2.1.2 Sections and retractions: 右逆元と左逆元の対

可逆性は簡約可能性より強い概念になる. 従って,全ての section は monic だし,全ての retraction は epic である.

定義 2.7 (左右可逆性を split で表す,右逆元を section,左逆元を retraction と呼ぶ.).

- 1. 左(右) 逆射を持つ射を **split** mono(epi) と呼ぶ.
- 2. $es = 1_A$ を満たす射 $s: A \to X, e: X \to A$ について,e に対する右逆元 s を section または splitting とよび,s に対する左逆元 e を retraction と呼ぶ.この時に引き戻される所の対象 A を X の retract と呼ぶ.



注. 可逆性については、関手は単位射や合成を保存するので、mono/epi の splitablility も保存する. これは例 2.5 で、忘却関手 $U: \text{Mon} \to \text{Sets}$ が、split じゃない epi である包含写像 $i: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を保存しなかった (Sets 上では epic ではなくなった) 例と対照的である.

例 2.8 (Sets での様子と,選択公理). Sets 上では,

- 1. $\emptyset \to A$ という種のものを除いて、mono である(左簡約可能)こと、split mono である(左可逆)こと、単射であることは全て同値.
 - 2. epic である(右簡約可能)こと, split epic である(右可逆)こと, 全射であることは全て同値.

なお、Sets において「全射ならば右逆元が存在する」という方向の条件は、選択公理と同値である.

実際, $e: E \to X$ を全射とする. 即ち、各 fiber $E_x = e^{-1}(\{x\})$ は空でない. このとき、 $es = 1_X$ を満たす 切断 s が存在するとは、E 上の集合の族 $(E_x)_{x \in X}$ から、各 x について、s の値とすべき $s(x) \in E_x$ を選び出

すことに等しい.

逆に、空でない集合の族 $(E_x)_{x\in X}$ が与えられたとき、 $E=\{(x,y)\in X\times\bigcup_{x\in X}E_x\mid x\in X,y\in E_x\}$ と定めて、この E からの全射 $e:E\to X$ を第一射影(添え字集合への射影)として定めれば、再び、これの切断 $s:X\to E$ は選択関数である。 $e\circ s=1_X$ を満たす切断 s が存在するということは選べているということになる.

これらは全て、集合の族 $(E_x)_{x\in X}$ という対象が、射 $e:E\to X$ として圏論的にも翻訳されていることによる. (This has much wider applications...)

定義 (射影的対象). 対象 P が projective であるとは,

次の条件

$$\forall f: P \to X, e: E \twoheadrightarrow X \quad \exists \overline{f}: P \to E \quad (e \circ \overline{f} = f)$$

$$P \xrightarrow{\overline{f}} X \downarrow_{e}$$

$$P \xrightarrow{f} X$$

が成り立つことをいう. 即ち、射影的対象から出る任意の射 $f: P \to X$ は、全射 $e: E \to X$ を通じて分解する. この条件 (left lifting propoerty against epimorphisms) を"f lifts across e"とも表現する. また、 \overline{f} を lift とも言う.

注.

1. f として, $f = id_P: P \to P$ を取り、epi として $e: E \to P$ を取ると、存在が保証される所の $\overline{f}: P \to E$ とは切断に他ならないから、射影的対象に入射する全ての epi は split する.

$$P \xrightarrow{\overline{f}} P$$

$$\downarrow e$$

$$P \xrightarrow{id_P} P$$

- 2. "Projective objects may be thought of as having a more "free" structure, thus permitting "more arrows.""
 - 3. 次の命題が成り立つ.

命題. 選択公理を認めるならば、全ての Sets の対象は射影的である.

[証明] P を勝手な集合とする。各 $x \in X$ について, $e^{-1}(\{x\}) = E_X(\neq \emptyset)$ と置く.選択公理より,各 $s(x) \in E_x$ を選び出す切断 $s: X \to E$ が存在する.

 $P=\bigcup_{x\in X}f^{-1}(\{x\})$ と分割できるが, $f^{-1}(\{x\})\subset P$ が空でないなら,その各元に $s(x)\in E_X$ を対応させることで,次の図式を可換にする $\overline{f}:P\to E$ が構成できる.

$$P \xrightarrow{\overline{f}} X \downarrow e$$

$$P \xrightarrow{f} X$$

よって、P は射影的対象である.

4. 次の命題が成り立つ.

