1 Categories

1.1 Introduction

1.2 Functions of sets

1.3 Definition of a category

定義 1.1 (Category)**.**

1. 対象 $A,B,C,\cdots$ というものがある．
2. 射 $f,g,h,\cdots$ というものがある．
3. 各射には $\mathrm{dom}(f) = A, \mathrm{cod}(f) = B$ という対象が紐づけられていて，その関係を $f : A \to B$ と書く．
4. $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ を満たす射 f,g に対し，$g \circ f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{cod}(g)$ という射が定義される．
5. 各対象 A には $1_A : A \to A$ という特別な射が定義される（単位射）．
6. 射は結合律を満たす．$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
7. 単位射は合成について単位的である．$f : A \to B$ として，$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$

1.4 Examples of categories

1. 集合の圏 **Sets** と，有限集合の圏 $\mathbf{Sets}_{\mathrm{fin}}$

例 (集合の圏から，対象の集合と射の集合に特定の制限を付け加えることで，自由に部分圏が作れる他の例．)**.**

1. 対象：有限集合，射：単射　は合成について閉じる．
2. 対象：集合，射：ファイバーが高々２元集合である写像　は合成について閉じないので圏ではない．
3. 対象：集合，射：ファイバーが高々有限集合である写像　は合成について閉じる．「高々可算である」でも大丈夫そう．
4. 対象：集合，射：ファイバーは無限集合である多価写像　は恒等写像がこれを満たさないので，単位射の特徴付けを満たす射が存在しなくなる．

2. Category of structured sets

定義 (具体圏)**.** 圏 C が，忘却関手 $U : C \to \mathbf{Set}$ を持つとき，これを具体圏と呼ぶ．

3. 順序集合と単調写像の圏 **Pos**
4. 二項関係の圏 **Rel**：写像は特別な二項関係と見れるから，**Sets** はこの部分圏である．

射 $f : A \to B$ は $A \times B$ の部分集合で，単位射 1_A は恒等写像 id_A のグラフと同じグラフを持つ関係，即ち自明な同値関係 $=_A$ になる．合成は，２つの関係 $R \subset A \times B, S \subset B \times C$ から作れる「相対関係 $(a,c) \in S \circ R :\Leftrightarrow \exists (a,b) \in R, (b,c) \in S$」として作れば確かに閉じている．

5. 有限圏としての自然数：射は順序関係である．
6. 圏の圏 **Cat**

定義 1.2 (Functor)**.** 関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ とは，次を満たす対象写像と射写像の組である．

1. $F(f : A \to B) = F(f) : F(A) \to F(B)$
2. $F(1_A) = 1_F(A)$
3. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(g)$

7. 圏としての preorder : 任意の 2 つの間に射が 1 つしか存在しない圏（細い圏）．従って，Hesse 図の上に作った自由圏そのものである．

定義 (thin category)**.** 圏 C が次の条件を満たす時，細い圏であるという．
任意の 2 つの対象 $x, y \in C$ について，

$$x \xrightarrow[g]{f} g$$

となっている時，必ず $f = g$ である．

注. 細い圏に於いて，２つの対象間で双方向に射が存在する場合，これは互いに逆射になる．

命題. 細い圏は，proset と同型で，poset と同値である．

注 1.3. 細い圏は全て poset と同型である，としなかったのがむしろ圏論特有の自由度の高さ，表現力の豊かさとなっている．

［証明］. 圏 C の対象の集合を集合 P とし，その間の関係 $x \leq y$ を

$$x \leq y :\Leftrightarrow \exists f : x \to y \in C$$

と定めると，この関係は反射性と推移性を満たし，前順序集合 (preordered set) となる．今，関手 $F : C \to P$ を対象集合は 1_P，射集合は $f : x \to y \mapsto x \leq y$ とすると，これはいずれも可逆で，確かに圏の同型である．
この時，集合 P について，次のように約束する．

$$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$$

すると集合 $P/=$ は順序集合 (partially ordered set) である．関手 $F' : C \to P/=$ は厳密な意味では可逆ではない． □

8. 圏としての poset : poset categories と呼ぶ．perorder category を同型な対象について畳み込んだもの．

9. 位相空間からの例

命題. T_0 spaces X are posets under the specialization ordering:

$$x \leq y \Leftrightarrow \forall U \in O(X)\ (x \in U \Rightarrow y \in U)$$

10. 数理論理学からの例 : 演繹体系に付随する圏 category of proofs 対象を式とし，その間に証明がある $\varphi \vdash \psi$ 時，射 $\varphi \to \psi$ を定義する．

11. 計算機科学からの例 : 関数型プログラミング言語 L に付随する圏 $C(L)$ 対象は L のデータ型，射は関数とする．単位射は do nothing program で，合成は関数の連続適用 $g \circ f = f ; g$ である．

12. 集合 X に付随する離散圏 $\mathbf{Dis}(X)$

13. 単一対象圏としての monoid

射が対象の間に持つ構造「２つの対象と順番付きで紐づけられている」と「単位射の存在」と「合成についての閉性（＝推移性）」とを，そっくりそのまま，順序関係に翻訳すれば前順序である．射自体の持つ構造「結合性」と「単位射の存在」を，代数構造に翻訳すればモノイドである．いずれも最低限の圏である．それぞれに付加構造として対称性を加えれば，半順序と群を得る．半順序とモノイドが，この本の主要な例になる．

8., 13. の観点から，poset の射とは関手だし，monoid の射も関手と見做せる．

1.5 Isomorphisms：と Cayley 表現関手

定義 1.4 (同型). 圏 C に於いて，次を満たす射 $f: A \to B$ を同型という．

$$\exists g: B \to A \in C \; g \circ f = 1_A \wedge f \circ g = 1_B$$

注 (例えば Pos では，全単射な射は，同型だとは限らない．). 射を何らかの写像だとすると，この同型であるための条件は全単射であることと同値．従ってこの定義は，具体圏に於ける台写像の「全単射」性を一般の圏に写し取ったものに思える．だから，全単射でないのに同型になることはないはずだ．だが，全単射な射は可逆だとは限らない．例えば Pos や Top などである．

これは台集合への情報の与え方に依るのだろうか．グラフによる与え方（つまり「より細かい」という語が定義できるような構造）だと，このようなことが起こる？より「細かい」構造が定義されている集合へ向けた射は，全単射であろうと可逆ではない．

定義 1.5 (群). 群とは，可逆なモノイドのことである．従って，全ての射が同型であるような単一対象圏のことである．

定理 (Cayley). 群 $G = (G, \cdot, e, ^{-1})$ は，$\mathrm{Aut}(G)$ の或る部分群と同型になる．

［証明］. Cayley representation $\overline{G} \subset \mathrm{Aut}(G)$ を構成する．各 $g \in G$ に対して，$\overline{g} \in \overline{G} \subset \mathrm{Aut}(G)$ を次のような射として定める．

$$\begin{array}{ccc} \overline{g} = g^* : G & \longrightarrow & G \\ \cup & & \cup \\ h & \longmapsto & g \cdot h \end{array}$$

この時，$\overline{G}$ は群になっていることを，写像 $F: G \to \overline{G}$ が群の射であることを示すことによって確認する．$F(f \cdot g) = F(f) \circ F(g)$ は G の演算 $\cdot$ の結合性より，また $F(e) = 1_G$ も成り立つ．なお，各射の可逆性については，$F(f \cdot f^{-1}) = F(f) \circ F(f^{-1}) = 1_G = F(e)$ より成り立つ．

