

目次

1	Categories	3
1.1	Introduction	3
1.2	Functions of sets	3
1.3	Definition of a category	3
1.4	Examples of categories	3
1.5	Isomorphisms	5
1.6	Constructions on categories	7
1.7	Free categories	9
1.8	Foundations: large, small, and locally small	9
1.9	Exercises	9
2	Abstract structures	9
2.1	Epis and monos	9
2.2	Initial and terminal objects	9
2.3	Generalized elements	9
2.4	Products	9
2.5	Examples of products	9
2.6	Categories with products	9
2.7	Hom-sets	9
2.8	Exercises	9
3	Duality	9
3.1	The duality principle	9
3.2	Coproducts	9
3.3	Equalizers	9
3.4	Coequalizers	9
3.5	Exercises	9
4	Groups and categories	9
4.1	Groups in category	9
4.2	The category of groups	9
4.3	Groups as categories	9
4.4	Finitely presented categories	9
4.5	Exercises	9
5	Limits and colimits	9
5.1	Subobjects	9

5.2	Pullbacks	9
5.3	Properties of pullbacks	9
5.4	Limits	9
5.5	Perservation of limits	9
5.6	Colimits	9
5.7	Exercises	9
6	Exponentials	9
6.1	Exponential in a category	9
6.2	Cartesian closed categories	9
6.3	Heyting algebras	9
6.4	Propositional definition of CCC	9
6.5	λ -calculus	9
6.6	Variable sets	9
6.7	exercises	9
7	Naturality	9
7.1	Category of categories	9
7.2	Representable structure	9
7.3	Stone duality	9
7.4	Naturality	9
7.5	Examples of natural transformations	9
7.6	Exponentials of categories	9
7.7	Functor categories	9
7.8	Monoidal categories	9
7.9	Equivalence of categories	9
7.10	Examples of equivalence	9
7.11	Exercises	9
8	Categories of diagrams	9
8.1	Set-valued functor categories	9
8.2	The Yoneda embedding	9
8.3	The Yoneda lemma	9
8.4	Applications of the Yoneda lemma	9
8.5	Limits in categories of diagrams	9
8.6	Colimits in categories of diagrams	9
8.7	Exponentials in categories of diagrams	9
8.8	Topoi	9
8.9	Exercises	9
9	Adjoint	9

9.1	Preliminary definition	9
9.2	Hom-set definition	9
9.3	Examples of adjoints	9
9.4	Order adjoints	9
9.5	Quantifiers as adjoints	9
9.6	RAPL	9
9.7	Locally cartesian closed categories	9
9.8	Adjoint functor theorem	9
9.9	Exercises	9
10	Monads and algebras	9
10.1	The triange identities	9
10.2	Mondas and adjoints	9
10.3	Algebras for a monad	9
10.4	Comonads and coalgebras	9
10.5	Algebras for endofunctors	9
10.6	Exercises	9

1 Categories

1.1 Introduction

1.2 Functions of sets

1.3 Definition of a category

定義 1.1 (Category).

1. 対象 A, B, C, \dots というものがある.
2. 射 f, g, h, \dots というものがある.
3. 各射には $\text{dom}(f) = A, \text{cod}(f) = B$ という対象が紐づけられていて, その関係を $f: A \rightarrow B$ と書く.
4. $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ を満たす射 f, g に対し, $g \circ f: \text{dom}(f) \rightarrow \text{cod}(g)$ という射が定義される.
5. 各対象 A には $1_A: A \rightarrow A$ という特別な射が定義される (単位射).
6. 射は結合律を満たす. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
7. 単位射は合成について単位的である. $f: A \rightarrow B$ として, $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$

1.4 Examples of categories

1. 集合の圏 **Sets** と, 有限集合の圏 **Sets_{fin}**

例 1.2* (集合の圏から, 対象の集合と射の集合に特定の制限を付け加えることで, 自由に部分圏が作れる他の例.).

