記号論理学レポート（担当：岡本賢吾先生）

司馬博文 J4-190549

2020 年 8 月 8 日

概要

このレポートは，提示された問題 [1]~[5] の問題文と解答からなる．また，記法上の注意や補題については各節の初めにまとめた．問題 [5] では，筆者の興味の中心である自動定理証明システムとその数学の応用に関連して，Herbrand の定理のステートメントの意味とその証明を自分の言葉で述べた．最後に問題 [5] の解答の内容の執筆にあたって参考にした文献をまとめて附した．

[1]

まず，問題を解く前にいくつか補題を示す．

補題 [1].1.

$$\psi \vdash_{NJ,NK} \phi \to \psi$$

［証明］**.**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi}{\neg\phi\lor\psi}\lor I_R \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\phi]^1 \quad [\phi]^2}{\bot}\bot I}{\psi}\neg E \qquad [\psi]^1}{\psi}\lor E\ ;1}{\phi\to\psi}\to I\ ;2$$

□

補題 [1].2 (De Morgan's law)**.**

$$\neg(\phi\land\psi) \vdash_{NK} \neg\phi\lor\neg\psi$$

［証明］**.** 次が証明図である．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^1 \quad [\psi]}{\phi\wedge\psi}\,\wedge\mathrm{I} \qquad \neg(\phi\wedge\psi)}{\bot}\,\bot\mathrm{I}}{\neg\phi}\,\neg\mathrm{I};1}{\neg\phi\vee\neg\psi}\,\vee\mathrm{I}_L \qquad [\neg(\neg\phi\vee\neg\psi)]^3}{\bot}\,\bot\mathrm{I}}{\neg\psi}\,\neg\mathrm{I};2}{\neg\phi\vee\neg\psi} \qquad [\neg(\neg\phi\vee\neg\psi)]^3}{\bot}\,\bot\mathrm{I}}{\neg\neg(\neg\phi\vee\neg\psi)}\,\neg\mathrm{I};3}{\neg\phi\vee\neg\psi}\,\neg\mathrm{E}
$$

□

これらの証明図は問題を解くにあたって参照される．

問題 [1].3 (2007 年度版 (1))**.**

$$\phi \to \neg\phi, \neg\neg\psi \to \neg\psi \vdash \neg(\phi \vee \psi)$$

［解］**.** この証明図は次の通り．

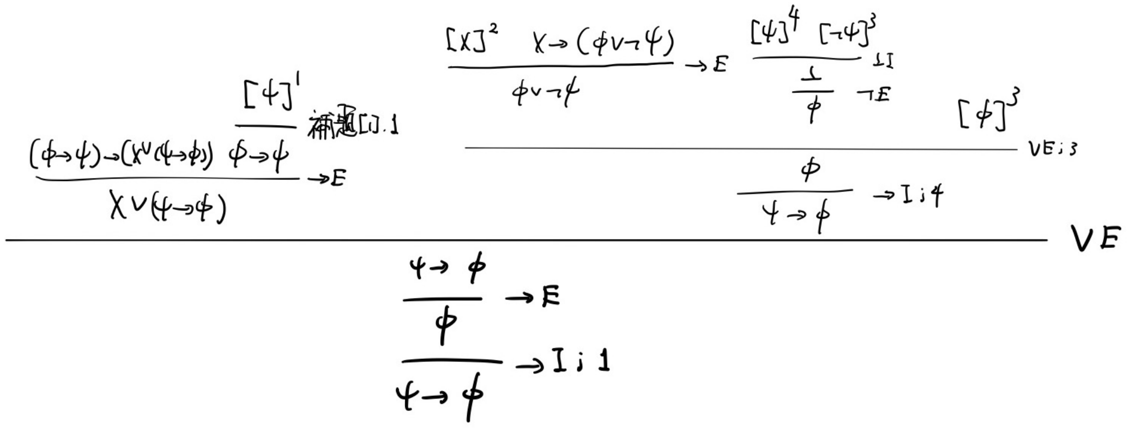
$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\phi\vee\psi]^2$}
\AxiomC{$[\phi]^1$}
\AxiomC{$\phi\to\neg\psi$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\neg\phi$}
\RightLabel{$\bot I$}
\UnaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\neg E$}
\UnaryInfC{ψ}
\AxiomC{$[\psi]^1$}
\RightLabel{$\vee E;1$}
\TrinaryInfC{ψ}
\AxiomC{$[\neg\psi]^3$}
\RightLabel{$\bot I$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\neg I;3$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\psi$}
\AxiomC{$\neg\neg\psi\to\neg\psi$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\neg\psi$}
\RightLabel{$\bot I$}
\UnaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\neg I;2$}
\UnaryInfC{$\phi\vee\psi$}
\end{prooftree}
$$

□

問題 [1].4 (2007 年度版 (2))**.**

$$(\phi \to \psi) \to (X \vee (\psi \to \phi)), X \to (\phi \vee \neg\psi) \vdash \psi \to \phi$$

［解］**.** この証明図は次の通り.

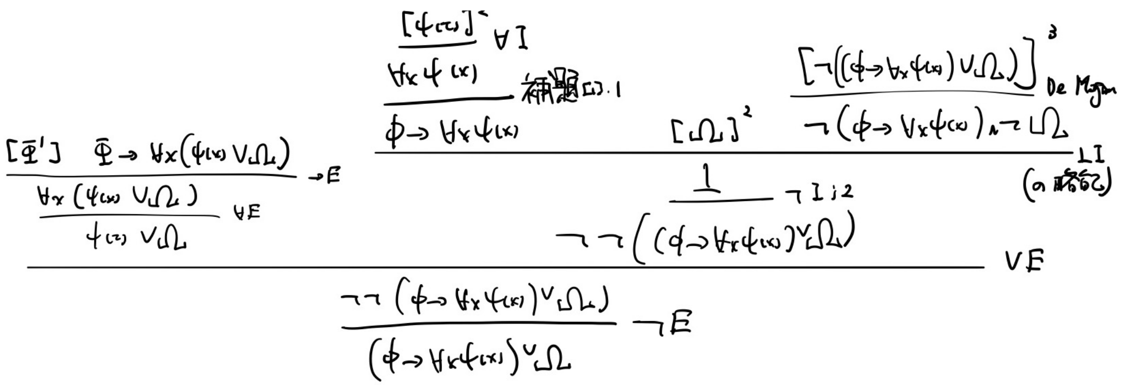


□

問題 [1].5 (2007 年度版 (3))**.**

$$\phi \to \forall(\psi(x) \vee \Omega) \vdash_{NK} (\phi \to \forall x \psi(x)) \vee \Omega$$

［解］**.** 次が証明図である．ただし，t は仮定 Φ には自由出現しない任意な変数とした．



□

問題 [1].6 (2008 年度版 (1))**.**

$$\phi \to (\neg\phi \vee \psi) \vdash \phi \to \neg(\psi \to (\neg\phi \vee \neg\psi))$$

［解］**.** 証明図は次の通りである．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^4 \quad \phi\to(\neg\phi\vee\psi)}{\neg\phi\vee\psi}{\scriptstyle\to E} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\phi]^1 \quad [\phi]^4}{\bot}{\scriptstyle\bot I}}{\psi}{\scriptstyle\neg E} \qquad [\psi]^1}{\psi}{\scriptstyle\vee E;1} \quad [\psi\to(\neg\phi\vee\neg\psi)]^3}{\neg\phi\vee\neg\psi}{\scriptstyle\to E} \qquad \dfrac{[\neg\phi]^2 \quad [\phi]^4}{\bot}{\scriptstyle\bot I} \qquad \dfrac{[\neg\psi]^2 \quad \psi}{\bot}{\scriptstyle\bot I}}{\dfrac{\bot}{\neg(\psi\to(\neg\phi\vee\neg\psi))}{\scriptstyle\neg E;3}}{\scriptstyle\vee E;2}}{\phi\to\neg(\psi\to(\neg\phi\vee\neg\psi))}{\scriptstyle\to I;4}
$$

□

[2]

まず 1 つ補題を用意する.

