圏と層　斎藤毅　講義ノート

司馬博文 J4-190549
hirofumi-shiba48@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

2019 年 12 月 9 日

目次

第 I 部
圏

位相空間のホモロジー理論を創始したポアンカレの言葉に「数学とは異なるものを同じとみなす技術である」というものがある．この言葉は色々な解釈ができると思うが，自然科学のいろんな場面で似た形で現れる数学的現象の本質を抽出して抽象化し，一つの理論にまとめることはまさに「異なるものを同じとみなす技術」ではないだろうか．例えば，平面幾何学における相似拡大，解析学における関数のある点の近くでの一次近似，自然科学，経済学の様々な場面で現れる諸量の比例関係などの中に潜む線型性という本質を捉え，抽象化して理論としてまとめたものが線形代数学である．このように抽象化して理論をまとめておくことで数学的現象の本質の理解が深まり，また，新たな現象が見つかった時には，その理論が適用可能であることさえ確かめれば，同じ考察を再び繰り返すことなく抽象化された理論の恩恵を受けることができる．線形代数学が自然科学のあらゆる分野において重要なものであることはいうまでもないであろう．[*1]

1　集合論の準備：集合の公理と Grothendieck 宇宙，写像と fiber 積

圏論の理論をこれから展開していく訳ではあるが，やはり集合論を基礎として展開するのが明瞭である．しかし，圏論は，集合論自体も考察の対象として取るわけだから，圏論の考察を展開する際に基盤とする数学的枠組みとしての集合論との関係には十分な注意が必要である．
展開法は２つある．集合論の「クラス」の概念を援用して，クラスも含めた取り扱いをすること．今回は集合論は，基礎づけの枠組みとして用い，集合論の高度な議論は避けたいから，今回は執らない．２つ目は「集合」の範囲を，「集合の集合は集合」が成り立つような或る宇宙 $mathfrakU$ の中に限れば，とりあえず基盤としては十分であり，集合の存在性について患う必要はなくなる．しかし，それに当たっては，集合論の ZFC 公理系にもう１つ公理を付け加えてから，それを集合の定義とせねばならない．
以上の議論を定義にまとめると，以下のようになる．

定義 1 (Grothendieck 宇宙)**.** 空でない集合 $\mathfrak{U}$ が宇宙であるとは，以下の４条件を充たすことをいう．
1, ［推移的集合である］$\forall x,y\,[x\in y \wedge y\in\mathfrak{U} \Longrightarrow x\in\mathfrak{U}]$
2, ［生成規則：*pairing*］$\forall x,y\,[x,y\in\mathfrak{U} \Longrightarrow \{x,y\}\in\mathfrak{U}]$
3, ［生成規則：*power*］$\forall x\,[x\in\mathfrak{U} \Longrightarrow \mathscr{P}(x):=\{y:\ y\subset x\}\in\mathfrak{U}]$
4, ［生成規則：*union*］$\forall I,x_i\in\mathfrak{U}(i\in I)\,[\bigcup_{i\in I}x_i := y:\ \exists i\in I\; y\in x_i]$

この４つの公理の下では，以下の命題は全て成り立つ（含意されている）．

5, $\varnothing\in\mathfrak{U}$
6, $\forall x\in\mathfrak{U}\,[x\in\mathfrak{U} \Longrightarrow \{x\}\in\mathfrak{U}]$
7, $\forall x\in\mathfrak{U}\,[x\in\mathfrak{U} \Longrightarrow \bigcup_{y\in x}y\in\mathfrak{U}]$
8, $\forall x,y\in\mathfrak{U}\,[x,y\in\mathfrak{U} \Longrightarrow x\times y\in\mathfrak{U}]$
9, $\forall x,y\in\mathfrak{U}[x\in\mathfrak{U}\wedge y\subset x \Longrightarrow y\in\mathfrak{U}]$
10, $\forall I,x_i\in\mathfrak{U}(i\in I)[I,x_i\in\mathfrak{U}(i\in I) \Longrightarrow \prod_{i\in I}x_i, \coprod_{i\in I}x_i\in\mathfrak{U}]$

定義 2 (（小さな）集合)**.** 集合とは，*ZFC* 公理系を充たすもののことである．小さな集合とは，*ZFC* 公理系に以下の公理を付け加えた公理系を充たすものである．噛み砕けば，物の集まり X,Y と，その元 $x\in X$ のことである．また，$X=Y$ とは，$x\in X \Longleftrightarrow x\in Y$ となることの略記である．

$$\forall x,y\,[\forall z(z\in x \Longleftrightarrow z\in y) \Longrightarrow x=y] \quad \text{(extentionality)}$$

［公理：Grothendieck 宇宙の存在］$\mathbb{N}\in\mathfrak{U}$ を充たす宇宙 $\mathfrak{U}$ は存在する．

こうして存在を保証した宇宙 $\mathfrak{U}$ を１つ取り，固定する．以降，「小さな集合」と言った場合は，この宇宙 $\mathfrak{U}$ に所属する集合のことを言う．公理より，$\mathbb{N}$ のみならず，そこから構成可能な $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ は全て小さな集合である．一方で，$\mathfrak{U}$ 自身は勿論，一元集合 $\{\mathfrak{U}\}$ も小さくない．

[*1] 志甫淳『層とホモロジー代数』（共立出版,2016）前文

定義 3 (写像とその相等). 写像とは，２つの集合 X,Y について，X の各元 x に対して Y の元 $f(x)$ が唯一つ定まっている時，f を X から Y への写像と呼び，$f:X\longrightarrow Y$ で表す．

この f に対して，X を始域，Y を終域と呼ぶ．なお，２つの写像 $f,g:X\longrightarrow Y$ が等しいとは，$f=g\Longleftrightarrow \forall x\in X\ [f(x)=g(x)]$ と定められる．集合論の言葉で言えば「グラフが等しい」ことを，写像が等しいと定義する．

定義 4 (写像の合成). ２つの写像 $f:X\longrightarrow Y, g:Y\longrightarrow Z$ に対し，その合成写像 $h:X\longrightarrow Z$ が $\forall x\in X\ [h(x)=g(f(x))]$ によって定めることができる．以降この h を $g\circ f$ と書く．

定義 5 (集合の積). ２つの集合 X,Y に対して，$X\times Y:=\{(x,y): x\in X\wedge y\in Y\}$ と定義する．但し，$(x,y)=(x',y')\Longleftrightarrow x=x'\wedge y=y'$ と定義する．

集合論的立場からは，$(x,y):=\{\{x\},\{x,y\}\}$ と定式化する．これを順序対，あるいは 2-組という．

定義 6 (写像の可換図式). X,Y,W,Z を集合とし，f,g,h,k を写像とする．以降 $f:X\longrightarrow Y$ を $X\xrightarrow{f}Y$ とも書くこととする．この時，以下の図が可換図式であるとは，$h\circ f=k\circ g\Longleftrightarrow \forall x\in X\ [h\circ f(x)=k\circ g(x)\in W]\cdots\star^1$ となることと定義する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "h"] \\ Z \arrow[r, "k"'] & W \end{tikzcd}$$

