函数解析
担当：石毛和弘先生

05-210520 司馬博文

2022 年 8 月 1 日

1 問題 1

任意の $1 \leqslant p < \infty$ に対して，$C_c(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ 上稠密である．

命題 1.1．任意の $1 \leqslant p < \infty$ に対して，$C_c(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ 上稠密である．

[証明]．任意の $f \in L^p(\Omega)$ と $\epsilon > 0$ に対して，ある $g \in C_c(\Omega)$ が存在して $\|f - g\|_{L^p(\Omega)} < \epsilon$ を満たすことを示せば良い．

(1) Ω は σ-コンパクトだから，コンパクトな Ω の部分集合の増大列 (K_n) で $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$ を満たすものが存在する．集合 K_n の定義関数を 1_{K_n} として，$f_n := 1_{K_n} f$ とすると，$f_n \nearrow f$ であるから，Lebesgue の優収束定理より，$\exists_{N\in\mathbb{N}}\ \|f_N - f\|_{L^p(\Omega)} < \epsilon/2$．

(2) $j_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(\delta > 0)$ を開球 $B_\delta(0)$ の外では零な軟化子として，$J_\delta(f) := j_\delta * f$ をこれに対応する作用素とする．$\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ 上では零として f_N を延長したものを $\widetilde{f}_N$ と表すと，十分小さい $\delta > 0$ に対して，supp $(J_\delta \widetilde{f}_N) \subset \Omega$ かつ $\|J_\delta \widetilde{f}_N - \widetilde{f}_N\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \epsilon/2$ を満たすように出来る．このとき supp $(J_\delta \widetilde{f}_N) \subset \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, K_N) \leqslant \delta\}$ を満たすから，$J_\delta \widetilde{f}_N \in C_c^\infty(\Omega)$．特に，$J_\delta \widetilde{f}_N \in C_c(\Omega)$．

(1),(2) を併せると，$g := J_\delta \widetilde{f}_N$ とすれば，$\|f - g\|_{L^p(\Omega)} < \epsilon$．$C_c(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ 上稠密である． ■

2 問題 2

Lebesgue 空間 $L^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ の可分性について調べよ．

定理 2.1．Lebesgue 空間 $L^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ は可分である．

[証明]．

方針 $\Omega := \mathbb{R}^n$ の場合について示せば，一般の領域 Ω については，$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ を，$\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ 上で零と定めることにより部分集合とみなすことで，可分性が従う．いま，$\mathbb{R}^n$ 上の閉矩形全体のなす集合を

$$\mathcal{R} := \left\{ \prod_{k=1}^n [a_k, b_k] \in P(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; a_k < b_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

と定めるとこれは可算集合で，$\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ を満たす．$\mathcal{E} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ を，各閉矩形 R の定義関数 1_R が生成する $\mathbb{Q}$-線型空間とすると，これは可算集合である．あとは，$L^p(\Omega)$ 上稠密であることを示せばよい．

$\mathcal{E}$ が $L^p(\Omega)$ 上稠密であることの証明 任意の $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ と $\epsilon > 0$ について，命題 1.1 より，$\exists_{f_1 \in C_c(\mathbb{R}^n)}\ \|f - f_1\|_p < \epsilon$．すると，supp f_1 はコンパクトだから，ある閉矩形 $R \in \mathcal{R}$ が存在して，supp $f_1 \subset R$ を満たす．このとき，f_1 は連続だから，R を十分細かく $\mathcal{R}$ の元の和として $R = \cup_{k=1}^N R_d$ かつ $\exists_{i \neq j}\ x \in R_i$ かつ $x \in R_j$ ならば $\exists_{i \in [d]}\ x \in \partial R_i$ を満たすように取れる．こうして，任意の $\delta > 0$ に対して，$f_2 \in \mathcal{E}$ の値を各 R_j° 上 $\min_{x \in R_j} f_1(x) \leqslant f_2 \leqslant \max_{x \in R_j} f_1(x)$ を満たすように定め，各 ∂R_j 上では 0 とすれば，$\|f_1 - f_2\|_\infty < \delta$ を満たすように出来る．とくに，$\delta < \dfrac{\epsilon}{|R|^{1/p}}$ を満たすように取れば，ある $f_2 \in \mathcal{E}$ について $\|f_1 - f_2\|_\infty < \epsilon$ を満たすように取れる．

以上より，$\|f - f_2\|_p \leqslant \|f - f_1\|_p + \|f - f_2\| < 2\epsilon$．よって，$\mathcal{E}$ は $L^p(\Omega)$ 上稠密である．

■

定理 2.2. $L^\infty(\Omega)$ は可分でない.