補題 [2].1 (De Morgan's law)**.**

$$\neg(\Phi\vee\Psi)\vdash\neg\Phi\wedge\neg\Psi$$

［証明］**.** 次が証明図である.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Phi]^1}{\Phi\vee\Psi}{\scriptstyle\vee I_L} \quad \neg(\Phi\vee\Psi)}{\bot}{\scriptstyle\bot I}}{\neg\Phi}{\scriptstyle\neg I;1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Psi]^2}{\Phi\vee\Psi}{\scriptstyle\vee I_R} \quad \neg(\Phi\vee\Psi)}{\bot}{\scriptstyle\bot I}}{\neg\Psi}{\scriptstyle\neg I;2}}{\neg\Phi\wedge\neg\Psi}{\scriptstyle\wedge I}
$$

□

以降，記号 (1)∼(10),[A]∼[D] は問題文内で定義された命題（の集合）を表すものとする.

問題 [2].2.

$$(1),(2),(3),(4),(5),(6),(7),(8),(9),(10)\vdash\bot \qquad \cdots[*]$$

［解］**.** まず，５つの部分証明図を用意する．部分証明図 $\dfrac{(1)\quad(2)}{[A]\vee[B]\vee[C]\vee[D]}\,\Pi_1$ は次の通りである.

$$\dfrac{\Xi \vee P \qquad \dfrac{\Phi \wedge (X \vee Y)}{\Phi}\,{\scriptstyle \wedge E_L} \qquad \dfrac{\Phi \wedge (X \vee Y)}{X \vee Y}\,{\scriptstyle \wedge E_R}}{(\Xi \vee P) \wedge \Phi \wedge (X \vee Y)}\,{\scriptstyle \wedge I}$$

$$\dfrac{\dfrac{(\Xi \vee P) \wedge \Phi \wedge (X \vee Y)}{((\Xi \wedge \Phi) \vee (P \wedge \Phi)) \wedge (X \vee Y)}\,\text{補題[2].1 /分配則}}{(\Xi \wedge \Phi \wedge X) \vee (P \wedge \Phi \wedge Y) \vee (\Xi \wedge \Phi \wedge X) \vee (\Xi \wedge \Phi \wedge Y)}\,\text{補題[2].1 /分配則}$$

部分証明図 $\dfrac{[A]}{\perp}\Pi_2$ は次の通りである.

$$\dfrac{\dfrac{\Phi \qquad \dfrac{\dfrac{\Xi \qquad \Xi \to (\Psi \wedge Z)}{\Psi \wedge Z}\,{\scriptstyle \to E}}{Z}\,{\scriptstyle \wedge E_R}}{\Phi \wedge Z}\,{\scriptstyle \wedge I} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{X \qquad X \to \neg((\Phi \wedge Z) \vee Y)}{\neg((\Phi \wedge Z) \vee Y)}\,{\scriptstyle \to E}}{\neg(\Phi \wedge Z) \wedge \neg Y}\,\text{de Morgan}}{\neg(\Phi \wedge Z)}\,{\scriptstyle \wedge E_L}}{\perp}\,{\scriptstyle \perp I}$$

部分証明図 $\dfrac{[B]}{\perp}\Pi_3$ は次の通りである.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Xi \qquad \Xi \to \Psi \wedge Z}{\Psi \wedge Z}\,{\scriptstyle \to E}}{\Psi}\,{\scriptstyle \wedge E_L} \qquad \Psi \to ((Y \to \neg\Phi) \vee (\Phi \to \neg Y))}{(Y \to \neg\Phi) \vee (\Phi \to \neg Y)}\,{\scriptstyle \to E} \qquad \dfrac{\Phi \qquad \dfrac{Y \qquad [Y \to \neg\Phi]^1}{\neg\Phi}}{\perp} \qquad \dfrac{Y \qquad \dfrac{\Phi \qquad [\Phi \to \neg Y]^1}{\neg Y}}{\perp}}{\perp}\,{\scriptstyle \vee E;1}$$

部分証明図 $\dfrac{[C]}{\bot}\Pi_4$ は次の通りである．

$$\dfrac{\dfrac{\Phi \qquad \dfrac{P \quad P\to(\Phi\to(H\vee M))}{\Phi\to(H\vee M)}{\scriptstyle\to E}}{H\vee M}{\scriptstyle\to E} \qquad \dfrac{X \qquad \dfrac{P \quad \dfrac{[H]^1 \quad H\to(P\to\neg X)}{P\to\neg X}{\scriptstyle\to E}}{\neg X}{\scriptstyle\to E}}{\bot}{\scriptstyle\bot I} \qquad \dfrac{\dfrac{X \qquad \dfrac{\dfrac{[M]^1}{Z\vee M} \quad (Z\vee M)\to(X\to\neg P)}{X\to\neg P}{\scriptstyle\to E}}{\neg P}{\scriptstyle\to E} \quad P}{\bot}{\scriptstyle\bot I}}{\bot}{\scriptstyle\vee E;1}$$

部分証明図 $\dfrac{[D]}{\bot}\Pi_5$ は次の通りである．

次の証明図を Π_5' とおく．

$$\dfrac{\dfrac{\Phi \qquad \dfrac{[Y\to\neg\Phi]^2 \quad Y}{\neg\Phi}{\scriptstyle\to E}}{\bot}{\scriptstyle\bot I} \qquad \dfrac{Y \qquad \dfrac{\Phi \quad [\Phi\to\neg Y]^2}{\neg Y}{\scriptstyle\to E}}{\bot}{\scriptstyle\bot I} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Xi\to\Psi\wedge Z \qquad \dfrac{\dfrac{Y \quad [H]^1}{H\wedge Y}{\scriptstyle\wedge I} \quad H\wedge Y\to\Xi}{\Xi}{\scriptstyle\to E}}{\Psi\wedge Z}{\scriptstyle\to E}}{\Psi}{\scriptstyle\wedge E} \qquad \Psi\to((Y\to\neg\Phi)\vee(\Phi\to\neg Y))}{(Y\to\neg\Phi)\vee(\Phi\to\neg Y)}{\scriptstyle\to E}}{\bot}{\scriptstyle\vee E;2}$$

