目次

概要

数々の数理モデルの中で，時空間のモデルに使われるのは実数とこれがなす Banach 空間 $\mathbb{R}^n$ であってきた．これを力学系＝「連続な状態空間内であって，経時発展法則が微分方程式によって与えられるもの」という．確率空間や統計的実験が考えられるのは遥かに後のことである．力学系を解析する位相的・幾何学的・解析的手法を見る（微分方程式論という）．そこに確率空間の構造を入れる量子確率論・情報理論，そして古典的問題の確率過程による解析までを見て，確率統計学的な示唆を得たい．ただし，統計力学は扱わない．

(1) Hamilton の正準方程式が定める力学系を **Hamilton 力学系**という．測地流や流体力学の渦点流などの力学系も含む．
   (i) Hamilton 力学系が**完全積分可能**または**可積分系**であるとは，独立変数の数と同じ数の第一積分 $F_1,\cdots,F_n$ が存在して次を満たす場合をいう：
      (a) $dF_1,\cdots,dF_n$ は M の稠密な開集合上で線形独立．
      (b) $\forall_{i,j\in[n]}\;[F_i,F_j]=0$.
      このとき，解は規則的でよくわかる（Liouvoille-Arnold の定理）．
   (ii) 可積分系を摂動すると一般には非可積分系になる（三体問題など）が，摂動が十分小さければ可積分系の時に存在していた規則的な解が同様に存在する．これを KAM 定理という．Kolmogorov, Arnold, Moser による．

(2) 力学では，状態空間を Euclid 空間に取る．これは変数の空間であり，対象は多様体である．Lagrange 以来の，運動を座標系の取り方に依らない理解への志向が結節した数学的対象である．一方で，セミパラメトリックモデルでは，変数の空間を一般の Banach 空間に取ることになる．

第 1 章

微分方程式

解析力学は微分方程式の解法理論という性格もある．

記法 1.0.1.

(1) $B^d \subset \mathbb{R}^d$ を任意の閉球とする．B を Banach 空間 X の任意の閉球とする．

1.1 定義

任意の微分方程式は，一般性を失うことなく，一階の自励系として良い．

定義 1.1.1 (differential equation, integral curve, autonomous system). M を 1 次元多様体，X を Banach 空間，$f : M \times X \supset U \to X$ を関数とする．空間 $\mathrm{Map}(M; X)$ 上の条件 $y'(t) = f(t, y(t))$ を (正規形の) **微分方程式**という．

(1) 解集合 $\left\{y \in \mathrm{AC}(U; X) \mid \forall_{t \in \mathrm{pr}_1(U)}\ y'(t) = f(t, y(t))\right\}$ の元を**大域解**または**積分曲線**という．
(2) 解集合 $\left\{y \in C^1(B^1_c(t_0); X) \mid \forall_{t \in B^1_c(t_0)}\ y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0\right\}$ の元を (t_0, y_0)-**初期値問題の** c-**近傍上の局所解**という．
(3) f が M 上定値であるとき，**自励系**であるといい，X を**相空間**といい，f を**ベクトル場**という．$M \times X$ を相空間とみなすことで，全ての常微分方程式は自励系とみなせる．これを**拡張相空間**という．

定義 1.1.2 (solvable in quadratures, exact 1-form, first integral).

(1) 微分方程式が $dF = g$ なる形に変形出来るとき，積分によって対応 $F \mapsto dF$ の逆像が 1 つ求められる．このとき**求積可能**であるという．
(2) 微分形式 ω が $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx^i$ $(P_i \in C^1)$ と表せるとき，**完全**であるという．これは，Frobenius の条件 $\omega \wedge d\omega = 0$ に同値.
(3) $G \in C^1(Q; X)$ が**第一積分**であるとは，解 y に対して $G \circ (\mathrm{id}, y)$ が定数関数であることをいう：$\forall_{t \in M}\ \dfrac{d}{dt} G(t, y(t, x)) = 0$.

要諦 1.1.3. 積分は微分方程式を解く方法として独立に用意できる一方で，微分方程式を解く行為としても定義できる．幾何学的に言えば，微分方程式を解くとは，接空間上の情報をつなぎ合わせて，全空間の様子を見ることに他ならない．こうして，Lie 群と Lie 代数の概念を得る．For example, finding integral curves of vector fields and more generally finding integral submanifolds of distributions, is also called an integration. In this vain, also a Lie group is a global object which integrates a Lie algebra (indeed, infinitesimally this reduces to solving the Maurer-Cartan equations).

歴史 1.1.4.

(1) 第一積分とは，全ての微分方程式を積分によって解こうとしていた時代に，解のことを積分と呼んでいた．
(2) 完全積分可能とは，Hamilton 系に対して定義される概念であり，Frobenius が定義した．Jacobi-Clebsch の理論が 1 階偏微分方程式系の対応物を「完全系」と定義した [5]．1-形式の「完全」性，さらには完全系列との関わりは不明．

1.2　局所解の存在と一意性

1.2.1　存在

定理 1.2.1 (Cauchy-Peano (1890)). $Q := B^1_a(t_0) \times B_r(y_0) \subset \mathbb{R} \times X$ を閉集合とし，$f : Q \to X$ を関数とする．f が連続ならば，(t_0, y_0)-初期値問題の局所解が存在する．

定理 1.2.2 (Caratheodory). $Q := B^1_a(t_0) \times B_r(y_0) \subset \mathbb{R} \times X$ を閉集合とし，$f : Q \to X$ を関数とする．次の 3 条件が成り立つとき，任意の $c \leqslant \min(a, r/K)$ に対して，(t_0, y_0)-初期値問題の c-近傍上の殆ど至る所の局所解が存在する：

(1) t-可測性：$\forall_{x \in B_r(y_0)}\ f(-, x) \in \mathcal{L}(B^1_a(t_0); X)$.
(2) y-連続性：$\forall_{(t,x) \in Q}\ f(t, -) \in C(B_r(y_0); X)$.
(3) 可積分性：$\exists_{m \in L^1(B^1_a; X)}\ \forall_{(t,x) \in Q}\ |f(t, x)| \leqslant m(t)$.

