目次

第 I 部

複素解析学 I

Introduction

「二次方程式を一般的に解く為には所謂虚数が必要であることが早く認められたのである。実数と虚数とを総括して、ガウス以来それを複素数と称する。数の範囲を複素数まで拡張することは、方程式論のみでなく、現今の数学の各部門に於て緊要であって、実数のみに関する問題に於ても、それを複素数の立場から考察するとき、明瞭に解決される場合が多い。これは次元の拡張であって、恰も上空から瞰下するとき、地上の光景が明快に観取せられるようなものである。」

——高木貞治『代数学講義』

複素解析学とは

複素数上の関数についての解析学．古くは関数と言えば複素関数を指したため，歴史的には「関数論」ともいう．また，「等角写像論」という切り口で教授されることも多い．

解析を代数的に出来るのが素晴らしい

留数計算や Goursat の定理，あるいはそもそも複素数体が代数的閉体であることなどの結果を用いることで，部分積分などの煩雑な微積分テクニックが，より代数的に簡明な操作に置き換わる．

講義の目標：$\log z\ (z \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$ を定義する

対数関数が解ったならば，一変数複素関数が解ったと言って良い．

謎

一体なぜ複素数という対象はこんなにも代数的に有用なのか．複素数のうちどの型が汎用性が高いのか．

実関数の複素関数への自然な拡張を目指す

例 (定義域の位相的性質が変わる)**.** 実関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\ (x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$ を複素数上に拡張したもの $f(z) = \dfrac{1}{z}\ (z \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$ は，定義域の位相的性質が違う（弧状連結である）．

例 (解析接続（複素指数関数）)**.** $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!},\ (x \in \mathbb{R})$ を複素数上に自然に拡張できる．

例 (新しく考慮可能になる値が出現する)**.** 対数関数 $\log x\ (x > 0)$ は，$\log z\ (x \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$ に拡張でき，新たに $x < 0$ にて値が定まる．これは，対数関数は指数関数の逆関数であるから，$z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して $e^w = z$ を満たす $w \in \mathbb{C}$ を $\log z$ と書く訳であるが，これは複素指数関数が単射でなくなるために（周期 2π を持つ）関数としては定まらない．そこで今回は次のように定義する．

定義 (complex logarithm)**.** $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して，$\gamma(0) = 1,\ \gamma(1) = z$ を満たす曲線 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ を任意に取り，

$$\begin{aligned}\log z &= \int_1^z \frac{dw}{w}\\ &:= \int_\gamma \frac{dw}{w}\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\gamma(t)} \frac{d\gamma}{dt} dt$$

によって定まる次のような多価関数を，**複素対数関数**という．

$$\log z = \log |z| + i(\theta + 2\pi i),\ n \in \mathbb{Z}$$

注． この性質が topology (homotopy) 的なものの考え方の原点となった．確かにベクトル解析のレポートを書き上げる際に自然に触れた．また，凡ゆる多価関数性は本質的に対数関数に起因するという．この多価性の解消は，複素指数関数の定義域を $[0, 2\pi)$ に絞れば解決されるが（これを「枝」を取り出す方法，と言う），より自然な方法に，穴あき (つまり原点を除く) ガウス平面を無限個貼り合わせた被覆空間としてのリーマン面上で定義された関数と見做す，リーマン面の方法がある．[†1]

[†1] ja.wikipedia.org/wiki/複素対数函数

第 1 章

複素数

もしかしたら何事も慣れるとそうなのかもしれないが，複素数の中心となる 2 つの構成に何度も立ち戻って基本的な性質を証明するのは構成論上仕方ないが，一度遊離してしまえば，複素数の性質を証明するのに実数の議論にまで戻る必要が必ずしもない．CR 作用素の性質も然り，また複素化という言葉（体としてというよりも，どちらかといえば線型代数）も然り（注 1.5.3）．

その観点からも，最後に証明する，複素線形性の特徴付けの 2 条件（定理 1.5.4）が，今後この上なく重要な意味を持つ．

1.1 複素数の構成

高校教育課程では，imaginary unit $i^2=-1$ を形式的に導入して，$a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ と表される数を複素数とし，和と積に関する次の法則を発見する．

$$(a+bi)+(c+di)=(a+b)+(b+d)i \tag{1.1}$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i \tag{1.2}$$

ここでは，性質 $i^2=-1$ を満たす，より筋が良い 2 つのモデルを実際に構成することで，更なる詳細の性質についての結果を導くための基盤とする．

定義 1.1.1 (complex numbers 1 — 代数系 $(\mathbb{R}^2,\cdot)$ として (Hamilton))**.** 積 $\cdot:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を備えた二次元実線型空間 $\mathbb{R}^2$ を**複素数体**と呼び，$\mathbb{C}:=(\mathbb{R}^2,\cdot)$ と書く．

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac-bd\\bc+ad\end{pmatrix}$$

標準基底 $\mathbf{e}:=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathbf{i}:=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を用いて，$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=a\mathbf{e}+b\mathbf{i}$ と成分表示できる．これを $a+bi$ と略記する．$\mathrm{Re}\,z:=a,\mathrm{Im}\,z:=b$ と定める．写像 $i:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}\ni a\mapsto a\mathbf{e}\in\mathbb{C}$ とすると，これは包含射（埋め込み）であり，$i(\mathbb{R})=\{z\in\mathbb{C}\mid\mathrm{Im}\,z=0\}$．この包含射によって $\mathbb{R}$ の元は $\mathbb{C}$ の元と同一視する．$\mathrm{Re}\ =0\wedge\mathrm{Im}\ =0$ を満たす，即ち純虚な実数とは，ただ一つの数 0 である．

補題 1.1.2. 次が成り立つ．

1. $\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}=\mathbf{e},\mathbf{e}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{i},\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}=\mathbf{i},\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=-\mathbf{e}$.
2. (可換性) $v,w\in\mathbb{R}^2$ に対して，$vw=wv$ が成り立つ．
3. (分配性) $v_1,v_2,w\in\mathbb{R}^2,a,b\in\mathbb{R}$ に対し，$(av_1+bv_2)w=av_1w+bv_2w$.

定義 1.1.3 (complex numbers 2 — 部分代数 M として)**.** 2 次元正方行列のなす線型空間 $M_2(\mathbb{R})$ の，次のようにして定まる部分空間 M を複素数体 $\mathbb{C}:=M$ と言う．

$$M=\left\{\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\;\middle|\;a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

命題 1.1.4. 次が成り立つ．

1. M は（行列）積について閉じて居る．
2. $\varphi:\mathbb{C}\ni a+bi\mapsto\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\in M$ は体としての同型である．

特に $\varphi(1)=E,\varphi(i)=J:=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ となる．この J を**複素構造**と言う．

注 1.1.5.

$$\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\;J\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)$$

であり，$J^2\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ であると言う構造を持つ．

補題 1.1.6. $\alpha,\beta,\gamma\in M$ について，次が成り立つ．

1. $\alpha+\beta=\beta+\alpha,(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma),\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.
2. $\alpha\beta=\beta\alpha$.
3. $\det(aE+bJ)=a^2+b^2$.（よって，零元 0 を除いて逆元を持つ）．

1.2　その他の構成と一意性：複素化，代数的閉包

まず，今回の授業で用いた 2 つの構成が等価であることが確認できる．次に，

1. 純粋な体論から：任意の各大体 $\mathbb{R}\subset\mathbb{F}$ が共通して持つ部分 $\cap\mathbb{F}$ として (Ahlfors),
2. 多項式の部分体 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ として，
3. 複素構造 J の中心化群として（問題 1.6.1），

も構成できる．
最後に $\mathbb{R}$-線型空間 V から同じ次元の $\mathbb{C}$-線型空間 $V\oplus V$ を構成する手法として算譜抽出をして複素化を定義できる（$V=\mathbb{R}$ の時，これは複素数の構成に等価）．

命題 1.2.1 (２つの構成の等価性)**.** 写像

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^2 \\ \cup\!\!\!\!\!\!\; & & \cup \\ aE+bJ & \longmapsto & \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{array}$$

は（体の）同型である．

書籍 [1] では $\mathbb{C}$ の存在を体の公理系についての論から示していた．それは，方程式 $x^2+1=0$ の解が存在する $\mathbb{R}$ の任意の拡大体 $\mathbb{F}$ が共通して持つ部分体 $\mathbb{C}$ としての構成で，まず $\mathbb{R}$ の公理とその存在と一意性を確認し，そして Hamilton の構成をして存在と一意性を確認した．

また，次の構成法もある．なんというか，体の拡大に代数方程式論を用いたことと深い繋がりがあるように思う．

問題 1.2.2 (多項式の部分体として)**.** 次の部分体は，$\mathbb{C}$ と同型である．

$$P := \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$$

例 1.2.3 (複素構造 J の中心化群としての構成)**.** ２次元実線型空間 V の自己射のモノイド $\mathrm{End}(V)$ に対して，可逆射 $J : V \to V$ を $J^2 = -E$ によって定め，これに対して可換になる射全体の集合を $M = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid AJ = JA\}$ を満たす部分空間／部分 (Abel) 群として複素数を作り出せる．勝手な元を $x \in V$ とし，もう一つを Jx と取れば（直行座標になる），J は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ と表示される．

命題 1.6.1 により，$L \in \mathrm{Aut}(V)$ は $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}\, L(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$ と表せるのであった．

1.2.1　複素共軛と複素化

命題 1.2.4 (複素共軛は唯一の非自明な自己同型である，従って対合である)**.** $\mathbb{R}$ 上の結合的代数の圏上での自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ は，複素共軛の作用のみで，$\mathbb{Z}/2$ である．

The automorphism group of the complex numbers, as an associative algebra over the real numbers, is $\mathbb{Z}/2$, acting by complex conjugation.†1

注 1.2.5. 実数の場合は $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = \{\mathrm{id}\}$ ということであろうか．

線型代数の言葉で，体の拡張 $\mathbb{R} \xrightarrow{i} \mathbb{C}$ は，一般化されており，複素化と呼ばれる．

定義 1.2.6 (complexification)**.** 実線型空間 V の**複素化**とは，$\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{C}$ とのテンソル積 $V^{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ のことである．なお，係数体を埋め込み $i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ により拡大する．†2 この複素化によって，V の基底は $V^{\mathbb{C}}$ の基底と同一視される．

---

†1 ncatlab.org/nlab/show/complex+number
†2 https://ncatlab.org/nlab/show/complexification

1.3　複素数特有の抽象的性質

複素数は一般に抽象的に，公理論的に存在し，それ自体の自律性を持つはずである．ということで，前節の二通りの構成法を抽象化し，複素共軛という複素構造 J に本質的な概念に注目して，複素数の特徴を，実数（成分）の言葉から遊離して複素共軛という複素数特有の言葉で捉え直し，**これを足場とすること**を目指す．
複素数体を $(\mathbb{R}^2,\cdot)$ と同一視した際には虚数単位 i が，M と同一視した際には $(x\ \ Jx)$ と表せることが本質的な意味を持つ．前者の見方では複素共軛は唯一の非自明な体同型であり，後者の見方では複素共軛は行列の転置である．

定義 1.3.1 (absolute value / modulus, conjugate)**.** $z = x+yi \in \mathbb{C}$ について，

1. $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ を，z の**絶対値**と言う．$(\mathbb{R}^2,\cdot)$ のベクトルとしての長さを表す．
2. $\overline{z} = x-yi$ を，z の**複素共軛**と言う．M の元としての転置を表す，転置が involution であるという点において共軛的である．

つまり，複素構造としては $\pm\sqrt{-1}$ のいずれも採用し得るが，**複素共軛を考えれば，右手系のみの言葉から複素数の世界を対称的に扱える．**

命題 1.3.2 (conjugate involution is a field automorphism)**.** 複素共軛の概念により定まる $\mathbb{R}$-線型写像 (conjugate involution) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, i \mapsto \overline{i} = -i$ は，$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ を変えない $\mathbb{C}$ の自己同型である．

注 1.3.3. これは体の拡大についての言葉を用いて，Galois 群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ が位数 2 の巡回群で，複素共軛により生成されると言える．[†3]

命題 1.3.4 (複素共軛による特徴付け)**.** 実部は，複素共軛との平均として得られる．

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\overline{z}}{2},\ \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

複素数の構成 1（定義 1.1.1）の際に用いた内部構造を抽象化する点において強力な指針となる．

補題 1.3.5 (絶対値，複素共軛と演算の整合性)**.** $z = x+yi, w = u+vi \in \mathbb{C}$ を $(\mathbb{R}^2,\cdot)$ の元とみなす．

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathrm{Re}\, z\overline{w} = \mathrm{Re}\, \overline{z}w$．（$\mathbb{R}^2$ の内積の表示．$\mathbb{R}^2$ 内の内積は，M では転置して掛け合わせた行列の 11 または 22 要素に現れるから，Re で取り出せる．これらは転置に対して値を保存する）．
2. $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}, \overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$．複素共軛はそのどちらを採用しても同じ複素数体を生成するので，和と積を保存する（同型）．
3. $|z|^2 = z\overline{z} = |\overline{z}|^2$．（回転変換の部分の打ち消し，直行行列が自身の転置と積を取って居るので 2 つの基底の長さを掛け合わせた値になる，これは行列式に等しい）．
4. $|zw| = |z||w|, \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$（3. の帰結）．

[†3] nLab

また，次が成り立つ．不等式条件は順序が $\mathbb{R}$ 上にしかないために，これの大部分を引き継ぐ形になる．

5. $|z\pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\, z\overline{w} + |w|^2$（これより恒等式 $|z+w|^2+|z-w|^2 = 2(|z|^2+|w|^2)$ を得る）．
6. $-|z| \le \mathrm{Re}\, z \le |z|, -|z| \le \mathrm{Im}\, z \le |z|$.
7. (Cauchy) $\mathrm{Re}\, z\overline{w} \le |z||w|$（等号成立条件は $z/w > 0 :\Leftrightarrow z/w \in \mathbb{R} \wedge z/w > 0$）．
8. (三角不等式) $|z+w| \le |z|+|w|$.

