目次

第 1 章

正則関数

1.1 正則関数の定義と幾何学的性質

のちに等角写像として特徴付けるが，それ以前にそのことを匂わせる幾何学的性質を豊かに持つ．

定義 1.1.1 (normal / analytic function)**.** 関数 $f:\mathbb{C}\overset{\text{open}}{\supset}D\to\mathbb{C}$ が各点において微分係数を持つとき，**正則**または**解析的**という．

補題 1.1.2 (正則関数が定める実関数)**.** $f:D\to\mathbb{C}$ を正則関数とする．$f=u+iv$ と表せるとき，$u,v:D\to\mathbb{R}$ を**実部**と**虚部**という．これらは，

(1) Cauchy-Riemann 方程式を満たす：$u_x=v_y, u_y=-v_x$.
(2) 調和関数である：$\triangle u=0, \triangle v=0$.

一般に，上の 2 条件を満たす実関数の組 (u,v) を**共役調和関数**という．次が成り立つ：

(3) u,v を調和関数とする．$u+iv$ は正則関数である．

系 1.1.3 (正則関数の微分係数の各種表現と Jacobian の特徴付け)**.** f が $z_0\in D$ で正則とする．

(1) $f'(z_0)=\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)=2\dfrac{\partial u}{\partial z}(z_0)$.
(2) $F(x,y):=f(z)$ とすると，$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ も微分可能であり，$\det J_F(x_0,y_0)=|f'(z_0)|^2$.

要諦 1.1.4 (正則関数の局所可逆性について)**.** ここから，$f'(z)\neq 0$ ならば z の近傍で f 位相同型を定めることが，陰関数定理から従う．が，より複素解析的な証明の方が簡潔で本質的である．また Jacobian が $|f'(z)|^2$ であることについては，線積分について無限小線分の長さが $|f'(z)|$ 倍されることと等角写像であることとの単純な帰結ともみれる！ Jacobi 行列の非対角成分がないのである．

正則関数の大域的可逆性について

陰関数定理の議論の時に夢想したことがあるであろうことに，各点で Jacobian が 0 でないならば，その局所的な可逆写像を繋ぎ合わせて大域的な逆射を構成できないか？ということである．正則関数において，この探求の行手を阻むものはただ一つで，像が重なってしまうことである．そこで，定義域と値域を，重なったフィルムを引き剥がすように拡張すれば，一価な単射が定まるかもしれない．

1.2 正則性の特徴付け

1.2.1 Cauchy-Riemann 作用素による特徴付け

定義 1.2.1 (Wirtinger derivative / Cauchy-Riemann operator)**.** 次によって定まる作用素 $\mathcal{O}(D)\to\mathcal{O}(D)$

$$\partial_z f=\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\overline{\partial} = \partial_{\overline{z}} f = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

を**コーシー・リーマン作用素**という．

定義 1.2.2 (totally differentiable)**.** 関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が**全微分可能**とは，実線型関数 $L : D \to \mathbb{C}; x + yi \mapsto \alpha x + \beta y$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ が存在して，$f(w+z) = f(w) + L(z) + o(|z|)$ が成り立つことをいう．

補題 1.2.3 (Wirtinger 微分の well-defined 性)**.** $f : D \to \mathbb{C}$ が全微分可能であるとする．

(1) $L(z) = f_x(w)x + f_y(w)y$ が成り立つ．

(2) $f_z := (f_x - if_y)/2, f_{\overline{z}} := (f_x + if_y)$ と置くと，$L(z) = f_z(w)z + f_{\overline{z}}(w)\overline{z}$ が成り立つ．

命題 1.2.4 (微分作用素による特徴付け)**.** $f : D \to \mathbb{C}$ について，次は同値．

(1) f は $a \in D$ で正則．

(2) f は $a \in D$ で全微分可能かつ $f_{\overline{z}}(a) = 0$．

1.2.2　等角写像としての特徴付け

定義 1.2.5 (conformal mapping)**.** C^1-級写像 $f : D \to \mathbb{C}$ が $p \in D$ で**等角**であるとは，f が引き起こす C^1-道の対応 $\gamma \mapsto f \circ \gamma$ が，p での接空間の内積を保つことをいう．

命題 1.2.6 (等角性による特徴付け)**.** $f : D \to \mathbb{C}$ が C^1-級であるとする．次は同値．

(1) $p \in D$ で等角である．

(2) $\partial_z f(p) \neq 0$ かつ $\partial_{\overline{z}} f(p) = 0$．

1.3　整級数

正則関数を構成する強力な手法となる．特に，理論展開の初期段階で指数関数を定義するのに用いられる．この手法の**普遍性**，すなわち任意の正則関数が整級数展開によって得られることはのちの理論で得られる．

定義 1.3.1. 級数のうち，$\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ を用いて $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と表せるものを**整級数**という．

1.3.1　Abel の定理

定理 1.3.2 (Abel)**.** 任意の整級数に対して，**収束半径** $R \in [0, \infty]$ が定まる：

(1) $\Delta(0, R)$ 上にて，整級数は絶対収束する．

(2) $\forall_{r \in [0,R)}$ について $[\Delta(0, r)]$ 上にて，整級数は一様収束する．

(3) $\Delta(\infty, R)$ 上にて，級数は発散する．

(4) $\Delta(0, R)$ 上にて整級数は微分可能で，その導関数は項別微分によって得られ，同じ収束半径を持つ．特に，整関数は $\Delta(0, R)$ 上で正則関数を定める．

(5) 収束半径 R は $1/R := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ で与えられる．

[証明]． R が求まればこれは一意であることは明らか．いま，$1/R := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ として，(1) から (4) の性質を示す．

(1) 任意に $z \in \Delta(0, R)$ を取ると，$|z| < \rho < R$ を満たす ρ が取れる：$1/\rho > 1/R$．このとき，limsup の定義から，$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}}\ \forall_{n \geqslant n_0}\ |a_n|^{1/n} < 1/\rho \Leftrightarrow |a_n| < 1/\rho^n$．特に $|a_n z^n| < \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$ であるから，三角不等式より，整級数はこの z において絶対収束する．

(2) また特に，任意の $\rho < \rho' < R$ に対して，$|a_n z^n| \leqslant (\rho/\rho')^n$ によってえ収束する正項優級数が構成できるから，Weierstrass

