目次

第 1 章

集合と写像

記法 1.0.1.

(1) 位相空間論では集合の概念については次の 3 点のみを使用し，その定義については抽象化して informal に言及する．
  (1) 像写像は合併は保つが，共通部分は不完全にしか保たない（命題 1.1.2）．
  (2) 逆像写像は合併も共通部分も保つ（命題 1.1.2）．
  (3) de Morgan の法則（命題**??**）．
(2) 集合 X に対し，その有限部分集合全体からなる集合を

$$F(X) := \{A \in P(X) \mid |A| < \infty\}$$

と置く．

1.1 写像の定める関手

1.1.1 関手性

問題 1.1.1 (A2.5.3)**.** $f_* : P(X) \to P(Y)$ の値域について，$f_*(P(X)) = P(f(X))$．

［証明］. ■

命題 1.1.2 (像と逆像と集合演算の絡み合い)**.**

(1) (adjunction) $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.
(2) f の像について次が成り立つ．
  (1) $A \subset f^{-1}(f(A))$.
  (2) $A' \subset A \Rightarrow f(A') \subset f(A)$.
  (3) $f(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} f(A_i)$，$f(\cap_{i \in I} A_i) \subset \cap_{i \in I} f(A_i)$.
  (4) f が単射ならば，$A = f^{-1}(f(A))$．f が単射で，I が inhabited (not empty) ならば，$f(\cap_{i \in I} A_i) = \cap_{i \in I} f(A_i)$.
(3) f の逆像について，次が成り立つ．
  (1) $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$，$f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)$.
  (2) $B \subset B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
  (3) $f^{-1}(\cup_{i \in I} B_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$，$f^{-1}(\cap_{i \in I} B_i) = \cap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

注 1.1.3 (proof via adjoints)**.** 1. の性質を，f_* は f^* の left adjoint である，という．なお，向きは，包含写像 $i : f(A) \to B$ の向きで左右が決まっている．これは内積空間での関係 $\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle$ から来たものである．あえて書くなら，$\langle f(A), B \rangle = \langle A, f^{-1}(B) \rangle$ である．ただし $\langle S, T \rangle$ とは，$S \subset T$ とした．in fact the analogy is not idle; see for instance Baez.

［証明］.

1. adjunction　どちらも，$x \in A \Rightarrow f(x) \in B$ という論理式の表現である．

2. Union, reasoning foreward/backward trick　1. より，任意の族 $(S_i)_{i\in I}$ と集合 T について，次の同値変形が成り立つ．

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in I} f(S_i) \subset T &\Leftrightarrow \forall i\in I,\ f(S_i)\subset T && (1.1)\\ &\Leftrightarrow \forall i\in I,\ S_i\subset f^{-1}(T) && (1.2)\\ &\Leftrightarrow \bigcup_{i\in I} S_i \subset f^{-1}(T) && (1.3)\\ &\Leftrightarrow f\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right)\subset T. && (1.4)\end{aligned}$$

1.1,1.3 行目の変形は，$\cup$ の定義 (defining property) による．1.2,1.4 が 1. の adjunction を用いた世界線の飛び越えである．いま，$T=\cup_{i\in I}f(S_i)$ とすると初めの主張が真であるから，前方向に同値変形すると $f(\cup_{i\in I}S_i)\subset\cup_{i\in I}f(S_i)$ を得る．続いて $T=f(\cup_{i\in I}S_i)$ とすると，終わりの主張が真であるから，後ろ方向に同値変形すると $\cup_{i\in I}f(S_i)\subset f(\cup_{i\in I}S_i)$ を得る．2 つ併せて，$\cup_{i\in I}f(S_i)=f(\cup_{i\in I}S_i)$ を得る．

2. Intersection, reasoning foreward/backward trick　同様にして 1. より，

$$\begin{aligned}S\subset\bigcap_{i\in I} f^{-1}(T_i) &\Leftrightarrow \forall i\in I,\ S\subset f^{-1}(T_i)\\ &\Leftrightarrow \forall i\in I,\ f(S)\subset T_i\\ &\Leftrightarrow f(S)\subset\bigcap_{i\in I}T_i\\ &\Leftrightarrow S\subset f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}T_i\right).\end{aligned}$$

