**概要**

統計学コースの研究計画書は、A4 版の用紙で 10 ページ以内とし、最初の 3 ページに統計コースを志望した理由、動機とともに入学後の研究計画を記載し、残りの枚数で統計学または計量経済学に関するエッセーを記載すること。エッセーは、例えば卒論の内容でも、今興味を持って取り組んでいる課題を小論文として執筆したものでもよい。ただし、数学的な能力の高さを評価するので、エッセーは数式に基づいて論理的に記述された内容である必要がある。なお、使用言語は日本語又は英語とする。

# 1　研究計画

## 1.1　志望動機

高校時代は自然科学と社会科学が好きで，受験数学の点数は伸び悩んでも，物理は大学教養過程の教科書も用いて完全な答案を書くことに精を出した．一方で受験とは関係ないながらも，隙間時間で心理学や行動経済学などの分野で学会をリードする学者の書籍を読み，ときには巻末の参考文献を参照して，将来はこのような研究者になりたいと考えていた．特に読みふけたのは Daniel Kahneman "Thinking Fast and Slow"の翻訳書 [1] で，

## 1.2　研究計画について

# 2　影響関数を用いたワンステップ推定

滑らかなノンパラメトリックモデルにおける最適な推定量は，ワンステップ推定量として構成できる．その（滑らかな）セミパラメトリックモデルにおける対応物としては，影響関数なる無限次元解析の言葉が自然に現れる．そこで，標準的な構成法を得るには，Malliavin 解析からの知見が生きる可能性が十分にある．

**記法 2.1.** 以下，断りなく用いる記法をここにまとめる．

(1) $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, P_\theta; \mathbb{R}^p)$ により，確率空間 $(\mathcal{X}, P_\theta)$ 上の 2 乗可積分な $\mathbb{R}^p$-値関数の全体のなす線型空間を表す．$\mathcal{X}$ が明らかな場合は省略し，$p = 1$ の場合は $\mathbb{R}^p$ も省略する．

(2) $P(\mathcal{X})$ によって，可測空間 $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 上の確率測度全体のなす空間とする．

(3) $f : \mathcal{X} \rightharpoonup \mathbb{R}$ によって，$\mathcal{X}$ の全体で定義されているとは限らない部分関数 $f|_{\mathrm{Dom}f} : \mathrm{Dom}f \to \mathbb{R}$ を表す．

## 2.1　パラメトリックモデルの場合

推定量の有効性を漸近分散の小ささで測ることとしよう．すると，正則性条件を満たす滑らかなパラメトリックモデルについては，次の結果が成り立つのであった．

**定理 2.2** (Cramer-Rao). $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^q$ で添字付けられたパラメトリックモデル $(P_\theta)_{\theta\in U}$ と，偏微分可能な関数 $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ と，その $\theta \in U$ における不偏推定量 $\delta \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X}^n; \mathbb{R}^p)$ とについて，次を仮定する：

(A0) 分布族 $(P_\theta)_{\theta\in U}$ はある $\sigma$-有限な参照測度 $\mu \in P(\mathcal{X})$ に関して絶対連続とし，その Radon-Nikodym 微分を $p_\theta : \mathcal{X} \to [0, 1]$ で表す．

(A1) $p_-(x) : U \to [0, 1]$ は $P_\theta$-a.e. $x$ に関して偏微分可能である．

(A2) $p_\theta(x) > 0$ を満たす点 $(x, \theta)$ の上で，スコア関数の第 $i$ 成分 $\psi_i : \mathcal{X} \times U \rightharpoonup \mathbb{R}$ を $\psi_i(x, \theta) := \dfrac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial \theta_i} = \dfrac{1}{p_\theta}\dfrac{\partial p_\theta}{\partial \theta_i}$ と定めると[†1]，二次の絶対積率が有限 $\psi_i(-, \theta) \in \mathcal{L}^2(P_\theta)$：

$$E_{P_\theta}[|\psi_i|^2] = \int_{\mathcal{X}} |\psi_i(x, \theta)|^2 p_\theta(x)\mu(dx) < \infty \qquad (\forall_{i\in[q]}).$$

(A3) 各 $\theta \in U$ における Fisher 情報行列 $I = (I_{ij})$ を，第 $(i, j)$-成分を

$$I_{ij}(\theta) := \mathrm{Cov}_{P_\theta}[\psi_i, \psi_j] = \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial \theta_i}\frac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial \theta_j} \cdot p_\theta(x)\mu(dx) \qquad (\forall_{i,j\in[q]}).$$

[†1] $\{x \in \mathcal{X} \mid p_\theta(x) = 0\}$ 上で $\psi_i(-, \theta)$ は定義されていないことに注意．

とすることによって定めると，正定値な対称行列となる．

(A4) 不偏推定量 $\delta$ は $\psi := (\psi_1, \cdots, \psi_q)^\top$ が定める推定方程式の解であり：$E_{P_\theta}[\psi] = \int_{\mathcal{X}} \psi(x,\theta)p_\theta(x)\mu(dx) = 0 \in \mathbb{R}^q$，かつ，次の微分と積分の可換性が成り立つ：

$$\int_{\mathcal{X}} \delta(x)\psi_i(x,\theta)p_\theta(x)\mu(dx) \left( = \int_{\mathcal{X}} \delta(x)\frac{\partial p_\theta}{\partial \theta_i}\mu(dx) \right) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\int_{\mathcal{X}} \delta(x)p_\theta(x)\mu(dx) \qquad (i \in [q]).$$

このとき，関数 $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ の Jacobi 行列を $J(\theta) := \frac{\partial g}{\partial \theta} \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ とすると，次の行列不等式が成り立つ：

$$\mathrm{Var}_\theta[\delta] \geqslant J(\theta)I(\theta)^{-1}J(\theta)^\top.$$

**［証明］．** 任意に $\theta \in U$ を取り，$I := I(\theta), J := J(\theta)$ と略記する．

**共分散への翻訳** 仮定 (A4) より，

$$J = \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}E_\theta[\delta] = E_\theta[\delta\psi^\top].$$

これと $E_\theta[\psi] = 0$ より，

$$\mathrm{Cov}_\theta[\psi, \delta] = E_\theta[\psi\delta^\top] = J^\top.$$

$I = E_\theta[\psi\psi^\top] = \mathrm{Var}_\theta[\psi]$.

**証明** すると，Cauchy-Schwartz の不等式同様，$\mathrm{Var}_\theta[\delta - JI^{-1}\psi] \geqslant O$ であることから，Cov の双線型性のみから従う．また，対称行列 $S$ に対して，$S^{-1} = (S^{-1})^\top = (S^\top)^{-1}$ であることと Fisher 情報行列が対称であることに注意すると，

$$\begin{aligned} O &\leqslant \mathrm{Var}_\theta[\delta - JI^{-1}\psi] = \mathrm{Cov}[\delta - JI^{-1}\psi, \delta - JI^{-1}\psi] \\ &= \mathrm{Var}_\theta[\delta] - JI^{-1}\mathrm{Cov}_\theta[\psi, \delta] - \mathrm{Cov}_\theta[\delta, \psi]I^{-1}J^\top + JI^{-1}\mathrm{Var}[\psi]I^{-1}\psi^\top \\ &= \mathrm{Var}_\theta[\delta] - JI^{-1}J^\top. \end{aligned}$$

■

# 3 Malliavin 解析による汎関数推定量の漸近展開

## 3.1 ロバスト推定について

# 参考文献

[1] ダニエル・カーネマン『ファスト＆スロー』（村井章子著・訳，早川書房，2012 年）．