目次

1 Categories

1.1 Introduction

1.2 Functions of sets

1.3 Definition of a category

定義 1.1 (Category)**.**

1. 対象 $A,B,C,\cdots$ というものがある．
2. 射 $f,g,h,\cdots$ というものがある．
3. 各射には $\mathrm{dom}(f)=A,\mathrm{cod}(f)=B$ という対象が紐づけられていて，その関係を $f:A\to B$ と書く．
4. $\mathrm{cod}(f)=\mathrm{dom}(g)$ を満たす射 f,g に対し，$g\circ f:\mathrm{dom}(f)\to\mathrm{cod}(g)$ という射が定義される．
5. 各対象 A には $1_A:A\to A$ という特別な射が定義される（単位射）．
6. 射は結合律を満たす．$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$
7. 単位射は合成について単位的である．$f:A\to B$ として，$f\circ 1_A=f=1_B\circ f$

1.4 Examples of categories

1. 集合の圏 **Sets** と，有限集合の圏 $\mathbf{Sets}_{\mathrm{fin}}$

例 1.2 *** (集合の圏から，対象の集合と射の集合に特定の制限を付け加えることで，自由に部分圏が作れる他の例．).**

1. 対象：有限集合，射：単射

2. 対象：集合，射：ファイバーが高々２元集合である写像
3. 対象：集合，射：ファイバーが高々有限集合である写像
4. 対象：集合，射：ファイバーは無限でも良い多価写像

2. Category of structured sets

定義 (具体圏)**.** 圏 C が，忘却関手 $U: C \to \mathbf{Set}$ を持つとき，これを具体圏と呼ぶ．

3. 順序集合と単調写像の圏 **Pos**
4. 二項関係の圏 **Rel**：写像は特別な二項関係と見れるから，**Sets** はこの部分圏である．

射 $f: A \to B$ は $A \times B$ の部分集合で，単位射 1_A は恒等写像 id_A のグラフと共通の「恒等関係」となる．合成は，２つの関係 $R \subset A \times B, S \subset B \times C$ から作れる「相対関係 $(a,c) \in S \circ R :\Leftrightarrow \exists (a,b) \in R, (b,c) \in S$」として作れば確かに閉じている．

5. 有限圏としての自然数：射は順序関係である．
6. 圏の圏 **Cat**

定義 1.3 (Functor)**.** 関手 $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ とは，次を満たす対象写像と射写像の組である．

1. $F(f: A \to B) = F(f): F(A) \to F(B)$
2. $F(1_A) = 1_F(A)$
3. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(g)$

7. 圏としての preorder：任意の２つの間に射が１つしか存在しない圏（細い圏）．

定義 (thin category)**.** 圏 C が次の条件を満たす時，細い圏であるという．

任意の２つの対象 $x, y \in C$ について，

$$x \underset{g}{\overset{f}{\longrightarrow}} g$$

となっている時，必ず $f = g$ である．

注. 細い圏に於いて，２つの対象間で双方向に射が存在する場合，これは互いに逆射になる．

命題. 細い圏は，proset と同型で，poset と同値である．

［証明］**.** 圏 C の対象の集合を集合 P とし，その間の関係 $x \leq y$ を

$$x \leq y :\Leftrightarrow \exists f: x \to y \in C$$

と定めると，この関係は反射性と推移性を満たし，前順序集合 (preordered set) となる．今，関手 $F: C \to P$ を対象集合は 1_P，射集合は $f: x \to y \mapsto x \leq y$ とすると，これはいずれも可逆で，確かに圏の同型である．

この時，集合 P について，次のように約束する．

$$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$$

すると集合 $P/=$ は順序集合 (partially ordered set) である．関手 $F': C \to P/=$ は厳密な意味では可逆ではない． □

8. 圏としての poset：poset categories

9. 位相空間からの例

命題. T_0 spaces X are posets under the specialization ordering:

$$x \leq y \Leftrightarrow \forall U \in O(X)\ (x \in U \Rightarrow y \in U)$$

10. 数理論理学からの例：演繹体系に付随する圏 category of proofs 対象を式とし，その間に証明がある $\varphi \vdash \psi$ 時，射 $\varphi \to \psi$ を定義する．