$\Gamma=\{\Psi,\Phi,(3),(7),(8)\}$ とおくと，Π_5 は次の通り

$$\dfrac{\dfrac{\Phi \qquad \dfrac{P \quad P\to(\Phi\to(H\vee M))}{\Phi\to(H\vee M)}{\scriptstyle\to E}}{H\vee M}{\scriptstyle\to E} \qquad \begin{matrix}\Gamma \quad [H]^1\\ \vdots\ \Pi_5'\\ \bot\end{matrix} \qquad \dfrac{\Phi \qquad \dfrac{\dfrac{Y \quad [M]^1}{Y\wedge M}{\scriptstyle\wedge I} \quad Y\wedge M\to\neg\Phi}{\neg\Phi}{\scriptstyle\to E}}{\bot}{\scriptstyle\bot I}}{\bot}{\scriptstyle\vee E;1}$$

以上 $\Pi_1,\cdots,\Pi_5$ を用いて，命題 [$*$] の証明図は $\Gamma_2:=\{(3),(10)\}$, $\Gamma_3:=\{(3),(7)\}$, $\Gamma_4:=\{(4),(5),(6)\}$, $\Gamma_5:=\{(3),(4),(7),(8),(9)\}$ として次のように表せる．

$$\dfrac{\begin{matrix}(1) \quad (2)\\ \vdots\ \Pi_1\\ [A]\vee[B]\vee[C]\vee[D]\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]^1 \quad \Gamma_2\\ \vdots\ \Pi_2\\ \bot\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]^1 \quad \Gamma_3\\ \vdots\ \Pi_3\\ \bot\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[C]^1 \quad \Gamma_4\\ \vdots\ \Pi_4\\ \bot\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[D]^1 \quad \Gamma_5\\ \vdots\ \Pi_5\\ \bot\end{matrix}}{\bot}{\scriptstyle\vee E;1}$$

□

[3]

記法. PA の言語を $L(PA) = \{0, S, +, \cdot, =\}$ とする．ただし，慣習に従って $x \cdot y$ は xy とも書くこととする．

問題 [3].1. 次の命題 [#] を PA!の閉論理式に書き換えよ.

> [#] いかなる自然数 x と、$1 \le y$ かつ $y \le x$ であるようないかなる自然数 y についても、y は、x の階乗 $x!$ の約数である。

［解］.

$$\forall x \forall y\, (1 \le y \wedge y \le x \to \exists z (x! = y \cdot z))$$

を，さらに $1, \le \notin L(PA)$ の略記を展開して

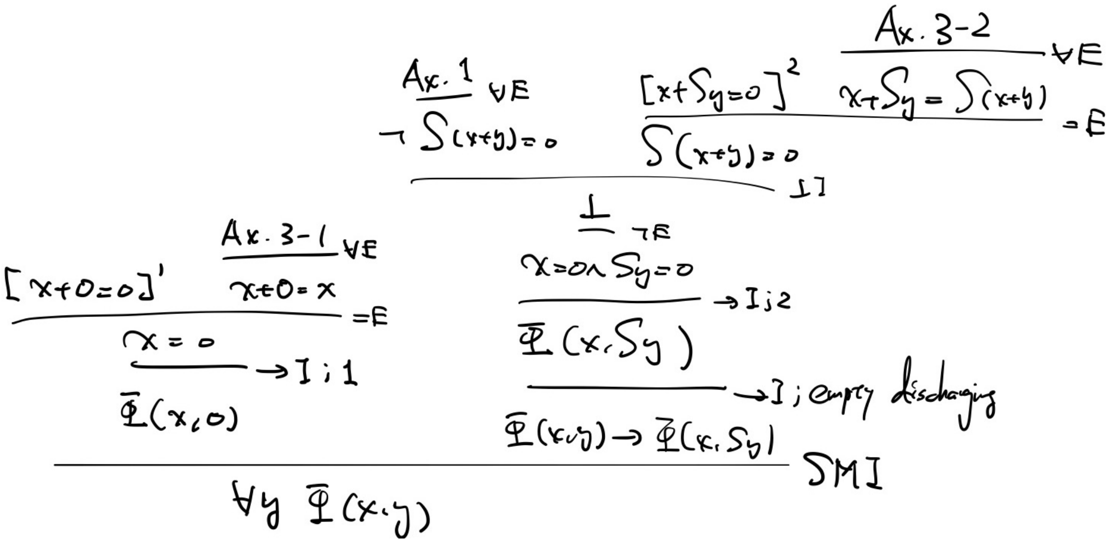
$$\forall x \forall y\, (\exists z_1 (S0 + z_1 = y) \wedge \exists z_2 (y + z_2 = x) \to \exists z (x! = y \cdot z))$$

□

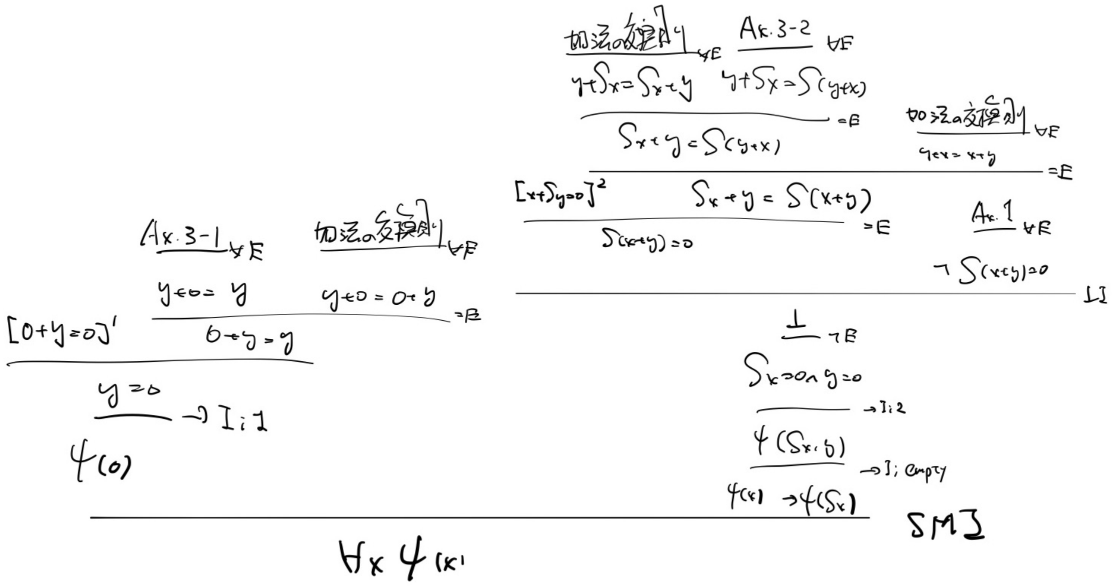
問題 [3].2. 次の補助定理 1 を示せ.

