

提出先：ITC-LMS のページの「課題」

提出期限：2020/7/9（木）12:00

解答は1問につき1枚（両面使用可）とすること（この用紙を4枚印刷するとよい．あるいは2枚目以降は白紙を用いても良いが，全て縦向きとすること．また，いずれの解答用紙の表面の上の方に学生証番号と氏名を記入すること）．

学生証番号	氏名
J4-190549	司馬博文

問1 1) 次のように定める正則な C^∞ 級曲線 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ について，その和を $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ と置くと（向き付き曲線の和は問4の回答中での補題の証明中（★¹）にて定義した）， γ は C の向きと整合的な区分的 C^∞ 級の正則なパラメータ付けである．

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_3 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 \Psi & \Psi & \Psi \\
 t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} & \theta \longmapsto \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} & t \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}
 \end{array}$$

従って，これを用いて，求める線積分の値は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
 \int_C X(p) \cdot dp &= \int_\gamma X(p) \cdot dp = \int_{\gamma_1} X(p) \cdot dp + \int_{\gamma_2} X(p) \cdot dp + \int_{\gamma_3} X(p) \cdot dp \\
 &= \int_0^1 \left\langle X(\gamma_1(t)) \mid \frac{d\gamma_1}{dt}(t) \right\rangle dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle X(\gamma_2(\theta)) \mid \frac{d\gamma_2}{d\theta}(\theta) \right\rangle d\theta + \int_0^1 \left\langle X(\gamma_3(t)) \mid \frac{d\gamma_3}{dt}(t) \right\rangle dt \\
 &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \begin{pmatrix} \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \\ 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle d\theta + \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -(1-t)^3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
 &= \int_0^1 (t^3 + (1-t)^3) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{(1-t)^4}{4} \right]_0^1 + \left[-\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

■

2) 曲線 C_d とは，原点中心の単位球面と， ${}^t(1, 1, 1)$ を法線ベクトルとする原点からの距離 d の平面との共通部分である．従って， $C_d = \emptyset$ ($|d| > 1$ の時) であり，この時線積分は $\int_{C_d} f(p)|dp| = 0$ ($|d| > 1$) であるから，以降 $|d| \leq 1$ の場合を考える．いま， C_d の y 軸を中心とする $\frac{\pi}{4}$ 回転変換による像を C'_d とすると，これは単位球面と平面 $x = d$ との共通部分であるから，次の正則な C^∞ 級関数 γ_d によりパラメータ付けされる．

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma_d : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 & & \\
 \Psi & & \\
 \Psi & & \\
 \theta \longmapsto \begin{pmatrix} d \\ \sqrt{1-d^2} \cos \theta \\ \sqrt{1-d^2} \sin \theta \end{pmatrix}
 \end{array}$$

従って，標準基底 ${}^t(x, y, z)$ に同様に $\frac{\pi}{4}$ 回転変換を施して得る基底 ${}^t\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z, y, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right) =: {}^t(x', y', z')$ で表された関数 $f(x', y', z') = x'^2$ を座標 ${}^t(x, y, z)$ について表示した関数を $g(x, y, z) := \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2 = \frac{1}{2}(z^2 - 2xz + x^2)$ とすると， $|d| \leq 1$ の下で，求める線積分は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
 \int_{C_d} f(p)|dp| &= \int_{C'_d} g(p)|dp| = \int_{\gamma_d} g(p)|dp| \\
 &= \int_0^{2\pi} g(\gamma_d(\theta)) \left\| \frac{d\gamma_d}{d\theta} \right\| d\theta \\
 &= \frac{1-d^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+d^2}{2} - 2d\sqrt{1-d^2} \sin \theta - \frac{1-d^2}{2} \cos 2\theta \right) d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-d^2}{2} \left[\frac{1+d^2}{2} \theta + 2d\sqrt{1-d^2} \cos \theta - \frac{1-d^2}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi}{2} (1-d^4) \quad (|d| \leq 1)
\end{aligned}$$

■

問2 境界を含む有界な領域 D とその境界である曲面 ∂D について, **Gauß** の発散定理より,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{A} &= \int_D (\operatorname{div} \mathbf{X}) \, d\operatorname{vol} \\ &= \int_D 3x \, dx \, dy \, dz\end{aligned}$$