1.2.2　一意性

定理 1.2.3 (Picard-Lindelof (1894)). $Q := B^1_a(t_0) \times B_r(y_0) \subset \mathbb{R} \times X$ を閉集合とし，$f : Q \to X$ を関数とする．次の 3 条件が成り立つとき，任意の $c \leqslant \min(a, r/K)$ に対して，(t_0, y_0)-初期値問題の c-近傍局所解が唯一存在する：

(1) t-連続性：$\forall_{x \in B_r(y_0)}\ f(-, x) \in C(B^1_a(t_0); X)$.
(2) y-Lipschitz 連続性：$\forall_{(t,x) \in Q}\ f(t, -) \in \mathrm{Lip}(B_r(y_0); X)$.
(3) 有界性：$\exists_{K \in \mathbb{R}}\ \sup_{(t,x) \in Q} \|f(t, x)\| \leqslant K$.

系 1.2.4 . f が y について C^r-級ならば，解は M 上 C^{r+1}-級である．

1.3　Gronwall の不等式と大域解

1.4　力学の脱幾何学化

Newton は力学を Euclid 幾何学の形式で書いた．Euler が運動方程式という解析的に同等な表現を世界で初めてした．Lagrange が δ の記法を発明し，Euler の変分法を代数的な馬力を借りて押し進めた．

歴史 1.4.1 (幾何学の時代). Issac Newton 1642-1727 はプリンキピア (1687) で，天体の運動を幾何学の言葉で書いた．当時は幾何学の対義語が「代数」「解析」であった．Euclid の原論以来の形式から，力学を解放する試みが「解析力学」(Lagrange) であった (Euler に言わせれば，代数が有限解析で微積分が無限小解析である)．その金字塔が Lagrange による Méchanique analitique (1788) である．初めて，代数・幾何の離陸，という意味で，応用数学の故郷である．Euler の時点で変分法まで揃っていた．

歴史 1.4.2 (Leonhard Euler 1707-1783 による解析化・変分原理への変換と，Lagrange へのバトンタッチ). Euler 1747 [8]「天体の運動一般の研究」で Newton の運動方程式を定式化した．変分法という分野を創始したのも Euler であり，1744 年には，変分問題の極値を与える曲線がみたす方程式を導いている．その論文の付録で作用量と定義し，それを最小にする最小作用の原理によって運動が規定されることも提唱している．

この夢のプログラムを δ の記法を発明して，代数の力を援用して引き継いだのが Lagrange である．Euler は Leibniz の方法の方が数学的に発展性があると気づいて，Lagrange をイタリアからベルリンアカデミーに呼び出し，多いに発展させた．これで Newton の質点力学を剛体力学，弾性体力学，流体力学へと発展させた．

歴史 1.4.3 (Joseph Louis Lagrange 1736-1813). まず，変分法を δ の記法を用いて完全に脱幾何学し，まず極値曲線の方程式を解いて，Euler に招聘された．さらに，力学解析・代数の言葉で書き直したのが『解析力学』1788,[9]．事実，運動方程式から，最小作用の原理などは定理として導かれる．ポテンシャルなどの技法は既に多様体的な考え方を内包していた．なお，ポテンシャル

が存在するとは，保存系であることに同値．この考え方を用いて運動方程式を書き直したもの，すなわち Lagrange の方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial t}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$$

も導かれる．

Siméon Denis Poisson 1781-1840 の 1809 の仕事を盛り込んだ第二版も，定理を増やした．

1.5　Lagrange 系の定義

1.5.1　系の分類

定義 1.5.1 (holonomic, configuration space, system point, generalized coordinates). 古典力学は微分方程式と**拘束条件**とで定まる力学系を考察する．

(1) 拘束条件が**ホロノミック**であるとは，質点の座標の間の方程式 $f(r_1, r_2, \cdots, t) = 0$ で表すことができることをいう．剛体理論はホロノミックな系である．

(2) ホロノミックな系において，自由度全体の空間 $\mathbb{R}^N$ からホロノミックな拘束条件の数 k だけ変数を取り除いた独立変数の空間 $\mathbb{R}^{N-k} =: \mathbb{R}^n$ を**配置空間** (Fadell) といい，その元を**配置点**，その近傍座標を**一般化座標**という．

(3) ホロノミックな系がさらに次の 2 条件を満たすとき（保存系はこれを満たす），**Langrange 系**であるという：

(L1) 外力が (一般化) ポテンシャルから導かれる：$F_i = -\nabla_i V$.

(L2) 拘束力は仕事をしない．すなわち，拘束力による仮想仕事が零になる．

このとき，n 本の方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

を **Euler-Lagrange 方程式**という．

(4) 次の条件を満たす力学系を**一元的 (monogenic) な系** (Lanczos, 1970[2]) という：

(H1) 外力が，位置と速度のみの関数である一般化スカラーポテンシャルから導かれる．

1.5.2　微分原理

仮想仕事と d'Alembert の法則による Lagrange の方程式の導出

動力学が静力学に変換される手法である．

Lagrangian 力学の構成には二通りある．Newton 力学を微分法則から換言する歴史的方法と，積分法則「最小作用の法則」を与えることである．ランダウ・リフシッツの教科書は後者の方法を採用している．ここでは，二通りの構成が等価であること，まず Newton 力学と Lagrangian 力学が等価な言い換えであることを観る．

公理 1.5.2 (principle of virtual work (1743)).

