目次

第 1 章

級数論

第 2 章

Fourier 級数導入

2.1 Hilbert 空間の正規直交系

記法 2.1.1.

(1) $L_{2\pi} := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ は Lebesgue 可測で，周期 } 2\pi \text{を持つ} \right\}.$

(2) $L^p_{2\pi} := \left\{ f \in L_{2\pi} \mid f|_{(-\pi,\pi]} \in L^p((-\pi,\pi]) \right\}.$

(3) $C_{2\pi} := \left\{ f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid f \text{ は周期 } 2\pi \text{を持つ} \right\}.$

(4) $C^k_{2\pi} := \left\{ f \in C^k(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, f \text{ は周期 } 2\pi \text{を持つ} \right\}.$

2.2 Fourier 係数の性質

命題 2.2.1 (表示)**.** $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ が $t \in (-\pi,\pi]$ 上一様収束する時，

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$$

が必要.

[証明] **.** e^{int} は正規直交系だから，

$$\begin{aligned}
(f, e^{int}) &= \left(\lim_{N\to\infty} S_N[f](t), e^{int}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} (S_N[f](t), e^{int}) && \text{内積の連続性??} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=-N}^{N} c_\nu (e^{i\nu t}, e^{int}) && \text{内積の線形性} \\
&= c_n.
\end{aligned}$$

■

補題 2.2.2.

(1) $f(t) = f(-t)$ のとき，$c_n[f] = c_{-n}[f]$．したがって，足し合わせると cos が出てくる.

(2) $f(t) = -f(-t)$ のとき，$c_n[f] = -c_{-n}[f]$．したがって，足し合わせると ~ が出てくる.

(3) $f(t) \in \mathbb{R}$ ならば，$\overline{c_n[f]} = c_{-n}[f]$.

[証明] **.**

(1)

$$\begin{aligned}
c_n[f] &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}dt \\
&= \int_{\pi}^{-\pi} f(-x)e^{-inx}(-dx)
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i(-n)x} dx = c_{-n}[f].$$

(2) 同様.

(3)

$$\overline{c_n[f]} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = c_{-n}[f].$$

あとは積分と複素共役の可換性についてであるが，実部と虚部に分けて考えると，積分の線形性より従う.

■

例 2.2.3.

$$f(x) = \frac{1}{\frac{5}{4} + \cos x}$$

の Fourier 展開を考える.

2.3　Riemann-Lebesgue の定理と Fourier 係数の減衰

定理 2.3.1 (Riemann-Lebesgue). 任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ に関して,

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \hat{f}(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\lambda} dt \xrightarrow{|\lambda| \to \infty} 0.$$ [†1]

[証明] .

(1) $f = \chi_{[a,b]}$ $(-\infty < a < b < \infty)$ のとき,

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\lambda)| &= \left| \int_a^b e^{-it\lambda} dt \right| \\ &= \left| \frac{e^{-ib\lambda} - e^{-ia\lambda}}{i\lambda} \right| \le \frac{2}{|\lambda|} \xrightarrow{|\lambda| \to \infty} 0. \end{aligned}$$

(2) f が単関数のとき，同様.

(3) $S := \left\{ s = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{[a_i, b_i]} \in L^1(\mathbb{R}) \mid b_i \in \mathbb{C}, -\infty < a < b < \infty, n \in \mathbb{N} \right\}$ は $L^1(\mathbb{R})$ で $\| - \|_1$ について稠密だから，一般の $f \in L^1(\mathbb{R})$ についても同様に示せる.

実際，任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ と $\epsilon > 0$ に対して，$g \in S$ が存在して，$\|f - g\|_1 = \int |f(x) - g(x)| dx < \epsilon$ を満たす．いま，(2) より $\exists_{N \in \mathbb{N}}$ $|\lambda| > N \Rightarrow \left| \int g(t) e^{it\lambda} dt \right| < \epsilon$ であるから,

$$\left| f(t) e^{it\lambda} dt \right| \le \int |f(t) - g(t)| dt + \left| \int g(t) e^{it\lambda} dt \right| < 2\epsilon \quad (|\lambda| > N).$$

■

要諦 2.3.2. 稠密だと限りなく S に近い点が取れるから，このように評価してしまえば収束性については全く同じ結論を得るのか.

系 2.3.3. 任意の可積分な周期関数 $f \in L^1_{2\pi}$ に対して，Fourier 係数は収束する：$c_n[f] \to 0$ $(|n| \to \infty)$.

[証明] . 定理と同様の手順で示せる. ■

系 2.3.4 (減衰の精緻化). f が C^K 級のとき,

(1) $\forall_{j=1,\cdots,K}$ $\forall_{n \in \mathbb{Z}}$ $(in)^j c_n[f] = c_n[f^{(j)}]$.

(2) $\forall_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ $|c_n[f]| \le \frac{1}{|n|^K} \|f^{(K)}\|_\infty$.

(3) $n^K \cdot c_n[f] \xrightarrow{|n| \to \infty} 0$.

---

†1 極限の取り方が対称なので，指数の符号はあまり問題でない.

[証明] .

(1) 部分積分により,

$$
\begin{aligned}
c_n[f] &= \frac{1}{2\pi}\left[f(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{e^{-int}}{-in}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{f(\pi)}{in}2\sin(n\pi) + \frac{1}{in}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int}dt = \frac{c_n[f']}{in}.
\end{aligned}
$$

これを繰り返すとわかる.

(2)

$$
\begin{aligned}
|c_n[f]| &\le \frac{1}{|in|^K}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f^{(k)}(t)||e^{-int}|dt \\
&\le \frac{1}{|n|^K}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f^{(k)}\|_\infty dt = \frac{1}{|n|^K}\|f^{(k)}\|_\infty.
\end{aligned}
$$

(3) (3) と系から明らか.