の M-判定法より，一様収束である．

(3) $|z| > R$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ に対しては，$R < \rho < |z|$ を満たす ρ が取れる：$1/\rho < 1/R$．このとき $|a_n| > 1/\rho^n$ を満たす n が無限に存在するから，$|a_n z^n| > \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$ i.o. 特に整級数は発散する．

(4) 項別微分が定める級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ は同じ収束半径を持つことは，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ による．あとは，$\Delta(0,R)$ 上で定める一様収束極限を f_1 とし，$f'(z) = f_1(z)$ を示せば良い．

■

1.3.2　収束円周上での挙動

> S は $(-\infty, 1)$ に関して対称な角領域で，1 を頂点とし，角が π より小さいものとなる．特に，S 内の 1 を通る任意の曲線は，単位円周 $\partial\Delta$ に接しない．$\exists_{M\in\mathbb{R}}\ |1-z| \leqslant M(1-|z|)$ とは，点 1 よりも円周 $\partial\Delta$ の方に一定以上の比率で近づかないことをいう．これを Stolz の角ともいう．

定理 1.3.3 (Abel 2)**.** 収束列 $(a_n) \in c(\mathbb{N};\mathbb{C})$ が定める級数 $f(z) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ について，$\frac{|1-z|}{1-|z|}$ が有界になるような経路 $z \in \mathrm{Im}\,\gamma \subset \Delta$ で近づければ，$\lim_{S\ni z\to 1} f(z) = f(1)$ が成り立つ．

1.4　関数列の一様収束

> 復習する．

定義 1.4.1. $E \subset \mathbb{C}$ 上の関数列 (f_n) が**一様収束**するとは，$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant n_0}\ \forall_{x\in E}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ を満たすことをいう．

1.4.1　一様収束の性質

定理 1.4.2 (一様収束は連続性を保つ)**.** (f_n) を $E \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数列とし，極限 f に一様収束するとする．このとき，f は連続である．

［証明］． 任意の $x_0 \in E$ と $\epsilon > 0$ をとる．

(1) f は (f_n) の一様収束極限だから，$\exists_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{x\in E}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3$．
(2) f_n は連続だから，$\exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in E}\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x_0) - f_n(x)| < \epsilon/3$．

以上より，任意の $|x - x_0| < \delta$ を満たす $x \in E$ に対して，

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon.$$

■

定理 1.4.3. $E \subset S$ を距離空間 S の部分集合とし，$x \in S$ をその集積点とする．(f_n) が f に一様収束するとき，$(\lim_{t\to x} f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ は収束し，

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

1.4.2　コンパクト一様収束

> 一方で，連続関数の列が連続関数に収束するとき，そのモードが一様収束であるとは限らない．

定理 1.4.4. (f_n) をコンパクト集合 K 上の連続関数の列とする．このとき，

(1) (f_n) はある連続関数 f に各点収束する．
(2) (f_n) は広義単調減少列である．

ならば，(f_n) は f に一様収束する．

1.4.3　一様収束と導関数

定理 1.4.5. $[a,b]$ 上の可微分関数の列 (f_n) は，ある $x_0 \in [a,b]$ において各点収束するとする．導関数が定める列 (f'_n) が一様収束するならば，元の列 (f_n) も一様収束し，極限と微分が可換になる：$\forall_{x\in[a,b]}\ f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'(x)$.

1.4.4　一様収束の判定法

命題 1.4.6 (一様収束の判定法)**.** (f_n) を E 上の関数の列で，各点収束極限 f を持つとする．

(1) (f_n) は一様収束する．
(2) (Cauchy criterion) $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geqslant n_0}\ \forall_{x\in E}\ |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$.
(3) $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

命題 1.4.7 (Weierstrass M-test)**.** 関数列 (f_n) は収束する優級数 $\{M_n\} \subset \mathbb{C}$ を持つとする：$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \|f_n\|_\infty \leqslant |M_n|, \sum_{n\in\mathbb{N}} M_n \in \mathbb{C}$. このとき，級数列 $(i = 1)^n f_i$ は一様収束する．

1.5　指数関数

多項式，有理関数の次に，絶対に外せない正則関数が指数関数である．これを早速整級数を用いて定義する．

1.5.1　定義と性質

定義 1.5.1.

$$e^z := 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

によって定まる整関数 $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を**指数関数**という．

[証明] ．この整級数が $\mathbb{C}$ 上で収束することを示すには，$\sqrt[n]{n!} \to \infty$ を示せば良い． ■

補題 1.5.2. e は

(1) 微分方程式 $f'(z) = f(z), f(0) = 1$ を満たすただ一つの解である．
(2) 指数法則を満たす．

1.5.2　周期性

写像 $f(y) = e^{iy}$ は，実数の加法群から単位円周 $S^1 := \partial\Delta$ の乗法群への Lie 群としての準同型を定めており，この核は $2\pi\mathbb{Z}$ となる．exp が定める同型 $\overline{\exp} : \mathbb{Z}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} S^1$ がトーラスとの同型を導く．よって，exp の逆関数というものは本来考えられず，あるとするならば無限個の値を持つ多価関数で，それぞれ $2\pi i$ の整数倍の差を持つ．

定理 1.5.3 (指数関数の周期性)**.** 指数関数 exp は周期である．すなわち，ある正実数 $\pi \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して，

$$e^w = 1 \Leftrightarrow w = 2\pi in \ \ (n \in \mathbb{Z})$$

を満たす．

［証明］． $w = x + yi$ と置くと，$e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y) = 1$ であるが，$|\cos y + i \sin y| = \cos^2 y + \sin^2 y = 1$ より，$|e^x| = 1$．$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ は全単射なので，$x = 0$ と分かる．
続いて，y の一番小さい解は $y = 2\pi$ であること，そしてその他の元は全てこれの整数倍で尽くされることを示す． ■

1.5.3 対数関数

$\log : \mathbb{C}^\times \to ?$ の像は代数的に考えれば $2\pi\mathbb{Z}$ のようなものになるべきである．あるいは，実用上は局所切断 (分枝) を取りたいものである．

定義 1.5.4. $f : D \to \mathbb{C}$ が**対数関数**であるとは，$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ の D 上での切断であることをいう：$\forall_{z\in D}\ \exp(\mathrm{Log}\,(z)) = z$．このとき $0 \notin D$ が必要．