であるから, 次のように D_1, D_2, D_3 を定めると, $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ であり, $D_1 \cap D_3 = \emptyset$, また $D_1 \cap D_2, D_2 \cap D_3$ はいずれも単位円板で体積 0 であるから, $\int_D 3x \, dx \, dy \, dz = \int_{D_1} 3x \, dx \, dy \, dz + \int_{D_2} 3x \, dx \, dy \, dz + \int_{D_3} 3x \, dx \, dy \, dz$ が成立する.

$$\begin{aligned}D_1 &= \left\{ \varphi_1(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \in D \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi \right\} \\ D_2 &= \left\{ \varphi_2(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \in D \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} \\ D_3 &= \left\{ \varphi_3(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 + r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \in D \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2} \right\}\end{aligned}$$

それぞれの境界を含んだ領域 D_1, D_2, D_3 のパラメータ付け $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ の **Yacobian** が,

$$\begin{aligned}\det D\varphi_1 &= \det D\varphi_3 = \det \begin{pmatrix} \sin \theta & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin \theta \\ \det D\varphi_2 &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r\end{aligned}$$

であることに注意すれば, 変数変換公式より, それぞれの重積分は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}\int_{D_1} x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} r \sin \theta \cos \varphi \cdot r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr = -\frac{\pi}{4} \\ \int_{D_2} x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 x \cdot r \, dr \, dx \, d\theta = \frac{\pi}{2} \\ \int_{D_3} x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + r \sin \theta \cos \varphi) r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr = \frac{11}{12}\pi\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{A} &= \int_D (\operatorname{div} \mathbf{X}) \, d\operatorname{vol} \\ &= \int_D 3x \, dx \, dy \, dz \\ &= 3 \left(\int_{D_1} x \, dx \, dy \, dz + \int_{D_2} x \, dx \, dy \, dz + \int_{D_3} x \, dx \, dy \, dz \right) \\ &= 3 \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{11}{12}\pi \right) = \frac{7}{2}\pi\end{aligned}$$

を得る. ■

問3 1) $f^1(x, y) = \frac{-2y}{x^2 + y^2} + \frac{-(y-2)}{x^2 + (y-2)^2}$, $f^2(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + (y-2)^2}$ と置くとこれはいずれも C^∞ 級の関数で,
 $X = f^1 \frac{\partial}{\partial x} + f^2 \frac{\partial}{\partial y}$ と表せる. これが定める D 上の C^∞ 級の 1-形式 $\omega := f^1 dx + f^2 dy$ を, 次の C^∞ 級関数 $\gamma = {}^t(\gamma^1, \gamma^2)$ で引き
 戻して考える.

$$\begin{array}{ccc} \gamma: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & D \\ \Psi & & \Psi \\ \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} p+t \\ q \\ r \end{pmatrix} \end{array}$$

この γ による D 上の 1-形式 dx, dy の引き戻しは

$$\begin{aligned} \gamma^* dx &= d\gamma^1 \\ &= \frac{\partial \gamma^1}{\partial p} dp + \frac{\partial \gamma^1}{\partial q} dq + \frac{\partial \gamma^1}{\partial t} dt \\ &= dp + dt \\ \gamma^* dy &= \frac{\partial \gamma^2}{\partial p} dp + \frac{\partial \gamma^2}{\partial q} dq + \frac{\partial \gamma^2}{\partial t} dt \\ &= dq \end{aligned}$$

であることより, γ による ω の引き戻しは

$$\begin{aligned} \gamma^* \omega &= (\gamma^* f^1) (\gamma^* dx) + (\gamma^* f^2) (\gamma^* dy) \\ &= (f^1 \circ \gamma) dp + (f^2 \circ \gamma) dq + (f^1 \circ \gamma) dt \end{aligned}$$

となる. 定数分の差は重要ではないから, dt の付く項のみを採用して, また p を x , q を y を書き直して D 上の C^∞ 級関数 $g(x, y)$ を次のように定義することとする.

$$g(x, y) := - \int_0^\infty f^1 \circ \gamma(x, y, t) dt = - \int_0^\infty \left(\frac{-2y}{(x+t)^2 + y^2} + \frac{-(y-2)}{(x+t)^2 + (y-2)^2} \right) dt$$