同様の reasoning foreward/backward trick により，$\cap_{i\in I}f^{-1}(T_i)=f^{-1}(\cap_{i\in I}T_i)$ を得る．

3. 像と交叉

$$\begin{aligned}f\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right)\subset\bigcup_{i\in I} f(S_i) &\Leftrightarrow (\forall_{i\in I})\ f\left(\bigcap_{i\in I} S_i\right)\subset S_i && \text{definingpropertyofintersection}\\ &\Leftarrow (\forall_{i\in I})\ \bigcap_{i\in I} S_i\subset S_i && ((2)\text{ より })\end{aligned}$$

■

要諦 1.1.4.

(1) 確か二重否定則を使わないと戻ってこれないのも，de Morgan のうち，$\neg\forall$ や $\neg\wedge$ だったよな？絶対つながっているよな．

(2) reasoning forward/backward trick とは結局，poset 上で $A=B$ iff $\forall T,\ A\leqslant T\Leftrightarrow B\leqslant T$ またはその双対命題を推論しているのである．This trick is vastly extrapolated by the Yoneda lemma.

(3) Category theorists は，像 $f_*(S)$ を $\exists_f(S)$ と表し，像写像を $\exists_f: P(X)\to P(Y)$ と存在量化子と同一視して理解する．The suggestion is to view existential quantification as corresponding to taking of a direct image. そもそも通常の命題 $P\subset X\times Y$ に対する存在量化された命題 $(\exists_{x\in X})P(x,y)$ とは，（形式化して条件を集合と見れば）像 $\mathrm{pr}_2^*(P)$ に他ならないからである．これに軸足を移して，存在量化子の意味を，射影だけでなくより普遍的な写像について像を取ること，とみなせる．

(4) こうすると，随伴関係は $\exists_f\dashv f^*$ と表せる．Which is an example of a famous slogan due to Lawvere: “Logical quantification is adjoint to substitution”(with resonances far beyond the purview of logic as ordinarily conceived).

1.1.2　和と積

補題 1.1.5.

(1) $(f,g)^{-1}(U\times V)=f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)$（積位相の特徴付け（命題??）で使用）．

(2) $(\prod_{i\in I}U_i)\cap(\prod_{i\in I}V_i)=\prod_{i\in I}(U_i\cap V_i)$（積位相の普遍性（命題??）で使用）．

1.1.3　可逆性の特徴付け

命題 1.1.6 (可逆射の普遍性による特徴付け：集合を，他の集合への写像についての述語で特徴付けること)**.** $f: X \to Y$ を写像とする．次の 2 条件は同値である．

(1) f は可逆である．
(2) 任意の集合 Z に対して，写像 $f^*: \mathrm{Map}(Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, Z)$ は可逆である．

1.1.4　全射・単射性の特徴づけ

命題 1.1.7 (双対命題)**.** $f: X \to Y$ を写像とし，$f^*: P(Y) \to P(X)$ を冪集合の上に定まる写像

$$\begin{tikzcd} P(Y) \arrow[r] & P(X) \\ A \arrow[r, mapsto] \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] & f^{-1}(A) \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] \end{tikzcd}$$

とする．

(1) f が単射であることと，f^* が全射であることは同値である．
(2) f が全射であることと，f^* が単射であることは同値である．

［証明］**.**

1. $\Rightarrow$　$f: X \to Y$ が単射とする．f^* は 2 で $\{1\} \in P(2)$ を普遍元として表現されるから，

$$\begin{tikzcd} f^*: \mathrm{Hom}(Y, 2) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X, 2) \\ \chi: Y \to 2 \arrow[r, mapsto] \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] & \chi \circ f: X \to 2 \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] \end{tikzcd}$$