要諦 1.5.5. こうして，対数関数をまず，指数関数の局所切断の全体と捉えておく．これは真の対数関数の制限ともみなせる．Ahlfors では真の対数関数をまずは (定義域を Riemann 面に拡張することなく) 集合値関数と捉えており，制限として得られる一価関数を**分枝**と呼んでいる．

定理 1.5.6. $\mathrm{Log}\ : R := \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ を $\mathrm{Log}\,(z) := \log|z| + i \arg z$ と定めると，これは $\exp$ の R 上での切断である：$\forall_{z\in R}\ \exp(\mathrm{Log}\,(z)) = z$．また，$R$ は Log の定義域として極大である．

1.6 一次変換

多項式と有理関数とは解析関数の重要な例であるが，これらのより自然な見方を探求してみる．すると正則関数の例の一つに収まるには極めて豊かな性質が見えてくる．

1.6.1 一次変換群

1 次変換群は $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}I = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ の構造を持つ複素 3 次元の Lie 群で，これは射影直線 $P^1(\mathbb{C})$ または Riemann 球面の位相変換群である．任意の Riemann 面の基本群は Mobius 群の離散部分群となり，特に重要な離散部分群として modular 群を持つ．

定義 1.6.1. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を用いて $S(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ で定まる変換を**1 次変換**という．

議論 1.6.2. 一次変換の扱いにくさの本質は非斉次性である．そこで，$z = z_1/z_2$ と見ると斉次化出来て，

$$w := \frac{w_1}{w_2} = \frac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2}$$

という，「比の間の対応」とみなせる．このことから，任意の行列のスカラー倍は同じ変換を定めることが分かる．そこで，商群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ を $\mathrm{PSL}(\mathbb{C})$ と表し，これが一次変換群に同型である．なお，行列の α 倍は行列式の α^2 倍に等しく，行列式を 1 に規格化する操作は，2 つのスカラー倍 $\pm\alpha$ によって達成されるので，さらに ± 1 で割る必要がある．
点 z に対して一見自由度を増やして 2 変数を用いて $z = z_1/z_2$ と見てから割り，「$\mathbb{C}$ の非零元の間の比全体の集合」を考えることは，斉次座標によって多様体の構造を持つ射影直線 $P^1(\mathbb{C})$ 上の点を考えることに等しい．そこでは，$\infty = [1 : 0]$ と対応するから，無限が出現しないという美点もある．構成からこれは Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ に同相である．

命題 1.6.3 (標準分解)**.** 任意の $S \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ は，

(1) 平行移動 $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 回転・拡大 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) 反転 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

の積に分解できる．

1.6.2　非調和比

定理 1.6.4 (一次変換は鋭推移的である)**.** $\hat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 z_2, z_3, z_4 に対して，この順に $1, 0, \infty$ に移す一次変換 S_{z_2,z_3,z_4} がただ一つ存在する．すなわち，対応 $S : [\hat{\mathbb{C}}]^3 \to \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ は単射である．

[証明]．

構成

$$S(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}\right)\left(\dfrac{z - z_3}{z - z_4}\right) & z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \text{ のとき}, \\ \dfrac{z - z_3}{z - z_4} & z_2 = \infty \text{ のとき}, \\ \dfrac{z_2 - z_4}{z - z_4} & z_3 = \infty \text{ のとき}, \\ \dfrac{z - z_3}{z_2 - z_3} & z_4 = \infty \text{ のとき}, \end{cases}$$

と置けば良い．

一意性　$1, 0, \infty$ を動かさない 1 次変換は恒等写像だけであることを示せば良い．$S = \dfrac{az + b}{cz + d}$ と置く．

$$\frac{a + b}{c + d} = 1. \qquad \frac{b}{d} = 0, \qquad \frac{a}{c} = \infty,$$

より，$b = c = 0, a = d$．$ad - bc = 1$ より，$a = d = 1$．よって，$S = \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$．

■

定義 1.6.5 (cross ratio / anharmonic ratio)**.** 相異なる 3 点 $z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して，$(z_1, z_2, z_3, z_4) := S_{z_2,z_3,z_4}(z_1)$ を**非調和比**という．

定理 1.6.6. 相異なる 4 点 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ と任意の一次変換 $T \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ に対して，$(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$

[証明]． 対応 $S : [\hat{\mathbb{C}}]^3 \to \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ の単射性より，$S_{z_2,z_3,z_4} \circ T^{-1} = S_{Tz_2,Tz_3,Tz_4}$．定理の主張は，$S_{z_2,z_3,z_4}(z_1) = S_{z_2,z_3,z_4} T^{-1}(Tz_1) = S_{Tz_2,Tz_3,Tz_4}(Tz_1)$ より従う．■

1.6.3　円円対応

記法 1.6.7. ∞ を通る直線を $\mathbb{C}$ 上の円と呼ぶ．

定理 1.6.8. 相異なる 4 点 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して，次の 2 条件は同値．

(1) $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

(2) 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 は $\mathbb{C}$ 上で同一の直線または円の上にある．

系 1.6.9. 一次変換は円を円に写す．

1.6.4　対称性：一次変換による幾何

$\mathbb{C}$ 上の直線を用いた幾何，特に対称性の概念を，円に対して一般化することに応用できる．この先の消息に，Schwartz の鏡映の原理などがある．

定義 1.6.10. $z, z^* \in \mathbb{C}$ が円 $C \subset \mathbb{C}$ に関して**対称**であるとは，$\forall_{z_1,z_2,z_3 \in [C]^3}\ (z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$ を満たすことをいう．

要諦 1.6.11. 円に関する対称点は，単位円に対する反転変換の一般化となっている．これを**鏡映変換**という．

定理 1.6.12 (対称の原理)**.** 一次変換 $S \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ は円 C_1 を円 C_2 に写すとする．このとき，円 C_1 に対称な 2 点は円 C_2 に関して対称に写される．

[証明]． 一度実軸への対称変換を経由して考えれば良い．■

1.6.5　Steiner の円

z の平面と w の平面との座標直線の対応をみるのは等角写像に対する標準的な分析である．一次変換については Steiner の円が知られている．

1.7　等角写像の例

一次変換は，正則関数の代数的な考察と幾何的な考察（例えば円の族を向きを含めて円の族に写す）とが交差する良い例であった．同様のことを，初等関数で考える．これは実関数のグラフを見ることに相等する．
また，この方法によって正則関数が特徴付けられるということが，Riemann の写像定理である．その手法は Riemann 面を導入することで，非単射な正則関数についても実行可能になる．