つまり，図式を有向グラフ（集合 X,Y,W,Z を頂点，写像 f,g,h,k を辺とした有向グラフ）だと思った時に，全ての有向道 (directed path) が，写像の合成について，”等しい”(定義２の注釈参照) 写像を与えるような図式を，可換図式という．「可換」であることの意味は強い，単に始域と終域が等しいだけでは足りない．

この概念の集合論による定式化は，必ずしもわかりやすいとは言い難い．特に「２つの演算は可換である」と言った時，可換図式の方が直感的である．可換図式とはなんだろうか．

定義 7 (fiber 積／引き戻し (pullback)). 終域が等しい２つの写像 $f:X\longrightarrow S, g:Y\longrightarrow S$ について，その fiber 積 $X_f\underset{S}{\times_g}Y$ を，

$$X_f\underset{S}{\times_g}Y:=\{(x,y)\in X\times Y:\ f(x)=f(y)\in S\}$$

fiber とは（集合論で）単に逆像のことを意味する．２つの写像の，共通する終域 S の各元 s についての逆像 $f^{-1}(s)=\{x\in X: f(x)=s\}, g^{-1}(s)$ 同士の積 $f^{-1}(s)\times g^{-1}(s)$ を，全ての $s\in S$ について足し合わせたもの（和集合，或いは結びのこと）に他ならない．

$$X_f\underset{S}{\times_g}Y=\bigcup_{s\in S}f^{-1}(s)\times g^{-1}(s)$$

fiber 積は射の合成の選択写像 c の定義域を正確に捉える．

> Grothendieck によるエタール・コホモロジーの定義への道を開いたのは、セールによる、代数幾何におけるファイバー束の定義だったらしい。ファイバー束が定義できるということは、コホモロジーでいえば H1 が定義できたということになる。あとは、これを拡張すればよい。グロタンディークはこの考えに基づいて、エタール・コホモロジーの理論を建設したということである。その根底となるのは、位相空間そのものよりも、その上の層全体のなす圏のほうが本質的であるという、トポスの考えである．[*2]
>
> A pullback is therefore the categorical semantics of an equation.[*3]

[*2] https://www.ms.u-tokyo.ac.jpd/ t-saito/jd/gr.pdf
[*3] https://ncatlab.org/nlab/show/pullback

2 圏

2.1 圏の定義

定義 8 (圏)**.** 圏とは，集合 C,M と写像 s,t,c,e の 6-組 (C,M,s,t,c,e) であって，図 *1 2 3 4* の可換図式を充たすもののことである．但し，s,t,c,e は夫々，

$$s : M \longrightarrow C, \quad t : M \longrightarrow C, \quad e : C \longrightarrow M$$

$$\begin{array}{cccc} c : M_s \underset{C}{\times}_t M & \stackrel{c}{\longrightarrow} & M \\ \cup & & \cup \\ (g,f) & \longmapsto & c(g,f) \end{array}$$

を充たす写像である．

図 1 射の合成演算の定義，即ち，合成射の選択写像 c の定義．$s(f) = s(c(g,f)) \wedge t(g) = t(c(g,f))$ を表す可換図式．

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "s"] & M_s \underset{C}{\times}_t M \arrow[l, "P_2"'] \arrow[r, "P_1"] \arrow[d, "c"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \arrow[d, "t"] \\ C & M \arrow[l, "s"] \arrow[r, "t"'] & C \end{tikzcd}$$

以降この P_1,P_2 のことを射影 (projection) と呼ぶ． $P_1 : X \underset{S}{\times} Y \longrightarrow X$，$P_2 : X \underset{S}{\times} Y \longrightarrow Y$
なお，$M_s \underset{C}{\times}_t M$ は 2-組で，第 1 成分が g，第 2 成分が f に当たることに注意．

図 2 射の合成 c についての結合則の成立 $c(c(h,g),f) = c(h,c(g,f))$ を表す可換図式．

$$\begin{tikzcd} M_s \underset{C}{\times}_t M_s \underset{C}{\times}_t M \arrow[r, "1\times c"] \arrow[d, "c\times 1"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_s \underset{C}{\times}_t M \arrow[d, "c"] \\ M_s \underset{C}{\times}_t M \arrow[r, "c"] & M \end{tikzcd}$$

但し，$M_s \underset{C}{\times}_t M_s \underset{C}{\times}_t M := \{(h,g,f) \in M \times M \times M : \ s(h) \stackrel{c}{=} t(g) \wedge s(g) \stackrel{c}{=} t(f)\}$ であり，

$$\begin{array}{ccc} c \times 1 : M_s \underset{C}{\times}_t M_s \underset{C}{\times}_t M & \longrightarrow & M_s \underset{C}{\times}_t M \\ \cup & & \cup \\ (h,g,f) & \longmapsto & (c(h,g),f) \\ 1 \times c : M_s \underset{C}{\times}_t M_s \underset{C}{\times}_t M & \longrightarrow & M_s \underset{C}{\times}_t M \\ \cup & & \cup \\ (h,g,f) & \longmapsto & (h,c(g,f)) \end{array}$$

これが well-defined である理由は，図 1 より，$s(g) = s(c(h,g)) = t(f)$ が保証されているから，(h,g,f) は確かに必ず $M_s \underset{C}{\times}_t M_s \underset{C}{\times}_t M$ に含まれるのである．

図 3　　単位射 e は自己射である．$s \circ e = 1_c = t \circ e$ の関係を表す可換図式．

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "1_C"'] \arrow[dr, "1_C"] \arrow[dd, "e"] & \\
C \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & & C \arrow[l, phantom, "\circlearrowright"] \\
 & M \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}
$$

つまり，C の任意の元を A と取ると，$A = 1_c(A) = s(e(A)) = t(e(A))$ だから，つまり，射 $e(A)$ は $e(A) : A \longrightarrow A$ である．このような射のうち特別なものを 1 つ定めて恒等射と呼び，図 3 によると全ての C の元について定まる．この特別な自己射の特徴付け（正確に同じものは同じものに写す自己愛写像であること）は次で定める．

図 4　　単位射 e の特徴付け (一種の interface)．$c(e(t(f)), f) = c(f, e(s(f)))$，即ち勝手な M の元を $f : A \longrightarrow B$ と置いた時に，$f \circ e(A) = e(B) \circ f \underline{= f}$ を表す可換図式．

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "(e\circ t{,}1_M)"'] \arrow[dr, "(1_M{,}e\circ s)"] \arrow[dd, "1_M"] & \\
M_s \underset{C}{\times}_t M \arrow[dr, "c"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & & M_s \underset{C}{\times}_t M \arrow[dl, "c"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowright"] \\
 & M &
\end{tikzcd}
$$

