

目次

第 1 章	確率過程と独立性	3
1.1	有限の場合の独立性	3
1.2	Markov 連鎖	4
1.3	無限の場合の独立性	4
1.4	条件付き期待値の性質	5
1.5	関数空間 C と D	5
1.5.1	ポーランド空間の位相の議論	5
1.5.2	D 空間と Skorokhod 位相	6
1.5.3	Kolmogorov σ -代数	7
1.6	確率過程に関する一般事項	7
1.6.1	3つの見方	7
1.6.2	確率過程の同値性	8
1.7	情報と情報増大系	8
1.7.1	閉 σ -代数	8
1.7.2	情報増大系	9
1.8	停止時	9
1.8.1	定義と例	9
1.8.2	情報量	10
第 2 章	マルチンゲール	12
2.1	離散時変数のマルチンゲール	12
2.1.1	定義	12
2.1.2	Doob 分解	13
2.1.3	Doob の任意抽出定理	13
2.1.4	Doob の不等式	13
2.1.5	劣マルチンゲールの収束定理	14
2.1.6	積率不等式	15
2.2	連続時変数のマルチンゲール	15
2.2.1	定義	15
2.2.2	Doob の不等式	16
2.2.3	Doob の任意抽出定理	16
2.2.4	劣マルチンゲールの収束定理	16
2.2.5	Doob-Meyer 分解	16
2.2.6	Burkholder の不等式	16
2.3	Gauss 系	16
第 3 章	半マルチンゲールと統計解析	17
3.1	統計推測への応用	17
第 4 章	Markov 過程	18

4.1	Kolmogorov の拡張定理	18
4.2	離散時間の Markov 連鎖	18
4.2.1	確率行列	18
4.2.2	Markov 連鎖の定義と構成	19
4.2.3	Markov 性	19
4.2.4	強 Markov 性	20
4.3	到達確率と差分作用素	20
4.3.1	到達確率と特徴付け	20
4.3.2	Markov 過程の定める martingale	20
4.4	有限状態空間上の Markov 連鎖	21
4.4.1	不変分布とエルゴード性	21
4.4.2	大数の法則	21
4.5	正方格子上のランダムウォーク	22
4.5.1	再帰性と非再帰性	22
4.5.2	単純ランダムウォークの再帰性と非再帰性	23
4.6	連続時間 Markov 過程	23
4.6.1	Chapman-Kolmogorov 方程式	23
第 5 章	加法過程	24
5.1	加法過程	24
5.1.1	定義と例	24
5.1.2	Levy-Ito 分解	24
5.2	Brown 運動	25
5.2.1	定義	25
5.2.2	Wiener 測度	25
5.2.3	特性値	26
5.2.4	独立増分性	26
5.2.5	可微分性	26
5.3	Poisson 過程	27
5.3.1	定義	27
5.3.2	独立増分性	27
5.4	無限分解可能分布	27
5.4.1	定義と特徴付け	27
5.4.2	Levy 分解	28
5.4.3	複合 Poisson 過程	28
第 6 章	拡散過程	29
6.1	1 次元拡散過程	29
第 7 章	定常過程と時系列解析	30
7.1	定常過程	30
第 8 章	参考文献	31
参考文献		32

第 1 章

確率過程と独立性

確率的な方法を使って数学的対象を調べることも、現実的対象を調べることも出来る。統計推測への応用も、調和解析への応用も考えたい。

値の空間が等しい確率変数の族を確率過程といい、このときの値域である位相空間を状態空間という。^{†1} 確率変数族には独立性の概念が拡張できたが、これは応用上自然ではない。遥かに緩いクラスとして、マルチンゲールを定義する。1930 年代に、独立確率変数の和の理論を整備する過程で豊かに育った Kolmogorov のアイデアを一般化する試みの中で、Levy がマルチンゲールの概念を発明し、Doob が理論を立てた。Brown 運動も確率積分もマルチンゲールになる。

解析学に可測関数、連続関数、解析関数というようなクラスがあるように、確率論にもマルチンゲール、加法過程、Markov 過程、定常過程などのクラスがある。解析学に指数関数、Bessel 関数などの特殊関数があるように、確率論にも Weiner 過程、Poisson 過程というような特殊過程がある。ただし、分類の指導方針が全く違う。確率論の指導原理は独立性であって来た。

1.1 有限の場合の独立性

Kolmogorov の本のように、試行の列を考えると筋が良い。意味論的な中心は試行 = 分割 $\mathfrak{A} = (A_i)$ であるが、数学的な主役はこれが生成する σ -代数 $\sigma[\mathfrak{A}]$ である。確率変数 X は定義域上に自明な同値関係を定めるが、これが定める類別が X を観測するという試行となる。すると、条件付き確率の背後にも試行、すなわち、 σ -代数があることが明瞭に理解できる。ちょうど漸近理論において統計的実験の列を考えると筋が良いのに似ている。

独立性は、分割の直交性で捉えられそうであるが、正確に一致させるためには公理を強める必要がある。

記法 1.1.1.

- (1) 集合の積を AB で、無縁和を $A + B$ で表す。
- (2) 試行 $\mathfrak{A}^1, \mathfrak{A}^2$ の積試行を $\mathfrak{A}^1 \mathfrak{A}^2$ で表す。

定義 1.1.2 (independent, conditional probability, conditional expectation). (Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とする。

- (1) 試行とは、 Ω の直和分割をいう。
- (2) 試行の列 $\mathfrak{A}^1, \dots, \mathfrak{A}^n = (A_i^n)_{i \in [r_n]}$ が (互いに) 独立であるとは、次が成り立つことをいう。^{†2}

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k_1 \in [r_1], \dots, k_n \in [r_n] \quad P[A_{k_1}^1 \cdots A_{k_n}^n] = P[A_{k_1}^1] \cdots P[A_{k_n}^n]$$

- (3) 試行 $\mathfrak{A} = (A_i)_{i \in [m]}$ $\forall i \in [m] \quad P(A_i) > 0$ のあとの事象 B の条件付き確率とは、次のように定まる $\sigma[\mathfrak{A}]$ -可測でもある確率変数 $P[B|\mathfrak{A}]$ をいう：

$$P[B|\mathfrak{A}](\omega) = \sum_{i=1}^m P[B|A_i] 1_{A_i}(\omega).$$

^{†1} 最も一般的には Banach 空間を取ることが流行らしい。

^{†2} 事象 A が独立とは、その事象が定める試行 $\mathfrak{A} = A + A^c$ が独立であることをいう。

- (4) 試行 $\mathfrak{A} = (A_i)_{i \in [m]} \forall i \in [m] P(A_i) > 0$ のあとの確率変数 X の条件付き期待値とは、次のように定まる $\sigma[\mathfrak{A}]$ -可測でもある確率変数 $E[X|\mathfrak{A}]$ をいう：

$$E[X|\mathfrak{A}](\omega) = \sum_{i=1}^m E[X|A_i]1_{A_i}(\omega) = \sum_{i=1}^m \frac{E[X1_{A_i}]}{P[A_i]}1_{A_i}(\omega)$$

補題 1.1.3 (独立性の条件付き期待値による特徴付け). 試行 $\mathfrak{A}^1, \dots, \mathfrak{A}^n$ について,

- (1) 互いに独立である.
- (2) $\forall k \in [n] \forall i \in [r_k] P[A_i^k | \mathfrak{A}^1 \mathfrak{A}^2 \dots \mathfrak{A}^{(k-1)}] = P[A_i^k]$.

1.2 Markov 連鎖

定義 1.2.1. 確率変数列 (X_n) が定める試行の列 (\mathfrak{A}^n) について,

- (1) $\forall k \in [n] \forall i \in [r_k] P[A_i^k | \mathcal{A}^1 \dots \mathcal{A}^{k-1}] = P[A_i^k | \mathfrak{A}^{k-1}]$ が成り立つとき, これを **Markov 連鎖** という.
- (2) $\forall k \in [n] \forall i \in [r_k] E[X_{n+1} | \mathcal{A}^1 \dots \mathcal{A}^n] = X_n$ a.s. が成り立つとき, これを **martingale** という.
- (3)

1.3 無限の場合の独立性

$L^2(\Omega)$ 上に制限して見ると, 任意の $X \in L^2(\Omega)$ に対して, $\mathcal{G} < \mathcal{F}$ -可測関数のなす部分空間 $L_{\mathcal{G}}^2(\Omega) \subset L_{\mathcal{F}}^2(\Omega)$ への直交射影の値 (のバージョン) として得られる $L_{\mathcal{G}}^1(\Omega)$ の元を, 条件付き期待値という. これは最小二乗の意味での最適推定値であるとも言える.

定義 1.3.1 (conditional expectation, conditional probability, regular). (Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とし, \mathcal{G} を \mathcal{F} の部分 σ -代数とする. 可積分確率変数 $X \in L^1(\Omega)$ について,

- (1) 次の 2 条件を満たす, P -零集合を除いて一意な確率変数を条件付き期待値といい, $E[X|\mathcal{G}]$ で表す.
 - (a) \mathcal{G} -可測でもある P -可積分確率変数である.
 - (b) 任意の \mathcal{G} -可測集合 $B \in \mathcal{G}$ 上では X と期待値が同じ確率変数になる: $\forall B \in \mathcal{G} E[X1_B] = E[E[X|\mathcal{G}]1_B]$ ^{†3}
- (2) $P[A|\mathcal{G}] := E[1_A|\mathcal{G}]$ ($A \in \mathcal{F}$) を条件付き確率というが, 確率測度を定めるとは限らない. これが確率測度を定めるとき, 正則条件付き確率という ^{†4}.

注 1.3.2 (正則条件付き確率). 任意の互いに素な可測集合列 $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$ について, 条件付き期待値の線形性と単調収束定理より,

$$P\left[\sum F_n \middle| \mathcal{G}\right] = E\left[\sum 1_{F_n} \middle| \mathcal{G}\right] = \sum E[1_{F_n}|\mathcal{G}] = \sum P[F_n|\mathcal{G}] \text{ a.s.}$$

が成り立つが, このときの零集合

$$\mathcal{N} := \left\{ \omega \in \Omega \mid P\left[\sum F_n \middle| \mathcal{G}\right] \neq \sum P[F_n|\mathcal{G}] \right\}$$

が, 任意の (おそらく非可算無限個ある) 互いに素な可測集合列 $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$ について, 一様に零集合を取れるとは限らないが, 「標準確率空間」については気にしなくてよい.

^{†3} これは 2 段階に分けて積分していると見れる.

^{†4} 完備で可分な距離空間上の Borel 確率空間上では存在と一意性が成り立つ.

1.4 条件付き期待値の性質

\mathcal{G} の元 $B \in \mathcal{G}$ に対して, その立場の上での X の期待値 $E[X1_B]$ を返す符号付き測度を $Q: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ と表そう. するとその $P|_{\mathcal{G}}$ に関する密度関数が $E[X|\mathcal{G}]$ である. $E[-|\mathcal{G}]: L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ は正な線型汎関数となっている.