■

要諦 2.3.5. k 回連続微分可能な関数の Fourier 係数は，多項式 n^{-k} よりも速く収束する．これにより，$f \in C^2_{2\pi}$ に対しては，Fourier 級数 $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} c_n[f]e^{inx}$ が絶対収束することがわかった．しかし，その収束先が f に一致するかは議論が必要である.

2.4 Dirichlet 核

定義 2.4.1 (Dirichlet kernel)**.** Dirichlet 核を

$$D_K(t) := \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-K}^{K} e^{int}$$

と定めると，Fourier 和は

$$
\begin{aligned}
S_K[f](x) &= \sum_{n=-K}^{K} c_n[f]e^{inx} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-K}^{K} e^{in(x-t)}dt \\
&= \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(x-t)D_K(t)dt
\end{aligned}
$$

と表せる.

第 3 章

関数解析的な Fourier 級数論

Hilbert 空間の同型 $H \simeq_{\mathrm{Hilb}} l^2(A)$ をなす場合に限れば，Fourier 級数論は極めて明晰に展開される．その動機がわかるように，三角級数論から精緻化していく．三角級数は，連続関数に対する多項式が一様近似可能であるように，任意の周期関数を一様近似可能である．この手法は任意の正規直交系に対して一般化でき，これを Fourier 級数というのである．

一方で，$L^1(T)$ などの Fourier 級数論は，内積が使えない Banach 空間となるので，Banach 空間論を用いたより精緻な議論をする．

3.1　三角級数論

記法 3.1.1. $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ を，絶対値が 1 の複素数がなす単位円とする．

議論 3.1.2. 今後，T 上の関数を考えるが，T 上の関数 F は，$\mathbb{R}$ 上の周期 2π を持つ関数 f の全体と，$f(t) = F(e^{it})$ によって対応を持つ．以降，$L(T)$ と $L_{2\pi}$ とを同一視し，$f \in L_{2\pi}$ に対して $f(e^{it})$ を $f(t)$ と略記する．

記法 3.1.3. Lebesgue 可測で周期 2π を持つ $\mathbb{R}$ 上の複素関数全体の集合であって，

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

が有限になるものを $L^p(T)$ $(1 \le p < \infty)$ で表す．いま，$L^p(T)$ は，μ を Lebesgue 測度として，$L^p(T,\mu)$ のノルムを 2π で割ったものとなっている．これは $\|1\|_p = 1$ となるための便宜である．一方で，$L^\infty(T) = L^\infty(T,\mu)$ となる．$C(T)$ は一様ノルムを備え，$C_b(T)$ と一致する．

3.1.1　三角級数の定義

2π 周期関数といえば三角多項式である．これによって任意の周期関数を近似する．

定義 3.1.4 (trigonometric polynomials)**.** 次の形を持つ有限和を，**三角多項式**という．

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \quad (t \in \mathbb{R}, a_n, b_n, c_n \in \mathbb{C})$$

記法 3.1.5. $u_n(t) := e^{int}$ $(n \in \mathbb{Z})$ と表す．

$$(f,g) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

とすると，これは $L^2(T)$ 上に内積を定め，ノルムと整合する．

補題 3.1.6 (trigonometric system)**.** $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(T)$ の正規直交系である：

$$(u_n, u_m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}dt = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

これを三角多項式系という．

3.1.2　三角多項式系の稠密性

実は $\{u_n\} \subset L^2(T)$ は稠密な部分空間を生成する．これが示せれば，$\{u_n\}$ が基底であること（正規直交系としての極大性）を得る．これは，有界閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ 内について，$C(I)$ 内で多項式系は稠密であること (Stone-Weierstrass) を，I 上の周期関数に限れば三角多項式系ですでに稠密であるという消息に精緻化したものと見れる．

定理 3.1.7. 任意の $f \in C(T)$ に対して，三角多項式 P が存在して一様に近似できる：$\forall_{f\in C(T)}\ \forall_{\epsilon>0}\ \exists_P\ \forall_{t\in\mathbb{R}} |f(t)-P(t)| < \epsilon$．特に，三角多項式系は $L^2(T)$ で稠密である．

［証明］．T はコンパクトであるから $C_c(T) = C(T)$ で，$C(T)$ は $L^2(T)$ 上稠密である．■

3.1.3　Fourier 級数の言葉による一般化

定理 3.1.8 (Fejer)**.** $f \in C(T)$ の定める Fourier 級数の部分和の算術平均は，f に一様収束する．

3.2　Fourier 級数

この三角級数についての研究結果の精緻化は，Fourier 級数の言葉を用いてなされる．

定義 3.2.1 (Fourier coefficient, Fourier series, partial sum)**.** $f \in L^1(\mathbb{T})$ について，

(1) $\widehat{f}(n) := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$ $(n \in \mathbb{Z})$ を **Fourier 係数**という．

(2) f の定める **Fourier 級数**とは，$\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{int}$ をいう．

(3) Fourier 級数の部分和を $s_N(t) := \displaystyle\sum_{-N}^{N}\widehat{f}(n)e^{int}$ で表す．

要諦 3.2.2 (Fourier 係数とはなにか)**.** 三角多項式 $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$ を見ると，上述の部分和の定義は自然である．また，$c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$ と表せる．これは，e^{int} の係数だけ定数に落ちるので抽出可能で，他の項は 2π 周期を持つ（あるいは複素平面上の周回積分な）ので積分すると 0 である．これは実は正規直交基底 $(u_n(t) = e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ に対して，$c_n = (f|u_n)$ となっている．一般に，$(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ を正規直交基底とする Hilbert 空間 H の元 $x \in H$ に対して，$\widehat{x}(\alpha) := (x, u_\alpha)$ $(\alpha \in A)$ によって定まる族 $(\widehat{x}(\alpha))_{\alpha\in A}$ を x の **Fourier 係数**という．

