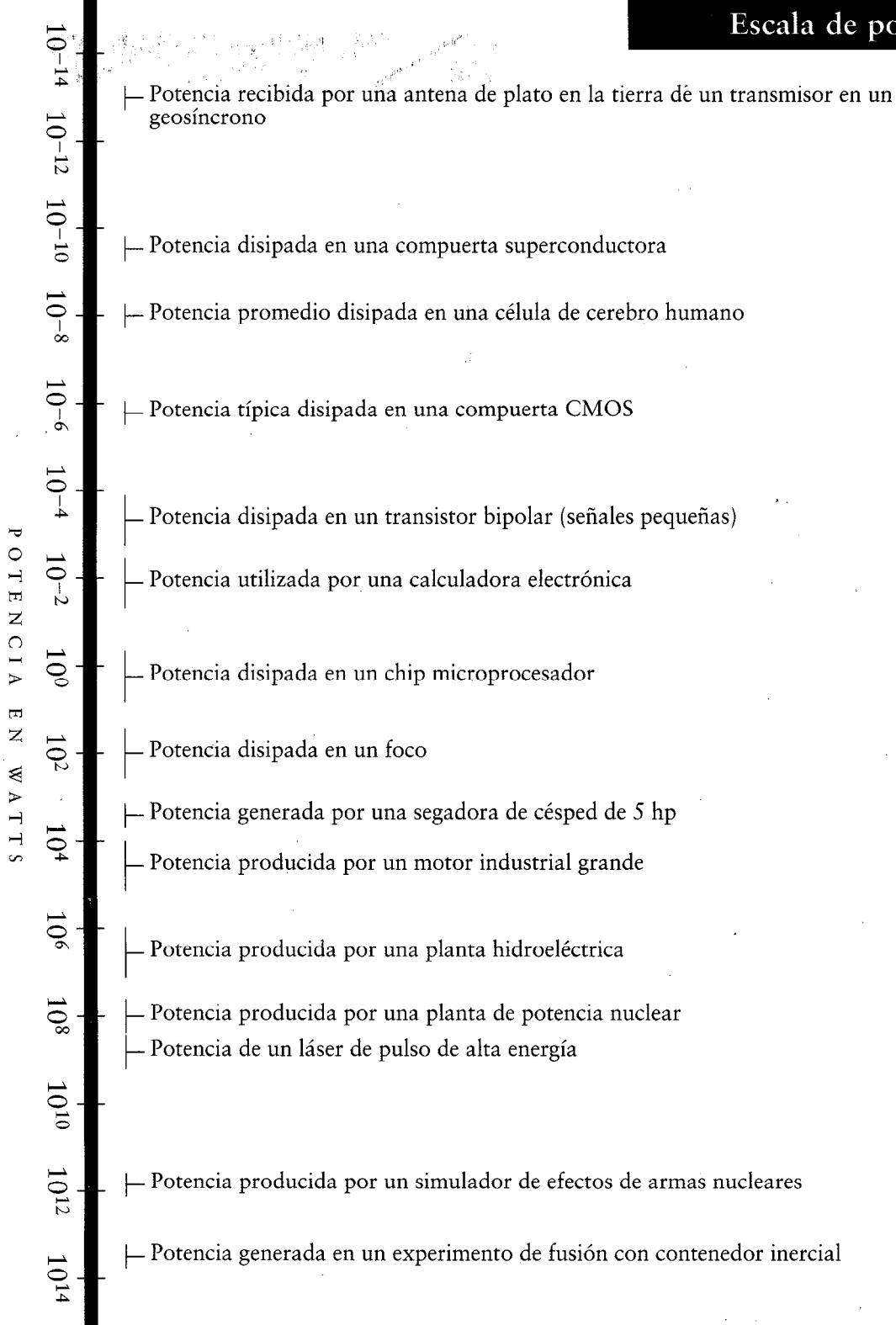


E D I C I Ó N
5

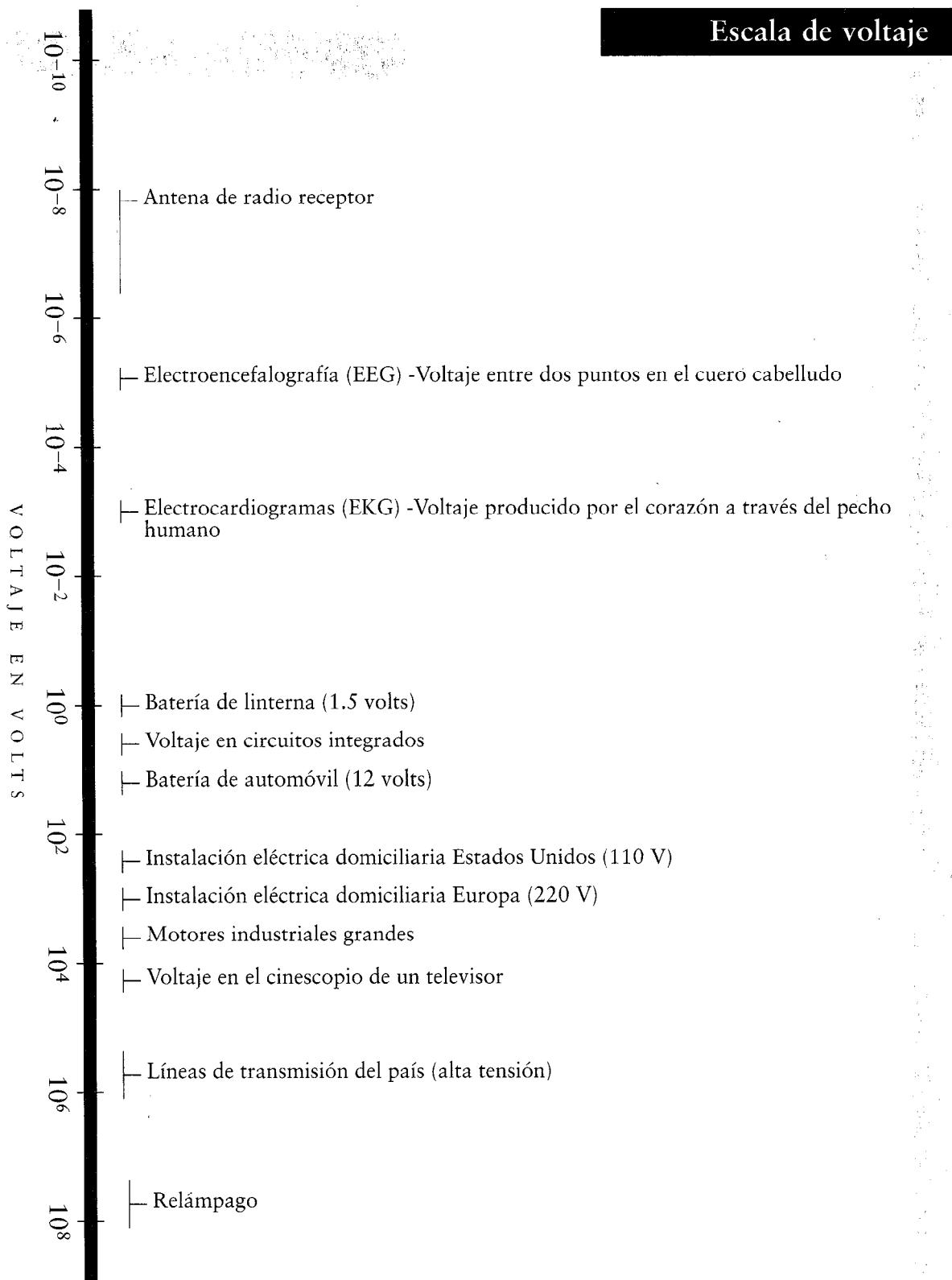
ANÁLISIS
BÁSICO
de CIRCUITOS
en INGENIERÍA

1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000

Escala de potencia



Escala de voltaje



621.374 2

I 659

5
EDICIÓN

ANÁLISIS BÁSICO *de CIRCUITOS* *en INGENIERÍA*

J. David Irwin
AUBURN UNIVERSITY

TRADUCCIÓN:

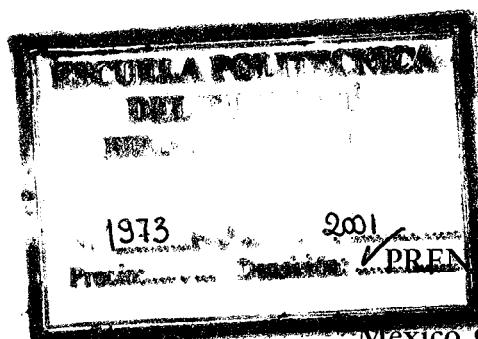
RICARDO CRUZ QUINTANA

REVISIÓN TÉCNICA:

Bernard Roeland Van Der Mersch Huerta Romo

INGENIERÍA ELECTRÓNICA Y DE COMUNICACIONES

UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA, A.C.



1973

2001

PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A.

México • Nueva York • Bogotá • Londres • Sydney •

París • Munich • Toronto • Nueva Delhi • Tokio •

Singapur • Río de Janeiro • Zurich

EDICIÓN EN ESPAÑOL:

DIRECTOR GENERAL:	MOISÉS PÉREZ ZAVALA
GERENTE DIVISIÓN COLLEGE:	JOSÉ TOMÁS PÉREZ BONILLA
GERENTE EDITORIAL COLLEGE:	LUIS GERARDO CEDEÑO PLASCENCIA
GERENTE DE EDICIONES:	JUAN ANTONIO RODRÍGUEZ MORENO
GERENTE DE TRADUCCIÓN:	JORGE BONILLA TALAVERA
GERENTE DE PRODUCCIÓN:	JULIÁN ESCAMILLA LIQUIDANO
DIRECTOR DE EDICIONES :	ALBERTO SIERRA OCHOA
SUPERVISOR DE TRADUCCIÓN:	CARLOS TALANCÓN ESPINOSA
SUPERVISORA DE PRODUCCIÓN:	OLGA ADRIANA SÁNCHEZ NAVARRETE

EDICIÓN EN INGLÉS:

Acquisitions Editor: *Linda Ratts Engelma*
Production Editor: *bookworks*
Production Liaisons: *Richard DeLorenzo, Joseph Scordato*
Copy Editor: *Donna Muldrer*
Art Director: *Amy Rosen*
Creative Director: *Paula Maylahn*
Designer: *Sheree Goodman*
Cover Illustrator: *Rolando Carujo*
Cover Designer: *Bruce Kenselaar*
Manufacturing Buyer: *Donna Sullivan*
Asst. Vice President Production and Mfg.: *David W. Riccardi*
Editorial Assistant: *Kathryn E. Cassino*

IRWIN: ANÁLISIS BÁSICO DE CIRCUITOS EN INGENIERÍA, 5a. Edición

Traducido del inglés de la obra: **BASIC ENGINEERING CIRCUIT ANALYSIS, 5a. Edición.**

All rights reserved. Authorized translation from English language edition published by Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company.

Todos los derechos reservados. Traducción autorizada de la edición en inglés publicada por Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the publisher.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o método sin autorización por escrito del editor.

Derechos reservados © 1997 respecto a la primera edición en español publicada por:
PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A.
Enrique Jacob 20, Col. El Conde
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México

ISBN 968-880-816-4

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1524

Original English Language Edition Published by Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company
Copyrights MCMXCVI
All rights reserved

ISBN 0-13-397274-7

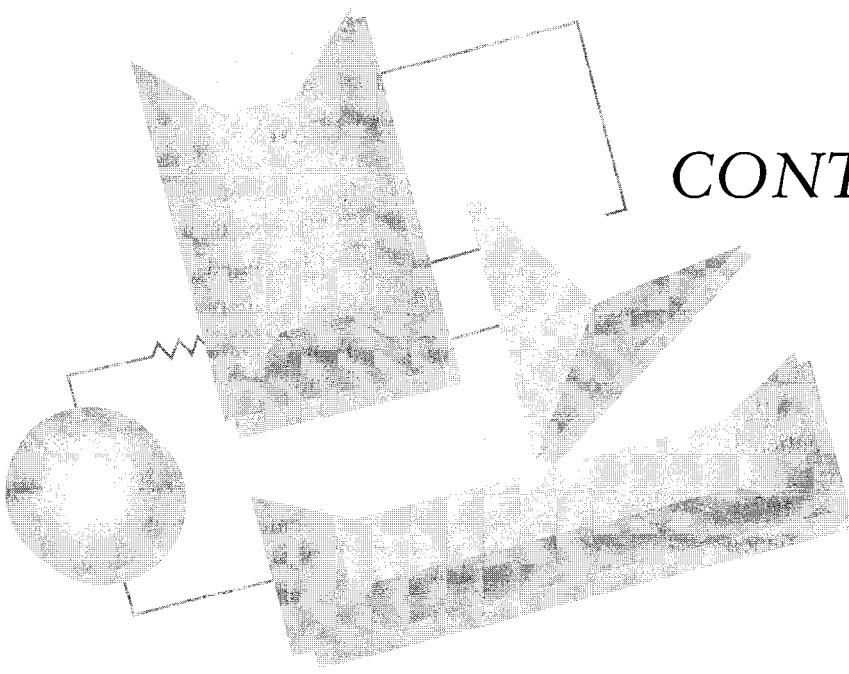
IMPRESO EN MÉXICO/PRINTED IN MEXICO

PROGRAMAS EDUCATIVOS
CALZ. CHABACANO No. 65 LOCAL A
COL. ASTURIAS, DELEG. CUAUHTEMOC, D.F.
C.P. 06850

3000 1996
□ □ □
DIC

Para Edie

Geri Marie
John David, Jr.
Laura Lynne



CONTENIDO

Prefacio xv

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS BÁSICOS

1

1.1	Sistemas de unidades	2
1.2	Cantidades básicas	2
1.3	Elementos de circuito	10
	Fuentes independientes	11
	Fuentes dependientes	12
1.4	Resumen	16
	Puntos clave	17
	Problemas	17

CAPÍTULO 2

CIRCUITOS RESISTIVOS

20

2.1	Ley de Ohm	21
2.2	Ley de Kirchhoff	27
2.3	Circuitos de una sola malla	37
	Divisor de voltaje	37
	Fuentes múltiples/redes de resistencias	41

2.4	Circuitos de un par de nodos	45
	Divisor de corriente	45
	Fuentes múltiples/redes de resistencia	49
2.5	Combinaciones de resistencia en serie y en paralelo	51
2.6	Transformaciones $Y \rightleftharpoons \Delta$	55
2.7	Circuitos con combinaciones de resistencias en serie y en paralelo	58
2.8	Circuitos con fuentes dependientes	63
2.9	Mediciones de cd	68
	El medidor de aguja	
	D'Arsonval	68
	Medición de corriente	68
	Medición de voltaje	71
	Medición de resistencia	74
	Mediciones de potencia	77
2.10	Aplicaciones	77
2.11	Diseño de circuitos	79
2.12	Resumen	84

Puntos clave	85	CAPÍTULO 4	TÉCNICAS ADICIONALES de ANÁLISIS	169	
Problemas	85				
CAPÍTULO 3					
TÉCNICAS de ANÁLISIS NODAL y de MALLA		96			
3.1	Análisis Nodal	97	4.1	Introducción 170	
Circuitos que contienen sólo fuentes de corriente independientes 100			4.2	Equivalencia 170	
Circuitos que contienen fuentes de corriente dependientes 107			4.3	Linealidad 170	
Circuitos que contienen fuentes de voltaje independientes 111			4.4	Superposición 173	
Circuitos que contienen fuentes de voltaje dependientes 116			4.5	Transformación de fuentes 179	
3.2	Análisis de malla	118	4.6	Teoremas de Thévenin y de Norton 184	
Circuitos que contienen solo fuentes de voltaje independientes 119			4.7	Circuitos que contienen sólo fuentes independientes 187	
Circuitos que contienen fuentes de corriente independientes 123				Circuitos que contienen sólo fuentes dependientes 192	
Circuitos que contienen fuentes dependientes 126				Circuitos que contienen fuentes independientes y dependientes 195	
3.3	Ecuaciones de circuitos por medio de topología de redes	129	4.8	Transferencia máxima de potencia 200	
Definiciones básicas 129			4.9	Aplicaciones 203	
Ecuaciones generales del análisis nodal 132			4.10	Resumen 204	
Ecuaciones generales de análisis de malla 136				Puntos clave 204	
3.4	Circuitos con amplificadores operacionales	139		Problemas 205	
3.5	Aplicaciones	152	CAPÍTULO 5		
3.6	Diseño de circuitos	153	ANÁLISIS de cd PSPICE		
3.7	Resumen	157	5.1	Introducción 212	
Puntos clave 157			5.2	Elementos del programa 213	
Problemas 158			Comandos de título y comentarios 214		
			5.3	Comandos de datos 214	
				Comandos de rama para fuentes independientes 217	
				Comandos de rama para fuentes lineales dependientes 217	
			5.4	Comandos de control de la solución 220	
			5.5	Comandos de especificación de la salida 221	
			5.6	Comandos para finalizar 221	

5.3	Análisis	222	7.2	Forma general de las ecuaciones de respuesta	292
	Circuitos que contienen fuentes Independientes	222	7.3	Técnicas de análisis	295
	Circuitos que contienen fuentes dependientes	226		Método de ecuación diferencial	295
	Circuitos que contienen amplificadores operacionales	233		Método paso por paso	300
	Simulación de barrido de cd en el PSPICE	236	7.4	Respuesta al pulso	315
5.4	Aplicaciones	238	7.5	Análisis transitorio de circuitos con PSPICE	319
5.5	Diseño de circuitos	245		Comandos de rama para bobinas y capacitores	320
5.6	Resumen	249		Comandos de rama para fuentes que varían con el tiempo	320
	Puntos clave	249		Comandos de control de la solución	323
	Problemas	249		Comandos de especificación de la salida	324
CAPÍTULO 6					
CAPACITANCIA e INDUCTANCIA				252	
6.1	Capacitores	253	7.6	Aplicaciones	336
6.2	Inductores	260	7.7	Diseño de circuitos	338
6.3	Características fundamentales de capacitores/bobinas	266	7.8	Resumen	339
6.4	Combinaciones de capacitores y bobinas	267		Puntos clave	340
	Capacitores en serie	267		Problemas	341
	Capacitores en paralelo	269	CAPÍTULO 8		
	Bobinas en serie	271	ANÁLISIS TRANSITORIO de CIRCUITOS de SEGUNDO ORDEN		
	Bobinas en paralelo	272			351
6.5	Circuitos RC con amplificador operacional	274	8.1	La ecuación del circuito básico	351
6.6	Aplicaciones	277	8.2	Desarrollo matemático de las ecuaciones de respuesta	352
6.7	Diseño de circuitos	279	8.3	Respuesta de la red	358
6.8	Resumen	283	8.4	Ánálisis de circuitos RLC con PSPICE	370
	Puntos clave	283	8.5	Aplicaciones	377
	Problemas	283	8.6	Diseño de circuitos	381
CAPÍTULO 7					
ANÁLISIS TRANSITORIO de CIRCUITOS de PRIMER ORDEN				290	
7.1	Introducción	291	8.7	Resumen	386
				Puntos clave	387
				Problemas	387

CAPÍTULO 9

ANÁLISIS de CA en ESTADO ESTABLE	393
9.1 Senoidales	394
9.2 Funciones forzantes senoidales y complejas	398
9.3 Fasores	403
9.4 Relaciones fasoriales para elementos de circuito	406
9.5 Impedancia y admitancia	411
9.6 Diagramas fasoriales	422
9.7 Análisis básico utilizando las leyes de Kirchhoff'	425
9.8 Técnicas de análisis	428
9.9 Técnicas de análisis con PSPICE	439
9.10 Resumen	443
Puntos clave	443
Problemas	444

CAPÍTULO 10

ANÁLISIS de POTENCIA en ESTADO ESTABLE	457
10.1 Potencia instantánea	458
10.2 Potencia promedio	459
10.3 Transferencia de potencia promedio máxima	466
10.4 Valores efectivos o rms	471
10.5 El factor de potencia	475
10.6 Potencia compleja	478
10.7 Corrección del factor de potencia	483
10.8 Mediciones de potencia	485
10.9 Circuitos trifilares de una sola fase	488
10.10 Consideraciones de seguridad	491
10.11 Aplicaciones	501
10.12 Diseño de circuitos	509
10.13 Resumen	512
Puntos clave	512
Problemas	513

CAPÍTULO 11

CIRCUITOS POLIFÁSICOS	522
11.1 Circuitos trifásicos	522
11.2 Conexiones trifásicas	525
11.3 Conexiones de fuente/carga	527
Conexión Y-Y balanceada	527
Fuente conectada en delta	531
Carga conectada en delta	534
11.4 Relaciones de potencia	540
11.5 Medición trifásica	544
Medición de potencia	544
Medición del factor de potencia	548
11.6 Corrección del factor de potencia	550
11.7 Aplicaciones	552
11.8 Diseño de circuitos	555
11.9 Resumen	557
Puntos clave	558
Problemas	558

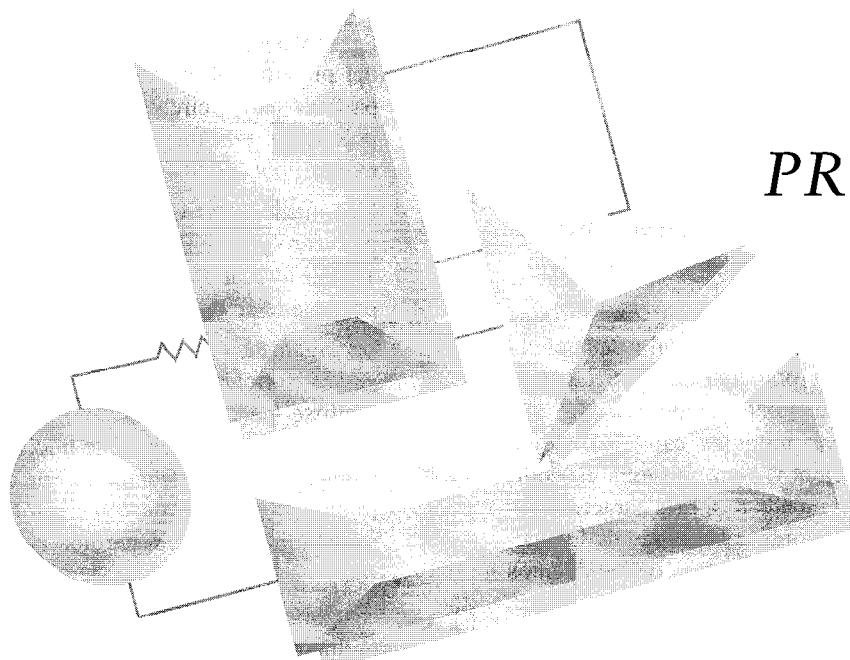
CAPÍTULO 12

REDES ACOPLADAS MAGNÉTICAMENTE	565
12.1 Inductancia mutua	566
12.2 Análisis de energía	573
12.3 Análisis con PSPICE de circuitos acoplados magnéticamente	577
12.4 El transformador ideal	579
12.5 Análisis con PSPICE de circuitos de transformadores ideales	589
12.6 Autotransformadores ideales	591
12.7 Transformadores trifásicos	594
12.8 Consideraciones de seguridad	598
12.9 Aplicaciones	599
12.10 Diseño de circuitos	603

12.11	Resumen 604	14.6	Interconexión de dos puertos 733
	Puntos clave 604		Interconexión en paralelo 733
	Problemas 604		Interconexión en serie 735
CAPÍTULO 13			Interconexión en cascada 737
FUNCIONAMIENTO de la RED de FRECUENCIA VARIABLE 614		14.7	Dos puertos empotrados en una red 739
13.1	Análisis de la respuesta de frecuencia variable 615	14.8	Resumen 741
	Funciones de la red 623		Puntos clave 742
	Polos y ceros 624		Problemas 742
13.2	Análisis de frecuencia senoidal 625	CAPÍTULO 15	
	Respuesta de frecuencia usando una gráfica de Bode 625	TRANSFORMADA de LAPLACE 748	
	Término constante 627 • Polos o ceros en el origen 627 • Polo o cero simple 628 • Polos o ceros cuadráticos 628	15.1	Definición 749
	Derivación de la función de transferencia usando la gráfica de Bode 636	15.2	Dos funciones singulares importantes 749
13.3	Circuitos resonantes 637	15.3	Pares de transformadas 753
13.4	Escalamiento 665	15.4	Propiedades de la transformada 755
13.5	Redes de filtros 667	15.5	Desarrollo de la transformada inversa 764
	Filtros pasivos 667		Polos simples 765
	Filtros activos 676		Polos complejos conjugados 766
13.6	Aplicaciones 696		Polos múltiples 768
13.7	Diseño de circuitos 700	15.6	Integral de convolución 770
13.8	Resumen 709	15.7	Teorema del valor inicial y del valor final 774
	Puntos clave 709	15.8	Aplicaciones 777
	Problemas 710	15.9	Resumen 778
CAPÍTULO 14			Puntos clave 778
REDES de DOS PUERTOS 719			Problemas 779
14.1	Parámetros de admitancia 720	CAPÍTULO 16	
14.2	Parámetros de impedancia 723	APLICACIÓN de la TRANSFORMADA de LAPLACE al ANÁLISIS de CIRCUITOS 783	
14.3	Parámetros híbridos 725	16.1	Soluciones de circuito de Laplace 784
14.4	Parámetros de transmisión 728	16.2	Modelos de elementos de circuito 786
14.5	Conversión de parámetros 731		

16.3	Técnicas de análisis	788	Algunas propiedades de la transformada de fourier	887	
16.4	Función de transferencia	808	Teorema de Parseval	892	
16.5	Conexión de las gráficas de polo cero/gráfica de Bode	825	Aplicaciones	893	
16.6	Respuesta de estado estable	828	17.3	Aplicaciones	897
16.7	Aplicaciones	833	17.4	Diseño de circuitos	899
16.8	Diseño de circuitos	835	17.5	Resumen	902
16.9	Resumen	841	Puntos clave	902	
	Puntos clave	842	Problemas	903	
	Problemas	842			
CAPÍTULO 17					
TÉCNICAS del ANÁLISIS de FOURIER				851	
17.1	Series de Fourier	851	TÉCNICAS para RESOLVER ECUACIONES SIMULTÁNEAS LINEALMENTE INDEPENDIENTES 909		
	Serie de Fourier exponencial	854	A.1	Eliminación gausiana	910
	Serie de Fourier trigonométrica	857	A.2	Determinantes	911
	Simetría y la serie de Fourier trigonométrica	858	A.3	Matrices	915
	Simetría de la función par	858			
	▪ Simetría de función impar	860			
	▪ Simetría de media onda	860			
	Análisis PSPICE	866			
	Corrimiento del tiempo	869			
	Generación de formas de onda	872			
	Espectro de frecuencia	875			
	Respuesta de la red en estado estable	876			
	Potencia promedio	879			
17.2	Transformada de Fourier	881			
	Algunos pares de transformadas importantes	883			
				APÉNDICE A	
PROCEDIMIENTO de INSTALACIÓN del PSPICE				924	
B.1	PSPICE para MS-WINDOWS	924			
B.2	PSPICE para MS-DOS	925			
				APÉNDICE B	
NÚMEROS COMPLEJOS				927	
Referencias				931	
Respuestas a problemas seleccionados				933	
Índice				941	

PREFACIO



Propósito

El propósito primario de este libro es la adquisición por parte del lector de una comprensión a fondo de los conceptos fundamentales del análisis de circuitos y sus aplicaciones a problemas del mundo real. Dentro de ese contexto, el libro está diseñado específicamente para cursos introductorios en análisis de circuitos lineales. El libro puede servir como texto básico para la especialidad de ingeniería eléctrica, o como un medio de introducción de las técnicas del análisis de circuitos a otras especialidades no eléctricas de la ingeniería.

He trabajado con diligencia en la organización del material para presentarlo de la manera más simple posible, de modo que pueda ser comprendido rápidamente por el lector. De hecho, una combinación de explicaciones claras y cuidadosas, ejemplos detallados, problemas de entrenamiento y respuestas a problemas seleccionados a lo largo del texto permite utilizar este libro como herramienta en el autoestudio.

Como regla general, los ejemplos que se ofrecen en una sección particular del material tienen cierto grado de dificultad, iniciando con los muy simples y continuando con los más desafiantes. De hecho muchos de los ejemplos, que se trabajan con detalle, son más difíciles que muchos de los problemas que se encuentran al final de capítulo.

La organización y presentación están diseñadas para ayudar al instructor a presentar el material de manera clara y lógica, y al estudiante para comprender los conceptos y técnicas, de modo que ambos puedan tener confianza al aplicarlos en situaciones prácticas.

Filosofía

La filosofía básica de este texto sigue la expresada en las ediciones previas, que es aprendemos haciendo. Por eso, es un texto repleto de ejemplos, problemas de entrenamiento y problemas al final de capítulo que ilustran cada faceta del material. Se proporcionan respuestas para todos los problemas de entrenamiento y muchos de los problemas de final de capítulo.

A medida que he tratado de usar valores reales para los componentes eléctricos, también he intentado mantener las matemáticas tan simples como sea posible, de modo que los conceptos y principios no queden ocultos en un laberinto de cálculos y números.

La presentación en esta edición está organizada para proporcionar una mayor penetración en el tema del análisis de circuitos mediante a) trabajar el mismo problema varias veces a fin de facilitar la comprensión y comparación de las diversas técnicas, así como las relaciones entre ellas; b) la ilustración del uso de las técnicas en una variedad de aplicaciones del mundo real, y

c) la demostración del uso de las técnicas en el diseño de circuitos básicos.

Características

Este libro contiene un número de características especiales que realzan su uso como se señala a continuación.

- El libro no sólo está lleno de ejemplos, sino que un gran número de ellos se orientan a las aplicaciones. Esos ejemplos prácticos se desarrollan en muchas secciones del texto y, además, hay una sección al final de casi todos los capítulos etiquetada como “Aplicaciones”, que presenta específicamente ejemplos del mundo real. Esta característica está diseñada para mejorar la habilidad de los lectores en la aplicación de los conocimientos recibidos.
- Al final de cada capítulo de aplicaciones aparecen secciones de diseño de circuitos. Los ejemplos contenidos en esas secciones abarcan desde ejercicios muy simples hasta aquellos que demuestran soluciones de prueba y error. Esta característica proporciona una nueva dimensión a la comprensión de los lectores del material y una primera introducción a los requerimientos del programa de estudios para el diseño en ingeniería que especifica ABET.
- Se proporciona un número de ilustraciones en un intento de colocar el material de este libro en un contexto práctico. Las ilustraciones incluyen fotografías de componentes eléctricos reales y gráficas que describen la extensión de corriente, frecuencia, potencia y voltaje. (Véase, por ejemplo, las figuras 1.5, 1.7, 2.1, 6.2, 6.3, 6.7 y los apéndices finales del texto.)
- El programa de análisis de circuitos asistido por computadora PSPICE permea todo el texto. Esencialmente toda faceta de este estándar de la industria que es aplicable al análisis de circuitos va acompañada con ejemplos que detallan su uso. Este método integrado no sólo fomenta el uso continuo de las computadoras a lo largo del programa de estudio, sino que apoya los requerimientos de ABET que piden específicamente el uso de la computadora en la solución de problemas de ingeniería.

- Para relacionar más el material con los problemas del mundo real, se analiza la medición de varios parámetros de circuitos y se presentan ejemplos prácticos del uso de técnicas de medición. (Véase, por ejemplo, la sección 2.9.)
- La conexión inherente que existe entre la gráfica de polo cero y la de Bode se señala con detalle gráfico a fin de ayudar a los lectores a comprender esta importante relación. (Véase la figura 16.28.)
- La organización del libro favorece su uso en diversos formatos. Secciones y capítulos pueden omitirse por completo en el desarrollo de una progresión natural desde el inicio hasta el final en una presentación coherente. Por ejemplo, los instructores que no deseen cubrir PSPICE pueden prescindir de ello sin pérdida de continuidad.
- Los problemas dentro del texto se dividen en dos categorías distintas: problemas de entrenamiento y problemas de final del capítulo. Los problemas de entrenamiento, con respuestas, aparecen al final de las secciones a fin de reforzar de inmediato la comprensión por parte del lector, del material de la sección. Los problemas que aparecen al final de cada capítulo están organizados para seguir la presentación del material, generalmente con dificultad gradual y se han seleccionado cuidadosamente para estimular la comprensión, por parte de los lectores, de las técnicas discutidas en ese capítulo.
- Al final de cada capítulo se resumen los conceptos importantes en forma concisa. Esos resúmenes sirven como un rápido recordatorio de todos los principios significativos y de las técnicas contenidas dentro del capítulo.

Agradecimientos

- Deseo expresar mi agradecimiento a muchas personas que han colaborado en la elaboración de este texto. En particular, estoy muy agradecido por el excelente apoyo y consejo proporcionado por el Sr. William C. Dillard. Ha sido extremadamente amable en el desarrollo de muchos ejemplos nuevos que se usan a lo largo del texto para ofrecer un libro más orientado a las aplicaciones. Además, ha ayudado en la preparación de numerosos cambios que se han incorporado en la edición final de este libro.

Me da gusto reconocer gratamente el amable apoyo de dos personas que revisaron cuidadosamente el manuscrito: el profesor (AB) M. E. Shafeei, de la Universidad Estatal de Pennsylvania en Harrisburg, y el profesor Leonard J. Tung, de Florida A&M University/Universidad Estatal de Florida.

También aprecio el apoyo de muchos colegas que ayudaron en la preparación de este texto. Ellos son: la Srita. Paula R. Marino; los profesores Thomas A. Baginski, Charles A. Gross, James L. Lowry, Zhi Ding, David C. Hill y Darrell L. Vines; Sres. Henry Cobb y Les Simonton; y mi asistente administrativa Srita. Betty Kelley. También quiero agradecer a Seth Wolpert, Universidad de Maine, por preparar el manual de soluciones que acompaña a este texto.

Además de las personas arriba mencionadas, estoy agradecido con gran número de otros colegas y amigos que han ayudado en la preparación de las ediciones previas de este libro. Me han apoyado mucho y quiero insistir de nuevo en mi aprecio por su ayuda también en esta ocasión. Son los profesores E. R. Graf, L. L. Grigsby, M. A. Honnell, R. C. Jaeger, M. S. Morse y C. L. Rogers; y los estudiantes Dr. Travis Blalock, Dr. Kevin Driscoll, Sr. Keith Jones, Sr. George Lindsey, Sr. David Mack, Dr. John Parr, Sr. Monty Rickels, Sr. James Trivitayakhum, Srita. Susan Williamson y la Srita. Jacinda Woodward.

También quiero expresar mi aprecio a los siguientes profesores que han hecho numerosas sugerencias para

mejorar este libro: David Anderson, Universidad de Iowa; Richard L. Baker, Universidad de California, Los Angeles; James L. Dodd, Profesor Emérito, Universidad Estatal de Mississippi; Earl D. Eyman, Universidad de Iowa; Arvin Grabel, Universidad del Noreste; Paul Gray, Universidad de Wisconsin, Platteville; Mohammad Habbli, Universidad de Nueva Orleáns; John Hadjilogiou, Instituto de Tecnología de Florida; Ralph Kinney, Universidad Estatal de Luisiana; K. S. P. Kumar, Universidad de Minnesota; James Luster, Snow College; Ian McCausland, Universidad de Toronto; Arthur C. Moeller, Marquette University; M. Paul Murray, Universidad Estatal de Mississippi; Burks Oakley, II, Universidad de Illinois en Champaign-Urbana; John O'Malley, Universidad de Florida; William R. Parkhurst, The Wichita State University; George Prans, Manhattan College; James Rowland, Universidad de Kansas; Robert N. Sackett, Normandale Community College; Richard Sanford, Clarkson University; Ronald Schultz, Universidad Estatal de Cleveland; M. E. Shafeei, Penn State; Karen M. St. Germaine, Universidad de Nebraska; Janusz Starzyk, Universidad de Ohio; Saad Tabet, Universidad Estatal de Florida; y Seth Wolpert, Universidad de Maine.

Finalmente, deseo expresar mi más profundo aprecio a Edie, mi esposa, sin cuya ayuda y apoyo este libro no habría sido posible.

J. D. I.

C O N T E N I D O D E L C A P Í T U L O

- 1.1** Sistema de unidades
- 1.2** Cantidades básicas
- 1.3** Elementos de circuitos
- 1.4** Resumen
- Puntos claves
- Problemas

C A P Í T U L O
1**CONCEPTOS
BÁSICOS**

Hoy vivimos en un mundo predominantemente eléctrico. Aunque en principio esta afirmación puede sonar extraña, un momento de reflexión nos indicará que es intrínsecamente cierta. Las dos áreas primarias de la electrotecnología que permean esencialmente todos los aspectos de nuestras vidas son la potencia y la información. Sin ellas, la vida como la conocemos experimentaría cambios extraordinarios. No obstante, hemos aprendido a generar, convertir, transmitir y utilizar esas tecnologías para el fortalecimiento de toda la raza humana.

La electrotecnología es una fuerza impulsora de los cambios que están ocurriendo en cada disciplina de la ingeniería. Por ejemplo, las prospecciones hoy se hacen con láser y con localizadores de campo electrónico, y los automóviles emplean tableros electrónicos y sistemas de encendido también electrónico. Los procesos industriales que van desde las refinerías químicas

y las fundidoras hasta las plantas de tratamiento de aguas residuales utilizan a) sensores electrónicos para obtener información del proceso, b) sistemas de instrumentación para recolectar la información y c) sistemas de control por computadora para procesar la información y generar señales electrónicas para los accionadores, que corrigen y controlan el proceso.

Fundamental a la electrotecnología es el área del análisis de circuitos. Un conocimiento profundo de este tema proporciona una comprensión de aspectos tales como causa y efecto, amplificación y atenuación, retroalimentación y control, y estabilidad y oscilación. De importancia crítica es el hecho de que esos principios pueden aplicarse no sólo a sistemas de ingeniería, sino también en sistemas económicos y sociales. De esta forma, las ramificaciones del análisis de circuitos son inmensas, por lo que bien vale la pena el esfuerzo empleado para conseguir la comprensión sólida de este tema. ■

1.1 Sistema de unidades

El sistema de unidades que empleamos es el sistema internacional de unidades, que por lo general se conoce como sistema estándar SI. Éste está compuesto de las unidades básicas: metro (m), kilogramo (kg), segundo (s), ampere (A), grado kelvin ($^{\circ}$ K) y candela (cd), definidas en todos los textos de física moderna, por lo que ya no abundaremos acerca de ellas aquí. Sin embargo, discutiremos las unidades con algún detalle conforme las vayamos encontrando en nuestros subsecuentes análisis.

Los prefijos estándares que se emplean en el SI se muestran en la figura 1.1. Observe la relación decimal entre dichos prefijos. Estos prefijos estándar se emplean en todo nuestro estudio de los circuitos eléctricos.

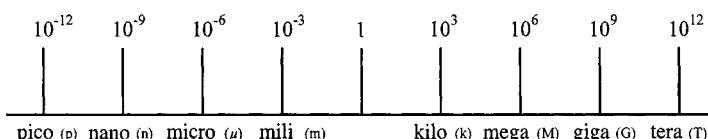


FIGURA 1.1 Prefijos SI estándar.

La tecnología de circuitos ha cambiado drásticamente con los años. Por ejemplo, a principios de los años sesenta el espacio en una tableta de circuito ocupado por la base de un solo tubo al vacío era casi del tamaño de un cuarto de dólar (moneda de 25 centavos). Hoy, el mismo espacio puede ser ocupado por el chip de circuito integrado de un procesador Pentium de Intel que contiene 3.1 millones de transistores. Esos chips son el motor de una multitud de equipos electrónicos.

1.2 Cantidadas básicas

Antes de iniciar nuestro análisis de los circuitos electrónicos, debemos definir los términos que emplearemos. Sin embargo, en este capítulo y a lo largo del libro nuestras definiciones y explicaciones serán tan simples como sea posible a fin de favorecer la comprensión del uso del material. No se hará ningún intento por definir muchas de las cantidades, debido a que tales definiciones no son sólo innecesarias en este nivel sino que con frecuencia son confusas. Aunque muchos de nosotros tenemos un concepto intuitivo de lo que significa un circuito, simplemente nos referiremos a un *circuito eléctrico* como una interconexión de componentes eléctricos.

Es muy importante que el lector entienda desde el principio la estrategia básica que emplearemos en nuestro análisis de circuitos eléctricos. Esta estrategia está señalada en la figura 1.2, y tendremos que ver sólo con la parte del diagrama que está a la derecha de la línea punteada. En cursos subsecuentes o en un estudio posterior el lector aprenderá cómo modelar dispositivos físicos tales como componentes electrónicos. Nuestro procedimiento aquí será emplear modelos lineales para nuestros componentes de circuitos, definir a continuación las variables que se usan en las ecuaciones de circuito apropiadas para proporcionar los valores de la solución y, finalmente, interpretar los valores de la solución para las variables a fin de determinar lo que está pasando realmente en el circuito físico. Las variables pueden cambiar con el tiempo o ser constantes, dependiendo de la naturaleza de los parámetros físicos que representan.

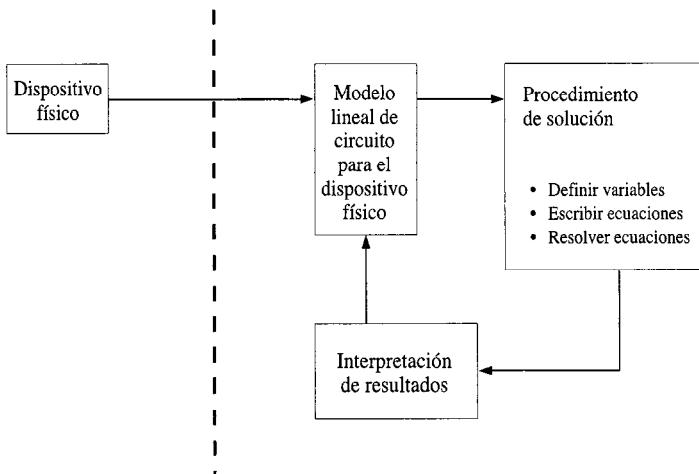


FIGURA 1.2 Estrategia básica empleada en el análisis de circuitos.

La cantidad más elemental en un análisis de circuitos eléctricos es la *carga eléctrica*. Sabemos por la física básica que la naturaleza de la carga está basada en conceptos de la teoría atómica. Vemos al átomo como un tabique fundamental de materia que está compuesto por un núcleo cargado positivamente rodeado por electrones cargados negativamente. En el sistema métrico la carga se mide en coulombs (C). La carga sobre un electrón es negativa e igual en magnitud a 1.602×10^{-19} C. Sin embargo, nuestro interés en la carga eléctrica está centrado alrededor de su movimiento, ya que la carga en movimiento da como resultado una transferencia de energía. De particular interés para nosotros son aquellas situaciones en las que el movimiento está confinado a una trayectoria cerrada definida.

Un circuito eléctrico es esencialmente un conducto que facilita la transferencia de carga desde un punto a otro. La razón de cambio de la carga con respecto al tiempo constituye una *corriente eléctrica*. Matemáticamente, la relación se expresa como

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad \text{o} \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i(x)dx \quad (1.1)$$

donde i y q representan corriente y carga, respectivamente (las minúsculas representan dependencia del tiempo y las mayúsculas están reservadas para cantidades constantes). La unidad básica de corriente es el ampere (A), y 1 ampere es 1 coulomb por segundo.

Aunque sabemos que el flujo de corriente en conductores metálicos procede del movimiento de electrones, el flujo de corriente convencional, adoptado universalmente, representa el movimiento de cargas positivas. Es importante que el lector piense acerca del flujo de corriente como el movimiento de carga positiva a pesar del fenómeno físico que tiene lugar. El simbolismo que se usará para representar el flujo de corriente se muestra en la figura 1.3. La variable que representa a la corriente en el alambre de la figura 1.3a fue definido como I_1 , que fluye en el alambre de izquierda a derecha en la figura. Se escribió un conjunto de ecuaciones para el circuito y se obtuvo un valor para la solución de 2 A, es decir, $I_1 = 2$ A. Esto significa que la corriente física en el alambre fluye de izquierda a derecha, en la dirección de nuestra variable, y es 2 A. $I_1 = 2$ A en la figura 1.3a indica que en cualquier punto del alambre que se muestra, 2 C de carga pasan de izquierda a derecha cada segundo. El mismo procedimiento se siguió para el alambre que se muestra en la figura 1.3b y la variable I_2 fue definida de la

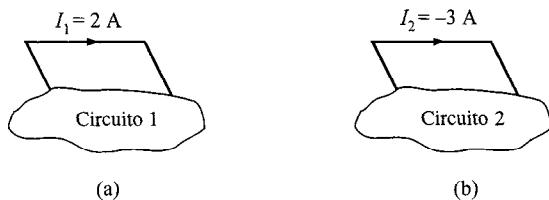


FIGURA 1.3 Flujo de corriente convencional: a) flujo de corriente positiva; b) flujo de corriente negativa.

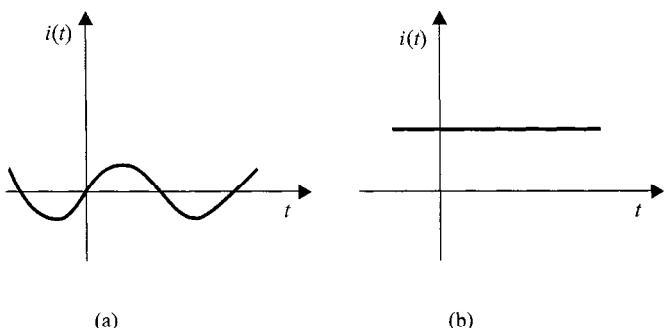


FIGURA 1.4 Dos tipos comunes de corriente: a) corriente alterna (ca); b) corriente directa (cd).

misma forma. Se escribió un conjunto de ecuaciones y se obtuvo un valor para la solución de -3 A . Una interpretación de este resultado es que la corriente física en el alambre es de derecha a izquierda, opuesta a nuestra dirección de referencia para I_1 ; su valor es 3 A . $I_2 = -3 \text{ A}$ en la figura 1.3b indica que en cualquier punto del alambre que se muestra pasan 3 C de carga de derecha a izquierda cada segundo. Así pues, es importante especificar no sólo la magnitud de la variable que representa la corriente, sino también su dirección. Después que se obtiene una solución para la variable de corriente, se conoce la corriente física real.

Hay dos tipos de corriente que con frecuencia encontraremos en nuestra vida diaria: corriente alterna (ca) y corriente directa (cd), que se muestran como función del tiempo en la figura 1.4. La *corriente alterna* es la corriente común que se encuentra en todas las casas, y que se usa para hacer funcionar el refrigerador, el horno, la lavadora, etc. Las baterías que se usan en automóviles o flashes son una fuente de *corriente directa*. Además de esos dos tipos de corriente, que tienen una amplia variedad de usos, podemos generar muchos otros tipos de corriente. Examinaremos algunos de estos tipos más adelante en este libro. Mientras tanto, es de interés notar que la magnitud de las corrientes en elementos que nos son familiares van de cabo a rabo, como se muestra en la figura 1.5.

Hemos indicado que las cargas en movimiento implican una transferencia de energía. Ahora definiremos *voltaje* (también llamado *fuerza electromotriz* o *potencial*) entre dos puntos en un circuito como la diferencia en el nivel de energía de una unidad de carga localizada en cada uno de los dos puntos. El trabajo o energía, $w(t)$ o W , se mide en joules (J); 1 joule es 1 newton metro (N · m). Así, el voltaje [$v(t)$ o V] se mide en

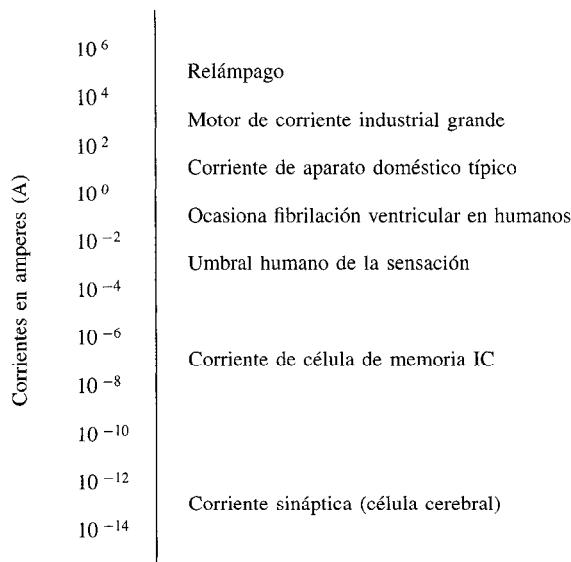


FIGURA 1.5 Magnitudes típicas de corriente.

volts (V), y 1 volt es 1 joule por coulomb, es decir, $1 \text{ volt} = 1 \text{ joule por coulomb} = 1 \text{ newton metro por coulomb}$.

Si una unidad de carga positiva se mueve entre dos puntos, la energía requerida para moverla es la diferencia en el nivel de energía entre los dos puntos y es el voltaje definido. Es en extremo importante que las variables que se utilizan para representar el voltaje entre dos puntos estén definidas de tal manera que la solución nos permita interpretar qué punto está al potencial más alto con respecto al otro.

En la figura 1.6a la variable que representa el voltaje entre los puntos *A* y *B* ha sido definida como V_1 , y se supone que el punto *A* está a un potencial más alto que el punto *B*, como está indicado por los signos + y - asociados con la variable y definidos en la figura. Los signos + y - definen una dirección de referencia para V_1 . Se escribieron las ecuaciones para el circuito y se obtuvo el valor de 2 V para la solución, es decir, $V_1 = 2 \text{ V}$, como se muestra en la figura. La interpretación física de esto es que la diferencia en potencial de los puntos *A* y *B* es 2 V, y el punto *A* está al potencial más alto. Si una unidad de carga positiva se mueve del punto *A* a través del circuito al punto *B*, entregará energía al circuito y tendrá 2 J menos de energía cuando alcance el punto *B*. Si una unidad de carga positiva se mueve del punto *B* al punto *A*, se deberá agregar energía extra a la carga en el circuito, de aquí que la carga termine con 2 J de energía extra en el punto *A* que con la que inició en el punto *B*.

El mismo procedimiento se siguió para el circuito en la figura 1.6b, y la variable V_2 se definió de la misma forma. Se escribió un conjunto de ecuaciones y se obtuvo un valor de -5 V como solución, es decir, $V_2 = -5 \text{ V}$. La interpretación física de $V_2 = -5 \text{ V}$ es que el potencial entre los puntos *A* y *B* es 5 V, y el punto *B* está al potencial más alto. Si el circuito en la figura 1.6b se hiciera funcionar con la variable para el voltaje definida como se muestra en la figura 1.6c, la solución sería $V_2 = 5 \text{ V}$. La interpretación física de esto es que la diferencia de potencial de los puntos *A* y *B* es 5 V, con el punto *B* al potencial más alto.

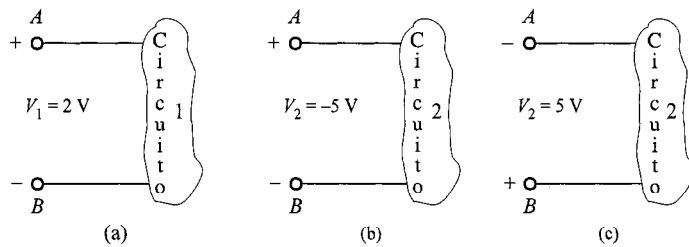


FIGURA 1.6 Representaciones de voltaje.

Advierta que es importante definir una variable con una dirección de referencia de modo que la respuesta pueda interpretarse para proporcionar la condición física en el circuito. Encontraremos que no es posible en muchos casos definir la variable de modo que la respuesta sea positiva, y también encontraremos que no es necesario hacerlo así. Un número negativo para una variable dada brinda exactamente la misma información que un número positivo para una nueva variable, que es la misma que la variable anterior, excepto que ésta tiene una dirección de referencia opuesta. Por eso, cuando definimos la corriente o el voltaje, es absolutamente necesario que especifiquemos tanto la magnitud como la dirección. Por tanto, es incompleto decir que el voltaje entre dos puntos es 10 V o que la corriente en una línea es 2 A, ya que sólo se ha definido la magnitud y no la dirección para las variables.

El intervalo de magnitudes para el voltaje, equivalente al de la corriente en la figura 1.5, se muestra en la figura 1.7. De nuevo, advierta que este intervalo abarca muchos órdenes de magnitud.

Hasta este punto hemos presentado las convenciones que empleamos en nuestras discusiones de corriente y voltaje. La *energía* es otro término importante de significado básico. La figura 1.8 ilustra las relaciones de voltaje-corriente para la transferencia de

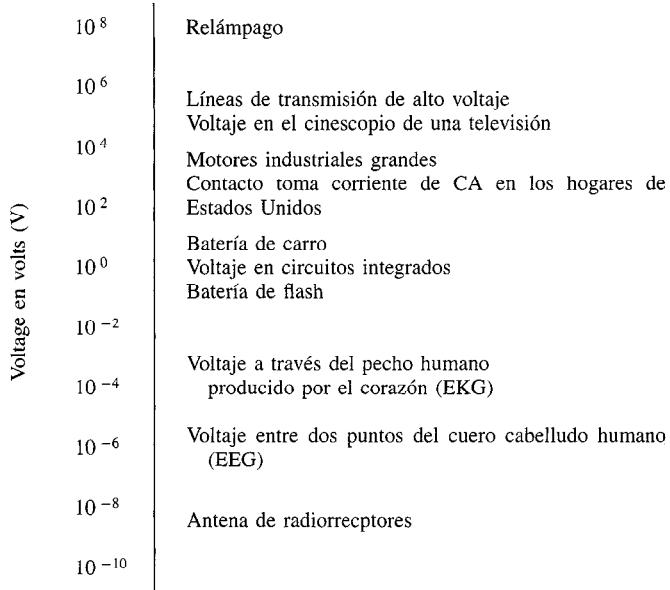


FIGURA 1.7 Magnitudes típicas de voltaje.

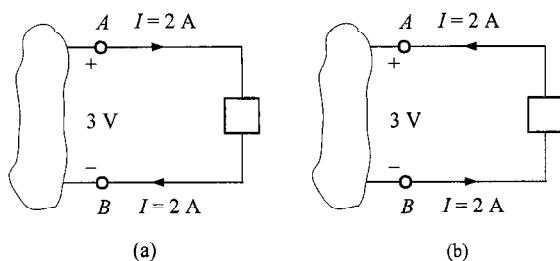


FIGURA 1.8 Relaciones voltaje-corriente para energía absorbida (a) y energía suministrada (b).

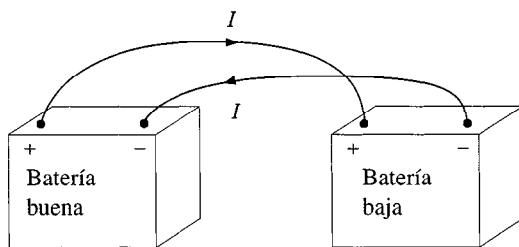
energía. En esta figura el bloque representa un elemento del circuito que ha sido extraído de un circuito mayor para su examen. En la figura 1.8a, la energía está siendo suministrada *al* elemento por cualquier cosa que esté unida a las terminales. Note que 2 A, es decir, 2 C, de carga se están moviendo del punto A al punto B a través del elemento cada segundo. Cada coulomb pierde 3 J de energía conforme pasa a través del elemento del punto A al punto B. Por consiguiente, el elemento está absorbiendo 6 J de energía por segundo. Note que cuando el elemento está *absorbiendo* energía, una corriente positiva entra en la terminal positiva. En la figura 1.8b la energía está siendo suministrada *por* el elemento a cualquier cosa que esté conectada a las terminales A-B. En este caso, note que cuando el elemento está *suministrando* energía, entra una corriente positiva en la terminal negativa y sale por la terminal positiva. Con esta convención, una corriente negativa en una dirección es equivalente a una corriente positiva en la dirección opuesta y viceversa. De modo similar, un voltaje negativo en una dirección es equivalente a un voltaje positivo en la dirección opuesta.

EJEMPLO 1.1

Suponga que su carro no arranca. Para determinar si la batería está fallando, acciona el interruptor de las luces y encuentra que éstas están muy bajas, indicando una batería débil. Usted pide prestado el carro de un amigo y unos cables pasacorriente. Sin embargo, ¿cómo conecta la batería del carro de su amigo a la del suyo? ¿Qué quiere que la batería de su amigo haga?

SOLUCIÓN Esencialmente, la batería del carro de su amigo debe suministrar energía a la suya, y por tanto debe conectarse de la forma que se muestra en la figura 1.9. Advierta que la corriente positiva sale de la terminal positiva de la batería buena (suministrando energía) y entra a la terminal positiva de la batería baja (absorbiendo energía). Advierta que se usan las mismas conexiones cuando se carga una batería.

En aplicaciones prácticas con frecuencia hay otras consideraciones que simplemente las relaciones eléctricas (por ejemplo, seguridad). Tal es el caso cuando el automóvil salta al tratar de arrancarlo. Las baterías de automóviles producen gases explosivos que pueden encenderse accidentalmente, ocasionando lesiones físicas graves. Asegúrese y siga los procedimientos descritos en su manual del propietario del automóvil.

**FIGURA 1.9** Diagrama para el ejemplo 1.1.

Hemos definido el voltaje en joules por coulomb como la energía requerida para mover una carga positiva de 1 C a través de un elemento. Si suponemos que estamos tratando con una cantidad diferencial de carga y energía, entonces

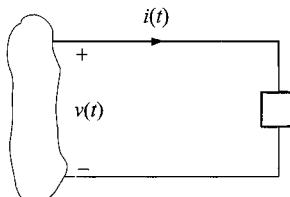
$$v = \frac{dw}{dq} \quad (1.2)$$

Multiplicando esta cantidad por la corriente en el elemento conduce a

$$vi = \frac{dw}{dq} \left(\frac{dq}{dt} \right) = \frac{dw}{dt} = p \quad (1.3)$$

que es la razón de cambio con respecto al tiempo de la energía o potencia medida en joules por segundo, o watts (W). Como, en general, tanto v como i son funciones del tiempo, p es también una cantidad que varía con el tiempo. Por tanto, el cambio en energía del tiempo t_1 al tiempo t_2 puede encontrarse integrando la ecuación (1.3), es decir,

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{t_1}^{t_2} vi dt \quad (1.4)$$

**FIGURA 1.10** Convención de signos para potencia.

En este punto, resumamos nuestra convención de signos para la potencia. Para determinar el signo de cualquiera de las cantidades involucradas, las variables para la corriente y voltaje deben colocarse como se muestra en la figura 1.10. La variable para el voltaje $v(t)$ se define como el voltaje a través del elemento con la referencia positiva en la misma terminal en que la variable de corriente $i(t)$ entra. Esta convención se llama *convención de signo pasiva*, y así se denominará en el resto de este libro. El producto de v e i , con sus signos correspondientes, determinará la magnitud y signo de la potencia. Si el signo de la potencia es positivo, la potencia está siendo absorbida por el elemento; si el signo es negativo, la potencia está siendo suministrada por el elemento.

E J E M P L O 1.2

Deseamos determinar la potencia absorbida por, o suministrada por, los elementos de la figura 1.8.

SOLUCIÓN En la figura 1.8a, $P = VI = (3 \text{ V})(2 \text{ A}) = 6 \text{ W}$ es absorbida por el elemento. En la figura 1.8b, $P = VI = (3 \text{ V})(-2 \text{ A}) = -6 \text{ W}$ es absorbida por el elemento, o $+6 \text{ W}$ es suministrada por el elemento.

E J E M P L O 1.3

Dados los dos diagramas que se muestran en la figura 1.11, determine si el elemento está absorbiendo o suministrando potencia y cuánta.

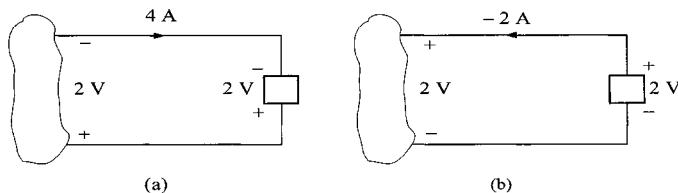


FIGURA 1.11 Elementos para el ejemplo 1.3.

SOLUCIÓN En la figura 1.11a la potencia es $P = (2 \text{ V})(-4 \text{ A}) = -8 \text{ W}$. Por tanto, el elemento está suministrando potencia. En la figura 1.11b, la potencia es $P = (2 \text{ V})(2 \text{ A}) = 4 \text{ W}$. Por ende, el elemento está absorbriendo potencia.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D1.1 Determine la cantidad de potencia absorbida o suministrada por los elementos de la figura D1.1.

Resp.: a) $P = -48 \text{ W}$; b) $P = 8 \text{ W}$.

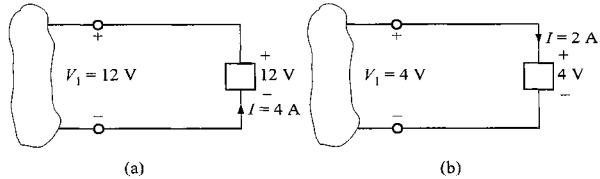


FIGURA D1.1

E J E M P L O 1.4

Deseamos determinar el voltaje o la corriente desconocidos en la figura 1.12.

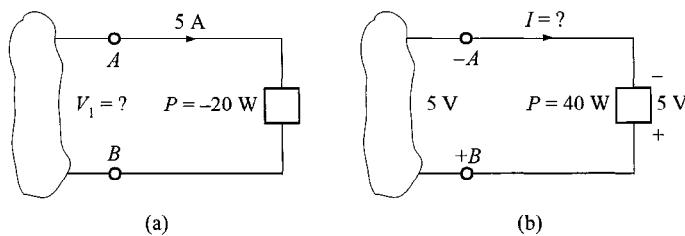


FIGURA 1.12 Elementos para el ejemplo 1.4.

SOLUCIÓN En la figura 1.12a, una potencia de -20 W indica que el elemento está entregando potencia. Por tanto, la corriente entra en la terminal negativa (terminal A), y desde la ecuación (1.3) el voltaje es 4 V .

En la figura 1.12b, una potencia de $+40\text{ W}$ indica que el elemento está absorbiendo potencia y, por ende, la corriente deberá entrar por la terminal positiva B. La corriente tiene entonces un valor de -8 A , como se muestra en la figura.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D1.2 Determine las variables desconocidas en la figura D1.2.

Resp.: a) $V_1 = -20\text{ V}$; b) $I = -5\text{ A}$.

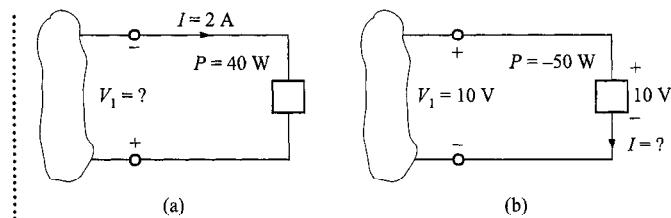


FIGURA D1.2

Es importante darse cuenta desde el principio que en nuestras discusiones tendremos que ver con el comportamiento de un elemento del circuito, y describiremos ese comportamiento mediante un modelo matemático. Entonces, cuando nos referimos a un elemento de circuito en particular, queremos decir el *modelo matemático* que describe su comportamiento.

1.3 Elementos de circuitos

Es importante darse cuenta desde el principio que en nuestras discusiones tendremos que ver con el comportamiento de un elemento del circuito, y describiremos ese comportamiento mediante un modelo matemático. Entonces, cuando nos referimos a un elemento de circuito en particular, queremos decir el *modelo matemático* que describe su comportamiento.

Hasta aquí hemos definido voltaje, corriente y potencia. En el resto de este capítulo definiremos fuentes de corriente y voltaje dependientes e independientes. Aunque supondremos elementos ideales, trataremos de indicar los defectos de esas suposiciones conforme procedamos con la discusión.

En general, los elementos que definiremos son dispositivos terminales que están completamente caracterizados por la corriente a través del elemento y/o el voltaje a través de éste. Esos elementos, que emplearemos en la construcción de circuitos eléctricos, serán clasificados de forma amplia como activos o pasivos. La distinción entre esas dos clasificaciones depende esencialmente de si uno de éstos suministra o absorbe energía. Como las mismas palabras lo indican, un elemento *activo* es capaz de generar energía y un elemento *pasivo* no puede generarla.

Sin embargo, mostraremos más tarde que algunos elementos pasivos son capaces de almacenar energía. Los elementos activos típicos son las baterías, generadores y los modelos de transistor. Los tres elementos pasivos comunes son las resistencias, los capacitores o condensadores y los inductores.

En el capítulo 2 realizaremos un examen de los elementos pasivos al discutir la resistencia en detalle. Sin embargo, antes de proseguir con dicho elemento, primero presentamos algunos elementos activos muy importantes.

1. Fuente de voltaje independiente.
2. Fuente de corriente independiente.
3. Dos fuentes de voltaje dependientes.
4. Dos fuentes de corriente dependientes.

Fuentes independientes

Una *fuente de voltaje independiente* es un elemento de dos terminales que mantiene un voltaje específico entre sus terminales *a pesar de la corriente a través de él*. El símbolo general para una fuente independiente, un círculo, se muestra en la figura 1.13a. Como lo indica la figura, la terminal A es $v(t)$ volts positiva con respecto a la terminal B. La palabra *positiva* puede ser algo confusa. Lo que se quiere decir en este caso es que $v(t)$ es una referencia positiva en la terminal A y que el voltaje físico a través del dispositivo debe ser interpretado a partir del valor numérico de $v(t)$. Es decir, si $v(t)$ en $t = 2$ segundos es -10 V, el punto B está a un potencial más alto que el punto A en $t = 2$ segundos. El símbolo $v(t)$ normalmente se emplea para voltajes que varían con el tiempo. Sin embargo, si el voltaje no varía con el tiempo (es decir, es constante), se utiliza algunas veces el símbolo que se muestra en la figura 1.13b. Este símbolo, que se usa para representar una batería, ilustra que la terminal A es V volts positiva con respecto a la terminal B, donde la línea larga en la parte superior y la línea corta en la parte inferior indican las terminales positiva y negativa, respectivamente, y así la polaridad del elemento.

En contraste con la fuente de voltaje independiente, la *fuente de corriente independiente* es un elemento de dos terminales que mantiene una corriente específica *a pesar del voltaje a través de sus terminales*. El símbolo general para una fuente independiente de corriente se muestra en la figura 1.13c, donde $i(t)$ es la corriente específica y la flecha indica la dirección positiva del flujo de corriente.

En su modo normal de operación, las fuentes independientes suministran potencia al resto del circuito. Sin embargo, también pueden conectarse en un circuito de tal manera que absorban potencia. Un ejemplo simple de este último caso es un circuito de carga de una batería tal como el que se mostró en el ejemplo 1.1.

Es importante que hagamos una pausa aquí para interponer un comentario que tiene que ver con un problema de los modelos. En general, los modelos matemáticos se aproximan a los sistemas físicos reales sólo bajo ciertos intervalos de condiciones. Raramente un modelo representa exactamente un sistema físico bajo todo grupo de condiciones. Para ilustrar este punto, considere el modelo para la fuente de voltaje de la figura 1.13a. Suponemos que la fuente de voltaje entrega v volts a pesar de que esté conectada a sus terminales. Teóricamente, podemos ajustar el circuito externo de modo que una cantidad infinita de corriente fluya, y en consecuencia la fuente de voltaje entregue una cantidad infinita de potencia. Esto es, por supuesto, físicamente imposible. Puede hacerse un argumento similar para la fuente de corriente independiente. Por tanto, se previene al lector de que tenga en mente que los modelos tienen limitaciones y son, por eso, representaciones válidas de sistemas físicos sólo bajo ciertas condiciones.

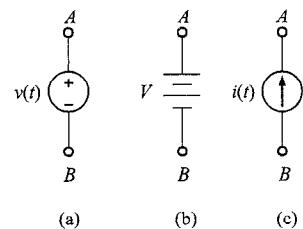


FIGURA 1.13
Símbolos para a)
fuente independiente
de voltaje; b) fuente de
voltaje constante;
c) fuente de corriente
independiente.

E J E M P L O 1.5

Determine la potencia absorbida o suministrada por los elementos en la red de la figura 1.14.

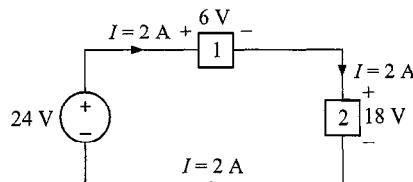


FIGURA 1.14 Red para el ejemplo 1.5.

SOLUCIÓN El flujo de corriente es hacia afuera de la terminal positiva de la fuente de 24 V, y por tanto este elemento está suministrando $(2)(24) = 48 \text{ W}$ de potencia. La corriente está en las terminales positivas de los elementos 1 y 2, y por ende los elementos 1 y 2 están absorbiendo $(2)(6) = 12 \text{ W}$ y $(2)(18) = 36 \text{ W}$, respectivamente. Advierta que la potencia suministrada es igual a la potencia absorbida.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D1.3 Encuentre la potencia que es absorbida o suministrada por los elementos de la figura D1.13.

Resp.: La fuente de corriente suministra 36 W, el elemento 1 absorbe 54 W, y el elemento 2 suministra 18 W.

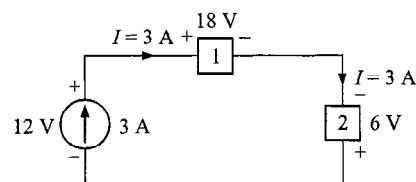


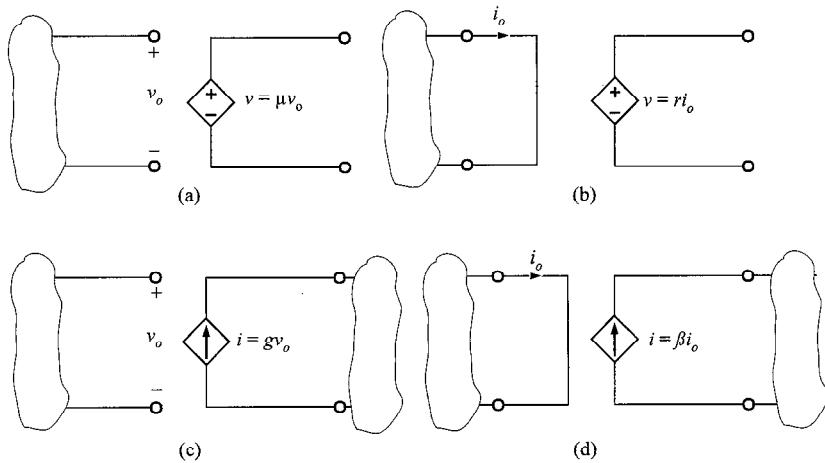
FIGURA D1.3

Fuentes dependientes

En contraste con las fuentes independientes, que producen un voltaje o corriente particular completamente inafectados por lo que está sucediendo en el resto del circuito, las fuentes dependientes generan un voltaje o corriente que está determinado por un voltaje o corriente en un lugar específico en el circuito. Esas fuentes son muy importantes, ya que son una parte integral de los modelos matemáticos utilizados para describir el comportamiento de muchos elementos de los circuitos electrónicos.

Por ejemplo, tanto los transistores de efecto de campo semiconductores de metal y óxido (MOSFET, por sus siglas en inglés) y los transistores bipolares, los cuales se encuentran comúnmente en una multitud de equipos electrónicos, están modelados con fuentes dependientes, y por tanto el análisis de circuitos electrónicos incluye el uso de esos elementos controlados.

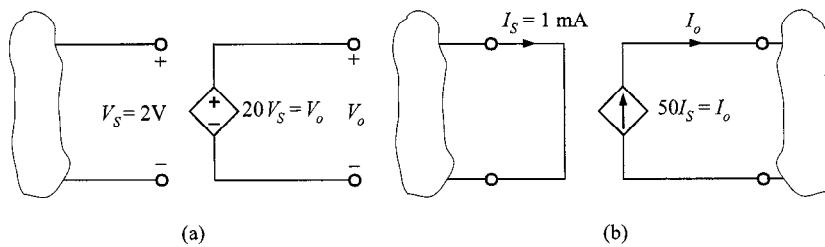
En contraste con el círculo utilizado para representar fuentes independientes, se usa un diamante para representar una fuente dependiente o controlada. La figura 1.15 ilustra los cuatro tipos de fuentes dependientes. Las terminales de entrada a la izquierda

**FIGURA 1.15** Cuatro tipos diferentes de fuentes dependientes.

representan el voltaje o corriente que controla la fuente dependiente, y las terminales de salida a la derecha representan la corriente o voltaje de salida de la fuente controlada. Note que en la figura 1.15a y d las cantidades μ y β son constantes sin dimensiones, ya que estamos transformando voltaje en voltaje y corriente en corriente. Este no es el caso de la figura 1.15b y c; por tanto, cuando empleemos esos elementos dentro de poco tiempo, deberemos describir las unidades de los factores r y g .

E J E M P L O 1.6

Dadas las dos redes que se muestran en la figura 1.16, deseamos determinar las salidas.

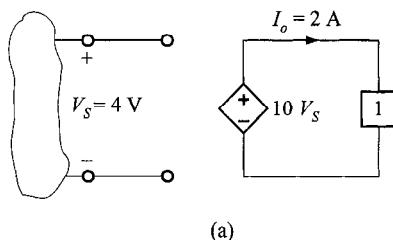
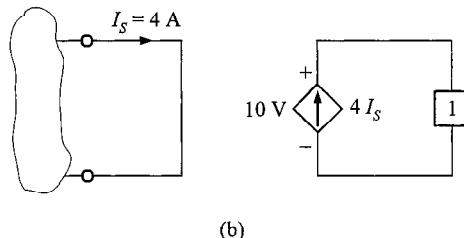
**FIGURA 1.16** Circuitos para el ejemplo 1.6.

SOLUCIÓN En la figura 1.16a el voltaje de salida es $V_o = \mu V_s$ o $V_o = 20 V_s = (20)(2 \text{ V}) = 40 \text{ V}$. Adviértase que el voltaje de salida ha sido amplificado de 2 V en las terminales de entrada a 40 V en las terminales de salida; es decir, el circuito es un amplificador con un factor de amplificación de 20.

En la figura 1.16b, la corriente de salida es $I_o = \beta I_s = (50)(1 \text{ mA}) = 50 \text{ mA}$; es decir, el circuito tiene una ganancia de corriente de 50, lo que quiere decir que la corriente de salida es 50 veces mayor que la corriente de entrada.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

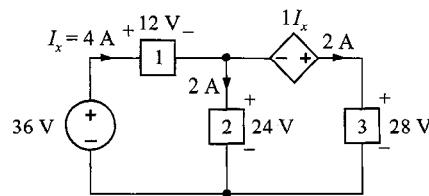
D1.4 Determine la potencia suministrada por las fuentes dependientes de la figura D1.4.

**FIGURA D1.4 (a)****FIGURA D1.4 (b)**

Resp.: a) Potencia suministrada = 80 W; b) potencia suministrada = 160 W.

EJEMPLO 1.7

Calculemos la potencia que es absorbida o suministrada por los elementos en la red de la figura 1.17.

**FIGURA 1.17** Circuito para el ejemplo 1.7.

SOLUCIÓN Utilizando la convención de signos para la potencia ilustrada en la figura 1.10, encontramos lo siguiente:

$$P_{36V} = (36)(-4) = -144 \text{ W}$$

$$P_1 = (12)(4) = 48 \text{ W}$$

$$P_2 = (24)(2) = 48 \text{ W}$$

$$P_{DS} = (1I_x)(-2) = (4)(-2) = -8 \text{ W}$$

$$P_3 = (28)(2) = 56 \text{ W}$$

Note que la fuente de 36 V y la fuente dependiente suministran potencia a la red y los elementos restantes absorben potencia. Más aún, la energía se conserva, ya que la potencia suministrada a la red es idénticamente igual a la potencia absorbida por la red.

E J E M P L O 1.8

Encontremos la corriente I_o en la red de la figura 1.18.

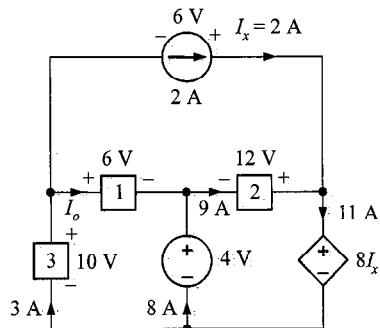


FIGURA 1.18 Circuito utilizado en el ejemplo 1.8.

SOLUCIÓN Primero debemos determinar la potencia absorbida o suministrada por cada elemento en la red. Utilizando la convención de signos para la potencia encontramos que:

$$P_{2A} = (6)(-2) = -12 \text{ W}$$

$$P_1 = (6)(I_o) = 6I_o \text{ W}$$

$$P_2 = (12)(-9) = -108 \text{ W}$$

$$P_3 = (10)(-3) = -30 \text{ W}$$

$$P_{4V} = (4)(-8) = -32 \text{ W}$$

$$P_{DS} = (8I_x)(11) = (16)(11) = 176 \text{ W}$$

Como la energía se debe conservar,

$$-12 + 6I_o - 108 - 30 - 32 + 176 = 0$$

o

$$6I_o + 176 = 12 + 108 + 30 + 32$$

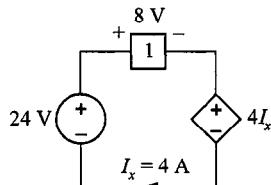
De aquí,

$$I_o = 1 \text{ A}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D1.5 Encuentre la potencia que es absorbida o suministrada por los elementos del circuito en la red de la figura D1.5.

Resp.: $P_{24V} = 96 \text{ W}$ suministrados, $P_1 = 32 \text{ W}$ absorbidos, $P_{4Ix} = 64 \text{ W}$ absorbidos.

**FIGURA D1.5**

Al estar concluyendo este capítulo, un número de comentarios importantes están en orden. El lector debe entender perfectamente nuestro método como se señaló en la figura 1.2, ya que en los siguientes capítulos simplemente definiremos y nos referiremos a voltajes y corrientes en lugares específicos dentro de un circuito. Antes de que se escriban cualesquier ecuaciones, los lectores deberían pensar cuidadosamente acerca de qué clases de respuestas esperan. Por ejemplo, si todas las fuentes son constantes, todos los voltajes y corrientes en el circuito serán constantes, y en consecuencia se deberán utilizar letras mayúsculas para todas las variables que representen los voltajes y las corrientes. También es útil para los lectores pensar antes acerca de cuántas variables están relacionadas entre sí y definir las variables de modo que un mínimo número de signos negativos sean utilizados. Aunque esto no es importante en la solución final, como se indicó antes, forzará a los lectores a pensar en el problema desde el principio hasta el final antes de atacarlo, de modo que la solución no sea una sorpresa.

1.4 Resumen

Hemos introducido la estrategia básica para el análisis de circuitos eléctricos. Esta estrategia incluye el uso de modelos lineales para representar los diversos elementos del circuito, la definición de las variables utilizadas en las ecuaciones del circuito, y la interpretación de los valores de la solución de las variables para determinar los valores reales de las cantidades que ellas representan en la red física.

El sistema de unidades que ha sido adoptado es el SI estándar. Carga, corriente, voltaje, potencia y energía han sido definidos y las interrelaciones entre esas cantidades han sido examinadas. Fuentes de corriente y voltaje, dependientes e independientes, han sido discutidas, y la convención de signos pasiva que será utilizada a lo largo del texto ha sido presentada.

Debería ser obvio en este punto que hay una ambigüedad en nuestra notación para variables y unidades. "V" se usa tanto como un símbolo para el voltaje y como la abreviatura de la unidad para volt. De modo similar, "W" se usa como el símbolo para la energía y como la abreviatura para el watt, la unidad de potencia. De este modo, nosotros mismos nos podemos encontrar con expresiones tales como $V = 12 \text{ V}$ o $P = 4 \text{ W}$, las cuales, cuando se toman fuera de contexto, pueden ser engañosas; sin embargo, si seguimos las discusiones asociadas, el significado será claro.

Puntos claves

- Los prefijos estándar que empleamos son:

$$\begin{array}{ll}
 p = 10^{-12} & k = 10^3 \\
 n = 10^{-9} & M = 10^6 \\
 \mu = 10^{-6} & G = 10^9 \\
 m = 10^{-3} & T = 10^{12}
 \end{array}$$

- La convención de signos pasiva es en extremo importante y se define en la figura 1.10. La potencia es absorbida (suministrada) por el elemento cuando el signo de la potencia es positivo (negativo) utilizando la convención de signos pasiva.
- La relación entre carga y corriente como función del tiempo está definida por las expresiones fundamentales en la ecuación (1.1).
- Las redes eléctricas consideradas aquí satisfacen el principio de conservación de la energía.
- Una fuente de voltaje ideal independiente (corriente) es un elemento de dos terminales que mantiene un voltaje específico (corriente) entre sus terminales haciendo caso omiso de la corriente (voltaje) de un lado a otro (a través) del elemento.
- Las fuentes dependientes o controladas generan un voltaje o corriente que está determinado por un voltaje o corriente en un lugar específico del circuito.

Problemas

1.1. La descarga de un relámpago que conduce 10 000 amperes dura 50 microsegundos. Si el rayo golpea un tractor, determine la carga depositada en el tractor si se supone que las llantas son perfectas.

1.2. Determine el tiempo requerido para que un cargador de una batería de 24 A entregue una carga de 1 200 C.

1.3. En un conductor dado, una carga de 600 C pasa cualquier punto en intervalos de 12 segundos. Deseamos determinar la corriente en el conductor.

1.4. Se sabe que la corriente en un conductor es de 12 A. ¿Cuántos coulombs de carga pasan por cualquier punto en un intervalo de tiempo de 1.5 minutos?

1.5. La carga que entra en un elemento se muestra en la figura P1.5. Encuentre la corriente del elemento en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 0.5$ segundos. (Pista: La ecuación para $q(t)$ es $q(t) = 1 + (2/0.5)t$, $t \geq 0$).

1.6. La corriente que entra en un elemento se muestra en la figura P1.6. Encuentre la carga que entra en el elemento en un intervalo de tiempo $0 < t < 4$ segundos.

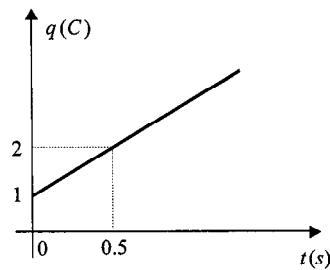


FIGURA P1.5

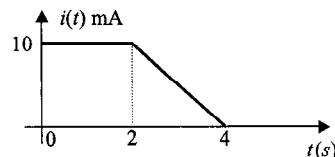


FIGURA P1.6

1.7. Determine la energía requerida para mover 10 coulombs de carga a través de 120 volts.

1.8. Cuando 2 coulombs de carga pasan a través de un elemento, si la energía requerida es 200 J, determine el voltaje a través del elemento.

1.9. Si una batería de 12 volts entrega 120 mJ de energía en 1 ms, encuentre: a) la cantidad de carga entregada por la batería, y b) la corriente producida.

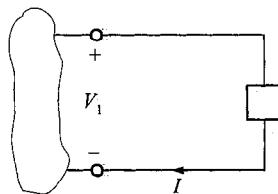
1.10. La carga que entra en la terminal positiva de un elemento es $q(t) = -30e^{-4t}$ mC. Si el voltaje a través del elemento es $120e^{-2t}$ V, determine la energía entregada al elemento en el intervalo de tiempo $0 < t < 50$ mseg.

1.11. La carga que entra en la terminal positiva de un elemento está dada por la expresión $q(t) = -12e^{-2t}$ mC. La potencia entregada al elemento es $p(t) = 2.4e^{-3t}$ W. Calcule la corriente en el elemento, el voltaje a través del elemento y la energía entregada al elemento en el intervalo de tiempo $0 < t < 100$ mseg.

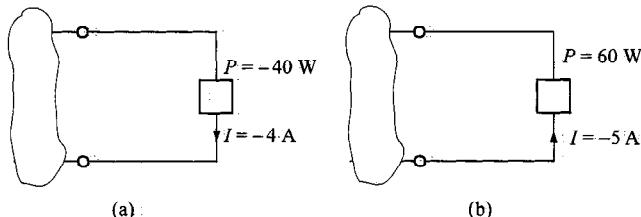
1.12. El voltaje a través de un elemento es $12e^{-2t}$ V. La corriente de entrada a la terminal positiva del elemento es $2e^{-2t}$ A. Encuentre la energía absorbida por el elemento en $t = 0$.

1.13. Determine cuánta potencia es absorbida por el circuito de la figura P1.13 si

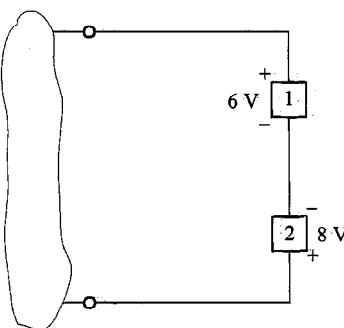
- a) $V_1 = 10$ V e $I = 3$ A.
- b) $V_1 = 4$ V e $I = -4$ A.

**FIGURA P1.13**

1.14. Determine la magnitud y dirección del voltaje a través de los elementos de la figura P1.14.

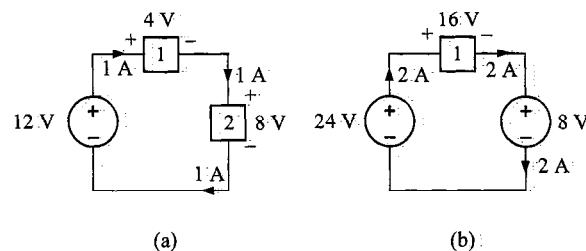
**FIGURA P1.14**

1.15. Dos elementos están conectados en serie como se muestra en la figura P1.15. El elemento 1 suministra 24 W de potencia. ¿El elemento 2 está absorbiendo o suministrando potencia, y cuánta?

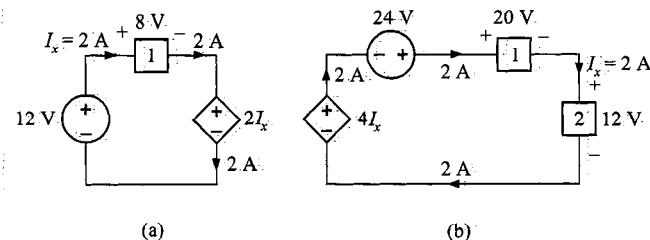
**FIGURA P1.15**

Nota importante: Los valores utilizados en los problemas restantes no son arbitrarios. Han sido seleccionados para satisfacer las leyes básicas del análisis de circuitos que serán estudiadas en el siguiente capítulo.

1.16. Encuentre la potencia que es absorbida o suministrada por los elementos del circuito de la figura P1.16.

**FIGURA P1.16**

1.17. Encuentre la potencia que es absorbida o suministrada por los elementos de la red de la figura P1.17.

**FIGURA P1.17**

1.18. Encuentre la potencia que es absorbida o suministrada por los elementos del circuito de la figura P1.18.

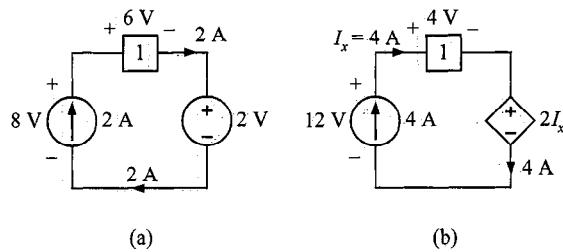


FIGURA P1.18

- 1.19. La fuente V_S en la red de la figura P1.19 ¿absorbe o suministra potencia, y cuánta?

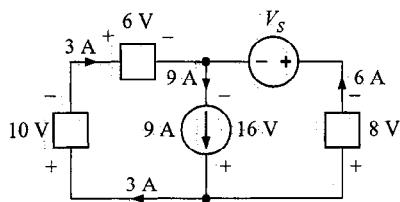


FIGURA P1.19

- 1.20. Encuentre V_x en la red de la figura P1.20.

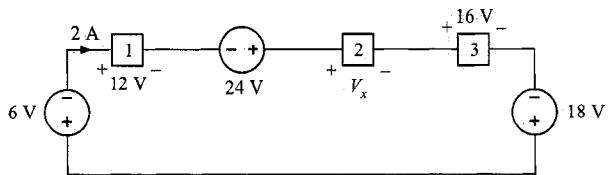


FIGURA P1.20

- 1.21. Encuentre I_x en la red de la figura P1.21.

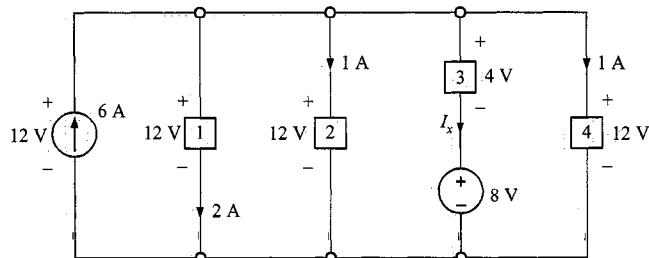


FIGURA P1.21

- 1.22. Encuentre V_x en la red de la figura P1.22.

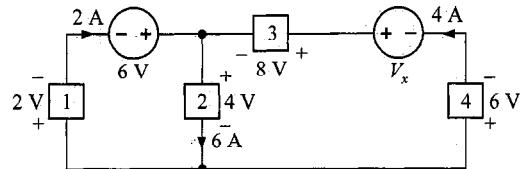


FIGURA P1.22

- 1.23. Encuentre I_o en la red de la figura P1.23.

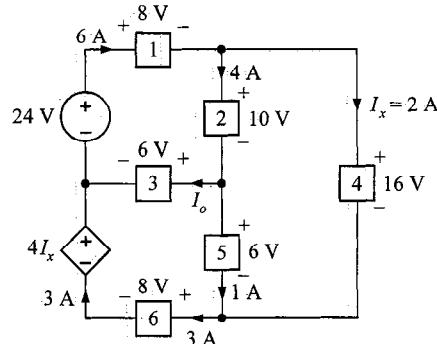


FIGURA P1.23

- 1.24. Elija I_S de forma tal que la potencia absorbida por el elemento 2 de la figura 1.24 sea 7 W.

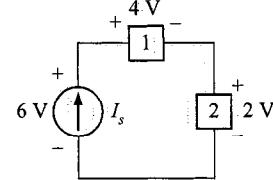


FIGURA P1.24

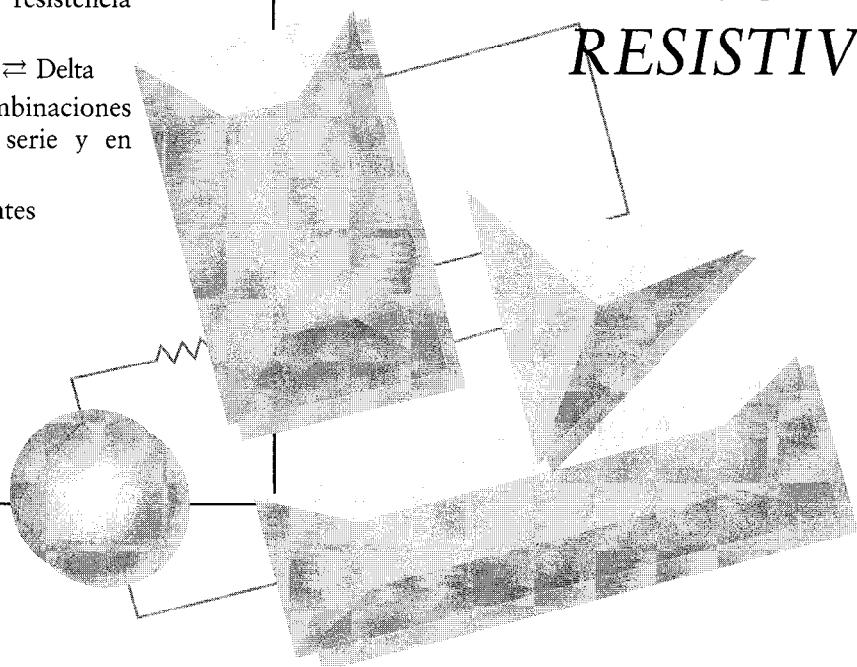
C O N T E N I D O D E L C A P Í T U L O

- 2.1** Ley de Ohm
- 2.2** Ley de Kirchhoff
- 2.3** Circuitos de una sola malla
- 2.4** Circuitos de un solo par de nodos
- 2.5** Combinaciones de resistencia en serie y paralelo
- 2.6** Transformaciones $Y \Leftrightarrow \Delta$
- 2.7** Circuitos con combinaciones de resistencias en serie y en paralelo
- 2.8** Circuitos con fuentes dependientes
- 2.9** Mediciones de cd
- 2.10** Aplicaciones
- 2.11** Diseño de circuitos
- 2.12** Resumen
Puntos clave
Problemas

C A P Í T U L O

2

CIRCUITOS RESISTIVOS



En este capítulo introducimos los conceptos y leyes básicos que son fundamentales para el análisis de circuitos. Dichas leyes son la ley de Ohm, la ley de corriente de Kirchhoff y la ley de voltaje de Kirchhoff. No podemos dejar de insistir en la importancia de estas tres leyes debido a que serán utilizadas de forma extensa a lo largo de todo nuestro estudio del análisis de circuitos. El lector que llegue a dominar su uso rápidamente encontrará no sólo el material en este texto fácil de aprender, sino que estará bien colocado para dominar rápidamente los temas subsecuentes en el campo de la ingeniería eléctrica.

Como regla general, la mayoría de nuestras actividades estarán confinadas en el análisis, es decir, en la determinación de un voltaje, corriente o potencia específico en algún lugar en una red. Las técnicas que introducimos tienen extensa aplicación en el análisis de circuitos, aunque las discutamos en el marco de las redes simples.

Nuestro método consistirá en iniciar con el elemento pasivo más simple, la resistencia, y con las relaciones matemáticas que existen entre el voltaje a través de ésta y la corriente a través de ella, como especifica la ley de Ohm. A medida que vayamos adquiriendo confianza y capacidad mediante el análisis de algunos circuitos elementales, introduciremos otras técnicas como el divisor de voltaje y el divisor de corriente que acelerarán nuestro trabajo.

Introduciremos circuitos que contienen fuentes dependientes, que se utilizan para modelar dispositivos activos tales como los transistores. De esta manera, nuestro estudio del análisis de circuitos proporcionará una introducción natural a muchos temas en el área de la electrónica.

Se introducen dispositivos y circuitos que se usan en la medición de cd, y de esta forma aprendemos los fundamentos de la medición de cantidades tales como voltaje, corriente y resistencia.

Finalmente, presentamos algunas aplicaciones del mundo real, que inician indicando la utilidad del análisis de circuitos, y después introducimos brevemente el tema de diseño de circuitos en una forma elemental. En capí-

tulos posteriores, nuevamente dichos tópicos serán revisados con frecuencia para presentar algunos ejemplos muy fascinantes que describen problemas que encontramos en nuestras vidas diarias. ■

2.1 Ley de Ohm

La ley de Ohm recibe este nombre del físico alemán Georg Simon Ohm, a quien se le acredita el establecimiento de la relación voltaje–corriente para la resistencia. Como resultado de su trabajo pionero, la unidad de resistencia lleva su nombre.

La ley de Ohm establece que el voltaje a través de una resistencia es directamente proporcional a la corriente que fluye a lo largo de ésta. La resistencia, medida en ohms, es la constante de proporcionalidad entre el voltaje y la corriente.

Un elemento de circuito cuya característica eléctrica principal es que resiste se llama resistencia, y se representa con el símbolo que se muestra en la figura 2.1a. Una resistencia es un dispositivo físico que puede adquirirse con ciertos valores estándar en una tienda de repuestos electrónicos. Esas resistencias, que se utilizan en varias aplica-

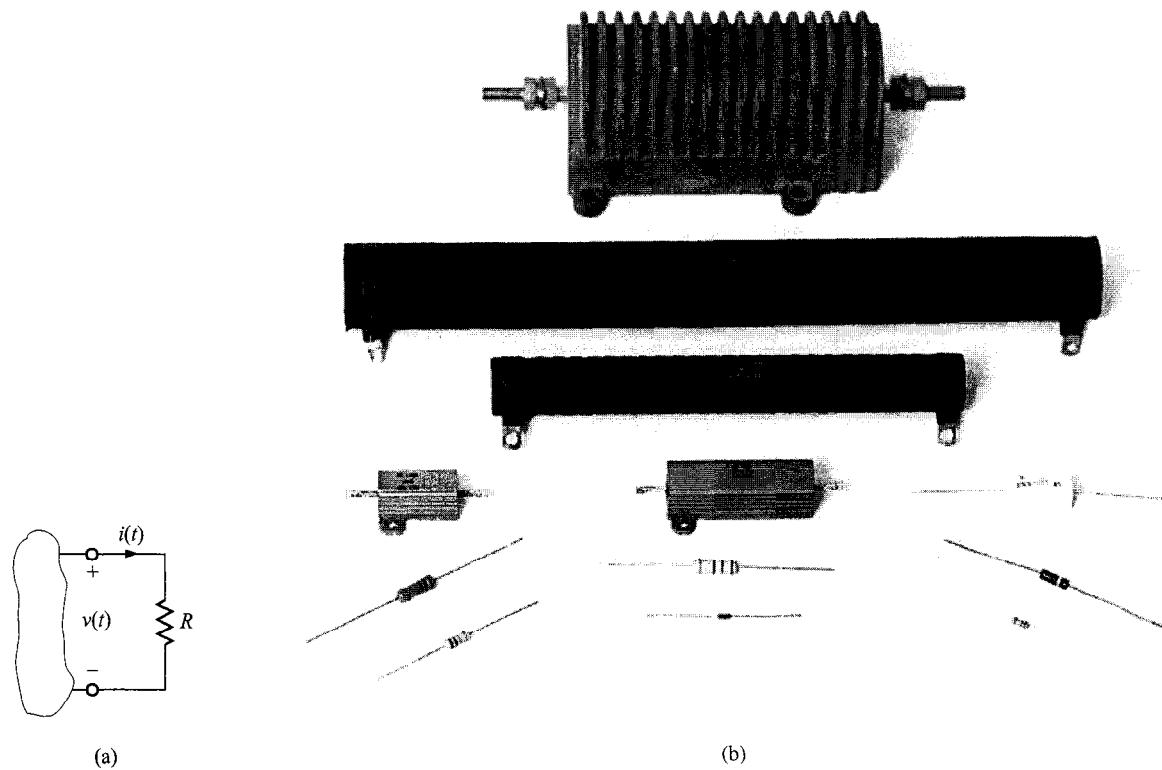


FIGURA 2.1 a) Símbolo para una resistencia; b) algunos dispositivos prácticos.

ciones eléctricas, están compuestas normalmente por carbón o una bobina de alambre. Además, las resistencias pueden fabricarse usando películas gruesas de óxido o delgadas de metal para usarse en circuitos híbridos, o pueden difundirse en circuitos integrados por semiconductores. En la figura 2.1b se muestran algunas resistencias típicas.

La relación matemática de la ley de Ohm se ilustra en la ecuación

$$v(t) = R i(t) \text{ donde } R \geq 0 \quad (2.1)$$

o de manera equivalente, por la curva característica de voltaje–corriente que se muestra en la figura 2.2a. Note cuidadosamente la relación entre la polaridad del voltaje y la dirección de la corriente. Además, observe que tácitamente hemos supuesto que la resistencia tiene un valor constante y que por tanto la curva característica de voltaje–corriente es lineal.

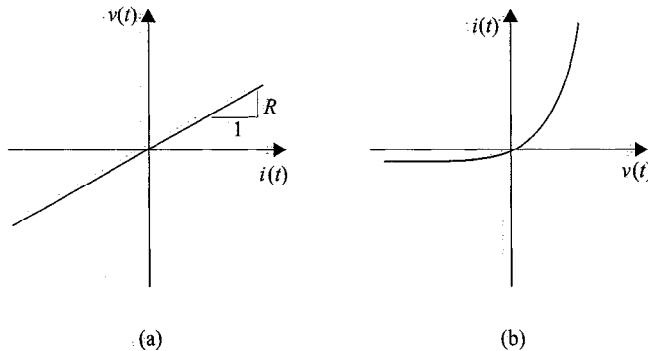


FIGURA 2.2 Representación gráfica de la relación voltaje–corriente para a) una resistencia lineal y b) un diodo.

Se usa el símbolo Ω para representar los ohms y, por tanto,

$$1 \Omega = 1 \text{ V/A}$$

Aunque en nuestro análisis siempre supondremos que las resistencias son lineales y que por eso están descritas por una curva característica en línea recta que pasa por el origen, es importante que los lectores se den cuenta de que existen algunos elementos muy útiles y prácticos que exhiben una curva característica de resistencia no lineal; es decir, la relación voltaje–corriente no es una línea recta. Los diodos, que se usan extensamente en circuitos eléctricos, son ejemplos de resistencias no lineales. En la figura 2.2b se muestra la curva característica de un diodo típico.

Como una resistencia es un elemento pasivo, la relación apropiada de corriente–voltaje se ilustra en la figura 2.1a. La potencia suministrada a las terminales es absorbida por la resistencia. Note que la carga se mueve del potencial más alto al más bajo conforme pasa a través de la resistencia y que la energía absorbida es disipada por la resistencia en forma de calor. Como se indicó en el capítulo 1, la razón de disipación de energía es la potencia instantánea y, por tanto,

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (2.2)$$

la cual, utilizando la ecuación (2.1), puede escribirse como

$$p(t) = R i^2(t) = \frac{v^2(t)}{R} \quad (2.3)$$

Esta ecuación ilustra que la potencia es una función no lineal de la corriente o del voltaje y que siempre es una cantidad positiva.

La conductancia, representada con el símbolo G , es otra cantidad que se aplica comúnmente en el análisis de circuitos. Por definición, la conductancia es el inverso de la resistencia; es decir,

$$G = \frac{1}{R} \quad (2.4)$$

La unidad de conductancia es el siemens, y la relación entre las unidades es

$$1 \text{ S} = 1 \text{ A/V}$$

Utilizando la ecuación (2.4) podemos escribir dos expresiones adicionales:

$$i(t) = Gv(t) \quad (2.5)$$

y

$$p(t) = \frac{i^2(t)}{G} = Gv^2(t) \quad (2.6)$$

La ecuación (2.5) es otra expresión de la ley de Ohm.

Los valores específicos de la resistencia y, por consiguiente, de la conductancia, son muy importantes: $R = 0$ y $R = \infty$.

Para examinar los dos casos, considérese la red de la figura 2.3a. El símbolo de resistencia variable se usa para describir una resistencia tal como el control de volumen de un radio o de una televisión. A medida que la resistencia se hace más y más pequeña, finalmente alcanzamos un punto donde la resistencia es cero y el circuito se reduce a lo que se muestra en la figura 2.3b; es decir, la resistencia puede reemplazarse por un corto circuito. Por otro lado, si la resistencia se incrementa y se hace más y más grande, alcanzamos finalmente un punto donde ésta es esencialmente infinita y la resistencia puede reemplazarse por un circuito abierto como se muestra en la figura 2.3c. Note que en el caso de un corto circuito donde $R = 0$

$$\begin{aligned} v(t) &= Ri(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $v(t) = 0$, aunque teóricamente la corriente pueda tener algún valor. En el caso del circuito abierto donde $R = \infty$

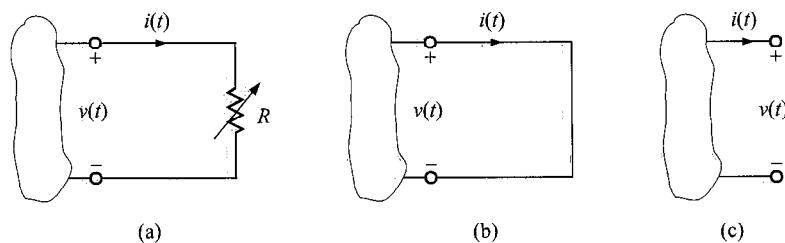


FIGURA 2.3 Descripciones de corto circuito y circuito abierto.

$$\begin{aligned} i(t) &= v(t)/R \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por ende, la corriente es cero a pesar del valor del voltaje a través de las terminales abiertas.

EJEMPLO 2.1

En el circuito de la figura 2.4a, determine la corriente y la potencia absorbida por la resistencia.

SOLUCIÓN Utilizando la ecuación (2.1) encontramos que la corriente es

$$I = V/R = 12/2k = 6 \text{ mA}$$

Note que debido a que muchas de las resistencias empleadas en nuestro análisis están en $k\Omega$, usaremos k en las ecuaciones en lugar de 1 000. La potencia absorbida por la resistencia está dada por la ecuación (2.2) o la (2.3) como

$$\begin{aligned} P &= VI = (12)(6 \times 10^{-3}) = 0.072 \text{ W} \\ &= I^2R = (6 \times 10^{-3})^2 (2k) = 0.072 \text{ W} \\ &= V^2/R = (12)^2/2k = 0.072 \text{ W} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.2

La potencia absorbida por la resistencia de $10 \text{ k}\Omega$ en la figura 2.4b es 3.6 mW. Determine el voltaje y la corriente en el circuito.

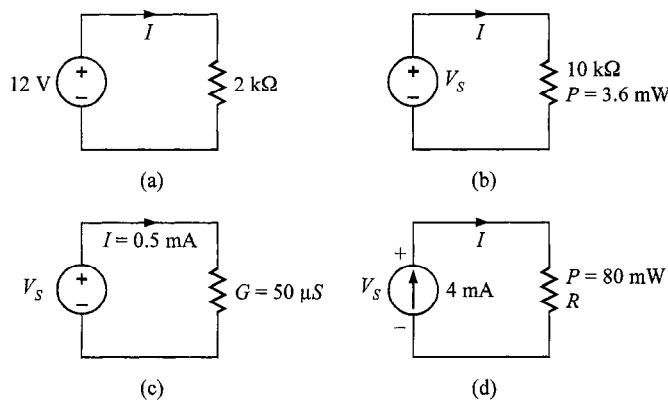


FIGURA 2.4 Circuitos para los ejemplos 2.1 a 2.4.

SOLUCIÓN Utilizando la relación de potencia, podemos determinar cualquiera de las incógnitas.

$$V_S^2/R = P$$

$$V_S^2 = (3.6 \times 10^{-3}) (10k)$$

$$V_S = 6 \text{ V}$$

E

$$I^2R = P$$

$$I^2 = (3.6 \times 10^{-3})/10k$$

$$I = 0.6 \text{ mA}$$

Además, una vez que se ha determinado V_S , puede obtenerse I mediante la ley de Ohm y de la misma forma si se conoce I , entonces la ley de Ohm puede usarse para derivar el valor de V_S . Note cuidadosamente que las ecuaciones para potencia incluyen los términos I^2 y V_S^2 . Por tanto, $I = -60 \text{ mA}$ y $V_S = -6 \text{ V}$ también satisfacen las ecuaciones matemáticas y, en este caso, la dirección de ambos (el voltaje y la corriente) es en sentido inverso.

EJEMPLO 2.3

Dado el circuito de la figura 2.4c, deseamos encontrar el valor de la fuente de voltaje y la potencia absorbida por la resistencia.

SOLUCIÓN El voltaje es

$$V_S = I/G = (0.5 \times 10^{-3})/(50 \times 10^{-6}) = 10 \text{ V}$$

La potencia absorbida es entonces

$$P = I^2/G = (0.5 \times 10^{-3})^2/(50 \times 10^{-6}) = 5 \text{ mW}$$

O podemos notar simplemente que

$$R = 1/G = 20 \text{ k}\Omega$$

y por tanto

$$V_S = IR = (0.5 \times 10^{-3}) (20k) = 10 \text{ V}$$

y la potencia puede determinarse utilizando $P = I^2R = V_S^2/R = V_S I$.

EJEMPLO 2.4

Dada la red de la figura 2.4d, deseamos encontrar R y V_S .

SOLUCIÓN Utilizando la relación de potencia, encontramos que

$$R = P/I^2 = (80 \times 10^{-3})/(4 \times 10^{-3})^2 = 5 \text{ k}\Omega$$

El voltaje ahora puede derivarse utilizando la ley de Ohm como

$$V_S = IR = (4 \times 10^{-3}) (5k) = 20\text{ V}$$

El voltaje puede obtenerse también de la otra relación de potencia en las ecuaciones (2.2) y (2.3).

Antes de dejar esta discusión inicial de los circuitos que contienen fuentes y una sola resistencia, es importante notar un fenómeno que encontraremos ser cierto en circuitos que contienen muchas fuentes y resistencias. La presencia de una fuente de voltaje entre un par de terminales nos dice precisamente que el voltaje está entre las dos terminales a pesar de lo que esté sucediendo en el balance de la red. Lo que no conocemos es la corriente en la fuente de voltaje. Debemos aplicar el análisis de circuitos a toda la red para determinar esta corriente. De la misma forma, la presencia de una fuente de corriente conectada entre dos terminales especifica el valor exacto de la corriente a través de la fuente entre las terminales. Lo que no conocemos es el valor del voltaje a través de la fuente de corriente. Este valor debe calcularse aplicando el análisis de circuitos a toda la red. Además, vale la pena insistir en que cuando se aplica la ley de Ohm, la relación $V = IR$ especifica una relación entre el voltaje *directamente a través* de una resistencia R y la corriente que está presente en esta resistencia. La ley de Ohm no se aplica cuando el voltaje está presente en una parte de la red y la corriente existe en otra parte. Este es un error cometido comúnmente por los estudiantes que tratan de aplicar $V = IR$ a una resistencia R en medio de una red mientras usan un V en algún otro lugar en la red.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

- D2.1** Dados los circuitos de la figura D2.1, encontrar a) la corriente I y la potencia absorbida por la resistencia en la figura D2.1a, y b) el voltaje a través de la fuente de corriente y la potencia suministrada por la fuente en la figura D2.1b.

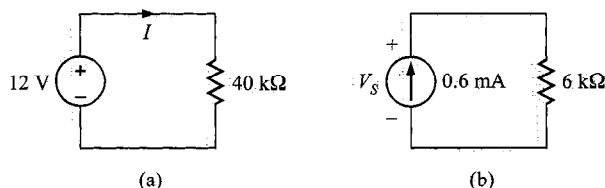
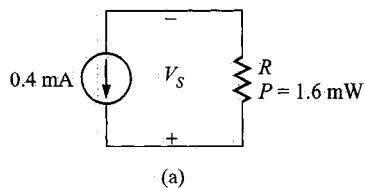


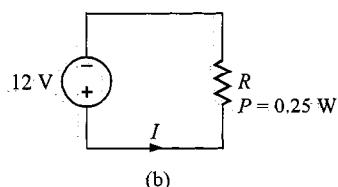
FIGURA D2.1

- Resp.** a) $I = 0.3 \text{ mA}$, $P = 3.6 \text{ mW}$, b) $V_S = 3.6 \text{ V}$, $P = 2.16 \text{ mW}$.

- D2.2** Dada la red de la figura D2.2, encontrar a) R y V_S



(a)



(b)

FIGURA D2.2

en el circuito de la figura D2.2a, y b) encontrar I y R en el circuito de la figura D2.2b.

- Resp.** a) $R = 10 \text{ kΩ}$, $V_S = 4 \text{ V}$, b) $I = 20.8 \text{ mA}$, $R = 576 \text{ Ω}$.

2.2 Ley de Kirchhoff

Los circuitos que hemos considerado con anterioridad tienen una sola resistencia y fueron analizados utilizando la ley de Ohm. En este punto comenzamos a aumentar nuestras capacidades para manejar redes más complicadas que resultan de una interconexión de dos o más de esos elementos simples. Supondremos que la interconexión se lleva a cabo por medio de conductores eléctricos (alambres) que tienen resistencia cero, es decir, conductores perfectos. Debido a que los alambres tienen resistencia cero, la energía en el circuito en esencia está agrupada en cada elemento, y empleamos el término *círculo de parámetro agrupado* para describir la red.

Para ayudarnos en nuestra discusión, definiremos un número de términos que serán empleados a lo largo de nuestro análisis. A medida que avancemos en nuestro método, usaremos ejemplos para ilustrar los conceptos y definir los términos apropiados. Por ejemplo, el circuito que se muestra en la figura 2.5 será utilizado para describir los términos *nodo*, *malla* y *rama*. Un *nodo* es simplemente un punto de conexión de dos o más elementos del circuito. Se previene al lector que note que aunque un nodo pueda alargarse con conductores perfectos, éste sigue siendo sólo un nodo. Por ejemplo, el nodo 5 consiste en todo el conector inferior del circuito. En otras palabras, si comenzamos en algún punto del circuito y nos movemos a lo largo de conductores perfectos en cualquier dirección hasta que encontramos un elemento del circuito, la trayectoria total que cubrimos representa un solo nodo. Por consiguiente, podemos suponer que un nodo es un extremo de un elemento del circuito junto con todos los conductores perfectos que están unidos a él. Al examinar el circuito, notamos que hay numerosas trayectorias a lo largo de él. Una *malla* es simplemente cualquier *trayectoria cerrada* a través del circuito en la cual ningún nodo se encuentra más de una vez. Por ejemplo, comenzando desde el nodo 1, una malla podría contener los elementos R_1 , v_1 , v_2 , R_4 e i_1 ; y así sucesivamente. Sin embargo la trayectoria R_1 , v_1 , R_5 , v_2 , R_3 , e i_1 no es una malla debido a que hemos encontrado dos veces al nodo 3. Finalmente, una *rama* es una parte de un circuito que contiene sólo un único elemento y los nodos a cada extremo del elemento. El circuito de la figura 2.5 contiene ocho ramas.

Dadas las definiciones previas, estamos ahora en condiciones de considerar la ley de Kirchhoff, a la que se le puso el nombre del científico alemán Gustav Robert Kirchhoff. Esas dos leyes son completamente simples pero extremadamente importantes. No intentaremos demostrarlas debido a que las pruebas están más allá de nuestro nivel actual de entendimiento. Sin embargo, demostraremos su utilidad e intentaremos hacer

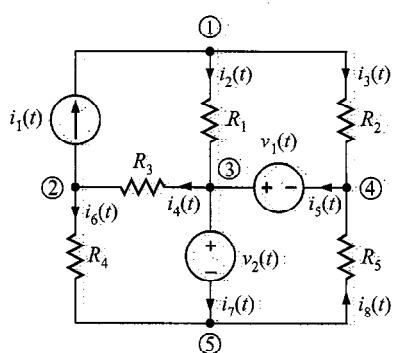


FIGURA 2.5 Circuito utilizado para ilustrar la LCK.

que el lector sea hábil al usarlas. La primera ley es la ley de corriente de Kirchhoff, la cual establece que la suma algebraica de las corrientes que entran en cualquier nodo es cero. En forma matemática, la ley aparece como

$$\sum_{j=1}^N i_j(t) = 0 \quad (2.7)$$

donde $i_j(t)$ es la j ésima corriente que entra al nodo a través de la rama j y N es el número de ramas conectadas al nodo. Para comprender el uso de esta ley, considere el nodo 3 que se muestra en la figura 2.5. La aplicación de la ley de Kirchhoff a este nodo da

$$i_2(t) - i_4(t) + i_5(t) - i_7(t) = 0$$

Hemos supuesto que los signos algebraicos de las corrientes que entran en el nodo son positivos y, por tanto, que los signos de las corrientes que salen del nodo son negativos.

Si multiplicamos la ecuación anterior por -1 , obtenemos la expresión

$$-i_2(t) + i_4(t) - i_5(t) + i_7(t) = 0$$

la cual simplemente afirma que la *suma algebraica de las corrientes que salen de un nodo es cero*. De manera alterna, podemos escribir la ecuación como

$$i_2(t) + i_5(t) = i_4(t) + i_7(t)$$

que establece que la *suma de las corrientes que entran en un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen del nodo*. Ambas expresiones en itálicas son formas alternativas de la ley de corriente de Kirchhoff.

Una vez más se debe insistir en que la última afirmación significa que la suma de las variables que han sido definidas entrando en el nodo es igual a la suma de las variables que han sido definidas saliendo del nodo, no las corrientes reales. Por ejemplo, $i_j(t)$ puede definirse que entra en el nodo, pero si su valor real es negativo, habrá carga positiva saliendo del nodo.

Note cuidadosamente que la ley de corriente de Kirchhoff afirma que la suma *algebraica* de las corrientes que entran o salen de un nodo debe ser cero. Ahora comentamos a ver por qué establecimos en el capítulo 1 que es de importancia crítica especificar tanto la magnitud como la dirección de la corriente.

EJEMPLO 2.5

Escribamos la LCK (ley de corriente de Kirchhoff) en cada nodo de la red de la figura 2.5 suponiendo que las corrientes que salen del nodo son positivas.

SOLUCIÓN Las ecuaciones de la LCK para los nodos 1 al 5 son

$$\begin{aligned} -i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) &= 0 \\ i_1(t) - i_4(t) + i_6(t) &= 0 \\ -i_2(t) + i_4(t) - i_5(t) + i_7(t) &= 0 \\ -i_3(t) + i_5(t) - i_8(t) &= 0 \\ -i_6(t) - i_7(t) + i_8(t) &= 0 \end{aligned}$$

Note con cuidado que si sumamos las primeras cuatro ecuaciones obtenemos la quinta ecuación. ¿Qué nos dice esto? Recuerde que esto significa que este conjunto de ecuaciones no es linealmente independiente. Podemos mostrar que las primeras cuatro ecuaciones son, por tanto, linealmente independientes. Guarde esta idea en la memoria, ya que será muy importante cuando aprendamos cómo escribir las ecuaciones necesarias para resolver todas las corrientes y voltajes en una red en el capítulo siguiente.

E J E M P L O 2.6

La red de la figura 2.5 está representada por el diagrama topológico que se muestra en la figura 2.6. Deseamos encontrar las corrientes desconocidas en la red.

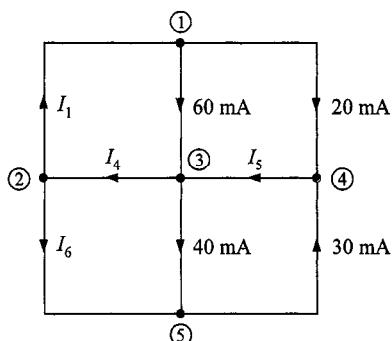


FIGURA 2.6 Diagrama topológico para el circuito de la figura 2.5.

S O L U C I Ó N Suponga que las corrientes que salen del nodo son positivas, las ecuaciones de la LCK para los nodos 1 al 4 son

$$\begin{aligned} -I_1 + 0.06 + 0.02 &= 0 \\ I_1 - I_4 + I_6 &= 0 \\ -0.06 + I_4 - I_5 + 0.04 &= 0 \\ -0.02 + I_5 - 0.03 &= 0 \end{aligned}$$

La primera ecuación da el valor de I_1 y la última el de I_5 . Conociendo I_5 podemos de inmediato obtener I_4 de la tercera ecuación. Entonces los valores de I_1 e I_4 dan el valor de I_6 de la segunda ecuación. Los resultados son $I_1 = 80 \text{ mA}$, $I_4 = 70 \text{ mA}$, $I_5 = 50 \text{ mA}$, e $I_6 = -10 \text{ mA}$.

Como se indicó con anterioridad, las fuentes dependientes o controladas son muy importantes debido a que las encontramos cuando analizamos circuitos que contienen elementos activos tales como los transistores. El ejemplo siguiente presenta un circuito que contiene una fuente de corriente controlada por corriente.

E J E M P L O 2.7

Escribamos las ecuaciones de la LCK para el circuito que se muestra en la figura 2.7.

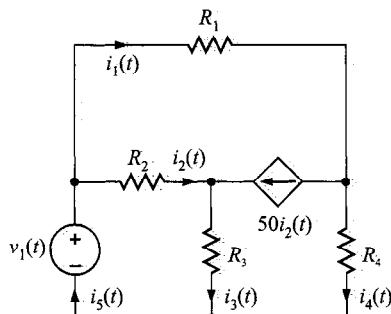


FIGURA 2.7 Circuito que contiene una fuente de corriente dependiente.

SOLUCIÓN. Las ecuaciones de la LCK para los nodos 1 al 4 son las siguientes.

$$\begin{aligned} i_1(t) + i_2(t) - i_5(t) &= 0 \\ -i_2(t) + i_3(t) - 50i_2(t) &= 0 \\ -i_1(t) + 50i_2(t) + i_4(t) &= 0 \\ i_5(t) - i_3(t) - i_4(t) &= 0 \end{aligned}$$

Si sumamos las primeras tres ecuaciones, obtendremos la cuarta. ¿Qué nos dice esto del conjunto de ecuaciones?

Finalmente es posible generalizar la ley de corriente de Kirchhoff para incluir una superficie cerrada. Por superficie cerrada entendemos algún conjunto de elementos completamente contenidos dentro de la superficie en que están interconectados. Como la corriente que entra en cada elemento dentro de la superficie es igual a la que sale del elemento (es decir, el elemento no almacena carga neta), se deduce que la corriente que entra en una interconexión de elementos es igual a la que sale de cualquier superficie que encierra esa interconexión. Por tanto, la ley de corriente de Kirchhoff también puede establecerse como: *La suma algebraica de las corrientes que entran en cualquier superficie cerrada es cero.*

E J E M P L O 2.8

Encontremos I_4 e I_1 en la red representada por el diagrama topológico de la figura 2.6.

SOLUCIÓN. Este diagrama está redibujado en la figura 2.8 y el nodo 1 está encerrado en la superficie 1 y los nodos 3 y 4 están encerrados en la superficie 2. Un rápido repaso de los ejemplos previos indica que derivamos un valor para I_4 del valor de I_5 . Sin embargo, I_5 está ahora completamente encerrado en la superficie 2. Si aplicamos la LCK a la superficie 2, suponiendo que las corrientes fuera de la superficie son positivas, obtenemos

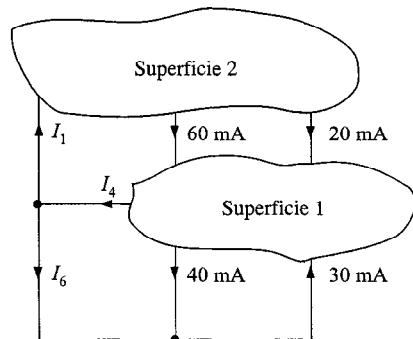


FIGURA 2.8 Diagrama utilizado para demostrar la LCK para una superficie.

$$I_4 - 0.06 - 0.02 - 0.03 + 0.04 = 0$$

o

$$I_4 = 70 \text{ mA}$$

la cual obtenemos sin ningún conocimiento de I_5 . De igual forma para la superficie 1, lo que entra debe salir y, por ende, $I_1 = 80 \text{ mA}$. Se anima al lector a cortar la red de la figura 2.6 en dos partes en cualquier forma y mostrar que siempre se satisface la LCK en las fronteras.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D2.3 Dadas las redes de la figura D2.3, encuentre a) I_1 en la figura D2.3a y b) I_T en la figura D2.3b.

Resp.: a) $I = -50 \text{ mA}$, b) $I = 70 \text{ mA}$.

D2.4 Encontrar a) I_1 en la red de la figura D2.4a y b) I_1 e I_2 en el circuito de la figura D2.4b.

Resp.: a) $I_1 = 6 \text{ mA}$, b) $I_1 = 8 \text{ mA}$ e $I_2 = 5 \text{ mA}$.

D2.5 Encuentre la corriente i_x en los circuitos de la figura D2.5.

Resp.: a) $i_x = 4 \text{ mA}$, b) $i_x = 12 \text{ mA}$.

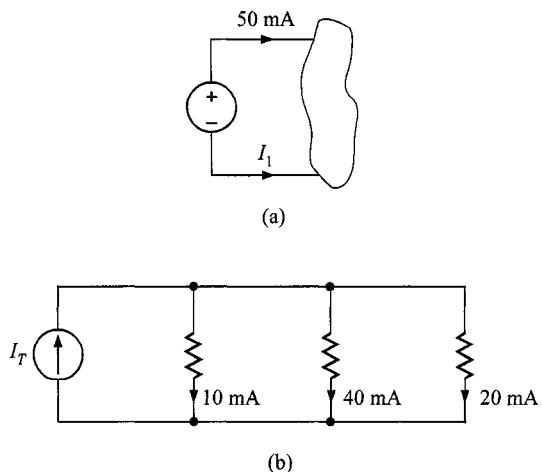
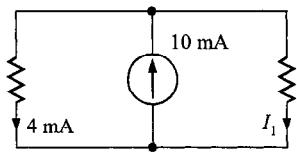
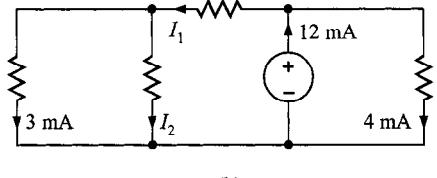


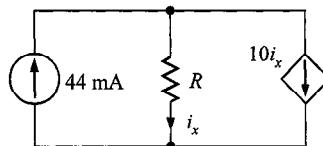
FIGURA D2.3



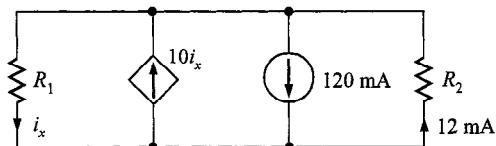
(a)



(b)

FIGURA D2.4

(a)



(b)

FIGURA D2.5

La segunda ley de Kirchhoff, llamada *ley del voltaje de Kirchhoff*, establece que *la suma algebraica de los voltajes alrededor de cualquier malla es cero*. Como en el caso de la ley de corriente de Kirchhoff, posponemos la prueba de esta ley y nos concentraremos en comprender cómo aplicarla. Una vez más se previene al lector que recuerde que estamos tratando sólo con circuitos de parámetros agrupados. Esos circuitos son conservativos, queriendo decir que el trabajo requerido para mover una unidad de carga alrededor de cualquier malla es cero.

Recuerde que en la ley de corriente de Kirchhoff se requirió que los signos algebraicos vigilaran si las corrientes estaban entrando o saliendo de un nodo. En la ley de voltaje de Kirchhoff el signo algebraico es utilizado para vigilar la polaridad del voltaje. En otras palabras, conforme atravesamos el circuito, es necesario hacer que sumen cero los incrementos y las disminuciones en el nivel de energía. Por tanto, es importante vigilar si el nivel de energía se incrementa o disminuye a medida que pasamos por cada elemento.

E J E M P L O 2.9

Considere el circuito que se muestra en la figura 2.9. Si V_{R_1} y V_{R_2} son cantidades conocidas, encontremos V_{R_3} .

SOLUCIÓN Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff (LVK), debemos recorrer el circuito y sumar a cero los incrementos y disminuciones en el nivel de energía. Como la red es una sola malla, tenemos sólo una trayectoria cerrada. Adoptaremos la política de considerar un incremento en el nivel de energía como negativo y una disminución en el nivel de energía como positivo. Utilizando esta política y comenzando en el punto *a* en la red y recorriendola en la dirección de las manecillas del reloj, obtenemos la ecuación

$$+ V_{R_1} - 5 + V_{R_2} - 15 + V_{R_3} - 30 = 0$$

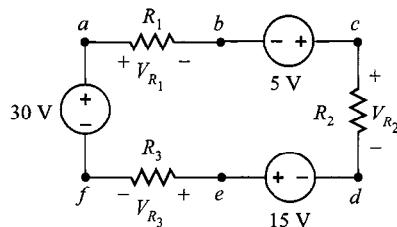


FIGURA 2.9 Circuito utilizado para ilustrar la LVK.

la cual puede escribirse como

$$\begin{aligned} +V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} &= 5 + 15 + 30 \\ &= 50 \end{aligned}$$

Ahora suponemos que V_{R_1} y V_{R_2} son conocidas y valen 18 V y 12 V, respectivamente. Entonces $V_{R_3} = 20$ V.

E J E M P L O 2.10

Considere la red de la figura 2.10.

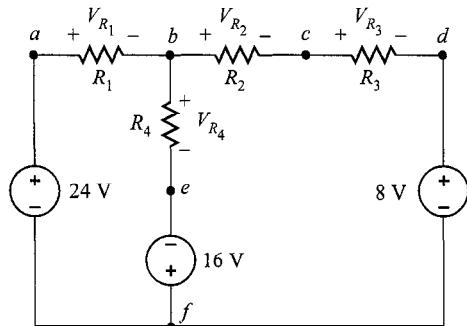


FIGURA 2.10 Circuito utilizado para explicar la LVK.

Demostremos que sólo dos de las tres ecuaciones de las posibles mallas son linealmente independientes.

SOLUCIÓN Note que esta red tiene tres trayectorias cerradas: la malla izquierda, la malla derecha y la malla exterior. Al aplicar nuestra política para escribir las ecuaciones de la LVK y de recorrer la malla izquierda comenzando desde el punto a , obtenemos

$$V_{R_1} + V_{R_4} - 16 - 24 = 0$$

La ecuación correspondiente para la malla derecha comenzando en el punto b es

$$V_{R_2} + V_{R_3} + 8 + 16 - V_{R_4} = 0$$

La ecuación para la malla exterior comenzando en el punto a es

$$V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} + 8 - 24 = 0$$

Note que si sumamos las primeras dos ecuaciones, obtenemos la tercera ecuación. Por tanto, como indicamos en el ejemplo 2.5, las tres ecuaciones no son linealmente independientes. Una vez más, hablaremos sobre este tema en el siguiente capítulo y demostraremos que necesitamos sólo las primeras dos ecuaciones para resolver los voltajes en el circuito.

Finalmente, emplearemos la convención V_{ab} para indicar el voltaje entre el punto a y el punto b : es decir, la variable para el voltaje entre el punto a y el punto b , con el punto a considerado positivo con relación al punto b . Como el potencial se mide entre dos puntos, es conveniente usar una flecha entre los dos puntos con la punta de la flecha localizada en el nodo positivo. Note que la notación de doble subíndice, las notación de $+$ y $-$, y la notación de la flecha con una sola punta son todo la misma cosa si la punta de la flecha apunta hacia la terminal positiva y al primer subíndice en la notación de doble subíndice. Todas esas formas equivalentes de etiquetar voltajes se muestran en la figura 2.11.

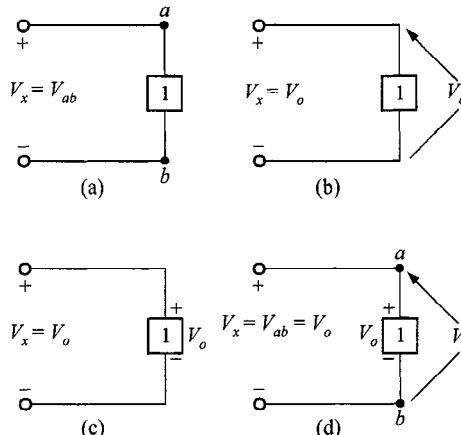


FIGURA 2.11 Formas equivalentes para etiquetar voltaje.

EJEMPLO 2.11

Considere la red de la figura 2.12a. Aplicaremos la LVK para determinar el voltaje entre dos puntos. Específicamente, en términos de la notación de doble subíndice, encontraremos V_{ae} y V_{ec} .

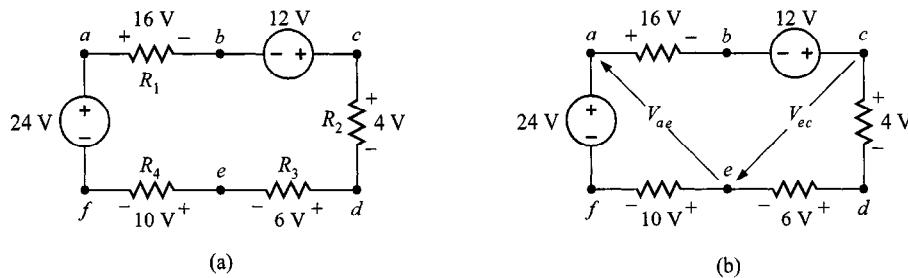


FIGURA 2.12 Red utilizada en el ejemplo 2.11.

SOLUCIÓN El circuito está redibujado en la figura 2.12b. Como los puntos a y e así como e y c no están físicamente encerrados, la notación de la flecha es muy útil. Nuestro método para determinar el voltaje desconocido es aplicar la LVK con el voltaje desconocido en la trayectoria cerrada. Por tanto, para determinar V_{ae} podemos usar la trayectoria aef a o $abcdea$. Las ecuaciones para las dos trayectorias en las que V_{ae} es el único desconocido son

$$V_{ae} + 10 - 24 = 0$$

y

$$16 - 12 + 4 + 6 - V_{ae} = 0$$

Note que ambas ecuaciones dan $V_{ae} = 14$ V. Incluso antes de calcular V_{ae} , podemos calcular V_{ec} usando la trayectoria $cdec$ o $cefabc$. Sin embargo, como V_{ae} ahora es conocido, podemos también usar la trayectoria $ceabc$. La LVK para cada una de esas trayectorias es

$$4 + 6 + V_{ec} = 0$$

$$-V_{ec} - V_{ae} + 16 - 12 = 0$$

y

$$-V_{ec} + 10 - 24 + 16 - 12 = 0$$

Cada una de esas ecuaciones da $V_{ec} = -10$ V.

En general, la representación matemática de la ley de voltaje de Kirchhoff es

$$\sum_{j=1}^N v_j(t) = 0 \quad (2.8)$$

donde $v_j(t)$ es el voltaje a través de la jésima rama (con la dirección de referencia apropiada) en una malla que contiene N voltajes. Esta expresión es análoga a la ecuación (2.7) para la ley de corriente de Kirchhoff.

EJEMPLO 2.12

Dada la red de la figura 2.13 que contiene una fuente dependiente, escribamos las ecuaciones de la LVK para las dos trayectorias cerradas $abda$ y bcd .

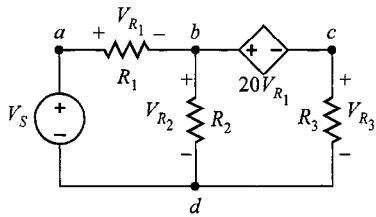


FIGURA 2.13 Red que contiene una fuente dependiente.

SOLUCIÓN Las dos ecuaciones de la LCK son

$$V_{R_1} + V_{R_2} - V_S = 0$$

$$20V_{R_1} + V_{R_3} - V_{R_2} = 0$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

- D2.6** En el circuito de la figura D2.6, encontrar V_{ad} , V_{ac} y V_{bd} .

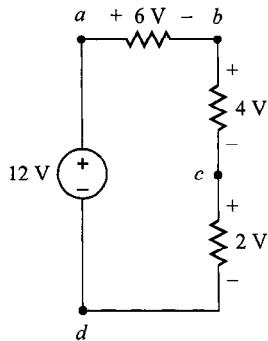


FIGURA D2.6

Resp.: $V_{ad} = 12 \text{ V}$, $V_{ac} = 10 \text{ V}$, y $V_{bd} = 6 \text{ V}$.

- D2.7** En la red de la figura D2.7, encontrar V_{ac} y V_{db} .

Resp.: $V_{ac} = 4 \text{ V}$, y $V_{db} = -2 \text{ V}$.

- D2.8** Encontrar V_{ad} y V_{eb} en la red de la figura D2.8.

Resp.: $V_{ad} = 26 \text{ V}$, $V_{eb} = 10 \text{ V}$.

- D2.9** Encontrar V_{bd} en el circuito de la figura D2.9.

Resp.: $V_{bd} = 11 \text{ V}$.

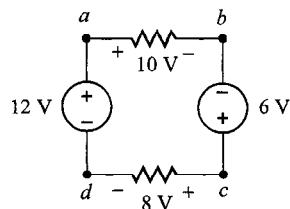


FIGURA D2.7

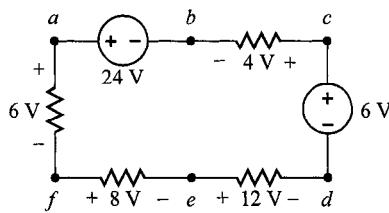


FIGURA D2.8

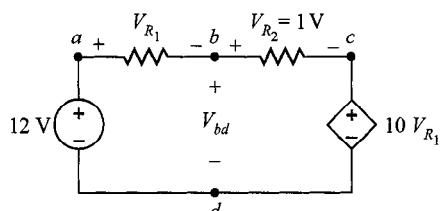


FIGURA D2.9

Antes de proceder con el análisis de circuitos simples, es extremadamente importante que insistamos en un punto sutil pero muy crítico. La ley de Ohm como se define por la ecuación $V = IR$ se refiere a la relación entre el voltaje y la corriente como se define en la figura 2.14a. Si la dirección de la corriente o del voltaje, pero no de ambos, se invierte, la relación entre la corriente y el voltaje sería $V = -IR$. De manera similar, dado el circuito de la figura 2.14b, si la polaridad del voltaje entre las terminales A y B se especifica como se muestra, entonces la dirección de la corriente I es del punto B por R al punto A . De la misma forma, en la figura 2.14c, si la dirección de la corriente se especifica como se muestra, entonces la polaridad del voltaje debe ser tal que el punto D está a un potencial más alto que el punto C y, por tanto, la flecha que representa el voltaje V es del punto C al punto D .

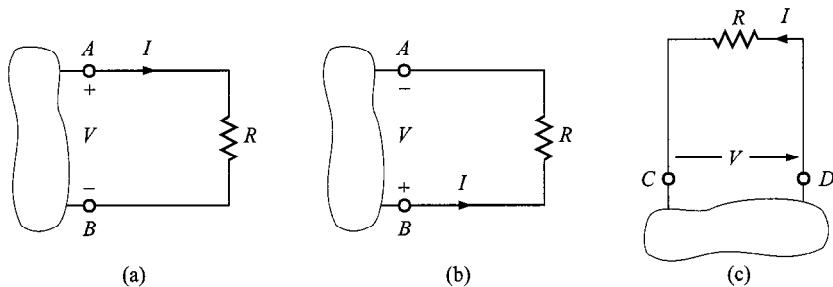


FIGURA 2.14 Circuitos utilizados para explicar la ley de Ohm.

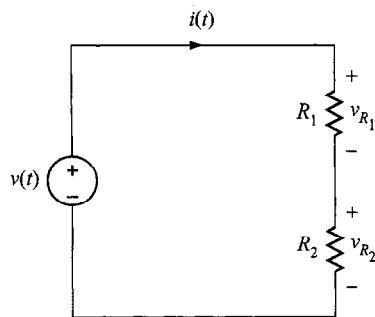
2.3 Circuitos de una sola malla

Divisor de voltaje

En este punto podemos comenzar a aplicar las leyes que hemos presentado previamente al análisis de circuitos simples. Para comenzar, examinemos lo que es quizás el circuito más simple —una sola trayectoria cerrada, o malla, de elementos—. Los elementos de una sola malla conducen la misma corriente y, por tanto, se dice que están en *serie*. Sin embargo, aplicaremos la ley de voltaje de Kirchhoff y la ley de Ohm al circuito para determinar varias cantidades en el circuito.

Nuestro método comenzará con un circuito simple para, a continuación, generalizar el análisis a otros más complicados. El circuito que se muestra en la figura 2.15 servirá como base para la discusión. Este circuito consiste en una fuente de voltaje independiente que está en serie con sus dos resistencias. Hemos supuesto que la corriente fluye en la dirección de las manecillas del reloj. Si esta suposición es correcta, la solución de las ecuaciones que dan la corriente producirán un valor positivo. Si la corriente realmente está fluyendo en la dirección opuesta, el valor de la variable de corriente simplemente será negativa, indicando que la corriente está fluyendo en una dirección opuesta a la que hemos supuesto. También hemos hecho asignaciones de polaridad para v_{R_1} y v_{R_2} . Estas asignaciones se han realizado utilizando la convención empleada en nuestra discusión de la ley de Ohm y nuestra elección de la dirección de $i(t)$, es decir, la convención que se muestra en la figura 2.14a.

Aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff a este circuito tenemos

**FIGURA 2.15** Circuito de una sola malla.

$$-v(t) + v_{R_1} + v_{R_2} = 0$$

o

$$v(t) = v_{R_1} + v_{R_2}$$

Sin embargo, de la ley de Ohm sabemos que

$$v_{R_1} = R_1 i(t)$$

$$v_{R_2} = R_2 i(t)$$

Por tanto,

$$v(t) = R_1 i(t) + R_2 i(t)$$

Al resolver la ecuación para $i(t)$ tenemos

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_1 + R_2} \quad (2.9)$$

Conociendo la corriente, podemos ahora aplicar la ley de Ohm para determinar el voltaje a través de cada resistencia:

$$\begin{aligned} v_{R_1} &= R_1 i(t) \\ &= R_1 \left[\frac{v(t)}{R_1 + R_2} \right] \\ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} v(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

De manera similar,

$$v_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v(t) \quad (2.11)$$

Aunque simples, las ecuaciones (2.10) y (2.11) son muy importantes ya que describen la operación de lo que se llama un *divisor de voltaje*. En otras palabras, la fuente de voltaje $v(t)$ está dividida entre las resistencias R_1 y R_2 en proporción directa a sus resistencias.

En esencia, si estamos interesados en el voltaje a través de la resistencia R_1 , evitamos el cálculo de la corriente $i(t)$ y simplemente multiplicamos el voltaje de entrada $v(t)$ por la relación $R_1/(R_1 + R_2)$. Como está ilustrado por la ecuación (2.10), estamos utilizando la corriente en el cálculo, pero no de forma explícita.

Note que las ecuaciones satisfacen la ley de voltaje de Kirchhoff, ya que

$$-v(t) + \frac{R_1}{R_1 + R_2} v(t) + \frac{R_2}{R_1 + R_2} v(t) = 0$$

EJEMPLO 2.13

Considere el circuito que se muestra en la figura 2.16. El circuito es idéntico al de la figura 2.15 excepto que R_1 es una resistencia variable tal como el control de volumen de un radio o televisión. Suponga que $V_S = 9\text{ V}$, $R_1 = 90\text{ k}\Omega$ y $R_2 = 30\text{ k}\Omega$.

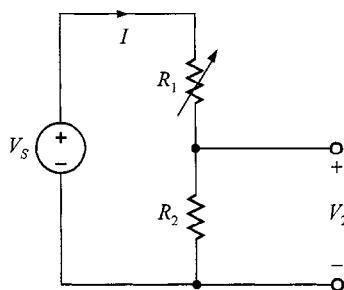


FIGURA 2.16 Circuito divisor de voltaje.

Examinemos el cambio tanto en el voltaje a través de R_2 y la potencia absorbida en esta resistencia conforme R_1 cambia de $90\text{ k}\Omega$ a $15\text{ k}\Omega$.

SOLUCIÓN Como este es un circuito divisor de voltaje, el voltaje V_2 puede obtenerse directamente como

$$\begin{aligned} V_2 &= \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right] V_S \\ &= \left[\frac{30\text{k}}{90\text{k} + 30\text{k}} \right] (9) \\ &= 2.25\text{ V} \end{aligned}$$

Ahora supongamos que la resistencia variable se cambia de $90\text{ k}\Omega$ a $15\text{ k}\Omega$. Entonces

$$\begin{aligned}V_2 &= \left[\frac{30\text{k}}{30\text{k} + 15\text{k}} \right] 9 \\&= 6\text{ V}\end{aligned}$$

El cálculo directo del divisor de voltaje es equivalente a determinar la corriente I y usar entonces la ley de Ohm para encontrar V_2 . Note que el mayor voltaje es a través de la resistencia más grande. Este concepto de divisor de voltaje y el circuito simple que hemos empleado para describirlo son muy útiles debido a que, como se mostrará más adelante, circuitos más complicados pueden reducirse a esta forma.

Finalmente, determinemos la potencia instantánea absorbida por la resistencia R_2 bajo las dos condiciones $R_1 = 90\text{ k}\Omega$ y $R_1 = 15\text{ k}\Omega$. Para el caso $R_1 = 90\text{ k}\Omega$, la potencia absorbida por R_2 es

$$\begin{aligned}P_2 &= I^2 R_2 = \left(\frac{9}{120\text{k}} \right)^2 (30\text{k}) \\&= 0.169\text{ mW}\end{aligned}$$

En el segundo caso

$$\begin{aligned}P_2 &= \left(\frac{9}{45\text{k}} \right)^2 (30\text{k}) \\&= 1.2\text{ mW}\end{aligned}$$

La corriente en el primer caso es $75\text{ }\mu\text{A}$, y en el segundo caso es $200\text{ }\mu\text{A}$. Como la potencia absorbida es una función del cuadrado de la corriente, la potencia absorbida en los dos casos es completamente diferente.

Demostremos ahora la utilidad práctica de esta red simple de divisor de voltaje.

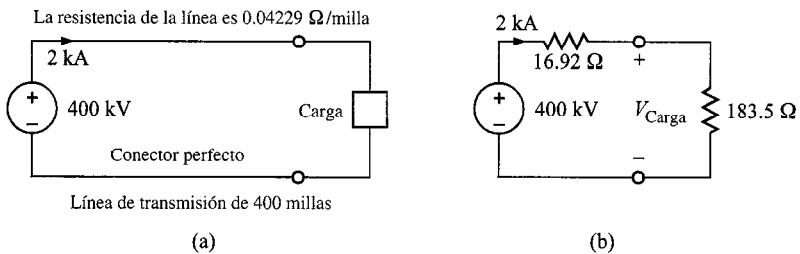
E J E M P L O 2.14

Considere el circuito de la figura 2.17a, el cual es una aproximación de un trasmisor de cd de alto voltaje. Hemos supuesto que la parte inferior de la línea de transmisión es un conductor perfecto y justificaremos esta suposición en el siguiente capítulo. La carga puede representarse por una resistencia de valor $183.5\text{ }\Omega$. Por consiguiente, el circuito equivalente de esta red se muestra en la figura 2.17b.

Determinemos la potencia entregada a la carga y la potencia perdida en la línea.

S o l u c i ó n Utilizando el divisor de voltaje, el voltaje de carga es

$$\begin{aligned}V_{\text{carga}} &= \left[\frac{183.5}{183.5 + 16.92} \right] 400\text{k} \\&= 366.24\text{ kV}\end{aligned}$$

**FIGURA 2.17** Instalaciones de trasmisión de cd de alto voltaje.

La potencia de entrada es 800 mW y la potencia trasmitida a la carga es

$$\begin{aligned} P_{\text{carga}} &= I^2 R_{\text{carga}} \\ &= 734 \text{ mW} \end{aligned}$$

Por tanto, la potencia perdida en la línea de trasmisión es

$$\begin{aligned} P_{\text{línea}} &= P_{\text{entrada}} - P_{\text{carga}} = I^2 R_{\text{línea}} \\ &= 66 \text{ mW} \end{aligned}$$

Como $P = VI$, suponga ahora que la planta de la compañía suministra potencia a 200 kV y 4 kA. ¿Qué efecto tendría esto en nuestra red de trasmisión? Sin hacer un solo cálculo, sabemos que debido a que la potencia es proporcional al cuadrado de la corriente, habrá un gran incremento en la potencia perdida en la línea y, por tanto, la eficiencia de la planta disminuirá sustancialmente. Esta la razón por la que, en general, trasmítimos potencia a alto voltaje y baja corriente.

Fuentes múltiples/redes de resistencias

En este punto deseamos extender nuestro análisis para incluir una multiplicidad de fuentes de voltaje y resistencias. Por ejemplo, considere el circuito que se muestra en la figura 2.18a. Aquí hemos supuesto que la corriente fluye en la dirección de las manecillas del reloj, y hemos definido la variable $i(t)$ en concordancia. Este puede ser o no el caso, dependiendo del valor de los diversas fuentes de voltaje. La ley de voltaje de Kirchhoff para este circuito es

$$+v_{R_1} + v_2(t) - v_3(t) + v_{R_2} + v_4(t) + v_5(t) - v_1(t) = 0$$

o utilizando la ley de Ohm,

$$(R_1 + R_2)i(t) = v_1(t) - v_2(t) + v_3(t) - v_4(t) - v_5(t)$$

la cual puede escribirse como

$$(R_1 + R_2)i(t) = v(t)$$

donde

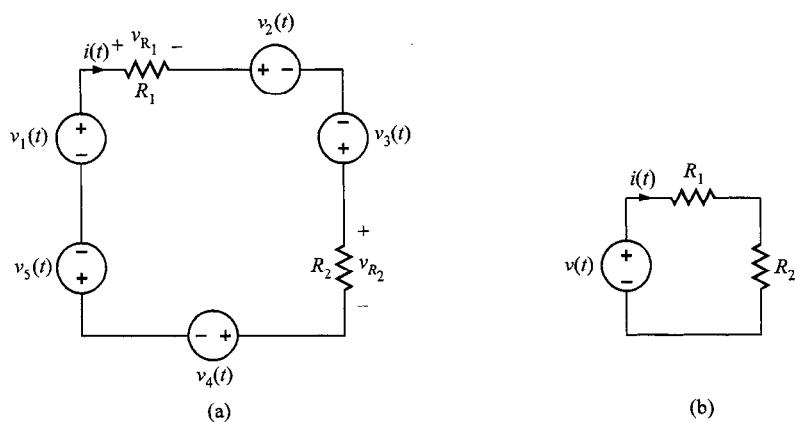


FIGURA 2.18 Circuitos equivalentes con fuentes múltiples.

$$v(t) = v_1(t) + v_3(t) - [v_2(t) + v_4(t) + v_5(t)]$$

por lo que según las definiciones precedentes, la figura 2.18a es equivalente a la figura 2.18b. En otras palabras, la suma de varias fuentes de voltaje en serie puede reemplazarse por una sola fuente cuyo valor sea la suma algebraica de las fuentes individuales. Este análisis puede, por supuesto, generalizarse a un circuito con N series de fuentes.

Considere ahora el circuito con N resistencias en serie como el que se muestra en la figura 2.19a. La aplicación de la ley de voltaje de Kirchhoff a este circuito da

$$\begin{aligned} v(t) &= v_{R_1} + v_{R_2} + \cdots + v_{R_N} \\ &= R_1 i(t) + R_2 i(t) + \cdots + R_N i(t) \end{aligned}$$

y por tanto,

$$v(t) = R_s i(t) \quad (2.12)$$

donde

$$R_s = R_1 + R_2 + \cdots + R_N \quad (2.13)$$

y de aquí,

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_s} \quad (2.14)$$

Note también que para cualquier resistencia R_i en el circuito, el voltaje a través de R_i está dado por la expresión

$$v_{R_i} = \frac{R_i}{R_s} v(t) \quad (2.15)$$

la cual es la propiedad de divisor de voltaje para múltiples resistencias en serie.

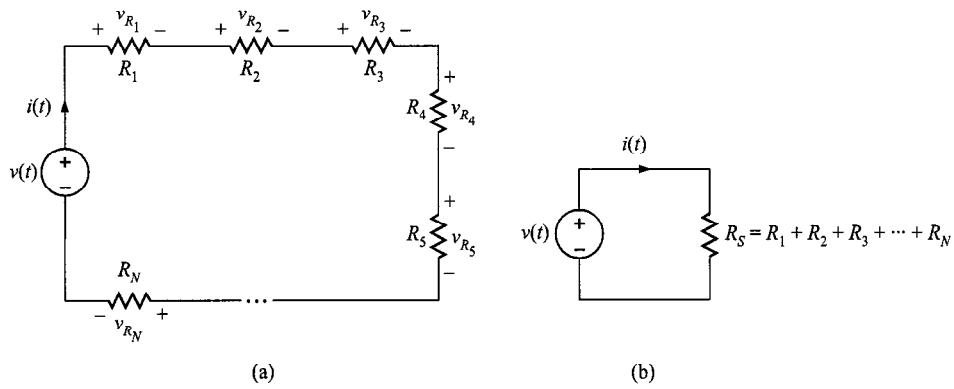


FIGURA 2.19 Circuitos equivalentes.

La ecuación (2.13) ilustra que la resistencia equivalente de N resistencias en serie es simplemente la suma de las resistencias individuales. De esta manera, usando las ecuaciones (2.13) y (2.14) podemos dibujar el circuito de la figura 2.19b como un circuito equivalente para el de la figura 2.19a.

EJEMPLO 2.15

Dado el circuito de la figura 2.20, encontremos I , V_{bd} , y la potencia absorbida por la resistencia de $30\text{ k}\Omega$.

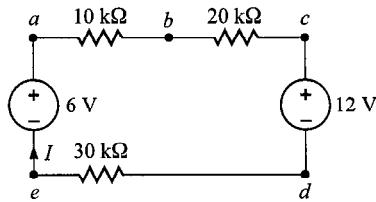


FIGURA 2.20 Circuito utilizado en el ejemplo 2.15.

SOLUCIÓN La LVK para la red da la ecuación

$$\begin{aligned} 10kI + 20kI + 12 + 30kI - 6 &= 0 \\ 60kI &= -6 \\ I &= -0.1 \text{ mA} \end{aligned}$$

Por tanto, la magnitud de la corriente es 0.1 mA , pero su dirección es opuesta a la que se supuso.

El voltaje V_{bd} puede calcularse usando cualquiera de las trayectorias cerradas $abdea$ o $bcdb$. Las ecuaciones para ambos casos son

$$10kI + V_{bd} + 30kI - 6 = 0$$

y

$$20kI + 12 - V_{bd} = 0$$

Utilizar $I = -0.1$ mA en ambas ecuaciones da $V_{bd} = 10$ V. Finalmente, la potencia absorbida por la resistencia de $30\text{ k}\Omega$ es

$$P = I^2R = 0.3 \text{ mW}$$

EJEMPLO 2.16

Una instalación de transmisión de cd es modelada por el circuito aproximado que se muestra en la figura 2.21. Si se sabe que el voltaje de carga es $V_{\text{carga}} = 458.3$ kV, deseamos encontrar el voltaje en el extremo emisor de la línea y la potencia perdida en la línea.

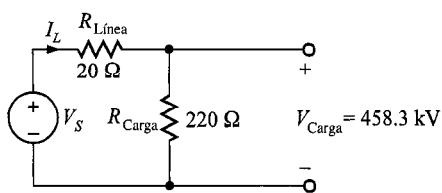


FIGURA 2.21 Circuito utilizado en el ejemplo 2.16.

SOLUCIÓN Conociendo el voltaje de carga y la resistencia de carga, podemos obtener la corriente de línea utilizando la ley de Ohm:

$$\begin{aligned} I_L &= 458.3\text{k}/220 \\ &= 2.083 \text{ kA} \end{aligned}$$

La caída de voltaje a través de la línea es

$$\begin{aligned} V_{\text{línea}} &= (I_L)(R_{\text{línea}}) \\ &= 41.67 \text{ kV} \end{aligned}$$

Utilizando ahora la LVK

$$\begin{aligned} V_S &= V_{\text{línea}} + V_{\text{carga}} \\ &= 500 \text{ kV} \end{aligned}$$

Note que como la red es simplemente un circuito divisor de voltaje, podemos obtener V_S inmediatamente de nuestro conocimiento de $R_{\text{línea}}$, R_{carga} y V_{carga} . Es decir,

$$V_{\text{carga}} = \left[\frac{R_{\text{carga}}}{R_{\text{carga}} + R_{\text{línea}}} \right] V_S$$

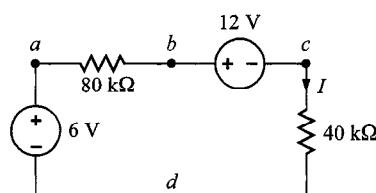
y V_S es la única incógnita en esta ecuación.

La potencia absorbida por la línea es

$$\begin{aligned} P_{\text{línea}} &= I_L^2 R_{\text{línea}} \\ &= 86.79 \text{ kW} \end{aligned}$$

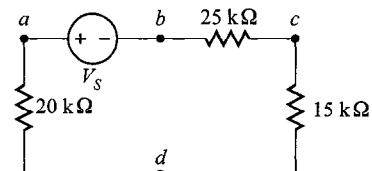
EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D2.10 Encuentre I y V_{bd} en el circuito de la figura D2.10.

**FIGURA D2.10**

Resp.: $I = -0.05 \text{ mA}$ y $V_{bd} = 10 \text{ V}$.

D2.11 En la red de la figura D2.11, si V_{ad} es 3 V, encontrar V_S .

**FIGURA D2.11**

Resp.: $V_S = 9 \text{ V}$.

2.4 Circuitos de un solo par de nodos

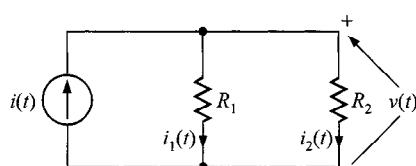
Divisor de corriente

Un circuito importante es el circuito de un solo par de nodos. En este caso los elementos tienen el mismo voltaje a través de ellos y, por ende, están en *paralelo*. Aplicaremos, sin embargo, la ley de corrientes de Kirchhoff y la ley de Ohm para determinar varias cantidades desconocidas en el circuito.

Siguiendo nuestro método con el circuito de un solo nodo, comenzaremos con el caso más simple y de ahí generalizaremos nuestro análisis. Considere el circuito que se muestra en la figura 2.22. Aquí tenemos una fuente de corriente independiente en paralelo con dos resistencias.

Como todos los elementos del circuito están en paralelo, el voltaje $v(t)$ aparece a través de cada uno de ellos.

Además, un examen del circuito indica que la corriente $i(t)$ está en el nodo superior del circuito y que las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ están fuera del nodo. Como la LCK

**FIGURA 2.22** Circuito simple en paralelo.

esencialmente establece que lo que entra debe salir, la cuestión que debemos resolver es cómo $i_1(t)$ e $i_2(t)$ dividen la corriente de entrada $i(t)$.

Aplicando la ley de corriente de Kirchhoff al nodo superior, obtenemos

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Y, empleando la ley de Ohm, tenemos,

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{v(t)}{R_1} + \frac{v(t)}{R_2} \\ &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v(t) \\ &= \frac{v(t)}{R_p} \end{aligned}$$

donde

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.16)$$

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.17)$$

Por consiguiente, la resistencia equivalente de dos resistencias conectadas en paralelo es igual al producto de sus resistencias divididas por su suma. Note también que esta resistencia equivalente R_p siempre es menor que R_1 o R_2 . Por tanto, conectando resistencias en paralelo reducimos la resistencia total. En el caso especial, cuando $R_1 = R_2$, la resistencia equivalente es igual a la mitad del valor de las resistencias individuales.

La manera en la que la corriente $i(t)$ de la fuente se divide entre las dos ramas se llama *división de corriente* y puede encontrarse de las expresiones precedentes. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} v(t) &= R_p i(t) \\ &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

e

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{v(t)}{R_1} \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} i(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

e

$$\begin{aligned}
 i_2(t) &= \frac{v(t)}{R_2} \\
 &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} i(t)
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Las ecuaciones (2.19) y (2.20) son planteamientos matemáticos de la regla del divisor de corriente.

EJEMPLO 2.17

Dada la red de la figura 2.23a, encontremos I_1 , I_2 y V_o .

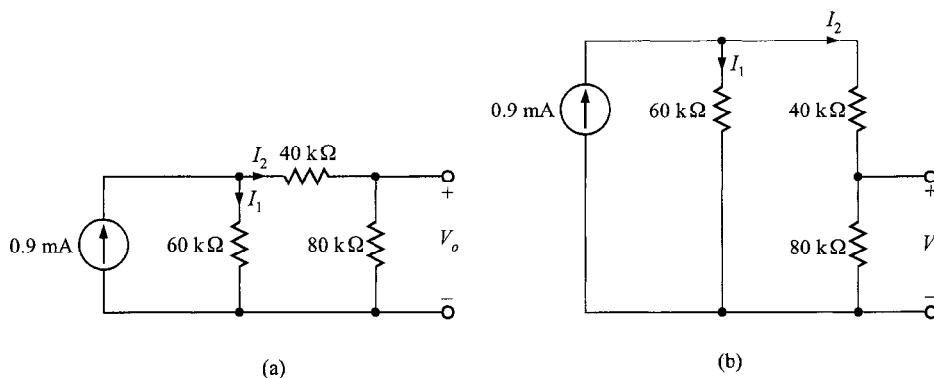


FIGURA 2.23 Circuitos utilizados en el ejemplo 2.17.

SOLUCIÓN En primer lugar, es importante reconocer que la fuente de corriente alimenta dos trayectorias paralelas. Para insistir en este punto, el circuito se dibuja de nuevo como se muestra en la figura 2.23b. Aplicando el divisor de corriente, obtenemos

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \left[\frac{40k + 80k}{60k + (40k + 80k)} \right] (0.9 \times 10^{-3}) \\
 &= 0.6 \text{ mA}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \left[\frac{60k}{60k + (40k + 80k)} \right] (0.9 \times 10^{-3}) \\
 &= 0.3 \text{ mA}
 \end{aligned}$$

Note que la corriente mayor fluye a través de la resistencia más pequeña y viceversa. Además, uno debe notar que si las resistencias de las dos trayectorias son iguales, la corriente se dividirá equitativamente entre ellas. La LCK se satisface ya que $I_1 + I_2 = 0.9 \text{ mA}$.

El voltaje V_o puede derivarse utilizando la ley de Ohm como

$$\begin{aligned} V_o &= 80kI \\ &= 24 \text{ V} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.18

Un autoestéreo típico consiste en un amplificador de audio de 2 W y dos bocinas representados por el diagrama que se muestra en la figura 2.24a. El circuito de salida del amplificador de audio es en esencia una fuente de corriente de 430 mA y cada una de las bocinas tiene una resistencia de 4 ohms. Determinemos la potencia absorbida por las bocinas.

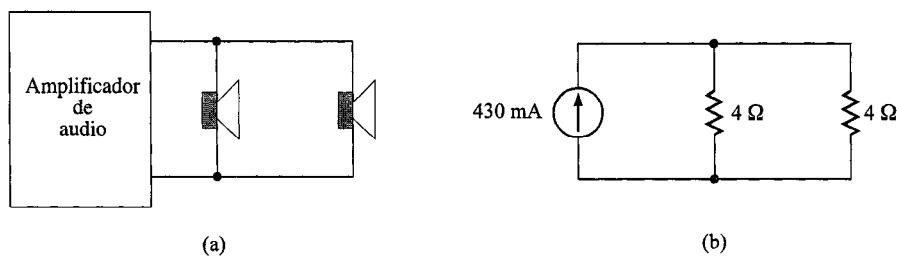


FIGURA 2.24 Circuitos utilizados en el ejemplo 2.18.

SOLUCIÓN El sistema de audio puede modelarse como se muestra en la figura 2.24b. Como ambas bocinas son dispositivos de 4Ω , la corriente se repartirá de manera uniforme entre ellas y la potencia absorbida por cada bocina es

$$\begin{aligned} P &= I^2R \\ &= (215 \times 10^{-3})^2(4) \\ &= 184.9 \text{ mW} \end{aligned}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D2.12 Encuentre las corrientes I_1 e I_2 y la potencia absorbida por la resistencia de $40 \text{ k}\Omega$ en la red de la figura D2.12.

Resp.: $I_1 = 12 \text{ mA}$, $I_2 = -4 \text{ mA}$, y $P_{40 \text{ k}\Omega} = 5.76 \text{ W}$.

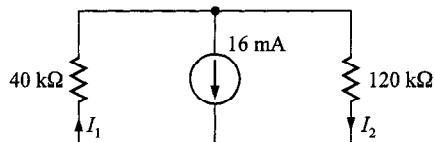


FIGURA D2.12

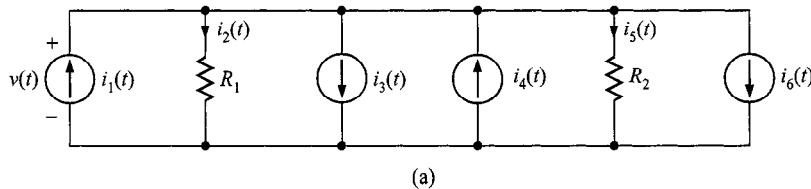
Fuentes múltiples/redes de resistencia

Ampliemos ahora nuestro análisis para incluir una multiplicidad de fuentes de corriente y resistencias en paralelo. Por ejemplo, considere el circuito que se muestra en la figura 2.25a. Hemos supuesto que el nodo superior es $v(t)$ volts positivo con respecto al nodo inferior. Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff al nodo superior tenemos

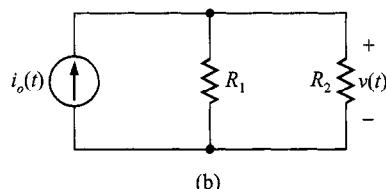
$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) - i_5(t) - i_6(t) = 0$$

O

$$i_1(t) - i_3(t) + i_4(t) - i_6(t) = i_2(t) + i_5(t)$$



(a)



(b)

FIGURA 2.25 Circuitos equivalentes.

Todos los términos en el lado izquierdo de la ecuación representan fuentes que pueden combinarse algebraicamente en una sola fuente; es decir,

$$i_o(t) = i_1(t) - i_3(t) + i_4(t) - i_6(t)$$

la cual efectivamente reduce el circuito de la figura 2.25a al de la figura 2.25b. Podemos, por supuesto, generalizar este análisis a un circuito con N fuentes de corriente. Utilizando la ley de Ohm, las corrientes en el lado derecho de la ecuación pueden expresarse en términos del voltaje y de las resistencias individuales de modo que la ecuación de la LCK se reduce a

$$i_o(t) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v(t)$$

Considere ahora el circuito con N resistencias en paralelo que se muestra en la figura 2.26a. Aplicando la ley de corriente de Kirchhoff al nodo superior tenemos

$$\begin{aligned} i_o(t) &= i_1(t) + i_2(t) + \cdots + i_N(t) \\ &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \right) v(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

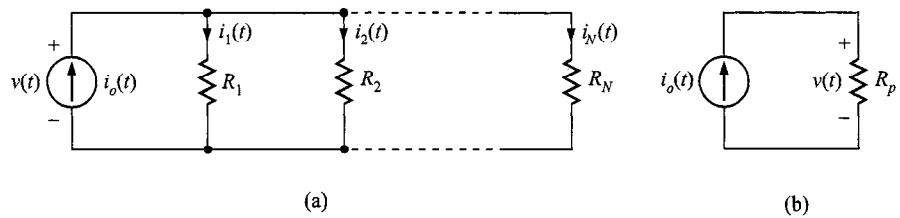


FIGURA 2.26 Circuitos equivalentes.

o

$$i_o(t) = \frac{v(t)}{R_p} \quad (2.22)$$

donde

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad (2.23)$$

de modo que en lo que a la fuente concierne, la figura 2.26a puede reducirse a un circuito equivalente como el que se muestra en la figura 2.26b.

El divisor de corriente para cualquier rama puede calcularse utilizando la ley de Ohm y las ecuaciones precedentes. Por ejemplo, para la jésima rama en la red de la figura 2.26a,

$$i_j(t) = \frac{v(t)}{R_j}$$

Utilizando la ecuación (2.22), obtenemos

$$i_j(t) = \frac{R_p}{R_j} i_o(t) \quad (2.24)$$

que define la regla del divisor de corriente para el caso general.

E J E M P L O 2.19

Dado el circuito de la figura 2.27a, deseamos encontrar la corriente en la resistencia de carga de 12 kΩ.

SOLUCIÓN A fin de simplificar la red de la figura 2.27a, sumamos algebraicamente las fuentes de corriente y combinamos las resistencias en paralelo de la siguiente manera:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{18k} + \frac{1}{9k} + \frac{1}{12k}$$

$$R_p = 4 \text{ k}\Omega$$

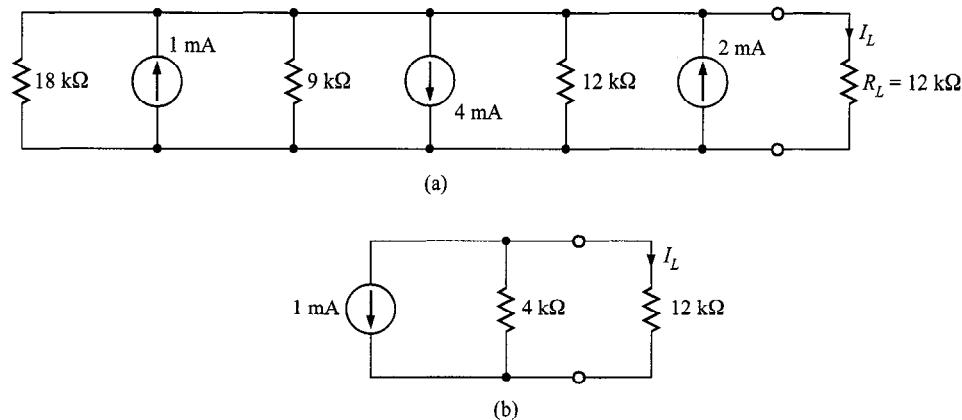


FIGURA 2.27 Circuitos utilizados en el ejemplo 2.19.

Usando esos valores podemos reducir el circuito de la figura 2.27a al de la figura 2.27b. Aplicando ahora el divisor de corriente, obtenemos

$$\begin{aligned} I_L &= - \left[\frac{4k}{4k + 12k} \right] (1 \times 10^{-3}) \\ &= - 0.25 \text{ mA} \end{aligned}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D2.13 Encontrar la potencia absorbida por la resistencia de 6 kΩ en la red de la figura D2.13.

Resp.: $P = 2.66 \text{ mW}$.

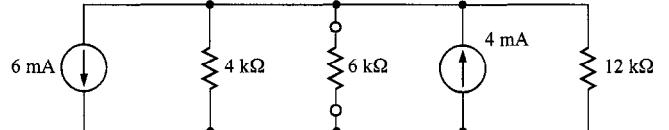


FIGURA D2.13

2.5 Combinaciones de resistencia en serie y en paralelo

Hemos mostrado en nuestras primeras muestras que la resistencia equivalente de N resistencias en serie es

$$R_S = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad (2.25)$$

y que la resistencia equivalente de N resistencias en paralelo se encuentra a partir de

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \quad (2.26)$$

Examinemos ahora algunas combinaciones de esos dos casos.

EJEMPLO 2.20

Deseamos determinar la resistencia en las terminales *A*-*B* en la red de la figura 2.28a.

SOLUCIÓN Comenzando en el extremo opuesto de la red desde las terminales y combinando las resistencias como se muestra en la secuencia de circuitos de la figura 2.28, encontramos que la resistencia equivalente en las terminales es $5\text{ k}\Omega$.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D2.14 Encontrar la resistencia equivalente en las terminales *A*-*B* en la red de la figura D2.14.

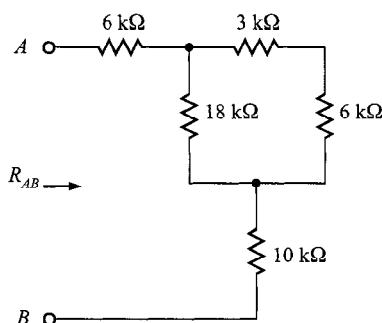


FIGURA D2.14

Resp.: $R_{AB} = 22\text{ k}\Omega$.

D2.15 Encontrar la resistencia equivalente en las terminales *A*-*B* en el circuito de la figura D2.15.

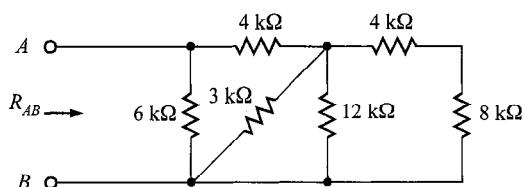


FIGURA D2.15

Resp.: $R_{AB} = 3\text{ k}\Omega$.

Como un ejemplo práctico del uso de resistencias en serie y en paralelo, considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.21

Un suministro estándar de potencia limitada de corriente cd mostrado en la figura 2.29a proporciona 0–18 V a 3 A a una carga. La caída de voltaje, V_R , a través de una resistencia, R , se utiliza como dispositivo sensor de corriente, retroalimenta al suministro de potencia y se usa para limitar la corriente I . Es decir, si la carga se ajusta de modo que la corriente trata de exceder 3 A, el suministro de potencia actuará para limitar la corriente a ese valor. El voltaje de retroalimentación, V_R , típicamente no debería exceder 600 mV.

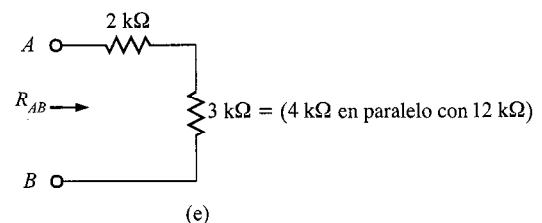
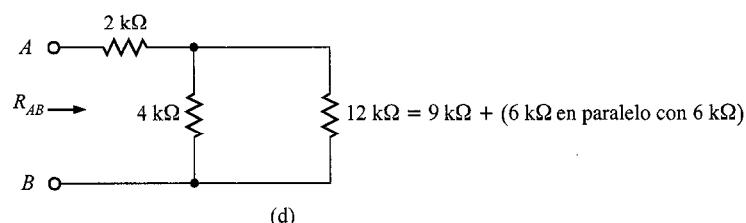
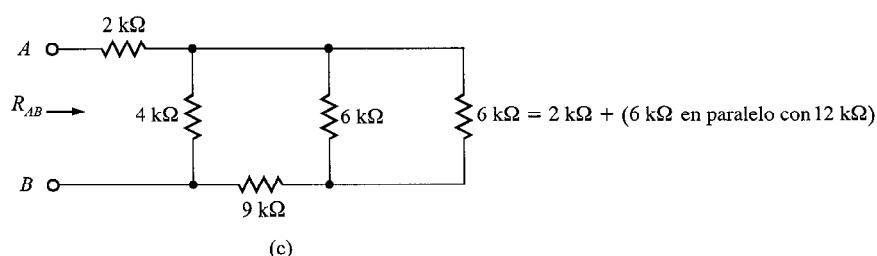
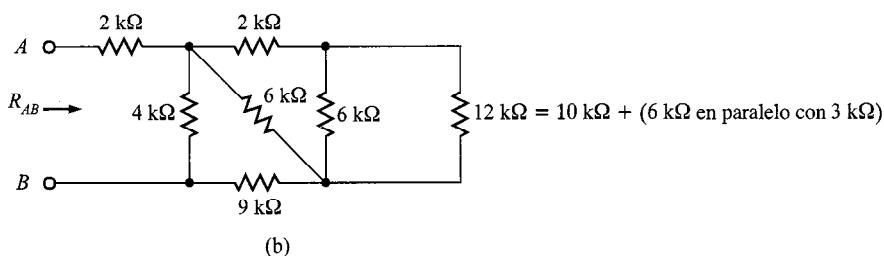
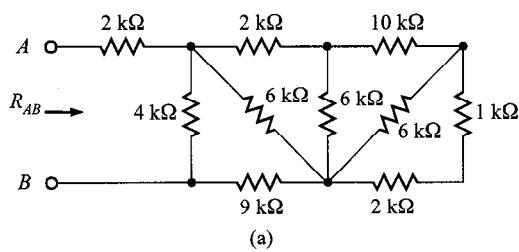


FIGURA 2.28 Simplificación de una red de resistencias.

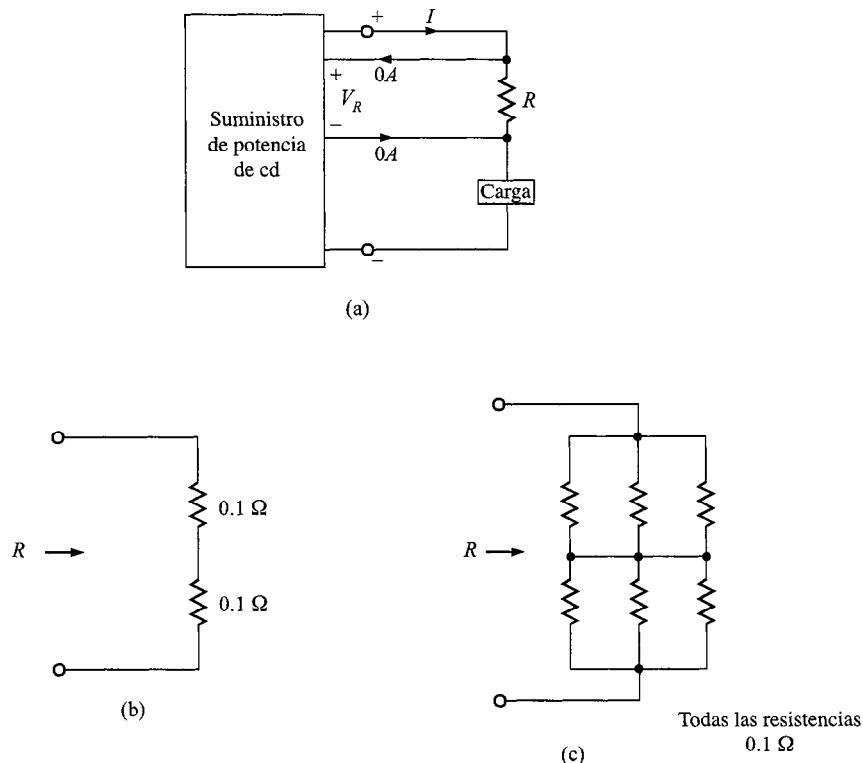


FIGURA 2.29 Circuitos utilizados en el ejemplo 2.21.

Si tenemos una caja de resistencias estándar de 0.1Ω , 5 W, determinemos la configuración de esas resistencias que proporcionen un $V_R = 600$ mV cuando la corriente sea 3 A.

SOLUCIÓN Utilizando la ley de Ohm, el valor de R deberá ser

$$R = \frac{V_R}{I}$$

$$= \frac{0.6}{3}$$

$$= 0.2 \Omega$$

Por tanto, dos resistencias de 0.1Ω conectadas en serie, como se muestra en la figura 2.29b, proporcionarán el voltaje de realimentación apropiado. Suponga, sin embargo, que la corriente de suministro de potencia estará limitada a 9 A. La resistencia requerida en este caso para producir $V_R = 600$ mV es

$$\begin{aligned} R &= \frac{0.6}{9} \\ &= 0.0667 \Omega \end{aligned}$$

Debemos determinar ahora como interconectar las resistencias de 0.1Ω para obtener $R = 0.0667 \Omega$. Como la resistencia deseada es menor que los componentes disponibles, es decir, 0.1Ω , debemos conectar las resistencias en algún tipo de configuración en paralelo. Como todas las resistencias son de igual valor, note que tres de ellas conectadas en paralelo proporcionarán una resistencia de un tercio de su valor o 0.0333Ω . Entonces dos de tales combinaciones conectadas en serie, como se muestra en la figura 2.29c, producirán la resistencia apropiada.

Finalmente, debemos verificar para asegurar que las configuraciones en las figuras 2.29b y c no hayan excedido la clasificación de potencia de las resistencias. En el primer caso, la corriente $I = 3 \text{ A}$ está presente en cada una de las dos series de resistencias. Por tanto, la potencia absorbida en cada resistencia es

$$\begin{aligned} P &= I^2R \\ &= (3)^2(0.1) \\ &= 0.9 \text{ W} \end{aligned}$$

que está dentro de la clasificación de 5 W de las resistencias.

En el segundo caso, la corriente $I = 9 \text{ A}$. La configuración de resistencias para R en este caso es una combinación en serie de dos conjuntos de tres resistencias en paralelo de igual valor. Usando la división de corriente, sabemos que la corriente I se repartirá equitativamente entre las tres trayectorias en paralelo y, por ende, la corriente en cada resistencia será de 3 A . Por tanto, de nuevo, la potencia absorbida por cada resistencia está dentro de su clasificación de potencia.

2.6 Transformaciones Y \rightleftharpoons Delta

A fin de animar un poco este tema, considere el circuito de la figura 2.30. Note que esta red esencialmente tiene el mismo número de elementos como los que están contenidos en nuestros ejemplos recientes. Sin embargo, cuando intentamos reducir el circuito a una resistencia equivalente R , encontramos que en ningún lado hay una resistencia en serie o en paralelo con otra. Por tanto, no podemos atacar el problema directamente usando las técnicas que hasta aquí hemos aprendido. Podemos, sin embargo, reemplazar una parte de la red con un circuito equivalente, y esta conversión nos permitirá, con facilidad, reducir la combinación de resistencias a una sola resistencia equivalente. Esta conversión se llama transformación Y-a-delta o delta-a-Y.

Considere las redes que se muestran en la figura 2.31. Note que las resistencias de la figura 2.31a forman una Δ (delta) y las resistencias de la figura 2.31b forman una Y (ye). Si ambas configuraciones están conectadas a sólo tres terminales a , b y c , sería ventajoso si pudiera establecerse una equivalencia entre ellas. De hecho, es posible relacionar las resistencias de una red con las de la otra de modo que sus características ter-

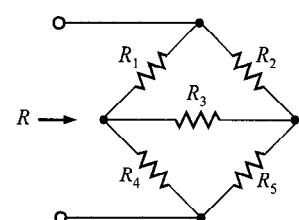


FIGURA 2.30 Red utilizada para ilustrar la necesidad de la transformación $\text{Y} \rightleftharpoons \text{delta}$.

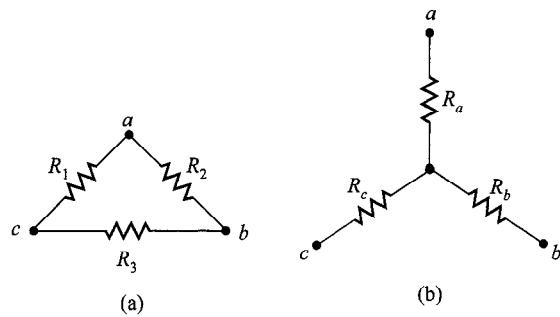


FIGURA 2.31 Redes de resistencias en delta y en Y.

minales sean las mismas. Esta relación entre las dos configuraciones de redes se llama transformación Y-Δ.

La transformación que relaciona las resistencias R_1 , R_2 y R_3 con las resistencias R_a , R_b y R_c se deriva como sigue. Para que en las dos redes sean equivalentes cada par de terminales, es necesario que la resistencia en las terminales correspondientes sea igual (es decir, que la resistencia en las terminales a y b con c a circuito abierto debe ser la misma para ambas redes). Por consiguiente, si igualamos las resistencias para cada conjunto correspondiente de terminales, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R_a + R_b = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_2 + R_1 + R_3} \\ R_{bc} &= R_b + R_c = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_3 + R_1 + R_2} \\ R_{ca} &= R_c + R_a = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Resolviendo este conjunto de ecuaciones para R_a , R_b y R_c se obtiene

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_b &= \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_c &= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned} \quad (2.28)$$

De manera similar, si resolvemos la ecuación (2.27) para R_1 , R_2 y R_3 , obtenemos

$$R_1 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_b}$$

$$R_2 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_c} \quad (2.29)$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_a} \quad (2.29)$$

Las ecuaciones (2.28) y (2.29) son relaciones generales y se aplican a cualquier conjunto de resistencias conectadas en Y o en Δ . Para el caso balanceado donde $R_a = R_b = R_c$ y $R_1 = R_2 = R_3$, las ecuaciones precedentes se reducen a

$$R_Y = \frac{1}{3} R_\Delta \quad (2.30)$$

y

$$R_\Delta = 3R_Y \quad (2.31)$$

Es importante notar que no es necesario memorizar las fórmulas en las ecuaciones (2.28) y (2.29). Un examen cercano de esas ecuaciones y de la figura 2.31 ilustra un patrón definido de las relaciones entre las dos configuraciones. Por ejemplo, la resistencia conectada al punto a en la Y (es decir, R_a) es igual al producto de las dos resistencias en la Δ que están conectadas al punto a dividido entre la suma de todas las resistencias en la delta. R_b y R_c están determinadas de manera similar. De la misma forma, hay patrones geométricos asociados con las ecuaciones para calcular las resistencias en la delta como una función de aquéllas en la Y.

Examinemos ahora el uso de la transformación delta \rightleftharpoons Y en la solución de un problema de red.

E J E M P L O 2.22

Deseamos encontrar la resistencia R equivalente de la red de la figura 2.32a.

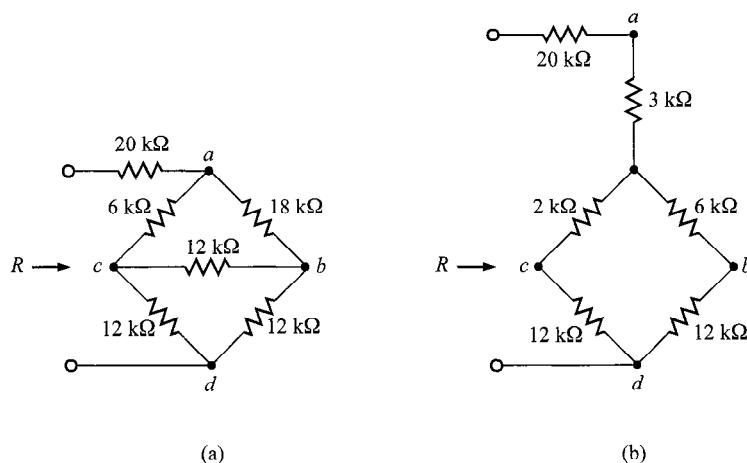


FIGURA 2.32 Red que emplea la transformación delta-a-Y.

SOLUCIÓN Para comenzar nuestra simplificación del circuito, notamos que el lado derecho de la red es en esencia una conexión directa de dos deltas. Si aplicamos la transformación delta-a-Y a la delta superior conectada entre los puntos *a*, *b* y *c*, obtenemos la red de la figura 2.32b. Como una muestra del cálculo de la transformación, la resistencia R_a es

$$R_a = \frac{(6k)(18k)}{6k + 18k + 12k}$$

$$= 3 \text{ k}\Omega$$

El circuito de la figura 2.32b contiene sólo resistencias conectadas en serie o en paralelo. La resistencia total es ahora

$$R = 20k + 3k + \frac{(2k + 12k)(6k + 12k)}{2k + 12k + 6k + 12k}$$

$$= 30.88 \text{ k}\Omega$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D2.16 Encontrar la resistencia R equivalente en la red de la figura D2.16.

Resp.: $R = 22 \text{ k}\Omega$.

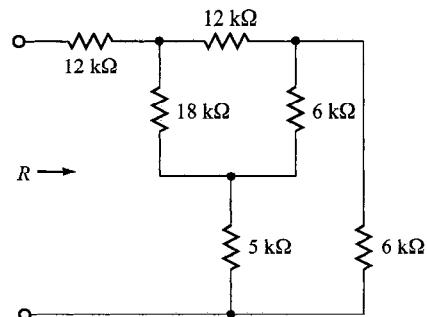


FIGURA D2.16

2.7 Circuitos con combinaciones de resistencias en serie y en paralelo

Hasta este punto hemos aprendido muchas técnicas que son fundamentales para el análisis de circuitos. Ahora deseamos aplicarlas y mostrar cómo se pueden usar en conjunto para analizar circuitos. Ilustraremos su aplicación a través de un número de ejemplos que se tratarán con algún detalle.

E J E M P L O 2.23

Deseamos encontrar todas las corrientes y voltajes etiquetados en la red de escalera que se muestra en la figura 2.33a.

SOLUCIÓN Para iniciar nuestro análisis de la red, comenzamos en el extremo derecho del circuito y combinamos las resistencias para determinar la resistencia total acompañada por la fuente de 12 V. Esto nos permitirá calcular la corriente I_1 . Entonces empleando la LVK, LCK, ley de Ohm, y/o la división de corriente, seremos capaces de calcular todas las corrientes y voltajes en la red.

En el extremo derecho del circuito, las resistencias de $9\text{ k}\Omega$ y $3\text{ k}\Omega$ están en serie y, en este caso, pueden combinarse en una resistencia equivalente de $12\text{ k}\Omega$. Esta resistencia está en paralelo con la resistencia de $4\text{ k}\Omega$, y su combinación da una resistencia equivalente de $3\text{ k}\Omega$, que se muestra en el extremo derecho de la figura 2.33b. En la figura 2.33b las dos resistencias de $3\text{ k}\Omega$ están en serie y su combinación está en paralelo con la resistencia de $6\text{ k}\Omega$. Combinando las tres resistencias se obtiene el circuito que se muestra en la figura 2.33c.

Aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff al circuito de la figura 2.33c se obtiene

$$\begin{aligned} I_1(9k + 3k) &= 12 \\ I_1 &= 1 \text{ mA} \end{aligned}$$

V_a puede calcularse con la ley de Ohm como

$$\begin{aligned} V_a &= I_1(3k) \\ &= 3 \text{ V} \end{aligned}$$

o utilizando la ley de voltaje de Kirchhoff,

$$\begin{aligned} V_a &= 12 - 9kI_1 \\ &= 12 - 9 \\ &= 3 \text{ V} \end{aligned}$$

Conociendo I_1 y V_a , podemos determinar ahora todas las corrientes y voltajes en la figura 2.33b. Como $V_a = 3\text{ V}$, la corriente I_2 puede encontrarse utilizando la ley de Ohm como

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{3}{6k} \\ &= \frac{1}{2} \text{ mA} \end{aligned}$$

Entonces utilizando la ley de corriente de Kirchhoff, tenemos

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$1 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times 10^{-3} + I_3$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \text{ mA}$$

Note que la I_3 también puede calcularse utilizando la ley de Ohm:

$$V_a = (3k + 3k) I_3$$

$$I_3 = \frac{3}{6k}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ mA}$$

Aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff a la malla del lado derecho de la figura 2.33b obtenemos

$$V_a - V_b = 3k I_3$$

$$3 - V_b = \frac{3}{2}$$

$$V_b = \frac{3}{2} \text{ V}$$

o como V_b es igual a la caída de voltaje a través de la resistencia de $3 \text{ k}\Omega$, podemos usar la ley de Ohm como

$$V_b = 3k I_3$$

$$= \frac{3}{2} \text{ V}$$

Ahora estamos en posición para calcular las últimas corrientes y voltajes desconocidos en la figura 2.33a. Conociendo V_b , podemos calcular I_4 usando la ley de Ohm como

$$V_b = 4k I_4$$

$$I_4 = \frac{\frac{3}{2}}{4k}$$

$$= \frac{3}{8} \text{ mA}$$

Entonces de ley de corriente de Kirchhoff, tenemos

$$I_3 = I_4 + I_5$$

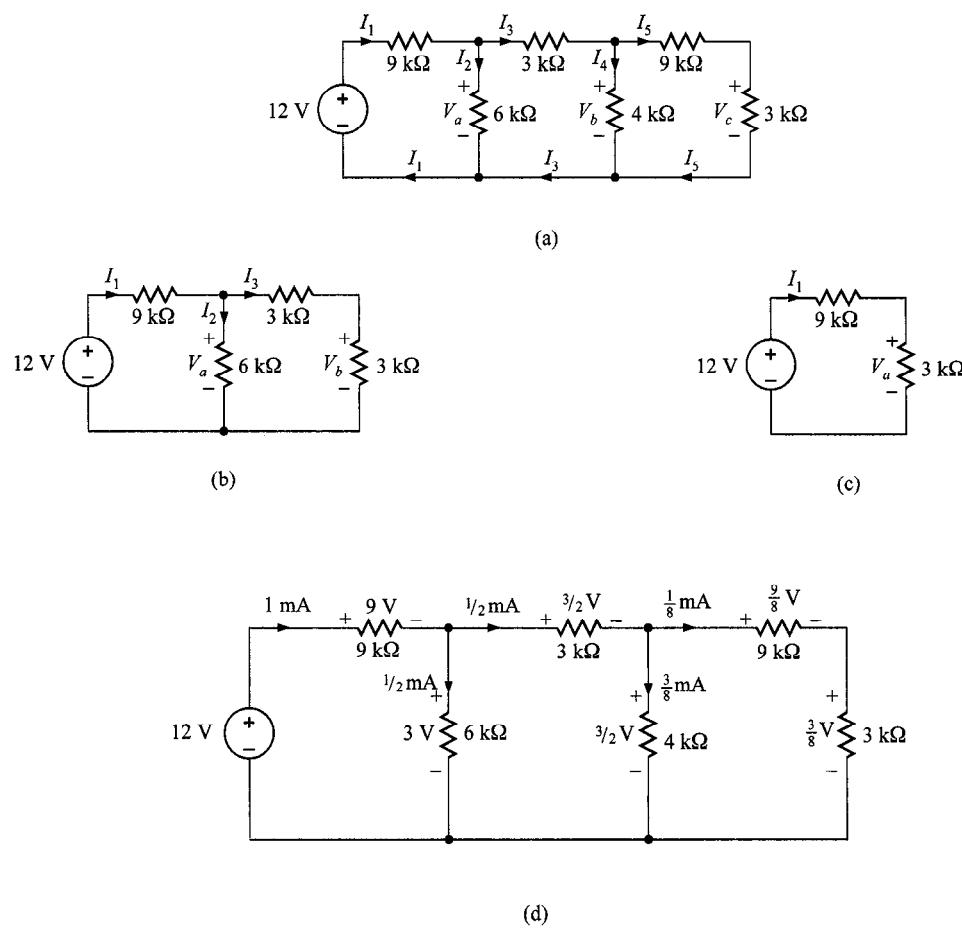
$$\frac{1}{2} \times 10^{-3} = \frac{3}{8} \times 10^{-3} + I_5$$

$$I_5 = \frac{1}{8} \text{ mA}$$

También pudimos haber calculado I_5 usando la regla del divisor de corriente. Por ejemplo,

$$I_5 = \frac{4k}{4k + (9k + 3k)} I_3$$

$$= \frac{1}{8} \text{ mA}$$

**FIGURA 2.33** Análisis de una red en escalera.

Finalmente, V_c puede calcularse como

$$V_c = I_5(3\text{k})$$

$$= \frac{3}{8} \text{ V}$$

V_c también puede encontrarse usando el divisor de voltaje; es decir, el voltaje V_b será dividido entre las resistencias de $9\text{k}\Omega$ y de $3\text{k}\Omega$. Por tanto,

$$V_c = \left[\frac{3\text{k}}{3\text{k} + 9\text{k}} \right] V_b$$

$$= \frac{3}{8} \text{ V}$$

Nótese que la ley de corriente de Kirchhoff se satisface en cada nodo y que la ley de voltaje de Kirchhoff se satisface alrededor de cada malla como se muestra en la figura 2.33d.

El siguiente ejemplo es, en esencia, el inverso del ejemplo anterior, ya que estamos dando la corriente en alguna rama de la red y pedimos encontrar el valor de la fuente de entrada.

EJEMPLO 2.24

Dado el circuito de la figura 2.34 e $I_4 = \frac{1}{2}$ mA, encontremos el voltaje V_0 de la fuente.

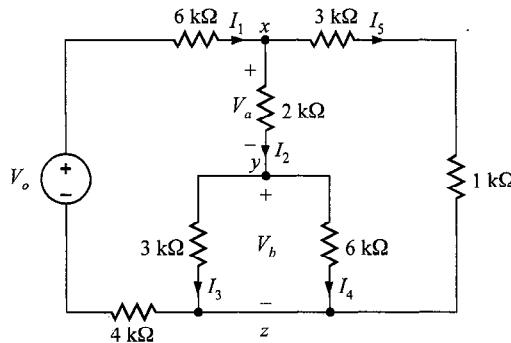


FIGURA 2.34 Ejemplo de circuito para análisis.

SOLUCIÓN Si $I_4 = \frac{1}{2}$ mA, entonces de la ley de Ohm, $V_b = 3$ V. V_b puede ahora usarse para calcular $I_3 = 1$ mA. La ley de corriente de Kirchhoff aplicada al nodo y nos da

$$\begin{aligned} I_2 &= I_3 + I_4 \\ &= 1.5 \text{ mA} \end{aligned}$$

Entonces de la ley de Ohm tenemos

$$\begin{aligned} V_a &= (1.5 \times 10^{-3})(2\text{k}) \\ &= 3 \text{ V} \end{aligned}$$

Como $V_a + V_b$ se conoce ahora, I_5 puede obtenerse:

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{V_a + V_b}{3\text{k} + 1\text{k}} \\ &= 1.5 \text{ mA} \end{aligned}$$

Aplicando la ley de corriente de Kirchhoff al nodo x obtenemos

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_5 \\ &= 3 \text{ mA} \end{aligned}$$

Ahora la LVK aplicada a cualquier trayectoria cerrada que contenga a V_0 dará el valor de esta fuente de entrada. Por ejemplo, si la trayectoria es la malla exterior, la LVK da

$$-V_o + 6kI_1 + 3kI_5 + 1kI_5 + 4kI_1 = 0$$

Como $I_1 = 3 \text{ mA}$ e $I_5 = 1.5 \text{ mA}$

$$V_o = 36 \text{ V}$$

Si hemos seleccionado la trayectoria que contenga la fuente y los puntos x , y y z , obtendremos

$$-V_o + 6kI_1 + V_a + V_b + 4kI_1 = 0$$

De nuevo esta ecuación da

$$V_o = 36 \text{ V}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D2.17 Encontrar V_o en la red de la figura D2.17.

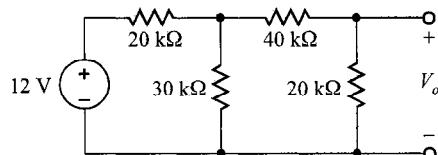


FIGURA D2.17

Resp.: $V_o = 2 \text{ V}$.

D2.18 Encontrar V_s en el circuito de la figura D2.18.

Resp.: $V_s = 9 \text{ V}$.

D2.19 Encontrar I_s en el circuito de la figura D2.19.

Resp.: $I_s = 0.3 \text{ mA}$.

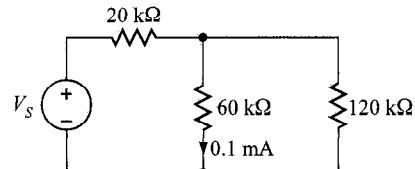


FIGURA D2.18

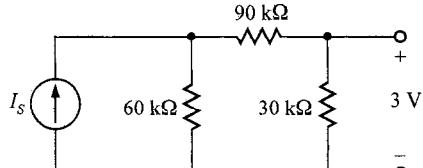


FIGURA D2.19

2.8 Circuitos con fuentes dependientes

En el capítulo 1 señalamos las diferentes clases de fuentes dependientes. Esas fuentes controladas son en extremo importantes debido a que son utilizadas para modelar dispositivos físicos tales como transistores de unión bipolar *npn* y *pnp* (BJT, por sus siglas en inglés) y transistores de efecto de campo (FET), que son transistores de efecto de campo de metal–óxido–semiconductor (MOSFET) o transistores de efecto de campo de compuerta aislada (IGFET). Esas estructuras básicas son cada una a su vez utilizadas para

hacer dispositivos analógicos y digitales. Un dispositivo analógico es un amplificador operacional (amp-op). Dispositivos digitales típicos son las memorias de acceso aleatorio (RAM), memorias sólo de lectura (ROM), y microprocesadores. Mostraremos ahora cómo resolver circuitos simples de una malla y de un nodo que contienen esas fuentes dependientes. Aunque los siguientes ejemplos son completamente simples, servirán para ilustrar los conceptos básicos.

El ejemplo siguiente emplea una fuente de voltaje controlada por corriente.

EJEMPLO 2.25

Determinemos el voltaje V_o en el circuito de la figura 2.35.

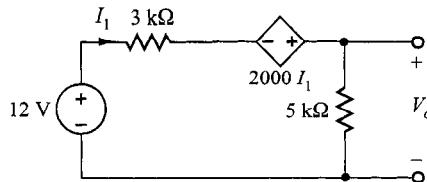


FIGURA 2.35 Circuito utilizado en el ejemplo 2.25.

SOLUCIÓN Al aplicar la LVK, obtenemos

$$-12 + 3kI_1 - 2kI_1 + 5kI_1 = 0$$

$$I_1 = 2 \text{ mA}$$

Por tanto,

$$V_o = (5k)I_1$$

$$= 10 \text{ V}$$

EJEMPLO 2.26

Dado el circuito de la figura 2.36 que contiene una fuente de corriente controlada por corriente, encontraremos el voltaje V_o .

SOLUCIÓN Aplicando la LCK al nodo superior, obtenemos

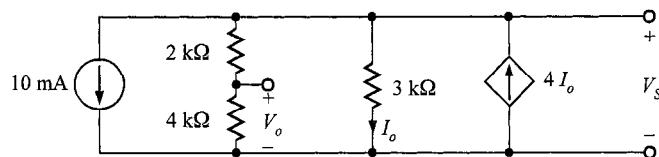


FIGURA 2.36 Circuito utilizado en el ejemplo 2.26.

$$10 \times 10^{-3} + \frac{V_S}{2k + 4k} + \frac{V_S}{3k} - 4I_o = 0$$

donde

$$I_o = \frac{V_S}{3k}$$

Sustituyendo esta expresión para la fuente controlada en la ecuación de la LCK obtenemos

$$\frac{10}{k} + \frac{V_S}{6k} + \frac{V_S}{3k} - \frac{4V_S}{3k} = 0$$

Resolviendo esta ecuación para V_S , obtenemos

$$V_S = 12 \text{ V}$$

El voltaje V_o puede obtenerse ahora utilizando un divisor de voltaje simple; es decir,

$$\begin{aligned} V_o &= \left[\frac{4k}{2k + 4k} \right] V_S \\ &= 8 \text{ V} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.27

La red de la figura 2.37 contiene una fuente de voltaje controlada por voltaje. Deseamos encontrar V_o en este circuito.

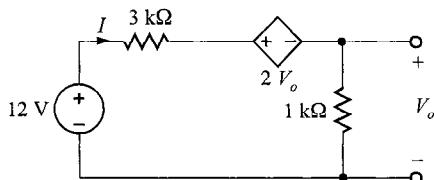


FIGURA 2.37 Circuito utilizado en el ejemplo 2.27.

SOLUCIÓN La aplicación de la LVK a esta red da

$$-12 + 3kI + 2V_o + 1kI = 0$$

donde

$$V_o = 1kI$$

Por tanto, la ecuación de la LVK puede escribirse como

$$-12 + 3kI + 2kI + 1kI = 0$$

o

$$I = 2 \text{ mA}$$

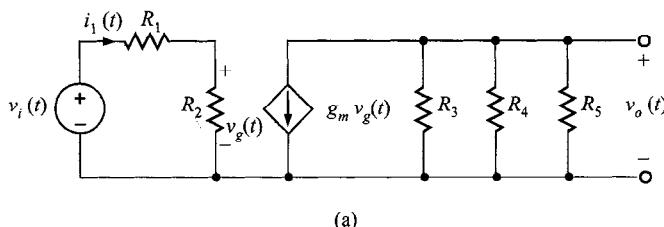
Por tanto,

$$V_o = 1kI$$

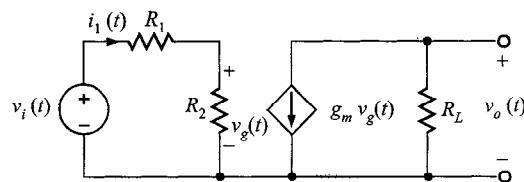
$$= 2 \text{ V}$$

E J E M P L O 2.28

Un circuito equivalente para un transistor de efecto de campo (FET) amplificador de fuente común o transistor de unión bipolar (BJT) amplificador de emisor común puede modelarse mediante el circuito que se muestra en la figura 2.38a. Deseamos determinar una expresión para la ganancia del amplificador, la cual es la relación del voltaje de salida al voltaje de entrada.



(a)



(b)

FIGURA 2.38 Ejemplo de circuito que contiene una fuente de corriente controlada por voltaje.

SOLUCIÓN Note que aunque este circuito, que contiene una fuente de corriente controlada por voltaje, parece ser algo complicado, ahora estamos realmente en una posición para resolverlo con las técnicas que hemos estudiado hasta este punto. La malla de la izquierda, o entrada en el amplificador, está esencialmente separada de la parte de salida del amplificador a la derecha. El voltaje a través de R_2 es $v_g(t)$, el cual controla la fuente de corriente dependiente.

Para simplificar el análisis, reemplazemos las resistencias R_3 , R_4 y R_5 con R_L tal que

$$\frac{1}{R_L} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

Entonces el circuito se reduce al que se muestra en la figura 2.38b. Aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff a la parte de entrada del amplificador obtenemos

$$v_i(t) = i_1(t)(R_1 + R_2)$$

y

$$v_g(t) = i_1(t)R_2$$

Resolviendo esas ecuaciones para $v_g(t)$ se obtiene

$$v_g(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_i(t)$$

Del circuito de salida, note que el voltaje $v_o(t)$ está dado por la expresión

$$v_o(t) = -g_m v_g(t) R_L$$

Combinando esta ecuación con la anterior se obtiene

$$v_o(t) = \frac{-g_m R_L R_2}{R_1 + R_2} v_i(t)$$

Por tanto, la ganancia del amplificador, que es la razón del voltaje de salida al voltaje de entrada, está dada por

$$\frac{v_o(t)}{v_i(t)} = -\frac{g_m R_L R_2}{R_1 + R_2}$$

Valores razonables para los parámetros del circuito de la figura 2.38a son $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $g_m = 0.04 \text{ S}$, $R_3 = 50 \text{ k}\Omega$, y $R_4 = R_5 = 10 \text{ k}\Omega$. Por consiguiente, la ganancia del amplificador bajo esas condiciones es

$$\begin{aligned} \frac{v_o(t)}{v_i(t)} &= \frac{-(0.04)(4.545)(10^3)(1)(10^3)}{(1.1)(10^3)} \\ &= -165.29 \end{aligned}$$

Entonces, la magnitud de la ganancia es 165.29.

En este punto quizás sea útil señalar que cuando se analizan circuitos con fuentes dependientes, primero tratamos la fuente dependiente como si fuera una fuente independiente cuando escribimos una ecuación de la ley de corriente o de voltaje de Kirchhoff. Una vez escrita la ecuación, se escribe la ecuación controladora que especifica la relación de la fuente dependiente con el parámetro desconocido. Por ejemplo, la primera ecuación en el ejemplo 2.26 trata a la fuente dependiente como una fuente independiente. La segunda ecuación en el ejemplo especifica la relación de la fuente dependiente con el voltaje, que es la incógnita en la primera ecuación.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D2.20 Encontrar V_o en el circuito de la figura D2.20.

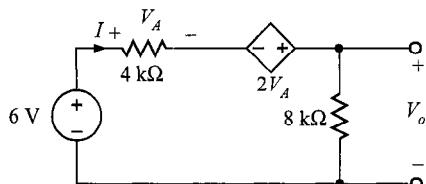


FIGURA D2.20

Resp.: $V_o = 12 \text{ V}$.

D2.21 Encontrar V_o en la red de la figura D2.21.

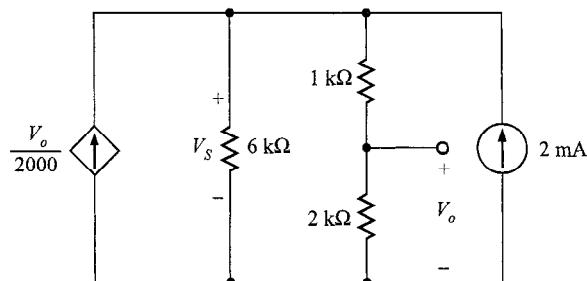


FIGURA D2.21

Resp.: $V_o = 8 \text{ V}$.

2.9 Mediciones de cd

Describiremos ahora los instrumentos que se emplean para medir físicamente corriente, voltaje, resistencia y potencia. Sin embargo, antes de proceder a discutir esos dispositivos, es provechoso describir el indicador de medición utilizado en muchos instrumentos para mediciones eléctricas.

El medidor de aguja D'Arsonval

El indicador de medición de D'Arsonval, que es un componente fundamental en muchos instrumentos eléctricos, se muestra en la figura 2.39. Este es un mecanismo de bobina móvil con imán permanente (PMMC) en el que una bobina de alambre fino se deja rotar entre los polos de un imán permanente. Si pasa una corriente a través de la bobina móvil, el campo magnético resultante reacciona con el campo magnético del imán permanente produciendo un par, que es compensada por un resorte restaurador. La deflexión de la aguja unida a la bobina es proporcional a la corriente de la bobina, producida por la cantidad que está siendo medida. Un medidor clasificado a 100 mV, 30 mA es un ejemplo de un medidor estándar típico.

Medición de corriente. El amperímetro es un dispositivo empleado para medir corriente, y se dispone comercialmente de una variedad de indicadores de medición. Cuando se conecta a una red, se inserta directamente en la trayectoria de la corriente que debe ser medida. Los amperímetros de cd deben conectarse de modo que la corriente entre en la terminal positiva para aumentar la deflexión en la escala.

En el caso ideal la resistencia interna de un amperímetro deberá ser cero. Sin embargo, los amperímetros prácticos tienen alguna pequeña resistencia interna, R_m , la cual puede producir un efecto de carga en circuitos de bajo voltaje y baja resistencia; es de-

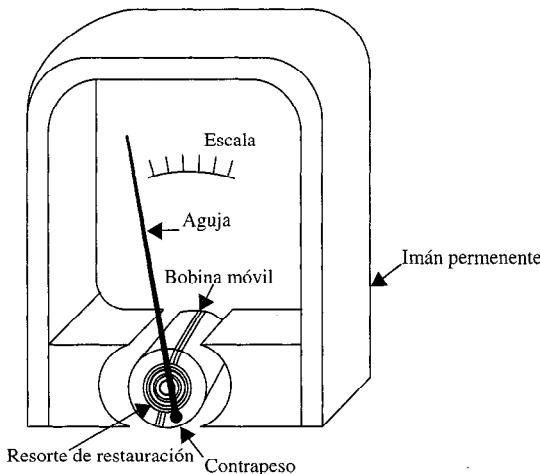


FIGURA 2.39 Indicador de medición de D'Arsonval.

cir, la corriente medida por el medidor cambia al insertar el medidor. Por tanto, es conveniente representar el amperímetro como se muestra en la figura 2.40, en la que toda la resistencia del medidor está agrupada en R_m .

E J E M P L O 2.29

Determinemos la resistencia interna de un amperímetro estándar que tiene una escala de 30 mA a 100 mV a escala completa.

S O L U C I Ó N La resistencia interna para este medidor es

$$R_m = \frac{100 \times 10^{-3}}{30 \times 10^{-3}} \\ = 3.33 \Omega$$

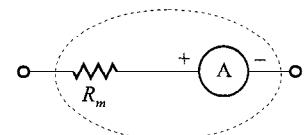


FIGURA 2.40
Representación del circuito de un amperímetro.

Ahora suponga que deseamos usar el mecanismo del amperímetro del ejemplo 2.29 para medir una corriente, como la que se muestra en la figura 2.41a, la cual es mayor que la escala de corriente del medidor. Podemos hacer esto desviando una gran parte de la corriente que debe ser medida alrededor del indicador de medición, como se muestra en la figura 2.41b. Note que la combinación en paralelo de R_m y R_{SH} forma un divisor de corriente. Seleccionando el valor apropiado de la resistencia de derivación, podemos usar el indicador de medición para medir una corriente mayor que la escala del mecanismo del medidor. Por ejemplo, la configuración que se muestra en la figura 2.41c es típica de un amperímetro multiescala. El siguiente ejemplo ilustra la selección de una resistencia de derivación para incrementar la escala de corriente.

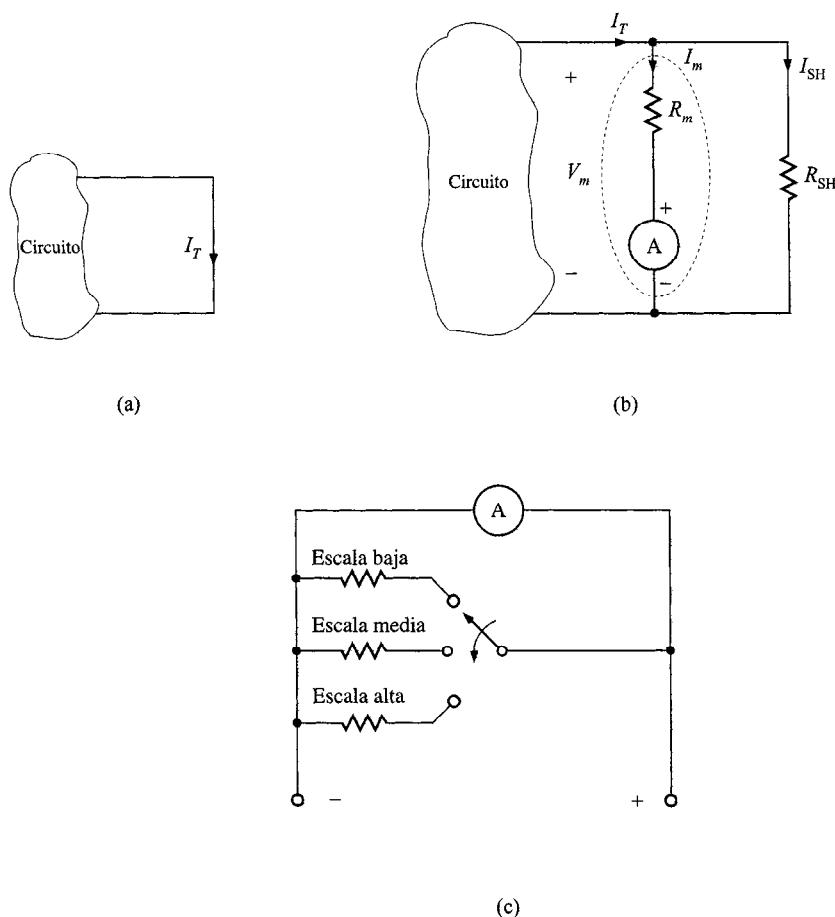


FIGURA 2.41 Circuitos utilizados para expandir la escala de un medidor.