1. 対象: 有限集合, 射: 単射

2. 対象：集合，射：ファイバーが高々 2 元集合である写像
3. 対象：集合，射：ファイバーが高々有限集合である写像
4. 対象：集合，射：ファイバーは無限でも良い多価写像

2. Category of structured sets

定義 (具体圏). 圏 C が，忘却関手 $U: C \rightarrow \mathbf{Set}$ を持つとき，これを具体圏と呼ぶ.

3. 順序集合と単調写像の圏 \mathbf{Pos}

4. 二項関係の圏 \mathbf{Rel} : 写像は特別な二項関係と見れるから， \mathbf{Sets} はこの部分圏である.

射 $f: A \rightarrow B$ は $A \times B$ の部分集合で，単位射 1_A は恒等写像 id_A のグラフと共通の「恒等関係」となる.
合成は，2つの関係 $R \subset A \times B, S \subset B \times C$ から作れる「相対関係 $(a, c) \in S \circ R : \Leftrightarrow \exists (a, b) \in R, (b, c) \in S$ 」
として作れば確かに閉じている.

5. 有限圏としての自然数：射は順序関係である.

6. 圏の圏 \mathbf{Cat}

定義 1.3 (Functor). 関手 $F: C \rightarrow D$ とは，次を満たす対象写像と射写像の組である.

1. $F(f: A \rightarrow B) = F(f): F(A) \rightarrow F(B)$
2. $F(1_A) = 1_{F(A)}$
3. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

7. 圏としての $\mathbf{preorder}$: 任意の 2 つの間に射が 1 つしか存在しない圏 (細い圏).

定義 (thin category). 圏 C が次の条件を満たす時，細い圏であるという.

任意の 2 つの対象 $x, y \in C$ について，

$$x \xrightarrow[f]{g} y$$

となっている時，必ず $f = g$ である.

注. 細い圏に於いて，2つの対象間で双方向に射が存在する場合，これは互いに逆射になる.

命題. 細い圏は， \mathbf{proset} と同型で， \mathbf{poset} と同値である.

[証明]. 圏 C の対象の集合を集合 P とし，その間の関係 $x \leq y$ を

$$x \leq y : \Leftrightarrow \exists f: x \rightarrow y \in C$$

と定めると，この関係は反射性と推移性を満たし，前順序集合 ($\mathbf{preordered set}$) となる. 今，関手 $F: C \rightarrow P$ を対象集合は 1_P ，射集合は $f: x \rightarrow y \mapsto x \leq y$ とすると，これはいずれも可逆で，確かに圏の同型である.

この時，集合 P について，次のように約束する.

$$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$$

すると集合 P / \equiv は順序集合 ($\mathbf{partially ordered set}$) である. 関手 $F': C \rightarrow P / \equiv$ は厳密な意味では可逆ではない. □

8. 圏としての \mathbf{poset} : poset categories

9. 位相空間からの例

命題. T_0 spaces X are posets under the specialization ordering:

$$x \leq y \Leftrightarrow \forall U \in O(X) (x \in U \Rightarrow y \in U)$$

10. 数理論理学からの例：演繹体系に付随する圏 **category of proofs** 対象を式とし，その間に証明がある $\varphi \vdash \psi$ 時，射 $\varphi \rightarrow \psi$ を定義する．

11. 計算機科学からの例：関数型プログラミング言語 L に付随する圏 $C(L)$ 対象は L のデータ型，射は関数とする．単位射は **do nothing program** で，合成は関数の連続適用 $g \circ f = f : g$ である．

12. 集合 X に付随する離散圏 **Dis**(X)

13. 単一対象圏としての **monoid**

射が対象の間に持つ構造「2つの対象と順番付きで紐づけられている」と「単位射の存在」と「合成についての閉性 (=推移性)」とを，そっくりそのまま，順序関係に翻訳すれば前順序である．射自体の持つ構造「結合性」と「単位射の存在」を，代数構造に翻訳すればモノイドである．いずれも最低限の圏である．それぞれに付加構造として対称性を加えれば，半順序と群を得る．半順序とモノイドが，この本の主要な例になる．