注 1.5.3. 仮想仕事の原理は，元はスイスの数学者 Bernoulli によって静的平衡状態を特徴付けるために考案されたが，フランスの数学者 d'Alembert が運動方程式に適用した．『力学論 (Traité de dynamique)』(1743) で発表．

なお，Bernoulli 家は，Nikolaus の子に 2 人の数学者 Jacob (1654-1705), Johann (1667-1748) がおり，同じ問題を研究していたため，兄弟仲は悪かったという．Jacob が Bernoulli 数に名を残し，Johann は最急降下線の研究をした．Johann の子に Daniel (1700-1782) がおり，彼が流体力学の研究者であった．

d'Alembert は百科全書派の一人で，啓蒙運動に大きく貢献した．

定理 1.5.4 . d'Alembert の原理は，Lagrange の方程式を含意する．

要諦 1.5.5. Largangian は特に，弾性力・電磁場・素粒子の系でも定義でき，異なる物理系が同じ形の Lagrangian で記述できることも多い．特に，電磁場に対して Hamilton の変分原理を記述することによって，粒子に対する量子化の方法を取り入れ，量子

電磁力学が構成された．

1.5.3　積分原理

ホロノミックな系については Lagrange の原理と等価であり，さらに形式的には非ホロノミックな系にも拡張できる原理である．

公理 1.5.6 (Hamilton の原理). 時区間 $[t_1, t_2]$ 間の系の運動は，$L := T - V$ の線積分 $I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ が停留値をとるような運動である．

定理 1.5.7 (２つの原理の等価性). 一元系の拘束がホロノミックであるとき，次の 2 条件は同値：

(1) Hamilton の原理式 $\delta I = 0$ が成り立つ．
(2) Lagrange の方程式が成り立つ．

命題 1.5.8 (Hamilton の原理の必要条件). 一元系の拘束がホロノミックであるとき，Hamilton の原理は次を含意する．すなわち，$\delta I = 0$ であるためには，次が必要：

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0$$

これは $\delta J = 0$ を書き下したもので，**Euler-Lagrange の方程式**という．

1.5.4　サイクリックな座標

次の概念は，角運動量保存則と運動量保存則を統合した視点から総合する概念である．

定義 1.5.9 (cyclic coordinates). 座標 q_i が**サイクリック**であるとは，それが Lagrangian に登場しないことをいう：$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$.

定理 1.5.10 . サイクリックな座標に対応する一般化運動量は保存される：$p_i = const$.

[証明]. Lagrange の運動方程式**??**より，$\dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0.$ ■

第 2 章

変分法

Lagrange の運動方程式に Euler の名前が環されているのは，変分法という導出における不可欠なピースが Euler によるものだからである．

これが Hamilton-Jacobi の理論を通じて，シンプレクティック構造と Huygens の原理があらゆる種の最適化理論において重要になることが認識されると，工学の分野でも Hamilton 方程式は欠かせないものとなった．

2.1 枠組みと歴史

定義 2.1.1 (variational calculus / secondary calculus). 曲線の空間（という可微分関数空間：無限次元線型空間）のうち，極値を取る関数を定める手法を**変分法**という．

換言すれば，非線型汎関数 (nonlinear functional) の停留点 (stationary point) ／臨界点 (critical point) を扱う微分法 (differential calculus) である．

定義 2.1.2 (functional). 無限次元多様体上の関数を特に**汎関数**という．特に，係数体 (scaler) に値を取るときにいう．

特に，変分法が取り扱う汎関数を**作用 (action functional)** という．

例 2.1.3 (汎関数の例)**.**

(1) 変分法は Johann Bernoulli (1696) の取り上げた最速降下曲線問題を，Euler が取り上げて著書 Elementa Calculi Variationum にまとめてから変分法の名前がついて始まった．

(2) Euclid 空間の曲線 $\gamma := \{(t,x) \mid x(t) = x,\ t \in [t_0, t_1]\}$ の長さ $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+\dot{x}^2}dt$ は，汎関数である．

歴史 2.1.4. マーストン・モースは変分法を今日 Morse 理論と呼ばれるものに応用した。レフ・ポントリャーギン、ラルフ・ロッカフェラーおよび F. H. Clarke は最適制御理論において変分法に対する新しい数学的な道具を開発した。リチャード・ベルマンの動的計画法は変分法の代替となるもののひとつである。

2.2 変分

定義 2.2.1 (differentiability of functionals, variation / differential). 曲線 $\gamma + h$ とは，$\gamma + h = \{(t,x) \mid x = x(t) + h(t)\}$ とする．汎関数 Φ が**微分可能**であるとは，h について線型な汎関数 F と $R(h,\gamma) = O(h^2)$ を満たす汎関数 R を用いて，

$$\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F + R$$

この線型汎関数 F を**一次変分 (first variation)** または**微分 (differential)** という．h をこの曲線 γ の**変分** (variation of the curve) という．

例 2.2.2 (action functional)**.** γ を (t,x)-平面上の曲線，$L = L(a,b,c)$ を可微分な三変数関数とする．汎関数 Φ を次のように定める．

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

以前示した，＜曲線の長さという汎関数＞の例は，$L = \sqrt{1+b^2}$ の場合である．

定理 2.2.3 (action functional の微分). 汎関数 $\Phi(\gamma)$ は微分可能で，その differential $F(h)$ は次のように表せる．