系 1.4.1. 任意の可積分確率変数 $X \in L^1(\Omega)$ に対して, 条件付き期待値 $E[X|\mathcal{G}]$ は存在し, 零集合での差を除いて一意である.

[証明]. 条件付き期待値は, \mathcal{G} の元に対して, その立場の上での X の期待値を返す測度 $Q: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ の, (Ω, \mathcal{G}) 上の確率密度関数であると見れば, Radon-Nikodym の定理の簡単な系である. 任意の事象 $B \in \mathcal{G}$ に対して, そのときの X の条件付き期待値を返す対応 $Q(B) := E[1_B X]$ ($B \in \mathcal{G}$) は (Ω, \mathcal{G}) 上の測度である. これが $P|_{\mathcal{G}}$ に対して絶対連続であることに注意すれば良い: $P[B] = 0 \Rightarrow Q[B] = 0$. ■

命題 1.4.2. (Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間, $X \in L^1(\Omega)$ を可積分確率変数, \mathcal{G}, \mathcal{H} を \mathcal{F} の σ -部分代数とする.

- (1) Y も条件付き期待値の定義を満たすとする. このとき, $E[Y] = E[X]$.
- (2) X が \mathcal{G} -可測であったならば, $E[X|\mathcal{G}] = X$ a.s.
- (3) (線型) $E[-|\mathcal{G}]$ は $L^1(\Omega)$ 上の線型汎関数である: $E[a_1 X_1 + a_2 X_2|\mathcal{G}] = a_1 E[X_1|\mathcal{G}] + a_2 E[X_2|\mathcal{G}]$ a.s.
- (4) (正) $X \geq 0 \Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \geq 0$.
- (5) (単調収束定理) $0 \leq X_n \nearrow X \Rightarrow E[X_n|\mathcal{G}] \nearrow E[X|\mathcal{G}]$ a.s.
- (6) (Fatou の補題) $X_n \geq 0 \Rightarrow E[\liminf X_n|\mathcal{G}] \leq \liminf E[X_n|\mathcal{G}]$ a.s.
- (7) (優収束定理) $\forall n \in \mathbb{N} |X_n| \in L^1(\Omega)$ かつ $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ ならば, $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{a.s.}} E[X|\mathcal{G}]$.
- (8) (Jensen) 凸関数 $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $c(E[X|\mathcal{G}]) \leq E[c(X)|\mathcal{G}]$ a.s. 特に, $\| \cdot \|_p$ ($p \geq 1$) は凸関数であるから $\|E[X|\mathcal{G}]\|_p \leq \|X\|_p$.
- (9) (Tower property) $\mathcal{H} < \mathcal{G} \Rightarrow E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]$ a.s.
- (10) (可測関数) $Z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G})$ のとき, $E[ZX|\mathcal{G}] = ZE[X|\mathcal{G}]$ a.s.
- (11) (独立性) $\mathcal{H} \perp \sigma[X, \mathcal{G}] \Rightarrow E[X|\sigma[\mathcal{G}, \mathcal{H}]] = E[X|\mathcal{G}]$ a.s. 特に, $X \perp \mathcal{H} \Rightarrow E[X|\mathcal{H}] = E[X]$ a.s.

[証明].

- (1) 条件付き期待値の一意性より, $Y = E[X|\mathcal{G}]$ a.s.. 任意の $G \in \mathcal{G}$ について, 条件付き期待値 $E[X|\mathcal{G}]$ は G 上では X と平均が等しいから, $E[Y1_G] = E[E[X|\mathcal{G}]1_G] = E[X1_G]$ が成り立つ. $G = \Omega$ と取れば良い.
- (2) X は自身の条件付き期待値としての要件を満たすから, 一意性より.
- (3) 右辺の $a_1 E[X_1|\mathcal{G}] + a_2 E[X_2|\mathcal{G}]$ も, $a_1 X_1 + a_2 X_2$ の $B \in \mathcal{G}$ 上での期待値を与える測度 Q の確率密度関数となっている. ■

1.5 関数空間 C と D

1.5.1 ポーランド空間の位相の議論

補題 1.5.1. ポーランド空間 (完備可分距離空間) の可算積はポーランド空間である.

定理 1.5.2. S 上のポーランド位相 τ と Hausdorff 位相 τ_1 を考える. $\tau_1 \subset \tau$ ならば, これらが定める Borel σ -代数は一致する: $\mathcal{B}_\tau(S) = \mathcal{B}_{\tau_1}(S)$.

1.5.2 D 空間と Skorokhod 位相

関数解析では考察の対称となったことはないようであるが、確率論では C と同様に重要である。が、明らかに大きすぎる。

記法 1.5.3. $T \subset \mathbb{R}$ を開区間とする。

定理 1.5.4. $C(T)$ は、

- (1) T がコンパクトであるとき、一様位相について、可分な Banach 空間 (特にポーランド空間) となる。
- (2) T がコンパクトでないとき、広義一様収束位相について、可分な Frechet 空間 (特にポーランド空間) となる。

定義 1.5.5. $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ が第 1 種不連続または **cadlag** または右連続であるとは、 I 上の各点で、右連続かつ有限な左極限が存在することを言う。これらの全体を $D(T)$ で表す。

補題 1.5.6. $C(T) \subset D(T)$ であり、(広義) 一様収束距離を用いて、同様の位相を入れることが出来る。このとき、この位相について、 $D(T)$ は完備であるが、可分でない。

[証明]。

完備 一様収束によって、cadlag 性は保たれる。

非可分性 $T := [0, 1]$ とコンパクト集合をとっても、定義関数の集合 $(1_{[0, \alpha]})_{\alpha \in [0, 1]}$ は $[0, 1]$ と同じ濃度を持つ非可算集合であるが、集積点を持たない： $\forall \alpha \neq \beta \in [0, 1] \quad \|1_{[0, \alpha]} - 1_{[0, \beta]}\|_{\infty} = 1$ 。

■

定義 1.5.7 (Skorohod topology). 簡単のため T を有界閉区間とする。 T の順序を保つ位相同型の全体の群を $\Phi(T)$ とすると、 $\Phi(T) \subset C(T) \subset D(T)$ である。

- (1) 一様距離 ρ について、 $\forall f, g \in D(T) \quad \forall \varphi \in \Phi(T) \quad \rho(f, g) = \rho(f \circ \varphi, g \circ \varphi)$ が成り立つ。
- (2) 次のように ρ_S を定めると、これは距離になる：

$$\rho_S(f, g) := \inf_{\varphi \in \Phi(T)} (\rho(f \circ \varphi, g) + \rho(\varphi, i))$$

- (3) この距離 ρ_S は完備ではないが、一様位相よりも弱い完備かつ可分な位相を定める。これを **Skorohod 位相** という。
- (4) Φ のうち、 T 上の Lipschitz ノルム $\lambda: \Phi \rightarrow [0, \infty]$ を有限にするもののなす部分集合 $\Psi := \{\varphi \in \Phi \mid \lambda(\varphi) < \infty\}$ は部分群となる：

$$\lambda(\varphi) := \sup_{s \neq t \in T} \left| \log \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \right|$$

なお、 λ は対数関数によって、小さいほど φ の傾きが一般に 1 に近いことを意味するように構成してある。

- (5) 次の距離 ρ_B を **Billingsley** の距離といい、Skorohod 位相を定める完備な距離である：

$$\rho_B(f, g) := \inf_{\psi \in \Psi(T)} (\rho(f \circ \psi, g) + \lambda(\psi)).$$

$\forall f, g \in D(T) \quad \forall \varphi \in \Phi(T) \quad \rho(f, g) = \rho(f \circ \varphi, g \circ \varphi)$ が成り立つことに注意して、

$$\rho_S(f, g) := \inf_{\varphi \in \Phi(T)} (\rho(f \circ \varphi, g) + \rho(\varphi, i))$$

は距離を定める。

命題 1.5.8. 右連続な階段関数全体の集合は、 $D(T)$ 内で一様収束位相について稠密である。

1.5.3 Kolmogorov σ -代数

σ -代数の全体は完備束をなす．また，full set と null set は δ -環をなすが，それらの合併は σ -代数であり，2 と表す [2]．

定義 1.5.9. 集合 T 上の関数の空間 $\mathcal{F} \subset \text{Map}(T, \mathbb{R})$ における σ -代数を考える．任意の $t \in T$ に対して，射影 $\text{ev}_t : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ が可測となるような \mathcal{F} 上の σ 加法族 \mathcal{B} の中で最小のものを $\mathcal{B}_K(\mathcal{F})$ で表し， \mathcal{F} 上の Kolmogorov σ -加法族という．

補題 1.5.10. $\mathcal{B}_K(\mathcal{F}) = \bigvee_{t \in T} \pi_t^{-1}(\mathcal{B}^1)$ である．すなわち，Kolmogorov σ -代数は， $\{\pi_t^{-1}(\mathcal{B}^1)\}_{t \in T}$ が束 $P(\mathcal{F})$ の中でなす下限となる．

定理 1.5.11 (一様位相，Skorohod 位相の Kolmogorov σ -代数との一致)．

- (1) $\mathcal{B}(C(T)) = \mathcal{B}_K(C(T))$ ．
- (2) $\mathcal{B}(D(T)) = \mathcal{B}_K(D(T))$ ．またこれは $D \subset L^1(T)$ としての L^1 -ノルムの位相が生成する Borel σ -代数とも一致する．

1.6 確率過程に関する一般事項

1.6.1 3つの見方

2つの見方を， $\{X_t, t \in T\}$ ，または， $X_*(\omega), (X_t(\omega), t \in T)$ として表現している．いずれの見方も， C, D -過程については同値になる．一方で， $\Omega \times T$ 上可測になることは特殊な性質で，これを満たす過程を可測過程という．Brown 運動は可測過程である．

補題 1.6.1. 可測関数の全体 $\mathcal{L}(\Omega)$ について．

- (1) 距離 $\rho_0(X, Y) := E[|X - Y| \wedge 1]$ について，完備可分な距離空間となる．
- (2)

$$\forall \epsilon \in (0, 1) \quad \epsilon P[|X - Y| > \epsilon] \leq \rho_0(X, Y) \leq \epsilon + P[|X - Y| > \epsilon].$$

- (3) この距離が定める位相は，確率収束を定める．

定義 1.6.2 (確率過程の連続性)．確率過程 $(X_t)_{t \in T} : T \rightarrow \mathcal{L}(\Omega)$ について，

- (1) $(\mathcal{L}(\Omega), \rho_0)$ について連続であるとき，確率連続であるという： $\forall s \in T \quad \forall \epsilon > 0 \quad \lim_{t \rightarrow s} P[|X_t - X_s| > \epsilon] = 0$ ．
- (2) $(\mathcal{L}(\Omega), \rho_0)$ について一様連続であるとき，一様確率連続であるという．

T がコンパクトであるとき，2つは同値．

定理 1.6.3 (2つの currying の等価性)．次の2条件は同値．

- (1) 確率変数の集合 $\{X_t\}_{t \in T}$ は C -過程である： $\forall \omega \in \Omega \quad X_*(\omega) \in C(T)$ ．
- (2) 見本過程に値を取る写像 $\Omega \rightarrow C(T)$ として可測である．

C を D に置き換えても成り立つ．

定理 1.6.4 (可測過程)．

- (1) 可測写像 $\Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ は，確率過程 $T \rightarrow \mathcal{L}(\Omega)$ を定める．
- (2) 過程 $T \rightarrow \mathcal{L}(\Omega)$ は可測過程であるとする．このとき，見本道の確率変数 $\Omega \rightarrow \mathcal{L}(T)$ が定まる．
- (3) C 過程と D 過程は可測過程である．

1.6.2 確率過程の同値性

定義 1.6.5 (equivalence / version, finite dimensional marginal distributions).

