目次

新微分方程式対話

笠原晧司

2020 年 5 月 27 日

第 I 部

常微分方程式入門

第 1 章

導入と例

1.1　分類と概観

定義 1.1.1 (関数方程式，差分方程式，微分方程式)**.**
1. 関数空間上の関係 $R(x)$ を満たす関数 x の集合（または族）を求める問題を関数方程式という．
2. 関数方程式のうち，独立変数を変化させた時の値の変化を指定する式によって与えられるものを差分方程式，独立変数による導関数との間の関係によって与えられる関数方程式を微分方程式という．
3. 関数方程式 $R(x), R'(x)$ が等価であるとは，集合として等しい $R(x) = R'(x)$ ということである．
$n, m, l = 1, 2, \cdots$ として，n 階の常微分方程式 (ODE) は，関数 $F : C^n(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)^{n+2} \to C^n(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)^l$ が存在して，

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0$$

と同値になる．
4. $l = 1$ の時，これを単独方程式，$l > 1$ の時方程式系／連立方程式と呼ぶ.
5. F が有理式になる時，代数的微分方程式という．この時，F の分子の多項式について，次数の概念を考えることができる．各項についてその次数が一致する時，同次方程式という．
6. F を最高階の導関数 $\dfrac{d^n x}{dt^n}$ について解かれた形で表示された微分方程式

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}\right)$$

を，正規形という．
7. F が $F\left(x, \dfrac{dx}{dt}, \cdots, \dfrac{d^n x}{dt^n}\right) = 0$ と表される時，「方程式は独立変数 t に陽には依存しない」といい，方程式 F を自励系 (autonomous) である，という．
8. F が独立変数 t についてを除いて，x とその導関数についての一次式である時，方程式 F は線型であるという．

注 1.1.2. これを書きながら思ったのは，独立変数 x や従属変数 t は何者かということである．平地先生の講義では $f : \mathbb{R}^{n+1} \supset \Omega \to \mathbb{R}$ として定式化していらっしゃった．もちろんそれで十分であろうが，関数に微分作用素が作用するという観点からはどうなるのか．この時に局所座標 $(\varphi; x^1, \cdots, x^n)$ とは何か，ただの

place holder か，写像として定式化できるかがまだよくわかっていない.

命題 1.1.3 (正規高階 OED の 1 階連立系). 正規形 n 階方程式 $\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$ について，独立変数 x とその t についての導関数を，新たに未知関数

$$z_0 = x,\ z_1 = \frac{dx}{dt},\ z_2 = \frac{d^2x}{dt^2},\ \cdots, z_{n-1} = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$$

とみなせば，次の正規形 n 連立 1 階方程式と等価になる.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n = f(t, z_0, \cdots, z_{n-1}) \end{pmatrix}$$

命題 1.1.4. 代数的正規形方程式は，代数的正規形連立方程式に書き換えられる.

注 1.1.5. 逆は一般には成り立たない.

1.1.1　初期値問題と境界値問題と，微分方程式の解

現実問題は，大抵，ODE にある種の追加の条件を加えた形で現れる．それを扱うための言葉を用意する.

定義 1.1.6 (初期値問題と境界値問題).
1. 微分方程式 $F(t, x, dx/dt, \cdots, d^n x/dt^n) = 0$ に加えて，

$$x(t_0) = \xi_0,\ \frac{dx}{dt}(t_0) = \xi_1,\ \cdots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t_0) = \xi_{n-1}$$

という制約条件を加えたものを「初期値問題」といい，この条件を初期条件という.
2. 微分方程式 $F : C^n(U; \mathbb{R}^m)^{n+2} \to C^n(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)^l$ に加えて，関数 x の定義域 U の境界点に於ける値を指定する形での条件を付け加えたものを，「境界値問題」という.
また，$x(a) = \xi_1, x(b) = \xi_2, \cdots$ という形での条件を Dirichlet 型，$dx/dt(a) = \xi_1, dx/dt(b) = \xi_2$ という形の条件を Neumann 型の境界条件という.