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}$$

[証明]. まず，

$$\begin{aligned}\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \left[L(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t) - L(x, \dot{x}, t)\right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h}\right] dt + O(h^2) = F(h) + R(h, \gamma)\end{aligned}$$

と置くと，$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h}\right] dt, R = O(h^2)$ であるから，確かに積分可能．また，部分積分より，

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial h}{\partial t}\right) dt = \left[h\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

■

2.3 極値問題

定義 2.3.1 (extremal). 微分可能汎関数 $\Phi(\gamma)$ について，曲線 γ が**極値関数／極値点**であるとは，$\forall h$，$F(h) = 0$ が成り立つことをいう．

定理 2.3.2 (作用汎関数が極値を取る条件：Euler-Lagrange 方程式). 曲線 γ が，$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ を通る曲線の空間上で，作用汎関数 $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$ の極値点であるための必要十分条件は，次が成り立つことである．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{on } \gamma$$

[証明]. 定理 2.2.3 より，$F(h)$ が h に依らず 0 になるための γ の条件を考えるが，F 第二項は $h(t_1) = h(t_0) = 0$ より 0．従って，次の補題により，$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ が成り立てば良い． ■

補題 2.3.3 . 連続関数 $f : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ について，次の 2 条件は同値．

(1) 任意の連続関数 $h : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}, h(t_0) = h(t_1) = 0$ に対して，条件 $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0$ である．

(2) $f = 0$.

例 2.3.4. $L = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$ とするとき，この値は確かに 0 になり，そのとき γ は直線になることが確認できる．

第 3 章

Hamilton-Jacobi 理論

古典力学での系は，ホロノミックな拘束のとき，$\mathbb{R}^n$ を配置空間として記述でき，n 個の時間に関して 2 階の微分方程式と $2n$ 個の初期条件が与えられる．特に，本質的な独立変数は n 個の q_i のみである．この設定では Lagrange 形式と Hamilton 形式は等価で，むしろ Lagrange 形式の方が含蓄が豊富である．Hamilton 形式の真価は，理論的な拡張に対する枠組みを提供するという点で有用性を見せてくる．特に，統計力学と量子力学では大部分が Hamilton 形式によって構成される．

3.1 Hamilton 系とその歴史

Hamilton 形式は，1 階の微分方程式で系を記述することを試みるが，初期条件は $2n$ 個あるので，$q_i, \dot{q}_i$ を独立と扱い，$2n$ 次元の**相空間**を状態空間とする．

定義 3.1.1 (phase space, canonical variables).

(1) Hamilton 系の状態空間 $\mathbb{R}^{2n}$ を**相空間**といい，その元 $(p,q) \in \mathbb{R}^{2n}$ を**正準変数**という．

3.1.1 Hamilton の研究

歴史 3.1.2 (William Rowan Hamilton 1805-1865)**.** イギリスで代数と論理学が出会い，Boole などの結節点が，計算機を産んだ．Leibniz の夢である．その中で Hamilton はたくましく当時の数理科学優等生であったフランスに学び，イギリスらしい進展を付け加えた．

本格的に数学を始めたのは 15 歳の頃で、当時最先端のラグランジュ、ラプラスの書物を学ぶ。この頃わずか 16 歳にしてラプラスの『天体力学』に誤りを発見し、専門家を驚かせた。Hamilton は実は詩人になりたかったのかもしれない．ワーズワースに憧れていたのだろうか．

注 3.1.3. 夏目漱石の『趣味の遺伝』(1906) で「ハミルトンのクオータニオンを発明したのもおおかたこんなものだろう」という表現があるが，これが受け入れられるはずがあろうか？そういえば線形変換を行列ではなく，四元数で書いていたのだっけか．

歴史 3.1.4 (Hamilton の光学研究)**.** 「光線系の理論」と題する一連の考作が 1828 年から発表されている．光学と力学が共進化したのは極めて興味深い事実である．解析力学の仕事をするにあたって，Fermat の原理をどの程度着想源としたかは不明である．

ハミルトンは反射・屈折の法則から，Fermat の原理を「証明」している．そして，Fermat の原理の翻訳として得たのは，

$$\delta I = \delta \int \nu(x,y,z)d\rho = 0.$$

である．ただし，ν は屈折率，ρ は線分要素とした．I を特性関数という．これは，Lagrange 系において力を与えるポテンシャル V にあたる．

歴史 3.1.5 (力学への応用)**.**

(1) 1834 年に発表した「動力学の一般的方法」[11] では，Newton の原理から出発して，

$$S := \int_0^t (T - U)dt$$

なる，「特性関数」にあたる量を定義し，「主関数」と呼んでいる．おそらく現代的な意味とは違う．そしてこれについての変分原理から，最小作用の原理を示した．

(2) 1835 年に発表した「動力学の一般的方法第二論文」[12] で，Hamilton の正準方程式を導いた．そしてこの Hamilton 系についても，「主関数」の方法が使えることを論じて論文を終える．

(3) 2 つとも Hamilton の原理と呼べる変分原理に関する記述はなく，(2) で「主関数の変分が 0 になるという条件は，Lagrange の方程式を含意する」という，主関数の理論の有用性に関する 1 つの例程度の立ち位置である．

3.1.2　Jacobi の研究

ハミルトンが「動力学の一般的方法」として示したのは，運動方程式を直接解かず，偏微分芳程式を解いて主関数を求め，それを使って運動方程式の解が得られることである．ヤコビは，この着想を一般の常微分方程式系に対して，偏微分方程式に帰着して解く方法として整備した．

