2020 年度ベクトル解析（足助担当）期末レポート解答用紙　　　　　　　　　　2020/7/6（月）
提出先：ITC-LMS のページの「課題」
提出期限：2020/7/9（木）**12:00**
解答は１問につき１枚（両面使用可）とすること（この用紙を４枚印刷するとよい．あるいは２枚目以降は白紙を用いても良いが，**全て縦向きとすること**．また，いずれの解答用紙の表面の上の方に**学生証番号と氏名を記入すること**）．

学生証番号	氏名
J4-190549	司馬博文

問１　**1)** 次のように定める正則な C^∞ 級曲線 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ について，その和を $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ と置くと（向き付き曲線の和は問４の回答中での補題の証明中 $(\star^1)$ にて定義した)，γ は C の向きと整合的な区分的 C^∞ 級の正則なパラメータ付けである．

$$\begin{array}{ccc} \gamma_1 : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \gamma_2 : \left[0,\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ \theta & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \gamma_3 : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \end{array}$$

従って，これを用いて，求める線積分の値は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\int_C X(p)\cdot dp &= \int_\gamma X(p)\cdot dp = \int_{\gamma_1} X(p)\cdot dp + \int_{\gamma_2} X(p)\cdot dp + \int_{\gamma_3} X(p)\cdot dp \\
&= \int_0^1 \left\langle X(\gamma_1(t)) \,\middle|\, \frac{d\gamma_1}{dt}(t) \right\rangle dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle X(\gamma_2(\theta)) \,\middle|\, \frac{d\gamma_2}{d\theta}(\theta) \right\rangle d\theta + \int_0^1 \left\langle X(\gamma_3(t)) \,\middle|\, \frac{d\gamma_3}{dt}(t) \right\rangle dt \\
&= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \begin{pmatrix} \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\rangle d\theta + \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -(1-t)^3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^1 \left(t^3 + (1-t)^3\right) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{(1-t)^4}{4}\right]_0^1 + \left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

■

2) 曲線 C_d とは，原点中心の単位球面と，${}^t(1,1,1)$ を法線ベクトルとする原点からの距離 d の平面との共通部分である．従って，$C_d = \emptyset$ ($|d| > 1$ の時) であり，この時線積分は $\int_{C_d} f(p)|dp| = 0$ ($|d| > 1$) であるから，以降 $|d| \le 1$ の場合を考える．いま，C_d の y 軸を中心とする $\frac{\pi}{4}$ 回転変換による像を C'_d とすると，これは単位球面と平面 $x = d$ との共通部分であるから，次の正則な C^∞ 級関数 γ_d によりパラメータ付けされる．

$$\begin{array}{ccc} \gamma_d : [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \cup & & \cup \\ \theta & \longmapsto & \begin{pmatrix} d \\ \sqrt{1-d^2}\cos\theta \\ \sqrt{1-d^2}\sin\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

従って，標準基底 ${}^t(x,y,z)$ に同様に $\frac{\pi}{4}$ 回転変換を施して得る基底 ${}^t\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z, y, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right) =: {}^t(x', y', z')$ で表された関数 $f(x',y',z') = x'^2$ を座標 ${}^t(x,y,z)$ について表示した関数を $g(x,y,z) := \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2 = \frac{1}{2}(z^2 - 2xz + x^2)$ とすると，$|d| \le 1$ の下で，求める線積分は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\int_{C_d} f(p)|dp| &= \int_{C'_d} g(p)|dp| = \int_{\gamma_d} g(p)|dp| \\
&= \int_0^{2\pi} g(\gamma_d(\theta)) \left\| \frac{d\gamma_d}{d\theta} \right\| d\theta \\
&= \frac{1-d^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+d^2}{2} - 2d\sqrt{1-d^2}\sin\theta - \frac{1-d^2}{2}\cos 2\theta \right) d\theta \\
&= \frac{1-d^2}{2} \left[\frac{1+d^2}{2}\theta + 2d\sqrt{1-d^2}\cos\theta - \frac{1-d^2}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}(1-d^4) \quad (|d| \le 1)
\end{aligned}$$