が全射であることを示せば良い．即ち，任意の $\eta: X \to 2 \in \mathrm{Hom}(X, 2)$ が f に沿って分解することを示せば良い．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "f"] \arrow[dr, "\eta"'] & Y \arrow[d, dotted, "\chi"] \\ & 2 \end{tikzcd}$$

これは，f は単射であることを使えば，命題 1.3.3 より，必ず分解する．まず，$\overline{f}: X \to f(X)$ を考えると，これは全単射であるから，$R_{\overline{f}}$ は自明な同値関係である．従って必ず η の定める同値関係よりも細かいから，適切な $\overline{\chi}: f(X) \to 2$ が存在する．残りの $Y \backslash f(X)$ については勝手に定めて $\chi: Y \to 2$ を定めれば良い．

1. $\Leftarrow$　$f^*: P(Y) \to P(X)$ が全射の下で $x \neq y$ について $f(x) = f(y)$ が成り立つと仮定して矛盾を導く．$x \neq y$ の時，$x \in A \wedge y \notin A$ を満たす $A \subset X$ を任意にとれば（$A = \{x\}$ など $A \subsetneq f^{-1}(x)$ を満たすものなら適格），$A = f^{-1}(B)$ を満たす $B \subset Y$ は存在しないので，f^* が全射であることに矛盾．

2. $\Rightarrow$　$f: X \to Y$ が全射とする．$\chi, \eta \in \mathrm{Hom}(Y, 2)$ について，$f^*(\chi) = f^*(\eta)$ とする．即ち，$\chi \circ f = \eta \circ f$．$f$ が全射の時 epic であるから（定理 1.2.6），$\chi = \eta$ が従う．よって，$f^*: P(Y) \to P(X)$ は単射．

2. $\Leftarrow$　$f^*: P(Y) \to P(X)$ が単射の時，ある $x \in Y$ について $f^{-1}(x) = \varnothing$ とすると，$f^{-1}(x) = f^*(\{x\}) = f^*(\varnothing)$ となるので，$|(f^*)^{-1}(\varnothing)| \geqslant 2$．$f^*$ が単射であることに矛盾．よって，f は全射．

■

要諦 1.1.8. もっと簡単に示せるんじゃないか？壮大な duality の理論があるのではないか？ Twitter でたまたまヤヌス対象を知ったが，$K \in \mathrm{Vect}_K$ が数えられていない．僕の理想とする理論はまた違う．

本当にもっと簡単に示せた！ありがとうございます小泉さん！

［証明］．集合 S に対して，全単射

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathcal{F}_2^{\oplus S}\right)^\vee & \longrightarrow & P(S) \\ \Psi & & \Psi \\ g & \longmapsto & \{s \in S \mid g([s]) = 1\} \end{array}$$

が存在することに着目する．ただし，$(-)^\vee$ は $\mathcal{F}_2$-線型空間の双対を表す．

写像 $f : A \to B$ は $\mathcal{F}_2$-線型写像 $\varphi_f : \mathcal{F}_2^{\oplus A} \to \mathcal{F}_2^{\oplus B}$ を誘導し，f の単射性・全射性は φ_f の単射性・全射性と同値である．また，双対写像 $\varphi_f : \left(\mathcal{F}_2^{\oplus B}\right)^\vee \to \left(\mathcal{F}_2^{\oplus A}\right)^\vee$ は上記の全単射により $f^* : P(B) \to P(A)$ に対応する．よって主張は次の補題から従う． ■

要諦 1.1.9 (欲しかった概念：入射的対象)．双対写像に対応した！なんと美しい証明であるか．やはり 2 と k には何かしらの関連があったのだ．そして線型空間の理論には，K 以外が要らないのか，もしかして．２つで一つと見做す双線型形式の見方と，テンソル積とで十分なのかもしれない．

補題 1.1.10. k を体とする．$\varphi : V \to W$ を k-線型空間の間の線型写像とし，$\varphi^* : W^\vee \to V^\vee$ をその双対写像とする．この時，

