

目次

第 1 章	集合と写像	5
1.1	写像の定める関手	5
1.1.1	随伴性	5
1.1.2	像の関手性の破れ	6
1.1.3	逆像の関手性	6
1.1.4	可逆性の特徴付け	6
1.1.5	全射・単射性の特徴付け	7
1.1.6	2つの関手の関係	7
1.1.7	双対性概観	8
1.2	普遍構成	9
1.2.1	和と積	9
1.2.2	等化子	9
1.2.3	余等化子	9
1.2.4	商集合の普遍性	10
1.2.5	貼り合わせ	11
1.3	写像の標準分解	11
1.3.1	標準分解	11
1.3.2	単射と全射の特徴付け	11
1.3.3	単射と全射の十分条件	12
1.4	実数の位相	12
1.4.1	点列の収束	12
1.4.2	連続写像	13
1.5	関数の連続性	14
1.5.1	連続性の特徴付け	14
1.5.2	上・下半連続性	14
1.5.3	下半連続関数の空間	14
1.6	次元論	15
第 2 章	位相空間とその射	16
2.1	開集合系による定義	16
2.1.1	公理と特徴付け	16
2.1.2	射の性質	17
2.1.3	位相の生成	18
2.1.4	準基の性質	19
2.2	位相空間の射	19
2.2.1	連続写像の特徴付け	19
2.2.2	開・閉写像の特徴付け	19
2.2.3	位相同型の特徴付け	20
2.2.4	埋め込み	20

2.2.5	像位相	20
2.3	同値な公理	21
2.3.1	閉包の定義	21
2.3.2	基底の定義	21
2.3.3	閉包の公理	21
2.3.4	近傍系の公理	21
2.3.5	基底の公理	22
2.4	積空間と始位相	22
2.4.1	積位相の特徴付け：2つの場合	22
2.4.2	積位相の特徴付け：一般の場合	22
2.4.3	始位相の普遍性	23
2.5	商空間と像位相	23
2.5.1	商空間の普遍性	23
2.5.2	直和位相の特徴付け	24
2.5.3	開被覆の性質	24
2.5.4	貼り合わせ	24
2.5.5	終位相の普遍性	24
2.6	ネット	25
2.6.1	ネットの収束	25
2.6.2	部分ネット	26
第3章	距離空間	27
3.1	距離関数の扱い	27
3.1.1	開集合の特徴付け	27
3.1.2	距離空間は正規	27
3.1.3	閉包の特徴付け	27
3.1.4	等距離写像	28
3.1.5	ノルム空間の等長写像	28
3.1.6	距離空間の例：付値	28
3.1.7	距離概念の一般化	29
3.1.8	一様空間の2つの定義	29
3.1.9	一様構造の定める位相	30
3.1.10	位相群	31
3.2	コンパクト距離空間	31
3.2.1	定義	31
3.2.2	閉集合による特徴付け	31
3.2.3	最大値の定理による特徴付け	31
3.2.4	実数のコンパクト部分集合	32
3.2.5	全有界性による特徴付け	32
3.3	写像の極限	33
3.3.1	集積点の定義	33
3.3.2	極限の一意性	34
3.3.3	超フィルターによるコンパクト性の特徴付け	34
3.3.4	Tychonoff の定理	35
3.4	点列の収束によるコンパクト距離空間の特徴付け	35
3.4.1	収束の特徴付け	35
3.4.2	写像の連続性の特徴付け	36
3.4.3	閉包の点列による特徴付け	36

3.4.4	コンパクト距離空間の点列による特徴付け	36
3.5	完備距離空間	38
3.5.1	閉集合との関係	38
3.5.2	完備化	39
3.5.3	不動点定理	40
3.5.4	可算共通部分	40
3.5.5	Baire 空間	40
3.6	距離化可能性	41
3.6.1	可算性・可分性	41
3.6.2	距離空間の可算・可分性	41
3.6.3	Frechet 空間 \mathbb{R}^∞ の距離付け可能性	42
3.6.4	一般の距離付け可能性	43
第 4 章	位相的構造	44
4.1	Hausdorff 空間	44
4.1.1	定義	44
4.1.2	積位相による特徴付け	44
4.1.3	連続単射の逆像への遺伝	44
4.1.4	等化子による特徴付け	45
4.1.5	Hausdorff 空間値写像は連続延長する	45
4.2	連結空間	46
4.2.1	定義と特徴付け	46
4.2.2	閉包と交叉和への遺伝	46
4.2.3	弧状連結性	47
4.2.4	実数の連結性	47
4.2.5	連結性の連続像への伝播	48
4.2.6	連結成分	48
4.2.7	連結成分と開かつ閉集合	49
4.3	局所連結空間	49
4.3.1	定義と特徴付け	49
4.3.2	伝播	49
4.4	一般のコンパクト性	50
4.4.1	積位相による特徴付け	50
4.4.2	閉集合との交叉と有限合併への遺伝	50
4.4.3	連続像への伝播	51
4.4.4	射影による特徴付け	51
4.4.5	積への遺伝	52
4.5	コンパクトハウスドルフ空間	52
4.5.1	連続写像の標準分解	52
4.5.2	コンパクトハウスドルフ空間の特徴付け	53
4.5.3	商空間への遺伝	54
4.5.4	コンパクトハウスドルフならば正規	54
4.6	正規空間	55
4.6.1	定義	55
4.6.2	特徴付け	55
4.6.3	正規であるための十分条件	55
4.6.4	Urysohn の補題	55
4.6.5	正規空間上の有界連続関数	56

4.6.6	1 の分解定理	56
4.7	局所コンパクト空間	56
4.7.1	定義	56
4.7.2	1 点コンパクト化による特徴付け	56
4.7.3	1 点コンパクト化の位相	57
4.7.4	σ -コンパクト性	58
4.7.5	距離付け可能性	58
4.8	局所コンパクト空間の精緻化	59
4.8.1	パラコンパクト性	59
4.8.2	第 2 可算ならパラコンパクト	59
4.8.3	第 2 可算ならば Lindelöf	60
4.8.4	1 の分割	60
第 5 章	写像空間	61
5.1	逆写像定理	61
5.1.1	Jacobi 行列	61
5.1.2	逆写像定理	61
5.1.3	系としての陰関数定理	62
5.1.4	陰関数定理	63
5.2	有界連続関数の空間	63
第 6 章	参考文献	64
参考文献		65

第 1 章

集合と写像

記法 1.0.1.

- (1) 位相空間論では集合の概念については次の 3 点のみを使用し、その定義については抽象化して informal に言及する.
- (1) 像写像は合併は保つが、共通部分は不完全にしか保たない (命題??).
 - (2) 逆像写像は合併も共通部分も保つ (命題??).
 - (3) de Morgan の法則 (命題??).
- (2) 集合 X に対し、その有限部分集合全体からなる集合を

$$F(X) := \{A \in P(X) \mid |A| < \infty\}$$

と置く.

1.1 写像の定める関手

位相では、集合 $f: X \rightarrow Y$ の定める対応 $f^*: P(X) \rightarrow P(Y)$ が肝要になる. この関手の性質を調べる. $P(X)$ には、完備 Boole 代数である側面と、完備束である側面とがある.

1.1.1 随伴性

f^*, f_* は互いに随伴をなす (f_* が左随伴: $f_* \dashv f^*$). これを用いて $P(X)$ と $P(Y)$ を往来して調べることが数学の基礎の最も基本的な手法となる. Lawvere によると、論理とは、2 つの互いに随伴な射の組である.

命題 1.1.1 (adjunction). $f: X \rightarrow Y$ を写像、 $A \subset X, B \subset Y$ とする.

- (1) $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.
- (2) (a) $A \subset f^{-1}(f(A))$.
(b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
- (3) f が単射のとき (a) は等号成立. また、(a) が任意の $A \in P(X)$ について成り立つならば f は単射.
- (4) f が全射のとき (b) は等号成立. 特に、 $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$.

【証明】. どちらも、 $x \in A \Rightarrow f(x) \in B$ という論理式の表現である. ■

要諦 1.1.2 (随伴の向きについて). なお、向きは、包含写像 $i: f(A) \rightarrow B$ の向きで左右が決まっている. これは内積空間での関係 $\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle$ から来たものである. あえて書くなら、 $\langle f(A), B \rangle = \langle A, f^{-1}(B) \rangle$ である. ただし $\langle S, T \rangle$ とは、 $S \subset T$ とした.

1.1.2 像の関手性の破れ

非対称性が破れる理由は、終域に「制限」をかけられないことが1つある。これは $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$ なる消息からもわかる (projection formula) という。これは相対位相のようなものを考える必然性を生み出す。

問題 1.1.3 (像の値域). $f : X \rightarrow Y$ を写像とする。

- (1) $\text{Im } f_* = P(\text{Im } f)$.
- (2) $\forall S \subset X, T \subset Y \quad f(S) \cap T = f(S \cap f^{-1}(T))$.

[証明] . 略. ■

命題 1.1.4 (像は和のみを保つ). $f : X \rightarrow Y$ を写像, $\{S_i\}_{i \in I} \subset P(X)$ を族とする。像 $f_* : P(X) \rightarrow P(Y)$ は次を満たす：

- (1) $f_*(\cup_{i \in I} S_i) = \bigcup_{i \in I} f_*(S_i)$.
- (2) $f_*(\cap_{i \in I} S_i) \subset \bigcap_{i \in I} f_*(S_i)$.

$I \neq \emptyset$ かつ f が単射のとき, (2) の等号は成立する。また, 任意の $\{S_i\}_{i \in I} \subset P(X)$ について (2) の等号が成立するならば, f は単射である。

[証明] .

- (1) a
- (2) $\forall i \in I \quad \cap_{i \in I} S_i \subset S_i$ だから, $\forall i \in I \quad f_*(\cap_{i \in I} S_i) \subset f_*(S_i)$. ■

1.1.3 逆像の関手性

f^* は完備 Boole 代数 $P(X)$ の射として完成されている。

命題 1.1.5 (順序の保存). $f : X \rightarrow Y$ を写像とする。 $f_* : P(X) \rightarrow P(Y), f^* : P(Y) \rightarrow P(X)$ はいずれも関手である。

- (1) $\forall A, A' \subset X \quad A' \subset A \Rightarrow f_*(A') \subset f_*(A)$.
- (2) $\forall B, B' \subset Y \quad B' \subset B \Rightarrow f^*(B') \subset f^*(B)$.

命題 1.1.6 (逆像は和と積を保つ). $f : X \rightarrow Y$ を写像, $\{T_i\}_{i \in I} \subset P(Y)$ を族とする。像 $f^* : P(Y) \rightarrow P(X)$ は次を満たす：

- (1) $f^*(\cup_{i \in I} T_i) = \bigcup_{i \in I} f^*(T_i)$.
- (2) $f^*(\cap_{i \in I} T_i) = \bigcap_{i \in I} f^*(T_i)$.

命題 1.1.7 (逆像は補集合を保つ). $f : X \rightarrow Y$ を写像, $B \subset Y$ を部分集合とする。この時, $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

1.1.4 可逆性の特徴付け

$P(X)$ は Boole 代数であるだけでなく, 順序による圏とみなせる。このときの米田の補題が効いている。これが束の構造である。

命題 1.1.8 (可逆射の普遍性による特徴付け：集合を, 他の集合への写像についての述語で特徴付けること). $f : X \rightarrow Y$ を写像とす

る。次の2条件は同値である。

- (1) f は可逆である。
- (2) 任意の集合 Z に対して、写像 $f^* : \text{Map}(Y, Z) \rightarrow \text{Map}(X, Z)$ は可逆である。

[証明] . 略。 ■

要諦 1.1.9. 圏 $P(X)$ での米田の補題は、 $(A = B) \Leftrightarrow (\forall T \in P(X) \ A \leq T \Leftrightarrow B \leq T)$ という主張になる。この完備性を利用したのが「上限」の概念であり、この完備性を利用して有理数を完備化する手法が Dedekind の切断でもある。

1.1.5 全射・単射性の特徴付け

ここは線形代数の理論の力を借りる。 $P(X)$ を特性関数のなす線型空間と同一視し、 f^*, f_* をその間の線型写像とみる。

命題 1.1.10 (全射・単射の特徴付け). $f : X \rightarrow Y$ を写像、 f^*, f_* を関手とする。

- (1) f が単射であることと、 f_* が単射であることと、 f^* が全射であることは同値である。
- (2) f が全射であることと、 f_* が全射であることと、 f^* が単射であることは同値である。

[証明] . まず、 f^* について示す。 f_* についても同様。集合 S に対して、全単射

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{F}_2^{\oplus S})^\vee & \xrightarrow{\quad} & P(S) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ g & \longmapsto & \{s \in S \mid g([s]) = 1\} \end{array}$$

が存在することに着目する。ただし、 $(-)^\vee$ は \mathbb{F}_2 -線型空間の双対を表す。

写像 $f : A \rightarrow B$ は \mathbb{F}_2 -線型写像 $\varphi_f : \mathbb{F}_2^{\oplus A} \rightarrow \mathbb{F}_2^{\oplus B}$ を誘導し、 f の単射性・全射性は φ_f の単射性・全射性と同値である。また、双対写像 $\varphi_f : (\mathbb{F}_2^{\oplus B})^\vee \rightarrow (\mathbb{F}_2^{\oplus A})^\vee$ は上記の全単射により $f^* : P(B) \rightarrow P(A)$ に対応する。よって主張は次の補題から従う。 ■

補題 1.1.11. k を体とする。 $\varphi : V \rightarrow W$ を k -線型空間の間の線型写像とし、 $\varphi^* : W^\vee \rightarrow V^\vee$ をその双対写像とする。この時、

- (1) φ が単射であることは、 φ^* が全射であることと同値である。
- (2) φ が全射であることは、 φ^* が単射であることと同値である。

[証明] .

- (1) $0 \rightarrow \text{Ker } \varphi \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow \text{Coker } \varphi \rightarrow 0$ は完全列である。
- (2) k は k 加群として入射的。即ち、関手 $\text{Hom}(-, k)$ は完全となる。
- (3) $0 \rightarrow (\text{Coker } \varphi)^\vee \rightarrow W^\vee \rightarrow V^\vee \rightarrow (\text{Ker } \varphi)^\vee \rightarrow 0$ は完全列である。

1.1.6 2つの関手の関係

f が全射または単射のとき、 f^*, f_* は互いに部分的に逆になる。

命題 1.1.12 (全射の双対写像)。

- (1) f が全射の時、定理 1.3.6 より、split epi だから、右逆射 (section) $f^{-1} : Y \rightarrow X$ が存在して、

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_Y \Rightarrow (f^{-1})^* \circ f^* = \text{id}_Y^* = \text{id}_{P(Y)}.$$

よって、 $(f^{-1})^*$ は f^* の左逆射 (retraction) であるという意味で $(f^*)^{-1}$ とも表し得る。

- (2) f が全射の時, 同じく split mono だから, あるいは命題??.3 より, 任意の部分集合 $B \subset Y$ について $f(f^{-1}(B)) = \text{id}_Y(B) = B = B \cap f(X)$. 従って, $f_* \circ f^* = \text{id}_{P(Y)}$ である.

- (3) 以上のことを象徴的に表せば,

$$((f^*)^{-1} = (f^{-1})^* =) f^{*-1} = f_*.$$

命題 1.1.13 (単射の双対写像).

- (1) f が単射の時, 定理 1.3.5 より, split mono だから, 左逆射 (retraction) $f^{-1} : Y \rightarrow X$ が存在して,

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X \Rightarrow f^* \circ (f^{-1})^* = \text{id}_X^* = \text{id}_{P(X)}.$$

よって, $(f^{-1})^*$ は f^* の右逆射 (section) であるという意味で $(f^*)^{-1}$ とも表し得る.

- (2) f が単射の時, 同じく split mono だから, 任意の部分集合 $A \subset X$ について $f^{-1}(f(A)) = \text{id}_X(A) = A$. 従って, $f^* \circ f_* = \text{id}_{P(X)}$ である.

- (3) 以上のことを象徴的に表せば,

$$((f^*)^{-1} = (f^{-1})^* =) f^{*-1} = f_*.$$

1.1.7 双対性概観

2 への線型写像を通じて, 集合論と線形代数との双対理論が相即相入する.

双対写像への全射と単射の持ち越し

前の節の逆像写像についての内容を一般化する. 定理 1.3.5, 1.3.6 より, 次の Hom 関手について,

$$\begin{aligned} f \text{ が単射 (左簡約可能)} &\Leftrightarrow f_* \text{ が単射 (左簡約可能)}, & f \text{ が全射 (右簡約可能)} &\Leftrightarrow f^* \text{ が単射} \\ &\Leftrightarrow f^* \text{ が全射}, & &\Leftrightarrow f_* \text{ が全射} \end{aligned}$$

は, 1 行目がすぐに判り^a, 2 行目は双対原理から来る. f^* が C で monic / epic であることと, f^* が C^{op} で epic / monic であることが同値なのである. C^{op} での f^* とは, postcomposition f_* に他ならない. よって, このことは単射/全射を, monic / epic に変えても一般の圏にて成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} f_* : \text{Map}(Z, X) & \longrightarrow & \text{Map}(Z, Y) & & f^* : \text{Map}(Y, Z) & \longrightarrow & \text{Map}(X, Z) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ g \mapsto & \longrightarrow & f \circ g & & g \mapsto & \longrightarrow & g \circ f \end{array}$$

^a <https://ncatlab.org/nlab/show/monomorphism> での特徴付け 4 つのうちの 1 つに含まれている

定理 1.1.14. $f : X \rightarrow Y$ を写像とする. Z を任意の集合として, $f^* : \text{Map}(Y, Z) \rightarrow \text{Map}(X, Z)$ を反変 Hom 関手, $f_* : \text{Map}(Z, X) \rightarrow \text{Map}(Z, Y)$ を共変 Hom 関手とする.

- (1) $f : X \rightarrow Y$ が単射である $\Leftrightarrow f^*$ が全射である.
 (2) $f : X \rightarrow Y$ が全射である $\Leftrightarrow f^*$ が単射である.
 (3) $f : X \rightarrow Y$ が単射である $\Leftrightarrow f_*$ が単射である.
 (4) $f : X \rightarrow Y$ が全射である $\Leftrightarrow f_*$ が全射である.

[証明].

- (1)

$$\begin{aligned} f \text{ が単射} &\Leftrightarrow f \text{ が左簡約可能} && \text{(定理 1.3.5)} \\ &\Leftrightarrow f^* \text{ が右簡約可能} && \text{(後述)} \\ &\Leftrightarrow f^* \text{ が全射} && \text{(定理 1.3.6)} \end{aligned}$$

であるが, \Rightarrow は, $r \circ f = \text{id}_X$ を満たす f の retraction r に対して, $f^* \circ r^* = \text{id}_{\text{Map}(X,Z)}$ を満たす $r^* : \text{Map}(X,Z) \rightarrow \text{Map}(Y,Z)$ が見つかる. \Leftarrow は, $Z = X$ とし, $f^* \circ r = \text{id}_{P(X)}$ を満たす $r : \text{Map}(X,X) \rightarrow \text{Map}(Y,X)$ に対して, $r(\text{id}_X)$ が f の retraction となる. 実際, $f(r(\text{id}_X)) = \text{id}_X$ より, $r(\text{id}_X) \circ f = \text{id}_X$ を得る.

(2) すでに述べた.

(3) すでに述べた.

(4)

■

要諦 1.1.15. おそらくこういうことであろう. しかし, epimorphism の定義は, 任意の対象 Z と平行な射の組 $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$ について, $(g_1 \circ f = g_2 \circ f) \Rightarrow (g_1 = g_2)$ であり, これは hom-functor $\text{Hom}(-, Z)$ が単射であることの定義に他ならない. Sets 上では単射と epimorphism が同値なので, 上の定理が成り立つ.

2 の役割を入れ替えることによる双対が起こる. de Morgan duality が開集合の閉集合の双対を引き起こしていて, 第??節の主眼である. これと, 反対圏が生み出す双対とどのような関係があるのだろうか?

1.2 普遍構成

1.2.1 和と積

命題 1.2.1 (積の普遍性). $(X_i)_{i \in I}$ を集合族, $X := \prod_{i \in I} X_i$ とする. 任意の集合 $T \in \text{Set}$ と写像の族 $(f_i : T \rightarrow X_i)_{i \in I}$ に対して, ある $f : T \rightarrow X$ がただ一つ存在して, 次を満たす: $\forall_{i \in I} f_i = \text{pr}_i \circ f$.

1.2.2 等化子

命題 1.2.2 (等化子の普遍性: 単射と一般の写像). $i : X \rightarrow Y$ を単射, T を勝手な集合, $f : T \rightarrow Y$ を写像とする. 次の2つの条件は同値である.

(1) $f(T) \subset i(X)$ である.

(2) 下の図式を可換にする写像 $g : T \rightarrow X$ が一意的に存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ \uparrow g & \nearrow f & \\ T & & \end{array}$$

要諦 1.2.3. $f(T) \supsetneq i(X)$ の時, g をどう取っても $f(T) \setminus i(X) \neq \emptyset$ となってしまうため, 写像として一致し得ない.

1.2.3 余等化子

命題 1.2.4 (全射と一般の写像). X, Y, Z を集合, $p : X \rightarrow Y$ を全射, $f : X \rightarrow Z$ を写像とする.

(1) 次の条件 (1) と (2) は同値である.

(1) $f = g \circ p$ を満たす写像 $g : Y \rightarrow Z$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

(2) 全射 p が定める同値関係 R_p は, 写像 f が定める同値関係 R_f よりも細かい: $C_{R_p} \subset C_{R_f}$.

(2) いま, R_p が R_f よりも細かいとする. この時, 次の2つの条件は同値である.

(1) $f = g \circ p$ を満たすこの $g : Y \rightarrow Z$ は単射である.

(2) R_p と R_f は同値である.

【証明】. 1. (1) \Rightarrow (2) は

$$\forall x, x' \in X, p(x) = p(x') \Rightarrow f(x) = f(x')$$

を示せば良い. いま, 実際 $p(x) = p(x')$ を満たす $x, x' \in X$ について, $q(p(x)) = q(p(x'))$ であるから, $f(x) = f(x')$ が従う.

次に (2) \Rightarrow (1) を考える. 写像 g を構成するために, 写像

$$\begin{array}{ccc} (p, f) : X & \longrightarrow & Y \times Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longmapsto & (p(x), f(x)) \end{array}$$

を考える. この値域 $(p, f)(X) = \{(p(x), f(x)) \mid x \in X\} =: \Gamma_g$ は (A) 写像のグラフとなっており, そして (B) このグラフが定める写像 $(Y, Z, \Gamma_g) =: g$ が求める唯一つの写像であることを示す.

(B) については, 全ての $x \in X$ について, g の定め方より $g(p(x)) = f(x)$ が成り立つから, 確かにこれは $f = g \circ p$ を満たす写像である.

(A) Γ_g が写像のグラフとなっていることの証明を, $\text{pr}_1 : Y \times Z \rightarrow Y$ を第一射影として, $\text{pr}_1|_{\Gamma_g}$ が全単射であることを示すことによって行う. $\text{pr}_1|_{\Gamma_g} \circ (p, f) = \text{id}_Y \circ p = p$ より, p は全射であるから $\text{pr}_1|_{\Gamma_g}$ も全射である. また, $(y, z), (y', z') \in \Gamma_g$ について $\text{pr}_1(y, z) = \text{pr}_1(y', z')$ 即ち $y = y'$ 即ち $\exists x, x' \in X$ s.t. $p(x) = p(x')$ ならば, $R_p \subset R_f$ より, $f(x) = f(x')$ 即ち $z = z'$ より, $\text{pr}_1|_{\Gamma_g}$ は単射でもある.

2. (2) \Rightarrow (1). $R_p = R_f$ の時, $X/R_p = X/R_f$ であるから, p, f の標準分解は, 可逆写像 $\bar{p} : X/R_p \rightarrow Y$ と単射 $\bar{f} : X/R_p \rightarrow Z$ を定める.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ q \downarrow & \searrow \bar{p} & \downarrow g \\ X/R_p & \xrightarrow{\bar{f}} & Z \\ & \nwarrow \bar{f} & \\ & f(X) & \end{array}$$

この図式は結局全体として可換であり ($f = g \circ p$ かつ $f = \bar{f} \circ q$ より, $\bar{f} \circ q = g \circ p$ を得る. これと $p = \bar{p} \circ q$ より), $\bar{f} \circ \bar{p}^{-1} = g$ となる. 従って g は全射である.

(1) \Rightarrow (2). g が単射ならば, $g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$ より,

$$\begin{aligned} p(x) = p(x') &\Leftrightarrow g(p(x)) = g(p(x')) \\ &\Leftrightarrow f(x) = f(x') \end{aligned}$$

より, $R_f = R_p$ である. ■

1.2.4 商集合の普遍性

系 1.2.5 (商集合の普遍性). R を集合 X 上の同値関係とし, $q : X \rightarrow X/R$ を商写像とする.

(1) 写像 $f : X \rightarrow Y$ について, 次の2条件は同値である.

(1) 次の図式を可換にする写像 $g : X/R \rightarrow Y$ が存在する. これは f によって引き起こされた写像である.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & X/R \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & Y \end{array}$$

(2) R は, f が定める同値関係 R_f より細かい.

