第 1 章

群

記法.

1. 断りなく G を群 $(G,\cdot,e,^{-1})$ とする．
2. 行列の共役転置を A^* または $A^\dagger$ で表す．
3. 複素共役を $\tilde{A}$ で表す．

1.1 群の概念

定義 1.1.1 (group). 集合 G とその上の写像 $\mathbf{m}: G\times G \to$, $\mathbf{I}: G\to G$, $e: 1\to G$ が定義されていて次の 3 公理を満たすとき，データの 4-組 $(G,\mathbf{m},\mathbf{I},e)$ を**群**と呼ぶ．ただし，$\mathbf{m}(a,b)$ の値を ab，$\mathbf{I}(a)$ の値を a^{-1} ，e の値も $e\in G$ と書く．

1. $\forall a,b,c\in G,\ (ab)c=a(bc)$,
2. $\forall a\in G, ea=a$,
3. $\forall a\in G,\ \exists a^{-1}\in G,\ a^{-1}a=e$.

即ち，次の 3 つの図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd} G\times G\times G \arrow[r, "{(m,1)}"] \arrow[d, "{(1,m)}"'] & G\times G \arrow[d, "m"] \\ G\times G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "I\times 1"] \arrow[d, "(1\times I)"'] & G\times G \arrow[d, "m"] \\ G\times G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "!\times 1"] \arrow[rrd, "\mathrm{pr}_2"'] & 1\times G \arrow[r, "e\times 1"] & G\times G \arrow[d, "m"] \\ & & G \end{tikzcd}$$

注 **1.1.2.**

1. 元の性質と見るよりも写像 m,I,e の性質として見ることで，各構造と各公理が 1 つずつ対応するようにデータ化する方法である．斎藤先生の本を見習った．この記述法はどんな応用を孕んでいるのだろうか……．
2. 構造 $\mathbf{I}$ を落とすと，モノイドと呼ばれる．
3. 構造 $\mathbf{m},\mathbf{I}$ がさらに連続写像であった場合，位相群と呼ばれる．
4. G が多様体で，$\mathbf{m},\mathbf{I}$ が局所座標について実解析的 (real analytic) であった場合，Lie 群と呼ばれる．

定義 1.1.3 (元の位数). $a\in G$ について，

1. $\exists m \in \mathbb{N}_{>0},\ a^m = e$ が成り立つ時，a は**有限の位数を持つ**という．
2. そうでない場合，a は**位数が無限**または 0 または**自由元**であるという．
3. a が有限の位数を持つ時，条件を満たす $m \in \mathbb{N}_{>0}$ のうち最小の数を a **の位数**と定める．

定義 1.1.4 (subgroup)**.** 群 $(G, \mathbf{m}, \mathbf{I}, e)$ と $H \subset G$ について，構造 $\mathbf{m}, \mathbf{I}, e$ の H への制限が自然に定まる時，4-組 $(H, \mathbf{m}\restriction_{H\times H}, \mathbf{I}\restriction_H, e)$ を G の部分郡という．

注 1.1.5. 本来は「G から受け継がれる演算について，H も群をなす」を部分群の定義とする．しかし，群の構造を写像 m, I, e の構造と見れば，上記のように書ける．その透過性については，次の命題が成り立つ．

命題 1.1.6 (群の公理の特徴付け)**.** (G, m, I, e) を群とする．空でない部分集合 $H \subset G$ に対して，次の 3 条件は同値である．

1. $(H, \cdot, e, {}^{-1})$ が群の公理を満たす．
2. G 上の写像 m, I の $H \times H, H$ への制限の値域は H に含まれる．即ち，任意の $a, b \in H$ に対し，$ab, a^{-1} \in H$．
3. $\forall a, b \in H,\ a^{-1}b \in H$．

