2.1.2 Sections and retractions：右逆元と左逆元の対

可逆性は簡約可能性より強い概念になる．従って，全ての section は monic だし，全ての retraction は epic である．

定義 2.7 (左右可逆性を split で表す，右逆元を section，左逆元を retraction と呼ぶ．)**.**

1. 左（右）逆射を持つ射を **split** mono(epi) と呼ぶ．

2. $es = 1_A$ を満たす射 $s : A \to X, e : X \to A$ について，e に対する右逆元 s を section または splitting とよび，s に対する左逆元 e を retraction と呼ぶ．この時に引き戻される所の対象 A を X の retract と呼ぶ．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "1_A"'] & X \arrow[d, "e"] \\ & A \end{tikzcd}$$

■

注. 可逆性については，関手は単位射や合成を保存するので，mono/epi の splitablility も保存する．これは例 2.5 で，忘却関手 $U : \mathrm{Mon} \to \mathrm{Sets}$ が，split じゃない epi である包含写像 $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を保存しなかった（Sets 上では epic ではなくなった）例と対照的である．

例 **2.8** (Sets での様子と，選択公理)**.** Sets 上では，

1. $\varnothing \to A$ という種のものを除いて，mono である（左簡約可能）こと，split mono である（左可逆）こと，単射であることは全て同値．

2. epic である（右簡約可能）こと，split epic である（右可逆）こと，全射であることは全て同値．

なお，Sets において「全射ならば右逆元が存在する」という方向の条件は，選択公理と同値である．

実際，$e : E \to X$ を全射とする．即ち，各 fiber $E_x = e^{-1}(\{x\})$ は空でない．このとき，$es = 1_X$ を満たす切断 s が存在するとは，E 上の集合の族 $(E_x)_{x \in X}$ から，各 x について，s の値とすべき $s(x) \in E_x$ を選び出

すことに等しい．

逆に，空でない集合の族 $(E_x)_{x\in X}$ が与えられたとき，$E=\{(x,y)\in X\times\bigcup_{x\in X}E_x \mid x\in X, y\in E_x\}$ と定めて，この E からの全射 $e:E\to X$ を第一射影（添え字集合への射影）として定めれば，再び，これの切断 $s:X\to E$ は選択関数である．$e\circ s=1_X$ を満たす切断 s が存在するということは選べているということになる．

これらは全て，集合の族 $(E_x)_{x\in X}$ という対象が，射 $e:E\to X$ として圏論的にも翻訳されていることによる．(This has much wider applications...)

定義 (射影的対象)**.** 対象 P が projective であるとは，

次の条件

$$\forall f:P\to X, e:E\twoheadrightarrow X \quad \exists\overline{f}:P\to E \quad (e\circ\overline{f}=f)$$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, two heads, "e"] \\ P \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

が成り立つことをいう．即ち，射影的対象から出る任意の射 $f:P\to X$ は，全射 $e:E\to X$ を通じて分解する．この条件 (left lifting propoerty against epimorphisms) を"f lifts across e"とも表現する．また，$\overline{f}$ を lift とも言う．

注.

1. f として，$f=id_P:P\to P$ を取り，epi として $e:E\to P$ を取ると，存在が保証される所の $\overline{f}:P\to E$ とは切断に他ならないから，射影的対象に入射する全ての epi は split する．

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, two heads, "e"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"] \arrow[r, "id_P"'] & P \end{tikzcd}$$

2. "Projective objects may be thought of as having a more "free" structure, thus permitting "more arrows.""

3. 次の命題が成り立つ.

命題. 選択公理を認めるならば，全ての Sets の対象は射影的である.

［証明］. P を勝手な集合とする．各 $x \in X$ について，$e^{-1}(\{x\}) = E_X(\neq \emptyset)$ と置く．選択公理より，各 $s(x) \in E_x$ を選び出す切断 $s : X \to E$ が存在する.

$P = \bigcup_{x \in X} f^{-1}(\{x\})$ と分割できるが，$f^{-1}(\{x\}) \subset P$ が空でないなら，その各元に $s(x) \in E_X$ を対応させることで，次の図式を可換にする $\overline{f} : P \to E$ が構成できる.

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, two heads, "e"] \\
P \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

よって，P は射影的対象である. □

4. 次の命題が成り立つ.

命題. 全ての圏 C について，射影対象 P の retract A は射影対象である.

