目次

第 1 章

集合と写像

記法 1.0.1.

(1) 位相空間論では集合の概念については次の 3 点のみを使用し，その定義については抽象化して informal に言及する．
  (1) 像写像は合併は保つが，共通部分は不完全にしか保たない（命題 1.1.2）．
  (2) 逆像写像は合併も共通部分も保つ（命題 1.1.2）．
  (3) de Morgan の法則（命題**??**）．
(2) 集合 X に対し，その有限部分集合全体からなる集合を

$$F(X) := \{A \in P(X) \mid |A| < \infty\}$$

と置く．

1.1 写像の定める関手

1.1.1 関手性

問題 1.1.1 (A2.5.3). $f_* : P(X) \to P(Y)$ の値域について，$f_*(P(X)) = P(f(X))$.

［証明］. ■

命題 1.1.2 (像と逆像と集合演算の絡み合い).

(1) (adjunction) $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.
(2) f の像について次が成り立つ．
  (1) $A \subset f^{-1}(f(A))$.
  (2) $A' \subset A \Rightarrow f(A') \subset f(A)$.
  (3) $f(\cup_{i\in I}A_i) = \cup_{i\in I}f(A_i)$，$f(\cap_{i\in I}A_i) \subset \cap_{i\in I} f(A_i)$.
  (4) f が単射ならば，$A = f^{-1}(f(A))$．f が単射で，I が inhabited (not empty) ならば，$f(\cap_{i\in I}A_i) = \cap_{i\in I}f(A_i)$.
(3) f の逆像について，次が成り立つ．
  (1) $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$，$f^{-1}(Y\backslash B) = X\backslash f^{-1}(B)$.
  (2) $B \subset B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
  (3) $f^{-1}(\cup_{i\in I}B_i) = \cup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$，$f^{-1}(\cap_{i\in I}B_i) = \cap_{i\in I}f^{-1}(B_i)$.

注 1.1.3 (proof via adjoints). 1. の性質を，f_* は f^* の left adjoint である，という．なお，向きは，包含写像 $i : f(A) \to B$ の向きで左右が決まっている．これは内積空間での関係 $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ から来たものである．あえて書くなら，$\langle f(A), B\rangle = \langle A, f^{-1}(B)\rangle$ である．ただし $\langle S, T\rangle$ とは，$S \subset T$ とした．in fact the analogy is not idle; see for instance Baez.

［証明］.

1. adjunction　どちらも，$x \in A \Rightarrow f(x) \in B$ という論理式の表現である．

2. Union, reasoning foreward/backward trick　1. より，任意の族 $(S_i)_{i\in I}$ と集合 T について，次の同値変形が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{i\in I} f(S_i) \subset T &\Leftrightarrow \forall i \in I,\ f(S_i) \subset T && (1.1)\\
&\Leftrightarrow \forall i \in I,\ S_i \subset f^{-1}(T) && (1.2)\\
&\Leftrightarrow \bigcup_{i\in I} S_i \subset f^{-1}(T) && (1.3)\\
&\Leftrightarrow f\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right) \subset T. && (1.4)
\end{aligned}
$$

1.1,1.3 行目の変形は，$\cup$ の定義 (defining property) による．1.2,1.4 が 1. の adjunction を用いた世界線の飛び越えである．いま，$T = \cup_{i\in I} f(S_i)$ とすると初めの主張が真であるから，前方向に同値変形すると $f(\cup_{i\in I} S_i) \subset \cup_{i\in I} f(S_i)$ を得る．続いて $T = f(\cup_{i\in I} S_i)$ とすると，終わりの主張が真であるから，後ろ方向に同値変形すると $\cup_{i\in I} f(S_i) \subset f(\cup_{i\in I} S_i)$ を得る．2 つ併せて，$\cup_{i\in I} f(S_i) = f(\cup_{i\in I} S_i)$ を得る．

2. Intersection, reasoning foreward/backward trick　同様にして 1. より，

$$
\begin{aligned}
S \subset \bigcap_{i\in I} f^{-1}(T_i) &\Leftrightarrow \forall i \in I,\ S \subset f^{-1}(T_i)\\
&\Leftrightarrow \forall i \in I,\ f(S) \subset T_i\\
&\Leftrightarrow f(S) \subset \bigcap_{i\in I} T_i\\
&\Leftrightarrow S \subset f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} T_i\right).
\end{aligned}
$$