> ［補助定理 1］$\forall y \forall z\, (y + z = 0 \to (y = 0 \wedge z = 0))$

［解］. 論理式 $x + y = 0 \to (x = 0 \wedge y = 0)$ を $\Phi(x, y)$ と略記する．先ず，自由変項 x について，$\forall y\, \Phi(x, y)$ の証明図 Π' は次の通りである．



これを用いて $\forall y\, \Phi(x, y)$ を $\Psi(x)$ と略記すると，$\forall x\, \Psi(x)$ の証明図は次の通り．

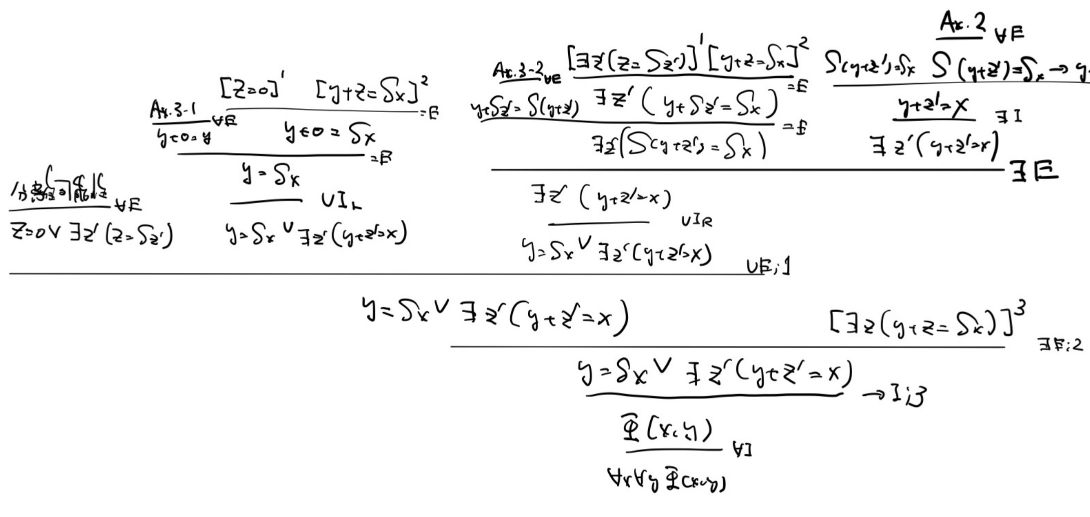


□

問題 [3].3. 次の補助定理 2 を示せ.

［補助定理 2］いかなる自然数 x と y についても、もしも $y \leq Sx$ ならば、$y = Sx \vee y \leq x$ である：$\forall x \forall y\ (\exists z(y+z=Sx) \rightarrow (y=Sx \vee \exists z'(y+z'=x)))$

［解］**.** 分離可能性の定理 $\vdash_{PA} z=0 \vee \exists z'(z=Sz')$ より $z=0$ と $\neg z=0$ の場合で場合分けすることによる証明の証明図は次の通りになる．ただし，x,y,z は互いに異なる変数とする．

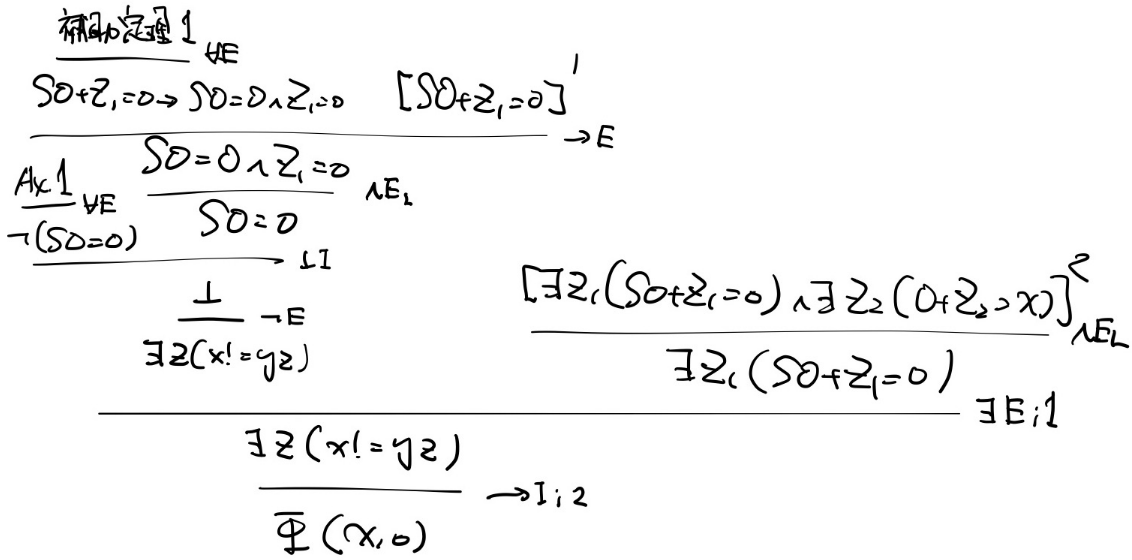


□

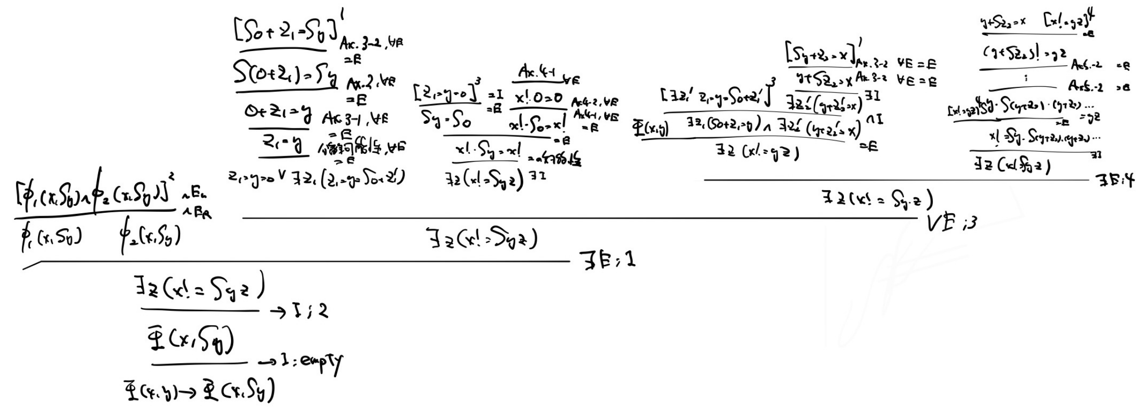
問題 [3].4. 定理 [#] を示せ.

［解］**.** 命題 $\exists z_1(S0+z_1=y) \wedge \exists z_2(y+z_2=x) \rightarrow \exists z(x!=yz)$ を $\phi_1(x,y) \wedge \phi_2(x,y) \rightarrow \phi_3(x,y)$ または $\Phi(x,y)$ と

書く．また，簡明さのために，所々２つの推論を１つの横棒のみと２つの注記を用いて $\frac{\cdots}{\cdots} \wedge E_L, \wedge E_R$ などと略記した．部分証明図 Π_1 を次のとおりとする．



