补充题解 - 《经典》- 第 10 章数学概念与方法

习题10-14 标准差 Standard Deviation, UVa10886

不难想到简单的暴力解法，考虑标准差的计算公式：

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{2m}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i+m^2\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-m^2 \quad \text{其中 } m=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\end{aligned}$$

但是这样时间效率并不是很高，即使AC，也是勉强通过。

思考一下有无有更好的办法，随机数生成器最容易出现重复问题。所以我们可以做个试验，使用hash判重(unordered_map)，就会发现在g = 0或者$g=2^{32}$之后就开始所有的g都一样。 g = 0之后的所有输出都是0，g = 2^{32}的所有输出都是2^{32}了。实际上回到题面看的也很容易发现将这两个数字代入之后，所有的seed就永远是固定的数字了，之后就不需要继续循环，直接计算结果并返回即可。

习题 10-21 二项式系数 Binomial coefficients, ACM/ICPC NWERC 2011, UVa1649

对于固定的k，$\binom{n}{k}$是相对于n单调递增的，不难想到使用对n使用二分来寻找所有等于m的$\binom{n}{k}$。

但是这里存在一个问题，计算$\binom{n}{k}$并且和二分查找中的mid比较时很容易溢出，有的同学考虑用浮点数，但是存在误差问题，并且计算速度较慢。不过可以考虑利用递推公式：$\binom{n}{k}=\frac{n-k+1}{n}\binom{n}{k-1}$，递推计算，每次先除以$\binom{n}{k-1}$和$n$的最大公约数，之后n一定能被$n-k+1$整除，这样一旦大于mid，直接返回结果即可。

但是即使这样仍然可能会乘法时溢出，怎么办呢，使用另外一个技巧：

$$a * b > 2^{63} \leftrightarrow a > 2^{63}/b$$

这样在可以在乘法之前就检测溢出，而且m一定是小于2^{63}的，如果发现即将溢出，就可以确定要计算的值一定是大于m的，可以直接返回比较结果。

习题 10-24 幂之和(Sum of Powers, UVa766)

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = \sum_{0 \le i \le k} \binom{k+1}{i} n^i$$
$$n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = \sum_{0 \le i \le k} \binom{k+1}{i} (n-1)^i$$
$$\cdots$$
$$2^{k+1} - 1^{k+1} = \sum_{0 \le i \le k} \binom{k+1}{i} \cdot 1^i$$

令 $F_k = \sum_{i=1}^{n} i^k$, 对上以上公式求和可得:

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{0 \le i \le k} \binom{k+1}{i} F_i$$
$$(k+1) \cdot F_k = (n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{0 \le j < k} \binom{k+1}{j} F_j = \sum_{1 \le j \le k+1} \binom{k+1}{j} \cdot n^k - \sum_{0 \le i < k} \binom{k+1}{i} F_i$$

这样就可以从i = 0到k从小到大一次性全部递推计算出来。

注意本题是要求有理数结果，所以可以使用有理数类来完成四则运算:

```
struct Rational {
  LL a, b;  // a/b
  Rational operator+(const Rational& r) {
    if (r.a == 0) return *this;
    LL na = a * r.b + b * r.a, nb = b * r.b;
    Rational ans = {na, nb};
    return ans.reduce();
  }
  Rational operator-(const Rational& r) {
    if (r.a == 0) return *this;
    Rational ans = {a * r.b - b * r.a, b * r.b};
    return ans.reduce();
  }
  Rational operator/(LL x) {
    assert(x);
    Rational ans = {a, b * x};
    return ans.reduce();
  }
  Rational operator*(LL x) {
    Rational ans = {a * x, b};
    return ans.reduce();
  }
  Rational& reduce() {
    LL g = gcd(a, b);
    a /= g, b /= g;
```

```
      return *this;
    }
  };
```

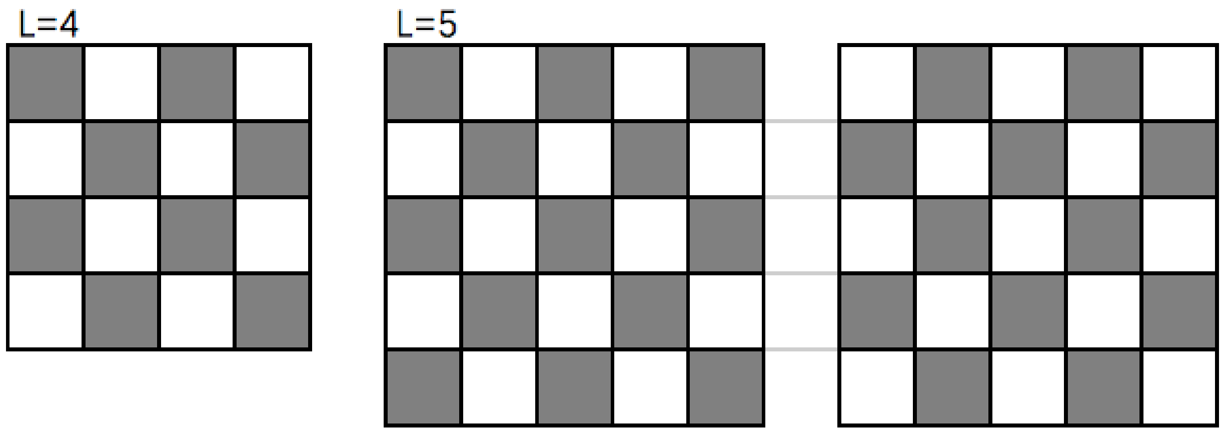
习题 10-25 因子(Factors, ACM/ICPC World Finals 2013, UVa1575)