E J E M P L O 2.30

Deseamos emplear un suministro de potencia de corriente ajustable de cd de 5 V, 500 mA para proporcionar la potencia para el circuito de sonido de un timbre de puerta como se muestra en la figura 2.42a. La bobina para el circuito de sonido tiene un límite de corriente de 250 mA. El único indicador de medición disponible para nosotros es el medidor de 30 mA, 100 mV descrito anteriormente. Por tanto, debemos seleccionar una resistencia de derivación, que al colocarla en paralelo con el medidor nos permita medir 250 mA a escala completa.

S O L U C I Ó N Con referencia a la figura 2.42b, la corriente total $I_T = 250$ mA. La corriente en el indicador de medición es $I_m = 30$ mA. Por tanto, usando la LCK

$$\begin{aligned}I_{SH} &= I_T - I_m \\&= 220 \text{ mA}\end{aligned}$$

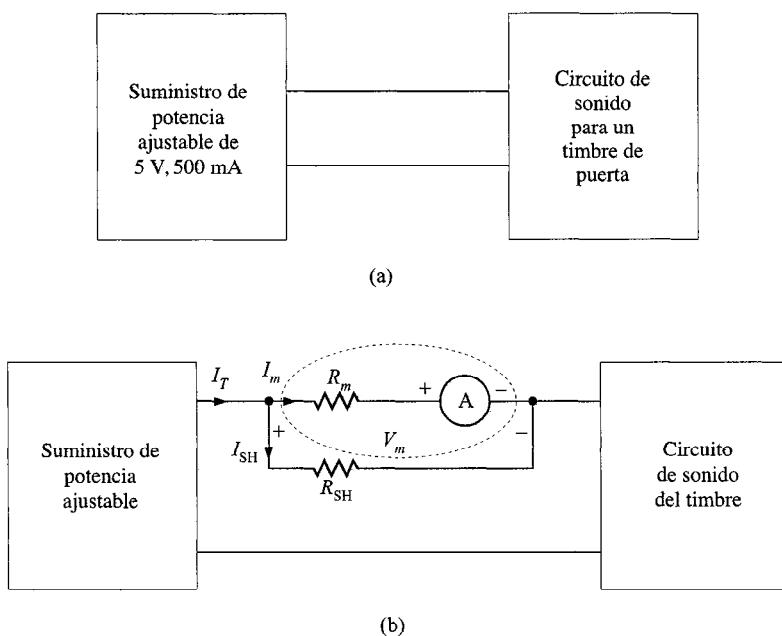


FIGURA 2.42 Circuitos utilizados en el ejemplo 2.30.

Como el voltaje $V_m = 100 \text{ mV}$ está a través de la resistencia del medidor y de la resistencia de derivación, el valor requerido de R_{SH} es

$$\begin{aligned} R_{SH} &= \frac{V_m}{I_{SH}} \\ &= \frac{0.1}{0.22} \\ &= 0.4545 \Omega \end{aligned}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

- D2.22** Un amperímetro de cd tiene un medidor a escala completa de 200 mV, 20 mA. Encuentre la resistencia del medidor.

Resp.: $R_m = 10 \Omega$.

- D2.23** Determine la cantidad de potencia que el amperímetro del problema de entrenamiento D2.22 disipa en la deflexión de escala completa.

Resp.: $P = 4 \text{ mW}$.

Medición de voltaje

Un voltímetro es el dispositivo básico utilizado para medir voltaje y se conecta en paralelo con el elemento cuyo voltaje se desea. A fin de obtener un aumento de la de-

flexión en la escala del medidor, la terminal + del voltímetro debe conectarse al punto de potencial más alto.

Una vez más la resistencia del indicador de medición es R_m y se representa como se muestra en la figura 2.40. Una resistencia R_{se} , llamada multiplicador, se conecta en serie con el indicador de medición. Esta resistencia R_{se} y el indicador de medición forman un divisor de voltaje y permite que el medidor sea usado en una forma que expande la escala de voltaje del medidor. El siguiente ejemplo ilustra esta técnica.

E J E M P L O 2.31

El control remoto de nuestro televisor no trabaja y sospechamos que la batería de 9 V del control está baja. Deseamos medir este voltaje, pero de todo lo que disponemos es de un indicador de medición de D'Arsonval de 100 mV, 30 mA. Determinemos el valor de la resistencia, R_{se} , que debe ser colocada en serie con el indicador de medición para medir este voltaje.

SOLUCIÓN El circuito para esta aplicación se muestra en la figura 2.43 y deberá producir una deflexión de escala completa de 9 V usando un indicador de medición de 100 mV, 30 mA. Para una deflexión a escala completa, $V_m = 100 \text{ mV}$ y, de aquí, utilizando la LVK

$$9 = I_m R_{se} + V_m$$

y como $V_m = 100 \text{ mV}$ e $I_m = 30 \text{ mA}$,

$$\begin{aligned} R_{se} &= \frac{9 - 0.100}{0.03} \\ &= 296.7 \Omega \end{aligned}$$

Recuerde del ejemplo 2.29 que la resistencia del medidor es 3.3Ω . Entonces, si el voltaje de la batería ha caído a 6 V, la corriente leída por el me-

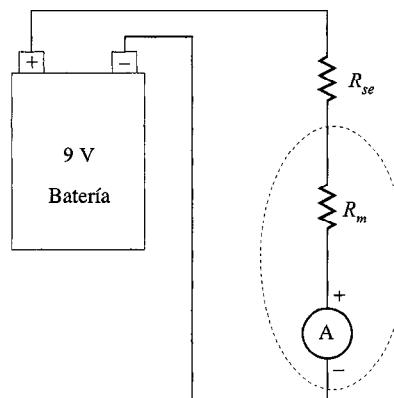


FIGURA 2.43 Circuito utilizado en el ejemplo 2.31.

$$I_m = \frac{6}{296.7 + 3.3} \\ = 20 \text{ mA}$$

didor sería, la cual es 6/9 o 2/3 a escala completa.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

- D2.24** Un medidor tiene una resistencia de 50Ω y una corriente a escala completa de 1 mA. Seleccione la re-

sistencia multiplicadora necesaria para medir 12 V a escala completa.

Resp.: $R_{se} = 11.95 \text{ k}\Omega$.

Finalmente, el voltímetro, como el amperímetro, tiene un efecto de carga en el circuito. La magnitud del efecto depende de la resistencia del voltímetro y de la resistencia de los elementos del circuito a los que está conectado el voltímetro. Cuando se conecta un voltímetro a través de un elemento, algo de corriente fluye en el medidor. Esta corriente será insignificante si la resistencia del medidor es mucho más alta que la de los elementos a través de los que está conectado.

La sensibilidad del voltímetro es una medición cuantitativa del efecto de carga. Se define como el recíproco de la corriente requerida para una deflexión a escala completa, es decir,

$$\text{Sensitividad} = \frac{1}{I_m} \Omega /V$$

Por tanto, un voltímetro con un alcance de 50 volts, que tiene un indicador de medición de $100 \mu\text{A}$, tiene una sensitividad de

$$\text{Sensitividad} = \frac{1}{100 \times 10^{-6}} \\ = 10\,000 \Omega /V$$

y, por tanto, la resistencia del medidor es

$$R_m = (\text{sensitividad})(\text{escala de voltaje}) \\ = (10\,000)(50) \\ = 0.5 \text{ M}\Omega$$

La sensitividad de un medidor en ohms/volt normalmente está impresa en la escala del medidor, lo cual nos ayuda a seleccionar un medidor que no cargará un circuito y causará errores de medición.

Medición de resistencia

Un óhmetro es un instrumento utilizado para medir la resistencia. El circuito de un óhmetro, mostrado en la figura 2.44a, consiste típicamente en un indicador de medición en serie con una batería y una resistencia reguladora. La escala del medidor lee típicamente en ohms de derecha a izquierda como se muestra en la figura 2.44b. Si $R_x = \infty$, es decir, los cables o terminales del óhmetro están abiertas, no hay deflexión del medidor. Sin embargo, si $R_x = 0$, es decir, si los cables del medidor están en corto, fluye la corriente máxima en el circuito y ocurre una deflexión de escala completa. La resistencia reguladora R_{req} es un dispositivo de calibración, que nos permite ajustar a cero el indicador de medición cuando las terminales están en corto, y así compensar para la medición de la resistencia y el envejecimiento de la batería.

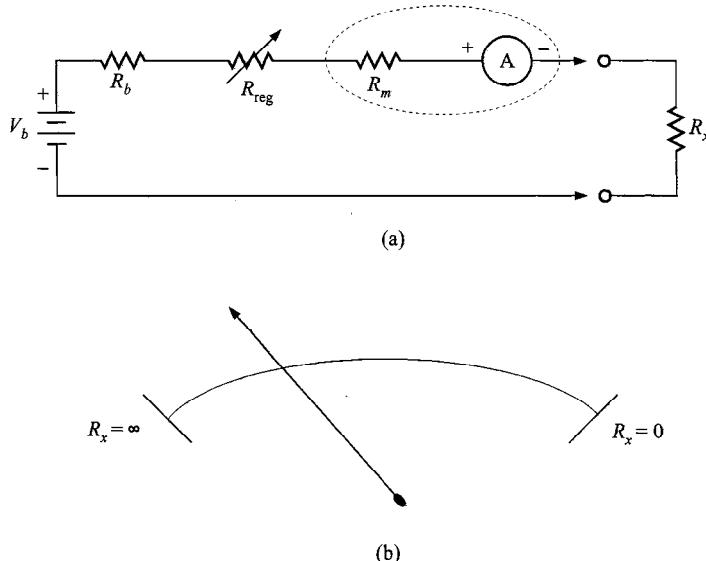


FIGURA 2.44 Circuito y escala del óhmetro.

El óhmetro difiere del amperímetro y del voltímetro en un aspecto importante: nunca debe conectarse a un circuito energizado. Es decir, el elemento que pretende medirse debe estar desconectado del circuito original cuando se realiza la medición.

Aunque este tipo de óhmetro es muy útil, no es un instrumento de precisión. Un dispositivo mucho más preciso para medir valores de resistencia con un amplio alcance es el *Puente de Wheatstone*. El circuito del Puente de Wheatstone se muestra en la figura 2.45. En esta red, las resistencias R_1 , R_2 y R_3 son conocidas. R_x es la resistencia desconocida. El dispositivo en la rama central es un mecanismo sensor de D'Arsonval en el ámbito de microamperes llamado galvanómetro.

El puente se usa de la siguiente manera: la resistencia desconocida R_x se conecta como se muestra en la figura 2.45 y entonces se ajusta R_3 hasta que no hay corriente en el galvanómetro. En este punto se dice que el puente está balanceado. Bajo esta condición balanceada, $I_G = 0$, y, de aquí, la LCK aplicada a los nodos centrales del puente da

$$I_1 = I_3$$

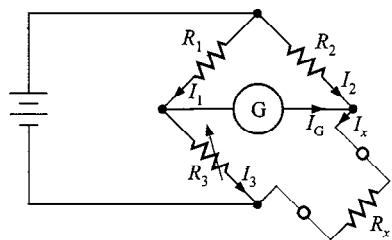


FIGURA 2.45 Circuito del Puente de Wheatstone.

e

$$I_2 = I_x$$

Además, como $I_G = 0$, no hay caída de voltaje a través del galvanómetro y, por tanto, la LVK requiere que

$$I_1 R_1 = I_2 R_2$$

e

$$I_3 R_3 = I_x R_x$$

Dividiendo una ecuación entre la otra y considerando el hecho de que $I_1 = I_3$ e $I_2 = I_x$, se obtiene la relación

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_x}$$

por lo que

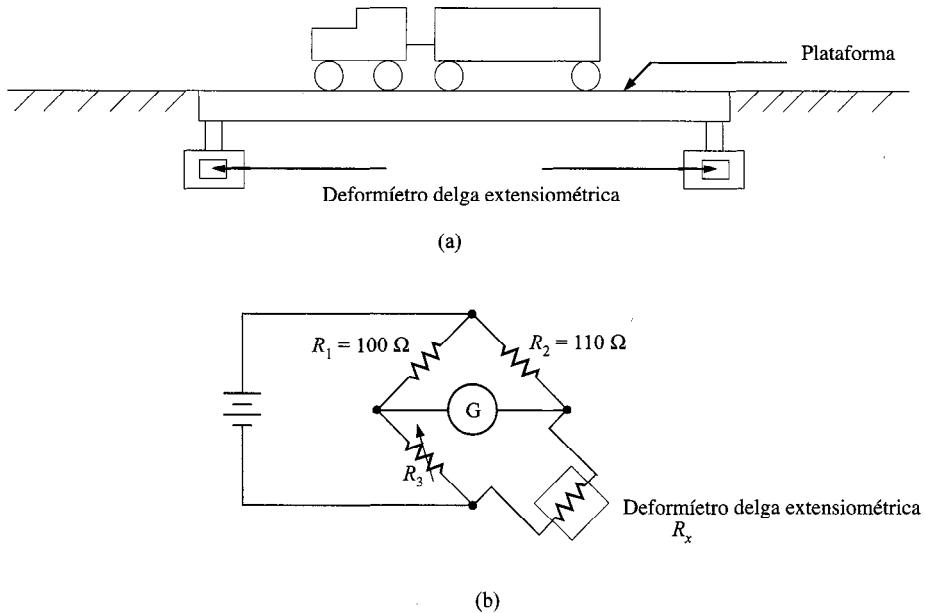
$$R_x = \left(\frac{R_2}{R_1} \right) R_3$$

Es interesante notar que R_x es independiente de la fuente de voltaje y dependiente sólo de la razón de R_2 a R_1 y no a sus valores específicos. En unidades comerciales la razón se hace igual a una potencia de diez comutando en el circuito del puente resistencias con valores de 1, 10, 100, y así sucesivamente.

Además del uso del Puente de Wheatstone para medir una resistencia desconocida, éste es empleado por los ingenieros para medir la deformación en un material sólido, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

E J E M P L O 2.32

Un sistema utilizado para determinar el peso de un camión se muestra en la figura 2.46a. La plataforma está soportada por cilindros sobre los que se montan deformímetros. Los deformímetros, que miden la deformación cuando el cilindro se desvía bajo la carga, están conectados a un Puente de Wheatstone, como se muestra en la figura 2.46b. El deformímetro tiene una resistencia de $120\ \Omega$ bajo condiciones de no carga, y cambia su valor bajo carga. La resistencia variable en el puente es un dispositivo de precisión calibrado.

**FIGURA 2.46** Diagramas utilizados en el ejemplo 2.32.

El peso se determina de la siguiente manera: la ΔR_3 requerida para balancear el puente representa la Δ de deformación, que cuando se multiplica por el módulo de elasticidad da la Δ de tensión. La Δ de tensión multiplicada por el área de la sección transversal del cilindro produce la Δ de carga, que se usa para determinar el peso.

Determinemos el valor de R_3 sin carga cuando el puente está balanceado y su valor cuando la resistencia del deformímetro cambia a 120.24Ω bajo carga.

SOLUCIÓN Usando la ecuación de balance para el puente, el valor de R_3 sin carga es

$$R_3 = \left(\frac{R_1}{R_2} \right) R_x$$

$$= \left(\frac{100}{110} \right) (120)$$

$$= 109.0909 \Omega$$

Bajo carga, el valor de R_3 es

$$R_3 = \left(\frac{100}{110} \right) (120.24)$$

$$= 109.3091 \Omega$$

Por tanto, la ΔR_3 es

$$\begin{aligned}\Delta R_3 &= 109.3091 - 109.0909 \\ &= 0.2182 \Omega\end{aligned}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D225 Dado el circuito de puente de la figura 2.45, en-

cuentre el valor de R_x si el puente está balanceado a $R_1 = 200 \Omega$, $R_2 = 240 \Omega$, y $R_3 = 220 \Omega$.

Resp.: $R_x = 264 \Omega$.

Mediciones de potencia

En un circuito de cd, la potencia es el producto de voltaje y corriente. Por tanto, la potencia puede derivarse de mediciones de corriente y voltaje. La potencia de cd puede medirse directamente utilizando un voltímetro junto con un amperímetro; el wáttmetro normalmente no se usa en mediciones de cd. El wáttmetro se usa de manera extensa para medir potencia en circuitos de ca, y discutiremos este dispositivo con algún detalle en al análisis de circuitos de ca posteriormente en este texto.

2.10 Aplicaciones

A lo largo de este libro procuramos presentar una amplia variedad de ejemplos que demuestren la utilidad del material bajo discusión en un entorno práctico. A fin de realizar nuestra presentación de los aspectos prácticos del análisis y diseño de circuitos, hemos dedicado secciones, como ésta, en la mayoría de los capítulos con el propósito específico de presentar ejemplos adicionales con una orientación a la aplicación.

EJEMPLO 2.33

Los bucles (elementos de calentamiento) de tipo eléctrico con frecuencia están fabricados de tiras de nicromio resistente. La operación del bucle es completamente simple. Se pasa una corriente a través del elemento de calentamiento haciendo que disipe potencia en forma de calor. También, un conmutador selector de cuatro posiciones, mostrado en la figura 2.47, controla la potencia de salida (calor). En este caso el bucle consiste en dos tiras de nicromio modeladas por las resistencias R_1 y R_2 , donde $R_1 < R_2$.

1. ¿Cómo deberían etiquetarse las posiciones A , B , C y D con respecto a los ajustes alto, medio, bajo y apagado?
2. Si deseamos que alto y medio correspondan a 2 000 W y 1 200 W de disipación de potencia, respectivamente, ¿cuáles son los valores de R_1 y R_2 ?
3. ¿Cuál es la disipación de potencia en el ajuste bajo?

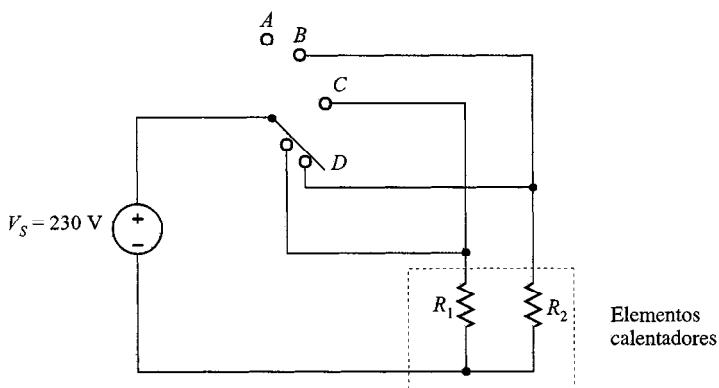


FIGURA 2.47 Circuito selector de un calentador de resistencia simple.

SOLUCIÓN La posición *A* es el ajuste de apagado ya que no fluye corriente a los elementos calentadores. En la posición *B*, la corriente fluye sólo a través de R_2 , mientras que en la posición *C* la corriente fluye sólo a través de R_1 . Como $R_1 < R_2$, se disipará más potencia cuando el conmutador está en la posición *C*. De esta forma, la posición *C* es el ajuste medio, *B* es el bajo y, por eliminación, la posición *D* es el ajuste alto.

Cuando el conmutador está en el ajuste medio, sólo R_2 disipa potencia, y podemos escribir R_2 como

$$R_2 = \frac{V_S^2}{P_2} = \frac{230^2}{1\,200}$$

o
 $R_2 = 44.08 \Omega$

En el ajuste alto, se entregan 2 000 W de potencia total a R_1 y R_2 . Como R_2 disipa 1 200 W, R_1 debe disipar los restantes 800 W. Por tanto, R_1 es

$$R_1 = \frac{V_S^2}{P_1} = \frac{230^2}{800}$$

o
 $R_1 = 66.13 \Omega$

Finalmente, en el ajuste bajo, sólo R_1 está conectado a la fuente de voltaje; así, la disipación de potencia en este ajuste es 800 W.

E J E M P L O 2.34

Un circuito equivalente para un amplificador de transistores utilizado en un reproductor de cintas portátil se muestra en la figura 2.48. La fuente ideal independiente, V_S , y R_S representan la circuitería de la cabeza magnética reproductora. La fuente dependiente, R_o y R_{ent} modelan el transistor. Finalmente, la resistencia R_L modela la carga, la cual en este caso es otro circuito de transistor. Encontremos la ganancia de voltaje de la red.

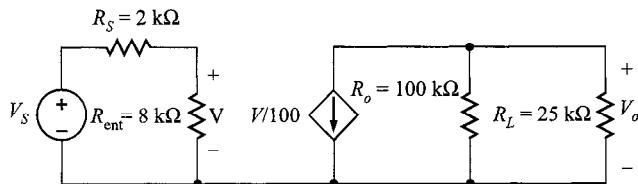


FIGURA 2.48 Modelo de circuito amplificador de transistor.

S O L U C I Ó N La ganancia del amplificador de transistor puede derivarse como sigue. El voltaje de salida puede expresarse como

$$V_o = - \frac{V}{100} (R_o // R_L)$$

Del divisor de voltaje de entrada, podemos expresar V como función de V_S .

$$V = V_S \left(\frac{R_{ent}}{R_{ent} + R_S} \right)$$

En donde

$$V_o = - \frac{V_S}{100} \left(\frac{R_{ent}}{R_{ent} + R_S} \right) (R_o // R_L)$$

Dados los valores de los componentes en la figura 2.48, la ganancia de voltaje es

$$A_V = \frac{V_o}{V_S} = -160$$

2.11 Diseño de circuitos

La vasta mayoría de este texto está relacionada con el análisis de circuitos; es decir, dado un circuito en el que todos los componentes están especificados, el análisis incluye encontrar aspectos tales como el voltaje a través de algún elemento o la corriente a través de otro. Además, la solución de un problema de análisis es por lo general única.

En contraste, el diseño incluye determinar la configuración del circuito que satisfará ciertas especificaciones. Además, la solución por lo general no es única pues hay varias maneras de satisfacer las especificaciones de comportamiento del circuito. También es posible que no exista una solución que cumpla los criterios de diseño.

Además de satisfacer ciertas especificaciones técnicas, los diseños normalmente también deben cumplir otros criterios como el económico, ambiental y las restricciones de seguridad. Por ejemplo, si el diseño de un circuito que satisface las especificaciones técnicas es demasiado caro o inseguro, no es viable a pesar de su mérito técnico.

En este punto, el número de elementos que podemos emplear en el diseño de circuitos está limitado principalmente a las resistencias lineales y los elementos activos que hemos presentado. Sin embargo, conforme progresemos a lo largo del texto introduciremos un número de otros elementos, por ejemplo el amplificador operacional, el capacitor o condensador y el inductor, que reforzarán significativamente nuestra capacidad de diseño.

Iniciamos nuestra discusión del diseño de circuitos considerando un par de ejemplos simples, que demuestran la selección de componentes específicos para satisfacer ciertas especificaciones del circuito.

E J E M P L O 2.35

Un aficionado a la electrónica que ha construido su propio amplificador estereofónico quiere agregar un panel indicador a contraluz a su creación para una imagen profesional. Su diseño del panel requiere siete focos –dos que operen a 12 V/15 mA y cinco a 9 V/5 mA–. Afortunadamente, su diseño de estéreo tiene ya un suministro de 12 V de cd de calidad; sin embargo, no hay suministro de 9 V. En lugar de construir una nueva fuente de potencia de cd, utilicemos el circuito barato que se muestra en la figura 2.49a para diseñar un convertidor de 12 V a 9 V, con la restricción de que la variación en V_2 será de no más de $\pm 5\%$. En particular, debemos determinar los valores necesarios de R_1 y R_2 .

SOLUCIÓN Primero, las lámparas L_1 y L_2 no tienen efecto en V_2 . Segundo, cuando las lámparas L_3-L_7 están encendidas, cada una de ellas tiene una resistencia equivalente de

$$R_{eq} = \frac{V_2}{I} = \frac{9}{0.005} = 1.8 \text{ k}\Omega$$

Mientras V_2 permanece claramente constante, la resistencia de la lámpara también será completamente constante. De este modo, el modelo de circuito necesario para nuestro diseño se muestra en la figura 2.49b. El voltaje V_2 estará a su máximo valor de $9 + 5\% = 9.45$ V cuando L_3-L_7 están todas apagadas. En este caso R_1 y R_2 están en serie y V_2 puede expresarse por una simple división de voltaje como

$$V_2 = 9.45 = 12 \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right]$$

Reacomodando la ecuación se obtiene

$$\frac{R_1}{R_2} = 0.27$$

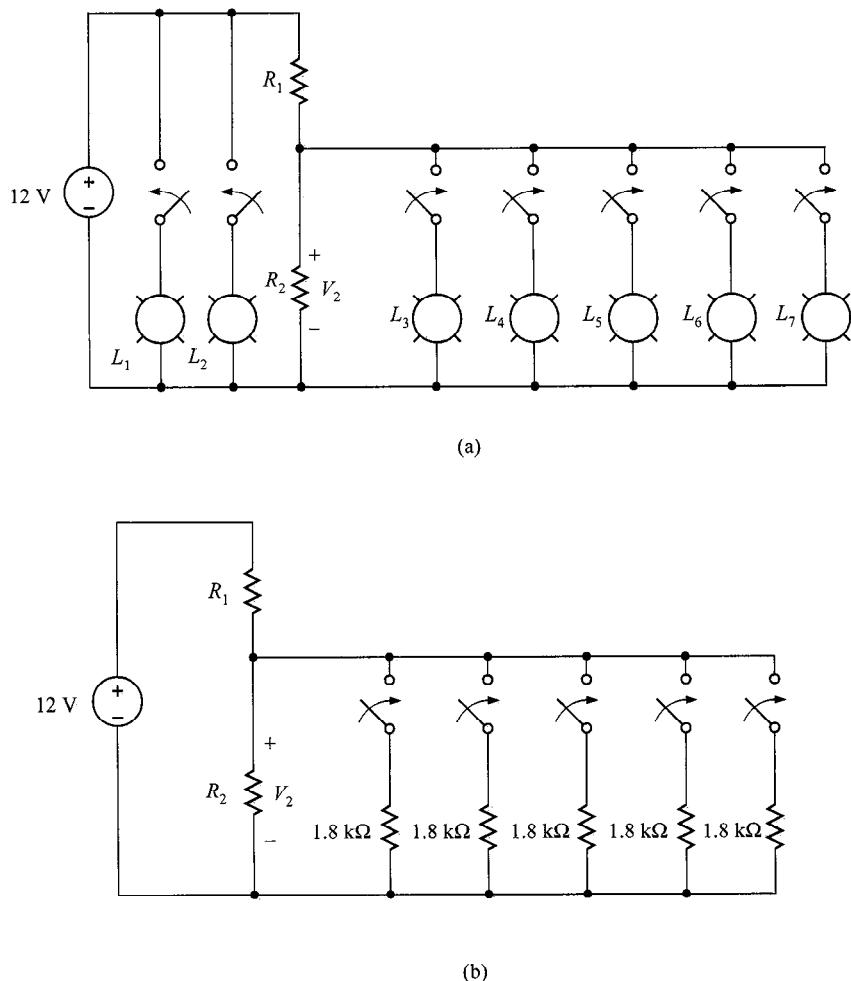


FIGURA 2.49 Circuito convertidor de 12 V a 9 V para suministro de potencia a un panel de luces.

Una segunda expresión que incluya R_1 y R_2 puede desarrollarse considerando el caso cuando L_3-L_7 están todas conectadas, lo que hace que V_2 alcance su valor mínimo de $9 - 5\%$ o 8.55 V. Ahora, la resistencia efectiva de las lámparas es cinco resistencias de $1.8 \text{ k}\Omega$ en paralelo, o 360Ω . La expresión correspondiente para V_2 es

$$V_2 = 8.55 = 12 \left[\frac{R_2 // 360}{R_1 + (R_2 // 360)} \right]$$

la cual puede reescribirse en la forma

$$\frac{\frac{360R_1}{R_2} + 360 + R_1}{360} = \frac{12}{8.55} = 1.4$$

Sustituyendo para R_1/R_2 , que vemos arriba, encontramos

$$R_1 = 360 [1.4 - 1 - 0.27]$$

o

$$R_1 = 46.8 \Omega$$

y así para R_2

$$R_2 = 173.3 \Omega$$

EJEMPLO 2.36

El circuito del panel de control de un amplificador estereofónico requiere el uso de tres diferentes voltajes en los nodos del circuito. Los voltajes necesarios son 4 V, 16 V y 24 V. Criterios como peso, costo y tamaño dictan que esos voltajes deben ser suministrados por una sola fuente de voltaje. Además, las restricciones de calor establecen que el suministro debe disipar menos de 5 watts. Suponiendo que no hay efecto de carga del balance de la red, diseñe un cuerdita de voltaje (divisor de voltaje de resistencia múltiple) que satisfaga los requerimientos.

SOLUCIÓN Una fuente de 24 V puede proporcionar directamente uno de los voltajes y el divisor de voltaje de la figura 2.50 puede usarse para generar los otros dos. Los requerimientos de potencia limitan nuestras elecciones a corrientes menores que 208.33 mA. El valor exacto que elegimos es un poco arbitrario y, por tanto, seleccionamos $I = 200$ mA. La resistencia es entonces

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{24}{0.2} = 120 \Omega$$

Utilizando la división de voltaje, encontramos que

$$\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_3}{120} = \frac{4}{24}$$

o

$$R_3 = 20 \Omega$$

De manera similar

$$\frac{R_2}{120} = \frac{16 - 4}{24}$$

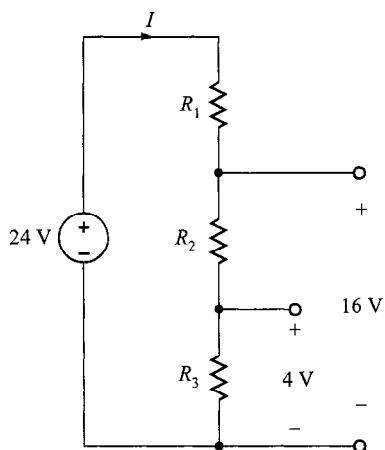


FIGURA 2.50 Divisores de voltaje para generación de voltajes intermedios.

O

$$R_2 = 60 \Omega$$

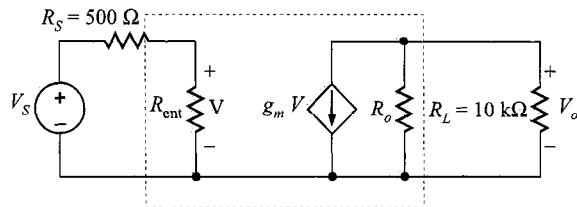
Finalmente, como la resistencia total es 120Ω , $R_1 = 40 \Omega$.

E J E M P L O 2.37

La red de la figura 2.51 es un circuito equivalente para un amplificador de transistor utilizado en un preamplificador estereofónico. La circuitería de entrada consistente en una fuente de 2 mV en serie con una resistencia de 500Ω modela la salida de un reproductor de discos compactos. La fuente dependiente, R_{ent} , y R_0 modelan al transistor, el cual amplifica la señal y la manda al amplificador de potencia. La resistencia de carga de $10 \text{ k}\Omega$ modela la entrada al amplificador de potencia que realmente impulsa las bocinas. Debemos diseñar un amplificador de transistor como el que se muestra en la figura 2.51, que proporcionará una ganancia total de -200. En la práctica realmente no variaremos los parámetros del dispositivo para lograr la ganancia deseada; más bien seleccionaremos un transistor de los libros de datos del fabricante que satisfaga las especificaciones requeridas. Los parámetros de modelo para tres transistores diferentes se enlistan a continuación:

Valores de los parámetros de transistores del fabricante

Número de parte	R_{ent} ($\text{k}\Omega$)	$R_0 (\text{k}\Omega)$	g_m (mA/V)
1	1.0	50	50
2	2.0	75	30
3	8.0	80	20

**FIGURA 2.51** Modelo de circuito de un amplificador de transistor.

Diseñar el amplificador eligiendo el transistor que produzca la ganancia más exacta. ¿Cuál es el porcentaje de error de su elección?

SOLUCIÓN El voltaje de salida puede escribirse como

$$V_o = -g_m V (R_0 // R_L)$$

Usando la división de voltaje en la entrada para encontrar V

$$V = V_S \left(\frac{R_{\text{ent}}}{R_{\text{ent}} + R_S} \right)$$

Combinando esas dos expresiones podemos resolver para la ganancia

$$A_V = \frac{V_o}{V_S} = -g_m \left(\frac{R_{\text{ent}}}{R_{\text{ent}} + R_S} \right) (R_o // R_L)$$

Usando los valores de los parámetros de los tres transistores, encontramos que

Número de parte	Ganancia
1	-277.8
2	-211.8
3	-167.3

Obviamente, la mejor alternativa es el transistor número 2, el cual tiene un error de ganancia de

$$\text{Porcentaje de error} = \left(\frac{211.8 - 200}{200} \right) \times 100\% = 5.9\%$$

2.12 Resumen

Este capítulo ha tratado principalmente con las leyes fundamentales que empleamos en nuestro análisis de circuitos: la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff. El elemento de cir-

cuito resistivo ha sido introducido y hemos mostrado cómo calcular una resistencia equivalente cuando esos elementos se colocan en serie o en paralelo. Se han presentado el divisor de corriente y el divisor de voltaje. Hemos ilustrado también el uso de la transformación Y-a-delta en la simplificación de la red. Hemos mostrado que, empleando las leyes fundamentales, podemos analizar algunos circuitos bastante complicados que contienen tanto fuentes independientes como dependientes.

Puntos clave

En este capítulo aparecen resultados principales. Por tanto, es de extrema importancia que los siguientes conceptos sean bien comprendidos.

- Ley de Ohm: la caída de voltaje a través de una resistencia es directamente proporcional a la corriente que fluye a través de ella; es decir. $V = IR$, donde R se mide en ohms.
- Ley de corriente de Kirchhoff: la suma algebraica de las corrientes que salen (entran) a un nodo es cero.
- Ley de voltaje de Kirchhoff: la suma algebraica de las caídas (elevaciones) de voltaje alrededor de una malla (es decir, una trayectoria cerrada) es cero.
- La corriente en un circuito de una sola malla puede obtenerse aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff y la ley de Ohm.
- El voltaje a través de un circuito de un solo par de nodos puede obtenerse aplicando la ley de corriente de Kirchhoff y la ley de Ohm.
- La división de corriente muestra que la corriente se divide entre resistencias en paralelo en proporción inversa a las trayectorias de resistencia.
- La división de voltaje muestra que el voltaje se divide entre resistencias en serie en proporción directa a sus resistencias.
- Resistencias en serie y en paralelo pueden combinarse sumando directamente las resistencias en serie y sumando la conductancia de las resistencias en paralelo.
- La transformación Y-a-delta nos permite hacer un intercambio equivalente entre resistencias conectadas en una configuración delta y resistencias conectadas en una configuración Y.
- Para un corto circuito, la resistencia es cero, el voltaje a través del corto es cero, y la corriente en el corto se determina para el resto del circuito.
- Para un circuito abierto, la resistencia es infinita, la corriente es cero y el voltaje a través de las terminales abiertas se determina para el resto del circuito.

Problemas

2.1. Un modelo para un lámpara de bolsillo estándar de dos pilas tamaño D se muestra en la figura P2.1. Encuentre la potencia disipada en la lámpara.

2.2. Un automóvil usa dos faros de halógeno conectados como se muestra en la figura P2.2. Determine la potencia suministrada por la batería si cada faro toma 3 A de corriente.

2.3. Hace muchos años una serie de luces para árbol navideño era fabricada en la forma que se muestra en la figura P2.3a. Hoy las luces se fabrican como se muestra en la figura P2.3b. ¿Existe una buena razón para este cambio?

2.4. Encuentre la corriente I y la potencia suministrada por la fuente en la red de la figura P2.4.

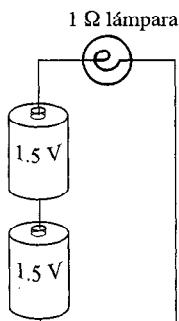


FIGURA P2.1

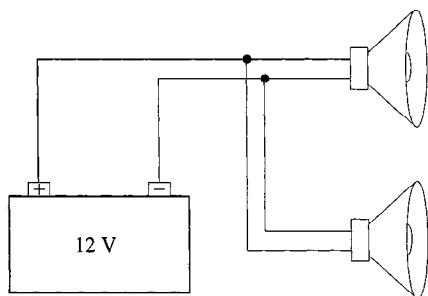
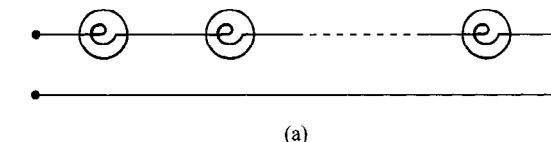


FIGURA P2.2



(a)

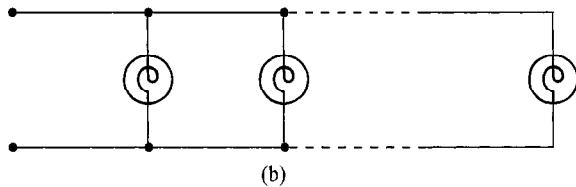


FIGURA P2.3

2.5. En el circuito de la figura P2.5, encuentre el voltaje a través de la fuente de corriente y la potencia absorbida por la resistencia.

2.6. Si la resistencia de $10 \text{ k}\Omega$ en la red de la figura P2.6 absorbe 2.5 mW , encontrar V_S .

2.7. En la red de la figura P2.7, la potencia absorbida por R_x es 5 mW . Encontrar R_x .

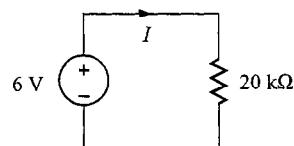


FIGURA P2.4

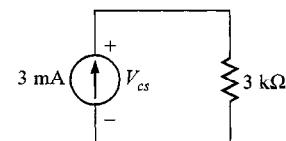


FIGURA P2.5

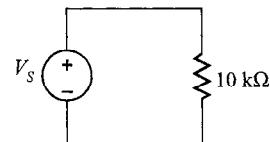


FIGURA P2.6

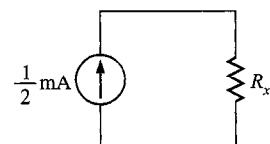


FIGURA P2.7

2.8. Encontrar I_1 en la red de la figura P2.8.

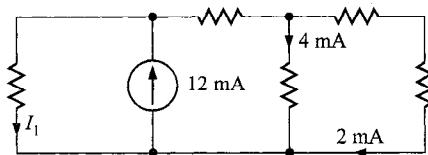


FIGURA P2.8

2.9. Encontrar I_1 e I_2 en el circuito de la figura P2.9.

2.10. Encontrar I_o en el circuito de la figura P2.10.

2.11. Encontrar I_o e I_1 en el circuito de la figura P2.11.

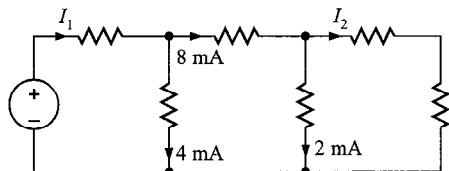


FIGURA P2.9

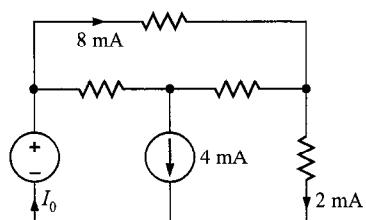


FIGURA P2.10

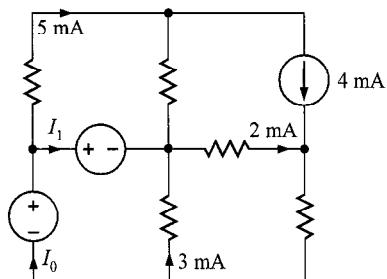


FIGURA P2.11

2.12. Encontrar I_x en el circuito de la figura P2.12.

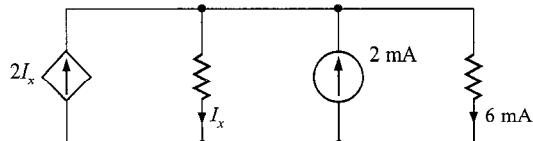


FIGURA P2.12

2.13. Encontrar I_x en la red de la figura P2.13.

2.14. Encontrar V_{bd} en el circuito de la figura P2.14.

2.15. Encontrar V_{ae} y V_{ce} en la red de la figura P2.15.

2.16. Encontrar V_{ac} en la red de la figura P2.16.

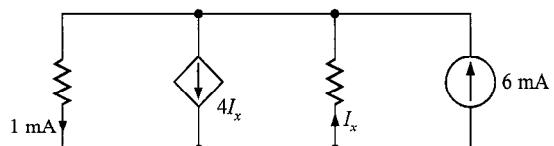


FIGURA P2.13

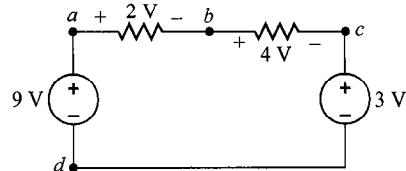


FIGURA P2.14

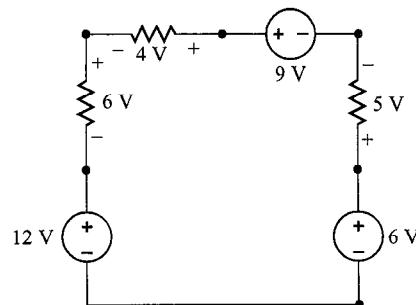


FIGURA P2.15

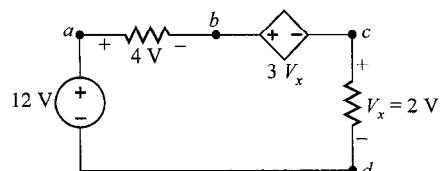


FIGURA P2.16

2.17. Encontrar V_{ad} y V_{ce} en el circuito de la figura P2.17.

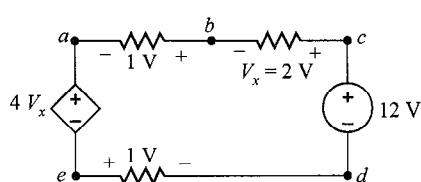


FIGURA P2.17

- 2.18. Encontrar V_{ac} en la red de la figura P2.18.

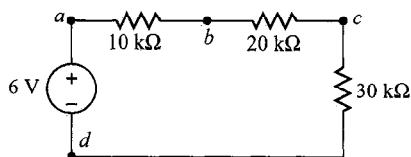


FIGURA P2.18

- 2.19. Encontrar I y V_{bd} en el circuito de la figura P2.19.

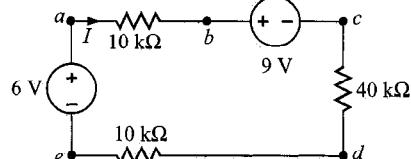


FIGURA P2.19

- 2.20. Encontrar la potencia suministrada por la fuente de 12 V y la potencia absorbida por la resistencia de 40 kΩ en la red de la figura P2.20.

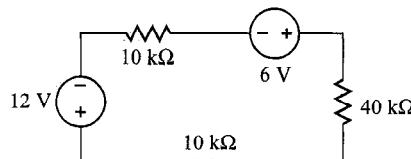


FIGURA P2.20

- 2.21. Encontrar la potencia absorbida por la resistencia de 30 kΩ en el circuito de la figura P2.21.

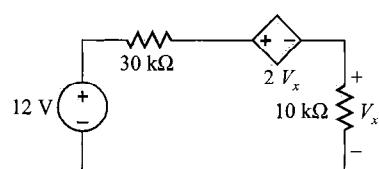


FIGURA P2.21

- 2.22. Encontrar V_1 en la figura P2.22.

- 2.23. Encontrar I_o en el circuito de la figura P2.23.

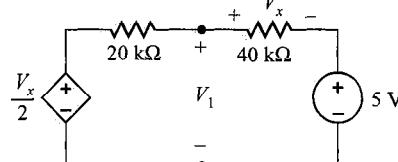


FIGURA P2.22

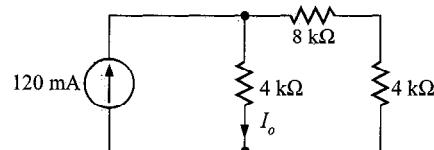


FIGURA P2.23

- 2.24. Determine I_1 y V_0 en el circuito de la figura P2.24.

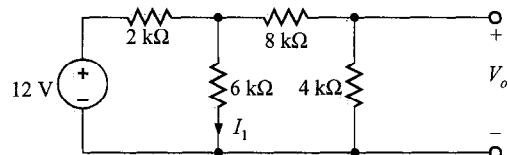


FIGURA P2.24

- 2.25. Encontrar I_1 y V_0 en el circuito de la figura P2.25.

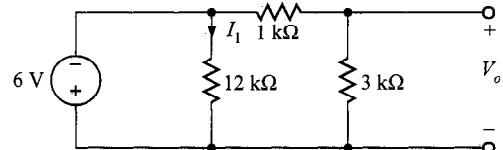


FIGURA P2.25

- 2.26. Determine V_0 en la red de la figura P2.26.

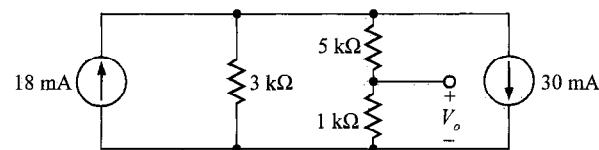


FIGURA P2.26

- 2.27. Si la conductancia de cada resistencia en la red de la figura P2.27 es 250 μS , encontrar la resistencia en las terminales A-B.

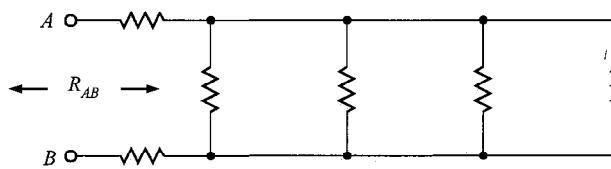


FIGURA P2.27

2.28. Encontrar R_{AB} en la red de la figura P2.28.

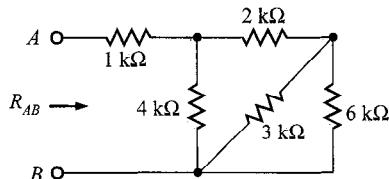


FIGURA P2.28

2.29. Determine R_{AB} en el circuito de la figura P2.29.

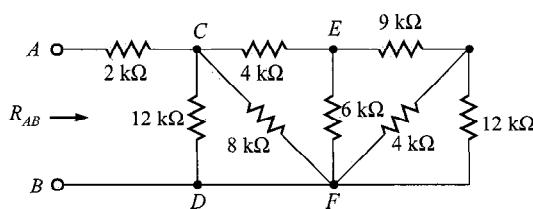


FIGURA P2.29

2.30. Encontrar R_{AB} en la red de la figura P2.30.

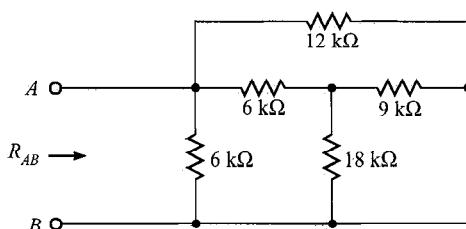


FIGURA P2.30

2.31. Encontrar R_{AB} en el circuito de la figura P2.31.

2.32. Determine I_o en el circuito de la figura P2.32.

2.33. Determine el valor de V_o en el circuito de la figura P2.33.

2.34. Encontrar I_o en el circuito de la figura P2.34.

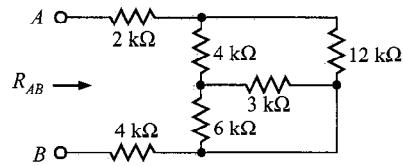


FIGURA P2.31

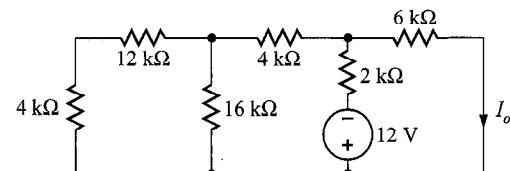


FIGURA P2.32

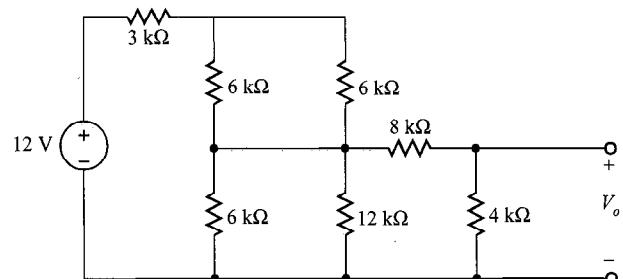


FIGURA P2.33

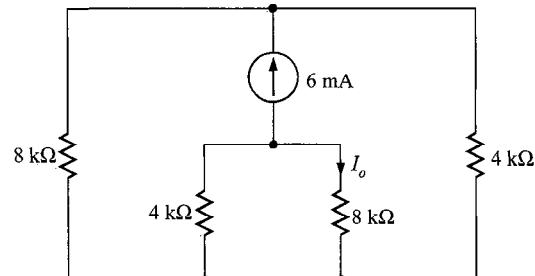


FIGURA P2.34

2.35. Determine el valor de V_o en la red de la figura P2.35.

2.36. Encontrar V_o en la red de la figura P2.36.

2.37. Encontrar V_o en la red de la figura P2.37.

2.38. Determine el valor de V_o en el circuito de la figura P2.38.

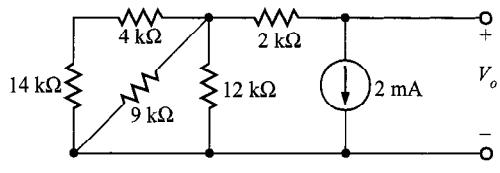


FIGURA P2.35

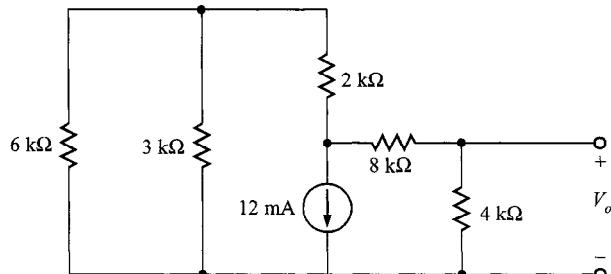


FIGURA P2.36

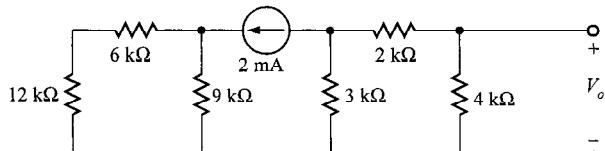


FIGURA P2.37

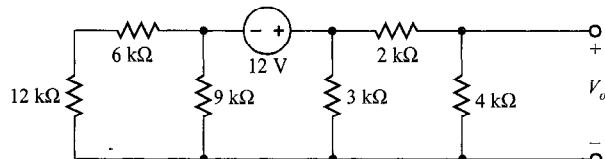


FIGURA P2.38

- 2.39. Encontrar V_o en la red de la figura P2.39.
- 2.40. Encontrar I_o en el circuito de la figura P2.40.
- 2.41. Determine el valor de V_o en la red de la figura P2.41.
- 2.42. Encontrar I_o en el circuito de la figura P2.42.
- 2.43. Determine el valor de I_o en el circuito de la figura P2.43.
- 2.44. Encontrar I_o en el circuito de la figura P2.44.

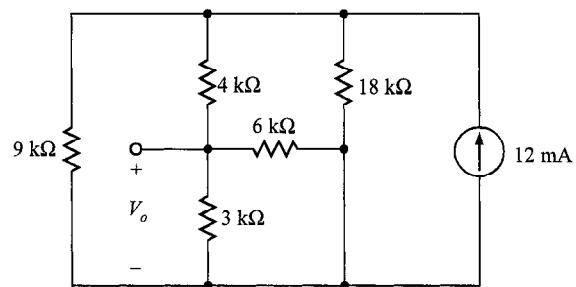


FIGURA P2.39

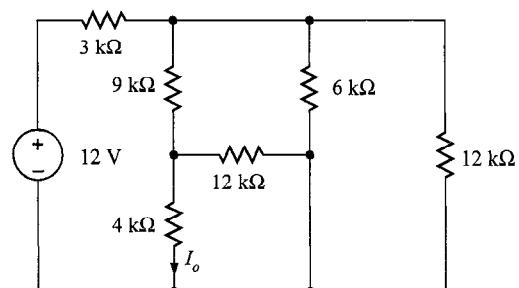


FIGURA P2.40

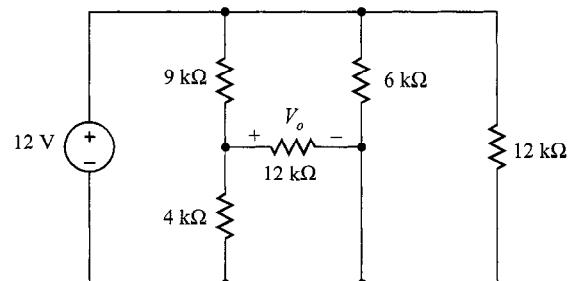


FIGURA P2.41

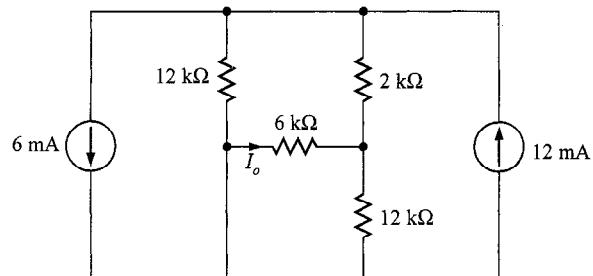


FIGURA P2.42

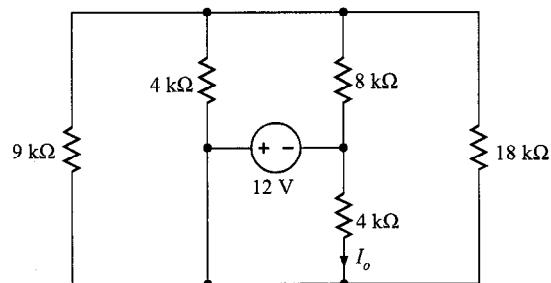


FIGURA P2.43

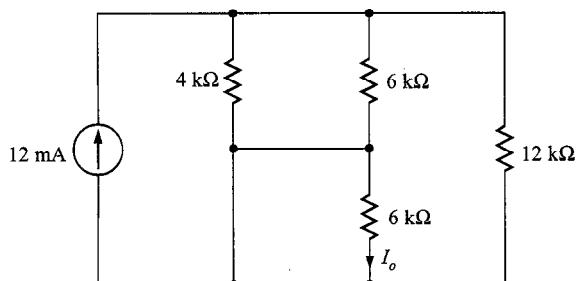


FIGURA P2.44

2.45. Determine el valor de V_o en el circuito de la figura P2.45.

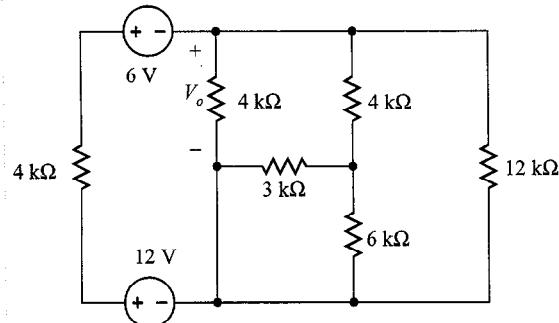


FIGURA P2.45

2.46. Encontrar V_o en la red de la figura P2.46.

2.47. Si $V_o = 4$ V en la red de la figura P2.47, encontrar V_s .

2.48. Dado que $V_o = 2$ V en el circuito de la figura P2.48, encontrar V_s .

2.49. Si $V_o = 6$ V en el circuito de la figura P2.49, encontrar I_s .

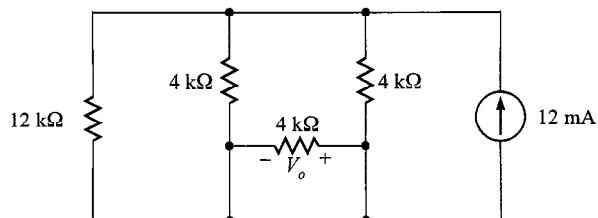


FIGURA P2.46

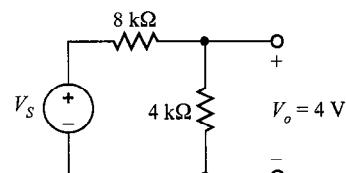


FIGURA P2.47

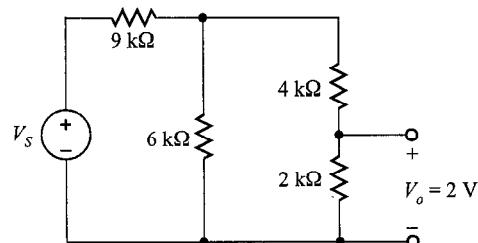


FIGURA P2.48

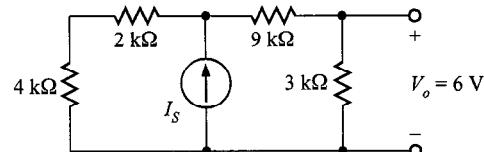


FIGURA P2.49

2.50. Dado que $V_1 = 5$ V en el circuito de la figura P2.50, encontrar I_s .

2.51. Si la potencia absorbida por la resistencia de $4 \text{ k}\Omega$ en la red de la figura P2.51 es 36 mW , encontrar I_o .

2.52. Si $I_o = 2 \text{ mA}$ en la red de la figura P2.52, encontrar V_s .

2.53. Si $I_o = 4 \text{ mA}$ en la red de la figura P2.53, encontrar I_s .

2.54. Si $I_o = 2 \text{ mA}$ en la red de la figura P2.54, encontrar V_s .

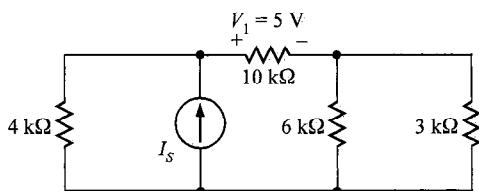


FIGURA P2.50

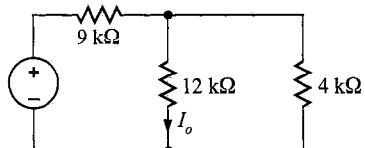


FIGURA P2.51

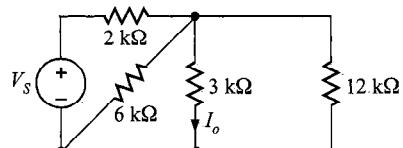


FIGURA P2.52

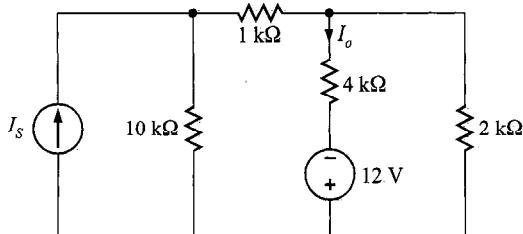


FIGURA P2.53

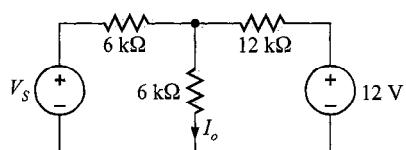


FIGURA P2.54

2.55. Dado que $V_o = 6 \text{ V}$ en el circuito de la figura P2.55, encontrar V_s .

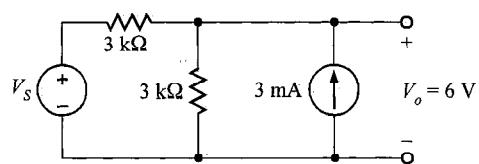


FIGURA P2.55

2.56. Si $V_o = 2 \text{ V}$ en la red de la figura P2.56, encontrar V_s .

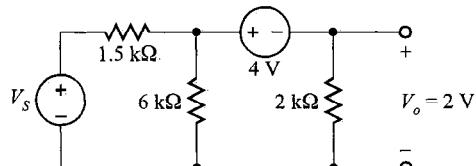


FIGURA P2.56

2.57. Si $V_o = 6 \text{ V}$ en el circuito de la figura P2.57, encontrar I_s .

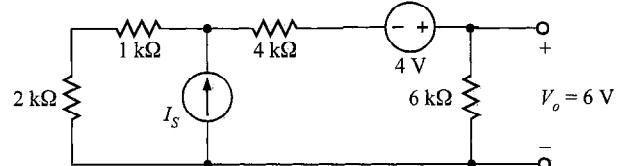


FIGURA P2.57

2.58. Dado que $V_o = 4 \text{ V}$ en la red de la figura P2.58, encontrar V_s .

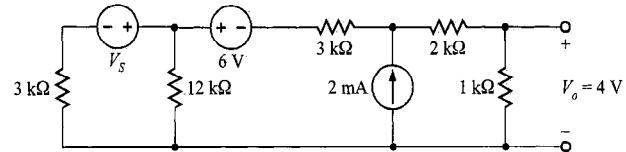


FIGURA P2.58

2.59. Encontrar I_o en el circuito de la figura P2.59.

2.60. Encontrar I_o en la red de la figura P2.60.

2.61. Encontrar la potencia absorbida por la red de la figura P2.61.

2.62. Determine el valor de V_o en la red de la figura P2.62.

2.63. Encontrar la potencia suministrada por la fuente de 6 V en la red de la figura P2.63.

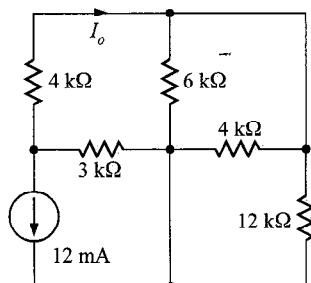


FIGURA P2.59

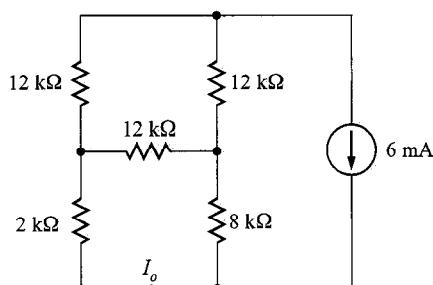


FIGURA P2.60

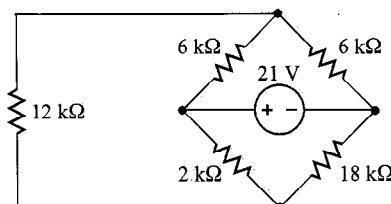


FIGURA P2.61

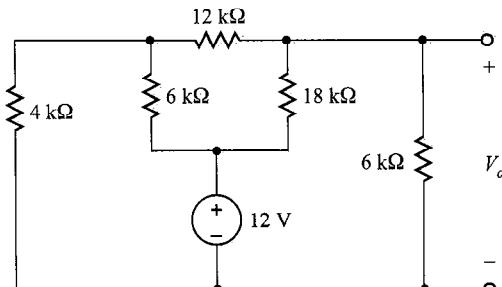


FIGURA P2.62

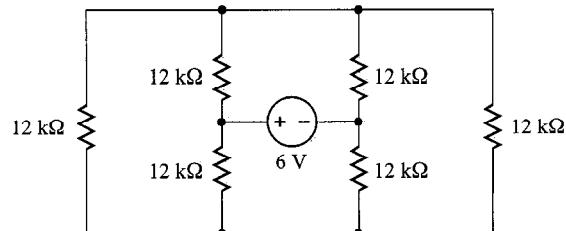


FIGURA P2.63

- 2.64. Si todas las resistencias de la red de la figura P2.64 son de $12 \text{ k}\Omega$ encontrar V_o .

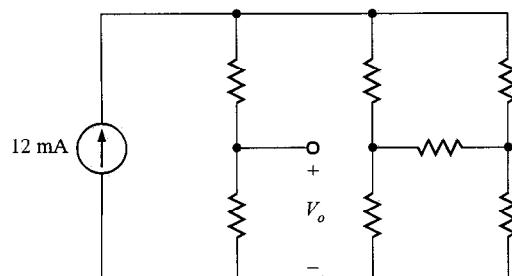


FIGURA P2.64

- 2.65. Encontrar V_o en el circuito de la figura P2.65.

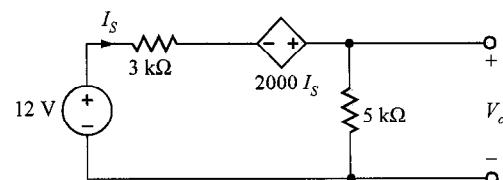


FIGURA P2.65

- 2.66. Encontrar V_o en la red de la figura P2.66.

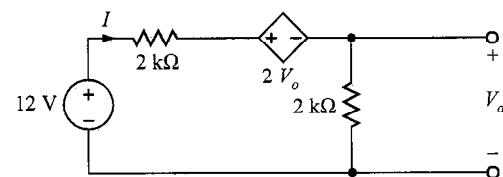


FIGURA P2.66

- 2.67. Un amplificador de transistor de una sola etapa se modela como se muestra en la figura P2.67. Encontrar la corriente en la carga R_L .

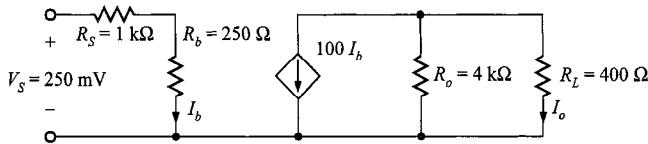


FIGURA P2.67

2.68. Un típico amplificador de transistor se muestra en la figura P2.68. Encontrar la ganancia de amplificador, es decir, la razón del voltaje de salida al voltaje de entrada.

2.69. Encontrar V_o en el circuito de la figura P2.69.

2.70. Encontrar la potencia absorbida por la resistencia de $12 \text{ k}\Omega$ en la red de la figura P2.70.

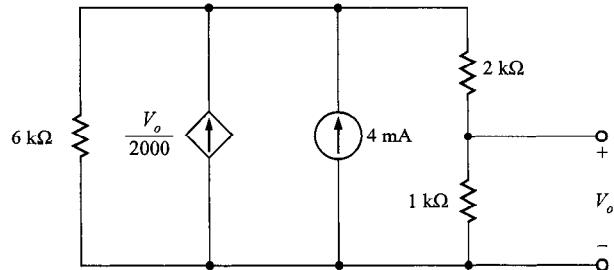


FIGURA P2.69

2.71. Encontrar la potencia absorbida por la resistencia de $12 \text{ k}\Omega$ en la red de la figura P2.71.

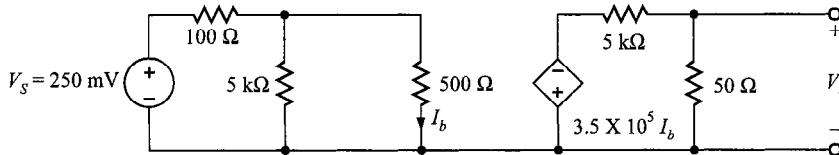


FIGURA P2.68

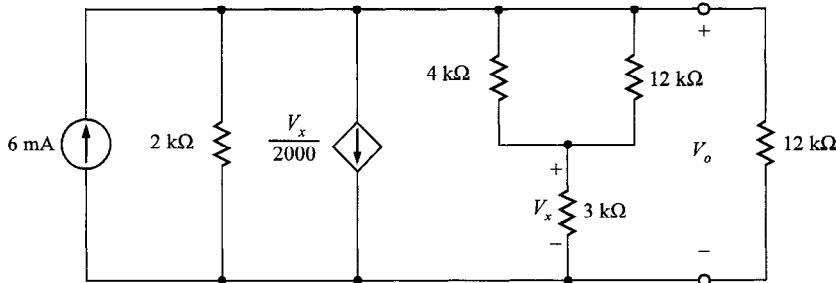


FIGURA P2.70

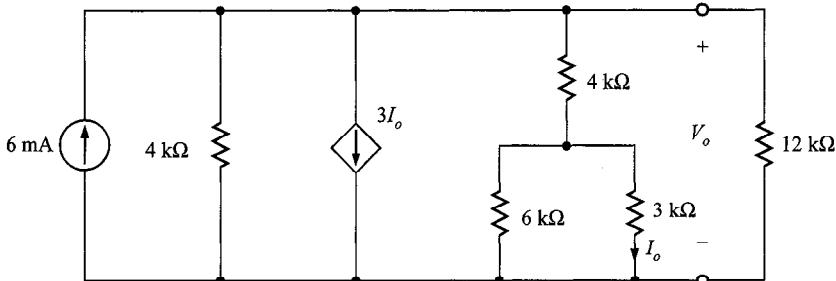


FIGURA P2.71

2.72. Dado un indicador de medición estimado en 50 mV, 20 mA a escala completa, encontrar la resistencia del medidor y la potencia disipada en la deflexión de escala completa.

2.73. Un indicador de medición de 50 mV, 20 mA se usa para medir corrientes entre 0 y 150 mA. Encontrar la resistencia derivadora requerida para las mediciones.

2.74. Un indicador de medición de 100 mV, 30 mA se usa en unión con una resistencia de derivación de $0.4\ \Omega$. Encontrar la magnitud de la corriente que puede ser medida por el medidor a escala completa.

2.75. Un indicador de medición de 100 mV, 30 mA se usará para medir 100 mA a escala completa. Encontrar la resistencia de derivación requerida para esta aplicación.

2.76. Un indicador de medición de 50 mV, 20 mA se usará para verificar el voltaje en las baterías de 1.5 volts de una lámpara portátil como se muestra en la figura P2.76. Encontrar el valor requerido de R_{se} para que este medidor lea 1.5 V a escala completa.

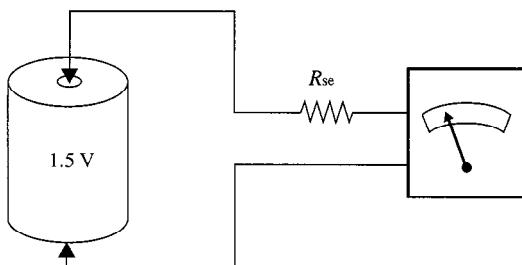


FIGURA P2.76

2.77. Una resistencia de $50\ \Omega$ se conecta en serie con un indicador de medición de 50 mV, 20 mA. ¿Qué voltaje a escala completa medirá esta combinación?

2.78. El puente de Wheatstone de la figura P2.45 se usa para medir una resistencia desconocida R_x . El puente está balanceado con $R_1 = 1\ k\Omega$, $R_2 = 1.2\ k\Omega$ y $R_3 = 1.8\ k\Omega$. Encontrar el valor de R_x .

2.79. Si el puente de Wheatstone de la figura 2.45 está balanceado con $R_x = 140\ \Omega$, $R_1 = 100\ \Omega$ y $R_2 = 200\ \Omega$, ¿cuál es el valor de la resistencia variable R_3 ?

2.80. En muchas aplicaciones de amplificadores tenemos que tratar no sólo con ganancia de voltaje sino también con ganancia de potencia.

$$\text{Ganancia de potencia} = A_P = (\text{potencia entregada a la carga}) / (\text{potencia entregada por la entrada})$$

Encontrar la ganancia de potencia para el circuito de la figura P2.80 donde $R_L = 50\ k\Omega$.

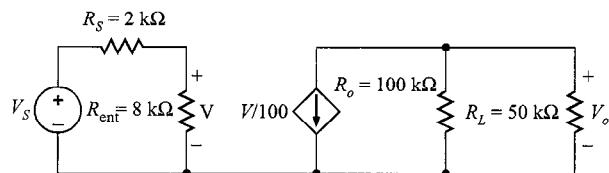


FIGURA P2.80

2.81. Rediseñ el divisor de voltaje del ejemplo 2.2 si los valores de voltaje de los nodos son 18 V, 15 V y 4 V con 60 mW de dissipación de potencia.

2.82. El amperímetro ideal de la figura P2.82 no tiene resistencia interna y un alcance máximo de 10 mA. Junto con la resistencia en serie R_{se} , funciona como voltímetro para medir el voltaje V_x . Elija R_{se} tal que el amperímetro lea su valor máximo cuando V_x sea 20 V. Si el amperímetro lee 2.7 mA, ¿cuál es el voltaje a V_x ?

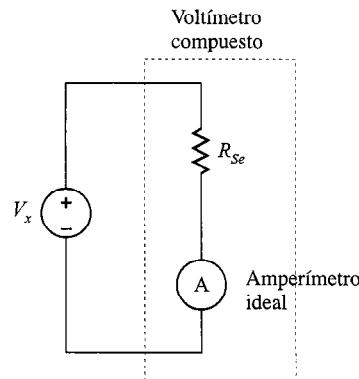


FIGURA P2.82

2.83. Para la red de la figura P2.83, elija los valores de R_{ent} y R_o tales que V_o sea máxima. ¿Cuál es la razón resultante, V_o/V_s ?

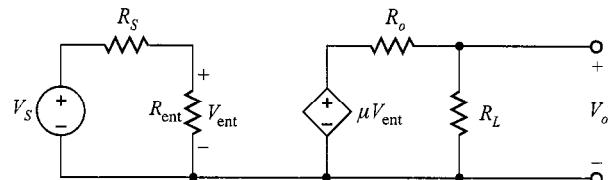
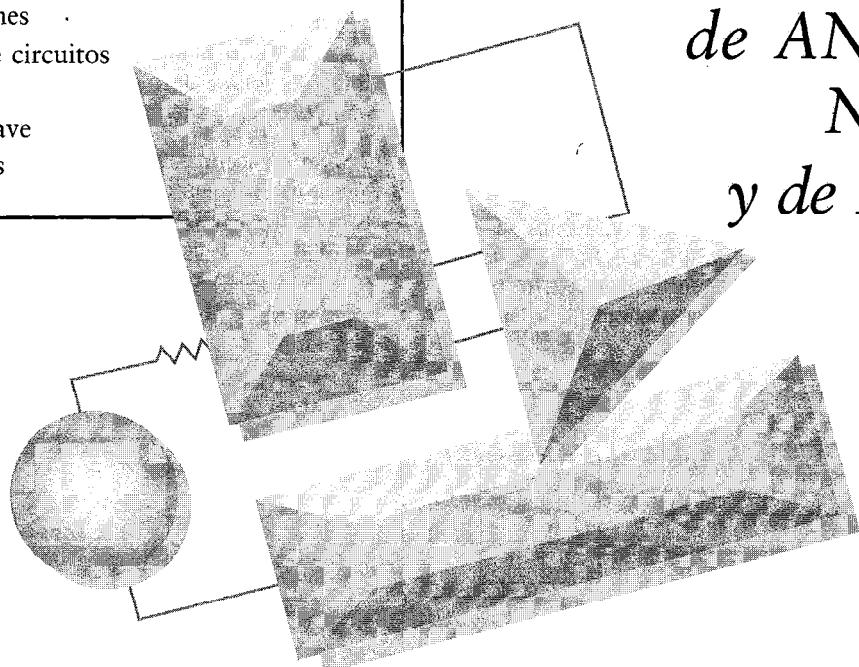


FIGURA P2.83

C O N T E N I D O D E L C A P Í T U L O

- 3.1** Análisis nodal
- 3.2** Análisis de malla
- 3.3** Ecuaciones de circuitos por medio de topología de redes
- 3.4** Circuitos con amplificadores operacionales
- 3.5** Aplicaciones
- 3.6** Diseño de circuitos
- 3.7** Resumen
- Puntos clave
- Problemas

C A P Í T U L O
3**TÉCNICAS
de ANÁLISIS
NODAL
y de MALLA**

En el capítulo 2 analizamos los circuitos más simples, aquellos que contienen sólo un par único de nodos o una sola malla. Encontramos que esos circuitos pueden analizarse completamente por medio de una sola ecuación algebraica. En el caso de un circuito de un solo par de nodos (es decir, uno que contiene dos nodos, otro de los cuales es un nodo de referencia), una vez que se conoce el voltaje del nodo, podemos calcular todas las corrientes. En un circuito de una sola malla, una vez que se conoce la corriente de ésta, podemos calcular todos los voltajes.

En este capítulo aumentaremos nuestras capacidades de manera esquemática de modo que podamos calcular todas las corrientes y voltajes en los circuitos que contienen múltiples nodos y mallas. Nuestros análisis están basados principalmente en dos leyes con las que estamos familiarizados: ley de corriente de Kirchhoff (LCK) y la ley de voltaje de Kirchhoff (LVK).

En un análisis nodal empleamos la LCK para determinar los voltajes de los nodos, y en un análisis de malla usamos la LVK para determinar las corrientes de la malla. Introducimos brevemente la topología de redes y demostramos su uso al escribir las ecuaciones de la LCK y la LVK.

Se presenta y analiza un circuito disponible, comercialmente muy importante, conocido como amplificador operacional, o op-amp. Los op-amps se usan literalmente en miles de aplicaciones, incluyendo artículos como reproductores de discos compactos (CD), memorias de acceso aleatorio (RAM), convertidores analógico a digital (A/D) y digital a analógico (D/A), amplificadores de audífonos e instrumentación electrónica de todos los tipos. Finalmente, analizamos las características terminales de este circuito y demostramos su uso en aplicaciones prácticas así como en diseño de circuitos. ■

3.1 Análisis nodal

En un análisis nodal las variables en el circuito se eligen como los voltajes de los nodos. Los voltajes de los nodos se definen con respecto a un punto común en el circuito. Un nodo se selecciona como el nodo de referencia, y todos los voltajes de los otros nodos se definen con respecto a ese nodo. Con frecuencia este nodo es uno al que está conectado el mayor número de ramas. Con frecuencia se le llama *tierra* debido a que se dice que está a potencial de tierra cero, y algunas veces representa el chasis o la línea de tierra en un circuito práctico.

Seleccionaremos nuestras variables como positivas con respecto al nodo de referencia. Si uno o más de los voltajes de los nodos realmente son negativos con respecto al nodo de referencia, el análisis lo indicará.

A fin de comprender el valor de conocer todos los voltajes de los nodos en una red, consideramos una vez más la red de la figura 2.33, la cual se dibuja nuevamente en la figura 3.1. Los voltajes, V_S , V_a , V_b y V_c , se miden todos con respecto al nodo inferior, que se selecciona como el de referencia y se marca con el símbolo \pm . Por tanto, el voltaje en el nodo 1 es $V_S = 12 \text{ V}$ con respecto al nodo de referencia 5; el voltaje en el nodo 2 es $V_a = 3 \text{ V}$ con respecto al nodo de referencia 5, y así sucesivamente. Advierta ahora con cuidado que una vez que se conocen esos voltajes de los nodos, podemos calcular inmediatamente cualquier corriente en una rama o la potencia suministrada o absorbida por cualquier elemento, ya que conocemos el voltaje a través de todos los elementos de la red. Por ejemplo, el voltaje V_1 a través de la resistencia de $9 \text{ k}\Omega$ que está más a la izquierda es la diferencia en potencial entre los dos extremos de la resistencia; es decir,

$$\begin{aligned} V_1 &= V_S - V_a \\ &= 12 - 3 \\ &= 9 \text{ V} \end{aligned}$$

Esta ecuación en realidad no es más que la aplicación de la LVK alrededor de la malla que está más a la izquierda; es decir,

$$-V_S + V_1 + V_a = 0$$

De modo similar, encontramos que

$$V_3 = V_a - V_b$$

y

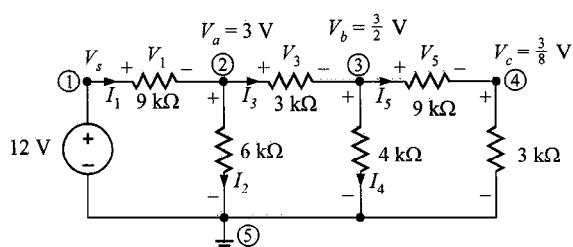


FIGURA 3.1 Circuitos con voltajes nódales conocidos.

$$V_5 = V_b - V_c$$

Entonces las corrientes en las resistencias son

$$I_1 = \frac{V_1}{9k} = \frac{V_s - V_a}{9k}$$

$$I_3 = \frac{V_3}{3k} = \frac{V_a - V_b}{3k}$$

$$I_5 = \frac{V_5}{9k} = \frac{V_b - V_c}{9k}$$

Y además

$$I_2 = \frac{V_a - 0}{6k}$$

$$I_4 = \frac{V_b - 0}{4k}$$

ya que el nodo de referencia está a potencial cero.

Así, como regla general, si conocemos los voltajes de los nodos en un circuito, podemos calcular la corriente a través de cualquier elemento resistivo utilizando la ley de Ohm; es decir,

$$i = \frac{v_m - v_n}{R} \quad (3.1)$$

como se ilustra en la figura 3.2.

En el ejemplo 2.5 ilustramos que el número de ecuaciones de la LCK linealmente

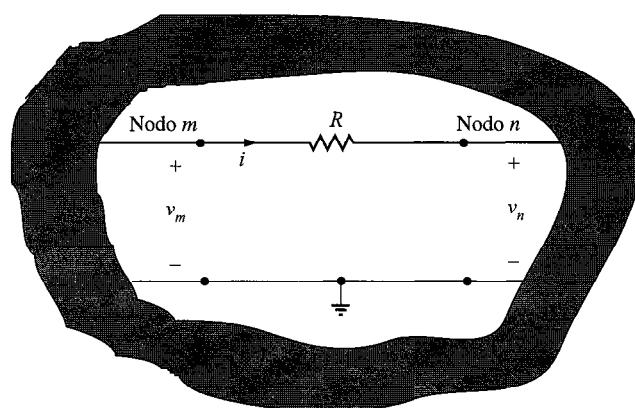


FIGURA 3.2 Circuito usado para ilustrar la ley de Ohm en una red de nodos múltiple.

independientes para una red de n nodos era $n - 1$. Además, encontramos que en un circuito de dos nodos, en el que un nodo era el nodo de referencia, sólo se requería una ecuación para resolver el voltaje del nodo desconocido. Lo que se ilustra en este caso simple es cierto en general; es decir, en un circuito de n nodos se escribe una ecuación linealmente independiente de la LCK para cada uno de los $n - 1$ nodos que no son de referencia, y este conjunto de $n - 1$ ecuaciones simultáneas linealmente independientes, cuando se resuelvan, darán los voltajes desconocidos de los $n - 1$ nodos.

Es instructivo tratar el análisis nodal examinando varios tipos diferentes de circuitos e ilustrando las características sobresalientes de cada uno. Comenzamos con el caso más simple. Sin embargo, como preludio a nuestro estudio de los detalles del análisis nodal, la experiencia indica que vale la pena desviarse por un momento para asegurar que el concepto de voltaje de nodo se entiende claramente.

En un principio es importante especificar una referencia. Por ejemplo, establecer que el voltaje en el nodo A es 12 V no significa nada a menos que proporcionemos el punto de referencia; es decir, el voltaje en el nodo A es 12 V con respecto a qué. El circuito de la figura 3.3 ilustra una parte de una red que contiene tres nodos, uno de los cuales es el nodo de referencia.

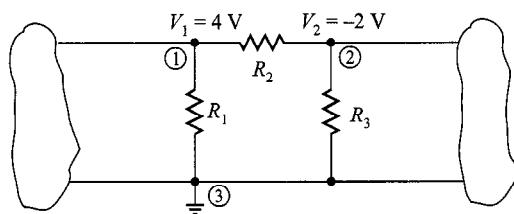


FIGURA 3.3 Ilustración de los voltajes nódales.

El voltaje $V_1 = 4 \text{ V}$ es el voltaje en el nodo 1 con respecto al nodo de referencia 3. De manera similar, el voltaje $V_2 = -2 \text{ V}$ es el voltaje en el nodo 2 con respecto al nodo 3. Sin embargo, el voltaje en el nodo 1 con respecto al nodo 2 es $+6 \text{ V}$, y el voltaje en el nodo 2 con respecto al nodo 1 es -6 V . Además, como la corriente fluirá del nodo de mayor potencial al nodo de menor potencial, la corriente en R_1 es de arriba hacia abajo, la corriente en R_2 es de izquierda a derecha, y la corriente en R_3 es de abajo hacia arriba.

Esos conceptos tienen aplicaciones importantes en nuestra vida diaria. Si estuviera colgado en medio del aire con una mano sobre una línea y la otra sobre otra línea, y el voltaje de la línea de cd de cada línea fuera exactamente el mismo, el voltaje a través de mi corazón debería ser cero y estaría seguro. Sin embargo, si suelto una línea y permito que mi pie toque tierra, el voltaje de la línea existirá desde mi mano hasta mi pie con mi corazón en medio. Probablemente moriría en el instante en que mi pie tocara tierra.

En la ciudad donde vivo, un joven trató de recuperar su perico que había escapado de su jaula y estaba parado en una línea de potencia en el exterior. Se subió en una escalera metálica y con una barra metálica alcanzó al perico; cuando la barra metálica tocó la línea de potencia, murió instantáneamente. La potencia eléctrica es vital para nuestro estándar de vida, pero también es muy peligrosa. El material de este libro *no* lo califica para que usted la maneje con seguridad. Por tanto, sea siempre extremadamente cuidadoso con los circuitos eléctricos.

Circuitos que contienen sólo fuentes de corriente independientes

Considere la red que se muestra en la figura 3.4. Hay tres nodos, y el nodo del fondo se elige como el nodo de referencia. Se supone que las corrientes en las ramas fluyen en las direcciones indicadas en las figuras. Si una o más de las corrientes de las ramas fluyen en realidad en una dirección opuesta a la supuesta, el análisis simplemente producirá una corriente de rama negativa.

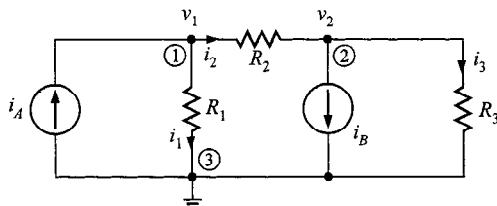


FIGURA 3.4 Circuito de tres nodos.

Aplicar la LCK al nodo 1 da

$$-i_A + i_1 + i_2 = 0$$

usando la ley de Ohm ($i = Gv$) y notando que el nodo de referencia está a un potencial cero, obtenemos

$$-i_A + G_1(v_1 - 0) + G_2(v_1 - v_2) = 0$$

o

$$(G_1 + G_2)v_1 - G_2v_2 = i_A$$

La LCK en el nodo 2 da

$$-i_2 + i_B + i_3 = 0$$

o

$$-G_2(v_1 - v_2) + i_B + G_3(v_2 - 0) = 0$$

la cual puede ser expresada como

$$-G_2v_1 + (G_2 + G_3)v_2 = -i_B$$

Por tanto, las dos ecuaciones para los dos voltajes desconocidos v_1 y v_2 de los nodos son

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2)v_1 - G_2v_2 &= i_A \\ -G_2v_1 + (G_2 + G_3)v_2 &= -i_B \end{aligned} \tag{3.2}$$

Advierta que el análisis ha producido dos ecuaciones simultáneas con las incógnitas v_1 y v_2 . Pueden resolverse usando cualquier técnica conveniente. En el

apéndice A se presentan dos métodos para resolver ecuaciones simultáneas. El primero se llama de eliminación gausiana, y el segundo involucra el uso de matrices. Como se muestra en el apéndice, la ecuación (3.2) puede reescribirse en forma matricial como

$$Av = i \quad (3.3)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} i_A \\ -i_B \end{bmatrix}$$

Así,

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_A \\ -i_B \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

En general, la solución a la ecuación (3.3) es

$$v = A^{-1} i \quad (3.5)$$

donde A^{-1} es la inversa de la matriz A . Este cálculo es fácil y directo para las calculadoras de mano modernas y para las computadoras personales.

Las ecuaciones de la LCK en los nodos 1 y 2 producen dos ecuaciones simultáneas linealmente independientes:

$$\begin{aligned} -i_A + i_1 + i_2 &= 0 \\ -i_2 + i_B + i_3 &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación de la LCK para el tercer nodo (de referencia) es

$$+i_A - i_1 - i_B - i_3 = 0$$

Advierta que si sumamos las primeras dos ecuaciones, obtenemos la tercera. Además, dos de cualquiera de estas ecuaciones pueden usarse para derivar la ecuación restante. Por tanto, en este circuito de $N = 3$ nodos, sólo $N - 1 = 2$ de las ecuaciones son linealmente independientes y se requiere determinar los $N - 1 = 2$ voltajes desconocidos de los nodos.

Advierta que un análisis nodal emplea la LCK junto con la ley de Ohm. Una vez que la dirección de la corriente de las ramas ha sido *supuesta*, entonces la ley de Ohm, como se ilustra en la figura 3.2 y expresada por la ecuación (3.1), se usa para designar las corrientes de las ramas en términos de los voltajes desconocidos de los nodos. Podemos suponer que las corrientes tienen cualquier dirección. Sin embargo, una vez que suponemos una dirección particular, debemos ser cuidadosos para escribir las corrientes de manera correcta en términos de los voltajes de los nodos utilizando la ley de Ohm.

E J E M P L O 3.1

Suponga que la red de la figura 3.4 tiene los siguientes parámetros: $I_A = 1 \text{ mA}$, $R_1 = 12 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 6 \text{ k}\Omega$, $I_B = 4 \text{ mA}$, y $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$. Determinemos todos los voltajes de los nodos y las corrientes de las ramas.

SOLUCIÓN Utilizando los valores de los parámetros, la ecuación (3.2) se convierte en

$$V_1 \left[\frac{1}{12k} + \frac{1}{6k} \right] - V_2 \left[\frac{1}{6k} \right] = 1 \times 10^{-3}$$

$$-V_1 \left[\frac{1}{6k} \right] + V_2 \left[\frac{1}{6k} + \frac{1}{6k} \right] = -4 \times 10^{-3}$$

donde empleamos letras mayúsculas debido a que los voltajes son constantes. La ecuación puede escribirse como

$$\frac{V_1}{4k} - \frac{V_2}{6k} = 1 \times 10^{-3}$$

$$-\frac{V_1}{6k} + \frac{V_2}{3k} = -4 \times 10^{-3}$$

Utilizando la eliminación gausiana, resolvemos la primera ecuación para V_1 en términos de V_2 :

$$V_1 = V_2 \left(\frac{2}{3} \right) + 4$$

Este valor es entonces sustituido en la segunda ecuación para obtener

$$\frac{-1}{6k} \left(\frac{2}{3} V_2 + 4 \right) + \frac{V_2}{3k} = -4 \times 10^{-3}$$

o

$$V_2 = -15 \text{ V}$$

Este valor de V_2 se sustituye ahora de regreso en la ecuación de V_1 en términos de V_2 , la cual da

$$V_1 = \frac{2}{3} V_2 + 4$$

$$= -6 \text{ V}$$

La ecuación del circuito también puede resolverse usando análisis matricial. En forma matricial, las ecuaciones son

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4k} & -\frac{1}{6k} \\ -\frac{1}{6k} & \frac{1}{3k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ -4 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

y por tanto,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4k} & -\frac{1}{6k} \\ -\frac{1}{6k} & \frac{1}{3k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ -4 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Para calcular la inversa de A , necesitamos el adjunto y el determinante. El adjunto es

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3k & 6k \\ \frac{1}{6k} & \frac{1}{4k} \end{bmatrix}$$

y el determinante es

$$\begin{aligned} |A| &= \left(\frac{1}{3k}\right)\left(\frac{1}{4k}\right) - \left(\frac{-1}{6k}\right)\left(\frac{-1}{6k}\right) \\ &= \frac{1}{18k^2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} &= 18k^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3k} & \frac{1}{6k} \\ \frac{1}{6k} & \frac{1}{4k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ -4 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \\ &= 18k^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3k^2} - \frac{4}{6k^2} \\ \frac{1}{6k^2} - \frac{1}{k^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 \\ -15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Conociendo los voltajes nodales, podemos determinar todas las corrientes utilizando la ley de Ohm:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{-6}{12\text{k}} = -\frac{1}{2} \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{6\text{k}} = \frac{-6 - (-15)}{6\text{k}} = \frac{3}{2} \text{ mA}$$

e

$$I_3 = \frac{V_2}{6\text{k}} = \frac{-15}{6\text{k}} = -\frac{5}{2} \text{ mA}$$

La figura 3.5 ilustra los resultados de todos los cálculos. Advierta que la LCK se satisface en cada nodo.

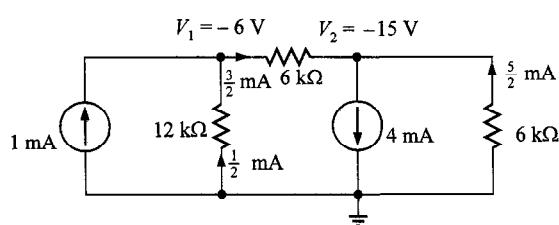


FIGURA 3.5 Circuito usado en el ejemplo 3.1.

Examinemos el circuito de la figura 3.6. Las direcciones de la corriente se suponen como se muestra en la figura.

En el nodo 1 de la LCK obtenemos

$$i_1 - i_A + i_2 - i_3 = 0$$

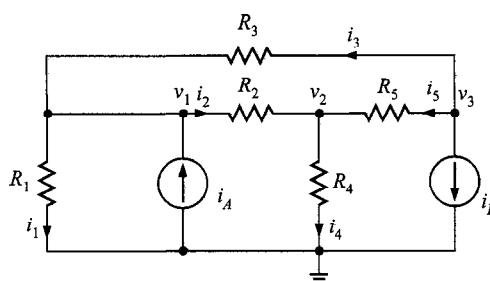


FIGURA 3.6 Circuito de cuatro nodos.

o

$$\frac{v_1}{R_1} - i_A + \frac{v_1 - v_2}{R_2} - \frac{v_3 - v_1}{R_3} = 0$$

$$v_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - v_2 \frac{1}{R_2} - v_3 \frac{1}{R_3} = i_A$$

En el nodo 2 de la LCK tenemos

$$-i_2 + i_4 - i_5 = 0$$

o

$$-\frac{v_1 - v_2}{R_2} + \frac{v_2}{R_4} - \frac{v_3 - v_2}{R_5} = 0$$

$$-v_1 \frac{1}{R_2} + v_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - v_3 \frac{1}{R_5} = 0$$

En el nodo 3 la ecuación es

$$i_3 + i_5 + i_B = 0$$

o

$$\frac{v_3 - v_1}{R_3} + \frac{v_3 - v_2}{R_5} + i_B = 0$$

$$-v_1 \frac{1}{R_3} - v_2 \frac{1}{R_5} + v_3 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) = -i_B$$

Agrupando las ecuaciones de los nodos, obtenemos

$$\begin{aligned} & v_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - v_2 \frac{1}{R_2} - v_3 \frac{1}{R_3} = i_A \\ & -v_1 \frac{1}{R_2} + v_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - v_3 \frac{1}{R_5} = 0 \\ & -v_1 \frac{1}{R_3} - v_2 \frac{1}{R_5} + v_3 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) = -i_B \end{aligned} \tag{3.6}$$

Advierta que nuestro análisis ha producido tres ecuaciones simultáneas en los tres voltajes desconocidos de los nodos v_1 , v_2 , y v_3 . Las ecuaciones también pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_A \\ 0 \\ -i_B \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

En este punto es importante que advirtamos la forma simétrica de las ecuaciones que describen las dos redes previas. Las ecuaciones (3.2) y (3.4) y las ecuaciones (3.6) y (3.7) exhiben el mismo tipo de forma simétrica. La matriz A para cada red (3.4) y (3.7) es una matriz simétrica. La simetría no es accidental. Las ecuaciones nodales para redes que contienen sólo resistencias y fuentes de corriente independientes siempre pueden escribirse en esta forma simétrica. Podemos tomar ventaja de este hecho y aprender a escribir las ecuaciones por inspección. Advierta en la primera ecuación de (3.2) que el coeficiente de v_1 es la suma de todas las conductancias conectadas al nodo 1 y que el coeficiente de v_2 es el negativo de las conductancias conectadas entre el nodo 1 y el nodo 2. El lado derecho de la ecuación es la suma de las corrientes que entran en el nodo 1 a través de las fuentes de corriente. Esta ecuación es la LCK en el nodo 1. En la segunda ecuación en (3.2), el coeficiente de v_2 es la suma de todas las conductancias conectadas al nodo 2, el coeficiente de v_1 es el negativo de la conductancia conectada entre el nodo 2 y el nodo 1, y el lado derecho de la ecuación es la suma de las corrientes que entran al nodo 2 a través de las fuentes de corriente. Esta ecuación es la LCK en el nodo 2. De manera similar, en la primera ecuación en (3.6) el coeficiente de v_1 es la suma de las conductancias conectadas al nodo 1, el coeficiente de v_2 es el negativo de la conductancia conectada entre el nodo 1 y el nodo 2, el coeficiente de v_3 es el negativo de la conductancia conectada entre el nodo 1 y el nodo 3, y el lado derecho de la ecuación es la suma de las corrientes que entran en el nodo 1 a través de las fuentes de corriente. Las otras dos ecuaciones en (3.6) se obtienen de forma similar. En general, si la LCK se aplica al nodo j con voltaje del nodo v_j , el coeficiente de v_j es la suma de todas las conductancias conectadas al nodo j y los coeficientes de los otros voltajes de los nodos (por ejemplo, v_{j-1} , v_{j+1}) son el negativo de la suma de las conductancias conectadas directamente entre esos nodos y el nodo j . El lado derecho de la ecuación es igual a la suma de las corrientes que entran en el nodo vía las fuentes de corriente. Por tanto, el lado izquierdo de la ecuación representa la suma de las corrientes que dejan el nodo j y el lado derecho de la ecuación representa las corrientes que entran en el nodo j .

E J E M P L O 3.2

Apliquemos lo que hemos aprendido para escribir las ecuaciones para la red de la figura 3.7 por inspección.

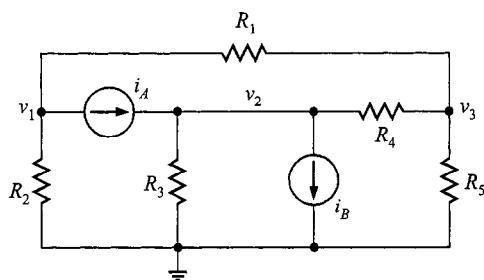


FIGURA 3.7 Circuito usado en el ejemplo 3.2.

SOLUCIÓN Las ecuaciones son

$$v_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - v_2 (0) - v_3 \left(\frac{1}{R_1} \right) = -i_A$$

$$-v_1(0) + v_2 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - v_3 \left(\frac{1}{R_4} \right) = i_A - i_B$$

$$-v_1 \left(\frac{1}{R_1} \right) - v_2 \left(\frac{1}{R_4} \right) + v_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) = 0$$

la cual también puede escribirse directamente en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & 0 & -\frac{1}{R_1} \\ 0 & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_A \\ i_A - i_B \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ambas ecuaciones y la matriz A exhiben la simetría que siempre estará presente en los circuitos que contienen sólo resistencias y fuentes de corriente.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D3.1 Escriba la ecuación nodal para el circuito de la figura D3.1.

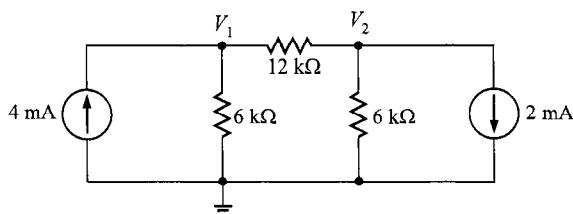


FIGURA D3.1

Resp.: $\frac{1}{4k} V_1 - \frac{1}{12k} V_2 = 4 \times 10^{-3}$, $\frac{-1}{12k} V_1 + \frac{1}{3k} V_2 = -2 \times 10^{-3}$

D3.2 Encuentre las corrientes de todas las ramas en la red de la figura D3.2.

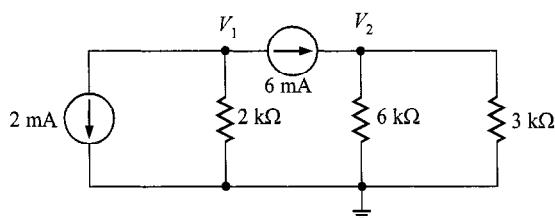


FIGURA D3.2

Resp.: Advierta que la LCK y el divisor de corriente da de inmediato las siguientes corrientes: $I_{2k\Omega} = 8 \text{ mA}\uparrow$, $I_{6k\Omega} = 2 \text{ mA}\downarrow$, e $I_{3k\Omega} = 4 \text{ mA}\downarrow$.

Circuitos que contienen fuentes de corriente dependientes

La presencia de una fuente dependiente puede destruir la forma simétrica de las ecuaciones nodales que definen al circuito. Considere el circuito que se muestra en la figura 3.8, el cual contiene una fuente de corriente controlada por corriente. Las ecuaciones de la LCK para los nodos que no son de referencia son

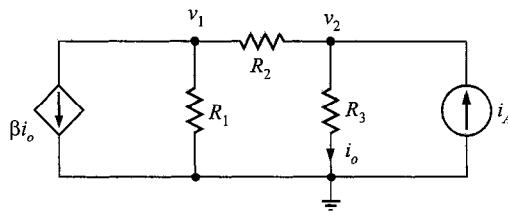


FIGURA 3.8 Circuito con una fuente dependiente.

$$\beta i_o + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0$$

y

$$\frac{v_2 - v_1}{R_2} + i_o - i_A = 0$$

donde $i_o = v_2/R_3$. Simplificando las ecuaciones, obtenemos

$$(G_1 + G_2)v_1 - (G_2 - \beta G_3)v_2 = 0$$

$$-G_2 v_1 + (G_2 + G_3)v_2 = i_A$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_2) & -(G_2 - \beta G_3) \\ -G_2 & (G_2 + G_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_A \end{bmatrix}$$

Note que la presencia de la fuente dependiente ha destruido la naturaleza simétrica de la ecuación nodal.

EJEMPLO 3.3

Determinemos los voltajes de los nodos para la red de la figura 3.8 dados los siguientes parámetros:

$$\beta = 2 \quad R_2 = 6 \text{ k}\Omega \quad i_A = 2 \text{ mA}$$

$$R_1 = 12 \text{ k}\Omega \quad R_3 = 3 \text{ k}\Omega$$

SOLUCIÓN Utilizando esos valores en las ecuaciones para la red da

$$\frac{1}{4\text{k}} V_1 + \frac{1}{2\text{k}} V_2 = 0$$

$$-\frac{1}{6\text{k}} V_1 + \frac{1}{2\text{k}} V_2 = 2 \times 10^{-3}$$

la cual en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4k} & \frac{1}{2k} \\ -\frac{1}{6k} & \frac{1}{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

El adjunto de la matriz A de los coeficientes es

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2k} & -\frac{1}{2k} \\ \frac{1}{6k} & \frac{1}{4k} \end{bmatrix}$$

y el determinante es

$$|A| = \left(\frac{1}{4k}\right)\left(\frac{1}{2k}\right) - \left(-\frac{1}{6k}\right)\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{5}{24k^2}$$

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{24k^2}{5} \begin{bmatrix} \frac{1}{2k} & -\frac{1}{2k} \\ \frac{1}{6k} & \frac{1}{4k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-24}{5} \\ \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

De aquí, $V_1 = -24/5$ V y $V_2 = 12/5$ V. Podemos verificar este análisis determinando las corrientes de las ramas en la red y usando después esa información para probar la LCK en los nodos. Por ejemplo, la corriente de arriba abajo a través de R_3 es

$$I_o = \frac{V_2}{R_3} = \frac{12/5}{3k} = \frac{4}{5k} \quad A$$

De manera similar, la corriente de derecha a izquierda a través de R_2 es

$$I_2 = \frac{V_2 - V_1}{R_2} = \frac{12/5 - (-24/5)}{6k} = \frac{6}{5k} \quad A$$

Todos los resultados se muestran en la figura 3.9. Advierta que la LCK se satisface en todos los nodos.

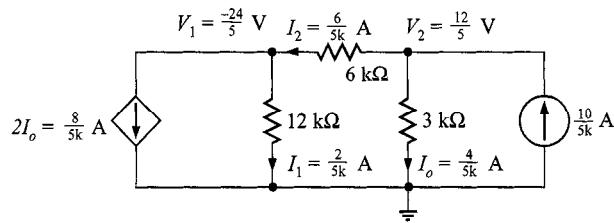


FIGURA 3.9 Circuito usado en el ejemplo 3.3.

Considere la red de la figura 3.10. Aplicando la LCK en cada uno de los nodos que no son de referencia se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} G_3 v_1 + G_1(v_1 - v_2) - i_A &= 0 \\ i_A + G_1(v_2 - v_1) + \alpha v_x + G_2(v_2 - v_3) &= 0 \\ G_2(v_3 - v_2) + G_4 v_3 - i_B &= 0 \end{aligned}$$

donde $v_x = v_2 - v_3$. Simplificando esas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} (G_1 + G_3)v_1 - G_1v_2 &= i_A \\ -G_1v_1 + (G_1 + \alpha + G_2)v_2 - (\alpha + G_2)v_3 &= -i_A \\ -G_2v_2 + (G_2 + G_4)v_3 &= i_B \end{aligned}$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_3) & -G_1 & 0 \\ -G_1 & (G_1 + \alpha + G_2) & -(\alpha + G_2) \\ 0 & -G_2 & (G_2 + G_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_A \\ -i_A \\ i_B \end{bmatrix}$$

Una vez más, encontramos que la simetría de la ecuación se destruye debido a la fuente dependiente.

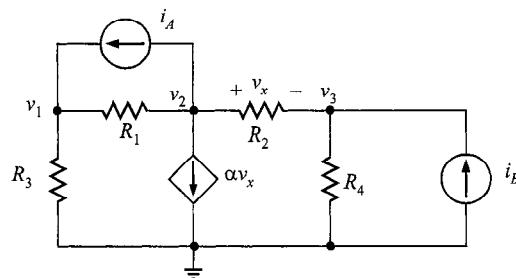
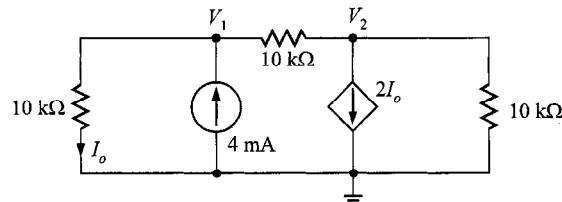


FIGURA 3.10 Circuito que contiene una fuente de corriente controlada por voltaje.

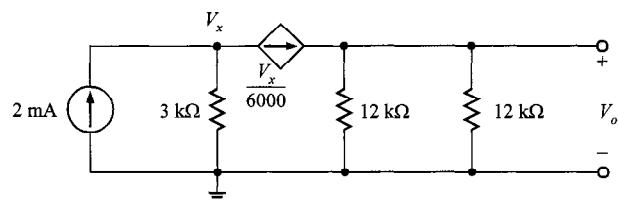
EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D3.3 Encuentre los voltajes nodales en el circuito de la figura D3.3.

**FIGURA D3.3**

Resp.: $V_1 = 16 \text{ V}$, $V_2 = -8 \text{ V}$.

D3.4 Encuentre el voltaje nodal de V_o de la red en la figura D3.4.

**FIGURA D3.4**

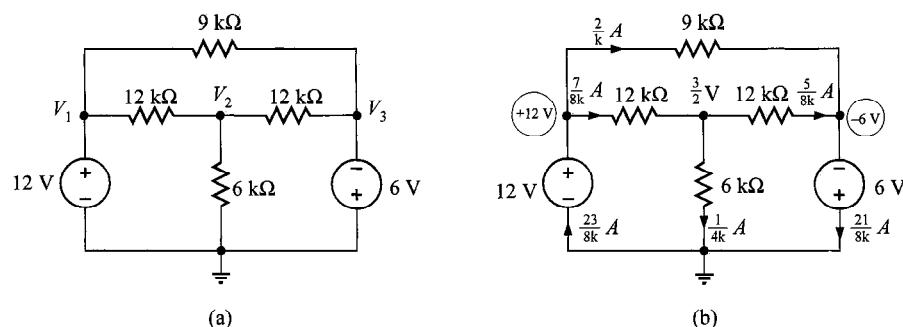
Resp.: $V_o = 4 \text{ V}$.

Circuitos que contienen fuentes de voltaje independientes

Como es nuestra práctica, en nuestra discusión de este tema procederemos del caso más simple a aquellos que son más complicados. El caso más simple es aquel en el que una fuente de voltaje independiente está conectada al nodo de referencia. El siguiente ejemplo ilustra este caso.

E J E M P L O 3.4

Considere el circuito que se muestra en la figura 3.11a. Determinemos los voltajes de todos los nodos y las corrientes de las ramas.

**FIGURA 3.11** Circuito usado en el ejemplo 3.4.

SOLUCIÓN Esta red tiene tres nodos que no son de referencia con voltajes nodales marcados con V_1 , V_2 , y V_3 . Basados en nuestras discusiones previas, supondríamos que a fin de encontrar todos los voltajes de los nodos necesitaríamos escribir una ecuación de la LCK para cada uno de los nodos que no son de referencia. Las tres ecuaciones simultáneas linealmente independientes

producirían los voltajes desconocidos de los nodos. Sin embargo, note que V_1 y V_3 son cantidades conocidas debido a que se conecta una fuente de voltaje independiente directamente entre el nodo de no referencia y cada uno de esos nodos. Por tanto, $V_1 = 12\text{ V}$ y $V_3 = -6\text{ V}$. Además, note que la corriente que atraviesa la resistencia de $9\text{ k}\Omega$ es $[12 - (-6)] / 9\text{k} = 2\text{ mA}$ de izquierda a derecha. No conocemos V_2 o la corriente en las resistencias restantes. Sin embargo, como sólo un voltaje nodal es desconocido, una sola ecuación nodal lo resolverá. La aplicación de la LCK a este nodo central da

$$\frac{V_2 - V_1}{12\text{k}} + \frac{V_2 - 0}{6\text{k}} + \frac{V_2 - V_3}{12\text{k}} = 0$$

o

$$\frac{V_2 - 12}{12\text{k}} + \frac{V_2}{6\text{k}} + \frac{V_2 - (-6)}{12\text{k}} = 0$$

de la que obtenemos

$$V_2 = \frac{3}{2}\text{ V}$$

Una vez que se conocen todos los voltajes de los nodos, se puede usar la ley de Ohm para encontrar las corrientes de las ramas que se muestran en la figura 3.11b. El diagrama ilustra que la LCK se satisface en todos los nodos.

Advierta que la presencia de las fuentes de voltaje en este ejemplo han simplificado el análisis, ya que dos de las tres ecuaciones linealmente independientes son $V_1 = 12\text{ V}$ y $V_3 = -6\text{ V}$. Encontraremos que, como regla general, siempre que entre nodos haya presentes fuentes de voltaje, las ecuaciones de voltaje nodales que describen a la red serán más simples.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

- D3.5** Encuentre la corriente I_o en la red de la figura D3.5.

Resp.: $I_o = \frac{3}{4}\text{ mA}$.

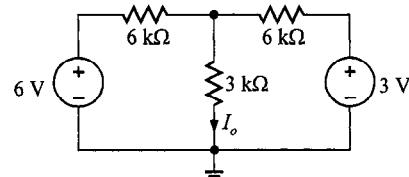
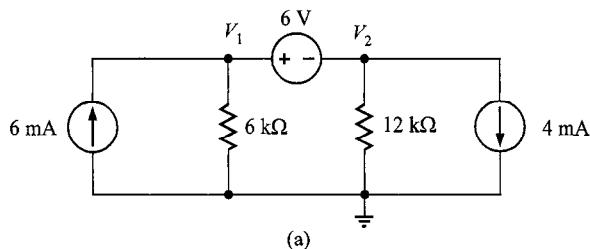


FIGURA D3.5

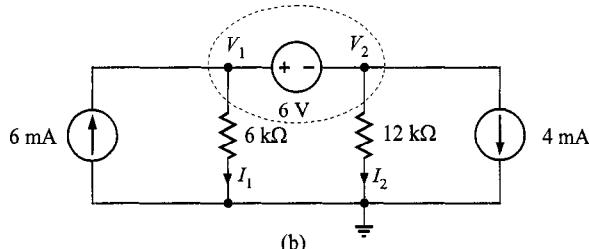
Consideraremos a continuación el caso en el que una fuente de voltaje independiente está conectada entre dos nodos que no son de referencia. Una vez más, utilizaremos un ejemplo para ilustrar el método.

E J E M P L O 3.5

Deseamos encontrar las corrientes en las dos resistencias del circuito de la figura 3.12a.



(a)



(b)

FIGURA 3.12 Circuitos usados en el ejemplo 3.5.

SOLUCIÓN Si tratamos de atacar este problema usando la fuerza bruta, de inmediato encontraremos un problema. Hasta aquí, las corrientes de las ramas eran valores de fuentes conocidas o podían ser expresados como el voltaje de la rama dividido entre la resistencia de la rama. Sin embargo, la corriente de la rama a través de la fuente de 6 V ciertamente no se conoce y no puede expresarse directamente utilizando la ley de Ohm. Podemos, por supuesto, dar a esta corriente un nombre y escribir las ecuaciones de la LCK en los dos nodos que no son de referencia en términos de esta corriente. No obstante, este método no es una panacea, ya que esta técnica generará *dos* ecuaciones simultáneas linealmente independientes en términos de *tres* incógnitas, es decir, los dos voltajes nodales y la corriente en la fuente de voltaje.

Para resolver este dilema, recordemos que se requieren $n - 1$ ecuaciones linealmente independientes para determinar los $n - 1$ voltajes en los nodos que no son de referencia en un circuito de n nodos. Como nuestra red tiene tres nodos, necesitamos dos ecuaciones linealmente independientes. Advierta ahora que si se conoce uno de los voltajes de los nodos de alguna manera, inmediatamente conocemos el otro, es decir, si se conoce V_1 entonces $V_2 = V_1 - 6$. Y si se conoce V_2 , entonces $V_1 = V_2 + 6$. Por tanto, la diferencia en potencial entre los dos nodos está *restringida* por la fuente de voltaje, y de aquí,

$$V_1 - V_2 = 6$$

Esta ecuación de restricción es una de las dos ecuaciones linealmente independientes que se necesitan para determinar los voltajes de los nodos.

A continuación considere la red de la figura 3.12b, en la que la fuente de 6 V está encerrada completamente por la superficie punteada. La ecuación de restricción gobierna esta porción punteada de la red. La ecuación restante se obtiene aplicando la LCK a esta superficie punteada, a la cual comúnmente se le llama *supernodo*. Recuerde que en el capítulo 2 demostramos que la LCK debe ser válida para una superficie, y esta técnica elimina el problema de tratar con una corriente a través de una fuente de voltaje. La LCK para el supernodo es

$$-6 \times 10^{-3} + \frac{V_1}{6k} + \frac{V_2}{12k} + 4 \times 10^{-3} = 0$$

Al resolver esas ecuaciones se obtiene $V_1 = 10$ V y $V_2 = 4$ V, y de aquí, $I_1 = 5/3$ mA e $I_2 = 1/3$ mA. Una comprobación rápida indica que la LCK se satisface en todos los nodos.

EJEMPLO 3.6

Escribamos las ecuaciones nodales para el circuito de la figura 3.13.

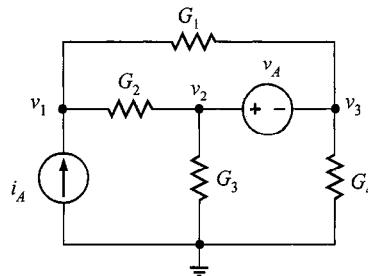


FIGURA 3.13 Circuito usado en el ejemplo 3.6.

SOLUCIÓN La ecuación para el nodo marcado con V_1 es

$$(v_1 - v_3)G_1 + (v_1 - v_2)G_2 - i_A = 0$$

La ecuación de restricción para el supernodo es

$$v_2 - v_3 = v_A$$

Y la ecuación de la LCK para el supernodo es

$$(v_2 - v_1)G_2 + v_2G_3 + (v_3 - v_1)G_1 + v_3G_4 = 0$$

Las tres ecuaciones darán los voltajes nodales.

EJEMPLO 3.7

Determinemos la corriente I_0 en la red de la figura 3.14a.

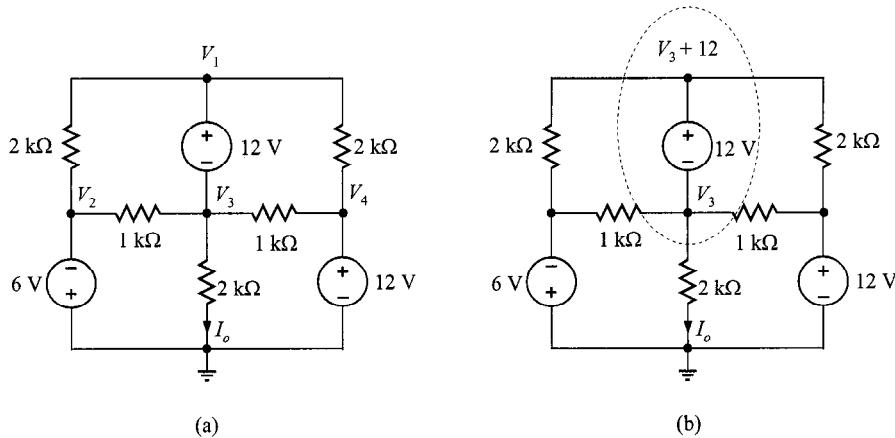


FIGURA 3.14 Ejemplo de circuitos con supernodos.

SOLUCIÓN Al examinar la red, notamos que los voltajes nodales V_2 y V_4 son conocidos, y que los voltajes nodales V_1 y V_3 están restringidos por la ecuación

$$V_1 - V_3 = 12$$

La red se redibuja en la figura 3.14b.

Como queremos encontrar la corriente I_o , V_1 (en el supernodo que contiene V_1 y V_3) se escribe como $V_3 + 12$. La ecuación de la LCK en el supernodo es entonces

$$\frac{V_3 + 12 - (-6)}{2k} + \frac{V_3 + 12 - 12}{2k} + \frac{V_3 - (-6)}{1k} + \frac{V_3 - 12}{1k} + \frac{V_3}{2k} = 0$$

Resolviendo la ecuación para V_3 obtenemos

$$V_3 = -\frac{6}{7} \text{ V}$$

I_o puede entonces ser calculada inmediatamente como

$$I_o = \frac{-\frac{6}{7}}{2k} = -\frac{3}{7} \text{ mA}$$

Como punto final en este análisis, considere la porción punteada de la red que se muestra en la figura 3.15. Observe que R_5 y el nodo A forman un supernodo. Este supernodo existe debido a que se conoce la corriente en R_5 y así, el voltaje a través de R_5 también se conoce.

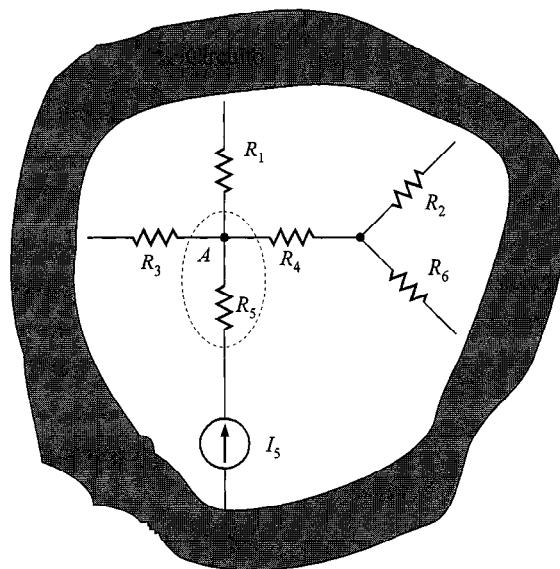


FIGURA 3.15 Red que contiene un supernodo.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D3.6 Use el análisis nodal para encontrar I_o en la red de la figura D3.6.

Resp.: $I_o = 3.8 \text{ mA}$.

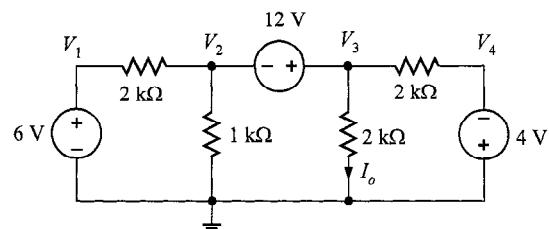


FIGURA D3.6

Circuitos que contienen fuentes de voltaje dependientes

Como los siguientes ejemplos indicarán, las redes que contienen fuentes dependientes (controladas) se tratan de la misma manera como se describió antes.

E J E M P L O 3.8

Deseamos encontrar I_o en la red de la figura 3.16.

SOLUCIÓN Como regla general, cuando se escriben las ecuaciones del circuito, primero tratamos a la fuente dependiente como si fuera una fuente independiente y entonces escribimos la ecuación de control. Como la fuente de voltaje independiente está conectada entre el nodo que no es de referencia etiquetado con V_1 y el de referencia, una de las dos ecuaciones linealmente independientes es

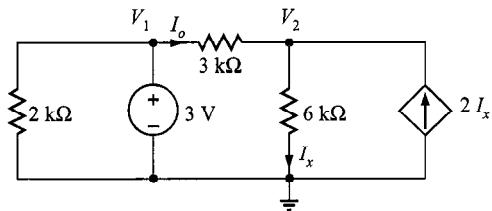


FIGURA 3.16 Circuito usado en el ejemplo 3.8.

$$V_1 = 3 \text{ V}$$

La LCK aplicada al segundo nodo que no es de referencia da

$$\frac{V_2 - 3}{3k} + \frac{V_2}{6k} = 2I_x$$

donde la ecuación de control es

$$I_x = \frac{V_2}{6k}$$

resolviendo esas ecuaciones se obtiene $V_2 = 6 \text{ V}$ y, de aquí,

$$I_o = \frac{3 - 6}{3k} = -1 \text{ mA}$$

EJEMPLO 3.9

Encontremos la corriente I_o en la red de la figura 3.17.

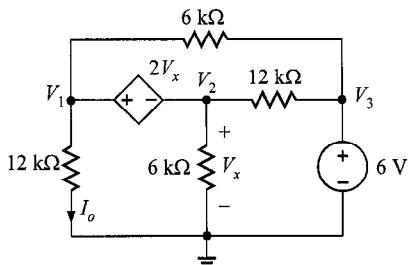


FIGURA 3.17 Circuito usado en el ejemplo 3.9.

SOLUCIÓN Este circuito contiene una fuente de voltaje independiente y una fuente de voltaje controlada por voltaje. Observe que $V_3 = 6 \text{ V}$, $V_2 = V_x$, y que existe un supernodo entre los nodos marcados con V_1 y V_2 .

Aplicando la LCK al supernodo obtenemos

$$\frac{V_1 - V_3}{6k} + \frac{V_1}{12k} + \frac{V_2}{6k} + \frac{V_2 - V_3}{12k} = 0$$

donde la ecuación de restricción para el supernodo es

$$V_1 - V_2 = 2V_x$$

La ecuación final es

$$V_3 = 6$$

Resolviendo esas ecuaciones encontramos que

$$V_1 = \frac{9}{2} \text{ V}$$

y, de aquí,

$$I_o = \frac{V_1}{12k} = \frac{3}{8} \text{ mA}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D3.7 Encuentre I_o en el circuito de la figura D3.7.

Resp.: $I_o = \frac{4}{3}$ mA.

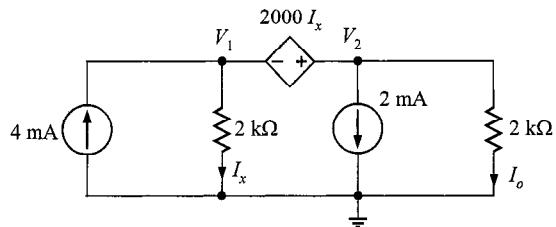


FIGURA D3.7

3.2 Análisis de malla

En un análisis nodal los parámetros desconocidos son los voltajes de los nodos, y la LCK se emplea para determinarlos. En contraste con este método, un análisis de malla utiliza la LVK para determinar las corrientes en el circuito. Una vez que se conocen las corrientes, se puede usar la ley de Ohm para calcular los voltajes. Recuerde que en el capítulo 2 encontramos que una sola ecuación era suficiente para determinar la corriente en un circuito que contiene una sola malla. Si el circuito contiene N mallas independientes, mostraremos que se requerirán N ecuaciones simultáneas independientes para describir la red. Por ahora supondremos que los circuitos son planos, lo cual simplemente significa que podemos dibujar los circuitos sobre una hoja de papel de una forma tal que ningún conductor cruce a otro conductor.

Circuitos que contienen sólo fuentes de voltaje independientes

Para iniciar nuestro análisis, considere el circuito que se muestra en la figura 3.18. Identifiquemos también dos mallas, *A-B-E-F-A* y *B-C-D-E-B*. Definimos ahora un nuevo conjunto de variables de corriente llamado *corrientes de malla*, que puede usarse para encontrar las corrientes físicas en el circuito. Supongamos que la corriente i_1 fluye en la primera malla y que la corriente i_2 fluye en la segunda. Entonces la corriente de la rama que fluye de *B* a *E* a través de R_3 es $i_1 - i_2$. Las direcciones de las corrientes se han supuesto. Como fue el caso en el análisis nodal, si las corrientes reales no están en la dirección indicada, los valores calculados serán negativos.

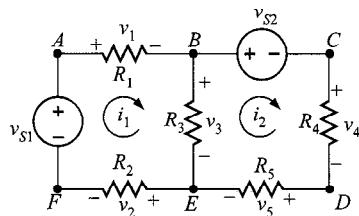


FIGURA 3.18 Circuito de dos mallas.

Aplicando la LVK a la primera malla tenemos

$$+v_1 + v_3 + v_2 - v_{S1} = 0$$

La LVK aplicada a la malla 2 da

$$+v_{S2} + v_4 + v_5 - v_3 = 0$$

donde $v_1 = i_1 R_1$, $v_2 = i_1 R_2$, $v_3 = (i_1 - i_2) R_3$, $v_4 = i_2 R_4$ y $v_5 = i_2 R_5$.

Al sustituir esos valores en las dos ecuaciones de la LVK se producen las dos ecuaciones simultáneas requeridas para determinar las dos corrientes de malla; es decir,

$$i_1(R_1 + R_2 + R_3) - i_2(R_3) = v_{S1}$$

$$-i_1(R_3) + i_2(R_3 + R_4 + R_5) = -v_{S2}$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{S1} \\ -v_{S2} \end{bmatrix}$$

En este punto es importante definir lo que se llama *malla*. Una malla es una clase especial de circuito cerrado que no contiene ningún otro circuito cerrado dentro de ella. Por tanto, conforme atravesamos la trayectoria de una malla, no envolvemos a ninguno de los elementos del circuito. Por ejemplo, la red de la figura 3.18 contiene dos mallas definidas por las trayectorias *A-B-E-F-A* y *B-C-D-E-B*. La trayectoria *A-B-C-D-E-F-A* es un circuito cerrado pero no es una malla. Como la mayor parte de nuestro análisis en esta sección incluirá escribir ecuaciones de la LVK para mallas, nos referiremos a las corrientes como corrientes de malla y al análisis como un *análisis de malla*.

E J E M P L O 3.10

Considere la red de la figura 3.19a. Deseamos encontrar la corriente I_o .

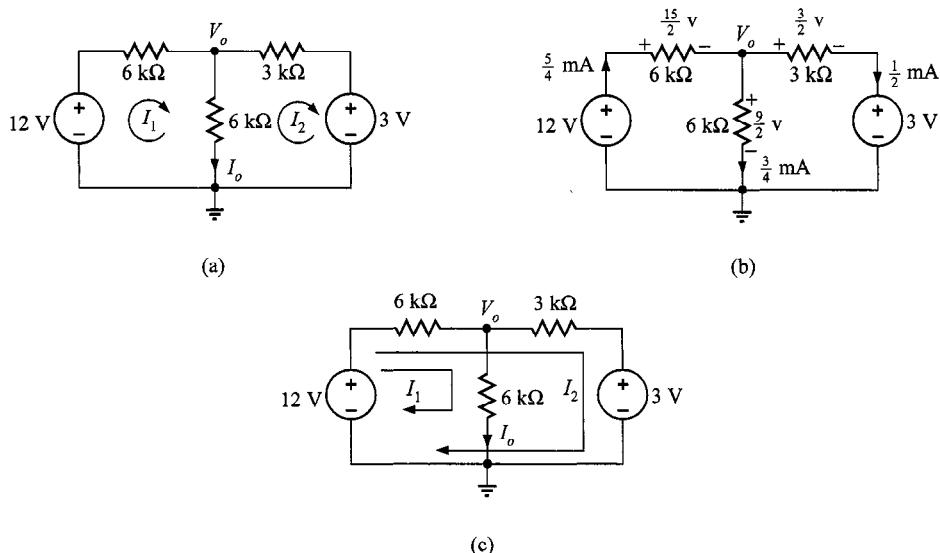


FIGURA 3.19 Circuitos usados en el ejemplo 3.10.

SOLUCIÓN Comenzaremos el análisis escribiendo las ecuaciones de las mallas. Note que no hay signos + y - en las resistencias. Sin embargo, no son necesarios, ya que aplicaremos la ley de Ohm a cada elemento resistivo a medida que escribamos las ecuaciones de la LVK. La ecuación para la primera malla es

$$-12 + 6kI_1 + 6k(I_1 - I_2) = 0$$

La ecuación de la LVK para la segunda malla es

$$6k(I_2 - I_1) + 3kI_2 + 3 = 0$$

donde $I_o = I_1 - I_2$.

Resolviendo las dos ecuaciones simultáneas se obtiene $I_1 = 5/4$ mA e $I_2 = 1/2$ mA. Por tanto, $I_o = 3/4$ mA. Todos los voltajes y corrientes en la red se muestran en la figura 3.19b. Recuerde del análisis nodal que una vez que los voltajes nodales estaban determinados, podíamos verificar nuestro análisis utilizando la LCK en los nodos. En este caso conocemos las corrientes de las ramas y podemos usar la LVK alrededor de cualquier trayectoria cerrada para verificar nuestros resultados. Por ejemplo, aplicar la LVK a la malla exterior da

$$-12 + \frac{15}{2} + \frac{3}{2} + 3 = 0$$

$$0 = 0$$

Como queremos calcular la corriente I_o , podemos usar el análisis de malla como se muestra en la figura 3.19c. Note que la corriente de malla I_1 pasa a través del tramo central de la red y, por tanto, $I_1 = I_o$. Las dos ecuaciones de malla en este caso son

$$-12 + 6k(I_1 + I_2) + 6kI_1 = 0$$

y

$$-12 + 6k(I_1 + I_2) + 3kI_2 + 3 = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $I_1 = 3/4$ mA e $I_2 = 1/2$ mA. Como la corriente en la fuente de 12 V source es $I_1 + I_2 = 5/4$ mA, esos resultados están de acuerdo con el análisis de malla.

Finalmente, con propósitos de comparación, encontraremos I_o utilizando el análisis nodal. La presencia de las dos fuentes de voltaje indicaría que este es un planteamiento viable. Aplicando la LCK al nodo central obtenemos

$$\frac{V_o - 12}{6k} + \frac{V_o}{6k} + \frac{V_o - 3}{3k} = 0$$

y de aquí,

$$V_o = \frac{9}{2} \text{ V}$$

y entonces

$$I_o = \frac{V_o}{6k} = \frac{3}{4} \text{ mA}$$

Advierta que en este caso tenemos que resolver sólo una ecuación en lugar de dos.

Una vez más estamos obligados a notar la forma simétrica de las ecuaciones de la malla que describen al circuito de la figura 3.18. Advierta que la matriz A para este circuito es simétrica.

Como esta simetría se exhibe generalmente por las redes que contienen resistencias y fuentes de voltaje independientes, podemos aprender a escribir las ecuaciones de malla por inspección. En la primera ecuación el coeficiente de i_1 es la suma de las resistencias a través de las que fluye la corriente de la malla 2, y el coeficiente de i_2 es el negativo de la suma de las resistencias comunes a la corriente de malla 1 y a la corriente de malla 2. El lado derecho de la ecuación es la suma algebraica de las fuentes de voltaje en la malla 1. El signo de la fuente de voltaje es positivo si éste ayuda a la dirección supuesta del flujo de corriente y negativo si se opone al flujo supuesto. La primera ecuación es la LVK para el anillo 1. En la segunda ecuación, el coeficiente de i_2 es la suma de todas las resistencias en el anillo 2, el coeficiente de i_1 es el negativo de la suma de las resistencias comunes la malla 1 y la malla 2, y el lado derecho de la ecuación es la suma algebraica de las fuentes de voltaje en el anillo 2. En general, si suponemos que todas las corrientes de malla están en la misma dirección (en la direc-

ción de las manecillas del reloj o en dirección contraria), entonces si se aplica la LVK la malla j con la corriente de malla i_j , el coeficiente de i_j es la suma de las resistencias en la malla j y los coeficientes de las otras corrientes de malla (por ejemplo, i_{j-1} , i_{j+1}) son los negativos de las resistencias comunes a esas mallas y la malla j . El lado derecho de la ecuación es igual a la suma algebraica de las fuentes de voltaje en la malla j . Esas fuentes de voltaje tienen un signo positivo si ayudan al flujo de corriente i_j y signo negativo si se oponen a él.

E J E M P L O 3.11

Escribamos las ecuaciones de malla por inspección de la red de la figura 3.20.

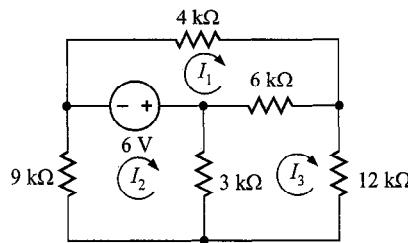


FIGURA 3.20 Circuito usado en el ejemplo 3.11.

S O L U C I Ó N Las tres ecuaciones simultáneas linealmente independientes son

$$(4k + 6k)I_1 - (0)I_2 - (6k)I_3 = -6$$

$$-(0)I_1 + (9k + 3k)I_2 - (3k)I_3 = 6$$

$$-(6k)I_1 - (3k)I_2 + (3k + 6k + 12k)I_3 = 0$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 10k & 0 & -6k \\ 0 & 12k & -3k \\ -6k & -3k & 21k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe la forma simétrica de las ecuaciones.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D3.8 Use ecuaciones de malla para encontrar V_o en el circuito de la figura D3.8.

Resp.: $V_o = \frac{33}{5}$ V.

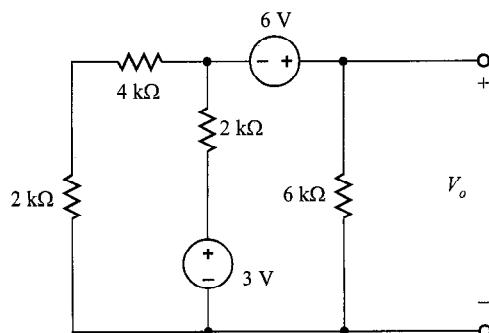


FIGURA D3.8

Circuitos que contienen fuentes de corriente independientes

Tal como la presencia de una fuente de voltaje en una red simplificó el análisis nodal, la presencia de una fuente de corriente simplifica un análisis de malla. Los siguientes ejemplos ilustran este punto.

E J E M P L O 3.12

Encontremos V_o y V_1 en el circuito de la figura 3.21.

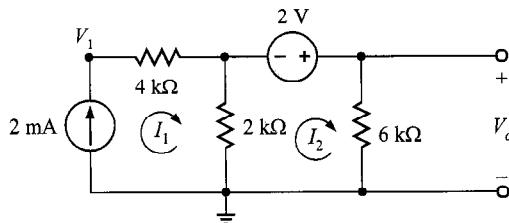


FIGURA 3.21 Circuito usado en el ejemplo 3.12.

SOLUCIÓN Aunque parece que hay dos corrientes de malla desconocidas, la corriente I_1 va directamente a través de la fuente de corriente y, por tanto, I_1 está restringida a ser 2 mA. Por tanto, sólo la corriente I_2 se desconoce. La LVK para la malla de la derecha es

$$2k(I_2 - I_1) - 2 + 6kI_2 = 0$$

Y, por supuesto,

$$I_1 = 2 \times 10^{-3}$$

Esas ecuaciones dan

$$I_2 = \frac{3}{4} \text{ mA}$$

Y de aquí,

$$V_o = 6kI_2 = \frac{9}{2} \text{ V}$$

Para obtener V_1 aplicamos la LVK alrededor de cualquier trayectoria cerrada. Si usamos la malla exterior, la ecuación de la LVK es

$$-V_1 + 4kI_1 - 2 + 6kI_2 = 0$$

Y por tanto,

$$V_1 = \frac{21}{2} \text{ V}$$

Note que como se desconoce la corriente I_1 la resistencia de $4 \text{ k}\Omega$ no entra en la ecuación para encontrar V_o . Sin embargo, aparece en cada malla que contenga a la fuente de corriente y, así, se usa para encontrar V_1 .

EJEMPLO 3.13

Deseamos encontrar V_o en la red de la figura 3.22.

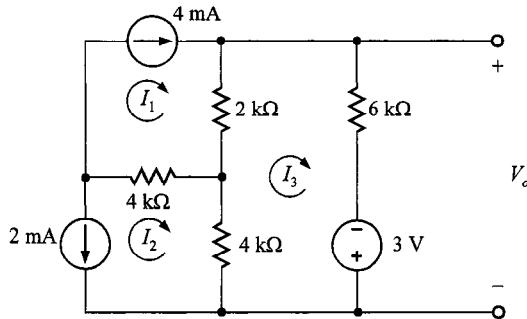


FIGURA 3.22 Circuito usado en el ejemplo 3.13.

SOLUCIÓN Como las corrientes I_1 y I_2 pasan directamente a través de una fuente de corriente, dos de las tres ecuaciones que se requieren son

$$I_1 = 4 \times 10^{-3}$$

$$I_2 = -2 \times 10^{-3}$$

La tercera ecuación es la LVK para el anillo que contiene a la fuente de voltaje; es decir,

$$4k(I_3 - I_2) + 2k(I_3 - I_1) + 6kI_3 - 3 = 0$$

Esas ecuaciones dan

$$I_3 = \frac{1}{4} \text{ mA}$$

y de aquí,

$$V_o = 6kI_3 - 3 = \frac{-3}{2} \text{ V}$$

Lo que hemos demostrado en los ejemplos previos es el método general para tratar con fuentes de corriente independientes cuando se escriben las ecuaciones de la LVK, es decir, usar una malla a través de cada fuente de corriente. El número de “vidrios de ventana” en la red nos dice cuántas ecuaciones necesitamos. Se escriben ecuaciones adicionales de la LVK para cubrir los elementos restantes de circuito en la red. El siguiente ejemplo ilustra este método.

EJEMPLO 3.14

Encontremos I_o en la red de la figura 3.23a.

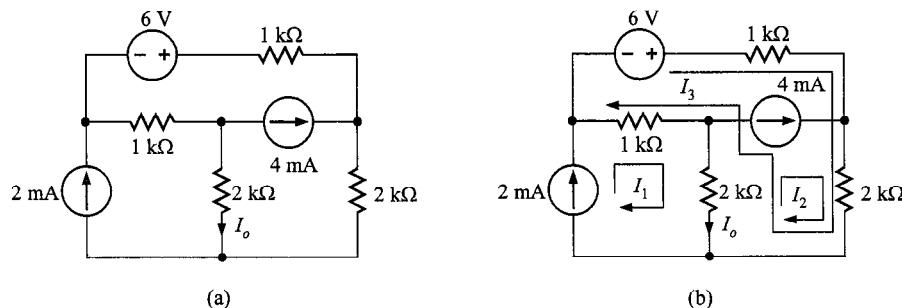


FIGURA 3.23 Circuito usado en el ejemplo 3.14.

SOLUCIÓN Primero, seleccionamos dos corrientes de malla I_1 y I_2 de modo que I_1 pase directamente a través de la fuente de 2 mA, como se muestra en la figura 3.23b. Por tanto, dos de nuestras tres ecuaciones linealmente independientes son

$$I_1 = 2 \times 10^{-3}$$

$$I_2 = 4 \times 10^{-3}$$

La corriente de malla restante I_3 debe pasar a través de los elementos de circuito no cubiertos por las ecuaciones previas y no puede, por supuesto, pasar a través de las fuentes de corriente. Esta corriente de malla también se muestra en la figura 3.23b. La ecuación de la LVK para esta malla es

$$-6 + 1kI_3 + 2k(I_2 + I_3) + 2k(I_3 + I_2 - I_1) + 1k(I_3 - I_1) = 0$$

Resolviendo la ecuación da

$$I_3 = \frac{-2}{3} \text{ mA}$$

Y por tanto,

$$I_o = I_1 - I_2 - I_3 = \frac{-4}{3} \text{ mA}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D3.9 Encuentre V_o en la red de la figura D3.9.

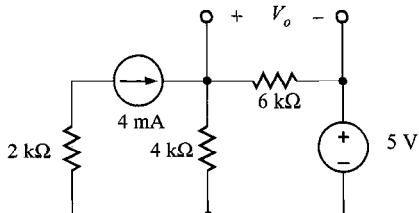


FIGURA D3.9

Resp.: $V_o = \frac{33}{5} \text{ V.}$

D3.10 Encuentre V_o en la red de la figura D3.10.

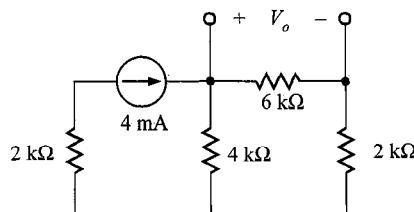


FIGURA D3.10

Resp.: $V_o = 8 \text{ V.}$

Circuitos que contienen fuentes dependientes

Tratamos con circuitos que contienen fuentes dependientes tal como lo hicimos en el pasado. Primero, tratamos a la fuente dependiente como si fuera una fuente independiente cuando escribimos las ecuaciones de la LVK. Despues, escribimos la ecuación controladora para la fuente dependiente. Los siguientes ejemplos ilustran el punto.

E J E M P L O 3.15

Encontremos V_o en el circuito de la figura 3.4, el cual contiene una fuente de voltaje controlada por voltaje.

SOLUCIÓN Las ecuaciones para las corrientes de malla que se muestran en la figura son

$$-2V_x + 2k(I_1 + I_2) + 4kI_1 = 0$$

$$-2V_x + 2k(I_1 + I_2) - 3 + 6kI_2 = 0$$

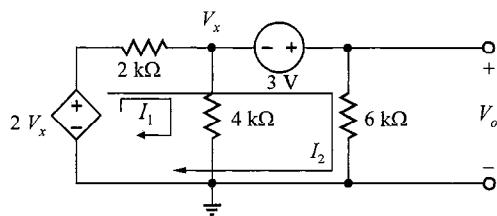


FIGURA 3.24 Circuito usado en el ejemplo 3.15.

donde

$$V_x = 4kI_1$$

Resolviendo esas ecuaciones se obtiene

$$I_2 = \frac{3}{2} \text{ mA}$$

y por tanto,

$$V_o = 6kI_2 = 9 \text{ V}$$

Por comparación, también resolveremos el problema utilizando el análisis nodal. La presencia de fuentes de voltaje indica que este método puede ser más simple. Tratando la fuente de 3 V y sus nodos de conexión como un supernodo, y escribiendo la ecuación de la LCK para este supernodo, se obtiene

$$\frac{V_x - 2V_x}{2k} + \frac{V_x}{4k} + \frac{V_x + 3}{6k} = 0$$

donde

$$V_o = V_x + 3$$

Esas ecuaciones también dan $V_o = 9 \text{ V}$.

E J E M P L O 3.16

Encontremos V_o en el circuito de la figura 3.25, el cual contiene una fuente de corriente controlada por voltaje.

SOLUCIÓN Las corrientes I_1 e I_2 son conducidas a través de las fuentes de corriente. Por tanto, dos de las ecuaciones que se necesitan son

$$I_1 = \frac{V_x}{2\,000}$$

$$I_2 = 2 \times 10^{-3}$$

La ecuación de la LVK para la tercera malla es

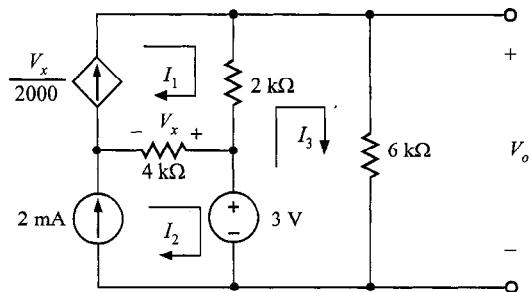


FIGURA 3.25 Circuito usado en el ejemplo 3.16.

$$-3 + 2k(I_3 - I_1) + 6kI_3 = 0$$

donde

$$V_x = 4k(I_1 - I_2)$$

Resolver esas ecuaciones da

$$I_3 = \frac{11}{8} \text{ mA}$$

y de aquí,

$$V_o = \frac{33}{4} \text{ V}$$

Como punto final, es muy importante examinar cuidadosamente el circuito antes de seleccionar un método de análisis. Un método podría ser mucho más simple que otro, y un poco de tiempo invertido al principio puede ahorrar mucho tiempo en el largo plazo.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D3.11 Use el análisis de anillo para encontrar V_o en el circuito de la figura D3.11.

Resp.: $V_o = 12 \text{ V}$.

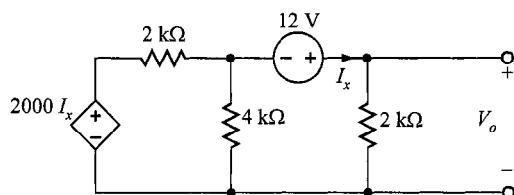


FIGURA D3.11

3.3 Ecuaciones de circuitos por medio de topología de redes

Ahora generalizamos los métodos de los análisis nodal y de malla que hemos presentado. Para nuestros propósitos, la *topología* se refiere a las propiedades relacionadas con la geometría del circuito. Esas propiedades permanecen sin cambio incluso si el circuito se dobla en otra forma teniendo la precaución de que ninguna parte se corte y que no se hagan nuevas conexiones.

Definiciones básicas

Para proporcionar una base para los conceptos a ser discutidos a continuación, considere la red que se muestra en la figura 3.26. Suponga que se nos pide que encontramos todas las corrientes y voltajes en este circuito. Este circuito parece ser mucho más complicado que los que hemos considerado al principio. Es más complicado porque es lo que se llama circuito *no planar*. Un circuito *planar* es uno que puede dibujarse en una superficie plana sin pasos; es decir, ninguna rama pasa sobre cualquier otra rama. Y por supuesto, un circuito no planar es uno que no es planar.

Presentemos ahora algunos conceptos topológicos para ayudarnos en nuestra discusión. Como las propiedades geométricas de un circuito son independientes de los elementos del circuito que contiene cada rama, simplemente representaremos cada rama de la red por un segmento de línea. Tal dibujo del circuito se llama *gráfico*.

E J E M P L O 3.17

Encuentre el gráfico para el circuito que se muestra en la figura 3.27a.

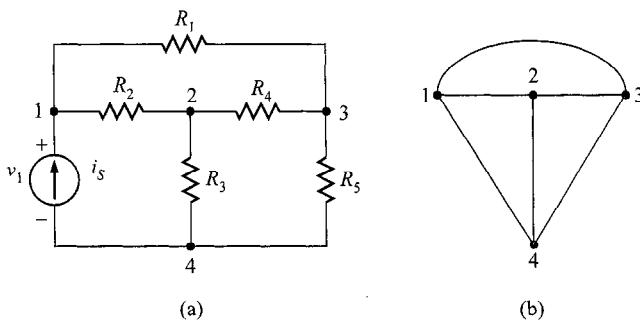


FIGURA 3.27 Circuito y su gráfico asociado.

SOLUCIÓN El gráfico asociado con el circuito que se muestra en la figura 3.27a está dado en la figura 3.27b..

Como puede verse por el ejemplo, el gráfico consiste en un número de nodos interconectados. Si existe una trayectoria desde cualquier nodo hacia todos los otros nodos, se dice que el gráfico es *conexo*.

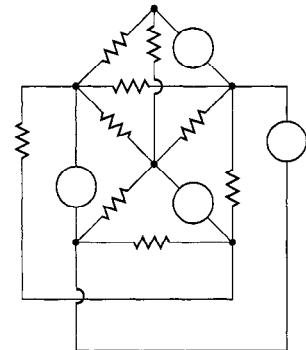


FIGURA 3.26
Ejemplo de un circuito no planar.

Un *árbol* del gráfico se define como un conjunto de ramas que conecta todos los nodos a todos los demás nodos, vía algún recorrido sin formar una trayectoria cerrada. En general, existe un número de diferentes árboles para cualquier circuito dado.

E J E M P L O 3.18

Encontrar tres posibles árboles para el gráfico que se muestra en la figura 3.27b.

SOLUCIÓN En la figura 3.28 están dados tres posibles árboles para el gráfico mostrado en la figura 3.27b.

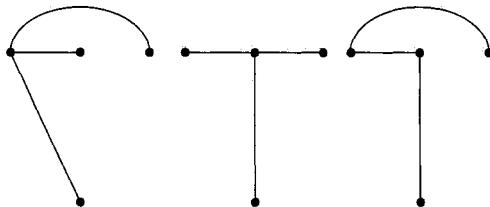


FIGURA 3.28 Árboles para el gráfico de la figura 3.27b.

Si se conoce un gráfico para una red y se especifica un árbol en particular, las ramas del gráfico que no son parte del árbol forman lo que se llama *coárbol*. El coárbol consiste en lo que llamamos *ligas* (o *acoplamiento*).

E J E M P L O 3.19

Encuentre los acoplamientos para los coárboles correspondientes a los árboles de la figura 3.28.

SOLUCIÓN Los acoplamientos que pertenecen a los coárboles correspondientes a los árboles de la figura 3.28 se muestran punteados en la figura 3.29.

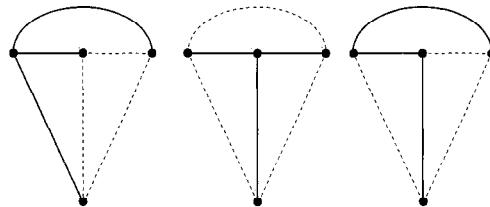


FIGURA 3.29 Coárboles consistentes en acoplamiento para los árboles que se muestran en la figura 3.28.

Observe que es imposible especificar categóricamente una rama particular de un gráfico como un acoplamiento, ya que ésta puede ser un acoplamiento para una elección de árbol y no para otra.

Finalmente, deseamos definir lo que se llama *grupo de corte*. Un grupo de corte es simplemente un conjunto mínimo de ramas, las que, cuando se cortan, dividirán el gráfico en dos partes separadas. Por lo tanto, es imposible ir de un nodo en una parte del gráfico a un nodo en otra parte sin pasar a través de una rama del grupo de corte.

E J E M P L O 3.20

Encuentre dos grupos de corte para el gráfico que se muestra en la figura 3.27b.

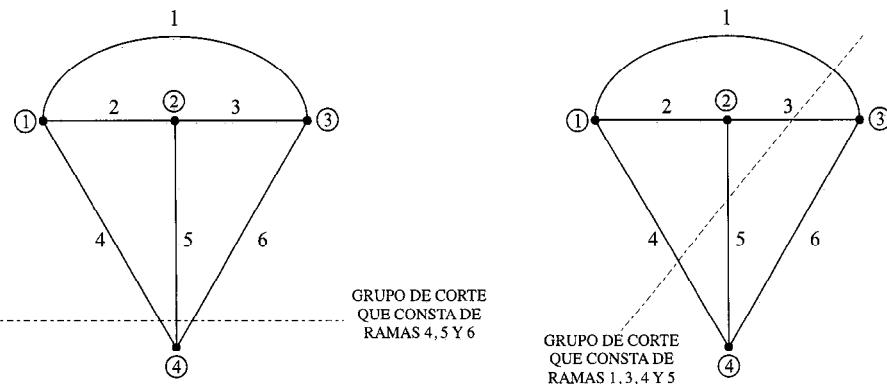


FIGURA 3.30 Dos grupos de corte para el gráfico de la figura 3.27b.

GRUPO DE CORTE QUE CONSTA DE RAMAS 4, 5 Y 6

GRUPO DE CORTE QUE COSTA DE RAMAS 1, 3, 4 Y 5

SOLUCIÓN Dos grupos de corte para el gráfico de la figura 3.27b se muestran en la figura 3.30. Observe que en un caso el nodo 4 está separado de los nodos 1, 2 y 3; en el otro caso, los nodos 1 y 2 están separados de los nodos 3 y 4.

Suponga que tenemos un gráfico que representa un circuito; definamos los siguientes parámetros:

$$L = \text{número de acoplamientos}$$

$$B = \text{número de ramas en el gráfico}$$

$$N = \text{número de nodos en el gráfico}$$

Ahora suponga que separamos todas las ramas del gráfico de modo que sólo permanezcan los nodos. A fin de construir un árbol, comenzamos colocando una rama entre dos nodos. Continuamos agregando ramas al árbol sin formar ninguna malla. Cada vez que agregamos una rama adicional agregamos un nodo más. Advierta que la incorporación de cada rama sucesiva conecta un nodo, excepto para la primera rama, la cual conecta dos nodos. De aquí que hay un nodo más que ramas en el árbol. Por tanto, en general, un árbol consiste en $N - 1$ ramas. Como todo el gráfico contiene B ramas, el número de acoplamientos está dado por la expresión

$$L = B - (N - 1) = B - N + 1 \quad (3.8)$$

E J E M P L O 3.21

Encuentre un árbol para la red que se muestra en la figura 3.26.

SOLUCIÓN Un árbol específico para la red de la figura 3.26 se ilustra en la figura 3.31. Advierta que el gráfico de la red satisface la relación de la ecuación (3.8).

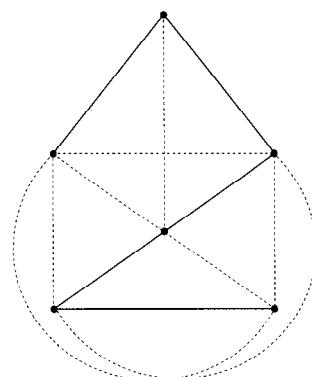


FIGURA 3.31 Árbol y sus correspondientes acoplamientos para la red de la figura 3.26.

$$L = B - N + 1$$

$$8 = 13 - 6 + 1$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D3.12 Dado el gráfico para la red de la figura D3.12a, establezca si las combinaciones de árbol-coárbol de la figura D3.12b a f forman un conjunto válido de ramas de árbol y acoplamientos.

Resp.: (b) No, (c) sí (d) sí, (e) no, (f) sí.

D3.13 Calcule el número apropiado de acoplamientos para los gráficos de la figura D3.12a.

Resp.: $L = 4$.

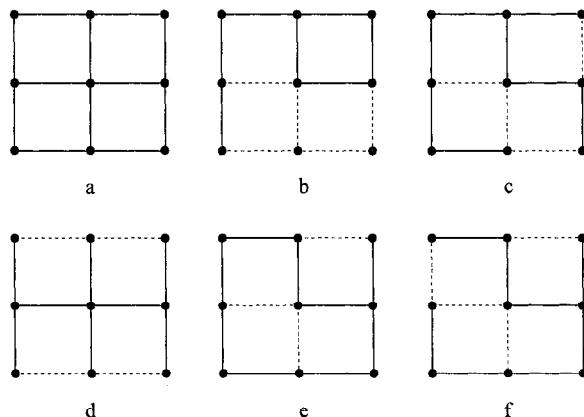


FIGURA D3.12

Ecuaciones generales del análisis nodal

Hemos mostrado que si tuviéramos un conjunto de $N - 1$ ecuaciones nodales *linealmente independientes* para una red de N nodos, podríamos determinar los voltajes nodales necesarios. Con esto en mente, redibujemos los gráficos de la figura 3.30 con las direcciones de corriente supuestas como se muestra en la figura 3.32. La LCK para cada parte del circuito dividida entre un grupo de corte se llama *ecuación del grupo de corte*. Note que cada ecuación del grupo de corte no es más que una suma de las ecuaciones de la LCK escritas para todos los nodos en cada parte del circuito. Por ejemplo, la ecuación del grupo de corte para la figura 3.32a es

$$i_4 - i_5 + i_6 = 0$$

la cual es la LCK en el nodo 4, donde $i_k(t)$ representa la k -ésima rama. De manera similar, la ecuación del grupo de corte para la figura 3.32b es

$$i_4 - i_5 + i_3 + i_1 = 0$$

la cual es la suma de las ecuaciones de la LCK en los nodos 3 y 4, o de modo equivalente en los nodos 1 y 2:

$$\text{Para el nodo 3: } i_1 + i_3 - i_6 = 0$$

$$\text{Para el nodo 4: } i_4 - i_5 + i_6 = 0$$

Sumando esas dos ecuaciones se obtiene

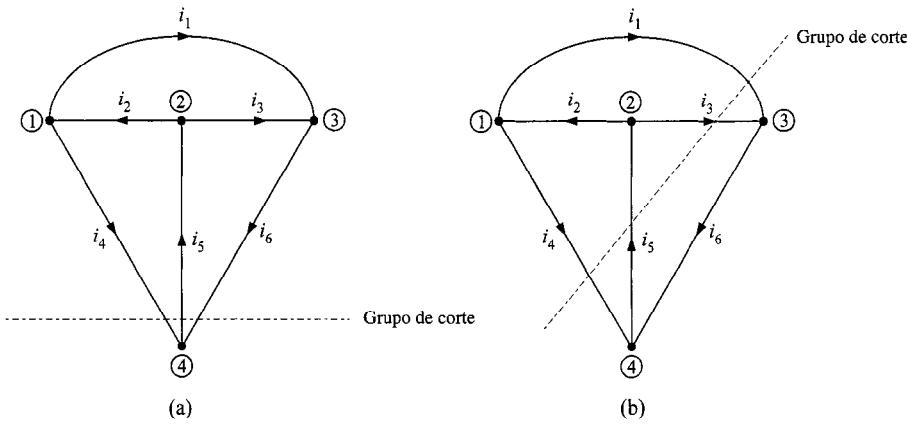


FIGURA 3.32 Ejemplo de gráfico para ilustrar las ecuaciones del grupo de corte.

$$i_4 - i_5 + i_3 + i_1 = 0$$

Debido a esta relación entre las ecuaciones de la LCK y las ecuaciones del grupo de corte, podemos determinar las ecuaciones independientes de la LCK para una red mediante la determinación de las ecuaciones del grupo de corte independientes. Además, podemos probar [1] que el número de ecuaciones del grupo de corte independientes (y por tanto de ecuaciones de la LCK) es exactamente $N - 1$.

Las ecuaciones del grupo de corte se derivan de un árbol que, como hemos mostrado, contiene $N - 1$ ramas. Si se corta cualquier rama del árbol, éste se dividirá en dos partes. Cada parte del árbol que se corta junto con los acoplamientos que conectan las dos partes separadas del gráfico, forman un grupo de corte. Por ejemplo, los grupos de corte para un árbol específico del gráfico presentado en la figura 3.27 se muestran en la figura 3.33. Note que el grupo de corte 1 incluye la rama 5 y los acoplamientos 4 y 6. El grupo de corte 2 incluye la rama 2 y los acoplamientos 4, 3 y 6. El grupo de corte 3 incluye la rama 1 y los acoplamientos 3 y 6. Los grupos de corte que contienen sólo una rama se llaman *grupos de corte fundamentales*, y hay $N - 1$ grupos fundamentales pues hay $N - 1$ ramas.

Demostraremos ahora el uso de la topología en la determinación de las ecuaciones nodales para una red.

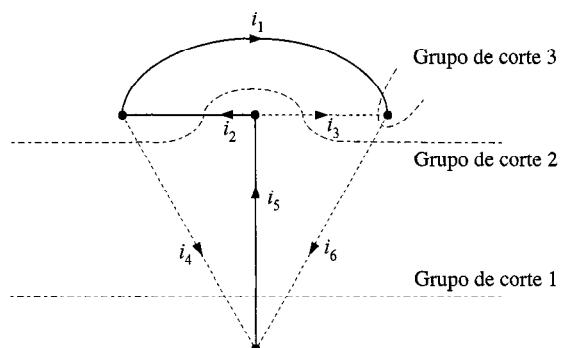


FIGURA 3.33 Ilustración de grupos de corte fundamentales.

E J E M P L O 3.22

Escriba las ecuaciones nodales para la red de la figura 3.27a.

SOLUCIÓN El circuito de la figura 3.27a está redibujado en la figura 3.34a con direcciones de corriente supuestas. Un árbol correspondiente con grupos de corte fundamentales se muestra en la figura 3.34b. Las ecuaciones del grupo de corte para los grupos de corte 1, 2 y 3 son

$$i_1 + i_2 - i_S = 0 \quad (3.9)$$

$$i_1 + i_4 - i_5 = 0 \quad (3.10)$$

$$i_S - i_3 - i_5 = 0 \quad (3.11)$$

Restando la segunda ecuación de la primera y sumando la tercera ecuación se obtiene

$$i_2 - i_4 - i_3 = 0 \quad (3.12)$$

Cada árbol de las cuatro ecuaciones están líneas independientes. Seleccione las ecuaciones (3.9), (3.12) y (3.10) y escribiendo la corriente de las ramas en términos del voltaje del nodo, se obtiene.

$$\frac{v_1 - v_3}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} - i_S = 0$$

$$\frac{v_1 - v_2}{R_2} - \frac{v_2}{R_3} + \frac{(v_2 - v_3)}{R_4} = 0$$

$$\frac{v_1 - v_3}{R_1} + \frac{v_2 - v_3}{R_4} - \frac{v_3}{R_5} = 0$$

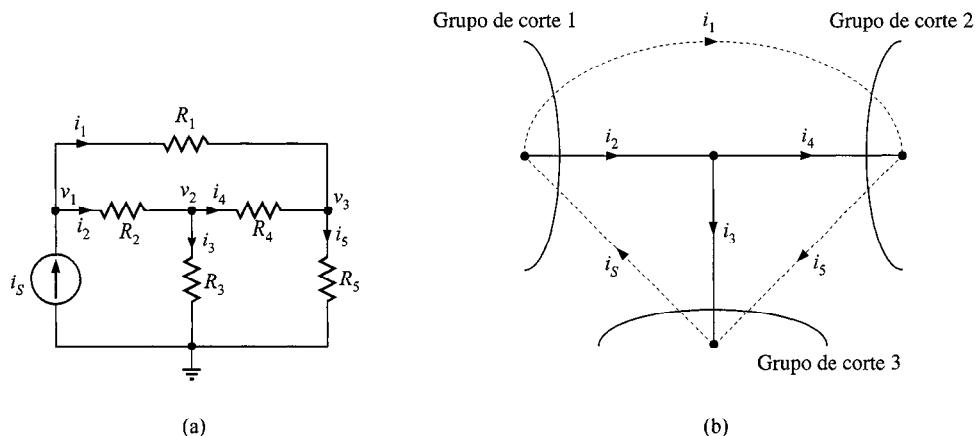


FIGURA 3.34 Red y gráfico usados en el ejemplo 3.22.

o

$$v_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - v_2 \left(\frac{1}{R_2} \right) - v_3 \left(\frac{1}{R_1} \right) = i_S$$

$$-v_1 \left(\frac{1}{R_2} \right) + v_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - v_3 \left(\frac{1}{R_4} \right) = 0$$

$$-v_1 \left(\frac{1}{R_1} \right) - v_2 \left(\frac{1}{R_4} \right) + v_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) = 0$$

Observe que las tres ecuaciones seleccionadas se eligieron porque pueden ser reconocidas como las ecuaciones nodales para la red.

EJEMPLO 3.23

Deseamos derivar las ecuaciones nodales para la red de la figura 3.6. Un gráfico para esta red se muestra en la figura 3.35.

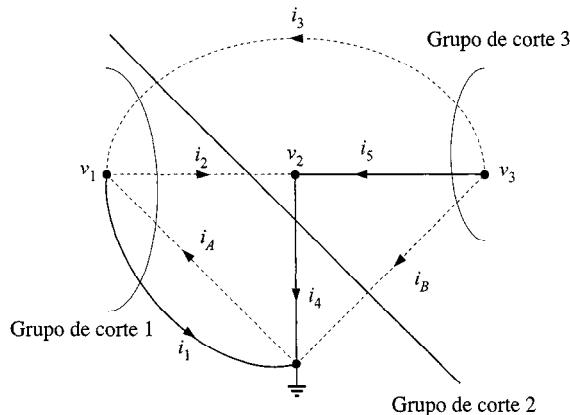


FIGURA 3.35 Gráfico y grupos de corte para la red que se muestra en la figura 3.6.

SOLUCIÓN Las ecuaciones del grupo de corte para este gráfico son

$$i_1 - i_A + i_2 - i_3 = 0$$

$$i_3 - i_2 + i_4 + i_B = 0$$

$$i_3 + i_5 + i_B = 0$$

Restando la tercera ecuación de la segunda y utilizando la ecuación resultante con la primera y tercera ecuaciones se obtiene

$$i_1 + i_2 - i_3 = i_A$$

$$-i_2 + i_4 - i_5 = 0$$

$$i_3 + i_5 = -i_B$$

que son idénticas a las ecuaciones antes derivadas.

Finalmente, si hay fuentes de voltaje presentes en la red, entonces, en general, el número de ecuaciones de la LCK independientes es $N - 1 -$ el número de fuentes de voltaje.

Cuando se usan ecuaciones nodales para resolver circuitos que contienen fuentes de voltaje, las siguientes reglas gobiernan la formulación de las ecuaciones requeridas:

1. Elegir un nodo como referencia y asignar una variable de voltaje a todos los demás nodos. Sea N el número total de nodos.
2. Formar un árbol que incluya todas las fuentes de voltaje (dependientes e independientes). Advierta que hay $N - 1$ ramas de un árbol y un número igual de grupos de corte fundamentales. Sea M el número de fuentes de voltaje. Por tanto, hay M grupos de corte fundamentales, cada uno de los cuales contiene una fuente de voltaje.
3. Para cada fuente de voltaje, escribir la ecuación de restricción correspondiente. Hay M ecuaciones de restricción.
4. Para cada grupo de corte fundamental que no contenga ninguna fuente de voltaje, escribir la ecuación del grupo de corte correspondiente. Hay $N - 1 - M$ ecuaciones nodelas linealmente independientes.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D3.14 Dada la red de la figura D3.14a, use el gráfico especificado para la red en la figura D3.14b para escribir un conjunto apropiado de ecuaciones nodelas para la red.

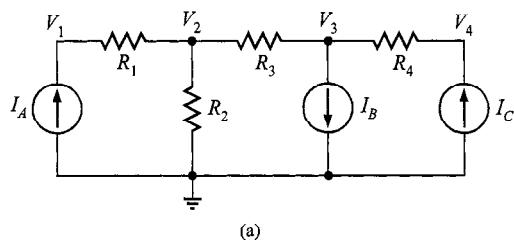


FIGURA D3.14 (a)

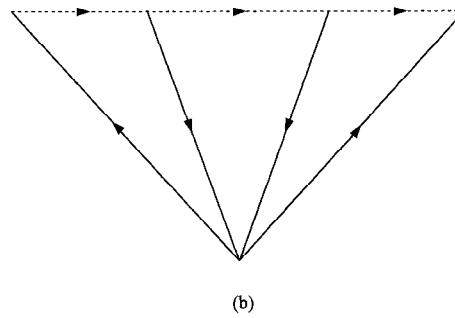


FIGURA D3.14 (b)

Resp.: $I_A = \frac{V_1 - V_2}{R_1}, \frac{V_1 - V_2}{R_1} = \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_2 - V_3}{R_3},$

$$\frac{V_2 - V_3}{R_3} = \frac{V_3 - V_4}{R_4} + I_B, \frac{V_3 - V_4}{R_4} = -I_C.$$

Ecuaciones generales de análisis de malla

Considere una vez más el gráfico que se muestra en la figura 3.33. Imagine que comenzamos sólo con las ramas 1, 2 y 5. Si ahora agregamos un acoplamiento a la vez al ár-

bol, creamos una nueva malla con cada acoplamiento. Por ejemplo, agregando el acoplamiento 3 se crea la malla que consiste en ese acoplamiento y las ramas 1 y 2 del árbol. Los otros acoplamientos agregados uno a la vez crean mallas similares. Como hemos mostrado que el número de acoplamientos es igual a $B - N + 1$, construiremos este mismo número de mallas, cada una de las cuales contiene sólo un acoplamiento. Las mallas construidas de esta manera se llaman *mallas fundamentales*. Si se escriben las ecuaciones de la LVK para esas mallas fundamentales, esas ecuaciones serán independientes, ya que cada una contiene un voltaje de acoplamiento que no está presente en cualquiera otra ecuación. De aquí que hay al menos $B - N + 1$ ecuaciones de la LVK independientes, y de hecho, podemos probar [1] que hay exactamente $B - N + 1$ ecuaciones de la LVK independientes.

Si hay fuentes de corriente presentes en la red, entonces en general, el número de ecuaciones de la LVK independientes es $B - N + 1$ - el número de fuentes de corriente.

Cuando se usan ecuaciones de malla para resolver circuitos que contienen fuentes de corriente, las siguientes reglas gobiernan la formulación de las ecuaciones requeridas:

1. Formar un árbol que excluya todas las fuentes de corriente (dependientes e independientes). Sea P el número total de fuentes de corriente.
2. Asignar a cada malla fundamental una variable de corriente de malla. Represente B el número total de ramas. Advierta que hay $B - (N - 1)$ acoplamientos y un número igual de mallas fundamentales. De aquí que hay P mallas fundamentales, cada una de las cuales contiene una fuente de corriente.
3. Para cada malla fundamental que contiene una fuente de corriente, escribir la correspondiente ecuación de restricción que relaciona la corriente de malla con el valor de la fuente de corriente. Hay P de tales ecuaciones de restricción.
4. Para cada malla fundamental que no contiene fuentes de corriente, escribir la ecuación de malla correspondiente. Hay $B - (N - 1) - P$ ecuaciones de malla linealmente independientes.

Hasta aquí, nuestro análisis ha sido muy general. En el caso especial de redes planares, los marcos de ventana pueden emplearse para escribir las ecuaciones de la LVK necesarias. La figura 3.36, la cual es una versión redibujada de la figura 3.34, ilustra este enfoque. Si se supone que todas las corrientes de anillo están en la misma dirección y no hay presentes fuentes controladas, las ecuaciones de la LVK para los marcos de ventana pueden escribirse mediante inspección, como se demostró con anterioridad.

E J E M P L O 3.24

Utilizando los métodos de la topología que acabamos de describir, deseamos derivar las ecuaciones de malla para la red de la figura 3.18. Un gráfico de esta red se muestra en la figura 3.37a. Los voltajes de rama han sido seleccionados y los acoplamientos junto con las ramas apropiadas de árbol forman las mallas fundamentales.

SOLUCIÓN Las variables de las corrientes de malla fundamentales son i_1 e i_2 , y las ecuaciones de malla fundamentales son

$$-v_{S1} + v_{R_1} + v_{R_3} + v_{R_2} = 0$$

$$-v_{R_3} + v_{S2} + v_{R_4} + v_{R_5} = 0$$

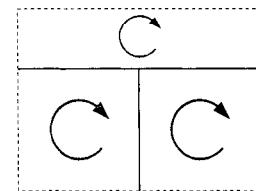


FIGURA 3.36 Gráfico que ilustra los marcos de ventana para el circuito de la figura 3.34.

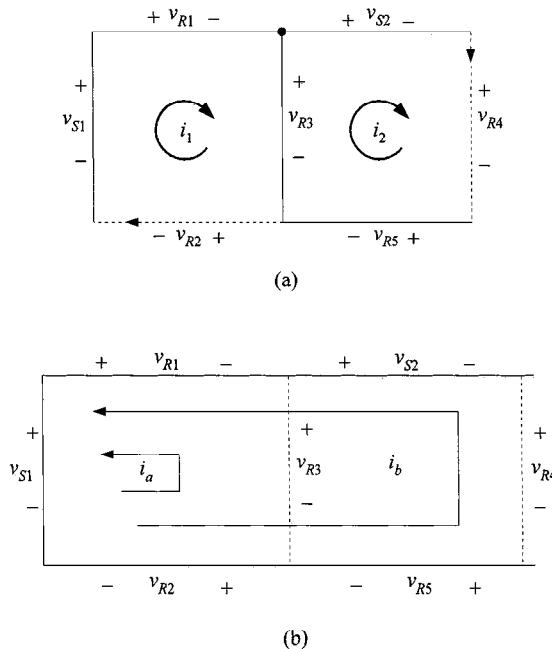


FIGURA 3.37 Gráfico para la red de la figura 3.18 que ilustra las mallas fundamentales.

Utilizando la relación $v = iR$, obtenemos

$$\begin{aligned} i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_3 + i_1 R_2 &= v_{S1} \\ -(i_1 - i_2) R_3 + i_2 R_4 + i_2 R_5 &= -v_{S2} \end{aligned}$$

O

$$\begin{aligned} i_1 (R_1 + R_2 + R_3) - i_2 R_3 &= v_{S1} \\ -i_1 R_3 + i_2 (R_3 + R_4 + R_5) &= -v_{S2} \end{aligned}$$

que son las mismas que las ecuaciones antes obtenidas.

Suponga, sin embargo, que hemos seleccionado ramas de árbol y acoplamientos correspondientes para la red como se muestra en la figura 3.37b. Las corrientes de malla fundamental son i_a e i_b , y las ecuaciones de malla fundamental en este caso son

$$v_{S1} - v_{R_1} - v_{R_3} - v_{R_2} = 0$$

$$v_{S1} - v_{R_1} - v_{S2} - v_{R_4} - v_{R_5} - v_{R_2} = 0$$

Como $v_{R_1} = (i_a + i_b)R_1$, y así sucesivamente, las ecuaciones precedentes pueden escribirse en términos de las corrientes de malla como

$$(R_1 + R_2 + R_3)i_a + (R_1 + R_2)i_b = v_{S1}$$

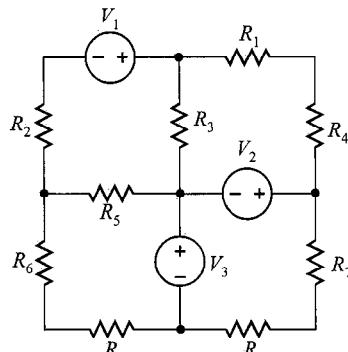
$$(R_1 + R_2)i_a + (R_1 + R_2 + R_4 + R_5)i_b = v_{S1} - v_{S2}$$

Esas dos ecuaciones linealmente independientes también darán todas las corrientes y voltajes en la red.

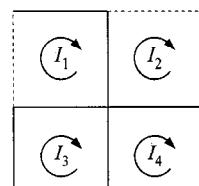
EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D3.15 Dada la red en la figura D3.15a y el gráfico para la red de la figura D3.15b, escriba el conjunto apropiado de ecuaciones de malla que den todas las corrientes en la red.

Resp.: $I_1(R_2 + R_3 + R_5) - I_2(R_3) - I_3(R_5) - I_4(0) = V_1$,
 $-I_1(R_3) + I_2(R_1 + R_3 + R_4) - I_3(0) - I_4(0) = -V_2$,
 $-I_1(R_5) - I_2(0) + I_3(R_5 + R_6 + R_8) - I_4(0) = -V_3$,
 $-I_1(0) - I_2(0) - I_3(0) + I_4(R_7 + R_9) = V_2 + V_3$.



(a)



(b)

FIGURA D3.15

3.4 Circuitos con amplificadores operacionales

El amplificador operacional, o op-amp como se conoce comúnmente, es un circuito extremadamente importante. Es una interconexión versátil de dispositivos que expande vastamente nuestra capacidad en el diseño de circuitos. Se emplea en todo, desde los sistemas de control de motores a los hornos de microondas. El op-amp se introdujo por primera vez en los años cuarenta para su uso en computadoras analógicas, y ahora encuentra extensa aplicación en el diseño de circuitos como resultado de los avances hechos en la tecnología de circuitos integrados. Aunque modelaremos los op-amps como dispositivos completamente simples, su construcción real implica el uso de numerosos componentes que incluyen resistencias, capacitores y transistores. Agregando resistencias y capacitores a las terminales del op-amp, podemos usar este modelo de op-amp para diseñar redes que desarrollen muchas funciones como suma, resta, diferenciación e integración, así como también graduación de voltaje y conversión de corriente a voltaje. Esos “bloques de construcción” pueden entonces emplearse para satisfacer aplicaciones más complejas.

El propósito de nuestro modelo es describir las características terminales (relaciones de voltaje-corriente) de los op-amp. Por tanto, comenzemos considerando las terminales del op-amp LM101 disponible comercialmente. La figura 3.38a muestra un bosquejo del LM101 DIP (paquete en línea dual) que tiene ocho puntas, o terminales. Las puntas 1, 5 y 8 se usan para ajustes finos de las características del dispositivo; sin embargo, un análisis de ellas en este punto sólo serviría para complicar innecesariamente la presentación. Las puntas 4 y 7 son las terminales de voltaje para el suministro de potencia de cd (típicamente 10 a 15 V); y, además, proporcionan una trayectoria de regreso a tierra para corriente ca. El op-amp tiene dos entradas las puntas 2 y 3. Un

voltaje positivo en la punta 3 produce una salida positiva. En consecuencia, la punta 3 se llama *entrada no inversora*. Un voltaje positivo en la punta 2 da una salida negativa; por tanto, se le llama *entrada inversora*. Con base en la descripción precedente, el amplificador operacional, a diferencia de los elementos que hemos presentado hasta aquí, es en esencia un dispositivo de cinco terminales. El símbolo del circuito para el op-amp con sus cinco conexiones terminales se muestra en la figura 3.38b.

Funcionalmente, el op-amp opera como el circuito equivalente que se muestra en la figura 3.38c. Este circuito equivalente implica un dispositivo unilateral; es decir, la salida está determinada por la diferencia en los voltajes de entrada, pero la entrada no se afecta por los voltajes en la salida. La resistencia R_i es muy grande, la ganancia A es muy alta y la resistencia R_o es muy baja; los valores típicos para esos parámetros son 10^5 a $10^{12} \Omega$, 10^5 a 10^7 V/V y 1 a 50Ω , respectivamente.

La curva de transferencia de cd (gráfica de la salida contra la entrada) para un op-amp con $A = 10^5$, $V^+ = 12 \text{ V}$ y $V^- = -12 \text{ V}$ se muestra en la figura 3.38d. El voltaje de entrada, V_{ent} , es el voltaje de entrada no inversora menos el voltaje de entrada inversora. Advierta primero que el voltaje de salida no puede exceder los valores de suministro de potencia. Esto se debe a la circuitería dentro del op-amp. Una vez que la salida alcanza ambos valores de suministro de potencia, incrementos posteriores en V_{ent} no tienen efecto en la salida y se dice que el op-amp está saturado. La porción de la curva de interés para nosotros es la región lineal. Aquí la razón de salida a entrada es la ganancia, $A = 10^5$.

Los valores enlistados previamente para R_i , R_o y A sugieren un modelo incluso más simple conocido como el *modelo del op-amp ideal*. R_i es muy grande y, por tanto, puede suponerse que es un circuito abierto. R_o es muy baja con respecto a la conexión de carga de salida recomendada y, por tanto, puede suponerse que es cero. Finalmente, la ganancia A es un factor de amplificación grande y puede también suponerse que es infinito. En este punto de nuestra enseñanza, sin embargo, la ganancia infinita causa alguna preocupación. ¿Significa esto que si la entrada es $1 \mu\text{V}$ la salida es ilimitada? Nuestro sentido común nos lleva a cuestionar esa condición. La realidad de la situación es que los voltajes de salida siempre estarán entre los voltajes de suministro de potencia como se muestran en la figura 3.38d. Por tanto, si el op-amp ha de permanecer en la región lineal de operación, el voltaje de salida (la diferencia entre los voltajes de las entradas inversora y no inversora) deberá permanecer dentro de los límites.

$$\frac{V_-}{A} \leq V_{\text{ent}} \leq \frac{V_+}{A}$$

Para valores muy grandes de A , V_{ent} se aproxima a cero. Así, una ganancia infinita da un voltaje de salida finito desde una entrada de cero volt. Llamamos a esta condición en las terminales de entrada *corto virtual*.

Otro aspecto importante de la configuración del op-amp que se muestra en la figura 3.38c es que si se supone que la ganancia es infinita, el voltaje de salida es imposible de controlar. Para la mirada de aplicaciones en las que necesitamos amplificadores, el control del voltaje de salida es vital. La manera como llevamos a cabo este control es a través de la realimentación; es decir, una parte de la señal de salida se realimentó hacia la entrada. Más tarde, mostraremos que a través de este mecanismo el rendimiento de todo el circuito del op-amp se puede controlar mediante elementos externos tales como resistencias. Para lograrlo, el op-amp se conecta a componentes externos con una trayectoria de señal desde la salida a la entrada inversora. Con el op-amp conectado de esta manera, veremos que la alta ganancia sirve para mantener las relaciones de entrada y salida de voltaje a pesar de cam-

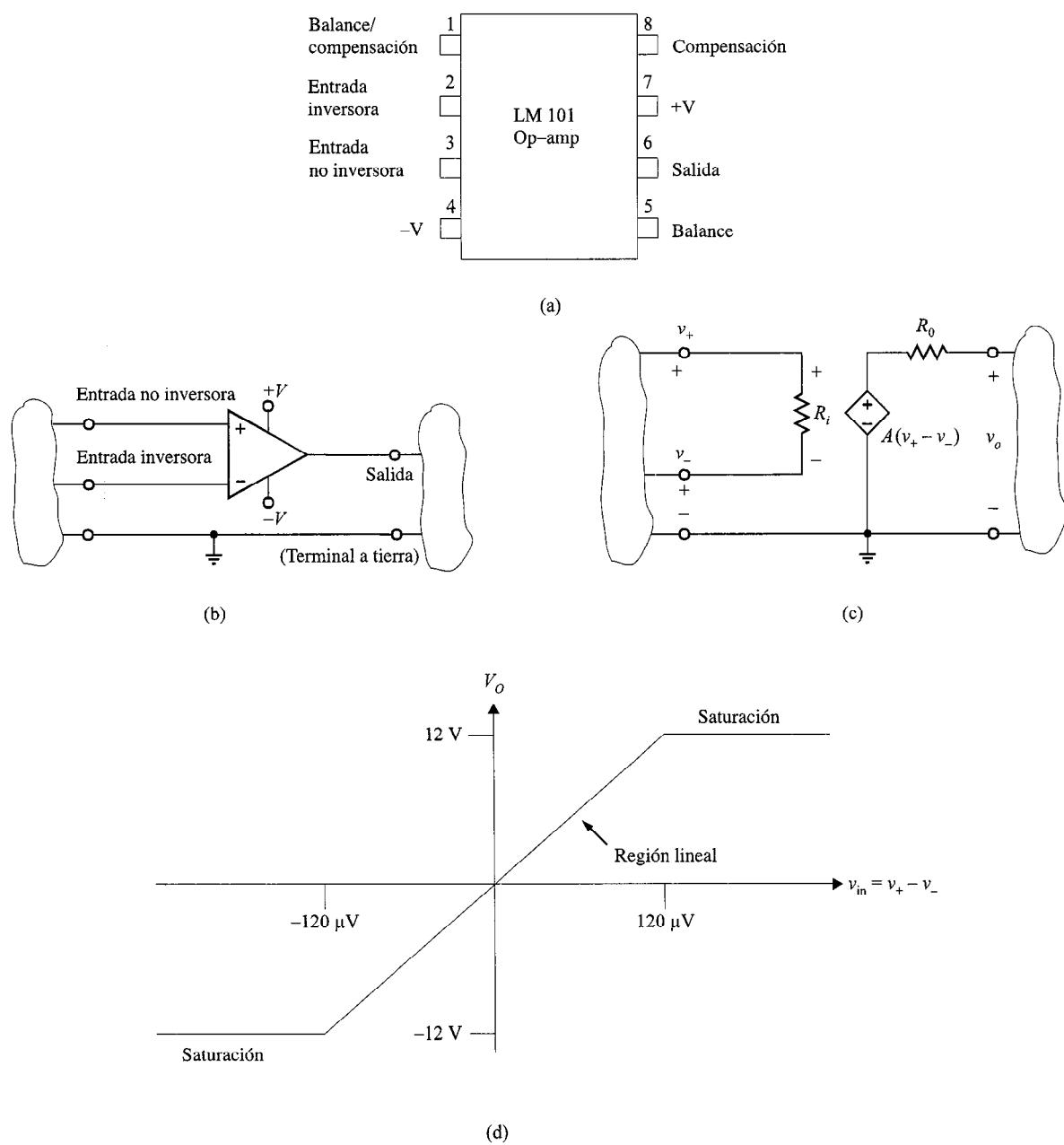


FIGURA 3.38 Representaciones del amplificador operacional.

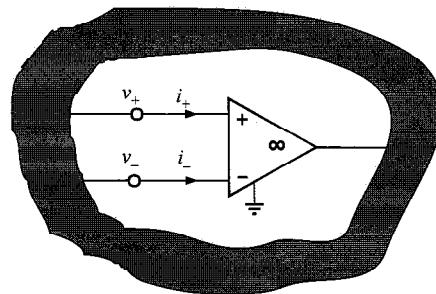


FIGURA 3.39 Modelo ideal de un amplificador operacional. Parámetros del modelo: $i_+ = i_- = 0$, $v_+ = v_-$.

bios en las características de la carga. A medida que la ganancia A del amplificador sea muy grande, la funcionalidad de los circuitos será ajustada por los componentes conectados externamente.

Bajo la suposición recién establecida, el modelo ideal para el op-amp se reduce al que se muestra en la figura 3.39. Las características importantes del modelo son: 1) como R_i es extremadamente grande, las corrientes de entrada al op-amp son aproximadamente cero (es decir, $i_+ \approx i_- \approx 0$); y 2) si el voltaje de salida ha de permanecer confinado, entonces a medida que la ganancia se hace muy grande y se aproxima a infinito, el voltaje a través de las terminales de entrada debe simultáneamente volverse infinitesimalmente pequeño de modo que conforme $A \rightarrow \infty$, $v_+ - v_- \rightarrow 0$ (es decir, $v_+ - v_- = 0$ o $v_+ = v_-$). La diferencia entre esos voltajes de entrada con frecuencia se llama la *señal de error* para el op-amp (es decir, $v_+ - v_- = v_e$).

La terminal de tierra (---) que se muestra en el op-amp es necesaria para el regreso de la señal de corriente, y garantiza que la ley de corriente de Kirchhoff se satisface en el op-amp y en el nodo de tierra del circuito.

En resumen, entonces, nuestro modelo ideal para el op-amp se encuentra establecido simplemente por las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} i_+ &= i_- = 0 \\ v_+ &= v_- \end{aligned} \quad (3.13)$$

Esas simples condiciones son extremadamente importantes ya que forman la base de nuestro análisis de circuitos con op-amp.

El siguiente ejemplo servirá para ilustrar la validez de nuestras suposiciones cuando analizamos circuitos con op-amp.

EJEMPLO 3.25

Determinemos la ganancia de la configuración básica de op-amp inversor que se muestra en la figura 3.40a utilizando los modelos no ideal e ideal del op-amp.

SOLUCIÓN Nuestro modelo para el op-amp se muestra de manera esquemática en la figura 3.40b y específicamente en términos de los parámetros R_i , A , y R_o en la figura 3.40c. Si el modelo se inserta en la red de la figura 3.40a, obtenemos el circuito de la figura 3.40d, el cual puede redibujarse como se muestra en la figura 3.40e.

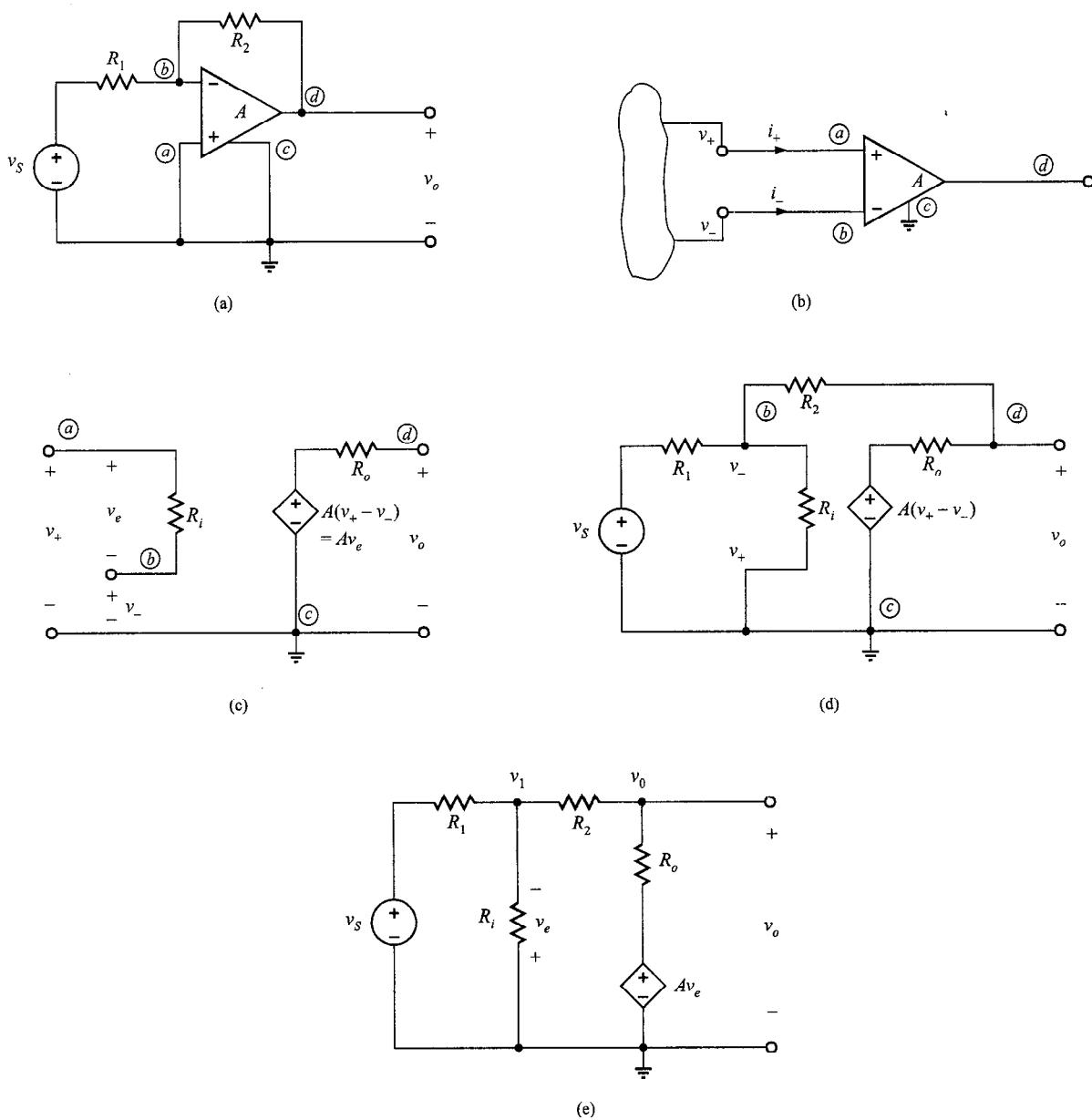


FIGURA 3.40 Circuito con op-amps.

Las ecuaciones nodales para la red son

$$\frac{v_1 - v_s}{R_1} + \frac{v_1}{R_i} + \frac{v_1 - v_o}{R_2} = 0$$

$$\frac{v_o - v_1}{R_2} + \frac{v_o - Av_e}{R_o} = 0$$

donde $v_e = -v_1$. Las ecuaciones pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} & -\left(\frac{1}{R_2}\right) \\ -\left(\frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_o}\right) & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para los voltajes nodales, obtenemos

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} & \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_o} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$\Delta = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} \right) - \left(\frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_o} \right)$$

De aquí,

$$v_o = \frac{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_o} \right) \left(\frac{v_s}{R_1} \right)}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} \right) - \left(\frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_o} \right)}$$

la cual puede escribirse como

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{-(R_2/R_1)}{1 - \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} \right) / \left(\frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_o} \right) \right]}$$

Si ahora empleamos valores típicos para los parámetros del circuito (por ejemplo, $A = 10^5$, $R_i = 10^8 \Omega$, $R_o = 10 \Omega$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, y $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$), la ganancia de voltaje de la red es

$$\frac{v_o}{v_s} = 4.9996994 \approx -5.000$$

Sin embargo, el op-amp tiene ganancia infinita y, por tanto, si tomamos el límite de la ecuación de ganancia cuando $A \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{v_o}{v_s} \right) = -\frac{R_2}{R_1} = -5.000$$

Note que el op-amp ideal condujo a un resultado exacto en cuatro dígitos significativos del que se obtiene de una solución exacta de un típico modelo del op-amp. Esos resultados son fácilmente repetidos por el vasto arreglo de útiles circuitos de op-amp.

Ahora analizamos la red de la figura 3.40a usando el modelo de op-amp ideal. En este modelo

$$i_+ = i_- = 0$$

$$v_+ = v_-$$

Como se muestra en la figura 3.40a, $v_+ = 0$ y, por tanto, $v_- = 0$. Si ahora escribimos una ecuación nodal en la terminal negativa del op-amp, obtenemos

$$\frac{v_s - 0}{R_1} + \frac{v_o - 0}{R_2} = 0$$

o

$$\frac{v_o}{v_s} = -\frac{R_2}{R_1}$$

y hemos obtenido inmediatamente los resultados previamente derivados.

Observe que la ganancia es una simple razón de resistencia. Este hecho hace al amplificador muy versátil pues podemos controlar la ganancia con exactitud y alterar su valor cambiando sólo una resistencia. También, la ganancia es esencialmente independiente de los parámetros del op-amp. Como los valores precisos de A , R_i y R_o son sensibles a factores como temperatura, radiación y edad, de su eliminación resulta una ganancia que es estable a pesar del ambiente inmediato. Como es mucho más fácil emplear el modelo de op-amp ideal que el modelo no ideal, si no se determina otra cosa usaremos las suposiciones del op-amp ideal para analizar circuitos que contengan amplificadores operacionales.

E J E M P L O 3.26

Considere el circuito del op-amp que se muestra en la figura 3.41. Determinemos una expresión para el voltaje de salida.

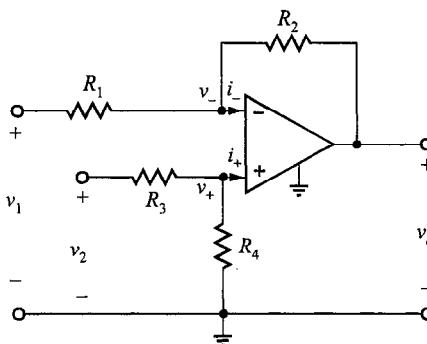


FIGURA 3.41 Circuito de amplificador operacional de un amplificador diferencial.

S O L U C I Ó N La ecuación nodal en la terminal inversora es

$$\frac{v_1 - v_-}{R_1} + \frac{v_o - v_-}{R_2} = i_-$$

En la terminal no inversora la LCK da

$$\frac{v_2 - v_+}{R_3} = \frac{v_+}{R_4} + i_+$$

Sin embargo, $i_+ = i_- = 0$ y $v_+ = v_-$. Sustituyendo esos valores en las dos ecuaciones precedentes se obtiene

$$\frac{v_1 - v_-}{R_1} + \frac{v_o - v_-}{R_2} = 0$$

y

$$\frac{v_2 - v_-}{R_3} = \frac{v_-}{R_4}$$

Resolviendo esas dos ecuaciones para v_o resulta la expresión

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_2 - \frac{R_2}{R_1} v_1$$

Observe que si $R_4 = R_2$ y $R_3 = R_1$, la expresión se reduce a

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} (v_2 - v_1)$$

Por tanto, este op-amp puede emplearse para restar dos voltajes de entrada.

E J E M P L O 3.27

El circuito de la figura 3.42a es un dispositivo de ganancia de voltaje diferencial de precisión. Se usa para proporcionar una entrada de una sola terminal para un convertidor analógico a digital. Deseamos derivar una expresión para la salida del circuito en términos de las dos entradas.

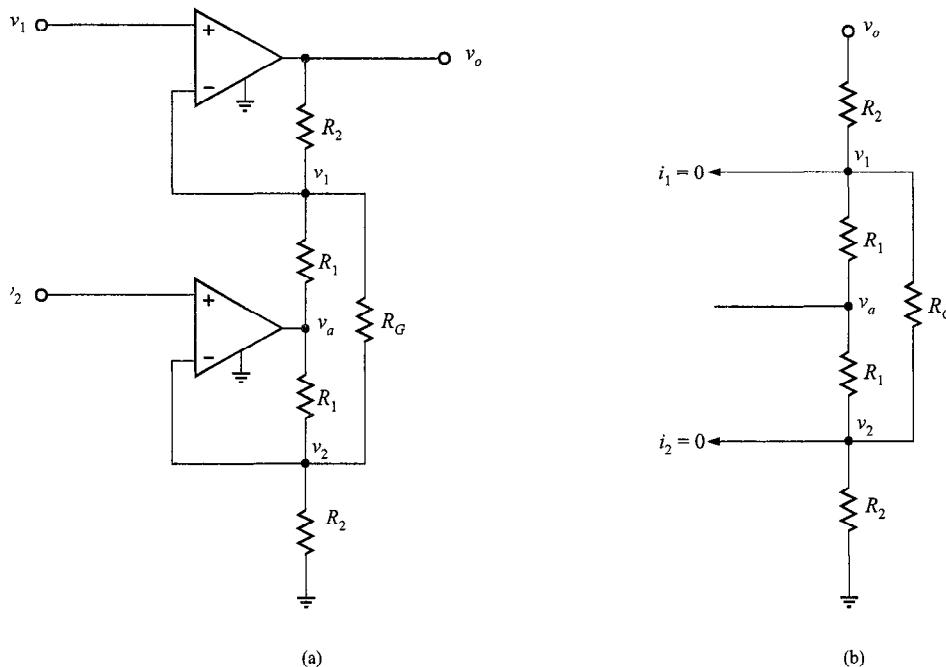


FIGURA 3.42 Instrumentación de un circuito amplificador.

SOLUCIÓN Para llevar acabo esto, dibujamos el circuito equivalente que se muestra en la figura 3.42b. Recuerde que el voltaje a través de las terminales de entrada del op-amp es aproximadamente cero y las corrientes en las terminales de entrada del op-amp son aproximadamente cero. Advierta que podemos escribir ecuaciones nodales para los voltajes de nodo v_1 y v_2 en términos de v_o y v_a . Como estamos interesados en una expresión para v_o en términos de los voltajes v_1 y v_2 , simplemente eliminamos el término v_a de las dos ecuaciones nodales. Las ecuaciones nodales son

$$\frac{v_1 - v_o}{R_2} + \frac{v_1 - v_a}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_G} = 0$$

$$\frac{v_2 - v_a}{R_1} + \frac{v_2 - v_1}{R_G} + \frac{v_2}{R_2} = 0$$

Combinando las dos ecuaciones para eliminar v_a , y escribiendo después v_o en términos de v_1 y v_2 , se obtiene

$$v_o = (v_1 - v_2) \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{2R_2}{R_G} \right)$$

EJEMPLO 3.28

Deseamos calcular la resistencia de entrada del circuito del op-amp que se muestra en la figura 3.43 sin ninguna suposición acerca de los parámetros A , R_i y R_o .

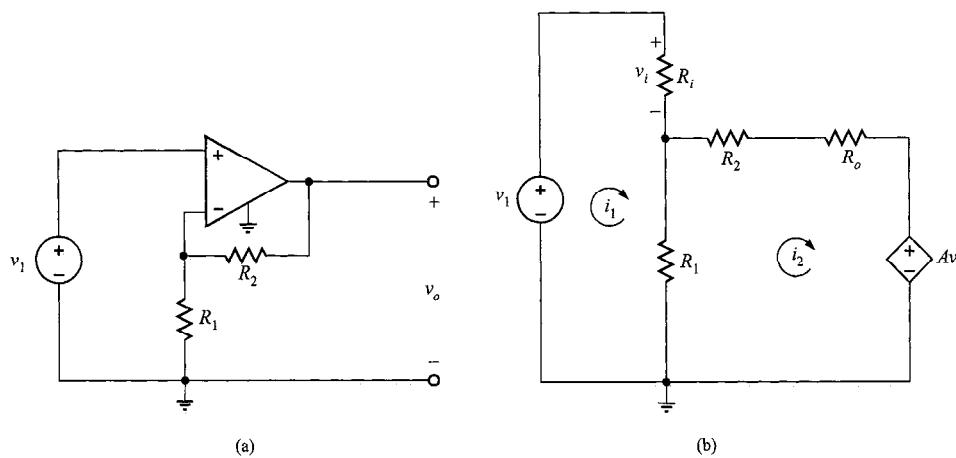


FIGURA 3.43 Circuito y modelo para un amplificador operacional no inversor.

SOLUCIÓN La resistencia de entrada es la resistencia vista por la fuente de voltaje de entrada v_1 . Usando el modelo de op-amp que se muestra en la figura 3.38c, obtenemos el circuito de la figura 3.43b. Las ecuaciones de anillo para este circuito son

$$\begin{aligned} v_1 &= i_1(R_i + R_1) - i_2R_1 \\ -Av_i &= -i_1R_1 + i_2(R_1 + R_2 + R_o) \\ v_i &= R_i i_1 \end{aligned}$$

Resolviendo esas ecuaciones para i_1 se obtiene

$$i_1 = \frac{v_1(R_1 + R_2 + R_o)}{(R_i + R_1)(R_1 + R_2 + R_o) + R_1(AR_i - R_1)}$$

La resistencia de entrada es

$$R_{\text{ent}} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{(R_i + R_1)(R_1 + R_2 + R_o) + R_1(AR_i - R_1)}{R_1 + R_2 + R_o}$$

$$= R_i + \frac{R_1(R_2 + R_o + AR_i)}{R_1 + R_2 + R_o}$$

Como A y R_i son normalmente muy grandes y R_o es muy pequeña, la expresión para R_{ent} puede aproximarse mediante la ecuación

$$R_{\text{ent}} \simeq \frac{AR_i}{1 + R_2/R_1}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D3.16 Encontrar I_o en la red de la figura D3.16.

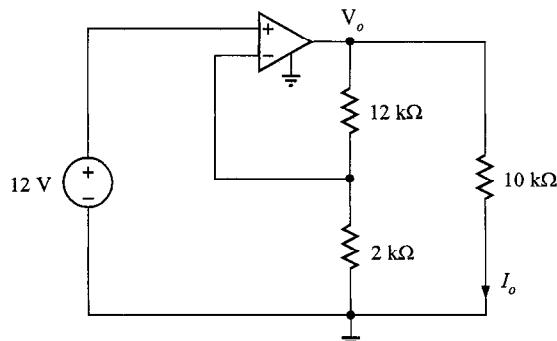


FIGURA D3.16

Resp.: $I_o = 8.4 \text{ mA}$.

D3.17 Determine la ganancia del circuito del op-amp de la figura D3.17.

$$\text{Resp.: } \frac{V_o}{V_s} = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

D3.18 Determine la ganancia y el voltaje de salida de la configuración de op-amp que se muestra en la figura D3.18.

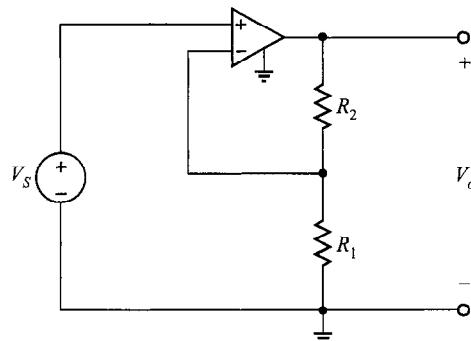


FIGURA D3.17

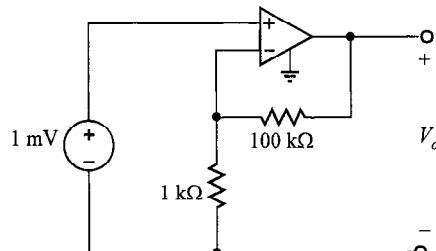
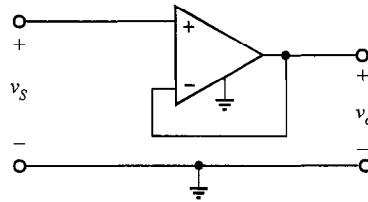


FIGURA D3.18

Resp.: $V_o = 0.101 \text{ V}$, ganancia = 101.

Un caso especial importante de amplificador no inversor es la configuración que se muestra en la figura 3.44. Note cuidadosamente que este circuito es equivalente al que se muestra en la figura D3.17 con $R_1 = \infty$ (es decir, en circuito abierto) y $R_2 = 0$

**FIGURA 3.44** Configuración de amplificador operacional de un seguidor de voltaje.

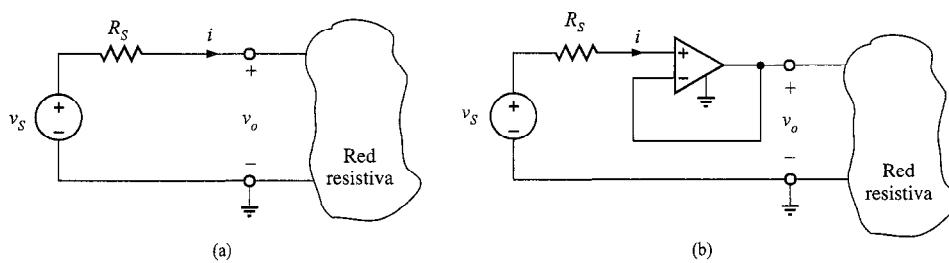
(es decir, en corto circuito). En esas condiciones notamos que la ganancia del circuito es $1 + R_2/R_1 = 1$ (es decir, $v_o = v_S$). Como v_o sigue a v_S , el circuito se llama *seguidor de voltaje*.

Una pregunta obvia en este punto es: si $v_o = v_S$, ¿por qué no sólo se conecta v_S a v_o vía dos alambres de conexión paralelos; por qué necesitamos colocar un op-amp entre ellos? La respuesta a esta interrogante es fundamental y nos proporciona una idea que nos ayudará en el análisis y diseño de circuitos.

Considere el circuito que se muestra en la figura 3.45a. En este caso, v_o no es igual a v_S debido a que la caída de voltaje a través de R_S :

$$v_o = v_S - iR_S$$

Sin embargo, en la figura 3.45b, la corriente de entrada en el op-amp es cero y, por tanto, v_S aparece en la entrada del op-amp. Como la ganancia de la configuración del op-amp es 1, $v_o = v_S$. En la figura 3.45a la interacción resistiva de la red con la fuente hace que el voltaje v_o sea menor que v_S . En otras palabras, la red resistiva carga el voltaje de la fuente. Sin embargo, en la figura 3.45b el op-amp aísla la fuente de la red resistiva, y por tanto, el seguidor de voltaje se considera como un *amplificador separador* ya que puede usarse para aislar un circuito de otro. La energía suministrada a la red resistiva en el primer caso debe provenir de la fuente v_S , mientras que en el segundo caso se origina en el suministro de potencia que abastece al amplificador, y pequeña o no, la energía es extraída de v_S .

**FIGURA 3.45** Ilustración de la capacidad aislante de un seguidor de voltaje.

E J E M P L O 3.29

Con frecuencia presentamos la ganancia del amplificador en un formato gráfico. Las gráficas de la señal de salida contra la de entrada se llaman *gráficas de transferencia* o *curvas de transferencia*. Encontremos una expresión para v_o en la figura 3.46 y tracemos la curva de transferencia.

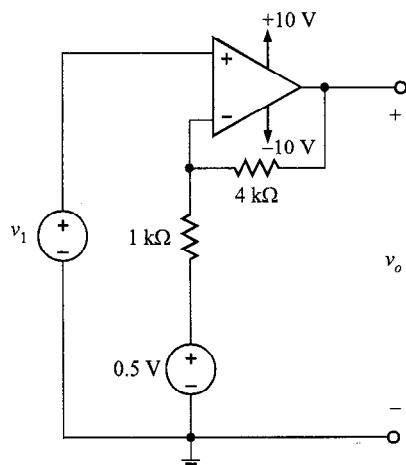


FIGURA 3.46

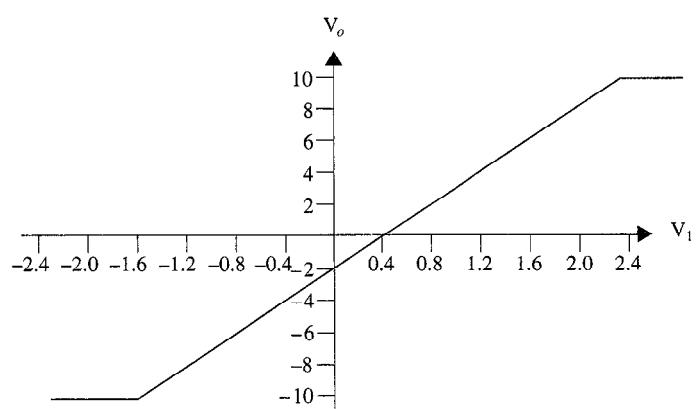


FIGURA 3.47 Curva de transferencia para una configuración de op-amp.

S O L U C I Ó N Note que nos hemos desviado de nuestro modelo normal para el op-amp y específicamente hemos mostrado los voltajes del suministro de cd en el circuito. Hemos hecho una excepción en este caso debido a su relevancia en las curvas de transferencia.

La ecuación nodal en la entrada inversora es

$$\frac{v_1 - 0.5}{1k} + \frac{v_1 - v_o}{4k} = 0$$

El voltaje de salida está entonces dado por la ecuación:

$$v_o = 5v_1 - 2$$

La curva de transferencia para este circuito, mostrada en la figura 3.47, contiene varias características clave.

Primero, la pendiente de la línea,

$$\frac{dv_o}{dv_1} = 5 \text{ V/V}$$

es la ganancia del circuito. Segundo, el voltaje de salida está desplazado por la fuente de 0.5 V. Como v_1 es 0.4 V cuando v_o es 0 V, decimos que el amplificador está *compensado* por +0.410 V. Tercero, el voltaje de salida no puede exceder el valor del voltaje de suministro de potencia de cd, V. El voltaje de salida cumple con la ecuación de transferencia hasta que v_o alcanza +10 V o -10 V. Más allá de este punto, v_o se satura en los voltajes de suministro de potencia. Como el modelo de op-amp ideal no incluye información acerca de cuán grande puede ser el voltaje de salida, se encamina a los diseñadores del circuito que estén conscientes de las limitaciones del modelo que estamos usando. Este es un tema común en el

modelado de dispositivos físicos con expresiones matemáticas. Los modelos tienden a ser válidos sólo en ciertas condiciones. Es de extrema importancia que el ingeniero comprenda las limitaciones del modelo y sus implicaciones.

3.5 Aplicaciones

En este punto, tenemos un nuevo elemento, el op-amp, que podemos emplear efectivamente tanto en aplicaciones como en el diseño de circuitos. Este dispositivo es un elemento extremadamente útil que amplía enormemente nuestra capacidad en esas áreas. Debido a su naturaleza ubicua, la adición del op-amp a nuestro repertorio de elementos de circuito nos permite tratar con un amplio espectro de circuitos prácticos. Así, no sólo lo emplearemos aquí, sino que lo usaremos a lo largo de este texto.

EJEMPLO 3.30

En un medidor de luz, un sensor produce una corriente proporcional a la intensidad de la radiación incidente. Deseamos obtener un voltaje proporcional a la intensidad de la luz utilizando el circuito de la figura 3.48. Así, seleccionamos un valor de R que produzca un voltaje de salida de 1 V por cada $10 \mu\text{A}$ de corriente del sensor. Suponga que el sensor tiene resistencia cero.

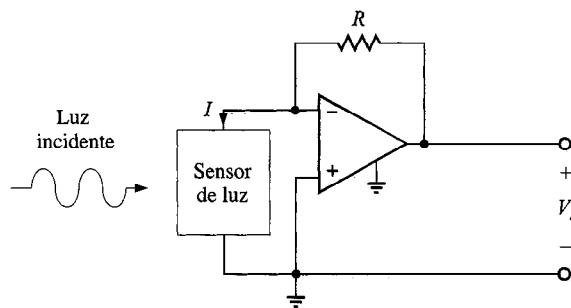


FIGURA 3.48 Convertidor de intensidad luminosa a voltaje.