同様の reasoning foreward/backward trick により，$\cap_{i\in I} f^{-1}(T_i) = f^{-1}(\cap_{i\in I} T_i)$ を得る．

3. **像と交叉**

$$
\begin{aligned}
f\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right) \subset \bigcup_{i\in I} f(S_i) &\Leftrightarrow (\forall_{i\in I})\ f\left(\bigcap_{i\in I} S_i\right) \subset S_i && \text{definingpropertyofintersection}\\
&\Leftarrow (\forall_{i\in I})\ \bigcap_{i\in I} S_i \subset S_i && \text{((2) より)}
\end{aligned}
$$

■

要諦 1.1.4.

(1) 確か二重否定則を使わないと戻ってこれないのも，de Morgan のうち，$\neg\forall$ や $\neg\wedge$ だったよな？絶対つながっているよな．
(2) reasoning forward/backward trick とは結局，poset 上で $A = B$ iff $\forall T,\ A \leqslant T \Leftrightarrow B \leqslant T$ またはその双対命題を推論しているのである．This trick is vastly extrapolated by the Yoneda lemma.
(3) Category theorists は，像 $f_*(S)$ を $\exists_f(S)$ と表し，像写像を $\exists_f : P(X) \to P(Y)$ と存在量化子と同一視して理解する．The suggestion is to view existential quantification as corresponding to taking of a direct image. そもそも通常の命題 $P \subset X \times Y$ に対する存在量化された命題 $(\exists_{x\in X})P(x, y)$ とは，（形式化して条件を集合と見れば）像 $\mathrm{pr}_2^*(P)$ に他ならないからである．これに軸足を移して，存在量化子の意味を，射影だけでなくより普遍的な写像について像を取ること，とみなせる．
(4) こうすると，随伴関係は $\exists_f \dashv f^*$ と表せる．Which is an example of a famous slogan due to Lawvere: “Logical quantification is adjoint to substitution”(with resonances far beyond the purview of logic as ordinarily conceived).

1.1.2　和と積

補題 1.1.5.

(1) $(f, g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$（積位相の特徴付け（命題**??**）で使用）．
(2) $(\prod_{i\in I} U_i) \cap (\prod_{i\in I} V_i) = \prod_{i\in I}(U_i \cap V_i)$（積位相の普遍性（命題**??**）で使用）．

1.1.3　可逆性の特徴付け

命題 1.1.6 (可逆射の普遍性による特徴付け：集合を，他の集合への写像についての述語で特徴付けること)**.** $f : X \to Y$ を写像とする．次の 2 条件は同値である．

(1) f は可逆である．
(2) 任意の集合 Z に対して，写像 $f^* : \mathrm{Map}(Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, Z)$ は可逆である．

1.1.4　全射・単射性の特徴づけ

命題 1.1.7 (双対命題)**.** $f : X \to Y$ を写像とし，$f^* : P(Y) \to P(X)$ を冪集合の上に定まる写像

$$\begin{array}{ccc} P(Y) & \longrightarrow & P(X) \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ A & \longmapsto & f^{-1}(A) \end{array}$$

とする．

(1) f が単射であることと，f^* が全射であることは同値である．
(2) f が全射であることと，f^* が単射であることは同値である．

［証明］.

1. $\Rightarrow$　$f : X \to Y$ が単射とする．f^* は 2 で $\{1\} \in P(2)$ を普遍元として表現されるから，

$$\begin{array}{ccc} f^* : \mathrm{Hom}(Y, 2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X, 2) \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ \chi : Y \to 2 & \longmapsto & \chi \circ f : X \to 2 \end{array}$$

が全射であることを示せば良い．即ち，任意の $\eta : X \to 2 \in \mathrm{Hom}(X, 2)$ が f に沿って分解することを示せば良い．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "f"] \arrow[dr, "\eta"'] & Y \arrow[d, dotted, "\chi"] \\ & 2 \end{tikzcd}$$

これは，f は単射であることを使えば，命題 1.3.3 より，必ず分解する．まず，$\overline{f} : X \to f(X)$ を考えると，これは全単射であるから，$R_{\overline{f}}$ は自明な同値関係である．従って必ず η の定める同値関係よりも細かいから，適切な $\overline{\chi} : f(X) \to 2$ が存在する．残りの $Y \backslash f(X)$ については勝手に定めて $\chi : Y \to 2$ を定めれば良い．