但し，$e \circ s : M \xrightarrow{\ s\ } C \xrightarrow{\ e\ } M$ であり，
$$
\begin{array}{ccc}
(1, e\circ s) : M & \longrightarrow & M_s \underset{C}{\times}_t M \\
\cup & & \cup \\
f & \longmapsto & (f, e(s(f)))
\end{array}
$$
である．

2.2　定義の脱構築，記号の集合論との混用

圏の要素は，以下のように 6 つの要素に分解できる．

(1-1)　［２つの集合 C, M を台集合とする］従って圏を $\mathscr{C}$ とした時，$C = \mathrm{ob}\mathscr{C}, \mathrm{M} = \mathrm{arr}\mathscr{C}$ とも書く．

(1-2)　［C, M には一定の関係が必要］M の各元が，順番を区別して，C の元２つと対応づけられている必要がある．この構造を $f : A \longrightarrow B$ などと表す．定式化の仕方は３つある．「全ての射に「始対象」「終対象」と呼び分けられる２つの対象を紐付ける選択写像 $s, t : M \longrightarrow C$ を定める」という方法や，「そもそも，集合 M を各 $A, B \in C$ に対して $\mathrm{Mor(A,B)}$ の，和集合として構成する」方法，あるいは「集合 C を各 $f \in M$ に対して２つずつ定まっていくと定義する」方法などがある．

(2-1)　［射の合成の定義（推移性）と閉性］閉性は，fiber 積を定義域とし，M を値域とする合成射の選択写像 c を定めることに等しい．残る定義は可換図式 1 で表現される．

(2-2)　［射の合成の推移性］可換図式では図 2 で表現される．

(3-1)　［単位射の存在性と定義（自己射である）］存在性は，C の各元に対して，特別な射を 1 つ選び出す選択写像 $e : C \longrightarrow M$ を 1 つ定めることに等しい．そして，その射が自己射である条件は，可換図式 3 のように表現される．

(3-2)　［単位射の特徴付け］単位射は，他の自己射から区別される．

今回の定義は，圏を 6 つ組とし，残る条件 (2-1) の一部，(2-2)，(3-1) の一部，(3-2) を可換図式を用いて定式化した．定義の流儀は他にもあるだろうが，その本質は上に述べた 6 つに整理できるであろう．

射の合成 $c(g, f)$ は以降，写像の合成と混用して，$g \circ f$ と書く．$A \in C$ に対してその単位射は，恒等写像の記号を混用して，$e(A) = 1_A$

と書く．6 つ組である圏のことも，C という．こうして，圏論は集合論を超えた物の見方を提供する準備が整いつつある．

2.3　圏の例

おしなべて，数学理論は何か世界の「型 (type)」について議論をする．様々な具体的対象が，その型に当てはまれば，例に漏れず必ず普遍的にもつ性質について考えたいからだ．
例を見ていくと分かる通り，圏論は特に抽象的だしスケールがでかい．これらの例を確認してから，「じゃあこいつらの型に，共通して言えるものはなんだろう？」と考えたい．

2.3.1　集合の圏 Sets

C:小さな集合全体の集合　とする．（すると $C \in \mathfrak{U}$）
$A,B,D \in C$ に対して，$\mathrm{Mor}_c(A,B) = \mathrm{Map}(A,B)$ とし，

$$\begin{array}{cccc} \circ : \mathrm{Map}(B,D) \times \mathrm{Map}(A,B) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(A,D) \\ \cup & & \cup \\ (g,f) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

と言うように射の合成を自然に定義し，恒等射は恒等写像 $1_A : A \longrightarrow A$ とすると，これは圏をなす．

2.3.2　線型代数学からの例

C:有限次元実線型空間全体の集合　とする．
$V,W \in C$ について，$\mathrm{Mor}_c(V,W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)$ とし，他射の合成と恒等写像 1_V については前述の集合の圏と同様にすれば，これは圏をなす．

2.3.3　微積分学からの例

C:$\mathbb{R}^2$ 上の開集合 U 全体の集合　とする．
$U,V \in C$ に対して，射の集合を $\mathrm{Mor}_c(U,V) = \{f : U \longrightarrow V : f$ は連続微分可能な写像 $\}$ と定める．
すると，集合としての写像の合成と，恒等写像を $1_U : (x,y) \longmapsto (x,y)$ とすれば，これは圏をなす．

2.3.4　用語の補充：同型射

定義 9 (可逆，同型，逆射)**.** 射 $f : A \longrightarrow B$ に対して，射 $g : B \longrightarrow A$ であって，$g \circ f = 1_A \wedge f \circ g = 1_B$ となる射 g が存在するとき，g を「逆射」といい，f は可逆である／同型射である，と言う．

今までの例は全て，「構造を持った集合」と「その間の射」というように，集合論や線型代数学や微分積分学などの数学の大きな理論の中から圏の構造を見出す，という姿勢であったが，以降の例では，「圏の特別なクラス」と見なせるような構造を考えていく．monoid と poset という 2 つの例は，射の合成を，代数的演算だと見る例と，順序関係だと見る例との，素晴らしい例になる．

2.3.5　monoid は単一対象圏：射の合成を，演算の雛形と見る

対象の集合 C を $\{A\}$ と言う一点集合とする．すると，s,t は定値写像となり，一意に定まる．これにより，c の定義域は $M_s \underset{C}{\times_t} M = \{(g,f) \in M \times M : s(g) = t(f) = A\} = M \times M$ となるから，$c : M \times M \longrightarrow M$ である．写像 $e : C \longrightarrow M$ の値も $e := e(A) = 1_A$ と書くこととする．すると結局，monoid とは，後は $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ と $f \circ e = e \circ f = f$ という 2 つの公理を充たす 3-組 $< M, \circ : M \times M \longrightarrow M, e >$ の取り方 1 つ 1 つに対して定まる圏 C に他ならない．

対象の集合 C が一点集合である場合の圏（単一対象圏）の全体は，モノイド $M =< M, \circ, e >$ 全体に一致する．monoid は圏の特別なクラスと見なせる．なお，モノイド M の全ての元が可逆であった時，$< M, \circ, e, ^{-1} >$ を特に群と言う．

2.3.6　順序関係：射の合成を，順序関係の雛形と見る

対象の集合 C を勝手にとる．$M\subset C\times C$ を満たす M を勝手にとる．第一射影と第二射影, つまり
$$\begin{array}{ccccccc} s:M & \longrightarrow & C & t:M & \longrightarrow & C \\ \uplus & & \uplus & \uplus & & \uplus \\ (x,y) & \longmapsto & x & (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$
によって s,t を定める．この下で，第一成分と第二成分が一致するような元 (A,A) を対象 $A\in C$ の単位射として取れば（従って，$\{(x,x)|x\in C\}\in M$ が必要），$<C,M,s,t,c,e>$ は圏をなす．
<u>さらに，全ての同型射は単位射である（＝逆射を持つならそれは単位射である）</u>時,「M は C の順序を定める」という．

