複素解析学Ｉ　第三回レポート

司馬博文 J4-190549

2020 年 10 月 10 日

[R5]

部分和の列 $\left(S_N := \sum_{n=0}^{N} |a_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束するから，この極限を $S \in \mathbb{R}$ と置く．

まず，新たな列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $T_n = S_{\max_{1\le i\le n} f(i)}$ で定めると，この列は収束し，$\lim_{n\to\infty} T_n = S$ であることを示す．作り方から，値域について $\{T_n\} \subset \{S_n\}$ であるから，列 (T_n) は上に有界．また (T_n) は単調増加列であることより，確かに実数列 (T_n) は収束する：$\lim_{n\to\infty} T_n \le S$．これから，$\lim_{n\to\infty} T_n \ge S$ でもあることをみる．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，十分大きな $N > 0$ が存在して

$$S - \varepsilon < S_n (< S) \quad (n \ge N)$$

が成り立つから，$N' := \{f^{-1}(N), N\}$ と取れば，$n \le \max_{1\le i\le n} f(i)$ より $T_n = S_{\max_{1\le i\le n} f(i)} \ge S_n$（等号成立は，$f|_{n+1} : \{0,1,\cdots,n\} \to \{0,1,\cdots,n\}$ が全単射である時）より，

$$S - \varepsilon < S_n \le T_n (< S) \quad (n > N')$$

が成り立つ．よって，$\lim_{n\to\infty} T_n = S$．

最後に，この (T_n) を用いて，$\left(S'_N := \sum_{n=0}^{N} |a_{f(n)}|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が S に収束することを示す．この列 (S'_N) も単調増加列で，$S'_N \le T_N$ $(N \in \mathbb{N})$ であるから極限値をもち，これを S' とすれば $S' \le S$ である．$S \le S'$ を示す．いま (T_n) は S に収束するから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，十分大きな N を取れば，

$$S - \varepsilon < T_n (< S) \quad (n \ge N)$$

を満たす．このとき，N に対して $M := \max_{1\le i\le N} f(i)$ と置けば $T_N = a_0 + a_1 + \cdots + a_M$ であるが，さらに $N' = \max_{1\le i\le M} f^{-1}(i)$ と置けば，$N' \ge N$ で，

$$S - \varepsilon < T_N \le S'_n (< S) \quad (n > N')$$

が成り立つ．よって，$S = S'$．

■

[R6]