微分積分学 石毛和弘 * 講義ノート

司馬博文 J4-190549
hirofumi-shiba48@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

2019 年 9 月 30 日

概要

微分積分学②では，まず（２変数の）偏微分とその応用を復習してから，１変数関数の積分，次に多変数関数の積分へと進む．Jacobian の計算などが，後期試験の花形になるであろう．最後に級数に触れて，微分積分学②の講義は締めくくられる．絶対収束という概念を導入して，より詳しく収束を議論する．

第 I 部 偏微分とその応用

1 復習

1.1 開集合と閉集合の概念

定義 1. $D \subset \mathbb{R}$，$P \in D$
1, P が D の内点である $\iff \exists r > 0\,\mathrm{s.t.}\, B(P,r) := \{Q \in \mathbb{R}^2 | d(P,Q) < R\} \subset D$
　∗ただし，d とは距離函数で，$d(P,Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2} = |P - Q|$
2, P が D の外点である $\iff \exists r > 0\,\mathrm{s.t.}\, B(P,r) \cap D = \emptyset$
$\iff P$ が D^c の内点.
3, P が D の境界点である $\iff \exists r > 0\,\mathrm{s.t.}\, B(P,r) \cap D \neq \emptyset B(P,r) \cap D^c \neq \emptyset$

∗ D の境界点が全て D に含まれる $\Longrightarrow$D は閉集合．D の境界点が全て D に含まれない $\Longrightarrow$D は開集合．(D が開集合 $\iff D^c$ が閉集合.
∗微積分学の考察対象は大体全て「領域」で定義されている．

定義 2 (連結・領域)**.** D の任意の点 P,Q に対して，P,Q を結ぶ D 内の曲線が存在する時，D を（弧状）連結という．特に，D が開集合でもある時に，これを「領域」という．

定義 3 (点列)**.** $\mathbb{R}^2$ 上の点列 $\{Pn\}$ が，$P \in \mathbb{R}^2$ に収束する，とは，

$$\lim_{n\to\infty} d(Pn,P) = 0 \text{（これを} \lim_{n\to\infty} Pn = P \text{とも書く.}$$

∗点列の極限は，存在すればただ一つである．
∗収束する点列は有界である．
∗収束列の全ての部分列は，同じ極限点に収束する．

定理 1 (Bolzano-Weierstrass の定理)**.** *(*$\mathbb{R}^2$ 上の*)* 有界な点列は，収束する部分列を持つ．

定理 2 (Cauchy 列は収束する)**.** 点列 $\{Pn\}$ が収束列であることと，点列 $\{Pn\}$ が *Cauchy* 列であることは，$\mathbb{R}^n$ 上では同値である．

* メールアドレスは ishige@ms.u-tokyo.ac.jp

ただし，*Cauchy* 列であるとは，点列が

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} d(Pn, Pm) < \epsilon$$

を満たすこと．

∗ (remark)D が開集合 $\Longleftrightarrow$ D から取り出した収束列の極限点は，必ず D に属する．

定義 4 (連続性)**.** $D \subset \mathbb{R}^2$ を集合，$f : D \Longrightarrow \mathbb{R}$ を写像，$P_0 \in \mathbb{R}^2, l \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 \forall P \in D 0 < d(P, P_0) < \delta \Longrightarrow |f(P) - l| < \epsilon$$

特に，$P_0 \in D, l = f(P_0)$ である時，f は点 P で連続であるという．

定理 3 (最大値・最小値定理)**.** D を有界閉集合，f を D 上連続な関数とすると，f は D 上有界であり，その最大値と最小値を D の上に取る．

定義 5 (偏微分)**.** f を点 (x_0, y_0) の近傍で定義された関数とする．

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

同様にして，$\frac{\partial}{\partial y} f$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f$ $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f$ を定義する．

定理 4 (Schwarz の定理)**.** 点 (a, b) の周りで，f_x, f_y, f_{xy} が存在し，f_{xy} が (a, b) にて連続ならば，$f_{yx}(a, b)$ は存在し，$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ を満たす．

