

目次

第 1 章	Riemann-Stieltjes 積分	2
1.1	定義と存在	2
1.2	関数列の一致収束	2
1.2.1	一致収束の性質	3
1.2.2	コンパクト一致収束	3
1.2.3	一致収束と積分	3
1.2.4	一致収束と導関数	3
1.2.5	一致収束の判定法	3
第 2 章	参考文献	5
	参考文献	6

第 1 章

Riemann-Stieltjes 積分

Lebesgue 積分とは違って、 \mathbb{R} の順序構造に強く依存した、Euclid 空間上にオーダーメイドの積分が定義できる。これについての古典論を復習する。

1.1 定義と存在

定義 1.1.1 ((Riemann-)Stieltjes integral). $I := [a, b]$ を閉区間とし、 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を有界関数、 $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を単調増加関数とする。

- (1) 分割 P とは、 $[a, b]$ の有限集合 $P = \{a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b\}$ をいう。
- (2) 各分割 $P \in P([a, b])$ に対して、 $\Delta\alpha_i := \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$ と表し、

$$M_i(P) := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i(P) := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad (i \in [n])$$

とし、

$$U(P, f, \alpha) := \sum_{i=1}^n M_i(P) \Delta\alpha_i, \quad L(P, f, \alpha) := \sum_{i=1}^n m_i(P) \Delta\alpha_i$$

とする。これを用いて、

$$\int_a^b f d\alpha := \inf_{P \in P([a, b]), |P| < \infty} U(P, f, \alpha), \quad \int_a^b f d\alpha = \sup_{P \in P([a, b]), |P| < \infty} L(P, f, \alpha).$$

として得る実数を、上 / 下 Stieltjes 積分と呼ぶ。

- (3) 上積分と下積分が一致するとき、Stieltjes 可積分であるといい、 $f \in \mathcal{R}([a, b], \alpha)$ と表す。

1.2 関数列の一様収束

復習する。

定義 1.2.1. $E \subset \mathbb{C}$ 上の関数列 (f_n) が一様収束するとは、 $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ を満たすことをいう。

定理 1.2.2 (可積分性の特徴付け). 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ について、次の 2 条件は同値。

- (1) $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.
- (2) $\forall \epsilon > 0 \exists P \in P([a, b]) |P| < \infty \wedge U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon$.

定理 1.2.3 (可積分条件). 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は、

- (1) 連続ならば $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.
- (2) 単調ならば、 α が連続ならば $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.
- (3) 有界であり、 $[a, b]$ 上に高々有限の不連続点をもち、その任意の点で α は連続であるならば、 $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

1.2.1 一様収束の性質

定理 1.2.4 (一様収束は連続性を保つ). (f_n) を $E \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数列とし, 極限 f に一様収束するとする. このとき, f は連続である.

[証明]. 任意の $x_0 \in E$ と $\epsilon > 0$ をとる.

- (1) f は (f_n) の一様収束極限だから, $\exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3$.
- (2) f_n は連続だから, $\exists_{\delta > 0} \forall_{x \in E} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x_0) - f_n(x)| < \epsilon/3$.

以上より, 任意の $|x - x_0| < \delta$ を満たす $x \in E$ に対して,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon.$$

■

定理 1.2.5. $E \subset S$ を距離空間 S の部分集合とし, $x \in S$ をその集積点とする. (f_n) が f に一様収束するとき, $(\lim_{t \rightarrow x} f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

1.2.2 コンパクト一様収束

一方で, 連続関数の列が連続関数に収束するとき, そのモードが一様収束であるとは限らない.

定理 1.2.6. (f_n) をコンパクト集合 K 上の連続関数の列とする. このとき,

- (1) (f_n) はある連続関数 f に各点収束する.
- (2) (f_n) は広義単調減少列である.

ならば, (f_n) は f に一様収束する.

1.2.3 一様収束と積分

定理 1.2.7. 単調増加関数 $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に関して, $[a, b]$ 上の可積分関数の列 $\{f_n\} \subset \mathcal{R}(\alpha)$ が, ある f に一様収束しているとする. このとき,

- (1) $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.
- (2) $\int_a^b f d\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n d\alpha$.

系 1.2.8 (項別積分). 可積分列 $\{f_n\} \subset \mathcal{R}(\alpha)$ が定める級数は各点収束しているとする: $\forall_{x \in [a, b]} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. このとき,

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha.$$

1.2.4 一様収束と導関数

定理 1.2.9. $[a, b]$ 上の可微分関数の列 (f_n) は, ある $x_0 \in [a, b]$ において各点収束するとする. 導関数が定める列 (f'_n) が一様収束するならば, 元の列 (f_n) も一様収束し, 極限と微分が可換になる: $\forall_{x \in [a, b]} f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

1.2.5 一様収束の判定法

命題 1.2.10 (一様収束の判定法). (f_n) を E 上の関数の列で, 各点収束極限 f を持つとする.

(1) (f_n) は一様収束する .

(2) (Cauchy criterion) $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 \forall x \in E |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$.

(3) $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

命題 1.2.11 (Weierstrass M -test). 関数列 (f_n) は収束する優級数 $\{M_n\} \subset \mathbb{C}$ を持つとする : $\forall n \in \mathbb{N} \|f_n\|_\infty \leq |M_n|, \sum_{n \in \mathbb{N}} M_n \in \mathbb{C}$. こ

のとき , 級数列 $(i = 1)^n f_i$ は一様収束する .

第 2 章

参考文献

参考文献

- [1] Walter Rudin - Principles of Mathematical Analysis