代数と幾何レポート 第3回

司馬博文 J4-190549

2020年10月14日

問題 28

$1, i \in \mathbb{C}$ が定める同型を

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \longmapsto & a+bi \end{array}$$

とすると，行列表示 $A \in M_2(\mathbb{R})$ について，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{C} \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\times A"] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

従って，$e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ について，

$$\varphi^{-1} \circ \alpha \circ \varphi(e_1) = \varphi^{-1}(\alpha(1)) = \varphi^{-1}(a+bi) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\varphi^{-1} \circ \alpha \circ \varphi(e_2) = \varphi^{-1}(\alpha(i)) = \varphi^{-1}(-b+ai) = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

であるから，行列表示は

$$A = (Ae_1\, Ae_2) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

■

問題 37

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)' = f(x), \qquad \int_0^x f'(t)dt = f(x),$$

より，F, G は互いに逆射であるから，いずれの像も終域全体である：

$$\operatorname{Im} F = F(C^\infty(\mathbb{R})) = C^\infty(\mathbb{R}), \qquad \operatorname{Im} G = G(C^\infty(\mathbb{R})) = C^\infty(\mathbb{R}).$$

また，核は

$$\operatorname{Ker} F = G(0) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall f(x) = a \in \mathbb{R}\}, \qquad \operatorname{Ker} G = F(0) = 0.$$

■