SOLUCIÓN Aplicando la LCK a la salida del op-amp,

$$I = V_o/R$$

Como V_o/I es 10^5 ,

$$R = 100 \text{ k}\Omega$$

EJEMPLO 3.31

El circuito de la figura 3.49 es un amperímetro electrónico. Opera como sigue: la corriente desconocida, I , a través de R_I produce un voltaje, V_I . V_I

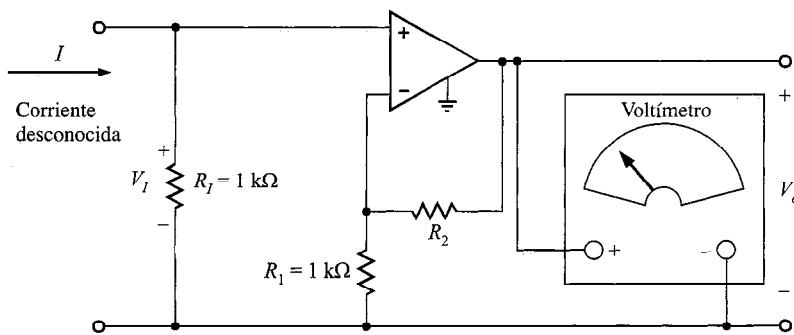


FIGURA 3.49 Amperímetro electrónico.

es amplificado por el op-amp para producir un voltaje V_O , que es proporcional a I . El voltaje de salida se mide con un voltímetro simple. Queremos encontrar el valor de R_2 tal que 10 V aparezca a V_O por cada miliampere de corriente desconocida.

SOLUCIÓN Como la corriente en la terminal + del op-amp es cero, la relación entre V_I e I es

$$V_I = IR_I$$

La relación entre los voltajes de entrada y de salida es

$$V_O = V_I \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

o, resolviendo la ecuación para V_O/I , obtenemos

$$\frac{V_O}{I} = R_I \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

Utilizando la razón requerida V_O/I de 10^4 y los valores de las resistencias de la figura 3.49, podemos encontrar que

$$R_2 = 9 \text{ k}\Omega$$

3.6 Diseño de circuitos

EJEMPLO 3.32

En la figura 3.50a se muestra en forma de bloques un sistema estereofónico típico. La señal de salida del fonógrafo es sólo de cerca de $2 \mu\text{V}$. El voltaje de entrada estándar para preamplificadores estereofónicos es cerca de 2 mV . Por tanto, la señal del fonógrafo debe ser amplificada por un factor de 1 000 antes de que alcance el amplificador de potencia. Para llevar a cabo esto, se usa un

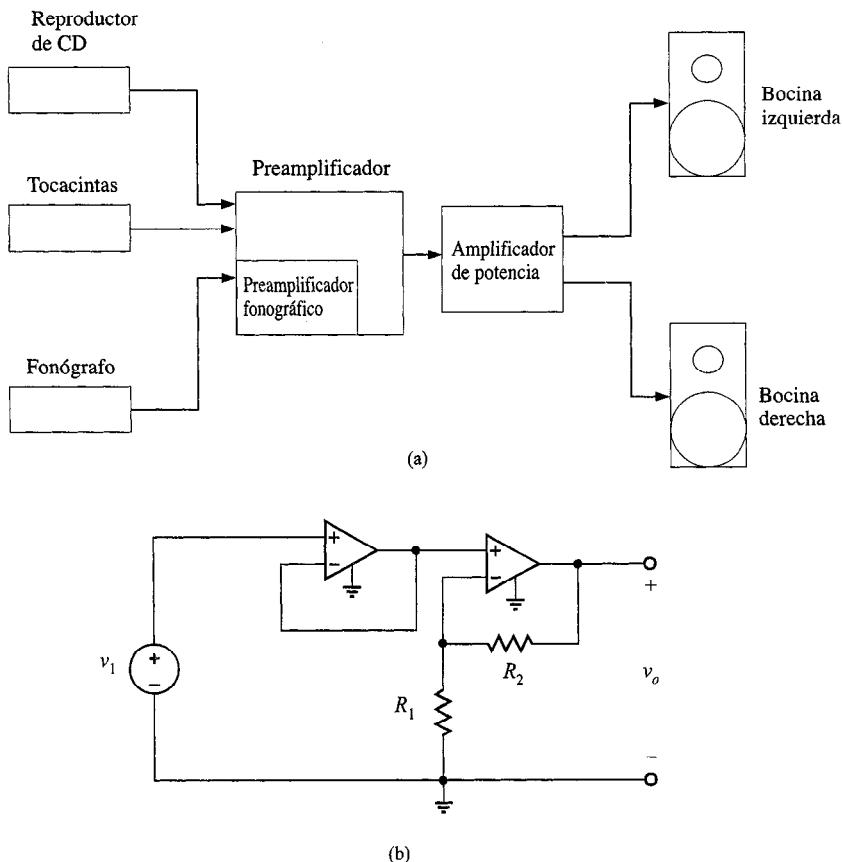


FIGURA 3.50 Amplificador fonográfico multietapa.

amplificador de propósito especial, llamado preamplificador fonográfico. Los fabricantes de estereofónicos lo colocan dentro del chasis del preamplificador como se muestra en la figura 3.50a.

Diseñemos un preamplificador fonográfico utilizando un op-amp ideal que tiene una resistencia de entrada de al menos $1 \text{ M}\Omega$, y una ganancia de voltaje de 1 000. Todas las resistencias deben ser menores a $10 \text{ M}\Omega$ a fin de limitar el ruido.

SOLUCIÓN Una posible red se muestra en la figura 3.50b. El requerimiento de la resistencia de entrada puede encontrarse fácilmente con un seguidor de voltaje como primera etapa del amplificador. La segunda etapa, o etapa de ganancia, puede ser una configuración del op-amp no inversor. Mostraremos en capítulos posteriores que la ganancia de voltaje total es el producto de las ganancias de las dos etapas,

$$A_V = A_{V1} * A_{V2} = (1) * (1 + (R_2/R_1))$$

Para lograr una ganancia de 1 000 seleccionemos $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ y $R_2 = 999 \text{ k}\Omega$.

E J E M P L O 3.33

Un termopar es un elemento de dos alambres que produce un pequeño voltaje proporcional a la temperatura. Un termopar particular genera un voltaje de 6 mV por cada elevación de 1°C en la temperatura. Esta señal será usada para activar un conmutador controlado por voltaje que requiere una señal de entrada de 5 V para operar. La figura 3.51a muestra un diagrama a bloques del sistema. Diseñemos un circuito de op-amp que dispare el conmutador en el punto de ebullición del agua (100°C) si el termopar genera 0 V a 0 °C.

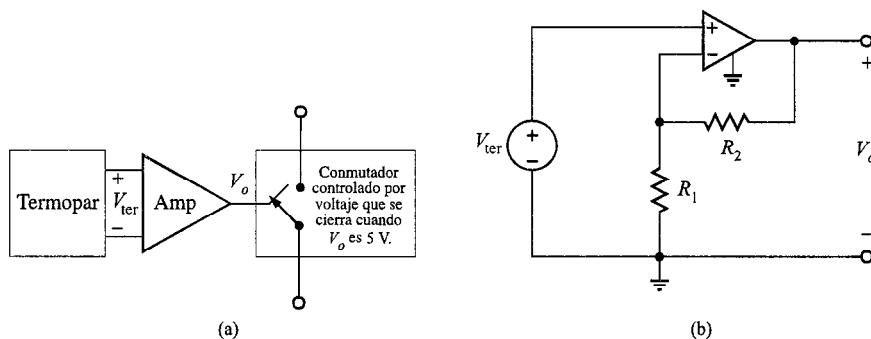


FIGURA 3.51 Amplificador para un interruptor de termómetro electrónico.

SOLUCIÓN La configuración del op-amp no inversor de una sola etapa que se muestra en la figura 3.51b debería satisfacer el requerimiento. A 100 °C, el voltaje del termopar, V_{ter} , es

$$V_{\text{ter}} = (100^\circ) (6 \text{ mV/}^\circ) = 600 \text{ mV.}$$

Esta señal de 600 mV debe ser amplificada a 5 V para disparar el conmutador. Por tanto, la ganancia del op-amp es

$$A_V = \frac{5}{0.6} = 8.33$$

Seleccionando $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$ y $R_2 = 22 \text{ k}\Omega$ en el circuito del op-amp de la figura 3.51b satisface la ganancia requerida.

E J E M P L O 3.34

Las fibras nerviosas conducen pequeños impulsos eléctricos del cerebro a los músculos. Esos impulsos causan la contracción muscular y el movimiento del cuerpo. Los médicos pueden monitorear voltajes en un músculo como un proceso de diagnóstico para buscar la interacción cerebro-nervio-músculo apropiada. Una versión simplificada del instrumento médico utilizado para este propósito se muestra en la figura 3.52. Agujas conductoras se insertan en un músculo y se mide la diferencia de potencial. Las señales en esas agujas están modeladas en la figura 3.52 por las fuentes de voltaje V_1 y V_2 .

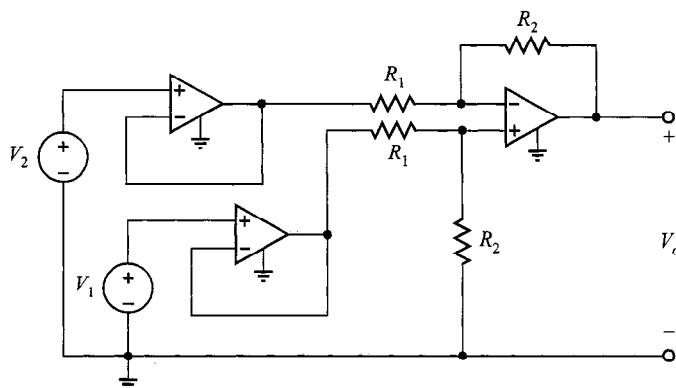


FIGURA 3.52 Amplificador de voltaje neuromuscular.

Los dos seguidores de voltaje se usan para separar al paciente del instrumento. Diseñemos el amplificador tal que la salida de voltaje sea 100 ($V_1 - V_2$).

SOLUCIÓN La relación entrada-salida para el circuito de la figura 3.52 es

$$V_o = (R_2/R_1)(V_1 - V_2) = 100(V_1 - V_2)$$

Tenemos dos incógnitas y sólo una ecuación. Así, si seleccionamos $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, entonces $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$. La configuración con esos valores satisface los requerimientos.

EJEMPLO 3.35

La amplitud de la señal recibida por la antena de un receptor de radio AM portátil es $1 \mu\text{V}$. La señal es amplificada a continuación para suministrar 8 V a una bocina. ¿Cuál es la ganancia de voltaje requerida de este sistema? Diseñemos un amplificador de cuatro etapas usando configuraciones de op-amp inversor idénticas para encontrar la ganancia requerida.

SOLUCIÓN La ganancia de voltaje requerida es

$$A_V = 8/10^{-6} = 8 \times 10^6$$

Como se mencionó anteriormente, un amplificador de cuatro etapas tiene una ganancia total igual al producto de las ganancias de las etapas individuales; es decir,

$$A_V = A_{V1}A_{V2}A_{V3}A_{V4}$$

Como en este caso las cuatro etapas son idénticas, podemos escribir

$$A_{V1} = A_{V2} = A_{V3} = A_{V4} = A$$

donde A representa la ganancia de una sola etapa. El op-amp inversor tiene una ganancia de

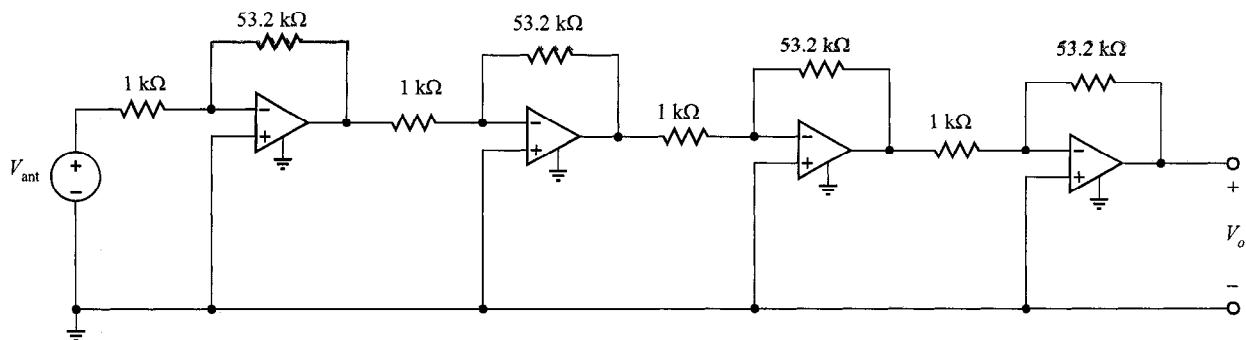


FIGURA 3.53 Amplificador de radio AM de cuatro etapas.

$$A = -\frac{R_2}{R_1}$$

La ganancia de una sola etapa es entonces

$$-\frac{R_2}{R_1} = \sqrt[4]{(8 \times 10^6)} = -53.2$$

Por tanto, la configuración de op-amp de cuatro etapas que se muestra en la figura 3.53 satisfará los requerimientos de diseño.

3.7 Resumen

Se han introducido dos técnicas muy importantes y extremadamente útiles para el análisis de circuitos. Los métodos de voltaje nodal y corriente de malla producen un conjunto de ecuaciones simultáneas que cuando se resuelven nos permiten determinar cualquier voltaje o corriente en la red. Se presentaron procedimientos para simplificar el análisis y se introdujeron técnicas para resolver ecuaciones. Además, hemos introducido la topología, así como, el amplificador operacional y su circuito equivalente, el cual usaremos en una variedad de circuitos a lo largo del libro.

Puntos clave

- Cuando se resuelve un circuito de N nodos usando análisis nodal:
 1. Etiquetar todos los nodos, seleccionando uno como el nodo de referencia.
 2. Si el circuito contiene sólo fuentes de corriente independientes, escribir $N - 1$ ecuaciones simultáneamente linealmente independientes usando la LCK para determinar los $N - 1$ voltajes nodales desconocidos.
 3. Si el circuito contiene una fuente de voltaje independiente, se crea un supernodo que encierra esta superficie y se escribe una ecuación de restricción para esta fuente además de las ecuaciones de la LCK para el supernodo y los nodos restantes.

4. Si el circuito contiene una fuente de corriente dependiente, tratar a la fuente dependiente como si fuera una fuente independiente cuando se escriben las ecuaciones de las N mallas, y después escribir una ecuación adicional para el parámetro de control de la fuente dependiente.
 5. Resolver las ecuaciones utilizando cualquier método conveniente.
- Cuando se resuelve un circuito de N mallas usando el análisis de malla:
 1. Etiquetar N corrientes de malla para N distintas trayectorias cerradas a través de la red.
 2. Si el circuito contiene sólo fuentes de voltaje independientes, escribir N ecuaciones simultáneamente independientes usando la LVK para determinar las N corrientes de malla desconocidas.
 3. Si el circuito contiene una fuente de corriente independiente, se escribe una ecuación de restricción para la corriente que fluye a través de ésta; la fuente de corriente es reemplazada entonces por un circuito abierto y se escribe otra ecuación para la malla recién creada.
 4. Si el circuito contiene una fuente de corriente dependiente, tratar a la fuente dependiente como si fuera una fuente independiente cuando se escriben las ecuaciones de las N mallas, y después escribir una ecuación adicional para el parámetro de control de la fuente dependiente.
 5. Resolver las ecuaciones usando cualquier método conveniente, tal como la regla de Cramer, matrices o sustitución.
 - Para un op-amp ideal, $i_+ = i_- = 0$ y $v_+ = v_-$.
 - Los op-amp se emplean de manera extensa en una variedad de sistemas electrónicos que usamos en nuestras vidas diarias.

Problemas

3.1. Encuentre I_o en el circuito de la figura P3.1 usando análisis nodal.

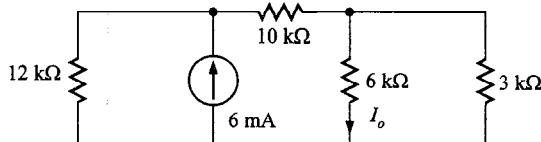


FIGURA P3.1

3.2. Encuentre I_o y V_o en la red de la figura P3.2 usando análisis nodal.

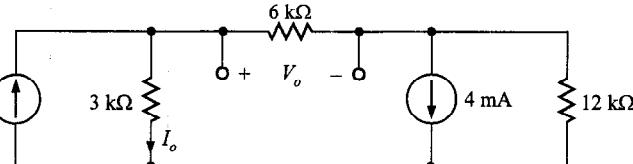


FIGURA P3.2

3.3. Use el análisis nodal para encontrar V_1 y V_o en el circuito de la figura P3.3.

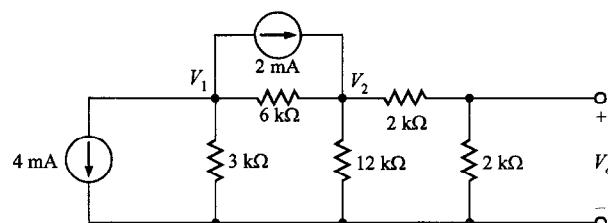


FIGURA P3.3

3.4. Encuentre I_o en la red de la figura P3.4 usando análisis nodal.

3.5. Use el análisis nodal para encontrar V_o en el circuito de la figura P3.5.

3.6. Encuentre V_o en la red de la figura P3.6 usando análisis nodal.

3.7. Encuentre I_o en el circuito de la figura P3.7 usando análisis nodal.

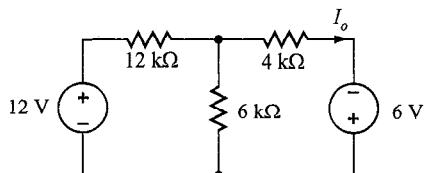


FIGURA P3.4

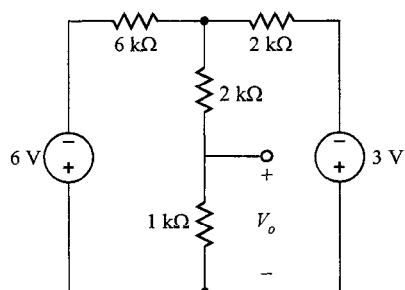


FIGURA P3.5

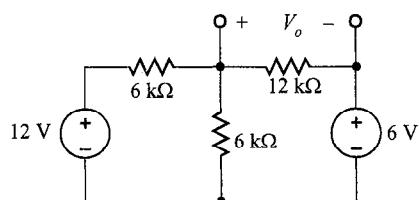


FIGURA P3.6

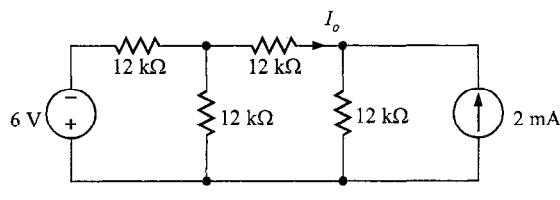


FIGURA P3.7

3.8. Use análisis nodal para encontrar V_o en la red de la figura P3.8.

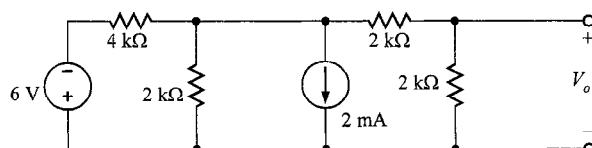


FIGURA P3.8

3.9. Use análisis nodal para encontrar I_o e I_S en el circuito de la figura P3.9.

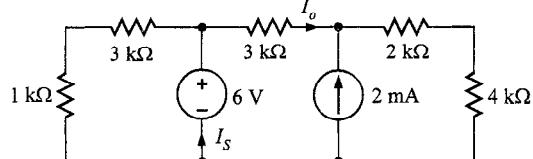


FIGURA P3.9

3.10. Encuentre V_o en la red de la figura P3.10 usando análisis nodal.

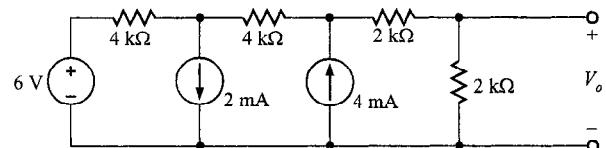


FIGURA P3.10

3.11. Encuentre I_o en el circuito de la figura P3.11 usando análisis nodal.

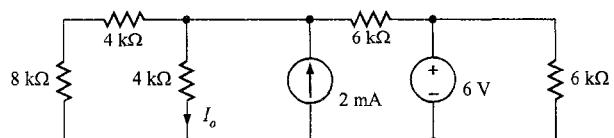


FIGURA P3.11

3.12. Use el análisis nodal para encontrar V_o en la red de la figura P3.12.

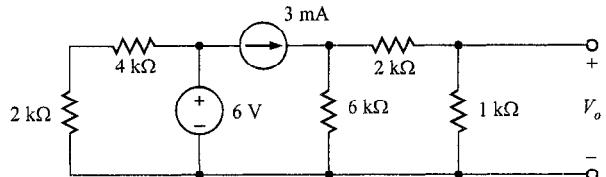


FIGURA P3.12

3.13. Encuentre I_1 en la red de la figura P3.13.

3.14. Encuentre I_o en el circuito de la figura P3.14.

3.15. Encuentre I_o en la red de la figura P3.15.

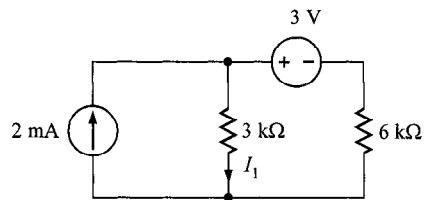


FIGURA P3.13

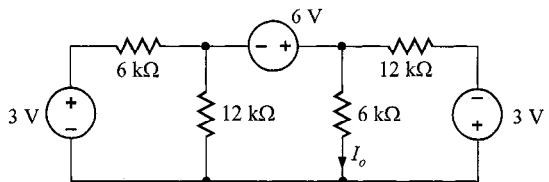


FIGURA P3.14

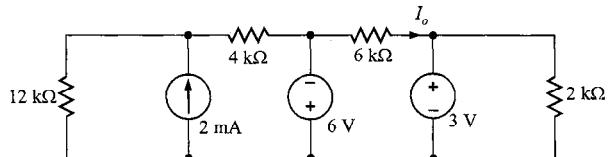


FIGURA P3.15

3.16. Encuentre V_o en la red de la figura P3.16.

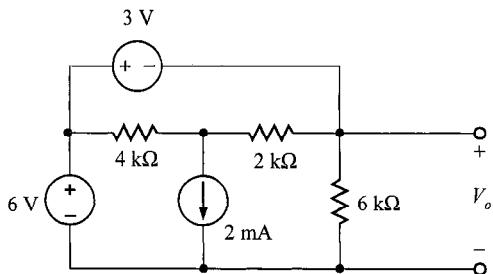


FIGURA P3.16

3.17. Encuentre I_o en el circuito de la figura P3.17.

3.18. Encuentre V_o en la red de la figura P3.18.

3.19. Encuentre V_o e I_o en el circuito de la figura P3.19 y verifique sus respuestas mostrando que la LCK se satisface en cada nodo.

3.20. Encuentre V_o en la red de la figura P3.20. Verifique su respuesta determinando todas las corrientes de rama y mostrando que la LCK se satisface en todos los nodos.

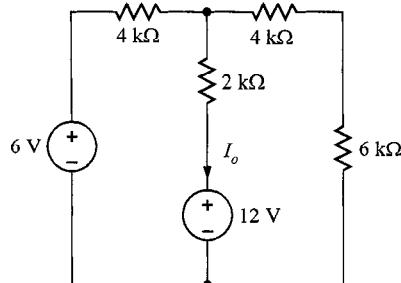


FIGURA P3.17

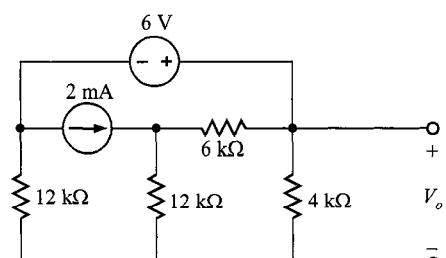


FIGURA P3.18

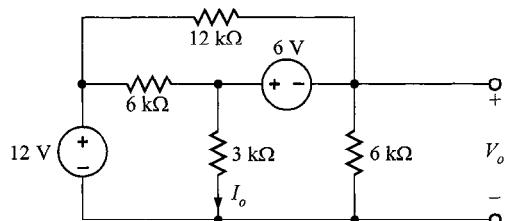


FIGURA P3.19

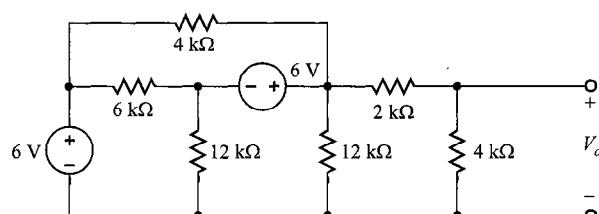


FIGURA P3.20

3.21. Encuentre V_o en la red de la figura P3.21.

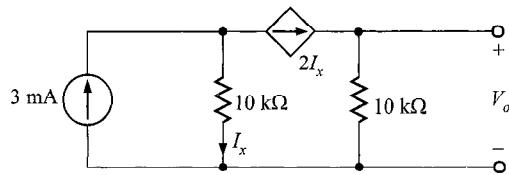


FIGURA P3.21

3.22. Encuentre I_o en el circuito de la figura P3.22.

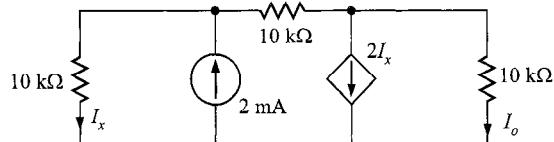


FIGURA P3.22

3.23. Encuentre V_o en la red de la figura P3.23.

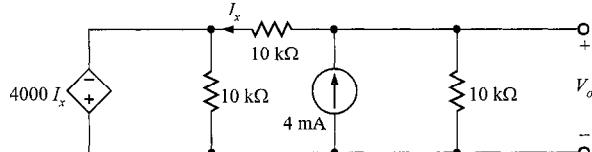


FIGURA P3.23

3.24. Encuentre V_o en el circuito de la figura P3.24. Además, encuentre todas las corrientes de las ramas y verifique sus respuestas usando la LCK en todos los nodos.

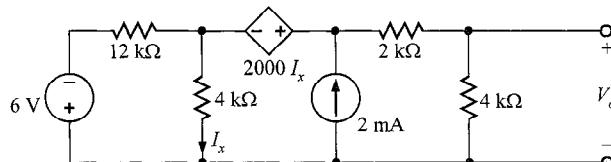


FIGURA P3.24

3.25. Encuentre V_o en la red de la figura P3.25. Además, determine todas las corrientes de las ramas y verifique la LCK en cada nodo.

3.26. Encuentre V_o en el circuito de la figura P3.26.

3.27. Encuentre I_o en la red de la figura P3.27.

3.28. Encuentre V_o en el circuito de la figura P3.28.

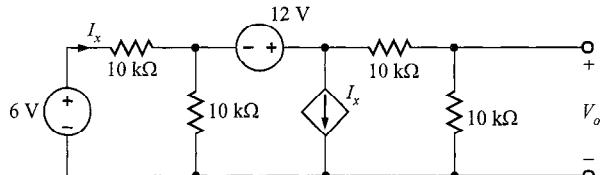


FIGURA P3.25

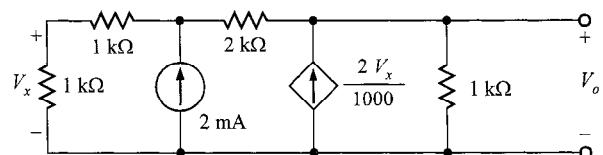


FIGURA P3.26

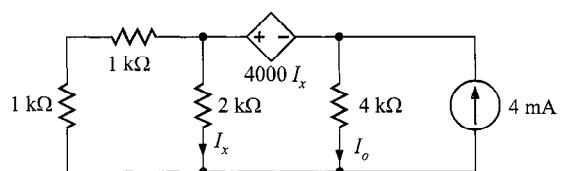


FIGURA P3.27

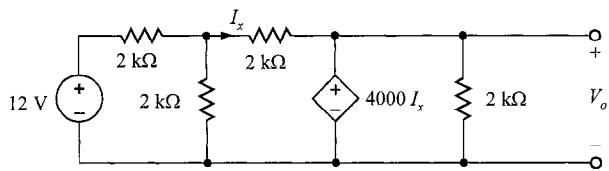


FIGURA P3.28

3.29. Encuentre todas las corrientes de las ramas y los voltajes de los nodos en el circuito de la figura P3.29.

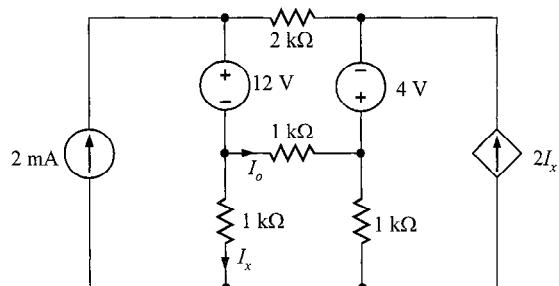


FIGURA P3.29

- 3.30. Use el análisis de malla para encontrar V_o en el circuito de la figura P3.30.

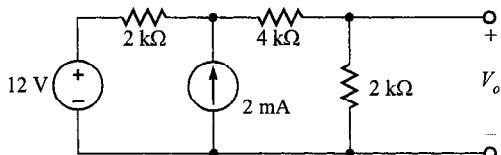


FIGURA P3.30

- 3.31. Use el análisis de malla para encontrar V_o en la red de la figura P3.31.

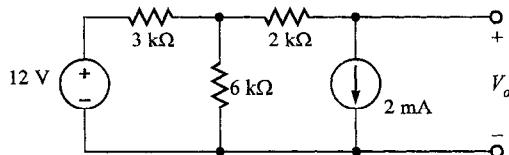


FIGURA P3.31

- 3.32. Encuentre I_o en la red de la figura P3.32.

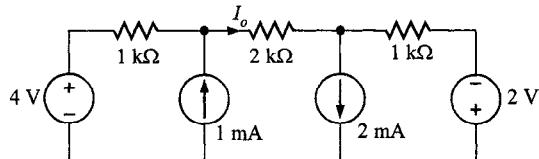


FIGURA P3.32

- 3.33. Encuentre I_o en la red de la figura P3.33 usando el análisis de malla.

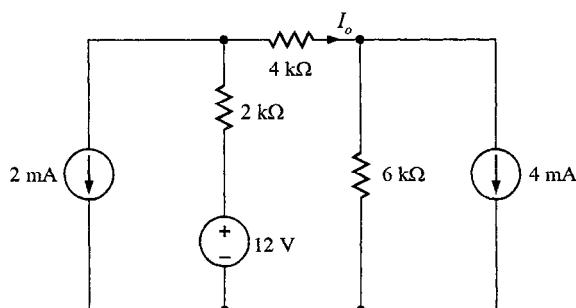


FIGURA P3.33

- 3.34. Use el análisis de malla para encontrar I_o en el circuito de la figura P3.34.

- 3.35. Use el análisis de malla para encontrar I_o en la red de la figura P3.35.

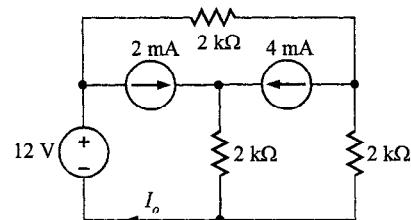


FIGURA P3.34

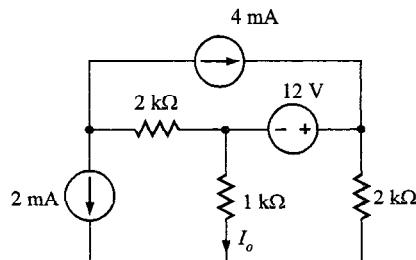


FIGURA P3.35

- 3.36. Encuentre I_o en la red de la figura P3.36.

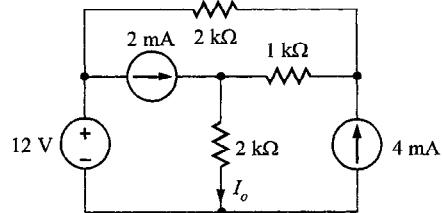


FIGURA P3.36

- 3.37. Encuentre V_o en la red de la figura P3.37.

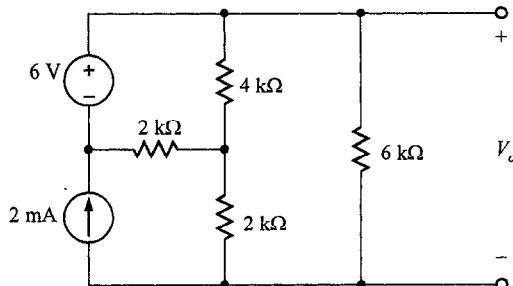
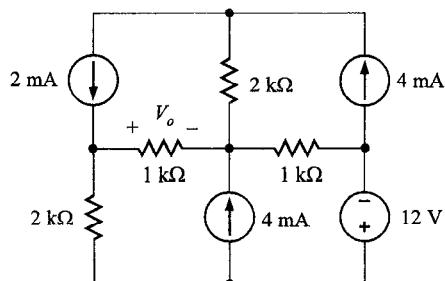
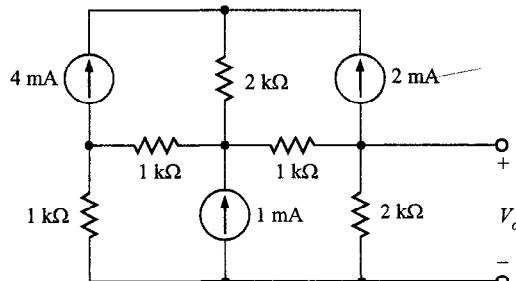


FIGURA P3.37

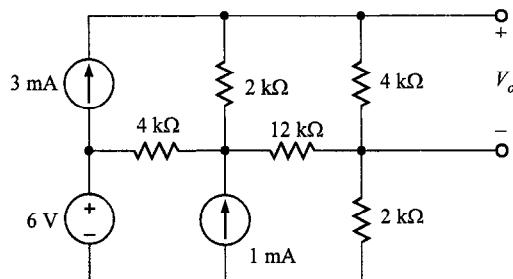
- 3.38.** Use el análisis de malla para encontrar V_o en el circuito de la figura P3.38.

**FIGURA P3.38**

- 3.39.** Encuentre V_o en la red de la figura P3.39.

**FIGURA P3.39**

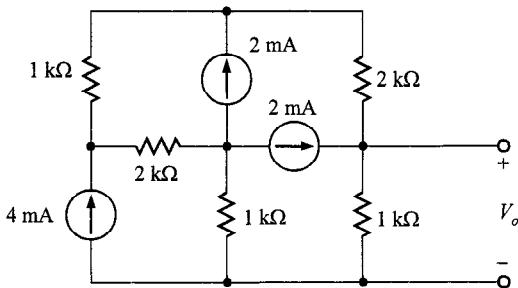
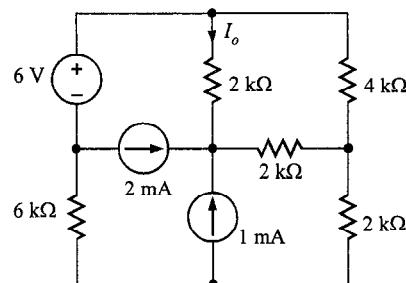
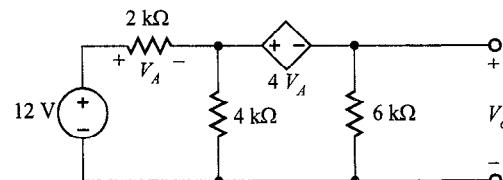
- 3.40.** Use el análisis de malla para encontrar V_o en la red de la figura P3.40.

**FIGURA P3.40**

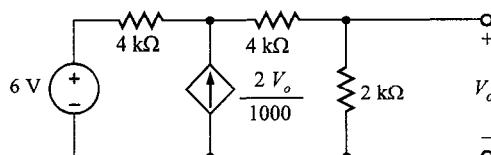
- 3.41.** Encuentre V_o en el circuito de la figura P3.41.

- 3.42.** Encuentre I_o en el circuito de la figura P3.42.

- 3.43.** Encuentre V_o en la red de la figura P3.43.

**FIGURA P3.41****FIGURA P3.42****FIGURA P3.43**

- 3.44.** Use el análisis de malla para encontrar V_o en el circuito de la figura P3.44.

**FIGURA P3.44**

- 3.45.** Use el análisis de anillo para encontrar V_o en el circuito de la figura P3.45.

- 3.46.** Encuentre V_o en la red de la figura P3.46.

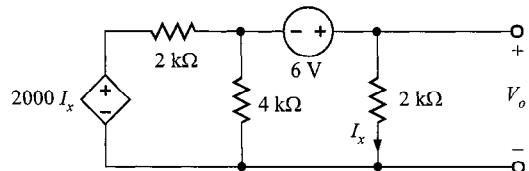


FIGURA P3.45

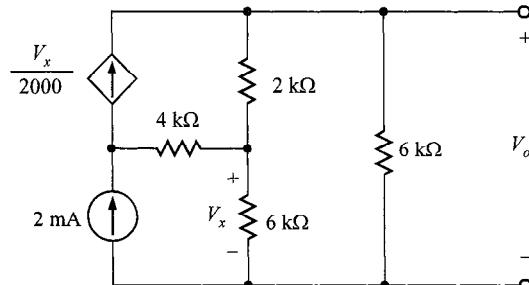


FIGURA P3.46

3.47. Encuentre V_o en la red de la figura P3.47.

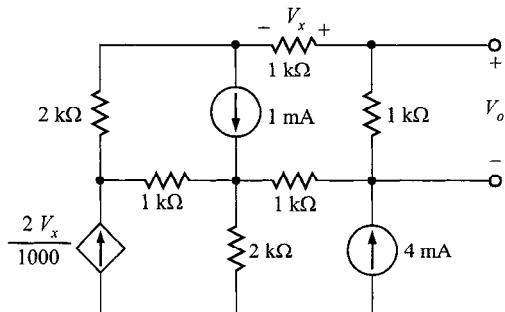


FIGURA P3.47

3.48. Dibuje una red definida por las siguientes ecuaciones nodales.

$$\begin{aligned} V_1 \left(\frac{1}{1\text{ k}\Omega} + \frac{1}{2\text{ k}\Omega} + \frac{1}{2\text{ k}\Omega} \right) - V_2 \left(\frac{1}{2\text{ k}\Omega} \right) \\ = \frac{4\text{ V}}{1\text{ k}\Omega} + \frac{2\text{ V}}{1\text{ k}\Omega}; -V_1 \left(\frac{1}{2\text{ k}\Omega} \right) + V_2 \left(\frac{1}{2\text{ k}\Omega} + \frac{1}{4\text{ k}\Omega} \right) \\ = -\frac{1\text{ V}}{1\text{ k}\Omega} \end{aligned}$$

3.49. Dibuje una red definida por las siguientes ecuaciones nodales.

$$V_1 \left(\frac{1}{8\text{ k}\Omega} + \frac{1}{1\text{ k}\Omega} \right) - V_2 \left(\frac{1}{1\text{ k}\Omega} \right) = -\frac{2\text{ V}}{1\text{ k}\Omega} - \frac{1\text{ V}}{1\text{ k}\Omega}$$

$$-V_1 \left(\frac{1}{1\text{ k}\Omega} \right) + V_2 \left(\frac{1}{1\text{ k}\Omega} + \frac{1}{2\text{ k}\Omega} \right) = \frac{2\text{ V}}{1\text{ k}\Omega} + \frac{4\text{ V}}{1\text{ k}\Omega}$$

3.50. Dibuje una red definida por las siguientes ecuaciones de malla.

$$(12\text{ k}\Omega)I_1 - (4\text{ k}\Omega)I_3 = -28\text{ V}$$

$$(3\text{ k}\Omega)I_2 - (2\text{ k}\Omega)I_3 = 16\text{ V}$$

$$I_3 = -\frac{4\text{ V}}{1\text{ k}\Omega}$$

3.51. Dibuje un circuito definido por las siguientes ecuaciones de malla.

$$I_1 = -\frac{6\text{ V}}{1\text{ k}\Omega}$$

$$-(4\text{ k}\Omega)I_1 + (12\text{ k}\Omega)I_2 - (2\text{ k}\Omega)I_4 = 0$$

$$(4\text{ k}\Omega)I_3 - (1\text{ k}\Omega)I_4 = -12\text{ V}$$

$$I_4 = -\frac{4\text{ V}}{1\text{ k}\Omega}$$

3.52. Para los gráficos de la figura P3.52, determine el número de ramas y el número de acoplamientos.

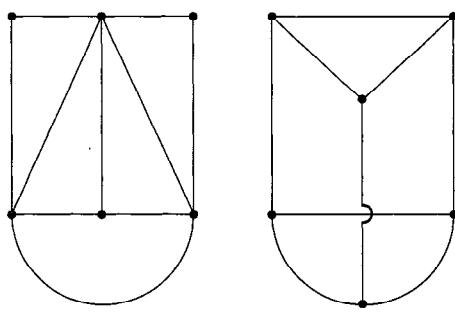


FIGURA P3.52

3.53. Para los gráficos que se muestran en la figura P3.53, con un árbol específico, encuentre un conjunto de ecuaciones de la LCK independientes utilizando grupos de corte.

3.54. Para los gráficos que se muestran en la figura P3.54, con un árbol específico, encuentre un conjunto de ecuaciones de la LCK independientes utilizando grupos de corte.

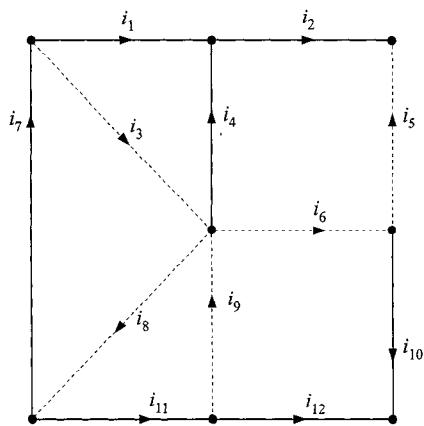
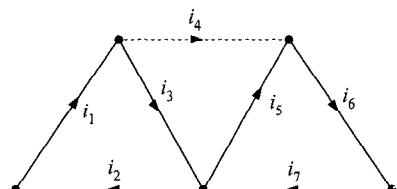
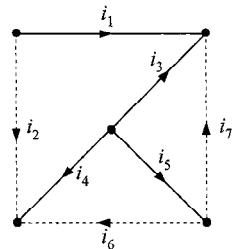


FIGURA P3.53



(a)



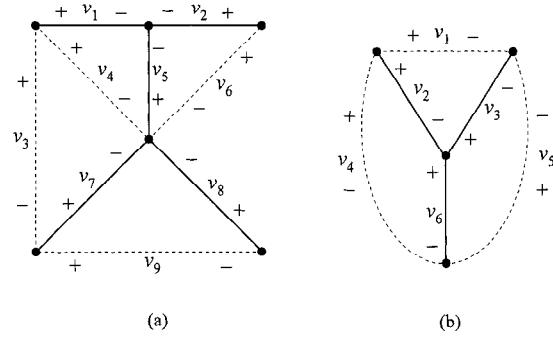
(b)

FIGURA P3.54

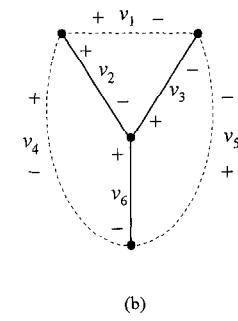
3.55. Para los gráficos que se muestran en la figura P3.55, con un árbol específico, encuentre un conjunto de ecuaciones de la LVK independientes utilizando mallas fundamentales.

3.56. Para los gráficos que se muestran en la figura P3.56, con un árbol específico, encontrar un conjunto de ecuaciones de la LVK independientes utilizando mallas fundamentales.

3.57. El árbol para la red de la figura P3.57a está dado en la figura P3.57b. Escriba las ecuaciones de la LCK en términos de los voltajes nodales desconocidos.

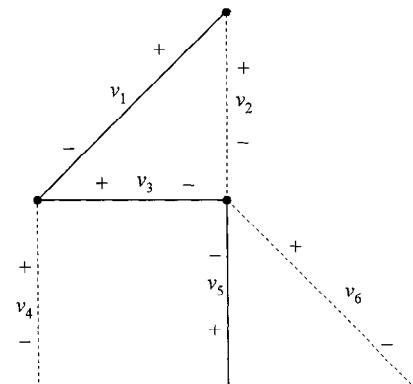


(a)

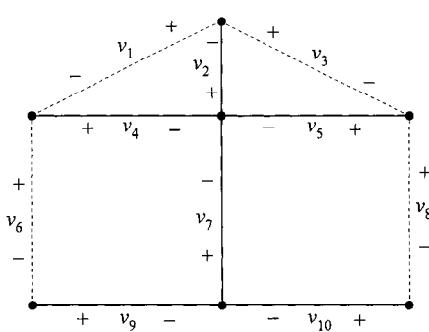


(b)

FIGURA P3.55

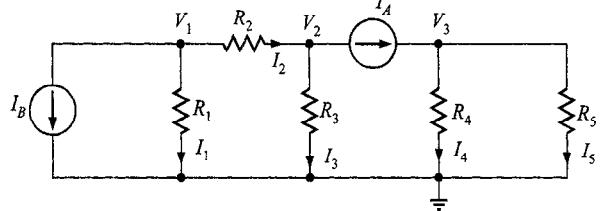


(a)

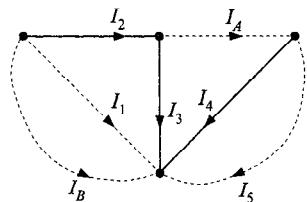


(b)

FIGURA P3.56



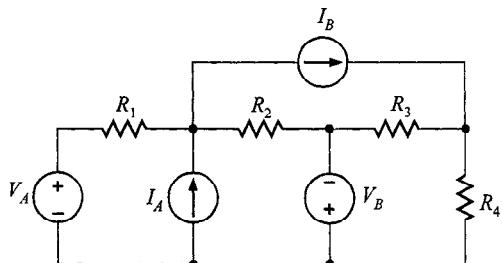
(a)



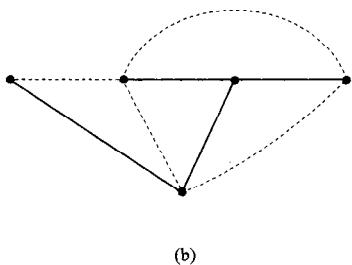
(b)

FIGURA P3.57

3.58. Dado el árbol de la figura P3.58b para la red de la figura P3.58a, escriba las ecuaciones de malla necesarias para resolver todos los voltajes desconocidos.



(a)



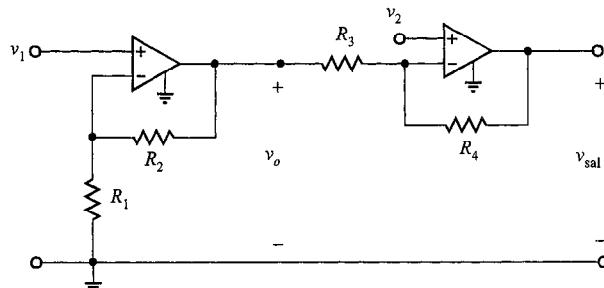
(b)

FIGURA P3.58

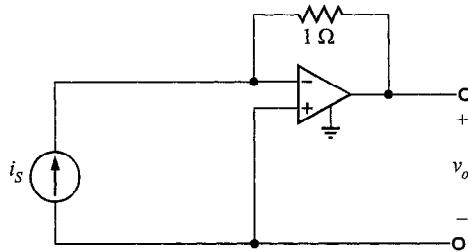
3.59. Dada una caja de resistencias de $10\text{ k}\Omega$ y un op-amp, diseñe un circuito que tenga un voltaje de salida de

$$v_o = -2v_1 - 4v_2$$

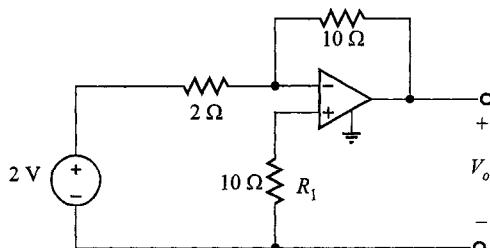
3.60. Encuentre la expresión para el voltaje de salida en el circuito del op-amp que se muestra en la figura P3.60.

**FIGURA P3.60**

3.61. La red de la figura P3.61 es un convertidor de corriente a voltaje o amplificador de transconductancia. Encuentre v_o/i_S para esta red.

**FIGURA P3.61**

3.62. Encuentre v_o en la red de la figura P3.62 y explique qué efecto tiene R_1 en la salida.

**FIGURA P3.62**

3.63. Encuentre v_o en la red de la figura P3.63.

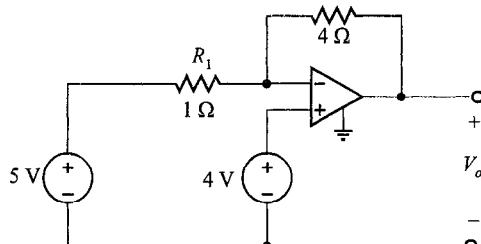


FIGURA P3.63

3.64. Encuentre la ganancia de voltaje del circuito de op-amp que se muestra en la figura P3.64.

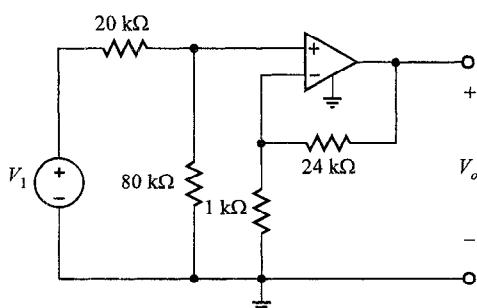


FIGURA P3.64

3.65. Para el circuito de la figura P3.65, encuentre el valor de R_1 que produce una ganancia de voltaje de 10.

3.66. El amperímetro electrónico del ejemplo 3.31 ha sido modificado y se muestra en la figura P3.66. El conmutador selector permite al usuario cambiar el alcance del medidor. Usando los valores para R_1 y R_2 del ejemplo 3.31, encuentre

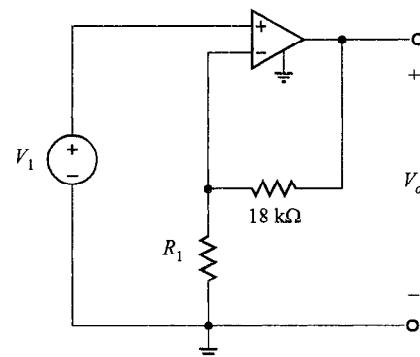


FIGURA P3.65

los valores de R_A y R_B que darán una salida de 10 V cuando la corriente que es medida es 100 mA y 10 mA, respectivamente.

3.67. Un digestor de 170 °C de temperatura máxima se usa en un molino de papel para procesar viruta de madera que finalmente será papel. Como se muestra en la figura P3.67a, se colocan tres termómetros electrónicos a lo largo de su longitud. Cada termómetro da 0 V a 0 °C y el voltaje cambia 25 mV/°C. Usaremos el promedio de los voltajes de los tres termómetros para encontrar una temperatura de digestor agregada. Además, debe aparecer 1 volt a V_O para cada 10 °C de temperatura promedio. Diseñe tal circuito de promedio usando la configuración con op-amps que se muestra en la figura P3.67b si el voltaje final de salida debe ser positivo.

3.68. Diseñe un circuito con op-amp que tenga una ganancia de -50 usando resistencias no menores que 1 kΩ.

3.69. Diseñe una red de op-amps de dos etapas que tenga una ganancia de -50 000 mientras no lleva corriente en su terminal de entrada. No use resistencias menores a 1 kΩ.

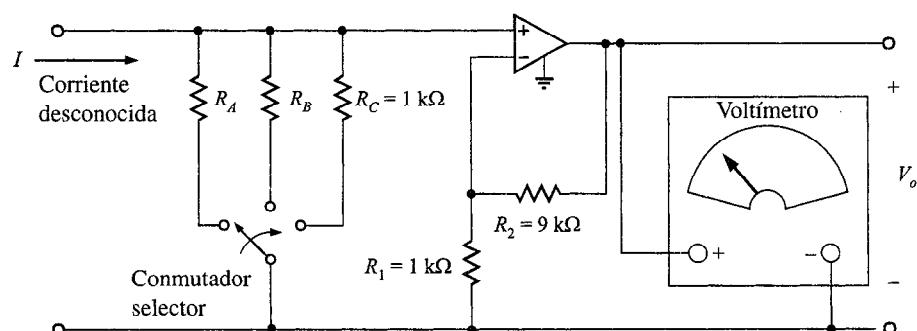


FIGURA P3.66

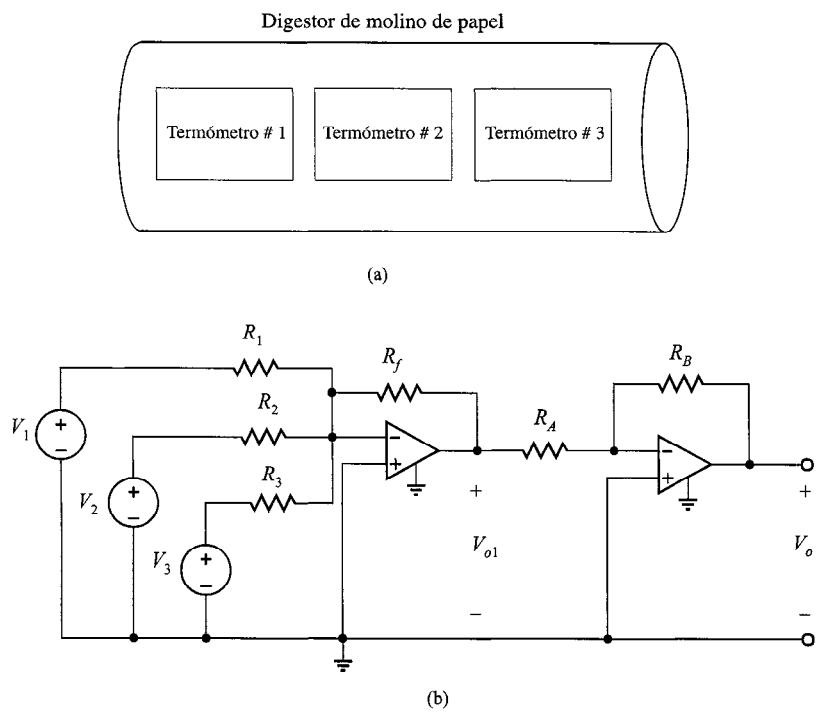
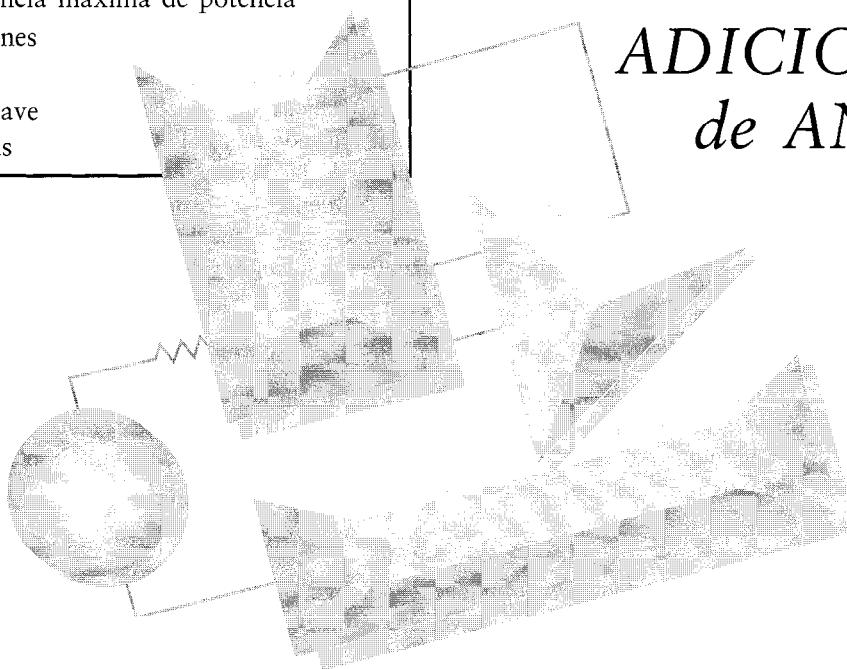


FIGURA P3.67

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

- 4.1** Introducción
- 4.2** Superposición
- 4.3** Transformación de fuentes
- 4.4** Teoremas de Thévenin y de Norton
- 4.5** Transferencia máxima de potencia
- 4.6** Aplicaciones
- 4.7** Resumen
- Puntos clave
- Problemas

CAPÍTULO**4****TÉCNICAS
ADICIONALES
*de ANÁLISIS***

En este punto hemos llegado a dominar la habilidad para resolver redes que contienen fuentes dependientes e independientes utilizando el análisis nodal o el de malla. En este capítulo introducimos varias técnicas nuevas de análisis que reforzarán nuestro arsenal de herramientas de análisis de circuitos. Encontraremos que en algunas situaciones esas técnicas conducen a una rápida solución y en otros casos no lo hacen. Sin embargo, esas técnicas nuevas en muchos casos proporcionan una penetración más profunda en la operación de circuitos que no puede obtenerse de un análisis nodal o de malla.

En muchas situaciones prácticas estamos interesados en el análisis de alguna parte de una red mucho

más grande. Si podemos modelar el resto de la red con un circuito equivalente simple, entonces nuestra tarea será mucho más simple. Por ejemplo, considere el problema de analizar algún dispositivo electrónico simple que está conectado al contacto de ca de la pared de su casa. En este caso todo el circuito incluye no sólo al dispositivo electrónico sino a la planta de la red de potencia que está conectada al dispositivo a través de los interruptores de circuito en la casa. Sin embargo, si podemos modelar fielmente todo lo que está fuera del dispositivo con un circuito equivalente simple, entonces nuestro análisis será manejable. Dos de los teoremas que presentaremos en este capítulo nos permitirán hacerlo con precisión. ■

4.1 Introducción

Antes de introducir técnicas adicionales de análisis, revisemos algunos de los temas que hasta aquí hemos usado ya sea explícita o implícitamente en nuestros análisis.

Equivalencia

La tabla 4.1 es un breve compendio de algunos de los circuitos equivalentes que han sido empleados en nuestro análisis. Este listado sirve como una rápida revisión conforme comenzamos a observar otras técnicas que pueden usarse para encontrar un voltaje o corriente específico en algún lugar de una red y proporcionar ideas adicionales sobre la operación de ésta. Además de las formas enlistadas en la tabla, es importante notar que una conexión en serie de fuentes de corriente o una conexión en paralelo de fuentes de voltaje no se debe hacer a menos que las fuentes estén apuntando en la misma dirección y tengan exactamente los mismos valores.

Linealidad

Todos los circuitos que hemos analizado hasta aquí y todos los circuitos que estudiaremos en este libro son circuitos lineales. Hemos mostrado al principio que la resistencia es un elemento lineal debido a que su relación de corriente-voltaje tiene una curva característica lineal; es decir,

$$v(t) = Ri(t)$$

La linealidad requiere aditividad y homogeneidad (escala). En el caso de un elemento resistivo, si se aplica $i_1(t)$, el voltaje a través de la resistencia es

$$v_1(t) = Ri_1(t)$$

De manera similar, si se aplica $i_2(t)$, entonces

$$v_2(t) = Ri_2(t)$$

Sin embargo, si se aplica $i_1(t) + i_2(t)$, el voltaje a través de la resistencia es

$$v(t) = R[i_1(t) + i_2(t)] = Ri_1(t) + Ri_2(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

Esto demuestra la propiedad aditiva. Además, si la corriente es escalada por una constante K_1 , el voltaje también está escalado por la constante K_1 , ya que

$$RK_1i(t) = K_1Ri(t) = K_1v(t)$$

Esto demuestra la homogeneidad.

Hemos mostrado en los capítulos precedentes que un circuito que contiene sólo fuentes independientes, fuentes linealmente dependientes y resistencias está descrito por ecuaciones de la forma

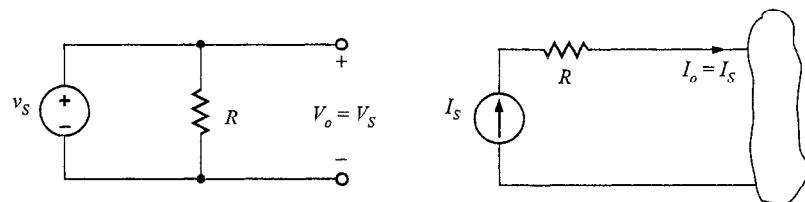
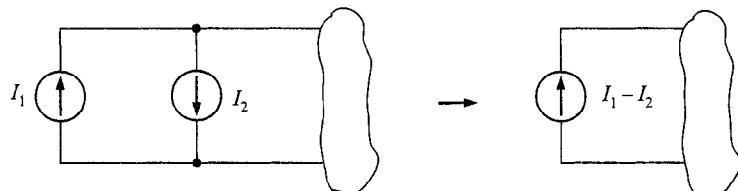
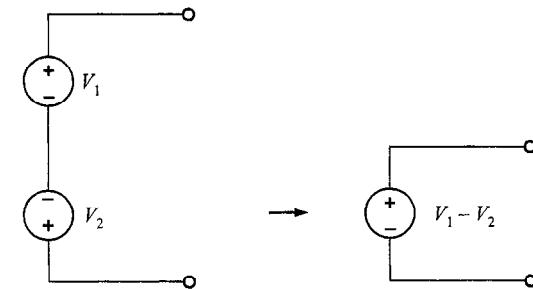
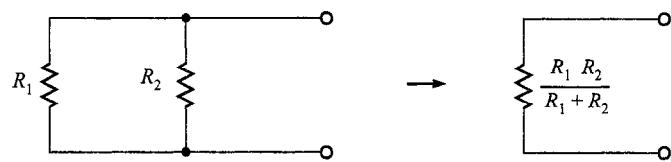
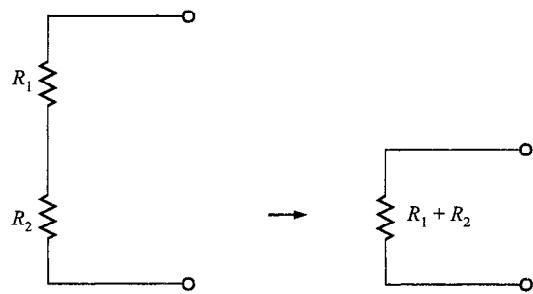
$$a_1v_1(t) + a_2v_2(t) + \cdots + a_nv_n(t) = i(t)$$

o

$$b_1i_1(t) + b_2i_2(t) + \cdots + b_ni_n(t) = v(t)$$

TABLA 4.1

Formas de circuitos equivalentes



Note que si las fuentes independientes se multiplican por una constante, los voltajes nodales o las corrientes de malla también están multiplicadas por la misma constante. Así, definimos un circuito lineal como uno que se compone sólo de fuentes independientes, fuentes lineales dependientes y elementos lineales. Los capacitores e inductores, que examinaremos en el capítulo 6, también son elementos de circuito que tienen una relación lineal de entrada-salida siempre que su energía almacenada inicial sea cero.

EJEMPLO 4.1

Para el circuito que se muestra en la figura 4.1, deseamos determinar el voltaje de salida V_{sal} . Sin embargo, en lugar de olvidar el problema de una manera directa y calcular I_o , entonces I_1 , luego I_2 , y así sucesivamente, usaremos la linealidad y supondremos simplemente que el voltaje de salida es $V_{\text{sal}} = 1 \text{ V}$. Esta suposición dará un valor para la fuente de voltaje. Utilizaremos entonces el valor real de la fuente de voltaje y la linealidad para calcular el valor real de V_{sal} .

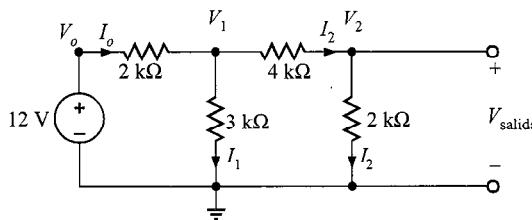


FIGURA 4.1 Circuito utilizado en el ejemplo 4.1.

SOLUCIÓN Si suponemos que $V_{\text{sal}} = V_2 = 1 \text{ V}$, entonces

$$I_2 = \frac{V_2}{2k} = 0.5 \text{ mA}$$

V_1 puede entonces calcularse como

$$\begin{aligned} V_1 &= 4kI_2 + V_2 \\ &= 3 \text{ V} \end{aligned}$$

De aquí,

$$I_1 = \frac{V_1}{3k} = 1 \text{ mA}$$

Aplicando ahora la LCK

$$I_o = I_1 + I_2 = 1.5 \text{ mA}$$

entonces

$$\begin{aligned} V_o &= 2kI_o + V_1 \\ &= 6 \text{ V} \end{aligned}$$

Por tanto, se supone que $V_{\text{sal}} = 1 \text{ V}$ produce una fuente de voltaje de 6 V. Sin embargo, ya que el voltaje real de la fuente es 12 V, el voltaje de salida real es $12V(12/6) = 2 \text{ V}$.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

■■■ Use la linealidad y la suposición de que $I_o = 1 \text{ mA}$ para calcular la corriente correcta I_o en el circuito de la figura D4.1 si $I = 6 \text{ mA}$.

Resp.: $I_o = 3 \text{ mA}$.

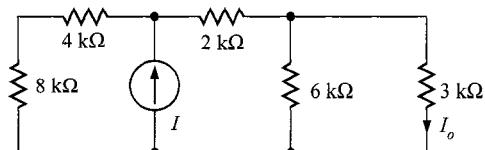


FIGURA D4.1

4.2 Superposición

A fin de proporcionar motivación para este tema, examinemos un circuito simple en el que dos fuentes contribuyen a la corriente en la red.

EJEMPLO 4.2

Considere el circuito de la figura 4.2a en el que los valores reales de las fuentes del voltaje se dejan sin especificar. Utilicemos esta red para examinar el concepto de superposición.

SOLUCIÓN Las ecuaciones de anillo para esta red son

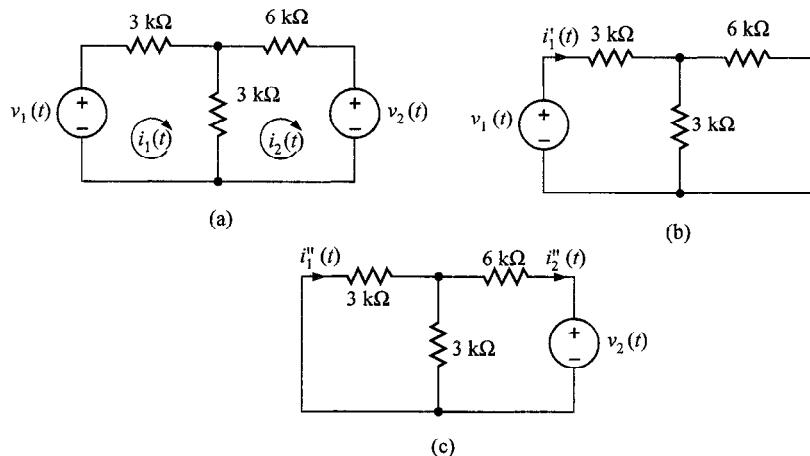
$$6ki_1(t) - 3ki_2(t) = v_1(t)$$

$$-3ki_1(t) + 9ki_2(t) = -v_2(t)$$

Resolviendo esas ecuaciones para $i_1(t)$ se obtiene

$$i_1(t) = \frac{v_1(t)}{5k} - \frac{v_2(t)}{15k}$$

En otras palabras, la corriente $i_1(t)$ tiene un componente debido a $v_1(t)$ y un componente debido a $v_2(t)$. En vista del hecho de que $i_1(t)$ tiene dos componentes, uno debido a cada fuente independiente, sería interesante examinar lo que cada fuente al actuar por sí sola contribuiría a $i_1(t)$. Para que $v_1(t)$ actúe sola, $v_2(t)$ debe ser cero. Como señalamos en el capítulo 2, $v_2(t) = 0$ significa que la fuente $v_2(t)$ sea reemplazada con un corto circuito. Por tanto, para determinar el valor de $i_1(t)$ debido sólo a $v_1(t)$, empleamos el circuito de la figura 4.2b y nos referimos a este valor dc $i_1(t)$ como $i'_1(t)$.

**FIGURA 4.2** Circuito utilizado para ilustrar la superposición.

$$i_1'(t) = \frac{v_1(t)}{3k + \frac{(3k)(6k)}{3k + 6k}}$$

$$= \frac{v_1(t)}{5k}$$

Determinemos ahora el valor de $i_1''(t)$ debido a $v_2(t)$ actuando sola y nos referimos a este valor como $i_1''(t)$. Usando la red de la figura 4.2c,

$$i_2''(t) = -\frac{v_2(t)}{6k + \frac{(3k)(3k)}{3k + 3k}} = \frac{-2v_2(t)}{15k}$$

Entonces usando el divisor de corriente, obtenemos

$$i_1''(t) = \frac{-2v_2(t)}{15k} \left(\frac{3k}{3k + 3k} \right)$$

$$= \frac{-v_2(t)}{15k}$$

Ahora, si sumamos los valores de $i_1'(t)$ e $i_1''(t)$, obtenemos el valor calculado directamente, es decir,

$$i_1(t) = i_1'(t) + i_1''(t)$$

$$= \frac{v_1(t)}{5k} - \frac{v_2(t)}{15k}$$

Note que hemos *superimpuesto* el valor de $i'_1(t)$ en $i''_1(t)$, o viceversa, para determinar la corriente desconocida.

Lo que hemos demostrado en el ejemplo 4.2 es cierto en general para circuitos lineales y es un resultado directo de la propiedad de linealidad. *El principio de superposición*, el cual nos proporciona la habilidad de reducir un problema complicado a varios problemas más fáciles —cada uno conteniendo sólo una fuente independiente—, establece que

En un circuito lineal que contiene múltiples fuentes independientes, la corriente o el voltaje en cualquier punto de la red puede calcularse como la suma algebraica de las contribuciones individuales de cada fuente al actuar sola.

Cuando se determina la contribución debida a una fuente independiente, cualesquiera fuentes de voltaje restantes quedan en cero al reemplazarlas con corto circuitos, y cualesquiera fuentes de corriente restantes quedan en cero reemplazándolas con circuitos abiertos.

Aunque la superposición puede ser usada en redes lineales que contienen fuentes dependientes, no es útil en este caso, ya que la fuente dependiente nunca queda en cero.

Es interesante notar que, como indican los ejemplos previos, la superposición proporciona alguna idea al determinar la contribución de cada fuente a la variable bajo investigación.

Demostraremos ahora la superposición con dos ejemplos. Con propósitos de comparación, también resolveremos las redes usando análisis de nodo y de malla. Además, emplearemos esas mismas redes cuando demostremos las técnicas subsecuentes, si se aplican.

E J E M P L O 4.3

Usemos la superposición para encontrar V_o en el circuito de la figura 4.3a.

SOLUCIÓN La contribución de la fuente de 2 mA al voltaje de salida se encuentra de la red de la figura 4.3b, usando la división de corriente

$$\begin{aligned} I_o &= (2 \times 10^{-3}) \left(\frac{1k + 2k}{1k + 2k + 6k} \right) \\ &= \frac{2}{3} \text{ mA} \end{aligned}$$

y

$$V'_o = I_o(6k) = 4 \text{ V}$$

La contribución de la fuente de 3 V al voltaje de salida se encuentra del circuito de la figura 4.3c. Utilizando la división de voltaje

$$\begin{aligned} V''_o &= 3 \left(\frac{6k}{1k + 2k + 6k} \right) \\ &= 2 \text{ V} \end{aligned}$$

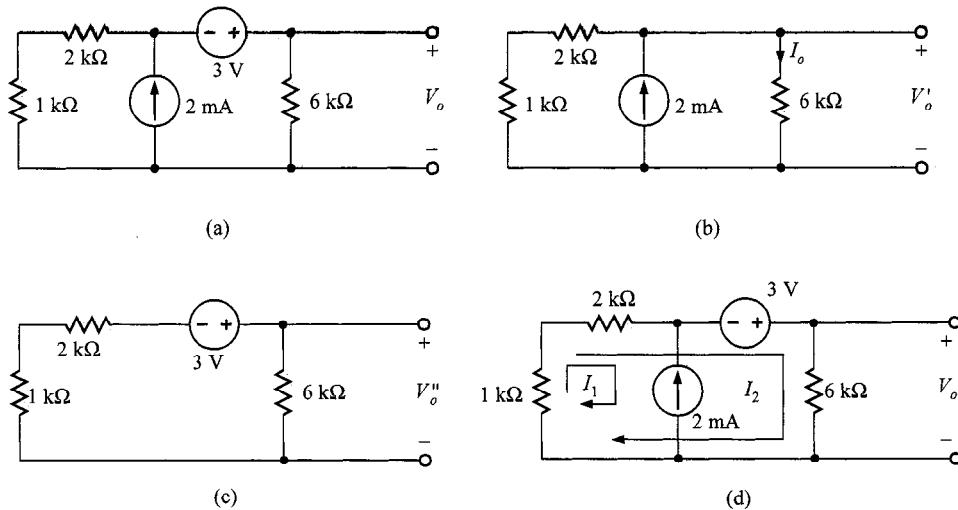


FIGURA 4.3 Circuito utilizado en el ejemplo 4.3.

Por tanto,

$$V_o = V'_o + V''_o = 6 \text{ V}$$

Aunque usamos dos circuitos separados para resolver el problema, ambos eran muy simples.

Si usamos el análisis nodal y la figura 4.3a para encontrar V_o y reconocer que la fuente de 3 V y sus nodos conectores forman un supernodo, V_o puede encontrarse de la ecuación del nodo

$$\frac{V_o - 3}{1k + 2k} - 2 \times 10^{-3} + \frac{V_o}{6k} = 0$$

la cual da $V_o = 6 \text{ V}$. Además, el análisis de malla aplicado como se muestra en la figura 4.3d produce las ecuaciones

$$I_1 = -2 \times 10^{-3}$$

y

$$3k(I_1 + I_2) - 3 + 6kI_2 = 0$$

la cual da $I_2 = 1 \text{ mA}$, y de aquí $V_o = 6 \text{ V}$.

EJEMPLO 4.4

Considere ahora la red de la figura 4.4a. Usemos la superposición para encontrar V_o .

SOLUCIÓN La contribución de la fuente de 6 V a V_o se encuentra que proceda en la red de la figura 4.4b, la cual se redibuja en la figura 4.4c. La resistencia de $2 \text{k}\Omega + 6 \text{k}\Omega = 8 \text{k}\Omega$ y la de $4 \text{k}\Omega$ están en paralelo y su combinación es una resistencia de $8/3 \text{k}\Omega$. Entonces usando el divisor de voltaje

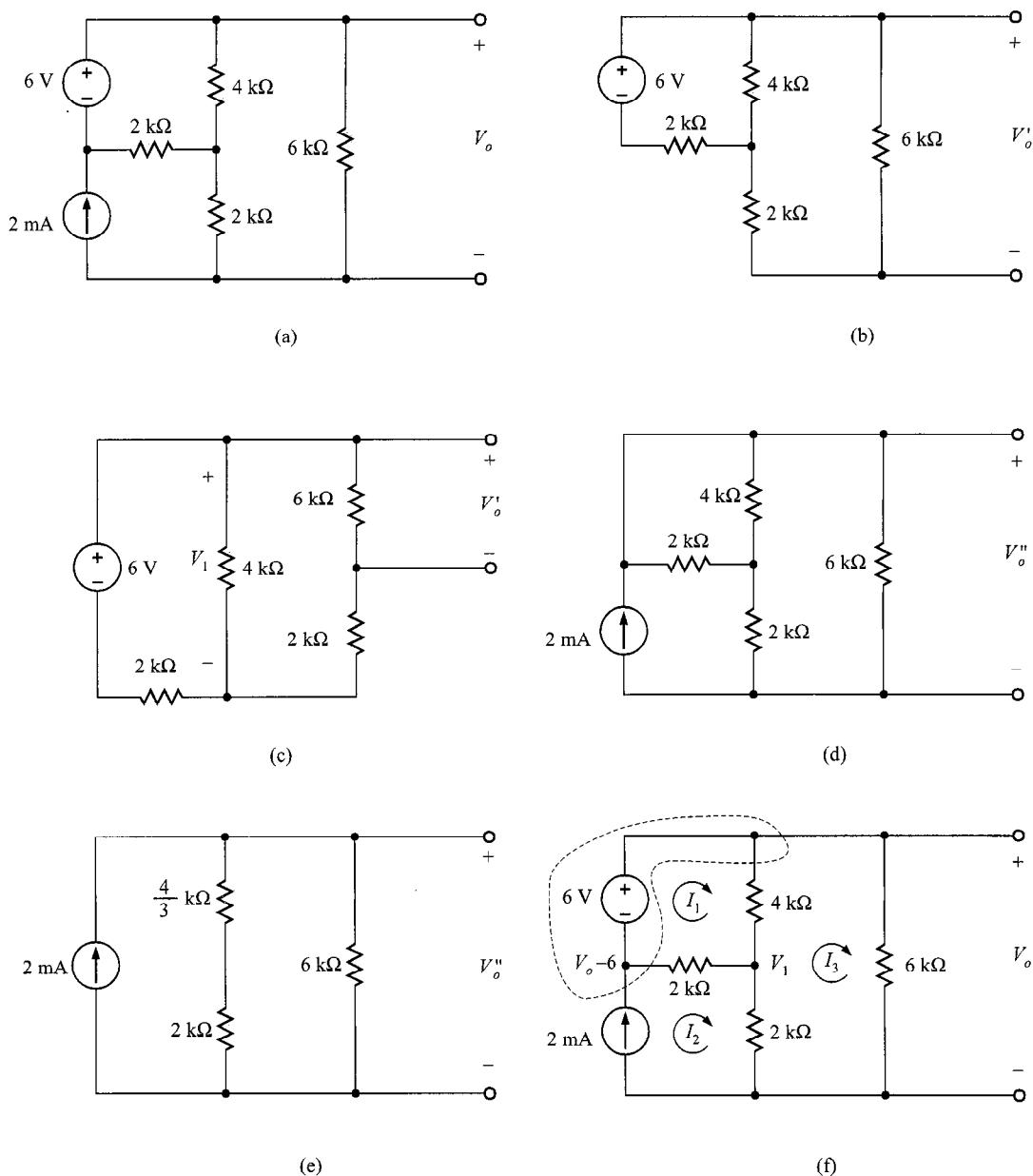


FIGURA 4.4 Circuito utilizado en el ejemplo 4.4.

$$V_1 = 6 \left(\frac{\frac{8}{3}k}{\frac{8}{3}k + 2k} \right) = \frac{24}{7} \text{ V}$$

Aplicando nuevamente el divisor de voltaje

$$V'_o = V_1 \left(\frac{6k}{6k + 2k} \right) = \frac{18}{7} \text{ V}$$

La contribución de la fuente de 2 mA se encuentra que procede de la figura 4.4d, la cual se dibuja nuevamente en la figura 4.4e. V''_o simplemente es igual al producto de la fuente de corriente y la combinación en paralelo de resistencias, es decir,

$$V''_o = (2 \times 10^{-3}) \left(\frac{10}{3} k \parallel 6k \right) = \frac{30}{7} \text{ V}$$

Entonces

$$V_o = V'_o + V''_o = \frac{48}{7} \text{ V}$$

Un análisis nodal de la red puede desarrollarse usando la figura 4.4f. La ecuación para el supernodo es

$$-2 \times 10^{-3} + \frac{(V_o - 6) - V_1}{2k} + \frac{V_o - V_1}{4k} + \frac{V_o}{6k} = 0$$

La ecuación para el nodo marcado con V_1 es

$$\frac{V_1 - V_o}{4k} + \frac{V_1 - (V_o - 6)}{2k} + \frac{V_1}{2k} = 0$$

Resolviendo esas dos ecuaciones, que ya contienen la ecuación de restricción para el supernodo, se obtiene $V_o = 48/7$ V.

Una vez más, con referencia a la figura 4.4f, las ecuaciones de anillo para la red son

$$-6 + 4k(I_1 - I_3) + 2k(I_1 - I_2) = 0$$

$$I_2 = 2 \times 10^{-3}$$

$$2k(I_3 - I_2) + 4k(I_3 - I_1) + 6kI_3 = 0$$

Resolviendo esas ecuaciones, obtenemos $I_3 = 8/7$ mA y, de aquí, $V_o = 48/7$ V.

La superposición puede aplicarse a un circuito con cualquier número de fuentes dependientes e independientes. De hecho, la superposición puede aplicarse a tal red en una variedad de formas. Por ejemplo, un circuito con tres fuentes independientes puede

resolverse usando cada fuente actuando sola, como lo que acabamos de demostrar, o podríamos usar dos a la vez y sumar el resultado con el que se obtiene de la tercera actuando sola. Además, las fuentes independientes no tienen que suponer su valor real o cero. Sin embargo, es obligatorio que la suma de los diferentes valores elegidos se sumen al valor total de la fuente.

La superposición es una propiedad fundamental de las ecuaciones lineales y, por tanto, puede aplicarse a cualquier efecto que esté relacionado linealmente con su causa. A este respecto es importante apuntar que aunque la superposición se aplica a corriente y voltaje en un circuito lineal, ésta no puede ser usada para determinar la potencia debido a que la potencia es una función no lineal.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D4.2 Calcule V_o en el circuito de la figura D4.2 usando la superposición.

Resp.: $V_o = \frac{4}{3}$ V.

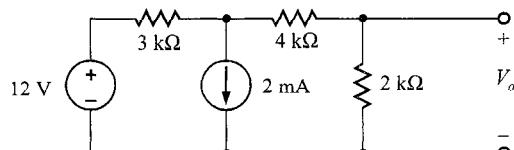


FIGURA D4.2

4.3 Transformación de fuentes

Antes de que comencemos a discutir la transformación de fuentes, es necesario que apuntemos que las fuentes reales difieren de los modelos ideales que hasta aquí hemos presentado. En general, una fuente de voltaje práctica no produce un voltaje constante a pesar de la resistencia de carga o la corriente que libera, y una fuente de corriente práctica no entrega una corriente constante a pesar de la resistencia de carga o el voltaje a través de sus terminales.

Las fuentes prácticas contienen resistencia interna, y esta resistencia de la fuente no es accesible al usuario. En general, queremos minimizar la resistencia debido a que ésta consume potencia. Algunos valores típicos para la resistencia interna se muestran en la tabla 4.2.

T A B L A 4.2

Resistencia interna aproximada de fuentes seleccionadas (baterías nuevas) a 21°C

Tipo de batería	Resistencia interna
Celda estándar de carbón zinc tamaño D de 1.5 V	0.5 Ω
Celda de trabajo pesado de carbón zinc tamaño D de 1.5 V	0.3 Ω
Celda alcalina tamaño D de 1.5 V	0.2 Ω
Celda de níquel cadmio tamaño D de 1.5 V	0.008 Ω
Estándar de carbón zinc de 9 V	35 Ω
Trabajo pesado de carbón zinc de 9 V	35 Ω
Alcalina de 9 V	2 Ω
Batería de automóvil de 12 V	0.006 Ω

Como las fuentes prácticas contienen resistencia interna, los modelos que se muestran en la figura 4.5a y b representan más de cerca a fuentes reales. Advierta que la potencia entregada por la fuente de voltaje práctica está dada por la expresión

$$\begin{aligned} P_L &= i_L^2 R_L \\ &= \left(\frac{v}{R_v + R_L} \right)^2 R_L \end{aligned}$$

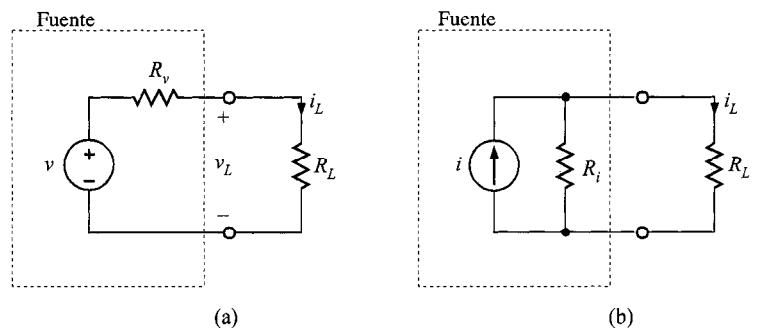
la cual puede escribirse como

$$P_L = \frac{v^2}{R_L} \left(\frac{1}{1 + R_v/R_L} \right)^2$$

y por tanto si $R_L \gg R_v$, entonces

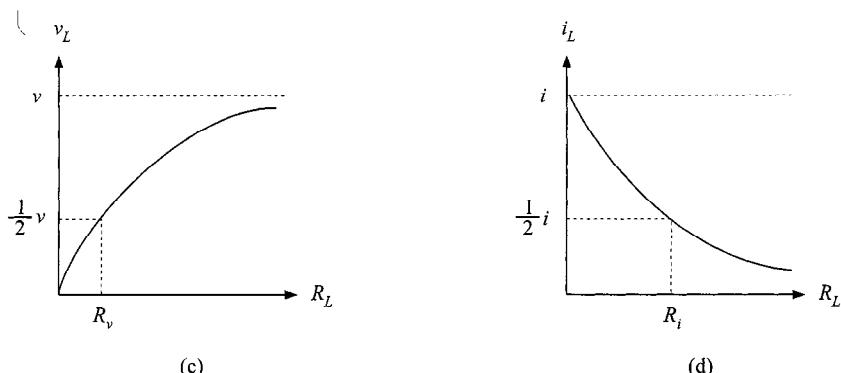
$$P_L = \frac{v^2}{R_L}$$

que es la potencia entregada por la fuente de voltaje ideal. De manera similar, la poten-



(a)

(b)



(c)

(d)

FIGURA 4.5 Efecto de la resistencia interna en fuentes de voltaje y de corriente reales.

cia entregada por la fuente de corriente práctica se calcula usando divisor de corriente como

$$\begin{aligned} P_L &= i_L^2 R_L \\ &= \left(\frac{i R_i}{R_i + R_L} \right)^2 R_L \end{aligned}$$

la cual puede escribirse como

$$P_L = i^2 R_L \left(\frac{1}{1 + R_L/R_i} \right)^2$$

y de aquí si $R_i \gg R_L$, entonces

$$P_L = i^2 R_L$$

que es la potencia entregada por la fuente de corriente ideal.

Las gráficas que se muestran en la figura 4.5c y d ilustran el efecto de la resistencia interna sobre la fuente de voltaje y la fuente de corriente, respectivamente. Las gráficas indican que el voltaje de salida se approxima al voltaje de la fuente ideal sólo para valores grandes de la resistencia de carga y, por tanto, valores pequeños de corriente. De manera similar, la corriente de carga es aproximadamente igual a la fuente de corriente ideal sólo para valores de la resistencia de carga R_L que es pequeña en comparación con la resistencia interna R_i .

Con este material sobre fuentes prácticas como información de base, ahora pre-guntamos si es posible intercambiar un modelo de fuente por otro; es decir, intercambiar un modelo de fuente de voltaje por un modelo de fuente de corriente, o viceversa. Podemos intercambiar una fuente por otra con tal que sean equivalentes; es decir, cada fuente produce exactamente el mismo voltaje y corriente para cualquier carga que esté conectada a través de sus terminales.

Examinemos los dos circuitos que se muestran en la figura 4.6. A fin de determinar las condiciones requeridas para que las dos fuentes sean equivalentes, examinemos las condiciones terminales de cada una. Para la red de la figura 4.6a,

$$i = i_L + \frac{v_L}{R_i}$$

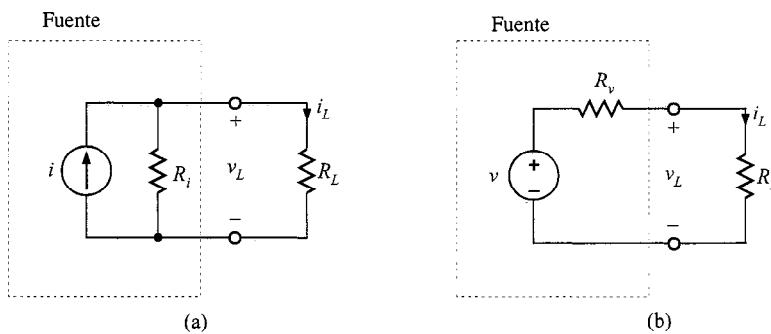


FIGURA 4.6 Circuitos utilizados para determinar las condiciones para un intercambio de fuentes.

o

$$iR_i = R_i i_L + v_L$$

Para la red de la figura 4.6b,

$$v = i_L R_v + v_L$$

Para que las dos redes sean equivalentes, sus características terminales deben ser idénticas; es decir,

$$v = iR_i \quad y \quad R_i = R_v \quad (4.1)$$

Las relaciones especificadas en la ecuación (4.1) y en la figura 4.6 son extremadamente importantes y el lector no debe fallar en el dominio de su significado. Lo que esas relaciones nos dicen es que si hemos encajado en una red una fuente de corriente i en paralelo con una resistencia R , podemos reemplazar esta combinación con una fuente de voltaje de valor $v = iR$ en serie con la resistencia R . Lo inverso es también cierto; es decir, una fuente de voltaje v en serie con una resistencia R puede reemplazarse con una fuente de corriente de valor $i = v/R$ en paralelo con la resistencia R . Los parámetros dentro del circuito (por ejemplo, un voltaje de salida) quedan sin cambio bajo esas transformaciones.

Debemos insistir en que los dos circuitos equivalentes de la figura 4.6, bajo las condiciones establecidas en la ecuación (4.1), son equivalentes sólo en los dos nodos externos. Por ejemplo, si desconectamos la resistencia de carga R_L en el circuito de la figura 4.6, el circuito equivalente en la figura 4.6a disipa potencia, pero el de la figura 4.6b no lo hace.

En este punto demostremos la utilidad del intercambio de una fuente utilizando dos ejemplos.

EJEMPLO 4.5

Repitamos el ejemplo 4.3 usando un intercambio de fuente.

SOLUCIÓN Por conveniencia, la red se redibuja en la figura 4.7a. Advierta que en el lado izquierdo de la red hay una fuente de corriente en paralelo con una resistencia de $3 \text{ k}\Omega$ ($1 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega$), que puede transformarse en una fuente de $6 \text{ V} = (2 \text{ mA})(3 \text{ k}\Omega)$ en serie con la misma resistencia de $3 \text{ k}\Omega$. La red resultante se muestra en la figura 4.7b. El voltaje de salida es entonces una simple división de los 9 volts ($6 \text{ V} + 3 \text{ V}$) entre las resistencias de $3 \text{ k}\Omega$ y de $6 \text{k}\Omega$. Por tanto,

$$V_o = 9 \left(\frac{6\text{k}}{3\text{k} + 6\text{k}} \right) = 6 \text{ V}$$

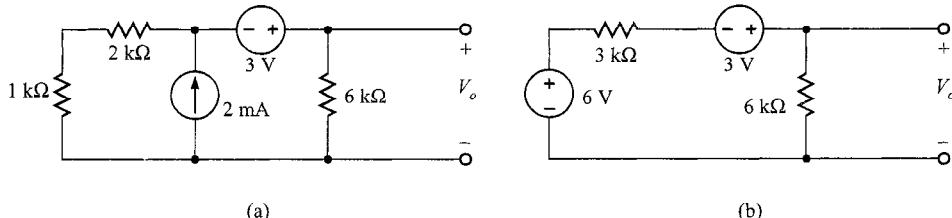


FIGURA 4.7 Circuitos utilizados en el ejemplo 4.5.

que está de acuerdo con nuestro análisis previo. Finalmente, se advierte al lector que conserve la polaridad de la fuente de voltaje y la dirección de la fuente de corriente en concordancia, como se muestra en la figura 4.7.

EJEMPLO 4.6

Demostraremos ahora cómo encontrar V_o en el circuito de la figura 4.8a usando la aplicación repetida de la transformación de una fuente.

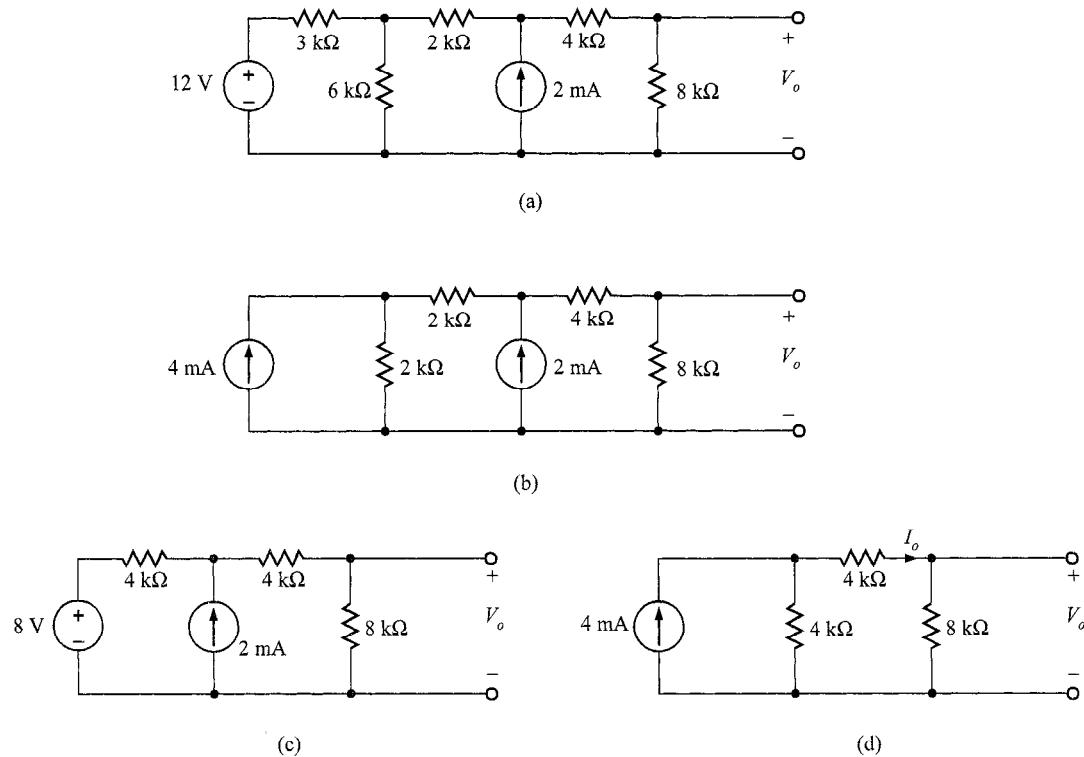


FIGURA 4.8 Circuitos utilizados en el ejemplo 4.6.

SOLUCIÓN Si comenzamos en el extremo izquierdo de la red de la figura 4.8a, la combinación en serie de la fuente de 12 V y la resistencia de $3\text{ k}\Omega$ se convierte en una fuente de corriente en paralelo con la resistencia de $3\text{ k}\Omega$. Si combinamos esta resistencia de $3\text{ k}\Omega$ con la resistencia de $6\text{ k}\Omega$, obtenemos el circuito de la figura 4.8b. Note en este punto que hemos eliminado un elemento de circuito. Continuando la reducción, convertimos la fuente de 4 mA y la resistencia de $2\text{ k}\Omega$ en una fuente de 8 V en serie con esta misma resistencia de $2\text{ k}\Omega$. Las dos resistencias de $2\text{ k}\Omega$ que están en serie se combinan ahora para producir la red de la figura 4.8c. Si convertimos ahora la combinación de la fuente de 8 V y la resistencia de $4\text{ k}\Omega$ en una fuente de 2 mA en paralelo con la resistencia de $4\text{ k}\Omega$ y combinamos la fuente de corriente resultante con la otra fuente de 2 mA , llegamos al cir-

cuito que se muestra en la figura 4.8d. En este punto, podemos simplemente aplicar el divisor de corriente a las dos trayectorias paralelas de resistencia y obtener

$$I_o = (4 \times 10^{-3}) \left(\frac{4k}{4k + 4k + 8k} \right) = 1 \text{ mA}$$

y de aquí,

$$V_o = (1 \times 10^{-3})(8k) = 8 \text{ V}$$

Se anima al lector a considerar las implicaciones de trabajar este problema usando cualquiera de las otras técnicas que hemos presentado.

Note que esta transformación sistemática, algunas veces tediosa, nos permite reducir la red metódicamente a una forma equivalente más simple con respecto a algún otro elemento del circuito. Sin embargo, también debemos darnos cuenta que esta técnica carece de valor en circuitos de la forma mostrada en la figura 4.4. Además, aunque aplicable a redes que contienen fuentes dependientes, no es tan útil como las otras técnicas, y debe tenerse cuidado de no transformar la parte del circuito que contiene la variable de control.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D4.3 Calcule V_o en el circuito de la figura D4.2 usando una transformación de fuentes.

Resp.: $V_o = \frac{4}{3} \text{ V.}$

4.4 Teoremas de Thévenin y de Norton

Hasta aquí hemos presentado un número de técnicas para análisis de circuitos. En este punto añadiremos dos teoremas a nuestra colección de herramientas que probarán ser extremadamente útiles. Los teoremas se llaman así por sus autores, M.L. Thévenin, un ingeniero francés, y E.L. Norton, un científico que trabajara en los Laboratorios Telefónicos Bell.

Supongamos que se nos da un circuito y que deseamos encontrar la corriente, voltaje, o la potencia que entrega a alguna resistencia de la red a la cual llamaremos carga. El *teorema de Thévenin* nos dice que podemos reemplazar toda la red, excluyendo la carga, por un circuito equivalente que contenga sólo una fuente de voltaje independiente en serie con una resistencia de tal forma que la relación corriente-voltaje en la carga se conserve sin cambio. El *teorema de Norton* es idéntico a la afirmación anterior con la excepción de que el circuito equivalente es una fuente de corriente independiente en paralelo con una resistencia.

Note que este es un resultado muy importante. Nos dice que si examinamos cualquier red desde un par de terminales, sabemos que con respecto a esas terminales, toda la red es equivalente a un circuito simple consistente en una fuente de voltaje independiente en serie con una resistencia o una fuente de corriente independiente en paralelo con una resistencia.

Al desarrollar los teoremas, supondremos que el circuito que se muestra en la figura 4.9a puede dividirse en dos partes, como se muestra en la figura 4.9b. En general, el circuito *B* es la carga y puede ser lineal o no lineal. El circuito *A* es el balance de la red original excluyendo la carga y debe ser lineal. Como tal, el circuito *A* puede contener fuentes independientes, fuentes dependientes y resistencias, o cualquier otro elemento lineal. Requerimos, sin embargo, que una fuente dependiente y su variable de control aparezcan en el mismo circuito.

El circuito *A* entrega una corriente *i* al circuito *B* y produce un voltaje v_o a través de las terminales de entrada del circuito *B*. Desde el punto de vista de las relaciones terminales del circuito *A*, podemos reemplazar el circuito *B* por una fuente de voltaje de v_o volts (con la polaridad apropiada), como se muestra en la figura 4.9c. Como el voltaje terminal no cambia y el circuito *A* tampoco lo hace, la corriente terminal *i* no cambia.

Aplicando ahora el principio de superposición a la red que se muestra en la figura 4.9c, la corriente total *i* que se muestra en la figura es la suma de las corrientes ocasionadas por todas las fuentes en el circuito *A* y la fuente v_o , la cual apenas hemos añadido. Por tanto, por medio de la superposición, la corriente *i* puede escribirse como

$$i = i_o + i_{sc} \quad (4.2)$$

donde i_o es la corriente debida a v_o con todas las fuentes independientes en el circuito *A* igualadas a cero (es decir, las fuentes de voltaje reemplazadas por corto circuitos y fuentes de corriente reemplazadas por circuitos abiertos), e i_{sc} es la corriente de corto circuito debida a todas las fuentes en el circuito *A* con v_o reemplazado por un corto circuito.

Los términos i_o y v_o están relacionados por la ecuación

$$i_o = \frac{-v_o}{R_{Th}} \quad (4.3)$$

donde R_{Th} es la resistencia equivalente que retorna en el circuito *A* desde las terminales *A-B* con todas las fuentes independientes en el circuito *A* igualadas a cero.

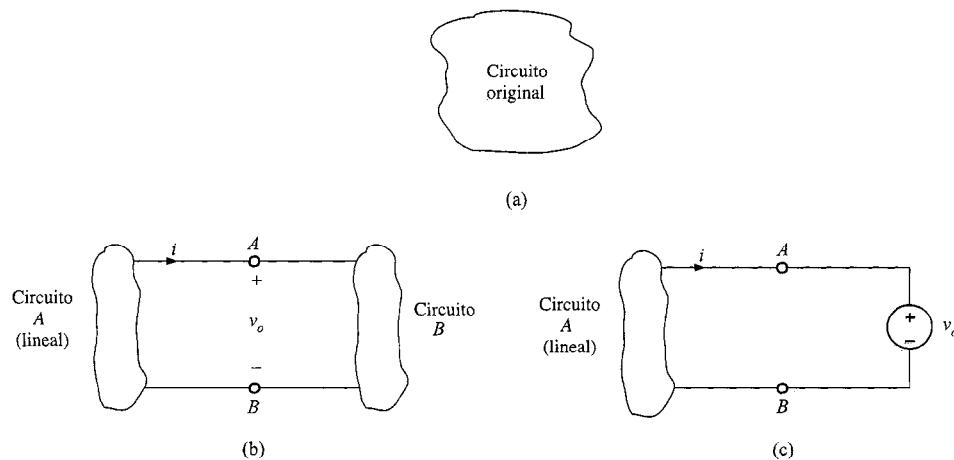


FIGURA 4.9 Conceptos utilizados para desarrollar el teorema de Thévenin.

Al sustituir la ecuación (4.3) en la ecuación (4.2) se obtiene

$$i = -\frac{v_o}{R_{Th}} + i_{sc} \quad (4.4)$$

Esta es una relación general y, por tanto, debe ser válida para cualquier condición específica en las terminales A-B. Como caso específico, suponga que las terminales son circuitos abiertos. Para esta condición, $i = 0$ y v_o es igual al voltaje de circuito abierto v_{oc} . Así, la ecuación (4.4) se convierte en

$$i = 0 = -\frac{-v_{oc}}{R_{Th}} + i_{sc} \quad (4.5)$$

De aquí,

$$v_{oc} = R_{Th}i_{sc} \quad (4.6)$$

Esta ecuación establece que el voltaje de circuito abierto es igual a la corriente de corto circuito multiplicada por la resistencia equivalente que se ve hacia el circuito A con todas las fuentes independientes igualadas a cero. Nos referimos a R_{Th} como la resistencia de Thévenin equivalente.

Sustituyendo la ecuación (4.6) en la ecuación (4.4) obtenemos

$$i = \frac{-v_o}{R_{Th}} + \frac{v_{oc}}{R_{Th}}$$

O

$$v_o = v_{oc} - R_{Th}i \quad (4.7)$$

Examinemos los circuitos descritos por esas ecuaciones. El circuito representado por la ecuación (4.7) se muestra en la figura 4.10a. El hecho de que este circuito es equivalente en las terminales A-B al circuito A en la figura 4.9 es una afirmación del *teorema de Thévenin*. El circuito representado por la ecuación (4.4) se muestra en la figura 4.10b. El hecho de que este circuito es equivalente en las terminales A-B al circuito A de la figura 4.9, es una afirmación del *teorema de Norton*.

Note con cuidado que los circuitos de la figura 4.10 junto con la relación de la ecuación (4.6) representan una transformación de fuente.

La forma como esos teoremas se aplican depende de la estructura de la red original bajo investigación. Por ejemplo, si sólo fuentes independientes están presentes, podemos calcular el voltaje de circuito abierto o la corriente de corto circuito y la

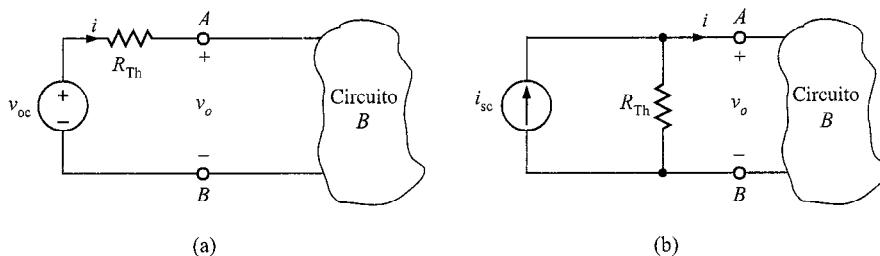


FIGURA 4.10 Circuitos equivalentes de Thévenin y Norton.

resistencia equivalente de Thévenin. Sin embargo, si también están presentes fuentes dependientes, la equivalente de Thévenin será determinada al calcular v_{oc} e i_{sc} , ya que éste es el mejor método para determinar R_{Th} en una red que contiene fuentes dependientes. Finalmente, si un circuito A no contiene fuentes *independientes*, entonces v_{oc} e i_{sc} necesariamente serán cero. (¿Por qué?) De esta manera, no podemos determinar R_{Th} mediante v_{oc}/i_{sc} , ya que la relación es indeterminada. Debemos buscar otro método. Advierta que si $v_{oc} = 0$, entonces el circuito equivalente es meramente la resistencia desconocida R_{Th} . Si aplicamos una fuente externa al circuito A —una fuente de prueba v_t — y determinamos la corriente, i_t , que fluye en el circuito A de v_t , entonces R_{Th} puede ser determinada de $R_{Th} = v_t/i_t$. Aunque el valor numérico de v_t no necesita especificarse, podemos hacer $v_t = 1$ V y entonces $R_{Th} = 1/i_t$. De manera alterna, podemos usar una fuente de corriente como fuente de prueba y hacer $i_t = 1$ A, entonces $v_t = (1)R_{Th}$.

Se presenta ahora una variedad de ejemplos para demostrar la utilidad de esos teoremas. Antes de comenzar nuestro análisis de varios ejemplos que demostrarán la utilidad de esos teoremas, se advierte al lector que recuerde que esos teoremas, además de un método alterno de ataque, con frecuencia nos permiten resolver varios pequeños problemas más que uno grande. Nos permiten reemplazar una red, no importa cuán grande, a un par de terminales con un circuito equivalente de Thévenin o uno de Norton. De hecho, podemos representar toda la red de distribución de potencia de Estados Unidos a un par de terminales con uno de los circuitos equivalentes. Una vez que se hace esto podemos analizar rápidamente el efecto de diferentes cargas en una red. Así, esos teoremas nos proveen de ideas adicionales de la operación de una red específica.

Circuitos que contienen sólo fuentes independientes

EJEMPLO 4.7

Utilicemos los teoremas de Thévenin y de Norton para encontrar V_o en la red del ejemplo 4.3.

SOLUCIÓN El circuito es redibujado en la figura 4.11a. Para determinar el equivalente de Thévenin, partimos la red en la carga de $6\text{ k}\Omega$ como se muestra en la figura 4.11b. La LVK indica que el voltaje de circuito abierto, V_{oc} , es igual a 3 V más el voltaje V_1 , el cual es el voltaje a través de la fuente de corriente. Los 2 mA de la fuente de corriente fluyen a lo largo de las dos resistencias (¡donde más podrían ir posiblemente!) y, por tanto, $V_1 = (2 \times 10^{-3})(1\text{k} + 2\text{k}) = 6$ V. Por lo tanto, $V_{oc} = 9$ V. Haciendo ambas fuentes igual a cero, podemos encontrar la resistencia equivalente de Thévenin, R_{Th} , usando el circuito de la figura 4.11c. Obviamente, $R_{Th} = 3\text{ k}\Omega$. Ahora nuestro circuito equivalente de Thévenin, consistente en V_{oc} y R_{Th} , está conectado de regreso a las terminales originales de la carga, como se muestra en la figura 4.11d. Usando un simple divisor de voltaje, encontramos que $V_o = 6$ V.

Para determinar el circuito equivalente de Norton en las terminales de la carga, debemos encontrar la corriente de corto circuito como se muestra en la figura 4.11e. Advierta que el corto circuito ocasiona que la fuente de 3 V esté directamente a través de (es decir, en paralelo con) las resistencias y la fuente de corriente. Por tanto, $I_1 = 3/(1\text{k} + 2\text{k}) = 1$ mA. Entonces usando la LCK, $I_{sc} = 3$ mA. Hemos determinado ya R_{Th} y, por tanto, conec-

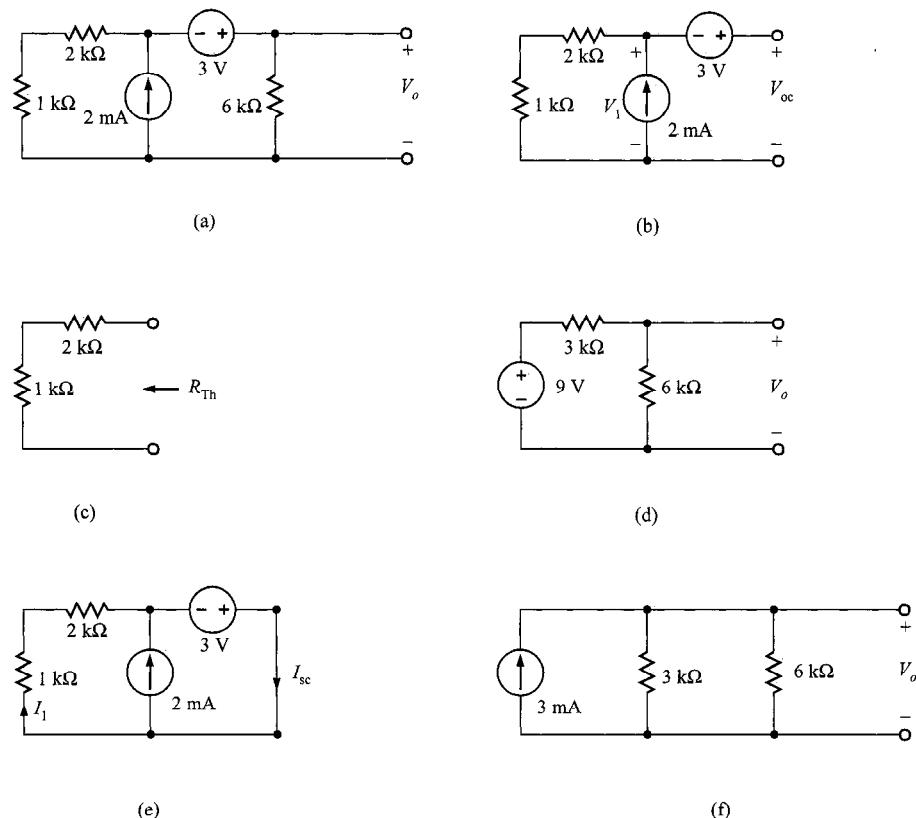


FIGURA 4.11 Circuitos utilizados en el ejemplo 4.7.

tar el equivalente de Norton a la carga resulta en el circuito de la figura 4.11f. De aquí, V_o es igual a la corriente de la fuente multiplicada por la combinación en paralelo de resistencias, que es 6 V.

Considere por un momento algunas características relevantes de este ejemplo. Advierta que al aplicar los teoremas no hay un punto donde romper la red a la izquierda de la fuente de 3 V, ya que las resistencias en paralelo con la fuente de corriente ya son un equivalente de Norton, que puede cambiarse inmediatamente a un equivalente de Thévenin ¡usando una transformación de fuente! Además, una vez que la red ha sido simplificada usando un equivalente de Thévenin o de Norton, simplemente tenemos una nueva red a la que podemos aplicar nuevamente los teoremas. El siguiente ejemplo ilustra este método.

EJEMPLO 4.8

Usemos el teorema de Thévenin para encontrar V_o en la red de la figura 4.8a, la cual se redibuja en la figura 4.12a.

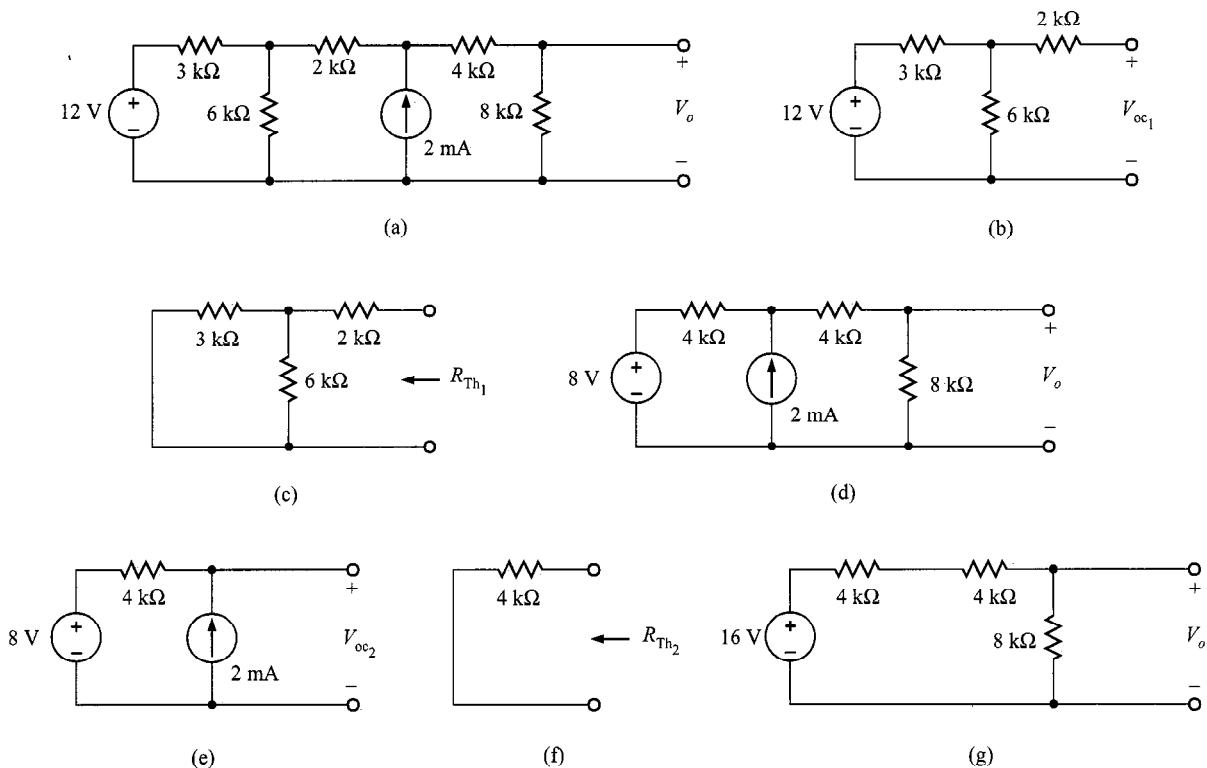


FIGURA 4.12 Circuitos utilizados en el ejemplo 4.8.

SOLUCIÓN Si partimos la red a la izquierda de la fuente de corriente, el voltaje de circuito abierto V_{oc_1} es como se muestra en la figura 4.12b. Como no hay corriente en la resistencia de $2\text{k}\Omega$ y por tanto no hay voltaje a través de ella, V_{oc_1} es igual al voltaje a través de la resistencia de $6\text{k}\Omega$, que puede determinarse mediante un divisor de voltaje como

$$V_{oc_1} = 12 \left(\frac{6\text{k}}{6\text{k} + 3\text{k}} \right) = 8\text{ V}$$

La resistencia equivalente de Thévenin, R_{Th_1} , se encuentra partiendo de la figura 4.12c como

$$R_{Th_1} = 2\text{k} + \frac{(3\text{k})(6\text{k})}{3\text{k} + 6\text{k}} = 4\text{k}\Omega$$

Conectando este equivalente de Thévenin de regreso a la red original produce el circuito que se muestra en la figura 4.12d. Podemos ahora aplicar el teorema de Thévenin nuevamente, y esta vez partimos la red a la derecha de la fuente de corriente como se muestra en la figura 4.12e. En este caso V_{oc_2} es

$$V_{oc_2} = (2 \times 10^{-3})(4\text{k}) + 8 = 16\text{ V}$$

y R_{Th_2} obtenida de la figura 4.12 es $4\text{ k}\Omega$. Conectando este equivalente de Thévenin al resto de la red produce el circuito que se muestra en la figura 4.12g. El divisor de voltaje simple aplicado a esta red final da $V_o = 8\text{ V}$. El teorema de Norton puede aplicarse de manera similar para resolver esta red; sin embargo, guardamos esta solución para un problema al final del capítulo.

EJEMPLO 4.9

Es instructivo examinar el uso de los teoremas de Thévenin y de Norton en la solución de la red de la figura 4.4a, la cual se dibuja nuevamente en la figura 4.13a.

SOLUCIÓN Si cortamos la red en la carga de $6\text{ k}\Omega$, el voltaje de circuito abierto se encuentra partiendo de la figura 4.13b. Las ecuaciones para las corrientes de anillo son

$$-6 + 4\text{k}I_1 + 2\text{k}(I_1 - I_2) = 0$$

e

$$I_2 = 2 \times 10^{-3}$$

de la cual fácilmente obtenemos $I_1 = 5/3\text{ mA}$. Entonces usando la LVK, V_{oc} es

$$\begin{aligned} V_{oc} &= 4\text{k}I_1 + 2\text{k}I_2 \\ &= 4\text{k} \left(\frac{5}{3} \times 10^{-3} \right) + 2\text{k}(2 \times 10^{-3}) \\ &= \frac{32}{3} \text{ V} \end{aligned}$$

R_{Th} se deriva de la figura 4.13c y es

$$R_{Th} = (2\text{k}||4\text{k}) + 2\text{k} = \frac{10}{3} \text{ k}\Omega$$

Uniendo el equivalente de Thévenin a la carga produce la red de la figura 4.13d. Entonces, usando la división de voltaje, obtenemos

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{32}{3} \left(\frac{6\text{k}}{6\text{k} + \frac{10}{3}\text{k}} \right) \\ &= \frac{48}{7} \text{ V} \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Norton a este problema, debemos encontrar la corriente de corto circuito que se muestra en la figura 4.13e. En este

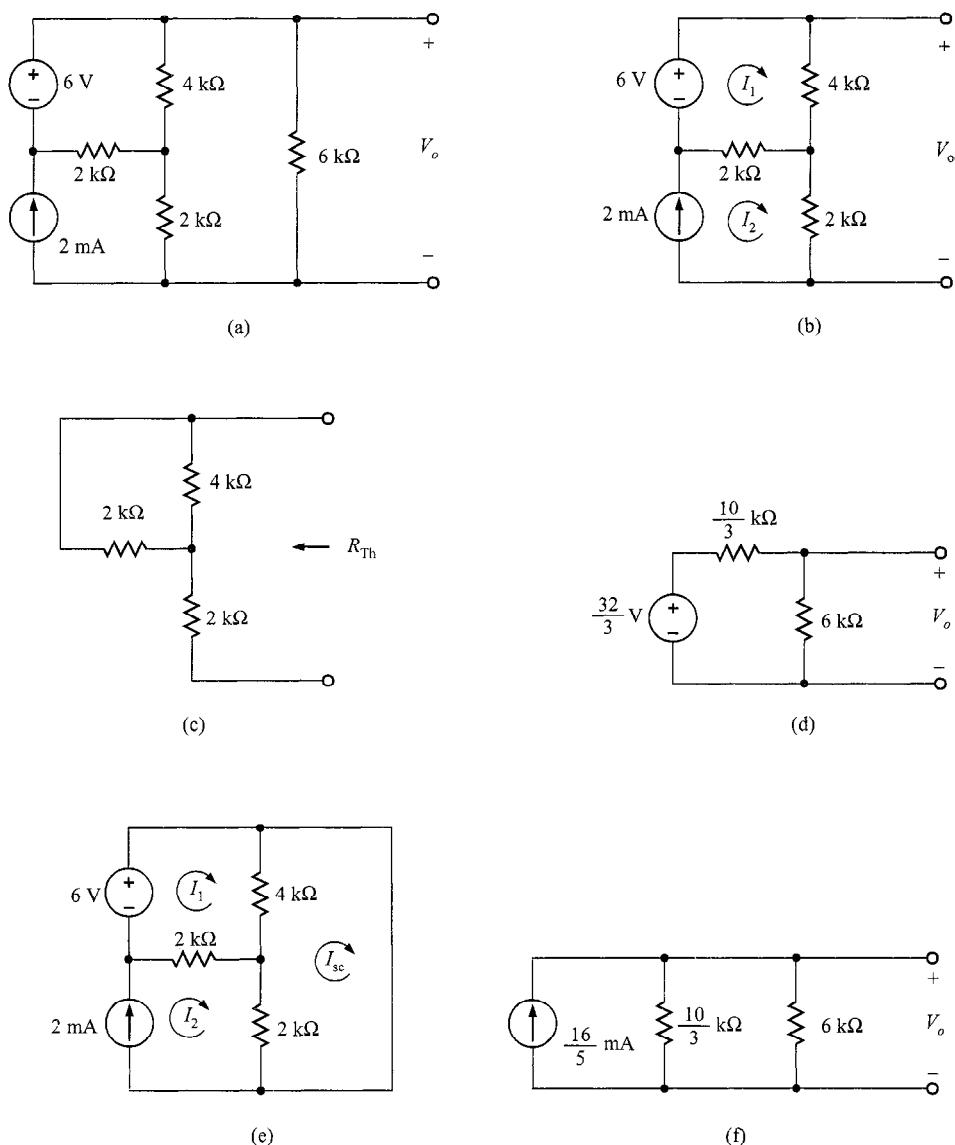


FIGURA 4.13 Circuitos utilizados en el ejemplo 4.9.

punto el lector de mente rápida ¡se detiene inmediatamente! Tres ecuaciones de malla aplicadas al circuito original inmediatamente conduce a la solución, pero las tres ecuaciones de malla en el circuito de la figura 4.13e proporcionarán sólo parte de la respuesta, específicamente la corriente de corto circuito. Algunas veces el uso de teoremas es más complicado que un ataque directo usando análisis nodal o de malla. Ésta parecería una de esas situaciones. Interesante, no lo es. Podemos encontrar I_{sc} de la red de la figura 4.13e sin usar las ecuaciones de malla. La técnica es simple, pero un poco engañosa, y de esta manera la salvamos para un problema al final

del capítulo. Habiendo dicho todas esas cosas, terminemos lo que habíamos iniciado. Las ecuaciones de anillo para la red de la figura 4.13e son

$$-6 + 4k(I_1 - I_{sc}) + 2k(I_1 - 2 \times 10^{-3}) = 0$$

$$2k(I_{sc} - 2 \times 10^{-3}) + 4k(I_{sc} - I_1) = 0$$

donde hemos incorporado el hecho de que $I_2 = 2 \times 10^{-3}$ A. Resolviendo esas ecuaciones se obtiene $I_{sc} = 16/5$ mA. R_{Th} ya ha sido determinada en el análisis de Thévenin. Conectando la equivalencia de Norton a la carga resulta el circuito de la figura 4.13f. Aplicando la ley de Ohm a este circuito se tiene $V_o = 48/7$ V.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D4.1 Use el teorema de Thévenin para encontrar V_o en la red de la figura D4.4.

Resp.: $V_o = -3$ V.

D4.2 Encuentre V_o en el circuito de la figura D4.2 usando los teoremas de Thévenin y de Norton. Cuando derive el circuito equivalente de Norton, corte la red a la izquierda de la resistencia de $4\text{ k}\Omega$. ¿Por qué?

Resp.: $V_o = \frac{4}{3}$ V.

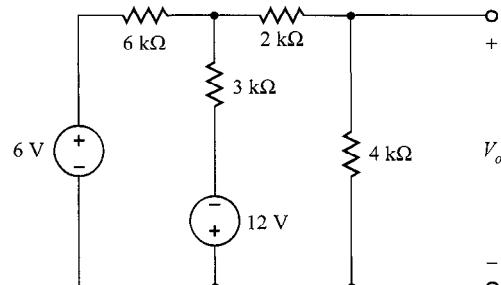


FIGURA D4.4.

Circuitos que contienen sólo fuentes dependientes

Como hemos establecido antes, el equivalente de Thévenin o de Norton de una red que contiene sólo fuentes dependientes es R_{Th} . Los siguientes ejemplos servirán para ilustrar cómo determinar esta resistencia equivalente de Thévenin.

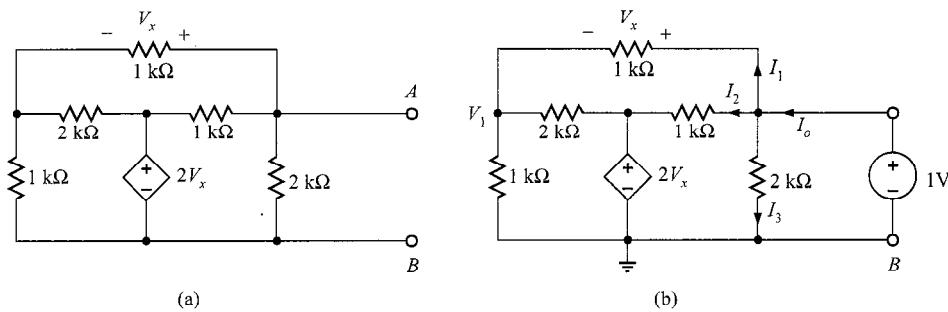
EJEMPLO 4.10

Deseamos determinar el equivalente de Thévenin de la red de la figura 4.14a en las terminales $A-B$.

SOLUCIÓN Nuestro método en este problema consistirá en aplicar una fuente de 1 V a las terminales como se muestra en la figura 4.14b, y después calcular la corriente I_o y $R_{Th} = 1/I_o$.

Las ecuaciones para la red de la figura 4.14b son como sigue. La LVK alrededor de la malla exterior especifica que

$$V_1 + V_x = 1$$

**FIGURA 4.14** Redes empleadas en el ejemplo 4.10.

La ecuación de la LCK en el nodo etiquetado con V_1 es

$$\frac{V_1}{1k} + \frac{V_1 - 2V_x}{2k} + \frac{V_1 - 1}{1k} = 0$$

Resuelva la ecuación para V_x da $V_x = 3/7$ V. Conociendo V_x , podemos calcular las corrientes I_1 , I_2 , e I_3 . Sus valores son

$$I_1 = \frac{V_x}{1k} = \frac{3}{7} \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{1 - 2V_x}{1k} = \frac{1}{7} \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \text{ mA}$$

Por lo tanto,

$$I_o = I_1 + I_2 + I_3$$

$$= \frac{15}{14} \text{ mA}$$

y

$$R_{Th} = \frac{1}{I_o}$$

$$= \frac{14}{15} \text{ k}\Omega$$

EJEMPLO 4.11

Determinemos R_{Th} en las terminales A-B para la red de la figura 4.15a.

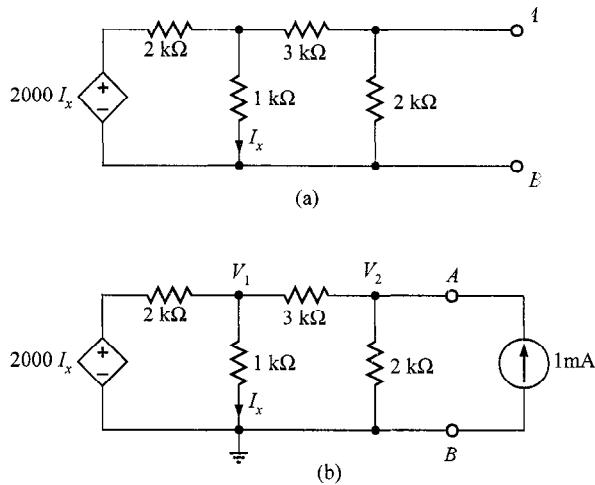


FIGURA 4.15 Redes empleadas en el ejemplo 4.10.

SOLUCIÓN Nuestro método para este problema consistirá en aplicar una fuente de corriente de 1 mA en las terminales A-B, calcular el voltaje terminal V_2 , como se muestra en la figura 4.15b, y entonces $R_{Th} = V_2/0.001$.

Las ecuaciones nodales para la red son

$$\frac{V_1 - 2000I_x}{2k} + \frac{V_1}{1k} + \frac{V_1 - V_2}{3k} = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{3k} + \frac{V_2}{2k} = 1 \times 10^{-3}$$

e

$$I_x = \frac{V_1}{1k}$$

Resolviendo esas ecuaciones se obtiene

$$V_2 = \frac{10}{7} \text{ V}$$

y de aquí,

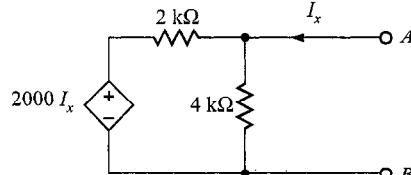
$$R_{Th} = \frac{V_2}{1 \times 10^{-3}}$$

$$= \frac{10}{7} \text{ k}\Omega$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

DIG Encuentre el circuito equivalente de Thévenin de la red de la figura D4.6 en las terminales A-B.

Resp.: $R_{Th} = \frac{8}{3} \text{ k}\Omega$

**FIGURA D4.6****Circuitos que contienen fuentes independientes y dependientes**

En ese tipo de circuitos debemos calcular el voltaje de circuito abierto y la corriente de corto circuito a fin de calcular la resistencia equivalente de Thévenin. Además, debemos recordar que no podemos separar la fuente dependiente y su variable de control cuando partimos la red para encontrar el equivalente de Thévenin o de Norton.

Ahora presentamos dos ejemplos: uno con una fuente de voltaje dependiente y otro con una fuente de corriente dependiente.

E J E M P L O 4.12

Usemos el teorema de Thévenin para encontrar V_o en la red de la figura 4.16a.

SOLUCIÓN Para comenzar, partimos la red en los puntos A-B. ¿Podemos partirla justo a la derecha de la fuente de 12 V? ¡No! ¿Por qué? El voltaje de circuito abierto se calcula de la red de la figura 4.16b. Advierta que ahora usamos la fuente de $2000I'_x$ debido a que este circuito es diferente del de la figura 4.16a. La LCK para el supernodo alrededor de la fuente de 12 V es

$$\frac{(V_{oc} + 12) - (-2000I'_x)}{1k} + \frac{V_{oc} + 12}{2k} + \frac{V_{oc}}{2k} = 0$$

donde

$$I'_x = \frac{V_{oc}}{2k}$$

dando $V_{oc} = -6 \text{ V}$.

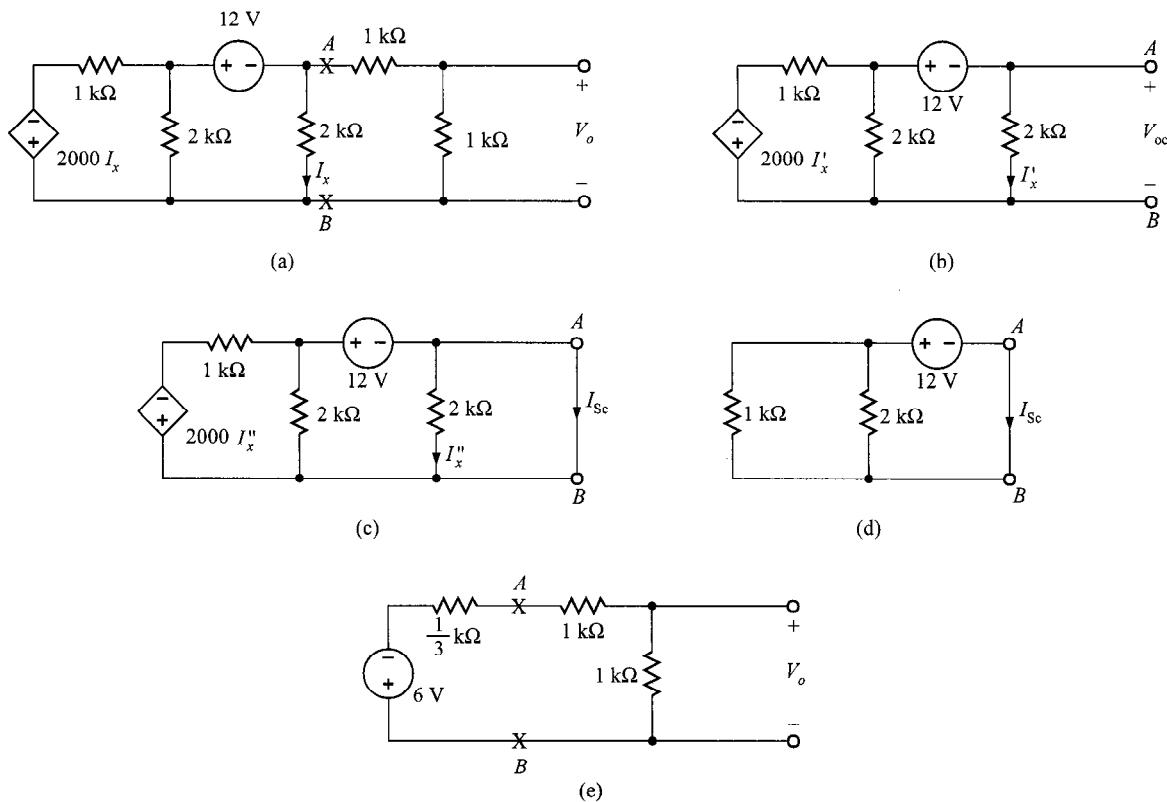


FIGURA 4.16 Circuitos utilizados en el ejemplo 4.12.

I_{sc} puede calcularse del circuito de la figura 4.16c. Observe que la presencia de la fuerza I''_x del corto circuito a cero y, por tanto, la red se reduce a la que se muestra en la figura 4.16d.

Por tanto,

$$I_{sc} = \frac{-12}{\frac{2}{3} k} = -18 \text{ mA}$$

entonces

$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{1}{3} \text{ k}\Omega$$

Conectando el circuito equivalente de Thévenin al resto de la red en las terminales A-B se produce el circuito de la figura 4.16e. En este punto, la división de voltaje simple da

$$V_o = (-6) \left(\frac{1k}{1k + 1k + \frac{1}{3} k} \right) = \frac{-18}{7} \text{ V}$$

E J E M P L O 4.13

Encontremos V_o en la red de la figura 3.25 usando el teorema de Thévenin.

SOLUCIÓN La red se redibuja en la figura 4.17a. V_{oc} se determina de la red de la figura 4.17b. Advierta que

$$I_1 = \frac{V'_x}{2k}$$

$$I_2 = 2 \text{ mA}$$

y

$$V'_x = 4k \left(\frac{V'_x}{2k} - 2 \times 10^{-3} \right)$$

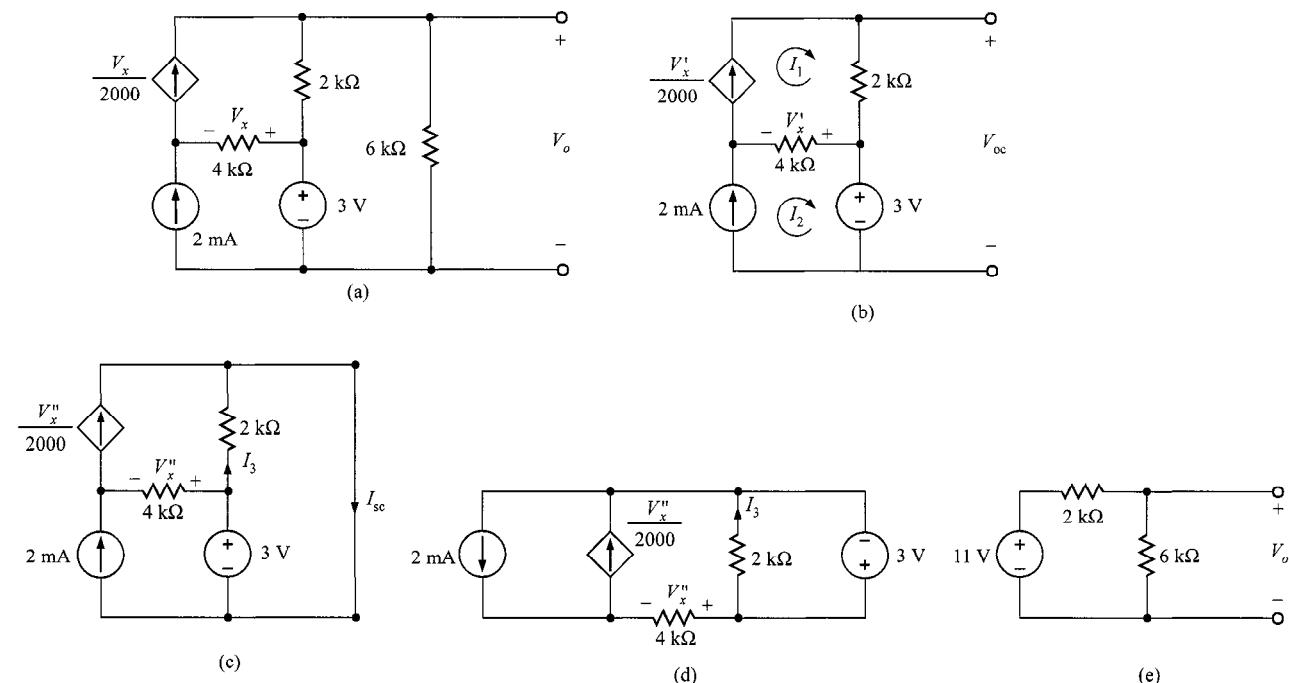


FIGURA 4.17 Circuitos utilizados en el ejemplo 4.13.

Resolviendo esas ecuaciones se obtiene $I_1 = 4 \text{ mA}$ y, de aquí,

$$V_{oc} = 2kI_1 + 3 = 11 \text{ V}$$

I_{sc} se deriva del circuito de la figura 4.17c. Observe que si colapsamos el corto circuito, la red se reduce a la de la figura 4.17d. Aunque hemos perdido temporalmente la idea de I_{sc} , podemos fácilmente encontrar las corrientes de rama y ellas, a su vez, darán I_{sc} . La LCK en el nodo del fondo de la red es

$$\frac{V''_x}{4k} = \frac{V''_x}{2000} - 2 \times 10^{-3}$$

o

$$V''_x = 8 \text{ V}$$

Entonces ya que

$$I_3 = \frac{3}{2k} = \frac{3}{2} \text{ mA}$$

como se muestra en la figura 4.17c

$$\begin{aligned} I_{sc} &= \frac{V''_x}{2000} + I_3 \\ &= \frac{11}{2} \text{ mA} \end{aligned}$$

Entonces

$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = 2 \text{ k}\Omega$$

Conectar el circuito equivalente de Thévenin al resto de la red original produce el circuito de la figura 4.17e. Un divisor simple de voltaje da

$$V_o = 11 \left(\frac{6k}{2k + 6k} \right)$$

$$= \frac{33}{4} \text{ V}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D4.7 Encuentre V_o en el circuito de la figura D4.7 con el teorema de Thévenin.

Resp.: $V_o = \frac{36}{13}$ V.

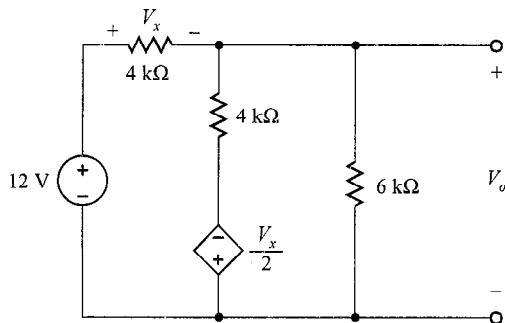


FIGURA D4.7

En este punto vale la pena hacer una pausa por un momento y reflexionar acerca de lo que hemos aprendido; es decir, comparemos el uso del análisis nodal o de malla con el uso de los teoremas analizados en este capítulo. Cuando examinamos una red para su análisis, una de las primeras cosas que deberíamos hacer es contar el número de nodos y mallas. A continuación consideraremos el número de fuentes. Por ejemplo, ¿hay un número de fuentes de voltaje o fuentes de corriente presentes en la red? Todos esos datos, junto con la información que esperamos cosechar de la red, dan una base para elegir el método más simple. Con el nivel actual de la potencia computacional disponible para nosotros, podemos resolver las ecuaciones nodales o de malla que definen la red en un momento.

Con respecto a los teoremas, hemos encontrado que en algunos casos éstos no necesariamente simplifican el problema y un ataque directo usando análisis nodal o de malla es tan bueno como cualquier otro método. Este es un punto válido siempre que estemos simplemente buscando algún voltaje o corriente. Sin embargo, el valor real de los teoremas es la idea y comprensión que nos proporcionan acerca de la naturaleza física de la red. Por ejemplo, la superposición nos dice lo que cada fuente contribuye a la cantidad bajo investigación. Sin embargo, una solución de computadora de las ecuaciones nodales o de malla no nos dice el efecto de cambiar los valores de ciertos parámetros en el circuito. Esto no nos ayuda a entender el concepto de cargar una red o las implicaciones de interconectar redes o la idea de igualar una red para máxima transferencia de potencia. Los teoremas nos ayudan a entender el efecto de usar un transductor en la entrada de un amplificador con una resistencia de entrada dada. Nos ayudan a explicar el efecto de una carga, tal como una bocina, a la salida del amplificador. No derivamos ninguna de esta información de un análisis nodal o de malla. De hecho, como un ejemplo simple, supongamos que una red en un par específico de terminales tiene un circuito equivalente de Thévenin consistente en una fuente de voltaje en serie con una resistencia de 2Ω . Si conectamos una resistencia de 2Ω a la red en esas terminales, el voltaje a través de la resistencia de 2Ω sería esencialmente nada. Este resultado es completamente obvio usando el método del teorema de Thévenin; sin embargo, un análisis nodal o de malla no nos da una clave de por qué hemos obtenido este resultado.

Hemos estudiado redes que contienen sólo fuentes dependientes. Este es un tema muy importante, ya que todos los dispositivos electrónicos, como los transistores, son modelados con esta característica. Los motores en los sistemas de potencia son también modelados de esta manera. Usamos esos dispositivos de amplificación para muchos propósitos diferentes, como el control de velocidad de un automóvil.

Finalmente, es interesante notar que cuando empleamos transformaciones de fuentes como lo hicimos en el ejemplo 4.6, estamos simplemente convirtiendo de uno a otro entre un circuito equivalente de Thévenin y un circuito equivalente de Norton.

4.5 Transferencia máxima de potencia

En análisis de circuitos algunas veces estamos interesados en determinar la máxima potencia que puede ser entregada a una carga. Empleando el teorema de Thévenin, podemos determinar la potencia máxima que un circuito puede suministrar y la forma en la cual ajustar la carga para efectuar la transferencia de potencia máxima.

Suponga que se nos da el circuito que se muestra en la figura 4.18. La potencia que se entrega a la carga está dada por la expresión

$$\begin{aligned} P_{\text{carga}} &= i^2 R_L \\ &= \left(\frac{v}{R + R_L} \right)^2 R_L \end{aligned}$$

Queremos determinar el valor de R_L que maximiza esta cantidad. De aquí, diferenciamos esta expresión con respecto a R_L e igualamos la derivada a cero.

$$\frac{dP_{\text{carga}}}{dR_L} = \frac{(R + R_L)^2 v^2 - 2v^2 R_L (R + R_L)}{(R + R_L)^4} = 0$$

la cual da

$$R_L = R$$

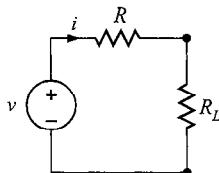


FIGURA 4.18
Circuito equivalente para examinar la máxima transferencia de potencia.

En otras palabras, la máxima potencia transferida tiene lugar cuando la resistencia de carga $R_L = R$. Aunque este es un resultado muy importante, lo hemos derivado usando la red simple de la figura 4.18. Sin embargo, debemos recordar que v y R en la figura 4.18 pueden representar el circuito equivalente de Thévenin para cualquier red lineal.

EJEMPLO 4.14

Encontremos el valor de R_L para la transferencia máxima de potencia en la red de la figura 4.19a y la potencia máxima que puede transferirse a esta carga.

SOLUCIÓN Para comenzar, derivamos el circuito equivalente de Thévenin para la red excluyendo la carga. V_{oc} puede ser calculada del circuito de la figura 4.19b. Las ecuaciones de malla para la red son

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \times 10^{-3} \\ 3k(I_2 - I_1) + 6kI_2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $I_2 = 1/3$ mA y, de aquí,

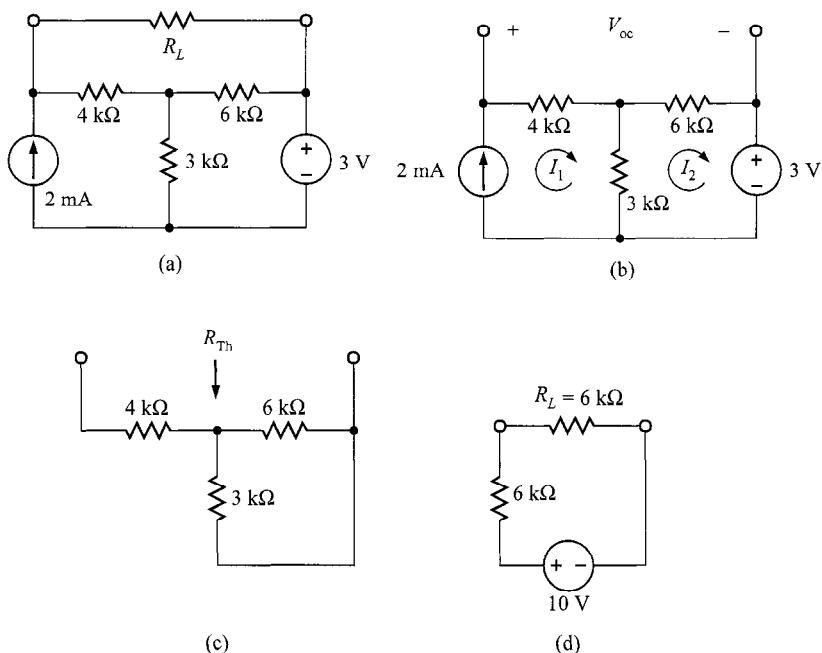


FIGURA 4.19 Circuitos utilizados en el ejemplo 4.14.

$$V_{oc} = 4kI_1 + 6kI_2 \equiv 10 \text{ V}$$

R_{Th} , que se muestra en la figura 4.19c es $6\text{ k}\Omega$; por tanto, $R_L = R_{Th} = 6\text{ k}\Omega$ para máxima transferencia de potencia. La máxima potencia transferida a la carga es

$$P_L = \left(\frac{10}{12k}\right)^2 (6k) = \frac{25}{6} \text{ mW}$$

E J E M P L O 4.15

Encontremos R_L para la máxima transferencia de potencia y la máxima potencia transferida a esta carga en el circuito de la figura 4.20a.

SOLUCIÓN Deseamos reducir la red a la forma que se muestra en la figura 4.18. Podemos formar el circuito equivalente de Thévenin partiendo la red en la carga. Sin embargo, un examen detenido de la red indica que nuestro análisis será más simple si partimos la red a la izquierda de la resistencia de $4\text{ k}\Omega$. Al hacer esto, sin embargo, debemos darnos cuenta, como se muestra en la figura 4.18, que para la transferencia máxima de potencia $R_L = R_{TH} + 4\text{ k}\Omega$. V_{oc} puede calcularse de la red de la figura 4.20b. For-

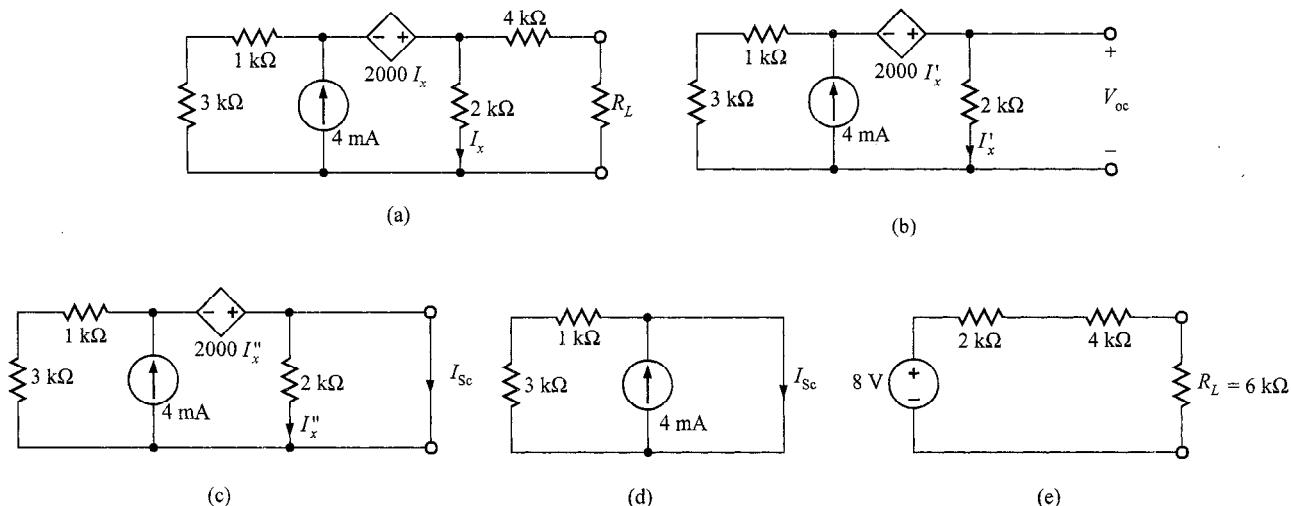


FIGURA 4.20 Circuitos utilizados en el ejemplo 4.15.

mando un supernodo alrededor de la fuente dependiente y sus nodos de conexión, la ecuación de la LCK para este supernodo es

$$\frac{V_{oc} - 2000I'_x}{1k + 3k} \neq -4 \times 10^{-3} + \frac{V_{oc}}{2k} = 0$$

donde

$$I'_x = \frac{V_{oc}}{2k}$$

Esas ecuaciones dan $V_{oc} = 8$ V. La corriente de corto circuito puede encontrarse de la red de la figura 4.20c. Es aquí donde encontramos la ventaja de partir la red a la izquierda de la resistencia de $4\text{ k}\Omega$. El corto circuito corta la resistencia de $2\text{ k}\Omega$ y, por tanto, $I''_x = 0$. De aquí, el circuito se reduce al de la figura 4.20d, donde claramente $I_{sc} = 4$ mA. Entonces

$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = 2\text{ k}\Omega$$

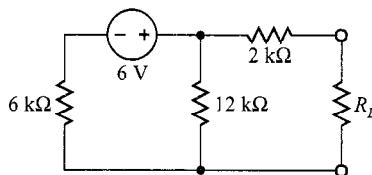
Conectando el equivalente de Thévenin al resto del circuito original se produce la red de la figura 4.20e. Para una máxima transferencia de potencia $R_L = R_{Th} + 4\text{ k}\Omega = 6\text{ k}\Omega$, y la máxima potencia transferida es

$$P_L = \left(\frac{8}{12k}\right)^2 (6k) = \frac{8}{3} \text{ mW}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D4.8 Dado el circuito de la figura D4.8, encuentre R_L para la máxima transferencia de potencia y la máxima potencia transferida.

Resp.: $R_L = 6 \text{ k}\Omega$, $P_L = 2/3 \text{ mW}$.

**FIGURA D4.8**

4.6 Aplicaciones

EJEMPLO 4.16

El lunes por la tarde, Connie Coed de pronto recuerda que tiene que escribir un artículo terminal para el martes. Cuando se sienta delante de su computadora para comenzar a teclear, descubre que el mouse de la computadora no funciona. Después de desarmarlo e inspeccionarlo, encuentra que el mouse tiene una tarjeta de circuito impreso que se acciona por un suministro contenido en el chasis de la computadora. Además, encuentra que la tarjeta contiene varias resistencias, algunos op-amp y un dispositivo no identificable, el cual está conectado directamente al suministro de 5 V de la computadora como se muestra en la figura 4.21a. Con un voltímetro para medir los voltajes de los nodos, Connie confirma que todas las resistencias y los op-amp funcionan apropiadamente y el voltaje del suministro de potencia alcanza a la tarjeta del mouse. Sin embargo, sin conocer la función del misterioso dispositivo dentro del circuito, Connie no puede determinar su condición. Una llamada telefónica al fabricante revela que el dispositivo es más bien lineal pero también es patentado. Con alguna persuasión, el representante del fabricante está de acuerdo que si Connie puede encontrar el circuito equivalente de Thévenin para el elemento en los nodos A-B con la computadora encendida, él le dirá si está funcionando apropiadamente. Armada con una sola resistencia de 1 kΩ y un voltímetro, Connie ataca el problema.

SOLUCIÓN A fin de encontrar el equivalente de Thévenin para el dispositivo desconocido, junto con la fuente de 5 V, Connie aísla primero los nodos A y B del resto de los dispositivos en la tarjeta para medir el voltaje a circuito abierto. La lectura resultante del voltímetro es $V_{AB} = 2.4 \text{ V}$. Así, el voltaje equivalente de Thévenin es 2.4 V. Entonces conecta la resistencia de 1 kΩ a los nodos A-B como se muestra en la figura 4.21b. La lectura del voltímetro es ahora $V_{AB} = 0.8 \text{ V}$. Con un divisor de voltaje para expresar V_{AB} en términos de V_{Th} , R_{Th} y R_{prueba} de la figura 4.21b da la expresión

$$0.8 = V_{Th} \left(\frac{1\text{k}}{1\text{k} + R_{Th}} \right)$$

Resolviendo las ecuaciones para R_{Th} , obtenemos

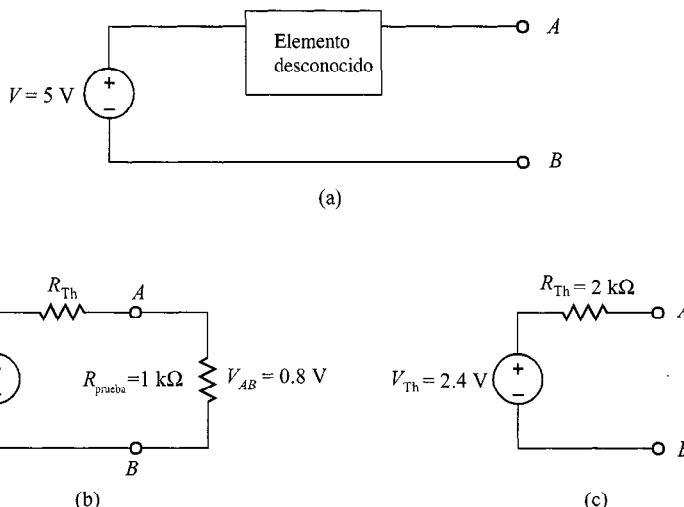


FIGURA 4.21 Redes utilizadas en el ejemplo 4.16.

$$R_{\text{Th}} = 2.0 \text{ k}\Omega$$

Por tanto, el dispositivo desconocido y la fuente de 5 V pueden representarse en las terminales A-B por el circuito equivalente de Thévenin que se muestra en la figura 4.21c. Cuando Connie telefonea nuevamente al fabricante con el dato, el representante le informa que el dispositivo en efecto ha fallado.

Resumen

En este capítulo hemos presentado un número de herramientas muy poderosas que tienen amplias aplicaciones en análisis de circuitos. Específicamente, hemos introducido el principio de superposición, que está basado en la linealidad y nos permite tratar a cada fuente independientemente y entonces sumar algebraicamente la respuesta debida a cada una para determinar la respuesta total. También hemos mostrado que la transformación de fuente y los teoremas de Thévenin y Norton con mucha frecuencia nos permiten simplificar el análisis de circuitos resolviendo una serie de problemas simples en lugar de uno más complicado. Se presentó el concepto de máxima potencia transferida de una red a una carga resistiva.

Puntos clave

- En una red lineal que contiene múltiples fuentes independientes, el principio de superposición nos permite calcular cualquier corriente o voltaje en la red como la suma algebraica de las contribuciones individuales de cada fuente actuando sola.
- La superposición es una propiedad lineal y no se aplica a funciones no lineales tales como la potencia.

- La transformación de fuente nos permite reemplazar una fuente V de voltaje en serie con una resistencia R por una fuente de corriente $I = V/R$ en paralelo con la resistencia R . Lo contrario también es cierto.
- Con el teorema de Thévenin podemos reemplazar alguna parte de una red a un par de terminales con una fuente de voltaje V_{oc} en serie con una resistencia R_{Th} . V_{oc} es el voltaje de circuito abierto en las terminales, y R_{Th} es la resistencia equivalente de Thévenin obtenida examinando las terminales con todas las fuentes independientes igualadas a cero.
- Con el teorema de Norton podemos reemplazar una parte de una red en un par de terminales con una fuente de corriente I_{sc} en paralelo con una resistencia R_{Th} . I_{sc} es la corriente de corto circuito en las terminales y R_{Th} es la resistencia equivalente de Thévenin.
- La máxima transferencia de potencia puede alcanzarse seleccionando la carga R_L igual a R_{Th} examinando las terminales de carga.

Problemas

4.1. Encuentre I_o en la red de la figura P4.1 usando la linealidad y la suposición de que $I_o = 1 \text{ mA}$.

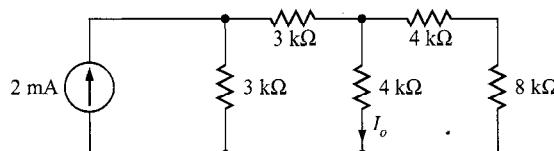


FIGURA P4.1

4.2. Encuentre V_o en el circuito de la figura P4.2 usando la linealidad y la suposición de que $V_o = 1 \text{ V}$.

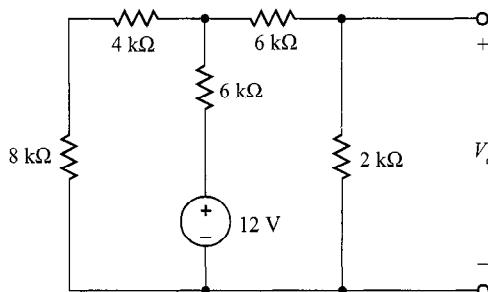


FIGURA P4.2

4.3. Use la superposición para encontrar V_o en la red de la figura P4.3.

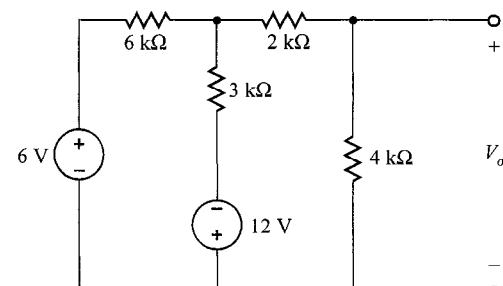


FIGURA P4.3

4.4. Encuentre V_o en el circuito de la figura P4.4 usando superposición.

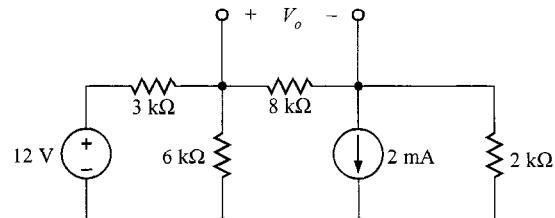


FIGURA P4.4

4.5. Use la superposición para encontrar I_o en la red de la figura P4.5.

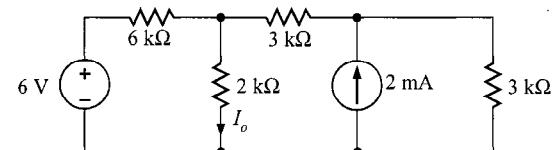


FIGURA P4.5

4.6. Use la superposición para encontrar I_o en el circuito de la figura P4.6.

4.7. Encuentre I_o en la red de la figura P4.7 usando superposición.

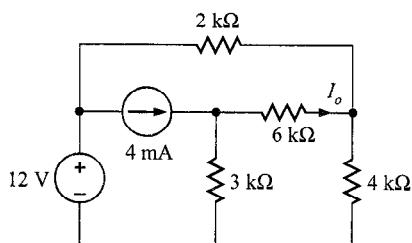


FIGURA P4.6

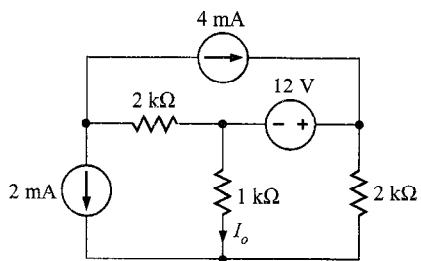


FIGURA P4.7

4.8. Use la superposición para encontrar V_o en el circuito de la figura P4.8.

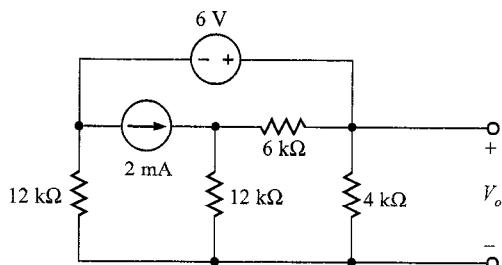


FIGURA P4.8

4.9. Encuentre V_o en el circuito de la figura P4.9 usando la superposición.

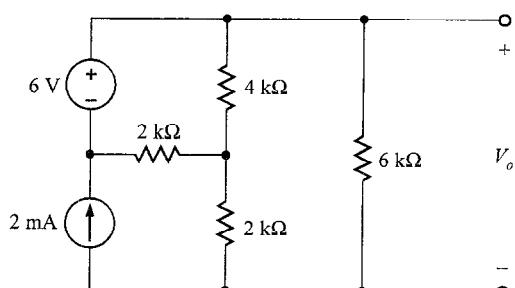


FIGURA P4.9

4.10. Encuentre V_o en la red de la figura P4.10.

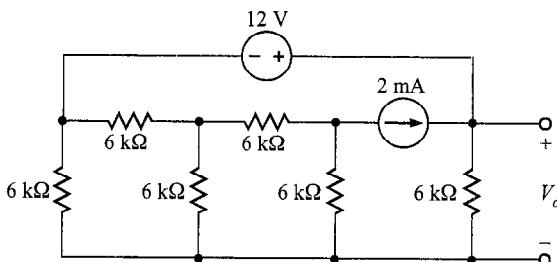


FIGURA P4.10

4.11. Use la transformación de fuentes para encontrar V_o en el circuito de la figura P4.3.

4.12. Encuentre V_o en la red de la figura P4.4 usando una transformación de fuentes.

4.13. Use una transformación de fuentes para encontrar I_o en el circuito de la figura P4.5.

4.14. Use la transformación de fuentes para encontrar I_o en la red de la figura P4.14.

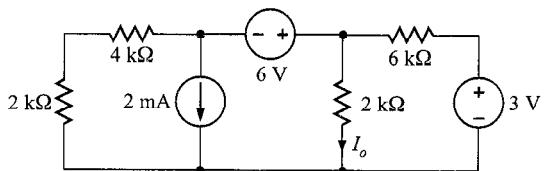


FIGURA P4.14

4.15. Encuentre I_o en el circuito de la figura P4.15.

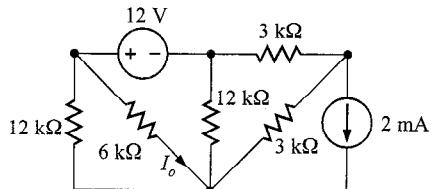


FIGURA P4.15

4.16. Encuentre V_o en la red de la figura P4.16.

4.17. Encuentre I_o en el circuito de la figura P4.17 usando la transformación de fuentes.

4.18. Encuentre I_o en la red de la figura P4.18.

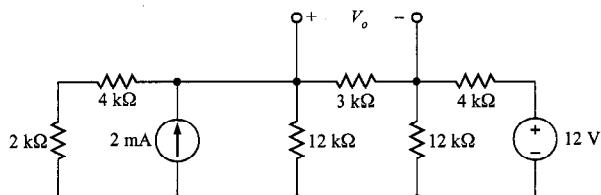


FIGURA P4.16

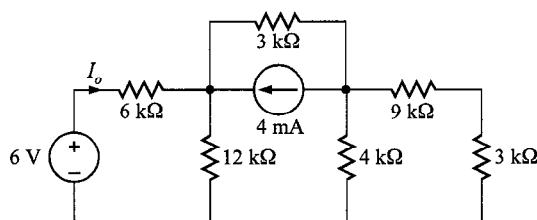


FIGURA P4.17

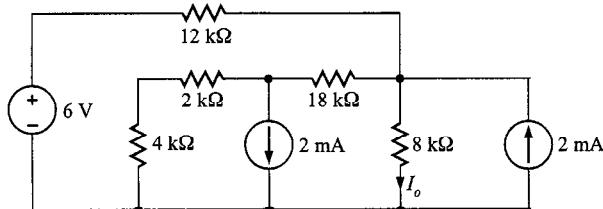


FIGURA P4.18

- 4.19.** Use la transformación de fuentes pata encontrar V_o en la red de la figura P4.19.

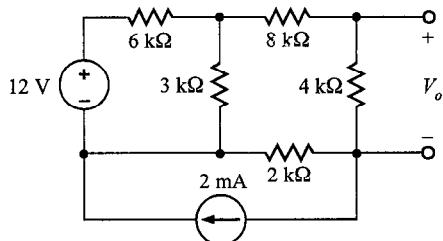


FIGURA P4.19

- 4.20.** Encuentre I_o en el circuito de la figura P4.20.
4.21. Encuentre V_o en el circuito de la figura P4.21.
4.22. Encuentre V_1 e I_o en el circuito de la figura P4.22.
4.23. Encuentre I_o en la red de la figura P4.23.

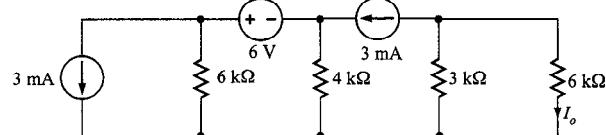


FIGURA P4.20

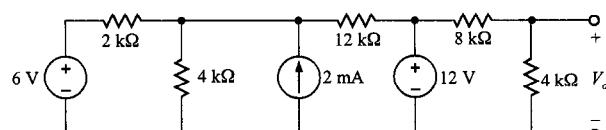


FIGURA P4.21

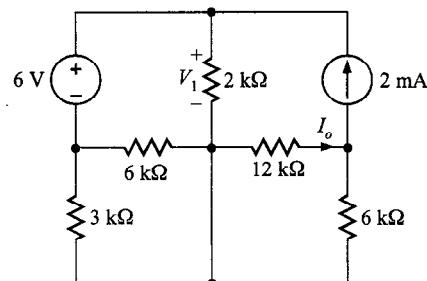


FIGURA P4.22

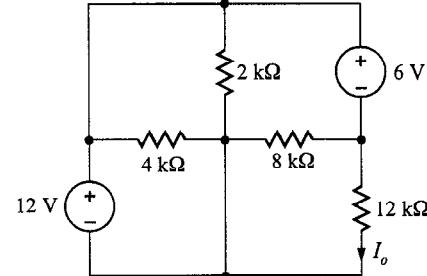


FIGURA P4.23

- 4.24.** Encuentre V_o en el circuito de la figura P4.24.
4.25. Use el teorema de Thévenin para encontrar V_o en la red de la figura P4.25.
4.26. Encuentre I_o en la red de la figura P4.35 usando el teorema de Thévenin.
4.27. Encuentre I_o en el circuito de la figura P4.36 usando el teorema de Thévenin.

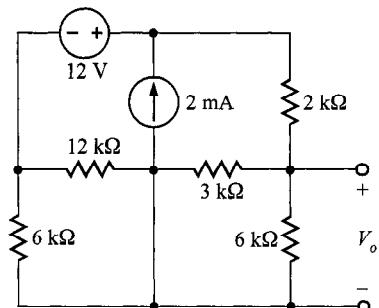


FIGURA P4.24

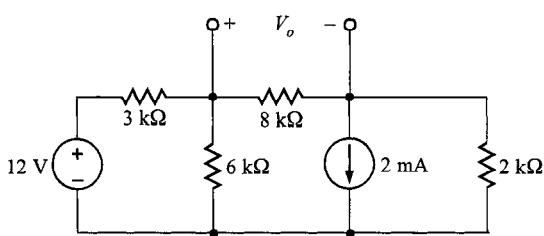


FIGURA P4.25

4.28. Use el teorema de Thévenin para encontrar V_o en el circuito de la figura P4.9.

4.29. Encuentre I_o en la red de la figura P4.29 usando el teorema de Thévenin.

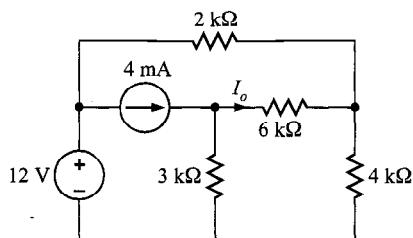


FIGURA P4.29

4.30. Use el teorema de Thévenin para encontrar V_o en la red de la figura P4.8.

4.31. Encuentre V_o en el circuito de la figura P4.31 usando el teorema de Thévenin.

4.32. Use el teorema de Thévenin para encontrar I_o en el circuito de la figura P4.32.

4.33. Encuentre I_o en el circuito de la figura P4.33 usando el teorema de Thévenin.

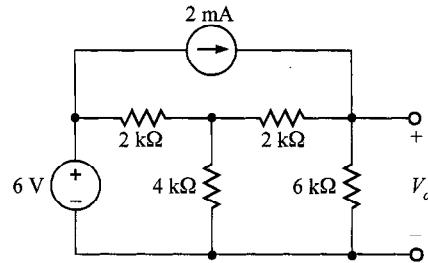


FIGURA P4.31

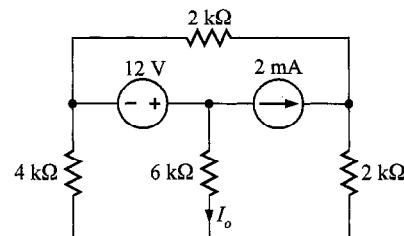


FIGURA P4.32

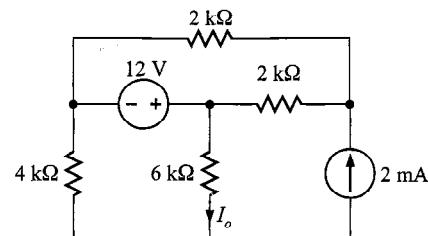


FIGURA P4.33

4.34. Encuentre I_o en la red de la figura P3.34 usando el teorema de Thévenin.

4.35. Use el teorema de Thévenin para encontrar V_o en el circuito de la figura P3.38.

4.36. Encuentre V_o en la red de la figura P3.39 usando el teorema de Thévenin.

4.37. Encuentre V_o en la red de la figura P3.40 usando el teorema de Thévenin.

4.38. Use el teorema de Thévenin para encontrar V_o en el circuito de la figura P3.41.

4.39. Use el teorema de Thévenin para encontrar I_o en la red de la figura P3.42.

- 4.40.** Use una combinación del teorema de Thévenin y de la superposición para encontrar V_o en el circuito de la figura P4.40.

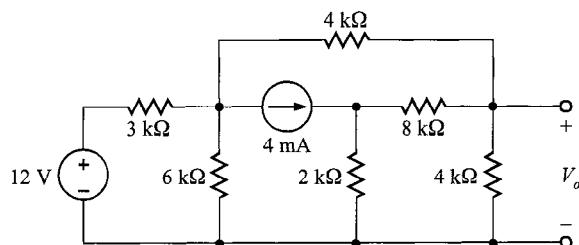


FIGURA P4.40

- 4.41.** Encuentre V_o en el circuito de la figura P4.43 usando el teorema de Thévenin.

- 4.42.** Use el teorema de Thévenin para encontrar I_o en el circuito de la figura P4.42.

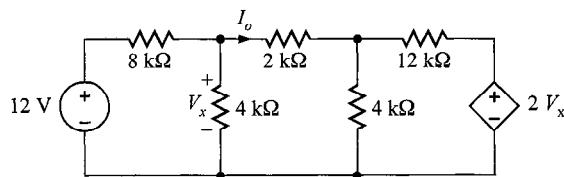


FIGURA P4.42

- 4.43.** Encuentre V_o en la red de la figura P4.43 usando el teorema de Thévenin.

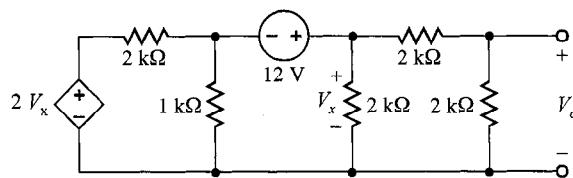


FIGURA P4.43

- 4.44.** Use el teorema de Thévenin para encontrar V_o en el circuito de la figura P4.44.

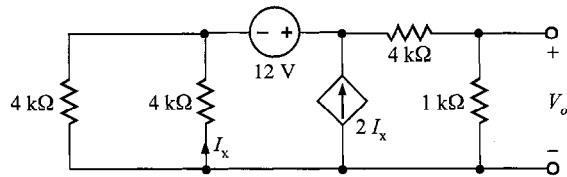


FIGURA P4.44

- 4.45.** Encuentre V_o en el circuito de la figura P4.45 usando el teorema de Thévenin.

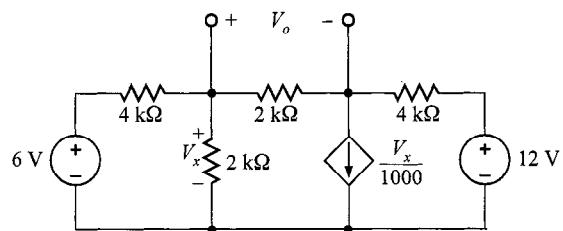


FIGURA P4.45

- 4.46.** Encuentre V_o en la red de la figura P4.46 usando el teorema de Thévenin.

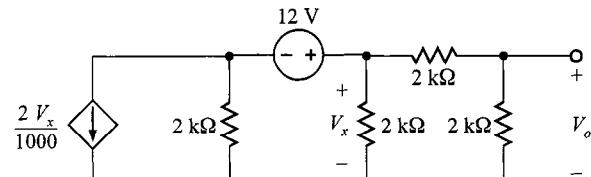


FIGURA P4.46

- 4.47.** Use el teorema de Thévenin para encontrar V_o en la red de la figura P4.47.

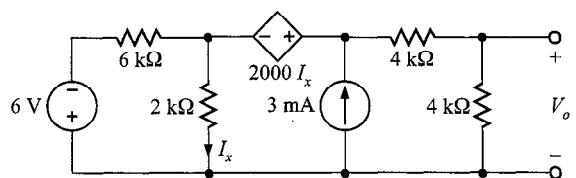


FIGURA P4.47

- 4.48.** Use el teorema de Thévenin para encontrar V_o en el circuito de la figura P3.47.

- 4.49.** Encuentre V_o en la red de la figura P4.11 usando el teorema de Norton.

- 4.50.** Use el teorema de Norton para encontrar I_o en el circuito de la figura P4.50.

- 4.51.** Encuentre I_o en el circuito de la figura P4.51 usando el teorema de Norton.

- 4.52.** Encuentre V_o en el circuito de la figura P4.9 usando el teorema de Norton.

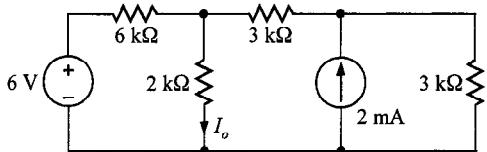


FIGURA P4.50

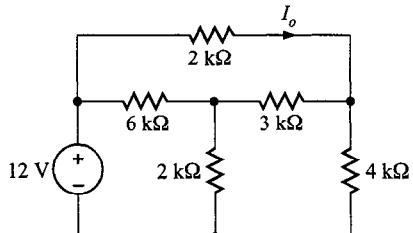


FIGURA P4.51

4.53. Encuentre V_o en la red de la figura P4.40 usando el teorema de Norton.

4.54. Encuentre I_{sc} en el ejemplo 4.9 sin el uso de ecuaciones de malla o de nodo o cualquier otro teorema.

4.55 En la red de la figura P4.55, encuentre R_L para máxima transferencia de potencia y la máxima potencia transferida a esta carga.

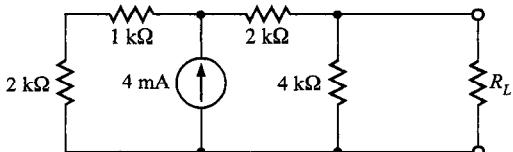


FIGURA P4.55

4.56. Encontrar R_L para máxima transferencia de potencia y la máxima potencia que puede ser transferida en la red de la figura P4.56.

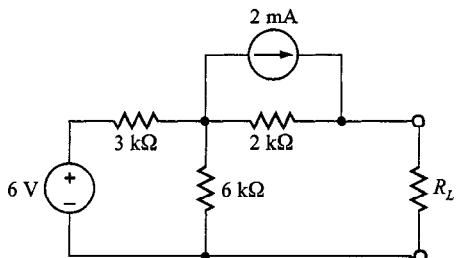


FIGURA P4.56

4.57 En la red de la figura P4.57, encuentre R_L para la máxima transferencia de potencia y la máxima potencia transferida a esta carga.

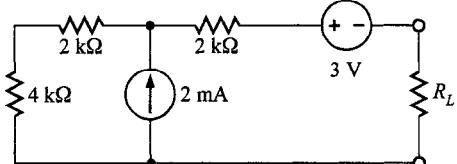


FIGURA P4.57

4.58 Encuentre R_L para la máxima transferencia de potencia y la máxima potencia que puede ser transferida en la red de la figura P4.58.

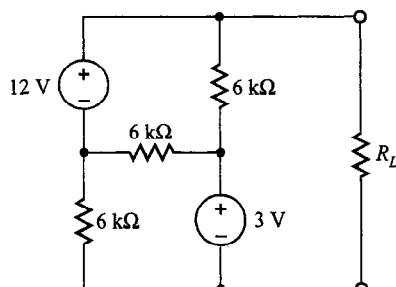


FIGURA P4.58

4.59 Encuentre R_L para la máxima transferencia de potencia y la máxima potencia que puede transferirse en la red de la figura P4.59.

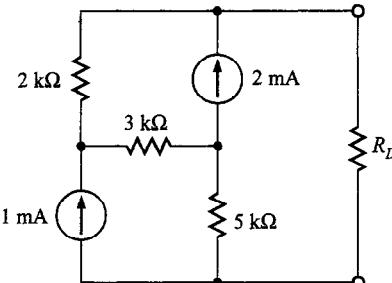


FIGURA P4.59

4.60. En la red de la figura P4.60, encuentre R_L para la máxima transferencia de potencia y la máxima transferencia que puede ser transferida a esta carga.

4.61 Encuentre el equivalente de Thévenin del circuito de la figura P4.61 en las terminales A-B.

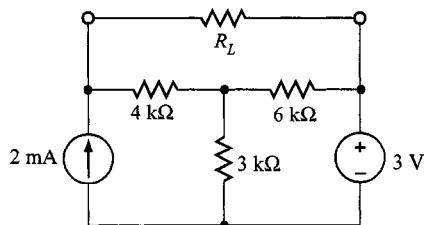


FIGURA P4.60

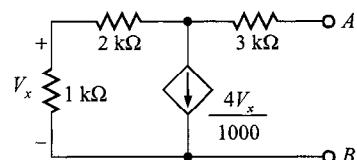


FIGURA P4.61

4.62. Encuentre el equivalente de Thévenin de la red de la figura P4.62 en las terminales A-B usando una fuente de corriente de 1 mA.

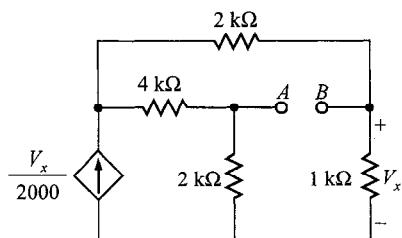


FIGURA P4.62

4.63. Repita el problema 4.62 usando una fuente de 1 V.

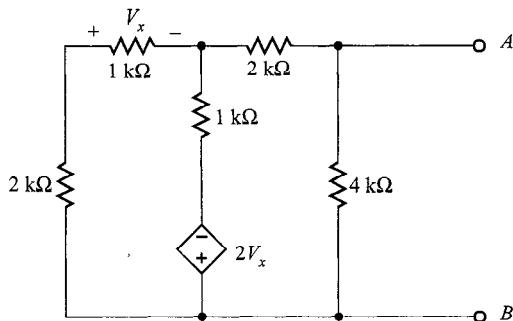


FIGURA P4.64

4.64. Encuentre el equivalente de Thévenin de la red de la figura P4.64 en las terminales A-B.

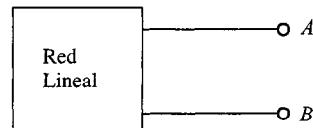


FIGURA P4.65

4.65. Dado el circuito lineal de la figura P4.65, se sabe que cuando se conecta una carga de 2 kΩ a las terminales A-B la corriente de carga es 10 mA. Si se conecta una carga de 10 kΩ a las terminales, la corriente de carga es 6 mA. Encuentre la corriente en una carga de 20 kΩ.

4.66. Si se conecta a las terminales de la red de la figura P4.66 una carga de 8 kΩ, $V_{AB} = 16$ V. Si una carga de 2 kΩ se conecta a las terminales, $V_{AB} = 8$ V. Encuentre V_{AB} si se conecta a las terminales una carga de 20 kΩ.

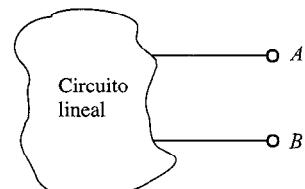


FIGURA P4.66

4.67. Elija R_L en la figura P4.67 tal que $I = 100 \mu\text{A}$.

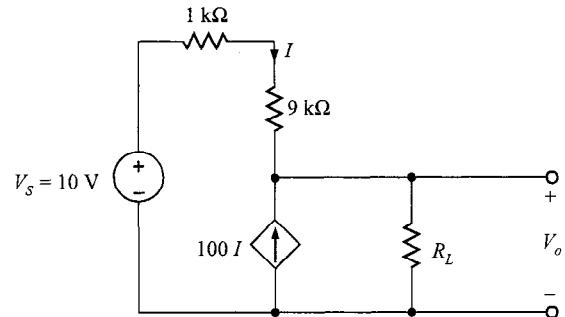
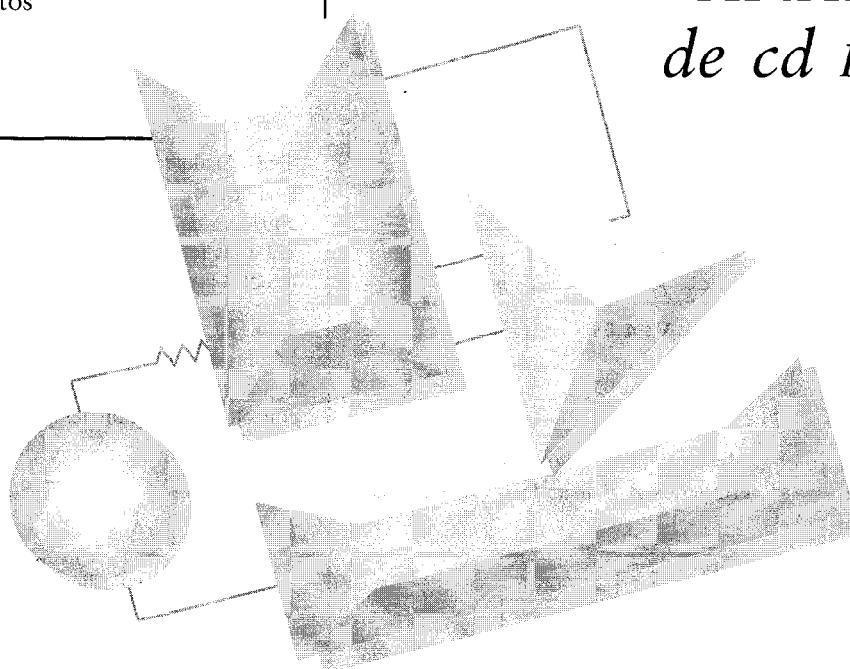


FIGURA P4.67.

4.68. Use el teorema de Thévenin para elegir R_L en la figura P4.67 para la máxima transferencia de potencia.

ANÁLISIS
de cd PSPICE

- 5.1** Introducción
- 5.2** Elementos del programa
- 5.3** Análisis
- 5.4** Aplicaciones
- 5.5** Diseño de circuitos
- 5.6** Resumen
- Puntos claves
- Problemas



Los circuitos integrados modernos, más pequeños que una moneda de 10 centavos de dólar, contienen millones de componentes electrónicos interconectados para desarrollar alguna función. Además, el costo para poner en funcionamiento las instalaciones de producción para elaborar esos diminutos dispositivos es muy alto, pues representa millones de dólares. ¿Se ha preguntado cómo los fabricantes de esos dispositivos llegan a saber que tienen un circuito viable antes de comprometer sus instalaciones

de producción? La respuesta es que ellos simulan el circuito utilizando un paquete de diseño asistido por computadora (CAD) para asegurar que funcionará según fue diseñado antes de iniciar su producción. El programa CAD industrial estándar para circuitos electrónicos es la materia de este capítulo. Aunque trataremos únicamente con circuitos muy simples, los principios son los mismos; así, este capítulo servirá como una introducción al análisis y diseño de redes muy complicadas. ■

5.1 Introducción

El PSPICE (*Programa de simulación con énfasis en circuitos integrados—Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis, en inglés*) fue desarrollado en el Departamento de Ingeniería Eléctrica y Ciencias Computacionales de la Universidad de California, en Berkeley. Este programa aplica el poder de la computadora digital en el análisis de circuitos complicados.

La creación del PSPICE fue financiada por el sector público, lo que hace que este software sea de dominio público. Esto significa que está disponible para todos los usuarios (en Estados Unidos).

Con el correr de los años el PSPICE ha llegado a ser el estándar de la industria, y las corporaciones desarrollan rutinariamente un análisis con el PSPICE de sus diseños de circuitos antes de colocarlos en la línea de producción.

Aunque aquí demostramos su uso con ejemplos simples que el lector puede comprobar fácilmente utilizando las técnicas presentadas en este libro, el valor real del programa reside en la facilidad con la que puede aplicarse a circuitos muy complicados que pudieran parecer difíciles de manejar si tuvieran que resolverse con cálculos a mano.

Desafortunadamente el PSPICE no es una panacea o sustituto para una comprensión total del análisis de circuitos, y por tanto no podemos limitarnos a pasar el problema a la computadora. Esta es quizás la filosofía de "dejar que la computadora lo resuelva" que dio por resultado el acrónimo GIGO, que son las siglas en inglés de "garbage in, garbage out" (basura entra, basura sale).

El PSPICE es capaz de desarrollar análisis de cd, ca, o transitorio. En el caso del análisis de cd, se resuelve un conjunto de ecuaciones simultáneas lineales o no lineales; en el caso del análisis de ca, se resuelve un grupo de ecuaciones complejas simultáneas lineales; y en el caso del análisis transitorio, la solución se obtiene resolviendo un conjunto de ecuaciones integrodiferenciales no lineales simultáneas.

Aunque el PSPICE es del dominio público, está diseñado para correr en computadoras grandes cuyo precio está fuera del alcance de la mayoría. Por esta razón el PSPICE se usa principalmente en la industria y en las universidades. Para hacer concordar las necesidades de simulación de circuitos con el presupuesto de las personas, varias compañías de software han alterado el PSPICE para que corra en Macintosh, PC o PC compatibles. Esta versión comercial se llama genéricamente PSPICE y la usaremos en adelante en este libro. Contiene los mismos algoritmos de solución de circuitos que el PSPICE y usa la misma sintaxis. Además, el PSPICE contiene algunas características útiles que no son parte del PSPICE. Presentaremos esas características conforme avancemos en el texto. La mayoría de las compañías que venden el PSPICE también distribuyen versiones del programa para estudiantes. Esas versiones pierden algo de las características avanzadas del PSPICE completo; sin embargo, proporcionan bastante poder de simulación para trabajo académico y son "programas gratis". Siguiendo un análisis completamente minucioso de las muchas características del PSPICE, lo emplearemos en varias aplicaciones prácticas e ilustraremos su uso en el diseño de circuitos.

Existen versiones del PSPICE tanto para DOS como para Windows. Los procedimientos de instalación para ambos se enlistan en el apéndice B. La principal diferencia entre esas dos versiones es que la versión para Windows contiene un editor esquemático que dispone de una entrada gráfica, en lugar de texto, para el circuito. A fin de ser concisos, todos los ejemplos en este libro fueron creados y corridos sin la ayuda del editor esquemático; sin embargo, este editor pudo haber sido usado para introducir los circuitos también.

5.2 Elementos del programa

En general, el uso del PSPICE en el análisis de un circuito eléctrico requiere los siguientes pasos:

1. Elegir el tipo de análisis a desarrollar; cd, ca, o transitorio.

2. Dibujar el circuito en el formato del PSPICE usando sólo los bloques que permiten el tipo de análisis deseado.
3. Escribir los comandos del PSPICE que describen el circuito.
4. Escribir los comandos de PSPICE que le indican al programa cómo analizar el circuito y describir el tipo de solución deseada.

Los comandos de PSPICE pueden subdividirse en las siguientes cinco categorías:

1. Comandos de título y comentarios.
2. Comandos de datos.
3. Comandos de control de la solución
4. Comandos de especificación de la salida.
5. Comandos para finalizar.

Comandos de título y comentarios

El *comando de título* es el primer comando en cualquier programa de PSPICE, y suele contener un título suficientemente descriptivo para identificar el problema particular que se investiga. La computadora imprimirá esta descripción como encabezado en la salida. El comando de título *debe* estar presente, ya que el PSPICE siempre usa la primera línea como un título.

El *comando de comentario* es básicamente una ayuda para el programador y aparece como una parte del listado de salida.

Hay dos tipos de comandos de comentarios: los comentarios de línea y los comentarios en línea. Los comentarios de línea están caracterizados por un asterisco como primer carácter, con los caracteres restantes que contienen información que describe lo que el programa va a hacer en ese punto. Toda la línea es un comentario. Los comentarios de línea se demuestran en el ejemplo 5.7. Los comentarios en línea son comandos que contienen tanto una instrucción de PSPICE como un comentario separado por una coma. El ejemplo 5.11 contiene un comentario en línea. Esos comandos son extremadamente útiles al referirse a un programa que no ha sido examinado en algún tiempo.

Hay otro carácter útil en el PSPICE y en el PSPICE: el signo +. Cuando se introducen comandos en un archivo, algunas veces el comando puede ser demasiado largo para colocarlo en una línea. Colocando el signo de más en la siguiente línea, el comando continúa.

Comandos de datos

Dar verbalmente un circuito a alguien, sin el uso de un diagrama del circuito, parecería ser una tarea difícil en el mejor de los casos e insuperable si el circuito es muy complicado. Por tanto, al describir el circuito a la computadora, se debe emplear un enfoque esquemático que especifique claramente la forma exacta en la cual los elementos del circuito están interconectados.

El tabique fundamental en un análisis con el PSPICE es una rama de circuito, y la rama estándar en el PSPICE se muestra en la figura 5.1. Note que se emplea un doble subíndice para describir los voltajes de la rama. El primer subíndice se asume como el

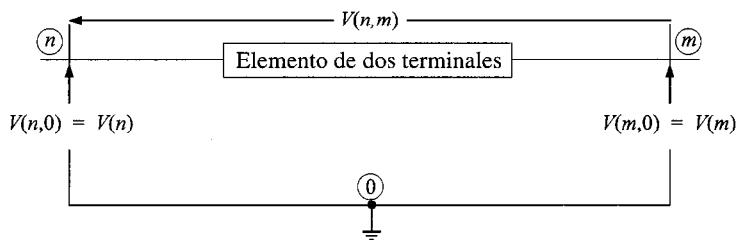


FIGURA 5.1 Rama de circuito estándar del PSPICE.

nodo positivo para el voltaje de la rama. Los voltajes nodales se denotan por $V(n, 0)$ o, por simplicidad, $V(n)$. La corriente de rama se referencia como una corriente positiva en una resistencia que produce un voltaje positivo de rama y, por tanto, la dirección de referencia para la corriente es del primer subíndice enlistado en el voltaje de rama al segundo.

Cada rama puede contener cualquier elemento de dos terminales, como una resistencia, una fuente de corriente, o una fuente de voltaje. Los valores de las fuentes de corriente o de voltaje pueden ser cero, pero el valor de la resistencia no debe ser cero.

Las ramas están conectadas a los nodos que el PSPICE identifica con números. Los números de los nodos deben ser no negativos y no necesitan ser secuenciales. El nodo de referencia a tierra debe ser numerado con el cero. El circuito no puede contener una malla de fuentes de voltaje o un grupo de corte (véase el capítulo 3) de fuentes de corriente. Cada nodo en el circuito debe tener una trayectoria de cd a tierra, y cada nodo debe tener al menos dos ramas de conexión.

Uno de los problemas principales encontrados al describir un circuito y las soluciones deseadas es mantener la pista de las direcciones de referencia de todos los voltajes y corrientes. Todas las direcciones de referencia en el PSPICE son fijadas por el programador y especificadas por el orden en el cual están enlistadas las conexiones de los nodos en los comandos de datos.

Se usa un formato libre en todos los comandos de datos. Los campos deben estar separados por uno o más espacios en blanco, un signo de igual, o un paréntesis que abre o que cierra. Un comando se puede continuar al insertar un signo más como primer carácter del comando de continuación, y el PSPICE continuará la lectura iniciando con el segundo carácter.

Cada comando de datos está compuesto de tres campos:

1. El nombre del elemento.
2. Los nodos del circuito a los que está conectado el elemento.
3. El valor de los parámetros que determinan las características eléctricas del elemento.

El campo de nombre del elemento debe comenzar con una letra del alfabeto y no puede contener ningún delimitador. La primera letra del nombre especifica el tipo de elemento:

R	resistencia
V	fuente de voltaje independiente
I	fuentes de corriente independiente
G	fuente de corriente controlada por voltaje
E	fuentes de voltaje controlada por voltaje
F	fuentes de corriente controlada por corriente
H	fuentes de voltaje controladas por corriente

Un nombre puede contener de uno a ocho caracteres. Por ejemplo, el nombre de una resistencia debe comenzar con la letra R y puede estar seguida por uno a siete caracteres adicionales. De aquí, R, R1348, RINPUT, ROUT3 y RAIB66DG son todos nombres válidos de resistencias.

El PSPICE no reconoce mayúsculas y minúsculas, por lo que los nombres de resistencias RINPUT, Rinput, rINPUT y RiNpUt se refieren a la misma resistencia. En el análisis que sigue, XXXXXXX, YYYYYYY y ZZZZZZZZ denotarán cuerdas alfanuméricas arbitrarias.

El campo de número puede ser un campo entero como 12 o -44, un campo de punto flotante como 3.142 o 1.4146, un entero o un punto flotante seguido por uno de los siguientes factores de escala:

T = 1E12	G = 1E9	MEG = 1E6
K = 1E3	M = 1E-3	U = 1E-6
N = 1E-9	P = 1E-12	F = 1E-15

Las letras que siguen inmediatamente después de un número que no son factores de escala son ignoradas, y las letras que siguen inmediatamente después de un factor de escala son ignoradas. Por tanto 10, 10V, 10VOLTS y 10HZ representan todos el mismo factor de escala. Advierta también que 1000, 1000.0, 1000HZ, 1E3, 1.0E3, 1KHZ y 1K representan todos el mismo número. Observe, sin embargo, que

1. No se permiten comandos.
2. Los signos olvidados son tomados como + por la computadora.
3. Un punto decimal olvidado se coloca al final de la serie de números.

La siguiente es una descripción detallada del formato de comandos de datos que se usan para describir cada tipo de rama en una red.

Comandos de rama para elementos resistivos. La forma general para un elemento resistivo es

XXXXXXXX N1 N2 VALUE

Aquí XXXXXXXX denota una cuerda alfanumérica arbitraria que identifica únicamente al elemento particular. N1 y N2 son los nodos del circuito a los cuales está conectado el elemento. VALUE es el valor de la resistencia en ohms. El valor de una resistencia puede ser positivo o negativo, pero no puede ser cero.

E J E M P L O 5.1

Escriba los comandos de rama para las resistencias que se muestran en la figura 5.2a.

S O L U C I Ó N Los comandos de rama para las resistencias que se muestran en la figura 5.2a son

R1 4 6 2
R2 6 3 10

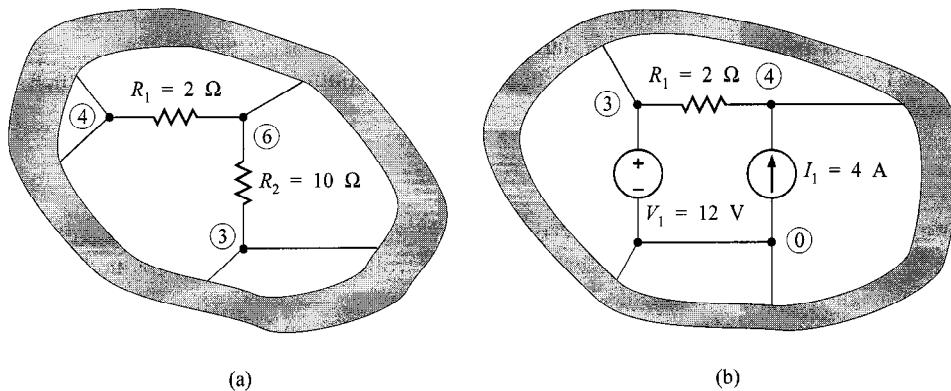


FIGURA 5.2 Circuitos utilizados para explicar los comandos de rama.

Comandos de rama para fuentes independientes. Los comandos de rama para fuentes independientes que tienen la forma

BXXXXXX N+ N- DC (DC VALUE)

B es la letra V para fuentes de voltaje o I para fuentes de corriente. N+ y N- son los nodos positivo y negativo, respectivamente.

Para una fuente de voltaje, se supone que la corriente positiva fluye de la terminal positiva N+, a través de la fuente a la terminal negativa N-. Por ejemplo, una fuente de voltaje que suministra potencia tendrá una corriente negativa en el PSPICE. Para fuentes de corriente, la corriente positiva entra a la terminal N+ y sale de la fuente en la terminal N-.

DC VALUE es el valor de cd de la fuente. Si el valor de la cd es cero, este valor puede omitirse.

E J E M P L O 5.2

Escriba los comandos de rama para los elementos que se muestran en la figura 5.2b.

SOLUCIÓN Los comandos de rama para los elementos que se muestran en la figura 5.2b son

```
R1 4 3 2
V1 3 0 DC 12
I1 0 4 DC 4
```

Comandos de rama para fuentes lineales dependientes. Una fuente lineal dependiente en el PSPICE se define como una fuente de voltaje o una fuente de corriente cuyo voltaje o corriente es, a veces, una constante de voltaje de rama específico o la corriente que fluye a través de una fuente de voltaje. El último punto introduce una idiosincrasia interesante del PSPICE. A fin de emplear la corriente en una rama particular,

debemos introducir una fuente de voltaje falsa en serie con esta rama particular de modo que el programa pueda calcular la corriente en esta fuente de voltaje.

Los comandos de rama para fuentes lineales controladas por voltaje tienen la forma general

BXXXXXXX N+ N- NC+ NC- VALUE

B es la letra G o E, donde $I_S = GV$ para fuentes de corriente controladas por voltaje y $V_S = EV$ para fuentes de voltaje controladas por voltaje. N+ y N- son los nodos positivo y negativo, respectivamente.

Para fuentes de corriente, la corriente positiva entra en la fuente en N+ y sale a N-. NC+ y NC- son los nodos controladores positivo y negativo, respectivamente. VALUE es el valor de la ganancia de voltaje E o la transconductancia G.

E J E M P L O 5.3

Escriba el comando de rama para la fuente dependiente de la figura 5.3a.

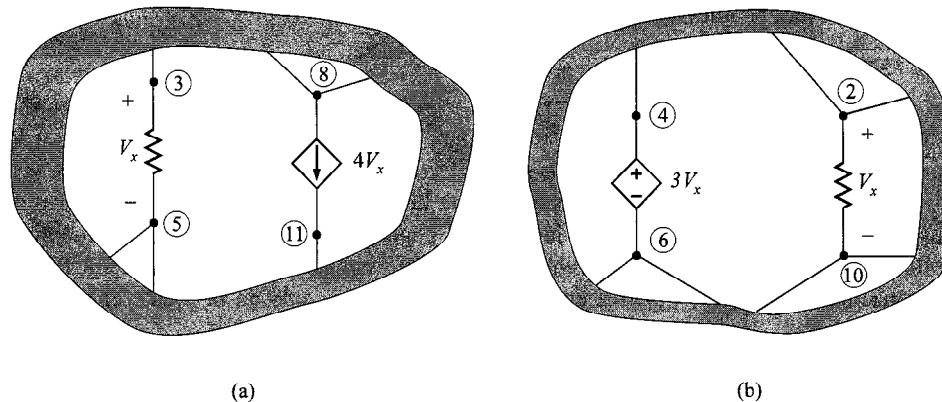


FIGURA 5.3 Circuitos utilizados para explicar comandos de rama para fuentes dependientes.

SOLUCIÓN El comando de rama para la fuente dependiente en la figura 5.3a es

G1 8 11 3 5 4

E J E M P L O 5.4

Escriba el comando de rama para la fuente dependiente de la figura 5.3b.

SOLUCIÓN El comando de rama para la fuente dependiente de la figura 5.3b es

E1 4 6 2 10 3

Los comandos de rama para fuentes lineales controladas por corriente tienen la forma

BXXXXXXX N+ N- VNAME VALUE

B es la letra F o H, donde $I_S = FI$ para fuentes de corriente controladas por corriente y $V_S = HI$ para fuentes de voltaje controladas por corriente. N+ y N- son los nodos positivo y negativo, respectivamente. El flujo de corriente es del nodo positivo, a través de la fuente, al nodo negativo. VNAME es el nombre de la fuente de voltaje a través de la cual fluye la corriente controladora. La corriente controladora positiva fluye en el nodo positivo a través de la fuente VNAME, y sale del nodo negativo. VALUE es el valor de la ganancia de corriente o la transresistencia H.

E J E M P L O 5.5

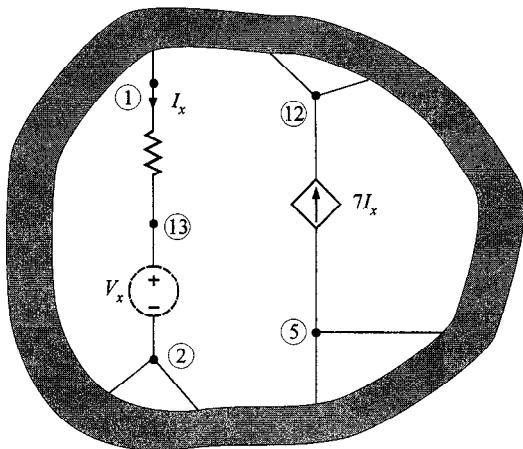
Escriba el comando de rama para la fuente dependiente de la figura 5.4a.

S O L U C I Ó N El comando de rama para la fuente dependiente de la figura 5.4a es

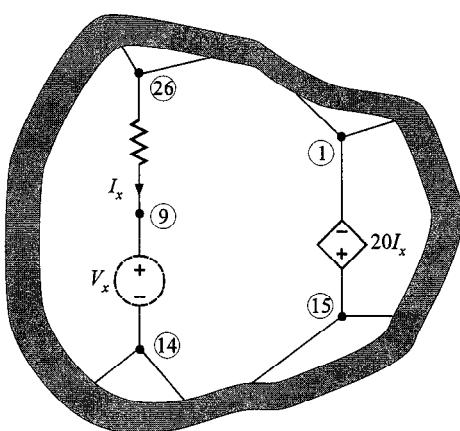
F1 5 12 VX 7

E J E M P L O 5.6

Escriba el comando de rama para la fuente dependiente de la figura 5.4b.



(a)



(b)

FIGURA 5.4 Circuitos utilizados para explicar comandos de rama para fuentes dependientes.

S O L U C I Ó N El comando de rama para la fuente dependiente de la figura 5.4b es

H1 15 1 VX 20

Note que en los ejemplos 5.5 y 5.6 V_x es la fuente de voltaje falso o simulado insertada en la red a fin de obtener la corriente de control I_x .

Comandos de control de la solución

Tres de las opciones de análisis de cd están especificadas por los comandos .OP, .DC y .TF. El comando .OP hará que todos los voltajes y corrientes nodales de cd así como los voltajes y corrientes para cada fuente dependiente sean listados como parte de la salida.

El análisis de cd puede llevarse a cabo para una gama de fuentes de voltaje o corriente usando el comando .DC. La forma general de este comando es

```
.DC SCRNAM VSTART VSTOP VINCR
```

SCRNAM es el nombre de una fuente de voltaje o de corriente que ha de variarse. VSTART, VSTOP y VINCR son los valores de inicio, final y de incremento, respectivamente. Como opción puede especificarse una segunda fuente con parámetros de barrido asociados. La forma para este comando es

```
.DC SCRNAM VSTART VSTOP VINCR SCR2 START2 STOP2 INCR2
```

En este caso, la primera fuente será barrida sobre su alcance para cada valor de la segunda fuente. Algunos ejemplos típicos del comando .DC son

```
.DC V1 1.25 10.50 0.25
.DC V0 0 50 1 I1 1M 10M 1M
```

La opción de análisis de cd también puede usarse para evaluar funciones de transferencia de señal pequeña de cd, es decir, la razón de una variable de salida a la variable de entrada. La resistencia de entrada y la de salida también se calcularán automáticamente como parte de la solución:

```
.TF OUTVAR INSRC
```

OUTVAR es la variable de salida de señal pequeña. INSRC es la fuente de entrada de señal pequeña. Dos ejemplos comunes de comandos son

```
.TF V(4, 1) VIN
.TF I(VOUT) VIN
```

Recuerde que el voltaje entre cualesquier dos nodos n y m se refiere como $V(n, m)$. Si el segundo nodo es cero, puede omitirse. Para las ecuaciones precedentes, el PSPICE calcularía el valor de la señal pequeña de la razón de $V(4, 1)$ a VIN, la resistencia vista por VIN y la resistencia entre los nodos 4 y 1.

Si no se especifica ningún análisis, el PSPICE llevará a cabo un análisis parcial .OP por defecto. El listado de salida incluirá voltajes nodales y corrientes de las fuentes de voltajes, pero ninguna información sobre fuentes dependientes.

Comandos de especificación de la salida

La salida impresa se pide utilizando el comando .PRINT con el formato

```
.PRINT DC OV1 OV2 . . . OV8
```

OV1, OV2,..., OV8 son las variables de salida de corriente o voltaje deseadas con un máximo de ocho variables de salida por comando. Sin embargo, en un análisis de cd, un comando de impresión no se necesita más con el PSPICE. Todos los voltajes y corrientes nodales en las fuentes de voltaje se imprimen automáticamente. Para corrientes la dirección de referencia es del nodo positivo, a través de la fuente, al nodo negativo, como se muestra en la figura 5.5.

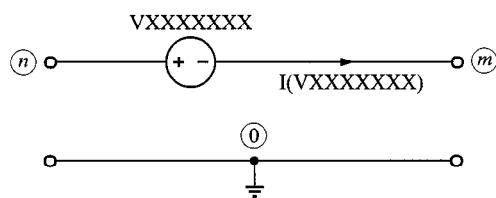


FIGURA 5.5 Corriente referenciada a una fuente de voltaje independiente.

La prueba es una característica adicional del PSPICE que permite a los usuarios trazar los resultados en la pantalla de una PC o imprimirlos. Al incluir el comando .PROBE en un archivo de PSPICE, éste automáticamente introducirá el programa Probe hasta completar el análisis de PSPICE.

La pantalla inicial en Probe muestra un gráfico sobre una línea de menú que contiene varias opciones. La opción por definición es “Add_trace”. Presione la tecla Enter. El gráfico en blanco permanece en la pantalla, pero la barra de menú es reemplazada por una petición de entrada de las variables que se han de trazar. El usuario puede entonces insertar una variable o una lista de variables separadas por espacios. Por ejemplo, “V(1) V(2) V(2,3) I(VS)” hará gráficas de los voltajes nodales en los nodos 1 y 2, el voltaje nodal entre los nodos 2 y 3 y la corriente de rama en la rama que contiene VS. También “V(1) * I(VS)” trazarán la gráfica del producto de voltaje en el nodo 1 y la corriente a través de la rama que contiene VS. Presione la tecla Enter después de escribir las variables que se van a graficar. La opción “Hard_copy” trazará la gráfica en la impresora conectada. La opción “Exit” deberá elegirse para salir del programa Probe. Las teclas con flechas se usan para seleccionar la opción deseada de la línea de menú.

Comandos para finalizar

El programador debe decirle al PSPICE cuando el fin de la entrada de datos (el programa) se ha alcanzado. Esto se hace colocando un comando al final del programa con el formato .END.

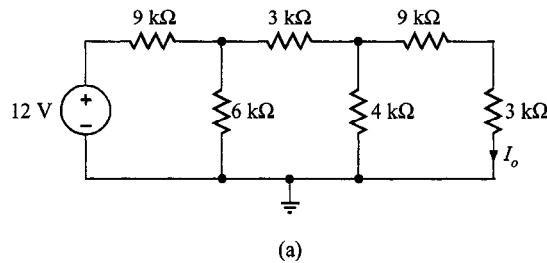
Los siguientes ejemplos servirán para ilustrar las técnicas que hemos descrito.

5.3 Análisis

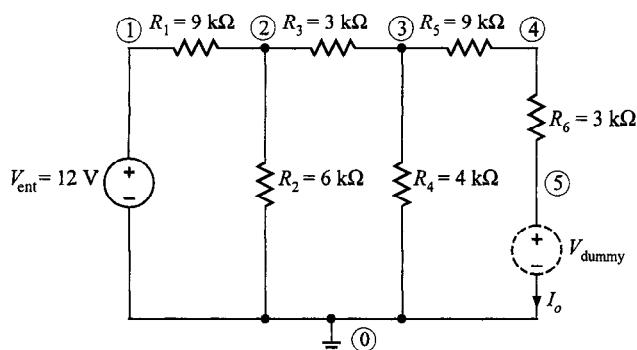
Circuitos que contienen sólo fuentes independientes

E J E M P L O 5.7

Determinemos todos los voltajes nodales y la corriente I_o en el circuito de la figura 3.1, el cual se dibuja otra vez por conveniencia en la figura 5.6a.



(a)



(b)

FIGURA 5.6 Circuito usado en el ejemplo 5.7.

SOLUCIÓN En la figura 5.6b el circuito está etiquetado para un análisis con el PSPICE. Advierta que la fuente de voltaje V_{falsa} sirve como un amperímetro para obtener I_o . Para usar el PSPICE, escriba ‘PS’ en el prompt ‘C:\>’. La pantalla muestra el Shell de control con la línea de menú en la parte superior y la línea de información en la parte inferior. La opción ‘Files’ está iluminada. Presione la tecla Enter. Esto activa el submenú ‘Files’. La opción ‘Current File’ está iluminada. Presione la tecla Enter. Escriba el nombre de su archivo PSPICE. Si este ha de ser un circuito nuevo, seleccione un nombre para el nuevo archivo PSPICE. El ‘Shell de Control de PSPICE’ nuevamente se despliega. Presione la tecla Enter para desplegar el submenú ‘Files’. La opción ‘Edit’ está iluminada. Presione la tecla Enter. Ahora el editor está activado.

El programa PSPICE para los circuitos es:

```
First PSPICE Example
Vin 1 0 dc 12
R1 1 2 9k
R2 2 0 6k
R3 2 3 3k
R4 3 0 4k
R5 3 4 9k
R6 4 5 3k
* vdummy will meter Io.
vdummy 5 0 dc 0
.end
```

Después de la terminación del programa, presione la tecla ESC (escape). Entonces presione la tecla "S" para salvar su archivo. El "Shell de control del PSPICE" nuevamente se despliega. Presione la tecla de la flecha derecha para iluminar la opción "Analysis". Presione la tecla Enter para desplegar el submenú "Analysis". La opción "Run PSPICE" está iluminada. Presione la tecla Enter para correr el PSPICE en su circuito PSPICE recién creado. Después de la terminación del análisis del PSPICE, se despliega el "Shell de control del PSPICE". Presione la tecla Enter para desplegar el submenú "Files". Use la tecla de la flecha hacia abajo para iluminar la opción "Browse Output". Presione la tecla Enter. Se despliegan las primeras 20 líneas de su archivo de salida. Use las teclas de flecha, Page Up y Page Down, para desplegar otras partes de su salida. Presione la tecla Esc para regresar al submenú "Files". Para salir del PSPICE, use las teclas de flecha para iluminar la opción "Quit" del menú. Seleccione la opción "Exit to DOS" del submenú "Quit". Para salvar su archivo recién creado, presione "S"

El listado de salida de la computadora incluye lo siguiente:

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	12.0000	(2)	3.0000	(3)	1.5000	(4)	.3750
(5)	0.0000						

VOLTAGE SOURCE CURRENTS

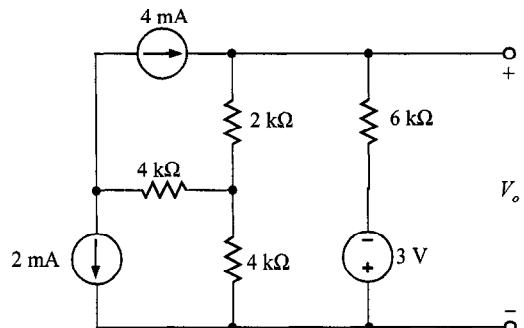
NAME	CURRENT
vin	-1.000E-03
vdummy	1.250E-04

Recuerde que en el PSPICE las corrientes medidas que fluyen en la terminal positiva de una fuente de voltaje tienen valores positivos en el archivo de salida. Así, I_o es 125 μ A.