- (1) 同じ状態空間 (E, \mathcal{E}) を持つ $(\Omega, \mathcal{F}, P), (\Omega', \mathcal{F}', P')$ 上の 2 つの過程 X, X' が同値であるまたは一方が他方のバージョンであるまたは法則同等 [2] であるとは, 任意の有限部分集合 $\{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ と任意の可測集合 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ について,

$$P[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n] = P'[X'_{t_1} \in A_1, \dots, X'_{t_n} \in A_n]$$

- (2) 測度 P の $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) : \Omega \rightarrow E^n$ による押し出しを $P_{t_1, \dots, t_n} := P^{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})}$ で表す. 任意の有限集合 $\{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ に関する押し出し全体の集合 \mathcal{M}_X を有限次元分布 (f.d.d) と呼ぶ.

補題 1.6.6 (過程の同値性の特徴付け). X, Y について, 次の 3 条件は同値.

- (1) X, Y は同値である.
- (2) $\mathcal{M}_X = \mathcal{M}_Y$.

定義 1.6.7 (modification, indistinguishable). 定義された確率空間も状態空間も等しい 2 つの過程 X, Y について,

- (1) 2 つは修正または変形または同等 [2] であるとは, $\forall t \in \mathbb{R}_+ X_t = Y_t$ a.s. を満たすことをいう.^{†5}
- (2) 2 つは識別不可能または強同等 [2] であるとは, 殆ど至る所の $\omega \in \Omega$ について, $\forall t \in \mathbb{R}_+ X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ が成り立つことをいう.

補題 1.6.8.

- (1) X, Y が互いの修正であるならば, 同値である.
- (2) X, Y が互いの修正であり, 見本道が殆ど確実に右連続ならば, 識別不可能である.

定理 1.6.9. 2 つの C 過程または D 過程が同値であるならば, 見本道の空間 $C(T), D(T)$ に押し出す確率測度は等しい.

1.7 情報と情報増大系

情報は σ -部分代数で, データは確率変数で表すとしたら, 2 つの構造が何らかの意味で整合して居る必要がある. これを適合的という.

1.7.1 閉 σ -代数

確率変数 X に対して, これが Ω 上に定める分割が生成する最小の閉 σ -代数を $\mathcal{F}[X] < \mathcal{G}(P)$ で表すこととしよう.

記法 1.7.1. $(\Omega, \mathcal{G}(P), P)$ 上の, $\mathcal{G}(P)$ の部分 σ -代数であって, すべての P -零集合を含むものを閉 σ -代数または情報といい, $\Phi = \Phi(\Omega, P) = \{\mathcal{B} \vee 2 < \mathcal{G}(P) \mid \mathcal{B} < \mathcal{G}(P)\}$ でらわす.

定義 1.7.2.

- (1) 可測関数 $X : \Omega \rightarrow S$ について, $\mathcal{F}[X] := X^{-1}(\mathcal{G}(P^X)) \vee 2$ を, X で生成される閉 σ -代数という. これは, X を可測にする閉 σ -代数の中で最小のものである.
- (2) 確率変数の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ については, $\mathcal{F}[X_\lambda, \lambda \in \Lambda] := \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}[X_\lambda]$ と表す.

定理 1.7.3. $X, Y \in \mathcal{X}(\Omega)$ について, $X < Y$ a.s. $\Leftrightarrow [\exists \varphi \in \text{Map}(\Omega, \Omega) X = \varphi \circ Y \text{ a.s.}]$ と表すと, これは同値類 \sim とその上の順序を定め,

^{†5} [?] ではこの概念を equivalence または version と呼んでいる.

- (1) $Y \prec X$ a.s. $\Leftrightarrow \mathcal{F}[Y] \subset \mathcal{F}[X]$.
 (2) $Y \sim X$ a.s. $\Leftrightarrow \mathcal{F}[Y] = \mathcal{F}[X]$.

1.7.2 情報増大系

情報系 $(\mathcal{F}[X_t])_{t \in T}$ について, 過去の記憶を取り $(\mathcal{F}[X_s; s \leq t])_{t \in T}$ とすれば単調増大になり, さらに $\left(\mathcal{F}_t := \bigcap_{s > t} \mathcal{F}[X_u; u \leq s] \right)_{t \in T}$ とすれば右連続にもなるから, 特に意識せず情報系 (filtration) と呼ぶこととする. また, 任意の情報系は, ある実過程が生成することに注意.

定義 1.7.4 (filtration).

- (1) T に関する情報増大系 $\{F_t\}_{t \in T} \subset \Phi(\Omega, P)$ とは,
 (a) 広義単調増大性: $\forall s, t \in T \ s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$
 (b) 右連続性: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigvee_{s > t} \mathcal{F}_s$
 を満たす閉 σ -代数の族をいう.
 (2) 任意の広義単調増大性を満たす系 (\mathcal{F}_t) に対して, $(\mathcal{F}_{t+})_{t \in T}$ は情報増大系である. これを右連続化という.
 (3) 確率過程 (X_t) に対して, $\left(\mathcal{F}_t := \bigcap_{s > t} \mathcal{F}[X_u; u \leq s] \right)$ を X が生成する情報増大系といい, $F[X] := (\mathcal{F}_t[X])_{t \in T}$ で表す.
 (4) 確率過程 (X_t) が右連続であるとは, D -過程であることをいう.

定義 1.7.5 (adapted, predictable). $F = (F_t)_{t \in T}$ を情報系, $X = (X_t)_{t \in T}$ を確率過程とする.

- (1) $\forall t \in T \ X_t \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}_t)$ のとき, X は F に適合するという. これは $\forall t \in T \ \mathcal{F}[X_t] \subset \mathcal{F}_t$ に同値.
 (2) $\forall t \in T \ X_t \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}_{t-1})$ のとき, X は F で可予測であるという. $X_t = E[X | \mathcal{F}_{t-1}]$ より, 右辺から計算可能になる.

例 1.7.6 (canonical filtration). $\mathcal{F}_t := \cap_{\epsilon > 0} \sigma[X_s \mid s \leq t + \epsilon]$ と定めると, 右連続で適合的な σ -部分代数となる. これを自然な情報系という.

命題 1.7.7. D -過程 $(X_t)_{t \in T}$ について, これが過程として生成する情報系と, D -値確率変数として生成する情報系とは等しい: $\mathcal{F}[X_t, t \in T] = \mathcal{F}[X.]$.

1.8 停止時

T に値を取る確率変数のうち, 試行列 $\{\tau = t\}$ が (\mathcal{F}_t) -適合的でなければ, これはモデルとして認められない場合が多い (大損してからやっぱなかったことにしてほしいとは言えない).

1.8.1 定義と例

定義 1.8.1 (Markov time / stopping time).

離散 確率変数 $\tau: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{N}}^{\dagger 6}$ が (\mathcal{F}_n) -Markov 時刻または停止時刻であるとは,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \{\tau \leq n\} := \{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

を満たすことをいう.

連続 確率変数 $\tau: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ が (\mathcal{F}_t) -Markov 時刻または停止時刻であるとは,

$$\forall t \geq 0 \quad \{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

^{†6} $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{N}}) = P(\overline{\mathbb{N}})$ に注意

を満たすことを言う．

1.8.1.1 離散の場合

補題 1.8.2 (離散の場合の特徴付け). $\tau : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$ について, 次の2条件は同値．

- (1) τ は Markov 時刻である．
- (2) $\forall n \in \mathbb{N} \{ \tau = n \} \in \mathcal{F}_n$ である．

補題 1.8.3 (離散停止時の構成). 停止時 $\tau, \tau_1, \tau_2 : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$ について,

- (1) $\tau + m$ ($m \in \bar{\mathbb{N}}$) も停止時だが, 一般に $\tau - m$ は停止時とは限らない．
- (2) $\tau_1 \vee \tau_2, \tau_1 \wedge \tau_2$ も停止時である．
- (3) $\tau_1 + \tau_2$ も停止時である．

例 1.8.4 (離散の例).

- (1) 定値関数は Markov 時刻である．
- (2) 到達時刻 (first hitting time) とは, (\mathcal{F}_n) -適合確率過程 (X_n) に対して, 任意の事象 $A \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$ に対し,

$$\tau_A(\omega) := \min \{ n \in \bar{\mathbb{N}} \mid X_n(\omega) \in A \}$$

で定まる時刻である．ただし, $\min \emptyset = \infty$ とする． $\{\tau_A \leq n\} = \bigcup_{i \in [n]} \{X_i \in A\}$ より, Markov 時刻である．

- (3) ある一定額 α 以上を賭けたら即座に賭けを中止すると決めているとき, この時刻は Markov 時刻である．
- (4) 最終脱出時刻 (last exit time) とは, (\mathcal{F}_n) -適合確率過程 (X_n) に対して, 任意の事象 $A \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$ に対し,

$$\sigma_A(\omega) := \max \{ n \in \bar{\mathbb{N}} \mid X_n(\omega) \in A \} + 1$$

とすると, これは確率変数ではあるが, Markov 時刻にはならない．「これが最後か?」を判定するには, さらに先の情報が必要だからである．

1.8.1.2 連続の場合

補題 1.8.5 (連続の場合の特徴付け). $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ について, 次の2条件は同値．

- (1) τ は Markov 時刻である．
- (2) $\forall t \geq 0 \{ \tau < t \} \in \mathcal{F}_t$.
- (3) $\forall t \geq 0 \{ \tau > t \} \in \mathcal{F}_t$.
- (4) $\forall t \geq 0 \{ \tau \geq t \} \in \mathcal{F}_t$.