■

問２ 境界を含む有界な領域 D とその境界である曲面 ∂D について，**Gauß**の発散定理より，

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} X\cdot dA &= \int_D (\operatorname{div} X)\, d\mathrm{vol}\\ &= \int_D 3x dxdydz\end{aligned}$$

であるから，次のように D_1, D_2, D_3 を定めると，$D = D_1\cup D_2\cup D_3$ であり，$D_1\cap D_3=\emptyset$，また $D_1\cap D_2, D_2\cap D_3$ はいずれも単位円板で体積 0 であるから，$\int_D 3xdxdydz = \int_{D_1} 3xdxdydz + \int_{D_2} 3xdxdydz + \int_{D_3} 3xdxdydz$ が成立する．

$$\begin{aligned}D_1 &= \left\{ \varphi_1(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\end{pmatrix} \in D \;\middle|\; 0\le r\le 1, 0\le\theta\le\pi, \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3}{2}\pi \right\}\\ D_2 &= \left\{ \varphi_2(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ r\cos\theta \\ r\sin\theta\end{pmatrix} \in D \;\middle|\; 0\le r\le 1, 0\le x\le 1, 0\le\theta\le 2\pi \right\}\\ D_3 &= \left\{ \varphi_3(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 1+r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\end{pmatrix} \in D \;\middle|\; 0\le r\le 1, 0\le\theta\le\pi, -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le+\frac{\pi}{2} \right\}\end{aligned}$$

それぞれの境界を含んだ領域 D_1, D_2, D_3 のパラメータ付け $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ の **Yacobian** が，

$$\begin{aligned}\det D\varphi_1 = \det D\varphi_3 &= \det\begin{pmatrix} \sin\theta & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix} = r^2\sin\theta\\ \det D\varphi_2 &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} = r\end{aligned}$$

であることに注意すれば，変数変換公式より，それぞれの重積分は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}\int_{D_1} xdxdydz &= \int_0^1\int_0^\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} r\sin\theta\cos\varphi\cdot r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr = -\frac{\pi}{4}\\ \int_{D_2} xdxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 x\cdot rdrdxd\theta = \frac{\pi}{2}\\ \int_{D_3} xdxdydz &= \int_0^1\int_0^\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+r\sin\theta\cos\varphi)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr = \frac{11}{12}\pi\end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} X\cdot dA &= \int_D (\operatorname{div} X)\, d\mathrm{vol}\\ &= \int_D 3xdxdydz\\ &= 3\left(\int_{D_1} xdxdydz + \int_{D_2} xdxdydz + \int_{D_3} xdxdydz\right)\\ &= 3\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{11}{12}\pi\right) = \frac{7}{2}\pi\end{aligned}$$

を得る．

■

問３　**1)** $f^1(x,y)=\frac{-2y}{x^2+y^2}+\frac{-(y-2)}{x^2+(y-2)^2}$，$f^2(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+(y-2)^2}$ と置くとこれはいずれも C^∞ 級の関数で，$X=f^1\frac{\partial}{\partial x}+f^2\frac{\partial}{\partial y}$ と表せる．これが定める D 上の C^∞ 級の **1-**形式 $\omega:=f^1dx+f^2dy$ を，次の C^∞ 級関数 $\gamma={}^t(\gamma^1,\gamma^2)$ で引き戻して考える．

$$\begin{array}{ccc}\gamma:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & D\\ \cup & & \cup\\ \begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix}p+t\\q\end{pmatrix}\end{array}$$

この γ による D 上の **1-**形式 dx,dy の引き戻しは

$$\begin{aligned}\gamma^*dx&=d\gamma^1\\&=\frac{\partial\gamma^1}{\partial p}dp+\frac{\partial\gamma^1}{\partial q}dq+\frac{\partial\gamma^1}{\partial t}dt\\&=dp+dt\\ \gamma^*dy&=\frac{\partial\gamma^2}{\partial p}dp+\frac{\partial\gamma^2}{\partial q}dq+\frac{\partial\gamma^2}{\partial t}dt\\&=dq\end{aligned}$$

であることより，γ による ω の引き戻しは

$$\begin{aligned}\gamma^*\omega&=(\gamma^*f^1)\,(\gamma^*dx)+(\gamma^*f^2)\,(\gamma^*dy)\\&=(f^1\circ\gamma)dp+(f^2\circ\gamma)dq+(f^1\circ\gamma)dt\end{aligned}$$