以降，$x,y\in C$ に対して，$(x,y)\in M$ の時，$x\leq y$ と書くこととする．単位射の存在性より，任意の $x\in C$ に対して $x\leq x$ であり（反射律），射の合成により，推移律 $x\leq y\wedge y\leq z\Longrightarrow x\leq z$ は満たされる．この時点で「前順序 (pre-order)」と呼ぶ．続いて下線部の条件により，反対象律 $x\leq y\wedge x\geq y\Longrightarrow x=x$ が満たされる．よって，M によって順序関係を定めた集合 C は，確かに順序集合となっている．

対象の集合 C に対して，$M\subset C\times C$ かつ $\{(x,x)\in C\times C|x\in C\}\subset M$ を満たす射の集合をもち，全ての同型射は単位射である時, M が C 上に定める「射が存在する」という関係を「順序関係」という．
これは Hasse 図から順序関係の公理を定めたように思える．poset とは，任意の Hom 集合が元をたかだか 1 つしか持たない圏である．

3 関手 (functor)

3.1 （共変）関手の定義

定義 10 (（共変）関手). 2 つの圏 $C=(C,M,s,t,c,e), C'=(C',M',s',t',c',e')$ に対して，圏 C から圏 C' への（共変）関手とは，写像 $F_C : C \longrightarrow C'$ と写像 $F_M : M \longrightarrow M'$ の組 $(F_C, F_M) =: F$ であって，以下の可換図式 5，6，7 を満たすもののことである．

図 5 射に付随する始対象と終対象との関係を保存すること．

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "F_C"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "t"] \arrow[d, "F_M"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C \arrow[d, "F_C"] \\
C & M' \arrow[l, "s'"] \arrow[r, "t'"'] & C
\end{tikzcd}
$$

図 6 射の合成が可換である．先に合成しても，後で合成しても同じことである．$F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$ を表す可換図式．

$$
\begin{tikzcd}
M_s \underset{C}{\times}_t M \arrow[r, "c"] \arrow[d, "F_M \times F_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \arrow[d, "F_M"] \\
M'_{s'} \underset{C'}{\times}_{t'} M' \arrow[r, "c'"'] & M'
\end{tikzcd}
$$

図 7 単位射は単位射に対応する．

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "e"] \arrow[d, "F_C"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \arrow[d, "F_M"] \\
C' \arrow[r, "e'"'] & M'
\end{tikzcd}
$$

以上，３つの構造を保つ写像（の組）が関手であるから，まさに圏準同型である．

3.2 関手の定義の吟味，記法の注意

圏を６つ組と見做し，残りの４つの条件

(2-1)’ 射の合成が，始対象と終対象の２つの属性に対して構造を保つ．

(2-2) 射の合成が結合的である．

(3-1)’ 単位射は自己射である．

(3-2) 単位射の特徴付け

を４つの可換図式を用いて圏を定義したのであった（定義 8）．このうち，(2-2) と (3-2) は関手の定義に関与しない．(2-1) と (3-1) に加えて，(1-2) が，関手が保存すべき条件であり，それぞれが図 6，7，5 に対応する．

概念としては関手は「写像の組」であるが，よく関手自体のことや，F_C, F_M のいずれのことも，F と書いてしまう．

3.3　圏の圏 CAT

3.3.1　恒等関手

$F_C = 1_C, F_M = 1_M$ と定めれば，３つの可換図式を自明な形で満たし，これは関手となる．これを恒等関手と呼び，$1_C : C \longrightarrow C$ と書く．

3.3.2　関手の合成

２つの関手 $F : C \longrightarrow C', G : C' \longrightarrow C''$ に対して，関手 $G \circ F : C \longrightarrow C''$ を，写像の合成を用いて

$$(G \circ F)_C := G_C(F_C(A)) \quad (\text{forall } A \in C),\ (G \circ F)_M := G_M(F_M(f)) \quad (\text{forall } f \in M)$$

と定める．

3.3.3　圏の圏 CAT

対象を圏とし，射を関手とする．合成は「関手の合成」を用いると結合的で，単位射を「恒等関手」とすればこれは特徴づけを満たす．従ってこれは圏をなし，CAT，［圏］などと書く．

3.4　部分圏 (subcategory)

3.4.1　部分圏の定義

定義 11 (部分圏)**.** (C, M, s, t, c, e) を圏とする．C', M' をそれぞれ C, M の部分集合とした時，これらに誘導される写像 $s \restriction M', t \restriction M', c \restriction M'_{s\restriction M'} \times_{\substack{t\restriction M' \\ C'}} M', e \restriction C'$ について，(C', M', s', t', c', e') が圏をなす時，これを C の部分圏という．

この時，２つの包含写像 $i_C : C' \longrightarrow C, i_M : M' \longrightarrow M$ によって定まる明らかな忠実関手 $i : C' \longrightarrow C$ が存在する．これを包含関手と呼ぶ．

3.4.2　充満部分圏 (full subcategory)

定義 12 (充満部分圏)**.** (C, M, s, t, c, e) を圏とする．C' を C の部分集合とした時，M' を $M' := \{f \in M | s(f), t(f) \in C\}$ と構成すれば，これは必ず部分圏をなす．これを特に「充満部分圏」と呼ぶ．

「頂点集合が生成する部分グラフ (induced subgraph)」の定義に似てるが，それとの相違点は，グラフの方では辺はたかだか 1 つしか存在し得ないが，充満部分圏では Hom 集合の濃度は不問である．

3.4.3　**Cat** の充満部分圏の例１：monoid 再考

「圏のうち単一対象圏であるもの」という特別なクラスが monoid なのであった．それと並行して，モノイドの射は，単一対象圏間の関手と一致する．従って，モノイドの圏 **Mon** は，圏の圏 **Cat** の充満部分圏である．
全く同様に「monoid のうち，全ての射が可逆であるもの」が群であり，その間の関手が群の射であったから，以下のような包含関手が存在する．

$$\mathbf{Grp} \xrightarrow{i} \mathbf{Mon} \xrightarrow{i'} \mathbf{Cat}$$

3.4.4　**Cat** の充満部分圏の例２：poset 再考

［順序集合］は［圏］の充満部分圏である．

3.4.5　充満部分圏の例３：自己射のなすモノイド

モノイドのなす圏 **Mon** も，圏の圏 **Cat** の充満部分圏であったが，同じ構図の低次元版のように，単一対象圏を「自己射のなすモノイド」と言えば，これは空圏を除けば，「あらゆる圏について，最小の充満部分圏」となる．
なお，「自己射のなすモノイド」とは，(C, M, s, t, c, e) を勝手な圏としたとき，C の勝手な元 A に対して，$C' = \{A\}$ と置き，$M' = \mathrm{Mor}_C(A, A) = \mathrm{End}(A)$ とすれば，これらが為す充満部分圏をさす．

3.4.6　充満部分圏の例４：自己同型のなす群

M' のうち，同型であるものをとって，$M'' = \mathrm{Aut}(A) \subset M'$ とする．$A \in C$ は勝手な圏 C の対象であったが，今圏 C を **Set** とすると，$\mathbf{Set} \ni S = \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して $mathrmAut_C(S) = \mathfrak{S}_n$ を「n 次対称群」という．これは，集合の圏の部分圏であるが，一般に充満部分圏ではない．