例 1.8.6. (X_t) の集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ への到達時刻は

$$\tau_A(\omega) := \inf \{ t > 0 \mid X_t(\omega) \in A \}$$

で定める． A が開または閉であるとき, τ_A は Markov 時刻になる．

1.8.2 情報量

過程を事前に決めた規則でランダムに止める過程も, 再びたしかに確率過程となる．

定義 1.8.7 (stopped process, information). τ を (\mathcal{F}_t) -停止時, $(X_t)_{t \in T}$ を (\mathcal{F}_t) -適合過程とする．

- (1) $(X_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega))_{t \in T}$ はを, 時点 τ で止めた過程という．これはたしかに確率過程になる．
- (2)

$$\mathcal{F}_\tau := \{ A \in \mathcal{F} \mid \forall t \in T \ A \cap \{ \tau \leq t \} \in \mathcal{F}_n \} = \mathcal{F}[X_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega); t \in T]$$

を時点 τ までの情報量という。

要諦 1.8.8. $A \in \mathcal{F}_\tau$ であるとは, τ が n 時以前に起こっているという追加情報もつけた事象 $A \cap \{\tau \leq n\}$ は \mathcal{F}_n によって判断可能であることをいう。 τ が定数 m のとき, $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_m$ となる。

定理 1.8.9. τ, σ を Markov 時刻とする。次が成り立つ。

- (1) \mathcal{F}_τ は σ -代数である。
- (2) τ は \mathcal{F}_τ -可測である。
- (3) $\tau \leq \sigma$ ならば $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$ 。

第 2 章

マルチンゲール

連続確率過程のマルチンゲールは、離散化したあとに適当な連続極限を取ることで、離散の場合の議論に帰着させることが出来る。

2.1 離散時変数のマルチンゲール

2.1.1 定義

定義 2.1.1 (martingale, submartingale). 確率過程 (X_n) が情報系 (\mathcal{F}_n) についてマルチンゲールであるとは、次の 3 条件が成り立つことをいう：

- (1) (\mathcal{F}_n) -適合的である： $\forall n \in \mathbb{N} \ X_n : \mathcal{F}_n$ measurable.
- (2) 可積分列である： $\forall n \in \mathbb{N} \ E[|X_n|] < \infty$.
- (3) martingale 性： $\forall n \in \mathbb{N} \ E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ a.s.

(3) の代わりに $\forall n \in \mathbb{N} \ E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq X_n$ a.s. が成り立つとき、劣マルチンゲールであるといい、 $\forall n \in \mathbb{N} \ E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq X_n$ a.s. が成り立つとき、優マルチンゲールであるという。

要諦 2.1.2. (3) は $\forall A \in \mathcal{F}_n \ E[X_{n+1} 1_A] = E[X_n 1_A]$ と同値。これが成り立つならば、繰り返し期待値の法則より、 $m > n \geq 1 \Rightarrow E[X_m | \mathcal{F}_n] = X_n$ a.s. であり、特に、 $E[X_n]$ は n に依らず一定である。また、 (X_n) が劣マルチンゲールであることと、 $(-X_n)$ が優マルチンゲールであることは同値。

例 2.1.3.

- (1) $\{Z_n\} \subset \mathcal{L}^1(\Omega)$ を期待値 0 かつ独立な確率変数列とし、 \mathcal{F}_n として自然な情報系を取る。和 $X_n := \sum_{k=1}^n Z_k$ はマルチンゲールである。 $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[X_n + Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[X_n | \mathcal{F}_n] + E[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ であるが、第 1 項は X_n は \mathcal{F}_n 可測であるから、 $E[X_n | \mathcal{F}_n] = X_n$ 。また、 $\sigma(Z_{n+1})$ と \mathcal{F}_n は独立だから??、 $E[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[Z_{n+1}] = 0$ a.s.。これは Kolmogorov の不等式??ですであつた消息である。
- (2) (\mathcal{F}_n) を情報系とし、 $X \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ を可積分確率変数とする。 $X_n := E[X | \mathcal{F}_n]$ とおけば、 (X_n) はマルチンゲールである。実際、 $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[E[X | \mathcal{F}_{n+1}] | \mathcal{F}_n] \stackrel{\text{a.s.}}{=} E[X | \mathcal{F}_n] = X_n$ 。

(1) の状況は公平な賭けなどの意味論を持つ。コイントスをして、表なら $+x$ 円、裏なら $-x$ 円の賭けで、所持金を X_n とすると、これはマルチンゲールである。

補題 2.1.4 (劣マルチンゲール性の保存).

- (1) $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は下に凸、 (X_n) をマルチンゲールとする。このとき、 $\forall n \in \mathbb{N} \ E[|\psi(X_n)|] < \infty$ ならば、 $(\psi(X_n))$ は劣マルチンゲールである。特に、ある $p \geq 1$ に関して $E[|X_n|^p] < \infty$ ならば、 $(|X_n|^p)$ は劣マルチンゲールである。
- (2) 下に凸な関数 $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ はさらに広義単調増加であるならば、 (X_n) が劣マルチンゲールの場合でも、 $(\psi(X_n))$ は劣マルチンゲールになる。

2.1.2 Doob 分解

定理 2.1.5 (Doob-Meyer decomposition theorem). 任意の (\mathcal{F}_n) -劣マルチンゲール (X_n) は, \mathcal{F} -マルチンゲールな $M = (M_n)$ と可予測な広義増加過程 $A = (A_n)$, すなわち, $0 = A_0 \leq A_1 \leq \dots, A_n \in L^1(\mathcal{F}_{n-1})$ ($n = 1, 2, \dots$)^{†1} を満たす列 (A_n) とに一意的に分解される: $X_n = M_n + A_n$ a.s. .

2.1.3 Doob の任意抽出定理

2つのランダム関数 X, τ の交錯を考える.

定義 2.1.6. (\mathcal{F}_n) -適当な確率過程 (X_n) と, \mathbb{N} -値 Markov 時刻 τ に対して, $X_\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を $X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega)$ で定める.

補題 2.1.7. $X_\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は

- (1) \mathcal{F} -可測である.
- (2) \mathcal{F}_τ -可測である.

[証明].

- (1) X_τ は可測関数の合成 $X \circ (\tau, \text{id}): \Omega \rightarrow \mathbb{N} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ であるため.

■

定理 2.1.8 (有界停止時刻によるマルチンゲール性の保存). (X_n) を劣マルチンゲール, τ, σ を $\tau \leq \sigma$ を満たす有界な Markov 時刻とする. このとき, X_τ, X_σ は共に可積分で, $E[X_\sigma | \mathcal{F}_\tau] \geq X_\tau$ a.s. . (X_n) がマルチンゲールであるとき, 等号成立.

系 2.1.9 (optional sampling theorem). (X_n) を (\mathcal{F}_n) -劣マルチンゲール, (τ_k) を有界な (\mathcal{F}_n) -マルコフ時刻の広義単調増加列とする. このとき, $Y_k := X_{\tau_k}$ は (\mathcal{F}_{τ_k}) -劣マルチンゲールである.

2.1.4 Doob の不等式

劣マルチンゲールに対しては, $\max_{1 \leq k \leq n} X_k$ に関する評価を, X_n のみを用いて与えられる. 一般の確率過程では決して成り立たない. この背後には Kolmogorov の不等式^{??}がある.

定理 2.1.10 (Doob inequality). (X_n) を劣マルチンゲールとする. このとき, $X_n^+ := X \vee 0$ とすると, 任意の $a > 0$ について, 次が成り立つ.

(1)

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq a\right) \leq \frac{1}{a} E[X_n 1_{\{\max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq a\}}] \leq \frac{1}{a} E[X_n^+]$$

(2)

$$P\left(\min_{1 \leq k \leq n} X_k \leq -a\right) \leq \frac{1}{a} E[X_n - X_1] - \frac{1}{a} E[X_n 1_{\{\min_{1 \leq k \leq n} X_k \leq -a\}}] \leq \frac{1}{a} E[X_n^+] - \frac{1}{a} E[X_1].$$

系 2.1.11. $\{M_n\} \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$ を $p \geq 1$ 乗可積分なマルチンゲールとする. このとき, 任意の $a > 0$ に対して,

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |M_k| \geq a\right) \leq \frac{1}{a^p} E[|M_n|^p].$$

^{†1} マルチンゲールに対して $A_n \in L^1(\mathcal{F}_{n-1})$ とは, \mathcal{F}_{n-1} -可測の意味しかない.

2.1.5 劣マルチンゲールの収束定理

劣マルチンゲールの正部分の期待値が「有界」ならば、 X_n は概収束極限を持つ。その証明では、劣マルチンゲールの上向き横断回数の評価が肝要になる。

2.1.5.1 martingale 変換

定義 2.1.12 (martingale transformation). 可予測な過程 (H_n) と (\mathcal{F}_n) -適合的な過程 (X_n) に対して、新たな確率過程 $(X'_n) := ((H \cdot X)_n)$ を次のように定める

$$X'_n = (H \cdot X)_n := \begin{cases} \sum_{k=2}^n H_k (X_k - X_{k-1}), & n \geq 2, \\ 0, & n = 1. \end{cases}$$

$(H \cdot X)_n$ を X_n のマルチンゲール変換という。連続時間の場合は、確率積分 $\int_0^t H dX$ となる。

要諦 2.1.13. (H_n) は戦略を表し、 (X_n) は \mathbb{Z} 上のランダムウォークとすれば、これによる変換 $(H \cdot X)_n$ は n 時に所持している利益分の金額となる。

例 2.1.14. 倍賭けの戦略は、次のように表せる。

$$H_n := \begin{cases} 2H_{n-1}, & Z_{n-1} = -1, \\ 1, & Z_{n-1} = 1. \end{cases}$$

定理 2.1.15. 可予測な確率過程 (H_n) は有界な列とする： $\forall n \in \mathbb{N} \sup_{\omega \in \Omega} |H_n(\omega)| < \infty$ 。このとき、次が成り立つ。

- (1) (X_n) がマルチンゲールならば、 $(X'_n) = ((H \cdot X)_n)$ もマルチンゲールである。
- (2) (X_n) が劣マルチンゲールで、 (H_n) が非負ならば、 $(X'_n) = ((H \cdot X)_n)$ も劣マルチンゲールである。

2.1.5.2 上渡回数定理

マルチンゲールは、(少なくとも期待値については) 単調に増加する傾向があり、いつまでも区間 $[a, b]$ 付近にとどまっていけないか、概収束をする。

定義 2.1.16 (upcrossing number).