定義 1.1.7 (微分方程式の解).
1. 微分方程式 $F = 0$ の解とは，これを満たす関数 $x : U \to \mathbb{R}^m$ をいう．（2. の観点からは特殊解と呼び分ける).
2. 関数の族 $(x(t, C))_{C \in \mathbb{R}}$ であって，全ての C について関数 $x(t, C)$ が $F = 0$ の解であり，また F に関する全ての初期値問題の解がこれに含まれる時，族 $(x(t, C))_{C \in \mathbb{R}}$ を一般解という.
3. 解の一意性が成り立たない状況下で，一般解の形で径数付けることが出来ないような特殊解を，特に特異解と呼ぶ.

1.1.2　軌道，安定性，

以降，$f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^m$ として，自励的な微分方程式系

$$\frac{d}{dt}x = f(x)$$

を考え，特に初期条件 $x(t_0) = \xi$ を満たす解を 1 つ $x(t) = \varphi(t; t_0, \xi)$ と置く．
ここまでは一般性の高い設定と思えるが，以降 φ は $-\infty < t < \infty$ で定義されているものとしてしまう．

第Ⅱ部

基礎理論

1.2 初期値問題の解の構成

1.3 最適制御理論と Pontryagin's maximum principle

最適制御理論 (optimal control theory) とは，ある力学系が，ある目的関数に対して最大化／最小化する軌道を決定するための理論体系のことである．[†1]

"The Mathematical Theory of Optimal Processes" (Pontryagin et al., 1962).

以降関数と言った時，全て実数値一変数関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする．

定義 1.3.1 (制御過程)**.** 次を満たす連立 1 階微分方程式系

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \cdots, x^n; u^1, \cdots, u^r) \quad (i = 1, \cdots, n)$$

を，操作量 $u = \{u_i\}_{i=1,\cdots,r}$ と制御変数 $x = \{x_i\}_{i=1,\cdots,n}$ についての制御系と呼ぶ．

1. 各 $u^i(t)$ $(i = 1 \cdots, r)$ は，あらかじめ与えられた部分的に連続な関数である．
2. $\forall t \in \mathbb{R}$ $u(t) = {}^t(u^1(t), \cdots, u^r(t)) \in \Omega$ を満たす閉領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ が存在する．

定義 1.3.2 (最適制御問題)**.** 次のような問題を，最適制御問題という．

ある初期条件 $x_0 = \{x^i(t_0)\}_{i=1,\cdots,n}$ と，目的点 $x_1 = \{x^i(t_1)\}_{i=1,\cdots,n}$ について，各操作量 $u(t) = \{u_i(t)\}_{i=1,\cdots,r}$ が定める制御過程 $\dfrac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \cdots, x^n; u^1, \cdots, u^r) \quad (i = 1, \cdots, n)$ が定める軌道 $x(t) = \{x^i(t)\}_{i=1,\cdots,n}$ のうち，次を満たすような操作量と軌道の組 $(u(t), x(t))$ を決定せよ．

ある目的関数 $f^0(x^1, \cdots, x^n; u^1, \cdots, u^r)$ について，

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt$$

という値を最小化する．

この時の操作量 $(u(t))$ を最適操作量，軌道 $(x(t))$ を最適軌道という．

[†1] en.wikipedia.org から． It has numerous applications in both science and engineering. For example, the dynamical system might be a spacecraft with controls corresponding to rocket thrusters, and the objective might be to reach the moon with minimum fuel expenditure. Or the dynamical system could be a nation's economy, with the objective to minimize unemployment; the controls in this case could be fiscal and monetary policy.

第 III 部

解法理論

第 2 章

解析力学の技法

（中略）代わりに，導関数を含まない関係式を用いて，軌道が特定できるかということが主要な問題となる．（後略）

17 世紀，微分積分学は Newton, Leibniz によって始められ，18 世紀，Euler, d'Alembert, Lagrange らによって確立されていった．これ以降，微分積分学の主要な動機の一つに古典的な力学の問題を解くと言ったことが意識されていくのだが，古典力学に由来する微分方程式をシステマティックに解く方法論が，解析力学の名の下に集積されていく．

線型性という性質を仮定した世界を系統的に扱う技術として線型代数があり，その重要性は 20 世紀以降，十分に理解されてきたと思う．一方で，非線型現象も含めた微分方程式の解を求める技法としての解析力学の重要性は十分に意識されてはこなかったのではないだろうか．

物理学においては，解析力学を，量子力学や統計力学への導入として重要視することが多いかと思うのだが，筆者はむしろ常微分方程式の解法理論としての重要性を強調したい．

2.1 Lagrange 形式と Hamilton 形式

定義 2.1.1 (canonical equations of Hamilton)**.** p_k, q_k $(k = 1, \cdots, n)$ についての C^2 級関数 H について，次のような方程式系を，正準方程式系，または Hamilton 系という．

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, \cdots, n)$$

各 p_k, q_k を座標にもつ $2n$ 次元空間を相空間と呼ぶ．この $2n$ 変数関数 $H(p, q)$ を Hamiltonian と呼ぶ．

注 2.1.2.