Proof. $\varphi(x, y) := f(x, y) - f(x, b)$ と置く．十分小さい $h, k > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\varphi(a + h, b + k) - \varphi(a, b + k) \\
&\qquad = \varphi_x(a + \theta h, b + k)h (0 < \exists\theta < 1) \\
&\qquad = [f_x(a + \theta h, b + k) - f_x(a + \theta h, b)]\, h \\
&\qquad = f_{xy}(a + \theta h, b + \theta' k)hk (0 < \exists\theta' < 1)
\end{aligned}$$

一方，φ の定義より，

$$\lim_{k \to 0} \frac{\varphi(x, b + k)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, b + k) - f(x, b)}{k} = f_y(x, b)$$

よって，

$$f_y(a + h, b) - f_y(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{\varphi(a + h, b + k) - \varphi(a, b + k)}{k} = h \lim_{h \to 0} f_{xy}(a + \theta h, b + \theta' h)$$

故に，

$$\begin{aligned}
f_{yx}(a, b) &= \lim_{h \to 0} \lim_{k \to 0} f_{xy}(a + \theta h, b + \theta' h) \\
&= f_{xy}(a, b) \qquad f_{xy}\text{の点 } (a, b) \text{ での連続性より}
\end{aligned}$$

□

定義 6 (全微分可能性)**.** f を点 (a, b) の近傍で定義された関数とする．f が点 (a, b) で全微分可能であるとは，$\exists A, B \in \mathbb{R} \text{s.t.} f(a + h, b + k) - f(a, b) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})\,((h, k) \to (0, 0))$ と定義する．

∗ f が点 (a, b) で全微分可能
$\Longrightarrow$ f は点 (a, b) で偏微分可能
$\Longrightarrow$ $A = f_x(a, b), B = f_y(a, b)$

命題 4.1. f_x, f_y が存在し，f_x または f_y が連続．この時，f は全微分可能である．

∗特に，f が C^1 級の関数ならば，十分に全微分可能である．

定理 5 (Chain Rule)**.** $z = f(x, y), x = x(u, v), y = y(u, v)$ の時，

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

が成り立つ．

定理 6 (Taylor の定理). f:領域 D 上の C^n 級関数 $(n = 1, 2, ...)$
線分 $\{(a+ht, b+kt) | 0 < t < 1\}$ が D に含まれているとする．ここで，$F(t) := f(a+th, b+tk)$ と置くと，

$$f(a+h, b+k) = F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + ... + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!} = f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a,b) + ... + \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

定理 7 (陰関数定理). $F = F(x, y)$:点 (a, b) の近傍で定義された C^1 級関数．点 (a, b) において，$F(a, b) = 0, F_y(a, b) \neq 0$ とする．この時，$\exists I$:点 a を含む閉区間 $\exists \delta > 0 s.t. \forall x \in I$ に対して $F(x, y) = 0, |y - b| < \delta$ を満たす．y は唯一つ，この I 上の関数 $y = f(x)$ は C^1 級関数であり，

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

2　極限

問：周の長さが一定 $(= 2s)$ の三角形のうちで，面積最大のものは正三角形であることを示せ．

Proof. 三角形の三辺の長さを x, y, z とする．対応する三角形の面積を S とすると，Heron の公式より，

$$S^2 = s(s-x)(s-y)(s-z)(2s = x+y+z) = s(s-x)(s-y)(x+y-s)$$

である．$f(x, y) = (s-x)(s-y)(x+y-s)$ と置く．x, y が動く範囲は

$$D := \{(x, y) | s - x > 0, s - y > 0 x + y - s > 0\}$$

であるが，f に最大値が存在するには，D が閉集合でなくてはならない（すでに有界ではある）．D の拡張 $\overline{D}$,

$$\overline{D} := \{(x, y) | s - x \geq 0, s - y \geq 0, x + y - s \geq 0\}$$

上で f を考える．$\overline{D}$ は有界閉集合で，f はその上で連続であるから，最大値最小値定理 3 より，f は $\overline{D}$ 上で最大値を取る．f は D 上正，D の境界点上で零なので，最大値を取る点は $\overline{D}$ の内点，つまり D 上で取る．その点を $(x, y) \in D$ とすると，

$$f_x(x, y) = -(s-y)(x+y-s) + (s-x)(s-y) = 0 f_y(x, y) = -(s-x)(x+y-s) + (s-x)(s-y) = 0 \Longrightarrow x = y = z$$

よって，面積の最大値を与える三角形は正三角形である．　□