［証明］. いま，A は P の retract だから，$e \circ s = 1_A$ とし，X, Y を勝手な対象，$f : A \to X$ を勝手な射，$g : Y \twoheadrightarrow X$ を勝手な epi 射とする.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] & X \\
A \arrow[u, dotted, "\overline{f\circ e}\circ s"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[r, shift left, "s"] & P \arrow[l, shift left, "e"] \arrow[u, "f\circ e"'] \arrow[ul, dashed, "\overline{f\circ e}"]
\end{tikzcd}$$

P は射影的対象だから，$f \circ e = \overline{f \circ e} \circ g$ を満たす射 $\overline{f \circ e} : P \to Y$ が存在する．これの両辺に右から s との合成をとると，$f \circ e \circ s = f = \overline{f \circ e} \circ g \circ s$ である.

従って，条件を満たす射 $\overline{f \circ g} \circ s$ が存在し，A も射影的対象である. □

2.2 Initial and terminal objects

定義 2.9. 圏 C において，

1. 任意の対象 C について，$\hom(0,C)$ が一元集合である時，$0 \in C$ を始対象と言う．
2. 任意の対象 C について，$\hom(C,1)$ が一元集合である時，$1 \in C$ を終対象と言う．

命題 2.10. 始対象は同型を除いて一意である．

［証明］**.** $1,1' \in C$ がいずれも始対象であるとする．この時，$\hom(1,1'),\hom(1'1)$ はいずれも一元集合で，$\hom(1,1),\hom(1',1')$ もいずれも一元集合だから，その元は互いに逆射である．従って，$1 \simeq 1'$． □

例 2.11.

1. Sets にて，空集合は始対象であり，一点集合が終対象である．この時，空集合全体の集合は 1 つであるが，一点集合全体の集合は唯一つではない．従って，$\mathrm{Set} \simeq \mathrm{Set}^{op}$ は成り立たず，一般に関手 ^{op} は同型にならない．

2. 同様にして，Cat では，空圏 0 が始対象であり，1 が終対象である．

3. Grp, Mon, Vect では，自明な群が始対象でも終対象でもある．

4. Rings では $\mathbb{Z}$ が始対象であり，零環が（環とするなら）終対象である．

5. Poset category では，始対象は存在すれば最小元であり，終対象は存在すれば最大元である．これらを持つような Poset を有界という．特に，Boolean algebra は双方を持つ．

6. ブール代数の圏 BA での始対象は 2，終対象は 1 である．

7. slice category C/X において，対象 $1_X : X \to X$ は終対象である．slice category の対象とは X に差し込む C の射 f のことだったから，この場合 $\hom(f,1_X) = \{f\}$ となる．

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "id_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

定義． ブール代数とは，次を満たす 6 組 $B = (B, \wedge, \vee, 0, 1, \neg)$ である．

$$0 \leq a$$
$$a \leq 1$$
$$a \leq c \ \wedge \ b \leq c \Leftrightarrow a \vee b \leq c$$
$$c \leq a \ \wedge \ c \leq b \Leftrightarrow c \leq a \wedge b$$
$$a \leq \neg b \Leftrightarrow a \wedge b = 0 \tag{1}$$
$$\neg\neg a = a \tag{2}$$

例． 冪集合 $P(X)$ は，$\wedge = \cap, \vee = \cup, 0 = \varnothing, 1 = X, \neg = X \setminus -$ として，束どころか，Boolean algebra をなす．特に X が一点集合のときは真理値 $2 = \{0,1\}$ である．X が空集合のときは自明なブール代数 $\{0 = 1\}$ となる．

2.3 Generalized elements

始対象への射

例． 1. Sets, Poset category では，対象 A から始対象 0 への射 $A \to 0$ が存在する時，$A = 0$ である．

2. Mon, Groups では，始対象と終対象は一致するので，全ての対象 A について射 $A \to 0$ も一意に取れる．

定義 (ultrafilter)． 部分集合 $F \subset B$ がブール代数 B の filter であるとは，

1(closed upward).

$$a \in F \ \wedge \ a \leq b \Rightarrow b \in F \tag{3}$$

2(closed under meets).

$$a \in F \ \wedge \ b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F \tag{4}$$

を満たすことである．F を真に包含する filter F' が $F' = B$ しか存在しない時，filter F を極大 (maximal) であるという．またこの F を ultrafilter ともいう．

命題 (ブール代数上の ultrafilter の同値な条件)**.** ブール代数 B と真のフィルター $F \subset B$ について，次の２条件は同値である．