1. 正準方程式は，Hamilton 形式の解析力学において，作用を

$$S[p, q] = \int_{t_i}^{t_f} \left(\sum_i p_i(t)\dot{q}(t) - H(p, q; t) \right) dt$$

とした時に，最小作用の原理を念頭において，これが最小値を取るための必要条件である停留条件を表した条件式である．この文脈では運動方程式と呼ばれる．

2. Hamilton 関数を，独立変数 t にも陽に依存しているとする $2n + 1$ 変数関数 $H(p, q; t)$ と考える場合は，非自励 Hamilton 系という．この時，$\dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial t}$ であり，次の命題 2.1.4 は成り立たない．併し，これは自励

的な Hamilton 系に帰着できる.

命題 2.1.3. 非自励的な Hamilton 系は，自励的な Hamilton 系に帰着できる

命題 2.1.4. Hamilton 系において，Hamilton 関数 H は保存量（第一積分）になる.

［証明］.

$$
\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{dp_k}{dt} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0
\end{aligned}
$$

□

2.1.1　力が保存力である場合の n 体 Newton 運動方程式は正準方程式になる.

第 IV 部

新微分方程式対話

2.2　微分方程式とその解

定義 2.2.1 (一階微分方程式)**.** 勝手に取った 3 変数関数 $F(t,x,y)$（但し，$\dfrac{\partial y}{\partial t} \neq 0$）に対して，この t と同じ定義域 T を持った関数 x とその微分 x' について

$$F(t,x,x') = 0$$

即ち全ての $t \in T$ について $F(t,x(t),x'(t)) = 0$ が成り立つとき，この方程式，または陰伏関数 f としてそれを x' について解いて得る $x' = f(t,x)$ を，一階の微分方程式と呼ぶ.

$x' = f(t,x)$ について，これを積分法によって，任意の $t \in T$ について表示すると，ある勝手に取った点 $t_0 \in T$ と対応する $x_0 := x(t_0)$ を定めて

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \quad \forall t \in T \tag{2.1}$$

と表示できる．こうすると，右辺は積分計算によって，高校で習った通りに簡約可能である．ここで，右辺の被積分関数の関数 x のところに，定数関数 x_0 を入れた時に得る値を x_1 とする.

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0)d\tau \quad \forall t \in T \tag{2.2}$$

これは t についての一次関数である．こうして，関数列 $\{x_n\}$ を取れる．もしこれに極限と呼べるものが存在し，

$$\overline{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \overline{x})d\tau \quad \forall t \in T \tag{2.3}$$

が成立するが，これは微分方程式 $x' = f(t,x)$ の解を，x_0 に始まり，$(t - t_0)$ の無限冪級数の形で得た事に当たる.

$$e^M := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$$

なので，

$$\begin{aligned}
e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}^3 + \cdots && (2.4) \\
&= \begin{pmatrix} -\dfrac{t^2}{2!} + \cdots & t - \dfrac{t^3}{3!} + \cdots \\ -t + \dfrac{t^3}{3!} + \cdots & -\dfrac{t^2}{2!} + \cdots \end{pmatrix} && (2.5) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} && (2.6)
\end{aligned}$$

であるから，連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

の解は,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

より,

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x d\tau \tag{2.8}$$

と表せて，このまま $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ として，$(t-t_0)M$ の冪を係数とした冪級数の和を得るから，解は

$$x(t) = x_0 e^{\begin{pmatrix} 0 & (t-t_0) \\ -(t-t_0) & 0 \end{pmatrix}} \tag{2.9}$$

と得る．即ち,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t-t_0) & \sin(t-t_0) \\ -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

が解である．ベクトル $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ が初期定数である．

2.3　行列の指数関数