对于一个整数k来说，考虑其素数分解$k = p_1^{e_1} \cdot_2^{e_2} \cdots \cdot p_m^{e_m}$。则$f(k) = \frac{(e_1+e_2+\cdots e_m)!}{e_1!e_2!\cdots e_m!}$。实际上与$p_1, p_2 \cdots p_m$无关。要求出最小的k, 那么就可以令$p_1, p_2 \cdots p_m$分别等于最小的素数，然后对$e_1, e_2 \cdots e_m$依次进行回溯，其中$e_i < 63$。计算f(k)时可能溢出，所以要提前算出所有可能的$e_i < 63$的素因子分解，使用《经典》一书中 例题 10- 3　选择 与 除法 （ Choose and Divide, UVa10375）中介绍的方法来计算f(k)。

习题10-26 方形花园(Square Garden, UVa12520)

如果想得到最大周长，则显然各个涂色格子之间的公共边越少越好。根据L的奇偶性分情况讨论。

L为偶数时(下图以L=4为示例)，如果 $n \leq \frac{L^2}{2}$，则可以做到每个涂色格子均无公共边，所求周长为4*n



如果$n > \frac{L^2}{2}$， 则需要考虑涂在哪里损失最小，如上图所示，首先考虑涂在角上的2个白色格子，涂色之后周长不变。接着考虑涂在边上的白色格子，每吐一个格子周长减少2。如果还有未涂色的，就只能涂在不靠边的白格子内，每涂一个周长减少4。

L为奇数时，参考上图中的L=5，则要分两种情况考虑，细节逻辑请参考L为偶数的情况。

习题 10-27 互联(Interconnect, ACM/ICPC NEERC 2006, UVa1390)

仔细思考之后不难发现，当前图的状态只需要考虑连通分量的个数以及每个连通分量的大小。

假设当前已经有了k个连通分量，考虑当前每个连通分量的点的个数C_i，则数组S=C[0,1,...k]可以作为一个整体来考虑，状态转移时，所有可以连的边有$n \cdot (n-1)$个，而其中能让连通分量个数减少的有$\sum_{0 \leq i,j \leq k, i \neq j} C_i \cdot C_j$个。记D(S)为所求的让所有点连通的期望操作次数，S_{ij}为i,j所在的分量连通之后的行程的新的状态, p,e分别为通过一次操作让S长度减少1的概率以及数学期望。

则有:

$$e = \sum_{0 \le i,j \le k, i \ne j} \frac{1}{n(n-1)} C_i C_j (1 + D(S_{ij}))$$

$$p = \sum_{0 \le i,j \le k, i \ne j} \frac{1}{n(n-1)} C_i C_j$$

$$D(s) = e + (1 + D(s)) * (1 - p) \rightarrow D(s) = \frac{e}{p} + \frac{(1-p)}{p}$$

边界情况就是当len(S) = 1时，D(S)=0。

下面考虑最坏情况下的时间复杂度，有k个连通分量的状态点的个数就相当于把整数n切分成k个数字形成一个无序集合的方案个数，其实这个数字就是2类 Strirling Nubmer。对于这个数字的讨论已经超越《经典》的范围，有兴趣的读者可以参考《具体数学》的相关章节。但是在本题中，实际上只会遍历到极少一部分的状态空间，所以以上算法的速度还是比较快的。如果读者有更精确的推导证明，请联系笔者。

习题10-29 名次表的变化(Fantasy Cricket, UVa11982)

分析

首先，输入字符串中的E可以忽略。本题抽象出来就是有个长度为N的字符串S，根据如下规则对1,2...i...N重新排列，规则如下：

1. S[i] = 'D'，将i排到<i的位置上
2. S[i] = 'U'，将i排到>i的位置上

则题目所求就是按照这种规则排列的方案数，显然如果N=0，答案为0。N>0时，从左到右决策，考虑到S[i]='U'时，i的位置必须推后决策，令D(i,j)前i个数字，还有j个U位置未确定的方案数，则所求结果为D(N,0)，边界情况为D(0,0)=1。

状态转移分以下几种情况讨论：

1. S[i] = 'D'，则需要将i往前放，有两种决策：
   1. i往前放，但是i这个位置空着，不放前面的某个'U'，则D(i,j) += D(i-1,j)*j
   2. i往前放，同时放个'U'过来。D(i,j) += D(i-1,j+1)*(j+1)*(j+1)
2. S[i] = 'U'，U要往后放，有两种决策：
   1. i这个位置空着，不放前面的某个'U'，则D(i,j) += D(i-1,j-1)
   2. i这个位置放某个前面的'U'。D(i,j) += D(i-1,j)*j
3. S[i] = 'E'，则D(i,j) = D(i-1,j)

