目次

第 1 章

Brown 運動

1.1 記法

記法 1.1.1. 正整数 $k, n \geq 1$ について，

(1) $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ で，C^k-級で，任意の k 階以下の偏導関数は有界である関数の空間とする．
(2) $C_0^k(\mathbb{R}^n) := C_c(\mathbb{R}^n) \cap C_b^k(\mathbb{R}^n)$ を，コンパクト台を持つもののなす部分空間とする．
(3) $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ は滑らかな関数であって，その関数自身とその任意の偏導関数は高々多項式の速度で増加する関数の空間とする．[†1]
(4) $C_b^\infty(\mathbb{R}^n) := C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_b^k(\mathbb{R}^n)$ を任意の偏導関数が有界なもののなす部分空間とする．
(5) $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_c(\mathbb{R}^n)$ をコンパクト台を持つ滑らかな関数の空間とする．

また，$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，$L^p(\Omega)$ によってその上の L^p 空間を表す．

1.2 Gauss 過程

1.2.1 Gauss 空間

X が d 次元 Gauss 変数であるとは，任意の線型汎関数 $\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ について $\alpha(X)$ が Gauss 確率変数であることと同値．この他にも，Gauss 変数の独立性は Gauss 空間で幾何学的に捉えられる．

記法 1.2.1. $X \sim N(0, 0)$ として，定数関数は Gauss 確率変数とする．

命題 1.2.2 (Gauss 確率変数全体の空間は閉部分空間をなす)**.** (X_n) を $X \in \mathrm{Meas}(\Omega, \mathbb{R})$ に確率収束する Gauss 確率変数の列とする．このとき，X も Gauss で，族 $\{|X_n|^p\}$ は一様可積分で，$X_n \to X$ は任意の $p \geq 1$ について L^p-収束もする．

定義 1.2.3 (Gaussian subspace)**.** Hilbert 空間 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の閉部分空間であって，中心化された Gauss 確率変数のみからなるものを **Gauss 空間**という．

命題 1.2.4 (独立性の特徴付け)**.** $(G_i)_{i\in I}$ をある Gauss 空間の閉部分空間の族とする．次の 2 条件は同値：

(1) σ-代数 $\sigma(G_i)$ の族は独立である．
(2) 各 G_i は組ごとに直交する：$\forall_{i,j\in I}\ G_i \perp G_j$.

1.2.2 Gauss 測度

命題 1.2.5 (一般化された独立同分布列の存在定理)**.** H を可分実 Hilbert 空間とする．ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とその上の確率変数の族 $X = (X_h)_{h\in H}$ が存在して，次の 2 条件を満たす：

[†1] 緩増加関数．https://ncatlab.org/nlab/show/tempered+distribution

(1) 写像 $X : H \to \mathrm{Meas}(\Omega, \mathbb{R}); h \mapsto X_h$ は線型である．
(2) 任意の $h \in H$ について，確率変数 X_h は中心化された Gauss 変数で，線型写像 $X : H \to L^2(\Omega)$ は等長である：$E[X_h^2] = \|h\|_H^2$.
(3) $\mathrm{Im}\, X \simeq_{\mathrm{Hilb}} H$ は $L^2(\Omega)$ の Gauss 部分空間である．

注 1.2.6. この同一視により，独立性 $X_h \perp\!\!\!\perp X_{h'}$ は添字空間 H における直交性として理解できる．

定義 1.2.7. $(A, \mathcal{A}, \mu)$ を可分な σ-有限測度空間とする．$H := L^2(A, \mathcal{A}, \mu)$ として，Gauss 変数族 $X = (X_h)_{h \in H}$ を取る．この写像 X を $(A, \mathcal{A})$ 上の**強度 μ の Gauss 測度**という．測度確定な可測集合 $F \in \mathcal{A}, \mu(F) < \infty$ の Gauss 測度 $X(F)$ は $X(1_F)$ とも表す．

定義 1.2.8 (equivalence / version, finite dimensional marginal distributions)**.**

(1) 同じ状態空間 $(E, \mathcal{E})$ を持つ $(\Omega, \mathcal{F}, P), (\Omega', \mathcal{F}', P')$ 上の 2 つの過程 X, X' が**同値である**または一方が他方の**バージョン**であるとは，任意の有限部分集合 $\{t_1, \cdots, t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ と任意の可測集合 $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{E}$ について，

$$P[X_{t_1} \in A_1, \cdots, X_{t_n} \in A_n] = P'[X'_{t_1} \in A_1, \cdots, X'_{t_n} \in A_n]$$

(2) 測度 P の $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}) : \Omega \to E^n$ による押し出しを $P_{t_1,\cdots,t_n} := P^{(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})}$ で表す．任意の有限集合 $\{t_1, \cdots, t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ に関する押し出し全体の集合 $\mathcal{M}_X$ を**有限次元分布** (f.d.d) と呼ぶ．

補題 1.2.9 (過程の同値性の特徴付け)**.** X, Y について，次の 3 条件は同値．

(1) X, Y は同値である．
(2) $\mathcal{M}_X = \mathcal{M}_Y$.