1.7.1　初等関数

定義 1.7.1 (ramification point, branch point, fundamental region)**.**

(1) $f : O \to \mathbb{C}$ について，点 $z_0 \in O$ の周りを一周しても元の値に戻らないとき，z_0 を**分岐点**，$f(z_0)$ を**分岐値**という．
(2) $\mathbb{C}$ からたかだか有限個の曲線を除いた領域へ単射に写される定義域の部分集合を**基本領域**という．

例 1.7.2 (多項式)**.** $w = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ は角領域を $\mathbb{C}\backslash(0, \infty)$ に写す．

(1) n 個の角領域 $(k-1)\dfrac{2\pi}{n} < \arg z < k\dfrac{2\pi}{n}$ の各々と，$\mathbb{C}\backslash(0, \infty)$ が微分同相になる．
(2) なお，このとき $0, \infty$ を通る任意の単純閉曲線に沿った切り口で $\mathbb{C}$ を貼り合わせればよく，その選択に関して Riemann 面は well-defined である．一方で点 $w = 0$ は n 枚のシートとつながっている．これを n **位の分岐点**という．

例 1.7.3 (指数関数)**.** $w = e^z$ は帯領域を $\mathbb{C}\backslash[0, \infty)$ に写す．

(1) 帯領域 $(k-1)2\pi < y < k2\pi$ の各々を $\mathbb{C}\backslash[0, \infty)$ に写す．

第 2 章

複素積分

多くの正則関数の性質は，積分の言葉を用いれば証明できる．その理由は，任意の正則関数が Cauchy の積分表示を持つため，積分論を通じて正則関数を調べることが出来る．

積分の中でも特に，微分係数の定義に用いられる形

$$\lim_{\zeta\to z}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}$$

に注目する．

2.1 積分の定義

Cauchy の積分定理は，微分形式の積分を $df=\partial_z f dz+\partial_{\overline{z}} f d\overline{z}$ に関して自然に定義したとき，Green の定理の直接的な帰結である（微分形式は最低でも C^1 級であった）．しかしこのとき，曲線の C^1-級という，ベクトル解析的な消息が入ってしまう．より複素解析的な議論は，複素積分を Riemann 和の議論まで戻って議論するところから始まる．

2.1.1 積分の定義

記法 2.1.1 (curve, path). **曲線**を連続関数 $[a,b]\to X$ の意味で使い，そのうち特に**道**を区分的に C^1 級な曲線として使う．

議論 2.1.2 (複素積分の定義: contour integral). f を連続関数とする．

(1) 道 γ に沿った $f:\mathrm{Im}\,\gamma\to\mathbb{C}$ の**複素線積分**を，

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

で定める．これは $\mathbb{C}$-線形写像となり，三角不等式（ある種のノルム減少性）を満たす．

(2) 一般の曲線 γ に沿った複素線積分を，

$$\int_\gamma f dz:=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{j=1}^n f(\gamma(\xi_j))(\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1}))$$

で定め，これが実数値となるとき**可積分**であるという．

(3) 同様にして，スカラー場の線積分の対応物として，**弧長積分**が得られる：

$$\int_\gamma f|dz|:=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{j=1}^n f(\gamma(\xi_j))|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})|.$$

命題 2.1.3.

(1) C^1-級曲線は長さ確定であり，$\mathrm{Length}(\gamma):=\int_\gamma 1\cdot|dz|=\int_\gamma|\gamma'(t)|dt.$

(2) 形式的三角不等式：γ を道，f を連続とすると，

$$\left|\int_\gamma f dz\right| \leqslant \int_\gamma \|f\|_\gamma |dz| \leqslant \|f\|_\gamma \mathrm{Length}(\gamma)$$

(3) 関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が連続で，曲線 $\gamma : [a,b] \to D$ が長さ確定ならば，f は γ 上可積分である．

(4) 特に γ が道でもあるとき，その積分値は 1-形式の積分と一致する：

$$\int_\gamma f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

2.1.2　ベクトル解析からの流入

議論 2.1.4 (ベクトル解析の結果の翻訳)**.** Euclid 空間の可縮な領域 $D \subset \mathbb{R}^n$ について，任意の C^∞-級の p-形式 $\omega \in \Omega^p(U)$ $(p \geqslant 1)$ は，閉ならば完全形式である．これはポテンシャルが存在するためである．この方法を用いれば，可縮は仮定が緩いにしても，星型領域上では同様のことが正則関数についても示せる．

定理 2.1.5. D を星型領域，$a \in D^\circ$ をその内点とする．$f : D \to \mathbb{C}$ が連続で，$D \backslash \{a\}$ 上正則とすると，

(1) f は D 上で正則な原始関数を持つ．

(2) D 内の任意の道 γ について，$\displaystyle\int_\gamma f dz = 0$.

2.1.3　線積分の一般化

領域は一般のままとして，Cauchy の定理が成り立つような自然な曲線 γ のクラスを探す．

定義 2.1.6. 曲線の形式和を**チェイン**と呼び，チェイン上での積分を次の右辺で定める．

$$\int_{\gamma_1+\cdots+\gamma_n} f dz := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f dz.$$

閉曲線の形式和で表せるチェインを**サイクル**という．

2.2　単連結領域

ベクトル解析で得た Poincare の補題は，正則関数については美しく満たされる．

2.2.1　単連結性の特徴付け

任意の曲線について Cauchy の定理が成り立つような領域の自然なクラスは，単連結性による．

定義 2.2.1 (homologue)**.** 任意の閉曲線 $\gamma_1, \gamma_2 : \partial\Delta \to D$ が $\forall_{p \in \mathbb{C}\backslash D}\ n(\gamma_1, p) = n(\gamma_2, p)$ を満たすとき，2 つはホモローグであるという．

定理 2.2.2. 領域 $D \subset \mathbb{C}$ について，次の 3 条件は同値．

(1) D の任意の閉曲線 $\gamma : \partial\Delta \to D$ は 1 点にホモトピックである：$\gamma \simeq 1_p$．このとき，連続延長 $\widetilde{\gamma} : [\Delta] \to D$ を持つ．

(2) $\hat{\mathbb{C}} \backslash D$ は連結である．

(3) D 内の任意の閉曲線 γ は 0 とホモローグである：$\forall_{a \in \mathbb{C}\backslash D}\ n(\gamma, a) = 0$.

(4) 1 次の de Rham コホモロジーが消える：微分 $\dfrac{d}{dz} : \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D)$ は全射.