3.4.7　モノイドの射と群の射の例：指数表示と指数法則とは何か

$(M, \cdot, e_M)$ をモノイドとする．モノイド $(\mathbb{N}, +, 0)$ からの射 $\begin{array}{ccc} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & M \\ \cup & & \cup \\ n & \longmapsto & x^n \end{array}$ と定めたものが，指数表示である．ただし，$x^0 = e_M, x^1 = x$ であり，以降 $x^{n+1} = x^n \cdot x$ と帰納的に定める．
しかしこのままだと不安である，f は本当にモノイドの射になっているだろうか．モノイドを圏とみて，f が関手であるための条件（可換図式 5,6,7）を満たすかどうか検証する．いずれも単一対象圏なので，図 5 は自明である．図 6 は，$f(n+m) \overset{M}{=} f(n) \cdot f(m)$（指数法則）が帰納的に成り立つことにより保証される．最後に，定義の仕方により，確かに $f(0) = e_M$ である．
指数表示と指数法則とは，和と積という２つの演算の間の，モノイド準同型だったのか．

全く同様に，２つの群 $< Z, +, 0 >$ と $< G, \cdot, e_G >$ の間の射だと考えれば，指数 n の走る範囲は整数にまで拡張できる．積を備えた代数系が群をなすことがその条件である．
では，複素行列を指数に取る場合はどうだろうか？

3.5　具体圏 (concrete category) 未解決

3.5.1　具体圏の定義

定義 13 (具体圏)**.** (C, M, s, t, c, e) を圏とする．忠実な関手 $F : C \longrightarrow \mathbf{Set}$ が存在するときに，組 (C, F) のことを「具体圏」と呼ぶ．また，このような忠実関手 F が存在する圏 C のことを「具体化可能 *(concretizable)*」という．

この関手 F は忘却関手であり，圏 C の対象をその台集合に写し，射は台写像 (underlying mapping) に写す．集合論が構築する様々な対象のうち，「集合の上に，付加構造を追加する」という形で定式化される構造が圏をなすとき，それは具体圏をなすという言葉で捉えられる．関手 F の取り方はいく通りも存在する場合が殆どで，実用上は上述した忘却関手のような一番自明なものを取る．

3.5.2　具体圏の例：Top, Grp

3.6　共変関手 (covariant) と反変関手 (contravatiant)

F が共変関手であるとき，それによる $f \in M$ の値を $F(f) = f_*$ と書き，F が反変関手であるとき $F(f) = f^*$ と書くこととする．

3.6.1　反変関手の定義

定義 14 (（反変）関手)**.** ２つの圏 $C = (C, M, s, t, c, e), C' = (C', M', s', t', c', e')$ に対して，圏 C から圏 C' への反変関手とは，写像 $F_C : C \longrightarrow C'$ と写像 $F_M : M \longrightarrow M'$ の組 $(F_C, F_M) =: F$ であって，以下の可換図式 *8*，*9*，*7* を満たすもののことである．

図 8　　射に付随する始対象と終対象の関係を，一律に逆転させる．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "F_C"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowright"] & M \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "t"] \arrow[d, "F_M"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowright"] & C \arrow[d, "F_C"] \\ C & M' \arrow[l, "t'"] \arrow[r, "s'"'] & C \end{tikzcd}$$

図 9　$F(g\circ f)=F(f)\circ F(g)$ を表す可換図式．ただし，$F_M\times F_M\circ\omega$ とは，図 10 のような合成写像とする．

$$\begin{tikzcd}
M_s \underset{C}{\times_t} M \arrow[r, "c"] \arrow[d, "F_M\times F_M\circ\omega"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \arrow[d, "F_M"] \\
M'_{s'} \underset{C'}{\times_{t'}} M' \arrow[r, "c'"'] & M'
\end{tikzcd}$$

図 10　$F_M\times F_M\circ\omega$ の定義

$$\begin{tikzcd}
M_s \underset{C}{\times_t} M \arrow[r, "\omega"] & M_t \underset{C}{\times_s} M \arrow[r, "F_M\times F_M"] & M'_{t'} \underset{C}{\times_{s'}} M' \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\
(g,f) \arrow[r, mapsto] & (f,g) \arrow[r, mapsto] & (F_M(f),F_M(g))=(f_*,g_*)
\end{tikzcd}$$

図 11　単位射は単位射に対応する（共変関手の定義と同一）．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "e"] \arrow[d, "F_C"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \arrow[d, "F_M"] \\
C' \arrow[r, "e'"'] & M'
\end{tikzcd}$$

3.6.2　逆転圏

圏 $C=(C,M,s,t,c,e)$ に対して，$C^{op}:=(C,M,t,s,c\circ\omega,e)$ は必ず圏をなす．

この概念を用いれば，反変関手 $F:C\longrightarrow C'$ は共変関手 $G:C^{op}\longrightarrow C'$ に対応すると分かる．

図 12

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "op"] \arrow[dr, "F"'] & C^{op} \arrow[d, "G"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright" near end] \\
 & C'
\end{tikzcd}$$

3.6.3　monoid での例：逆転モノイド

M をモノイドとすると，逆転単一対象圏 M^{op} も勿論モノイドであり，これを「M の逆転モノイド」という．$M=M^{op}$ の時，このモノイド M は可換であるという．

3.6.4　poset での例：冪集合関手 $\mathscr{P}$

圏 $(C,M\subset C\times C,p1,p2,c,e)$ で，M の可逆な射は単位者のみである時，M は C 上に順序を定める．

勝手な集合 X に対して，$C=P(X)$ とし，包含写像を射とする圏を考えると，これは合成写像も包含写像となることより圏をなし，特に

Set の部分圏となる．冪を取る操作により，Set の対象の中でも特に［順序集合］の対象となるのだ．
$$\begin{array}{ccc} P_C : [\text{集合}] & \longrightarrow & [\text{順序集合}] \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ X & \longmapsto & P(X) \end{array}$$

次に，集合 X,Y 間の写像 $f : X \longrightarrow Y$ の P_M による像をどう定義するべきか考える．これは［集合］の射と考えれば適当な写像で良いのだが,［順序集合］の射だと考えると，順序準同型である必要がある．順序集合とは圏の特別なクラスであったから，これは関手である．ということで，P_M の像の候補は以下関手化 $P_M = *$ の 2 つのである．

$$f_* : P(X) \longrightarrow P(Y) \quad \text{共変関手}$$
$$f^* : P(Y) \longrightarrow P(X) \quad \text{反変関手}$$

まず，共変関手について，
$$\begin{array}{ccc} f_* : P(X) & \longrightarrow & P(Y) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A & \longmapsto & f(A) = \{y \in Y | \exists x \in A\ f(x) = y\} \end{array}$$
と定める．これは包含関係を保存するので，関手になると予想される．実際 $\begin{cases} (f \circ g)_* &= f_* \circ g_* \\ 1_{X*} &= 1_{P(X)} \end{cases}$ が確認できる．