[証明].

(1) $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ かつ $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ |S_n| > 0$ を満たすような Ω の可測な分割 $\{S_n\} \subset \mathcal{B}(\Omega)$ が存在する．実際，$S_0 := \Omega\backslash(2^{-1}\Omega)$ とすると，$|S_0| = (1/2)^n|\Omega|$．同様に，$S_m := S_{m-1}\backslash 2^{-1}S_{m-1}$ としていくと，各 (S_n) は互いに素で，正の測度を持つ．

(2) 任意の $I \subset \mathbb{N}$ に対して，$f_I := 1_{\cup_{n\in I} S_n}$ を集合 $\cup_{n\in I} S_n \subset \Omega$ の特性関数とすると，任意の $I \neq J \subset \mathbb{N}$ に対して $\|f_I - f_J\|_\infty = 1$ より，$\{B_{1/2}(f_I)\}_{I\in P(\mathbb{N})} \subset L^\infty(\Omega)$ は互いに素な開集合の非可算無限族となる．ただし $B_{1/2}(f_I)$ とは，$f_I \in L^\infty(\Omega)$ を中心とした半径 $1/2$ の開球とした．

(3) $X \subset L^\infty(\Omega)$ を稠密部分集合とすると，$\{X \cap B_{1/2}(f_I)\}$ は非空集合の族であるから，選択公理より元 $\{x_I\}_{I\in P(\mathbb{N})}$ が選び出せて，$x_I \in X \cap B_{1/2}(f_I)$ を満たす．これにより，単射 $P(\mathbb{N}) \to X; I \mapsto x_I$ が定まったことになるから，X は非可算集合である．

■

3 問題 3

$L^1(\Omega) \subsetneq (L^\infty(\Omega))^*$.

定理 3.1. $L^1(\Omega) \subsetneq (L^\infty(\Omega))^*$.

[証明].

(1) $L^1(\Omega) \neq (L^\infty(\Omega))^*$ である．仮に等号が成立するならば，$L^\infty(\Omega)$ は可分であることが必要だが，これは矛盾.

(2) $L^1(\Omega) \subset (L^\infty(\Omega))^*$ である．任意の $u \in L^1(\Omega)$ に対して，対応

$$\begin{array}{ccc} T_u : L^\infty(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & T_u(f) := \int_\Omega fu\,dx \end{array}$$

は $T_u \in (L^\infty(\Omega))^*$ を満たすことを示せば良い．T_u は明らかに線形作用素であり，またこれは Holder の不等式より，$|T_u f| \leqslant \|u\|_1\|f\|_\infty$ が成り立つから，有界でもある.

■

4 問題 4

Banach 空間の $x \in X$ への弱収束列 $\{x_j\} \subset X$ は, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\{x_j\}$ のある凸結合が存在して, $\left\|x - \sum_{j=1}^k \alpha_j x_j\right\| \leqslant \epsilon$ を満たす.

定理 4.1 (Mazur, S.). X をノルム空間とし，$\{x_n\} \subset X$ を x に弱収束する点列とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して，x_n の凸結合が存在して，

$$\left|x - \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right| \leqslant \epsilon.$$

[証明].

方針 $x_n \xrightarrow{w} x$ は $x_n - x_0 \xrightarrow{w} x_\infty - x_0$ と同値だから，改めて $x_n - x_0$ を x_n と取り直すことで，$x_0 = 0$ を仮定しても一般性は失われない．このとき，

$$M_1 := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in X \,\middle|\, \alpha_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

とすると，$x_0 = 0$ の仮定より $0 \in M_1$ である．$\exists_{\epsilon>0}\,\forall_{u\in M}\,\|x_\infty - u\| > \epsilon$ と仮定して矛盾を導く．

優越する Minkowski 汎関数の構成

$$M := \{v \in X \mid \exists_{u\in M_1}\,\|v-u\| \leqslant \epsilon/2\}$$

とすると，$M_1 \subset M$ を満たす 0 の凸近傍である．よって，$\mu_M(x) := \inf\left\{t>0 \mid t^{-1}x \in M\right\}$ とおくと，これは Minkowski 汎関数である．

