目次

第 1 章

解析力学

Newton 力学を数学的に整理すると，巨視的運動を多様体上に映し取る理論だと理解された．接空間は位置と速度の組の全体となる．最小作用の原理は，さらに Riemann と Einstein を経由して，物体は測地線に沿って動くという幾何学が出来た．

力学は、幾何学→ Euler 的解析学と Lagrange 的代数学の洗練を受ける→ Fermat の原理を主軸にして Hamilton と Jacobi による最小作用の原理を中心にした展開→幾何学が拾う（Poincare の手による)、の旅程を辿った。Hamilton-Jacobi 理論以降は数学史的な先行研究もない．

1.1　古典力学

当時は幾何学の対義語が「代数」「幾何」であった．Euclid の原論から，力学を引き剥がす試みが「解析力学」(Lagrange) であった．初めて，代数・幾何の離陸，という意味で，応用数学の故郷である．Euler の時点で変分法まで揃っていた．

歴史 1.1.1 (幾何学の時代)**.** Issac Newton 1642-1727 は天体の運動を幾何学の言葉で書いた．

歴史 1.1.2 (Leonhard Euler 1707-1783)**.** Euler 1747 [1]「天体の運動一般の研究」で Newton の運動方程式を定式化した．Euler は Leibniz の方法の方が数学的に発展性があると気づいて，多いに発展させた．これで Newton の質点力学を剛体力学，弾性体力学，流体力学へと発展させた．

さらには，最速降下線や等周問題を統一的に扱う変分法という分野を創始したのも Euler であった．1744 年には，変分問題の極値を与える曲線がみたす方程式を導いている．その論文の付録では，質量と軌道要素上の速さの積を軌道に沿って積分したものを作用量と定義し，それを最小にする最小作用の原理によって運動が規定されることも提唱している．

歴史 1.1.3 (Joseph Louis Lagrange 1736-1813)**.** まず，変分法を δ の記法を用いて完全に脱幾何学し，まず極値曲線の方程式を解いて，Euler に招聘された．さらに，力学解析・代数の言葉で書き直したのが『解析力学』1788,[2]．事実，運動方程式から，最小作用の原理などは定理として導かれる．ポテンシャルなどの技法は既に多様体的な考え方を内包していた．なお，ポテンシャルが存在するとは，保存系であることに同値．この考え方を用いて運動方程式を書き直したもの，すなわち Lagrange の方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial t}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$$

も導かれる．

Siméon Denis Poisson 1781-1840 の 1809 の仕事を盛り込んだ第二版も，定理を増やした．

1.2　Hamilton の研究

イギリスで代数と論理学が出会い，Boole などの結節点が，計算機を産んだ．Leibniz の夢である．その中で Hamilton はたくましく当時の数理科学優等生であったフランスに学び，イギリスらしい進展を付け加えた．
実は，変分原理 (今では Hamilton の原理と呼ばれる) から，Lagrange の方程式も導ける．2 つは同値なのだ！すると，連立 1 階常微分方程式系を解く問題が出現し，こちらの方が発展性があるのであった．
作用汎関数 1 つが系に関する情報を湛えている，というのが基本的手法であった．

歴史 1.2.1 (William Rowan Hamilton 1805-1865)**.** 本格的に数学を始めたのは 15 歳の頃で、当時最先端のラグランジュ、ラプラスの書物を学ぶ。この頃わずか 16 歳にしてラプラスの『天体力学』に誤りを発見し、専門家を驚かせた。Hamilton は実は詩人になりたかったのかもしれない．ワーズワースに憧れていたのだろうか．

『趣味の遺伝』(1906) で「ハミルトンのクオータニオンを発明したのもおおかたこんなものだろう」という表現があるが，これが受け入れられるはずがあろうか？そういえば線形変換を行列ではなく，四元数で書いていたのだっけか．

1.2.1　光学研究

「光線系の理論」と題する一連の考作が 1828 年から発表されている．光学と力学が共進化したのは極めて興味深い事実である．Fermat の原理をどの程度着想源としたかは不明である．

