

# 目次

第 1 章	Brown 運動	3
1.1	記法	3
1.2	Gauss 分布	3
1.2.1	平均と分散	3
1.2.2	Gauss 測度	4
1.2.3	Gauss 変数の独立性	4
1.2.4	ホワイトノイズ関数	4
1.3	Gauss 過程	5
1.3.1	Gauss 空間	5
1.3.2	Gauss 測度	5
1.3.3	Gauss 過程	6
1.4	Kolmogorov の拡張定理	7
1.5	定義と特徴付け	7
1.6	構成	9
1.6.1	Gauss 過程としての構成	10
1.6.2	ランダムな係数を持った Fourier 級数としての構成	10
1.6.3	酔歩としての構成	13
1.6.4	連続時間 Markov 過程としての構成	14
1.6.5	martingale 法による構成	14
1.7	Brown 運動の変種	14
1.7.1	固定端 Brown 運動	14
1.7.2	多様体上の Brown 運動	14
1.7.3	幾何 Brown 運動	14
1.7.4	ドリフトと拡散係数を持った Brown 運動	15
1.7.5	Ornstein-Uhlenbeck 拡散	15
1.7.6	Cameron-Martin 定理	15
1.7.7	Brownian sheet	17
1.8	性質	18
1.8.1	フラクタル曲線としての見本道の対称性	18
1.8.2	連続性概念	19
1.8.3	見本道の連続性	21
1.8.4	見本道の可微分性	22
1.8.5	見本道の変分	23
1.9	Wiener 積分	24
1.9.1	定義と像	24
1.9.2	白色雑音	24
1.9.3	Brown 運動の超関数微分としての白色雑音	25
1.9.4	Brown 運動の特徴付け	25

1.9.5	Path 積分	25
1.10	Wiener 空間	26
1.10.1	古典的 Wiener 空間	26
1.10.2	抽象的 Wiener 空間	26
1.10.3	Skorokhod 空間	26
1.11	Brownian Filtration	26
1.12	Markov 性	26
1.13	Brown 運動に付随する martingale	26
1.14	強 Markov 性	26
1.15	Laplace 作用素	26
第 2 章	ホワイトノイズ解析	27
第 3 章	確率解析	28
3.1	確率積分	28
3.2	不定確率積分	28
3.3	一般の過程の積分	28
3.4	伊藤の公式	28
3.5	田中の公式	28
3.6	伊藤の公式の多次元化	28
3.7	Stratonovich 積分	28
3.8	後退確率積分	28
3.9	積分表現定理	28
3.10	Girsanov の定理	28
第 4 章	微分作用素と発散作用素	29
4.1	有限次元での議論	29
4.2	Malliavin 微分	29
4.3	Sobolev 空間	29
4.4	確率積分としての発散	29
4.5	Isonormal な Gauss 過程	29
第 5 章	確率微分方程式	30
5.1	概観	30
5.1.1	最適輸送理論	30
5.1.2	移流方程式	30
5.1.3	Brown 運動が定める確率ベクトル場	31
5.1.4	確率微分方程式	31
第 6 章	無限次元確率微分方程式	33
参考文献		34

# 第 1 章

## Brown 運動

### 1.1 記法

記法 1.1.1. 正整数  $k, n \geq 1$  について,

- (1)  $C_b^k(\mathbb{R}^n)$  で,  $C^k$ -級で, 任意の  $k$  階以下の偏導関数は有界である関数の空間とする.
- (2)  $C_0^k(\mathbb{R}^n) := C_c(\mathbb{R}^n) \cap C_b^k(\mathbb{R}^n)$  を, コンパクト台を持つもののなす部分空間とする.
- (3)  $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  は滑らかな関数であって, その関数自身とその任意の偏導関数は高々多項式の速度で増加する関数の空間とする.<sup>†1</sup>
- (4)  $C_b^\infty(\mathbb{R}^n) := C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_b^k(\mathbb{R}^n)$  を任意の偏導関数が有界なものなす部分空間とする.
- (5)  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_c(\mathbb{R}^n)$  をコンパクト台を持つ滑らかな関数の空間とする.

また,  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を確率空間とし,  $L^p(\Omega)$  によってその上の  $L^p$  空間を表す.

### 1.2 Gauss 分布

[3] による. 関数解析全開で読みやすい.

記法 1.2.1.  $H$  を可分 Hilbert 空間,  $(H, \mathcal{B}(H))$  を Borel 可測空間,  $P(H)$  をその上の Borel 確率測度全体の集合とする.

#### 1.2.1 平均と分散

可分 Hilbert 空間という一番一般的な方法で, 分布の扱い方を定める. 共分散とは半正定値対称行列としたが, 無限次元から見れば, 有限の跡を持つというのが本質であるようだ.

定義 1.2.2 (mean, covariance operator).  $\mu \in P(H)$  について,

- (1)  $E[|x|] < \infty$  のとき, 線型形式  $F: H \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \int_H \langle x, y \rangle \mu(dy)$  は有界である. この Riesz 表現  $\exists! m \in H$   $F(x) = \langle m, x \rangle$  を定める元  $m \in H$  を  $\mu$  の平均という.
- (2)  $E[|x|] \leq E[|x|^2] < \infty$  のとき, 双線型形式  $G: H \times H \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \int_H \langle x, z - m \rangle \langle y, z - m \rangle \mu(dz)$  は有界である. よって, Riesz 表現を定める自己有界作用素  $\exists! Q \in B(H)$   $\langle Qx, y \rangle = G(x, y)$  を共分散という.

補題 1.2.3 (共分散作用素の性質).  $E[|x|] < \infty$  とする.

- (1)  $Q$  は正作用素であり, かつ自己共役である.
- (2)  $H$  の任意の正規直交基底  $(e_k)$  について,  $\text{Tr} Q := \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle Qe_k, e_k \rangle = \int_H |x - m|^2 \mu(dx) < \infty$ .
- (3)  $Q$  はコンパクト作用素である.

<sup>†1</sup> 緩増加関数. <https://ncatlab.org/nlab/show/tempered+distribution>

$$(4) E[|x|^2] = \text{Tr}Q + |m|^2.$$

記法 1.2.4. 正作用素の空間を  $B^+(H)$  とし, 有限な跡を持つ作用素の空間を  $B_1^+(H) \subset B^+(H)$  で表す.

### 1.2.2 Gauss 測度

定義 1.2.5 (Gaussian measure).  $\mu \in P(H)$  が Gauss 測度であるとは, ある  $m \in H, Q \in L_1^+(H)$  を用いて,

$$\hat{\mu}(h) = e^{i(m|h)} e^{-\frac{1}{2}(Qh,h)}$$

と表せるものをいう.  $Q$  がであるとき,  $\mu$  は非退化であるという. なお, 自己共役作用素  $Q = Q^*$  が単射であることは,  $\text{Im } Q$  がノルム閉ならば  $Q = Q^*$  が可逆であることに同値であるが, 実は  $\text{Im } Q$  がノルム閉であることは必ずしも成り立たない.  $\mu = N_{m,Q}$  と表す.

### 1.2.3 Gauss 変数の独立性

ある Gauss 確率変数の成分 (一般化して, 有界線型汎関数との合成) の間の独立性は, 直交性で捉えられる.

命題 1.2.6 (Gauss 変数の affine 変換).  $H, K$  を可分 Hilbert 空間,  $T(x) = Ax + b$  ( $A \in H(H, K), b \in K$ ) を affine 作用素とする. このとき,  $T \sim N(Aa + b, AQA^*)$ .

記法 1.2.7.  $H$  上の確率変数のうち, 特に有界線型汎関数によって定まるもの:  $F_v(x) = (x, v)$  ( $v \in H$ ) を考える. これは Gauss 確率変数である:  $F_v \sim N_{\langle Qv, v \rangle}$ .

命題 1.2.8 (独立性の特徴付け).  $v_1, \dots, v_n \in H$  とする.

- (1) 線型確率変数  $F_{v_1}, \dots, F_{v_n}$  が独立である.
- (2)  $\langle Qv_i, v_j \rangle$  は対角行列である.

### 1.2.4 ホワイトノイズ関数

$Q$  がコンパクト作用素であること, 正作用素であること, すべてが交錯している. white noise とは中心化された有限な分散を持つ独立確率変数の組として得られる確率ベクトルをいう.

記法 1.2.9.  $\mu = N_Q$  を中心化された非退化な Gauss 分布とする. 二乗根作用素  $Q^{1/2}$  の像  $\text{Im } Q^{1/2}$  を Cameron-Martin 部分空間という. これは  $H$  の真の部分空間であるが, 実は  $H$  上稠密である. この部分空間上に定まる線型作用素  $W: \text{Im } Q^{1/2} \rightarrow H^*$  を

$$W_f(x) := \langle Q^{-1/2}f, x \rangle \quad (f \in Q^{1/2}(H), x \in H)$$

とおく. ひとまず単射な  $Q^{1/2}$  は  $\text{Im } Q^{1/2}$  上は可逆だからその上で定義したが, 一意な延長  $\overline{W}: H \hookrightarrow L^2(H, \mu)$  が存在する. この  $L^2(H, \mu)$  の部分空間は Gauss 空間である. すると, 独立性の特徴付けより,  $W_{f_1}, \dots, W_{f_n}$  が独立であることと,  $f_1, \dots, f_n$  が直交であることは同値.

定義 1.2.10 (white noise). 有界線型作用素  $W: H \hookrightarrow L^2(H, \mu); f \mapsto \langle Q^{-1/2}f, x \rangle = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{-1/2} \langle x, e_h \rangle \langle f, e_h \rangle$  をホワイトノイズと  
いう.

命題 1.2.11 (white noise は Gauss 過程である).

- (1)  $z \in H$  に対して, 値  $W_z$  は  $N(0, |z|^2)$  に従う実 Gauss 変数である.
- (2)  $z_1, \dots, z_n \in H$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) に対して,  $(W_{z_1}, \dots, W_{z_n})$  は  $N_n(0, \langle \langle z_h, z_k \rangle \rangle_{h,k \in [n]})$  に従う Gauss 変数である.

命題 1.2.12 (Cameron-Martin 部分空間は零集合).  $\mu(Q^{1/2}(H)) = 0$ .

この記法を使うと,  $D$  を勾配として,  $M\varphi := Q^{1/2}D\varphi$  が Malliavin 微分となる.  $M$  は可閉作用素になり, その閉包は Malliavin-Sobolev 空間  $D^{1,2}(H, \mu)$  上の作用素となる. 随伴  $M^*$  は Skorohod 積分または Gauss 発散作用素という.

## 1.3 Gauss 過程

### 1.3.1 Gauss 空間

$X$  が  $d$  次元 Gauss 変数であるとは, 任意の線型汎関数  $\alpha: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  について  $\alpha(X)$  が Gauss 確率変数であることと同値. この他にも, Gauss 変数の独立性は Gauss 空間で幾何学的に捉えられる.

記法 1.3.1.  $X \sim N(0, 0)$  として, 定数関数は Gauss 確率変数とする.

命題 1.3.2 (Gauss 確率変数全体の空間は閉部分空間をなす).  $(X_n)$  を  $X \in \text{Meas}(\Omega, \mathbb{R})$  に確率収束する Gauss 確率変数の列とする. このとき,  $X$  も Gauss で, 族  $\{|X_n|^p\}$  は一様可積分で,  $X_n \rightarrow X$  は任意の  $p \geq 1$  について  $L^p$ -収束もする.

定義 1.3.3 (Gaussian subspace). Hilbert 空間  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  の閉部分空間であって, 中心化された Gauss 確率変数のみからなるものを Gauss 空間という.

命題 1.3.4 (独立性の特徴付け).  $(G_i)_{i \in I}$  をある Gauss 空間の閉部分空間の族とする. 次の 2 条件は同値:

- (1)  $\sigma$ -代数  $\sigma(G_i)$  の族は独立である.
- (2) 各  $G_i$  は組ごとに直交する:  $\forall i, j \in I \quad G_i \perp G_j$ .

### 1.3.2 Gauss 測度

命題 1.3.5 (一般化された独立同分布列の存在定理).  $H$  を可分実 Hilbert 空間とする. ある確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  とその上の確率変数の族  $X = (X_h)_{h \in H}$  が存在して, 次の 2 条件を満たす:

- (1) 写像  $X: H \rightarrow \text{Meas}(\Omega, \mathbb{R}); h \mapsto X_h$  は線型である.
- (2) 任意の  $h \in H$  について, 確率変数  $X_h$  は中心化された Gauss 変数で, 線型写像  $X: H \rightarrow L^2(\Omega)$  は等長である:  $E[X_h^2] = \|h\|_H^2$ .
- (3)  $\text{Im } X \simeq_{\text{Hilb}} H$  は  $L^2(\Omega)$  の Gauss 部分空間である.

注 1.3.6. この同一視により, 独立性  $X_h \perp\!\!\!\perp X_{h'}$  は添字空間  $H$  における直交性として理解できる.

定義 1.3.7 (Gaussian measure).  $(A, \mathcal{A}, \mu)$  を可分な  $\sigma$ -有限測度空間とする.  $H := L^2(A, \mathcal{A}, \mu)$  として, Gauss 変数族  $X = (X_h)_{h \in H}$  を取る. この写像  $X$  を  $(A, \mathcal{A})$  上の強度  $\mu$  の Gauss 測度という. 測度確定な可測集合  $F \in \mathcal{A}, \mu(F) < \infty$  の Gauss 測度  $X(F)$  は  $X(1_F)$  とも表す.

定義 1.3.8 (equivalence / version, finite dimensional marginal distributions).