(1) φ が単射であることは，φ^* が全射であることと同値である．
(2) φ が全射であることは，φ^* が単射であることと同値である．

［証明］．

(1) $0 \to \mathrm{Ker}\,\varphi \to V \to W \to \mathrm{Coker}\,\varphi \to 0$ は完全列である．
(2) k は k 加群として入射的．即ち，関手 $\mathrm{Hom}(-, k)$ は完全となる．
(3) $0 \to (\mathrm{Coker}\,\varphi)^\vee \to W^\vee \to V^\vee \to (\mathrm{Ker}\,\varphi)^\vee \to 0$ は完全列である．

■

命題 1.1.11 (全射の双対写像)．

(1) f が全射の時，定理 1.2.6 より，split epi だから，右逆射 (section) $f^{-1} : Y \to X$ が存在して，

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y \Rightarrow (f^{-1})^* \circ f^* = \mathrm{id}_Y^* = \mathrm{id}_{P(Y)}.$$

よって，$(f^{-1})^*$ は f^* の左逆射 (retraction) であるという意味で $(f^*)^{-1}$ とも表し得る．

(2) f が全射の時，同じく split mono だから，あるいは命題 1.1.2.3 より，任意の部分集合 $B \subset Y$ について $f(f^{-1}(B)) = \mathrm{id}_Y(B) = B = B \cap f(X)$．従って，$f_* \circ f^* = \mathrm{id}_{P(Y)}$ である．

(3) 以上のことを象徴的に表せば，

$$((f^*)^{-1} = (f^{-1})^* =) f^{*-1} = f_*.$$

命題 1.1.12 (単射の双対写像)．

(1) f が単射の時，定理 1.2.5 より，split mono だから，左逆射 (retraction) $f^{-1} : Y \to X$ が存在して，

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \Rightarrow f^* \circ (f^{-1})^* = \mathrm{id}_X^* = \mathrm{id}_{P(X)}.$$

よって，$(f^{-1})^*$ は f^* の右逆射 (section) であるという意味で $(f^*)^{-1}$ とも表し得る．

(2) f が単射の時，同じく split mono だから，任意の部分集合 $A \subset X$ について $f^{-1}(f(A)) = \mathrm{id}_X(A) = A$．従って，$f^* \circ f_* = \mathrm{id}_{P(X)}$ である．

(3) 以上のことを象徴的に表せば，

$$((f^*)^{-1} = (f^{-1})^* =) f^{*-1} = f_*.$$

1.1.5　形式的双対性

双対写像への全射と単射の持ち越し

前の節の逆像写像についての内容を一般化する．定理 1.2.5,1.2.6 より，次の Hom 関手について，

$$\begin{aligned} f\text{ が単射 (左簡約可能)} &\Leftrightarrow f_*\text{が単射 (左簡約可能)}, \\ &\Leftrightarrow f^*\text{が全射}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f\text{ が全射 (右簡約可能)} &\Leftrightarrow f^*\text{が単射} \\ &\Leftrightarrow f_*\text{が全射} \end{aligned}$$

は，1 行目がすぐに判り[a]，2 行目は双対原理から来る．f^* が C で monic / epic であることと，f^* が C^{op} で epic / monic であることが同値なのである．C^{op} での f^* とは，postcomposition f_* に他ならない．よって，このことは単射／全射を，monic / epic に変えても一般の圏にて成り立つ．

$$\begin{array}{ccc} f_* : \mathrm{Map}(Z,X) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(Z,Y) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ g & \longmapsto & f\circ g \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f^* : \mathrm{Map}(Y,Z) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(X,Z) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ g & \longmapsto & g\circ f \end{array}$$

[a] https://ncatlab.org/nlab/show/monomorphism での特徴付け 4 つのうちの 1 つに含まれている

定理 1.1.13. $f : X \to Y$ を写像とする．Z を任意の集合として，$f^* : \mathrm{Map}(Y,Z) \to \mathrm{Map}(X,Z)$ を反変 Hom 関手，$f_* : \mathrm{Map}(Z,X) \to \mathrm{Map}(Z,Y)$ を共変 Hom 関手とする．