(2) R' を Y の同値関係とし, $q' : Y \rightarrow Y/R'$ を商写像とする. 写像 $f : X \rightarrow Y$ に対して, 次の2条件は同値である.

(1) 写像 $g : X/R \rightarrow Y/R'$ で, 次の図式を可換にするものが存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ q' \downarrow & & \downarrow q' \\ X/R & \xrightarrow{g} & Y/R' \end{array}$$

(2) $C \subset X \times X$ を R のグラフとし, C' を R' のグラフとすると, $C \subset (f \times f)^{-1}(C')$ である.

[証明] . 1. 全射 p について命題 1.2.4 を適用して得る主張である. なお, q が定める同値関係 R_q とは R に他ならない.

2. 全射 $q' \circ f$ について命題 1.2.4 を適用して得る主張である. ■

1.2.5 貼り合わせ

定理 1.2.6. X を集合, $(X_i)_{i \in I}$ を被覆とする. ある集合 Y への写像の族 $(f_i : X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ について, 次の 2 条件は同値.

(1) ある $f : X \rightarrow Y$ が存在して, $\forall i \in I \ f|_{X_i} = f_i$.

(2) $\forall i, j \in I \ f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j}$.

このとき, f は一意的に存在する.

1.3 写像の標準分解

1.3.1 標準分解

命題 1.3.1 (canonical decomposition). $f : X \rightarrow Y$ を写像とする.

(1) 次の図式を可換にする写像 \bar{f} が唯一つ存在する. この分解 $f = i \circ \bar{f} \circ q$ を f の標準分解という.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ q \downarrow & & \uparrow i \\ X/R_f & \xrightarrow{\bar{f}} & f(X) \end{array}$$

(2) このとき, 写像 \bar{f} は可逆である. この \bar{f} を f によって引き起こされる可逆写像と呼ぶ.

(3) f が定める同値関係 R_f についての商集合 X/R_f を, f の余像と呼ぶ.

1.3.2 単射と全射の特徴付け

命題 1.3.2 (全射と単射の特徴付け). 次の 3 条件は同値である.

(1) f は単射である.

(2) f が定める同値関係 R_f は相等関係と同値である.

(3) f が定める写像 $X \rightarrow f(X)$ は可逆である.

次の 3 条件は同値である.

(1) f は全射である.

(2) $f(X) = Y$ である.

(3) X の同値関係 R と商集合からの可逆写像 $\bar{f} : X/R \rightarrow Y$ で, $q : X \rightarrow X/R$ を商写像とすると, $f = \bar{f} \circ q$ を満たすものが存在する.

1.3.3 単射と全射の十分条件

単射は左 q 退化の事象, 全射は右 i 退化の事象だと知っていれば, 次は明らかに思えてくる.

補題 1.3.3 (単射は左 q 退化の事象, 全射は右 i 退化の事象). $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ を写像とする. 次の条件について, $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ が成り立つ.

- (1) f と g は単射である.
- (2) $g \circ f$ は単射である.
- (3) f は単射である.

次の条件について, $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ が成り立つ.

- (1) f と g は全射である.
- (2) $g \circ f$ は全射である.
- (3) g は全射である.

命題 1.3.4. 写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ について, 次の2条件は同値である.

- (1) $f \circ g$ は可逆である.
- (2) g が単射で f が全射である.

モノ射とエピ射まとめ

定理 1.3.5 (mono). 以下は全て写像 $f: X \rightarrow Y$ が単射であることの同値な定義である.

- (1) [像/逆像の言葉] $\forall x \in X f^{-1}(f(x)) = \{x\}$.
- (2) [その論理的変形・大域化] $\forall A \subset X f^{-1}(f(A)) = A$ (雪江群論).
- (3) [左一意性] f が定める同値関係 R_f は相等関係と同値である. (関係が一致するとはグラフが一致することと定義した).
- (4) [標準分解の言葉] f が定める写像 $X \rightarrow f(X)$ は可逆になる.
- (5) [左簡約可能: monic] $g \circ f = \text{id}_X$ を満たす写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在する. または, $X = \emptyset$ である.
- (6) [関手性] 任意の $A_1, A_2 \subset X$ に対して, $f_*(A_1 \cap A_2) = f_*(A_1) \cap f_*(A_2)$ [1.1.4](#).
- (7) [像関手の左簡約可能性] 任意の $A \subset X$ に対して, $f^{-1}(f(A)) = A$ [1.1.1](#).

定理 1.3.6 (epi (AC)). 以下は全て写像 $f: X \rightarrow Y$ が全射であることの同値な定義である.

- (1) [逆像の言葉] $\forall y \in Y f^{-1}(y) \neq \emptyset$.
- (2) [右全域性] $f(X) = Y$.
- (3) [標準分解の言葉] $f = \bar{f} \circ q$ となる可逆写像 \bar{f} が存在する.
- (4) [右簡約可能: epic] $f \circ g = \text{id}_Y$ を満たす写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在する.

1.4 実数の位相

1.4.1 点列の収束

Dedekind の構成により, $P(\mathbb{R})$ 上に $\inf, \sup: P(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が定まる. ここから, まず点列の収束が定義できる. すると, 距離空間の点列の収束も定義できたことになる!

定義 1.4.1. 数列 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束するとは,

$$\inf_{m \geq 0} \left(\sup_{n \geq m} |x_n - a| \right) = 0$$

を満たすことをいう。これを用いて、 \mathbb{R}^n 上の収束は、距離 $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ を用いて定義できる。

命題 1.4.2 (点列の収束の位相的特徴付け). $(x_m) \in {}^<\omega\mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$ とする。次の3条件は同値である。

- (1) $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a$. すなわち, $\lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, a) = 0$.
- (2) $\forall r \in \mathbb{R}_{>0} \exists l \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}_{\geq l} d(x_m, a) < r$.
- (3) a を元として含む任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ について, $\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \notin U\}$ は有限集合である。

条件 3. を「十分大きな n について $x_m \in U (m \geq n)$ である, ということがある。

1.4.2 連続写像

\mathbb{R} の位相が構成できたならば、任意の距離空間上において、次のような方法で写像の連続性が定義できる。

定義 1.4.3. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ について,

- (1) $f: U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ を写像とする。 $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ とは、次のことをいう：

$$\inf_{r>0} \left(\sup_{x \in U, 0 < d(x, a) < r} d(f(x), b) \right) = 0.$$

- (2) 写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ が $a \in U$ で**連続**であるとは, $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ であることをいう。
 (3) $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ が**連続写像**であるとは, 全ての $x \in U$ において f が連続であることをいう。

命題 1.4.4.

- (1) 加法 $+: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ と乗法 $\cdot: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ と逆元 $^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続である。
- (2) 射影 $\text{pr}_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} (i \in [m])$ は連続である。次の2条件は同値である。
 - (1) 写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ は a で連続である。
 - (2) $f_i := \text{pr}_i \circ f: U \rightarrow \mathbb{R} (i \in [m])$ はそれぞれ a で連続である。

命題 1.4.5 (連続写像の開集合による特徴付け). $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ を開集合上の写像とする。

- (1) $a \in U$ に対し, 次の3条件は同値である。
 - (1) 写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ は a で連続である。
 - (2) $\forall q > 0, \exists r > 0, \forall x \in U, d(x, a) < r \Rightarrow d(f(x), d(a)) < q$.
 - (3) $f(a) \in V$ を満たす任意の開集合 $V \subset \mathbb{R}^m$ に対し, $a \in W \subset f^{-1}(V)$ を満たす開集合 $W \subset \mathbb{R}^n$ が存在する。
- (2) 次の2条件は同値である。
 - (1) $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ は連続である。
 - (2) 任意の開集合 $V \subset \mathbb{R}^m$ について, 逆像 $f^{-1}(V) \subset U$ は \mathbb{R}^n の開集合である。

命題 1.4.6 (連続写像の点列による特徴付け). \mathbb{R}^n -開集合上の写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ と $a \in U$ に対し, 次の2条件は同値。

- (1) $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ は a で連続である。
- (2) U の点列 (x_k) が a に収束するならば, \mathbb{R}^m の点列 $(f(x_k))$ は $f(a)$ に収束する。

1.5 関数の連続性

1.5.1 連続性の特徴付け

凸関数の特徴付けと似た消息が成り立つ.

命題 1.5.1. 一般の位相空間 X 上の関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ について, 次の2条件は同値:

- (1) f は連続.
- (2) $U := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) < y\}$ と $V := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) > y\}$ はいずれも $X \times \mathbb{R}$ の開集合.

1.5.2 上・下半連続性

すでに Fatou の補題のような消息が現れている.

定義 1.5.2 (upper semicontinuous, right continuous). X を位相空間とする.

- (1) 実数値関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が**上半連続**であるとは, \mathbb{R} の位相 $\{(-\infty, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ について連続であることをいう.
- (2) 実数上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow X$ が**右連続**であるとは, $\{[s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ が生成する \mathbb{R} の位相について連続であることをいう.

注 1.5.3. 上半連続性の定義は, $f^{-1}((-\infty, t)) = \{x \in X \mid f(x) < t\}$ が開であること. 右連続性の定義は $\{[s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ は, s に右から近づく点列を収束と判定するためである.

命題 1.5.4 (特性関数の連続性). $A \subset X$ について,

- (1) A が開であることと, 1_A が下半連続であることは同値.
- (2) A が閉であることと, 1_A が上半連続であることは同値.
- (3) A が開かつ閉であることと, 1_A が連続であることは同値.

ただし, 2 には離散位相を入れた.

命題 1.5.5 (上半連続性の特徴付け). 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ について, 次の2条件は同値:

- (1) f は上半連続である.
- (2) $\forall a \in X \ \forall r > 0 \ \exists U \in \mathcal{O}(a) \ U \subset \{x \in X \mid f(x) < f(a) + r\}$.
- (3) X の収束ネット (x_λ) について, $\limsup_{\lambda} f(x_\lambda) \leq f(\lim x_\lambda)$.

X は $C(X; [0, 1])$ によって分離されるとき (例えば正規空間のとき), 次も同値:

- (3) f はある連続関数の族の下限である.

命題 1.5.6 (上半連続性の保存). $(f_i: X \rightarrow \mathbb{R})_{i \in I}$ は上半連続な関数の族とする. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が $f(x) := \inf_{i \in I} f_i(x)$ によって定まるならば, f も上半連続である.

1.5.3 下半連続関数の空間

X 上の下半連続な関数全体の集合を $C^{1/2}(X)$ とする. すると, **frame** の構造が受け継がれ, $\text{Op}(X)$ を関数空間として実現できる.

命題 1.5.7.

- (1) $(C^{1/2}(X), \bigvee, \wedge)$ は frame である.
- (2) $C^{1/2}(X)$ は和と積について閉じている.
- (3) $C^{1/2}(X)$ は一様収束位相について閉じている.

1.6 次元論

現代では殆ど廃れた問題意識であるが、コンパクト集合を考えるにあたって、開被覆がどれだけ自然な発想であるかわかる。

歴史 1.6.1. Cantor の 1870 年以降の論文で、初めて \mathbb{R}^n の任意の集合の位相が考えられた。そこで、内点、集積点、境界点、開・閉集合などの Euclid 空間的な概念はすべて Cantor が与えた。Cantor (1878) は線分から正方形への全単射を構成し、Peano (1890) はそれが連続に取れることがわかった。そこで、位相不変量としての次元の概念の精緻化が要請された。次の定義のような次元の概念が位相不変量であることを示すために Brouwer が用いた手法は、代数的位相幾何学において主流となった。

一方で Fréchet は、関数空間においても類似の位相的問題を考える仮定で、距離空間の概念を定義した (1905)。そしてその様子から、「近傍」なる概念の持つべき性質を 4 公理にまとめあげて「位相空間」(今日の Hausdorff 空間に当たる) と呼んだのは Hausdorff (1914) である。こうして、位相幾何学の議論の対象は真に広がった。

位相空間の公理は、Kuratowski (1933) が「閉包の公理」を提案し、Bourbaki が開集合族、またはフィルターによるものがある。

定義 1.6.2 (Poincaré 1912, Brouwer 1913, Lebesgue 1921). コンパクト部分集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ の **次元** とは、次の条件を満たす自然数 m のうち最小のものをいう：

任意の $\epsilon > 0$ に対して、 K の各点が $m + 1$ 回以上は覆われないような、直径が ϵ を超えない開集合の族が取れる。

第 2 章

位相空間とその射

また位相空間は普遍構成ができる.

2.1 開集合系による定義

2.1.1 公理と特徴付け

開集合系による定義では, 開集合の全体 $\text{Op}(X)$ が持つ $P(X)$ の部分代数としての性質に注目する. 特に束の言葉を利用して, 枠と呼ばれる.

定義 2.1.1 (frame, filter). $\mathcal{O} \subset P(X)$ が

- (1) 枠であるとは, 次の 3 条件を満たすことをいう:
 - (a) \bigcup について閉じている.
 - (b) \cap について閉じている.
 - (c) 2 つが両立する: 任意の族 $\{Y_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{O}$ について, $X \cap \left(\bigcup_{i \in I} Y_i \right) = \bigcup_{i \in I} X \cap Y_i$.
- (2) フィルターであるとは, 次の 3 条件を満たすことをいう:
 - (a) 非空: $X \in \mathcal{O}$.
 - (b) 上方閉: $\forall A \in \mathcal{O} \ \forall B \in P(X) \ A \leq B \Rightarrow B \in \mathcal{O}$.
 - (c) 下方有向: $\forall A, B \in \mathcal{O} \ \exists C \in \mathcal{O} \ C \leq A \wedge C \leq B$.

定義 2.1.2 (topology, topological space). 集合 X と次の条件を満たす $\text{Op}(X) \subset P(X)$ との組 $(X, \text{Op}(X))$ を位相空間という:

- (1) $(U_i)_{i \in I}$ が \mathcal{O} の元の族ならば, $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.
- (2) $(U_i)_{i \in I}$ が \mathcal{O} の元の有限族ならば, $\cap_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}_X := \text{Op}(X)$, $\mathcal{O}(x) := \{U \in \mathcal{O}_X \mid x \in U\}$ と表す. (2) の有限条件を落としても成り立つとき, \mathcal{O} を **Alexandroff 位相** という.

例 2.1.3. $\text{Op}(X)$ や, 一点 $x \in X$ の近傍系または開近傍系 $\mathcal{O}(x)$ や, X のコンパクト集合の全体はフィルターをなす.

命題 2.1.4 (開集合の公理の特徴付け). X を集合とし, $\mathcal{O} \subset P(X)$ を集合とする.

- (1) 次の条件は同値である.
 - (1) $(U_i)_{i \in I}$ が \mathcal{O} の元の族ならば, $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.
 - (1') X の部分集合 U であって, 次を満たすものは全て \mathcal{O} の元である:

$$\forall x \in U, \exists V \in \mathcal{O}, x \in V \subset U.$$

- (2) 次の条件は同値である.
 - (2) $(U_i)_{i \in I}$ が \mathcal{O} の元の有限族ならば, $\cap_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.
 - (2') $X \in \mathcal{O}$ である. かつ, $U, V \in \mathcal{O} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{O}$ である.

[証明] .

- (1) \Rightarrow (1') (1') の論理式は, U 内部の開集合全体の集合 $\mathcal{U}_U := \{V \in \mathcal{O} \mid V \subset U\}$ の和が U 自身になる $\cup_{V \in \mathcal{U}_U} V = U$ という条件を表しており, (1') 全体ではこれを満たすならば $U \in \mathcal{O}$ という主張と同値である. 従って, \mathcal{U}_U は \mathcal{O} の開集合の族だから, (1) \Rightarrow (1').
- (1') \Rightarrow (1) \mathcal{O} の族 $(U_i)_{i \in I}$ を取る. $\cup_{i \in I} U_i =: U$ と置くと, 任意の元 $x \in U$ に対して $i \in I$ が存在して $x \in U_i \subset U$ が成り立つから, $U \in \mathcal{O}$.
- (2) \Rightarrow (2') $I = \emptyset$ とすれば, $(U_i)_{i \in I} = X \in \mathcal{O}$. $I = 2$ とすれば, $U, V \in \mathcal{O} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{O}$.
- (2') \Rightarrow (2) I の濃度についての数学的帰納法より.

■

2.1.2 射の性質

f^* は枠の射であるから, これによって位相を引き戻せる. 一方で, 終位相は $f_*(\mathcal{O}_X)$ のような代数的な表現を必ずしも持たない. f が全単射であることが十分条件で, f が全射であることが必要条件である.

命題 2.1.5 (f^* は枠の射である). $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

- (1) \mathcal{O} が Y の位相ならば, 引き戻し $f^*\mathcal{O} := \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{O}\} = f^*(\mathcal{O})$ は X の位相になる.
- (2) \mathcal{O} が X の位相ならば, 像位相 $\mathcal{O}' := \{V \in P(Y) \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{O}\} = (f^*)^{-1}(\mathcal{O})$ は Y の位相である.

[証明] . 関手 f^* が任意の \cap, \cup 演算を保つこと (命題??) により成り立つ性質である.

- (1) 「像空間」 $f^*\mathcal{O} \subset P(X)$ の任意の合併は, $\mathcal{O} \subset P(Y)$ の族 $(U_i)_{i \in I}$ ($U_i \subset Y$) (これは再び \mathcal{O} の元) を用いて $\cup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ と表せるから,

$$\cup_{i \in I} f^{-1}(U_i) = f^{-1}(\cup_{i \in I} U_i) \in f^*\mathcal{O}.$$

同様に, $|I| < \infty$ として,

$$\cap_{i \in I} f^{-1}(U_i) = f^{-1}(\cap_{i \in I} U_i) \in f^*\mathcal{O}.$$

- (2) 「逆像空間」 $\mathcal{O}' = f^{*-1}(\mathcal{O}) \subset P(Y)$ の任意の合併 $\cup_{i \in I} V_i$ は, $V_i \in \mathcal{O} \subset P(X)$ であって $\cup_{i \in I} f^{-1}(V_i) \in \mathcal{O}$ 従って $f^{-1}(\cup_{i \in I} V_i) \in \mathcal{O}$ が成り立つから, $\cup_{i \in I} V_i \in \mathcal{O}' = f^{*-1}(\mathcal{O})$ が従う. 有限共通部分についても同様だから, $\mathcal{O}' = f^{*-1}(\mathcal{O})$ は任意の合併と任意の有限共通部分について閉じている.

■

定義 2.1.6 (initial topology, relative topology / subspace topology, final topology). $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

- (1) X の位相 $f^*\mathcal{O}_Y$ を \mathcal{O}_Y の f による引き戻しまたは始位相という.
- (2) 部分空間 $A \subset X$ 上の, X の位相 \mathcal{O}_X の包含写像 $i: A \rightarrow X$ による引き戻し $i^*\mathcal{O}_X$ のことを, A の相対位相という. この時, $\mathcal{O}_A = i^*\mathcal{O}_X = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}_X\}$ となる.
- (3) Y の位相 $f^{*-1}(\mathcal{O}_X) := \{V \in P(Y) \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X\}$ を f による像位相または終位相という.

補題 2.1.7 (押し出しが像位相になるとき). $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

- (1) f が全単射でない場合は, $f_*(\mathcal{O}_X) \subsetneq (f^*)^{-1}(\mathcal{O}_X)$ となることも, $(f^*)^{-1}(\mathcal{O}_X) \supsetneq f_*(\mathcal{O}_X)$ となることもある.
- (2) 一般には $f^* \circ f_* = \text{id}_{P(X)}$, $f_* \circ f^* = \text{id}_{P(Y)}$ は成り立たない.
- (3) f が全単射の時, f^* も全単射で, $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^* = f_*$ である.

[証明] .

- (1) $f_*(\mathcal{O}_X) \subsetneq (f^*)^{-1}(\mathcal{O}_X)$ は f が全射でないときに起こる. $a \in Y \setminus f(X)$ を取る. $U \in f_*(\mathcal{O}_X)$ とすると, $U \cup \{a\}$ は $(f^*)^{-1}(\mathcal{O}_X)$ の元であるが, 像にはなり得ないので $f_*(\mathcal{O}_X)$ の元ではない. これを単純化すると次の例のようになる. $1: S \rightarrow 2$ を定値写

像とする. $f_*(\text{Op}(S)) = \text{Op}(S)$ となるが, $(f^*)^{-1}(S) = P(2)$ となるので後者は離散位相を定める.

一方, $(f^*)^{-1}(\mathcal{O}_X) \supsetneq f_*(\mathcal{O}_X)$ は f が単射でないがために起こる. 恒等写像 id_2 と $2 \mapsto 1$ の和写像 $3 \rightarrow 2$ は全射だが単射ではない. 3 の位相 $\text{Op}(3) = \{0, 3, \{1\}\}$ を考えると, $f_*(\text{Op}(3)) = \text{Op}(S)$ となるが, $(f^*)^{-1}(\text{Op}(3)) = \{0, 2\}$ となり, 後者は密着位相を定める.

(2) 1 の例を引き合いに出せば, そこ $\mathcal{O}_X \in P(X)$ において恒等性は崩れる.

(3) 命題 1.1.13, 1.1.12 より.

■

要諦 2.1.8. 命題??を見るとおり, 一般の f について $A \subset f^{-1}(f(A)), f(f^{-1}(B)) \subset B$ が成り立つ. 前者は非単射性から生じ, 後者は非全射性から生じる. 反例構成ではこれしか使っていない.

命題 2.1.9. 写像 $f: X \rightarrow Y$ と X の位相 \mathcal{O} に対して, $f_*\mathcal{O} := \{f(U) \in P(Y) \mid U \in \mathcal{O}\}$ と定める.

(1) f が全射でなければ, $f_*\mathcal{O}$ は Y の位相になり得ない.

(2) $f: X \rightarrow Y$ が全射であっても, $f_*\mathcal{O}$ は Y の位相であるとは限らない.

[証明] .

(1) f が全射でない限り $Y \in f_*\mathcal{O}$ を満たさない.

(2) 集合演算の $f(\cap_{i \in I} U_i) \subset \cap_{i \in I} f(U_i)$ (命題??) を hack する. $f: 4 \rightarrow 3$ を, $\text{Op}(4) = \{0, 4, \{0, 1\}, \{2, 3\}\}$ とし, $f(0) = 0, f(1) = f(2) = 1, f(3) = 2$ とすると, $f_*(\text{Op}(4)) = \{0, 3, \{0, 1\}, \{1, 2\}\}$ より, これは位相にはならない. この原理は, $f(\{0, 1\} \cap \{2, 3\}) = f(\emptyset) = \emptyset \neq \{1\} = \{0, 1\} \cap \{1, 2\} = f(\{0, 1\}) \cap f(\{2, 3\})$ ということである.

■

2.1.3 位相の生成

位相の全体も有界束をなし, 最大元が余離散位相 $P(X)$, 最小元が離散位相 $\{\emptyset, X\}$ となる. このうち, 両端に位置する病的な位相を脱落させていくのが分離公理である.

例 2.1.10 (trait / Sierpiński space, cofinite topology).

(1) $\mathbb{S} := (2, \{\emptyset, \{1\}, 2\})$ を線または **Sierpiński 空間** という.

(2) $\mathcal{O} = \{X \mid S \in P(X) \mid |S| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$ を **余有限位相** という. T_1 位相のうち最も粗いものとして特徴付けられる.

命題 2.1.11 (位相の完備束). $(\tau_j)_{j \in J}$ を X 上の位相の族とする. 包含関係 \subset に関する上限 $\vee \tau_j$ と下限 $\wedge \tau_j$ が存在する.

[証明] .

(1) $\wedge \tau_j := \{A \in P(X) \mid \forall j \in J, A \in \tau_j\}$ と定めると, これは位相である.

(2) T を X 上の位相であって任意の τ_j より強いものとして, $\text{CoDisc}(X) \in T$ より, $T \neq \emptyset$. これについて, $\vee \tau_j := \wedge_{\tau \in T} \tau$ と定めれば良い.

■

命題 2.1.12 (生成される位相の具体的構成). $\mathcal{U} \subset P(X)$ とする.

$$\mathcal{O}_{\mathcal{U}} := \left\{ U \in P(X) \mid \begin{array}{l} x \in U \text{ ならば, } \mathcal{U} \text{ の元の有限族 } (U_i)_{i \in n} \text{ で} \\ x \in \cap_{i \in n} U_i \subset U \text{ を満たすものが存在する} \end{array} \right\}.$$

とすると, これは $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ を満たす位相となり, \mathcal{U} を含む位相のうち最も小さい

2.1.4 準基の性質

命題 2.1.13. $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ を準基とする: $\mathcal{O}_{\mathcal{U}} = \mathcal{O}$. このとき, 任意の位相空間 (T, \mathcal{O}_T) からの任意の写像 $f: T \rightarrow X$ について, 次の2条件は同値.

- (1) f は連続.
- (2) $f^*(\mathcal{U}) \subset \mathcal{O}_T$.

例 2.1.14 (実数の位相). 無限半開区間 $\{(-\infty, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, \infty) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は \mathbb{R} の準基である.

