2020 年度ベクトル解析（足助担当）レポート問題 6 v2　　　　　　　　2020/6/8（月）

提出先：ITC-LMS のページの「課題」

提出期間：2020/6/8（月）～ 2020/6/15（月）**9:00**

返却は ITC-LMS を用いて 6/22 日（月）以降に行う．

※ レポートの作成方法は特に指定しないが，提出ファイルは PDF 形式とすること．なお，ファイル名は，「“回数”＋“学生証番号の下 7 桁.pdf”」（例：64123456.pdf）とすること．ファイルの作成にあたって印刷やスキャンなどに困難があれば速やかに足助まで申し出ること．

学生証番号	氏名	共同作成者（ある場合）
J4-190549	司馬博文	なし

問． ${}^t(x, y, z)$ を $\mathbb{R}^3$ の標準的な座標とし，$S^2 = \{{}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とする．函数（スカラー場）$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $f(x, y, z) = z^2$ により定め，また，$\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ について $C_\theta = \{{}^t(x, y, z) \in S^2 \mid z = \sin\theta\}$ とする．

1) $\displaystyle\int_{C_\theta} f(p)|dp|$ を求めよ[†1]．

2) $\displaystyle\int_{S^2} f(p)|dA|$ を求めよ．また，右辺を直接計算することにより $\displaystyle\int_{S^2} f(p)|dA| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{C_\theta} f(p)|dp| \right) d\theta$ が成り立つことを示せ．

3) f が一般の場合にも $\displaystyle\int_{S^2} f(p)|dA| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{C_\theta} f(p)|dp| \right) d\theta$ が成り立つことを示せ．

※ 参考文献がある場合には最後にまとめて箇条書きで示すこと．

※ 全体として２ページに収めること．

※ 共同作成者に記載がないにもかかわらず，ほかのレポートとほぼ同一であるレポートが散見される．誰かと共同してレポートを作成することは構わないが，そのことは明記すること．それをしなければ剽窃であって，これは学術上の致命的な不正行為である．万一，写される側がそのことを承知していなかったことが露見した場合には重大な結果をもたらす可能性がある．

（以上）

1)

C_θ のパラメータ付けを $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos t \\ \cos\theta\sin t \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ $(t \in [0, 2\pi])$ とすると，

$$\begin{aligned} \int_{C_\theta} f(p)|dp| &= \int_0^{2\pi} f(\varphi(t))||D\varphi(t)||dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2\theta|\cos\theta|dt = 2\pi\sin^2\theta|\cos\theta| \end{aligned}$$

より，$2\pi\sin^2\theta|\cos\theta|$．

2)

S^2 の三角形分割 $\{S_i\}_{i=1}^8$ を，上半球面 S^2_+ については

$$\begin{aligned} S_1 &= \Sigma_+ \cap \{{}^t(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, y \geq 0\} \\ S_2 &= \Sigma_+ \cap \{{}^t(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x \leq 0, y \geq 0\} \\ S_3 &= \Sigma_+ \cap \{{}^t(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, y \leq 0\} \\ S_4 &= \Sigma_+ \cap \{{}^t(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x \leq 0, y \leq 0\} \end{aligned}$$

などとし，下半球面についても $S_5, \cdots, S_7$ を同様に定める．今回，関数 f は z 軸周りのあらゆる回転変換について（特に $\dfrac{\pi}{2}$ 回転について）不変であることに注目し，特に S_1 を中心に考える．$\Delta =$

[†1] 記号の復習をしておくと，この場合，p は C_θ 上を動く．

$\left\{{}^t(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ とし，S_1 のパラメータ付 $\psi_1 : \Delta \to S_1$ を，$\psi_1 \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ \sqrt{1-r^2} \end{pmatrix}$ とする．

すると，

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} f(p)|dA| &= \sum_{i=1}^{8} \int_\Delta f\left(\psi_i\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}\right) \left\| \frac{\partial\psi_i}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \times \frac{\partial\psi_i}{\partial\theta}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \right\| drd\theta \\
&= 8\int_\Delta f\left(\psi_1\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}\right) \left\| \frac{\partial\psi_1}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \times \frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \right\| drd\theta \\
&= \int_\Delta (1-r^2)\frac{r^2}{1-r^2} drd\theta \\
&= 8\int_0^1 r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 4\pi \int_0^1 \frac{r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

より，$\displaystyle\int_{S^2} f(p)|dA| = \frac{4}{3}\pi$ を得る．

また，

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{C_\theta} f(p)|dp|\right) d\theta &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta |\cos\theta| d\theta \\
&= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3}{3} = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

が成り立ち，$\displaystyle\int_{S^2} f(p)|dA| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{C_\theta} f(p)|dp|\right) d\theta$ を得る．

3)

2) の解答の途中で定義した S^2 の三角形分割 $\{S_i\}_{i=1,\cdots,8}$ に対して，閉区間 $\Delta := [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の分割 $\{\Delta_i\}_{i=1,\cdots,8}$ を次のように定める．

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \Delta_2 &= \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\
\Delta_3 &= \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] & \Delta_4 &= \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\
\Delta_5 &= \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \Delta_6 &= \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\
\Delta_7 &= \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] & \Delta_8 &= \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \times \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]
\end{aligned}$$

すると，これらの Δ_i に対する $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos t \\ \cos\theta\sin t \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ の制限（そのそれぞれを φ_i とする）が，それぞれ S_i のパラメータ付けになっている．このことから，一般の連続関数 $f : S^2 \to \mathbb{R}$ について，定義 5.2.2 より，

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} f|dA| &= \sum_{i=1}^{8} \int_{S_i} f|dA| \\
&= \sum_{i=1}^{8} \int_{\Delta_i} f\left(\varphi_i\begin{pmatrix} t \\ \theta \end{pmatrix}\right) \left\| \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\begin{pmatrix} t \\ \theta \end{pmatrix} \times \frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta}\begin{pmatrix} t \\ \theta \end{pmatrix} \right\| dtd\theta \\
&= \int_\Delta f\left(\varphi\begin{pmatrix} t \\ \theta \end{pmatrix}\right) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial t}\begin{pmatrix} t \\ \theta \end{pmatrix} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\begin{pmatrix} t \\ \theta \end{pmatrix} \right\| dtd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} f\left(\varphi\begin{pmatrix} t \\ \theta \end{pmatrix}\right) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial t}\begin{pmatrix} t \\ \theta \end{pmatrix} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\begin{pmatrix} t \\ \theta \end{pmatrix} \right\| dt\right) d\theta
\end{aligned}$$

が従うから，$\displaystyle\int_{S^2} f|dA| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{C_\theta} f(p)|dp|\right) d\theta$ である．