代数と幾何レポート 第２回

司馬博文 J4-190549

2020 年 10 月 6 日

概要

ボロクソに採点してください．よろしくお願いします．

問題８

１

W の任意の元は $a,b \in K$ を用いて

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix} = a(e_1-e_3)+b(e_2-e_3) \tag{1}$$

と表せるから，e_1-e_3, e_2-e_3 は W の生成系である．また (式 (1))$=0$ の時，$ae_1+be_2-(a+b)e_3=0$ であるが，e_1,e_2,e_3 は K^3 の基底だから $a=b=0$ が従う．よって，e_1-e_3, e_2-e_3 は線型独立でもある．

■

２

$a,b,c \in K$ について，

$$\begin{aligned} &a+b+c=0 \land a=b=c \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a=b=c, & K \text{ の標数が 3 の時}, \\ a=b=c=0, & \text{それ以外の時}, \end{cases} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{cases} W \cap W' = W', & K \text{ の標数が 3 の時}, \\ W \cap W' = 0, & \text{それ以外の時}. \end{cases}$$

□

$K(e_1+e_2+e_3)=W'$ より，$W+W'$ の元は，$a,b,c \in K$ を用いて，

$$\begin{aligned} &a(e_1-e_3)+b(e_2-e_3)+c(e_1+e_2+e_3) \\ =&(a+c)e_1+(b+c)e_2+(c-a-b)e_3 \end{aligned}$$

と表せる．$e_1-e_3, e_2-e_3, e_1+e_2+e_3$ を形式的に基底として 3 次元 K-線型空間と見た $W\oplus W'$ と，数ベクトル空間 K^3 の部分空間である $W+W'$ の間に定まる線型写像

$$\begin{array}{ccc} f: W\oplus W' & \longrightarrow & W+W' \\ \cup & & \cup \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a+c \\ b+c \\ c-a-b \end{pmatrix} \end{array}$$

が可逆であることと，$f^{-1}(0_{K^3})=0$ であることは同値である．（線型写像 $h: V\to W$ が全単射である時，$h^{-1}(0_W)=\{0_V\}$ である．逆に $h^{-1}(0_W)=\{0_V\}$ である時，任意に $w\in W$ をとって $v_1, v_2\in f^{-1}(w)$ とすると，$f(v_1-v_2)=f(v_1)-f(v_2)=w-w=0$ より，$v_1=v_2$）．これが示せれば，$W+W'\simeq W\oplus W'$ であり，また形式的な基底 $(e_1-e_3,0),(e_2-e_3,0),(0,e_1+e_2+e_3)\in W\oplus W'$ と $e_1,e_2,e_3\in K$ が定める同型により $W\oplus W'\simeq K^3$ であることから，（$W+W'\subset K^3$ より）$W+W'=K^3$ とわかる．

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+c=0 \\ c-a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+(a+b)=0 \\ b+(a+b)=0 \\ c=a+b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a+b+b=0 \\ c=a+b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a+a+a=0 \\ c=a+a \end{cases}$$

より，K の標数が 3 の時 $f^{-1}(0)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ であり，それ以外の時 $f^{-1}(0)=0$．よって，K の標数が 3 の時は $W'=K(e_1+e_2+e_3)\subset W$ より，$W+W'=W$．それ以外の時は，上の f が同型を定めるが，$W+W'\subset K^3$ だから，$W+W'=K^3$．

■

注. 単に $e_1-e_3, e_2-e_3, e_1+e_2+e_3$ が K^3 の基底になるかどうかを $=0$ の時に係数が全て 0 になるかどうかによって検証しているだけであり，写像 f の可逆性とまで論じると大袈裟であることに気付きましたが，この際，言葉遣いと議論の運びが正しいかどうかを見ていただきたいです．

問題１９

１

f の値域は $f(K^n)=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle=: W\subset V$ である．$x_1,\cdots,x_n$ が線型独立であることと，$x_1,\cdots,x_n$ が W の基底であることは同値，これは f の終域を狭めて得られる写像 $g: K^n\to W$ が同型である事に同値．$i: W\to V$ を包含写像とするとこれは単射だから，$f=i\circ g$ が単射である事に同値．

■

2

$x_1,\cdots,x_n$ が V の生成系である時，$f(K^n)=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle=V$ であるから（f は $x_1,\cdots,x_n$ が定める線型写像だから，$f(K^n)=\{v\in K^n \mid \exists (a_1,\cdots,a_n)^T\in K^n,\ v=a_1x_1+\cdots+a_nx_n\}=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$），$f$ が全射である事に同値.

■