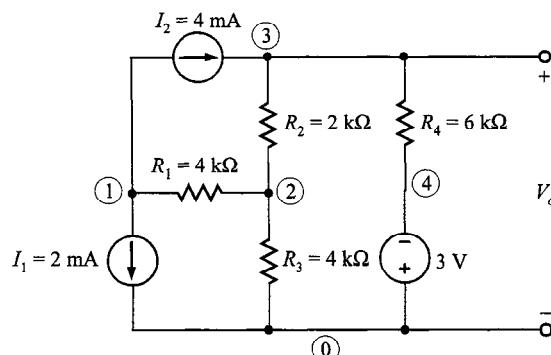
El voltaje de salida siempre se registra en volts y todos los voltajes nodales se imprimen automáticamente.

E J E M P L O 5.8

Determinemos todos los voltajes nodales para el circuito de la figura 3.22, que se redibuja por conveniencia en la figura 5.7a.



(a)



(b)

FIGURA 5.7 Circuito usado en el ejemplo 5.8.

S O L U C I Ó N El circuito está marcado para un análisis del PSPICE en la figura 5.7b. Note que el voltaje nodal $V(3)$ es el mismo que V_o .

El programa del PSPICE para este circuito es

```

Second PSPICE Example
I1 1 0 dc 2mA
I2 3 1 dc -4mA
V 4 0 dc -3v
r1 2 1 4k
r2 3 2 2k
r3 2 0 4k
r4 3 4 6k
* v(3) is Vo.
.end

```

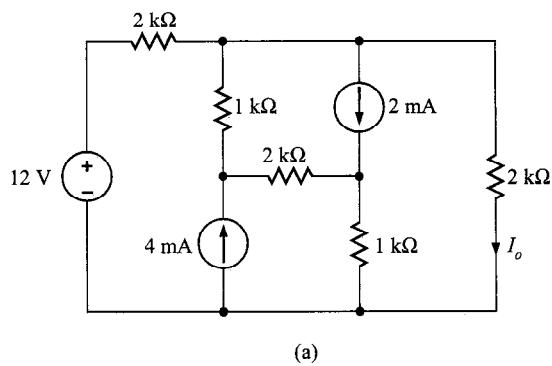
El listado de salida del simulador incluye lo siguiente:

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	-33.0000	(2)	-9.0000	(3)	-1.5000	(4)	-3.0000

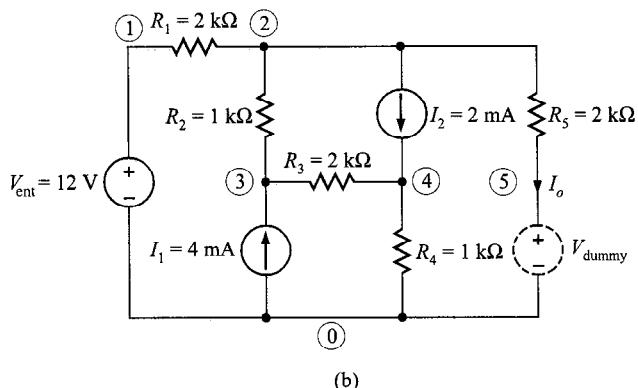
E J E M P L O 5.9

Deseamos calcular todos los voltajes nodales y la corriente I_o para el circuito de la figura 5.8a. El circuito se redibuja para un análisis del PSPICE en la figura 5.8b.

S O L U C I Ó N Una vez más, emplearemos una fuente falsa o simulada para determinar la corriente de salida.



(a)



(b)

FIGURA 5.8 Circuito usado en el ejemplo 5.9.

El programa del PSPICE para este circuito es

```
Third PSPICE Example
vin 1 0 dc 12
i1 0 3 dc 4m
i2 2 4 dc 2m
r1 1 2 2k
```

```

r2 2 3 1k
r3 3 4 2k
r4 4 0 1k
r5 2 5 2k
* vdummy will meter the current Io.
vdummy 5 0 dc 0
.end

```

El listado de salida del simulador incluye lo siguiente:

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	12.0000	(2)	6.0000	(3)	8.0000	(4)	4.0000
(5)	0.0000						

VOLTAGE SOURCE CURRENTS	
NAME	CURRENT
vin	-3.000E-03
vdummy	3.000E-03

La corriente de salida I_o , es +3 mA.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D5.1 Dado el circuito de la figura D5.1a, use el PSPICE para determinar todos los voltajes nodales y la corriente en la resistencia $1 \text{ k}\Omega$.

Resp.: $V_1 = -3.33 \text{ V}$, $V_2 = 6.67 \text{ V}$, $V_3 = 1.67 \text{ V}$, $V_4 = 0.83 \text{ V}$, $V_5 = 0.42 \text{ V}$, $I_{1\Omega} = 0.42 \text{ mA}$.

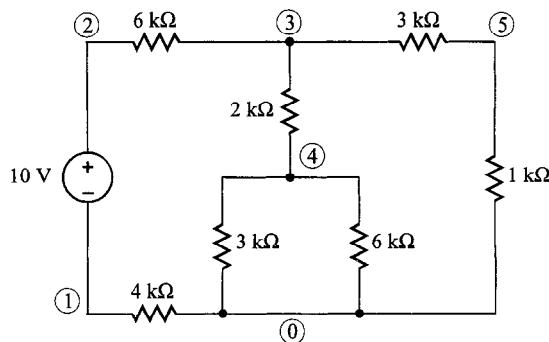


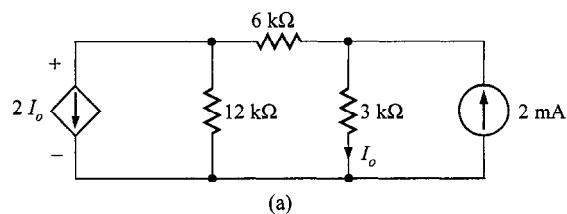
FIGURA D5.1

Circuitos que contienen fuentes dependientes

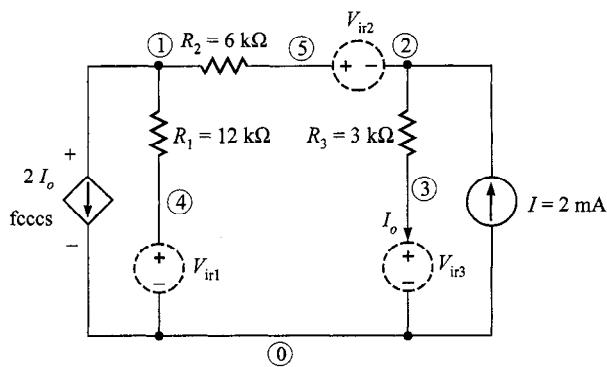
Los siguientes ejemplos indicarán el uso del PSPICE para problemas que contienen fuentes dependientes.

E J E M P L O 5.10

Considere el circuito de la figura 3.9 que contiene una fuente de corriente controlada por corriente. Deseamos encontrar todos los voltajes nodales y las corrientes de rama en este circuito, el cual se dibuja de nuevo en la figura 5.9a.



(a)



(b)

FIGURA 5.9 Circuitos usados en el ejemplo 5.10.

SOLUCIÓN El circuito utilizado para el análisis con el PSPICE se muestra en la figura 5.9b. Note que se usan fuentes de voltaje falsas o simuladas para determinar las corrientes de rama.

El programa PSPICE para este circuito es

```

Fourth PSPICE Example
I 0 2 dc 2mA
r1 1 4 12k
* vir1 will meter the current through r1.
vir1 4 0 dc 0
r2 1 5 6k
* vir2 meters the current through r2.
vir2 5 2 dc 0
r3 2 3 3k
* vir3 meters the current through r3 and it
* "meters"  $I_o$  for the Current Controlled
* Current Source.
vir3 3 0 dc 0
fcccs 1 0 vir3 2
.op
.end

```

El listado de salida de la simulación incluye lo siguiente:

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	-4.8000	(2)	2.4000	(3)	0.0000	(4)	0.0000
(5)	2.4000						

VOLTAGE SOURCE CURRENTS **** CURRENT-CONTROLLD CURRENT SOURCES
 NAME CURRENT
 vir1 -4.000E-04 NAME fcccs
 vir2 -1.200E-03 I-SOURCE 1.600E-03
 vir3 8.000E-04

La corriente de salida es 0.8 mA u 800 μ A. El comando .OP fue necesario para la salida de la corriente a través de la fuente dependiente. El PSPICE llama a esta corriente I-SOURCE y es 1.6 mA.

E J E M P L O 5.11

Consideremos el circuito de la figura D3.4 que contiene una fuente de corriente controlada por voltaje. El circuito se dibuja de nuevo por conveniencia en la figura 5.10a, y se etiqueta para un análisis con PSPICE en la figura 5.10b. Encuentremos todos los voltajes nodales y las corrientes de rama.

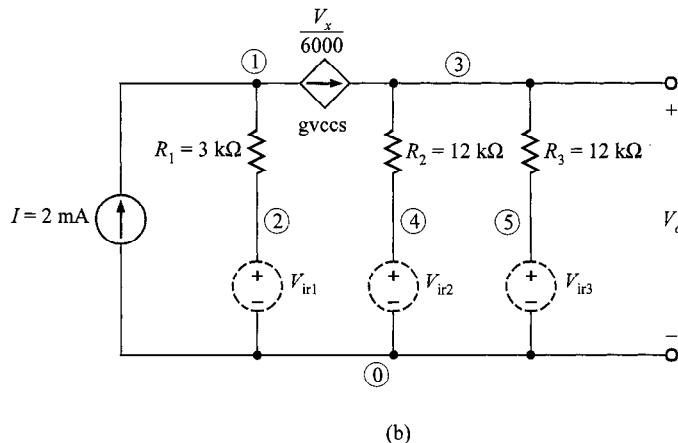
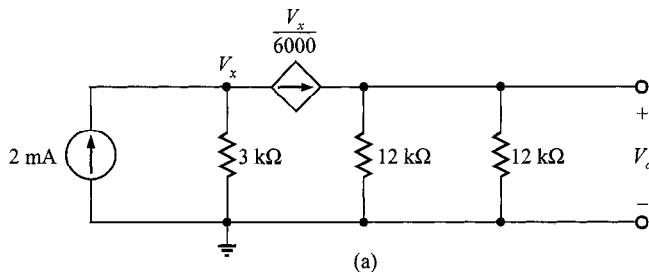


FIGURA 5.10 Circuitos empleados en el ejemplo 5.11.

SOLUCIÓN Las fuentes falsas o simuladas se han empleado para determinar las corrientes de rama.

El programa PSPICE para este circuito es

```
Fifth PSPICE Example
I 0 1 dc 2mA
r1 1 2 3k; vir1 meters the current through r1.
vir1 2 0 dc 0
r2 3 4 12k; vir2 meters the current through r2.
vir2 4 0 dc 0
r3 3 5 12k; vir3 meters the current through r3.
vir3 5 0 dc 0
gvccs 1 3 1 0 0.167m
.op
.end
```

El listado de salida del simulador incluye lo siguiente:

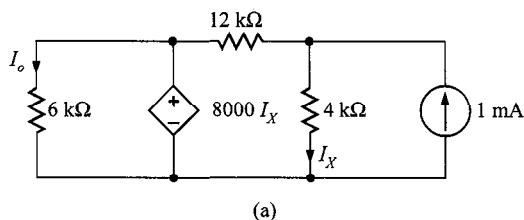
NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	3.9973	(2)	0.0000	(3)	4.0053	(4)	0.0000
(5)	0.0000						

VOLTAGE SOURCE CURRENTS	
NAME	CURRENT
vir1	1.332E-03
vir2	3.338E-04
vir3	3.338E-04

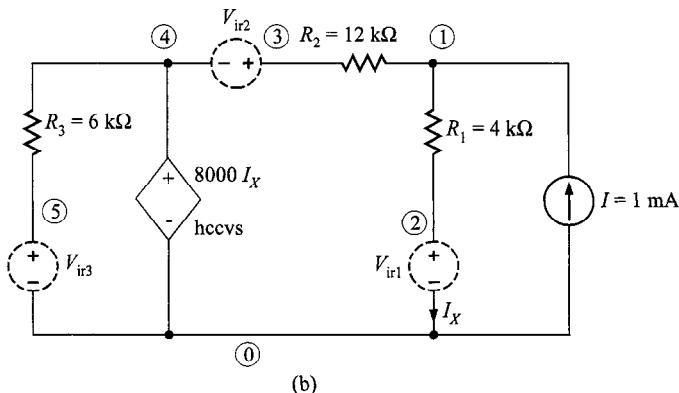
El análisis manual da $V(3)$ para que sea 4 volts, pero de acuerdo con el PSPICE $V(3)$; es 4.0053 V! La diferencia está en la precisión del programa PSPICE, en particular la corriente de la fuente dependiente. Sobre el papel ésta es $V_x/6000$ mientras que en el programa PSPICE ésta es $0.167 \times 10^{-3}V_x$. Como resultado, hay una ligera diferencia entre los valores de los voltajes nodales reales y los resultados del PSPICE. Podemos mejorar la precisión usando más exactitud en nuestra representación de 1/6000. Sin embargo, nunca seremos capaces de introducir exactamente 1/6000 en forma decimal. Esto ilustra un hecho vital en el modelado de los circuitos físicos. La inexactitud en el modelo produce inexactitud en el resultado. Por tanto, los ingenieros siempre deben estar conscientes de las limitaciones de los modelos que usamos al simular la realidad.

EJEMPLO 5.12

Examinemos el circuito de la figura 3.16 el cual contiene una fuente de voltaje controlada por corriente. El circuito se redibuja en la figura 5.11a, y se marca para un análisis del PSPICE en la figura 5.11b. Encontremos todos los voltajes nodales y las corrientes de rama.



(a)



(b)

FIGURA 5.11 Circuitos usados en el ejemplo 5.12.

S O L U C I Ó N El programa PSPICE para este circuito es

```

Sixth PSPICE Example
I 0 1 dc 1mA
r1 1 2 4k
* vir1 measures the current through r1.
* This must be done so that the dependent
* source's voltage can be calculated.
vir1 2 0 dc 0
r2 1 3 12k
* vir2 meters the current through r2.
vir2 3 4 dc 0
hccvs 4 0 vir1 8000
r3 4 5 6k
* vir3 measures the current through r3.
vir3 5 0 dc 0
.op
.end

```

El listado de salida de la simulación incluye lo siguiente:

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	6.0000	(2)	0.0000	(3)	12.0000	(4)	12.0000
(5)	0.0000						

```
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
vir1     1.500E-03
vir2    -5.000E-04
vir3     2.000E-04

***** CURRENT-CONTROLLED VOLTAGE SOURCES
NAME      hccvs
V-SOURCE  1.200E+01
I-SOURCE  -2.500E-03
```

E J E M P L O 5.13

Considere ahora el circuito que se muestra en la figura 3.17, el cual contiene una fuente de voltaje controlada por voltaje. El circuito se dibuja de nuevo en la figura 5.12a y se etiqueta para un análisis con PSPICE en la figura 5.12b. Encontremos todos los voltajes nodales y las corrientes de rama.

S o l u c i ó n El programa del PSPICE correspondiente para este circuito es

```
Seventh PSPICE Example
v 1 0 dc 6
r1 1 2 12k
* vir1 meters the current through r1.
vir1 2 3 dc 0
r2 3 4 6k
* vir2 meters the current through r2.
vir2 4 0 dc 0
r3 5 6 12k
* vir3 meters the current through r3.
vir3 6 0 dc 0
r4 1 7 6k
* vir4 meters the current through r4.
vir4 7 5 dc 0
evcvs 5 3 3 4 2
.op
.end
```

El listado de salida de la simulación incluye lo siguiente:

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	6.0000	(2)	1.5000	(3)	1.5000	(4)	0.0000
(5)	4.5000	(6)	0.0000	(7)	4.5000		

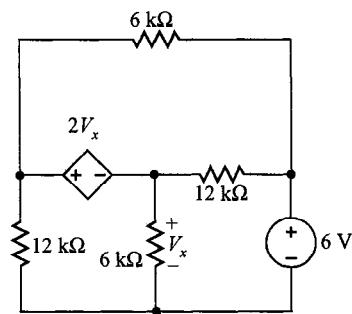

```
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
v        -6.250E-04
```

```

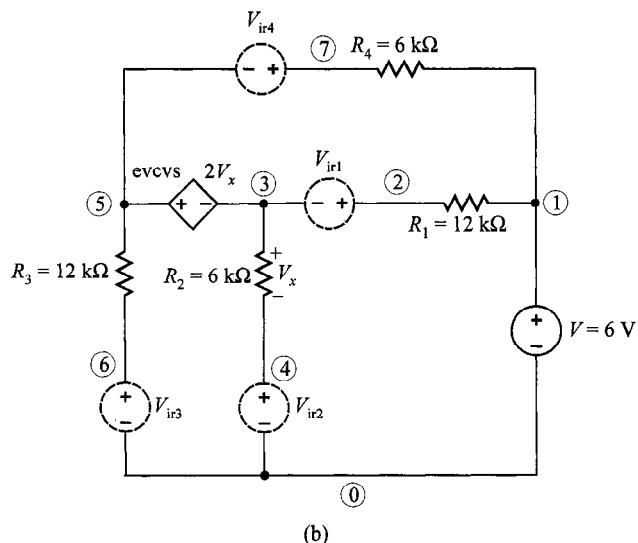
vir1      3.750E-04
vir2      2.500E-04
vir3      3.750E-04
vir4      2.500E-04

***** VOLTAGE-CONTROLLED VOLTAGE SOURCES
NAME      evcvs
V-SOURCE  3.000E+00
I-SOURCE  -1.250E-04

```



(a)

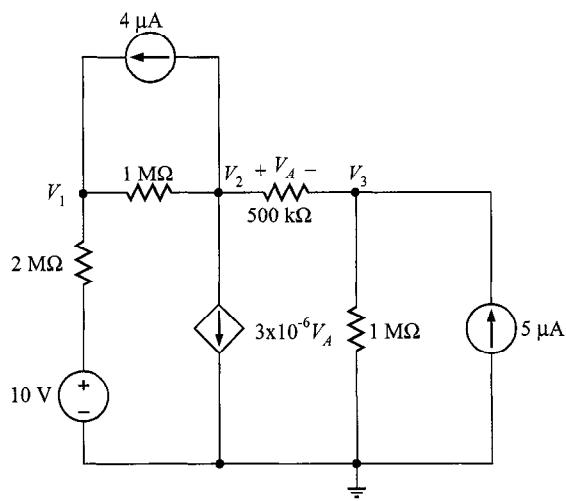


(b)

FIGURA 5.12 Circuitos usados en el ejemplo 5.13.

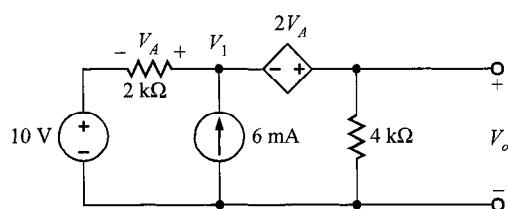
EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D5.2 Calcule los voltajes nodales en el circuito de la figura D5.2.

**FIGURA D5.2**

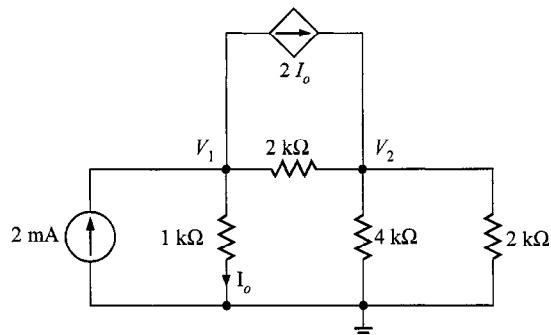
Resp.: $V_1 = 9.44 \text{ V}$, $V_2 = 5.17 \text{ V}$, $V_3 = 5.11 \text{ V}$.

D5.3 Calcule los voltajes nodales en el circuito de la figura D5.3.

**FIGURA D5.3**

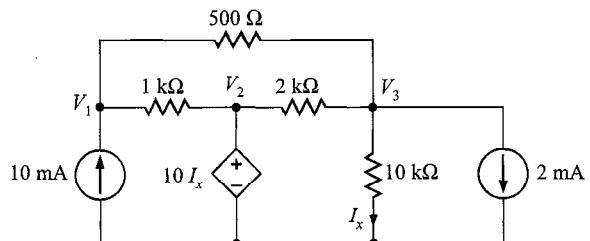
Resp.: $V_1 = 10.50 \text{ V}$, $V_o = 11.50 \text{ V}$.

D5.4 Calcule los voltajes nodales en el circuito de la figura D5.4.

**FIGURA D5.4**

Resp.: $V_1 = 0.80 \text{ V}$, $V_2 = 1.60 \text{ V}$.

D5.5 Dada la red de la figura D5.5, calcule los voltajes nodales y la corriente, I_x .

**FIGURA D5.5**

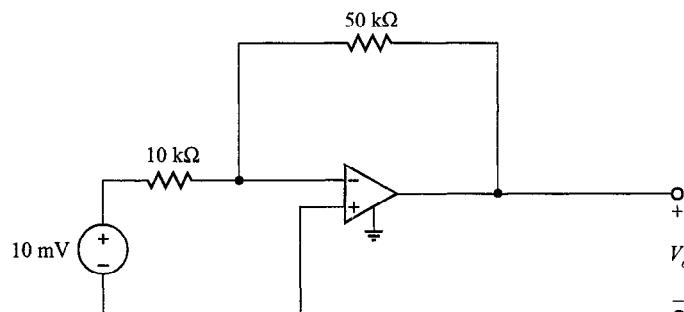
Resp.: $V_1 = 50.00 \text{ V}$, $V_2 = 46.67 \text{ V}$, $V_3 = 46.67 \text{ V}$, $I_x = 4.67 \text{ mA}$.

Circuitos que contienen amplificadores operacionales

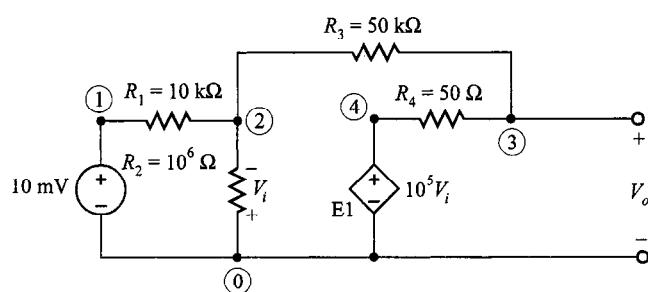
Aplicaremos ahora el PSPICE a redes que contienen amps-op. El modelo que emplearemos se muestra en la figura 3.38c. Los valores de los parámetros que usaremos son $R_i = 1 \text{ MEG}\Omega$, $A = 10^5$ y $R_o = 50 \Omega$.

E J E M P L O 5.14

Determinemos el voltaje de salida del circuito de amp-op que se muestra en la figura 5.13a.



(a)



(b)

FIGURA 5.13 Circuito usado en los ejemplos 5.14 y 5.15.

S O L U C I Ó N La red se dibuja nuevamente en la figura 5.13b. El programa PSPICE y el listado de salida son

```
BASIC INVERTING CONFIGURATION OF AN OP-AMP
V1    1    0    DC    10M
E1    4    0    0    2    1E5
R1    1    2    10K
R2    2    0    1MEG
R3    2    3    50K
R4    3    4    50
* VO IS THE SAME AS NODE VOLTAGE V(3)
.END
```

La salida del programa incluye

V1	V (3)
1.000E-02	-5.000E-02

E J E M P L O 5.15

Dada la red de amp-op del ejemplo 5.14, cambiemos la fuente de voltaje a 1 V y calculemos el voltaje de salida, la ganancia del circuito, la resistencia de entrada y la resistencia de salida en la red.

S O L U C I Ó N El programa del PSPICE y el listado de salida son como sigue:

```
USE OF .TF ON INVERTING OP-AMP
V1    1    0    DC    1
E1    4    0    0    2    1E5
R1    1    2    10K
R2    2    0    1MEG
R3    2    3    50K
R4    3    4    50
* .TF GIVES THE GAIN, INPUT RESISTANCE, AND
*OUTPUT RESISTANCE
.TF V(3) V1
* Vo IS THE SAME AS NODE VOLTAGE V(3)
.END
```

La salida del programa incluye

V1	V (3)
1.000E+00	-5.000E+00
V(3)/V1	=-5.000E+00
INPUT RESISTANCE AT V1	= 1.000E+04
OUTPUT RESISTANCE AT V (3)	= 3.025E-03

E J E R C I C I O D E E N T R E N A M I E N T O

Ejercicio 5.6 Calcule el voltaje de salida, ganancia y resistencias de entrada y salida para la red de la figura D5.6.

Resp.: $V_o = 6 \text{ V}$, ganancia = 6, $R_i = 1.67 \times 10^{11} \Omega$, $R_o = 3 \times 10^{-4} \Omega$.

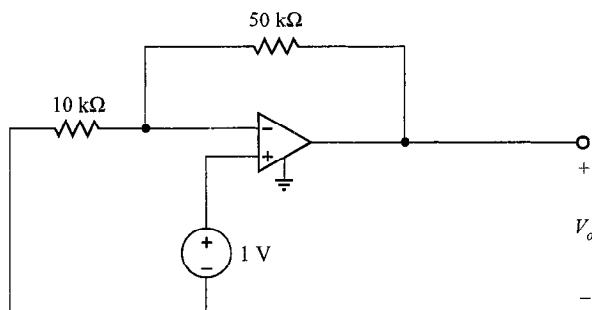


FIGURA D5.6

Simulación de barrido de cd en el PSPICE

Los siguientes ejemplos demuestran el uso del comando .DC y de la utilería .PROBE en el PSPICE para generar gráficas de barrido de cd.

E J E M P L O 5.16

Investigaremos la variación de la corriente I_o en el circuito de la figura 5.6a debida a cambios en la fuente de voltaje V_{ent} .

SOLUCIÓN Usando la capacidad de barrido de cd del PSPICE variaremos V_{ent} de 0 a 12 en pasos de 0.1V. Entonces usaremos la utilería PROBE para trazar I_o contra V_{ent} .

El programa del PSPICE para este circuito es

```
First PSPICE Example with DC Sweep
Vin 1 0 dc 12
R1 1 2 9k
R2 2 0 6k
R3 2 3 3k
R4 3 0 4k
R5 3 4 9k
R6 4 5 3k
vdummy 5 0 dc 0; vdummy will meter Io.
.dc vin 0 12 0.1
.end
```

La figura 5.14 muestra los resultados gráficos de correr la utilería PROBE.

Observe varias cosas de la gráfica. Primero, es lineal. Esto es lógico ya que todos los elementos del circuito tienen relaciones de voltaje-corriente

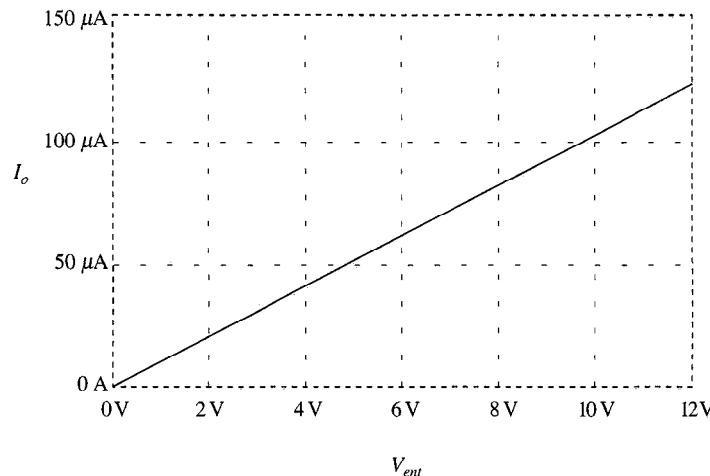


FIGURA 5.14 Gráfica de barrido de cd obtenida en el ejemplo 5.16.

lineales. Segundo, la pendiente de la línea da la sensibilidad de I_o con respecto a cambios en V_{ent} . Puede considerar a ésta como un factor de ganancia. Finalmente, el valor de I_o a $V_{ent} = 12$ V debe concordar con el resultado del ejemplo 5.7, donde V_{ent} es un suministro de 12 V constante. De la gráfica podemos ver que $V_{ent} = 12$ V, e I_o es 125 uA, lo mismo que se obtuvo en el ejemplo 5.7.

EJEMPLO 5.17

Determinemos la variación de la corriente I_o en la red de la figura 5.11a debida a cambios en la fuente de corriente I .

SOLUCIÓN Usando la capacidad de barrido de cd del PSPICE variaremos I de 0 A a 1 mA en pasos de 10 μ A. Entonces usaremos la utilería PROBE para graficar I_o contra I . El programa de PSPICE para la red que se muestra en la figura 5.11b es entonces

```
Second PSPICE Example with DC Sweep
I 0 1 dc 0
r1 1 2 4k
* vir1 measures the current through r1.
* This must be done so that the dependent
* source's voltage can be calculated.
vir1 2 0 dc 0
r2 1 3 12k
* vir2 meters the current through r2.
vir2 3 4 dc 0
hccvs 4 0 vir1 8000
r3 4 5 6k
* vir3 measures the current through r3.
vir3 5 0 dc 0
.dc I 0 1mA 10uA
.end
```

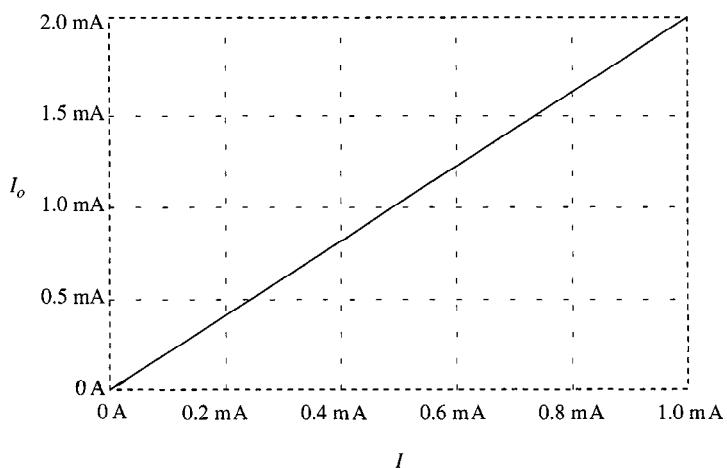


FIGURA 5.15 Gráfica de barrido de cd obtenida en el ejemplo 5.17.

La gráfica de la figura 5.15 se obtiene usando la característica PROBE. La gráfica es, por supuesto, lineal y notamos que cuando $I_0 = 1 \text{ mA}$, $I = 2 \text{ mA}$ —los mismos valores obtenidos en el ejemplo 5.12—. Advierta que la corriente de salida siempre es dos veces el tamaño de la corriente de la fuente y, por tanto, el circuito opera como un amplificador de corriente.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D5.7 Genere una gráfica de transferencia de V_o contra I_1 para $0 \text{ A} \leq I_1 \leq 5 \text{ mA}$ del circuito de la figura D5.7. ¿Cuál es la ganancia V_o/I_1 ?

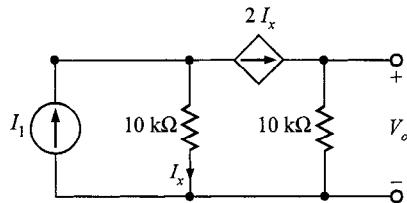


FIGURA D5.7

Resp.: $V_o/I_1 = 6.67 \text{ kV/A}$.

D5.8 Genere una familia de curvas de transferencia de V_o contra V_1 para el circuito de la figura D5.8, haciendo variar tanto V_1 como I_1 . Varíe V_1 para cada valor de -10 V a $+10 \text{ V}$ para cada valor de I_1 , inicie I_1 en 0 mA e incremente en pasos de 1 mA hasta 4 mA . De su gráfica, encuentre I_1 y la ganancia V_o/V_1 y la ganancia V_o/I_1 .

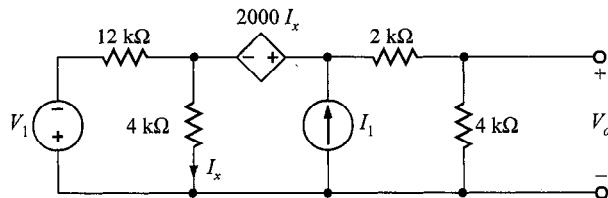


FIGURA D5.8

Resp.: $V_o/V_1 = 0.14 \text{ V/V}$, $V_o/I_1 = 1.73 \text{ kV/A}$.

5.4 Aplicaciones

EJEMPLO 5.18

En el control computarizado de procesos productivos, la velocidad del motor se monitorea con un tacómetro. Este dispositivo produce un voltaje analógico (continuo) proporcional a la velocidad (rpm) del motor. Como la computadora debe almacenar datos en forma digital, se emplea un dispositivo llamado convertidor analógico-digital (A/D).

Dentro del convertidor A/D hay un subcicuito importante llamado red de escala $R-2R$, que se muestra en la figura 5.16a, el cual se usa para dividir secuencialmente el voltaje de suministro de potencia entre 2. Por ejemplo, si V_{cd} en la red de la figura 5.16a es 10 V , entonces los voltajes nodales V_2 , V_3 , V_4 , etc., son 5 V , 2.5 V , 1.25 V , y así sucesivamente.

Encontremos los voltajes nodales y la disipación total de potencia en esta red celular $R-2R$ de la figura 5.16a si $V_{cd} = 32 \text{ V}$ y $R = 10 \text{k}\Omega$.

SOLUCIÓN Usando las técnicas de combinación de resistencias en serie y en paralelo descritas en la sección 2.5 encontraremos rápidamente

que la resistencia total vista por la fuente de voltaje es $2R$. Además, el uso repetido de la división de voltaje da $V_1 = 32$ V, $V_2 = 16$ V, $V_3 = 8$ V, $V_4 = 4$ V, $V_5 = 2$ V, y $V_6 = 1$ V. La corriente entregada por V_{cd} es

$$I = \frac{V_{dc}}{2R} = \frac{32}{20\,000} = 1.6 \text{ mA (red)}$$

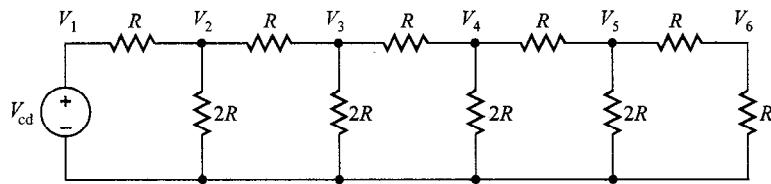
Por tanto, la potencia disipada por la resistencia es

$$P = IV_{cd} = (1.6 \times 10^{-3}) (32) = 51.2 \text{ mW}$$

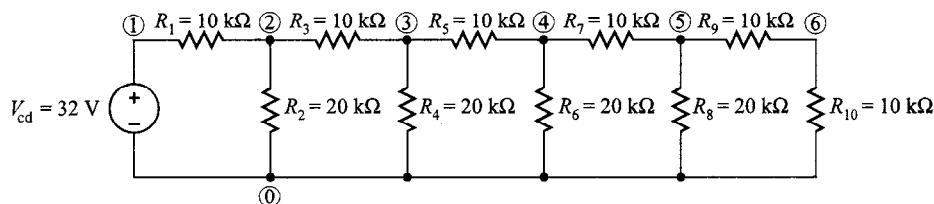
La siguiente salida del simulador para los voltajes nodales y la dissipación de potencia está exactamente de acuerdo con nuestros cálculos.

R-2R Ladder Voltage Divider

```
VDC 1 0 dc 32
R1 1 2 10k
R2 2 0 20k
R3 2 3 10k
R4 3 0 20k
R5 3 4 10k
R6 4 0 20k
R7 4 5 10k
R8 5 0 20k
R9 5 6 10k
R10 6 0 10k
.end
```



(a)



(b)

FIGURA 5.16 Subcircuito de escala $R-2R$ y red del PSPICE.

La siguiente salida del simulador para los voltajes nodales y la disipación de potencia están exactamente de acuerdo con nuestros cálculos.

```

NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE
(1) 32.0000 (2) 16.0000 (3) 8.0000 (4) 4.0000
(5) 2.0000 (6) 1.0000

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME CURRENT
Vin -1.600E-03
TOTAL POWER DISSIPATION 5.12E-02 WATTS

```

E J E M P L O 5.19

Como los amps-op pueden usarse para crear sumadores de voltaje y amplificadores diferenciales, podemos diseñar circuitos para realizar matemáticas simples. Considere a un profesor que calcula las calificaciones al final del trimestre. La tarea contribuye con 20% de la calificación del curso, el examen de mitad de trimestre 30%, y el examen final 50%. Cada una de esas tres calificaciones varía de 0 a 100 puntos. La calificación del curso es entonces

$$\text{Calificación} = (0.2 \times \text{tarea}) + (0.3 \times \text{examen de mitad del curso}) + (0.5 \times \text{examen final})$$

Utilicemos el circuito sumador con amp-op que se muestra en la figura 5.17a para llevar a cabo este cálculo. En esta red hacemos $R = 3 \text{ k}\Omega$, 1 V representa 10 puntos, y empleamos nuestro modelo de amp-op con $R_i = 1 \text{ M}\Omega$, $R_o = 50 \text{ }\Omega$ y $A = 10^5$.

SOLUCIÓN Las fuentes de voltaje V_H , V_M y V_F que se muestran en la figura 5.17a representan las calificaciones de la tarea, examen de mitad del curso y examen final, respectivamente. El voltaje de salida se encuentra mediante el análisis nodal y es

$$-V_o = V_M \left(\frac{R}{R_M} \right) + V_H \left(\frac{R}{R_H} \right) + V_F \left(\frac{R}{R_F} \right)$$

Con excepción del signo negativo, la expresión tiene exactamente la misma forma que el cálculo que deseamos desarrollar. Como $R = 3 \text{ k}\Omega$,

$$R/R_M = 0.3 \text{ y } R_M = 10 \text{ k}\Omega$$

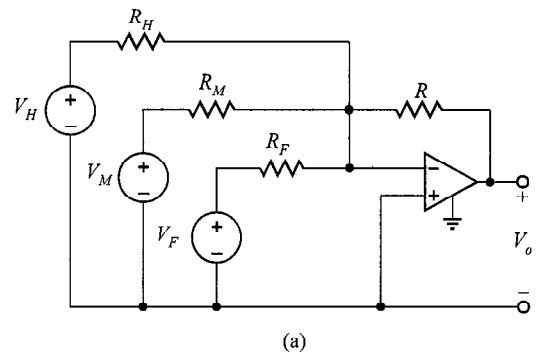
$$R/R_H = 0.2 \text{ y } R_H = 15 \text{ k}\Omega$$

$$R/R_F = 0.5 \text{ y } R_F = 6 \text{ k}\Omega$$

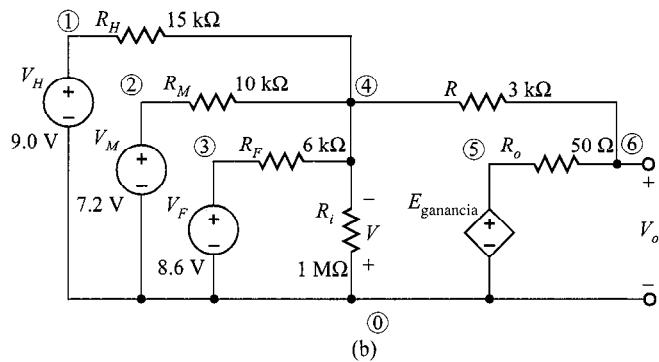
Suponga que un estudiante en particular obtuvo 72 puntos en el examen de medio curso, 90 en tareas y 86 en el examen final. Esta calificación debería ser

$$\text{Calificación} = (0.2 \times 90) + (0.3 \times 72) + (0.5 \times 86) = 82.6$$

Así, en el circuito, $V_H = 9.0 \text{ V}$, $V_M = 7.2 \text{ V}$, $V_F = 8.6 \text{ V}$ y $V_o = -8.26 \text{ V}$. Utilicemos el PSPICE para verificar los cálculos. El circuito del PSPICE está dado en la figura 5.17b para las calificaciones dadas. El programa es



(a)



(b)

FIGURA 5.17 Sumador pesado y red del PSPICE para una calculadora de grados.

```

Analog Computer for Grade Calculation
* For input voltages, 1V = 10 points
Vh 1 0 dc 9.0
Vm 2 0 dc 7.2
Vf 3 0 dc 8.6
Rh 1 4 15k
Rm 2 4 10k
Rf 3 4 6k
R 4 6 3k
Ri 4 0 1meg
Ro 6 5 50
Egain 5 0 0 4 100k
.end

```

De los siguientes resultados de la simulación, el PSPICE predice un voltaje de salida de -8.2598 , que representa una calificación de aproximadamente 82.6 puntos. Nuestro análisis de amp-op ideal está en excelente acuerdo.

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	9.0000	(2)	7.2000	(3)	8.6000	(4)	83.98-E06
(5)	-8.3975	(6)	-8.2598				

E J E M P L O 5.20

En este ejemplo demostraremos el poder del comando .TF en el PSPICE para reducir un circuito con amp-op multietapas complejo a una simple red equivalente de tres elementos. Considere el circuito con amp-op que se muestra en la figura 5.18a. Usemos el comando .TF para encontrar la ganancia.

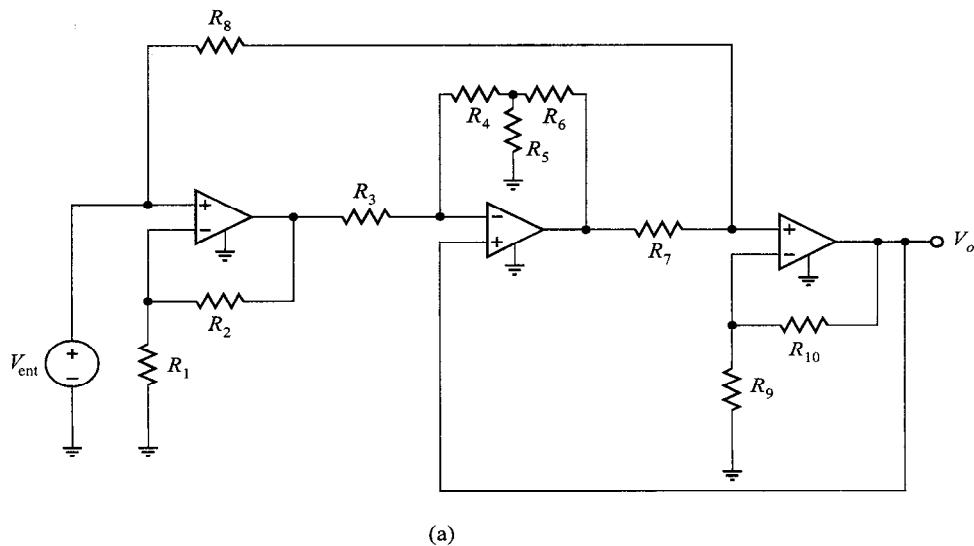
SOLUCIÓN Encontrar la ganancia resultaría tedioso, incluso si se supone que los amp-op son ideales. Sin embargo, el comando .TF puede usarse para proporcionarnos la ganancia equivalente y las resistencias de entrada y de salida. La figura 5.18b muestra el circuito del PSPICE usando $R_i = 1 \text{ M}\Omega$, $R_o = 50 \Omega$ y $A = 10^5$ para los amp-op. El programa del PSPICE es

```
Example 5.17
Vin 1 0 dc 0
Ri1 1 2 1meg
R1 2 0 1k
R2 2 4 9k
Ro1 3 4 50
Egain1 3 0 1 2 100k
R3 4 5 1k
R4 5 6 5k
R5 6 0 1k
R6 6 8 5k
Ri2 5 12 1meg
Ro2 7 8 50
Egain2 7 0 12 5 100k
R7 8 9 3k
R8 1 9 2k
Ri3 9 10 1meg
Ro3 12 11 50
Egain3 11 0 9 10 100k
R9 10 0 1k
R10 10 12 9k
.tf v(12) Vin
.end
```

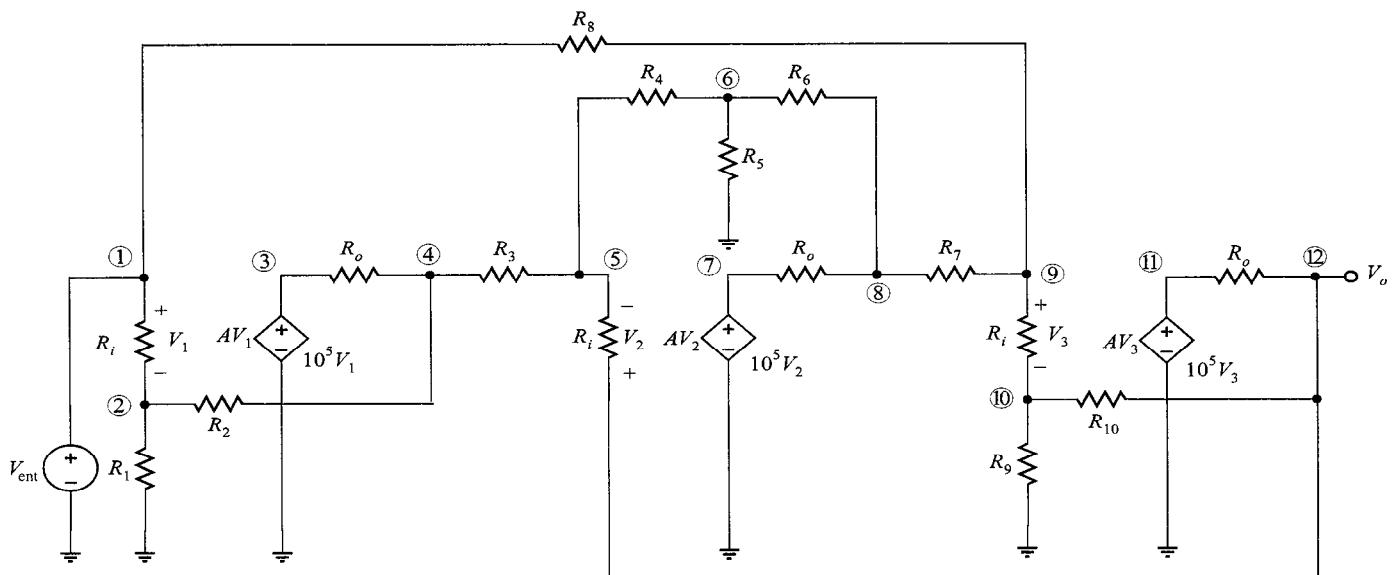
La salida de la simulación incluye los siguientes datos:

```
***** SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS
V(12)/Vin = 8.508E+00
INPUT RESISTANCE AT Vin = 1.342E+04
OUTPUT RESISTANCE AT V(12) = 5.010E+01
```

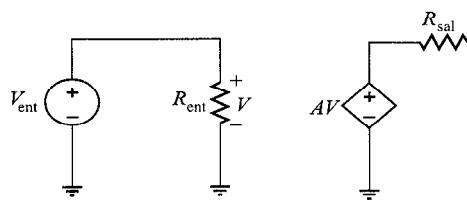
Basados en los resultados de la simulación, toda la red de la figura 5.18a puede reducirse al circuito de la figura 5.18c. Debería mencionarse que el circuito equivalente no es más que dos redes equivalentes de Thévenin. La primera es el equivalente de Thévenin vista por la fuente de entrada V_S , y la segunda la que ve el modo de salida. Utilizando la fuente dependiente para



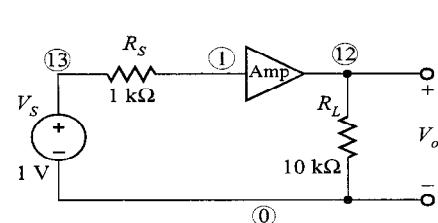
$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \text{ k}\Omega & R_3 &= 1 \text{ k}\Omega & R_5 &= 1 \text{ k}\Omega & R_7 &= 3 \text{ k}\Omega & R_9 &= 1 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 9 \text{ k}\Omega & R_4 &= 5 \text{ k}\Omega & R_6 &= 5 \text{ k}\Omega & R_8 &= 2 \text{ k}\Omega & R_{10} &= 9 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$



(b)



(c)



(d)

FIGURA 5.18 Redes utilizadas en el ejemplo 5.20.

el voltaje de Thévenin en la salida, nuestro circuito equivalente puede usarse para modelar la figura 5.18a sin tener en cuenta la circuitería de entrada.

Para demostrar que las redes de la figura 5.18a y en la figura 5.18c son equivalentes, simulemos ambas redes bajo condiciones idénticas de carga y funcionamiento. Hagamos que la circuitería de entrada consista en un suministro de 1 V en serie con una resistencia de $1 \text{ k}\Omega$ y usemos una carga de $10 \text{ k}\Omega$ como se muestra en la figura 5.18d. El programa del PSPICE y la salida de la simulación para un circuito grande de amp-op son

```
Op amp circuit with input circuitry and load
Vs 13 0 dc 1
Rs 13 1 1k
Ri1 1 2 1meg
R1 2 0 1k
R2 2 4 9k
Ro1 3 4 50
Egain1 3 0 1 2 100k
R3 4 5 1k
R4 5 6 5k
R5 6 0 1k
R6 6 8 5k
Ri2 5 12 1meg
Ro2 7 8 50
Egain2 7 0 12 5 100k
R7 8 9 3k
R8 1 9 2k
Ri3 9 10 1meg
Ro3 12 11 50
Egain3 11 0 9 10 100k
R9 10 0 1k
R10 10 12 9k
Rload 12 0 10k
.end
```

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	.9288	(2)	.9287	(3)	9.4008	(4)	9.2871
(5)	7.9419	(6)	1.2164	(7)	.5628	(8)	.5728
(9)	.7864	(10)	.7863	(11)	7.9419	(12)	7.8633
(13)	1.0000						

La salida del programa PSPICE y de la simulación para el circuito equivalente son

```
Equivalent Network for Op Amp Circuit
Vs 13 0 1V
Rs 13 1 1k
Rin 1 0 13.42k
Egain 11 0 1 0 8.508
Rout 11 12 50.1
Rload 12 0 10k
.end
```

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	.9307	(11)	7.9180	(12)	7.8785	(13)	1.0000

¡Los voltajes de salida difieren por sólo 0.4%! Advierta que cuando se usa el circuito equivalente no podemos resolver para ningún voltaje nodal, corrientes de rama, disipaciones de potencia, etc., en la red de amp-op. Los únicos voltajes y corrientes que podemos determinar son aquellos a la entrada y a la salida.

5.5 Diseño de circuitos

E J E M P L O 5.21

En una planta de procesamiento de leche, la leche fresca se almacena en dos cubas que tienen las dimensiones y capacidades que se muestran en la figura 5.19a. Sensores de nivel en cada cuba entregan los voltajes, V_{L1} y V_{L2} , proporcionales al nivel del líquido dentro de la respectiva cuba. El voltaje del medidor de nivel es 0 V cuando la cuba está llena y cae 1 V por cada pie que disminuye el nivel. Deseamos un voltaje proporcional al número de galones usados. En particular deseamos que 1 V represente 100 galones. Utilicemos amp-op para diseñar tal red y el PSPICE para verificar nuestro trabajo usando nuestro modelo de amp-op con $R_i = 1 \text{ M}\Omega$, $R_o = 50 \Omega$ y $A = 10^5$.

SOLUCIÓN Dados los anteriores requerimientos, necesitamos un circuito que haga tres cosas. Primero, los voltajes del medidor de nivel, V_{L1} y V_{L2} , deben ser escalados para reflejar diferencias dimensionales entre las cubas. Segundo, los voltajes deben invertirse para que el incremento en el uso de leche corresponda al incremento en el voltaje de salida final. Y tercero, los voltajes del medidor escalados deben sumarse. La ecuación que deseamos usar es similar en forma a la desarrollada en el ejemplo 5.19. Por tanto, un circuito sumador con amp-op, tal como el de la figura 5.19, con dos entradas debe ser capaz de realizar la salida requerida.

Basadas en las dimensiones y capacidad de la cuba 1 en la figura 5.19a, cuando la cuba 1 está vacía, se han usado 1 500 galones de leche y el voltaje del medidor de nivel, V_{L1} , será -10 V. Sin embargo, deseamos que 1 500 galones produzcan 15 V en la salida final, V_G en la figura 5.19b. Así, V_{L1} debe ser amplificado por un factor de -1.5. De manera similar, cuando la cuba 2 está vacía, se han usado 600 galones y $V_{L2} = -15 \text{ V}$. Como el voltaje de salida correspondiente debe ser 6 V, V_{L2} debe amplificarse por -0.4. Por tanto, el voltaje final de salida está relacionado a V_{L1} y V_{L2} por la ecuación

$$V_G = -(1.5V_{L1} + 0.4V_{L2})$$

El voltaje de salida del circuito de la figura 5.19b es

$$V_G = -\left(V_{L1}\frac{R}{R_1} + V_{L2}\frac{R}{R_2}\right)$$

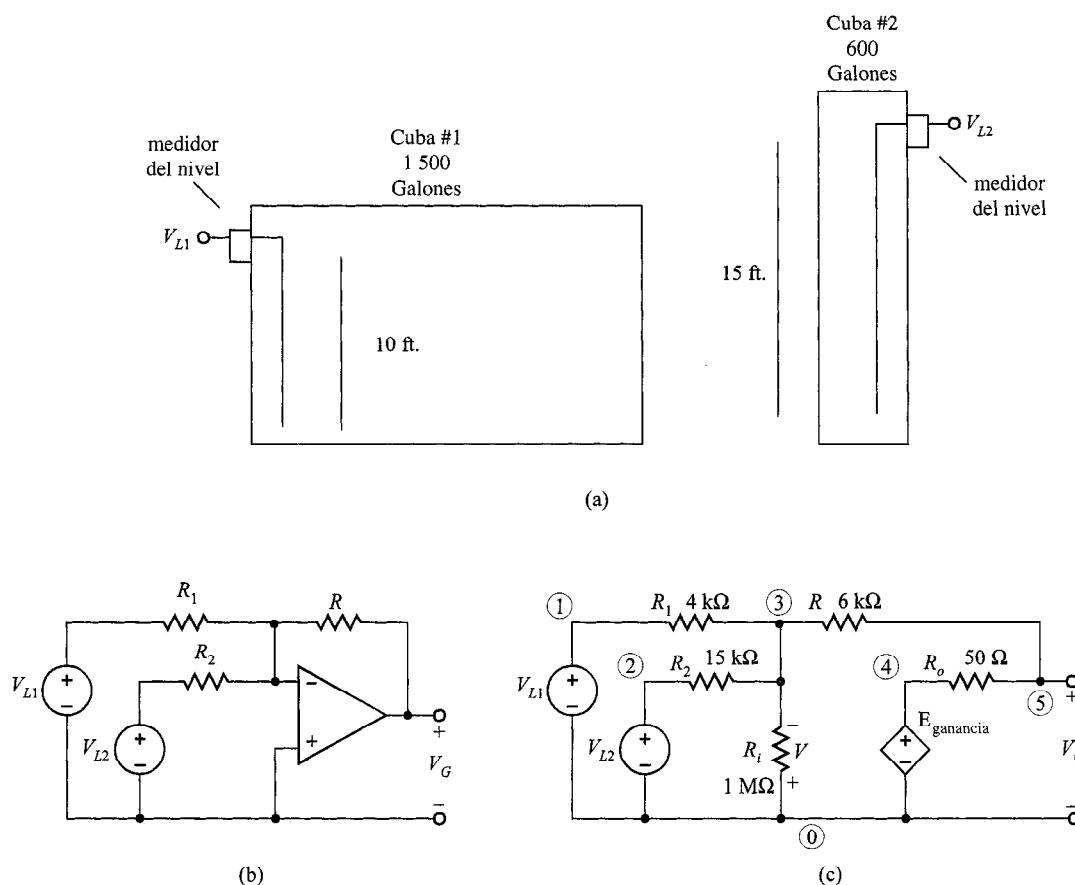


FIGURA 5.19 Diagrama de bloques y redes para el sensor del nivel de leche.

El diseño requiere razones de resistencias de $R/R_1 = 1.5$ y $R/R_2 = 0.4$. Ya que una resistencia puede elegirse arbitrariamente, sea $R = 6\text{ k}\Omega$. Esto da

$$R_1 = R/1.5 = 4\text{ k}\Omega \quad y \quad R_2 = R/0.4 = 15\text{ k}\Omega$$

El circuito del PSPICE se muestra en la figura 5.19c. A fin de verificar la exactitud de la red, arbitrariamente hacemos $V_{L1} = -2\text{ V}$ y $V_{L2} = -8\text{ V}$. El voltaje de salida esperado es 6.2 V. El programa del PSPICE es

```
Milk Level Sensor
VL1 1 0 dc -2V
VL2 2 0 dc -8V
R1 1 3 4k
R2 2 3 15k
R 3 5 6k
Ri 3 0 1meg
Ro 4 5 50
Egain 4 0 0 3 100k
.end
```

Los siguientes resultados de la simulación muestran que la salida es realmente 6.1998 V. Nuestros cálculos del amp-op ideal y de la simulación están en excelente acuerdo.

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	-2.0000	(2)	-8.0000	(3)	-62.51E-06	(4)	6.2515
(5)	6.1998						

E J E M P L O 5.22

La salida de un termómetro electrónico es un voltaje V_C , que es proporcional a la temperatura en °C. Diseñemos un circuito para convertir V_C a un voltaje que sea proporcional a la temperatura en °F, y verifiquemos los resultados usando el PSPICE. Los amps-op disponibles tienen $R_i = 1 \text{ M}\Omega$, $R_o = 50 \Omega$ y $A = 10^5$.

SOLUCIÓN La relación entre la temperatura en grados Fahrenheit y Celsius es

$$^{\circ}\text{F} = (9/5) (^{\circ}\text{C}) + 32$$

Una vez más el formato de la ecuación sugiere el uso de una configuración de amp-op sumador con dos entradas. Como se indica en el ejemplo previo, la salida de tal configuración será negativa. Por tanto, podemos seguir este amp-op sumador con un amp-op inversor básico para obtener la ecuación deseada.

El circuito debe amplificar por 9/5 y desplazar en 32. La figura 5.20a muestra un circuito que hace esto. La fuente de voltaje V_C modela el termómetro que produce el voltaje relacionado con Celsius, y V_{bias} contribuirá con el corrimiento necesario.

Sobre la base del trabajo del ejemplo 5.21, el voltaje de salida del primer amp-op es

$$V_{O1} = -V_C \frac{R}{R_1} - V_{\text{bias}} \frac{R}{R_2}$$

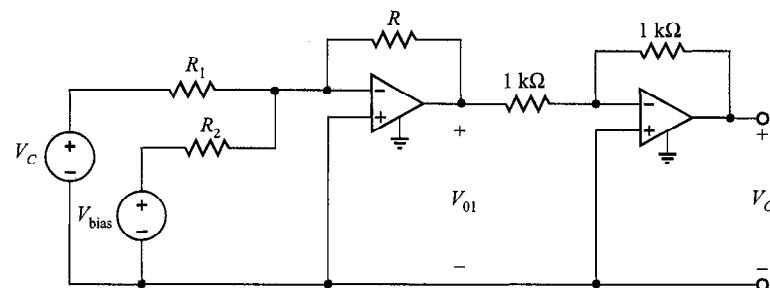
El segundo amp-op tiene una ganancia de -1 ; por tanto, el voltaje de salida para la red es

$$V_O = V_{O1} \frac{R}{R_1} + V_{\text{bias}} \frac{R}{R_2}$$

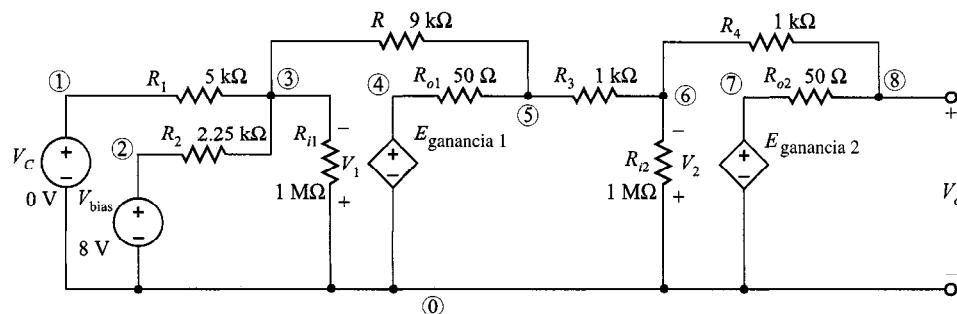
Obviamente tenemos más variables que ecuaciones y podemos hacer algunas elecciones. Comparando esta expresión con la relación Fahrenheit-Celsius vemos que

$$\left(\frac{R}{R_1}\right) = \frac{9}{5} \text{ y } V_{\text{bias}} \left(\frac{R}{R_2}\right) = 32$$

Si hacemos $V_{\text{bias}} = 8 \text{ V}$ y $R = 9 \text{ k}\Omega$, entonces R_1 es $5 \text{ k}\Omega$ y R_2 es $2.25 \text{ k}\Omega$.



(a)



(b)

FIGURA 5.20 Convertidor de grados Celsius a Fahrenheit.

El circuito de PSPICE se muestra en la figura 5.20b con $V_C = 0$ V. El programa del PSPICE es

```
Celsius to Fahrenheit Converter
Vc 1 0 dc 0
Vbias 2 0 dc 8
R1 1 3 5k
R2 3 2 2.25k
R 3 5 9k
Ri1 3 0 1meg
Ro1 4 5 50
Egain1 4 0 0 3 100k
R3 5 6 1k
R4 6 8 1k
Ri2 6 0 1meg
Ro2 7 8 50
Egain2 7 0 0 6 100k
.end
```

Ajustando V_C para que 0 V corresponda a 0 °C. La siguiente salida de la simulación predice un voltaje de salida de 31.997 V. Esto está de acuerdo con la equivalencia

Fahrenheit equivalente a 32 °F.

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	0.0000	(2)	8.0000	(3)	337.8E-06	(4)	-33.7750
(5)	-31.9980	(6)	-336.0E-06	(7)	33.5970	(8)	31.9970

5.6 Resumen

En este capítulo hemos introducido el programa de análisis asistido por computadora PSPICE. Hemos, además, presentado y explicado varios comandos usados para introducir datos, describir el tipo de solución deseada, especificar la salida y aplicado el PSPICE a circuitos que contienen fuentes independientes, fuentes dependientes y amps-op. Finalmente, empleamos el PSPICE en problemas orientados a las aplicaciones y demostrado su uso en el diseño de circuitos.

Puntos clave

- El programa PSPICE consiste en las siguientes cinco categorías de comandos:
 1. Comandos de título y comentarios.
 2. Comandos de datos.
 3. Comandos de control de la solución.
 4. Comandos de especificación de la salida.
 5. Comando para finalizar.
- Pistas útiles al programar en PSPICE:
 1. La primera línea disponible de un programa se toma como el título. Si se salta una línea antes de escribir el título, éste será un comando de datos y el programa no correrá.
 2. El número “cero” y la letra “o” son caracteres diferentes. Si inadvertidamente escribe “o” donde debe ser “cero”, sus programas pueden no correr y experimentarán gran dificultad para localizar el error.
 3. La pérdida de comprensión de las convenciones de la dirección de referencia de corriente y voltaje ocasionan más errores al programar y en la interpretación de los resultados que lo que hace otro factor.
- PSPICE es una herramienta muy útil al analizar y probar circuitos electrónicos.
- PSPICE puede ser un elemento importante en el diseño de circuitos.

Problemas

- 5.1. Resuelva el problema 3.2 usando PSPICE.
- 5.2. Resuelva el problema 3.5 usando PSPICE.
- 5.3. Use PSPICE para resolver el problema 3.7.
- 5.4. Encuentre el voltaje de salida en la red de la figura P3.8 utilizando PSPICE.

- 5.5. Resuelva el problema 3.9 usando PSPICE.
- 5.6. Encuentre el voltaje de salida en el circuito de la figura P3.12 usando PSPICE.
- 5.7. Resuelva el problema 3.14 usando PSPICE.
- 5.8. Resuelva el problema 3.15 usando PSPICE.
- 5.9. Encuentre el voltaje de salida en la red de la figura P3.16 usando PSPICE.

5.10. Use PSPICE para encontrar el voltaje de salida en el circuito de la figura P3.18.

5.11. Resuelva el problema 3.32 usando PSPICE.

5.12. Resuelva el problema 3.33 usando PSPICE.

5.13. Resuelva el problema 3.35 usando PSPICE.

5.14. Resuelva el problema 3.36 usando PSPICE.

5.15. Encuentre el voltaje de salida en la red de la figura P3.37 usando PSPICE.

5.16. Resuelva el problema 3.38 usando PSPICE.

5.17. Encuentre el voltaje de salida en el circuito de la figura P3.39 usando PSPICE.

5.18. Encuentre el voltaje de salida en la red de la figura P3.40 usando PSPICE.

5.19. Use PSPICE para encontrar el voltaje de salida en el circuito de la figura P3.41.

5.20. Resuelva el problema 3.42 usando PSPICE.

5.21. Encuentre el voltaje de salida en el circuito de la figura P3.20 usando PSPICE.

5.22. Encuentre el voltaje de salida en el circuito de la figura P3.21 usando PSPICE.

5.23. Use PSPICE para encontrar el voltaje de salida en el circuito de la figura P3.43.

5.24. Encuentre el voltaje de salida en el circuito de la figura P3.44 usando PSPICE.

5.25. Use PSPICE para encontrar el voltaje de salida en el circuito de la figura P3.45.

5.26. Resuelva el problema 3.22 usando PSPICE.

5.27. Encuentre el voltaje de salida en el circuito de la figura P3.23 usando PSPICE.

5.28. Use PSPICE para encontrar el voltaje de salida en el circuito de la figura P3.24.

5.29. Encuentre el voltaje de salida en el circuito de la figura P3.26 usando PSPICE.

5.30. Resuelva el problema 3.27 usando PSPICE.

5.31. Encuentre el voltaje de salida en la red de la figura P3.46 usando PSPICE.

5.32. Use PSPICE para encontrar el voltaje de salida en el circuito de la figura P3.47.

5.33. Resuelva el problema 3.29 usando PSPICE.

5.34. Dada la red de la figura P5.34, calcule V_o y la ganancia del circuito.

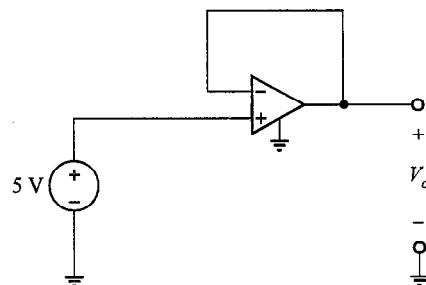


FIGURA P5.34

5.35. Calcule I_1 , I_2 y V_o en la red que se muestra en la figura P5.35.

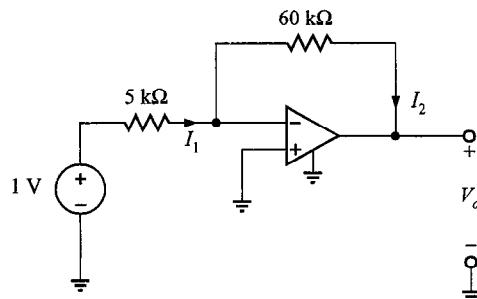


FIGURA P5.35

5.36. La red de la figura P5.36 es un amplificador diferencial. Calcule el voltaje V_o .

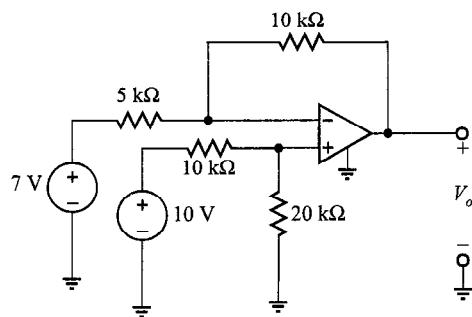


FIGURA P5.36

5.37. Calcule V_o en la red de la figura P5.37.

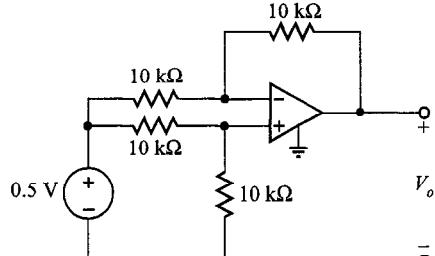


FIGURA P5.37

5.38. Calcule V_o en la red de la figura P5.38.

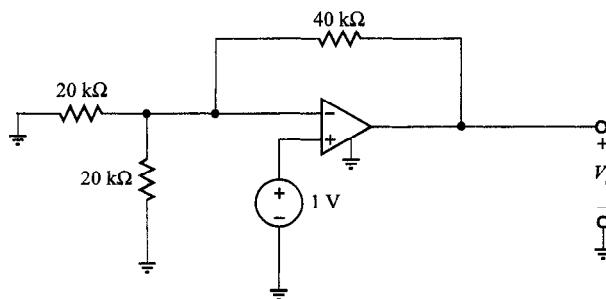


FIGURA P5.38

5.39. Dada la red de la figura P5.39, calcule V_1 , V_o , la ganancia y las resistencias de entrada y de salida.

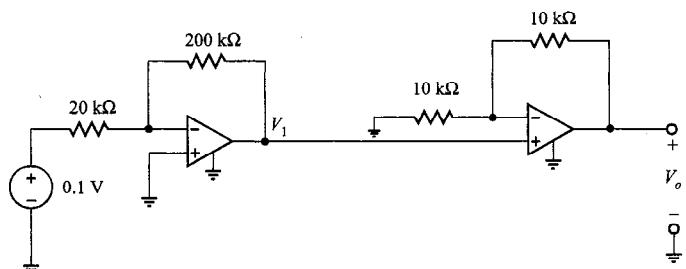


FIGURA P5.39

5.40. Use el comando .DC y la utilería .PROBE de PSPICE para producir un gráfico de V_o contra V_1 para el circuito de la figura P5.40. Haga variar V_1 entre 0 V y 12 V. ¿Cuál es la ganancia?

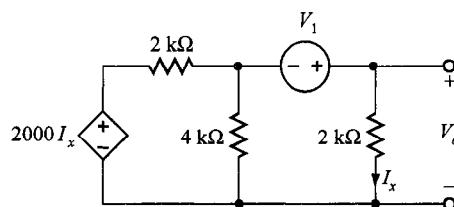


FIGURA P5.40

5.41. Usando el comando .DC y la utilería .PROBE de PSPICE, produzca un gráfico de V_o contra V_S en el circuito de amp-op de la figura P5.41. Use el modelo de amp-op de la figura 5.13b. Haga variar V_S entre -2 V y 2 V. ¿Cuál es la ganancia y la compensación?

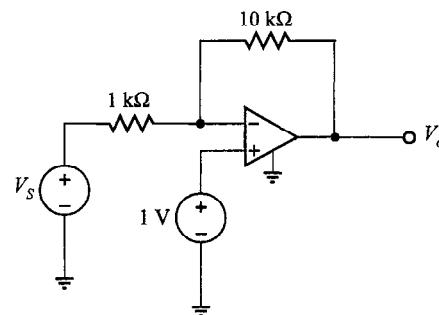


FIGURA P5.41

5.42. Muestre por análisis y por verificación con PSPICE que el circuito de la figura P5.42 lleva a cabo la conversión de temperatura en grados Celsius a Fahrenheit descrita en el ejemplo 5.22. Con propósitos de simulación use un modelo de amp-op con $R_i = 1 \text{ M}\Omega$, $R_o = 50 \Omega$ y $A = 10^5$. ¿Qué valores para V_{bias} y para las resistencias utilizó?

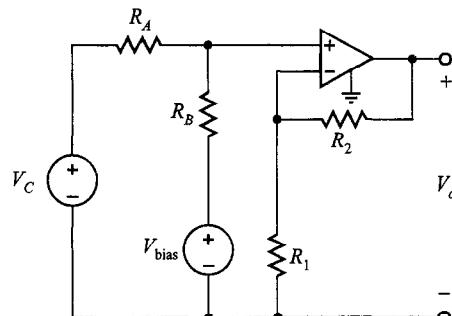
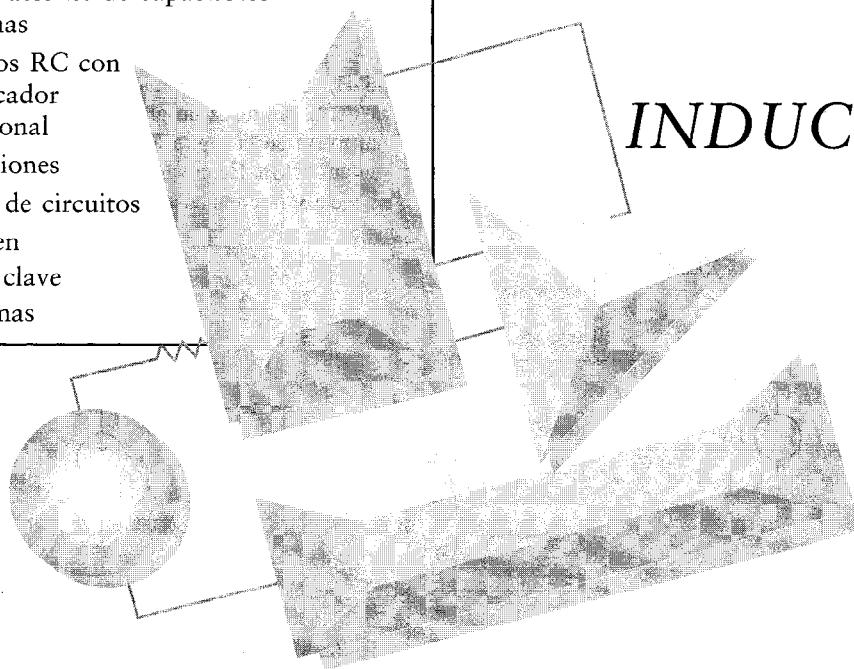


FIGURA P5.42

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

- 6.1** Capacitores
- 6.2** Bobinas
- 6.3** Características fundamentales de capacitores/bobinas
- 6.4** Combinaciones de capacitores y bobinas
- 6.5** Circuitos RC con amplificador operacional
- 6.6** Aplicaciones
- 6.7** Diseño de circuitos
- 6.8** Resumen
Puntos clave
Problemas

CAPÍTULO
6**CAPACITANCIA**
e
INDUCTANCIA

¿Alguna vez se ha preguntado cómo una diminuta batería de cámara es capaz de producir un destello cegador o cómo una “pistola aturdidora” de mano puede descargar 50 000 V? La respuesta es almacenamiento de energía, y vamos a presentar en este capítulo dos elementos que poseen esta propiedad: el capacitor y la bobina. Tanto los capacitores como las bobinas son elementos lineales; sin embargo, a diferencia de la resistencia, sus características terminales se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales. Otra característica distintiva de estos elementos es su capacidad de absorber energía del circuito, almacenarla temporalmente y regresarla después. Los elementos que poseen esta capacidad de almacenamiento de energía se denominan simplemente *elementos de almacenamiento*.

Los capacitores son capaces de almacenar energía cuando un voltaje está presente a través del elemento. La energía realmente se almacena en un campo eléctrico no diferente del que se produce al deslizarse

a lo largo del asiento de un carro en un seco día de invierno. De manera inversa, las bobinas son capaces de almacenar energía cuando una corriente pasa a lo largo de ellas haciendo que se forme un campo magnético. Este fenómeno puede demostrarse colocando una brújula en la vecindad de una corriente. La corriente ocasiona un campo magnético cuya energía desvía la aguja de la brújula.

También se introduce un circuito muy importante, que emplea un capacitor en un papel vital. Este circuito, como amp-op integrador, produce un voltaje de salida que es proporcional a la integral del voltaje de entrada. La importancia de este circuito está en que cualquier sistema, por ejemplo eléctrico, mecánico, hidráulico, biológico, social, económico, etc., que se pueda describir mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes puede modelarse por una red que consista en amps-op integradores. De esta forma, sistemas com-

plejos y costosos pueden probarse con facilidad y económico antes de su construcción e implementación.

Finalmente, examinaremos circuitos donde normalmente se hallan capacitores y bobinas, o que pueden usarse en el diseño de circuitos. ■

6.1 Capacitores

Un capacitor es un elemento de circuito que consiste en dos superficies conductoras separadas por un material no conductor, o dieléctrico. Un capacitor simplificado y su símbolo eléctrico se muestran en la figura 6.1.

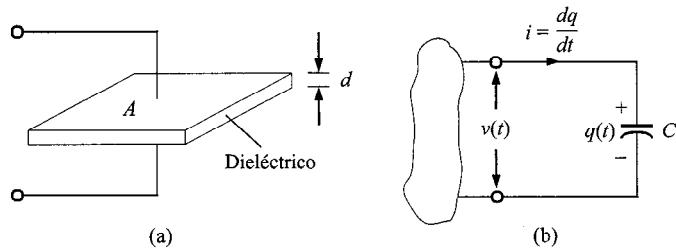


FIGURA 6.1 Capacitor y su símbolo eléctrico.

Hay muchas formas diferentes de capacitores y pueden clasificarse por el tipo de material dieléctrico que se usa entre las placas conductoras. Aunque cualquier buen aislador puede servir como dieléctrico, cada tipo tiene características que lo hacen más apropiado en aplicaciones particulares.

Para aplicaciones generales en circuitos electrónicos (por ejemplo, acoplamiento entre etapas de amplificación), el material dieléctrico puede ser aire, vacío, papel impregnado con aceite o cera, mylar, poliestireno, mica, vidrio o cerámica.

Los capacitores con dieléctrico de cerámica construidos con titanatos de bario tienen una razón de capacitancia a volumen grande debido a su alta constante dieléctrica. Los capacitores con dieléctrico de mica, vidrio y cerámica operarán satisfactoriamente a altas frecuencias.

Los capacitores electrolíticos de aluminio, que constan de un par de placas de aluminio separadas por un electrolito pastoso de bórax humedecido, pueden proporcionar valores de capacitancia altos en pequeños volúmenes. Se suelen utilizar para filtrado, desviación y acoplamiento, y en aplicaciones de suministro de potencia y arranque de motores. Los capacitores de electrolito de tantalio tienen pérdidas más bajas y características más estables que los condensadores electrolíticos de aluminio. La figura 6.2 muestra una variedad de capacitores típicos.

Además de esos capacitores, que deliberadamente insertamos en una red para aplicaciones específicas, la capacitancia parásita está presente cuando coincide una diferencia de potencial entre dos materiales conductores separados por un dieléctrico. Debido a que esta capacitancia parásita puede ocasionar un acoplamiento indeseado entre circuitos, se debe tener cuidado extremo en la disposición de los sistemas electrónicos sobre las tarjetas de circuitos impresos.

La capacitancia se mide en coulombs por volt o faradios. La unidad *faradio* (F) se llama así por Michael Faraday, un famoso físico inglés. Los condensadores pueden ser fijos o variables, y típicamente van de miles de microfaradios (μF) a unos cuantos picofaradios (pF).

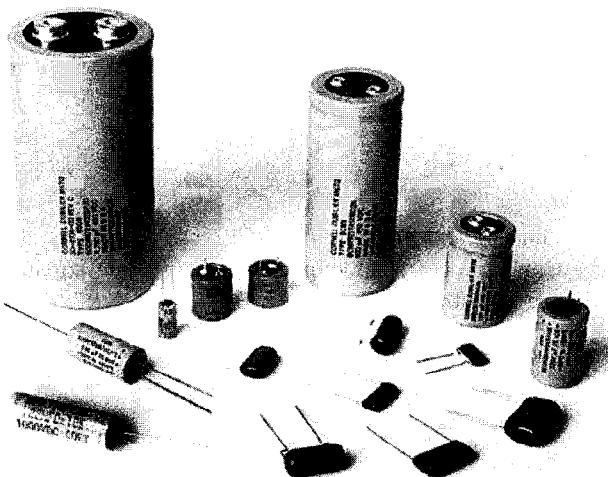


FIGURA 6.2 Algunos capacitores típicos. (Cortesía de Cornell Dubilier.)

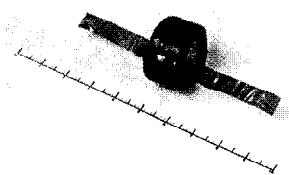


FIGURA 6.3
Capacitor de
55 faradios, 500 joules
y una regla
de 10 pulgadas
para comparación.

Sin embargo, la tecnología de los condensadores, inicialmente impulsada por el moderno interés en los vehículos eléctricos, está cambiando rápidamente. Por ejemplo, el condensador de la fotografía de la figura 6.3 se diseñó y construyó en el Instituto de Potencia Espacial en la Universidad de Auburn, a fin de lograr capacitores de alta energía y alta densidad de potencia para su aplicación en vehículos eléctricos y espaciales. Este capacitor, construido especialmente, está clasificado a 55 F, 500 joules. Es interesante calcular las dimensiones de un capacitor equivalente simple que conste de dos placas paralelas, cada una de área A , separadas por una distancia d , como se muestra en la figura 6.1. Aprendimos en la física básica que la capacitancia de dos placas paralelas de área A , separadas por la distancia d , es

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

donde ϵ_0 , la permisividad del espacio libre, es $8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$. Si suponemos que las placas están separadas por una distancia en aire del grosor de una hoja de papel impregnado con aceite, que es aproximadamente de 1.016×10^{-4} metros, entonces

$$55 = \frac{(8.85 \times 10^{-12})A}{1.016 \times 10^{-4}}$$

$$A = 6.3141 \times 10^8 \text{ m}^2$$

y como 1 milla cuadrada es igual a 2.59×10^6 metros cuadrados, el área es

$$A \cong 244 \text{ millas cuadradas}$$

la cual es el área de ¡una ciudad de tamaño medio! Parecería ahora que el capacitor de la fotografía es mucho más impresionante que lo que originalmente daba la impresión. Este capacitor se construye realmente usando múltiples capas de una combinación de carbón prensado y fibras metálicas, que son tratadas con calor para que se

adhieran a la hoja metálica. Las hojas metálicas están conectadas para formar una pila de 18 celdas, dentro de esta geometría. Literalmente hay millones de piezas de carbón y fibras metálicas empleadas para obtener el área de la superficie requerida.

Suponga ahora que se conecta una fuente al capacitor que se muestra en la figura 6.1, entonces se transferirán cargas positivas a una placa y cargas negativas a la otra. La carga en el capacitor es proporcional al voltaje a través de éste como

$$q = Cv \quad (6.1)$$

donde C es el factor de proporcionalidad conocido como la capacitancia del elemento en faradios.

El diferencial de carga entre las placas crea un campo eléctrico que almacena energía. Debido a la presencia del dieléctrico, la corriente de conducción que fluye en los alambres que conectan el capacitor al resto del circuito no puede fluir internamente entre las placas. Sin embargo, vía la teoría de campo electromagnético se puede mostrar que esta corriente de conducción es igual a la corriente de desplazamiento que fluye entre las placas del capacitor y está presente siempre que un campo eléctrico o voltaje varía con el tiempo.

Nuestro interés primordial está en las características terminales de corriente-voltaje del capacitor. Como la corriente es

$$i = \frac{dq}{dt}$$

entonces para un capacitor

$$i = \frac{d}{dt} Cv$$

la cual para capacitancia constante es

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (6.2)$$

La ecuación (6.2) puede reescribirse como

$$dv = \frac{1}{C} i dt$$

Integrando ahora esta expresión desde $t = -\infty$ hasta algún tiempo t y suponiendo $v(-\infty) = 0$ se obtiene

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(x) dx \quad (6.3)$$

donde $v(t)$ indica la dependencia con respecto al tiempo del voltaje. La ecuación (6.3) se puede expresar como dos integrales, por lo que

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(x) dx + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx \quad (6.4)$$

$$= v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx$$

donde $v(t_0)$ es el voltaje debido a la carga que se acumula en el capacitor desde el tiempo $t = -\infty$ hasta el tiempo $t = t_0$.

La energía almacenada en el capacitor puede derivarse de la potencia que se entrega al elemento. Esta potencia está dada por la expresión

$$p(t) = v(t)i(t) = Cv(t) \frac{dv(t)}{dt} \quad (6.5)$$

y de aquí que la energía almacenada en el campo eléctrico es

$$\begin{aligned} w_c(t) &= \int_{-\infty}^t Cv(x) \frac{dv(x)}{dx} dx = C \int_{-\infty}^t v(x) \frac{dv(x)}{dx} dx \\ &= C \int_{v(-\infty)}^{v(t)} v(x) dv(x) = \frac{1}{2} Cv^2(x) \Big|_{v(-\infty)}^{v(t)} \\ &= \frac{1}{2} Cv^2(t) \text{ joules} \end{aligned} \quad (6.6)$$

ya que $v(t = -\infty) = 0$. La expresión para la energía también puede escribirse usando la ecuación (6.1) como

$$w_c(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} \quad (6.7)$$

Las ecuaciones (6.6) y (6.7) representan la energía almacenada por el capacitor que, a su vez, es igual al trabajo realizado por la fuente para cargar el capacitor.

La polaridad del voltaje a través de un capacitor que está siendo cargado se muestra en la figura 6.1b. En el caso ideal, el capacitor mantendrá la carga por un periodo de tiempo indefinido si se elimina la fuente. Si posteriormente se conecta al capacitor un dispositivo que absorba energía (por ejemplo, un foco de flash), una corriente de descarga fluirá desde el capacitor y, por tanto, el capacitor suministrará su energía almacenada al dispositivo.

EJEMPLO 6.1

Si la carga acumulada en dos conductores paralelos cargados a 12 V es 600 pC, ¿cuál es la capacitancia de los conductores paralelos?

SOLUCIÓN Usando la ecuación (6.1), encontramos que

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{(600)(10^{-12})}{12} = 50 \text{ pF}$$

EJEMPLO 6.2

El voltaje a través de un capacitor de $5 \mu\text{F}$ tiene la forma de onda que se muestra en la figura 6.4a. Determine la forma de onda de la corriente.

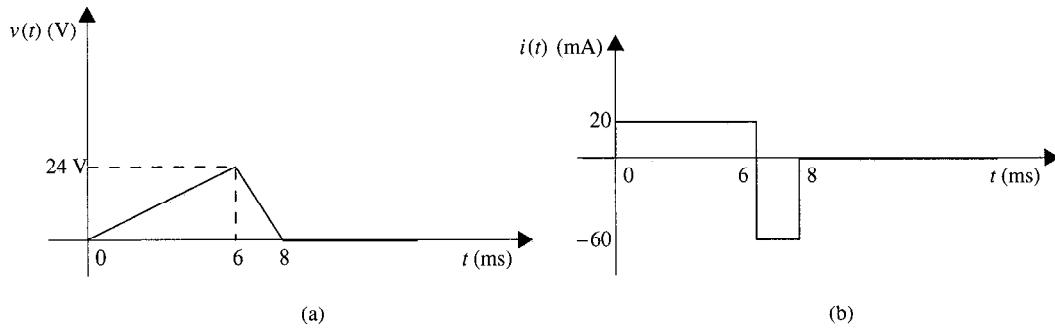


FIGURA 6.4 Formas de onda de voltaje y corriente para un capacitor de $5 \mu\text{F}$.

S O L U C I Ó N Note que

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{24}{6 \times 10^{-3}} t & 0 \leq t \leq 6 \text{ ms} \\ &= \frac{-24}{2 \times 10^{-3}} t + 96 & 6 \leq t < 8 \text{ ms} \\ &= 0 & 8 \text{ ms} \leq t \end{aligned}$$

Usando la ecuación (6.2), encontramos que

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv(t)}{dt} \\ &= 5 \times 10^{-6}(4 \times 10^3) & 0 \leq t \leq 6 \text{ ms} \\ &= 20 \text{ mA} & 0 \leq t \leq 6 \text{ ms} \\ i(t) &= 5 \times 10^{-6}(-12 \times 10^3) & 6 \leq t \leq 8 \text{ ms} \\ &= -60 \text{ mA} & 6 \leq t < 8 \text{ ms} \end{aligned}$$

e

$$i(t) = 0 \quad 8 \text{ ms} \leq t$$

Por tanto, la forma de onda de la corriente es como se muestra en la figura 6.4b e $i(t) = 0$ para $t > 8$ ms.

E J E M P L O 6.3

Determine la energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor del ejemplo 6.2 a $t = 6$ ms.

S O L U C I Ó N Utilizando la ecuación (6.6), tenemos

$$w(t) = \frac{1}{2} Cv^2(t)$$

En $t = 6 \text{ ms}$,

$$\begin{aligned} w(6 \text{ ms}) &= \frac{1}{2} (5 \times 10^{-6}) (24)^2 \\ &= 1440 \mu\text{J} \end{aligned}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO**Resp.: 0.05 V.**

- D6.1** Un capacitor de $10 \mu\text{F}$ tiene una carga acumulada de 500 nC . Determine el voltaje a través del capacitor.

EJEMPLO 6.4

La corriente en un capacitor de $4 \mu\text{F}$ inicialmente descargado se muestra en la figura 6.5a. Derivemos las formas de onda para el voltaje, potencia y energía y calculemos la energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor en $t = 2 \text{ ms}$.

SOLUCIÓN Las ecuaciones para la forma de onda de la corriente en el intervalo específico de tiempo son

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{16 \times 10^{-6}t}{2 \times 10^{-3}} & 0 \leq t \leq 2 \text{ ms} \\ &= -8 \times 10^{-6} & 2 \text{ ms} \leq t \leq 4 \text{ ms} \\ &= 0 & 4 \text{ ms} < t \end{aligned}$$

Como $v(0) = 0$, la ecuación para $v(t)$ en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 2 \text{ ms}$ es

$$v(t) = \frac{1}{(4)(10^{-6})} \int_0^t 8(10^{-3}) x dx = 10^3 t^2$$

Y de aquí,

$$v(2 \text{ ms}) = 10^3 (2 \times 10^{-3})^2 = 4 \text{ mV}$$

En el intervalo de tiempo $2 \text{ ms} \leq t \leq 4 \text{ ms}$,

$$v(t) = \frac{1}{(4)(10^{-6})} \int_{2(10^{-3})}^t -8(10^{-6}) dx + (4)(10^{-3}) = -2t + 8 \times 10^{-3}$$

La forma de onda para el voltaje se muestra en la figura 6.5b.

Como la potencia es $p(t) = v(t)i(t)$, la expresión para la potencia en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 2 \text{ ms}$ es $p(t) = 8t^3$. En el intervalo de tiempo $2 \text{ ms} \leq t \leq 4 \text{ ms}$, la ecuación para la potencia es

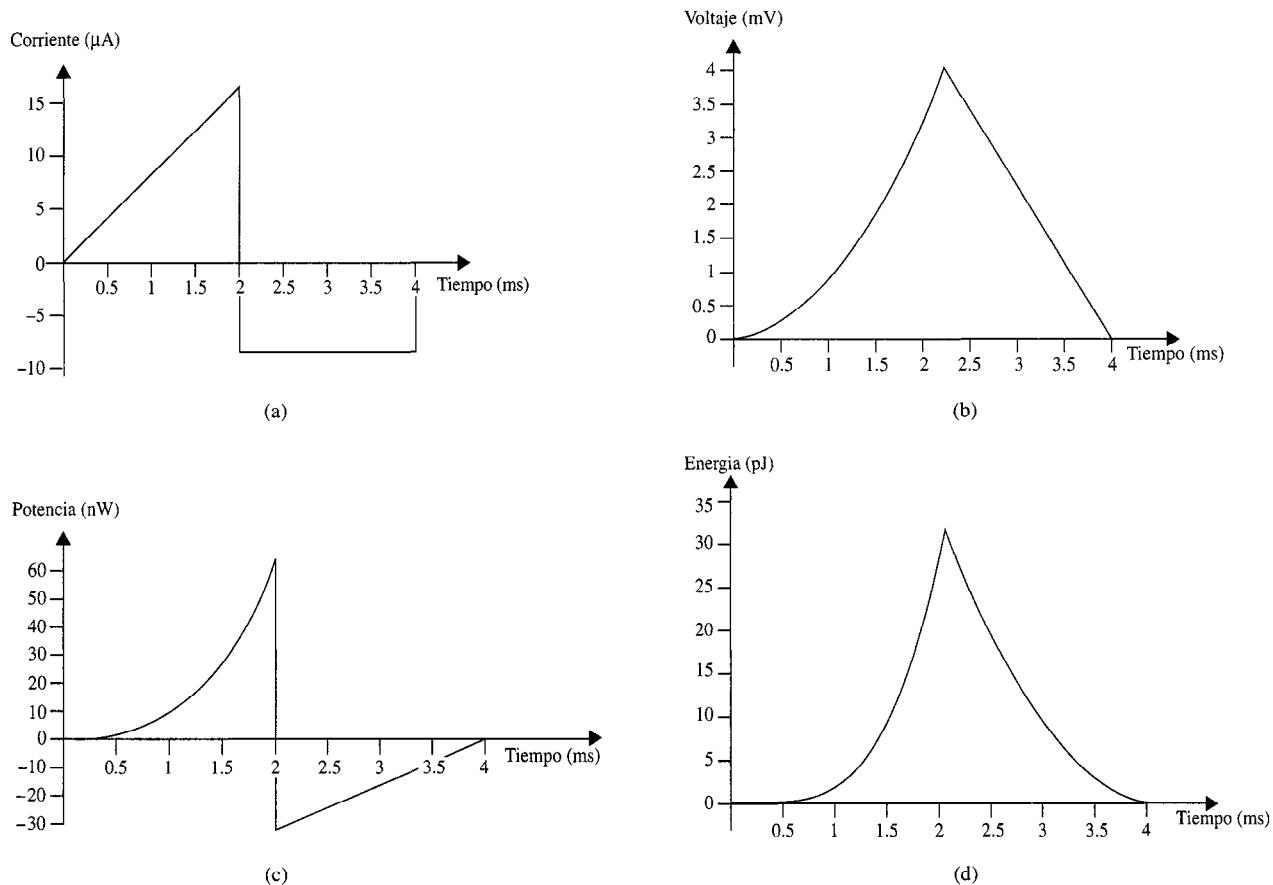


FIGURA 6.5 Formas de onda utilizadas en el ejemplo 6.4.

$$p(t) = -(8)(10^{-6})(-2t + 8 \times 10^{-3})$$

$$= 16(10^{-6})t - 64(10^{-9})$$

La forma de onda de la potencia se muestra en la figura 6.5c. Advierta que durante el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 2$ ms, el capacitor absorbe energía y durante el intervalo $2 \text{ ms} \leq t \leq 4$ ms, éste entrega energía.

La energía está dada por la expresión

$$w(t) = \int_{t_0}^t p(x)dx + w(t_0)$$

En el intervalo $0 \leq t \leq 2$ ms,

$$w(t) = \int_0^t 8x^3 dx = 2t^4$$

De aquí,

$$w(2 \text{ ms}) = 32 \text{ pJ}$$

En el intervalo de tiempo $2 \leq t \leq 4 \text{ ms}$,

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{2 \times 10^{-3}}^t [(16 \times 10^{-6})x - (64 \times 10^{-9})]dx + 32 \times 10^{-12} \\ &= [(8 \times 10^{-6})x^2 - (64 \times 10^{-9})x]_{2 \times 10^{-3}}^t + 32 \times 10^{-12} \\ &= (8 \times 10^{-6})t^2 - (64 \times 10^{-9})t + 128 \times 10^{-12} \end{aligned}$$

De esta expresión encontramos que $w(2 \text{ ms}) = 32 \text{ pJ}$ y $w(4 \text{ ms}) = 0$. La forma de onda de la energía se muestra en la figura 6.5d.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D6.2 El voltaje a través de un capacitor de $2 \mu\text{F}$ se muestra en la figura D6.2. Determine la forma de onda para la corriente del capacitor.

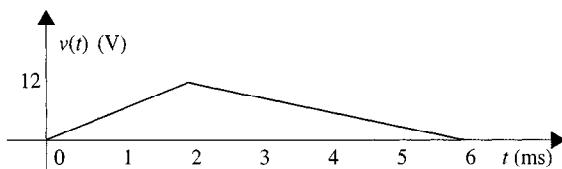
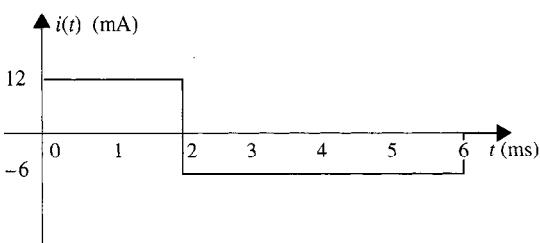


FIGURA D6.2

Resp.:



D6.3 Calcule la energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor del ejercicio de entrenamiento D6.2 en $t = 2 \text{ ms}$.

Resp.: $w = 144 \mu\text{J}$.

6.2 Inductores

Una bobina es un elemento de circuito que consiste en un alambre conductor usualmente en forma de rollo o carrete. En la figura 6.6 se muestran dos bobinas típicas y sus símbolos eléctricos. Las bobinas se suelen caracterizar según el tipo de núcleo en el que están enrolladas. Por ejemplo, el material del núcleo puede ser aire o cualquier material no magnético, hierro o ferrita. Las bobinas hechas con aire o con materiales no magnéticos se usan ampliamente en circuitos de radio, televisión y filtros. Las bobinas con núcleo de hierro se usan en suministros de potencia eléctrica y en filtros. Las bobinas con núcleo de ferrita se utilizan ampliamente en aplicaciones de alta frecuencia. Note que, en contraste con el núcleo magnético que confina el flujo (como se muestra en la

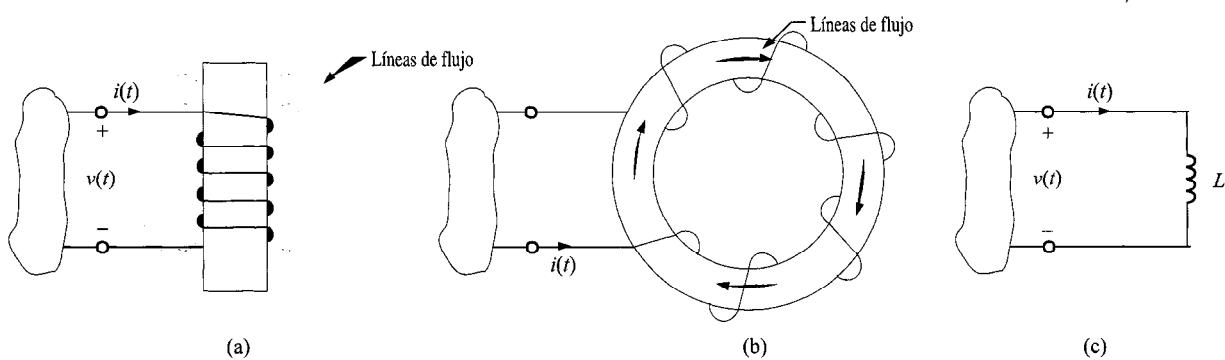


FIGURA 6.6 Dos bobinas y sus símbolos eléctricos.

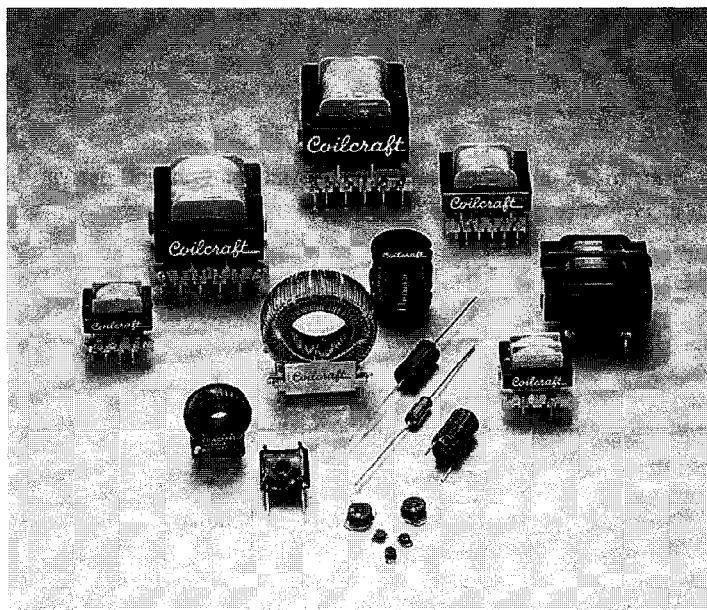


FIGURA 6.7 Algunas bobinas típicas. (Cortesía de Coilcraft.)

figura 6.6b), las líneas de flujo para bobinas no magnéticas se extienden más allá de la misma bobina, como se ilustra en la figura 6.6a. Como la capacitancia parásita, la inductancia parásita puede proceder de cualquier elemento que conduzca corriente rodeado por líneas de flujo. La figura 6.7 muestra una variedad de bobinas típicas.

Desde un punto de vista histórico, los pasos que condujeron al modelo matemático que empleamos para representar la bobina fueron los siguientes: primero se mostró que un conductor de corriente podría producir un campo magnético. Después se encontró que el campo magnético y la corriente que lo producía estaban relacionados linealmente. Finalmente, se demostró que un campo magnético cambiante producía un voltaje que era proporcional a la razón con respecto al tiempo del cambio de la corriente que

producía el campo magnético; es decir,

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (6.8)$$

La constante de proporcionalidad L se llama inductancia y se mide con la unidad de henry, llamada así en honor al inventor norteamericano Joseph Henry, quien descubriera la relación. Como se ve en la ecuación (6.8), 1 henry (H) es dimensionalmente igual a 1 volt-segundo por amperio.

Siguiendo el desarrollo de las ecuaciones matemáticas para el condensador, encontramos que la expresión para la corriente en una bobina es

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(x) dx \quad (6.9)$$

la cual también puede escribirse como

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(x) dx \quad (6.10)$$

La potencia transmitida a la bobina puede usarse para hacer derivar la energía almacenada en el elemento. Esta potencia es igual a

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= \left[L \frac{di(t)}{dt} \right] i(t) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Por tanto, la energía almacenada en el campo magnético es

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t \left[L \frac{di(x)}{dx} \right] i(t) dx$$

Siguiendo el desarrollo de la ecuación (6.6), obtenemos

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \text{ joules} \quad (6.12)$$

La bobina, como la resistencia y el capacitor, es un elemento pasivo. La polaridad del voltaje a través de la bobina se muestra en la figura 6.6.

Las bobinas prácticas suelen estar entre unos pocos microhenrys a decenas de henrys. Desde un punto de vista del diseño de circuitos es importante notar que las bobinas no pueden fabricarse fácilmente en un chip de circuito integrado, y por tanto el diseño de chips emplea solamente, de ordinario, dispositivos electrónicos activos, resistencias y capacitores, que pueden fabricarse fácilmente en la forma de microcircuito.

EJEMPLO 6.5

La corriente en una bobina de 10 mH tiene la forma de onda que se muestra en la figura 6.8a. Determine la forma de onda del voltaje.

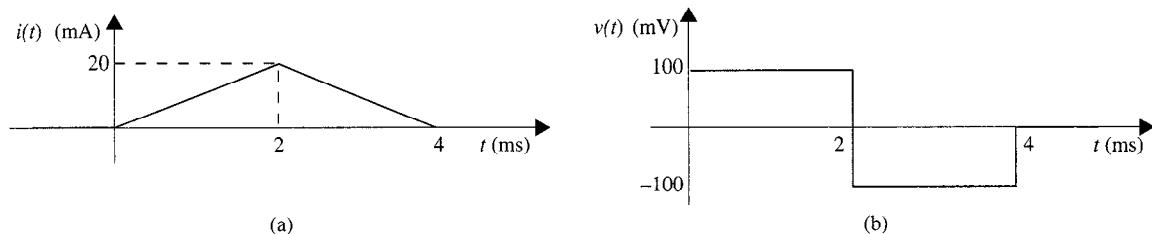


FIGURA 6.8 Formas de onda de la corriente y del voltaje de una bobina de 10 mH.

SOLUCIÓN Usando la ecuación (6.8) y notando que

$$i(t) = \frac{20 \times 10^{-3}t}{2 \times 10^{-3}} \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ ms}$$

$$i(t) = \frac{-20 \times 10^{-3}t}{2 \times 10^{-3}} + 40 \times 10^{-3} \quad 2 \leq t \leq 4 \text{ ms}$$

e

$$i(t) = 0 \quad 4 \text{ ms} < t$$

encontramos que

$$\begin{aligned} v(t) &= (10 \times 10^{-3}) \frac{20 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ ms} \\ &= 100 \text{ mV} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v(t) &= (10 \times 10^{-3}) \frac{-20 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} \quad 2 \leq t \leq 4 \text{ ms} \\ &= -100 \text{ mV} \end{aligned}$$

y $v(t) = 0$ para $t > 4$ ms. Por tanto, la forma de onda del voltaje se muestra en la figura 6.8b.

EJEMPLO 6.6

La corriente en una bobina de 2 mH es

$$i(t) = 2 \operatorname{sen} 377t \text{ A}$$

Determine el voltaje a través de la bobina y la energía almacenada en la bobina.

SOLUCIÓN De la ecuación (6.8), tenemos

$$\begin{aligned}
 v(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \\
 &= (2 \times 10^{-3}) \frac{d}{dt} (2 \sin 377t) \\
 &= 1.508 \cos 377t \text{ V}
 \end{aligned}$$

y de la ecuación (6.12),

$$\begin{aligned}
 w_L(t) &= \frac{1}{2} L i^2(t) \\
 &= \frac{1}{2} (2 \times 10^{-3}) (2 \sin 377t)^2 \\
 &= 0.004 \sin^2 377t \text{ J}
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 6.7

El voltaje a través de una bobina de 200 mH está dado por la expresión

$$\begin{aligned}
 v(t) &= (1 - 3t) e^{-3t} \text{ mV} & t > 0 \\
 &= 0 & t < 0
 \end{aligned}$$

Derivemos las formas de onda para la corriente, energía y potencia.

SOLUCIÓN La forma de onda para el voltaje se muestra en la figura 6.9a. La corriente se deriva de la ecuación (6.10) como

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{10^3}{200} \int_0^t (1 - 3x) e^{-3x} dx \\
 &= 5 \left\{ \int_0^t e^{-3x} dx - 3 \int_0^t x e^{-3x} dx \right\} \\
 &= 5 \left\{ \left[\frac{e^{-3x}}{-3} \right]_0^t - 3 \left[-\frac{e^{-3x}}{9} (3x + 1) \right]_0^t \right\} \\
 &= 5te^{-3t} \text{ mA} & t \geq 0 \\
 &= 0 & t < 0
 \end{aligned}$$

Una gráfica de la forma de onda de la corriente se muestra en la figura 6.9b.

La potencia está dada por la expresión

$$\begin{aligned}
 p(t) &= v(t)i(t) \\
 &= 5t(1-3t)e^{-6t} \mu\text{W} & t \geq 0 \\
 &= 0 & t < 0
 \end{aligned}$$

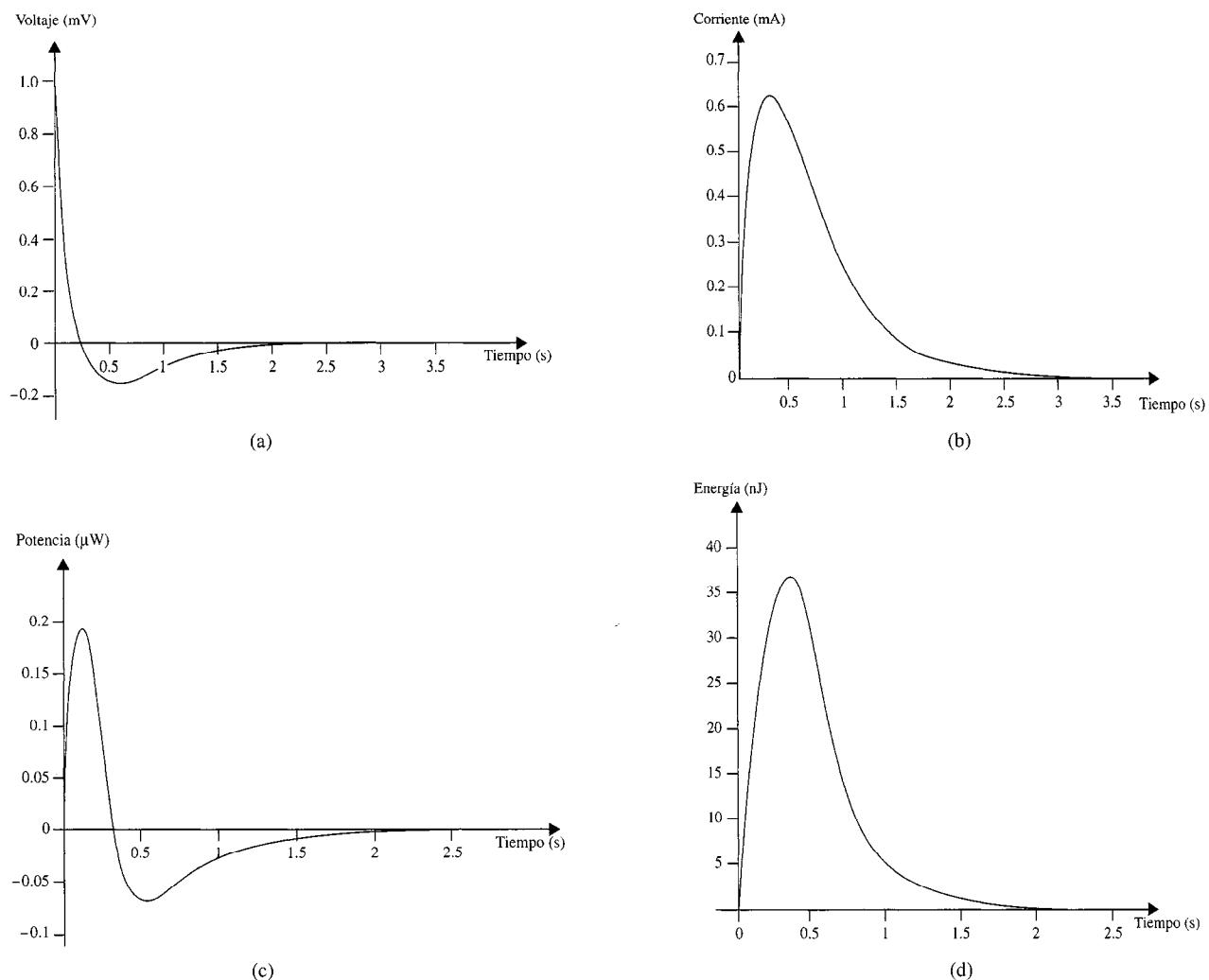


FIGURA 6.9 Formas de onda utilizadas en el ejemplo 6.7.

La ecuación para la potencia se grafica en la figura 6.9c.

La expresión para la energía es

$$\begin{aligned}
 w(t) &= \frac{1}{2} L i^2(t) \\
 &= 2.5 t^2 e^{-6t} \mu J \quad t \geq 0 \\
 &= 0 \quad t < 0
 \end{aligned}$$

Esta ecuación se grafica en la figura 6.9d.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D6.4 La corriente en una pequeña bobina de 5 mH tiene la forma de onda que se muestra en la figura D6.4. Calcule la forma de onda para el voltaje de la bobina.

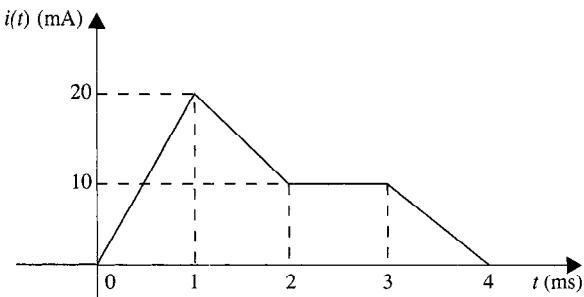
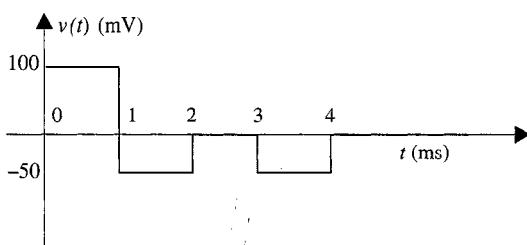


FIGURA D6.4

Resp.:



D6.5 Calcule la energía almacenada en el campo magnético de la bobina en el ejercicio de entrenamiento D6.4 a $t = 1.5$ ms.

Resp.: $W = 562.5$ nJ.

6.3 Características fundamentales de capacitores/bobinas

Los capacitores y las bobinas tienen un número de características muy importantes. Una de las primeras cosas que el lector puede haber notado es la similitud de las ecuaciones que los definen. Los capacitores y las bobinas tienen una relación dual; es decir, las ecuaciones que los definen son idénticas si intercambiamos C con L e i con v , y viceversa, como se muestra en la tabla 6.1. Debido a esta relación, los elementos tienen un número de características complementarias. Por ejemplo, si el voltaje a través de un capacitor es constante (es decir, que no varía con respecto al tiempo), la corriente a lo largo de éste es cero y por tanto el capacitor se ve como un circuito abierto de cd. De manera similar, si la corriente en una bobina es constante, el voltaje a través de ella es cero y por ende la bobina se ve como un corto circuito de cd. Un salto instantáneo en el voltaje a través de un capacitor no es realizable físicamente debido a que requiere el movimiento de una cantidad finita de carga en un tiempo cero, la cual es una corriente infinita. De igual manera, un cambio instantáneo en la corriente en una bobina requeriría un voltaje infinito. Por tanto, no es posible cambiar instantáneamente la corriente en una bobina.

Los capacitores y las bobinas *ideales* sólo almacenan energía; no disipan energía, como lo hace una resistencia. Aunque modelamos esos elementos como dispositivos ideales, en la práctica hay algunas pérdidas de resistencia asociadas con cada elemento, como se muestra en la figura 6.10. En el caso del capacitor, normalmente hay una gran pérdida de resistencia en paralelo, la cual proporciona una trayectoria de conducción entre las placas. Es a través de esta resistencia en paralelo como el capacitor real se descarga a sí mismo lentamente. La bobina física, que forma el inductor, tiene una resistencia de devanado significativa que disipa energía rápidamente. Así, la bobina práctica se modela como una resistencia en serie con una bobina ideal. De los dos elementos, el capacitor es con mucho el mejor dispositivo de almacenamiento de energía.

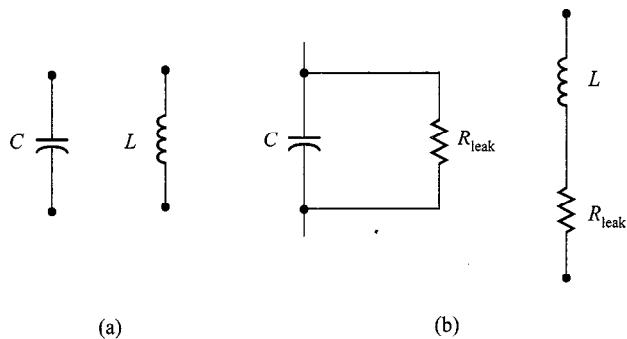


FIGURA 6.10 a) Elementos ideales, y b) elementos prácticos.

T A B L A 6.1

Relación dual para capacitores y bobinas

Capacitor	Bobina
$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$
$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx + v(t_0)$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(x) dx + i(t_0)$
$p(t) = Cv(t) \frac{dv(t)}{dt}$	$p(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt}$
$w(t) = \frac{1}{2} Cv(t)^2$	$w(t) = \frac{1}{2} Li^2(t)$

6.4 Combinaciones de capacitores y bobinas

Capacitores en serie

Si se conecta en serie un número de capacitores, su capacitancia equivalente puede calcularse usando la LVK. Considere el circuito que se muestra en la figura 6.11a. Para este circuito

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \dots + v_N(t) \quad (6.13)$$

pero

$$v_i(t) = \frac{1}{C_i} \int_{t_0}^t i(t) dt + v_i(t_0) \quad (6.14)$$

Por tanto, la ecuación (6.13) puede escribirse como sigue, usando la ecuación (6.14):

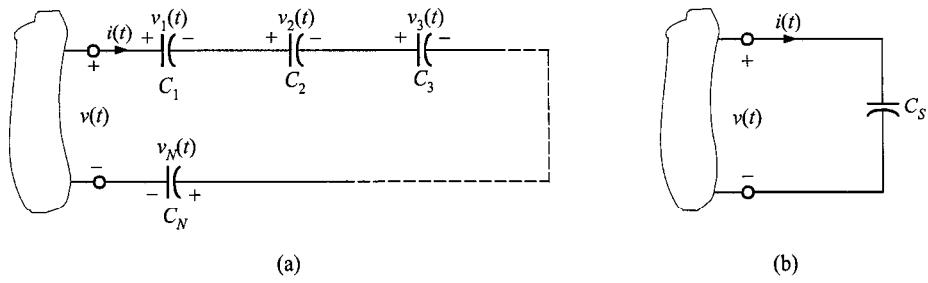


FIGURA 6.11 Circuito equivalente para N capacitores conectados en serie.

$$v(t) = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \right) \int_{t_0}^t i(t) dt + \sum_{i=1}^N v_i(t_0) \quad (6.15)$$

$$= \frac{1}{C_S} \int_{t_0}^t i(t) dt + v(t_0) \quad (6.16)$$

donde

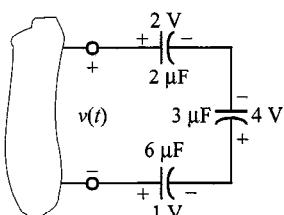
$$v(t_0) = \sum_{i=1}^N v_i(t_0)$$

y

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N} \quad (6.17)$$

Así, el circuito de la figura 6.11b es equivalente al de la figura 6.6a con las condiciones establecidas previamente.

También es importante notar que como la misma corriente fluye en cada uno de los capacitores en serie, cada capacitor gana la misma carga en el mismo periodo de tiempo. El voltaje a través de cada capacitor dependerá de su carga y de la capacitancia del elemento.



E J E M P L O 6.8

Determine la capacitancia equivalente y el voltaje inicial para el circuito de la figura 6.12.

SOLUCIÓN Note que esos capacitores deben haber sido cargados antes de conectarlos en serie, o de otra forma la carga de cada uno sería igual y los voltajes estarían en la misma dirección.

La capacitancia equivalente es

$$\frac{1}{C_5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

donde todos los valores de las capacitancias están en microfaradios.

FIGURA 6.12
Circuito que
contiene múltiples
capacitores con
voltajes iniciales.

Por tanto, $C_S = 1 \mu\text{F}$ y, como se ve de la figura, $v(t_0) = -3 \text{ V}$.
Advierta que la energía total almacenada en el circuito es

$$\begin{aligned} w(t_0) &= \frac{1}{2} [2 \times 10^{-6}(2)^2 + 3 \times 10^{-6}(-4)^2 + 6 \times 10^{-6}(-1)^2] \\ &= 31 \mu\text{J} \end{aligned}$$

Sin embargo, la energía recuperable en las terminales es

$$\begin{aligned} w_C(t_0) &= \frac{1}{2} C_S v^2(t) \\ &= \frac{1}{2} [1 \times 10^{-6}(-3)^2] \\ &= 4.5 \mu\text{J} \end{aligned}$$

E J E M P L O 6.9

Dos capacitores previamente descargados se conectan en serie y se cargan con una fuente de 12 V. Un capacitor es de $30 \mu\text{F}$ y el otro se desconoce. Si el voltaje a través del capacitor de $30 \mu\text{F}$ es 8 V, encuentre la capacitancia del capacitor desconocido.

S O L U C I O N La carga en el capacitor de $30 \mu\text{F}$ es

$$Q = CV = (30 \mu\text{F})(8 \text{ V}) = 240 \mu\text{C}$$

Como fluye la misma corriente en cada uno de los condensadores en serie, cada capacitor gana la misma carga en el mismo periodo de tiempo.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{240 \mu\text{C}}{4 \text{ V}} = 60 \mu\text{F}$$

Capacitores en paralelo

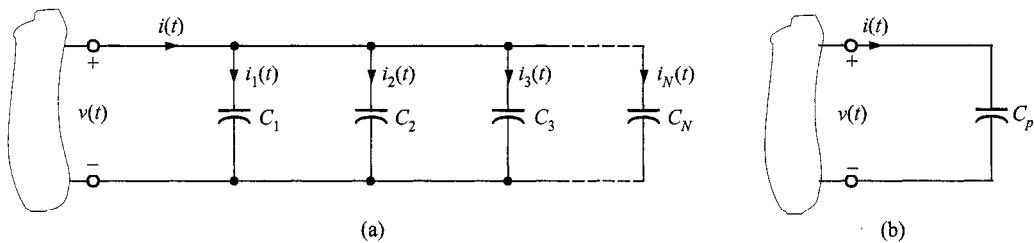
Para determinar la capacitancia equivalente de N capacitores conectados en paralelo, empleamos la LCK. Como puede verse de la figura 6.13a

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots + i_N(t) \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} &= C_1 \frac{dv(t)}{dt} + C_2 \frac{dv(t)}{dt} + C_3 \frac{dv(t)}{dt} + \dots + C_N \frac{dv(t)}{dt} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N C_i \right) \frac{dv(t)}{dt} \\ &= C_p \frac{dv(t)}{dt} \end{aligned} \quad (6.19)$$

donde

$$C_p = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N \quad (6.20)$$

FIGURA 6.13 Circuito equivalente para N capacitores conectados en paralelo.**E J E M P L O 6.10**

Determine la capacitancia equivalente en las terminales A–B del circuito que se muestra en la figura 6.14.

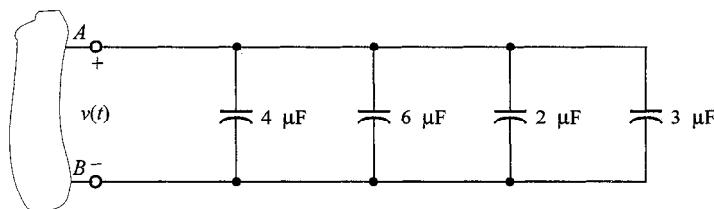


FIGURA 6.14 Circuito que contiene múltiples capacitores en paralelo.

$$\begin{aligned} \text{SOLUCIÓN} \quad C_p &= 4 \mu\text{F} + 6 \mu\text{F} + 2 \mu\text{F} + 3 \mu\text{F} \\ &= 15 \mu\text{F} \end{aligned}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D6.6 Se conectan dos capacitores en serie como se muestra en la figura D6.6. Determine el valor de C_1 .

Resp.: $C_1 = 4 \mu\text{F}$.

D6.7 Calcule la capacitancia equivalente de la red de la figura D6.7.

Resp.: $C_{eq} = 1.5 \mu\text{F}$.

D6.8 Calcule la capacitancia equivalente de la red de la figura D6.8 si todos los capacitores son de $4 \mu\text{F}$.

Resp.: $C_{eq} = \frac{32}{3} \mu\text{F}$.

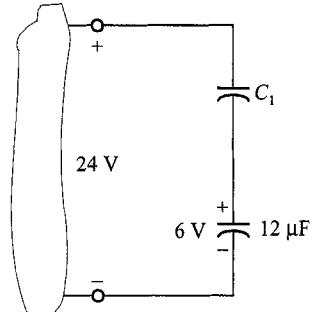


FIGURA D6.6

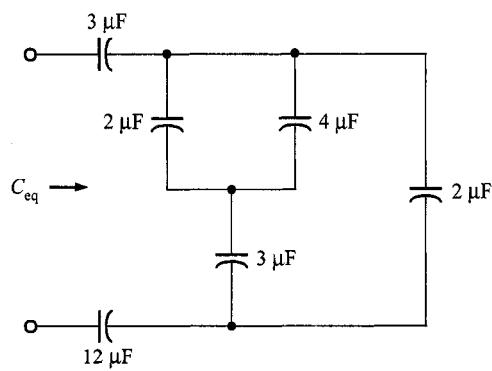


FIGURA D6.7

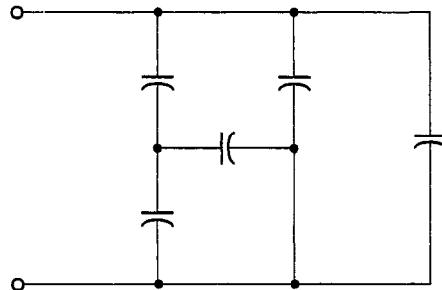


FIGURA D6.8

Bobinas en serie

Si N bobinas se conectan en serie, la inductancia equivalente de la combinación puede determinarse como sigue. Refiriéndonos a la figura 6.15a y usando la LVK, vemos que

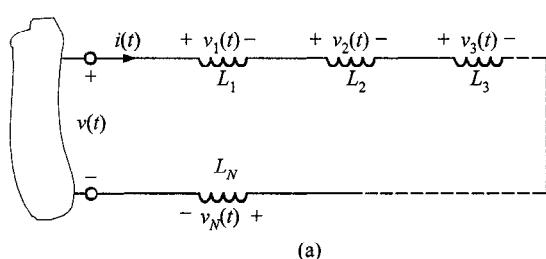
$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \dots + v_N(t) \quad (6.21)$$

y por tanto,

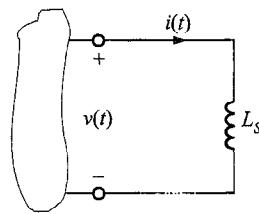
$$v(t) = L_1 \frac{di(t)}{dt} + L_2 \frac{di(t)}{dt} + L_3 \frac{di(t)}{dt} + \dots + L_N \frac{di(t)}{dt} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{i=1}^N L_i \right) \frac{di(t)}{dt} \\ &= L_S \frac{di(t)}{dt} \end{aligned} \quad (6.23)$$

donde



(a)



(b)

FIGURA 6.15 Circuito equivalente para N bobinas conectadas en serie.

$$L_S = \sum_{i=1}^N L_i \quad (6.24)$$

Por ende, con esta condición la red de la figura 6.15b es equivalente a la de la figura 6.15a.

EJEMPLO 6.11

Encuentre la inductancia equivalente del circuito que se muestra en la figura 6.16.

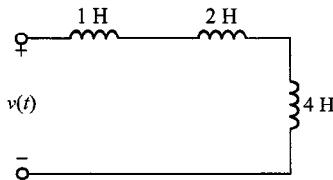


FIGURA 6.16 Circuito que contiene bobinas múltiples.

SOLUCIÓN La inductancia equivalente del circuito que se muestra en la figura 6.16 es

$$\begin{aligned} L_S &= 1 \text{ H} + 2 \text{ H} + 4 \text{ H} \\ &= 7 \text{ H} \end{aligned}$$

Bobinas en paralelo

Considere el circuito que se muestra en la figura 6.17a, que contiene N bobinas en paralelo. Usando la LCK, podemos escribir

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \cdots + i_N(t) \quad (6.25)$$

Sin embargo,

$$i_j(t) = \frac{1}{L_j} \int_{t_0}^t v(x) dx + i_j(t_0) \quad (6.26)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (6.25) da

$$i(t) = \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{L_j} \right) \int_{t_0}^t v(x) dx + \sum_{j=1}^N i_j(t_0) \quad (6.27)$$

$$= \frac{1}{L_p} \int_{t_0}^t v(x) dx + i(t_0) \quad (6.28)$$

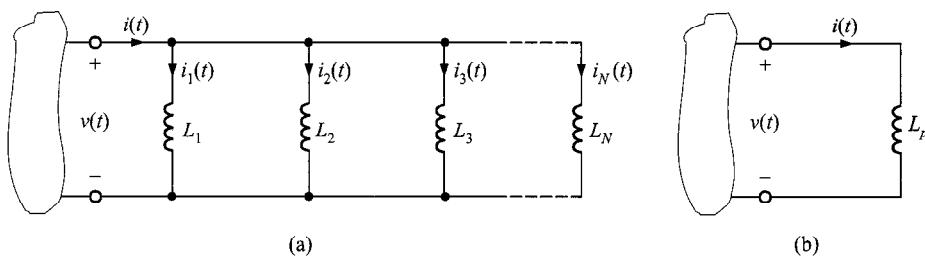


FIGURA 6.17 Circuitos equivalentes para N bobinas conectadas en paralelo.

donde

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N} \quad (6.29)$$

e $i(t_0)$ es igual a la corriente en L_P a $t = t_0$. Así, el circuito de la figura 6.17b es equivalente al de la figura 6.17a bajo las condiciones establecidas previamente.

E J E M P L O 6.12

Determine la inductancia equivalente y la corriente inicial para el circuito que se muestra en la figura 6.18.

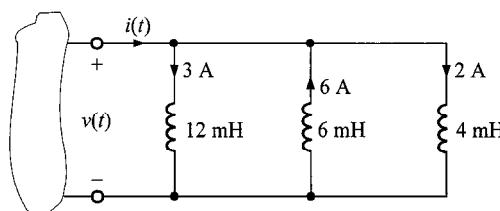


FIGURA 6.18 Circuito que contiene bobinas múltiples con corrientes iniciales.

SOLUCIÓN La inductancia equivalente es

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$$

donde todos los valores de inductancia están en milihenrys.

$$L_B = 2 \text{ mH}$$

y la corriente inicial es $i(t_0) = -1$ A.

El material previo indica que los capacitores se combinan como conductancias, mientras que las bobinas se combinan como resistencias.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D6.9 Calcule la inductancia equivalente de la red de la figura D6.9 si todas las bobinas son de 4 mH.

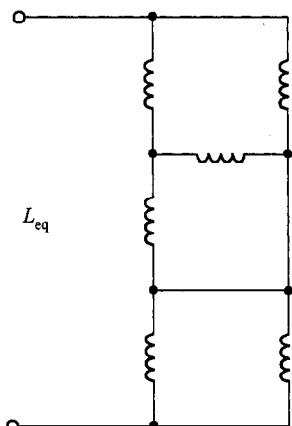


FIGURA D6.9

Resp.: 4.4 mH.

D6.10 Determine la inductancia equivalente de la red de la figura D6.10 si todas las bobinas son de 6 mH.

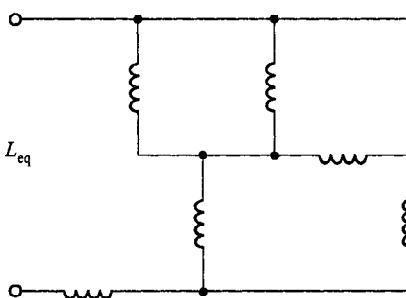


FIGURA D6.10

Resp.: 9.429 mH.

6.5 Circuitos *RC* con amplificador operacional

Dos circuitos de *RC* con amp-op muy importantes son el diferenciador y el integrador. Estos circuitos se derivan del circuito para un amp-op inversor, reemplazando las resistencias R_1 y R_2 , respectivamente, por un capacitor. Considere, por ejemplo, el circuito que se muestra en la figura 6.19a. Las ecuaciones del circuito son

$$C_1 \frac{d}{dt} (v_1 - v_-) + \frac{v_o - v_-}{R_2} = i_-$$

Sin embargo, $v_- = 0$ e $i_- = 0$. Por tanto,

$$v_o(t) = -R_2 C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} \quad (6.30)$$

Así, la salida del circuito de amp-op es proporcional a la derivada de la entrada.

Las ecuaciones del circuito para la configuración del amp-op en la figura 6.19b son

$$\frac{v_1 - v_-}{R_1} + C_2 \frac{d}{dt} (v_o - v_-) = i_-$$

pero ya que $v_- = 0$ e $i_- = 0$, la ecuación se reduce a

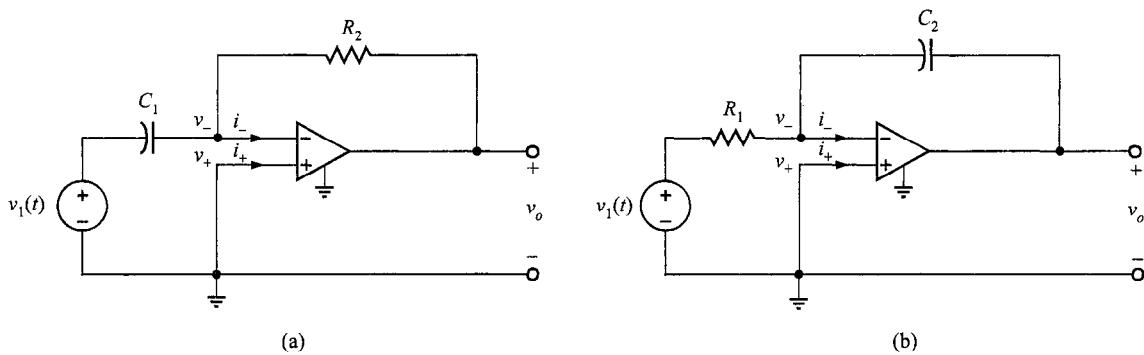


FIGURA 6.19 Circuitos de amplificador operacional derivador e integrador.

$$\frac{v_1}{R_1} = -C_2 \frac{dv_o}{dt}$$

o

$$\begin{aligned} v_o(t) &= \frac{-1}{R_1 C_2} \int_{-\infty}^t v_1(x) dx \\ &= \frac{-1}{R_1 C_2} \int_0^t v_1(x) dx + v_o(0) \end{aligned} \quad (6.31)$$

Si el capacitor inicialmente está descargado, entonces $v_o(0) = 0$, de aquí,

$$v_o(t) = \frac{-1}{R_1 C_2} \int_0^t v_1(x) dx \quad (6.32)$$

Así, el voltaje de salida del circuito del amp-op es proporcional a la integral del voltaje de entrada.

EJEMPLO 6.13

La forma de onda de la figura 6.20a se aplica a la entrada del circuito diferenciador que se muestra en la figura 6.19a. Si $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ y $C_1 = 2 \mu\text{F}$, determine la forma de la onda a la salida del amp-op.

SOLUCIÓN Usando la ecuación (6.30), encontramos que la salida del amp-op es

$$\begin{aligned} v_o(t) &= -R_2 C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} \\ &= -(2)10^{-3} \frac{dv_1(t)}{dt} \end{aligned}$$

$dv_1(t)/dt = (2)10^3$ para $0 \leq t < 5 \text{ ms}$, y por ende,

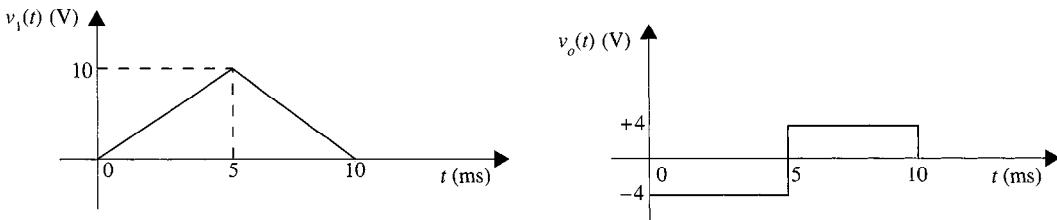


FIGURA 6.20 Formas de onda de entrada y salida de un circuito derivador.

$$v_o(t) = -4 \text{ V} \quad 0 \leq t < 5 \text{ ms}$$

$dv_1(t)/dt = -(2)10^3$ para $5 \leq t < 10 \text{ ms}$, y por tanto,

$$v_o(t) = 4 \text{ V} \quad 5 \leq t < 10 \text{ ms}$$

De aquí, la forma de onda de la salida del diferenciador se muestra en la figura 6.20b.

E J E M P L O 6.14

Si el integrador que se muestra en la figura 6.19b tiene los parámetros $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$ y $C_2 = 0.2 \mu\text{F}$, determine la forma de la onda en la salida del amp-op si la forma de la onda de entrada está dada como en la figura 6.21a y el capacitor inicialmente está descargado.

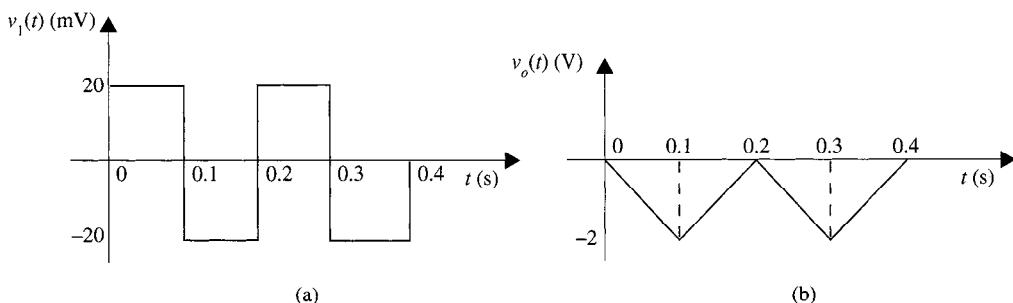


FIGURA 6.21 Formas de onda de entrada y salida de un circuito integrador.

S O L U C I Ó N La salida del integrador está dada por la expresión

$$v_o(t) = \frac{-1}{R_1 C_2} \int_0^t v_1(x) dx$$

la cual con los parámetros dados del circuito es

$$v_o(t) = -10^3 \int_0^t v_1(x) dx$$

En el intervalo $0 \leq t < 0.1$ s, $v_1(t) = 20$ mV. De aquí,

$$\begin{aligned} v_o(t) &= -10^3(20)10^{-3}t \quad 0 \leq t < 0.1 \text{ s} \\ &= -20t \end{aligned}$$

En $t = 0.1$ s, $v_o(t) = -2$ V. En el intervalo de 0.1 a 0.2 s, el integrador produce una salida con pendiente positiva de $20t$ desde $v_o(0.1) = -2$ V hasta $v_o(0.2) = 0$ V. Esta forma de onda desde $t = 0$ hasta $t = 0.2$ s se repite en el intervalo $t = 0.2$ a $t = 0.4$ s, y por tanto la forma de la onda de salida se muestra en la figura 6.21b.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D6.11 La forma de onda en la figura D6.11 se aplica a las terminales de entrada del circuito del amp-op diferenciador. Determine la forma de la onda de salida del diferenciador si los parámetros del circuito del amp-op son $C_1 = 2$ F y $R_2 = 2 \Omega$.

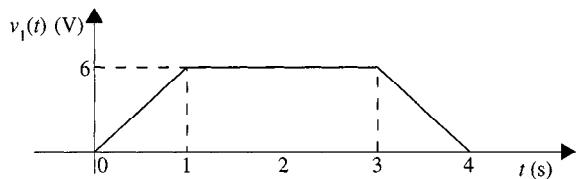
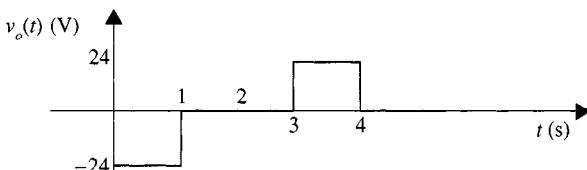


FIGURA D6.11

Resp.:



6.6 Aplicaciones

Ahora tenemos dos elementos que se han agregado a nuestro repertorio de componentes que pueden emplearse en aplicaciones y diseño de circuitos—capacitores y bobinas. Por ejemplo, acabamos de encontrar que cuando los condensadores se usan junto con amps-op, podemos construir circuitos que integran o derivan una señal. En el resto del texto encontraremos que esos dos componentes son una parte integral de nuestro análisis y diseño de circuitos.

E J E M P L O 6.15

Los chips de circuitos integrados, o CI, son piezas rectangulares de silicio que varían en tamaño de cerca de 10/1 000 a 200/1 000 de pulgada por cada lado. Los fabricantes de chips hacen el contacto eléctrico con el silicio mediante alambre de oro fino, llamado de hilos de conexión, que se tienden de la superficie de silicio a las puntas de metal, como se muestra en la figura 6.22a. El chip es cubierto con plástico para protegerlo de daño físico y las puntas se convierten en las terminales de acceso.

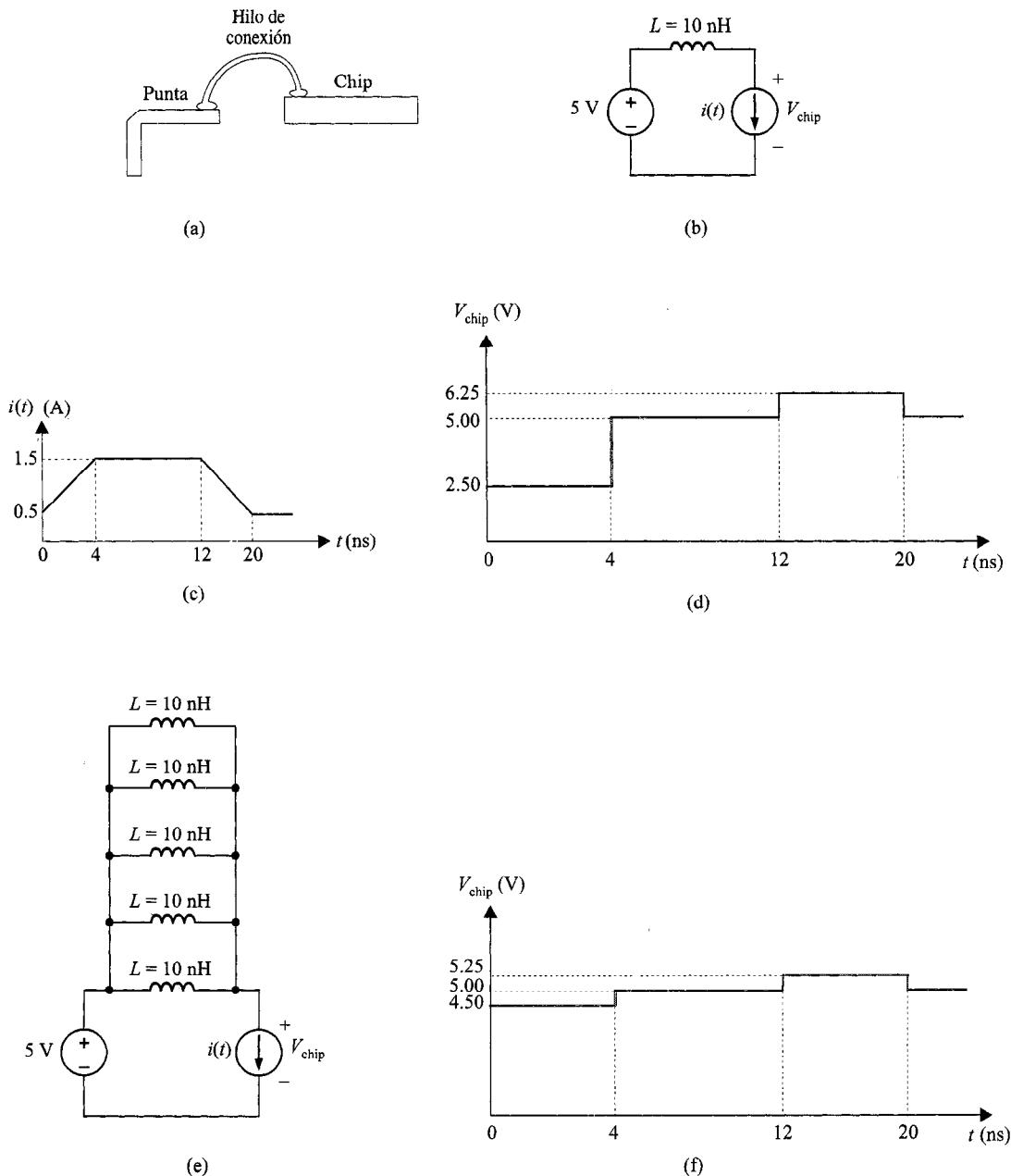


FIGURA 6.22 Ejemplo de hilos de conexión de un circuito integrado.

En general, los alambres no son conductores perfectos. Tienen resistencia e inductancia. En la mayoría de los casos, la resistencia y la inductancia de los alambres son tan pequeñas que no tienen un efecto medible en el rendimiento del circuito. Sin embargo, en casos donde la corriente cambia rápidamente, la inductancia del alambre puede jugar un papel significativo. Examinemos el efecto de la inductancia de un hilo de conexión de un microprocesador de alta velocidad.

SOLUCIÓN La figura 6.22b muestra una red equivalente para la situación de interés. El hilo de conexión es modelado por la bobina de 10 nH. La fuente de corriente $i(t)$, representa la corriente que está siendo utilizada por el microprocesador. Finalmente, la fuente de 5 V representa el voltaje de suministro del chip. Como el microprocesador desarrolla varias funciones, la demanda de corriente $i(t)$, cambia como se muestra en la figura 6.22c. Utilizando los valores de los elementos de la figura 6.22b, grafiquemos $V_{\text{chip}}(t)$ y encontraremos sus valores mínimo y máximo.

Aplicando la LVK en la figura 6.22b, el voltaje del chip puede expresarse como

$$v_{\text{chip}}(t) = 5 - L \frac{di(t)}{dt}$$

De la figura 6.22c para $0 \leq t \leq 4 \text{ ns}$,

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{\Delta i(t)}{\Delta t} = \frac{1}{4n} = 250 \times 10^6$$

De manera similar, en el intervalo de $12 \text{ ns} \leq t \leq 20 \text{ ns}$,

$$\frac{di(t)}{dt} = -125 \times 10^6$$

Sobre la base de esos cálculos, el voltaje resultante del chip, que se muestra en la figura 6.22d, varía ampliamente del requerimiento de 5 V. El valor mínimo es 2.5 V y el máximo es 6.25 V. Si deseamos un voltaje de chip más estable, podemos simplemente poner varios hilos de conexión en paralelo como se muestra en la figura 6.22e. Ahora $i(t)$ se divide entre cinco trayectorias diferentes y así $di(t)/dt$ y el cambio en $V_{\text{chip}}(t)$ se reducen por un factor de 5. El voltaje de chip resultante, mostrado en la figura 6.22f, tiene valores mínimo y máximo de 4.5 V y 5.25 V. Esta técnica simple la emplean la mayoría de los fabricantes de CI.

6.7 Diseño de circuitos

EJEMPLO 6.16

En una fábrica de tejido, durante el proceso de teñido, el tinte se bombea a través de un ducto a una tina. Como se muestra en la figura 5.23a, un medidor de flujo montado sobre el ducto monitorea la razón de flujo y entrega 1 volt a v_F por cada galón/segundo de flujo. Queremos diseñar un circuito

con un voltaje de salida de 1 V por cada 10 galones usados. Diseñemos una red para llevar a cabo la conversión que se requiere usando el integrador inversor de la figura 6.23b, donde la fuente de voltaje v_F representa la salida del medidor de flujo.

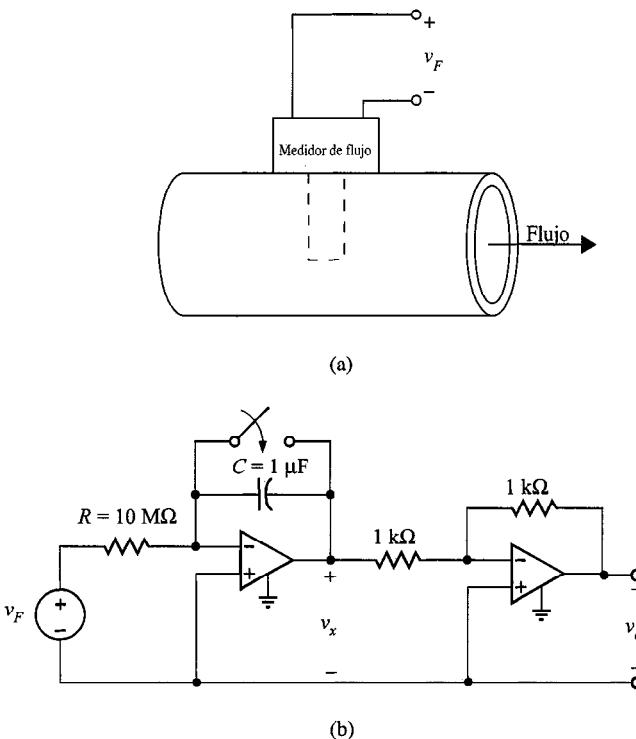


FIGURA 6.23 Conversión de medidor de flujo/medidor de volumen.

SOLUCIÓN La relación entre v_x y v_F en la figura 6.23b es

$$v_x = \frac{-1}{RC} \int v_F dt$$

La integral de v_F producirá 1 volt-segundo por cada galón usado. Como queremos 1 volt a v_x por cada 10 galones, RC debe ser 10. Si elegimos arbitrariamente $C = 1 \mu\text{F}$, entonces $R = 10 \text{ M}\Omega$. Como v_x es negativo, sumamos el inversor simple en la figura 6.23b para producir el voltaje v_o , que tiene todas las características requeridas. El commutador alrededor del capacitor puede cerrarse para inicializar el integrador a 0 V en v_x . Finalmente, como el voltaje de salida del amp-op no puede exceder su suministro de potencia de cd, a medida que v_o alcanza este límite, necesitaremos cortar el valor de salida (normalmente se hace electrónicamente), cerrar el commutador para inicializar v_o a cero, y abrir después el commutador para iniciar un nuevo ciclo de integración.

E J E M P L O 6.17

Se conduce un estudio de tráfico en una intersección para determinar la mejor secuencia de tiempo de la luz del semáforo. En particular, necesitamos encontrar la diferencia en el número de vehículos en el lado este contra los del lado sur en un periodo de 24 horas. Los sensores en la carpeta asfáltica, como se muestra en la figura 6.24a, producen la forma de onda de voltaje de la figura 6.24b cada vez que pasa un vehículo. Queremos diseñar una red que produzca un voltaje proporcional a esta diferencia, donde 1 V corresponde a diez automóviles. Usemos un integrador inversor para producir un voltaje que cumpla los requerimientos y verifiquemos su comportamiento con el PSPICE usando nuestro modelo de amp-op con $R_i = 1 \text{ M}\Omega$, $R_o = 50 \Omega$ y $A = 10^5$.

SOLUCIÓN La red requerida debe hacer tres cosas. Primero, debe llevar a cabo una resta de los dos voltajes de los sensores. Segundo, debe integrar la diferencia para mantener una corrida total de la situación del

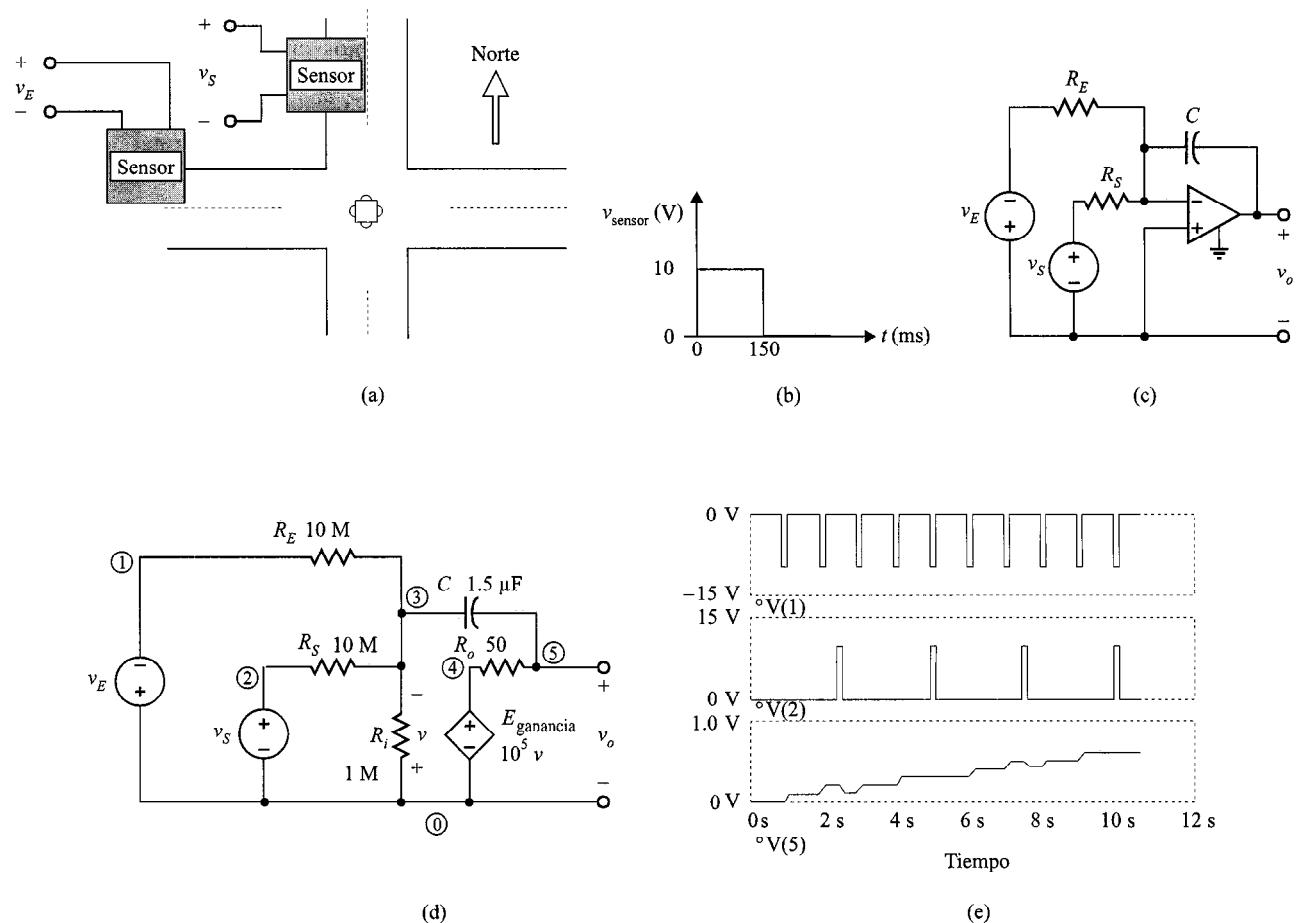


FIGURA 6.24 Estudio de semáforos.

tráfico. Y tercero, debe escalar el voltaje para cumplir la especificación de 1 V por diez vehículos. El circuito de la figura 6.24c, donde las fuentes de voltaje representan las salidas del sensor, cumplirá todos los requerimientos.

La LCK en la entrada del amp-op inversor da v_o en términos de v_E y v_S .

$$\frac{v_S}{R_S} - \frac{v_E}{R_E} = -C \left(\frac{dv_o}{dt} \right)$$

Resolviendo para v_o obtenemos

$$v_o = \int \left[\frac{1}{R_E C} v_E - \frac{1}{R_S C} v_S \right] dt$$

Con base en la forma de la onda del sensor en la figura 6.24b, la integral de la salida del sensor es 1.5 V segundos por cada vehículo que pasa. Si los productos RC en la ecuación precedente son 15, entonces un vehículo producirá 0.1 V en v_o como se requiere. Si elegimos arbitrariamente $C = 1.5 \mu\text{F}$, entonces R_E y R_S son $10 \text{ M}\Omega$. Como en el ejemplo 6.16, a medida que el voltaje de salida del integrador se acerca a los valores de suministro de potencia del amp-op, los datos deben cortarse y el capacitor descargarse a través de un conmutador para inicializar el integrador. Al final de un periodo de 24 horas, los valores registrados de v_o pueden sumarse para dar el conteo diario de vehículos.

El circuito del PSPICE se muestra en la figura 6.24d. Usaremos la fuente de voltaje PULSE en el PSPICE para los voltajes del sensor. Con propósitos de simulación, dejemos pasar un vehículo del lado este cada segundo y un vehículo del lado sur cada 2.5 segundos. Las fuentes v_E y v_S en el siguiente programa del PSPICE corresponden a esas formas de onda.

```
Traffic Survey Network
VE 0 1 pulse(0 10 .85 0 0 .15 1)
VS 2 0 pulse(0 10 2.35 0 0 .15 2.5)
RE 1 3 10meg
RS 2 3 10meg
C 3 5 1.5u
Ri 3 0 1meg
Ro 4 5 50
Egain 4 0 0 3 100k
.tran 2m 10.5
.probe
.end
```

Después de 10 segundos, han pasado diez vehículos del lado este contra cuatro del lado sur. La diferencia de seis debe producir 0.6 volts en v_o . De las gráficas de .PROBE de v_E , v_S y v_o que se muestran en la figura 6.24e, el voltaje de salida a los 10 segundos es 0.608 V, el cual está dentro del 1.2% de nuestros cálculos del amp-op ideal.

6.8 Resumen

En este capítulo se presentaron dos elementos ideales de circuito adicionales: el capacitor y la bobina. Mostramos que, en agudo contraste con la resistencia, ambos elementos son capaces de almacenar energía y se determinaron las relaciones de energía para esos elementos. Ilustramos cómo calcular la capacitancia equivalente cuando los capacitores están interconectados en serie o paralelo y cómo determinar la inductancia equivalente cuando esos elementos están interconectados. Una de las formas importantes en las que se usa el capacitor es en un circuito de amp-op *RC*. Hemos presentado estos circuitos y demostrado su uso en el diseño de circuitos.

Puntos clave

- Los capacitores y las bobinas son capaces de almacenar energía.
- Un capacitor se ve como un circuito abierto de cd.
- Una bobina se ve como un corto circuito de cd.
- Cuando se determina la capacitancia equivalente de un número de capacitores interconectados, los capacitores en serie se combinan como resistencias en paralelo y los capacitores en paralelo se combinan como resistencias en serie.
- Cuando se determina la inductancia equivalente de un número de bobinas interconectadas, las bobinas se combinan como resistencias si están conectadas en serie o en paralelo.
- Los circuitos amp-op *RC* pueden usarse para diferenciar o integrar una señal.
- Los circuitos amp-op *RC* son muy útiles en el diseño de circuitos.

Problemas

6.1. Un capacitor de $12 \mu\text{F}$ tiene una carga acumulada de $480 \mu\text{C}$. Determine el voltaje a través del capacitor.

6.2. Un capacitor de $100 \mu\text{F}$ descargado se carga con una corriente constante de 1 mA . Encuentre el voltaje a través del capacitor después de 4 segundos.

6.3. El voltaje a través de un capacitor de $100 \mu\text{F}$ está dado por la expresión $v(t) = 120 \text{ sen } 377t \text{ V}$. Encuentre a) la corriente en el capacitor, y b) la expresión para la energía almacenada en el elemento.

6.4. Un capacitor de $3 \mu\text{F}$ y otro de $6 \mu\text{F}$ están conectados en paralelo y cargados a 12 V . Encuentre

- La carga almacenada por cada capacitor.
- La energía total almacenada.

6.5. Los dos capacitores de la figura P6.5 se cargaron y después se conectaron como se muestra. Determine la capacitancia equivalente, el voltaje inicial en las terminales y la energía total almacenada en la red.

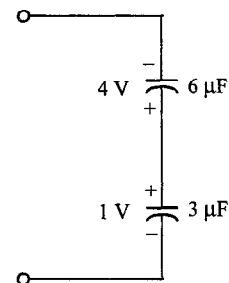


FIGURA P6.5

6.6. Dos capacitores se conectan en serie como se muestra en la figura P6.6. Encuentre V_o .

6.7. El voltaje a través de un capacitor de $100 \mu\text{F}$ se muestra en la figura P6.7. Calcule la forma de la onda para la corriente en el capacitor.

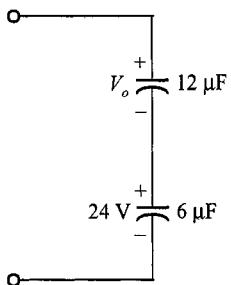


FIGURA P6.6

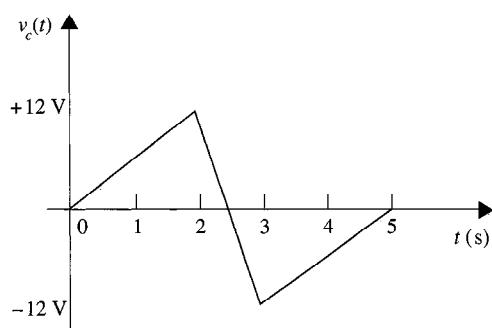


FIGURA P6.10

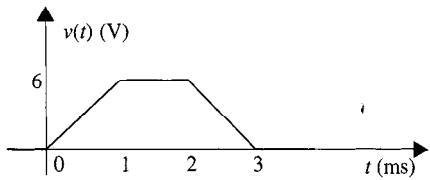


FIGURA P6.7

- 6.8.** La corriente en un capacitor de $100 \mu\text{F}$ se muestra en la figura P6.8. Determine la forma de onda para el voltaje a través del capacitor.

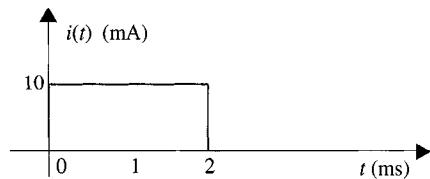


FIGURA P6.8

- 6.9.** El voltaje a través de un capacitor de $2 \mu\text{F}$ está dado por la forma de onda de la figura P6.9. Calcule la forma de onda de la corriente.

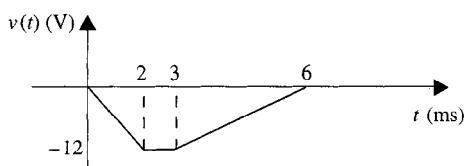


FIGURA P6.9

- 6.10.** El voltaje a través de un capacitor de 0.1 F está dado por la forma de onda de la figura P6.10. Encuentre la forma de onda para la corriente en el capacitor.

- 6.11.** El voltaje a través de un capacitor de $50 \mu\text{F}$ se muestra en la figura P6.11. Determine la forma de onda de la corriente.

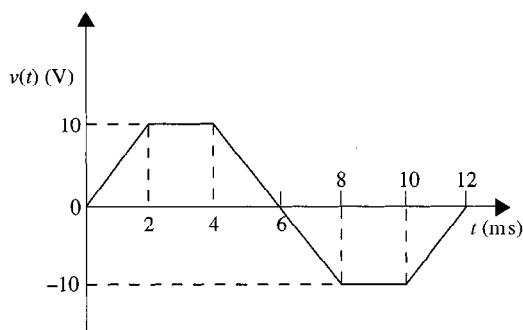


FIGURA P6.11

- 6.12.** Dibuje la forma de onda para la corriente en un capacitor de $12 \mu\text{F}$ cuando el voltaje de éste es como se describe en la figura P6.12.

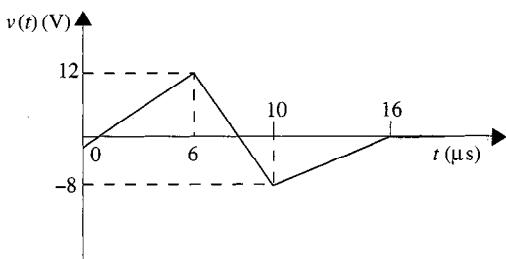


FIGURA P6.12

- 6.13.** Dibuje la forma de onda para la corriente en un capacitor de $3 \mu\text{F}$ cuando el voltaje a través de él está dado en la figura P6.13.

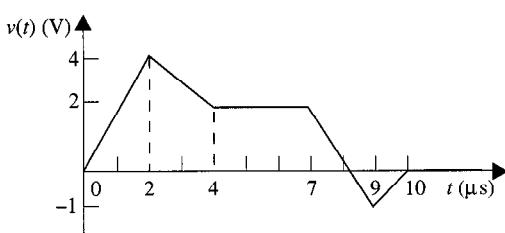


FIGURA P6.13

- 6.14.** El voltaje a través de un capacitor de $6 \mu\text{F}$ está dado por la forma de onda de la figura P6.14. Grafique la forma de onda para la corriente del capacitor.

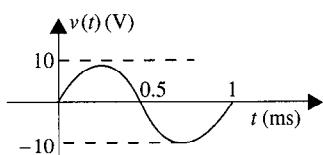


FIGURA P6.14

- 6.15.** La forma de onda para la corriente en un capacitor de $200 \mu\text{F}$ se muestra en la figura P6.15. Determine la forma de onda para el voltaje del capacitor.

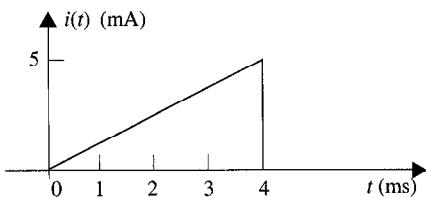


FIGURA P6.15

- 6.16.** La corriente en una bobina cambia de 0 a 200 mA en 4 ms e induce un voltaje de 100 mV . ¿Cuál es el valor de la bobina?

- 6.17.** Si la corriente $i(t) = 1.5t \text{ A}$ fluye a través de una bobina de 2 H , encuentre la energía almacenada a $t = 2 \text{ s}$.

- 6.18.** La corriente que fluye a través de una bobina de 100 mH es $i(t) = 2 \text{ sen}377t \text{ A}$. Encuentre a) el voltaje a través de la bobina, y b) la expresión para la energía almacenada en el elemento.

- 6.19.** La corriente en una bobina de 25 mH está dada por las expresiones

$$i(t) = 0 \quad t < 0$$

$$i(t) = 10(1 - e^{-t}) \text{ mA} \quad t > 0$$

Encuentre a) el voltaje a través de la bobina, y b) la expresión para la energía almacenada en ella.

- 6.20.** Dados los datos del problema anterior, encuentre el voltaje a través de la bobina y la energía almacenada en ella después de 1 segundo .

- 6.21.** La corriente en una bobina de 50 mH está especificada como sigue.

$$i(t) = 0 \quad t < 0$$

$$i(t) = 2te^{-4t} \text{ A} \quad t > 0$$

Encuentre a) el voltaje a través de la bobina, b) el tiempo en que la corriente es un máximo y c) el tiempo en el que el voltaje es un mínimo.

- 6.22.** La corriente en una bobina de 10 mH se muestra en la figura P6.22. Determine la forma de onda para el voltaje a través de la bobina.

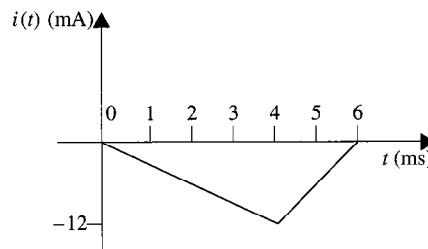


FIGURA P6.22

- 6.23.** La corriente en una bobina de 50 mH está dada en la figura P6.23. Bosqueje el voltaje de la bobina.

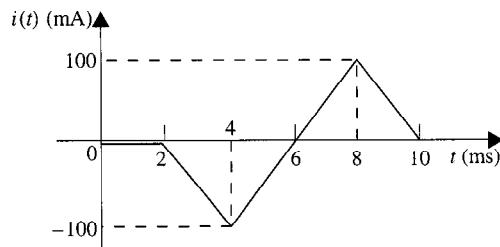


FIGURA P6.23

- 6.24.** La corriente en una bobina de 10 mH se muestra en la figura P6.24. Encuentre el voltaje a través de la bobina.

- 6.25.** Dibuje la forma de onda para el voltaje a través de una bobina de 10 mH cuando la corriente de la bobina está dada por la forma de onda de la figura P6.25.

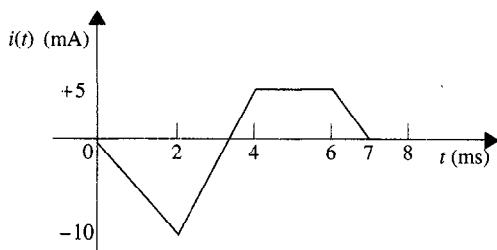


FIGURA P6.24

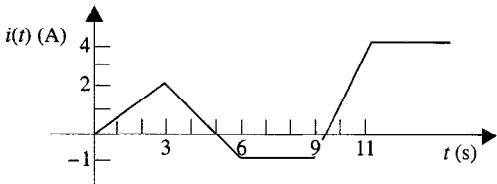


FIGURA P6.25

6.26. La corriente en una bobina de 16 mH está dada por la forma de onda de la figura P6.26. Encuentre la forma de onda para el voltaje a través de la bobina.

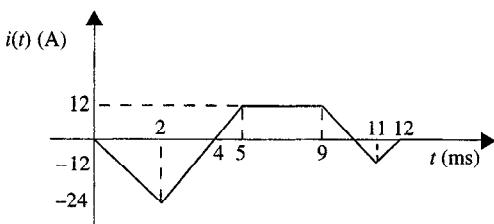


FIGURA P6.26

6.27. La corriente en una bobina de 4 mH está dada por la forma de onda de la figura P6.27. Grafique el voltaje a través de la bobina.

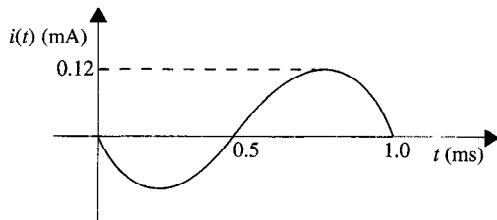


FIGURA P6.27

6.28. El voltaje a través de una bobina de 2 H está dado por la forma de onda que se muestra en la figura P6.28. Encuentre la forma de onda para la corriente en la bobina.

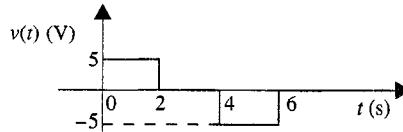


FIGURA P6.28

6.29. La forma de onda para el voltaje a través de una bobina de 20 mH se muestra en la figura P6.29. Calcule la forma de onda para la corriente de la bobina.

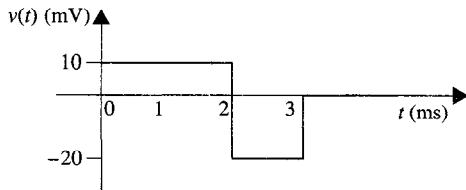


FIGURA P6.29

6.30. El voltaje a través de una bobina de 10 mH se muestra en la figura P6.30. Determine la forma de onda para la corriente de la bobina.

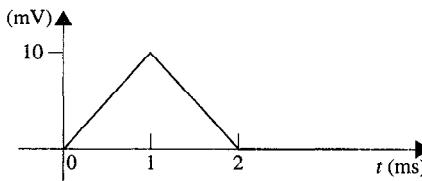


FIGURA P6.30

6.31. ¿Qué valores de capacitancia pueden obtenerse al interconectar un capacitor de 4 μF , un capacitor de 6 μF y uno de 12 μF ?

6.32. Dados los capacitores de 1, 3 y 4 μF , ¿pueden interconectarse para obtener un capacitor equivalente de 2 μF ?

6.33. Dados cuatro capacitores de 2 μF , encuentre el valor máximo y mínimo que puede obtenerse al interconectar los capacitores en combinaciones en serie/paralelo.

6.34. Seleccione el valor de C para producir la capacitancia total deseada de $C_T = 2 \mu\text{F}$ en el circuito de la figura P6.34.

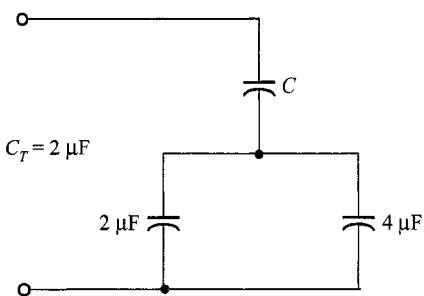


FIGURA P6.34

6.35. Determine la capacitancia total de la red de la figura P6.35.

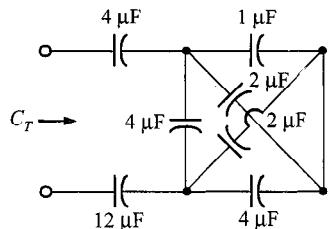


FIGURA P6.35

6.36. Encuentre la capacitancia equivalente en las terminales A-B en la figura P6.36.

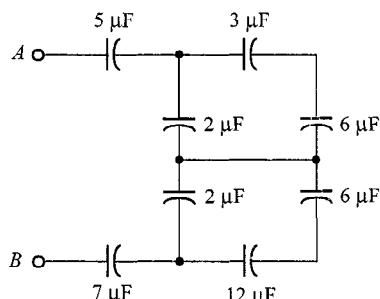


FIGURA P6.36

6.37. Encuentre la capacitancia total C_T de la red de la figura P6.37.

6.38. Encuentre la capacitancia total C_T de la red de la figura P6.38.

6.39. En la red de la figura P6.39, encuentre la capacitancia C_T : a) si el conmutador está abierto, y b) si el conmutador está cerrado.

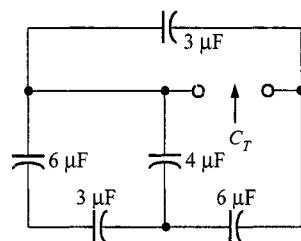


FIGURA P6.37

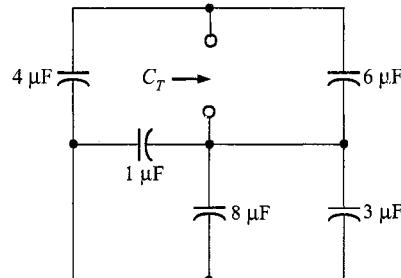


FIGURA P6.38

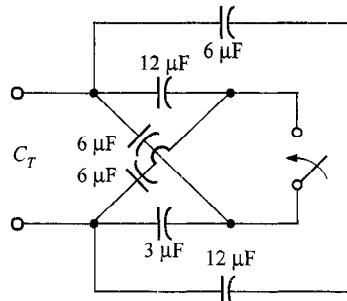


FIGURA P6.39

6.40. Determine la inductancia en las terminales A-B en la red de la figura P6.40.

6.41. Determine la inductancia en las terminales A-B en la red de la figura P6.41.

6.42. Encuentre la inductancia total en las terminales A-B que se muestran en la red de la figura P6.42.

6.43. Dada la red que se muestra en la figura P6.43, encuentre

- La inductancia equivalente en las terminales A-B con las terminales C-D en corto circuito.
- La inductancia equivalente en las terminales C-D con las terminales A-B en circuito abierto.

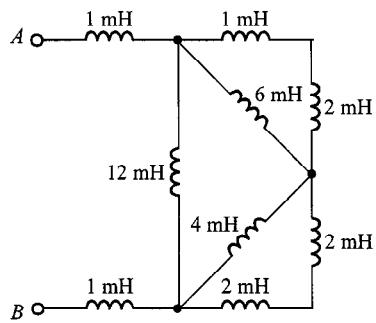


FIGURA P6.40

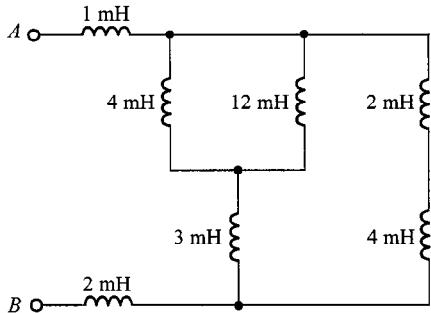


FIGURA P6.41

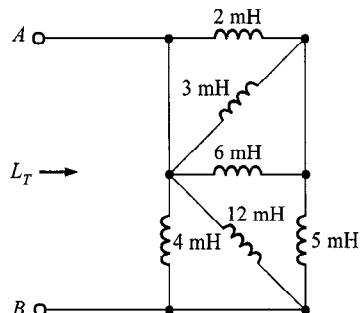


FIGURA P6.42

6.44. Encuentre la inductancia total en las terminales de la red de la figura P6.44.

6.45. Encuentre L_T en la red de la figura P6.45, a) con el commutador abierto, y b) con el commutador cerrado. Todas las bobinas son de 12 mH.

6.46. Encuentre el valor de L en la red de la figura P6.46, de modo que la inductancia total L_T sea 2 mH.

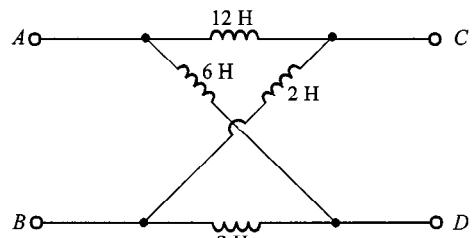


FIGURA P6.43

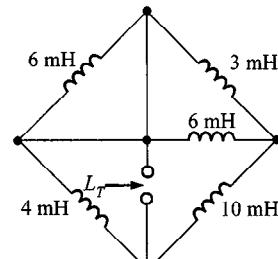


FIGURA P6.44

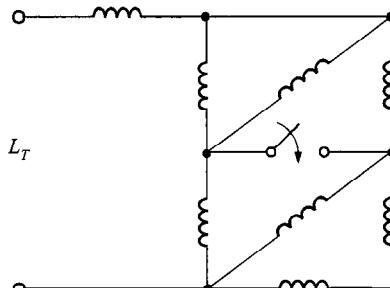


FIGURA P6.45

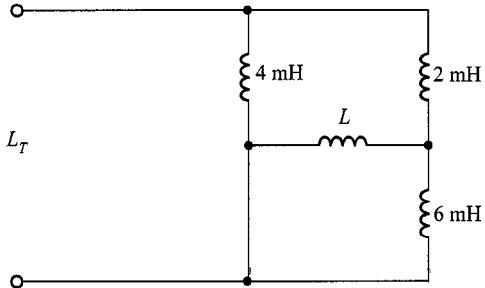


FIGURA P6.46

6.47. Para la red de la figura P6.47, elija C de modo que

$$v_o = -10 \int v_s dt$$

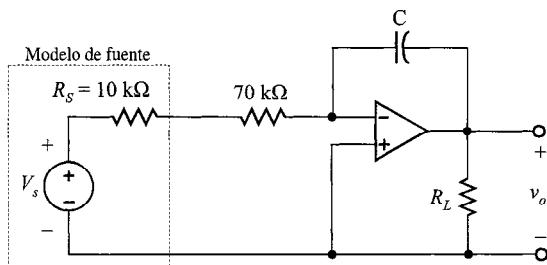


FIGURA P6.47

6.48. Diseñe un circuito con amps-op que produzca el voltaje de salida

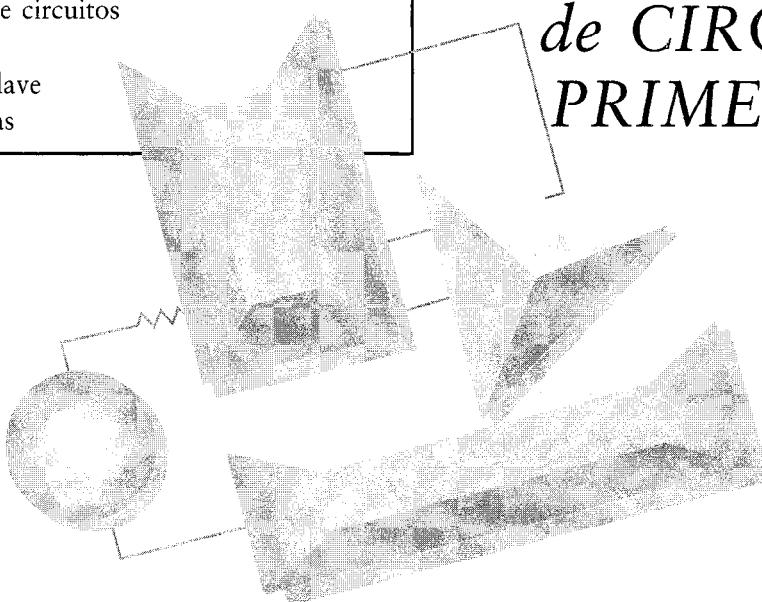
$$v_o = \int v_s dt - 10v_s$$

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

- 7.1** Introducción
- 7.2** Forma general de las ecuaciones de respuesta
- 7.3** Técnicas de análisis
- 7.4** Respuesta al pulso
- 7.5** Análisis transitorio de circuitos con PSPICE
- 7.6** Aplicaciones
- 7.7** Diseño de circuitos
- 7.8** Resumen
- Puntos clave
- Problemas

CAPÍTULO

ANÁLISIS TRANSITORIO *de CIRCUITOS de PRIMER ORDEN*



En este capítulo llevamos a cabo lo que normalmente se conoce como análisis transitorio de primer orden, ya que las redes que examinamos contienen sólo un único elemento de almacenamiento. Cuando en la red está presente sólo un elemento de almacenamiento, ésta puede describirse mediante una ecuación diferencial de primer orden.

Nuestro análisis incluye un examen y descripción del comportamiento de un circuito como función del tiempo después de que ocurre un cambio súbito en la red debido a la apertura o cierre de interruptores. Debido a la presencia del elemento de almacenamiento, la respuesta del circuito a un cambio súbito atravesará por un periodo de transición antes de estabilizarse en un valor de estado estable. Examinaremos cuidadosamente este periodo de transición en nuestro análisis transitorio.

Uno de los parámetros importantes que estudiaremos en nuestro análisis transitorio es la constante de

tiempo del circuito. Éste es un parámetro muy importante de la red ya que nos dice qué tan rápido responderá el circuito a los cambios. Podemos contrastar dos sistemas muy diferentes para obtener un sentido del parámetro. Por ejemplo, considere el modelo para un sistema de aire acondicionado para una habitación y el modelo para una etapa de un solo transistor de amplificación en un chip de computadora. Si cambiamos el ajuste del acondicionador de aire de 70 a 60 grados, la unidad funcionará y la habitación comenzará a enfriarse. Sin embargo, la temperatura medida por un termómetro en la habitación disminuirá lentamente y, así, el tiempo requerido para alcanzar la temperatura deseada será largo. No obstante, si enviamos una señal de disparo a un transistor para cambiar el estado, la acción puede tardar sólo unos cuantos nanosegundos. Esos dos sistemas tendrán constantes de tiempo muy diferentes.

Se presentan dos técnicas de análisis para llevar a cabo un análisis transitorio: el método de la ecuación diferencial en el que se escribe una ecuación diferencial y se resuelve para cada red, y un método de paso por paso que toma ventaja de la forma conocida de la solución en cada caso.

Se examinan con algún detalle las técnicas requeridas para llevar a cabo un análisis transitorio con PSPICE, y se presentan ejemplos para los diversos tipos de entradas. Finalmente, se presenta y analiza un número de ejemplos orientados a las aplicaciones. ■

7.1 Introducción

En el capítulo 6 encontramos que los capacitores y las bobinas eran capaces de almacenar energía eléctrica. En el caso de un condensador cargado, la energía se almacena en el campo eléctrico que existe entre las placas cargadas positiva y negativamente. Esta energía almacenada puede liberarse si de alguna forma se conecta un circuito a través del condensador que proporcione una trayectoria por la cual las cargas negativas se mueven hacia las cargas positivas. Como sabemos, este movimiento de carga constituye una corriente. La razón por la cual se descarga la energía es una función directa de los parámetros en el circuito que está conectado a través de las placas del condensador.

Como un ejemplo, considere el circuito del flash de una cámara. Recuerde que la operación del circuito del flash, desde el punto de vista de un usuario, supone oprimir un botón en la cámara que dispara el obturador y el flash, y entonces hay que esperar unos segundos antes de repetir el proceso para tomar la siguiente fotografía. Esta operación puede ser modelada usando el circuito de la figura 7.1a. La fuente de voltaje y la resistencia R_S modelan las baterías que hacen funcionar la cámara y el flash. El capacitor modela el almacenamiento de energía, el interruptor modela el botón y, finalmente, la resistencia R modela la lámpara de destello de xenón. Así, si se carga el capacitor, cuando el interruptor está cerrado, el voltaje del capacitor cae y se libera la energía a través de la lámpara de xenón, produciendo el destello. En la práctica, esta energía liberada tarda cerca de un milisegundo y el tiempo de descarga es una función de los elementos en el circuito. Cuando el botón se suelta y el interruptor queda abierto, la batería comienza a recargar al capacitor. Una vez más, el tiempo requerido para cargar el capacitor es una función de los elementos del circuito. Los ciclos de carga y descarga se ilustran gráficamente en la figura 7.1b. Aunque el tiempo de descarga es muy rápido, no es instantáneo. A fin de proporcionar otra idea de este fenómeno, considere lo que podemos llamar un *diagrama de cuerpo libre* de la mitad derecha de la red de la figura 7.1a, como se muestra en la figura 7.1c, es decir, un capacitor cargado que se descarga a través de una resistencia. Cuando el interruptor está cerrado, la LCK para el circuito es

$$C \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{v_c(t)}{R} = 0$$

o

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = 0$$

Demostraremos en la siguiente sección que la solución de esta ecuación es

$$v_c(t) = V_o e^{-t/RC}$$

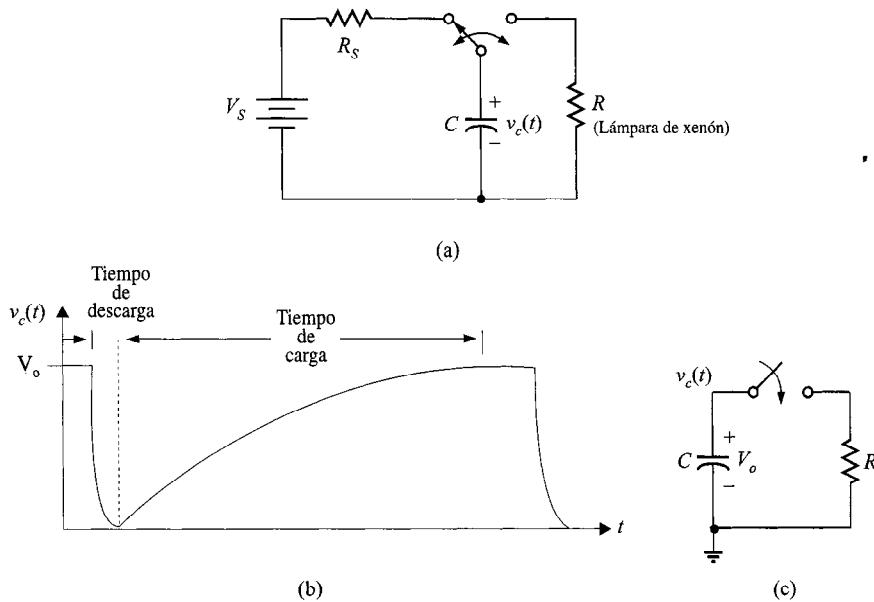


FIGURA 7.1 Diagramas utilizados para describir el circuito del flash de una cámara.

Note que esta función es una exponencial decreciente, y que la razón por la cual decrece es una función de los valores de R y C . El producto RC es un parámetro muy importante y le asignaremos un nombre especial en la siguiente discusión.

7-2 Forma general de las ecuaciones de respuesta

En nuestro estudio de circuitos transitorios de primer orden mostraremos que la solución de esos circuitos (es decir, encontrar un voltaje o una corriente) requiere que resolvamos una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t) \quad (7.1)$$

Aunque hay una variedad de técnicas para resolver una ecuación de este tipo, obtendremos una solución general que emplearemos en dos métodos diferentes del análisis transitorio.

Un teorema fundamental de las ecuaciones diferenciales afirma que si $x(t) = x_p(t)$ es una solución a la ecuación (7.1), y $x(t) = x_c(t)$ es una solución a la ecuación homogénea

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = 0 \quad (7.2)$$

entonces

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) \quad (7.3)$$

es una solución de la ecuación (7.1) original. El término $x_p(t)$ se llama *solución integral particular*, o respuesta forzada, y $x_c(t)$ se llama *solución complementaria*, o respuesta natural.

En este momento nos limitamos a la situación en la que $f(t) = A$ (es decir, alguna constante). La solución general de la ecuación diferencial consiste entonces en dos partes que se obtienen resolviendo las dos ecuaciones

$$\frac{dx_p(t)}{dt} + ax_p(t) = A \quad (7.4)$$

$$\frac{dx_c(t)}{dt} + ax_c(t) = 0 \quad (7.5)$$

Como el lado derecho de la ecuación (7.4) es una constante, es razonable suponer que la solución $x_p(t)$ también debe ser una constante. Por lo tanto, suponemos que

$$x_p(t) = K_1 \quad (7.6)$$

Sustituyendo esta constante en la ecuación (7.4) se obtiene

$$K_1 = \frac{A}{a} \quad (7.7)$$

Al examinar la ecuación (7.5) notamos que

$$\frac{dx_c(t)/dt}{x_c(t)} = -a \quad (7.8)$$

Esta ecuación es equivalente a

$$\frac{d}{dt} [\ln x_c(t)] = -a$$

De aquí,

$$\ln x_c(t) = -at + c$$

y por tanto,

$$x_c(t) = K_2 e^{-at} \quad (7.9)$$

Por tanto, una solución de la ecuación (7.1) es

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_c(t) \\ &= \frac{A}{a} + K_2 e^{-at} \end{aligned} \quad (7.10)$$

La constante K_2 puede encontrarse si se conoce en un instante de tiempo el valor de la variable independiente $x(t)$.

La ecuación (7.10) puede expresarse en general en la forma

$$x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau} \quad (7.11)$$

Una vez que se obtiene la solución de la ecuación (7.11), ciertos elementos de la ecuación reciben nombres de uso común en ingeniería eléctrica. Por ejemplo, el término K_1 se denomina como la *solución de estado estable*: el valor de la variable $x(t)$ conforme $t \rightarrow \infty$ cuando el segundo término se hace insignificante. La constante τ se llama *constante de tiempo* del circuito. Note que el segundo término de la ecuación (7.11) es una exponencial decreciente que tiene un valor, si $\tau > 0$, de K_2 para $t = 0$ y un valor de 0 para $t = \infty$. La razón a la cual decrece esta exponencial está determinada por la constante de tiempo τ . En la figura 7.2a se muestra una representación gráfica de este efecto. Como puede verse de la figura, el valor de $x_c(t)$ ha caído de K_2 a un valor de $0.368K_2$ en una constante de tiempo, una caída de 63.2 %. En dos constantes de tiempo el valor de $x_c(t)$ ha caído a $0.135K_2$, una caída de 63.2 % del valor al tiempo $t = \tau$. Esto significa que la brecha entre un punto sobre la curva y el valor final de la curva se cierra 63.2 % cada constante de tiempo. Finalmente, después de cinco constantes de tiempo, $x_c(t) = 0.0067K_2$, que es menos que el 1%.

Una propiedad interesante de la función exponencial que se muestra en la figura 7.2a es que la pendiente inicial de la curva intersecta el eje de tiempo a un valor de $t = \tau$. De hecho, podemos tomar cualquier punto sobre la curva, no sólo el valor inicial, y encontramos la constante de tiempo hallando el tiempo requerido para cerrar la brecha un 63.2 %. Finalmente, la diferencia entre una constante de tiempo pequeña (es decir, respuesta rápida) y una constante de tiempo grande (es decir, respuesta lenta) se muestra en la figura 7.2b. Esas curvas indican que si el circuito tiene una constante de tiempo pequeña, se restablece rápidamente a un valor de estado estable. De manera inversa, si la constante de tiempo es grande, se requiere más tiempo para que el circuito se restablezca o alcance el estado estable. En cualquier caso, note que la respuesta del circuito esencialmente alcanza el estado estable en cinco constantes de tiempo (es decir, 5τ).

Observe que la discusión previa ha sido muy general porque no se ha supuesto ninguna forma particular del circuito —sólo que de éste resulta una ecuación diferencial de primer orden.

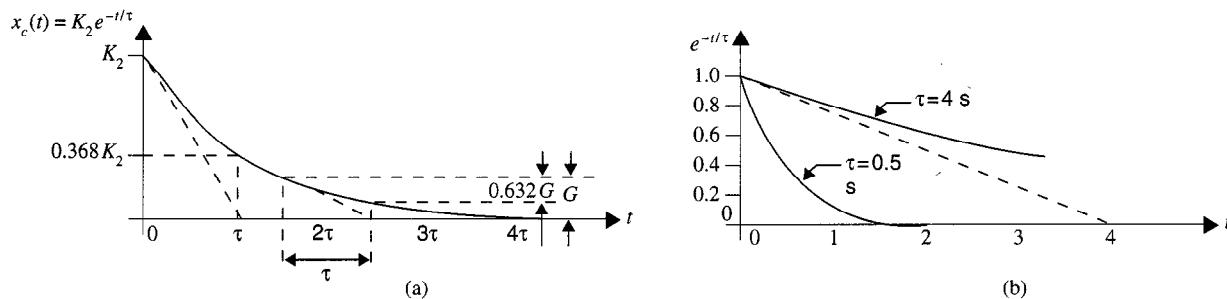


FIGURA 7.2 Ilustraciones de la constante de tiempo.

7-3 Técnicas de análisis

Método de ecuación diferencial

La ecuación (7.11) define la forma general de la solución de circuitos transitorios de primer orden, es decir, representa la solución de la ecuación diferencial que describe una corriente o voltaje desconocidos *en cualquier lugar de la red*. Una de las maneras en que podemos llegar a esta solución está en que resolvamos las ecuaciones que describen el comportamiento de la red usando lo que con frecuencia se llama *método de variable de estado*. De acuerdo con esta técnica escribimos la ecuación para el voltaje a través del capacitor, la ecuación para la corriente a través de la bobina o ambas. Recuerde del capítulo 6 que esas cantidades no pueden cambiar instantáneamente. Ilustremos primero esta técnica en el caso general y luego examinemos dos ejemplos específicos.

Considere el circuito que se muestra en la figura 7.3a. Al tiempo $t = 0$, el interruptor se cierra. La ecuación de la LCK que describe el voltaje del capacitor para el tiempo $t > 0$ es

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t) - V_s}{R} = 0$$

o

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{RC} = \frac{V_s}{RC}$$

De acuerdo con lo que acabamos de estudiar, se supone que la solución de esta ecuación diferencial de primer orden es de la forma

$$v(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación diferencial se obtiene

$$-\frac{K_2}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{K_1}{RC} + \frac{K_2}{RC} e^{-t/\tau} = \frac{V_s}{RC}$$

Igualando los términos constantes y exponenciales obtenemos

$$K_1 = V_s$$

$$\tau = RC$$

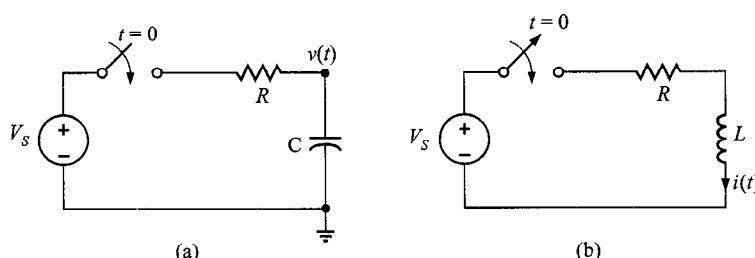


FIGURA 7.3 Circuitos *RC* y *RL*.

Por tanto,

$$v(t) = V_S + K_2 e^{-t/RC}$$

donde V_S es el valor de estado estable y RC es la constante de tiempo de la red. K_2 está determinada por la condición inicial del capacitor. Por ejemplo, si el capacitor está inicialmente descargado, es decir, si el voltaje a través del capacitor es cero en $t = 0$, entonces

$$0 = V_S + K_2$$

o

$$K_2 = -V_S$$

De aquí, la solución completa para el voltaje $v(t)$ es

$$v(t) = V_S - V_S e^{-t/RC}$$

El circuito de la figura 7.3b puede examinarse de manera similar. La ecuación de la LVK que describe la corriente de la bobina para $t > 0$ es

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_S$$

Un desarrollo idéntico al que acabamos de utilizar da

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + k_2 e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$

donde V_S/R es el valor de estado estable y L/R es la constante de tiempo del circuito. Si no hay corriente inicial en la bobina, entonces en $t = 0$

$$0 = \frac{V_S}{R} + K_2$$

y

$$K_2 = -\frac{V_S}{R}$$

De aquí,

$$i(t) = \frac{V_S}{R} - \frac{V_S}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

es la solución completa. Advierta que si deseamos calcular el voltaje a través de la resistencia, entonces

$$v_R(t) = Ri(t)$$

$$= V_S \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

E J E M P L O 7.1

Considere el circuito que se muestra en la figura 7.4a. Suponiendo que el interruptor ha estado en la posición 1 por largo tiempo, en el tiempo $t = 0$ el interruptor se mueve a la posición 2. Deseamos calcular la corriente $i(t)$ para $t > 0$.

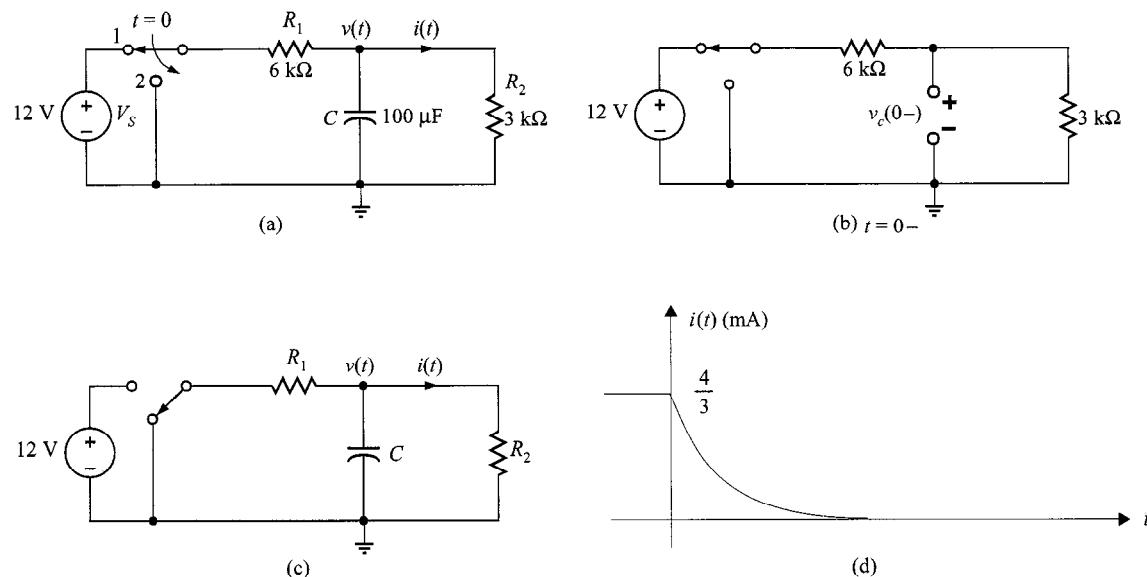


FIGURA 7.4 Análisis de un circuito RC .

S O L U C I Ó N En $t = 0-$ el capacitor está totalmente cargado y no conduce corriente, ya que éste actúa como un circuito abierto en cd. El voltaje inicial a través del capacitor puede encontrarse usando división de voltaje. Como se muestra en la figura 7.4b,

$$v_c(0-) = 12 \left(\frac{3k}{6k + 3k} \right) = 4 \text{ V}$$

La red para $t > 0$ se muestra en la figura 7.4c. La ecuación de la LCK para el voltaje a través del condensador es

$$\frac{v(t)}{R_1} + C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_2} = 0$$

Usando los valores de los componentes la ecuación se convierte en

$$\frac{dv(t)}{dt} + 5v(t) = 0$$

La forma de la solución a esta ecuación homogénea es

$$v(t) = K_2 e^{-t/\tau}$$

Si sustituimos esta solución en la ecuación diferencial encontramos que $\tau = 0.2$ segundos. Así,

$$v(t) = K_2 e^{-t/0.2} \text{ V}$$

Usando la condición inicial $v_c(0-) = v_c(0+) = 4$ V, encontramos que la solución completa es

$$v(t) = 4e^{-t/0.2} \text{ V}$$

Entonces $i(t)$ es simplemente

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_2}$$

o

$$i(t) = \frac{4}{3} e^{-t/0.2} \text{ mA}$$

EJEMPLO 7.2

El interruptor en la red de la figura 7.5a opera a $t = 0$. Encontremos el voltaje de salida $v_o(t)$ para $t > 0$.

SOLUCIÓN En $t = 0-$ el circuito está en estado estable y la bobina actúa como un corto circuito. La corriente inicial a través de la bobina puede encontrarse de muchas maneras; sin embargo, formaremos un equivalente de Thévenin para la parte de la red a la izquierda de la bobina como se muestra en la figura 7.5b. De esta red encontramos que $I_1 = 4$ A y $V_{oc} = 4$ V. Además, $R_{Th} = 1 \Omega$. De aquí, $i_L(0-)$ obtenida de la figura 7.5c es $i_L(0-) = 4/3$ A.

La red para $t > 0$ se muestra en la figura 7.5d. La ecuación de la LVK para el circuito es

$$-V_{S1} + R_1 i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + R_3 i(t) = 0$$

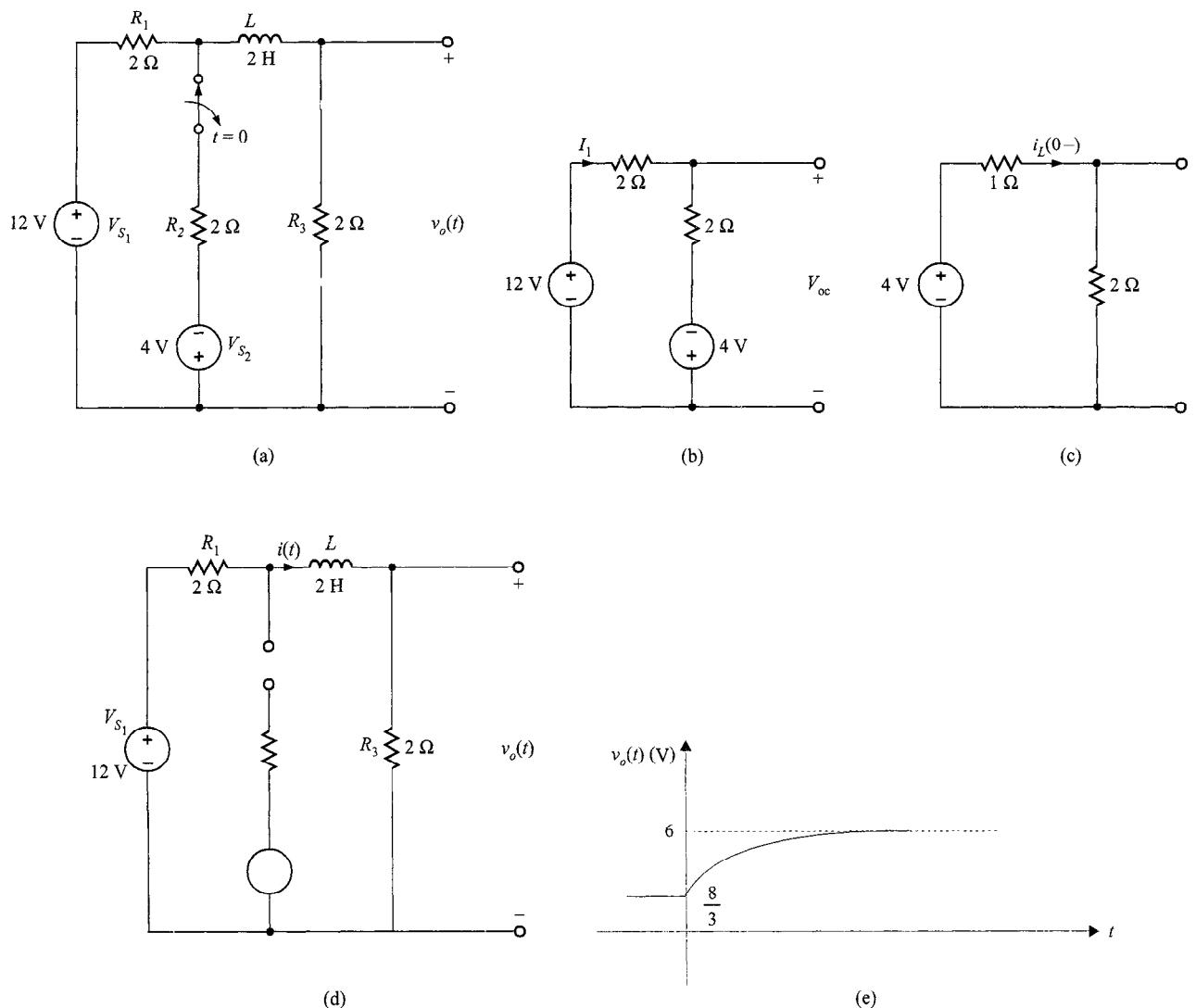
la cual con los valores de los componentes se reduce a

$$\frac{di(t)}{dt} + 2i(t) = 6$$

La solución a esta ecuación es de la forma

$$i(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$$

que cuando se sustituye en la ecuación diferencial da

**FIGURA 7.5** Análisis de un circuito RL .

$$K_1 = 3$$

$$\tau = 1/2$$

Por tanto,

$$i(t) = (3 + K_2 e^{-2t}) \text{ A}$$

Evaluando esta función en las condiciones iniciales, que son

$$i_L(0-) = i_L(0+) = i(0) = 4/3 \text{ A}$$

encontramos que

$$K_2 = \frac{-5}{3}$$

De aquí,

$$i(t) = \left(3 - \frac{5}{3} e^{-2t}\right) A$$

y entonces

$$v_o(t) = 6 - \frac{10}{3} e^{-2t} V$$

Una gráfica del voltaje $v_o(t)$ se muestra en la figura 7.5e.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D7.1 Encuentre $v_C(t)$ para $t > 0$ en el circuito que se muestra en la figura D7.1.

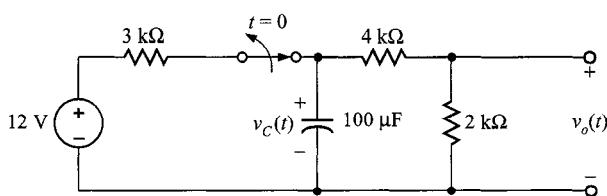


FIGURA D7.1

Resp.: $v_C(t) = 8e^{-t/0.6}$ V.

D7.2 En el circuito que se muestra en la figura D7.2, el interruptor se abre en $t = 0$. Encuentre $i_1(t)$ para $t > 0$.

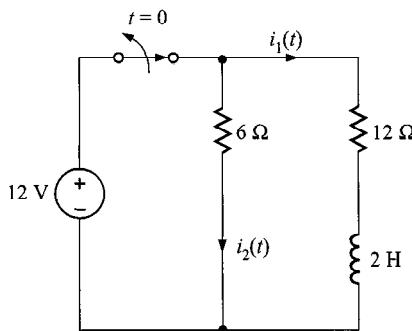


FIGURA D7.2

Resp.: $i_1(t) = 1e^{-9t}$ A.

Método paso por paso

En la técnica de análisis anterior derivamos la ecuación diferencial para el voltaje del capacitor o la corriente de la bobina, resolvimos la ecuación diferencial y utilizamos la solución para encontrar la variable desconocida en la red. En la técnica muy metódica que describiremos, utilizaremos el hecho de que la ecuación (7.11) es la forma de la solución y emplearemos el análisis de circuitos para determinar las constantes K_1 , K_2 y τ .

De la ecuación (7.11) notamos que conforme $t \rightarrow \infty$, $e^{-at} \rightarrow 0$ y $x(t) = K_1$. Por lo tanto, si el circuito se resuelve para la variable $x(t)$ en estado estable (es decir, $t \rightarrow \infty$) con el capacitor reemplazado por un circuito abierto [v es constante y por lo tanto $i = C(dv/dt) = 0$] o la bobina reemplazada por un corto circuito [i es constante y por lo tanto $v = L(di/dt) = 0$], entonces la variable $x(t) = K_1$. Note que como el ca-

pacitor o la bobina han sido cambiados, el circuito es un circuito de cd con fuentes constantes y resistencias y, por tanto, sólo se requiere el análisis de cd en la solución del estado estable.

La constante K_2 en la ecuación (7.11) puede también obtenerse vía la solución de un circuito de cd en el que un capacitor se reemplaza por una fuente de voltaje o una bobina es reemplazada por una fuente de corriente. El valor de la fuente de voltaje para el capacitor o la fuente de corriente para la bobina es un valor conocido en un instante de tiempo. En general, utilizaremos los valores de la condición inicial, ya que en general éstos son los únicos conocidos, pero puede usarse el valor en cualquier instante. Este valor puede obtenerse de numerosas formas y con frecuencia se especifica como dato de entrada en el planteamiento del problema. Sin embargo, una solución más apropiada es una en la que se conecta un interruptor en el circuito y el valor inicial del voltaje del capacitor o de la corriente de la bobina están determinados por el circuito previo (es decir, el circuito antes de que el interruptor sea conectado). Normalmente se supone que el circuito previo ha alcanzado el estado estable y, por tanto, el voltaje a través del condensador o la corriente a través de la bobina puede encontrarse exactamente de la misma manera que se usó para encontrar K_1 .

Finalmente, el valor de la constante de tiempo puede encontrarse determinando la resistencia de Thévenin equivalente en las terminales del elemento de almacenamiento. Entonces $\tau = R_{\text{Th}}C$ para un circuito RC , y $\tau = L/R_{\text{Th}}$ para un circuito RL .

Reiteremos ahora este procedimiento en una forma paso por paso.

Paso 1. Suponemos una solución para la variable $x(t)$ de la forma $x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$.

Paso 2. Suponiendo que el circuito original ha alcanzado el estado estable antes de que se conecte un interruptor (produciendo por ello un circuito nuevo), dibujar este circuito previo con el capacitor reemplazado por un circuito abierto o la bobina reemplazada por un corto circuito. Resolver para el voltaje a través del capacitor, $v_C(0-)$, o la corriente a través de la bobina, $i_L(0-)$, antes de la acción del interruptor.

Paso 3. Suponiendo que la energía en el elemento de almacenamiento no pueda cambiar en el tiempo cero, dibujar el circuito, válido sólo en $t = 0+$. Los interruptores están en sus nuevas posiciones y el condensador es reemplazado por una fuente de voltaje con un valor de $v_C(0+) = v_C(0-)$ o la bobina reemplazada por una fuente de corriente con un valor $i_L(0+) = i_L(0-)$. Resolver para el valor inicial de la variable $x(0+)$.

Paso 4. Suponiendo que se ha alcanzado el estado estable después de que los interruptores se han conectado, dibujar el circuito equivalente, válido para $t > 5\tau$, reemplazando el capacitor por un circuito abierto o la bobina por un corto circuito. Resolver para el valor en el estado estable de la variable

$$x(t) \Big|_{t > 5\tau} \doteq x(\infty)$$

Paso 5. Como la constante de tiempo para todos los voltajes y corrientes en el circuito será la misma, puede obtenerse reduciendo todo el circuito a un simple circuito en serie que contenga una fuente de voltaje, una resistencia y un elemento de almacenamiento (es decir, un capacitor o una bobina) que forme un circuito simple de Thévenin

equivalente en las terminales del elemento de almacenamiento. Este circuito de Thévenin equivalente se obtiene recorriendo el circuito desde las terminales del elemento de almacenamiento. La constante de tiempo para un circuito que contiene un capacitor es $\tau = R_{\text{Th}}C$, y para un circuito que contiene una bobina es $\tau = L/R_{\text{Th}}$.

Paso 6. Utilizando los resultados de los pasos 3, 4 y 5, podemos evaluar las constantes en el paso 1 como

$$x(0+) = K_1 + K_2$$

$$x(\infty) = K_1$$

y por tanto, $K_1 = x(\infty)$, $K_2 = x(0+) - x(\infty)$, y por ende la solución es

$$x(t) = x(\infty) + [x(0+) - x(\infty)]e^{-t/\tau}$$

Recuerde que esta forma de solución sólo se aplica en circuitos de primer orden que tienen fuentes de cd constantes. Si las fuentes no son de cd, la respuesta forzada será diferente. En general, la respuesta forzada es de la misma forma que las funciones forzadas (fuentes) y sus derivadas.

EJEMPLO 7.3

Considere el circuito que se muestra en la figura 7.6a. El circuito está en estado estable antes del tiempo $t = 0$, cuando el commutador está cerrado. Calculemos la corriente $i(t)$ para $t > 0$.

SOLUCIÓN

Paso 1. $i(t)$ es de la forma $K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$.