3.3　Fourier 級数とは正規直交基底論に他ならない

めっちゃ幾何学的だし Hilbert 空間的な行為！

直交系 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の部分列 $(u_\alpha)_{\alpha\in F}$ が定める（$x \in H$ の）Fourier 部分和は，M_F 上におけるその点 x の最良の近似になる．ということは，その極限たる Fourier 級数は，x 自身に収束することが期待される．
このように，Fourier 変換の理論とは，直交系に対して，それぞれの成分を考えて足し合わせるという極めて Euclid 空間的な発想の，無限化によって複雑に思えるようになっただけである．

補題 3.3.1 (有限な正規直交系についての観察)**.** $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を Hilbert 空間 H の直交系とし，$F \subset A$ を有限部分集合とする．$\{u_\alpha\}_{\alpha\in F}$ の生成する部分空間を M_F で表す．

(1) $\varphi : A \to \mathbb{C}$ は F 内に台を持つとする．このとき，$y = \sum_{\alpha\in F} \varphi(\alpha)u_\alpha \in M_F$ について，

(a) $\forall_{\alpha\in A}\ \widehat{y}(\alpha) = \varphi(\alpha)$ を満たし，

(b) $\|y\|^2 = \sum_{\alpha\in F} |\varphi(\alpha)|^2$ を満たす．

(2) $x \in H$ とし，F の定める部分和を $s_F(x) = \sum_{\alpha\in F} \widehat{x}(\alpha)u_\alpha$ とする．このとき，

(a) $\forall_{s\in M_F}\ s \ne s_F(x) \Rightarrow \|x - s_F(x)\| < \|x - s\|$ で，

(b) $\sum_{\alpha\in F} |\widehat{x}(\alpha)|^2 \le \|x\|^2$.

［証明］．

(1) (u_α) が正規直交基底であることから従う．

(a) $\widehat{y}(\alpha) = (y, u_\alpha) = \varphi(\alpha)$.

(b) y は有限和で表せているから，ノルムの定義 $\|y\|^2 = (y|y) = \left(\sum_{\alpha\in F} \widehat{y}(\alpha)u_\alpha, \sum_{\alpha\in F} \widehat{y}(\alpha)u_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in F} |\widehat{y}(\alpha)|^2$ より．

(2) (a) $x \in H$ を任意に取る．その F に関する Fourier 部分和を $s_F := s_F(x) \in M_F$ とすると，この Fourier 係数は

$$\widehat{s_F}(\alpha) = (s_F, u_\alpha) = \widehat{x}(\alpha)$$

に他ならないわけだから，x と s_F とでは，$(u_\alpha)_{\alpha\in F}$ に関しては係数は一致する．すなわち，$x - s_F$ なる項は，M_F と直交する：$\forall_{\alpha\in F}\ x - s_F \perp u_\alpha$.

任意の $s \in M_F$ について，$s_F - s \in M_F$ だから，これも $(x - s_F) \perp (s_F - s)$ であるから，Pythagoras の恒等式より，

$$\|x - s\|^2 = \|(x - s_F) + (s_F - s)\|^2 = \|x - s_F\|^2 + \|s_F - s\|^2.$$

(b) 特に $s = 0$ の場合を考えると，$\|x - s_F\|^2 + \|s_F\|^2 = \|x\|^2$．よって，$\|s_F\|^2 = \sum_{\alpha\in F} |\widehat{x}(\alpha)|^2 \le \|x\|^2$.

■

要諦 3.3.2 (Fourier 級数の動作原理)**.**

(1) つまり，有限の範囲では，正規直交基底 (u_α) の有限部分に対して，その Fourier 係数とは，その基底に対する展開係数に他ならず，ノルムについても Euclid 空間で見慣れた Pythagoras の定理が成り立つ．さらに，P を正規直交系 (u_α) の有限線型結合全体のなす部分空間とすると，Fourier 係数を定める変換 $\mathcal{F} : P \xrightarrow{\sim} C_c(A) =: l_c^2(A)$ は等長同型であることも述べている．

(2) は，$x \in H$ の Fourier 級数の（任意の）部分和 s_F は，直交関係 $(x - s_F) \perp M_F$ を持つ．すなわち，部分和を考えている範囲 $F \subset A$ が定める部分空間 M_F 内の，x に対する最良の近似である．これが Fourier 級数の原理である．

3.4　無限化の準備

この有限範囲の観察を無限化することを考えるが，その手順は添字集合 A 上の数え上げ測度に関する Lebesgue 積分に従う．$\sum_{\alpha\in A} \varphi(\alpha)$ を，有限な部分和の上限とする定義の仕方は奇妙に思えるかもしれないが，これは Lebesgue 積分の定義に他ならない．

定義 3.4.1 (無限和の定義)**.** 添字集合 A 上の数え上げ測度を μ と表し，その上の p 乗可積分関数全体の空間を $l^p(A) := L^p(\mu)$ で表す．$l^2(A)$ は，$(\varphi, \psi) := \sum_{\alpha\in A} \varphi(\alpha)\overline{\psi(\alpha)}$ を内積として，Hilbert 空間を定める．また，$l^2(A) = L^2(\mu)$ であり，A 上のコンパクト集合とは有限集合に他ならないから，有限な台を持つ関数の全体は $l^2(A)$ 上で稠密である．特に，$\varphi \in l^2(A)$ ならば，集合 $\{\alpha \in A \mid \varphi(\alpha) \ne 0\}$ は高々可算である．

故に，$\varphi(\alpha) \in [0, \infty]$ について，$\sum_{\alpha\in A} \varphi(\alpha) := \sup_{F\subset A, |F|<\infty} \sum_{\alpha\in F} \varphi(\alpha)$ とする．

[証明]．$A_n := \left\{\alpha \in A \mid |\varphi(\alpha)| > \dfrac{1}{n}\right\}$ とおく．このとき，

$$\sum_{\alpha \in A_n} |n\varphi(\alpha)|^2 \le n^2 \sum_{\alpha \in A} |\varphi(\alpha)|^2 \in \mathbb{R}$$

より，各 A_n は有限集合だから，$\{\alpha \in A \mid \varphi(\alpha) \ne 0\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ は高々可算である．■

