

圏と層からの数学原論

Anonymous Mathematicians

2020 年 8 月 18 日

目次

第 I 部	圏	3
第 1 章	集合論の準備	5
1.1	集合の公理と Grothendieck 宇宙	5
1.2	写像と fiber 積	6
第 2 章	圏	9
2.1	圏の定義	9
2.2	定義の脱構築, 記号についての注意	10
2.3	圏の例 7 つ	11
2.4	圏の構成	14
第 3 章	圏の射と圏の圏	21
3.1	関手	21
3.2	圏の圏	22
3.3	Hom 関手	27
第 4 章	関手の射と関手の圏	30
4.1	関手の射	30
4.2	関手の圏	32
第 5 章	圏の同値 (equivalence)	35
5.1	圏の同値の定義	35
5.2	圏の同値の特徴付け	36
5.3	圏の同値の well-definedness	37
5.4	同値な圏の例 1 : 行列の圏と有限次元 \mathbb{R} -線型空間の圏	37
5.5	同値な圏の例 2 : 有限次元 \mathbb{R} -線型空間の圏とその双対空間の圏	38
第 6 章	表現可能関手	41
6.1	表現可能関手	41
6.2	表現可能関手と米田の補題 : 前層の圏の様子	41
第 7 章	随伴 (adjoint)	51

目次	2
7.1 定義	51
7.2 例	52
7.3 左随伴関手を持つことの判定法	52
第 8 章 普遍性と極限	53
8.1 種々の特別な対象	53
8.2 直積	55
8.3 pullback	55
8.4 テンソル	56
第 II 部 圏論の拡張	57
第 9 章 豊穣圏 (enriched category)	58
9.1 豊穣圏の定義	58
第 10 章 2-圏	59
10.1 2-圏の定義	59
10.2 2-圏の例	59
第 11 章 閉圏 (closed category)	60
11.1 閉圏の定義	60
11.2 デカルト閉圏 (cartesian closed category)	60
第 12 章 モノイド圏 (Monoidal category)	62
12.1 モノイド圏の定義	62
12.2 モノイド圏の例	63
12.3 モノイド同値	63
12.4 閉モノイド圏 (closed monoidal category)	63
第 III 部 層 (sheaf)	64
第 13 章 Introduction	65
13.1 これが圏論の上で行われる理由	65
第 14 章 位相空間と連続写像	66
14.1 Euclid 空間での開集合の定義から, 特徴づけを導く	66
14.2 位相空間を, 特徴付けだっただ方を公理として定義する	67
14.3 部分位相空間	68
14.4 連続写像	69
参考文献	70

第 I 部

卷

位相空間のホモロジー理論を創始したポアンカレの言葉に「数学とは異なるものを同じとみなす技術である」というものがある。この言葉は色々な解釈ができると思うが、自然科学のいろんな場面で似た形で現れる数学的現象の本質を抽出して抽象化し、一つの理論にまとめることはまさに「異なるものを同じとみなす技術」ではないだろうか。例えば、平面幾何学における相似拡大、解析学における関数のある点の近くでの一次近似、自然科学、経済学の様々な場面で現れる諸量の比例関係などの中に潜む線型性という本質を捉え、抽象化して理論としてまとめたものが線形代数学である。このように抽象化して理論をまとめておくことで数学的現象の本質の理解が深まり、また、新たな現象が見つかった時には、その理論が適用可能であることさえ確かめれば、同じ考察を再び繰り返すことなく抽象化された理論の恩恵を受けることができる。線形代数学が自然科学のあらゆる分野において重要なものであることはいうまでもないであろう。^{†1}

現代の数学は、集合と位相の抽象的なことばで書かれ、線型代数と微積分の2本の柱で支えられている。この基礎をある程度学んだ読者を、その先に広がる数学の世界へ案内する。言語にたとえば、集合と位相、線型代数と微積分はそれぞれ、基礎的な文法と日常会話に相当する。それだけの準備があれば、数学の世界の探索に出発できる。

^{†1} 志甫淳『層とホモロジー代数』（共立出版,2016）前文

第 1 章

集合論の準備

1.1 集合の公理と Grothendieck 宇宙

圏論の理論を展開するに当たって、集合のことは基礎として展開するのが明瞭であろう。しかし、「ものの集まり」という言及を素朴なまま再帰的に許すと Russell の逆理などの問題が生じ、かと言ってクラスの扱いは高度になるため、気楽にことばとしてのみ集合の概念を使うために、我々の考察の対象とする集合の舞台を、クラスの定義とは別に、十分大きな集合 \mathfrak{U} （これを宇宙と呼ぶ）を先に設定して、これに限っておく。（あるいは、任意の集合に対してそれを含む宇宙が存在することを約束する）。この時、この宇宙 \mathfrak{U} に属する集合の全体 $P(\mathfrak{U})$ も、また集合である。以上の議論を定義にまとめると、以下のようになる。

定義 1.1.1 (Grothendieck universe). 空でない集合 \mathfrak{U} が宇宙であるとは、以下の 4 条件を満たすことをいう。

1. \in に対する閉性 $\forall x, y [x \in y \wedge y \in \mathfrak{U} \rightarrow x \in \mathfrak{U}]$
2. pairing に対する閉性 $\forall x, y [x, y \in \mathfrak{U} \rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{U}]$
3. power に対する閉性 $\forall x [x \in \mathfrak{U} \rightarrow P(x) \in \mathfrak{U}]$
4. union に対する閉性 $\forall I, x_i \in \mathfrak{U} (i \in I) [\bigcup_{i \in I} x_i := y : \exists i \in I y \in x_i]$

この時、宇宙 \mathfrak{U} について、以下の命題が成り立つ。

命題 1.1.2. 空でない宇宙 \mathfrak{U} について、以下の条件が成り立つ。

5. $\emptyset \in \mathfrak{U}$
6. $\forall x \in \mathfrak{U} [x \in \mathfrak{U} \rightarrow \{x\} \in \mathfrak{U}]$
7. $\forall x \in \mathfrak{U} [x \in \mathfrak{U} \rightarrow \bigcup_{y \in x} y \in \mathfrak{U}]$
8. $\forall x, y \in \mathfrak{U} [x, y \in \mathfrak{U} \rightarrow x \times y \in \mathfrak{U}]$
9. $\forall x, y \in \mathfrak{U} [x \in \mathfrak{U} \wedge y \subset x \rightarrow y \in \mathfrak{U}]$
10. $\forall I, x_i \in \mathfrak{U} (i \in I) \left[I, x_i \in \mathfrak{U} (i \in I) \rightarrow \prod_{i \in I} x_i, \coprod_{i \in I} x_i \in \mathfrak{U} \right]$

定義 1.1.3 (小さな集合). 集合とは、ZFC 公理系を満たすものとする。特に、ZFC 公理系に以下の公理 1.1.4 を付け加えた公理系を満たすものを、小さな集合とする。

公理 1.1.4 (Grothendieck 宇宙の存在). $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}$ を満たす宇宙 \mathfrak{U} は存在する。

注 1.1.5. ZFC とクラスの関係の中で言及される「小さな集合」と、この定義のいう小さな集合とは、どれくらい類比的なのだろうか。

公理 1.1.4 を付け加える理由は、この条件が（正確には、 \emptyset, V_ω を除いた非自明な宇宙 \mathfrak{U} の存在が）ZFC から独立であるからである。この時、宇宙 \mathfrak{U} 自身は、集合ではあるが、小さな集合とはならないことに注意。そして、今後の議論で「集合」と言った時、暗黙に「小さな集合」を指すこととすれば、「(小さな) 集合全体の集合 \mathfrak{U} 」という形で、真のクラスの取り扱いを回避することが出来る。

命題 1.1.6. 構造 $(\mathfrak{U}; \in)$ は、ZFC 公理系のモデルである。

示せないけど、成り立つらしい。

こうして定めた宇宙 \mathfrak{U} を 1 つ取り、以後固定する。

1.2 写像と fiber 積

定義 1.2.1 (mapping).

1. 部分集合 $\Gamma \subset X \times Y$ が「 X から Y への写像のグラフである」とは、

$$\forall x \in X \exists y \in Y ((x, y) \in \Gamma \wedge \forall z \in Y ((x, z) \in \Gamma \Rightarrow y = z))$$

が成立することを言う。

2. $\Gamma \subset X \times Y$ を、 X から Y への写像のグラフとすると、3 つ組 $f = (\Gamma, X, Y)$ を写像 $X \rightarrow Y$ と呼び、 $f: X \rightarrow Y$ と表す。
3. 次のように置く。

$$\text{Map}(X, Y) := \{f \in P(X \times Y) \times \{X\} \times \{Y\} \mid f = (\Gamma, X, Y), \Gamma \text{ は } X \text{ から } Y \text{ への写像のグラフ}\}$$

この時、 X を始域 (source), Y を終域 (target) と呼ぶ。なお、2 つの写像 $f, g: X \rightarrow Y$ が等しいとは、 $f = g \iff \forall x \in X [f(x) = g(x)]$ と定める。

定義 1.2.2 (写像の合成). 2 つの写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ に対し、新たな写像を $h: X \rightarrow Z$ を $\forall x \in X [h(x) = g(f(x))]$ を満たす写像として構成できる。この h を合成写像と呼び、 $g \circ f$ と書く。

定義 1.2.3 (集合の積). 2 つの集合 X, Y に対して、新たに (直) 積と呼ばれる集合を $X \times Y := \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$ と定める。但し、 (x, y) は組と呼び、 $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ と定める。 $(x, y) = (x', y') \iff x = x' \wedge y = y'$ を満たす。

定義 1.2.4 (fiber 積). 終域が等しい 2 つの写像 $f: X \rightarrow S, g: Y \rightarrow S$ について、その X と Y の S 上の **fiber 積** $X_f \times_S g Y \subset X \times Y$ を ($|S| = 1$ の時等号成立),

$$\begin{aligned} X_f \times_S g Y &:= \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y) \in S\} \\ &= \coprod_{s \in S} f^{-1}(s) \times g^{-1}(s) \end{aligned}$$

と定義する。

例 1.2.5 (fiber 積の立ち位置を他の概念との連関の中で把握する).

1. pullback である fiber 積は, Set 上の pullback である.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & S \\ \text{pr}_1 \uparrow & & \uparrow g \\ X_f \times_S Y & \xrightarrow{\text{pr}_2} & Y \end{array}$$

図 1.1 図中の pr_1, pr_2 はそれぞれ第一, 第二射影の fiber 積への制限である

2. 写像のグラフの部分集合としての解釈 ここでまず g を包含写像とする. すると, 図中の射影の制限 $\text{pr}_1 : X_f \times_S Y \rightarrow X$ は可逆写像 $X_f \times_S Y \rightarrow f^{-1}(Y)$ を定めている. 換言すれば, この fiber 積は, $f: X \rightarrow S$ に対して $Y \subset S$ が与えられた時の「部分可逆写像」($f^{-1}(Y), Y, X_f \times_S Y$) を定める.
3. その解釈の特別な場合は「共通部分」である また f も包含写像とすると, 写像 $X_f \times_S Y \rightarrow X \cap Y$ は可逆である.
4. 同値関係のグラフとしての解釈 $R \subset X \times X$ を X 上の同値関係とし, $p: X \rightarrow Y \subset P(X)$ をこれが定める商写像とする. 同じ同値類 $x, y \in [x] \in Y$ に所属することが $(x, y) \in R$ と同値であるから, 次が成り立つ.

$$R = X_p \times_Y pX$$

圧倒的表現力である. 同様にして fiber 積は射の合成の選択写像 c の定義域 (composable な射の組の集合) を正確に捉える. 2つの写像 f, g による S 上の方程式を, $X \times Y$ の部分集合 (解空間) として翻訳したものである. 従って次のように言える.

A pullback is therefore the categorical semantics of an equation.^{†1}

定義 1.2.6 (写像の可換図式). X, Y, S, T を集合とし, f, g, p, q を写像とする. この時, 次の図式が可換であるとは, $f \circ p = g \circ q$ が成立すること, 即ち $\forall x \in T [f(p(x)) = g(q(x)) \in S]$ が成立することである.

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{p} & X \\ q \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & S \end{array} \quad (1.1)$$

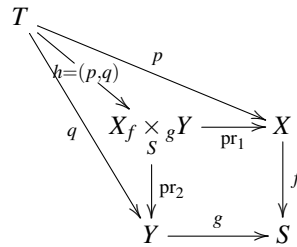
注 1.2.7. つまり, 図式を有向グラフ (集合 X, Y, W, Z を頂点, 写像 f, g, h, k を辺とした有向グラフ) だと思った時に, 両端点を共有する全ての有向道 (directed path) が, 写像の合成について, 等しい写像を与えるような図式を, 可換図式であるという. この概念の集合論的に書いたからといって, 必ずしもわかりやすいとは言い難い.

定義 1.2.8 (cartesian).

1. 図式 1.1 似て, 写像 $(p, q): T \rightarrow X \times Y$ は fiber 積への写像 $T \rightarrow X_f \times_S Y$ を定める. この写像も (p, q) で

^{†1} <https://ncatlab.org/nlab/show/pullback>

表す．何故なら，これは次の図式を可換にするただ一つの写像 $h: T \rightarrow X_f \times_S Y$ であるからである．



2. この時， $h = (p, q)$ が可逆になる時の図式 1.1 を **cartesian** であるという．

注 1.2.9. cartesian とはフランスの数学者 René Descartes の名前に由来するのであるが，その名前から冠詞の部分 des を省いたものである．

第 2 章

圏

圏は数学の枠組みを与えると同時に、それ自体 1 つの代数的な対象である。

現代の数学では、数学の対象を単独に扱うのではなく、それと似た対象全体のなす圏の一員として捉えることが多い。こうすることで、対象自体の構成よりも、圏の中の他の対象との関わりに焦点が当たる。圏の個々の対象ではなく、圏自体が興味の主な対象となることもある。圏の中での役割によってその対象が特定されることを表すのが、米田の補題と呼ばれる系 6.2.2 である。[2]

2.1 圏の定義

定義 2.1.1 (category). 圏とは、集合 C, M と写像 $s : M \rightarrow C, t : M \rightarrow C, e : C \rightarrow M, c : M_s \times_C M \rightarrow M$ の 6-組 (C, M, s, t, c, e) であって、次の図 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 の図式を可換にするもののことである。以降、第一成分の集合 C を代表して圏の名前としても使う。

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xleftarrow{\text{pr}_2} & M_s \times_C M & \xrightarrow{\text{pr}_1} & M \\
 \downarrow s & & \downarrow c & & \downarrow t \\
 C & \xleftarrow{s} & M & \xrightarrow{t} & C
 \end{array}$$

図 2.1 写像 c の値（合成と呼ぶ）について、各 (g, f) について、 $s(f) = s(c(g, f)) \wedge t(g) = t(c(g, f))$ を要請する可換図式。

但し、写像 p_1, p_2 は夫々第一、第二射影である。

$$\begin{array}{ccc}
 M_s \times_C M_s \times_C M & \xrightarrow{1 \times c} & M_s \times_C M \\
 \downarrow c \times 1 & \circlearrowleft & \downarrow c \\
 M_s \times_C M & \xrightarrow{c} & M
 \end{array}$$

図 2.2 写像 c について、結合則の成立 $c(c(h, g), f) = c(h, c(g, f))$ を要請する可換図式。

但し, $1 \times c$ は積写像を表す. なお, 図 2.1 より, $s(g) = s(c(h, g)) = t(f)$ が保証されているから, (h, g, f) は確かに必ず $M_s \times_I M_s \times_I M$ に含まれるのである.

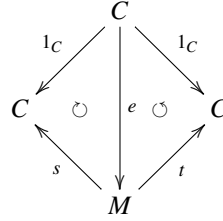


図 2.3 写像 e の値 (単位射と呼ぶ) について, それが自己射であること, 即ち $s \circ e = 1_C = t \circ e$ を要請する可換図式.

つまり, C の任意の元を A とすると, その値 $e(A)$ は射 $e(A): A \rightarrow A$ となる必要がある. このような射のうち特別なものを e の値として 1 つ定めて単位射と呼び, 図 2.3 により全ての C の元について定まる. この特別な自己射を他から区別する性質 (合成に関して identity である) を次で定める.

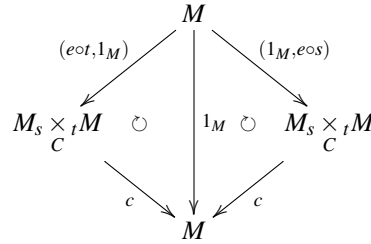


図 2.4 写像 e の値 (単位射) の特徴付け. $c(e(t(f)), f) = c(f, e(s(f)))$, 即ち M の各元 $f: A \rightarrow B$ に対して, $f \circ e(A) = e(B) \circ f = f$ の成立を要請する可換図式.

この性質は一種の interface の役割を果たす. 但し, 写像 $(1, e \circ s)$ は, 対角写像 δ と積写像 $1 \times e \circ s$ との合成写像で,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{(1, e \circ s)} & M_s \times_I M \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f & \longmapsto & (f, e(s(f))) \end{array}$$

である.

2.2 定義の脱構築, 記号についての注意

圏の要素は, 以下のように 6 つの要素に分解できる.

(1-1). 2 つの集合 C, M を議論領域とする

圏を \mathcal{C} とした時, $C = \text{Ob } \mathcal{C}, M = \text{Ar } \mathcal{C}$ とも書く.