- (1) 同じ状態空間  $(E, \mathcal{G})$  を持つ  $(\Omega, \mathcal{F}, P), (\Omega', \mathcal{F}', P')$  上の 2 つの過程  $X, X'$  が同値であるまたは一方が他方のバージョンであるとは, 任意の有限部分集合  $\{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{R}_+$  と任意の可測集合  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{G}$  について,

$$P[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n] = P'[X'_{t_1} \in A_1, \dots, X'_{t_n} \in A_n]$$

- (2) 測度  $P$  の  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}): \Omega \rightarrow E^n$  による押し出しを  $P_{t_1, \dots, t_n} := P^{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})}$  で表す. 任意の有限集合  $\{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{R}_+$  に関する押し出し全体の集合  $\mathcal{M}_X$  を有限次元分布 (f.d.d) と呼ぶ.

補題 1.3.9 (過程の同値性の特徴付け).  $X, Y$  について, 次の 3 条件は同値.

- (1)  $X, Y$  は同値である.

$$(2) \mathcal{M}_X = \mathcal{M}_Y.$$

定義 1.3.10 (modification, indistinguishable). 定義された確率空間も状態空間も等しい2つの過程  $X, Y$  について,

- (1) 2つは修正または変形であるとは,  $\forall t \in \mathbb{R}_+ X_t = Y_t$  a.s. を満たすことをいう。<sup>†2</sup>
- (2) 2つは識別不可能であるとは, 殆ど至る所の  $\omega \in \Omega$  について,  $\forall t \in \mathbb{R}_+ X_t(\omega) = Y_t(\omega)$  が成り立つことをいう。

補題 1.3.11.

- (1)  $X, Y$  が互いの修正であるならば, 同値である。
- (2)  $X, Y$  が互いの修正であり, 見本道が殆ど確実に右連続ならば, 識別不可能である。

### 1.3.3 Gauss 過程

定義 1.3.12 (Gaussian process, centered).  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上の実確率過程  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  について,

- (1) Gauss 過程であるとは, 任意の有限部分集合  $\{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{R}_+$  について, 確率ベクトル  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  は  $n$  次元正規分布に従うことをいう。
- (2) Gauss 過程  $B$  の共分散とは, 関数  $\Gamma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}; (s, t) \mapsto \text{Cov}[X_s, X_t] = E[(X_s - E[X_s])(X_t - E[X_t])]$  をいう。
- (3) 中心化されているとは,  $\forall t \in \mathbb{R}_+ E[X_t] = 0$  を満たすことをいう。

定義 1.3.13 (semi-definite positive function). 関数  $\Gamma : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$  が半正定値であるとは,  $T$  の任意の有限部分集合  $\{t_1, \dots, t_d\} \subset T$  ( $d \in \mathbb{N}$ ) に対して, 行列  $(\Gamma(t_i, t_j))_{i, j \in [d]}$  は半正定値であることをいう。

命題 1.3.14 (Gauss 過程の共分散の特徴付け).  $T$  を任意の集合とする。関数  $\Gamma : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$  と任意の関数  $m : T \rightarrow \mathbb{R}$  について, 次の2条件は同値。

- (1) ある平均  $m$  の Gauss 過程が存在して, その共分散である。
- (2) 対称な半正定値関数である。

[証明]. Kolmogorov の拡張定理 1.4.5 による。ここでは  $a = 0$  として証明する。

(1)  $\Rightarrow$  (2)  $T$  の対称性は積の可換性より明らか。任意の有限部分集合  $\{t_i\}_{i \in [n]} \subset T$  と任意のベクトル  $a = (a_i)_{i \in [n]} \in \mathbb{C}^n$  を取る。これについて, 2次形式  $a^*(\Sigma(i, j))a$  が非負であることを示せば良い。

$$\begin{aligned} \sum_{i, j \in [n]} &= \Gamma(t_i, t_j) a_i \overline{a_j} \\ &= E \left[ \sum_{i \in [n]} a_i (X_{t_i} - E[X_{t_i}]) \sum_{j \in [n]} \overline{a_j} (X_{t_j} - E[X_{t_j}]) \right] \\ &= E \left[ \left| \sum_{i \in [n]} a_i (X_{t_i} - E[X_{t_i}]) \right|^2 \right] \geq 0. \end{aligned}$$

(2)  $\Rightarrow$  (1) 確率分布族  $(P_{t_1, \dots, t_n})_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \{t_i\} \subset T}$  を,  $\mathbb{R}^n$  上の平均0, 分散共分散行列を  $\Sigma_{t_1, \dots, t_n} := (\Gamma(t_i, t_j))_{i, j \in [n]}$  とする正規分布とする。  $\Gamma$  は対称な半正定値関数としたので,  $\Sigma_{t_1, \dots, t_n}$  も対称な半正定値行列であり, これに対応する正規分布はたしかに存在する。また定義より, 一貫性条件を満たす。よって,  $(P_{t_1, \dots, t_n})_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \{t_i\} \subset T}$  を有限次元周辺分布とする確率過程  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  が存在するが, これは平均0で分散  $\Gamma$  の Gauss 過程である。 ■

補題 1.3.15 (共分散公式).  $X, Y$  を Gauss 確率変数とする。  $X_t := tX + Y$  ( $t \in \mathbb{R}_+$ ) によって定まる確率過程  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  は Gauss 過程であって, 平均  $m_X(t) = tE[X] + E[Y]$  と分散

$$\Gamma_X(s, t) = st\text{Var}[X] + (s + t)\text{Cov}[X, Y] + \text{Var}[Y]$$

<sup>†2</sup> [1] ではこの概念を equivalence または version と呼んでいる。

を持つ .

[ 証明 ]. 平均は期待値の線形性より明らか . 分散については , 次のように計算が進む . ただし , 見やすくするため  $\mu_X := E[X], \mu_Y := E[Y] \in \mathbb{R}$  とする .

$$\begin{aligned}\Gamma(s, t) &= E[(X_s - E[X_s])(X_t - E[X_t])] \\ &= E[X_s X_t] - (s\mu_X + \mu_Y)E[X_t] - (t\mu_X + \mu_Y)E[X_s] + (s\mu_X + \mu_Y)(t\mu_X + \mu_Y) \\ &= stE[X^2] + (s + t)E[XY] + E[Y^2] + (s\mu_X + \mu_Y)(t\mu_X + \mu_Y) = st\text{Var}[X] + (s + t)\text{Cov}[X, Y] + \text{Var}[Y].\end{aligned}$$

■

## 1.4 Kolmogorov の拡張定理

Kolmogorov の拡張定理は , Hopf の拡張定理の一般化である . そこから確率過程論についても , 種々の対象が構成できる .  $\mathbb{R}_+$  上の確率過程も , 有限次元周辺分布を指定することで構成できるが ,  $\mathbb{R}^\infty$  の場合と違って一意性は担保されない .

**定理 1.4.1.** 確率空間列  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{G}(\mathbb{R}^n))$  上の確率測度列  $(\mu_n)$  が次の一貫性条件をみたすとき ,  $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \mathcal{G}(\mathbb{R}^\mathbb{N}))$  上の確率測度  $\mu$  であって  $\forall A \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n) \mu(A \times \mathbb{R}^\mathbb{N}) = \mu_n(A)$  を満たすものが一意に存在する . ただし ,  $A \times \mathbb{R}^\mathbb{N} = \{(\omega_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid (\omega_1, \dots, \omega_n) \in A\}$  とした . なお ,  $\mathbb{R}^\mathbb{N}$  には直積位相を考える .

$$(\text{consistency}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall A \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n) \quad \mu_{n+1}(A \times \mathbb{R}) = \mu_n(A) .$$

特に , この一貫性条件は  $\mathbb{R}^\mathbb{N}$  上の測度に延長できるための必要十分条件である . これは  $\mathbb{R}$  を一般の完備可分空間としても成り立つ .

**系 1.4.2.**  $\mathbb{R}$  上の確率測度  $\mu$  に対して , ある確率空間が存在して , これを法則とする独立な確率変数の列  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  が存在する .

**系 1.4.3** (Hilbert 空間により添字付けられた確率過程).  $H$  を可分実 Hilbert 空間とする . ある確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  とその上の確率変数の族  $X = (X_h)_{h \in H}$  が存在して , 次の 2 条件を満たす :

- (1) 写像  $X : H \rightarrow \text{Meas}(\Omega, \mathbb{R}); h \mapsto X_h$  は線型である .
- (2) 任意の  $h \in H$  について , 確率変数  $X_h$  は中心化された Gauss 変数で , 線型写像  $X : H \rightarrow L^2(\Omega)$  は等長である :  $E[X_h^2] = \|h\|_H^2$  .
- (3)  $\text{Im } X \simeq_{\text{Hilb}} H$  は  $L^2(\Omega)$  の Gauss 部分空間である .

**注 1.4.4.** この同一視により , 独立性  $X_h \perp\!\!\!\perp X_{h'}$  は添字空間  $H$  における直交性として理解できる .

**定理 1.4.5** (確率過程版). 確率分布族  $\{P_{t_1, \dots, t_n}\}_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, t_i \in \mathbb{R}_+}$  が次の条件を満たすとき , ある確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  が存在して , これらを有限次元周辺分布とする確率過程  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  が存在する .

- (C1)  $P_{t_1, \dots, t_n} \in P(\mathbb{R}^n)$  である .
- (C2) 任意の部分集合  $\{t_{k_1} < \dots < t_{k_m}\} \subset \{t_1 < \dots < t_n\}$  について ,  $P_{t_{k_1}}, \dots, P_{t_{k_m}}$  は  $P_{t_1, \dots, t_n}$  の対応する周辺分布である .

## 1.5 定義と特徴付け

Brown 運動は , 平均 0 で分散が  $\Gamma = \min$  であるような Gauss 過程であって , 殆ど確実に連続であるような過程である .

**定義 1.5.1** ((standard) Brownian motion / Wiener process).  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上の実確率過程  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  が標準 Brown 運動であるとは , 次の 4 条件を満たすことをいう :

- (B1)  $B_0 = 0$  a.s.
- (B2)  $\forall n=2,3, \dots \quad \forall 0 \leq t_1 < \dots < t_n \quad B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1}$  は独立 .
- (B3) 増分について ,  $B_t - B_s \sim N(0, t - s) \quad (0 \leq s < t)$  .



(B4)  $\Omega \rightarrow \text{Meas}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}); \omega \mapsto (t \mapsto B_t(\omega))$  について, 殆ど確実に  $t \mapsto B_t(\omega)$  は連続.

$d$  個の独立な Brown 運動  $B^1, \dots, B^d$  の積  $B = (B_t^1, \dots, B_t^d)_{t \in \mathbb{R}_+}$  を  $d$  次元 Brown 運動という.

例 1.5.2 (Brown 運動ではない例). Brown 運動  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  に対して, 独立でランダムな時刻  $U : \Omega \rightarrow [0, 1]$  を考える.  $U$  は  $[0, 1]$  上の一様分布に従うとする.

$$\tilde{B}_t := \begin{cases} B_t, & t \neq U, \\ 0, & t = U. \end{cases}$$

とすると,  $P[s \neq U \wedge t \neq U] = 0$  に注意して,

$$E[\tilde{B}_t \tilde{B}_s] = E[B_t B_s | s \neq U \wedge t \neq U] + 0 = E[B_t B_s 1_{\{s \neq U, t \neq U\}}] P[s \neq U \wedge t \neq U] = s \wedge t.$$

だから, これは平均 0 で共分散  $s \wedge t$  の Gauss 過程である. 特に, Brown 運動のバージョンである. 一方で,  $U = 0$  である場合を除いて見本道は連続でない, すなわち殆ど確実に見本道は連続でない.

補題 1.5.3 (高次元正規分布の特徴付け). 正規分布に従う独立な実確率変数  $B_{t_1}, \dots, B_{t_n}$  について,

- (1)  $B_{t_1}, \dots, B_{t_n}$  の線型結合は正規分布に従う確率変数を定める.
- (2) 積写像  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  は  $n$  次元正規分布に従う.

実は, 独立性の仮定は必要ない. 一般に,  $n$  次元確率ベクトル  $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  が  $n$  次元正規分布に従うことと, 任意の線型汎関数  $f \in (\mathbb{R}^n)^*$  に関して  $f(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  が正規確率変数であることは同値.

[証明].

- (1)  $B_{t_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), B_{t_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  として,  $B_{t_1} + B_{t_2}$  が正規分布に従うことを示せば十分である. 一般に, 独立な 2 つの確率変数の和の特性関数は, 期待値が積に対して分解することより, 元の確率変数の特性関数の積となる:

$$\varphi_{X+Y}(u) = E[e^{iu(X+Y)}] = E[e^{iuX} e^{iuY}] = E[e^{iuX}] E[e^{iuY}] = \varphi_X(u) \varphi_Y(u).$$

よって,

$$\begin{aligned} \varphi_{B_{t_1} + B_{t_2}}(u) &= \exp\left(i\mu_1 u - \frac{1}{2}\sigma_1^2 u^2\right) \exp\left(i\mu_2 u - \frac{1}{2}\sigma_2^2 u^2\right) \\ &= \exp\left(i(\mu_1 + \mu_2)u - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)u^2\right) \end{aligned}$$

であるが, これは  $B_{t_1} + B_{t_2} \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$  を意味する.

- (2)  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  の特性関数は, それぞれの特性関数の積となるが, 正規分布の特性関数の積は正規分布の特性関数となることは (1) で見た:  $\varphi_{(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})}(u) = \exp\left(i(\mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 u_1^2 + \dots + \sigma_n^2 u_n^2)\right)$ .
- (3) 任意の確率変数  $X = (X_1, \dots, X_n)$  と線型汎関数  $f(x) = a^\top x$  ( $a \in \mathbb{R}^n$ ) について,

$$\varphi_{f(X)}(v) = E[e^{ivf(X)}] = E[e^{iva^\top X}] = \varphi_X(va)$$

が成り立つことに注意する.