［証明］**.** 1., 2., 3. は $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ の元としての成分計算からわかる．4. は 2.,3. を用いて $|ab|^2 = ab\cdot\overline{ab} = ab\overline{a}\overline{b} = |a|^2|b|^2$ から得る．$b = \dfrac{1}{b}$ と定め直せばもう一方を得る．

5. は 3. と 1. から分かる．$|z\pm w|^2 = (z\pm w)(\overline{z}\pm\overline{w}) = |z|^2 \pm (z\overline{w}+\overline{w}z) + |w|^2$.

6. は定義（実数からの構成）から成分計算により従う．

7. は，5. より $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^n |a_i - \lambda\overline{b}_i|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 + |\lambda|^2 \sum_{i=1}^n |b_i|^2 - 2\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}\sum_{i=1}^n a_ib_i \ge 0$ が成り立つ．特に $\lambda = \dfrac{\sum_{i=1}^n a_ib_i}{\sum_{i=1}^n |b_i|^2}$ とすることで，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n |a_i|^2 + \frac{|\sum_{i=1}^n a_ib_i|^2}{\sum_{i=1}^n |b_i|^2} - 2\mathrm{Re}\,\frac{\sum_{i=1}^n \overline{a}_i\overline{b}_i}{\sum_{i=1}^n |b_i|^2}\sum_{i=1}^n a_ib_i \\
=&\sum_{i=1}^n |a_i|^2 + \frac{|\sum_{i=1}^n a_ib_i|^2}{\sum_{i=1}^n |b_i|^2} - 2\frac{|\sum_{i=1}^n a_ib_i|^2}{\sum_{i=1}^n |b_i|^2} \\
=&\sum_{i=1}^n |a_i|^2 - \frac{|\sum_{i=1}^n a_ib_i|^2}{\sum_{i=1}^n |b_i|^2} \ge 0
\end{aligned}$$

を得る．

8. は，5. と 6. より $|a+b|^2 = |a|^2+|b|^2+2\mathrm{Re}\, a\overline{b} \le |a|^2+|b|^2+2|a||b| = (|a|+|b|)^2$ より従う．□

命題 1.3.6. 複素数 α がある実係数代数方程式の解ならば，$\overline{\alpha}$ も解である．

［証明］**.** 補題 1.3.5.2 より，全ての四則演算からなる方程式関係について，その構造を体同型（＝四則演算を保存する）である involution は保存する．そしてこの involution による双対命題は，係数が全て実数であるために，同じ方程式についてもう一つの解の存在を保障することになる．□

例 1.3.7 (代数方程式)**.**

円の方程式　$|z-\alpha| = r$ またはパラメータ表示で $z = r\xi + \alpha$ $(|\xi| = 1)$．または代数方程式で $(z-a)(overline z - \overline{a}) = r^2$．また，この方程式は複素共軛の下で不変だから，その不動核に入っていることがわかる，即ち実数の関係式 1 本の等価な表現がある．

楕円の方程式　長軸が実軸に含まれ，短軸が虚軸に含まれる場合，$|z|^2 + a(z^2+\overline{z}^2) - r = 0$ $(0 \le a < \dfrac{1}{2})$ と表せる．成分で表すと $(1+2a)x^2 + (1-2a)y^2 - r = 0$ となる．

注 1.3.8 (2 つの構成の緊密な協調)**.** 次のような観察は，複素数という構造の筋の良さを伺わせる．この 2 つを往来することで強力な時短になる．特に幾何的な側面は次の節で考察する．

1. 代数的な計算 $\dfrac{1}{\alpha+i\beta} = \dfrac{\alpha-i\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ は，行列としての逆写像を考えることで $z^{-1} = Z^{-1} = \dfrac{1}{|\det Z|}\overline{z}$ に一致する．逆行列が転置の定数倍に一致するのはたまたまである．

1.4　複素数の積の幾何的性質

複素数は公理論的にも存在するが，必要に応じて Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ や行列 M と同型を取って考えられるのが強みである．例えば，複素数は $(\mathbb{R}^2,\cdot)$ の点でもあり，その上での（回転・拡大）変換でもあるのであった．これらを組み合わせ，適宜内部構造を参照することで，幾何的にも代数的にも強力な道具になる．「あと半年もすると，なんでも複素数で書いて計算してしまうようになります．」とのことであった．おかげで公式 $\sqrt{\alpha+i\beta}=\pm\left(\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}+i\frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right)$ $(\beta\neq 0)$ を考えずに済むのである．

複素数を幾何的に捉えるには，回転・拡大変換に強い極座標系の表示を用いると手触りが良い．

定義 1.4.1 (polar form / trigonometric form)**.** 複素数 z はある実数 θ を用いて，

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

と表せる．この時 θ を z の**偏角**といい，$\theta=\arg z$ と書く．$\arg:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ は多価な選択写像で，特に $(-\pi,\pi]$ に取る値を**主値**というが，暗黙のうちに 2π の倍数分の違いは無視して $=$ などの記号で結ぶことが多い．

補題 1.4.2 (偏角の性質：$\mathbb{C}$ の積を $\mathbb{R}$ の和に写す)**.** $w=|w|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ とする．

1. $zw=|z||w|(\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi))$.
2. $\arg w-\arg z=\arg(w/z)\quad\mathrm{mod}\ 2\pi$.

定義 1.4.3 (Gauss 平面の向きと複素数のなす角)**.** 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ においてベクトル $v,w\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ のなす角は

$$\cos\theta=\frac{(v,w)}{||v||\cdot||w||}$$

とし，この時符号が不定であった．一般に Euclid 空間 $\mathbb{R}^2$ と言った時は，(e_1,e_2) を標準的な向きとする．

しかしここに積の構造を加えた $\mathbb{C}$ の場合，$\sqrt{-1}(=i=J)$ という標準的な向き（右手系）が定まって居る．従って，２つの複素数 $v,w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ のなす角は次のように定義する．

$$\frac{w}{||w||}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\frac{v}{||v||}$$

命題 1.4.4 (円分方程式の解)**.** 方程式 $z^n=\alpha\in\mathbb{C}$ の解は，$\alpha=r(\cos\theta+\sin\theta)$ を満たす r,θ を用いて，

$$z=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^m\quad m=0,1,2,\cdots,n-1$$

と表せる．表示は少し技巧的で，前半の z_0 が解を構成する因子で，その偏角変化の step が ξ^m 分大きくなっても，n 乗した後に α の方向を向いて居る事は変わらない．そして方程式の解はこの n 個に尽きる．

命題 1.4.5 (Dirichlet kernel)**.**

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\ (\theta\neq 2\pi n\ n\in\mathbb{Z})$$

右辺は**ディリクレ核**と呼ばれ，Fourier 解析にて収束性の議論の際などに登場するのが有名．三角関数の加法に対する法則のみで説明可能な事象であることは間違いないが，その論理の筋が辿れたからと言って我々に利する事は少なそうである．

［証明］. $\zeta = \cos\theta + i\sin\theta$ $(\theta \neq 2\pi n\ n \in \mathbb{Z})$ とおく，即ち $\zeta \neq 1$．次が成り立つ．

$$1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^n = \frac{1-\zeta^{n+1}}{1-\zeta}$$

この左辺の実部は $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ であるから，右辺の実部を計算することを考える．$z = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}$ と置き直すと，$z^2 = \zeta, z^{-1} = \overline{z}, 1-\zeta = 1-z^2 = z(\overline{z}-z)$ だから，

$$\begin{aligned}\frac{1-\zeta^{n+1}}{1-\zeta} &= \frac{1-z^{2n+2}}{z(\overline{z}-z)} \\ &= \frac{\overline{z}-z^{2n+1}}{\overline{z}-z} \\ &= \frac{\overline{z}-z^{2n+1}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{i(\overline{z}-z^{2n+1})}{2\sin\frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

この実部は $\mathrm{Re}\,(i\overline{z}-iz^{2n+1}) = \sin\frac{\theta}{2} + \sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)$ より，得る． □

注 1.4.6 (公理論としての厳密性についての注意)**.** 以上の議論は，三角関数は定義せずに（あるいはすごく解析的に定義し）naive に用いており，また幾何的な言明は $\mathbb{R}$ の解析的性質から従うものとしたことに注意．[1] 複素解析学では三角関数を別の角度から定義しなおす．

1.5　等角性と複素線形性は同値

（厳密には CR 方程式が複素関数の Yacobi 行列に課す制約を見ることによって判明するが,）平面上の線型写像が等角である時，それは平面を Gauss 平面 $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ とみなしたときにこの上の $\mathbb{C}$-線型写像を定めていることに同値であることを，初等的に平面上のベクトルの「なす角」を複素数の偏角の言葉で捉えることで，見る．

まず，複素数とは，部分空間 $M \subset M_2(\mathbb{R})$ であった．即ちモノイド $\mathrm{Mor}_{\mathrm{FinVect}_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C})$ の部分群であることを洗い出す．

1.5.1　実線型写像が複素線型でもあるための条件と複素化

命題 1.5.1 ($\mathbb{R}^2$ の実自己線型写像の複素数表示)**.** 実線型写像 $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は，ある複素数 $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$ と用いて，$L(z) = \alpha z + \beta\overline{z}$ と表せる．（即ち，実線型写像 $L: \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ は ι を用いて $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ の実部分空間（２次元）に埋め込める）

［証明］**.** $\mathbb{R}^2$ の標準基底について，L は行列 $A=(a\,b)\in M_2(\mathbb{R})$ で表示されるとする．すると，

$$
\begin{aligned}
L=(a\,b)&=\frac{1}{2}(a+Jb\ \ -Ja+b)+\frac{1}{2}(a-Jb\ \ Ja+b)\\
&=\frac{1}{2}(a+Jb\ \ Ja-b)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(a-Jb\ \ Ja+b)
\end{aligned}
$$

と分解できる．2 つの行列は，それぞれ $Ja-b=J(a+Jb), Ja+b=(a-Jb)$ の関係を満たすから，これを複素数

$$
\begin{aligned}
\beta&:=\frac{1}{2}(a+Jb\,Ja-b)\\
\alpha&:=\frac{1}{2}(a-Jb\,Ja+b)
\end{aligned}
$$

と取れば，

$$
\begin{aligned}
Lz&=\beta\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}z+\alpha z\\
&=\alpha z+\beta\overline{z}
\end{aligned}
$$

と表せる． □

命題 1.5.2 ($\mathbb{R}^2$ の実自己線型写像の可逆性条件)**.** 実線型写像 $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が $L(z)=\alpha z+\beta\overline{z}$ と表されているとする．これが可逆であることは $|\alpha|^2-|\beta|^2\neq 0$ に同値である．

［証明］**.**

$$
\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \arrow[r] \arrow[d, mapsto] & \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha+\beta+\overline{(\alpha+\beta)} & -(\alpha-\beta-\overline{(\alpha-\beta)})\\ \alpha+\beta-\overline{(\alpha+\beta)} & \alpha-\beta+\overline{(\alpha-\beta)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \arrow[d, mapsto]\\
z \arrow[r, mapsto] & \alpha z+\beta\overline{z}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "f_L"] \arrow[d, "\varphi_{1,i}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\varphi_{1,i}"]\\
\mathbb{C} \arrow[r, "L"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

$\alpha z+\beta\overline{z}$ に $z=x+yi$ を代入し，基底 $1,i$ について成分表示をすると，$L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ の表現行列を特定できる．この行列式は，

$$
\begin{aligned}
\det f_L&=\frac{1}{4}\Big\{((\alpha+\beta)+\overline{(\alpha+\beta)})((\alpha-\beta)+\overline{\alpha-\beta})\\
&\qquad-((\alpha+\beta)-\overline{(\alpha+\beta)})((\alpha-\beta)-\overline{(\alpha-\beta)})\Big\}\\
&=\frac{1}{4}(4\alpha\overline{\alpha}-4\beta\overline{\beta})=|\alpha|^2-|\beta|^2.
\end{aligned}
$$

