目次

第 1 章

保型関数入門（担当：松本久義先生）

離散部分群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の作用で上半平面 $\mathbb{H}$ を割った空間は Riemann 面の構造を入れることができ，この上の微分形式は保型形式と呼ばれる数論的対象を定める．

同様に Lie 群の表現論の舞台ともなる．Lie 群 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ が計量を保って作用するが，これを Möbius 変換という．

また，双曲幾何も，Gauss 平面での実現を持つ，これを Poincaré の上半平面モデルという．このモデルは単位円板モデルと計量を保って写り合う，即ち，２つのモデルが Riemann 面として解析的同型（多変数複素解析の文脈で，２つの C^n 上の領域間に，正則写像が両方向に存在すること）である．

1.1　非 Euclid 幾何

1.2　一次分数変換

射影一般線型群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ は $\hat{\mathbb{C}}$ に一次分数変換によって作用する．この作用は計量を保ち，特に射影幾何学の言葉で言えば円を保つ（射影空間の射）．

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を標準分解する．

定理 1.2.1 ($\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の標準分解)**.** 任意の一次分数変換は，次の変換の合成によって表せる．

1. $z \mapsto az$ $(a \in \mathbb{C}^\times)$,
2. $z \mapsto z + c$ $(c \in \mathbb{C})$,
3. $z \mapsto \dfrac{1}{z}$.

定義 1.2.2 (circle)**.** $\hat{\mathbb{C}}$ の円とは，次のことをいう．

1. $\mathbb{C}$ 上の円，
2. $\mathbb{C}$ 上の直線と ∞ との合併．

定理 1.2.3 (円円対応)**.** 一次分数変換は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円を円に移す．

［証明］. 定理 1.2.1 より，変換 $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ が円を保つことを示せば良い． □

参考文献

projective general linear group is triply transitive] $(x_1,x_2,x_3),(x_1',x_2',x_3')\in\hat{\mathbb{C}}$ をそれぞれの組のどの２つも等しくないとする．この時ある一次分数変換が存在して，$x_1\mapsto x_1',x_2\mapsto x_2',x_3\mapsto x_3'$ を満たす．

定義 1.2.4 (orbit)**.** 群 G が集合 X に作用しているとする．

$$Gx := \{gx \mid g\in G\}$$

を x を通る**軌道**という．逆に，X の部分集合のうち G の軌道としても得られるものを **G-軌道**という．

注 1.2.5. 線型空間も，体の作用と見れるのだろうか．すると，生成する空間とは軌道概念の拡張になる．

定義 1.2.6 (transitive)**.** 群作用が**推移的**であるとは，空でない X に対して，

$$\forall x\in X,\ Gx = X$$

が成り立つことをいう．

定理 1.2.7. Riemann 面 $\hat{\mathbb{C}}$ への $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の群作用の軌道は次の３つである．

1. 射影直線 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$.
2. 上半平面 $\mathbb{H}$.
3. 下半平面 $\mathbb{H}_-$

［証明］**.** それぞれ，$0,i,-i$ の軌道として構成し，これらが $\hat{\mathbb{C}}$ の類別となっていることを確認する． □

1.3 上半平面と束

平面上に基底を 2 つ定めると，これらが作る座標系を得る．これを斜交座標の場合も含めて，束という代数系のことばで Gauss 平面上で捉える．

定義 1.3.1 (lattice and its morphism)**.**

1. 加法群としての $\mathbb{C}$ の部分群 L が**束**であるとは，ある $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ が存在して次を満たすことをいう：
   (1) $L = \{mw_1 + nw_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\} =: \langle w_1, w_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$.
   (2) w_1, w_2 は $\mathbb{R}$ 上一次独立．（i.e. $\dfrac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$）．
   この時の $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ を L の**基底**と呼ぶ.
2. $L_1, L_2 \subset \mathbb{C}$ を束とする．これらが**同型**であるとは，
$$L_1 \simeq L_2 :\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{C}^\times,\ aL_1 = L_2$$
   とする．ただし，$aL_1 = \{aL \mid l \in L_1\} = \langle aw_1, aw_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ とした.
3. $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ を一次独立とする時，これらが張る平行四辺形の内部を
$$P(w_1, w_2) := \{tw_1 + sw_2 \mid s, t \in (0,1)\}$$
   とする.

注 1.3.2.

1. $\mathbb{C}$ 上の点を 2 つ取ると，これを基底とした座標系を得る．それを束と呼ぶ.
2. このように加法群 $\mathbb{C}$ の言葉で定義した束が，等角写像で写り合う時，同型であるという.

定義 1.3.3 (upper half-plane)**.**

1. $\mathbb{H} := \{t \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} t > 0\}$ を**上半平面**と呼ぶ．$H, \mathfrak{H}, H^+$ などとも表す.
2. これが Riemann 球面に埋め込まれているとみなした時，その閉包を**閉上半平面**と呼ぶ：$\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
3. $t \in \mathbb{H}$ に対して，これが上半平面上に定める束を
$$\Omega_t := \{m + nt \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \langle 1, t \rangle_{\mathbb{Z}}$$

と置く．

注 1.3.4 (上半平面に注目すれば良い理由)**.** $L=\langle w_1,w_2\rangle_{\mathbb{Z}}$ とすると，基底は一次独立であることより $\mathrm{Im}\,w_1/w_2\neq 0$ である．この時必要なら順番を入れ替えることで $w_1/w_2\in\mathbb{H}$ と出来る（なす角のうち「狭い方」を取れば π より小さく 0 より大きい）．従って，$L=w_2\Omega_{w_1/w_2}$ である．

1.3.1　$\mathbb{H}$ 上の束の同型類を定めたい

前節で，束を考えるには上半平面のみに注目したクラス Ω_t $(t\in\mathbb{C})$ に注目すれば良いとして代表系を取った．次に，これらの同型類を定めたい．

ここで，上半平面に対する実行列の作用を観察する．まず，実行列の固有ベクトルにより強く分類できる．なぜなら，複素共軛による双対命題が常に成り立つので，1 つのベクトルの行き先に言及するだけで同時に 2 つ目も定めていることになる．

補題 1.3.5. $A\in M_2(\mathbb{R}),t\in\mathbb{H}$ が

$$A\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$$

を満たす時，$A=I$ である．

［証明］**.** $A\in M_2(\mathbb{R})$ より，

$$A\begin{pmatrix}\bar{t}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{t}\\1\end{pmatrix}$$

も成り立つ．$t\in\mathbb{H}$ としたから，$\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{t}\\1\end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立より，A の定める写像は $\mathbb{H}$ 上の恒等写像である．従って，$A=I$. □

次の定理は，楕円関数と保型形式の間の関係の土台となる対応を示す．それは，上半平面上の束 Ω_t が同型であるとは，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の作用に対して，同じ軌道に乗る

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot t_1=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})t_2$$

ことに同値であることを示す．

定理 1.3.6. $t_1,t_2\in\mathbb{H}$ に対して，以下は同値である．

1. $\Omega_{t_1} \simeq \Omega_{t_2}$.
2. $\exists g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

1.4 基本領域

1.5 楕円関数

1.6 Eisenstein 級数

1.7 Fourier 展開

1.8 保型形式

1.9 保型形式の極と零点

1.10 保型関数体