補題 3.4.2 (連続延長が等長同型であり続けるための条件)．X, Y を距離空間とし，$f : X \to Y$ を連続写像とする．このとき，さらに次の 3 条件が満たされれば，f は等長同型である．

(1) X は完備である．
(2) X の稠密部分集合 X_0 が存在して，$f|_{X_0}$ は等長である．
(3) $f(X_0)$ は Y 上稠密である．

注 3.4.3. f が全写であるという結論だけでも十分強い．

3.5　Hilbert 空間論

可分 Hilbert 空間 H の正規直交基底 $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ が定める Fourier 係数の対応 $H \to l^2(A)$ は等長同型である．そして，Fourier 変換は H の内積と $l^2(A)$ の内積とを結びつける：Parseval の恒等式．これは正規直交基底であることの特徴付けにもなる．

定理 3.5.1 (Bessel inequality, Riesz-Fischer theorem)．$(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ を H の正規直交系とし，P を (u_α) が有限生成する空間 (有限線型和全体のなす空間) とする．

(1) $\forall_{x \in H} \displaystyle\sum_{\alpha \in A} |\widehat{x}(\alpha)|^2 \le \|x\|^2$.
(2) Fourier 係数の対応

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} : H & \longrightarrow & l^2(A) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & \mathcal{F}[x] := \widehat{x} \end{array}$$

は連続な線型写像で，$\overline{P}$ への制限は等長同型 $\overline{P} \simeq l^2(A)$ を定める．

[証明]．

(1) 有限の場合の $\displaystyle\sum_{\alpha \in F} |\widehat{x}(\alpha)|^2 \le \|x\|^2$ という消息??(2)(b) と，無限和の定義 3.4.1 より，$\displaystyle\sum_{\alpha \in A} |\widehat{x}(\alpha)|^2 = \sup_{F \subset A, |F| < \infty} \sum_{\alpha \in F} |\widehat{x}(\alpha)|^2 \le \|x\|^2$ と従う．
(2) (a) まず，$\mathcal{F}$ の well-defined 性は (1) の Bessel の不等式により，$\widehat{x} : A \to \mathbb{R}$ はたしかに（数え上げ測度について）二乗可積分である．
  (b) 線形性は, Fourier 係数は内積を通じて定義しているので明らか：$\mathcal{F}[ax+by] = \widehat{ax+by} = a\widehat{x}+b\widehat{y} = a\mathcal{F}[x]+b\mathcal{F}[y]$.
  (c) 連続性は (1) の Bessel の不等式により，$\|\mathcal{F}[y] - \mathcal{F}[x]\|_2 = \|\widehat{y} - \widehat{x}\|_2 \le \|y - x\|$ から従う．
  (d) 有限の場合の観察 3.3.1(1) より，$\mathcal{F}$ は任意の P の元を，$C_c(A)$ 上に全写に写し，さらに等長同型である．
  (e) $\overline{P}$ は完備空間 H の閉部分集合であるから完備，$l_c^2(A) = C_c(A)$ は $l^2(A)$ 内で稠密なので，よって補題 3.4.2 より，連続な延長 $\overline{\mathcal{F}} : \overline{P} \to l^2(A)$ は等長同型である．

■

要諦 3.5.2. Bessel の不等式は，有限の場合にて Fourier 部分和は M_F への射影であると観測した 3.4.1 から，（射影がノルム減少的なので）長さは当然短くなる．無限和はその上限と定義したので，不等号は保存される，というのみの話である．

注 3.5.3. 証明の (2)(e) 部分は $L^2(T)$ が稠密である（Hilbert 空間である）ことによるため，L^p 空間が完備であるという事実を Riesz-Fisher の定理とも呼ばれている．

定理 3.5.4 (Parseval's identity：正規直交基底の特徴付け)**.** $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ を H の正規直交系する．このとき，次の 4 条件は同値：

(1) (u_α) は完全である／基底である：H 内の極大な正規直交系である．

(2) (u_α) の有限線型結合全体の集合 P は H 上稠密である．

(3) $\forall_{x\in H}\ \sum_{\alpha\in A}|\widehat{x}(\alpha)|^2 = \|x\|^2$.

(4) (Parseval's identity) $\forall_{x,y\in H}\ \sum_{\alpha\in A}\widehat{x}(\alpha)\overline{\widehat{y}(\alpha)} = (x,y)$.[†1]

［証明］．

(1)⇒(2)　P は稠密でないと仮定すると，$P^\perp \neq 0$ は零でない元を含む（直交分解定理の系）．よって，このうちノルムが 1 であるものを $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に追加した集合は再び正規直交系で，極大性に矛盾する．

(2)⇒(3)　Riesz-Fischer の定理 3.5.1(2) より，H と $l^2(A)$ とは等長同型である：$\|\widehat{x}\|_2^2 = \|x\|^2$.

(3)⇒(4)　H も $l^2(A)$ も Hilbert 空間であるから，それぞれの空間で極化恒等式

$$4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$$

を用いて，ノルムの等式 $\|\widehat{x}\|_2^2 = \|x\|^2$ は内積の等式 $(\widehat{x}|\widehat{y}) = (x|y)$ に書き直せる．

(4)⇒(1)　(1) が成り立たないとすると，$\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ のすべてと直交する元 $u \neq 0 \in H$ が取れる．この元について，ノルムは $(u,u) = \|u\|^2 > 0$ であるが，対応する Fourier 係数はすべて 0 なので，Parseval の恒等式に反する．

■

系 3.5.5 (Hilbert 空間の元の Fourier 係数と有限次元線型空間の「線型独立性」とが対応する)**.** $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ を H の正規直交基底とする．このとき，$x,y\in H$ の Fourier 係数が写像 $A\to\mathbb{C}$ として一致する $\widehat{x}=\widehat{y}$ ならば，$x=y$ である．