$\Rightarrow$   $X = (X_1, \dots, X_n) \sim N_d(\mu, \Sigma)$  のとき, 右辺によって左辺  $\varphi_{f(X)}$  が正規分布の特性関数であることが分かる.

$\Leftarrow$  任意の  $f(X)$  が正規であるとき,  $v = 1$  と取ることによって, 任意の  $a \in \mathbb{R}^n$  に対して  $\varphi_X(va)$  の値が左辺によって分かる. このとき,  $\varphi_X$  の関数形は, 多変量正規分布の特性関数に他ならないと分かる.

■

要諦 1.5.4 (Cramer-Wold). (3) の結果は  $\mathbb{R}^n$  上の一般の確率分布について成り立ち, Cramer-Wold の定理と呼ばれる. 原理は単純明快で, 一般の  $X \in \mathbb{R}^n$  について,  $\forall a \in \mathbb{R}^n$   $\varphi_{a^\top X}(v) = \varphi_X(va)$  が成り立つため,  $f \in (\mathbb{R}^n)^*$  を通じた挙動が特性関数を一意に定める.

補題 1.5.5 (多次元正規確率変数の成分間の独立性の特徴付け).  $Y_1 := (X_1, \dots, X_{k_1})^\top, \dots, Y_l := (X_{k_{l-1}+1}, \dots, X_d)^\top$  ( $l \geq 2$ ) のように,  $X$  を  $l$  個の確率変数  $Y_1, \dots, Y_l$  に分ける. この分割に対して,  $\Sigma$  のブロック  $\Sigma_{a,b} := \text{Cov}[Y_a, Y_b]$  ( $a, b \in [l]$ ) を考える.



- (1)  $Y_1, \dots, Y_l$  は独立 .  
 (2)  $\forall a, b \in [l] \ a \neq b \Rightarrow \Sigma_{a,b} = 0$  .

命題 1.5.6. 実確率過程  $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  について, 次の 2 条件は同値 .

- (1)  $B$  は (B1),(B2),(B3) を満たす .  
 (2)  $B$  は平均 0 共分散  $\Gamma(s, t) := \min(s, t)$  の Gauss 過程である .

[ 証明 ] .

(1) $\Rightarrow$ (2) Gauss 過程であることを示すには, 任意の  $0 < t_1 < \dots < t_n \in \mathbb{R}_+$  を取り,  $B := (B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  が  $n$  次元の正規分布に従うことを示せば良い . まず, 仮定 (B1),(B2) より,  $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$  は独立であり, それぞれが正規分布に従う . したがって, 積写像  $A := (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  は  $n$  次元正規分布に従う (補題 (2)). 行列

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

が定める線形変換を  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  とおくと, これは明らかに可逆で,  $B = f(A)$  が成り立つ . ここで, 任意の線型汎関数  $q \in (\mathbb{R}^n)^*$  に関して,  $q(B) = q(f(A))$  は,  $q \circ A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が線型であることから, 正規分布に従う . よって,  $B$  も正規分布に従う .

また, 仮定 (B3) より平均は  $m(t) = E[B_t] = 0$  で, 共分散は,  $s \geq t$  のとき, 増分の独立性 (B2) に注意して

$$\Gamma(s, t) = \text{Cov}[B_s, B_t] = E[B_s B_t] = E[B_s(B_t - B_s + B_s)] = E[B_s(B_t - B_s)] + E[B_s^2] = s.$$

$\Gamma$  の対称性より, これは  $\Gamma(s, t) = \min(s, t)$  を意味する .

(2) $\Rightarrow$ (1)(B1) 平均と分散を考えると,  $m(0) = E[B_0] = 0$  かつ  $\Gamma(0, 0) = E[B_0^2] = 0$  . よって,  $E[|B_0|] = 0$  より,  $B_0 = 0$  a.s.

(B2) Gauss 過程であることより, 組  $A := (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1})$  は  $n$  次元正規分布に従う . これらが独立であることを示すには, 補題より  $A$  の分散共分散行列  $\Sigma_A$  の非対角成分がすべて 0 であることを示せば良い . 平均が 0 で  $\Gamma(s, t) = \min(s, t)$  であることより, 任意の  $1 < i < j \in [n]$  について, 共分散の双線型性に注意して,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[B_{t_i} - B_{t_{i-1}}, B_{t_j} - B_{t_{j-1}}] &= E[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] \\ &= E[B_{t_i} B_{t_j}] - E[B_{t_{i-1}} B_{t_j}] - E[B_{t_i} B_{t_{j-1}}] + E[B_{t_{i-1}} B_{t_{j-1}}] = i - (i-1) - i + (i-1) = 0. \end{aligned}$$

(B3) 平均が 0 で  $\Gamma(s, t) = \min(s, t)$  であることより,

$$E[(B_t - B_s)^2] = E[B_t^2] + E[B_s^2] - 2E[B_t B_s] = t + s - 2s = t - s.$$

■

## 1.6 構成

構成のアイデアは複数ある .

- (1) Gauss 過程としての構成 .  
 (2) Fourier 級数としての構成 .  
 (3) 対称な酔歩の分布極限としての構成 .

指針 1.6.1.  $T > 0$  として, 区間  $[0, T]$  上の過程  $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$  を条件 (B1) から (B4) を満たすように構成すれば, 過程の列  $(Y^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$  を「つなげた」過程を

$$W_t := \left( \sum_{i=1}^{\lfloor t/T \rfloor} Y_T^{(i)} \right) + Y_{t - \lfloor t/T \rfloor T}^{[\lfloor t/T \rfloor + 1]}$$

と定めると、これが目標の  $\mathbb{R}_+$  上の Brown 運動となる。よって以降の構成の議論では、有界区間  $[0, T]$  上に構成することを目指す。

### 1.6.1 Gauss 過程としての構成

定理 1.6.2 (Kolmogorov's continuity criterion / 正規化定理 / 連続変形定理). 実過程  $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$  が

$$\exists_{\alpha, \beta, K > 0} \forall_{s, t \in [0, T]} E[|X_t - X_s|^\beta] \leq K|t - s|^{1+\alpha}$$

を満たすならば、 $X$  のある連続な修正  $\tilde{X}$  が識別不可能な違いを除いて一意的存在して、任意の  $0 \leq \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$  について次を満たす：

$$\exists_{G_\gamma \in \mathcal{L}(\Omega'; \mathbb{R})} \forall_{s, t \in [0, T]} |\tilde{X}_t - \tilde{X}_s| \leq G_\gamma |t - s|^\gamma.$$

特に、 $\tilde{X}$  の見本道は  $\gamma$ -次 Holder 連続である。

[証明]. [2]I.2 Thm(2.1) は、一般の添字集合  $t \in [0, 1]^d$  上の Banach 空間値過程  $(X_t)$  について示している。■

要諦 1.6.3. Gauss 過程は積率の計算により、この十分条件を満たす。

構成 1.6.4.  $\Gamma(s, t) = \min(s, t)$  は明らかに対称である。さらに半正定値であることを示せば、これを共分散とする平均 0 の Gauss 過程が存在する 1.3.14。まず、 $\min(s, t) = \int_{\mathbb{R}_+} 1_{[0, s]}(r) 1_{[s, t]}(r) dr$  であることに注意すると、任意の  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  と  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  について、

$$\begin{aligned} \sum_{i, j \in [n]} a_i a_j \min(t_i, t_j) &= \sum_{i, j \in [n]} \int_0^\infty 1_{[0, t_i]}(r) 1_{[0, t_j]}(r) dr \\ &= \int_0^\infty \left( \sum_{i=1}^n a_i 1_{[0, t_i]}(r) \right)^2 dr \geq 0. \end{aligned}$$

最後に、この過程が条件 (B4) を満たすことを見れば良い。これは Kolmogorov の正規化定理 1.6.2 による。任意の  $0 \leq s \leq t$  について、 $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$  であり、正規分布の奇数次の中心積率は 0 で偶数次の中心積率は

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} E[|B_t - B_s|^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!} (t - s)^k$$

と表せるから、ある  $B$  の修正が存在して、任意の閉区間  $[0, T]$  上で  $\gamma < \frac{k-1}{2k}$  について  $\gamma$ -次 Holder 連続である。特に、任意の  $\gamma < \frac{1}{2}$  について、 $B$  の見本道  $t \mapsto B_t(\omega)$  は殆ど至る所  $\gamma$ -Holder 連続である。

### 1.6.2 ランダムな係数を持った Fourier 級数としての構成

$t \in [0, \pi]$  を固定した関数  $f(s) = s \wedge t \in S^*([0, \pi])$  の Fourier 級数を計算することで、

$$s \wedge t = \frac{st}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin ks \sin kt}{k^2}$$

を得る。すると、 $Z_n \sim N(0, 1)$  について、

$$W_t := \frac{t}{\sqrt{\pi}} Z_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \frac{\sin kt}{k}$$

と定めれば、 $(W_t)_{t \in [0, \pi]}$  は平均 0 で共分散  $E[W_s W_t] = s \wedge t$  の Gauss 過程であることが期待できる。あとは、上記の Fourier 級数の収束の問題が残るのみである。これは以下の議論で  $e_n(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt$  と取った場合であり、このときの Brown 運動  $W_t$  の表示を **Paley-Wiener** 表現という。Wiener が 1923 年に初めて Brown 運動を構成したのはこの方法による。

## 1.6.2.1 一般理論

記法 1.6.5.  $T > 0$  とし,  $L^2([0, T])$  の正規直交系  $(e_n)_{n \geq 0}$  を取る.  $\{Z_n\}_{n \geq 0} \subset L^2(\Omega)$  を  $N(0, 1)$  に従う独立同分布確率変数列とする.

定理 1.6.6 (Ito-Nishio). 上述の設定において,

- (1)  $\sum_{n=0}^{\infty} Z_n \int_0^t e_n(r) dr$  は  $L^2(\Omega)$  内で収束する.
- (2) この収束は殆ど至る所一様収束である:  $\sup_{t \in [0, T]} \left| \sum_{n=0}^N Z_n \int_0^t e_n(r) dr - B_t \right| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ .
- (3) 極限  $B \in L^2(\Omega)$  は中心化された共分散  $\Gamma = \min$  を持つ Gauss 過程である.

## 1.6.2.2 Wiener の構成

Wiener が 1923 年に初めて Brown 運動を構成したのは, 基底として三角級数を取った場合である [5](Thm 6.1).

## 1.6.2.3 Levy の構成

Levy と Ciesielski は基底としてウェーブレットの一例である Haar 関数系を取った. まずは, 明示的に Haar 基底を使わずに構成し, 線形補間としての意味を重視する. 極めて具体的で, 「こうすれば Brown 運動を構成できる」というのがよく分かる.  $D_n := \left\{ \frac{k}{2^n} \in [0, 1] \mid 0 \leq k \leq 2^n \right\}$  上に点をうち, その線型補間を行い,  $C([0, 1])$  上での極限を取る. この場合も, 見本道の連続性は自然に従い, また  $\mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  の積空間上での可測性もわかりやすい.

## 補題 1.6.7.

- (1)  $X_1, X_2 \sim N(0, \sigma^2)$  を独立同分布確率変数とする. このとき,  $X_1 + X_2$  と  $X_1 - X_2$  も独立で, いずれも  $N(0, 2\sigma^2)$  に従う.
- (2)  $X \sim N(0, 1)$  とする. このとき,

$$\forall x > 0 \quad \frac{x}{x^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq P[X > x] \leq \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- (3)  $(X_n)$  を正規確率ベクトルの列で,  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$  a.s. を満たすとする.  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n]$ ,  $C := \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov}[X_n]$  が存在するならば,  $X$  は  $b, C$  が定める正規確率変数である.

[証明].

- (1)  $\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} (X_1 + X_2, X_1 - X_2)^\top$  は, 標準正規分布  $\frac{1}{\sigma} (X_1, X_2)^\top$  の直交行列  $\frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1; 1, -1)$  による変換であるから, 再び標準正規分布である.
- (2) 右辺の不等式については,

$$\begin{aligned} P[X > x] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

構成 1.6.8.  $[0, 1]$  内の小数第  $n$  位までの 2 進有理数の集合を

$$\mathcal{D}_n := \left\{ \frac{k}{2^n} \in [0, 1] \mid 0 \leq k \leq 2^n \right\}$$

で表し,  $\mathcal{D} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_n$  とする. 各  $\mathcal{D}_n$  上に点を打ち, その線型補完として  $C([0, 1])$  の列を得て, その一様収束極限が (存在して) Gauss 過程であることを導けば良い.

列の構成  $N(0, 1)$  に従う独立同分布確率変数列が, ある確率空間  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  上に存在する:  $\{Z_n\} \subset L^2(\Omega)$ . これを用いて,  $\mathcal{D}_n$  上の確率過程で,

$$(1) \quad B_0 = 0, B_1 = Z_1,$$

$$(2) \quad \forall r < s < t \in \mathcal{D}_n \quad B_s - B_r \perp B_t - B_s \sim N(0, t - s),$$

$$(3) \quad (B_d)_{d \in \mathcal{D}_n} \perp (Z_t)_{t \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_n},$$

の3条件を満たすものが任意の  $n \in \mathbb{N}$  について存在することを示す.