1. $\Leftarrow$　$f^* : P(Y) \to P(X)$ が全射の下で $x \neq y$ について $f(x) = f(y)$ が成り立つと仮定して矛盾を導く．$x \neq y$ の時，$x \in A \wedge y \notin A$ を満たす $A \subset X$ を任意にとれば（$A = \{x\}$ など $A \subsetneq f^{-1}(x)$ を満たすものなら適格），$A = f^{-1}(B)$ を満たす $B \subset Y$ は存在しないので，f^* が全射であることに矛盾．

2. $\Rightarrow$　$f : X \to Y$ が全射とする．$\chi, \eta \in \mathrm{Hom}(Y, 2)$ について，$f^*(\chi) = f^*(\eta)$ とする．即ち，$\chi \circ f = \eta \circ f$．$f$ が全射の時 epic であるから（定理 1.2.6），$\chi = \eta$ が従う．よって，$f^* : P(Y) \to P(X)$ は単射．

2. $\Leftarrow$　$f^* : P(Y) \to P(X)$ が単射の時，ある $x \in Y$ について $f^{-1}(x) = \varnothing$ とすると，$f^{-1}(x) = f^*(\{x\}) = f^*(\varnothing)$ となるので，$|(f^*)^{-1}(\varnothing)| \geqslant 2$．$f^*$ が単射であることに矛盾．よって，f は全射．

■

要諦 1.1.8. もっと簡単に示せるんじゃないか？壮大な duality の理論があるのではないか？ Twitter でたまたまヤヌス対象を知ったが，$K \in \mathrm{Vect}_K$ が数えられていない．僕の理想とする理論はまた違う．

本当にもっと簡単に示せた！ありがとうございます小泉さん！

［証明］．集合 S に対して，全単射

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathcal{F}_2^{\oplus S}\right)^\vee & \longrightarrow & P(S) \\ \Psi & & \Psi \\ g & \longmapsto & \{s \in S \mid g([s]) = 1\} \end{array}$$

が存在することに着目する．ただし，$(-)^\vee$ は $\mathcal{F}_2$-線型空間の双対を表す．

写像 $f: A \to B$ は $\mathcal{F}_2$-線型写像 $\varphi_f : \mathcal{F}_2^{\oplus A} \to \mathcal{F}_2^{\oplus B}$ を誘導し，f の単射性・全射性は φ_f の単射性・全射性と同値である．また，双対写像 $\varphi_f : \left(\mathcal{F}_2^{\oplus B}\right)^\vee \to \left(\mathcal{F}_2^{\oplus A}\right)^\vee$ は上記の全単射により $f^* : P(B) \to P(A)$ に対応する．よって主張は次の補題から従う． ■

要諦 1.1.9 (欲しかった概念：入射的対象)．双対写像に対応した！なんと美しい証明であるか．やはり 2 と k には何かしらの関連があったのだ．そして線型空間の理論には，K 以外が要らないのか，もしかして．２つで一つと見做す双線型形式の見方と，テンソル積とで十分なのかもしれない．

補題 1.1.10. k を体とする．$\varphi : V \to W$ を k-線型空間の間の線型写像とし，$\varphi^* : W^\vee \to V^\vee$ をその双対写像とする．この時，

(1) φ が単射であることは，φ^* が全射であることと同値である．
(2) φ が全射であることは，φ^* が単射であることと同値である．

［証明］．

(1) $0 \to \mathrm{Ker}\,\varphi \to V \to W \to \mathrm{Coker}\,\varphi \to 0$ は完全列である．
(2) k は k 加群として入射的．即ち，関手 $\mathrm{Hom}(-, k)$ は完全となる．
(3) $0 \to (\mathrm{Coker}\,\varphi)^\vee \to W^\vee \to V^\vee \to (\mathrm{Ker}\,\varphi)^\vee \to 0$ は完全列である．