8., 13. の観点から，poset の射とは関手だし，monoid の射も関手と見做せる．

1.5 Isomorphisms

定義 1.4 (同型). 圏 C に於いて，次を満たす射 $f : A \rightarrow B$ を同型という．

$$\exists g : B \rightarrow A \in C \quad g \circ f = 1_A \wedge f \circ g = 1_B$$

注 (note that, for example in Pos, the category theoretic definition gives the right notion, while there are "bijective homomorphisms" between non-isomorphic posets.). 射を何らかの写像だとすると，この同型であるための条件は全単射であることと同値．従ってこの定義は，具体圏に於ける写像の「全単射」性を一般の圏に写し取ったものに思える．だから，全単射でないのに同型になることはないはずだ．だが，全単射な射は可逆だとは限らない．

定義 1.5 (群). 群とは，可逆なモノイドのことである．従って，全ての射が同型であるような単一対象圏のことである．

定理 (Cayley). 群 $G = (G, \cdot, e, {}^{-1})$ は， $\text{Aut}(G)$ の或る部分群と同型になる．

〔証明〕. Cayley representation $\overline{G} \subset \text{Aut}(G)$ を構成する．各 $g \in G$ に対して， $\bar{g} \in \overline{G} \subset \text{Aut}(G)$ を次のような射として定める．

$$\begin{array}{ccc} \bar{g} = g^* : G & \longrightarrow & G \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ h & \longmapsto & g \cdot h \end{array}$$

この時， \overline{G} は群になっていることを，写像 $F : G \rightarrow \overline{G}$ が群の射であることを示すことによって確認する． $F(f \cdot g) = F(f) \circ F(g)$ は G の演算 \cdot の結合性より，また $F(e) = 1_G$ も成り立つ．なお，各射の可逆性については， $F(f \cdot f^{-1}) = F(f) \circ F(f^{-1}) = 1_G = F(e)$ より成り立つ．

群の射 $F : G \rightarrow \overline{G}$ の逆射 H を構成する．

$$\begin{array}{ccc}
H: \overline{G} & \longrightarrow & G \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\bar{g} & \longmapsto & g = \bar{g}(e)
\end{array}$$

これについて、確かに $F \circ H = 1_{\overline{G}}, H \circ F = 1_G$ が成り立つ。従って、 $G \simeq \overline{G}$ □

注 1.6 (Two different levels of isomorphisms). 構成した群 $\overline{G} \subset \text{Aut}(G)$ の元である、 g を集合 G に左から作用させる写像 \bar{g} は、群 G の置換であり、集合の同型である。一方、構成した関手 F, H は群の同型である。

定理 1.7. 任意の圏 C は、或る具体圏と同型である。

[証明] . 圏 C から、同型な圏 \overline{C} を構成する。関手 $\overline{}: C \rightarrow \overline{C}$ の対象写像を次のように定める。

$$\begin{array}{ccc}
C & \longrightarrow & \overline{C} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
c & \longmapsto & \bar{c} = \{f \in \text{arr}(C) \mid \text{cod}(f) = c\}
\end{array}$$

射関手を次のように定める。

$$\begin{array}{ccc}
C & \longrightarrow & \overline{C} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
g: c \rightarrow d & \longmapsto & \bar{g} = g^*: \text{hom}_C(-, c) \rightarrow \text{hom}_C(-, d)
\end{array}$$

ただし、この写像 g^* は、任意の対象 $x \in C$ に対して、

$$\begin{array}{ccc}
\text{hom}_C(x, c) & \longrightarrow & \text{hom}_C(x, d) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
f: x \rightarrow c & \longmapsto & g \circ f: x \rightarrow d
\end{array}$$

と対応づける写像（関手の射／自然変換）である。この関手は可逆であり、逆関手の $\bar{x} \in \overline{C}$ 成分は射写像は次の通りである。

$$\begin{array}{ccc}
\overline{C} & \longrightarrow & C \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\bar{g}: \text{hom}_C(-, c) \rightarrow \text{hom}_C(-, d) & \longmapsto & \bar{g}(1_c)
\end{array}$$