□

注 1.5.3 (complexification を用いた証明：実数上まで引き戻す必要がない)**.** 証明中の同型射 $\varphi_{1,i}:\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は，$1,i\in\mathbb{C}$ が定める同型である．複素線型空間としての $\mathbb{C}$ は，実線型空間 $\mathbb{R}$ の複素化である：$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}=:\mathbb{R}_{\mathbb{C}}\simeq\mathbb{C}$. 今回の証明はこれの梯子を降るために用いたが，逆に登る方向へと用いると，実数上の議論まで引き戻さずとも済む．

実 2 次線型空間としての $\mathbb{C}$ の複素化 $\mathbb{C}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}(=\mathbb{C}^2)$ を考える．そこへの埋め込みである実線型写像 $\iota : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ を $z \mapsto \begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}$ で与えると，これは単射だから，$V = \iota(\mathbb{C})$ と実 2 次部分空間を置けば $\iota : \mathbb{C} \to V$ の範囲で可逆である．なお，ここで V **は複素線型（部分）空間ではない**ことに注意，複素数倍について閉じていないからである．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\oplus\mathbb{C} \arrow[r, dashed, "L_{\mathbb{C}}"] & \mathbb{C}\oplus\mathbb{C} \\
V \arrow[u, dotted, "i"] \arrow[r, "\hat{L}:=L\oplus L"] & V \arrow[u, dotted, "i"] \\
\mathbb{C} \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "L"] & \mathbb{C} \arrow[u, "\iota"] \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\
z \arrow[r, mapsto] & \alpha z + \beta\overline{z}
\end{tikzcd}
$$

すると，上図を可換にする実線型写像 $\hat{L} := \iota\circ L\circ\iota^{-1}$ の行列表示は，

$$\hat{L}\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z + \beta\overline{z} \\ \overline{\beta} z + \overline{\alpha}\overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}$$

となる．（行列表示に複素数が現れているが，これは L が実線型写像であることと矛盾しない）．即ち，上の可換図式は，最上部の射 $L_{\mathbb{C}}$ は $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ 上のものであるが，下部の四角形は $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}$ 上のもので，i はただの包含写像である．この時，**複素線型写像** $L_{\mathbb{C}}$ **は実線型写像** L **の複素化**と言う（ただし，実線型写像 $\hat{L}$ は L が $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C} \to \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ 上に定める実線型写像の V への制限で，$L_{\mathbb{C}}$ とは，複素行列 $\hat{L}$ が $\mathbb{C}^2$ 上に定める複素線型写像）．

まず，可換図式の下部を $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}$ 上で考え，$\det\iota = 1$ を導く，すると $\det\hat{L} = \det\iota^{-1}\cdot\det L\cdot\det\iota = \det L$ を得る．ι は $\mathbb{C}$ の基底を 1，V の基底を e_1, e_2 と複素上の線型空間として見ていると見えてこない，L は必ずしも複素線型とは限らないからである．一方双方を実線型空間と見ると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+yi \\ x-yi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より，確かに $\det\iota = 1$．

可換図式の上部の $\hat{L}$ の $L_{\mathbb{C}}$ への拡張考える．$\hat{L}$ と $L_{\mathbb{C}}$ は表現行列が同一であるから，$\det\hat{L} = \det L_{\mathbb{C}}$．$V, \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ の集合としての共通部分から取れる 2 元 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix}$ は，V の $\mathbb{R}$ 上の基底でもあり，$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底でもある．これが複素化である．

複素化：体の拡大に伴う，体上の加群の射の拡張

実線型写像 $f : V \to W$ について，一度積写像 $f\oplus f : V\oplus V \to W\oplus W$ を考え，空間 $V\oplus V, W\oplus W$ に複素数の構造を入れて得る $V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}$ 上に，それに伴って拡張される $\mathbb{C}$ 倍 $\cdot : \mathbb{C}\times V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ の構造を保つと言う意味での複素線型写像 $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ を f の複素化という．$V\oplus V$ から $V_{\mathbb{C}}$ の定義は，集合としては変わらず，純粋に複素数積の代数的構造を入れたのみである．

1.5.2　複素線型写像と等角写像

写像 $z \mapsto \bar{z}$ は，$\bar{z} = \alpha z$ と表した場合の $\alpha \in \mathbb{C}$ が $z \in \mathbb{C}$ の値に依ってしまい：$\alpha = \dfrac{x^2 - y^2 - 2xyi}{x^2 + y^2}$，一定の複素数 $\alpha z = \bar{z}$ と表すことの出来ない変換である．即ち，複素線型ではなく，複素数をかける行為と複素共軛を取る行為は可換ではない．従って，この実線型写像 $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が，複素線型写像 $L' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ と見做せるためには，この成分が消えなければならない．

定理 1.5.4. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を実線型同型とする．次の 3 条件は同値である．

1. L は等角写像である（任意の $v, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して，v, w のなす角と Lv, Lw のなす角が等しい）．
2. L は $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ と見た時，$\mathbb{C}$-線型写像である（即ち，L は複素数で表される，あるいは $L \in M$）．
3. L は複素構造 J と可換である．即ち，$JL = LJ$ が成り立つ．

［証明］．まず 1.⇔2. を示す．⇐ は，$\exists \alpha \in \mathbb{C}, L(z) = \alpha z$ である時，α は回転・拡大変換を施すので，なす角を保存する．⇒ を考える．$L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を等角写像と仮定すると，特に $1, z$ のなす角と $L(1), L(z)$ のなす角は等しい．従って，

$$\arg z - \arg 1 = \arg L(z) - \arg L(1)$$

を得る．これより，$\arg\left(\dfrac{L(z)}{z}\right) = \arg L(1) = (L$ に依って定まる値$)$ より，命題 1.5.1 より，複素数 $\dfrac{L(z)}{z} = \dfrac{\alpha z + \beta \bar{z}}{z} = \alpha + \beta\left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)$ の偏角はある一定値をとる．ここで $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に応じて，$\dfrac{\bar{z}}{z}$ は単位円周 $|\xi| = 1$ 上を動くから，複素数 $\dfrac{L(z)}{z}$ は $\dfrac{L(z)}{z} = \alpha + \beta\zeta \ (|\zeta| = 1)$ とパラメータ表示できるが，この偏角は一定であるはずなので，$\beta = 0$．よって，$L(z) = \alpha z \ (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$．

次に 2.⇔3. を示す（問題 1.6.1 の解が証明となって居る）．⇒ は，2. が成り立つ時，$iL(z) = L(iz) \ (z \in \mathbb{C})$ が成り立つから，即ち 3. も成り立つ．一方この時，命題 1.5.1 より，$L(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$ と置いて，

$$\begin{aligned} L(iz) - iL(z) &= \alpha(iz) + \beta(\overline{iz}) - i(\alpha z + \beta \bar{z}) \\ &= -2i\beta\bar{z} = 0 \end{aligned}$$

より，$\beta = 0$ を得る． □

1.6　演習

問題 1.6.1 (複素構造の特徴付け, 複素数の特徴付け)**.** V を二次元実線型空間，$J : V \to V$ を $J^2 = -E$ を満たす線型写像とする．

1. V のある基底が存在して，J は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ と表示される．
2. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．$AJ = JA$ を満たす二次正方行列 A を全て求めよ．

［解］．1. $x \in V$ を任意に取る．すると，x, Jx が線型独立である．なぜならば，x, Jx が線型従属ならば，$\exists k \in \mathbb{R}(Jx = kx)$ であるが，$J^2 x = -x = k^2 x$ であり，$k^2 = -1$ が導かれるが，これは $k \in \mathbb{R}$ に矛盾．従って x, Jx

は線型独立．すると，これを基底として，$J = (Jx\ J^2x) = (Jx\ -x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ と表される．

2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と置くと，$J^4 = E$ より，条件は $A = JAJ^3$ となるから，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ より，これを満たす A は確かに集合 $M \subset M_2(\mathbb{R})$ をなす．

問題 1.6.2. $f(z) = \dfrac{z-a}{1-z\overline{a}}$ $(|a|<1)$ について，次を示せ．

1. $|z| = 1$ の時 $|f(z)| = 1$.
2. $|z| < 1$ の時 $f(z)| < 1$.

第 2 章

複素関数

実 2 変数ベクトル値関数と複素関数の間に次のような同型がある．

$$
\begin{array}{ccc}
\varphi : \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2 \supset D, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(\mathbb{C} \supset D', \mathbb{C}) \\
\cup & & \cup \\
f(x,y) & \longmapsto & g(z(,\overline{z})) := f\left(\dfrac{z+\overline{z}}{2}, \dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right)
\end{array}
$$

これにより，複素解析の殆どは，足元の空間を基底 $1, i \in \mathbb{C}$ が定める同型 $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, a+bi \mapsto (a,b)$ によって同一視することで，$\mathbb{R}^2$ 上の微分位相幾何（ベクトル解析）の特殊なモデルとして理解できるはずである．

複素関数 $f : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ を一変数 $z(= x+yi)$ で定義したところまではこれで良いが，それについての微分作用素 $\dfrac{d}{dz}$ に対しての振る舞いは，$\mathbb{R}^2$ 上の x, y の 2 変数の観点からは素朴には全く予想がつかない．ここで，複素微分可能な平面上の関数 $D \to \mathbb{C}$ のクラスを特徴付ける偏微分方程式が Cauchy-Riemann 方程式である．この一階の二次の偏微分方程式を満たすこと，その関数が等角写像であること（定理 2.3.6）と，その関数が複素微分可能であること（＝線型主要部が複素線型であること，定理 2.3.4）と，その関数が J の中心化子となる平面上の自己同型群を定めることと（問題 1.6.1），同値になる．

2.1 複素数列の収束

Hamilton の構成 $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ の通り，$\mathbb{R}^2$ の位相の議論と並行になる．位相の言葉を定義しなければ，微分は概念さえ出てこない．そして $\mathbb{R}$ の場合に比べて順序構造が除かれたのみで，微分概念は殆ど同様に定義される．

定義 2.1.1 (convergence)**.** 複素数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $z \in \mathbb{C}$ に収束するとは，絶対値について

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ n \geq N \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう．この論理式を $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ と略記する．

命題 2.1.2 ($\mathbb{R}^2$ として)**.** 複素数列 $\{z_n = x_n + iy_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について，$\lim_{n\to\infty} z_n = z$ と $\lim_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = y$ とは同値．

［証明］**.** 三角不等式より，

$$\max(|x_n - x|, |y_n - y|) \le |z_n - z| \le |x_n - x| + |y_n - y|$$

$\Leftarrow$ はこの右辺から，$\Rightarrow$ はこの左辺から分かる． □

命題 2.1.3 (completeness)**.** $\mathbb{C}$ は完備である．

［証明］**.** 複素 Cauchy 列 $\{z_n = x_n + iy_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，実 Cauchy 列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束するから，$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も収束する． □

2.2　複素関数

まず正則関数（整型関数）を定義する．そしてその必要条件として簡単に Cauchy-Riemann 方程式が導けることを観察し，その微分幾何的な意味（Jacobi 行列 J_f が複素数を定める $J_f \in M$ ために，等角写像となる）を確認する．そして，複素数とは複素構造 J の中心化子でもあるという事実（問題 1.6.1）は，複素線形性 $\dfrac{\partial}{\partial z}(\alpha f) = \alpha \cdot_{\mathbb{C}} \dfrac{\partial}{\partial z} f$ に対応する．各接空間において，α が定める変換 A と，複素微分が定める変換 J とは可換なのである．

2.2.1　複素微分と正則関数

定義 2.2.1 (convergence, limit, continuous)**.** 開集合 D の複素関数 $f : D \to \mathbb{C}$ の，$p \in D$ における極限値とは，次を満たす $\alpha \in \mathbb{C}$ のことをいう．

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ 0 < |z - p| < \delta \Rightarrow |f(z) - \alpha| < \varepsilon$$

この論理式を $\lim_{z\to p} f(z) = \alpha$ と書く．

これを用いて，関数が $p \in D$ で連続であることを，$f(p) = \lim_{z\to p} f(z)$ が成り立つことと定義する．

命題 2.2.2. 次の 3 条件は同値である．

1. $\lim_{z\to p} f(z) = \alpha$.
2. $\lim_{z\to p} \overline{f(z)} = \overline{\alpha}$.
3. $\lim_{z\to p} \mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Re}\, \alpha \wedge \lim_{z\to p} \mathrm{Im}\, f(z) = \mathrm{Im}\, \alpha$.