■

命題 1.1.11 (全射の双対写像)．

(1) f が全射の時，定理 1.2.6 より，split epi だから，右逆射 (section) $f^{-1} : Y \to X$ が存在して，
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y \Rightarrow (f^{-1})^* \circ f^* = \mathrm{id}_Y^* = \mathrm{id}_{P(Y)}.$$
よって，$(f^{-1})^*$ は f^* の左逆射 (retraction) であるという意味で $(f^*)^{-1}$ とも表し得る．
(2) f が全射の時，同じく split mono だから，あるいは命題 1.1.2.3 より，任意の部分集合 $B \subset Y$ について $f(f^{-1}(B)) = \mathrm{id}_Y(B) = B = B \cap f(X)$．従って，$f_* \circ f^* = \mathrm{id}_{P(Y)}$ である．
(3) 以上のことを象徴的に表せば，
$$((f^*)^{-1} = (f^{-1})^* =)f^{*-1} = f_*.$$

命題 1.1.12 (単射の双対写像)．

(1) f が単射の時，定理 1.2.5 より，split mono だから，左逆射 (retraction) $f^{-1} : Y \to X$ が存在して，
$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \Rightarrow f^* \circ (f^{-1})^* = \mathrm{id}_X^* = \mathrm{id}_{P(X)}.$$
よって，$(f^{-1})^*$ は f^* の右逆射 (section) であるという意味で $(f^*)^{-1}$ とも表し得る．
(2) f が単射の時，同じく split mono だから，任意の部分集合 $A \subset X$ について $f^{-1}(f(A)) = \mathrm{id}_X(A) = A$．従って，$f^* \circ f_* = \mathrm{id}_{P(X)}$ である．
(3) 以上のことを象徴的に表せば，
$$((f^*)^{-1} = (f^{-1})^* =)f^{*-1} = f_*.$$

1.1.5　形式的双対性

双対写像への全射と単射の持ち越し

前の節の逆像写像についての内容を一般化する．定理 1.2.5,1.2.6 より，次の Hom 関手について，

$$f \text{ が単射 (左簡約可能)} \Leftrightarrow f_* \text{が単射 (左簡約可能)}, \qquad f \text{ が全射 (右簡約可能)} \Leftrightarrow f^* \text{が単射}$$
$$\Leftrightarrow f^* \text{が全射}, \qquad \Leftrightarrow f_* \text{が全射}$$

は，1 行目がすぐに判り[a]，2 行目は双対原理から来る．f^* が C で monic / epic であることと，f^* が C^{op} で epic / monic であることが同値なのである．C^{op} での f^* とは，postcomposition f_* に他ならない．よって，このことは単射／全射を，monic / epic に変えても一般の圏にて成り立つ．

$$\begin{array}{ccccccc} f_* : \mathrm{Map}(Z, X) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(Z, Y) & \qquad & f^* : \mathrm{Map}(Y, Z) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(X, Z) \\ \Cup & & \Cup & & \Cup & & \Cup \\ g & \longmapsto & f \circ g & & g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

[a] https://ncatlab.org/nlab/show/monomorphism での特徴付け 4 つのうちの 1 つに含まれている

定理 1.1.13. $f : X \to Y$ を写像とする．Z を任意の集合として，$f^* : \mathrm{Map}(Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, Z)$ を反変 Hom 関手，$f_* : \mathrm{Map}(Z, X) \to \mathrm{Map}(Z, Y)$ を共変 Hom 関手とする．

(1) $f : X \to Y$ が単射である　$\Leftrightarrow$　f^* が全射である．
(2) $f : X \to Y$ が全射である　$\Leftrightarrow$　f^* が単射である．
(3) $f : X \to Y$ が単射である　$\Leftrightarrow$　f_* が単射である．
(4) $f : X \to Y$ が全射である　$\Leftrightarrow$　f_* が全射である．

［証明］．

(1)

$$\begin{aligned} f \text{ が単射} &\Leftrightarrow f \text{ が左簡約可能} && (\text{定理 } 1.2.5) \\ &\Leftrightarrow f^* \text{が右簡約可能} && (\text{後述}) \\ &\Leftrightarrow f^* \text{が全射} && (\text{定理 } 1.2.6) \end{aligned}$$

であるが，$\Rightarrow$ は，$r \circ f = \mathrm{id}_X$ を満たす f の retraction r に対して，$f^* \circ r^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Map}(X,Z)}$ を満たす $r^* : \mathrm{Map}(X, Z) \to \mathrm{Map}(Y, Z)$ が見つかる．$\Leftarrow$ は，$Z = X$ とし，$f^* \circ r = \mathrm{id}_{P(X)}$ を満たす $r : \mathrm{Map}(X, X) \to \mathrm{Map}(Y, X)$ に対して，$r(\mathrm{id}_X)$ が f の retraction となる．実際，$f(r(\mathrm{id}_X)) = \mathrm{id}_X$ より，$r(\mathrm{id}_X) \circ f = \mathrm{id}_X$ を得る．

