常微分方程式レポート（担当：平地健吾先生）

司馬博文 J4-190549

2020 年 7 月 16 日

[1]

(1)

$$\frac{dy}{dx}(x) = y + y^2 = y(y+1) =: f(x,y)$$

と置くと，f は $\mathbb{R}$ 上 C^1 級なので，$\mathbb{R}$ 上 Lipschitz 連続である．$y \equiv 0, -1$ は解だから，以降 $y(y+1)$ は決して 0 にならないとすると，

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}(x) = y + y^2 \\
\Leftrightarrow &\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right) dy = \int dx \\
\Leftrightarrow &\log\left|\frac{y}{1+y}\right| = x + C \\
\Leftrightarrow &\frac{y}{1+y} = Ae^x \ (A := e^C > 0) \\
\Leftrightarrow &y = \frac{Ae^x}{Ae^x - 1} \ (A \in \mathbb{R}_{>0}, x \neq -\log A)
\end{aligned}$$

よって解は，$y \equiv 0, -1$ と併せて，

$$y = \frac{Ae^x}{Ae^x - 1} \ (A \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, x \neq -\log A)$$

(2) 方程式 $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2$ は，$1+x^2, 1+y^2 \geq 1 > 0$ より，$\dfrac{1}{1+y^2}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$ と変形できる．従って，両辺 x で積分すると，$\arctan y = \arctan x + C \ (C \in \mathbb{R})$．よって，$y = \tan(\arctan(x) + C) \ (C \in \mathbb{R})$．

(3) 方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y^2}{2xy}$ に対応する全微分方程式は $\omega := 2xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$ である．いま，$d\omega = 2y\,dx \wedge dy + 2y\,dy \wedge dx = 0$ よりポテンシャル $F(x,y)$ は存在し，$F(x,y) = y^2x - \dfrac{x^3}{3} + C \ (C \in \mathbb{R})$ である．従って，所与の微分方程式は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} \\
\Leftrightarrow &\frac{d}{dx}\left(y^2x - \frac{x^3}{3}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow &3y^2x - x^3 = C \ (C \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

よって解は $y=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^3+C}{x}}$ $(C\in\mathbb{R})$ 但し定義域は $\{x\in\mathbb{R}\mid x>\max\{0,-\sqrt[3]{c}\}\vee x<\min\{0,-\sqrt[3]{c}\}\}$.

(4)

[2]

斉次線型微分方程式 $\frac{dy}{dx}=2xy$ の解は $y=Ce^{x^2}$ $(C\in\mathbb{R})$ である．ここで $C=z(x)$ と置くと，$y=z(x)e^{x^2}$ で，$\frac{dy}{dx}=z'(x)e^{x^2}+2xy$ となるから，$\frac{dz}{dx}(x)=\frac{xe^{-x^2}}{e^{x^2}}$ を解けば良い．これは変数分離系の微分方程式だから，

$$\begin{aligned}&\frac{dz}{dx}=xe^{-2x^2}\\ \Leftrightarrow &z=-\frac{e^{-2x^2}}{4}+C\ (C\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

$\lim_{|x|\to\infty}y=0$ の時，$y=z(x)e^{x^2}$ と定めたから $z\to 0\ (|x|\to\infty)$ である．従って $C=0$．この時，$z=\frac{e^{-2x^2}}{4}$ より，$y(x)=z(x)e^{x^2}=-\frac{e^{-x^2}}{4}$.

[3]

(a) $U(x,y)=x^2y+\sin y+C\ (C\in\mathbb{R})$

(b) 積分因子 μ を，x のみの関数 $\mu=\mu(x)$ とする．$\omega:=(x^2-y^2)\,dx+2xy\,dy$ に対して $d(\mu\omega)=0$ となれば良いから，自明な積分因子 $\mu\equiv 0$ を無視して

$$\begin{aligned}&d(\mu\omega)=0\\ \Leftrightarrow &\frac{d\mu}{dx}(x)=-\frac{2\mu(x)}{x}\ (x\neq 0\text{ の時})\\ \Leftrightarrow &\mu(x)=\frac{1}{x^2}+C\ (x\neq 0)\end{aligned}$$

と計算できるから，例えば関数 $\mu(x)=\frac{1}{x^2}\ (x\neq 0)$ は積分因子である．この下で $\mu\omega=\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy=0$ のポテンシャルは $F(x,y)=\frac{y^2}{x}+x+C\ (C\in\mathbb{R})$ である．従って，求める解は $y=\sqrt{-x^2+xC}\ (C\in\mathbb{R})$ 但しこの関数の定義域は $\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<C\vee C<x<0\}$

[4]

(1) $(D+2)(D+1)y=\cos x$ を，二段階 $(D+2)y=y_1,(D+1)y_1=\cos x$ に分けて解く．$y_1=a\cos x+b\sin x\ (a,b\in\mathbb{R})$ と置くと，$(D+1)y_1=(b-a)\sin x+(a+b)\cos x$ であるから，$a=b=\frac{1}{2}$ を得る．よって，$y_1=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$．続いて，$y=a\cos x+b\sin x\ (a,b\in\mathbb{R})$ と置くと，$(D+2)y=(2b-a)\sin x+(2a+b)\cos x$ より，$a=\frac{1}{10},b=\frac{3}{10}$ を得る．よって，特殊解 $y=\cos x+3\sin x$ を得る．これを $(D+2)(D+1)y=0$ の基本解 e^{-x},e^{-2x} と併せて，一般解は

$$y=\cos x+3\sin x+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}\ (C_1,C_2\in\mathbb{R})$$