2.2 位相空間の射

2.2.1 連続写像の特徴付け

命題 2.2.1. $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

- (1) 次の同値な2条件を満たすとき, f は連続であるという:
 - (a) $f^*(\mathcal{O}_Y) \subset \mathcal{O}_X$.
 - (b) $\mathcal{O}_Y \subset f_*(\mathcal{O}_X)$.
- (2) 次の2条件は同値.
 - (a) f は連続.
 - (b) 任意の点 $x \in X$ に対して, $\forall V \in \mathcal{O}(f(x)) \exists U \in \mathcal{O}(x) U \subset f^{-1}(V)$.

定理 2.2.2 (圏論的特徴付け). 写像 $f: X \rightarrow Y$ について, 次の3条件は同値.

- (1) f は連続である.
- (2) $\forall g \in C(Y; \mathbb{S}) \ g \circ f \in C(X; \mathbb{S})$.
- (3) $\forall Z \in \text{Top} \ \forall g \in C(Y; Z) \ g \circ f \in C(X; Z)$.

命題 2.2.3 (閉集合と閉包による特徴付け). 写像 $f: X \rightarrow Y$ について, 次の3条件は同値.

- (1) f は連続である.
- (2) 任意の閉集合 $B \subset Y$ に対して, $f^{-1}(B)$ は閉.
- (3) $\forall A \in P(X) \ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

2.2.2 開・閉写像の特徴付け

議論の非対称性を補完する概念である.

命題 2.2.4 (演算子による開／閉写像の特徴付け).

- (1) f が開写像であることと, $\forall A \in P(X) \ f(A^\circ) \subset f(A)^\circ$ であることは同値である.
- (2) f が閉写像であることと, $\forall A \in P(X) \ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ であることは同値である.

定理 2.2.5. $f: X \rightarrow Y$ を開／閉な連続写像とする.

- (1) f が全射 $\Rightarrow f$ は商写像 $\Leftrightarrow f$ は section を持つ (final topology).
- (2) f が単射 $\Rightarrow f$ は埋め込み $\Leftrightarrow f$ は retraction を持つ (initial topology).
- (3) f が全単射 $\Leftrightarrow f$ は同相写像. また, f が全単射の時, f が開写像であることと閉写像であることが同値で, f が全単射でない場合はそのどちらも一般的には成り立たない.

[証明] .

- (1) f が全射ならば, section $g: Y \rightarrow X$ が存在して, $f \circ g = \text{id}_Y$ を満たす. 即ち, ちなみに $\forall U \in P(X)$, $g(U) = f^{-1}(U)$ より, f の開閉に拘らず g は開写像になる.
- (2) 任意の部分集合 $U \subset X$ について

$$f(X \setminus U) \stackrel{\text{単射の時}}{=} f(X) \setminus f(U) \stackrel{\text{全射の時}}{=} Y \setminus f(U)$$

が成り立つため, f が単射の時は, 部分空間への同相写像となっている.

- (3) $f^* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ が成り立つため. 上の関係 $f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$ は全射性と単射性のどちらか1つでも欠けると通れない.

■

要諦 2.2.6. いずれの場合も, 起きている現象は $f^* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ である. それぞれに対する表現が違っただけである. 足元に誘発される場合は final topology, 頭上に誘発される場合は initial topology, 全単射である場合は同相写像. この聖域は, コンパクト集合から Hausdorff 空間への射で起こる.

2.2.3 位相同型の特徴付け

命題 2.2.7. $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. 次の4条件は同値.

- (1) f は位相同型である.
- (2) f が全単射であり, 位相を引き戻す: $f^*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X$.
- (3) f は全単射な開写像である.
- (4) 任意の $T \in \text{Top}$ について, $f_*: C(T; X) \rightarrow C(T; Y)$ は全単射を定める.

2.2.4 埋め込み

Top の切断を埋め込みという. 単に連続な単射が, 切断であるとは限らない.

定義 2.2.8 (imbedding, retraction). $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする.

- (1) f が単射かつ $\mathcal{O}_X = f^*(\mathcal{O}_Y)$ を満たすとき, これを**埋め込み**という. このとき, $f: X \rightarrow f(X)$ は位相同型である.
- (2) f の左逆射 $r \circ f = \text{id}_X$ を (連続な) **レトラクション**という.

命題 2.2.9 (埋め込みであることの十分条件). 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ について,

- (1) レトラクション $r: Y \rightarrow X$ を持つならば, 埋め込みである.
- (2) 単射な開写像ならば, 開な埋め込みである.

2.2.5 像位相

ある程度の双対命題が成り立つ. そう, 埋め込みの双対概念は商写像である.

定義 2.2.10. $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. f の右逆射 $f \circ s = \text{id}_Y$ を (連続な) **セクション**という.

命題 2.2.11. $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. f にセクションが存在すれば, Y の位相は f による像位相である.

2.3 同値な公理

いずれの命題も、開集合の公理と同値になる。

2.3.1 閉包の定義

定義 2.3.1. X を位相空間, $x \in X, A \subset X$ とする.

- (1) $\{x\} \in \mathcal{O}(x)$ のとき, **孤立点**という.
- (2) $\forall U \in \mathcal{O}(x) \ U \cap A \neq \emptyset$ のとき, **触点**という.
- (3) A の触点全体の集合を**閉包** \bar{A} という.
- (4) $\bar{A} = X$ のとき, X **上稠密**であるという.

命題 2.3.2 (開核, 閉包, 稠密性の特徴付け). $A \subset X$ とする.

- (1) A° は A に含まれる開集合のうち最大のものである.
- (2) \bar{A} は A を含む閉集合のうち最小のものである.
- (3) A が X 上稠密であることと, $\forall U \in \mathcal{O}_X \ U \neq \emptyset \Rightarrow A \cap U \neq \emptyset$.

2.3.2 基底の定義

定義 2.3.3. $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$ について,

- (1) \mathcal{U} が \mathcal{O} の**基底**であるとは, 次を満たすことをいう: $\forall U \in \mathcal{O}_X \ \forall x \in U \ \exists V \in \mathcal{U} \ x \in V \subset U$.
- (2) \mathcal{U} が $\mathcal{O}(x)$ の**基本系**であるとは, $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}(x)$ であって, 次を満たすことをいう: $\forall U \in \mathcal{O}(x) \ \exists V \in \mathcal{U} \ V \subset U$.

2.3.3 閉包の公理

命題 2.3.4. $A, B \subset X$ とする. 次の4条件が成り立つ:

- (1) $A \subset \bar{A}$.
- (2) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
- (3) 冪等: $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$.
- (4) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

2.3.4 近傍系の公理

記法 2.3.5. ここでのみ, $\mathcal{O}(x)$ を x の近傍のなすフィルターとする. 開近傍に限らないことに注意.

命題 2.3.6. $x \in X$ について, 次の5条件が成り立つ.

- (1) $X \in \mathcal{O}(x)$.
- (2) $\forall V \in \mathcal{O}(x) \ \forall W \in \mathcal{P}(X) \ V \subset W \Rightarrow W \in \mathcal{O}(x)$.
- (3) $\forall V, W \in \mathcal{O}(x) \ V \cap W \in \mathcal{O}(x)$.
- (4) $\forall V \in \mathcal{O}(x) \ x \in V$.
- (5) $\forall V \in \mathcal{O}(x) \ \exists W \in \mathcal{O}(x) \ \forall y \in W \ V \in \mathcal{O}(y)$.

前の3条件は, $\mathcal{O}(x)$ がフィルターであることを主張している.

2.3.5 基底の公理

命題 2.3.7. $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$ を基底とする. 次の2条件が成り立つ.

- (1) $\forall U, V \in \mathcal{U} \quad \forall x \in U \cap V \quad \exists W \in \mathcal{U} \quad x \in W \subset U \cap V.$
- (2) $\forall x \in X \quad \exists U \in \mathcal{U} \quad x \in U.$

2.4 積空間と始位相

2.4.1 積位相の特徴付け：2つの場合

定義 2.4.1. $X \times Y$ の位相のうち, $\mathcal{U} := \{U \times V \in \mathcal{P}(X \times Y) \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ が生成する位相 $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ を **積位相** という. $\text{pr}_1^*(\mathcal{O}_X) \cup \text{pr}_2^*(\mathcal{O}_Y)$ を準基として生成される位相と言っても良い.

命題 2.4.2 (積位相の特徴付け). X, Y を位相空間とする.

- (1) \mathcal{U} は $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ の基底である. 実際, 次の2条件が同値:
 - (a) $W \in \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y.$
 - (b) $\forall (x, y) \in W \quad \exists U \in \mathcal{O}(x), V \in \mathcal{O}(y) \quad U \times V \subset W.$
- (2) 射影 $\text{pr}_1 : X \times Y \rightarrow X, \text{pr}_2 : X \times Y \rightarrow Y$ はいずれも連続な開写像になり, $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ はこの性質を満たす最弱の位相である.

[証明].

- (1) a
- (2) 連続であり, $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ がこれについての始位相に一致することは明らか. 像は合併を保つから, \mathcal{U} の元を開に移すことを確かめれば良い. これは定め方から明らか.

■

命題 2.4.3 (積写像の連続性の特徴付け). 任意の $T \in \text{Top}$ と写像 $f : T \rightarrow X, g : T \rightarrow Y$ について, 次の2条件は同値;

- (1) 積 $(f, g) : T \rightarrow X \times Y$ が連続.
- (2) f, g はそれぞれ連続.

命題 2.4.4 (連続写像のグラフの埋め込み). $f : X \rightarrow Y$ が連続ならば, 積 $g := (\text{id}_X, f) : X \rightarrow X \times Y$ は埋め込みで, $\text{Im } g = \Gamma_f \subset X \times Y$.

例 2.4.5 (距離空間の積). 2つの距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ について, L^1 -距離, L^2 -距離, L^∞ -距離 (正確には Manhattan 距離, Euclid 距離, 一様距離) のいずれも同値で, $X \times Y$ の積位相を定める. また, 距離関数 $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ は連続になる.

例 2.4.6 (二項演算). 実数の加法 $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と乗法 $\times: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ も連続である. 行列積も連続である.

2.4.2 積位相の特徴付け：一般の場合

一般の場合の積位相とは, 写像の空間 $\text{Map}(I, X)$ の各点収束位相である.

定義 2.4.7. 位相空間の族 $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ の積 $\text{Map}(I, X) = X := \prod_{i \in I} X_i$ に定まる位相のうち, 射影の族 $(\text{pr}_i)_{i \in I}$ の定める始位相, すなわち, 射影の引き戻し $\bigcup_{i \in I} \text{pr}_i^*(\mathcal{O}_i)$ によって生成される位相を, X の **積位相** または **Tychonoff 位相** という.

命題 2.4.8 (積位相の特徴付け).

$$\mathcal{U} := \left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid \begin{array}{l} (U_i)_{i \in I} \text{は開集合 } U_i \subset X_i \text{の族であり,} \\ \{i \in I \mid U_i \subsetneq X_i\} \text{は有限集合である} \end{array} \right\}$$

とすると, これは $\prod_{i \in I} \mathcal{O}_i$ の基底である. すなわち, $U \subset X$ について, 次の2条件は同値.

- (1) $U \in \mathcal{O}_X$.
- (2) $\forall x \in U \exists \{U_i\}_{i \in I} (U_i \in \mathcal{O}_i) \ U_i = X_i \text{ f.e. } \wedge \prod_{i \in I} U_i \subset U$.

命題 2.4.9 (積写像の連続性の特徴付け). 任意の $T \in \mathbf{Top}$ と写像の族 $(g_i : T \rightarrow X_i)$ について, 次の2条件は同値:

- (1) $g := \prod_{i \in I} g_i : T \rightarrow X$ は連続.
- (2) $\forall i \in I \ g_i \in C(T; X_i)$.

例 2.4.10 (m -進小数展開). 任意の自然数 $m \geq 2$ について, m -進小数展開 $e_m : m^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$, すなわち

$$e_m((x_n)) := \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{m^n}$$

は連続. ただし, 2 は離散空間とした. Tychonoff の定理より $2^{\mathbb{N}}$ はコンパクトだから, e_m は全射より $[0, 1]$ がコンパクトであること (Heine-Borel) もわかる.

2.4.3 始位相の普遍性

積位相を調べるにあたって, 始位相の基底の探し方と, 積写像の連続性の特徴付けは, 一般の始位相について使える手法である.

命題 2.4.11 (誘導位相の普遍性). $(X_i)_{i \in I}$ を位相空間の族, $(f_i : X \rightarrow X_i)_{i \in I}$ を写像の族とし, X を誘導位相により位相空間と考える.

- (1) X の部分集合 U について, 次の2条件は同値.
 - (1) U は X の開集合である.
 - (2) $x \in U$ ならば, 有限部分集合 $J \subset I$ と $f_i(x) \in X_i$ の開近傍の有限族 $(U_i)_{i \in J}$ で, $\cap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) \subset U$ を満たすものが存在する.
- (2) 任意の位相空間 T と写像 $g : T \rightarrow X$ に対し, 次の2条件は同値.
 - (1) g は連続である.
 - (2) 任意の $i \in I$ に対して, $f_i \circ g$ が連続.

2.5 商空間と像位相

2.5.1 商空間の普遍性

命題 2.5.1 (universality of quotient space). 写像 $f : X \rightarrow Y$ が写像 $g : X/R \rightarrow Y$ を引き起こすならば, $R_f \subset R$ である 1.2.5. このとき, f が連続なことから g が連続なことは同値.

[証明]. f が連続であることから, 像位相 $f_*\mathcal{O}_X$ について $\mathcal{O}_Y \subset f_*\mathcal{O}_X$ が成り立つことは同値. X/R の位相は $p_*\mathcal{O}_X$ であるから, $f = g \circ p$ のとき, これは $\mathcal{O}_Y \subset g_*(p_*(\mathcal{O}_X))$ に同値. ■

2.5.2 直和位相の特徴付け

射影による始位相が直和位相で、包含による終位相が直和位相である。いずれも連続な開写像になる。包含は埋め込みでもある。

定義 2.5.2 (direct sum topology). 直和 $\coprod_{i \in I} X_i$ の、標準単射の族 $j_i : X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ による像位相を**直和位相**という。

補題 2.5.3. 任意の $i \in I$ に対して標準単射 $j_i : X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ は開埋め込みであり、 $(j_i(X_i))_{i \in I}$ は $\coprod_{i \in I} X_i$ の開被覆である。

2.5.3 開被覆の性質

非常に非自明な事実だが、開被覆がその空間の位相を殆ど規定してしまう。

命題 2.5.4 (開被覆の像位相としての見方). X を位相空間とし、 $(U_i)_{i \in I}$ を X の開被覆とする。

- (1) X の位相は、包含写像の族 $(j_i : U_i \rightarrow X)_{i \in I}$ による像位相である。
- (2) \mathcal{U}_i を U_i の開集合系とすると、 X の位相は $\mathcal{U} = \cup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ によって生成される位相である。

[証明] . \mathcal{O} を X の位相とし、 $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ を \mathcal{U} が生成する位相、 \mathcal{O}' を像位相とする。 $\mathcal{O}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ を示す。最左辺は $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ による。中辺は \mathcal{O}' が包含写像を連続にする最も細かい位相であることによる。最後に最右辺は、任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して、 $U = \cup_{i \in I} (U \cap U_i)$ と $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ の元の合併として表せるから、 $U \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$. ■

命題 2.5.5. $f : X \rightarrow Y$ を連続写像、 $(V_i)_{i \in I}$ を Y の開被覆とする。次の2条件は同値：

- (1) Y の位相は f の像位相である。
- (2) 任意の $i \in I$ に対して、 V_i の位相は、制限 $f_i : f^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$ による像位相である。

2.5.4 貼り合わせ

定理 2.5.6 (位相の族の貼り合わせの条件). X を集合、 (X_i) を X の被覆とする。 (X_i, \mathcal{O}_i) は位相空間であるとする。次の2条件は同値。

- (1) 包含の族 $(j_i : X_i \rightarrow X)$ による像位相によって (X_i) は X の開被覆となり、 j_i は開埋め込みになる。
- (2) 任意の $X_i \cap X_j$ は X_i, X_j の開部分空間となり、 X_i からの相対位相と X_j からの相対位相とは等しい。

2.5.5 終位相の普遍性

連続全射な開・閉写像が存在するならば、終域の位相は像位相である。

命題 2.5.7 (像位相の特徴付け). $(X_i)_{i \in I}$ を位相空間の族、 $(f_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ を写像の族とする。

$$\mathcal{O} = \{U \in P(X) \mid \forall i \in I, f_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_{X_i}\}$$

は X の位相である。この位相を、写像の族 $(f_i)_{i \in I}$ による**像位相**という。

[証明] . 開集合の公理を満たすことを示す。 $(U_j)_{j \in J}$ を \mathcal{O} の族とする。

- (1) 任意の $i \in I$ について $f_i^{-1}(\cup_{j \in J} U_j) = \cup_{j \in J} f_i^{-1}(U_j) \in \mathcal{O}_{X_i}$ が成り立つから、 $\cup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}$ 。
- (2) $|J| < \infty$ とする。任意の $i \in I$ について $f_i^{-1}(\cap_{j \in J} U_j) = \cap_{j \in J} f_i^{-1}(U_j) \in \mathcal{O}_{X_i}$ が成り立つから、 $\cap_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}$ 。

命題 2.5.8 (終位相の普遍性). X を写像の族 $(f_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ による像位相によって位相空間と見做す. 任意の位相空間 Y と任意の写像 $g : X \rightarrow Y$ に対し, 次の2条件は同値.

- (1) $g : X \rightarrow Y$ は \mathcal{O} に関して連続である.
- (2) 任意の $i \in I$ に対し, $g \circ f_i : X_i \rightarrow Y$ が連続である.

[証明].

- (1) \Rightarrow (2) 像位相は各 f_i を連続にする最も細かい位相であるから, f_i は連続. (1) より g も連続であるから, $g \circ f_i$ は連続.
 (2) \Rightarrow (1) 任意の $U \in \mathcal{O}_Y$ に対して, $g^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ を示せば良い.

$$\begin{aligned} & (g \circ f_i)^{-1}(U) \in \mathcal{O}_{X_i} \\ \Leftrightarrow & f_i^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{O}_{X_i} \\ \Leftrightarrow & g^{-1}(U) \in \mathcal{O}. \end{aligned}$$

命題 2.5.9. $f : X \rightarrow Y$ を全射な連続写像とする.

- (1) f が開写像ならば, $\mathcal{O}_Y = f^*(\mathcal{O}_X) = \{f(U) \in P(Y) \mid U \in \mathcal{O}_X\}$ であり, f による像位相である.
- (2) $f_i(A) := \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subset A\}$ として $f_i : P(X) \rightarrow P(Y)$ を定める. f が開写像ならば, $\mathcal{O}_Y = \{f_i(U) \in P(Y) \mid U \in \mathcal{O}_X\}$ であり, f による像位相である.

2.6 ネット

点列の収束を, 開近傍のフィルター $\mathcal{O}(x)$ について, $\forall U \in \mathcal{O}(x) \ x_n \in U$ f.e. と特徴付けられることに注目すると, 一般の上に有向な集合からの写像について, 収束の概念を定義できる.

2.6.1 ネットの収束

定義 2.6.1 (direction, directed set, net / generalized sequences). (D, \leq) を前順序集合とする. すなわち, \leq は反射的で, 推移的である.

- (1) 前順序 \leq が任意の2元について上界を持つとき, **方向**であるという.
- (2) 組 (D, \leq) を**有向集合**という.
- (3) 有向集合 D からの写像 $i : D \rightarrow X$ を X 上の**ネット**または**有向系**という. ネットも $(x_n)_{n \in D}$ と表し, $x_n = i(n)$ とする.

定義 2.6.2 (eventuality filter / cofinitely often). $v : D \rightarrow X$ を集合 X 上のネットとする. ネット v が定めるフィルター F_v とは,

$$F_v := \{A \in P(X) \mid \exists i \in D \ \forall j \geq i \ v_j \in A\}$$

のことである. この条件を v は A に**終局**するという. $D = \mathbb{N}$ のとき, $v \in A$ f.e. と同値.

定義 2.6.3 (convergence of net, limit point, cluster / accumulation point, universal). X を位相空間, F を S 上のフィルターとする.

- (1) ネット $n : D \rightarrow X$ が $x \in X$ に**収束**するとは, 任意の x の開近傍 (従って近傍) $A \in \mathcal{O}(x)$ に, n が終局する $A \in F_n$ ことをいう. このとき, x を**極限点**という. X が Hausdorff のとき, 一意に定まる.
- (2) ネット $n : D \rightarrow X$ が $x \in X$ に**集積**するとは, 任意の x の開近傍 (従って近傍) $A \in \mathcal{O}(x)$ に, n が無限回入ることをいう: $\forall i \in D \ \exists j \geq i \ n_j \in A$. このとき, x を**集積点**という. 実は, 任意の集積点は必ず部分ネットの極限点になる.^{†1}

^{†1} これは英語で cluster と <https://ncatlab.org/nlab/show/filter> に乗っているが, filter については cluster と accumulate は同じ定義になるのだろうか?

- (3) ネット $n : D \rightarrow X$ が普遍的であるとは、任意の集積点が極限点であることをいう。同値だが、任意の $Y \in P(X)$ について、 $Y \in F_v \vee X \setminus Y \in F_v$ が成り立つ。

2.6.2 部分ネット

ネットについては、任意の空間のコンパクト集合が「ネットコンパクト」になる。

定義 2.6.4 (Kelley 1955). $(y_\beta)_{\beta \in B}$ が $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ の部分ネットであるとは、次の2条件を満たす写像 $f : B \rightarrow A$ が存在することをいう：

- (1) $\forall \beta \in B \ x_{f(\beta)} = y_\beta$.
- (2) strongly cofinal : $\forall \alpha \in A \ \exists \beta \in B \ \forall \beta_1 \geq \beta \ f(\beta_1) \geq \alpha$.

注 2.6.5. Willard も Kelley 2.6.4 も、(ネット $n : D \rightarrow X$ 同様) f に単射性を要求していない点に注意。したがって、 $A = \mathbb{N}$ としても、通常の部分列の定義よりは一般的である。

補題 2.6.6 (集積点の特徴付け). $\mathcal{B} \subset P(X)$ は任意合併について閉じているとする。ネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ について、次の2条件は同値。

- (1) 任意の $B \in \mathcal{B}$ に集積する。
- (2) 部分ネット $(x_{h(\mu)})_{\mu \in M}$ が存在して、任意の $B \in \mathcal{B}$ に終局する。

系 2.6.7. 位相空間 X 上のネットの任意の集積点 x について、ある部分ネットが存在して x に終局する。

定理 2.6.8 (existence of universal nets (AC)). 任意のネットは、部分ネットとして普遍ネットを持つ。

命題 2.6.9 ((AC)). 任意の位相空間 $Y \subset X$ と点 $x \in X$ について、次の2条件は同値。

- (1) $x \in \overline{Y}$.
- (2) x に収束する Y のネットが存在する。

第 3 章

距離空間

抽象位相空間論を展開したが、元々位相空間論の端緒は、Fréchet が距離空間の概念を定義して Cantor の概念を一般化したことに始まる。その際のモチベーションは関数空間であった。そこで、関数空間の例を意識しながら、距離空間の扱い方を考える。

- (1) 距離空間のコンパクト性は、点列コンパクト性によって特徴付けられ、そのときに完備性の概念が見つかる。
- (2) 可分位相空間の距離化可能性は、第 2 可算性と正規性によって特徴付けられる。このときに、可算性・可分性が問題になるのである。

3.1 距離関数の扱い

3.1.1 開集合の特徴付け

命題 3.1.1. X を距離空間、 $U \subset X$ とする。次の 2 条件は同値：

- (1) U は開集合。
- (2) $\exists f \in C(X) \ U = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ 。

3.1.2 距離空間は正規

命題 3.1.2. $A, B \subset X$ を互いに素な閉集合とする。このとき、 $\exists f \in C(X) \ A = f^{-1}(0) \wedge B = f^{-1}(1)$ 。

3.1.3 閉包の特徴付け

命題 3.1.3 (閉包の距離関数による特徴付け)。 $d(-, A) : X \rightarrow \mathbb{R}$ を $\emptyset \neq A \subset X$ からの距離とする。

- (1) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ が成り立つ。また関数 $d(-, A) : X \rightarrow \mathbb{R}$ は連続である。
- (2) $\bar{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ である。

[証明] .

- (1) 三角不等式より、

$$\forall x, y \in X, \forall a \in A, d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

である。両辺の下限をとって、 $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) \Rightarrow d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ 。同様に $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ も成り立つから、 $|d(x, A) - d(y, A)| = \max\{d(x, A) - d(y, A), d(y, A) - d(x, A)\} \leq d(x, y)$ 。すると、 $d_{\mathbb{R}} = |x - y|$ に注意して、系 2.1 より、 $d(-, A) : X \rightarrow \mathbb{R}$ は連続。

- (2) $\bar{A} = \{x \in X \mid \forall r > 0, U_r(x) \cap A \neq \emptyset\}$ より。

3.1.4 等距離写像

距離空間の射は等長写像という。

定義 3.1.4 (isometry, global isometry).

- (1) $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が $d_X = f^*d_Y$, すなわち, $\forall x, x' \in X, d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ を満たす時, これを**等長写像**という.
- (2) 等長写像が全単射であり, 逆写像も等長写像であるとき, **大域的等長写像**という.