歴史 1.2.2. ハミルトンは反射・屈折の法則から，Fermat の原理を「証明」している．そして，Fermat の原理の翻訳として得たのは，

$$\delta I = \delta \int \nu(x, y, z) d\rho = 0.$$

である．ただし，ν は屈折率，ρ は線分要素とした．I を特性関数という．

1.2.2　力学への応用

歴史 1.2.3. 1834 年に発表した「動力学の一般的方法」[4] では，Newton の原理から出発して，

$$S := \int_0^t (T - U) dt$$

なる，「特性関数」にあたる量を定義した．そして最小作用の原理を示した．

要諦 1.2.4. つまり，"Hamilton の原理"から他を導出する手法は，確かに持ち味であり，副産物として得たことは間違いないが，そこを出発点に据えた訳ではない．

1.3　Jacobi の研究

王立協会の紀要に発表された Hamilton 力学研究は大陸の有力な研究者たちの注目を引いた。1842-43 年冬学期におこなった講義録『力学講義』が集大成になる．
ハミルトンが示したのは，運動方程式を直接解かず，偏微分芳程式を解いて主関数を求め，それを使って運動方程式の解が得られることである．ヤコビは，この着想を常微分方程式系を偏微分方程式に帰着して解く方法として整備した．すなわち，あるクラスの連立 1 階常微分方程式系（正準方程式）を，非線形 1 階偏微分方程式に帰着して解く技法をつなげた (Hilbert[9])．一般に，偏微分方程式のほうが常微分方程式を解くより難しい．しかしヤコビは，適当な変数変換を施し，変数を完全に分離できれば，HJ 方程式は求積法で容易に解けることを指摘した．これは正準変換と呼ばれている．

歴史 1.3.1 (Carl Gustav Jacob Jacobi 1804-1851)**.** 1842-43 のケーニヒスベルク大学講義録では，Jacobi も Newton の原理から出発して，種々の結果を定理として導く．しかし，Hamilton の原理を出発点に据えて，等価に導出し直したりもした．

1836 の論文 [6] では，2 つの固定中心から引きつけられる質点の運動に対応する HJ 方程式の変数を，楕円座標を導入して完全に分離させ，オイラー以来の難問を解いてみせた．ヤコビの解法は時として強力なのである．ヤコビが自覚するように，既知の変数変換で変数が分離するような問題に対してしか適用できない方法だが，19 世紀後半には近似計算法が発展していくので，彼の着想は有効に活用されていった．

1837 の論文 [7]「変分法と微分方程式の研究」と「偏微分方程式の解を常微分方程式系に帰着することについて」と「力学の微分方程式の積分について」で，変分問題を偏微分方程式に帰着し，「正準性」を定義して解法を提示し「正準変換定理」を導き，

要諦 1.3.2. しかし実は，正準方程式の解法理論を提示するにあたって，正準変換のピースを完成させていなかった．つまり，母関数の原型 ψ と H-J の完全解との関係に気づいていない．

定理 1.3.3 .

1.4　正準変換への過程

ここまでの理論では「正準変換（正準形の射）」の考え方が入っていない．以降，Hamilton-Jacobi 理論は天体力学と呼ばれていた．

歴史 1.4.1. 1892 年, 彼の代表作『天体力学の新しい方法』で，Newton 方程式から Hamilton 方程式を導き，その後 Jacobi の解法を紹介する．しかしここでさらに一歩踏み込んで，Hamilton-Jacobi 方程式の完全解が正準変換の母関数になることを示唆した．第 3 版で，正準変換の導入法の現代的なものが得られた．

解こうとするハミルトン方程式を単純にするよ変換の母関数を求めるために HJ 方程式の完全解を求めることにより，元の方程式の解を得る，というこうした現代的な解法を"Jacobi の解法"と呼んだが，実際 Poincaré の業績である．