群の射 $F: G \to \overline{G}$ の逆射 H を構成する．

$$\begin{array}{ccc} H : \overline{G} & \longrightarrow & G \\ \cup & & \cup \\ \overline{g} & \longmapsto & g = \overline{g}(e) \end{array}$$

これについて，確かに $F \circ H = 1_{\overline{G}}, H \circ F = 1_G$ が成り立つ．従って，$G \simeq \overline{G}$ □

注 1.6 (Two different levels of isomorphisms). 構成した群 $\overline{G} \subset \mathrm{Aut}(G)$ の元である，g を集合 G に左から作用させる写像 $\overline{g}$ は，群 G の置換であり，集合の同型である．一方，構成した関手 F, H は群の同型である．

定理. 任意の圏 C は，或る具体圏と同型である．

［証明］. 圏 C から，同型な圏 $\overline{C}$ を構成する．関手 $\overline{} : C \to \overline{C}$ の対象写像を次のように定める．

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \overline{C} \\ \uplus & & \uplus \\ c & \longmapsto & \overline{c} = \{f \in \mathrm{arr}(C) \mid \mathrm{cod}(f) = c\} \end{array}$$

射関手を次のように定める．

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \overline{C} \\ \uplus & & \uplus \\ g : c \to d & \longmapsto & \overline{g} = g^* : \mathrm{hom}_C(-, c) \to \mathrm{hom}_C(-, d) \end{array}$$

ただし，この写像 g^* は，任意の対象 $x \in C$ に対して，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hom}_C(x, c) & \longrightarrow & \mathrm{hom}_C(x, d) \\ \uplus & & \uplus \\ f : x \to c & \longmapsto & g \circ f : x \to d \end{array}$$

と対応づける写像（関手の射／自然変換）である．この関手は可逆であり，逆関手の $\overline{x} \in \overline{C}$ 成分は射写像は次の通りである．

$$\begin{array}{ccc} \overline{C} & \longrightarrow & C \\ \uplus & & \uplus \\ \overline{g} : \mathrm{hom}_C(-, c) \to \mathrm{hom}_C(-, d) & \longmapsto & \overline{g}(1_c) \end{array}$$

□

注. こうして，対象 c を「c に入射する射」に写し，射を「c に入射する Hom 集合同士の自然変換」に写す構成関手 $\overline{} : C \to \overline{C}$ を「Cayley 表現関手」と呼ぶことにしようか．群論での Cayley 表現のアナロジーとして，ここでも「表現」という語が,「対象 c を取り巻く射の動きを定式化することで，c の内部構造が漏れ出しているのを捉える」という精神を感じる．

これが「表現」という術語の出処であろう．この時点ではまだ素朴の意味で「C の表現 $\overline{C}$」という感覚である．また，これが「ホム関手」「ホム集合」という概念の出処でもある．集合での表現を持つから，我々の「具体」性という得意分野に引きずりこめるのだ．また，何度も本文内で注意されるが，集合に頼り過ぎないで，純粋に圏論的なまま理論を豊かにしていくのも大事である．（群論だってそうなのだろう）．例えば，一般の圏を白紙から考えるとき，対象の間の射全体の集まりは「集合」であるとは限らないのだ．

また，2-圏の起こりにも見える．また戻って来たい．

1.6 Constructions on categories

前章の終わりに出て来た Cayley representation の考え方が，圏論の階層性の萌芽の全てなんじゃないか．これを分解したような圏の構成法についての言葉を整理する．

1.6.1 Product

$C \times D$

対象：$(c,d) \in \mathrm{obj}(C) \times \mathrm{obj}(D)$
射：$(f,g) \in \mathrm{mor}(C) \times \mathrm{mor}(D)$
合成，単位射：徹底的に「要素毎」の考え方（直積の普遍性）

1.6.2 Opposite

C^{op}

対象：同じ
射：$f : C \to D \in C$ に対して，$f^* : D^* \to C^* \in C^{op}$
合成：順序を逆にしたもの
$C^{op} = (C, M, t, s, c \circ w, e)$

.

この時の構成関手 ^{op} は良く関手を分解するときに用いる．

duality とは，ある圏が，別の圏の反対（の部分圏）になるという対応が成り立つこと（を主張する命題のこと）である．

1.6.3 arrow category : lifting

arrow category $\overrightarrow{C}$

対象：射
射 $g : (f : A \to B) \to (f' : A' \to B')$: 足を結びつける C の射と頭を結びつける C の射の組 $g := (g_1, g_2)$，すなわち，次の $f' \circ g_1 = g_2 \circ f$ を主張する可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "g_2"] & B' \end{tikzcd}$$

合成：成分毎 $(h_1, h_2) \circ (g_1, g_2) = (h_1 \circ g_1, h_2 \circ g_2)$，または，可換図式を繋げて外回りを取ること
単位射：$1_f = (1_A, 1_B)$

対象は射 $f : A \to B$ だが，要は (A, B)，これはどう考えても $C \times C$ あるいは $[2, C]$ と同型になる．

命題 (arrow category と product category の関係)**.** 次の関手が存在する．

$$C \xleftarrow{\mathrm{dom}} \overrightarrow{C} \xrightarrow{\mathrm{cod}} C$$

即ち，対象 $f : A \to B \in \overrightarrow{C}$ について，その定義域に写す関手と，その終域に写す関手とが，射影に相当する．

注 (nLab "lift"より)**.** arrow category の射としての可換図式 (g_1, g_2) を，「f_1, f_2 間の lifting problem (between f_1 and f_2)」とも言う．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "g_2"'] \arrow[ur, dashed, "\exists\gamma"] & B' \end{tikzcd}$$

上図を可換にする $\gamma : B \to A'$ が存在する時，これを lift と呼び，この lifting problem (g_1, g_2) は solution γ を持つ，と言う．またこの lift が一意的である時，f と f' は直交する（$f \perp f'$）と言う．定義 2.1.2 参照．

1.6.4 slice / over category：頭を共通の対象に突っ込んだ射と，足元の移動

圏 C と対象 $c \in C$ について，

C/c

対象：$\{f \in \mathrm{arr}(C) \mid \mathrm{cod}(f) = c\}$
射：2 対象 $f : x \to c, f' : x' \to c$ に対して両足を結ぶ C の射．つまり，次の C の図式を可換にする射 $a : x' \to x \in C$（$f = f' \circ a$）．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "f"'] & & x' \arrow[dl, "f'"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

命題 (slice category と arrow category の関係)**.** これは，対象を，終域を c とする射のみに限ったため，arrow category の充満部分圏である．

対象について，その codomain c を忘れ，射 $a : (x, c) \to (x', c)$ についても c を忘れれば，先ほどの cod に当たるものが，忘却関手 $C/c \to C$ となる．（これは一種の具体圏だったのか？）

命題 (slice category と product category の関係)**.** 次の関手が存在する．

$$C \xleftarrow{\mathrm{dom}} \overrightarrow{C} \xrightarrow{\mathrm{cod}} C$$

即ち，対象 $f : x \to c \in \overrightarrow{C}$ について，その定義域に写す関手と，その終域に写す関手（＝）とが，射影に相当する．

