目次

関数空間上の写像 F と関数 $u(x_1, \cdots, x_n)$ に対して，

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n^2}, \cdots\right) = 0 \quad (n \geq 2)$$

を偏微分方程式という．

(1) F に $x_1, \cdots, x_n$ の項がない場合，**線型**という．$x_1, \cdots, x_n$ は関数空間上の定数と思えるため？
(2) 1 階の線型偏微分方程式を**移流／輸送方程式 (advection / transport equation)** という．
(3) 2 解の線型偏微分方程式について，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ 部を**主要部**という．

主要部の係数 (a_{ij}) が定数の場合を考える．適当な変数変換によって，係数行列 $A := (a_{ij})$ を，対角成分が $0, \pm 1$ の対角行列にすることができる．u に C^2 級を仮定するとき，(a_{ij}) は対称行列であるため，固有値は全て実数となる．

(1) A が正則で，全ての固有値が同一符号であるとき，主要部は $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ と表せる．これを**楕円型**という．
(2) A が正則で，ただ一つの固有値のみ符号が異なるとき，主要部は $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ と表せる．これを**双曲型**という．
(3) A が正則で，上記以外の場合，主要部は $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}\right) - \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_{m+1}^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)$ と表せる．これを**超双曲型**という．
(4) A が非正則であるとき，これを**放物型**という．

例 0.0.1.

(1) 楕円型方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$ を potential 方程式，または Laplace 方程式という．
(2) 双曲型方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ を波動方程式という．
(3) 放物型方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ を熱方程式・拡散方程式という．

第 1 章

熱方程式

1.1　熱方程式の発生