命題. 全ての圏 C について、射影対象 P の retract A は射影対象である.

[証明] . いま,A は P の retract だから, $e \circ s = 1_A$ とし,X,Y を勝手な対象, $f:A \to X$ を勝手な射, $g:Y \to X$ を勝手な epi 射とする.

$$\begin{array}{c}
Y \xrightarrow{g} X \\
\hline
foeos & foe
\end{array}$$

$$A \xleftarrow{s} P$$

P は射影的対象だから, $f \circ e = \overline{f \circ e} \circ g$ を満たす射 $\overline{f \circ e} : P \to Y$ が存在する.これの両辺に右から s との合成をとると, $f \circ e \circ s = f = \overline{f \circ e} \circ g \circ s$ である.

従って,条件を満たす射 $\overline{f \circ g} \circ s$ が存在し,A も射影的対象である.

2.2 Initial and terminal objects

定義 2.9. 圏 C において,

- 1. 任意の対象 C について,hom(0,C) が一元集合である時, $0 \in C$ を始対象と言う.
- 2. 任意の対象 C について,hom(C,1) が一元集合である時, $1 \in C$ を終対象と言う.

命題 2.10. 始対象は同型を除いて一意である.

[証明] $.1,1' \in C$ がいずれも始対象であるとする.この時,hom(1,1'),hom(1'1) はいずれも一元集合で,hom(1,1),hom(1',1') もいずれも一元集合だから,その元は互いに逆射である.従って, $1 \simeq 1'$.

例 2.11.

- 1. Sets にて、空集合は始対象であり、一点集合が終対象である。この時、空集合全体の集合は1つであるが、一点集合全体の集合は唯一つではない。従って、Set \simeq Set op は成り立たず、一般に関手 op は同型にならない。
 - 2. 同様にして、Cat では、空圏 0 が始対象であり、1 が終対象である。
 - 3. Grp, Mon, Vect では、自明な群が始対象でも終対象でもある.
 - 4. Rings では \mathbb{Z} が始対象であり、零環が(環とするなら)終対象である.
- 5. Poset category では、始対象は存在すれば最小元であり、終対象は存在すれば最大元である. これらを持つような Poset を有界という. 特に、Boolean algebra は双方を持つ.
 - 6. ブール代数の圏 BA での始対象は 2,終対象は 1 である.
- 7. slice category C/X において、対象 $1_X: X \to X$ は終対象である.slice category の対象とは X に差し込む C の射 f のことだったから、この場合 $hom(f,1_X) = \{f\}$ となる.

$$\begin{array}{ccc}
Y & \xrightarrow{f} & X \\
& & & \downarrow id_X
\end{array}$$

定義. ブール代数とは、次を満たす6組 $B = (B, \land, \lor, 0, 1, \neg)$ である.

$$0 \le a$$

$$a \le 1$$

$$a \le c \land b \le c \Leftrightarrow a \lor b \le c$$

$$c \le a \land c \le b \Leftrightarrow c \le a \land b$$

$$a \le \neg b \Leftrightarrow a \land b = 0$$

$$\neg \neg a = a$$
(2)

例.冪集合 P(X) は, $\land = \cap, \lor = \cup, 0 = \varnothing, 1 = X, \neg = X \setminus -$ として,東どころか,Boolean algebra をなす.特に X が一点集合のときは真理値 $2 = \{0,1\}$ である.X が空集合のときは自明なブール代数 $\{0 = 1\}$ となる.

2.3 Generalized elements

始対象への射

例. 1. Sets, Poset category では、対象 A から始対象 0 への射 $A \rightarrow 0$ が存在する時、A = 0 である.

2. Mon, Groups では、始対象と終対象は一致するので、全ての対象 A について射 $A \rightarrow 0$ も一意に取れる.

定義 (ultrafilter). 部分集合 $F \subset B$ がブール代数 B の filter であるとは,

1(closed upward).

$$a \in F \land a < b \Rightarrow b \in F \tag{3}$$

2(closed under meets).

$$a \in F \land b \in F \Rightarrow a \land b \in F$$
 (4)

を満たすことである. F を真に包含する filter F' が F' = B しか存在しない時, filter F を極大 (maximal) であるという. またこの F を ultrafilter ともいう.

命題 (ブール代数上の ultrafilter の同値な条件). ブール代数 B と真のフィルター $F \subset B$ について,次の 2 条件は同値である.