$n = 0$  のとき, (1) で定まる  $B_0, B_1$  は,  $B_1 - B_0 = Z_1 \sim N(0, 1)$  かつ  $(0, Z_1)$  は  $(Z_t)_{t \in \mathcal{D} \setminus \{0, 1\}}$  と独立である.  $n > 0$  のとき,  $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$  について

$$B_d := \frac{B_{d-1/2^n} + B_{d+1/2^n}}{2} + \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}$$

とおけば良い. 実際, このとき  $\mathcal{D}_{n-1} \ni B_{d-1/2^n}, B_{d+1/2^n} \perp (Z_t)_{t \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{n-1}}$  より, 帰納法の仮定から  $B_d \perp (Z_t)_{t \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_n} \subset (Z_t)_{t \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{n-1}}$  が成り立つ. よって後は条件 (2) の成立を示せば良い. 帰納法の仮定から  $\frac{B_{d-1/2^n} - B_{d+1/2^n}}{2}, \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}$  は独立に  $N(0, 1/2^{n+1})$  に従う. よって, 和と差  $B_d - B_{d+1/2^n}, B_d - B_{d-1/2^n}$  も独立に  $N(0, 1/2^n)$  に従う. このとき,  $(B_d - B_{d-1/2^n})_{d \in \mathcal{D}_n \setminus \{0\}}$  が独立であることを示せば十分である. これらは多次元正規分布を定めるから, 対独立性を示せば十分である.

これら新たな点が定める新たな  $1/2^n$  増分は,  $\mathcal{D}_{n-1}$  の点の凸結合としたから,  $\mathcal{D}_{n-1}$  の言葉で表せて, 独立性は帰納法の仮定から従う.

一様収束極限の存在  $(B_d)_{d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}}$  の線型補間を  $F_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  と表す ( $D_{-1} = \emptyset$  とする) と,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall d \in \mathcal{D}_n \quad B_d = \sum_{i=0}^n F_i(d) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(d)$$

が成り立つ. このとき,  $\sum_{i=0}^{\infty} F_i(t)$  は  $C([0, 1])$  の一様ノルムについて収束すること, 従って  $\|F_n\|_{\infty}$  が 0 に収束することを示せば良い.

任意の  $c > 1$  と  $(\frac{1}{c\sqrt{n}} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  を満たすくらい) 十分大きな  $n$  について,

$$P[|Z_d| \geq c\sqrt{n}] \leq 2 \frac{1}{c\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2 n}{2}} \leq e^{-\frac{c^2 n}{2}}.$$

よって, ある  $N \in \mathbb{N}$  について,

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{\infty} P[\exists d \in \mathcal{D}_n \quad |Z_d| \geq c\sqrt{n}] &< \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{d \in \mathcal{D}_n} P[|Z_d| \geq c\sqrt{n}] \\ &\leq \sum_{n=N}^{\infty} (2^n + 1) \exp\left(-\frac{c^2 n}{2}\right) \end{aligned}$$

が成り立つから,  $c > \sqrt{2 \log 2}$  を満たす  $c$  を取れば, 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} P[\exists d \in \mathcal{D}_n \quad |Z_d| \geq c\sqrt{n}] < \infty$  が成り立つ. これを満たす  $c$  を一つ任意にとると, Borel-Cantelli の補題から,

$$P[\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\exists d \in \mathcal{D}_n \quad |Z_d| \geq c\sqrt{n}\}] \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{\infty} P[\exists d \in \mathcal{D}_n \quad |Z_d| \geq c\sqrt{n}] = 0.$$

すなわち,  $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall d \in \mathcal{D}_n \quad |Z_d| < c\sqrt{n}$ . これは,  $\forall n \geq N \quad \|F_n\|_{\infty} < c\sqrt{n} 2^{-n/2}$  を意味する. よって,  $B_t := \sum_{i=0}^{\infty} F_i(t)$  は確率 1 で一様収束する.

極限過程は Brown 運動である 任意に  $0 \leq t < s \in [0, 1]$  を取ると,  $\mathcal{D}$  の列  $(t_n), (s_n)$  が存在して  $t, s$  にそれぞれ収束する. 極限過程  $B$  の連続性より,  $B_s = \lim_{n \rightarrow \infty} B_{s_n}$  が成り立つ. よって,  $B_{t_n} \sim N(0, t_n)$  より,  $E[B_t] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[B_{t_n}] = 0$ . また,

$$\text{Cov}[B_s, B_t] = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov}[B_{s_n}, B_{t_n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

以上より,  $(B_t)_{t \in I}$  は Brown 運動である.

命題 1.6.9 (jointly measurable). このように構成された  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  は,  $\Omega \times \mathbb{R}_+$  上可測である. ただし,  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  とは, 独立同分布確率変数列  $(Z_n)$  の定義域となる確率空間とする.

[証明].  $B_t = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(t)$  と定めたから,  $\forall n \in \mathbb{N} F_n(t)$  は  $\Omega \times [0, 1]$  上可測であることを示せば良い.  $\mathbb{R}_+$  上の Brown 運動は, これら  $(B_t)_{t \in [0, 1]}$  の和として表せるため. 任意の  $c \in \mathbb{R}$  について,

$$\{(\omega, t) \in \Omega \times [0, 1] \mid F_n(t) > c\}$$

が可測であることを示せばよいが, この集合は,

$$(1) \ c \geq 0 \text{ のとき } \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left\{ Z_{\frac{2k-1}{2^n}} \geq c \right\} \times \left( \frac{2k-1}{2^n} - \frac{Z_{\frac{2k-1}{2^n}} - c}{Z_{\frac{2k-1}{2^n}}} \frac{1}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n} + \frac{Z_{\frac{2k-1}{2^n}} - c}{Z_{\frac{2k-1}{2^n}}} \frac{1}{2^n} \right).$$

(2)  $c < 0$  のとき

$$\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left\{ Z_{\frac{2k-1}{2^n}} > c \right\} \times \left[ \frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k}{2^n} \right] \cup \left\{ Z_{\frac{2k-1}{2^n}} \leq c \right\} \times \left( \left[ \frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n} - \frac{Z_{\frac{2k-1}{2^n}} - c}{Z_{\frac{2k-1}{2^n}}} \frac{1}{2} \right) \cup \left( \frac{2k-1}{2^n} + \frac{Z_{\frac{2k-1}{2^n}} - c}{Z_{\frac{2k-1}{2^n}}} \frac{1}{2^n}, \frac{2k}{2^n} \right) \right).$$

と等しいから, たしかに  $\Omega \times [0, 1]$  の積  $\sigma$ -加法族の元である. ■

### 1.6.3 酔歩としての構成

酔歩のスケールとして得られるこの方法は, Brown 運動が基本的な対象であることの直感的な説明となる (これを「不変性」という表現で捉えている). また,  $C(\mathbb{R}_+)$  における極限であるから, 連続性は自然に従う. 酔歩と同様に Brown 運動は 1,2 次元においては再帰的であるが, 3 次元以上では過渡的である. もはや酔歩とは異なる点に, スケール不変性が挙げられる.

さらにここで Donsker の定理が登場する. 中心極限定理を連続化したものが Donsker の定理 (functional central limit theorem) であるが, i.i.d. の誤差の分布は,  $-\infty, \infty$  では  $y = 0$  になる Brown 運動を固定端で走らせれば良い.

記法 1.6.10 (酔歩). 任意の  $T > 0$  に対して, これを  $n \in \mathbb{N}$  等分する考え方で, 独立同分布に従う  $n$  個の確率変数  $\xi_1, \dots, \xi_n \sim (0, T/n)$ , または  $X_i := \sqrt{n}\xi_i \sim (0, T)$  を考える. この和  $R_k := \sum_{i=1}^k \xi_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^k X_i$  ( $k \in [n]$ ) を考えると, 過程  $(R_k)_{k \in [n]}$  は  $n$  ステップの酔歩で, 分散が  $T/n$  である.  $n$  を scale parameter という. この過程について,  $n \rightarrow \infty$  の極限を取ることを考える. すると, ステップ数は増え, ステップの幅は小さくなる. このとき, 中心極限定理より, 列  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$  は正規分布  $N(0, T)$  に分布収束する.

議論 1.6.11 (酔歩の線形補間).  $R_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor tn/T \rfloor} X_i$  は cadlag ではあるが連続ではないため, より簡単な対象にしたい. そこで,  $\forall k=0, \dots, n$   $S_n \left( \frac{kT}{n} \right) = R_k$  を満たす  $S_n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  を, 線型補間による連続延長とする. すると過程  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \times \Omega' \rightarrow C([0, T])$  が定まる. 2 つの過程  $(R_n), (S_n)$  について, 差は  $\epsilon_n(T) := \max(\xi_1, \dots, \xi_{\lfloor nT \rfloor + 1})$  なる過程を超えない.

命題 1.6.12.  $E[X_1^2] < \infty$  ならば, 任意の  $T > 0$  に対して次が成り立つ:  $\forall \delta > 0 \ P \left[ \sup_{t \in [0, T]} |R_n(t) - S_n(t)| > \delta \right] = P(\epsilon_n(T) > \delta) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

定理 1.6.13 (Donsker's invariance principle/ functional central limit theorem).  $(X_m)$  を平均 0 分散  $T$  の独立同分布とする. これが定める線形補間  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \times \Omega' \rightarrow C([0, T])$  は, Brown 運動  $(B_t := \sqrt{T}W_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow C([0, T])$  に分布収束する.

注 1.6.14 (Donsker's theorem). Donsker の元々の論文に載っている定理は, この形であった. その後, セミパラの研究者が, 外積分に基づいて, 独自の理論を作った. なお, 「不変性」とは, 増分過程  $(\xi_i)$  または  $(X_i)$  の分布に依らないことを指す.

要諦 1.6.15. この証明は, 一般の酔歩 (部分和過程) を, 停止時の列における Brown 運動の値として表現できるという Skorokhod の結果を用いて, Skorokhod 埋め込み表現から証明する.

### 1.6.4 連続時間 Markov 過程としての構成

熱核を用いて実際に確率測度を  $\mathbb{R}^D$  上に構成する． $D \subset [0, 1]$  は二進有理数の全体とし，Kolmogorov の拡張定理を用いる極めて具体的な構成である [6]．

### 1.6.5 martingale 法による構成

Gauss 過程を得たあと，残るは条件 (B4) の連続性であるが，これを示すのに Kolmogorov の正規化定理に依らず，martingale 性を利用する方法がある [5](Thm 6.2)．

定理 1.6.16 (martingale による正則化). 平均 0，共分散  $\min$  の Gauss 過程  $(W_t)_{t \in [0, 1]}$  にはあるバージョンが存在し，Brown 運動である（見本道は殆ど確実に連続である）．

## 1.7 Brown 運動の変種

### 1.7.1 固定端 Brown 運動

定義 1.7.1 (Brownian bridge). 共分散を  $\Gamma(s, t) = \min(s, t) - \frac{st}{T}$  とする中心化された Gauss 過程  $(B_t)_{t \in [0, T]}$  ( $T > 0$ ) を **Brown 橋**という．共分散の形から，両端  $0, T$  で固定され，真ん中  $T/2$  で最も不確実性が大きくなる過程であると分かる．これは Brown 運動を条件づけた過程  $B_t := [W_t | W_T = 0]$  ( $t \in [0, T]$ ) と理解できる．

要諦 1.7.2. これは次の微分方程式の解としても実現される：

$$dX_t = dB_t + \frac{-X_t}{T-t} dt, \quad t \in [0, T), \quad X_0 = 0.$$

構成 1.7.3. 1 次元 Brown 運動  $(W_t)$  に対して  $\left(W_t - \frac{t}{T} W_T\right)_{t \leq T}$  とすれば，これは Brown 橋である．

命題 1.7.4. Brown 橋は共分散  $\text{Cov}[X_s, X_t] = s \vee t - st$  が定める連続な中心化された Brown 過程である．

### 1.7.2 多様体上の Brown 運動

定義 1.7.5. Riemann 多様体  $(M, g)$  上の Laplace 作用素  $\Delta_M/2$  が生成する拡散過程  $(X_t, P_x)_{x \in M}$  を  $M$  上の Brown 運動と呼ぶ．ただし， $P_x$  は熱方程式の基本解を用いて表示できる．

命題 1.7.6. 任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して， $B(0) = x$  を満たす両側 **Brown 運動**  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}}$  が存在する．

命題 1.7.7. 任意の多様体上の Brown 運動に対して，Euclid 空間へ多様体を埋め込むこと，または直交枠束を用いることで，あるベクトル場が定める確率微分方程式の解として実現される．

### 1.7.3 幾何 Brown 運動

例 1.7.8 (geometric Brownian motion). 他の確率過程として，

$$\exp\left(\mu t + \sigma B_t - \left(\frac{\sigma^2 t}{2}\right)\right)$$

を幾何ブラウン運動という．



### 1.7.4 ドリフトと拡散係数を持った Brown 運動

例 1.7.9 (Brownian motion with drift and diffusion coefficient). 標準 Brown 運動  $(B_t)$  に対して,  $X_t := x + \mu t + \sigma B_t$  によって定まる過程を,  $x \in \mathbb{R}$  から開始し,  $\mu \in \mathbb{R}$  のドリフトを持ち, 拡散係数  $\sigma^2 \in \mathbb{R}$  の Brown 運動という.

### 1.7.5 Ornstein-Uhlenbeck 拡散

摩擦の存在下での質量の大きい Brown 粒子の速度のモデルとして最小の応用が見つかった, 定常過程かつ Markov 過程でもある Gauss 過程である. なお, この 3 条件を満たす (時空間変数の線形変換の別を除いて) 唯一の非自明な過程である. 時間的に平均へドリフトする, 平均回帰性 (mean-reverting) を持つために, 拡散過程でもある.