数学原論での導入 C_A

圏 $C=(C,M,s,t,c,e)$ とその対象 $A\in C$ に対して，A 上の圏 $C_A=(C_A,M_A,s_A,t_A,c_A,e_A)$ を，以下のように定める．

1. $C_A=\{f\in M\mid t(f)=A\}$．この，圏 C における A を的とする射 $f:B\to A$ を「A 上の対象」という．これを B と書いてしまうことも多い．
2. $M_A=\{(g,k)\in M_s\underset{C}{\times}{}_tM\mid g\in C_A\}$．即ち，$B$ を D に写す over category の射 (g,k) とは，$f\in C_A$ に対して，的である $g\in C_A$ と，それと足下で合成可能な射 k との組で，これは $f=g\circ k\in C_A$ を $g\in C_A$ を満たすもの，即ち次を可換にするものである．この時第二成分である k のみをさして「A 上の射」とも呼ぶ．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & D \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

3. $s_A:M_A\to C_A$ は合成 c の M_A への制限．
4. $t_A:M_A\to C_A$ は第一射影．
5. c_A は $c_A((h,l),(g,k))=(h,l\circ k)$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "k"] & C \arrow[r, "l"] \arrow[rr, bend left, "h\circ l=s(l,h)=g"] & B \arrow[r, "h"] & A \end{tikzcd}$$

6. $e_A(f)=(f,1_{s(f)})$ で定める．

注. これまた 3.4. は「道」みたいな定め方だな．形式的には結構技巧的なものになっている．

一般的に幾何的な対象のなす圏を考えているときは A 上の圏といえば C_A であり，代数的な対象を考えているときは A 上の圏というと C^A になる．

slice category 構成の定める関手

C の射 $g:c\to d$ に対して，自然変換 $g^*:C/c\to C/d$ が定まる．

$$\begin{array}{ccc} C/c & \longrightarrow & C/d \\ \cup & & \cup \\ f:x\to c & \longmapsto & g\circ f:x\to d \end{array}$$

$$a:(f:x\to c)\to(f':x'\to c)\ \longrightarrow\ a:(g\circ f:x\to d)\to(g\circ f':x'\to d)$$

従って，slice category の構成は，関手 ("composition functor")$C/(-):C\to\mathbf{Cat}$ を定める．

これは勝手な圏 C に対して，関手圏としての表現を与える Cayley 表現関手のアナロジー，と思うことが出来る．Cayley 表現関手は，抽象的な群や圏を，「射の集合」として具体化する．slice category の構成は，

圏を「圏の圏」とする．というより，これに忘却関手 $U : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Sets}$ を合成した関手であった．

$$\overline{} = U \circ C/(-)$$

注. composition functor は，Hom 関手の射写像である．これをこの本では Cayley representation から導入し，圏論としてはまず slice category を定義したわけだ．どっちが主軸だろう？

いや，Hom 関手が要は over category の構成写像なのか！？

命題 (coslice category)**.**

$$(-)/C = C/(-) \circ {}^{op}$$

である．

例 1.7.

$$\mathrm{Sets}_* \simeq 1/\mathrm{Sets}$$

となる．何故なら，Sets_* の射 $f : (A,a) \to (B,b)$ は，圏 $1/\mathrm{Sets}$ の射 f と対応し，対象は図式の中の通り，1 から出る射 a,b と対応させれば良い．

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

こうして同型が構成できる．

命題. $1 \in C$ を圏 C に於ける終対象とする．この時，

$$C \simeq C/1$$

［証明］. 対象写像を $a \in C$ を，唯一の射 $a \to 1$ に写す写像とする．この後どのように射写像を定めれば，可逆な関手 $C \to C/1$ を定められるのかが分からない． □

Pos に於ける slice category

定義 (principal ideal)**.** 順序集合 $(P,\leq)$ の部分集合 I がイデアルであるとは，次の 3 条件が成り立つことをいう．

1. $I \neq \varnothing$
2(lower set). $\forall x \in I\ \forall y \in P\ (y \leq x \Rightarrow y \in I)$
3(directed set). $\forall x,y \in I\ \exists z \in I\ (x \leq z \wedge y \leq z)$

イデアル $I \subset P$ が主イデアルであるとは，単元生成されたイデアル（p を含む最小のイデアル）のことをいう．即ち，$\downarrow(p) = \{q \in P \mid p \leq p\}$ である．

注. 2. の形の条件は群論の時点から見たことがある．ideal は元々抽象代数からの借入語である．

directed set は有向集合と呼ばれる．前順序集合 (preorder) のうち，どの 2 元も上界を持つものをいう．即ち，半束ならば有向集合だが，有向集合だからと言って半束であるとは限らない（上界は複数あっても上限が存在するとは限らない）．

命題 (principal ideal)**.** poset category P について，

$$P/p \simeq \downarrow(p)$$

1.7 Free categories

1.7.1 Free monoid

定義 (free functor from Mon)**.** 自由関手 $M : \mathrm{Sets} \to \mathrm{Mon}$ とは，集合 A から，$A^* = W(A) := {}^{<\omega}A$ を台集合として，concatenation 演算子 $*$ を積とし，空列 $-$ を単位元としたモノイド $(A^*, *, -)$ に対応させる関手である．

注. $A = \varnothing$ の時 $M(A)$ は自明なモノイドであり，$A = 1$ の時，一進法表記した $M(A) = \mathbb{N}$ である．
$A = \mathbb{N}$ とした場合，集合上では $\mathbb{N} \simeq U(M(\mathbb{M}))$ であるが，モノイドとしては全く違う．

定義 (UMP of "freeness")**.** $M(A)$ が集合 A から生成される自由モノイドである（即ち，関手 $M : \mathrm{Sets} \to \mathrm{Mon}$ が自由関手である）とは，次の条件を満たすことである．
任意のモノイド $N \in \mathrm{Mon}$ と，それとの任意の写像 $f : A \to U(N)$ に対応して，モノイドの射 $\overline{f} : M(A) \to N$ が唯一つ存在して，次の図式を可換にする $i : A \to U(M(A))$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} U(M(A)) \arrow[r, dashed, "U(\overline{f})"] & U(N) \text{ (on Sets)} \\ A \arrow[u, dotted, "i"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M(A) \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & N \text{ (on Mon)} \end{tikzcd}$$

論理構造を明確にするために，この条件を，集合とモノイドの組 $(A, M(A))$ に対する条件として形式化すると，

$$\exists i : A \to U(M(A))\ \forall f : A \to U(N)\ \exists! \overline{f} : M(A) \to N\ (f = U(\overline{f}) \circ i)$$

■

命題 1.8. 勝手な集合 A について，A 上の自由モノイド $M(A) = (A^*, *, -)$ は，上の普遍性を満たす．

［証明］**.** A を勝手な集合，$N = (N, \cdot, u)$ を勝手なモノイド，$f : A \to U(N)$ を勝手な写像とする．一意的な $\overline{f} : M(A) \to N$ と，$i : A \to M(A)$ とを順に構成し，$f = U(\overline{f}) \circ i$ を満たすようにできることを示せばいい．
f を用いて，写像 $\overline{f}$ を

$$\begin{cases} \overline{f}(-) & = u \\ \overline{f}(a_1, \cdots, a_i) & = f(a_1) \cdot \cdots \cdot f(a_i) \quad (a_1, \cdots, a_i \in A) \end{cases}$$