□

注. これが「表現」という述語の出処であろう。この時点ではまだ素朴の意味で「 C の表現 \overline{C} 」という感覚である。また、これが「ホム関手」「ホム集合」という概念の出処でもある。集合での表現を持つから、我々の「具体」性という得意分野に引きずりこめるのだ。また、集合に頼り過ぎないで、純粋に圏論的なまま理論を豊かにしていくのも大事である。（群論だってそうなのだろう）。例えば、一般の圏を白紙から考えるとき、対象の間の射全体の集まりは「集合」であるとは限らないのだ。

1.6 Constructions on categories

1.6.1 Product

圏 $C \times D$ は (c, d) という形の対象をもち、射も、合成も、単位射も、直接の「要素毎」の考え方で、新しい圏を想定出来る。

1.6.2 Opposite

$f: C \rightarrow D \in C$ に対して、 $f^*: D^* \rightarrow C^* \in C^{op}$ で、合成の順序も逆にしたもの。

duality とは、ある圏が、別の圏の反対（の部分圏）になるという対応が成り立つこと（を主張する命題のこと）である。

1.6.3 arrow category

圏 C に対して、その射を対象とし、その間の射を $g: (f: A \rightarrow B) \rightarrow (f': A' \rightarrow B')$ を、次の $f' \circ g_1 = g_2 \circ f$ を主張する可換図式、つまり、圏 C の射の組 $g := (g_1, g_2)$ とする圏である。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g_1} & A' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ B & \xrightarrow{g_2} & B' \end{array}$$

合成は、可換図式を繋げて外回りを取ることで、つまり成分毎 $(h_1, h_2) \circ (g_1, g_2) = (h_1 \circ g_1, h_2 \circ g_2)$ で、従って単位射は $1_f = (1_A, 1_B)$

対象は射 $f: A \rightarrow B$ だが、要は (A, B) 、これはどう考えても $C \times C$ あるいは $[2, C]$ と同型になる。即ち、次の関手が存在する。

$$C \xleftarrow{\text{dom}} \vec{C} \xrightarrow{\text{cod}} C$$

1.6.4 slice category

圏 C と対象 $c \in C$ について、 $\{f \in \text{arr}(C) \mid \text{cod}(f) = c\}$ を対象全体の集合とし、2つの対象 $f: x \rightarrow c, f': x' \rightarrow c$ の間の射は次の C の図式を可換にする射 $a: x' \rightarrow x \in C$ である ($f = f' \circ a$)。

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{a} & x' \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & c & \end{array}$$

これは arrow category の部分圏であろう。

対象について、その codomain c を忘れ、射 $a: (x, c) \rightarrow (x', c)$ についても c を忘れれば、忘却関手 $C/c \rightarrow C$ を定める。これは一種の具体圏だったのか。

C の射 $g: c \rightarrow d$ に対して、関手 $g^*: C/c \rightarrow C/d$ が定まる。

$$\begin{array}{ccc}
 C/c & \longrightarrow & C/d \\
 \Psi & & \Psi \\
 f : x \rightarrow c & \longmapsto & g \circ f : x \rightarrow d
 \end{array}$$

$$a : (f : x \rightarrow c) \rightarrow (f' : x' \rightarrow c) \longrightarrow a : (g \circ f : x \rightarrow d) \rightarrow (g \circ f' : x' \rightarrow d)$$

1.7 Free categories

1.8 Foundations: large, small, and locally small

1.9 Exercises

2 Abstract structures

2.1 Epis and monos

2.2 Initial and terminal objects

2.3 Generalized elements

2.4 Products

2.5 Examples of products

2.6 Categories with products

2.7 Hom-sets

2.8 Exercises

3 Duality

3.1 The duality principle

3.2 Coproducts

3.3 Equalizers

3.4 Coequalizers

3.5 Exercises

4 Groups and categories

4.1 Groups in category

4.2 The category of groups

4.3 Groups as categories

4.4 Finitely presented categories

4.5 Exercises

5 Limits and colimits

5.1 Subobjects