(1) $f : X \to Y$ が単射である　$\Leftrightarrow$　f^* が全射である．
(2) $f : X \to Y$ が全射である　$\Leftrightarrow$　f^* が単射である．
(3) $f : X \to Y$ が単射である　$\Leftrightarrow$　f_* が単射である．
(4) $f : X \to Y$ が全射である　$\Leftrightarrow$　f_* が全射である．

［証明］．

(1)

$$\begin{aligned} f\text{ が単射} &\Leftrightarrow f\text{ が左簡約可能} && (\text{ 定理 } 1.2.5) \\ &\Leftrightarrow f^*\text{が右簡約可能} && (\text{ 後述 }) \\ &\Leftrightarrow f^*\text{が全射} && (\text{ 定理 } 1.2.6) \end{aligned}$$

であるが，$\Rightarrow$ は，$r\circ f = \mathrm{id}_X$ を満たす f の retraction r に対して，$f^*\circ r^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Map}(X,Z)}$ を満たす $r^* : \mathrm{Map}(X,Z) \to \mathrm{Map}(Y,Z)$ が見つかる．$\Leftarrow$ は，$Z = X$ とし，$f^*\circ r = \mathrm{id}_{P(X)}$ を満たす $r : \mathrm{Map}(X,X) \to \mathrm{Map}(Y,X)$ に対して，$r(\mathrm{id}_X)$ が f の retraction となる．実際，$f(r(\mathrm{id}_X)) = \mathrm{id}_X$ より，$r(\mathrm{id}_X)\circ f = \mathrm{id}_X$ を得る．

(2) すでに述べた．
(3) すでに述べた．
(4)

■

要諦 1.1.14. おそらくこういうことであろう．しかし，epimorphism の定義は，任意の対象 Z と平行な射の組 $g_1, g_2 : Y \to Z$ について，$(g_1\circ f = g_2\circ f) \Rightarrow (g_1 = g_2)$ であり，これは hom-functor $\mathrm{Hom}(-,Z)$ が単射であることの定義に他ならない．Sets 上では単射と epimorphism が同値なので，上の定理が成り立つ．

2 の役割を入れ替えることによる双対が起こる．de Morgan duality が開集合の閉集合の双対を引き起こしていて，第**??**節の主眼である．これと，反対圏が生み出す双対とどのような関係があるのだろうか？

1.2　写像の標準分解

1.2.1　標準分解

命題 1.2.1 (canonical decomposition)**.** $f : X \to Y$ を写像とする．

(1) 次の図式を可換にする写像 $\overline{f}$ が唯一つ存在する．この分解 $f = i \circ \overline{f} \circ q$ を f の**標準分解**という．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/R_f \arrow[r, dotted, "\overline{f}"] & f(X) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

(2) 写像 $\overline{f}$ は可逆である．この $\overline{f}$ を f によって**引き起こされる可逆写像**と呼ぶ．

(3) f が定める同値関係 R_f についての商集合 X/R_f を，f の**余像**と呼ぶ．

1.2.2　単射と全射

命題 1.2.2 (全射と単射の特徴付け)**.** 次の 3 条件は同値である．

(1) f は単射である．

(2) f が定める同値関係 R_f は相等関係と同値である．

(3) f が定める写像 $X \to f(X)$ は可逆である．

次の 3 条件は同値である．

(1) f は全射である．

(2) $f(X) = Y$ である．

(3) X の同値関係 R と商集合からの可逆写像 $\overline{f} : X/R \to Y$ で，$q : X \to X/R$ を商写像とすると，$f = \overline{f} \circ q$ を満たすものが存在する．

単射は左 q 退化の事象，全射は右 i 退化の事象だと知っていれば，次は明らかに思えてくる．

補題 1.2.3 (単射は左 q 退化の事象，全射は右 i 退化の事象)**.** $f : X \to Y, g : Y \to Z$ を写像とする．次の条件について，1⇒2⇒3 が成り立つ．