定義 1.7.10 (Ornstein-Uhlenbeck diffusion). Brown 運動に, 時間変数に  $\exp(2-)$  を合成し, 時間に応じて  $e^{-t}$  にスケールした過程  $(X_t := e^{-t} B_{e^{2t}})_{t \in \mathbb{R}}$  を Ornstein-Uhlenbeck 過程または平均回帰過程という.

要諦 1.7.11.

- (1) 一次元周辺分布は  $\forall t \in \mathbb{R} \quad X_t \sim N(0, 1)$  である.
- (2) 離散時間の過程に  $AR(1)$  というものがあり, この連続化とみなせる.
- (3) Brown 運動と違って, 時間反転可能であり,  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_{-t})_{t \in \mathbb{R}_+}$  は分布が等しい.
- (4)  $-\infty$  近傍の振る舞いは Brown 運動の  $0$  近傍の振る舞いに関係がある.
- (5) これが満たす確率微分方程式を Langevin 方程式という:

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\lambda U(t) + \dot{B}(t)$$

ただし  $\dot{B}$  は白色雑音である.

### 1.7.6 Cameron-Martin 定理

ドリフト  $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  付きの Brown 運動を調べることは, 標準 Brown 運動を調べることに等しい. これはちょうど  $F$ -Brown 橋と標準 Brown 橋の関係と同じである.

#### 1.7.6.1 Cameron-Martin 部分空間

$F(0) = 0$  を満たす見本道  $F \in C([0, 1])$  のうち, ある  $F' \in L^2([0, 1])$  の積分として得られるものの全体を Cameron-Martin 部分空間という.

記法 1.7.12 (skelton / Cameron-Martin subspace).

- (1) 標準 Brown 運動の法則を  $L_0$ , ドリフト  $F$  付きの Brown 運動の法則を  $L_F$  で表す.  $L_F \ll L_0 \Leftrightarrow L_0(A) = 0 \Rightarrow L_F(A) = 0$  がいかなるときか? まず,  $F$  が連続で,  $F(0) = 0$  が必要なのは明らかである. そうでなければ,  $L_F$  は連続でなかったり,  $0$  からスタートしない見本道に正の確率を許してしまうため.
- (2)  $D[0, 1] := \left\{ F \in C[0, 1] \mid \exists f \in L^2[0, 1] \quad \forall t \in [0, 1] \quad F(t) = \int_0^t f(s) ds \right\}$  を Dirichlet 空間という. より一般に Dirichlet 空間は, Dirichlet 積分なる半ノルムが有限となるような Hardy 空間の部分空間で, 正則関数の再生核 Hilbert 空間ともなる. この Dirichlet 空間には特別な名前がついており, skelton または Cameron-Martin 部分空間と呼ばれる.

定義 1.7.13 (Dirichlet space).  $\Omega \subset \mathbb{C}$  上の Dirichlet 空間とは, 正則関数の再生核 Hilbert 空間がなす  $H^2(\Omega)$  の部分空間で,

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{f \in H^2(\Omega) \mid \mathcal{D}(f) < \infty\} \quad \mathcal{D}(f) := \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} |f'(z)|^2 dA = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} |\partial_x f|^2 + |\partial_y f|^2 dx dy.$$



この右辺が変分原理である Dirichlet 原理を定める Dirichlet 積分になっていることから名前がついた。

**定義 1.7.14** (RKHS: reproductive kernel Hilbert space).  $X$  を集合,  $H \subset \text{Map}(X; \mathbb{R})$  を Hilbert 空間とする. 評価関数  $\text{ev}_x: H \rightarrow \mathbb{R}$  が任意の  $x \in X$  について有界線型汎関数である  $\forall x \in X \text{ ev}_x \in B(H)$  とき,  $H$  を再生核 Hilbert 空間という. すなわち, Riesz の表現定理よりある  $K_x \in H$  が存在して  $\text{ev}_x(-) = \langle -, K_x \rangle$  と表せる. この対応  $X \rightarrow H; x \mapsto K_x$  が導く双線型形式  $K: X \times X \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto K(x, y) := \langle K_x, K_y \rangle$  を再生核という. 再生核は対称で半正定値である.

**定理 1.7.15.** 関数  $K: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  は対称かつ半正定値であるとする. このとき, ただ一つの Hilbert 空間  $H$  が  $\text{Map}(X; \mathbb{R})$  内に存在して,  $K$  を再生核として持つ.

### 1.7.6.2 Cameron-Martin 定理

$L_F \ll L_0$  ならば, 標準 Brown 運動  $B$  の a.s. 性質は  $B + F$  に引き継がれる. これはちょうど Cameron-Martin 部分空間について  $F \in D[0, 1]$  に同値. したがって微分を見てみると良い.

**定義 1.7.16** (equivalence measure, absolute continuous, singular). 可測空間  $(\Omega, \mathcal{G})$  上の測度を考える.

- (1) 2つの測度の零集合の全体が一致するとき, すなわち互いに絶対連続であるとき  $\mu \ll \nu \wedge \nu \ll \mu$ , これらは同値であるという.
- (2) 絶対連続性は, 測度の同値類の間に順序を定める.
- (3) 2つの測度の「台」が分解出来るとき, すなわち, ある分割  $\Omega = A \sqcup A^c$  が存在して  $P(A) \cap \mathcal{G} \subset \mathcal{N}(\mu)$  かつ  $P(A^c) \cap \mathcal{G} \subset \mathcal{N}(\nu)$  が成り立つとき, 特異であるといい  $\mu \perp \nu$  と表す.
- (4) Lebesgue 分解により, 任意の2つの  $\sigma$ -有限測度  $\mu, \nu$  について, 一方をもう一方に対して絶対連続部分と特異部分との和に分解できる.

**定理 1.7.17** (Cameron-Martin). 任意の連続関数  $F \in C[0, 1], F(0) = 0$  について, 次が成り立つ:

- (1)  $F \notin D[0, 1]$  ならば,  $L_F \perp L_0$  である.
- (2)  $F \in D[0, 1]$  ならば,  $L_F$  と  $L_0$  は同値である.

**要諦 1.7.18.** 可微分なドリフト  $F$  については, Brown 運動の法則は同値になる. すなわち, ほとんど確実な事象 (見本道の連続性や可微分性) が等しい.

### 1.7.6.3 証明

証明には martingale を用いる.

**記法 1.7.19.**  $F \in C[0, 1], n > 0$  について, 2進小数点  $\mathcal{D}_n$  で分割して考えた,  $F$  の二次変分

$$Q(F) := \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (F(t_k) - F(t_{k-1}))^2$$

に至る列を

$$Q_n(F) := 2^n \sum_{j=1}^{2^n} \left[ F\left(\frac{j}{2^n}\right) - F\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right]^2$$

と表す.

**補題 1.7.20.**  $F \in C[0, 1], F(0) = 0$  について,

- (1)  $(Q_n(F))_{n \in \mathbb{N}}$  は増加列である.
- (2)  $F \in D[0, 1] \Leftrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} Q_n(F) < \infty$ .
- (3)  $F \in D[0, 1] \Rightarrow Q_n(F) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|F'\|_2^2$ .

[ 証明 ].

(1)  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$  より, 任意の  $j \in [2^n]$  について,

$$\begin{aligned} \left[ F\left(\frac{j}{2^n}\right) - F\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right]^2 &= \left[ \left( F\left(\frac{2j-1}{2^{n+1}}\right) - F\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right) + \left( F\left(\frac{j}{2^n}\right) - F\left(\frac{2j-1}{2^{n+1}}\right) \right) \right]^2 \\ &\leq 2 \left[ F\left(\frac{2j-1}{2^{n+1}}\right) - F\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right]^2 + 2 \left[ F\left(\frac{j}{2^n}\right) - F\left(\frac{2j-1}{2^{n+1}}\right) \right]^2 \end{aligned}$$

これを  $j \in [2^n]$  について和を取ると,

$$\sum_{j=1}^{2^n} \left[ F\left(\frac{j}{2^n}\right) - F\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right]^2 \leq 2 \sum_{j=1}^{2^{n+1}} \left[ F\left(\frac{j}{2^{n+1}}\right) - F\left(\frac{j-1}{2^{n+1}}\right) \right]^2$$

より,  $(Q_n(F))_{n \in \mathbb{N}}$  の単調増加性を得る.

(2)  $\Rightarrow F \in D[0, 1]$  のとき, ある  $f := F' \in L^2[0, 1]$  が存在して, Cauchy-Schwartz より任意の  $j \in [2^n]$  について

$$2^n \left( \int_{(j-1)2^{-n}}^{j2^{-n}} f dt \right)^2 \leq 2^n \int_{(j-1)2^{-n}}^{j2^{-n}} 1^2 dt \int_{(j-1)2^{-n}}^{j2^{-n}} f^2 dt = \int_{(j-1)2^{-n}}^{j2^{-n}} f^2 dt$$

が成り立つから,

$$Q_n(F) = 2^n \sum_{j=1}^{2^n} \left( \int_{(j-1)2^{-n}}^{j2^{-n}} f dt \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{2^n} \int_{(j-1)2^{-n}}^{j2^{-n}} f^2 dt = \|f\|_2^2 < \infty.$$

$\Leftarrow$

■

補題 1.7.21 (Paley-Wiener stochastic integral).  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  を標準 Brown 運動とする.  $F \in D[0, 1]$  について,

$$\xi_n := 2^n \sum_{j=1}^{2^n} \left[ F\left(\frac{j}{2^n}\right) - F\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right] \left[ B\left(\frac{j}{2^n}\right) - B\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right]$$

はほとんど確実に  $L^2$ -収束する. この極限を  $\int_0^1 F' dB$  で表す.

### 1.7.7 Brownian sheet

$N = 2$  の Brown 運動は, Wiener 空間上の確率解析において基本的な役割を果たす.

定義 1.7.22.  $\mathbb{R}_+^N$  をパラメータにもつ中心化された Gauss 確率変数の族  $(X_a)_{a \in \mathbb{R}_+^N}$  が次の 2 条件を満たすとき,  $N$  次元パラメータの Brown 運動という:

- (1)  $E[X_a X_b] = a \wedge b := \prod_{i=1}^N (a_i \wedge b_i)$ .
- (2)  $P[X_0 = 0] = 1$ .

命題 1.7.23.  $N = 2$  のとき, 独立な標準 Brown 運動の列  $(B_t^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  を用いて,

$$B_{s,t} := sB_t^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} B_t^{(n)} \frac{\sqrt{2}}{n\pi} \sin(n\pi s) \quad (s, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+$$

で構成される.

## 1.8 性質

### 1.8.1 フラクタル曲線としての見本道の対称性

スケール不変であり、時間反転が可能である関数  $1/t$  と  $t$  によって時間と空間のパラメータを変換すると再び Brown 運動である。大数の法則によると Brown 運動が  $y = \pm x$  が囲む空間から無限回出ることはいえませんが、 $y = \pm\sqrt{n}$  が囲む空間からは殆ど確実に無限回出ていく。

命題 1.8.1.

- (1) 自己相似性・スケール不変性:  $\forall a > 0$   $(X_t := a^{-1/2} B_{at})_{t \geq 0}$  は Brown 運動である。
- (2) (原点) 対称性:  $(-B)_{t \in \mathbb{R}_+}$  は Brown 運動である。
- (3) 時間一様性:  $\forall h > 0$   $(B_{t+h} - B_h)_{t \in \mathbb{R}_+}$  は Brown 運動である。
- (4) 時間の巻き戻し:  $(X_t := B_1 - B_{1-t})_{t \in [0,1]}$  と  $(B_t)_{t \in [0,1]}$  とは分布が等しい。
- (5) 時間反転不変性: 次も Brown 運動である:

$$X_t = \begin{cases} tB_{1/t} & t > 0, \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

- (6) 大数の法則:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0$  a.s.<sup>†3</sup>
- (7) 1/2-大数の法則<sup>†4</sup>:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ a.s.}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = -\infty \text{ a.s.}$$

[ 証明 ].