なお, $t \geq 0$ に於いて, ${}^t(x, y) \in D$ より $x > 0$ に注意して, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} (0 \leq) \left| \frac{-2y}{(x+t)^2 + y^2} + \frac{-(y-2)}{(x+t)^2 + (y-2)^2} \right| &= \left| \frac{-2y}{(x^2 + y^2 + t^2 + 2xt)} + \frac{-(y-2)}{(x^2 + y^2 + t^2 + 2xt - 4y + 4)} \right| \\ &\leq \left| \frac{-2y}{x^2 + y^2 + t^2} \right| + \left| \frac{-(y-2)}{x^2 + y^2 + t^2} \right| \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| \frac{-2y}{(x+t)^2 + y^2} + \frac{-(y-2)}{(x+t)^2 + (y-2)^2} \right| dt &\leq \int_0^\infty \left(\left| \frac{-2y}{x^2 + y^2 + t^2} \right| + \left| \frac{-(y-2)}{x^2 + y^2 + t^2} \right| \right) dt \\ &= |-2y| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\cos^2 \theta}{x^2 + y^2} \right| \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos^2 \theta} d\theta + |-(y-2)| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\cos^2 \theta}{x^2 + y^2} \right| \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= (2|y| + |y-2|) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{2|y| + |y-2|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

と評価できるが, 最右辺は有限な値だから, 最左辺は有界である. 従って, 積分 $g(x, y) = - \int_0^\infty f^1 \circ \gamma(x, y, t) dt$ は絶対収束し, 関数 g は確かに D 上で定義される. この関数 g がベクトル場 X の領域 D への制限 $X|_D$ のスカラーポテンシャルとなっていること, 即ち $\text{grad } g = X|_D$ を証明する. $\text{grad } g = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}$ であるから, 係数が等しいこと, 即ち $f^1 = \frac{\partial g}{\partial x}, f^2 = \frac{\partial g}{\partial y}$ を示せば良い.

関数 g の非積分関数 $h(x, y, t) := \frac{-2y}{(x+t)^2 + y^2} + \frac{-(y-2)}{(x+t)^2 + (y-2)^2}$ は C^∞ 級で, 特に連続であるから, その積分 $G(x, y, s) := - \int_0^s \left(\frac{-2y}{(x+t)^2 + y^2} + \frac{-(y-2)}{(x+t)^2 + (y-2)^2} \right) dt$ も連続で, 従って $s \rightarrow \infty$ の時に $g(x, y)$ には一様収束する. このことより, $\frac{\partial g}{\partial x}$ は次のように計算できる.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \left(\frac{-2y}{(x+t)^2 + y^2} + \frac{-(y-2)}{(x+t)^2 + (y-2)^2} \right) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\infty}^0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2} + \frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2} \right) dt \\
&= \left[\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2} + \frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2} \right]_{\infty}^0 = \frac{-2y}{x^2+y^2} + \frac{-(y-2)}{x^2+(y-2)^2} = f^1(x, y)
\end{aligned}$$

続いて, $\frac{\partial g}{\partial y}$ は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{\infty}^0 \left(\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2} + \frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2} \right) dt \\
&= \int_{\infty}^0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2} + \frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2} \right) dt \\
&= \int_{\infty}^0 \left(\frac{-2((x+t)^2+y^2) + 2y(2y)}{((x+t)^2+y^2)^2} + \frac{-((x+t)^2+(y-2)^2) + 2(y-2)^2}{((x+t)^2+(y-2)^2)^2} \right) dt \\
&= \int_{\infty}^0 \left(-2 \left(\frac{2(x+t)^2}{((x+t)^2+y^2)^2} - \frac{1}{(x+t)^2+y^2} \right) - \left(\frac{2(x+t)^2}{((x+t)^2+(y-2)^2)^2} - \frac{1}{(x+t)^2+(y-2)^2} \right) \right) dt \\
&= -4 \int_{\infty}^0 \frac{(x+t)^2}{((x+t)^2+y^2)^2} dt + 2 \int_{\infty}^0 \frac{dt}{(x+t)^2+y^2} - \int_{\infty}^0 \frac{2(x+t)^2}{((x+t)^2+(y-2)^2)^2} dt + \int_{\infty}^0 \frac{dt}{(x+t)^2+(y-2)^2} \quad \cdots (*)
\end{aligned}$$