すなわち，あるクラスの連立 1 階常微分方程式系（正準方程式）を，非線形 1 階偏微分方程式に帰着して解く技法をつなげた (Hilbert[17])．一般に，偏微分方程式のほうが常微分方程式を解くより難しい．しかしヤコビは，適当な変数変換を施し，変数を完全に分離できれば，HJ 方程式は求積法で容易に解けることを指摘した．これは正準変換の 1 つである．

歴史 3.1.6 (Carl Gustav Jacob Jacobi 1804-1851 への継承)**.** 王立協会の紀要に発表された Hamilton 力学研究は大陸の有力な研究者たちの注目を引いた。1842-43 年冬学期におこなったケーニヒスベルク大学講義録『力学講義』が集大成になる．ここでは Jacobi も Newton の原理から出発して，種々の結果を定理として導く．そこでは，Hamilton の原理にあたる変分原理を定理として示し，「Hamilton はこの原理から出発した」という事実とは異なる記述が添えてある．

歴史 3.1.7 (Jacobi の研究方針：変分問題の一般的解法理論)**.** 変分問題の解は Euler-Lagrange の方程式を満たす．そのうち，たまたま力学に応用できるとき，これを Lagrange の運動方程式と呼ぶのみである．そこで Jacobi は Hamilton や Lagrange の場合と違って，ポテンシャルが t に依存する場合も含めた理論を立てようとした．このときも，偏微分方程式の完全解がもとまれば，これが微分方程式系と変分原理を満たす運動の軌跡を与える．

歴史 3.1.8 (偏微分方程式の解法理論への貢献)**.**

(1) 1836 の論文 [13] では，2 つの固定中心から引きつけられる質点の運動に対応する HJ 方程式の変数を，楕円座標を導入して完全に分離させ，オイラー以来の難問を解いてみせた．ヤコビの解法は時として強力なのである．ヤコビが自覚するように，既知の変数変換で変数が分離するような問題に対してしか適用できない方法だが，19 世紀後半には近似計算法が発展していくので，彼の着想は有効に活用されていった．

(2) 1837 の論文 [?]「変分法と微分方程式の研究」と「偏微分方程式の解を常微分方程式系に帰着することについて」と「力学の微分方程式の積分について」で，変分問題＝「正準方程式」と呼ばれる形を持った微分方程式問題を偏微分方程式に帰着し，その解法を提示した．しかしこれが「正準変換」の 1 例であることには気づいていない．二重にロバストな統計量の構成と同様，解けるクラスを確定しただけである．

3.2　Legendre 変換

Legendre 変換とは，線型空間上の実凸関数を，その双対空間上の関数に写す変換であり，従って対合である．代数幾何学でも関連する概念があるようであるが，Banach 空間の双対の構成との類似性に注目したい．これを一般化した概念が凸共役または Legendre-Fenchel 変換である．

3.2.1　定義

定義 3.2.1 (Legendre transform / dual in the sense of Young). 2 つの可微分関数 $f, \overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が，互いに**ルジャンドル変換**または**ヤング双対**であるとは，これらの微分が互いに逆写像であることをいう：

$$Df \circ D\overline{f} = \mathrm{id}, \qquad D\overline{f} \circ Df = \mathrm{id}.$$

定義 3.2.2 (Legendre transformation). $y = f(x)$ を凸関数とする：$f''(x) > 0$．この関数 f に対して，新たな変数 p を持つ関数 g を $g(p) = F(p, x(p))$ 対応させる対応を**ルジャンドル変換**という．ただし，ここでの $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とは座標変換であって，p に対して $F(p, x) = px - f(x)$ を最小にする x を $x = x(p)$ と定める：$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$, i.e., $f'(x) = p$．なお，f は凸関数であるから，このような点 $x(p)$ はただ一つである．

注 3.2.3. $F(p, x) = px - f(x)$ とは，原点を通り傾き p の直線 $y = px$ と，曲線 $y = f(x)$ との垂直方向の距離である．それは即ち，曲線 $y = f(x)$ 上の点で接線の傾きが p となる点に他ならない．

ルジャンドル変換は点と線の双対性、つまり凸な関数 $y = f(x)$ は (x, y) の点の集合によって表現できるが、それらの傾きと切片の値で指定される接線の集合によっても等しく充分に表現できることに基いている。

命題 3.2.4 .

(1) f の定義域を $\mathbb{R}$ とする．このとき，g の定義域は，一点か，閉区間か，半直線 (ray) である．

(2) f の定義域が閉区間だったとする．このとき，g の定義域は $\mathbb{R}$ である．

定義 3.2.5 (convex conjugation). X を実ノルム線型空間とし，X^* を X の双対空間とし，双対組を $\langle \cdot, \cdot \rangle : X^* \times X \to \mathbb{R}$ で表す．拡大実数に値を取る関数 $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ の**凸共役** $f^* : X^* \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を，次のように定める：

$$f^*(x^*) := \sup\{\langle x^*, x \rangle - f(x) \mid x \in X\}.$$

3.2.2　力学系に定める変換

Lagrange 系から Hamilton 系への変換 $(q, \dot{q}, t) \mapsto (q, p, t)$ は Legendre 変換が与える．このとき，n 個の 2 階常微分方程式である Lagrange の方程式は，$2n$ 個の 1 階偏微分方程式となる．

議論 3.2.6 (canonical equations of Hamilton)**.** $f(x, y)$ の微分 $df = udx + vdy$ $(u = f_x, v = f_y)$ から，u, v を変数として取り出すと，f に関する 2 階微分方程式は 1 階になるであろう．このとき，$g := f - ux$ と定めると，$dg = df - udx - xdu = vdy - xdu$．すなわち，