Paso 2. El voltaje inicial a través del capacitor se calcula de la figura 7.6b como

$$\begin{aligned} v_C(0-) &= 36 - (2)(2) \\ &= 32 \text{ V} \end{aligned}$$

Paso 3. El nuevo circuito, válido sólo para $t = 0+$, se muestra en la figura 7.6c. El valor de la fuente de voltaje que reemplaza al capacitor es $v_C(0-) = v_C(0+) = 32 \text{ V}$. De aquí,

$$i(0+) = \frac{32}{6k} = \frac{16}{3} \text{ mA}$$

Paso 4. El circuito equivalente, válido para $t > 5\tau$, se muestra en la figura 7.6d. La corriente $i(\infty)$ causada por la fuente de 36 V es

$$i(\infty) = \frac{36}{2k + 6k} = \frac{36}{8} \text{ mA}$$

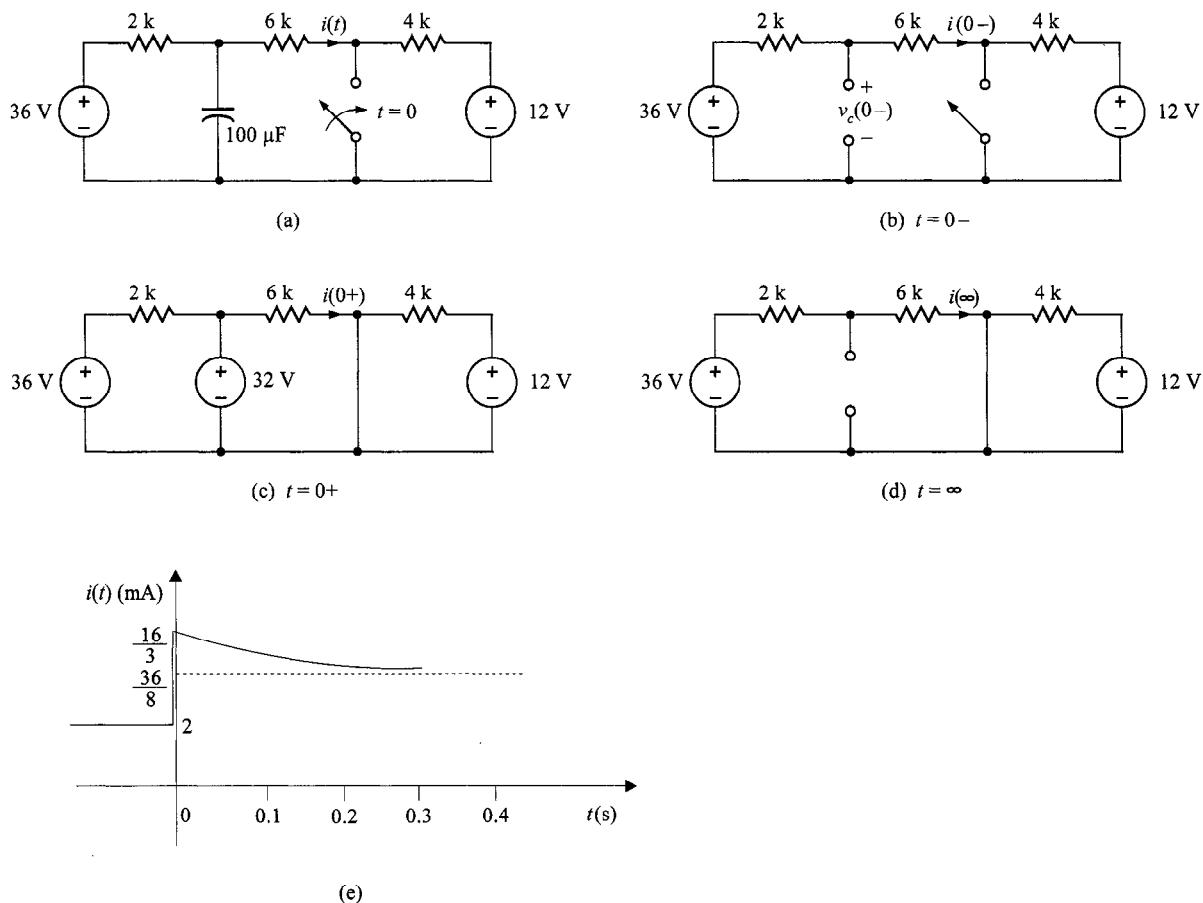


FIGURA 7.6 Análisis de un circuito transitorio RC con una función forzante constante.

Paso 5. La resistencia de Thévenin equivalente, obtenida recorriendo las terminales del circuito abierto del capacitor en la figura 7.6d, es

$$R_{\text{Th}} = \frac{(2\text{k})(6\text{k})}{2\text{k} + 6\text{k}} = \frac{3}{2} \text{ k}\Omega$$

Por tanto, la constante de tiempo del circuito es

$$\begin{aligned} \tau &= R_{\text{Th}} C \\ &= \left(\frac{3}{2}\right) (10^3) (100) (10^{-6}) \\ &= 0.15 \text{ s} \end{aligned}$$

Paso 6.

$$K_1 = i(\infty) = \frac{36}{8} \text{ mA}$$

$$K_2 = i(0+) - i(\infty) = i(0+) - K_1$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{36}{8}$$

$$= \frac{5}{6} \text{ mA}$$

Por tanto,

$$i(t) = \frac{36}{8} + \frac{5}{6} e^{-t/0.15} \text{ mA}$$

Una vez más vemos que aunque el voltaje a través del capacitor es continuo en $t = 0$, la corriente $i(t)$ en la resistencia de $6 \text{ k}\Omega$ salta en $t = 0$ de 2 mA a $5\frac{1}{3} \text{ mA}$, y finalmente decae a $4\frac{1}{2} \text{ mA}$.

E J E M P L O 7.4

El circuito que se muestra en la figura 7.7a se supone que ha estado en una condición de estado estable antes del cierre del interruptor en $t = 0$. Deseamos calcular el voltaje $v(t)$ para $t > 0$.

S O L U C I Ó N

Paso 1. $v(t)$ es de la forma $K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$.

Paso 2. En la figura 7.7b vemos que

$$\begin{aligned} i_L(0-) &= \frac{24}{4 + \frac{(6)(3)}{6+3}} \left(\frac{6}{6+3} \right) \\ &= \frac{8}{3} \text{ A} \end{aligned}$$

Paso 3. El nuevo circuito, válido sólo para $t = 0+$, se muestra en la figura 7.7c, el cual es equivalente al circuito de la figura 7.7d. El valor de la fuente de corriente que reemplaza a la bobina es $i_L(0-) = i_L(0+) = \frac{8}{3} \text{ A}$. El voltaje nodal $v_1(0+)$ puede determinarse del circuito de la figura 7.7d usando un ecuación de un solo nodo, y $v(0+)$ es igual a la diferencia entre la fuente de voltaje y $v_1(0+)$. La ecuación para $v_1(0+)$ es

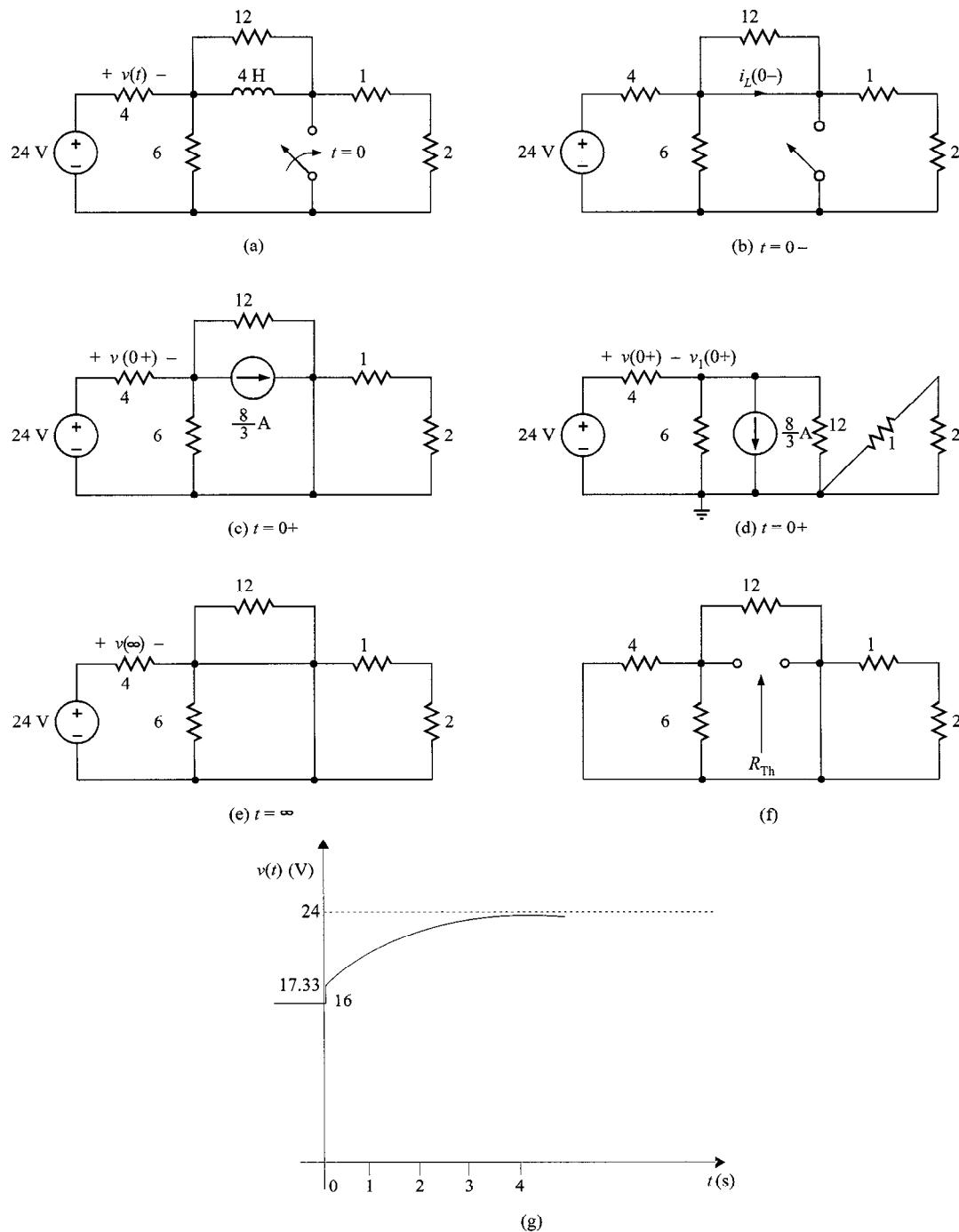


FIGURA 7.7 Análisis de un circuito transitorio RL con una función forzante constante.

$$\frac{v_1(0+) - 24}{4} + \frac{v_1(0+)}{6} + \frac{8}{3} + \frac{v_1(0+)}{12} = 0$$

o

$$v_1(0+) = \frac{20}{3} \text{ V}$$

Entonces

$$v(0+) = 24 - v_1(0+)$$

$$= \frac{52}{3} \text{ V}$$

Paso 4. El circuito equivalente para la condición de estado estable después del cierre del interruptor está dado en la figura 7.7e. Advierta que las resistencias de 6, 12, 1 y 2 Ω están en corto circuito y, por tanto, $v(\infty) = 24 \text{ V}$.

Paso 5. La resistencia de Thévenin equivalente se encuentra recorriendo el circuito desde las terminales de la bobina. Este circuito se muestra en la figura 7.7f. Observe con cuidado que R_{Th} es igual a las resistencias de 4, 6 y 12 Ω en paralelo. Por tanto, $R_{\text{Th}} = 2 \Omega$, y la constante de tiempo del circuito es

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{Th}}} = \frac{4}{2} = 2 \text{ s}$$

Paso 6. Del análisis previo encontramos que

$$K_1 = v(\infty) = 24$$

$$K_2 = v(0+) - v(\infty) = -\frac{20}{3}$$

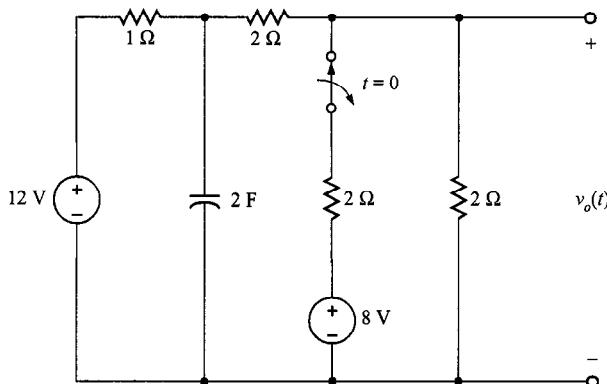
y de aquí que

$$v(t) = 24 - \frac{20}{3} e^{-t/2} \text{ V}$$

De la figura 7.7b vemos que el valor de $v(t)$ antes del cierre del interruptor es 16 V. Por tanto, la respuesta del circuito $v(t)$, como función del tiempo, se muestra en la figura 7.7g.

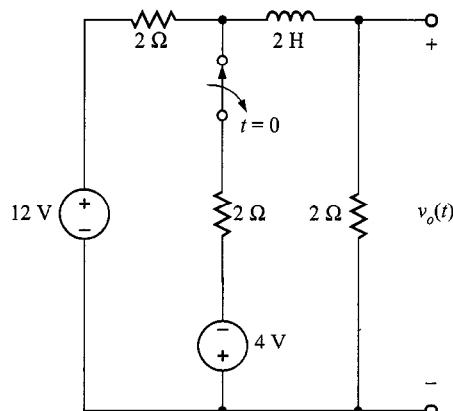
EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D7.3 Considere la red de la figura D7.3. El interruptor se abre en $t = 0$. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$.

**FIGURA D7.3**

$$\text{Resp.: } v_o(t) = \frac{24}{5} + \frac{1}{5} e^{-(5/8)t} \text{ V.}$$

D7.4 Considere la red que se muestra en la figura D7.4. Si el interruptor se abre en $t = 0$, encuentre el voltaje de salida $v_o(t)$ para $t > 0$.

**FIGURA D7.4**

$$\text{Resp.: } v_o(t) = 6 - \frac{10}{3} e^{-2t} \text{ V.}$$

EJEMPLO 7.5

El circuito que se muestra en la figura 7.8a ha alcanzado el estado estable con el conmutador en la posición 1. En el tiempo $t = 0$ el interruptor se mueve de la posición 1 a la posición 2. Queremos calcular $v_o(t)$ para $t > 0$.

SOLUCIÓN

Paso 1. $v_o(t)$ es de la forma $K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$.

Paso 2. Usando el circuito de la figura 7.8b, podemos calcular $i_L(0-)$.

$$i_A = \frac{12}{4} = 3 \text{ A}$$

Entonces

$$i_L(0-) = \frac{12 + 2i_A}{6} = \frac{18}{6} = 3 \text{ A}$$

Paso 3. El nuevo circuito, válido sólo para $t = 0+$, se muestra en la figura 7.8c. El valor de la fuente de corriente que reemplaza a la bobina es $i_L(0-) = i_L(0+) = 3 \text{ A}$. Debido a la fuente de corriente

$$v_o(0+) = (3)(6) = 18 \text{ V}$$

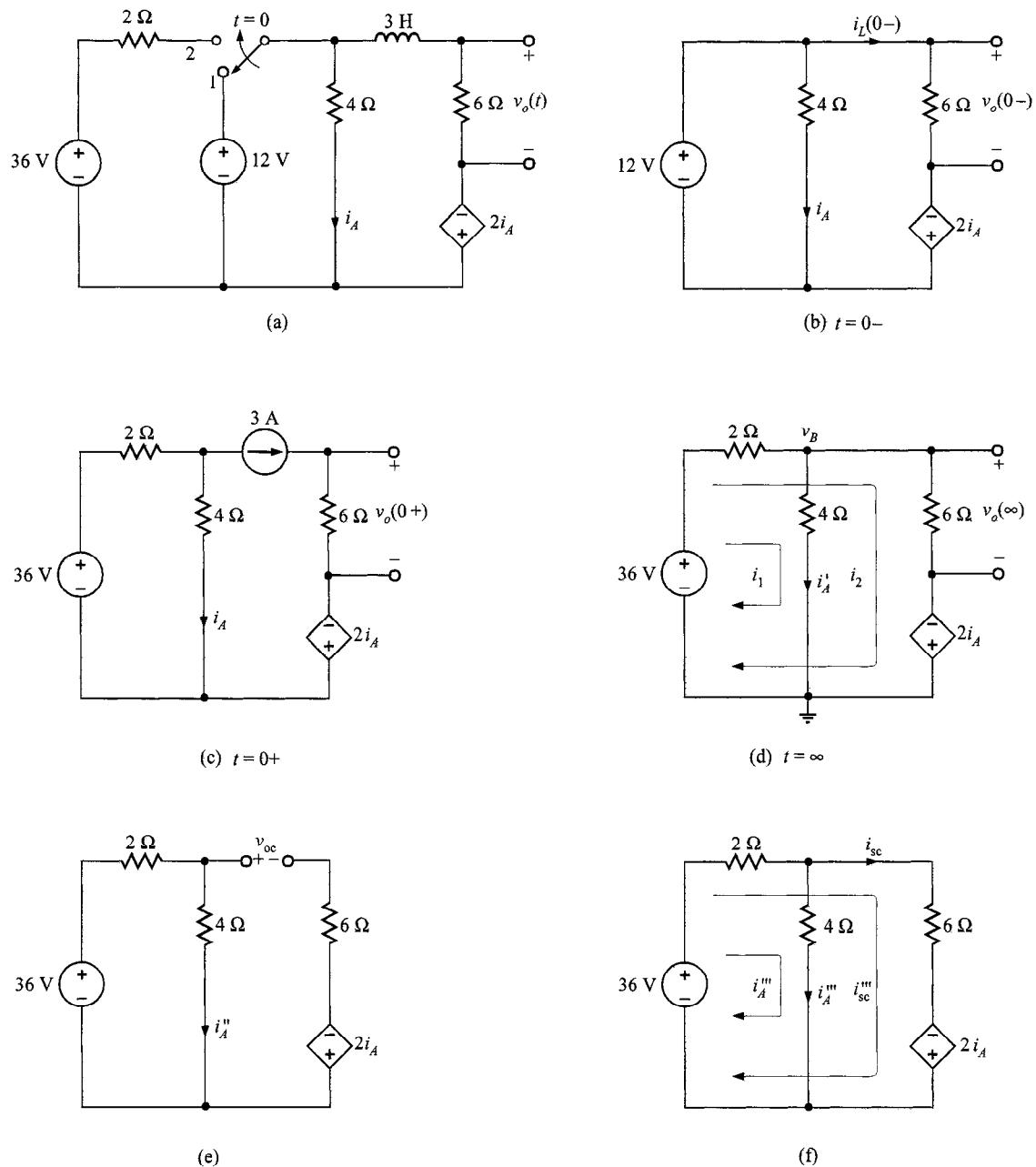


FIGURA 7.8 Análisis de un circuito transitorio RL que contiene una fuente dependiente.

Paso 4. El circuito equivalente, para la condición de estado estable después del cierre del interruptor, se da en la figura 7.8d. Utilizando los voltajes y corrientes definidos en la figura, podemos calcular $v_o(\infty)$ en una variedad de formas. Por ejemplo, usando ecuaciones nodales podemos encontrar $v_o(\infty)$ de

$$\frac{v_B - 36}{2} + \frac{v_B}{4} + \frac{v_B + 2i'_A}{6} = 0$$

$$i'_A = \frac{v_B}{4}$$

$$v_o(\infty) = v_B + 2i'_A$$

o usando ecuaciones de malla,

$$36 = 2(i_1 + i_2) + 4i_1$$

$$36 = 2(i_1 + i_2) + 6i_2 - 2i_1$$

$$v_o(\infty) = 6i_2$$

Usando cualquiera de los métodos, encontramos que $v_o(\infty) = 27$ V.

Paso 5. La resistencia equivalente de Thévenin puede obtenerse vía v_{oc} e i_{sc} , debido a la presencia de la fuente dependiente. De la figura 7.8e notamos que

$$i''_A = \frac{36}{2+4} = 6 \text{ A}$$

Por tanto,

$$v_{oc} = (4)(6) + 2(6)$$

$$= 36 \text{ V}$$

De la figura 7.8f podemos escribir las siguientes ecuaciones de malla:

$$36 = 2(i'''_A + i_{sc}) + 4i''_A$$

$$36 = 2(i'''_A + i_{sc}) + 6i_{sc} - 2i''_A$$

Resolviendo esas ecuaciones para i_{sc} se obtiene

$$i_{sc} = \frac{36}{8} \text{ A}$$

Por tanto,

$$R_{Th} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = \frac{36}{36/8} = 8 \Omega$$

De aquí, la constante de tiempo del circuito es

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{Th}}} = \frac{3}{8} \text{ s}$$

Paso 6. Usando la información recién calculada, podemos derivar la ecuación final para $v_o(t)$:

$$K_1 = v_o(\infty) = 27$$

$$K_2 = v_o(0+) - v_o(\infty) = 18 - 27 = -9$$

Por tanto,

$$v_o(t) = 27 - 9e^{-t/(3/8)} \text{ V}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D7.5 Si el interruptor de la red de la figura D7.5 se cierra en $t = 0$, encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$.

Resp.: $v_o(t) = 24 + 36e^{-(t/12)}$ V.

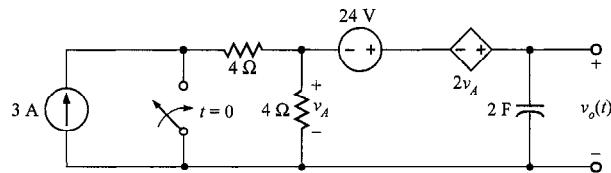


FIGURA D7.5

En este punto es apropiado establecer que no toda acción de un interruptor ocurrirá siempre en el tiempo $t = 0$. Ésta puede ocurrir en cualquier tiempo t_0 . En este caso el resultado del análisis paso por paso da las siguientes ecuaciones:

$$x(t_0) = K_1 + K_2$$

$$x(\infty) = K_1$$

y

$$x(t) = x(\infty) + [x(t_0) - x(\infty)] e^{-(t-t_0)/\tau} \quad t > t_0$$

La función está corrida esencialmente en el tiempo por t_0 segundos.

Finalmente, se debe notar que si más de una fuente independiente está presente en la red, simplemente podemos emplear la superposición para obtener la respuesta total.

Hasta aquí hemos considerado sólo fuentes constantes. Aunque éstas representan un tipo de problema muy importante, de ningún modo son el único tipo ni es necesariamente el más importante.

Regresando a la ecuación (7.1), preguntamos: “¿Cuál es la solución si $f(t)$ no es una constante y la ecuación de la red realmente es como sigue?”

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t) \quad (7.12)$$

Recuerde que $x(t)$ consiste en dos partes: la respuesta natural (solución complementaria) y la respuesta forzada (solución particular). Es decir,

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \quad (7.13)$$

donde $x_c(t)$ y $x_p(t)$ deben satisfacer las ecuaciones

$$\frac{dx_c(t)}{dt} + ax_c(t) = 0 \quad (7.14)$$

y

$$\frac{dx_p(t)}{dt} + ax_p(t) = f(t) \quad (7.15)$$

Así $x_c(t)$ aún debe ser de la forma

$$x_c(t) = K_2 e^{-at} \quad (7.16)$$

Sin embargo, como $f(t)$ ya no es una constante, $x_p(t)$, en general, tampoco lo será. Aunque hay muchos métodos matemáticos diferentes para determinar la forma apropiada de $x_p(t)$, aquí emplearemos un método deductivo. Un método que es sistemático, y con frecuencia más eficiente, se introducirá en el capítulo 17.

Una inspección cuidadosa de la ecuación (7.15) sugiere que $x_p(t)$ debe consistir en formas funcionales como $f(t)$ y su primera derivada.

EJEMPLO 7.6

Considere el circuito de la figura 7.9. El condensador tiene una carga inicial y en $t = 0$ se aplica una fuente exponencialmente decreciente. Deseamos determinar $v_o(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$.

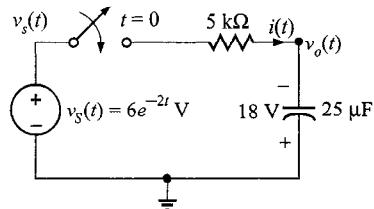


FIGURA 7.9 Circuito RC con una función forzante no constante.

SOLUCIÓN Un análisis nodal da la ecuación

$$C \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{v_o(t) - v_s(t)}{R} = 0 \quad t > 0$$

o

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + 8v_o(t) = 48e^{-2t}$$

Ahora la respuesta natural (solución complementaria) debe, como antes, satisfacer la ecuación homogénea

$$\frac{dv_{oc}(t)}{dt} + 8v_{oc}(t) = 0$$

la cual lleva a

$$v_{oc}(t) = K_2 e^{-8t}$$

La respuesta forzada (solución particular) debe satisfacer la ecuación

$$\frac{dv_{op}(t)}{dt} + 8v_{op}(t) = 48e^{-2t}$$

Deducimos que $v_{op}(t)$ debe ser de la forma de la función forzante, e^{-2t} , y su derivada, la cual en este caso es también e^{-2t} . Así, suponemos que

$$v_{op}(t) = K_1 e^{-2t}$$

y sustituyendo esa supuesta solución en la ecuación diferencial podemos determinar el valor requerido de K_1 .

$$\frac{d}{dt} (K_1 e^{-2t}) + 8(K_1 e^{-2t}) = 48e^{-2t}$$

$$(-2 + 8)K_1 e^{-2t} = 48e^{-2t}$$

$$K_1 = 8$$

Por tanto, la solución total es

$$v_o(t) = 8e^{-2t} + K_2 e^{-8t}$$

Sin embargo, como $v_o(0) = -18$, K_2 puede obtenerse de la expresión para $v_o(t)$ como

$$v_o(0) = -18 = 8e^{-2(0)} + K_2 e^{-8(0)}$$

o

$$K_2 = -26$$

entonces

$$v_o(t) = 8e^{-2t} - 26e^{-8t} \text{ V} \quad t > 0$$

Para determinar $i(t)$, notamos que

$$\begin{aligned}
 i(t) &= C \frac{dv_o(t)}{dt} \\
 &= 25 \times 10^{-6}(-16e^{-2t} + 208e^{-8t}) \\
 &= -0.4e^{-2t} + 5.2e^{-8t} \text{ mA} \quad t > 0
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 7.7

Considere la red de la figura 7.10a. La corriente inicial de la bobina es cero y se aplica un voltaje senoidal en $t = 0$. Encontremos $i_L(t)$ y $v_o(t)$ para $t > 0$.

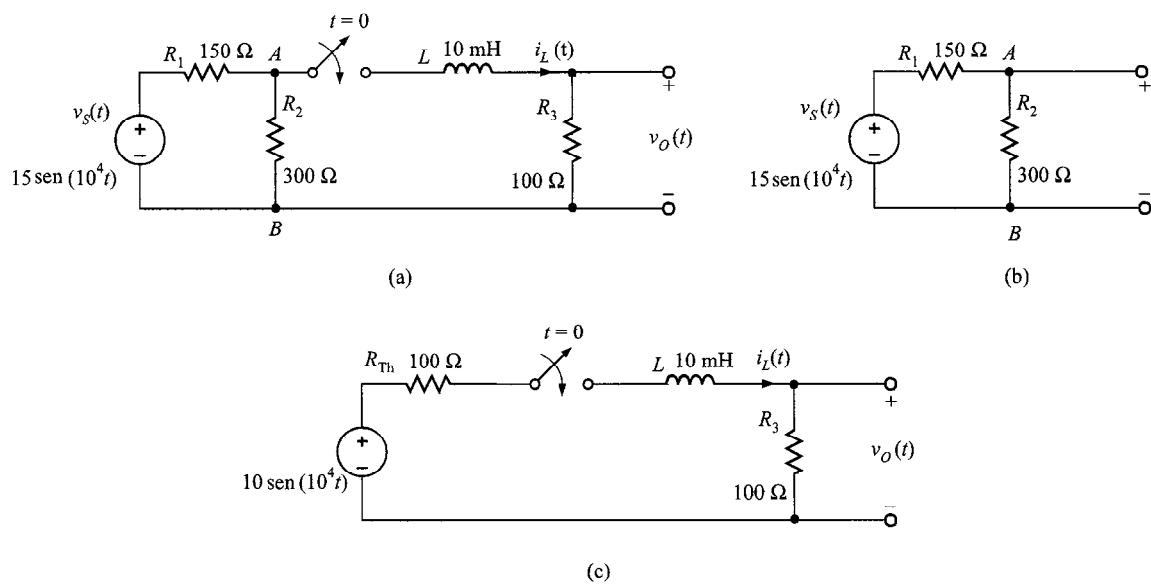


FIGURA 7.10 Circuito RL con una función forzante senoidal.

SOLUCIÓN Para simplificar la red, primero encontramos el circuito equivalente de Thévenin visto con respecto a la fuente en los nodos $A-B$ como se muestra en la figura 7.10b. El voltaje equivalente de Thévenin es

$$v_{Th}(t) = v_s(t) \left(\frac{300}{300 + 150} \right) = 10 \operatorname{sen}(10^4 t) \text{ V}$$

La resistencia equivalente es la combinación en paralelo de 150Ω con 300Ω o $R_{Th} = 100 \Omega$. Ahora el circuito original se reduce al de la figura 7.10c. Un análisis de malla da la expresión

$$v_S(t) = (R_{Th} + R_3)i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

o

$$\frac{di(t)}{dt} + 2(10^4) i(t) = 10^3 \operatorname{sen}(10^4 t)$$

La solución complementaria debe satisfacer la ecuación homogénea

$$\frac{di_c(t)}{dt} + 2(10^4) i_c(t) = 0$$

la cual requiere una solución de la forma

$$i_c(t) = K_1 e^{-2(10^4)t}$$

La respuesta forzada debe satisfacer la ecuación

$$\frac{di_p(t)}{dt} + 2(10^4) i_p(t) = 10^3 \operatorname{sen}(10^4 t)$$

La solución debe ser de la forma de la función forzante $v_S(t)$ y su derivada. Por tanto, podemos escribir

$$i_p(t) = K_2 \operatorname{sen}(10^4 t) + K_3 \cos(10^4 t)$$

y sustituyendo esta solución supuesta en la ecuación diferencial podemos determinar K_2 y K_3 .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [K_2 \operatorname{sen}(10^4 t) + K_3 \cos(10^4 t)] + 2(10^4) [K_2 \operatorname{sen}(10^4 t) + K_3 \cos(10^4 t)] \\ = 10^3 \operatorname{sen}(10^4 t) \end{aligned}$$

Agrupando todos los términos de seno separadamente de los términos con cosenos se producen dos ecuaciones

$$2(10)^4 K_2 - 10^4 K_3 \operatorname{sen}(10^4 t) = 10^3 \operatorname{sen}(10^4 t)$$

$$(10^4 K_2 + 2(10^4) K_3) \cos(10^4 t) = 0$$

Resolviendo para K_2 y K_3 simultáneamente se obtiene

$$K_2 = 0.040$$

$$K_3 = 0.020$$

La expresión final para $i_p(t)$ es

$$i_p(t) = 40 \operatorname{sen}(10^4 t) - 20 \cos(10^4 t) \text{ mA}$$

La corriente total es la suma de las soluciones complementaria y forzada

$$i(t) = 0.04 \operatorname{sen}(10^4 t) - 0.02 \cos(10^4 t) + K_1 e^{-2(10^4)t} \text{ A}$$

El valor de K_1 puede encontrarse usando el valor inicial de $i(t)$. En $t = 0$

$$i(0) = -0.02 + K_1 = 0$$

y

$$K_1 = 0.020$$

Por tanto,

$$i(t) = 0.04 \operatorname{sen}(10^4 t) - 0.02 \cos(10^4 t) + 0.02 e^{-2(10^4)t} \text{ A}$$

y

$$v_o(t) = 4 \operatorname{sen}(10^4 t) - 2 \cos(10^4 t) + 2 e^{-2(10^4)t} \text{ V}$$

Este circuito también es analizado en el PSPICE en el ejemplo 7.11, y en la figura 7.22 se muestra una gráfica de las formas de onda de entrada y salida.

7.4 Respuesta al pulso

Hasta aquí hemos examinado redes en las que súbitamente se aplica una fuente de voltaje o corriente. Como resultado de esta aplicación súbita de una fuente, los voltajes y corrientes en el circuito son forzados a cambiar abruptamente. Una función forzante, cuyo valor cambia de manera discontinua o tiene una derivada discontinua, se llama *función singular*. Dos de estas funciones singulares, que son muy importantes en el análisis de circuitos, son la función de impulso unitario y la función de escalón unitario. Postergaremos el análisis de la primera hasta un capítulo posterior y nos concentraremos en la segunda.

La *función de escalón unitario* se define mediante la siguiente relación matemática:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

En otras palabras, esta función, que no tiene dimensiones, es igual a cero para valores negativos del argumento y igual a 1 para valores positivos de éste. Es indefinida para un argumento cero donde la función es discontinua. Una gráfica del escalón unitario se muestra en la figura 7.11a. El escalón unitario no tiene dimensiones y, por tanto, un escalón de voltaje de V_o volts o un escalón de corriente de I_o amperes se escribe como $V_o u(t)$ e $I_o u(t)$, respectivamente. Los circuitos equivalentes para un escalón de voltaje se muestran en las figuras 7.11b y c. Circuitos equivalentes para un escalón de corriente se muestran en las figuras 7.11d y e. Si utilizamos la definición del escalón unitario, es fácil generalizar esta función reemplazando el argumento t por $t - t_0$. En este caso

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

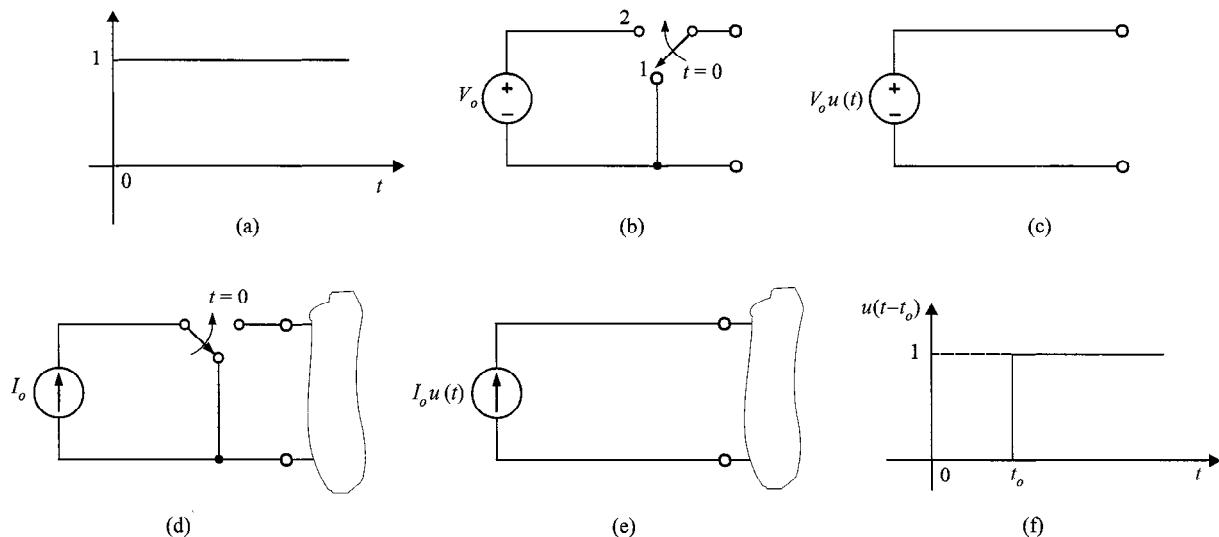


FIGURA 7.11 Gráficas y modelos de la función de escalón unitaria.

Una gráfica de esta función se muestra en la figura 7.11f. Note que $u(t - t_0)$ es equivalente al retrasar $u(t)$ por t_0 segundos, de modo que el cambio abrupto suceda en el tiempo $t = t_0$.

Las funciones escalón pueden utilizarse para construir uno o más pulsos. Por ejemplo, el pulso de voltaje que se muestra en la figura 7.12a puede formularse iniciando un escalón unitario en $t = 0$ y restando uno que comienza en $t = T$, como se muestra en la figura 7.12b. La ecuación para el pulso es

$$v(t) = A[u(t) - u(t - T)]$$

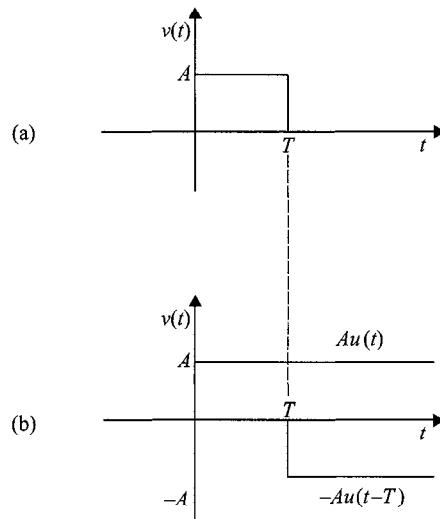


FIGURA 7.12 Construcción de un pulso vía dos funciones de escalón.

Si el pulso debe comenzar en $t = t_0$ y tiene un ancho T , la ecuación sería

$$v(t) = A \{ u(t - t_0) - u[t - (t_0 + T)] \}$$

Con este método podemos escribir la ecuación para un pulso que comience en cualquier tiempo y termine en cualquier instante. De manera similar, con este método, podemos escribir la ecuación para una serie de pulsos, llamada *tren de impulsos*, simplemente al formar una suma de pulsos construida de la forma previamente ilustrada.

El siguiente ejemplo servirá para ilustrar muchos de los conceptos que acabamos de presentar.

EJEMPLO 7.8

Consideré el circuito que se muestra en la figura 7.13a. La función de entrada es el pulso de voltaje que se puede ver en la figura 7.13b. Como la fuente es cero para todo tiempo negativo, las condiciones iniciales para la red son cero [es decir, $v_C(0-) = 0$]. La respuesta $v_o(t)$ para $0 < t < 0.3$ se debe a la aplicación de la fuente constante en $t = 0$ y no tiene influencia por ningún cambio en la fuente que ocurra posteriormente. En $t = 0.3$ segundos la función forzante se hace cero, y por tanto $v_o(t)$ para $t > 0.3$ segundos es respuesta libre de fuente o respuesta natural de la red.

Determinemos la expresión para el voltaje $v_o(t)$.

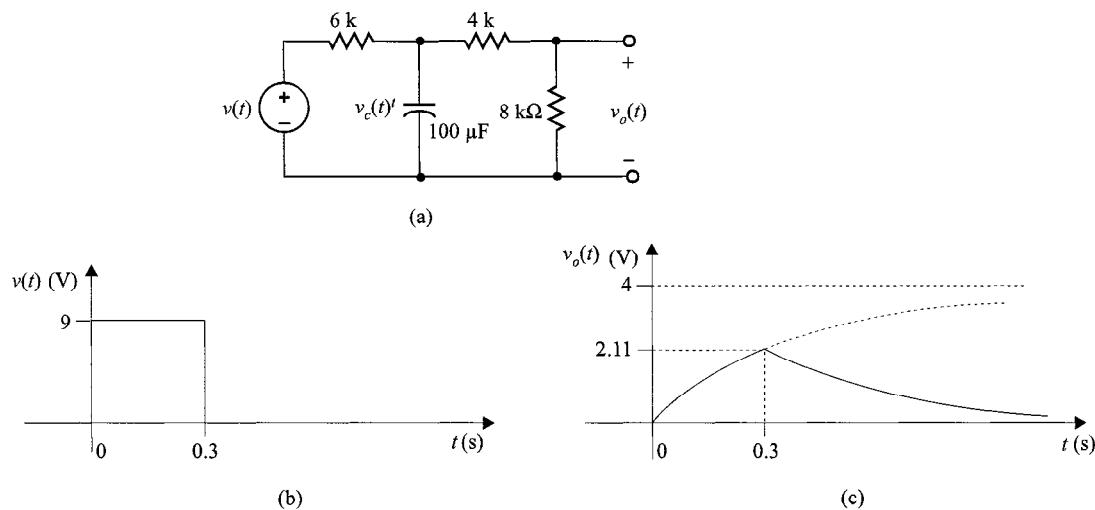


FIGURA 7.13 Respuesta de pulso de una red.

SOLUCIÓN Como el voltaje de salida $v_o(t)$ es una división de voltaje del voltaje del capacitor, y el voltaje inicial a través del capacitor es cero, sabemos que $v_o(0+) = 0$.

Si no se hicieron cambios en la fuente después de $t = 0$, el valor de estado estable de $v_o(t)$ [es decir, $v_o(\infty)$] debido a la aplicación del escalón unitario en $t = 0$ será

$$v_o(\infty) = \frac{9}{6k + 4k + 8k} (8k)$$

$$= 4 \text{ V}$$

La resistencia equivalente de Thévenin es

$$R_{\text{Th}} = \frac{(6k)(12k)}{6k + 12k}$$

$$= 4 \text{ k}\Omega$$

Por tanto, la constante de tiempo del circuito es

$$t = R_{\text{Th}}C$$

$$= (4) (10^3) (100) (10^{-6})$$

$$= 0.4 \text{ s}$$

Por consiguiente, la respuesta $v_o(t)$ para el periodo $0 < t < 0.3$ segundos es

$$v_o(t) = 4 - 4e^{-t/0.4} \text{ V} \quad 0 < t < 0.3 \text{ s}$$

El voltaje del capacitor puede calcularse dándose cuenta que usando la división de voltaje, $v_o(t) = \frac{2}{3} v_C(t)$. Por tanto,

$$v_C(t) = \frac{3}{2} (4 - 4e^{-t/0.4}) \text{ V}$$

Como el voltaje del condensador es continuo,

$$v_C(0.3-) = v_C(0.3+)$$

y por tanto,

$$v_o(0.3+) = \frac{2}{3} v_C(0.3-)$$

$$= 4(1 - e^{-0.3/0.4})$$

$$= 2.11 \text{ V}$$

Como la fuente es cero para $t > 0.3$ segundos, el valor final para $v_o(t)$ conforme $t \rightarrow \infty$ es cero. Por consiguiente, la expresión para $v_o(t)$ para $t > 0.3$ segundos es

$$v_o(t) = 2.11e^{-(t-0.3)/0.4} \text{ V} \quad t > 0.3 \text{ s}$$

El término $e^{-(t-0.3)/0.4}$ indica que el decrecimiento de la exponencial inicia en $t = 0.3$ segundos. La solución completa puede escribirse por medio de la superposición como

$$v_o(t) = 4(1 - e^{-t/0.4})u(t) - 4(1 - e^{-(t-0.3)/0.4})u(t-0.3) \text{ V}$$

o equivalentemente, la solución completa es

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 4(1 - e^{-t/0.4}) \text{ V} & 0 < t < 0.3 \text{ s} \\ 2.11e^{-(t-0.3)/0.4} \text{ V} & 0.3 \text{ s} < t \end{cases}$$

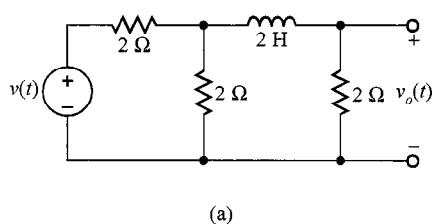
la cual en forma matemática es

$$v_o(t) = 4(1 - e^{-t/0.4})[u(t) - u(t - 0.3)] + 2.11e^{-(t - 0.3)/0.4}u(t - 0.3) \text{ V}$$

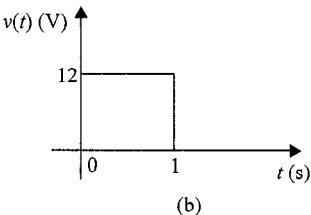
Note que el término $[u(t) - u(t - 0.3)]$ actúa como una función de compuerta que captura sólo la parte de la respuesta del escalón que existe en el intervalo de tiempo $0 < t < 0.3$ segundos. La salida como función del tiempo se muestra en la figura 7.13c.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D7.6 La fuente de voltaje en la red de la figura D7.6a se muestra en la figura D7.6b. La corriente inicial en el capacitor debe ser cero. (¿Por qué?) Determine el voltaje de salida $v_o(t)$ para $t > 0$.



(a)

FIGURA D7.6 (a)**FIGURA D7.6 (b)**

Resp.: $v_o(t) = 0$ para $t < 0$, $4(1 - e^{-(3/2)t})$ V para $0 \leq t \leq 1$, y $3.11e^{-(3/2)(t - 1)}$ V para $t > 1$.

7.5 Análisis transitorio de circuitos con PSPICE

Para iniciar nuestro análisis de este tema, es importante señalar que todo el material del capítulo 5 se aplica también aquí. El circuito se describe exactamente de la misma manera y, de hecho, un análisis de cd se lleva a cabo automáticamente antes del análisis transitorio para determinar las condiciones iniciales del circuito. La variable independiente en un análisis transitorio siempre es el tiempo, y las variables del circuito se tabulan o bien se grafican como funciones del tiempo. También es importante notar que el circuito que se analiza no puede contener una malla de fuentes de voltaje, un capacitor o ambos, y no puede contener un grupo de corte (véase capítulo 3) de fuentes de corriente y/o bobinas.

Presentaremos ahora algunos datos nuevos, comandos de control de la solución y de especificación de la salida que serán útiles en el análisis transitorio. Los ejemplos indicarán la facilidad con que podemos llevar a cabo análisis que serían difíciles de tratar matemáticamente.

Comandos de rama para bobinas y capacitores

La forma general del comando para esos elementos es

```
BXXXXXXX N1 N2 VALUE
```

B es la letra L o C, dependiendo del tipo de elemento. XXXXXXXX denota una cuerda alfanumérica arbitraria que identifica unívocamente el elemento particular. N1 y N2 son los nodos del circuito a los que está conectado el elemento. VALUE es el valor del elemento. La capacitancia está en faradios y la inductancia en henrys.

Comandos de rama para fuentes que varían con el tiempo

A cualquier fuente independiente puede asignarse un valor dependiente del tiempo para el análisis transitorio. Si se asigna a una fuente un valor dependiente del tiempo, el valor al tiempo cero se utilizará en cualquier análisis de cd que se solicite. Las fuentes que varían con el tiempo pueden ser de cuatro tipos diferentes: pulso, exponencial, senoidal, o lineal por partes, o tramos. El tipo de fuente se especifica en el comando de datos que define la fuente.

El comando de datos para *fuentes de pulsos* es de la forma

```
VXXXXXXX N+ N- PULSE (V1 V2 TD TR TF PW PER)
```

V1 es el valor inicial de la fuente en volts o amperes, y V2 es el valor de la fuente durante el pulso. TD es el tiempo de retraso entre el tiempo cero y el inicio del pulso en segundos. TR, TF y PW son el tiempo de subida, el tiempo de caída y el ancho del pulso en segundos. PER es el periodo en segundos para un tren de pulsos periódico. Los puntos intermedios en el pulso están determinados por interpolación lineal. Por consiguiente, la tabla 7.1 describe el pulso solo que se muestra en la figura 7.14.

T A B L A 7.1

Tiempo	Valor
0	V1
TD	V1
TD + TR	V2
TD + TR + PW	V2
TD + TR + PW + TF	V1

Los valores por omisión y las unidades para los parámetros de la fuente del pulso se resumen en la tabla 7.2.

Las *fuentes exponenciales* se describen utilizando el formato

```
VXXXXXXX N+ N- EXP(V1 V2 TD1 TAU1 TD2 TAU2)
```

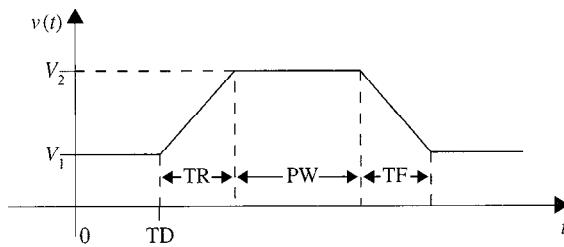


FIGURA 7.14 Forma general de un pulso.

T A B L A 7.2

Parámetro	Valor por omisión	Unidades
V1—voltaje inicial		volts o amperes
V2—valor pulsado		volts o amperes
TD—tiempo de retraso	0.0	segundos
TR—tiempo de elevación	TSTEP	segundos
TF—tiempo de caída	TSTEP	segundos
PW—ancho del pulso	TSTOP	segundos
PER—periodo	TSTOP	segundos

V1 es el valor inicial en volts o amperes. V2 es el valor pico en volts o amperes. TD1 y TAU1 son las constantes del tiempo de retraso en la elevación y del tiempo de elevación, respectivamente. TD2 y TAU2 son las constantes del tiempo de retraso de caída y del tiempo de caída, respectivamente. Todos los tiempos están expresados en segundos. La forma de onda que se muestra en la figura 7.15 está descrita por la expresión

$$\text{Tiempo } 0 \text{ a } \text{TD1:} \quad V1$$

$$\text{Tiempo } \text{TD1} \text{ a } \text{TD2:} \quad V1 + (V2 - V1) * \\ (1 - \text{EXP}(-(\text{TIME} - \text{TD1}) / \text{TAU1}))$$

$$\text{Tiempo } \text{TD2} \text{ a } \text{TSTOP:} \quad V1 + (V2 - V1) * \\ (1 - \text{EXP}(-(\text{TIME} - \text{TD1}) / \text{TAU1})) \\ + (V1 - V2) * \\ (1 - \text{EXP}(-(\text{TIME} - \text{TD2}) / \text{TAU2}))$$

Los valores por omisión y las unidades para los parámetros de la fuente exponencial se resumen en la tabla 7.3.

Los comandos de datos para la *fuente senoidal* de la forma que se muestra en la figura 7.16 es

```
VXXXXXXX N+ N- SIN(VO VA FREQ TD THETA)
```

La apariencia de esta forma de onda se describe por la ecuación

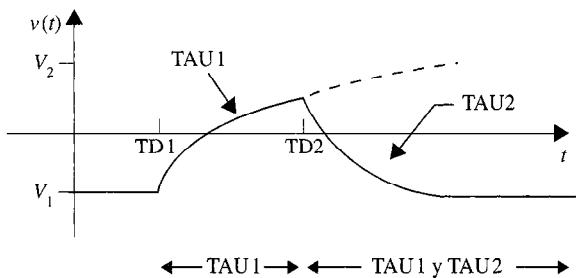


FIGURA 7.15 Forma general de una fuente exponencial.

TABLA 7.3

Parámetro	Valor por omisión	Unidades
V1—voltaje inicial		volts o amperes
V2—voltaje pico		volts o amperes
TD1—tiempo de retraso de la elevación	0.0	segundos
TAU1—constante de tiempo de elevación	TSTEP	segundos
TD2—tiempo de retraso de la elevación	TD1 + TSTEP	segundos
TAU2—constante de tiempo de caída	TSTEP	segundos

Tiempo 0 a TD: $VO + VA(\text{STNE}(2\pi*\text{PHASE}/360))$

Tiempo TD a TSTOP: $VO + VA * \text{EXP}(-(\text{TIME}-TD) * \text{THETA}) * \text{SINE}(2\pi * (\text{FREQ} * (\text{TIME} + TD) + \text{PHASE}/360))$

VO es la compensación en volts o amperes. VA es la amplitud en volts o amperes. FREQ es la frecuencia en hertz. TD es el retraso en segundos, y THETA es el factor de amortiguamiento en $(\text{segundos})^{-1}$.

Los valores por omisión y las unidades para los parámetros de la fuente senoidal están resumidas en la tabla 7.4.

TABLA 7.4

Parámetro	Omisión	Unidades
VO—compensación		volts o amperes
VA—amplitud		volts o amperes
FREQ—frecuencia	1/TSTOP	hertz
TD—retraso	0.0	segundos
THETA—factor de amortiguamiento	0.0	1 por segundo

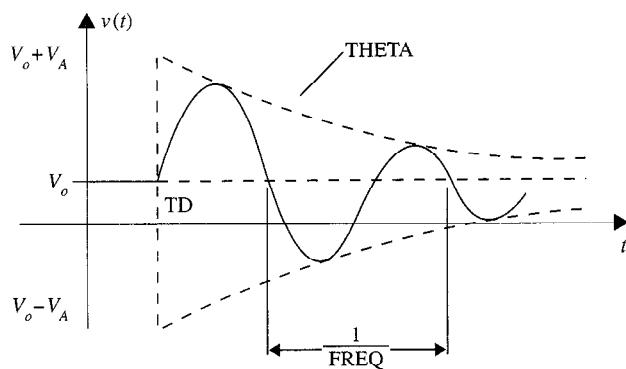


FIGURA 7.16 Forma general de una fuente senoidal.

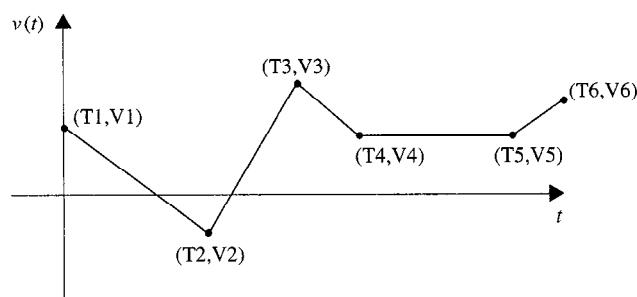


FIGURA 7.17 Forma general de una fuente lineal por secciones.

Las *fuentes lineales* por tramos se describen usando el formato

VXXXXXXX N+ N- PWL (T1 V1 T2 V2 T3 V3 . . .)

Como se muestra en la figura 7.17, cada par de valores (T_I, V_I) especifican que el valor de la fuente está en V_I volts o amperes en el tiempo T_I. El valor de la fuente en valores intermedios del tiempo se determina por interpolación lineal. Los valores de T_I siempre deben incrementarse en el tiempo.

Comandos de control de la solución

El análisis transitorio en PSPICE se invoca usando un comando .TRAN de la forma

.TRAN TSTEP TSTOP TSTART TMAX

TSTEP es el incremento de impresión o graficación de la salida de la impresora. TSTART y TSTOP son los tiempos de inicio y paro para el análisis. Si TSTART se omite, se supone como cero. El análisis transitorio siempre comienza en el tiempo cero. En el intervalo [0, TSTART], el circuito es analizado, pero no se almacena ninguna salida. En el intervalo [TSTART, TSTOP], el análisis continúa y las salidas se almacenan. TMAX es el tiempo máximo del escalón que el PSPICE usará y definirá para un valor que sea el más pequeño de (TSTOP-TSTART)/50 o TSTEP.

Si las condiciones iniciales para los elementos capacitivos e inductivos se conocen y serán empleadas en el análisis del PSPICE, el siguiente comando .TRAN incluye la palabra clave UIC (condiciones iniciales de uso).

```
.TRAN TSTEP TSTOP TSTART TMAX UIC
```

Si se especifica esta palabra clave, el PSPICE usará los valores iniciales que pueden agregarse a los comandos de datos en la forma

```
CXXXXXXX N+ N- VALUE IC= INCOND  
LYYYYYYY N+ N- VALUE IC= INCOND
```

Para el capacitor, la condición inicial es el valor inicial (tiempo cero) del voltaje del capacitor en volts. Para la bobina, la condición inicial es el valor inicial (tiempo cero) de la corriente de la bobina en amperes que fluye de N+, a través de la bobina, a N-. Cuando se emplea la característica UIC, el PSPICE usa los valores iniciales en los comandos de datos como la condición inicial transitoria y procede con el análisis.

Si UIC no se incluye en el comando .TRAN, el PSPICE llevará a cabo un análisis de cd en $t = 0$ para determinar las condiciones iniciales.

Comandos de especificación de la salida

Los comandos .PRINT y .PROBE empleados en el análisis de cd también son útiles aquí. En un análisis transitorio toman la forma

```
.PRINT TRAN OV1 . . . OV8  
.PROBE
```

E J E M P L O 7.9

Deseamos graficar $v_o(t)$ e $i_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura 7.18a.

SOLUCIÓN Las condiciones iniciales están determinadas a partir del circuito de la figura 7.18b. El programa PSPICE usado para calcular el voltaje inicial del capacitor es

```
CIRCUIT USED TO DETERMINE INITIAL CONDITIONS  
*DC VOLTAGE SOURCE  
V1 1 3 DC 12  
*DC CURRENT SOURCE  
I1 0 2 DC 2  
* RESISTOR VALUES  
R1 1 2 2  
R2 2 3 1  
R3 3 0 1  
* CAPACITOR VALUE  
C1 3 0 1  
.END
```

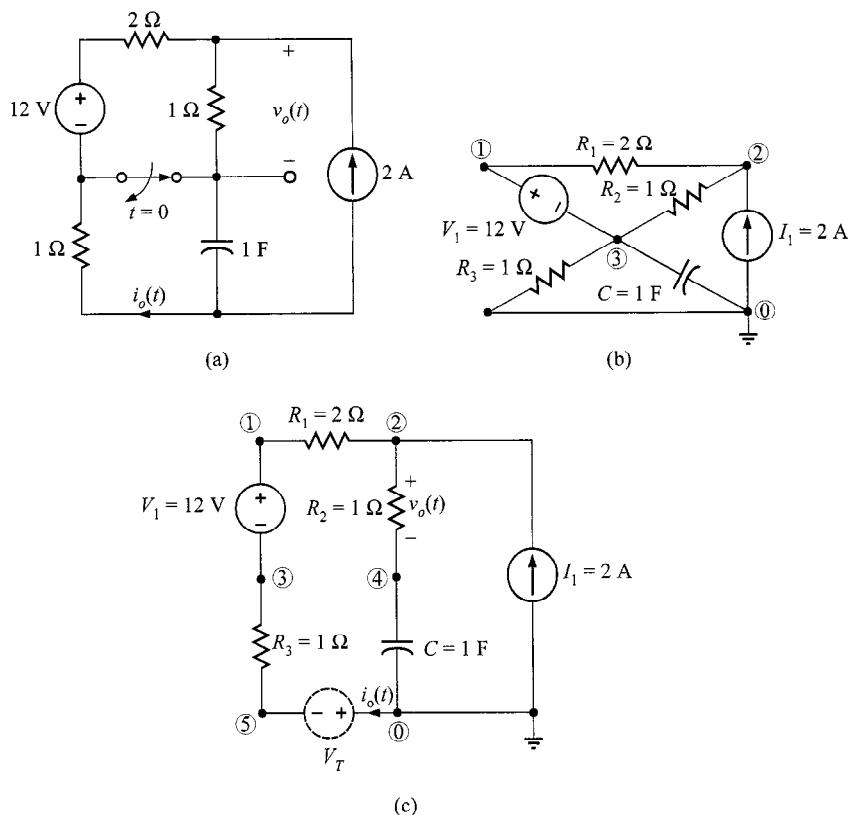


FIGURA 7.18 Redes utilizadas en el ejemplo 7.9.

Si elegimos ‘Browse Output’ a partir del submenú ‘Files’, podemos revisar los resultados del programa, los cuales ilustran que el voltaje inicial del capacitor es 2 V.

Ahora sabemos que el voltaje inicial del capacitor es 2 V. La red para $t > 0$ se muestra en la figura 7.18c. El programa PSPICE que graficará la salida sobre un intervalo de 20 segundos usando intervalos de 200 ms es como sigue.

```
CIRCUIT USED TO COMPUTE OUTPUT RESPONSE
*CIRCUIT CONDITIONS AT TIME T=0+
*DC VOLTAGE SOURCE
V1 1 3 DC 12
*TEST SOURCE
VT 0 5 DC 0
*DC CURRENT SOURCE
I1 0 2 DC 2
*RESISTOR VALUES
R1 1 2 2
R2 2 4 1
R3 3 5 1
*CAPACITOR VALUE
C1 4 0 1 IC=2.0
```

```
.TRAN 200MS 20S UIC
.PROBE
.END
```

Hasta el final del análisis transitorio, la pantalla desplegará una gráfica en blanco y una línea de menú bajo la gráfica. Presione Enter, que selecciona la opción ‘Addtrace’ del menú. Escriba ‘I(VT)V(2,4)’ y presione la tecla Enter. En la pantalla aparece una gráfica de la corriente y voltaje seleccionados. Se puede obtener una copia en disco usando las teclas con flechas para iluminar ‘Hard_copy’ del menú. Presione la tecla Enter una vez que la opción de copia en disco esté iluminada. El usuario puede entonces salir del programa de comprobación seleccionando la opción ‘Exit’ de la línea de menú de la misma forma.

Las gráficas para $v_o(t)$ e $i_o(t)$ se muestran en las figuras 7.19a y b, respectivamente.

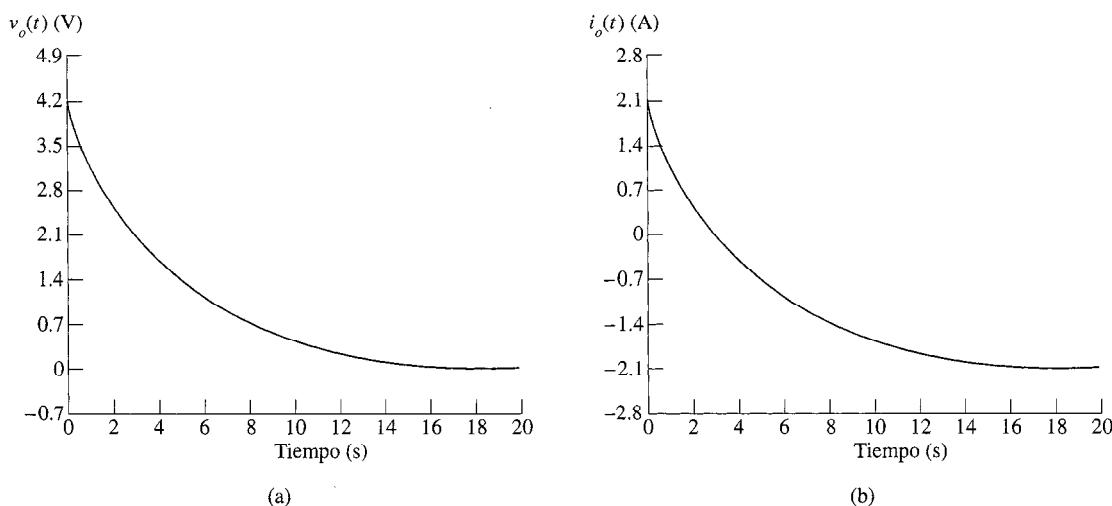


FIGURA 7.19 Gráficas de salida para el ejemplo 7.9.

E J E M P L O 7.10

Dada la red de la figura 7.20a, grafique $v_o(t)$ e $i_o(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 10$ segundos usando muestreos de 100 ms.

SOLUCIÓN La red de la figura 7.20b se usa para determinar la corriente inicial de la bobina. El programa PSPICE que dará la condición inicial es

```
COMPUTE INITIAL CONDITION
*DC VOLTAGE SOURCE
V1 1 0 DC 12
*TEST SOURCE TO DETERMINE CURRENT THROUGH L
VT 3 0 DC 0
*RESISTOR VALUES
R1 1 2 2
```

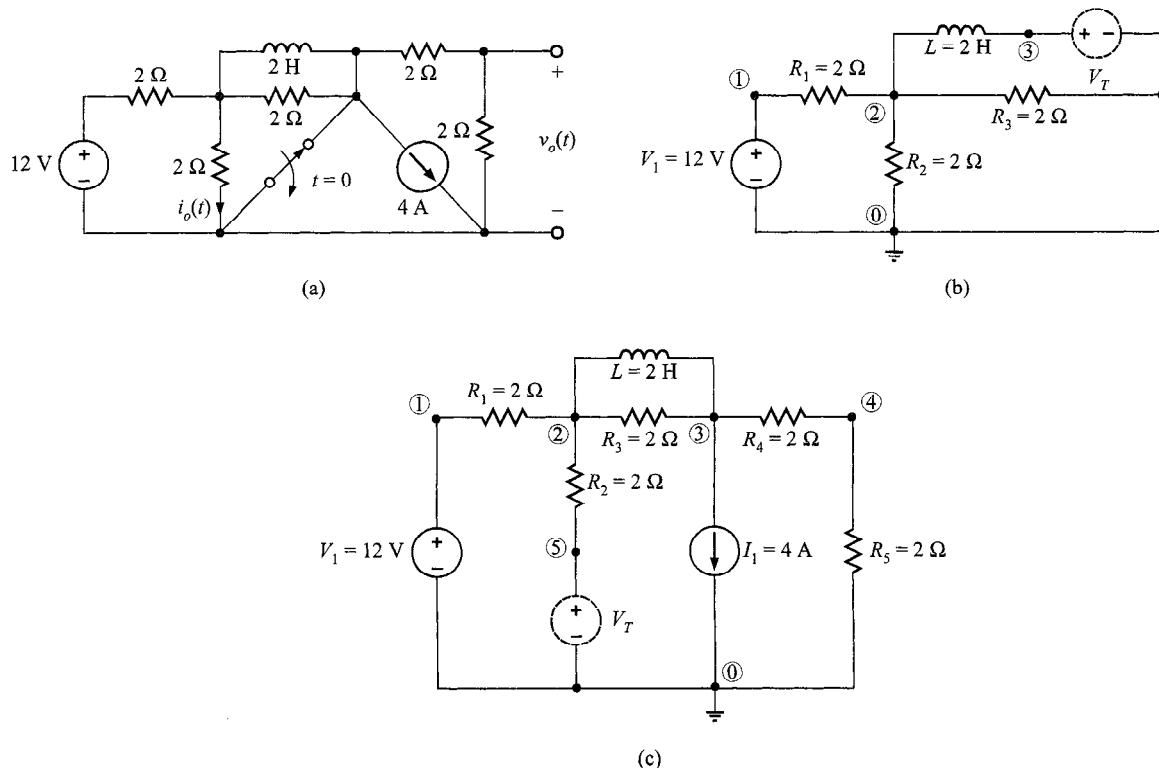


FIGURA 7.20 Redes utilizadas en el ejemplo 7.10.

```
R2 2 0 2
R3 2 0 2
*INDUCTOR VALUE
L1 2 3 2
.END
```

La salida del programa incluye lo siguiente:

VOLTAGE	SOURCE	CURRENTS
NAME	CURRENT	
V1	-6.000D+00	
VT	6.000D+00	

La red para $t > 0$ se muestra en la figura 7.20c. El programa PSPICE que graficará las salidas, dada una corriente inicial de la bobina de 6 A, es como sigue.

```
OUTPUT RESPONSE PROGRAM
*CIRCUIT CONDITIONS AT TIME T = 0 +
*DC VOLTAGE SOURCE
V1 1 0 DC 12
*DC CURRENT SOURCE
```

```

I1 3 0 DC 4
*TEST SOURCE TO DETERMINE SPECIFIED VOLTAGE
VT 5 0 DC 0
*RESISTOR VALUES
R1 1 2 2
R2 2 5 2
R3 2 3 2
R4 3 4 2
R5 4 0 2
*INDUCTOR VALUE
L1 2 3 2 IC=6.0
.TRAN 100MS 10S UIC
.PROBE
.END

```

Las gráfica para $v_o(t)$ e $i_o(t)$ se muestran en la figura 7.21a y b, respectivamente.

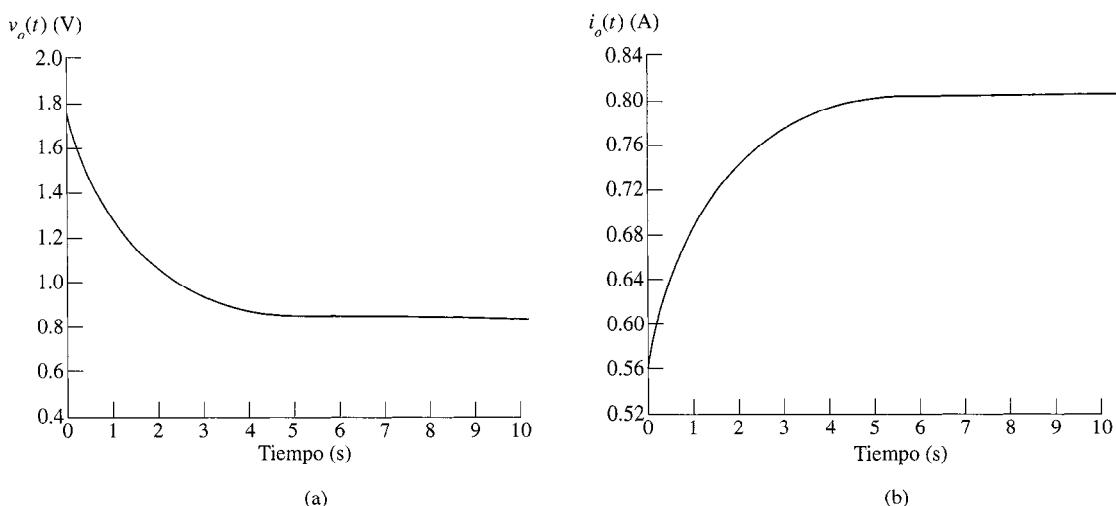


FIGURA 7.21 Gráficas de salida para el ejemplo 7.10.

Consideré una vez más el circuito analizado en el ejemplo 7.7. En ese ejemplo, la red se examinó usando el método de la ecuación diferencial. Ahora llevamos a cabo el análisis usando PSPICE.

E J E M P L O 7.11

Para la red de la figura 7.10a del ejemplo 7.7, grafiquemos la señal de entrada y la respuesta de salida en un intervalo de 2 ms con uno nuestro de 10 μ s.

SOLUCIÓN El programa PSPICE se muestra en la figura 7.22a. Del ejemplo 7.7, la corriente inicial de la bobina es cero y, por tanto, el programa es

```

Simulation of sinusoidal network in Example 7.7
*radial frequency of 10,000 r/s equals 1591.55 Hz
Vs 1 0 sin(0 15 1591.55 0 0)
R1 1 2 150
R2 2 0 300
L 2 3 10m IC=0
R3 3 0 100
.tran 10u 2m uic
.probe
.end

```

Las gráficas de entrada y de salida se muestran en la figura 7.22b.

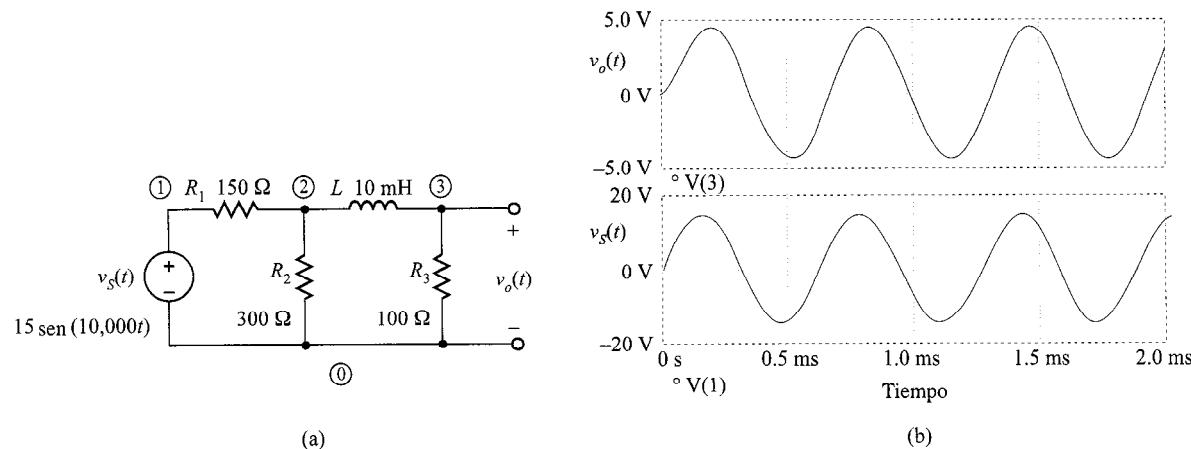
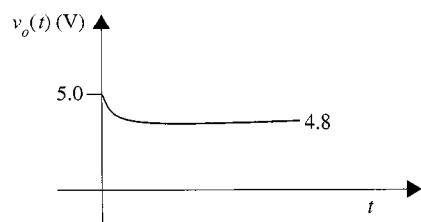


FIGURA 7.22 Figuras usadas en el ejemplo 7.11.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

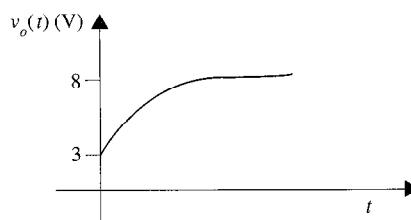
D7.3 Usando PSPICE, grafique $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura D7.3.

Resp.:



D7.4 Dada la red de la figura D7.4, grafique $v_o(t)$ para $t > 0$ usando PSPICE.

Resp.:



E J E M P L O 7.12

Considere la red de la figura 7.23a. La señal de entrada para la red se muestra en la figura 7.23b y está dada por la ecuación

$$v_S(t) = 10(1 - e^{-t/0.5}) \text{ V} \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ s}$$

$$v_S(t) = 10(1 - e^{-t/0.5}) + 10e^{-(t-2)/2} \text{ V} \quad 2 \text{ s} < t$$

Deseamos graficar la señal de salida $v_o(t)$ en un intervalo de 10 segundos usando muestreos de 50 ms.

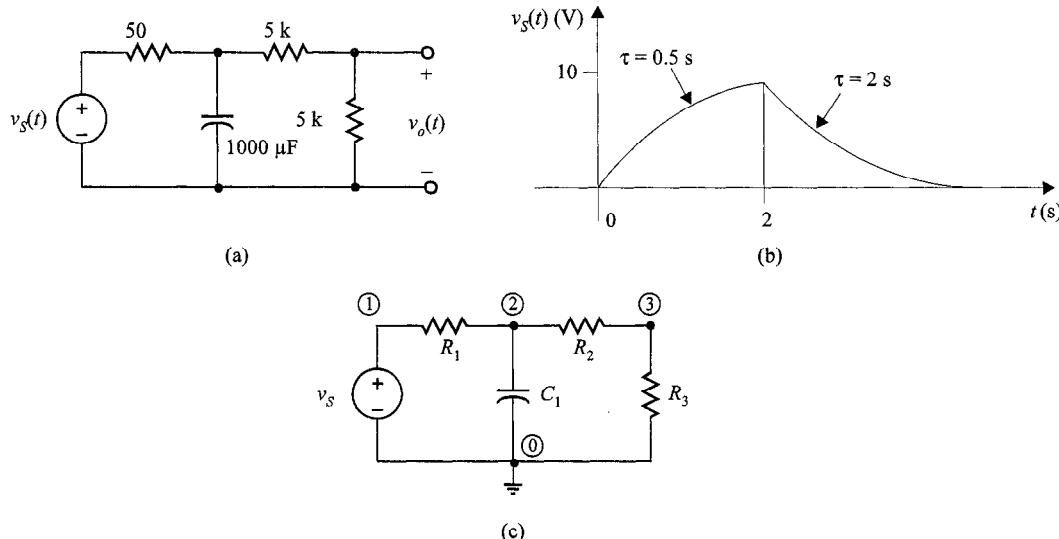


FIGURA 7.23 Figuras usadas en el ejemplo 7.12.

S O L U C I Ó N La red se dibuja nuevamente para un análisis con PSPICE en la figura 7.23c. El programa para esta red es

```

EXAMPLE 7.12
VS 1 0 EXP(0 10 0 .5 2 2)
R1 1 2 50
R2 2 3 5K
R3 3 0 5K
C1 2 0 1000U
*ANALYSIS
.TF V(3) VS
.TRAN .05 10
.PROBE
.END

```

Una gráfica para los voltajes de entrada y salida se muestra en la figura 7.24.

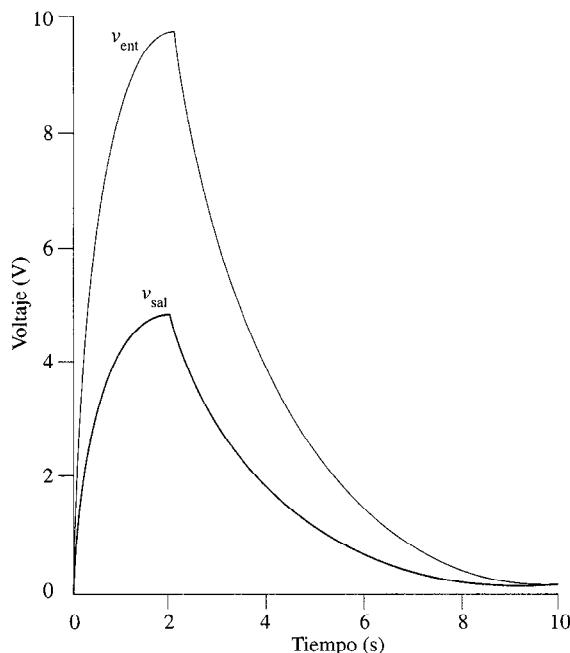


FIGURA 7.24 Gráficas de entrada y salida para el ejemplo 7.12.

E J E M P L O 7.13

Dada la red de la figura 7.23a, grafiquemos la respuesta de salida en un intervalo de 2 segundos con un muestreo de 10 ms si la entrada está dada por la expresión

$$v_S(t) = 10e^{-2t} \sin[2\pi(4)t] \text{ V}$$

SOLUCIÓN El programa para la red de la figura 7.23c con la nueva señal de entrada es

```
EXAMPLE 7.13
VS 1 0 SIN(0 10 4 0 2 0)
R1 1 2 50
R2 2 3 5K
R3 3 0 5K
C1 2 0 1000U
*ANALYSIS
.TF V(3) VS
.TRAN .01 2
.PROBE
.END
```

Las gráficas de entrada y salida se muestran en la figura 7.25.

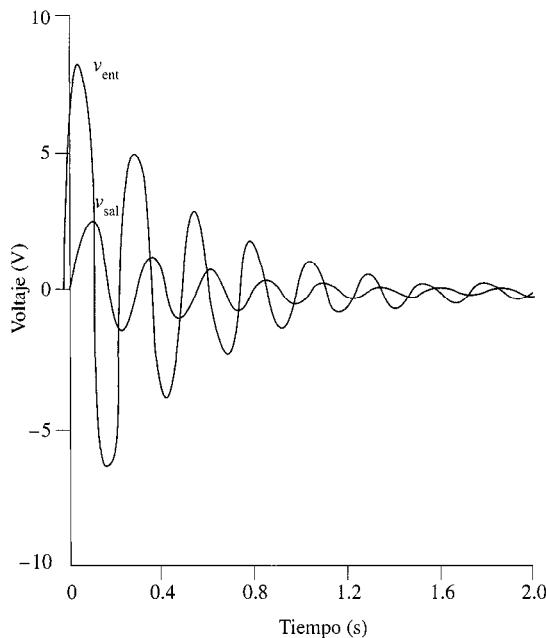


FIGURA 7.25 Gráficas de entrada y salida para el ejemplo 7.13.

E J E M P L O 7.14

Para la red de la figura 7.23a, grafiquemos la respuesta de salida en un intervalo de 2 segundos con un muestreo de 10 ms si la salida a la red es como se muestra en la figura 7.26.

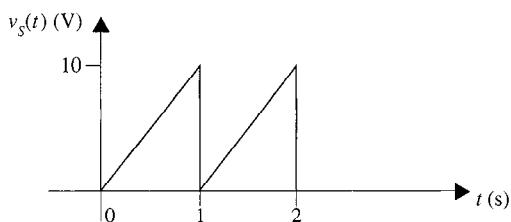


FIGURA 7.26 Forma de onda de la entrada tipo diente de sierra.

S O L U C I Ó N El programa para la red de la figura 7.23c con la señal de entrada que se muestra en la figura 7.26 es

```
EXAMPLE 7.14
VS 1 0 PULSE(0 10 0 1 0 .1US 1)
R1 1 2 50
R2 2 3 5K
```

```
R3 3 0 5K
C1 2 0 1000U
*ANALYSIS
.TF V(3) VS
.TRAN .01 2
.PROBE
.END
```

Las gráficas de entrada y salida se muestran en la figura 7.27.

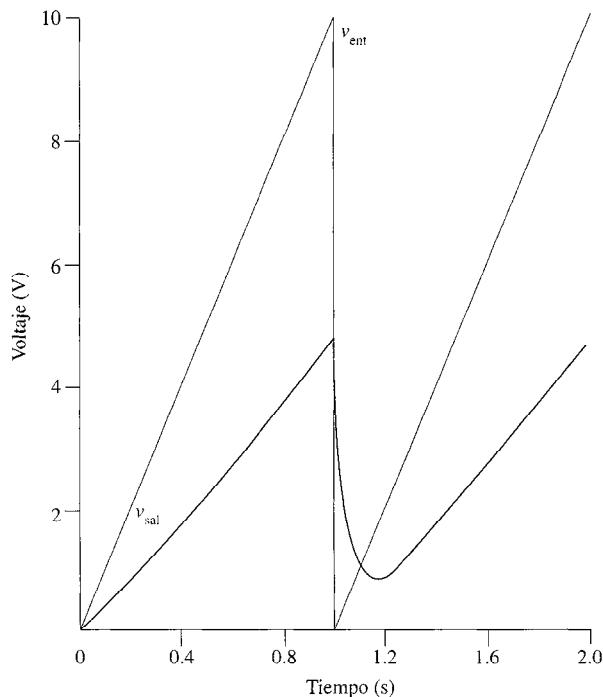


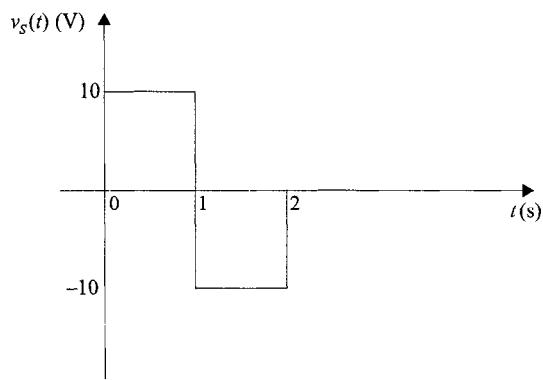
FIGURA 7.27 Gráficas de entrada y salida para el ejemplo 7.14.

E J E M P L O 7.15

Para la red de la figura 7.23, grafiquemos la respuesta de salida en un intervalo de 2 segundos con un muestreo de 10 ms si la entrada a la red es la que se muestra en la figura 7.28.

SOLUCIÓN El programa para la red de la figura 7.23c con la forma de onda de la entrada que se muestra en la figura 7.28 es

```
EXAMPLE 7.15
VS 1 0 PULSE (-10 10 0 0 0 1 2)
R1 1 2 50
R2 2 3 5K
```

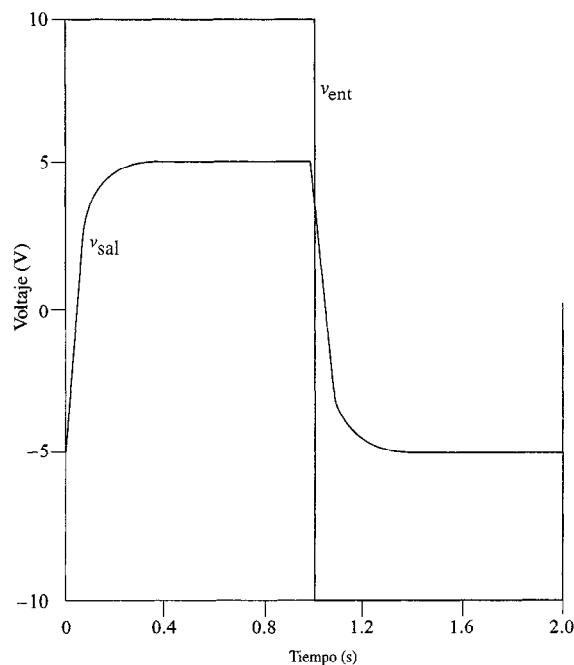
**FIGURA 7.28** Forma de onda de entrada tipo pulso.

```

R3 3 0 5K
C1 2 0 1000U
*ANALYSIS
.TF V(3) VS
.TRAN .01 2
.PROBE
.END

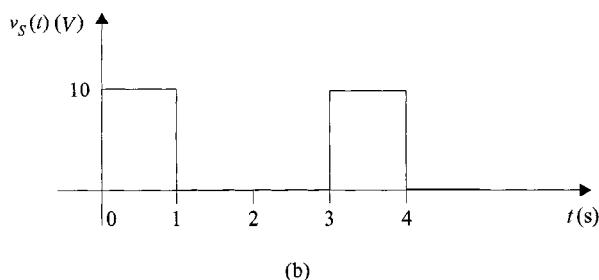
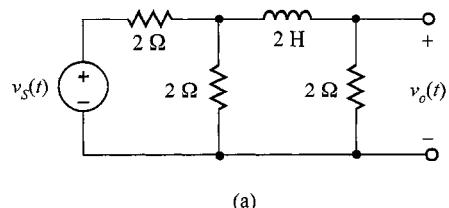
```

Las gráficas de las señales de entrada y salida se muestran en la figura 7.29.

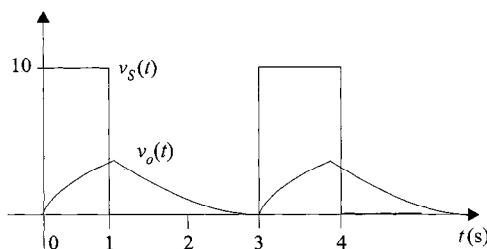
**FIGURA 7.29** Gráficas de entrada y salida para el ejemplo 7.15.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D7.9 Dada la red de la figura D7.9a, grafique el voltaje de salida en un intervalo de 10 segundos usando un muestreo de 50 ms si el voltaje de entrada es el que se muestra en la figura D7.9b.

**FIGURA D7.9**

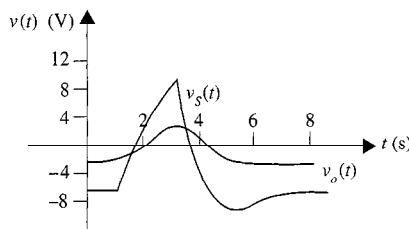
Resp.:



D7.10 Para la red de la figura D7.9a, grafique el voltaje de salida en un intervalo de 10 segundos usando un muestreo de 50 ms si el voltaje de entrada es

$$\begin{aligned} v_s(t) &= -5 \text{ V} & 0 \leq t \leq 1 \text{ s} \\ &= -5 + 15(1 - e^{-(t-1)/2}) \text{ V} & 1 \leq t \leq 3 \text{ s} \\ &= -5 + 15(1 - e^{-(t-1)/2}) - 15e^{-(t-3)/1} \text{ V} & 3 \leq t \end{aligned}$$

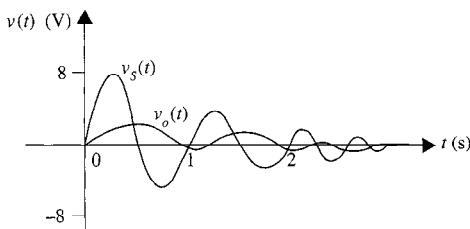
Resp.:



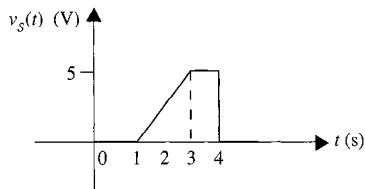
D7.11 Para la red de la figura D7.9a, grafique el voltaje de salida en un intervalo de 4 segundos usando un muestreo de 20 ms si el voltaje de entrada es

$$v_s(t) = 10e^{-t} \sin 2\pi t \text{ V}$$

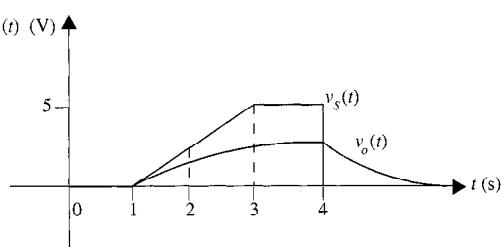
Resp.:



D7.12 Para la red de la figura D7.9a, grafique el voltaje de salida en un intervalo de 10 segundos usando un muestreo de 50 ms si la entrada es como se muestra en la figura D7.12.

**FIGURA D7.12**

Resp.:



7.6 Aplicaciones

E J E M P L O 7.16

La red de la figura 7.30 modela el circuito para una luz de neón destellante. El capacitor carga hacia la fuente de un voltaje de 9 V, a través de la resistencia. La luz de neón está diseñada para encenderse cuando el voltaje del capacitor alcance 8 V. Cuando la luz se enciende, descarga completamente al capacitor, se apaga y el ciclo comienza nuevamente. Esta es una forma de lo que se llama un oscilador de relajación. Si $C = 10 \mu\text{F}$, encontremos R de modo que la luz destelle una vez por segundo.

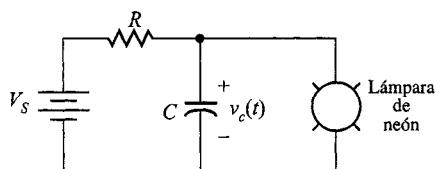


FIGURA 7.30 Circuito utilizado en el ejemplo 7.16.

S O L U C I Ó N Primero debemos encontrar una expresión para el voltaje del capacitor si suponemos que la luz de neón nunca se enciende. Una situación análoga existe en la red de la figura 7.3a, donde el voltaje a través del capacitor es

$$v_c(t) = V_s - V_s e^{-t/RC} = 9 - 9e^{-t/RC}$$

En $t = 1$ segundo, el voltaje del capacitor debe ser 8 V. Por tanto,

$$v(1) = 8 = 9 - 9e^{-1/RC}$$

Si resolvemos para RC , se obtiene

$$RC = 0.455 \text{ s}$$

Finalmente,

$$R = 0.455/C = 45.5 \text{ k}\Omega$$

E J E M P L O 7.17

El circuito de un marcapasos se muestra en la figura 7.31. El SCR (rectificador controlado de silicio) es un dispositivo de estado sólido que tiene dos modos distintos de operación. Cuando el voltaje a través del SCR se incrementa pero es menor que 5 V, el SCR se comporta como un circuito abierto, según se muestra en la figura 7.32a. Una vez que el voltaje a través del SCR alcanza 5 V, el dispositivo funciona como una fuente de corriente, tal como se muestra en la figura 7.32b. Este comportamiento continuará mientras el voltaje del SCR se mantenga por arriba de los 0.2 V. En este voltaje, el SCR se apaga y de nuevo es un circuito abierto.

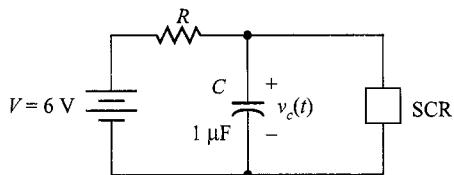


FIGURA 7.31 Circuito equivalente de marcapasos del corazón.

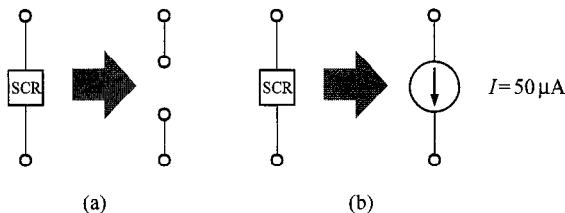


FIGURA 7.32 Circuito equivalente para el rectificador de silicio controlado.

Suponga que $t = 0$, $v_c(t)$ es 0 volts y el capacitor de $1 \mu\text{F}$ comienza a cargar hacia la fuente de voltaje de 6 V. Encuentre el valor de la resistencia tal que $v_c(t)$ sea igual a 5 V (el voltaje de encendido del SCR) en 1 segundo. En $t = 1$ segundo, el SCR se enciende y comienza a descargar al capacitor. Encuentre el tiempo requerido para que $v_c(t)$ caiga de 5 V a 0.2 V. Finalmente, grafiquemos $v_c(t)$ para los tres ciclos.

SOLUCIÓN Para $t < 1$ segundo, el circuito equivalente para el marcapasos se muestra en la figura 7.33. Como se indicó en el ejemplo anterior, el voltaje del capacitor tiene la forma

$$v_c(t) = 6 - 6e^{-t/RC}$$

Un voltaje de 0.2 V ocurre en

$$t_1 = 0.034RC$$

mientras un voltaje de 5 V ocurre a

$$t_2 = 1.792RC$$

Deseamos que $t_2 - t_1 = 1$ segundo. Por lo tanto,

$$t_2 - t_1 = 1.758RC = 1 \text{ s}$$

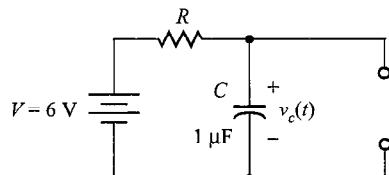


FIGURA 7.33 Red equivalente de marcapasos durante el ciclo de carga del capacitor.

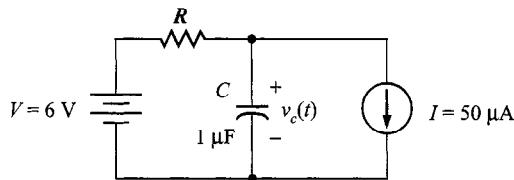


FIGURA 7.34 Red equivalente de marcapaso durante el ciclo de descarga del capacitor.

y

$$RC = 0.569 \text{ s y } R = 569 \text{ k}\Omega$$

En $t = 1$ segundo, el SCR se enciende y el marcapasos es modelado por el circuito de la figura 7.34. La forma de la onda de descarga es

$$v(t) = K_1 + K_2 e^{-(t-1)/RC}$$

El término $(t - 1)$ aparece en el exponencial para correr la función 1 segundo, ya que durante ese tiempo el capacitor se está cargando. Justo después de que el SCR se enciende en $t = 1^+$ segundos, $v_c(t)$ es aún 5 V, mientras a $t = \infty$, $v_c(t) = 6 - IR$. Por lo tanto,

$$K_1 + K_2 = 5 \text{ y } K_1 = 6 - IR$$

Nuestra solución es entonces de la forma

$$v_c(t) = 6 - IR + (IR - 1)e^{-(t-1)/RC}$$

Sea T el tiempo necesario más allá de 1 segundo para que $v(t)$ caiga a 0.2 V. Escribimos

$$v_c(T+1) = 6 - IR + (IR - 1)e^{-T/RC} = 0.2$$

Si sustituimos para I , R y C , encontramos

$$T = 0.11 \text{ segundos}$$

La forma de onda de la salida se muestra en la figura 7.35.

7.7 Diseño de circuitos

E J E M P L O 7.18

Considere la luz de neón destellante analizada en el ejemplo 7.16. Generemos la curva de diseño para el valor de la resistencia contra la frecuencia para velocidades de destello en el intervalo de 0.1 a 5 destellos por segundo. Si f representa la frecuencia de destellos, determine el valor de R para velocidades de destello de $f = 0.5$ y $f = 5$ destellos por segundo.

SOLUCIÓN Del ejemplo 7.16, sabemos que

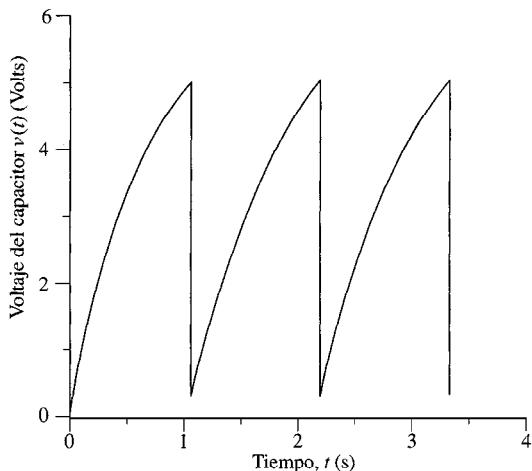


FIGURA 7.35 Forma de onda del voltaje de salida del marcapasos del corazón.

$$v_c(t) = 9 - 9e^{-t/RC}$$

Denotemos al periodo entre destellos con la variable T . Un destello debe ocurrir cada vez que $v_c(t)$ se carga a 8 V. Por lo tanto,

$$v_c(T) = 8 = 9 - 9e^{-T/RC}$$

Resolviendo para R se obtiene

$$R = 0.455T/C = 45.5 \times 10^3 T$$

Como el periodo T es $1/f$,

$$R = 45.5 \times 10^3 / f$$

Como verificación rápida, si $f = 1$ destello/segundo, como es el caso del ejemplo 7.16, la ecuación para R da un valor de $45.5 \text{ k}\Omega$, que coincide con el valor del ejemplo 7.16. La gráfica de R contra f se muestra en la figura 7.36. Para 0.5 destellos/segundo, $R = 91.0 \text{ k}\Omega$ y para 5 destellos/segundo, $R = 9.1 \text{ k}\Omega$.

7.8 Resumen

Hemos mostrado que la solución de circuitos transitorios de primer orden que contienen un único elemento almacenador de energía (es decir, C o L) incluye la solución de una ecuación diferencial de primer orden. Hemos analizado esos circuitos usando dos técnicas: un método de ecuación diferencial y un método paso por paso. Éste último es, en esencia, un mapa a la solución. Se estudiaron las respuestas natural y forzada de

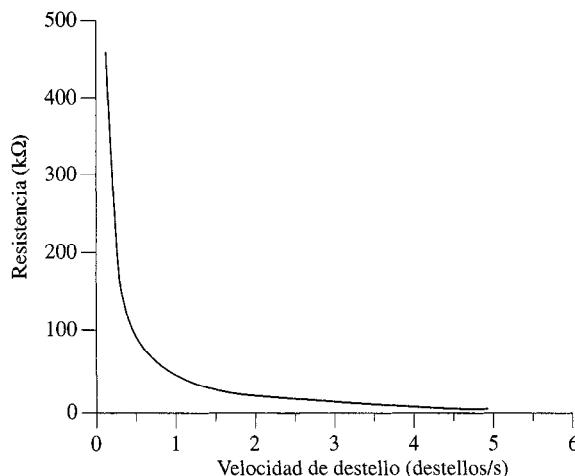


FIGURA 7.36 Valor de la resistencia contra la velocidad de destello para el circuito del ejemplo 7.16.

redes transitorias de primer orden. Se encontró que la respuesta natural es exponencial, controlada por la constante de tiempo del circuito y esencialmente se aproxima a su valor final en cinco constantes de tiempo.

Las constantes de tiempo para circuitos RC y RL son $R_{Th}C$ y L/R_{Th} , respectivamente, donde R_{Th} es la resistencia equivalente de Thévenin vista desde las terminales del elemento de almacenamiento.

Finalmente, la aplicación del PSPICE a problemas de RC y RL se presentó junto con el análisis y diseño de algunos circuitos prácticos.

Puntos clave

- El voltaje o corriente en cualquier lugar de un circuito RC o RL se obtiene resolviendo una ecuación diferencial de primer orden.
- Una solución a la ecuación

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = A \text{ is } x(t) = \frac{A}{a} + K_2 e^{-at}$$

donde A/a se llama solución de estado estable y $1/a$ se llama constante de tiempo.

- La función e^{-at} decae a un valor que es menor que el 1% de su valor inicial después de un periodo de $5/a$ segundos.
- Si una red tiene una constante de tiempo pequeña, su respuesta a alguna entrada rápidamente irá a su valor de estado estable; sin embargo, si la constante de tiempo de la red es grande, se requiere un tiempo largo para que la red alcance el estado estable.
- Un circuito RC tiene una constante de tiempo de $R_{Th}C$ segundos y un circuito RL tiene una constante de tiempo de L/R_{Th} segundos.

Problemas

- 7.1.** Use el método de la ecuación diferencial para encontrar $v_c(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.1 y grafique la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de abrir el interruptor.

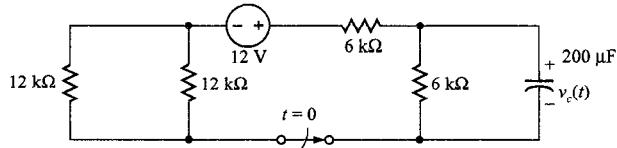


FIGURA P7.1

- 7.2.** Use el método de la ecuación diferencial para encontrar $v_c(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.2 y grafique la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de cerrar el interruptor.

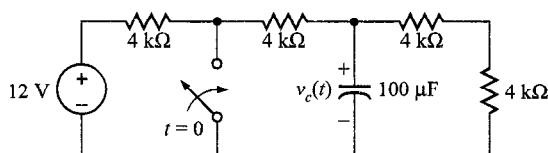


FIGURA P7.2

- 7.3.** Use el método de la ecuación diferencial para encontrar $i(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.3 y grafique la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de abrir el interruptor.

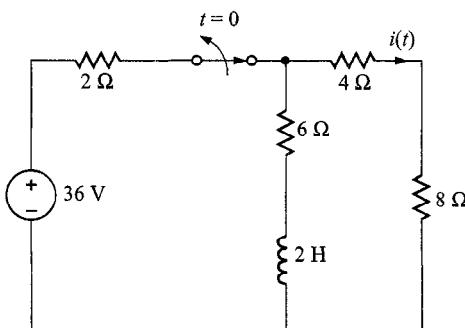


FIGURA P7.3

- 7.4.** Use el método de la ecuación diferencial para encontrar $i_L(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.4 y grafique la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de abrir el interruptor.

- 7.5.** Use el método de la ecuación diferencial para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.5 y grafique la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de abrir el interruptor.

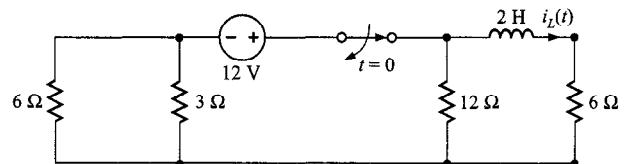


FIGURA P7.4

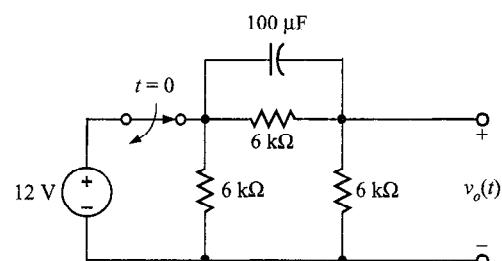


FIGURA P7.5

- 7.6.** Use el método de la ecuación diferencial para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.6 y grafique la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de abrir el interruptor.

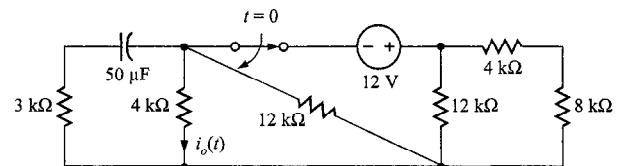


FIGURA P7.6

- 7.7.** Use el método de la ecuación diferencial para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.7 y grafique la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de cerrar el interruptor.

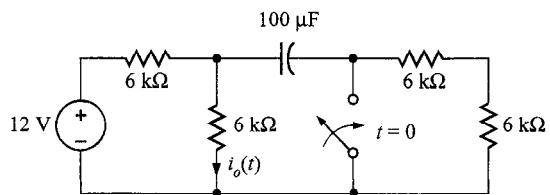


FIGURA P7.7

- 7.8.** Usando el método de la ecuación diferencial, encuentre $i_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.8 y grafique la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de abrir el interruptor.

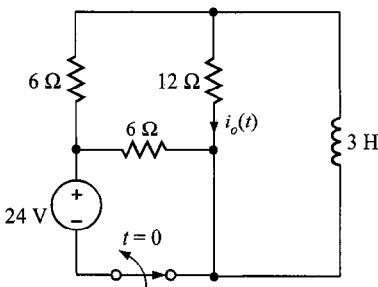


FIGURA P7.8

- 7.9.** Use el método de la ecuación diferencial para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.9 y grafique la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de abrir el interruptor.

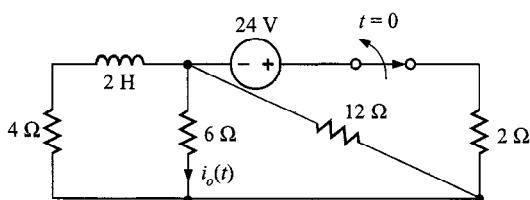


FIGURA P7.9

- 7.10.** Use el método de la ecuación diferencial para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.10 y grafique la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de abrir el interruptor.

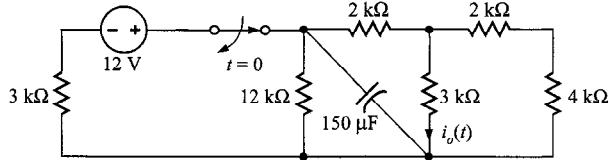


FIGURA P7.10

- 7.11.** Use el método de la ecuación diferencial para encontrar $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.11 y grafique la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de abrir el interruptor.

- 7.12.** Use el método de la ecuación diferencial para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.12 y grafique la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de abrir el interruptor.

- 7.13.** Use el método de la ecuación diferencial para encontrar $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.13 y grafique la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de abrir el interruptor.

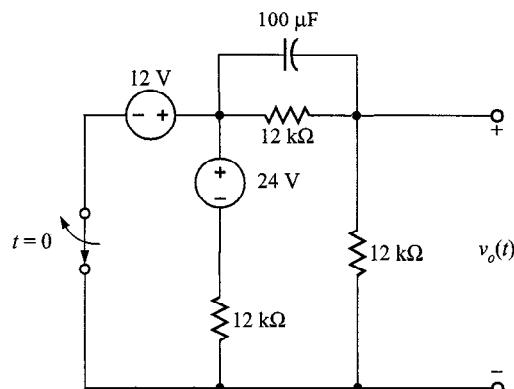


FIGURA P7.11

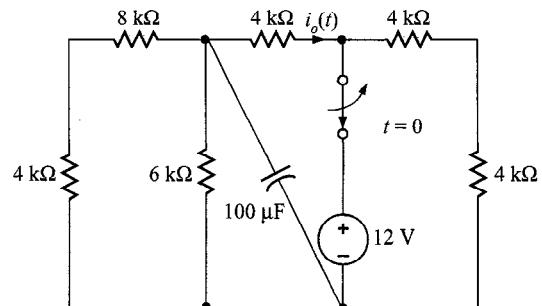


FIGURA P7.12

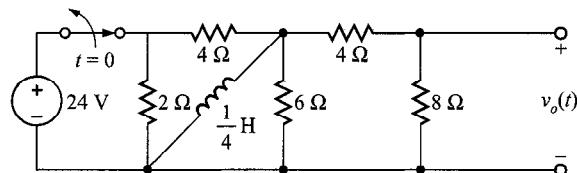


FIGURA P7.13

- 7.14.** Usando el método de la ecuación diferencial encuentre $i_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.14 y grafique la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de abrir el interruptor.

- 7.15.** Use el método de la ecuación diferencial para encontrar $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.15 y grafique la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de abrir el interruptor.

- 7.16.** Los voltajes dentro del cinescopio de una televisión pueden alcanzar varios miles de voltios. Esto representa un serio peligro para los técnicos. Suponga que un capacitor de $1.2 \mu\text{F}$ se conecta al cinescopio y se carga a $20\,000 \text{ V}$. El técnico quiere descargar el capacitor a través de una resistencia

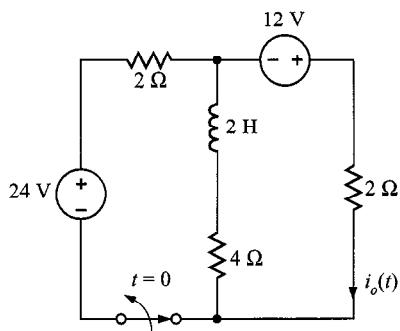


FIGURA P7.14

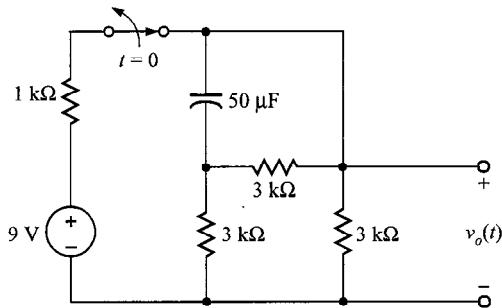


FIGURA P7.15

de $500 \text{ k}\Omega$. ¿Cuánto tiempo tardará el capacitor en descargarse el 99%?

7.17. ¿Cuánto tiempo tardará en descargarse el capacitor del problema 7.16 a sólo 20 volts? ¿Cuál es el máximo de corriente disipada a través de la resistencia durante la descarga?

7.18. Use la técnica de paso por paso para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.18.

7.19. Use el método de paso por paso para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.19.

7.20. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.19 usando la técnica de paso por paso.

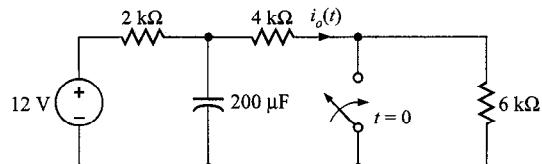


FIGURA P7.18

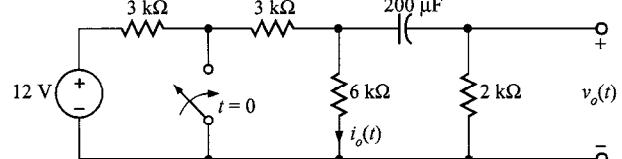


FIGURA P7.19

7.21. Use el método de paso por paso para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.21.

7.22. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.21 usando el método de paso por paso.

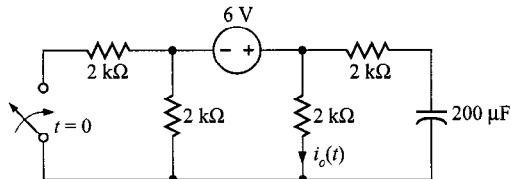


FIGURA P7.23

7.23. Use la técnica de paso por paso para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.23.

7.24. Encuentre $i_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.24 usando el método de paso por paso.

7.25. Use la técnica de paso por paso para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.25.

7.26. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.26 usando el método de paso por paso.

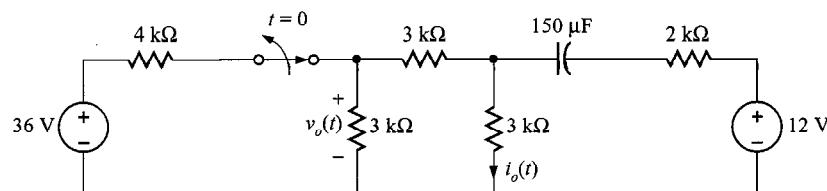


FIGURA P7.21

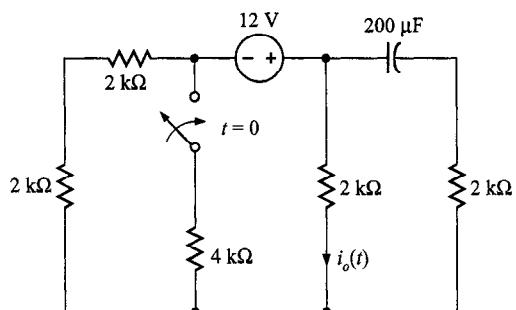


FIGURA P7.24

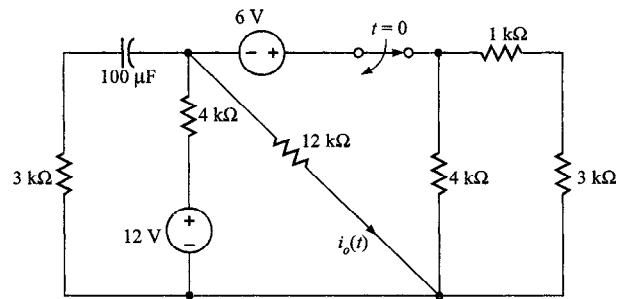


FIGURA P7.25

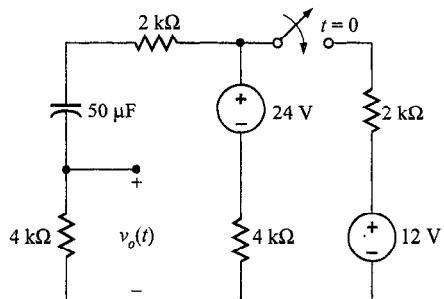


FIGURA P7.26

7.27. Encuentre $i_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.27 usando la técnica de paso por paso.

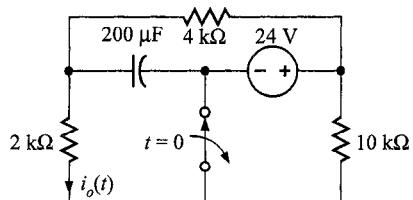


FIGURA P7.27

7.28. Use la técnica de paso por paso para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.28.

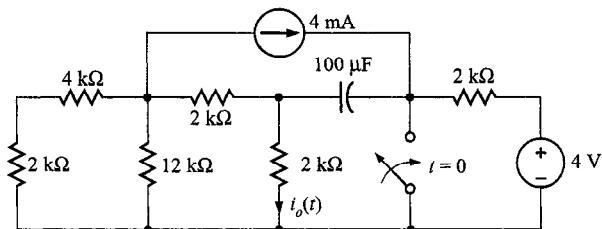


FIGURA P7.28

7.29. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.29 usando el método de paso por paso.

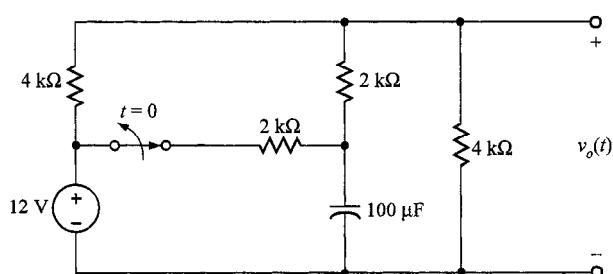


FIGURA P7.29

7.30. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.30 usando el método de paso por paso.

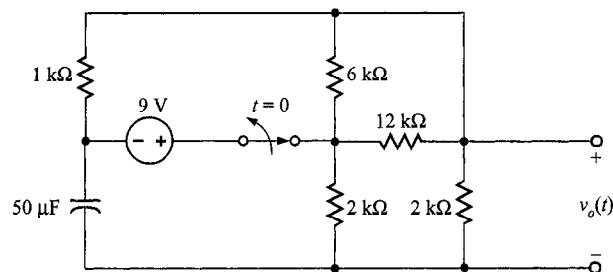


FIGURA P7.30

7.31. Use la técnica de paso por paso para encontrar $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.31.

7.32. Use el método de paso por paso para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.32.

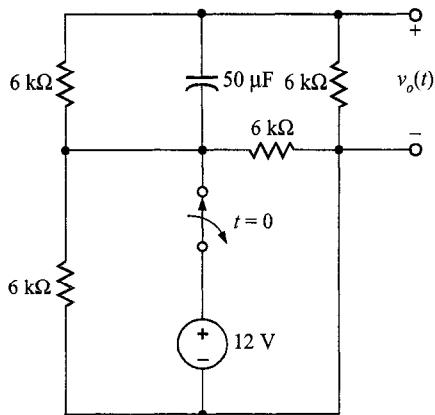


FIGURA P7.31

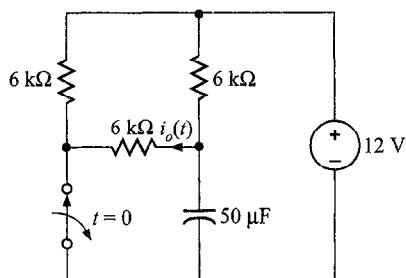


FIGURA P7.32

- 7.33. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.33 usando el método de paso por paso.

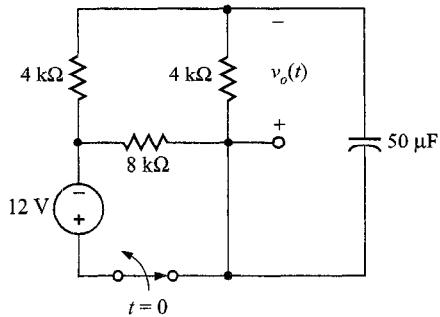


FIGURA P7.33

- 7.34. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.34 usando el método de paso por paso.

- 7.35. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.35 usando el método de paso por paso.

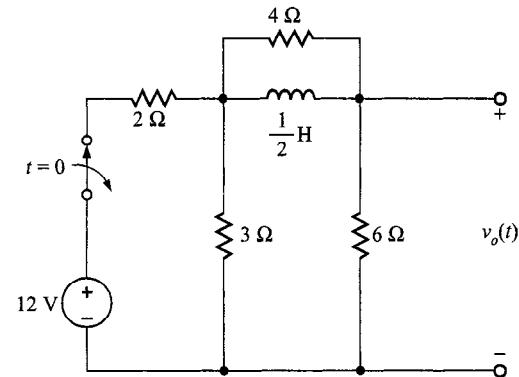


FIGURA P7.34

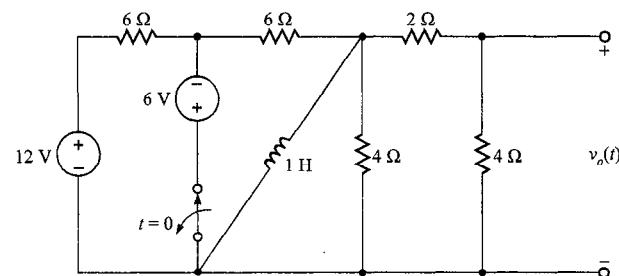


FIGURA P7.35

- 7.36. Use el método de paso por paso para encontrar $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.36.

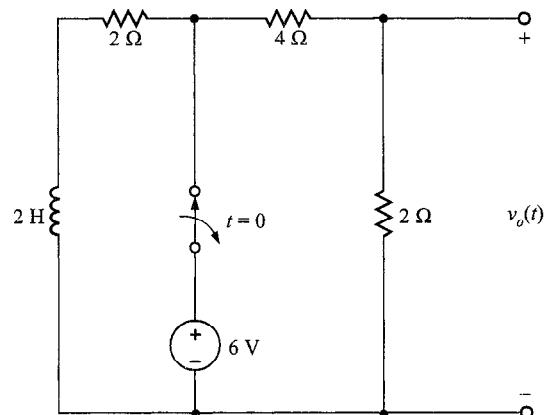


FIGURA P7.36

- 7.37. Use la técnica de paso por paso para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.37.

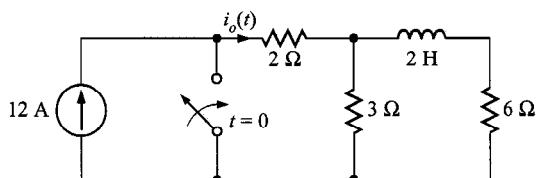


FIGURA P7.37

- 7.38. Encuentre $i_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.38 usando el método de paso por paso.

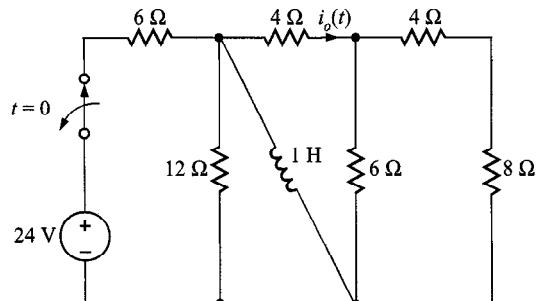


FIGURA P7.38

- 7.39. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.39 usando la técnica de paso por paso.

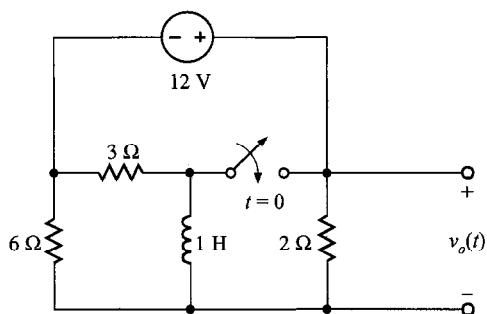


FIGURA P7.39

- 7.40. Use el método de paso por paso para encontrar $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.40.

- 7.41. Use la técnica de paso por paso para encontrar $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.41.

- 7.42. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.42 usando el método de paso por paso.

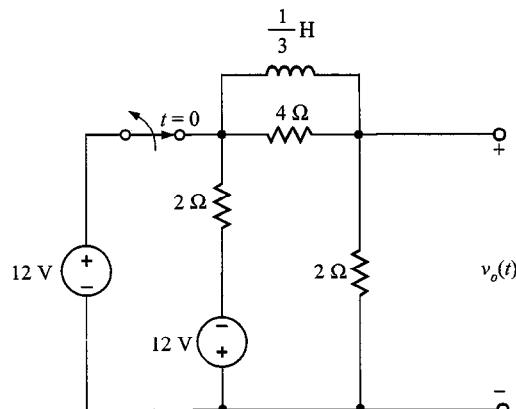


FIGURA P7.40

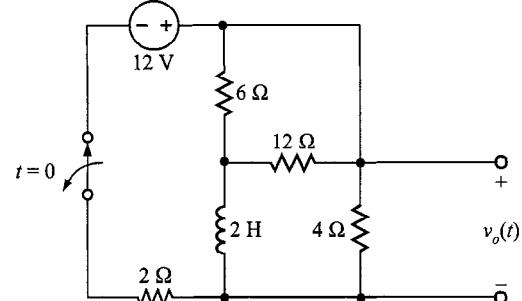
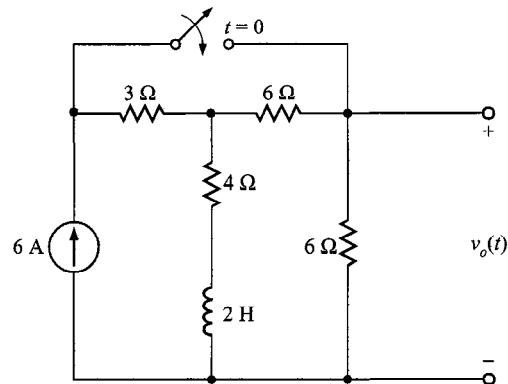


FIGURA P7.41



- 7.43. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.43 usando la técnica de paso por paso.

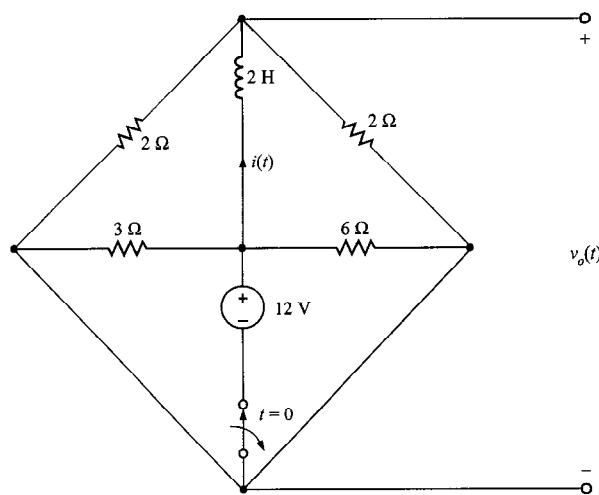


FIGURA P7.43

7.44. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.44 usando el método de paso por paso.

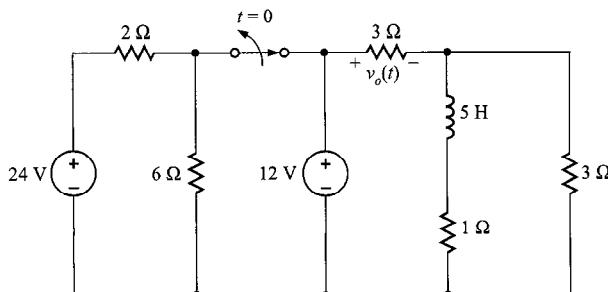


FIGURA P7.44

7.45. Use el método de paso por paso para encontrar $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.45.

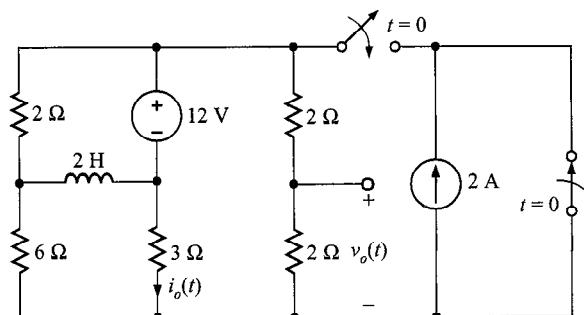


FIGURA P7.45

7.46. Use la técnica de paso por paso para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.46.

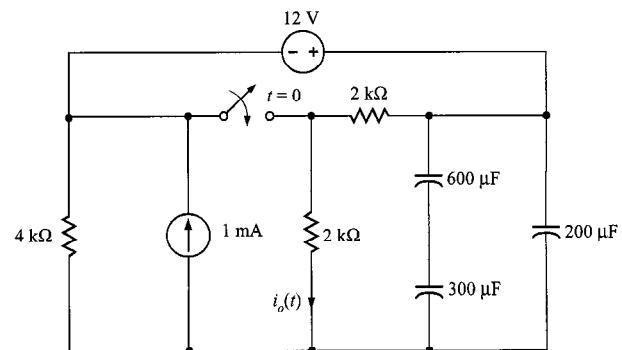


FIGURA P7.46

7.47. Encuentre $i_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.47 usando el método de paso por paso.

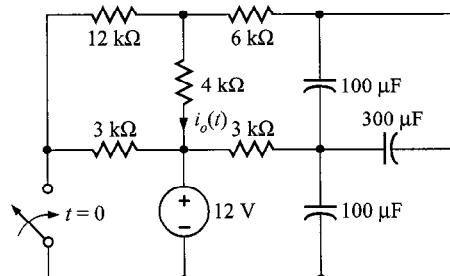


FIGURA P7.47

7.48. Encuentre $i_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.48 usando la técnica de paso por paso.

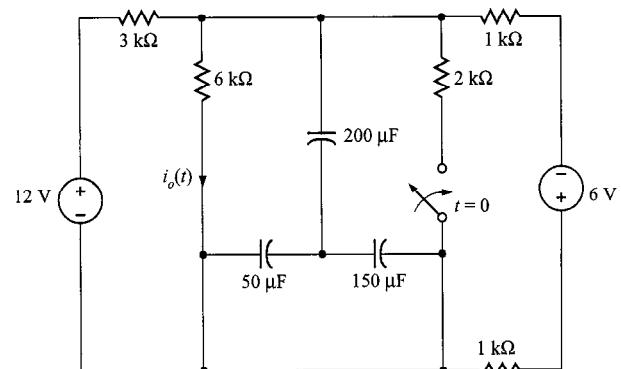


FIGURA P7.48

- 7.49. Use el método de paso por paso para encontrar $i_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.49.

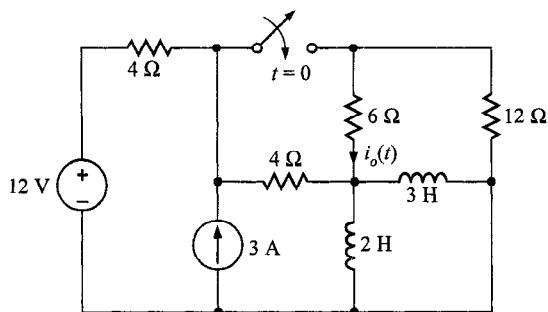


FIGURA P7.49

- 7.50. Use el método de paso por paso para encontrar $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.50.

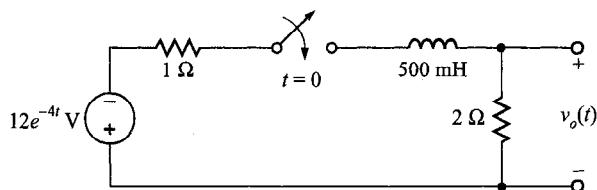


FIGURA P7.50

- 7.51. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.51 usando la técnica de paso por paso.

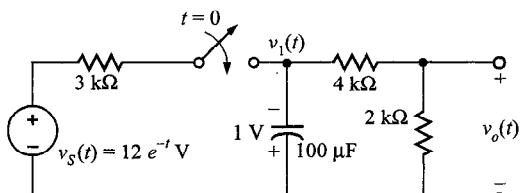


FIGURA P7.51

- 7.52. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.52 usando el método de paso por paso.

- 7.53. Use el método de paso por paso para encontrar $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P7.53.

- 7.54. Use la técnica de paso por paso para encontrar $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.54.

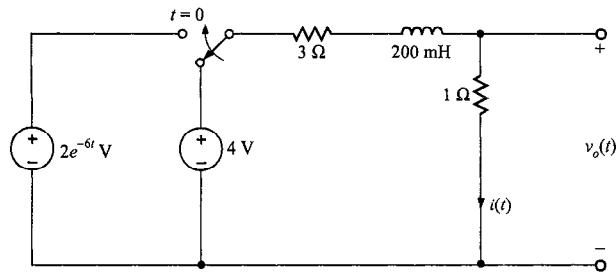


FIGURA P7.52

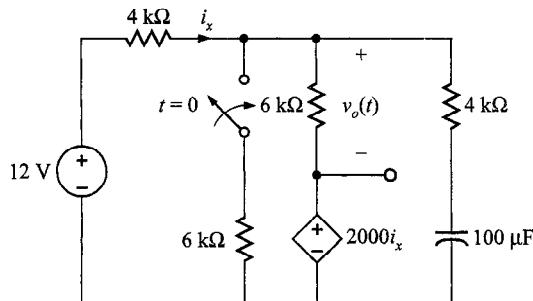


FIGURA P7.53

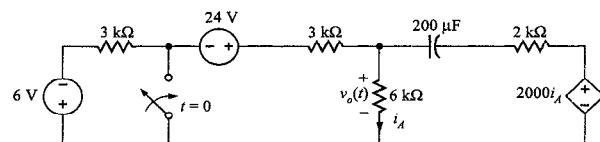


FIGURA P7.54

- 7.55. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P7.55 usando el método de paso por paso.

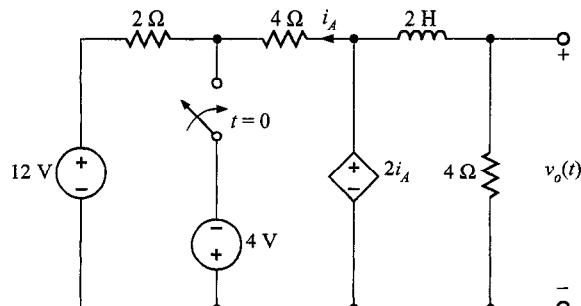


FIGURA P7.55

7.56. Para la red de la figura P7.56, encuentre $i(t)$ para $t > 0$ dadas las condiciones iniciales del capacitor de $3.33 \mu\text{F}$ enlistadas abajo y use el PSPICE para graficar cada corriente en la misma gráfica.

- a) $v_c(0^-) = 0 \text{ V}$
- b) $v_c(0^-) = 6 \text{ V}$
- c) $v_c(0^-) = 24 \text{ V}$
- d) $v_c(0^-) = -24 \text{ V}$

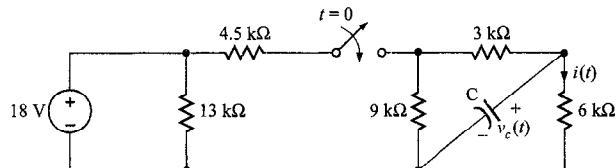
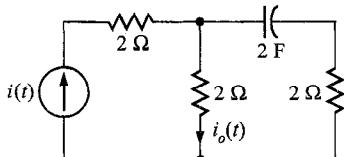
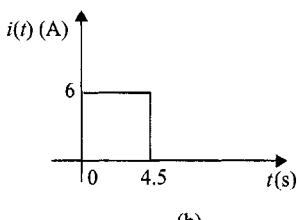


FIGURA P7.56

7.57. La fuente de corriente en la red de la figura P7.57a se define en la figura P7.57b. El voltaje inicial a través del capacitor debe ser cero. (¿Por qué?) Determine la corriente $i_o(t)$ para $t > 0$.



(a)



(b)

FIGURA P7.57

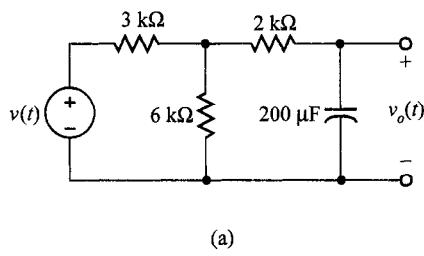
7.58. Determine la ecuación para el voltaje $v_o(t)$ para $t > 0$, en la figura P7.58a cuando está sujeto al pulso de entrada que se muestra en la figura P7.58b.

7.59. Encuentre el voltaje de salida $v_o(t)$ en la red de la figura P7.59 si el voltaje de entrada es

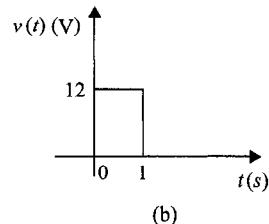
$$v_i(t) = 5[u(t) - u(t - 0.05)] \text{ V}$$

7.60. Encuentre el voltaje de salida $v_o(t)$ en la red de la figura P7.60 si el voltaje de entrada es

$$v_i(t) = 6[u(t) - u(t - 0.05)] \text{ V}$$



(a)



(b)

FIGURA P7.58

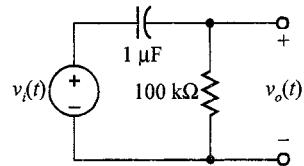


FIGURA P7.59

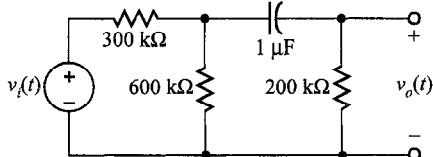


FIGURA P7.60

7.61. Dada la red de la figura P7.61a, grafique $i_o(t)$ en un intervalo de 4 segundos usando un muestreo de 20 ms si la fuente de entrada $i_S(t)$ es como se muestra en la figura P7.61b.

7.62. Para la red de la figura P7.61a, grafique la corriente $i_o(t)$ en un intervalo de 10 seg usando muestreos de 50 ms si la entrada $i_S(t)$ está dada por la expresión

$$\begin{aligned} i_S(t) &= 10(1 - e^{-t/4}) \text{ A} & 0 \leq t \leq s \\ &= 10(1 - e^{-t/4}) - 10e^{-(t-2)} \text{ A} & 2 \leq t \end{aligned}$$

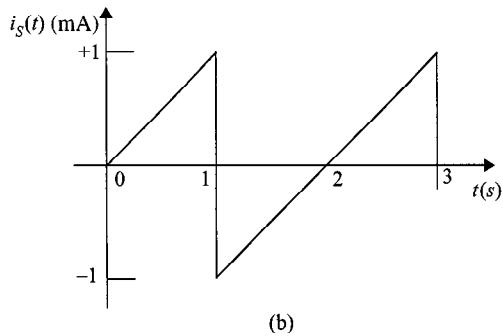
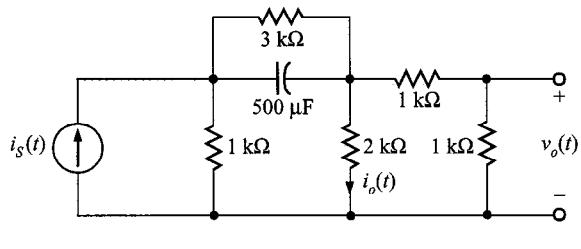


FIGURA P7.61

7.63. Para la red de la figura P7.61a grafique el voltaje $v_o(t)$ en un intervalo de 2 segundos usando un muestreo de 10 ms si la entrada $i_s(t)$ es

$$i_s(t) = 10e^{-2t} \operatorname{sen} 4\pi t \text{ A}$$

7.64. Para la red de la figura P7.61a, grafique el voltaje $v_o(t)$ en un intervalo de 4 segundos usando muestreos de 20 ms si la entrada $i_s(t)$ es como se muestra en la figura P7.64.

7.65. Para la red de la figura P7.65, elija C de modo que la constante de tiempo sea $120 \mu\text{s}$ para $t > 0$.

7.66. Para el circuito de la figura P7.66, elija R_1 , R_2 y L tales que

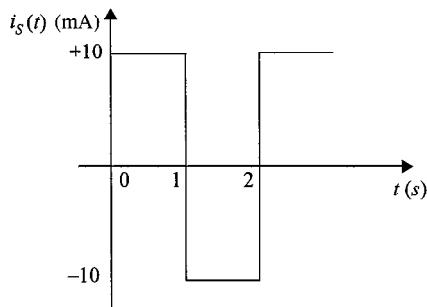


FIGURA P7.64

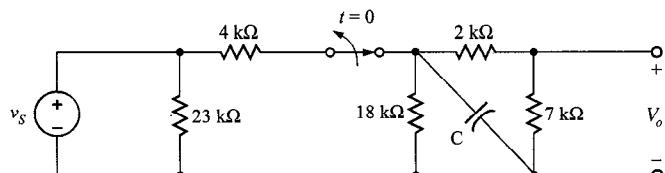


FIGURA P7.65

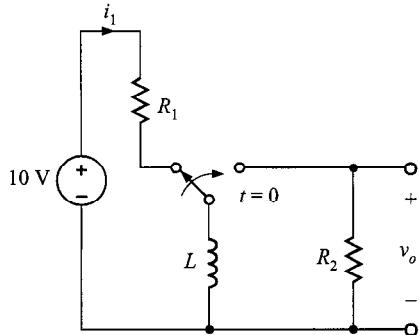


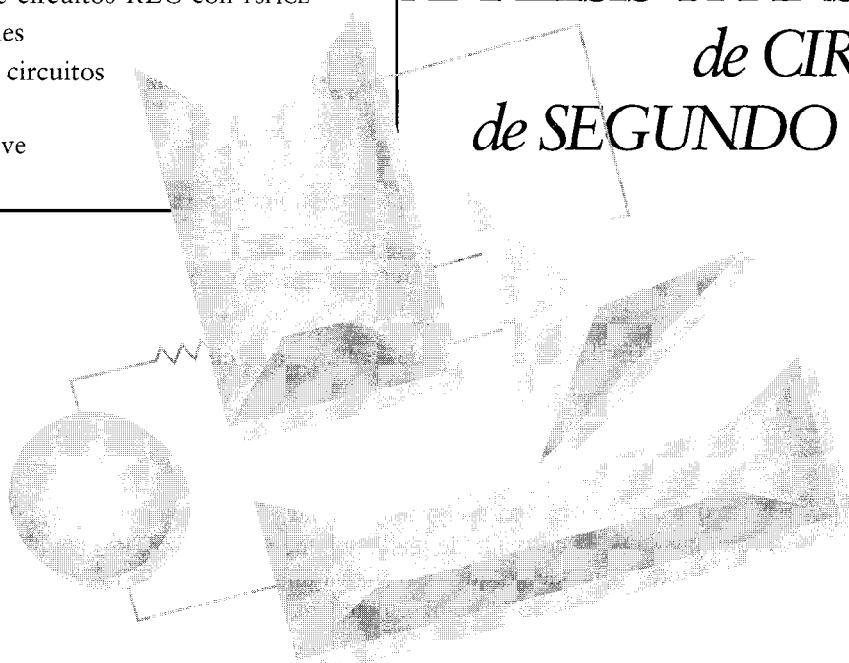
FIGURA P7.66

$$v_o(t) = -20 e^{-10^6 t} \text{ V}$$

y la corriente i_1 nunca excede 1 A.

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

- 8.1** La ecuación del circuito básico
- 8.2** Desarrollo matemático de las ecuaciones de respuesta
- 8.3** Respuesta de la red
- 8.4** Análisis de circuitos *RLC* con PSPICE
- 8.5** Aplicaciones
- 8.6** Diseño de circuitos
- 8.7** Resumen
- Puntos clave
- Problemas

CAPÍTULO
8**ANÁLISIS TRANSITORIO
de CIRCUITOS
de SEGUNDO ORDEN**

En este capítulo extenderemos nuestro análisis de circuitos, que contienen sólo un único elemento de almacenamiento, al caso donde una bobina y un capacitor están presentes de manera simultánea. Aunque los circuitos *RLC* son más complicados que los que hemos analizado en el capítulo 7, seguiremos un desarrollo similar al que se hizo antes para obtener una solución.

Nuestra presentación tratará sólo con circuitos muy simples, ya que el análisis puede de manera rápida llegar a ser complicado para redes que contienen más de una malla o un nodo que no sea de referencia. Una vez

que presentemos el desarrollo matemático de las ecuaciones de respuesta, analizaremos varias redes en las que los parámetros han sido elegidos para ilustrar los diferentes tipos de respuesta. Además extenderemos nuestro análisis con PSPICE a redes que contengan una bobina y un capacitor. Finalmente, proporcionaremos un número de aplicaciones prácticas que indiquen la importancia de esos circuitos transitorios de segundo orden.

Un método más eficiente que proporciona una solución matemática general para redes *RLC* se presentará en el capítulo 16. ■

8.1 La ecuación del circuito básico

Para comenzar nuestro desarrollo, consideremos los dos circuitos *RLC* básicos que se muestran en la figura 8.1. Suponemos que la energía inicialmente puede ser almacenada

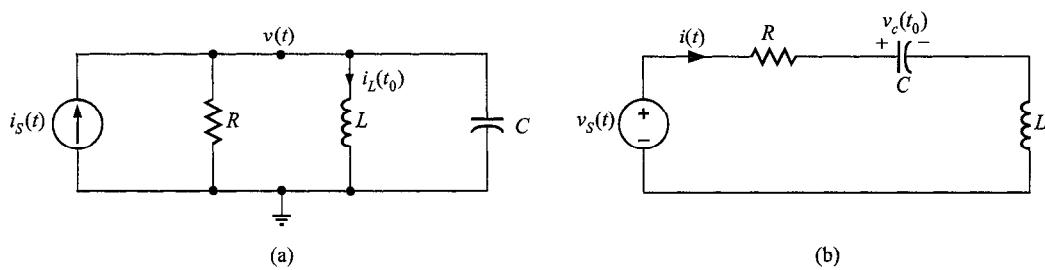


FIGURA 8.1 Circuitos RLC en paralelo y en serie.

en la bobina y en el capacitor. La ecuación nodal para el circuito RLC en paralelo es

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(x) dx + i_L(t_0) + C \frac{dv}{dt} = i_s(t)$$

De manera similar, la ecuación de malla para el circuito RLC en serie es

$$Ri + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx + v_C(t_0) + L \frac{di}{dt} = v_s(t)$$

Note que la ecuación para el voltaje nodal en el circuito en paralelo es de la misma forma que la de la corriente de malla del circuito en serie. Por tanto, la solución de esos dos circuitos depende de que se resuelva una ecuación. Si las dos ecuaciones de arriba se derivan con respecto al tiempo, obtenemos

$$C \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = \frac{di_s}{dt}$$

y

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dv_s}{dt}$$

Como ambos circuitos conducen a una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, concentraremos nuestro análisis en este tipo de ecuación.

8.2 Desarrollo matemático de las ecuaciones de respuesta

De acuerdo con nuestro desarrollo de la solución de la ecuación diferencial de primer orden que resulta del análisis de un circuito RL o de uno RC como se señaló en el capítulo 7, emplearemos ahora el mismo método para obtener la solución de la ecuación diferencial de segundo orden que resulta del análisis de circuitos RLC. Como regla general, para este caso nos enfrentamos con una ecuación de la forma

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = f(t) \quad (8.1)$$

Una vez más usamos el hecho de que si $x(t) = x_p(t)$ es una solución a la ecuación (8.1), y si $x(t) = x_c(t)$ es una solución de la ecuación homogénea

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = 0$$

entonces

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t)$$

es una solución de la ecuación original (8.1). Si de nuevo nos limitamos a una función de forzamiento constante [es decir, $f(t) = A$], el desarrollo al principio del capítulo 7 muestra que la solución de la ecuación (8.1) será de la forma

$$x(t) = \frac{A}{a_2} + x_c(t) \quad (8.2)$$

Fijemos ahora nuestra atención en la solución de la ecuación homogénea

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = 0$$

donde a_1 y a_2 son constantes. Por simplicidad reescribiremos la ecuación en la forma

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx(t)}{dt} + \omega_n^2 x(t) = 0 \quad (8.3)$$

donde hemos hecho las siguientes sustituciones simples para las constantes $a_1 = 2\zeta\omega_n$ y $a_2 = \omega_n^2$.

Siguiendo el desarrollo de una solución para la ecuación diferencial homogénea de primer orden del capítulo 7, la solución de la ecuación (8.3) debe ser una función cuyas derivadas de primero y segundo orden tienen la misma forma, de modo que el lado izquierdo de la ecuación (8.3) se hará idénticamente cero para toda t . De nuevo suponemos que

$$x(t) = Ke^{st}$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación (8.3) obtenemos

$$s^2Ke^{st} + 2\zeta\omega_n sKe^{st} + \omega_n^2 Ke^{st} = 0$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre Ke^{st} se obtiene

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (8.4)$$

Esta ecuación comúnmente se llama *ecuación característica*; ζ se llama *razón de amortiguamiento* y a ω_n se le denomina *frecuencia resonante no amortiguada*. La importancia de esta terminología llegará a ser clara conforme avancemos con el desarrollo. Si

esta ecuación se satisface, nuestra solución supuesta $x(t) = Ke^{st}$ es correcta. Empleando la fórmula cuadrática, encontramos que la ecuación (8.4) se satisface si

$$\begin{aligned} s &= \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \\ &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Por tanto, hay dos valores de s , s_1 y s_2 que satisfacen la ecuación (8.4):

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (8.6)$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Esto significa que $x_1(t) = K_1 e^{s_1 t}$ es una solución de la ecuación (8.3) y que $x_2(t) = K_2 e^{s_2 t}$ también es una solución de la ecuación (8.3); es decir,

$$\frac{d^2}{dt^2} (K_1 e^{s_1 t}) + 2\zeta\omega_n \frac{d}{dt} (K_1 e^{s_1 t}) + \omega_n^2 K_1 e^{s_1 t} = 0$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2} (K_2 e^{s_2 t}) + 2\zeta\omega_n \frac{d}{dt} (K_2 e^{s_2 t}) + \omega_n^2 K_2 e^{s_2 t} = 0$$

La suma de esas dos ecuaciones produce la igualdad

$$\frac{d^2}{dt^2} (K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}) + 2\zeta\omega_n \frac{d}{dt} (K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}) + \omega_n^2 (K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}) = 0$$

Advierta que la suma de las dos soluciones también es una solución. Por tanto, en general, la solución complementaria de la ecuación (8.3) es de la forma

$$x_c(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (8.7)$$

K_1 y K_2 son constantes que pueden ser evaluadas vía las condiciones iniciales $x(0)$ y $dx(0)/dt$. Por ejemplo, ya que

$$x(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

entonces

$$x(0) = K_1 + K_2$$

y

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{dx(0)}{dt} = s_1 K_1 + s_2 K_2$$

De aquí, $x(0)$ y $dx(0)/dt$ produce dos ecuaciones simultáneas, que cuando se resuelven dan las constantes K_1 y K_2 .

Un examen minucioso de las ecuaciones (8.6) y (8.7) indica que la forma de la solución de la ecuación homogénea depende del valor de ζ . Por ejemplo, si $\zeta > 1$, las raíces de la ecuación característica, s_1 y s_2 , también llamadas *frecuencias naturales* debido a que determinan la respuesta natural (no forzada) de la red, son reales y diferentes; si $\zeta < 1$, las raíces son números complejos; y, finalmente, si $\zeta = 1$, las raíces son reales e iguales. Cada uno de esos casos es muy importante; por tanto, examinaremos ahora cada uno con algún detalle.

Caso 1, $\zeta > 1$. Este caso comúnmente se llama *sobreamortiguado*. Las frecuencias naturales s_1 y s_2 son reales y diferentes, por tanto, la respuesta natural de la red descrita por la ecuación diferencial de segundo orden es de la forma

$$x_c(t) = K_1 e^{-(\zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + K_2 e^{-(\zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \quad (8.8)$$

donde K_1 y K_2 se encuentran de las condiciones iniciales. Esto indica que la respuesta natural es la suma de dos exponenciales decrecientes.

Caso 2, $\zeta < 1$. Este caso se llama *subamortiguado*. Como $\zeta < 1$, las raíces de la ecuación característica dadas en la ecuación (8.6) pueden escribirse como

$$s_1 = -\zeta \omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -\sigma + j\omega_d$$

$$s_2 = -\zeta \omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -\sigma - j\omega_d$$

donde $j = \sqrt{-1}$, $\sigma = \zeta \omega_n$ y $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. Así, las frecuencias naturales son números complejos (discutidos brevemente en el apéndice C). La respuesta natural es entonces

$$x_c(t) = K_1 e^{-(\sigma - j\omega_d)t} + K_2 e^{-(\sigma + j\omega_d)t}$$

$$x_c(t) = e^{-\sigma t}(K_1 e^{j\omega_d t} + K_2 e^{-j\omega_d t})$$

Utilizando las identidades de Euler

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$$

obtenemos

$$\begin{aligned} x_c(t) &= e^{-\sigma t}[K_1(\cos \omega_d t + j \sin \omega_d t) + K_2(\cos \omega_d t - j \sin \omega_d t)] \\ &= e^{-\sigma t}[(K_1 + K_2)\cos \omega_d t + (jK_1 - jK_2)\sin \omega_d t] \\ &= e^{-\sigma t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \end{aligned} \quad (8.9)$$

donde A_1 y A_2 , como K_1 y K_2 , son constantes que se evalúan usando las condiciones

iniciales $x(0)$ y $dx(0)/dt$. Si $x_c(t)$ es real, K_1 y K_2 serán complejas y $K_2 = K_1^*$. $A_1 = K_1 + K_2$ es, portanto, 2 veces la parte real de K_1 , y $A_2 = jK_1 - jK_2$ es -2 veces la parte imaginaria de K_1 . A_1 y A_2 son los números reales. Esto ilustra que la respuesta natural es una respuesta oscilatoria exponencialmente amortiguada.

Caso 3, $\zeta = 1$. Este caso, llamado *críticamente amortiguado*, genera

$$s_1 = s_2 = \zeta\omega_n$$

como se muestra en la ecuación (8.6). Por consiguiente, la ecuación (8.7) se reduce a

$$x_c(t) = K_3 e^{-\zeta\omega_n t}$$

donde $K_3 = K_1 + K_2$. Sin embargo, esta no puede ser una solución a la ecuación diferencial de segundo orden (8.3), debido a que en general no es posible satisfacer las dos condiciones iniciales $x(0)$ y $dx(0)/dt$ con la única constante K_3 .

En el caso donde la ecuación característica tiene raíces repetidas, puede obtenerse una solución de la siguiente manera. Si se sabe que $x_1(t)$ es una solución de la ecuación homogénea de segundo orden, entonces vía la sustitución $x(t) = x_1(t)y(t)$ podemos transformar la ecuación diferencial dada en una ecuación de primer orden en $dy(t)/dt$. Como esta ecuación resultante es sólo una función de $y(t)$, puede resolverse para encontrar la solución general $x(t) = x_1(t)y(t)$.

Para el caso presente, $s_1 = s_2 = -\zeta\omega_n$. Por simplicidad hacemos $\alpha = \zeta\omega_n$ y, de aquí, la ecuación básica es

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \alpha^2 x(t) = 0 \quad (8.10)$$

y una solución conocida es

$$x_1(t) = K_3 e^{-\alpha t}$$

Empleando la sustitución

$$x_2(t) = x_1(t)y(t) = K_3 e^{-\alpha t}y(t)$$

La ecuación (8.10) se convierte en

$$\frac{d^2}{dt^2} [K_3 e^{-\alpha t}y(t)] + 2\alpha \frac{d}{dt} [K_3 e^{-\alpha t}y(t)] + \alpha^2 K_3 e^{-\alpha t}y(t) = 0$$

Evaluando las derivadas obtenemos

$$\frac{d}{dt} [K_3 e^{-\alpha t}y(t)] = -K_3 \alpha e^{-\alpha t}y(t) + K_3 e^{-\alpha t} \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} [K_3 e^{-\alpha t}y(t)] = K_3 \alpha^2 e^{-\alpha t}y(t) - 2K_3 \alpha e^{-\alpha t} \frac{dy(t)}{dt} + K_3 e^{-\alpha t} \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

Si sustituimos esas expresiones en la ecuación precedente se obtiene

$$K_3 e^{-\alpha t} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 0$$

Por tanto,

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 0$$

y de aquí,

$$y(t) = A_1 + A_2 t$$

Por ende, la solución general es

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(t)y(t) \\ &= K_3 e^{-\alpha t}(A_1 + A_2 t) \end{aligned}$$

la cual puede escribirse como

$$x_2(t) = B_1 e^{-\zeta \omega_n t} + B_2 t e^{-\zeta \omega_n t} \quad (8.11)$$

donde B_1 y B_2 son constantes derivadas de las condiciones iniciales.

Es informativo bosquejar la respuesta natural para los tres casos que hemos discutido: sobreamortiguado, ecuación (8.8); subamortiguado, ecuación (8.9); y críticamente amortiguado, ecuación (8.11). La figura 8.2 ilustra gráficamente los tres casos para las situaciones en las que $x_C(0) = 0$. Advierta que la respuesta críticamente amortiguada tiene un pico y decae más rápido que la respuesta sobreamortiguada. La respuesta subamortiguada es una senoide exponencialmente amortiguada cuya velocidad de decaimiento depende del factor ζ . En realidad, los términos $\pm e^{-\zeta \omega_n t}$ definen lo que se llama la *envolvente* de la respuesta, y las oscilaciones amortiguadas (es decir, las oscilaciones de amplitud decreciente) exhibidas por la forma de onda de la figura 8.2b se llaman *oscilaciones amortiguadas*.

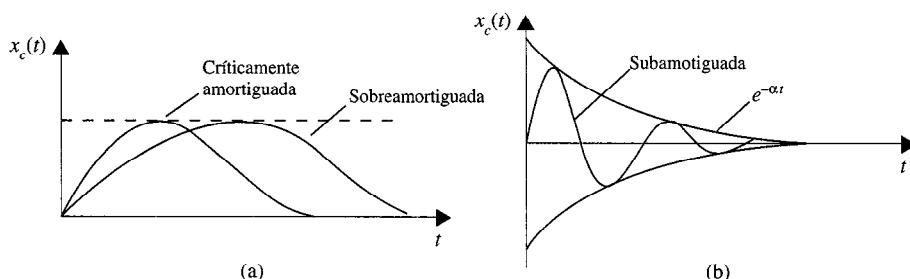


FIGURA 8.2 Comparación de respuestas sobreamortiguada, críticamente amortiguada y subamortiguada.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D8.1 Un circuito *RLC* en paralelo tiene los siguientes parámetros del circuito: $R = 1 \Omega$, $L = 2 \text{ H}$, y $C = 2 \text{ F}$. Calcule la razón de amortiguamiento y la frecuencia natural no amortiguada de esta red.

Resp.: $\zeta = 0.5$, $\omega_n = 0.5 \text{ rad/seg}$.

D8.2 Un circuito *RLC* en serie consiste en $R = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, y un condensador. Determine el tipo de respuesta exhibida por la red si a) $C = \frac{1}{2} \text{ F}$, b) $C = 1 \text{ F}$, y c) $C = 2 \text{ F}$.

Resp.: a) subamortiguado, b) críticamente amortiguado, c) sobreamortiguado.

8.3 Respuesta de la red

Analizaremos ahora un número de redes *RLC* simples que contienen condiciones iniciales diferentes de cero y funciones forzantes constantes. Se considerarán circuitos que exhiben respuestas sobreamortiguadas, subamortiguadas y críticamente amortiguadas. El método ilustrará no sólo las técnicas de ecuaciones diferenciales, sino también la manera en que los circuitos equivalentes, válidos en $t = 0+$ y $t = \infty$, se usan en el análisis. Los siguientes ejemplos servirán para demostrar las técnicas de análisis.

EJEMPLO 8.1

Considere el circuito *RLC* en paralelo que se muestra en la figura 8.3. La ecuación diferencial de segundo orden que describe el voltaje $v(t)$ es

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$

Una comparación de esta ecuación con las ecuaciones (8.3) y (8.4) indica que para el circuito *RLC* en paralelo el término de amortiguamiento es $1/2 RC$ y la frecuencia resonante es $1/\sqrt{LC}$. Si los parámetros del circuito son $R = 2 \Omega$, $C = \frac{1}{5} \text{ F}$ y $L = 5 \text{ H}$, la ecuación será

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2.5 \frac{dv}{dt} + v = 0$$

Supongamos que las condiciones iniciales en los elementos de almacenamiento son $i_L(0) = -1 \text{ A}$ y $v_C(0) = 4 \text{ V}$.

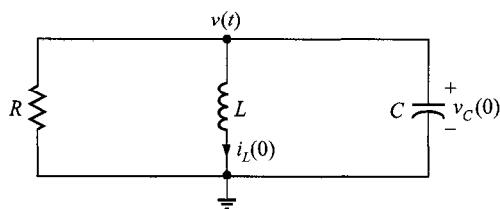


FIGURA 8.3 Circuito *RLC* en paralelo.

Encontremos el voltaje nodal $v(t)$ y la corriente de la bobina.

SOLUCIÓN La ecuación característica para la red es

$$s^2 + 2.5s + 1 = 0$$

y las raíces son

$$s_1 = -2$$

$$s_2 = -0.5$$

Como las raíces son reales y diferentes, el circuito es sobreamortiguado y $v(t)$ es de la forma

$$v(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-0.5t}$$

Las condiciones iniciales se emplean ahora para determinar las constantes K_1 y K_2 . Como $v(t) = v_C(t)$,

$$v_C(0) = v(0) = 4 = K_1 + K_2$$

La segunda ecuación necesaria para determinar K_1 y K_2 normalmente se obtiene de la expresión

$$\frac{dv(t)}{dt} = -2K_1 e^{-2t} - 0.5K_2 e^{-0.5t}$$

Sin embargo, la segunda condición inicial no es $dv(0)/dt$. Si este fuera el caso, simplemente evaluaríamos la ecuación en $t = 0$. Esto produciría una segunda ecuación en las incógnitas K_1 y K_2 . No obstante, podemos evitar este problema notando que la ecuación nodal para el circuito puede escribirse como

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} + i_L(t) = 0$$

6

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{-1}{RC} v(t) + \frac{i_L(t)}{C}$$

$$t = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{dv(0)}{dt} &= \frac{-1}{RC} v(0) - \frac{1}{C} i_L(0) \\ &= -2.5(4) - 5(-1) \\ &= -5 \end{aligned}$$

Pero como

$$\frac{dv(t)}{dt} = -2K_1 e^{-2t} - 0.5K_2 e^{-0.5t}$$

entonces cuando $t = 0$

$$-5 = -2K_1 - 0.5K_2$$

Esta ecuación, junto con la ecuación

$$4 = K_1 + K_2$$

produce las constantes $K_1 = 2$ y $K_2 = 2$. Por tanto, la ecuación final para el voltaje es

$$v(t) = 2e^{-2t} + 2e^{-0.5t} \text{ V}$$

Note que la ecuación de voltaje satisface la condición inicial $v(0) = 4$ V. La curva de respuesta para este voltaje $v(t)$ se muestra en la figura 8.4.

La corriente de la bobina se relaciona con $v(t)$ mediante la ecuación

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt$$

Al sustituir nuestra expresión por $v(t)$ se obtiene

$$i_L(t) = \frac{1}{5} \int [2e^{-2t} + 2e^{-0.5t}] dt$$

o

$$i_L(t) = -\frac{1}{5} e^{-2t} - \frac{4}{5} e^{-0.5t} \text{ A}$$

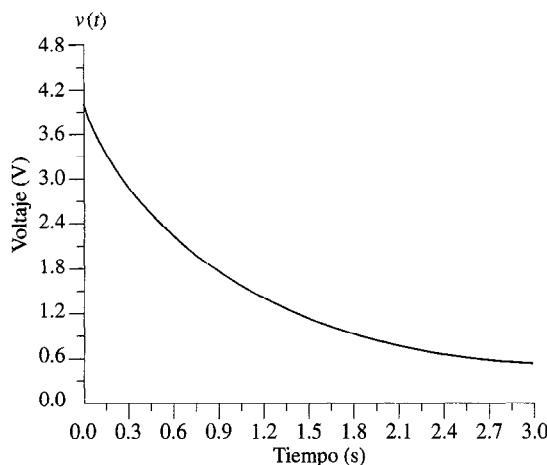


FIGURA 8.4 Respuesta sobreamortiguada.

Advierta que en comparación con los circuitos RL y RC que analizamos en el capítulo 7, la respuesta de este circuito RLC está controlada por dos constantes de tiempo. El primer término tiene una constante de tiempo de $\frac{1}{2}$, y el segundo término tiene una constante de tiempo de 2.

E J E M P L O 8.2

El circuito RLC en serie que se muestra en la figura 8.5 tiene los siguientes parámetros: $C = 0.04 \text{ F}$, $L = 1 \text{ H}$, $R = 6 \Omega$, $i_L(0) = 4 \text{ A}$ y $v_C(0) = -4 \text{ V}$. La ecuación para la corriente en el circuito está dada por la expresión

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

Una comparación de esta ecuación con las ecuaciones (8.3) y (8.4) ilustra que para un circuito RLC en serie el término de amortiguamiento es $R/2L$ y la frecuencia resonante es $1/\sqrt{LC}$. Sustituyendo los valores de los elementos del circuito en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 6 \frac{di}{dt} + 25i = 0$$

Determinemos la expresión para la corriente y el voltaje del capacitor.

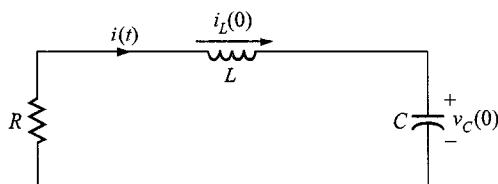


FIGURA 8.5 Circuito RLC en serie.

S O L U C I Ó N La ecuación característica es entonces

$$s^2 + 6s + 25 = 0$$

y las raíces son

$$s_1 = -3 + j4$$

$$s_2 = -3 - j4$$

Como las raíces son complejas, el circuito es subamortiguado y la expresión para $i(t)$ es

$$i(t) = K_1 e^{-3t} \cos 4t + K_2 e^{-3t} \sin 4t$$

Utilizando las condiciones iniciales, encontramos que

$$i(0) = 4 = K_1$$

y

$$\frac{di}{dt} = -4K_1 e^{-3t} \operatorname{sen}4t - 3K_1 e^{-3t} \cos4t + 4K_2 e^{-3t} \cos4t - 3K_2 e^{-3t} \operatorname{sen}4t$$

y así

$$\frac{di(0)}{dt} = -3K_1 + 4K_2$$

Aunque no conocemos $di(0)/dt$, podemos encontrarla vía la LVK. Del circuito notamos que

$$Ri(0) + L \frac{di(0)}{dt} + v_C(0) = 0$$

o

$$\begin{aligned} \frac{di(0)}{dt} &= -\frac{R}{L} i(0) - \frac{v_C(0)}{L} \\ &= -\frac{6}{1}(4) + \frac{4}{1} \\ &= -20 \end{aligned}$$

Por tanto

$$-3K_1 + 4K_2 = -20$$

y como $K_1 = 4$, $K_2 = -2$, entonces la expresión para $i(t)$ es

$$i(t) = 4e^{-3t} \cos 4t - 2e^{-3t} \operatorname{sen} 4t \text{ A}$$

Note que esta expresión satisface la condición inicial $i(0) = 4$. El voltaje a través del capacitor puede determinarse vía la LVK usando esta corriente:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_C(t) = 0$$

o

$$v_C(t) = -Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt}$$

Sustituyendo la expresión anterior para $i(t)$ en esta ecuación obtenemos

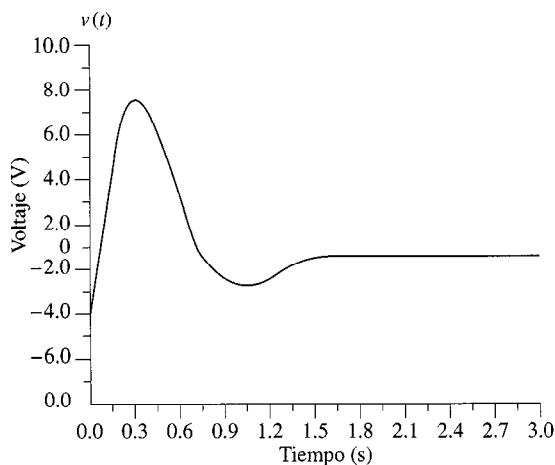


FIGURA 8.6 Respuesta subamortiguada.

$$v_C(t) = -4e^{-3t} \cos 4t + 22e^{-3t} \sin 4t \text{ V}$$

Note que esta expresión satisface la condición inicial $v_C(0) = -4$ V. Una gráfica de la función $v_C(t)$ se muestra en la figura 8.6.

EJEMPLO 8.3

Examinemos el circuito de la figura 8.7, el cual es ligeramente más complicado que los dos que hemos considerado anteriormente. Las dos ecuaciones que describen la red son

$$L \frac{di(t)}{dt} + R_1 i(t) + v(t) = 0$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_2}$$

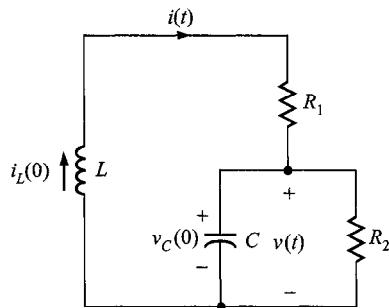
Sustituyendo la segunda ecuación en la primera se obtiene

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right) \frac{dv}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2 L C} v = 0$$

Si los parámetros del circuito y las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} R_1 &= 10 \Omega & C &= \frac{1}{8} \text{ F} & v_C(0) &= 1 \text{ V} \\ R_2 &= 8 \Omega & L &= 2 \text{ H} & i_L(0) &= \frac{1}{2} \text{ A} \end{aligned}$$

la ecuación diferencial se convierte en

**FIGURA 8.7** Circuito RLC en serie/paralelo.

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 6 \frac{dv}{dt} + 9v = 0$$

Deseamos encontrar expresiones para la corriente $i(t)$ y el voltaje $v(t)$.

SOLUCIÓN La ecuación característica es entonces

$$s^2 + 6s + 9 = 0$$

y de aquí las raíces son

$$s_1 = -3$$

$$s_2 = -3$$

Como las raíces son reales e iguales, el circuito está críticamente amortiguado. El término $v(t)$ entonces está dado por la expresión

$$v(t) = K_1 e^{-3t} + K_2 t e^{-3t}$$

Como $v(t) = v_C(t)$,

$$v(0) = v_C(0) = 1 = K_1$$

Además,

$$\frac{dv(t)}{dt} = -3K_1 e^{-3t} + K_2 e^{-3t} - 3K_2 t e^{-3t}$$

Sin embargo,

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C} - \frac{v(t)}{R_2 C}$$

Igualando entre sí estas dos expresiones y evaluando la ecuación resultante obtenemos a $t = 0$

$$\frac{1/2}{1/8} - \frac{1}{1} = -3K_1 + K_2$$

$$3 = -3K_1 + K_2$$

Como $K_1 = 1$, $K_2 = 6$ y la expresión para $v(t)$ es

$$v(t) = e^{-3t} + 6te^{-3t} \text{ V}$$

Note que la expresión satisface la condición inicial $v(0) = 1$.

La corriente $i(t)$ puede determinarse de la ecuación del análisis nodal en $v(t)$.

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_2}$$

Sustituyendo $v(t)$ de la ecuación anterior, encontramos

$$i(t) = \frac{1}{8} [-3e^{-3t} + 6e^{-3t} - 18te^{-3t}] + \frac{1}{8} [e^{-3t} + 6te^{-3t}]$$

o

$$i(t) = \frac{1}{2} e^{-3t} - \frac{3}{2} te^{-3t} \text{ A}$$

Si esta expresión para la corriente se emplea en la ecuación del circuito,

$$v(t) = -L \frac{di(t)}{dt} - R_1 i(t)$$

obtenemos

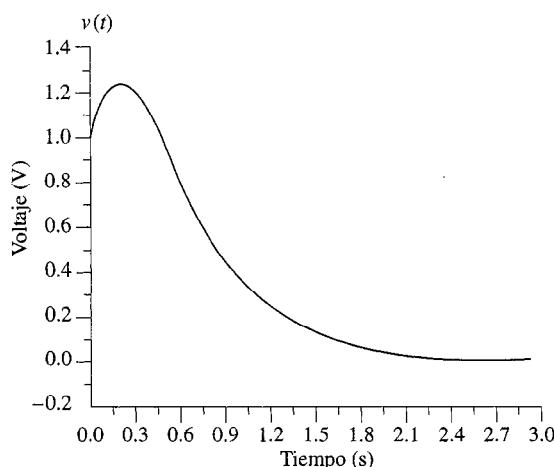


FIGURA 8.8 Respuesta críticamente amortiguada.

$$v(t) = e^{-3t} + 6te^{-3t} \text{ V}$$

que es idéntica a la expresión derivada anteriormente. Esta función se muestra en la figura 8.8.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D8.3 El interruptor en la red de la figura D8.3 se abre en $t = 0$. Encontrar $i(t)$ para $t > 0$.

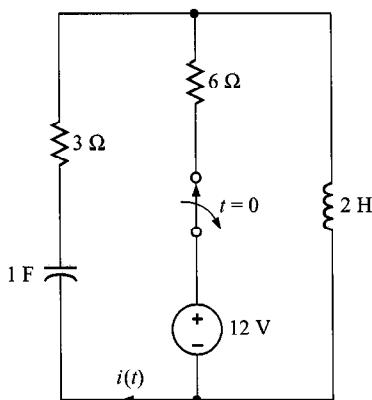


FIGURA D8.3

Resp.: $i(t) = -2e^{-t/2} + 4e^{-t} \text{ A.}$

D8.4 El interruptor de la red de la figura D8.4 se mueve de la posición 1 a la posición 2 en $t = 0$. Encontrar $v_o(t)$ para $t > 0$.

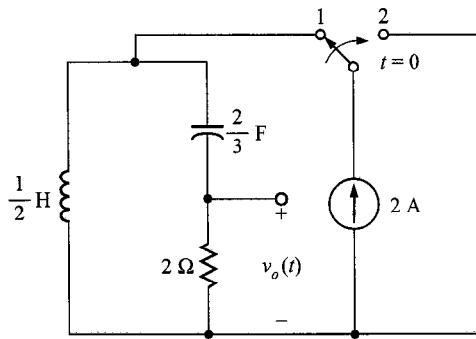


FIGURA D8.4

Resp.: $v_o(t) = 2(e^{-t} - 3e^{-3t}) \text{ V.}$

E J E M P L O 8.4

Considere el circuito que se muestra en la figura 8.9. Éste es el mismo que el analizado en el ejemplo 8.2, excepto que está presente una función forzante constante. Los parámetros del circuito son los mismos que los utilizados en el ejemplo 8.2:

$$C = 0.04 \text{ F} \quad i_L(0) = 4 \text{ A}$$

$$L = 1 \text{ H} \quad v_C(0) = -4 \text{ V}$$

$$R = 6 \Omega$$

Queremos encontrar una expresión para $v_C(t)$ en $t > 0$.

SOLUCIÓN De nuestro primer desarrollo matemático sabemos que la solución general de este problema consistirá en una solución particular más una solución complementaria. Del ejemplo 8.2 sabemos que la solución complementaria es de la forma $K_3 e^{-3t} \cos 4t + K_4 e^{-3t} \sin 4t$. La solución particular es una constante, ya que la entrada es una constante y por tanto la

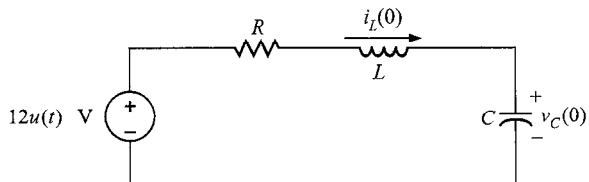


FIGURA 8.9 Circuito RLC en serie con una función de entrada de escalón.

solución general es

$$v_C(t) = K_3 e^{-3t} \cos 4t + K_4 e^{-3t} \sin 4t + K_5$$

Un examen del circuito muestra que en el estado estable el valor final de $v_C(t)$ es 12 V, ya que en la condición de estado estable, la bobina está en corto circuito y el capacitor es un circuito abierto. Así, $K_5 = 12$. El valor de estado estable también puede calcularse inmediatamente a partir de la ecuación diferencial. La forma de la solución general es entonces

$$v_C(t) = K_3 e^{-3t} \cos 4t + K_4 e^{-3t} \sin 4t + 12$$

Las condiciones iniciales ahora pueden usarse para evaluar las constantes K_3 y K_4 .

$$\begin{aligned} v_C(0) &= -4 = K_3 + 12 \\ -16 &= K_3 \end{aligned}$$

Como la derivada de una constante es cero, el resultado del ejemplo 8.2 muestra que

$$\frac{dv_C(0)}{dt} = \frac{i(0)}{C} = 100 = -3K_3 + 4K_4$$

y ya que $K_3 = -16$, $K_4 = 13$. Por lo tanto, la solución general para $v_C(t)$ es

$$v_C(t) = 12 - 16e^{-3t} \cos 4t + 13e^{-3t} \sin 4t \text{ V}$$

Note que esta ecuación satisface la condición inicial $v_C(0) = -4$, y la condición final $v_C(\infty) = 12$ V.

E J E M P L O 8.5

Examinemos el circuito que se muestra en la figura 8.10. Un examen detenido de este circuito indicará que es idéntico al que se muestra en el ejemplo 8.3, excepto que está presente una función forzante constante. Suponemos que el circuito está en estado estable en $t = 0-$. Las ecuaciones que describen el circuito en $t > 0$ son

$$L \frac{di(t)}{dt} + R_1 i(t) + v(t) = 24$$

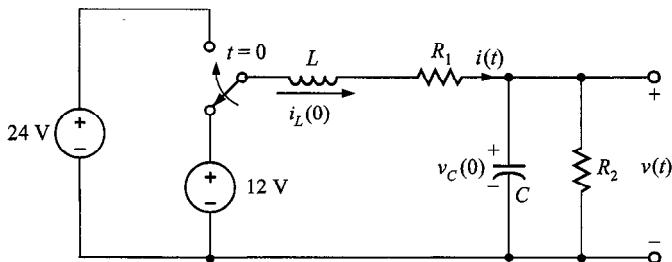


FIGURA 8.10 Circuito RLC en serie/paralelo con una función forzante constante.

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_2}$$

Combinando esas ecuaciones, obtenemos

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right) \frac{dv(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2 L C} v(t) = \frac{24}{LC}$$

Si los parámetros del circuito son $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $L = 2 \text{ H}$ y $C = \frac{1}{4} \text{ F}$, la ecuación diferencial para el voltaje de salida se reduce a

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 7 \frac{dv(t)}{dt} + 12v(t) = 48$$

Determinemos el voltaje de salida $v(t)$.

SOLUCIÓN La ecuación característica es

$$s^2 + 7s + 12 = 0$$

y de aquí las raíces son

$$s_1 = -3$$

$$s_2 = -4$$

La respuesta del circuito es sobreamortiguada, y por tanto la solución general es de la forma

$$v(t) = K_1 e^{-3t} + K_2 e^{-4t} + K_3$$

El valor de estado estable del voltaje K_3 , puede calcularse de la figura 8.11a. Note que

$$v(\infty) = 4 \text{ V} = K_3$$

Las condiciones iniciales pueden calcularse de las figuras 8.11b y c, las cuales son válidas en $t = 0-$ y $t = 0+$, respectivamente. Advierta que $v(0+) = 2 \text{ V}$ y por ello de la ecuación de respuesta

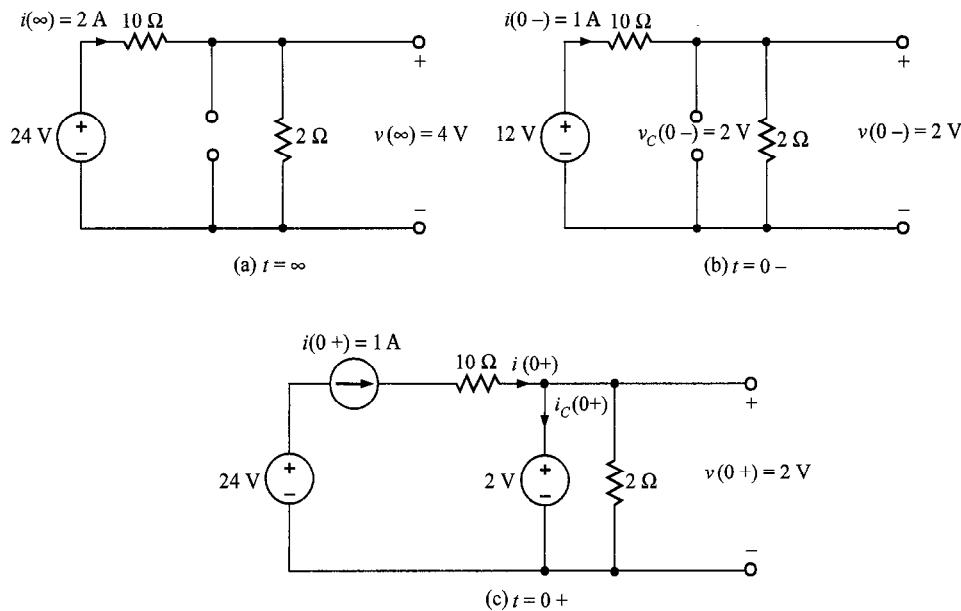


FIGURA 8.11 Circuitos equivalentes en $t = \infty$, $t = 0^-$ y $t = 0^+$ para el circuito de la figura 8.10.

$$\begin{aligned}v(0+) &= 2 \text{ V} = K_1 + K_2 + 4 \\-2 &= K_1 + K_2\end{aligned}$$

La figura 8.11c ilustra que $i(0+) = 1$. De la ecuación de respuesta vemos que

$$\frac{dv(0)}{dt} = -3K_1 - 4K_2$$

y como

$$\begin{aligned}\frac{dv(0)}{dt} &= \frac{i(0)}{C} - \frac{v(0)}{R_2 C} \\&= 4 - 4 \\&= 0\end{aligned}$$

entonces

$$0 = -3K_1 - 4K_2$$

Resolviendo las dos ecuaciones para K_1 y K_2 se obtiene $K_1 = -8$ y $K_2 = 6$. Por tanto, la solución general para la respuesta del voltaje es

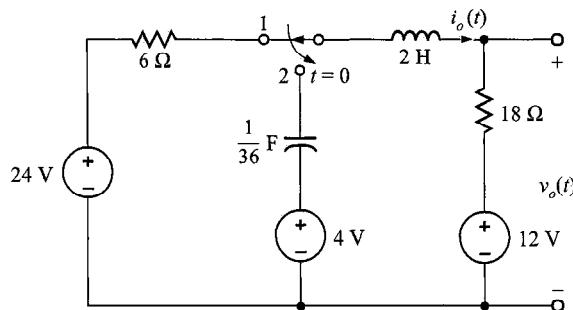
$$v(t) = 4 - 8e^{-3t} + 6e^{-4t} \text{ V}$$

Note que esta ecuación satisface los valores inicial y final de $v(t)$.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D8.5 El interruptor de la red de la figura D8.5 se mueve de la posición 1 a la posición 2 en $t = 0$. Calcule $i_o(t)$ para $t > 0$ y use esta corriente para determinar $v_o(t)$ para $t > 0$.

Resp.: $i_o(t) = -\frac{1}{2}e^{-3t} + e^{-6t}$ A, $v_o(t) = 12 + 18i_o(t)$ V.

**FIGURA D8.5**

Los ejemplos indican claramente que la solución general de circuitos *RLC*, incluso muy simples, puede ser completamente complicada. Aunque podemos continuar nuestro análisis matemático actual y presentar las técnicas para resolver redes más generales, existen mejores métodos. Por ejemplo, en el capítulo 16 la técnica de la transformada de Laplace será aplicada para analizar circuitos *RLC* con una variedad de funciones forzantes, y el lector encontrará que la técnica de la transformada no sólo es más fácil de usar sino que proporciona una visión adicional en el análisis.

8.4 Análisis de circuitos *RLC* con PSPICE

En las secciones anteriores de este capítulo nuestras técnicas de análisis han sido de naturaleza matemática. Aunque el enfoque matemático indica el tipo de respuesta que producirá la red, no conduce fácilmente a una solución. En contraste, un programa de PSPICE consistente sólo en pocos comandos es suficiente para dar resultados que fácilmente despliegan el comportamiento del circuito. Ahora con el auxilio de PSPICE reexaminaremos algunos de los circuitos que tratamos en los primeros ejemplos e ilustraremos la facilidad con la que puede aplicarse en general.

E J E M P L O 8.6

El circuito *RLC* del ejemplo 8.2 se dibuja nuevamente para un análisis con PSPICE en la figura 8.12. Escribamos un programa en PSPICE que grafique el voltaje del capacitor en intervalos de 0.1 segundos, en un rango de 3 segundos.

SOLUCIÓN El siguiente programa grafica el voltaje del capacitor.

```
EXAMPLE 8.6 PLOT OF CAPACITOR VOLTAGE IN
*EXAMPLE 8.2
R 1 0 6
L 1 2 1 IC=4
C 2 0 0.04 IC=-4
```

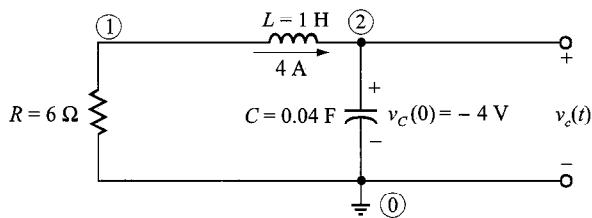


FIGURA 8.12 Circuito de la figura 8.5, redibujado para un análisis con PSPICE.

```
.TRAN 0.1 3 UIC
.PROBE
.END
```

Una gráfica del voltaje del capacitor se muestra en la figura 8.6.

E J E M P L O 8.7

El circuito *RLC* del ejemplo 8.3 se redibuja en la figura 8.13 para un análisis con PSPICE. Escribamos un programa de PSPICE que grafique el voltaje $v(t)$ en intervalos de 0.1 segundos en un rango de 3 segundos.

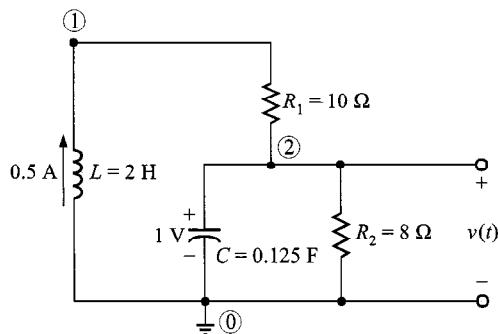


FIGURA 8.13 Circuito del ejemplo 8.3, redibujado para un análisis con PSPICE.

S O L U C I Ó N Con referencia a la figura 8.13, el programa PSPICE es

```
EXAMPLE 8.7 PLOT OF V(T) IN EXAMPLE 8.3
L 0 1 2 IC=0.5
R1 1 2 10
C 2 0 0.125 IC=1
R2 2 0 8
.TRAN 0.1 3 UIC
.PROBE
.END
```

Una gráfica del voltaje $v(t)$ se muestra en la figura 8.8.

E J E M P L O 8.8

Dada la red de la figura 8.14a, grafiquemos $v_o(t)$ e $i_o(t)$ para $t > 0$ sobre un intervalo de 10 segundos usando pasos de 100 ms.

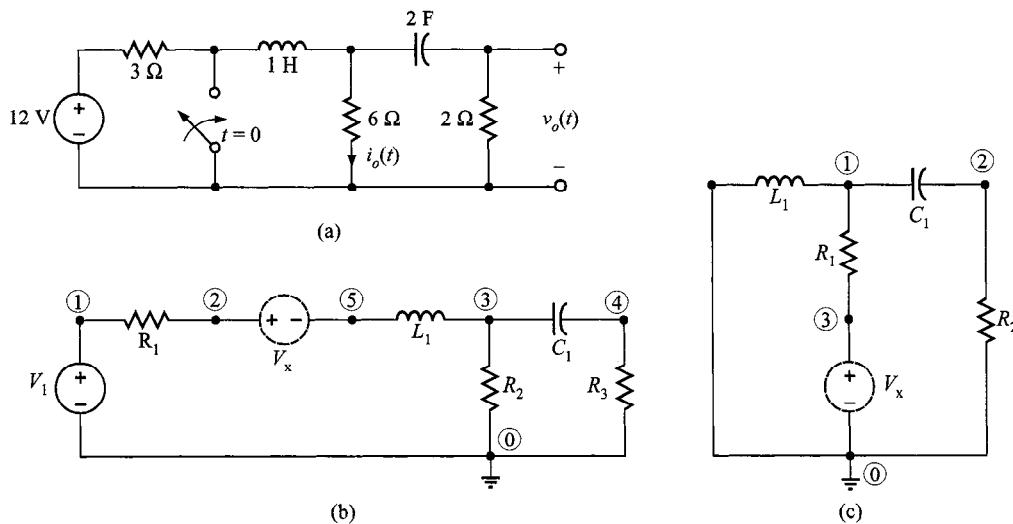


FIGURA 8.14 Redes usadas en el ejemplo 8.8.

SOLUCIÓN Las condiciones iniciales se derivan de la red de la figura 8.14b. El programa PSPICE para este circuito es

```

INITIAL NETWORK
V1    1    0    DC   12
VX    2    5    DC   0
R1    1    2    3
R2    3    0    6
R3    4    0    2
L1    5    3    1
C1    3    4    2
*USE DC ANALYSIS
.DC  V1 12 12 1
.PRINT DC I(VX) V(3) V(4)
.END

```

El PSPICE no da el voltaje entre los nodos 3 y 4. Sin embargo, $V(3)$ y $V(4)$ pueden usarse para determinar $V(3) - V(4) = 8$ V. $I(VX) = 1.33$ A. La red para $t > 0$ se muestra en la figura 8.14c. El programa para esta red es

```

FINAL NETWORK
R1    1    3    6
R2    2    0    2

```

```

L1 1 0 1 IC = 1.33A
C1 2 1 2 IC=8V
VX 3 0 DC 0
* USE TRANSIENT ANALYSIS
.TRAN .1 10 UIC
.PROBE
.END

```

Las gráficas para $v_o(t)$ e $i_o(t)$ se muestran en las figuras 8.15a y b, respectivamente.

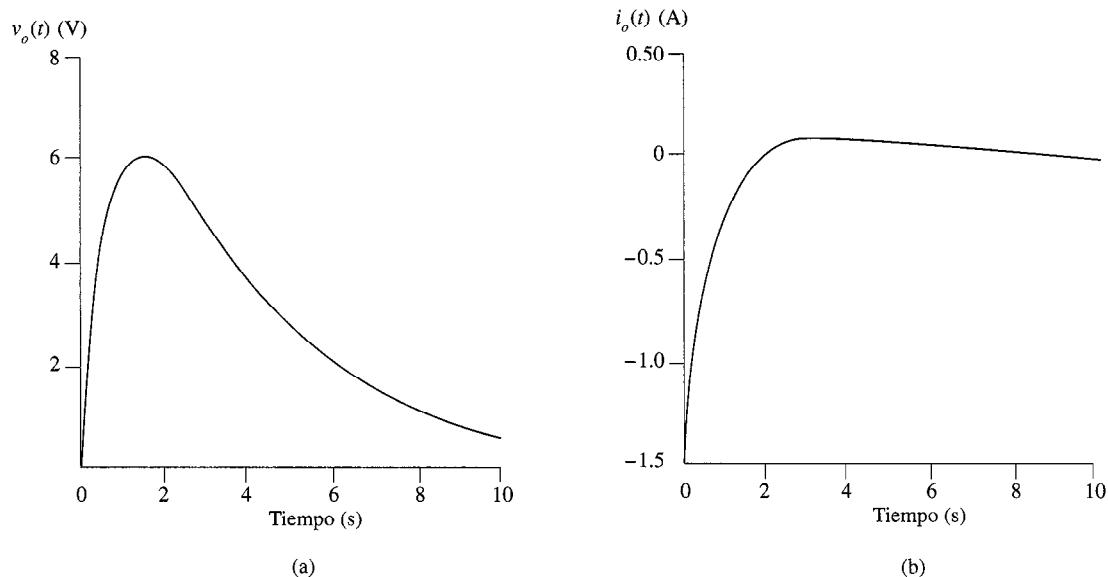


FIGURA 8.15 Gráficas de la salida para el ejemplo 8.8.

E J E M P L O 8.9

Considere la red que se muestra en la figura 8.16a. La red está marcada para un análisis con PSPICE, como se muestra en la figura 8.16b. Deseamos graficar el voltaje de salida $v_{\text{sal}}(t)$ para $t > 0$ para un intervalo de 10 segundos con muestreos de 100 ms.

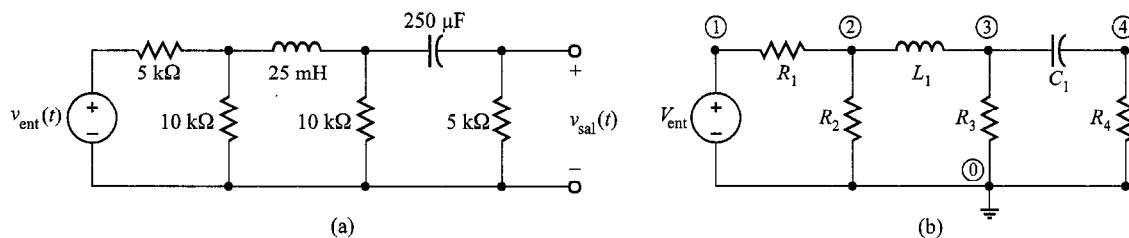


FIGURA 8.16 Circuitos usados en el ejemplo 8.9.

SOLUCIÓN Las cuatro entradas a la red son las siguientes:

1. El pulso se muestra en la figura 8.17a.
2. La función lineal por segmentos se muestra en la figura 8.17b.
3. La función exponencial está definida por la ecuación

$$v_{\text{ent}}(t) = 10(1 - e^{-t/4}) \text{ V} \quad 0 \leq t \leq 3 \text{ s}$$

$$= 10(1 - e^{-t/4}) - 10e^{-(t-3)} \text{ V} \quad 3 \text{ s} \leq t$$

4. La función senoidal está definida por la ecuación

$$v_{\text{ent}}(t) = 10e^{-0.5t} \text{ sen } 2\pi t \text{ V}$$

El programa para la red con la primera entrada es

```
PULSE INPUT
VIN 1 0 PWL (0 10 1 10 1.001 0 10 0)
R1 1 2 5K
R2 2 0 10K
R3 3 0 10K
R4 4 0 5K
C1 3 4 250UF IC=0
L1 2 3 25MH IC=0
* TRANSFER FUNCTIONS AND TRANSIENT ANALYSIS
.TF V(4) VIN
.TRAN .1 10 UIC
.PROBE
.END
```

Los voltajes de entrada y salida se muestran en la figura 8.18.

El comando de PSPICE para la segunda entrada es

```
VIN 1 0 PWL (0 0 2 10 4 10 4.001 0)
```

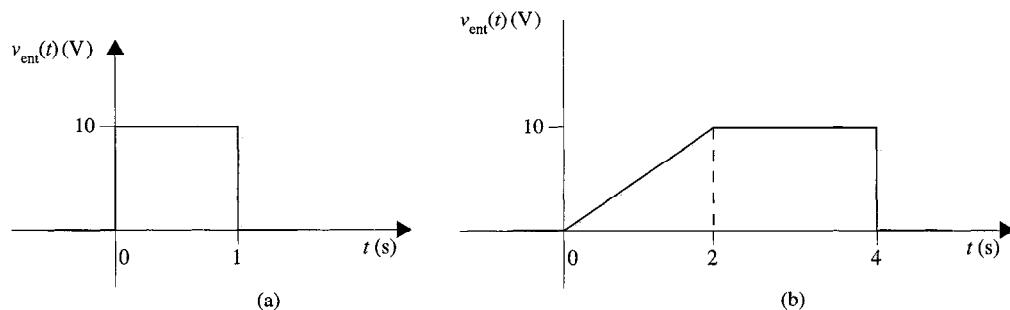


FIGURA 8.17 Entradas para el ejemplo 8.9.

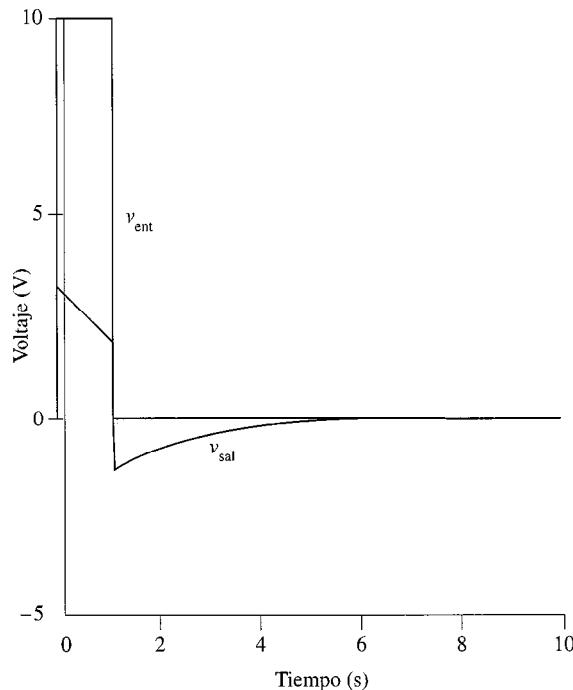


FIGURA 8.18 Gráficas de entrada y salida para la primera entrada del ejemplo 8.9.

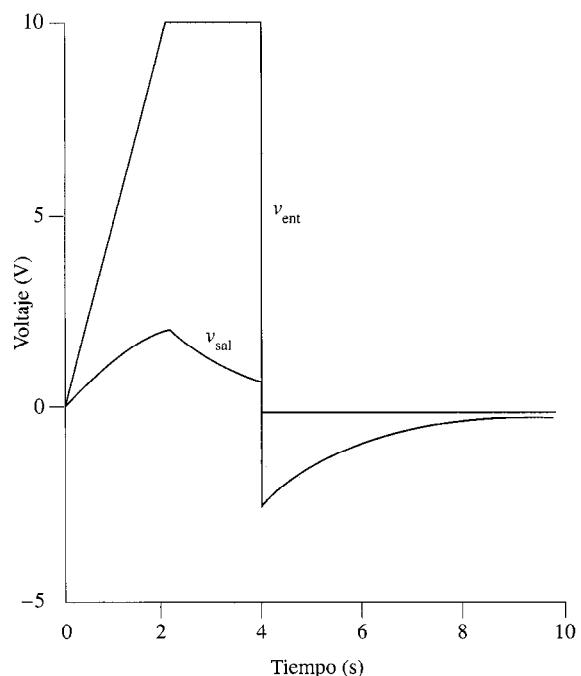


FIGURA 8.19 Gráficas de entrada y salida para la segunda entrada del ejemplo 8.9.

Si el comando del voltaje de entrada en el programa original se reemplaza con este comando, los voltajes de entrada y salida son como se muestra en la figura 8.19.

El comando de PSPICE para la tercera entrada es

```
VIN 1 0 EXP(0 10 0 4 3 1)
```

Si el comando del voltaje de entrada en el programa original se reemplaza con este comando para la fuente exponencial, los voltajes de entrada y salida son como se muestra en la figura 8.20.

El comando de PSPICE para la cuarta entrada es

```
VIN 1 0 SIN(0 10 1 0 .5)
```

Finalmente, si el comando del voltaje de entrada en el programa original se reemplaza con este comando para la fuente senoidal, los voltajes de entrada y salida son como se muestra en la figura 8.21.

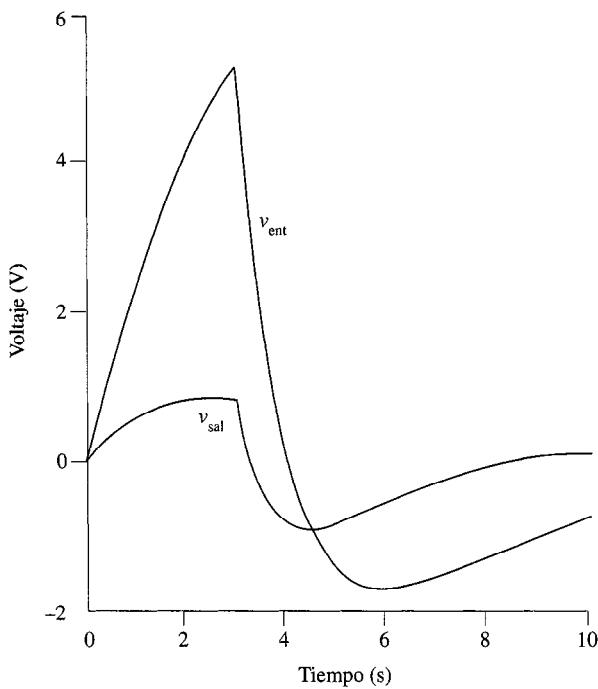


FIGURA 8.20 Gráficas de entrada y salida para la tercera entrada del ejemplo 8.9.

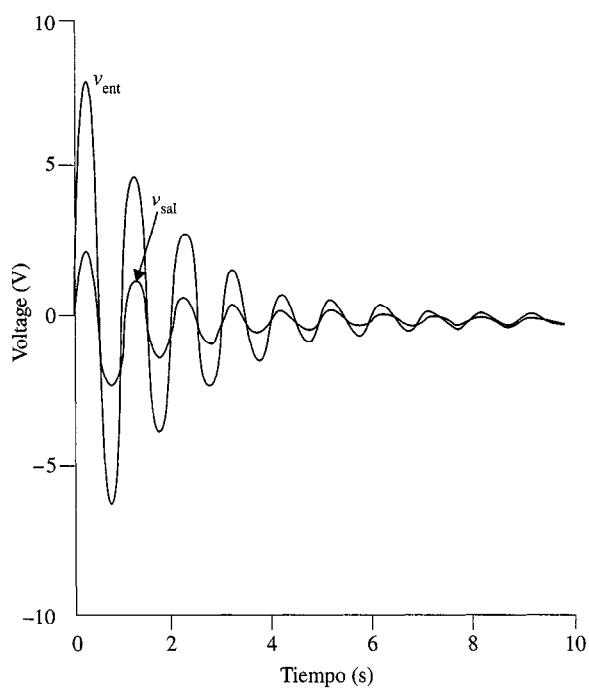


FIGURA 8.21 Gráficas de entrada y salida para la cuarta entrada del ejemplo 8.9.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D8.6 Para la red de la figura D8.6, use el PSPICE para graficar la respuesta transitoria de $i(t)$ de 0 a 0.5 segundos en incrementos de 10 ms.

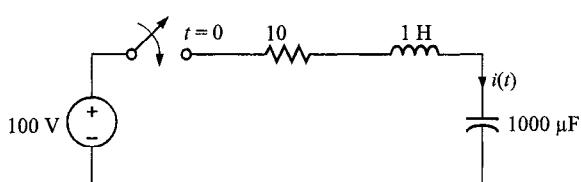
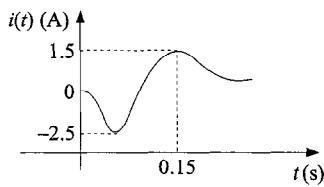


FIGURA D8.6

Resp.:



D8.7 Dada la red de la figura D8.7a, use el PSPICE para graficar $v_o(t)$, $0 \leq t \leq 10$ segundos, usando muestreos de 100 ms si la entrada está dada en la figura D8.7b.

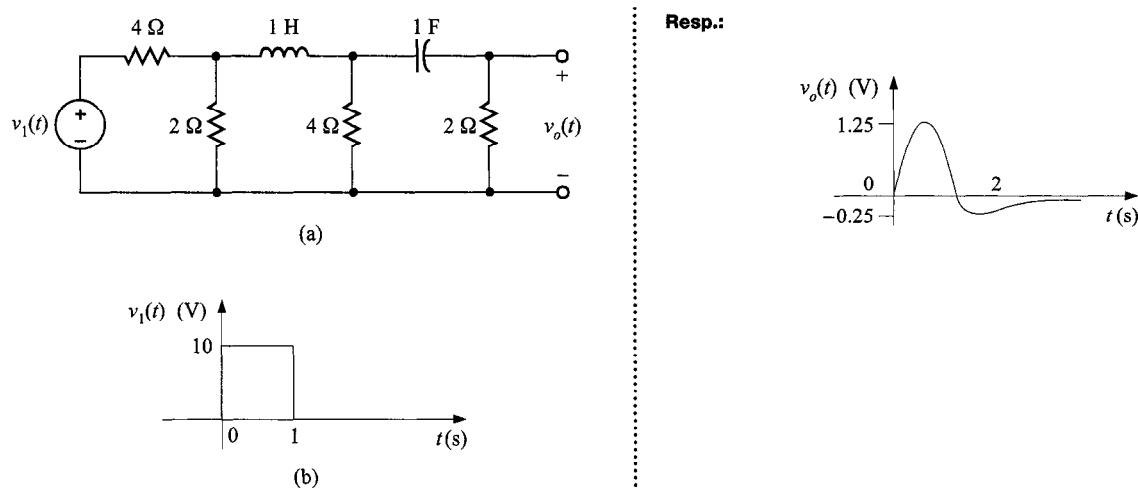


FIGURA D8.7

8.5 Aplicaciones

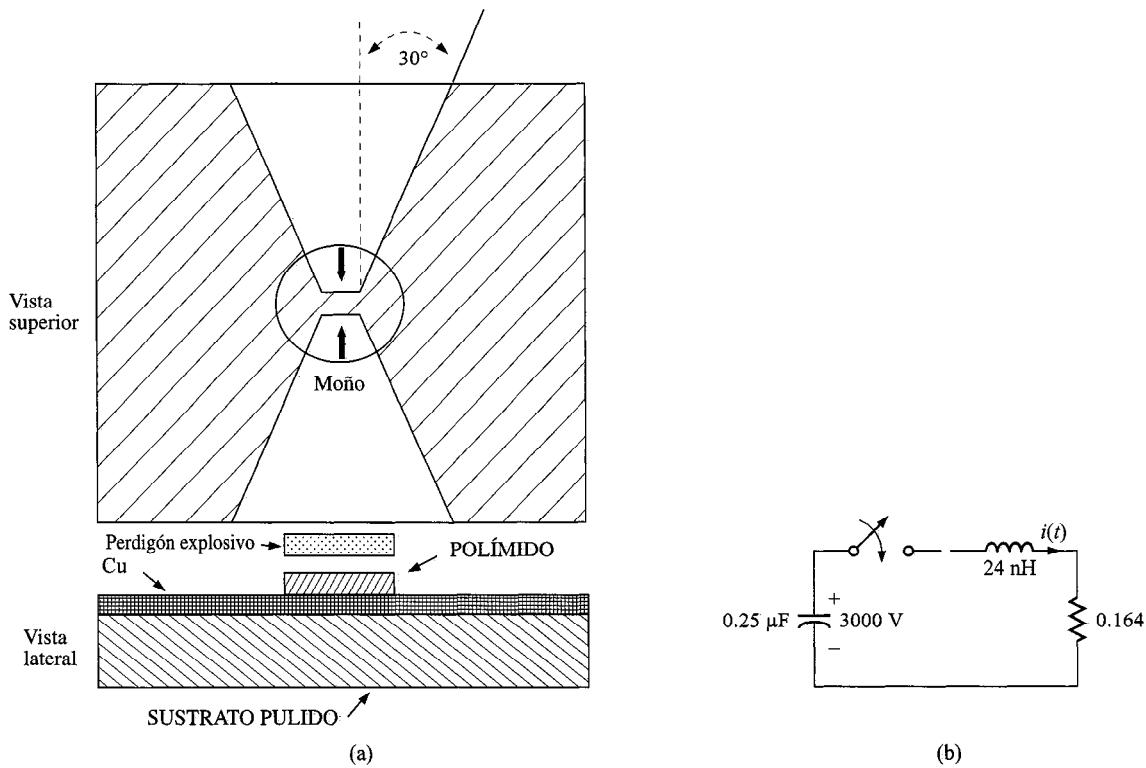
Aunque hay una amplia variedad de aplicaciones prácticas para los circuitos *RLC*, aquí concentraremos nuestra atención en una clase particular de circuitos en la que la potencia es suministrada a la red mediante un capacitor de descarga.

E J E M P L O 8.10

Describamos el uso de un capacitor de descarga, que se conoce como detonador *slapper*.

SOLUCIÓN Un dispositivo conocido como unidad de descarga capacitiva (CDU, por sus siglas en inglés de capacitive discharge unit) se diseña para producir potencia muy alta (por ejemplo, megawatts en un tiempo muy corto, tal como nanosegundos). Una aplicación práctica del CDU es su uso como lo que se llama detonador slapper. El slapper se muestra en la figura 8.22a y consiste en una sustancia aislante pulida, la cual es cubierta selectivamente con cobre en la forma de un *moño* o *corbata de lazo*. Sobre el centro del moño se coloca un material polímero llamado *bólido*. El dispositivo se posiciona cerca de un perdigón explosivo, como se muestra en la figura 8.22a. Cuando una corriente grande se descarga a través del moño, la hoja se calienta tan rápido que explota y la presión producida por la presión impulsa la delgada pieza de polímero hacia arriba a velocidades de 3 a 7 km/segundo. Cuando el bólido se impacta con el perdigón explosivo, la energía cinética del bólido se difunde al perdigón y resulta una detonación.

El CDU se modela como se muestra en la figura 8.22b. La resistencia representa la región central del moño, la bobina representa la inductancia en

**FIGURA 8.22** Detonador slapper y su circuito equivalente.

en el circuito, el interruptor es típicamente una chispa, y el capacitor cargado es la fuente de energía. Los valores típicos de los componentes se muestran en la figura. Una gráfica de la corriente como función del tiempo que sigue al cierre del conmutador se muestra en la figura 8.23. Un valor aproximado de la potencia promedio entregada por el dispositivo puede obtenerse dividiendo la energía total almacenada en el condensador entre el tiempo total de la descarga. La energía total almacenada en el capacitor es aproximadamente un joule y, como se muestra en la figura 8.23, esta energía es descargada en alrededor de 1 microsegundo y $1\text{J}/1\mu\text{s}$ es un megawatt.

E J E M P L O 8.11

Un esquema experimental para un disparador de riel se muestra en la figura 8.24. Con el interruptor sw-2 abierto, el interruptor sw-1 está cerrado y el suministro de potencia carga el banco de los capacitores a 10 kV. Entonces el interruptor sw-1 se abre. El disparador de riel se dispara cerrando el conmutador sw-2. Cuando el capacitor se descarga, la corriente hace que la hoja al final del disparador explote, creando un plasma caliente que se acelera hacia la parte inferior del tubo. La caída de voltaje al vaporizarse la hoja es insignificante y por tanto más del 95% de la energía permanece disponible para acelerar el plasma. El flujo de corriente establece un campo

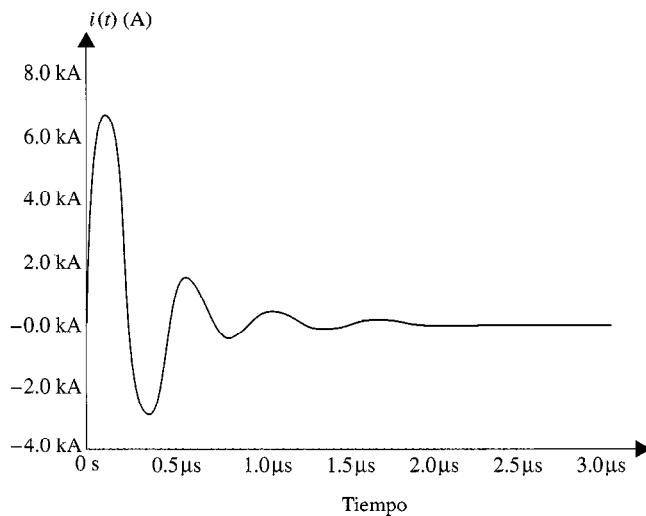


FIGURA 8.23 Corriente del detonador como función del tiempo.

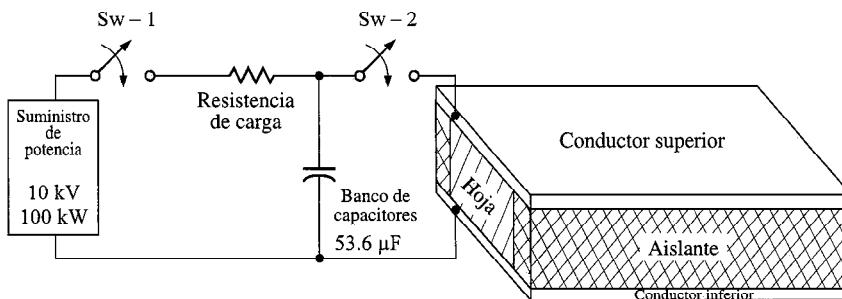


FIGURA 8.24 Esquema experimental para un disparador de riel.

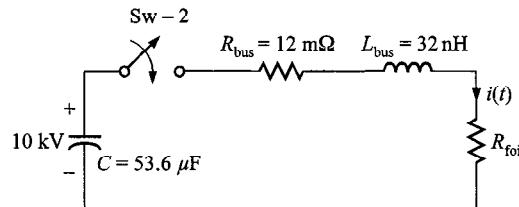
magnético y la fuerza sobre el plasma causada por el campo magnético, que es proporcional al cuadrado de la corriente en cualquier instante de tiempo, acelera el plasma. Cuanto más alto sea el voltaje inicial, más grande es la aceleración.

El diagrama del circuito para el circuito de descarga se muestra en la figura 8.25. La resistencia de la línea (un conductor pesado) incluye la resistencia del interruptor. La resistencia de la hoja y del plasma resultante es insignificante, y, por tanto, la corriente que fluye entre el conductor superior y el inferior depende de los componentes restantes del circuito en la trayectoria cerrada que se especifica en la figura 8.24.

La ecuación diferencial para la respuesta natural de la corriente es

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R_{bus}}{L_{bus}} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{L_{bus}C} = 0$$

Utilicemos la ecuación característica para describir la forma de onda de la corriente.

**FIGURA 8.25** Circuito de descarga del disparador de riel.

S O L U C I Ó N Usando los valores del circuito, la ecuación característica es

$$s^2 + 37.5 \times 10^4 s + 58.3 \times 10^{10} = 0$$

y las raíces de la ecuación son

$$s_1, s_2 = (-18.75 \pm j74) \times 10^4$$

y por tanto, la red está subamortiguada.

Las raíces de la ecuación característica ilustran que la frecuencia resonante amortiguada es

$$\omega_d = 740 \text{ krad/s}$$

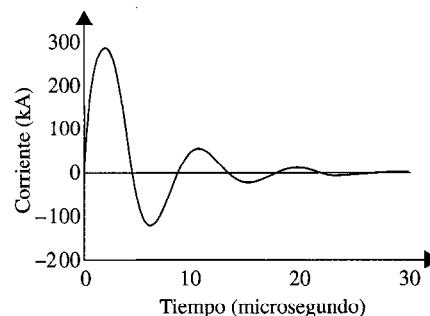
Por tanto,

$$f_d = 118 \text{ kHz}$$

y el periodo de la onda es

$$T = \frac{1}{f_d} = 8.5 \mu\text{s}$$

Una gráfica real de la corriente se muestra en la figura 8.26, y esta gráfica verifica que el periodo de la respuesta amortiguada es realmente 8.5 μs.

**FIGURA 8.26** Corriente de carga con el banco de capacitores cargado a 10 kV.

Dos aplicaciones adicionales para el CDU son las bolsas de aire de los automóviles y los cerrojos explosivos utilizados por la NASA para proporcionar separaciones de etapas seguras en un cohete multietapa.

En la aplicación de la bolsa de aire, un alambre delgado se solda entre dos puntas. El alambre está rodeado por una mezcla pirotécnica. En el impacto, una corriente pasa a través del alambre vía las puntas. Cuando el alambre se calienta lo suficiente para encender la mezcla, un gran volumen de gas frío se produce y la bolsa se expande.

La NASA emplea un número de cerrojos, que están eléctricamente aislados del cohete, para proporcionar el soporte mecánico necesario para mantener dos etapas unidas. Cada cerrojo es la carga resistiva en un CDU. Al tiempo de la separación, una señal común de control de fuego se manda a los commutadores en el CDU y la energía en el capacitor se descarga a través del cerrojo, haciendo que éste se vaporice. Todos los cerrojos explotan de forma simultánea y ocurre la separación de la etapa. Claramente, todos los cerrojos deben soltarse simultáneamente para evitar un accidente catastrófico.

8.6 Diseño de circuitos

Los siguientes ejemplos proporcionan una introducción a algunas estrategias de diseño típicas para circuitos de segundo orden. En esos ejemplos, el problema incluye la selección de los parámetros apropiados del circuito para alcanzar una respuesta transitoria específica.

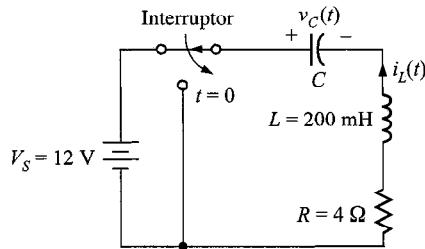
EJEMPLO 8.12

La red de la figura 8.27 modela un sistema de encendido de automóvil. La fuente de voltaje representa la batería estándar de 12 V. La bobina es la bobina de encendido que está acoplada magnéticamente al encendido (no se muestra). La resistencia interna de la bobina se modela mediante la resistencia y el interruptor es el interruptor encendido con llave. Inicialmente el interruptor conecta la circuitería de encendido a la batería, y así se carga el interruptor a 12 V. Para arrancar el motor cerramos el interruptor, descargando con eso el interruptor a través de la bobina. Suponiendo que una operación óptima de arranque requiere una respuesta sobreamortiguada para $i_L(t)$ que alcanza al menos 1 A en 100 ms después de la conexión, y permanece arriba de 1 A entre 1 y 1.5 s, encontraremos un valor para el interruptor que produzca tal forma de onda de la corriente. Además, grafiquemos la respuesta incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de conectar el interruptor y verifiquemos nuestro diseño.