続いて，反変関手について，
$$\begin{array}{ccc} f^* : P(Y) & \longrightarrow & P(X) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\} \end{array}$$

> 関手化とは，関手 F_C の終域となる対象の 1 つ 1 つが圏と見なせる場合の，F_M の像を捉えるための言葉である．考察が 1 段階高次元になった様子を捉える．後述の表現可能関手はその例で,「関手化」として捉えられる．Hom 類間の写像は，関手の射をなすと捉えられる．

反変版の方の冪集合関手は，なんだか連続写像との関連性を感じる．「反変版の冪集合関手は 2 点集合によって表現されている．」を検証する．*4

3.6.5　忘却関手 forgetful fanctor

圏 C が別の圏 C'（Set など）のうち，特に付加的な構造持つものがなす圏とすると，その構造を忘れ去ることにより，自明な共変関手を構成することができる．これを忘却関手という．

3.7　表現可能関手 representable fanctor

3.7.1　表現可能関手の定義

> **定義 15** (表現可能関手)**.** 圏 (C,M,s,t,c,e) と圏の圏 Set に対して，圏 C の或る対象 $X \in C$ を用いて，$\mathrm{Hom}_C(-,X)$ または $\mathrm{Hom}_C(X,-)$ と表せる F_C を持った関手 $F : C \longrightarrow \mathbf{Set}$ を,「表現可能関手」という．

これらは，米田の補題により，圏全体の大域的な性質を反映していることが保証される．

3.7.2　有限次元 $\mathbb{R}$-線型空間での例

$C =$［有限次元 $\mathbb{R}-$線型空間］とする．関手 $_*$ を以下のように定義する．

$$\begin{array}{rccc} *_C : & C & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & W & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) = \mathrm{Hom}_C(V,W) \\ *_M : & (f : U \to W) & \longmapsto & f_* : \mathrm{Hom}_C(V,U) \to \mathrm{Hom}_C(V,W) \\ & & & \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \\ & & & g : V \to U \longrightarrow f \circ g : V \to W \end{array}$$

$h : W \longrightarrow W'$ を勝手に取った時，これには $f : U \longrightarrow W$ との合成が定義され，あとは以下の 2 条件を満たせば関手として定められたことになる．

$$\begin{cases} (h \circ f)_* &= h_* \circ f_* \\ (1_W)_* &= 1_{\mathrm{Hom}_C(V,W)} \end{cases}$$

---

*4 https://ja.wikipedia.org/wiki/関手

3.7.3 双対空間

自己反変関手 $\begin{array}{rcl} {}^{V} : C & \longrightarrow & C \\ \uplus & & \uplus \\ V & \longmapsto & V^V = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}=C}(V,\mathbb{R}) \end{array}$ を考える．対象である有限次元 $\mathbb{R}$-線型空間 V を，その係数体 $\mathbb{R}$ への線型写像（線型形式という）のなす線型空間 $V^V \in C$ に写す関手である．${}^V_M$ の定め方を考えたい．$f : V \longrightarrow W$ を圏 C の射とすれば，これは $\mathbb{R}$-線型写像だから，$f \in {}^V(W)$ である．今 ^{V} を反変関手とするならば，$g : W \longrightarrow \mathbb{R}$ を勝手な W^V の元とすると，この $f \in M$ の関手化 ${}^V_M$ を，次のようにすれば良い．

$\begin{array}{lcl} {}^V_M(f) : {}^V_C(W) = W^V & \longrightarrow & V^V = {}^V_C(V) \\ \uplus & & \uplus \\ g : W \to \mathbb{R} & \longmapsto & g \circ f : V \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}$ この時，確かに f^V は線型写像であり，圏 C の射である．こうして，自己反変関手 ^{V} が，［有限次元 $\mathbb{R}$-線型空間］上に定まった．

$$\begin{cases} (g \circ f)^V & = & f^V \circ g^V \\ (1_V)^V & = & 1_{V^V} \end{cases}$$

$\because f : V \longrightarrow W, g : W \longrightarrow U$ とすれば，$g \circ f : V \longrightarrow U, (g \circ f)^V : U^V \longrightarrow V^V$

4 関手の射

歴史的には「自然変換」という．写像には階層がないが，圏論では上がっていけるようだ．不思議だ．この観念を n-圏／ n-射といい，これを考えることを higher order category theory という．

> Frequently in modern mathematics there occur phenomena of ”naturality”: a ”natural” isomorphism between two groups or between two complexes, a ”natural” homeomorphism of two spaces and the like. We here propose a precise definition of the ”naturality” of such correspondences, as a basis for an appropriate general theory. [*5]
>
> Just as a functor is a morphism between categories, a natural transformation is a 2-morphism between two functors.
> Natural transformations are the 2-morphisms in the 2-category Cat.[*6]

4.1 関手の射の定義

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & C' \end{tikzcd}$$

定義 16 (関手の射)**.** C, C' を圏とし，F, G を関手 $F, G : C \longrightarrow C'$ とする．写像 $\varphi : C \longrightarrow M'$ が以下の２つの可換図式を満たす時，これを関手 F, G 間の関手の射という．$\varphi : C \longrightarrow M'$ の値，つまり元の圏 C の各対象 $x \in C$ に *assign* される M' の射 $\varphi_\chi : F(\chi) \longrightarrow G(\chi)$ のことを「φ の成分 *(component of* φ *at* χ*)*」という．

4.2 関手の射の合成

３つの関手 $F, G, H : C \longrightarrow C'$ に対して，２つの関手の射 $\varphi : F \longrightarrow G, \psi G \longrightarrow H$ の合成を，$\psi \circ \varphi(A) := \psi(A) \overset{M'}{\circ} \varphi(A) : F(A) \longrightarrow H(A)$ のように定義する．この定義は 2-圏における vertical composition という．

[*5] S. Eilenberg and S. MacLane, Natural Isomorphisms in Group Theory, Proceedings of the National Academy of Sciences, 28(1942), 537-543.
[*6] https://ncatlab.org/nlab/show/natural+transformation

図 13　各 $A \in C$ に対して $\varphi(A) : F_C(A) \longrightarrow G_C(A)$ を表す可換図式．つまり，各対象について，F, G で移った先の２つの対象を結ぶ射を選び取る条件．

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "F_C"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "G_C"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright", shift left=4ex] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"', shift right=4ex] & \\
C' & M' \arrow[l, "s'"] \arrow[r, "t'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

図 14　２つの関手の間に自然な変換があることを表す可換図式．

$$\begin{tikzcd}
F_C(A) \arrow[r, "F_M(f)"] \arrow[d, "\varphi(A)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F_C(B) \arrow[d, "\varphi(B)"] \\
G_C(A) \arrow[r, "G_M(f)"'] & G_C(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "(\varphi\circ t{,}F_M)"] \arrow[d, "(G_M{,}\varphi\circ s)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M'_{s'} \underset{C'}{\times_{t'}} M' \arrow[d, "c'"] \\
M'_{s'} \underset{C'}{\times_{t'}} M' \arrow[r, "c'"'] & M'
\end{tikzcd}$$