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}$$

となる．ここで，の部分 x だけ u に代わっている．このとき，$H(q, p, t) := \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$ を **Hamiltonian** といい，$-\dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{\partial H}{\partial t}$ を満たす．これについての同様の条件式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad -\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

を **Hamilton の正準方程式**という．

例 3.2.7 (Gibbs free energy は Hamiltonian である)**.** enthalpy X は entropy S と圧力 P について，$dX = TdS + VdP$ の関係があり，これも Legendre 変換の関係になる．なお，T は温度，V は体積である．このとき，$G := X - TS$ とすると，**Gibbs の自由エネルギー**が定義され，これは Hamiltonian である．

3.2.3　凸関数の保存

命題 3.2.8 . Legendre 変換は凸関数を凸関数に写す．

定義 3.2.9 (Young's inequality). 定義より，$F(x,p) = px - f(x) \leqslant g(p)$ $(\forall x, p)$ である．次の形の不等式を**ヤングの不等式**という：

$$px \leqslant f(x) + g(p).$$

3.2.4　対合性

定理 3.2.10 . Legendre 変換は involutive である．

系 3.2.11 . 直線の族 $\{y = px - g(p)\}_p$ の包絡線は，$f = g^*$ として，$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ である．

3.3　Symplectic 記法

Hamilton の運動方程式は座標と運動量を対称に取り扱わない．無理矢理この組による n 変数条件に書き換えようとすると多くの場合は奇怪になるが，唯一示唆的な手段がある．

定義 3.3.1 .

(1) $\eta_i := q_i, \eta_{i+n} := p_i$ $(i \in [n])$ とし，$\eta \in \mathbb{R}^{2n}$ を列行列とする．
(2) 列行列 $\dfrac{\partial H}{\partial \eta}$ を $\left(\dfrac{\partial H}{\partial \eta}\right)_i := \dfrac{\partial H}{\partial q_i}, \left(\dfrac{\partial H}{\partial \eta}\right)_{i+n} := \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$ とする．
(3) $J := (0, 1; -1, 0) \in M_{2n}(\mathbb{R})$ とする．

定理 3.3.2 (symplectic notation / matrix notation). Hamilton の運動方程式は

$$\dot{\eta} = J\frac{\partial H}{\partial \eta}$$

と表せる．

歴史 3.3.3. symplectic の語は，intertwined という意味のギリシャ語から，Weyl (1939) *The Classical Group* において造語された．

3.4　変分原理

3.4.1　修正された Hamilton の原理

配置空間 $\mathbb{R}^n$ 上の軌跡の空間上の変分原理を Hamilton の原理と呼んだ．この，相空間 $\mathbb{R}^{2n}$ 上の対応物を**修正された Hamilton の原理**という．

定理 3.4.1 . 修正された Hamilton の原理が導く Euler-Lagrange 方程式は，正準方程式に他ならない．

要諦 3.4.2. Hamilton 形式においては，p, q のいずれか一方に特権的な地位を与えるべきではなく，全く平等に扱うべきであり，基礎方程式を 2 階から 1 階にしたことに伴って数が増えただけである．独立変数を，「座標」と「運動量」に分けることは，単に運動を記述する $2n$ の独立変数を，Hamilton の運動方程式に対して対称な振る舞いをするように，数学的に 2 つにグループ分けしているのみである．

3.4.2　最小作用の原理

定義 3.4.3 . 配置空間上の変分について，

(1) δ-変分は，配置空間上の軌跡の空間上の微分で，$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ が必要．
(2) Δ-変分はもっと条件が緩く，軌跡の微分可能性のみが要求される．

公理 3.4.4.

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = 0$$

を最小作用の原理という．

命題 3.4.5 (幾何光学の Fermat の原理との類似性). 次の条件が成り立つとき，最小作用の原理は $\Delta(t_2 - t_1) = 0$ となる．

(1) 非相対論的で，一般化座標を定義する式が時間を陽に含まない．このとき，運動エネルギーは $T = \frac{1}{2} M_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k$ と表せる．
(2) ポテンシャルが速度に依存しない．
(3) 系に外力が作用しない．

すなわち，2 点間の移動時間が極値をとるような特定の道筋に沿って運動する．この条件は幾何光学における Fermat の原理と全く同じである．

定理 3.4.6 (Jacobi 形の最小作用の原理). (1) の条件が成り立つとき，(M_{jk}) なる係数行列は計量テンソルをなす曲がった配置空間 (curvilinear configuration space) が構成できる．この多様体上の計量は $(d\rho)^2 = M_{jk} dq_j dq_k$ と表せる．このとき，最小作用の原理は

$$\Delta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{H - V(q)} d\rho = 0$$

と表せる．すなわち，系の運動は，系を表す点が配置空間における測地線に沿って進む．

3.5　正準変換

本質的に解かなければいけない微分方程式は，Lagrangian を用いる手続と同じになるが，座標と運動量を区別しないことで，より力学の形式的な構造に対する深い示唆を与える．例えば，Hamilton が保存されるとき（時間の関数でないとき），$2n$ 個の座標がサイクリックになるような正準座標への変換が存在する．従って，解が得られる．

定義 3.5.1 (extended canonical transformation, restricted). 変換 $Q_i = Q_i(q, p, t), P_i = P_i(q, p, t)$ が，再びある K について Hamilton の運動方程式を満たすならば，この変換を**広義の正準変換**という．また，Q, P が t の項を含まないとき，**限定された**正準変換であるという．

補題 3.5.2 (正準変換の正規化と母関数による定式化). Q, P が広義の正準変換ならば，

$$\exists_{\lambda \in \mathbb{R}} \exists_{F \in C^2(\mathbb{R}^{2n})} \lambda(p_i \dot{q}_i - H) = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}$$

が必要．λ を**スケール変換**，F を**母関数**という．$\lambda = 1$ を満たすとき，Q, P を単に**正準変換**という．

要諦 3.5.3. 母関数によって正準変換を分類できる．

定理 3.5.4 (symplectic な定式化). Q, P を変換とし，これが定める 1 列行列を $\zeta \in M_{1,2n}(\mathbb{R})$，$\dot{\eta} = J \frac{\partial H}{\partial \eta}$ を正準変数 $\eta \in M_{1,2n}(\mathbb{R})$ に関する Hamilton の方程式とし，$(M_{ij}) = \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ をその Jacobi 行列とする．このとき，次の 2 条件は同値：

(1) Q, P は正準変換である．
(2) $MJM^\top = J$.