となる．定数分の差は重要ではないから，dt の付く項のみを採用して，また p を x，q を y を書き直して D 上の C^∞ 級関数 $g(x,y)$ を次のように定義することとする．

$$g(x,y):=-\int_0^\infty f^1\circ\gamma(x,y,t)dt=-\int_0^\infty\left(\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2}+\frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2}\right)dt$$

なお，$t\geq 0$ に於いて，${}^t(x,y)\in D$ より $x>0$ に注意して，三角不等式より，

$$\begin{aligned}(0\leq)\left|\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2}+\frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2}\right|&=\left|\frac{-2y}{(x^2+y^2+t^2+2xt)}+\frac{-(y-2)}{(x^2+y^2+t^2+2xt-4y+4)}\right|\\&\leq\left|\frac{-2y}{x^2+y^2+t^2}\right|+\left|\frac{-(y-2)}{x^2+y^2+t^2}\right|\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\left|\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2}+\frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2}\right|dt&\leq\int_0^\infty\left(\left|\frac{-2y}{x^2+y^2+t^2}\right|+\left|\frac{-(y-2)}{x^2+y^2+t^2}\right|\right)dt\\&=|-2y|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\cos^2\theta}{x^2+y^2}\right|\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cos^2\theta}d\theta+|-(y-2)|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\cos^2\theta}{x^2+y^2}\right|\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cos^2\theta}d\theta\\&=(2|y|+|y-2|)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|d\theta=\frac{\pi}{2}\frac{2|y|+|y-2|}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

と評価できるが，最右辺は有限な値だから，最左辺は有界である．従って，積分 $g(x,y)=-\int_0^\infty f^1\circ\gamma(x,y,t)dt$ は絶対収束し，関数 g は確かに D 上で定義される．この関数 g がベクトル場 X の領域 D への制限 $X|_U$ のスカラーポテンシャルとなっていること，即ち $\operatorname{grad}g=X|_U$ を証明する．$\operatorname{grad}g=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}$ であるから，係数が等しいこと，即ち $f^1=\frac{\partial g}{\partial x},f^2=\frac{\partial g}{\partial y}$ を示せば良い．

関数 g の非積分関数 $h(x,y,t):=\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2}+\frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2}$ は C^∞ 級で，特に連続であるから，その積分 $G(x,y,s):=-\int_0^s\left(\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2}+\frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2}\right)dt$ も連続で，従って $s\to\infty$ の時に $g(x,y)$ には一様収束する．このことより，$\frac{\partial g}{\partial x}$ は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\int_\infty^0\left(\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2}+\frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2}\right)dt\\&=\int_\infty^0\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2}+\frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2}\right)dt\\&=\left[\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2}+\frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2}\right]_\infty^0=\frac{-2y}{x^2+y^2}+\frac{-(y-2)}{x^2+(y-2)^2}=f^1(x,y)\end{aligned}$$

続いて，$\frac{\partial g}{\partial y}$ は次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\int_{\infty}^{0}\left(\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2}+\frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2}\right)dt \\
&= \int_{\infty}^{0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2}+\frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2}\right)dt \\
&= \int_{\infty}^{0}\left(\frac{-2((x+t)^2+y^2)+2y(2y)}{((x+t)^2+y^2)^2}+\frac{-((x+t)^2+(y-2)^2)+2(y-2)^2}{((x+t)^2+(y-2)^2}\right)dt \\
&= \int_{\infty}^{0}\left(-2\left(\frac{2(x+t)^2}{((x+t)^2+y^2)^2}-\frac{1}{(x+t)^2+y^2}\right)-\left(\frac{2(x+t)^2}{((x+t)^2+(y-2)^2)^2}-\frac{1}{(x+t)^2+(y-2)^2}\right)\right)dt \\
&= -4\int_{\infty}^{0}\frac{(x+t)^2}{((x+t)^2+y^2)^2}dt+2\int_{\infty}^{0}\frac{dt}{(x+t)^2+y^2}-\int_{\infty}^{0}\frac{2(x+t)^2}{((x+t)^2+(y-2)^2)^2}dt+\int_{\infty}^{0}\frac{dt}{(x+t)^2+(y-2)^2} \quad \cdots(*)
\end{aligned}
$$