1. F は ultrafilter である．
2. 任意の $b \in B$ について，$b \in F$ か $\neg b \in F$ かのいずれか一方である．

［証明］**.** 1.⇒2. を考える．$b \le b$ と式 1（$a \le c \,\wedge\, b \le c \Leftrightarrow a \vee b \le c$）を併せると，$b \wedge \neg b = 0$ を得る．従って，$b \in F \,\wedge\, \neg b \in F$ とすると，$0 \in F$ となって，超 filter F が真のフィルターであることに矛盾する．一方で，$b, \neg b \notin F$ と仮定すると，$b/B = \uparrow(b) = \{a \in B \mid b \le a\}$ は真の filter（$0 \notin b/B$）であり，F よりも真に大きい．従って，F が超 filter であることに矛盾．よって，$b \in F$ と $\neg b \in F$ のいずれか一方である．

2.⇒1. を考える．F を真のフィルターとして，任意の $b \in B$ について，$b \in F$ か $\neg b \in F$ かのいずれか一方であるとする．$b \in B \setminus F$ を任意にとり，これを含む F より大きい真のフィルター F' を考えると，$b \notin F$ より，$\neg b \in F$ であるから，$b, \neg b \in F'$ となる．すると，フィルターの定義より $b \wedge \neg b = 0 \in F'$ となるから，これは $F' = B$ である．従って，フィルター F は極大である．　□

命題. ブール代数の射 $p : B \to 2$ は，B 上の超フィルターと一対一に対応する．

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{BA}}(B, 2) \simeq \mathrm{St}(B)$$

［証明］**.** 写像 $U : \mathrm{hom}_{\mathrm{BA}}(B, 2) \to \mathrm{St}(B)$ を，各 $p : B \to 2$ に対して $U_p := p^{-1}(1)$ と置く．こうして定めた U_p は超 filter になって居る．何故ならば，次の３条件が満たされるからである．

1. $a \in U_p, a \le b$ とすると，p は関手だから，$1 = p(a) \le p(b)$ となる．1 は最大元だから $p(b) = 1$ より，式 3 を満たす．
2. $a, b \in U_p$ とすると，$p(a) = p(b) = 1$ で，$p(a) \wedge p(b) = 1 \in U_p$ であるから，式 4 を満たす．
3. 性質「任意の $b \in B$ について，$b \in U_p$ か $\neg b \in U_p$ かのいずれか一方である．」も，$b \in U_p$ と仮定すれば，p はブール代数の射だから $p(\neg b) = \neg p(b) = 0$ より $\neg b \notin U_p$ で，逆も成り立つので成り立つ．

逆に，写像 $p : \mathrm{St}(B) \to \mathrm{hom}_{\mathrm{BA}}(B, 2)$ を，超フィルター $U \subset B$ に対して，射 $p_U : B \to 2$（$p_U(b) = 1 :\Leftrightarrow b \in U$）を対応させる写像として定める．超フィルター U に b か $\neg b$ のいずれかが入って居ることにより，p_U は構造 $\neg$ を保ち，確かにブール代数の射になる．

こうして定めた写像 U, p は互いに逆写像になって居る．　□

注. 1. ブール代数の射 $B \to 2$ は，真理値表の行 1 つに対応する．例えば B を $P(2)$ から生成したものとすると，

$$\begin{tikzcd} & 1 & \\ a \arrow[ur] & & \neg a \arrow[ul] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

2 つの超フィルターが，$b := \neg a$ とかけば，それぞれ次の行に対応する．

a	b	$a \vee b$
0	1	1
1	0	1

2. 以上の議論と類比的なことが Rings での，始対象への射 $A \to \mathbb{Z}$ で起こる．これが対応するのは超フィルターの代わりに，prime ideal と呼ばれる．

終対象からの射

例 **2.12.**

1. Sets にて，$X \simeq \mathrm{Hom}_{Sets}(1, X)$

2. Pos Top にて，$\mathrm{Hom}_{Pos}(1, P)$ は，P の台集合 $U(P)$ に対応する．

3. 一般の圏 C において，$\mathrm{Hom}_C(1, A)$ の元を，A の global elements, points, constants などという．

4. Sets, Poset category, Top にて，全ての点 $x : 1 \to P$ において $fx = gx$ が成り立つことと，$f = g$ であることは同値である．

5. Mon にて，$\mathrm{Hom}_{Mon}(1, M)$ は「$0 \in 1$ を M の単位元 u_M に対応させる射 $1 \to M$」の一点集合である．従って，任意の射 $h, j : M \to N$ に対して，全ての（1 つしかないが）$x : 1 \to M$ について，$hx = jx$ である．Monoids do not "have enough points."