［証明］**.** $\mathbb{R}^2$ の位相構造から遺伝した性質である．直積の普遍性に沿った定義が出来て居ることを確認できる． □

定義 2.2.3 (complex-differentiable, regular / holomorphic)**.**

複素関数 f が $a \in D$ で**（複素）微分可能**であるとは，極限値 $\lim_{z\to a} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$ が存在することをいう．

関数 f が全ての点で微分可能であるとき，関数 f を**正則**または**整型**であるという．

> 「形容詞‘解析’ (analytic) は、むしろ全局的の意味において用いられる。局所的には簡便に正則 (regular) という。フランス系では整型 (holomorphe) ともいう。」

（高木貞治『解析概論』p.202）

こうして関数の正則性の概念にまで到達した．$f:\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ が複素微分可能であるとは，実微分可能であることよりも遥かに強い（CR 方程式だけ強い）概念である．ひとまず，関数についての微積分の議論を抽象するために，次の補題を立てる．

補題 2.2.4 (関数の正則性の遺伝と微分法則)**.** $f,g:D\to\mathbb{C}$ を正則関数とする．

1. $f+g, fg, f/g$ は（g の零点を除いて）正則である．
2. (Leibniz) 極限値について，$(f+g)'=f'+g', (fg)'=f'g+fg', \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$ $(g(z)\neq 0)$.
3. (Chain) $f\circ g$ は正則で，$(f\circ g)'=(f'\circ g)\cdot g'$.

2.2.2　Cauchy-Riemann 方程式とその微分幾何的な意味

議論 2.2.5 (複素微分可能であるために追加で必要な条件)**.** さて，いま，f が正則である時，特に x,y 軸への偏導関数 f_x, f_y を考えると，

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=f_x(z)$$
$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+ih)-f(z)}{ih}=-if_y(z)$$

となるから，関係式 $f_x=-if_y$ が成り立つことが必要である．これを成分ごとに書き下すことによって得る二本の偏微分方程式を**コーシー・リーマンの方程式**という．

となると，逆にこの偏微分方程式を満たす 2 変数ベクトル値関数 f は全て正則になるのかが気になる．本当にそうなることが期待される（定理 2.3.4），なんとなく $\mathbb{R}^2$ に対して，複素構造 J が生み出す本質的な構造であるような気がするからである．

定義 2.2.6 (Cauchy-Riemann 方程式)**.** C^1 級 2 変数ベクトル値関数 $f=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ について，次の偏微分方程式を**コーシー・リーマンの方程式**という．

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix}=-J\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial y}\\ -\frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}$$

注 2.2.7 (等角写像の言葉による Cauchy-Riemann 方程式の特徴付け)**.** これは，ベクトル値実関数 f の Yacobi 行列が $\left(\begin{pmatrix}u_x\\v_x\end{pmatrix}\ J\begin{pmatrix}u_x\\v_x\end{pmatrix}\right)$ と表される，即ち，M に属することを要求して居ることに他ならない．従って，Cauchy-Riemann 方程式が満たされることは，f の定める接空間上の変換 df が，各接空間においては複素数で表されること＝等角変換であることに同値である．従って，Cauchy-Riemann 方程式の解 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は，各点の接空間を各点ごとに等角に変換する，等角写像である．

また，等角写像の合成はまた等角写像であることから，Cauchy-Riemann 方程式の解は合成について閉じて居ることが予想される．

2.3　Cauchy-Riemann 作用素：等角写像性を接空間上で再考

前節では初等的な考察から CR 方程式を導き，それが複素関数 f の Yacobi 行列に課される条件 $J_f \in M$ と同値であることとその意味を考察した．
一方で，このことを微分作用素の代数的に，複素共軛の言葉からの微分作用素 $\partial_z, \partial_{\overline{z}}$ の満たすべき性質は何かという翻訳を考えたい．そもそも，複素数には通常の $\mathbb{R}^2$ 平面としての微分構造の特殊な場合としても考えられるが，複素構造特有の捉え方があるはずである．それを象徴するのが Wirtinger の偏微分作用素／ Cauchy-Riemann 作用素（と対応する 1-形式）である．これは（各接空間において，α が定める変換 A と，複素微分が定める変換 J とは可換であることからも分かるとおり）複素線型で，Leibniz 則と連鎖律が成り立つ．即ち，２変数関数 $f(z, \overline{z})$ と見て，全く実多変数ベクトル値関数 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の微積分とパラレルに計算が展開できる．強力な代数的道具となる．1-形式を用いて Cauchy の積分定理を証明するときまで極めて強力な道具となる．
また，この代数的観点からは，ある複素関数が微分可能であるかの CR 方程式は，導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ が消えて居るかを確認すれば良いだけである．この複素関数のための微分 (Wirtinger の作用素) からの見方は「複素関数とは，複素数による一変数関数である」という調和した感覚を，方程式の言葉で述べたものである．
これは**線型空間の複素化**として一般化されている．

2.3.1　Cauchy-Riemann 作用素：複素関数のための偏微分作用素＝接空間の基底

議論 2.3.1 (Cauchy-Riemann 方程式を，線型空間の複素化の視点から見直すことを目指す)**.** いま，$f: D \to \mathbb{C}$ が $a \in D$ で全微分可能とは，或る $\mathbb{R}$-線型写像 $L: x+yi \mapsto \alpha x + \beta y$ が存在し，$f(a+z) = f(a) + L(z) + o(z)\ (z \in \mathbb{C})$ と表せることと同値であったが，f が全微分可能である時 $L(x+yi) = f_x(a)x + f_y(a)y = \dfrac{f_x(a) - i f_y(a)}{2}(x + yi) + \dfrac{f_x(a) + i f_y(a)}{2}(x - yi) = f_z z + f_{\overline{z}} \overline{z}$ と表せるから，或る $\mathbb{R}$-線型写像 L が存在し，$f(a+z) = f(a) + f_z(a)z + f_{\overline{z}}(a)\overline{z} + o(z)\ (z \in \mathbb{C})$ と表せることと同値でもある．この時，Cauchy-Riemann 方程式（複素微分可能であるための必要十分条件）はもちろん $f_{\overline{z}} = 0$ と表される．

定義 2.3.2 (Wirtinger derivative / Cauchy-Riemann operator とその 1-形式)**.** これは恰も，形式的には基底変換に見える．そこで，新たに取った基底 $z, \overline{z}$ についての偏微分作用素

$$\partial_z f = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\overline{\partial} = \partial_{\overline{z}} f = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

を**コーシー・リーマン作用素**という．また，対応する 1-形式を $dz = dx + idy, d\overline{z} = dx - idy \in \Omega(\mathbb{C})$ と定める：

$$dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 1, \qquad d\overline{z}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = 1.$$

次の美しい代数的法則が成り立つために，どの微分作用素を採用しようと，即ち x,y を基底として考えても，$z,\overline{z}$ を形式的に独立変数と考えてウルティンガーの微分を考えても，議論はほぼ並行に展開される．次の補題のように，ウルティンガーの微分は通常の意味の微分が満たすべき性質（補題 2.2.4 など）をすべて満たして居る．

補題 2.3.3 (微分法則)**.** ウルティンガーの微分作用素 $\dfrac{\partial}{\partial z},\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ について，次が成り立つ．

1. 複素線型である．
2. Liebniz 則が成り立つ．
3. Chain Rule が成り立つ．
4. 複素共軛の構造と整合的である．

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}},\qquad \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}=\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}$$

［証明］**.** 全て $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ と同一視をして，実数上の既知の議論まで還元すれば確認できる． □

ここで，新たに得たコーシー・リーマン作用素の言葉で，複素微分可能性（コーシー・リーマン方程式）が特徴付けられることをみる．つまり，全微分可能な $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が正則な $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ に自然に拡張できるためには，$f=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ のそれぞれが微分可能であるだけでなく，ちょうど Cauchy-Riemann 方程式という条件を加えたものに等しい．この条件のチェックには，$\overline{z}$ での偏微分を見れば良い，という．

定理 2.3.4 (複素微分可能性の特徴付け)**.** 次の二条件は同値．

1. f は a で複素微分可能である．
2. f は a で全微分可能，かつ，$\partial_{\overline{z}}f(a)=0$ である．

［証明］**.** 1.⇒2. は既に述べたように，実軸と虚軸について近づければ全微分可能だとわかり，その導関数は Cauchy-Riemann 方程式を，即ち $f_{\overline{z}}(a)=0$ を満たす．

⇐ は，全微分可能性より $f(a+z)=f(a)+f_z(a)z+f_{\overline{z}}(a)\overline{z}+o(z)\;\;(z\in\mathbb{C})$ と表せるが，$f_{\overline{z}}(a)=0$ だから，$f(a+z)=f(a)+f_z(a)z+o(z)\;\;(z\in\mathbb{C})$．これは 1. の定義に他ならない． □

2.3.2　等角写像性を微分幾何の言葉で再考

等角性とは，各接空間上で接ベクトルが直交することに他ならない．Cauchy-Riemann 方程式とは，複素関数 f が各接空間上に定める線型主要部 df が複素線型写像であることを要請する条件であるから，各点でベクトルの角度を保つに決まっている（定理 1.5.4）．

定義 2.3.5 (conformal)**.** C^1 級複素関数 $f:D\to\mathbb{C}$ が $p\in D$ において等角であるとは，任意の p を通る正則な２曲線 $\gamma_i:(-1,1)\to D,\gamma_i(0)=p\;(i=1,2)$ について，これらが p でなす角と $\tilde{\gamma}_i:=f\circ\gamma_i$ が p でなす角が等しいことをいう．

なお，２曲線 γ_i が点 p でなす角とは，順序も考えて $\arg\left(\dfrac{\gamma_1'(p)}{\gamma_2'(p)}\right)$ と定める．

定理 2.3.6 (等角写像の特徴付け)**.** f を C^1 級複素関数とする．次の二条件は同値．

1. f は p で等角である．
2. （f は p で全微分可能，かつ，）$\partial_{\bar{z}}f(p)=0$ である．

［証明］**.** f を C^1 級とする時，点 p の接空間 $T_p(\mathbb{C})$ 上に f が定める線型写像（関数の differential）は，$(dz)_p,(d\bar{z})_p$ を空間 $\mathrm{Hom}(T_p(\mathbb{C}),T_p(\mathbb{C}))$ の基底として，

$$(df)_p=\frac{\partial f}{\partial z}(p)(dz)_p+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p)(d\bar{z})_p$$

と表せる（議論 2.3.1）．従って，f が点 p にて等角であることは，$(df)_p$ が $\mathbb{C}$-線型写像であることと同値で（定理 1.5.4），それは $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p)=0$ であることに同値． □

注 2.3.7. まるで平面 $\mathbb{R}^2$ の接空間 $T_p(\mathbb{R}^2)$ 上の変換に，見えない自由度 $(d\bar{z})_p\in\mathrm{Hom}(T_p(\mathbb{R}^2),T_p(\mathbb{R}^2))$ があって，その係数が潰れていれば等角写像になる，と言って居るように思える．このようなものの見方が複素構造の本質である，と．

2.4　Cauchy-Riemann 作用素による微分幾何概観

今までの章で確認したことを改めて述べ直し，Cauchy の積分定理をベクトル解析の知識から確認する．

定義 2.4.1 (複素関数と二変数ベクトル値関数，複素線積分)**.**

- 次の同型射が存在する．

$$\begin{array}{ccc}\varphi:\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2\supset D,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(\mathbb{C}\supset D',\mathbb{C})\\ \cup & & \cup\\ f(x,y) & \longmapsto & g(z(,\bar{z}))=f\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2},\dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)\end{array}$$

  逆射はもちろん $g(z,\bar{z})=f(x+yi,x-yi)$ とすれば良い．この時 $z,\bar{z}$ は形式的に独立変数として扱って作った同型であるが，$z,\bar{z}$ の間の関係をぴったり捉えたのが Cauchy-Riemann 方程式である．これを満たすものを $g(z,\bar{z})$ を略記して $g(z)$ と書き，複素関数と呼ぶ．
- この同型を用いて，$\mathbb{R}^2$ 上の線積分として成分ごとに計算し，再び複素数に引き戻して値を定義したものを，**複素線積分**という．

Cauchy-Riemann equation と同値なもの

$f:D\to\mathbb{C}$ を全微分可能とする．

1. f は正則．
2. $\partial_{\bar{z}}f=0$．
3. f は等角写像である．
4. f は任意に複素数 α が定める変換 g_α と可換である．

注 2.4.2 (正則とは？)**.**

1. まるで平面 $\mathbb{R}^2$ の接空間 $T_p(\mathbb{R}^2)$ 上の変換に，見えない自由度 $(d\bar{z})_p \in \mathrm{Hom}(T_p(\mathbb{R}^2), T_p(\mathbb{R}^2))$ があって，その係数が潰れていれば等角写像になる．
2. f は $\bar{z}$ に関数として依存しない（複素解析的であるという意味で）．

定義 2.4.3 (compact convergence / uniform convergence on compact sets)**.** 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ と距離空間 (Y, d_Y) 間の関数の列 $(f_n : X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ が，関数 $f : X \to Y$ に**コンパクト一様収束**するとは，任意のコンパクト集合 $K \subset X$ について次が成り立つことをいう：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall x \in K,\ n > N \ \Rightarrow |f_n|_K(x) - f|_K(x)| < \varepsilon.$$