注 3.1.5. 距離空間の等長写像は, 全単射ならば大域的であるが, Riemann 多様体では, 全単射な等長写像と大域的等長写像とは違う概念になる.

命題 3.1.6 (部分距離空間の well-definedness).

- (1) $f: X \rightarrow Y$ が等長写像ならば, f は埋め込みである.
- (2) 部分距離空間 $A \subset X$ の定める位相は, X の部分位相としての A の位相と等しい.

[証明].

- (1) 系??より, f は特に連続である. また, $f(x) = f(x')$ とすると, $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x')) = 0$ だから, $x = x'$ が従うので f は単射である. あとは $f^*0_Y = 0_X$ を示す. 連続性より, $f^*0_Y \supset 0_X$ を示せば良い. f の連続性より, $\mathcal{U}_X \subset f^*\mathcal{U}_Y \subset f^*0_Y$. 命題??より $0_X \subset f^*0_Y$ が従う.
- (2) 包含写像 $i: A \rightarrow X$ は等長写像だから, 埋め込みである. よって, $i: A \rightarrow X$ は部分距離空間の A と部分空間 A は同相である.

■

3.1.5 ノルム空間の等長写像

定義 3.1.7 (strictly convex). ノルム空間 F が**厳密に凸**であるとは, $\forall u, v \in \partial B \ \forall t \in (0, 1) \ tu + (1-t)v \in B^\circ$ が成り立つことをいう. L^p ($1 < p < \infty$) 空間は厳密に凸である.

定理 3.1.8. ノルム空間の等長写像 $f: E \rightarrow F$ は, F が厳密に凸のとき, affine である.

[証明]. 連続性より,

$$f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

を示せば十分.

■

定理 3.1.9 (Mazur-Ulam). E, F を実ノルム空間, $f: E \rightarrow F$ を等長な線形写像とする. このとき, f は affine である.

3.1.6 距離空間の例：付値

絶対値の概念を, ノルムに一般化するのではなく, 一般の体に一般化する道もある.

定義 3.1.10 (valuation). 体 K 上の写像 $v: K \rightarrow \mathbb{R}$ が**付値**であるとは, 次の3条件を満たすことをいう:

- (1) $v \geq 0$ かつ $v^{-1}(0) = \{0\}$.
- (2) 積の分解: $\forall x, y \in K \ v(xy) = v(x)v(y)$.
- (3) 三角不等式: $\forall x, y \in K \ v(x+y) \leq v(x) + v(y)$.

また, $v_p(x+y) \leq \max\{v_p(x), v_p(y)\}$ なる関係が成り立つ付値を非 **Archimedes** 的付値という.

例 3.1.11 (p -adic valuation). p を素数とする.

- (1) $x \neq 0$ が整数のとき, $e \in \mathbb{N}$ と p と互いに素な整数 r を用いて $x = \pm p^e r$ と表せる. $e =: e_p(x)$ を p -指数という.
- (2) $x \neq 0$ が一般の有理数であるとき, $\exists r, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \ x = r/s$. このとき, $e_p(x) := e_p(r) - e_p(s)$ とおく.
- (3) 最後に, $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ に対して, $v_p(x) := p^{-e_p(x)}$ とする.

このとき, $v_p(x+y) \leq \max\{v_p(x), v_p(y)\}$ が成り立ち, 付値となる. これを p 進付値という. \mathbb{Q} の絶対値による付値を無限付値または **Archimedes** 的付値という.

定理 3.1.12 (付値が定める距離空間).

3.1.7 距離概念の一般化

Lawvere 距離空間の観点からすると, short map が正確に enriched functor となる. これが, Met の射は連続写像でも, 一樣連続写像でもなくて, short map が圏論的には良さそうだという指針になる.

定義 3.1.13 (extended, pseudo-, quasi-, Lawvere).

- (1) 距離関数 d の終域を $d : X \rightarrow [0, \infty]$ としたものを, **拡大距離空間**という. 終域を一般の有向集合とすると, 一樣空間の概念を得る.
- (2) 公理 (1) Separation を除いたものを, **擬距離** (または半距離) という. 関数空間上の半ノルムが生成する. 擬距離が距離であることと, 生成する位相が T_0 であることは同値.
- (3) 公理 (3) Symmetry を除いたものを, **準距離**という.^{†1}
- (4) 擬距離であり, 準距離でもある拡張距離空間を, **Lawvere 距離空間**という.

補題 3.1.14. Lawvere 距離空間 M は, 順序集合 $([0, \infty], \leq)$ を加法 $+$ によってモノイド圏とみなして, この上の豊稜圏とみなせる. 順序集合自体が 2 を積 \cdot によってモノイド圏とみなした上の豊稜圏とみなせるから, M での射の合成は三角不等式と一致する.^{†2}

3.1.8 一樣空間の2つの定義

一樣収束の概念による距離空間の一般化である

entourage による定義は Bourbaki 流であり, いまだに一番一般的に見られる. FinSets から開集合系の圏 \mathbf{Op} への反変関手を記述しているとみなせる. 一樣空間の概念は André Weil が提案したもので, 一樣連続写像に自然に言及できる空間である. これは距離空間と位相群の概念の拡張とみなせる.^a

^a <https://ncatlab.org/nlab/show/uniform+space>

定義 3.1.15 (entourage / vicinities, uniform structure / uniformity, uniform space (Bourbaki)). X を集合とする. 次の6公理を満たすような X 上の近縁と呼ばれる二項関係 $U \subset X \times X$ のフィルター $\mathcal{U} \subset P(X \times X)$ を**一樣構造**と呼び, この組 (X, \mathcal{U}) を**一樣空間**という.

- (1) (reflexive) $\forall U \in \mathcal{U} \ \Delta_X \subset U$.
- (2) (transitive) $\forall U \in \mathcal{U} \ \exists V \in \mathcal{U} \ V \circ V \subset U$. 即ち, $\forall U \in \mathcal{U} \ \exists V \in \mathcal{U} \ \forall x, y, z \in X \ x \approx_V y \approx_V z \Rightarrow x \approx_U z$.

^{†1} 一方通行や坂道の概念など, 日常にはありふれている距離概念である.

^{†2} Thus generalized, many constructions and results on metric spaces turn out to be special cases of yet more general constructions and results of enriched category theory.

- (3) (symmetric) $\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{U} V^{\text{op}} \subset U$. 即ち, $\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{U} \forall x, y \in X y \approx_V x \Rightarrow x \approx_U y$ (6 と合わせると, $V \subset U^{\text{op}} \in \mathcal{U}$ が必要).
- (4) (inhabited) $\mathcal{U} \neq \emptyset$. 6 と合わせると, $X \times X \in \mathcal{U}$ が必要.
- (5) (downward-directed) $\forall U, V \in \mathcal{U} \exists W \in \mathcal{U} W \subset U \cap V$. 6 の下では $W = U \cap V \in \mathcal{U}$ が必要.
- (6) (upward-closed) $\forall U \in \mathcal{U} U \subset V \subset X \times X \rightarrow V \in \mathcal{U}$.

関係 $(x, x') \in U$ を, $x \in X$ と $x' \in X$ とは U の程度に近いという. (1) から (5) を満たす関係の族を, 近縁の基と呼ぶ.

要諦 3.1.16. (4) から (6) は \mathcal{U} がフィルターになる条件である.

例 3.1.17 (加法構造).

- (1) \mathbb{R} 上の族 $V_\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x - y| < \alpha\}_{\alpha > 0}$ は一様構造となる. これを**加法一様構造**という.
- (2) 集合 X 上の同値関係 R は一様構造の近縁の基本系となる. R が自明であるとき $R = \Delta_X$, これは一様構造を定め, **離散一様構造**という.

定義 3.1.18 (被覆).

- (1) 位相空間 X の被覆 $C \subset P(X)$ とは, $\cup C = X$ を満たす $P(X)$ の族をいう.
- (2) C_1 は C_2 の細分である $C_1 < C_2$ とは, 次が成り立つことをいう: $\forall A \in C_1 \exists B \in C_2 A \subset B$.
- (3) C_1, C_2 の結びとは, $C_1 \wedge C_2 := \{A \cap B \in P(X) \mid A \in C_1, B \in C_2\}$ のことを指す. これは再び被覆となる.
- (4) $A \in P(X)$ について, $C[A] := \bigcup \{B \in C \mid A \cap B \neq \emptyset\}$ と定める.
- (5) $C^* := \{C[A] \in P(X) \mid A \in C\}$ と定める.
- (6) 近縁 U について, $U[x] := \{y \in X \mid x \approx_U y\}$ と定める.

定義 3.1.19 (Covering uniformities). 位相空間 X の一様被覆 \mathcal{G} とは, 次を満たす被覆の族 \mathcal{G} のことをいう:

- (1) $\forall C \in \mathcal{G} \exists C' \in \mathcal{G} (C')^* < C$.
- (2) (inhabited) $\mathcal{U} \neq \emptyset$. (4) の下では, $\{X\} \in \mathcal{G}$.
- (3) (downward-directed) $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{G} \exists C_3 \in \mathcal{G} C_3 < C_1 \wedge C_2$.
- (4) (upward-closed) $\forall C \in \mathcal{G} C < C' \Rightarrow C' \in \mathcal{G}$.

要諦 3.1.20. 公理 (2) から (4) が \mathcal{G} がフィルターであるための条件である. (1) だけが本質的で, これを満たすものを準基, (4) 以外を満たすものを基という.

補題 3.1.21 (2つの定義の同値性).

- (1) 近縁系 \mathcal{U} に対して, 族 $C \subset P(X)$ が, ある近縁 $U \in \mathcal{U}$ について $\{U[x] \in P(X) \mid x \in X\} < C$ を満たすとき $C \in \mathcal{G}$ とすると, \mathcal{G} は一様構造を定める.
- (2) 一様被覆系 \mathcal{G} に対して, $C \in \mathcal{G}$ を一様被覆として $\bigcup \{A \times A \mid A \in C\}$ が生成する近縁系 \mathcal{U} は一様構造を定める.
- (3) (1), (2) の対応は全単射を定める.

3.1.9 一様構造の定める位相

定義 3.1.22 (uniform topology). 近縁系 \mathcal{U} について, $U[x] = \{y \in X \mid x \approx_U y\}$ を $x \in X$ の近傍のフィルターとする位相はただ一つ存在し, これを**一様構造 \mathcal{U} が定める位相**という.

命題 3.1.23. 一様空間 (X, \mathcal{U}) を一様位相によって位相空間とみなす. X は正規かつ完備正規 (completely regular) である.

定義 3.1.24 (uniformly continuous function). $(X, \mathcal{U}_X), (Y, \mathcal{U}_Y)$ を一様空間とする.

- (1) 関数 $f: X \rightarrow Y$ が一様連続であるとは, $\forall U \in \mathcal{U}_Y (f \times f)^{-1}(U) \in \mathcal{U}_X$ すなわち $(f \times f)^* \mathcal{U}_Y \subset \mathcal{U}_X$ が成り立つことをいう.
- (2) 一様空間と一様連続写像は具体圏をなし, これを **Unif** と書く.

補題 3.1.25. $(X, \mathcal{U}_X), (Y, \mathcal{U}_Y)$ を一様空間とする.

- (1) 一様連続関数 $f: X \rightarrow Y$ は、対応する一様位相について連続である。
 (2) 一様位相について連続だが、一様連続ではない関数 $f: X \rightarrow Y$ が存在する。

3.1.10 位相群

3.2 コンパクト距離空間

3.2.1 定義

コンパクト性も、連結性と同様、全体空間 X に依らずに定義出来る概念であるとわかる。

定義 3.2.1. 部分空間 $A \subset X$ がコンパクトであるとは、 X の任意の開集合族が A の開被覆となっているならば、 A の有限な部分被覆が選び出せることをいう。

3.2.2 閉集合による特徴付け

命題 3.2.2 (コンパクト性の特徴付け：閉集合の言葉による双対命題). 位相空間 X の部分集合 A に対して、次の3つの条件は同値である。

- (1) A はコンパクトである。
 (2) X の閉集合の任意の族 $(F_i)_{i \in I}$ について、次の条件 (C') が成り立つ。
 (C') I の任意の有限部分集合 $\{i_1, \dots, i_n\}$ に対して、 $A \cap F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \neq \emptyset$ ならば、 $A \cap \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$ である。
 (3) X の部分位相空間としての A はコンパクトである。

[証明] . (1) \Leftrightarrow (2) 条件 (C) の対偶「有限部分被覆が存在しないならば、それはそもそも開被覆ではない」は
 (C'') 任意の I の有限部分集合 $\{i_1, \dots, i_n\}$ について $A \not\subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ ならば、 $A \not\subset \bigcup_{i \in I} U_i$ である。
 となる。 $F_i := X \setminus U_i$ と定めるとこれは閉集合で、

$$\begin{aligned} A \not\subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} &\Leftrightarrow A \cap F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \neq \emptyset, \\ A \not\subset \bigcup_{i \in I} U_i &\Leftrightarrow A \cap \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset. \end{aligned}$$

(1) \Leftrightarrow (3)

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i \Leftrightarrow A = A \cap \bigcup_{i \in I} U_i \Leftrightarrow \bigcup_{i \in I} (A \cap U_i)$$

より。

■

3.2.3 最大値の定理による特徴付け

命題 3.2.3 (maximum value theorem). X を位相空間とし、 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする。 A が X のコンパクト集合であり空でないならば、 f の A への制限には最大値が存在する。

[証明] . $\forall x \in A, \exists y \in A, f(x) < f(y)$ と仮定して、矛盾を導く。これは、 A の元 $y \in A$ に対して $U_y := f^{-1}((-\infty, f(y)))$ と定めると、 $A = \bigcup_{y \in A} U_y$ となる、と翻訳できる。任意の $x \in A$ に対して、 y が存在して $x \in U_y$ を満たす、ということである。

こうして A の開被覆 $(U_y)_{y \in A}$ を得たが、 A はコンパクトであるから、有限個の元 $y_1, \dots, y_n \in A$ で $A \subset U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$ を満たすものが存在する。すると、このうちで $f(y_i)$ を最大にする y_i が定まるから、 $y \in A \subset U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n} = U_{y_i}$ となってしまうが、これは $y_i \in f^{-1}((-\infty, f(y_i))) = f^{-1}((-\infty, f(y_i)))$ を意味し、矛盾。

■

命題 3.2.4. X を距離空間とする。次の4条件は同値である：

- (1) X はコンパクト.
- (2) X は点列コンパクト.
- (3) X の離散な閉部分集合は有限である.
- (4) $X = \emptyset$ または $\forall f \in C(X)$ は最大値を持つ.

3.2.4 実数のコンパクト部分集合

系 3.2.5 (距離空間のコンパクト集合).

- (1) X を距離空間とする. A が X のコンパクト部分集合ならば, A は有界である.
- (2) A が \mathbb{R} の空でないコンパクト集合ならば, A は最大元を持つ.

[証明].

- (1) A が空でない場合について示せば良い. 勝手に $a \in A$ を取り, 連続関数 $d(-, a) : A \rightarrow \mathbb{R}$ について最大値の定理 3.2.3 を適用すれば, 最大値 M を得る. 三角不等式より, 任意の $x, y \in A$ について, $d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, a) \leq 2M$.
- (2) 恒等写像 $A \rightarrow A \subset \mathbb{R}$ は連続だから, これに最大値の定理 3.2.3 を適用すれば良い.

■

定理 3.2.6 (Heine-Borel / Borel-Lebesgue). $a \leq b$ を実数とする. 閉区間 $[a, b]$ は \mathbb{R} のコンパクト集合である.

系 3.2.7. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする. f の最大値 M と最小値 m が存在し, $f([a, b]) = [m, M]$ である.

[証明]. 最大値の定理より, f の最大値 M が存在する. 関数 $-f$ も最大値 M' をもち, $m := -M'$ が f の最小値である. よって, $f([a, b]) \subset [m, M]$. 一方で, 系 4.2.9 より, $[m, M] \subset f([a, b])$ でもある.

■

3.2.5 全有界性による特徴付け

任意の大きさの開球によって有限被覆ができ, それらを十分小さく取ったときに任意の開被覆を細分出来る (Lebesgue 数を持つ) ならば, コンパクトである.

定義 3.2.8 (totally bounded, Lebesgue number). X を距離空間とする.

- (1) X が全有界であるとは, 任意の実数 $r > 0$ に対して, $X = U_r(a_1) \cup \cdots \cup U_r(a_n)$ を満たす有限個の点 $a_1, \dots, a_n \in X$ が存在することをいう. 全有界ならば有界である.
- (2) $(U_i)_{i \in I}$ を X の開被覆とする. 実数 $r > 0$ が次の条件 (L) を満たす時, r は $(U_i)_{i \in I}$ のルベーク数であるという.
(L) 任意の空でない部分集合 $A \subset X$ に対して, A の直径が r 以下ならば, $A \subset U_i$ を満たす $i \in I$ が存在する.

命題 3.2.9 (距離空間がコンパクトであることの特徴付け). X を距離空間とする. 次の2条件は同値である.

- (1) X はコンパクトである.
- (2) X は全有界であり, X の任意の開被覆 $(U_i)_{i \in I}$ に対し, $(U_i)_{i \in I}$ のルベーク数が存在する.

[証明].

(1) \Rightarrow (2) X をコンパクトとする.

- (1) 任意の $r > 0$ に対して, r -開球 $(U_r(x))_{x \in X}$ は X の開被覆だから, $X = U_r(a_1) \cup \cdots \cup U_r(a_n)$ を満たす $a_1, \dots, a_n \in X$ が存在する.
- (2) $(U_i)_{i \in I}$ を X の任意の開被覆とし, その Lebesgue 数が存在することを示す. $X = \emptyset$ ならば, $r \in \mathbb{R}$ は任意に取ればよい. $X \neq \emptyset$ とする. これに対して,

$$B := \{(x, r) \in X \times (0, \infty) \mid \exists i \in I, U_{2r}(x) \subset U_i\}$$

とすると, $(U_i)_{i \in I}$ が開被覆であることから, $(U_r(x))_{(x,r) \in B}$ も開被覆である. 従って X がコンパクトであることより, $(x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n) \in B$ ($n \geq 1$) が存在して, $X \subset U_{r_1}(x_1) \cup \dots \cup U_{r_n}(x_n)$ が成り立つ.

- (3) $r := \min(r_1, \dots, r_n) > 0$ とすれば, これが開被覆 $(U_i)_{i \in I}$ の Lebesgue 数であること, 即ち条件 (L) を満たすことを示す. $A \subset X$ を, 任意の, 直径 r 以下の空でない部分集合とする. 勝手な $a \in A$ に対して, $a \in U_{r_j}(x_j)$ を満たす $j \in [n]$ が存在するから, $\exists i \in I, A \subset \overline{U_r(a)} \subset U_{2r}(x_j) \subset U_i$.

(2) \Rightarrow (1) $(U_i)_{i \in I}$ を任意の開被覆とし, $r > 0$ をその Lebesgue 数とする. この有限被覆を構成すれば良い.

- (1) まず, 全有界より, $X = U_{\frac{r}{2}}(a_1) \cup \dots \cup U_{\frac{r}{2}}(a_n)$ を満たす $a_1, \dots, a_n \in X$ が存在する.
- (2) 各開球の直径は r 以下だから, $U_{\frac{r}{2}}(a_1) \subset U_{i_1}, \dots, U_{\frac{r}{2}}(a_n) \subset U_{i_n}$ を満たす部分族 $i_1, \dots, i_n \in I$ が存在する.
- (3) この時, $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ である.

■

3.3 写像の極限

極限とは連続延長可能性である. これによって, コンパクト性が特徴付けることができる. ネットはその特別で理解しやすい例であり, また距離空間におけるコンパクト性は点列で十分である.

3.3.1 集積点の定義

任意の集積点は触点である. 集積点は, 触点の中でも特に, 近傍によって A の他の点と分離不可能な点をいう.

定義 3.3.1 (accumulation point). X を位相空間とし, $A \subset X, x \in X$ とする.

- (1) x が A の**集積点**であるとは, x が $A \cup \{x\}$ の孤立点でないことをいう: $\forall U \in \mathcal{O}(x) (U \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset)$. $x \in X \setminus A$ のとき, x が境界点であることに同値.
- (2) 写像 $f: A \rightarrow Y$ の延長 $\bar{f}: A \cup \{a\} \rightarrow Y$ が a で連続であるとき, $f(a)$ を**極限**であるといい, $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ と表す.

要義 3.3.2 (触点との違い). A の触点の集合 \bar{A} は, A と A の集積点との合併になる. そして, 性質 $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ は x が集積点であることを特徴づける.

注 3.3.3 (まさかこんな捉え方があるとは).

- (1) 集積点は「その点の任意の近傍が A と共通部分を持ってしまう」という意味で, 「 A 上の点で任意精度で近似可能」な点である. A とは**近傍によっては分離不可能な点**である. これは開閉の概念以前に定義可能な概念であり, また極限の概念の一般化でもあり, $x \in X \setminus A$ の時は, x が A の集積点であることと $x \in \bar{A} \setminus A$ であることは同値である. これによって, 閉集合を集積点の言葉によって特徴付けることができる. A の内点が集積点であるかどうかはまた別の議論である. 境界点の方が収束の議論がしやすいのは不思議である.
- (2) 極限とは, **連続性を保った延長**と定義できる. Top での順極限ということか?

補題 3.3.4 (集積点の特徴付け).

- (1) x は A の集積点である ($x \in X$ が部分空間 $A \cup \{x\}$ の孤立点ではない).
- (2) x の任意の開近傍 $U(x)$ について, $U(x) \cap A \neq \emptyset$.
- (3) $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

3.3.2 極限の一意性

点列だけでなく、一般の写像の極限に関して、Hausdorff 空間上では一意になる。

命題 3.3.5 (Hausdorff 空間では極限は一意的). X, Y を位相空間とし、 A を X の部分集合、 $a \in X \setminus A$ を A の集積点とする。

(1) (収束の特徴付け) 写像 $f: A \rightarrow Y$ と $b \in Y$ に対し、次の2条件は同値。

(1) $x \in A$ が a に近づく時、 $f(x)$ は b に収束する。

(2) b の任意の開近傍 V に対し、 $a \in X$ の開近傍 U で、 $f(U \cap A) \subset V$ を満たすものが存在する。

(2) Y をハウスドルフ空間とし、 $f: A \rightarrow Y$ を写像とする。 $x \in A$ が a に限りなく近づく時 $f(x)$ が $b, c \in Y$ の両方に収束するならば、 $b = c$ 。

[証明] .

(1) f の延長 $\tilde{f}: \tilde{A} := A \sqcup \{a\} \rightarrow Y$ を $\tilde{f}(a) = b$ で定めると、(1) は、 \tilde{f} が $a \in \tilde{A}$ にて連続であることと同値だから、任意の b の開近傍 V に対して、 $a \in \tilde{A}$ の開近傍 U であって

$$U \subset \tilde{f}^{-1}(V) \Leftrightarrow \tilde{f}(U) \subset V$$

を満たすものが存在するという事と同値である。これは、写像 f が $f(U \setminus \{a\}) \subset V$ であることに同値。

(2) 写像を $\tilde{f}(a) = b$ としても、 $\tilde{f}(a) = c$ としても $x = a \in \tilde{A}$ にて連続であるということである。この下で $b \neq c$ と仮定して矛盾を導く。 Y は Hausdorff だから、 $V \cap W = \emptyset$ を満たす b, c の開近傍 V, W が存在する。すると、1 より、 $f(U \cap A) \subset V$ かつ $f(U \cap A) \subset W$ を満たす a の開近傍 U が存在する。このとき、 $f(U \cap A) \subset V \cap W = \emptyset$ より、 $U \cap A = \emptyset$ である。 U は a の開近傍であったから、この条件を満たす U が存在することは、 a が A の集積点であることに矛盾する。

■

3.3.3 超フィルタによるコンパクト性の特徴付け

定理 3.3.6. $\mathcal{F} \subset P(X)$ が超フィルタであるとは、次の同値な条件を満たすものをいう：

(1) 真のフィルタのうち、極大なものである。

(2) 真のフィルタであって、次を満たす： $\forall B \in \mathcal{F} \quad A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ 。

(3) $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F} \quad A \cap B_1 \cap \dots \cap B_n \neq \emptyset$ 。

記法 3.3.7. 集合 A に対して $\tilde{A} := A \sqcup \{\infty\}$ とし、

$$S_A := \left\{ \emptyset \in P(P(\tilde{A})) \mid \begin{array}{l} \emptyset \text{ は } \tilde{A} \text{ の位相であり,} \\ \infty \text{ は } A \text{ の集積点である} \end{array} \right\}$$

と置く。 ∞ が A の集積点であるとは、 A が \tilde{A} で稠密であることと同値。

補題 3.3.8. S_A は包含関係に関して帰納的半順序集合である。

命題 3.3.9 (S_A を使った位相空間のコンパクト性の判定). 位相空間 X について、次の3条件は同値である。

(1) X はコンパクト空間である。

(2) A を任意の集合とし、 \emptyset を S_A の任意の元とする。 \tilde{A} を \emptyset によって位相空間と考え、 A をその部分空間と考える。任意の写像 $f: A \rightarrow X$ に対し、 f のグラフ $\Gamma_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ の積位相に関する閉包 $\overline{\Gamma_f} \subset \tilde{A} \times X$ と $\{\infty\} \times X$ の共通部分はない。

(3) A を任意の集合とし、 \emptyset を S_A の任意の極大元とする。 \tilde{A} を \emptyset によって位相空間と考える。任意の写像 $f: A \rightarrow X$ に対し、 f の延長である連続写像 $g: \tilde{A} \rightarrow X$ が存在する。(即ち、 $f(a)$ の $a \rightarrow \infty$ の極限が存在する)

3.3.4 Tychonoff の定理

Tychonoff の定理

Alexandroff のコンパクト化のように, **filter** の言葉をハードに使う. 20 世紀の香りがする. こうして, 選択公理と Zorn の補題と同値な命題を, Top の中にも翻訳できたことになる.