部分積分の方法により，

$$
\begin{aligned}
2\int_{\infty}^{0}\frac{(x+t)^2}{((x+t)^2+y^2)^2}dt &= \int_{\infty}^{0}-(x+t)\left(\frac{1}{(x+t)^2+y^2}\right)'dt \\
&= -\left[\frac{x+t}{(x+t)^2+y^2}\right]_{\infty}^{0}+\int_{\infty}^{0}\frac{dt}{(x+t)^2+y^2} \\
&= -\frac{x}{x^2+y^2}+\int_{\infty}^{0}\frac{dt}{(x+t)^2+y^2}
\end{aligned}
$$

であるから，$(*)$ は，

$$
\begin{aligned}
&\left(2\frac{x}{x^2+y^2}-2\int_{\infty}^{0}\frac{dt}{(x+t)^2+y^2}\right)+2\int_{\infty}^{0}\frac{dt}{(x+t)^2+y^2}+\left(\frac{x}{x^2+(y-2)^2}-\int_{\infty}^{0}\frac{dt}{(x+t)^2+(y-2)^2}\right) \\
&\quad +\int_{\infty}^{0}\frac{dt}{(x+t)^2+(y-2)^2} \\
&= \frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+(y-2)^2} = f^2(x,y)
\end{aligned}
$$

と計算できる．以上より，D 上の関数 $g(x,y) = -\int_0^{\infty}\left(\frac{-2y}{(x+t)^2+y^2}+\frac{-(y-2)}{(x+t)^2+(y-2)^2}\right)dt$ は，ベクトル場 X の領域 D への制限のスカラーポテンシャルである．

■

2) $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0),(0,2)\}$ 上で定義された関数 g が存在して $X = \operatorname{grad} g$ を満たすと仮定し，矛盾を導く．$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ と自己交叉のない閉曲線 $\gamma : [0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ を定めると，$\gamma([0,2\pi])\subset\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0),(0,2)\}$ であるから，勾配ベクトル場に関する積分定理より，次のようにして曲線 γ に沿ったベクトル場 X の線積分を求めることができる．

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma}X\cdot dx &= \int_{\gamma}\operatorname{grad} g\cdot dx \\
&= \int_{\partial\gamma} g
\end{aligned}
$$

ここで γ は単純閉曲線であるから，$\partial\gamma = \emptyset$．従って，$\int_{\gamma}X\cdot dx = \int_{\partial\gamma} g = 0$ が導かれる．

一方，この γ に沿ったベクトル場 X の線積分の値は，次の g を用いない場合の計算結果と矛盾する．

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma}X\cdot dx &= \int_0^{2\pi}\left\langle X(\gamma(\theta))\ \middle|\ \frac{d\gamma}{d\theta}(\theta)\right\rangle d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left\langle\begin{pmatrix}-2\sin\theta+\frac{-(\sin\theta-2)}{5-4\sin\theta}\\ 2\cos\theta+\frac{\cos\theta}{5-4\sin\theta}\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\right\rangle d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\frac{1}{5-4\sin\theta}\right) \\
&\geq \int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\frac{1}{5-4}\right) = 2\pi
\end{aligned}
$$

従って，$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0),(0,2)\}$ 上で定義された X のスカラーポテンシャルは存在しない．■

問4 $f^1(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}+\frac{-(y-2)}{x^2+(y-2)^2}+\frac{-(y+2)}{x^2+(y+2)^2}$，$f^2(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+(y-2)^2}+\frac{x}{x^2+(y+2)^2}$ と置くとこれはいずれも C^∞ 級で，$X=f^1\frac{\partial}{\partial x}+f^2\frac{\partial}{\partial y}$ と表せる．曲線 $\gamma([0,1])$ 上の相異なる２点 $a=\gamma(s), b=\gamma(t)$ $(s,t\in[0,1], s<t)$ を結ぶ区分的に C^1 級かつ正則で，自己交叉を持たず，$\gamma([0,1])\setminus\{a,b\}$ と共通部分を持たず，$s=0$ または $t=1$ である場合を除いて C とも共通部分を持たない曲線 $\gamma':[s,t]\to\mathbb{R}^2\setminus\{p,q,r\}$ を１つ取る．但し，向きは $\gamma'(s)=a, \gamma'(t)=b$ とする．これについて次のように γ を部分的に変更した曲線

$$\gamma''(u)=\begin{cases}\gamma(u) & u\in[0,1]\setminus[s,t]\\ \gamma'(u) & u\in[s,t]\end{cases}$$