- (1) 実数 $a < b$ について、列 (σ_i) を次のように定めると、Markov 時刻の狭義単調増加列となる：

$$\begin{aligned} \sigma_1 &:= \min \{n \geq 1 \mid X_n \leq a\}, & \sigma_2 &:= \min \{n > \sigma_1 \mid X_n \geq b\}, \\ \sigma_{2k+1} &:= \min \{n > \sigma_{2k} \mid X_n \leq a\}, & \sigma_{2k+2} &:= \min \{n > \sigma_{2k+1} \mid X_n \geq b\}. \end{aligned}$$

- (2) Markov 時刻の狭義単調増加列に対して、 $U_n := \max_{k \in \mathbb{N} \mid \sigma_{2k} \leq n}$ と定めると、 \mathbb{N} -値確率変数の列となる。成分 U_n を、時刻 n までの $a \nearrow b$ 間の上向き横断回数という。

定理 2.1.17. (X_n) が劣マルチンゲールならば、

$$E[U_n] \leq \frac{1}{b-a} E[(X_n - a)^+].$$

2.1.5.3 劣マルチンゲールの収束定理

劣マルチンゲールに対しても、有界列は収束することに対応する結果が成り立つ。

定理 2.1.18. 劣マルチンゲール (X_n) は $\sup_{n \in \mathbb{N}} E[X_n^+] < \infty$ を満たすとする．このとき，ある確率変数 X が存在して $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ a.s. かつ可積分 $X \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ である．

要諦 2.1.19. 劣マルチンゲールに対して，有界性条件 $\sup_{n \in \mathbb{N}} E[X_n^+] < \infty$ は，平均の一樣有界性 $\sup_{n \in \mathbb{N}} E[|X_n|] < \infty$ に同値．

2.1.6 積率不等式

Doob の不等式 2.1.10 を，マルチンゲールの p 次のモーメントに関する評価式に書き直せる．

2.1.6.1 Doob の不等式の一般化

定理 2.1.20. $p > 1$ について， $\{M_n\} \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$ を p 乗可積分なマルチンゲールとする．このとき，

$$E \left[\max_{1 \leq k \leq n} |M_k|^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p E[|M_n|^p].$$

2.1.6.2 Burkholder の不等式

記法 2.1.21. $\{M_n\} \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ を， $M_0 = 0$ を初項とする 2 乗可積分なマルチンゲールとする．このとき， $\forall n \in \mathbb{N} \ E[M_n] = 0$ である．

定義 2.1.22. $p \geq 1$ について，マルチンゲール (M_n) の p 次変分または p 次変動とは，次で定まる実数列 $([M]_n)$ をいう：

$$[M]_n := \sum_{k=1}^n |M_k - M_{k-1}|^p.$$

特に $p = 1$ のとき，変分あるいは全変動という．

命題 2.1.23. 2 次変分 $[M]_n$ は，次の 2 条件をみたす：

- (1) $(M_n^2 - [M]_n)$ はマルチンゲールである．
- (2) $([M]_n)$ は増加過程である： $0 = [M]_0 \leq [M]_1 \leq \dots$ ．

注 2.1.24. (M_n^2) は劣マルチンゲールだから，Doob 分解 $M_n^2 = N_n + A_n$ を持つ．このとき， $(M_n^2 - A_n)$ はマルチンゲールであるが， (A_n) も命題の 2 条件を満たす． (A_n) も (M_n) の 2 次変分と呼び， $(\langle M \rangle_n)$ で表す． $(\langle M \rangle_n)$ は可予測でもあるが，一般に $([M]_n)$ はそうではない．明確な区別が必要である．一方で，連続マルチンゲールにおいては，2 つの概念は 1 つに退化する．

定理 2.1.25 (Burkholder-Davis-Gundy). (M_n) を $M_0 = 0$ を満たす p 乗可積分なマルチンゲールとする．このとき，次が成り立つ：

$$\forall p \geq 1 \ \exists c_p, C_p > 0 \quad c_p E \left[[M]_n^{p/2} \right] \leq E \left[\max_{1 \leq k \leq n} |M_k|^p \right] \leq C_p E \left[[M]_n^{p/2} \right].$$

要諦 2.1.26. 右辺は，Doob の不等式の $E[|M_n|^p]$ を $E[[M]_n^{p/2}]$ で置き換えたものになっている． $p = 2$ のとき両者は一致するが，応用上は 2 次変分の方が計算しやすいことが多い．

2.2 連続時変数のマルチンゲール

2.2.1 定義

離散の場合のマルチンゲールは可積分性を仮定していたが，その全貌は右連続性である．

定義 2.2.1. D -過程 (X_t) が (\mathcal{F}_t) -マルチンゲールであるとは，次の 3 条件を満たすことをいう．

- (1) (\mathcal{F}_t) -適合である： $\forall t \geq 0 \ X_t$ は \mathcal{F}_t -可測．
- (2) 可積分である： $\forall t \geq 0 \ X_t \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F})$ ．

$$(3) \quad \forall_{0 \leq s \leq t} E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad \text{a.s.}$$

条件 (3) の代わりに $\forall_{0 \leq s \leq t} E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s \quad \text{a.s.}$ をみたすとき, (\mathcal{F}_t) -劣マルチンゲールという.

2.2.2 Doob の不等式

2.2.3 Doob の任意抽出定理

2.2.4 劣マルチンゲールの収束定理

2.2.5 Doob-Meyer 分解

2.2.6 Burkholder の不等式

2.3 Gauss 系

第 3 章

半マルチンゲールと統計解析

3.1 統計推測への応用

回帰モデル $X_i = f(X_{i-1}, \dots, X_{i-p}) + \epsilon_i$ において, サンプルングが均等でないときなど, ϵ_i は何か連続的な確率過程を積分して定まる, と考えると数理モデルとして非常に自然である. 連続関数 f について,

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(Y_s) ds + W_t$$

とし, $W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \sim \mathbb{N}(0, t_i - t_{i-1})$ を標準 Weiner 過程とする.

このようなモデルのうち, 特に株価の対数を Y_t とおいたときに使われるパラメトリックモデルに, Vasicek 過程

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t \alpha_1(Y_s - \alpha_2) ds + \beta W_t$$

などがあり, 離散的観測 $\{Y_{t_0}, \dots, Y_{t_n}\}$ に基づいて未知パラメータ $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ の推定を考える. このときにマルチンゲール理論が使える.

その理由は, martingale というクラスの形式的定義が, 自然に統計モデルの「ノイズの直交性」の拡張となっていると考えられるためである. これは独立性の仮定による代数規則 $E[\epsilon_i \epsilon_j] = 0$ の抽出となっているのである.

大きな応用分野として生存解析における censored data^{†1}の解析がある. このとき, N_t を死亡数, Y_t を censor されずに残っている観測対象数, 癌の再発時刻の分布関数を F , 密度関数を f とすると,

$$N_t - \int_0^t \alpha(s) Y_s ds \quad \alpha(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

はマルチンゲールになる. α はハザード関数といい, 患者が時刻 t で生存しているという条件の下, その時間に死亡する条件付き確率となる. このマルチンゲールの期待値は常に 0 だから, N_t の不偏推定量が見つかったことになる. なお,

$$\int_0^t \frac{1}{Y_s} (dM_s - \alpha(s) Y_s ds)$$

もマルチンゲールとなることがわかる.

^{†1} 消息不明になる瞬間があること. 癌の再発データにおいて, 他の原因による死亡など.

第 4 章

Markov 過程

互いに独立な試行の列（確率変数の列）の，マルチンゲールとは別の方向への一般化を考える．独立性は一切の過去の履歴に依らないが，Markov 性は，現在の状態のみに依存する性質を指す．

Brown 運動は状態空間，時間パラメータのいずれも連続な場合であり，Poisson 過程は状態空間は離散的である例である．状態空間が離散的な場合，Markov 連鎖ともいう．またここで偏微分方程式との関係から，確率過程の一般化も自然に出現する．添字集合を多様体 M とした確率過程 $\Omega \times M \rightarrow \mathbb{R}^n$ を確率場という．このとき，時間概念が空間に置き換わっている． x_{n+1} の x_n への依存の仕方は経時変化しないという，時間的一様性の仮定をおいて議論する．すると，Markov 過程は推移作用素を定めることで分布が決まる．これは大数の法則を一般化する．また，推移作用素になり得る作用素は放物型偏微分方程式によって特徴付けられる．

4.1 Kolmogorov の拡張定理

Hopf の拡張定理の一般化である．

定理 4.1.1. 確率空間列 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{G}(\mathbb{R}^n))$ 上の確率測度列 (μ_n) が次の一貫性条件をみたすとき， $(\mathbb{R}^N, \mathcal{G}(\mathbb{R}^N))$ 上の確率測度 μ であって $\forall A \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n) \mu(A \times \mathbb{R}^N) = \mu_n(A)$ を満たすものが一意的に存在する．ただし， $A \times \mathbb{R}^N = \{(\omega_n) \in \mathbb{R}^N \mid (\omega_1, \dots, \omega_n) \in A\}$ とした．なお， \mathbb{R}^N には直積位相を考える．

$$(\text{consistency}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall A \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n) \quad \mu_{n+1}(A \times \mathbb{R}) = \mu_n(A) .$$

特に，この一貫性条件は \mathbb{R}^N 上の測度に延長できるための必要十分条件である．これは \mathbb{R} を一般の完備可分空間としても成り立つ．

4.2 離散時間の Markov 連鎖

記法 4.2.1 (state space). I を可算集合とし，これを状態空間とする．見本過程は列 $\mathbb{N} \rightarrow I$ となり，経時的に I 上を動き回りことになる．

4.2.1 確率行列

歴史 4.2.2. Markov が Markov 連鎖と確率行列を発明した．言語分析やカードシャッフルの問題に用いるつもりであったが，たちまち他の分野でも有用だと解った．確率行列の概念は Kolmogorov に引き継がれることとなる．実際，量子状態を表す演算子も，行列表示を持つこととなる．

記法 4.2.3.

- (1) $\mathbf{1}$ はすべての成分が 1 であるような縦ベクトルを表す．
- (2) δ_i で， i 成分のみが 1 でそれ以外が 0 であるようなベクトルを表す．

定義 4.2.4 (stochastic matrix).

- (1) I 上の確率ベクトル $(v_i)_{i \in I}$ とは, I 上の確率質量関数 $I \rightarrow [0, 1]$ をいう.
- (2) (可算個の成分を持ち得る) 行列 $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$ が (右) 確率的であるとは, 各 i 行ベクトル $(p_{ij})_{j \in I}$ がそれぞれ I 上の確率ベクトルを定めることをいう. 意味論として, 成分 p_{ij} は, 現状態 i から次の時刻 j に遷移する確率を定める.

補題 4.2.5 (確率行列の特徴付け). 行列 \mathbb{P} について, 次の 3 条件は同値.

- (1) \mathbb{P} は確率的である.
- (2) 各行の和が 1 で非負な作用素 (積分なので): $f \geq 0 \Rightarrow \mathbb{P}f \geq 0$ かつ $\mathbb{P}\mathbf{1} = \mathbf{1}$.
- (3) 横ベクトル v が確率ベクトルならば, $v\mathbb{P}$ も確率ベクトルである.

補題 4.2.6 (確率行列は群をなす?). 確率行列 $\mathbb{P} = (p_{ij}), \mathbb{P}' = (p'_{ij})$ の積は確率行列である.

4.2.2 Markov 連鎖の定義と構成

定義 4.2.7 (transition matrix, Markov chain). I -値確率変数列 $\{X_n\} \subset \text{Meas}(\Omega, I)$ が, 初期分布 v , 遷移行列 \mathbb{P} を持つ空間 I 上の Markov 連鎖であるとは, 次が成り立つことをいう:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall i_0, \dots, i_n \in I \quad P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = v_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

命題 4.2.8. 適当な確率空間の上に, 初期分布 v と遷移行列 \mathbb{P} をもち, 殆ど至る所 I 値な Markov 連鎖が存在する.