(2) すでに述べた．

(3) すでに述べた．

(4)

■

要諦 1.1.14. おそらくこういうことであろう．しかし，epimorphism の定義は，任意の対象 Z と平行な射の組 $g_1, g_2 : Y \to Z$ について，$(g_1 \circ f = g_2 \circ f) \Rightarrow (g_1 = g_2)$ であり，これは hom-functor $\mathrm{Hom}(-, Z)$ が単射であることの定義に他ならない．Sets 上では単射と epimorphism が同値なので，上の定理が成り立つ．

2 の役割を入れ替えることによる双対が起こる．de Morgan duality が開集合の閉集合の双対を引き起こしていて，第**??**節の主眼である．これと，反対圏が生み出す双対とどのような関係があるのだろうか？

1.2　写像の標準分解

1.2.1　標準分解

命題 1.2.1 (canonical decomposition)**.** $f: X \to Y$ を写像とする．

(1) 次の図式を可換にする写像 $\overline{f}$ が唯一つ存在する．この分解 $f = i \circ \overline{f} \circ q$ を f の**標準分解**という．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/R_f \arrow[r, dotted, "\overline{f}"] & f(X) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

(2) 写像 $\overline{f}$ は可逆である．この $\overline{f}$ を f **によって引き起こされる可逆写像**と呼ぶ．
(3) f が定める同値関係 R_f についての商集合 X/R_f を，f **の余像**と呼ぶ．

1.2.2　単射と全射

命題 1.2.2 (全射と単射の特徴付け)**.** 次の 3 条件は同値である．

(1) f は単射である．
(2) f が定める同値関係 R_f は相等関係と同値である．
(3) f が定める写像 $X \to f(X)$ は可逆である．

次の 3 条件は同値である．

(1) f は全射である．
(2) $f(X) = Y$ である．
(3) X の同値関係 R と商集合からの可逆写像 $\overline{f}: X/R \to Y$ で，$q: X \to X/R$ を商写像とすると，$f = \overline{f} \circ q$ を満たすものが存在する．

単射は左 q 退化の事象，全射は右 i 退化の事象だと知っていれば，次は明らかに思えてくる．

補題 1.2.3 (単射は左 q 退化の事象，全射は右 i 退化の事象)**.** $f: X \to Y, g: Y \to Z$ を写像とする．次の条件について，1⇒2⇒3 が成り立つ．

(1) f と g は単射である．
(2) $g \circ f$ は単射である．
(3) f は単射である．

次の条件について，1⇒2⇒3 が成り立つ．

(1) f と g は全射である．
(2) $g \circ f$ は全射である．
(3) g は全射である．

命題 1.2.4. 写像 $f: X \to Y, g: Y \to Z$ について，次の 2 条件は同値である．

(1) $f \circ g$ は可逆である．
(2) g が単射で f が全射である．

モノ射とエピ射まとめ

定理 1.2.5 (mono)**.** 以下は全て写像 $f : X \to Y$ が単射であることの同値な定義である．

(1) ［像／逆像の言葉］$\forall x \in X f^{-1}(f(x)) = \{x\}$.
(2) ［その論理的変形・大域化］$\forall A \subset X f^{-1}(f(A)) = A$（雪江群論）.
(3) ［左一意性］f が定める同値関係 R_f は相等関係と同値である．（関係が一致するとはグラフが一致することと定義した）.
(4) ［標準分解の言葉］f が定める写像 $X \to f(X)$ は可逆になる．
(5) ［左簡約可能：monic］$g \circ f = \mathrm{id}_X$ を満たす写像 $g : Y \to X$ が存在する．または，$X = \varnothing$ である．

定理 1.2.6 (epi)**.** 以下は全て写像 $f : X \to Y$ が全射であることの同値な定義である．

(1) ［逆像の言葉］$\forall y \in Y f^{-1}(y) \neq \varnothing$.
(2) ［右全域性］$f(X) = Y$.
(3) ［標準分解の言葉］$f = \overline{f} \circ q$ となる可逆写像 $\overline{f}$ が存在する．
(4) ［右簡約可能：epic］$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ を満たす写像 $g : Y \to X$ が存在する．