で定めると，確かにこれはモノイドの射である．これに続いて，$i : A \to U(M(A))$ を包含写像とすると，

$$\begin{aligned} f(a) &= U(\overline{f}) \circ i(a) \quad (\forall a \in A) \\ &= U(\overline{f})(a) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$\overline{f}$ は一意的に定めることができているので，確かに $M(A)$ は UMP を満たす． □

注 (自由モノイドの普遍性として妥当な直観的理由)**.** $M(A)$ の生成系 A のそれぞれについて行き先を定める写像 $f : A \to U(N)$ から，モノイドの射 $\overline{f} : M(A) \to N$ を一般的に（＝関手的に），そして一意的に構成可能

である．次元というか，軌道のようなものは潰れるかもしれないが．この時，足元は生成系 A から，その上の自由モノイド $M(A)$ にまで持ち上がる．それに対応するのが包含写像 $i:A\to M(A)$ である．このような性質を持つのが，生成系 A を指定した時に付随して確定するモノイド $M(A)$ のことで，このようなものはとても標準的で自然なものだから，とりあえず「自由」と呼ぶ．が，このように，背後には関手がある．

この時，モノイドの射 $\overline{f}$ の存在性が"no noise"に対応し（純粋なモノイド性のみを持ち，それ以上の，公理に含まれない非自明な関係は一切持たない．だから，任意のモノイド N に対してこのような射が存在する．)，一意性が"no junk"に対応する（生成元に関しての閉包であり，生成元とモノイドの公理には行き先が指定されておらず，自由度が残っているような元は全く含まれていない)．

命題 1.9 (UMP が対象を同型を除いて一意に定める)**.** $M,N\in\mathrm{Mon},i:A\to U(M),j:A\to U(N)$ を写像とし，$(A,M),(A,N)$ はいずれも自由モノイドの普遍性を満たすとする．この時，$M\sim N$ である．

［証明］**.** (A,M) の普遍性に対して $f=j$ を適用し，(A,N) の普遍性に対して $f=i$ を適用すれば，互いに逆射となるモノイドの射 $\overline{i},\overline{j}$ を得る． □

例. $M(1)\simeq\mathbb{N}$ として，UMP により同型を除いて一意に定まる．

1.7.2 Free Category

今回はグラフの道として定式化するが，analogous な定式化は他にも存在する．それらをまとめて path category と呼ぶ．

定義 (有向グラフ)**.** 集合 $V(G),E(G)$ とその間の写像 $s:E(G)\to V(G),t:E(G)\to V(G)$ の 4 つ組 $G=(V(G),E(G),s,t)$ を有向グラフと言う．

$$E \xrightarrow{s,\,t} V$$

頂点の有限列 $(e_1,\cdots,e_n)\in{}^{<\omega}E(G)$ であって，$t(e_i)=s(e_{i+1})\ (i=1,\cdots,n-1)$ を満たすものを道という．

定義 (有向グラフ上の自由圏)**.** 有向グラフ G に対して，G から生成される自由圏 $\mathbf{C}(G)$ を，$C(G)=(V,\mathrm{path}(E),\mathrm{dom},\mathrm{cod},\circ,e)$ 定める．

$$M_s \underset{C}{\times} {}_tM \xrightarrow{\ \circ\ } M \underset{\mathrm{cod}\ \ e}{\overset{\mathrm{dom}}{\longleftrightarrow}} C$$

1. 対象は頂点とする．
2. 射は，G の道とする．$(e_1,\cdots,e_n)$ を道としたとき，射を $e_n\cdots e_1$ と書くこととする．
3. 合成は道の結合とする．あるいは，文字列 $e_n\cdots e_1$ の結合と考えても良い．
4. 各頂点 v に対して，単位射 1_v を考える．

例. $V(G)=1$ であった場合，$C(G)$ は一点対象圏であり，$E(F)$ 上の自由モノイド（に付随する圏）と同型になる．

定義 (有向グラフ準同型)**.** グラフの射 $h:G\to H$ とは，次を可換にする写像の組 (h_0,h_1) である．

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] \arrow[d, "h_1"'] & G_0 \arrow[d, "h_0"] \\ H_1 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & H_0 \end{tikzcd}$$

定義 (圏の忘却関手)**.** 忘却関手 $U : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Graphs}$ を

$$M_s \underset{C}{\times} {}_t M \xrightarrow{\circ} M \underset{\mathrm{cod}\ \ e}{\overset{\mathrm{dom}}{\leftrightarrows}} C$$

を，台グラフ

$$M \underset{\mathrm{cod}}{\overset{\mathrm{dom}}{\rightrightarrows}} C$$

に写す，６組 (C,M,s,t,c,e) を４組 (C,M,s,t) に情報を落とす行為だとみなせる．

注. 一般に忘却関手は「集合の付加構造を落とす」関手であるが，圏自体の忘却関手も，圏論的な定式化を使えば，全く同じような議論「グラフの付加構造を落とす」ものとして理解できる．

一般に，射をそのまま edge と見做してしまっているので，自然な有向グラフとは程遠く（推移性が無駄に残っている），C と U は互いに逆関手ではない．U の左随伴が自由圏構成関手 C である．

定義 (自由圏の普遍性)**.**

$$\exists i : G \to U(C(G))\ \forall h : G \to U(D)\ \exists! \overline{h} : C(G) \to D\ (U(\overline{h}) \circ i = h)$$

例.

1. グラフ $(1, E, \Psi)$ 上の自由圏は単一対象圏となる．
2. グラフ $(2, \{0 \to 1\})$ 上の自由圏は，finite category 2 と同型．
3. グラフ

$$A \underset{f}{\overset{e}{\leftrightarrows}} B$$

上の自由圏は，無限個の道が存在するために，無限個の射が存在する

1.8 Foundations: large, small, and locally small

定義 1.10 (finite, small, locally small, large)**.** 圏 (C,M,s,t,c,e) が有限であるとは，C,M が有限集合であることをいう．小さいとは，C,M が集合であることをいう．C,M のいずれかでも集合ではない場合，大きいという．

定義 1.11 (hom-set と locally small)**.** $\hom_C(X,Y) = \{f \in C_1 \mid f : X \to Y\}$ が集合であるとき，局所的に小さいという．圏が小さい場合は局所的にも小さい．

注. 圏を考える際，「◯◯ 全体のなす圏」など，大抵は言及が雑すぎるので，その圏は大抵小さくはならない．しかし，対象の集合 C は（従って M も）集合にはならずとも，対象を集合とした圏 Sets, Pos, Top, Group において Hom 集合は大抵集合になる．

その主な理由は，条件を無条件に化しただけでは（例えば群の公理など）そのメンバーが集合になるとは限

らないから，クラスについての知見が必要になるからである．例えば［有限集合］FinSet も小さくない．全ての集合 X について $\{X\}$ とすれば有限集合を作れるからである．同様の理由で［小さな圏］Cat も自身は圏として小さくない．

しかし，［遺伝的有限集合］SetsFin とすれば小さくできる．$C = V_\omega$ は ZFC の下では集合である．即ち，FinSet は小さな圏と同値であるため，「本質的に小さい」と言える．

注 1.12. Poset として見た $\mathbb{R}$ は小さい圏だが，具体圏ではない．(structured set ではないから？)

Pos は具体圏だが小さくはない．

注 (Grothendieck 宇宙と到達不可能基数は同じ！？ nLab "finite category")**.** (Locally) finite categories may also be called (locally) ω-small; this generalises from ω (the set of natural numbers) to (other) inaccessible cardinals (or, equivalently, Grothendieck universes).