(1) f と g は単射である．

(2) $g \circ f$ は単射である．

(3) f は単射である．

次の条件について，1⇒2⇒3 が成り立つ．

(1) f と g は全射である．

(2) $g \circ f$ は全射である．

(3) g は全射である．

命題 1.2.4. 写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ について，次の 2 条件は同値である．

(1) $f \circ g$ は可逆である．

(2) g が単射で f が全射である．

モノ射とエピ射まとめ

定理 1.2.5 (mono)**.** 以下は全て写像 $f : X \to Y$ が単射であることの同値な定義である．

(1) ［像／逆像の言葉］$\forall x \in X f^{-1}(f(x)) = \{x\}$.
(2) ［その論理的変形・大域化］$\forall A \subset X f^{-1}(f(A)) = A$（雪江群論）.
(3) ［左一意性］f が定める同値関係 R_f は相等関係と同値である．（関係が一致するとはグラフが一致することと定義した）.
(4) ［標準分解の言葉］f が定める写像 $X \to f(X)$ は可逆になる．
(5) ［左簡約可能：monic］$g \circ f = \mathrm{id}_X$ を満たす写像 $g : Y \to X$ が存在する．または，$X = \varnothing$ である．

定理 1.2.6 (epi)**.** 以下は全て写像 $f : X \to Y$ が全射であることの同値な定義である．

(1) ［逆像の言葉］$\forall y \in Y f^{-1}(y) \neq \varnothing$.
(2) ［右全域性］$f(X) = Y$.
(3) ［標準分解の言葉］$f = \overline{f} \circ q$ となる可逆写像 $\overline{f}$ が存在する．
(4) ［右簡約可能：epic］$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ を満たす写像 $g : Y \to X$ が存在する．

1.3　等化子と余等化子

1.3.1　等化子

命題 1.3.1 (等化子の普遍性：単射と一般の写像)**.** $i : X \to Y$ を単射，T を勝手な集合，$f : T \to Y$ を写像とする．次の 2 つの条件は同値である．

(1) $f(T) \subset i(X)$ である．
(2) 下の図式を可換にする写像 $g : T \to X$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] & Y \\ T \arrow[u, dotted, "g"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

要諦 1.3.2. $f(T) \supsetneq i(X)$ の時，g をどう取っても $f(T)\backslash i(X) \neq \varnothing$ となってしまうため，写像として一致し得ない．

1.3.2　余等化子

命題 1.3.3 (全射と一般の写像)**.** X, Y, Z を集合，$p : X \to Y$ を全射，$f : X \to Z$ を写像とする．

(1) 次の条件 (1) と (2) は同値である．
 (1) $f = g \circ p$ を満たす写像 $g : Y \to Z$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, dashed, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

 (2) 全射 p が定める同値関係 R_p は，写像 f が定める同値関係 R_f よりも細かい：$C_{R_p} \subset C_{R_f}$.
(2) いま，R_p が R_f よりも細かいとする．この時，次の 2 つの条件は同値である．
 (1) $f = g \circ p$ を満たすこの $g : Y \to Z$ は単射である．
 (2) R_p と R_f は同値である．

注 1.3.4. 写像 p の時点で重要な何かが潰れていなければいい．このための条件は，「写像が定める同値関係」として，共通する始域 X 上の関係，またはそのグラフ（部分集合）の包含関係などで議論できる．R_p の方が R_f よりも細かければ，より豊富な情報を含んでいて還元出来ない部分はないから，g を上手く潰すように設定すれば，$f = g \circ p$ と出来る．

なお，２つの同値関係の間の関係として，「よりも細かい」とは，$\forall x, x' \in X\, p(x) = p(x') \Rightarrow f(x) = f(x')$ が成り立つと言うことである．この逆も成り立つ時，２つの同値関係は同値であると言う．