11. 計算機科学からの例：関数型プログラミング言語 L に付随する圏 $C(L)$ 対象は L のデータ型，射は関数とする．単位射は do nothing program で，合成は関数の連続適用 $g \circ f = f : g$ である．

12. 集合 X に付随する離散圏 $\mathbf{Dis}(X)$

13. 単一対象圏としての monoid

射が対象の間に持つ構造「２つの対象と順番付きで紐づけられている」と「単位射の存在」と「合成についての閉性（＝推移性）」とを，そっくりそのまま，順序関係に翻訳すれば前順序である．射自体の持つ構造「結合性」と「単位射の存在」を，代数構造に翻訳すればモノイドである．いずれも最低限の圏である．それぞれに付加構造として対称性を加えれば，半順序と群を得る．半順序とモノイドが，この本の主要な例になる．

8., 13. の観点から，poset の射とは関手だし，monoid の射も関手と見做せる．

1.5 Isomorphisms

定義 1.4 (同型)**.** 圏 C に於いて，次を満たす射 $f : A \to B$ を同型という．

$$\exists g : B \to A \in C\ g \circ f = 1_A \wedge f \circ g = 1_B$$

注 (note that, for example in Pos, the category theoretic definition gives the right notion, while there are "bijective homomorphisms" between non-isomorphic posets.)**.** 射を何らかの写像だとすると，この同型であるための条件は全単射であることと同値．従ってこの定義は，具体圏に於ける台写像の「全単射」性を一般の圏に写し取ったものに思える．だから，全単射でないのに同型になることはないはずだ．だが，全単射な射は可逆だとは限らない．

定義 1.5 (群)**.** 群とは，可逆なモノイドのことである．従って，全ての射が同型であるような単一対象圏のことである．

定理 (Cayley)**.** 群 $G = (G, \cdot, e, ^{-1})$ は，$\mathrm{Aut}(G)$ の或る部分群と同型になる．

［証明］. Cayley representation $\overline{G} \subset \mathrm{Aut}(G)$ を構成する．各 $g \in G$ に対して，$\overline{g} \in \overline{G} \subset \mathrm{Aut}(G)$ を次のような射として定める．

$$\begin{array}{ccc} \overline{g} = g^* : G & \longrightarrow & G \\ \cup & & \cup \\ h & \longmapsto & g \cdot h \end{array}$$

この時，$\overline{G}$ は群になっていることを，写像 $F : G \to \overline{G}$ が群の射であることを示すことによって確認する．$F(f \cdot g) = F(f) \circ F(g)$ は G の演算 $\cdot$ の結合性より，また $F(e) = 1_G$ も成り立つ．なお，各射の可逆性については，$F(f \cdot f^{-1}) = F(f) \circ F(f^{-1}) = 1_G = F(e)$ より成り立つ．

群の射 $F : G \to \overline{G}$ の逆射 H を構成する．

$$\begin{array}{ccc} H:\overline{G} & \longrightarrow & G \\ \Psi & & \Psi \\ \overline{g} & \longmapsto & g=\overline{g}(e) \end{array}$$

これについて，確かに $F\circ H=1_{\overline{G}}, H\circ F=1_G$ が成り立つ．従って，$G\simeq\overline{G}$ □

注 1.6 (Two different levels of isomorphisms)**.** 構成した群 $\overline{G}\subset\mathrm{Aut}(G)$ の元である，g を集合 G に左から作用させる写像 $\overline{g}$ は，群 G の置換であり，集合の同型である．一方，構成した関手 F,H は群の同型である．

定理 1.7. 任意の圏 C は，或る具体圏と同型である．

［証明］**.** 圏 C から，同型な圏 $\overline{C}$ を構成する．関手 $\overline{}:C\to\overline{C}$ の対象写像を次のように定める．

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \overline{C} \\ \Psi & & \Psi \\ c & \longmapsto & \overline{c}=\{f\in\mathrm{arr}(\mathrm{C})\mid\mathrm{cod}(f)=c\} \end{array}$$