注 2.2.3. (2) により，D が単連結であることと $\hat{\mathbb{C}} \backslash D$ が単連結であることとは同値になるが，これは 2 次元に特有の性質となる．

2.2.2　原始関数の存在

系 2.2.4. 単連結領域上の零でない正則関数 $f: D \to \mathbb{C}$ に対して，$\log f(z), \sqrt[n]{f(z)}$ の一価な分枝が D 上で存在する．

2.2.3　多重連結性

歴史 2.2.5 (連結度から n 重連結性へ)**.** VC 次元も似たような「群構造の発見」がなされるのだろうか？

Riemann 1851 **『複素一変数関数の一般論の基礎』**　で連結度（初めての位相不変量？）が定義された．はじめ，単連結性の概念は「境界 ∂D 上の 2 点を結ぶ D 内の曲線が必ず D を 2 つに分割する」ことを言った．横断線 n 本が領域を m 個に分割するとき，$n-m$ を連結度といい，連結度 -1 を単連結と言った．

Riemann 1857 **『アーベル関数の理論』**　n 個の閉曲線 $S^1 \to D$ の組であり，どの組み合わせを取っても D の部分領域の完全境界をなさない最大の n に対して，$n+1$ を n 重連結とよんだ．

Betti **数**　Riemann はよくイタリアに療養に行っていた，そこで Betti がこの考えを曲面から一般の次元に拡張したものを用いた．これを Poincare が拾って，「位置解析」で，ホモロジー同値の言葉を使って新たな定義を与え，Betti 数と呼んだ．なんとなく VC 次元に似ている．

Noether **が数から群へ**

定義 2.2.6.

(1) 単連結でない領域 D を**多重連結**であるという．
(2) $\hat{\mathbb{C}} \backslash D$ が連結成分を n 個もつとき，n **重連結**または**連結度** n であるという．

2.2.4　連結性について

> $\mathbb{R}$ では連結性と弧状連結性とが同値になるが，$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ 一般については，任意の開集合についてしか言えない．

補題 2.2.7 (domain, region)**.** $D \subset \mathbb{C}$ とする．次の 2 条件を考える．

(1) D は弧状連結.
(2) D は連結.

(1)⇒(2) が成り立ち，D が開集合の時 (2)⇒(1) も成り立つ．このような D を**領域**と言う．

［証明］．

(1)⇒(2)　$\emptyset \neq V \subset D$ を開かつ閉とし，$V = D$ を導く．任意の $p \in V, q \in D$ について，これを結ぶ任意の道 $\gamma: [0,1] \to D$ に対し[†1]，実数 m を $m = \sup\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in V\}$ と置いた時，$m = 1$ が導かれることを示せば良い．
V は D-閉だから，$m = \max\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in V\}$ でもある．即ち $\gamma(m) \in V$．また V は D-開だから，$\gamma(m) \in V$ の近傍 U が存在して $U \cap D \subset V$ を満たす．これより，$m < 1$ ならば，γ の連続性より，ある $\epsilon > 0$ が存在して $\gamma(m+\epsilon) \in U \cap D \subset V$ を満たすので，m の定義（最大性）に矛盾．従って，$m = 1$ である．

(2)⇒(1)　任意の $p \in D$ について，$V = \{q \in D \mid p$ と q を結ぶ道$\gamma_q: [0,1] \to D$ が存在する $\}$ とすると，$V = D$ が従うことを示す．
V は D-開と示す．任意に $q \in V$ を取ると，$q \in D$ でもあるから，$\epsilon > 0$ が存在して $\Delta(q,\epsilon) \subset D$ である．この時，任意の $r \in \Delta(q,\epsilon)$ について，γ_q に線分 $[q,r]$ を繋げたものは再び道だから，$\Delta(q,\epsilon) \subset V$ が従う．
V は D-閉と示す．D 内に収束する V の点列 (z_n) を任意に取る．ある $\epsilon > 0$ が存在して，$\Delta(z_\infty,\epsilon)$ は十分大きな N について，z_n $(n \geqslant N)$ を含む．すると，γ_{z_N} と線分 $[z_N, z_\infty]$ を繋げたものは道である．よって，$z_\infty \in V$．

[†1] 道とは区間からの連続写像のこと

■

例 2.2.8 (位相幾何学者の正弦曲線).

$$I = [-i, i], \quad V = \left\{ x + i \sin \frac{\pi}{x} \;\middle|\; x \in (0, 1) \right\}$$

とし，$D = I \cup V$ と定めるとこれは連結であるが弧状連結ではない．原点 O と V は共有点は持たないが，位相的に分離不可能であるから，D は 2 つの連結部分に分解することはできない．かと言って共有点は持たないので，道で結べない．

2.3 回転数

まず，対数関数とその複素積分を用いて，曲線がある点の周りを何周するかを解析的なことばで捉えられる．

2.3.1 定義と性質

定義 2.3.1 (winding number)**.** 閉道 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ について，

$$\begin{array}{rccc} n(\gamma, -) : & \mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}\,\gamma & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & a & \longmapsto & \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} \end{array}$$

を**回転数**という．

［証明］． 曲線 γ を表すパラメータを $z : [\alpha, \beta] \to \mathrm{Im}\,\gamma$ とすると，

$$h(t) := \int_\alpha^t \frac{z'(t)}{z(t) - a} dt$$

とおき，$e^{h(\beta)} = 1$ を示せば，指数関数の周期性から $n(\gamma, -) \subset 2\pi i\mathbb{Z}$ が示せる．

微積分学の基本定理より，

$$h'(t) = \frac{z'(t)}{z(t) - a} \quad \text{f.e.}$$

これより，関数 $H(t) := e^{-h(t)}(z(t) - a)$ は $[\alpha, \beta]$ 上定値関数である．実際，この導関数は

$$H'(t) = -h'(t)e^{-h(t)}(z(t) - a) + e^{-h(t)}z'(t) = 0 \quad \text{f.e.}$$

特に $t = \beta$ の場合を考えて $e^{h(\beta)} = \dfrac{z(\beta) - a}{z(\alpha) - a} = 1$. ■

要諦 2.3.2 (対数関数の Riemann 面を登っていく描像)**.** 直感的には，

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - a} = \int_\gamma d\log(z - a) = \int_\gamma d\log|z - a| + i \int_\gamma d\arg(z - a)$$