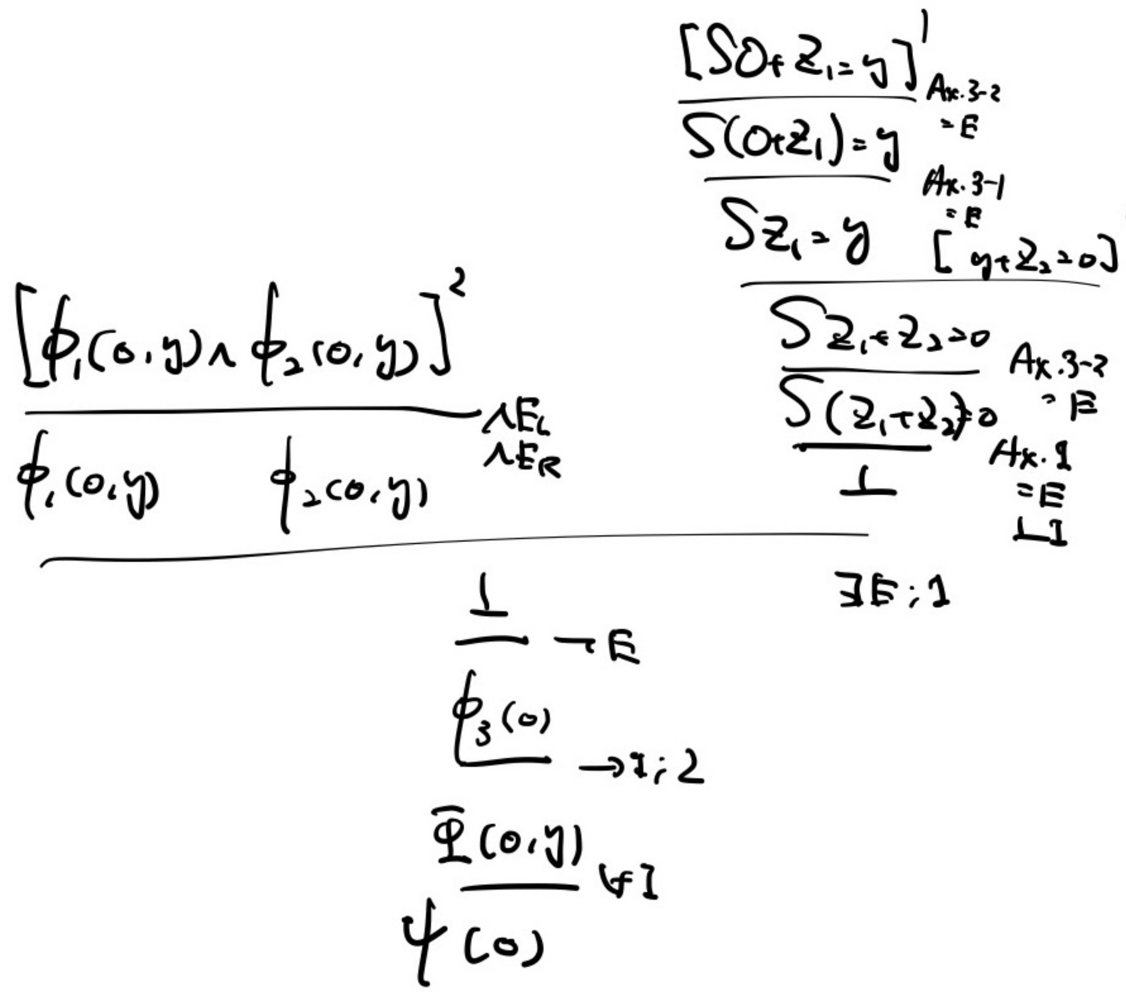
部分証明図 Π_2 を次のとおりとする．



以上の部分証明図 Π_1, Π_2 を用いて，$\forall y \Phi(x, y)$ の証明図は次の通りになる．ただし，$\Gamma_1 = \{\mathrm{Ax.1}, \text{補助定理１}\}, \Gamma_2 = \{\mathrm{Ax.2}, \mathrm{Ax.3-1}, \mathrm{Ax.3-2}, \mathrm{Ax.4-1}, \mathrm{Ax.4-2}, \mathrm{Ax.5-2}, \text{分離可能性}, = \text{の対称性}\}$ と置いた．

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1 \\ \vdots\ \Pi_1 \\ \Phi(x,0)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2 \\ \vdots\ \Pi_2 \\ \Phi(x,y) \to \Phi(x,Sy)\end{array}}{\forall y\, \Phi(x,y)}\ \mathrm{SMI}
$$

次に，論理式 $\forall y \Phi(x,y)$ を $\Psi(x)$ と書く．次を部分証明図 Σ_1 とする．



次を部分証明図 Σ_2 とする.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Phi(x)]^2}{\Phi(x,y)}\forall E \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[y+z_2=x]^1}{S(y+z_2)=Sx}{=}I,\ {=}E}{y+Sz_2=Sx}\mathrm{Ax.3-2},\ {=}E}{\exists z_2'(y+z_2'=Sx)}}{} \qquad [S0+z_1=y]^1}{\exists z(Sx!=yz)}\to E}{\Phi(Sx)}\to I;\ \mathrm{empty}}{\Phi(x)\to\Phi(Sx)}\to I;2
$$

以上を用いて，$\forall x \Psi(x)$ の証明図は次の通り．ただし，$\Gamma_1' = \{\mathrm{Ax}.1, \mathrm{Ax}.3-1, \mathrm{Ax}.3-2\}, \Gamma_2' = \{\mathrm{Ax}.3-2\}$ と置いた．

$$
\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1' \\ \vdots\ \Sigma_1 \\ \Phi(0)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2' \\ \vdots\ \Sigma_2 \\ \Phi(x)\to\Phi(Sx)\end{matrix}}{\forall x\, \Phi(x)}\mathrm{SMI}
$$

$\square$

[4]

記法. 順序集合論の言語に $\leq$ は含まれているものとする．また，$\neg(u \in Q)$ を $u \notin Q$ と略記する．

問題 [4].1. 次の定理を一階の閉論理式で表せ．ただし，$(S, \leq)$ を順序集合，$(Q, \leq)$ をその部分順序集合とする．

> [%] もしも x、y が、互いに等しくない (つまり、$\neg x = y$ であるような)Q の極大元だとすると、そのとき、S のいかなる元 u についても、もしも u が Q の上限ならば、u は Q の元ではない。

