複素解析学 I レポート

司馬博文 J4-190549

2020 年 10 月 7 日

[R3]

$n \in \mathbb{N}$ について定まる線型写像 F：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} & \xrightarrow{\quad F \quad} & \mathbb{C}[x,y] \\ \cup & & \cup \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^{n-k} y^k = P(x,y) = f(z) \end{array}$$

について，$\mathbb{C}[x,y]$ の部分空間

$$V := \left\{ f(z) = P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \right\}$$

の逆像の次元を求める問題である．

まず，次の補題を証明する．

補題. $n = 1, 2, \cdots$ とする．族 $(x^{n-k}y^k)_{k=1,\cdots,n}$ は，実 2 変数の複素係数多項式からなる線型空間 $\mathbb{C}[x,y]$ 上，線型独立である．

［証明］**.** n についての帰納法で示す．$n=1$ の時，x, y は独立変数であるから，$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ として $\alpha_1 x + \alpha_2 y = 0$ ならば，特に $x=0, y=0$ の場合をそれぞれ考えると $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$（例えば $x=0$ とした時，$\alpha_2 y = 0$．任意の $y \in \mathbb{R}$ についてこれを満たすには $\alpha_2 = 0$ が必要）．よって，$\mathbb{C}[x,y]$ 上線型独立．

今，$n = 1, \cdots, m-1$ について族 $(x^{n-k}y^k)_{k=1,\cdots,n}$ が線型独立であると仮定し，$n=m$ の場合を示す．$x^m, x^{m-1}y, \cdots, xy^{m-1}, y^m$ に対して，$\alpha_0, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ とし，$\alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} y + \cdots +$

$\alpha_{m-1}xy^{m-1}+\alpha_m y^m=0$ とする．まず, $x=0, y=0$ の場合をそれぞれ考えると, $\alpha_0=\alpha_m=0$ である．すると，$\alpha_1 x^{m-1}y+\cdots+\alpha_{m-1}xy^{m-1}=xy(\alpha_1 x^{m-2}+\cdots+\alpha_{m-1}y^{m-2})=0$ である．特に $xy\neq 0$ の場合を考えると，$\alpha_1 x^{m-2}+\cdots+\alpha_{m-1}y^{m-2}=0$．すると帰納法の仮定より，$x^{m-2}, x^{m-3}y, \cdots, xy^{m-3}, y^{m-2}$ は線型独立だから，$\alpha_1=\cdots=\alpha_{m-1}=0$．以上より，$n=m$ の場合も成り立つ． $\square$

$n=0$ の時，$P(x,y)=\alpha_0$ と定数関数であり，これは常に正則．従って，$F^{-1}(V)=\mathbb{C}$ で，一次元．

$n=1,2,\cdots$ の時，

$$P(x,y)=\alpha_0 x^n+\alpha_1 x^{n-1}y+\alpha_2 x^{n-2}y^2+\cdots+\alpha_{n-2}x^2y^{n-2}+\alpha_{n-1}xy^{n-1}+\alpha_n y^n$$

であるから，補題より，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0 &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=0\\
&\Leftrightarrow (n\alpha_0 x^{n-1}+(n-1)\alpha_1 x^{n-2}y+\cdots+2\alpha_{n-2}xy^{n-2}+\alpha_{n-1}y^{n-1})\\
&\qquad +i(\alpha_1 x^{n-1}+2\alpha_2 x^{n-2}y+\cdots+(n-1)\alpha_{n-1}xy^{n-2}+n\alpha_n y^{n-1})=0\\
&\Leftrightarrow (n\alpha_0+i\alpha_1)x^{n-1}+((n-1)\alpha_1+2\alpha_2 i)x^{n-2}y+\cdots\\
&\qquad \cdots+(2\alpha_{n-2}+i(n-1)\alpha_{n-1})xy^{n-2}+(\alpha_{n-1}+in\alpha_n)y^{n-1}=0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} n\alpha_0+i\alpha_1=0\\ (n-1)\alpha_1+2\alpha_2 i=0\\ \qquad\vdots \\ 2\alpha_{n-2}+i(n-1)\alpha_{n-1}=0\\ \alpha_{n-1}+in\alpha_n=0\end{cases} \qquad (\because \text{補題})
\end{aligned}$$

この n 本の連立方程式により，部分空間 $F^{-1}(V)$ は 1 次元に定まる．なぜなら，$\alpha_0\in\mathbb{C}$ を任意に定めると，1 本目の式により α_1 が定まり，それと 2 本目により α_2 が定まり，以降 α_n まで一意に定まるからである．

よって以上より，$\dim(F^{-1}(V))=1$．

$\blacksquare$

[R4]

適宜 $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ による同一視をすることで，変数 $z \in U, x := \mathrm{Re}\, z, y := \mathrm{Im}\, z \in \mathbb{R}$ と関数 $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を，次の図のように置く．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} & \\
U \simeq \mathbb{R}^2 \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[rr, "f"] & & V \simeq \mathbb{R}^2 \arrow[ul, "g"'] \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
z = x + yi \arrow[rr, mapsto] & & f(z) = u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + iv\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

多変数の実ベクトル値関数 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 (\simeq \mathbb{C})$ についての連鎖律より，$\dfrac{\partial h}{\partial z}$ は次のように計算できる．ただし，式中の $\cdot$ は終域 $\mathbb{C}$ 上の積とした．

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x} - i\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x} \\
&= (g_x \circ f \cdot u_x + g_y \circ f \cdot v_x) - i(g_x \circ f \cdot u_y + g_y \circ f \cdot v_y) \\
&= g_x \circ f (u_x - iu_y) + g_y \circ f (v_x - iv_y) \quad (\text{体 } \mathbb{R} \text{ の分配法則により，式を整理した}).
\end{aligned}$$

一方で，

$$\frac{\partial g}{\partial z} \circ f \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \circ f \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}$$

も，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (u + iv)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

より，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial z} \circ f \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \circ f \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} \\
=&\left(\frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}\right) \circ f \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y}\right) \circ f \cdot \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} + i\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}\right) \\
=&(g_x - ig_y) \circ f (u_x + iv_x - i(u_y + iv_y)) + (g_x + ig_y) \circ f (u_x - iv_x - i(u_y - iv_y)) \\
=&(g_x - ig_y) \circ f (u_x + v_y + i(v_x - u_y)) + (g_x + ig_y) \circ f (u_x - v_y - i(v_x + u_y)) \\
=&2g_x \circ f (u_x - iu_y) + 2g_y \circ f (v_x - iv_y)
\end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} \circ f \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \circ f \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}$$

を得る．

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial z} \circ f \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \circ f \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial \bar{z}}$$

も同様．

■