が成り立つが，arg には γ 上一価な分枝が定義出来ない．第二項が $2\pi i$ という値の原因になっている．

命題 2.3.3 (回転数の性質)**.** γ を閉道，$\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}\,\gamma = \sqcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ を連結成分への分解とする．

(1) $n(\gamma, z)$ の各連結成分への制限は定値．
(2) 非有界な連結成分の上では $n(\gamma, z) = 0$ を満たす．

2.4　Cauchy の定理

Cauchy の定理を編み上げる過程は，位相的な洗練である．はじめは長方形領域から行い，最終的にはホモトピーの言葉で定理を完成させる．なお，積分領域 T や $[\Delta(a,r)]$ に対して，これを含む連結な開近傍上で正則関数が定義されていることを考えることに注意．

2.4.1　Cauchy の定理

補題 2.4.1 (閉三角形領域に対する Cauchy の定理)**.** $D \subset \mathbb{C}$ を領域，$p \in D$ とし，連続関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は $D \backslash \{p\}$ 上正則とする．このとき，任意の閉三角形 $T \subset D$ について，

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

要諦 2.4.2. 有限個の特異点（ただしその上でも連続）を除いて任意の閉三角形 T 上で正則な関数は，∂T 上での積分が零である．実は有限個の特異点 (ζ_j) 上で連続性がわからなくとも，$\lim_{z\to\zeta_j}(z-\zeta_j)f(z) = 0$ がなりたてば良い．

［証明］． 一般の三角形 $T \subset D$ について，$\eta(T) := \int_{\partial T} f(z)\,dz$ と置く．

$p \notin T$ の場合　T を 4 つの三角形 $(T_1^j)_{j\in[4]}$ に分割すると $\eta(T) = \sum_{j=1}^{4}\eta(T_1^j)$．この時，$T_1 := \max_{j\in[4]} T_1^j$ と置くと，

$$|\eta(T)| \leqslant 4|\eta(T_1)|.$$

同様にして分割を繰り返すと，三角形の包含列

$$T =: T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset \cdots$$

を得，

$$|\eta(T)| \leqslant 4^j|\eta(T_j)| \quad (j \in \mathbb{N})$$

が成り立つ．各三角形について $z_j \in T_j$ を取る．すると，

$$k > j \Rightarrow z_k \in T_j$$

が成り立つ．$diam(T_j) := \max\{|z-w| \mid z,w \in T_j\}$ と置くと，$diam(T_j) = 2^{-j}diam(T)$ だから，(z_j) は Cauchy 列である．よって，$a := \bigcap_{j=0}^{\infty} T_j$ とおけばこれが極限点 $a = \lim_{j\to\infty} z_j$ に他ならない．

$p \notin T$ としたから f は a で微分可能で，

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + (z-a)\varphi(z) \quad (\lim_{z\to a}\varphi(z) = 0)$$

と置けるから，

$$\begin{aligned}
\eta(T_j) &:= \int_{\partial T_j} (f(a) + f'(a)(z-a) + (z-a)\varphi(z))\,dz \\
&= \int_{\partial T_j} (z-a)\varphi(z)\,dz \quad (\text{補題}) \\
|\eta(T_j)| &\leqslant \int_{\partial T_j} |z-a||\varphi(z)|\,|dz| \\
&\leqslant diam(T_j)|\varphi|_{T_j} L(\partial T_j) \\
&= 2^{-j}diam(T)|\varphi|_{T_j} 2^{-j} L(\partial T) \\
&= 4^{-j}diam(T)L(\partial T)|\varphi|_{T_j}.
\end{aligned}$$

すると，

$$\begin{aligned}
|\eta(T)| &\leqslant 4^j|\eta(T_j)| \\
&\leqslant diam(T)L(\partial T)|\varphi|_{T_j} \xrightarrow{j\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

$p \in T$ の場合　T を同様に 4^j 個の三角形に分割する．どの段階でも，p を含む T^k は高々 6 個である．上での議論より，p を含まない全ての T^k_j について，$\eta(T^k) = 0$ であることはわかっているから，$|\eta(T^{k_0})| := \max_k |\eta(T^k)|$ と置くと，

$$
\begin{aligned}
|\eta(T)| &\leqslant \sum_{k=1}^{4^j} |\eta(T^k_j)| \leqslant 6|\eta(T^{k_0}_j)| \\
|\eta(T^k)| &= \int_{\partial T^k} |f(z)|\,|dz| \leqslant |f|_T L(\partial T^k) = |f|_T 2^{-j} L(\partial T) \\
|\eta(T)| &\leqslant 6|f|_T 2^{-j} L(\partial T) \xrightarrow{j\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

■

定理 2.4.3 (ホモロジーの言葉による Cauchy の定理)**.** 開集合 D 上の正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ と閉曲線 $\gamma : \partial\Delta \to D$ についての条件 $\displaystyle\int_\gamma f dz = 0$ について，

(1) 任意の D に関して 0 とホモローグな閉曲線 γ に対して成り立つ．

(2) D が単連結ならば，任意の閉曲線に対して成り立つ．

2.4.2　Cauchy の積分表示

定理 2.4.4 (閉円板に対する Cauchy の積分表示)**.** $f : D \to \mathbb{C}$ を正則とする．$[\Delta(a, r)] \subset D$ ならば，

$$\forall_{z\in\Delta(a,r)} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

定理 2.4.5 (一般の曲線に対する Cauchy の積分表示)**.** D を星型領域，$f : D \to \mathbb{C}$ を正則関数，$\gamma : [\alpha, \beta] \to D$ を閉道とする．このとき，次が成り立つ：

$$\forall_{z\in D\backslash \mathrm{Im}\,\gamma} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = n(\gamma, z) f(z).$$

2.4.3　高階導関数に対する Cauchy の評価

微分も積分を用いてかけることを通じて，正則関数が C^∞-級であることを示す．

補題 2.4.6. $\gamma : [a, b] \to D$ を道，$\varphi : \mathrm{Im}\,\gamma \to \mathbb{C}$ を連続関数とする．$\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}\,\gamma$ 上の関数

$$F_n(z) := \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta$$

は $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}\,\gamma$ 上正則であり，その導関数は $F_n'(z) = nF_{n+1}(z)$ を満たす．

定理 2.4.7. 正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ について，

(1) f は D 上無限回微分可能である．

(2) 任意の円板 $[\Delta(a, r)] \subset D$ に対して，n 階導関数は

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

と表せる．

(3) $|f^{(n)}(a)| \leqslant \dfrac{n!}{r^n}\|f\|_{\partial\Delta(a,r)}$.