注 3.3.10. Tychonoff の定理 (定理 4.4.6) の証明には選択公理と Zorn の補題を使うが, 選択公理は Tychonoff の定理から導ける. この3つは同値な命題である.

定理 3.3.11 (Tychonoff). $(X_i)_{i \in I}$ をコンパクト空間の族とする. この時, 積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ はコンパクトである.

3.4 点列の収束によるコンパクト距離空間の特徴付け

完備性の発見

写像 $\mathbb{N} \rightarrow X$ が収束することは, ネットとして収束すること (任意の開近傍に終局すること) に同値. これにより, 写像の連続性から, 閉包・コンパクト性を調べることができる. このとき, 距離空間において, 完備性という点列に関する性質が見つかる.

3.4.1 収束の特徴付け

定義 3.4.1. 位相空間 X の点列 (x_n) が $a \in X$ に収束するとは, $\forall U \in \mathcal{O}(a) \ x_n \in U$ f.e. が成り立つことをいう.

命題 3.4.2 (収束の特徴付け). X を位相空間とし, (x_n) を X の点列, $a \in X$ とする.

(1) $\tilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \coprod \{\infty\}$ を離散空間 \mathbb{N} の一点コンパクト化とする. 写像 $\tilde{x} : \tilde{\mathbb{N}} \rightarrow X$ を

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} x_n, & n \in \mathbb{N}, \\ a, & n = \infty, \end{cases}$$

と定める. 次の2条件は同値.

- (1) 点列 (x_n) は a に収束する.
- (2) 写像 $\tilde{x} : \tilde{\mathbb{N}} \rightarrow X$ は連続.
- (2) X が距離空間ならば, 次の条件とも同値である.
 - (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0$ である.
- (3) X が距離空間であるとする. (x_n) が収束するならば, (x_n) は有界である.

[証明].

- (1) 各 $n \in \mathbb{N}$ は孤立点だから, $\tilde{x}|_{\mathbb{N}}$ は連続. 従って, (2) は \tilde{x} が $\tilde{x}(\infty) = a$ にて連続であることに同値. いま, 一般に X の部分集合 $a \in U$ に対し, $\infty \in V \subset \tilde{x}^{-1}(U)$ を満たす ∞ の開近傍 $V \subset \tilde{\mathbb{N}}$ 即ち余有限集合 V が存在するとは, $\tilde{x}^{-1}(U) \subset \tilde{\mathbb{N}}$ 自体も余有限であることに同値. これは (1) の定義である.
- (2) 命題 1.4.2 と同様.
- (3) (x_n) が収束するならば, これが定める写像 $\tilde{x} : \tilde{\mathbb{N}} \rightarrow X$ は連続である. よって, 像 $\tilde{x}(\tilde{\mathbb{N}})$ はコンパクトである. 距離空間のコンパクト集合は有界である (系 3.2.5). 従ってその部分集合 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \tilde{x}(\tilde{\mathbb{N}})$ も有界である.

3.4.2 写像の連続性の特徴付け

系 3.4.3 (連続性の極限の言葉による特徴付け). X, Y を位相空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

- (1) f が $a \in X$ で連続ならば, X の任意の a に収束する点列に対して, $(f(x_n))$ は $f(a) \in Y$ に収束する.
- (2) X が距離空間であるとき, 逆も成り立つ.

[証明].

- (1) 点列 (x_n) が収束するので, 点列 (x_n) の定める写像 $\hat{x}: \hat{N} \rightarrow X$ は連続である. 従って, 合成 $f \circ \hat{x}: \hat{N} \rightarrow Y$ も連続であるから, 特に ∞ でも連続. よって, 点列 $(f(x_n))$ は $f(a) \in Y$ に収束する.
- (2) 点列 $x: N \rightarrow X$ の, \hat{N} への延長は, N は \hat{N} の稠密な部分集合だから, X が Hausdorff であるとき一意である (系 4.1.7).

■

3.4.3 閉包の点列による特徴付け

系 3.4.4 (点列による閉包の特徴付け). X を位相空間とし, A を X の部分集合とする.

$$B = \{a \in X \mid a \text{ に収束する } A \text{ の点列 } (x_n) \text{ が存在する}\}$$

と定める.

- (1) $\bar{A} \supset B$.
- (2) (AC) X が距離空間ならば, $\bar{A} = B$.

[証明].

- (1) A の点列 (x_n) が存在して $a \in X$ に収束するならば, $a \in \bar{A}$ であることを示せば良い. 収束列 (x_n) が定める連続写像 $\hat{x}: \hat{N} \rightarrow X$ は, 命題??(3) より, $\hat{x}(\hat{N}) \subset \bar{A}$ を満たすので, $\hat{x}(\infty) = a \in \bar{A}$ を満たす.
- (2) $\bar{A} \subset B$ を示す. $a \in \bar{A}$ を任意にとり, これに収束する X の点列を構成すれば良い. いま, $a \in \bar{A}$ より, a の任意の近傍は A と共通部分を持つ (定義??). 特に, 任意の $n \geq 1$ に対して, $U_n^{\perp}(a) \cap A \neq \emptyset$ である. 従って, 選択公理を認めれば, 点列 $(x_n) \in \prod_{n \geq 1} (U_n^{\perp}(a) \cap A)$ が取れる. これについて, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0$ より, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in B$ である (定義??).

■

3.4.4 コンパクト距離空間の点列による特徴付け

点列コンパクトと同値であることを示すには, 完備性の概念が効いてくる.

補題 3.4.5 (部分列が収束することの特徴付け). X を距離空間とする. X の点列 (x_n) と X の点 a について, 次の3条件は同値である.

- (1) (x_n) の部分列 (x_{n_m}) で, a に収束するものが存在する.
- (2) $A = \{(x_n, n) \mid n \in N\} \subset X \times \hat{N}$ とし, \bar{A} を積位相に関する閉包とすると, $(a, \infty) \in \bar{A}$ である.
- (3) 任意の自然数 m に対し, $\inf_{n \geq m} d(x_n, a) = 0$ である.

[証明].

- (1) \Rightarrow (2) 部分列 (x_{n_m}) が a に収束するならば, \hat{N} の点列である $(m_n)_{n \in N}$ は ∞ に収束するから, A の点列 (x_{m_n}, m_n) は $(a, \infty) \in X \times \hat{N}$ に収束する. 連続写像 $\hat{N} \rightarrow X$ と $\hat{N} \rightarrow \hat{N}$ との積も連続であるためである. よって, 系 3.4.4 より, $(a, \infty) \in \bar{A}$ である.

(2) \Rightarrow (3) $(a, \infty) \in \bar{A}$ とする. 任意の自然数 m に対して, $\inf_{n \geq m} d(x_n, a) = 0$ を示す. 任意の実数 $r > 0$ に対して, $(0 \leq \inf_{n \geq m} d(x_n, a) < r$ を導く. いま, 任意の実数 $r > 0$ に対して, それぞれは $a \in X, \infty \in \hat{\mathbb{N}}$ の開近傍なので, $U_r(a) \times \hat{\mathbb{N}}_{\geq m}$ は $(a, \infty) \in X \times \hat{\mathbb{N}}$ の開近傍である (積位相の基底??). よって, $(a, \infty) \in \bar{A}$ は閉包の点なので, $A \cap (U_r(a) \times \hat{\mathbb{N}}_{\geq m}) = \{(x_n, n) \mid d(x_n, a) < r, n \geq m\}$ は空でない. 従って, $d(x_n, a) < r$ を満たす自然数 $n \geq m$ が存在して, $\inf_{n \geq m} d(x_n, a) < r$ を満たす.

(3) \Rightarrow (1) 次のように帰納的に構成した部分列 (x_{m_n}) は, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{m_n}, a) = 0$ より, a に収束する.

(1) $m_0 := 0$.

(2) $n \geq 1$ について, $\inf_{m \geq m_{n-1}+1} d(x_m, a) = 0$ が成り立つから, 特に $d(x_m, a) < \frac{1}{n}$ を満たす自然数 $m > m_{n-1}$ が存在する. そのような m のうち最小のものを $m_n := m$ とする.

■

命題 3.4.6 (コンパクト距離空間は点列コンパクトである).

(1) X がコンパクト距離空間ならば, X は点列コンパクトである.

(2) (Bolzano-Weierstrass) (x_n) を \mathbb{R}^m の有界な点列とすると, 収束する部分列 (x_{m_n}) が存在する.

[証明].

(1) 任意に X の点列 (x_n) をとり, この収束する部分列が存在することを示せば良い. $A := \{(x_n, n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X \times \hat{\mathbb{N}}$ の閉包を \bar{A} とし, $\exists a \in X, (a, \infty) \in \bar{A}$ を示せば, 補題 3.4.5 より収束する部分列が存在する. いま, X は compact だから, 特徴付け 4.4.4 より, 射影 $\text{pr}_2: X \times \hat{\mathbb{N}} \rightarrow \hat{\mathbb{N}}$ は閉写像である. よって, $\text{pr}_2(\bar{A}) \subset \hat{\mathbb{N}} = \overline{\text{pr}_2(A)}$ (命題??) は, $\mathbb{N} \subset \text{pr}_2(A) \subset \text{pr}_2(\bar{A})$ を満たす閉集合だから, $\text{pr}_2(\bar{A}) = \hat{\mathbb{N}}$ である. 即ち, $\exists a \in X, (a, \infty) \in \bar{A}$.

(2) (x_n) が \mathbb{R}^m の有界な点列ならば, 実数 $M > 0$ であって, $\{x_n\} \subset [-M, M]^m$ を満たすものが存在する. 命題??より, 有界閉集合 $[-M, M]^m$ はコンパクトだから, 1. より, (x_n) には収束する部分列が存在する.

■

定理 3.4.7 (AC). 距離空間 X について, 次の3条件は同値である.

(1) X はコンパクト.

(2) X は点列コンパクト.

(3) X は完備かつ全有界.

[証明].

(1) \Rightarrow (2) 命題 3.4.6.1.

(2) \Rightarrow (3), AC

完備性について Cauchy 列 (x_n) を任意に取る. X は点列コンパクトなので, 収束する部分列 (x_{m_n}) が存在する. 補題??より, Cauchy 列 (x_n) は部分列の収束先 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{m_n}$ に収束する.

全有界性について 対偶命題: X が全有界でないならば, 点列コンパクトでないことを示す. 即ち, 実数 $r > 0$ であって, 任意の有限部分集合 $A \subset X$ に対して, $X \not\supset \cup_{a \in A} U_r(a)$ が成り立つものが存在すると仮定する. これに対して次のように X の点列 (x_n) を帰納的に定める:

(1) $x_0 \in X \neq \emptyset$ を任意に取る.

(2) $x_0, \dots, x_n \in X$ に対して, $x_{n+1} \in X \setminus (U_r(x_0) \cup \dots \cup U_r(x_n)) \neq \emptyset$ と取る.

すると, この点列は $d(x_m, x_n) \geq r$ ($0 \leq m < n$) を満たすので, 収束する部分列を持たない.

(3) \Rightarrow (1), AC X を全有界かつ完備とし, ここからコンパクト性を示す.

コンパクト空間 A の構成 X は全有界で $\frac{1}{2^n} > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) だから, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\forall x \in X \exists a \in A_n, d(x, a) < \frac{1}{2^n}$ を満たす離散有限集合 A_n が存在する ($X = \cup_{a \in A_n} U_{\frac{1}{2^n}}(a)$ を満たす A_n が存在するため). 選択公理より, これらからなる, X の離散有限集合の列 (A_n) が取れる. これらの無限積空間 $A := \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ は Tychonoff の定理 4.4.6 より,

compact である.

コンパクト部分空間 C の構成 A の部分空間 C を

$$C := \left\{ (a_n) \in A \mid \forall n \in \mathbb{N}, d(a_n, a_{n+1}) \leq \frac{3}{2^{n+1}} \right\}$$

で定める. するとこの C は

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ (a_m) \in A \mid \forall n \in \mathbb{N}, d(a_n, a_{n+1}) \leq \frac{3}{2^{n+1}} \right\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\text{pr}_n \times \text{pr}_{n+1})^{-1} \left(\left[0, \frac{3}{2^{n+1}} \right] \right)$$

をみだし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について射影の積 $\text{pr}_n \times \text{pr}_{n+1} : A \rightarrow A_n \times A_{n+1}$ は連続だから, C はコンパクト空間 A の閉部分空間である. 従って C もコンパクトである (系 4.4.2).

全射 $l : C \rightarrow X$ の構成 $(a_n) \in C$ は

$$\begin{aligned} \forall n \leq m \quad d(a_n, a_m) &\leq d(a_n, a_{n+1}) + \cdots + d(a_{m-1}, a_m) \\ &\leq \frac{3}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{3}{2^m} \leq \frac{3}{2^n} \end{aligned}$$

より, X の Cauchy 列である. X は完備だから, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in X$ が存在し, 写像

$$\begin{array}{ccc} l : C & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ (a_n) & \longmapsto & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \end{array}$$

が定まる. この l が全射であることを示す.

任意の $x \in X$ に対して, $l^{-1}(x)$ の元を構成する. 点列 $a = (a_n) \in A$ であって, $d(a_n, x) < \frac{1}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}$) を満たすものが存在するように, 空間 A を定義したのであった. 選択公理より, このような $a \in A$ が取れる. ここでこの点列は,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(a_n, a_{n+1}) \leq d(a_n, x) + d(a_{n+1}, x) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2^{n+1}}$$

を満たすから, $a \in C$ でもある. この点列は $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ より, $l(a) = x$ を満たす.

l は連続である 任意に点 $a = (a_n) \in C$ を取り, 任意の $r > 0$ について, 逆像 $l^{-1}(U_r(l(a)))$ に含まれる $a \in C$ の開近傍の基本系 (即ち基底) を構成すれば良い (命題??).^{†3}

任意の $n \in \mathbb{N}$ について $d(a_n, l(a)) \leq \frac{3}{2^n}$ である. よって任意の実数 $r > 0$ に対して, m を $\frac{6}{2^n} < r$ を満たす最小の自然数 n とすれば, $a = (a_n), b = (b_n) \in C$ が $a_m = b_m$ を満たすならば, $d(l(a), l(b)) \leq d(a_m, l(a)) + d(b_m, l(b)) \leq \frac{6}{2^m} < r$ である. 従って, $\text{pr}_m^{-1}(\text{pr}_m(a)) \subset l^{-1}(U_r(l(a)))$ である. よって, 全射 $l : C \rightarrow X$ は連続である.^{†4} C はコンパクトだから, 4.4.3 より, X もコンパクトである. ■

3.5 完備距離空間

3.5.1 閉集合との関係

命題 3.5.1 (距離空間内の閉集合). X を距離空間, A を部分空間とする. 次の 2 条件を考える.

- (1) A は完備.
- (2) A は X の閉集合.

$1 \Rightarrow 2$ である. X が完備ならば逆も成り立つ.

[証明].

^{†3} l の終域の基底は開球で, 始域の基底は

^{†4} ???

- (1) \Rightarrow (2), AC $A \subset \bar{A}$ を示せば良い. 任意に $a \in \bar{A}$ を取る. 系 3.4.4.2(AC) より, a に収束する A の点列 (x_n) が存在する. 収束する列 (x_n) は Cauchy 列で (補題 3.4.1), A は完備だから, (x_n) は収束する. 系 3.4.4.2 より, それは a で, よって $a \in A$.
- (2) \Rightarrow (1) (x_n) を A の Cauchy 列とし, これが収束することを示せば良い. X が完備ならば, 極限を持つ: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =: a \in X$. 系 3.4.4 より, $a \in \bar{A} = A$. 従って, A は完備.

■

3.5.2 完備化

定義 3.5.2 (completion). X を距離空間, Y を完備距離空間とする. $f: X \rightarrow Y$ が等長写像であり, 像 $f(X)$ が Y で稠密である時, Y は f に関して X の完備化であるという.

命題 3.5.3. X を距離空間とする. $x \in X$ に対し, $d(x, -): X \rightarrow \mathbb{R}$ を $y \mapsto d(x, y)$ と定める.

$$\begin{array}{ccc} D_X: X & \longrightarrow & \text{Map}(X, \mathbb{R}) \\ \wr & & \wr \\ x & \longmapsto & d(x, -) \end{array}$$

$a \in X$ とする.

- (1) $x \in X$ ならば, $D_X(x) - D_X(a) \in B(X)$ である. $x \in X$ を $D_X(x) - D_X(a) \in B(X)$ に写す写像 $i: X \rightarrow B(X)$ は等長写像である.
- (2) 等長写像 $i: X \rightarrow B(X)$ の像の閉包 $\overline{i(X)}$ が X の完備化である.
- (3) (一意性) Y を距離空間, $f: X \rightarrow Y$ を等長写像とし, Y は f に関して X の完備化であるとする. $y \in Y$ に対し,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D}_X(y): X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \wr & & \wr \\ x & \longmapsto & d(y, f(x)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{i}: Y & \longrightarrow & B(X) \\ \wr & & \wr \\ y & \longmapsto & \tilde{D}_X(y) - D_X(a) \end{array}$$

と定めると, 写像 \tilde{i} は可逆な等長写像 $Y \rightarrow \overline{i(X)}$ を定め, $\tilde{i} \circ f = i$ である.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & \searrow \tilde{i} & \\ B(X) & & \end{array}$$

[証明].

- (1) (a) 命題 3.1.3 より,

$$|D_X(x)(y) - D_X(x)(z)| = |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

より, $y \rightarrow x$ の極限を考えると, $D_X(x) \in C(X)$ である.

- (b) 再び命題 3.1.3 より,

$$\forall z \in X, |D_X(x)(z) - D_X(y)(z)| = |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

より, さらに踏み込んで $D_X(x) - D_X(y) \in B(X)$ である.

- (c) いま,

$$\|D_X(x) - D_X(y)\|_\infty = \sup_{z \in X} |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

であるが, $z = y$ とすると, $|d(x, y) - d(y, y)| = d(x, y)$ なので, $d(i(x), i(y)) = \|D_X(x) - D_X(y)\|_\infty = d(x, y)$ より, i は等長写像である.

- (2) $\overline{i(X)} \subset B(X)$ は完備距離空間 $B(X)$ の部分閉集合だから, 命題 3.5.1 より完備である. i は等長写像で, $i(X)$ は $\overline{i(X)}$ 上で稠密に決まっているので, $\overline{i(X)}$ は X の完備化である.

- (3)

■

3.5.3 不動点定理

定義 3.5.4 (contracting mapping). X を距離空間とし, $f: X \rightarrow X$ を写像とする. Lipschitz 定数 $r \in (0, 1)$ を持つ Lipschitz 連続関数 f を縮小写像という: $\exists_{r \in (0, 1)} \forall_{x, y \in X} d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x, y)$.

命題 3.5.5 (完備距離空間の縮小写像には不動点が存在する). X を距離空間とし, $f: X \rightarrow X$ を縮小写像とする.

- (1) $f(a) = a$ を満たす $a \in X$ は, 存在すればただ一つである.
- (2) X が完備であり空でなければ, $f(a) = a$ を満たす $a \in X$ が存在する.

[証明] f は縮小写像だから, 条件を満たす $r \in (0, 1)$ が存在する.

- (1) $a, b \in X$ が $f(a) = a, f(b) = b$ を満たすとする. $d(a, b) \leq r d(a, b)$ より, $r \in (0, 1)$ だから, $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$.
- (2) 任意に $x \in X \neq \emptyset$ を取り, X の点列をこれから $(x_n := f^n(x))$ と定める. すると,

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, \quad d(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_{i+1}, x_i) \\ &\leq \sum_{i=m}^{n-1} r^i d(x_1, x_0) \\ &= \frac{r^m - r^n}{1 - r} d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{r^m}{1 - r} d(x_1, x_0) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

より, これは Cauchy 列である. X は完備だから, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =: a \in X$ が存在する. これについて, $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$ である. ■

3.5.4 可算共通部分

命題 3.5.6 (AC, 完備距離空間の稠密開集合の可算共通部分は稠密). X を完備距離空間とする. $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が X の稠密な開集合の列ならば, 共通部分 $\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$ も稠密である.

系 3.5.7 (Baire, AC). X を空でない完備距離空間とし, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を X の閉集合の列とする. $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ ならば, 内部 A_n° が空でない n が存在する.

3.5.5 Baire 空間

3つの Banach 空間上の作用素の基本結果は, 全て Baire の範疇定理の上に拠って立つ. これは, 完備距離空間の稠密開集合の可算交叉は再び稠密である (くらいに「濃い」) ことを主張している.

定義 3.5.8 (Baire space, nowhere dense).

- (1) 閉包が内点を持たない集合を疎集合という. 集合が疎であることと, その補集合が稠密であることは同値.
- (2) 可算個の疎集合の合併として表せる集合を第一類という.
- (3) そうでない集合, すなわち, 任意の稠密開集合の可算共通部分は稠密であるような位相空間を第二類または Baire 空間という.

[証明] 任意の半径 $r > 0$ の閉球 B_0 を取り, これと $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ との共通部分が空でないことを示せば, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ の稠密性が示せる.

いま, $A_1 \cap B_0^\circ$ は空でない開集合だから, ある半径 $2^{-1}r$ より小さい閉球 B_1 が取れる. これを繰り返すことで, $B_n \subset$

$A_n \cap B_{n-1}^\circ, r(B_n) < 2^{-n}r$ を満たす閉球の列 (B_n) が取れる. X は完備だから, $\exists_{x \in X} \{x\} = \bigcap_{n=1}^\infty B_n \subset B_0 \cap (\bigcap_{n=1}^\infty A_n)$ が成り立ち, 共通部分が空でないことがわかった. ■

命題 3.5.9 (Baire category theorem 1). 任意の完備距離空間 X は Baire 空間である.

すなわち, (A_n) を X の稠密開集合の列とすると, この共通部分 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ は X で稠密である. また双対命題は, 閉集合列を用いて $X = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ と表せたとき, 少なくとも一つの F_n は疎でない (内点を持つ).

注 3.5.10. 実は ZF の下で従属選択公理と呼ばれる弱い選択公理と同値になる.

命題 3.5.11 (BCT2). 任意の局所コンパクトハウスドルフ空間は Baire 空間である.

要諦 3.5.12. こちらは函数解析学では使わないが, 任意の有限次元多様体が Baire 空間であることがわかる. 多様体がパラコンパクトでない場合でも成り立つ. なお, 局所コンパクトでない完備距離空間も, 距離化可能でない局所コンパクトハウスドルフ空間も存在することに注意.

3.6 距離化可能性

一般の距離空間が距離化可能であるための条件は, 可算性で捉えられる.

3.6.1 可算性・可分性

定義 3.6.1 (first-countable, second-countable, separable, σ -compact). 位相空間 X について,

- (1) 任意の点 $x \in X$ の近傍系 $\mathcal{O}(x)$ が可算な基本形を持つとき, **第1可算**であるという.
- (2) 開集合系 \mathcal{O}_X が可算な基底 \mathcal{U} を持つとき, X は**第2可算**であるという. これは可算な準基を持てば十分.
- (3) 稠密な可算部分集合が存在する時, **可分**であるという.
- (4) X は局所コンパクトであるとする. X のコンパクト集合の列 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を満たすものが存在する時, X は **σ -コンパクト**であるという.

命題 3.6.2. 位相空間 X について,

- (1) 第2可算ならば第1可算である.
- (2) 第2可算ならば可分である.

3.6.2 距離空間の可算・可分性

距離空間では可分性の概念が十分強く, 第2可算性と同値になる.

命題 3.6.3 (距離空間では全有界なら可分). 距離空間 X について,

- (1) X は第1可算である.
- (2) 稠密な部分集合 A に対して, 次のようにして開集合の基底が構成できる: $\mathcal{U}_A = \{U_{1/n}(a) \mid a \in A, n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ は X の開集合系の基底である.
- (3) (AC) X が全有界ならば, X は可分である.

[証明].

- (1) 命題??と実数の Archimedes 性より, 任意の $x \in X$ に対し, $\{U_{\frac{1}{n}}(x)\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ は開近傍の基本系であり, 可算である.
- (2) X の開集合 U とその点 $x \in U$ を任意に取り, この間に挟まる \mathcal{U}_A の元を構成すれば良い. 開球は基底だから, $U_r(x) \subset U$ を満たす実数 $r > 0$ が存在し, 実数の Archimedes 性より, $n \geq \frac{2}{r}$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ も存在する. A は稠密だから, この n に対

しても $U_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$ で, $a \in U_{1/n}(x) \cap A$ が取れる. $\frac{1}{n} + d(x, a) < \frac{2}{n} \leq r$ が成り立つから, $x \in U_{1/n}(a) \subset U_r(x) \subset U$ が成り立つ.