定義 1.2.10 (modification, indistinguishable)**.** 定義された確率空間も状態空間も等しい 2 つの過程 X, Y について，

(1) 2 つは**修正**であるとは，$\forall_{t \in \mathbb{R}_+}\ X_t = Y_t$ a.s. を満たすことをいう．†2
(2) 2 つは**識別不可能**であるとは，殆ど至る所の $\omega \in \Omega$ について，$\forall_{t \in \mathbb{R}_+}\ X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ が成り立つことをいう．

補題 1.2.11.

(1) X, Y が互いの修正であるならば，同値である．
(2) X, Y が互いの修正であり，見本道が殆ど確実に右連続ならば，識別不可能である．

1.2.3　Gauss 過程

定義 1.2.12 (Gaussian process, centered)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実確率過程 $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ について，

(1) **Gauss 過程**であるとは，任意の有限部分集合 $\{t_1, \cdots, t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ について，確率ベクトル $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ は n 次元正規分布に従うことをいう．
(2) Gauss 過程 B の**共分散**とは，関数 $\Gamma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}; (s, t) \mapsto \mathrm{Cov}[X_s, X_t] = E[(X_s - E[X_s])(X_t - E[X_t])]$ をいう．
(3) **中心化されている**とは，$\forall_{t \in \mathbb{R}_+}\ E[X_t] = 0$ を満たすことをいう．

定義 1.2.13 (semi-definite positive function)**.** 関数 $\Gamma : T \times T \to \mathbb{R}$ が**半正定値**であるとは，T の任意の有限部分集合 $\{t_1, \cdots, t_d\} \subset T$ $(d \in \mathbb{N})$ に対して，行列 $(\Gamma(t_i, t_j))_{i,j \in [d]}$ は半正定値であることをいう．

命題 1.2.14 (Gauss 過程の共分散の特徴付け)**.** T を任意の集合とする．関数 $\Gamma : T \times T \to \mathbb{R}$ と任意の関数 $m : T \to \mathbb{R}$ について，次の 2 条件は同値．

(1) ある平均 m の Gauss 過程が存在して，その共分散である．
(2) 対称な半正定値関数である．

[証明]． Kolmogorov の拡張定理 1.2.16 による．ここでは $a = 0$ として証明する．

(1)⇒(2)　T の対称性は積の可換性より明らか．任意の有限部分集合 $\{t_i\}_{i \in [n]} \subset T$ と任意のベクトル $a = (a_i)_{i \in [n]} \in \mathbb{C}^n$ を取る．

---

†2 [1] ではこの概念を equivalence または varsion と呼んでいる．

これについて，2 次形式 $a^*(\Sigma(i,j))a$ が非負であることを示せば良い．

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j\in[n]} &= \Gamma(t_i,t_j)a_i\overline{a_j} \\
&= E\left[\sum_{i\in[n]} a_i(X_{t_i}-E[X_{t_i}])\sum_{j\in[n]}\overline{a_j}(X_{t_j}-E[X_{t_j}])\right] \\
&= E\left[\left|\sum_{i\in[n]} a_i(X_{t_i}-E[X_{t_i}])\right|^2\right] \ge 0.
\end{aligned}
$$

(2)⇒(1)　確率分布族 $(P_{t_1,\cdots,t_n})_{n\in\mathbb{N}_{\ge1},\{t_i\}\subset T}$ を，$\mathbb{R}^n$ 上の平均 0，分散共分散行列を $\Sigma_{t_1,\cdots,t_n} := (\Gamma(t_i,t_j))_{i,j\in[n]}$ とする正規分布とする．Γ は対称は半正定値関数としたので，$\Sigma_{t_1,\cdots,t_n}$ も対称な半正定値行列であり，これに対応する正規分布はたしかに存在する．また定義より，一貫性条件を満たす．よって，$(P_{t_1,\cdots,t_n})_{n\in\mathbb{N}_{\ge1},\{t_i\}\subset T}$ を有限次元周辺分布とする確率過程 $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が存在するが，これは平均 0 で分散 Γ の Gauss 過程である．