1.3　等化子と余等化子

1.3.1　等化子

命題 1.3.1 (等化子の普遍性：単射と一般の写像)**.** $i : X \to Y$ を単射，T を勝手な集合，$f : T \to Y$ を写像とする．次の 2 つの条件は同値である．

(1) $f(T) \subset i(X)$ である．
(2) 下の図式を可換にする写像 $g : T \to X$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] & Y \\ T \arrow[u, dotted, "g"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

要諦 1.3.2. $f(T) \supsetneq i(X)$ の時，g をどう取っても $f(T) \backslash i(X) \neq \varnothing$ となってしまうため，写像として一致し得ない．

1.3.2　余等化子

命題 1.3.3 (全射と一般の写像)**.** X, Y, Z を集合，$p : X \to Y$ を全射，$f : X \to Z$ を写像とする．

(1) 次の条件 (1) と (2) は同値である．
    (1) $f = g \circ p$ を満たす写像 $g : Y \to Z$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, dashed, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

    (2) 全射 p が定める同値関係 R_p は，写像 f が定める同値関係 R_f よりも細かい：$C_{R_p} \subset C_{R_f}$.
(2) いま，R_p が R_f よりも細かいとする．この時，次の 2 つの条件は同値である．
    (1) $f = g \circ p$ を満たすこの $g : Y \to Z$ は単射である．
    (2) R_p と R_f は同値である．

注 1.3.4. 写像 p の時点で重要な何かが潰れていなければいい．このための条件は，「写像が定める同値関係」として，共通する始域 X 上の関係，またはそのグラフ（部分集合）の包含関係などで議論できる．R_p の方が R_f よりも細かければ，より豊富な情報を含んでいて還元出来ない部分はないから，g を上手く潰すように設定すれば，$f = g \circ p$ と出来る．

なお，２つの同値関係の間の関係として，「よりも細かい」とは，$\forall x, x' \in X\, p(x) = p(x') \Rightarrow f(x) = f(x')$ が成り立つと言うことである．この逆も成り立つ時，２つの同値関係は同値であると言う．

［証明］． 1.　(1) ⇒ (2) は

$$\forall x, x' \in X,\ p(x) = p(x') \Rightarrow f(x) = f(x')$$

を示せば良い．いま，実際 $p(x) = p(x')$ を満たす $x, x' \in X$ について，$q(p(x)) = q(p(x'))$ であるから，$f(x) = f(x')$ が従う．

次に (2) ⇒ (1) を考える．写像 g を構成するために，写像

$$\begin{array}{ccc} (p, f) : X & \longrightarrow & Y \times Z \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & (p(x), f(x)) \end{array}$$

を考える．この値域 $(p, f)(X) = \{(p(x), f(x)) \mid x \in X\} =: \Gamma_g$ は (A) 写像のグラフとなっており，そして (B) このグラフが定める写像 $(Y, Z, \Gamma_g) =: g$ が求める唯一つの写像であることを示す．

(B) については，全ての $x \in X$ について，g の定め方より $g(p(x)) = f(x)$ が成り立つから，確かにこれは $f = g \circ p$ を満たす写像である．

(A) Γ_g が写像のグラフとなっていることの証明を，$\mathrm{pr}_1 : Y \times Z \to Y$ を第一射影として，$\mathrm{pr}_1|_{\Gamma_g}$ が全単射であることを示すことによって行う．$\mathrm{pr}_1|_{\Gamma_g} \circ (p, f) = id_Y \circ p = p$ より，p は全射であるから $\mathrm{pr}_1|_{\Gamma_g}$ も全射である．また，$(y, z), (y', z') \in \Gamma_g$ について $\mathrm{pr}_1(y, z) = \mathrm{pr}_1(y', z')$ 即ち $y = y'$ 即ち $\exists x, x' \in X\, \mathrm{s.t.}\, p(x) = p(x')$ ならば，$R_p \subset R_f$ より，$f(x) = f(x')$ 即ち $z = z'$ より，$\mathrm{pr}_1|_{\Gamma_g}$ は単射でもある．

