複素解析学 I レポート

司馬博文 J4-190549

2020 年 9 月 27 日

[R1]

(a)

$z \in \mathbb{C}$ とする．$\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i} \Leftrightarrow (\overline{z}-z)i = 2\mathrm{Im}\, z$ より，

$$\begin{aligned}
|\psi(z)|^2 &= \psi(z)\overline{\psi(z)} \\
&= \frac{z-i}{z+i}\overline{\frac{z-i}{z+i}} \\
&= \frac{z-i}{z+i}\frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} \\
&= \frac{|z|^2+(-\overline{z}+z)i+1}{|z|^2+(\overline{z}-z)i+1} \\
&= \frac{|z|^2-2\mathrm{Im}\, z+1}{|z|^2+2\mathrm{Im}\, z+1} \qquad \cdots\cdots (*)
\end{aligned}$$

であるが，$z \in \mathbb{R}$ だから $\mathrm{Im}\, z = 0$ より，

$$|\psi(z)|^2 = \frac{z^2+1}{z^2+1} = 1$$

■

(b)

$(*)$ より，$\mathrm{Im}\, z > 0$ の時，$\dfrac{|z|^2-2\mathrm{Im}\, z+1}{|z|^2+2\mathrm{Im}\, z+1} < 1$ より，$|\psi(z)| < 1$．従って，$(0 <)|\psi(z)| < 1$．

■

[R2]

(a)⇒(b)

(a) より，次が成り立つ．

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |a - z| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(z)| < \varepsilon. \tag{1}$$

a に収束する数列 $\{z_n\}$ を任意に取ると，次が成り立つ．

$$\forall \delta > 0,\ \exists N > 0,\ n > N \Rightarrow |a - z_n| < \delta. \tag{2}$$

任意の $\varepsilon > 0$ を取ると，1 より，$|a - z| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(z)| < \varepsilon$ を満たす $\delta > 0$ が存在し，この δ に対して 2 より，$n > N \Rightarrow |a - z_n| < \delta$ を満たす $N > 0$ が存在する．以上より，次の論理式，即ち $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a)$ が示せた．

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \exists N > 0,\ n > N \Rightarrow |a - z_n| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(z_n)| < \varepsilon.$$

数列 $\{z_n\}$ は任意にとったから，(b) が示せた．

■

(b)⇒(a)

Gauss 平面上の点 $w \in \mathbb{C}$ に対して，$z_n^w = a + \dfrac{w - a}{n}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定めることにより，点 w を通り a に収束する（$|z_n - a|$ の値が単調減少するという意味で）単調な数列 $\{z_n^w\}_{n=1,2,\cdots}$ が取れる．（こうして，数列の族 $(\{z_n^w\}_{n=1,2,\cdots})_{w\in\mathbb{C}}$ を定めた）．任意に $\varepsilon > 0$ を取る．これに対して，各 $w \in \mathbb{C}$ に対して $\{z_n^w\}$ は a に収束するから，(b) から非負整数 $N^w \geq 0$ が存在し，$n > N^w \Rightarrow |f(z_n^w) - f(a)| < \varepsilon$ を満たす（こうして，族 $\{N^w\}_{w\in\mathbb{C}}$ が定まる）．このとき，$\delta = \min_{w\in\mathbb{C}} |z_{N+1}^w - a|$ とすれば，$|z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つことを示せば良い．

$|w - a| < \delta$ を満たす $w \in \mathbb{C}$ を任意に取る．これを通る数列 $\{z_n^w\}$ について，$n > N \Rightarrow |f(z_n^w) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ．いま，$\{z_n^w\}$ は単調だったから，δ は $\delta = \min_{w\in\mathbb{C}} |z_{N+1}^w - a|$ と定めたことから，$|w - a| < \delta$ を満たす w に対して，$w = z_m^w$ を満たす整数 $m > N$ が存在する．従って，$|f(z_m^w) - f(a)| = |f(w) - f(a)| < \varepsilon$ が導かれる．

以上より，次の主張，即ち (a) が示せた．

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

■

(b)⇒(a)（より簡潔な回答）

対偶を示す．(a) が成り立たないとすると，$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, |z-a| < \delta \wedge |f(z) - f(a)| \geq \varepsilon$．この時の ε を一つ取り，ε_0 とする．ここで，勝手に a に収束する数列 $\{z_n\}$ を取る．すると $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0, n > N \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon$．従って，$\varepsilon_0$ に対して，$\forall \delta > 0,\ \exists N > 0,\ n > N \Rightarrow |f(z_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$ が成り立つから，$\lim_{n\to\infty} f(z_n) \neq f(a)$．よって (b) の否定が導けた．

■