Lebesgue 積分と Sobolev 空間 1 米田剛 講義ノート

司馬博文 J4-190549
hirofumi-shiba48@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

2019 年 9 月 30 日

第 I 部
非可算無限・非可測集合

1 実数の非可算性

命題 1 (実数の非可算性)**.** 実数の部分集合である $(0,1) := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ 中に存在する実数は非可算無限である．

証明（*Cantor* の対角線論法）．$(0,1)$ 内の実数が可算であると仮定する．すると，実数の全ての元を，以下のように並べることができる．

$$\left.\begin{array}{c}0.1325......\\ 0.552.......\\ 0.9833......\\ \vdots\end{array}\right\}\cdots\star^1$$

$$\Longrightarrow\left(\begin{array}{l}0.a_{11}a_{12}a_{13}\\ 0.a_{21}a_{22}a_{23}\\ 0.a_{31}a_{32}a_{33}\\ \quad\vdots\end{array}\right.\qquad\text{以下同様に附番していく．}$$

ここで，$\overline{a}_{ij}$ を a_{ij} ではない勝手な一桁の自然数とする．これを用いて，新たな数 $0.\overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\overline{a}_{33}......$ を作ると，これは $(0,1)$ 内の実数であるのにも関わらず，$\star^1$ の中には存在しない数であるから，矛盾．よって実数は非可算である． □

これを踏まえて，非可測集合を構成しよう．

2 実数の非可測集合 Vitali Monsters (Herrlich)

長さが定まらない $\mathbb{R}$ の部分集合 Λ を構成することを考える．
まず長さとはなんだろう？ここで考えたい「集合の長さ」とは，例えば区間 $[0,1]$ だと 1，一般に区間 $[a,b]$ だと $b-a$ だと考えられるようなもののことだ．では，集合 $[0,1]\cup[3,4]$ は？当然 2 と定義すべきだろう．この感覚を，厳密な定義に落とし込む 1 つのやり方が Lebesgue 測度である．ここでは「集合の長さ」はこの直感的な定義で十分であるから，深入りしない．以下，集合の濃度ではなく，長さのことを $|A|$ などと書く．
さて，実数の部分集合で，この「長さ」の概念が考えられないような集合（数学的に言えば「Lebesgue 不可測集合」）は作れるだろうか？そんな場合があるのだろうか？ 20 世紀に入るまで，その存在性は誰にも分からなかった．

定義 1 (Vitali 集合)**.** $\mathbb{R}$ の部分集合 Λ を「任意の実数 x に対して，一意に $r \in \Lambda$ と $q \in \mathbb{Q}$ が存在し，$x = r + q$ と表せるようなもの」と定義する．

＊ Giuseppe Vitali は 1875-1932 にかけてのイタリアの数学者である．実数の部分集合の中で，不可測なものが存在することを示した (Vitali の定理,1905)（というより実例を初めて作った）のが彼である．
＊すると，x が有理数の時，r も有理数である．x が無理数の時，r も無理数である．Λ は一対一対応はするから実数と同じ濃度であろう．（正しいこと言っているけどあまり自明な事実ではない．この文章は要削除）
＊つまりこれは，$\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$-線型空間と見なした時の基底の冪集合に等しい．（多分等濃って意味で．）
＊なお，この Vitali 集合の存在は，選択公理を仮定して初めて示される．一気に選び出すことを含意しているからだ．つまり，選択公理を仮定しない宇宙では，実数の部分集合に不可測集合が存在するかどうかは未解決である（と思う）．
＊このような集合は，不可算に無限個存在する．
ここで，便宜上，$\Lambda \subset (-1,1)$ となるように，代表元の選出を調整する．（選出公理はここまで強いのだろうか？いや，選び方は支持できるのだから，ここは選択公理の守備範囲ではないのだろうな．）
＊例 : $x=\pi$ の時は，$|r|=|\pi-q|<1$ となるように有理数 q をとる．この場合は $q=3$ ととれば，$r=0.1415926535......$ となり，$r\in(-1,1)$ である．有理数は稠密だから，このようになる q は常に取れる．

命題 2 (集合 Λ の長さ)**.** 集合 Λ の長さは定まらない．

証明. 集合 Λ の定め方から，$(-1,1)$ 区間内の任意の実数 x は，Λ の元 r と $(-2,2)$ 内の有理数 q を使って，$x=r+q$ と表される．ここで，集合 Λ の平行移動 V_n を，q_n を $(-2,2)$ 内の n 番目の有理数として，

$$V_n=\{\lambda+q_n|\lambda\in\Lambda\}$$

と与えると，

$$(-1,1)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n\subset(-3,3)\cdots\star^2$$

となることがわかる．そして，$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに素である．なぜなら，もし自然数 j,k が存在して，$V_j\cap V_k\neq\varnothing$ だったとすると，$x\in V_j\cap V_k$ が取れて，$x=r_j+q_j=r_k+q_k$ という二通りの表現が得られて，Λ の定義に矛盾．よって，$V_j\cap V_k=\varnothing(\text{for }\forall\text{k,j}\in\mathbb{N})$ である．よって，

$$\left|\bigcup_{k=1}^{\infty}V_k\right|=\sum_{k=1}^{\infty}|V_k|$$

よって，$\star^2$ より，

$$|(-1,1)|\le\left|\bigcup_{k=1}^{\infty}V_k\right|=\sum_{k=1}^{\infty}|V_k|=\sum_{k=1}^{\infty}|V+q_k|=\sum_{k=1}^{\infty}|V|\le|(-3,3)|$$

であり，結局

$$2\le|\Lambda|\sum_{k=1}^{\infty}1\le 6$$

である．一つの定数の無限和は 0 であるか無限大に発散するかのいずれかであるから，そのいずれの場合にしろ，この式を満たす $|\Lambda|$ は存在しない．□