部分積分の方法により,

$$\begin{aligned}
2 \int_{\infty}^0 \frac{(x+t)^2}{((x+t)^2+y^2)^2} dt &= \int_{\infty}^0 -(x+t) \left(\frac{1}{(x+t)^2+y^2} \right)' dt \\
&= - \left[\frac{x+t}{(x+t)^2+y^2} \right]_{\infty}^0 + \int_{\infty}^0 \frac{dt}{(x+t)^2+y^2} \\
&= -\frac{x}{x^2+y^2} + \int_{\infty}^0 \frac{dt}{(x+t)^2+y^2}
\end{aligned}$$

であるから, (*) は,

$$\begin{aligned}
&\left(2\frac{x}{x^2+y^2} - 2 \int_{\infty}^0 \frac{dt}{(x+t)^2+y^2} \right) + 2 \int_{\infty}^0 \frac{dt}{(x+t)^2+y^2} + \left(\frac{x}{x^2+(y-2)^2} - \int_{\infty}^0 \frac{dt}{(x+t)^2+(y-2)^2} \right) \\
&\quad + \int_{\infty}^0 \frac{dt}{(x+t)^2+(y-2)^2} \\
&= \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+(y-2)^2} = f^2(x, y)
\end{aligned}$$

と計算できる. 以上より, D 上の関数 $g(x, y) = - \int_0^{\infty} \left(\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2} + \frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2} \right) dt$ は, ベクトル場 X の領域 D への制限のスカラーポテンシャルである. ■

2) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (0, 2)\}$ 上で定義された関数 g が存在して $X = \text{grad } g$ を満たすと仮定し, 矛盾を導く. $\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ と自己交叉のない閉曲線 $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を定めると, $\gamma([0, 2\pi]) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (0, 2)\}$ であるから, 勾配ベクトル場に関する積分定理より, 次のようにして曲線 γ に沿ったベクトル場 X の線積分を求めることができる.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} X \cdot dx &= \int_{\gamma} \text{grad } g \cdot dx \\
&= \int_{\partial \gamma} g
\end{aligned}$$

ここで γ は単純閉曲線であるから, $\partial \gamma = \emptyset$. 従って, $\int_{\gamma} X \cdot dx = \int_{\partial \gamma} g = 0$ が導かれる.

一方, この γ に沿ったベクトル場 X の線積分の値は, 次の g を用いない場合の計算結果と矛盾する.

$$\int_{\gamma} X \cdot dx = \int_0^{2\pi} \left\langle X(\gamma(\theta)) \mid \frac{d\gamma}{d\theta}(\theta) \right\rangle d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \sin \theta + \frac{-(\sin \theta - 2)}{5 - 4 \sin \theta} \\ 2 \cos \theta + \frac{\cos \theta}{5 - 4 \sin \theta} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{5 - 4 \sin \theta} \right) \\
&\geq \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{5 - 4} \right) = 2\pi
\end{aligned}$$

従って、 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (0, 2)\}$ 上で定義された X のスカラーポテンシャルは存在しない。

■

問4 $f^1(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} + \frac{-(y-2)}{x^2 + (y-2)^2} + \frac{-(y+2)}{x^2 + (y+2)^2}$, $f^2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + (y-2)^2} + \frac{x}{x^2 + (y+2)^2}$ と置くとこれはいずれも C^∞ 級で, $X = f^1 \frac{\partial}{\partial x} + f^2 \frac{\partial}{\partial y}$ と表せる. 曲線 $\gamma([0, 1])$ 上の相異なる2点 $a = \gamma(s)$, $b = \gamma(t)$ ($s, t \in [0, 1], s < t$) を結ぶ区分的に C^1 級かつ正則で, 自己交叉を持たず, $\gamma([0, 1]) \setminus \{a, b\}$ と共通部分を持たず, $s = 0$ または $t = 1$ である場合を除いて C と共通部分を持たない曲線 $\gamma' : [s, t] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p, q, r\}$ を1つ取る. 但し, 向きは $\gamma'(s) = a, \gamma'(t) = b$ とする. これについて次のように γ を部分的に変更した曲線

$$\gamma''(u) = \begin{cases} \gamma(u) & u \in [0, 1] \setminus [s, t] \\ \gamma'(u) & u \in [s, t] \end{cases}$$

