

# 函数解析

## 担当：石毛和弘先生

05-210520 司馬博文

2022 年 8 月 2 日

### 1 問題 1

任意の  $1 \leq p < \infty$  に対して、 $C_c(\Omega)$  は  $L^p(\Omega)$  上稠密である。

**命題 1.1.** 任意の  $1 \leq p < \infty$  に対して、 $C_c(\Omega)$  は  $L^p(\Omega)$  上稠密である。

**[証明].** 任意の  $f \in L^p(\Omega)$  と  $\epsilon > 0$  に対して、ある  $g \in C_c(\Omega)$  が存在して  $\|f - g\|_{L^p(\Omega)} < \epsilon$  を満たすことを示せば良い。

- (1)  $\Omega$  は  $\sigma$ -コンパクトだから、コンパクトな  $\Omega$  の部分集合の増大列  $(K_n)$  で  $\cup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Omega$  を満たすものが存在する。集合  $K_n$  の定義関数を  $1_{K_n}$  として、 $f_n := 1_{K_n} f$  とすると、 $f_n \nearrow f$  であるから、Lebesgue の優収束定理より、 $\exists_{N \in \mathbb{N}} \|f_N - f\|_{L^p(\Omega)} < \epsilon/2$ .
- (2)  $j_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  ( $\delta > 0$ ) を開球  $B_\delta(0)$  の外では零な軟化子として、 $J_\delta(f) := j_\delta * f$  をこれに対応する作用素とする。 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  上では零として  $f_N$  を延長したものを  $\tilde{f}_N$  と表すと、十分小さい  $\delta > 0$  に対して、 $\text{supp}(J_\delta \tilde{f}_N) \subset \Omega$  かつ  $\|J_\delta \tilde{f}_N - \tilde{f}_N\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \epsilon/2$  を満たすように出来る。このとき  $\text{supp}(J_\delta \tilde{f}_N) \subset \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, K_N) \leq \delta\}$  を満たすから、 $J_\delta \tilde{f}_N \in C_c^\infty(\Omega)$ 。特に、 $J_\delta \tilde{f}_N \in C_c(\Omega)$ 。

(1),(2) を併せると、 $g := J_\delta \tilde{f}_N$  とすれば、 $\|f - g\|_{L^p(\Omega)} < \epsilon$ 。 $C_c(\Omega)$  は  $L^p(\Omega)$  上稠密である。 ■

### 2 問題 2

Lebesgue 空間  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) の可分性について調べよ。

**定理 2.1.** Lebesgue 空間  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) は可分である。

**[証明].**

**方針**  $\Omega := \mathbb{R}^n$  の場合について示せば、一般の領域  $\Omega$  については、 $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$  を、 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  上で零と定めることにより部分集合とみなすことで、可分性が従う。いま、 $\mathbb{R}^n$  上の閉矩形全体のなす集合を

$$\mathcal{R} := \left\{ \prod_{k=1}^n [a_k, b_k] \in P(\mathbb{R}^n) \mid a_k < b_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

と定めるとこれは可算集合で、 $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  を満たす。 $\mathcal{B} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$  を、各閉矩形  $R$  の定義関数  $1_R$  が生成する  $\mathbb{Q}$ -線型空間とすると、これは可算集合である。あとは、 $L^p(\Omega)$  上稠密であることを示せばよい。

$\mathcal{B}$  が  $L^p(\Omega)$  上稠密であることの証明 任意の  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  と  $\epsilon > 0$  について、命題 1.1 より、 $\exists_{f_1 \in C_c(\mathbb{R}^n)} \|f - f_1\|_p < \epsilon$ 。すると、 $\text{supp } f_1$  はコンパクトだから、ある閉矩形  $R \in \mathcal{R}$  が存在して、 $\text{supp } f_1 \subset R$  を満たす。このとき、 $f_1$  は連続だから、 $R$  を十分細かく  $\mathcal{R}$  の元の和として  $R = \cup_{k=1}^N R_d$  かつ  $\exists_{i \neq j} x \in R_i$  かつ  $x \in R_j$  ならば  $\exists_{i \in [d]} x \in \partial R_i$  を満たすように取れる。こうして、任意の  $\delta > 0$  に対して、 $f_2 \in \mathcal{B}$  の値を各  $R_j^\circ$  上  $\min_{x \in R_j^\circ} f_1(x) \leq f_2 \leq \max_{x \in R_j} f_1(x)$  を満たすように定め、各  $\partial R_j$  上では 0 とすれば、 $\|f_1 - f_2\|_\infty < \delta$  を満たすように出来る。とくに、 $\delta < \frac{\epsilon}{|R|^{1/p}}$  を満たすように取れば、ある  $f_2 \in \mathcal{B}$  について  $\|f_1 - f_2\|_\infty < \epsilon$  を満たすように取れる。

以上より、 $\|f - f_2\|_p \leq \|f - f_1\|_p + \|f_1 - f_2\|_p < 2\epsilon$ 。よって、 $\mathcal{B}$  は  $L^p(\Omega)$  上稠密である。

定理 2.2.  $L^\infty(\Omega)$  は可分でない.