1.9 Exercises

2 Abstract structures

圏論的な言葉だけで，圏の対象や射を特徴付ける性質を述べる．このような性質のことをひとまず abstruct characterization と呼ぶこととする．UMP はその良い例である．

2.1 Epis and monos：代数的に定めた，圏論的単射・全射の条件

2.1.1 まずは射の代数の話をしよう．

単射は左に付いても単位的な働きしかせず，全射は右に付いても単位的な働きしかしない，まるで筒抜け，という写像の合成における振る舞いのみを抽出して，次の圏論的概念を定める．

定義 2.1 (圏論的単射・全射)**.** 射 $f : A \to B \in \mathcal{C}$ について

1. 次（左簡約可能条件）を満たすとき，monomorphism という．

$$\forall C \in \mathcal{C} \;\; \forall g, h : C \to A \;\; (fg = fh \Rightarrow g = h)$$

$$C \overset{g}{\underset{h}{\longrightarrow}} A \xrightarrow{f} B$$

2. 次（右簡約可能条件）を満たすとき，epimorphism という．

$$\forall D \in \mathcal{C} \;\; \forall i, j : B \to D \;\; (if = jf \Rightarrow i = j)$$

$$A \xrightarrow{f} B \overset{i}{\underset{j}{\longrightarrow}} D$$

命題 2.2 (Sets では全射も全写も同値である)**.** $f \in$ Sets に於ては，次は同値．

1. f は monic である．
2. f は単射である．

［証明］**.** 1.⇒2. について．$f : X \to Y$ を monic とすると，特に $g, h : 1 \to X$ について，$g \neq h \Rightarrow fg \neq fh$ である．ここで，1 は一点集合であるから，$g \neq h \Leftrightarrow g(0) \neq h(0)$，$fg \neq fh \Leftrightarrow f(g(0)) \neq f(h(0))$ が成り立

つことに注意すると，これは f が単射である条件である．

2.⇒1. について．$f : X \to Y$ を単射として，勝手な Z について $g,h : Z \to X$ を取る．ここで $g \neq h$ を仮定する．すると，$g(c) \neq h(c)$ を満たす $c \in C$ が存在するから，その c について $f \circ g(c) \neq f \circ h(c)$ より，$fg \neq fh$ を得る． □

例 2.3 (具体圏に於ける monic 射は台写像も Sets 上で monic である．)**.** 具体圏において，monos は，「単射な準同型」に一致する．これは，具体圏中の自由対象の普遍性から示せる性質である．上記の証明で，A の元と射 $1 \to A$ とを同一視した行為が，UMP of $M(1)$ により，具体圏の中にも同じ状況が写される，パラレルな議論が展開できる．従って，具体圏の monos は，Sets でも monic である．

これは，1 という存在が特殊なんだと見方が変えられる．

命題. 次の 2 条件は同値である．

1. Mon において，射 $f : M \to N$ が monic である．
2. 台写像 $U(f) : U(M) \to U(N)$ はモノイドの射 $f : M \to N$ を定め，また Sete 上で monic である．

［証明］**.** 1.⇒2. は成り立つ．

2.⇒1. を考える．まず写像 $x,y : 1 \to U(M)$ を $x \neq y$ となるように取る．取れない場合は自明に f は左簡約可能になる．すると，自由モノイド $M(1)$ の普遍性により，モノイドの射 $\overline{x},\overline{y} : M(1) \to M$ が $\overline{x} \neq \overline{y}$ を満たしながら一意的に存在する．この時，$U(f)$ は monic であるとしたから，$x \neq y$ より，$U(f)x \neq U(f)y$ である．これと再び自由モノイド $M(1)$ の普遍性より，$f\overline{x} \neq f\overline{y}$ を満たす射 $M(1) \to N$ が存在する．よって，射 f は monic である． □

例 2.4 (Pos に於ける状況は退化してしまっている．Pos では射の存在性の 0,1 コードしか大事じゃなく，合成は全く使わない次元だからであろう．)**.** Pos において，射 $p \leq q$ は monic かつ epic である．何故なら，Hom-set の元は高々 1 つであるから．$g = h$ とならないような $g,h : r \to p$ は取れない．

例 2.5 (具体圏で epic な射は，Sets 上でも epic とは限らない．)**.** 次の命題は，Sets 上で epic(=surjective) ではないのに，Mon 上では epic である例である．

そうすると，Mon 上で monic かつ epic でも，台写像は全単射ではない可能性がある．ここらへんから，次の命題 2.6 の逆は確かに成り立たないことがわかる．

命題. 包含写像（monic な集合の射）$i : (\mathbb{N},+,0) \to (\mathbb{Z},+,0)$ は epic なモノイドの射であるが，特に全射（集合の射として epic）ではない．

［証明］**.** i が Mon 上で epic であるとは，i の右簡約則，即ち，$f,g : (\mathbb{Z},+,0) \to (M,*,u)$ について，$f|_{\mathbb{N}} = g|_{\mathbb{N}} \Rightarrow f = g$ を示せば良い．

いま，$f|_{\mathbb{N}} = g|_{\mathbb{N}}$ とすると，実は $f(-1) = g(-1)$ を示せば，各 $f(-i) = g(-i)$ $(i = 2,3,4,\cdots)$ も得る．

$$\begin{aligned}
f(-1) &= f(-1) * g(0) \\
&= f(-1) * g(1-1) \\
&= f(-1) * g(1) * g(-1) \\
&= f(-1) * f(1) * g(-1) \\
&= f(0) * g(-1) \\
&= g(-1)
\end{aligned}$$

i は包含写像であり，$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \neq \varnothing$ だから，明らかに集合の全射ではない． □

同型射との関係

可逆性によって同型射を，簡約可能性によって monic, epic 射を定義した．両側簡約可能だからと言って可逆だとは限らないが，逆は勿論成り立つ．群論の初歩でも似たような議論があるように，非常に代数的に定義している，まるで射の代数である．

命題 2.6 (可逆な射は簡約可能である)**.** 同型射は，monic かつ epic である．

［証明］**.** $m : B \to C$ は逆射を $e : C \to B$ とする同型であるとする．すると，$mx = my$ と仮定すれば，$x = (em)x = e(mx) = e(my) = y$ を導けるから，m は monic である． □

2.1.2 Sections and retractions：右逆元と左逆元の対

可逆性は簡約可能性より強い概念になる．従って，全ての section は monic だし，全ての retraction は epic である．

定義 2.7 (左右可逆性を split で表す，右逆元を section，左逆元を retraction と呼ぶ．)**.**

1. 左（右）逆射を持つ射を **split** mono(epi) と呼ぶ.

2. $es = 1_A$ を満たす射 $s : A \to X, e : X \to A$ について，e に対する右逆元 s を section または splitting とよび，s に対する左逆元 e を retraction と呼ぶ．この時に引き戻される所の対象 A を X の retract と呼ぶ.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "1_A"'] & X \arrow[d, "e"] \\ & A \end{tikzcd}$$

■

注. 可逆性については，関手は単位射や合成を保存するので，mono/epi の splitablility も保存する．これは例 2.5 で，忘却関手 $U : \mathrm{Mon} \to \mathrm{Sets}$ が，split じゃない epi である包含写像 $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を保存しなかった（Sets 上では epic ではなくなった）例と対照的である.