- (3) 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $\forall x \in X, \exists a \in A_n, d(x, a) \leq 1/n$ を満たす有限集合 $A_n \subset X$ が存在するから, 選択公理より列 (A_n) を得る. $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ とするとこれは可算集合であり, X 上稠密である.

■

系 3.6.4. X を距離空間とすると, 次の2条件は同値.

- (1) X は可分である.
- (2) X は第2可算である.

[証明].

(1) \Rightarrow (2) X の稠密な可算部分集合を A とする. 命題 3.6.3 の通りに \mathcal{U}_A を定めると, これは可算である.

(2) \Rightarrow (1), AC 命題??.3 より.

■

3.6.3 Frechet 空間 \mathbb{R}^∞ の距離付け可能性

命題 3.6.5 (モデル空間での例).

- (1) 積空間 $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ は距離付け可能である.
- (2) 積空間 $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ は可分であり, 第2可算である.

[証明].

- (1) 証明方針 \mathbb{R} は空でない开区間と同相だから, 積空間 $A := \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right)$ が距離付け可能であることを示せば良い. また $l^\infty \subset \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$ は距離空間だから (例??), 包含写像

$$\begin{array}{ccc} i : A & \longrightarrow & l^\infty \\ \psi & & \psi \\ (a_n) & \longmapsto & a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

が埋め込みであること: $i^*(\mathcal{O}_{l^\infty}) = \mathcal{O}_A$, 即ち l^∞ 空間の部分空間であることを示せば良い.

証明

$$\begin{aligned} \forall r > 0, \forall a \in A, \quad i^{-1}(U_r(a)) &= U_r(a) \cap A \\ &= \prod_{n \leq 1/r} U_r(a_n) \times \prod_{n > 1/r} \left(0, \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

は族の積位相の特徴付けより開集合系の基底である. 基底と基底が通じ合っているため, i^* が任意の合併を保つことより (命題??), $i^*(\mathcal{O}_{l^\infty}) = \mathcal{O}_A$ である.

- (2) $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ の可算部分集合

$$\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} := \{x = (x_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid x_n \neq 0 \text{ を満たす } n \text{ は高々有限個}\}$$

が稠密であるため. 系 3.6.4 より.

■

3.6.4 一般の距離付け可能性

第2可算な正規空間が距離付け可能で、可分距離空間を定める。これは埋め込み $X \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ が構成できることによる。さらに、コンパクト距離空間は $[0, 1]^\infty$ の閉部分空間に埋め込める。

定理 3.6.6 (Urysohn の距離付け定理). 位相空間 X について、次の3条件は同値である。

- (1) X は可分かつ距離付け可能。
- (2) X は第2可算かつ正規。
- (3) 埋め込み $X \rightarrow \mathbb{R}^\mathbb{N}$ が存在する。

系 3.6.7 (AC, コンパクト距離空間は閉区間の可算積の閉部分空間と同相である). 位相空間 X について、次の3条件は同値である。

- (1) X はコンパクトかつ距離付け可能である。
- (2) X は第2可算かつコンパクト・ハウスドルフである。
- (3) 閉埋め込み $X \rightarrow [0, 1]^\mathbb{N}$ が存在する。

第 4 章

位相的構造

4.1 Hausdorff 空間

4.1.1 定義

定義 4.1.1. 位相空間 X が, $\forall x, y \in X \ x \neq y \Rightarrow \exists U \in \mathcal{O}(x), V \in \mathcal{O}(y) \ U \cap V = \emptyset$ を満たすとき, **Hausdorff** または**分離空間**であるという.

4.1.2 積位相による特徴付け

命題 4.1.2 (Hausdorff 空間の特徴付け: 対角集合が閉集合となる空間). X を位相空間とする.

- (1) 次の 2 条件は同値である.
 - (1) X は Hausdorff である.
 - (2) 対角集合 Δ_X が積空間 $X \times X$ の閉集合である.
- (2) X が Hausdorff ならば, 任意の $x \in X$ について $\{x\}$ は X の閉集合である.

[証明] .

- (1) 次の条件は全て同値である.
 - (2) Δ_X が閉集合である.
 - (1.75) $(X \times X) \setminus \Delta_X$ が開集合である.
 - (1.5) 任意の点 $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$ に対して, x の開近傍 U と y の開近傍 V が存在して, $((x, y) \in) U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta_X$ を満たすものが存在する (積位相の特徴付け??より).
 - (1.25) 任意の点 $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$ に対して, x の開近傍 U と y の開近傍 V が存在して, $U \times V \cap \Delta_X = \emptyset$ を満たすものが存在する.
 - (1) 任意の点 $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$ に対して, x の開近傍 U と y の開近傍 V が存在して, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する.
- (2) 任意の元 $x \in X$ に対して, 写像 $i_x : X \rightarrow X \times X$ を $i_x(y) := (x, y)$ と定めると, これは連続である.^{†1} $\{x\}$ はこれによる閉集合 Δ_X の逆像 $\{x\} = i_x^{-1}(\Delta_X)$ である.

■

4.1.3 連続単射の逆像への遺伝

部分空間に Hausdorff 性は引き継がれる.

命題 4.1.3. $f : X \rightarrow Y$ を連続単射とする. Y が Hausdorff ならば, X も Hausdorff である.

^{†1} 例えば, $\text{pr}_2 : X \times X \rightarrow X$ が開写像であるため (積位相の特徴付け??).

【証明】.

- (1) f が連続ならば, $f \times f$ は連続である (積位相の特徴付け??2).
- (2) f が単射ならば, $(f \times f)^{-1}(\Delta_Y) = \Delta_X$ である.
- (3) 連続写像 $f \times f$ による逆像 $(f \times f)^{-1}(\Delta_Y) = \Delta_X$ は閉集合である.

系 4.1.4. X を Hausdorff 空間とする. X の部分空間 A は Hausdorff である.

【証明】. 包含写像 $i: A \rightarrow X$ は連続単射である.

命題 4.1.5 (直積への Hausdorff 性の伝播).

- (1) $(X_i)_{i \in I}$ を Hausdorff 空間の族とすると, 積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ も Hausdorff である.
- (2) X と Y を位相空間とし, $X \times Y$ が Hausdorff であるとする. Y が空でなければ X は Hausdorff である.

【証明】.

- (1) $\Delta_X = \cap_{i \in I} (\text{pr}_i \times \text{pr}_i)^{-1}(\Delta_{X_i})$. 仮定より, Δ_{X_i} は閉集合である. pr_i は $\prod_{i \in I} X_i$ の積位相について連続写像であるから, $\text{pr}_i \times \text{pr}_i$ も連続である (積位相の特徴付け??).
- (2) 各 $b \in Y$ に対して, 写像 $f: X \rightarrow X \times Y$ を $f(x) := (x, b)$ と定めると, これは連続で単射である. よって, 命題 4.1.3 より.

4.1.4 等化子による特徴付け

非常に閉グラフ定理に繋がる見方である.

命題 4.1.6 (Hausdorff 性の特徴付け: 等化子). 位相空間 X について, 次の3条件は同値である.

- (1) X は Hausdorff である.
- (2) 任意の位相空間 T と任意の連続写像 $f, g: T \rightarrow X$ に対して, $\text{Ker}(f, g) = \{t \in T \mid f(t) = g(t)\}$ は T の閉集合である.
- (3) 任意の位相空間 T と任意の連続写像 $f: T \rightarrow X$ に対し, f のグラフ $\Gamma = \{(t, x) \in T \times X \mid f(t) = x\}$ は $T \times X$ の閉集合である.

【証明】.

- (1) \Rightarrow (2) $\text{Ker}(f, g) = (f, g)^{-1}(\Delta_X)$ である. f, g が連続であることと (f, g) が連続であることは同値 (積位相の特徴付け??). よって, Δ_X が閉集合ならば, $\text{Ker}(f, g)$ は閉集合である.
- (2) \Rightarrow (3) $\Gamma = \text{Ker}(f \circ \text{pr}_1, \text{pr}_2)$ である.
- (3) \Rightarrow (1) 対角集合 Δ_X とは, $\text{id}_X: X \rightarrow X$ のグラフである.

4.1.5 Hausdorff 空間値写像は連続延長する

系 4.1.7 (Hausdorff 空間への連続写像は, 稠密な部分集合への制限で一意的に定まる). X を位相空間とし, Y を Hausdorff 空間とする. A が X の稠密な部分集合ならば, 制限写像 $i^*: C(X, Y) \rightarrow C(A, Y)$ は単射である.

【証明】. 任意の $f, g \in C(X, Y)$ について, $f|_A = g|_A \Rightarrow f = g$ を示す. 仮定は即ち $A \subset \text{Ker}(f, g)$ と同値であるが, Y が Hausdorff ならば, $\text{Ker}(f, g)$ は閉集合である. よって, $\text{Ker}(f, g) = X$. 即ち, $f = g$.

4.2 連結空間

4.2.1 定義と特徴付け

定義 4.2.1 (connected). X を位相空間とし, $\emptyset \subsetneq A \subset X$ について,

- (1) A が**連結**であるとは, X の開集合 U, V であって $A \subset U \cup V, A \cap U \cap V = \emptyset, A \cap U \neq \emptyset, A \cap V \neq \emptyset$ を満たすものは存在しないことをいう. すなわち, 部分空間としての A が2つの開集合の非交和として表せないことをいう.
- (2) A が**弧状連結**であるとは, 任意の2点 $x, y \in A$ に対して, これらを結ぶ $[0, 1]$ からの連続写像 $f : [0, 1] \rightarrow A, f(0) = x, f(1) = y$ が存在することをいう.

命題 4.2.2 (連結性の特徴付けと intermediate value theorem). 空でない位相空間 X に対し, 次の5条件は同値である.

- (1) X は連結である.
- (2) **中間値の定理**: $\forall f \in C(X, \mathbb{R}) \quad \forall u, v \in X \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad f(u) \leq c \leq f(v) \Rightarrow [\exists t \in X (c = f(t))]$.
- (3) $f : X \rightarrow 2$ が離散位相空間 $2 = \{0, 1\}$ への連続写像ならば, f は定数関数である.
- (4) U が X の開集合であり閉集合でもあるならば, $U = X \vee U = \emptyset$.
- (5) $p : X \rightarrow 1$ を定値写像とすると, 任意の離散位相空間 Y に対して, $p^* : C(1, Y) \rightarrow C(X, Y)$ が可逆である.

[証明]. (1) \Rightarrow (2) $f \in C(X, \mathbb{R})$ を任意の連続関数とする. 任意の $f(u) < c < f(v)$ を満たす u, v, c について $f(t) = c$ を満たす $c \in X$ を構成すれば良い. いまこの $c \in \mathbb{R}$ について,

$$U = \{x \in X \mid f(x) < c\}, \quad V = \{x \in X \mid f(x) > c\},$$

と定めるといずれも開区間の連続写像による逆像であるから, 開集合である. また, $U \cap V = \emptyset$ で, 少なくとも $u \in U, v \in V$ であるからいずれも空でない. X が連結ならば, $X \subset U \cup V$ も満たす開集合 U, V は存在しないから, $X \not\subset U \cup V$ 即ち $X \setminus (U \cup V) \neq \emptyset$ である. この任意の元 $t \in X \setminus (U \cup V)$ を取ると, $f(t) \in \mathbb{R} \setminus ((-\infty, c) \cup (c, \infty))$ なので, $c = f(t)$ である.

(2) \Rightarrow (3) $f \in C(X, 2)$ を連続写像とする. 2 を離散位相空間と見ているので, \mathbb{R} への関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ と考えたものも連続である (離散位相空間 2 は \mathbb{R} の部分空間とみなせるので, $i : 2 \rightarrow \mathbb{R}$ とすると連続で, $f' = i \circ f$ と考えれば良い). 従って, (2) より, $f(X) = 2$ ならば, $f(t) = 1/2$ を満たす $t \in X$ が存在するはずだが, これは矛盾. 従って, $f(X) \subsetneq 2$ 即ち f は定数関数である.

(3) \Rightarrow (4) $U \subset X$ は開かつ閉とする. すると, 特性関数 $\chi_U : X \rightarrow 2$ は, 2 の離散位相に対しても連続になる (通常は Sierpiński 位相についてのみ連続). 従って, $U = \emptyset \vee X$.

(4) \Rightarrow (1) X の開集合 U が最初の2条件 $X \subset U \cup V, X \cap U \cap V = \emptyset$ を満たすとは, 無縁和 $X = U \coprod V$ を意味する. すると, U, V はいずれも開かつ閉であり, (4) より, $U = \emptyset \vee V = \emptyset$. よって, 条件を満たす分割はなく, X は連結である.

(5) \Leftrightarrow (2) 任意の離散空間 Y への連続写像 $f \in C(X, Y)$ は, $y \in Y$ が存在して定値写像 $f = y$ に限る, ということである. これは, 埋め込み $i : Y \rightarrow \mathbb{R}$ が取れる場合については (2) \Rightarrow (3) の時と同様に示せる. ■

4.2.2 閉包と交叉和への遺伝

連結な稠密部分集合を持つならば, 連結である. Hausdorff 性とは違って, 部分集合への遺伝は難しい.

系 4.2.3 (連結性の伝播). X を位相空間とする. $A, B \subset X$ とする.

- (1) A が連結とする. このとき, B が $A \subset B \subset \bar{A}$ を満たすならば, B も連結である. 特に, \bar{A} も連結である.
- (2) A, B が連結とする. $A \cap B \neq \emptyset$ ならば, $A \cup B$ も連結である.

[証明].

- (1) 任意に $f \in C(B, 2)$ を取り, これが定数関数であることを示す. 勝手に $a \in A$ を取って $c := f(a)$ と置くと, $f|_A = c$ であ

る。離散位相空間 2 は Hausdorff ($0, 1$ が近傍によって分離可能) で、 A は B 上稠密だから、系 4.1.7 より、 $f = c$ を得る。

- (2) 任意に $f \in C(A \cup B, 2)$ を取り、これが定数関数であることを示す。 $A \cap B \neq \emptyset$ なので、勝手に $a \in A \cap B$ を取って $c := f(a)$ と置くと、 $f|_A = f|_B = c$ である。よって、 $f = c$ を得る。

■

4.2.3 弧状連結性

系 4.2.4 (弧状連結ならば連結). 位相空間 X が弧状連結ならば、 X は連結である。

[証明]. 任意に連続関数 $f \in C(X, 2)$ を取り、これが定数関数であることを示す。 $a \in X$ を勝手に取る。 X は弧状連結だから、任意の $x \in X$ に対して、連続写像 $g : [0, 1] \rightarrow X$ であって $g(0) = a, g(1) = x$ を満たすものが存在する。すると、 $f \circ g : [0, 1] \rightarrow 2$ は連続であるが、 $[0, 1]$ は連結であるから (命題 4.2.8), 命題 4.2.2 より、定値写像 $f \circ g = f(a)$ である。よって、 $f(x) = f(a)$ 。以上より、 $f = f(a)$ である。

■

定義 4.2.5 (path component). $\text{PConn}_x(X) := \{y \in X \mid y, x \text{ は道で結べる}\}$ を弧状連結成分という。この二項関係は X 上に同値関係を定める。弧状連結成分の全体を $\pi_0(X)$ で表す。

補題 4.2.6. 弧状連結成分の全体は、連結成分の全体よりも細かい。

注 4.2.7. 位相幾何学者の正弦曲線の、 $y = \sin(1/x)$ 上の点の弧状連結成分は、 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin(1/x), 0 < x \leq 1\}$ となり、開集合である。連結成分はただ 1 つである。

4.2.4 実数の連結性

実数の連結部分集合を区間という。

命題 4.2.8. $a < b$ を実数とする。閉区間 $[a, b]$ は連結である。

[証明]. 連続関数 $f \in C([a, b], 2)$ を任意に取り、これが定数関数 $f(a)$ となることを背理法で示す。 $f(c) \neq f(a)$ となる $c \in [a, b]$ が存在したと仮定する。

いま、 $A := f^{-1}(f(a)) \cap [a, c]$ とすると、 $\{f(a)\}$ が閉より、 A は少なくとも $a \in A$ を持つ閉集合となるから、 $s := \sup A \in A$ が存在する。 $s \in A$ は命題 4.2.2 による。これについて、 $f(s) = f(a) \neq f(c)$ より、 $s < c$ 。よって、 $(s, c] \cap A = \emptyset$ より、勝手に取った $t \in (s, c]$ に対し、 $f(t) = f(c)$ (f は二値写像であることに注意)。しかし f は連続だから、 $[s, c]$ 上で $f = f(c)$ 。よって、 $f(s)$ の値について矛盾。従って、 f は定数関数である。

■

系 4.2.9 (区間上の単調写像は開埋め込み). $a < b$ を実数とする。

- (1) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする。 $f(a) \leq f(b)$ ならば、 $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$ である。
- (2) $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする。任意の $a < s < t < b$ に対し、 $f(s) < f(t)$ ならば、 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ は開埋め込みである。

[証明].

- (1) 閉区間 $[a, b]$ は連結であるから、 $f(a) < c < f(b)$ を満たす $c \in [f(a), f(b)]$ について、 $t \in [a, b]$ が存在して $c = f(t) \in f([a, b])$ である (命題 4.2.2)。
- (2) 連続写像 f はこのとき単射だから、あとは開写像であることを示せば良い。 $U \subset (a, b)$ を開集合としたとき、 $f(U)$ が \mathbb{R} の開集合であることを示す。任意に $y \in f(U)$ を取ると、 $\exists x \in U, f(x) = y$ である。よって、 $x \in (s, t) \subset U$ を満たす実数 $a < s < x < t < b$ が存在する (ϵ -近傍などを取れば良い、 ϵ -近傍は (a, b) の位相の基底であるため)。 f は単射だから $f((s, t)) = f([s, t]) \setminus \{f(s), f(t)\}$ で、単調性と 1. より、 $[f(s), f(t)] = f([s, t])$ から、右辺は $(f(s), f(t))$ とわかる。こうして、 $f(y) \in (f(s), f(t)) \subset U$ と開近傍が取れたことになる。以上より、 $f(U)$ は開集合である。

■

命題 4.2.10 (\mathbb{R} の連結集合の分類). \mathbb{R} の部分集合 A に対し, 次の3条件は同値である.

- (1) A は連結である.
- (2) A は弧状連結である.
- (3) 次の条件のどれか1つが成り立つ.
 - (i) $A = \mathbb{R}$ である.
 - (ii) $a \in \mathbb{R}$ であって, A が $[a, \infty), (a, \infty), (-\infty, a), (-\infty, a]$ のどれかと等しくなるようなものが存在する.
 - (iii) 実数 $a < b$ であって, A が $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$ のどれかと等しくなるものが存在する.
 - (iv) $a \in \mathbb{R}$ であって, $A = \{a\}$ となるものが存在する.

4.2.5 連結性の連続像への伝播

命題 4.2.11 (連続写像は連結性を保存する). $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. A が X の連結部分集合ならば, $f(A)$ は Y の連結部分集合である.

[証明]. A が連結ならば $A \neq \emptyset$ としたから, $f(A) \neq \emptyset$ より, $g \in C(f(A), 2)$ が取れる. これが定数関数であることを示す. すると, $g \circ f|_A \in C(A, 2)$ であるから, $g \circ f|_A$ は定数関数. $f|_A$ は全射だから g も定数関数と判る.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \downarrow g \\ & & 2 \end{array}$$

系 4.2.12 (積への伝播). X, Y を位相空間とする. 次の2条件は同値である.

- (1) X, Y はそれぞれ連結である.
- (2) $X \times Y$ は連結である.

[証明].

- (1) \Rightarrow (2) 任意に取った $(a, b) \in X \times Y$ に対して, 任意の $f \in C(X \times Y, 2)$ が $f = f(a, b)$ を満たす定数関数だと示せば良い. 任意の $(x, y) \in X \times Y$ に対して, $X \simeq X \times \{y\}, Y \simeq \{a\} \times Y$ なので, 命題 4.2.11 より, これらも連結. よって, $f|_{X \times \{y\}}, f|_{\{a\} \times Y}$ は定数関数. よって, $f(x, y) = f(a, y) = f(a, b)$. $(x, y) \in X \times Y$ は任意に定めたから, $f = f(a, b)$.
- (2) \Rightarrow (1) 連続写像 $\text{pr}_1: X \times Y \rightarrow X, \text{pr}_2: X \times Y \rightarrow Y$ の像である (命題 4.2.11).

命題 4.2.13 (AC). 一般に, 連結空間の族 (X_i) に対して, 積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ も連結である.

4.2.6 連結成分

命題 4.2.14 (連結成分は閉集合). X を位相空間とする.

- (1) $x, y \in X$ に対し, x と y を元として含む連結な部分集合 $A \subset X$ が存在するという条件は, X 上の同値関係 R を定める.
- (2) A をこの同値関係 R に関する同値類の1つ (すなわち連結成分) とすると, A は連結な閉集合である.

[証明].

- (1) 各 $x \in X$ に対して $\{x\}$ は連結だから, 反射律は成り立つ. 対象律は明らか. 連結部分集合 A, B が存在して $x, y \in A, y, z \in B$ の時, $A \cap B \neq \emptyset$ より, $x, y, z \in A \cup B$ も連結 (系 4.2.3) で, 推移律も成り立つ.
- (2) $a \in A$ を任意に取る. $f \in C(A, 2)$ を任意に取り, $c := f(a)$ を置く. 任意の $x \in A$ に対して, $\{x, a\} \subset A$ を満たす連結部分集合 $B \subset A$ が存在するが, これについて $f|_B = c$. よって, $f(x) = c$ を得るが, $x \in A$ は任意に取ったから $f = c$. よって, A は連結. 系 4.2.3 より \bar{A} も連結であるが, A の極大性より $\bar{A} \subset A$. よって, A は閉.

4.2.7 連結成分と開かつ閉集合

連結成分は閉集合だから、連結成分が高々有限個であるとき、連結成分は開かつ閉である。連結成分が無限個であるときもこの性質が成り立つためには、空間に局所連結性を課せば良い。

定義 4.2.15 (quasi-component). 同値関係 $x \sim_q y :\Leftrightarrow \forall f \in C(X; \mathbb{R}) f(x) = f(y)$ による同値類を、**擬成分**という。これは、 x を含む全ての開かつ閉集合の共通部分として特徴付けられる。

補題 4.2.16 (極大性: quasi-component). Γ_x を x の連結成分, Γ'_x を x の擬成分含むとする。

- (1) $\Gamma_x \subset \Gamma'_x$ である。
- (2) X が compact Hausdorff または局所連結ならば、 $\Gamma'_x \subset \Gamma_x$ でもある。

[証明] .

- (1) 任意の X の clopen set U について、 $U \subsetneq \Gamma_x$ ならば、 $\Gamma_x = (U \cap \Gamma_x) \coprod (\Gamma_x \setminus U)$ と2つの開集合で分割できてしまい、矛盾。

4.3 局所連結空間

一般に、任意の位相空間 X が、その連結成分 (U_i) の直和 $\coprod_{i \in I} U_i$ に等しいとは限らない。任意の開部分空間がこの性質を満たす空間を、**局所連結**であるという。

4.3.1 定義と特徴付け

定義 4.3.1. 位相空間 X が**局所連結**であるとは、任意の点 $x \in X$ の(開)近傍系 $\mathcal{O}(x)$ が、連結な開集合のみからなる基本系を持つことをいう。

注 4.3.2. 連結空間は局所連結とは限らない！位相幾何学者の正弦曲線は、連結であるが局所連結ではない。

例 4.3.3. 任意の連結成分が一点集合であるとき、**完全不連結空間**という。完全不連結空間が局所連結であるとは、連結集合が一点集合しかないのだからこれが基底になるしかない、すなわち、離散であることは同値である。 \mathbb{Q} は離散ではなく、局所連結ではない、完全不連結空間である。

命題 4.3.4. X を位相空間とする。次の3条件は同値：

- (1) X は局所連結である。
- (2) 任意の X の開部分空間 U の任意の連結成分は U -開である。
- (3) 任意の開部分空間は、その連結成分の直和空間に等しい。

特に、局所連結空間の任意の連結成分は開かつ閉である。

4.3.2 伝播

命題 4.3.5. 局所連結空間の商空間は再び局所連結である。

4.4 一般のコンパクト性

4.4.1 積位相による特徴付け

命題 4.4.1 (コンパクト性の積位相の言葉による特徴付け). X を位相空間とし, A を X の部分集合とする. 次の3条件は同値である.

- (1) A はコンパクトである.
- (2) Y を任意の位相空間とし, $y \in Y$ を任意の点とする. $A \times \{y\}$ の任意の開近傍 $W \subset X \times Y$ に対し, A の開近傍 $U \subset X$ と y の開近傍 $V \subset Y$ で, $U \times V \subset W$ を満たすものが存在する.
- (3) Y を任意の位相空間とし, $y \in Y$ を任意の点とする. $A \times \{y\}$ の任意の開近傍 $W \subset X \times Y$ に対し, y の開近傍 $V \subset Y$ で, $A \times V \subset W$ を満たすものが存在する.