[証明].

- (1)  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  かつ  $\forall_{n \in \mathbb{N}} |S_n| > 0$  を満たすような  $\Omega$  の可測な分割  $\{S_n\} \subset \mathcal{B}(\Omega)$  が存在する. 実際,  $S_0 := \Omega \setminus (2^{-1}\Omega)$  とすると,  $|S_0| = (1/2)^n |\Omega|$ . 同様に,  $S_m := S_{m-1} \setminus 2^{-1}S_{m-1}$  としていくと, 各  $(S_n)$  は互いに素で, 正の測度を持つ.
- (2) 任意の  $I \subset \mathbb{N}$  に対して,  $f_I := 1_{\bigcup_{n \in I} S_n}$  を集合  $\bigcup_{n \in I} S_n \subset \Omega$  の特性関数とすると, 任意の  $I \neq J \subset \mathbb{N}$  に対して  $\|f_I - f_J\|_\infty = 1$  より,  $\{B_{1/2}(f_I)\}_{I \in P(\mathbb{N})} \subset L^\infty(\Omega)$  は互いに素な開集合の非可算無限族となる. ただし  $B_{1/2}(f_I)$  とは,  $f_I \in L^\infty(\Omega)$  を中心とした半径  $1/2$  の開球とした.
- (3)  $X \subset L^\infty(\Omega)$  を稠密部分集合とすると,  $\{X \cap B_{1/2}(f_I)\}$  は非空集合の族であるから, 選択公理より元  $\{x_I\}_{I \in P(\mathbb{N})}$  が選び出せて,  $x_I \in X \cap B_{1/2}(f_I)$  を満たす. これにより, 単射  $P(\mathbb{N}) \rightarrow X; I \mapsto x_I$  が定まったことになるから,  $X$  は非可算集合である.

### 3 問題 3

$$L^1(\Omega) \subsetneq (L^\infty(\Omega))^*.$$

定理 3.1.  $L^1(\Omega) \subsetneq (L^\infty(\Omega))^*$ .

[証明].

- (1)  $L^1(\Omega) \neq (L^\infty(\Omega))^*$  である. 仮に等号が成立するならば,  $L^\infty(\Omega)$  は可分であることが必要だが, これは矛盾.
- (2)  $L^1(\Omega) \subset (L^\infty(\Omega))^*$  である. 任意の  $u \in L^1(\Omega)$  に対して, 対応

$$\begin{array}{ccc} T_u : L^\infty(\Omega) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ f & \longmapsto & T_u(f) := \int_{\Omega} f u dx \end{array}$$

は  $T_u \in (L^\infty(\Omega))^*$  を満たすことを示せば良い.  $T_u$  は明らかに線形作用素であり, またこれは Holder の不等式より,  $|T_u f| \leq \|u\|_1 \|f\|_\infty$  が成り立つから, 有界でもある.

### 4 問題 4

Banach 空間の  $x \in X$  への弱収束列  $\{x_j\} \subset X$  は, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して,  $\{x_j\}$  のある凸結合が存在して,  $\left\| x - \sum_{j=1}^k \alpha_j x_j \right\| \leq \epsilon$  を満たす.

定理 4.1 (Mazur, S.).  $X$  をノルム空間とし,  $\{x_n\} \subset X$  を  $x$  に弱収束する点列とする. 任意の  $\epsilon > 0$  に対して,  $x_n$  の凸結合が存在して,

$$\left\| x - \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right\| \leq \epsilon.$$

[証明].

方針  $x_n \xrightarrow{w} x$  は  $x_n - x_0 \xrightarrow{w} x_\infty - x_0$  と同値だから, 改めて  $x_n - x_0$  を  $x_n$  と取り直すことで,  $x_0 = 0$  を仮定しても一般性は失われない. このとき,

$$M_1 := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in X \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

とすると,  $x_0 = 0$  の仮定より  $0 \in M_1$  である.  $\exists \epsilon > 0 \forall u \in M \|x_\infty - u\| > \epsilon$  と仮定して矛盾を導く.

優越する Minkowski 汎関数の構成

$$M := \{v \in X \mid \exists u \in M_1 \|v - u\| \leq \epsilon/2\}$$

とすると,  $M_1 \subset M$  を満たす  $0$  の凸近傍である. よって,  $\mu_M(x) := \inf \{t > 0 \mid t^{-1}x \in M\}$  とおくと, これは Minkowski 汎関数である.