■

補題 1.2.15. X, Y を Gauss 確率変数とする．$X_t := tX + Y$ $(t\in\mathbb{R}_+)$ によって定まる確率過程 $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は Gauss 過程であって，平均 $m_X(t) = tE[X]+E[Y]$ と分散

$$
\Gamma_X(s,t) = st\mathrm{Var}[X] + (s+t)\mathrm{Cov}[X,Y] + \mathrm{Var}[Y]
$$

を持つ．

［証明］． 平均は期待値の線形性より明らか．分散については，次のように計算が進む．ただし，見やすくするため $\mu_X := E[X], \mu_Y := E[Y] \in \mathbb{R}$ とする．

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s,t) &= E[(X_s-E[X_s])(X_t-E[X_t])] \\
&= E[X_sX_t] - (s\mu_X+\mu_Y)E[X_t] - (t\mu_X+\mu_Y)E[X_s] + (s\mu_X+\mu_Y)(t\mu_X+\mu_Y) \\
&= stE[X^2] + (s+t)E[XY] + E[Y^2] + (s\mu_X+\mu_Y)(t\mu_X+\mu_Y) = st\mathrm{Var}[X] + (s+t)\mathrm{Cov}[X,Y] + \mathrm{Var}[Y].
\end{aligned}
$$

■

1.2.4　Kolmogorov の拡張定理

定理 1.2.16. 確率分布族 $\{P_{t_1,\cdots,t_n}\}_{n\in\mathbb{N}_{\ge1},t_i\in\mathbb{R}_+}$ が次の条件を満たすとき，ある確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ が存在して，これらを有限次元周辺分布とする確率過程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が存在する．

(C1) $P_{t_1,\cdots,t_n} \in P(\mathbb{R}^n)$ である．
(C2) 任意の部分集合 $\{t_{k_1} < \cdots < t_{k_m}\} \subset \{t_1 < \cdots < t_n\}$ について，$P_{t_{k_1}},\cdots,P_{t_{k_m}}$ は $P_{t_1,\cdots,t_n}$ の対応する周辺分布である．

1.3　定義と性質

Brown 運動は，平均 0 で分散が $\Gamma=\min$ であるような Gauss 過程であって，殆ど確実に連続であるような過程である．

定義 1.3.1 (Brownian motion). $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の実確率過程 $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が **Brown 運動**であるとは，次の 4 条件を満たすことをいう：

(B1) $B_0 = 0$ a.s.
(B2) $\forall_{n=2,3,\cdots}\ \forall_{0\le t_1<\cdots<t_n}\ B_{t_n}-B_{t_{n-1}},\cdots,B_{t_2}-B_{t_1}$ は独立．
(B3) 増分について，$B_t - B_s \sim N(0,t-s)$ $(0\le s<t)$．
(B4) $\Omega \to \mathrm{Meas}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}); \omega \mapsto (t\mapsto B_t(\omega))$ について，殆ど確実に $t\mapsto B_t(\omega)$ は連続．

d 個の独立な Brown 運動 $B^1,\cdots,B^d$ の積 $B=(B^1_t,\cdots,B^d_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を **d 次元 Brown 運動**という．

補題 1.3.2 (高次元正規分布の特徴付け)**.** 正規分布に従う独立な実確率変数 $B_{t_1},\cdots,B_{t_n}$ について，

(1) $B_{t_1},\cdots,B_{t_n}$ の線型結合は正規分布に従う確率変数を定める．
(2) 積写像 $(B_{t_1},\cdots,B_{t_n}):\Omega\to\mathbb{R}^n$ は n 次元正規分布に従う．
(3) 一般に，n 次元確率ベクトル $X(X_1,\cdots,X_n):\Omega\to\mathbb{R}^n$ が n 次元正規分布に従うことと，任意の線型汎関数 $f\in(\mathbb{R}^n)^*$ に関して $f(X):\Omega\to\mathbb{R}$ が正規確率変数であることとは同値．

［証明］．

(1) $B_{t_1}\sim N(\mu_1,\sigma_1),B_{t_2}\sim N(\mu_2,\sigma_2)$ として，$B_{t_1}+B_{t_2}$ が正規分布に従うことを示せば十分である．一般に，独立な 2 つの確率変数の和の特性関数は，元の確率変数の特性関数の積となる：

$$\varphi_{X+Y}(u)=E[e^{iuX+Y}]=E[e^{iuX}e^{iuY}]=E[e^{iuX}]E[e^{iuY}]=\varphi_X(u)\varphi_Y(u).$$