は再び区分的に C^1 級かつ正則な曲線で，**i),ii),iii)** を満たし，$\gamma''([0,1])$ には γ'' による自然な向きが定まる．この場合も同様に，C と γ'' を繋げて得られる閉曲線を $C_{\gamma''}$ とする．これについて，次の補題が成り立つ．

補題． 線積分 $\int_{C_\gamma}X(p)\cdot dp$ の値は，積分路 C_γ が囲む特異点 p,q,r の組合わせで定まり，積分路 C_γ を特異点 p,q,r を跨がない範囲で変更しても値は変わらない．但し，証明を簡明化するため，C_γ から $C_{\gamma''}$ への変化分の領域（証明中の言葉では領域 ΔD）は星形とする．即ち，上記の通り定めた閉曲線 $C_{\gamma''}$ であって，p,q,r のいずれも通らずに C_γ から $C_{\gamma''}$ へと連続的に変形できる場合（証明中に定義する記号では，$p,q,r\notin\Delta D$ の場合）について，次が成り立つ．

$$\int_{C_\gamma}X(p)\cdot dp=\int_{C''_\gamma}X(p)\cdot dp$$

証明． 条件 i),ii),iii) より，$C_\gamma, C_{\gamma''}$ はいずれも単純閉曲線であるから，Jordan の閉曲線定理より，それぞれについて $\mathbb{R}^2\setminus C_\gamma, \mathbb{R}^2\setminus C_{\gamma''}$ の２つの連結部分のうち有界な方が取れる．これをそれぞれ領域 $D_\gamma, D_{\gamma''}$ とする．この時，γ' は端点を除いて γ と共通部分を持たないので，$D_\gamma\subset D_{\gamma''}$ か $D_{\gamma''}\subset D_\gamma$ かのいずれかが成り立つ．ぞれぞれの場合について，$\Delta D:=D_{\gamma''}\setminus D_\gamma$，$\Delta D:=D_\gamma\setminus D_{\gamma''}$ と定め，ΔD が p,q,r のいずれをも含まない場合を考える．ただし，曲線 $\zeta:[c,d]\to\mathbb{R}^2$ に対して曲線 $-\zeta:[c,d]\to\mathbb{R}^2$ を $-\zeta(u):=\zeta(c+d-u)$ $(u\in[c,d])$ とすることにして，向き付きの閉曲線 $\partial(\Delta D)\subset\mathbb{R}^2$ を，それぞれの場合についてパラメータ $\partial(\Delta D)=\gamma'+(-(\gamma|_{[s,t]}))$ または $\partial(\Delta D)=\gamma|_{[s,t]}+(-\gamma')$ が定める閉曲線と定める．（但し，端点のみを共有する曲線 $\zeta:[c,d]\to\mathbb{R}^2, \zeta':[c',d']\to\mathbb{R}^2$ かつ $\zeta(d)=\zeta'(c')$ に対して曲線 $\zeta+\zeta'$ とは，$(\zeta+\zeta')(u)=\begin{cases}\zeta(u) & u\in[c,d]\\ \zeta'(u) & u\in[d,d+(d'-c')]\end{cases}$ により定まる曲線 $\zeta+\zeta':[c,d+d'-c']\to\mathbb{R}^2$ とした $\cdots(\star^1)$）．いま，X の定める 1-形式 f^1dx+f^2dy は，

$$\begin{aligned}d(f^1dx+f^2dy)&=df^1\wedge dx+df^2\wedge dy\\&=\left(\frac{\partial f^2}{\partial x}-\frac{\partial f^1}{\partial y}\right)dx\wedge dy\\&=\left(\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2+(y-2)^2-2x^2}{(x^2+(y-2)^2)^2}+\frac{(x^2+(y+2)^2-2x^2)}{(x^2+(y+2)^2)^2}\right.\\&\quad\left.-\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{-(x^2+(y-2)^2)+2(y-2)^2}{(x^2+(y-2)^2)^2}-\frac{-(x^2+(y+2)^2)+2(y+2)^2}{(x^2+(y+2)^2)^2}\right)dx\wedge dy\\&=0\end{aligned}$$