(1-2). C, M 間の vertex と edge としての関係

M の各元が, 順番を区別して, C の元 2 つと対応づけられている必要がある. この構造を $f: A \rightarrow B$ などと表す. 定式化の仕方は少なくとも 3 つある. 「全ての射に「始対象」「終対象」と呼び分けられる

2つの対象を紐付ける選択写像 $s, t: M \rightarrow C$ を定める」という上記の方法や、「そもそも、集合 M を各 $A, B \in C$ に対して $\text{Mor}(A, B)$ の和集合として構成する」方法、あるいは「集合 C が各 $f \in M$ に対して2つずつ定まっていくとする」方法などがある。後になるほど集合論的な、対象に注目した発想である。

(2-1). 射の合成の閉性と推移性

閉性は、fiber 積 $M_s \times_C M_t$ を定義域とし、 M を値域とする合成射の選択写像 c を1つ定めることに等しい。残る、合成射が保存すべき C, M 間の構造は、全て2つの写像 s, t で捕まえられているので、可換図式2.1のように表現出来る。

(2-2). 射の合成の結合性

可換図式2.2で表現される。

(3-1). 単位射の存在性と定義（自己射である）

存在性は、 C の各元に対して、特別な射を1つ選び出す選択写像 $e: C \rightarrow M$ を1つ定めることに等しい。そして、その射が自己射である条件は、可換図式2.3のように表現される。

(3-2). 単位射の特徴付け

単位射は、他の自己射から区別される、特別な性質を充たす。それは、「単位射との結合は、右からであろうと左からであろうと、射に変化を与えない」という単位性 (identity) である。なお、この性質を充たすような射は一意に定まることに注意。だからこれを「単位射の特徴付け」とも呼べる。殆どの場合、恒等写像が定める射がこの性質を満たすために、代わりに恒等射と呼ぶこともある。

今回の定義は、圏を6つ組とし、残る条件(2-1)の一部、(2-2)、(3-1)の一部、(3-2)を可換図式を用いて定式化した。定義の流儀は他にもあるだろうが、その本質は上に述べた6つに整理できるのではないかと考えている。

射の合成 $c(g, f)$ は以降、写像の合成と同じ記号を用いて、 $g \circ f$ または gf と書く。 $A \in C$ に対してその単位射は、恒等写像の記号を用いて、 $e(A)$ を 1_A と書く。なお、 $\text{Hom}_C(A, B) = \text{Mor}_C(A, B) = \{f \in M \mid s(f) = A, t(f) = B\}$ と定める。

2.3 圏の例7つ

圏は数学の枠組みを与えると同時に、それ自体1つの代数的な対象である。[2]

この言葉の前半が、前半の3つの例に対応し、後半が残りの4つの例に対応する。圏は数学的対象を他の対象との関係の中で捉える枠組みとなると同時に、その射についての性質が「代数的構造」または「順序的構造」や「関係」と言った概念の雛形となっている。

注。なお、第1章で議論したように、本来の意味では「有限次元実線型空間全体の集合」などの対象は定義出来ないことに注意。

2.3.1 集合の圏

C を小さな集合全体の集合とする。 $A, B, D \in C$ に対して、 $\text{Mor}_C(A, B) = \text{Map}(A, B)$ とし、

$$\begin{array}{ccc} \circ: \text{Map}(B, D) \times \text{Map}(A, B) & \rightarrow & \text{Map}(A, D) \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow & & \downarrow \\ (g, f) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

と言うように射の合成を、写像の合成として自然に定義し、恒等射は恒等写像 $1_A : A \rightarrow A$ とすると、これは圏をなす。

2.3.2 線型空間の圏

C を有限次元実線型空間全体の集合とする。 $V, W \in C$ について、 $\text{Mor}_C(V, W) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ とし、射の合成と恒等写像 1_V については前述の集合の圏と同様にすれば、これは圏をなす。

2.3.3 可微分多様体の圏

C を \mathbb{R}^2 上の開集合 U 全体の集合とする。 $U, V \in C$ に対して、射の集合を $\text{Mor}_C(U, V) = \{f : U \rightarrow V : f \text{ は連続微分可能な写像}\}$ と定める。

すると、集合としての写像の合成と、恒等射を写像 $1_U : (x, y) \mapsto (x, y)$ とすれば、これは圏をなす。

同型射

定義 2.3.1 (可逆, 同型, 逆射). 射 $f : A \rightarrow B$ に対して、射 $g : B \rightarrow A$ であって、 $g \circ f = 1_A \wedge f \circ g = 1_B$ を満たす g を射 f の逆射といい、 f は可逆である、或いは同型である、と言う。なお、逆射は存在すれば一意であることは、射の合成の結合性からすでに従う。

2.3.4 単系の圏論的特徴付け：単一対象圏：射の合成を、演算の雛形と見る

対象の集合 C を一点集合 $\{A\}$ とする。すると、 s, t は定値写像として一意に定まる。これにより、 c の定義域は $M_s \times M_t = M \times M$ となるから、結局 $c : M \times M \rightarrow M$ である。これは任意の M の2元の間に定義された演算となるから、 $c(f, g)$ を $f \cdot g$ と書くことにする。写像 $e : C \rightarrow M$ の値を $e := e(A) = 1_A$ と書くこととする。すると、この単一対象圏 C は、後は $(h \cdot g) \cdot f = h \cdot (g \cdot f)$ と $f \cdot e = e \cdot f = f$ という2つの公理を充たす3組 $(M; \cdot, e)$ に等しくなり、これは monoid の公理に他ならない。

単一対象圏における射の合成は、素朴な意味での代数的演算に退化する。特に、それ以外に射に何の条件も課さなければ、これは単系 (monoid) と呼ばれる。この時、圏 $(\{A\}, M, s, t, c, e)$ の全体が、モノイド $M = (M, \cdot, e)$ 全体に一致する。Morphism と Monoid とで頭文字が一致しているのが運命的。また一般の圏 C についても、各対象 $a \in C$ について、 $\text{Hom}_C(a, a)$ は monoid になる。

2.3.5 可換

なお、モノイド M の全ての元が可逆であった時、 $(M; \cdot, e, {}^{-1})$ を特に群と言う。

M をモノイドとすると、逆転単一対象圏 M^{op} も勿論モノイドであり、これを M の逆転モノイドという。 $M = M^{op}$ の時、このモノイド M は可換であるという。

2.3.6 順序関係の圏論的特徴付け：骨格圏：射の合成を、順序関係の雛形と見る

前順序集合 (preordered set) とは、任意の Hom 集合 $\text{Hom}_C(x, y)$ に、元が高々 1 つしか存在しないような圏のことである。このような圏のことを、細い圏 (posetal category, thin category) という。

定義 2.3.2 (thin category). 圏 C について、写像 $(s, t) : M \rightarrow C \times C$ が単射である時、この圏を細い圏であるという。

この例を実際に構成してみる。 C を対象の集合とする。 $\Delta_C := \{(x, x) \in C \times C \mid x \in C\}$ を対角集合として、 $\Delta_C \subset M \subset C \times C$ を満たす M を自由に定める。 s, t を第一射影と第二射影とする。この下で、元 (A, A) を対象 $A \in C$ の単位射とすれば、 $\langle C, M, s, t, c, e \rangle$ は圏をなす。

この上さらに、全ての同型射は単位射しかないとき、即ち、任意の対象にとって同型な対象は自分自身しか居ない場合（このとき、その圏は **skeletal** であるという）、 M は C の順序を定めるという。

定義 2.3.3 (skeletal). 圏 C の可逆射は全て単位射である時、この圏は **skeletal** であるという。

これは、圏を有向グラフとして捉えなおしたようなものである。「射が存在する」という関係を、順序関係だと捉えれば、それは Hasse 図の例に他ならない。

以降、 C の 2 元 $x, y \in C$ に対して、 $(x, y) \in M$ という関係がある時、 $x \leq y$ と書くこととする。単位射の存在性より、任意の $x \in C$ に対して $x \leq x$ であり（反射律）、射の合成が定義されていることにより、推移律 $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$ は満たされる。この時点で「前順序 (pre-order)」と呼ぶ。続いて「全ての同型射は単位射である」という条件により、反対称律 $x \leq y \wedge x \geq y \Rightarrow x = y$ が満たされる。よって、 M によって上記のように順序を定めた集合 C は、確かに順序集合となっている。

注 2.3.4 (勘違いしやすい点).

1. 細い圏では、任意の互いに異なる 2 対象の間に互いに逆向きの射があるならば（即ち、 $\text{hom}(a, b)$ も $\text{hom}(b, a)$ も空でない）、その合成は単位射にならねばならない。なぜなら、単位射ではないならば、 $\text{hom}(a, a)$ は 2 つ以上の元を持つことになる。従って、互いに逆向きな射は必ず逆射である。
2. 前順序集合は、二項関係 \leq を射の存在性に対応させることで細い圏と見做せるが、その場合反対称性の前段階とも言える $a < b \wedge b < a \Rightarrow a \simeq b$ が成り立つ。この結論は相等性の意味では $a \neq b$ の場合に含まれる。

前順序集合 (poset) とは細い圏のことである。順序集合とは、さらに skeletal な圏のことである。順序とは、圏の基底骨格構造であるとも言おうか。例えば、対象の集合 C に対して、 $\{(x, x) \in C \times C \mid x \in C\} \subset M \subset C \times C$ を満たす射の集合 M をもち、全ての同型射は単位射である時、 M が C 上に定める「射が存在する」という関係は「順序関係」と等しい。

これは Hasse 図と順序関係の公理との対応に似ている。

2.3.7 関係

細い圏 C であって、 C の射が全て可逆である時、 M は C の同値関係のグラフであるという。同値関係も前順序（反射的かつ推移的な関係）の一種である。

2.4 圏の構成

2.4.1 具体圏

定義 2.4.1 (concrete category). (C, M, s, t, c, e) を圏とする。忠実な関手 $F : C \rightarrow \mathbf{Set}$ が存在するときに、組 (C, F) のことを**具体圏**と呼ぶ。また、このような忠実関手 F が存在する圏 C のことを**具体化可能 (concretizable)** という。

注 2.4.2. 関手 F の例として、例えば忘却関手がある。忘却関手は、圏 C の対象をその台集合に写し、射はその台写像 (underlying mapping) に写す。集合論が構築する様々な対象のうち、「集合の上に、付加構造を追加する」という形で定式化される構造が圏をなすとき、それは具体圏をなすという言葉で捉えられる。関手 F の取り方はいく通りも存在する場合が殆どだが、上述した忘却関手のような一番自然なものを取ることが多い。

定理 2.4.3. 任意の圏 C は、或る具体圏と同型である。

[証明]。圏 C から、同型な圏 \bar{C} を構成する。関手 $\bar{} : C \rightarrow \bar{C}$ の対象写像を次のように定める。

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \bar{C} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ c & \longmapsto & \bar{c} = \{f \in \text{arr}(C) \mid \text{cod}(f) = c\} \end{array}$$

射関手を次のように定める。

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \bar{C} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ g : c \rightarrow d & \longmapsto & \bar{g} = g^* : \text{hom}_C(-, c) \rightarrow \text{hom}_C(-, d) \end{array}$$

ただし、この写像 g^* は、任意の対象 $x \in C$ に対して、

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_C(x, c) & \longrightarrow & \text{hom}_C(x, d) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f : x \rightarrow c & \longmapsto & g \circ f : x \rightarrow d \end{array}$$

と対応づける写像（関手の射／自然変換）である。この関手は可逆であり、逆関手の $\bar{x} \in \bar{C}$ 成分は射写像は次の通りである。

$$\begin{array}{ccc} \bar{C} & \longrightarrow & C \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \bar{g} : \text{hom}_C(-, c) \rightarrow \text{hom}_C(-, d) & \longmapsto & \bar{g}(1_c) \end{array}$$

□

注 2.4.4. こうして、対象 c を「 c に入射する射」に写し、射を「 c に入射する Hom 集合同士の自然変換」に写す構成関手 $\bar{} : C \rightarrow \bar{C}$ を「Cayley 表現関手」と呼ぶことにしようか。群論での Cayley 表現のアナロジーとして、ここでも「表現」という語が、「対象 c を取り巻く射の動きを定式化することで、 c の内部構造が漏れ出しているのを捉える」という精神を感じる。

これが「表現」という術語の出处であろう。この時点ではまだ素朴の意味で「 C の表現 \bar{C} 」という感覚である。また、これが「ホム関手」「ホム集合」という概念の出处でもある。集合での表現を持つから、我々の「具体」性という得意分野に引きずりこめるのだ。また、何度も本文内で注意されるが、集合に頼り過ぎないで、純粋に圏論的なまま理論を豊かにしていくのも大事である。（群論だってそうなのだろう）。例えば、一般の圏を白紙から考えるとき、対象の間の射全体の集まりは「集合」であるとは限らないのだ。

また、2-圏の起こりにも見える。また戻って来たい。

2.4.2 直積圏

定義 2.4.5 (product category). $(C, M, s, t, c, e), (C', M', s', t', c', e')$ を圏とする。直積圏 $C \times C'$ とは、射の集合を $M \times M'$ とし、このファイバー積 $(M \times M')_{s \times s'} \times_{C \times C'} (M \times M')_{t \times t'}$ を $(M_s \times_{C'} M) \times (M'_{s'} \times_{C'} M')$ と同一視し、積写像 $c \times c'$ が $(M \times M')_{s \times s'} \times_{C \times C'} (M \times M')_{t \times t'}$ 上に定める $M \times M'$ への写像も $c \times c'$ で表すと、 $(C \times C', M \times M', s \times s', t \times t', c \times c', e \times e')$ も圏になり、この圏のことをいう。

注 2.4.6. 直積圏は、圏の圏 Cat における直積対象である。同様に、 $F : C \rightarrow C_1, G : C' \rightarrow C'_1$ が定める関手 $F \times G : C \times C' \rightarrow C_1 \times C'_1$ も積という。

2.4.3 逆転圏

定義 2.4.7 (opposite category). 圏 C の射 $f : C \rightarrow D \in C$ に対して、 $f^* : D^* \rightarrow C^* \in C^{op}$ を射とし、合成の順序を逆にして得る圏 $C^{op} = (C, M, t, s, c \circ w, e)$ を反対圏という。ただし、写像 w を次とした。

$$\begin{array}{ccc} M_t \times_s M & \longrightarrow & M_t \times_s M \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (f, g) & \longmapsto & (g, f) \end{array}$$

この時の構成関手 op は良く関手を分解するときに用いる。duality とは、ある圏が、別の圏の反対（の部分圏）になるという対応が成り立つこと（を主張する命題のこと）である。

2.4.4 部分圏

定義 2.4.8 (subcategory). (C, M, s, t, c, e) を圏とする。 C', M' をそれぞれ C, M の部分集合とした時、 C', M' が定める写像 $s \upharpoonright M', t \upharpoonright M', c \upharpoonright M'_{s \upharpoonright M'} \times_{C'} M', e \upharpoonright C'$ について、 (C', M', s', t', c', e') が圏をなす時、これを C の部分圏という。 M' は C' で定まるわけではないために曖昧さを残すが、この場合も C' で圏を表すことが多い。

この時、2つの包含写像 $i_C : C' \rightarrow C, i_M : M' \rightarrow M$ によって定まる明らかな忠実関手 $i : C' \rightarrow C$ が存在する。これを包含関手と呼ぶ。しかし、圏論においては、部分圏そのものではなく、対象に関する制限のみを課して

いて、対象の間の射は全く同じになるという特別な場合である充満部分圏の方が中心的な役割を演じる。

定義 2.4.9 (full subcategory). (C, M, s, t, c, e) を圏とする. 与えられた $C' \subset C$ に対して M' を $M' := \{f \in M \mid s(f), t(f) \in C'\}$ と定めれば, (C', M', s', t', c', e') 必ず部分圏をなす. これを充満部分圏と呼ぶ.

注 2.4.10. $M = \coprod_{(A,B) \in C \times C} \text{Hom}_C(A, B)$ の同一視の下で, $M' = M \cap (C' \times C')$ と表せる.

即ち, C の部分圏 C' のうち, 任意の対象 $A, B \in C$ について, $\text{Hom}_C(A, B) = \text{Hom}_{C'}(A, B)$ が成立するような部分圏を充満部分圏という. 「頂点集合が生成する部分グラフ (induced subgraph)」の定義に似てゐるが, それとの相違点は, グラフの方では辺はただか 1 つしか存在し得ないが, (充満部分) 圏では Hom 集合の濃度は不問である.

2.4.5 自由圏

今回はグラフ G の頂点を対象, 道を射として, 4-組 $G = (V, E, s, t)$ を 6-組 $C(G) = (V, \text{path}(E), s, t, c, e)$ に構造拡張する形で自由圏を得るが, 等価な定式化は他にも存在する. それらをまとめて path category と呼ぶ.

定義 2.4.11 (directed graph, path). 集合 V, E とその間の写像 $s, t : E \rightarrow V$ の 4 組 $G = (V, E, s, t)$ を有向グラフと言う.

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} V$$

頂点の有限列 $(e_1, \dots, e_n) \in {}^{<\omega}E$ であつて, $t(e_i) = s(e_{i+1})$ ($i = 1, \dots, n-1$) を満たすものを道という. 道全体の集合を $\text{path}(E) \subset {}^{<\omega}E$ と書く.

定義 2.4.12 (free category). 有向グラフ G に対して, G から生成される自由圏 $C(G)$ を, $C(G) = (V, \text{path}(E), s, t, c, e)$ 定める.

$$M_s \times_C M_t \xrightarrow{c} M \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{e} \\ \xrightarrow{t} \end{array} C$$

1. 対象は頂点とする.
2. 射は, G の道とする. (e_1, \dots, e_n) を道としたとき, 射を $e_n \cdots e_1$ と書くこととする.
3. 合成は道の結合とする. あるいは, 文字列 $e_n \cdots e_1$ の結合と考えても良い.
4. 各頂点 v に対して, 単位射 1_v を考える.

定義 2.4.13 (homomorphism of directed graphs). グラフの射 $h : G \rightarrow H$ とは, 次を可換にする写像の組 (h_0, h_1) である.

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} & G_0 \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_0 \\ H_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} & H_0 \end{array}$$

定義 2.4.14 (forgetful functor). 忘却関手 $U : \text{Cat} \rightarrow \text{Graphs}$ を

$$M_s \times_C M_t \xrightarrow{c} M \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{e} \\ \xrightarrow{t} \end{array} C$$

を, 台グラフ

$$M \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} C$$

に写す, 6組 (C, M, s, t, c, e) を 4組 (C, M, s, t) に情報を落とす行為だとみなせる.

注 2.4.15. 一般に忘却関手は「集合の付加構造を落とす」関手であるが, 圏自体の忘却関手も, 圏論的な定式化を使えば, 全く同じような議論「グラフの付加構造を落とす」ものとして理解できる.

一般に, 射をそのまま **edge** と見做してしまっているのも, 自然な有向グラフとは程遠く (推移性が無駄に残っている), C と U は互いに逆関手ではない. U の左随伴が自由圏構成関手 C である.

定義 2.4.16 (universality of freeness).

$$\exists i: G \rightarrow U(C(G)) \forall h: G \rightarrow U(D) \exists ! \bar{h}: C(G) \rightarrow D (U(\bar{h}) \circ i = h)$$

例 2.4.17.

1. グラフ $(1, E)$ 上の自由圏は単一対象圏となる.
2. グラフ $\{0 \rightarrow 1\}$ 上の自由圏は, **finite category 2** と同型.
3. グラフ

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{e} \\ \xleftarrow{f} \end{array} B$$

上の自由圏は, 無限個の道が存在するために, 無限個の射が存在する

2.4.6 矢印圏

定義 2.4.18 (arrow category). 圏 $C = (C, M, s, t, c, e)$ に対して, C の射を対象とし, その間の射 $f: (a_0 \xrightarrow{a} a_1) \rightarrow (b_0 \xrightarrow{b} b_1) \in M$ を, 次の可換図式 (f_0, f_1) とする.

$$\begin{array}{ccc} a_0 & \xrightarrow{f_0} & a_1 \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ b_0 & \xrightarrow{f_1} & b_1 \end{array}$$

合成は成分毎, 即ち可換図式を繋げて可換長方形 (commutative oblong) を得ることとすると, これは圏をなし, これを矢印圏 $\text{Arr}(C)$ と書く.

定義がすっきりしない.

命題 2.4.19 (特徴付け). 圏 C について, $\text{Arr}(C) \simeq [2, C]$ である.

注 2.4.20. 従って, $I = \{0 \rightarrow 1\}$ を interval category として, 矢印圏は $[I, C], [\Delta[1], C]$ とも表される.

$C \times C$ とも同型になる.

注 2.4.21 (arrow category と product category の関係). 次の関手が存在する.

$$C \xleftarrow{\text{dom}} \overrightarrow{C} \xrightarrow{\text{cod}} C$$

即ち、対象 $f: A \rightarrow B \in \vec{C}$ について、その定義域に写す関手と、その終域に写す関手とが、射影に相当する。これも忘却関手という。

注 2.4.22 (lift). arrow category の射としての可換図式 (g_1, g_2) を、 f_1, f_2 間の **lifting problem (between f_1 and f_2)** とも言う。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g_1} & A' \\ f \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow f' \\ B & \xrightarrow{g_2} & B' \end{array}$$

上図を可換にする $\gamma: B \rightarrow A'$ が存在する時、これを lift と呼び、この lifting problem (g_1, g_2) は solution γ を持つ、と言う。またこの lift が一意である時、 f と f' は直交する ($f \perp f'$) と言う。

2.4.7 スライス圏

スライス圏は、任意の圏に対して同型な具体圏を構成する Cayley 関手の際に用いた (定理 2.4.3)。

定義 2.4.23 (category over A). 圏 $C = (C, M, s, t, c, e)$ とその対象 $A \in C$ に対して、 A 上の圏 $C_A := (C_A, M_A, s_A, t_A, c_A, e_A)$ を、以下のように定める。

1. $C_A = \{f \in M \mid t(f) = A\}$.
2. $M_A = \{(g, k) \in M_s \times_{t, C} M \mid g \in C_A\} \times_{C_A} M$. A 上の対象と、それに対して足元で合成可能な A 上の射の組とも、長さ 2 の path だともみなせる。この時、第二成分である k のみをさして A 上の射と呼ぶことも多い。この射 (g, k) の源は下の図を可換にする $f = g \circ k$ であり、的は第一成分である g である。即ち、次のとおり。

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{k} & D \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & A & \end{array}$$

3. $s_A: M_A \rightarrow C_A$ は合成 c の M_A への制限 $c \downarrow_{M_A}: C_A \times_{t, C} M \rightarrow C_A$.
4. $t_A: M_A \rightarrow C_A$ は第一射影 pr_1 . 即ち、 A 上の射 (g, k) は、 $f = g \circ k \mapsto g$ と写す。
5. c_A は $c_A((h, l), (g, k)) = (h, l \circ k)$

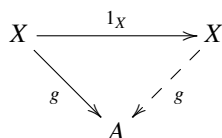
$$\begin{array}{ccc} M_{A s_A} \times_{C_A} M_A & \longrightarrow & M_A \\ \Downarrow & & \Downarrow \end{array}$$

$$((h, l), (g, k)) \longmapsto (h, l \circ k)$$

$$\begin{array}{ccccc} B & \xleftarrow{l} & C & \xleftarrow{k} & D \\ & \searrow h & \downarrow g & \swarrow g \circ k & \\ & & A & & \end{array}$$

6. $e_A(f) = (f, 1_{s(f)})$ で定める。即ち、 $f: B \rightarrow A$ とすると、 $(g, 1_B)$ であり、 $g \circ 1_B = g$ を g に写す恒等射に

なっている。



注 2.4.24.