4.3　関手の同型／自然同型 (natural equivalence)

関手の射 $\varphi : F \longrightarrow G$ が，逆射 $\phi : G \longrightarrow F$（$\psi \circ \phi = 1_F, \psi \circ \varphi = 1_G$ を満たす）を持つ時，これは関手の同型であるという．
つまり，関手の合成の定義から，各 $A \in C$ に対して $\varphi(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$ が（勿論 $\psi(A)$ も）それぞれ同型であることをさす．

4.4　関手圏 Funct

C, C' を圏として，対象を関手 $C \longrightarrow C'$ の全て，射をその間の自然変換とすれば，これは圏をなす．これを $\mathrm{Fun}(C, C'), C'^C, [C, D]$ などと書く．

4.5　関手圏の例

図式の圏や，前層／層の圏は，関手圏の例である．

4.5.1　有限次元 $\mathbb{R}$-線型空間の例 1

圏 C を［有限次元 $\mathbb{R}$-線型空間］とし，圏 C' を［集合］とする．すると C は C' の部分圏である．
１つ目の関手 F を以下のように，$Hom_C(V, -)$ によって定まる共変な表現可能関手とする．

$$\begin{array}{lcr}
F_C : C & \longrightarrow & C' \\
\quad \Cup & & \Cup \\
\quad W & \longmapsto & \mathrm{Hom}_C(V, W) \\
F_M : M & \longrightarrow & M' \\
\quad \Cup & & \Cup \\
\quad f : U \to W & \longmapsto & f_* : \mathrm{Hom}_C(V, U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(V, W) \\
 & & \Cup \qquad\qquad\qquad \Cup \\
 & & g : V \to U \longmapsto f \circ g : V \to W
\end{array}$$

２つ目の関手 G は忘却関手とする．
すると，関手の射 $\varphi : F \longrightarrow G$ を各 $W \in C$ に対して

$$\begin{array}{cccc}
\varphi(W): F(W) & \longrightarrow & G(W) \\
\| & & \| \\
\mathrm{Hom}_C(V,W) & & W \\
\cup & & \cup \\
g: V \to W & \longmapsto & g(x)\,(\text{構造を忘れた線型空間} W \text{の素朴な元})
\end{array}$$

という集合の射（写像）を対応させれば，以下の可換図式は任意の $g \in \mathrm{Hom}_C(V,U)$ に対して $f \circ g(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in U$ であるから可換だとわかる．これはなんだ？？［有限次元 $\mathbb{R}$-線型空間］からの表現可能関手の例として，素朴な集合からの coding の例をあげ

$$\begin{array}{ccc}
F_C(U) = \mathrm{Hom}_C(V,U) & \xrightarrow{F_M(U)=f_*} & F_C(W) = \mathrm{Hom}_C(V,W) \\
\varphi(U)\downarrow & \circlearrowright & \downarrow\varphi(W) \\
G_C(U) = U & \xrightarrow[G_M(f)=f(underlying)]{} & G_C(W) = W
\end{array}$$

たのだろうか？

4.5.2 有限次元 $\mathbb{R}$-線型空間の例 2：テンソル

圏 C, C' と表現可能関手 F を上述の例と同様に定める．２つ目の関手は，$W \in C$ に対して，$G_C(W) = W^n = \{(y1, \cdots, yn) | y1, \cdots, yn \in W\} (n \in \mathbb{N})$，$f: U \longrightarrow W$ に対して

$$\begin{array}{ccc}
G_M(f) = f_*: U^n & \longrightarrow & W^n \\
\cup & & \cup \\
(y1, \cdots, yn) & \longmapsto & (f(y1), \cdots, f(yn))
\end{array}$$

として定める．

すると，関手の射 $\varphi: F \longrightarrow G$ を各 $W \in C$ に対して

$$\begin{array}{ccc}
F(W) = \mathrm{Hom}_C(V,W) & \longrightarrow & G(W) = W^n \\
\cup & & \cup \\
g & \longmapsto & (g(x_1), \cdots, g(x_n))
\end{array}$$

と定めれば，これは確かに可換図式 13,14 を満たす．

命題 1. 以下の２条件は同値である．

(1) $x_1, \cdots, x_n$ が $V \in C$ の基底である．

(2) 関手の射 $\varphi: F \longrightarrow G$ は関手の同型である．

前述の例は，n=1 の場合に当たる．

第 II 部
層

5 Introduction

幾何学とは図形の形を捉える数学の三大分野の一つである．例をあげよう．

$$\text{球面 } S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$
$$\text{トーラス } T^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

とすると，S^2 と T^2 は位相空間としては同相ではない．これを「大域的に違う」と表現する．しかし，S^2 も T^2 も局面であり，一部を取り出すと似ている．これを「局所的には同じ」と表現する．
この大域と局所のズレを捉える概念装置が「層 (shelf)」である．

5.1 これが圏論の上で行われる理由

集合は，１つ１つバラバラな元の集まりを，ひとつの全体として捉える．しかし，この２元的な見方のいずれかしかないと，その間の関係が見えてこない．ということで，全体と個別の間に中間的なものを設定する，という発想が開集合系とそれによる位相空間の定義であり，これが幾何学の基礎となっている．

また，連続写像とは，以下の２つの性質を持つ．

連続写像の性質

1：全体上で定義された連続写像は，定義域を狭めて制限しても連続写像である．

2：局所的に定義された連続写像は，その定義域を全体に拡張しても連続写像になる．

6　位相空間と連続写像

6.1　Euclid 空間での開集合の定義から，特徴づけを導く

定義 17 (Euclid 空間上の開集合の，$\varepsilon-\delta$ 論法による定義)**.** 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 U が開集合であるとは，U 内の任意の点 (s,t) に対し，実数 $r>0$ であって，$U_r(s,t)\subset U$ となるものが存在するということ．
但し，$U_r:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|(x-s)^2+(y-t)^2<r^2\}$ とする．

定義 18 (連続写像の，$\varepsilon-\delta$ 論法による定義)**.** U,V を平面 $\mathbb{R}^2$ の開部分集合とする．$f:U\longrightarrow V$ が連続写像であるとは，U の任意の点 (s,t) と任意の実数 $q>0$ に対して，実数 $r>0$ であって，

$$U_r(s,t)\subset U\wedge f(U_r(s,t))\subset U_q(f(s,t))$$

となるようなものが存在することである．

以上見て来た Euclid 空間上での $\varepsilon-\delta$ 論法による定義は，距離の概念を使用して，些か直感的に定義している．例えば

$$d((x,y),(s,t)):=\sqrt{(x-s)^2+(y-t)^2}$$

と置くと，f が連続写像であるとは，

$$d((x,y),(s,t))<r\Longrightarrow d(f(x,y),f(s,t))<q$$

を満たすことである．これは「V で近い点は U でもどこまでも近い」という感覚に非常に合致した定義だと言えよう．

しかし，このように距離の言葉に翻訳しなくても連続の概念は定義出来る，というのがミソなのであった．

定義 19 (連続写像の特徴付け)**.** $U,V\subset\mathbb{R}^2$ を開集合とする．写像 $f:U\longrightarrow V$ に対して，次の条件 *(1),(2)* は同値である．
(1) f は連続である．
(2) V に含まれる $\mathbb{R}^2$ の任意の開集合 W に対して，その f による逆像 $f^{-1}(W)$ は U に含まれる $\mathbb{R}^2$ の開集合である．

