計算の理論　レポート問題 2.1

司馬博文 J4-190549

2020 年 6 月 9 日

概要

河村先生の授業にて，「計算で解けない問題」の例として，ポストの文字列揃え問題（以下 PCP とする）を学んだ．この問題が計算不可能であることを，Turing 機械による「計算」「計算で解ける」ことの定義を用いて，「PCP を解く Turing 機械は存在しない」ことを（自分の言葉で）証明を構成する形で確認した．

その過程を，次の 3 つの段階に分解してまとめた．

1. Turing 機械が停止するかどうかを判定する問題（以降 HALT とする）は決定不可能である（定理 1.1）．
2. PCP は別の問題（PCPw1）に書き換えても等価である（命題 2.1,2.2）．
3. HALT から PCPw1 に帰着する算法が存在するから，これが解けるならば 1 に矛盾する（定理 3.1）．

1　停止性判定問題 HALT は計算不可能である

次の定理が成り立つため，停止性判定問題は計算不可能であると言える．

定理 1.1 (停止性判定機械の非存在)**.** 次の問題を解く機械は存在しない．

> 停止性判定問題
> 1(入力). 機械 M と入力 x を表す二進数表記による自然数からなる組 (M, x) の全て．
> 2(出力). M が停止する場合は，出力 $M(x)$．停止しない場合は記号 $\times$．

［証明］**.** 停止性判定問題を解く機械 M_0 の存在を認めて，矛盾を導く．このとき，任意の機械 M と入力 x に対して，その停止性についての情報を得られるのだから，それに挙動を追加しただけの次のような 2 つの機械 M_1, M_2 を構成できる．

> 入力 (M, x) に対して，$M(x)$ が停止するならば停止せず（$\times$ を出力し），$M(x)$ が停止しないならば停止する（◯ を出力する）機械 M_1．
>
> 入力 x に対して，x をコードされた機械と見たときの機械 x について，$x(x)$ が停止するならば停止せず（$\times$ を出力し），$x(x)$ が停止しないならば停止する（◯ を出力する）機械 M_2．

このとき，$M_1(x, x) \simeq M_2(x)$ が成り立つ．即ち，M_2 は関数 $M_1 : \mathbb{N}^2 \to \{◯, \times\}$ の定義域を $\Delta \subset \mathbb{N}^2$ に制限し，1 変数にしたものに他ならない．しかしこのとき，機械 $M_2(x)$ は自然数の中にコードされて居らず，そのようなものを作り出してしまったことになる．よって矛盾．□

2　PCP と PCPw1 は，Turing 等価である

> PCP (Post's Correspondence Problem)：有限列が上下 1 組書かれた札（を表す文字列）が有限種類・各種類可算無限個与えられる．これらを有限枚並べて，上下の文字列を一致させることが出来るかを表す文字列 $\{◯, \times\}$ を返せ．
> PCPw1 (PCP with the 1st card designated)：有限列が上下 1 組書かれた札<u>と区別されたそのうちの 1 枚</u>（を表す文字列）が有限種類・各種類可算無限個与えられる．これらを，<u>区別された 1 枚を先頭として</u>有限枚並べて，上下の文字列を一致させることが出来るかを表す文字列 $\{◯, \times\}$ を返せ．

命題 2.1. PCP は PCPw1 に帰着する．

［証明］**.** PCP 問題はカードの枚数 n について，そのそれぞれを最初に使うカードとして指定した場合の n 回の PCPw1 問題に

等価である． □

命題 2.2. PCPw1 は PCP に帰着する．

［**証明**］**.** n 枚の札と 1 枚の指定札からなる PCPw1 問題を考える．計 $n+1$ 枚の札 $\dfrac{\xi}{\eta}=(\xi,\eta)$（但し ξ,η は記号の有限列）について，ξ 内の任意の記号 x の出現を全て $!x$ で置換し，η 内の任意の記号 y の出現を全て $y!$ で置換した $n+1$ 枚のカードを作成する．次に，指定札について，同じような置換を施した上で η の先頭に！を追加したカードを 1 枚作成する．これは，唯一上下について両方とも！が先頭にくる札であり，一致させるにはこの札を先頭に用いるしかない．最後に，上のカードに記号！が 1 つだけ足りない点を除いて記号列が全て上下一致した場合に，◯ 判定が出来るように，札 $\dfrac{!?}{?}$ を作成する．こうして作成した計 $n+3$ 枚のカードについての PCP は，所与の PCPw1 に等価になる． □