Hahn-Banach の定理による帰謬 いま  $\forall v \in M \|x_\infty - v\| > \epsilon/2$  なので,  $\mu_M(x_\infty) > 1$  より, ある  $\mu_M(u_0) = 1$  を満たす  $u_0 \in X$  と  $\beta > 1$  を用いて  $x_\infty = \beta u_0$  と表せる. ここで,

$$X_1 := \{x \in X \mid \exists \gamma \in \mathbb{R} x = \gamma u_0\}$$

とすると,  $x_\infty \in X_1$  を満たす部分空間である. この上の有界線型汎関数を  $f_1(x) = \gamma$  ( $x = \gamma u_0$  のとき) で定めると, これは  $f_1 \leq \mu_M$  on  $X$  を満たす. よって,  $f \leq p$  を満たす  $X$  上への有界線型な延長  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  が存在する:  $f \in X^*$ . これまでの議論より

$$\sup_{x \in M_1} f(x) \leq \sup_{x \in M} f(x) \leq \sup_{x \in M} \mu_M(x) = 1 < \beta = f(\beta u_0) = f(x_\infty)$$

であるから,  $f(x_n) \rightarrow f(x_\infty)$  に矛盾.

■

## 5 問題 5

$K \in L^2(\Omega \times \Omega)$  に対して,

- (1) 任意の  $f \in L^2(\Omega)$  に対して,  $(Kf)(x) := \int_{\Omega} K(x, y)f(y)dy$  は  $\mathbb{R}^n$  上 well-defined で,  $L^2(\Omega)$  の元である.
- (2)  $K: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  はコンパクトである.

**命題 5.1.**  $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$  に対して,

- (1) 任意の  $f \in L^2(\Omega)$  に対して,  $(Kf)(x) := \int_{\Omega} K(x, y)f(y)dy$  は  $\mathbb{R}^n$  上 well-defined で,  $L^2(\Omega)$  の元である.
- (2)  $K: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  はコンパクトである.

[証明].

- (1)  $\Omega \times \Omega$  は  $\sigma$ -有限だから, Fubini の定理より,  $K(x, -)f(-): \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  は可測で, 殆ど至る所可積分である. よってたしかに, 殆ど至る所  $(Kf)(x)$  は定まる. また, Cauchy-Schwartz の不等式より, 殆ど至る所の  $x$  に対して,

$$\begin{aligned} |Kf(x)| &\leq \int_{\Omega} |K(x, y)||f(y)|dy \\ &= \|f\|_2 \left( \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\|Kf\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \int_{\Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 dx dy = \|f\|_2^2 \|K\|_2^2 < \infty.$$

よってたしかに  $Kf \in L^2(\Omega)$  である.

- (2)  $B \subset L^2(\Omega)$  を単位閉球とする.

方針: 有限ランク作用素のノルム収束極限であることを示す ( $T_n$ ) を有限ランク作用素の列とし,  $T$  に作用素ノルムについて収束するとする. このとき,  $T$  はコンパクト作用素である. 実際, Alaoglu の定理より  $B$  は弱コンパクトだから,  $T: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  が弱-ノルム連続であることを示せば良い. 任意の  $x$  に弱収束する点列  $\{x_n\} \subset B$  について,

$$\|Tx_m - Tx\| = \|(T - T_n)x_m - (T - T_n)x + T_nx_m - T_nx\| \leq 2\|T - T_n\| + \|T_nx_m - T_nx\|$$

が成り立つが,  $\text{Im}(T_n)$  は有限次元だから, 弱位相とノルム位相は一致し,  $\|T_nx_m - T_nx\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$ .

有限ランク作用素の構成  $K_1 := \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$  ( $a_i, b_i \in L^2(\Omega)$ ) を  $K_1(x, y) := \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(y)$  と定める. このとき,

$$(K_1 f)(x) = \int_{\Omega} K_1(x, y)f(y)dy = \sum_{i=1}^n a_i(x) \int_{\Omega} b_i(y)f(y)dy$$

より,  $\text{rank}(\text{Im}(K_1)) \leq n$  である.

$K$  に収束する有限ランク作用素列の構成  $L^2(\Omega \times \Omega)$  は可分だから,  $K$  にノルム収束する列  $K_n := \sum_{i=1}^{m^n} a_i \otimes b_i$  が存在する.

これについて,  $\|K_n - K\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  が成り立つ.

■

## 参考文献

- [1] Rudin, W. (1991). *Functional Analysis*.
- [2] 黒田成俊 (1980). 『関数解析』 (共立出版).
- [3] Brezis, H. (1910). *Functional Analysis*.
- [4] Pedersen, G. (1989). *Analysis Now*.