2.5　局所整級数展開

正則関数の最も重要な性質に急ごう．任意の正則関数は，収束する整級数（関数要素）の「貼り合わせ」によって定まる．この観点から得られる大域的解析関数を Weierstrass の大域的解析関数というのであった．

2.5.1　Weierstrass の定理

正則関数列も連続関数列と同様，一様収束極限には正則性が遺伝する．

定理 2.5.1 (Weierstrass)**.** 各領域 Ω_n 上で正則な関数 f_n の列 (f_n) は，領域 Ω 上で各点収束極限 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ を持ち，さらにこの収束は広義一様であるとする．このとき，

(1) f は Ω 上正則である．
(2) k 階導関数の列 $(f_n^{(k)})$ は Ω 上で $f^{(k)}$ に広義一様収束する．

系 2.5.2. 各項が正則関数からなる級数

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots$$

の収束モードが広義一様収束でもあるとき，f は Ω 上正則で，項別の微分を許す．

2.5.2　Hurwitz の定理

定理 2.5.3 (Hurwitz)**.** 正則関数列 $\{f_n\}\subset\mathcal{O}(\Omega)$ がある f に一様収束するとする．

(1) 任意の f_n が零点を持たないならば，f も持たないか，定数 0 である．
(2) 任意の f_n が単射ならば，f も単射か，定数関数である．

2.5.3　Taylor の定理

定理 2.5.4 (Taylor の定理)**.** 領域上の正則関数 $f:D\to\mathbb{C}$ と任意の点 $z_0\in D$ について，

(1) 任意の $n\in\mathbb{N}$ について，正則関数 $f_n\in\mathcal{O}(D)$ が存在し，次が成り立つ

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+f_n(z)(z-z_0)^n\quad\text{on } D.$$

(2) このとき剰余項 f_n は，任意の閉円板 $[\Delta(z_0,r)]\subset D$ に対して，その内部 $\Delta(z_0,r)$ 上で

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(z_0,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n(\zeta-z)}d\zeta\quad\text{on } \Delta(z_0,r).$$

と表示出来る．

2.5.4　整級数展開

系 2.5.5. 領域上の正則関数 $f:D\to\mathbb{C}$ と任意の点 $z_0\in D$ について，任意の開円板 $\Delta(z_0,r)\subset D$ 上において

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z-z_0)^n\quad\text{on } \Delta(z_0,r)$$

が成り立つ．ただし，右辺の収束は広義一様収束とした．

2.5.5 Laurent 展開

$1/z$ での整級数展開を考える．

2.6 正則関数の描像

2.6.1 定数関数の特徴付け

系 2.6.1 (Liouville)**.** $\mathbb{C}$ 上で有界な整関数は，定数関数である．

系 2.6.2 (代数学の基本定理)**.** 定数でない多項式は零点を持つ．

2.6.2 正則関数の特徴付け

系 2.6.3 (Morera)**.** 領域 D 上の連続関数 $f : D \to \mathbb{C}$ について，任意の三角形 $T \subset D$ に対して

$$\int_{\partial T} f(\zeta) d\zeta = 0$$

が成り立つならば，D 上正則である．

2.6.3 有理型関数

定義 2.6.4. 連続関数 $f : D \to \hat{\mathbb{C}}$ であって，$D \backslash f^{-1}(\infty)$ 上正則な関数を**有理型関数**という．

定理 2.6.5. $\hat{\mathbb{C}}$ 上の有理型関数 $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ は有理関数である．

2.7 特異点

Cauchy の積分表示による簡単な帰結を確認する．

定義 2.7.1. 連続関数 $f : D \to \mathbb{C}$ について，値が定義されないことも含めて，関数が正則にならない点 $z_0 \in \mathbb{C}$ を**特異点**という．

(1) 他の特異点を含まない開近傍が取れるような特異点を**孤立特異点**という．
(2) 孤立特異点のうち $\lim_{z \to a} f(z) \in \hat{\mathbb{C}}$ が定義出来ないとき，これを**真性特異点**という．

2.7.1 特異点の除去

特異点が除去できる十分条件は 2 つほどあるが，本質は特異点周りの漸近挙動である．

系 2.7.2 (連続性による除去)**.** 連続関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が高々有限個の点を除いて正則ならば，D 上で正則である．

系 2.7.3 (除去可能特異点の特徴付け (Riemann))**.** 1 点 $p \in D$ を除いた領域上の関数 $f : D \backslash \{p\} \to \mathbb{C}$ は正則であるとする．このとき，次の 2 条件は同値．

(1) f は D 上正則に延長でき，その延長は一意的である．
(2) $\lim_{z \to p} (z - p) f(z) = 0$.
(3) a の近傍が存在して，f はその上で有界になる．

2.7.2　零点と極

> 零点は特異点ではなく，極は正則性を失うという意味で特異点であるが，この 2 つは表裏一体である．いずれも孤立する．

定義 2.7.4. $f : D \to \mathbb{C}$ を零でない正則関数とする．

(1) $f(z_0) = 0$ を満たす点 $z_0 \in D$ を**零点**という．
(2) $\min\left\{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(z_0) = 0\right\}$ を，零点 z_0 の**位数**という．
(3) 正則関数 $f : \Delta^*(z_0, r) \to \mathbb{C}$ に対し，$f(z_0) = \infty$ を満たす点 $z_0 \in D$ を**極**という．
(4) このとき，$1/f : \Delta^*(z_0, r) \to \mathbb{C}$ も正則で，z_0 で連続だから除去可能な零点となる．この $1/f$ の零点の位数を，f の極の位数という．
(5) 連続関数 $f : D \to \hat{\mathbb{C}}$ であって，極を除いて正則な関数を**有理型**という．このとき，$f^{-1}(\infty)$ は離散集合であるか，$f = \infty$ となるかのいずれかである．そこで有理型関数と言ったとき前者も仮定することが多い．

命題 2.7.5 (位数は有限である)**.** $f : D \to \mathbb{C}$ を正則関数，$z_0 \in D$ を零点とする．$\forall_{j\in\mathbb{N}}\ f^{(j)}(z_0) = 0$ が成り立つならば，f は零関数である．