［証明］**.** 1 と 2 は同値である．2 ならば 3 はわかるから，3 から 2 を導く．
　H は空でないから $a \in H$ が取れる．すると，3 より $aa^{-1} = e \in H$ を得る（$a^{-1} \in H$ かどうかには触れていない）．続いて $a, e \in H$ がわかったから，再び 3 より結局 $a^{-1}e = a^{-1} \in H$．以上より $a, b \in H$ の時特に $a^{-1}, b \in H$ でもあるから，３度目の 3 より $ab = (a^{-1})^{-1}b \in H$ を得る．これより結局，$a^{-1}, ab \in H$ を得た．　□

注 1.1.7. この $a^{-1}b$ という形は繰り返し出る．これを命題として抽出したのは意味が大きいだろう．例えば次の主張は系として従う．任意に取った具体的な元 $a^{-1}b$ の行方を追うだけで閉性を示せる．

系 1.1.8. H_1, H_2 を G の部分群とする．$H_1 \cap H_2$ も G の部分群である．

［証明］**.** $\forall a, b \in H_1 \cap H_2,\ a^{-1}b \in H_1 \cap H_2$ を示す．$a, b \in H_1 \cap H_2$ の時，$a, b \in H_1$ かつ $a, b \in H_2$ である．命題 1.1.6 の証明中の議論より，$a^{-1}b \in H_1$ かつ $a^{-1}b \in H_2$．よって $a^{-1}b \in H_1 \cap H_2$．　□

記法 1.1.9. 群 G の部分集合 $S, T \subset G$ と元 $a, b \in S$ に対して，集合を

$$
\begin{array}{lll}
ST = \{st \mid s \in S, t \in T\} & S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\} & \\
aS = \{ax \mid x \in S\} & Sb = \{xb \mid x \in S\} & aSb = \{axb \mid x \in S\}
\end{array}
$$

と定義する．

注 1.1.10. 線型空間の理論でも，内部の構造が，その全体空間同士の関係にも同じ構造・記号を流用するのはよくあることである．

命題 (1.1.6 言い換え)**.**

2. $HH \subset H$ かつ $H^{-1} \subset H$．
3. $H^{-1}H \subset H$．

定義 1.1.11 (生成される群)**.**

1. 部分集合 $S \subset G$ に対して，S を含む最小の G の部分群を S **から生成される部分群**といい，$\langle S \rangle$ と書く．

2. S を含む G の部分群の族を $(G_i)_{i\in I}$ とすると，$\langle S\rangle = \cap_{i\in I} G_i$ である．
3. $\langle S\rangle = \{a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_r^{n_r} \mid a_i \in S, n_i \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}_{>0}\ (1 \leq i \leq r)\}$.

1.2　群の例

例 1.2.1 (1-torus)**.** 次の群 T を一次元トーラスという．

$$T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

例 1.2.2 (the group of the n-th roots of unity)**.** $Res(N)$ $(N \in \mathbb{N})$ を，1 の N 乗根とすると，

$$Res(N) = \{1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{N-1}\}, \qquad \omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}.$$

となる．この群を μ_N と書く．

問 1.2.3. 全ての無限群は，無限の正規部分群を持つか？

反例 1.2.4 (Prüfer p-group)**.** ブリューファー p 群とは，次のように定義できる．

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \{\exp\left(\frac{2\pi i m}{p^n}\right) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

または p 進数の加法群 $\mathbb{Q}_p$ と p 進整数からなる部分群 $\mathbb{Z}_p$ を用いて，$\mathbb{Z}(p^\infty) = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ と表せる．

この p^∞ 群または p 準巡回群の部分群は包含関係によって全順序づけられる唯一の無限群の系列である（素数 p の取り方だけ違う）．

反例 1.2.5 (Tarski Monster group)**.** Tarski Monster group は全ての部分群に対して素数 p が存在して位数 p の巡回群に同型になる無限群である．

例 1.2.6 (the residue classes of modulo N)**.** N を法とした剰余群 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Z}_N$ は，位数 N の巡回群である．