SOLUCIÓN Antes de que el interruptor se mueva en $t = 0$, el interruptor se ve como un circuito abierto y la bobina actúa como un corto circuito. Así,

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0 \text{ A} \quad \text{y} \quad v_C(0^-) = v_C(0^+) = 12 \text{ V}$$

Después de la conexión, el circuito es una red *RLC* no forzada descrita por la ecuación característica

**FIGURA 8.27** Modelo de circuito para un sistema de encendido.

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

Con raíces en $s = -s_1$ y $-s_2$. La ecuación característica es de la forma

$$(s + s_1)(s + s_2) = s^2 + (s_1 + s_2)s + s_1s_2 = 0$$

Comparando las dos expresiones, vemos que

$$\frac{R}{L} = s_1 + s_2 = 20$$

y

$$\frac{1}{LC} = s_1s_2$$

Como la red debe ser sobreamortiguada, la corriente de la bobina es de la forma

$$i_L(t) = K_1 e^{-s_1 t} + K_2 e^{-s_2 t}$$

Justo después de la conexión,

$$i_L(0^+) = K_1 + K_2 = 0$$

o

$$K_2 = -K_1$$

También, en $t = 0^+$, el voltaje de la bobina es igual al voltaje del capacitor debido a que $i_L = 0$ y por tanto $i_L R = 0$. Así, podemos escribir

$$v_L(0^+) = L \frac{di_L(0^+)}{dt} \Rightarrow -s_1 K_1 + s_2 K_1 = \frac{12}{L}$$

o

$$K_1 = \frac{60}{s_2 - s_1}$$

En este punto, elijamos arbitrariamente $s_1 = 3$ y $s_2 = 17$, que satisface la condición $s_1 + s_2 = 20$, y además,

$$K_1 = \frac{60}{s_2 - s_1} = \frac{60}{14} = 4.29$$

$$C = \frac{1}{Ls_1s_2} = \frac{1}{(0.2)(3)(17)} = 98 \text{ mF}$$

y de aquí, $i_L(t)$ es

$$i_L(t) = 4.29[e^{-3t} - e^{-17t}] \text{ A}$$

La figura 8.28a muestra una gráfica de $i_L(t)$. En 100 ms la corriente se ha incrementado a 2.39 A, que cumple las especificaciones de magnitud inicial. Sin embargo, un segundo después, en $t = 1.1$ segundos, $i_L(t)$ ha caído a sólo 0.16 A —muy por abajo del requerimiento de magnitud sobre el tiempo—. Puesto de manera simple, la corriente cae demasiado rápido. A fin de hacer una estimación al corriente para s_1 y s_2 , investiguemos el efecto que las raíces exhiben sobre la forma de onda de la corriente cuando $s_2 > s_1$.

Como $s_2 > s_1$, la exponencial asociada con s_2 caerá a 0 más rápido que la asociada con s_1 . Esto hace que $i_L(t)$ se eleve —entre más grande sea el valor de s_2 , más rápida la elevación—. Después de que han pasado $5(1/s_2)$ segundos, la exponencial asociada con s_2 es aproximadamente 0 e $i_L(t)$ decrece exponencialmente con una constante de tiempo $\tau = 1/s_1$. Así, para frenar la caída de $i_L(t)$ debemos reducir s_1 . Por tanto, elijamos $s_1 = 1$. Como $s_1 + s_2$ debe ser igual a 20, $s_2 = 19$. En estas condiciones

$$C = \frac{1}{Ls_1s_2} = \frac{1}{(0.2)(1)(19)} = 263 \text{ mF}$$

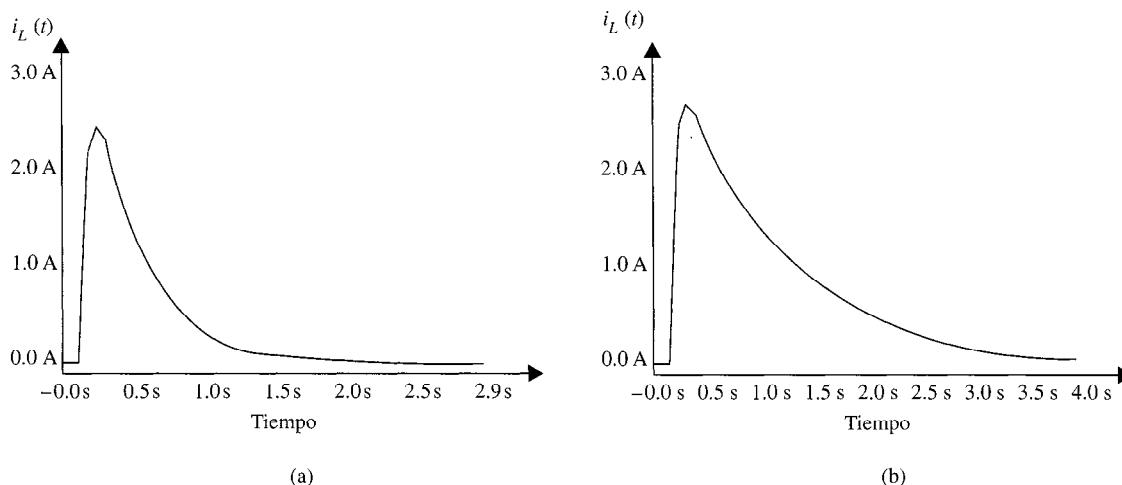


FIGURA 8.28 Corriente de encendido como función del tiempo.

y

$$K_1 = \frac{60}{s_2 - s_1} = \frac{60}{18} = 3.33$$

Así, la corriente es

$$i_L(t) = 3.33[e^{-t} - e^{-19t}]A$$

la cual se muestra en la figura 8.28b. A 100 ms la corriente es 2.52 A. También, a $t = 1.1$ segundos, la corriente es 1.11 A —arriba del requerimiento de 1 A—. Por tanto, la elección de $C = 263$ mF cumple todas las especificaciones del encendido.

E J E M P L O 8.13

Desfibrilador es un dispositivo que se usa para detener las fibrilaciones del corazón —temblor errático no coordinado de las fibras musculares del corazón— mediante la descarga de un choque eléctrico al corazón. El desfibrilador de Lown fue desarrollado por el doctor Bernard Lown en 1962. Su característica clave, que se muestra en la figura 8.29a, es su forma de onda del voltaje. Un diagrama simplificado del circuito que es capaz de producir la forma de onda de Lown se muestra en la figura 8.29b. Encontremos los valores necesarios para la bobina y el capacitor.

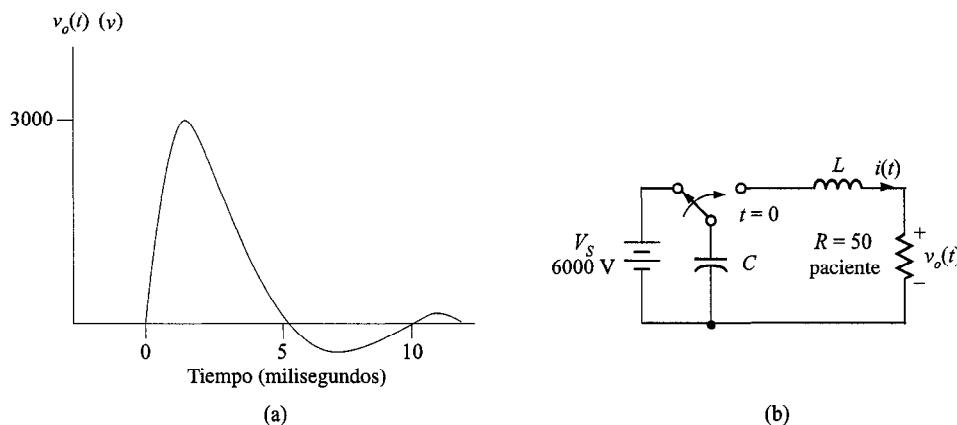


FIGURA 8.29 Forma de onda y circuito simplificado del desfibrilador de Lown. Reimpreso con permiso de J. Wiley & Sons Inc., *Introduction to Biomedical Equipment Technology*.

S O L U C I Ó N Como la forma de onda de Lown es oscilatoria por naturaleza, sabemos que el circuito es subamortiguado ($\zeta < 1$) y el voltaje aplicado al paciente es de la forma

$$v_o(t) = K_1 e^{-\zeta \omega_o t} \sin[\omega_o t]$$

donde

$$\zeta\omega_o = \frac{R}{2L}$$

$$\omega = \omega_o \sqrt{1 - \zeta^2}$$

y

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

para el circuito *RLC* en serie. En la figura 8.29a, vemos que el periodo de la función seno es

$$T = 10 \text{ ms}$$

Así, tenemos una expresión que incluye ω_o y ζ

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_o \sqrt{1 - \zeta^2} = 200\pi$$

Una segunda expresión puede obtenerse resolviendo para la razón de $v_o(t)$ en $t = T/4$ a la de $t = 3T/4$. En esos dos instantes la función seno es igual a +1 y -1, respectivamente. Utilizando los valores de la figura 8.29a, podemos escribir

$$\frac{v_o(T/4)}{-v_o(3T/4)} = \frac{K_1 e^{-\zeta\omega_o(T/4)}}{K_1 e^{-\zeta\omega_o(3T/4)}} = e^{\zeta\omega_o(T/2)} \approx \frac{3000}{250} = 12$$

o

$$\zeta\omega_o = 497.0$$

Dada $R = 50 \Omega$, el valor necesario de la bobina es

$$L = 50.3 \text{ mH}$$

Usando nuestra expresión para ω

$$\omega^2 = (200\pi)^2 = \omega_o^2 - (\zeta\omega_o)^2$$

o

$$(200\pi)^2 = \frac{1}{LC} - (497.0)^2$$

Resolviendo para el valor del capacitor, encontramos que

$$C = 31.0 \mu\text{F}$$

Verifiquemos nuestro diseño utilizando el PSPICE. El circuito del PSPICE se muestra en la figura 8.30a y el programa es

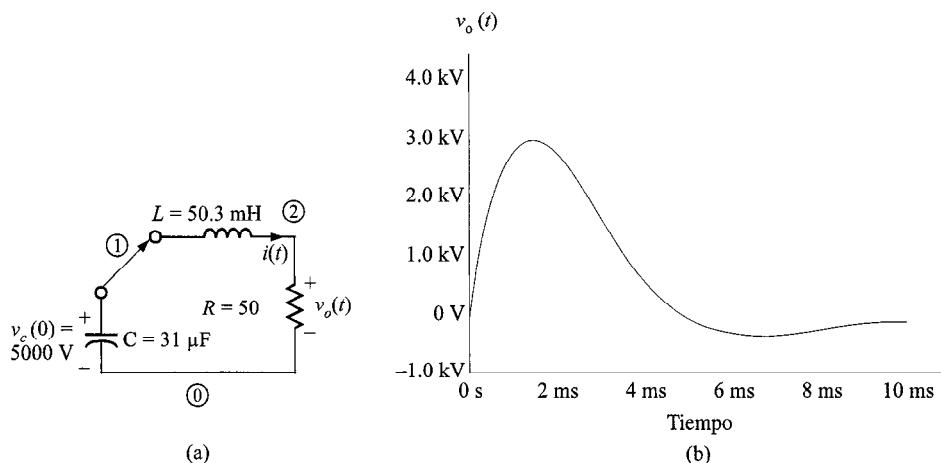


FIGURA 8.30 Circuito del PSPICE y gráfica de salida para el desfibrilador de Lown.

```
Example 8.13 Lown Defibrillator
C 1 0 31u ic=5000
L 1 2 50.3m
R1 2 0 50
.tran 0.1m 10m uic
.probe
.end
```

La gráfica del voltaje de salida que se muestra en la figura 8.30b está de acuerdo con la forma de onda de Lown en la figura 8.29a; así, podemos considerar que el diseño ha sido un éxito.

Es importante notar que mientras esta solución es viable, no es la única. Como en muchos problemas de diseño, hay con frecuencia varias formas de satisfacer las especificaciones de diseño.

8.7 Resumen

Hemos mostrado que el análisis de circuitos *RLC* conduce a una ecuación diferencial de segundo orden. Las raíces de la ecuación característica del circuito controlan el tipo de respuesta. Esas raíces son una función de la razón de amortiguamiento del circuito y de la frecuencia resonante no amortiguada. Si las raíces son reales y diferentes, la respuesta es sobreamortiguada; si las raíces son complejas conjugadas, la respuesta es subamortiguada; y si las raíces son reales e iguales, la respuesta es críticamente amortiguada.

Se presenta el análisis de PSPICE de circuitos *RLC*. Hemos mostrado que un análisis con PSPICE se lleva a cabo exactamente de la misma manera como se hizo en el capítulo 7; simplemente tenemos al capacitor y la bobina presentes en la red al mismo tiempo.

Finalmente, hemos presentado algunas aplicaciones de interés del uso de redes *RLC* y demostrado la importancia de esos parámetros en el diseño de circuitos.

Puntos clave

- La ecuación característica para un circuito *RLC* es $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$, donde α es el coeficiente de amortiguamiento y ω_0 es la frecuencia resonante no amortiguada.
- Las dos raíces de la ecuación característica para un circuito *RLC* son reales y diferentes si $\alpha > \omega_0$; y son reales e iguales si $\alpha = \omega_0$.
- La respuesta de un circuito *RLC* se dice que es sobreamortiguada si las raíces de la ecuación característica de la red son reales y diferentes, subamortiguada si aquéllas son números complejos, y críticamente amortiguada si son reales e iguales.
- El análisis del PSPICE de las redes que contienen una bobina y un condensador se lleva a cabo exactamente de la misma manera que se señaló en el capítulo 7.
- Muchas aplicaciones prácticas requieren el uso de circuitos que contienen condensadores y bobinas en el diseño de circuitos.

Problemas

8.1. La ecuación diferencial que describe la corriente $i_o(t)$ en una red es

$$\frac{d^2i_o(t)}{dt^2} + 6 \left[\frac{di_o(t)}{dt} \right] + 8i_o(t) = 0$$

Encuentre

- La ecuación característica de la red.
- Las frecuencias naturales de la red.
- La expresión para $i_o(t)$.

8.2. La corriente terminal en una red está descrita por la ecuación

$$\frac{d^2i_o(t)}{dt^2} + 10 \left[\frac{di_o(t)}{dt} \right] + 25i_o(t) = 0$$

Encuentre

- La ecuación característica de la red.
- Las frecuencias naturales de la red.
- La ecuación para $i_o(t)$.

8.3. El voltaje $v_1(t)$ en una red se define mediante la ecuación

$$\frac{d^2v_1(t)}{dt^2} + 2 \left[\frac{dv_1(t)}{dt} \right] + 5v_1(t) = 0$$

Encuentre

- La ecuación característica de la red.
- Las frecuencias naturales de la red.
- La expresión para $v_1(t)$.

8.4. EL voltaje de salida de un circuito está descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2v_o(t)}{dt^2} + 6 \left[\frac{dv_o(t)}{dt} \right] + 10v_o(t) = 0$$

Encuentre

- La ecuación característica del circuito.
- Las frecuencias naturales de la red.
- La ecuación para $v_o(t)$.

8.5. Los parámetros para un circuito *RLC* en paralelo son $R = 1 \Omega$, $L = \frac{1}{5} \text{ H}$ y $C = \frac{1}{40} \text{ F}$. Determine el tipo de amortiguamiento que exhibe el circuito.

8.6. Un circuito *RLC* en serie contiene una resistencia $R = 2 \Omega$ y un condensador $C = \frac{1}{8} \text{ F}$. Seleccione el valor de la bobina de manera que el circuito sea críticamente amortiguado.

8.7. Para el circuito subamortiguado que se muestra en la figura P8.7, determine el voltaje $v(t)$ si las condiciones iniciales de los elementos de almacenamiento son $i_L(0) = 1 \text{ A}$ y $v_C(0) = 10 \text{ V}$.

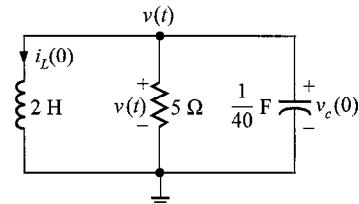


FIGURA P8.7

8.8. Dado el circuito y las condiciones iniciales del problema 8.7, determine la corriente a través de la bobina.

- 8.9.** En el circuito críticamente amortiguado que se muestra en la figura P8.9, las condiciones iniciales en los elementos de almacenamiento son $i_L(0) = 2 \text{ A}$ y $v_C(0) = 5 \text{ V}$. Determine el voltaje $v(t)$.

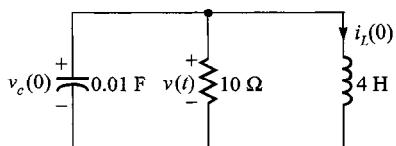


FIGURA P8.9

- 8.10.** Dado el circuito y las condiciones iniciales del problema 8.9, determine la corriente $i_L(t)$ que fluye a través de la bobina.

- 8.11.** Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P8.11 y grafique la respuesta, incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de mover el interruptor.

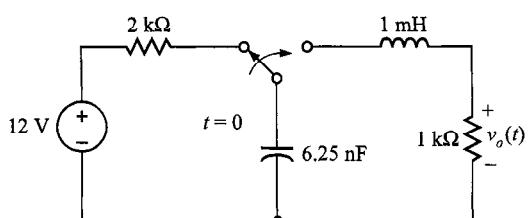


FIGURA P8.11

- 8.12.** Dado el circuito de la figura P8.12, encuentre la ecuación para $i(t)$, $t > 0$.

- 8.13.** Encuentre $i_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura

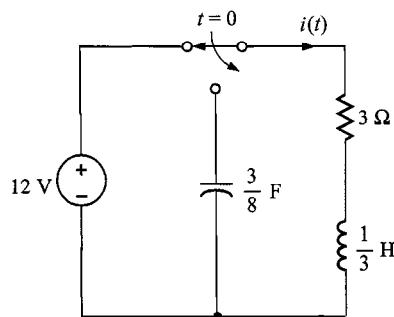


FIGURA P8.12

- P8.13 y grafique la respuesta, incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de abrir el interruptor.

- 8.14.** Encuentre $i_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P8.14 y grafique la respuesta, incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de cerrar el interruptor.

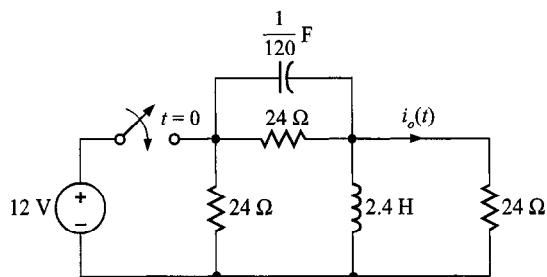


FIGURA P8.14

- 8.15.** Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura

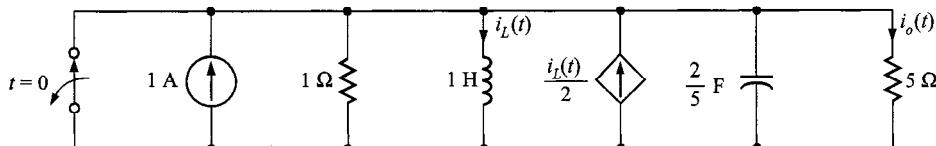


FIGURA P8.13

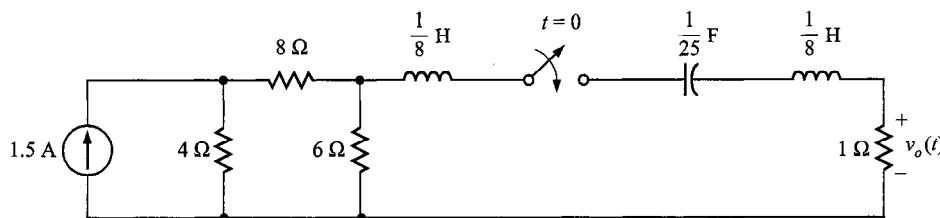


FIGURA P8.15

P8.15 y grafique la respuesta, incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de cerrar el interruptor.

8.16. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P8.16 y grafique la respuesta, incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de cerrar el interruptor.

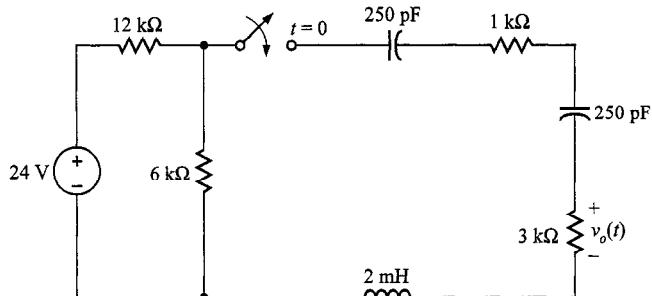


FIGURA P8.16

8.17. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P8.17 y grafique la respuesta, incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de cerrar el interruptor.

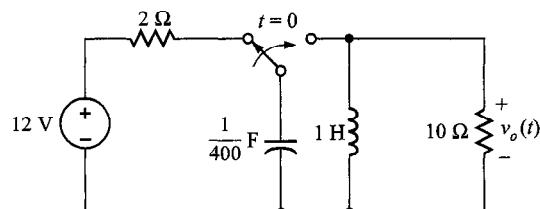


FIGURA P8.17

8.18. En el circuito que se muestra en la figura P8.18, encuentre $v(t)$, $t > 0$.

8.19. Para la red que se muestra en la figura P8.19, use PSPICE para graficar $v_o(t)$ en un intervalo de 10 segundos, comenzando en $t = 0$ y usando un muestreo de 100 ms.

8.20. En el circuito que se muestra en la figura P8.20, la acción del conmutador ocurre en $t = 0$. Determine el voltaje $v_o(t)$, $t > 0$.

8.21. Dada la red de la figura P8.21, use el PSPICE para grafi-

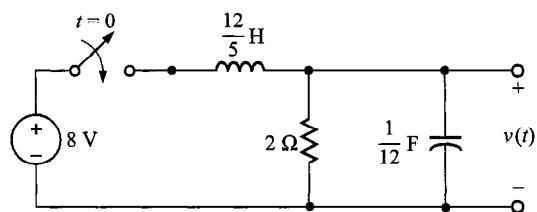


FIGURA P8.18

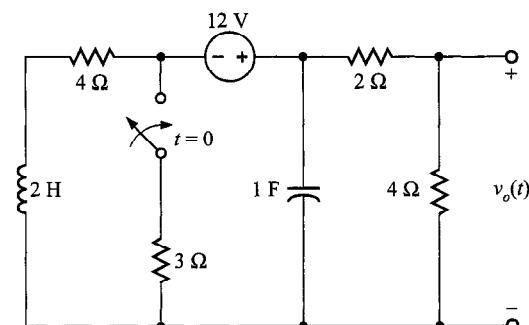


FIGURA P8.19

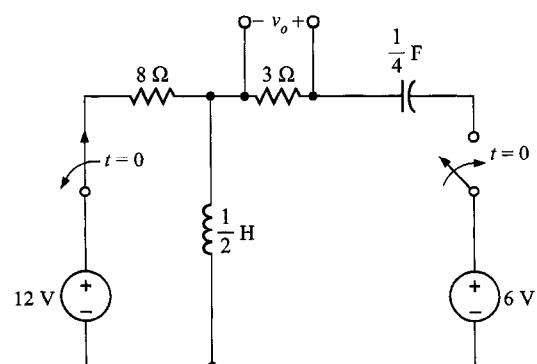


FIGURA P8.20

car $v_o(t)$ en un intervalo de 10 segundos iniciando en $t = 0$ y usando un muestreo de 100 ms.

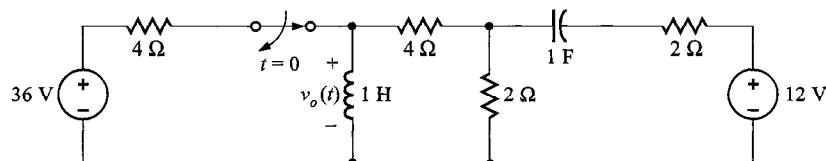


FIGURA P8.21

- 8.22.** Dada la red de la figura P8.22, use el PSPICE para graficar $v_o(t)$ en un intervalo de 10 segundos, comenzando en $t = 0$ y usando un muestreo de 100 ms.

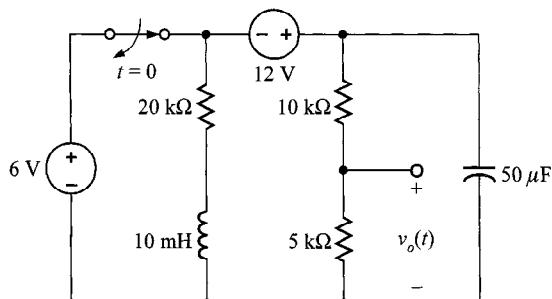


FIGURA P8.22

- 8.23.** Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P8.23 y grafique la respuesta, incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de mover el interruptor.

- 8.24.** Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P8.24 y grafique la respuesta, incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de mover el interruptor.

- 8.25.** Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P8.25 y grafique la respuesta, incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de mover el interruptor.

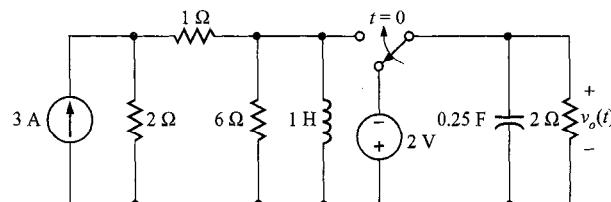


FIGURA P8.23

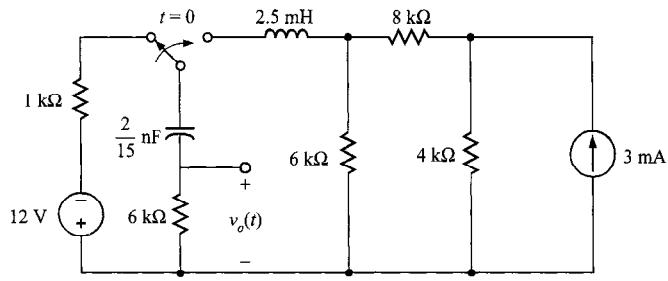


FIGURA P8.25

- 8.26.** Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura P8.26 y grafique la respuesta, incluyendo el intervalo de tiempo justo antes de $t = 0$.

- 8.27.** Dada la red de la figura P8.27, use el PSPICE para graficar $v_o(t)$ en un intervalo de 10 segundos, comenzando en $t = 0$ y usando un muestreo de 100 ms.

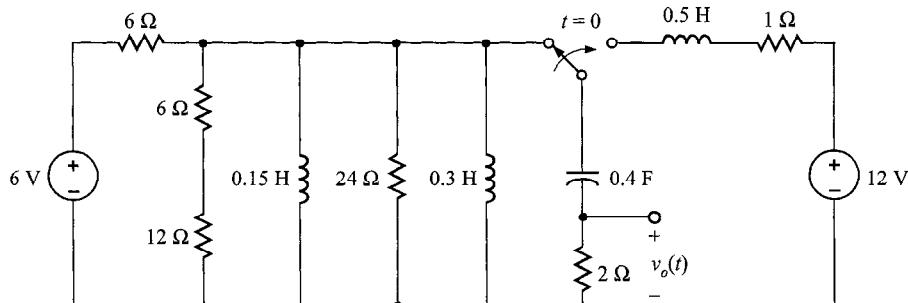


FIGURA P8.24

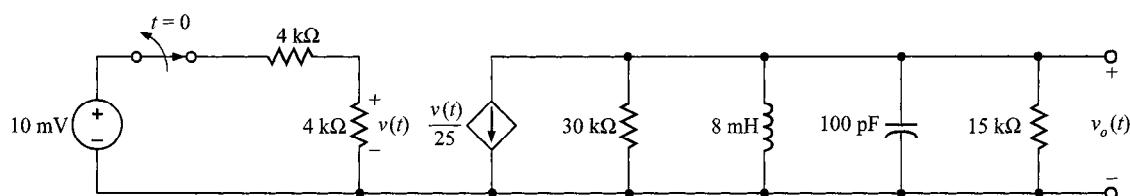


FIGURA P8.26

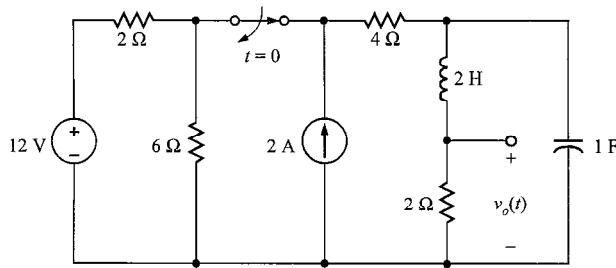
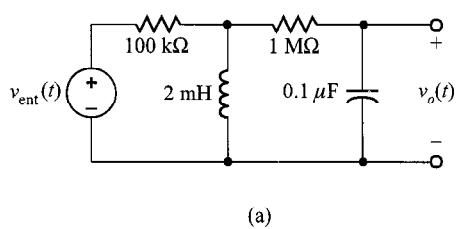


FIGURA P8.27

- 8.28.** Dada la red de la figura P8.28a y el voltaje de entrada que se muestra en la figura P8.28b, use el PSPICE para graficar el voltaje $v_o(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 4$ s, usando un muestreo de 20 ms.



(a)

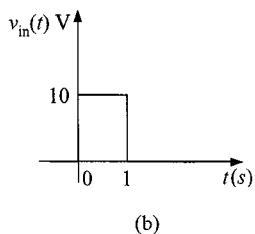


FIGURA P8.28

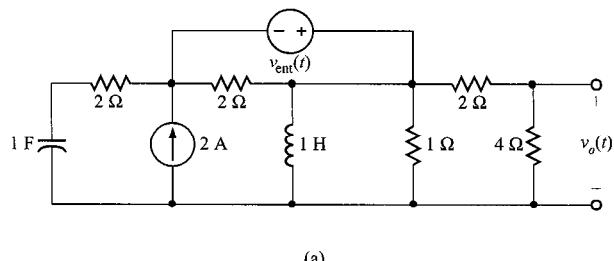
- 8.29.** Dada la red de la figura P8.29a y el voltaje de entrada que se muestra en la figura P8.29b, grafique $v_o(t)$ usando el PSPICE en el intervalo $0 \leq t \leq 10$ segundos, usando un muestreo de 100 ms.

- 8.30.** Dada la red de la figura P8.30 y la entrada

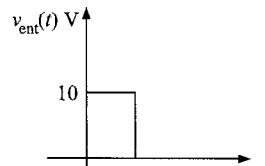
$$\begin{aligned} v_s(t) &= 10(1 - e^{-t/4}) \text{ V} & 0 \leq t \leq 3 \text{ s} \\ &= 10(1 - e^{-t/4}) - 10e^{-(t-3)} \text{ V} & 3 \text{ s} < t \end{aligned}$$

grafique el voltaje $v_o(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 10$ s usando el PSPICE, con un paso de 50 ms.

- 8.31.** Dada la red de la figura P8.31a y la entrada de la figura P8.31b, usando el PSPICE grafique $v_o(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 4$ s, usando un paso de 20 ms.



(a)



(b)

FIGURA P8.29

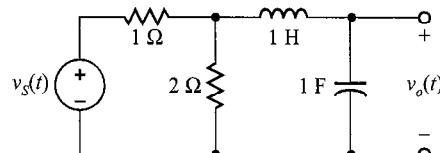
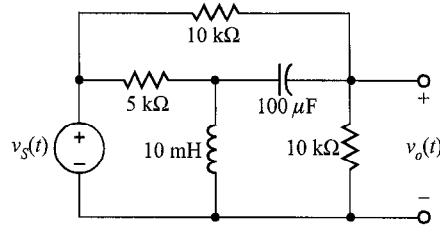
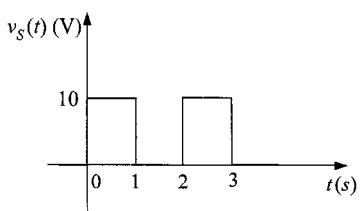


FIGURA P8.30



(a)



(b)

FIGURA P8.31

- 8.32. Repita el problema 8.31 si el voltaje de entrada es

$$v_s(t) = 10(1 - e^{-t/2})V \quad 0 \leq t \leq 3 \text{ s}$$

$$= 10(1 - e^{-t/2}) - 10e^{-(t-3)/4}V \quad 3 \text{ s} < t$$

Use un muestreo de 30 ms en el intervalo de $0 \leq t \leq 6$ s.

- 8.33. Para la red de la figura P8.33 elija C y L tales que para

$t > 0$, la ecuación característica es

$$s^2 + 7 \times 10^5 s + 10^{10} = 0$$

- 8.34. Diseñe un circuito RCL en serie con $R \geq 1 \text{ k}\Omega$, que tenga la ecuación característica

$$s^2 + 4 \times 10^7 s + 4 \times 10^{14} = 0$$

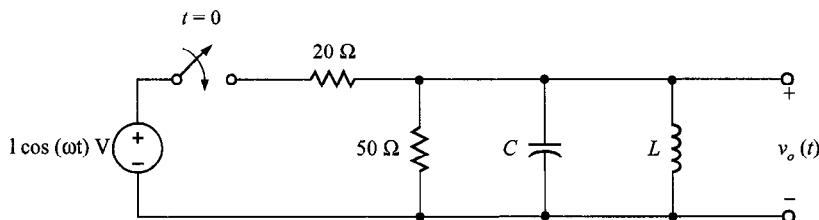


FIGURA P8.33

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

- 9.1** Senoidales
- 9.2** Funciones forzantes senoidales y complejas
- 9.3** Fasores
- 9.4** Relaciones fasoriales para elementos de circuito
- 9.5** Impedancia y admitancia
- 9.6** Diagramas fasoriales
- 9.7** Análisis básico utilizando las leyes de Kirchhoff
- 9.8** Técnicas de análisis
- 9.9** Técnicas de análisis con PSPICE
- 9.10** Resumen
- Puntos clave
- Problemas

CAPÍTULO 9**ANÁLISIS de CA
en ESTADO
ESTABLE**

En los capítulos anteriores hemos considerado con algún detalle la respuesta natural y forzada de una red. Encontramos que la respuesta natural era una característica de la red e independiente de la función forzante. La respuesta forzada, sin embargo, depende directamente del tipo de función forzante, que por lo general ha sido una constante hasta ahora. En este punto suspendemos esta tarea para considerar algo de veras muy emocionante: la *función forzante senoidal*. La naturaleza está repleta de ejemplos de fenómenos senoidales. Esto es importante para nosotros a medida que examinemos diferentes tipos de sistemas físicos; no obstante, hay una razón digna de tenerse en cuenta para estudiar esta función forzante: la forma de onda dominante en la industria de potencia eléctrica. La señal presente en los tomacorrientes de ca en nuestra casa, oficina, laboratorio, etc., es senoidal. Además, demostraremos en el capítulo 17 que con el análisis de

Fourier podemos representar cualquier señal periódica mediante una suma de senoidales.

En este capítulo nos concentraremos en la respuesta forzada de estado estable de redes con funciones impulsoras senoidales. Ignoraremos las condiciones iniciales y la respuesta transitoria o natural, que finalmente desaparece en el tipo de circuitos que trataremos. Nos referimos a esto como un *análisis de ca en estado estable*.

Nuestro método comenzará estudiando las características de una función senoidal como preludio a su uso como función forzante para un circuito. Relacionaremos matemáticamente esta función forzante senoidal con una función forzante compleja, que nos conducirá a definir un fasor. Empleando fasores transformamos efectivamente un conjunto de ecuaciones diferenciales con funciones forzantes senoidales en el dominio del tiempo en un conjunto de ecuaciones algebraicas que contienen números complejos en el dominio de frecuencias. Mos-

traremos que, en este dominio de frecuencias, las leyes de Kirchhoff son válidas y, por tanto, todas las técnicas de análisis que hemos aprendido para el análisis de cd

se aplican en el análisis de ca de estado estable. Finalmente, demostraremos la potencia de PSPICE en la solución de circuitos de ca en estado estable. ■

9.1 Senoidales

Comencemos nuestra discusión de funciones senoidales considerando la onda senoidal

$$x(\omega t) = X_M \operatorname{sen} \omega t \quad (9.1)$$

donde $x(t)$ puede representar $v(t)$ o $i(t)$. X_M es la *amplitud* o *valor máximo*, ω es el *radian* o *frecuencia angular* y ωt es el *argumento* de la función seno. Una gráfica de la función en la ecuación (9.1) como función de su argumento se muestra en la figura 9.1a. Obviamente, la función se repite cada 2π radianes. Esta condición se describe matemáticamente como $x(\omega t + 2\pi) = x(\omega t)$ o, en general, para el periodo T como

$$x[\omega(t + T)] = x(\omega t) \quad (9.2)$$

lo que quiere decir que la función tiene el mismo valor en el tiempo $t + T$ que el que tiene en el tiempo t .

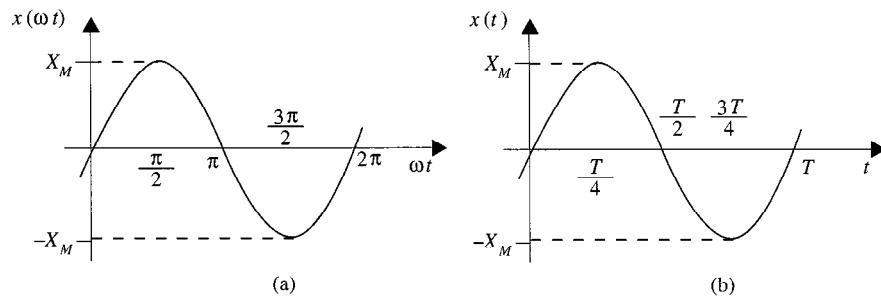


FIGURA 9.1 Gráficas de una onda senoidal como función de ωt y t .

La forma de onda también puede graficarse como función del tiempo, como se muestra en la figura 9.1b. Advierta que esta función recorre un periodo cada T segundos; en otras palabras, en 1 segundo recorre $1/T$ períodos o ciclos. El número de ciclos por segundo, llamado hertz, es la frecuencia f , donde

$$f = \frac{1}{T} \quad (9.3)$$

Ahora, como $\omega T = 2\pi$ como se muestra en la figura 9.1a, encontramos que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (9.4)$$

que por supuesto es la relación general entre el periodo en segundos, la frecuencia en hertz y frecuencia en radianes.

Ahora que hemos analizado algunas de las propiedades básicas de una onda seno, consideremos la siguiente expresión general para una función senoidal:

$$x(t) = X_M \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \quad (9.5)$$

En este caso $(\omega t + \theta)$ es el argumento de la función seno, y θ se llama *ángulo de fase*. Una gráfica de esta función se muestra en la figura 9.2, junto con la función original en la ecuación (9.1) para su comparación. Debido a la presencia del ángulo de fase, cualquier punto en la forma de onda $X_M \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ ocurre θ radianes antes que el punto correspondiente en la forma de onda $X_M \operatorname{sen}\omega t$. Por tanto, decimos que $X_M \operatorname{sen}\omega t$ se retrasa de $X_M \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ en θ radianes. En la situación más general, si

$$x_1(t) = X_{M_1} \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$

y

$$x_2(t) = X_{M_2} \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

entonces $x_1(t)$ adelanta a $x_2(t)$ en $\theta - \phi$ radianes y $x_2(t)$ se retrasa de $x_1(t)$ en $\theta - \phi$ radianes. Si $\theta = \phi$, las formas de onda son idénticas y se dice que las funciones están *en fase*. Si $\theta \neq \phi$, las funciones están *fueras de fase*.

El ángulo de fase normalmente se expresa en grados más que en radianes, y, por tanto, simplemente establecemos en este punto que usaremos las dos formas de manera indistinta, es decir,

$$x(t) = X_M \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = X_M \operatorname{sen}(\omega t + 90^\circ) \quad (9.6)$$

Rigurosamente hablando, como ωt está en radianes, el ángulo de fase también lo debe estar. Sin embargo, es una práctica común y conveniente usar grados para la fase, y, por consiguiente, será la práctica en este texto.

Además, se debe notar que agregar al argumento múltiplos enteros de 2π radianes o 360° no cambia la función original. Esto puede mostrarse con facilidad matemáticamente, pero es visiblemente evidente cuando se examina la forma de onda, como se muestra en la figura 9.2.

Aunque nuestro análisis se ha centrado alrededor de la función seno, pudimos haber usado fácilmente la función coseno, ya que las dos formas de onda difieren sólo por un ángulo de fase; es decir,

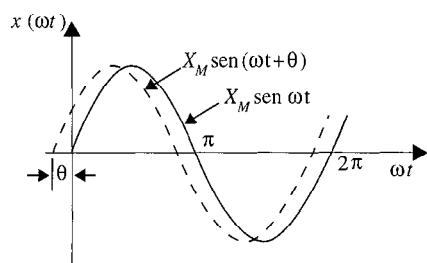


FIGURA 9.2 Ilustración gráfica de $X_M \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ adelantando a $X_M \operatorname{sen}\omega t$ por θ radianes.

$$\cos \omega t = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (9.7)$$

$$\sin \omega t = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (9.8)$$

Se debe notar que cuando se compara una función senoidal con otra *de la misma frecuencia* para determinar la diferencia de fase, es necesario expresar ambas funciones como senos o cosenos con amplitudes positivas. Una vez en este formato, el ángulo de fase entre las funciones puede calcularse como previamente se señaló. Otras dos identidades trigonométricas que normalmente prueban su utilidad en la determinación del ángulo de fase son

$$-\cos(\omega t) = \cos(\omega t \pm 180^\circ) \quad (9.9)$$

$$-\sin(\omega t) = \sin(\omega t \pm 180^\circ) \quad (9.10)$$

Finalmente, las relaciones de suma y resta de ángulos para senos y cosenos puede ser útil para la manipulación de funciones senoidales.

Esas relaciones son

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (9.11)$$

Nuestro interés en esas relaciones girará en torno a los casos donde $\alpha = \omega t$ y $\beta = \theta$. Como θ es una constante, las ecuaciones anteriores indican que una función senoidal o cosenoidal con un ángulo de fase puede escribirse como la suma de una función seno y una función coseno con los mismos argumentos. Por ejemplo, usando la ecuación (9.11), la ecuación (9.5) puede escribirse como

$$\begin{aligned} x(t) &= X_M \sin(\omega t + \theta) \\ &= X_M (\sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta) \\ &= A \sin \omega t + B \cos \omega t \end{aligned}$$

donde

$$A = X_M \cos \theta$$

$$B = X_M \sin \theta$$

o

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \tan^{-1}(B/A))$$

EJEMPLO 9.1

Deseamos graficar las formas de onda para las siguientes funciones: a) $v(t) = 1 \cos(\omega t + 45^\circ)$, b) $v(t) = 1 \cos(\omega t + 225^\circ)$, y c) $v(t) = 1 \cos(\omega t - 315^\circ)$.

SOLUCIÓN En la figura 9.3a se muestra una gráfica de la función $v(t) = 1 \cos \omega t$. La figura 9.3b es una gráfica de la función $v(t) = 1 \cos(\omega t + 45^\circ)$. La figura 9.3c es una gráfica de la función $v(t) = 1 \cos(\omega t + 225^\circ)$. Note que como

$$v(t) = 1 \cos(\omega t + 225^\circ) = 1 \cos(\omega t + 45^\circ + 180^\circ)$$

esta forma de onda está desfasada 180° respecto de la forma de onda de la figura 9.3b; es decir, $\cos(\omega t + 225^\circ) = -\cos(\omega t + 45^\circ)$, y la figura 9.3c es el negativo de la figura 9.3b. Finalmente, como la función

$$v(t) = 1 \cos(\omega t - 315^\circ) = 1 \cos(\omega t - 315^\circ + 360^\circ) = 1 \cos(\omega t + 45^\circ)$$

esta función es idéntica a la que se muestra en la figura 9.3b.

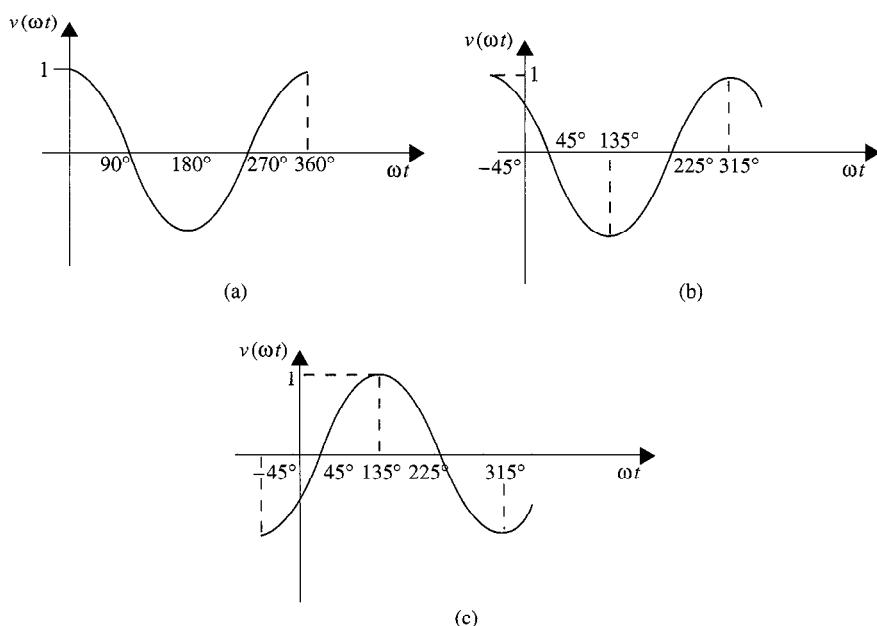


FIGURA 9.3 Formas de onda coseno con varios ángulos de fase.

EJEMPLO 9.2

Determine la frecuencia y el ángulo de fase entre los dos voltajes $v_1(t) = 12 \operatorname{sen}(1000t + 60^\circ)$ V y $v_2(t) = -6 \cos(1000t + 30^\circ)$ V.

SOLUCIÓN La frecuencia en hertz (Hz) está dada por la expresión

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1000}{2\pi} = 159.2 \text{ Hz}$$

Usando la ecuación (9.9), $v_2(t)$ puede escribirse como

$$v_2(t) = -6 \cos(\omega t + 30^\circ) = 6 \cos(\omega t + 210^\circ) \text{ V}$$

Entonces, empleando la ecuación (9.7), obtenemos

$$\begin{aligned} v_2(t) &= 6 \cos(\omega t + 210^\circ) \\ &= 6 \sin(\omega t + 300^\circ) \text{ V} = 6 \sin(\omega t - 60^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

Ahora que ambos voltajes de la misma frecuencia se expresan como ondas seno con amplitudes positivas, el ángulo de fase entre $v_1(t)$ y $v_2(t)$ es $60^\circ - (-60^\circ) = 120^\circ$; es decir, $v_1(t)$ adelanta a $v_2(t)$ por $+120^\circ$ o $v_2(t)$ se retrasa de $v_1(t)$ en 120° .

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D9.1 Dado el voltaje $v(t) = 120 \cos(314t + \pi/4) \text{ V}$, determine la frecuencia del voltaje en hertz y el ángulo de fase en grados.

Resp.: $f = 50 \text{ Hz}$, $\theta = 45^\circ$.

D9.2 Se sabe que tres corrientes de rama en una red son

$$i_1(t) = 2 \sin(377t + 45^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 0.5 \cos(377t + 10^\circ) \text{ A}$$

$$i_3(t) = -0.25 \sin(377t + 60^\circ) \text{ A}$$

Determine los ángulos de fase para los que $i_1(t)$ adelanta a $i_2(t)$ e $i_1(t)$ adelanta a $i_3(t)$.

Resp.: i_1 adelanta a i_2 por -55° , i_1 adelanta a i_3 por -195° .

9.2 Funciones forzantes senoidales y complejas

En los capítulos precedentes aplicamos una función forzante constante a una red y encontramos que la respuesta de estado estable también era constante.

De manera similar, si aplicamos una función forzante senoidal a una red lineal, los voltajes y corrientes de estado estable en la red también serán senoidales. Esto también debe estar claro respecto de las ecuaciones de la LVK y la LCK. Por ejemplo, si un voltaje de rama es una senoide de alguna frecuencia, los otros voltajes de rama deben ser senoides de la misma frecuencia si la LVK se aplica alrededor de cualquier trayectoria cerrada. Esto significa, por supuesto, que las soluciones forzadas de las ecuaciones diferenciales que describen una red con una función forzante senoidal son funciones senoidales en el tiempo. Por ejemplo, si suponemos que nuestra función de entrada es un voltaje $v(t)$ y nuestra respuesta de salida es una corriente $i(t)$, como se muestra en la figura 9.4, entonces, si $v(t) = A \sin(\omega t + \theta)$, $i(t)$ será de la forma $i(t) = B \sin(\omega t + \phi)$. El punto crítico aquí es que conocemos la forma de la respuesta de salida, y, por tanto, la solución simplemente implica determinar los valores de los dos parámetros B y ϕ .

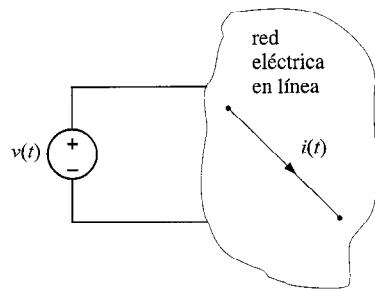


FIGURA 9.4 Respuesta de corriente a un voltaje aplicado en una red eléctrica.

EJEMPLO 9.3

Considere el circuito de la figura 9.5. Derivemos la expresión para la corriente.

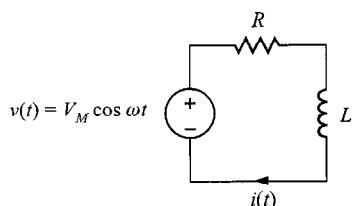


FIGURA 9.5 Circuito RL .

SOLUCIÓN: La ecuación de la LVK para este circuito es

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_M \cos \omega t$$

Como la función forzante de entrada es $V_M \cos \omega t$, suponemos que la componente de la respuesta forzada de la corriente $i(t)$ es de la forma

$$i(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

la cual puede escribirse usando la ecuación (9.11) como

$$\begin{aligned} i(t) &= A \cos \phi \cos \omega t - A \sin \phi \sin \omega t \\ &= A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \end{aligned}$$

Note que ésta es, como observamos en el capítulo 7, de la forma de la función forzante $\cos \omega t$ y su derivada $\sin \omega t$. Al sustituir esta forma por $i(t)$ en la ecuación diferencial precedente se obtiene

$$L \frac{d}{dt} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) + R(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) = V_M \cos \omega t$$

Evaluando la derivada indicada se produce

$$-A_1 \omega L \sin \omega t + A_2 \omega L \cos \omega t + RA_1 \cos \omega t + RA_2 \sin \omega t = V_M \cos \omega t$$

Igualando los coeficientes de las funciones seno y coseno, obtenemos

$$-A_1\omega L + RA_2 = 0$$

$$A_1R + A_2\omega L = V_M$$

es decir, dos ecuaciones simultáneas en las incógnitas A_1 y A_2 . Resolviendo esas dos ecuaciones para A_1 y A_2 se obtiene

$$A_1 = \frac{RV_M}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$A_2 = \frac{\omega L V_M}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Por tanto,

$$i(t) = \frac{RV_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega L V_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t$$

la cual usando la última identidad en la ecuación (9.11) puede escribirse como

$$i(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

donde A y ϕ se determinan como sigue:

$$A \cos \phi = \frac{RV_M}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$A \sin \phi = \frac{-\omega L V_M}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

De aquí,

$$\tan \phi = \frac{A \sin \phi}{A \cos \phi} = -\frac{\omega L}{R}$$

y, por tanto,

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

como

$$(A \cos \phi)^2 + (A \sin \phi)^2 = A^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = A^2$$

$$A^2 = \frac{R^2 V_M^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + \frac{(\omega L)^2 V_M^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} = \frac{V_M^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$A = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

De aquí, la expresión final para $i(t)$ es

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right)$$

El análisis anterior indica que ϕ es cero si $L = 0$ y por ello $i(t)$ está en fase con $v(t)$. Si $R = 0$, $\phi = 90^\circ$ y la corriente se retrasa del voltaje en 90° . Si R y L están presentes, la corriente se retrasa del voltaje por algún ángulo entre 0° y 90° .

Este ejemplo ilustra un punto importante: resolver incluso un circuito simple de una malla que contenga una resistencia y una bobina es muy complicado cuando se compara con la solución de un circuito de una sola malla que contenga sólo dos resistencias. Imagine por un momento cuán laborioso sería resolver un circuito más complicado usando el procedimiento que hemos empleado en el ejemplo 9.3. Para evitar este método, estableceremos una correspondencia entre funciones senoidales temporales y números complejos. Mostraremos entonces que esta relación conduce a un conjunto de ecuaciones algebraicas para corrientes y voltajes en una red (por ejemplo, corrientes de malla o voltajes nodales) en las que los coeficientes de las variables son números complejos. De aquí, una vez más encontraremos que determinar las corrientes o voltajes en un circuito puede realizarse resolviendo un conjunto de ecuaciones algebraicas; sin embargo, en este caso, su solución es complicada por el hecho de que las variables de las ecuaciones tienen coeficientes complejos, en lugar de reales.

El vehículo que emplearemos para establecer una relación entre las funciones senoidales variables en el tiempo y los números complejos es la ecuación de Euler, la cual para nuestros propósitos se escribe como

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (9.12)$$

Esta compleja función tiene una parte real y una parte imaginaria:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^{j\omega t}) &= \cos \omega t \\ \operatorname{Im}(e^{j\omega t}) &= \sin \omega t \end{aligned} \quad (9.13)$$

donde $\operatorname{Re}(\cdot)$ e $\operatorname{Im}(\cdot)$ representan la parte real y la imaginaria, respectivamente, de la función en el paréntesis.

Supongamos ahora que seleccionamos como nuestra función forzante en la figura 9.4 el voltaje no factible

$$v(t) = V_M e^{j\omega t} \quad (9.14)$$

el cual debido a la identidad de Euler puede escribirse como

$$v(t) = V_M \cos \omega t + j V_M \sin \omega t \quad (9.15)$$

Las partes real e imaginaria de esta función son cada una factibles. Pensamos de esta

función forzante compleja como dos funciones forzantes, una real y otra imaginaria, y como consecuencia de la linealidad se aplica el principio de superposiciones, y así la respuesta de corriente puede escribirse como

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi) + jI_M \sin(\omega t + \phi) \quad (9.16)$$

donde $I_M \cos(\omega t + \phi)$ es la respuesta debida a $V_M \cos \omega t$ y $jI_M \sin(\omega t + \phi)$ es la respuesta debida a $jV_M \sin \omega t$. Esta expresión para la corriente que contiene un término real y uno imaginario puede escribirse vía la ecuación de Euler como

$$i(t) = I_M e^{j(\omega t + \phi)} \quad (9.17)$$

Debido a las relaciones anteriores encontramos que más que aplicar la función forzante $V_M \cos \omega t$ y calcular la respuesta $I_M \cos(\omega t + \phi)$, podemos aplicar la función forzante compleja $V_M e^{j\omega t}$ y calcular la respuesta $I_M e^{j(\omega t + \phi)}$, la parte real de la cual es la respuesta deseada $I_M \cos(\omega t + \phi)$. Aunque este procedimiento puede en un principio parecer más complicado, no lo es. Mediante esta técnica convertiremos la ecuación diferencial en una ecuación algebraica que es mucho más fácil de resolver.

EJEMPLO 9.4

Una vez más, determinemos la corriente en el circuito RL examinado en el ejemplo 9.3.

Sin embargo, más que aplicar $V_M \cos \omega t$ aplicaremos $V_M e^{j\omega t}$.

SOLUCIÓN: La respuesta forzada será de la forma

$$i(t) = I_M e^{j(\omega t + \phi)}$$

donde sólo se desconocen I_M y ϕ . Sustituyendo $v(t)$ e $i(t)$ en la ecuación diferencial para el circuito, obtenemos

$$RI_M e^{j(\omega t + \phi)} + L \frac{d}{dt} (I_M e^{j(\omega t + \phi)}) = V_M e^{j\omega t}$$

Haciendo la derivada indicada, obtenemos

$$RI_M e^{j(\omega t + \phi)} + j\omega LI_M e^{j(\omega t + \phi)} = V_M e^{j\omega t}$$

Dividiendo cada término de la ecuación entre el factor común $e^{j\omega t}$ obtenemos

$$RI_M e^{j\phi} + j\omega LI_M e^{j\phi} = V_M$$

que es una ecuación algebraica con coeficientes complejos. Esta ecuación puede escribirse como

$$I_M e^{j\phi} = \frac{V_M}{R + j\omega L}$$

Convirtiendo el segundo miembro de la ecuación a forma exponencial o polar se produce la ecuación

$$I_M e^{j\phi} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j[-\tan^{-1}(\omega L/R)]}$$

(Un repaso rápido de números complejos se da en el apéndice C para los lectores que necesiten acentuar sus habilidades en esta área.) La forma anterior indica claramente que la magnitud y la fase de la corriente resultante son

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

y

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

Sin embargo, como nuestra función forzante real era $V_M \cos \omega t$ más bien que $V_M e^{j\omega t}$, nuestra respuesta es la parte real de la respuesta compleja:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_M \cos(\omega t + \phi) \\ &= \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right) \end{aligned}$$

Advierta que ésta es idéntica a la respuesta obtenida en el ejemplo previo resolviendo la ecuación diferencial para la corriente $i(t)$.

9.3 Fasores

Una vez más supongamos que la función forzante de una red lineal es de la forma

$$v(t) = V_M e^{j\omega t}$$

Entonces todo voltaje o corriente de estado estable en la red tendrá la misma forma y la misma frecuencia ω ; por ejemplo, una corriente $i(t)$ será de la forma $i(t) = I_M e^{j(\omega t + \phi)}$.

Conforme procedamos en nuestro subsecuente análisis de circuitos, anotaremos simplemente la frecuencia y entonces omitiremos el factor $e^{j\omega t}$, ya que éste es común a todos los términos en las ecuaciones descritas. Omitir el término $e^{j\omega t}$ indica que todo voltaje o corriente puede describirse completamente mediante una magnitud y una fase. Por ejemplo, un voltaje $v(t)$ puede escribirse en forma exponencial como

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re}[V_M e^{j(\omega t + \theta)}] \quad (9.18)$$

o como un número complejo

$$v(t) = \operatorname{Re}(V_M \angle \theta e^{j\omega t}) \quad (9.19)$$

Como estamos trabajando con una función forzante compleja, cuya parte real es la respuesta deseada, y cada término en la ecuación contendrá $e^{j\omega t}$, podemos omitir $\text{Re}(\cdot)$ y $e^{j\omega t}$ y trabajar sólo con el número complejo V_M/θ . Esta representación compleja comúnmente se llama *fasor*. Como característica distintiva, los fasores se escribirán en negritas. De manera completamente idéntica, un voltaje $v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta) = \text{Re}[V_M e^{j(\omega t + \theta)}]$ y una corriente $i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}[I_M e^{j(\omega t + \phi)}]$ se escriben en notación fasorial como $\mathbf{V} = V_M/\theta$ e $\mathbf{I} = I_M/\phi$, respectivamente.

E J E M P L O 9.5

De nuevo, consideramos el circuito *RL* del ejemplo 9.3. Usemos fasores para determinar la expresión para la corriente.

SOLUCIÓN La ecuación diferencial es

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_M \cos \omega t$$

La función forzante puede ser reemplazada por una función forzante compleja que está escrita como $\mathbf{V}e^{j\omega t}$ con el fasor $\mathbf{V} = V_M/0^\circ$. De manera similar, la componente de la respuesta forzada de la corriente $i(t)$ puede reemplazarse por una función compleja que se escribe como $\mathbf{I}e^{j\omega t}$ con el fasor $\mathbf{I} = I_M/\phi$. Recordemos de nuestras discusiones anteriores que la solución de la ecuación diferencial es la parte real de esta corriente.

Utilizando la función forzante compleja, encontramos que la ecuación diferencial se convierte en

$$L \frac{d}{dt} (\mathbf{I}e^{j\omega t}) + R\mathbf{I}e^{j\omega t} = \mathbf{V}e^{j\omega t}$$

$$j\omega L\mathbf{I}e^{j\omega t} + R\mathbf{I}e^{j\omega t} = \mathbf{V}e^{j\omega t}$$

Advierta que $e^{j\omega t}$ es un factor común y, como ya hemos indicado, puede ser eliminado dejando los fasores, es decir,

$$j\omega L\mathbf{I} + R\mathbf{I} = \mathbf{V}$$

Por tanto,

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R + j\omega L} = I_M/\theta = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

Así,

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right)$$

la cual nuevamente es la función que obtuvimos antes.

Definimos las relaciones entre fasores después de que el término $e^{j\omega t}$ ha sido eliminado como “análisis fasorial, o del dominio de la frecuencia”. Así, hemos transformado un conjunto de ecuaciones diferenciales con funciones forzantes senoidales en el dominio de tiempo a un conjunto de ecuaciones algebraicas que contienen números complejos en el dominio de la frecuencia. En efecto, nos enfrentamos ahora con la solución de un conjunto de ecuaciones algebraicas para los fasores desconocidos. Los fasores entonces simplemente se transforman de manera inversa al dominio del tiempo para obtener la solución del conjunto original de ecuaciones diferenciales. Además, notamos que la solución de circuitos senoidales en estado estable sería relativamente simple si pudiéramos escribir la ecuación fasorial directamente de la descripción del circuito. En la sección 9.4 presentaremos los fundamentos para hacer justo esto.

Observe que en nuestras discusiones hemos supuesto tácitamente que las funciones senoidales pueden ser representadas como fasores con un ángulo de fase basado en una función coseno. Por tanto, si se usan funciones seno, simplemente emplearemos la relación de la ecuación (9.7) para obtener el ángulo de fase apropiado.

En suma, mientras $v(t)$ representa un voltaje en el dominio del tiempo, el fasor \mathbf{V} representa al voltaje en el dominio de frecuencia. El fasor contiene sólo información de magnitud y de fase, y la frecuencia está implícita en esta representación. La transformación del dominio de tiempo al dominio de frecuencia, así como la transformación inversa, se muestran en la tabla 9.1. Recuerde que el ángulo de fase está basado en una función coseno y, por tanto, si se incluye una función seno, se debe emplear un factor de corrimiento de 90° , como se muestra en la tabla.

T A B L A 9.1
Representación fasorial

Dominio de tiempo	Dominio de frecuencia
$A \cos(\omega t \pm \theta)$	$A \angle \pm \theta$
$A \sin(\omega t \pm \theta)$	$A \angle \pm \theta - 90^\circ$

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de transformaciones fasoriales.

Es importante notar, sin embargo, que si una red contiene sólo fuentes seno no hay necesidad de hacer el corrimiento de 90° . Simplemente llevamos a cabo el análisis fasorial normal y entonces la parte *imaginaria* de la solución compleja variante en el tiempo es la respuesta deseada. Puesto simplemente, las fuentes coseno generan una respuesta coseno y fuentes seno generan una respuesta seno.

E J E M P L O 9.6

Convierta las funciones temporales $v(t) = 24 \cos(337t - 45^\circ)$ V e $i(t) = 12 \sin(337t + 120^\circ)$ A a fasores.

S O L U C I Ó N Usando la transformación fasorial mostrada previamente, tenemos

$$\mathbf{V} = 24 \angle -45^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{I} = 12 \angle 120^\circ - 90^\circ = 12 \angle 30^\circ \text{ A}$$

E J E M P L O 9.7

Convierta los fasores $\mathbf{V} = 16 \angle 20^\circ$ V e $\mathbf{I} = 10 \angle -75^\circ$ A del dominio de frecuencia al dominio de tiempo si la frecuencia es 1 kHz.

SOLUCIÓN Empleando la transformación inversa para fasores, encontramos que

$$v(t) = 16 \cos(2000\pi t + 20^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = 10 \cos(2000\pi t - 75^\circ) \text{ A}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D9.3 Convierta las siguientes funciones de voltaje a fasores.

$$v_1(t) = 12 \cos(377t - 425^\circ) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 18 \sin(2513t + 4.2^\circ) \text{ V}$$

Resp.: $\mathbf{V}_1 = 12 \angle -425^\circ$ V, $\mathbf{V}_2 = 18 \angle -85.8^\circ$ V

D9.4 Convierta los siguientes fasores al dominio del tiempo si la frecuencia es 400 Hz.

$$\mathbf{V}_1 = 10 \angle 20^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_2 = 12 \angle -60^\circ \text{ V}$$

Resp.: $v_1(t) = 10 \cos(800\pi t + 20^\circ)$ V, $v_2(t) = 12 \cos(800\pi t - 60^\circ)$ V.

9.4 Relaciones fasoriales para elementos de circuitos

Tal como procedimos en nuestro desarrollo de las técnicas requeridas para analizar circuitos en el estado estable senoidal, ahora estamos en posición para establecer las relaciones fasoriales entre voltaje y corriente para tres elementos pasivos R , L y C .

En el caso de una resistencia como se muestra en la figura 9.6a, se sabe que la relación voltaje-corriente es

$$v(t) = Ri(t) \quad (9.20)$$

Aplicar el voltaje complejo $V_M e^{j(\omega t + \theta_v)}$ resulta en la corriente compleja $I_M e^{j(\omega t + \theta_i)}$, y, por tanto, la ecuación (9.20) se convierte en

$$V_M e^{j(\omega t + \theta_v)} = RI_M e^{j(\omega t + \theta_i)}$$

la cual se reduce a

$$V_M e^{j\theta_v} = RI_M e^{j\theta_i} \quad (9.21)$$

La ecuación (9.21) puede escribirse en forma fasorial como

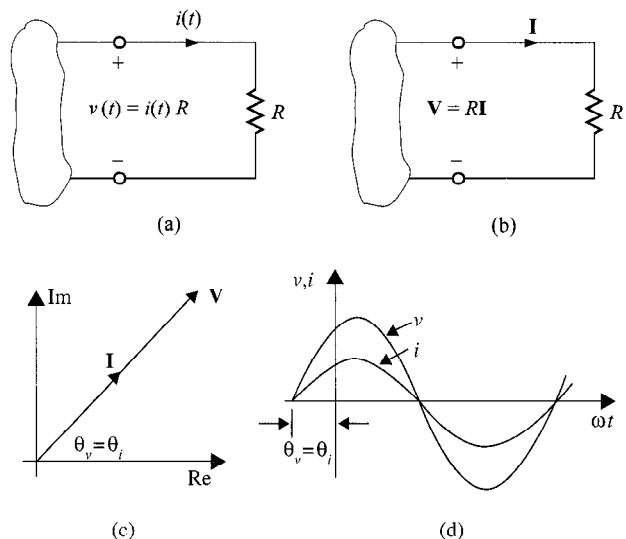


FIGURA 9.6 Relaciones de voltaje-corriente para una resistencia.

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \quad (9.22)$$

donde

$$\mathbf{V} = V_M e^{j\theta_v} = V_M / \theta_v \quad \text{and} \quad \mathbf{I} = I_M e^{j\theta_i} = I_M / \theta_i$$

De la ecuación (9.21) vemos que $\theta_v = \theta_i$, y así la corriente y el voltaje para este circuito están *en fase*.

Históricamente, los números complejos han sido representados como puntos en una gráfica en la que el eje x representa al eje real y el eje y al eje imaginario. El segmento de línea que conecta el origen con el punto proporciona una representación adecuada de la magnitud y el ángulo cuando los números complejos se escriben en forma polar. Un repaso del apéndice C indicará cómo esos números complejos o segmentos de línea pueden sumarse, restarse, etc. Como los fasores son números complejos, es conveniente representar gráficamente el voltaje y la corriente fasorial como segmentos de línea. Una gráfica de los segmentos de línea que representan fasores se llama *diagrama fasorial*. Esta representación pictórica de los fasores proporciona información inmediata de la magnitud relativa de un fasor con otro, el ángulo entre dos fasores, y la posición relativa de un fasor con respecto a otro (es decir, adelanto o atraso). Un diagrama fasorial y las formas de onda senoidales para la resistencia se muestran en la figura 9.6c y d, respectivamente. Se dibujará un diagrama fasorial para cada uno de los otros elementos de circuito en el resto de esta sección.

E J E M P L O 9.8

Si el voltaje $v(t) = 24 \cos(377t + 75^\circ)$ V se aplica a una resistencia de 6Ω como se muestra en la figura 9.6a, deseamos determinar la corriente resultante.

SOLUCIÓN Como el voltaje fasorial es

$$\mathbf{V} = 24 \angle 75^\circ \text{ V}$$

la corriente fasorial de la ecuación (9.22) es

$$\mathbf{I} = \frac{24 \angle 75^\circ}{6} = 4 \angle 75^\circ \text{ A}$$

la cual en el dominio del tiempo es

$$i(t) = 4 \cos(377t + 75^\circ) \text{ A}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

- D9.5** Se sabe que la corriente en una resistencia de 4Ω es $\mathbf{I} = 12 \angle 60^\circ \text{ A}$. Exprese el voltaje a través de la resistencia como función del tiempo si la frecuencia de la

corriente es 4 kHz.

$$\text{Resp.: } v(t) = 48 \cos(8000\pi t + 60^\circ) \text{ V}$$

La relación de voltaje-corriente para una bobina, como se muestra en la figura 9.7a, es

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (9.23)$$

Sustituyendo el voltaje y la corriente complejos en esta ecuación se obtiene

$$V_M e^{j(\omega t + \theta_v)} = L \frac{d}{dt} I_M e^{j(\omega t + \theta_i)}$$

la cual se reduce a

$$V_M e^{j\theta_v} = j\omega L I_M e^{j\theta_i} \quad (9.24)$$

La ecuación (9.24) en notación fasorial es

$$\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I} \quad (9.25)$$

Note que la ecuación diferencial en el dominio del tiempo (9.23) ha sido convertida en una ecuación algebraica con coeficientes complejos en el dominio de frecuencia. Esta relación se muestra en la figura 9.7b. Como el operador imaginario $j = 1e^{j90^\circ} = 1 \angle 90^\circ = \sqrt{-1}$, la ecuación (9.24) puede escribirse como

$$V_M e^{j\theta_v} = \omega L I_M e^{j(\theta_i + 90^\circ)} \quad (9.26)$$

Por tanto, el voltaje y la corriente están *fuera de fase* 90° , y en particular el voltaje adelanta a la corriente por 90° o la corriente está retrasada del voltaje en 90° . El diagrama fasorial y las formas de onda senoidales para el circuito de la bobina se muestran en la figura 9.7c y d, respectivamente.

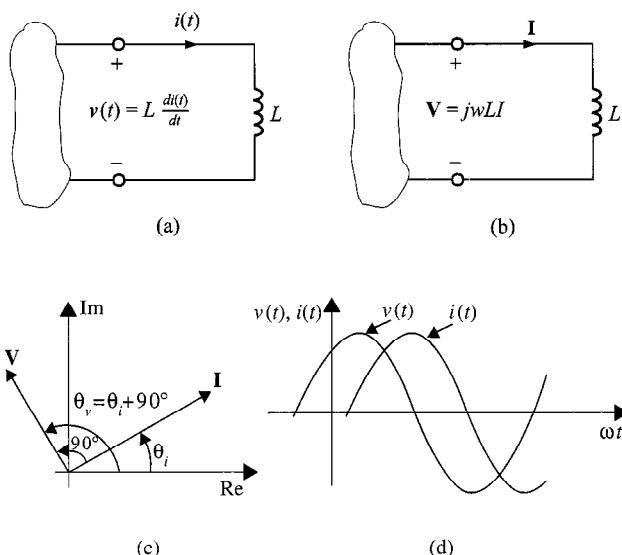


FIGURA 9.7 Relaciones de voltaje-corriente para una bobina.

E J E M P L O 9.9

El voltaje $v(t) = 12 \cos(377t + 20^\circ)$ V se aplica a una bobina de 20 mH como se muestra en la figura 9.7a. Encontrar la corriente resultante.

SOLUCIÓN La corriente fasorial es

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} = \frac{12 \angle 20^\circ}{\omega L \angle 90^\circ} \\ &= \frac{12 \angle 20^\circ}{(377)(20 \times 10^{-3}) \angle 90^\circ} \\ &= 1.59 \angle -70^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$$i(t) = 1.59 \cos(377t - 70^\circ) \text{ A}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D9.6 La corriente en una bobina de 0.05 H es $I = 4 \angle -30^\circ \text{ A}$. Si la frecuencia de la corriente es 60 Hz , determine el voltaje a través de la bobina.

Resp.: $v_L(t) = 75.4 \cos(377t + 60^\circ)$ V.

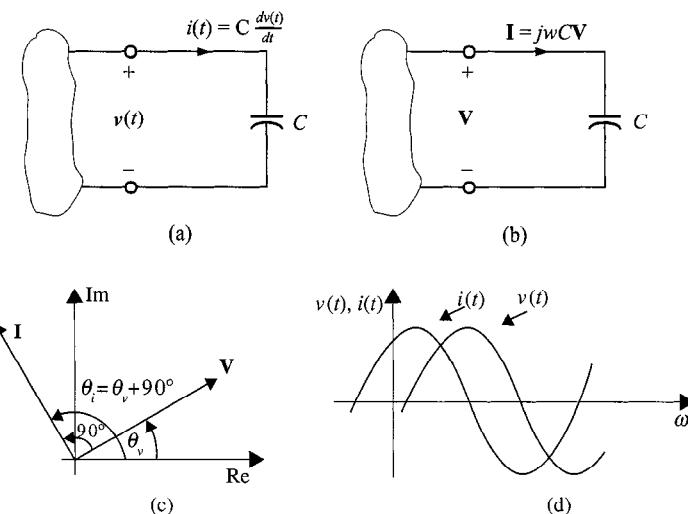


FIGURA 9.8 Relaciones de voltaje-corriente para un capacitor.

La relación voltaje-corriente para nuestro último elemento pasivo, el capacitor, como se muestra en la figura 9.8a, es

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (9.27)$$

Una vez más, empleando el voltaje y la corriente complejos obtenemos

$$I_M e^{j(\omega t + \theta_i)} = C \frac{d}{dt} V_M e^{j(\omega t + \theta_v)}$$

la cual se reduce a

$$I_M e^{j\theta_i} = j\omega C V_M e^{j\theta_v} \quad (9.28)$$

En notación fasorial esta ecuación se convierte en

$$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V} \quad (9.29)$$

La ecuación (9.27), una ecuación diferencial en el dominio del tiempo, ha sido transformada en la ecuación (9.29), una ecuación algebraica con coeficientes complejos en el dominio de frecuencia. La relación fasorial se muestra en la figura 9.8b. Sustituir $j = 1e^{j90^\circ}$ en la ecuación (9.28) da

$$I_M e^{j\theta_i} = \omega C V_M e^{j(\theta_v + 90^\circ)} \quad (9.30)$$

Advierta que el voltaje y la corriente están 90° fuera de fase. La ecuación (9.30) establece que la corriente adelanta al voltaje en 90° o que el voltaje se retrasa de la corriente en 90° . El diagrama fasorial y las formas de onda para el circuito del capacitor se muestran en la figura 9.8c y d, respectivamente.

E J E M P L O 9.10

Se aplica el voltaje $v(t) = 100 \cos(314t + 15^\circ)$ V a un capacitor de $100\mu\text{F}$ como se muestra en la figura 9.8a. Encontrar la corriente.

S o l u c i ó n La corriente fasorial resultante es

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= j\omega C(100 \angle 15^\circ) \\ &= (314)(100 \times 10^{-6} \angle 90^\circ)(100 \angle 15^\circ) \\ &= 3.14 \angle 105^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Por tanto, la corriente escrita como función del tiempo es

$$i(t) = 3.14 \cos(314t + 105^\circ) \text{ A}$$

E J E R C I C I O D E E N T R E N A M I E N T O

Resp.: $\mathbf{V}_C = 63.67 \angle -235^\circ$ V.

D E S A R O L L O La corriente en un capacitor de $150\mu\text{F}$ es $\mathbf{I} = 3.6 \angle -145^\circ$ A. Si la frecuencia de la corriente es 60 Hz, determine el voltaje a través del capacitor.

9.5 Impedancia y admitancia

Hemos examinado cada uno de los elementos de circuito en el dominio de frecuencia sobre una base individual. Ahora deseamos tratar esos elementos pasivos de circuito en una forma más general. Definimos ahora la *impedancia* \mathbf{Z} de entrada de dos terminales, también llamada impedancia de entrada, exactamente de la misma manera en la que definimos antes la resistencia. Más adelante examinaremos otro tipo de impedancia, llamada impedancia de transferencia.

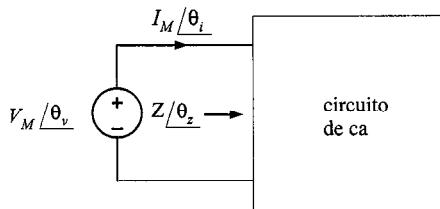
La impedancia se define como la razón del voltaje fasorial \mathbf{V} a la corriente fasorial \mathbf{I} :

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad (9.31)$$

en las dos terminales del elemento relacionado con otro por la convención pasiva de signos, como se ilustra en la figura 9.9. Como \mathbf{V} e \mathbf{I} son complejos, la impedancia \mathbf{Z} es compleja y

$$\mathbf{Z} = \frac{V_M \angle \theta_v}{I_M \angle \theta_i} = \frac{V_M}{I_M} \angle \theta_v - \theta_i = Z \angle \theta_z \quad (9.32)$$

Como \mathbf{Z} es la razón de \mathbf{V} a \mathbf{I} , las unidades de \mathbf{Z} son ohms. Así, la impedancia en un

**FIGURA 9.9** Relación de impedancia general.

circuito de ca es análoga a la resistencia en un circuito de cd. En forma rectangular, la impedancia se expresa como

$$\mathbf{Z}(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (9.33)$$

donde $R(\omega)$ es la componente real, o resistiva, y $X(\omega)$ es la componente imaginaria, o reactiva. En general, simplemente nos referimos a R como la resistencia y a X como la reactivancia. Es importante notar que R y X son funciones reales de ω , y por consiguiente $\mathbf{Z}(j\omega)$ es dependiente de la frecuencia. La ecuación (9.33) claramente indica que \mathbf{Z} es un número complejo; sin embargo, no es un fasor.

Las ecuaciones (9.32) y (9.33) indican que

$$Z \angle \theta_z = R + jX \quad (9.34)$$

Por tanto,

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (9.35)$$

$$\theta_z = \tan^{-1} \frac{X}{R}$$

donde

$$R = Z \cos \theta_z$$

$$X = Z \sin \theta_z$$

Para los elementos pasivos individuales la impedancia es como se muestra en la tabla 9.2. Sin embargo, así como tuvo sus ventajas saber determinar la resistencia equivalente en circuitos de cd, así también queremos aprender cómo determinar la impedancia equivalente en circuitos de ca.

T A B L A 9.2
Impedancia de elementos pasivos

Elementos pasivos	Impedancia
R	$\mathbf{Z} = R$
L	$\mathbf{Z} = j\omega L = jX_L = \omega L \angle 90^\circ$, $X_L = \omega L$
C	$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C} = jX_C = -\frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$, $X_C = -\frac{1}{\omega C}$

La LCK y la LVK son válidas en el dominio de frecuencia, y podemos usar este hecho, como se hizo en el capítulo 2 para las resistencias, para mostrar que las impedancias pueden combinarse usando las mismas reglas que hemos establecido para las combinaciones de resistencias. Es decir, si $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \dots, \mathbf{Z}_n$ están conectadas en serie, la impedancia equivalente \mathbf{Z}_s es

$$\mathbf{Z}_s = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \dots + \mathbf{Z}_n \quad (9.36)$$

y si $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \dots, \mathbf{Z}_n$ están conectadas en paralelo, la impedancia equivalente es

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_p} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{1}{\mathbf{Z}_3} + \dots + \frac{1}{\mathbf{Z}_n} \quad (9.37)$$

EJEMPLO 9.11

Determinar la impedancia equivalente de la red que se muestra en la figura 9.10 si la frecuencia es $f = 60$ Hz. Entonces calcule la corriente $i(t)$ si la fuente de voltaje es $v(t) = 50 \cos(\omega t + 30^\circ)$ V. Finalmente, calcular la impedancia equivalente si la frecuencia es $f = 400$ Hz.

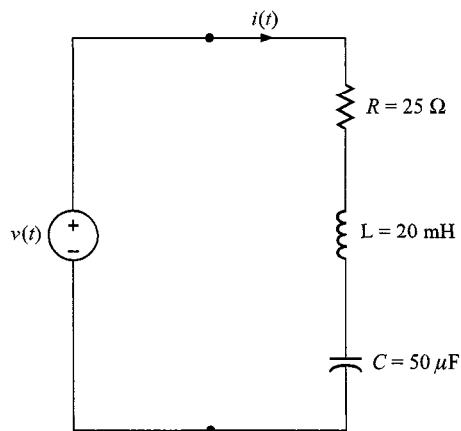


FIGURA 9.10 Circuito de ca en serie.

SOLUCIÓN Las impedancias de los elementos individuales a 60 Hz son

$$\mathbf{Z}_R = 25 \Omega$$

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j(2\pi \times 60)(20 \times 10^{-3}) = j7.54 \Omega$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{(2\pi \times 60)(50 \times 10^{-6})} = -j53.05 \Omega$$

Como los elementos están en serie,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C \\ &= 25 - j45.51 \Omega \end{aligned}$$

la corriente en el circuito está dada por

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{50 \angle 30^\circ}{25 - j45.51} = \frac{50 \angle 30^\circ}{51.92 \angle -61.22^\circ} = 0.96 \angle 91.22^\circ \text{ A}$$

o en el dominio de tiempo, $i(t) = 0.96 \cos(377t + 91.22^\circ) \text{ A}$.

Si la frecuencia es 400 Hz, la impedancia de cada elemento es

$$\mathbf{Z}_R = 25 \Omega$$

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j50.27 \Omega$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = -j7.96 \Omega$$

La impedancia total es entonces

$$\mathbf{Z} = 25 + j42.31 = 49.14 \angle 59.42^\circ \Omega$$

Es importante notar que a la frecuencia $f = 60 \text{ Hz}$, la reactancia del circuito es capacitiva, es decir, si la impedancia está escrita como $R + jX$, $X < 0$; sin embargo, en $f = 400 \text{ Hz}$ la reactancia es inductiva ya que $X > 0$.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D9.8 Encontrar la corriente $i(t)$ en la red de la figura D9.8.

Resp.: $i(t) = 3.88 \cos(377t - 39.2^\circ) \text{ A}$.

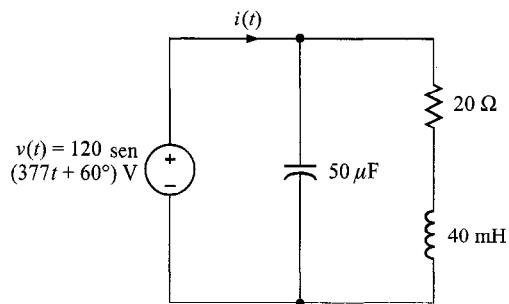


FIGURA D9.8

Otra cantidad que es muy útil en el análisis de circuitos de ca es la *admitancia* de entrada de dos terminales, que es el recíproco de la impedancia; es decir,

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} \quad (9.38)$$

Las unidades de \mathbf{Y} son siemens, y esta cantidad es análoga a la conductancia en circuitos de cd resistivos. Como \mathbf{Z} es un número complejo, \mathbf{Y} también es un número complejo.

$$\mathbf{Y} = Y_M \angle \theta_y \quad (9.39)$$

que se escribe en forma rectangular como

$$\mathbf{Y} = G + jB \quad (9.40)$$

donde G y B se llaman *conductancia* y *susceptancia*, respectivamente. Debido a la relación entre \mathbf{Y} y \mathbf{Z} , podemos expresar los componentes de una cantidad como función de los componentes de la otra. De la expresión

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} \quad (9.41)$$

podemos mostrar que

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (9.42)$$

y de una manera similar, podemos mostrar que

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2} \quad (9.43)$$

Es muy importante notar que en general R y G no son recíprocas una de la otra. Lo mismo es cierto para X y B . El caso puramente resistivo es una excepción. En el caso puramente reactivo las cantidades son recíprocas negativas una de la otra.

La admitancia de los elementos pasivos individuales es

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_R &= \frac{1}{R} = G \\ \mathbf{Y}_L &= \frac{1}{j\omega L} = -\frac{1}{\omega L} \angle 90^\circ \\ \mathbf{Y}_C &= j\omega C = \omega C \angle 90^\circ \end{aligned} \quad (9.44)$$

Una vez más, como la LCK y la LVK son válidas en el dominio de la frecuencia, podemos mostrar, usando el mismo método señalado en el capítulo 2 para la conductancia en circuitos resistivos, que las reglas para combinar admitancias son las mismas que aquéllas para combinar conductancias; es decir, si $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \dots, \mathbf{Y}_n$ están conectadas en paralelo, la admitancia equivalente es

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \dots + \mathbf{Y}_n \quad (9.45)$$

y si $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ están conectadas en paralelo, la admitancia equivalente es

$$\frac{1}{\mathbf{Y}_s} = \frac{1}{\mathbf{Y}_1} + \frac{1}{\mathbf{Y}_2} + \dots + \frac{1}{\mathbf{Y}_n} \quad (9.46)$$

E J E M P L O 9.12

Calcule la admitancia equivalente \mathbf{Y}_p para la red de la figura 9.11 y úsela para determinar la corriente \mathbf{I} si $\mathbf{V}_S = 60 \angle 45^\circ$ V.

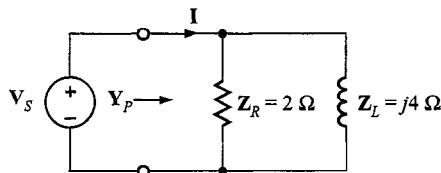


FIGURA 9.11 Ejemplo de circuito en paralelo.

S O L U C I Ó N De la figura 9.11 notamos que

$$\mathbf{Y}_R = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{2} \text{ S}$$

$$\mathbf{Y}_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{-j}{4} \text{ S}$$

Por tanto,

$$\mathbf{Y}_p = \frac{1}{2} - j \frac{1}{4} \text{ S}$$

y de aquí,

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= \mathbf{Y}_p \mathbf{V}_S \\ &= \left(\frac{1}{2} - j \frac{1}{4} \right) (60 \angle 45^\circ) \\ &= 33.6 \angle 18.43^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

E J E R C I C I O D E E N T R E N A M I E N T O

- D9.9 Encuentre la corriente \mathbf{I} en la red de la figura D9.9.

Resp.: $\mathbf{I} = 9 \angle 53.7^\circ$ A.

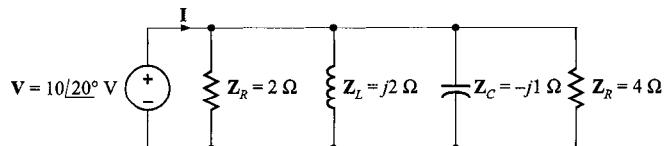


FIGURA D9.9

Como preludio a nuestro análisis de circuitos de ca más generales, examinemos las técnicas para calcular la impedancia o admitancia de circuitos en los que están interconectados numerosos elementos pasivos. El siguiente ejemplo ilustra que nuestra técnica es análoga a nuestros primeros cálculos de resistencia equivalente.

EJEMPLO 9.13

Considere la red que se muestra en la figura 9.12a. La impedancia de cada elemento está dada en la figura. Deseamos calcular la impedancia equivalente de la red Z_{eq} en las terminales A-B.

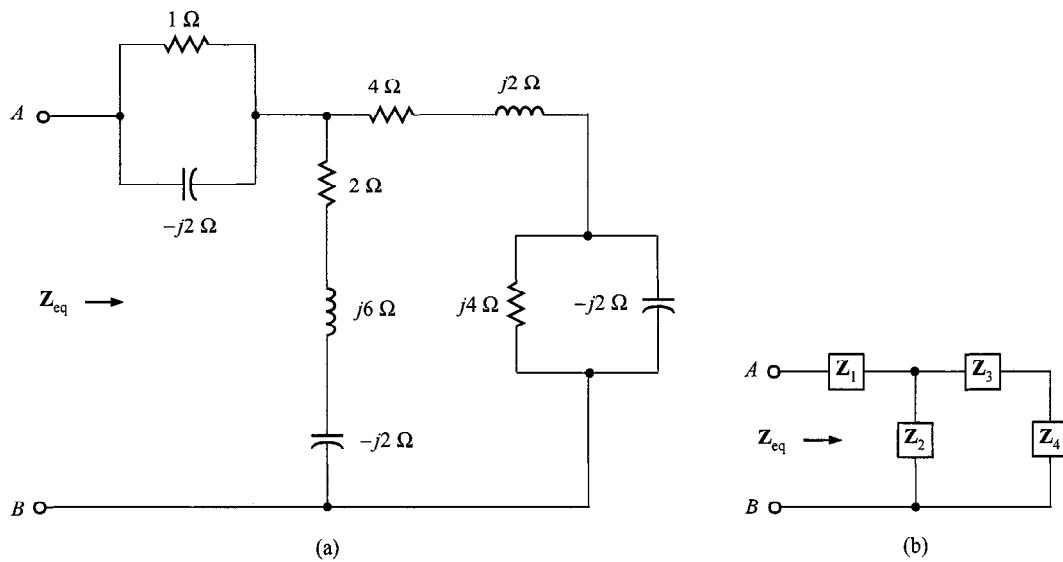


FIGURA 9.12 Circuitos de ejemplo para determinar la impedancia equivalente.

SOLUCIÓN La impedancia equivalente Z_{eq} puede calcularse en una variedad de formas; podemos usar sólo impedancias, sólo admitancias, o una combinación de las dos. Utilizaremos la última. Comenzamos por notar que el circuito de la figura 9.12a puede ser representado por el circuito de la figura 9.12b.

Advierta que

$$\mathbf{Y}_4 = \mathbf{Y}_L + \mathbf{Y}_C$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{j4} + \frac{1}{-j2} \\ &= j \frac{1}{4} \text{ S} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{Z}_4 = -j4 \Omega$$

Ahora

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{34} &= \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4 \\ &= (4 + j2) + (-j4) \\ &= 4 - j2 \Omega\end{aligned}$$

y de aquí,

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{34} &= \frac{1}{\mathbf{Z}_{34}} \\ &= \frac{1}{4 - j2} \\ &= 0.20 + j0.10 \text{ S}\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_2 &= 2 + j6 - j2 \\ &= 2 + j4 \Omega\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_2 &= \frac{1}{2 + j4} \\ &= 0.10 - j0.20 \text{ S} \\ \mathbf{Y}_{234} &= \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_{34} \\ &= 0.30 - j0.10 \text{ S}\end{aligned}$$

El lector debe notar cuidadosamente nuestro método —estamos sumando impedancias en serie y sumando admitancias en paralelo.

De \mathbf{Y}_{234} podemos calcular \mathbf{Z}_{234} como

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{234} &= \frac{1}{\mathbf{Y}_{234}} \\ &= \frac{1}{0.30 - j0.10} \\ &= 3 + j1 \Omega\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_1 &= \mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_C \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{-j2} \\ &= 1 + j \frac{1}{2} \text{ S}\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_1 &= \frac{1}{1 + j \frac{1}{2}} \\ &= 0.8 - j0.4 \Omega\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{eq} &= \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_{234} \\ &= 0.8 - j0.4 + 3 + j1 \\ &= 3.8 + j0.6 \Omega\end{aligned}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D9.10 Calcule la impedancia \mathbf{Z}_T en la red de la figura D9.10.

Resp.: $\mathbf{Z}_T = 3.38 + j1.08 \Omega$.

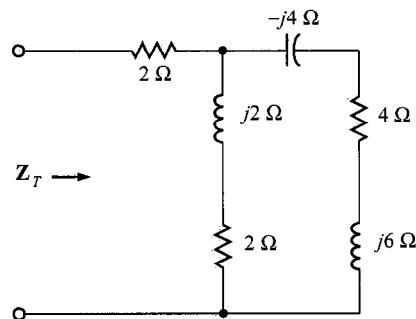


FIGURA D9.10

Las transformaciones Y a delta y delta a Y presentadas con anterioridad para la resistencia también son válidas para la impedancia en el dominio de frecuencia. Por tanto, las impedancias que se muestran en la figura 9.13 están relacionadas mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_a &= \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \\ \mathbf{Z}_b &= \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \\ \mathbf{Z}_c &= \frac{\mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}\end{aligned}\tag{9.47}$$

y

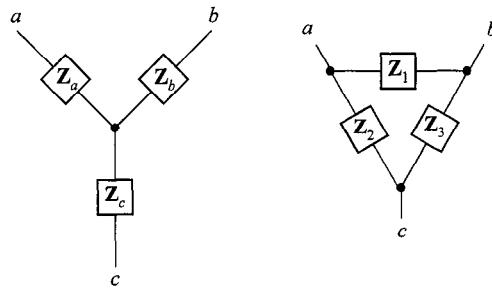


FIGURA 9.13 Configuraciones de redes en Y y delta.

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_c} \\ Z_2 &= \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_b} \\ Z_3 &= \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_a} \end{aligned} \quad (9.48)$$

Esas ecuaciones son relaciones generales y por consiguiente se aplican a cualquier conjunto de impedancias conectadas en una configuración Y o delta.

EJEMPLO 9.14

Determinemos la impedancia Z_{eq} en las terminales A-B de la red de la figura 9.14a.

SOLUCIÓN Para simplificar la red, debemos convertir una de las deltas colocada espalda con espalda en una Y. Si seleccionamos la delta definida por los puntos C, D y E, las impedancias de la Y correspondiente se calculan a partir de la ecuación (9.47) como

$$\begin{aligned} \frac{(2)(-j2 + j4)}{2 - j2 + j4 + 1 + j1} &= \frac{2(j2)}{3 + j3} = 0.67 + j0.67 \Omega \\ \frac{(2)(1 + j1)}{3 + j3} &= 0.67 \Omega \\ \frac{(-j2 + j4)(1 + j1)}{3 + j3} &= j0.67 \Omega \end{aligned}$$

y se muestra en la figura 9.14b. Si ahora combinamos las dos impedancias en paralelo, obtenemos

$$\frac{(0.67 - j1)(2 + j0.67)}{0.67 - j1 + 2 + j0.67} = 0.81 - j0.48 \Omega$$

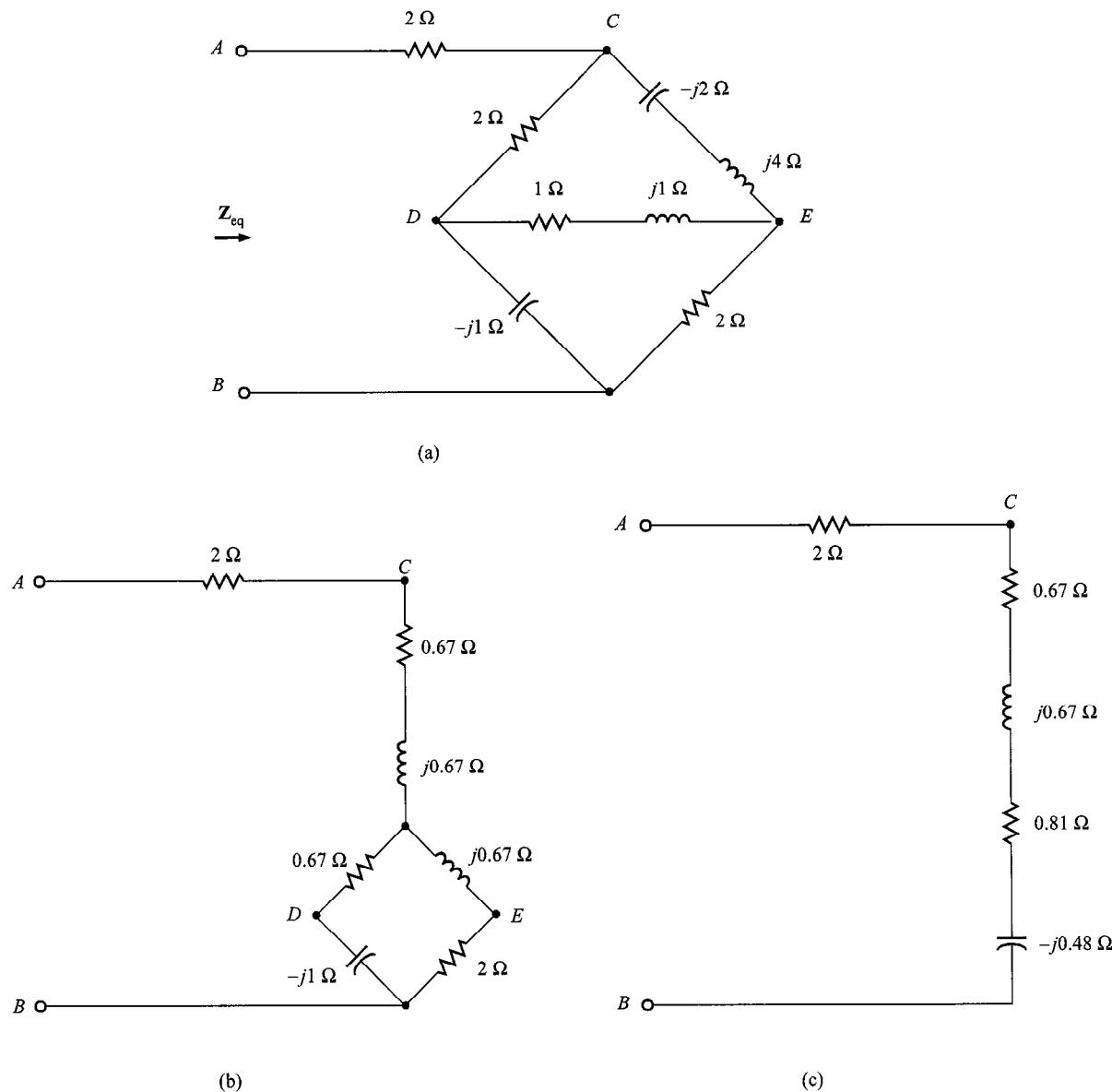


FIGURA 9.14 Circuitos utilizados en el ejemplo 9.14.

la cual reduce la red a la que se muestra en la figura 9.14c. De aquí, la impedancia equivalente es

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= 2 + 0.67 + j0.67 + 0.81 - j0.48 \\ &= 3.48 + j0.19 \Omega \end{aligned}$$

9.6 Diagramas fasoriales

La impedancia y la admitancia son funciones de la frecuencia y, por tanto, sus valores cambian a medida que cambia la frecuencia. Esos cambios en \mathbf{Z} y \mathbf{Y} tienen un efecto resultante sobre las relaciones de corriente-voltaje en una red. Este impacto de cambios en la frecuencia sobre los parámetros del circuito puede verse fácilmente por medio de un diagrama fasorial. Los siguientes ejemplos servirán para ilustrar esos puntos.

EJEMPLO 9.15

Dibujemos el diagrama fasorial de la red que se muestra en la figura 9.15.

SOLUCIÓN Las variables pertinentes están marcadas en la figura. Por conveniencia, para formar un diagrama fasorial seleccionamos \mathbf{V} como un fasor de referencia y le asignamos arbitrariamente un ángulo de fase de 0° . Mediremos, por consiguiente, todas las corrientes con respecto a este fasor. No sufrimos una pérdida de generalidad al asignar a \mathbf{V} un ángulo de fase de 0° , ya que si en realidad es, por ejemplo 30° , simplemente rotaremos todo el diagrama fasorial 30° , debido a que todas las corrientes están medidas con respecto a este fasor.

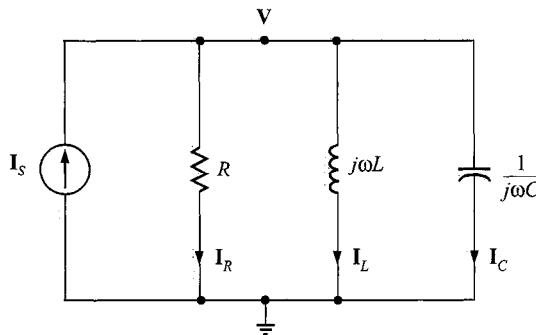


FIGURA 9.15 Ejemplo de circuito en paralelo.

En el nodo superior del circuito la LCK es

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}}{R} + \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} + \frac{\mathbf{V}}{1/j\omega C}$$

Como $\mathbf{V} = V_M \angle 0^\circ$, entonces

$$\mathbf{I}_s = \frac{V_M \angle 0^\circ}{R} + \frac{V_M \angle -90^\circ}{\omega L} + V_M \omega C \angle 90^\circ$$

El diagrama fasorial que ilustra la relación de fase entre \mathbf{V} , \mathbf{I}_R , \mathbf{I}_L e \mathbf{I}_C se muestra en la figura 9.16a. Para valores pequeños de ω tales que la magnitud de \mathbf{I}_L es mayor que la de \mathbf{I}_C , el diagrama fasorial para las corrientes se

muestra en la figura 9.16b. En el caso de valores grandes de ω , es decir, aquellos para los cuales I_C es mayor que I_L , el diagrama fasorial para las corrientes se muestra en la figura 9.16c. Observe que conforme ω se incrementa, el fasor I_S se mueve de I_{S_1} a I_{S_n} a lo largo del lugar geométrico de los puntos especificados por la línea punteada que se muestra en la figura 9.16d.

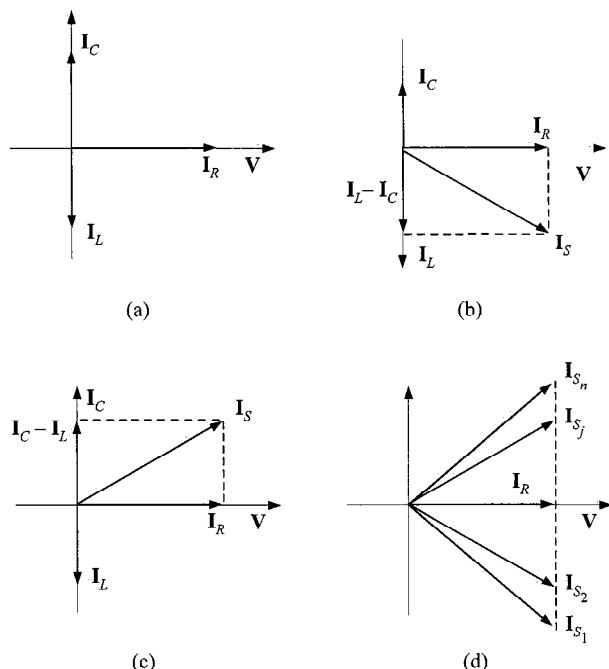


FIGURA 9.16 Diagramas fasoriales para el circuito de la figura 9.15.

Note que I_S está en fase con V cuando $I_C = I_L$ o, en otras palabras, cuando $\omega L = 1/\omega C$. Por ello, el voltaje nodal V está en fase con la fuente de corriente I_S cuando

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Esto también puede verse de la ecuación de la LCK

$$I_S = \left[\frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right] V$$

E J E M P L O 9.16

Determinemos el diagrama fasorial para el circuito en serie que se muestra en la figura 9.17a.

SOLUCIÓN La LVK para este circuito es de la forma

$$\mathbf{V}_S = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C$$

$$= \mathbf{IR} + \omega L \mathbf{I} \angle 90^\circ + \frac{\mathbf{I}}{\omega C} \angle -90^\circ$$

Si seleccionamos \mathbf{I} como un fasor de referencia de modo que $\mathbf{I} = I_M \angle 0^\circ$, entonces si $\omega L I_M > I_M / \omega C$, el diagrama fasorial será de la forma que se muestra en la figura 9.17b. Específicamente, si $\omega = 377$ rad/segundo (es decir, $f = 60$ Hz), entonces $\omega L = 6$ y $1/\omega C = 2$. En esas condiciones el diagrama fasorial es como se muestra en la figura 9.17c. Sin embargo, si seleccionamos \mathbf{V}_S como referencia con, por ejemplo,

$$v_S(t) = 12\sqrt{2} \cos(377t + 90^\circ) \text{ V}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{12\sqrt{2} \angle 90^\circ}{4 + j6 - j2} \\ &= \frac{12\sqrt{2} \angle 90^\circ}{4\sqrt{2} \angle 45^\circ} \\ &= 3 \angle 45^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

y todo el diagrama fasorial, como se muestra en las figuras 9.17b y c, es rotado 45° como se muestra en la figura 9.17d.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

- D9.11 Dibuje un diagrama fasorial que ilustre todas las corrientes y voltajes para la red de la figura D9.11.

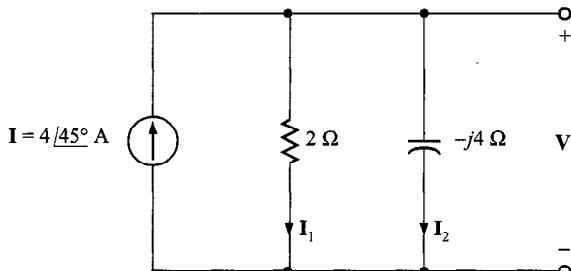
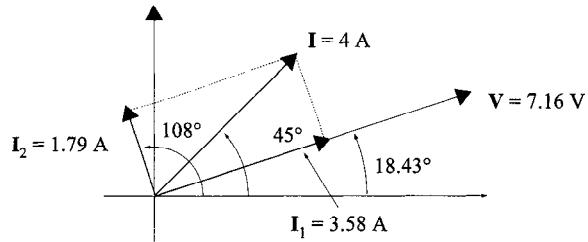


FIGURA D9.11

Resp.:



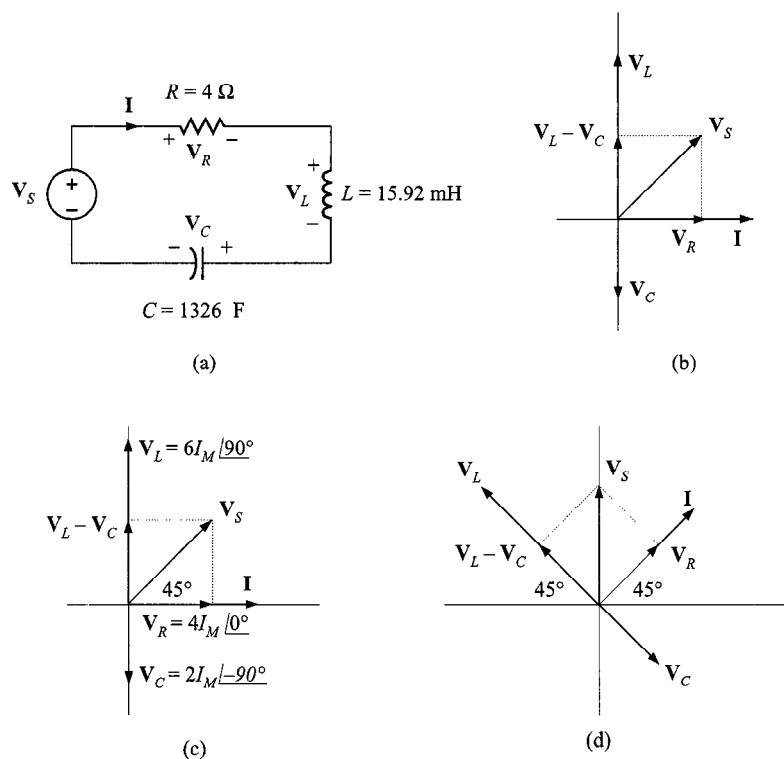


FIGURA 9.17 Circuito en serie y ciertos diagramas fasoriales específicos.

9.7 Análisis básico utilizando las leyes de Kirchhoff

Hemos mostrado que las leyes de Kirchhoff se aplican en el dominio de frecuencia y, por tanto, se pueden usar para calcular voltajes y corrientes de estado estable en circuitos de ca. Este método incluye expresar esos voltajes y corrientes como fasores, y una vez que se ha hecho esto, el análisis de ca en estado estable empleando ecuaciones fasoriales se lleva a cabo de forma idéntica a la utilizada en el análisis de cd de circuitos resistivos. El álgebra de números complejos es la herramienta que se utiliza para la manipulación matemática de las ecuaciones fasoriales, las cuales, por supuesto, tienen coeficientes complejos. Comenzaremos por aclarar que las técnicas que hemos aplicado en la solución de circuitos resistivos de cd también son válidas en el análisis de circuitos de ca —siendo la única diferencia que en el análisis de circuitos de ca de estado estable las ecuaciones fasoriales algebraicas tienen coeficientes complejos.

En este punto, es importante que el lector comprenda cómo en nuestra manipulación de ecuaciones fasoriales algebraicas con coeficientes complejos, por simplicidad, normalmente llevaremos sólo dos dígitos a la derecha del punto decimal. Al hacer esto, introduciremos errores de redondeo en nuestros cálculos. En ninguna parte están esos

errores más evidentes que cuando se usan dos o más métodos para resolver el mismo problema, como se hace en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9.17

Deseamos calcular todos los voltajes y corrientes en el circuito que se muestra en la figura 9.18a.

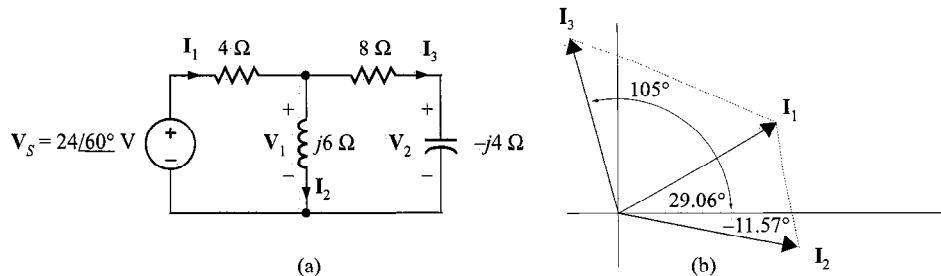


FIGURA 9.18 a) Ejemplo de circuito de ca, b) diagrama fasorial para las corrientes.

SOLUCIÓN Nuestro método será como sigue. Calcularemos la impedancia total vista por la fuente V_S . Entonces usaremos ésta para determinar I_1 . Conociendo I_1 , podemos calcular V_1 usando la LVK. Conociendo V_1 , podemos calcular I_2 e I_3 , etcétera.

La impedancia total vista por la fuente V_S es

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= 4 + \frac{(j6)(8-j4)}{j6+8-j4} \\ &= 4 + \frac{24+j48}{8+j2} \\ &= 4 + 4.24 + j4.94 \\ &= 9.61 \angle -30.94^\circ \Omega \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_S}{Z_{eq}} = \frac{24 \angle 60^\circ}{9.61 \angle -30.94^\circ} \\ &= 2.5 \angle 29.06^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

V_1 puede determinarse usando la LVK:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_S - 4I_1 \\ &= 24 \angle 60^\circ - 10 \angle 29.06^\circ \\ &= 3.26 + j15.93 = 16.26 \angle 78.43^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Advierta que \mathbf{V}_1 también puede calcularse mediante el divisor de voltaje:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_s \frac{(j6)(8-j4)}{j6+8-j4}}{4 + \frac{(j6)(8-j4)}{j6+8-4}} \text{ V}$$

que partiendo de nuestros cálculos previos es

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= \frac{(24 \angle 60^\circ)(6.51 \angle 49.36^\circ)}{9.61 \angle 30.94^\circ} \\ &= 16.26 \angle 78.42^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Conociendo \mathbf{V}_1 , podemos calcular \mathbf{I}_2 e \mathbf{I}_3 :

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_2 &= \frac{\mathbf{V}_1}{j6} = \frac{16.26 \angle 78.42^\circ}{6 \angle 90^\circ} \\ &= 2.71 \angle -11.57^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_3 &= \frac{\mathbf{V}_1}{8-j4} \\ &= 1.82 \angle 105^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Advierta que \mathbf{I}_2 e \mathbf{I}_3 se pudieron haber calculado por división de corriente. Por ejemplo, \mathbf{I}_2 puede determinarse mediante

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_2 &= \frac{\mathbf{I}_1(8-j4)}{8-j4+j6} \\ &= \frac{(2.5 \angle 29.06^\circ)(8.94 \angle -26.57^\circ)}{8+j2} \\ &= 2.71 \angle -11.55^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Finalmente, \mathbf{V}_2 puede calcularse como

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_2 &= \mathbf{I}_3(-j4) \\ &= 7.28 \angle 15^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Este valor también se podría haber calculado por división de voltaje. El diagrama fasorial para las corrientes \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 , e \mathbf{I}_3 se muestra en la figura 9.18b y es una ilustración de la LCK.

Finalmente, se anima al lector a trabajar el problema a la inversa, es

decir, dada V_2 , encontrar V_S . Advierta que si se conoce V_2 , I_3 puede calcularse inmediatamente usando la impedancia del capacitor. Entonces $V_2 + I_3(8)$ da V_1 . Conociendo V_1 podemos encontrar I_2 . Entonces $I_2 + I_3 = I_1$, etc. Note que este análisis, que es objeto del siguiente ejercicio de entrenamiento, implica simplemente una aplicación repetida de la ley de Ohm, la LCK y la LVK.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D9.12 En la red de la figura D9.12, se sabe que V_o es $8 \angle -45^\circ$ V. Calcule V_S .

Resp.: $V_S = 17.88 \angle -18.45^\circ$ V.

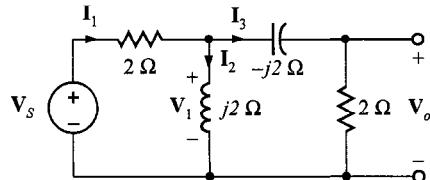


FIGURA D9.12

9.8 Técnicas de análisis

En esta sección volvemos a revisar los métodos de análisis que anteriormente hemos aplicado con éxito a circuitos de cd e ilustraremos su aplicabilidad al análisis de ca en estado estable. El vehículo que empleamos para presentar esas técnicas son ejemplos en los que todos los teoremas, junto con el análisis nodal y el análisis de malla, se utilizan para obtener una solución.

EJEMPLO 9.18

Determinemos la corriente I_o en la red de la figura 9.19a usando análisis nodal, análisis de malla, superposición, intercambio de fuentes, teorema de Thévenin y teorema de Norton.

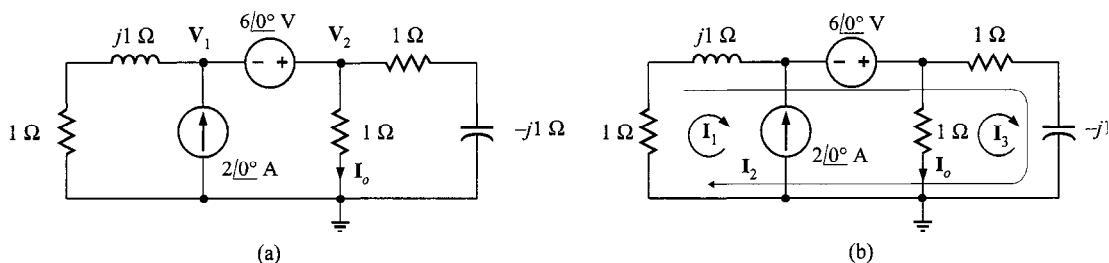


FIGURA 9.19 Circuitos utilizados en el ejemplo 9.18 para análisis nodal y de malla.

SOLUCIÓN Comenzamos con un análisis nodal de la red. La ecuación de la LCK para el supernodo que incluye la fuente de voltaje es

$$\frac{\mathbf{V}_1}{1+j} - 2 \angle 0^\circ + \frac{\mathbf{V}_2}{1} + \frac{\mathbf{V}_2}{1-j} = 0$$

y la ecuación de restricción de la LVK asociada es

$$\mathbf{V}_1 + 6 \angle 0^\circ = \mathbf{V}_2$$

Resolviendo para \mathbf{V}_1 en la segunda ecuación y utilizando este valor en la primera ecuación se obtiene

$$\frac{\mathbf{V}_2 - 6 \angle 0^\circ}{1+j} - 2 \angle 0^\circ + \mathbf{V}_2 + \frac{\mathbf{V}_2}{1-j} = 0$$

o

$$\mathbf{V}_2 \left[\frac{1}{1+j} + 1 + \frac{1}{1-j} \right] = \frac{6 + 2 + 2j}{1+j}$$

Resolviendo para \mathbf{V}_2 obtenemos

$$\mathbf{V}_2 = \left(\frac{4+j}{1+j} \right) \mathbf{V}$$

Por tanto,

$$\mathbf{I}_o = \frac{4+j}{1+j} = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}j \right) \text{A}$$

La red de la figura 9.19a se usa para llevar a cabo un análisis de malla. Observe que se selecciona una corriente de malla que pasa a través de la fuente de corriente independiente. Las tres ecuaciones de malla son

$$\mathbf{I}_1 = -2 \angle 0^\circ$$

$$1(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) + j1(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) - 6 \angle 0^\circ + 1(\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3) - j1(\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3) = 0$$

$$1\mathbf{I}_3 + 1(\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3) - j1(\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3) = 0$$

La combinación de las dos primeras ecuaciones da

$$\mathbf{I}_2(2) + \mathbf{I}_3(1-j) = 8 + 2j$$

La tercera ecuación de malla se puede simplificar en la forma

$$\mathbf{I}_2(1-j) + \mathbf{I}_3(2-j) = 0$$

Resolviendo esta última ecuación para \mathbf{I}_2 y sustituyendo el valor en la ecuación previa se obtiene

$$\mathbf{I}_3 \left[\frac{-4+2j}{1-j} + 1-j \right] = 8 + 2j$$

o

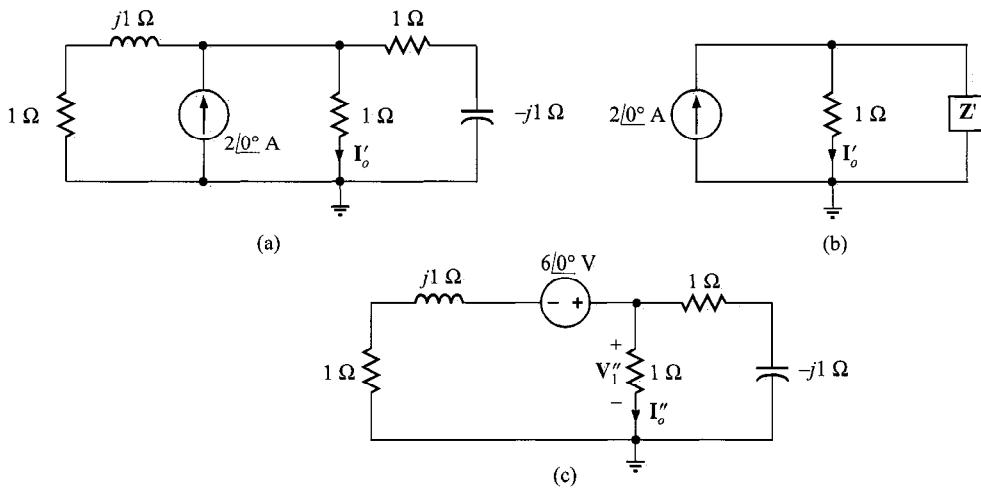


FIGURA 9.20 Circuitos utilizados en el ejemplo 9.18 para un análisis de superposición.

$$\mathbf{I}_3 = \frac{-10 + 6j}{4}$$

y finalmente

$$\mathbf{I}_o = -\mathbf{I}_3 = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}j \right) \text{ A}$$

Al usar la superposición, aplicamos una fuente independiente a la vez. La red en la que actúa sola la fuente de corriente se muestra en la figura 9.20a. Combinando las dos impedancias en paralelo en cada extremo de la red, obtenemos el circuito de la figura 9.20b donde

$$\mathbf{Z}' = \frac{(1+j)(1-j)}{(1+j) + (1-j)} = 1 \Omega$$

Por esto, usando el divisor de corriente

$$\mathbf{I}'_o = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

El circuito en el que la fuente de voltaje actúa sola se muestra en la figura 9.20c. El voltaje \mathbf{V}''_1 obtenido usando el divisor de voltaje es

$$\begin{aligned} \mathbf{V}''_1 &= \frac{(6 \angle 0^\circ) \left[\frac{1(1-j)}{1+1-j} \right]}{1+j + \left[\frac{1(1-j)}{1+1-j} \right]} \\ &= \frac{6(1-j)}{4} \text{ V} \end{aligned}$$

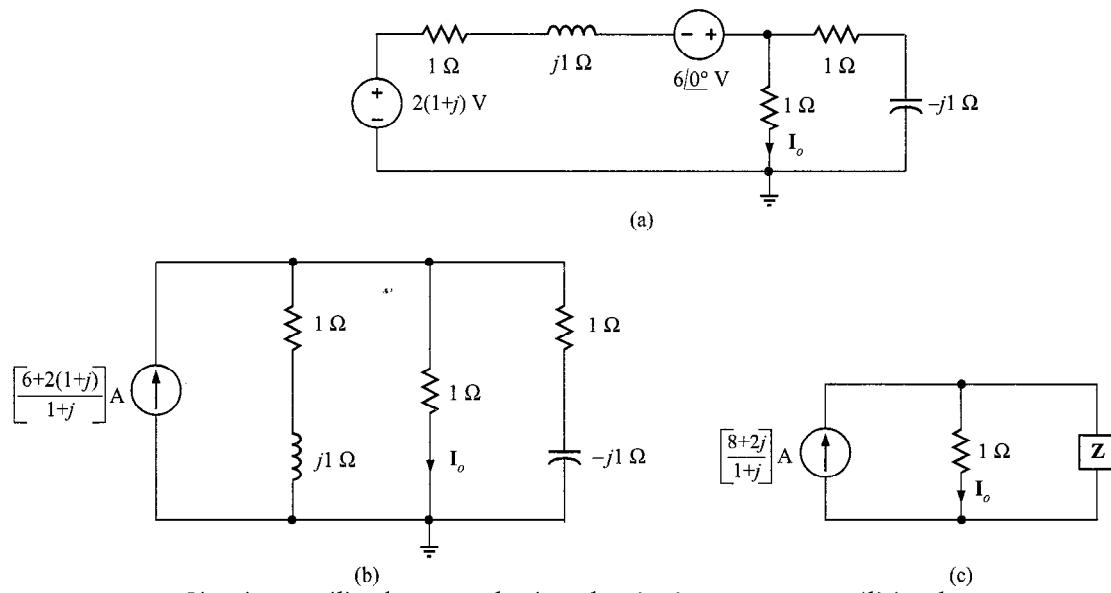


FIGURA 9.21 Circuitos utilizados en el ejemplo 9.18 para un análisis de intercambio de fuentes.

y de aquí,

$$\mathbf{I}'_o = \frac{6}{4} (1 - j) \text{ A}$$

Entonces

$$\mathbf{I}_o = \mathbf{I}'_o + \mathbf{I}''_o = 1 + \frac{6}{4} (1 - j) = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}j\right) \text{ A}$$

Como un primer paso en el método de intercambio de fuentes, intercambiamos la fuente de corriente y la impedancia en paralelo por una fuente de voltaje en serie con la impedancia como se muestra en la figura 9.21a.

La suma de las dos fuentes de voltaje y su transformación junto con la impedancia en serie en una fuente de corriente en paralelo con esa impedancia se muestra en la figura 9.21b. La combinación de las dos impedancias que están en paralelo con la resistencia de 1Ω produce la red de la figura 9.21c donde

$$\mathbf{Z} = \frac{(1+j)(1-j)}{1+j+1-j} = 1 \Omega$$

Por tanto, usando el divisor de corriente,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_o &= \left(\frac{8+2j}{1+j}\right)\left(\frac{1}{1+1}\right) = \frac{4+j}{1+j} \\ &= \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}j\right) \text{ A} \end{aligned}$$

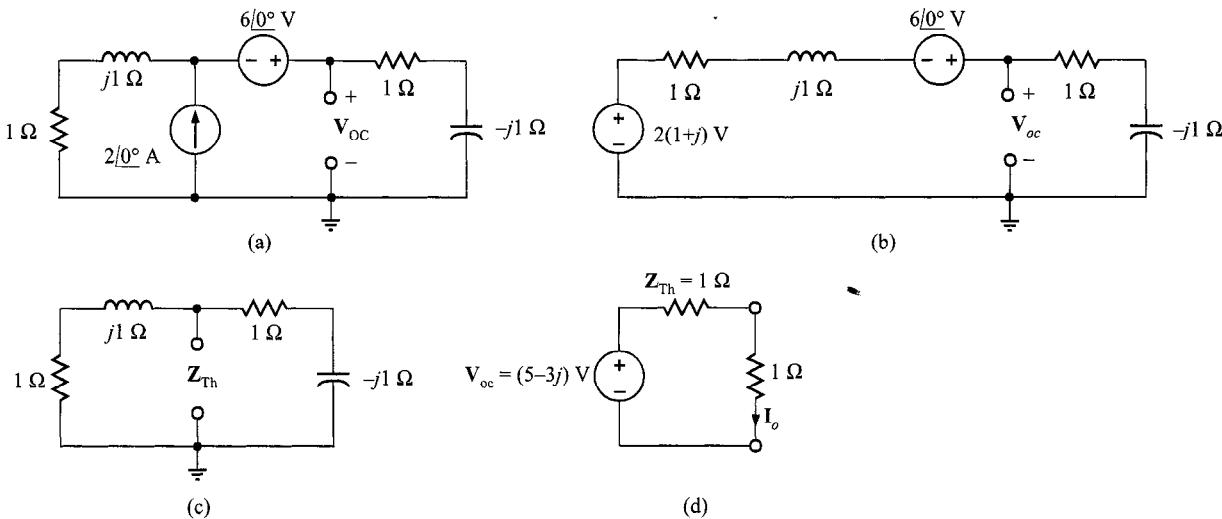


FIGURA 9.22 Circuitos utilizados en el ejemplo 9.18 para un análisis de Thévenin.

Para aplicar el teorema de Thévenin al circuito de la figura 9.19a, primero encontramos el voltaje de circuito abierto V_{oc} , como se muestra en la figura 9.22a. A fin de simplificar el análisis, llevamos a cabo un intercambio de fuente en el extremo izquierdo de la red, lo cual da como resultado el circuito de la figura 9.22b. Ahora usando el divisor de voltaje

$$V_{oc} = [6 + 2(1 + j)] \left[\frac{1 - j}{1 - j + 1 + j} \right]$$

o

$$V_{oc} = (5 - 3j) \text{ V}$$

La impedancia equivalente de Thévenin Z_{Th} , obtenida en las terminales del circuito abierto cuando la fuente de corriente se reemplaza con un circuito abierto y la fuente de voltaje se reemplaza con un corto circuito, se muestra en la figura 9.22c y su cálculo es

$$Z_{Th} = \frac{(1 + j)(1 - j)}{1 + j + 1 - j} = 1 \Omega$$

Conectando el circuito equivalente de Thévenin a la resistencia de 1Ω que contiene I_o en la red original se obtiene el circuito de la figura 9.22d. la corriente I_o es entonces

$$I_o = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}j \right) \text{ A}$$

Finalmente, para aplicar el teorema de Norton al circuito de la figura

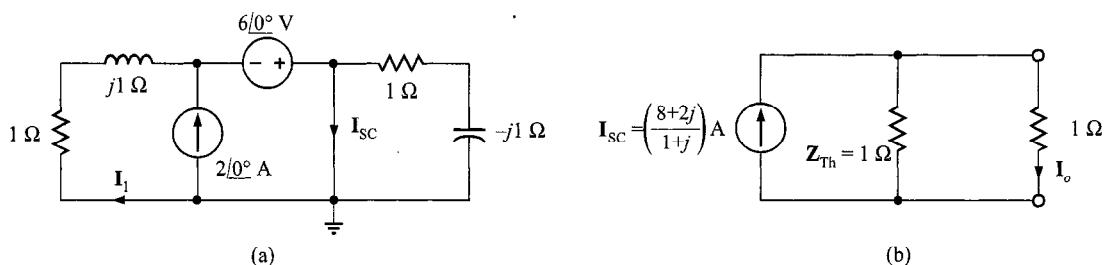


FIGURA 9.23 Circuitos utilizados en el ejemplo 9.18 para un análisis de Norton.

9.19a, calculamos la corriente de corto circuito, I_{sc} , usando la red de la figura 9.23a. Advierta que debido al corto circuito, la fuente de voltaje está directamente a lo largo de la impedancia en la rama del extremo izquierdo. Por tanto,

$$I_1 = \frac{6 \angle 0^\circ}{1+i}$$

Entonces, aplicado la LCK

$$\mathbf{I}_{sc} = \mathbf{I}_1 + 2 \angle 0^\circ = 2 + \frac{6}{1+j}$$

$$= \left(\frac{8+2j}{1+j} \right) \mathbf{A}$$

Se sabe que la impedancia equivalente de Thévenin, Z_{Th} , es $1\ \Omega$ y, por tanto, conectando el equivalente de Norton a la resistencia de $1\ \Omega$ que contiene I_o se obtiene la red de la figura 9.23b. Usando el divisor de corriente, encontramos que

$$\mathbf{I}_o = \frac{1}{2} \left(\frac{8 + 2j}{1 + j} \right) \\ = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}j \right) \mathbf{A}$$

E J E M P L O 9.19

Determinemos el voltaje V_o en el circuito de la figura 9.24a. En este ejemplo utilizaremos ecuaciones nodales, ecuaciones de malla, el teorema de Thévenin y el teorema de Norton. Omitiremos las técnicas de superposición y transformación de fuentes. ¿Por qué?

SOLUCIÓN A fin de llevar a cabo un análisis nodal, etiquetamos los voltajes nodales e identificamos el supernodo como se muestra en la figura 9.24b. La ecuación de restricción para el supernodo es

$$\mathbf{V}_3 + 12 \angle 0^\circ = \mathbf{V}_1$$

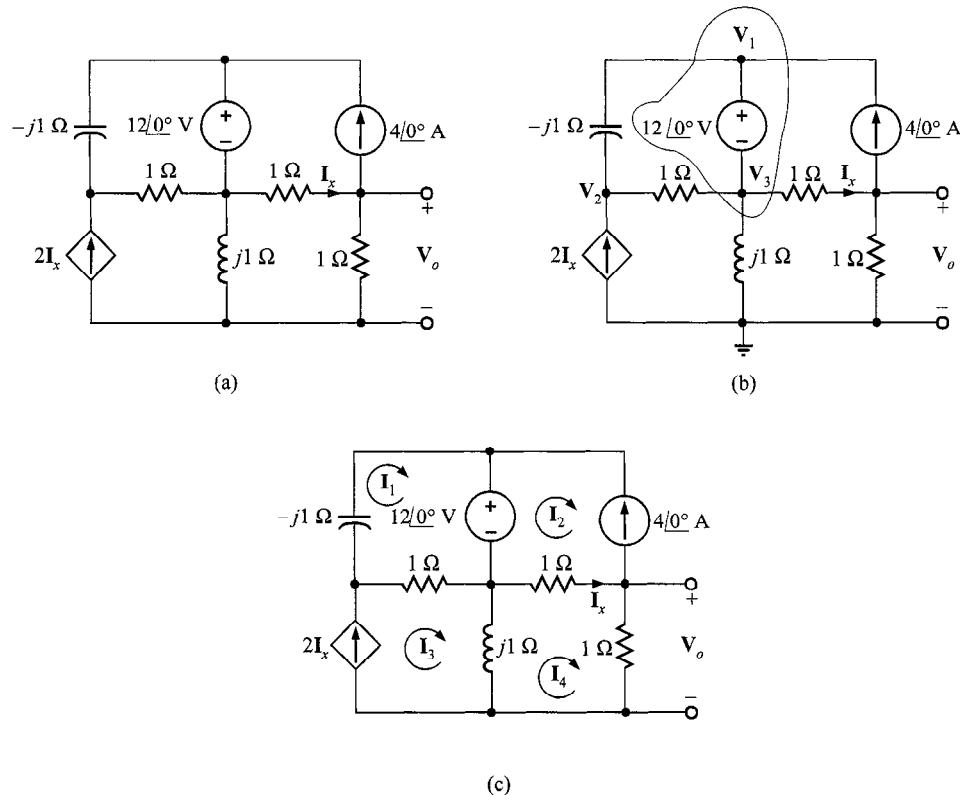


FIGURA 9.24 Circuitos utilizados en el ejemplo 9.19 para un análisis nodal y de malla.

y las ecuaciones de la LCK para los nodos de la red son

$$\frac{V_1 - V_2}{-j1} + \frac{V_3 - V_2}{1} - 4/0^\circ + \frac{V_3 - V_o}{1} + \frac{V_3}{j1} = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{-j1} + \frac{V_2 - V_3}{1} - 2\left(\frac{V_3 - V_o}{1}\right) = 0$$

$$4/0^\circ + \frac{V_o - V_3}{1} + \frac{V_o}{1} = 0$$

En este punto podemos resolver las ecuaciones anteriormente mencionadas usando un análisis matricial o, por ejemplo, sustituir la primera y la última ecuaciones en las restantes dos, lo cual da

$$3V_o - (1+j)V_2 = -(4+j12)$$

$$-(4+j2)V_o + (1+j)V_2 = 12+j16$$

Resolviendo esas ecuaciones para \mathbf{V}_o se obtiene

$$\mathbf{V}_o = \frac{-(8+j4)}{1+j2}$$

$$= -4 \angle -36.87^\circ \text{ V}$$

Las corrientes de anillo para la red están definidas en la figura 9.24c. Las ecuaciones de restricción para el circuito son

$$\mathbf{I}_2 = -4 \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_4 - \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_4 + 4 \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{I}_3 = 2\mathbf{I}_x = 2\mathbf{I}_4 + 8 \angle 0^\circ$$

Las ecuaciones de la LVK para el anillo 1 y para el anillo 4 son

$$-j1\mathbf{I}_1 + 1(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3) = -12 \angle 0^\circ$$

$$j1(\mathbf{I}_4 - \mathbf{I}_3) + 1(\mathbf{I}_4 - \mathbf{I}_2) + \mathbf{I}_4 = 0$$

Advierta que si las ecuaciones de restricción se sustituyen en la segunda ecuación de la LVK, la única incógnita en la ecuación es \mathbf{I}_4 . Esta sustitución da

$$\mathbf{I}_4 = -4 \angle -36.87^\circ \text{ A}$$

y de aquí,

$$\mathbf{V}_o = -4 \angle -36.87^\circ \text{ V}$$

Para aplicar el teorema de Thévenin, encontraremos el voltaje de circuito abierto y entonces determinaremos la impedancia equivalente de Thévenin usando una fuente de prueba en las terminales del circuito abierto. Podemos determinar la impedancia equivalente de Thévenin calculando la corriente de cortocircuito; sin embargo, determinaremos esta corriente cuando apliquemos el teorema de Norton.

El voltaje de circuito abierto se determina partiendo de la red de la figura 9.25a. Advierta que $\mathbf{I}'_x = 4 \angle 0^\circ \text{ A}$, y como $2\mathbf{I}'_x$ fluye a través de la bobina, el voltaje de circuito abierto \mathbf{V}_{oc} es

$$\mathbf{V}_{oc} = -1(4 \angle 0^\circ) + j1(2\mathbf{I}'_x)$$

$$= -4 + j8 \text{ V}$$

Para determinar la impedancia equivalente de Thévenin, apagamos las fuentes independientes, aplicamos una fuente de voltaje de prueba en las terminales de salida y calculamos la corriente que sale de la fuente de prueba. Como se muestra en la figura 9.25b, ya que \mathbf{I}''_x fluye en la fuente de prueba, la LCK requiere que la corriente en la bobina también sea \mathbf{I}''_x . La LVK alrededor del anillo que contiene la fuente de prueba indica que

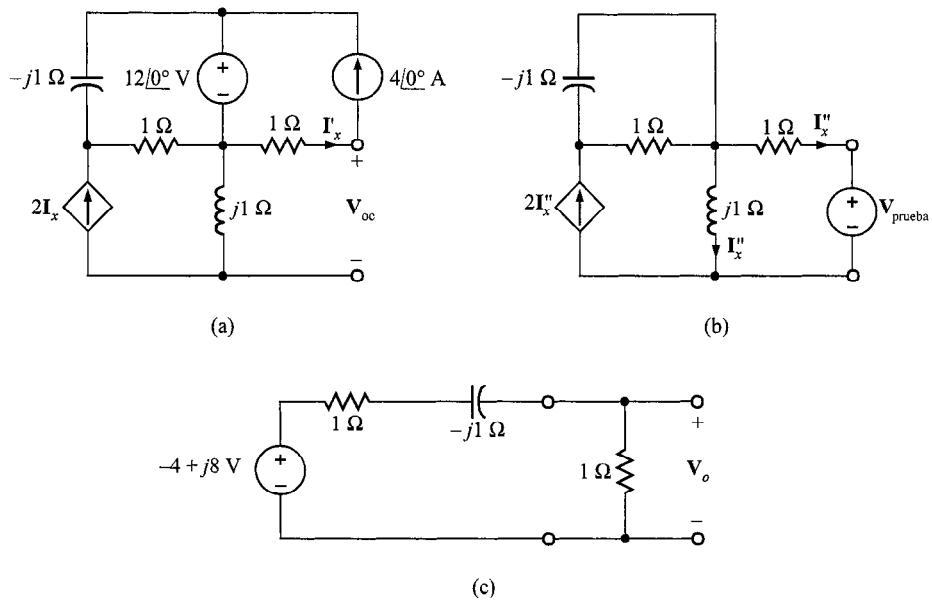


FIGURA 9.25 Circuitos utilizados en el ejemplo 9.19 cuando se aplica el teorema de Thévenin.

$$j1I''_x - 1I''_x - V_{\text{prueba}} = 0$$

Por tanto,

$$I''_x = \frac{-V_{\text{prueba}}}{1-j}$$

Entonces

$$\begin{aligned} Z_{\text{Th}} &= \frac{V_{\text{prueba}}}{-I''_x} \\ &= 1-j \Omega \end{aligned}$$

Si ahora se conecta la red equivalente de Thévenin a la carga como se muestra en la figura 9.25c, se encuentra que el voltaje de salida V_o es

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{-4 + j8}{2 - j1} (1) \\ &= -4 \angle -36.87^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Al usar el teorema de Norton, encontraremos la corriente de corto circuito a partir de la red de la figura 9.26a. Una vez más, usando el super-nodo, las ecuaciones de restricción y de la LCK son

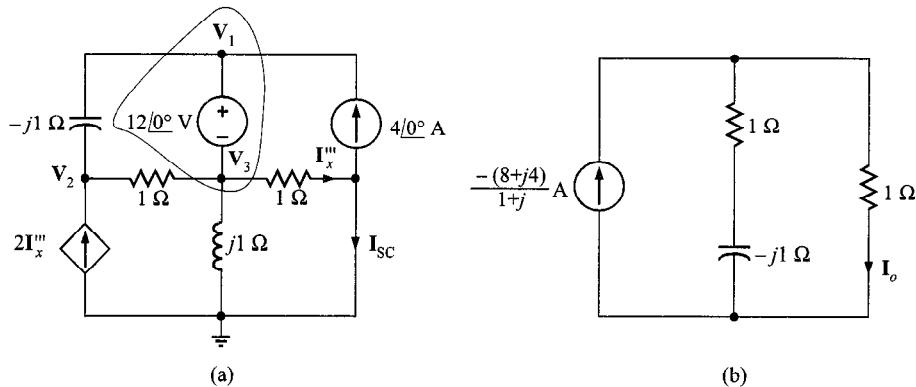


FIGURA 9.26 Circuitos utilizados en el ejemplo 9.19 cuando se aplica el teorema de Norton.

$$\mathbf{V}_3 + 12 \angle 0^\circ = \mathbf{V}_1$$

$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{-i1} + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3}{1} - 2\mathbf{I}_x''' = 0$$

$$\frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{-i1} + \frac{\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2}{1} - 4 \angle 0^\circ + \frac{\mathbf{V}_3}{i1} + \mathbf{I}_x''' = 0$$

$$I_x''' = \frac{V_3}{1}$$

Sustituyendo la primera y la última ecuación en las ecuaciones restantes se obtiene

$$(1+j)\mathbf{V}_2 - (3+j)\mathbf{I}_x''' = j12$$

$$-(1+j)\mathbf{V}_2 + (2)\mathbf{I}_x''' = 4 - j12$$

Resolviendo esas ecuaciones para I'_x se obtiene

$$I_x''' = \frac{-4}{1+j} \text{ A}$$

La ecuación de la LCK en el nodo de la extrema derecha en la red de la figura 9.26a es

$$\mathbf{I}_x''' = 4 /0^\circ + \mathbf{I}_{sc}$$

Resolviendo para I_{sc} obtenemos

$$I_{sc} = \frac{-(8+j4)}{1+j} \text{ A}$$

Se encontró con anterioridad que la impedancia equivalente de Thévenin era

$$\mathbf{Z}_{\text{Th}} = (1 - j) \Omega$$

Usando la red equivalente de Norton, la red original se reduce a la que se muestra en la figura 9.26b. El voltaje V_o es entonces

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{-(8+j4)}{1+j} \left[\frac{(1)(1-j)}{1+1+j} \right] \\ &= -4 \left[\frac{3-j}{3+j} \right] \\ &= -4 \angle -36.87^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D9.13 Use análisis nodal para encontrar V_o en la red de la figura D9.13.

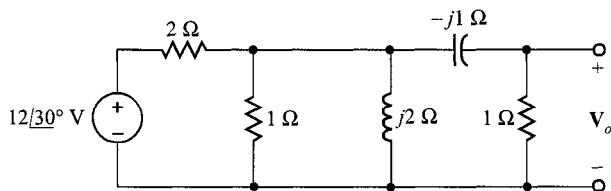


FIGURA D.9.13

Resp.: $V_o = 2.12 \angle 75^\circ \text{ V}$.

D9.14 Use ecuaciones de anillo para encontrar V_o en la red de la figura D9.14.

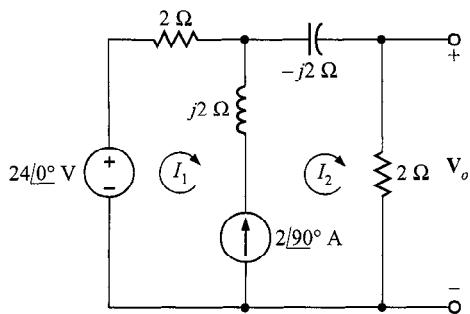


FIGURA D.9.14

Resp.: $V_o = 10.88 \angle 36^\circ \text{ V}$.

D9.15 Usando superposición, encuentre V_o en la red de la figura D9.15.

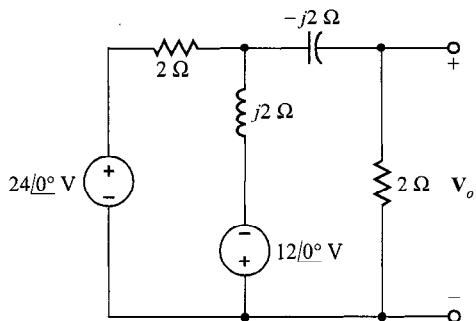


FIGURA D.9.15

Resp.: $V_o = 12 \angle 90^\circ \text{ V}$.

D9.16 Encuentre V_o en la red de la figura D9.14 usando transformación de fuentes.

Resp.: $V_o = 12 \angle 90^\circ \text{ V}$.

D9.17 Encuentre V_o en la red de la figura D9.14 usando el teorema de Thévenin.

Resp.: $V_o = 10.86 \angle 36.53^\circ \text{ V}$.

D9.18 Use el teorema de Norton para encontrar V_o en la red de la figura D9.15.

Resp.: $V_o = 12 \angle 90^\circ \text{ V}$.

9.9 Técnicas de análisis con PSPICE

La parte del análisis de ca con PSPICE es similar a la del análisis de cd, excepto que se obtiene una solución de estado estable en el dominio de frecuencia. El circuito resuelto por el PSPICE es un circuito en el dominio de frecuencia. Como el análisis tiene lugar en el dominio de frecuencia, todas las fuentes de ca deben ser senoidales y tener la misma frecuencia. La computadora calcula las impedancias de todas las ramas a partir de los valores de salida de los elementos (y la frecuencia), y el programador proporciona las magnitudes y los ángulos de fases de todas las fuentes. Las fuentes dependientes también son fasores y siempre son una constante de tiempo y un voltaje o corriente de rama.

Hemos presentado ya, en los capítulos 5 y 7, todas las herramientas necesarias para un análisis con PSPICE en este caso, con la excepción del comando de control de solución apropiado. Para una análisis de ca, el comando de control de solución es

```
.AC XXX NO FSTART FSTOP
```

XXX es DEC para variación por decenas, OCT por octavos, o LIN para variación lineal. NO es el número de puntos por decena, octava o por los puntos totales, dependiendo de si se especificó DEC, OCT o LIN es la frecuencia de inicio, y FSTART es la frecuencia de inicio, y FSTOP es la frecuencia final, ambas en hertz. Observe que el comando AC no es significativo si no se especifican como fuentes independientes de ca.

Para el análisis de ca, se pueden usar cinco variables de salida adicionales reemplazando V por

VR	parte real
VI	parte imaginaria
VM	magnitud
VP	fase
VDB	$20 \log_{10}$ (magnitud)

Advierta que, en este capítulo, usaremos sólo la variación lineal. De hecho, calcularemos los voltajes y corrientes desconocidos en sólo una frecuencia; es decir, la frecuencia de la fuente no será variada. Las variaciones por decena o por octava se explican y se usan en el capítulo 13.

Un comando típico de impresión que se usa en el análisis de ca es

```
.PRINT AC VM(1) VP(1) IM(1) IP(1) VM(3,4) VP(3,4)
```

Advierta que en contraste con el análisis de cd, podemos calcular el voltaje o corriente entre dos nodos que no son de referencia.

Los siguientes ejemplos servirán para ilustrar el uso de PSPICE en un análisis de ca.

EJEMPLO 9.20

Usemos PSPICE para determinar el voltaje V_o en la red de la figura 9.27.

SOLUCIÓN Observe que la frecuencia de las fuentes es 400 Hz. El programa de PSPICE que calcula el voltaje de salida es el que sigue.

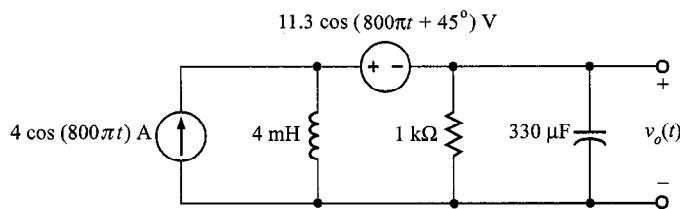


FIGURA 9.27 Circuito utilizado en el ejemplo 9.20.

EXAMPLE 9.20

```

V1 1 2 AC 11.3 45
I1 0 1 AC 4 0
R1 2 0 1K
C1 2 0 330U
L1 1 0 4MH
*AC ANALYSIS
.AC LIN 1 400 400
.PRINT AC VM(2) VP(2)
.END

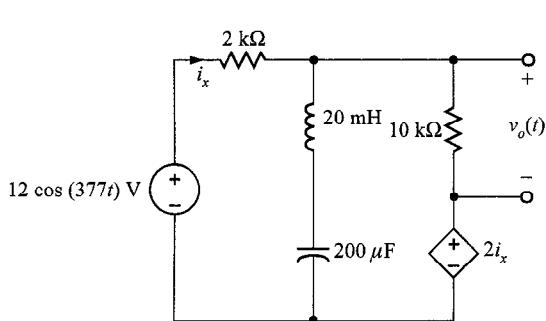
```

El listado de salida de la computadora incluye

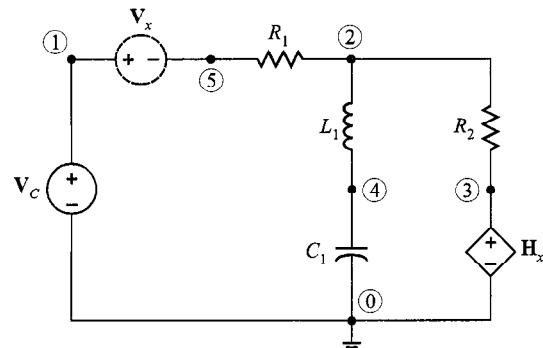
FREQ	VM(2)	VP(2)
4.000E+02	4.524E+00	-7.599E+01

E J E M P L O 9.21

Usemos PSPICE para determinar el voltaje de salida en la red de la figura 9.28.



(a)



(b)

FIGURA 9.28 Circuitos utilizados en el ejemplo 9.21.

SOLUCIÓN Note que la frecuencia de la fuente es 60 Hz. El programa PSPICE para calcular el voltaje de salida V_o es

```
EXAMPLE 9.21
VC 1 0 AC 12 0
VX 1 5 AC 0
HX 3 0 VX 2
R1 5 2 2K
R2 2 3 10K
C1 4 0 200UF
L1 2 4 20MH
*ANALYSIS
.AC LIN 1 60 60
.PRINT AC VM(2,3) VP(2,3)
.END
```

El listado de salida de la computadora incluye lo siguiente:

FREQ	VM(2,3)	VP(2,3)
6.000E+01	3.637E-02	-1.091E+02

EJEMPLO 9.22

Determinemos el voltaje V_o en el circuito que se muestra en la figura 9.29a.

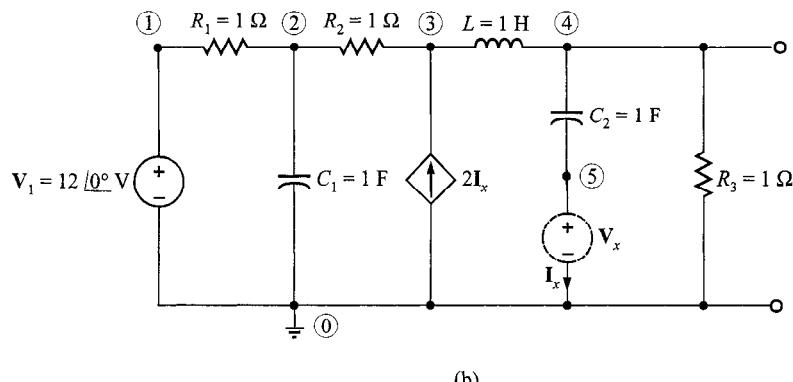
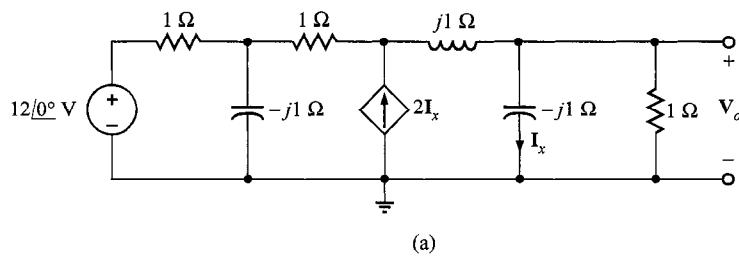


FIGURA 9.29 Circuitos utilizados en el ejemplo 9.22.

SOLUCIÓN Esta red se dibuja de nuevo para un análisis con PSPICE en la figura 9.29b. Note que la red está especificada en el dominio de frecuencia, y ésta no se estableció explícitamente. Para el análisis de PSPICE debemos establecer los valores de la frecuencia y de los parámetros. Somos libres de seleccionar cualquier frecuencia y parámetros del circuito que sean consistentes con los valores de impedancia dados. Un valor conveniente es $f = 1/2\pi$ hertz, el cual da $\omega = 1$ rad/segundos.

El programa del PSPICE para calcular el voltaje de salida es

```
EXAMPLE 9.22 AC ANALYSIS
V1 1 0 AC 12 0
R1 1 2 1
C1 2 0 1
R2 2 3 1
F1 0 3 VX 2
L1 3 4 1
C2 4 5 1
VX 5 0 AC 0 0
R3 4 0 1
.AC LIN 1 0.159155 0.159155
.PRINT AC VM(4) VP(4)
.END
```

La salida de la computadora para el programa es

FREQ	VM(4)	VP(4)
1.592E-01	6.000E+00	2.049E-05

Como nuestro método de análisis en este capítulo ha estado limitado a una sola frecuencia, los ejemplos con PSPICE han mantenido ese formato. Sin embargo, el uso de rutinas de gráficos para el análisis sobre intervalos de frecuencia se presenta en el capítulo 13.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D9.19 Dada la red de la figura D9.19, calcule V_o e I_o usando PSPICE si la frecuencia es $f = 1/2\pi$ Hz.

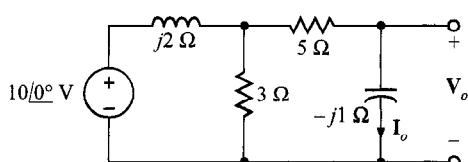


FIGURA D9.19

Resp.: $V_o = 1.402 \angle -127.4^\circ$ V, $I_o = 1.402 \angle -37.4^\circ$ A.

D9.20 Usando PSPICE, calcule V_o en la red de la figura D9.20.

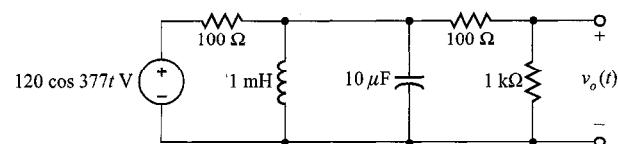


FIGURA D9.20

Resp.: $V_o = 0.4118 \angle 89.76^\circ$ V.

9.10 Resumen

En este capítulo se mostró que nuestro método de solución para circuitos de ca incluye un análisis en el dominio de frecuencia. Un conjunto de ecuaciones diferenciales con funciones forzantes senoidales en el dominio del tiempo se transformó en un conjunto de ecuaciones algebraicas con coeficientes complejos en el dominio de frecuencia. Se introdujo el método fasorial y se establecieron relaciones fasoriales para los elementos de circuito. Se resolvieron ecuaciones algebraicas en el dominio de frecuencia que incluyen las cantidades desconocidas del circuito usando la técnica de fasores.

La impedancia y la admitancia se presentaron y se utilizaron junto con los fasores para resolver circuitos de ca que contienen una sola fuente. La técnica de solución se basa en los siguientes hechos: 1) las leyes de Kirchhoff valen para corrientes y voltajes fasoriales, y 2) para una impedancia \mathbf{Z} , su voltaje y corriente están relacionados por $\mathbf{V} = \mathbf{IZ}$.

Hemos mostrado que todas las técnicas de análisis, como el teorema de Thévenin, que fueron aplicadas efectivamente en el análisis de circuitos de cd también son aplicables en el análisis de ca en estado estable. Finalmente, hemos demostrado el uso de PSPICE en la solución de problemas de circuitos de ca en estado estable.

Puntos clave

- La función senoidal $x(t) = X_M \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ tiene una amplitud de X_M , una frecuencia de radián de ω , un periodo de $2\pi/\omega$, y un ángulo de fase de θ .
- Si $x_1(t) = X_{M_1} \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ y $x_2(t) = X_{M_2} \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$, $x_1(t)$ adelanta a $x_2(t)$ por $\theta - \phi$ radianes y $x_2(t)$ está atrasado de $x_1(t)$ por $\theta - \phi$ radianes.
- Cuando se compara una función senoidal con otra de la misma frecuencia para determinar la diferencia de fase, es necesario expresar ambas funciones como senos o cosenos con amplitudes positivas.
- El voltaje senoidal $v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta)$ puede escribirse en forma exponencial como $v(t) = \operatorname{Re}[V_M e^{j(\omega t + \theta)}]$ y en forma fasorial como $\mathbf{V} = V_M \angle \theta$.
- Si θ_v y θ_i representan los ángulos de fase del voltaje en paralelo y la corriente a lo largo de un elemento de circuito, entonces $\theta_i = \theta_v$ si el elemento es una resistencia, θ_i está retrasada de θ_v en 90° si el elemento es una bobina, θ_i adelanta a θ_v por 90° si el elemento es un capacitor.
- La impedancia, \mathbf{Z} , se define como la razón del voltaje fasorial, \mathbf{V} , a la corriente fasorial, \mathbf{I} , donde $\mathbf{Z} = R$ para una resistencia, $\mathbf{Z} = j\omega L$ para una bobina y $\mathbf{Z} = 1/j\omega C$ para un capacitor.
- \mathbf{Z} y \mathbf{Y} son funciones de frecuencia y, por consiguiente, sus valores cambian a medida que cambia la frecuencia.
- La LCK y la LVK se aplican en el dominio de frecuencia.
- Todas las técnicas de análisis como ecuaciones nodales, ecuaciones de malla, ecuaciones de anillo, superposición, intercambio de fuentes, teorema de Thévenin y teorema de Norton también son aplicables al análisis de ca en estado estable.
- El PSPICE puede usarse de forma efectiva para analizar problemas de circuitos de ca en estado estable.

Problemas

9.1. Determine la posición relativa de las dos ondas seno.

$$v_1(t) = 12 \operatorname{sen}(377t - 45^\circ)$$

$$v_2(t) = 6 \operatorname{sen}(377t + 675^\circ)$$

9.2. Dada $i(t) = 5 \cos(400t - 120^\circ)$ A, determine el periodo de la corriente y la frecuencia en hertz.

9.3. Escriba la expresión para la forma de onda que se muestra en la figura P9.3 como una función de coseno con valores numéricos para la amplitud, frecuencia y fase.

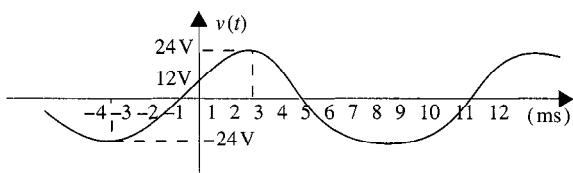


FIGURA P9.3

9.4. Dadas las siguientes corrientes

$$i_1(t) = 4 \operatorname{sen}(377t - 10^\circ)$$

$$i_2(t) = -2 \cos(377t - 195^\circ)$$

$$i_3(t) = -1 \operatorname{sen}(377t - 250^\circ)$$

Calcule el ángulo de fase entre cada par de corrientes.

9.5. Determine los ángulos de fase mediante los que $v_1(t)$ adelanta a $i_1(t)$ y $v_1(t)$ adelanta a $i_2(t)$, donde

$$v_1(t) = 4 \operatorname{sen}(377t + 25^\circ)$$

$$i_1(t) = 0.05 \cos(377t - 10^\circ)$$

$$i_2(t) = -0.1 \operatorname{sen}(377t + 75^\circ)$$

9.6. Calcule la corriente en la resistencia de la figura P9.6 si el voltaje de entrada es

a) $v_1(t) = 10 \cos(377t + 180^\circ)$ V.

b) $v_2(t) = 12 \operatorname{sen}(377t + 45^\circ)$ V.

Dé las respuestas en los dominios de tiempo y de frecuencia.

9.7. Calcule la corriente en el capacitor que se muestra en la figura P9.7 si el voltaje de entrada es

a) $v_1(t) = 16 \cos(377t - 22^\circ)$ V.

b) $v_2(t) = 8 \operatorname{sen}(377t + 64^\circ)$ V.

Dé las respuestas en los dominios de tiempo y de frecuencia.

9.8. Calcule la corriente en la bobina que se muestra en la figura P9.8 si el voltaje de entrada es

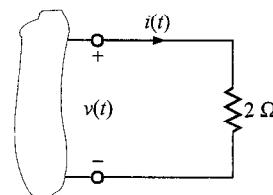


FIGURA P9.6

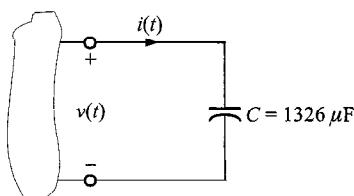


FIGURA P9.7

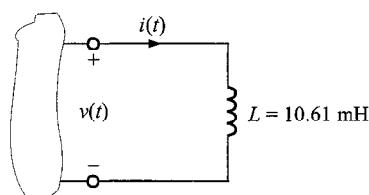


FIGURA P9.8

a) $v_1(t) = 24 \cos(377t + 12^\circ)$ V.

b) $v_2(t) = 18 \operatorname{sen}(377t - 48^\circ)$ V.

Dé las respuestas en los dominios de tiempo y de frecuencia.

9.9. Encuentre la impedancia, Z , en el dominio de frecuencia, como se muestra en la figura P9.9.

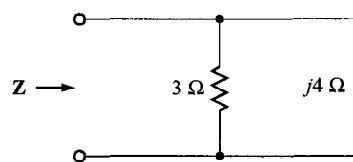


FIGURA P9.9

9.10. Encuentre la impedancia, Z , en el dominio de frecuencia, como se muestra en la figura P9.10.

9.11. Encuentre la impedancia, Z , en el dominio de frecuencia, como se muestra en la figura P9.11.

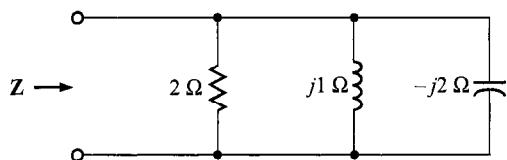


FIGURA P9.10

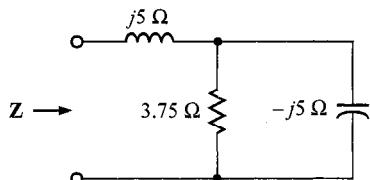


FIGURA P9.11

9.12. Encuentre la impedancia, Z , en el dominio de frecuencia, como se muestra en la figura P9.12.

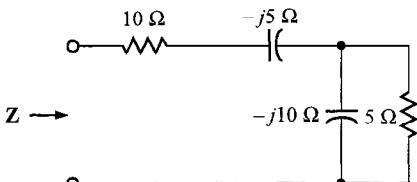


FIGURA P9.12

9.13. Calcule la impedancia Z_{ab} en el circuito de la figura P9.13: a) con el interruptor abierto, y b) con el interruptor cerrado.

9.14. En la red de la figura P9.14, encuentre $Z(j\omega)$ a la frecuencia de 60 Hz.

9.15. En Europa, la red de potencia eléctrica opera a una frecuencia de 509 Hz. Encuentre $Z(j\omega)$ del problema 9.14 a $f = 50$ Hz.

9.16. Calcule la impedancia equivalente en las terminales $A-B$ en el circuito que se muestra en la figura P9.16.

9.17. Encuentre Z en la red de la figura P9.17.

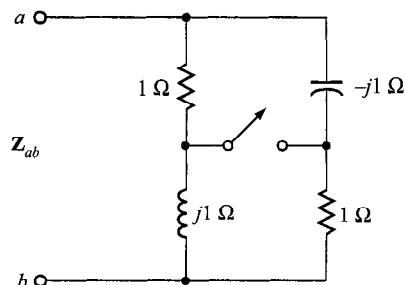


FIGURA P9.13

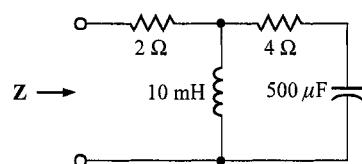


FIGURA P9.14

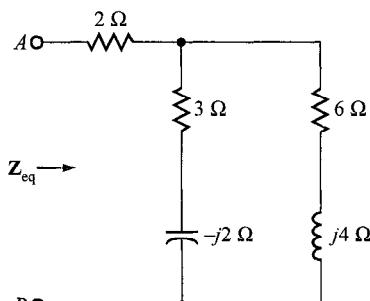


FIGURA P9.16

9.18. Encuentre \mathbf{Y} en la red de la figura P9.18.

9.19. Encuentre \mathbf{Z} en la red de la figura P9.19.

9.20. Encuentre \mathbf{Z} en la red de la figura P9.20.

9.21. Encuentre \mathbf{Z} en la red de la figura P9.21.

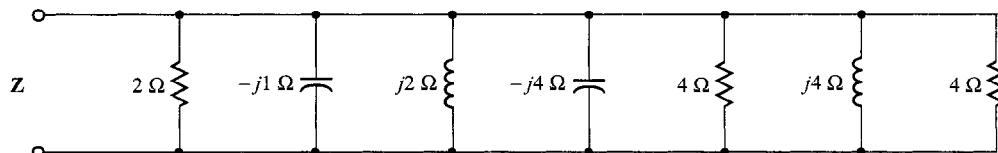


FIGURA P9.17

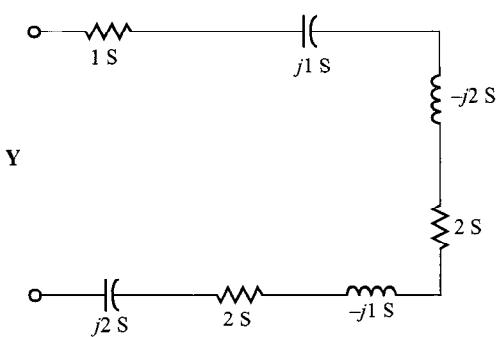


FIGURA P9.18

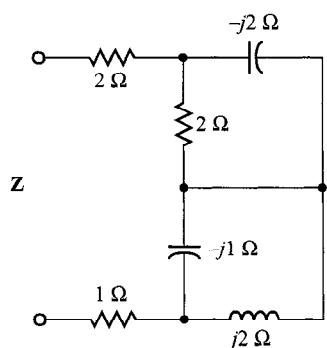


FIGURA P9.19

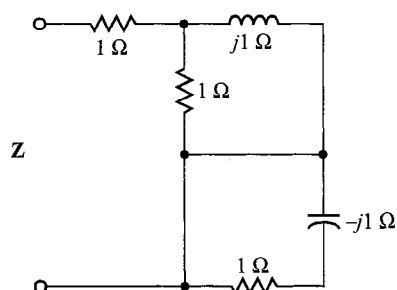


FIGURA P9.20

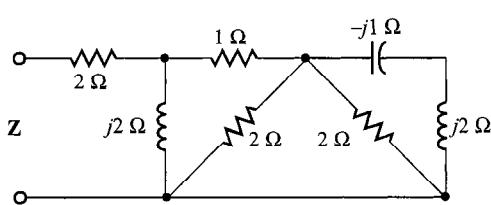


FIGURA P9.21

9.22. Encuentre Z en la red de la figura P9.22.

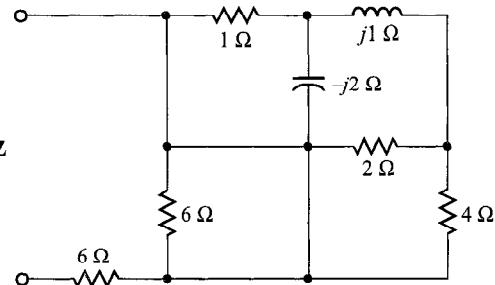


FIGURA P9.22

9.23. Determine los valores de los dos elementos en paralelo R_p y L_p o C_p en la red de la figura P9.23, de modo que la impedancia Z es $10 - j20 \Omega$ como $\omega = 250$ r/s.

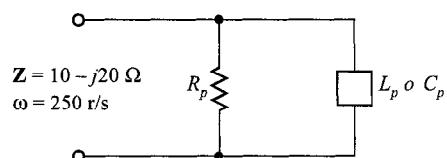


FIGURA P9.23

9.24. Dos elementos (R , L , C) conectados en paralelo como se muestra en la figura P9.24 tienen una impedancia $Z = 20 + j10 \Omega$ como $\omega = 500$ r/s. Determine los elementos y sus valores.

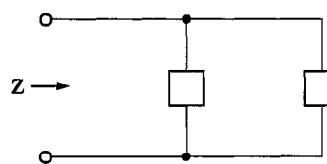


FIGURA P9.24

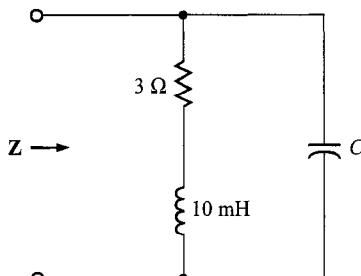
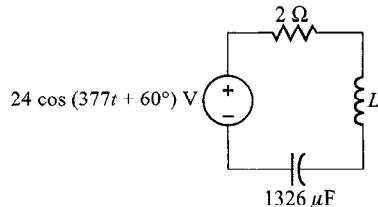
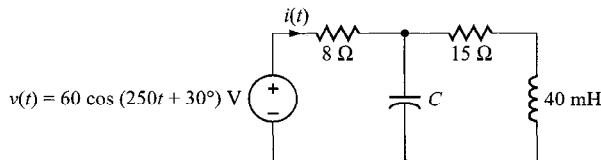
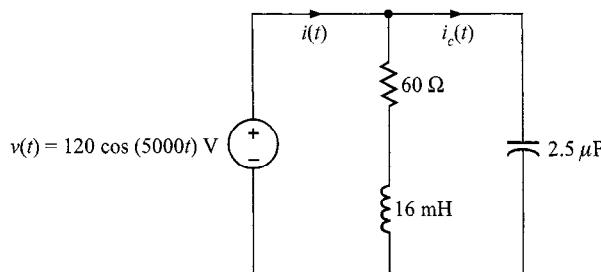
9.25. Se encuentra que la impedancia de la red de la figura P9.25 es puramente real en $f = 60$ Hz. ¿Cuál es el valor de C ?

9.26. En el circuito que se muestra en la figura P9.26, determine el valor de la inductancia tal que la corriente esté en fase con la fuente de voltaje.

9.27. Encuentre el valor de la capacitancia, C , que se muestra en el circuito de la figura P9.27, de modo que $i(t)$ esté en fase con la fuente de voltaje.

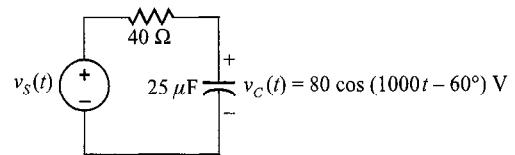
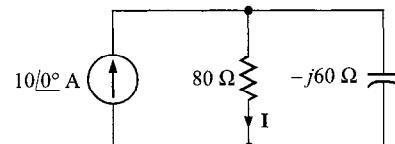
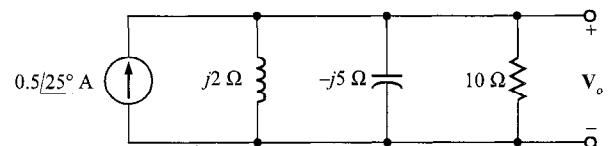
9.28. Encuentre $i_C(t)$ e $i(t)$ en la red de la figura P9.28.

9.29. Encuentre $v_S(t)$ en el circuito de la figura P9.29.

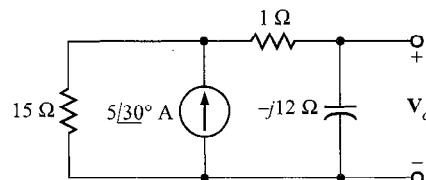
**FIGURA P9.25****FIGURA P9.26****FIGURA P9.27****FIGURA P9.28**

9.30. Encuentre la corriente \mathbf{I} en el dominio de frecuencia, como se muestra en la figura P9.30.

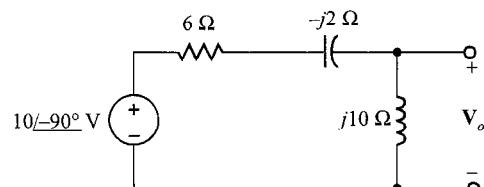
9.31. Encuentre el voltaje \mathbf{V}_o , en el dominio de frecuencia, como se muestra en la figura P9.31.

**FIGURA P9.29****FIGURA P9.30****FIGURA P9.31**

9.32. Encuentre el voltaje \mathbf{V}_o , en el dominio de frecuencia, como se muestra en la figura P9.32.

**FIGURA P9.32**

9.33. Encuentre el voltaje \mathbf{V}_o , en el dominio de frecuencia, como se muestra en la figura P9.33.

**FIGURA P9.33**

9.34. Encuentre el voltaje \mathbf{V}_o , en el dominio de frecuencia, como se muestra en la figura P9.34.

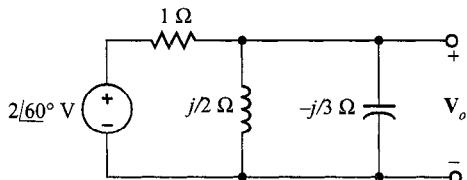


FIGURA P9.34

- 9.35. Encuentre la corriente I en el dominio de frecuencia, como se muestra en la figura P9.35.

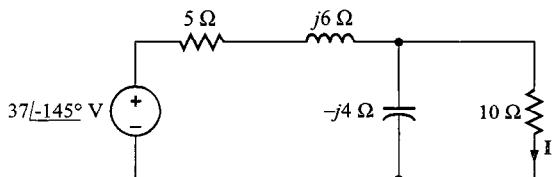


FIGURA P9.35

- 9.36. Encuentre V_o en el circuito de la figura P9.36.

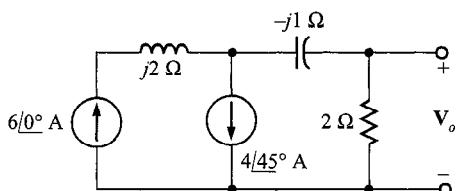


FIGURA P9.36

- 9.37. Encuentre I_1 y V_o en la red de la figura P9.37.

- 9.38. Dibuje la red en el dominio de frecuencia y calcule $i(t)$ en el circuito que se muestra en la figura P9.38 si $v_s(t)$ es $10 \cos(100t + 45^\circ)$ V. También, usando un diagrama fasorial, muestre que $v_L(t) + v_R(t) = v_s(t)$.

- 9.39. Dibuje la red en el dominio de frecuencia y calcule $i(t)$ en el circuito que se muestra en la figura P9.39 si $v_s(t)$ es $15 \sin(1000t)$ V. También, usando un diagrama fasorial, muestre que $v_C(t) + v_R(t) = v_s(t)$.

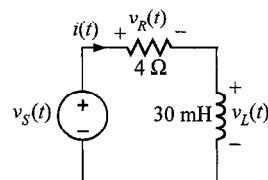


FIGURA P9.38

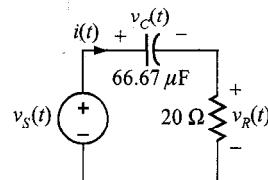


FIGURA P9.39

- 9.40. Dibuje la red en el dominio de frecuencia y calcule $i(t)$ en el circuito que se muestra en la figura P9.40 si $v_s(t)$ es $20 \cos(100t + 45^\circ)$ V. También, usando un diagrama fasorial, muestre que $v_C(t) + v_R(t) + v_L(t) = v_s(t)$.

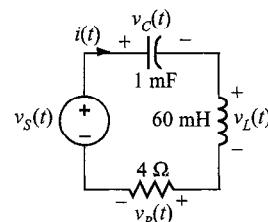


FIGURA P9.40

- 9.41. Dibuje la red en el dominio de frecuencia y calcule $v_o(t)$ en el circuito que se muestra en la figura P9.41 si $i_s(t)$ es $1 \cos(2500t - 45^\circ)$ A. También, usando un diagrama fasorial, muestre que $i_C(t) + i_R(t) = i_s(t)$.

- 9.42. Dibuje la red en el dominio de frecuencia y calcule $v_o(t)$ en el circuito que se muestra en la figura P9.42 si $i_s(t)$

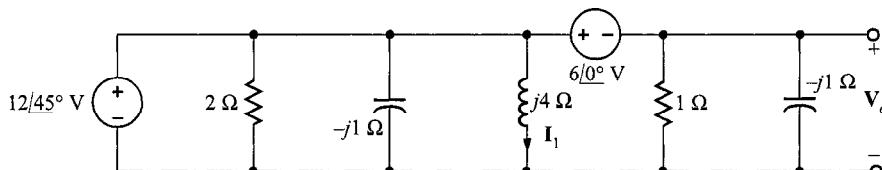


FIGURA P9.37

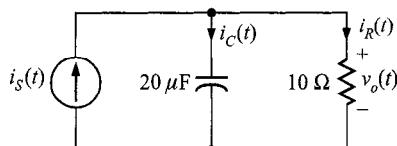


FIGURA P9.41

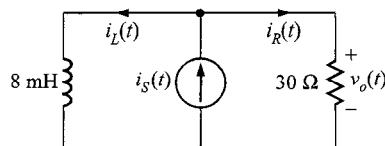


FIGURA P9.42

es $100 \cos(5000t + 8.13^\circ)$ mA. También, usando un diagrama fasorial, muestre que $i_L(t) + i_R(t) = i_s(t)$.

- 9.43.** Dibuje la red en el dominio de frecuencia y calcule $v_o(t)$ en el circuito que se muestra en la figura P9.43 si $i_s(t)$ es $300 \sin(10^4t - 45^\circ)$ mA. También, usando un diagrama fasorial, mostrar que $i_1(t) + i_2(t) = i_s(t)$.

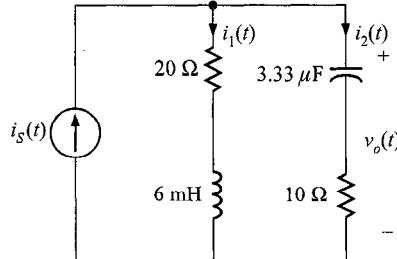


FIGURA P9.43

- 9.44.** Dibuje la red en el dominio de frecuencia y calcule $v_o(t)$ en el circuito que se muestra en la figura P9.44 si $v_s(t)$ es $4 \sin(500t + 45^\circ)$ V e $i_s(t)$ es $1 \cos(500t + 45^\circ)$ A. También, usando un diagrama fasorial, determine $v_1(t)$.

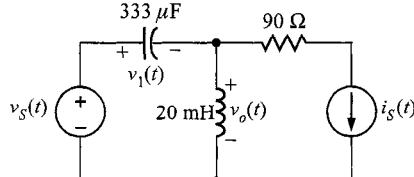


FIGURA P9.44

- 9.45.** Dibuje la red en el dominio de frecuencia y calcule $v_o(t)$ en el circuito que se muestra en la figura P9.45 si $i_1(t)$

es $200 \cos(10^5t + 60^\circ)$ mA, $i_2(t)$ es $100 \sin(10^5t + 90^\circ)$ mA y $v_s(t) = 10 \sin(10^5t)$ V. También, use un diagrama fasorial para determinar $v_C(t)$.

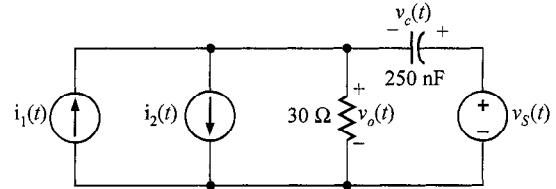


FIGURA P9.45

- 9.46.** Dibuje la red en el dominio de frecuencia y calcule $v_o(t)$ en el circuito que se muestra en la figura P9.46 si $v_s(t)$ es $10 \cos(10^4t + 30^\circ)$ V. También, use un diagrama fasorial para determinar $v_L(t)$.

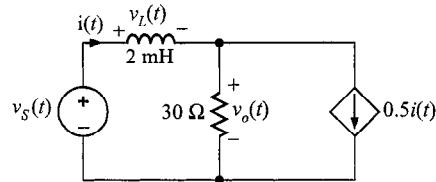


FIGURA P9.46

- 9.47.** Dibuje la red en el dominio de frecuencia y calcule $v_o(t)$ en el circuito que se muestra en la figura P9.47 si $v_s(t)$ es $10 \cos(2\pi ft)$ V donde $f = 400$ Hz. También, use un diagrama fasorial para determinar $v(t)$.

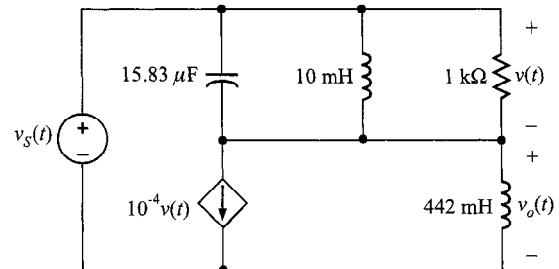


FIGURA P9.47

- 9.48.** Usando V_S como referencia, grafique los diagramas fasoriales para todos los voltajes y corrientes en la figura P9.48.

- 9.49.** Dada la red de la figura P9.49, grafique los diagramas fasoriales para todos los voltajes y corrientes.

- 9.50.** Dada la red de la figura P9.50, grafique los diagramas fasoriales para a) las corrientes I_1 , I_2 , e I_3 , y b) las corrientes I_3 , I_4 , e I_5 .

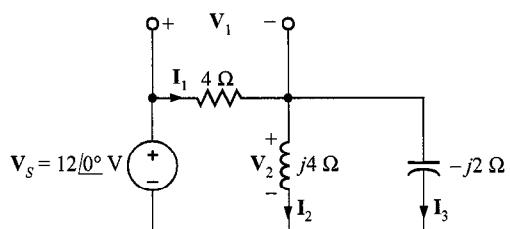


FIGURA P9.48

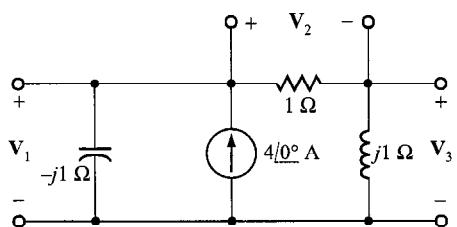


FIGURA P9.49

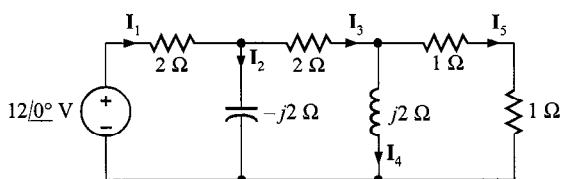


FIGURA P9.50

9.51. Encuentre \mathbf{V}_o en la red de la figura P9.51.

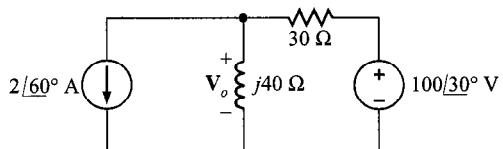


FIGURA P9.51

9.52. Encuentre \mathbf{V}_o en la red de la figura P9.52.

9.53. Encuentre \mathbf{I}_o en la red de la figura P9.53.

9.54. Encuentre \mathbf{I}_o en la red de la figura P9.54.

9.55. Encuentre \mathbf{I}_o en la red de la figura P9.55.

9.56. Encuentre \mathbf{I}_o en la red de la figura P9.56.

9.57. Encuentre \mathbf{V}_o en la red de la figura P9.57.

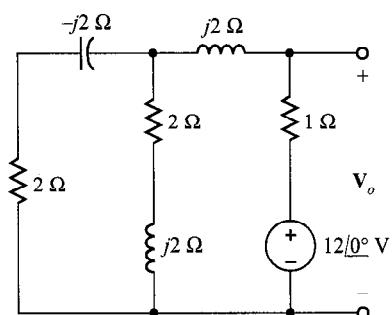


FIGURA P9.52

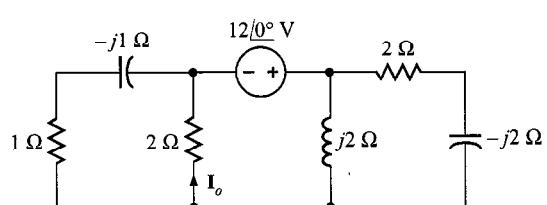


FIGURA P9.53

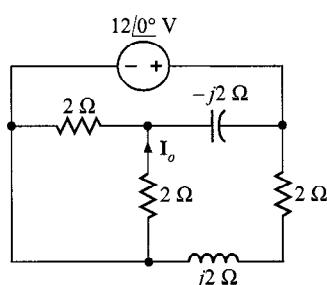


FIGURA P9.54

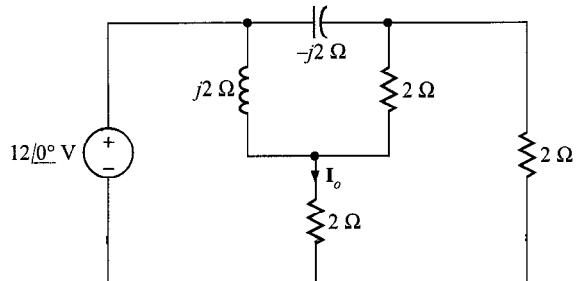


FIGURA P9.55

9.58. Encuentre \mathbf{V}_o en la red de la figura P9.58.

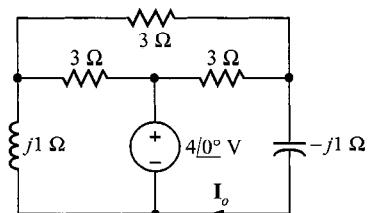


FIGURA P9.56

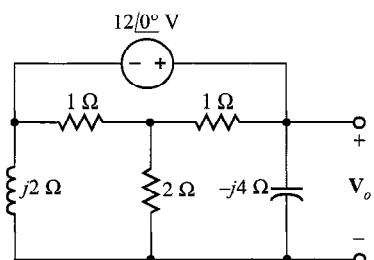


FIGURA P9.57

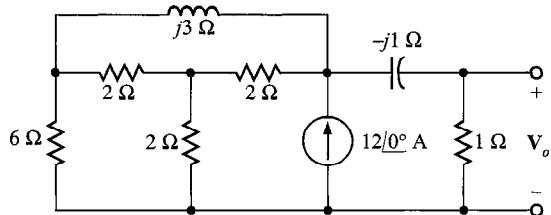


FIGURA P9.58

- 9.59. En el circuito de la figura P9.59, si $V_o = 4 \angle 45^\circ\text{ V}$, encontrar I_1 .

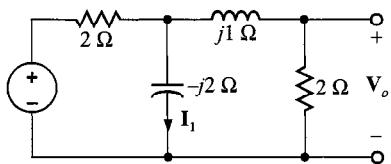


FIGURA P9.59

- 9.60. Encuentre V_s en la red de la figura P9.60, si $V_1 = 4 \angle 0^\circ\text{ V}$.
 9.61. Encuentre V_s en la red de la figura P9.61, si $I_1 = 2 \angle 0^\circ\text{ A}$.
 9.62. Encuentre V_s en la red de la figura P9.62, si $I_o = 2 \angle 0^\circ\text{ A}$.
 9.63. Encuentre I_s en la red de la figura P9.63, si $V_1 = 8 \angle 0^\circ\text{ V}$.
 9.64. Si $V_1 = 4 \angle 0^\circ\text{ V}$, encuentre I_o en la figura P9.64.

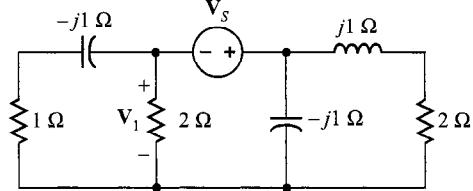


FIGURA P9.60

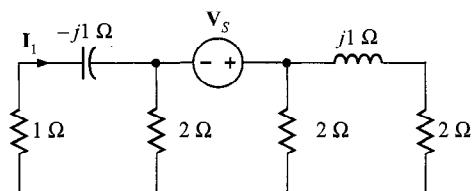


FIGURA P9.61

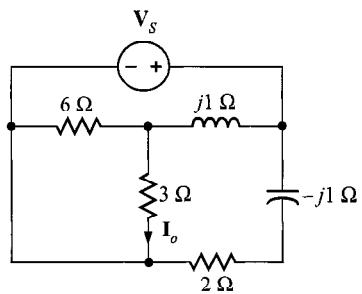


FIGURA P9.62

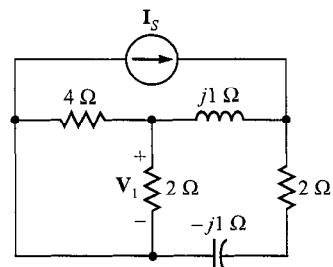


FIGURA P9.63

- 9.65. En la red de la figura P9.65, se sabe que V_o es $4 \angle 45^\circ\text{ V}$; Encuentre Z .
 9.66. En la red de la figura P9.66, $V_1 = 2 \angle 45^\circ\text{ V}$. Encuentre Z .
 9.67. Encuentre I_o en la red de la figura P9.67, usando análisis nodal.

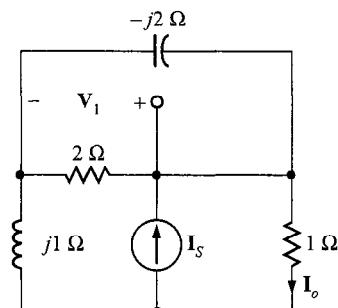


FIGURA P9.64

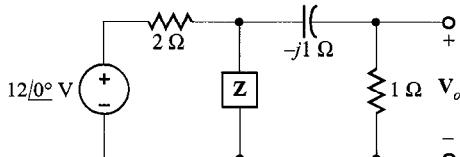


FIGURA P9.65

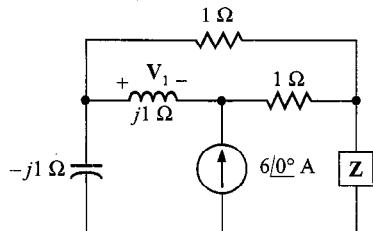


FIGURA P9.66

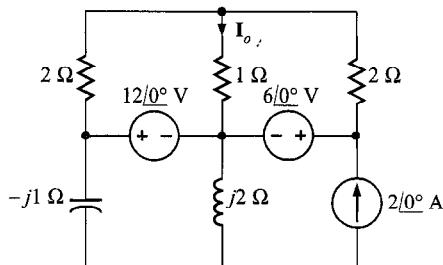


FIGURA P9.67

9.68. Usando análisis nodal, encuentre \mathbf{I}_o en el circuito de la figura P9.68.

9.69. Encuentre \mathbf{I}_o en el circuito de la figura P9.69 usando análisis nodal.

9.70. El circuito equivalente de baja frecuencia para un am-

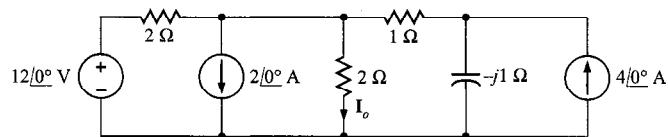


FIGURA P9.68

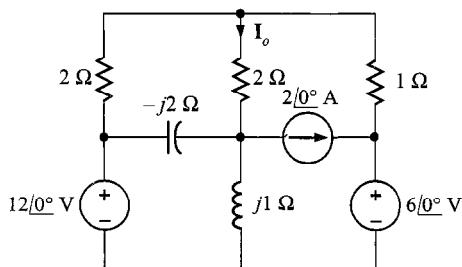


FIGURA P9.69

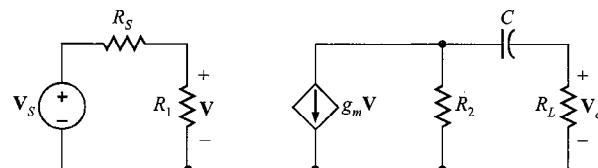


FIGURA P9.70

plificador de transistor de emisor común se muestra en la figura P9.70. Calcule la ganancia de voltaje V_o/V_s .

9.71. Use el análisis nodal para encontrar \mathbf{V}_o en el circuito de la figura P9.71

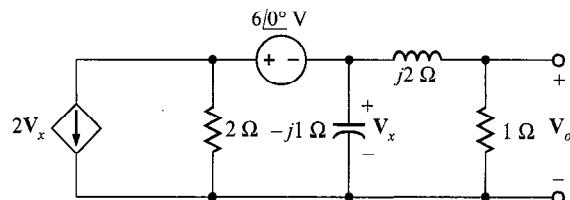


FIGURA P9.71

9.72. Use el análisis de malla para encontrar \mathbf{V}_o en el circuito que se muestra en la figura P9.72.

9.73. Use el análisis de malla para encontrar \mathbf{V}_o en el circuito que se muestra en la figura P9.73.

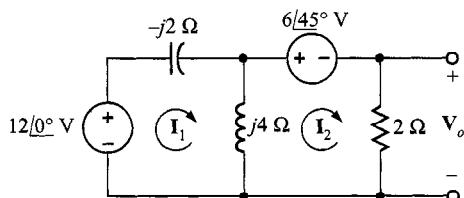


FIGURA P9.72

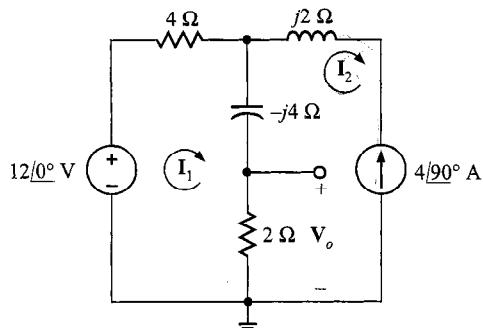


FIGURA P9.73

9.74. Use el análisis de malla para encontrar V_o en el circuito de la figura P9.74.

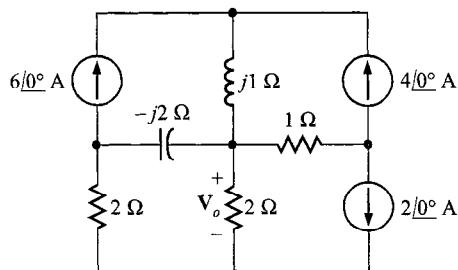


FIGURA P9.74

9.75. Usando el análisis de malla, determine V_o en la red de la figura P9.75.

9.76. Encuentre V_o en la red de la figura P9.76.

9.77. Encuentre V_o en la red de la figura P9.77.

9.78. Use la superposición para encontrar V_o en la red de la figura P9.78.

9.79. Encuentre V_o en la red de la figura P9.79 usando superposición.

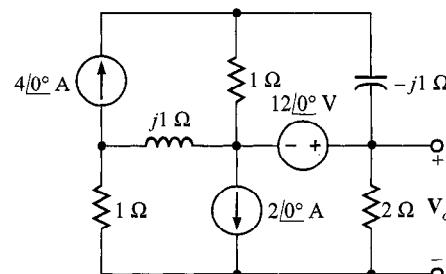


FIGURA P9.75

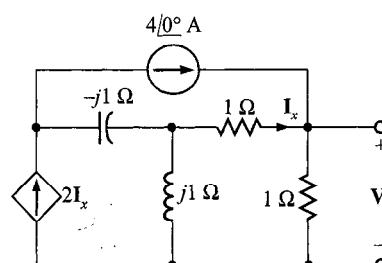


FIGURA P9.76

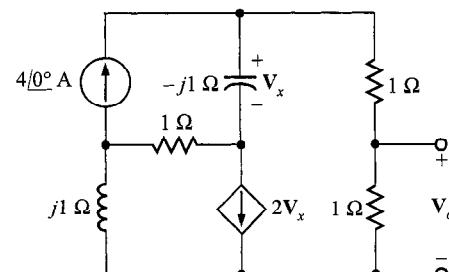


FIGURA P9.77

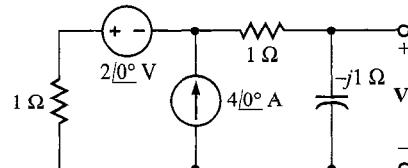


FIGURA P9.78

9.80. Use la transformación de fuentes para determinar V_o en la red de la figura P9.80.

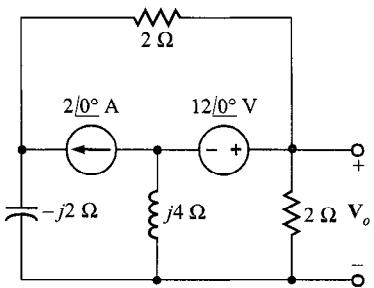


FIGURA P9.79

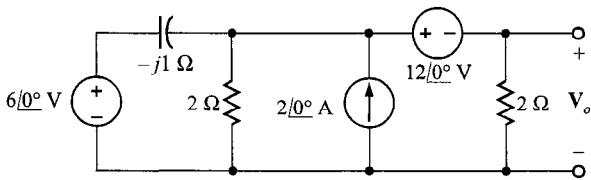


FIGURA P9.80

9.81. Resuelva el problema 9.68 usando la transformación de fuentes.

9.82. Resuelva el problema 9.72 usando el teorema de Thévenin.

9.83. Resuelva el problema 9.73 usando el teorema de Thévenin.

9.84. Aplique el teorema de Thévenin dos veces para encontrar V_o en el circuito de la figura P9.84.

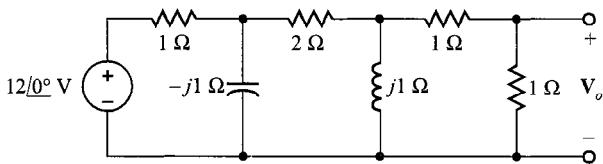


FIGURA P9.84

9.85. Resuelva el problema 9.71 usando el teorema de Thévenin.

9.86. Encuentre el equivalente de Thévenin para la red de la figura P9.86 en las terminales A-B.

9.87. Calcule la impedancia equivalente de Thévenin Z_{Th} en el circuito que se muestra en la figura P9.87.

9.88. Encuentre el equivalente de Thévenin para la red de la figura P9.88 en las terminales A-B.

9.89. Encuentre la corriente en la bobina del circuito de la figura P9.89 usando el teorema de Norton.

9.90. Encuentre V_x en el circuito que se muestra en la figura P9.90 usando el teorema de Norton.

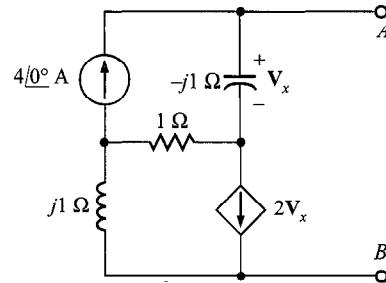


FIGURA P9.86

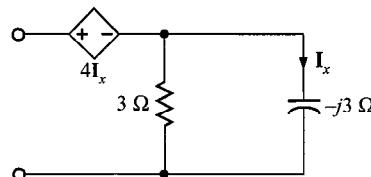


FIGURA P9.87

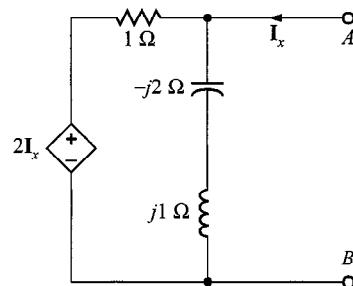


FIGURA P9.88

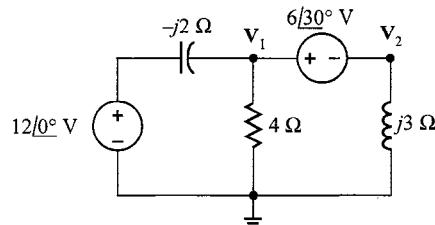


FIGURA P9.89

9.91. Encuentre I_o en la red de la figura P9.91 usando el teorema de Norton.

9.92. Encuentre el equivalente de Thévenin de la red de la figura P9.92 en las terminales A-B.

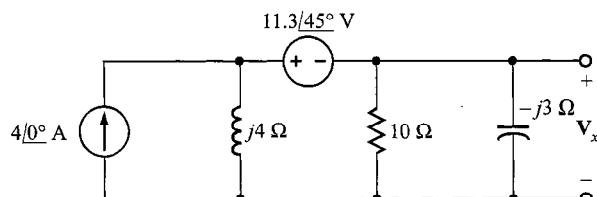


FIGURA P9.90

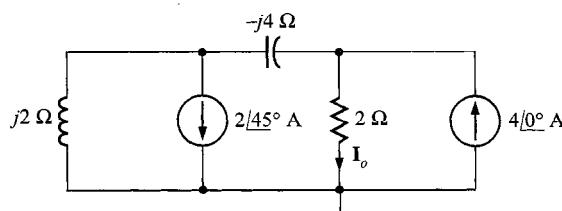


FIGURA P9.91

9.93. Use el PSPICE para encontrar V_o en la red de la figura P9.93.

9.94. Use el PSPICE para calcular la función de transferencia de señal pequeña I_o/I_s y la corriente de salida en la red de la figura P9.94.

9.95. Use el PSPICE para calcular la función de transferencia de señal pequeña V_o/V_s y el voltaje de salida V_o en la red de la figura P9.95.

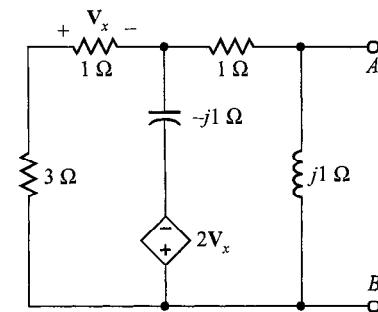


FIGURA P9.92

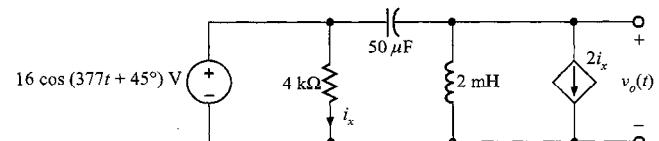


FIGURA P9.93

9.96. La red de la figura P9.96 opera en $f = 400$ Hz. Use PSPICE para encontrar la corriente I_o .

9.97. La red de la figura P9.97 opera en $f = 60$ Hz. Use PSPICE para encontrar el voltaje V_o .

9.98. La red de la figura P9.98 opera a $f = 60$ Hz. Encuentre las corrientes I_o e I_x usando el PSPICE.

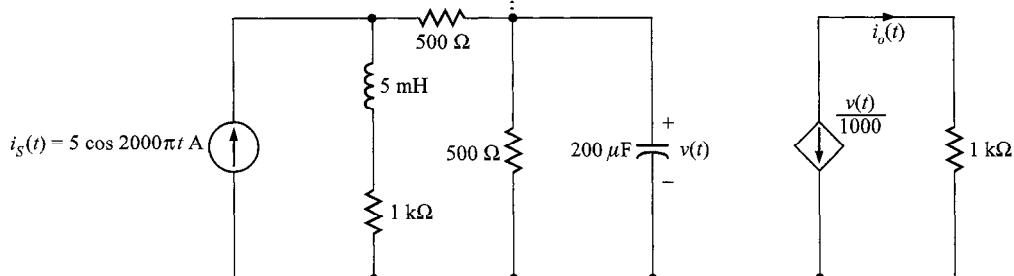


FIGURA P9.94

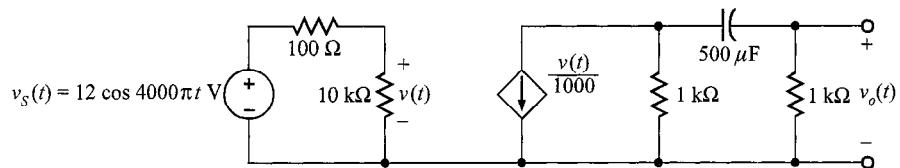


FIGURA P9.95

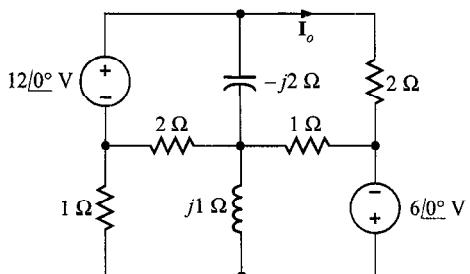


FIGURA P9.96

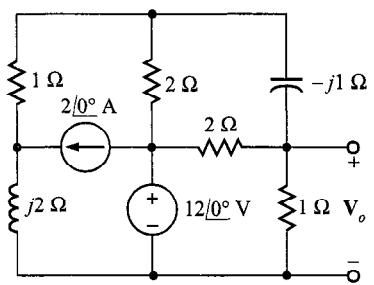


FIGURA P9.97

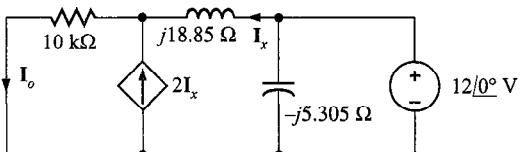


FIGURA P9.98

9.99. La red de la figura P9.99 opera en $f = 60$ Hz. Use PSPICE para encontrar el voltaje V_o .

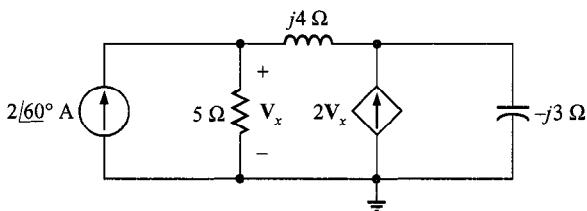


FIGURA P9.99

9.100. El circuito de la figura P9.100 opera en $f = 60$ Hz. Use PSPICE para calcular el voltaje V_o .

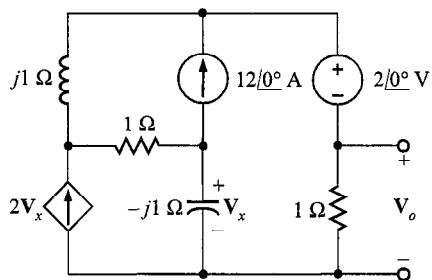


FIGURA P9.100

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

- 10.1** Potencia instantánea
- 10.2** Potencia promedio
- 10.3** Transferencia de potencia promedio máxima
- 10.4** Valores efectivos o rms
- 10.5** El factor de potencia
- 10.6** Potencia compleja
- 10.7** Corrección del factor de potencia
- 10.8** Mediciones de potencia
- 10.9** Circuitos trifilares de una sola fase
- 10.10** Consideraciones de seguridad
- 10.11** Aplicaciones
- 10.12** Diseño de circuitos
- 10.13** Resumen
Puntos clave
Problemas

CAPÍTULO
10**ANÁLISIS
de POTENCIA
en ESTADO
ESTABLE**

¿Entiende usted el circuito eléctrico de alambre de su casa que se usa para hacer funcionar todos los aparatos y luces? ¿Conoce los peligros a que se expone al trabajar con circuitos de potencia eléctrica? Éstos son dos de los varios temas que examinaremos en este capítulo.

En los capítulos precedentes hemos estado tratando principalmente de determinar el voltaje o corriente en algún punto de una red. De igual importancia para nosotros es en muchas situaciones la potencia que suministra o que absorbe cierto elemento. Típicamente, los dispositivos eléctricos y electrónicos tienen condiciones normales de funcionamiento de potencia instantánea máxima o de potencia pico que no pueden excederse sin dañar los dispositivos.

En sistemas eléctricos y electrónicos, la potencia llega en todos los volúmenes. La potencia absorbida por algún dispositivo en un chip de circuito integrado puede estar en picowatts, mientras que la potencia su-

ministrada por una estación generadora grande puede estar en gigawatts. Advierta que el intervalo entre esos dos ejemplos es enormemente grande (10^{21}).

En nuestro trabajo previo definimos que la potencia instantánea es el producto del voltaje y la corriente. La potencia promedio, obtenida al promediar la potencia instantánea, es la razón promedio a la cual la energía es absorbida o suministrada. En el caso de cd, donde la corriente y el voltaje son constantes, la potencia instantánea es igual a la potencia promedio. Sin embargo, como demostraremos, este no es el caso cuando las corrientes y voltajes son funciones senoidales del tiempo.

En este capítulo exploraremos las diferentes ramificaciones de la potencia en circuitos de ca. Examinaremos la potencia instantánea, la potencia promedio, la transferencia de potencia máxima, la potencia promedio para formas de onda no senoidales periódicas, el factor de potencia, la potencia compleja y la medición de potencia.

Se presentarán y discutirán algunas consideraciones de seguridad muy prácticas mediante varios ejemplos.

Finalmente, se presenta una variedad de ejemplos orientados a las aplicaciones. El origen de esos ejemplos es el circuito común del cableado doméstico. ■

10.1 Potencia instantánea

Empleando la convención de signos adoptada en los primeros capítulos, podemos calcular la potencia instantánea suministrada o absorbida por algún dispositivo como el producto del voltaje instantáneo a través del dispositivo y la corriente instantánea a través de él.

Considere el circuito que se muestra en la figura 10.1. En general, el voltaje y la corriente en estado estable para la red puede escribirse como

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta_v) \quad (10.1)$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \theta_i) \quad (10.2)$$

FIGURA 10.1 Red de ca simple.

La potencia instantánea es entonces

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= V_M I_M \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) \end{aligned} \quad (10.3)$$

Empleando la siguiente identidad trigonométrica,

$$\cos \phi_1 \cos \phi_2 = \frac{1}{2} [\cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos(\phi_1 + \phi_2)] \quad (10.4)$$

encontramos que la potencia instantánea puede escribirse como

$$p(t) = \frac{V_M I_M}{2} [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)] \quad (10.5)$$

Observe que la potencia instantánea consta de dos términos. El primer término es una constante (es decir, es independiente del tiempo), y el segundo término es una onda coseno de dos veces la frecuencia de excitación. Examinaremos esta ecuación con más detalle en la sección 10.2.

EJEMPLO 10.1

El circuito de la figura 10.1 tiene los siguientes parámetros: $v(t) = 4 \cos(\omega t + 60^\circ)$ V y $\mathbf{Z} = 2 \angle 30^\circ \Omega$. Deseamos determinar ecuaciones para la corriente y la potencia instantánea como funciones del tiempo, y graficar esas funciones con el voltaje en una sola gráfica para su comparación.

SOLUCIÓN Como

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{4 \angle 60^\circ}{2 \angle 30^\circ} \\ &= 2 \angle 30^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

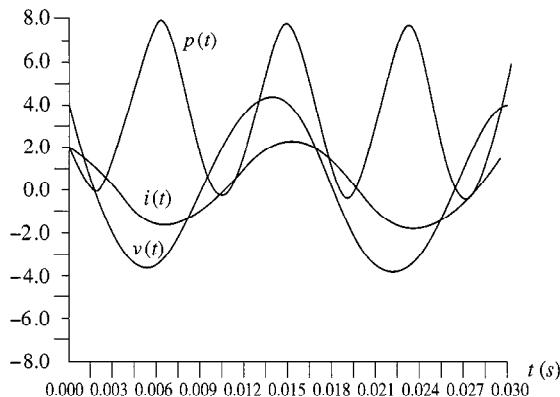


FIGURA 10.2 Gráficas de $v(t)$, $i(t)$ y $p(t)$ para el circuito en el ejemplo 10.1 usando $f = 60$ Hz.

entonces

$$i(t) = 2 \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ A}$$

De la ecuación (10.5),

$$\begin{aligned} p(t) &= 4[\cos(30^\circ) + \cos(2\omega t + 90^\circ)] \\ &= 3.46 + 4 \cos(2\omega t + 90^\circ) \text{ W} \end{aligned}$$

Una gráfica de esta función, junto con gráficas del voltaje y la corriente, se muestra en la figura 10.2. Como puede verse en la figura, la potencia instantánea tiene un valor promedio, y la frecuencia es dos veces la del voltaje o la corriente.

10.2 Potencia promedio

El valor promedio de cualquier forma de onda (por ejemplo, una función senoidal) puede calcularse integrando la función en un periodo completo y dividiendo este resultado entre el periodo. Por tanto, si el voltaje y la corriente están dados por las ecuaciones (10.1) y (10.2), respectivamente, la potencia promedio es

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_M I_M \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) dt \quad (10.6) \end{aligned}$$

donde t_0 es arbitraria, $T = 2\pi/\omega$ es el periodo del voltaje o la corriente, y P se mide en watts. Realmente podemos promediar la forma de onda sobre un número

entero de períodos de modo que la ecuación (10.6) también pueda escribirse como

$$P = \frac{1}{nT} \int_{t_0}^{t_0 + nT} V_M I_M \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) dt \quad (10.7)$$

donde n es un entero positivo.

Empleando la ecuación (10.5) en la expresión (10.6), obtenemos

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} \frac{V_M I_M}{2} [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)] dt \quad (10.8)$$

Podemos, por supuesto, trabajar asidua y minuciosamente con la integración indicada; sin embargo, con un poco de previsión podemos determinar el resultado por inspección. El primer término es independiente de t , y por tanto es una constante en la integración. Integrando las constantes en el periodo y dividiendo entre el periodo resulta simplemente la constante original. El segundo término es una onda coseno. Es bien sabido que el valor promedio de una onda coseno en un periodo completo o un número entero de períodos es cero y, por tanto, el segundo término en la ecuación (10.8) desaparece. En vista de esta discusión, la ecuación (10.8) se reduce a

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (10.9)$$

Observe que como $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, el argumento para una función coseno puede ser $\theta_v - \theta_i$ o $\theta_i - \theta_v$. Además, note que $\theta_v - \theta_i$ es el ángulo de la impedancia del circuito como se muestra en la figura 10.1. Por tanto, para un circuito puramente resistivo,

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M \quad (10.10)$$

y para un circuito puramente reactivo,

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M \cos(90^\circ)$$

$$= 0$$

Debido a que las impedancias puramente reactivas no absorben potencia promedio, con frecuencia reciben el nombre de *elementos sin pérdidas*. La red puramente reactiva opera en una forma en la que almacena energía en una parte del periodo y la libera en otra.

EJEMPLO 10.2

Deseamos determinar la potencia promedio absorbida por la impedancia que se muestra en la figura 10.3.

