目次

第 1 章

Fourier 級数

1.1 Hilbert 空間の正規直交系

これから展開される Fourier 級数論とは，Hilbert 空間 $L^2(I)$ において，正規直交系 (e^{int}) が完全であることを示す旅路である．

記法 1.1.1.

(1) $L_{2\pi} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f$ は Lebesgue 可測で，周期 2πを持つ$\}$.
(2) $L^p_{2\pi} := \{f \in L_{2\pi} \mid f|_{(-\pi,\pi]} \in L^p((-\pi,\pi])\}$.
(3) $C_{2\pi} := \{f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid f$ は周期 2πを持つ$\}$.
(4) $C^k_{2\pi} := \{f \in C^k(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, f$ は周期 2πを持つ$\}$.

定義 1.1.2 (orthonormal system, complete)**.** 区間 $I := (-\pi,\pi]$ 上の二乗可積分な複素関数の空間 $L^2(I)$ を考える．

(1) 内積 $L^2(I) \times L^2(I) \to \mathbb{C}$ を $(f,g) := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$ とする．
(2) 族 $\{\varphi_n\} \subset L^2(I)$ が $(\varphi_n,\varphi_m) = \delta_{nm}$ を満たすとき，これを $L^2(I)$ の**正規直交系**という．
(3) 任意の $L^2(I)$ の元が正規直交系によって展開可能であるとき，すなわち，$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ (x,\varphi_n) = 0 \Rightarrow x = 0$ が成り立つとき，これを**完全**であるという．

定理 1.1.3. Hilbert 空間 H において，

(1) 完全正規直交基底は存在する．
(2) H が可分ならば，可算なものが存在する．

定理 1.1.4. Hilbert 空間 H において，次の 3 条件は同値．

(1) $\{\varphi_n\}$ は完全な正規直交系をなす．
(2) $\{\varphi_n\}$ の一次結合全体は，H で稠密になる．
(3) (Fourier 級数展開) 任意の $x \in H$ について，$x = \displaystyle\sum_n (x,\varphi_n)\varphi_n$.

命題 1.1.5. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi_n(t) := e^{int}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ は，$L^2((-\pi,\pi])$ の正規直交系である．

補題 1.1.6. ノルム空間上のノルムと内積は連続である．

1.2 Fourier 係数の性質

命題 1.2.1 (表示)**.** $f(t) = \displaystyle\sum^{\infty_{n=-\infty}} c_n e^{int}$ が $t \in (-\pi,\pi]$ 上一様収束する時，

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$$

が必要．

［証明］．e^{int} は正規直交系だから，

$$
\begin{aligned}
(f, e^{int}) &= \left(\lim_{N\to\infty} S_N[f](t), e^{int}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} (S_N[f](t), e^{int}) && \text{内積の連続性 1.1.6} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=-N}^{N} c_\nu (e^{i\nu t}, e^{int}) && \text{内積の線形性} \\
&= c_n.
\end{aligned}
$$

■

補題 1.2.2.

(1) $f(t) = f(-t)$ のとき，$c_n[f] = c_{-n}[f]$．したがって，足し合わせると cos が出てくる．
(2) $f(t) = -f(-t)$ のとき，$c_n[f] = -c_{-n}[f]$．したがって，足し合わせると ~ が出てくる．
(3) $f(t) \in \mathbb{R}$ ならば，$\overline{c_n[f]} = c_{-n}[f]$．

［証明］．

(1)

$$
\begin{aligned}
c_n[f] &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt \\
&= \int_{\pi}^{-\pi} f(-x) e^{-inx} (-dx) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i(-n)x} dx = c_{-n}[f].
\end{aligned}
$$

(2) 同様．
(3)

$$
\overline{c_n[f]} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = c_{-n}[f].
$$

あとは積分と複素共役の可換性についてであるが，実部と虚部に分けて考えると，積分の線形性より従う．

■

例 1.2.3.

$$
f(x) = \frac{1}{\frac{5}{4} + \cos x}
$$

の Fourier 展開を考える．

1.3　Riemann-Lebesgue の定理と Fourier 係数の減衰

定理 1.3.1 (Riemann-Lebesgue)**.** 任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ に関して，

$$
\mathcal{F}[f](\lambda) = \hat{f}(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\lambda} dt \xrightarrow{|\lambda|\to\infty} 0.^{\dagger 1}
$$