Hahn-Banach の定理による帰謬 いま $\forall_{v\in M}\,\|x_\infty - v\| > \epsilon/2$ なので，$\mu_M(x_\infty) > 1$ より，ある $\mu_M(u_0) = 1$ を満たす $u_0 \in X$ と $\beta > 1$ を用いて $x_\infty = \beta u_0$ と表せる．ここで，

$$X_1 := \{x \in X \mid \exists_{\gamma\in\mathbb{R}}\; x = \gamma u_0\}$$

とすると，$x_\infty \in X_1$ を満たす部分空間である．この上の有界線型汎関数を $f_1(x) = \gamma$ ($x = \gamma u_0$のとき) で定めると，これは $f_1 \leqslant \mu_M$ on X を満たす．よって，$f \leqslant p$ を満たす X 上への有界線型な延長 $f : X \to \mathbb{R}$ が存在する：$f \in X^*$．これまでの議論より

$$\sup_{x\in M_1} f(x) \leqslant \sup_{x\in M} f(x) \leqslant \sup_{x\in M} \mu_M(x) = 1 < \beta = f(\beta(u_0)) = f(x_\infty)$$

であるから，$f(x_n) \to f(x_\infty)$ に矛盾．

■

5 問題 5

$K \in L^2(\Omega\times\Omega)$ に対して，

(1) 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，$(Kf)(x) := \int_\Omega K(x,y)f(y)dy$ は $\mathbb{R}^n$ 上 well-defined で，$L^2(\Omega)$ の元である．
(2) $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ はコンパクトである．

命題 5.1． $K \in L^2(\Omega\times\Omega)$ に対して，

(1) 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，$(Kf)(x) := \int_\Omega K(x,y)f(y)dy$ は $\mathbb{R}^n$ 上 well-defined で，$L^2(\Omega)$ の元である．
(2) $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ はコンパクトである．

[証明].

(1) $\Omega\times\Omega$ は σ-有限だから，Fubini の定理より，$K(x,-)f(-) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ は可測で，殆ど至る所可積分である．よってたしかに，殆ど至る所 $(Kf)(x)$ は定まる．また，Cauchy-Schwartz の不等式より，殆ど至る所の x に対して，

$$\begin{aligned}|Kf(x)| &\leqslant \int_\Omega |K(x,y)||f(y)|dy \\ &= \|f\|_2 \left(\int_\Omega |K(x,y)|^2 dy\right)^{1/2}\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$\|Kf\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2 \int_\Omega\int_\Omega |K(x,y)|^2 dxdy = \|f\|_2^2\|K\|_2^2 < \infty.$$

よってたしかに $Kf \in L^2(\Omega)$ である．

(2) $B \subset L^2(\Omega)$ を単位閉球とする．

方針：有限ランク作用素のノルム収束極限であることを示す (T_n) を有限ランク作用素の列とし，T に作用素ノルムについて収束するとする．このとき，T はコンパクト作用素である．実際，Alaoglu の定理より B は弱コンパクトだから，$T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ が弱-ノルム連続であることを示せば良い．任意の x に弱収束する点列 $\{x_n\} \subset B$ について，

$$\|Tx_m - Tx\| = \|(T-T_n)x_m - (T-T_n)x + T_nx_m - T_nx\| \leqslant 2\|T-T_n\| + \|T_nx_m - T_nx\|$$

が成り立つが，Im (T_n) は有限次元だから，弱位相とノルム位相は一致し，$\|T_nx_m - T_nx\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$.

有限ランク作用素の構成　$K_1 := \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$ $(a_i, b_i \in L^2(\Omega))$ を $K_1(x,y) := \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(y)$ と定める．このとき，

$$(K_1 f)(x) = \int_\Omega K_1(x,y)f(y)dy = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \int_\Omega b_i(y)f(y)dy$$

より，$\mathrm{rank}(\mathrm{Im}\ (K_1)) \leqslant n$ である．

K に収束する有限ランク作用素列の構成　$L^2(\Omega \times \Omega)$ は可分だから，K にノルム収束する列 $K_n := \sum_{i=1}^{m^n} a_i \otimes b_i$ が存在する．

これについて，$\|K_n - K\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ が成り立つ．

■