SOLUCIÓN De la figura notamos que

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_M / \theta_v}{2 + j2} = \frac{10 / 60^\circ}{2.83 / 45^\circ} = 3.53 / 15^\circ A$$

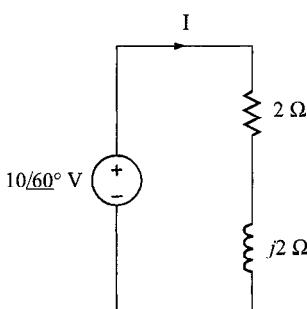


FIGURA 10.3 Ejemplo de circuito RL .

Por tanto,

$$I_M = 3.53 \text{ A} \quad y \quad \theta_i = 15^\circ$$

De aquí,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\theta_v - \theta_i) \\ &= \frac{1}{2} (10) (3.53) \cos(60^\circ - 15^\circ) \\ &= 12.5 \text{ W} \end{aligned}$$

Como la bobina no absorbe potencia, podemos emplear la ecuación (10.10) a condición de que V_M en esa ecuación sea el voltaje a través de la resistencia. Utilizando el divisor de voltaje, obtenemos

$$V_R = \frac{(10 \angle 60^\circ)(2)}{2+j2} = 7.07 \angle 15^\circ \text{ V}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} (7.07) (3.53) \\ &= 12.5 \text{ W} \end{aligned}$$

Además, usando la ley de Ohm, también podemos emplear las expresiones

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{R}$$

o

$$P = \frac{1}{2} I_M^2 R$$

donde una vez más debemos tener cuidado de que V_M e I_M en esas ecuaciones se refieran al voltaje a través de la resistencia y la corriente a lo largo de ella, respectivamente.

EJEMPLO 10.3

Para el circuito que se muestra en la figura 10.4, deseamos determinar la potencia promedio total absorbida y la potencia promedio total suministrada.

SOLUCIÓN De la figura notamos que

$$\mathbf{I}_1 = \frac{12 \angle 45^\circ}{4} = 3 \angle 45^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{12 \angle 45^\circ}{2-j1} = \frac{12 \angle 45^\circ}{2.24 \angle -26.57^\circ} = 5.37 \angle 71.57^\circ \text{ A}$$

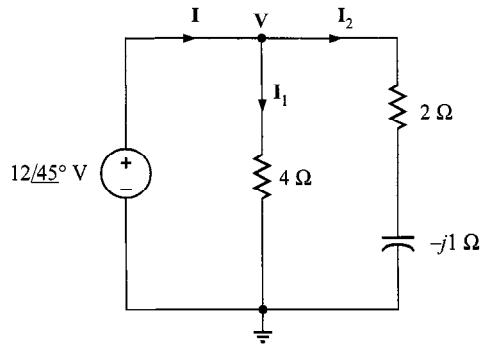


FIGURA 10.4 Ejemplo de circuito para ilustrar un balance de potencia.

y por tanto,

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= 3 / 45^\circ + 5.37 / 71.57^\circ \\ &= 8.16 / 62.08^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

La potencia promedio absorbida en la resistencia de 4Ω es

$$P_4 = \frac{1}{2} V_M I_M = \frac{1}{2} (12)(3) = 18 \text{ W}$$

La potencia promedio absorbida en la resistencia de 2Ω es

$$P_2 = \frac{1}{2} I_M^2 R = \frac{1}{2} (5.37)^2 (2) = 28.8 \text{ W}$$

Por tanto, la potencia promedio total absorbida es

$$P_A = 18 + 28.8 = 46.8 \text{ W}$$

Observe que pudimos haber calculado la potencia absorbida en la resistencia de 2Ω usando $\frac{1}{2} V_M^2 / R$ si hubiésemos calculado primero el voltaje a través de la resistencia de 2Ω .

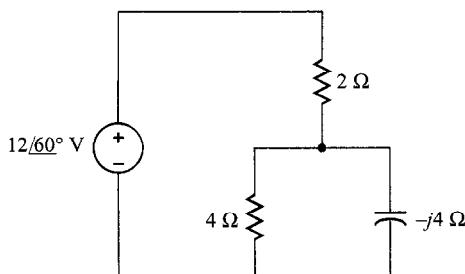
La potencia promedio total suministrada por la fuente es

$$\begin{aligned} P_S &= +\frac{1}{2} V_M I_M \cos(\theta_v - \theta_i) \\ &= +\frac{1}{2} (12) (8.16) \cos(45^\circ - 62.08^\circ) \\ &= +46.8 \text{ W} \end{aligned}$$

Así, la potencia promedio total suministrada es, por supuesto, igual a la potencia promedio total absorbida.

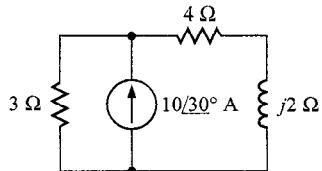
EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D10.1 Encuentre la potencia promedio absorbida por cada resistencia en la red de la figura D10.1.

**FIGURA D10.1**

Resp.: $P_{2\Omega} = 7.20 \text{ W}$, $P_{4\Omega} = 7.20 \text{ W}$.

D10.2 Dada la red de la figura D10.2, encuentre la potencia promedio absorbida por cada elemento pasivo de circuito y la potencia promedio total suministrada por la fuente de corriente.

**FIGURA D10.2**

Resp.: $P_{3\Omega} = 56.55 \text{ W}$, $P_{4\Omega} = 33.95 \text{ W}$, $P_L = 0$, $P_{cs} = -90.50 \text{ W}$.

Cuando se determina la potencia promedio, si en una red está presente más de una fuente, podemos utilizar cualquiera de nuestras técnicas de análisis de redes para encontrar el voltaje y/o la corriente necesarios para calcular la potencia. Sin embargo, debemos recordar que en general no podemos aplicar la superposición a la potencia. Debemos, no obstante, mencionar que hay un caso especial en el que la superposición se aplica a la potencia. Si la corriente es de la forma

$$i(t) = I_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + I_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

y si $n\omega_1 = m\omega_2$, donde n y m son dos enteros diferentes, entonces $n\omega_1 = 2\pi/(T/n)$ y $m\omega_2 = 2\pi/(T/m)$, de modo que $\cos \omega_1 t$ tiene n períodos completos en el tiempo T y $\cos \omega_2 t$ tiene m períodos completos en el tiempo T . Esas senoidales se dice que están armónicamente relacionadas. Este tema será discutido con detalle en el capítulo 17.

La potencia promedio que es absorbida por la resistencia R , en un intervalo de tiempo T , está dada por

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T [I_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + I_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)]^2 R dt$$

donde ω_1 y ω_2 son periódicas en T . La ecuación anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T [I_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \theta_1) + I_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \theta_2) \\ &\quad + 2I_1 I_2 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \cos(\omega_2 t + \theta_2)] R dt \\ &= \frac{I_1^2}{2} R + \frac{I_2^2}{2} R + \frac{1}{T} \int_0^T \{I_1 I_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \theta_1 + \theta_2] \\ &\quad + I_1 I_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \theta_1 + \theta_2]\} R dt \end{aligned}$$

Como $(\omega_1 + \omega_2) = (n + m)(2\pi/T)$ y $(\omega_1 - \omega_2) = (n - m)(2\pi/T)$, la integral será cero. Por tanto,

$$P = \frac{I_1^2}{2} R + \frac{I_2^2}{2} R$$

La superposición también se aplica si una, y sólo una, de las fuentes es cd.

EJEMPLO 10.4

Considere la red que se muestra en la figura 10.5. Deseamos determinar la potencia promedio total absorbida y suministrada por cada elemento.

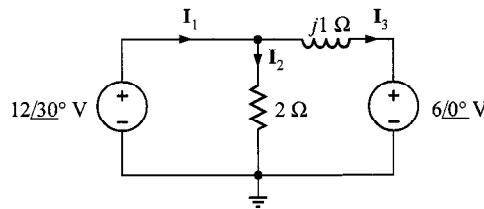


FIGURA 10.5 Ejemplo de circuito RL con dos fuentes.

SOLUCIÓN De la figura notamos que

$$I_2 = \frac{12 \angle 30^\circ}{2} = 6 \angle 30^\circ \text{ A}$$

y

$$I_3 = \frac{12 \angle 30^\circ - 6 \angle 0^\circ}{j1} = \frac{4.39 + j6}{j1} = 7.43 \angle -36.19^\circ \text{ A}$$

La potencia absorbida por la resistencia de 2Ω es

$$P_2 = \frac{1}{2} V_M I_M = \frac{1}{2} (12)(6) = 36 \text{ W}$$

De acuerdo con la dirección de I_3 , la fuente $6 \angle 0^\circ - \text{V}$ está absorbiendo potencia. La potencia que absorbe está dada por

$$\begin{aligned} P_{6 \angle 0^\circ} &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\theta_v - \theta_i) \\ &= \frac{1}{2} (6) (7.43) \cos[0^\circ - (-36.19^\circ)] \\ &= 18 \text{ W} \end{aligned}$$

En este punto surge una nueva pregunta: ¿Cómo sabemos si la fuente de $6 \angle 0^\circ - \text{V}$ está suministrando potencia al resto de la red o absorbiéndola? La respuesta a esta pregunta es realmente directa. Si empleamos nuestra convención pasiva de signos que fue adoptada en los primeros capítulos, es decir, si la dirección de la corriente de referencia entra en la terminal positiva de la fuente y la respuesta es positiva, entonces la fuente está absorbiendo potencia. Si la

respuesta es negativa, la fuente está suministrando potencia al resto del circuito. Se pudo haber usado una convención de signo de generador, y con esta condición la interpretación del signo de la respuesta sería inversa. Observe que una vez que se adopta y se usa la convención de signos, el signo para la potencia promedio será negativo sólo si la diferencia angular es mayor de 90° (es decir, $|\theta_v - \theta_i| > 90^\circ$).

Para obtener la potencia suministrada a la red, calculamos \mathbf{I}_1 como

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1 &= \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 \\ &= 6 \angle 30^\circ + 7.43 \angle -36.19^\circ \\ &= 11.29 \angle -7.07^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Por tanto, la potencia suministrada por la fuente de $12 \angle 30^\circ \text{ V}$ utilizando la convención de signo de generador es

$$\begin{aligned}P_S &= +\frac{1}{2}(12)(11.29)\cos(30^\circ + 7.07^\circ) \\ &= +54 \text{ W}\end{aligned}$$

y de aquí la potencia absorbida es igual a la potencia suministrada.

EJEMPLO 10.5

La corriente en una resistencia de 2Ω es de la forma

$$i(t) = 4 \cos(377t + 30^\circ) + 2 \cos(754t + 60^\circ)$$

Deseamos encontrar la potencia promedio absorbida por la resistencia.

SOLUCIÓN Como $\omega_1 = 377$ y $\omega_2 = 754$ (es decir, $\omega_2 = 2\omega_1$), entonces

$$P = \frac{1}{2}(4^2 + 2^2) 2 = 20 \text{ W}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D10.3 Determine la potencia promedio total absorbida y suministrada por cada elemento de la red de la figura D10.3.

Resp.: $P_{cs} = -69.3 \text{ W}$, $P_{V_s} = 19.8 \text{ W}$, $P_{4\Omega} = 49.5 \text{ W}$, $P_C = 0$.

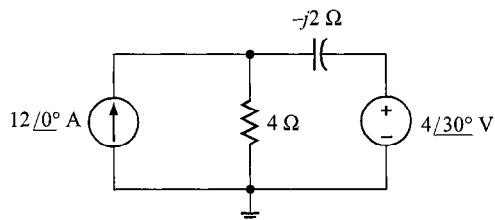


FIGURA D10.3

D10.4 Dada la red de la figura D10.4, determine la potencia promedio total absorbida o suministrada por cada elemento.

Resp.: $P_{24} \angle 0^\circ = -55.4 \text{ W}$, $P_{12} \angle 0^\circ = 5.5 \text{ W}$, $P_{2\Omega} = 22.1 \text{ W}$, $P_{4\Omega} = 27.8 \text{ W}$, $P_L = 0$.

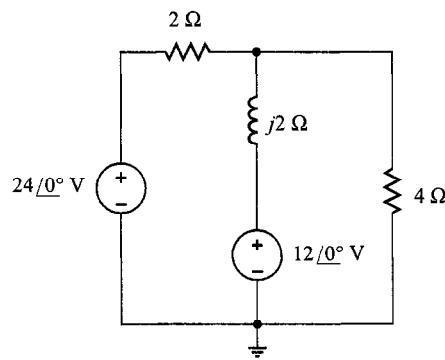


FIGURA D10.4

10.3 Transferencia de potencia promedio máxima

En nuestro estudio de redes resistivas tratamos el problema de la transferencia de potencia máxima a una carga resistiva. Mostramos que si la red que excluye la carga se representaba por un circuito equivalente de Thévenin, resultaría una transferencia de potencia máxima si el valor de la resistencia de carga era igual a la resistencia equivalente de Thévenin (es decir, $R_L = R_{Th}$). Reexaminaremos ahora esta cuestión en el contexto presente para determinar la impedancia de carga de la red que se presenta en la figura 10.6, que dará como resultado una potencia promedio máxima absorbida por la impedancia de carga Z_L .

La ecuación para potencia promedio en la carga es

$$P_L = \frac{1}{2} V_L I_L \cos(\theta_{V_L} - \theta_{I_L}) \quad (10.11)$$

La corriente y el voltaje fasoriales en la carga están dados por las expresiones

$$I_L = \frac{V_{oc}}{Z_{Th} + Z_L} \quad (10.12)$$

$$V_L = \frac{V_{oc} Z_L}{Z_{Th} + Z_L} \quad (10.13)$$

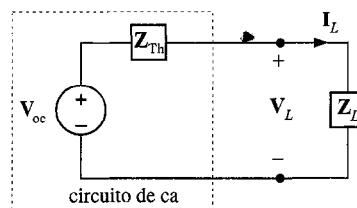


FIGURA 10.6 Circuito utilizado para examinar la transferencia de potencia máxima.

donde

$$\mathbf{Z}_{\text{Th}} = R_{\text{Th}} + jX_{\text{Th}} \quad (10.14)$$

y

$$\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L \quad (10.15)$$

La magnitud de la corriente y voltaje fasoriales están dados por las expresiones

$$I_L = \frac{V_{\text{oc}}}{[(R_{\text{Th}} + R_L)^2 + (X_{\text{Th}} + X_L)^2]^{1/2}} \quad (10.16)$$

$$V_L = \frac{V_{\text{oc}}(R_L^2 + X_L^2)^{1/2}}{[(R_{\text{Th}} + R_L)^2 + (X_{\text{Th}} + X_L)^2]^{1/2}} \quad (10.17)$$

Los ángulos de fase para la corriente y voltaje fasoriales están contenidos en la cantidad $(\theta_{V_L} - \theta_{i_L})$. Note también que $\theta_{V_L} - \theta_{i_L} = \theta_{\mathbf{Z}_L}$ y además

$$\cos \theta_{\mathbf{Z}_L} = \frac{R_L}{[R_L^2 + X_L^2]^{1/2}} \quad (10.18)$$

Sustituyendo las ecuaciones (10.16) a (10.18) por la ecuación (10.11) se obtiene

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{V_{\text{oc}}^2 R_L}{(R_{\text{Th}} + R_L)^2 + (X_{\text{Th}} + X_L)^2} \quad (10.19)$$

las cuales, por supuesto, pueden obtenerse directamente de la ecuación (10.16) usando $\frac{1}{2} I_L^2 R_L$. Una vez más, una pequeña previsión nos ahorrará algún trabajo. Desde el punto de vista de maximizar P_L , V_{oc} es una constante. La cantidad $(X_{\text{Th}} + X_L)$ no absorbe potencia y, por tanto, cualquier valor diferente de cero de esta cantidad sólo sirve para reducir P_L . De aquí que podemos eliminar este término seleccionando $X_L = -X_{\text{Th}}$. Nuestro problema se reduce a maximizar

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{V_{\text{oc}}^2 R_L}{(R_L + R_{\text{Th}})^2} \quad (10.20)$$

Sin embargo, esta es la misma cantidad que maximizamos en el caso puramente resistivo seleccionando $R_L = R_{\text{Th}}$. Por lo tanto, para una transferencia de potencia promedio máximo a la carga que se muestra en la figura 10.6, \mathbf{Z}_L debe elegirse de forma que

$$\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L = R_{\text{Th}} - jX_{\text{Th}} = \mathbf{Z}_{\text{Th}}^* \quad (10.21)$$

Finalmente, si la impedancia de carga es puramente resistiva (es decir, $X_L = 0$), la condición para transferencia de potencia promedio máxima puede derivarse mediante la expresión

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0$$

donde P_L es la expresión en la ecuación (10.19) con $X_L = 0$. El valor de R_L que maximiza P_L bajo la condición $X_L = 0$ es

$$R_L = \sqrt{R_{\text{Th}}^2 + X_{\text{Th}}^2} \quad (10.22)$$

E J E M P L O 10.6

Dado el circuito de la figura 10.7a deseamos encontrar el valor de Z_L para transferencia de potencia promedio máxima. Además, deseamos encontrar el valor de la potencia promedio máxima entregada a la carga.

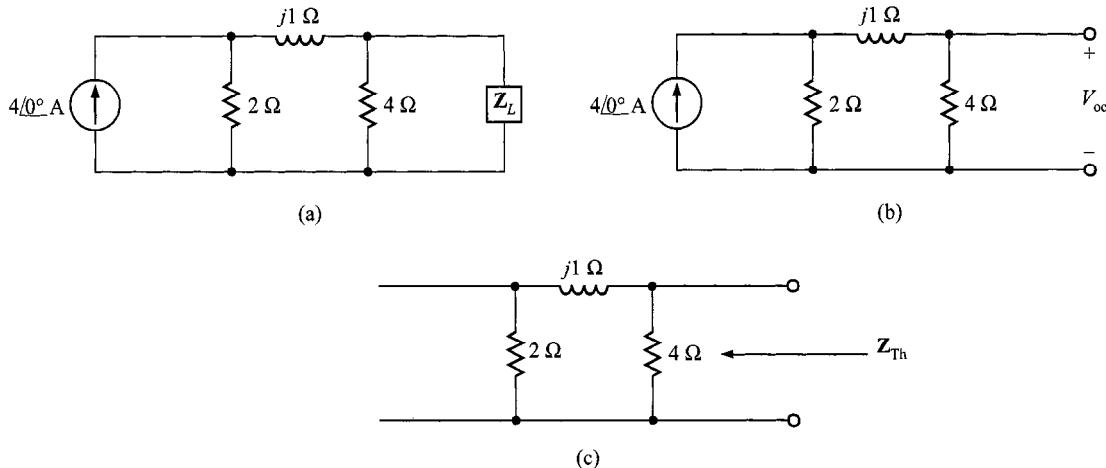


FIGURA 10.7 Circuitos para ilustrar la transferencia de potencia promedio máxima.

SOLUCIÓN A fin de resolver el problema, formamos un equivalente de Thévenin en la carga. El circuito de la figura 10.7b se usa para calcular el voltaje de circuito abierto

$$V_{oc} = \frac{4 \angle 0^\circ (2)}{6 + j1} (4) = 5.28 \angle -9.46^\circ \text{ V}$$

La impedancia equivalente de Thévenin puede derivarse del circuito de la figura 10.7c. Como se muestra en la figura,

$$Z_{Th} = \frac{4(2 + j1)}{6 + j1} = 1.40 + j0.43 \Omega$$

Por lo tanto, Z_L para transferencia máxima de potencia promedio es

$$Z_L = 1.40 - j0.43 \Omega$$

Con Z_L como se da previamente, la corriente en la carga es

$$I = \frac{5.28 \angle -9.46^\circ}{2.8} = 1.89 \angle -9.46^\circ \text{ A}$$

Por tanto, la potencia promedio máxima transferida a la carga es

$$P_L = \frac{1}{2} I_M^2 R_L = \frac{1}{2} (1.89)^2 (1.4) = 2.50 \text{ W}$$

E J E M P L O 10.7

Para el circuito que se muestra en la figura 10.8a, deseamos encontrar el valor de Z_L para transferencia de potencia promedio máxima. Además, determinemos el valor de la potencia promedio máxima entregada a la carga.

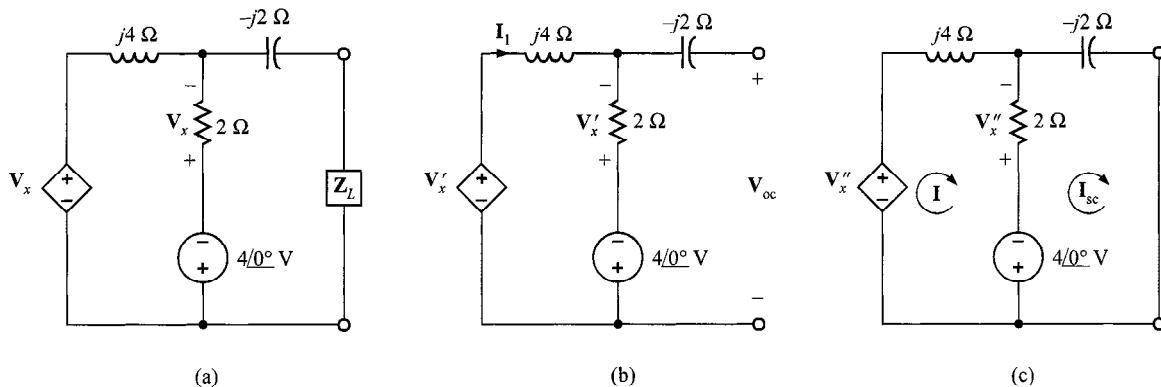


FIGURA 10.8 Circuitos para ilustrar la transferencia de potencia promedio máxima.

SOLUCIÓN Primero reduciremos el circuito, con la excepción de la carga, a un circuito equivalente de Thévenin. El voltaje de circuito abierto puede calcularse a partir de la figura 10.8b. Las ecuaciones para el circuito son

$$V'_x + 4 = (2 + j4)I_1$$

$$V'_x = -2I_1$$

Resolviendo para I_1 , obtenemos

$$I_1 = \frac{1 \angle -45^\circ}{\sqrt{2}}$$

El voltaje de circuito abierto es entonces

$$\begin{aligned} V_{oc} &= 2I_1 - 4 \angle 0^\circ \\ &= \sqrt{2} \angle -45^\circ - 4 \angle 0^\circ \\ &= -3 - j1 \\ &= -3.16 \angle 18.43^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

La corriente de corto circuito puede derivarse de la figura 10.8c. Las ecuaciones para este circuito son

$$\begin{aligned} V''_x + 4 &= (2 + j4)I - 2I_{sc} \\ -4 &= -2I + (2 - j2)I_{sc} \\ V''_x &= -2(I - I_{sc}) \end{aligned}$$

Resolviendo esas ecuaciones para \mathbf{I}_{sc} se obtiene

$$\mathbf{I}_{sc} = -(1 + j2) \text{ A}$$

La impedancia equivalente de Thévenin es entonces

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{V}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}} = \frac{3 + j1}{1 + j2} = 1 - j1 \Omega$$

Por tanto, para transferencia de potencia promedio máxima la impedancia de carga debe ser

$$\mathbf{Z}_L = 1 + j1 \Omega$$

La corriente en esta carga \mathbf{Z}_L es entonces

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{oc}}{\mathbf{Z}_{Th} + \mathbf{Z}_L} = \frac{-3 - j1}{2} = -1.58 \angle 18.43^\circ \text{ A}$$

De aquí, la potencia promedio máxima transferida a la carga es

$$P_L = \frac{1}{2} (1.58)^2 (1)$$

$$= 1.25 \text{ W}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D10.5 Dada la red de la figura D10.5, encuentre \mathbf{Z}_L para una transferencia de potencia promedio máxima y la potencia promedio máxima transferida a la carga.

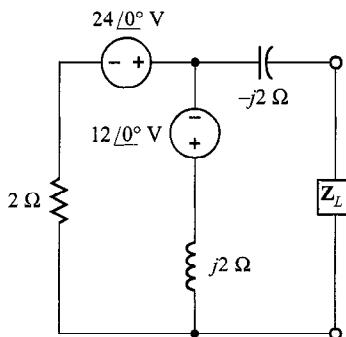


FIGURA D10.5

Resp.: $\mathbf{Z}_L = 1 + j1 \Omega$, $P_L = 44.94 \text{ W}$.

D10.6 Encuentre \mathbf{Z}_L para una transferencia de potencia promedio máxima y la potencia promedio máxima transferida a la carga en la red de la figura D10.6.

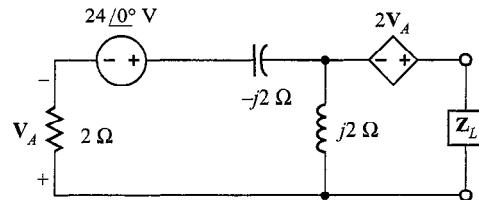


FIGURA D10.6

Resp.: $\mathbf{Z}_L = 2 + j2 \Omega$, $P_L = 180 \text{ W}$.

10.4 Valores efectivos o rms

En las anteriores secciones de este capítulo hemos mostrado que la potencia promedio absorbida por una carga resistiva depende directamente del tipo, o tipos, de fuentes que están entregando potencia a la carga. Por ejemplo, si la fuente fue de cd, la potencia promedio absorbida fue I^2R , y si la fuente fue senoidal, la potencia promedio fue $\frac{1}{2}I_M^2R$. Aunque esos dos tipos de formas de onda son extremadamente importantes, de ninguna manera son las únicas formas de onda que encontraremos en el análisis de circuitos. Por tanto, una técnica mediante la cual podemos comparar la *efectividad* de las diferentes fuentes de entregar potencia a una carga resistiva sería totalmente útil.

A fin de llevar a cabo esta comparación, definimos lo que se llama el *valor efectivo de una forma de onda periódica*, que representa voltaje o corriente. Aunque cualquier cantidad puede usarse, emplearemos la corriente en la definición. De aquí, definimos el valor efectivo de una corriente periódica como un valor constante o de cd, que entrega la misma potencia promedio a una resistencia R . Llamemos a la corriente constante I_{eff} . Entonces la potencia promedio entregada a la resistencia como resultado de esta corriente es

$$P = I_{\text{eff}}^2 R$$

De forma similar, la potencia promedio entregada a una resistencia por una corriente periódica $i(t)$ es

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) R dt$$

Igualando esas dos expresiones, encontramos que

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) dt} \quad (10.23)$$

Observe que este valor efectivo se encuentra determinando primero el *cuadrado* de la corriente, calculando después el valor promedio o *medio* y finalmente extrayendo la *raíz cuadrada*. Así al “leer” la ecuación matemática (10.23), estamos determinando la raíz cuadrada media, que abreviamos como rms, (por sus siglas en inglés) y, por tanto, I_{eff} se llama I_{rms} .

Como la cd es constante, el valor rms de la cd es simplemente el valor constante. Determinemos ahora el valor rms de otras formas de onda. La forma de onda más importante es la senoidal y, por consiguiente, tratamos ésta en particular en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10.8

Deseamos calcular el valor rms de la forma de onda $i(t) = I_M \cos(\omega t - \theta)$, la cual tiene un periodo de $T = 2\pi/\omega$.

SOLUCIÓN Sustituyendo esas expresiones en la ecuación (10.23) se obtiene

$$I_{\text{rms}} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T I_M^2 \cos^2(\omega t - \theta) dt \right]^{1/2}$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi,$$

encontramos que la ecuación anterior puede expresarse como

$$I_{\text{rms}} = I_M \left\{ \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t - 2\theta)] dt \right\}^{1/2}$$

Como sabemos que el promedio o valor medio de una onda coseno es cero,

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} &= I_M \left(\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2} dt \right)^{1/2} \\ &= I_M \left[\frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi/\omega} \right]^{1/2} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (10.24)$$

Por tanto, el valor rms de una senoide es igual al valor máximo dividido entre $\sqrt{2}$. De aquí que una corriente senoidal con un valor máximo de I_M entrega la misma potencia promedio a una resistencia R que una corriente cd con un valor de $I_M/\sqrt{2}$.

Al usar los valores rms para el voltaje y la corriente, la potencia promedio puede escribirse en general como

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (10.25)$$

La potencia absorbida por una resistencia R es

$$P = I_{\text{rms}}^2 R = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} \quad (10.26)$$

Al tratar con voltajes y corrientes en numerosas aplicaciones eléctricas, es importante saber si los valores citados son máximo, promedio, rms, o qué. Por ejemplo, la toma de corriente eléctrica de 120 V de ca tiene un valor rms de 120 V, un valor promedio de 0 V y un valor máximo de $120\sqrt{2}$ V.

Finalmente, si la corriente en una resistencia R está compuesta por una suma de ondas senoidales de frecuencias diferentes, la potencia absorbida por la resistencia puede ser expresada como

$$P = (I_{1\text{rms}}^2 + I_{2\text{rms}}^2 + \dots + I_{n\text{rms}}^2)R \quad (10.27)$$

donde el valor rms de la corriente total es

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{I_{1\text{rms}}^2 + I_{2\text{rms}}^2 + \dots + I_{n\text{rms}}^2} \quad (10.28)$$

Cada componente representa una corriente de diferente frecuencia.

E J E M P L O 10.9

Deseamos calcular el valor rms de la forma de onda del voltaje que se muestra en la figura 10.9.

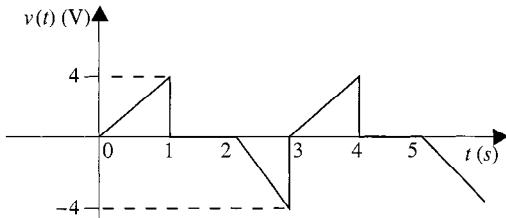


FIGURA 10.9 Forma de onda utilizada para ilustrar valores rms.

SOLUCIÓN La forma de onda es periódica con periodo $T = 3$ segundos. La ecuación para el voltaje en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 3$ segundos es

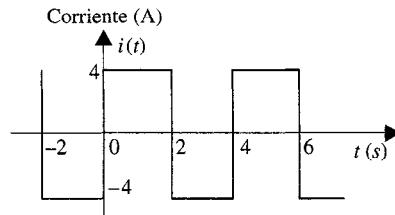
$$v(t) = \begin{cases} 4t \text{ V} & 0 < t \leq 1 \text{ s} \\ 0 \text{ V} & 1 < t \leq 2 \text{ s} \\ -4t + 8 \text{ V} & 2 < t \leq 3 \text{ s} \end{cases}$$

El valor rms es

$$\begin{aligned} V_{\text{rms}} &= \left\{ \frac{1}{3} \left[\int_0^1 (4t)^2 dt + \int_1^2 (0)^2 dt + \int_2^3 (-4t + 8)^2 dt \right] \right\}^{1/2} \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(\frac{16t^3}{3} \Big|_0^1 + \left(64t - \frac{64t^2}{2} + \frac{16t^3}{3} \right) \Big|_2^3 \right) \right]^{1/2} \\ &= 1.89 \text{ V} \end{aligned}$$

E J E M P L O 10.10

Determine el valor rms de la forma de onda de la corriente de la figura 10.10 y use este valor para calcular la potencia promedio entregada a una resistencia de 2Ω por la que fluye esta corriente.

**FIGURA 10.10** Forma de onda utilizada para ilustrar valores rms.

SOLUCIÓN La forma de onda de la corriente es periódica, con un periodo de $T = 4$ segundos. El valor rms es

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} &= \left\{ \frac{1}{4} \left[\int_0^2 (4)^2 dt + \int_2^4 (-4)^2 dt \right] \right\}^{1/2} \\ &= \left[\frac{1}{4} \left(16t \Big|_0^2 + 16t \Big|_2^4 \right) \right]^{1/2} \\ &= 4 \text{ A} \end{aligned}$$

La potencia promedio entregada a una resistencia de 2Ω con esta corriente es

$$P = I_{\text{rms}}^2 R = (4)^2 (2) = 32 \text{ W}$$

EJEMPLO 10.11

Deseamos encontrar el valor rms de la corriente:

$$i(t) = 12 \text{ sen } 377t + 6 \text{ sen}(754t + 30^\circ) \text{ A}$$

SOLUCIÓN Como las frecuencias de las dos ondas senoidales son diferentes,

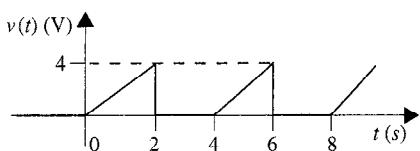
$$\begin{aligned} I_{\text{rms}}^2 &= I_{1\text{rms}}^2 + I_{2\text{rms}}^2 \\ &= \left(\frac{12}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$I_{\text{rms}} = 9.49 \text{ A}$$

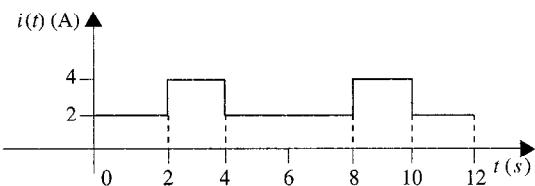
EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D10.7 Calcular el valor rms de la forma de onda de voltaje que se muestra en la figura D10.7.

**FIGURA D10.7**

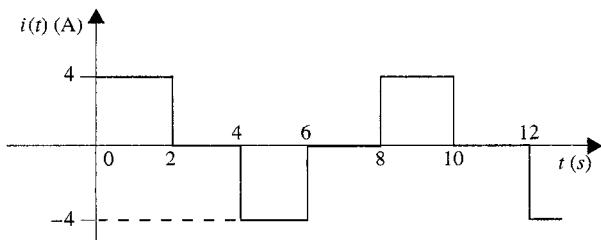
Resp.: $V_{\text{rms}} = 1.633 \text{ V}$.

D10.8 La forma de onda de corriente de la figura D10.8 fluye a través de la resistencia de 4Ω . Calcule la potencia promedio entregada a la resistencia.

**FIGURA D10.8**

Resp.: $P = 32 \text{ W}$.

D10.9 La forma de onda de corriente de la figura D10.9 fluye a través de la resistencia de 10Ω . Determine la potencia promedio entregada a la resistencia.

**FIGURA D10.9**

Resp.: $P = 80 \text{ W}$.

D10.10 La corriente $i(t)$ fluye en una resistencia de 4Ω . Determine la potencia absorbida por la resistencia si

$$i(t) = 4 \operatorname{sen}(377t - 30^\circ) + 6 \cos(754t - 45^\circ) \text{ A}$$

Resp.: $P = 104 \text{ W}$.

10.5 El factor de potencia

El factor de potencia es una cantidad muy importante. Su importancia se deriva en parte del impacto económico que tiene en los usuarios industriales de grandes cantidades de potencia. En esta sección definiremos cuidadosamente este término y entonces ilustraremos su significancia mediante algunos ejemplos prácticos.

En la sección 10.4 mostramos que a una carga que opera en el estado estable de ca se le entrega una potencia promedio de

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Definiremos un poco más los términos de esta importante ecuación. El producto $V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$ se denomina *potencia aparente*. Aunque el término $\cos(\theta_v - \theta_i)$ es una cantidad sin dimensiones y las unidades de P son watts, la potencia aparente normalmente se establece en volt-amperes (VA) o kilovolts-amperes (kVA) a fin de distinguirla de la potencia promedio.

Definimos ahora el *factor de potencia* (*fp*) como la razón de la potencia promedio a la potencia aparente; es decir,

$$fp \equiv \frac{P}{V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}} = \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (10.29)$$

donde

$$\cos(\theta_v - \theta_i) = \cos \theta_{Z_L} \quad (10.30)$$

El ángulo $\theta_v - \theta_i = \theta_{Z_L}$ es el ángulo de fase de la impedancia de carga, y con frecuencia se le denomina *ángulo del factor de potencia*. Las dos posiciones extremas de este ángulo corresponden a una carga puramente resistiva donde $\theta_{Z_L} = 0$, el fp es 1, y la carga solamente reactiva donde $\theta_{Z_L} = \pm 90^\circ$ y el fp es 0. Es, por supuesto, posible tener un fp unitario para una carga que contiene elementos R , L y C , si los valores de los elementos del circuito son tales que un ángulo de fase cero se obtiene en la frecuencia particular de operación.

Existe, por supuesto, un amplia gama de ángulos de factor de potencia entre $\pm 90^\circ$ y 0° . Si la carga es una combinación RC equivalente, entonces el ángulo del fp se halla entre los límites $-90^\circ < \theta_{Z_L} < 0^\circ$. Por otro lado, si la carga es una combinación RL equivalente, entonces el ángulo del fp está entre los límites $0 < \theta_{Z_L} < 90^\circ$. Obviamente, puede surgir confusión al identificar el tipo de carga que puede resultar, debido a que $\cos \theta_{Z_L} = \cos(-\theta_{Z_L})$. Para evitar este problema, se dice que el fp está *adelantado* o *retrasado*, donde esos dos términos se refieren a la fase de la corriente con respecto al voltaje. Como la corriente adelanta al voltaje en una carga RC , la carga tiene un fp adelantado. De manera similar, una carga RL tiene un fp retrasado; por consiguiente, las impedancias de carga de $Z_L = 1 - j1$ y $Z_L = 2 + j1$ tienen factores de potencia de $\cos(-45^\circ) = 0.707$ adelantado y $\cos(26.59^\circ) = 0.894$ retrasado, respectivamente.

E J E M P L O 10.12

Una carga industrial consume 88 kW con un fp de 0.707 retrasado de una línea de 480 V rms. La resistencia de la línea de transmisión del transformador de la compañía de potencia a la planta es 0.08 Ω. Determinemos la potencia que debe ser suministrada por la compañía de potencia a) bajo las condiciones presentes, y b) si el fp cambia de alguna manera a 0.90 de retraso. Es económicamente ventajoso tener un factor de potencia tan cercano a uno como sea posible.

S O L U C I Ó N a) El circuito equivalente para esas condiciones se muestra en la figura 10.11. Utilizando la ecuación (10.29), obtenemos la magnitud de la corriente rms en la planta:

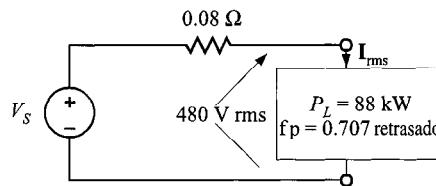


FIGURA 10.11 Circuito de ejemplo para examinar cambios en el factor de potencia.

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} &= \frac{P_L}{(\text{fp})(V_{\text{rms}})} \\ &= \frac{(88)(10^3)}{(0.707)(480)} \\ &= 259.3 \text{ A rms} \end{aligned}$$

La potencia que debe suministrar la compañía de potencia es

$$\begin{aligned} P_S &= P_L + (0.08) I_{\text{rms}}^2 \\ &= 88\,000 + (0.08)(259.3)^2 \\ &= 93.38 \text{ kW} \end{aligned}$$

b) Suponga ahora que el fp se cambia de alguna forma a 0.90 retrasado, pero el voltaje permanece constante a 480 V. La corriente de carga rms para esta condición es

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} &= \frac{P_L}{(\text{fp})(V_{\text{rms}})} \\ &= \frac{(88)(10^3)}{(0.90)(480)} \\ &= 203.7 \text{ A rms} \end{aligned}$$

En esas condiciones la compañía de potencia debe generar

$$\begin{aligned} P_S &= P_L + (0.08) I_{\text{rms}}^2 \\ &= 88\,000 + (0.08)(203.7)^2 \\ &= 91.32 \text{ kW} \end{aligned}$$

Observe con cuidado la diferencia entre los dos casos. Un simple cambio en el fp de la carga de 0.707 retrasada a 0.90 retrasada ha tenido un efecto interesante. Observe que en el primer caso la compañía de potencia debe generar 93.38 kW a fin de suministrar a la planta 88 kW de potencia debido a que el bajo factor de potencia significa que las pérdidas de la línea serán altas —5.38 kW—. Sin embargo, en el segundo caso la compañía de potencia necesita generar solamente 91.32 kW a fin de suministrar a la planta sus requerimientos de potencia, y las correspondientes pérdidas de línea son sólo de 3.32 kW.

El ejemplo claramente indica el impacto económico del factor de potencia de la carga. Un factor de potencia bajo en la carga significa que los generadores de la empresa deben ser capaces de conducir más corriente a voltaje constante, y deben también suministrar potencia para pérdidas de línea $I_{\text{rms}}^2 R$ más altas que las que se requerirían si el factor de potencia de la carga fuera alto. Como las pérdidas de línea representan energía gastada en calor y no beneficia a nadie, la empresa insistirá que una planta mantenga un fp alto, típicamente 0.90 de retraso, y ajustar su programa de ritmo para pena-

lizar a las plantas que no cumplen este requerimiento. En la siguiente sección demostraremos una técnica simple y económica para alcanzar este factor de corrección de la potencia.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

DATOS Una carga industrial consume 100 kW a 0.707 fp retasado. La línea de voltaje de 60 Hz en la carga es $480 \angle 0^\circ$ V rms. La resistencia de la línea de transmisión entre el transformador de la compañía de poten-

cia y la carga es 0.1Ω . Determine los ahorros de potencia que se pueden obtener si el fp se cambia a 0.94 de retraso.

Resp.: El ahorro de potencia es 3.771 kW.

10.6 Potencia compleja

En nuestro estudio de potencia de ca en estado estable es conveniente introducir otra cantidad, que comúnmente se llama *potencia compleja*. Para desarrollar la relación entre esta cantidad y otras que hemos presentado en las secciones anteriores, consideremos el circuito que se muestra en la figura 10.12.

La potencia compleja se define como

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{rms}} \mathbf{I}_{\text{rms}}^* \quad (10.31)$$

donde $\mathbf{I}_{\text{rms}}^*$ se refiere al complejo conjugado de \mathbf{I}_{rms} ; es decir, si $\mathbf{I}_{\text{rms}} = I_{\text{rms}} \angle \theta_i = I_R + jI_I$, entonces $\mathbf{I}_{\text{rms}}^* = I_{\text{rms}} \angle -\theta_i = I_R - jI_I$. La potencia compleja es entonces

$$\mathbf{S} = V_{\text{rms}} \angle \theta_v I_{\text{rms}} \angle -\theta_i = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \angle \theta_v - \theta_i \quad (10.32)$$

o

$$\mathbf{S} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) + jV_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\theta_v - \theta_i) \quad (10.33)$$

donde, por supuesto, $\theta_v - \theta_i = \theta_Z$. Notamos en la ecuación (10.33) que la parte real de la potencia compleja es simplemente la *potencia promedio o real*. A la parte imaginaria de \mathbf{S} le llamamos la *potencia de cuadratura o reactiva*. Por tanto, la potencia compleja se puede expresar en la forma

$$\mathbf{S} = P + jQ \quad (10.34)$$

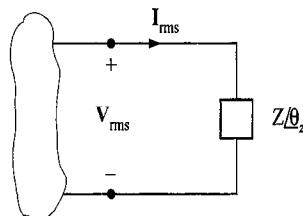


FIGURA 10.12 Circuito utilizado para explicar relaciones de potencia.

donde

$$P = \operatorname{Re}(\mathbf{S}) = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (10.35)$$

$$Q = \operatorname{Im}(\mathbf{S}) = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\theta_v - \theta_i) \quad (10.36)$$

Como se muestra en la ecuación (10.33), la magnitud de la potencia compleja es lo que hemos llamado *potencia aparente*, y el ángulo de fase para la potencia compleja es simplemente el ángulo del factor de potencia. La potencia compleja como la potencia aparente se mide en volts-amperes, la potencia real se mide en watts, y a fin de distinguir a Q de las otras cantidades, que de hecho tienen las mismas dimensiones, se mide en volts-amperes reactivos, o var.

Además de las relaciones expresadas anteriormente, notamos que como

$$\cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{\operatorname{Re}(\mathbf{Z})}{|\mathbf{Z}|}$$

$$\sin(\theta_v - \theta_i) = \frac{\operatorname{Im}(\mathbf{Z})}{|\mathbf{Z}|}$$

e

$$I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{rms}}}{|\mathbf{Z}|}$$

Las ecuaciones (10.35) y (10.36) pueden escribirse como

$$P = I_{\text{rms}}^2 \operatorname{Re}(\mathbf{Z}) \quad (10.37)$$

$$Q = I_{\text{rms}}^2 \operatorname{Im}(\mathbf{Z}) \quad (10.38)$$

y, por tanto, la ecuación (10.34) puede expresarse como

$$\mathbf{S} = I_{\text{rms}}^2 \mathbf{Z} \quad (10.39)$$

Los diagramas de la figura 10.13 sirven para explicar más las relaciones entre las diversas cantidades de potencia. Como se muestra en la figura 10.13a, la corriente fasorial puede dividirse en dos componentes: una que está en fase con \mathbf{V}_{rms} y otra que está desfasada 90° de \mathbf{V}_{rms} . Las ecuaciones (10.35) y (10.36) ilustran que la componente en fase produce la potencia real, y la componente a 90° , llamada componente de cuadratura, produce la potencia de cuadratura o reactiva. Además, las ecuaciones (10.34) a (10.36) indican que

$$\tan(\theta_v - \theta_i) = \frac{Q}{P} \quad (10.40)$$

la cual relaciona el ángulo del fp a P y Q en lo que se llama *triángulo de potencia*.

Las relaciones entre \mathbf{S} , P y Q pueden expresarse por medio de los diagramas que se muestran en la figura 10.13b y c. En la figura 10.13b notamos las siguientes condiciones. Si Q es positiva, la carga es inductiva, el factor de potencia está retrá-

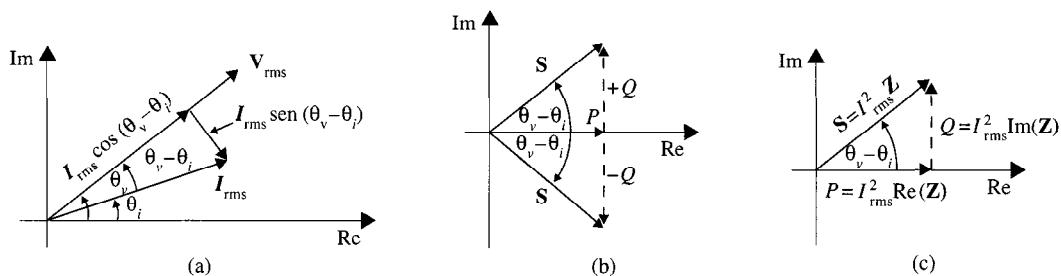


FIGURA 10.13 Diagrama para ilustrar relaciones de potencia.

sado y el número complejo S está en el primer cuadrante. Si Q es negativa, la carga es capacitiva, el factor de potencia está adelantado y el número complejo S está en el cuarto cuadrante. Si Q es cero, la carga es resistiva, el factor de potencia es unitario y el número complejo S se encuentra en el eje real positivo. La figura 10.13c ilustra las relaciones expresadas por las ecuaciones (10.37) a (10.39) para una carga inductiva.

Finalmente, es importante establecer que la potencia compleja, como la energía, se conserva; es decir, la potencia compleja total entregada a cualquier número de cargas individuales es igual a la suma de las potencias complejas entregadas a cada carga individual, sin hacer caso de cómo están interconectadas.

E J E M P L O 10.13

Una carga opera a 20 kW, 0.8 fp retrasado. El voltaje de carga es $220 /0^\circ$ V rms a 60 Hz. La impedancia de la línea es $0.09 + j0.3 \Omega$. Deseamos determinar el voltaje y el factor de potencia en la entrada de la línea.

SOLUCIÓN El diagrama del circuito para este problema se muestra en la figura 10.14. Como está ilustrado en la figura 10.13,

$$S = \frac{P}{\cos \theta} = \frac{P}{\text{fp}} = \frac{20\ 000}{0.8} = 25\ 000 \text{ VA}$$

Por tanto, en la carga

$$S_L = 25\ 000 / \theta = 25\ 000 / 36.87^\circ = 20\ 000 + j15\ 000 \text{ VA}$$

$$\text{Como } S_L = \mathbf{V}_L \mathbf{I}_L^*$$

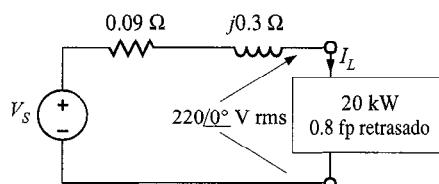


FIGURA 10.14 Circuito de ejemplo para análisis de potencia.

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_L &= \left[\frac{25,000 \angle 36.87^\circ}{220 \angle 0^\circ} \right]^* \\ &= 113.64 \angle -36.87^\circ \text{ A rms}\end{aligned}$$

Las pérdidas de potencia compleja en la línea son

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\text{línea}} &= I_L^2 \mathbf{Z}_{\text{línea}} \\ &= (113.64)^2 (0.09 + j0.3) \\ &= 1162.26 + j3874.21 \text{ VA}\end{aligned}$$

Como se estableció con anterioridad, la potencia compleja se conserva y, por consiguiente, la potencia compleja en el generador es

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_S &= \mathbf{S}_L + \mathbf{S}_{\text{línea}} \\ &= 21\,162.26 + j18\,874.21 \\ &= 28\,356.25 \angle 41.73^\circ \text{ VA}\end{aligned}$$

De aquí, el voltaje del generador es

$$\begin{aligned}V_S &= \frac{|\mathbf{S}_S|}{I_L} = \frac{28\,356.25}{113.64} \\ &= 249.53 \text{ V rms}\end{aligned}$$

y el factor de potencia del generador es

$$\cos(41.73^\circ) = 0.75 \text{ retrasado}$$

Pudimos haber resuelto este problema usando la LVK. Por ejemplo, calculamos la corriente de carga como

$$\mathbf{I}_L = 113.64 \angle -36.87^\circ \text{ A rms}$$

Por ello, la caída de voltaje en la línea de transmisión es

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{\text{línea}} &= (113.64 \angle -36.87^\circ) (0.09 + j0.3) \\ &= 35.59 \angle 36.43^\circ \text{ V rms}\end{aligned}$$

Por tanto, el voltaje del generador es

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_S &= 220 \angle 0^\circ + 35.59 \angle 36.43^\circ \\ &= 249.53 \angle 4.86^\circ \text{ V rms}\end{aligned}$$

De aquí que el voltaje del generador es 249.53 V rms. Además,

$$\theta_v - \theta_i = 4.86^\circ - (-36.87^\circ) = 41.73^\circ$$

y por tanto,

$$f_p = \cos(41.73^\circ) = 0.75 \text{ retrasado}$$

EJEMPLO 10.14

Dos redes A y B están conectadas por dos conductores que tienen una impedancia neta de $Z = 0 + j1\Omega$ como se muestra en la figura 10.15. Los voltajes en las terminales de las redes son $V_A = 120 \angle 30^\circ$ V rms y $V_B = 120 \angle 0^\circ$ V rms. Deseamos determinar el flujo de potencia promedio entre las redes e identificar cuál es la fuente y cuál es la carga.

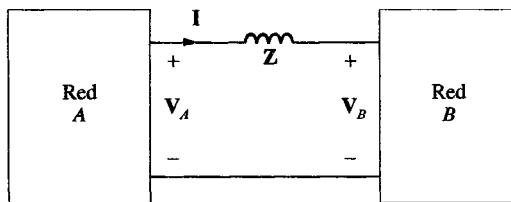


FIGURA 10.15 Red utilizada en el ejemplo 10.14.

SOLUCIÓN Como se muestra en la figura 10.15,

$$\begin{aligned} I &= \frac{V_A - V_B}{Z} \\ &= \frac{120 \angle 30^\circ - 120 \angle 0^\circ}{j1} \\ &= 62.12 \angle 15^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

La potencia entregada por la red A es

$$\begin{aligned} P_A &= |V_A| |I| \cos(\theta_{V_A} - \theta_I) \\ &= (120) (62.12) \cos(30^\circ - 15^\circ) \\ &= 7200.4 \text{ W} \end{aligned}$$

La potencia absorbida por la red B es

$$\begin{aligned} P_B &= |V_B| |I| \cos(\theta_{V_B} - \theta_I) \\ &= (120) (62.12) \cos(0^\circ - 15^\circ) \\ &= 7200.4 \text{ W} \end{aligned}$$

Si el flujo de potencia se hubiera producido realmente de la red B a la red A, los signos resultantes de P_A y P_B habrían sido negativos.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D10.12 Una carga industrial requiere 40 kW a 0.84 fp de retraso. El voltaje de la carga es $220 \angle 0^\circ$ V rms a 60 Hz. La impedancia de la línea de transmisión es $0.1 + j0.25 \Omega$. Determine las pérdidas de potencia real y reactiva en la línea y la potencia real y reactiva requerida en la entrada de la línea de transmisión.

Resp.: $P_{\text{línea}} = 4.685$ kW, $Q_{\text{línea}} = 11.713$ kvar, $P_S = 44.685$ kW, $Q_S = 37.55$ kvar.

D10.13 Una carga requiere 60 kW a 0.85 fp de retraso. El voltaje de la línea de 60 Hz en la carga es $220 \angle 0^\circ$ V rms. Si la impedancia de la línea de transmisión es $0.12 + j0.18 \Omega$, determine el voltaje de la línea y el factor de potencia en la entrada.

Resp.: $V_{\text{ent}} = 284.6 \angle 5.8^\circ$ V rms, $\text{pf}_{\text{ent}} = 0.792$ retraso.

10.7 Corrección del factor de potencia

Las plantas industriales que requieren grandes cantidades de potencia tienen una amplia variedad de cargas. Sin embargo, por naturaleza las cargas normalmente tienen un factor de potencia retrasado. En vista de los resultados obtenidos en el ejemplo 10.12, somos inducidos naturalmente a preguntar si hay alguna técnica conveniente para elevar el factor de potencia de una carga. Como un cargo típica puede ser un banco de motores de inducción u otra costosa maquinaria, la técnica para elevar el fp debe ser económica a fin de ser viable.

Para contestar la pregunta realizada, examinemos el circuito que se muestra en la figura 10.16. El circuito ilustra una carga industrial típica. En paralelo con esta carga hemos colocado un capacitor. La potencia compleja original de la carga Z_L , que denotaremos por S_{ant} , es

$$S_{\text{ant}} = P_{\text{ant}} + jQ_{\text{ant}} = |S_{\text{ant}}| \angle \theta_{\text{ant}}$$

La potencia compleja para el capacitor es

$$S_{\text{cond}} = 0 + jQ_{\text{cond}} = |S_{\text{cap}}| \angle -90^\circ$$

La potencia compleja nueva que resulta de agregar un condensador es

$$S_{\text{ant}} + S_{\text{cond}} = S_{\text{nueva}} = P_{\text{ant}} + jQ_{\text{nueva}} = |S_{\text{nueva}}| \angle \theta_{\text{nueva}} \quad (10.41)$$

donde θ_{nueva} está especificada por el factor de potencia requerido. La diferencia entre las potencias complejas nueva y anterior es ocasionada por la suma de un capacitor y como éste es puramente reactivo,

$$S_{\text{cond}} = +jQ_C = -j\omega CV_{\text{rms}}^2 \quad (10.42)$$

La ecuación (10.42) se puede usar para encontrar el valor requerido de C a fin de alcanzar el nuevo factor de potencia especificado. El procedimiento que hemos descrito se ilustra en la figura 10.17 donde $\theta_{\text{ant}} = \theta_{v_L} - \theta_{i_L}$ y $\theta_{\text{nueva}} = \theta_{v_T} - \theta_{i_T}$. De aquí, podemos obtener un factor de potencia particular para la carga total simplemente mediante una selección adecuada de un capacitor y colocándolo en paralelo con la carga original. En general, queremos que el factor de potencia sea grande y, por tanto, que el ángulo del factor de potencia deba ser pequeño (es decir, entre más grande sea el factor de potencia deseado, más pequeño será el ángulo $\theta_{v_T} - \theta_{i_T}$).

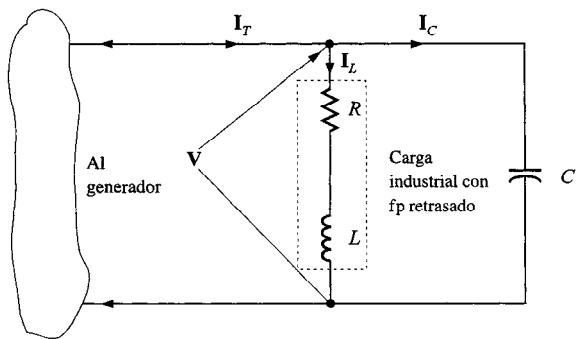


FIGURA 10.16 Circuito para corrección del factor de potencia.

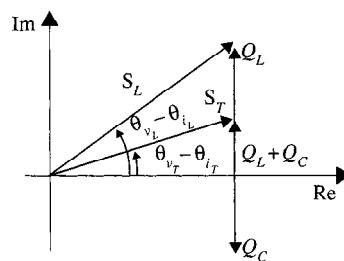


FIGURA 10.17 Ilustración de la técnica para corrección del factor de potencia.

EJEMPLO 10.15

Los kayaks de plástico se fabrican utilizando un proceso llamado rotomoldeo, el cual está diagramado en la figura 10.18. Se inyecta plástico fundido en un molde que es rotado a lo largo del eje del kayak hasta que el plástico se enfriá, resultando una embarcación hueca de una sola pieza. Suponga que el motor de inducción utilizado para hacer girar el molde consume 50 kW en un fp de 0.8 retrasado de una línea de $220 \angle 0^\circ$ V rms, 60 Hz. Deseamos elevar el fp a 0.95 retrasado colocando un banco de capacitores en paralelo con la carga.

SOLUCIÓN El diagrama del circuito para este problema se muestra en la figura 10.19. $P_L = 50$ kW y como $\cos^{-1} 0.8 = 36.87^\circ$, $\theta_{\text{ant}} = 36.87^\circ$. Por tanto,

$$Q_{\text{ant}} = P_{\text{ant}} \tan \theta_{\text{ant}} = (50) (10^3) (0.75) = 37.5 \text{ kvar}$$

De aquí,

$$\mathbf{S}_{\text{ant}} = P_{\text{ant}} + jQ_{\text{ant}} = 50\,000 + j37\,500$$

y

$$\mathbf{S}_{\text{cond}} = 0 + jQ_{\text{cond}}$$

Como el factor de potencia requerido es 0.95, $\theta_{\text{nueva}} = 18.19^\circ$. Entonces



FIGURA 10.18 Proceso de manufactura de rotomodelado.

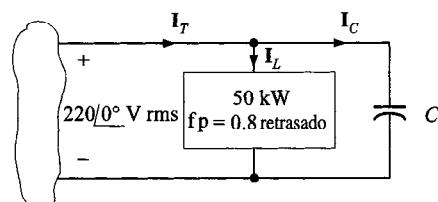


FIGURA 10.19 Circuito de ejemplo para la corrección del factor de potencia.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{\text{nueva}} &= \mathbf{S}_{\text{ant}} + \mathbf{S}_{\text{cond}} = P_{\text{nueva}} + j(Q_{\text{nueva}} + Q_{\text{cond}}) \\
 &= 50\,000 + j50\,000 \tan 18.19^\circ \\
 &= 50\,000 + j16\,430
 \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
 Q_{\text{ant}} + Q_{\text{cond}} &= 16\,430 \\
 Q_{\text{cond}} &= 16\,430 - 37\,500 \\
 &= -j21\,070
 \end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{21\,070}{(377)(220)^2} \\
 &= 1155 \mu\text{F}
 \end{aligned}$$

Utilizando un capacitor de esta magnitud en paralelo con la carga industrial, creamos, desde la perspectiva de la empresa, una carga con fp de 0.95 retrasado. Sin embargo, los parámetros de la carga real permanecen sin cambio. En esas condiciones, la corriente proporcionada por la empresa es menor y por consiguiente puede usar pequeños conductores para la misma cantidad de potencia. O, si el tamaño del conductor es fijo, las pérdidas de línea serán menores, ya que esas pérdidas son una función del cuadrado de la corriente.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

Resp.: $C = 773 \mu\text{F}$

- D10.14** Calcule el valor del capacitor necesario para cambiar el factor de potencia del ejercicio D10.11 a 0.95 retrasado.

10.8 Mediciones de potencia

En las secciones anteriores hemos ilustrado técnicas para calcular potencia. Ahora mostraremos cómo se mide realmente la potencia en una red eléctrica. Un instrumento utilizado para medir la potencia promedio es el watímetro. Este instrumento contiene una bobina de corriente de baja impedancia (la cual idealmente tiene impedancia cero) que

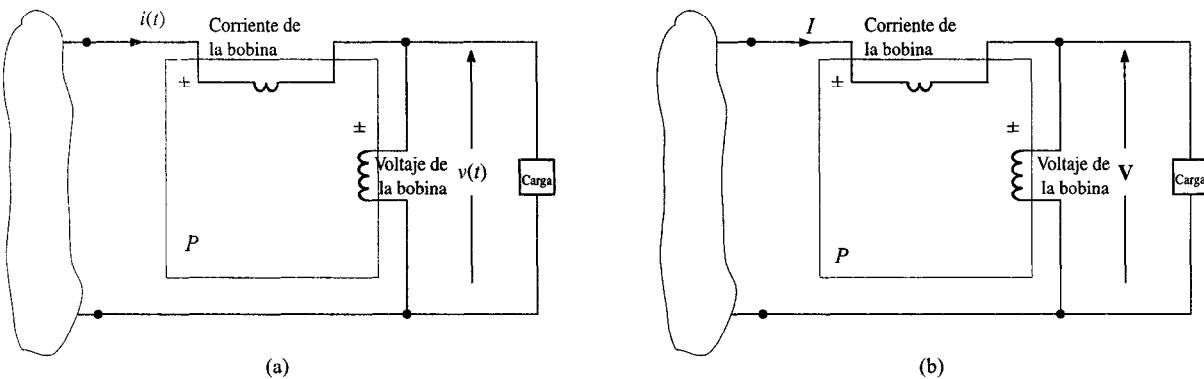


FIGURA 10.20 Conexiones del watímetro para medición de potencia.

se conecta en serie con la carga, y una bobina de voltaje de alta impedancia (la cual idealmente tiene impedancia infinita) que se conecta a través de la carga. Si el voltaje y la corriente son periódicos y el watímetro se conecta como se muestra en la figura 10.20a, leerá

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt$$

donde $v(t)$ e $i(t)$ están definidos en la figura. Advierta que $i(t)$ es registrada como entrando en la terminal \pm de la bobina de corriente y que $v(t)$ es registrada como positiva con respecto a las terminales \pm de la bobina de voltaje. En la figura 10.20b se muestra el circuito equivalente en el dominio de frecuencia, donde la corriente y el voltaje están registrados igual que en el dominio de tiempo, y la lectura del watímetro será

$$P = \text{Re}(\mathbf{V}\mathbf{I}^*) = |\mathbf{V}| |\mathbf{I}| \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Si $v(t)$ e $i(t)$ o \mathbf{V} e \mathbf{I} se eligen correctamente, la lectura será la potencia promedio. En la figura 10.20 las conexiones producirán una lectura de la potencia entregada a la carga. Como las dos bobinas están completamente aisladas entre ellas, se pueden conectar en cualquier lugar del circuito y la lectura puede tener o no significado.

Advierta que si una de las bobinas en el watímetro se invierte, las ecuaciones para la potencia son el negativo de lo que eran antes de la inversión de la bobina debido al cambio en la referencia de la variable con respecto a la terminal \pm . Debido a la construcción física de los watímetros, la terminal \pm de la bobina de potencial debe conectar

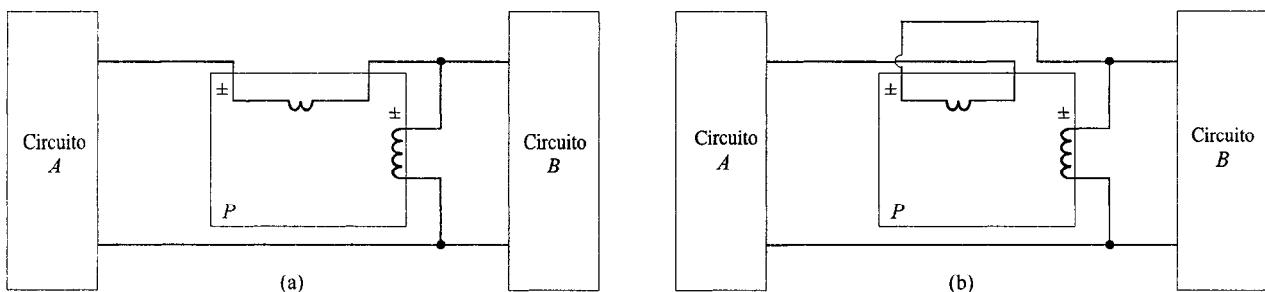


FIGURA 10.21 Conexiones del watímetro.

tarse siempre a la misma línea que la bobina de corriente, como se muestra en la figura 10.21a. Si es necesario invertir un devanado para producir una lectura de escala superior, cualquier bobina puede invertirse. Por ejemplo, invertir la bobina de corriente da como resultado la red que se muestra en la figura 10.21b. Note que si la terminal \pm de la bobina potencial está conectada a la línea que contiene la bobina de corriente y el medidor está leyendo en la parte superior de la escala, la potencia, P , fluye a través del watímetro del circuito A al circuito B .

EJEMPLO 10.16

Dada la red que se muestra en la figura 10.22, deseamos determinar la lectura del watímetro.

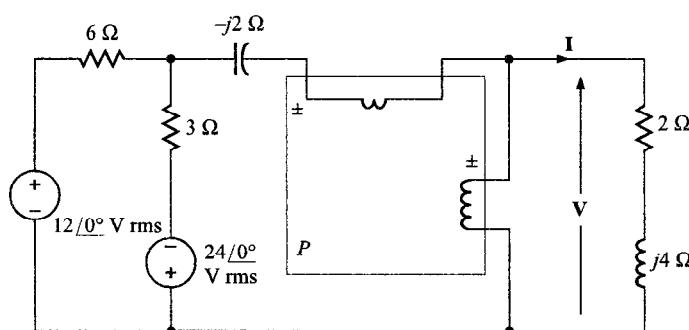


FIGURA 10.22 Uso del watímetro en la medición de potencia.

SOLUCIÓN Utilizando cualquiera de las técnicas (por ejemplo, el teorema de Thévenin), podemos mostrar que

$$\mathbf{I} = 2.68 / 153.43^\circ \text{A rms}$$

$$\mathbf{V} = 11.99 / 216.86^\circ \text{V rms}$$

y por consiguiente el watímetro lee

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{Re}(\mathbf{VI}^*) = |\mathbf{V}| |\mathbf{I}| \cos(\theta_v - \theta_i) \\ &= (11.99)(2.68) \cos(216.86^\circ - 153.43^\circ) \\ &= 14.37 \text{ W} \end{aligned}$$

la potencia promedio entregada a la impedancia $(2 + j4)\ \Omega$.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D10.15 Determine la lectura del watímetro en la red de la figura D10.15.

Resp.: $P = 1440.24 \text{ W}$.

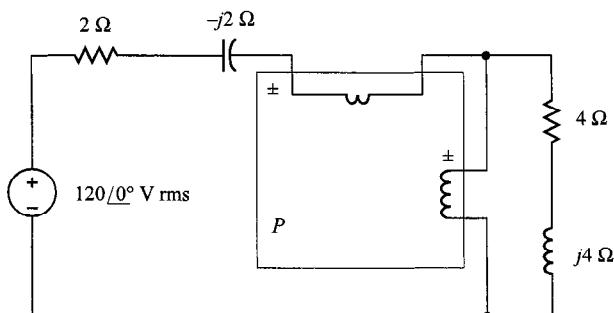


FIGURA D10.15

10.9 Circuitos trifilares de una sola fase

El circuito trifilar de una sola fase de ca que se muestra en la figura 10.23 es un tema importante debido a que es la red típica de potencia de ca que se encuentra en los hogares. Observe que las fuentes de voltaje son iguales, es decir, $\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}$. Así, las magnitudes son iguales y las fases son iguales (una sola fase). El voltaje línea a línea $\mathbf{V}_{ab} = 2\mathbf{V}_{an} = 2\mathbf{V}_{nb} = 2\mathbf{V}$. Dentro de una casa, las luces y pequeños aparatos están conectados desde una línea al neutro n , y los aparatos grandes como calentadores de agua y acondicionadores de aire se conectan línea a línea. Las luces operan a cerca de 120 V rms y los aparatos grandes operan a aproximadamente 240 V rms.

Unamos dos cargas idénticas al sistema de voltaje trifilar de una sola fase usando conductores perfectos como se muestra en la figura 10.23b. De la figura notamos que

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_L}$$

e

$$\mathbf{I}_{bB} = - \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_L}$$

la LCK en el punto N es

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{nN} &= -(\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB}) \\ &= -\left(\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_L} - \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_L}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Observe que no hay corriente en el alambre neutro, y por consiguiente puede eliminarse sin afectar el resto del sistema; es decir, todos los voltajes y corrientes permanecerán sin cambio. Uno es naturalmente impulsado a preguntarse hasta dónde llega la simplicidad exhibida por este sistema. Por ejemplo, ¿qué pasaría si cada línea tuviera un impedancia

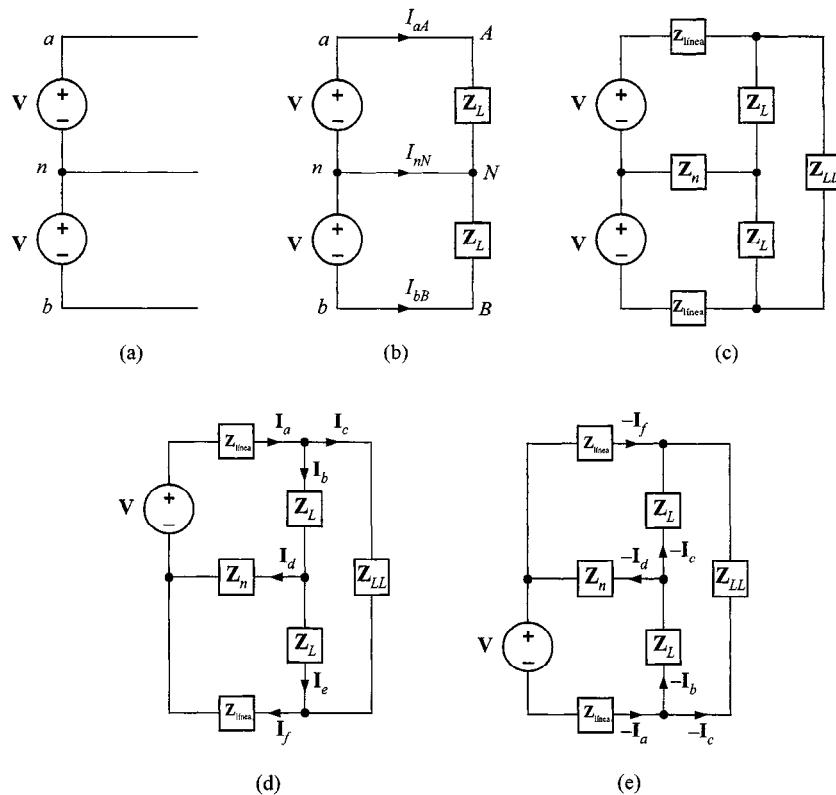


FIGURA 10.23 Sistema trifilar de una sola fase.

de línea, si el conductor neutro tuviera una impedancia asociada a él, y si hubiera una carga atada de línea a línea? Para explorar esas preguntas, considere el circuito de la figura 10.23c. Aunque podemos examinar este circuito usando muchas de las técnicas que hemos empleado en capítulos anteriores, la simetría de la red sugiere que quizás la superposición pueda conducirnos a algunas conclusiones sin tener que recurrir al asalto con fuerza bruta. Empleando la superposición, consideremos los dos circuitos de la figura 10.23d y e. Las corrientes en la figura 10.23d están marcadas de forma arbitraria. Debido a la relación simétrica entre la figura 10.23d y e, las corrientes de la figura 10.23e se corresponden directamente con las de la figura 10.23d. Si agregamos las dos corrientes fasoriales en cada rama, encontramos que la corriente neutra es nuevamente cero. Una corriente neutra de cero es un resultado directo de la naturaleza simétrica de la red. Si las impedancias de línea $Z_{\text{línea}}$ o las impedancias de carga Z_L son diferentes, la corriente neutra no será cero. Haremos uso directo de esos conceptos cuando estudiemos las redes trifásicas en el capítulo 11.

E J E M P L O 10.17

En la figura 10.24a se muestra un circuito doméstico trifilar de una sola fase. El uso de las luces, el estéreo y la cocina durante un periodo de 24 horas se demuestra en la figura 10.24b. Calculemos el uso de energía durante 24 horas en kW·hora. Suponiendo que esto representa un día típico y que

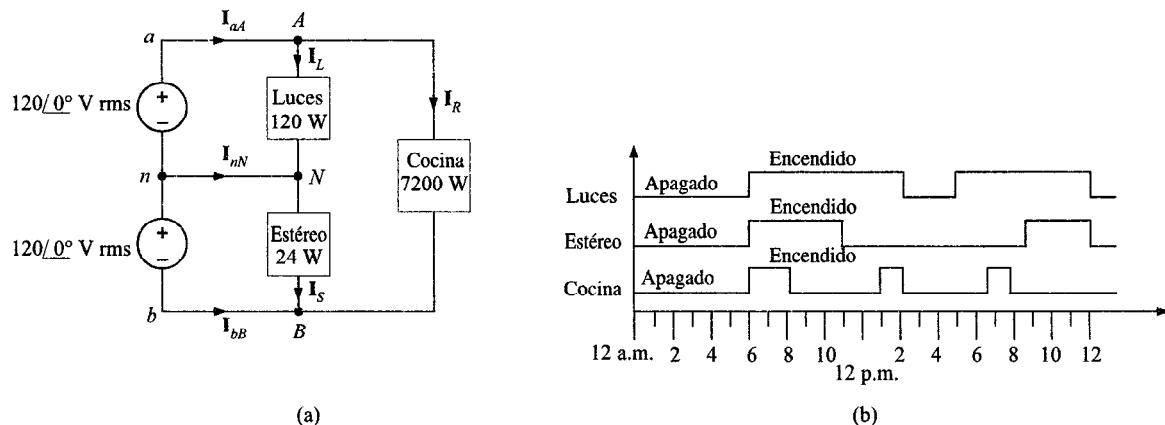


FIGURA 10.24 Red trifilar doméstica y uso de los aparatos.

nuestra tarifa de consumo es \$0.08/kW-h, estimemos también el recibo de pago para un mes de 30 días.

SOLUCIÓN Aplicando el análisis nodal a la figura 10.24a se obtiene

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_R$$

$$\mathbf{I}_{bB} = -\mathbf{I}_S - \mathbf{I}_R$$

$$\mathbf{I}_{nN} = \mathbf{I}_S - \mathbf{I}_L$$

Las magnitudes de la corriente para cada carga pueden encontrarse de los correspondientes niveles de potencia como sigue.

$$I_L = \frac{P_L}{V_{an}} = \frac{120}{120} = 1 \text{ A rms}$$

$$I_S = \frac{P_S}{V_{nb}} = \frac{24}{-120} = -0.2 \text{ A rms}$$

$$I_R = \frac{P_S}{V_{ab}} = \frac{7200}{240} = 30 \text{ A rms}$$

La energía utilizada es simplemente la integral de la potencia entregada por las dos fuentes en el periodo de 24 horas. Como las magnitudes del voltaje son constantes, podemos expresar la energía entregada por las fuentes como

$$E_{an} = V_{an} \int I_{aA} dt$$

$$E_{nb} = V_{nb} \int -I_{bB} dt$$

Las integrales de I_{aA} e I_{bB} pueden determinarse gráficamente de la figura 10.24b.

$$\int_{12\text{a.m.}}^{12\text{a.m.}} I_{aA} dt = 3I_R + 15I_L = 105$$

$$\int_{12\text{a.m.}}^{12\text{a.m.}} -I_{bB} dt = 8I_S + 3I_R = 91.6$$

Por tanto, la energía diaria para cada fuente y la energía total es

$$E_{an} = 12.60 \text{ kW-h}$$

$$E_{bn} = 10.99 \text{ kW-h}$$

$$E_{total} = 23.59 \text{ kW-h}$$

En un mes de 30 días, una tarifa de \$0.08/kW-h da como resultado un recibo de consumo de potencia de

$$\text{Costo} = (23.59) (30) (0.08) = \$56.62$$

10-10 Consideraciones de seguridad

Aunque este libro tiene que ver principalmente con la teoría del análisis de circuitos, reconocemos que muchos estudiantes, en este punto de sus estudios, habrán comenzado a relacionar la teoría con los dispositivos y sistemas eléctricos que encuentran en el mundo que los rodea. Así, parece aconsejable separarse brevemente de la teoría y gastar algo de tiempo discutiendo los muy prácticos e importantes temas de la seguridad. La seguridad eléctrica es un tema muy amplio y diverso que requeriría varios volúmenes para un tratamiento completo. En lugar de ello, limitaremos nuestro análisis a pocos conceptos introductorios, ilustrándolos con ejemplos.

Sería difícil imaginar que alguien en nuestra sociedad pudiera haber llegado a su adolescencia sin haber experimentado alguna forma de sacudida eléctrica. Si ésta provino de una descarga electrostática inofensiva o de un contacto accidental con un circuito eléctrico energizado, la respuesta fue probablemente la misma —una reacción muscular inmediata e involuntaria—. En ambos casos, la causa de la reacción es la corriente que fluye por el cuerpo. La gravedad de la sacudida depende de varios factores, el más importante de los cuales es la magnitud, la duración y la trayectoria de la corriente a través del cuerpo.

El efecto de la sacudida eléctrica varía mucho de una persona a otra. La figura 10.25 muestra las reacciones generales que ocurren cuando una corriente de ca de 60 Hz pasa por el cuerpo humano de mano a mano, con el corazón en la trayectoria de la conducción. Observe que hay un punto intermedio de corriente, entre 0.1 a 0.2 A, que tiene muchas probabilidades de ser mortal. Los niveles de corriente en este punto son propensos a producir fibrilación ventricular, una desorganización de las contracciones metódicas del músculo del corazón. La recuperación del latido generalmente no ocurre sin una intervención médica inmediata. Los niveles de corriente por arriba de ese punto fatal hacen que el corazón se contraiga peligrosamente, y si la sacudida se interrumpe con la suficiente rapidez, el corazón puede recuperar su latido por sí mismo.

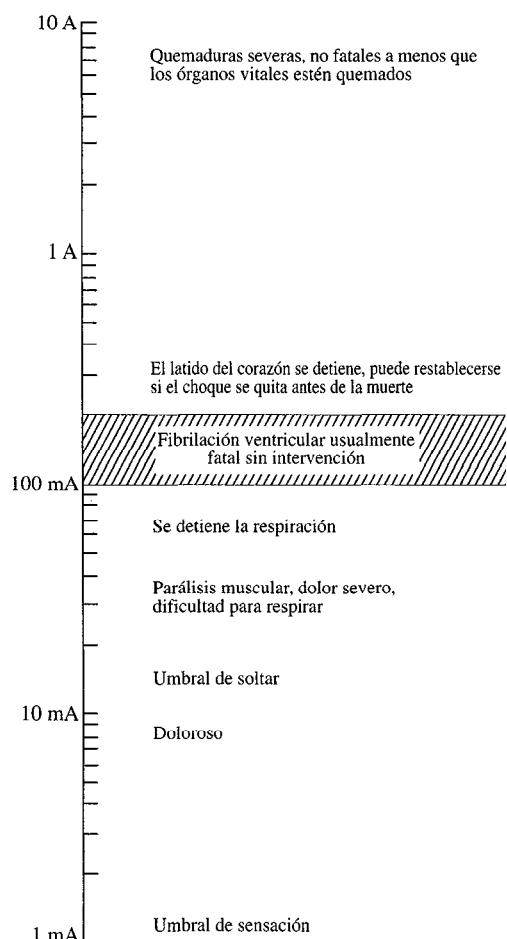


FIGURA 10.25 Efectos de la descarga eléctrica. (De C.F. Dalziel y W.R. Lee, “Lethal Electric Currents”, *IEEE Spectrum*, febrero de 1969, pp. 44-50, y C.F. Dalziel, “Electric Shock Hazard”, *IEEE Spectrum*, febrero de 1972, pp. 41-50.)

El voltaje requerido para producir una corriente dada depende del grado del contacto con el cuerpo y de la impedancia del cuerpo entre los puntos de contacto. El voltaje electrostático tal como el que puede producirse al deslizarse a lo largo del asiento de un coche en un seco día de invierno puede ser del orden de 20 000 a 40 000 V, y la sobre-tensión de corriente al tocar la manija de la puerta, del orden de 40 A. Sin embargo, la trayectoria para el flujo de corriente es principalmente sobre la superficie del cuerpo y su duración es de sólo unos microsegundos. Aunque ese choque podría ser desastroso para algunos componentes electrónicos, no causa nada más que un malestar de poca importancia y de cierta irritación en un ser humano.

Los aparatos eléctricos que se encuentran por todas partes en el hogar requieren típicamente 120 o 240 V rms para su operación. Aunque el nivel de voltaje es pequeño comparado con el del choque electrostático, el potencial para dañar al individuo y a los objetos es mucho mayor. El contacto accidental es más susceptible de generar un flujo de corriente de mano a mano o de mano a pie —cuálquiera de los cuales someterá al corazón a un choque—. Por otra parte, la corriente de 60 Hz y de cambio relativamente

lento (baja frecuencia) tiende a penetrar más profundamente en el cuerpo que a permanecer en la superficie como lo suele hacer una corriente de cambio rápido (alta frecuencia). Además, la fuente de energía tiene la capacidad de sostener un flujo de corriente sin disminución. Por ello, el análisis subsecuente se concentrará primordialmente en los peligros asociados con el sistema de potencia de ca de 60 Hz.

El sistema trifilar de una sola fase que se presentó anteriormente es por lo general, aunque no exclusivamente, utilizado para la distribución de potencia a las residencias. Dos aspectos importantes de este o de cualquier sistema que se relacionan con la seguridad no se han mencionado todavía: la fusión de circuito y el aterrizaje.

Cada rama de circuito, haciendo caso omiso del tipo de carga que sirve, está protegido del flujo excesivo de corriente mediante cortadores de circuito (breakers) o fusibles. Los circuitos de las partes fijas de los enchufes están generalmente limitados a 20 amperes y los circuitos de alumbrado a 15 amperes. Claramente, éstos no pueden proteger a las personas de una descarga letal. El propósito principal de esos dispositivos limitadores de corriente es proteger el equipo.

El conductor neutro del sistema de potencia se conecta a tierra en una multitud de puntos a lo largo del sistema y, en particular, en la entrada de servicio a la residencia. La conexión a tierra puede ser mediante una varilla clavada en tierra o por el contacto con un tubo de agua fría de un sistema metálico de agua enterrado. Las ramas de los circuitos que se salen del tablero de distribución (caja de fusibles) generalmente consisten en tres conductores más que en sólo dos, como se mostró en la figura 10.23. El tercer conductor es el alambre a tierra, como se muestra en la figura 10.26.

El conductor a tierra puede parecer redundante, ya que no juega ningún papel en la operación normal de una carga que puede conectarse al enchufe. Su papel se ilustra mediante el siguiente ejemplo.

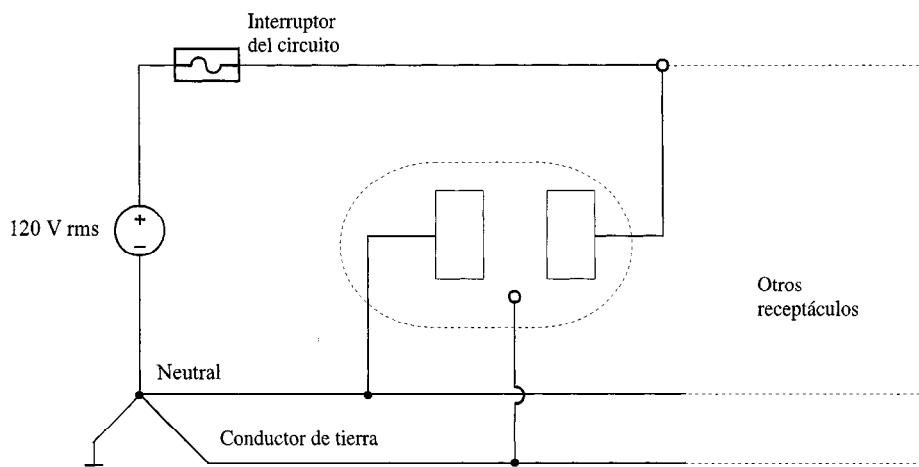


FIGURA 10.26 Receptáculo de casa.

E J E M P L O 10.18

Joe College tiene un taller en su sótano donde usa varias herramientas eléctricas, como taladros, sierras y lijadoras. El piso del sótano es de concreto, y como está bajo el nivel del suelo, por lo general está húmedo. El concreto húmedo es un conductor relativamente bueno. Sin saberlo Joe, el aislante en un alambre de su taladro eléctrico ha sido mellado y el alambre está en contacto con (o en corto con) el chasis metálico, como se muestra en la figura 10.27. ¿Está Joe en algún peligro cuando utiliza el taladro?

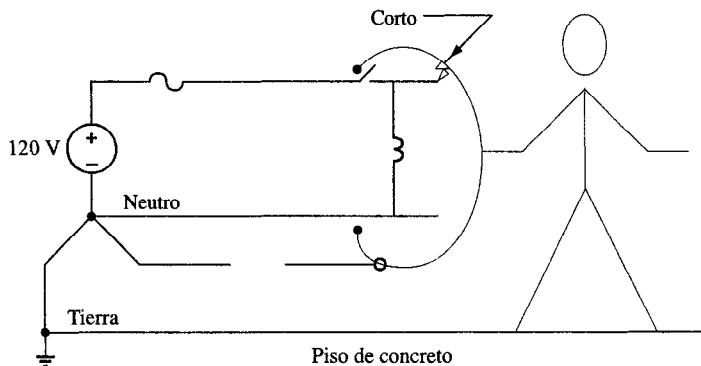


FIGURA 10.27 Circuito de falla.

S O L U C I Ó N Sin el conductor a tierra conectado al chasis metálico de la herramienta, Joe recibiría una fuerte descarga, quizás mortal, cuando intente usar el taladro. El voltaje entre su mano y sus pies sería de 120 V, y la corriente que pasara por su cuerpo estaría limitada por la resistencia de su cuerpo y del piso de concreto. Típicamente, los cortadores del circuito no operarían. Sin embargo, si el conductor a tierra está presente y conectado apropiadamente al chasis del taladro, el chasis permanecerá al potencial de tierra, la fuente de 120 V se pone en corto con tierra, operan los interruptores del circuito, y Joe vive para taladrar otro hoyo.

Se mencionó antes que el interruptor del circuito o fusible no puede proporcionar una protección efectiva contra la descarga. Hay, sin embargo, un tipo especial de dispositivo llamado interruptor accionado por corriente de pérdida a tierra (GFI, por sus siglas del inglés de ground-fault interrupter), el cual puede proporcionar protección al personal. Este dispositivo detecta un flujo de corriente fuera del circuito normal. Considere el circuito de la figura 10.27. En la condición normal de operación segura, la corriente en el conductor neutro debe ser la misma que la del conductor de la línea. Si en algún momento la corriente en la línea no es igual a la corriente en el neutro, entonces una trayectoria secundaria se establece de alguna forma creando una condición peligrosa. Esta trayectoria secundaria se llama falla. Por ejemplo, la trayectoria de falla en la figura 10.27 es a través de Joe y el piso de concreto. El GFI detecta esta falla y como respuesta abre el circuito. Este principio de operación se ilustra mediante el siguiente ejemplo.

E J E M P L O 10.19

Describamos la operación de un GFI.

SOLUCIÓN Considere la acción del circuito magnético de la figura 10.28. En condiciones normales de operación, i_1 e i_2 son iguales, y si las bobinas en los conductores neutro y de línea son idénticos, como aprendimos en física básica, el flujo magnético en el núcleo será cero. En consecuencia, no se inducirá voltaje en la bobina sensora.

Si una falla ocurriera en la carga, la corriente fluirá en el conductor a tierra y quizás en la tierra; así, i_1 e i_2 ya no serán iguales, el flujo magnético no será cero, y se inducirá un voltaje en la bobina sensora. Ese voltaje se puede usar para activar un interruptor de circuito. Esta es la esencia del dispositivo GFI.

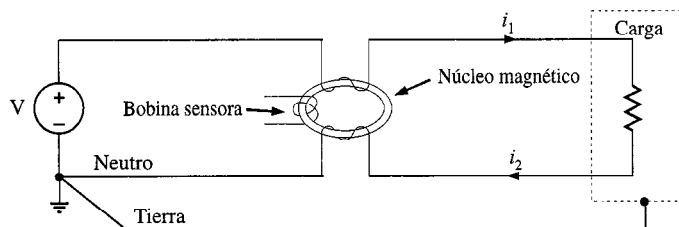


FIGURA 10.28 Circuito del interruptor accionado por corriente de pérdida a tierra.

Los interruptores de falla a tierra están disponibles en la forma de interruptores de circuito y también como receptáculos. Se requieren ahora en circuitos de ramas que sirven para tomas en áreas como baños, sótanos, garajes y lugares a la intemperie. Los dispositivos operarán en corriente de pérdida a tierra del orden de pocos miliamperes. Desafortunadamente, el GFI es un dispositivo relativamente nuevo y los requerimientos del código eléctrico por lo general no son retroactivos. Así pocas residencias antiguas lo tienen.

Los requerimientos para la instalación y mantenimiento de sistemas eléctricos están definidos meticulosamente en varios códigos que se han establecido para proporcionar protección al personal y a la propiedad. La instalación, alteración o reparación de dispositivos y sistemas eléctricos debe ser realizada sólo por personas calificadas. El objeto de la materia que estudiamos en análisis de circuitos no proporciona tal calificación.

Los siguientes ejemplos ilustran los peligros potenciales que se pueden encontrar en una variedad de situaciones diarias. Comenzamos retomando una situación descrita en un ejemplo previo.

E J E M P L O 10.20

Suponga que un hombre está trabajando en el techo de una casa móvil con un taladro de mano. Es temprano, el hombre está descalzo, y el rocío cubre la casa móvil. La terminal de tierra en la clavija del taladro ha sido quitada. ¿Recibirá el hombre una descarga si la línea eléctrica “caliente” se pone en corto con el chasis del taladro?

SOLUCIÓN Para analizar este problema debemos construir un modelo que represente adecuadamente la situación descrita. En su libro *Medical Instrumentation* (Boston: Houghton Mifflin Company, 1978), John G. Webster sugiere los siguientes valores para la resistencia del cuerpo humano: R_{piel} (seca) = 15 k Ω , R_{piel} (húmeda) = 150 Ω , $R_{extremidad}$ (brazo o pierna) = 100 Ω , y R_{tronco} = 200 Ω .

El modelo de la red se muestra en la figura 10.29. Note que como la línea a tierra está en circuito abierto, existe una trayectoria cerrada que se origina en el alambre caliente a través del corto, el cuerpo humano, la casa móvil y la tierra. Por causa de las condiciones establecidas previamente, se supone que las resistencias de la superficie de contacto R_{sc_1} y R_{sc_2} son de 150 Ω cada una. La resistencia del cuerpo R_{cuerpo} , consistente en brazo, tronco y pierna, es 400 Ω . La resistencia de la casa móvil se supone que es cero, y la resistencia de tierra R_{gnd} , de la tierra de la casa móvil a la fuente real de tierra se supone que es 1 Ω . Por tanto, la magnitud de la corriente a través del cuerpo de la mano al pie sería

$$\begin{aligned} I_{cuerpo} &= \frac{120}{R_{sc_1} + R_{cuerpo} + R_{sc_2} + R_{gnd}} \\ &= \frac{120}{701} \\ &= 171 \text{ mA} \end{aligned}$$

Una corriente de esta magnitud puede fácilmente ocasionar una falla del corazón.

Es importante notar que se proporcionaría protección adicional si el interruptor de circuito fuera un interruptor accionado por corriente de pérdida a tierra.

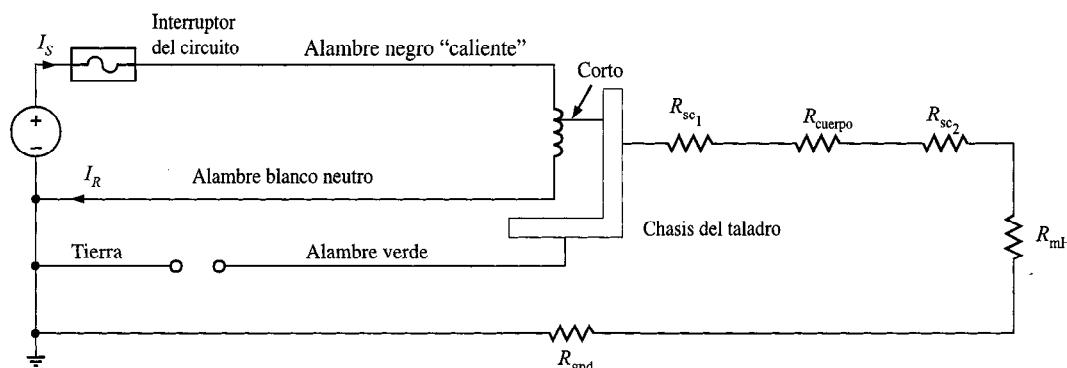


FIGURA 10.29 Modelo para el ejemplo 10.20.

EJEMPLO 10.21

Dos niños están jugando básquetbol en su patio. A fin de refrescarse, deciden saltar en su alberca. La alberca tiene un revestimiento de vinílico, por lo que el agua está aislada eléctricamente de tierra. Oculto para los niños,

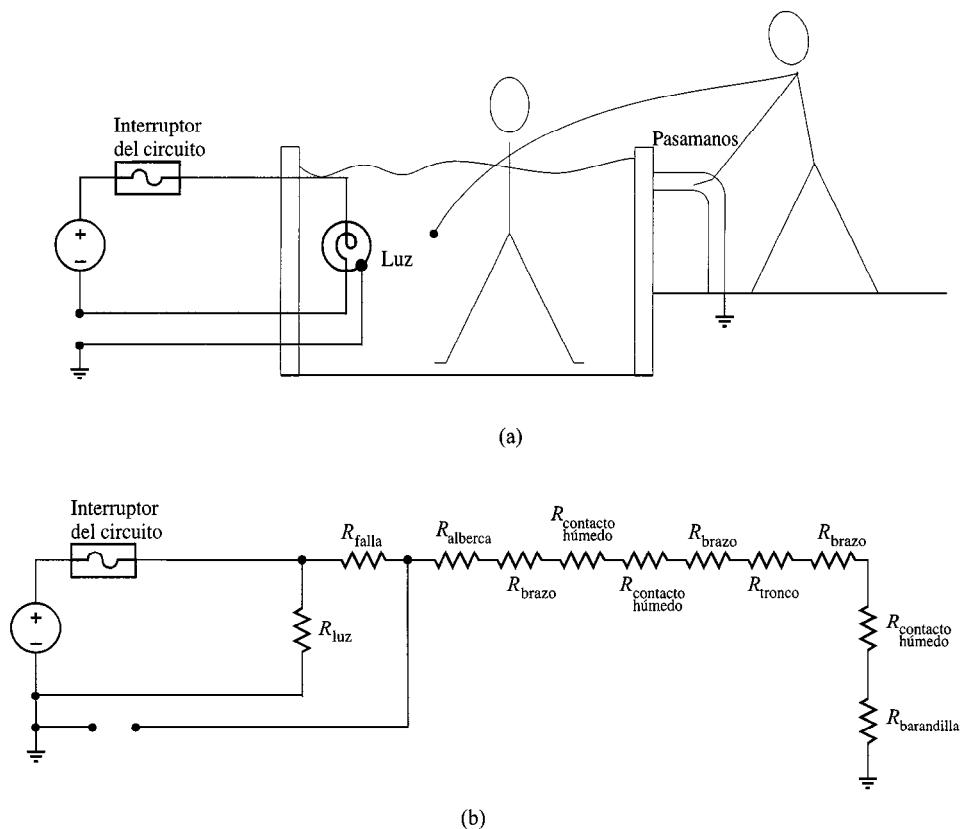


FIGURA 10.30 Diagramas utilizados en el ejemplo 10.21.

hay una falla a tierra en una de las luces de la alberca. Un niño salta y mientras está en la alberca con el agua arriba de su pecho, alcanza a jalar al otro niño, que está agarrado de un pasamanos aterrizado como se muestra en la figura 10.30a. ¿Cuál es el impacto de esta acción?

SOLUCIÓN La acción de la figura 10.30a se ilustra como se muestra en la figura 10.30b. Note que como la falla a tierra ha ocurrido, existe una trayectoria de corriente a través de los dos niños. Suponiendo que las resistencias de la falla, la alberca y el pasamanos son aproximadamente cero, la magnitud de la corriente a través de los dos niños sería

$$I = \frac{120}{(3R_{brazo}) + 3(R_{contacto\ húmedo}) + R_{tronco}}$$

$$= \frac{120}{950}$$

$$= 126 \text{ mA}$$

Este nivel de corriente podría ocasionar una sacudida seria en ambos niños. El niño que está fuera de la alberca podría experimentar una falla cardiaca.

E J E M P L O 10.22

Un paciente en un laboratorio médico tiene un estimulador muscular unido a su antebrazo izquierdo. Su ritmo cardíaco está siendo monitoreado por una máquina EKG con dos electrodos diferenciales sobre el corazón y el electrodo a tierra conectado a su tobillo derecho. Esta actividad se ilustra en la figura 10.31a. El estimulador actúa como una fuente de corriente que lleva 150 mA a través del músculo del electrodo activo al electrodo pasivo. Si el técnico del laboratorio decide erróneamente conectar el electrodo pasivo del estimulador al electrodo de tierra del sistema EKG para tener una tierra común, ¿hay algún riesgo?

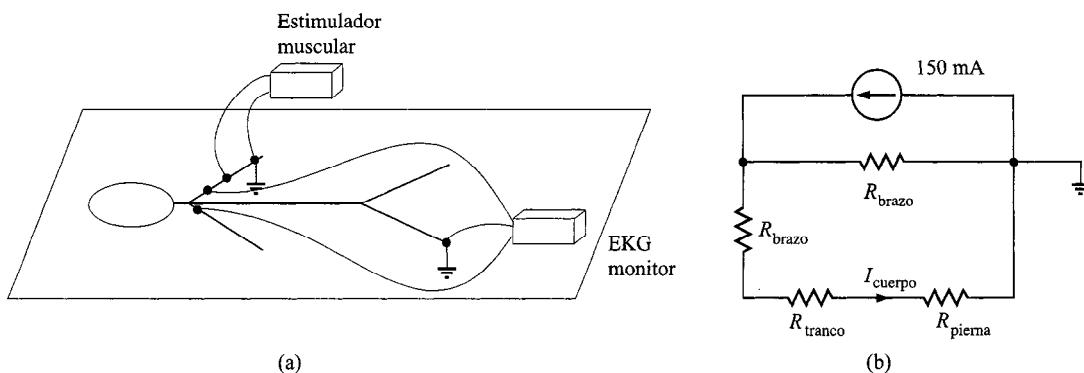


FIGURA 10.31 Diagramas utilizados en el ejemplo 10.22.

S O L U C I Ó N Cuando el electrodo pasivo del estimulador se conecta al electrodo de tierra del sistema EKG, la red equivalente de la figura 10.31b ilustra las dos trayectorias para la corriente del estimulador. Usando la división de corriente, la corriente del cuerpo es

$$\begin{aligned} I_{\text{cuerpo}} &= \frac{(150)(10^{-3})(100)}{100 + 100 + 200 + 100} \\ &= 30 \text{ mA} \end{aligned}$$

Por tanto, un nivel de corriente peligrosamente alto fluirá del estimulador a través del cuerpo a la tierra del EKG.

E J E M P L O 10.23

Un paciente de cuidado cardiaco con un electrodo de paso ha ignorado las reglas del hospital y está escuchando un estéreo económico. El estéreo tiene

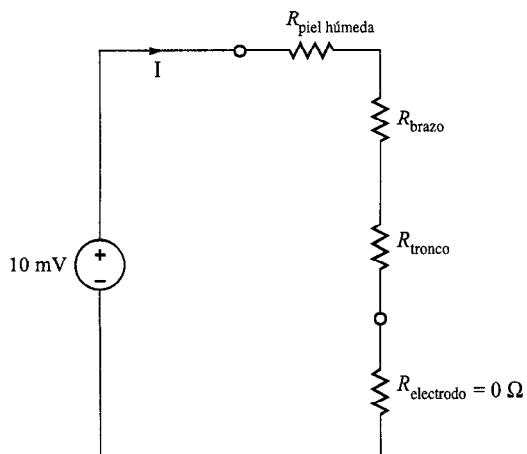


FIGURA 10.32 Modelo del circuito del ejemplo 10.23.

un zumbido amplificado a 60 Hz que es muy molesto. El paciente decide desarmar parcialmente el estéreo en un intento de eliminar el zumbido. En el proceso, mientras sostiene uno de los alambres de la bocina, el otro toca el electrodo de paso. ¿Cuáles son los riesgos de esta situación?

SOLUCIÓN Supongamos que la piel del paciente está húmeda y que el voltaje de 60 Hz a través de los alambres de la bocina es sólo de 10 mV. Entonces el modelo del circuito en este caso sería el que se muestra en la figura 10.32. La corriente a través del corazón sería

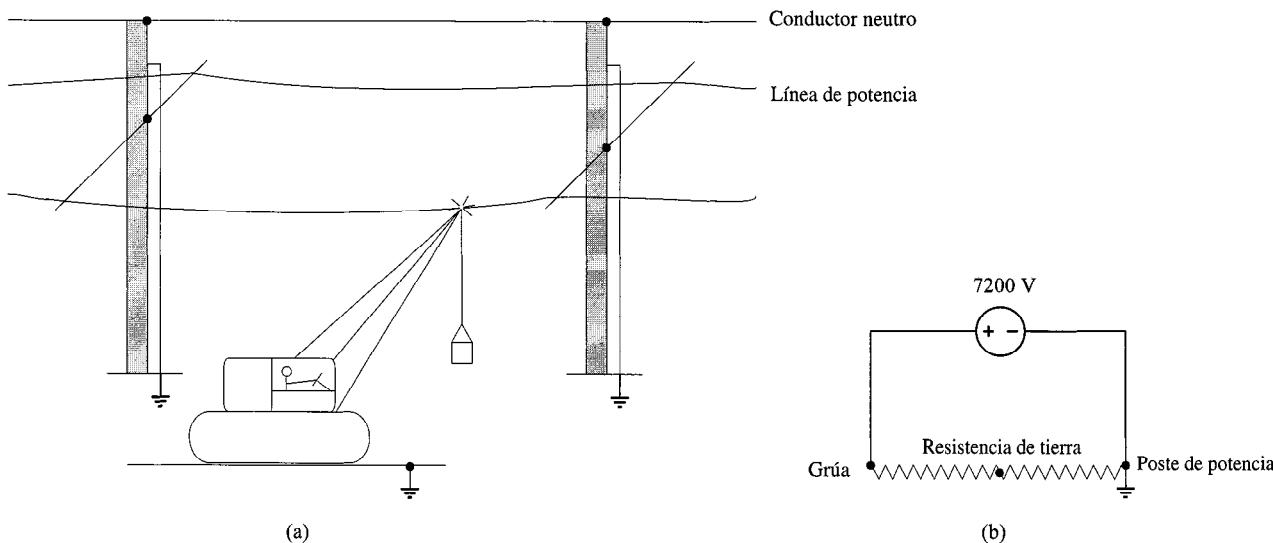
$$\begin{aligned} I &= \frac{(10)(10^{-3})}{150 + 100 + 200} \\ &= 22.2 \mu\text{A} \end{aligned}$$

Es sabido que 10 μA entregados directamente al corazón son potencialmente letales.

EJEMPLO 10.24

Mientras maniobra en un área fangosa, el operador de una grúa toca accidentalmente una línea de alto voltaje con la pluma de la grúa como se ilustra en la figura 10.33a. El potencial de la línea era de 7 200 V. El conductor neutro estaba aterrizado en el poste. Cuando el operador de la grúa se da cuenta de lo que había pasado, saltó de la grúa y corrió en dirección del poste, que estaba a unos 10 m de distancia. Se electrocutó mientras corría. ¿Podemos explicar tan trágico accidente?

SOLUCIÓN Las condiciones descritas en la figura 10.33a pueden ilustrarse como se muestra en la figura 10.33b. La grúa estaba a 7 200 V respecto a tierra. Por tanto, un gradiente de 720V/m existía a lo largo de la

**FIGURA 10.33** Ilustraciones utilizadas en el ejemplo 10.24.

tierra entre la grúa y el poste de potencia. Esta tierra entre la grúa y el poste se ilustra como una resistencia. Si la zancada del hombre era de cerca de 1 m, la diferencia de potencial entre sus pies era aproximadamente 720 V. Un hombre en la misma área con sus pies juntos estaría ilesos.

Los ejemplos de esta sección se han proporcionado en un intento por ilustrar algunos de los peligros potenciales que existen cuando se trabaja o se juega en la proximidad de una potencia eléctrica. En el peor de los casos, la falla al prevenir un accidente eléctrico puede terminar con la muerte. Sin embargo, incluso los contactos eléctricos no letales pueden ocasionar algunos daños como quemaduras o caídas. Por tanto, debemos estar alerta para asegurar no sólo nuestra propia seguridad, sino también la de otros que trabajan o juegan con nosotros.

Los siguientes señalamientos nos ayudarán a minimizar los riesgos de lesiones.

1. Evitar trabajar en sistemas eléctricos energizados.
2. Suponer siempre que un sistema eléctrico está energizado a menos que pueda verificar absolutamente que no lo está.
3. Nunca realizar reparaciones o alteraciones que no estén de conformidad con las previsiones del código prevaleciente.
4. No trabajar sólo en sistemas potencialmente peligrosos.
5. Si otra persona está “paralizada” en un circuito eléctrico energizado, desconecte el circuito si es posible. Si no se puede hacer eso, utilice materiales no conductores como tablas secas de madera, varas, cinturones y prendas de vestir para separar el cuerpo del contacto. Actúe rápidamente pero tenga cuidado de protegerse a sí mismo.

6. Cuando maneje equipo metálico largo como escaleras de mano, antenas, etc. en el exterior, esté continuamente consciente de las líneas de potencia elevadas y evite cualquier posibilidad de hacer contacto con ellas.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D10.16 Una mujer está manejando su coche en una tormenta violenta. Mientras está esperando en un crucero, cae una línea de potencia sobre su coche y hace contacto. El voltaje de la línea de potencia es 7 200 V.

- a) Suponga que la resistencia del coche es insignificante, ¿cuál es la corriente potencial a través de su cuerpo si mientras agarra la manija de la puerta con una mano seca, sale del carro al piso mojado?

- b) Si ella permanece en el coche, ¿qué pasaría?

Resp.: a) $I = 463 \text{ mA}$, extremadamente peligroso; b) estaría a salvo.

La seguridad cuando se trabaja con potencia eléctrica debe ser siempre una consideración primaria. Sin tener en cuenta cuán eficiente o conveniente es una red eléctrica para una aplicación particular, no vale la pena si también es peligrosa para la vida humana.

Además de las numerosas muertes que ocurren cada año debido a los accidentes eléctricos, el daño por fuego que resulta del uso impropio del alambrado eléctrico y la distribución del equipo asciende a millones de dólares por año.

Para prevenir las pérdidas de vidas y los daños a la propiedad, se han establecido procedimientos y especificaciones muy detalladas para la construcción y operación de sistemas eléctricos para asegurar su operación segura. El *Código Nacional Eléctrico* ANSI CI (ANSI—American National Standards Institute) es la guía principal. Sin embargo, hay otros códigos; por ejemplo, el código de seguridad eléctrica nacional, ANSI C2, el cual trata de los requerimientos de seguridad para instalaciones públicas. El Laboratorio de los Aseguradores (UL) prueba todos los tipos de dispositivos y sistemas para asegurar que son seguros para su uso por el público en general. Encontramos la etiqueta UL en todos los tipos de equipo eléctrico que se usa en la casa, como los electrodomésticos y los cables de extensión.

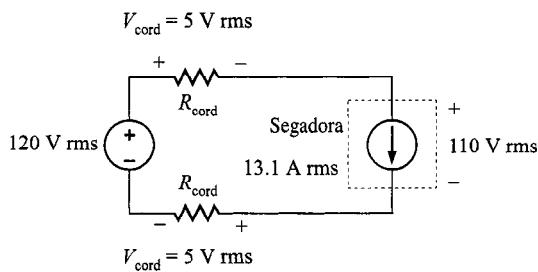
La energía eléctrica juega un papel muy importante en nuestras vidas. Es extremadamente importante para nuestra salud general y para nuestro bienestar. Sin embargo, si no se usa apropiadamente, puede ser letal.

10.11 Aplicaciones

Los siguientes ejemplos orientados a la aplicación ilustran un uso práctico del material estudiado en este capítulo.

EJEMPLO 10.25

Una segadora de césped requiere 12 A rms a 120 V, pero operará bajo 110 V rms sin daño. A 110 V rms, la corriente extraída es 13.1 A rms, como se muestra en la figura 10.34. Dar la máxima longitud del cable de extensión que puede usarse con una fuente de potencia de 120 V rms si el cable de extensión está fabricado de

**FIGURA 10.34** Modelo del circuito para el ejemplo 10.25.

1. Alambre calibre 16 ($4 \text{ m}\Omega/\text{pie}$)
2. Alambre calibre 14 ($2.5 \text{ m}\Omega/\text{pie}$)

S O L U C I Ó N La caída de voltaje a través del cordón de extensión es

$$V_{\text{cord}} = (2)(13.1)R_{\text{cord}} = 10 \text{ V rms}$$

o

$$R_{\text{cord}} = 0.382 \Omega$$

Si ℓ_{cord} es la longitud del cordón de extensión, entonces para alambre calibre 16 encontramos

$$\ell_{\text{cord}} = \frac{R_{\text{cord}}}{0.004} = 95.5 \text{ pies}$$

y para alambre calibre 14 tenemos

$$\ell_{\text{cord}} = \frac{R_{\text{cord}}}{0.0025} = 152.8 \text{ pies}$$

E J E M P L O 10.26

El suministro de potencia de cd que se muestra en la figura 10.35 está diseñado para proporcionar los requerimientos de una computadora. El suministro de cd tiene una eficiencia de 92% y a un factor de potencia de entrada unitario proporciona 5 V a 40 A de cd. Determinemos el requerimiento de corriente en el tomacorriente de ca de la pared.

S O L U C I Ó N La potencia de salida del suministro de cd es

$$P_{\text{sal}} = (40)(5) = 200 \text{ W}$$

La potencia de entrada al suministro es

$$P_{\text{ent}} = \frac{P_{\text{sal}}}{0.92} = 217.4 \text{ W}$$

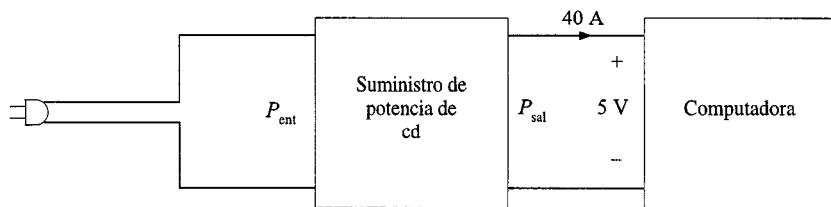


FIGURA 10.35 Circuito utilizado en el ejemplo 10.26.

El requerimiento de potencia de ca es

$$P_{\text{ca}} = P_{\text{ent}} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \text{ fp}$$

y de aquí,

$$I_{\text{rms}} = \frac{P_{\text{ent}}}{V_{\text{rms}} \text{ fp}} = 1.81 \text{ A rms}$$

E J E M P L O 10.27

Después de una parada en un café al anochecer, Joe College arranca su carro y nota que la luz del alternador no se apaga, indicando una falla total del alternador. Las condiciones de la autopista permiten manejar a 55 mph al anochecer y Joe está a 82.5 millas de su casa. Recuerda que había comprado una batería para carro de 120 A-h 12 V el mes pasado, anunciada para producir “600 amps fríos de arranque”. Joe calcula que ha empleado cerca de 6 segundos para arrancar el carro.

Joe inmediatamente apaga el radio y el calentador para conservar potencia. Sus dos focos delanteros consumen cada uno 50 watts en luz baja. Suponiendo que el resto de la carga eléctrica del carro totaliza 50 watts, ¿estarán Joe en casa antes de que la batería esté completamente descargada?

SOLUCIÓN Si Joe supone que la batería está completamente cargada, entonces $Q = 120 \text{ A-h}$. Como se desconoce la corriente exacta requerida para arrancar el coche, Joe decide usar el valor en el peor de los casos de 600 A. Así la carga requerida para arrancar la máquina se estima que es

$$\begin{aligned} Q_{\text{arranque}} &= (600 \text{ A}) \frac{(6 \text{ seg})}{3600 \text{ seg / h}} \\ &= 1 \text{ A-h} \end{aligned}$$

La carga eléctrica en la batería causada por los dos focos y los otros elementos dentro del carro es

$$\begin{aligned} I &= \frac{150 \text{ watts}}{12 \text{ volts}} \\ &= 12.5 \text{ A} \end{aligned}$$

El tiempo requerido para manejar hasta su casa a 55 mph es

$$\begin{aligned} t &= \frac{82.5}{55} \\ &= 1.5 \text{ h} \end{aligned}$$

La carga total gastada en la batería incluyendo el arranque es

$$Q_{\text{total}} = 1 + 12.5(1.5) = 19.75 \text{ A h}$$

Por tanto, Joe deberá estar en casa con carga de reserva.

EJEMPLO 10.28

El circuito de la figura 10.36a ilustra un amplificador de sonda de campo eléctrico que incluye efectos capacitivos. Como está dibujado, la potencia promedio entregada a la carga no está optimizada. Sin embargo, la impedancia compensatoria Z_C puede usarse para modificar la potencia de salida. Designemos Z_C para la transferencia de potencia máxima si la señal de entrada V_S es senoidal a 10^6 rad/segundo.

SOLUCIÓN Para transferencia de potencia máxima, la impedancia de Z_C en paralelo con R_L debe ser el complejo conjugado de la impedancia equivalente de Thévenin en los nodos A-B, mirando hacia atrás de la fuente. Por tanto, encontremos la impedancia de Thévenin para la red que se dibuja nuevamente en la figura 10.36b. EL análisis nodal da

$$(V_S - V_{oc})j\omega C_2 = g_m V_S + \frac{V_{oc}}{R_2}$$

o

$$V_{oc} = V_S(j\omega C_2 - g_m) Z_2$$

donde

$$Z_2 = R_2 // \frac{1}{j\omega C_2}$$

Para encontrar I_{sc} cortamos los nodos A y B como se muestra en la figura 10.36c. Todas las corrientes de las fuentes dependientes fluyen a través del corto; por consiguiente,

$$I_{sc} = -g_m V_S$$

y Z_{Th} es

$$Z_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = Z_2 \left(1 - \frac{j\omega C_2}{g_m} \right)$$

Utilizando los valores de los elementos de la figura 10.36a se obtiene

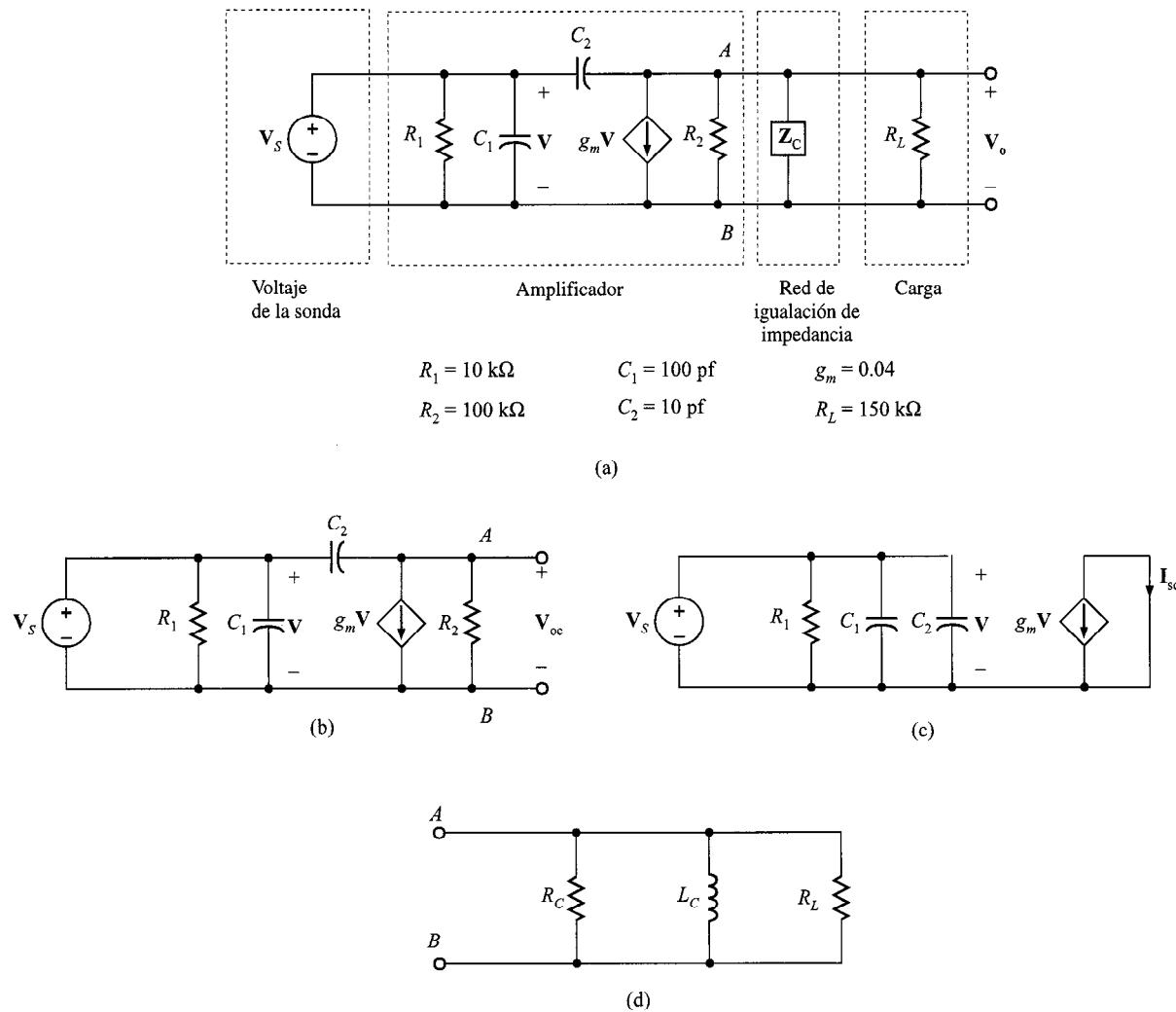


FIGURA 10.36 Circuitos utilizados en el ejemplo 10.28.

$$\mathbf{Z}_{\text{Th}} = \frac{10^5}{1+j1} (1 - j2.5 \times 10^{-4}) \approx \frac{10^5}{1+j1}$$

o

$$\mathbf{Z}_{\text{Th}} = 70.7 \angle -45^\circ \text{ k}\Omega$$

La transferencia de potencia máxima requiere

$$\mathbf{Z}_C // R_L = \mathbf{Z}_{\text{Th}}^*$$

Como Z_{Th} es capacitiva, es razonable que Z_C deba ser inductiva. Usemos la red de la figura 10.36d para la impedancia de compensación y encontraremos los valores de L_C y R_C para transferencia de potencia promedio máxima. La impedancia paralela equivalente es

$$Z_{eq} = R_C // R_L // j\omega L_C$$

o

$$Z_{eq} = \frac{R_C // R_L}{1 - j \frac{R_C // R_L}{\omega L_C}}$$

Basados en los requerimientos para transferencia de potencia máxima, encontramos

$$R_C // R_L = 100 \text{ k}\Omega$$

o

$$R_C = 300 \text{ k}\Omega$$

y

$$\frac{R_C // R_L}{\omega L_C} = 1$$

o

$$L_C = 100 \text{ mH}$$

Esos valores aseguran que el amplificador ve una carga equivalente, Z_{eq} , que produce transferencia de potencia promedio máxima.

E J E M P L O 10.29

Por razones de seguridad el Código Eléctrico Nacional restringe la estimación del interruptor de circuito en una línea de iluminación doméstica de 120 V a no más de 20 A. Además, el código también requiere un 25% de margen de seguridad para cargas de iluminación continua. En esas condiciones determinemos el número focos de 100 W que pueden colocarse en una rama del circuito.

SOLUCIÓN El modelo para la rama del circuito se muestra en la figura 10.37. La potencia consumida por cada foco de 100 W es

$$I_{foco} = 100/120 = 0.833 \text{ A rms}$$

Usando la recomendación para el margen de seguridad, la corriente estimada consumida por cada foco es 25% más o

$$I_{foco} = (1.25)(0.83) = 1.04 \text{ A rms}$$

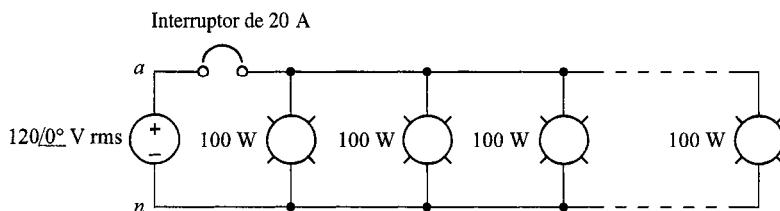


FIGURA 10.37 Rama de circuito de 20 A para iluminación doméstica

Por tanto, el número máximo de focos en un interruptor de circuito es

$$n = 20 / 1.04 = 19 \text{ focos}$$

E J E M P L O 10.30

Mientras estamos sentados en una casa leyendo un libro, notamos que cada vez que el acondicionador de aire comienza a funcionar, las luces momentáneamente se apagan. Investiguemos este fenómeno usando el circuito trifilar de una sola fase que se muestra en la figura 10.38a y algunos requerimientos típicos de corriente para un acondicionador de aire de 10 000 Btu/h, suponiendo una resistencia de línea de 0.5Ω .

S O L U C I Ó N Los focos de 60 W pueden ilustrarse aproximadamente por su resistencia equivalente de

$$P_{\text{foco}} = \frac{V_{an}^2}{R_{\text{foco}}}$$

o

$$R_{\text{foco}} = 240 \Omega$$

Cuando la unidad de acondicionamiento de aire se enciende, el requerimiento de corriente es 40 A, como se muestra en la figura 10.38b. Como el motor del compresor llega a su velocidad, el requerimiento de corriente cae rápidamente a un valor de estado estable de 10 A, como se muestra en la figura 10.38c. Compararemos el voltaje a través de los focos, V_{an} , en el encendido y en el estado estable.

Usando la superposición, encontraremos primero la porción de V_{an} ocasionada por las fuentes de voltaje. El circuito apropiado se muestra en la figura 10.38d. Usando la división de voltaje encontramos que

$$V_{AN1} = V_{an} \left(\frac{R_{\text{foco}}}{R_{\text{foco}} + 2R_L} \right)$$

o

$$V_{AN1} = 119.50 \text{ V rms}$$

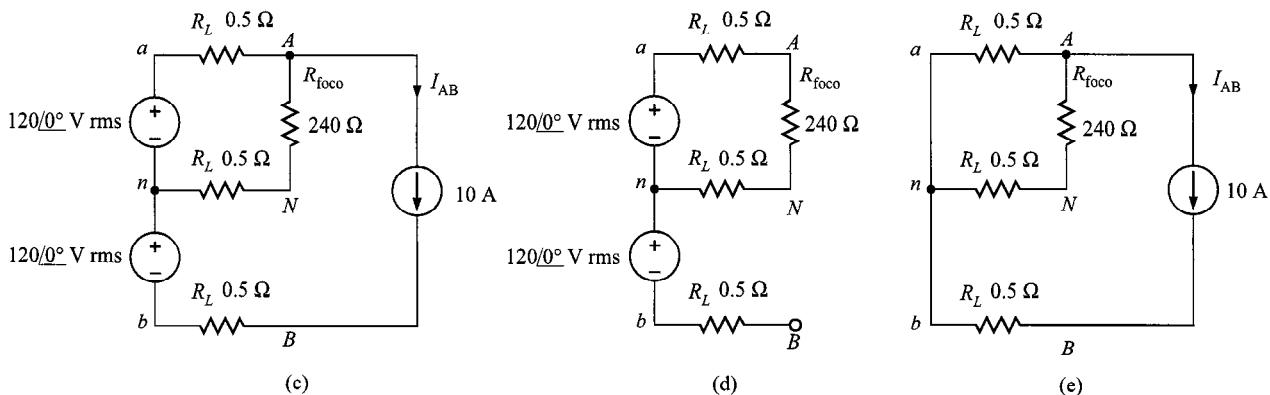
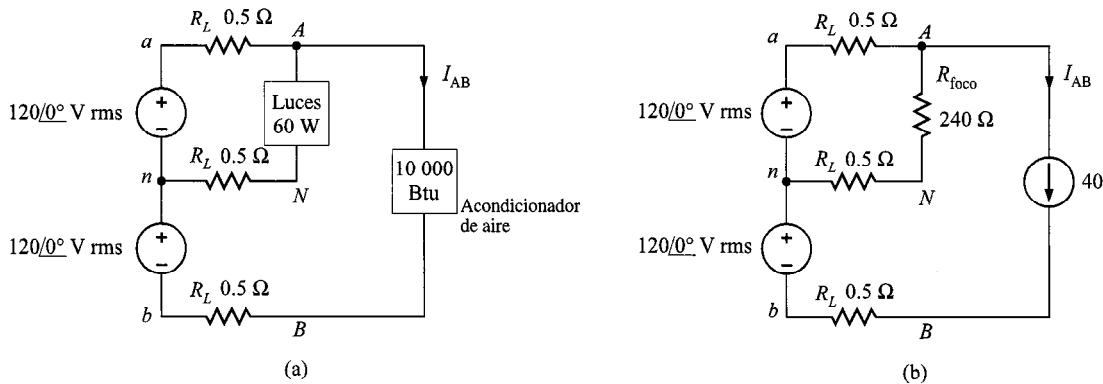


FIGURA 10.38 Redes utilizadas en el ejemplo 10.30.

La figura 10.38e. dará la contribución de V_{AN} ocasionada por la corriente de 10 A en estado estable. Usando la división de corriente para calcular la corriente a través del foco, encontramos que

$$V_{AN2} = - \left\{ I_{AB} \left(\frac{R_L}{R_{\text{foco}} + 2R_L} \right) \right\} R_{\text{foco}}$$

0

$$V_{AN2} = - 4.98 \text{ V rms}$$

Por tanto, el valor de estado estable de V_{AN} es

$$V_{AN} = V_{AN1} + V_{AN2} = 114.52 \text{ V rms}$$

En el arranque, nuestra expresión para V_{AN2} puede usarse con $I_{AB} = 40 \text{ A}$, que da $V_{AN2} = -19.92 \text{ V rms}$. El valor resultante para V_{AN} es

$$V_{AN} = V_{AN1} + V_{AN2} = 119.50 - 19.92 = 99.58 \text{ V rms}$$

El voltaje entregado al foco en el arranque es 13% más bajo que el valor de estado estable resultando un oscurecimiento momentáneo de las luces.

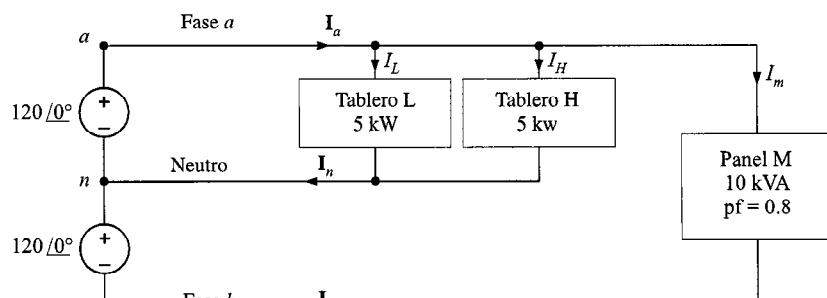
10.12 Diseño de circuitos

El siguiente ejemplo de diseño se presenta en el contexto de un circuito doméstico trifilar de una sola fase y sirve como una buena introducción al material del siguiente capítulo.

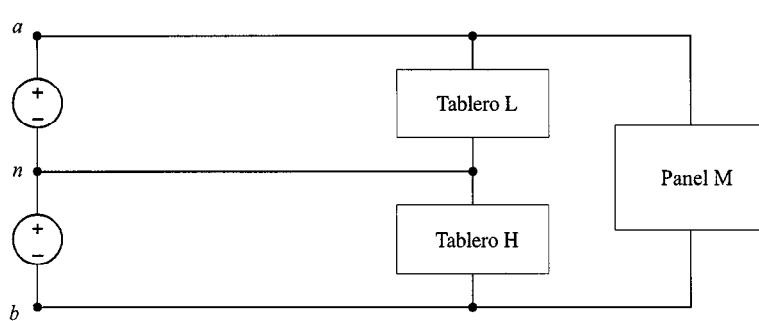
EJEMPLO 10.31

Un circuito de 60 Hz trifilar de una sola fase comercial de trabajo ligero sirve para iluminación, calentamiento y cargas de motor, como se muestra en la figura 10.39a. Las cargas de iluminación y calentamiento son esencialmente resistencias y, por ello, con factor de potencia (fp) unitario, mientras que las cargas de motor tienen fp retrasado.

Deseamos diseñar una configuración balanceada para la red y determinar su viabilidad económica usando el siguiente procedimiento.



(a)



(b)

FIGURA 10.39 Sistema de distribución de potencia trifilar de una sola fase.

- Calcule las corrientes de fase y neutra, y la potencia compleja y el fp para cada fuente.
- Ahora desplace la carga de calentamiento (panel H) a la fase *b*, como se muestra en la figura 10.39b. Esto se llama “balancear” la carga. Repetir el análisis de (a).
- Suponga que las resistencias del conductor de fase y neutral son cada una de 0.05Ω y que tienen un efecto insignificante en los resultados de a). Evalúe las pérdidas de línea del sistema para (a) y (b). Si las cargas en cuestión operan 24 horas por día y 365 días al año, a \$0.08 kW h, ¿cuánta energía (y dinero) se ahorra al operar en el modo balanceado?

SOLUCIÓN

- a) Las magnitudes de las corrientes son

$$I_L = I_H = \frac{P}{V} = \frac{5\,000}{120} = 41.67 \text{ A}$$

e

$$I_m = \frac{10\,000}{240} = 41.67 \text{ A}$$

Además,

$$\theta_m = \cos^{-1}(0.8) = -36.9^\circ$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a &= \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_H + \mathbf{I}_m \\ &= 41.67 \angle 0^\circ + 41.67 \angle 0^\circ + 41.67 \angle -36.9^\circ \\ &= 119.3 \angle -12.1^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Las corrientes en las líneas de fase *b* y neutral son

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_H = 83.33 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_b = 41.67 \angle -36.9^\circ \text{ A}$$

La potencia compleja y el factor de potencia para cada fuente son

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{V}_{an} \mathbf{I}_a^* = (120 \angle 0^\circ) (119.3 \angle +12.1^\circ) = 14 + j3 \text{ kVA}$$

$$\text{fp}_a = \cos(-12.1^\circ) = 0.9778 \text{ retrasado}$$

y de manera similar

$$\mathbf{S}_b = \mathbf{V}_{bn} \mathbf{I}_b^* = 4 + j3 \text{ kVA}$$

$$\text{fp}_b = 0.8 \text{ retrasado}$$

b) Bajo la condición balanceada

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_a &= \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_m = 41.67 \angle 0^\circ + 41.67 \angle -36.9^\circ \\ &= 79.06 \angle -18.4^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{I}_b = 79.06 \angle -18.4^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_n = 0$$

Por tanto,

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{V}_{an} \mathbf{I}_a^* = 9 + j3 \text{ kVA}$$

$$\text{fp}_a = 0.9487 \text{ retrasado}$$

y

$$\mathbf{S}_b = \mathbf{V}_{bn} \mathbf{I}_b^* = 9 + j3 \text{ kVA}$$

$$\text{fp}_b = 0.9487 \text{ retrasado}$$

c) La potencia perdida en las líneas en kW es

$$\begin{aligned}P_{\text{perdida}} &= R_a I_a^2 + R_b I_b^2 + R_n I_n^2 \\ &= 0.05(I_a^2 + I_b^2 + I_n^2)/1000\end{aligned}$$

La energía total perdida en un año es

$$W_{\text{perdida}} = (24)(365)P_{\text{perdida}} = 8760 P_{\text{perdida}}$$

y el costo anual es

$$\text{Cost} = \$0.08 W_{\text{perdida}}$$

Una comparación de los casos no balanceado y balanceado se muestra en la siguiente tabla

	Caso no balanceado	Caso balanceado
$P_{\text{perdida}}(\text{kW})$	1.146	0.625
W_{perdida} (kW h)	10 038	5 475
Costo(\$)	803	438

Por tanto, el ahorro anual obtenido usando la configuración balanceada es

$$\text{Ahorro de energía anual} = 10038 - 5475 = 4563 \text{ kW h}$$

$$\text{Ahorro del costo anual} = 803 - 438 = \$365$$

10.13 Resumen

Se han presentado las relaciones básicas de potencia que se aplican en circuitos de ca en estado estable. Se definió la potencia instantánea y la potencia promedio. Las técnicas para transferencia de potencia promedio máxima, que es análoga a la transferencia de potencia máxima para circuitos de cd, fueron presentadas para varias condiciones de carga.

El valor efectivo, o rms, de una forma de onda periódica se introdujo como un medio de medir la efectividad de una fuente para entregar potencia a una carga resistiva.

Se introdujo el ángulo del factor de potencia, junto con un esquema para corregirlo si es necesario. También se presentó la potencia compleja y sus relaciones con la potencia real y reactiva.

Se introdujo el circuito trifilar de una sola fase que encontramos comúnmente en hogares y que se analizó como preludio al estudio de circuitos trifásicos que cubriremos en el siguiente capítulo.

Se presentaron las técnicas para hacer mediciones de potencia, se introdujeron las consideraciones de seguridad y se discutieron a través de una variedad de ejemplos.

Finalmente, se presentó y se discutió con algún detalle varios ejemplos muy prácticos.

Puntos clave

- Si la corriente y el voltaje son funciones senoidales del tiempo, la potencia instantánea es igual al valor promedio independiente del tiempo más un término senoidal que tiene una frecuencia que dobla la del voltaje o corriente.
- Los capacitores y las bobinas son elementos sin pérdidas y no absorben potencia promedio.
- Cuando hay múltiples fuentes presentes en una red, la superposición no puede usarse para calcular potencia a menos que cada fuente sea de una frecuencia diferente.
- Para obtener la transferencia de potencia promedio máxima a una carga, la impedancia de carga debe elegirse igual al conjugado de la impedancia equivalente de Thévenin que representa el resto de la red.
- El valor efectivo de una forma de onda periódica se encuentra determinando el valor de la raíz cuadrática media de la forma de onda.
- El valor rms de una función senoidal es igual al valor máximo de la senoide dividido entre $\sqrt{2}$.
- La potencia aparente se define como el producto $V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}$.
- El factor de potencia se define como la razón de la potencia promedio a la potencia aparente y se dice que está adelantada cuando la fase de la corriente adelanta al voltaje, y retrasada cuando la fase de la corriente retrasa al voltaje.
- El factor de potencia de una carga con un factor de potencia retrasado puede corregirse colocando un capacitor en paralelo con la carga.
- La potencia compleja, S , se define como el producto $V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^*$.
- La potencia compleja S puede escribirse como $S = P + jQ$, donde P es la potencia real o promedio y Q es la potencia imaginaria o de cuadratura.

- El circuito trifilar de una sola fase es el más comúnmente usado en los hogares. Los aparatos grandes se conectan línea a línea y los aparatos pequeños y las luces se conectan de línea a neutral.
- La seguridad debe ser un asunto primordial en el diseño y uso de cualquier circuito eléctrico.
- El Código Nacional Eléctrico es la guía principal para la construcción y operación de sistemas eléctricos.

Problemas

- 10.1.** El voltaje y la corriente en la entrada de una red están dadas por las expresiones

$$v(t) = 6 \cos \omega t \text{ V}$$

$$i(t) = 4 \sin \omega t \text{ A}$$

Determine la potencia promedio absorbida por la red.

- 10.2.** Encuentre la potencia promedio absorbida por la resistencia en el circuito que se muestra en la figura P10.2. Sea $i_1(t) = 4 \cos(377t + 60^\circ)$ A, $i_2(t) = 6 \cos(754t + 10^\circ)$ A e $i_3(t) = 4 \cos(377t - 30^\circ)$ A.

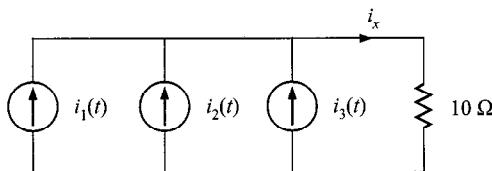


FIGURA P10.2

- 10.3.** Calcule la potencia promedio absorbida por los elementos a la derecha de la línea punteada en la red que se muestra en la figura P10.3.

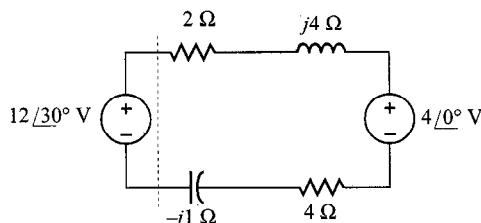


FIGURA P10.3

- 10.4.** Determine la potencia promedio suministrada por cada fuente en el problema 10.3.

- 10.5.** Dada la red de la figura P10.5, muestre que la potencia suministrada por las fuentes es igual a la potencia absorbida por los elementos pasivos.

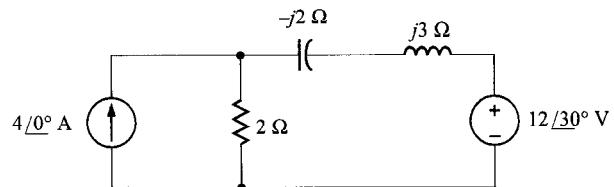


FIGURA P10.5

- 10.6.** Encuentre la potencia promedio absorbida por la red que se muestra en la figura P10.6.

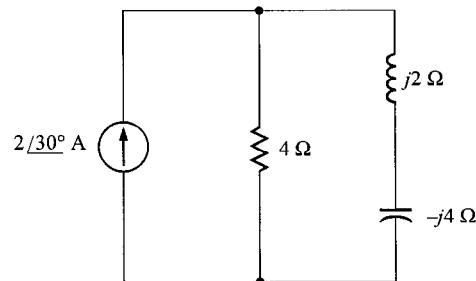


FIGURA P10.6

- 10.7.** Calcule la potencia promedio absorbida por la resistencia de 1 W en la red que se muestra en la figura P10.7.

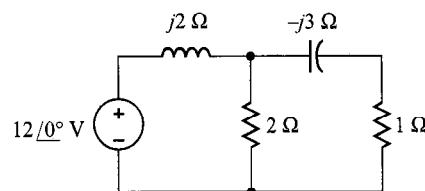


FIGURA P10.7

- 10.8.** Dado el circuito de la figura P10.8, encuentre la potencia promedio suministrada y la potencia promedio absorbida por cada elemento.

- 10.9.** Determine la potencia promedio absorbida por la resistencia de 4 Ω de la red que se muestra en la figura P10.9.

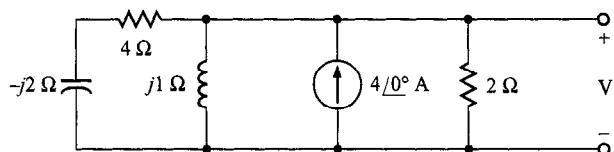


FIGURA P10.8

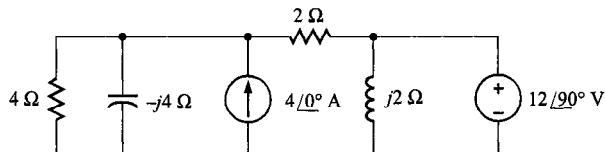


FIGURA P10.12

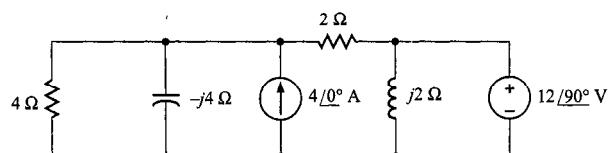


FIGURA P10.9

10.10. Dado el circuito de la figura P10.10, encuentre la potencia promedio absorbida por la red.

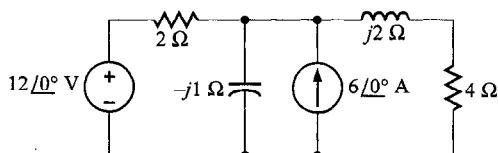


FIGURA P10.10

10.11. Dada la red de la figura P10.11, encuentre la potencia promedio suministrada por el circuito.

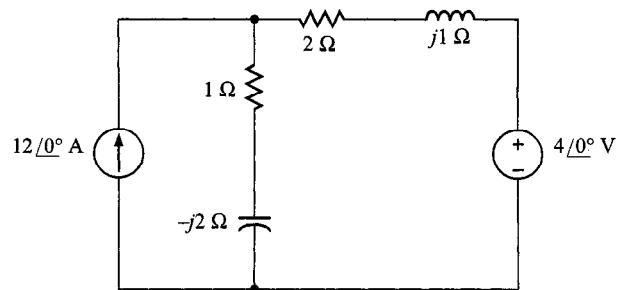


FIGURA P10.11

10.12. Determine la potencia promedio absorbida por la resistencia de 4Ω de la red que se muestra en la figura P10.12.

10.13. Dado el circuito de la figura P10.13, determine la cantidad de potencia promedio suministrada a la red.

10.14. Encuentre la potencia promedio absorbida por la resistencia de 2 W en el circuito que se muestra en la figura P10.14.

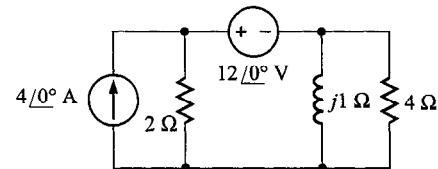


FIGURA P10.13

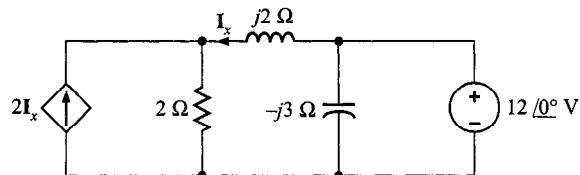


FIGURA P10.14

10.15. Determine la potencia promedio absorbida por una resistencia de 2Ω , conectada en las terminales de salida de la red que se muestra en la figura P10.15.

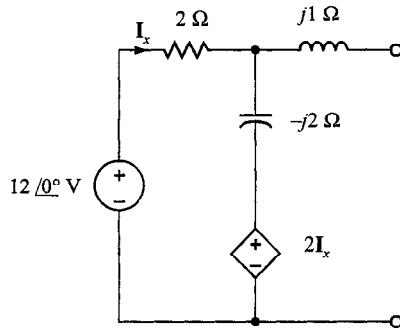


FIGURA P10.15

10.16. Determine la potencia promedio absorbida por la resistencia de salida de $2 \text{ k}\Omega$ de la figura P10.16.

10.17. Determine la potencia promedio absorbida por la resistencia de 4Ω de la figura P10.17.

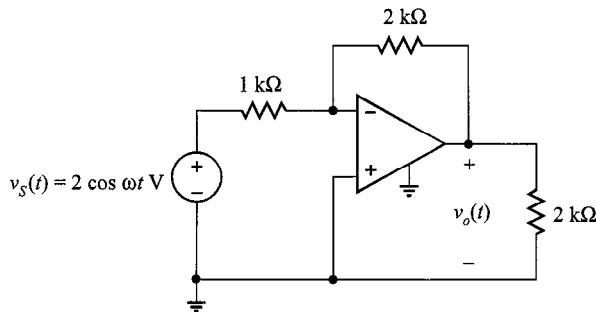


FIGURA P10.16

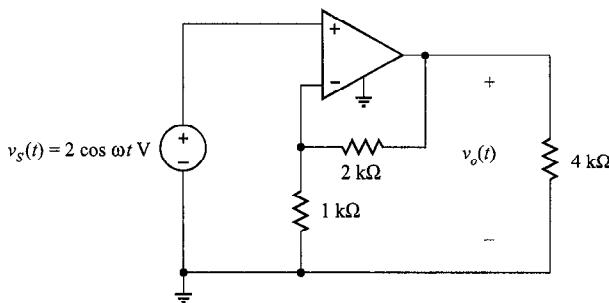


FIGURA P10.17

10.18. Muestre que la potencia promedio máxima transferida a una carga está dada por las siguientes expresiones, donde V_{oc} y R_{Th} están definidas en el capítulo.

$$P_L = \frac{V_{oc}^2}{8R_{Th}}$$

10.19. Determine la impedancia Z_L para la transferencia de potencia promedio máxima y el valor de la potencia promedio máxima transferida a Z_L para el circuito que se muestra en la figura P10.19.

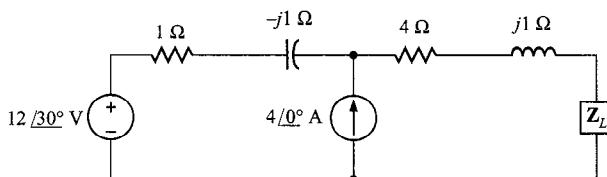


FIGURA P10.19

10.20. Determine la impedancia Z_L para la transferencia de potencia promedio máxima y el valor de la potencia promedio máxima absorbida por la carga en la red que se muestra en la figura P10.20.

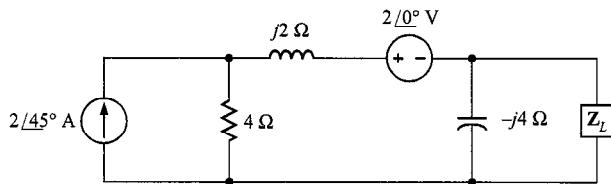


FIGURA P10.20

10.21. Determine la impedancia Z_L para la transferencia de potencia promedio máxima y el valor de la potencia promedio máxima transferida a Z_L para el circuito que se muestra en la figura P10.21.

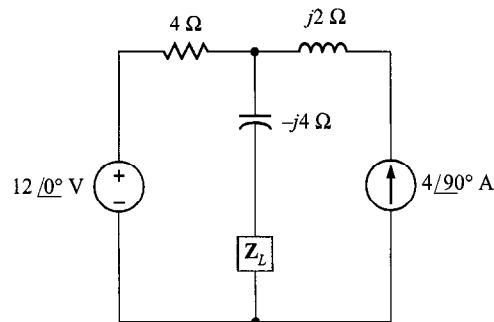


FIGURA P10.21

10.22. Repita el problema 10.21 para la red de la figura P10.22.

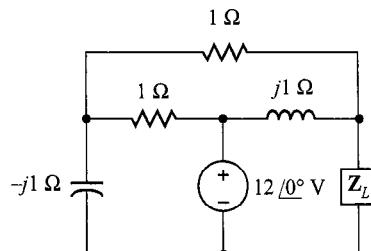


FIGURA P10.22

10.23. Repita el problema 10.21 para la red de la figura P10.23.

10.24. Determine la impedancia Z_L para la transferencia de potencia promedio máxima y el valor de la potencia promedio máxima absorbida por la carga en la red de la figura P10.24.

10.25. Determine la impedancia Z_L para la transferencia de potencia promedio máxima y el valor de la potencia promedio máxima absorbida por la carga en la red de la figura P10.25.

10.26. En la red de la figura P10.26, encuentre Z_L para transferencia de potencia promedio máxima y la potencia promedio máxima transferida.

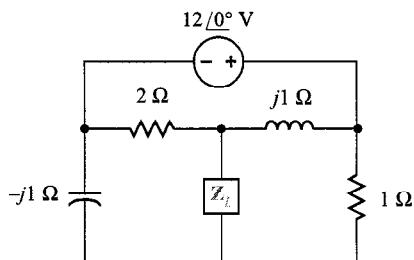


FIGURA P10.23

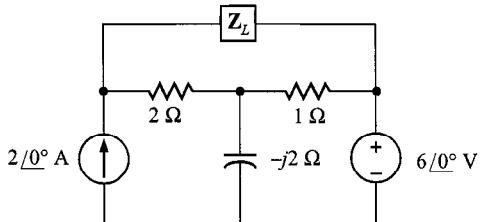


FIGURA P10.24

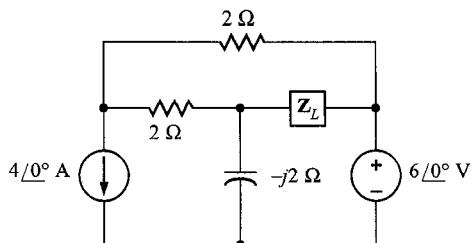


FIGURA P10.25

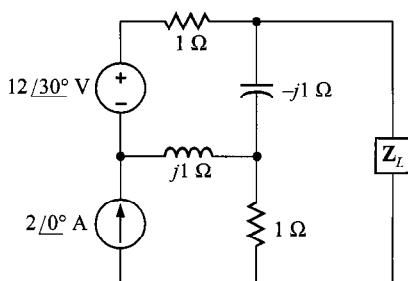


FIGURA P10.26

10.27. Determine la impedancia Z_L para la transferencia de potencia promedio máxima y el valor de la potencia promedio máxima transferida a Z_L para el circuito que se muestra en la figura P10.27.

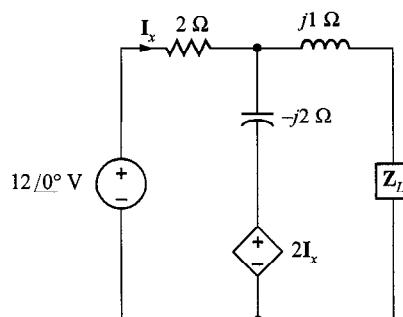


FIGURA P10.27

10.28. Determine Z_L para la transferencia de potencia promedio máximo y el valor de la potencia promedio máxima transferida para la red que se muestra en la figura P10.28.

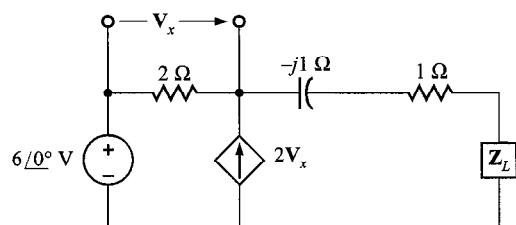


FIGURA P10.28

10.29. Encuentre la impedancia Z_L para la transferencia de potencia promedio máxima y el valor de la potencia promedio máxima transferida a Z_L para el circuito que se muestra en la figura P10.29.

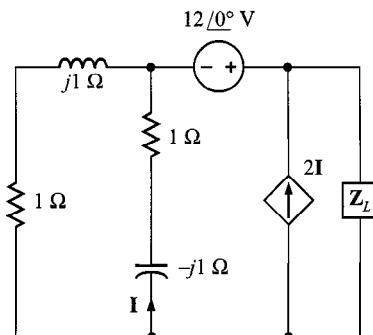


FIGURA P10.29

10.30. Repita el problema 10.21 para la red de la figura P10.30.

10.31. Dada la red de la figura P10.31, encuentre Z_L para la transferencia de potencia promedio máxima y la potencia promedio máxima transferida.

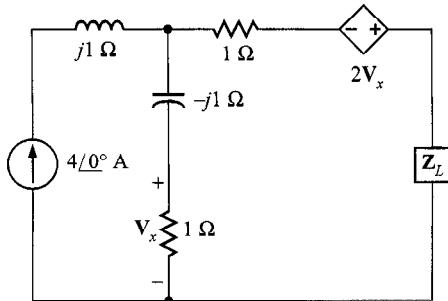


FIGURA P10.30

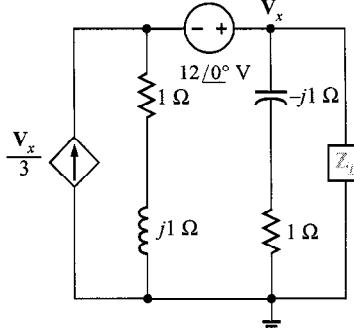


FIGURA P10.31

- 10.32.** Determine la impedancia Z_L para la transferencia de potencia promedio máxima y el valor de la potencia promedio máxima absorbida por la carga en la red que se muestra en la figura P10.32.

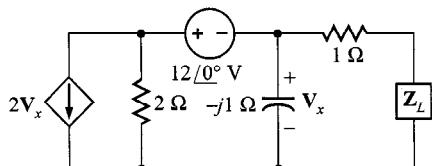


FIGURA P10.32

- 10.33.** Determine la impedancia Z_L para la transferencia de potencia promedio máxima y el valor de la potencia promedio máxima absorbida por la carga en la red que se muestra en la figura P10.33.

- 10.34.** Calcule el valor rms del voltaje dado por la forma de onda que se muestra en la figura P10.34.

- 10.35.** Calcule el valor rms de la forma de onda que se muestra en la figura P10.35.

- 10.36.** Calcule el valor rms de la forma de onda de la figura P10.36.

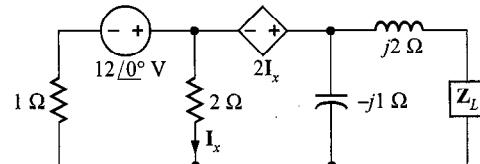


FIGURA P10.33

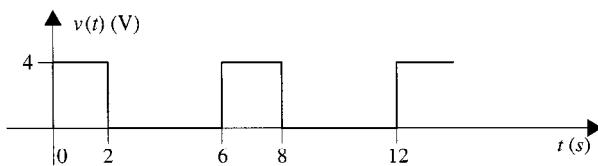


FIGURA P10.34

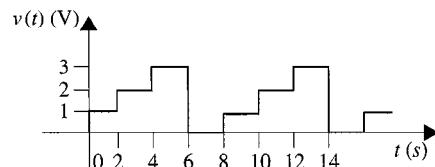


FIGURA P10.35

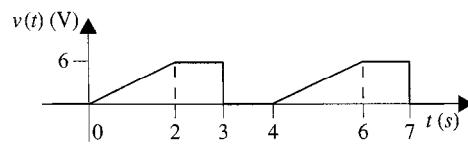


FIGURA P10.36

- 10.37.** Calcule el valor rms de la forma de onda de la figura P10.37.

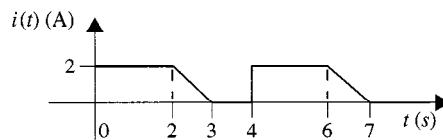


FIGURA P10.37

- 10.38.** Calcule el valor rms de la forma de onda que se muestra en la figura P10.38.

- 10.39.** Calcule el valor rms de la forma de onda que se muestra en la figura P10.39.

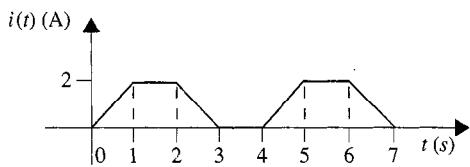


FIGURA P10.38

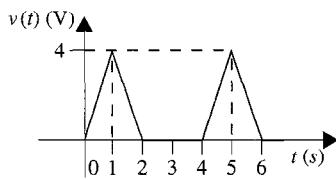


FIGURA P10.39

- 10.40.** La forma de onda de la corriente de la figura P10.40 fluye a través de una resistencia de 5Ω . Encuentre la potencia promedio absorbida por la resistencia.

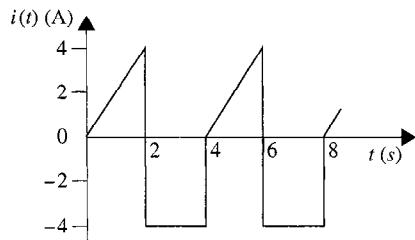


FIGURA P10.40

- 10.41.** Calcule el valor rms de la forma de onda que se muestra en la figura P10.41.

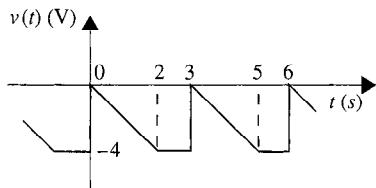


FIGURA P10.41

- 10.42.** Calcule el valor rms de la forma de onda de la figura P10.42.

- 10.43.** Calcule el valor rms de la forma de onda que se muestra en la figura P10.43.

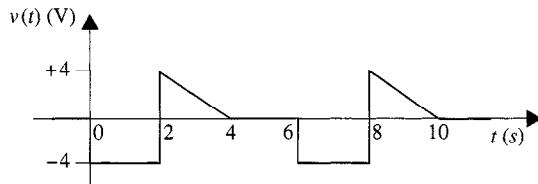


FIGURA P10.42

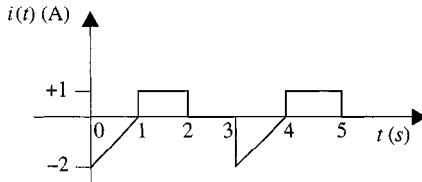


FIGURA P10.43

- 10.44.** Calcule el valor rms de la forma de onda que se muestra en la figura P10.44.

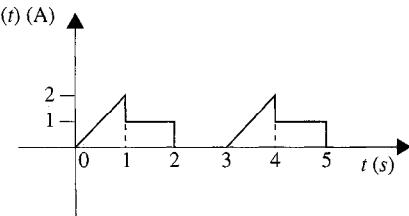


FIGURA P10.44

- 10.45.** Calcule el valor rms de la forma de onda que se muestra en la figura P10.45.

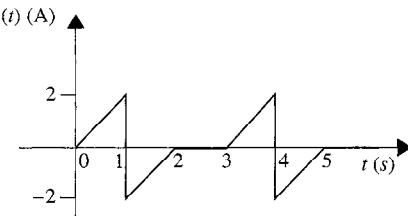


FIGURA P10.45

- 10.46.** Encuentre el valor rms de la forma de onda exponencial que se muestra en la figura P10.46.

- 10.47.** Determine el valor rms de la onda seno rectificada que se muestra en la figura P10.47. Use el hecho de que $\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta$.

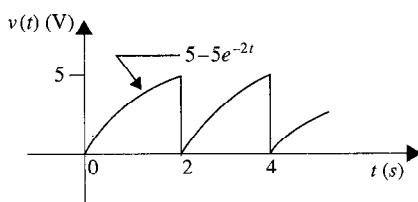


FIGURA P10.46

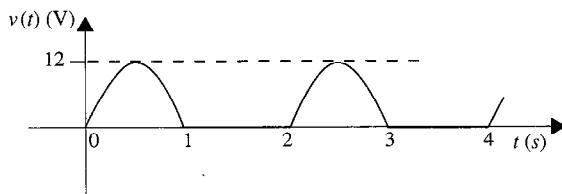


FIGURA P10.47

- 10.48.** Encuentre el valor rms de la corriente definida por la expresión

$$i(t) = 10 \cos(377t) + 12 \operatorname{sen}(754t + 80^\circ) \text{ A}$$

- 10.49.** Una planta toma 250 A rms de una línea de 440 V rms para suministrar una carga con 100 kW. ¿Cuál es el factor de potencia de la carga?

- 10.50.** Una carga industrial consume 100 kW a 0.8 fp retrasado. Si un amperímetro en la línea de transmisión indica que la corriente de carga es 284 A rms, encuentre el voltaje de carga.

- 10.51.** Una carga industrial que consume 80 kW es suministrada por la compañía de potencia a través de una línea de transmisión con una resistencia de 0.1Ω , con 84 kW. Si el voltaje en la carga es 440 V rms, encuentre el factor de potencia en la carga.

- 10.52.** La compañía de potencia suministra 80 kW a una carga industrial. La carga toma 220 A rms de la línea de transmisión. Si el voltaje de carga es 440 V rms y el factor de potencia de la carga es 0.8 retrasado, encuentre las pérdidas en la línea de transmisión.

- 10.53.** Una carga industrial opera a 30 kW, 0.8 fp retrasado. El voltaje de carga es $220 \angle 0^\circ$ V rms. Las pérdidas de potencia real y reactiva en la alimentación de la línea de transmisión son 1.8 kW y 2.4 kvar, respectivamente. Encuentre la impedancia de la línea de transmisión y el voltaje de entrada a la línea.

- 10.54.** Una línea de transmisión con impedancia de $0.08 + j0.25 \Omega$ se usa para entregar potencia a la carga. La carga es inductiva y el voltaje de carga es $220 \angle 0^\circ$ V rms a 60 Hz. Si la carga requiere 12 kV y la pérdida de potencia real en la

línea es 560 W, determine el ángulo del factor de potencia de la carga.

- 10.55.** Calcule el voltaje V_s que debe suministrarse para obtener 2 kW, $240 \angle 0^\circ$ V rms, y un factor de potencia de 0.8 retrasado en la carga Z_L en la red de la figura P10.55.

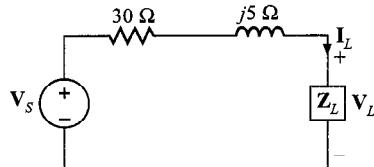


FIGURA P10.55

- 10.56.** Determine el voltaje V_s que debe suministrarse para obtener 1.5 kW, $0.75 \angle 0^\circ$ A rms, y un factor de potencia de 0.85 adelantado en la carga Z_L en la red de la figura P10.56.

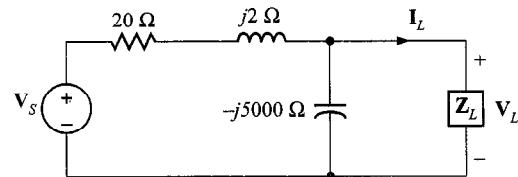


FIGURA P10.56

- 10.57.** Use las leyes de Kirchhoff para calcular el voltaje de la fuente de la red que se muestra en la figura P10.57.

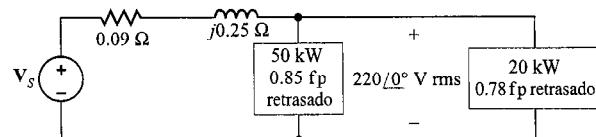


FIGURA P10.57

- 10.58.** Dada la red de la figura 10.58, determine el voltaje de entrada V_s .

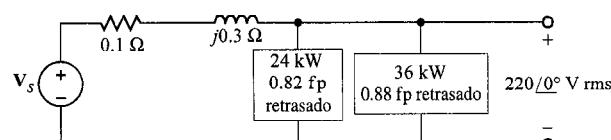


FIGURA P10.58

10.59. Encuentre el voltaje de la fuente de entrada y el factor de potencia de la fuente para la red que se muestra en la figura P10.59.

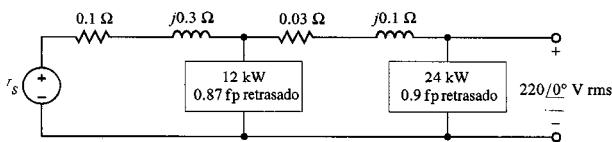


FIGURA P10.59

10.60. Una planta consume 60 kW a un factor de potencia de 0.5 retrasado de una línea de 220 V rms 60 Hz. Determine el valor del condensador que cuando se coloca en paralelo con la carga cambiará el factor de potencia de la carga a 0.9 retrasado.

10.61. Una carga particular tiene un fp de 0.8 retrasado. La potencia entregada a la carga es 40 kW de una línea de 220 V rms 60 Hz. ¿Qué valor de capacitancia colocado en paralelo con la carga elevará el fp a 0.9 retrasado?

10.62. Una pequeña planta tiene un banco de motores de inducción que consume 64 kW a un fp de 0.68 retrasado. El voltaje de línea a través de los motores es 220 $\angle 0^\circ$ V rms. La compañía de potencia local ha pedido a la planta elevar el fp a 0.92 retrasado. ¿Qué valor se requiere de la capacitancia?

10.63. El voltaje de la línea de 60 Hz para una carga industrial de 60 kW, fp de 0.76 retrasado es 440 $\angle 0^\circ$ V rms. Encuentre el valor de la capacitancia que cuando se coloca en paralelo con la carga eleva el factor de potencia a 0.9 retrasado.

10.64. Una carga industrial consume 44 kW a 0.82 fp retrasado de una línea de 220 $\angle 0^\circ$ -V-rms, 60-Hz line. Un banco de condensadores totalizando 900 mF está disponible. Si esos condensadores se colocan en paralelo con la carga, ¿cuál es el nuevo factor de potencia de la carga total?

10.65. Un banco de motores de inducción consume 36 kW a 0.78 pf retrasado de una línea de 60-Hz, 220 $\angle 0^\circ$ V rms. Si 500 μ F de condensadores se colocan en paralelo con la carga, encuentre el nuevo factor de potencia de la carga combinada.

10.66. Dada la red de la figura P10.66, determine la lectura del watímetro.

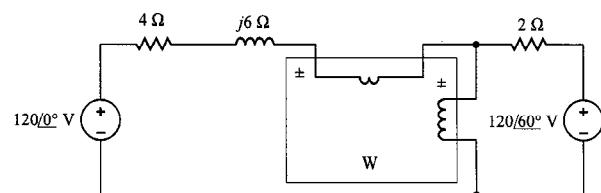


FIGURA P10.66

10.67. Dada la red de la figura P10.67, determine la lectura del watímetro.

10.68. A fin de probar un socket, una mujer, mientras está parada sobre unos cojines que la aislen de la tierra, mete su dedo en el socket como se muestra en la figura P10.68. La punta de su dedo hace contacto con un lado de la línea y el lado de su dedo hace contacto con el otro lado de la línea. Suponiendo que cualquier parte de un brazo tiene una resistencia de 100 Ω, ¿hay alguna corriente en el cuerpo? ¿Hay alguna corriente en las cercanías del corazón?

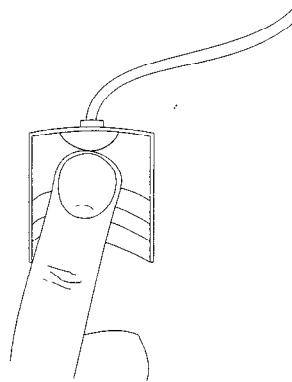


FIGURA P10.68

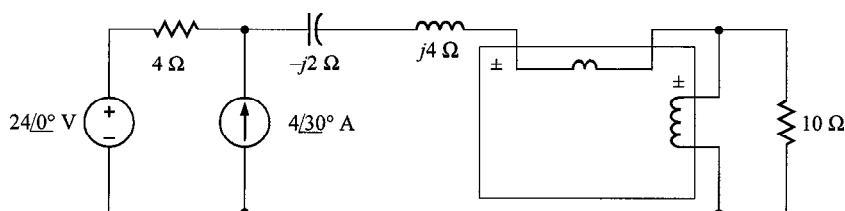


FIGURA P10.67

10.69. Un mecánico inexperto está instalando una batería de 12 V en un carro. La terminal negativa ha sido conectada. Él está apretando los tornillos de la terminal positiva. Con un apretón en la llave inglesa, la gira de modo que el anillo de oro en su dedo hace contacto con el chasis del carro. Esta situación se ilustra en la figura P10.69, donde suponemos que la resistencia de la llave inglesa es insignificante y la resistencia del contacto es como sigue:

$$R_1 = R_{\text{tornillo a llave}} = 0.01 \Omega$$

$$R_2 = R_{\text{llave a anillo}} = 0.01 \Omega$$

$$R_3 = R_{\text{anillo}} = 0.01 \Omega$$

$$R_4 = R_{\text{anillo a chasis}} = 0.01 \Omega$$

¿Qué potencia se disipa rápidamente en el anillo de oro, y cuál es el impacto de esta disipación de potencia?

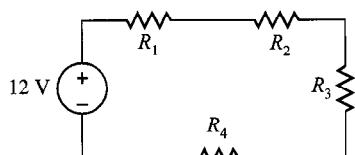


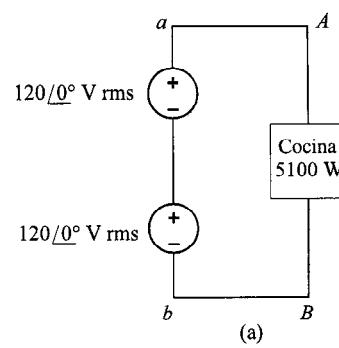
FIGURA P10.69

10.70. Un hombre y su hijo están haciendo volar una cometa. La cometa se enreda en una línea de potencia de 7 200 V cerca de un poste de potencia. El hombre trepa al poste para quitar la cometa. Mientras trata de quitar la cometa, el hombre accidentalmente toca la línea de 7 200 V. Suponiendo que el poste de potencia está bien aterrizado, ¿cuál es la corriente potencial que atraviesa el cuerpo del hombre?

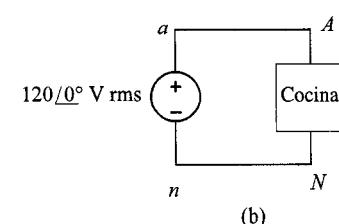
10.71. Varias lámparas domésticas de 120 V serán usadas para proporcionar iluminación en un cuarto grande. La carga total de la iluminación es 8 kW. El Código Eléctrico Nacional requiere que ningún interruptor de circuito sea mayor que 20 A con un 25% de margen de seguridad. Determine el número de ramas de circuito idénticas que se necesitan para este requerimiento.

10.72. Una cocina doméstica de 5.1 kW se diseña para operar con un voltaje senoidal de 240 V rms como se muestra en la figura P10.72a. Sin embargo, el electricista ha conectado erróneamente la cocina para 120 V rms, como se muestra en la figura P10.72b. ¿Cuál es el efecto de este error?

10.73. Para la red de la figura P10.73, elija C de modo que I esté en fase con V_S si la frecuencia es 60 Hz y L es 1 mH.



(a)



(b)

FIGURA P10.72

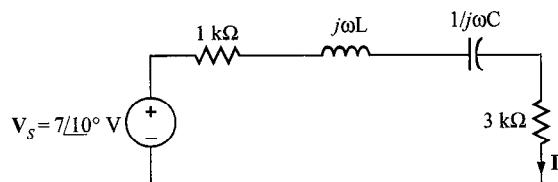


FIGURA P10.73

10.74. Para la figura P10.74, encuentre la $Z = R + jX$ de la red que se requiere para transferencia de potencia promedio máxima.

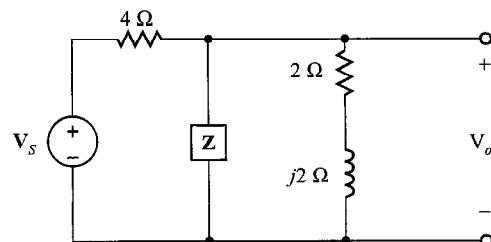
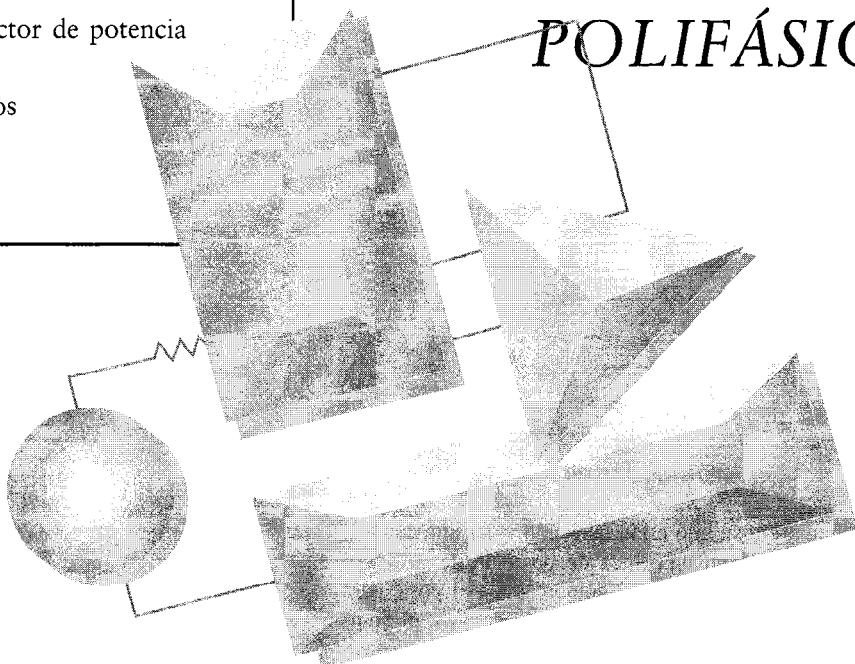


FIGURA P10.74

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

- 11.1** Circuitos trifásicos
- 11.2** Conexiones trifásicas
- 11.3** Conexiones de fuente/carga
- 11.4** Relaciones de potencia
- 11.5** Medición trifásica
- 11.6** Corrección del factor de potencia
- 11.7** Aplicaciones
- 11.8** Diseño de circuitos
- 11.9** Resumen
 - Puntos clave
 - Problemas

CAPÍTULO
11**CIRCUITOS
POLIFÁSICOS**

Mientras viajamos a través de nuestra ciudad o por sus orillas, con frecuencia encontramos líneas aéreas de transmisión de potencia. Si observamos cuidadosamente, encontraremos que hay típicamente tres grandes conductores. Dependiendo de la configuración, puede haber uno o dos conductores más pequeños que se colocan por encima de los conductores de potencia y se utilizan como protección contra los rayos. Esta línea de distribución de potencia trifásica se emplea para transmitir potencia de la estación genera-

dora al usuario. La importancia de este circuito trifásico se deriva del hecho de que podemos mostrar que a) la potencia distribuida de esta forma es estable más que pulsante, como es el caso en la distribución de una sola fase y, por tanto, hay menos desgaste y desgarramiento en el equipo de conversión mecánica, y b) usando un conjunto de voltajes trifásicos podemos transmitir la misma cantidad de potencia que se entrega en el caso de una sola fase con menos conductores y, por consiguiente, con mucho menos material. ■

11.1 Circuitos trifásicos

En este capítulo agregamos una nueva dimensión a nuestro estudio de circuitos de ca en estado estable. Hasta este punto hemos tratado con lo que llamamos circuitos de una sola fase. Ahora extenderemos nuestras técnicas de análisis a circuitos polifásicos o,

más específicamente, circuitos trifásicos, es decir, circuitos que contienen tres fuentes de voltaje que están apartadas un tercio de ciclo en el tiempo.

Hay muchas e importantes razones para estudiar los circuitos trifásicos. Es más ventajoso y económico generar y transmitir potencia eléctrica en el modo polifásico que con los sistemas de una sola fase. Como resultado, la mayor parte de la potencia eléctrica se transmite en circuitos polifásicos. En Estados Unidos la frecuencia de los sistemas de potencia es 60 Hz, mientras que en otras partes del mundo 50 Hz es lo común.

La transmisión de potencia se lleva a cabo de manera mucho más eficiente a muy alto voltaje. Como este voltaje puede ser extremadamente alto en comparación con el nivel que se usa normalmente (por ejemplo, en el hogar), hay necesidad de elevar y bajar el voltaje. Esto se puede llevar a cabo en sistemas de ca usando transformadores, que estudiaremos en el capítulo 12.

Como lo indica el nombre, los circuitos trifásicos son aquellos en los que la función forzante es un sistema de voltajes trifásicos. Si los tres voltajes senoidales tienen la misma magnitud y frecuencia y cada voltaje está 120° fuera de fase con los otros dos, se dice que los voltajes están *balanceados*. Si las cargas son tales que las corrientes producidas por los voltajes también están balanceadas, se refiere uno a todo el circuito como un *circuito trifásico balanceado*.

Un conjunto balanceado de voltajes trifásicos puede representarse en el dominio de frecuencia como se muestra en la figura 11.1a donde hemos supuesto que sus magnitudes son 120 V rms. De la figura notamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{an} &= 120 / 0^\circ \text{ V rms} \\ \mathbf{V}_{bn} &= 120 / -120^\circ \text{ V rms} \\ \mathbf{V}_{cn} &= 120 / -240^\circ \text{ V rms} \\ &= 120 / 120^\circ \text{ V rms} \end{aligned} \quad (11.1)$$

Observe que nuestra notación de doble subíndice es exactamente la misma que la empleada en los primeros capítulos; es decir, \mathbf{V}_{an} significa el voltaje en el punto *a* con respecto al punto *n*. También emplearemos la notación de doble subíndice para corrientes;

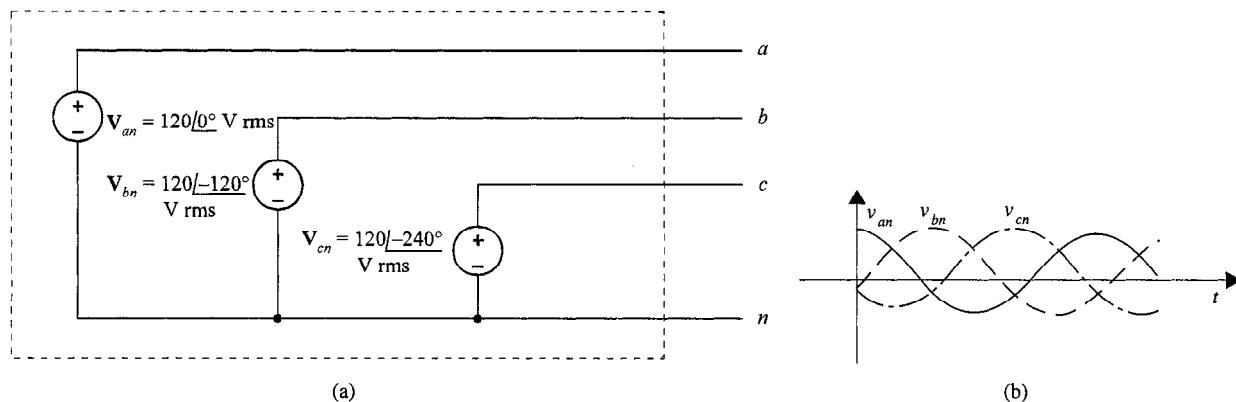


FIGURA 11.1 Voltajes trifásicos balanceados.

es decir, \mathbf{I}_{an} se usa para representar la corriente de a a n . Sin embargo, debemos ser muy cuidadosos en este caso al describir la trayectoria precisa, ya que en un circuito habrá más de una trayectoria entre los dos puntos. Por ejemplo, en el caso de una sola malla las dos corrientes posibles en las dos trayectorias estarán 180° fuera de fase entre ellas.

Los voltajes fasoriales precedentes pueden expresarse en el dominio de tiempo como

$$\begin{aligned} v_{an}(t) &= 120 \sqrt{2} \cos \omega t \text{ V} \\ v_{bn}(t) &= 120 \sqrt{2} \cos(\omega t - 120^\circ) \text{ V} \\ v_{cn}(t) &= 120 \sqrt{2} \cos(\omega t + 120^\circ) \text{ V} \end{aligned} \quad (11.2)$$

Esas funciones del tiempo se muestran en la figura 11.1b.

Finalmente, examinemos la potencia instantánea generada por un sistema trifásico. Suponga que los voltajes de la figura 11.1 son

$$\begin{aligned} v_{an}(t) &= V_m \cos \omega t \text{ V} \\ v_{bn}(t) &= V_m \cos(\omega t - 120^\circ) \text{ V} \\ v_{cn}(t) &= V_m \cos(\omega t - 240^\circ) \text{ V} \end{aligned} \quad (11.3)$$

Si la carga está balanceada, las corrientes producidas por las fuentes son

$$\begin{aligned} i_a(t) &= I_m \cos(\omega t - \theta) \text{ A} \\ i_b(t) &= I_m \cos(\omega t - \theta - 120^\circ) \text{ A} \\ i_c(t) &= I_m \cos(\omega t - \theta - 240^\circ) \text{ A} \end{aligned} \quad (11.4)$$

La potencia instantánea producida por el sistema es

$$\begin{aligned} p(t) &= p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) \\ &= V_m I_m [\cos \omega t \cos(\omega t - \theta) + \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\omega t - \theta - 120^\circ) \\ &\quad + \cos(\omega t - 240^\circ) \cos(\omega t - \theta - 240^\circ)] \end{aligned} \quad (11.5)$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad (11.6)$$

la ecuación (11.5) se vuelve

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{V_m I_m}{2} [\cos \theta + \cos(2\omega t - \theta) + \cos \theta \\ &\quad + \cos(2\omega t - \theta - 240^\circ) + \cos \theta + \cos(2\omega t - \theta - 480^\circ)] \end{aligned} \quad (11.7)$$

la cual puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
 p(t) = & \frac{V_m I_m}{2} [3 \cos \theta + \cos(2\omega t - \theta) \\
 & + \cos(2\omega t - \theta - 120^\circ) + \cos(2\omega t - \theta + 120^\circ)]
 \end{aligned} \quad (11.8)$$

Existe una identidad trigonométrica que nos permite simplificar la expresión anterior. La identidad, que probaremos después utilizando fasores, es

$$\cos \phi + \cos(\phi - 120^\circ) + \cos(\phi + 120^\circ) = 0 \quad (11.9)$$

Si empleamos esta identidad, la expresión para la potencia se convierte en

$$p(t) = 3 \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta \text{ W} \quad (11.10)$$

Note que esta ecuación indica que la potencia instantánea siempre es constante en el tiempo, más que pulsante como es en el caso de una sola fase. Por consiguiente, la potencia que entrega una fuente de voltaje trifásica es muy suave, lo cual es otra razón por la que la potencia se genera en forma trifásica.

11.2 Conexiones trifásicas

Con mucho, la fuente de voltaje más importante es la fuente trifásica balanceada. Esta fuente, como se ilustra con la figura 11.2, tiene las siguientes propiedades. Las fases de los voltajes, es decir, el voltaje de cada línea *a*, *b* y *c* al neutro *n*, está dado por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{an} &= V_p \angle 0^\circ \\
 \mathbf{V}_{bn} &= V_p \angle -120^\circ \\
 \mathbf{V}_{cn} &= V_p \angle +120^\circ
 \end{aligned} \quad (11.11)$$

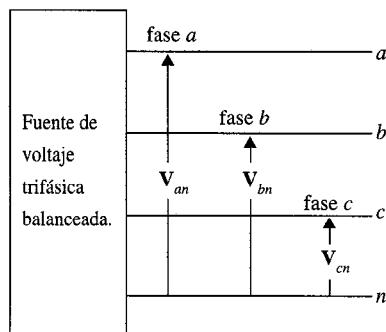


FIGURA 11.2 Fuente de voltaje trifásica balanceada.

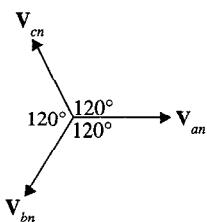


FIGURA 11.3
Diagrama fasorial para una fuente de voltaje trifásica balanceada.

El diagrama fasorial para esos voltajes se muestra en la figura 11.3. La secuencia de fase es este conjunto se dice que es *abc* (llamada secuencia de fase positiva), lo que significa que \mathbf{V}_{bn} se *retrasa* de \mathbf{V}_{an} por 120° .

Estandarizaremos nuestra notación para que siempre marquemos los voltajes \mathbf{V}_{an} , \mathbf{V}_{bn} y \mathbf{V}_{cn} , y los observemos en el orden *abc*. Además, normalmente supondremos sin pérdida de generalidad que $\angle \mathbf{V}_{an} = 0^\circ$.

Una propiedad importante del conjunto de voltaje balanceado es que

$$\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0 \quad (11.12)$$

Esta propiedad puede verse fácilmente descomponiendo los fasores de voltaje en sus componentes a lo largo de los ejes real e imaginario. Esto también se puede demostrar mediante la ecuación (11.9).

Desde el punto de vista del usuario que conecta una carga a la fuente de voltaje trifásica balanceada, no es importante cómo se generan los voltajes. Es importante notar, sin embargo, que si las corrientes de carga generadas al conectar una carga a la fuente de potencia que se muestra en la figura 11.2 también están *balanceadas*, hay dos posibles configuraciones equivalentes para la carga. Puede considerarse que la carga equivalente está conectada en una configuración *i griega* (*Y*) o *delta* (Δ). La configuración *Y* balanceada se muestra en la figura 11.4a y de manera equivalente en la figura 11.4b. La configuración delta se muestra en la figura 11.5a y de forma equivalente en la figura 11.5b. Observe que en el caso de la conexión delta, no hay línea neutra. La función real de la línea neutra en la conexión *Y* será examinada y se mostrará que en un sistema balanceado la línea neutra no conduce corriente y, con propósitos de análisis, puede omitirse.

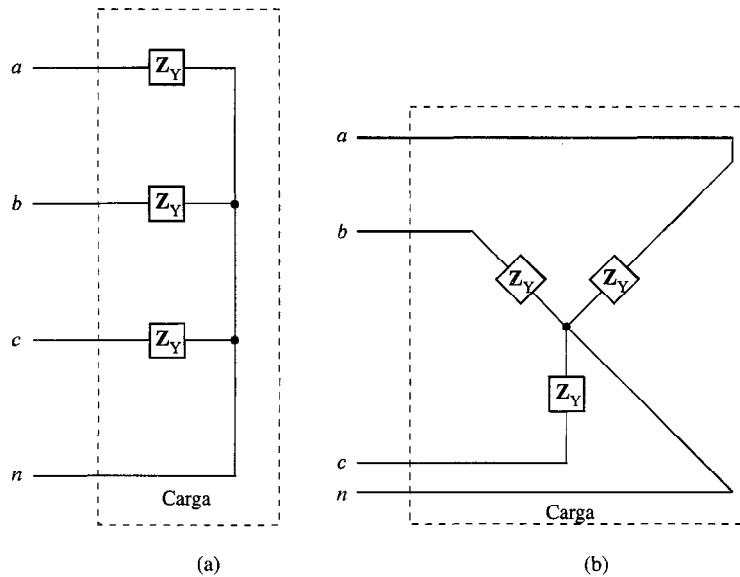


FIGURA 11.4 Cargas conectadas en *i griega* (*Y*).

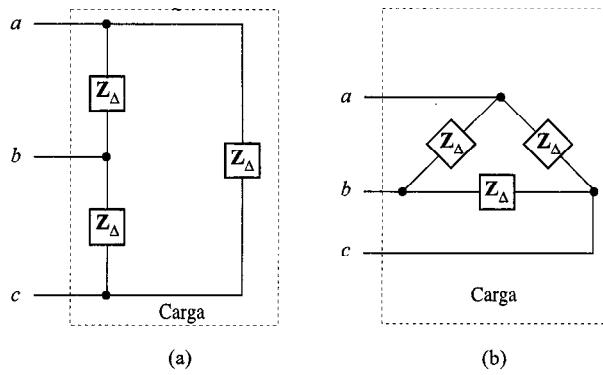


FIGURA 11.5 Cargas conectadas en delta (Δ).

11.3 Conexiones de fuente/carga

Como la fuente y la carga pueden conectarse cada una en Y o en Δ , los circuitos trifásicos balanceados pueden conectarse en Y-Y, Y- Δ , Δ -Y o Δ - Δ . Nuestro método para el análisis de todos esos circuitos será “pensar en Y” y, por tanto, analizaremos primero la conexión Y-Y.

Conexión Y-Y balanceada

Ahora suponga que la fuente y la carga están conectadas en una Y, como se muestra en la figura 11.6. Los voltajes de fase con secuencia de fase positiva son

$$\mathbf{V}_{an} = V_p \angle 0^\circ$$

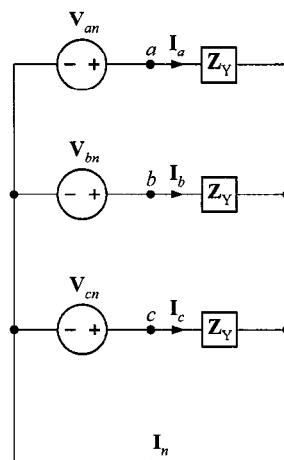


FIGURA 11.6 Conexión Y-Y trifásica balanceada.

$$\mathbf{V}_{bn} = V_p \angle -120^\circ \quad (11.13)$$

$$\mathbf{V}_{cn} = V_p \angle +120^\circ$$

donde V_p , el voltaje de fase, es la magnitud del voltaje fasorial del neutro a cualquier línea. Los voltajes *línea a línea*, o simplemente *voltajes de línea*, pueden calcularse usando la LVK; por ejemplo,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} \\ &= V_p \angle 0^\circ - V_p \angle -120^\circ \\ &= V_p - V_p \left[-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\ &= V_p \left[\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\ &= \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ\end{aligned}$$

La suma fasorial se muestra en la figura 11.7a. De manera similar, obtenemos el conjunto de voltajes línea a línea como

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} &= \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ \\ \mathbf{V}_{bc} &= \sqrt{3} V_p \angle -90^\circ \\ \mathbf{V}_{ca} &= \sqrt{3} V_p \angle -210^\circ\end{aligned} \quad (11.14)$$

Todos los voltajes de línea con los voltajes de fase se muestran en la figura 11.7b. Denotaremos la magnitud de los voltajes de línea como V_L , y, por tanto, para un sistema balanceado,

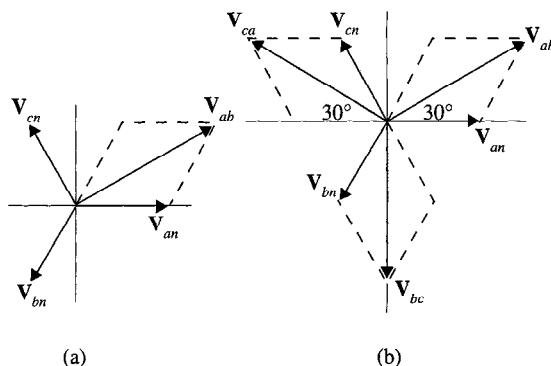


FIGURA 11.7 Representación fasorial de los voltajes de fase y de línea en un sistema Y-Y balanceado.

$$V_L = \sqrt{3} V_p \quad (11.15)$$

De aquí que, en un sistema conectado en Y, el voltaje de línea es igual a $\sqrt{3}$ veces el voltaje de fase.

Como se muestra en la figura 11.6, la corriente de línea para la fase a es

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{V_p \angle 0^\circ}{\mathbf{Z}_Y} \quad (11.16)$$

donde \mathbf{I}_b e \mathbf{I}_c tienen la misma magnitud pero se retrasan de \mathbf{I}_a por 120° y 240° , respectivamente.

La corriente neutra \mathbf{I}_n es entonces

$$\mathbf{I}_n = (\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c) = 0 \quad (11.17)$$

Como no hay corriente en el neutro, este conductor puede contener cualquier impedancia o puede ser un circuito abierto o un corto circuito, sin cambiar los resultados encontrados anteriormente.

Como se ilustró con la conexión Y-Y en la figura 11.6 la corriente en la línea que conecta la fuente a la carga es la misma que la corriente de fase que fluye a través de la impedancia \mathbf{Z}_Y . Por consiguiente, en una conexión Y-Y,

$$I_L = I_Y \quad (11.18)$$

donde I_L es la magnitud de la corriente de línea e I_Y es la magnitud de la corriente en una carga conectada en Y.

Es importante notar que aunque tenemos un sistema trifásico compuesto de tres fuentes y tres cargas, podemos analizar sólo una fase y usar la secuencia de fase para obtener los voltajes y corrientes de las otras fases. Esto es, por supuesto, un resultado directo de la condición balanceada. Podemos tener, incluso, impedancias presentes en las líneas; sin embargo, mientras el sistema permanezca balanceado, necesitamos analizar sólo una fase. Si las impedancias de línea en las líneas a , b y c son iguales, el sistema estará balanceado. Recuerde que el balance del sistema no se afecta por lo que aparezca en la línea neutra, y como la impedancia de la línea neutra es arbitraria, suponemos que es cero (es decir, un corto circuito).

E J E M P L O 11.1

Una fuente de voltaje trifásica con secuencia abc conectada en una Y balanceada tiene un voltaje de línea de $\mathbf{V}_{ab} = 208 \angle -30^\circ$ V rms. Deseamos determinar los voltajes de fase.

S o l u c i ó n La magnitud del voltaje de fase está dada por la expresión

$$V_p = \frac{208}{\sqrt{3}}$$

$$V_p = 120 \text{ V rms}$$

Las relaciones de fase entre los voltajes de línea y de fase se muestran en la

figura 11.7. De esta figura notamos que

$$\mathbf{V}_{an} = 120 \angle -60^\circ \text{ V rms}$$

$$\mathbf{V}_{bn} = 120 \angle -180^\circ \text{ V rms}$$

$$\mathbf{V}_{cn} = 120 \angle +60^\circ \text{ V rms}$$

Las magnitudes de esos voltajes son bastante comunes, y uno con frecuencia escucha que el servicio eléctrico en un edificio, por ejemplo, es trifásico de 208/120 V.

E J E M P L O 11.2

Una carga trifásica conectada en Y es abastecida por una fuente trifásica, conectada en Y balanceada con secuencia *abc*, con un voltaje de fase de 120 V rms. Si la impedancia de línea y la impedancia de carga por fase son $1 + j1 \Omega$ y $20 + j10 \Omega$, respectivamente, deseamos determinar el valor de las corrientes de línea y los voltajes de carga.

S o l u c i ó n Los voltajes de fase son

$$\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$$

$$\mathbf{V}_{bn} = 120 \angle -120^\circ \text{ V rms}$$

$$\mathbf{V}_{cn} = 120 \angle +120^\circ \text{ V rms}$$

El diagrama del circuito por fase se muestra en la figura 11.8. La corriente de línea para la fase *a* es

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{aA} &= \frac{120 \angle 0^\circ}{21 + j11} \\ &= 5.06 \angle -27.65^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

El voltaje de carga para la fase *a*, al que llamamos \mathbf{V}_{AN} , es

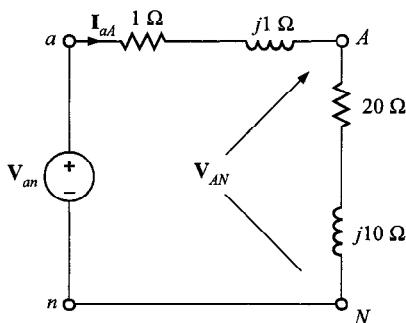


FIGURA 11.8 Diagrama del circuito por fase para el problema del ejemplo 11.2.

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{AN} &= (5.06 \angle -27.65^\circ) (20 + j10) \\ &= 113.15 \angle -1.08^\circ \text{ V rms}\end{aligned}$$

Las correspondientes corrientes de línea y voltajes de carga para las fases *b* y *c* son

$$\mathbf{I}_{bB} = 5.06 \angle -147.65^\circ \text{ A rms} \quad \mathbf{V}_{BN} = 113.15 \angle -121.08^\circ \text{ V rms}$$

$$\mathbf{I}_{cC} = 5.06 \angle -267.65^\circ \text{ A rms} \quad \mathbf{V}_{CN} = 113.15 \angle -241.08^\circ \text{ V rms}$$

Para recalcar y clarificar nuestra terminología, el voltaje de fase, V_p , es la magnitud del voltaje fasorial del neutro a cualquier línea, mientras que el voltaje de línea, V_L , es la magnitud del voltaje fasorial entre dos líneas cualesquiera. Así, los valores de V_L y V_p dependerán del punto en el que se calculan en el sistema.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D11.1 El voltaje para la fase *a* de una fuente conectada en Y balanceada con secuencia de fase *abc* es $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 90^\circ$ V rms. Determine los voltajes de línea para esta fuente.

Resp.: $\mathbf{V}_{ab} = 208 \angle 120^\circ$ V rms, $\mathbf{V}_{bc} = 208 \angle 0^\circ$ V rms, $\mathbf{V}_{ca} = 208 \angle -120^\circ$ V rms.

D11.2 Una fuente de voltaje trifásica con secuencia de fase *abc* conectada en una Y balanceada tiene un voltaje de línea de $\mathbf{V}_{ab} = 208 \angle 0^\circ$ V rms. Determine los voltajes de fase de la fuente.

Resp.: $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle -30^\circ$ V rms, $\mathbf{V}_{bn} = 120 \angle -150^\circ$ V rms, $\mathbf{V}_{cn} = 120 \angle -270^\circ$ V rms.

D11.3 Una carga trifásica en Y es abastecida por una fuente conectada en Y trifásica balanceada con secuencia *abc* a través de una línea de transmisión con una impedancia de $1 + j1$ ohms por fase. La impedancia de la carga es $8 + j3$ ohms por fase. Si el voltaje de carga para la fase *a* es $104.02 \angle 26.6^\circ$ V rms (es decir, $V_p = 104.02$ V rms al final de la carga), determine los voltajes de fase de la fuente.

Resp.: $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 30^\circ$ V rms, $\mathbf{V}_{bn} = 120 \angle -90^\circ$ V rms, $\mathbf{V}_{cn} = 120 \angle -210^\circ$ V rms.

El análisis anterior indica que podemos simplemente tratar un circuito trifásico balanceado en una base por fase y usar la relación de fase para determinar todos los voltajes y corrientes. Examinemos las situaciones en las que la fuente o la carga están conectadas en Δ .

Fuente conectada en delta

Considere la fuente conectada en delta que se muestra en la figura 11.9a. Observe que las fuentes están conectadas línea a línea. Encontramos al principio que la relación entre voltajes línea a línea y línea a neutro estaban dados por la ecuación (11.14) e ilustrados en la figura 11.7 para una secuencia de fase *abc* de los voltajes. Por consiguiente, si las fuentes en delta son

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} &= V_L \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_{bc} &= V_L \angle -120^\circ \\ \mathbf{V}_{ca} &= V_L \angle +120^\circ\end{aligned}\tag{11.19}$$

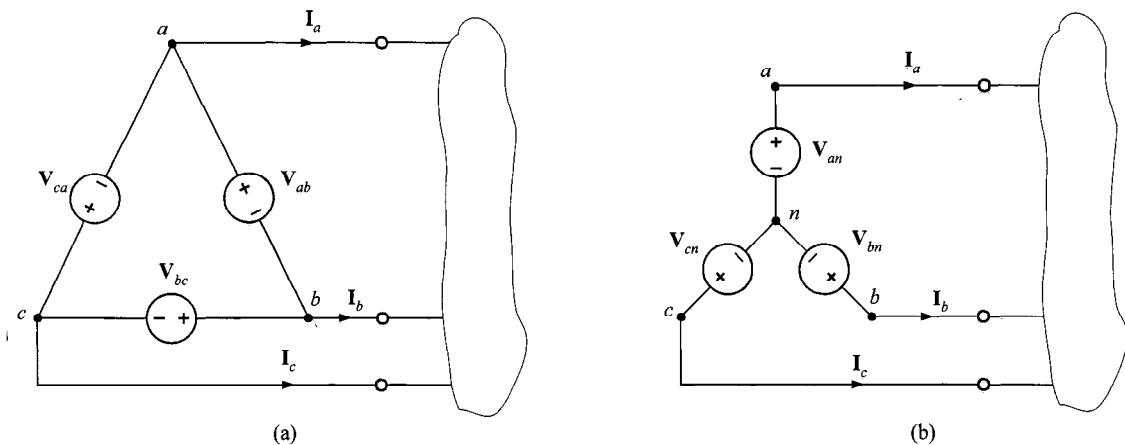


FIGURA 11.9 Fuentes conectadas en delta y Y.

donde V_L es la magnitud del voltaje de fase, las fuentes en Y equivalentes que se muestran en la figura 11.9b son

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{an} &= \frac{V_L}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = V_p \angle -30^\circ \\ \mathbf{V}_{bn} &= \frac{V_L}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ = V_p \angle -150^\circ \\ \mathbf{V}_{cn} &= \frac{V_L}{\sqrt{3}} \angle -270^\circ = V_p \angle +90^\circ \end{aligned} \quad (11.20)$$

donde V_p es la magnitud del voltaje de fase de una fuente equivalente conectada en Y. Por consiguiente, si encontramos una red que contenga una fuente conectada en delta, podemos convertir fácilmente la fuente de delta a Y de modo que todas las técnicas que hemos discutido previamente pueden ser aplicadas en un análisis.

E J E M P L O 11.3

Considere la red que se muestra en la figura 11.10a. Deseamos determinar las corrientes de línea y la magnitud de los voltajes de línea en la carga.

SOLUCIÓN El diagrama de una sola fase para la red se muestra en la figura 11.10b. La corriente de línea \mathbf{I}_{aA} es

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{aA} &= \frac{(208/\sqrt{3}) \angle -30^\circ}{12.1 + j4.2} \\ &= 9.38 \angle -49.14^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

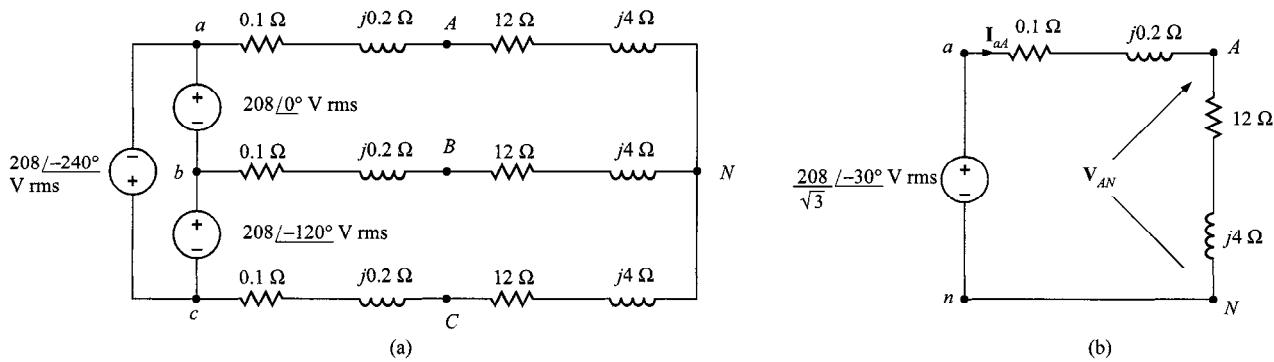


FIGURA 11.10 Una red delta-Y y un diagrama de una sola fase (fase *a*) equivalente.

y así $\mathbf{I}_{bB} = 9.38 \angle -169.14^\circ$ A rms e $\mathbf{I}_{cC} = 9.38 \angle 70.86^\circ$ A rms. El voltaje \mathbf{V}_{AN} es entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{AN} &= (9.38 \angle -49.14^\circ)(12 + j4) \\ &= 118.65 \angle -30.71^\circ \text{ V rms}\end{aligned}$$

Por tanto, la magnitud del voltaje de línea en la carga es

$$\begin{aligned}V_L &= \sqrt{3}(118.65) \\ &= 205.51 \text{ V rms}\end{aligned}$$

El voltaje de fase en la fuente es $V_p = 208/\sqrt{3} = 120$ V rms, mientras que el voltaje de fase en la carga es $V_p = 205.51/\sqrt{3} = 118.65$ V rms. Está claro que debemos ser cuidadosos con nuestra notación y específicamente donde se toma el voltaje de fase o de línea.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D11.4 Considere la red que se muestra en la figura D11.4. Calcule la magnitud de los voltajes de línea en la carga.

Resp.: $V_L = 241$ V rms.

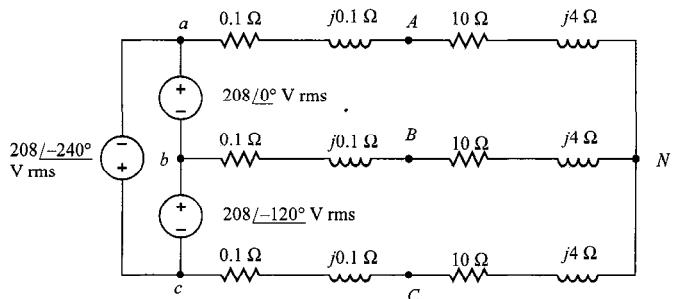


FIGURA D11.4

Carga conectada en delta

Considere ahora la carga conectada en Δ que se muestra en la figura 11.11. Advierta que en esta conexión el voltaje línea a línea es el voltaje a través de cada impedancia de carga.

Si los voltajes de fase de la fuente son

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{an} &= V_p \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_{bn} &= V_p \angle -120^\circ \\ \mathbf{V}_{cn} &= V_p \angle +120^\circ\end{aligned}\quad (11.21)$$

entonces los voltajes de línea son

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} &= \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ = V_L \angle 30^\circ = \mathbf{V}_{AB} \\ \mathbf{V}_{bc} &= \sqrt{3} V_p \angle -90^\circ = V_L \angle -90^\circ = \mathbf{V}_{BC} \\ \mathbf{V}_{ca} &= \sqrt{3} V_p \angle -210^\circ = V_L \angle -210^\circ = \mathbf{V}_{CA}\end{aligned}\quad (11.22)$$

donde V_L es la magnitud del voltaje de línea en la carga conectada en delta y en la fuente ya que no hay impedancia de línea presente en la red.

De la figura 11.11 notamos que si $\mathbf{Z}_\Delta = Z_\Delta \angle \theta$, las corrientes de fase en la carga son

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta} \quad (11.23)$$

donde \mathbf{I}_{BC} e \mathbf{I}_{CA} tienen la misma magnitud pero se retrasan de \mathbf{I}_{AB} por 120° y 240° , respectivamente. La LCK ahora puede emplearse junto con las corrientes de fase para determinar las corrientes de línea. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{aA} &= \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} \\ &= \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA}\end{aligned}$$

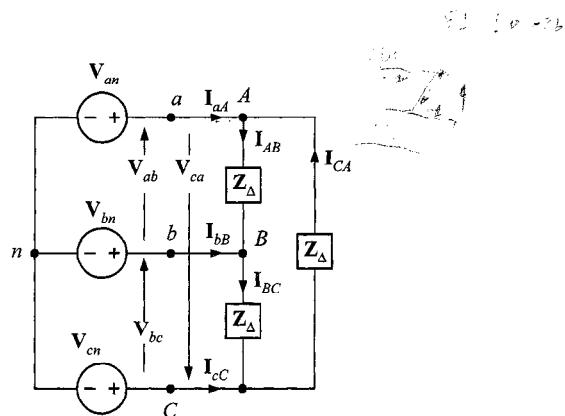


FIGURA 11.11 Sistema trifásico Y-delta balanceado.

Sin embargo, es quizás más fácil convertir simplemente la carga conectada en Δ balanceada a una carga conectada en Y balanceada usando la transformación Δ -Y

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{1}{3} \mathbf{Z}_\Delta$$

y entonces la corriente de línea \mathbf{I}_{aA} es simplemente

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_Y}$$

Finalmente, usando el mismo método que se utilizó al principio para determinar la relación entre los voltajes de línea y los voltajes de fase en una conexión Y-Y, podemos mostrar que la relación entre las *magnitudes* de las corrientes de fase en la carga conectada en Δ y la corriente de línea es

$$I_L = \sqrt{3} I_\Delta \quad (11.24)$$

EJEMPLO 11.4

Una carga conectada en delta balanceada contiene una resistencia de 10Ω en serie con una bobina de 20 mH en cada fase. La fuente de voltaje es una Y balanceada trifásica de 60 Hz con secuencia abc y con un voltaje $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 30^\circ \text{ V rms}$. Deseamos determinar todas las corrientes de la Δ y las corrientes de línea.

SOLUCIÓN La impedancia por fase en la carga en delta es $\mathbf{Z}_\Delta = 10 + j7.54 \Omega$. El voltaje de línea $\mathbf{V}_{ab} = 120 \sqrt{3} \angle 60^\circ \text{ V rms}$. Como no hay impedancia de línea, $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab} = 120 \sqrt{3} \angle 60^\circ \text{ V rms}$. De aquí,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{AB} &= \frac{120 \sqrt{3} \angle 60^\circ}{10 + j7.54} \\ &= 16.60 \angle +22.98^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

Si $\mathbf{Z}_\Delta = 10 + j7.54 \Omega$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_Y &= \frac{1}{3} \mathbf{Z}_\Delta \\ &= 3.33 + j2.51 \Omega \end{aligned}$$

entonces la corriente de línea

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{aA} &= \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{120 \angle 30^\circ}{3.33 + j2.51} \\ &= \frac{120 \angle 30^\circ}{4.17 \angle 37.01^\circ} \\ &= 28.78 \angle -7.01^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

Por tanto, las restantes fases y corrientes de línea son

$$\mathbf{I}_{BC} = 16.60 \angle -97.01^\circ \text{ A rms} \quad \mathbf{I}_{bB} = 28.78 \angle -127.01^\circ \text{ A rms}$$

$$\mathbf{I}_{CA} = 16.60 \angle +142.98^\circ \text{ A rms} \quad \mathbf{I}_{cC} = 28.78 \angle 112.98^\circ \text{ A rms}$$

En resumen, la relación entre el voltaje de línea, la corriente de línea y la corriente de fase para las configuraciones en Y y en Δ se muestran en la figura 11.12. Las corrientes y voltajes se muestran para una fase. Las dos fases restantes tienen la misma magnitud pero están retrasadas 120° y 240° , respectivamente.

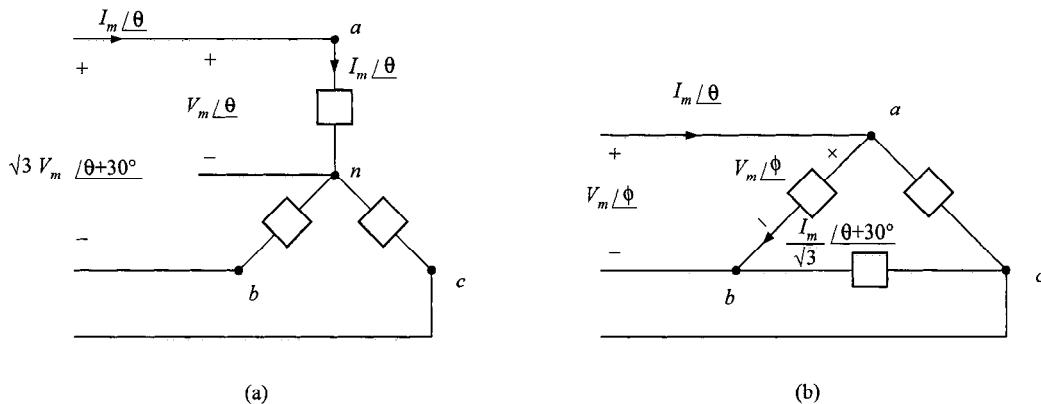


FIGURA 11.12 Relación de voltaje y corriente para las configuraciones Y y delta.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D11.5 Una fuente de voltaje trifásica con una secuencia *abc* conectada en una Y balanceada suministra potencia a una carga conectada en delta balanceada. La corriente de línea para la fase *a* es $\mathbf{I}_{aA} = 12 \angle 40^\circ$ A rms. Encuentre las corrientes de fase en la carga conectada en delta.

Resp.: $\mathbf{I}_{AB} = 6.93 \angle 70^\circ$ A rms, $\mathbf{I}_{BC} = 6.93 \angle 50^\circ$ A rms, $\mathbf{I}_{CA} = 6.93 \angle -170^\circ$ A rms.

D11.6 Una fuente trifásica balanceada con una secuencia *abc* conectada en Y suministra potencia a una carga conectada en delta balanceada. La impedancia de carga por fase es $12 + j8 \Omega$. Si la corriente \mathbf{I}_{AB} en una fase de la delta es $14.42 \angle 86.31^\circ$ A rms, determine las corrientes de línea y los voltajes de fase en la fuente.

Resp.: $\mathbf{I}_a = 24.98 \angle 56.31^\circ$ A rms, $\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_a \angle -120^\circ$, $\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_a \angle -240^\circ$, $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 90^\circ$ V rms, $\mathbf{V}_{bn} = \mathbf{V}_{an} \angle -120^\circ$, $\mathbf{V}_{cn} = \mathbf{V}_{an} \angle -240^\circ$.

Considere ahora dos ejemplos en los que las cargas consisten en una combinación en paralelo de una carga conectada en delta y una carga conectada en Y.

EJEMPLO 11.5

Considere la red que se muestra en la figura 11.13a. Deseamos determinar todas las corrientes de la carga.

