目次

数理最適化理論の源流は，18 世紀に Euler や Lagrange らが主に力学に関連する極値問題あるいは変分問題を統一的に取り扱う方法を研究したことに遡る．しかし，現代の最適化理論が大きく発展を遂げたのは，George Dantzig が 1947 年に線型計画問題に対する単体法を開発し，初めて実用に強く抜けた．

第 1 章

凸解析

最適化問題が凸性を満たす時，局所的に最適ならば大域的に最適であることが従う重要なクラスである．

1.1 凸集合

定義 1.1.1. 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が $\forall_{u,v\in S}\ \forall_{\lambda\in[0,1]}\ (1-\lambda)u+\lambda v \in S$ を満たす時，**凸**であるという．

補題 1.1.2. $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合，$\lambda \in \mathbb{R}$ を実数とする．

(1) $C_1 + C_2$ は凸である．
(2) λC_1 は凸である．
(3) $C_1 \cap C_2$ は凸である．
(4) 開核 C_1° は凸である．
(5) 閉包 $\overline{C_1}$ は凸である．

1.2 分離定理

補題 1.2.1 (超平面)**.** 非零なベクトル $p \in \mathbb{R}^n$ と定数 $c \in \mathbb{R}^\times$ が定める超平面 $H = \langle -, p\rangle = c$ を考える．半空間 $H_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid {}^t px \geq c\}, H_- := \{x \in \mathbb{R}^n \mid {}^t px \leq c\}$ は凸である．

命題 1.2.2. $C \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合で，$y \notin C$ とする．この時，ある超平面 $H \subset \mathbb{R}^n$ が存在して，$y \in \overset{\circ}{H}_-, C \subset \overset{\circ}{H}_+$ を満たす．

命題 1.2.3. $C \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合で，$y \in \partial C$ とする．この時，$y \in H$ を満たす超平面 $H \subset \mathbb{R}^n$ が存在して，$C \subset H_+$ を満たす．

補題 1.2.4. $\emptyset \subsetneq K \subset \mathbb{R}^n$ を閉凸集合とする．集合 K 内で，ノルムが最小であるものが一意的に存在する．

［証明］.

存在 ノルム $\|\cdot\| : K \to \mathbb{R}$ はコンパクト集合上の連続関数だから，最小値を取るベクトル $v \in K$ が存在する．
一意性 $y \in V$ も最小のノルム $\|y\| =: \delta$ を持つとする．K の凸性 $\dfrac{x+y}{2} \in K$ より，$\left|\dfrac{x+y}{2}\right| \geq 2\delta$ であるから，$|x-y|^2 = 2|x|^2+2|y|^2-|x+y|^2 \leq 2|x|^2+2|y|^2-4\delta^2 = 0$ より $x = y$.

■

要諦 1.2.5. 一意性の証明まじか．

定理 1.2.6 (分離定理)**.** 互いに素な空でない凸部分集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ について，超平面 $\langle -, v\rangle = c$ によって A と B が分離できる：$A \subset H_+, B \subset H_-$.

1.3　線型不等式の定理

Kuhn-Tucker の定理の証明にも登場した，Minkowski-Farkas の定理は凸集合の分離定理と密接な関係がある．また無裁定条件が状態価格の存在と同値であるという数理ファイナンスにおける最重要の主張も，本質的には凸集合の分離定理（あるいは無限次元における対応物である Hahn-Banacha の拡張定理）を基礎としている．[a]

[a] http://web.econ.keio.ac.jp/staff/ito/pdf03/me03sepa.pdf

記法 1.3.1. 非負ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n_+$，正ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n_{++}$ とする．

補題 1.3.2. 部分空間 $L \subset \mathbb{R}^n$ とその直交補空間 $L^\perp$ について，次の 2 条件は同値．

(1) $L \cap \mathbb{R}^n_+ = 0$.

(2) $L^\perp \mathbb{R}^n_{++} \neq \emptyset$.

定理 1.3.3 (Minkowski-Farkas' lemma (02)). $d_0, \cdots, d_K \in \mathbb{R}^N$ を N 次元の縦ベクトルとする．この時，次のいずれか一方のみが成立する．

(1) $(d_1 \ \cdots \ d_K)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_K\end{pmatrix} = d_0$ を満たす非負縦ベクトル $\lambda \geq 0$ が存在する．

(2) $hd_0 < 0$ かつ $\forall_{j\in[M]}\ hd_j \geq 0$ を満たす横ベクトル $h \in \mathbb{R}^N$ が存在する．

または (1) は「(2)：任意の $h^T(d_1 \cdots d_K) \geq 0$ を満たす横ベクトル $h^T \in \mathbb{R}^N$ について，$h^T d_0 \geq 0$ である．」と同値である，といっても良い．

［証明］．

$\Rightarrow$ 　$y^T A \geq 0^T$ を満たす任意の $y \in \mathbb{R}^N$ について，$y^T A = y^T A^{\exists} x$ で，$y^T A \geq 0^T$ に $x \geq 0$ も併せると，$y^T A \geq 0$.

$\Leftarrow$ 　A の列ベクトル $a_1, \cdots, a_K$ の生成する凸錐を $S := \left\{\sum_{i=1}^K x_i a_i \mid x_i \geq 0\right\}$ とすると，S は A による $\mathbb{R}^K_+ := \{x \in \mathbb{R}^K \mid x \geq 0\}$ の像だから，(1) が成立しないとすると，b は像には入らないということだから $b \notin S$．すると分離定理 1.2.2 より，ある $y \in \mathbb{R}^N$ が存在して，$y^T a_i \geq 0$ かつ $y^T b < 0$ を満たす．よって矛盾．

■