2.7.3　一致の定理

定理 2.7.6. $f : D \to \mathbb{C}$ を零でない正則関数とする．このとき，f の零点はいずれも孤立点である．

系 2.7.7 (一致の定理)**.** $f, g : D \to \mathbb{C}$ を正則関数である．ある D 内に集積点を持つ部分集合上で値が一致するならば，D 上で一致する．

2.7.4　真性特異点

> 整級数展開の観点から孤立特異点が分類できる．極には主要部が決まる．級数が収束しない場合は，Hilbert による結果と同様，任意の値に収束させることが出来る．

命題 2.7.8 (孤立特異点の分類)**.** $f : \Delta^*(a, r) \to \mathbb{C}$ を正則関数とする．次のいずれかが成り立つ．

(1) $\forall_{\alpha\in\mathbb{R}}\ \lim_{z\to a} |z - a|^\alpha |f(z)| = 0$.
(2) $\exists_{h\in\mathbb{Z}}\ \forall_{\alpha>h}\ \lim_{z\to a} |z - a|^\alpha |f(z)| \land \forall_{\alpha<h}\ \lim_{z\to a} |z - a|^\alpha |f(z)| = \infty$．このときの $\alpha \in \mathbb{Z}$ を**代数的位数**といい，極のとき正，正則のとき非正，零点のとき負となる．
(3) $\forall_{\alpha\in\mathbb{R}}\ \lim_{z\to a} |z - a|^\alpha |f(z)| \notin \{0, \infty\}$．このとき a を**真性孤立特異点**という．

定理 2.7.9 (Weierstrass)**.** 正則関数 $f : D\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ は真性特異点 a の任意の近傍内で，任意の複素数値に，いくらでも近づき得る．すなわち，

$$\forall_{\alpha\in\hat{\mathbb{C}}}\ \exists_{r>0}\ \exists_{\{z_n\}\subset\Delta^*(z,r)} \quad \lim_{n\to\infty} z_n = a \land \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha.$$

2.7.5　偏角の原理と零点の数

> 極の主要部に言及したが，対数微分の方法により，零点（あるいは極）の個数を数えることが出来る．また，主要部とは要は多項式なので，重複度とはその零点・極の周りでの像曲線の回転数に他ならない．

定理 2.7.10 (偏角の原理)**.** $f : D \to \mathbb{C}$ を領域上の零でない正則関数，$\gamma : [a, b] \to D$ を f の零点 $f^{-1}(0) = \{z_1, \cdots, z_n\}$ を通らな

い閉曲線とする．このとき，次が成り立つ：

$$\sum_{j=1}^{n} n(\gamma, z_j) \cdot m_{z_j} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

系 2.7.11 (零点の近傍での対応)**.** 連続関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は $z_0 \in D$ で解析的であるとき，$f - w_0$ ($f(z_0) =: w_0$) は z_0 を零点に持つ．この位数を $n \geqslant 1$ とする．

(1) ある $\epsilon > 0$ と $\delta > 0$ が存在して，任意の $a \in \Delta(w_0, \delta)$ に対して，$f(z) = a$ の $\Delta(z_0, \epsilon)$ 上の解は重複度を込めて n 個の根を持つ．
(2) ある $\epsilon > 0$ と $\delta > 0$ が存在して，$a \in \Delta^*(w_0, \delta) \Rightarrow |f^{-1}(a) \cap \Delta^*(z_0, \epsilon)| = n$ を満たす．

2.7.6　開写像定理

系 2.7.12. 定数でない正則関数は開写像である．

系 2.7.13. $f : D \to \mathbb{C}$ を正則関数，$z_0 \in D$ を領域内の点とする．

(1) $f'(z_0) \neq 0$ ならば，ある近傍について $f|_U : U := f^{-1}(\Delta(w_0, r)) \to \Delta(w_0, r)$ は位相同型かつ等角写像となる．
(2) 正則関数 $f : U \to V$ が全単射ならば，逆写像も正則である．

2.7.7　Rouche の定理

定理 2.7.14 (Rouche)**.** D を道 ∂D で囲まれた有界領域，f, g を $[D]$ の近傍上の正則関数である．境界道 ∂D 上での条件

$$\forall_{z \in \partial D} \quad |f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

を満たすならば，f, g の D 上での重複度も込めた零点の個数は等しい．

2.8　最大値の原理

連続延長の問題の足がかりになる．

2.8.1　最大値の原理

定理 2.8.1. 領域上の正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が，この上で最大値 $\max_{z \in D}|f(z)| \in \mathbb{R}$ を持つならば，f は定数である．

系 2.8.2. 正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は，コンパクト部分集合 $K \subset D$ 上にて $|f(z)| \leqslant \max_{w \in \partial K}|f(w)|$ を満たす．K の内点にて等号成立した場合，f は定数である．

2.8.2　Schwarz の補題

正規化された正則関数 $f : \Delta \to \Delta, f(0) = 0$ は，ノルム減少的で，0 での Jacobian も縮小的 (1 以下) である．

歴史 2.8.3. Hermann Schwarz 1843-21 はドイツ人数学者．Laurent Schwartz 1915-02 はフランス人で，超関数 (distribution) に名前を残す．Fields 賞受賞者．

定理 2.8.4. 正規化された正則関数 $f : \Delta \to \Delta, f(0) = 0$ について，

(1) $\forall_{z \in \Delta}\ |f(z)| \leqslant |z|$.
(2) $|f'(0)| \leqslant 1$.

が成り立つ．また，ある点 $z_0 \in \Delta^*$ で (1) の等号が成立するか，(2) の等号が成立するとき，$\exists_{\theta\in[0,2\pi]}\ f(z) = e^{i\theta}z$ と表せる．

2.8.3　正則自己同型の分類

一次変換の理論と，Schwatz の補題とで，単位円板の正則自己同型群の構造が定まる．

定理 2.8.5 (単位円板の双正則写像は一次変換と回転の合成である)**.** 単位円板の双正則写像 $f:\Delta\to\Delta$ がある $a\in\Delta$ について $f(a)=0$ を満たすとする．このとき，

$$\exists_{\theta\in\mathbb{R}}\quad f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

系 2.8.6 (上半平面の双正則写像は特殊線型群が定める一次変換である)**.** 上半平面の双正則写像 $f:H\to H$ について，

$$\exists_{A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}\quad f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

第 3 章

留数解析

第 4 章

無限積展開

第 5 章

調和関数

第 6 章

Dirichlet 問題