- 1. *F* は ultrafilter である.
- 2. 任意の $b \in B$ について, $b \in F$ かっ $b \in F$ かのいずれか一方である.

[証明]. $1.\rightarrow 2$. を考える. $b \le b$ と式 1 ($a \le c \land b \le c \Leftrightarrow a \lor b \le c$) を併せると, $b \land \neg b = 0$ を得る. 従って, $b \in F \land \neg b \in F$ とすると, $0 \in F$ となって, 超 filter F が真のフィルターであることに矛盾する. 一方で, $b, \neg b \notin F$ と仮定すると, $b/B = \uparrow(b) = \{a \in B \mid b \le a\}$ は真の filter $(0 \notin b/B)$ であり, F よりも真に大きい. 従って, F が超 filter であることに矛盾. よって, $b \in F$ と $\neg b \in F$ のいずれか一方である.

2.⇒1. を考える. F を真のフィルターとして,任意の $b \in B$ について, $b \in F$ か ¬ $b \in F$ かのいずれか一方であるとする. $b \in B \setminus F$ を任意にとり,これを含む F より大きい真のフィルター F' を考えると, $b \notin F$ より,¬ $b \in F$ であるから,b,¬ $b \in F'$ となる.すると,フィルターの定義より $b \land \neg b = 0 \in F'$ となるから,これは F' = B である.従って,フィルター F は極大である.

命題. ブール代数の射 $p: B \to 2$ は、B 上の超フィルターと一対一に対応する.

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{BA}}(B,2) \simeq \operatorname{St}(B)$$

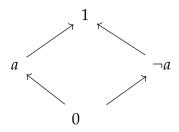
[証明] . 写像 U: $hom_{BA}(B,2) \to St(B)$ を,各 $p: B \to 2$ に対して $U_p := p^{-1}(1)$ と置く.こうして定めた U_p は超 filter になって居る.何故ならば,次の 3 条件が満たされるからである.

- 1. $a \in U_p$, $a \le b$ とすると,p は関手だから, $1 = p(a) \le p(b)$ となる.1 は最大元だから p(b) = 1 より,式 3 を満たす.
 - 2. $a,b \in U_p$ とすると、p(a) = p(b) = 1 で、 $p(a) \land p(b) = 1 \in U_p$ であるから、式 4 を満たす.
- 3. 性質「任意の $b \in B$ について, $b \in U_p$ か $\neg b \in U_p$ かのいずれか一方である.」も, $b \in U_p$ と仮定すれば,p はブール代数の射だから $p(\neg b) = \neg p(b) = 0$ より $\neg b \notin U_p$ で,逆も成り立つので成り立つ.

逆に、写像 $p: St(B) \to hom_{BA}(B,2)$ を、超フィルター $U \subset B$ に対して、射 $p_U: B \to 2$ ($p_U(b) = 1: \Leftrightarrow b \in U$) を対応させる写像として定める。 超フィルター U に b か $\neg b$ のいずれかが入って居ることにより、 p_U は構造 \neg を保ち、確かにブール代数の射になる.

こうして定めた写像 U,p は互いに逆写像になって居る.

注. 1. ブール代数の射 $B \to 2$ は、真理値表の行 1 つに対応する。例えば B を P(2) から生成したものとすると、



2つの超フィルターが、 $b := \neg a$ とかけば、それぞれ次の行に対応する.

а	b	$a \lor b$
0	1	1
1	0	1

2. 以上の議論と類比的なことが Rings での、始対象への射 $A \to \mathbb{Z}$ で起こる.これが対応するのは超フィルターの代わりに、prime ideal と呼ばれる.

終対象からの射

例 2.12.

- 1. Sets にて、 $X \simeq \text{Hom}_{Sets}(1,X)$
- 2. Pos Top にて、 $Hom_{Pos}(1,P)$ は、P の台集合 U(P) に対応する.
- 3. 一般の圏 C において, $Hom_C(1,A)$ の元を,A の global elements, points, constants などという.
- 4. Sets, Poset category, Top にて、全ての点 $x:1 \to P$ において fx = gx が成り立つことと、f = g であることは同値である.
- 5. Mon にて, $\operatorname{Hom}_{Mon}(1,M)$ は「 $0 \in 1$ を M の単位元 u_M に対応させる射 $1 \to M$ 」の一点集合である. 従って,任意の射 $h,j:M\to N$ に対して,全ての(1 つしかないが) $x:1\to M$ について,hx=jx である. Monoids do not "have enough points."
- 6. BA にて、 $\operatorname{Hom}_{BA}(1,B)$ $(B \neq 1)$ は空集合である。実際、 $f: 1 \to B$ をその元とし、 $f(0) = b \in B$ と置くと、f は一項演算 ¬ の構造を保つために $f(\neg 0) = \neg b \neq b$ が必要だが、これは $0 = \neg 0 \in 1$ による

 $f(0) = f(\neg 0)$ と両立しない.