- (1) (B1)  $X_0 = a^{-1/2} B_0 = 0$  a.s.
- (B2)  $a^{-1/2}(B_{at_n} - B_{at_{n-1}}), \dots, a^{-1/2}(B_2 - B_1)$  は、独立な確率変数の可測関数  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto a^{-1/2}x$  との合成であるから、再び独立である。
- (B3)  $B_{at} - B_{as} \sim N(0, a(t-s))$  だから、 $X_t - X_s = a^{-1/2}(B_{at} - B_{as}) \sim N(0, a(t-s))$ 。
- (B4)  $t \mapsto B_t(\omega)$  が連続になる  $\omega \in \Omega$  について、 $t \mapsto a^{-1/2}B_{at}$  は連続関数との合成からなるため連続。
- (2) (1) と同様の議論による。
- (3) (1) と同様の議論による。
- (4) (1) と同様の議論と Wiener 測度の一意性による？
- (5)  $(X_t)$  が平均 0 共分散  $\min$  の Gauss 過程であることを示してから、(B4) を示す。

Gauss 過程であることの証明 有限次元周辺分布  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  は、正規確率ベクトル  $(B_{1/t_1}, \dots, B_{1/t_n})$  の、行列  $\text{diag}(t_1, \dots, t_n)$  が定める変換による値であるから、再び多変量正規分布に従う。よって、 $(X_t)$  は Gauss 過程である。平均は  $E[X_t] = E[tB_{1/t}] = 0$ 。共分散は

$$\text{Cov}[X_s, X_t] = E[X_s X_t] = stE[B_{1/s} B_{1/t}] = st \min\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) = \min(s, t).$$

見本道の連続性の証明  $t \mapsto X(t)$  は  $t > 0$  については殆ど確実に連続であるから、 $t = 0$  での連続性を示せば良い。

- (a) まず、 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}}$  の分布は、標準 Brown 運動の制限  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}}$  が  $\mathbb{R}^\infty$  上に誘導するものと等しい (Kolmogorov の拡張定理の一意性より)。よって、 $\lim_{t \searrow 0, t \in \mathbb{Q}} X_t = \lim_{t \searrow 0, t \in \mathbb{Q}} B_t = 0$  a.s.
- (b)  $(X_t)$  は  $\mathbb{R}_{>0}$  上で殆ど確実に連続であることと、 $\mathbb{R}_{>0} \cap \mathbb{Q}$  のその上での稠密性より、極限は一致する:  $\lim_{t \searrow 0} X_t = \lim_{t \searrow 0, t \in \mathbb{Q}} X_t = 0$  a.s.  
実際、ある full set  $F \in \mathcal{F}$  が存在して  $\forall \omega \in F$   $X_t(\omega)$  は  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  上連続であるが、このとき

$$\left| \lim_{t \searrow 0} X_t(\omega) - \lim_{t \searrow 0, t \in \mathbb{Q}} X_t(\omega) \right| = 2\epsilon > 0$$

<sup>†3</sup> 時間反転により、 $\infty$  での性質を 0 に引き戻して考えることが出来る、という議論の順番がきれいだと考えて入れ替えた。

<sup>†4</sup> 大数の法則と併せてみると、長い目で見て、Brown 運動は線型関数よりは遅く増加するが、 $\sqrt{t}$  よりも  $\limsup$  が速く増加する。

とすると,

$$\exists \delta_1 > 0 \ 0 < s < \delta_1 \Rightarrow \left| X_s(\omega) - \lim_{t \searrow 0} X_t(\omega) \right| < \epsilon$$

$$\exists \delta_2 > 0 \ 0 < s < \delta_2 \Rightarrow \left| X_s(\omega) - \lim_{t \searrow 0, t \in \mathbb{Q}} X_t(\omega) \right| < \epsilon$$

が成り立つが, このとき  $(0, \min(\delta_1, \delta_2)) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$  上での  $X_t$  の値について矛盾が生じている.

(6) (5) より,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} X(1/t) = X(0) = 0 \text{ a.s.}$$

(7) 任意の  $c \in \mathbb{Z}_+$  について, Brown 運動のスケール不変性 (1) より,  $\{B_n > c\sqrt{n}\} \Leftrightarrow \{n^{-1/2}B_n > c\} \Leftrightarrow \{B_1 > c\}$  である. まず, 集合に関する Fatou の補題から,  $P[\{B_n > c\sqrt{n} \text{ i.o.}\}] \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} P[\{B_n > c\sqrt{n}\}] = P[\{B_1 > c\}] > 0$ . 次に,

$X_n := B_n - B_{n-1}$  とすると,  $\{B_n > c\sqrt{n} \text{ i.o.}\} = \left\{ \sum_{j=1}^n X_j > c\sqrt{n} \text{ i.o.} \right\}$  は  $(X_n)$  について可換な事象であるから (手前の有限個の  $X_1, \dots, X_m$  に対する置換に対して不変) であるから, Hewitt-Savage の定理より,  $P[\{B_n > c\sqrt{n} \text{ i.o.}\}] = 1$ . 最後に, 任意の  $c \in \mathbb{Z}_+$  について合併事象を取ると,  $P\left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = \infty\right] = 1$  を得る.

■

**命題 1.8.2** (ユニタリ変換不変性 / conformal invariance property). 多次元正規分布の性質が一般化される.  $B$  を  $d$  次元 Brown 運動,  $U \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$  を直交行列とする. このとき,  $(X_t := UB_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  は Brown 運動である.

## 1.8.2 連続性概念

一様連続性の強さを定量化する手法が連続度である.  $\epsilon$ - $\delta$  論法において,  $\delta$  から  $\epsilon$  を与える関数関係を分類することで, 連続性を分類する.

**定義 1.8.3** (modulus of continuity).  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  をノルム空間とし,  $f: X \rightarrow Y$  を関数とする.  $X, Y$  のそれ以外の位相的性質は不問とした方がよい.

(1)  $\omega(\delta; f) := \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$  とおくと,  $\omega: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  が定まる. このとき,  $\forall f \in \text{Map}(X, Y) \ \omega(0; f) = 0$  に注意.

### 1.8.2.1 大域的性質

**補題 1.8.4** (uniform continuity). 次の 2 条件は同値.

- (1)  $\omega(-; f)$  は  $\delta = 0$  にて連続:  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta; f) = 0$ .
- (2)  $f$  は一様連続.

**定義 1.8.5** (Lipschitz continuity, Holder continuity).  $f: X \rightarrow Y$  を関数とする.

- (1)  $\omega(\delta; f) = O(\delta)$  を満たすとき, <sup>†5</sup> $f$  は Lipschitz 定数  $\sup_{\delta \in (0, \infty]} \frac{\omega(\delta; f)}{\delta}$  の Lipschitz 連続関数という.
- (2)  $\alpha \in [0, 1]$  について  $\omega(\delta; f) = O(\delta^\alpha)$  を満たすとき  $f$  は  $\alpha$ -次 Holder 連続であるという. なお,  $\alpha$  は大きいほど  $\delta^\alpha$  ( $\delta \in (0, 1)$ ) は小さいから, 条件は強く,  $\alpha = 0$  のときは有界性に同値.
- (3)  $|f|_{C^{0, \alpha}} := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$  を Holder 係数といい, これは Holder 空間  $C^{0, \alpha}$  に半ノルムを定める.

これらの条件は,  $\omega(\delta; f)$  の  $\delta \rightarrow 0$  のときの 0 への収束の速さによる分類であるから, これらを満たす関数は特に一様連続であることは明らか.

<sup>†5</sup>  $O(\delta)$  ( $\delta \rightarrow 0$ ) ではなく,  $\delta$  の全域で  $\delta$  の定数倍で抑えられることをいう.

要諦 1.8.6. Lipschitz 連続性は,  $X$  上で任意の 2 点  $x \neq y \in X$  を取っても, その間の  $f$  の増分の傾き  $|f(x) - f(y)|/|x - y|$  はある定数を超えないことを意味する. 特に有界な 1 次導関数を持つ場合, その上限  $\sup_{x \in X} f'(x)$  は Lipschitz 定数以下になるが, 一致するとは限らない.

### 1.8.2.2 局所的性質

補題 1.8.7 (continuous, locally uniform continuous).  $f: X \rightarrow Y$  と  $x_0 \in X$  について, 次の 2 条件は同値.

- (1)  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta; f|_{U_\delta(x_0)}) = 0$ .
- (2)  $f$  は  $x_0$  において連続.

また次の 2 条件も同値.

- (1) ある近傍  $x_0 \in U^{\text{open}} \subset X$  が存在して,  $f|_U$  の連続度  $\omega$  は  $\delta = 0$  にて連続.
- (2)  $f$  は  $x_0$  において局所一様連続.

注 1.8.8. この 2 つは  $X$  が局所コンパクトならば同値になる. したがって, たとえば無限次元 Banach 空間では 2 つの概念は区別する必要がある.

[ 証明 ].

- (1) $\Rightarrow$ (2) 任意の  $\epsilon > 0$  を取ると, 仮定よりある  $\delta > 0$  が存在して,  $\sup_{|x-y| \leq \delta, x, y \in U_\delta(x_0)} |f(x) - f(y)| < \epsilon$ . よって特に  $|x_0 - y| < \delta$  ならば,  $|f(x_0) - f(y)| \leq \sup_{|x-y| \leq \delta, x, y \in U_\delta(x_0)} |f(x) - f(y)| < \epsilon$ .
- (2) $\Rightarrow$ (1) 任意の  $\epsilon > 0$  を取ると, ある  $\delta > 0$  について  $\forall y \in X \ |x_0 - y| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| < \epsilon/2$  が成り立つ. このとき,

$$\sup_{|x-y| \leq \delta, x, y \in U_\delta(x_0)} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{|x-y| \leq \delta, x, y \in U_\delta(x_0)} (|f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)|) < \epsilon.$$

■

定義 1.8.9. Holder 係数  $|f|_{C^{0,\alpha}} := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \in [0, \infty]$  が  $X$  のあるコンパクト集合上で有界ならば, 局所 Holder 連続であるという.

### 1.8.2.3 関数の分類

ある  $\omega \in \Omega$  に対して, これを連続度として持つ関数として, 連続性に基づいた類別を作れる. 似た概念に一様可積分性がある.

定義 1.8.10.  $x = 0$  において連続で消える関数全体を

$$\Omega := \left\{ \omega \in \text{Map}([0, \infty], [0, \infty]) \mid \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = \omega(0) = 0 \right\}$$

と表す.  $f: X \rightarrow Y, x_0 \in X$  について,

- (1)  $\omega_{x_0}(\delta; f) := \omega(\delta; f|_{U_\delta(x_0)})$  を,  $x_0$  における局所連続度としよう.
- (2) 局所連続度の上方集合を  $\Omega_{x_0}(f) := \{\omega_{x_0} \in \Omega \mid \forall y \in X \ |f(x_0) - f(y)| \leq \omega_{x_0}(|x_0 - y|)\}$  と表すと, 大域連続度の上方集合は  $\Omega(f) := \bigcap_{x \in X} \Omega_x(f)$  と表せる.

定義 1.8.11 (equicontinuity, uniform equicontinuity). 関数族  $\{f_\lambda\} \subset \text{Map}(X, Y)$  について,

- (1) 同程度連続であるとは, 任意の  $x \in X$  において, ある  $\omega_x(\delta; f) \in \Omega_x(f)$  が存在して, 任意の  $f_\lambda$  の局所連続度 (の上界) となっていることをいう.
- (2) 一様に同程度連続であるとは, ある  $\omega(\delta; f) \in \Omega(f)$  が存在して, 任意の  $f_\lambda$  の大域連続度 (の上界) となっていることをいう.

これらの概念も,  $X$  がコンパクトな場合は一致する.

補題 1.8.12. 同程度連続な関数列  $(f_n)$  がある関数  $f$  に各点収束するとき,  $f$  は連続である.

定理 1.8.13. 有界閉区間  $I := [a, b]$  上の関数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset l^\infty(I)$  について, 次の 2 条件を満たすならば一様ノルムについて相対コンパクトである, すなわち, 一様収束する部分列を持つ.

- (1) 一様有界である:  $\exists C \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \|f_n\|_\infty \leq M$ .
- (2) 一様に同程度連続である.

#### 1.8.2.4 確率化

定義 1.8.14 (modulus of continuity). Brown 運動のコンパクト集合への制限  $B: [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  の連続度  $\omega_B$  とは,

$$\sup_{s \neq t \in [0, 1]} \frac{|B_t - B_s|}{\omega_B(|s - t|)} \leq 1$$

かつ  $\lim_{\delta \searrow 0} \omega_B(\delta) = 0$  を満たす関数  $\omega_B(\delta): [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  をいう.

注 1.8.15. Brown 運動の見本道は連続だから,

$$\limsup_{h \searrow 0} \sup_{t \in [0, 1-h]} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{\varphi(h)} \leq 1$$

を考えても問題ない. これは, 特に偏差  $h$  が小さい場合に関する評価になる. 通常の意味での連続度  $\omega_B(f)$  を得るためには,  $[0, 1]$  上で  $h$  以上離れている 2 点についての  $\sup_{h \leq |s-t| \leq \delta} |B_s - B_t|$  と  $\varphi(\delta)$  との大きい方を  $\omega_B(\delta)$  として取れば良い.

一方で,  $\sup$  を外して, 計測関数  $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  であって,  $\limsup_{t \in \mathbb{R}_+} \frac{B(t)}{\varphi(t)} \in \mathbb{R}_+$  を満たすものを探すことは, 連続度と対になる.

#### 1.8.3 見本道の連続性

見本道はコンパクト集合上で一様連続である. それがどのくらい強いかを測る尺度が Holder 連続性であるが, 見本道は任意の  $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$  について,  $\gamma$ -Holder 連続であることは, Kolmogorov の連続変形定理 1.6.2 から従う.

連続度の全体は最小元をもつが, ことに  $\delta$  が十分 0 に近いとき,  $\omega_B(\delta) = \sqrt{2\delta \log(\delta)}$  が最小となる. これは,  $\delta^{1/2}$  より少し悪いことを意味する.

命題 1.8.16.

- (1) 1/2-Holder 連続ではない:  $P \left[ \sup_{s \neq t \in [0, 1]} \frac{|B_t - B_s|}{\sqrt{|t - s|}} = +\infty \right] = 1$ .<sup>†6</sup>
- (2) 連続度の例: ある定数  $C > 0$  について, 十分小さい任意の  $h > 0$  と任意の  $h \in [0, 1 - h]$  について,

$$|B_{t+h} - B_t| \leq C\sqrt{h \log(1/h)} \text{ a.s.}$$

- (3)  $\forall c < \sqrt{2}$  について,  $\forall \epsilon > 0 \ \exists h \in (0, \epsilon) \ \exists t \in [0, 1-h] \ |B_{t+h} - B_t| \geq c\sqrt{h \log(1/h)}$ .
- (4) 最適評価 (Levy 1937):  $C = \sqrt{2}$  のとき最適な連続度となる:<sup>†7</sup>

$$\limsup_{\delta \searrow 0} \sup_{s, t \in [0, 1], |t-s| < \delta} \frac{|B_t - B_s|}{\sqrt{2|t-s| \log|t-s|}} = 1 \text{ a.s.}$$

- (5) 任意の  $\alpha < 1/2$  について, 殆ど確実に見本道は任意の点で局所  $\alpha$ -Holder 連続である.
- (6) 任意の  $\alpha > 1/2$  について, 殆ど確実に見本道は任意の点で局所  $\alpha$ -Holder 連続でない. これは Paley-Wiener-Zygmund 1933 よりも強いことに注意.
- (7) ほとんど確実に, 見本道のどこかには局所 1/2-Holder 連続であるような点が存在する. これを slow point という.