6. BA にて，$\mathrm{Hom}_{BA}(1, B)$ $(B \neq 1)$ は空集合である．実際，$f : 1 \to B$ をその元とし，$f(0) = b \in B$ と置くと，f は一項演算 $\neg$ の構造を保つために $f(\neg 0) = \neg b \neq b$ が必要だが，これは $0 = \neg 0 \in 1$ による

$f(0) = f(\neg 0)$ と両立しない．

定義. 対象 A に対して，勝手な対象 X からの射 $x : X \to A$ を，A の generalized element または variable element という．特に $X = 1$ の時，global element, points, constants などという．

注.
1. Computer scientists と logicians は，射 $1 \to A$ を定数や閉項とし，一般の射 $X \to A$ を任意の項とする．

2(Good for testing). $f : A \to B$ が monic であるとは，任意の $x, x' \in \mathrm{hom}(X, A)$ について，$x \neq x' \Rightarrow fx \neq fx'$ であることだが，これは「f が monic とは，一般化された元について"単射"であることである」と言い換えられる．

3. C の図式が可換 $\alpha f = \beta g$ であるとは，全ての一般化された元 x について $\alpha f x = \beta g x$ であるということである．（元の場合は $x = 1_A$ の場合に当たる．）

命題 (射の相等の特徴付け)**.**
全ての圏 C における任意の射 $f, g : C \to D$ について，次の 2 条件は同値である．
1. $f = g$ である．
2. $\forall X \in C\ \forall x \in \mathrm{Hom}_C(X, C)\ (fx = gx)$

［証明］**.** 1.⇒2. は明らかだから 2.⇒1. を示す．特に $X = C$ として，$x = id_C$ とすると，$f \circ id_C = g \circ id_C$ より $f = g$ が従う． □

例 2.13 (一般化された元は，定数よりも，より多くの構造に言及できる．)**.**

次のような 2 つの Poset category X, A とその間の射 $f : X \to A$（点線で表した）を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & c \\
y \arrow[rrr, dashed, bend left, "f"] & & z \arrow[ur, dashed] & b \arrow[u] \\
 & x \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[rr, dashed] & & a \arrow[u] \\
 & X & & A
\end{tikzcd}
$$

これは Pos にて monic かつ epic であるが，同型ではない．さらに進んで，$X \simeq A$ でないことを示すには，「X, A を区別する保存量 (invariant) を見つける」と良い．

実際，今回 $\mathrm{Hom}_{Pos}(1, X) \simeq \mathrm{Hom}_{Pos}(1, A)$ であるが，$|\mathrm{Hom}_{Pos}(2, X)| = 5$ と $|\mathrm{Hom}_{Pos}(2, A)| = 6$ は要素の数が違う．

命題. 全ての圏 C において，$P \simeq Q$ ならば，$\mathrm{Hom}_C(2, P) \simeq \mathrm{Hom}_C(2, Q)$ である．

［証明］. $i : P \to Q$ を同型とする．写像 $i_* : \mathrm{Hom}(2, P) \to \mathrm{Hom}(2, Q)$ を次のように定める．

$$
\begin{array}{rccc}
i_* : & \mathrm{Hom}(2, P) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(2, Q) \\
 & \Cup & & \Cup \\
 & f & \longmapsto & i \circ f
\end{array}
$$

と定めると，$i : P \to Q$ の逆射 j から同様に定めた写像 $j_* : \mathrm{Hom}(2, Q) \to \mathrm{Hom}(2, P)$ が i_* の逆射となる． □

注. $\mathrm{Hom}(X, -)$ は常に関手になり，関手は常に同型を保存する．

例 2.14.

1. 一般化された元 $t : T \to A$ のうち，特定の T が特異的に意味を持つことが多い (revealing)．そこで，このような t を figures of shape T in A と呼ぶ．

2. 前の例 2.13 で Pos の射 $2 \to P$ が P 内の $p \leq p'$ を満たす組 (p, p') と対応した．これは a figure of shape 2 in P の例であり，非常に geometric な直観に合う．

3. Mon の圏では，終対象からの射は常に 1 つしかなかった．しかし，$M(1)$ からの射（figures of shape $\mathbb{N}$ in M）については次が成り立つ．

命題 ($M(1)$-値点がモノイドの射を決定する)**.** 圏 Mon の射 $f,g:M\to M'$ について，次の 2 つは同値．

1. $f=g$ である．
2. 任意の $x\in \mathrm{Hom}_{Mon}(M(1),M)$ について $fx=gx$ である．

［証明］**.** 2.⇒1. を示す．

$U(M)$ 上の任意の global element $y:1\to U(M)$ を取る．すると，これによって定まるモノイドの射 $\overline{y}:M(1)\to M$ について，仮定より，$f\circ\overline{y}=g\circ\overline{y}$ が成り立つ．これから，$U(f\circ\overline{y})=U(g\circ\overline{y})$ が従う．