［証明］．

(1) $f = \chi_{[a,b]}$ $(-\infty < a < b < \infty)$ のとき，

$$
|\hat{f}(\lambda)| = \left| \int_a^b e^{-it\lambda} dt \right|
$$

[†1] 極限の取り方が対称なので，指数の符号はあまり問題でない．

$$= \left|\frac{e^{-ib\lambda} - e^{-ia\lambda}}{i\lambda}\right| \le \frac{2}{|\lambda|} \xrightarrow{|\lambda|\to\infty} 0.$$

(2) f が単関数のとき，同様．

(3) $S := \left\{ s = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{[a_i,b_i]} \in L^1(\mathbb{R}) \mid b_i \in \mathbb{C}, -\infty < a < b < \infty, n \in \mathbb{N} \right\}$ は $L^1(\mathbb{R})$ で $\|-\|_1$ について稠密だから，一般の $f \in L^1(\mathbb{R})$ についても同様に示せる．

実際，任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ と $\epsilon > 0$ に対して，$g \in S$ が存在して，$\|f-g\|_1 = \int |f(x) - g(x)|dx < \epsilon$ を満たす．いま，(2) より $\exists_{N\in\mathbb{N}}\ |\lambda| > N \Rightarrow \left|\int g(t)e^{it\lambda}dt\right| < \epsilon$ であるから，

$$\left|f(t)e^{it\lambda}dt\right| \le \int |f(t) - g(t)|dt + \left|\int g(t)e^{it\lambda}dt\right| < 2\epsilon \quad (|\lambda| > N).$$

■

要諦 1.3.2. 稠密だと限りなく S に近い点が取れるから，このように評価してしまえば収束性については全く同じ結論を得るのか．

系 1.3.3. 任意の可積分な周期関数 $f \in L^1_{2\pi}$ に対して，Fourier 係数は収束する：$c_n[f] \to 0$ $(|n| \to \infty)$．

［証明］. 定理と同様の手順で示せる． ■

系 1.3.4 (減衰の精緻化). f が C^K 級のとき，

(1) $\forall_{j=1,\cdots,K}\ \forall_{n\in\mathbb{Z}}\ (in)^j c_n[f] = c_n[f^{(j)}]$.

(2) $\forall_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\ |c_n[f]| \le \frac{1}{|n|^K}\|f^{(K)}\|_\infty$.

(3) $n^K \cdot c_n[f] \xrightarrow{|n|\to\infty} 0$.

［証明］.

(1) 部分積分により，

$$\begin{aligned} c_n[f] &= \frac{1}{2\pi}\left[f(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{e^{-int}}{-in}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{f(\pi)}{in}2\sin(n\pi) + \frac{1}{in}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int}dt = \frac{c_n[f']}{in}. \end{aligned}$$

これを繰り返すとわかる．

(2)

$$\begin{aligned} |c_n[f]| &\le \frac{1}{|in|^K}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f^{(k)}(t)||e^{-int}|dt \\ &\le \frac{1}{|n|^K}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f^{(k)}\|_\infty dt = \frac{1}{|n|^K}\|f^{(k)}\|_\infty. \end{aligned}$$

(3) (3) と系から明らか．

■

要諦 1.3.5. k 回連続微分可能な関数の Fourier 係数は，多項式 n^{-k} よりも速く収束する．これにより，$f \in C^2_{2\pi}$ に対しては，Fourier 級数 $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n[f]e^{inx}$ が絶対収束することがわかった．しかし，その収束先が f に一致するかは議論が必要である．

1.4 Dirichlet 核

定義 1.4.1 (Dirichlet kernel). Dirichlet 核を

$$D_K(t) := \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-K}^{K} e^{int}$$

と定めると，Fourier 和は

$$
\begin{aligned}
S_K[f](x) &= \sum_{n=-K}^{K} c_n[f]e^{inx} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-K}^{K} e^{in(x-t)}dt \\
&= \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(x-t)D_K(t)dt
\end{aligned}
$$

と表せる．

参考文献

[1] J. Korevaar "Fourier Analysis and Related Topics"