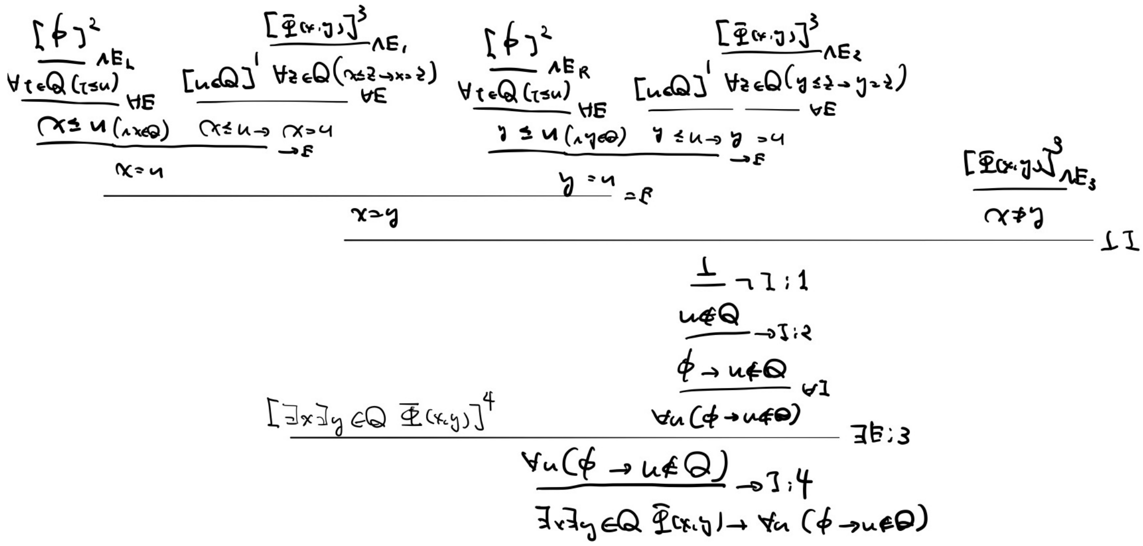
［解］．

$$
\begin{aligned}
&(\exists x \in Q \exists y \in Q(\forall z \in Q(x \leq z \to x = z) \wedge \forall z \in Q(y \leq z \to y = z) \wedge x \neq y)) \\
\to &(\forall u \in S((\forall t \in Q(t \leq u) \wedge \forall s \in S(\forall t \in Q t \leq s \to u \leq s)) \to u \notin Q))
\end{aligned}
$$

□

問題 [4].2. [%] を示せ．

［解］．[%] を $\exists x \in Q \exists y \in Q \Phi(x, y) \to \exists u(\phi_1 \to u \notin Q)$ と表す．即ち，$\forall z \in Q(x \leq z \to x = z) \wedge \forall z \in Q(y \leq z \to y = z) \wedge x \neq y$ を $\Phi(x, y)$，$\forall t \in Q(t \leq u) \wedge \forall s \in S(\forall t \in Q t \leq s \to u \leq s)$ を ϕ と表した．すると，証明図は以下の通りである．



□

[5]

問題 [5].1. 記号論理学に関わる何らかの証明、または証明の解説を書け。

筆者は数学への動定理証明システムの応用（またはその逆）に興味を持っている．そこで，記号論理学の授業の内容に関連して，以降小節に分けて，証明論における定理である Herbrand の定理とその証明を示す．

5.1　一階述語論理に構文論についての準備：Skolem 標準形

記法 **[5].2.**

1. 以降言語 L を 1 つ固定し，変項を $x, y, z, \cdots$，言語 L に含まれる定数を $a, b, c, \cdots$，述語を $P, Q, R, \cdots$ と書くこととする．
2. Prolog での記法に倣い，述語の arity $n \in \mathbb{N}$ を P/n というように述語記号に/を挟んで添えて書く．
3. L の有限列として一致するという同値関係を $\equiv$ で表す．
4. $:\Leftrightarrow$ は，左辺を右辺で定義すると言うメタ言語内での記法である．
5. 同様にして，$\Rightarrow$ や $\Leftrightarrow$ はメタ論理での「ならば」記号として使い，$\rightarrow$ や $\leftrightarrow$ を一階述語論理の論理記号として採用する．
6. 変数や定数の組を $\vec{x} := (x_1, \cdots, x_n)$ と書き，$\forall\vec{x}$ を記号列 $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n$ の略記とする．

注 **[5].3.** また，文献 [1] に沿って，一階論理で使われる記号のうち，非論理記号の集合のことを言語 L とする流儀を採用した．

定義 **[5].4** (term)**.** **L-項**全体の集合 Tm_L を次のように帰納的に定める．

1. $x, y, z, \cdots, a, b, c, \cdots \in Tm_L$ である．
2. $f : Tm_L^n \rightarrow Tm_L \quad (f/n \in L)$ について，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in Tm_L$ である時に $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in Tm_L$ である．
3. 以上の 1 と 2 により Tm_L の元であるとわかるもののみを L-項と定義する

変数 $x, y, z, \cdots$ を含まない L-項を **L-閉項 (L-closed term)** ／または **L-基礎項 (L-ground term)** と言う．

定義 **[5].5** (literal)**.** 次のいずれかの形をした論理式を，**原子論理式 (atomic formulta)** と言う．

$$t_1 = t_2, \qquad R(t_1, \cdots, t_n), \qquad (t_i \in Tm_L, R/n \in L).$$

原子論理式とその否定形を **literal** と言う．

定義 **[5].6** (formula)**.** **L-論理式**とは，次のように帰納的に定義される記号列のことである．

1. literal は論理式である．
2. 論理式 φ, ψ について，$(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ は論理式である．
3. 論理式 φ と変数 x について，$(\exists x \varphi)$, $(\forall x \varphi)$ は論理式である．

L-論理式全体の集合を Fml_L と書くこととする．

以降，一般の L-論理式についてではなく，次の 2 種の標準形のみに議論を絞る．

定義 **[5].7** (prenex normal form)**.** 次の形の論理式を**冠頭標準形**の論理式という．

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \theta \quad (n \geq 0, Q_i \in \{\exists, \forall\}, \theta \text{には量化記号なし})$$

この時 θ をこの論理式の母式 (matrix) という．

定義 **[5].8** (Skolem normal form)**.** 冠頭標準形の論理式 φ について，φ 中の各存在量化記号 $\exists y_l$ $(l \in \mathbb{N})$ について，それより前に全称量化記号が n_l 個 $\forall x_1^l, \cdots, \forall x_{n_l}^l$ とあるとすれば，n_l-変数の新たな関数記号 f_l を導入し

て，φ の母式中の変数 y_l を $f_l(x_1^l,\cdots,x_{n_l}^l)$ で置き換えることで，存在量化記号 $\exists y_l$ を消去することができる．これは拡張された言語 $L\cup\{f_i\}$ での $\forall$-論理式であり，これを **Skolem（連言）標準形**という．

次が成り立つという意味で，これは標準形である．

命題 [5].9. 冠頭標準形の論理式 φ のモデルに対して，適切に Skolem 関数記号 f_i に解釈を追加することでその Skolem 標準形 φ^S のモデルが得られ，φ^S のモデルから Skolem 関数への解釈を削れば φ のモデルが得られる．

確かに，φ での各存在量化子で縛られた変数 y_l に対して，y_l が存在することと Skolem 関数 f_l が構成可能であることに等価である．

5.2 一階述語論理の意味論についての準備：充足可能性

定義 [5].10 (structure)**.** **L-構造**とは，議論領域 $M\neq\varnothing$ と解釈写像 $F:L\to M$ との対 $\mathscr{M}:=(M,F)$ であって，言語 L に対して次を満たすもののことである．

1. $R/n\in L$ に対して，$F(R)=:R^{\mathscr{M}}$ は M 上の n-項関係である：$R^{\mathscr{M}}\subset M^n$.
2. $f/n\in L$ に対して，$F(f)=:f^{\mathscr{M}}$ は M 上の n-項関数である：$f^{\mathscr{M}}:M^n\to M$.
3. 特に定数 $c\in L$ に対しては，$F(c)=:c^{\mathscr{M}}\in M$ である．

構造 $\mathscr{M}$ は通常 $\mathscr{M}=(M;R^{\mathscr{M}},\cdots,f^{\mathscr{M}},\cdots,c^{\mathscr{M}},\cdots)$ と表し，$|\mathscr{M}|:=M$ を構造 $\mathscr{M}$ の対象領域もしくは領域 (universe) という．