2.　(2) ⇒ (1)．　$R_p = R_f$ の時，$X/R_p = X/R_f$ であるから，p, f の標準分解は，可逆写像 $\tilde{p} : X/R_p \to Y$ と単射 $\overline{f} : X/R_p \to Z$ を定める．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] \arrow[drr, phantom, ""] \arrow[dr, "f" near end] & Y \arrow[d, "g"] \\ X/R_p \arrow[ur, "\tilde{p}" near end] \arrow[r, "\overline{f}"'] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] & Z \\ f(X) \arrow[ur, dashed, "i"'] & \end{tikzcd}$$

この図式は結局全体として可換であり（$f = g \circ p$ かつ $f = \overline{f} \circ q$ より，$\overline{f} \circ q = g \circ p$ を得る．これと $p = \tilde{p} \circ q$ より），$\overline{f} \circ \tilde{p}^{-1} = g$ となる．従って g は全射である．

(1) ⇒ (2)．g が単射ならば，$g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$ より，

$$\begin{aligned} p(x) = p(x') &\Leftrightarrow g(p(x)) = g(p(x')) \\ &\Leftrightarrow f(x) = f(x') \end{aligned}$$

より，$R_f = R_p$ である．

■

系 1.3.5 (商集合の普遍性)**.** R を集合 X 上の同値関係とし，$q : X \to X/R$ を商写像とする．

(1) 写像 $f : X \to Y$ について，次の２条件は同値である．

　(1) 次の図式を可換にする写像 $g : X/R \to Y$ が存在する．これは f によって引き起こされた写像である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f"'] & X/R \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

　(2) R は，f が定める同値関係 R_f より細かい．

(2) R' を Y の同値関係とし，$q' : Y \to Y/R'$ を商写像とする．写像 $f : X \to Y$ に対して，次の２条件は同値である．

　(1) 写像 $g : X/R \to Y/R'$ で，次の図式を可換にするものが存在する．

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle q'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q'} \\ X/R & \xrightarrow[g]{} & Y/R' \end{array}$$

(2) $C \subset X \times X$ を R のグラフとし，C' を R' のグラフとすると，$C \subset (f \times f)^{-1}(C')$ である．

［証明］．1. 全射 p について命題 1.3.3 を適用して得る主張である．なお，q が定める同値関係 R_q とは R に他ならない．

2. 全射 $q' \circ f$ について命題 1.3.3 を適用して得る主張である． ■

1.4　実数の位相

1.4.1　点列の収束

命題 1.4.1 (点列の収束の位相的特徴付け)**.** $(x_m) \in {}^{<\omega}\mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$ とする．次の 3 条件は同値である．

(1) $\lim_{m\to\infty} x_m = a$.

(2) $\forall r \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists l \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}_{\geqslant n}\ d(x_m, a) < r$.

(3) a を元として含む任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ について，$\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \notin U\}$ は有限集合である．

条件 3. を「十分大きな n について $x_m \in U (m \geqslant n)$ である，ということがある．

1.4.2　連続写像

定義 1.4.2. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ について，

(1) $f : U \backslash \{a\} \to \mathbb{R}^m$ を写像とする．$b = \lim_{x \to a} f(x)$ とは，次のことをいう：

$$\inf_{r>0}\left(\sup_{x\in U, 0<d(x,a)<r} d(f(x), b)\right) = 0.$$

(2) 写像 $f : U \to \mathbb{R}^m$ が $a \in U$ で**連続**であるとは，$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ であることをいう．

(3) $f : U \to \mathbb{R}^m$ が**連続写像**であるとは，全ての $x \in U$ において f が連続であることをいう．

命題 1.4.3.

(1) 加法 $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と乗法 $\cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と逆元 $^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ は連続である．

(2) 射影 $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $(i \in [m])$ は連続である．次の 2 条件は同値である．

　(1) 写像 $f : U \to \mathbb{R}^m$ は a で連続である．

　(2) $f_i := \mathrm{pr}_i \circ f : U \to \mathbb{R}$ $(i \in [m])$ はそれぞれ a で連続である．

命題 1.4.4 (連続写像の特徴付け)**.** $f : U \to \mathbb{R}^m$ を開集合上の写像とする．

(1) $a \in U$ に対し，次の 3 条件は同値である．

　(1) 写像 $f : U \to \mathbb{R}^m$ は a で連続である．

　(2) $\forall q > 0,\ \exists r > 0,\ \forall x \in U,\ d(x, a) < r \Rightarrow d(f(x), d(a)) < q$.