よって，

$$\begin{aligned}\varphi_{B_{t_1}+B_{t_2}}(u)&=\exp\left(i\mu_1u-\frac{1}{2}\sigma_1^2u^2\right)\exp\left(i\mu_2u-\frac{1}{2}\sigma_2^2u^2\right)\\&=\exp\left(i(\mu_1+\mu_2)u-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)u^2\right)\end{aligned}$$

であるが，これは $B_{t_1}+B_{t_2}\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ を意味する．

(2) $(B_{t_1},\cdots,B_{t_n}):\Omega\to\mathbb{R}^n$ の特性関数は，それぞれの特性関数の積となるが，正規分布の特性関数の積は正規分布の特性関数となることは (1) で見た：$\varphi_{(B_{t_1},\cdots,B_{t_n})}(u)=\exp\left(i(\mu_1u_1+\cdots+\mu_nu_n)-\dfrac{1}{2}(\sigma_1^2u_1^2+\cdots\sigma_n^2u_n^2)\right)$.

(3) $\Rightarrow$ は (1) による．$\Leftarrow$ について，まず射影 $\mathrm{pr}_i\in(\mathbb{R}^n)^*$ $(i\in[n])$ について考えることより，$\mathrm{pr}_i(X)=X_i$ は正規分布に従うことが分かる．$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i)$ とおく．このとき，$\Sigma:=(\mathrm{Cov}[X_i,X_j])_{i,j\in[n]},\mu:=(E[X_i])_{i\in[n]}$ とおくと，$X\sim N_d(\mu,\Sigma)$ となることを示せば良い．任意の $f\in(\mathbb{R}^n)^*$ を取ると，ある $a\in\mathbb{R}^n$ を用いて $f(x)=a^\top x$ と表せるが，$f(X)$ の特性関数は X の特性関数の，1 次元部分空間 $\mathbb{R}a$ への制限になる $\varphi_{f(X)}=\varphi_X|_{\mathbb{R}a}$ ことに注意すれば，(1) で計算したとおり $f(X)\sim N(f(\mu),a^\top\Sigma a)$ より

$$\varphi_{f(X)}(u)=\exp\left(if(\mu)u-\frac{1}{2}(a^\top\Sigma a)^2u^2\right)=\exp\left(i\mu\cdot au-\frac{1}{2}\left((ua)^\top\Sigma(ua)\right)^2\right)$$

が成り立つことは，任意の $a\in\mathbb{R}^n$ について，$\varphi_{f(X)}$ は，$N_d(\mu,\Sigma)$ の $\mathbb{R}a$ への制限に等しいことを表していると分かる．したがってたしかに $X\sim N_d(\mu,\Sigma)$ である．

■

要諦 1.3.3 (Cramer-Wold)**.** (3) の結果は $\mathbb{R}^n$ 上の一般の確率分布について成り立ち，Cramer-Wold の定理と呼ばれる．

補題 1.3.4 (多次元正規確率変数の成分間の独立性の特徴付け)**.** $Y_1:=(X_1,\cdots,X_{k_1})^\top,\cdots,Y_l=(X_{k_{l-1}},\cdots,X_d)^\top$ $(l\ge2)$ のように，X を l 個の確率変数 $Y_1,\cdots,Y_l$ に分ける．この分割に対して，Σ のブロック $\Sigma_{a,b}:=\mathrm{Cov}[Y_a,Y_b]$ $(a,b\in[l])$ を考える．

(1) $Y_1,\cdots,Y_l$ は独立．
(2) $\forall_{a,b\in[l]}\ a\ne b\Rightarrow\Sigma_{a,b}=O$.

命題 1.3.5. 実確率過程 $B=(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ について，次の 2 条件は同値．

(1) B は (B1),(B2),(B3) を満たす．
(2) B は平均 0 共分散 $\Gamma(s,t):=\min(s,t)$ の Gauss 過程である．

［証明］．

(1)⇒(2)　Gauss 過程であることを示すには，任意の $0<t_1<\cdots<t_n\in\mathbb{R}_+$ を取り，$B:=(B_{t_1},\cdots,B_{t_n}):\Omega\to\mathbb{R}^n$ が n 次元の正規分布に従うことを示せば良い．まず，仮定 (B1),(B2) より，$B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}}$ は独立であり，それぞれが正規分布に従う．したがって，積写像 $A:=(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}}):\Omega\to\mathbb{R}^n$ は n 次元正規分布に従う（補題 (2)）.