[証明]. I は可算だから単射 $I \hookrightarrow \mathbb{N}$ が存在する. 以降, $I \hookrightarrow \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{R}$ として, \mathbb{R} の部分集合と同一視する.

構成 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}))$ 上の測度 P_{n+1} を

$$P_{n+1}(A) := \sum_{(i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1} \cap A} v_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n} \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}))$$

とすると, これはたしかに確率測度である.

一貫性 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$ について,

$$P_{n+2}(A \times \mathbb{R}) = \sum_{(i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1} \cap A} v_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n} \left(\sum_{i_{n+1} \in I} p_{i_n i_{n+1}} \right) = P_{n+1}(A).$$

検証 Kolmogorov の拡張定理 4.1.1 より, $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ 上の確率測度 P であって, $P(A \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = P_{n+1}(A)$ を満たすものがただ一つ存在する. この空間上の実数値確率変数列 (X_n) を, $X_n(\omega) = \omega_n$ ($\omega = (\omega_0, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) と定めれば, これは殆ど至る所 I -値の, 求める Markov 過程である. ■

例 4.2.9 (i.i.d. は Markov 過程). $\mathbb{P} = (p_{ij})$ の行ベクトルが i に依らずすべて同じであるとき, (X_n) は独立同試行に従う確率変数列となる.

4.2.3 Markov 性

定義 4.2.10 (Markov property). 過去の軌跡を $A_{i_0, \dots, i_n} := \{\omega \in \Omega \mid X_0(\omega) = i_0, \dots, X_n(\omega) = i_n\}$ とし, $P(A_{i_0, \dots, i_n}) > 0$ ならば, $\forall i_{n+1} \in I \quad P[X_{n+1} = i_{n+1} \mid A_{i_0, \dots, i_n}] = p_{i_n i_{n+1}}$ が成り立つことは定義からすぐにわかる. これを Markov 性という.

記法 4.2.11. $\mathcal{F}_n := \sigma[X_0, \dots, X_n]$ を, Markov 連鎖の定める自然な増加情報系とする.

定理 4.2.12. (X_n) は初期分布 v , 遷移行列 \mathbb{P} の Markov 連鎖とする. $m \in \mathbb{N}, i \in I$ は $P[X_m = i] > 0$ を満たすとする. このとき, 条件付き確率測度 $P[- \mid X_m = i]$ の下で, 次の 2 条件が成り立つ.

- (1) $(X_{m+n})_{n \in \mathbb{N}}$ は初期分布 δ_i , 遷移行列 \mathbb{P} の Markov 連鎖である.

(2) $(X_{m+n})_{n \in \mathbb{N}}$ は \mathcal{F}_m と独立である .

補題 4.2.13. 確率行列の n 乗の成分を $\mathbb{P}^n =: (p_{ij}^{(n)})$ と表すこととする . このとき ,

$$\forall m \in \mathbb{N} \forall i \in I \ P(X_m = i) > 0 \Rightarrow P[X_{m+n} = j | X_m = i] = p_{ij}^{(n)} .$$

この成分を n ステップ遷移確率という .

4.2.4 強 Markov 性

いかなる時点においても , 現在の状況にしか依存しない性質を Markov 性と言うのであった . さらに , 時間をランダムに定めても , 現状にしか依存しないはずである . これを強 Markov 性という .

定理 4.2.14. (X_n) を初期分布 ν , 遷移確率 \mathbb{P} の Markov 連鎖とし , $i \in I$ は $P[\tau < \infty, X_\tau = i] > 0$ とする . このとき , 条件付き確率 $P[-|\tau < \infty, X_\tau = i]$ の下で , 次の 2 条件が成り立つ .

- (1) $(X_{\tau+n})_{n \in \mathbb{N}}$ は初期分布 δ_i , 遷移行列 \mathbb{P} を持つ Markov 過程である .
- (2) $(X_{\tau+n})_{n \in \mathbb{N}}$ は \mathcal{F}_τ と独立である .

4.3 到達確率と差分作用素

差分は前進 $\Delta f(x) := f(x+1) - f(x)$ と後退 $\nabla f(x) := f(x) - f(x-1)$ の 2 つが考えられる . これが連続になると確率微分方程式となるのだ .

4.3.1 到達確率と特徴付け

定義 4.3.1 (hitting / absorption probability). (X_n) を Markov 過程とする .

- (1) 集合 $A \subset I$ に対して , A への到達時刻とは , $\tau_A := \min \{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in A\}$ として定まる可測関数 $\Omega \rightarrow \overline{\mathbb{N}}$ であった 1.8.4 .
- (2) 初期分布 δ_i を持つ Markov 過程に関する確率を P_i で表す . $a_i := P_i[\tau_A < \infty]$ を到達確率または吸収確率という .
- (3) I 上の確率測度 Q_i を , $i \in I$ からの遷移確率 $(p_{ij})_{j \in I}$ が定めるものとして , 任意の $i \in I$ に対して Q_i -可積分な関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ に対する作用素 $\mathcal{L}: \cap_{i \in I} L^1(I, Q_i) \rightarrow \text{Map}(I, \mathbb{R})$ を , $\mathcal{L}f(i) := \sum_{j \in I} p_{ij}f(j) - f(i)$ と定め , 差分作用素という .

定理 4.3.2 (到達確率の特徴付け). 到達確率 $(a_i)_{i \in I}$ は , 方程式系

$$\forall i \in I \setminus A \ \mathcal{L}a(i) = 0, \quad \forall i \in A \ a_i = 0$$

の最小の非負解である . 後者は前者の境界条件という .

要諦 4.3.3. 差分方程式を書き直すと , $i \in I \setminus A$ に関して $a_i = \sum_{j \in I} p_{ij}a_j$ となり , i からの遷移確率に関する , 到達確率の平均になる .

4.3.2 Markov 過程の定める martingale

一般の Markov 過程について , これを martingale 理論の問題に還元することが可能である . これは全く確率微分方程式特有の構造である .

定理 4.3.4. (X_n) を Markov 過程, $f \in l^\infty(\mathbb{R})$ を有界関数とする.

$$Y_n := f(X_n) - f(X_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}f(X_k)$$

によって定まる過程 (Y_n) は (\mathcal{F}_n) -マルチンゲールである.

4.4 有限状態空間上の Markov 連鎖

$|I| < \infty$ の場合について, 理論の広がりを見る.

4.4.1 不変分布とエルゴード性

確率行列 \mathbb{P} の, 確率分布の空間 $P(I)$ への作用を考えると, 不動点が存在する.

定義 4.4.1 (ergodic, irreducible, aperiodic). Markov 連鎖 $((X_n), I, \mathbb{P})$ について,

- (1) \mathbb{P} がエルゴード的であるとは, $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \mathbb{P}^{n_0} > 0$ が成り立つことをいう.
- (2) \mathbb{P} が既約であるとは, $\forall_{i,j \in I} \exists_{n_1 \in \mathbb{N}} p_{ij}^{(n_1)} > 0$ を満たすことをいう.
- (3) 状態 $i \in I$ が非周期的であるとは, $\exists_{n_2 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_2} p_{ii}^{(n)} > 0$ を満たすことをいう.

補題 4.4.2 (エルゴード性の特徴付け). Markov 連鎖 $((X_n), I, \mathbb{P})$ が $|I| < \infty$ を満たすとき, 次の 3 条件は同値.

- (1) \mathbb{P} はエルゴード的である.
- (2) \mathbb{P} は既約で, すべての状態 $i \in I$ は非周期的である.
- (3) \mathbb{P} は既約で, ある状態 $i \in I$ は非周期的である.

例 4.4.3.

- (1) 円周の N 等分点上のランダムウォークは, N が奇数ならばエルゴード的であるが, 偶数ならば既約であっても非周期的にはならない.
- (2) $p_{ii} = 1$ を満たす $i \in I$ を trap という. これがある Markov 過程はエルゴード的でない.

定理 4.4.4 (有限状態 Markov 過程のエルゴード定理). Markov 連鎖 $((X_n), I, \mathbb{P})$ が $|I| < \infty$ を満たし, \mathbb{P} はエルゴード的であるとする. このとき, (1) を満たす I 上の確率分布 π が一意に存在する. この π は (2),(3) も満たす.

- (1) 定常性: $\pi \mathbb{P} = \pi$.
- (2) 極限分布: $\forall_{i,j \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$.
- (3) 混合性: (2) の収束は指数関数的である: $\exists_{C>0} \exists_{0<\lambda<1} \forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{i,j \in I} |p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \leq C\lambda^n$.

この分布 π を不変分布または定常分布という.

4.4.2 大数の法則

Markov 連鎖がエルゴード的ならば, 独立性の代わりになり, 大数の法則が成り立つ.

定理 4.4.5 (大数の弱法則). Markov 連鎖 $((X_n), I, \mathbb{P})$ が $|I| < \infty$ を満たし, \mathbb{P} はエルゴード的であるとする. π を不変分布とすると, 関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ について,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) \xrightarrow{P} E^\pi[f].$$

定義 4.4.6 (number of visit). $i \in I$ に関して, $f(j) := 1_{\{j=i\}}$ と定めると, $\sum_{k=1}^n f(X_k)$ とは時刻 n までの i への訪問回数 $\tau_i^{(n)}$ を表す. 滞在時間ともいう.

系 4.4.7. $\frac{\tau_i^{(n)}}{n} \xrightarrow{P} \pi_i$.

定義 4.4.8 (stationarity).

- (1) Markov 連鎖 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が定常的であるとは, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と $(X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ との分布が等しいことをいう.
- (2) 初期分布を π とするエルゴード的な Markov 連鎖を定常 Markov 連鎖という.

定理 4.4.9 (高次元化). Markov 連鎖 $((X_n), I, \mathbb{P})$ が $|I| < \infty$ を満たし, \mathbb{P} はエルゴード的であるとする. π を不変分布とすると, 関数 $f: I^l \rightarrow \mathbb{R}$ ($l \geq 1$) について,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k, \dots, X_{k+l-1}) \xrightarrow{P} E^\pi[f]$$

ただし, E^π は定常 Markov 連鎖 $(\bar{X}_n)_{n \in [l]}$ に関する期待値である.

4.5 正方格子上のランダムウォーク

次に非有限な状態空間を持つ Markov 過程の例を見る. 代表的なものが, \mathbb{Z}^d 上のランダムウォークである.

定義 4.5.1 (random walk). Markov 過程 $((X_n), \mathbb{Z}^d, \mathbb{P})$ の遷移行列 \mathbb{P} が, 時間一様性に加えて空間一様性 $\forall_{x, y, z \in \mathbb{Z}^d} p_{xy} = p_{x+z, y+z}$ を満たすとき, これを酔歩という.

議論 4.5.2 (加法過程としての構成). Markov 過程としての一貫性に訴えずとも, 空間的一様性に注目すれば, 初期分布 ν を持つ Z_0 と, 分布 p を持つ Z_1, Z_2, \dots とが独立であるとき, $X_n := \sum_{k=0}^n Z_k$ とすればこれは酔歩である.