1.5　Poincaré

1.6　20 世紀前半

歴史 1.6.1 (エドマンド・T・ホイッテーカー (1873-1956))**.** Lie の接触変換は，正準変換を引き起こすことに気づいた．

1.7　天の力学から原子の力学へ

原子模型の提案から，Hamilton 光学が見直された．ハミルトン光学ないしは光学の HJ 理論という分野が，1920 年代には確立していた．そして Born が Hamilton-Jacobi 理論を，天体力学と量子力学をつなげる数学的形式として見直し，『原子の力学』(1925) として刊行した．「量子力学」と題する論文が刊行されたのも，同年のすぐ後の出来事であった．

歴史 1.7.1. 当時の量子物理学者の間でよく読まれたのは，スウェーデンの天文学者カ-ル・シヤリニ　(1862-1934) による『天の力学』であった．

歴史 1.7.2 (David Hilbert)**.** 1922-23 年，ダーフイト-ヒルベルト (1862-1943) はゲツチングン大学で,『量子論の数学的基礎』17 を講義した．ここで彼は，変分原理に基づいて光学と力学の HJ 理論を統一的に論じた．これは Hamilton の仕事ではなく，Hilbert なのであった！

歴史 1.7.3 (Max Born)**.** ヒルベルトの定式化を押さえた上でボルンは，1925 年に『原子の力学』を刊行する．Hilbert の講義録は 2009 まで世に出なかったので，今日の前期量子論を理解するための Hamilton-Jacobi の理論の教科書としての流れを作った．

第 2 章

場の量子論

経路 (path) の空間という対象は，一番最初には物理学で生まれた．古典論が経路ごとの変分理論だとすれば，量子論は経路に渡った積分理論となる．この積分を量子化という．

量子論では経路というものが人間の素朴な感覚では well-defined ではなくなる．スリット実験でわかる通り，一つの経路というのを通るわけではない．重ね合わせの原理というのは，それぞれの状態の重ね合わせが物理状態であることをいう，そして Schrodinger 方程式は線形な偏微分方程式であるから，この構造を保って発展する．ここで測度論的な観点に至る．パラメトリックに有限次元で見るとちょうど Markov 連鎖のようであり，Hermite 作用素とは転移作用素に他ならない．この線形変換を繰り返すことは，全てのあり得る経路に関して積分していることになる．行列の積を考えると意味がわかりやすい．経路積分は分配関数＝数え上げの母関数とも見れる．

2.1 経路積分

パラメトリックな理論では，方向微分と多重積分が使われるが，変分は汎関数微分だとすれば，経路積分が汎関数積分である．経路の空間 $\mathrm{Map}(X,Y)$ 上の汎関数 W を

$$a$$

と定めて，遷移振幅の m 乗 (m ステップの発展) が

$$(A^m)_{i_0 i_m} := \sum_{\phi\in\mathrm{Map}(X,Y),\phi(0)=i_0,\phi(m)=i_m} W(\phi)$$

と表せる．

2.1.1 場とは切断の全体である

例えば解析力学では $M=\mathbb{R}, F=\mathbb{R}^3$ とし，底空間 $E=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ を 4 次元空間とする（一般の多様体でも良い）．こうしてファイバー束 $\iota:F\to E, \pi:E\to M$ を考える．場の空間は切断の全体 $\mathfrak{F}:=\Gamma(M,E)$ とする．変分原理で考えられるのは，作用汎関数 $S:\Gamma(M,E)\to\mathbb{C}$ をいう．

よって解析力学は 1 次元の場の理論の最も標準的な理論である．場の古典論は，Euler-Lagrange の方程式 $dS=0$ から停留点を見つける問題であった．解全体がパラメトリックならば，解のモジュライ空間が得られる．いくつかの連結成分を持っていることがある．

一方で場の量子論は，場の部分集合のみに興味があるわけではない（収束する前の混沌）．全体空間 $\mathfrak{F}$ 上の測度を考えなければいけないから，大域的な情報が必要．分配関数 (partition function) とは，

$$Z=\int_{\mathfrak{F}}\exp\left(-\frac{i}{h}S[\phi]\right)\mathscr{D}\phi$$

として定義したい．$h\to 0$ とすると古典論につながる（対応原理）．この式は h が Gauss 密度関数の分散に見える！（中心極限定理により？）古典極限を取るとデルタ測度に収束する．