一般的に幾何的な対象のなす圏を考えているときは A 上の圏といえば C_A であり，代数的な対象を考えているときは A 上の圏というと C^A になる。

定義 (Mikhael Gromov).

M 上の幾何 = 別の空間 Σ から M への写像の研究.

M 上の解析 = M から別の空間への写像の研究.

1. これは，対象を，終域を c とする射のみに限ったため，arrow category の充満部分圏である。
2. 対象について，その codomain c を忘れ，射 $a : (x, c) \rightarrow (x', c)$ についても c を忘れれば，先ほどの cod に当たるものが，忘却関手 $C/c \rightarrow C$ となる。（これは一種の具体圏だったのか？）
3. コンマ圏の特殊な場合である。
4. 定義は，前層同様，終域を固定する．反対に始域を固定する双対概念は under category または coslice category と呼ばれ， C^A または $A \backslash C$ と書く。

命題 2.4.25. 次の2条件は同値.

1. $1 \in C$ は C の終対象である。
2. $C/1 \simeq C$

命題 2.4.26 (Poset での例：スライス圏と単項イデアルの同一視). 圏 P を順序集合とする. $p \in P$ について，

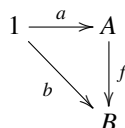
$$P/p \simeq \downarrow(p) := \{x \in P \mid x \leq p\}$$

である。

命題 2.4.27 (Set での例). 圏 $Sets_*$ を，ある区別された点 $a \in A$ を備えた集合 A が，それを保存するような写像 $f : (A, a) \rightarrow (B, b)$ についてなす圏とする. この時，

$$Sets_* \simeq 1 \backslash Sets$$

[証明]. 任意の対象 $(A, a), (B, b) \in Sets_*$ について，次の図式は常に可換である。



□

2.4.8 コンマ圏

以前は, hom 集合に $C(x,y)$ などと書いたのと同様にして, コンマ圏を (f,g) と書いたために名前がついたが, 現在では専ら (f/g) や $(f \downarrow g)$ と書く. 少なくとも同値な3種の定義がある.

定義 2.4.28 (成分から the objectwise definition). $f: C \rightarrow E, g: D \rightarrow E$ を関手とする. 次のように定めた圏を comma category (f/g) と書く.

1. 対象は3-組 (c,d,α) である. なお, $\alpha: f(c) \rightarrow g(d)$ は E の射.
2. 射は $(\beta, \gamma): (c_1, d_1, \alpha_1) \rightarrow (c_2, d_2, \alpha_2)$ は次の E -図式を可換にする C, D の射 β, γ の組.

$$\begin{array}{ccc} f(c_1) & \xrightarrow{f(\beta)} & f(c_2) \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 \\ g(d_1) & \xrightarrow{g(\gamma)} & g(d_2) \end{array}$$

3. 射の合成は, 成分毎に C, D 上での射の合成とする.

この時, canonical な忘却関手 $H_C: (f/g) \rightarrow C, H_D: (f/g) \rightarrow D$ の存在に注意.

命題 2.4.29. 次は自然変換である.

$$\begin{array}{ccc} \theta: f \circ H_C & \longrightarrow & g \circ H_D \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (c, d, \alpha) & \longmapsto & \alpha \end{array}$$

この自然変換は, コンマ圏の普遍性を2-圏上に定義する.

定義 2.4.30 (コンマ圏の普遍性).

第 3 章

圏の射と圏の圏

圏論の視点として、圏という対象を定めたのなら、その間の射を定めたい。また、多くの自然な数学的対象の構成も、関手の観点から捉えられる。

多項式環や自由加群と言った標準的な構成も、表現可能関手や随伴艦主として統一的に捉えることができる。[2]

3.1 関手

定義 3.1.1 (covariant / contravariant functor). 2 つの圏 $C = (C, M, s, t, c, e), C' = (C', M', s', t', c', e')$ に対して、圏 C から圏 C' への共変関手とは、写像 $F_C : C \rightarrow C'$ と写像 $F_M : M \rightarrow M'$ の組 $(F_C, F_M) =: F$ であって、以下の図式 3.1, 3.2, 3.3 の左側を、反変関手とは右側を可換にするもののことである。 F_C を対象写像 (object function), F_M を射写像 (arrow function) などという。

図 3.1 左は射に付随する始対象と終対象との関係を、 F_C と F_M が整合的に保存すること、 M の射 $f : A \rightarrow B$ について、対応する M' の射が $F_M(f) : F_C(A) \rightarrow F_C(B)$ であることを要請する可換図式。右は、射に付随する始対象と終対象の関係を、一律に逆転させること、即ち M の射 $f : A \rightarrow B$ に対応する M' の射が $F_M(f) : F_C(B) \rightarrow F_C(A)$ であることを要請する可換図式。

$$\begin{array}{ccc} C \xleftarrow{s} M \xrightarrow{t} C & & C \xleftarrow{s} M \xrightarrow{t} C \\ F_C \downarrow \quad \circlearrowleft \quad \downarrow F_M \quad \circlearrowleft \quad \downarrow F_C & & F_C \downarrow \quad \circlearrowleft \quad \downarrow F_M \quad \circlearrowleft \quad \downarrow F_C \\ C \xleftarrow{s} M' \xrightarrow{t} C & & C \xleftarrow{t'} M' \xrightarrow{s'} C \end{array}$$

図 3.2 左は、射の合成を保存する。先に合成しても、後で合成しても同じことである。つまり、 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ を要請する可換図式。右は、 $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ を要請する可換図式。

$$\begin{array}{ccc} M_s \times_C M \xrightarrow{c} M & & M_s \times_C M \xrightarrow{c} M \\ F_M \times F_M \downarrow \quad \circlearrowleft \quad \downarrow F_M & & F_M \times F_M \downarrow \quad \circlearrowleft \quad \downarrow F_M \\ M'_{s'} \times_{C'} M' \xrightarrow{c'} M' & & M'_{s'} \times_{C'} M' \xrightarrow{c'} M' \end{array}$$

なお、図 3.1 より、 $(f, g) \in M_s \times_{C'} M$ ならば、その $F_M \times F_M$ による像は必ず $(F_M(f), F_M(g)) \in M'_{s'} \times_{C'} M'$ である。

図 3.3 単位射は単位射に対応する。 C の元 A に対し、 $F_M(1_A) = 1_{F_C(A)}$ を要請する可換図式。

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{e} & M \\ F_C \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow F_M \\ C' & \xrightarrow{e'} & M' \end{array}$$

注 3.1.2.

1. 圏を 6 つ組と見做し、残りの 4 つの条件

(2-1)' 射の合成が、始対象と終対象の 2 つの属性に対して構造を保つ。

(2-2) 射の合成が結合的である。

(3-1)' 単位射は自己射である。

(3-2) 単位射の特徴付け

を 4 つの可換図式を用いて圏を定義したのであった (定義 2.1.1)。このうち、(2-2) と (3-2) は関手の定義に関与しない。(2-1) と (3-1) に加えて、(1-2) が、関手が保存すべき条件であり、それぞれが図 3.2, 3.3, 3.1 に対応する。

2. 概念としては関手は「写像の組」であるが、以降関手自体のことや、 F_C, F_M のいずれのことも、 F と書く。 F の定める関手 $C^{op} \rightarrow C'^{op}$ も F と書く。
3. F が共変関手であるとき、それによる $f \in M$ の値を $F(f) = f_*$ と書き、 F が反変関手であるとき $F(f) = f^*$ と書く。
4. 逆転圏の概念を用いれば、反変関手 $F: C \rightarrow C'$ の議論は共変関手 $G: C^{op} \rightarrow C'$ の議論に帰着させられる。別の表現で言えば、1 つの共変関手を定めることは、共役な反変関手を暗黙のうちに定めていることになる。

命題 3.1.3 (反変関手に対応する共変関手). 反変関手 $F: C \rightarrow C'$ に対して、以下の図式を可換にする共変関手 $G: C^{op} \rightarrow C'$ が唯一つ存在する。

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{op} & C^{op} \\ & \searrow F & \downarrow G \\ & & C' \end{array}$$

3.2 圏の圏

3.2.1 定義

定義 3.2.1 (identity functor). $F_C = 1_C, F_M = 1_M$ と定めれば、3 つの可換図式を自明な形で満たし、これは関手となる。これを恒等関手と呼び、 $1_C: C \rightarrow C$ と書く。これは写像の合成に関しての単位元となる。

定義 3.2.2 (composition of functor). 2 つの関手 $C \xrightarrow{F} C' \xrightarrow{G} C''$ に対して、新たな関手 $G \circ F: C \rightarrow C''$ を、写像

の合成を用いて

$$(G \circ F)_C(A) := G_C(F_C(A)) \quad (\text{for all } A \in C), \quad (G \circ F)_M(f) := G_M(F_M(f)) \quad (\text{for all } f \in M)$$

と構成する。すると、これは結合的である。

定義 3.2.3 (category of categories). 対象を圏とし、射を関手とする。合成は「関手の合成」を用いると結合的で、単位射を「恒等関手」とすればこれは特徴づけを充たす。従ってこれは圏をなし、 Cat , [圏] などと書く。

注 3.2.4. なお、本来は「大きな圏全体を対象の集合とした圏」は定義出来ない。しかし今回は議論を宇宙 \mathfrak{U} というミニチュア世界に限ったために、「圏の全体」と言っても1つの集合を得る。

このような構成を厳密に行うには宇宙のことが必要になるがここではこれ以上たちらない。[2]

3.2.2 単系と群の圏

圏がそのまま構造を与えているとき、それは Cat の部分圏になる。

定義 3.2.5 (単系の射の特徴付け). M, M' を単系とする。写像 $f: M \rightarrow M'$ が、 M が定める圏から M' が定める圏への関手を定めるとき、この f を単系の射であるという。

例 3.2.6 (単系の圏). 任意の圏 C について、その任意の一点集合である部分集合 $\{A\} \in C$ から生成される充満部分圏は monoid である。これを自己射のなすモノイドと呼び、 $\text{End}(A) := \text{Mor}_C(A)$ と書く。このように、モノイドの圏 Mon は、圏の圏 Cat の、「対象を1つしか持たない圏全体の集合」についての充満部分圏である。

例 3.2.7 (可換単系の圏). 同様にして、可換単系のなす充満部分圏も定まり、[可換単系] または CMon と書く。

例 3.2.8 (群の圏). 全く類比的に、モノイド M であって、全ての射が可逆であるもの $M^\times := \{x \in M \mid x \text{ は可逆}\}$ は群である。 $\text{End}_C(A)$ はモノイドであったから、 $\text{End}_C(A)^\times$ は群であり、これを $\text{Aut}_C(A)$ と書き、 A の自己同型群という。特に、 $C = \text{Set}$ である時、 $C \ni A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ についての自己同型群 $\text{Aut}_C(A)$ は n 次対称群といい、 \mathfrak{S}_n と書く。また、その間の関手が群の射であるから、これも圏の圏 Cat の、また同時に monoid の圏 Mon の充満部分圏である。

以上のことより、以下のような包含関手 i, j が存在する。

$$\text{Grp} \xrightarrow{i} \text{Mon} \xrightarrow{j} \text{Cat}$$

例 3.2.9 (モノイドの射の例：指数表示と指数法則とは何か). (M, \cdot, e_M) をモノイドとする。任意の $x \in M$ 毎に、 M の単位元 e_M を x に埋め込むことによって定まるモノイド $(\mathbb{N}, +, 0)$ からの射 f_x

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f_x} & M \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ n & \longmapsto & f(n) =: x^n \end{array}$$

が存在する。ただし、 $x^0 = e_M, x^1 = x$ であり、以降 $x^{n+1} = x^n \cdot x$ と帰納的に定めた。これが指数表示である。

注 3.2.10 (well-definedness). f が本当にモノイドの射になっていることを確認する。モノイドを圏とみて、 f が関手であるための条件（可換図式 3.1, 3.2, 3.3）を充たすかどうか検証する。いずれも単一対象圏なので、図

3.1 は自ら明らかである．図 3.2 $f(n+m) \stackrel{M}{=} f(n) \cdot f(m)$ は $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$ がから成り立つことが確認できることにより保証される．最後に，やはり定義から， $f(0) = e_M$ である．

指数表示と指数法則とは，和と積という 2 つの演算の間の，モノイド準同型による移行だったのか．

例 3.2.11 (群の射の例)． x が定める単系の射 $\mathbb{N} \rightarrow G$ は， x^{-n} を x^n の逆元と定めることで，群の射 $\mathbb{Z} \rightarrow G$ に一意的に延長される．

注 3.2.12. このような拡張は，積を備えた方の代数系が群をなすことがその条件である．では，複素行列を指数に取る場合はどうだろうか？

定義 3.2.13 (action of a group)．群 G が定める圏 $[G]$ のただ一つの対象を I とする． C を圏， $F : [G] \rightarrow C$ を関手とし， $X := F(I)$ とおくと， $F_M : G = \text{End}_{[G]}(I) \rightarrow \text{End}_C(X)$ は群の射 $G \rightarrow \text{Aut}_C(X)$ を定める．これを (C の対象) X への G の作用という．

3.2.3 逆転圏と双対原理

「ある圏で成り立てば，双対的な命題も成立する」という言明は，数学基礎論の立場からなされるものである．

定義 (圏の形式的定義)． (C, M, s, t, \circ, e) であって，次の 7 条件を満たすものが圏である．

$$\begin{array}{ll} s(1_A) = A & t(1_A) = A \\ f \circ 1_{s(f)} = f & 1_{t(f)} \circ f = f \\ s(g \circ f) = s(f) & t(g \circ f) = t(g) \end{array}$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

なお，この定義を圏の言語の中で表した公理系 (theory) を CT とする．

斎藤先生の本ではこれが可換図式で示されている．次の「代入 $[c \circ \omega = c, t = s, s = t]$ 」操作が視覚的に表現されるからであろう．

定義 (圏の言語)．圏論の言語 (the elementary language of category theory) を定め， L_{CT} とする．

定義 (双対文)． Σ を L_{CT} -文とする．これに，次の代入を施した文字列 $\Sigma^* := \Sigma[c \circ \omega = c, t = s, s = t]$ は同様に L_{CT} -文となる．これを双対文という．

命題． Δ も L_{CT} -文とする．圏の公理系関係なく， $\Sigma \Rightarrow \Delta$ が成り立つ (= 証明が存在する) 時， $\Sigma^* \Rightarrow \Delta^*$ が成り立つ．

[証明]． $\Sigma \Rightarrow \Delta$ 証明を表す記号列 P について，双対文と同様の置換を施したもの $P[c \circ \omega = c, t = s, s = t]$ は， $\Sigma^* \Rightarrow \Delta^*$ の証明を表す記号列である． □

命題． $CT = CT^*$ である (記号列としての一致)．

[証明]．実際に書き直してみれば，確かに置換 $[c \circ \omega = c, t = s, s = t]$ について不変である． □

命題 3.2.14 (formal duality). 任意の L_{CT} -文 Σ について、次（のメタ命題？命題図式）が成り立つ。

$$(CT \Rightarrow \Sigma) \Rightarrow (CT \Rightarrow \Sigma^*)$$

〔証明〕. 命題 3.2.3 より、 CT も L_{CT} -文であるから、

$$(CT \Rightarrow \Sigma) \Rightarrow (CT^* \Rightarrow \Sigma^*)$$

が成り立つ。これに命題 3.2.3 を合わせて、主張を得る。 \square

命題. L_{CT} -文 Σ が、或る圏 C で成立したとする。（即ち、構造を $\mathcal{C} = (C, F)$ とすると、 $\mathcal{C} \models \Sigma$ である）。この時、 L_{CT} -文 Σ^* が圏 C^{op} で成立する。（即ち、構造を $\mathcal{C}^{op} = (C^{op}, F)$ とすると、 $\mathcal{C}^{op} \models \Sigma^*$ である）。

命題 3.2.15 (Conceptual duality). L_{CT} -文 Σ が全ての圏 C にて充足されるとする。この時、 L_{CT} -文 Σ^* も全ての圏で成立する。

〔証明〕. 命題 3.2.3 より、全ての圏で成り立つような L_{CT} -文 Σ は、特に勝手な圏 C でもその反対圏 C^{op} でも成り立つのだから、 Σ^* も圏 C, C^{op} の両方で成り立つ。 \square

これでやっと Bool 代数の定義が完全なものになる、ということだろうか。

圏論において可換図式が中心的な役割を演じるのは、反対圏の中で考えることと双対概念を考えることが一致し、またそれが直観的な操作「射の向きと合成の順序を逆にする」で得られることによる。

注 3.2.16. 今後「余 (co-)」という接頭辞の付いた概念は、その概念の、逆転圏における対応物である。ある圏で成り立つ事柄は、その逆転圏でも成り立つから、そのようにして見なして良い概念を、「余 (co-)」を付けて呼ぶ。

3.2.4 順序集合の圏

定義 3.2.17 (Pos). 順序集合間の射である単調写像は、順序集合を圏と見なした時の関手と同一視できる。従って、[順序集合] は [圏] の充満部分圏である。この圏を Pos などと書く。

$$\text{Pos} \xrightarrow{i} \text{Cat}$$

定義 3.2.18 (power set functor). 冪集合の構成 P は関手であり、次の共役な 2 つの関手 $P^* : \text{Set}^{op} \rightarrow \text{Set}$, $P_* : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ を定める。これをそれぞれ、反変の冪集合（構成）関手、共変の冪集合（構成）関手という。

$$\begin{array}{ccc} P^* : \text{Set}^{op} & \longrightarrow & \text{Set} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ X & \longmapsto & P(X) \\ X \xrightarrow{f} Y & \longmapsto & P(Y) \xrightarrow{f^*} P(Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P_* : \text{Set} & \longrightarrow & \text{Set} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ X & \longmapsto & P(X) \\ X \xrightarrow{f} Y & \longmapsto & P(X) \xrightarrow{f_*} P(Y) \end{array}$$

但し、

像写像 (image function) $f_* : P(X) \rightarrow P(Y)$

逆像写像 (preimage function) $f^* : P(Y) \rightarrow P(X)$

は、以下のように、 X の部分集合 A に対して、その f による像 $f(A)$ を対応させる写像である。

$$\begin{array}{ccc} f_* : P(X) & \longrightarrow & P(Y) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array}$$

まず、これが確かに「順序集合」の射となることを確認する。

命題 3.2.19 (像写像 f_* は単調写像である). 写像 $f_* : P(X) \rightarrow P(Y)$ を、上で定めた像写像とする。 $A \subset A' \subset X$ ならば $f(A) \subset f(A') (\subset Y)$ が成り立つ。