3 HALT は PCPw1 に帰着する

HALT：機械 M と入力 x を表す 2 進数表記による自然数の組 (M,x) の全てを入力として取り，M が停止する場合は出力 $M(x)$ を，停止しない場合は記号 $\times$ を出力する．
HALT’：機械 M と入力 x を表す 2 進数表記による自然数の組 (M,x) の全てを入力として取り，M が停止する場合は出力 $M(x)$ を出力してテープ上の文字を全て消去し，ヘッドをテープ左端に揃えてから終了状態に至り，停止しない場合は記号 $\times$ を出力する．

すると，２つの問題は互いに帰着し，等価である．

定理 3.1. 停止前に追加の行動を要求する停止性判定問題 HALT’ は，最初のカードの指定つきポストの文字列合わせ問題 PCPw1 に帰着する．

［**証明**］**.** まず，Turing 機械の挙動を文字列にコードする方法を準備する．簡単のため，勝手な Turing 機械 $M=(\Sigma,I,b;Q,q_0,q_h;\delta)$ について，そのアルファベットは $\Sigma=\{0,1\}$ とし，$Q=\{q_0,q_1,\cdots,q_k,q_h\}$ とする．すると各状態は，tape（のうち十分大きくとった有限領域，即ち入力 x と同じ長さ）上に存在する cell 内の記号の列（例えば 010110 $\cdots$ 010）の中に，head が指し示す cell に書き込まれている記号の直前に，head の状態 q_i を挿入した文字列（例えば初期状態から 2 回右に遷移した場合 $01q_i0110\cdots010$ など）を用いて表せる．すると，この各状態を表す記号列を，separate symbol % などを用いて区切って繋げることで，或る Turing 機械の挙動全体をコードすることが出来る．

入力 (M,x) に応じて，次のような手順でカードを作る．まず，上部分は空欄のカード $\dfrac{\quad}{q_0x\%}$ を作成し，これを最初に使うべきカードとして指定する．次に，separate カード $\dfrac{\%}{\%}$ を追加する．続いて，機械 M のアルファベットに応じて，その元 (tape symbol) 1 つを上下同じ文字書いたカード，従ってここでは $\Sigma_M=\{0,1\}$ であるからカード $\dfrac{0}{0},\dfrac{1}{1}$ を用意する．次に，遷移規則 δ の算譜に応じて，例えば $\delta(q_i,a,R)=(q_j,b)$ の場合は右遷移カード $\dfrac{q_ia}{bq_j}$，$\delta(q_i,a,L)=(q_j,b)$ の場合は左遷移カード $\dfrac{aq_i}{q_jb}$ を作成する．最後に，受理状態 q_h についてカード $\dfrac{aq_h}{q_h}$ を全てのアルファベット $a\in\Sigma$ について作成する．

すると，これらの有限枚のカードについての PCPw1 問題は，最初のカードの下の内容を上が追随するために次のカードから始まり，次の separate カードを迎えるまでは，カードの上の文字列は Turing 機械 M の初期状態を表す文字列を模倣する．その時カードの下の文字列としてあり得るパターンは，Turing 機械 M の算譜 δ に記載されていたもののみである．これが separate カード $\dfrac{\%}{\%}$ を挟んで続く．最後のカード $\dfrac{aq_h}{q_h}$（を含むような separate カードで区切られたブロック）を迎えることが出来る場合は，「全ての文字を消去した結果，head は左端に到達した結果停止する」ことに対応するから，◯ を出力，もしそのような並べ方がない場合は Turing 機械が停止しないことがわかるので $\times$ を出力すれば良い． □

参考文献

[1] en.wikipedia.org による"Post Correspondence Problem"のページを参考にした．