代数と幾何レポート

司馬博文 J4-190549

2020 年 9 月 29 日

問題 1

$2 \in \mathbb{Z}$ を取ると，$2b = 1$ を満たす数 b は整数ではない．

問題 2

元 $a \neq 0 \in \mathbb{F}_p$ を任意に取る．この a により定まる写像

$$\begin{array}{rccc} f_a : & \mathbb{F}_p & \longrightarrow & \mathbb{F}_p \\ & \cup & & \cup \\ & b & \longmapsto & ab \end{array}$$

を考える．これが全単射であることを示すことにより，各 $a \neq 0 \in \mathbb{F}_p$ に対して逆像 $f_a^{-1}(1)$ の元はただ一つであることを導く．

今, $q, r \in \mathbb{F}_p$ が $f_a(q) = f_a(r)$ 即ち $aq = ar$ を満たしたとする．すると, $a(q-r) = 0 \in \mathbb{F}$ であるから，a, q, r を $0 < a, q, r < p$ を満たす対応する整数と定め直したときに，$a(q-r) \equiv 0 \mod p$ が成り立つ．このとき，$0 < a < p, -p < q-r < p$ より，$q - r = 0$ 即ち $q = r$ が従う．

よって，f_a は単射である．今 $\mathbb{F}_p$ は有限集合だから，f_a は全射でもある．

■

問題３

(1)

$x+x=x$ ならば，両辺に逆元 $(-x)$ を加えて，

$$\begin{aligned}(x+x)+(-x)&=x+(-x)\\x+(x+(-x))&=0\\x+0&=0\\x&=0\end{aligned}$$

を得る．

■

(2)

0 は加法の中立元だから $0=0+0$ より, $0x=(0+0)x$．分配法則より, $(0+0)x=0x+0x$．この２つを合わせて $0x=0x+0x$ を得るから，(1) の結果より $0x=0$．

■

(3)

分配律による結果 $0x=(1+(-1))x=x+(-1)x$ を考える．左辺は (2) より $0x=0$ だから，$x+(-1)x=0=x+(-x)$ である．両辺に x の逆元 $-x$ を加えることにより，$(-1)x=-x$ を得る．

■

問題４

問題の条件である

$$\begin{cases}x_i=e_i-e_{i+1}, & i=1,2,\cdots,n-1,\\x_n=c_1e_1+c_2e_2+\cdots+c_ne_n,\end{cases}\tag{1}$$

の関係から，$e_1, \cdots, e_{n-1}$ を消去すると，

$$\begin{aligned} x_n &= c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n && (2)\\ &= c_1(e_1 - e_2) + (c_1 + c_2)(e_2 - e_3) + \cdots && (3)\\ &\quad \cdots + (c_1 + \cdots + c_{n-1})(e_{n-1} - e_n) + (c_1 + \cdots + c_n)e_n && (4)\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{j} c_i\right)x_j + Ce_n, \qquad (C := c_1 + \cdots + c_n\text{とした}) && (5) \end{aligned}$$

を得る．

(a)⇒(b)

$C = 0$ と仮定すると，式 5 より，

$$-\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{j} c_i\right)x_j + x_n = 0$$

を得る．$x_1, \cdots, x_n \in K^n$ は K-線型空間 K^n の基底としたから，特に x_n の係数を比較して $1 = 0$ が必要だが，これは K が体であることに矛盾．従って，$C \neq 0$ である．

(b)⇒(a)

$x \in V$ を任意に取る．$a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in K$ として，

$$\begin{aligned} x &= a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n && (6)\\ &= b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n && (7) \end{aligned}$$

と表せたとする．関係 1 の下で，式 7 は，

$$\begin{aligned} x &= b_1(e_1 - e_2) + b_2(e_2 - e_3) + \cdots + b_{n-1}(e_{n-1} - e_n) + b_n(c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n)\\ &= (b_1 + b_nc_1)e_1 + (-b_1 + b_2 + b_nc_2)e_2 + \cdots + (-b_{n-2} + b_{n-1} + b_nc_{n-1})e_{n-1} + (b_nc_n)e_n \end{aligned}$$

と同値であるが，$e_1, \cdots, e_n$ は K^n の基底だから，式 6 と比較して，

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + b_nc_1,\\ a_2 &= -b_1 + b_2 + b_nc_2,\\ \vdots &= \quad \vdots\\ a_{n-1} &= -b_{n-2} + b_{n-1} + b_nc_{n-1},\\ a_n &= b_nc_n, \end{aligned}$$

が必要．これを逆に解いて，

$$\begin{cases} b_j = \sum_{i=1}^{j} a_i - \dfrac{A}{C} \sum_{i=1}^{j} c_i, \quad j = 1, 2, \cdots, n-1, \\ b_n = \dfrac{A}{C}, \end{cases}$$

を得る．また，$e_1, \cdots, e_n$ が K^n の基底であることより，$a_1, \cdots, a_n$ は一意的に定まっているから，各係数 $b_1, \cdots, b_n$ はただ一通りに表せた事になる．よって，$x_1, \cdots, x_n \in K^n$ は基底である．

■

問題 5

$v, w \in V = C^\infty(\mathbb{R})$ とする．即ち，$v, w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$．この時，関数 $a(v+w)$ と $av + aw$ を考える．任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，実数の積を $\cdot$ と表すと，

$$\begin{aligned} a(v+w)(x) &= a \cdot (v+w)(x) \\ &= a \cdot (v(x) + w(x)) \\ &= a \cdot v(x) + a \cdot w(x) \qquad && \mathbb{R} \text{ 上の和に対する積の分配則} \\ (av+aw)(x) &= av(x) + aw(x) \\ &= a \cdot v(x) + a \cdot w(x) \end{aligned}$$

より等しいから，関数 $a(v+w), av+aw$ は等しい．よって，

$$\forall a \in \mathbb{R},\ v, w \in V,\ a(v+w) = av + aw$$

■