行列

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

が定める線形変換を $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ とおくと，これは明らかに可逆で，$B=f(A)$ が成り立つ．ここで，任意の線型汎関数 $q\in(\mathbb{R}^n)^*$ に関して，$q(B)=q(f(A))$ は，$q\circ A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が線型であることから，正規分布に従う．よって，B も正規分布に従う．

また，仮定 (B3) より平均は $m(t)=E[B_t]=0$ で，共分散は，$s\ge t$ のとき，増分の独立性 (B2) に注意して

$$\Gamma(s,t)=\mathrm{Cov}[B_s,B_t]=E[B_sB_t]=E[B_s(B_t-B_s+B_s)]=E[B_s(B_t-B_s)]+E[B_s^2]=s.$$

Γ の対称性より，これは $\Gamma(s,t)=\min(s,t)$ を意味する．

(2)⇒(1)(B1)　平均が 0 であることより，特に $m(0)=E[B_0]=0$．よって，$B_0=0$ a.s.

(B2)　Gauss 過程であることより，組 $A:=(B_{t_n}-B_{t_{n-1}},\cdots,B_{t_2}-B_{t_1})$ は n 次元正規分布に従う．これらが独立であることを示すには，補題より A の分散共分散行列 Σ_A の非対角成分がすべて 0 であることを示せば良い．平均が 0 で $\Gamma(s,t)=\min(s,t)$ であることより，任意の $1<i<j\in[n]$ について，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[B_{t_i}-B_{t_{i-1}},B_{t_j}-B_{t_{j-1}}]&=E[(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})]\\&=E[B_{t_i}B_{t_j}]-E[B_{t_{i-1}}B_j]-E[B_{t_i}B_{t_{j-1}}]+E[B_{t_{i-1}}B_{t_{j-1}}]=i-(i-1)-i+(i-1)=0.\end{aligned}$$

(B3)　平均が 0 で $\Gamma(s,t)=\min(s,t)$ であることより，

$$E[(B_t-B_s)^2]=E[B_t^2]+E[B_s^2]-2E[B_tB_s]=t+s-2s=t-s.$$

■

1.4　構成

構成のアイデアは複数ある．

(1) Gauss 過程としての構成.
(2) Fourier 級数としての構成.
(3) 対称な酔歩の分布極限としての構成.

指針 1.4.1. $T>0$ として，区間 $[0,T]$ 上の過程 $B=(B_t)_{t\in[0,T]}$ を条件 (B1) から (B4) を満たすように構成すれば，$T=1$ とした場合について，過程の列 $(Y^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ を「つなげた」過程を

$$W_t:=\left(\sum_{i=0}^{\lfloor t\rfloor-1}Y_1^{(i)}\right)+Y_{t-[t]}^{[t]}$$

と定めると，これが目標の Brown 運動となる．よって以降の構成の議論では，有界区間 $[0,T]$ に注目して議論する．

1.4.1　Gauss 過程としての構成

定理 1.4.2 (Kolmogorov's continuity criterion / 正規化定理)**.** 実過程 $X=(X_t)_{t\in[0,T]}$ が $\exists_{\alpha,\beta,K>0}\ \forall_{s,t\in[0,T]}\ E[|X_t-X_s|^\beta]\le K|t-s|^{1+\alpha}$ を満たすならば，X のある修正 $\widetilde{X}$ が存在して，任意の $\gamma<\dfrac{\alpha}{\beta}$ について次の 2 条件を満たす．

(1) $\exists_{G_\gamma\in\mathrm{Meas}(\Omega',\mathbb{R})}\ \forall_{s,t\in[0,T]}\ |\widetilde{X}_t-\widetilde{X}_s|\le G_\gamma|t-s|^\gamma$.
(2) $\widetilde{X}$ の見本道は γ-次 Holder 連続である．

要諦 1.4.3. Kolmogorov の拡張定理により存在が証明される，平均 0 共分散 $\Gamma(s,t) = \min(s,t)$ の Gauss 過程は，この十分条件を満たす．