は再び区分的に C^1 級かつ正則な曲線で, i), ii), iii) を満たし, $\gamma''([0, 1])$ には γ'' による自然な向きが定まる. この場合も同様に, C と γ'' を繋げて得られる閉曲線を $C_{\gamma''}$ とする. これについて, 次の補題が成り立つ.

補題. 線積分 $\int_{C_{\gamma}} X(p) \cdot dp$ の値は, 積分路 C_{γ} が囲む特異点 p, q, r の組合わせで定まり, 積分路 C_{γ} を特異点 p, q, r を跨がない範囲で変更しても値は変わらない. 但し, 証明を簡明化するため, C_{γ} から $C_{\gamma''}$ への変化分の領域 (証明中の言葉では領域 ΔD) は星形とする. 即ち, 上記の通り定めた閉曲線 $C_{\gamma''}$ であって, p, q, r のいずれも通らずに C_{γ} から $C_{\gamma''}$ へと連続的に変形できる場合 (証明中に定義する記号では, $p, q, r \notin \Delta D$ の場合) について, 次が成り立つ.

$$\int_{C_{\gamma}} X(p) \cdot dp = \int_{C_{\gamma''}} X(p) \cdot dp$$

証明. 条件 i), ii), iii) より, $C_{\gamma}, C_{\gamma''}$ はいずれも単純閉曲線であるから, Jordan の閉曲線定理より, それぞれについて $\mathbb{R}^2 \setminus C_{\gamma}, \mathbb{R}^2 \setminus C_{\gamma''}$ の2つの連結部分のうち有界な方が取れる. これをそれぞれ領域 $D_{\gamma}, D_{\gamma''}$ とする. この時, γ' は端点を除いて γ と共通部分を持たないので, $D_{\gamma} \subset D_{\gamma''}$ か $D_{\gamma''} \subset D_{\gamma}$ かのいずれかが成り立つ. それぞれの場合について, $\Delta D := D_{\gamma''} \setminus D_{\gamma}$, $\Delta D := D_{\gamma} \setminus D_{\gamma''}$ と定め, ΔD が p, q, r のいずれをも含まない場合を考える. ただし, 曲線 $\zeta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して曲線 $-\zeta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $-\zeta(u) := \zeta(c + d - u)$ ($u \in [c, d]$) とすることにして, 向き付きの閉曲線 $\partial(\Delta D) \subset \mathbb{R}^2$ を, それぞれの場合についてパラメータ $\partial(\Delta D) = \gamma' + (-\gamma|_{[s, t]})$ または $\partial(\Delta D) = \gamma|_{[s, t]} + (-\gamma')$ が定める閉曲線と定める. (但し, 端点のみを共有する曲線

$$\zeta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2, \zeta' : [c', d'] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ かつ } \zeta(d) = \zeta'(c') \text{ に対して曲線 } \zeta + \zeta' \text{ とは, } (\zeta + \zeta')(u) = \begin{cases} \zeta(u) & u \in [c, d] \\ \zeta'(u) & u \in [d, d + (d' - c')] \end{cases} \text{ に}$$

より定まる曲線 $\zeta + \zeta' : [c, d + d' - c'] \rightarrow \mathbb{R}^2$ とした $\dots(\star^1)$). いま, X の定める1-形式 $f^1 dx + f^2 dy$ は,

$$\begin{aligned} d(f^1 dx + f^2 dy) &= df^1 \wedge dx + df^2 \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial f^2}{\partial x} - \frac{\partial f^1}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + (y-2)^2 - 2x^2}{(x^2 + (y-2)^2)^2} + \frac{(x^2 + (y+2)^2 - 2x^2)}{(x^2 + (y+2)^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-(x^2 + (y-2)^2) + 2(y-2)^2}{(x^2 + (y-2)^2)^2} - \frac{-(x^2 + (y+2)^2) + 2(y+2)^2}{(x^2 + (y+2)^2)^2} \right) dx \wedge dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