［証明］． $x-y$ を考えると，この Fourier 係数はすべて 0 である．よって，Parseval の恒等式の特別な場合（定理の (3)）より，$0=\|x-y\|^2$．よって，$x=y$. ■

Hilbert 空間の同型とは，内積を保存する線型作用素をいうから，次が結論づけられたことになる．

系 3.5.6. $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ は H の正規直交基底であるとし，$\widehat{x}(\alpha) := (x,u_\alpha)$ を Fourier 係数とする．このとき，写像 $\widehat{-}: H\to l^2(A)$ は Hilbert 空間の同型である．

$H=L^2(T)$ の場合について考えてみると，Fourier 展開は $L^2(T)\sim_{\text{Hilb}} l^2(\mathbb{Z})$ を与える．Riesz-Fischer の定理より，二乗和が絶対収束する数列 $(c_n)\in l^2(\mathbb{Z})$ に対して，必ず $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\ (n\in\mathbb{Z})$ を満たす周期関数 $f\in L^2(T)$ が一意的に存在する．また Parseval の定理より，$\|f-s_N\|_2^2 = \sum_{|n|\geq N}|\widehat{f}(n)|^2$ であるから，$N\to\infty$ のときこのノルムは 0 に収束する．よって，f の Fourier 級数は f に L^2-収束する．一方で，概収束を示すには，より精緻な議論を要する．

3.6　Hilbert 空間の分類

Hilbert 空間の分類は $l^2(A), l^2(B)$ の空間に移して考えることで即時に決着がつき，これが Fourier 変換論の最初の帰結になる．まず任意の Hilbert 空間は基底を持つことを示せれば，Hilb と $l^2(-)$ の間に対応がついたことになり，あとは $l^2(A)\sim_{\text{Hilb}} l^2(B) \Leftrightarrow A\sim_{\text{Set}} B$ を示せば良い．

[†1] 右辺は $\widehat{x},\widehat{y}\in l^2(A)$ の内積である．

3.7 連続関数の Fourier 級数

連続関数の Fourier 級数が各点収束するための条件を探す

以降，Banach 空間論の技術を援用して，より一般の内積が使えない場合の Fourier 級数論を展開する．

3.7.1 殆どの連続関数は Fourier 展開に失敗する

Fourier 変換は，Dirichlet 核との畳み込みの極限と見れるため，この作用素的な考察によって，ほとんどの $\mathbb{R}$ 上の点（稠密）上で Fourier 級数は収束しない関数が $C(T)$ のほとんど（稠密）であることがわかる．逆を言えば，任意の $x\in\mathbb{R}$ について，その上で収束する Fourier 級数を持つ連続関数の全体は，$C(T)$ の Baire の第一類部分集合をなす．

問題 3.7.1. Fourier 変換は二乗可積分関数上に同型 $\mathcal{F}:L^2(T)\xrightarrow{\sim}l^2(\mathbb{Z})$ を定め，特に Parseval の定理より，任意の $f\in L^2(T)$ について，Fourier 級数は L^2-収束するのであった．よって特に Cauchy 列であるから，Egoroff の定理より，Fourier 級数列の部分列が存在して，f に概収束する．では，$L^2(T)$ の元とはいわず一般に，$f\in C(T)$ の Fourier 級数はいつ各点収束するのか？：どんな $f\in C(T)$ と $x\in\mathbb{R}$ について，$\lim_{n\to\infty}s_n(f;x)=f(x)$ か？

定義 3.7.2 (Dirichlet kernel)**.** Dirichlet 核を $D_n(t):=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt}$ と定めると，Fourier 部分和は

$$s_n(f;x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{inx}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D(x-t)dt=(f*D_n)(x)$$

と表せる．すなわち，ただの有限和ではなく，積分と見れる．

議論 3.7.3 (一様有界性の原理より，すべての連続関数の Fourier 級数が概収束する訳ではない)**.**

$$s^*(f;x):=\sup_{n\in\mathbb{N}}|s_n(f;x)|$$

とおく．$\Lambda_nf:=s_n(f;0)$ として，$\Lambda_n:C(T)\to\mathbb{R}$ を定めると，Fourier 部分和とは Dirichlet 核を積分核とする積分でもあったから，これは Banach 空間 $C(T)$ 上の有界線型汎関数である．こうして得た作用素の族 $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のそれぞれについて，作用素ノルムは三角不等式により

$$\|\Lambda_n\|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt=\|D_n\|_1$$

と評価できる．実は，$\|\Lambda_n\|\to\infty\ (n\to\infty)$ である．よって，Banach-Steinhaus の定理より，ある稠密な G_δ-集合 $E_0\subset C(T)$ が存在して，その上では $\{\Lambda_n\}$ は有界でない．すなわち，$\forall_{f\in E_0}\ s^*(f;0)=\infty$．

［証明］．

Dirichlet 核の列は発散する

$$e^{it/2}D_n(t)=e^{it/2}\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt},\qquad e^{-it/2}D_n(t)=e^{-it/2}\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt},$$

の片々を引いて，

$$2i\sin xD_n(t)=e^{ikt}e^{it/2}-e^{-ikt}e^{-it/2}=2i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$$

$$D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin(t/2)}.$$

これより，

$$\|D_n\|_1>\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|\frac{dt}{t}=\frac{2}{\pi}\int_0^{(n+1/2)\pi}|\sin t|\frac{dt}{t}$$

$$> \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|dt = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \to \infty$$

と評価できる．

Γ_n の列のノルムは Dirichlet 核のノルムに一致する　任意の $n \in \mathbb{N}$ を取る．列 $\{f_i\} \subset L^1(T)$ であって，$\Lambda_n(f_j) \xrightarrow{j\to\infty} \|D_n\|_1$ であるものが取れれば，$\|\Lambda_n\| = \|D_n\|_1$ がわかる．

$$g(t) := \begin{cases} 1, & D_n(t) \geq 0, \\ -1, & D_n(t) < 0. \end{cases}$$

と定めると，これは可積分だから，ある $\{f_j\} \subset C(T)$ が存在して，$-1 \leq f_j \leq 1$ を満たし，g に各点で収束する．よって，Lebesgue の優収束定理より，

$$\lim_{j\to\infty}\Lambda_n(f_j) = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_(-t)D_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(-t)D_n(t)dt = \|D_n\|_1.$$