構成 1.4.4. $\Gamma(s,t) = \min(s,t)$ は明らかに対称である．さらに半正定値であることを示せば，これを共分散とする平均 0 の Gauss 過程が存在する 1.2.14．まず，$\min(s,t) = \int_{\mathbb{R}_+} 1_{[0,s]}(r)1_{[s,t]}(r)dr$ であることに注意すると，任意の $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ と $a_1,\cdots,a_n \in \mathbb{R}$ について，

$$\begin{aligned}\sum_{i,j\in[n]} a_ia_j \min(t_i,t_j) &= \sum_{i,j\in[n]} \int_0^\infty 1_{[0,t_i]}(r)1_{[0,t_j]}(r)dr \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n a_i 1_{[0,t_i]}(r)\right)^2 dr \ge 0.\end{aligned}$$

最後に，この過程が条件 (B4) を満たすことを見れば良い．これは Kolmogorov の正規化定理 1.4.2 による．任意の $0 \le s \le t$ について，$B_t - B_s \sim N(0, t-s)$ であり，正規分布の奇数次の中心積率は 0 で偶数次の中心積率は

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} \quad E[|B_t - B_s|^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}(t-s)^k$$

と表せるから，ある B の修正が存在して，任意の閉区間 $[0,T]$ 上で $\gamma < \frac{k-1}{2k}$ について γ-次 Holder 連続である．特に，任意の $\gamma < \frac{1}{2}$ について，B の見本道 $t \mapsto B_t(\omega)$ は殆ど至る所 γ-Holder 連続である．

1.4.2　ランダムな係数を持った Fourier 級数としての構成

$t \in [0,\pi]$ を固定した関数 $f(s) = s \wedge t \in S^*([0,\pi])$ の Fourier 級数を計算することで，

$$s \wedge t = \frac{st}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin ks \sin kt}{k^2}$$

を得る．すると，$Z_n \sim N(0,1)$ について，

$$W_t := \frac{t}{\sqrt{\pi}} Z_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^\infty Z_k \frac{\sin kt}{k}$$

と定めれば，$(W_t)_{t\in[0,\pi]}$ は平均 0 で共分散 $E[W_sW_t] = s \wedge t$ の Gauss 過程であることが期待できる．あとは，上記の Fourier 級数の収束の問題が残るのみである．これは以下の議論で $e_n(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt$ と取った場合であり，このときの Brown 運動 W_t の表示を **Paley-Wiener 表現**という．また，Levy と Ciesielski は基底としてウェーブレットの一例である Haar 関数系を取った．

記法 1.4.5. $T > 0$ とし，$L^2([0,T])$ の正規直交系 $(e_n)_{n\ge 0}$ を取る．$\{Z_n\}_{n\ge 0} \subset L^2(\Omega)$ を $N(0,1)$ に従う独立同分布確率変数列とする．

定理 1.4.6. 上述の設定において，

(1) $\sum_{n=0}^\infty Z_n \int_0^t e_n(r)dr$ は $L^2(\Omega)$ 内で収束する．

(2) この収束は殆ど至る所一様収束である：$\sup_{t\in[0,T]} \left|\sum_{n=0}^N Z_n \int_0^t e_n(r)dr - B_t\right| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$

(3) 極限 $B \in L^2(\Omega)$ は中心化された共分散 $\Gamma = \min$ を持つ Gauss 過程である．

定義 1.4.7 (skelton / Cameron-Martin subspace).

$$H := \left\{ w(t) = \int_0^t h(x)dx \in C_{(0)}([0,1]) \;\middle|\; h \in L^2([0,1],dx) \right\}$$

と定めると，これは内積 $(f_1, f_2) := \int_0^1 h_1 h_2 dx$ について Hilbert 空間となる．これを W_0 の骨格，または Cameron-Martin 部分空間という．

1.5 Wiener 積分

1.6 Wiener 空間

1.7 Brownian Filtration

1.8 Markov 性

1.9 Brown 運動に付随する martingale

1.10 強 Markov 性

Laplace 作用素

$P_t[f(x)] = E[f(x+B_t)]$ をおくことにより，$\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ は $C_0(\mathbb{R})$ 上で Hille-吉田の意味での強連続半群となり，その生成作用素 $\lim_{t\to 0} \dfrac{P_t - I}{t} = \dfrac{\nabla}{2}$ が Laplace 作用素である．I は恒等作用素とした．

第 2 章

確率解析

確率論ははじめから偏微分方程式論と密接に関係していたことを思うと，確率論自体が測度論で基礎付けられることは自然であった．さらに，確率積分なる概念も自然に定義できるはずである．