即ち，全てのコンパクト集合 $K \subset X$ について

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} d_Y(f_n(x), f(x)) = 0$$

が成り立つことをいう．

定義 2.4.4 (analytic)**.** $f : D \to \mathbb{C}$ が**複素解析的**であるとは，任意の $p \in D$ について，$r > 0$ が存在して，$B_r(p) \subset D$ の範囲内で f が Taylor 展開可能であることをいう．つまり，剰余項がコンパクト一様収束をする．

$$f(z) = f(p) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(p)(z-p)^n \quad (\forall p \in \mathbb{C},\ \exists r > 0,\ \forall z \in B_r(p))$$

定理 2.4.5 (正則関数は解析的である)**.** $f : D \to \mathbb{C}$ が正則ならば，複素解析的である．（複素解析的ならばもちろんオーバーキルで正則である．この 2 つの関数のクラスが一致することが複素解析学の肝の一つである）．

定義 2.4.6 (entire function)**.** これより，正則関数 f の収束半径とは，f の最も近い特異点までの距離となる．特異点がないならば，f が正則ならば即 $\mathbb{C}$ 上全ての点で無限解微分可能ということになる．これを**整関数**という．

系 2.4.7 (identity theorem)**.** 連結な領域 $D \subset \mathbb{C}$ で正則な関数 f について，その零点集合が D 上に集積点を持つならば，f は D 上零関数であるとわかる．（従って，正則関数に関しては，可算点列上で局所的に一致することを確認すれば，大域的に一致すると分かって決まってしまう）．

定理 2.4.8 (Cauchy's integral theorem)**.** $f : D \to \mathbb{C}$ を正則関数とする．閉領域 $D' \subset D$ は，その境界が区分的 C^1 級の曲線 $\gamma_i\ (i = 1, \cdots, r)$ からなるものとする．この時，次が成り立つ．

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_r} f(z)dz = 0$$

［証明］**.** $f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ と表せるとする．すると，$\mathbb{R}^2$ 上の積分として，Stokes の定理より，

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_r} f(z)dz &= \int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_r} (udx + vdy) \\
&= \int_{D'} d(udx + vdy) \\
&= \int_{D'} du \wedge dx + dv \wedge dy \\
&= \int_{D'} \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) \wedge dy
\end{aligned}$$

$$= \int_{D'} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

となるが，今 f は正則関数であるから，Cauchy-Riemann 方程式の実部より，$\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$．よって，$\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_r} f(z)dz = 0.$ □

注 2.4.9 (一般の境界付き多様体上の Stokes の定理からは例として一瞬で示せる)**.** Wirtinger 微分の言葉により，Cauchy-Riemann 方程式は余接空間上の 1-形式の消息に移してあるので，次の議論では一瞬である．

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_r} f dz &= \int_{D'} df \wedge dz && \text{(Stokes}'\text{theorem)} \\ &= \int_{D'} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 0 \end{aligned}$$

Cauchy の積分定理は，複素平面上の正則関数の周回積分は，homotopy に対して不変であることを主張して居る．

系 2.4.10. γ_1, γ_2 は端点が一致する曲線であって，可縮な領域を内部に囲むものとする．f がその領域を含むある開集合上で正則ならば，次が成り立つ．

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Cauchy の定理の逆については，次の事実が成り立つ．

定理 2.4.11 (Morera’s theorem)**.** 連結な領域 $D \subset \mathbb{C}$ について，連続な複素関数 $f : D \to \mathbb{C}$ を考える．次の 2 条件は同値である．

1. 任意の区分的 C^1 級の閉曲線について線積分が 0 である
2. f は正則である．

2.⇒1. は Cauchy の定理と言ったが，1.⇒2. をモレラの定理という．

Cauchy の定理は閉領域について成り立つ定理であった，Poincaré の補題により，空間 D' が可縮であるため potential が存在するのである．では，穴が空いた領域においては，積分値でその穴についての情報を捉えることができる．これが Cauchy の積分公式である．

定理 2.4.12 (Cauchy’s integral formula)**.** 開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 内の単純閉曲線 C について，C が囲む領域内の点 ξ で正則関数 f が取る値に対して，次が成り立つ．

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

関数のクラスを生み出す関手が微分方程式である

正則関数の全体は層をなす．微分方程式の正則解は，その部分層を指定していると考えられ，Cauchy-Riemann 方程式はこの観点から特に重要である．
また，Laplace 方程式は調和関数をうみ，二つは酷似している．

2.4.1　（概）複素多様体

複素微分幾何学では，複素多様体が研究される．mirror 対称性からは，symplectic 幾何学と複素幾何学に何らかの対応性を定式化しようとしている．それは Calabi yau 多様体という，1 次元の楕円曲線や 2 次元の K3 曲面の高次元への拡張である複素多様体上で展開されつつある現象である．

> 一般にミラー対称性は，2 つの物理理論の同値性であり，複素幾何学の問題をシンプレクティック幾何学の問題へ翻訳することでもある．
> 今日では，ミラー対称性は純粋数学の主要な研究テーマであり，数学者は物理学者の直観に基づくミラー対称性を数学的に深く理解しつつある．ミラー対称性は弦理論の計算を実行する際の基本的なツールでもある．

定義 2.4.13 (almost complex structure)**.** 滑らかな多様体 M 上に定義された接束上の自己同型射 $J: TM \to TM$ で，$J^2 = -\mathrm{id}_{TM}$ を満たすものを**概複素構造**という．これは M 上の滑らかな $(1,1)$-テンソル場とも見れる．

注 2.4.14.
1. この概念は 1940s の Charles Ehresmann と Heinz Hopf による．
2. Riemann 計量と Symplectic 形式と整合性を持つ三つ組 (compatible triple) を形成することがある．
3. 任意の複素多様体は，概複素構造を定める．
4. M が概複素構造を持つならば，M の次元は偶数である．
5. 任意の偶数次元の線型空間には線型複素構造が入る．従って偶数次元の多様体はいつも $(1,1)$-テンソル場を持っており，各点で $J_p^2 = -1$ を満たす．そして，この局所テンソルを互いに貼り合わせても大域的に定義できる時だけ，各点ごとに定義された線型複素構造は**複素構造**を与える．
6. 複素構造のことを概複素構造と区別して**可積分な**複素構造という．即ち，我々は複素線型写像 f から接空間上の自己同型 J_f を得たが，これを逆に局所から大域に辿ることが出来る場合のことを複素多様体という．
7. 球面で概複素構造を持つものは S^2, S^6 だけで，S^2 の場合は Riemann 球面から定まるものであるが，S^6 の場合は，可積分かどうかも分かっていない．(Eresmann and Hopf).

2.5　指数関数

代表的な整関数の源は複素指数関数である．ここから，三角関数や双曲線関数などの代表的な関数が出てくる．まずは初等的に，指数関数を実関数の場合と同様，微分方程式によって指定する．

議論 2.5.1 (関数は，微分方程式によって指定する．)**.** 実解析の場合からの自然な拡張として，次の偏微分方程式 2.1 の解 f として複素指数関数を定義するのが良いと思われる．

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f, \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0, \qquad f(0) = 1. \tag{2.1}$$

f の存在を認めてその必要条件を探ると，Cauchy-Riemann operator の関係 2.3.2 を用いて，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = f$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right) = if$$

である．これを用いて，まず偏角成分を確定させるために，実関数 $|f|$ を求めるにあたって，

$$\frac{\partial |f|^2}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\overline{f} + f\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 2|f|^2$$
$$\frac{\partial |f|^2}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\overline{f} + f\overline{\frac{\partial f}{\partial y}} = i|f|^2 - i|f|^2 = 0$$

と計算でき，従って $|f|^2 =: h(x)$ とおけば，これは実常微分方程式 $h_x = 2h, h(0) = 1$ を満たす．従って，$h(x) = Ae^{2x}(A \in \mathbb{R})$ が一般解であるが，正規化して，$|f(z)| = e^x$ とわかる．

ここで，定数変化法より，残る部分を $g(z) := e^{-x}f(z)$ と定めると，x, y で記述したいのでこれについての偏微分を調査すれば，

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -e^{-x}f + e^{-x}f = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = e^{-x}if = ig$$

を得るから，この常微分方程式を $g(0) = 1$ と共に解くと，$g(y) = \cos y + i\sin y$.

定義 2.5.2 (complex exponential function)**.** 複素指数関数 $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を，実関数 $e^x, \cos y, \sin y$ を用いて，$e^z := e^x(\cos y + i\sin y)$ によって定義する．特に，純虚数 $x = 0$ について，逆に実関数の複素指数関数による表現を得る．

$$\cos y = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sin y = \frac{e^z - e^{-z}}{2i}$$

注 2.5.3 (別定義)**.** 実数の優級数判定法より，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ は絶対収束する．よって，定理 3.2.14 から，複素微分可能な関数を $\mathbb{C}$ 上に定める．これを指数関数と定義しても良い．

2.6　連結性から，正則関数の姿を探る

連結な定義域上の正則関数が，定数関数となるための条件を考える（定理 2.6.5）．そのために，連結性についての位相的な言葉を準備する．総合して，これらの議論をするためのものの考え方は極めて微分位相幾何学（ベクトル解析）的であるが，欲しい結果のためには，折れ線だけを考えれば非常にすっきり議論できる．

この節での結果は，正則関数の微分がどこかで消える時，それは多項式関数であるということである．

定義 2.6.1 (domain / region)**.** 連結な開集合を**領域**という．

注 2.6.2. Hahn (1921, p. 85 foonote 1) によれば、連結開集合としての領域の概念を導入したのはコンスタンチン・カラテオドリの有名な著作 (Carathéodory 1918) においてである。ハーンはまた、”Gebiet” (”領域”) の語はそれ以前より時折開集合の同義語として用いられていたことも注意している．

Hahn (1921, p. 61 foonote 3) は開集合 (”offene Menge”) の定義を与えたところで、以下のように述べている: ”Vorher war, für diese Punktmengen die Bezeichnung ”Gebiet” in Gebrauch, die wir (§ 5, S. 85) anders verwenden werden.” (訳文: ”以前は ”Gebiet” の語をこのような点集合を表すのにしばしば用いられていた、そして我々はその語を (§ 5, p. 85) において別な意味で用いている。”

命題 2.6.3. 領域 D が弧状連結であれば，D 内の任意の 2 点は折れ線で繋ぐことができる．

［証明］**.** $p,q\in D$ とし，$\gamma:[0,1]\to D$ を $\gamma(0)=p,\gamma(1)=q$ を満たす連続関数とし，これらから p,q を結ぶ折れ線を構成する．ここで，$l:[0,1]\xrightarrow{\gamma}\gamma([0,1])\xrightarrow{d(-,\mathbb{C}\setminus D)}\mathbb{R}$ より定めると，これも連続関数となる（平面上の 2 点についての距離関数 $d:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ も連続であるから）．この関数は定義域がコンパクトなので，最小値 $m:=\min_{t\in[0,1]} l(t)$ が存在する．また，$m>0$ である．（$\gamma[0,1]\subset D$ はコンパクト，即ち有界閉集合で，$\mathbb{C}\setminus D$ も閉集合であるから，その間にある $r>0$ の開球が取れる）．Heine - Cantor の定理より，コンパクトな定義域上の連続関数は一様連続であることと同値だから，特に m について，N が存在して，$|s-t|<\dfrac{1}{N}\Rightarrow|\gamma(s)-\gamma(t)|<m$ を満たす．この N について，曲線 γ を N 等分して得られる点を結んだ折れ線は，$\forall i\in N,\ [p_i,p_{i+1}]\subset D$ であるから，折れ線全体も D に含まれる． □

注 2.6.4. 一様連続性の使い方が自由自在の夫である．それと，γ が外部 $\mathbb{C}\setminus D$ と最接近する距離 m について，この大きさで等分すれば論理の流れ（最後の 1 文）が楽というのは良いテクニックである．

定理 2.6.5 (連結な定義域上の正則関数が定数であるための条件)**.** f を領域 D 上の正則な関数とする．

1. D 上で $f'=0$ ならば f は定数.
2. D 上で $\mathrm{Re}\,f$ が定数であれば f も定数.

［証明］**.** 1. D は連結だから，特に任意にとった線分 $[p,q]\subset D$ 上について，$f'=0$ ならば f は定数であることが示せば良い．線分を $\gamma:[0,1]\to D$ を用いて $\gamma(t)=tq+(1-t)p$ とパラメータ付し，実数上の関数 $f\circ\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ を考える．$\dfrac{\partial}{\partial t}f(\gamma(t))=f'(\gamma(t))\gamma'(t)=0$ より，両辺を t で積分して，$f\circ\gamma$ は $[0,1]$ 上定数関数，よって f は $[p,q]$ 上定数関数.