〔証明〕. いま、

$$\begin{array}{ccc} f_* : P(X) & \longrightarrow & P(Y) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A & \longmapsto & f(A) \\ \cup & & \\ A' & \longmapsto & f(A') \end{array}$$

$f(A') = \emptyset$ である時 (即ち $A' = \emptyset$ である時), $f(A') \subset f(A)$ である. 以降, $f(A') \neq \emptyset$ とする. $x \in f(A')$ を任意に取る. すると, $f^{-1}(x) \subset A'$ であるから, $A' \subset A$ と併せて, $f^{-1}(x) \subset A$ を得る. よって, $x \in f(A)$ である.^{†1}以上より, $f(A') \subset f(A)$. \square

これは, $f_* : P(X) \rightarrow P(Y)$ が, 包含写像を射として圏と見なした順序集合 $P(X)$ と $P(Y)$ の間の関手となっていることも含意するが, 証明は省略する. 適切な同一視が存在するのである. 次に, 関手 $P_* := (P_C, P_{*M})$ が確かに関手の公理を充たすことを確認する。

命題 3.2.20 (共変冪集合関手 P_*). 上記のように定義した写像の組 $P_* := (P_C, P_{*M})$ は, 関手 $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Poset}$ である。

〔証明〕. 最初の図式については, $f : X \rightarrow Y$ について $P_{*M} : P_C(X) \rightarrow P_C(Y)$ と定義しているから充たす. 残る2つの図式については,

$$\begin{cases} (f \circ g)_* = f_* \circ g_* \\ 1_{X*} = 1_{P(X)} \end{cases}$$

が成り立つことを確認すれば良い. 任意の写像 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ について,

$$\begin{array}{ccc} (f \circ g)_* : P(X) & \longrightarrow & P(Z) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A & \longmapsto & f \circ g(A) = f(g(A)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} f_* \circ g_* : P(X) & \xrightarrow{g_*} & P(Y) & \xrightarrow{f_*} & P(Z) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ A & \longmapsto & g(A) & \longmapsto & f(g(A)) \end{array}$$

^{†1} A の部分集合の像は A の像に含まれることの表現の1つであるが, 集合の逆像 (preimage) と元の逆像 (fiber) との間の記号 f^{-1} 混用や, \in や \subset の記号が入り混じっていて一見論理的な正確さがわかりにくい. 全ての $y \in X$ について, $y \in f^{-1}(x) \implies y \in A \implies f(y) = x \in f(A)$ より, $f^{-1}(x) \subset A \iff x \in f(A)$

より, $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ である. 次に $1_X : X \rightarrow X$ の P_{M*} による像は, $P(X)$ の元 A を, 1_X による像, 即ち A に写す写像 $1_{X*} : P(X) \rightarrow P(X)$ であるが, これは $P(X)$ 上の恒等写像 $1_{P(X)}$ に等しい. よって, $1_{X*} = 1_{P(X)}$ も分かる. \square

よって, 関手 P_* を定めることが出来た. 同様にして, P^* も定められ, 以下の図式は可換になる.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Set} & \xrightarrow{op} & \mathbf{Set}^{op} \\ & \searrow P_* & \downarrow P^* \\ & & \mathbf{Poset} \end{array}$$

関手化とは, 関手 F_C の終域となる対象の1つ1つが圏と見なせる場合の, F_M の像を捉えるための言葉である. 考察が1段階高次元になった様子を捉える. 後述の表現可能関手はその例で, 「関手化」として捉えられる. \mathbf{Hom} 類間の写像は, 関手の射をなすと捉えられる.

反変版の方の冪集合関手は, なんだか連続写像との関連性を感じる. 「反変版の冪集合関手は2点集合によって表現されている.」を検証する.^{†2}

3.3 Hom 関手

定義 3.3.1 (Hom functor). 圏 C に対して, 対象の組 (A, B) に対してその間の射の集合 $\mathbf{Hom}_C(A, B)$ を対応させることで, 関手 $\mathbf{Hom}_C : C^{op} \times C \rightarrow \mathbf{Set}$ が定まる. これを \mathbf{Mor}_C と書く.

注 3.3.2. \mathbf{Hom} 関手の引数を $c \in C$ に固定することによって, 2つ付随する関手 h^c, h_c が定まる. これはそれぞれ余前層と前層であり, これと同型な余前層と前層を表現可能であるという.

$$\begin{aligned} h^c &:= \mathbf{Hom}_C(c, -) : C \xrightarrow{\simeq} 1 \times C \xrightarrow{(c, \text{id})} C^{op} \times C \xrightarrow{\mathbf{Hom}_C} \mathbf{Set} \\ h_c &:= \mathbf{Hom}_C(-, c) : C \xrightarrow{\simeq} C^{op} \times 1 \xrightarrow{(\text{id}, c)} C^{op} \times C \xrightarrow{\mathbf{Hom}_C} \mathbf{Set} \end{aligned}$$

注 3.3.3 (binary functor). このように, 積圏 (product category) 上に定義される関手を双関手 (binary functor / bifunctor) と呼ぶ. n 変数への拡張を重関手 (multifunctor) と呼ぶ. なお, \mathbf{Hom} 関手はプロ関手 (profunctor) の例になっていて, 特に恒等プロ関手である.

定義 3.3.4. ホム関手 C を圏とする. 圏 C の Hom functor とは, 次のように対応する関手 \mathbf{hom} (または $\mathbf{hom}(-, -)$ と表す) である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{hom}(-, -) : C^{op} \times C & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ \Psi & & \Psi \\ (c, c') & \longmapsto & \mathbf{Hom}_C(c, c') \end{array}$$

$$(f, g) : (d, c') \rightarrow (c, d') \longmapsto h : \mathbf{Hom}_C(c, c') \rightarrow \mathbf{Hom}_C(d, d')$$

但し, 写像 h は \mathbf{Set} の射で, 任意の C の射の組 $(f : d \rightarrow c, g : c' \rightarrow d')$ に対して定義され, 以下のような対応

^{†2} <https://ja.wikipedia.org/wiki/関手>

をする写像である．（この対応 h を関手 hom の値として $\text{hom}_C(f, g)$ と書くこともある．）

$$\begin{array}{ccc} h : \text{Hom}_C(c, c') & \longrightarrow & \text{Hom}_C(d, d') \\ \Psi & & \Psi \\ q : c \rightarrow c' & \longmapsto & g \circ q \circ f : d \rightarrow d' \end{array}$$

即ち、 C 上の任意の射の組 f, g について、 f の target と g の source の間の射 q を、下の図を可換にする射 $d \rightarrow d'$ に写す対応である．

$$\begin{array}{ccc} c & \xleftarrow{f} & d \\ q \downarrow & & \downarrow \\ c' & \xrightarrow{g} & d' \end{array}$$

（第一変数 f について引き戻して、第二変数 g について押し出している感覚がある．）

こうして定義したホム関手 $\text{hom} : C^{op} \times C \rightarrow \mathbf{Set}$ は、第一変数が反変で第二変数が共変な双関手 (bifunctor) である．つまり、第一引数／第二引数を固定すると、自然と共変／反変関手が定義される． $c \in C$ を1つ選び出して、2つの関手 $h^c := \text{Hom}(c, -) : C \rightarrow \mathbf{Set}, h_c := \text{Hom}(-, c) : C^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ を、以下のように構成できる．

$$h^c = \text{Hom}(c, -) : C \xrightarrow{\simeq} 1 \times C \xrightarrow{c \times 1_C} C^{op} \times C \xrightarrow{\text{hom}(-, -)} \mathbf{Set}$$

$$h_c = \text{Hom}(-, c) : C \xrightarrow{\simeq} C^{op} \times 1 \xrightarrow{1_C \times c} C^{op} \times C \xrightarrow{\text{hom}(-, -)} \mathbf{Set}$$

但し、関手 c は $1 \ni 0 \rightarrow c \in C$ に写す包含定関手 (constant functor / selection functor) $1 \rightarrow C$ とした．なお、圏 1 とは対象の集合を自然数 $1 = \{0\}$ 、射の集合を $\{1_0\}$ とした単一対象圏である．

これはホム関手の分解 (decompose) として捉えられて、次の図式は可換になる．

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Hom}_C(A, B) & & \\ & \swarrow \text{Hom}(A, f) & \downarrow \text{Hom}(h, f) & \searrow \text{Hom}(h, B) & \\ \text{Hom}_C(A, B') & & & & \text{Hom}_C(A', B) \\ & \swarrow \text{Hom}(h, B') & \downarrow & \swarrow \text{Hom}(A', f) & \\ & & \text{Hom}_C(A', B') & & \end{array}$$

それぞれの関手 $\text{Hom}_C(A, -) = h^A$ を共変 Hom 関手（余前層）、 $\text{Hom}_C(-, B) = h_B$ を反変 Hom 関手（前層）と呼ぶ．また、この可換図式の一番外側の四角形は、図式 4.3 と見比べると、 C の適当に与えられた射 $h : A' \rightarrow A$ 毎に、2つの Hom 関手 $\text{Hom}_C(A, -), \text{Hom}_C(A', -)$ の値である \mathbf{Set} 上の射 $\text{Hom}_C(A, f), \text{Hom}_C(A', f)$ の間を可換にしている、これが成り立つとは即ち、写像 $\varphi := \text{Hom}_C(h, -) : C \rightarrow \text{arr}(\mathbf{Set})$ が2つの関手 $\text{Hom}_C(A, -), \text{Hom}_C(A', -)$ の自然変換（関手の射）となっていることを、上の可換図式が含意していることが分かる．

なお、Hom 関手の間の自然変換は、全てこの形のものに限ることが分かる．（米田の補題 6.2.2）なお、値を集合の圏 \mathbf{Set} に取るのではなく、自身である圏 C の内部に取る場合、これを内部 Hom 関手（定義 11.1.1）という．

例 3.3.5 (反変冪集合関手は表現可能関手である). 次が成り立つ.

命題 3.3.6 (P^* is represented by 2). 反変冪集合関手 $P^* : \mathbf{Set}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ は, 集合 $2 = \{0, 1\}$ によって表現される. 即ち, 次の同型射 φ が存在する.

$$\varphi : P^* \xrightarrow{\sim} h_2 = \mathrm{hom}_{\mathbf{Set}}(-, 2)$$

[証明].

□

第 4 章

関手の射と関手の圏

関手の射のことを，歴史的には「自然変換」といい，圏論の動機ともなった．写像には階層がないが，圏論では階層を上がっていきけるようだ．不思議だ．この観念を n -圏／ n -射といい，これを考える理論を higher order category theory という．最近の流行りは 4 段目の infinite category らしい．

Frequently in modern mathematics there occur phenomena of "naturality": a "natural" isomorphism between two groups or between two complexes, a "natural" homeomorphism of two spaces and the like. We here propose a precise definition of the "naturality" of such correspondences, as a basis for an appropriate general theory.^{†1}

Just as a functor is a morphism between categories, a natural transformation is a 2-morphism between two functors.

Natural transformations are the 2-morphisms in the 2-category Cat .^{†2}

4.1 関手の射

定義 4.1.1 (関手の射). C, C' を圏とし, $F, G: C \rightarrow C'$ を関手とする．写像 $\varphi: C \rightarrow M'$ が存在して以下の 2 つの可換図式を充たす時, これを関手 F, G 間の関手の射という．元圏 C の対象 $x \in C$ に assign される M' の関手の射 φ による値 $\varphi(x): F(x) \rightarrow G(x)$ のことを「 φ の成分 (component of φ at x)」という．

この時, 2 つの関手 $F, G: C \rightarrow C'$ の間に自然変換 (natural transformation) $\varphi: F \rightarrow G$ が存在するといいい, 以下のように描かれる (denoted) ことがある．

$$\begin{array}{ccc} C & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \varphi \\ \xrightarrow{G} \end{array} & C' \end{array}$$

^{†1} S. Eilenberg and S. MacLane, Natural Isomorphisms in Group Theory, Proceedings of the National Academy of Sciences, 28(1942), 537-543.

^{†2} <https://ncatlab.org/nlab/show/natural+transformation>

図 4.1 各 $A \in C$ に対して $\varphi(A): F_C(A) \rightarrow G_C(A)$ を表す可換図式. つまり, 各対象について, F, G で移った先の2つの対象を結ぶように射を選び取るように要請している可換図式.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 & \swarrow F_C & \downarrow \varphi & \searrow G_C & \\
 C' & \xleftarrow{s'} & M' & \xrightarrow{t'} & C'
 \end{array}$$

図 4.2 2つの関手 $F, G: C \rightarrow C'$ の間に自然な“移り合いの関係” $\varphi(B) \circ F(f) = G(f) \circ \varphi(A)$ があることを表す可換図式.

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{(\varphi \circ f, F_M)} & M'_{s'} \times_{C'} M'_{t'} \\
 (G_M, \varphi \circ s) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow c' \\
 M'_{s'} \times_{C'} M'_{t'} & \xrightarrow{c'} & M'
 \end{array}$$

この可換図式は, 任意の圏 C の射 $f: A \rightarrow B$ について, 圏 C' 上の次のような図式が可換になる条件と等価である.

図 4.3 任意の C の射 $f: A \rightarrow B$ についてこの図式が可換になる. これを naturality square と呼ぶこともある.

$$\begin{array}{ccc}
 F_C(A) & \xrightarrow{F_M(f)} & F_C(B) \\
 \varphi(A) \downarrow & & \downarrow \varphi(B) \\
 G_C(A) & \xrightarrow{G_M(f)} & G_C(B)
 \end{array}$$

4.1.1 関手の射の合成

3つの関手 $F, G, H: C \rightarrow C'$ に対して, 2つの関手の射 $\varphi: F \rightarrow G, \psi: G \rightarrow H$ の合成 $\psi \circ \varphi$ を, C の各元 A に関して $\psi \circ \varphi(A) := \psi(A) \circ \varphi(A): F(A) \xrightarrow{\varphi} G(A) \xrightarrow{\psi} H(A)$ というように定義する. 1つ目の \circ は関手の射の合成, 2つ目の \circ は圏 C' の射としての合成であることに注意. この定義は2-圏における vertical composition という.

すると, 定義の仕方により, 合成 $\psi \circ \varphi: C \rightarrow M'$ は $A \in C$ を C' の射 $F_C(A) \rightarrow H_C(A)$ に写すから, 1つ目の可換図式 4.1 を充たす. 2つ目の可換図式 4.2 は, そもそも φ, ψ が関手の射であったから C の任意の射 $f: A \rightarrow B$ に対して次の図式が可換であり, そのことに含意されている. (下図の一番外側を廻る道が可換であること.)

$$\begin{array}{ccc}
 F_C(A) & \xrightarrow{F_M(f)} & F_C(B) \\
 \varphi(A) \downarrow & & \downarrow \varphi(B) \\
 G_C(A) & \xrightarrow{G_M(f)} & G_C(B) \\
 \psi(A) \downarrow & & \downarrow \psi(B) \\
 H(A) & \xrightarrow{H_M(f)} & H(B)
 \end{array}$$

4.1.2 関手の同型／自然同型 (natural equivalence)

関手 $F : C \rightarrow C'$ について、関手の射 $1_F : F \rightarrow F$ を、任意の $A \in C$ に対して圏 C' の対象 $F(A)$ の単位射 $1_{F(A)} : F(A) \rightarrow F(A)$ を対応させると定めると、これは関手の射の合成に関して単位的である。関手の射 $\varphi : F \rightarrow G$ が、逆射 $\phi : G \rightarrow F$ ($\psi \circ \phi = 1_F, \psi \circ \phi = 1_G$ を満たす) を持つ時、これは関手の同型であるという。従って、関手の射が同型である／可逆であるとは、各 $A \in C$ に対して対応する圏 C' の射 $\varphi(A) : F(A) \rightarrow G(A)$ がそれぞれ同型（可逆）で、逆射が $\psi(A) : G(A) \rightarrow F(A)$ であることに等しい。

命題 4.1.2 (関手の同型の特徴付け). 関手 $F, G : C \rightarrow C'$ と関手の射 $\varphi : F \rightarrow G$ について、以下の2つの条件は同値である。

1. φ は関手の同型である。
2. 任意の $A \in C$ について、圏 C' の射 $\varphi(A) : F(A) \rightarrow G(A)$ は同型である。

[証明] . $1 \rightarrow 2$ は、上述の通り、定義の仕方そのものである。 $2 \rightarrow 1$ は、各 $A \in C$ に対し、 $\phi(A)$ を $\varphi(A)$ の逆射とすれば、写像 $\phi : G \rightarrow F$ が定まるが、これは φ の（関手の射としての）逆射に確かになっている。 \square

4.2 関手の圏

C, C' を圏として、対象を関手 $C \rightarrow C'$ の全て、射をその間の自然変換とすれば、これは圏をなす。これを $\mathbf{Fun}(C, C'), \mathbf{Funct}(C, C'), C'^C, [C, D] \in \mathbf{Cat}$ などと書く。

例 4.2.1. 図式の圏や、前層／層の圏は、関手圏の例である。

4.2.1 線型代数

$C = \mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}}$ とする。

定義 4.2.2 (表現可能関手 h^V). 有限次元実線型空間の圏 $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}}$ について、 $V \in \mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}}$ に対して $h^V := \mathbf{Hom}_{\mathbb{R}}(V, -)$ と置くと、共変関手 $h^V : C \rightarrow \mathbf{Set}$ が定まり、これは表現可能関手の例である。

定義 4.2.3 (共変関手 F^S). $S \in \mathbf{Set}$ に対して、共変関手 $F^S : \mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{Set}$ を次のように定める。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{F^S} & \mathbf{Set} \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 W & \longmapsto & \mathbf{Map}(S, W) \\
 f : U \rightarrow W & \longmapsto & F^S(f) : \mathbf{Map}(S, U) \longrightarrow \mathbf{Map}(S, W) \\
 & & \Downarrow \qquad \qquad \Downarrow \\
 & & k \longmapsto f \circ k
 \end{array}$$

注 4.2.4. $S = [n] := \{1, 2, \dots, n\}$ のとき、 $F^{[n]}(W) = W^{[n]} \simeq W^n$ と同一視出来る。特に $n = 1$ のとき、 F^1 は忘却関手である。

定義 4.2.5 (双対関手). 双対空間を構成する反変関手 $\sim: \text{FinVect}_{\mathbb{R}}^{op} \rightarrow \text{FinVect}_{\mathbb{R}}$ を次のように定める.

$$\begin{array}{ccc} \sim: C^{op} & \longrightarrow & C \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ V & \longmapsto & V^{\sim} \\ f: V \rightarrow W & \longmapsto & f^{\sim}: W^{\sim} \rightarrow V^{\sim} \end{array}$$

注 4.2.6. V と V^{\sim} には自然な同型が取れないことで有名である. この双対空間構成関手 \sim が最初の, 圏の同値の例になる.

例 4.2.7 (関手の射の例 1 : 値写像). 関手 h^V と忘却関手 $F := F^1$ を考える. 次のように定めた写像 $\varphi: \text{FinVect}_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Arr}(\text{Set})$ は関手の射 $\varphi: h^V \rightarrow F$ となっている.

$$\begin{array}{ccc} \varphi(W): h^V(W) & \longrightarrow & G(W) \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Hom}_C(V, W) & & W \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ g: V \rightarrow W & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

但し, x とは V の勝手な元で, この写像 $\varphi(W)$ は, 各線型空間 $W \in C$ への (予め定めた) V からの線型写像の 1 つ 1 つを, V 上の点 x で取る値として coding するような写像になっている. これは値写像 (evaluation mapping) ev_x の線型写像版とも見れる.^{†3}

命題 4.2.8 (φ の well-definedness). 上記のように定義した関手の射 $\varphi: h^V \rightarrow F$ に対して, 任意に取った C の射 $f: U \rightarrow W$ について, 次の図式は可換になる.

$$\begin{array}{ccc} h^V(U) & \xrightarrow{h^V(f)} & h^V(W) \\ \downarrow \varphi(U) & & \downarrow \varphi(W) \\ F(U) & \xrightarrow{F(f)} & F(W) \end{array}$$

〔証明〕. 上の可換図式を書き直せば,

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_C(U, W) & \xrightarrow{f_*} & \text{Hom}_C(V, W) \\ \downarrow \varphi(U) & & \downarrow \varphi(W) \\ U & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

となる. 任意に $g \in \text{Hom}_C(U, W)$ と $x \in V$ を取る. 右回りでの合成写像による値は $f \circ g(x)$ であり, 左回りでの合成写像による値は $f(g(x))$ である. f, g はいずれも写像であるから, これは成り立つ. \square

注 4.2.9. 米田の補題として, この証明は一般化される.