より閉形式である．従って，仮定より $p,q,r\notin\Delta D\cup\partial(\Delta D)$ であり（$p,q,r\notin\gamma''([s,t]), p,q,r\notin\gamma([0,1])$ であるので，$p,q,r\notin\Delta D$ ならばこれを満たす），また領域 ΔD は星形としたから，$\Delta D\cup\partial(\Delta D)\subset U$ を満たす或る p,q,r を含まない領域 U が存在して星形になり，Poincaré の補題より，ベクトル場 X の U への制限 $X|_U$ は，U 上で定義されたスカラーポテンシャル g が存在して $\mathrm{grad}\,X|_U=g$ を満たす．従って，$D_\gamma\subset D_{\gamma''}$ の時（$D_{\gamma''}\subset D_\gamma$ の場合も同様），勾配ベクトル場に関する積分定理と，$\partial(\Delta D)$ が区分的に正則かつ C^1 級な単純閉曲線 $\gamma'+(-\gamma|_{[s,t]})$ であることより，

$$\begin{aligned}\int_{\partial(\Delta D)}X(p)\cdot dp&=\int_{\gamma'}X(p)\cdot dp+\int_{-\gamma|_{[s,t]}}X(p)\cdot dp\\&=\int_{\gamma'}X(p)\cdot dp-\int_{\gamma|_{[s,t]}}X(p)\cdot dp=\int_{\partial(\partial(\Delta D))}g=0\end{aligned}$$

であるから，

$$\int_{\gamma'}X(p)\cdot dp=\int_{\gamma|_{[s,t]}}X(p)\cdot dp$$

従って，

$$\int_{C_\gamma}X(p)\cdot dp=\int_{C_{\gamma''}}X(p)\cdot dp$$

が成り立つ．以上より，積分路を C_γ から $C_{\gamma''}$ へと，特異点 p,q,r を跨がない範囲かつ ΔD が星形になる範囲で変更しても，線積分の値は一定である．また積分路の C_γ から $C_{\gamma''}$ への変更の仮定を十分細かく分解することにより，一般の場合についても主張は成り立つ．（補題の証明終わり） □

補題より，積分路 C_γ が内部 D_γ に含む特異点 p,q,r の数と種類に依って積分の値が変化することが分かる．これを調べるために，まず「x 軸に沿った積分路 $\gamma_{y=l}^{x=v_1\to v_2}$」と「$y$ 軸に沿った積分路 $\gamma_{y=h_1\to h_2}^{x=k}$」の２つの場合について一般的な場合で線積分の値を求め，この結果を用いて具体的に４種類の曲線 $C_{\gamma_0}, R_p, R_q, R_r$ に沿った線積分を計算し，この結果から線積分 $\int_{C_\gamma} X(p)\cdot dp$ の値は領域 D_γ 内の特異点の個数のみに依ることを導き，実際にこれらの積分路を組み合わせることで，特異点を **0,1,2,3** 個含む積分路を全ての場合について構成して，線積分の値を求める．

まず，次の２つの曲線（線分）$\gamma_{y=l}^{x=v_1\to v_2} : [v_1,v_2] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{p,q,r\}, \gamma_{y=h_1\to h_2}^{x=k} : [h_1,h_2] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{p,q,r\}$ を，それぞれ $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ l \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix}$ によって定義する $\cdots(\star^2)$．$\gamma_{y=l}^{x=v_1\to v_2}$ に沿った線積分の値は，各項について変数変換 $t = l\tan\theta, t=(l-2)\tan\theta, t=(l+2)\tan\theta$ による置換積分により，次のように計算できる（$l \neq 0, \pm 2$ の時）．

