目次

第 1 章　Riemann-Stieltjes 積分 2
1.1 定義と存在 2
1.2 関数列の一様収束 2
1.2.1 一様収束の性質 2
1.2.2 コンパクト一様収束 3
1.2.3 一様収束と積分 3
1.2.4 一様収束と導関数 3
1.2.5 一様収束の判定法 3

第 2 章　参考文献 4

参考文献 5

第 1 章

Riemann-Stieltjes 積分

Lebesgue 積分とは違って，$\mathbb{R}$ の順序構造に強く依存した，Euclid 空間上にオーダーメイドの積分が定義できる．これについての古典論を復習する．

1.1 定義と存在

定義 1.1.1. $I := [a, b]$ を閉区間とする．

(1) **分割** P とは，$[a, b]$ の有限集合 $P = \{a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n = b\}$ をいう．
(2) 各分割 $P \in P([a, b])$ に対して，

$$M_i(P) := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \qquad m_i(P) := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \ (i \in [n])$$

とし，

$$U(P; f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(P)\Delta x_i, \qquad L(P, f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(P)\Delta x_i$$

とする．

$$\overline{\int_a^b} f dx := \inf_{P \in P([a,b]), |P| < \infty} U(P, f), \qquad \underline{\int_a^b} f dx = \sup_{P \in P([a,b]), |P| < \infty} L(P, f).$$

1.2 関数列の一様収束

復習する．

定義 1.2.1. $E \subset \mathbb{C}$ 上の関数列 (f_n) が**一様収束**するとは，$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0 \in \mathbb{N}}\ \forall_{n \geqslant n_0}\ \forall_{x \in E}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ を満たすことをいう．

1.2.1 一様収束の性質

定理 1.2.2 (一様収束は連続性を保つ)**.** (f_n) を $E \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数列とし，極限 f に一様収束するとする．このとき，f は連続である．

[証明] . 任意の $x_0 \in E$ と $\epsilon > 0$ をとる．

(1) f は (f_n) の一様収束極限だから，$\exists_{n \in \mathbb{N}}\ \forall_{x \in E}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3$.
(2) f_n は連続だから，$\exists_{\delta > 0}\ \forall_{x \in E}\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x_0) - f_n(x)| < \epsilon/3$.

以上より，任意の $|x - x_0| < \delta$ を満たす $x \in E$ に対して，

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon.$$

■

定理 1.2.3. $E \subset S$ を距離空間 S の部分集合とし，$x \in S$ をその集積点とする．(f_n) が f に一様収束するとき，$(\lim_{t\to x} f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ は収束し，

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

1.2.2　コンパクト一様収束

一方で，連続関数の列が連続関数に収束するとき，そのモードが一様収束であるとは限らない．

定理 1.2.4. (f_n) をコンパクト集合 K 上の連続関数の列とする．このとき，

(1) (f_n) はある連続関数 f に各点収束する．
(2) (f_n) は広義単調減少列である．

ならば，(f_n) は f に一様収束する．

1.2.3　一様収束と積分

定理 1.2.5.

1.2.4　一様収束と導関数

定理 1.2.6. $[a,b]$ 上の可微分関数の列 (f_n) は，ある $x_0 \in [a,b]$ において各点収束するとする．導関数が定める列 (f_n') が一様収束するならば，元の列 (f_n) も一様収束し，極限と微分が可換になる：$\forall_{x\in[a,b]}\ f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'(x)$.

1.2.5　一様収束の判定法

命題 1.2.7 (一様収束の判定法)**.** (f_n) を E 上の関数の列で，各点収束極限 f を持つとする．

(1) (f_n) は一様収束する．
(2) (Cauchy criterion) $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geqslant n_0}\ \forall_{x\in E}\ |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$.
(3) $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

命題 1.2.8 (Weierstrass M-test)**.** 関数列 (f_n) は収束する優級数 $\{M_n\} \subset \mathbb{C}$ を持つとする：$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \|f_n\|_\infty \leqslant |M_n|,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} M_n \in \mathbb{C}$. このとき，級数列 $(i=1)^n f_i$ は一様収束する．

第 2 章

参考文献

参考文献

[1] Walter Rudin - Principles of Mathematical Analysis