■

命題 3.7.4. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して稠密な G_δ 集合 $E_x \subset C(T)$ が存在して，$\forall_{f\in E_x}\ s^*(f;x) = \infty$ が成り立つ．

定理 3.7.5. 稠密な G_δ-集合 $E \subset C(T)$ が存在して，次を満たす：

任意の $f \in E$ に対して，集合 $Q_f := \{x \in \mathbb{R} \mid s^*(f;x) = \infty\}$ は $\mathbb{R}$ の稠密な G_δ-集合である．

実は，E と Q_f は非可算無限集合である．

命題 3.7.6. 完備距離空間 X は孤立点を持たないとする．このとき，G_δ-である可算な稠密部分集合は存在しない．

以上より，結論としては，$C(T)$ のうちほとんどの関数（稠密）は，$\mathbb{R}$ 上のうちほとんどの点（稠密）で Fourier 級数は発散する．

3.7.2　条件を緩めることによって解決可能

定義 3.7.7. $0 < \alpha \leq 1$ について，α-次の Lipschitz 条件を満たす関数 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ を

$$M_f := \sup_{s\neq t}\frac{|f(s)-f(t)|}{|s-t|^\alpha} < \infty.$$

と定める．その全体を Lipα と表す．

命題 3.7.8. Lipα はノルム $\|f\| = |f(a)| + M_f$ あるいはノルム $\|f\| = M_f + \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ について Banach 空間となる．

命題 3.7.9. ある $0 < \alpha \leq 1$ について，$f \in C(T) \cap$ Lipα は，その Fourier 級数は f に各点収束する．

3.8　可積分関数の Fourier 係数

では，L^2 までは行かなくとも，もっと緩い可積分性によって $C(T)$ の条件を緩めるとどうか？

定理 3.8.1 (Riemann-Lebesgue の補題)**.** 任意の $f \in L^1(T)$ に関して，対応する Fourier 係数 $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ は，$\widehat{f} \in C_0(\mathbb{Z})$ である．

$$\mathcal{F}[f](n)\ \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \xrightarrow{|n|\to\infty} 0.$$

これは，$L^1(\mathbb{R}) \sim C_0(\mathbb{Z}) =: c_0$ なる Riesz-Fischer の再来のような関係を期待させる．[†2]任意の，無限遠点で消失する係数列 (a_n) に対して，これを Fourier 係数として持つ可積分関数 $f \in L^1(T)$ は存在するか？これは直感的には極めて存在しそうであるが，開写像定理より否と証明される．

[†2] Z に離散位相を入れると，$\mathbb{Z}$ は局所コンパクトハウスドルフで，まさに $c_0 = C_0(\mathbb{Z})$ である．

定理 3.8.2 (Riemann-Lebesgue の補題の部分逆は成り立つ). Fourier 係数の対応

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} : L^1(T) & \longrightarrow & c_0 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f & \longmapsto & \widehat{f} \end{array}$$

は単射な有界線型作用素であるが，全射ではない．

3.9 Poisson 積分

Poisson 積分とは，T 上の Radon 測度 μ_z を，$[-\pi, \pi]$ 上の Lebesgue 測度に変換したときに生じる積分核 $P_r(\theta - t)$ に関する畳み込みである．

記法 3.9.1. K をコンパクトハウスドルフ空間，H をそのコンパクト部分集合とする ($K = [\Delta]$ の境界の一般化)．ノルム $\|f\|_E := \sup_{x\in E}|f(x)|$ $(E \subset K)$ に関して，$A \subset C(K)$ は $1 \in A$ を満たし，$\forall_{f\in A}\ \|f\|_K = \|f\|_H$ を満たす関数のなす線型部分空間とする．これは最大値の原理を満たす連続関数全体の空間となる：$\forall_{f\in A, x\in K}\ |f(x)| \le \|f\|_H$．これはすなわち，任意の点 $x \in K$ について，評価作用素 $\mathrm{ev}_x : M \to \mathbb{F}$ はノルム 1 の有界線型汎関数である．なお，M とは，制限作用素 $|_H : C(K) \to C(H)$ の A への制限は全単射な等長同型 $A \xrightarrow{\sim} |_H(A) =: M \subset C(H)$ を引き起こすときの像とした．特に，任意の M の元は A の元であるような K 全体への一意な延長を持つ．

よって，$\mathrm{ev}_x : M \to \mathbb{F}$ は，延長 $\Lambda : C(H) \to \mathbb{F}$ を持ち，これは再びノルム 1 である：$\Lambda 1 = 1, \|\Lambda\| = 1$．実はこのことから，$\Lambda \in (C(H))^*$ は正な線型汎関数であることが従う．すると Riesz の表現定理より，H 上のある Radon 測度（正則な Borel 測度）μ_x が存在して，

$$\forall_{f\in C(H)}\ \Lambda f = \int_H f d\mu_x$$

と表現される．特に，$f \in A$ については $f(x) = \int_H f d\mu_x$．

命題 3.9.2. 任意の $x \in K$ に対応した境界 H 上の測度 μ_x が存在して，任意の $f \in A$ に対して次が成り立つ：

$$f(x) = \int_H f d\mu_x.$$

μ_x の一意性は一般には言えないが，次のような状況では成り立つ．

例 3.9.3 (Poisson 積分の設定). $K := [\Delta], H := T = \partial\Delta$ とする．このとき，任意の多項式 f は最大値の原理を満たす：$\|f\|_U = \|f\|_T$．そこで，$A \subset C([\Delta])$ を，多項式の全体を含み，$\forall_{f\in A}\ \|f\|_U = \|f\|_T$ を満たす関数の線型部分空間とする．このとき，任意の $z \in \Delta$ に対して，T 上の Borel 測度 μ_z が存在して

$$f(z) = \int_T f d\mu_z \quad (f \in A)$$

を満たす．

定義 3.9.4.