定義. 対象 A に対して、勝手な対象 X からの射 $x: X \to A$ を、A の generalized element または variable element という。特に X=1 の時、global element, points, constants などという。

注.

1. Computer scientists と logicians は、射 $1 \rightarrow A$ を定数や閉項とし、一般の射 $X \rightarrow A$ を任意の項とする.

2(Good for testing). $f: A \to B$ が monic であるとは、任意の $x, x' \in \text{hom}(X, A)$ について、 $x \neq x' \Rightarrow fx \neq fx'$ であることだが、これは「f が monic とは、一般化された元について"単射"であることである」と言い換えられる。

3. C の図式が可換 $\alpha f = \beta g$ であるとは、全ての一般化された元 x について $\alpha f x = \beta g x$ であるということである. (元の場合は $x=1_A$ の場合に当たる.)

命題 (射の相等の特徴付け).

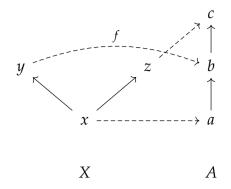
全ての圏 C における任意の射 $f,g:C \to D$ について、次の 2 条件は同値である.

- 1. f = g σ σ σ σ .
- 2. $\forall X \in C \ \forall x \in \text{Hom}_C(X,C) \ (fx = gx)$

[証明] .1. ⇒ 2. は明らかだから 2. ⇒ 1. を示す.特に X=C として, $x=id_C$ とすると, $f\circ id_C=g\circ id_C$ より f=g が従う.

例 2.13 (一般化された元は、定数よりも、より多くの構造に言及できる。)。

次のような2つの Poset category X, A とその間の射 $f: X \to A$ (点線で表した) を考える.



これは Pos にて monic かつ epic であるが、同型ではない. さらに進んで、 $X \simeq A$ でないことを示すには、 「X, A を区別する保存量 (invariant) を見つける」と良い.

実際,今回 $\operatorname{Hom}_{Pos}(1,X) \simeq \operatorname{Hom}_{Pos}(1,A)$ であるが, $|\operatorname{Hom}_{Pos}(2,X)| = 5$ と $|\operatorname{Hom}_{Pos}(2,A)| = 6$ は要素の数が違う.

命題. 全ての圏 C において、 $P \simeq Q$ ならば、 $\operatorname{Hom}_{C}(2,P) \simeq \operatorname{Hom}_{C}(2,Q)$ である.

[証明] $i: P \to Q$ を同型とする.写像 $i_*: \operatorname{Hom}(2,P) \to \operatorname{Hom}(2,Q)$ を次のように定める.

と定めると、 $i:P \to Q$ の逆射 j から同様に定めた写像 $j_*: \mathrm{Hom}(2,Q) \to \mathrm{Hom}(2,P)$ が i_* の逆射となる. $\ \square$

注. $\operatorname{Hom}(X,-)$ は常に関手になり、関手は常に同型を保存する.

例 2.14.

- 1. 一般化された元 $t: T \to A$ のうち、特定の T が特異的に意味を持つことが多い (revealing). そこで、このような t を figures of shape T in A と呼ぶ.
- 2. 前の例 2.13 で Pos の射 $2 \to P$ が P 内の $p \le p'$ を満たす組 (p,p') と対応した.これは a figure of shape 2 in P の例であり,非常に geometric な直観に合う.

3. Mon の圏では、終対象からの射は常に 1 つしかなかった。しかし、M(1) からの射(figures of shape $\mathbb N$ in M)については次が成り立つ。

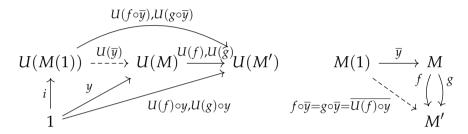
命題 (M(1)-値点がモノイドの射を決定する). 圏 Mon の射 $f,g:M\to M'$ について、次の 2 つは同値.