［証明］．1.　(1) $\Rightarrow$ (2) は
$$\forall x, x' \in X,\ p(x) = p(x') \Rightarrow f(x) = f(x')$$

を示せば良い．いま，実際 $p(x) = p(x')$ を満たす $x, x' \in X$ について，$q(p(x)) = q(p(x'))$ であるから，$f(x) = f(x')$ が従う．

次に (2) $\Rightarrow$ (1) を考える．写像 g を構成するために，写像

$$\begin{array}{ccc} (p,f) : X & \longrightarrow & Y \times Z \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & (p(x), f(x)) \end{array}$$

を考える．この値域 $(p,f)(X) = \{(p(x), f(x)) \mid x \in X\} =: \Gamma_g$ は (A) 写像のグラフとなっており，そして (B) このグラフが定める写像 $(Y, Z, \Gamma_g) =: g$ が求める唯一つの写像であることを示す．

(B) については，全ての $x \in X$ について，g の定め方より $g(p(x)) = f(x)$ が成り立つから，確かにこれは $f = g \circ p$ を満たす写像である．

(A) Γ_g が写像のグラフとなっていることの証明を，$\mathrm{pr}_1 : Y \times Z \to Y$ を第一射影として，$\mathrm{pr}_1|_{\Gamma_g}$ が全単射であることを示すことによって行う．$\mathrm{pr}_1|_{\Gamma_g} \circ (p,f) = id_Y \circ p = p$ より，p は全射であるから $\mathrm{pr}_1|_{\Gamma_g}$ も全射である．また，$(y,z),(y',z') \in \Gamma_g$ について $\mathrm{pr}_1(y,z) = \mathrm{pr}_1(y',z')$ 即ち $y = y'$ 即ち $\exists x, x' \in X\ \text{s.t.}\ p(x) = p(x')$ ならば，$R_p \subset R_f$ より，$f(x) = f(x')$ 即ち $z = z'$ より，$\mathrm{pr}_1|_{\Gamma_g}$ は単射でもある．

2.　(2) $\Rightarrow$ (1)．$R_p = R_f$ の時，$X/R_p = X/R_f$ であるから，p, f の標準分解は，可逆写像 $\tilde{p} : X/R_p \to Y$ と単射 $\overline{f} : X/R_p \to Z$ を定める．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f"] & Y \arrow[d, "g"] \\
X/R_p \arrow[r, "\overline{f}"'] \arrow[ur, "\tilde{p}"] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] & Z \\
f(X) \arrow[ur, dashed, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

この図式は結局全体として可換であり（$f = g \circ p$ かつ $f = \overline{f} \circ q$ より，$\overline{f} \circ q = g \circ p$ を得る．これと $p = \tilde{p} \circ q$ より)，$\overline{f} \circ \tilde{p}^{-1} = g$ となる．従って g は全射である．

(1) $\Rightarrow$ (2)．g が単射ならば，$g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$ より，

$$\begin{aligned} p(x) = p(x') &\Leftrightarrow g(p(x)) = g(p(x')) \\ &\Leftrightarrow f(x) = f(x') \end{aligned}$$

より，$R_f = R_p$ である．

■

系 1.3.5 (商集合の普遍性)**.** R を集合 X 上の同値関係とし，$q : X \to X/R$ を商写像とする．

(1) 写像 $f : X \to Y$ について，次の２条件は同値である．
  (1) 次の図式を可換にする写像 $g : X/R \to Y$ が存在する．これは f によって引き起こされた写像である．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f"'] & X/R \arrow[d, "g"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

  (2) R は，f が定める同値関係 R_f より細かい．

(2) R' を Y の同値関係とし，$q' : Y \to Y/R'$ を商写像とする．写像 $f : X \to Y$ に対して，次の２条件は同値である．
  (1) 写像 $g : X/R \to Y/R'$ で，次の図式を可換にするものが存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q'"'] & Y \arrow[d, "q'"] \\ X/R \arrow[r, "g"'] & Y/R' \end{tikzcd}$$