例 **2.8** (Sets での様子と，選択公理)**.** Sets 上では，

1. $\varnothing \to A$ という種のものを除いて，mono である（左簡約可能）こと，split mono である（左可逆）こと，単射であることは全て同値.

2. epic である（右簡約可能）こと，split epic である（右可逆）こと，全射であることは全て同値.

なお，Sets において「全射ならば右逆元が存在する」という方向の条件は，選択公理と同値である．

実際，$e : E \to X$ を全射とする．即ち，各 fiber $E_x = e^{-1}(\{x\})$ は空でない．このとき，$es = 1_X$ を満たす切断 s が存在するとは，E 上の集合の族 $(E_x)_{x \in X}$ から，各 x について，s の値とすべき $s(x) \in E_x$ を選び出

すことに等しい．

逆に，空でない集合の族 $(E_x)_{x\in X}$ が与えられたとき，$E = \{(x,y) \in X \times \bigcup_{x\in X} E_x \mid x \in X, y \in E_x\}$ と定めて，この E からの全射 $e : E \to X$ を第一射影（添え字集合への射影）として定めれば，再び，これの切断 $s : X \to E$ は選択関数である．$e \circ s = 1_X$ を満たす切断 s が存在するということは選べているということになる．

これらは全て，集合の族 $(E_x)_{x\in X}$ という対象が，射 $e : E \to X$ として圏論的にも翻訳されていることによる．(This has much wider applications...)

定義 (射影的対象)**.** 対象 P が projective であるとは，

次の条件

$$\forall f : P \to X, e : E \twoheadrightarrow X \quad \exists \overline{f} : P \to E \quad (e \circ \overline{f} = f)$$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, two heads, "e"] \\ P \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

が成り立つことをいう．即ち，射影的対象から出る任意の射 $f : P \to X$ は，全射 $e : E \to X$ を通じて分解する．この条件 (left lifting propoerty against epimorphisms) を"f lifts across e"とも表現する．また，$\overline{f}$ を lift とも言う．

注.

1. f として，$f = id_P : P \to P$ を取り，epi として $e : E \to P$ を取ると，存在が保証される所の $\overline{f} : P \to E$ とは切断に他ならないから，射影的対象に入射する全ての epi は split する．

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, two heads, "e"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"] \arrow[r, "id_P"'] & P \end{tikzcd}$$

2. "Projective objects may be thought of as having a more "free" structure, thus permitting "more arrows.""

3. 次の命題が成り立つ．

命題. 選択公理を認めるならば，全ての Sets の対象は射影的である．

［証明］**.** P を勝手な集合とする．各 $x \in X$ について，$e^{-1}(\{x\}) = E_X (\neq \emptyset)$ と置く．選択公理より，各 $s(x) \in E_x$ を選び出す切断 $s : X \to E$ が存在する．

$P = \bigcup_{x \in X} f^{-1}(\{x\})$ と分割できるが，$f^{-1}(\{x\}) \subset P$ が空でないなら，その各元に $s(x) \in E_X$ を対応させることで，次の図式を可換にする $\overline{f} : P \to E$ が構成できる．

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, two heads, "e"] \\
P \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

よって，P は射影的対象である． □

4. 次の命題が成り立つ．

命題. 全ての圏 C について，射影対象 P の retract A は射影対象である．

［証明］**.** いま，A は P の retract だから，$e \circ s = 1_A$ とし，X, Y を勝手な対象，$f : A \to X$ を勝手な射，$g : Y \twoheadrightarrow X$ を勝手な epi 射とする．

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] & X \\
A \arrow[u, dotted, "\overline{f \circ e} \circ s"] \arrow[ur, "f"] \arrow[r, shift left, "s"] & P \arrow[l, shift left, "e"] \arrow[ul, dashed, "\overline{f \circ e}"'] \arrow[u, "f \circ e"']
\end{tikzcd}$$

P は射影的対象だから，$f \circ e = \overline{f \circ e} \circ g$ を満たす射 $\overline{f \circ e} : P \to Y$ が存在する．これの両辺に右から s との合成をとると，$f \circ e \circ s = f = \overline{f \circ e} \circ g \circ s$ である．

従って，条件を満たす射 $\overline{f \circ g} \circ s$ が存在し，A も射影的対象である． □

2.2　Initial and terminal objects

定義 2.9. 圏 C において，

1. 任意の対象 C について，$\hom(0,C)$ が一元集合である時，$0 \in C$ を始対象と言う．
2. 任意の対象 C について，$\hom(C,1)$ が一元集合である時，$1 \in C$ を終対象と言う．

命題 2.10. 始対象は同型を除いて一意である．

［証明］**.** $1,1' \in C$ がいずれも始対象であるとする．この時，$\hom(1,1'),\hom(1'1)$ はいずれも一元集合で，$\hom(1,1),\hom(1',1')$ もいずれも一元集合だから，その元は互いに逆射である．従って，$1 \simeq 1'$. □

例 2.11.

1. Sets にて，空集合は始対象であり，一点集合が終対象である．この時，空集合全体の集合は 1 つであるが，一点集合全体の集合は唯一つではない．従って，$\mathrm{Set} \simeq \mathrm{Set}^{op}$ は成り立たず，一般に関手 ^{op} は同型にならない．

2. 同様にして，Cat では，空圏 0 が始対象であり，1 が終対象である．

3. Grp, Mon, Vect では，自明な群が始対象でも終対象でもある．

4. Rings では $\mathbb{Z}$ が始対象であり，零環が（環とするなら）終対象である．

5. Poset category では，始対象は存在すれば最小元であり，終対象は存在すれば最大元である．これらを持つような Poset を有界という．特に，Boolean algebra は双方を持つ．

6. ブール代数の圏 BA での始対象は 2，終対象は 1 である．

7. slice category C/X において，対象 $1_X : X \to X$ は終対象である．slice category の対象とは X に差し込む C の射 f のことだったから，この場合 $\hom(f,1_X) = \{f\}$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "id_X"] \\
& X &
\end{tikzcd}
$$

定義. ブール代数とは，次を満たす 6 組 $B = (B, \wedge, \vee, 0, 1, \neg)$ である．

$$0 \leq a$$
$$a \leq 1$$
$$a \leq c \ \wedge \ b \leq c \Leftrightarrow a \vee b \leq c$$
$$c \leq a \ \wedge \ c \leq b \Leftrightarrow c \leq a \wedge b$$
$$a \leq \neg b \Leftrightarrow a \wedge b = 0 \tag{1}$$
$$\neg\neg a = a \tag{2}$$

例. 冪集合 $P(X)$ は，$\wedge = \cap, \vee = \cup, 0 = \varnothing, 1 = X, \neg = X \setminus -$ として，束どころか，Boolean algebra をなす．特に X が一点集合のときは真理値 $2 = \{0, 1\}$ である．X が空集合のときは自明なブール代数 $\{0 = 1\}$ となる．

2.3 Generalized elements

始対象への射

例. 1. Sets, Poset category では，対象 A から始対象 0 への射 $A \to 0$ が存在する時，$A = 0$ である．

2. Mon, Groups では，始対象と終対象は一致するので，全ての対象 A について射 $A \to 0$ も一意に取れる．

定義 (ultrafilter). 部分集合 $F \subset B$ がブール代数 B の filter であるとは，

1(closed upward).