より閉形式である. 従って, 仮定より $p, q, r \notin \Delta D \cup \partial(\Delta D)$ であり ($p, q, r \notin \gamma''([s, t]), p, q, r \notin \gamma([0, 1])$ であるので, $p, q, r \notin \Delta D$ ならばこれを満たす), また領域 ΔD は星形としたから, $\Delta D \cup \partial(\Delta D) \subset U$ を満たす或る p, q, r を含まない領域 U が存在して星形になり, Poincaré の補題より, ベクトル場 X の U への制限 $X|_U$ は, U 上で定義されたスカラーポテンシャル g が存在して $\text{grad } X|_U = g$ を満たす. 従って, $D_{\gamma} \subset D_{\gamma''}$ の時 ($D_{\gamma''} \subset D_{\gamma}$ の場合も同様), 勾配ベクトル場に関する積分定理と, $\partial(\Delta D)$ が区分的に正則かつ C^1 級な単純閉曲線 $\gamma' + (-\gamma|_{[s, t]})$ であることより,

$$\begin{aligned} \int_{\partial(\Delta D)} X(p) \cdot dp &= \int_{\gamma'} X(p) \cdot dp + \int_{-\gamma|_{[s, t]}} X(p) \cdot dp \\ &= \int_{\gamma'} X(p) \cdot dp - \int_{\gamma|_{[s, t]}} X(p) \cdot dp = \int_{\partial(\Delta D)} g = 0 \end{aligned}$$

であるから,

$$\int_{\gamma'} X(p) \cdot dp = \int_{\gamma|_{[s, t]}} X(p) \cdot dp$$

従って,

$$\int_{C_{\gamma}} X(p) \cdot dp = \int_{C_{\gamma''}} X(p) \cdot dp$$

が成り立つ．以上より，積分路を C_γ から $C_{\gamma''}$ へと，特異点 p, q, r を跨がない範囲かつ ΔD が星形になる範囲で変更しても，線積分の値は一定である．また積分路の C_γ から $C_{\gamma''}$ への変更の仮定を十分細かく分解することにより，一般の場合についても主張は成り立つ．（補題の証明終わり） \square

補題より，積分路 C_γ が内部 D_γ に含む特異点 p, q, r の数と種類によって積分の値が変化することが分かる．これを調べるために，まず「 x 軸に沿った積分路 $\gamma_{y=l}^{x=v_1 \rightarrow v_2}$ 」と「 y 軸に沿った積分路 $\gamma_{y=h_1 \rightarrow h_2}^{x=k}$ 」の2つの場合について一般的な場合で線積分の値を求め，この結果を用いて具体的に4種類の曲線 $C_{\gamma_0}, R_p, R_q, R_r$ に沿った線積分を計算し，この結果から線積分 $\int_{C_\gamma} X(p) \cdot dp$ の値は領域 D_γ 内の特異点の個数のみに依ることを導き，実際にこれらの積分路を組み合わせることで，特異点を **0,1,2,3** 個含む積分路を全ての場合について構成して，線積分の値を求める．

まず，次の2つの曲線（線分） $\gamma_{y=l}^{x=v_1 \rightarrow v_2} : [v_1, v_2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p, q, r\}, \gamma_{y=h_1 \rightarrow h_2}^{x=k} : [h_1, h_2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p, q, r\}$ を，それぞれ $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ l \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix}$ によって定義する $\cdots(\star^2)$ ． $\gamma_{y=l}^{x=v_1 \rightarrow v_2}$ に沿った線積分の値は，各項について変数変換 $t = l \tan \theta, t = (l-2) \tan \theta, t = (l+2) \tan \theta$ による置換積分により，次のように計算できる（ $l \neq 0, \pm 2$ の時）．