(2) $C \subset X \times X$ を R のグラフとし，C' を R' のグラフとすると，$C \subset (f \times f)^{-1}(C')$ である．

［証明］. 1. 全射 p について命題 1.3.3 を適用して得る主張である．なお，q が定める同値関係 R_q とは R に他ならない．

2. 全射 $q' \circ f$ について命題 1.3.3 を適用して得る主張である． ■

1.4　実数の位相

1.4.1　点列の収束

命題 1.4.1 (点列の収束の位相的特徴付け). $(x_m) \in {}^{<\omega}\mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$ とする．次の 3 条件は同値である．

(1) $\lim_{m\to\infty} x_m = a$.

(2) $\forall r \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists l \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}_{\geqslant n}\ d(x_m, a) < r$.

(3) a を元として含む任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ について，$\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \notin U\}$ は有限集合である．

条件 3. を「十分大きな n について $x_m \in U (m \geqslant n)$ である，ということがある．

1.4.2　連続写像

定義 1.4.2. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ について，

(1) $f : U\backslash\{a\} \to \mathbb{R}^m$ を写像とする．$b = \lim_{x\to a} f(x)$ とは，次のことをいう：

$$\inf_{r>0}\left(\sup_{x\in U, 0<d(x,a)<r} d(f(x), b)\right) = 0.$$

(2) 写像 $f : U \to \mathbb{R}^m$ が $a \in U$ で**連続**であるとは，$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$ であることをいう．

(3) $f : U \to \mathbb{R}^m$ が**連続写像**であるとは，全ての $x \in U$ において f が連続であることをいう．

命題 1.4.3.

(1) 加法 $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と乗法 $\cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と逆元 ${}^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ は連続である．

(2) 射影 $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $(i \in [m])$ は連続である．次の 2 条件は同値である．
   (1) 写像 $f : U \to \mathbb{R}^m$ は a で連続である．
   (2) $f_i := \mathrm{pr}_i \circ f : U \to \mathbb{R}$ $(i \in [m])$ はそれぞれ a で連続である．

命題 1.4.4 (連続写像の特徴付け). $f : U \to \mathbb{R}^m$ を開集合上の写像とする．

(1) $a \in U$ に対し，次の 3 条件は同値である．
   (1) 写像 $f : U \to \mathbb{R}^m$ は a で連続である．
   (2) $\forall q > 0,\ \exists r > 0,\ \forall x \in U,\ d(x, a) < r \Rightarrow d(f(x), d(a)) < q$.
   (3) $f(a) \in V$ を満たす任意の開集合 $V \subset \mathbb{R}^m$ に対し，$a \in W \subset f^{-1}(V)$ を満たす開集合 $W \subset \mathbb{R}^n$ が存在する．

(2) 次の 2 条件は同値である．
   (1) $f : U \to \mathbb{R}^m$ は連続である．
   (2) 任意の開集合 $V \subset \mathbb{R}^m$ について，逆像 $f^{-1}(V) \subset U$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．

注 1.4.5. 連続写像 $f : U \to \mathbb{R}$ を考えれば，$U \subset \mathbb{R}^n$ の部分集合 $\{x \in U \mid f(x) > a\}$ は $\mathbb{R}^n$-開集合だとわかる．また，$\{a\} \subset \mathbb{R}^m$ は閉集合だから，連続写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を考えれば，$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = a\}$ も $\mathbb{R}^n$-閉集合である．

命題 1.4.6 (連続写像の特徴付け). $\mathbb{R}^n$-開集合上の写像 $f : U \to \mathbb{R}^m$ と $a \in U$ に対し，次の 2 条件は同値．

(1) $f : U \to \mathbb{R}^m$ は a で連続である．

(2) U の点列 (x_k) が a に収束するならば，$\mathbb{R}^m$ の点列 $(f(x_k))$ は $f(a)$ に収束する．

第 2 章

位相空間とその射

また位相空間は普遍構成ができる.

第 3 章

距離空間

第 4 章

位相的構造

第 5 章

写像空間