4.5.1 再帰性と非再帰性

平均的な一歩 $E[Z_1]$ が零ベクトルでない場合, 酔歩は非再帰的である. また, 再帰的であることと無限回 0 を踏むことは同値である.

記法 4.5.3. $\nu = \delta_0$, あるいは, $Z_0 = 0$ から始まる酔歩を考える.

$$A_n := \{X_n = 0, \forall_{1 \leq k \leq n-1} X_k \neq 0\}$$

$$q := \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = P[\{\exists_{n \in \mathbb{N}} X_n = 0\}]$$

とする.

定義 4.5.4 (recurrent). 酔歩が $q = 1$ を満たすとき再帰的であるという.

補題 4.5.5. 酔歩について, 次の 2 条件は同値.

- (1) 再帰的である.
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} P[X_n = 0] = \infty$.

定理 4.5.6 (非再帰性の十分条件). $R := \max \{|z| \in \mathbb{R} \mid z \in \mathbb{Z}^d, p_{0z} > 0\} < \infty$ と仮定し, $m := \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} p_{0z} z = E[Z_1] \in \mathbb{R}^d$ とおく. $m \neq 0$ のとき, 酔歩は非再帰的である.

4.5.2 単純ランダムウォークの再帰性と非再帰性

単純酔歩では, $2d$ 個の隣点にのみ, そして等確率に移動可能とする. $E[Z_1] = 0$ なので, これだけで再帰性は判定できない.

定義 4.5.7 (simple random walk). 遷移確率が

$$p_z := \begin{cases} \frac{1}{2d}, & |z| = 1, \\ 0, & |z| \neq 1 \end{cases}$$

となる酔歩を単純酔歩という.

定理 4.5.8 (Polya). d 次元の単純酔歩は, $d = 1, 2$ のとき再帰的であり, $d \geq 3$ のとき再帰的でない.

4.6 連続時間 Markov 過程

4.6.1 Chapman-Kolmogorov 方程式

熱核の半群性

Markov 過程の発展は, 確率行列の積で表された. この連続化は, ある発展条件を満たすことである. この放物型偏微分方程式を Chapman-Kolmogorov 方程式という. これを解いて推移確率とし, Kolmogorov の拡張定理に基づけば拡散過程が構成できる. Kolmogorov は初期から物理学への応用を見据えて, 多様体の言葉で論じていた.

この方法は Hormander が取ったように, 偏微分方程式への迂回でもある. 直接的に確率微分方程式に基づいて Brown 運動を「変形する」という確率論的手法を立てたのが伊藤清である.

議論 4.6.1. 離散集合 I 上の遷移行列 \mathbb{P} が満たす規則は次のようにかかる.

- (1) $\forall i \in I \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$.
- (2) $\forall i, j \in I \forall n, m \in \mathbb{N} \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} = p_{ij}^{(n+m)}$.

I を一般のポーランド空間, \mathbb{N} を \mathbb{R}_+ へ, 遷移行列を遷移作用素へ一般化したい.

- (1) $\forall s \in \mathbb{R}_+ \forall x \in S p(s, x, -) \in P(S)$. 時刻 0 に x から出発する Markov 過程の, 時刻 s での位置の分布.
- (2) $\forall s, t \in \mathbb{R}_+ \forall x, z \in S \int_S p(s, x, dy) p(t, y, dz) = p(s+t, x, dz)$. または, $\forall A \in \mathcal{G}(S) \int_S p(s, x, dy) p(t, y, A) = p(s+t, x, A)$.

こうして, 行列積は積分に一般化される. (2) を時間一様な Chapman-Kolmogorov の等式という. これは, 時刻 0 に x から初めて, $s+t$ に A に至るまでの時刻 s での経由地 $y \in S$ について積分しても等しくなる, という意味を持つ.

第 5 章

加法過程

5.1 加法過程

見本道が殆ど至る所 cadlag である過程を D -過程という．見本過程 $\mathbb{R}_+ \rightarrow \text{Meas}(\Omega, \mathbb{R}); s \mapsto X_s$ が確率連続な加法過程で D -過程でもあるものを，Levy 過程という．任意の確率連続な加法過程は Levy 過程に同等であり，Levy 過程の構造は解明済みである．

大雑把に言えば，連続な加法過程は Gauss 型，すなわちブラウン運動に限り，非連続的な加法過程は Poisson 型に限る．任意の Levy 過程は，ドリフト付きの Brown 運動と Levy のジャンプ過程との和に分解できる．

5.1.1 定義と例

例 5.1.1. \mathbb{Z}^d -酔歩は次の性質を満たす：任意の長さ $k \geq 2$ の部分列 $(n_j)_{j \in [k]}$ について，増分の過程 $(X_{n_j} - X_{n_{j-1}})_{j \in [k]}$ は独立．

定義 5.1.2 (increment, additive process). 次の性質を満たす，初期分布 δ_0 な \mathbb{R}^d -値確率過程 $(X_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ ，すなわち，空間的一様かつ時間一様な Markov 過程を加法過程という．

(3) 任意の長さ $k \geq 2$ の狭義単調増加非負実数列 $(s_j)_{j \in [k]}$, $s_0 = 0$ が定める増分列 $(X_{s_j} - X_{s_{j-1}})_{j \in [k]}$ は独立．

このとき， S の原点を 0 とするとその転移確率は一様に $p(s, -) := p(s, 0, -)$ と表わせ，Chapman-Kolmogorov の等式も

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x, z \in S \quad \int_S p(s, dy - x) p(t, dz - y) = p(s + t, dz - x)$$

と表せる．

定理 5.1.3 (Gauss 型と Poisson 型 Levy 過程). X を Levy 過程とする．

- (1) X がさらに概連続過程であれば，増分 $X_b - X_a$ ($b > a$) は Gauss 分布に従う．
- (2) X がさらに殆ど至る所飛躍 1 で増加する階段関数を見本過程に持つならば，増分 $X_b - X_a$ ($b > a$) は Poisson 分布に従う．

5.1.2 Levy-Ito 分解

定理 5.1.4 (Levy 過程の分解定理 (Levy-Ito decomposition)). X を Levy 過程とする． $\Gamma = \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ 上の固有な Poisson 配置 N と，これと独立な Gauss 型 Levy 過程 G が存在して，

$$X(t, \omega) = G(t, \omega) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{s \leq t} \int_{|u| > 1/n} (u N(dsdu, \omega) - \phi(u) n(dsdu)) \right]$$

と表せる．

定義 5.1.5 (Levy-Khintchine triplet). Levy 過程 X の連続部分 G を用いて， $m(t) := E[G(t)]$, $v(t) := \text{Var}[G(t)]$ は有限確定する．また， m は連続関数， v は連続な単調増加関数， $m(0) = v(0) = 0$ を満たす．また， n を Poisson 配置 $N = N_X$ の平均測度，すな

わち Γ 上の測度で、次を満たす：

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad n(\{t\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})) = 0, \quad \int_{s \leq t} \int_{|u| > 0} (u^2 \wedge 1) n(ds du) < \infty.$$

組 (n, m, ν) を、Levy 過程 X の特性量または **Levy-Khintchine 組** という。

定理 5.1.6. 上記の条件を満たす (n, m, ν) に対して、これを特性量として持つ Levy 過程が存在して、法則同等を除いて一意である。

定義 5.1.7. $X_t - X_s$ ($t > s$) の確率法則が $t - s$ の値のみに関係するような Levy 過程を、時間的に一様な **Levy 過程** という。このとき、特性値は次のように表せる。

$$m_X(t) = mt, \quad \nu_X(t) = \nu t, \quad n_X(dt du) = dt \cdot n(du).$$

5.2 Brown 運動

連続な加法過程は、必然的に Gauss 型である。これを Brown 運動という。ドリフトはないものをまずは見る。

5.2.1 定義

熱方程式 $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$, $u(x, 0) = 0$ の基本解

$$H(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

は熱核または熱方程式の初期値問題の Green 関数と呼ばれ、初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ に関する解は

$$u(x, t) = H * f = \int_{\mathbb{R}} H(x - y, t) f(y) dy$$

と表される。熱の拡散と確率の拡散、エントロピーの概念は深いどこかでつながっているのだろうか。

定義 5.2.1. 確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の実数値確率過程 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ が **Brown 運動** であるとは、次の 3 条件をみたすことをいう：

- (1) $B_0 = 0$ a.s.
- (2) 任意の見本道 $B_t(\omega) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ は連続： $B_t \in W$ 。
- (3) 任意の長さ $n \in \mathbb{N}_{>0}$ の \mathbb{R}_+ の狭義増加列 $(t_j)_{j \in [n]}$, $t_j = 0$ が定める増分の組 $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})_{j \in [n]}$ は互いに独立に Gauss 分布 $N(0, t_j - t_{j-1})$ に従う。

要諦 5.2.2. 実は (3) のうち増分の正規性はなくても従うことは、Levy 過程の理論による。

定理 5.2.3 (Brown 運動の存在). ある確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) が存在して、その上に Brown 運動が存在する。

5.2.2 Wiener 測度

古典的 Wiener 空間 W_0 は 0 から始まる連続な見本過程 $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 全体の空間で、Banach 空間となる。Brown 運動はここに確率測度を押し出し (見本道のばらつき), Brown 運動は、関数解析的には W_0 上の確率測度の 1 つと同一視出来る。

記法 5.2.4 (classical Wiener space). 次の言葉を使えば、Brown 運動とは Wiener 空間に値を持つ確率変数 $\Omega \rightarrow W_0$ であって、カリ-化 $\mathbb{R}_+ \rightarrow \text{Meas}(\Omega, \mathbb{R})$ は任意の有限成分について独立な Gauss 分布を定めるものをいう。

- (1) $W = W^1 := C(\mathbb{R}_+)$ を連続な見本道の空間とする。

(2) $W_0 := \{w \in W \mid w_0 = 0\}$ とする．これを古典的 **Wiener** 空間という．

それぞれの空間には一様ノルムは入れられないので，広義一様収束位相を考え，Borel 集合族によって可測空間とみなす． \mathbb{R}_+ なので Banach 空間ではない．

定義 5.2.5 (Wiener measure (23)). $(W_0, \mathcal{B}(W_0))$ 上の射影の族 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, $B_t(\omega) := \text{pr}_t(\omega) = \omega_t$ が Brown 運動になるような確率測度 P を **Wiener** 測度という．

補題 5.2.6. Wiener 測度は一意的に存在する．

[証明] .