【証明】.

- (1) \Rightarrow (2) (1) $W \subset X \times Y$ を $A \times \{y\}$ の任意の開近傍として, $U \times V \subset W$ を満たす A の開近傍 U と y の開近傍 V を構成すれば良い. 積位相の特徴付けより, 任意の $x \in A$ に対して, $(x, y) \in U_x \times V_x \subset W$ を満たす x の開近傍 U_x と y の開近傍 V_y が存在するから, これらの族 $(U_x, V_x)_{x \in A}$ を取ると, $A \times \{y\} \subset \cup_{x \in A} (U_x \times V_x) \subset W$ を満たす. が, $\cup_{x \in A} (U_x \times V_x) \subset (\cup_{x \in A} U_x) \times (\cup_{x \in A} V_x)$ であって, 等号は成り立たないので, まだ U, V は構成できない. ここで A がコンパクトであることが効いてくるのである.
- (2) いま, 族の定め方より $A \subset \cup_{x \in A} U_x$ で, A はコンパクトであるために, 族 $(U_x, V_x)_{x \in A}$ のうち $(U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n)$ が存在して, $A \subset \cup_{i \in [n]} U_i$ を満たす. この時, $U := \cup_{i \in [n]} U_i, V := \cap_{i \in [n]} V_i$ とすれば, いずれも開集合で,

$$A \times \{y\} \subset U \times V = \cup_{i \in [n]} U_i \times V \subset \cup_{i \in [n]} (U_i \times V_i) \subset W$$

を満たす.

(2) \Rightarrow (3) $U \times V \subset W$ を満たす A の開近傍 U が存在するならば, $A \times V \subset U \times V \subset W$ である.

(3) \Rightarrow (1) $(U_i)_{i \in I}$ を X の開集合の族で, $A \subset \cup_{i \in I} U_i$ を満たすものとする. このうちの有限部分被覆を構成する算譜を与えれば良い.

場面設定して (3) を使う 位相空間 Y を積空間 $Y := S^I$ とし, 点 $y := (1)_{i \in I} \in Y$ を定数関数 $1: I \rightarrow 2$ とする. 族 $(V_i)_{i \in I}$ を逆像 $V_i := \text{pr}_i^{-1}(1)$ と定めるとこれは開集合の族で, $W := \cup_{i \in I} (U_i \times V_i)$ とすると $X \times Y$ の開集合の族が定まる. これについて,

$$\begin{aligned} (X \times \{y\}) \cap W &= \cup_{i \in I} (U_i \times (\{y\} \cap V_i)) & (\forall i \in I, X \cap U_i = U_i) \\ &= \cup_{i \in I} U_i \times \{y\} & (\forall i \in I, \{y\} \cap V_i = \{y\}) \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$A \times \{y\} \subset \cup_{i \in I} U_i \times \{y\} = (X \times \{y\}) \cap W \subset W$$

がわかり, W は $A \times \{y\}$ の開近傍である. よって, (3) より, $A \times V \subset W$ を満たす開近傍 $1 \in V \subset Y$ が存在する.

構成 I の有限部分集合 J に対して, $V_J := \{1\}^J \times S^{I \setminus J}$ と書くこととする. すると, 族の積位相の特徴付け (命題??) より, 開集合 V に対して, $y \in V_J \subset V$ となる J が存在する. ここで, 空間 Y の決め方が効いてくる. $\chi_J \in V_J$ が成り立つ. これより,

$$A \times \{\chi_J\} \subset A \times V_J \subset A \times V \subset W$$

である. これと $(X \times \{\chi_J\}) \cap W = \cup_{i \in J} U_i \times \{\chi_J\}$ と併せて, $A \subset \cup_{i \in J} U_i$ を得る.

■

4.4.2 閉集合との交叉と有限合併への遺伝

系 4.4.2 (有限個の合併, 閉集合との共通部分はコンパクトである). X を位相空間とする.

- (1) $A \subset X$ をコンパクト集合とする. B が X の閉集合ならば, $A \cap B$ もコンパクト集合である. 特に X がコンパクト空間ならば, X の閉集合 $B = X \cap B$ はコンパクト集合である.
- (2) A_1, \dots, A_n が X の有限個のコンパクト集合ならば, 合併 $A_1 \cup \dots \cup A_n$ もコンパクト集合である.

【証明】. 任意の位相空間 Y とその点 $y \in Y$ を用意する.

- (1) $(A \cap B) \times \{y\}$ の開近傍 $W \subset X \times Y$ を取り, $(A \cap B) \times \{y\} \subset (A \cap B) \times V \subset W$ を満たす y の開近傍 V が構成できることを示せば良い. いま $W \cup ((X \setminus B) \times Y)$ を考えれば, B は X -閉集合だから, これは $A \times \{y\}$ を含む開集合, 即ち開近傍で, A はコンパクトだから, y の開近傍 $V \subset Y$ が存在して, $A \times \{y\} \subset A \times V \subset W \cup ((X \setminus B) \times Y)$ を満たす. これについて, $(A \cap B) \times \{y\} \subset (A \cap B) \times V \subset W$ である.
- (2) $(A_1 \cup \dots \cup A_n) \times \{y\}$ の開近傍 $W \subset X \times Y$ を取り,

$$(A_1 \cup \dots \cup A_n) \times \{y\} \subset (A_1 \cup \dots \cup A_n) \times V \subset W$$

を満たす y の開近傍 V を構成すれば良い. 各 A_i ($i \in [n]$) はコンパクトで, W は $A_i \times \{y\}$ の開近傍でもあるから, $A_i \times \{y\} \subset A_i \times V_i \subset W$ を満たす y の開近傍の族 $(V_i)_{i \in [n]}$ が見つかる. これに対して, $V := \bigcap_{i \in [n]} V_i$ と定めれば良い. 実際, これは再び y の開近傍で,

$$(A_1 \cup \dots \cup A_n) \times \{y\} \subset (A_1 \cup \dots \cup A_n) \times V \subset \bigcup_{i \in [n]} (A_i \times V_i) \subset W$$

を満たす.

■

4.4.3 連続像への伝播

系 4.4.3 (連続写像はコンパクト性を保存する). $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. $A \subset X$ をコンパクト集合とすると, $f(A) \subset Y$ もコンパクト集合である.

【証明】. 任意の位相空間 Z とその点 $z \in Z$ を用意する. $f(A) \times \{z\}$ の開近傍 $W \subset Y \times Z$ を任意に取り, $f(A) \times \{z\} \subset f(A) \times V \subset W$ を満たす z の開近傍 $V \subset Z$ を構成すれば良い.

$f \times 1: X \times Z \rightarrow Y \times Z$ は連続写像より, $W' := (f \times 1)^{-1}(W) \subset X \times Z$ は $A \times \{z\}$ の開近傍である. A はコンパクトであるから, $A \times \{z\} \subset A \times V \subset W'$ を満たす z の開近傍 $V \subset Z$ が存在する. これについて,

$$\begin{aligned} (f \times 1)(A \times \{z\}) &\subset (f \times 1)(A \times V) \subset (f \times 1)(W') \\ &\Leftrightarrow f(A) \times \{z\} \subset f(A) \times V \subset W \end{aligned}$$

である.

■

4.4.4 射影による特徴付け

命題 4.4.4 (コンパクト性の射影の言葉による特徴付け). 位相空間 X について, 次の2条件は同値.

- (1) X はコンパクトである.
- (2) 任意の位相空間 Y に対して, $\text{pr}_2: X \times Y \rightarrow Y$ は閉写像である.

【証明】.

(1) を積位相の言葉に翻訳 Y を任意の位相空間, $y \in Y$ を任意の点とすると, X がコンパクトであることは, 任意の $X \times \{y\}$ の開近傍 $W \subset X \times Y$ に対して, $X \times \{y\} \subset X \times V \subset W$ を満たす y の開近傍 $V \subset Y$ が存在することに同値.

さらに閉集合の言葉に翻訳 $F := (X \times Y) \setminus W$ と置いて, $X \times Y$ の開集合 W を考える代わりに, 閉集合 F を考える. すると,

$X \times \{y\} = \text{pr}_2^{-1}(y)$ より, 射影の言葉を使うと,

- (1) $X \times \{y\} \subset W \Leftrightarrow \text{pr}_2^{-1}(y) \cap F = \emptyset \Leftrightarrow y \in Y \setminus \text{pr}_2(F).$
- (2) $X \times V \subset W \Leftrightarrow \text{pr}_2^{-1}(V) \cap F = \emptyset \Leftrightarrow V \subset Y \setminus \text{pr}_2(F).$

と書き換えられる．以上をまとめると，(1)は

(3) 任意の位相空間 Y に対して， $X \times Y$ の任意の閉集合 F と任意の点 $y \in Y \setminus \text{pr}_2(F)$ に対し， y の開近傍 $V \subset Y$ で， $V \subset Y \setminus \text{pr}_2(F)$ を満たすものが存在する．

と同値．

さらに点 $y \in Y$ を抽象化する (3') の任意にとった Y, F に対する条件は， $\text{pr}_2(F)$ が Y の閉集合であるということと同値．よって (2) と同値．

■

4.4.5 積への遺伝

系 4.4.5 (積もコンパクト). X, Y を位相空間とする． $A \subset X, B \subset Y$ がコンパクト集合ならば， $A \times B \subset X \times Y$ もコンパクト集合である．

〔証明〕．命題 3.2.2 より， $A = X, B = Y$ の場合について示せば十分である． Z を任意の位相空間とする． X がコンパクトという仮定より，射影 $\text{pr}_{23} : X \times (Y \times Z) \rightarrow Y \times Z$ は閉写像で， Y がコンパクトより，射影 $\text{pr}_2 : Y \times Z \rightarrow Z$ は閉写像である．合成 $\text{pr}_3 = \text{pr}_2 \circ \text{pr}_{23}$ も閉写像であるから， $X \times Y$ はコンパクトである．

■

定理 4.4.6 (Tychonoff (AC)). $(X_i)_{i \in I}$ をコンパクト空間の族とする．この時，積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ はコンパクトである．

4.5 コンパクトハウスドルフ空間

4.5.1 連続写像の標準分解

コンパクト空間とハウスドルフ空間との間の Hom 集合

コンパクト空間とハウスドルフ空間との間の射は，閉写像で，かつ proper である．また，従って，全単射であることと同相であることが一致する．

命題 4.5.1. X を位相空間， Y を Hausdorff 空間とし， $f : X \rightarrow Y$ を連続写像とする．

- (1) X がコンパクトならば， f は閉写像である．
- (2) A が X のコンパクト集合ならば， $f(A)$ は Y の閉集合である．

〔証明〕．

- (1) 場面設定 任意の閉集合 $A \subset X$ について，像 $f(A) \subset Y$ が閉であることを示せば良い． f のグラフ $\Gamma \subset X \times Y$ を考えると， $f(A) = \text{pr}_2(\text{pr}_1^{-1}(A) \cap \Gamma)$ である．

終域 Hausdorff 性 Y が Hausdorff であるため， Γ は閉である (Hausdorff 性の特徴付け 4.1.6)．

挿入曲 $\text{pr}_1^{-1}(A)$ が閉集合であるため， $\text{pr}_1^{-1}(A) \cap \Gamma$ も閉集合である (積位相の特徴付け??より，射影は連続)．

始域 compact 性 X が compact であるため， $\text{pr}_2 : X \times Y \rightarrow Y$ は閉写像である．よって， $f(A) = \text{pr}_2(\text{pr}_1^{-1}(A) \cap \Gamma)$ は閉 (コンパクト性の特徴付け 4.4.4)．

- (2) 1. より，制限 $f|_A : A \rightarrow Y$ は閉写像である．その閉集合 A の像 $f(A)$ は閉である．

■

系 4.5.2. X をコンパクト空間， Y をハウスドルフ空間とし， $f : X \rightarrow Y$ を連続写像とする．

- (1) f が全単射ならば， f は同相写像である．
- (2) f が単射ならば， $f : X \rightarrow Y$ は閉埋め込みである．
- (3) 像 $f(X)$ は Y の閉集合であり， f が引き起こす可逆写像 $\bar{f} : X/R_f \rightarrow f(X)$ は商空間から部分空間への同相写像である．

〔証明〕．

- (1) 逆写像 $g: Y \rightarrow X$ が連続だと示せば良い. 任意の開集合 $U \subset X$ について, $F := X \setminus U$ は閉より, $g^{-1}(U) = g^{-1}(X \setminus F) = Y \setminus g^{-1}(F) = Y \setminus f(F)$ は Y の開集合である.
- (2) $f: X \rightarrow Y$ は閉写像でもあるから, 閉埋め込みになる.
- (3) 命題 4.5.1 より, $f(X)$ は閉集合になる. 系 4.4.3 より, 商空間 $X/R_f = p(X)$ はコンパクトである. 系 4.1.4 より, Hausdorff 空間 Y の部分空間 $f(X)$ は Hausdorff である. よって, 1. より, 全単射 \bar{f} は同型である.

■

4.5.2 コンパクトハウスドルフ空間の特徴付け

コンパクト集合の閉部分集合はコンパクトであり, Euclid 空間のコンパクト集合は有界閉集合と等価である.

命題 4.5.3 (Hausdorff 空間内でのコンパクト集合). X をハウスドルフ空間とする.

- (1) X の部分集合 A についての 2 条件
- (1) A はコンパクト集合である.
- (2) A は閉集合である.
- は, (1) \Rightarrow (2) が成り立つ, X がコンパクト空間である時に逆も成り立つ.
- (2) A, B が X のコンパクト集合ならば, $A \cap B$ も X のコンパクト集合である.

[証明].

- (1) \Rightarrow は包含写像 $i: A \rightarrow X$ の像 $i(A) = A$ は閉であることから従う. \Leftarrow は系 4.4.2 より, X がコンパクト空間であるとき, 閉集合 $A (= X \cap A)$ はコンパクトである.
- (2) 系 4.4.5 より, コンパクト集合の積 $A \times B$ は積空間 $X \times X$ のコンパクト集合である. X は Hausdorff 空間であるから, 特徴付け 4.1.2 より, $\Delta_X \subset X \times X$ は閉集合である. よって, $(A \times B) \cap \Delta_X = (A \cap B) \times (A \cap B)$ は $X \times X$ のコンパクト集合である. 連続写像 $\text{pr}_2: X \times X \rightarrow X$ の像 $\text{pr}_2((A \cap B) \times (A \cap B)) = A \cap B$ もコンパクトである. なお, この事実は, 積位相の特徴付け??により, 対角写像 $X \rightarrow X \times X$ が埋め込みであり, その制限により定まる同型 $A \cap B \rightarrow (A \times B) \cap \Delta_X$ からも分かる.

■

系 4.5.4 (コンパクトではない空間でのコンパクト集合). X を距離空間とし, X の部分集合 A について, 次の 2 条件

- (1) A はコンパクトである.
- (2) A は有界閉集合である.

は, (1) \Rightarrow (2) が成り立つ, $X = \mathbb{R}^n$ の時に逆も成り立つ.

[証明].

- (1) \Rightarrow (2) (1) 距離空間内のコンパクト集合は有界である (系 3.2.5). 距離函数に最大値の定理を適用することからえる.
- (2) 距離空間はハウスドルフである (命題??). 距離函数は実数に値をとっているために, 自由に点を近傍によって分離できるのである.
- (3) ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合である (命題 4.5.3).
- (2) \Rightarrow (1) 命題??. \mathbb{R}^n では有界閉集合は, Heine-Borel の定理の帰結だが, コンパクト空間の閉集合となる.

■

4.5.3 商空間への遺伝

コンパクトハウスドルフ空間のコンパクト部分集合を一点に潰して得られる空間は再びコンパクトハウスドルフ空間である。

命題 4.5.5 (ハウスドルフはコンパクト集合を一点に潰してもハウスドルフである). X をハウスドルフ空間とし, $A \subset X$ を空でないコンパクト集合とする. A を一点に潰して得られる空間 Y はハウスドルフである. さらに, X がコンパクトなら, Y もコンパクトである.

[証明] .

商空間の復習 $R_A := (A \times A) \cup \Delta_X$ とする. $q : X \rightarrow X/R_A = Y$ を商写像とし, $q(A) =: \{c\}$ とする. この一点集合は像位相について閉だから, $Y \setminus \{c\}$ は開である. 実際, Hausdorff 空間内のコンパクト集合 $A \subset X$ は閉より, $X \setminus A$ は開であり, $q^{-1}(Y \setminus \{c\}) = X \setminus q^{-1}(c) = X \setminus A$ を満たす集合 $Y \setminus \{c\}$ は開である. 従って, 制限 $q|_{X \setminus A} : X \setminus A \rightarrow Y \setminus \{c\}$ は同相写像である.

命題の言い換え この値域 $Y \setminus \{c\}$ は, Hausdorff 空間 X の部分空間 (これもまた Hausdorff) と同相だから, Hausdorff である. 証明としては, 逆写像について命題 4.1.3 による. 以下, 任意の点 $x \in X \setminus A$ に対して, c の開近傍 $U \subset Y$ と $q(x)$ の開近傍 $V \subset Y$ で互いに素なものを構成すれば良い.

A が compact だと $q(A) = c$ が近傍によって分離できる理由

コンパクト性の特徴付け 4.4.1 を用いる. $W := (X \times X) \setminus \Delta_X$ を考えると, X が Hausdorff より, これは開で, $x \notin A$ より, これは $A \times \{x\}$ の開近傍である. A はコンパクトだから,

$$A \times \{x\} \subset \tilde{U} \times \tilde{V} \subset W$$

を満たす A の開近傍 $\tilde{U} \subset X$ と x の開近傍 $\tilde{V} \subset X$ が存在する. $\tilde{U} \times \tilde{V} \subset W$ とは, 任意の $u \in \tilde{U}$ と $v \in \tilde{V}$ について $u \neq v$ ということだから, $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ である.

この像を $U := q(\tilde{U}), V := q(\tilde{V})$ と置けば, q は A を潰す商写像だから, $q^{-1}(\tilde{U}) = U, q^{-1}(\tilde{V}) = V$ が成り立つ. よって $q^{-1}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) = U \cap V = \emptyset$ で, また, $U \subset Y$ は $q(A) = c$ の開近傍で, $V \subset Y$ は $q(x)$ の開近傍である. よって, Y は Hausdorff である.

コンパクト性 X がコンパクトなら, その q による像である Y もコンパクトである. ■

4.5.4 コンパクトハウスドルフならば正規

系 4.5.6 (コンパクト・ハウスドルフ空間の互いに交わらない閉集合は, 開集合で分離できる). X がコンパクト・ハウスドルフ空間ならば, X は正規である.

[証明] . $A, B \subset X$ を互いに素な空でない閉集合とする. A の開近傍 $U \subset X$ と, B の開近傍 $V \subset X$ で, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものを構成すれば良い.

空間 Z の構成 compact-Hausdorff 空間の閉集合とは compact 集合であるから (命題 4.5.3), これを 1 点に潰して得られる空間 $Y := X \setminus (A \times A) \cup \Delta_X$ は compact-Hausdorff である (命題 4.5.5). この商写像を $q : X \rightarrow Y$ とすると, これは連続だから, $B' := q(B)$ も compact である (系 4.4.3). こうして, Y を 1 点に潰して得られる空間 $Z := Y \setminus (B' \times B') \cup \Delta_Y$ も compact-Hausdorff である. この商写像を $q' : Y \rightarrow Z$ とする.

Hausdorff 性から結論を得る $p := q' \circ q : X \rightarrow Z$ とし, $a, b \in Z$ を $p^{-1}(a) = A, p^{-1}(b) = B$ で定まる 1 点の名前とする ($A \cap B = \emptyset$ より well-defined である). $a \neq b$ だから, a の開近傍 $U' \subset Z$ と b の開近傍 $V' \subset Z$ で $U' \cap V' = \emptyset$ を満たすものが存在する. $U := p^{-1}(U'), V := p^{-1}(V')$ と置けば良い. ■

4.6 正規空間

Hahn-Banach の定理のように, $C(X; [0, 1])$ が X 上に分離族を定める空間の一つの十分条件が正規性である. 第2可算な正規空間が距離付け可能で, 可分距離空間を定める.

4.6.1 定義

定義 4.6.1 (regular, normal). Hausdorff 空間 X について,

- (1) 任意の非空閉集合 A と $x \notin A$ とが開近傍によって分離出来るとき, **正則**であるという.
- (2) 任意の非空閉集合 A, B が互いに素ならば, 近傍によって分離出来るとき, **正規**であるという.

4.6.2 特徴付け

命題 4.6.2 (正則性の特徴付け). X を Hausdorff 空間とする. 次の3条件は同値:

- (1) 閉集合 A と一点 $x \notin A$ が開近傍によって分離できる.
- (2) 任意の点 $x \in X$ の近傍 $x \in V$ について, x の開近傍 $x \in U$ が存在して $\overline{U} \subset V$ を満たす.
- (3) 空でない任意の閉集合 A について, これを一点に潰して得られる空間 $X/(\Delta_X \cup (A \times A))$ も Hausdorff である (正規性の命題 4.7.4 に当たる見方).

命題 4.6.3 (正規性の特徴付け). X を Hausdorff 空間とする. 次の3条件は同値:

- (1) 互いに交わらない任意の閉集合 A, B について, 開近傍によって分離できる.
- (2) 任意の閉集合 A の近傍 $A \subset V$ について, A の開近傍 $A \subset U$ が存在して $\overline{U} \subset V$ を満たす.
- (3) 互いに交わらない任意の閉集合 A, B について, Urysohn の距離関数によって分離できる (補題 4.6.5).

[証明].

- (1) \Rightarrow (2) $B := X \setminus V$ と定めると, $A \cap B \neq \emptyset$ より, $U \cap W = \emptyset$ を満たす開近傍 $A \subset U, B \subset W$ が存在する. 再び $C := X \setminus W$ と置くと, $A \subset U \subset C \subset V$ が成り立つが, C は閉集合より, $\overline{U} \subset C$ を得る. 2つ併せて, $A \subset \overline{U} \subset V$ である.
- (1) \Rightarrow (3) Urysohn の補題 4.6.5

■

4.6.3 正規であるための十分条件

命題 4.6.4. コンパクトハウスドルフ空間は正規であるが, パラコンパクトな Hausdorff 空間も正規である. 一方で, 局所コンパクトな空間は正規とは限らない.

4.6.4 Urysohn の補題

補題 4.6.5 (Urysohn's lemma). X を正規空間とする. A を X の閉集合, U を X の開集合で, $A \subset U$ を満たすものとする.

- (1) X の閉集合 B と, X の開集合 V で, $A \subset V \subset B \subset U$ を満たすものが存在する.
- (2) (Urysohn's lemma) 連続関数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ で, $A \subset f^{-1}(0) \subset f^{-1}([0, 1) \subset U$ を満たすものが存在する.

[証明].

- (1) 正規性の特徴付け 4.6.3 より.
- (2)



4.6.5 正規空間上の有界連続関数

定理 4.6.6 (Tietze の延長定理 (AC)). X を正規空間, $A \subset X$ を閉とする.

- (1) 制限 $F_A : C_b(X) \rightarrow C_b(A)$ は全射であり, 特に任意の $g \in C_b(A)$ に対して $f \in F_A^{-1}(g)$ は $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$ に選べる.
- (2) 制限 $C(X) \rightarrow C(A)$ も全射である.

系 4.6.7 (有界連続関数の空間が可分になる条件 (AC)). X を正規空間とする. 次の 2 条件は同値:

- (1) X はコンパクトかつ距離付け可能である.
- (2) $C_b(X)$ は一様位相について可分である.

4.6.6 1 の分解定理

定理 4.6.8. 正規空間の任意の局所有限な開被覆について, これに従属する 1 の分割が存在する.

4.7 局所コンパクト空間

4.7.1 定義

定義 4.7.1. 位相空間 X が局所コンパクトであるとは, 任意の点 $x \in X$ の (開) 近傍系 $\mathcal{O}(x)$ がコンパクト集合からなる近傍系を持つことを言う.

命題 4.7.2. 位相空間 X について, (1) \Rightarrow (2) が成り立つ. X が Hausdorff のとき, (2) \Rightarrow (1) も成り立つ.

- (1) 任意の点 $x \in X$ の任意の開近傍 $U \in \mathcal{O}(x)$ に対して, より小さな開近傍 $V \in \mathcal{O}(x)$, $V \subset U$ で相対コンパクトなものが存在し, $\bar{V} \subset U$ が成り立つ.
- (2) 任意の点 $x \in X$ の (開) 近傍系 $\mathcal{O}(x)$ がコンパクト集合からなる近傍系を持つ.

4.7.2 1 点コンパクト化による特徴付け

コンパクトハウスドルフ空間の開部分空間への同相写像をコンパクト化という.

定義 4.7.3 (relatively compact, locally compact, compactification, (Alexandroff) one-point compactification). X をハウスドルフ空間, Y をコンパクトハウスドルフ空間とする.

- (1) 開埋め込み $f : X \rightarrow Y$ が存在するとき, Y は X のコンパクト化であるという.
- (2) さらに, $Y \setminus f(X)$ が一点集合である時, Y は X の一点コンパクト化またはアレクサンドロフのコンパクト化であるといい, この点を無限遠点という.