2. $\mathrm{Re}\,f$ が定数関数である時，$0=2\partial_z(\mathrm{Re}\,f)=\partial_z f+\partial_z\overline{f}=\partial_z f+\overline{\partial_{\overline{z}}f}=\partial_z f$ より，f が正則であるという条件に下で，1. の条件と同値である． □

この定理は，微分の階数 n についての帰納法により，次のように一般化される．

命題 2.6.6 (一般化：多項式関数の特徴付け)**.** 領域 D 上の正則関数 f が，$f^{(n)}=0$ を満たす時，f は $n-1$ 次以下の z についての多項式である．

2.7　Riemann 球面

複素多様体 $\mathbb{C}P^1\simeq S^2$ を構成し，その上での関数を考える．すると，煩瑣な特異点 (zeros and poles) は全て対称的に扱え，真性特異点のみが残り，見通しが良い．

前節の多項式関数の特徴付けに続いて，今回は有理関数 $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ $(P,Q\in\mathbb{C}[z])$ を考える．これは，Q の

零点 Z を除いて $\mathbb{C}$ 上で正則である．そこでまず，Z での挙動を調べる．

2.7.1　多項式の考察

定理 2.7.1 (fundamental theorem of algebra). 定数でない複素係数多項式 $P\in\mathbb{C}[z]$ について，$P(z)=0$ を満たす $z\in\mathbb{C}$ が存在する．

注 2.7.2. 代数学の基本定理は、複素数体が、代数方程式による数の拡大体で最大のものであることを示している。これは、体論の言葉で言えば「複素数体は代数的閉体である」 ということになる。

系 2.7.3. $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots a_nz^n$ $(a_n\neq 0)$ とする．相異なる $\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{C}$ と $m_1,\cdots,m_k\in\mathbb{N},\sum_{i=1}^k m_i=n$ が存在して，

$$P(z)=a_n(z-\alpha_1)^{m_1}\cdots(z-\alpha_k)^{m_k},$$

と表せる．

［証明］. 因数定理を再帰的に用いる証明手法について，n についての数学的帰納法より． □

命題 2.7.4 (multiplicity, degree). 次の 3 条件は同値である（ように条件 1 を定義する）．

1. α は $P(z)$ の m **位の零点**である．
2. $P_1(\alpha)\neq 0$ の多項式を用いて，$P(z)=(z-\alpha)^mP_1(z)$ と表せる．
3. $P(\alpha)=P'(\alpha)=P''(\alpha)=\cdots=P^{(m-1)}(\alpha)=0$ かつ $P^{(m)}(\alpha)\neq 0$.

2.7.2　有理式への拡張

命題 2.7.4 の特徴付は，そのまま有理関数にも適用できる．

命題 2.7.5 (pole). ひとまず，P,Q は共通の零点を持たないとし，

$$R(z)=c\frac{(z-\alpha_1)^{m_1}\cdots(z-\alpha_k)^{m_k}}{(z-\beta_1)^{n_1}\cdots(z-\beta_l)^{n_l}}$$

と表示できたとする．この時の β_i を n_i **位の極**と呼ぶ．ひとまずは形式的に，$R(\beta_i)=\infty$ と表す．

命題 2.7.6. 次の 3 条件は同値である．

1. α は R の m 位の極である．
2. α は $1/R$ の m 位の零点である．
3. $R_1(\alpha)\neq 0,\infty$ を満たす有利関数について，$R(z)=(z-a)^{-m}R_1(z)$ と表せる．
4. $\forall j<m,\ (\lim_{z\to\alpha}|(z-a)^jR(z)|=\infty)\land(\lim_{z\to\alpha}(z-a)^mR(z)\in\mathbb{C})$.

2.7.3　Riemann 球面とその上の関数

$\mathbb{R}^3$ 内の原点を中心とした単位球面を S^2 とし，$N:=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},S:=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\in S^2$ とする．

命題 2.7.7 (stereographic projections)**.** $\mathbb{R}^3$ からの相対位相について，次の写像 Z', W' は同相写像である．

$$\begin{array}{ccc} S^2 \setminus \{N\} & \xrightarrow[\sim]{Z'} & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ p = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & Z'(p) := \dfrac{\xi_1 + i\xi_2}{1-\xi_3} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S^2 \setminus \{S\} & \xrightarrow[\sim]{W'} & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ p = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & W'(p) := \dfrac{\xi_1 - i\xi_2}{1+\xi_3} \end{array}$$

また，この 2 つの同相写像は，$S^2 \setminus \{N, S\} \subset \mathbb{R}^3$ 上に向きを整合的に定める（いずれも，S^2 の「外側」が z 軸上から見た $\mathbb{R}^2$ の向きに対応する／貼り合わさる)．

注 2.7.8.

1. Z' は，$\xi_3 = 0$ の時，点を動かさない．$\xi_3 > 0$ の時，$p = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{\xi_1}{1-\xi_3} + i\dfrac{\xi_2}{1-\xi_3}$ へ写す．これは直線 Np と，S^2 の赤道 (equator) を通る平面との交点となる．一方で W' は，それに加えて複素共役（実軸対称）変換を施している，S^2 を S で開いて伸ばした後に，ひっくり返してから $\mathbb{R}^2$ に貼り付ける動きである．あるいは，S^2 を実軸について 180 度回転してから，Z' を施している．
2. 向きを逆転させている操作が，$\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ に複素共軛を作用させている操作に対応している．

この同相写像を，２つの極 N, S について行えば，S^2 の atlas$\{Z', W'\}$ を得る．実際，このような局所座標系 Z', W' について，S^n は（滑らかな）多様体をなす．これを $n = 2$ とし，同型 $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ によって得る複素多様体としての S^2 を，**リーマン球面**という．ただし，極には取り扱いを有する．

定義 2.7.9 (Riemann sphere)**.** 立体射影 Z' に，$N \mapsto \infty$ を付け加えて得られる同相写像 $Z : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$，または，立体射影 W' に，$S \mapsto \infty$ を付け加えて得られる同相写像 $Z : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ によって定まる複素多様体（複素射影平面）を，**リーマン球面**という．

注 2.7.10.

1. 従って，$\hat{\mathbb{C}}$ 上での点列の収束は，同相写像 Z^{-1} で写した先の $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上で考える．特に，$\hat{\mathbb{C}}$ 上の点列 $\{z_n\}$ が ∞ に収束するとは，$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$ と同値である（定義？)．
2. 複素射影平面 $\mathbb{C}P^1$ でもある．

2.7.4　有理型関数：Riemann 球面上の有理関数

Riemann 球面の局所座標系 $Z' : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}, W' : S^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{C}$ を用いて，Riemann 球面上の関数の扱いを定義していく．即ち，Riemann 球面上の点がどの局所座標で表されるかで場合分けをして，適時座標変換を使いながら，定義していく．

命題 2.7.11 (有理関数の拡張)**.** 有理関数 $R : \mathbb{C} \setminus Z \to \mathbb{C}$ について，極では $R(z) = \infty\ (z \in Z)$ とし，$R(\infty) := \lim_{|z|\to\infty} R(z)$ として $R : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ と見做す．この関数は連続である．

［証明］. 有理関数 $R:\mathbb{C}\setminus Z\to\mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ 上連続であるから，極の周りでの連続性を新たに確認すれば良い． □

定義 2.7.12 ($\hat{\mathbb{C}}$-値正則関数 meromorphic functions: holomorphic function with values in the Riemann sphere)**.** $f:\mathbb{C}\supset U\to\hat{\mathbb{C}}$ が正則であるとは，局所座標系 $\{Z',W'\}$ について正則であることをいう．即ち，

1. $f(p)\in S^2\setminus\{N\}$ の時，$\mathbb{C}$-値関数 $Z'\circ f:U\to S^2\setminus\{N\}\to\mathbb{C}$ が p の近傍で正則．
2. $f(p)\in S^2\setminus\{S\}$ の時，$\mathbb{C}$-値関数 $W'\circ f:U\to S^2\setminus\{S\}\to\mathbb{C}$ が p の近傍で正則．

が成り立つことをいう．$\hat{\mathbb{C}}$-値正則関数を**有理型関数**ともいう．

注 2.7.13.

1. 有理型関数は，有理関数が多項式関数の商であるのと同様，正則関数の商として表せるからである．
2. これはつまり，解析接続を使って除きうる特異点を解消してやれば，有理型関数同士で四則演算をとったものはやはり有理型であることから従う．従って，（同じ領域で定義される）有理型関数の全体の成す集合は体を成す．**この体は複素数体の拡大体である．**
3. だんだんものすごく層っぽくなってきた？
4. 「複素多様体上で，極以外の特異点を持たない正則関数のこと」とも説明される．これは即ち，リーマン球面上で上の定義の意味で「正則」である，つまり「リーマン球面への正則関数であって、常に ∞ の値をとる定数関数ではないもの」のことを意味する．この時極とは $f^{-1}(\infty)$ の元である．
5. 極のことを**仮性特異点**といい，極でも可除でもない特異点を**真性特異点 (essential singularity)** という．

命題 2.7.14. 有理関数 $R:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は，有理型関数である．

定義 2.7.15 ($\hat{\mathbb{C}}$-上正則関数)**.** 関数 $f:S^2\supset U\to\mathbb{C}$ が正則であるとは，任意の $p\in U$ について，

1. $p\neq\infty$ ならば，$f(z)$ が p 近傍で $\hat{\mathbb{C}}$-値正則，
2. $p=\infty$ ならば，$f(1/z)$ が $z=0$ 近傍で $\hat{\mathbb{C}}$-値正則

であることをいう．ただし，$f(1/0)=\infty$ とする．

定義 2.7.16 (degree of zeros and poles)**.** 有理関数 $R:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ が，$R(p)=0$ を満たす時 $p\in\hat{\mathbb{C}}$ をその**零点**，$R(p)=\infty$ を満たす時 $p\in\hat{\mathbb{C}}$ をその**極**という．

$p=\infty$ が零点または極である時の**位数**を，$\tilde{R}(w):=R(\frac{1}{w})$ と置く時の関数 $\tilde{R}$ の $w=0$ における位数として定義する．

議論 2.7.17. 有理関数を

$$\begin{aligned}R(z)&=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m}\\&=w^{m-n}\frac{a_0w^n+a_1w^{n-1}+\cdots+a_{n-1}w+a_n}{b_0w^m+b_1w^{m-1}+\cdots+b_{m-1}w+b_m}=\tilde{R}(w)\end{aligned}$$

と置くと，分子の次数が大きい $m>n$ 時，$\tilde{R}$ は $w=0$ で $m-n$ 位の零点を持つ．分母の字数が大きい $n>m$ 時，$\tilde{R}$ は $w=0$ で $n-m$ 位の極を持つ．

すると，$\hat{\mathbb{C}}$ 上の有理関数 R の零点の位数の和は

$$\begin{aligned} n + &\begin{cases} m-n, & (m>n), \\ 0, & (m<n) \end{cases} \\ &= \max\{m,n\}. \end{aligned}$$

同様に極の位数の和も $\max\{m,n\}$.

定義 2.7.18 (degree of rational functions). $\max\{m,n\}$ を，有理関数 R の**位数**とする．

定理 2.7.19 (有理関数の根の個数と全単射になる条件). 有理関数 $R(z)$ の位数を m とする．任意の $a \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して $R(z)=a$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上に重複も含めて m 個の解を持つ．

従って，この意味で $R:\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ は m 対 1 写像である：$|R^{-1}(a)| = m\ (\forall a \in \hat{\mathbb{C}})$．特に，$m=1$ の時，有理関数 R は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の全単射を定める，これを**メビウス変換**という．

［証明］. $a=\infty$ の時，$|R^{-1}(\infty)|$ は（定義 2.7.16 上）極の位数の和だから $=m$．$a \in \mathbb{C}$ の時，$R(z)$ の位数と $R(z)-a$ の位数と $R-a$ の零点の個数と $R(z)=a$ の根の重複度を含めた個数は等しい． □

2.7.5　貼り合わせによる特徴付けと Möbius 変換

リーマン球面の 2 つの局所座標系 Z,W の間の座標変換を考える．

命題 2.7.20 (gluing function of the Riemann sphere). まず，$\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ として，次の同相写像 φ が座標変換となっている．

$$\begin{tikzcd} & S^2\setminus\{S,N\} \arrow[dl, "Z'"'] \arrow[dr, "W'"] & \\ \mathbb{C}^* \arrow[rr, "\varphi", "\sim"'] & & \mathbb{C}^* \\ \cup & & \cup \\ z \arrow[rr, mapsto] & & w := \frac{1}{z} \end{tikzcd}$$

即ち，Riemann 球面 S^2 は，2 つの複素平面を同相写像 φ によって貼り合わせて得る多様体である．

［証明］.

$$Z(p)W(p) = \frac{\xi_1+i\xi_2}{1-\xi_3}\frac{\xi_1-i\xi_2}{1+\xi_3} = \frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{1-\xi_3^2} = 1\ (\forall p \in S^2\setminus\{N,S\})$$

□

定義 2.7.21 (Möbius transformation / homography / a linear fractional transformation / a fractional linear transformation). 複素線型写像（＝等角写像）のなす圏 $\mathrm{FinVect}_{\mathbb{C}}$ 上の自己同型群 $\mathrm{Aut}\hat{\mathbb{C}}$ の元 (biholomorphisms, i.e. bijective conformal transformations) を**メビウス変換**または**一次（分数）変換**という．定理 2.7.19 より，位数が 1 の有理関数がこれに当てはまり，またこれに尽きるから，一般には $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ と表示できる．

「一次変換」と言われると線型変換と紛らわしいが，実際，線型変換の作用によって理解できる．

命題 2.7.22. メビウス変換のなす群 $\mathrm{Aut}\hat{\mathbb{C}}$ は射影線型群（一般線型群の中心による剰余群）$\mathrm{PGL}_2(K) := \mathrm{GL}_2(K)/\{\lambda I \mid \lambda \in K^\times\}$ の $K = \mathbb{C}$ である場合と同型である．

注 2.7.23.

