微分積分学 S2 ターム　レポート

司馬博文　J4190549

2019 年 7 月 8 日

問題１：$a > 0$ とし，

$$f(x) = x \log(a+x)$$

を考える．このとき，f がマクローリン展開可能となる x の範囲を求め，それを説明せよ．
答：

$$\begin{cases} |x| \leq 1 & a > 1 \text{ のとき} \\ |x| < 1 & a = 1 \text{ のとき} \\ \text{マクローリン展開可能な } x \text{ は存在しない} & 0 < a < 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

説明：求めるマクローリン展開可能となる x の条件は，関数 $g(x) = \log(a+x)$ のものと一致する．Taylor の定理の Cauchy の剰余項による表示により，この $g(x)$ は，$x = 0$ の周りで，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\theta \in (0,1)$ が存在して，

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

$$\text{但し } R_n(x) = \frac{f^{(k)}(\theta x)}{(n-1)!}(x - \theta x)^{n-1} x$$

と表せる．したがって，$|R_n(x)| \to 0 (as \;\; n \to \infty)$ となる条件を求めれば良い．

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1-\theta}{a+\theta x} \right|^n \frac{|x|^n}{1-\theta}$$

であるから，それは $\left| \frac{1-\theta}{a+\theta x} \right| \leq 1$ かつ $|x| \leq 1$ かつ「$|\frac{1-\theta}{a+\theta x}|$ と $|x|$ とは同時に 1 に恒常的に等しい訳ではない」という条件に等しい．この最後の条件は，$a = 1$ かつ $\theta = 0$ のとき，$|x| = 1$ ならば当てはまってしまうことに注意……($\sharp$) すれば，$|x| \leq 1$ の下では，第一の条件は

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1-\theta}{a+\theta x} \right| \leq \frac{1-\theta}{a - \theta |x|} \leq \frac{1-\theta}{a-\theta} \leq 1$$

即ち，十分条件は

$$1 - \theta \leq a - \theta \Leftrightarrow 1 \leq a$$

つまり，$a \geq 1$ の場合は，($\sharp$) の場合を除いて，$|x| \leq 1$ の下にてマクローリン展開可能である．

　次に $0 < a < 1$ の場合を考える．このとき，$|\frac{1-\theta}{a+\theta x}|$ の値は，x の値に関わらず，θ が 0 から 1 の間で変化するにしたがって，1 より大きかったり小さかったりして定まらない．したがって，この場合はマクローリン展開出来ない．

問題２：$\sin 0.1$ を小数第 5 位まで求めよ．
答：$\sin x$ を $x = 0$ を中心として Taylor 展開を考えることにより，

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

と表せる．これに $x = 0.1$ を代入することにより，

$$\sin 0.1 = 0.1 - \frac{(0.1)^3}{6} + \frac{(0.1)^5}{120} + ((0.1)^6 \text{以下の微小項})$$

より，

$$\sin 0.1 = 0.1 - 0.0001666...... + 0.00000008 + (\text{小数点 6 桁以下の小数}) = \underline{0.09983......} \quad \cdot \cdot \cdot (\text{答})$$