核心逻辑如下：

```
void add_mod(LL& x, LL y) { x = (x + (y % M)) % M; }

LL solve(const char* S) {
  int N = strlen(S + 1);
  if (N == 0) return 1;
  _zero(D);
  D[0][0] = 1;
  _rep(i, 1, N) _rep(j, 0, i) {
    LL& d = D[i][j];
    if (S[i] == 'D')
```

```
        add_mod(d, D[i - 1][j] * j + D[i - 1][j + 1] * (j + 1) * (j + 1));
      else if (S[i] == 'U')
        add_mod(d, D[i - 1][j - 1] + D[i - 1][j] * j);
      else
        d = D[i - 1][j];
    }
    return D[N][0];
  }
```

习题10-35 Fibonacci Word, ACM/ICPC World Finals 2012, UVa1282

P在F_n中出现，只有3种情况：在F_{n-1}中；在F_{n-2}中；一部分在F_{n-1}的结尾，另一部分在F_{n-2}的开头。不难想到使用记忆化搜索，记D_n为P在F_n中出现的次数, L为P的长度，则状态转移方程为:
$D_n = D_{n-1} + D_{n-2} + \sum_{i=1}^{L-1}(F_{n-1}\text{以}P_{0\cdots i}\text{结束且}F_{n-2}\text{以}P_{i+1\cdots L-1}\text{开始})$。

边界条件为:

$len(F_n) < L \rightarrow D_n = 0$

$len(F_n) = L \rightarrow D_n = [F_n = P]$

那么下一步的关键就是要判断F_n是否以指定的字符串开始。这个很容易根据F_n的递归特性写出递归判断的算法。判断F_n是否以指定的字符串开始的逻辑类似。详情参见本题代码。上述DP算法的时间复杂度为$O(n \cdot L^2)$。

事实上，本题还有更简洁的解法，详情参见ACM/ICPC的官方题解。

习题10-46 抽奖(Honorary Tickets, UVa11895)

分析

对于一个初始有L个奖，信封个数为T的箱子来说，抽过一次之后剩余有奖信封的期望个数是：

$(L-1) \cdot \frac{L}{T} + L \cdot \frac{T-L}{T} = \frac{L \cdot (T-1)}{T}$

因为题目要求输出有理数，一般地，对于一个期望有奖信封个数为p/q的箱子来说，抽过一次后有奖信封的期望个数是$\frac{p \cdot (T-1)}{T \cdot q}$。因为每个人都足够聪明，都会选择当前有奖概率最大的箱子来取，而获奖概率就等于$\frac{p}{qT}$，可以用一个priority_queue来维护所有的箱子，并且维护当前抽奖概率最大的箱子。模拟K-1次抽奖操作，抽完后更新其期望p/q，之后直接输出当前获奖概率最大的箱子的获奖概率即可。

有几个细节注意：p,q需要用long long来维护，概率比较时牵涉到除法，可以引入浮点数进行比较。

习题10-48 考试(Exam, ACM/ICPC Chengdu 2012, UVa1655)

分析

ab|x≤n，可以转化为求合法的符合abc ≤ n的(a,b,c)方案数。

考虑有序的(a,b,c)，其中a≤b≤c。那么$1 \le a \le n^{\frac{1}{3}}$，固定a之后，b满足$a \le b \le \sqrt{\frac{n}{ba}}$。a,b固定之后，c的范围就是$b \le c \le \frac{n}{ab}$。合法的a,b,c数对个数要分情况讨论：

1. a<b时，如果b=c，符合要求的c有一个，对应的合法的a,b,c无序方案有3种: (b,c,a), (a,b,c), (b,a,c)；b<c时，c有$\frac{n}{ab}-b$个，a,b,c有6种排列。所以对应的合法方案有$6(\frac{n}{ab}-b)+3$种。
2. a=b时，如果b=c，符合要求c有一个，对应的方案有1种。b<c时，c有$\frac{n}{ab}-b$，a,b,c有3种排列。对应的合法方案有$3(\frac{n}{ab}-b)+1$种。

关键部分代码如下:

```
LL ans = 0;
for (LL a = 1; a * a * a <= N; a++) {      // 1 ≤ a ≤ N^(1/3)
    for (LL b = a; b * b <= N / a; b++) {  // a ≤ b ≤ sqrt(N/a)
        LL c = N / (a * b);                // b ≤ c ≤ N/ab
        if (c < b) break;
        if (a < b) {
            ans += 3;            // b = c, 2 3 3, 3 2 3, 3 3 2
            ans += 6 * (c - b);  // b < c < N/ab
        } else {               // a = b
            ans += 1;            // b = c, 2 2 2
            ans += 3 * (c - b);  // b < c < N/ab
        }
    }
}
printf("Case %d: %lld\n", kase, ans);
```