Brown 運動 B_t は微分可能ではないし，有界変動にもならないので，Stieltjes 積分としては定義できる道はない．連鎖律は伊藤の公式と呼び，微分は出来ないから積分の言葉で定式化される．余分な右辺第 3 項が特徴である．

2.1 確率積分

2.2 不定確率積分

2.3 一般の過程の積分

2.4 伊藤の公式

2.5 田中の公式

2.6 伊藤の公式の多次元化

2.7 Stratonovich 積分

2.8 後退確率積分

2.9 積分表現定理

2.10 Girsanov の定理

第 3 章

微分作用素と発散作用素

第 4 章

確率微分方程式

元々 Markov 過程論から純粋に数学的に生じた問題意識の解決のために確率微分方程式が開発された．しかし，確率論的な現象は自然界にありふれている．常微分方程式の定める流れに沿って輸送された物理量は，移流方程式と呼ばれる 1 階の偏微分方程式を満たす．Brown 運動に沿って輸送された物理量（熱など）は，熱伝導方程式・拡散方程式と呼ばれる 2 階の偏微分方程式を満たす．この対応関係は確率微分方程式を導入することでさらに一般化され，2 階の放物型・楕円形の偏微分方程式の解を確率的に表示することが出来るようになる．こうして，確率微分方程式は，ポテンシャル論・偏微分方程式論や微分幾何学との架け橋になる．

Brown 運動は，空間的に一様な確率場での積分曲線だと思えば，さらに一般に空間的な一様性の仮定を取った場合が確率微分方程式であり，これは Brown 運動の変形として得られるというのが伊藤清のアイデアである．

4.1　概観

4.1.1　最適輸送理論

定義 4.1.1.

4.1.2　移流方程式

Brown 運動は，位置を忘れて粒子の視点から見た，確率ベクトル場から受ける「流れ」だと理解できる．したがってその背景には確率ベクトル場がある．

定義 4.1.2 (advection, 時間的に一様なベクトル場による輸送方程式)**.**

(1) 物理量のスカラー場や物質がベクトル場によって輸送されること・経時変化することを，**移流**という．

(2) 定ベクトル $b = (b^1, b^2) \in \mathbb{R}^2$ が定める空間一様な移流に関する初期値問題 $u = u(t, x)$ は，

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + b \cdot \nabla u = 0, \quad (t > 0, x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2), \\ u(0, x) = f(x) \in C^1(\mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

と表される．このとき，$X_t(x) := x - bt$ は，時刻 t に x に居る粒子が，時刻 0 にどこにいたかを表す．よって，初期状態として与えられた物理量 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を用いて，時刻 t に位置 $x \in \mathbb{R}^2$ で観測される物理量は $f(X_t(x))$ で表される．これは大数の法則に物理的な意味論を与える**??**.

議論 4.1.3 (変数係数の移流問題)**.** ベクトル場 $b = b(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対して，方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b(t, x) \cdot \nabla u = 0 \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^2)$$

を考える．$y \in \mathbb{R}^2$ から出発した粒子の位置を表す変数 $Y_t \in \mathbb{R}^2$ を固定して，そこでの時間変化を表す常微分方程式に関する初期値

問題 $\dot{Y}_t = b(t, Y_t)$ $(t \in \mathbb{R}_+)$; $Y_0 = y \in \mathbb{R}^2$ を考える．すると，解 $u(t, x)$ は次を満たす必要がある：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}(u(t, Y_t(y))) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, Y_t(y)) + \dot{Y}_t(y) \cdot \nabla u(t, Y_t(y)) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + b \cdot \nabla u\right)(t, Y_t(y)) = 0.\end{aligned}$$

よって，$u(t, Y_t(y)) = u(0, Y_0(y)) = f(y)$ なる第一積分が見つかったことになる．

こうして元の偏微分方程式は，$y \in \mathbb{R}^2$ に居た粒子が受けることになる流れ Y_t に沿った輸送を記述する方程式であったと理解できる．または，ベクトル場による移流方程式とは，ある移流 Y_t の第一積分が満たすべき方程式とも見れる．†1

注 4.1.4 (2 つの関連)**.** いま，$Y_t : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$ は，各 $y \in \mathbb{R}^2$ に対して，これが受けることになる力の時系列 $Y_t(y)$ を与えている．これが可逆であるとする：$X_t := Y_t^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$．すると，出発点 y が t 時刻にいる位置 x について，$y = X_t(x)$ と辿る確率過程になる．これは解について $u(t, x) = f(X_t(x))$ なる表示を与える．