$$\int_{\gamma_{y=l}^{x=v_1\to v_2}} X(p)\cdot dp = \int_{v_1}^{v_2} \left(\frac{-l}{t^2+l^2} + \frac{-(l-2)}{t^2+(l-2)^2} + \frac{-(l+2)}{t^2+(l+2)^2} \right) dt \tag{1}$$

$$= -l \int_{\arctan\left(\frac{v_1}{l}\right)}^{\arctan\left(\frac{v_2}{l}\right)} \frac{d\theta}{l} - (l-2) \int_{\arctan\left(\frac{v_1}{l-2}\right)}^{\arctan\left(\frac{v_2}{l-2}\right)} \frac{d\theta}{l-2} - (l+2) \int_{\arctan\left(\frac{v_1}{l+2}\right)}^{\arctan\left(\frac{v_2}{l+2}\right)} \frac{d\theta}{l+2} \tag{2}$$

$$= -\arctan\left(\frac{v_2}{l}\right) + \arctan\left(\frac{v_1}{l}\right) - \arctan\left(\frac{v_2}{l-2}\right) + \arctan\left(\frac{v_1}{l-2}\right) \tag{3}$$

$$- \arctan\left(\frac{v_2}{l+2}\right) + \arctan\left(\frac{v_1}{l+2}\right) \ (l \neq 0, \pm 2) \tag{4}$$

なお，$l=0$ の時は，$\int_{\gamma_{y=l}^{x=v_1\to v_2}} X(p)\cdot dp = \int_{v_1}^{v_2} \left(0 + \frac{2}{t^2+4} + \frac{-2}{t^2+4}\right) dt = 0 \ (l=0) \cdots (*)$ である．また，$\gamma_{y=h_1\to h_2}^{x=k}$ に沿った線積分の値も，同様の計算により次の結果を得る．

$$\int_{\gamma_{y=h_1\to h_2}^{x=k}} X(p)\cdot dp = \arctan\left(\frac{h_2}{k}\right) - \arctan\left(\frac{h_1}{k}\right) + \arctan\left(\frac{h_2-2}{k}\right) - \arctan\left(\frac{h_1-2}{k}\right) \tag{5}$$

$$+ \arctan\left(\frac{h_2+2}{k}\right) - \arctan\left(\frac{h_1+2}{k}\right) \ (k \neq 0, \pm 2) \tag{6}$$

$\arctan$ は奇関数であるから，どちらの積分の値も，それぞれ積分路に対する次の２種の変換「y 軸対称変換 $v_1 \mapsto -v_1, v_2 \mapsto -v_2$ または $h_1 \mapsto -h_1, h_2 \mapsto -h_2$」と「$x$ 軸対称変換 $l \mapsto -l$ または $h \mapsto -h$」に対して符号が逆転することに注目して，次の４種の積分路について積分を計算する．$(\star^1)$ で定義した向き付き曲線の和（但し $\zeta + (-\zeta) = \emptyset$ する）の記法を用いる．まず特異点を１つも囲まない長方形閉曲線 C_{γ_0} を C と $\gamma_0 := \gamma_{y=0\to 3}^{x=2} + \gamma_{y=3}^{x=2\to 1} + \gamma_{y=3\to 0}^{x=1}$ を繋げたものとし，各点 q,p,r を中心とした一辺 2 の正方形閉曲線 R_q, R_p, R_r をそれぞれ曲線 $\gamma_q := \gamma_{y=1}^{x=-1\to 1} + \gamma_{y=1\to 3}^{x=1} + \gamma_{y=3}^{x=1\to -1} + \gamma_{y=3\to 1}^{x=-1}$，$\gamma_p := \gamma_{y=-1}^{x=-1\to 1} + \gamma_{y=-1\to 1}^{x=1} + \gamma_{y=1}^{x=1\to -1} + \gamma_{y=1\to -1}^{x=-1}$，$\gamma_r := \gamma_{y=-3}^{x=-1\to 1} + \gamma_{y=-3\to -1}^{x=1} + \gamma_{y=-1}^{x=1\to -1} + \gamma_{y=-1\to -3}^{x=-1}$ とそれが定める自然な向きを持った閉路とする．それぞれに沿った線積分の値を，式 (3), (4) と (5), (6) と $(*)$ に当てはめて，前述した奇関数性を利用して計算すると，まず R_0, R_q について次のようになる．