1.2.1　matrix group

定義 1.2.7 (Greneral linear group)**.** K を体とする（環 R としても良い）．一般線型群

$$GL(n, K) = \{A \in M(n, K) \mid A \text{ は可逆 }\}$$

は $n = 1$ の時 abelian で $n > 1$ の時 nonabelian である．

この部分群を matrix group という．

定義 1.2.8 (Special linear group)**.**

$$SL(n, K) = \{A \in GL(n, K) \mid \det A = 1\}$$

定義 1.2.9 (orthogonal group)**.**

$$O(n, K) = \{A \in GL(n, K) \mid AA^{tr} = 1\}$$
$$SO(n, K) = \{A \in O(n, K) \mid \det A = 1\}$$

定義 1.2.10 (Special unitary group)**.**

$$
\begin{aligned}
U(n) &= \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid AA^\dagger = 1\} \\
SU(n) &= \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}
\end{aligned}
$$

定義 1.2.11 (sympletic form)**.** $\mathbb{R}^{2n}$ 上のシンプレティック形式 J とは，

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})
$$

注 1.2.12.

$$
J = J^* = -J^{tr} = -J^{-1}
$$

定義 1.2.13 (sympletic group)**.** シンプレティック行列とは，シンプレティック形式 J に対して $A^{tr}JA = J$ を満たす行列 A をさす．

シンプレティック群とは，この行列がなす群

$$
Sp(2n,K) := \{A \in GL(2n,K) \mid A^{tr}JA = J\}
$$

を指す．

1.2.2　位相群の例

1.3　正規部分群，剰余群，中心化群，交換子群

定義 1.3.1 (center)**.** 群 G に対して，その中心 $Z(G)$ とは，次のように構成される G のアーベル部分群である．

$$
Z(G) := \{z \in G \mid \forall g \in G,\ zg = gz\}
$$

例 1.3.2. $GL(n,K)$ $(K = \mathbb{R},\mathbb{C})$ の場合，その核は単位行列に相似 (proportional) な行列からなる集合である．

この概念を一般化した生成的な概念が中心化群，さらに緩めた概念を正規化群と呼ぶ．

定義 1.3.3 (centralizer, normalizer)**.** 群 G の部分集合 S について，その中心化群，正規化群と呼ばれる群を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
Z(S) &:= \{x \in G \mid \forall s \in S,\ xsx^{-1} = s\} \\
N(S) &:= \{x \in G \mid xSx^{-1} = S\}
\end{aligned}
$$

注 1.3.4. S が一点集合の場合，$Z(S) = N(S)$ となる．

G を $N(H)$ として生成するような部分群 H を正規部分群という（命題 1.3.6.1）．

定義 1.3.5 (normal subgroup)**.** 群 G の部分群 N が

$$
\forall x \in G,\ xNx^{-1} \subset N
$$

を満たす時，N を G の正規部分群といい，$N \triangleleft G$ と書く．

命題 1.3.6. H を G の部分群とする．次の 3 条件が成立する．

1. $G \triangleright H \Leftrightarrow N(H) = G$.
2. $G \supset N(H) \triangleright H$.
3. $G \triangleright Z(G)$.

定義 1.3.7 (simple group)**.** 群 G が，自身と自明な部分群以外に正規部分群を持たない時，G を**単純群**という．

定理 1.3.8 (非可換有限単純群の分類)**.** 非可換有限単純群は次のいずれかになる．

1. 交代群 A_n $(n \geq 5)$.
2. リー型の単純群.
3. 26 個の散在型単純群.

1.4　群の射

1.5　群の構成

1.6　共役類

1.7　可解群

1.8　可換群

第 2 章

位相群

参考文献

[1] ポントリャーギン『連続群論』
[2] 桂利行『大学数学の入門 1 代数学 1 郡と環』
[3] Gregory Moore ”Abstract group theory”
[4] Steve Awodey ”Basic Category Theory”