ベクトル場が時間に依存しないとき，Y_t は可逆であり，逆 X_t は常微分方程式 $\dot{X}_t = -b(X_t), X_0 = x$ を満たす．定数係数の場合は，これを解いたものと見れるから，たしかに一般化となっている．

4.1.3　Brown 運動が定める確率ベクトル場

移流方程式は，時間変化するベクトル場 $\mathbb{R}_+ \to \mathrm{Map}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ による物理量の輸送を考えた．もし，ベクトル場が確率的であったら？前節の例はひとつの見本道に過ぎないとしたら？すなわち，前節ではスタート地点 $y \in \mathbb{R}^2$ を根源事象とみて，時間変化するベクトル場を確率過程と見たが，ここに新たにランダム性の発生源を加えるのである．

4.1.4　確率微分方程式

例 4.1.5 (空間的に一様な場合)**.** $b \in \mathbb{R}^2, \alpha = (\alpha^i_k)_{i,k\in[2]}$ が定める確率過程 $X_t(x) := x - \alpha B_t - bt$ $(t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}^2)$ を考える．X_t は，定数係数ベクトル場による輸送と，Brown 運動とを合成した運動に他ならない．実際，仮に B_t が t について微分可能であるならば，$\dot{X}_t = -\alpha\dot{B}_t - b$ となるから，時間発展するベクトル場 $-\alpha\dot{B}_t - b$ による移流であると考えられる．α が Brown 運動の強さと歪みの情報を含んでいる．ただし，Brown 運動の時刻 t における $y \in \mathbb{R}^2$ に関する分布は

$$P[B_t \in dy] = p(t, y)dy := \frac{1}{2\pi t}e^{-|y|^2/2t}dy$$

と表せる．

すると，X_t による輸送の平均値を

$$u(t, x) := E[f(X_t(x))]$$

とおけば，これは

$$q(t, x, z) := \frac{1}{2\pi t|\det\alpha|}\exp\left(-\frac{|\alpha^{-1}(z - x + bt)|^2}{2t}\right)$$

とおくことで

$$\begin{aligned}u(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x - al - bt)p(t, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(z)q(t, x, z)dz.\end{aligned}$$

と整理出来る．これは熱伝導方程式と呼ばれる放物型方程式の一般解であり，$q(t, x, z)$ が一般解と呼ばれるものである：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} a^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - b \cdot \nabla u, \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^2).$$

---

†1 これが Kolmogorov が発見したものだった？

例 4.1.6 (変数係数の場合). α, b が共に $x \in \mathbb{R}^2$ に依存する場合，任意の $t > 0$ について，常微分方程式

$$\dot{X}_t = \alpha(X_t)\dot{B}_t + b(X_t) \quad (X_0 = x \in \mathbb{R}^2)$$

を考えたい．しかし B_t は微分可能でないから，積分形で代わりに表現することを考える．すなわち，$\dot{B}_s ds = \frac{dB_s}{ds} ds = dB_s$ とし，この右辺を定義することを考える．

$$X_t = x + \int_0 t\alpha(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds.$$

すると次の問題は，右辺第 2 項が Stieltjes の意味での積分として定義することは出来ない．B_t は有界変動でないので，線積分の発想はお門違いである．これは確率論的な考察で乗り越えることが出来る．

この確率微分方程式の解 X_t を求めれば，平均値 $u(t,x)$ は放物型偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^2 a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + b(x)\cdot\nabla u \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^2, a(x) := \alpha(x)^t\alpha(x))$$

を満たすことになる．これはいわば，確率過程 X_t から得られる平均処置効果のような統計量の 1 つが，偏微分方程式で記述される物理法則を満たすということに過ぎない．X_t は非常に豊かな情報を湛えていて，偏微分方程式はその 1 断面に過ぎないと言えるだろう．

第 5 章

無限次元確率微分方程式

確率微分方程式はランダムなゆらぎを持つ常微分方程式であるから，同様にランダムなゆらぎを持つ偏微分方程式に当たる概念も自然に現れるはずである．

参考文献

[1] David Nualart and Eulalia Nualart "Introduction to Malliavin Calculus"
[2] Daniel Revuz, and Marc Yor "Continuous Martingales and Brownian Motion"
[3] Giuseppe Prato - Introduction to Stochastic Analysis and Malliavin Calculus
[4] Vershynin - High-Dimensional Probability
[5] Richard Bass - Stochastic Processes
[6] 舟木直久『確率微分方程式』