一般に, V の次元が 1 でない限り, こうして定義した関手の射 $\varphi: C \rightarrow \mathbf{Set}$ は同型ではない. そこで, 次の例を考える.

^{†3} 写像と点の役割が入れ替わっている. これは, 数学で度々使われる重要な方法である. (斎藤毅『集合と位相』) という言及は, 米田の補題を意識してであろう.

例 4.2.10. 関手 h^V を上記と同様に定義し、関手 $G: C \rightarrow \mathbf{Set}$ を次のように定義する. 但し, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccc} G: C & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ W & \longmapsto & W^n \end{array}$$

$$f: U \rightarrow W \longmapsto f_*: U^n \rightarrow W^n$$

但し, 写像 f_* は以下のように, U^n の各成分について $f: U \rightarrow W$ を施す写像である.

$$\begin{array}{ccc} f_*: U^n & \longrightarrow & W^n \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto & (f(y_1), \dots, f(y_n)) \end{array}$$

次のように写像 $\varphi: C \rightarrow \mathbf{arr}(\mathbf{Set})$ を定める. $x_1, \dots, x_n \in V$ として, 各 $W \in C$ を \mathbf{Set} 上の射

$$\begin{array}{ccc} \varphi(W): F(W) = \mathrm{Hom}_C(V, W) & \longrightarrow & G(W) = W^n \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ g & \longmapsto & (g(x_1), \dots, g(x_n)) \end{array}$$

この時, φ は2つの関手 h^V, G の間に自然変換を定める. 証明は命題 4.2.8 を一般化する形で達成される.

この時, x_1, \dots, x_n が V の基底であるとき, 射 φ は可逆であることは簡単にわかるが, 実は射 φ が可逆であるとき, 必ず x_1, \dots, x_n は V の基底である. つまり, 命題 6.2.6 が成り立つ.

有限次元実線型空間 V について, $x_1, \dots, x_n \in V$ が基底であることの特徴付け「 φ が関手の同型になること」を得た (命題 6.2.6). これは言葉を変えれば, 任意の有限次元実線型空間 W への線型写像 $g: V \rightarrow W$ が, 基底の行き先 $(g(x_1), \dots, g(x_n)) \in W^n$ によって完全に分類できることを, 圏論的に定式化したものだと思う. 議論の途中で, 一次独立性などの概念や, 「任意の $x \in V$ に対して, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ が存在して, $x = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n$ とただ一通りに表せる。」などの V 自身や, 他の C の対象自身についての条件などは一度も現れていない.

第 5 章

圏の同値 (equivalence)

圏に対する適切な「同値」の概念 (= 2 つの圏が実質的に同じものと考えられる時はいつか?) を模索する。

表現可能関手の定義 6.1.1 もそうであったが、関手同士の関係で、同型を除いて一意に定めることは出来ても、それ以上の同一関係があまり意味を持たないこともある。2 つの圏 C, C' が同型であるとは、可逆な関手 $F: C \rightarrow C'$ が存在することである。そして、関手 F が可逆であるとは、 $1_C, 1_{C'}$ を恒等関手として、 $F \circ G = 1_{C'}$ かつ $G \circ F = 1_C$ を満たす関手 $G: C' \rightarrow C$ が存在することである。この時対象関数、射関数のそれぞれが写像として可逆であるため、圏が同型であるには、例えば射集合と対象集合とが互いに同じ濃度を持っている必要がある。この圏が同型であるための条件を、関手の同型を使って緩めることを考える。圏の同値は、もう少し緩い意味での、しかし自然な「圏同士が本質的には同値」という状態を捉える概念となる。この操作は本質的に圏の中の同値類に注目する行為になっている。そういう意味で、今まで出会った中で一番気持ちの良い同値関係かもしれない。相等関係という意味での、自明な同値関係とは違う。

どうしてこのような問題が生じたのかを考えたい、同型などの概念を宿していた圏自身が十分高次元になったからだろうか。

5.1 圏の同値の定義

定義 5.1.1 (equivalence of categories). 2 つの圏 C, C' が同値であるとは、互いに逆向きの関手 $F: C \rightarrow C', G: C' \rightarrow C$ と、その間の関手の同型 φ, ψ の 3 つが存在し、次が成り立つこと。

$$G \circ F \xrightarrow{\varphi} 1_C, \quad F \circ G \xrightarrow{\psi} 1_{C'}$$

関手 F, G 間のこの条件を「同型の違いを除いて逆関手である (inverse to each other up to natural isomorphism)」とも言う。この時、 G を F の準逆関手であるという。^aこのとき、 F, G を圏 C, C' の同値であるという。

^a nLab ではこれを inverse functor と呼んでしまっている。

即ち、 C の対象 A について、行って戻ってきた $G(F(A))$ と元の A の間に必ず同型射 $\varphi(A): G(F(A)) \rightarrow A$ が存在し、圏 C' についても同様であること。

5.2 圏の同値の特徴付け

定義 5.2.1 (忠実, 充満関手). $F : C \rightarrow C'$ を関手とする.

1. 任意の $A, B \in C$ に対して, 関手 F が定める次の写像

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_C(A, B) & \longrightarrow & \text{Mor}_{C'}(F(A), F(B)) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f : A \rightarrow B & \longmapsto & F(f) : F(A) \rightarrow F(B) \end{array}$$

が単射であるとき, 関手 F は**忠実 (faithful)** であるという. 全射であるとき, 関手 F は**充満 (full)** であるという. 可逆である時, **充満忠実 (fully faithful)** であるという.

2. 任意の $A' \in C'$ に対して, $A \in C$ が存在して同型射 $F(A) \rightarrow A'$ が圏 C' 上に存在するとき, F は**本質的に全射 (essentially surjective (on objects), eso, dense)** であるという.

注 5.2.2. 1. の用語は射写像の属性についての術語, 2. は対象写像についての術語となる. 射写像の性質については, 「全射」などの写像を連想させる用語が避けてあり, 対象写像について使われている.

命題 5.2.3 (圏の同値の特徴付け). 関手 $F : C \rightarrow C'$ に対して, 次の2条件は同値である.

- 1) $F : C \rightarrow C'$ は圏の同値である.
- 2) F は充満忠実で, 本質的に全射である.

即ち, 上記のように定義した圏同値の概念は, 「射の様子はもれなく対応していて, 対象の方だけ, 同型の範囲でズレがある (同型だった2つの対象が1つの対象にまとまっていたり, 分裂していたり.)」という状況を指し, 射の様子に注目するという目的のある圏論にとっては, 圏同士の関係で, 同型よりもより自然な同値関係となっている. 従って, 一般に「圏の同値」と言った時, この関係を指す.

[証明]. (AC)

□

補題 5.2.4 (充満忠実関手は, 射の可逆性を保存する.). $F : C \rightarrow C'$ を関手とし, $f : A \rightarrow B$ を C の射とする. 次の2条件を考える.

- 1) $f : A \rightarrow B$ は C の可逆な射 (同型) である.
 - 2) $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ は C' の可逆な射 (同型) である.
- 1) \Rightarrow 2) は常に成り立ち, 2) \Rightarrow 1) は F が充満忠実なら成り立つ.

関手が充満忠実であるならば, 互いに逆射であるような射の組は, 互いに逆射である射の組に写すことが分かった.^{†1}

系 5.2.5. $F : C \rightarrow C'$ を充満忠実関手とする.

$$C'_0 := \{A' \in C' \mid A \in C \text{ と同型 } F(A) \xrightarrow{\sim} A' \text{ が存在する} \}$$

と置いて, C'_0 を C' の充満部分圏とすると, F は圏の同値 $F : C \rightarrow C'_0$ を引き起こす.

^{†1} 実はこの条件は, F が充満忠実ではなくとも, F の射写像 F_M が全単射であれば成り立つ. (2020/2/22)

[証明] . こうして作った C'_0 への F が誘導する関手は、本質的に全射である。一方 C'_0 は充満部分圏であるから、誘導される関手 $F : C \rightarrow C'_0$ も充満忠実のままである。 \square

5.3 圏の同値の well-definedness

命題 5.3.1 (圏の同値の well-definedness). 圏の同値は、次の3条件を充たす。

1. 任意の圏 C について、 C と C は圏同値。
2. 任意の圏 C, C' について、 C と C' が圏同値なら、 C' と C も圏同値である。
3. 任意の圏 C, C', C'' について、 C と C' 、 C' と C'' が夫々圏同値ならば、 C と C'' も圏同値である。

5.4 同値な圏の例1：行列の圏と有限次元 \mathbb{R} -線型空間の圏

行列のなす圏 C_0 を定義する。対象の集合を $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ とし、その間の射を $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $\text{Mor}_{C_0}(n, m) = M(m, n; \mathbb{R})$ として定め、射の合成を行列の積とし、単位射を I_n 倍写像として圏をなす。

関手 $F : C_0 \rightarrow C$ を次のように定義する。 $C = [\text{有限次元 } \mathbb{R}\text{-線型空間}]$ とする。

$$\begin{array}{ccc} F : C_0 & & C \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ n & \longmapsto & \mathbb{R}^n A \in M(m, n; \mathbb{R}) \longmapsto F(A) = f_A \end{array}$$

但し、写像 f_A は、 $x \in \mathbb{R}^n$ を Ax に写す A 倍写像である。この時、次の命題は確かに成り立つ。

命題 5.4.1 (関手 F の well-definedness). 上記のように定義した関手 $F : C_0 \rightarrow C$ に関して、次の2つの条件が成立する。

1. $F(AB) = F(A) \circ F(B)$
2. $F(I_n) = 1_{F(I_n)}$

また、線型代数学から、次の命題が成り立つ。

命題 5.4.2. 関手 F の射写像

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{C_0}(n, m) = M(m, n; \mathbb{R}) & & \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A & \longmapsto & f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \end{array}$$

は可逆である。

従って、関手 F は充満忠実である。

命題 5.4.3. 上記のように構成した関手 F は本質的に全射である。

[証明] . $V \in C$ を任意に取る。 V は有限次元の線型空間だから、自然数 n と基底 $x_1, \dots, x_n \in V$ が存在する。

射 $F(n) = \mathbb{R}^n \rightarrow V$ を,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto a_1 \cdot x_1 + \cdots + a_n \cdot x_n$$

で定めると, これは同型になる. (基底の特徴付け) 従って, 任意の $V \in C$ について, $n \in C_0$ が存在して $F(n) \simeq V$ となる. \square

以上より, 関手 F は充満忠実で本質的に全射な関手だから, これは圏 C, C_0 の同値である.

5.5 同値な圏の例 2 : 有限次元 \mathbb{R} -線型空間の圏とその双対空間の圏

関手 $^V : C^{op} \rightarrow C(\text{check})$ を定める. 最後に, これが圏の同値になることを説明する.

$$\begin{array}{ccc} ^V : C & \longrightarrow & C \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ V & \longmapsto & V^V = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}) \end{array}$$

$$f : V \rightarrow W \longmapsto f^V : W^V \rightarrow V^V$$

なお, 写像 f^V は

$$\begin{array}{ccc} f^V : W^V & \longrightarrow & V^V \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ g : W \rightarrow \mathbb{R} & \longmapsto & g \circ f : V \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

である. 線型写像の合成は線型写像であるから, $g \circ f$ は確かに \mathbb{R} -線型形式である. この時, 次の命題が成り立つ.

命題 5.5.1 (関手 V の well-definedness). 上記のように定めた関手 V について, 次の2条件が成り立つ.

1. $(g \circ f)^V = f^V \circ g^V$
2. $(1_V)^V = 1_{V^V}$

関手 F は前節で定義した圏の同値だとする. 関手 V が圏の同値であることを示すに当たって, まず関手 $^t : C_0^{op} \rightarrow C_0$ を定義し, これが圏の同型であることを示す. 次に, 圏の同型 $\varphi : F \circ ^t \rightarrow ^V \circ F$ が存在することを示す. すると, 次の図式から, 圏の同型 t は圏の同値でもあるから, 圏の同値の推移律 (命題 5.3.1) より, 関手 $F \circ ^t$ も圏の同値. これと同型な $^V \circ F$ も圏の同値. 従って, V が圏の同値だとわかる.

$$\begin{array}{ccc} C_0^{op} & \xrightarrow{F} & C^{op} \\ \downarrow \simeq & & \downarrow ^V \\ C_0 & \xrightarrow{F} & C \end{array}$$

なお, この図式は可換ではないが, 同型の違いを除いて可換であるから, 2-可換であるという.

関手 $^t : C_0^{op}$ を, 次のように, 対象写像は恒等写像, 射写像は各射である行列をその転置行列に写す写像として定める.

$$\begin{array}{ccc}
{}^t : C_0^{op} & \longrightarrow & C_0 \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
n & \longmapsto & n \\
\\
A & \longmapsto & {}^t A
\end{array}$$

これは次の命題を充たす.

命題 5.5.2 (関手 t の well-definedness). 上記のように定めた関手 t について, 次の2条件が成り立つ.

1. ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$
2. ${}^t I_n = I_n$

これは非常に見慣れた, 行列の転置についての計算規則である. 従って, 確かに関手 t を定めた.

次に, この関手 t は可逆であり, 逆射は自身 t となる対合である. なぜなら, 対象写像は C_0 上の恒等写像であり, その逆写像は自分自身である. 各行列にその転置行列を対応させる射写像についても同様である. 従って, 関手 t は圏の同型である.

ここで, 次の命題を証明する.

命題 5.5.3. 2つの関手 $F \circ {}^t, {}^V \circ F$ の間に関手の自然同型 $\varphi : F \circ {}^t \xrightarrow{\sim} {}^V \circ F$ が存在する.

[証明]. 自然同型 φ を, 各 $n \in C_0^{op}$ に対してその成分を, 圏 C の同型射

$$\begin{array}{ccc}
\varphi(n) : F \circ {}^t(n) = \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{R}^n)^V = {}^V \circ F(n) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
x & \longmapsto & f_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}
\end{array}$$

として定める. ただし, 線型写像 $f_x \in (\mathbb{R}^n)^V$ は, 各 $y \in \mathbb{R}^n$ に対して, その x に対する標準内積 $x \cdot y \in \mathbb{R}$ を対応させる線型写像である. (横ベクトル x を左から行列積で掛けるという x 倍写像). これは, 任意の C_0^{op} の射 $A \in M(m, n; \mathbb{R})$ に対して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^m & \xrightarrow{\varphi(m)} & (\mathbb{R}^m)^V \\
\downarrow \times {}^t A & & \downarrow \times (Ax)^V \\
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi(n)} & (\mathbb{R}^n)^V
\end{array}$$

従って, φ は確かに関手の同型 $\varphi : F \circ {}^t \xrightarrow{\sim} {}^V \circ F$ である. □

以上より, 圏の同値関係の推移律より, 関手 ${}^V : C \rightarrow C^{op}$ は確かに圏の同値である.

なお, この事実を示すのに, 次の命題を示すことによって達成しても良い.

命題 5.5.4 (再双対). 関手 ${}^V \circ {}^V$ を次のように定めると, 関手の同型 $1_C \rightarrow {}^V \circ {}^V$ が存在する.

$$\begin{array}{ccccc}
{}^V \circ {}^V : C & \xrightarrow{{}^V} & C^{op} & \xrightarrow{{}^V} & C \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
V & \longmapsto & V^V & \longmapsto & (V^V)^V =: V^W
\end{array}$$

ただし、空間 V^W は線型空間 V の再双対といい、 $V^W = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V^V, \mathbb{R}) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ という線型汎関数の空間である。

すると、 V は自身を準逆関手とした圏の同値であるとわかる。

第 6 章

表現可能関手

関手の表現と随伴は、数学全体に現れる構成や記述の基本言語となる。

関手の表現や前層の言葉を使って、圏の対象がその圏の他の対象との関わりによって特定される。

6.1 表現可能関手

Representable functors are ubiquitous.

To a fair extent, category theory is all about representable functors and the other universal constructions: Kan extensions, adjoint functors, limits, which are all special cases of representable functors - and representable functors are special cases of these. ^{†1}

定義 6.1.1 (表現可能関手). C を圏とする. 集合の圏 **Set** への関手 $F : C^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ (または C 上の前層) が表現可能であるとは、関手 F が、対象 $X \in C$ が存在して、その反変ホム関手 $h_X = \text{hom}_C(-, X) : C^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ と同型となること. この時、関手 F を X によって表現される (反変) 関手といい、同型 $\varphi : F \xrightarrow{\sim} h_X$ を表現と呼ぶ.

また、この双対的な概念、即ち共変 Hom 関手 $\text{Hom}_C(X, -) : C \rightarrow \mathbf{Set}$ と同型な関手 $F : C \rightarrow \mathbf{Set}$ を C -余表現可能関手 (corepresentable functor) (余前層) という. また、この X は同型の違いを除いて一意に決定され、 F の表現対象 (**representing object for F**) という. (命題 6.2.11)

また、米田の補題 (命題 6.2.2) によれば、一般の関手 $F : C^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対して、関手の射 $\varphi : h_X \rightarrow F$ は、ある一点 $\xi \in F(X)$ のみによって一意に定まる. 即ち、組 (X, ξ) が同型の違いを除いて一意に定まる. この対象 $X \in C$ を F の表現対象 (**representing object for F**) または F の普遍対象 (**universal object for F**) といい、 ξ を F の普遍元 (**universal element for F**) という.

6.2 表現可能関手と米田の補題：前層の圏の様子

C を圏とする. 関手圏 (C -前層の圏) $\mathbf{Fun}(C^{op}, \mathbf{Set}) =: C^\wedge$ の中での「表現可能関手」 (= 圏 C' の対象の中でも、ある特定の反変ホム関手と同型の差しかない対象) の役回りを考察する. これにより、前層の圏 C^\wedge は圏 C を調べるにあたって劣らず重要な対象となる. (という圏論的パラダイム全体を代表するような補題である).