<sup>†6</sup> 実は, 局所 1/2-Holder 連続な点も存在するが, 高々零集合である. また,  $\alpha > 1/2$  については, ほとんど確実に, 任意の点で  $\alpha$ -Holder 連続でない. これは微分可能性についての Paley の結果よりも強い主張である.

<sup>†7</sup>  $\limsup$  を  $\lim$  に置き換えても成り立つ.

[ 証明 ].

- (1) 時間反転により 1/2-大数の法則 1.8.1(7) に帰着する .  $\sup_{s \neq t \in [0,1]} \frac{|B_t - B_s|}{\sqrt{|t-s|}} > \sup_{t \in (0,1]} \frac{|B_t - B_0|}{\sqrt{|t-0|}}$  であるから ,

$$P \left[ \sup_{t \in (0,1]} \frac{|B_t|}{\sqrt{t}} = \infty \right] = 1$$

を示せば良いが , 実は

$$P \left[ \limsup_{t \searrow 0} \frac{|B_t|}{\sqrt{t}} = \infty \right] = 1$$

が成り立つ . 実際 ,  $X_t$  を (5) の時間反転とすると ,

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{|B_t|}{\sqrt{t}} = \limsup_{t \searrow 0} \sqrt{t} |X_{1/t}| = \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{|X_s|}{\sqrt{s}} = \infty \text{ a.s.}$$

(2) 保留 .

(3) a

(4) (7) と (8) の関係同様 , 時間反転による .

(5) e

(6)  $X$  を ,  $B$  の時間反転とし (5) , この  $t = 0$  における微分可能性を考える . このとき , (7) より ,

$$\begin{aligned} D^*X(0) &= \limsup_{h \searrow 0} \frac{X_h - X_0}{h} \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{1/n} - X_0}{1/n} \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} X_{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = \infty. \end{aligned}$$

すなわち ,  $D^*X(0) = \infty$  で ,  $D_*X(0) = -\infty$  も同様にして得る . 特に ,  $X_t$  は  $t = 0$  にて微分可能でない .

ここで , 任意の  $t > 0$  に対して ,  $Y_s := B_{t+s} - B_t$  とすると ,  $Y_s$  も標準 Brown 運動で (3) ,  $Y_0$  にて微分可能でない . よって ,  $B$  も  $B_t$  において微分可能でない .

■

命題 1.8.17.

- (1) 最小包絡関数 :  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(t)}} = 1 \text{ a.s.}^{\dagger 8}$   
 (2) 一点における連続性の結果・繰り返し対数の法則 (Khinchin 1933) :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+ \quad \limsup_{t \searrow s} \frac{|B_t - B_s|}{\sqrt{2|t-s| \log \log|t-s|}} = 1 \text{ a.s.}$$

#### 1.8.4 見本道の可微分性

命題 1.8.18. 関数  $f$  の右・左微分係数を  $D^*f(t) := \limsup_{h \searrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$  ,  $D_*f(t)$  で表すとする

- (1) 任意の  $t \in \mathbb{R}_+$  について , 殆ど確実に  $B_t$  は  $t$  において微分可能でない上に , 殆ど確実に  $D^*B(t) = +\infty \wedge D_*B(t) = -\infty$  .  
 (2) (Paley-Wiener-Zygmund 1933)  $B$  の見本道は殆ど確実に至る所微分不可能性である .<sup>†9</sup> さらに , ほとんど確実に  $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad D^*B(t) = +\infty \vee D_*B(t) = -\infty$  .  
 (3) ほとんど確実に  $\forall t \in [0,1] \quad D^*B(t) \in \{\pm\infty\}$  という主張は正しくない .

<sup>†8</sup> 1/2-Holder 連続性が 1/2-大数の法則の系であったように , 繰り返し対数の法則はこの系になる .

<sup>†9</sup> Paley et al. 1933, Dvoretzky et al. 1961.



## 1.8.5 見本道の変分

命題 1.8.19 (erratic).

- (1) 殆ど確実に, 任意の  $0 < a < b < \infty$  に対して, Brown 運動の見本道は  $[a, b]$  上単調でない.  
 (2) ほとんど確実に, 局所的な増加点  $t \in (0, \infty)$  s.t.  $\exists_{t \in (a, b) \text{ open } \mathbb{R}_+} [\forall_{s \in (a, t)} f(s) \leq f(t)] \wedge [\forall_{s \in (t, b)} f(t) \leq f(s)]$  を持たない.

定義 1.8.20 (bounded variation). 右連続関数  $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$  が有界変動であるとは,

$$V_f^{(1)}(t) := \sup \sum_{j=1}^k |f(t_j) - f(t_{j-1})| < \infty$$

を満たすことをいう. 有界変動関数は 2 つの単調増加関数の差で表されるクラスと一致する.

命題 1.8.21 (2 次変動の  $L^2$ -収束).  $[0, t]$  の部分分割  $\pi := (0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t)$  の系列  $(\pi_n), \pi_n \subset \pi_{n+1}$  について,  $|\pi| := \max_{j \in n} (t_{j+1} - t_j)$  とする. このとき, 次の  $L^2(\Omega)$ -収束が成り立つ:

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 = t \quad \in L^2(\Omega).$$

[証明]. 確率変数列を  $\xi_j := (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)$  ( $j \in n$ ) とおくと, これらは中心化された独立な確率変数列になる. 実際,

$$E[\xi_j] = E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] - E[t_{j+1} - t_j] = t_{j+1} - t_j - (t_{j+1} - t_j) = 0.$$

また, 各  $\xi_j$  は独立な確率変数列  $(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$  の可測関数による像であるから, やはり独立である.

正規分布の偶数次の中心積率は  $\mu_{2r} = \frac{(2r)!}{2^r r!} \sigma^{2r}$  と表せるため,  $E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^4] = 3(t_{j+1} - t_j)^2$  であることに注意すると,

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - t \right)^2 \right] &= E \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \right)^2 \right] = \sum_{j=0}^{n-1} E[\xi_j^2] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (3(t_{j+1} - t_j)^2 - 2(t_{j+1} - t_j)^2 + (t_{j+1} - t_j)^2) \\ &= 2 \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)^2 \leq 2t|\pi| \xrightarrow{|\pi| \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

■

注 1.8.22. より強く, 概収束も示せる. なお,  $(\pi_i)$  が部分分割の系列でない場合, 反例が殆ど確実に存在する. というのも, 殆ど確実に分割の列で  $|\pi_n| \rightarrow 0$  を満たすものが存在して,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k(n)} (B(t_j^{(n)}) - B(t_{j-1}^{(n)}))^2 = \infty$$

が成り立つ. 他にこういうものを排除する十分条件として,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\pi_n| < \infty$  がある.

命題 1.8.23 (2 次変動の概収束).  $[0, t]$  の分割の列  $(\pi^n)_{n \geq 1}, \pi^n := \{0 = t_0^n < \dots < t_{k_n}^n = t\}$  は  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\pi^n| < \infty$  を満たすとする. このとき,

$$\sum_{j=0}^{k_n-1} (B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} t.$$

系 1.8.24 (全変動の発散). 区間  $[0, t]$  における全変動

$$V := \sup_{\pi} \sum_{j=0}^{n-1} |B_{t_{j+1}} - B_{t_j}|$$

は殆ど確実に  $\infty$  である.

[証明]. Brown 運動の見本道は殆ど確実に連続であるから,  $\sup_{j \in n} |B_{t_{j+1}} - B_{t_j}| \xrightarrow{|\pi| \rightarrow 0} 0$  である. よって, もし  $V < \infty$  ならば, 2乗和

$$\begin{aligned} V_2 &:= \sum_{j=1}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \leq \sup_{j \in n} |B_{t_{j+1}} - B_{t_j}| \left( \sum_{j=0}^{n-1} |B_{t_{j+1}} - B_{t_j}| \right) \\ &\leq V \sup_{j \in n} |B_{t_{j+1}} - B_{t_j}| \xrightarrow{|\pi| \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

よって, 2 次変動の  $L^2$ -極限は,

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 = P[V = \infty] \left( \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \right) = t$$

と表せる.  $P[V < \infty] = 0$  でない限り, 2 次変動が  $t$  に  $L^2$ -収束することに矛盾する. ■

## 1.9 Wiener 積分

Wiener 測度は, Wiener 過程によって誘導される Gauss 測度の例である. Wiener 測度が定める Lebesgue 積分を考えると, Stieltjes 積分の状況がうまく模倣出来, これは伊藤積分の制限になる. このとき, Brown 運動が有界変動関数 (分布関数) に当たるが, ホワイトノイズが積分にあたる.

### 1.9.1 定義と像

有界変動な部分は零集合であるから, Stieltjes 積分を取ることは出来ない. そこで, 単関数について Riemann 和を取る作用素の一意的な延長として得られる有界線型作用素  $L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\Omega)$  を Wiener 積分とする.

記法 1.9.1.

$$\mathcal{E}_0 := \left\{ \varphi_t = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \mathbf{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t) \in L^2(\mathbb{R}_+) \mid n \geq 1, a_0, \dots, a_{j-1} \in \mathbb{R}, 0 = t_0 < \dots < t_n \right\}$$

は  $L^2(\mathbb{R}_+)$  の稠密部分空間である.

定義 1.9.2 (Paley-Wiener integral). 単関数  $\varphi \in \mathcal{E}_0$  上の有界線型作用素  $\mathcal{E}_0 \rightarrow L^2(\Omega)$

$$\int_{\mathbb{R}_+} \varphi_t dB_t := \sum_{j=0}^n a_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

は等長写像であるが, この  $L^2(\mathbb{R}_+)$  への連続延長  $B : L^2(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  を **Wiener 積分** という. 像は  $B(\varphi) = \int_0^\infty \varphi_t dB_t \sim N(0, \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2)$  を満たし,  $\text{Im } B \subset L^2(\Omega)$  は  $L^2(\mathbb{R}_+)$  と等長同型な, Brown 運動が生成する Gauss 部分空間となる.

補題 1.9.3. 任意の  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$  の Wiener 測度による Lebesgue 積分は, 正規分布に従う確率変数  $B(\varphi) \sim N(0, \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2)$  となる.

### 1.9.2 白色雑音

ホワイトノイズ 1.2.10 と Wiener 積分 1.9.2 は同一視出来る. ここではそれを利用して, Wiener 積分の言葉を用いてホワイトノイズを定義する.

定義 1.9.4 (white noise).  $D \subset \mathbb{R}^m$  を Borel 集合とする.  $l$  を  $\mathbb{R}^m$  上の Lebesgue 測度とする.

(1)  $D$  内の測度確定な集合の全体を  $\mathcal{M}(D) := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \cap P(D) \mid I(A) < \infty\}$  と表す .

(2)  $\mathcal{M}(D)$  上の平均 0 の Gauss 過程  $(W(A))_{A \in \mathcal{M}(D)}$  であって,  $\Gamma(A, B) = E[W(A)W(B)] = I(A \cap B)$  を満たすものをいう .

要諦 1.9.5. この族  $W : \mathcal{M}(D) \rightarrow L^2(\Omega)$  は, 埋め込み  $\mathcal{M}(D) \hookrightarrow L^2(D); A \mapsto 1_A$  によって線型な等長写像  $L^2(D) \ni \varphi \mapsto \int_D \varphi(x)W(dx) \in \overline{W} \subset L^2(\Omega)$  に延長出来る . そこで, 有界線型作用素としてもホワイトノイズは定義できる 1.2.10 . ただし,  $\overline{W}$  は  $W = \{W(A)\}_{A \in \mathcal{M}} \subset L^2(\Omega)$  が生成する Gauss 部分空間である .

### 1.9.3 Brown 運動の超関数微分としての白色雑音

議論 1.9.6 (白色雑音は, Brown 運動の超関数の意味での時間微分である). Wiener 測度を緩増加超関数の空間に実現することで, 仮想的な時間微分  $dB_t$  は自然に捉えられる .  $S$  を Schwartz の急減少関数の空間とし,  $S'$  をその双対空間とし,  $\langle -, - \rangle$  をこの間のペアリングとする . このとき, 次の定理が成り立つ .

定理 1.9.7. 次を満たす  $(S', \mathcal{B}(S'))$  上の確率測度  $\nu$  がただ一つ存在する :

$$\forall \varphi \in S \quad \int_{S'} \exp i \langle u, \varphi \rangle \nu(du) = \exp \left( -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(t) dt \right)$$

このときの確率空間  $(S', \mathcal{B}(S'), \nu)$  を白色雑音という . これを引き起こす過程  $\dot{B}$  を,  $\mathbb{R}$  上の Brown 運動  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}}$  を用いて構成する .

$$\dot{B}(\varphi) := - \int_{\mathbb{R}} B_t \varphi'(t) dt \quad (\varphi \in S)$$

とすると, これは  $(S, \mathcal{B}(S))$  上の  $S'$ -値確率変数であり, 白色雑音  $\nu$  に従う .

### 1.9.4 Brown 運動の特徴付け

Brown 運動は Wiener 積分を通じてホワイトノイズを定義する . 一方でホワイトノイズの累積分布関数として Brown 運動が得られる . これは Stieljes 積分を通じて, ある有界変動関数  $d\rho$  が有界線型汎関数  $\int -d\rho \in (C([a, b]))^*$  を定める関係とと相似形であるが, 用いている測度は今回は  $C(\mathbb{R}_+)$  上の Wiener 測度である .