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{y=l}^{x=v_1 \rightarrow v_2}} X(p) \cdot dp &= \int_{v_1}^{v_2} \left(\frac{-l}{t^2 + l^2} + \frac{-(l-2)}{t^2 + (l-2)^2} + \frac{-(l+2)}{t^2 + (l+2)^2} \right) dt \\ &= -l \int_{\arctan(\frac{v_1}{l})}^{\arctan(\frac{v_2}{l})} \frac{d\theta}{l} - (l-2) \int_{\arctan(\frac{v_1}{l-2})}^{\arctan(\frac{v_2}{l-2})} \frac{d\theta}{l-2} - (l+2) \int_{\arctan(\frac{v_1}{l+2})}^{\arctan(\frac{v_2}{l+2})} \frac{d\theta}{l+2} \\ &= -\arctan\left(\frac{v_2}{l}\right) + \arctan\left(\frac{v_1}{l}\right) - \arctan\left(\frac{v_2}{l-2}\right) + \arctan\left(\frac{v_1}{l-2}\right) \\ &\quad - \arctan\left(\frac{v_2}{l+2}\right) + \arctan\left(\frac{v_1}{l+2}\right) \quad (l \neq 0, \pm 2) \end{aligned}$$

なお， $l = 0$ の時は， $\int_{\gamma_{y=l}^{x=v_1 \rightarrow v_2}} X(p) \cdot dp = \int_{v_1}^{v_2} \left(0 + \frac{2}{t^2 + 4} + \frac{-2}{t^2 + 4} \right) dt = 0 \quad (l = 0) \cdots (*)$ である．また， $\gamma_{y=h_1 \rightarrow h_2}^{x=k}$ に沿った線積分の値も，同様の計算により次の結果を得る．

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{y=h_1 \rightarrow h_2}^{x=k}} X(p) \cdot dp &= \arctan\left(\frac{h_2}{k}\right) - \arctan\left(\frac{h_1}{k}\right) + \arctan\left(\frac{h_2-2}{k}\right) - \arctan\left(\frac{h_1-2}{k}\right) \\ &\quad + \arctan\left(\frac{h_2+2}{k}\right) - \arctan\left(\frac{h_1+2}{k}\right) \quad (k \neq 0, \pm 2) \end{aligned}$$

\arctan は奇関数であるから，どちらの積分の値も，それぞれ積分路に対する次の2種の変換「 y 軸対称変換 $v_1 \mapsto -v_1, v_2 \mapsto -v_2$ または $h_1 \mapsto -h_1, h_2 \mapsto -h_2$ 」と「 x 軸対称変換 $l \mapsto -l$ または $h \mapsto -h$ 」に対して符号が逆転することに注目して，次の4種の積分路について積分を計算する． (\star^1) で定義した向き付き曲線の和（但し $\zeta + (-\zeta) = \emptyset$ する）の記法を用いる．まず特異点を1つも囲まない長方形閉曲線 C_{γ_0} を C と $\gamma_0 := \gamma_{y=0 \rightarrow 3}^{x=2} + \gamma_{y=3}^{x=2 \rightarrow 1} + \gamma_{y=3 \rightarrow 0}^{x=1} + \gamma_{y=0}^{x=1 \rightarrow 2}$ を繋げたものとし，各点 q, p, r を中心とした一辺2の正方形閉曲線 R_q, R_p, R_r をそれぞれ曲線 $\gamma_q := \gamma_{y=1}^{x=-1 \rightarrow 1} + \gamma_{y=1 \rightarrow 3}^{x=1} + \gamma_{y=3}^{x=1 \rightarrow -1} + \gamma_{y=3 \rightarrow 1}^{x=-1}$ ， $\gamma_p := \gamma_{y=-1}^{x=-1 \rightarrow 1} + \gamma_{y=-1 \rightarrow 1}^{x=1} + \gamma_{y=1}^{x=1 \rightarrow -1} + \gamma_{y=1 \rightarrow -1}^{x=-1}$ ， $\gamma_r := \gamma_{y=-3}^{x=-1 \rightarrow 1} + \gamma_{y=-3 \rightarrow -1}^{x=1} + \gamma_{y=-1}^{x=1 \rightarrow -1} + \gamma_{y=-1 \rightarrow -3}^{x=-1}$ とそれが定める自然な向きを持った閉路とする．それぞれに沿った線積分の値を，式(3),(4)と(5),(6)と(*)に当てはめて，前述した奇関数性を利用して計算すると，まず R_0, R_q について次のようになる．