1. （一般，特殊）射影線型群は，射影空間に忠実に作用する群のことである．群作用において忠実とは，$\forall g, h \in G,\ \exists x \in X,\ gx \neq hx$ が成り立つことをいう．
2. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の時，特殊射影線型群とも同型である : $\mathrm{PSL}_2(K) = \mathrm{SL}_2(K)/\pm I$．これは射影直線に作用する．

2.8　Schwartzian derivative による一次変換の特徴付け

定義 2.8.1 (Schwartzian derivative)**.** 正則関数 f に対する次の微分作用素 S を，**シュワルツ微分**という．

$$(Sf)(z) := \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

命題 2.8.2 (シュワルツ微分作用素は，Möbius 変換の下で不変である)**.** シュワルツ微分作用素は，Möbius 変換の下で不変である．

命題 2.8.3. 正則関数 f について，次の 2 条件は同値である．

1. 正則関数 f は，位数 1 の有理関数 R，即ち Möbius 変換である．
2. シュワルツ微分が 0 になる：$Sf = 0$.

2.9　演習

第 3 章

冪級数

一度に無限個の項の和を考えることは出来ないから，有限和を用いた近似列の極限として無限和を捉える．（近似列について何かしらの言及をし，これを帰納法を用いて極限への言及について引き上げる）．極限の概念が定義できるのは，射の上に於てのみである．（物理学が近似の学問であるとしたら，その有限範囲の極限としての無限を考える射の学問が数学と言えるのではないだろうか）．

そしてこの級数の方法において，複素関数を無限和（＝有限範囲での近似の極限）として表すことができる．この媒介をするのが線型代数の言葉であり，関数の空間と列の空間との間に，基底を定めることによって同型が定まり，この対応を媒介してくれる．

そして整関数を定義し，微分やその他の諸属性を証明するのは，無限列の空間上に於てである．従って，「積分と微分の交換」や「微分と極限の交換」と言った射の可換性の証明が最後まで問題となる．

極限というものの本質として，議論が必然的に圏論的になる．

最後に，複素微分というものは，冪級数の方法即ち極限の言葉によって定義できる関数のクラスに極めて親和性の高い作用素で，この極限とこの微分とは無条件に可換になる（定理 3.2.14）．

3.1　級数とは無限和

級数とは無限和である．無限和を定義するには，有限部分和の列の極限として定義する．級数について絶対収束という条件さえ満たせば，複素数上の和についての法則は複素数列の上にも遺伝し，和の結合性，可換性，積の分配性が同様に成り立つことが保証される．

定義 3.1.1 (級数の収束)**.** 複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が定める級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとは，部分和の列 $\left\{S_N := \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n\right\}$ が収束することをいう．

このとき特に，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ も収束するとき，特に**絶対収束**という．

命題 3.1.2 (和の可換性)**.** 絶対収束する級数は，和を取る順序を変えても収束する．即ち，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき，任意の全単射 $\sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ も収束し，極限値は一致する．

［証明］. 部分和の列 $\left(S_N := \sum_{n=0}^{N} |a_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束するから，この極限を $S \in \mathbb{R}$ と置く．

まず，新たな列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $T_n = S_{\max_{1\le i\le n} f(i)}$ で定めると，この列は収束し，$\lim_{n\to\infty} T_n = S$ であることを示す．作り方から，値域について $\{T_n\} \subset \{S_n\}$ であるから，列 (T_n) は上に有界．また (T_n) は単調増加列であることより，確かに実数列 (T_n) は収束する：$\lim_{n\to\infty} T_n \le S$．これから，$\lim_{n\to\infty} T_n \ge S$ でもあることをみる．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，十分大きな $N > 0$ が存在して

$$S - \varepsilon < S_n (< S) \quad (n \ge N)$$

が成り立つから，$N' := \{f^{-1}(N), N\}$ と取れば，$n \le \max_{1\le i\le n} f(i)$ より $T_n = S_{\max_{1\le i\le n} f(i)} \ge S_n$（等号成立は，$f|_{n+1} : \{0,1,\cdots,n\} \to \{0,1,\cdots,n\}$ が全単射である時）より，

$$S - \varepsilon < S_n \le T_n (< S) \quad (n > N')$$

が成り立つ．よって，$\lim_{n\to\infty} T_n = S$．

最後に，この (T_n) を用いて，$\left(S'_N := \sum_{n=0}^{N} |a_{f(n)}|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が S に収束することを示す．この列 (S'_N) も単調増加列で，$S'_N \le T_N$ $(N \in \mathbb{N})$ であるから極限値をもち，これを S' とすれば $S' \le S$ である．$S \le S'$ を示す．いま (T_n) は S に収束するから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，十分大きな N を取れば，

$$S - \varepsilon < T_n (< S) \quad (n \ge N)$$

を満たす．このとき，N に対して $M := \max_{1\le i\le N} f(i)$ と置けば $T_N = a_0 + a_1 + \cdots + a_M$ であるが，さらに $N' = \max_{1\le i\le M} f^{-1}(i)$ と置けば，$N' \ge N$ で，

$$S - \varepsilon < T_N \le S'_n (< S) \quad (n > N')$$

が成り立つ．よって，$S = S'$．　□

命題 3.1.3 (無限和についての分配法則)**.** 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対収束するとする．このとき，$c_m := \sum_{n=1}^{m} a_n b_{m-n}$ と置けば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ も絶対収束し，

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

が成り立つ．

［証明］. $d_m := \sum_{n=0}^{m} |a_n b_{m-n}|$ と置くと，三角不等式より $|c_m| \le d_m$ $(\forall m \in \mathbb{N})$．ここで，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} d_k &= \sum_{n+m\le N} |a_n||b_n| && \text{（有限和の可換性）}\\ &\le \sum_{n=0}^{N} |a_n| \cdot \sum_{n=0}^{N} |b_n|\end{aligned}$$

であるが，右辺は収束するから，$\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ も収束する．よって $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ も収束する．

続いて，$\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) = \sum_{n=0}^{N} c_n$ が $N \to \infty$ の極限では成り立つことを示す．

$$\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) - \sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{n=N+1}^{2N} c_n$$

であるが，$\left\{\sum_{n=1}^{N} c_n\right\}$，特に $\left\{\left|\sum_{n=1}^{N} c_n\right|\right\}$ は Cauchy 列であるから，右辺は任意の $\varepsilon > 0$ に対して，N を十分大きくとれば

$$\left|\sum_{n=0}^{2N} c_n - \sum_{n=0}^{N} c_n\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{2N} c_n\right| < \varepsilon$$

と出来る．よって，

$$\left|\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) - \sum_{n=0}^{N} c_n\right| \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

よって，

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

□

3.2　冪級数と収束半径

定義 3.2.1 (power series / série entiére, formal power series)**.**

1. $c \in \mathbb{C}$ 中心の**冪級数**または**整級数**とは，収束列と中心点の組 $(\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, c)$ に対して定義される級数
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$
のことをいう．
2. 特に収束性の議論をする以前の，z を一般の可換環 R 上を走る不定元と見る時，多項式の無限への拡張となっており**形式的冪級数**という．形式的に定義された和と積について再び可換環となり，これを $R[[z]]$ と書く．

しばらくは簡単のために，冪級数の中心は原点 $c = 0$ とする．あとで平行移動を考えれば良い．

定義 3.2.2 (radius of convergence)**.** 原点中心の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ に対して，これが絶対収束する z の範囲を

$$D := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \infty \right\}$$

と定めると，D は $\mathbb{C}$ 上の開または閉の円板となる（実数列についての優級数判定法より）．この D の内部は $D^\circ = \Delta(0,R)$ と表せ，この半径 R を**収束半径**と呼ぶ．ただし，$D = \{0\}$ の時は $R = 0$，$D = \mathbb{C}$ の時は $R = \infty$ とした．

即ち，絶対収束の事象は，同心円上の同値類 $[r]$ で起こり，収束半径の内部なら任意の $[\rho]$ で絶対収束する．一方 $[R]$ 上での事象は θ にも依る場合が多く，一概には言えない．

定理 3.2.3. 冪級数 $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n$ の収束半径を $R>0$ とする．

1. 任意の $0<\rho<R$ に対して，冪級数 $S(z)$ は閉円板 $[\Delta(0,\rho)]$ 上で一様に絶対収束する．
2. $|z|>R$ ならば，$S(z)$ は発散する．

［証明］**.** 2. 対偶命題：$S(z)$ が収束するならば $|z|\le R$ であることを示す．今点 z_0（$|z_0|=:r$ とする）で $S(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ は収束するとする．すると，Cauchy 列でもあることより特に $\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n=0$ であるから，従って列 $(a_n z_0^n)$ は有界列であり，$\exists M\ge 0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ |a_n z_0^n|\le M$．すると，任意の $|z|\le s<r(=|z_0|)$ を満たす $z\in\mathbb{C}$ と $s\in\mathbb{R}$ について，$\frac{s}{r}\le\frac{|z|}{|z_0|}$ より，

$$|a_n z^n|\le|a_n z_0^n|\left(\frac{s}{r}\right)^n\le M\left(\frac{s}{r}\right)^n\quad(\forall n\in\mathbb{N}).$$

この時右辺は $\frac{s}{r}<1$ より収束するから，$S(z)$ は閉円板 $[\Delta(0,s)]$ にて一様に（$=z$ に依らず）絶対収束する．s は $s<r$ を満たすように任意に取ったから，$S(z)$ は開円板 $[\Delta(0,s)]$ にて一様に絶対収束する．従って，$\Delta(0,r)\subset\Delta(0,R)=D^\circ\subset D$ より，$r\le R$.

1. $\rho<|z_0|<R$ を満たす点 $z_0\in D^\circ$ にて $S(z_0)$ は絶対収束するから，2. での議論より，$(0<)\rho<|z_0|$ を満たす ρ について $S(z)$ は閉円盤 $[\Delta(0,\rho)]$ 上で一様に絶対収束する．　□

次の補題が抽出できる．

補題 3.2.4. $t>0$ とし，$\lim_{n\to\infty} a_n t^n$ が収束するとする．$|z|<t$ ならば，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束し，$\lim_{n\to\infty} a_n z^n=0$ である．

3.2.1　上極限を用いた収束半径の表示と d'Alembert による計算法

上極限の概念 lim sup は，実数列の特徴量を，**上限による漸近列の極限**を用いて捉える．「無限列の値域の上限の極限」という形で 2 回射の極限を取ることになるので，随分巧妙な well-defined 性を hack した記法である．

定義 3.2.5 (superior limit)**.** 実数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の**上極限**とは，

1. $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$ の時，$\limsup x_n=\infty$.
2. そうでない時，数列 $(\sup\{x_m\mid m\ge n\})_{n\in\mathbb{N}}$ の極限 $\limsup x_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{m\ge n} x_m\in[-\infty,\infty)$.

と定める．$\overline{\lim}$ とも書く．

命題 3.2.6 (上極限の特徴付け)**.** 有界な実数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，$\limsup x_n=x\in\mathbb{R}$ とは，次の 2 条件に同値.