$$P_r(\theta - t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)} \quad t, \theta \in \mathbb{R}$$

を **Poisson 核**という．これは，次のようにも表現できる：

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}.$$

特に，$\forall_{0\le r<1}\ P_r(\theta - t) \ge 0$ である．なお，$r \to 1$ の極限について，(P_r) は Banach 代数 $L^1(T)$ の近似的単位元をなす．

［証明］． $z = re^{i\theta}$ とすると，$(ze^{-it})^n = r^n e^{in(\theta-t)}$ で，この実部と $r^{|-n|}e^{-in(\theta-t)}$ の実部は一致する．よって，$P_r(\theta - t)$ の実部は，次の式の実部に一致する：

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(ze^{-it})^n = \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{1 - r^2 + 2ir\sin(\theta - t)}{|1 - ze^{-it}|^2}.$$

■

定理 3.9.5 (Poisson 積分)**.** $A \subset C([\Delta])$ を線型部分空間とする．A が多項式の全体を含み，$\forall_{f\in A}\ \sup_{z\in\Delta}|f(z)| = \sup_{z\in T}|f(z)|$ を満たすならば，任意の $f \in A$ と $z \in \Delta$ について，次の Poisson 積分表現が出来る：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}f(e^{it})dt \quad (z = re^{i\theta})$$

要諦 3.9.6. 逆に，任意の T 上の可積分関数 $f : T \to \mathbb{C}$ を与えた時，これの単位円板上への延長 $\overline{f} : [\Delta] \to \mathbb{C}$ であって，$\sup_{z\in U}|\overline{f}(z)| = \sup_{z\in T}|f(z)|$ を満たすもの（これは調和性に同値）が一意に存在する．この自然な対応を掴むのが関数解析.

3.10　**半平面上の** Poisson **核**

定義 3.10.1.

(1) $H(t) := e^{-|t|}$ と定める.

(2) その Fourier 変換を $h_\lambda(x) := (H(\lambda t), e^{-itx}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)e^{itx}dm(t)$ $(\lambda > 0)$ と定める．これを**上半平面における Poisson 核**という.

補題 3.10.2 (上半平面の Poisson 核の性質)**.**

(1) $h_\lambda(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\lambda}{\lambda^2+x^2}$.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(x)dm(x) = 1$.

(3) $0 < H(t) \leq 1$．$H(\lambda t) \xrightarrow{\lambda\to 0} 1$.

定理 3.10.3. $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(p \in [1,\infty])$ に対して，$(f * h_\lambda)(x)$ は上半平面上で定義された $x + i\lambda \in \mathbb{H}$ の調和関数である.

第 4 章

Fourier 変換

4.1 Formal Property

周期関数 $f \in L^2(T)$ や $f \in L^1(T)$ に関する Fourier 変換を，まず Fourier 係数列への対応 $\mathcal{F}: L^1(T) \to C_0(\mathbb{Z}) = c_0$ として考えた．では $\mathbb{Z}$ 上から $\mathbb{R}$ 上へと拡張しようとすると，ほとんどの $f \in C(T)$ では失敗するが，$f \in L^p(T)$ $(1 < p \le \infty)$ では殆ど至る所の $x \in \mathbb{R}$ で成功する．一般の関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ については，Fourier 変換を実数上の関数として調べる．

記法 4.1.1.

(1) dx を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度，m をそれを $\sqrt{2\pi}$ で割ったものとする：

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dm(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

(2) p-ノルムの定義も変わる：

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dm(x) \right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty).$$

(3) 畳み込み：

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dm(y) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(4) $f \in L^1$ に対して，$t \in \mathbb{R}$ によって定まる積分核 e^{-ixt} によって積分したものを **Fourier 変換** $\widehat{\ } : L^1 \to L^1$ といい，次のように表す：

$$\hat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}dm(x) \quad (t \in \mathbb{R})$$

(5) $L^p(\mathbb{R}), C_0(\mathbb{R})$ を L^p, C_0 と略記する．

定義 4.1.2.

(1) $\mathbb{R}$ から，$\mathbb{C}$ の乗法部分群 S^1 への群準同型を**指標**という：$|\varphi(t)| = 1, \varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$.

定理 4.1.3 (Fourier 変換の関手性)**.** $f \in L^1, \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ とする．Fourier 変換は，指標による積を平行移動に，平行移動を指標による積に変換し，畳み込みを各点積に変換する：

(1) $g(x) = f(x)e^{i\alpha x} \Rightarrow \widehat{g}(t) = \widehat{f}(t-\alpha)$.
(2) $g(x) = f(x-\alpha) \Rightarrow \widehat{g}(t) = \widehat{f}(t)e^{-i\alpha t}$.
(3) $g \in L^1 \wedge h = f * g \Rightarrow \widehat{h}(t) = \widehat{f}(t)\widehat{g}(t)$.

また，次が成り立つ：

(4) $g(x) = \overline{f(-x)} \Rightarrow \widehat{g}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$.

(5) $g(x) = f(x/\lambda) \wedge \lambda > 0 \Rightarrow g(t) = \lambda f(\lambda t)$.
(6) $g(x) = -ixf(x) \wedge g \in L^1 \Rightarrow \widehat{f}$ は微分可能で $\widehat{f}'(t) = \widehat{g}(t)$.