注 [5].11. 数学の慣習では，右肩の添字を省略し，構造 $\mathscr{M}$ と領域 M を混用する．例えば $G=(G,+,-,0)$ など．

構造中心に論理式をみる場合，これに対応して言語を拡張する操作を定義しておきたい．言語 L と L-構造 $\mathscr{M}=(M,F)$ が与えられた時，これに適して言語 L を拡張した言語を $L(\mathscr{M}):=L\cup\{c_a\mid a\in M\}$ と定める．この c_a を $a\in M$ の名前 (name) という．解釈写像 $F:L\to M$ は自然に $F:L(\mathscr{M})\to M$ に拡張される．

定義 [5].12 (value of terms)**.** L を言語，$\mathscr{M}=(M,F)$ を L-構造，t を $L(\mathscr{M})$-閉式とする．解釈写像 F が定める式 t の**値** $t^{\mathscr{M}}$ を次のように帰納的に定める．

1. $t/0$ ならば，$t^{\mathscr{M}}:=c^{\mathscr{M}}$.
2. $\exists f\in L,\ t/n\equiv f(t_1,\cdots,t_n)$ ならば，$t^{\mathscr{M}}:=f^{\mathscr{M}}(t_1^{\mathscr{M}},\cdots,t_n^{\mathscr{M}})$.

定義 [5].13 (satisfication relation)**.** L を言語，$\mathscr{M}=(M,F)$ を L-構造，φ を $L(\mathscr{M})$-文とする．L-構造と $L(\mathscr{M})$-閉論理式の**充足関係** $\vDash$ を，次のように帰納的に定義する．なお，7,8 の定義の右辺はメタ論理を一階の言語で表現した文章である．

1. $\mathscr{M}\vDash(t_1=t_2):\Leftrightarrow t_1^{\mathscr{M}}=t_2^{\mathscr{M}}$.
2. $\mathscr{M}\vDash R(t_1,\cdots,t_n)\ (R\in L):\Leftrightarrow(t_1^{\mathscr{M}},\cdots,t_n^{\mathscr{M}})\in R^{\mathscr{M}}$.
3. $\mathscr{M}\vDash\neg\varphi:\Leftrightarrow\mathscr{M}\nvDash\varphi:\Leftrightarrow\mathscr{M}\vDash\varphi$ でない．
4. $\mathscr{M}\vDash\varphi\vee\psi:\Leftrightarrow\mathscr{M}\vDash\varphi\vee\mathscr{M}\vDash\psi$.

5. $\mathscr{M} \vDash \varphi \wedge \psi :\Leftrightarrow \mathscr{M} \vDash \varphi \wedge \mathscr{M} \vDash \psi$.
6. $\mathscr{M} \vDash \varphi \to \psi :\Leftrightarrow \mathscr{M} \vDash \varphi \to \mathscr{M} \vDash \psi \Leftrightarrow \neg(\mathscr{M} \vDash \varphi) \vee \mathscr{M} \vDash \psi$.
7. $\mathscr{M} \vDash \exists v(v),\ \varphi :\Leftrightarrow \exists a \in M,\ \mathscr{M} \vDash \varphi(c_a)$.
8. $\mathscr{M} \vDash \forall v(v),\ \varphi :\Leftrightarrow \forall a \in M,\ \mathscr{M} \vDash \varphi(c_a)$.

5.3 Herbrand の定理

Herbrand の定理とは，Jacques Herbrand が 1930 年に提出した証明論に於ける定理であり，一階述語論理の論理式の充足不能性（または恒真性）の判定を，Herbrand 基底上の有限回の命題論理の充足不能性の判定に還元する定理である．一階述語論理と命題論理の充足不能性の意味論的定義は全く異なり，後者に於ける充足不能性は各 Herbrand 基底に対する真理値の付与の仕方について有限回の機械的な操作で判定可能である．従って，この定理が以降自動定理証明システム開発に当たっての理論的基盤となった．なお，Herbrand 定理が与えられたからと言って，実際に直接的に証明を構成する，または充足可能性／不能性を実用的な範囲での制限時間内で判定する（ようなアルゴリズムを与える）という課題は極めて困難で，論理プログラミング言語として代表的な Prolog の誕生は 1965 年の John Alan Robinson による導出原理の提出の仕事を待たねばならない．また，Prolog も，扱う一階述語論理の論理式に強い制約をつけたものになっている．自動定理証明システムの開発はまだまだこれからである[a]．

[a] 一切の制約のない一般の一階述語論理の論理式の恒真性の判定問題は，Turing 機械の非停止性の認識問題に帰着されるため，決定不能であることはすでに知られている．

先ず，Herbrand の定理は，一階述語論理の意味論と命題論理の意味論の接続にあたって，特別な構造「Herbrand 構造」を用意する．これは Herbrand 基底と呼ばれる L-原子論理式を命題変数として，一階述語論理の L-論理式を命題論理的な意味論の世界へ解釈するような L-構造である．このことを見ていく．

定義 [5].14 (Herbrand universe)**.** L-論理式 A の**エルブラン領域**とは，言語 L の記号のうち，次の当てはまるものからなる部分集合 L_A から生成される L_A-閉項全体 Tm_{L_A} のことをいう．

1. A に出現する定数記号
2. A に自由出現する変数記号
3. A に出現する関数記号

ただし，A に 1 も 2 も存在しない場合は，定数記号を L から自由に 1 つ選んで L_A の元とする．

注 [5].15. 具体的に取れる点の全体領域／閉包を確保したことになる．

定義 [5].16 (Herbrand structure)**.** L-論理式 A の **Herbrand 構造**とは，Herbrand 領域 Tm_{L_A} を領域とし，その上の L-閉項を次のように解釈する写像 $F_{Tm_{L_A}}$ を解釈写像とする構造 $\mathscr{M}_{L_A} := (L_A, \mathrm{id}_{Tm_{L_A}})$ のことである．解釈写像 $F_{Tm_{L_A}}$ は，L_A に属する記号はそれ自身に，即ち Tm_{L_A} の元はそれ自身に写し，述語記号 $P/n \in L$ は，勝手な関数 $(L_A)^n \to \{\top, \bot\}$ に写す（従って述語記号の解釈は各 Herbrand 構造について異なり得る）ものとする．また，論理記号は命題論理の結合子として解釈する．

定義 [5].17 (Herbrand-satisfiable)**.** 論理式（の集合）が **Herbrand 充足可能**であるとは，その論理式（の集合）

を充す Herbrand 構造が存在することをいう．

命題 [5].18. Skolem 標準形の論理式は，充足可能ならば Herbrand 充足可能である．逆は自明に成り立つから，即ち Skolem 標準形の論理式にとって，充足可能性と Herbrand 充足可能性とは同値である．

［証明］**.** Skolem 標準形の論理式 A について，これを充足する構造 $\mathscr{M}$ が存在するとする：$\mathscr{M} \vDash A$．この構造の述語記号 $P/n \in L$ への解釈を，真理値関数と見た時，これが命題 [5].22 の方法で定める Herbrand 構造 $\mathscr{M}_{L_A}$ について（即ち，次の式の通りに定めた $\mathscr{M}_{L_A}$ について），$\mathscr{M}_{L_A} \vDash A$ である．

$$P^{\mathscr{M}_{L_A}}(t_1, \cdots, t_n) := P^{\mathscr{M}}(t_1^{\mathscr{M}}, \cdots, t_n^{\mathscr{M}})$$