Proof. (1)$\Longrightarrow$(2)
$W\subset V$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする．U 上の点 $(s,t)\in f^{-1}(W)$ を任意に取る．すると，定義上，$f(s,t)\in W\subset V$ となる．従って点 $f(s,t)$ は開集合 W 内部の点だから，実数 $q>0$ が存在して，$U_q(f(s,t))\subset W$ を満たす．続いて f は連続なので，$f(U_r(s,t))\subset U_q(f(s,t))(\subset W)$ となる実数 $r>0$ が存在する．従って，写像は包含関係を保存する射だから，$U_r(s,t)\subset f^{-1}(W)$ を得る．点 (s,t) は任意に取ったから，逆像 $f^{-1}(W)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の開集合である．
(2)$\Longrightarrow$(1)
U 内の任意の点 (s,t) と実数 $q>0$ を任意に取る．V は開集合で，$f(s,t)\in V$ だから，$q'>0$ であって $U_{q'}(f(s,t))\subset V$ となるような実数が存在する．$q'>q$ だったならば $q'=q$ と置き換えることにより，一般に $q'\leq q$ として良い．W を $U_{q'}(f(s,t))$ として (2) を適用すると，この逆像 $f^{-1}(U_{q'}f(s,t))$ は開集合になる．$q>0$ だから勿論 $(s,t)\in f^{-1}(U_{q'}f(s,t))$ であるから，実数 $r>0$ であって $U_r(s,t)\subset f^{-1}(U_{q'}f(s,t))\subset f^{-1}(U_qf(s,t))(\because q'\leq q)$ となるものが存在する．よって，$f(U_r(s,t))\subset U_q(f(s,t))$ を得る．従って f は連続写像． □

命題 2 (Euclid 空間の開集合の集合演算に対する性質)**.** *1,* $(U_i)_{i\in I}$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合の族とすると，合併 $\bigcup_{i\in I}U_i$ も開集合となる．
2, $(U_i)_{i\in I}$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合の有限族とすると，共通部分 $\bigcap_{i\in I}U_i$ も開集合となる．

但し，合併とは $\bigcup_{i\in I}U_i:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\exists i\in I\mathrm{s.t.(x,y)\in U_i}\}$ を意味し，共通部分とは $\bigcap_{i\in I}U_i:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\forall i\in I[\underline{i\in I\Longrightarrow}(x,y)\in U_i]\}$ を意味する．

こう見ると，合併と共通部分は，$\forall$ と $\exists$ との双対に基づいた，明らかな双対概念だなぁ．

I が 2 元集合，例えば $I=1,2$ の時，$U_1\cup U_2$ や $U_1\cap U_2$ などと，中置記法で書く．$I=\varnothing$ の時，$\bigcup_{i\in\varnothing}U_i=\varnothing$ とする（零和）．一方零積は，下線部の前提条件が常に偽だから，$\bigcap_{i\in\varnothing}U_i=\mathbb{R}^2$（普遍集合）と約束する．

Proof. □

6.2　位相空間を，特徴付けだった方を公理として定義する

これらを用いて，次のように位相空間を定義する．

定義 20 (位相空間)**.** X を集合とする．X の冪集合 $\mathscr{P}$ の部分集合 O が次の条件 *(1),(2)* を満たす時，O は X の位相であるという．
(1) $(U_i)_{i\in I}$ が O に属する X の部分集合の族ならば，合併 $\bigcup_{i\in I} U_i$ も O の元である．なお特に，$\bigcup_{i\in\varnothing} U_i = \varnothing \in O$ である．
(2) $(U_i)_{i\in I}$ が O に属する X の部分集合の有限族ならば，共通部分 $\bigcap_{i\in I} U_i$ も O の元である．なお特に，$\bigcap_{i\in\varnothing} U_i = X \in O$ である
集合 X に対 (X,O) が指定されている時，この X を位相空間と呼び，この O を X の開集合系，O の元を X の開集合という．

6.2.1　例１：Euclid 空間

$X=\mathbb{R}^2, O=\{U\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)|U$ は $\mathbb{R}^2$の開集合である．$\}$ と定めると，O は $\mathbb{R}^2$ の位相となっている．$\because$ 命題 2

6.2.2　例２：離散（位相）空間

集合 X に対して，$\mathscr{P}(X)$ は位相になる．こうして生成した位相空間を離散位相空間という．

6.2.3　例３：２元集合の位相

$\mathbb{S}=0,1$ とする（一次元球面）．$O=\{\emptyset,\mathbb{S},\{1\}\}=\mathscr{P}(\mathbb{S})-\{0\}$ は $\mathbb{S}$ の位相となる．

6.3　部分位相空間

X を位相空間とし，O をその位相とする．X の部分集合 A に対して，位相 O の各元の A との共通部分を取ったものからなる集合 $O_A := \{U\cap A|U\in O\}$ は A の位相になる．

$$\bigcup_{i\in I}(U_i\cap A) = (\bigcup_{i\in I}\cap A)$$
$$\bigcap_{i\in I}(U_i\cap A) = (\bigcap_{i\in I})\cap A$$

より，確かに 2 つの公理を満たす．この位相 O_A によって部分集合 A を位相空間とみなした場合，これを部分位相空間という．

A が X の開集合だった場合，即ち，$A\in O$ であった場合，$O_A=\{U\in O|U\subset A\}$ でもある．つまり，「A の部分集合である X の開集合」と「A を X の部分位相空間と考えた時の開集合」とは常に一致する．
$\supset$ は U を A の部分集合かつ O の元とすれば，$U\cap A=U$ なので，確かに $U\in O_A$．一方 $\subset$ は，$U\in O_A$ とすると，A は開集合だから，命題 2(2) より開集合同士の合併は開集合で，$U\cap A\in O$．なお，$U\in O_A$ としたから明らかに $U\subset A$.

例：S^2 や T^2 は $\mathbb{R}^3$ の部分位相空間である．

6.4　連続写像

定義 21 (連続写像)**.** X,Y を位相空間とし，O_X,O_Y を其々の位相とする．写像 $f:X\Longrightarrow Y$ が連続写像であるとは，$V\subset Y$ が Y の開集合ならば，その逆像 $f^{-1}(V)(\subset X)$ が X の開集合であることを言う．

特に X,Y が $\mathbb{R}^2$ の開集合であった場合，これは命題 2 と合致する．