これを、適当な対象 $A \in C$ によって表現される反変ホム関手 $h_A : C^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ と、一般の反変関手 $F : C^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$

^{†1} nLab の representable functor のエントリ

との間の射（これは関手圏 C^\wedge 上の射なので，自然変換に当たる）を考えることによってする。

6.2.1 Yoneda's embedding : 圏 C とその前層との関係

C を圏とする．その上の前層の圏 $[C^{op}, \mathbf{Set}]$ を C^\wedge と置く．次の関手 $h_C : C \rightarrow C^\wedge$ を構成し，これを調べることで，一般の圏とその前層との間の関係を探ることとする．

定義 6.2.1 (Yoneda embedding). 次の，圏 C の対象 A を A で表現された前層 $h_A = \text{hom}_C(-, A)$ へと，射 $f : A \rightarrow B$ をそれが定める関手の射 $f_* : h_A \rightarrow h_B$ へと写す関手 $h_C : C \rightarrow C^\wedge$ を，歴史的には米田の埋め込みという．

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{y} & C^\wedge \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A & \longmapsto & h_A \end{array}$$

$$f : A \rightarrow B \longmapsto f_* : h_A \rightarrow h_B$$

ただし，写像 $f_* : h_A \rightarrow h_B$ は， $g \in h_A = \text{Hom}_C(-, A)$ を $g \circ f \in h_B$ に写す自然変換である．

このように定めた関手 y が実は充満忠実となる（系 6.2.7）．従って，前層の圏 C^\wedge の充満部分圏である「表現可能前層」は，圏 C と同値であるということが，米田の補題 6.2.2 の系として得られる．

■

関手は可逆性を保つから， $f : A \rightarrow B$ が同型であることと， $f_* : h_A \rightarrow h_B$ が同型であることは同値である．この事実は， A と B の間に可逆な射が存在するかどうかは， A への射と B への射とが同じ様子をしているかどうか（各 $X \in C$ について $\text{Hom}_C(X, A) \simeq \text{Hom}_C(X, B)$ であるかどうか）が同値であるということになる．このものの見方の転換が，Cayley 表現から始まる，「内部構造の外部化」の一途である．

従って，あとは，一般の $F \in C^\wedge$ を取って， h_A からの射を考えたい．

6.2.1.1 h_A からの射の研究

さて， $A \in C$ を勝手にとって，その関手 $y : C \rightarrow C^\wedge$ による値 $h_A = \text{hom}_C(-, A) \in C^\wedge$ と，一般の反変関手（前層） $F \in C^\wedge$ との関係を考える．この時， $a \in F(A)$ を勝手に1つ取る毎に，この2つの共変 Hom 関手 $h_A, F : C^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ の間の自然変換（関手の射） $\varphi_a : h_A \rightarrow F$ が構成できることを説明する．

各 $X \in C$ に対して，2つの関手のそれぞれが \mathbf{Set} 上で取る値 $h_A(X)$ と $F(X)$ の間に，射 $\varphi(X) : h_A(X) \rightarrow F(X)$ を構成する規則を与えれば良い．しかしこの時，前者は $h_A(X) = \text{Hom}_C(X, A)$ であり，元として C の射 $g : X \rightarrow A \in \text{Hom}_C(X, A)$ などが取れるが，後者 $F(X)$ は全く素性不明の集合であり， $g \in \text{arr}(C)$ に $F(X)$ の何を対応させれば良いかはこのままでは考えられない．そこで， $g : X \rightarrow A \in h_A(X)$ を反変関手 $F : C^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ で写した時の値である，写像 $F(g) : F(A) \rightarrow F(X)$ が値を $F(X)$ に取ることを利用して，勝手な $F(A)$ の元を $a \in F(A)$ とすることで， $g \in h_A$ に対して $F(g)(a) \in F(X)$ を対応させることで，自然変換の $X \in C$ に対する成分 $\varphi_a(X)$ を定める．

$$\begin{array}{ccc}
h_A(X) = \mathrm{Hom}_C(X, A) & \xrightarrow{\varphi_a(X)} & F(X) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
g : X \rightarrow A & \longmapsto & F(g)(a) (= g^*a \text{ などとも書く})
\end{array}$$

こうして定義した自然変換 φ_a は確かに自然変換となることを確認する．任意の $f : Y \rightarrow X \in C^{op}$ について，次の図式が可換になれば必要十分．

$$\begin{array}{ccc}
h_A(X) & \xrightarrow{\varphi_a(X)} & F(X) \\
f^* \downarrow & & \downarrow F(f) \\
h_A(Y) & \xrightarrow{\varphi_a(Y)} & F(Y)
\end{array}$$

これは，等式 $F(g \circ f)(a) = F(f)(F(g)(a)) = F(f) \circ F(g)(a)$ の成立を要請しているが， F は反変関手 $C^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ であったから，常に $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ が成り立つのであった．よって確かに，関手の射 $\varphi_a : h_A \rightarrow F$ ($a \in F(A)$) を定義できた．これは， $F(A)$ の元 a の取り方に依らないから，結局は次のような対応 φ を定めたことに等しい．(\mathbf{Set} 上の射)

$$\begin{array}{ccc}
\varphi : F(A) & \longrightarrow & \mathrm{Nat}_{C'}(h_A, F) = \mathrm{Hom}_{C'}(h_A, F) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
a & \longmapsto & \varphi_a
\end{array}$$

圏 C' は関手の圏 $C' = \mathbf{Fun}(C^{op}, \mathbf{Set})$ であったから，その上のホム集合とは，自然変換のことである．これを強調したい時， $\mathrm{Nat}_{C'}(h_A, F)$ と書く．

6.2.2 米田の補題： h_A からの射の研究の帰結

ここで，実のところ， C' 上の，反変ホム関手 h_A から一般の対象 F への写像の集合，即ち2つの前層 h_A, F 間の自然変換は，全て上で議論したこの φ のタイプで尽くされることがわかる．この事実を，米田の補題と呼ぶ．

定理 6.2.2 (Yoneda's lemma).

$$\begin{array}{ccc}
 C & C^{op} & Set \\
 \\
 \begin{array}{c} A \\ \uparrow f \\ X \end{array} & \begin{array}{c} A \\ \downarrow f^{op} \\ X \end{array} & \begin{array}{c} F(A) \xleftarrow{a} 1 \\ \downarrow F(f) \\ F(X) \end{array}
 \end{array}$$

$\begin{array}{c} \downarrow f^* \\ \downarrow f^* a \end{array}$

今、此処には変数が2つある． f と a である．

1. a を固定された踏み台だと思うと、 a が定める Set の射

$$a_X : h_A(X) = \text{Hom}_C(X, A) \rightarrow \text{Hom}(1, F(X)) \simeq F(X)$$

が定まる．これを X 成分だと思えば、族 $(a_X)_{X \in C} : C \rightarrow M'$ は関手の射

$$\varphi_a : h_A \rightarrow F$$

を定める．

2. 次に a を動かす．すると、これは関手の射 $\text{Hom}_{C^\wedge}(h_A, F)$ の全てを走る．

つまり、証明可能な形で言い換えれば、1. で定めた対応を、次の写像 φ だと思うと、

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Hom}_{C^\wedge}(h_A, F) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 a & \longmapsto & \varphi_a
 \end{array}$$

次の「踏み台 a の情報を復元する」写像 ψ が逆射になっている．

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{C^\wedge}(h_A, F) & \xrightarrow{\psi} & F(A) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \varphi & \longmapsto & \varphi(A)(1_A)
 \end{array}$$

注 6.2.3. 純粋な圏論では、米田の補題の主張は米田の埋め込み $y : C \rightarrow C'$ を使って、次のように書かれる．任意の X と $c \in C$ について、

$$\text{Hom}_{[C^{op}, \mathbf{Set}]}(y(c), X) \simeq X(c)$$

前層 X の $c \in C$ での値である集合と、 c を表現する前層 h_c と X の間の射の集合とは、集合として同型であること主張している．

注 6.2.4. 米田の補題の双対的な主張は、 C を圏とし、 $F : C \rightarrow \mathbf{Set}$ を共変関手とした時、 $A \in C$ が表現する共変 Hom 関手 $h^A = \text{Hom}_C(A, -)$ が存在して、以下の写像が可逆になる．

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi : F(A) & \longrightarrow & \text{Hom}_{C'}(h^A, F) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 a & \longmapsto & \varphi_a : h^A \rightarrow F
 \end{array}$$

ただし、関手の射 φ_a (の各成分) は、以前は反変的なものだったが、この場合は共変的なものである。

$$\begin{array}{ccc} \varphi_a(X) : h^A(X) = \mathrm{Hom}_C(A, X) & \longrightarrow & F(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ g : A \rightarrow X & \longmapsto & F(g)(a) = g_*a \end{array}$$

[証明] . 逆向きの射 ψ を次のように定める。

$$\begin{array}{ccc} \psi : \mathrm{Hom}_{C'}(h_A, F) & \longrightarrow & F(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \xi : h_A \rightarrow F & \longmapsto & \xi(A)(1_A) \end{array}$$

すると、 $\psi \circ \varphi = 1_{F(A)}$ となる。なぜなら、各 $a \in F(A)$ に対して、 $\psi \circ \varphi(a) = \psi(\varphi_a)$ は、 φ_a の A 成分 $\varphi_a(A) : h_A(A) = \mathrm{End}_C(A) \rightarrow F(A)$ の 1_A での値、即ち $F(1_A)(a) = 1_{F(A)}(a) = a$ である^{†2}。次に $\varphi \circ \psi = 1_{\mathrm{Hom}_{C'}(h_A, F)}$ について考える。

$\xi \in \mathrm{Hom}_{C'}(h_A, F)$ を自然変換とする。 $\varphi(\xi) = \xi(A)(1_A) =: a$ とすると、 $\psi(a) = \varphi_a$ である。このとき、任意に取った X と $g : X \rightarrow A \in h_A(X)$ について、この普遍元 $a = \xi(A)(1_A)$ が定める自然変換 φ_a の X 成分による値 $F(g)(a) = F(g)(\xi(A)(1_A)) = F(g) \circ \xi(A)(1_A)$ と、元の自然変換 ξ の X 成分による g の値 $\xi(X)(g)$ が一致することを確かめたい。ここで、 $\xi : h_A \rightarrow F$ は関手の射であるから、次の図式 (naturality square) は可換である。

$$\begin{array}{ccc} h_A(A) & \xrightarrow{\xi(A)} & F(A) \\ h_A(g) \downarrow & & \downarrow F(g) \\ h_A(X) & \xrightarrow{\xi(X)} & F(X) \end{array}$$

ここで、 $1_A \in h_A(X)$ の2通りの値を比べてみると、時計回りでは $\xi(A)(1_A) = a$ に写されてから、 $F(g)(a)$ 即ち自然変換 φ_a の X 成分の値に他ならない。次に、反時計回りでは、 h_A は反変 Hom 関手であることに注意して、 $h_A(g)(1_A) = 1_A \circ g = g$ に写されてから、 $\xi(X)(g)$ に至る。これは自然変換 ξ の X 成分の値に他ならない。図式は可換だから、 $F(g)(a) = \xi(X)(g)$ は任意の X と $g \in h_A(X)$ について成り立つことがわかった。以上より、 ψ は確かに φ の逆射となっており、 φ は可逆である。□

従って、証明によって得られた知見として、上記の写像 φ は次のように分解できる。

$$\mathrm{Hom}_{[C^{op}, \mathbf{Set}]}(h_A, F) \xrightarrow{\mathrm{lc}} \mathrm{Hom}_C(h_A(A), F(A)) \xrightarrow{ev_{1_A}} F(A)$$

6.2.3 前層の射の例1

今までの議論とは双対的な設定で考える、即ち共変 Hom 関手 (余前層) の方で議論をする。

$C = \mathbf{Mon}$ とし、 $F : C \rightarrow \mathbf{Set}$ を忘却関手とする。 $A = (\mathbb{N}, +, 0) \in C$ とすると (こちらは今後 A の代わりに \mathbb{N} と書く)、 $h^A = \mathrm{Hom}_C(A, -)$ はこの対象から出る射全体の集合となる。普遍元 $a \in F(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ として 1 を取る。すると、 1 を普遍元として定まる自然変換は、 $M \in C$ に対して

^{†2} 最初の等号は F が関手であることによる。

$$\begin{array}{ccc}
h^{\mathbb{N}}(M) = \text{Hom}_C(\mathbb{N}, M) & \xrightarrow{\varphi_1(M)} & F(M) = M(\text{underlying}) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
f: \mathbb{N} \rightarrow M & \longmapsto & F(f)(1) = f(1)
\end{array}$$

を成分とする．この自然変換は，勝手なモノイド M からの射 $\mathbb{N} \rightarrow M$ のそれぞれを， $1 \in \mathbb{N}$ で取る値，即ちその単位元（台集合 M の元として）へと写している．

すると，今回この自然変換は可逆となる．

命題 6.2.5 (モノイドの圏の忘却関手は，(余) 表現可能関手である．). $C = \mathbf{Mon}$ とし，忘却関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ と \mathbb{N} を表現する共変 Hom 関手 $h^{\mathbb{N}}$ とは，自然同型である．

〔証明〕．自然変換 φ_1 の逆射 ψ_1 を構成することによって証明する．全ての $M \in C$ に対して，

$$\begin{array}{ccc}
M(\text{underlying}) & \xrightarrow{\psi_1(M)} & \text{Hom}_C(\mathbb{N}, M) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
x & \longmapsto & g: \mathbb{N} \ni n \mapsto x^n \in M
\end{array}$$

とすれば，これは $\varphi_1(M)$ の逆射となっている．これを確認する．

$f: \mathbb{N} \rightarrow M \in \text{Hom}_C(\mathbb{N}, M)$ を任意に取る．モノイド M の積を \cdot とし，その繰り返しを冪として表すと，

$$\psi_1 \circ \varphi_1(f) = \psi_1(f(1)) = g: \mathbb{N} \ni n \mapsto f(1)^n \in M$$

であるが，この写像 g は $f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1)^n \in M$ より， f そのものである．逆に， $x \in M$ を任意に取る．

$$\varphi_1 \circ \psi_1(x) = \varphi_1(f: \mathbb{N} \ni n \mapsto x^n \in M) = f(1) = x$$

より，確かに $\varphi_1(M)$ と $\psi_1(M)$ は互いに逆射．よって命題 4.1.2 より， φ_1 は関手の同型である． \square

忘却関手 $F: \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$ とモノイド M を表現する共変 Hom 関手には，その単位元 $e \in M$ を普遍元とする自然同型が存在する．

6.2.4 前層の射の例 2

$C = \mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}}$ とし， n を勝手な自然数とする． C の勝手な対象を V とし，普遍元として $x = (x_1, \dots, x_n) \in V^n = F(V)$ を取る．例 4.2.7 で定めた共変 Hom 関手 h^V と，例 4.2.10 で定めた関手 $G: C \ni W \mapsto W^n \in \mathbf{Set}$ との間の自然変換 $\varphi_x: h^V \rightarrow G$ の $W \in C$ 成分は次のようになる．

$$\begin{array}{ccc}
h^V(W) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) & \xrightarrow{\varphi_x(W)} & W^n = G(W) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
f: V \rightarrow W & \longmapsto & (f(x_1), \dots, f(x_n))
\end{array}$$

このとき，次の命題が成立する．

命題 6.2.6 (線型空間の基底の圏論的特徴付け)．上記の状況の下で，次の 2 つの条件は同値である．

1. x は V の基底である．

2. x は関手の同型 $\varphi_x : h^V \rightarrow G$ を定める.

これを示すのに、次の命題を用いる. 米田の補題を, $B \in C$ として $F = h_B$ に対して適用すると, 次の主張が導かれる.

系 6.2.7 (米田の補題の系 1 : Hom 関手の間の自然変換). 圏 C に対して, 任意の対象 $A, B \in C$ について, 次の写像 (**Set** の射) φ は可逆である.

$$\begin{array}{ccc} F(A) = h_B(A) = \text{Hom}_C(A, B) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Hom}_{[C^{\text{op}}, \text{Set}]}(h_A, F = h_B) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f : A \rightarrow B & \longmapsto & \varphi_f = f_* : h_A \rightarrow h_B \end{array}$$

これは, $\text{Hom}_C(B, A)$ の各元 f に対して, それから生成される自然変換 $\varphi = f_* : h_A \rightarrow h_B$ を対応させる規則である. ただし, 関手の射 f_* は, 各 $X \in C$ 成分を以下のように与えるものである.

$$\begin{array}{ccc} h_A(X) = \text{Hom}_C(X, A) & \xrightarrow{f_*(X)} & h_B(X) = \text{Hom}_C(X, B) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ g : X \rightarrow A & \longmapsto & f \circ g : X \rightarrow B \end{array}$$

なお, この対応が, $\text{Hom}_C(X, A)$ の元 $g : X \rightarrow A$ に対して, $h_B(g) : h_B(A) \rightarrow h_B(X)$ の点 $f : A \rightarrow B$ での値を対応させていることに注意. (h_B とは, 3.3 節で定義した共変 Hom 関手であることに注意.)

注 6.2.8. この系の双対的な主張は以下の通りである. 米田の補題 (命題 6.2.2) の双対的な主張に $F = h^B$ と代入して考えると, 次の可逆な写像を得る.

$$\begin{array}{ccc} \varphi : h^B(A) = \text{Hom}_C(B, A) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{[C, \text{Set}]}(h^A, h^B) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f : B \rightarrow A & \longmapsto & \varphi_f = f^* : \text{Hom}_C(A, -) \rightarrow \text{Hom}_C(B, -) \end{array}$$

[証明]. まず, $1 \Rightarrow 2$ を証明する. 今, $x = (x_1, \dots, x_n)$ は V の基底であるとする. この時に, 任意に取った $W \in C = \mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}}$ に対して φ_x の成分

$$\begin{array}{ccc} h_V(W) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) & \xrightarrow{\varphi_x(W)} & W^n = G(W) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ g : V \rightarrow W & \longmapsto & (g(x_1), \dots, g(x_n)) \end{array}$$

の可逆性を示せば, 命題 4.1.2 より, 関手の射 φ_x 自体も可逆とわかる. この写像は, 線型写像 $g : V \rightarrow W$ を, V の基底 x の W での行き先を用いて分類している写像だということに注目する.

そこで, 写像 (**Set** 上の射) $\varphi_x(W)$ に対して, 逆向きの写像

$$\begin{array}{ccc} \psi(W) : W^n & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ y = (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto & g : V \rightarrow W \end{array}$$

を, V の任意の元 $a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n \in V$ に対して (x は V の基底なので, 任意の実数 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ に対し

てこれは任意の V の元の表示になっている), $g(a_1 \cdot x_1 + \cdots + a_n \cdot x_n) = a_1 \cdot y_1 + \cdots + a_n \cdot y_n \in W$ を対応させる写像 g を, $\psi(W)$ の y での値として取るように定義する. (なお, この時, g は確かに \mathbb{R} -線型写像になっている. これを $y \in W^n$ の定める写像と呼ぶ.) こうして構成した $\psi(W)$ はいつでも $\varphi_x(W)$ の逆射になっていることを示す.

$\varphi_x(W) \circ \psi(W) = 1_{\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)}$ は, 勝手に取った $g \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ に対して, $\varphi_x(W)$ による値は $(g(x_1), \dots, g(x_n))$, この $\psi(W)$ による値は $g(x_1), \dots, g(x_n)$ の定める写像になる. これは元の写像 g に他ならない. $\psi(W) \circ \varphi_x(W) = 1_{W^n}$ は, 勝手に取った $y \in W^n$ に対して, これが定める写像 g の $\varphi_x(W)$ による値は, y であるから従う.

次に, $2 \Rightarrow 1$ を示す. $\mathbb{R}^n \in \mathbf{Set}$ の標準基底を $e = (e_1, \dots, e_n)$ とおく. すでに証明した $1 \Rightarrow 2$ の主張により, $\varphi_e: h^{\mathbb{R}^n} \rightarrow G$ は関手の同型である. この時, 次の (関手圏 $[C, \mathbf{Set}]$ 上の) 図式を可換にする射 $\varphi_e^{-1} \circ \varphi_x: h^V \rightarrow h^{\mathbb{R}^n}$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} h^{\mathbb{R}^n} & \xrightarrow{\varphi_e} & G \\ \uparrow & \nearrow \varphi_x & \\ h^V & & \end{array}$$

系 6.2.7 の双対的な命題より, 写像

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_C(\mathbb{R}^n, V) & \longrightarrow & \text{Hom}_{[C, \mathbf{Set}]}(h^V, h^{\mathbb{R}^n}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f: \mathbb{R}^n \rightarrow V & \longmapsto & \varphi_f = f^*: h^V \rightarrow h^{\mathbb{R}^n} \end{array}$$

は可逆になる. 即ち, 或る $f: \mathbb{R}^n \rightarrow V \in \text{Hom}_C(\mathbb{R}^n, V)$ がただ一つ存在して, 上の図を可換にする ($f^* = \varphi_e^{-1} \circ \varphi_x$). すると, x は, 同型 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow V$ による e の像であるから, 定義よりこれは基底であることがわかった. \square

定義 6.2.9 (基底の定義 (参考)). K を体とし, $V \in \mathbf{FinVect}$ を K -線型空間とし, $x_1, \dots, x_n \in V$ とする. $K^n \in \mathbf{Set}$ を直積集合とし, その間の写像 f_x を次のように定める.^a

$$\begin{array}{ccc} f_x: K^n & \longrightarrow & V \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (a_1, \dots, a_n) & \longmapsto & a_1 \cdot x_1 + \cdots + a_n \cdot x_n \end{array}$$

この時, 以下の2つの条件は同値であり, この同値な条件を満たす x_1, \dots, x_n を V の基底と呼ぶ.