射関手を次のように定める．

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \overline{C} \\ \Psi & & \Psi \\ g:c\to d & \longmapsto & \overline{g}=g^*:\mathrm{hom}_C(-,c)\to\mathrm{hom}_C(-,d) \end{array}$$

ただし，この写像 g^* は，任意の対象 $x\in C$ に対して，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hom}_C(x,c) & \longrightarrow & \mathrm{hom}_C(x,d) \\ \Psi & & \Psi \\ f:x\to c & \longmapsto & g\circ f:x\to d \end{array}$$

と対応づける写像（関手の射／自然変換）である．この関手は可逆であり，逆関手の $\overline{x}\in\overline{C}$ 成分は射写像は次の通りである．

$$\begin{array}{ccc} \overline{C} & \longrightarrow & C \\ \Psi & & \Psi \\ \overline{g}:\mathrm{hom}_C(-,c)\to\mathrm{hom}_C(-,d) & \longmapsto & \overline{g}(1_c) \end{array}$$

□

注. これが「表現」という述語の出処であろう．この時点ではまだ素朴の意味で「C の表現 $\overline{C}$」という感覚である．また，これが「ホム関手」「ホム集合」という概念の出処でもある．集合での表現を持つから，我々の「具体」性という得意分野に引きずりこめるのだ．また，集合に頼り過ぎないで，純粋に圏論的なまま理論を豊かにしていくのも大事である．（群論だってそうなのだろう）．例えば，一般の圏を白紙から考えるとき，対象の間の射全体の集まりは「集合」であるとは限らないのだ．

1.6 Constructions on categories

1.6.1 Product

圏 $C \times D$ は (c,d) という形の対象をもち，射も，合成も，単位射も，直接の「要素毎」の考え方で，新しい圏を想定出来る．

1.6.2 Opposite

$f : C \to D \in C$ に対して，$f^* : D^* \to C^* \in C^{op}$ で，合成の順序も逆にしたもの．

duality とは，ある圏が，別の圏の反対（の部分圏）になるという対応が成り立つこと（を主張する命題のこと）である．

1.6.3 arrow category

圏 C に対して，その射を対象とし，その間の射を $g : (f : A \to B) \to (f' : A' \to B')$ を，次の $f' \circ g_1 = g_2 \circ f$ を主張する可換図式，つまり，圏 C の射の組 $g := (g_1, g_2)$ とする圏である．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "g_2"] & B' \end{tikzcd}$$

合成は，可換図式を繋げて外回りを取ること，つまり成分毎 $(h_1, h_2) \circ (g_1, g_2) = (h_1 \circ g_1, h_2 \circ g_2)$ で，従って単位射は $1_f = (1_A, 1_B)$

対象は射 $f : A \to B$ だが，要は (A, B)，これはどう考えても $C \times C$ あるいは $[2, C]$ と同型になる．即ち，次の関手が存在する．

$$C \xleftarrow{\text{dom}} \vec{C} \xrightarrow{\text{cod}} C$$

1.6.4 slice category

圏 C と対象 $c \in C$ について，$\{f \in \text{arr}(C) \mid \text{cod}(f) = c\}$ を対象全体の集合とし，２つの対象 $f : x \to c, f' : x' \to c$ の間の射は次の C の図式を可換にする射 $a : x' \to x \in C$ である（$f = f' \circ a$）．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "f"'] & & x' \arrow[dl, "f'"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

これは arrow category の部分圏であろう．

対象について，その codomain$c$ を忘れ，射 $a : (x, c) \to (x', c)$ についても c を忘れれば，忘却関手 $C/c \to C$ を定める．これは一種の具体圏だったのか．

C の射 $g : c \to d$ に対して，関手 $g^* : C/c \to C/d$ が定まる．

$$
\begin{array}{ccc}
C/c & \longrightarrow & C/d \\
\cup & & \cup \\
f : x \to c & \longmapsto & g \circ g : x \to d
\end{array}
$$

$$
a : (f : x \to c) \to (f' : x' \to c) \longrightarrow a : (g \circ f : x \to d) \to (g \circ f' : x' \to d)
$$