(2) $(D-3)(D+1)y=x^2$ を，$(D-3)y=y_1, (D+1)y_1=x^2$ に分けて求める．$y_1=ax^2+bx+c$ と置くと，$y_1'=2ax+b$ より，$(D+1)y_1=ax^2+(2a+b)x+b+c$ となるから，$a=1, b=-2, c=2$ を得る．同様に $y=ax^2+bx+c$ と置くと，$(D-3)y=-3ax^2+(2a-3b)x+b-3c$ となるから，$a=-\dfrac{1}{3}, b=\dfrac{4}{9}, c=-\dfrac{14}{27}$ より，特殊解は $y=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{4}{9}x-\dfrac{14}{27}$ である．よって，$(D-3)(D+1)y=0$ の基本解 e^{-x}, e^{3x} と併せて，一般解は次のとおり．

$$y=-9x^2+12x-14+C_1e^{-x}+C_2e^{3x}\ (C_1, C_2\in\mathbb{R})$$

[8]

$\mathbb{R}^2$-値関数 $y(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x)\end{pmatrix}$ に関する所与の常微分方程式を，関数 $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を用いて次のように置く．

$$\frac{dy}{dx}(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{df_1}{dx}(x) \\ \dfrac{df_2}{dx}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_2(x) \\ -f_1(x)\end{pmatrix}=: F(x,y)$$

$$y(0)=\begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}$$

(a) $n=1,2,\cdots$ について，関数 $y_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $y_n(x)=y_0+\int_0^x F(t,y_{n-1})dt\ (n=1,2,\cdots)$ と置く．これを順番に計算すると，

$$\begin{aligned}
y_1(x)&=\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}+\int_0^x F(t,y_0)dt \\
&=\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}+\int_0^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}dt \\
&=\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 1\end{pmatrix} \\
y_2(x)&=\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}+\int_0^x F(t,y_1)dt \\
&=\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}+\int_0^x \begin{pmatrix} 1 \\ -t\end{pmatrix}dt \\
&=\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x \\ -\dfrac{x^2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 1-\dfrac{x^2}{2}\end{pmatrix} \\
y_3(x)&=\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}+\int_0^x F(t,y_2)dt \\
&=\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}+\int_0^x \begin{pmatrix} 1-\dfrac{t^2}{2} \\ -t\end{pmatrix}dt \\
&=\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x-\dfrac{x^3}{6} \\ -\dfrac{x^2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-\dfrac{x^3}{6} \\ 1-\dfrac{x^2}{2}\end{pmatrix}dt \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

より，一般項 y_n は

$$y_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{x^n}{n!} \\ 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}, & (n \text{ is odd}), \\ \begin{pmatrix} x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \dfrac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} \\ 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} \dfrac{x^n}{n!} \end{pmatrix}, & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

と表される．この時，y_n の各成分を $y_n = \begin{pmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \end{pmatrix}$ と置くと，これらは各 $x \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{n,m\to\infty} |y_n^i(x) - y_m^i(x)| = 0$ $(i = 1,2)$ が成り立つから，確かに関数列 $\{y_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は任意の $x \in \mathbb{R}$ について $n \to \infty$ とした時に収束する．収束先の関数 $\lim_{n\to\infty} y_n =: f$ は

$$f(x) = \begin{pmatrix} x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\ 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{pmatrix}$$

と表せる．

(b) まず次を示す．

補題. 関数列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は任意の開区間 $(-a,a)$ (但し $a > 0$) 上で f に一様収束する．

［証明］**.**

$$|y_n - y_{n-1}| = \begin{cases} \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{x^n}{n!} \\ 0 \end{pmatrix}, & (n \text{ is odd}), \\ \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \dfrac{x^n}{n!} \end{pmatrix}, & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

であるから，$|y_n - y_{n-1}| \leq \dfrac{x^n}{n!}$ より，$m > n$ について

$$\begin{aligned} |y_m - y_n| &\leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{x^k}{k!} \\ &< \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a^k}{k!} \ (\because |x| < a) \end{aligned}$$

と評価できるから，n を十分大きく，特に $n \geq 2a \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{a}{n}$ と取れば，$\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{a}{n} > \dfrac{a}{n+1} > \dfrac{a}{n+2} > \cdots > \dfrac{a}{m}$ だから，

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a^k}{k!} &\leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{1}{2^k} \\ &\leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2 \end{aligned}$$

いま $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}=0$ だから，次が成り立つ．

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall x\in(-a,a),\ m,n\geq N\Rightarrow|y_m(x)-y_n(x)|<\varepsilon$$

即ち，関数列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $(-a,a)$ 上一様収束する． □

さて，関数 f の成分を $f=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}$ と置く．各 $x\in\mathbb{R}$ についてそれを含む適切な開集合を取ると，補題より関数列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はその上で一様収束するから，この関数 $f=\lim_{n\to\infty}y_n$ を x で微分すると，次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\frac{df_1}{dx}&=\frac{d}{dx}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right)\\
&=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=f_2\\
\frac{df_2}{dx}&=\frac{d}{dx}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)\\
&=-x+\frac{x^3}{3!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots=-f_1
\end{aligned}$$

従って，f は確かに所与の微分方程式の解である．

また，微分可能性も全く同様に，任意の $x\in\mathbb{R}$ について，それを含む開区間で一様収束するから，各 y_n が x で微分可能であったから f も x で微分可能で，導関数は次のように表される．

$$\frac{df}{dx}(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{dy_n}{dx}(x)$$

■