- 1. f = g σ σ σ .
- 2. 任意の $x \in \text{Hom}_{Mon}(M(1), M)$ について fx = gx である.

[証明].2.⇒1.を示す.

U(M) 上の任意の global element $y: 1 \to U(M)$ を取る. すると、これによって定まるモノイドの射 $\overline{y}: M(1) \to M$ について、仮定より、 $f \circ \overline{y} = g \circ \overline{y}$ が成り立つ. これから、 $U(f \circ \overline{y}) = U(g \circ \overline{y})$ が従う.

この時、下の図式は可換であるから、特に左側の Sets 上の図式の一番外側の大回りの図式も可換になる. これより、 $U(f)\circ y=U(g)\circ y$ が従う.



以上のことが任意にとった y について成り立つのだから、次が導けたことになる.

$$\forall y \in U(M) \ U(f)(y) = U(g)(y)$$

即ち、モノイドの射 f,g が写像として等しいことを得た。

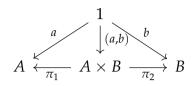
4. 次が成り立つ. モノイド M の台集合 U(M) は,一般化された要素 $M(1) \to M$,即ち,M 内の全ての figures of shape $\mathbb N$ によって定まる.

$$U(M) \simeq \operatorname{Hom}_{Sets}(1, U(M)) \simeq \operatorname{Hom}_{Mon}(M(1), M)$$

これより、モノイド M からの写像 $U(M) \to -$ を考えるときは、M の元の代わりに、M 内の全ての $\mathbb N$ の型 $\mathbb N \to M$ を考えればいい.

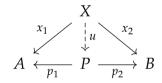
2.4 Products

命題. Sets において、集合 $A,B \in$ Sets の直積 (cartesian product) $A \times B := \{(a,b) \mid a \in A,b \in B\}$ からの 写像 $\pi_1 : A \times B \to A$, $\pi_2 : A \times B \to B$ をそれぞれ第一射影と第二射影とすると、次の図式は可換になる.



定義 **2.15** (UMP of a product diagram). 任意の圏 C において、対象 A, B の直積図式 (product diagram) とは、対象 P とそれからの射 $p_1: P \to A$, $p_2: P \to B$ があって、次を満たすもののことである.

任意の対象 X と任意の射 $x_1: X \to A, x_2: X \to B$ について、ただ一つの射 $u: X \to P$ が存在して、次の図式を可換にする.



注 2.16. 次の2つに主張が分解できる.

1(存在). $x_1 = p_1 u \land x_2 = p_2 u$ を満たす射 $u: X \to U$ が存在する.

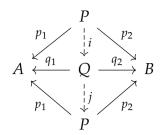
2(一意性). $v: X \to U$ も $x_1 = p_1 v \land x_2 = p_2 v$ を満たすならば, v = u である.

命題 **2.17**. 圏 C の対象 A, B の積 P は,同型を除いて一意的である.

[証明]. P と射 $p_1: P \to A, p_2: P \to B$ と,Q と射 $q_1: Q \to A, q_2: Q \to B$ のいずれも,A と B の積の UMP を満たすとする.

Q についての UMP より, $i: P \rightarrow Q$ が, P についての UMP より, $j: Q \rightarrow P$ がそれぞれ存在し, 次の図

式を可換にする.



すると、特に $p_1 \circ j \circ i = p_1$ かつ $p_2 \circ j \circ i = p_2$ が成り立つ.これを $p_1 \circ 1_P = p_1$ と $p_2 \circ 1_P = p_2$ と見比べると、UMP の一意性条件により、 $j \circ i = 1_P$ かつ $i \circ j = 1_P$ である.

同様にして、 $i \circ j = 1_Q$ も得る.

以上より、
$$P \simeq Q$$
 である.

記法.

- 1. この $A \ge B$ についての一意的な積を, $A \times B$ と書く.
- 2. UMP の定義内にある記号について、射 $u: X \to A \times B$ を $\langle x_1, x_2 \rangle$ と書く.
- 3. 積への射 $f: X \to A \times B$ は、射の組 $(f_1: X \to A, f_2: X \to B)$ と一対一対応する.
- 4. 積からの射 $g: A \times B \to Y$ は、一般化された元 $f = (f_1, f_2)$ について、一般化された元 $g\langle f_1, f_2 \rangle$ が対応 するので、いわば「一般化された 2 変数関数」と言える.