1. $\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ n\ge N\Rightarrow x_n<x+\varepsilon$,

2. (x_n) は x に収束する部分列を持つ．

［証明］．⇒ について．$\limsup x_n = x \in \mathbb{R}$ とすると，列を $(y_n := \sup\{x_m \mid m \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ と定めればこれは単調減少列となる．$\varepsilon > 0$ を任意の取ると，$\lim_{n\to\infty} y_n = x$ よりある N が存在して $n > N \Rightarrow |y_n - x| < \varepsilon$ が成り立つ．$x_n \leq \sup\{x_m \mid m \geq n\} = y_n \ (\forall n \in \mathbb{N})$ と併せて，(y_n) が単調減少列であることに注意して，$x_n \leq y_n < \varepsilon + x$ を得る．また，$\{y_n\} \cap \{x_n\}$ に対して，順番通りに $\mathbb{N}$ から附番すれば，x に収束する (x_n) の部分列を得る．

⇐ について．$(y_n := \sup\{x_m \mid m \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ と定めると，これは (x_n) の部分列であるから，1 が成り立つ．□

注 3.2.7. (x_n) の x に収束する部分列は順序構造を持つはずで，それについての言及がないのは本当に同値になるのだろうか？「存在が保証されているところの，(x_n) の x に収束する部分列のうち最大のものをとれば，(y_n) はその部分列だから，(y_n) も x に収束する」と論じたい．

定理 3.2.8 (冪級数の収束半径は係数列から定まる)**.** 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n$ の収束半径は

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

と表せる．ただし，$R = 0$ の時は $R^{-1} = \infty$ とする．

［証明］．$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が $z \in \Delta(0, R)$ で収束するとする．この時 $(a_n z^n)$ は 0 に収束するから特に有界であり，$\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n z^n| \leq M$．これより，$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{\sqrt[n]{M}}{|z|}$ だから，

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{M}}{|z|} = \frac{1}{|z|}.$$

$|z|$ はいくらでも R に近く取れるから，特に

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R}.$$

（この全称量化子を除去する論理的言い換えについて，対偶を確認する：$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{R}$ ならば，あるより小さい実数 $r < \frac{1}{R}$ が存在して，$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > r$ を満たす．これは論理的に必ず正しい）

逆向きの不等式 $R \geq (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ を得るには，$|z|(< \rho) < (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ を満たす全ての z において $S(z)$ は絶対収束することを示せば良い．上極限の特徴付け（命題 3.2.6）の 1 より，ε を十分小さく取ることで，十分大きな N に対して

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \limsup \sqrt[n]{|a_n|} + \varepsilon < \frac{1}{\rho} \quad (\forall n > N)$$

が成り立つから，

$$(\sqrt[n]{|a_n|})^n |z|^n = |a_n z^n| < \left|\frac{|z|}{\rho}\right| \quad (n > N)$$

$\frac{|z|}{\rho} < 1$ より，$S(z)$ は絶対収束することがわかる．□

命題 3.2.9 (d'Alembert の公式)**.** 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n$ の係数列 (a_n) について，極限 $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ が収束するならば，この値は元の冪級数の収束半径である：

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

また，$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\infty$ の時，$R=\infty$.

注 3.2.10. d'Alembert の収束判定法というと，値 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ と 1 との大小関係によって，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ の収束性が議論できる，という「十分遠くの等比数列による近似」の手法であった.

［証明］. $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=:r$ と置くと，$\Delta(0,r)$ 上で冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz_n$ は一様絶対収束，$|z|>r$ ならば冪級数は発散することを示す.

$z\neq 0$ を複素数とし，$t:=\frac{|z|+r}{2|z|}$ と置く．すると，$0<|z|<r$ ならば，$t:=\frac{|z|+r}{2|z|}<\frac{r+r}{2|z|}$ であるから，

$$1<t<\frac{r}{|z|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\frac{1}{|z|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_nz^n|}{|a_{n+1}z^{n+1}|}.$$

従って，

$$\begin{aligned}&\exists N>0,\ n\geq N\Rightarrow\frac{|a_nz^n|}{|a_{n+1}z^{n+1}|}\geq t\\ \Leftrightarrow\ &\exists N>0,\ n\geq N\Rightarrow|a_nz^n|\leq t^{N-m}|a_Nx^N|\end{aligned}$$

よって，右辺について $\frac{1}{t}<1$ より，級数 $|a_Nz^N|t^N\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\right)^n$ は収束するから，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ も絶対収束する.

同様にして，$|z|>r$ の時，$\lim_{n\to\infty}|a_nz^n|=\infty$ であるから，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ は発散する. □

補題 3.2.11. 次が成り立つ：

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\leq\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\leq\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

従って，$\lim_{n\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ が収束する時，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ も収束する.

例 3.2.12 (収束円の境界上での消息：Abel の変形法). $a\in\mathbb{R}$ について定まる冪級数

$$f_a(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n^az^n$$

の収束円周 $|z|=R=1$ 上での収束性について，次が成り立つ.

1. $a<-1$ であれば，$|z|=1$ 上絶対収束する.
2. $-1\leq a<0$ であれば，$z=-1$ で発散，それ以外で収束.
3. $0\leq a$ であれば，$|z|=1$ 上発散.

［証明］. 級数 $f_a(1)=\sum_{n=1}^{\infty}n^a$ は，$a<-1$ の時収束，$a\geq-1$ の時発散するのであった．だから，$a<-1$ の時は $|z|=1$ 上絶対収束，$a\geq 0$ の時は各項が $|n^az^n|\geq 1$ であるから発散．そこで，$a\in[-1,0)$ の場合を考える.

ここで，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ を考え，その部分和の列を $(S_n:=1+z+z^2+\cdots+z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ と置く（アーベルのトリック）．すると，級数 $f_a(z)$ の部分和は

$$\sum_{n=1}^{N}n^az^n=\sum_{n=1}^{N}n^a(S_n-S_{n-1})$$

$$= -S_0 + \sum_{n=1}^{N-1}(n^a-(n+1)^a)S_n + N^a S_N$$

と分解できる．

$z \neq -1$ の時

$$|S_n| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{2}{|1-z|}$$

と a に依らずに評価できる．また，関数 $y(x)=x^a$ に関する $[n,n+1]$ 上での平均値の定理より，$a \in [-1,0)$ に注意して

$$\exists \theta \in (0,1),\ n^a-(n+1)^a = -a(n+\theta)^{a-1} \leq -an^{a-1}$$

だから，第二項は $N\to\infty$ とした時

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|(n^a-(n+1)^a)S_n| &\leq \frac{2}{|1-z|}\sum_{n=1}^{\infty}(n^a-(n+1)^a) \\ &\leq \frac{-2a}{|1-z|}\sum_{n=1}^{\infty}n^{a-1} < \infty \qquad (\because a-1<-1)\end{aligned}$$

と評価され，また第三項も

$$|N^a S_N| \leq N^a\frac{a}{|1-z|} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

と収束するから，$f_a(z)$ は収束する．

$z=-1$ の時　そもそも $a\in[-1,0)$ の時，係数列 (n^a) が発散するため，$z=-1$ の時は発散する．

□

3.2.2　冪級数は収束円内で項別微積分可能である

冪級数とは，（Taylor 展開的な近似列の）極限の言葉を用いて定義される関数である．この時極限は，殆どの作用素と可換で，絶対収束なら和の法則も保存するのであった．また優級数の方法とはほぼ三角不等式である．ここで，収束円内では，冪級数は無条件で，冪級数上の形式的微分作用素 D と，冪級数の定義の極限を取る行為とも可換であることを見る．

定義 3.2.13 (termwise differentiation operator)**.** 形式的冪級数 $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ に対し，その項別微分 DS を

$$DS(z) := \sum_{n=1}^{\infty} na_nz^{n-1}$$

と定める．

定理 3.2.14 (冪級数は項別微分できる)**.** 形式的冪級数 $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ に対して，次が成り立つ．

1. $S(z)$ の収束半径と $DS(z)$ の収束半径は等しい．

2. $S(z)$ は収束円 $\Delta(0,R)$ の内部で正則関数であり，$S'(z) = DS(z)$ である．即ち，次が成り立つ：

［証明］. 1. $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^t} = 1$ より，

$$\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}) = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

より．

2.

$$S(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n =: S_N(z) + R_N(z)$$

と置き，S の収束半径を $R \in [0,\infty]$ とし，（$R = 0$ の時は微分は定義されないから）任意に取った点 $w \in \Delta(0,R)$ での微分を考える．$\rho \in (|w|,R)$ に対して，$z \in \Delta(0,R)$ の範囲で

$$\begin{aligned}
&\frac{S(z)-S(w)}{z-w} - DS(w) \\
= &\left(\frac{S_N(z)-S_N(w)}{z_w} - S'_N(w)\right) + \big(S'_N(w) - DS(w)\big) + \frac{R_N(z)-R_N(w)}{z-w} \\
=: &\ I_N(z) + II_N(z) + III_N(z)
\end{aligned}$$

を評価すれば良い．即ち，「ρ を十分小さく取ればいくらでも S' は DS に近づけることができる」と示せば，冪級数の定める関数 S は正則で，その導関数は DS とわかる．それに当たって N で分解したが，この N というつまみを十分に大きく調整すれば，第二項と第三項は無視でき，その範囲内にて第一項を評価することが出来る，という指針で証明する．

第二項　$\lim_{N\to\infty} S'_N(w) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \overset{def.}{=} DS(w)$ は DS の定義であるから，$\lim_{N\to\infty} II_N(z) = 0$.

第三項

$$\begin{aligned}
\left|\frac{R_N(z)-R_N(w)}{z-w}\right| &\le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|a_n(z^n-w^n)}{|z-w|} && \text{（三角不等式）} \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + w^{n-1}| \\
&\le \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot n\rho^{n-1} && (|z|,|w| < \rho)
\end{aligned}$$

右辺は $DS(\rho)$ で，1. と $\rho < R$ より絶対収束するから，$III_N(z)$ も $N \to \infty$ とした時 $\Delta(0,\rho)$ 上 0 に一様に絶対収束する．

第一項　以上より，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ |II_N(z)| + |II_N(z)| < \varepsilon \quad (\forall z \in \Delta(0,\rho))$$

が成り立つ．任意に ε を取り，このような N を固定すると，$\lim_{z\to w z\in\Delta(0,R)} I_N(z) = 0$ となる．即ち，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \exists\delta > 0,\ 0 < |z-w| < \delta \Rightarrow |I_N(z)| < \varepsilon \quad (\forall z \in \Delta(0,\rho), n > N).$$

この時，

$$\left|\frac{S(z)-S(w)}{z-w} - DS(w)\right| < 2\varepsilon \quad (\forall z \in \Delta(0,\rho))$$

である．ε を任意に取ったから，$S'(w) = DS(w)$.

□

注 3.2.15. 今回の証明で示している命題を形式化するとまずは一番頑健な明瞭性が得られる：

$$\forall\rho\in(0,R),\ \forall z\in\Delta(0,\rho),\ \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \exists\delta>0,\ (|z-w|<\delta\wedge n>N)\Rightarrow\left|\frac{S(z)-S(w)}{z-w}-DS_n(z)\right|<\varepsilon.$$

ただし $DS_n:=\sum_{k=0}^{n}ka_kz^{k-1}$ とした．S が定義できているのと同様に，形式的には DS も同じ範囲で定義できることは 1. で示せる，いずれも冪級数だからである．DS という冪級数が $N\to\infty$ の極限によって定義されていることと，微分というものが $z\to w$ の極限として定義されていることの 2 つが入り乱れている．さらに言えば，収束半径 R というのも厄介者で，開円板 $\Delta(0,R)$ が「収束円の内部」だから，R を直接使うのではうまく評価できず，間にもう一つ ρ を取らねばならない（おそらく）．それで元の定理の代わりにそれと同値な先頭に 1 つ全称量化子が増えたものを示している．

定理 3.2.16. 冪級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ はその収束円の中で任意回微分可能であり，その導関数は

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nz^{n-k}$$

と表される．特に，$f^{(k)}(0)=k!a_k$ が成り立ち，$f(z)$ は次のように Taylor 展開できる：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n.$$

［証明］**.** 定理 3.2.14 を帰納的に用いて得る結果である． □

冪級数で表される関数は微分可能

冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ が $U_r(0)$ で収束するならば，$f(z):=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ は $U_r(0)$ で微分可能であり，$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nz^{n-1}$.

3.3　三角関数と指数関数

一般に指数写像は滑らかな多様体の接束上に，共変微分のことばで定義される．

定義 3.3.1 (exponential mapping)**.** 関数 $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ を

$$\exp z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

と定義する．また，三角関数を

$$\cos z:=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\mathrm{Re}\ e^{iz},\qquad \sin z:=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\mathrm{Im}\ e^{iz}$$

と定める．

補題 3.3.2 (well-definedness)**.**

1. 微分方程式 $f' = f,\ f(0) = 1$ の解である．従って，この定義は 2.5.2 と等しい（グラフが一致）．
2. $\exp z$ の収束半径は ∞ である．

［証明］**.** 1. 微分方程式の解の一意性より．

2. 命題 3.2.9 より，

$$\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow{n\to\infty} \infty = R.$$

□

命題 3.3.3. 指数関数 $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とその制限について，次が成り立つ．

1. 指数法則（和と積のズレた保存）：$e^z e^w = e^{z+w}$.
2. 三角関数の微分法則：$(\cos z)' = -\sin z,\ (\sin z)' = \cos z$.
3. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$. (because complex conjugation is a continuous field automorphism).
4. 三角関数の特徴付け：$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
5. Euler の公式：$e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

［証明］**.** 1.

$$\begin{aligned} & e^z e^w = e^{z+w} \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \end{aligned}$$

であるが，左辺は命題 3.1.3 より，

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}$$

右辺は

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k} {}_nC_k}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

より，指数法則の関係式を得る． □

3.4　対数関数

A logarithm is a local section of an exponential map.[a]

[a] nLab exponential mapping

第 4 章

写像としての解析関数

第 5 章

複素積分

Cauchy の積分定理は，Stokes の定理に他ならない．Cauchy の積分公式は，Poincaré の補題の仮定が満たされていないことを使って，定義域にあいた穴を捉える．

参考文献

[1] Lars V. Ahlfors ”COMPLEX ANALYSIS”, 3rd ed. (1979)