この時，下の図式は可換であるから，特に左側の Sets 上の図式の一番外側の大回りの図式も可換になる．これより，$U(f)\circ y=U(g)\circ y$ が従う．

$$\begin{tikzcd}
U(M(1)) \arrow[r, dashed, "U(\overline{y})"] \arrow[rr, bend left, "{U(f\circ\overline{y}),U(g\circ\overline{y})}"] & U(M) \arrow[r, "{U(f),U(g)}"] & U(M') \\
1 \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "y"] \arrow[urr, "{U(f)\circ y,U(g)\circ y}"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M(1) \arrow[r, "\overline{y}"] \arrow[dr, dashed, "f\circ\overline{y}=g\circ\overline{y}=\overline{U(f)\circ y}"'] & M \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \\
& M'
\end{tikzcd}$$

以上のことが任意にとった y について成り立つのだから，次が導けたことになる．

$$\forall y\in U(M)\ U(f)(y)=U(g)(y)$$

即ち，モノイドの射 f,g が写像として等しいことを得た． □

4. 次が成り立つ．モノイド M の台集合 $U(M)$ は，一般化された要素 $M(1)\to M$，即ち，M 内の全ての figures of shape $\mathbb{N}$ によって定まる．

$$U(M)\simeq \mathrm{Hom}_{Sets}(1,U(M))\simeq \mathrm{Hom}_{Mon}(M(1),M)$$

これより，モノイド M からの写像 $U(M)\to -$ を考えるときは，M の元の代わりに，M 内の全ての $\mathbb{N}$ の型 $\mathbb{N}\to M$ を考えればいい．

2.4 Products

命題. Sets において，集合 $A, B \in \mathrm{Sets}$ の直積 (cartesian product) $A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ からの写像 $\pi_1 : A \times B \to A$, $\pi_2 : A \times B \to B$ をそれぞれ第一射影と第二射影とすると，次の図式は可換になる．

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, "{(a,b)}"] \arrow[dr, "b"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

定義 2.15 (UMP of a product diagram)**.** 任意の圏 C において，対象 A, B の直積図式 (product diagram) とは，対象 P とそれからの射 $p_1 : P \to A, p_2 : P \to B$ があって，次を満たすもののことである．

> 任意の対象 X と任意の射 $x_1 : X \to A, x_2 : X \to B$ について，ただ一つの射 $u : X \to P$ が存在して，次の図式を可換にする．

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[dr, "x_2"] & \\
A & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

注 2.16. 次の 2 つに主張が分解できる．

1(存在). $x_1 = p_1 u \wedge x_2 = p_2 u$ を満たす射 $u : X \to U$ が存在する．

2(一意性). $v : X \to U$ も $x_1 = p_1 v \wedge x_2 = p_2 v$ を満たすならば，$v = u$ である．

命題 2.17. 圏 C の対象 A, B の積 P は，同型を除いて一意的である．

［証明］**.** P と射 $p_1 : P \to A, p_2 : P \to B$ と，Q と射 $q_1 : Q \to A, q_2 : Q \to B$ のいずれも，A と B の積の UMP を満たすとする．

Q についての UMP より，$i : P \to Q$ が，P についての UMP より，$j : Q \to P$ がそれぞれ存在し，次の図

式を可換にする.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, dashed, "i"] \arrow[dr, "p_2"] & \\
A & Q \arrow[l, "q_1"'] \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, dashed, "j"] & B \\
 & P \arrow[ul, "p_1"] \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}$$

すると，特に $p_1 \circ j \circ i = p_1$ かつ $p_2 \circ j \circ i = p_2$ が成り立つ．これを $p_1 \circ 1_P = p_1$ と $p_2 \circ 1_P = p_2$ と見比べると，UMP の一意性条件により，$j \circ i = 1_P$ かつ $i \circ j = 1_P$ である．

同様にして，$i \circ j = 1_Q$ も得る．

以上より，$P \simeq Q$ である． □

記法.

1. この A と B についての一意的な積を，$A \times B$ と書く．

2. UMP の定義内にある記号について，射 $u : X \to A \times B$ を $\langle x_1, x_2 \rangle$ と書く．

3. 積への射 $f : X \to A \times B$ は，射の組 $(f_1 : X \to A, f_2 : X \to B)$ と一対一対応する．

4. 積からの射 $g : A \times B \to Y$ は，一般化された元 $f = (f_1, f_2)$ について，一般化された元 $g\langle f_1, f_2 \rangle$ が対応するので，いわば「一般化された 2 変数関数」と言える．

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "g"] & B \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$