存在 Brown 運動の存在 5.2.3 による．ある空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の Brown 運動 $B: \Omega \rightarrow W$ を取る．これによる像測度 P^B は $P^B(W_0) = 1$ を満たすから， W_0 への制限を取れば，これが Wiener 測度である．

一意性 W_0 の柱状集合全体 \mathcal{G} 上では一意的である． \mathcal{G} は π -系・情報族であり， $\mathcal{B}(W_0) = \sigma(\mathcal{G})$ を満たすため，一意に延長される．

■

5.2.3 特性値

補題 5.2.7 (積率). B_t の奇数次の積率は消えてきて，偶数次の積率は

$$E[B_t^2] = t, \quad E[B_t^4] = 3t^2, \quad E[B_t^6] = 15t^3, \quad E[B_t^{2n+1}] = 0, \quad E[B_t^{2n}] = (2n-1)!! t^n.$$

補題 5.2.8 (共分散). $\forall t, s \in \mathbb{R}_+ \quad E[B_t B_s] = t \wedge s$.

5.2.4 独立増分性

加法過程としての独立増分性は，martingale 問題に繋がる．

記法 5.2.9. ブラウン運動 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ の自然な情報系を $\mathcal{F}_t^B := \sigma[B_s; s \leq t]$ と表す．

命題 5.2.10. $0 \leq s < t$ に関して， $B_t - B_s$ は \mathcal{F}_s^B と独立．

系 5.2.11. Brown 運動 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ は (\mathcal{F}_t^B) に関して martingale である．その 2 次変分は $\langle B \rangle_t = t$ で与えられる．

5.2.5 可微分性

定理 5.2.12 (Paley-Wiener-Zygmund). $B_t(\omega)$ は ω -a.e. に対して， t について至る所微分不可能である．

定理 5.2.13 (modulus of continuity). $1/2$ -Holder 連続性よりやや悪い連続度を持つ．

$$\limsup_{t_2 - t_1 = \epsilon \searrow 0, 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1} \frac{|B_{t_2} - B_{t_1}|}{\sqrt{2\epsilon \log(1/\epsilon)}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

定理 5.2.14 (重複対数の法則).

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(1/t)}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

5.3 Poisson 過程

D -過程であるが連続過程ではなく、見本過程が至る所ジャンプしているとき、これは Poisson 型 Levy 過程である。ここまでいかずとも、少しドリフト 0 分散 0 の Brown 運動を混ぜて、ジャンプを持つ加法過程で特に基本的な Poisson 過程を見る。

5.3.1 定義

\mathbb{R}_+ 上に強さ λ の Poisson 点過程を考える。その総数を整数で切ったものを Poisson 過程と呼ぼう。

定義 5.3.1 (Poisson process). (Ω, \mathcal{F}, P) 上の \mathbb{Z}_+ -値確率過程 $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ がパラメータ $\lambda > 0$ を持つ **Poisson 過程**であるとは、次の条件を満たすことをいう：

- (1) $N_0 = 0$ a.s.
- (2) 任意の見本道 $N_t(\omega)$ は右連続かつ単調増加である。
- (3) 任意の長さ $n \in \mathbb{N}_{>0}$ の \mathbb{R}_+ の狭義増加列 $(t_j)_{j \in [n]}$, $t_0 = 0$ が定める増分の組 $(N_{t_j} - N_{t_{j-1}})_{j \in [n]}$ は独立で、それぞれパラメータ $\lambda(t_j - t_{j-1})$ を持つ Poisson 分布に従う。

議論 5.3.2 (Poisson 過程の構成). Kolmogorov の拡張定理により存在は保証されるが、次のように構成できる。独立にパラメータ λ の指数分布??に従う \mathbb{R}_+ -値確率変数列 (S_j) を取る： $P[S_j \geq t] = e^{-\lambda t}$ 。なお、パラメータ $\lambda > 0$ の指数分布密度関数は

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0, \infty)}(x)$$

と表せる。このとき

$$Z_0 = 0, \quad Z_k = \sum_{j=1}^k S_j$$

とするとこれは強さ λ の Poisson 点過程であり、 $t \in \mathbb{R}_+$ を超えた Z_k の数の過程

$$N_t := \max \{k \in \mathbb{N} \mid Z_k \leq t\} \in \overline{\mathbb{Z}}_+$$

は Poisson 過程となり、 $P[N_t \in \mathbb{Z}_+] = 1$ 。

5.3.2 独立増分性

命題 5.3.3. $0 \leq s < t$ について、 $N_t - N_s$ は $\mathcal{F}_s^N = \sigma[N_u; u \leq s]$ と独立である。

系 5.3.4. $(N_t - \lambda t)_{t \geq 0}$ は (\mathcal{F}_t^N) に関してマルチンゲールである。

5.4 無限分解可能分布

5.4.1 定義と特徴付け

確率変数 X が、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、ある分布 μ_n が存在してそれに従う独立同分布変数 n 個の和で表せるとき、これを無限可解であるという。これは半群 $P(\mathbb{R})$??の言葉を用いて定義できる。

定義 5.4.1. 1 次元の分布 μ が無限可解であるとは、分布族 $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ が存在して、 μ を乗法単位元として \mathbb{R}_+ と同型な連続半群となることをいう：

- (1) $\mathbb{R}_+ \rightarrow P(\mathbb{R}); t \mapsto \mu_t$ は弱位相に関して連続 .
- (2) $\forall t, s \in \mathbb{R}_+ \quad \mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$.
- (3) $\mu_0 = \delta_0$.
- (4) $\mu_1 = \mu$.

補題 5.4.2. 次の 4 条件は同値 .

- (1) μ は無限可解である .
- (2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu = \mu_n * \mu_n * \cdots * \mu_n$ と表せる .
- (3) 任意の $\epsilon > 0$ に対し, 分解 $\mu = \mu_1 * \cdots * \mu_n$ であって, Levy 距離に関して $d_L(\mu_i, \delta) < \epsilon$ を満たすものが存在する .
- (4) $\mu_n = \mu_{n1} * \cdots * \mu_{nm(n)}, \max_{k \in [m(n)]} d_L(\mu_{nk}, \delta) \rightarrow 0$ を満たす列 (μ_n) が存在して, $\mu_n \rightarrow \mu$.

例 5.4.3. 畳み込みについて閉じている分布族??はみな無限可解な分布の例である .

例 5.4.4. 時間的に一様な Levy 過程 X は, 任意の $t \in \mathbb{R}_+$ について X_t は無限可解である . また逆に, 連続半群 (μ_t) に対して, これが定める一様な Levy 過程が存在する .

5.4.2 Levy 分解

無限可解分布, 連続半群 $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, 時間的に一様な Levy 過程 (の法則同値類) X の間に, 次の全単射対応がある :

$$\mu \xrightarrow{\mu=\mu_t} \{\mu_t\} \xrightarrow{\mu_t=P^{X(t)}} X$$

定理 5.4.5 (無限可解分布の Levy 分解定理). 任意の無限可解分布 μ は, 特性関数 $\mathcal{F}\mu(z)$ が $\mathcal{F}\mu(z) = e^{\psi(z)}$ なる形になる . ただし,

$$\psi(z) = imz - \frac{\nu}{2}z^2 + \int_{|u|>0} (e^{izu} - 1 - i\phi(u)z)n(du), \quad m \in \mathbb{R}, \nu \geq 0, \int_{|u|>0} (u^2 \wedge 1)n(du) < \infty.$$

定義 5.4.6. Poisson 分布, Cauchy 分布も Levy 分解を定め, これらに対応する一様 Levy 過程を Poisson 過程, Cauchy 過程という .

5.4.3 複合 Poisson 過程

定義 5.4.7. $m = 0, \nu = 0$ のときの $\psi(z) = \int_{|u|>0} (e^{izu} - 1)n(du)$ と表せる μ のクラスを, 複合 Poisson 分布という . これに対応する過程を複合 Poisson 過程という .

補題 5.4.8. 複合 Poisson 分布 μ は, ν^{*n} を Poisson 分布 p_λ によって加重平均を取ったものである :

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \nu^{*n}.$$

第 6 章

拡散過程

6.1 1 次元拡散過程

与えられた領域 U をほとんど確実に出ていく強 Markov 過程を拡散過程という。

記法 6.1.1. $W := C(\mathbb{R}_+)$ 上に確率測度の族 $(P_x)_{x \in \mathbb{R}}$ を考える。射影を $X_t := \text{pr}_t : W \rightarrow \mathbb{R}; \omega \mapsto \omega(t) (t \in \mathbb{R}_+)$ と表すと、この見本過程 $\mathbb{R}_+ \rightarrow \text{Map}(W, \mathbb{R})$ は任意の $x \in \mathbb{R}$ について (W, P_x) 上連続。 $\mathcal{B}_t := \sigma[X_s; s \leq t]$ とする。

定義 6.1.2 (diffusion process). 確率過程 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ が $P_x[X_0 = x] = 1$ と次の条件を満たすとき、 $\mathcal{M} := (\mathcal{M}_x)_{x \in \mathbb{R}}, \mathcal{M}_x := \{X_t(\omega) \in \mathbb{R} \mid t \in \mathbb{R}_+, \omega \in (W, P_x)\}$ を、 x から始まる一様な連続強 Markov 過程または拡散過程という。

(強 Markov 性) $x \in \mathbb{R}$ と有限な (B_t) -Markov 時刻 $\tau : W \rightarrow \mathbb{R}_+, E \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^1)$ について、 $P_x[X_{\tau+t} \in E \mid \mathcal{B}_\tau] = P_x[X_t \in E] \big|_{x=X_\tau}$ 。

定義 6.1.3 (regular point, regular diffusion process). 拡散過程 $(\mathcal{M}_x)_{x \in \mathbb{R}}$ について、

- (1) x は \mathcal{M} の正則点であるとは、 $P_x[\exists_{t \in \mathbb{R}_+} X_t > x] > 0, P_x[\exists_{t \in \mathbb{R}_+} X_t < x] > 0$ が成り立つことをいう。
- (2) 任意の $x \in \mathbb{R}$ が正則点であるとき、 \mathcal{M} は正則であるという。

第 7 章

定常過程と時系列解析

加法過程とは，増分が定常な過程である．

7.1 定常過程

定常過程については，スペクトル分解とエルゴード定理が証明できる．

定義 7.1.1 (weak / strong stationary stochastic process). 確率過程 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ について，

- (1) $\forall t, s, h \in \mathbb{R} \ m(t+h) = m(t), \Gamma(t+h, s+h) = \Gamma(t, s)$ が成り立つとき，すなわち m が定数で $\Gamma(s, t)$ は $|t-s|$ の関数であるとき，弱定常過程という．
- (2) 任意の $n \in \mathbb{N}, \{t_i\}_{i \in [n]} \subset \mathbb{R}$ について，有限次元分布が任意の平行移動 $h \in \mathbb{R}$ について等しい： $\Phi_{t_1+h, \dots, t_n+h} = \Phi_{t_1, \dots, t_n}$ がとき，強定常過程という．

補題 7.1.2. 過程 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ について，

- (1) 強定常かつ $X_0 \in L^2(\Omega)$ のとき，弱定常である．
- (2) $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ が Gauss であるとき，弱定常性と強定常性とは同値．

第 8 章

参考文献

参考文献

- [1] Williams - Probability with Martingales
- [2] 伊藤清 『確率論』