条件 (2) を**シンプレクティック条件**，M を**シンプレクティック行列**という．

歴史 3.5.5. Q, P が制限されていない一般の場合に対してこれを示す方法は，Lie による連続変換の 1-パラメータ変換群の理論を用いることでできる．

命題 3.5.6 (正準変換の群).

(1) 恒等変換は正準である．
(2) 正準変換の逆は正準である．

(3) 正準変換の合成は正準である．
(4) 正準変換の合成は結合的である．

3.6　正準不変量と接触変換

Hamilton 力学のほとんどの概念は Poisson 括弧式を用いて特徴づけることができるのは，変換群の構造を用いて相空間 $\mathbb{R}^{2n}$ が特徴付けられることを言っていると考えれば当然の事実であろう．

3.6.1　歴史

ここまでの理論では「正準変換（正準形の射）」の考え方が入っていない．以降，Hamilton-Jacobi 理論は天体力学と呼ばれていた．

歴史 3.6.1 (Poincare の正準変換の研究)**.**

(1) 1892 年，彼の代表作『天体力学の新しい方法』[18] で，Newton 方程式から Hamilton の正準方程式を導き，その後 Jacobi の解法を紹介する．しかしここでさらに一歩踏み込んで，Hamilton-Jacobi 方程式の完全解が正準変換の母関数になることを示唆した．
(2) 第 3 版で，母関数 S が H-J 方程式の解になれば，これが定める正準変換が力学系の解を与えることを示し，これは Goldstein の教科書に載っている説明と同じである．
(3) 1905 の『天体力学講義』[19] では，正準変換となるための十分条件を 1-形式で提示する．特に H-J 方程式の完全解 S はこれを満たし，さらにこれが定める正準変換は，変換後の正準変数が定数になるようなクラスを定める．これを **Jacobi の方法と称したが**，Jacobi がここまで見えていた訳ではない．

歴史 3.6.2 (Edmund Whittaker (1873-1956))**.** Lie の接触変換は，正準変換を引き起こすことに気づいた (1904 『解析力学』)．1960s までは，正準性を保つ変換を正準変換とともに「接触変換」とも呼ばれていた．

3.6.2　Poisson 括弧式

定義 3.6.3 (Poisson brackets, fundamental). 正準変数 p, q に関する括弧式とは，双線型形式

$$[u,v]_{p,q} := \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^\top J\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

をいう．ζ を正準変数としたとき，$[\zeta,\zeta]$ を**基本括弧式**という．

補題 3.6.4 . この演算について，$\mathbb{R}^{2n}$ の変換関数の全体は Lie 代数をなす．積は結合的ではなく，代わりに Jacobi の恒等式を満たす．

命題 3.6.5 . 変換 $\eta \to \zeta$ について，次の 2 条件は同値：

(1) 正準変換である．
(2) $[\zeta,\zeta]_\eta = J$.

3.6.3　Lagrange の括弧式

歴史的な興味があるのみである．

3.6.4 Liouville の定理

定理 3.6.6 . 統計的集団 $E \subset \mathbb{R}^{2n}$ について，任意の点 $x \in E$ の近傍に含まれる E の他の点の密度 D は，時間的に一定である．すなわち，次が成り立つ：

$$\frac{dD}{dt} = [D, H] + \frac{\partial D}{\partial t} = 0.$$

定義 3.6.7 (microcanonical ensemble). D を，あるエネルギーをもつ系については特定の定数，その他のエネルギー準位を持つ場合は 0 にする．この条件を満たす統計的集団 E を**小正準集団**という．

3.7 Hamilton-Jacobi の理論

実際，この枠組みに整理したのは Poincare である．

3.7.1 Hamilton-Jacobi の方程式

Hamilton が時間に依存する場合の解法理論を考える．解とは，$t = 0$ のときに初期値 (q_0, p_0) を持つような正準変数に他ならないから，まずは定数関数 (q_0, p_0) への正準変換を考え，その逆変換 $q = q(q_0, p_0, t), p = p(q_0, p_0, t)$ を計算すれば良い．そのための十分条件が Hamilton-Jacobi の方程式であり，数学的にはこれを解けば，力学問題の解が得られたことになる．

定理 3.7.1 (Hamilton-Jacobi equation, Hamilton's principal function).