1. $\forall x \in V \exists! (a_1, \dots, a_n) \in K^n [x = a_1 \cdot x_1 + \cdots + a_n \cdot x_n]$
2. f_x は可逆.

^a こんな書き方をしたが, 暗黙のうちに V を \mathbf{Set} 上に移動して, f は射として定めてないか?

x が n 次元線型空間 V の基底であるとは、 V が表現する共変 **Hom** 関手 $h^V : C \rightarrow \mathbf{Set}$ と、 n 次元線型空間を n 個の直積の集合と見なし、その間の線型写像は基底の定める写像とする「線型空間をベクトルの空間へと対応させる関手」 $G : C \rightarrow \mathbf{Set}$ とが、同型になるような x の取り方のことである。 V 内で「基底」を取ると、圏 C を、我々の馴染み深い **Set** 上で調べることが可能になる。

6.2.5 前層の射の例3：共通部分の集合演算と論理積

X を全体集合として、 $A, B \subset X$ の共通部分を取る演算は、 X の冪集合 $P(X)$ 上に1つ定められた写像 $P(X) \times P(X) \rightarrow P(X)$ に等しい。さらに、これを $X \in \mathbf{Set}$ についての成分と見ると、共通部分を取るという演算は、1つの自然変換 $\cap : (P, P) \rightarrow P$ を定めることがわかる。これを集合の圏の前層の圏 $[\mathbf{Set}^{op}, \mathbf{Set}]$ の射として調べることで、共通部分を取るという集合演算をより深く理解することを考える。

自然変換 \cap は、圏 $[\mathbf{Set}^{op}, \mathbf{Set}]$ において、**Bool** 代数 2 上の演算 \wedge を普遍元として定まる自然変換 $\wedge \circ : h_2 \times_2 \rightarrow h_2$ と、自然に同一視される。^a

^a 3/11/2020

6.2.6 米田の補題の系

米田の補題 6.2.2 は、前層の圏 $C' = [C^{op}, \mathbf{Set}]$ において、反変 **Hom** 関手 h_A という対象と一般の対象 F の間の射 $\varphi_a : h_A \rightarrow F$ は、完全に $a \in F(A)$ で添字づけられることを主張している。これは、その特定の自然変換 η の A 成分 $\eta(A)$ の 1_A で取る値に他ならない。即ち、 $\eta : h_A \rightarrow F$ が自然変換であるであるということ、前層の圏の射であるという時点で、その条件 (naturality condition) は十分に強く、 $\eta(A)$ が 1_A で取る値 $\eta(A)(1_A) \in F(A)$ によって一意に指定され、また逆に $F(A)$ で取る値によってその自然変換を復元できる。これは今までの章で定義してきた圏論の様々な概念が、絶妙な条件の強弱で定義されているという結果を物語っているのかもしれない。

だから、前層の圏（の射）を調べるときは、表現可能関手を媒介にすれば良い、という方針が立つ。その良い例が 6.2.4 節での議論である。圏 $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}}$ では $h^{\mathbb{R}^n}$ という表現可能関手があり、線型空間とベクトルの空間を繋ぐ役割をする関手 G がどの $h^{\mathbb{R}^n}$ と同型になるかは $n \in \mathbb{N}$ に依り、これを線型空間の次元という。

系 6.2.7 は、米田の補題が描写する C' 上の射の様子のうち、特に反変 **Hom** 関手同士の間射についての部分の主張を取り上げている。この場合は、圏 C の2元 A, B の間の射 $f : A \rightarrow B$ が、その2つが表現する反変 **Hom** 関手（前層） h_A, h_B の間の自然変換に一対一対応しているという様子を描写している。

圏 C からその上の前層の圏への関手である「米田の埋め込み」の視点からは次の命題が成り立ち、「圏 C の対象 A を知ることは、圏 $[C^{op}, \mathbf{Set}]$ の対象である h_A 、即ち、他の対象から入ってくる射の集合を知ることと同等であることがわかる。^{†3} そして、前層の圏は、米田の埋め込みの値である反変 **Hom** 関手、つまり表現可能前層を拠点として調べることができる。

系 6.2.10 (米田の補題の系2：Yoneda embedding). C を圏とする。このとき、その前層の圏 $C' = [C^{op}, \mathbf{Set}]$ と

^{†3} the probes of X by A are indeed the maps of generalized objects from A into X

の間に、次のような充満忠実関手 $y: C \rightarrow C'$ が存在する．（これを米田の埋め込み (Yoneda embedding) という）．

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{y} & [C^{op}, \mathbf{Set}] \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A & \longmapsto & h_A = \mathrm{Hom}_C(-, A) \end{array}$$

$$f: A \rightarrow B \longmapsto \varphi_f = f_*: h_A \rightarrow h_B$$

〔証明〕．この関手 y の射写像は、任意の $A, B \in C$ についての Hom 集合 $\mathrm{Hom}_C(A, B)$ 毎に、系 6.2.7 での写像 φ に他ならない．系 6.2.7 によりこれは可逆だから、関手 y は充満忠実である． \square

系 6.2.11 (米田の補題の系 3 : uniqueness of representing objects). ある前層 $F: C^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ について、それを表現する元 $A \in C$ とは、同型 $\mathrm{hom}_C(-, A) \simeq F$ が存在するような $A \in C$ のことであるが、これは存在するなら同型の差を除いて一意である．

〔証明〕． A, B はともに F を表現するとする．このとき、 h_A, h_B の間に同型が存在することになる．系 6.2.10 より、 $A, B \in C$ は同型である．^{†4} \square

定義 6.2.12 (表現可能関手). 1. $F \in C^\wedge$ について、対象 $A \in C$ と関手の同型 $\varphi: h_A \rightarrow F$ が存在するとき、 F を representable という．

2. 関手の同型 φ は A の普遍性ともいう．

3. このとき、関手の同型 φ に対応する $a \in F(A)$ が存在する．復元の仕方は、米田の補題 6.2.2 より、 A 成分による 1_A の像 $a = \varphi(A)(1_A)$ であるが、これを F は a によって A で表現される、といい、 a を普遍元という．

^{†4} 圏論的には意味を持たない事実であるが、これは関手 y が充満忠実でなくとも、射写像が全単射なら十分に成り立つ．

第 7 章

随伴 (adjoint)

圏の同値は、対象の集合に関して、圏の同型から弱めた概念であった。随伴関手は、圏の同値をさらに弱めた概念である。線型代数の随伴写像と形式的に類似することからその名前がつけられた。

次が成り立つ。

命題 7.0.1. $F : C \rightarrow D, G : D \rightarrow C$ を関手とする。次の 3 つの条件は同値である。

1. F と G は圏の同値である。
2. F は G の左随伴関手であり、かつ、2 つの関手は充満忠実である。

7.1 定義

随伴には同値な定義が最低でも 3 つある。なお、関連する用語も、adjunction, adjoint, adjunct の 3 つがある。

記法 7.1.1. $F : C \rightarrow C', G : C' \rightarrow C$ を互いに逆向きの関手とする。 F が逆転圏に定める関手 $C^{op} \rightarrow C'^{op}$ も F と書く。次の可換図式で、右上周りの合成関手を $\text{Hom}_{C'}(F(-), -) := \text{Hom}_{C'} \circ (F \times 1_{C'})$ と書き、左下周りの合成関手を $\text{Hom}_C(-, G(-)) := \text{Hom}_C \circ (1_C \times G)$ と書く。

$$\begin{array}{ccc} C^{op} \times C' & \xrightarrow{F \times 1_{C'}} & C'^{op} \times C' \\ \downarrow 1_{C^{op}} \times G & & \downarrow \text{Hom}_{C'} \\ C^{op} \times C & \xrightarrow{\text{Hom}_C} & \text{Set} \end{array}$$

定義 7.1.2 (adjoint). 関手 $C^{op} \times C' \rightarrow \text{Set}$ としての同型

$$\varphi : \text{Hom}_{C'}(F(-), -) \rightarrow \text{Hom}_C(-, G(-))$$

が存在するとき、 F は G の左随伴関手であるといい、 $F \dashv G$ と表す。

注 7.1.3 (adjunction, adjunct).

1. 次のようにも書く。

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ C & \xrightarrow{\quad} & C' \\ & \perp & \\ & G & \end{array}$$

2. 2 つの圏 C, C' の間の関手 $F : C' \leftarrow C, G : C \rightarrow C'$ が随伴 (**adjunction**) であるという。

3. このとき, 各 $c \in C, d \in D$ について, 次のような集合の同型が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hom}_D(d, G(c)) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{hom}_C(F(d), c) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f : d \rightarrow G(c) & \longmapsto & \bar{f} : F(d) \rightarrow c \end{array}$$

この Hom 集合間の集合の同型 (bijection) (のの一つ一つ) を **adjunction isomorphism** という. また, $X \in C, Y \in D$ として $f \in \mathrm{hom}_C(FY, X)$ に対して, D の射 $G(f) =: \bar{f}$ を随伴 (**adjunct**) という.

注 7.1.4 (名前の由来 [2]). Hom 関手 $\mathrm{Mor}_C : C^{op} \times C \rightarrow \mathrm{Set}$ と $\mathrm{Mor}_{C'} : C'^{op} \times C' \rightarrow \mathrm{Set}$ を非退化双線型形式 $V \times V \rightarrow K$ と $W \times W \rightarrow K$ のように考え, 関手 $G : C' \rightarrow C$ を線型写像 $f : W \rightarrow V$ のように考えると, 関手の同型 φ は f の右随伴写像 $f^* : V \rightarrow W$ を定義する式の左右を入れ替えたものに似ているので, F は G の左随伴関手と呼ばれる.

定義 7.1.5 (普遍射を用いた定義).

これは書くのが簡単で, 証明する場合には一番使いやすい定義となる. また, 最適化への応用へも一番近い.

定義 7.1.6 (余単位-単位随伴による定義).

命題 7.1.7. 定義??による随伴関手 (adjoint functor) は, 圏 Cat に於ける随伴 (adjunction) に等しい.

7.2 例

例 7.2.1 (集合).

7.3 左随伴関手を持つことの判定法

第 8 章

普遍性と極限

まず普遍性について考える。極限は、「普遍性による構成」に通底する共通性質を捉えた概念となる。普遍性や随伴を考える前に、米田の補題と表現可能性 (representability) を考え、言葉を用意する。

Representability is one of the most fundamental concepts of category theory, with close ties to the notion of adjoint functor and to the Yoneda lemma. It is the crucial concept underlying the idea of universal property; thus for example crucial concepts such as “limit”, “colimit”, “exponential object”, “Kan extension” and so on are naturally expressed in terms of representing objects. The concept permeates much of algebraic geometry and algebraic topology.^{†1}

8.1 種々の特別な対象

8.1.1 始対象／終対象の普遍性

命題 8.1.1 (始対象を持つ圏の特徴付け). 圏 C について、以下の 2 条件は同値。

1. 圏 C は始対象を持つ。
2. 関手 $C \rightarrow 1$ は右随伴 (right adjoint) を持つ。

この下で、圏 C の始対象は、終圏 (terminal object) 1 の唯一の対象 0 の、右随伴による像である。

8.1.2 自由対象の普遍性

定義 8.1.2 (自由モノイド). A を台集合とする。 $W(A) = A^* := {}^{<\omega}A$ を A 上の単語という。これは、文字列を結合する演算 $*$ について、空列 $-$ を単位元としてモノイドをなす。これを自由モノイドという。これを $M(A) = (A^*, *, -)$ とする。

$W(A)$ を Kleene closure といい、その上の結合 (concatenation) 演算 $*$ は Kleene star と呼ばれている。自由とは縛られていない、という気持ちだろう。これを厳密に、射の言葉で定義を与える。

定義 8.1.3 (自由対象の普遍性 (UMP: Universal Mapping Property of free monoid)). 集合の射 $i: A \rightarrow |M(A)|$ を包含写像とする。任意に取ったモノイド $N \in \mathbf{Mon}$ と、任意に取った写像 $f: A \rightarrow |N|$ の組について、それが定

^{†1} nLab の representable functor のエントリ

めるモノイドの射 $\bar{f}: M(A) \rightarrow N$ がただ一つ存在して $|\bar{f}| \circ i = f$ を満たす, という条件を, Universal Mapping Property of free monoid $M(A)$ という.

$$\begin{array}{ccc} M(A) & \xrightarrow{\bar{f}} & N \\ & \nearrow f & \\ A & \xrightarrow{i} & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{on Mon} \\ \\ \text{on Sets} \end{array}$$

定義 8.1.4 (自由群の普遍性). $U: \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ を忘却関手とする. 自由群 F_n とは, 任意の群 $G \in \text{Grp}$ に対して, 各 $f: n \rightarrow U(G)$ に対して $\bar{f}: F_n \rightarrow G \in \text{Grp}$ が存在して, 下図を可換にする $\phi: n \rightarrow U(F_n)$ が存在することを言う.

$$\begin{array}{ccc} U(F_n) & \xrightarrow{U(\bar{f})} & U(G) \\ \phi \uparrow & \nearrow f & \\ n & & \end{array}$$

命題 8.1.5. 定義 8.1.2 による自由モノイド $(A^*, *, -)$ は UMP を満たす.

[証明]. モノイド N と, そこへの射 $f: A \rightarrow N$ を勝手に取る. 次の2条件を満たすモノイドの射 $\bar{f}: A^* \rightarrow N$ を1つ定める.

$$\begin{cases} \bar{f}(-) & = e_N \\ \bar{f}(a_1 * \cdots * a_i) & = f(a_1)_N \cdots f(a_i)_N \end{cases}$$

すると, この \bar{f} は, 特に次を満たす.

$$\forall a \in A \quad f(a) = \bar{f}(a) \quad \cdots (*)$$

これを満たす写像 $\bar{f}: A^* \rightarrow N$ は, 一意である. 仮に $g: A^* \rightarrow N$ も $(*)$ を満たすモノイドの射であるとする. 勝手に取った $a \in A^*$ について, A^* は A から生成される自由モノイドだから何らかの $a_1, \dots, a_n \in A$ を用いて $a = a_1 * \cdots * a_n$ と表せるが, この知識を使うと

$$\begin{aligned} \bar{f}(a) &= \bar{f}(a_1 * \cdots * a_n) \\ &= f(a_1)_N \cdots f(a_n)_N \\ &= g(a_1)_N \cdots g(a_n)_N \quad (\because g \text{ も } (*) \text{ を満たす}) \\ &= g(a) \quad (\because g \text{ はモノイドの射}) \end{aligned}$$

従って, $\bar{f} = g$. 以上より, 射 \bar{f} の存在性と一意性が示せた. □

命題 8.1.6. 2つのモノイド M, N が, いずれも A 上の自由モノイド $M(A)$ としての普遍性を満たすとする. この時, $M \simeq N$ である. (ちなみに, 同型 $\varphi: M \rightarrow N$ は一意的である.)

これより, Kleene による構成に限らず, 自由モノイドを普遍性によって同型の違いを除いて定義出来たことになる.

[証明]. 命題 8.1.5 より, 次の Set 上の図式を可換にする \bar{i}, \bar{j} がただ一つ存在する.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & N & & \\
 & \nearrow i & \uparrow j & \nwarrow \bar{j} & \\
 M & \xleftarrow{i} & A & \xrightarrow{i} & M
 \end{array}$$

この時, $\bar{j} \circ \bar{i}: M \rightarrow M$ はこれもモノイドの射 (の台写像) であるが, 再び, $i = (\bar{j} \circ \bar{i}) \circ i \dots (*)$ を成り立たせるという普遍性を満たすような射である. また, 1_M も $(*)$ を満たすから, $\bar{j} \circ \bar{i} = 1_M$. 同様にして, $\bar{i} \circ \bar{j} = 1_N$ も得る. 従って, 同型 $\bar{i}: M \rightarrow N$ が一意に存在する. \square

例 8.1.7. $(\mathbb{N}, +)$ は $\{1\}$ を生成系とするモノイドであるが, これは任意の一点集合上の自由モノイドと同型.

8.2 直積

定義 8.2.1 (積の普遍性). A, B, C はある圏の対象とする. 次の条件を満たすとき, C は $A \times B$ と書かれる. 2つの射 $\pi_1: C \rightarrow A, \pi_2: C \rightarrow B$ が存在し, 各 $f_1: X \rightarrow A, f_2: X \rightarrow B$ について, 唯一つ $f: X \rightarrow C$ が存在して次の図式が可換になる.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
 A & \xleftarrow{\pi_1} & C & \xrightarrow{\pi_2} & B
 \end{array}$$

特に, これが集合の圏であった場合, $X = 1$ とした時の条件から, $\pi_1 \circ f = (f_1: X \rightarrow A) \simeq a$ より, 各 $(f: 1 \rightarrow C) \simeq (f_1, f_2) \simeq (a, b)$ であり, $f: 1 \rightarrow C$ のそれぞれとは, C の元 1 つ 1 つと一対一対応するから, $C = A \times B$ の各元は (a, b) と (少なくとも) 同一視できることは, 普遍性の主張に含まれていることがわかる.

8.2.1 デカルト圏

8.3 pullback

定義 8.3.1 (pullback の普遍性). 次のような図式 (cospan という) の極限である.

$$\begin{array}{ccc}
 a & & b \\
 & \searrow f & \swarrow g \\
 & c &
 \end{array}$$

span/roof/correspondence とは, relation の拡張概念であり, relation は「変数を持つ predicate」として, 元々 predicate の拡張概念であった. あるいは, $f = 1, g = 1$ の場合を考えれば, 「非対称性をなくした射」という拡張概念とも捉えられる.

定義 8.3.2 (span, roof, correspondences). 圏 C において, x から y への span とは, 次のような形をした図式のことである.

$$\begin{array}{ccc}
 & s & \\
 f \swarrow & & \searrow g \\
 x & & y
 \end{array}$$

8.4 テンソル

第 II 部

圏論の拡張

第 9 章

豊穣圏 (enriched category)

圏の定義の、集合論からの遊離とも捉えられる。射集合がベクトル空間や位相空間としてなどの追加の構造を備えている場合、即ち、射の集合としてホム集合と呼んでいた物が、特別 **Set** のではなく一般のモノイド圏の対象となるようなものでも良いとする拡張である。すると、今まで考えていた圏は、集合の直積をモノイド積として備えた集合の圏 (**Set**, \times , $\{\cdot\}$) で豊穣化された圏のことであると相対化される。

9.1 豊穣圏の定義

定義 9.1.1. K をモノイド圏とする。圏 C のホム集合が圏 K の対象となるとき $\text{Hom}_C(A, B) \in K$ (これをホム対象 (hom-objects) という)、この圏 C を K -圏 (**K-category**)、または K -豊穣圏 (**category enriched over/in K**) という。

第 10 章

2-圏

圏の圏 **Cat** についての考察を通じて、圏自体の定義を拡張し、今までの圏の定義 2.1.1 を 1-圏として相対化する枠組みを提供する。

Multidimensional mathematics is the mathematics of objects that belongs to 2-categories. which kind of generalizes the usual mathematics of sets & categories. (Vladimir Voevodsky)

10.1 2-圏の定義

2-圏の定義は 2 つあり、2-morphism の合成についての条件が違う。strict 2-category とは、デカルトモノイド圏 **Cat** 上の豊穡圏のことである。weak 2-category は、2-morphism の合成則を、同型の違いの範囲で許容する (weakly enriched over **Cat**)。

定義 10.1.1 (strict 2-category). 圏 C のホム集合 $\text{Hom}_C(A, B)$ のそれぞれ自身が圏と見做せる（これをホム圏 (hom-categories) という）とき、これを 2-圏と呼ぶ。このとき、ホム圏間の射（即ち関手）を 2-射 (2-morphism) といい、元々の意味での C の射を 1-射 (1-morphism) という。

定義 10.1.2 (weak/general 2-category / bicategory).