命題 1.9.8.  $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$  の Wiener 積分はホワイトノイズである :  $W_f = \int_0^\infty f(s)dB(s)$  .

命題 1.9.9.  $W$  を  $\mathbb{R}_+$  上のホワイトノイズとすると,  $W_t := W([0, t]) = W_{1_{[0, t]}}$  と定めるとこれは Brown 運動の修正である .

### 1.9.5 Path 積分

量子力学, 量子場理論で生まれた考え方である .

議論 1.9.10. 伝播関数 (propagator) は, 粒子が移動する際の確率振幅を与える . これはある積分核  $K$  が与える積分変換作用素  $U$  で与えられるが, この積分核が曲者である . 場の付値が関数  $\varphi$  で与えられ, 関数  $\varphi$  の空間上の, 作用汎関数  $S$  の積分

$$K(x, y) := \int \exp(iS(\varphi)) D\varphi$$

で与えられる . しかし,  $D\varphi$  なる測度が不明瞭どころか, 対応する測度が存在しないこともある . 道積分 (path integral) の語源は, 多様体  $X$  上の粒子を記述するシグマ模型においては,  $\varphi \in C([0, 1], X)$  は厳密に「道」になるため . ここで (古典的) Wiener 空間が登場する .

## 1.10 Wiener 空間

### 1.10.1 古典的 Wiener 空間

定義 1.10.1. (1)  $\Omega := \{\omega \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}) \mid \omega(0) = 0\}$ .

(2)  $\mathcal{F}$  を,  $\mathbb{R}_+$  上の広義一様収束位相が生成する Borel  $\sigma$ -代数とする.

(3)  $P$  を Wiener 測度とする.

命題 1.10.2 ( $\sigma$ -代数の特徴付け).  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を Wiener 空間とする.

(1)  $\mathbb{R}_+$  上の広義一様収束位相が生成する Borel  $\sigma$ -代数  $\mathcal{F}$  は次の円筒集合の集合  $\mathcal{G} \subset P(\Omega)$  によって生成される:

$$\mathcal{G} = \{C = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in [k] \omega(t_i) \in A_i\} \in P(\Omega) \mid k \in \mathbb{N}_{\geq 1}, A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), 0 \leq t_1 < \dots < t_k\}$$

(2)  $p_t(x) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/(2t)}$  を正規分布の確率密度関数とする.

$$P(C) = \int_{A_1 \times \dots \times A_k} p_{t_1}(x_1) p_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \cdots p_{t_k-t_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) dx_1 \cdots dx_k.$$

が成り立ち, これの  $\mathcal{F}$  上への延長はたしかに一意的である.

(3) 任意の  $\omega \in \Omega$  に対して,  $B_t(\omega) := \omega(t)$  と定めると, これは Brown 運動である.

### 1.10.2 抽象的 Wiener 空間

### 1.10.3 Skorokhod 空間

連続でない, cadlag な見本過程も許す場合, その空間を Skorokhod 空間という.

## 1.11 Brownian Filtration

## 1.12 Markov 性

## 1.13 Brown 運動に付随する martingale

## 1.14 強 Markov 性

## 1.15 Laplace 作用素

$P_t[f(x)] = E[f(x + B_t)]$  をおくことにより,  $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  は  $C_0(\mathbb{R})$  上で Hille-吉田の意味での強連続半群となり, その生成作用素  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t - I}{t} = \frac{\nabla^2}{2}$  が Laplace 作用素である.  $I$  は恒等作用素とした.

## 第 2 章

# ホワイトノイズ解析

時系列として独立同分布の確率変数列で絵あり，定常時系列として持つスペクトルはフラットすなわち無色である．このような偶然量はノイズと呼ぶのにふさわしい．それ絵はノイズとして見ると厄介なものかもしれないが，最大の情報量をもつので通信の理論には大いに活躍の場がある．そして，一般のガウス過程の中でも元素的なものとして特徴付けられる．それは「揺らぎ」の典型であり，基本となる．

An innovative approach to random fields: Applications of white noise theory.

## 第 3 章

# 確率解析

確率論ははじめから偏微分方程式論と密接に関係していたことを思うと，確率論自体が測度論で基礎付けられることは自然であった．さらに，確率積分なる概念も自然に定義できるはずである．

Brown 運動  $B_t$  は微分可能ではないし，有界変動にもならないので，Stieltjes 積分としては定義できる道はない．連鎖律は伊藤の公式と呼び，微分は出来ないから積分の言葉で定式化される．余分な右辺第 3 項が特徴である．

### 3.1 確率積分

### 3.2 不定確率積分

### 3.3 一般の過程の積分

### 3.4 伊藤の公式

### 3.5 田中の公式

### 3.6 伊藤の公式の多次元化

### 3.7 Stratonovich 積分

### 3.8 後退確率積分

### 3.9 積分表現定理

### 3.10 Girsanov の定理

## 第 4 章

# 微分作用素と発散作用素

4.1 有限次元での議論

4.2 Malliavin 微分

4.3 Sobolev 空間

4.4 確率積分としての発散

4.5 Isonormal な Gauss 過程



## 第 5 章

# 確率微分方程式

元々 Markov 過程論から純粋に数学的に生じた問題意識の解決のために確率微分方程式が開発された。しかし，確率論的な現象は自然界にありふれている。常微分方程式の定める流れに沿って輸送された物理量は，移流方程式と呼ばれる 1 階の偏微分方程式を満たす。Brown 運動に沿って輸送された物理量（熱など）は，熱伝導方程式・拡散方程式と呼ばれる 2 階の偏微分方程式を満たす。この対応関係は確率微分方程式を導入することでさらに一般化され，2 階の放物型・楕円形の偏微分方程式の解を確率的に表示することが出来るようになる。こうして，確率微分方程式は，ポテンシャル論・偏微分方程式論や微分幾何学との架け橋になる。

Brown 運動は，空間的に一様な確率場での積分曲線だと思えば，さらに一般に空間的な一様性の仮定を取った場合が確率微分方程式であり，これは Brown 運動の変形として得られるというのが伊藤清のアイデアである。

### 5.1 概観

#### 5.1.1 最適輸送理論

定義 5.1.1.

#### 5.1.2 移流方程式

Brown 運動は，位置を忘れて粒子の視点から見た，確率ベクトル場から受ける「流れ」だと理解できる。したがってその背景には確率ベクトル場がある。

定義 5.1.2 (advection, 時間的に一様なベクトル場による輸送方程式).

- (1) 物理量のスカラー場や物質がベクトル場によって輸送されること・経時変化することを，移流という。
- (2) 定ベクトル  $b = (b^1, b^2) \in \mathbb{R}^2$  が定める空間一様な移流に関する初期値問題  $u = u(t, x)$  は，

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \cdot \nabla u = 0, \quad (t > 0, x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2),$$

$$u(0, x) = f(x) \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

と表される。このとき， $X_t(x) := x - bt$  は，時刻  $t$  に  $x$  に居る粒子が，時刻 0 にどこにいたかを表す。よって，初期状態として与えられた物理量  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を用いて，時刻  $t$  に位置  $x \in \mathbb{R}^2$  で観測される物理量は  $f(X_t(x))$  で表される。これは大数の法則に物理的な意味論を与える??。

議論 5.1.3 (変数係数の移流問題). ベクトル場  $b = b(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して，方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b(t, x) \cdot \nabla u = 0 \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^2)$$

を考える。  $y \in \mathbb{R}^2$  から出発した粒子の位置を表す変数  $Y_t \in \mathbb{R}^2$  を固定して，そこでの時間変化を表す常微分方程式に関する初期値

問題  $\dot{Y}_t = b(t, Y_t)$  ( $t \in \mathbb{R}_+$ );  $Y_0 = y \in \mathbb{R}^2$  を考える．すると，解  $u(t, x)$  は次を満たす必要がある：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}(u(t, Y_t(y))) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, Y_t(y)) + \dot{Y}_t(y) \cdot \nabla u(t, Y_t(y)) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} + b \cdot \nabla u \right)(t, Y_t(y)) = 0. \end{aligned}$$

よって， $u(t, Y_t(y)) = u(0, Y_0(y)) = f(y)$  なる第一積分が見つかったことになる．

こうして元の偏微分方程式は， $y \in \mathbb{R}^2$  に居た粒子が受けることになる流れ  $Y_t$  に沿った輸送を記述する方程式であったと理解できる．または，ベクトル場による移流方程式とは，ある移流  $Y_t$  の第一積分が満たすべき方程式とも見れる．<sup>†1</sup>

注 5.1.4 (2つの関連)．いま， $Y_t : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  は，各  $y \in \mathbb{R}^2$  に対して，これが受けることになる力の時系列  $Y_t(y)$  を与えている．これが可逆であるとする： $X_t := Y_t^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ．すると，出発点  $y$  が  $t$  時刻にいる位置  $x$  について， $y = X_t(x)$  と辿る確率過程になる．これは解について  $u(t, x) = f(X_t(x))$  なる表示を与える．

ベクトル場が時間に依存しないとき， $Y_t$  は可逆であり，逆  $X_t$  は常微分方程式  $\dot{X}_t = -b(X_t)$ ,  $X_0 = x$  を満たす．定数係数の場合は，これを解いたものと見れるから，たしかに一般化となっている．

### 5.1.3 Brown 運動が定める確率ベクトル場

移流方程式は，時間変化するベクトル場  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \text{Map}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  による物理量の輸送を考えた．もし，ベクトル場が確率的であったら？前節の例はひとつの見本道に過ぎないとしたら？すなわち，前節ではスタート地点  $y \in \mathbb{R}^2$  を根源事象とみて，時間変化するベクトル場を確率過程と見たが，ここに新たにランダム性の発生源を加えるのである．

### 5.1.4 確率微分方程式

例 5.1.5 (空間的に一様な場合)． $b \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha = (\alpha_k^i)_{i,k \in [2]}$  が定める確率過程  $X_t(x) := x - \alpha B_t - bt$  ( $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ) を考える． $X_t$  は，定数係数ベクトル場による輸送と，Brown 運動とを合成した運動に他ならない．実際，仮に  $B_t$  が  $t$  について微分可能であるならば， $\dot{X}_t = -\alpha \dot{B}_t - b$  となるから，時間発展するベクトル場  $-\alpha \dot{B}_t - b$  による移流であると考えられる． $\alpha$  が Brown 運動の強さと歪みの情報を含んでいる．ただし，Brown 運動の時刻  $t$  における  $y \in \mathbb{R}^2$  に関する分布は

$$P[B_t \in dy] = p(t, y)dy := \frac{1}{2\pi t} e^{-|y|^2/2t} dy$$

と表せる．

すると， $X_t$  による輸送の平均値を

$$u(t, x) := E[f(X_t(x))]$$

とおけば，これは

$$q(t, x, z) := \frac{1}{2\pi t |\det \alpha|} \exp \left( -\frac{|\alpha^{-1}(z - x + bt)|^2}{2t} \right)$$

とおくことで

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x - \alpha t - bt) p(t, y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(z) q(t, x, z) dz. \end{aligned}$$

と整理出来る．これは熱伝導方程式と呼ばれる放物型方程式の一般解であり， $q(t, x, z)$  が一般解と呼ばれるものである：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \alpha^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - b \cdot \nabla u, \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^2).$$

<sup>†1</sup> これが Kolmogorov が発見したものだった？

例 5.1.6 (変数係数の場合).  $\alpha, b$  が共に  $x \in \mathbb{R}^2$  に依存する場合, 任意の  $t > 0$  について, 常微分方程式

$$\dot{X}_t = \alpha(X_t)\dot{B}_t + b(X_t) \quad (X_0 = x \in \mathbb{R}^2)$$

を考えたい. しかし  $B_t$  は微分可能でないから, 積分形で代わりに表現することを考える. すなわち,  $\dot{B}_s ds = \frac{dB_s}{ds} ds = dB_s$  とし, この右辺を定義することを考える.

$$X_t = x + \int_0^t \alpha(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds.$$

すると次の問題は, 右辺第 2 項が Stieltjes の意味での積分として定義することは出来ない.  $B_t$  は有界変動でないので, 線積分の発想はお門違いである. これは確率論的な考察で乗り越えることが出来る.

この確率微分方程式の解  $X_t$  を求めれば, 平均値  $u(t, x)$  は放物型偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + b(x) \cdot \nabla u \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^2, a(x) := \alpha(x)^t \alpha(x))$$

を満たすことになる. これはいわば, 確率過程  $X_t$  から得られる平均処置効果のような統計量の 1 つが, 偏微分方程式で記述される物理法則を満たすということに過ぎない.  $X_t$  は非常に豊かな情報を湛えていて, 偏微分方程式はその 1 断面に過ぎないと言えるだろう.

## 第 6 章

# 無限次元確率微分方程式

確率微分方程式はランダムなゆらぎを持つ常微分方程式であるから，同様にランダムなゆらぎを持つ偏微分方程式に当たる概念も自然に現れるはずである．

## 参考文献

- [1] David Nualart and Eulalia Nualart "Introduction to Malliavin Calculus"
- [2] Daniel Revuz, and Marc Yor "Continuous Martingales and Brownian Motion"
- [3] Giuseppe Prato - Introduction to Stochastic Analysis and Malliavin Calculus
- [4] Vershynin - High-Dimensional Probability
- [5] Richard Bass - Stochastic Processes
- [6] 舟木直久 『確率微分方程式』
- [7] Morters and Peres - Brownian Motion