目次

第 1 章

微分論

1.1 l'Hospital の定理

定理 1.1.1. $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ を可微分関数，$\forall_{x \in (a,b)}\ g'(x) \neq 0$ とする．次の 2 条件のいずれかが成り立てば,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \to a} A \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \to a} A$$

(1) $f(x), g(x) \xrightarrow{x \to a} 0$.

(2) $g(x) \xrightarrow{x \to a} +\infty$.

第 2 章

Riemann-Stieltjes 積分

Lebesgue 積分とは違って，$\mathbb{R}$ の順序構造に強く依存した，Euclid 空間上にオーダーメイドの積分が定義できる．これについての古典論を復習する．

2.1 定義と存在

定義 2.1.1 ((Riemann-)Stieltjes integral)**.** $I := [a,b]$ を閉区間とし，$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を有界関数，$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ を単調増加関数とする．

(1) **分割** P とは，$[a,b]$ の有限集合 $P = \{a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n = b\}$ をいう．

(2) 各分割 $P \in P([a,b])$ に対して，$\Delta\alpha_i := \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$ と表し，

$$M_i(P) := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \qquad m_i(P) := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \ (i \in [n])$$

とし，

$$U(P,f,\alpha) := \sum_{i=1}^n M_i(P)\Delta\alpha_i, \qquad L(P,f,\alpha) := \sum_{i=1}^n m_i(P)\Delta\alpha_i$$

とする．これを用いて，

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha := \inf_{P \in P([a,b]), |P| < \infty} U(P,f,\alpha), \qquad \underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup_{P \in P([a,b]), |P| < \infty} L(P,f,\alpha).$$

として得る実数を，**上／下 Stieltjes 積分**と呼ぶ．

(3) 上積分と下積分が一致するとき，**Stieltjes 可積分**であるといい，$f \in \mathcal{R}([a,b],\alpha)$ と表す．

2.2 関数列の一様収束

復習する．

定義 2.2.1. $E \subset \mathbb{C}$ 上の関数列 (f_n) が**一様収束**するとは，$\forall_{\epsilon>0} \ \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \ \forall_{n \geqslant n_0} \ \forall_{x \in E} \ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ を満たすことをいう．

定理 2.2.2 (可積分性の特徴付け)**.** 関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ について，次の 2 条件は同値．

(1) $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

(2) $\forall_{\epsilon>0} \ \exists_{P \in P([a,b])} \ |P| < \infty \land U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$.

定理 2.2.3 (可積分条件)**.** 関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は，

(1) 連続ならば $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

(2) 単調ならば，α が連続ならば $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

(3) 有界であり，$[a,b]$ 上に高々有限の不連続点をもち，その任意の点で α は連続であるならば，$f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

2.2.1　一様収束の性質

定理 2.2.4 (一様収束は連続性を保つ)**.** (f_n) を $E \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数列とし，極限 f に一様収束するとする．このとき，f は連続である．

［証明］．任意の $x_0 \in E$ と $\epsilon > 0$ をとる．

(1) f は (f_n) の一様収束極限だから，$\exists_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{x\in E}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3$.
(2) f_n は連続だから，$\exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in E}\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x_0) - f_n(x)| < \epsilon/3$.

以上より，任意の $|x - x_0| < \delta$ を満たす $x \in E$ に対して，

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon.$$

■

定理 2.2.5. $E \subset S$ を距離空間 S の部分集合とし，$x \in S$ をその集積点とする．(f_n) が f に一様収束するとき，$(\lim_{t\to x} f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ は収束し，

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

2.2.2　コンパクト一様収束

一方で，連続関数の列が連続関数に収束するとき，そのモードが一様収束であるとは限らない．

定理 2.2.6. (f_n) をコンパクト集合 K 上の連続関数の列とする．このとき，

(1) (f_n) はある連続関数 f に各点収束する．
(2) (f_n) は広義単調減少列である．

ならば，(f_n) は f に一様収束する．

2.2.3　一様収束と積分

定理 2.2.7. 単調増加関数 $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ に関して，$[a, b]$ 上の可積分関数の列 $\{f_n\} \subset \mathscr{R}(\alpha)$ が，ある f に一様収束しているとする．このとき，

(1) $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.
(2) $\displaystyle\int_a^b f d\alpha = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n d\alpha$.

系 2.2.8 (項別積分)**.** 可積分列 $\{f_n\} \subset \mathscr{R}(\alpha)$ が定める級数は各点収束しているとする：$\forall_{x\in[a,b]}\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$．このとき，

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n d\alpha.$$

2.2.4　一様収束と導関数

定理 2.2.9. $[a, b]$ 上の可微分関数の列 (f_n) は，ある $x_0 \in [a, b]$ において各点収束するとする．導関数が定める列 (f'_n) が一様収束するならば，元の列 (f_n) も一様収束し，極限と微分が可換になる：$\forall_{x\in[a,b]}\ f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'(x)$.

2.2.5　一様収束の判定法

命題 2.2.10 (一様収束の判定法)**.** (f_n) を E 上の関数の列で，各点収束極限 f を持つとする．

(1) (f_n) は一様収束する．

(2) (Cauchy criterion) $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geqslant n_0}\ \forall_{x\in E}\ |f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon$.

(3) $\|f_n-f\|_\infty\to 0$.

命題 2.2.11 (Weierstrass M-test)**.** 関数列 (f_n) は収束する優級数 $\{M_n\}\subset\mathbb{C}$ を持つとする：$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \|f_n\|_\infty\leqslant|M_n|,\ \sum_{n\in\mathbb{N}}M_n\in\mathbb{C}$. このとき，級数列 $(i=1)^n f_i$ は一様収束する．

第 3 章

参考文献

参考文献

[1] Walter Rudin - Principles of Mathematical Analysis