$$a \in F \ \wedge \ a \leq b \Rightarrow b \in F \tag{3}$$

2(closed under meets).

$$a \in F \ \wedge \ b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F \tag{4}$$

を満たすことである．F を真に包含する filter F' が $F' = B$ しか存在しない時，filter F を極大 (maximal) であるという．またこの F を ultrafilter ともいう．

命題 (ブール代数上の ultrafilter の同値な条件)**.** ブール代数 B と真のフィルター $F \subset B$ について，次の２条件は同値である．

1. F は ultrafilter である．
2. 任意の $b \in B$ について，$b \in F$ か $\neg b \in F$ かのいずれか一方である．

［証明］**.** 1.⇒2. を考える．$b \le b$ と式 1（$a \le c \wedge b \le c \Leftrightarrow a \vee b \le c$）を併せると，$b \wedge \neg b = 0$ を得る．従って，$b \in F \wedge \neg b \in F$ とすると，$0 \in F$ となって，超 filter F が真のフィルターであることに矛盾する．一方で，$b, \neg b \notin F$ と仮定すると，$b/B = \uparrow(b) = \{a \in B \mid b \le a\}$ は真の filter（$0 \notin b/B$）であり，F よりも真に大きい．従って，F が超 filter であることに矛盾．よって，$b \in F$ と $\neg b \in F$ のいずれか一方である．

2.⇒1. を考える．F を真のフィルターとして，任意の $b \in B$ について，$b \in F$ か $\neg b \in F$ かのいずれか一方であるとする．$b \in B \setminus F$ を任意にとり，これを含む F より大きい真のフィルター F' を考えると，$b \notin F$ より，$\neg b \in F$ であるから，$b, \neg b \in F'$ となる．すると，フィルターの定義より $b \wedge \neg b = 0 \in F'$ となるから，これは $F' = B$ である．従って，フィルター F は極大である． □

命題. ブール代数の射 $p : B \to 2$ は，B 上の超フィルターと一対一に対応する．

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{BA}}(B,2) \simeq \mathrm{St}(B)$$

［証明］**.** 写像 $U : \mathrm{hom}_{\mathrm{BA}}(B,2) \to \mathrm{St}(B)$ を，各 $p : B \to 2$ に対して $U_p := p^{-1}(1)$ と置く．こうして定めた U_p は超 filter になって居る．何故ならば，次の３条件が満たされるからである．

1. $a \in U_p, a \le b$ とすると，p は関手だから，$1 = p(a) \le p(b)$ となる．1 は最大元だから $p(b) = 1$ より，式 3 を満たす．
2. $a, b \in U_p$ とすると，$p(a) = p(b) = 1$ で，$p(a) \wedge p(b) = 1 \in U_p$ であるから，式 4 を満たす．
3. 性質「任意の $b \in B$ について，$b \in U_p$ か $\neg b \in U_p$ かのいずれか一方である．」も，$b \in U_p$ と仮定すれば，p はブール代数の射だから $p(\neg b) = \neg p(b) = 0$ より $\neg b \notin U_p$ で，逆も成り立つので成り立つ．

逆に, 写像 $p : \mathrm{St}(B) \to \mathrm{hom}_{\mathrm{BA}}(B,2)$ を, 超フィルター $U \subset B$ に対して, 射 $p_U : B \to 2$（$p_U(b) = 1 :\Leftrightarrow b \in U$）を対応させる写像として定める．超フィルター U に b か $\neg b$ のいずれかが入って居ることにより，p_U は構造 $\neg$ を保ち，確かにブール代数の射になる．

こうして定めた写像 U, p は互いに逆写像になって居る． □

注. 1. ブール代数の射 $B \to 2$ は，真理値表の行 1 つに対応する．例えば B を $P(2)$ から生成したものとすると，

$$\begin{tikzcd}
 & 1 & \\
a \arrow[ur] & & \neg a \arrow[ul] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

2 つの超フィルターが，$b := \neg a$ とかけば，それぞれ次の行に対応する．

a	b	$a \vee b$
0	1	1
1	0	1

2. 以上の議論と類比的なことが Rings での，始対象への射 $A \to \mathbb{Z}$ で起こる．これが対応するのは超フィルターの代わりに，prime ideal と呼ばれる．

終対象からの射

例 **2.12.**

1. Sets にて，$X \simeq \mathrm{Hom}_{Sets}(1, X)$

2. Pos Top にて，$\mathrm{Hom}_{Pos}(1, P)$ は，P の台集合 $U(P)$ に対応する．

3. 一般の圏 C において，$\mathrm{Hom}_C(1, A)$ の元を，A の global elements, points, constants などという．

4. Sets, Poset category, Top にて，全ての点 $x : 1 \to P$ において $fx = gx$ が成り立つことと，$f = g$ であることは同値である．

5. Mon にて，$\mathrm{Hom}_{Mon}(1, M)$ は「$0 \in 1$ を M の単位元 u_M に対応させる射 $1 \to M$」の一点集合である．従って，任意の射 $h, j : M \to N$ に対して，全ての（1 つしかないが）$x : 1 \to M$ について，$hx = jx$ である．Monoids do not "have enough points."

6. BA にて，$\mathrm{Hom}_{BA}(1, B)$ $(B \neq 1)$ は空集合である．実際，$f : 1 \to B$ をその元とし，$f(0) = b \in B$ と置くと，f は一項演算 $\neg$ の構造を保つために $f(\neg 0) = \neg b \neq b$ が必要だが，これは $0 = \neg 0 \in 1$ による

$f(0)=f(\neg 0)$ と両立しない．

定義. 対象 A に対して，勝手な対象 X からの射 $x: X \to A$ を，A の generalized element または variable element という．特に $X=1$ の時，global element, points, constants などという．

注.
1. Computer scientists と logicians は，射 $1 \to A$ を定数や閉項とし，一般の射 $X \to A$ を任意の項とする．

2(Good for testing). $f: A \to B$ が monic であるとは，任意の $x, x' \in \mathrm{hom}(X, A)$ について，$x \neq x' \Rightarrow fx \neq fx'$ であることだが，これは「f が monic とは，一般化された元について"単射"であることである」と言い換えられる．

3. C の図式が可換 $\alpha f = \beta g$ であるとは，全ての一般化された元 x について $\alpha f x = \beta g x$ であるということである．（元の場合は $x = 1_A$ の場合に当たる．）

命題 (射の相等の特徴付け)**.**
全ての圏 C における任意の射 $f, g: C \to D$ について，次の 2 条件は同値である．
1. $f = g$ である．
2. $\forall X \in C\ \forall x \in \mathrm{Hom}_C(X, C)\ (fx = gx)$

［証明］**.** 1.⇒2. は明らかだから 2.⇒1. を示す．特に $X = C$ として，$x = id_C$ とすると，$f \circ id_C = g \circ id_C$ より $f = g$ が従う． □

例 2.13 (一般化された元は，定数よりも，より多くの構造に言及できる．)**.**

次のような 2 つの Poset category X, A とその間の射 $f : X \to A$（点線で表した）を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & c \\
y \arrow[rrr, dashed, bend left, "f"] & & z \arrow[ur, dashed] & b \arrow[u] \\
 & x \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[rr, dashed] & & a \arrow[u] \\
 & & & \\
 & X & & A
\end{tikzcd}
$$