　(3) $f(a) \in V$ を満たす任意の開集合 $V \subset \mathbb{R}^m$ に対し，$a \in W \subset f^{-1}(V)$ を満たす開集合 $W \subset \mathbb{R}^n$ が存在する．

(2) 次の 2 条件は同値である．

　(1) $f : U \to \mathbb{R}^m$ は連続である．

　(2) 任意の開集合 $V \subset \mathbb{R}^m$ について，逆像 $f^{-1}(V) \subset U$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．

注 1.4.5. 連続写像 $f : U \to \mathbb{R}$ を考えれば，$U \subset \mathbb{R}^n$ の部分集合 $\{x \in U \mid f(x) > a\}$ は $\mathbb{R}^n$-開集合だとわかる．また，$\{a\} \subset \mathbb{R}^m$ は閉集合だから，連続写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を考えれば，$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = a\}$ も $\mathbb{R}^n$-閉集合である．

命題 1.4.6 (連続写像の特徴付け)**.** $\mathbb{R}^n$-開集合上の写像 $f : U \to \mathbb{R}^m$ と $a \in U$ に対し，次の 2 条件は同値．

(1) $f : U \to \mathbb{R}^m$ は a で連続である．

(2) U の点列 (x_k) が a に収束するならば，$\mathbb{R}^m$ の点列 $(f(x_k))$ は $f(a)$ に収束する．

1.5　次元論

現代では殆ど廃れた問題意識であるが，コンパクト集合を考えるにあたって，開被覆がどれだけ自然な発想であるかがわかる．

歴史 1.5.1. Cantor の 1870 年以降の論文で，初めて $\mathbb{R}^n$ の任意の集合の位相が考えられた．そこで，内点，集積点，境界点，開・閉集合などの Euclid 空間的な概念はすべて Cantor が与えた．Cantor (1878) は線分から正方形への全単射を構成し，Peano (1890) はそれが連続に取れることがわかった．そこで，位相不変量としての次元の概念の精緻化が要請された．次の定義のような次元の概念が位相不変量であることを示すために Brouwer が用いた手法は，代数的位相幾何学において主流となった．

一方で Frèchet は，関数空間においても類似の位相的問題を考える仮定で，距離空間の概念を定義した (1905)．そしてその様子から，「近傍」なる概念の持つべき性質を 4 公理にまとめあげて「位相空間」（今日の Hausdorff 空間に当たる）と呼んだのは Hausdorff (1914) である．こうして，位相幾何学の議論の対象は真に広がった．

位相空間の公理は，Kuratowski (1933) が「閉包の公理」を提案し，Bourbaki が開集合族，またはフィルターによるものがある．

定義 1.5.2 (Poincarè 1912, Brouwer 1913, Lebesgue 1921)**.** コンパクト部分集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ の**次元**とは，次の条件を満たす自然数 m のうち最小のものをいう：

任意の $\epsilon > 0$ に対して，K の各点が $m+1$ 回以上は覆われないような，直径が ϵ を超えない開集合の族が取れる．

第 2 章

位相空間とその射

また位相空間は普遍構成ができる.

2.1 定義

第 3 章

距離空間

抽象位相空間論を展開したが，元々位相空間論の端緒は，Frèchet が距離空間の概念を定義して Cantor の概念を一般化したことに始まる．その際のモチベーションは関数空間であった．

第 4 章

位相的構造

第 5 章

写像空間

一般的な位相空間論を準備し，距離空間での例を見て，さらにこれを特徴づける位相的構造を見てきた．これで，位相空間論の発展を促した源流である，関数空間に取り組める．

第 6 章

参考文献

参考文献

[1] 斎藤毅『集合と位相』(東京大学出版会．2016)

[2] 彌永昌吉・彌永健一『集合と位相 II』(岩波講座 基礎数学 9，1977)．

[3] 森田紀一『位相空間論』(

[4] Peter Johnstone - The point of pointless topology (83)

[5] Peter Johnstone, Stone Spaces, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 3, Cambridge University Press 1982. xxi+370 pp. MR85f:54002, reprinted 1986.

[6] https://ncatlab.org/nlab/show/Introduction+to+Topology

[7] Steven Vickers, Topology via Logic, Cambridge University Press (1989)

[8] F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Veit & Co., Leipzig, 1914.

[9] Nicolas Bourbaki 位相 I

[10] Analysis Now