(1) 変換後の Hamiltonian K が零関数ならば，新たな正準変数は定数関数である．

(2) 母関数 F が次の方程式を満たすとき，$K = 0$ である：

$$H\left(q_1, \cdots, q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial F_t}{\partial t} = 0.$$

(2) を満たすときの母関数を S と書いて，Hamilton の**主関数**という．

系 3.7.2 . S は次を満たす：$\dfrac{dS}{dt} = L.$

歴史 3.7.3. Hamilton は Lagrangian L の時間積分が，ある偏微分方程式の特解であることに気づいた．その逆の成立，すなわち，Hamilton-Jacobi の完全解から，系の運動の解が導かれることに気づいたのが Jacobi であった．

3.7.2 サイクリックな正準変数への変換と Hamilton の特性関数

3.8 Bohr の量子力学と天文力学

3.9 天の力学から原子の力学へ

Bohr (1913) の原子模型の提案から，Hamilton 光学が見直された．ハミルトン光学ないしは光学の HJ 理論という分野が，1920 年代には確立していた．そして Born が Hamilton-Jacobi 理論を，天体力学と量子力学をつなげる数学的形式として見直し，『原子の力学』(1925) として刊行した．「量子力学」と題する論文が刊行されたのも，同年のすぐ後の出来事であった．

歴史 3.9.1. 当時のドイツの量子物理学者の間でよく読まれたのは，スウェーデンの天文学者 Carl Charlier(1862-1934) による『天の力学』であった．ドイツ語で，制限つき周期運動について詳しいためである．ここでは，天体力学における角変数 $\omega = \nu t + \beta$ が，作用に相当する積分と正準共役になることが示唆されていた．この正準変数を「**作用・角変数**」と名付けたのは，シュワルツシルト (1916) がシュタルク効果の説明にあたってである．

歴史 3.9.2 (Klein から David Hilbert へ：変分原理からの大総合).　(1) Klein は Hamilton 光学の普及に努めた.

(2) 1922-23 年，ダーフイト-ヒルベルト (1862-1943) はゲッチングン大学で,『量子論の数学的基礎』17 を講義した．ここで彼は，変分原理に基づいて光学と力学の HJ 理論を統一的に論じた．このように変分原理から出発する物理学の見方は Hamilton の仕事ではなく，Hilbert なのであった！実際，この本は変分原理を基調に書かれており，正準方程式を**変分問題の標準微分方程式**として提示している.

定理 3.9.3 (Jacobi). 偏微分方程式 $u_x + H(x_1, \cdots, x_n, x, u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}) = 0$ の完全積分 $u = \varphi(x_1, \cdots, x_n, x, a_1, \cdots, a_n)$ が知られているならば，$2n$ 個の任意のパラメータ $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ を持った方程式 $\varphi_{a_i} = b_i, \varphi_{x_i} = p_i$ から正準な連立微分方程式

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i}$$

の解の $2n$-パラメータの群が得られる.

歴史 3.9.4 (Max Born). ヒルベルトの定式化を押さえた上でボルンは，1925 年に『原子の力学』を刊行する．名前の由来は「天体力学だけでなく，原子の力学のための Hamilton-Jacobi 理論の再評価」というところである．Hilbert の講義録は 2009 まで世に出なかったので，今日の (ゾンマーフェルトが望んだような) 前期量子論を理解するための Hamilton-Jacobi の理論の教科書としての流れを作った．そこで，我々の歴史的理解が歪んだのである.

第 4 章

力学系

Hamilton-Jacobi 理論を完成させた Poincare ののち，新たな対象が生まれた．

4.1 歴史

3 体問題に決着を付けたのが Poincare で，これ以降，カオス・力学系という対象が認識された．

第 5 章

参考文献

参考文献

[1] Vladimir I. Arnold "Mathematical Methods of Classical Mechanics" 2nd, (1991).

[2] Goldstein, H. (瀬川富士，矢野忠，江沢康生訳) 『新版 古典力学 (上)』. 吉岡書店.

[3] Goldstein, H. (瀬川富士，矢野忠，江沢康生訳) (2005). 『新版 古典力学 (下)』. 吉岡書店.

[4] Fellman, E. A. (山本敦之訳). (2002). 『オイラーの生涯』 シュプリンガー・フェアラーク東京.

[5] Bourbaki, N. (村田全，清水達雄，杉浦光夫訳). (2006). 『数学史 (下)』 ちくま学芸文庫.

[6] 磯崎洋『解析力学と微分方程式』(共立出版，2020)

[7] 伊藤秀一 (1998) 『常微分方程式と解析力学』(共立講座，21 世紀の数学).

[8] Euler, L. (1747). Reserches sur le mouvement des corps céleste général. Omera Omnia, Ser.II, Vol.25.

[9] Lagrange. (1788) Méchanique analitique . Paris.

[10] Mécanique analytique. 2nd ed., Volume 1.(1811) Vol.2 (1813) Paris.

[11] Hamilton, W. R. (1834). On a General Method in Dynamics; by which the Study of the Motions of all free Systems of attracting or repelling Points is reduced to the Search and Differentiation of one central Relation, or characteristic Function.

[12] Hamilton, W. R. (1835). Second Essay on a General Method in Dynamics.

[13] Jacobi, C. G. J. (1836). "Sur le Mouvement d' un Point et sur un Cas particulier du Probl'em des trois Corps," Lettre adresseea l' Acad ´ emie des Sciences de Paris, Comptes Rendus, t.3, pp.59-61 = Werke 4, pp.37-38.

[14] Jacobi, C. G. J. (1837). Uber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischenirgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systems gewohnlicher Differentialgleichungen *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*. 17::97-162.

[15] Jacobi, C. G. J. (1837). Note sur l' intgration des ´ equations diff erentielles de la dynamique. *Comptes rendus de l' Acadmiedes Sciences* 5::61-67.

[16] Max Born. (1925). Vorlesungen über Atommechanik. Berlin, Springer.

[17] Courant, R., and Hilbert, D. (1937). Methoden der Mathematischen Physik. Berlin, Verlag von Julius Springer.

[18] Poincare, H. (1892). 『天体力学の新しい方法』

[19] Poincare, H. (1915). 『天体力学講義』