10.2 2-圏の例

前順序集合の圏 **Ord** は 2 つの意味で 2-圏である。まず、これが圏 2（対象の集合を 2 とし、射の集合は $0 \rightarrow 1$ のみを元とする一点集合、モノイド積は連言、モノイド単位は 1）上での豊穡圏であるから。あるいは、**Ord** の射は、点ごとの関係 $f \leq g : \iff \forall (f(x) \leq g(x))$ によって前順序集合をなすから、この意味で任意の n -圏と見做せるのではないか？次に、**Ord** の対象の 1 つ 1 つが圏とみなせ、2-射はその関手の間の射となる。

第 11 章

閉圏 (closed category)

閉圏とは、圏の上に closed structure と呼ばれる、内部 Hom 関手の構造が存在するような圏のことである。その構造とは、圏 C の対象 X, Y について、射の集合自体も圏 C の対象 $\text{hom}(X, Y) \in C$ と見做せることであり、この対象を内部 Hom (対象) (internal hom (object)) と呼ぶ。これを $[X, Y]$ ともかく。つまり、自身の豊穡圏と見做せるような圏であり、即ち内部 Hom とは、Hom 対象の特別な、内部である（同じ圏の中で見つかる）場合である。1 つの圏の中で話が済む、という意味での closed であろう。例えば **Set** はそうである。なお、閉圏の上の忘却関手 $U : C \rightarrow \mathbf{Set}$ は、内部 Hom 関手を外部 Hom 関手に写す。^{†1}

内部 Hom 関手は内部積関手の随伴関手である。簡単な例に引き寄せて言えば、集合 X との直積を取る行為は、定義域を X とする関数全体の集合を定めることの、左随伴 (left adjoint) である。これは、**Set** に直積をモノイド積と見なしたものが、デカルト閉圏をなす、と表現される。

11.1 閉圏の定義

定義 11.1.1 (closed category). 圏 C に対して、6-組 $(C, [-, -], I, i, j_X, L_{YZ}^X)$ が以下の条件を満たすとき、これを閉圏という。ただし、 $[-, -] : C^{op} \times C \rightarrow C$ は内部 Hom 関手 (internal hom-functor) と呼ばれる関手 ($[-, -]$ の代わりに、関手性を強調して \Rightarrow と書かれることや、 $\text{hom}(-, -)$ と書かれることもある)、 $I \in C$ は単位対象 (unit object) と呼ばれる対象、 $i : id_C \simeq [I, -]$ は関手の同型、 $j_X : I \rightarrow [X, X]$ は

11.2 デカルト閉圏 (cartesian closed category)

モノイド積が通常の積である時のモノイド閉圏をデカルト閉圏という。この時の内部 Hom を、冪対象と呼ぶ。即ち、圏 C が、直積を取るという内部 Hom 関手が定義できており、デカルト閉圏では、内部 Hom 対象 $[X, Y]$ を X^Y と書き、これを特に指数対象／冪対象 (exponential object) と呼ぶ。

11.2.1 デカルト閉圏の例

Set に集合の直積をモノイド積としたものはデカルト閉圏であるが、この圏での指数対象は配置集合 (function set) となる。

^{†1} Hom 関手の wikipedia page

Cat に圏の積をモノイド積としたものもデカルト閉圏になる．この圏での冪対象は関手の圏 $[C, D]$ または D^C である．

定義 11.2.1 (exponential object). 圏 C 上に、積と呼ばれる双関手 $C \times C \rightarrow C$ が定義されているとする．このとき、 $X, Y \in C$ の冪対象とは、任意の対象 $Z \in C$ と射 $e: Z \times Y \rightarrow X$ と射 $\text{ev}: X^Y \times Y \rightarrow X$ について、次の図式を可換にするような射 $u: Z \rightarrow X^Y$ が存在するような対象 X^Y のことである．

$$\begin{array}{ccc} Z \times Y & \xrightarrow{u \times 1_Y} & X^Y \times Y \\ & \searrow e & \downarrow \text{ev} \\ & & X \end{array}$$

この射 u を **exponential transpose** や e のカリリー化 (**currying**) などという．また、ラムダ計算では $\lambda(e)$ や e^\flat などと書かれることもある．

冪対象 X^Y が圏 C 内に存在する時、これを X は Y を冪化する (**X exponentiates Y**) という．対象 Y が、全ての X に対して冪対象 X^Y を圏の内部に持つ時、この対象 Y のことを冪化可能 (**exponentiable / powerful**) という．

定義 11.2.2 (cartesian closed). 圏 C が終対象をもち、全ての対象が冪化可能 (exponentiable) である時、この圏をデカルト閉圏 (ccc) であるという．

第 12 章

モノイド圏 (Monoidal category)

モノイド圏とは、圏の上に、monoidal structure と呼ばれる付加的な構造が存在するような圏のことである。モノイド圏においては、内部 Hom 関手は内部積関手の随伴関手である。元々は、こちらの流儀で、その名残が Gray tensor product と Abelian groups の例に残っている。^{†1}

12.1 モノイド圏の定義

定義 12.1.1 (Monoidal category / tensor category). モノイド圏とは、次の条件を満たす 6-組 $(\mathbf{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ である。ただし、 \mathbf{C} は圏、 $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ はテンソル積またはモノイド積と呼ばれる双関手（内部積関手 (**internal product functor**) と呼ぶ）、 $I \in \mathbf{C}$ はモノイド単位または単位対象と呼ばれる圏 \mathbf{C} の対象であり、 α, λ, ρ は関手の同型である。

1. [緩められた結合律] 2つの関手 $(- \otimes -) \otimes -$, $- \otimes (- \otimes -) : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ の間に結合子 (**associator**) と呼ばれる関手の同型 α が存在する。即ち、各対象 $A, B, C \in \mathbf{C}$ に対する成分が、 \mathbf{C} 上の同型

$$\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \simeq A \otimes (B \otimes C)$$

である。

2. [緩められた単位律] 2つの関手 $I \otimes -$ と $1_{\mathbf{C}}$ の間に、夫々左単位子、右単位子 (**unit**) と呼ばれる互いに逆向きの関手の同型 λ, ρ が存在する。即ち、各対象 $A \in \mathbf{C}$ に対して、 λ, ρ 成分は夫々

$$\lambda_A : I \otimes A \simeq A, \quad \rho_A : A \otimes I \simeq A$$

である。

3. [整合性条件 (coherence condition)] これら 3つの関手の同型 α, λ, ρ について、次の図式 12.1, 12.2 は任意の対象 $A, B, C, D \in \mathbf{C}$ について可換である。また、3つの関手の射 α, λ, ρ が恒等射であった場合（即ち、結合律と単位律が同型ではなく、相等関係として成立する場合）、この 6-組を特に強モノイド圏 (**strict monoidal category**) という。

なぜ、整合性条件の必要性が発生するのだろうか。

^{†1} nLab の closed+category のエントリ

図 12.1 これはなんだ. pentagon identity と呼ばれる 4 項の間の結合性についての条件で, これが成り立れば任意の $n \in \mathbb{N}$ について整合的な結合性が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C} \otimes 1_D} & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \xrightarrow{\alpha_{A,B \otimes C,D}} A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \\
 \downarrow \alpha_{A \otimes B,C,D} & & \downarrow 1_A \otimes \alpha_{B,C,D} \\
 ((A \otimes B) \otimes (C \otimes D)) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C \otimes D}} & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
 \end{array}$$

図 12.2 何もわからん. triangle identity と呼ばれる.

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes I) \otimes B & \xrightarrow{\alpha_{A,I,B}} & A \otimes (I \otimes B) \\
 \searrow \rho_A \otimes 1_B & & \swarrow 1_A \otimes \lambda_B \\
 & A \otimes B &
 \end{array}$$

12.2 モノイド圏の例

12.2.1 デカルトモノイド圏

直積の概念は, モノイド積/テンソル積の良い雛型であるようだ. 一般に, 有限積を持つデカルト圏は, いずれも積をモノイド積, 終対象を単位対象として, モノイド圏を成す. これをデカルトモノイド圏 (**cartesian (monoidal) category**) という.

集合の圏 **Set** は直積をモノイド積, 一元集合を単位対象とすると, モノイド圏をなす.

圏の圏 **Cat** は, 圏の直積をモノイド積, 単対象離散圏を単位対象とするモノイド圏を成す.

12.3 モノイド同値

12.4 閉モノイド圏 (closed monoidal category)

定義 12.4.1 (closed monoidal category). モノイド圏 C が, 閉モノイド圏であるとは, $X \in C$ を任意の対象として, 対象 X とのテンソル積を取る関手 $- \otimes X : C \rightarrow C$ が, X との内部 Hom 集合を取る関手 $[X, -] : C \rightarrow C$ を右随伴として持つこと, 即ち次の全単射 (adjunction) Φ が各 $A, B \in C$ について存在することを言う.

$$\Phi_{A,B} : \text{Hom}_C(A \otimes X, B) \simeq \text{Hom}_C(A, X \Rightarrow B) = \text{Hom}_C(A, [X, B])$$

なお, これをカーリー化 (**currying**) という.

命題 12.4.2. 任意のモノイド圏は, 或る強モノイド圏とモノイド同値である.

これは圏論の結果から自然に類推される.

第 III 部

層 (sheaf)

第 13 章

Introduction

幾何学とは形を捉える数学の三大分野の一つである．例をあげよう．

$$\begin{aligned}\text{球面 } S^2 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\ \text{トーラス } T^2 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}\end{aligned}$$

とすると、 S^2 と T^2 は位相空間としては同相ではない．これを「大域的に違う」と表現する．しかし、 S^2 も T^2 も、その曲面の一部を取り出すと似ている．これを「局所的には同じ」と表現する．この大域と局所のズレを捉える、非常に自然な物の見方が「層 (sheaf)」である．

13.1 これが圏論の上で行われる理由

集合は、1つ1つバラバラな元の集まりを、ひとつの全体として捉える．しかし、この2元的な見方のいずれかの極しかないとなると、その間の微妙な関係が見えてこない．ということで、全体と個別の間に中間的なものを設定する、という発想が開集合系とそれによる位相空間の定義であり、これが幾何学の基礎となっていた．

連続写像と、以下の2つの性質を持つ．

連続写像の性質

- 1 : 全体上で定義された連続写像は、定義域を狭めて制限しても連続写像である．
- 2 : 局所的に定義された連続写像は、その定義域を全体に拡張しても連続写像になる．

第 14 章

位相空間と連続写像

すでに慣れている Euclid 空間での議論を経て、位相空間と連続写像の概念を、集合論的観点から要素を抽出して定義し直すやり方は、圏論的に「圏と射」の関係として見直せることを説明する。

14.1 Euclid 空間での開集合の定義から、特徴づけを導く

定義 14.1.1 (Euclid 空間上の開集合の, $\varepsilon - \delta$ 論法による定義). 平面 \mathbb{R}^2 の部分集合 U が開集合であるとは, U 内の任意の点 (s, t) に対し, 実数 $r > 0$ であって, $U_r(s, t) \subset U$ となるものが存在するという事. 但し, $U_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-s)^2 + (y-t)^2 < r^2\}$ とする.

定義 14.1.2 (連続写像の, $\varepsilon - \delta$ 論法による定義). U, V を平面 \mathbb{R}^2 の開部分集合とする. $f: U \rightarrow V$ が連続写像であるとは, U の任意の点 (s, t) と任意の実数 $q > 0$ に対して, 実数 $r > 0$ であって,

$$U_r(s, t) \subset U \wedge f(U_r(s, t)) \subset U_q(f(s, t))$$

となるようなものが存在することである.

以上見て来た Euclid 空間上での $\varepsilon - \delta$ 論法による定義は, 距離の概念を使用して, 些か直感的に定義している. 例えば

$$d((x, y), (s, t)) := \sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}$$

と置くと, f が連続写像であるとは,

$$d((x, y), (s, t)) < r \rightarrow d(f(x, y), f(s, t)) < q$$

を充たすことである. これは「 V で近い点は U でもどこまでも近い」という感覚に非常に合致した定義だと言える.

しかし, このように距離の言葉に翻訳しなくても連続の概念は定義出来る, というのがミソなのであった.

定義 14.1.3 (連続写像の特徴付け). $U, V \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とする. 写像 $f: U \rightarrow V$ に対して, 次の条件 (1), (2) は同値である.

(1) f は連続である.

(2) V に含まれる \mathbb{R}^2 の任意の開集合 W に対して, その f による逆像 $f^{-1}(W)$ は U に含まれる \mathbb{R}^2 の開集合である.

〔証明〕. (1)→(2)

$W \subset V$ を \mathbb{R}^2 の開集合とする. U 上の点 $(s, t) \in f^{-1}(W)$ を任意に取る. すると, 定義上, $f(s, t) \in W \subset V$ となる. 従って点 $f(s, t)$ は開集合 W 内部の点だから, 実数 $q > 0$ が存在して, $U_q(f(s, t)) \subset W$ を満たす. 続いて f は連続なので, $f(U_r(s, t)) \subset U_q(f(s, t)) (\subset W)$ となる実数 $r > 0$ が存在する. 従って, 写像は包含関係を保存する射だから, $U_r(s, t) \subset f^{-1}(W)$ を得る. 点 (s, t) は任意に取ったから, 逆像 $f^{-1}(W)$ は \mathbb{R}^2 上の開集合である.

(2)→(1)

U 内の任意の点 (s, t) と実数 $q > 0$ を任意に取る. V は開集合で, $f(s, t) \in V$ だから, $q' > 0$ であって $U_{q'}(f(s, t)) \subset V$ となるような実数が存在する. $q' > q$ だったならば $q' = q$ と置き換えることにより, 一般に $q' \leq q$ として良い. W を $U_{q'}(f(s, t))$ として (2) を適用すると, この逆像 $f^{-1}(U_{q'}(f(s, t)))$ は開集合になる. $q > 0$ だから勿論 $(s, t) \in f^{-1}(U_{q'}(f(s, t)))$ であるから, 実数 $r > 0$ であって $U_r(s, t) \subset f^{-1}(U_{q'}(f(s, t))) \subset f^{-1}(U_q(f(s, t))) (\because q' \leq q)$ となるものが存在する. よって, $f(U_r(s, t)) \subset U_q(f(s, t))$ を得る. 従って f は連続写像. □

命題 14.1.4 (Euclid 空間の開集合の集合演算に対する性質). 1, $(U_i)_{i \in I}$ を \mathbb{R}^2 の開集合の族とすると, 合併 $\bigcup_{i \in I} U_i$ も開集合となる.

2, $(U_i)_{i \in I}$ を \mathbb{R}^2 の開集合の有限族とすると, 共通部分 $\bigcap_{i \in I} U_i$ も開集合となる.

但し, 合併とは $\bigcup_{i \in I} U_i := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists i \in I \text{ s.t. } (x, y) \in U_i\}$ を意味し, 共通部分とは $\bigcap_{i \in I} U_i := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall i \in I [i \in I \rightarrow (x, y) \in U_i]\}$ を意味する.

こう見ると, 合併と共通部分は, \forall と \exists との双対に基づいた, 明らかな双対概念だなぁ.

I が 2 元集合, 例えば $I = 1, 2$ の時, $U_1 \cup U_2$ や $U_1 \cap U_2$ などと, 中置記法で書く. $I = \emptyset$ の時, $\bigcup_{i \in \emptyset} U_i = \emptyset$ とする (零和). 一方零積は, 下線部の前提条件が常に偽だから, $\bigcap_{i \in \emptyset} U_i = \mathbb{R}^2$ (普遍集合) と約束する.

〔証明〕. □

14.2 位相空間を, 特徴付けだった方を公理として定義する

これらを用いて, 次のように位相空間を定義する.

定義 14.2.1 (位相空間). X を集合とする. X の冪集合 \mathcal{P} の部分集合 \mathcal{O} が次の条件 (1),(2) を満たす時, \mathcal{O} は X の位相であるという.

(1) $(U_i)_{i \in I}$ が \mathcal{O} に属する X の部分集合の族ならば, 合併 $\bigcup_{i \in I} U_i$ も \mathcal{O} の元である. なお特に, $\bigcup_{i \in \emptyset} U_i = \emptyset \in \mathcal{O}$ である.

(2) $(U_i)_{i \in I}$ が \mathcal{O} に属する X の部分集合の有限族ならば, 共通部分 $\bigcap_{i \in I} U_i$ も \mathcal{O} の元である. なお特に,

$$\bigcap_{i \in \emptyset} U_i = X \in \mathcal{O} \text{ である}$$

集合 X に対 (X, \mathcal{O}) が指定されている時, この X を位相空間と呼び, この \mathcal{O} を X の開集合系, \mathcal{O} の元を X の開集合という.

14.2.1 例 1 : Euclid 空間

$X = \mathbb{R}^2, \mathcal{O} = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) | U \text{ は } \mathbb{R}^2 \text{ の開集合である.}\}$ と定めると, \mathcal{O} は \mathbb{R}^2 の位相となっている. \therefore 命題 14.1.4

14.2.2 例 2 : 離散 (位相) 空間

集合 X に対して, $\mathcal{P}(X)$ は位相になる. こうして生成した位相空間を離散位相空間という.

14.2.3 例 3 : 2 元集合の位相

$\mathbb{S} = \{0, 1\}$ とする (一次元球面). $\mathcal{O} = \{\emptyset, \mathbb{S}, \{1\}\} = \mathcal{P}(\mathbb{S}) - \{0\}$ は \mathbb{S} の位相となる.

14.3 部分位相空間

X を位相空間とし, \mathcal{O} をその位相とする. X の部分集合 A に対して, 位相 \mathcal{O} の各元の A との共通部分を取ったものからなる集合 $\mathcal{O}_A := \{U \cap A | U \in \mathcal{O}\}$ は A の位相になる.

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) &= (\bigcup_{i \in I} U_i) \cap A \\ \bigcap_{i \in I} (U_i \cap A) &= (\bigcap_{i \in I} U_i) \cap A \end{aligned}$$

より, 確かに 2 つの公理を満たす. この位相 \mathcal{O}_A によって部分集合 A を位相空間とみなした場合, これを部分位相空間という.

A が X の開集合だった場合, 即ち, $A \in \mathcal{O}$ であった場合, $\mathcal{O}_A = \{U \in \mathcal{O} | U \subset A\}$ でもある. つまり, 「 A の部分集合である X の開集合」と「 A を X の部分位相空間と考えた時の開集合」とは常に一致する.

\supset は U を A の部分集合かつ \mathcal{O} の元とすれば, $U \cap A = U$ なので, 確かに $U \in \mathcal{O}_A$. 一方 \subset は, $U \in \mathcal{O}_A$ とすると, A は開集合だから, 命題 14.1.4(2) より開集合同士の合併は開集合で, $U \cap A \in \mathcal{O}$. なお, $U \in \mathcal{O}_A$ としたから明らかに $U \subset A$.

例: S^2 や T^2 は \mathbb{R}^3 の部分位相空間である.

14.4 連続写像

定義 14.4.1 (連続写像). X, Y を位相空間とし, O_X, O_Y を其々の位相とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続写像であるとは, $V \subset Y$ が Y の開集合ならば, その逆像 $f^{-1}(V) (\subset X)$ が X の開集合であることを言う.

特に X, Y が \mathbb{R}^2 の開集合であった場合, これは命題 14.1.4 と合致する.

参考文献

- [1] 志甫淳『層とホモロジー代数』（共立出版，2016）
- [2] 斎藤毅『数学原論』（東京大学出版会，2020）