これは Pos にて monic かつ epic であるが，同型ではない．さらに進んで，$X \simeq A$ でないことを示すには，「X, A を区別する保存量 (invariant) を見つける」と良い．

実際，今回 $\mathrm{Hom}_{Pos}(1, X) \simeq \mathrm{Hom}_{Pos}(1, A)$ であるが，$|\mathrm{Hom}_{Pos}(2, X)| = 5$ と $|\mathrm{Hom}_{Pos}(2, A)| = 6$ は要素の数が違う．

命題. 全ての圏 C において，$P \simeq Q$ ならば，$\mathrm{Hom}_C(2, P) \simeq \mathrm{Hom}_C(2, Q)$ である．

［証明］**.** $i : P \to Q$ を同型とする．写像 $i_* : \mathrm{Hom}(2, P) \to \mathrm{Hom}(2, Q)$ を次のように定める．

$$
\begin{array}{rccc}
i_* : & \mathrm{Hom}(2, P) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(2, Q) \\
 & \Psi & & \Psi \\
 & f & \longmapsto & i \circ f
\end{array}
$$

と定めると，$i : P \to Q$ の逆射 j から同様に定めた写像 $j_* : \mathrm{Hom}(2, Q) \to \mathrm{Hom}(2, P)$ が i_* の逆射となる．　□

注. $\mathrm{Hom}(X, -)$ は常に関手になり，関手は常に同型を保存する．

例 2.14.

1. 一般化された元 $t : T \to A$ のうち，特定の T が特異的に意味を持つことが多い (revealing)．そこで，このような t を figures of shape T in A と呼ぶ．

2. 前の例 2.13 で Pos の射 $2 \to P$ が P 内の $p \leq p'$ を満たす組 (p, p') と対応した．これは a figure of shape 2 in P の例であり，非常に geometric な直観に合う．

3. Mon の圏では，終対象からの射は常に 1 つしかなかった．しかし，$M(1)$ からの射（figures of shape $\mathbb{N}$ in M）については次が成り立つ．

命題 ($M(1)$-値点がモノイドの射を決定する)**.** 圏 Mon の射 $f, g : M \to M'$ について，次の 2 つは同値．

1. $f = g$ である．
2. 任意の $x \in \mathrm{Hom}_{Mon}(M(1), M)$ について $fx = gx$ である．

［証明］**.** 2.⇒1. を示す．

$U(M)$ 上の任意の global element $y : 1 \to U(M)$ を取る．すると，これによって定まるモノイドの射 $\overline{y} : M(1) \to M$ について，仮定より，$f \circ \overline{y} = g \circ \overline{y}$ が成り立つ．これから，$U(f \circ \overline{y}) = U(g \circ \overline{y})$ が従う．

この時，下の図式は可換であるから，特に左側の Sets 上の図式の一番外側の大回りの図式も可換になる．これより，$U(f) \circ y = U(g) \circ y$ が従う．

$$
\begin{tikzcd}
U(M(1)) \arrow[r, dashed, "U(\overline{y})"] \arrow[rr, bend left, "{U(f\circ\overline{y}),U(g\circ\overline{y})}"] & U(M) \arrow[r, "{U(f),U(g)}"] & U(M') \\
1 \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "y"] \arrow[urr, "{U(f)\circ y,U(g)\circ y}"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M(1) \arrow[r, "\overline{y}"] \arrow[dr, dashed, "{f\circ\overline{y}=g\circ\overline{y}=\overline{U(f)\circ y}}"'] & M \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \\
& M'
\end{tikzcd}
$$

以上のことが任意にとった y について成り立つのだから，次が導けたことになる．

$$\forall y \in U(M)\ U(f)(y) = U(g)(y)$$

即ち，モノイドの射 f, g が写像として等しいことを得た． □

4. 次が成り立つ．モノイド M の台集合 $U(M)$ は，一般化された要素 $M(1) \to M$，即ち，M 内の全ての figures of shape $\mathbb{N}$ によって定まる．

$$U(M) \simeq \mathrm{Hom}_{Sets}(1, U(M)) \simeq \mathrm{Hom}_{Mon}(M(1), M)$$

これより，モノイド M からの写像 $U(M) \to -$ を考えるときは，M の元の代わりに，M 内の全ての $\mathbb{N}$ の型 $\mathbb{N} \to M$ を考えればいい．

2.4 Products

命題. Sets において，集合 $A, B \in \mathrm{Sets}$ の直積 (cartesian product) $A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ からの写像 $\pi_1 : A \times B \to A$, $\pi_2 : A \times B \to B$ をそれぞれ第一射影と第二射影とすると，次の図式は可換になる．

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, "{(a,b)}"] \arrow[dr, "b"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B \end{tikzcd}$$

定義 2.15 (UMP of a product diagram)**.** 任意の圏 C において，対象 A, B の直積図式 (product diagram) とは，対象 P とそれからの射 $p_1 : P \to A, p_2 : P \to B$ があって，次を満たすもののことである．

> 任意の対象 X と任意の射 $x_1 : X \to A, x_2 : X \to B$ について，ただ一つの射 $u : X \to P$ が存在して，次の図式を可換にする．

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[dr, "x_2"] & \\ A & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B \end{tikzcd}$$

注 2.16. 次の 2 つに主張が分解できる．

1(存在). $x_1 = p_1 u \wedge x_2 = p_2 u$ を満たす射 $u : X \to U$ が存在する．

2(一意性). $v : X \to U$ も $x_1 = p_1 v \wedge x_2 = p_2 v$ を満たすならば，$v = u$ である．

命題 2.17. 圏 C の対象 A, B の積 P は，同型を除いて一意的である．

［証明］**.** P と射 $p_1 : P \to A, p_2 : P \to B$ と，Q と射 $q_1 : Q \to A, q_2 : Q \to B$ のいずれも，A と B の積の UMP を満たすとする．

Q についての UMP より，$i : P \to Q$ が，P についての UMP より，$j : Q \to P$ がそれぞれ存在し，次の図

式を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, dashed, "i"] \arrow[dr, "p_2"] & \\
A & Q \arrow[l, "q_1"'] \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, dashed, "j"] & B \\
 & P \arrow[ul, "p_1"] \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

すると，特に $p_1 \circ j \circ i = p_1$ かつ $p_2 \circ j \circ i = p_2$ が成り立つ．これを $p_1 \circ 1_P = p_1$ と $p_2 \circ 1_P = p_2$ と見比べると，UMP の一意性条件により，$j \circ i = 1_P$ かつ $i \circ j = 1_P$ である．

同様にして，$i \circ j = 1_Q$ も得る．

以上より，$P \simeq Q$ である． □

記法.

1. この A と B についての一意的な積を，$A \times B$ と書く．

2. UMP の定義内にある記号について，射 $u : X \to A \times B$ を $\langle x_1, x_2 \rangle$ と書く．

3. 積への射 $f : X \to A \times B$ は，射の組 $(f_1 : X \to A, f_2 : X \to B)$ と一対一対応する．

4. 積からの射 $g : A \times B \to Y$ は，一般化された元 $f = (f_1, f_2)$ について，一般化された元 $g\langle f_1, f_2 \rangle$ が対応するので，いわば「一般化された 2 変数関数」と言える．

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "g"] & B \\
 & Y &
\end{tikzcd}
$$