要諦 4.1.4. 以上の結果は，ひとえに m の平行移動不変性と，任意の $t \in \mathbb{R}$ について積分核 $x \mapsto e^{itx}$ は $\mathbb{R}$ の指標であることによる．なお，$\mathbb{R}$ の連続な指標はすべて指数関数によって表現される．

注 4.1.5 ((6) の逆)**.** 微分を ti による積に変換することから，Fourier 変換は常微分方程式論でも応用される．$f, f' \in L^1$ のとき，$\widehat{f'} = it\widehat{f}(t)$ である．

4.2 The Inversion Theorem

元の世界に戻す方法があって初めて，Formal Property が応用上の意味を持つ．

4.2.1 可積分条件

議論 4.2.1 (Fourier 級数に関する逆転公式)**.** Fourier 係数列が

$$c_n = (f, e^{inx}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

であった場合，元の関数は $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \in L^2(T)$ となるのであった．しかし，f の級数の収束は各点においては定まらない．しかし，追加で $c_n \in L^1(\mu) = l^\infty$ を仮定すれば，級数は一様収束するから，Fourier 級数は f に殆ど至る所収束する．

記法 4.2.2. 任意の関数 $f \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ と点 $y \in \mathbb{R}$ について，f の y-平行移動を

$$f_y(x) = f(x - y)$$

で表す．

補題 4.2.3. $f \in L^p$ $(1 \le p < \infty)$ に対する平行移動写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & L^p(\mathbb{R}) \\ \cup & & \cup \\ y & \longmapsto & f_y = (f \cdot -y) \end{array}$$

は一様連続である．

命題 4.2.4. $\mathcal{F} : L^1 \to C_0$ がノルム減少的な写像 (short map) であることを定立する．

(1) $f \in L^1$ ならば $\widehat{f} \in C_0$ である．
(2) $\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$.

4.2.2 灯台

正関数 H と，その Fourier 変換 h_λ であって積分が明らかなものの組を把握しておく．これはなんでも良いが，Poisson 核とする．

命題 4.2.5. $f \in L^1$ ならば，

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\widehat{f}(t)e^{ixt}dm(t).$$

命題 4.2.6. $g \in L^\infty$ は $x \in \mathbb{R}$ において連続であるとする．このとき，

$$\lim_{\lambda \to 0}(g * h_\lambda)(x) = g(x).$$

命題 4.2.7. $f \in L^p$ $(1 \le p < \infty)$ について，$\lim_{\lambda \to 0}\|f * h_\lambda - f\|_p = 0$.

4.2.3　逆転公式

定理 4.2.8 (The Inversion Theorem). $f, \widehat{f} \in L^1$ で，

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) e^{ixt} dm(t) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たすとする．このとき，$g \in C_0$ かつ $f = g$ a.e.

定理 4.2.9 (The Uniqueness Theorem). $f \in L^1$ かつ $\widehat{f} = 0$ ならば，$f(x) = 0$ a.e.

4.3　The Plancherel Theorem

4.4　The Banach Algebra L^1

4.5　急減少関数空間

可積分関数の $\mathcal{F}$ による像は可積分とは限らない．そこで，$\mathcal{F}$ が保存する性質を探したい．そのうち一つは急減少性である．$\mathcal{F}$ は複素 Frechet 空間 $S(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上に線型自己同型を定め，標準的な Fourier 変換 $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ の自然な延長となる．この性質により，突然この空間が調和解析の中心へと躍り出る．緩増加関数の空間 $D'(X)$ は，線型偏微分方程式を解く自然な場となる．

4.5.1　多重指数

基底 $x := (x^1, \cdots, x^n)$ に対して，これらの組み合わせの冪を簡潔に表記する記法を導入する．

定義 4.5.1. 集合 $\mathbb{N}^d$ に各点和と l_1-ノルム $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$，階乗 $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$ を備えた区間の元を多重指数という．

(1) 二項係数について $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_d}{\beta_d}$ とする．

(2) $f \in C^d(\mathbb{R}^d)$ に対する偏微分について，$\partial^\alpha f = \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} f$ とする．

(3) $x \in \mathbb{R}^d$ に対して，$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ とする．

4.5.2　定義

一般に $\mathbb{R}^n$ 上の急減少関数とは，$\mathbb{R}$ の座標写像の任意の冪との積写像が有界写像であることをいう．が，主に議論の対象となる，無限階微分可能な急減少関数とは，任意階の (偏) 導関数が急減少であることをいう．

記法 4.5.2.

$$D_j := \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d} = \frac{1}{i^{|\alpha|}} \partial^\alpha$$

定義 4.5.3 (rapidly decreasing function, the Schwartz space). $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ が**急減少偏導関数を持つ滑らかな関数**であるとは，$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right|$ をノルムとして，

$$S(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n} \ \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty \}$$

に属することをいう．これに，半ノルムの族 $p_{\alpha,\beta}(f) := \|x^\alpha \partial_\beta(f)(x)\|_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}}$ が引き起こす位相を入れた空間 $S(\mathbb{R}^n)$ を **Schwartz 空間**という．

要諦 4.5.4. 無限回微分可能な関数であるが，$|x| \to \infty$ を考えたときに，任意階の導関数が，x の任意の負冪よりも速くゼロに収束するものをいう．これは確率分布との関連で捉えると見通しが良い．どうして収束の速さが Fourier 変換と関係があるのだろうか．

例 4.5.5 (Gauss 関数)**.** $\forall_{i\in\mathbb{N}^n}\ \forall_{a>0}\ x^i e^{-a|x|^2} \in S(\mathbb{R}^n)$.

例 4.5.6. 隆起関数は Schwartz 関数である：$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

定理 4.5.7.

(1) Schwartz 関数は可積分である：$\forall_{p\in[1,\infty]}\ S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.
(2) 実は，$\forall_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \displaystyle\int_{x\in\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x)\mathrm{dvol}(x) < \infty$ も満たす．
(3) $S(\mathbb{R}^n)$ は複素 Frechet 空間をなす．
(4) Fourier 変換 $\widehat{(-)} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は線型同型を定める．

4.6　急減少関数の Fourier 変換

参考文献

[1] J. Korevaar "Fourier Analysis and Related Topics"
[2] 高橋陽一郎『実関数と Fourier 解析』
[3] Rudin "Real and Complex Analysis" 3rd
[4]