□

例 [5].19. 論理式 $\neg P(c) \wedge \exists x P(x)$ を考える．これは充足可能である（例えば，領域を $\{\top, \bot\}$ として，そこへの解釈関数を $c \mapsto \bot, c' \mapsto \top$ とし，述語 P を適切に解釈すれば良い）が，Herbrand 領域は論理式内に arity 1 以上の関数記号が含まれないために $Tm_{L_A} = \{c\}$ であり，これでは Herbrand 充足にはなり得ない．

一方，元の論理式に Skolem 関数 c'（ここでは arity 0 の定数記号である）を導入して Skolem 化した論理式 $P(c') \wedge P(c)$ は，言語は $L \cup \{c'\} =: L'$ に拡張され，Herbrand 領域は $Tm_{L'_A} = \{c, c'\}$ となり，上記の証明中に示した方法で，充足する構造 $\mathscr{M}$ を作るたびに対応する Herbrand 構造 $\mathscr{M}_{L'_A}$ も作ることができる．実際，この事実は一般化され，命題 [5].22 が成り立つ．

定義 [5].20 (Herbrand basis)**.** L-論理式 A に出現する述語記号と，A の Herbrand 領域 Tm_{L_A} の元から作られる L-原子論理式の全体を，論理式 A の **Herbrand 基底**という．

例 [5].21. 元の Skolem 標準形の論理式が $\forall x \forall y (P(x) \wedge Q(x, f(x, c)))$ である時，Herbrand 基底は $\mathrm{Base}_A = \{P(c), P(f(c,c)), P(f(f(c,c),c)), \cdots, Q(c,c), Q(f(c,c),c), \cdots\}$ となる．

命題 [5].22 (Herbrand 構造と付値)**.** L-論理式 A の Herbrand 構造 $\mathscr{M}_{L_A} = (L_A, \mathrm{id}_{Tm_{L_A}})$ と，L-論理式 A の Herbrand 基底 Base_A 上の真理値関数 $\mathrm{Base}_{L_A} \to \{\top, \bot\}$ とは一対一対応する．

［証明］**.** 真理値関数 $\chi_{L_A} : \mathrm{Base}_{L_A} \to \{\top, \bot\}$ の値を，各述語 $P/n \in L$ と L_A-閉論理式 $t_1, \cdots, t_n \in L_A$ について，$\chi_{L_A}(P(t_1, \cdots, t_n)) = P^{\mathscr{M}}(t_1, \cdots, t_n)$ と定める．この対応付けは可逆であり，L-論理式 A の Herbrand 構造全体の集合と，集合 $\mathrm{Hom}(\mathrm{Base}_{L_A}, \{\top, \bot\})$ 上に全単射を定める． □

定義 [5].23 (H-instance)**.** Skolem 標準形の L-論理式 $A \equiv \forall \vec{x} A(\vec{x}; \vec{a})$ $(\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n))$ について，母式 $A(\vec{x}; \vec{a})$ に自由出現している変数に，L-閉項を代入して得る論理式 $A(\vec{t}; \vec{a})$ またはその有限個の連言 $\wedge\{A(\vec{t^i}; \vec{a}) \mid i \leq r\}$ を A の例という．特に，L-閉項 $\vec{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ が全て Herbrand 領域のものである時：$t_j \in Tm_{L_A}$ $(j = 1, \cdots, n)$ これを **H-例**という．ここで，特に連言で結ばれていない H-例の全体を $\Gamma = \{A(t_1, \cdots, t_n) \mid t_1, \cdots, t_n \in Tm_{L_A}\}$ と書くこととする．

以上，準備が整った．まとめると次のとおりである．

Herbrand 構造

Skolem 標準形の論理式 $\mathscr{A}$ の母式 $A(\vec{x};\vec{a})$ は量化記号なしであるから，Herbrand 基底 $\mathrm{Base}_{\mathscr{A}}$ の要素を命題記号（命題変数）とする命題論理式と解釈できる．従って，各 Herbrand 基底への真理値の付値 $\chi_{\mathscr{A}}:\mathrm{Base}_{\mathscr{A}}\to\{\top,\bot\}$ を定めるごとに，命題論理式の解釈を 1 つ得る．これは一階の論理式 $\mathscr{A}$ の解釈と一対一対応する．

先ず，次が成り立つ．

補題 [5].24. Skolem 標準形の L-論理式 $\mathscr{A}$ の H-例の集合 Γ が，命題論理式の集合として充足可能であるならば，$\mathscr{A}$ は充足可能である．

注 [5].25. L-論理式 A の母式を $\mathscr{A}$ とする．Γ が命題論理式の集合として充足可能であるとする．すると，任意の $t_1,\cdots,t_n\in Tm_{L_{\mathscr{A}}}$ に対して $A^{\mathscr{M}_{\mathscr{A}}}(t_1,\cdots,t_n)=\top$ とする Herbrand 構造 $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ が存在する．従って命題 [5].22 より $\mathscr{A}$ は充足可能である．

これを用いて，Herbrand の定理を証明する．その前に，命題論理についての基本的な結果を確認する．

定理 [5].26 (命題論理のコンパクト性定理)**.** T を命題論理の論理式の集合とする．次の 2 条件は同値である．

1. T は充足可能である．
2. T の任意の（有限）部分集合は充足可能である．

定理 [5].27 (Herbrand's theorem)**.** 次の 2 条件は同値である．

1. $\mathscr{A}\equiv\forall\vec{x}A(\vec{x})$ が充足不能である．
2. ある H-例 $\wedge\{A(\vec{t^i})\mid i\le r\}$ が命題論理式として充足不能である．

［証明］**.** 1.⇒2. について．補題 [5].24 の対偶より，$\mathscr{A}\equiv\forall\vec{x}A(\vec{x})$ が充足不能ならば，Γ は命題論理式の集合として充足不能である．すると，命題論理のコンパクト性定理（の対偶）より，そのある有限部分集合も充足不能である．従って，それに対応する H-例 $\wedge\{A(\vec{t^i})\mid i\le r\}$ も充足不能である．

2.⇒1. は明らかである．□

なお，ある例が充足不能（恒偽）であるとは，その否定が恒真 (tautology) であることと同値であるから，次の双対的な定理も成り立ち，こちらが Herbrand の定理と呼ばれることもある．

定理 [5].28. Skolem 標準形の L-論理式 $\mathscr{A}$ について，次の 3 条件は同値である．なお，1 と 3 が同値であるという主張が**エルブランの定理**に当たり，1 と 2 が同値であるという主張は Gödel の完全性定理に当たる．

1. A は（一階述語論理の証明体系にて）証明可能である：$\vdash A$.
2. A は恒真 (tautology) である：$\vDash A$.
3. A のある（選言）H-例 $\vee\{A(\vec{t^i};\vec{a})\mid i\le r\}$ が恒真である．

参考文献

[1] 新井敏康著『数学基礎論』（岩波オンデマンドブックス，2011）

[2] 萩谷昌己著『論理と計算のしくみ』（岩波オンデマンドブックス，2007）