そこで $\mathfrak{F}$ 上に確率分布が与えられているような設定と数学的には同値である．「揺らぎ」の期待値が欲しいことになる．場のノルムについて足し上げているので，Z は数論の zeta 関数の Z が意識されていて，正規化変数にあたる（確率測度なら 1 だったが）．

Yang-Mills 理論などの場の理論としては初等的なものでも，数学的な基礎付けは出来ていない．

重み W はある局所的な性質を満たす．その貼り合わせとして大域的なものが得られるかどうかが問題になるので，非常に層のような議論になる．したがって層は非常に場の量子論的である．

2.1.2　母関数との対応

トポロジーにおけるリボングラフなどにも応用されている．$\dim \mathfrak{F} < \infty$ として考える（この場合を格子 gauge 理論という）．$\mathfrak{F} = \Gamma(M, E) \simeq \mathbb{R}^N$ となり，経路積分は N 変数関数の積分となる．

$$Z(t_3, t_4) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right).$$

有限次元の場合でも簡単ではない．

そこで，古典解（微分が消える場所）を中心とした Taylor 展開を考える．これを摂動展開（＝一種の近似）といい，2 次項から始まる級数が得られる．2 次項というのは大体正規分布となる．場 ϕ は平均 ϕ_0，標準偏差 $\sqrt{h/a}$ の正規分布にしたがって揺らぐことになる．3 次以降の項を無視することは，場の相互作用を無視することになり，このような場を自由場という（作用汎関数が場 ϕ の正定値な 2 次形式で表されるような理論）．電磁気学は Abel なもので，ここに入る．このとき，正規分布を用いて厳密に記述できる．自由場の相関関数＝期待値を与えるのが Wick の定理である．

定理 2.1.1 (Wick). $\langle x^{i_1} x^{i_2} \rangle = A^{i_1 i_2}$.

これは積分を，$2n$ の座標のペアの取り方 (Wich 縮約) の全体について足しあげる有限和で表せたことになる．$A^{i_1 i_2} = (A^{-1})_{i_1 i_2}$ を伝播関数 (propagator) という．

調和積分論も自由場の理論とみなせる．

Wich 縮約の取り方に関する和を表したのが Feynman 図形である．Wick の定理はあらゆるつなぎ方に対して和を取れ，ということであるが，頂点をつなげて和をとって得られるのが Feynman 図形．縮約の場合の数は爆発しても，その位相的な同型類は少ないままである．その同型類に測度を考えれば，なんとか計算可能でないか？というのが Feynman のアイデアであった．

第 3 章

参考文献

参考文献

[1] Euler, L. (1747). Reserches sur le mouvement des corps céleste général. Omera Omnia, Ser.II, Vol.25.

[2] (1788) Méchanique analitique . Paris.

[3] Mécanique analytique. 2nd ed., Volume 1.(1811) Vol.2 (1813) Paris.

[4] Hamilton, W. R. (1834). On a General Method in Dynamics; by which the Study of the Motions of all free Systems of attracting or repelling Points is reduced to the Search and Differentiation of one central Relation, or characteristic Function.

[5] Hamilton, W. R. (1835). Second Essay on a General Method in Dynamics.

[6] Jacobi, C. G. J. (1836). "Sur le Mouvement d' un Point et sur un Cas particulier du Probl'em des trois Corps," Lettre adress ´ ee 'a l' Acad ´ emie des Sciences de Paris, Comptes Rendus, t.3, pp.59-61 = Werke 4, pp.37-38.

[7] Jacobi, C. G. J. (1837). Note sur

[8] Max Born. (1925). Vorlesungen über Atommechanik. Berlin, Springer.

[9] Courant, R., and Hilbert, D. (1937). Methoden der Mathematischen Physik. Berlin, Verlag von Julius Springer.