$$\begin{aligned} \int_{R_0} X(p) \cdot dp &= \int_C X(p) \cdot dp + \int_{\gamma_{y=0 \rightarrow 3}^{x=2}} X(p) \cdot dp + \int_{\gamma_{y=3}^{x=2 \rightarrow 1}} X(p) \cdot dp + \int_{\gamma_{y=3 \rightarrow 0}^{x=1}} X(p) \cdot dp \\ &= 0 + \left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{3}{2}\right) + \arctan\left(\frac{5}{2}\right) \right) + \left(-\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{2}{3}\right) - \arctan(1) \right) \\ &\quad + \arctan(2) - \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{2}{5}\right) - (\arctan(1) + \arctan(3) + \arctan(5)) = 0 \\ \int_{R_q} X(p) \cdot dp &= \int_{\gamma_{y=1}^{x=-1 \rightarrow 1}} X(p) \cdot dp + \int_{\gamma_{y=1 \rightarrow 3}^{x=1}} X(p) \cdot dp + \int_{\gamma_{y=3}^{x=1 \rightarrow -1}} X(p) \cdot dp + \int_{\gamma_{y=3 \rightarrow 1}^{x=-1}} X(p) \cdot dp \\ &= 2(\arctan(2) - \arctan(3) + \arctan(4)) + 2(\arctan(1) - \arctan(2) + \arctan(3) - \arctan(4) \\ &\quad + \arctan(5)) + 2(\arctan(1) + \arctan(1/3) + \arctan(1/5)) - 2\arctan(1/3) = 2\pi \end{aligned}$$

前述した奇関数性に注意すれば，同様の計算により $\int_{R_p} X(p) \cdot dp = \int_{R_r} X(p) \cdot dp = 2\pi$ も得る．積分路 R_p, R_q, R_r での線積分での値がどれも等しいから，補題と併せて，線積分の値は積分路が囲む特異点の数に依ることが分かる．すると，特異点を1つのみ囲む閉

じた経路 $C_{\gamma_0+\gamma_q}$ について, $\int_{C_{\gamma_0+\gamma_q}} X(p) \cdot dp = 2\pi$ である. 以降同様に, $\int_{C_{\gamma_0+\gamma_q+\gamma_p}} X(p) \cdot dp = 4\pi$, $\int_{C_{\gamma_0+\gamma_q+\gamma_p+\gamma_r}} X(p) \cdot dp = 6\pi$ を得る.

以上の結果を, (\star^2) で定義した曲線の記法を用いてまとめると, 線積分 $\int_{C_\gamma} X(p) \cdot dp$ の取り得る値とその時の積分路の例は次の通りとなる.

$$\int_{C_\gamma} X(p) \cdot dp = \begin{cases} 0 & \gamma = \gamma_0 = \gamma_{y=0 \rightarrow 3}^{x=2} + \gamma_{y=3}^{x=2 \rightarrow 1} + \gamma_{y=3 \rightarrow 0}^{x=1} \text{の時} \\ 2\pi & \gamma = \gamma_0 + \gamma_q = \gamma_{y=0 \rightarrow 3}^{x=2} + \gamma_{y=3}^{x=2 \rightarrow -1} + \gamma_{y=3 \rightarrow 1}^{x=-1} + \gamma_{y=1}^{x=-1 \rightarrow 1} + \gamma_{y=1 \rightarrow 0}^{x=1} \text{の時} \\ 4\pi & \gamma = \gamma_0 + \gamma_q + \gamma_p = \gamma_{y=0 \rightarrow 3}^{x=2} + \gamma_{y=3}^{x=2 \rightarrow -1} + \gamma_{y=3 \rightarrow -1}^{x=-1} + \gamma_{y=-1}^{x=-1 \rightarrow 1} + \gamma_{y=-1 \rightarrow 0}^{x=1} \text{の時} \\ 6\pi & \gamma = \gamma_0 + \gamma_q + \gamma_p + \gamma_r = \gamma_{y=0 \rightarrow 3}^{x=2} + \gamma_{y=3}^{x=2 \rightarrow -1} + \gamma_{y=3 \rightarrow -3}^{x=-1} + \gamma_{y=-3}^{x=-1 \rightarrow 1} + \gamma_{y=-3 \rightarrow 0}^{x=1} \text{の時} \end{cases}$$

■