$$\int_{R_0} X(p)\cdot dp = \int_C X(p)\cdot dp + \int_{\gamma_{y=0\to 3}^{x=2}} X(p)\cdot dp + \int_{\gamma_{y=3}^{x=2\to 1}} X(p)\cdot dp + \int_{\gamma_{y=3\to 0}^{x=1}} X(p)\cdot dp$$
$$= 0 + \left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{3}{2}\right) + \arctan\left(\frac{5}{2}\right)\right) + \left(-\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{2}{3}\right) - \arctan(1)\right.$$
$$\left. + \arctan(2) - \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{2}{5}\right)\right) - (\arctan(1) + \arctan(3) + \arctan(5)) = 0$$

$$\int_{R_q} X(p)\cdot dp = \int_{\gamma_{y=1}^{x=-1\to 1}} X(p)\cdot dp + \int_{\gamma_{y=1\to 3}^{x=1}} X(p)\cdot dp + \int_{\gamma_{y=3}^{x=1\to -1}} X(p)\cdot dp + \int_{\gamma_{y=3\to 1}^{x=-1}} X(p)\cdot dp$$
$$= 2\left(\arctan(2) - \arctan(3) + \arctan(4)\right) + 2\left(\arctan(1) - \arctan(2) + \arctan(3) - \arctan(4)\right.$$
$$\left. + \arctan(5)\right) + 2\left(\arctan(1) + \arctan(1/3) + \arctan(1/5)\right) - 2\arctan(1/3) = 2\pi$$

前述した奇関数性に注意すれば，同様の計算により $\int_{R_p} X(p)\cdot dp = \int_{R_r} X(p)\cdot dp = 2\pi$ も得る．積分路 R_p, R_q, R_r での線積分での値がどれも等しいから，補題と併せて，線積分の値は積分路が囲む特異点の数に依ることが分かる．すると，特異点を１つのみ囲む閉じた経路 $C_{\gamma_0+\gamma_q}$ について，$\int_{C_{\gamma_0+\gamma_q}} X(p)\cdot dp = 2\pi$ である．以降同様に，$\int_{C_{\gamma_0+\gamma_q+\gamma_p}} X(p)\cdot dp = 4\pi, \int_{C_{\gamma_0+\gamma_q+\gamma_p+\gamma_r}} X(p)\cdot dp = 6\pi$ を得る．

以上の結果を，$(\star^2)$ で定義した曲線の記法を用いてまとめると，線積分 $\int_{C_\gamma} X(p)\cdot dp$ の取り得る値とその時の積分路の例は次の通りとなる．

$$\int_{C_\gamma} X(p)\cdot dp = \begin{cases} 0 & \gamma = \gamma_0 = \gamma_{y=0\to 3}^{x=2} + \gamma_{y=3}^{x=2\to 1} + \gamma_{y=3\to 0}^{x=1} \text{の時} \\ 2\pi & \gamma = \gamma_0 + \gamma_q = \gamma_{y=0\to 3}^{x=2} + \gamma_{y=3}^{x=2\to -1} + \gamma_{y=3\to 1}^{x=-1} + \gamma_{y=1}^{x=-1\to 1} + \gamma_{y=1\to 0}^{x=1} \text{の時} \\ 4\pi & \gamma = \gamma_0 + \gamma_q + \gamma_p = \gamma_{y=0\to 3}^{x=2} + \gamma_{y=3}^{x=2\to -1} + \gamma_{y=3\to -1}^{x=-1} + \gamma_{y=-1}^{x=-1\to 1} + \gamma_{y=-1\to 0}^{x=1} \text{の時} \\ 6\pi & \gamma = \gamma_0 + \gamma_q + \gamma_p + \gamma_r = \gamma_{y=0\to 3}^{x=2} + \gamma_{y=3}^{x=2\to -1} + \gamma_{y=3\to -3}^{x=-1} + \gamma_{y=-3}^{x=-1\to 1} + \gamma_{y=-3\to 0}^{x=1} \text{の時} \end{cases} \blacksquare$$