命題 4.7.4 (局所コンパクトなハウスドルフ空間ならば, 1 点コンパクト化可能である). X をハウスドルフ空間とする. 次の 3 条件は同値である.

- (1) X は局所コンパクトである.
- (2) X のコンパクト化が存在する.
- (3) X の 1 点コンパクト化が存在する.

[証明] .

(3) \Rightarrow (2) 1 点コンパクト化は, コンパクト化の特別な場合である.

(2) \Rightarrow (1)

証明方針 コンパクト化 $f: X \rightarrow Y$ が存在する時, Y が compact Hausdorff, f が開埋め込みだから, 閉集合 $A \subset Y$ が存在して $f(X) = Y \setminus A$ と同相. よって, $X \simeq Y \setminus A$ として, X が局所コンパクトであると示せば良い.

任意に $x \in X$ を取る. $x \notin A$ であるから, Y が正規より (系 4.5.6), x の開近傍 U と A の開近傍 V が存在して $U \cap V = \emptyset$ を満たす. この時,

$$U \subset K := Y \setminus V \subset X = Y \setminus A$$

であるが, $K \subset Y$ は閉集合であるから, compact である (命題 4.5.3). よって, U は相対コンパクトである.

(1) \Rightarrow (3) X を局所コンパクト空間として, その1点コンパクト化 $i: X \rightarrow Y := X \coprod \{c\}$ を構成する.

証明方針 $\mathcal{O}_X \subset P(X)$ を X の開集合系とし, 新たに開集合とすべき集合を $\mathcal{V} := \{V \in \mathcal{O}_X \mid X \setminus V \text{ は } X \text{ のコンパクト集合}\}$ とする. $\mathcal{O} \subset P(Y)$ を, $\mathcal{O} := \mathcal{O}_X \cup \{V \coprod \{c\} \mid V \in \mathcal{V}\}$ とおくと, \mathcal{V} が filter の公理を満たすため, \mathcal{O} は Y の位相であり (問題 4.7.6.4), $i: X \rightarrow Y$ が開埋め込みであることを示す. 続いて, こうして得た (Y, \mathcal{O}) が compact Hausdorff であることを示す.

i, \mathcal{O} の定義 (1) $U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{V}$ について, $V \subset U$ とする. このとき $X \setminus U \subset X \setminus V$ は compact 集合の開部分集合だからコンパクトであり (命題 4.4.2), $U \in \mathcal{V}$ である.

(2) $(V_i)_{i \in I}$ を \mathcal{V} の有限族とすると, $X \setminus \bigcap_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus V_i)$ は系 4.4.2 よりコンパクトである. よって, $\bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}$. 以上より, 問題 4.7.6.4 より, \mathcal{O} は Y の位相であり, $i: X \rightarrow Y$ は開埋め込みである.

Hausdorff 性 X は Hausdorff であるから, あとは任意の $x \in X$ に対して c と近傍によって分離できることを示せば良い. X は局所コンパクトであるから, x の開近傍 U とコンパクト集合 K であって, $x \in U \subset K \subset X$ を満たすものが存在する. $V := Y \setminus K \in \mathcal{O}$ とすると, これは c の開近傍であり, $U \cap V = \emptyset$ である.

compact 性 Z を任意の位相空間とし, $z \in Z$ を任意の点とする. 任意の $Y \times \{z\}$ の開近傍 $W \subset Y \times Z$ を取る.

今, 積位相の特徴付け 4.4.1 への, $c \in Y$ の開近傍 $U \subset Y$ と $z \in Z$ の開近傍 $V \subset Z$ であって, $U \times V \subset W$ を満たすものが存在する. $U \cap X \in \mathcal{V}$ より, 補集合 $A := Y \setminus U = i(X \setminus (U \cap X))$ は compact である. W は $A \times \{z\}$ の開近傍でもあるから, $A \times \{z\} \subset A \times V' \subset W$ を満たす z の開近傍 $V' \subset Z$ が存在する. すると, z の開近傍 $V \cap V'$ について,

$$\begin{aligned} Y \times \{z\} &\subset Y \times (V \cap V') \\ &\subset (U \times V) \cup (A \times V') && \because Y = U \cup A, V \cap V' \subset V, V' \\ &\subset W \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, コンパクト性の特徴付け 4.4.1 より, Y はコンパクトである. ■

4.7.3 1点コンパクト化の位相

補題 4.7.5 (1点コンパクト化の位相の定め方の well-definedness). X を局所コンパクト空間, Y をコンパクトハウスドルフ空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を X の一点コンパクト化とする. $\{c\} = Y \setminus f(X)$ と置くと, 次が成り立つ.

- (1) $\{U \in P(Y) \mid U \text{ は } Y \text{ の開集合で } c \notin U\} = \{f(V) \mid V \text{ は } X \text{ の開集合}\},$
- (2) $\{U \in P(Y) \mid U \text{ は } Y \text{ の開集合で } c \in U\} = \{Y \setminus f(A) \mid A \text{ は } X \text{ のコンパクト集合}\}.$

[証明].

- (1) f は開埋め込みだから, $\bar{f}: X \rightarrow Y \setminus \{c\}$ は同相写像. $c \notin U$ を満たす部分集合 $U \subset f(X)$ が開集合であることは, U がある X の開集合の像であることに同値である.
- (2) Y は compact Hausdorff だから, 命題 4.5.3 より, U が開集合であることと, $Y \setminus U$ が compact であることは同値. 特に $c \in U$ の時は補集合 $Y \setminus U$ が $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ と同相だから, これは U がある compact 集合 $A := f^{-1}(U)$ の像の補集合であることに同値. ■

問題 4.7.6 (一点コンパクト化の位相の構成 (フィルター言葉で)). Y を位相空間, $X \subset Y$ を部分空間とし, 補集合は一点集合: $Y \setminus X = \{c\}$ とする. $i: X \rightarrow Y$ を包含写像とし, Y の開集合系を \mathcal{O}_Y , X の開集合系を \mathcal{O}_X とする. $\mathcal{V} := \{i^*(U) = U \cap X \mid U \in \mathcal{O}_Y\}$ は c の開近傍 とする.

(1) \mathcal{V} は次の 2 条件を満たす.

(1) (upward-closed) $U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{V}$ について, $V \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{V}$.

(2) (downward-directed) $(V_i)_{i \in I}$ が \mathcal{V} の有限族ならば, $\bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}$.

(2) 次の条件は, c が Y の孤立点でないことに同値.

(3) (proper) $\emptyset \notin \mathcal{V}$.

(3) X が Y の開部分空間であることと, Y の開集合系が $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X \sqcup \{V \sqcup \{c\} \mid V \in \mathcal{V}\}$ であることが同値である.

(4) X を位相空間とし, \mathcal{O}_X を X の開集合系, $\mathcal{V} \subset \mathcal{O}_X$ を (1),(2) を満たす部分集合とする. 無縁和 $Y = X \sqcup \{c\}$ に対して, $\emptyset \subset P(Y)$ を $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X \sqcup \{V \sqcup \{c\} \mid V \in \mathcal{V}\}$ と定めるとこれは Y の位相であることを示せ.

[証明].

(1) (1) は, $V \in \mathcal{V}$ ならば, $V \cup \{c\} \in \mathcal{O}_Y$ は c の開近傍. $V \subset U$ の時, $U \cup \{c\} = (U \cup V) \cup \{c\}$ も c の開近傍だから, $U \in \mathcal{V}$.

(2) は, 各 $V_i \cup \{c\}$ が c の開近傍だから, $\bigcap_{i \in I} (V_i \cup \{c\}) = (\bigcap_{i \in I} V_i) \cup \{c\}$ も c の開近傍である. よって, $\bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}$.

(2) c が Y の孤立点であることは, $\{c\} \in \mathcal{O}_Y$ が c の開近傍であることだから, これは $\{c\} \in \mathcal{V}$ であることに同値.

(3) $X \in \mathcal{O}_Y$ であるとき, X は開部分空間である. X が開部分空間であるとき, $i: X \rightarrow Y$ が開埋め込みであるから, $\mathcal{O}_X = i^* \mathcal{O}_Y$ であるが, $\mathcal{O}_Y \setminus \mathcal{O}_X$ は全て c の開近傍であるから, $\mathcal{O}_Y \setminus \mathcal{O}_X = \{V \sqcup \{c\} \mid V \in \mathcal{V}\}$ である.

(4) $(U_i)_{i \in I}$ を \mathcal{O}_X の族, $(V_j)_{j \in J}$ を $\{V \sqcup \{c\} \mid V \in \mathcal{V}\}$ の族として, 族 $(W_i)_{i \in I \sqcup J} := (U_i)_{i \in I} \sqcup (V_j)_{j \in J}$ を考えても一般性は失われない. $\bigcup_{i \in I \sqcup J} W_i = (\bigcup_{i \in I} U_i) \cup (\bigcup_{j \in J} V_j)$ は \mathcal{V} の条件 (1) より, \emptyset の元である. 同様にして有限族の共通部分についても \emptyset の元であることがわかる.

■

4.7.4 σ -コンパクト性

補題 4.7.7. X を局所コンパクト空間, \mathcal{U} を \mathcal{O}_X の基底とする. $\mathcal{U}' := \{U \in \mathcal{U} \mid U \text{ は相対コンパクト}\}$ も \mathcal{O}_X の基底である.

命題 4.7.8. X を局所コンパクト空間, $Y = X \cup \{b\}$ を一点コンパクト化とする. 次の 2 条件は同値.

(1) X は σ -コンパクトである.

(2) $\mathcal{O}(b)$ に, 可算な基本系が存在する.

4.7.5 距離付け可能性

定理 4.7.9. 次の 5 条件は同値:

(1) X は第 2 可算である.

(2) X は可分かつ距離付け可能.

(3) X は σ -コンパクトかつ距離付け可能.

(4) X は σ -コンパクトかつ, 任意の $x \in X$ について第 2 可算な開近傍 $U \in \mathcal{O}(x)$ が存在する.

(5) X の一点コンパクト化が第 2 可算である.

(6)

4.8 局所コンパクト空間の精緻化

位相多様体 (C^0 -多様体) は明らかに局所コンパクトである。局所コンパクトな空間に第2可算性を与えると、パラコンパクト性を持つ。これで、可微分多様体の定義には第2可算性が入るのである。パラコンパクトな多様体は、任意の開被覆に関して1の分割を持つ。

定義 4.8.1 (manifold). Hausdorff 空間 M と C^r -局所座標系 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ との組を C^r -**多様体**という。 C^0 -多様体は局所的に Euclid 空間と同相な空間のことであり、明らかに局所コンパクトかつ局所（弧状）連結である。

定義 4.8.2 (paracompact, Lindelöf). 位相空間 M について、

- (1) 開被覆 $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ が**局所有限**であるとは、 $\forall x \in M \exists U \in \mathcal{O}(x) \ |\ \{\alpha \in A \mid U_\alpha \cap U \neq \emptyset\}| \in \mathbb{N}$.
- (2) 被覆 $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ の**細分**とは、被覆 $(V_\beta)_{\beta \in B}$ であって、 $\forall \beta \in B \exists \alpha \in A \ V_\beta \subset U_\alpha$ を満たすものをいう。全ての元 U_α を縮めて作った被覆をいう。
- (3) 任意の開被覆が、局所有限な開細分^{†2}を持つとき、 M を**パラコンパクト**であるという。
- (4) 位相空間が **Lindelöf** または**可算被覆性**を持つとは、任意の開被覆が可算部分被覆を持つことをいう。

4.8.1 パラコンパクト性

定理 4.8.3 (局所コンパクト空間のパラコンパクト性の特徴付け). M を連結な局所コンパクト空間とする。次の4条件は同値。

- (1) M はパラコンパクト。
- (2) M には局所有限で局所コンパクトな開被覆 $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ を持つ：各 $\overline{U_\alpha}$ はコンパクト。
- (3) M は σ -コンパクト： M は高々可算個のコンパクト集合 $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ の和集合として表せる。
- (4) M は高々可算個の開集合 $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ の和で表せ、かつ、各 U_i は相対コンパクトで $\forall i \in \mathbb{N} \ \overline{U_i} \subset U_{i+1}$ を満たす。

定理 4.8.4 (パラコンパクト多様体の開被覆). M^n をパラコンパクトな位相多様体とし、 $\mathcal{U} = (\tilde{U}_i)$ を M^n の局所有限な開被覆とする。このとき、 \mathcal{U} の局所有限な細分 $\mathcal{V} = (V_j)$ であって、次の条件を満たすものが存在する： \mathcal{V} を M 上の開集合の族と考えたとき、 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1 \cup \cdots \mathcal{V}_n$ と分解でき、各 \mathcal{V}_k の元は互いに素な開集合族となっている。

4.8.2 第2可算ならパラコンパクト

系 4.8.5. 連結かつ局所コンパクトな空間 M について、次の2条件は同値。

- (1) M は可算基を持つ（第2可算である）。
- (2) M はパラコンパクトかつ連結成分が高々可算個である。

【証明】。

(1) \Rightarrow (2) まず、連結成分が非可算個であった場合は、全ての連結成分からなる開被覆については可算な部分被覆を持たないので矛盾。よって連結成分は高々可算個である。あとは、それぞれの連結成分がパラコンパクトであることを示せば良い。任意の開被覆に対して、可算な部分被覆が存在する。

■

^{†2} 元すべて開集合であるような被覆を開被覆ということと同様。

4.8.3 第2可算ならば Lindelöf

補題 4.8.6 (second-countable then Lindelöf). 第2可算な位相空間は、可算被覆性を持つ。すなわち、任意の開被覆に対して、可算な部分被覆が存在する。

[証明] .

私の案 可算な開基 $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ を1つ取る。 $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ を任意の開被覆とする。任意の $x \in M$ について、 $\exists_\alpha x \in V_\alpha$ であるが、 \mathcal{U} は M の開基だから、ある $i \in \mathbb{N}$ が存在して、 $x \in U_i \subset V_\alpha$ を満たす。こうして i と結びつけられる V_α を集めれば、可算な部分被覆となっている。

stackexchange ある種の背理法と言える論理マジック^{†3}

■

4.8.4 1の分割

命題 4.8.7 (パラコンパクトならば、任意の開被覆は1の分割を持つ (AC)). (X, \mathcal{O}_X) を位相空間とする。次の2条件は同値。

- (1) X はパラコンパクトな Hausdorff 空間である。
- (2) 任意の開被覆は従属する1の分割を持つ。

定理 4.8.8. 第2可算な C^r ($r \in [1, \infty]$)-多様体 M の局所有限かつ相対コンパクトな開被覆 $(O_\alpha)_{\alpha \in A}$ について、これに属する1の分解 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset C^r(M)$ で、各 f_α が M 上 C^r 級であるものが存在する。

- (1) $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset C^r(M)$.
- (2) $0 \leq f_\alpha \leq 1$.
- (3) $\text{supp } f_\alpha = \overline{\{x \in M \mid f_\alpha(x) \neq 0\}} \subset O_\alpha$.
- (4) $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha = 1$.

^{†3} <https://math.stackexchange.com/questions/2257690/if-x-is-second-countable-then-x-is-lindel>

第 5 章

写像空間

5.1 逆写像定理

5.1.1 Jacobi 行列

定義 5.1.1 (Jacobi 行列).

- (1) C^r 級同相写像は, 行列を定める: $J: C^r(U, V) \times U \rightarrow M_{np}(\mathbb{R}); (f, x) \mapsto J(f)(x)$.
- (2) 各点 $x \in U$ に対し, $J: \text{Diff}^r(U) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ は群準同型を定める.
- (3) $\text{rank}_x f := \text{rank}(J(f)(x))$ と定める.

補題 5.1.2. 自然な写像 $\Phi(\varphi, \psi): C^r(U, V) \rightarrow C^r(U_1, V_1)$ について,

$$\forall_{x \in U} \text{rank}_{\varphi(x)} \Phi(\varphi, \psi)f = \text{rank}_x f.$$

5.1.2 逆写像定理

Euclid 空間の射には, 局所的には, 奇妙な可逆性の特徴付けがある. この局所性が多様体の発想となる. 可微分写像は線型写像の空間に写される事実を使えば, ランクの半連続性から直ちに従う消息である.

逆写像定理も陰関数定理も, 証明には縮小写像の原理を用いてみる. 距離空間のこの構造が情報の根源であると信じる. 複素関数論の論理展開がその特殊化であるという見方が肝要. それぞれの可逆性の特徴付けがある.

定義 5.1.3 (局所同相). 次の 2 条件を満たす写像 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を, 原点の周りの C^r 級の局所同相写像という.

- (1) $\exists_{U \in \mathcal{O}(0)} \varphi \in C^r(U, \mathbb{R}^n), \varphi(0) = 0$.
- (2) $\exists_{W \in \mathcal{O}(0)} W \subset U \wedge \varphi|_W \in \text{Diff}^r(W, \varphi(W))$.

定理 5.1.4 (逆写像定理). f を \mathbb{R}^n の原点の近傍で定義された C^r ($r \in [1, \infty]$) 級写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ で, $f(0) = 0$ とする. この時, 次の 2 条件は同値.

- (1) f は原点の周りで C^r 級局所同相.
- (2) $\text{rank}_0 f = n$.

[証明].

方針 (2) \Rightarrow (1) を示せば良い. $A := J(f)(0) \in M_n(\mathbb{R})$ とおくと, $\text{rank} A = n$ である. この時, $A \times$ は線型な可微分同相写像 $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ を定めるから, $\bar{f} := A^{-1} \circ f$ も $\bar{f}(0) = 0$ を満たす C^r 級の写像 $U \rightarrow \mathbb{R}^n$ となり, 追加で $J(\bar{f})(0) = I_n$ を満たす. これについて (1) を導けば, 一般の $f = A \circ \bar{f}$ についても, 原点の周りの C^r 級の局所同相写像となる.

可逆射の構成

- (1) まず, 原点の近傍で定まる C^r 級の写像 $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n, g(x) := f(x) - x$ を考える. これは f による移動の変位ベクトルを表す. 以下, \mathbb{R}^n の距離 d をノルム $|x| := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ が定めるものとする.

g は特に C^1 級で (g' が距離 d に関して連続で), 仮定より $g'(0) = 1 - 1 = 0$ であるから, $\epsilon > 0$ が存在して, 任意の $i, j \in [n]$ に対し, $\overline{U_\epsilon(0)} \subset (Dg)^{-1}(U_{1/2n}(0))$, すなわち

$$\left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right| < \frac{1}{2n} \quad \text{on } \overline{U_\epsilon(0)}.$$

するとこの範囲では,

$$\begin{aligned} \forall x, x' \in U_\epsilon(0) \quad \exists \theta \in (0, 1) \quad |g_i(x) - g_i(x')| &= \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x + \theta(x' - x))(x_j - x'_j) \right| && \because \text{多変数の平均値の定理} \\ &\leq n \max_{x \in U_\epsilon(0), i, j \in [n]} \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right| |x - x'| \leq \frac{1}{2} |x - x'|. \end{aligned}$$

と評価できる. $i \in [n]$ は任意だったから, $|g(x) - g(x')| \leq \frac{1}{2} |x - x'|$. 特に, $|g(x)| \leq \frac{|x|}{2}$. ここで, $g: U_\epsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ は, Lipschitz 係数 $\frac{1}{2}$ の縮小写像であると言いたいが, 値域についてはまだよくわからない. 同様に, $x, f(x), f(f(x)), \dots$ という点列の挙動も不明である. そこで, $|g(x)| \leq \frac{|x|}{2}$ を用いて, 値域 m の方を先に制限することを考える.

(2) そこで, $U_{\epsilon/2}(0)$ 内の点 y に至る点 \bar{x} を逆算する.

$$\begin{array}{ccc} h: U_{\epsilon/2}(0) & \longrightarrow & C^r(U, \mathbb{R}^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & \longmapsto & h_y(x) := y - g(x) = y + x - f(x) \end{array}$$

を考えると, h_y は実は $h_y: U_\epsilon(0) \rightarrow U_\epsilon(0)$ (また $\overline{U_\epsilon(0)} \rightarrow U_\epsilon(0)$) を定める. 実際,

$$\begin{aligned} \forall x \in U_\epsilon(0) \quad |h_y(x)| &\leq |y| + |g(x)| \\ &\leq |y| + \frac{|x|}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

そして, h_y は完備距離空間 $(\overline{U_\epsilon(0)}, d)$ 上の縮小写像である:

$$\forall x, x' \in U_\epsilon(0) \quad |h_y(x) - h_y(x')| = |g(x) - g(x')| \leq \frac{1}{2} |x - x'|.$$

したがって, 不動点 $\bar{x} = h_y(\bar{x}) \in \overline{U_\epsilon(0)}$ がただ一つ存在する.

さらに, $y \in U_{\epsilon/2}(0)$ だから, $\bar{x} \in U_\epsilon(0)$ である. 実際, $x = \bar{x}, x' = 0$ を考えると, $|h_y(\bar{x}) - y| = |\bar{x} - y| \leq \frac{|\bar{x}|}{2}$ より, $\bar{x} \leq 2|y| < \epsilon$ が従う.

(3) 以上より, $W := f^{-1}(U_{\epsilon/2}(0)) \cap U_\epsilon(0)$ とおくと, $f|_W: W \rightarrow U_{\epsilon/2}(0)$ は全単射となる. 全射性は構成より, 単射性は不動点の一意性から従う. W は確かに 0 の開近傍となっている.

■

要諦 5.1.5.

方針 $A \times$ という同型については, hom 関手の消息で局所同相性は簡単に伝播するので, これについては無視してよく, 仮定 $J(f)(0) = I_n$ も追加して良い. つまり, 原点では微分が 0 でほぼ変化しないことを仮定して示せば良い.

5.1.3 系としての陰関数定理

逆関数定理の系としての陰関数定理

逆写像定理は同じ次元の間の Euclid 空間の射の局所的可逆性を言った. この系としての陰関数定理は, 次元が違えど, 低い方の次元に揃えれば局所的に「可逆」であることを言っていると捉えられる.

系 5.1.6. $f \in C^r(U, V)$ ($U, V \subset \mathbb{R}^n$) とする. このとき, 次の2条件は同値.

- (1) f は可逆である: $f \in \text{Diff}^r(U, V)$.
- (2) f は全単射で, U の各点 $x \in U$ で $J(f)(x)$ が正則.

要諦 5.1.7. 層でやったような, 局所的な可逆写像を貼り合わせた感覚. しかし複素関数論では, 正則性と複素微分可能性が同値であるから, (2) の後半の条件が退化して見えなくなる.

系 5.1.8 (陰関数定理). $r \in [1, \infty], n \leq p$ について, $f: U \stackrel{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ を \mathbb{R}^n の原点の周りで定義された C^r 級写像で, $f(0) = 0$ を満たすものとする. このとき, 次の2条件は同値.

- (1) \mathbb{R}^p の原点の周りの C^r 級局所同相写像 φ が存在して, $\varphi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ が成り立つ.
- (2) $\text{rank}_0 f = n$.

系 5.1.9 (低次元への写像の場合). $r \in [1, \infty], n \geq p$ について, $f: U \stackrel{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ を \mathbb{R}^n の原点の周りで定義された C^r 級写像で, $f(0) = 0$ を満たすものとする. このとき, 次の2条件は同値.

- (1) \mathbb{R}^n の原点の周りの C^r 級局所同相写像 ψ が存在して, $f \circ \psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p)$ が成り立つ.
- (2) $\text{rank}_0 f = p$.

5.1.4 陰関数定理

写像空間の縮小写像の不動点として, 陰関数や常微分方程式の解が得られる.

一般的な位相空間論を準備し, 距離空間での例を見て, さらにこれの特徴づける位相的構造を見てきた. これで, 位相空間論の発展を促した源流である, 関数空間に取り組める.

5.2 有界連続関数の空間

命題 5.2.1. X を位相空間, Y を距離空間とする.

- (1) 写像 $D: \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(X \times Y; \mathbb{R})$ を, $D(f) := D_f(x, y) = d(f(x), y)$ で定める. するとこれは単射であり, $\|D_f - D_g\|_\infty = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$ は $l^\infty(X; Y)$ に距離を定める. $f \in C_b(X; Y)$ と D_f が連続であることは同値.
- (2) $C_b(X; Y)$ は $l^\infty(X; Y)$ の閉部分空間となる.
- (3) $e: C_b(X; Y) \times X \rightarrow Y$ は C_b の一様位相と積位相について連続になる.

第 6 章

参考文献

参考文献

- [1] 斎藤毅『集合と位相』（東京大学出版会、2016）
- [2] 彌永昌吉・彌永健一『集合と位相 II』（岩波講座 基礎数学 9, 1977）.
- [3] 森田紀一『位相空間論』（
- [4] Peter Johnstone - The point of pointless topology (83)
- [5] Peter Johnstone, Stone Spaces, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 3, Cambridge University Press 1982. xxi+370 pp. MR85f:54002, reprinted 1986.
- [6] <https://ncatlab.org/nlab/show/Introduction+to+Topology>
- [7] Steven Vickers, Topology via Logic, Cambridge University Press (1989)
- [8] F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Veit & Co., Leipzig, 1914.
- [9] Nicolas Bourbaki 位相 I
- [10] Analysis Now