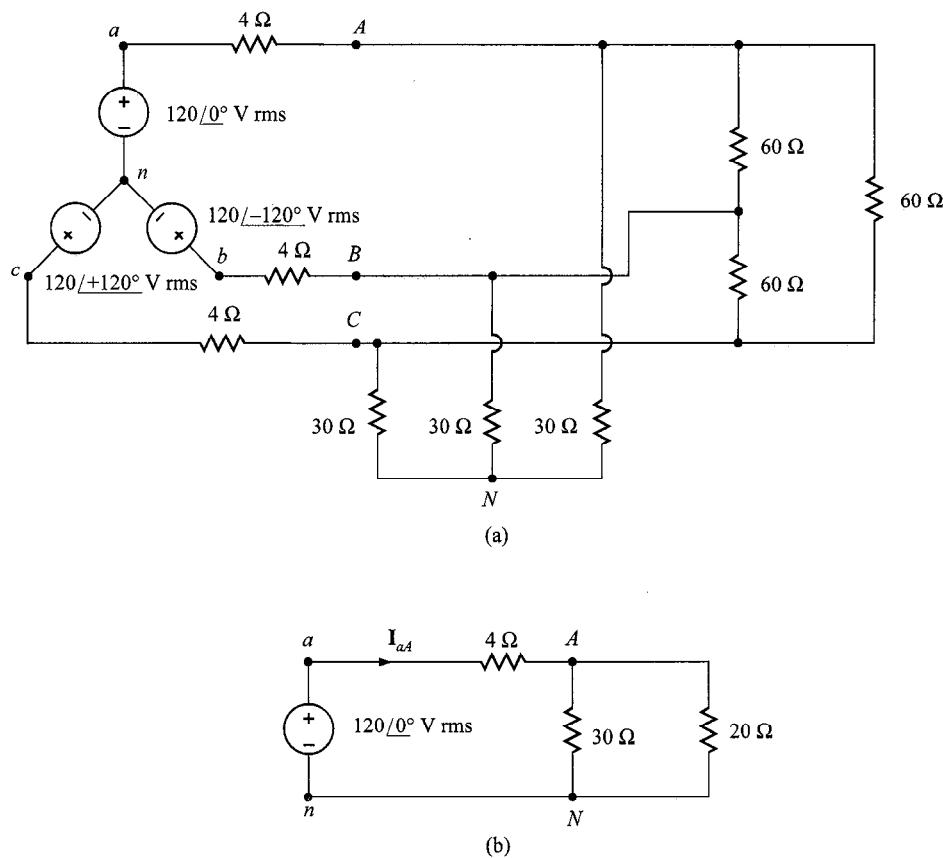


FIGURA 11.13 Redes utilizadas en el ejemplo 11.5: a) red original; b) red equivalente de fase *a*.

SOLUCIÓN El diagrama del circuito para la fase *a* se muestra en la figura 11.13b. Como la combinación en paralelo de $30\ \Omega$ y $20\ \Omega$ es $12\ \Omega$,

$$\begin{aligned} I_{aA} &= \frac{120 \angle 0^\circ}{16} \\ &= 7.5 \angle 0^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

y de aquí

$$\begin{aligned} V_{AN} &= (7.5 \angle 0^\circ)(12) \\ &= 90 \angle 0^\circ \text{ V rms} \end{aligned}$$

En la carga conectada en Y original,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{AN} &= \frac{90 \angle 0^\circ}{30} \\ &= 3 \angle 0^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

y por tanto $\mathbf{I}_{BN} = 3 \angle -120^\circ$ A rms e $\mathbf{I}_{CN} = 3 \angle +120^\circ$ A rms.

Para la carga conectada en delta original

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{AB} &= 90 \sqrt{3} \angle 0^\circ + 30^\circ \\ &= 155.88 \angle 30^\circ \text{ V rms} \end{aligned}$$

y de aquí,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{AB} &= \frac{155.88 \angle 30^\circ}{60} \\ &= 2.60 \angle 30^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\mathbf{I}_{BC} = 2.60 \angle -90^\circ$ A rms e $\mathbf{I}_{CA} = 2.60 \angle +150^\circ$ A rms.

Como se muestra en la figura 11.13a, la corriente de línea debe ser igual a la suma de las corrientes de carga. De aquí,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{aA} &= \mathbf{I}_{AN} + \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} \\ &= \mathbf{I}_{AN} + \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} \\ &= 3 \angle 0^\circ + 2.6 \angle 30^\circ - 2.6 \angle 150^\circ \\ &= 7.5 \angle 0^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

que es una verificación simple de nuestros cálculos.

E J E M P L O 11.6

Un sistema trifásico balanceado tiene una carga que consiste en una Y balanceada en paralelo con una delta balanceada. La impedancia por fase para la Y es $10 + j6 \Omega$ y para la delta es $24 + j9 \Omega$. La fuente es una delta balanceada y $\mathbf{V}_{ab} = 208 \angle 30^\circ$ V rms. Si la impedancia de línea por fase es $1 + j0.5 \Omega$, queremos determinar las corrientes de línea, los voltajes de fase de la carga cuando la carga se convierte a una Y equivalente, y las corrientes en la carga conectada en delta.

SOLUCIÓN Convirtiendo la carga en delta a una carga en Y equivalente, obtenemos

$$\mathbf{Z}_{Y1} = \frac{1}{3} \mathbf{Z}_{\Delta 1} = 8 + j3 \Omega$$

El circuito equivalente por fase se muestra en la figura 11.14. Como el

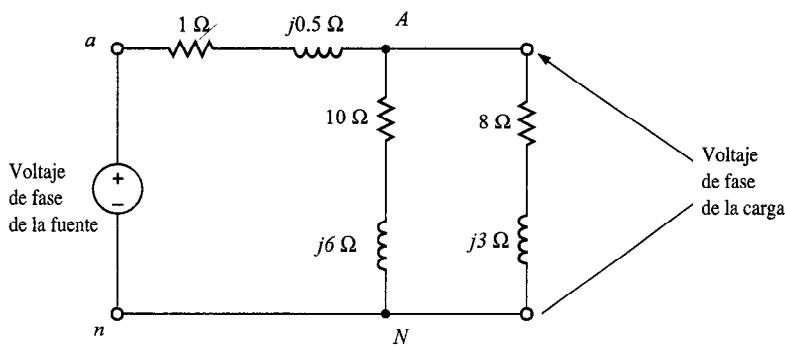


FIGURA 11.14 Circuito por fase equivalente para el ejemplo 11.6.

voltaje en la fuente es $\mathbf{V}_{ab} = 208 \angle 30^\circ$ V rms, el voltaje de fase en la fuente es $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 0^\circ$ V rms.

Recuerde que como las cargas están balanceadas, los puntos neutros pueden conectarse. La impedancia de la carga en Y equivalente es

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_Y &= \frac{\mathbf{Z}_{Y1}\mathbf{Z}_{Y2}}{\mathbf{Z}_{Y1} + \mathbf{Z}_{Y2}} \\ &= \frac{(10 + j6)(8 + j3)}{10 + j6 + 8 + j3} = 4.95 \angle 24.95^\circ \\ &= 4.49 + j2.09 \Omega\end{aligned}$$

La corriente de línea \mathbf{I}_a es entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_a &= \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_{\text{lnea}} + \mathbf{Z}_Y} \\ &= \frac{120 \angle 0^\circ}{1 + j0.5 + 4.49 + j2.09} \\ &= 19.77 \angle -25.26^\circ \text{ A rms}\end{aligned}$$

El voltaje de fase en la carga es entonces $\mathbf{V}_p = |\mathbf{V}_{AN}|$, donde

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{AN} &= \mathbf{I}_a \mathbf{Z}_Y \\ &= (19.77 \angle -25.26^\circ) (4.95 \angle 24.95^\circ) \\ &= 97.86 \angle -0.31^\circ \text{ V rms}\end{aligned}$$

Por tanto, las corrientes de línea y los voltajes de fase de la carga son

$$\begin{array}{ll}\mathbf{I}_{aA} = 19.77 \angle -25.26^\circ \text{ A rms} & \mathbf{V}_{AN} = 97.86 \angle -0.31^\circ \text{ V rms} \\ \mathbf{I}_{bB} = 19.77 \angle -145.26^\circ \text{ A rms} & \mathbf{V}_{BN} = 97.86 \angle -120.31^\circ \text{ V rms} \\ \mathbf{I}_{cC} = 19.77 \angle +94.74^\circ \text{ A rms} & \mathbf{V}_{CN} = 97.86 \angle +119.69^\circ \text{ V rms}\end{array}$$

A fin de determinar las corrientes de fase en la carga conectada en delta, retomamos el circuito original. Aunque la carga conectada en Y, con la que reemplazamos la carga conectada en delta, es equivalente *en las terminales externas*, debemos usar el circuito original para determinar voltajes o corrientes *internos*.

Como

$$V_{AN} = 97.86 \angle -0.31^\circ \text{ V rms},$$

entonces

$$\begin{aligned} V_{AB} &= 97.86 \sqrt{3} \angle -0.31^\circ + 30^\circ \\ &= 169.5 \angle 29.69^\circ \text{ V rms} \end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{aligned} I_{AB} &= \frac{V_{AB}}{Z_\Delta} = \frac{169.5 \angle 29.69^\circ}{24 + j9} \\ &= 6.61 \angle 9.13^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

Las corrientes de fase restantes en la delta son

$$I_{BC} = 6.61 \angle -110.87^\circ \text{ A rms}$$

$$I_{CA} = 6.61 \angle 129.13^\circ \text{ A rms}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D11.2 En un sistema trifásico balanceado la carga consiste en una Y balanceada en paralelo con una delta balanceada. La impedancia por fase para la Y es $8 + j4 \Omega$ y para la delta es $18 + j6 \Omega$. La fuente es una Y

balanceada con una secuencia de fase *abc* y $V_{an} = 120 \angle 60^\circ \text{ V rms}$. Si la impedancia de línea por fase es $1 + j1 \Omega$, determine la magnitud de las corrientes de fase en cada carga.

Resp.: $I_\Delta = 1.68 \text{ A rms}$, $I_Y = 2.06 \text{ A rms}$.

11.4 Relaciones de potencia

Si la carga está conectada en una Y o en una delta, la potencia real y reactiva por fase es

$$\begin{aligned} P_p &= V_p I_p \cos \theta \\ Q_p &= V_p I_p \sin \theta \end{aligned} \tag{11.25}$$

donde θ es el ángulo entre el voltaje de fase y la corriente de línea, o

$$\begin{aligned} P_p &= \frac{V_L I_L}{\sqrt{3}} \cos \theta \\ Q_p &= \frac{V_L I_L}{\sqrt{3}} \sin \theta \end{aligned} \quad (11.26)$$

La potencia reactiva y real total para las tres fases es entonces

$$\begin{aligned} P_T &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \\ Q_T &= \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta \end{aligned} \quad (11.27)$$

y, por tanto, la magnitud de la potencia compleja (potencia aparente) es

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}_T| &= \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} \\ &= \sqrt{3} V_L I_L \end{aligned} \quad (11.28)$$

y

$$\angle \mathbf{S}_T = \theta$$

E J E M P L O 11.7

Un sistema trifásico delta-Y balanceado tiene un voltaje de línea de 208 V rms. La potencia real total absorbida por la carga es 1 200 W. Si el ángulo del factor de potencia de la carga es 20° retrasado, deseamos determinar la magnitud de la corriente de línea y el valor de la impedancia de carga por fase en la delta.

SOLUCIÓN La corriente de línea puede obtenerse de la ecuación (11.26). Como la potencia real por fase es 400 W,

$$\begin{aligned} \frac{400}{208} &= \frac{(208 I_L)}{\sqrt{3}} \cos 20^\circ \\ I_L &= 3.54 \text{ A rms} \end{aligned}$$

La magnitud de la corriente en cada lado de la carga conectada en delta es

$$\begin{aligned} I_\Delta &= \frac{I_L}{\sqrt{3}} \\ &= 2.05 \text{ A rms} \end{aligned}$$

Por tanto, la magnitud de la impedancia de la delta en cada fase de la carga es

$$\begin{aligned} |\mathbf{Z}_\Delta| &= \frac{V_L}{I_\Delta} \\ &= \frac{208}{2.05} \\ &= 101.46 \Omega \end{aligned}$$

Como el ángulo del factor de potencia es 20° retrasado, la impedancia de la carga es

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_\Delta &= 101.46 \angle 20^\circ \\ &= 95.34 + j34.70 \Omega\end{aligned}$$

EJEMPLO 11.8

Para el circuito del ejemplo 11.2 deseamos determinar la potencia real y reactiva por fase en la carga y la potencia real total, potencia reactiva y la potencia compleja en la fuente.

SOLUCIÓN De los datos del ejemplo 11.2 la potencia compleja por fase en la carga es

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\text{carga}} &= \mathbf{VI}^* \\ &= (113.15 \angle -1.08^\circ) (5.06 \angle 27.65^\circ) \\ &= 572.54 \angle 26.57^\circ \\ &= 512.07 + j256.09 \text{ VA}\end{aligned}$$

Por tanto, la potencia real y reactiva por fase en la carga son 512.07 W y 256.09 var, respectivamente.

La potencia compleja por fase en la fuente es

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\text{fuente}} &= \mathbf{VI}^* \\ &= (120 \angle 0^\circ) (5.06 \angle 27.65^\circ) \\ &= 607.2 \angle 27.65^\circ \\ &= 537.86 + j281.78 \text{ VA}\end{aligned}$$

Por tanto, la potencia real total, potencia reactiva y la potencia aparente en la fuente son 1 613.7 W, 845.4 var y 1 821.6 VA, respectivamente.

EJEMPLO 11.9

Una fuente trifásica balanceada sirve a tres cargas como sigue:

Carga 1: 24 kW con factor de potencia 0.6 retrasado

Carga 2: 10 kW con factor de potencia unitario

Carga 3: 12 kVA con factor de potencia 0.8 adelantado

Si el voltaje de línea en las cargas es 208 V rms a 60 Hz, deseamos determinar la corriente de línea y el factor de potencia combinado de las cargas.

SOLUCIÓN De los datos encontramos que

$$\cos \theta = \frac{P}{S}$$

$$\mathbf{S}_1 = 24\ 000 + j32\ 000 \quad \text{---} \quad 40^\circ 13^\circ \quad 132.13$$

$$\mathbf{S}_2 = 10\ 000 + j0 \quad \text{---} \quad 0^\circ \quad 10$$

$$\mathbf{S}_3 = 12\ 000 / -36.9^\circ = 9\ 600 - j7\ 200$$

$$11.13 + j3.63$$

Por tanto,

$$\mathbf{S}_{\text{carga}} = 43\ 600 + j24\ 800$$

$$= 50\ 160 \angle 29.63^\circ \text{ VA}$$

$$I_L = \frac{|\mathbf{S}_{\text{carga}}|}{\sqrt{3} V_L}$$

$$= \frac{50\ 160}{208 \sqrt{3}}$$

$$I_L = 139.23 \text{ A rms}$$

y el factor de potencia combinado es

$$\text{fp}_{\text{carga}} = \cos 29.63^\circ$$

$$= 0.869 \text{ retrasado}$$

E J E M P L O 11.10

Dado el sistema trifásico del ejemplo 11.9, determinemos el voltaje de línea y el factor de potencia en la fuente si la impedancia de línea es $\mathbf{Z}_{\text{línea}} = 0.05 + j0.02 \Omega$.

S o l u c i ó n La potencia compleja absorbida por las impedancias de línea es

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{línea}} &= 3(R_{\text{línea}} I_L^2 + jX_{\text{línea}} I_L^2) \\ &= 2\ 908 + j1\ 163 \text{ VA} \end{aligned}$$

La potencia compleja entregada por la fuente es entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_S &= \mathbf{S}_{\text{carga}} + \mathbf{S}_{\text{línea}} \\ &= 43\ 600 + j24\ 800 + 2\ 908 + j1\ 163 \\ &= 53\ 264 \angle 29.17^\circ \text{ VA} \end{aligned}$$

El voltaje de línea en la fuente es entonces

$$\begin{aligned} V_{L_S} &= \frac{|\mathbf{S}_S|}{\sqrt{3} I_L} \\ &= 220.87 \text{ V rms} \end{aligned}$$

y el factor de potencia en la fuente es

$$\begin{aligned} \text{fp}_S &= \cos 29.17^\circ \\ &= 0.873 \text{ retrasado} \end{aligned}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D11.8 Un sistema Y-Y trifásico balanceado tiene un voltaje de línea de 208 V rms. La potencia real total absorbida por la carga es 12 kW con fp de 0.8 retrasado. Determine la impedancia por fase de la carga.

Resp.: $Z = 2.88 / 36.87^\circ \Omega$.

D11.9 Para el sistema Y-Y balanceado descrito en el ejercicio de entrenamiento D11.3, determine la potencia real y reactiva y la potencia compleja en la fuente y en la carga.

Resp.: $S_{\text{carga}} = 1186.27 + j444.94 \text{ VA}$, $S_{\text{fuente}} = 1335.65 + j593.55 \text{ VA}$.

D11.10 Una línea de 480 V rms alimenta dos cargas trifásicas balanceadas. Si las dos cargas se estiman como sigue,

Carga 1: 5 kVA con fp de 0.8 retrasado

Carga 2: 10 kVA con fp de 0.9 retrasado

determine la magnitud de la corriente de línea de la fuente de 480 V rms.

Resp.: $I_L = 17.97 \text{ A rms}$.

11.5 Medición trifásica

Medición de potencia

La medición de potencia trifásica parecería ser una tarea simple, ya que a fin de llevar a cabo la medición únicamente haría falta aplicar la medición de una sola fase para cada fase. Para un sistema balanceado, esta tarea llegaría a ser incluso más simple, ya que sólo necesitamos medir la potencia en una fase y multiplicar la lectura del watímetro por 3. Sin embargo, como señalamos al principio, la terminal neutra en la carga conectada en Y puede ser inaccesible y, por supuesto, en una carga conectada en delta no hay punto neutro. Nuestra técnica de medición debe, por tanto, tratar sólo con líneas externas a la carga.

El método que describiremos se aplica a las conexiones en Y y en delta; sin embargo, presentaremos el método de medición usando una carga conectada en Y balanceada. Considere el circuito que se muestra en la figura 11.15. La bobina de corriente de cada watímetro se conecta en serie con la corriente de línea, y la bobina de voltaje de cada watímetro se conecta entre una línea y lo que llamaremos el neutro virtual N^* , que no es más que un punto arbitrario.

La potencia promedio medida por el watímetro A es

$$P_A = \frac{1}{T} \int_0^T v_{AN^*} i_A dt \quad (11.29)$$

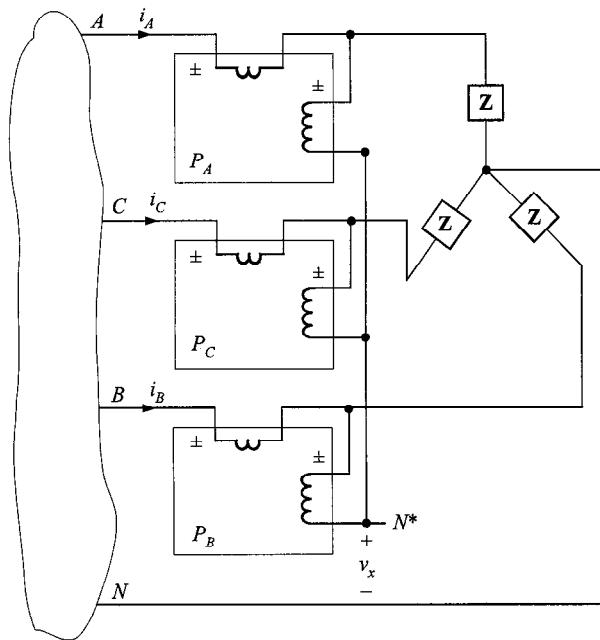


FIGURA 11.15 Conexiones del watímetro para medición de potencia.

donde T es el periodo de todos los voltajes y corrientes en el sistema. De manera similar,

$$P_B = \frac{1}{T} \int_0^T v_{BN^*} i_B \ dt \quad (11.30)$$

$$P_C = \frac{1}{T} \int_0^T v_{CN^*} i_C \, dt \quad (11.31)$$

La suma de todas las mediciones del watímetro es

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AN*} i_A + v_{BN*} i_B + v_{CN*} i_C) dt \quad (11.32)$$

Como se muestra en la figura 11.15, los voltajes v_{AN^*} , v_{BN^*} y v_{CN^*} pueden expresarse como

$$v_{AN^*} = v_{AN} - v_x$$

$$v_{BN^*} = v_{BN} - v_x \quad (11.33)$$

$$v_{CN^*} = v_{CN} - v_x$$

Sustituyendo la ecuación (11.33) en la ecuación (11.32) se obtiene

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AN} i_A + v_{BN} i_B + v_{CN} i_C) dt - \frac{1}{T} \int_0^T v_X (i_A + i_B + i_C) dt \quad (11.34)$$

Sin embargo,

$$i_A + i_B + i_C = 0 \quad (11.35)$$

y de aquí la expresión para la potencia se reduce a

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v_{AN} i_A dt + \frac{1}{T} \int_0^T v_{BN} i_B dt + \frac{1}{T} \int_0^T v_{CN} i_C dt \quad (11.36)$$

que reconocemos que es la potencia total absorbida por la carga en Y trifásica. Por consiguiente, usando los tres watímetros que se muestran en la figura 11.15, podemos medir la potencia absorbida por una carga trifásica, y, además, este método se aplica si el sistema es balanceado o desbalanceado, y si la carga está conectada en Y o en delta.

Si conectamos el neutro virtual a la línea C, la bobina de voltaje en el watímetro C tendrá cero volts a través de ella; el watímetro leerá cero watts, y así puede quitarse. De aquí, los dos watímetros A y B medirán entonces toda la potencia en la carga trifásica. Esta configuración se muestra en la figura 11.16 y se conoce como el *método de dos watímetros* para medición de potencia. El método de dos watímetros siempre puede usarse cuando la carga está balanceada, pero en el caso desbalanceado, es válida sólo para una carga trifilar, es decir, una carga con conductor no neutro. En general, si hay n alambres de la fuente a la carga, se requieren $n - 1$ watímetros. Como se muestra en la figura 11.16, la potencia total medida por el método de dos watímetros es

$$\begin{aligned} P_T = P_A + P_B &= |\mathbf{V}_{AC}| |\mathbf{I}_{aA}| \cos(\angle \mathbf{V}_{AC} - \angle \mathbf{I}_{aA}) \\ &\quad + |\mathbf{V}_{BC}| |\mathbf{I}_{bB}| \cos(\angle \mathbf{V}_{BC} - \angle \mathbf{I}_{bB}) \end{aligned} \quad (11.37)$$

donde, por ejemplo, $\angle \mathbf{V}_{AC}$ representa el ángulo de fase del voltaje \mathbf{V}_{AC} .

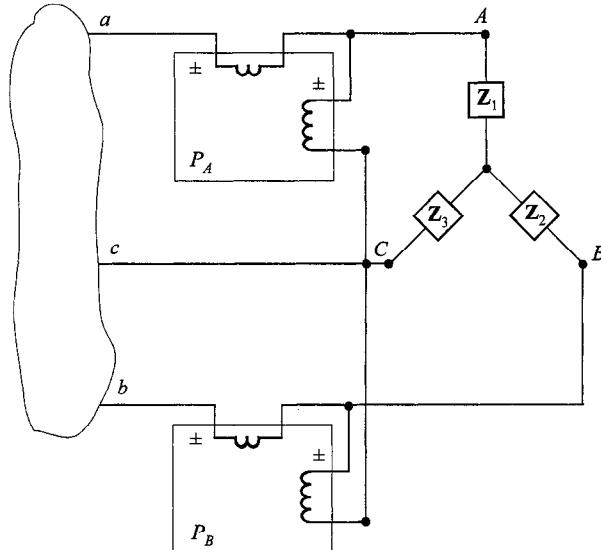


FIGURA 11.16 Método de los dos watímetros para la medición de potencia.

E J E M P L O 11.11

Un sistema delta-Y balanceado tiene una fuente con secuencia de fase *abc* con $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 0^\circ$ V rms. La carga balanceada tiene una impedancia de fase de $10 + j5 \Omega$. Deseamos encontrar la potencia absorbida por la carga usando el método de dos watímetros.

S o l u c i ó n Si $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 0^\circ$ V rms, entonces

$$\mathbf{V}_{AB} = 208 \angle 30^\circ \text{ V rms}$$

$$\mathbf{V}_{BC} = 208 \angle -90^\circ \text{ V rms}$$

$$\mathbf{V}_{CA} = 208 \angle -210^\circ \text{ V rms}$$

y de aquí $\mathbf{V}_{AC} = 208 \angle -30^\circ$ V rms. Como la impedancia de fase es $10 + j5 = 11.18 \angle 26.57^\circ \Omega$, la magnitud de la corriente de la delta es

$$I_\Delta = \frac{208}{11.18} = 18.60 \text{ A rms}$$

La potencia promedio por fase es, por tanto,

$$\begin{aligned} P_p &= (18.60)^2(10) \\ &= 3461 \text{ W} \end{aligned}$$

y de aquí la potencia total es

$$P_T = 10383 \text{ W}$$

Usando el método de dos watímetros, notamos que

$$\mathbf{I}_{aA} = 18.60 \sqrt{3} \angle -26.57^\circ \text{ A rms}$$

$$\mathbf{I}_{bB} = 18.60 \sqrt{3} \angle -120 - 26.57^\circ \text{ A rms}$$

Por tanto, usando la ecuación (11.37), tenemos

$$\begin{aligned} P_T &= (208)(32.22)\cos(-30^\circ + 26.57^\circ) \\ &\quad + (208)(32.22)\cos(-90^\circ + 120^\circ + 26.57^\circ) \\ &= 10383 \text{ W} \end{aligned}$$

E J E R C I C I O D E E N T R E N A M I E N T O

D11.11 Dados los datos del ejercicio de entrenamiento D11.6, si el método de dos watímetros se usa para medir potencia, encuentre la lectura de cada watímetro.

Resp.: $P_A = 5185 \text{ W}$, $P_B = 2303 \text{ W}$.

Medición del factor potencia

El método de dos watímetros también puede usarse para calcular el ángulo del factor de potencia si la carga está balanceada. Para ilustrar cómo puede llevarse a cabo esto, considere la carga conectada en Y que se muestra en la figura 11.6, donde $\mathbf{Z} = Z_Y \angle \theta^\circ$. Si la fuente es una Y balanceada con secuencia *abc* y con $\underline{\mathbf{V}}_{an} = 0^\circ$, entonces como se muestra en la ecuación (11.37),

$$P_A = |\mathbf{V}_{AC}| |\mathbf{I}_{aA}| \cos(\underline{\mathbf{V}}_{AC} - \underline{\mathbf{I}}_{aA})$$

$$|\mathbf{V}_{AC}| = V_L \text{ y } \underline{\mathbf{V}}_{AC} = \underline{\mathbf{V}}_{CA} + 180^\circ = -30^\circ$$

Similarmente,

$$|\mathbf{I}_{aA}| = I_L \text{ e } \underline{\mathbf{I}}_{aA} = -\theta$$

Por tanto,

$$P_A = V_L I_L \cos(-30^\circ + \theta)$$

De manera similar podemos mostrar que

$$P_B = V_L I_L \cos(30^\circ + \theta)$$

Entonces la razón de las dos lecturas del watímetro es

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\cos(\theta - 30^\circ)}{\cos(\theta + 30^\circ)}$$

Si empleamos ahora las identidades trigonométricas de la ecuación (9.11) y recordamos que $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ y $\sin 30^\circ = 1/2$, es sencillo mostrar que la ecuación precedente puede reducirse a

$$\tan \theta = \frac{(P_A - P_B) \sqrt{3}}{P_A + P_B}$$

y como $P_T = P_A + P_B$,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{(P_A - P_B) \sqrt{3}}{P_T} \quad (11.38)$$

Las ecuaciones precedentes indican que si $P_A = P_B$, la carga es resistiva; si $P_A > P_B$, la carga es inductiva; y si $P_A < P_B$, la carga es capacitiva. Finalmente, esta técnica es válida si la carga está conectada en Y o en delta.

EJEMPLO 11.12

En un sistema Y-delta balanceado, se conectan dos watímetros para medir la potencia total. Deseamos determinar el factor de potencia de la carga si las lecturas del watímetro son $P_A = 1200 \text{ W}$ y $P_B = 480 \text{ W}$.

SOLUCIÓN Usando la ecuación (11.38), tenemos

$$\theta = \tan^{-1} \frac{(1200 - 480) \sqrt{3}}{1680}$$

$$= 36.59^\circ$$

Por tanto,

$$\cos \theta = \text{fp} = 0.80 \text{ retrasado}$$

EJEMPLO 11.13

Si la fuente del ejemplo 11.12 tiene un voltaje de línea de 208 V rms, deseamos encontrar la impedancia de la carga en delta.

SOLUCIÓN La potencia total $P_T = P_A + P_B = 1680$ W; por tanto, la potencia por fase es $P_p = 1680/3 = 560$ W. De aquí, usando la expresión

$$V_L I_\Delta \cos \theta = P_p$$

$$I_\Delta = \frac{560}{(208)(0.8)}$$

$$= 3.37 \text{ A rms}$$

Por tanto,

$$Z = \frac{208}{3.37} \angle 36.59^\circ = 61.72 \angle 36.59^\circ$$

$$= 49.55 + j36.79 \Omega$$

EJEMPLO 11.14

En un sistema Y-delta balanceado, se usan dos watímetros para medir la potencia total. El watímetro A lee 800 W y el B lee 400 W después de que la corriente de las terminales de la bobina se han invertido. Si el voltaje de línea es 208 V rms, deseamos determinar la potencia promedio total, el factor de potencia y la impedancia de la carga.

SOLUCIÓN De los datos dados $P_A = 800$ y $P_B = -400$; por tanto, la potencia total P_T es

$$P_T = P_A + P_B$$

$$= 400 \text{ W}$$

El factor de potencia se calcula de

$$\theta = \tan^{-1} \frac{[800 - (-400)] \sqrt{3}}{400}$$

$$\theta = 79.11^\circ$$

y por tanto,

$$\cos \theta = \text{fp} = 0.19 \text{ retrasado}$$

La impedancia de la delta se determina de

$$V_L I_\Delta \cos \theta = P_p$$

$$(208)I_\Delta(0.19) = \frac{400}{3}$$

$$I_\Delta = 3.37 \text{ A rms}$$

Por tanto,

$$Z_\Delta = \frac{208}{3.37} \angle 79.11^\circ = 61.72 \angle 79.11^\circ \Omega$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D11.12 Dos watímetros se usan para medir la potencia total en la carga de un sistema Y-Y balanceado. El voltaje de línea es 208 V rms y las lecturas del watímetro son $P_A = 1\,600 \text{ W}$ y $P_B = 840 \text{ W}$. Calcule la impedancia por fase de la carga.

Resp.: $Z = 15.58 \angle 28.35^\circ \Omega$.

D11.13 Se utilizan dos watímetros para medir la potencia total en la carga de un sistema Y-Y balanceado. El voltaje de línea es 208 V rms. El watímetro A lee 1 280 W y el B lee 540 W cuando la corriente en las terminales de la bobina se invierte. Determine el factor de potencia de la carga y la impedancia por fase de la carga.

Resp.: $\text{fp} = 0.23 \text{ retrasado}, Z = 13.43 \angle 76.79^\circ \Omega$.

11.6 Corrección del factor de potencia

En la sección 10.7 ilustramos una técnica simple para elevar el factor de potencia de una carga. El método incluía la selección apropiada de un capacitor y su colocación en paralelo con la carga. En un sistema trifásico balanceado, la corrección del factor de potencia se lleva a cabo exactamente de la misma manera. Es importante notar, sin embargo, que la S_{cap} especificada en la ecuación (10.42) es proporcionada por tres capacitores y, además V_{rms} en la ecuación es el voltaje a través de cada capacitor. El siguiente ejemplo ilustra la técnica.

E J E M P L O 11.15

En el sistema trifásico balanceado que se muestra en la figura 11.17, el voltaje de línea es 34.5 kV rms a 60 Hz. Deseamos encontrar los valores de los capacitores C tales que la carga total tenga un factor de potencia de 0.94 adelantado.

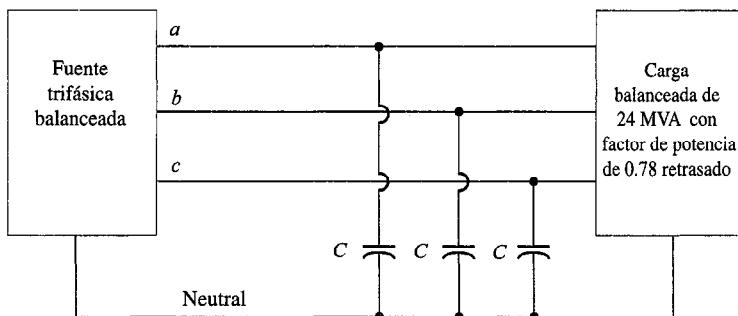


FIGURA 11.17 Red utilizada en el ejemplo 11.15.

SOLUCIÓN Siguiendo el desarrollo señalado en la sección 10.7 para la corrección del factor de potencia de una sola fase, obtenemos

$$\begin{aligned} S_{\text{vieja}} &= 24 / \cos^{-1} 0.78 \text{ MVA} \\ &= 18.72 + j15.02 \text{ MVA} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \theta_{\text{nueva}} &= -\cos^{-1} 0.94 \\ &= -19.95^\circ \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} S_{\text{nueva}} &= 18.72 + j18.72 \tan(-19.95^\circ) \\ &= 18.72 - j6.80 \text{ MVA} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} S_{\text{cap}} &= S_{\text{nueva}} - S_{\text{vieja}} \\ &= -j21.82 \text{ MVA} \end{aligned}$$

Sin embargo,

$$-j\omega C V_{\text{rms}}^2 = -j21.82 \text{ MVA}$$

y como el voltaje de línea es 34.5 kV rms, entonces

$$(377) \left(\frac{34.5k}{\sqrt{3}} \right)^2 C = \frac{21.82}{3}$$

De aquí,

$$C = 48.6 \mu\text{F}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

- D11.14** Encuentre C en el ejemplo 11.15 tal que la carga total tenga un factor de potencia de 0.90 retrasado.

Resp.: $C = 13.26 \mu\text{F}$

Finalmente, el lector recordará que todo nuestro análisis de este capítulo se ha enfocado a sistemas balanceados. Es muy importante, sin embargo, señalar que en el sistema trifásico desbalanceado el problema es mucho más complicado debido al acoplamiento mutuamente inductivo entre las fases en aparatos de potencia.

11.7 Aplicaciones

El primero de los dos siguientes ejemplos ilustra la manera en la que el flujo de potencia se mide cuando se interconectan las instalaciones, contestando la pregunta de quién suministra potencia a quién. El segundo ejemplo demuestra el método real en el que los capacitores son especificados por el fabricante para la corrección del factor de potencia.

EJEMPLO 11.16

Dos sistemas trifásicos balanceados, X y Y , están interconectados con líneas que tienen impedancia $\mathbf{Z}_{\text{línea}} = 1 + j2 \Omega$. Los voltajes de línea son $\mathbf{V}_{ab} = 12 \angle 0^\circ \text{ kV rms}$ y $\mathbf{V}_{AB} = 12 \angle 5^\circ \text{ kV rms}$ como se muestra en la figura 11.18a. Deseamos determinar cuál de los sistemas es la fuente, cuál es la carga, y la potencia promedio suministrada por la fuente y absorbida por la carga.

SOLUCIÓN Cuando dibujamos el circuito por fase para el sistema como se ilustra en la figura 11.18b, el análisis será esencialmente el mismo que el del ejemplo 10.15.

La red de la figura 11.8b indica que

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{aA} &= \frac{\mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_{\text{línea}}} \\ &= \frac{\frac{12\ 000}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ - \frac{12\ 000}{\sqrt{3}} \angle -25^\circ}{\sqrt{5} \angle 63.43^\circ} \\ &= 270.30 \angle -180.93^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

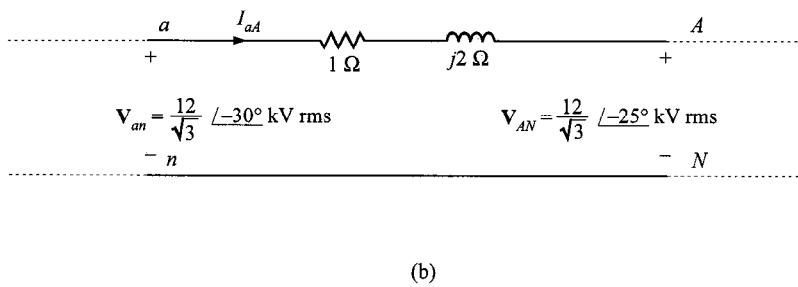
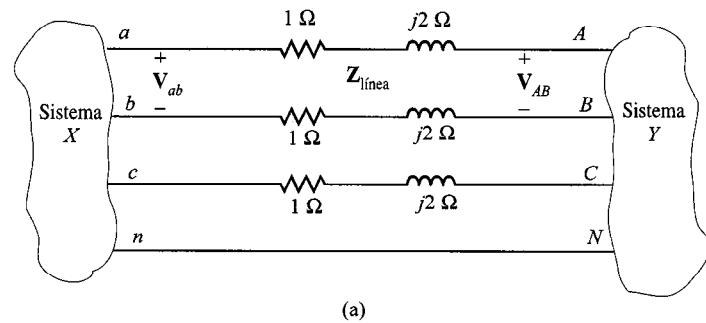


FIGURA 11.18 Circuitos utilizados en el ejemplo 11.16: a) sistema trifásico original; b) circuito por fase.

La potencia promedio total absorbida por el sistema *Y* es

$$\begin{aligned}
 P_Y &= \sqrt{3} |\mathbf{V}_{AB}| |\mathbf{I}_{aA}| \cos(\theta_{\mathbf{V}_{AN}} - \theta_{\mathbf{I}_{aA}}) \\
 &= \sqrt{3} (12000) (270.30) \cos(-25^\circ + 180.93^\circ) \\
 &= -5.130 \text{ MW}
 \end{aligned}$$

Observe que el sistema *Y* no es la carga sino la fuente, y suministra 5.130 MW.

El sistema *X* absorbe la siguiente potencia promedio:

$$P_X = \sqrt{3} |\mathbf{V}_{ab}| |\mathbf{I}_{Aa}| \cos(\theta_{\mathbf{V}_{AN}} - \theta_{\mathbf{I}_{Aa}})$$

donde

$$\mathbf{I}_{Aa} = -\mathbf{I}_{aA} = 270.30 \angle -0.93^\circ \text{ A rms}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 P_X &= \sqrt{3} (12000) (270.30) \cos(-30^\circ + 0.93^\circ) \\
 &= 4.910 \text{ MW}
 \end{aligned}$$

y por ello, el sistema *X* es la carga.

La diferencia en la potencia suministrada por el sistema *Y* y la absorbida por el sistema *X* es, por supuesto, la potencia absorbida por la resistencia de las tres líneas.

El ejemplo anterior ilustra un punto interesante. Advierta que la diferencia de fase en los dos extremos de la línea de potencia determina la dirección del flujo de potencia. Como las numerosas compañías de potencia en Estados Unidos están unidas para formar la red nacional de potencia, la diferencia de fase a lo largo de las líneas de transmisión interconectadas refleja la forma en la que la potencia se transfiere entre las compañías de potencia.

Los capacitores para corrección del factor de potencia, por lo general, son especificados por el fabricante en vars en lugar de farads. Por supuesto, el abastecedor también debe especificar el voltaje al cual está diseñado el capacitor para operar y se supone una frecuencia de 60 Hz. La relación entre la capacitancia y la clasificación en vars es

$$Q_R = \frac{V^2}{|Z_c|}$$

donde Q_R está clasificado en vars, V es la clasificación de voltaje y Z_c es la impedancia del capacitor a 60 Hz. Así, un capacitor de 500 V, 600 vars, tiene una capacitancia de

$$C = \frac{Q_R}{\omega V^2} = \frac{600}{(377)(500)^2}$$

o

$$C = 6.37 \mu F$$

y puede usarse en cualquier aplicación donde el voltaje a través del capacitor no exceda del valor estimado de 500 V.

EJEMPLO 11.17

La tabla 11.1 enlista las clasificaciones del voltaje y potencia para tres capacidores correctores del factor de potencia. Determinemos cuál de ellos, si hay alguno, puede emplearse en el ejemplo 11.15.

T A B L A 11.1

Voltaje clasificado y vars para capacitores de corrección del factor de potencia

Capacitor	Voltaje clasificado (kV)	Q clasificada (Mvars)
1	10.0	4.0
2	50.0	25.0
3	20.0	7.5

SOLUCIÓN De la figura 11.17 vemos que el voltaje a través de los capacitores es el voltaje de línea a neutro, que es

$$V_{an} = \frac{V_{ab}}{\sqrt{3}} = \frac{34500}{\sqrt{3}}$$

o

$$V_{an} = 19.9 \text{ kV}$$

Por consiguiente, sólo aquellos capacitores con voltajes clasificados mayores o iguales a 19.9 kV pueden usarse en esta aplicación, lo cual elimina al capacitor 1. Determinemos ahora la capacitancia de los capacitores 2 y 3. Para el capacitor 2,

$$C_2 = \frac{Q}{\omega V^2} = \frac{25 \times 10^6}{(377)(50000)^2}$$

o

$$C_2 = 26.53 \mu\text{F}$$

que es mucho más pequeña que los 48.6 μF requeridos. La capacitancia del capacitor 3 es

$$C_3 = \frac{Q}{\omega V^2} = \frac{7.5 \times 10^6}{(377)(20000)^2}$$

o

$$C_3 = 49.7 \mu\text{F}$$

que está dentro del 2.5% del valor requerido. Obviamente, el capacitor 3 es la mejor elección.

11.8 Diseño de circuitos

En el siguiente ejemplo examinamos la selección del conductor y del capacitor en un problema práctico de corrección del factor de potencia.

EJEMPLO 11.18

Dos tiendas, como se muestra en la figura 11.19, están localizadas en una intersección concurrida. Las tiendas son alimentadas desde una fuente de 60 Hz trifásica balanceada con un voltaje de línea de 13.8 kV rms. La línea de potencia está construida con un conductor #4ACSR (cable de aluminio reforzado con acero) que está clasificado a 170 A rms.

Una tercera tienda, que se muestra en la figura 11.19, desea colocarse en la intersección. Determinemos: a) si el conductor #4ACSR permitirá la adición de esta tienda, y b) el valor de los capacitores conectados en Y que se requieren para cambiar el factor de potencia total para las tres tiendas a 0.92 retrasado.

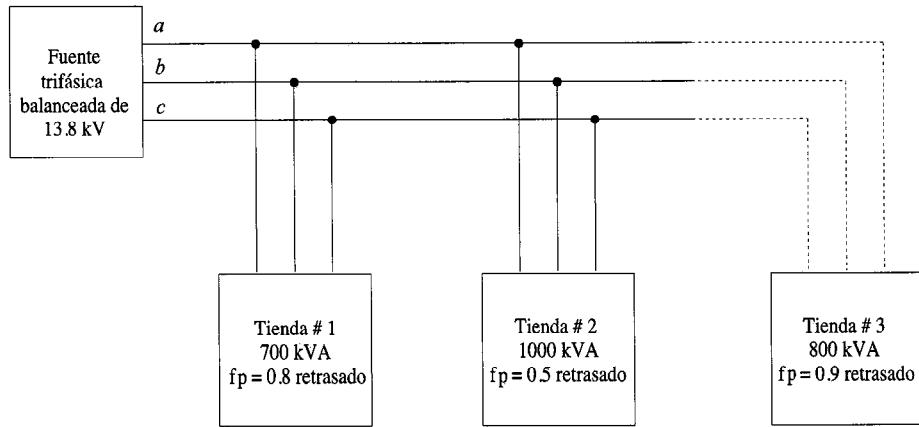


FIGURA 11.19 Circuito utilizado en el ejemplo 11.18.

SOLUCIÓN a) La potencia compleja para cada una de las tres cargas es

$$\mathbf{S}_1 = 700 \angle 36.9^\circ = 560 + j420 \text{ kVA}$$

$$\mathbf{S}_2 = 1000 \angle 60^\circ = 500 + j866 \text{ kVA}$$

$$\mathbf{S}_3 = 800 \angle 25.8^\circ = 720 + j349 \text{ kVA}$$

Por consiguiente, la potencia compleja total es

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_T &= \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 \\ &= 1780 + j1635 \\ &= 2417 \angle 42.57^\circ \text{ kVA} \end{aligned}$$

Como

$$\mathbf{S}_T = \sqrt{3} V_L I_L$$

la corriente de línea es

$$\begin{aligned} I_L &= \frac{(2417)(10^3)}{\sqrt{3}(13.8)(10^3)} \\ &= 101.1 \text{ A rms} \end{aligned}$$

Como este valor está por debajo del valor estimado de 170 A rms, el conductor está apropiadamente calibrado y podemos agregar la tercera tienda con seguridad.

b) El factor de potencia combinado para las tres cargas se encuentra de la expresión

$$\cos\theta = \text{fp} = \frac{1780}{2417} = 0.7365 \text{ retrasado}$$

Agregando capacitores deseamos cambiar este factor de potencia a 0.92 retrasado. Este nuevo factor de potencia corresponde a θ_{nueva} de 23.07° . Por consiguiente, la potencia compleja nueva es

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\text{nueva}} &= 1780 + j1780 \tan(23.07^\circ) \\ &= 1780 + j758.28 \text{ kVA}\end{aligned}$$

Como se ilustró en la figura 10.17, la diferencia entre $\mathbf{S}_{\text{nueva}}$ y \mathbf{S}_T se encuentra en que es suministrada por el capacitor puramente reactivo y, por tanto,

$$\mathbf{S}_{\text{cap}} = jQ_c = \mathbf{S}_{\text{nueva}} - \mathbf{S}_T$$

o

$$\begin{aligned}jQ_c &= j(758.28 - 1635) \\ &= -j876.72 \text{ kVA}\end{aligned}$$

Así

$$-j\omega CV_{\text{rms}}^2 = \frac{-j876.72}{3}$$

y

$$377 \left(\frac{13.8 \times 10^3}{\sqrt{3}} \right)^2 C = \frac{876.72}{3} \times 10^3$$

Por tanto,

$$C = 12.2 \mu\text{F}$$

De aquí, tres capacitores de este valor conectados en Y en la carga dará un factor de potencia total de 0.92 retrasado.

11.9 Resumen

Hemos mostrado que una importante ventaja del sistema trifásico balanceado es que proporciona una entrega de potencia muy suave. Debido a la condición de balance es posible analizar un circuito en una base por fase, proporcionando, por tanto, un atajo significante en el cálculo de una solución. Las relaciones entre los diversos voltajes y corrientes para los sistemas balanceados en las configuraciones Y y delta se encontró que eran muy simples. La capacidad de llevar a cabo transformaciones Y-delta y delta-Y se mostró que es un ingrediente importante en nuestro método de cálculo.

Se presentaron las técnicas para la medición de potencia en un entorno trifásico. Se derivó el método de dos watímetros para la medición de potencia trifásica, y fue presentado el uso de este método para la medición del factor de potencia. Finalmente, se discutió la corrección del factor de potencia para sistemas trifásicos balanceados.

Puntos clave

- Una fuente de voltaje trifásica balanceada tiene tres voltajes senoidales de la misma magnitud y frecuencia, y cada voltaje está 120° fuera de fase de los otros.
- Si las corrientes de carga generadas al conectar una carga a una fuente de voltaje trifásica balanceada también están balanceadas, la carga está conectada en una configuración Y balanceada o una delta balanceada.
- Una fuente de voltaje balanceada con secuencia de fase positiva es una en la que \mathbf{V}_{bn} retrasa a \mathbf{V}_{an} por 120° y \mathbf{V}_{cn} retrasa a \mathbf{V}_{bn} por 120° .
- No hay corriente en la línea neutra de un sistema Y-Y balanceado.
- Los circuitos de ca trifásicos balanceados pueden analizarse en una base por fase.
- El método de dos watímetros es una técnica para medir potencia real en un sistema trifilar trifásico utilizando sólo dos watímetros.
- El ángulo del factor de potencia de una carga en un sistema trifásico balanceado puede calcularse usando dos watímetros.
- La corrección del factor de potencia en un entorno trifásico balanceado se lleva a cabo de la misma manera que en el caso de una sola fase.
- La terminología trifásica se resume en la tabla 11.2.

T A B L A 11.2

Terminología trifásica

Cantidad	Y	Delta
I_a, I_b, I_c	Corriente de línea (I_L)	
	Corriente de fase (I_0)	
V_{an}, V_{bn}, V_{cn}	Voltaje línea a neutro	
	Voltaje de fase (V_0)	
V_{ab}, V_{bc}, V_{ca}	Línea a línea, Fase a fase, Voltaje de línea (V_L)	
		Voltaje de fase (V_0)
I_{ab}, I_{bc}, I_{ca}		Corriente de fase (I_0)

Problemas

11.1. Bosqueje una representación fasorial de una sistema trifásico balanceado que contenga voltajes de fase y voltajes de línea si $\underline{V}_{an} = 100 \angle 45^\circ$ V rms. Marque todas las magnitudes y suponga una secuencia de fase abc.

11.2. Una fuente de voltaje Y balanceada trifásica con secuencia positiva tiene una fase de $\underline{V}_{an} = 100 \angle 20^\circ$ V. Determine los voltajes de línea de la fuente.

11.3. Una fuente conectada en Y trifásica balanceada con secuencia positiva con un voltaje de fase de 100 V suministra potencia a una carga conectada en Y balanceada. La impedancia de la carga por fase es $40 + j10 \Omega$. Determine las corrientes de línea en el circuito si $\underline{V}_{an} = 0^\circ$.

11.4. Una fuente conectada en Y trifásica balanceada con secuencia positiva suministra potencia a una carga conectada en Y balanceada. La magnitud de los voltajes de línea es 150 V. Si la impedancia de carga por fase es $36 + j12 \Omega$, determine las corrientes de línea si $\underline{V}_{an} = 0^\circ$.

11.5. Una fuente conectada en Y trifásica balanceada con secuencia *abc* suministra potencia a una carga conectada en Y balanceada. La impedancia de línea por fase es $1 + j0 \Omega$, y la impedancia de carga por fase es $20 + j20 \Omega$. Si el voltaje de línea de la fuente $100 \angle 0^\circ$ V rms, encuentre las corrientes de línea.

11.6. En un sistema Y-Y trifásico balanceado, la fuente es un conjunto de voltajes de secuencia *abc* con $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 60^\circ$ V rms. La impedancia por fase de la carga es $12 + j16 \Omega$. Si la impedancia de línea por fase es $0.8 + j1.4 \Omega$, encuentre las corrientes de línea y los voltajes de carga.

11.7. Un conjunto de voltajes de secuencia *abc* alimenta a un sistema Y-Y trifásico balanceado. Las impedancias de línea y carga son $0.6 + j1 \Omega$ y $18 + j14 \Omega$, respectivamente. Si el voltaje de carga en la fase *a* es $\mathbf{V}_{AN} = 114.47 \angle 18.99^\circ$ V rms, determine los voltajes en la entrada de línea.

11.8. En un sistema Y-Y trifásico balanceado, la fuente es un conjunto de voltajes de secuencia *abc*. El voltaje de carga en la fase *a* es $\mathbf{V}_{AN} = 108.58 \angle 79.81^\circ$ V rms, $Z_{\text{línea}} = 1 + j1.4 \Omega$, y $Z_{\text{carga}} = 10 + j13 \Omega$. Determine la secuencia de voltajes de entrada.

11.9. Una secuencia *abc* de voltajes balanceada alimenta a un sistema Y-Y trifásico balanceado. Las impedancias de línea y de carga son $0.6 + j0.9 \Omega$ y $8 + j12 \Omega$, respectivamente. El voltaje de carga en la fase *a* es $\mathbf{V}_{AN} = 116.63 \angle 10^\circ$ V rms. Encuentre el voltaje de línea \mathbf{V}_{ab} .

11.10. En un sistema Y-Y trifásico balanceado, la fuente es un conjunto de voltajes de secuencia *abc*. $Z_{\text{línea}} = 1 + j1.8 \Omega$, $Z_{\text{carga}} = 14 + j12 \Omega$, y el voltaje de carga en la fase *a* es $\mathbf{V}_{AN} = 398.1 \angle 17.99^\circ$ V rms. Encuentre el voltaje de línea \mathbf{V}_{ab} .

11.11. Una fuente trifásica balanceada con secuencia de fase *abc* alimenta a una carga balanceada. El sistema está conectado en Y-Y y $\angle \mathbf{V}_{an} = 0^\circ$. La impedancia de línea es $0.5 + j0.2 \Omega$, la impedancia de carga es $16 + j10 \Omega$, y la potencia total absorbida por la carga es 1836.54 W. Determine la magnitud del voltaje de la fuente \mathbf{V}_{an} .

11.12. En un sistema Y-Y trifásico balanceado, la potencia total perdida en las líneas es 272.57 W. $\mathbf{V}_{AN} = 105.28 \angle 31.65^\circ$ V rms y el factor de potencia de la carga es 0.77 retrasado. Si la impedancia de línea es $2 + j1 \Omega$, determine la impedancia de carga.

11.13. En un sistema Y-Y trifásico balanceado la impedancia de carga es $8 + j4 \Omega$. La fuente tiene una secuencia de fase *abc* y $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 0^\circ$ V rms. Si el voltaje de carga es $\mathbf{V}_{AN} = 111.62 \angle -1.33^\circ$ V rms, determine la impedancia de línea.

11.14. En un sistema Y-Y trifásico balanceado la impedancia de carga es $20 + j12 \Omega$. La fuente tiene una secuencia de fase *abc* y $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 0^\circ$ V rms. Si el voltaje de carga es $\mathbf{V}_{AN} =$

111.49 $\angle -0.2^\circ$ V rms, determine la magnitud de la corriente de línea si la carga súbitamente se pone en corto circuito.

11.15. En un sistema Y-Y trifásico balanceado, la fuente es un conjunto de voltajes con secuencia de fase *abc* y $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 50^\circ$ V rms. El voltaje de carga en la fase *a* es $110.65 \angle 29.03^\circ$ V rms y la impedancia de carga es $16 + j20 \Omega$. Encuentre la impedancia de línea.

11.16. En un sistema Y-Y trifásico balanceado, la fuente es un conjunto de voltajes con secuencia de fase *abc* y $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 40^\circ$ V rms. Si se sabe que la corriente de línea en la fase *a* y la impedancia de línea son $7.10 \angle -10.28^\circ$ A rms y $0.8 + j1 \Omega$, respectivamente, encuentre la impedancia de carga.

11.17. Un conjunto de voltajes con secuencia de fase *abc* alimenta a un sistema Y-Y trifásico balanceado. Si $\mathbf{V}_{an} = 440 \angle 30^\circ$ V rms, $\mathbf{V}_{AN} = 413.28 \angle 29.78^\circ$ V rms, y $Z_{\text{línea}} = 1.2 + j1.5 \Omega$, encuentre la impedancia de carga.

11.18. En un sistema trifásico balanceado, una fuente conectada en delta suministra potencia a una carga conectada en Y. Si la impedancia de línea es $0.2 + j0.4 \Omega$, la impedancia de carga $6 + j4 \Omega$, y el voltaje de fase de la fuente $\mathbf{V}_{ab} = 208 \angle 40^\circ$ V rms, encuentre la magnitud del voltaje de línea en la carga.

11.19. Dada la red de la figura P11.19, calcule las corrientes de línea y la magnitud del voltaje de fase en la carga.

11.20. En un sistema delta-Y trifásico balanceado la fuente tiene una secuencia de fase *abc*. Las impedancias de línea y de carga son $0.6 + j0.3 \Omega$ y $12 + j7 \Omega$, respectivamente. Si la corriente de línea $\mathbf{I}_{aA} = 9.6 \angle -20^\circ$ A rms, determine los voltajes de fase de la fuente.

11.21. Una fuente de 60 Hz conectada en Y trifásica balanceada con secuencia de fase *abc* abastece a una carga conectada en delta balanceada. La impedancia de fase en la carga consiste en una resistencia de 20Ω conectada en serie con una bobina de 50 mH , y el voltaje de fase en la fuente es $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 20^\circ$ V rms. Si la impedancia de línea es cero, encuentre las corrientes de línea en el sistema.

11.22. Una fuente conectada en Y trifásica balanceada con secuencia de fase *abc* abastece a una carga conectada en delta balanceada. La impedancia por fase en la carga en delta es $12 + j9 \Omega$. El voltaje de línea en la fuente es $\mathbf{V}_{ab} = 120 \sqrt{3} \angle 40^\circ$ V rms. Si la impedancia de línea es cero, encuentre las corrientes de línea en el sistema Y-delta balanceado.

11.23. Una fuente conectada en Y trifásica balanceada con secuencia de fase *abc* suministra potencia a una carga conectada en delta balanceada. La impedancia por fase en la

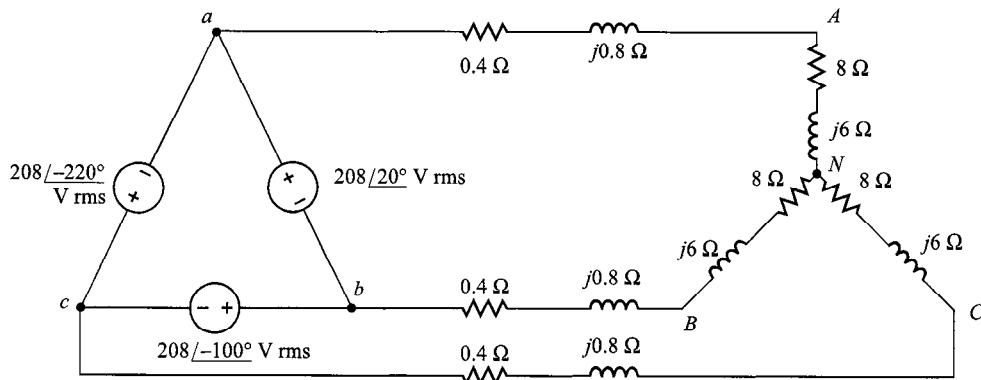


FIGURA P11.19

carga es $14 + j12 \Omega$. Si la fuente de voltaje para la fase a es $V_{an} = 120 \angle 80^\circ$ V rms, y la impedancia de línea es cero, encuentre las corrientes de fase en la fuente conectada en Y.

11.24. Una fuente conectada en Y trifásica balanceada con secuencia de fase abc abastece a una carga conectada en delta balanceada. La impedancia por fase de la carga en delta es $10 + j8 \Omega$. Si se sabe que la impedancia de línea es cero y la corriente de línea en la fase a se sabe que es $I_{aa} = 28.10 \angle -28.66^\circ$ A rms, encuentre el voltaje de carga V_{AB} .

11.25. Una fuente conectada en Y trifásica balanceada con secuencia de fase abc suministra potencia a una carga conectada en delta. La impedancia por fase de la carga en delta es $14 + j11 \Omega$. Si la impedancia de línea es cero y la corriente de línea en la fase a es $I_{aa} = 20.22 \angle 31.84^\circ$ A rms, encuentre los voltajes de la fuente balanceada.

11.26. En un sistema Y-delta trifásico balanceado, la fuente tiene una secuencia de fase abc y $V_{an} = 120 \angle 0^\circ$ V rms. Si la corriente de línea es $I_{aa} = 4.8 \angle 20^\circ$ A rms, encuentre la impedancia de carga por fase en la delta.

11.27. En un sistema Y-delta trifásico balanceado, la fuente tiene una secuencia de fase abc y $V_{an} = 120 \angle 40^\circ$ V rms. Las impedancias de línea y de carga son $0.5 + j0.4 \Omega$ y $24 + j18 \Omega$, respectivamente. Encuentre las corrientes en la delta de la carga.

11.28. Pruebe que la magnitud de las corrientes de línea que alimentan una carga conectada en delta balanceada es igual a las corrientes de la delta multiplicadas por la raíz cuadrada de 3 (figura P11.28).

11.29. En un sistema delta-delta trifásico balanceado, la fuente tiene una secuencia de fase abc . Las impedancias de línea y de carga son $0.3 + j0.2 \Omega$ y $9 + j6 \Omega$, respectivamente. Si la corriente de carga en la delta es $I_{AB} = 15 \angle 40^\circ$ A rms, encuentre los voltajes de fase de la fuente.

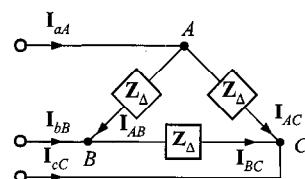


FIGURA P11.28

11.30. En un sistema delta-delta trifásico balanceado, la fuente tiene una secuencia de fase abc . El ángulo de fase para la fuente de voltaje es $\angle V_{ab} = 40^\circ$ y $I_{ba} = 4 \angle 15^\circ$ A rms. Si la potencia total absorbida por la carga es 1400 W, encuentre la impedancia de la carga.

11.31. Una impedancia de carga trifásica consiste en una Y balanceada en paralelo con una delta balanceada. ¿Cuál es la carga Y equivalente y cuál es la carga delta equivalente si la impedancia de fase de la Y y de la delta son $6 + j3 \Omega$ y $15 + j12 \Omega$, respectivamente?

11.32. En un sistema trifásico balanceado, la fuente con secuencia de fase abc está conectada en Y y $V_{an} = 120 \angle 20^\circ$ V rms. La carga consiste en dos Y balanceadas con impedancias de fase de $8 + j6 \Omega$ y $12 + j8 \Omega$. Si la impedancia de línea es cero, encuentre las corrientes de línea y las corrientes de fase en cada carga.

11.33. En un sistema trifásico balanceado, la fuente es una Y balanceada con una secuencia de fase abc y $V_{ab} = 208 \angle 60^\circ$ V rms. La carga consiste en una Y balanceada con impedancia de fase de $8 + j5 \Omega$ en paralelo con una delta balanceada con una impedancia de fase de $21 + j12 \Omega$. Si la impedancia de línea es $1.2 + j1 \Omega$, encuentre las corrientes de fase en la carga en Y balanceada.

11.34. En un sistema trifásico balanceado, la fuente es una Y balanceada con una secuencia de fase abc y $V_{an} = 120 \angle 0^\circ$

V rms. La carga es una Y balanceada con impedancia de fase de $6 + j4 \Omega$ en paralelo con una delta balanceada que tiene una impedancia de fase de $12 + j6 \Omega$. Si la impedancia de línea es $1 + j1 \Omega$, encuentre la magnitud del voltaje de fase de la delta.

11.35. En un sistema trifásico balanceado, la fuente es una Y balanceada con una secuencia de fase *abc* y $V_{ab} = 208 \angle 50^\circ$ V rms. La carga es una Y balanceada en paralelo con una delta balanceada. La impedancia de fase de la Y es $5 + j3 \Omega$ y la impedancia de fase de la delta es $18 + j12 \Omega$. Si la impedancia de línea es $1 + j0.8 \Omega$, encuentre las corrientes de línea y de fase en las cargas.

11.36. En un sistema trifásico balanceado la fuente, que tiene una secuencia de fase *abc*, se conecta en delta y $V_{ab} = 208 \angle 55^\circ$ V rms. Hay dos cargas conectadas en paralelo. La carga 1 está conectada en Y y la impedancia de fase es $4 + j3 \Omega$. La carga 2 está conectada en Y y la impedancia de fase es $8 + j6 \Omega$. Calcule las corrientes de la delta en la fuente si la impedancia de línea que conecta la fuente a las cargas es $0.2 + j0.1 \Omega$.

11.37. En un sistema trifásico balanceado la fuente tiene una secuencia de fase *abc* y se conecta en delta. Hay dos cargas conectadas en Y en paralelo. La impedancia de fase de la carga 1 y la carga 2 es $4 + j4 \Omega$ y $10 + j4 \Omega$, respectivamente. La impedancia de la línea que conecta la fuente a las cargas es $0.3 + j0.2 \Omega$. Si la corriente en la fase *a* de la carga 1 es $I_{AN_1} = 10 \angle 20^\circ$ A rms, encuentre las corrientes de la delta en la fuente.

11.38. En un sistema trifásico balanceado la fuente tiene una secuencia de fase *abc* y está conectada en delta. Hay dos cargas conectadas en paralelo. La línea que conecta la fuente a las cargas tiene una impedancia de $0.2 + j0.1 \Omega$. La carga 1 está conectada en Y y la impedancia de fase es $4 + j2 \Omega$. La carga 2 está conectada en delta y la impedancia de fase es $12 + j9 \Omega$. La corriente I_{AB} en la carga en delta es $\angle 45^\circ$ A rms. Encuentre los voltajes de fase de la fuente.

11.39. En un sistema trifásico balanceado la fuente tiene una secuencia de fase *abc* y está conectada en delta. Hay dos cargas conectadas en paralelo. La carga 1 está conectada en Y y tiene una impedancia de fase de $6 + j2 \Omega$. La carga 2 está conectada en delta y tiene una impedancia de fase de $9 + j3 \Omega$. La impedancia de línea es $0.4 + j0.3 \Omega$. Determine los voltajes de fase de la fuente si la corriente en la fase *a* de la carga 1 es $I_{AN_1} = 12 \angle 30^\circ$ A rms.

11.40. Una fuente trifásica conectada en delta balanceada suministra potencia a una carga que consiste en una delta balanceada en paralelo con una Y balanceada. La impedancia de fase de la delta es $24 + j12 \Omega$, y la impedancia de fase de la Y es $12 + j8 \Omega$. Los voltajes de la fuente con secuencia de fase *abc* son $V_{ab} = 440 \angle 60^\circ$ V rms, $V_{bc} = 440 \angle -60^\circ$ V

rms, y $V_{ca} = 440 \angle -180^\circ$ V rms, y la impedancia de línea por fase es $1 + j0.8 \Omega$. Encuentre las corrientes de línea y la potencia absorbida por la carga conectada en Y.

11.41. Una fuente conectada en Y con secuencia *abc* que tiene un voltaje en la fase *a* de $120 \angle 0^\circ$ V rms se une a una carga conectada en Y que tiene una impedancia de $80 \angle 70^\circ \Omega$. Si la impedancia de línea es $4 \angle 20^\circ \Omega$, determine la potencia compleja total producida por las fuentes de voltaje y la potencia real y reactiva disipadas por la carga.

11.42. La magnitud de la potencia compleja (potencia aparente) suministrada por un sistema Y-Y trifásico balanceado es 3 600 VA. El voltaje de línea es 208 V rms. Si la impedancia de línea es insignificante y el ángulo del factor de potencia de la carga es 25° , determine la impedancia de la carga.

11.43. Un sistema trifásico balanceado tiene dos cargas paralelas. La carga 1 está clasificada a 3 000 VA, fp de 0.7 retrasado, y la carga 2 está clasificada a 2 000 VA, fp de 0.75 adelantado. Si el voltaje de línea es 208 V rms, encuentre la magnitud de la corriente de línea.

11.44. Dos plantas industriales representan cargas trifásicas balanceadas. Las plantas reciben su potencia de una fuente trifásica balanceada con un voltaje de línea de 4.6 kV rms. La planta 1 está clasificada en 300 kVA, fp de 0.8 retrasado y la planta 2 está clasificada a 350 kVA, fp de 0.84 retrasado. Determine la corriente de la línea de potencia.

11.45. Un agrupamiento de cargas es servido por una fuente trifásica balanceada con un voltaje de línea de 4 160 V rms. La carga 1 es 240 kVA con fp de 0.8 retrasado y la carga 2 es de 160 kVA con fp de 0.92 retrasado. Una tercera carga se desconoce excepto que tiene un factor de potencia unitario. Si la corriente de línea se mide y se encuentra que es 62 A rms, encuentre la potencia compleja de la carga desconocida.

11.46. Una fuente trifásica balanceada sirve a dos cargas:

Carga 1: 36 kVA con fp de 0.8 retrasado

Carga 2: 18 kVA con fp de 0.6 retrasado

El voltaje de línea en la carga es 208 V rms a 60 Hz. Encuentre la corriente de línea y el factor de potencia combinado en la carga.

11.47. Una fuente trifásica balanceada sirve a las siguientes cargas:

Carga 1: 48 kVA con fp de 0.9 retrasado

Carga 2: 24 kVA con fp de 0.75 retrasado

El voltaje de línea en la carga es 208 V rms a 60 Hz. Encuentre las corrientes de línea y el factor de potencia combinado en la carga.

11.48. Un pequeño centro comercial comprende tres tiendas que representan tres cargas trifásicas balanceadas. Las líneas

de potencia al centro comercial representan una fuente trifásica con un voltaje de línea de 13.8 kV rms. Las tres cargas son

- Carga 1: 500 kVA con fp de 0.8 retrasado
- Carga 2: 400 kVA con fp de 0.85 retrasado
- Carga 3: 300 kVA con fp de 0.90 retrasado

Encuentre la corriente de la línea de potencia.

11.49. Las siguientes cargas son servidas por una fuente trifásica balanceada:

- Carga 1: 18 kVA con fp de 0.8 retrasado
- Carga 2: 8 kVA con fp de 0.8 adelantado
- Carga 3: 12 kVA con fp de 0.75 retrasado

El voltaje de carga es 208 V rms a 60 Hz. Si la impedancia de línea es insignificante, encuentre el factor de potencia de la fuente.

11.50. Una fuente trifásica balanceada sirve a las siguientes cargas:

- Carga 1: 18 kVA con fp de 0.8 retrasado
- Carga 2: 10 kVA con fp de 0.7 adelantado
- Carga 3: 12 kW con fp unitario
- Carga 4: 16 kVA con fp de 0.6 retrasado

El voltaje de carga es 208 V rms a 60 Hz y la impedancia de la línea es $0.02 + j0.04 \Omega$. Encuentre el voltaje de línea y el factor de potencia en la fuente.

11.51. Una fuente trifásica balanceada suministra potencia a tres cargas. Las cargas son

- Carga 1: 18 kW con fp de 0.8 retrasado
- Carga 2: 10 kVA con fp de 0.6 adelantado
- Carga 3: desconocida

Si el voltaje de línea en la carga es 208 V rms, la corriente de línea en la fuente es 116.39 A rms, y el factor de potencia combinado en la carga es 0.86 retrasado, encuentre la carga desconocida.

11.52. Una fuente trifásica balanceada suministra potencia a tres cargas. Las cargas son

- Carga 1: 20 kVA con fp de 0.6 retrasado
- Carga 2: 12 kW con fp de 0.75 retrasado
- Carga 3: desconocida

Si el voltaje de línea en la carga es 208 V rms, la corriente de línea en la fuente es 98.60 A rms, y el factor de potencia combinado en la carga es 0.88 retrasado, encuentre la carga desconocida.

11.53. La fuente de la red de la figura P11.53 tiene una secuencia de fase *abc* y $\mathbf{V}_{ab} = 208 \angle 60^\circ$ V rms. Determine las dos lecturas del vatímetro.

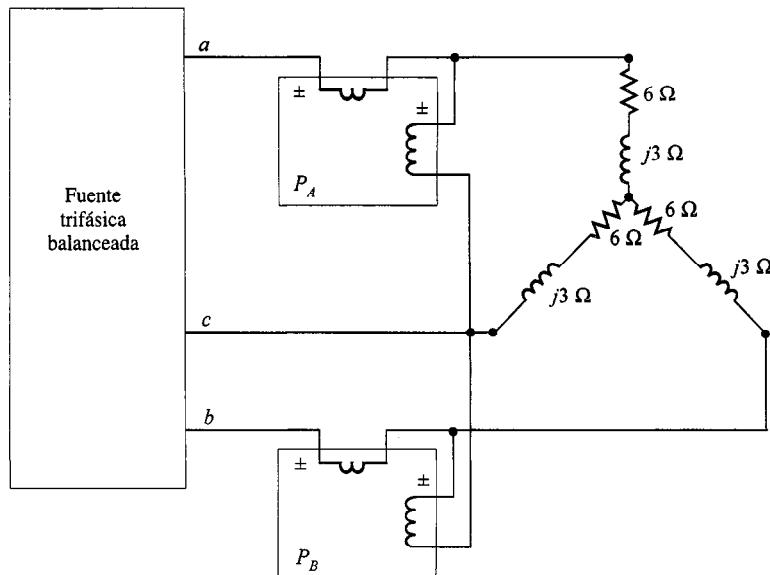


FIGURA P11.53

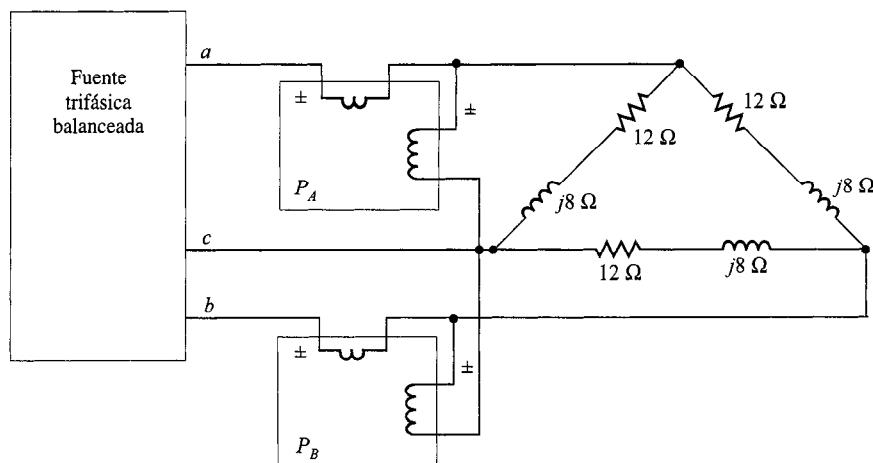


FIGURA P11.54

11.54. La fuente en la red de la figura P11.54 tiene una secuencia de fase abc y $V_{ab} = 208 \angle 10^\circ$ V rms. Determine las lecturas de los dos watímetros.

11.55. Un sistema trifásico Y-Y balanceado con $V_{an} = 90 \angle 30^\circ$ V rms. La carga balanceada tiene una impedancia por fase de $24 + j16 \Omega$. Calcule las lecturas de los watímetros si se usa el método de dos watímetros para medir la potencia trifásica total.

11.56. En un sistema trifásico balanceado la fuente tiene una secuencia de fase abc , se conecta en Y, y $V_{abc} = 120 \angle 45^\circ$ V rms. Hay dos cargas paralelas conectadas en Y. La carga 1 tiene una impedancia de fase de $4 + j3 \Omega$ y la carga 2 tiene una impedancia de fase de $12 + j8 \Omega$. Encuentre la potencia total absorbida por las cargas usando el método de dos watímetros.

11.57. Un sistema trifásico balanceado tiene una fuente conectada en Y con secuencia de fase abc y $V_{an} = 120 \angle 60^\circ$ V rms. Se conectan dos cargas en paralelo. La carga 1 se conecta

en Y, y la impedancia de fase es $6 + j2 \Omega$. La carga 2 está conectada en delta, y la impedancia de fase es $8 + j3 \Omega$. Encuentre la potencia total absorbida por las cargas usando el método de los dos watímetros.

11.58. Se emplean dos watímetros para medir la potencia total en un sistema Y-delta trifásico balanceado. El voltaje de fase de la fuente es 120 V rms. Sin invertir las terminales del medidor, las lecturas del medidor son $P_A = 1\,600$ W y $P_B = 800$ W. Determine la impedancia por fase de la delta.

11.59. En un sistema trifásico Y-delta balanceado se usan dos watímetros para medir la potencia total. El voltaje de línea es 208 V rms. Si el watímetro A lee 1 200 W y el B lee 400 W cuando las terminales de corriente se invierten, determine el factor de potencia y la impedancia de carga por fase.

11.60. Encuentre C en la red de la figura P11.60 tal que la carga total tenga un factor de potencia de 0.92 adelantado.

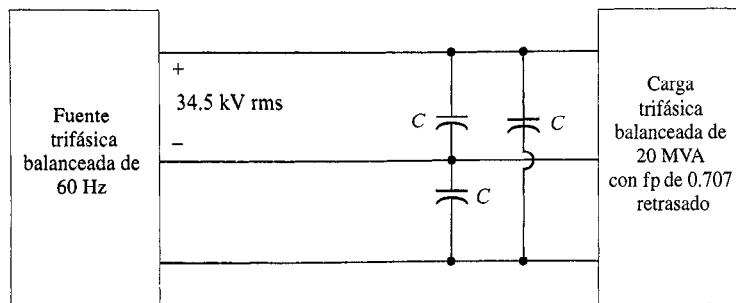


FIGURA P11.60

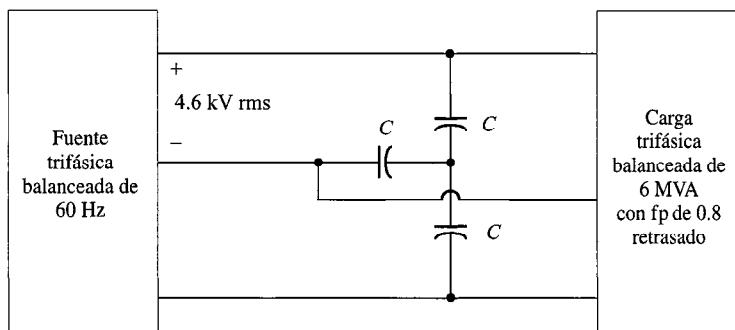


FIGURA P11.62

11.61. Encuentre el valor de C en el problema 11.60 tal que la carga total tenga un factor de potencia de 0.92 retrasado.

11.62. Encuentre C en la red de la figura P11.62 tal que la carga total tenga un factor de potencia de 0.9 retrasado.

11.63. Encuentre C en la red de la figura P11.62 tal que la carga total tenga un factor de potencia de 0.9 adelantado.

11.64. Una práctica estándar de las instalaciones de las compañías es dividir a sus consumidores en usuarios de una fase y usuarios trifásicos. La compañía debe proporcionar a los usuarios trifásicos, generalmente industrias, las tres fases. Sin embargo, los usuarios de una fase, residenciales y

de luz comercial, se conectan a sólo una fase. Para reducir el costo de cables, todos los usuarios de una fase en una vecindad se conectan juntos. Esto significa que incluso si los usuarios trifásicos presentan cargas perfectamente balanceadas a la red de potencia, las cargas de una fase nunca están balanceadas, resultando en un flujo de corriente en la conexión neutra.

Considere la red de 60 Hz y secuencia abc de la figura P11.64. Con un voltaje de línea de $416 \angle 30^\circ$ V rms, la fase a suministra a los usuarios de sólo una fase en la calle A; la fase b abastece a la calle B y la fase c suministra a la calle C. Además, la carga trifásica industrial que está conectada en delta, está balanceada. Encuentre la corriente neutra.

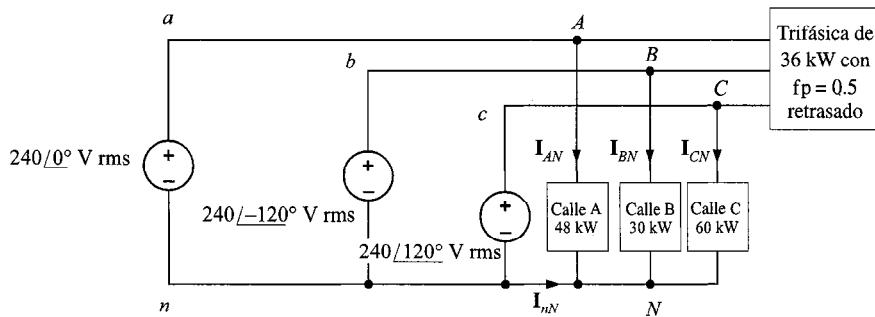


FIGURA P11.64 Subcircuito de potencia instalado.

- 12.1** Inductancia mutua
- 12.2** Análisis de energía
- 12.3** Análisis con PSPICE de circuitos acoplados magnéticamente
- 12.4** El transformador ideal
- 12.5** Análisis con PSPICE de circuitos de transformadores ideales
- 12.6** Autotransformadores ideales
- 12.7** Transformadores trifásicos
- 12.8** Consideraciones de seguridad
- 12.9** Aplicaciones
- 12.10** Diseño de circuitos
- 12.11** Resumen
Puntos clave
Problemas

REDES ACOPLADAS MAGNÉTICAMENTE

Las líneas de potencia de alto voltaje entrecruzan al país para suministrarnos potencia eléctrica en cualquier faceta de nuestras vidas. Muchas de las instalaciones eléctricas están para formar una red de potencia enlazada anteriormente eléctrica. Como indicamos, para suministrar potencia de manera eficiente, ésta se transmite a alto voltaje. Las líneas de 500 kV son instalaciones típicas de transmisión. Sin embargo, la potencia que se suministra a nuestras casas, por ejemplo, es típicamente 208/120 V rms. Así, es natural que preguntemos cómo se baja a este nivel el alto voltaje que suministran las líneas de transmisión. Por ello, para contestar estas preguntas hablaremos ahora del transformador, que es el componente principal en esta aplicación.

Los avances recientes en circuitos integrados han hecho que los diseñadores eviten el uso de transforma-

dores (y también de bobinas) en muchísimas situaciones. Con ese fin, podemos usar otros muchos componentes como resistencias, capacitores, amps-op y otros dispositivos. Sin embargo, aunque esta sustitución pudiera parecer irracional, no lo es. Es muy fácil fabricar componentes como resistencias y capacitores y requieren mucho menos espacio que una sola bobina.

Sin embargo, los transformadores continúan siendo un componente eléctrico importante. Además de los sistemas de potencia, donde los transformadores desempeñan un papel importante, hay otras aplicaciones. Por ejemplo, los transformadores se usan para eliminar ruido de alta frecuencia en sistemas de control de audio e industriales, y se construyen conectores de pared especiales que reducen el voltaje para recargar baterías de calculadoras y de herramientas de mano. ■

12.1 Inductancia mutua

Para comenzar nuestra descripción de dos bobinas acopladas, empleamos la *ley de Faraday*, que puede establecerse como sigue: El voltaje inducido en una bobina es proporcional a la razón con respecto al tiempo del cambio del flujo y el número de vueltas N , en la bobina. Las dos bobinas acopladas se muestran en la figura 12.1 junto con los siguientes componentes de flujo.

ϕ_{l_1}	Flujo en la bobina 1, que no se une con la bobina 2; éste es producido por la corriente en la bobina 1
ϕ_{l_2}	Flujo en la bobina 2, que no se une con la bobina 1; éste es producido por la corriente en la bobina 2
ϕ_{12}	Flujo en la bobina 1 producido por la corriente en la bobina 2
ϕ_{21}	Flujo en la bobina 2 producido por la corriente en la bobina 1
$\phi_{11} = \phi_{l_1} + \phi_{21}$	Flujo en la bobina 1 producido por la corriente en la bobina 1
$\phi_{22} = \phi_{l_2} + \phi_{12}$	Flujo en la bobina 2 producido por la corriente en la bobina 2
ϕ_1	Flujo total en la bobina 1
ϕ_2	Flujo total en la bobina 2

A fin de escribir las ecuaciones que describen las bobinas acopladas, definimos los voltajes y corrientes usando la convención de signos pasiva en cada par de terminales, como se muestra en la figura 12.1.

En forma matemática, la ley de Faraday puede escribirse como

$$v_1(t) = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \quad (12.1)$$

El flujo ϕ_1 será igual a ϕ_{11} , el flujo en la bobina 1 ocasionado por la corriente de la bobina 1, más o menos el flujo en la bobina 1 producido por la corriente de la bobina 2; es decir,

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} \quad (12.2)$$

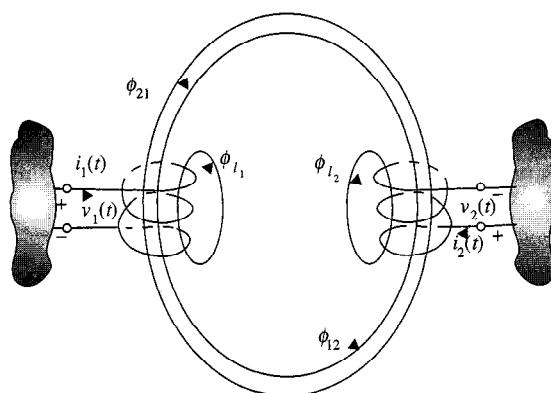


FIGURA 12.1 Relaciones de flujo para bobinas mutuamente acopladas.

Si la corriente de la bobina 2 es tal que los flujos se suman, entonces se usa el signo más; si la corriente en la bobina 2 es tal que los flujos se oponen uno al otro, se usa un signo menos. La ecuación para el voltaje ahora puede escribirse como

$$\begin{aligned} v_1(t) &= N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \\ &= N_1 \frac{d\phi_{11}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_{12}}{dt} \end{aligned} \quad (12.3)$$

De la física básica sabemos que

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= N_1 i_1 \mathcal{P}_{11} \\ \phi_{12} &= N_2 i_2 \mathcal{P}_{12} \end{aligned} \quad (12.4)$$

donde las \mathcal{P} 's son constantes (permeancias) que dependen de las trayectorias magnéticas tomadas por los componentes del flujo. La ecuación del voltaje puede entonces escribirse como

$$v_1(t) = N_1^2 \mathcal{P}_{11} \frac{di_1}{dt} + N_1 N_2 \mathcal{P}_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (12.5)$$

La constante $N_1^2 \mathcal{P}_{11} = L_{11}$ (la misma L que usamos antes) se llama ahora la *autoinductancia*, y la constante $N_1 N_2 \mathcal{P}_{12} = L_{12}$ se llama *inductancia mutua*. Por tanto,

$$v_1(t) = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (12.6)$$

Usando la misma técnica, podemos escribir

$$v_2(t) = N_2^2 \mathcal{P}_{22} \frac{di_2}{dt} + N_1 N_2 \mathcal{P}_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (12.7)$$

que puede escribirse como

$$v_2(t) = L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (12.8)$$

Si el medio a través del cual pasa el flujo magnético es lineal, entonces $\mathcal{P}_{12} = \mathcal{P}_{21}$. De aquí, $L_{12} = L_{21} = M$. Por conveniencia, definimos $L_1 = L_{11}$ y $L_2 = L_{22}$.

Ahora necesitamos examinar los detalles físicos de las bobinas acopladas. En física básica aprendimos la regla de la mano derecha, la cual afirma que si giramos los dedos de nuestra *mano derecha alrededor* de la bobina en la dirección de la corriente, el flujo producido por la corriente está en la dirección de nuestro pulgar.

A fin de indicar la relación física de las bobinas y, por consiguiente, simplificar la convención de signos para los términos mutuos, empleamos lo que comúnmente se llama la *convención de punto*. Se colocan puntos al lado de cada bobina de modo que

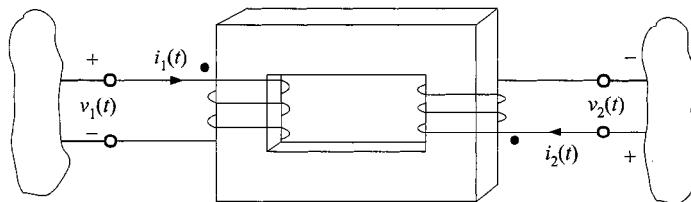


FIGURA 12.2 Ilustración de la convención de puntos para bobinas acopladas.

si entran corrientes en ambas terminales con puntos o salen de ambas terminales con puntos, los flujos producidos por esas corrientes se sumarán. Para colocar los puntos en un par de bobinas acopladas, arbitrariamente seleccionamos una terminal de cada bobina y colocamos un punto ahí. Usando la regla de la mano derecha, determinamos la dirección del flujo producido por esta bobina cuando la corriente está entrando en la terminal punteada. Examinamos, después, la otra bobina para determinar a qué terminal tendría que entrar la corriente para producir un flujo que se sumara al flujo producido por la primera bobina. Se coloca un punto en esta terminal. Los puntos han sido colocados en los dos circuitos acoplados de la figura 12.2; verifique que sean correctos.

Cuando se escriben las ecuaciones para los voltajes terminales, los puntos pueden usarse para definir el signo de los voltajes mutuamente inducidos. Si las corrientes \$i_1(t)\$ e \$i_2(t)\$ están ambas entrando o saliendo de los puntos, el signo del voltaje mutuo \$M(di_2/dt)\$ será el mismo en una ecuación que el del voltaje autoinducido \$L_1(di_1/dt)\$. Si una corriente entra a un punto y la otra corriente sale de un punto, los términos del voltaje mutuo inducido y del voltaje autoinducido tendrán signos opuestos.

E J E M P L O 12.1

Determine la expresión para \$v_1(t)\$ y \$v_2(t)\$ en el circuito que se muestra en la figura 12.3.

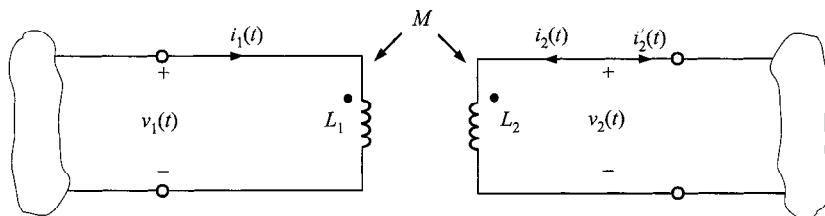


FIGURA 12.3 Dos circuitos de bobinas acopladas mutuamente.

SOLUCIÓN Para el circuito de la figura 12.3 las ecuaciones del voltaje para las variables asignadas en la figura son

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

E J E M P L O 12.2

Determine las ecuaciones para $v_1(t)$ y $v_2(t)$ en los circuitos que se muestran en la figura 12.3 si reemplazamos $i_2(t)$ con $i'_2(t)$ (es decir, corriente secundaria saliendo del punto).

S O L U C I Ó N Las ecuaciones son

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di'_2}{dt}$$

$$v_2(t) = -L_2 \frac{di'_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D12.1 Escriba las ecuaciones para $v_1(t)$ y $v_2(t)$ en el circuito de la figura D12.1.

Resp.: $v_1(t) = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$, $v_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$.

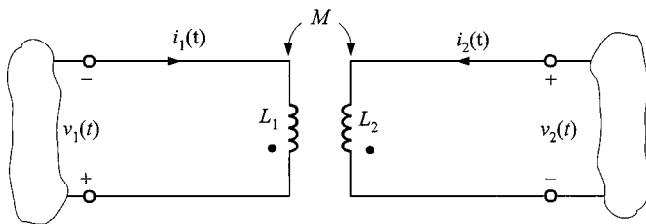


FIGURA D12.1

Suponga que el circuito de la figura 12.3 es excitado con una fuente senoidal. Los voltajes serán de la forma $\mathbf{V}_1 e^{j\omega t}$ y $\mathbf{V}_2 e^{j\omega t}$, y las corrientes serán de la forma $\mathbf{I}_1 e^{j\omega t}$ e $\mathbf{I}_2 e^{j\omega t}$, donde \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 , \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 son fasores. Sustituyendo esos voltajes y corrientes en las ecuaciones (12.6) y (12.8), obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + j\omega M \mathbf{I}_1 \end{aligned} \quad (12.9)$$

El modelo del circuito acoplado en el dominio de frecuencia es idéntico al del dominio del tiempo, excepto por la manera en que están marcados los elementos y variables. El signo de los términos mutuos se maneja de la misma forma que se hace en el dominio del tiempo.

E J E M P L O 12.3

Las dos bobinas mutuamente acopladas de la figura 12.4a pueden interconectarse de cuatro maneras posibles. Deseamos determinar la inductancia equivalente de cada una de las cuatro interconexiones posibles.

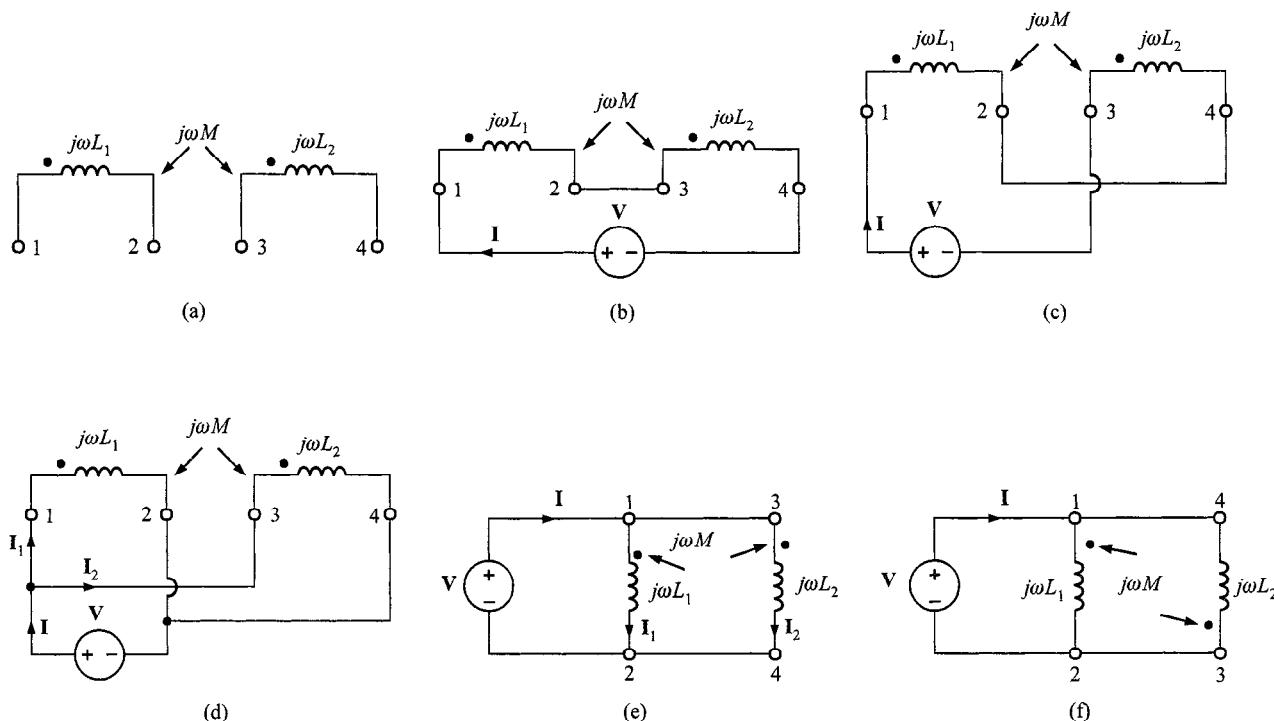


FIGURA 12.4 Circuitos utilizados en el ejemplo 12.3.

S O L U C I Ó N El caso 1 se muestra en la figura 12.4b. En este caso

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= j\omega L_1 \mathbf{I} + j\omega M \mathbf{I} + j\omega L_2 \mathbf{I} + j\omega M \mathbf{I} \\ &= j\omega L_{eq} \mathbf{I} \end{aligned}$$

donde $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$.

El caso 2 se muestra en la figura 12.4c. Usando la LVK, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= j\omega L_1 \mathbf{I} - j\omega M \mathbf{I} + j\omega L_2 \mathbf{I} - j\omega M \mathbf{I} \\ &= j\omega L_{eq} \mathbf{I} \end{aligned}$$

donde $L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$.

El caso 3 se muestra en la figura 12.4d y se dibuja otra vez en la figura 12.4e. Las dos ecuaciones de la LVK son

$$\mathbf{V} = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V} = j\omega M \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \mathbf{I}_2$$

Resolviendo esas ecuaciones para \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 se obtiene

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}(L_2 - M)}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}(L_1 - M)}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}$$

Usando la LCK nos da

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}(L_1 + L_2 - 2M)}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L_{eq}}$$

donde

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

El caso 4 se muestra en la figura 12.4f. Las ecuaciones de voltaje en este caso serán las mismas que las del caso 3, excepto que los signos de los términos mutuos serán negativos. Por tanto,

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

EJEMPLO 12.4

Deseamos determinar el voltaje de salida \mathbf{V}_o en el circuito de la figura 12.5.

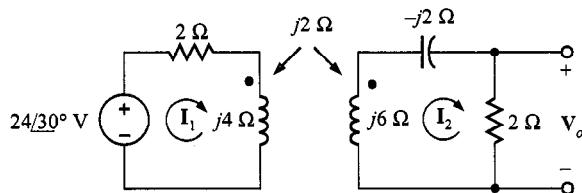


FIGURA 12.5 Ejemplo de un circuito acoplado magnéticamente.

SOLUCIÓN Las dos ecuaciones de la LVK para la red son

$$(2 + j4)\mathbf{I}_1 - j2\mathbf{I}_2 = 24 \angle 30^\circ$$

$$-j2\mathbf{I}_1 + (2 + j6 - j2)\mathbf{I}_2 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones se obtiene

$$\mathbf{I}_2 = 2.68 \angle 3.43^\circ \text{ A}$$

Por tanto,

$$\mathbf{V}_o = 2\mathbf{I}_2$$

$$= 5.36 / 3.43^\circ \text{ V}$$

Consideremos ahora un ejemplo más complicado que incluya inductancia mutua.

E J E M P L O 12.5

Consideré el circuito de la figura 12.6. Deseamos escribir las ecuaciones de anillo para esta red.

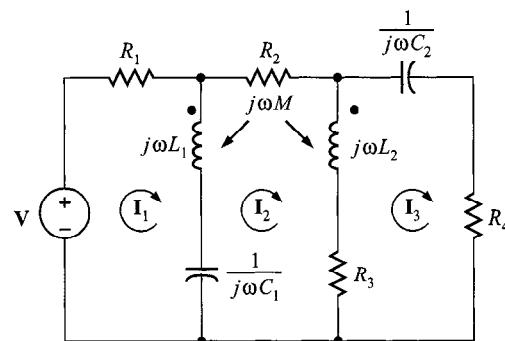


FIGURA 12.6 Ejemplo de un circuito acoplado magnéticamente.

SOLUCIÓN Debido a las múltiples corrientes que están presentes en las bobinas acopladas, debemos ser muy cuidadosos al escribir las ecuaciones del circuito.

Las ecuaciones de anillo para la red fasorial son

$$\mathbf{I}_1 R_1 + j\omega L_1 (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + j\omega M (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + \frac{1}{j\omega C_1} (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = \mathbf{V}$$

$$\frac{1}{j\omega C_1} (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + j\omega L_1(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + j\omega M(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + R_2 \mathbf{I}_2 + j\omega L_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)$$

$$-j\omega M(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + R_3(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) = 0$$

$$R_3(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + j\omega L_2(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + j\omega M(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + \frac{1}{j\omega C_2} \mathbf{I}_3 + R_4 \mathbf{I}_3 = 0$$

que puede reescribirse en la forma

$$\left(R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) \mathbf{I}_1 - \left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} - j\omega M \right) \mathbf{I}_2 - j\omega M \mathbf{I}_3 = \mathbf{V}$$

$$- \left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} - j\omega M \right) \mathbf{I}_1$$

$$+ \left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1 + R_2 + j\omega L_2 + R_3 - j2\omega M \right) \mathbf{I}_2$$

$$- (j\omega L_2 + R_3 - j\omega M) \mathbf{I}_3 = 0$$

$$- j\omega M \mathbf{I}_1 - (R_3 + j\omega L_2 - j\omega M) \mathbf{I}_2 + \left(R_3 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + R_4 \right) \mathbf{I}_3 = 0$$

Note la forma simétrica de esas ecuaciones.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D12.2 Encuentre las corrientes \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 y el voltaje de salida \mathbf{V}_o en la red de la figura D12.2.

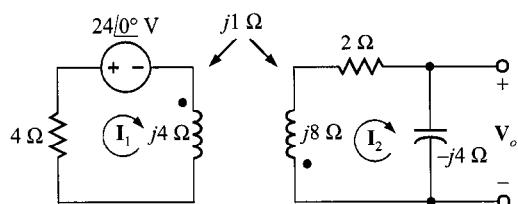


FIGURA D12.2

Resp.: $\mathbf{I}_1 = -4.29 \angle -42.8^\circ \text{ A}$, $\mathbf{I}_2 = 0.96 \angle -16.26^\circ \text{ A}$, $\mathbf{V}_o = 3.84 \angle -106.26^\circ \text{ V}$.

D12.3 Escriba las ecuaciones de la LVK en forma estándar para la red de la figura D12.3.

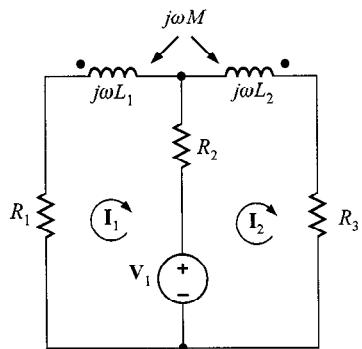


FIGURA D12.3

Resp.: $(R_1 + j\omega L_1 + R_2) \mathbf{I}_1 - (R_2 + j\omega M) \mathbf{I}_2 = -\mathbf{V}_1$, $- (R_2 + j\omega M) \mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + R_3) \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1$.

12.2 Análisis de energía

Ahora llevaremos a cabo un análisis de energía en un par de bobinas mutuamente acopladas, que darán algunas relaciones interesantes para los elementos del circuito. Nuestro análisis incluirá el desarrollo de un experimento en la red que se muestra en la figura 12.7. Antes de comenzar el experimento, colocamos todos los voltajes y corrien-

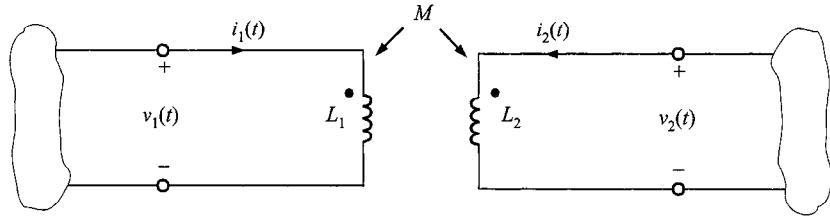


FIGURA 12.7 Circuito acoplado magnéticamente.

tes en el circuito igual a cero. Una vez que el circuito está inactivo, comenzamos haciendo que la corriente $i_1(t)$ se incremente de cero a algún valor I_1 con las terminales del lado derecho a circuito abierto. Como las terminales del lado derecho están abiertas, $i_2(t) = 0$, y por consiguiente la potencia que entra en esas terminales es cero. La potencia instantánea que entra en las terminales del lado izquierdo es

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) = \left[L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \right] i_1(t)$$

La energía almacenada dentro del circuito acoplado en t_1 cuando $i_1(t) = I_1$ es entonces

$$\int_0^{t_1} v_1(t)i_1(t)dt = \int_0^{I_1} L_1 i_1(t) di_1(t) = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

Continuando nuestro experimento, comenzando en el tiempo t_1 , dejamos que la corriente $i_2(t)$ se incremente de cero a algún valor I_2 en el tiempo t_2 mientras se mantiene $i_1(t)$ constante a I_1 . La energía entregada a través de las terminales del lado derecho es

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2(t)i_2(t)dt = \int_0^{I_2} L_2 i_2(t) di_2(t) = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Sin embargo, durante el intervalo t_1 a t_2 el voltaje $v_1(t)$ es

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

Como $i_1(t)$ es una constante I_1 , la energía liberada a través de las terminales del lado izquierdo es

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} v_1(t)i_1(t)dt &= \int_{t_1}^{t_2} M \frac{di_2(t)}{dt} I_1 dt = MI_1 \int_0^{I_2} di_2(t) \\ &= MI_1 I_2 \end{aligned}$$

Por tanto, la energía total almacenada en la red para $t > t_2$ es

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + MI_1 I_2 \quad (12.10)$$

Podemos, por supuesto, repetir completo nuestro experimento con el punto ya sea en L_1 o en L_2 , pero no en ambos, en sentido inverso, y en este caso el signo del término de inductancia mutua sería negativo, produciendo

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - M I_1 I_2$$

Es muy importante para el lector darse cuenta que en nuestra derivación de la ecuación anterior, mediante el experimento, los valores I_1 e I_2 podrían haber sido cualesquiera valores en cualquier tiempo; por consiguiente, la energía almacenada en las bobinas acopladas magnéticamente en cualquier instante de tiempo está dada por la expresión

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 [i_1(t)]^2 + \frac{1}{2} L_2 [i_2(t)]^2 \pm M i_1(t) i_2(t) \quad (12.11)$$

Las dos bobinas acopladas representan una red pasiva, y, por tanto, la energía almacenada dentro de esta red debe ser no negativa para cualesquier valores de las inductancias y de las corrientes. La ecuación para la energía instantánea almacenada en el circuito magnético puede escribirse como

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$$

Sumando y restando el término $\frac{1}{2}(M^2/L_2) i_1^2$ y rearreglando la ecuación se obtiene

$$w(t) = \frac{1}{2} \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \left(i_2 + \frac{M}{L_2} i_1 \right)^2$$

En esta expresión reconocemos que la energía instantánea almacenada será no negativa si

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (12.12)$$

Observe que esta ecuación especifica un límite superior del valor de la inductancia mutua.

Definimos el coeficiente de acoplamiento entre las dos bobinas L_1 y L_2 como

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (12.13)$$

y notamos que el rango de valores de la ecuación (12.12) es

$$0 \leq k \leq 1 \quad (12.14)$$

Este coeficiente es una indicación de qué cantidad de flujo en una bobina está ligado con la otra bobina; es decir, si todo el flujo de una bobina alcanza a la otra bobina, entonces tenemos 100% de acoplamiento y $k = 1$. Para valores grandes de k (es decir, $k > 0.5$), se dice que las bobinas están fuertemente acopladas, y para pequeños valores de k (es decir, $k \leq 0.5$), se dice que las bobinas están débilmente acopladas. Las ecuaciones previas indican que el valor para la inductancia mutua está confinado al intervalo

$$0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (12.15)$$

y que el límite superior es la media geométrica de las inductancias L_1 y L_2 .

E J E M P L O 12.6

El circuito acoplado de la figura 12.8a tiene un coeficiente de acoplamiento de 1 (es decir, $k = 1$). Deseamos determinar la energía almacenada en las bobinas mutuamente acopladas en el tiempo $t = 5$ ms. $L_1 = 2.653$ mH y $L_2 = 10.61$ mH.

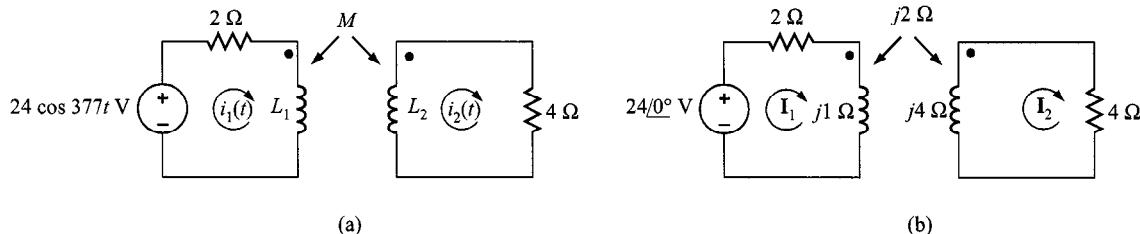


FIGURA 12.8 Ejemplo de un circuito acoplado magnéticamente dibujado en los dominios de tiempo y de frecuencia.

S O L U C I Ó N De los datos la inductancia mutua es

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = 5.31 \text{ mH}$$

El circuito equivalente del dominio de frecuencia se muestra en la figura 12.8b, donde los valores de la impedancia para X_{L_1} , X_{L_2} y X_M son 1, 4 y 2, respectivamente. Las ecuaciones de anillo para la red son entonces

$$(2 + j1)\mathbf{I}_1 - 2j\mathbf{I}_2 = 24 \angle 0^\circ$$

$$-j2\mathbf{I}_1 + (4 + 4j)\mathbf{I}_2 = 0$$

Solucionando esas ecuaciones para las dos corrientes de anillo se tiene

$$\mathbf{I}_1 = 9.41 \angle -11.31^\circ \text{ A} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_2 = 3.33 \angle +33.69^\circ \text{ A}$$

y, por tanto,

$$i_1(t) = 9.41 \cos(377t - 11.31^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 3.33 \cos(377t + 33.69^\circ) \text{ A}$$

A $t = 5$ ms, $377t = 1.885$ rad o 108° , y por consiguiente,

$$i_1(t = 5 \text{ ms}) = 9.41 \cos(108^\circ - 11.31^\circ) = -1.10 \text{ A}$$

$$i_2(t = 5 \text{ ms}) = 3.33 \cos(108^\circ + 33.69^\circ) = -2.61 \text{ A}$$

Por tanto, la energía almacenada en las bobinas acopladas en $t = 5$ ms es

$$\begin{aligned} w(t)|_{t=0.005 \text{ seg}} &= \frac{1}{2}(2.653)(10^{-3})(-1.10)^2 + \frac{1}{2}(10.61)(10^{-3})(-2.61)^2 \\ &\quad - (5.31)(10^{-3})(-1.10)(-2.61) \\ &= (1.61)(10^{-3}) + (36.14)(10^{-3}) - (15.25)(10^{-3}) \\ &= 22.5 \text{ mJ} \end{aligned}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D12.4 La red de la figura D12.4 opera a 60 Hz. Calcule la energía almacenada en las bobinas mutuamente acopladas en el tiempo $t = 10$ ms.

Resp.: $w(10 \text{ ms}) = 39 \text{ mJ}$.

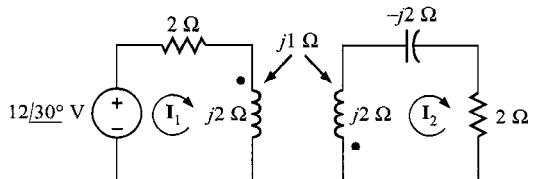


FIGURA D12.4

12.3 Análisis con PSPICE de circuitos acoplados magnéticamente

El programa de análisis de circuitos de PSPICE puede emplearse para resolver circuitos magnéticamente acoplados. Para usar el PSPICE, en este caso, debemos presentar un comando adicional que defina el acoplamiento. El comando es

KXXXXXXX LYYYYYYY LZZZZZZZ value

LYYYYYYY y LZZZZZZZ son los nombres de las bobinas acopladas y value es el coeficiente del acoplamiento KXXXXXXX que satisface la relación

$$0 < \text{KXXXXXXX} \leq 1$$

La convención de punto se aplica en este análisis y el punto debe estar en el primer nodo de cada bobina. Los siguientes ejemplos ilustran el uso del PSPICE para circuitos acoplados.

EJEMPLO 12.7

Consideremos una vez más la red del ejemplo 12.4, que se dibuja de nuevo en la figura 12.9 para el análisis de PSPICE. Supongamos que la frecuencia es $f = 1/2\pi$ Hz. El coeficiente de acoplamiento es entonces

$$k = \frac{2}{\sqrt{(4)(6)}} = 0.408248$$

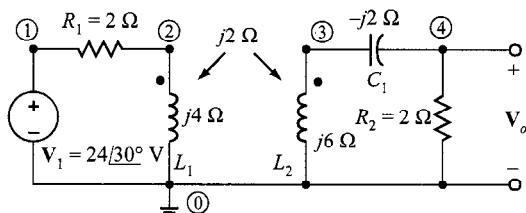


FIGURA 12.9 La figura 12.5 preparada para análisis con PSPICE.

Determine el voltaje de salida usando PSPICE.

SOLUCIÓN El programa del PSPICE para determinar el voltaje de salida es

```
EXAMPLE 12.7
V1 1 0 AC 24 30
R1 1 2 2
L1 2 0 4
L2 3 0 6
K1 L1 L2 0.408248
C1 3 4 0.5
R2 4 0 2
.AC LIN 1 0.159155 0.159155
.PRINT AC VM(4) VP(4)
.END
```

La salida de la computadora es

FREQ	VM(4)	VP(4)
1.592E-01	5.367E+00	3.435E+00

EJEMPLO 12.8

La red de la figura 12.10a se redibuja en la figura 12.10b para un análisis con PSPICE. Escribamos un programa que calcule la corriente en R_2 suponiendo que la frecuencia es $f = 1/2\pi$ Hz.

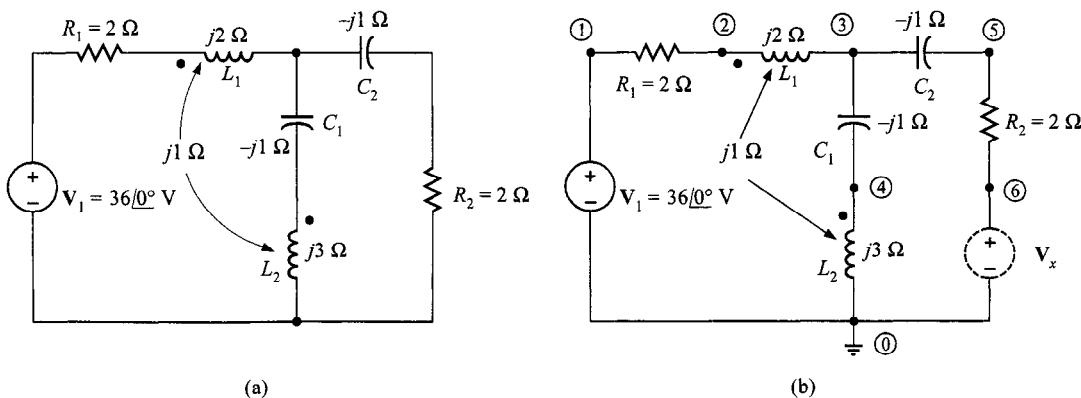


FIGURA 12.10 Ejemplo de análisis con PSPICE.

SOLUCIÓN El coeficiente de acoplamiento es

$$k = \frac{1}{\sqrt{(2)(3)}} = 0.408248$$

El programa es el que sigue.

```
EXAMPLE 12.8
V1 1 0 AC 36 0
R1 1 2 2
L1 2 3 2
C1 3 4 1
L2 4 0 3
K1 L1 L2 0.408248
C2 3 5 1
R2 5 6 2
VX 6 0 AC 0 0
.AC LIN 1 0.159155 0.159155
.PRINT AC 1M(VX) IP(VX)
.END
```

La salida de la computadora es

```
FREQ IM(VX) IP(VX)
1.592E-01 6.900E+00 2.657E+01
```

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D12.5 Dada la red de la figura D12.5, con $f = 1/2\pi$ Hz y el coeficiente de acoplamiento = 0.9, calcule \mathbf{V}_o por medio de un programa de PSPICE.

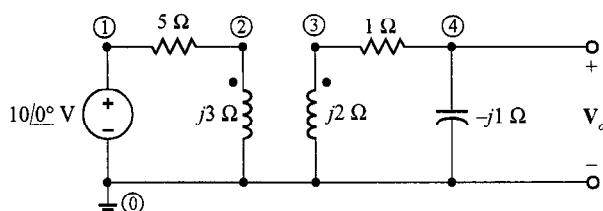


FIGURA D12.5

Resp.: $\mathbf{V}_o = 2.092 \angle -49.39^\circ$ V.

D12.6 Dada la red de la figura D12.6 con $f = 1/2\pi$ Hz y el coeficiente de acoplamiento = 0.7071, escriba un programa de PSPICE para calcular \mathbf{V}_o .

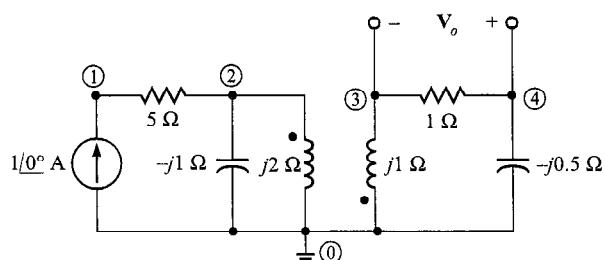


FIGURA D12.6

Resp.: $\mathbf{V}_o = 0.8944 \angle -63.44^\circ$ V.

12.4 El transformador ideal

Consideré la situación que se ilustra en la figura 12.11, que muestra dos bobinas de alambre embobinado en un solo núcleo magnético cerrado. El núcleo magnético concentra el flujo de manera que todo el flujo une todas las vueltas de ambas bobinas. En el caso ideal también ignoramos la resistencia del alambre. Examinemos ahora las ecua-

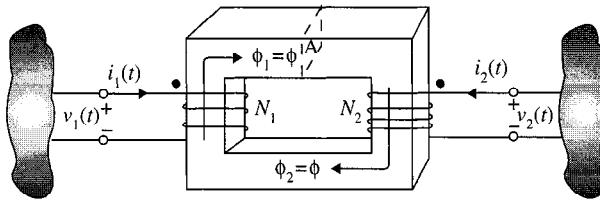


FIGURA 12.11 Transformador que emplea un núcleo magnético.

ciones de acoplamiento bajo la condición de que el mismo flujo vaya a través de cada devanado y, por tanto,

$$v_1(t) = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

y

$$v_2(t) = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

y, por tanto,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (12.16)$$

Otra relación puede desarrollarse entre las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ y el número de vueltas en cada bobina. Para desarrollar esta relación, empleamos, de la teoría de campo electromagnético, la ley de Ampère, que se escribe en forma matemática como

$$\oint H \cdot dl = i_{\text{encerrado}} = N_1 i_1 + N_2 i_2 \quad (12.17)$$

donde H es la intensidad de campo magnético y la integral está sobre la trayectoria cerrada recorrida por el flujo alrededor del núcleo del transformador. Para el material del núcleo ideal, $\mu = \infty$, $H = 0$. Por tanto,

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0 \quad (12.18)$$

o

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} \quad (12.19)$$

Observe que si dividimos la ecuación (12.18) entre N_1 y la multiplicamos por v_1 , obtenemos

$$v_1 i_1 + \frac{N_2}{N_1} v_1 i_2 = 0$$

Sin embargo, como $v_1 = (N_1/N_2)v_2$,

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0$$

y de aquí la potencia total en el dispositivo es cero, lo que significa que un transformador ideal no tiene pérdidas.

Por tanto, para resumir la convención de punto para un transformador ideal,

$$v_1 = \frac{N_1}{N_2} v_2 \quad (12.20)$$

donde ambos voltajes tienen referencia positiva en los puntos y

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0 \quad (12.21)$$

donde se define que ambas corrientes entran a los puntos.

Consideré ahora el circuito que se muestra en la figura 12.12, donde el símbolo usado para el transformador indica que es un transformador con núcleo de hierro. Debido a la relación entre los puntos, las corrientes y voltajes asignados; los voltajes fasoriales \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 están relacionados por la expresión

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

y las corrientes fasoriales, de la ecuación (12.21), están relacionadas por

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

El signo en la ecuación (12.21) es inverso, ya que la dirección de \mathbf{I}_2 es inversa. Las dos ecuaciones anteriores pueden reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \frac{N_1}{N_2} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_1 &= \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (12.22)$$

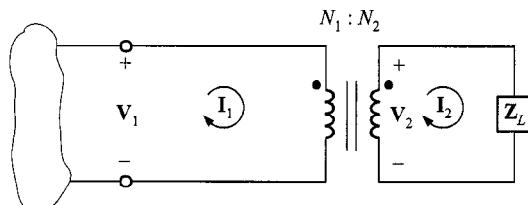


FIGURA 12.12 Circuito de transformador ideal utilizado para ilustrar la impedancia de salida.

También note que

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1^* = \left(\frac{N_1}{N_2} \mathbf{V}_2 \right) \left(\frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2 \right)^*$$

$$= \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_2^* = \mathbf{S}_2$$

De la figura notamos que $\mathbf{Z}_L = \mathbf{V}_2 / \mathbf{I}_2$, y, por tanto, la impedancia de entrada

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \mathbf{Z}_L \quad (12.23)$$

Si ahora definimos la razón de vuelta como

$$n = \frac{N_2}{N_1} \quad (12.24)$$

entonces, las ecuaciones de definición del *transformador ideal* son

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \frac{\mathbf{V}_2}{n^2} \\ \mathbf{I}_1 &= n \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{S}_1 &= \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{Z}_1 &= \frac{\mathbf{Z}_L}{n^2} \end{aligned} \quad (12.25)$$

Las ecuaciones (12.25) definen las importantes relaciones para un transformador ideal. Debe tenerse cuidado al usar esas relaciones debido a que los signos de los voltajes y las corrientes dependen de las referencias asignadas y de cómo están relacionadas con los puntos.

Al mismo tiempo en que se especifica la relación de voltaje/corriente en la ley de Ohm para una resistencia, la figura 12.13 y las siguientes ecuaciones resumen las relaciones de voltaje y corriente para el transformador ideal

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} &= \frac{N_1}{N_2} \\ N_1 \mathbf{I}_1 &= N_2 \mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (12.26)$$

Observe con cuidado las direcciones de las corrientes y la dirección positiva de los voltajes con respecto a los puntos. Si cualquiera de esas direcciones cambia, entonces las variables en las ecuaciones se reemplazan por cantidades negativas. Por ejemplo,

$$\frac{\mathbf{V}_1}{-\mathbf{V}'_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (12.27)$$

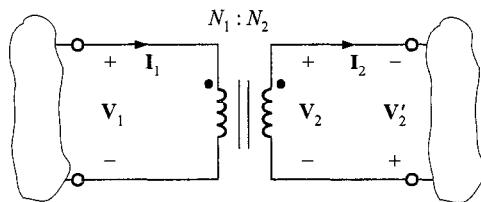


FIGURA 12.13 Relación corriente/voltaje para un transformador ideal.

Aunque los transformadores prácticos no usan puntos, per se, sin embargo, utilizan marcas especificadas por la Asociación Nacional de Fabricantes Eléctricos (NEMA) que son conceptualmente equivalentes a los puntos.

E J E M P L O 12.9

Dado el circuito que se muestra en la figura 12.14, deseamos determinar todos los voltajes y corrientes especificados.

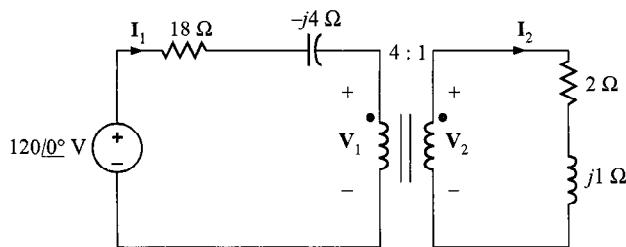


FIGURA 12.14 Circuito de transformador ideal.

S O L U C I Ó N Debido a las relaciones entre los puntos y las corrientes y voltajes, las ecuaciones del transformador son

$$V_1 = - \frac{V_2}{n} \quad \text{e} \quad I_1 = - nI_2$$

donde $n = \frac{1}{4}$. La impedancia reflejada en la entrada del transformador es

$$Z_1 = 16(2 + j1) = 32 + j16 \Omega$$

Por tanto, la corriente en la fuente es

$$I_1 = \frac{120 \angle 0^\circ}{18 - j4 + 32 + j16} = 2.33 \angle -13.5^\circ \text{ A}$$

El voltaje a través de la entrada al transformador es entonces

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 Z_1 \\ &= (2.33 \angle -13.5^\circ)(32 + j16) \\ &= 83.50 \angle 13.07^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

De aquí, \mathbf{V}_2 es

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_2 &= -n\mathbf{V}_1 \\ &= -\frac{1}{4}(83.50 \angle 13.07^\circ) \\ &= 20.88 \angle 193.07^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

La corriente \mathbf{I}_2 es

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_2 &= -\frac{\mathbf{I}_1}{n} \\ &= -4(2.33 \angle -13.5^\circ) \\ &= 9.32 \angle 166.50^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D12.7 Calcule la corriente \mathbf{I}_1 en la red de la figura D12.7.

Resp.: $\mathbf{I}_1 = 3.07 \angle 39.81^\circ \text{ A}$.

D12.8 Encuentre \mathbf{V}_o en la red de la figura D12.7.

Resp.: $\mathbf{V}_o = 3.07 \angle 39.82^\circ \text{ V}$.

D12.9 En la red de la figura D12.9 el voltaje $\mathbf{V}_o = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$. Encuentre el voltaje de entrada \mathbf{V}_S .

Resp.: $\mathbf{V}_S = 25.5 \angle -11.31^\circ \text{ V}$.

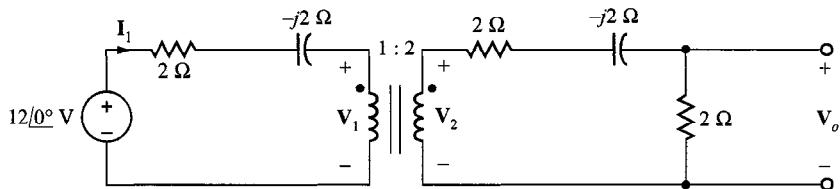


FIGURA D12.7

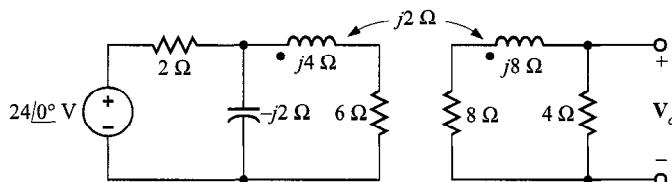


FIGURA D12.9

Otra técnica para simplificar el análisis de circuitos que contienen un transformador ideal incluye el uso del teorema de Thévenin o de Norton para obtener un circuito equivalente que reemplace el transformador y el circuito primario o el secundario. Sin embargo, esta técnica por lo general requiere más esfuerzo que el método presentado hasta el momento. Demostremos este método empleando el teorema de Thévenin para derivar un circuito equivalente para el transformador y el circuito primario de la red que se muestra en la figura 12.15a. Las ecuaciones para el transformador en vista de la dirección de las corrientes y voltajes y la posición de los puntos son

$$\mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{n}$$

Al formar un equivalente de Thévenin en las terminales secundarias $2 - 2'$ como se muestra en la figura 12.15b, notamos que $\mathbf{I}_2 = 0$ y, por tanto, de la ecuación (13.32) $\mathbf{I}_1 = 0$. De aquí,

$$\mathbf{V}_{oc} = \mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1 = n\mathbf{V}_{S_1}$$

La impedancia equivalente de Thévenin obtenida al examinar las terminales de circuito abierto con \mathbf{V}_{S_1} reemplazada por un corto circuito es \mathbf{Z}_1 , que cuando se refleja en el secundario por la razón de vueltas es

$$\mathbf{Z}_{Th} = n^2\mathbf{Z}_1$$

Por tanto, uno de los circuitos equivalentes que resultan para la red de la figura 12.15a es como el que se muestra en la figura 12.15c. De manera semejante, podemos mostrar que el reemplazo del transformador y de su circuito secundario por un circuito equivalente da como resultado la red que se muestra en la figura 12.15d.

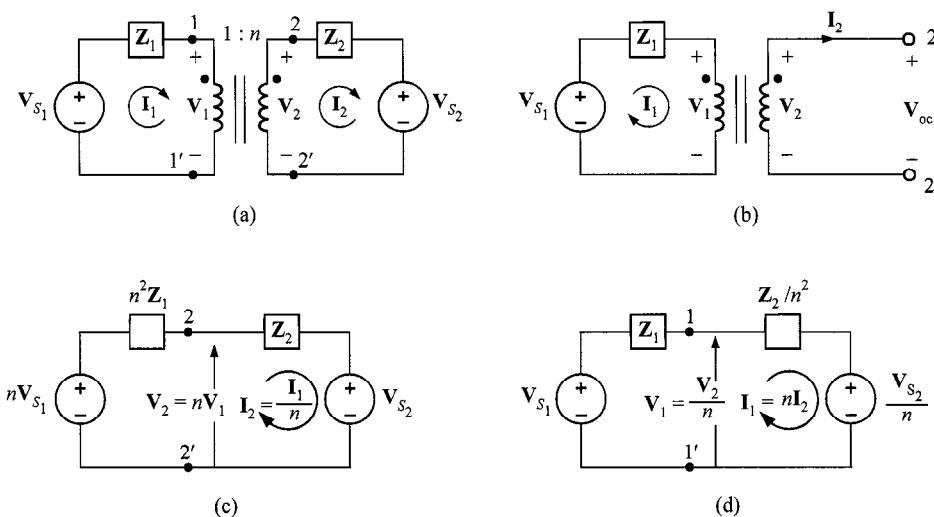


FIGURA 12.15 Circuito que contiene un transformador ideal y algunas de sus redes equivalentes.

Se puede mostrar, en general, que cuando se desarrolla un circuito equivalente para el transformador y su circuito primario, cada voltaje primario se multiplica por n , cada corriente primaria se divide entre n , y cada impedancia primaria se multiplica por n^2 . De manera similar, cuando se desarrolla un circuito equivalente para el transformador y su circuito secundario, cada voltaje secundario se divide entre n , cada corriente secundaria se multiplica por n , y cada impedancia secundaria se divide entre n^2 . Las potencias son las mismas, sea que se calculen en el lado primario o en el secundario.

El lector debe recordar, por nuestro análisis anterior, que si cada punto en el transformador se invierte, entonces n se reemplaza por $-n$ en los circuitos equivalentes. Además, se debe notar que el desarrollo de esos circuitos equivalentes está basado en la suposición de que al quitar el transformador se dividirá la red en dos partes; es decir, no hay otras conexiones entre el primario y el secundario que a través del transformador. Si existe cualesquier conexión externa, la técnica de circuito equivalente en general no puede usarse. Finalmente, se debe notar que si los circuitos primario o secundario son más complicados que los que se muestran en la figura 12.15a, puede aplicarse el teorema de Thévenin para reducir la red a la que se muestra en la figura 12.15a. También podemos simplemente reflejar el circuito complicado componente por componente de un lado del transformador al otro.

E J E M P L O 12.10

Dado el circuito de la figura 12.16a, deseamos dibujar las dos redes obtenidas reemplazando el transformador y el primario, y el transformador y el secundario, con circuitos equivalentes.

SOLUCIÓN Debido a la relación entre corrientes y voltajes asignados y la localización de los puntos, la red que contiene un circuito equivalente para el primario y la red que contiene un circuito equivalente para el secundario se muestran en las figuras 12.16b y c, respectivamente. El lector deberá notar cuidadosamente la polaridad de las fuentes de voltaje en las redes equivalentes.

E J E M P L O 12.11

Determinemos el voltaje de salida V_o en el circuito de la figura 12.17a.

SOLUCIÓN Comenzamos nuestro ataque formando un equivalente de Thévenin para el circuito primario. En la figura 12.17b podemos mostrar que el voltaje de circuito abierto es

$$V_{oc} = \frac{24 \angle 0^\circ}{4 - j4}(-j4) - 4 \angle -90^\circ$$

$$= 12 - j8 = 14.42 \angle -33.69^\circ \text{ V}$$

La impedancia equivalente de Thévenin al examinar las terminales del circuito abierto con las fuentes de voltaje reemplazadas por un corto circuito es

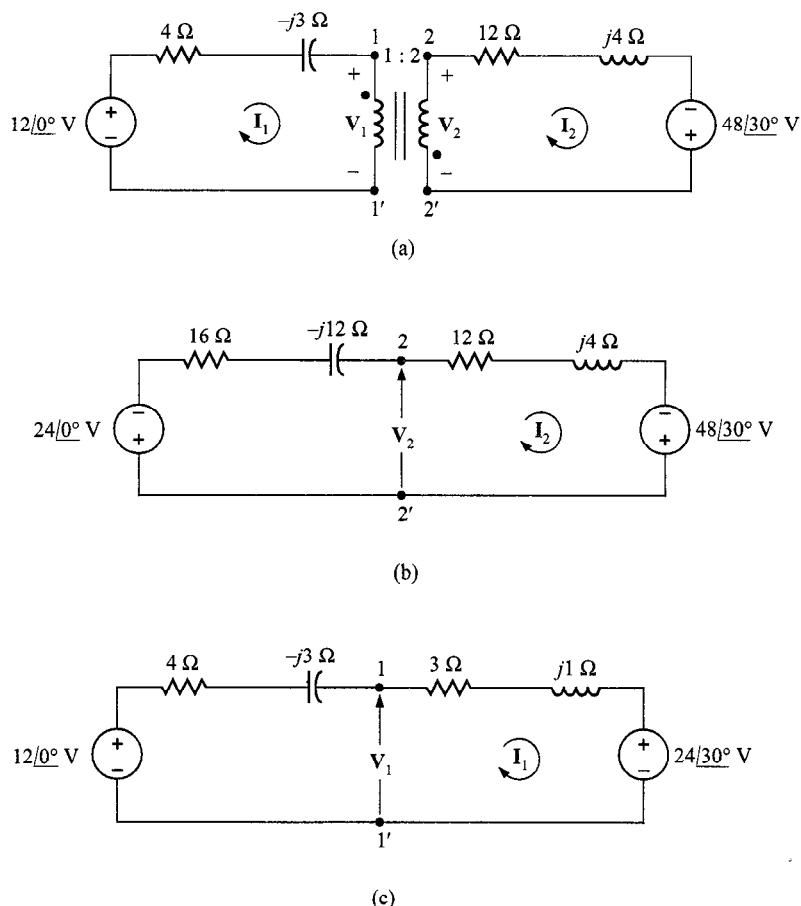


FIGURA 12.16 Circuito de ejemplo y dos circuitos equivalentes.

$$Z_{Th} = \frac{(4)(-j4)}{4 - j4} + 2$$

$$= 4 - j2 \Omega$$

Así el circuito de la figura 12.17a se reduce al que se muestra en la figura 12.17c. Al formar un circuito equivalente para el transformador y el primario resulta la red que se muestra en la figura 12.17d. Por tanto, el voltaje V_o es

$$V_o = \frac{-28.84 \angle -33.69^\circ}{20 - j5} \quad (2)$$

$$= 2.80 \angle 160.35^\circ \text{ V}$$

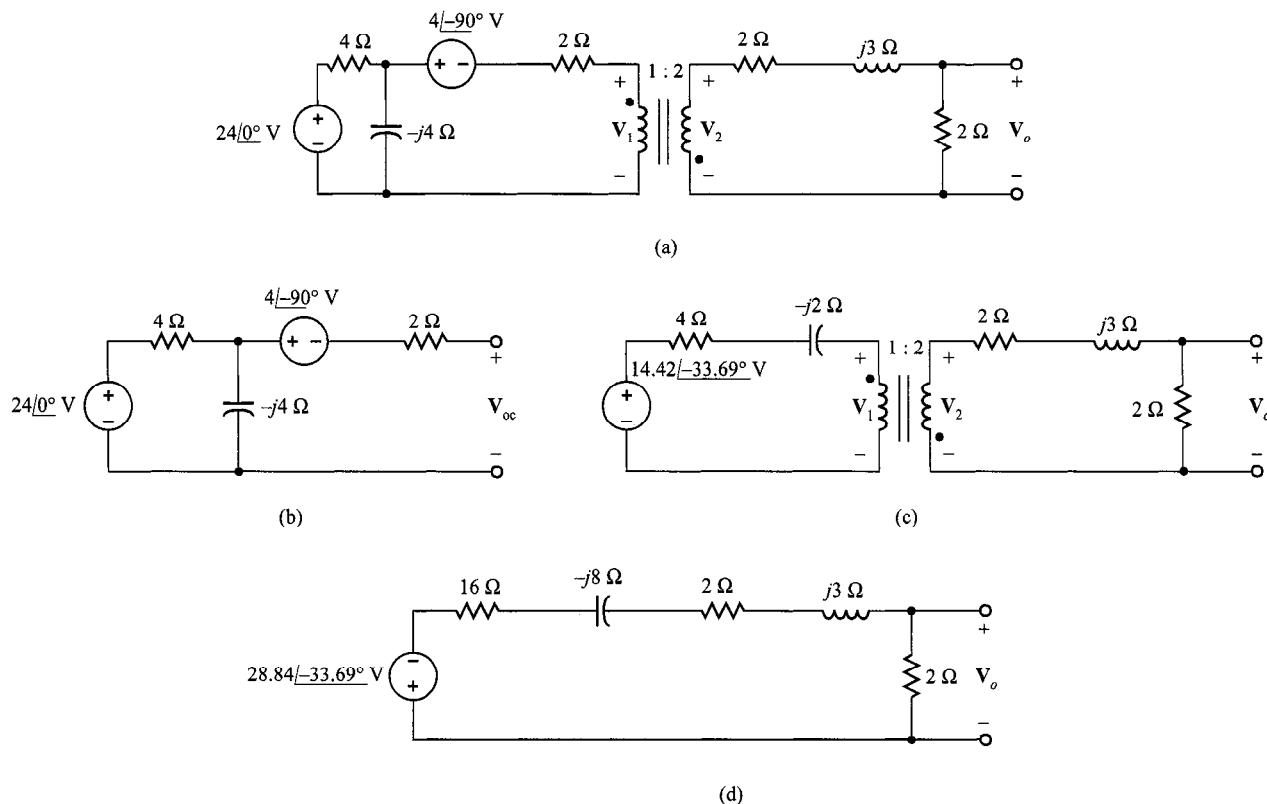


FIGURA 12.17 Red de ejemplo y otros circuitos utilizados para derivar una red equivalente.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D12.10 Dada la red de la figura D12.10, forme un circuito equivalente para el transformador y el primario, y use la red resultante para calcular I_1 .

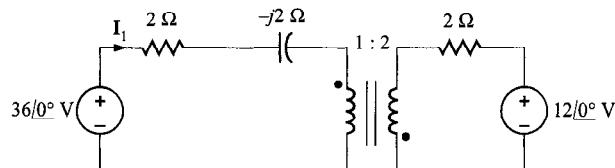


FIGURA D12.10

Resp.: $I_1 = 13.12 \angle 38.66^\circ$ A.

D12.11 Dada la red de la figura D12.11, forme un circuito equivalente para el transformador y el primario, y use la red resultante para calcular V_o .

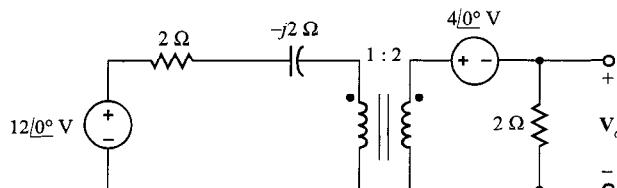


FIGURA D12.11

Resp.: $V_o = 3.12 \angle 38.66^\circ$ V.

12.5 Análisis con PSPICE de circuitos de transformadores ideales

El programa de análisis de circuitos PSPICE es una herramienta útil para resolver circuitos de transformadores ideales. Para emplear la potencia de PSPICE en este caso, sin embargo, debemos modelar el transformador ideal en términos de los elementos del circuito que hasta aquí hemos introducido. Las ecuaciones matemáticas que regulan la operación del transformador ideal que se muestra en la figura 12.18a son

$$V_1 = \frac{1}{n} V_2$$

$$I_2 = \frac{1}{n} I_1$$

Advierta que la ecuación de voltaje y la de corriente exhiben una relación *dependiente*. Por tanto, las ecuaciones pueden modelarse como se muestra en la figura 12.18b, y el programa de PSPICE para este modelo es

E1	1	2	3	0	$\frac{1}{n}$
VT	2	0	0		
F1	0	3	VT	$\frac{1}{n}$	

donde VT es una fuente falsa de prueba utilizada para medir I_1 . Si uno de los puntos se invierte, entonces el término $1/n$ en el programa de PSPICE debe tener un signo negativo. Además, recuerde que en un análisis de PSPICE debe haber una trayectoria de cd a tierra desde cada nodo. Por tanto, puede ser necesario en algunos casos insertar una resistencia muy grande (por ejemplo, $10 M\Omega$) a través de la fuente de corriente del nodo ③ al nodo ① para proporcionar esta trayectoria sin afectar los resultados del análisis.

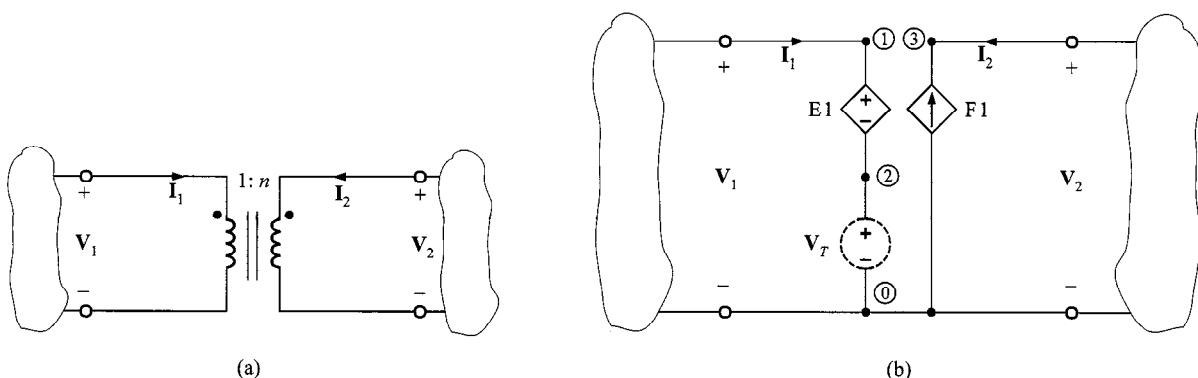


FIGURA 12.18 a) Transformador ideal; b) modelo de PSPICE.

E J E M P L O 12.12

Resolvamos los ejercicios de entrenamiento D12.7 y D12.8 utilizando el PSPICE.

SOLUCIÓN Empleando nuestro modelo para el transformador ideal, la red de la figura D12.7 está etiquetada para un análisis con PSPICE como se muestra en la figura 12.19 donde una vez más, por conveniencia, suponemos que $f = 1/2\pi$ hertz. El programa PSPICE y los resultados de salida son los siguientes.

```

DRILL EXERCISES D12.7 AND D12.8 USING
*DEPENDENT SOURCES.
VIN 1 0 AC 12
R1 1 2 2
C1 2 3 0.5
E1 3 7 4 0 0.5
VTEST 7 0 0
F1 0 4 VTEST 0.5
*Add this to create a DC path to ground.
*PSPICE will generate an error if there
*is not a DC path to ground from every node.
RDCPATH 4 0 10MEG
R2 4 5 2
C2 5 6 0.5
R3 6 0 2
* F = 1/2PI
.AC LIN 1 0.159155 0.159155
.PRINT AC VM(6) VP(6) IM(VTEST) IP(VTEST)
.END

AC ANALYSIS RESULTS
      FREQ        VM(6)        VP(6)        IM(VTEST)        IP(VTEST)
      1.592E-01  3.073E+00  3.981E+01  3.073E+00  3.981E+01

```

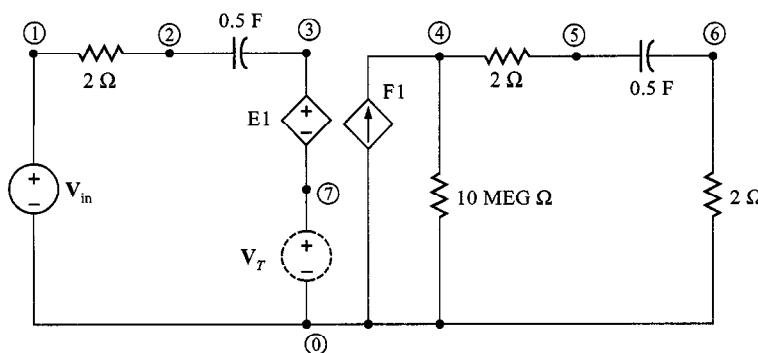


FIGURA 12.19 Red utilizada en el ejemplo 12.12.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

DIRECCIÓN Resuelva el problema presentado en el ejemplo 12.11 usando PSPICE.

Resp.: Véase el ejemplo 12.11.

12.6 Autotransformadores ideales

Los transformadores de dos devanados que hemos presentado hasta ahora proporcionan aislamiento eléctrico entre el devanado primario y el secundario, como se muestra en la figura 12.20a. Es posible, sin embargo, interconectar los devanados primario y secundario en serie, creando un dispositivo de tres terminales como se muestra en la figura 12.20b y se representa en la figura 12.20c. Como podemos ver, este arreglo ofrece ciertas ventajas prácticas sobre el caso aislado. Observe que el arreglo de tres terminales es esencialmente un devanado continuo con un punto de

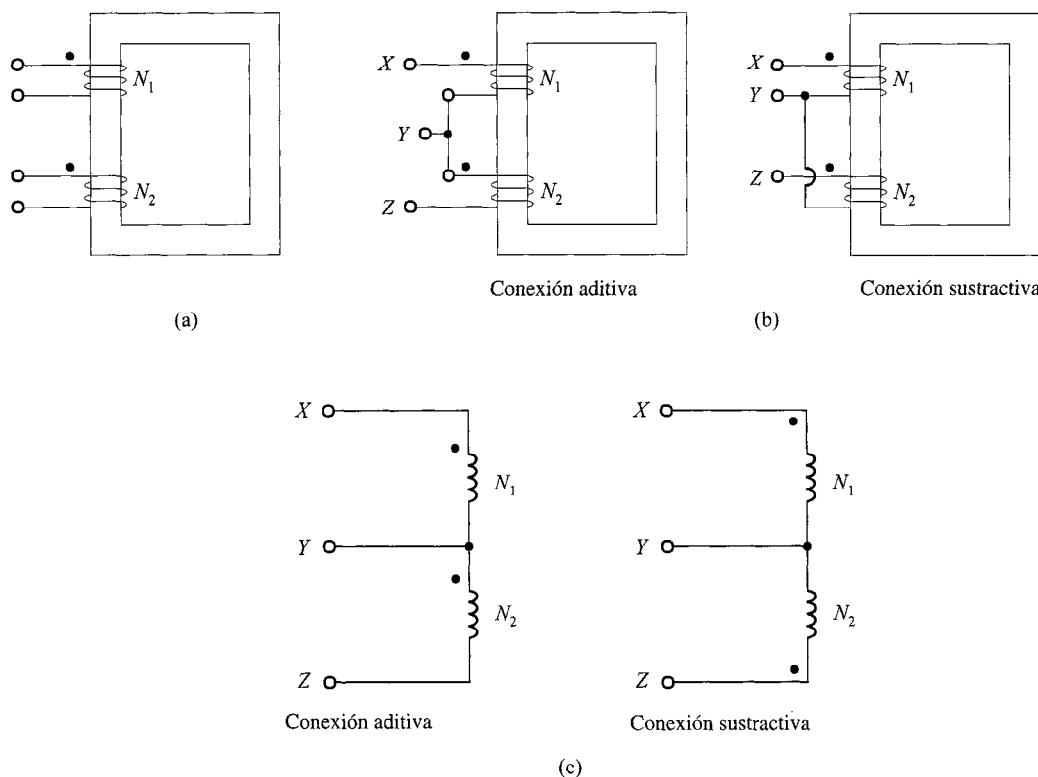


FIGURA 12.20 Autotransformador: a) transformador de dos devanados normales con devanados adyacentes; b) transformador de dos devanados interconectados para crear un solo devanado, autotransformador de tres terminales; c) representación simbólica de b).

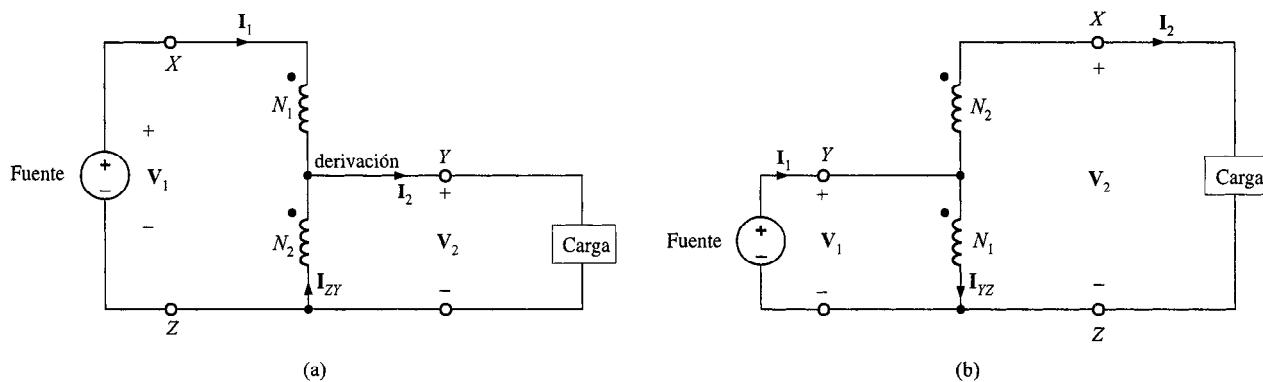


FIGURA 12.21 Circuitos de autotransformador: a) conexión de disminución; b) conexión de elevación.

derivación interno (terminal Y). Tal dispositivo comúnmente está disponible y se llama *autotransformador*.

El punto de derivación puede ajustarse para proporcionar un voltaje variable en la salida. El autotransformador puede usarse en cualquier aplicación práctica que requiera un transformador normal, con tal de que no se requiera aislamiento eléctrico. Es particularmente útil donde se necesita un suministro de voltaje de salida variable (por ejemplo, en el ambiente de un laboratorio).

Examinemos la conexión del autotransformador de disminución en la figura 12.21a. Mediante la acción del transformador

$$\frac{\mathbf{V}_{XY}}{\mathbf{V}_{YZ}} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{y} \quad N_1 \mathbf{I}_1 = N_2 \mathbf{I}_{ZY}$$

Usando la LVK nos da

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{YZ}$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{XY} + \mathbf{V}_{YZ} = \left(\frac{N_1}{N_2} + 1 \right) \mathbf{V}_2$$

e

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_{ZY} = \left(1 + \frac{N_1}{N_2} \right) \mathbf{I}_1$$

Entonces

$$\frac{\mathbf{V}_{XY} \mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2 \mathbf{I}_2} = \frac{\left(\frac{N_1}{N_2} \mathbf{V}_2 \right) \left(\frac{N_2}{N_1 + N_2} \right) \mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2 \mathbf{I}_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} \quad (12.28)$$

¿Cuál es el significado de esta expresión? Sabemos que la clasificación de potencia del devanado N_1 debe ser la misma que la clasificación del devanado N_2 . Sin embargo, la ecuación (12.28) ilustra que la clasificación de potencia del devanado N_1 (es decir, la clasificación de potencia del transformador) es sólo una fracción $[N_1/(N_1 + N_2)]$ de la potencia que es requerida por la carga.

Los siguientes ejemplos ilustran este punto.

E J E M P L O 12.13

Un transformador de 5 kVA 220 V/110 V se conectará para servir a una carga de 110 V desde una fuente de 330 V.

- Dibuje el diagrama apropiado del circuito.
- Determine la carga máxima que puede ser servida sin sobrecargar el transformador.

S O L U C I Ó N

- El circuito de la figura 12.21a es apropiado si el devanado de 220 V se asigna que sea “ N_1 ” y el devanado de 110 V sea “ N_2 .”
- Como $N_1/N_2 = 220/110$, $N_1 = 2N_2$ y

$$\frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{2N_2}{2N_2 + N_2} = \frac{2}{3}$$

Por tanto,

$$\frac{\mathbf{V}_{XY}\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2} = \frac{5 \text{ kVA}}{S_2} = \frac{2}{3}$$

y

$$S_2 = \frac{3}{2}(S) = 7.5 \text{ kVA}$$

o la carga servida puede ser una o media vez la clasificación de potencia del transformador.

E J E M P L O 12.14

El transformador del ejemplo 12.13 será usado para servir una carga de 330 V desde una fuente de 220 V.

- Dibuje el diagrama apropiado del circuito.
- Calcule todas las corrientes si cada devanado opera a las condiciones de clasificación.
- Calcule la potencia aparente de la carga.

SOLUCIÓN

- El diagrama apropiado del circuito se muestra en la figura 12.21b, asignando el devanado de 220 V a “ N_1 ” y asignando al devanado de 110 V a “ N_2 .”
- $I_{YZ} = 5\,000/220 = 22.73$ A e $I_2 = 5\,000/110 = 45.45$ A, y por consiguiente, $I_1 = I_2 + I_{YZ} = 68.18$ A. Nota: En este punto puede no ser claro cómo podemos ignorar la naturaleza compleja de las corrientes y voltajes al sumarlas. Sin embargo, el ejemplo 12.15 examinará este tema.
- $S_2 = V_2 I_2 = 15$ kVA. Observe que esta cantidad es ¡tres veces la clasificación del devanado!

EJEMPLO 12.15

En las condiciones descritas en el ejemplo 12.14, determinemos todos los voltajes y corrientes fasoriales si $V_2 = 330 \angle 0^\circ$ V y si el factor de potencia de la carga es 0.8 retrasado.

SOLUCIÓN Suponga que $V_1 = 220 \angle \alpha$. Entonces $V_{XY} = (110/220)220 \angle \alpha = 110 \angle \alpha$ V. Ahora $V_2 = V_1 + V_{XY} = 220 \angle \alpha + 110 \angle \alpha = 330 \angle \alpha$ V. Sin embargo, como $V_2 = 330 \angle 0^\circ$ V, $\alpha = 0^\circ$. Como el factor de potencia de la carga está retrasado, $\theta_2 = -\cos^{-1}(0.8) = -36.9^\circ$, y por consiguiente $I_2 = 45.45 \angle -36.9^\circ$ A. También, $I_{YZ} = (N_2/N_1) I_2 = (110/220)(45.45 \angle -36.9^\circ) = 22.72 \angle -36.9^\circ$ A. De aquí, $I_1 = I_2 + I_{YZ} = 45.45 \angle -36.9^\circ + 22.72 \angle -36.9^\circ = 68.18 \angle -36.9^\circ$ A. El análisis indica que resultados similares habrían sido alcanzados para cualquier ángulo α o factor de potencia; es decir, V_1 , V_{XY} y V_2 están *en general* en fase, como lo están I_1 , I_2 e I_{YZ} .

Los ejemplos han ilustrado que los transformadores de dos devanados son capaces de más entrega de potencia cuando se conectan como un autotransformador. En el transformador de dos devanados la potencia se transfiere inductivamente, mientras que en el autotransformador la potencia es transferida inductiva y conductivamente.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D12.3 Se dispone de un transformador de 120/12 V con doble devanado. ¿Qué voltajes pueden obtenerse en la

salida si el transformador se conecta como autotransformador con una salida de 120 $\angle 0^\circ$ V?

Resp.: 132 $\angle 0^\circ$ V y 108 $\angle 0^\circ$ V.

12.7 Transformadores trifásicos

Los transformadores desempeñan un papel clave en la transmisión de potencia trifásica de ca. Se utilizan para elevar el voltaje de la estación generadora a la red de transmisión de potencia de alto voltaje y para bajar el voltaje de la red de transmisión a las cargas.

La transformación trifásica puede realizarse utilizando un *banco* de transformadores de una sola fase o un transformador trifásico. Si se usa un banco de transformadores monofásicos, es importante asegurar que todos los transformadores tienen características similares, para mantener un sistema balanceado.

Hay cuatro formas posibles balanceadas en las que el transformador trifásico puede conectarse: Y-Y, delta-delta, Y-delta, y delta-Y, como se muestra en la figura 12.22. Comúnmente, "ye" se simboliza con "Y" y delta como " Δ ".

Los transformadores primarios con frecuencia se conectan en delta. La razón para usar esta configuración delta es que permite que la componente dominante de tercera armónica, que existe típicamente en la corriente primaria, circule en la malla primaria sin ser inducida en el secundario.

La configuración delta-delta tiene una propiedad única. Si uno de los transformadores por alguna razón se elimina (por ejemplo, para reparación o mantenimiento), los otros dos transformadores, que forman ahora una *delta abierta*, aún pueden proporcionar voltajes trifásicos balanceados a una carga reducida.

Cada vez que el secundario se conecta en Y y la línea neutra se usa, las cargas monofásicas (línea a neutro) y trifásica (línea a línea) pueden ser abastecidas.

En las configuraciones Y-Y y delta-delta, las corrientes y voltajes de línea difieren por la razón de vueltas n . En las configuraciones Y-delta y delta-Y, entra en juego un factor $\sqrt{3}$.

E J E M P L O 12.16

Una carga trifásica de 100 kVA con f_p de 0.8 es abastecida por un alimentador trifásico cuya impedancia por fase es $0.01 + j0.02 \Omega$. En su extremo transmisor el alimentador se conecta al lado de bajo voltaje de un transformador trifásico de 12 kVY: 208 V Δ que suponemos es ideal. Si el voltaje de línea en la carga es 200 V, deseamos encontrar

- La corriente de línea en la carga.
- El voltaje de línea en el extremo transmisor del alimentador.
- El voltaje y corriente de línea en el lado de alto voltaje del transformador.

La red se muestra en la figura 12.23.

SOLUCIÓN El voltaje de línea en la carga es

$$V_{AB} = V_L = 200 \text{ V}$$

y, por tanto,

$$V_{AN} = \frac{V_{AB}}{\sqrt{3}} = 115.5 \text{ V}$$

Recuerde que

$$S = \sqrt{3} V_L I_L$$

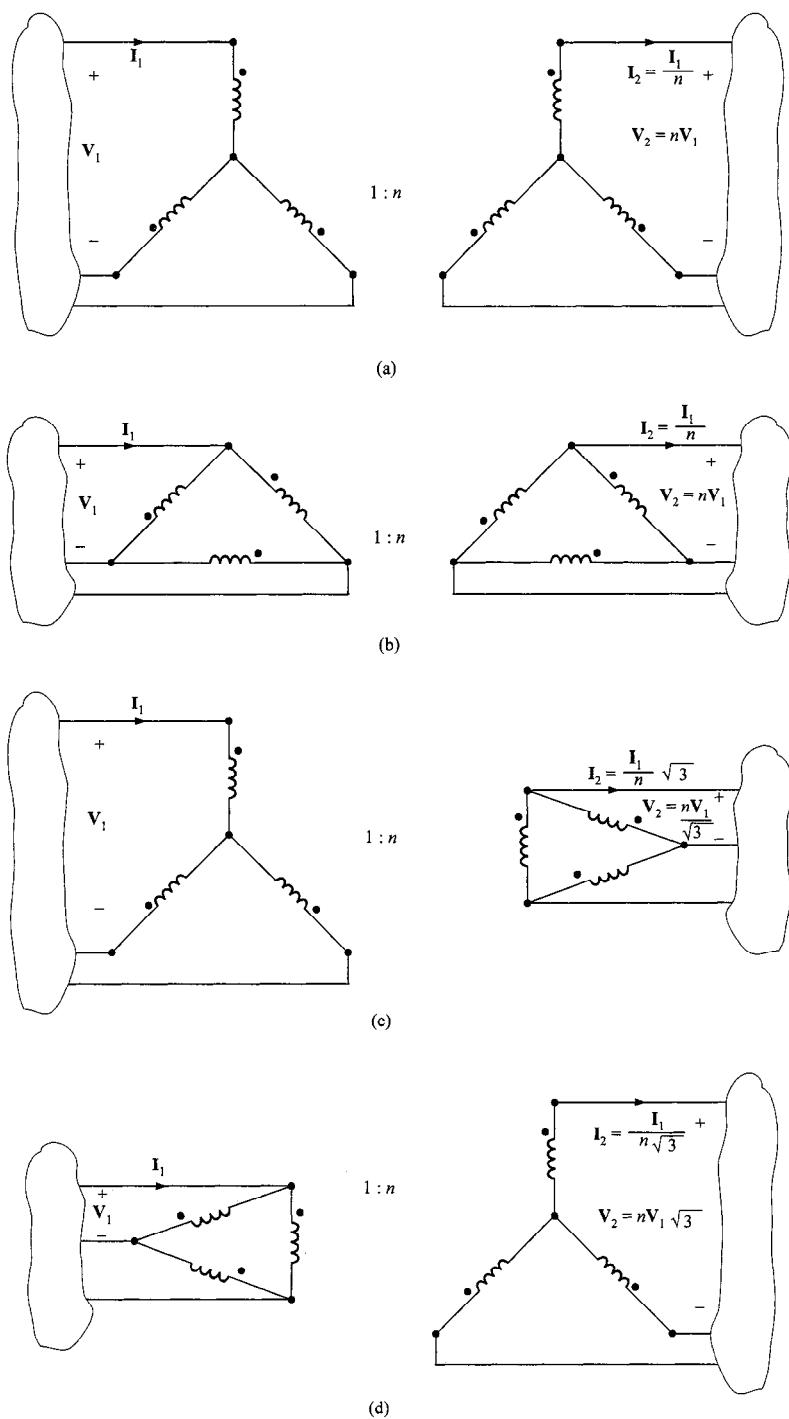


FIGURA 12.22 Conexión de transformador trifásico.

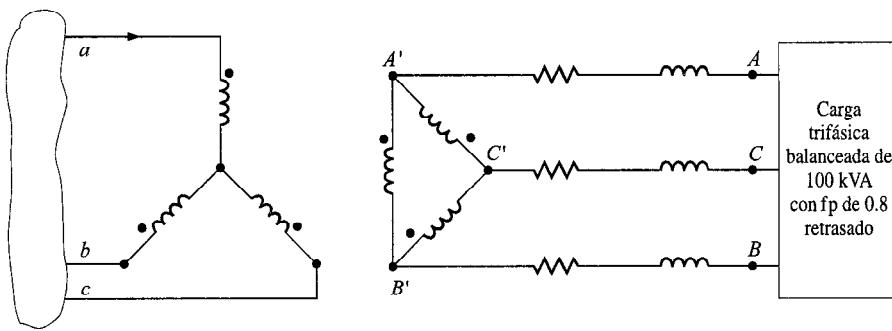


FIGURA 12.23 Red utilizada en el ejemplo 12.16.

y de aquí,

$$I_L = \frac{100\,000}{200\sqrt{3}} \\ = 288.7 \text{ A}$$

Si ahora suponemos que $V_{AN} = 115.5 \angle 0^\circ$ V y notamos que

$$\theta = \cos^{-1}(fp) = \cos^{-1}(0.8) = \pm 36.9^\circ$$

como el factor de potencia está retrasado,

$$I_{A'A} = 288.7 \angle -36.9^\circ \text{ A}$$

Entonces en el extremo transmisor del alimentador,

$$V_{A'N'} = (0.01 + j0.02) I_{A'A} + 115.5 \angle 0^\circ \\ = 121.3 \angle 1.36^\circ \text{ V}$$

Así, el voltaje de línea en el lado de bajo voltaje del transformador es

$$V_L = \sqrt{3} V_{A'N'} = 210.1 \text{ V}$$

Los transformadores de potencia trifásica se clasifican en el voltaje de línea, haciendo caso omiso de las conexiones Y o delta internas. Como se supone que el transformador es ideal, el voltaje de línea en el lado de alto voltaje del transformador es

$$V_{LHV} = \left(\frac{12\,000}{208} \right) (210.1) \\ = 12.12 \text{ kV}$$

De manera similar,

$$I_{LHV} = \left(\frac{208}{12\,000} \right) (288.7)$$

$$= 5.004 \text{ A}$$

Es interesante notar que la razón de vueltas por fase del transformador es $(12\,000/\sqrt{3})/208$. Sin embargo, el voltaje de fase en el lado de alto voltaje del transformador es línea a neutro debido a la conexión en Y. Por tanto, si el voltaje de línea se determina utilizando la razón de vueltas por fase, obtenemos

$$V_{LHV} = \sqrt{3} \left(\frac{12\,000/\sqrt{3}}{208} \right) V_{LLV}$$

y el factor $\sqrt{3}$ se cancela. Consideraciones similares afectan la corriente.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

Ejemplo 12.16 Un transformador trifásico balanceado se clasifica en 1 000 MVA 25 kVΔ: 500 kVY. La carga trifásica balanceada conectada a las terminales de alto voltaje del

transformador consume 750 MW, fp de 0.8 retrasado, a 500 kV. Determine la magnitud de las corrientes de línea en la fuente y en la carga.

Resp.: $I_S = 21.65 \text{ kA}$, $I_L = 1083 \text{ A}$.

12.8 Consideraciones de seguridad

Los transistores son de uso general en el equipo electrónico moderno para proporcionar un suministro de potencia de bajo voltaje. Como ejemplos, en sistemas de cómputo un nivel común de voltaje es 5 V cd, los radios portátiles usan 9 V cd, y los equipos militares y aéreos operan a 28 V cd. Cuando los transformadores se usan para conectar esos circuitos de transistores de bajo voltaje a la línea de potencia, hay por lo general menos peligro de descargas en el sistema debido a que el transformador proporciona aislamiento eléctrico a causa de la línea de voltaje. Sin embargo, desde el punto de vista de la seguridad, un transformador, aunque útil en muchas situaciones, no es una solución absoluta. Siempre debemos estar atentos cuando trabajamos con cualquier equipo eléctrico para minimizar los peligros de una descarga eléctrica.

En equipo electrónico de potencia o sistemas de potencia el peligro es muy serio. El problema en esos casos es el del alto voltaje de una fuente de baja impedancia, y debemos recordar constantemente que el voltaje de línea en nuestra casa puede ser letal.

Considere ahora el siguiente ejemplo que ilustra un peligro oculto que puede sorprender incluso a un profesional experimentado, con consecuencias devastadoras.

EJEMPLO 12.17

Dos casas adyacentes, A y B, se alimentan desde transformadores diferentes como se muestra en la figura 12.24a. Una sobretensión en la línea de

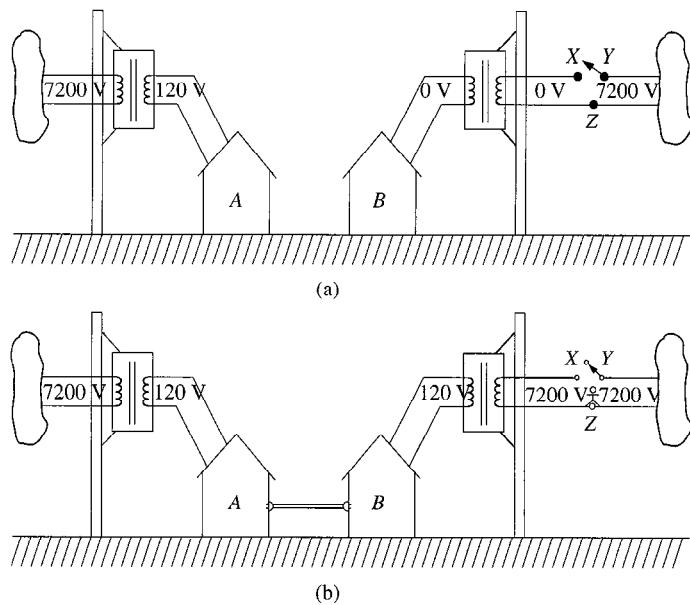


FIGURA 12.24 Diagramas utilizados en el ejemplo 12.17.

alimentación de la casa *B* ha ocasionado que se abra el interruptor del circuito *X–Y*. La casa *B* ahora no tiene potencia. En un intento por ayudar a su vecino, el habitante de la casa *A* se ofrece a conectar un largo cordón de extensión entre un tomacorriente de pared en la casa *A* y un tomacorriente de pared en la casa *B*, como se muestra en la figura 12.24b. Después, el instalador de líneas de la compañía eléctrica llega a reconectar el interruptor de circuito. ¿Está el instalador de líneas en algún peligro en esta situación?

S o l u c i ó n Desconocedor de la conexión con el cordón de extensión, el instalador de líneas cree que no hay voltaje entre los puntos *X* y *Z*. Sin embargo, debido a la conexión eléctrica entre las dos casas, existen 7 200V entre los dos puntos, y el instalador de líneas puede lesionarse seriamente o incluso morir si hace contacto con este alto voltaje.

12.9 Aplicaciones

Los siguientes ejemplos demuestran varias aplicaciones de los transformadores. Primero visitaremos nuevamente el problema de transmisión de potencia a largas distancias e ilustraremos el importante papel que desempeña el transformador en esa aplicación. Entonces examinamos el uso de un transformador en la distribución de potencia a nuestras casas y, finalmente, consideraremos su uso en la recarga de baterías de una calculadora de mano.

E J E M P L O 12.18

Investigaremos dos maneras para entregar potencia trifásica de 120 MW desde una estación generadora a una distancia de 200 km con una carga monofásica de 240 V con al menos 97% de eficiencia.

Consideraremos dos casos, es decir, sin y con un transformador.

S O L U C I Ó N

Caso 1. Como la potencia monofásica es 40 MW, la corriente por fase es

$$I = \frac{P_{1\phi}}{V} = \frac{40M}{240} = 166.67 \text{ kA}$$

como se muestra en la figura 12.25. Dado un voltaje de carga de 240 V, el voltaje del generador no debe ser de más de

$$V_S = \frac{V_{\text{carga}}}{0.97} = 247.42 \text{ V}$$

y la caída de voltaje debida a la resistencia de línea no más que

$$V_{\text{línea}} = (0.03)V_S = 7.42 \text{ V}$$

Por tanto, la resistencia de línea es

$$R_{\text{línea}} = \frac{V_{\text{línea}}}{I} = 44.54 \mu\Omega$$

sobre la distancia de 200 km. La resistencia de línea puede escribirse como

$$R_{\text{línea}} = \rho \frac{L}{A}$$

donde ρ es la resistividad del cable, L es su longitud (200 km) y A es su área de sección transversal. Los valores típicos de ρ son aproximadamente $8 \mu\Omega\text{cm}$. Dados esos valores, el cable requerido tiene un área de sección transversal de

$$A = \rho \frac{L}{R_{\text{línea}}}$$

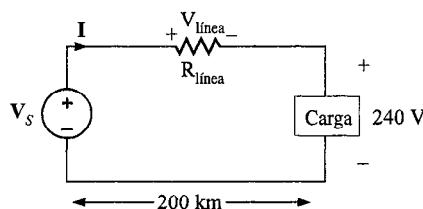


FIGURA 12.25 Modelo monofásico para el caso 1.

o

$$A = 355.2 \text{ m}^2$$

que corresponde a un diámetro de 21.3 m o 70 pies! Obviamente, esto no es factible.

Caso 2. Tratemos de transmitir la potencia a 200 kV y reducir el voltaje a 240 V con un transformador de disminución en la carga, como se muestra en la figura 12.26. Ahora la corriente por fase es sólo

$$I = \frac{P_{1\phi}}{V} = \frac{40M}{200k} = 200 \text{ A}$$

Si empleamos un cable de transmisión estándar que tiene un área de sección transversal de 1.75 pulg² y una resistencia por unidad de longitud de 0.07 Ω/km, la caída de voltaje en la línea es

$$V_{\text{línea}} = R_{\text{línea}}I = (0.07)(200)(200) = 2800 \text{ V}$$

La eficiencia de la transmisión es

$$\text{Eficiencia} = \left(\frac{200k - 2.8k}{200k} \right) 100\% = 98.6\%$$

Ahora tenemos una transmisión de potencia muy eficiente (económica) usando un cable relativamente pequeño y por consiguiente económico. Este es el porqué las compañías utilizan altos voltajes para la distribución de potencia.

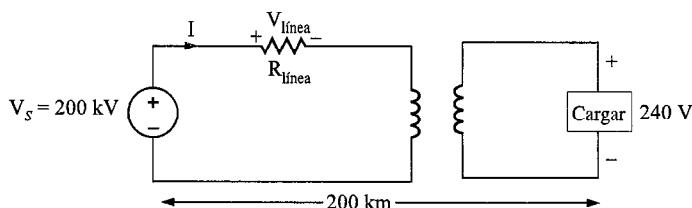


FIGURA 12.26 Modelo monofásico para el caso 2.

E J E M P L O 12.19

El transformador local de la figura 12.27 proporciona la última disminución de voltaje en un sistema de distribución de potencia. Una vista común en los postes de las compañías eléctricas en áreas residenciales es un transformador monofásico que típicamente tiene 13.8 kV de línea a neutro en su bobina primaria, y una bobina secundaria de derivación central proporciona 120 V y 240 V para servir a varias residencias. Encontremos la razón de vueltas necesarias para producir el voltaje secundario de 240 V. Suponiendo que el transformador proporciona un servicio de 200 A a cada diez casas, determinemos la clasificación mínima de potencia para el transformador y la corriente máxima en el primario.

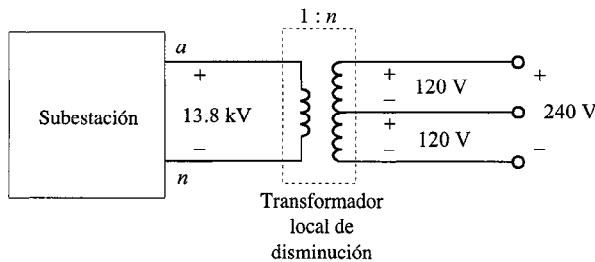


FIGURA 12.27 Subcicuito del transformador local con derivación central.

S O L U C I Ó N La razón de vueltas está dada por

$$n = \frac{V_2}{V_1} = \frac{240}{13\,800} = \frac{1}{57.5}$$

Si I_H es la corriente máxima por casa, entonces la corriente primaria máxima es

$$I_1 = nI_2 = n(10I_H) = 34.78 \text{ A}$$

La potencia máxima entregada al primario es entonces

$$S_1 = V_1 I_1 = (13\,800)(34.78) = 480 \text{ kVA}$$

Por tanto, el transformador debe tener una clasificación de potencia de al menos 480 kVA.

E J E M P L O 12.20

En la figura 12.28 se muestra un diagrama simplificado del circuito para un recargador de calculadora. Éste opera a 120 V rms a 60 Hz y produce una salida de cd de 9 V. La conversión a cd se realiza por el subcicuito detector de pico, que simplemente produce un voltaje de cd igual al valor pico de la señal de ca que entra a él. Determinemos la razón de vueltas requerida para el transformador.

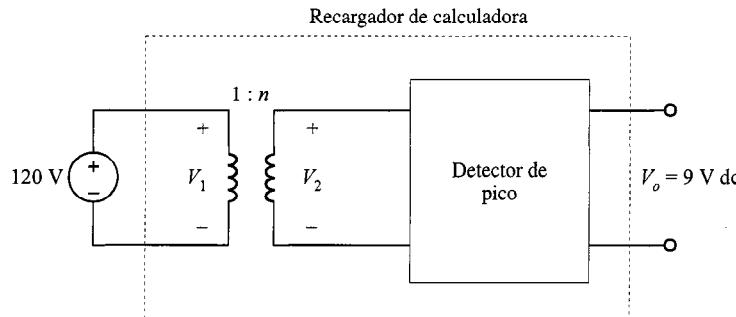


FIGURA 12.28 Diagrama simplificado para un recargador de calculadora.

SOLUCIÓN Para una salida de 9 V, la entrada al detector de picos debe ser 9 V, o

$$v_2(t) = 9 \operatorname{sen}(120\pi)t$$

que tiene un valor rms de

$$V_2 = \frac{V_p}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} = 6.36 \text{ V rms}$$

Por tanto, la razón de vueltas requerida es

$$n = \frac{V_2}{V_1} = \frac{6.36}{120} = \frac{1}{18.86}$$

12.10 Diseño de circuitos

El siguiente ejemplo simple ilustra una técnica para emplear un transformador en una configuración que extenderá la vida de una serie de luces para árbol navideño.

EJEMPLO 12.21

Los focos en una serie de luces navideñas normalmente operan a 120 V rms. Sin embargo, duran mucho más si en su lugar se conectan a 108 V rms. Usando un transformador de 120 V-12 V, diseñemos un autotransformador que proporcionará 108 V rms a los focos.

SOLUCIÓN Para reducir el voltaje de 120 V a 108 V se requiere que las dos bobinas se conecten de manera que sus voltajes estén en oposición uno con el otro como se muestra en la figura 12.29. En este arreglo, el voltaje a través de ambas bobinas es

$$V_o = V_1 - V_2 = 120 - 12 = 108 \text{ V rms}$$

y las luces están conectadas simplemente a través de las dos bobinas.

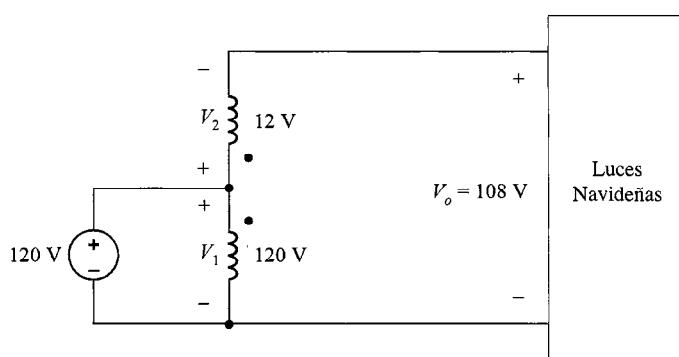


FIGURA 12.29 Autotransformador para luces de árbol navideño de bajo voltaje.

12.11 Resumen

Se han presentado circuitos acoplados magnéticamente y discutido las ecuaciones del circuito que describen esos elementos. La inductancia mutua ha sido definida y se ha adoptado una convención de puntos para indicar la relación física de las bobinas a fin de simplificar la convención de signos para los términos mutuos en las ecuaciones del circuito. Se ha llevado a cabo un análisis de energía para bobinas mutuamente acopladas, el cual conduce a una definición del coeficiente de acoplamiento entre bobinas.

Fueron descritas las bobinas acopladas con buen material magnético y presentado como un transformador ideal. Finalmente, se empleó el teorema de Thévenin para derivar circuitos equivalentes para el transformador y su circuito primario o secundario para simplificar el análisis de circuitos que contienen transformadores ideales.

Se usó el programa de análisis de circuitos de PSPICE para analizar circuitos que contienen inductancia mutua y transformadores ideales.

También se presentaron los autotransformadores y los transformadores trifásicos. Finalmente, se discutieron algunas consideraciones de seguridad.

Puntos clave

- Un transformador es un dispositivo que contiene dos o más bobinas que están magnéticamente acopladas.
- Se dice que las bobinas inductoras están mutuamente acopladas si comparten un flujo magnético común.
- La convención de puntos se usa para determinar si el flujo producido por una corriente que fluye a través de una bobina inductora se sumará o se opondrá al flujo producido por otra bobina inductora.
- Un transformador ideal es uno en el que la permeabilidad del núcleo y la conductividad del devanado se suponen infinitas.
- El material del PSPICE presentado a lo largo del texto puede aplicarse a circuitos mutuamente acoplados y a circuitos que contienen transformadores ideales.
- El uso de un autotransformador puede ser un enfoque de costo efectivo en algunas aplicaciones de transformadores.
- Los transformadores trifásicos son comúnmente utilizados en cuatro conexiones.

Problemas

12.1. Dada la red de la figura P12.1,

- Encuentre las ecuaciones para $v_a(t)$ y $v_b(t)$.
- Encuentre las ecuaciones para $v_c(t)$ y $v_d(t)$.

12.2. Encuentre la ganancia de voltaje V_o/V_s de la red que se muestra en la figura P12.2.

12.3. Encuentre V_o en la red de la figura P12.3.

12.4. Escriba las ecuaciones de anillo para la red de la figura P12.4.

12.5. Escriba las ecuaciones de anillo para la red que se muestra en la figura P12.5.

12.6. Escriba las ecuaciones de anillo para la red que se muestra en la figura P12.6.

12.7. Encuentre V_o en la red de la figura. P12.7.

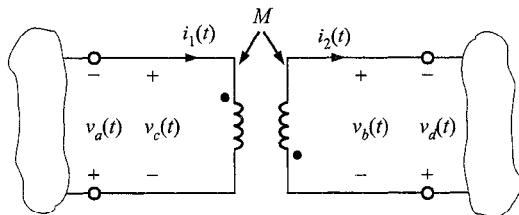


FIGURA P12.1

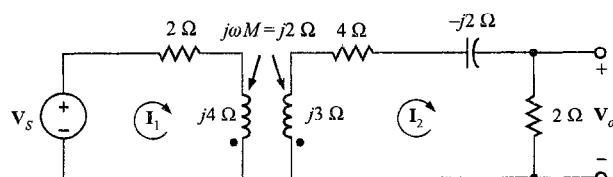


FIGURA P12.2

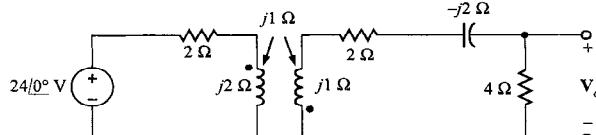


FIGURA P12.3

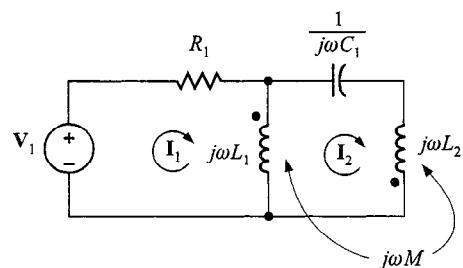


FIGURA P12.4

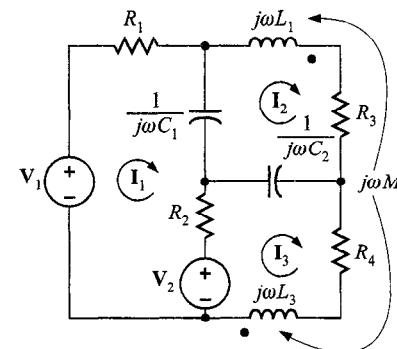


FIGURA P12.5

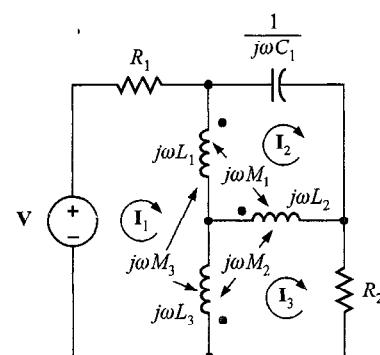


FIGURA P12.6

12.8. Encuentre V_o en la red de la figura P12.8.

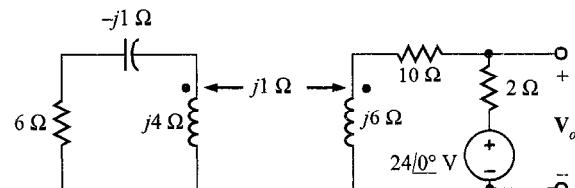


FIGURA P12.8

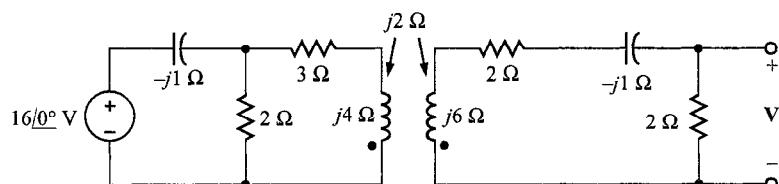


FIGURA P12.7

12.9. Encuentre V_o en el circuito de la figura P12.9.

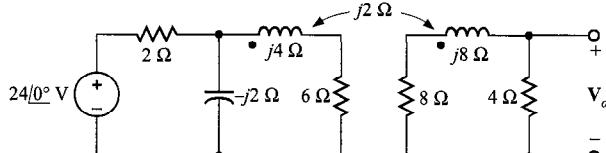


FIGURA P12.9

12.10. Encuentre V_o en la red de la figura P12.10.

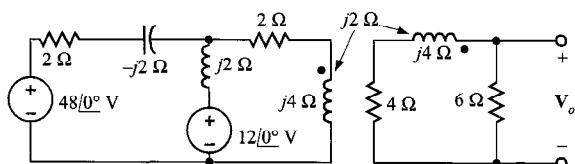


FIGURA P12.10

12.11. Encuentre I_o en el circuito de la figura P12.11.

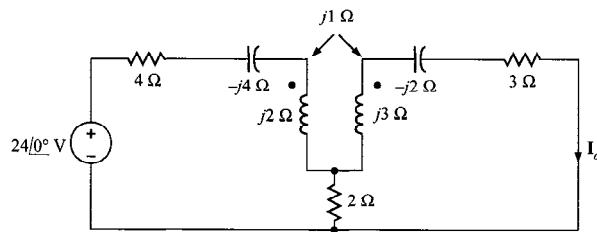


FIGURA P12.11

12.12. Dos bobinas en una red están posicionadas de modo que haya 100% de acoplamiento entre ellas. Si la inductancia de una bobina es 10 mH y la inductancia mutua es 6 mH, calcule la inductancia de la otra bobina.

12.13. Se sabe que las corrientes en las bobinas acopladas magnéticamente que se muestran en la figura P12.13 son $i_1(t) = 8 \cos(377t - 20^\circ)$ mA e $i_2(t) = 4 \cos(377t - 50^\circ)$ mA. Los valores de la bobina son $L_1 = 2$ H, $L_2 = 1$ H y $k = 0.6$. Determine $v_1(t)$ y $v_2(t)$.

12.14. Determine la energía almacenada en las bobinas acopladas del problema 12.13 a $t = 1$ ms.

12.15. Determine la impedancia vista por la fuente en la red que se muestra en la figura P12.15.

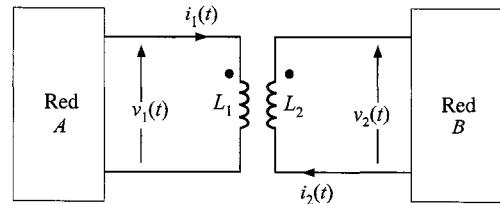


FIGURA P12.13

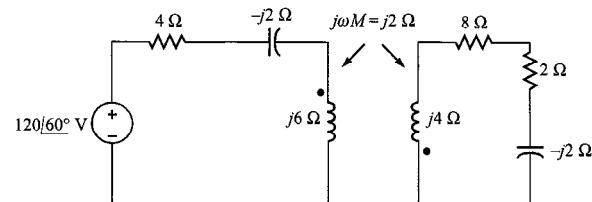


FIGURA P12.15

12.16. Dada la red que se muestra en la figura P12.16, determine el valor del capacitor C que ocasionará que la impedancia reflejada al primario sea puramente resistiva. $\omega = 60$ Hz.

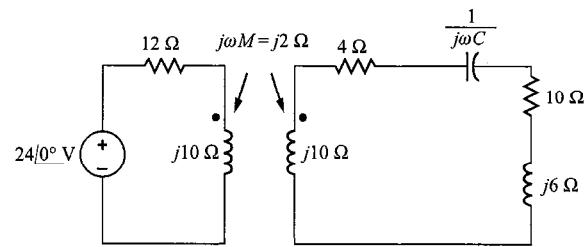


FIGURA P12.16

12.17. Calcule la impedancia de entrada de la red de la figura P12.17.

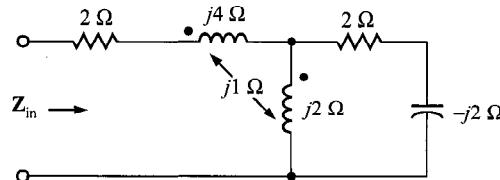


FIGURA P12.17

12.18. Analice la red de la figura P12.18 y determine si puede encontrarse un valor de X_c tal que el voltaje de salida sea igual a dos veces el voltaje de entrada.

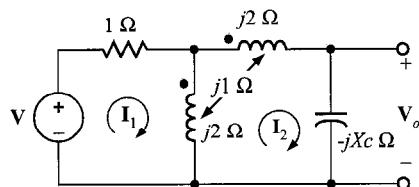


FIGURA P12.18

- 12.19.** Use el PSPICE para encontrar \mathbf{V}_o en la red de la figura P12.19. La frecuencia de la fuente es 400 Hz y $k_{12} = 0.8$

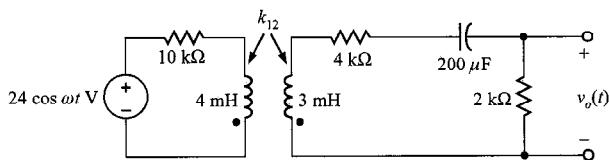


FIGURA P12.19

- 12.20.** Dada la red de la figura P12.20, encuentre las corrientes $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_o(t)$ usando el PSPICE.

- 12.21.** Repita el problema 12.20 si la frecuencia de la fuente es 400 Hz.

- 12.22.** Use PSPICE para encontrar las corrientes \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 e \mathbf{I}_3 en la red de la figura P12.22. La frecuencia de las fuentes es 60 Hz. $k = 0.6$

- 12.23.** Determine la impedancia de entrada vista por la fuente en el circuito de la figura P12.23 si $\mathbf{Z}_L = 10 \angle 30^\circ \Omega$.

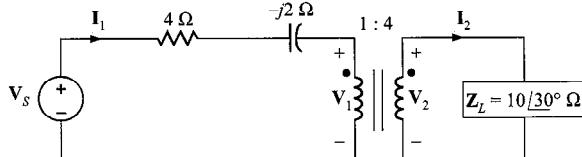


FIGURA P12.23

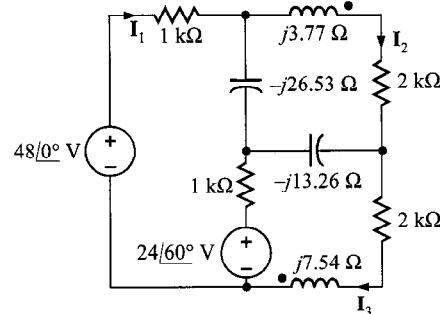


FIGURA P12.22

- 12.24.** Dado que $\mathbf{V}_o = 48 \angle 30^\circ \text{ V}$ en el circuito que se muestra en la figura P12.24, determine \mathbf{V}_s .

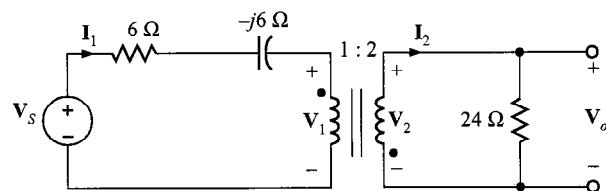


FIGURA P12.24

- 12.25.** Si la fuente de voltaje \mathbf{V}_s en el circuito del problema 12.24 es $50 \angle 0^\circ \text{ V}$, determine \mathbf{V}_o .

- 12.26.** Encuentre todas las corrientes y voltajes en la red de la figura P12.26.

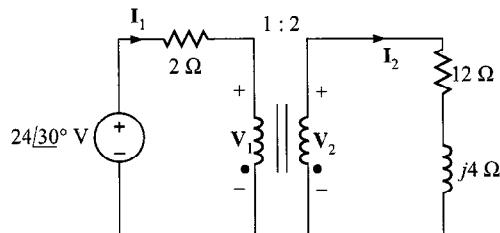


FIGURA P12.26

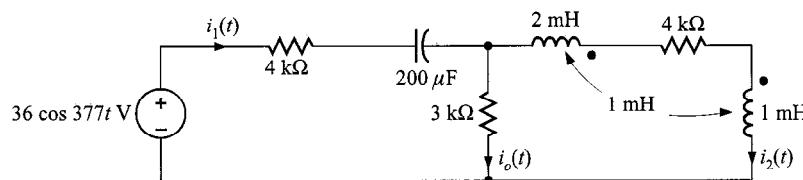


FIGURA P12.20

12.27. Determine la impedancia de entrada vista por la fuente en la red que se muestra en la figura P12.27.

12.28. Determine la impedancia de entrada vista por la fuente en la red que se muestra en la figura P12.28.

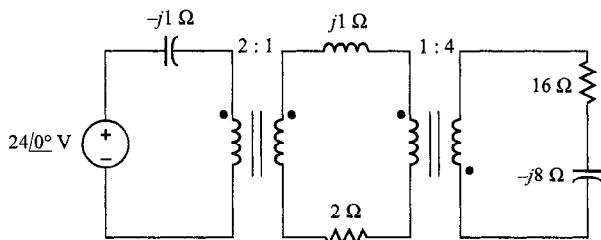


FIGURA P12.28

12.29. Encuentre la corriente I en la red de la figura P12.29.

12.30. Encuentre la corriente I en la red de la figura P12.30.

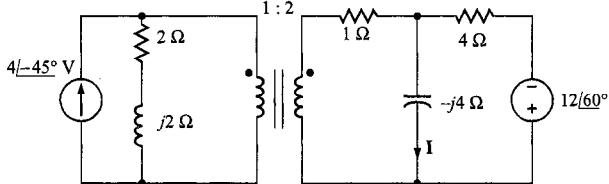


FIGURA P12.30

12.31. Encuentre el voltaje V_o en la red de la figura P12.31.

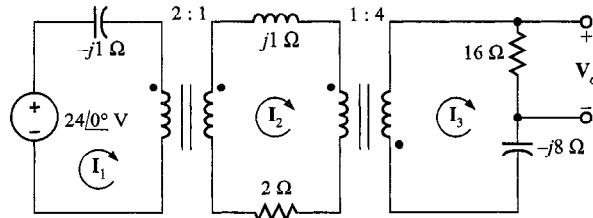


FIGURA P12.31

12.32. Encuentre V_o en el circuito de la figura P12.32.

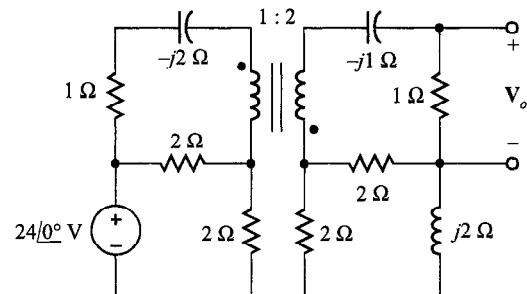


FIGURA P12.32

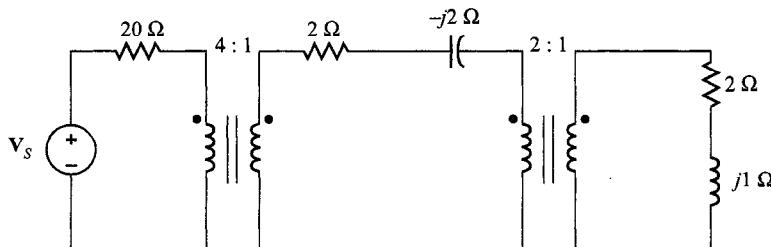


FIGURA P12.27

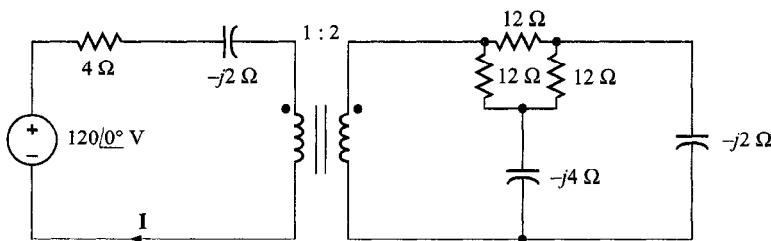


FIGURA P12.29

12.33. En el circuito de la figura P12.33, si $I_x = 6 \angle 45^\circ$ A, encuentre V_o .

12.34. En la red de la figura P12.34, si $I_1 = 4 \angle 0^\circ$ A, encuentre V_S .

12.35. Encuentre V_o en la red de la figura P12.35.

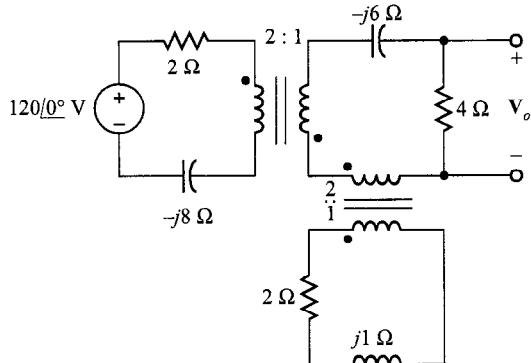


FIGURA P12.35

12.36. Encuentre V_o en el circuito de la figura P12.36.

12.37. La etapa de salida de un amplificador en un viejo radio será igualada a la impedancia de una bocina como se muestra en la figura P12.37. Si la impedancia de la bocina es 8Ω y el amplificador requiere una impedancia de carga de $3.2 \text{ k}\Omega$, determine la razón de vueltas del transformador ideal.

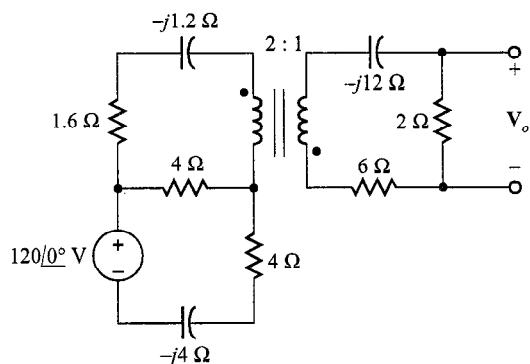


FIGURA P12.36

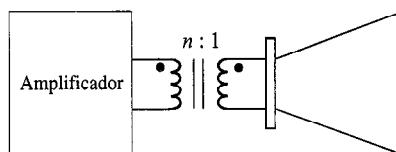


FIGURA P12.37

12.38. Determine la potencia promedio entregada a cada resistencia en la red que se muestra en la figura P12.38.

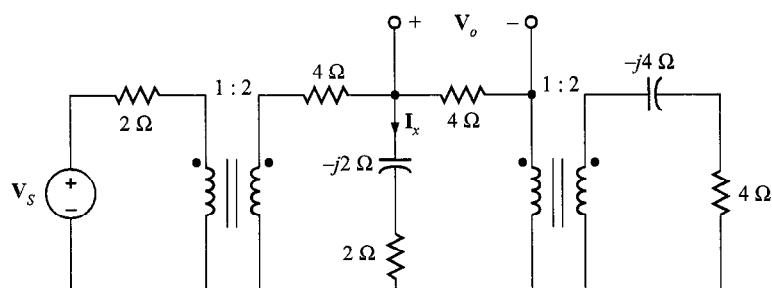


FIGURA P12.38

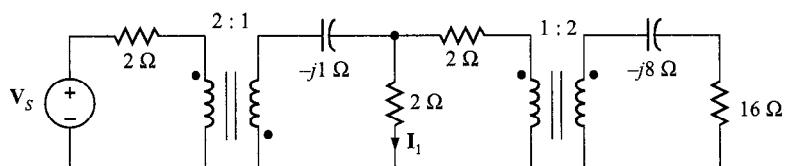


FIGURA P12.34

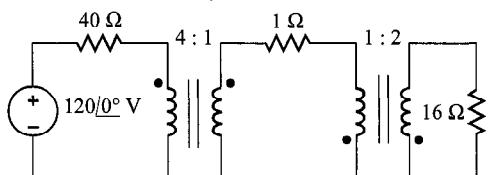


FIGURA P12.38

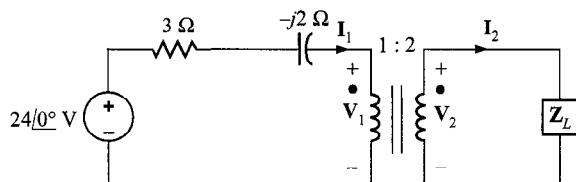


FIGURA P12.41

12.39. Derive una red equivalente para el circuito de la figura P12.39 y utilícelo para determinar la corriente I_1 .

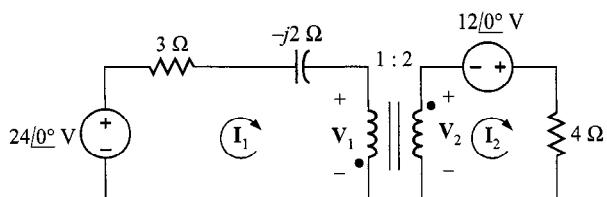


FIGURA P12.39

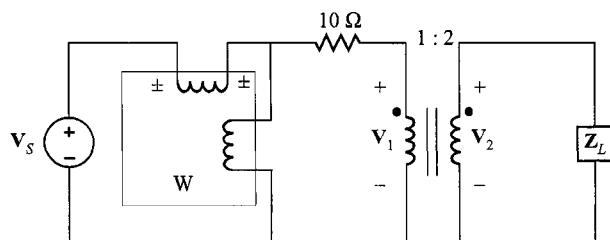


FIGURA P12.42

12.40. Forme un circuito equivalente para el transformador y el primario en la red que se muestra en la figura P12.40 y utilícelo para determinar I_2 .

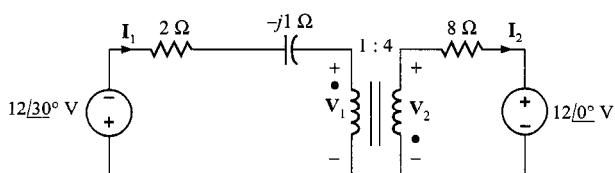


FIGURA B12.40

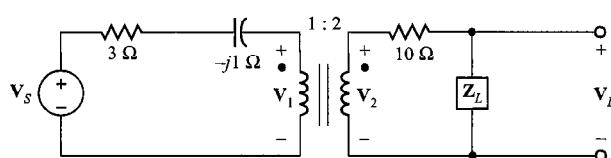


FIGURA P12.43

12.41. En la red que se muestra en la figura P12.41, determine el valor de la impedancia de carga para transferencia de potencia máxima.

12.42. En el circuito que se muestra en la figura P12.42, si $V_2 = 120 \angle 0^\circ$ V rms y la carga Z_L absorbe 400 W con f_p de 0.9 retrasado, determine la lectura del vatímetro.

12.44. Encuentre V_s en la red de la figura P12.44.

12.45. Encuentre V_S en la red de la figura P12.45.

12.46. Determine la lectura del watímetro en la red de la figura P12.46.

12.47. Determine la impedancia de entrada del circuito que se muestra en la figura P12.47.

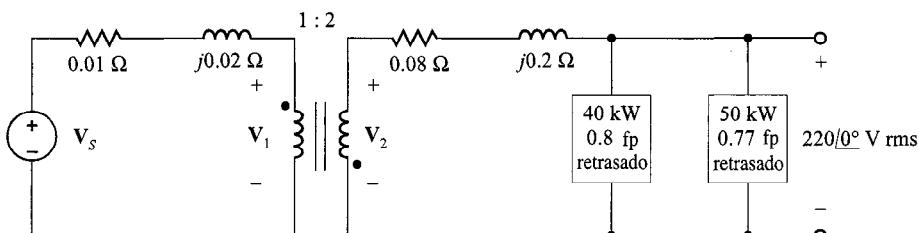


FIGURA P12-44

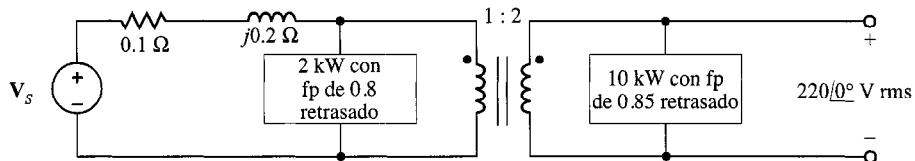


FIGURA P12.45

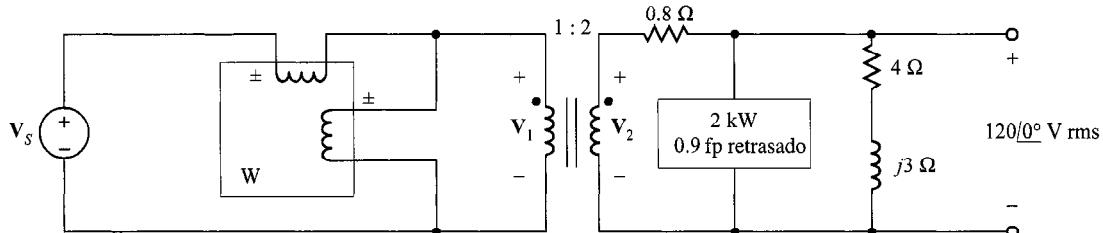


FIGURA P12.46

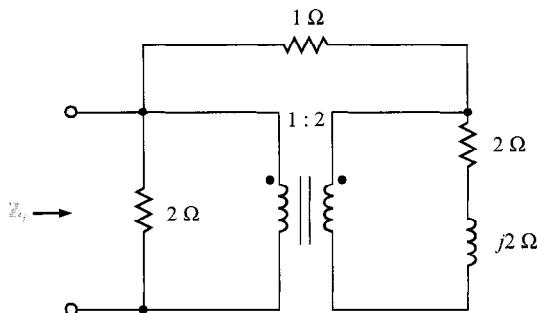


FIGURA P12.47

12.48. Dado el circuito de la figura P12.48, deseamos encontrar el valor de la carga R_o para transferencia de potencia máxima, y el valor de la potencia máxima entregada a esta carga.

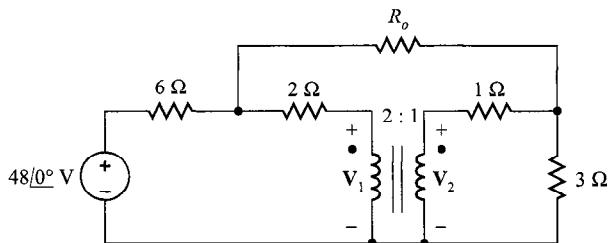


FIGURA P12.48

12.49. Encuentre V_o en la red de la figura P12.49.

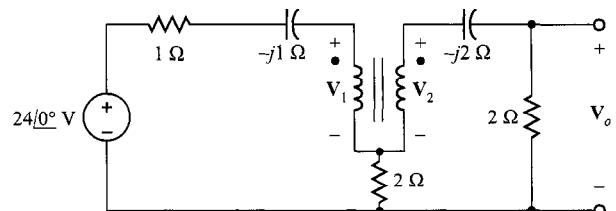


FIGURA P12.49

12.50. Use el PSPICE para encontrar I en la red de la figura P12.50.

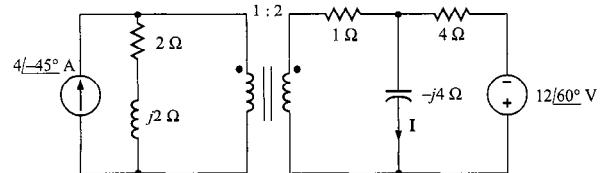


FIGURA P12.50

12.51. Use el PSPICE para encontrar I en la red de la figura P12.51.

12.52. Forme un circuito equivalente para el transformador y el primario en la red que se muestra en la figura P12.52, y utilice este circuito y el PSPICE para encontrar la corriente I_2 .

12.53. El diagrama de la figura P12.53 representa un sistema de distribución de potencia de la planta generadora a una sola residencia. La potencia se genera a $20\,000 \text{ V}$ y después pasa a través de varios transformadores antes de alcanzar al consumidor.

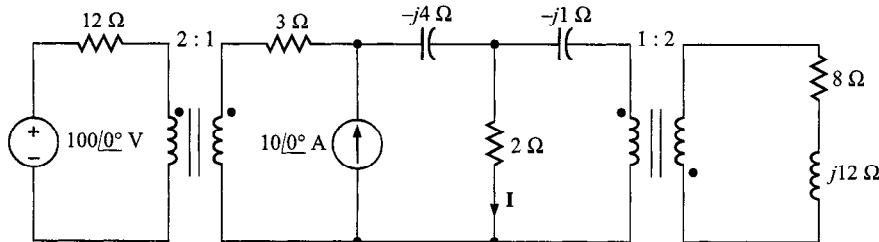


FIGURA P12.51

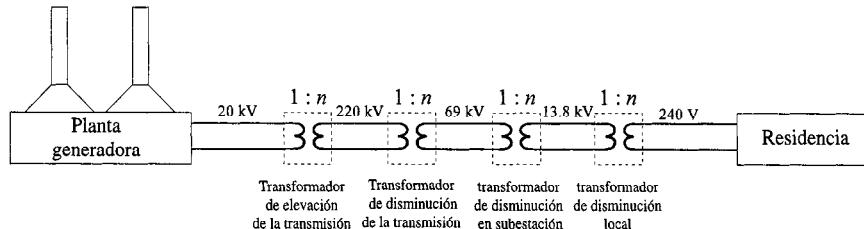


FIGURA P12.53

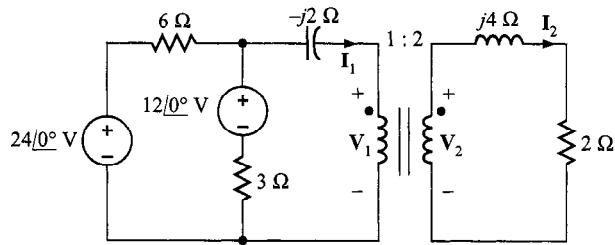


FIGURA P12.52

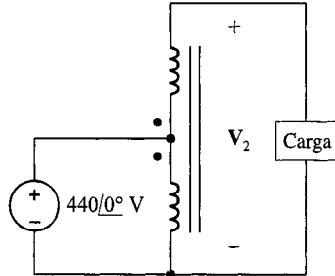


FIGURA P12.56

Encuentre la razón de vuelta requerida para cada transformador.

12.54. Un transformador de dos devanados de 36 kVA , $2400/240 \text{ V}$, se conectará como autotransformador para suministrar 2160 V a una carga. Dibuje un esquema de la conexión del transformador y determine la clasificación en kVA del autotransformador

12.55. Un transformador de dos devanados de $440/220 \text{ V}$, clasificado como 15 kVA , se conecta como autotransformador para disminuir el voltaje de 660 V a 220 V . Determine la clasificación de volt–ampere del autotransformador y compárela con la del transformador original.

12.56. Un transformador de dos devanados de $440/110 \text{ V}$, clasificado a 20 kVA , se conecta como se muestra en la figura P12.56. Determine el voltaje V_2 y la clasificación en kVA del transformador en la configuración mostrada.

12.57. Un banco de transformadores monofásicos se conecta en una Y de alto voltaje a una configuración delta de bajo voltaje. Cada transformador está clasificado a 60 kVA , $13.2 \text{ kV}/240 \text{ V rms}$. Si los transformadores sirven a una carga trifásica balanceada que consume 66.67 kVA con f_p de 0.75 retrasado, ¿cuáles son las magnitudes de las corrientes de línea en la fuente y en la carga?

12.58. Un transformador trifásico balanceado está clasificado a $240\Delta/208Y \text{ V rms}$. El transformador sirve a una carga trifásica balanceada que consume 12.5 kVA con f_p de 0.8 retrasado. La magnitud del voltaje de línea en la carga es 200 V rms y la impedancia de línea es $0.1 + j0.2 \Omega$. Encuentre la magnitud de la corriente de línea en la carga y la magnitud del voltaje de línea en el primario del transformador.

12.59. Usando un transformador de 200 V/50 V, diseñe un autotransformador que convierta 200 V a

- a) 250 V
- b) 150 V
- c) 40 V

12.60. Encuentre I_1 e I_2 en la red que se muestra en la figura P12.60.

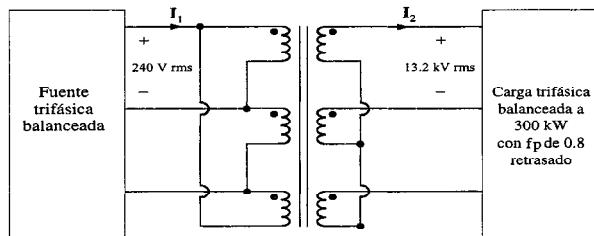


FIGURA P12.60

12.61. Un transformador trifásico balanceado de $13.2\text{kVY}/240\Delta$ V rms se usa en la red de la figura P12.61 para abastecer una carga. La magnitud del voltaje de línea en la carga es 230 V rms. Encuentre la magnitud de la corriente de línea en la carga y la magnitud del voltaje de línea en el primario del transformador.

12.62. Tres transformadores con la vuelta central del devanado de bajo voltaje derivada y conectada a una terminal exterior (devanado de derivación central) se muestran en la figura P12.62. La razón de cada transformador es 10 a 1 (10:1 de izquierda a derecha en el dibujo). Los tres transformadores se conectan a un banco de transformadores trifásico Y: Δ y después se conectan a un sistema trifásico balanceado de 12 460 volts. Dado que el voltaje $V_{ab} = 12\,460 \angle 50^\circ$ V, determine los siguientes voltajes:

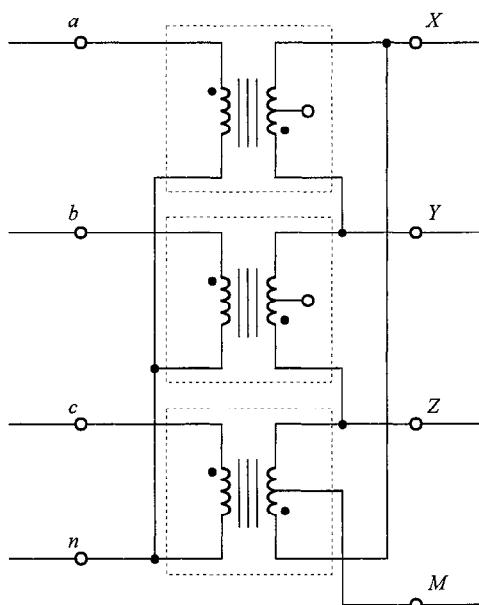


FIGURA P12.62

$$\begin{array}{ll} \mathbf{V}_{an} & \mathbf{V}_{ZX} \\ \mathbf{V}_{bn} & \mathbf{V}_{ZM} \\ \mathbf{V}_{XY} & \mathbf{V}_{XM} \\ \mathbf{V}_{YZ} & \mathbf{V}_{YM} \end{array}$$

12.63. Un transformador trifásico balanceado está clasificado a $240\Delta/120\Delta$ V rms y conectado en $\Delta-\Delta$. La carga trifásica balanceada consume 10 kVA con fp de 0.8 retrasado. La magnitud del voltaje de línea en la carga es 110 V rms y la impedancia de línea es $0.1 + j0.2 \Omega$. Encuentre la magnitud de la corriente de línea en la carga y la magnitud del voltaje de línea en el primario del transformador.

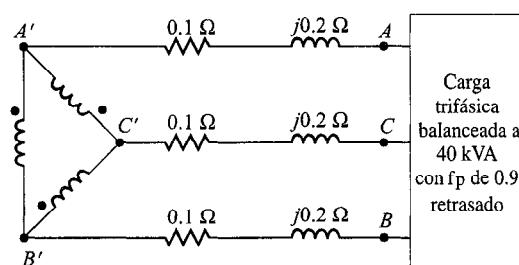
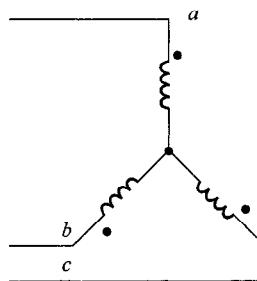
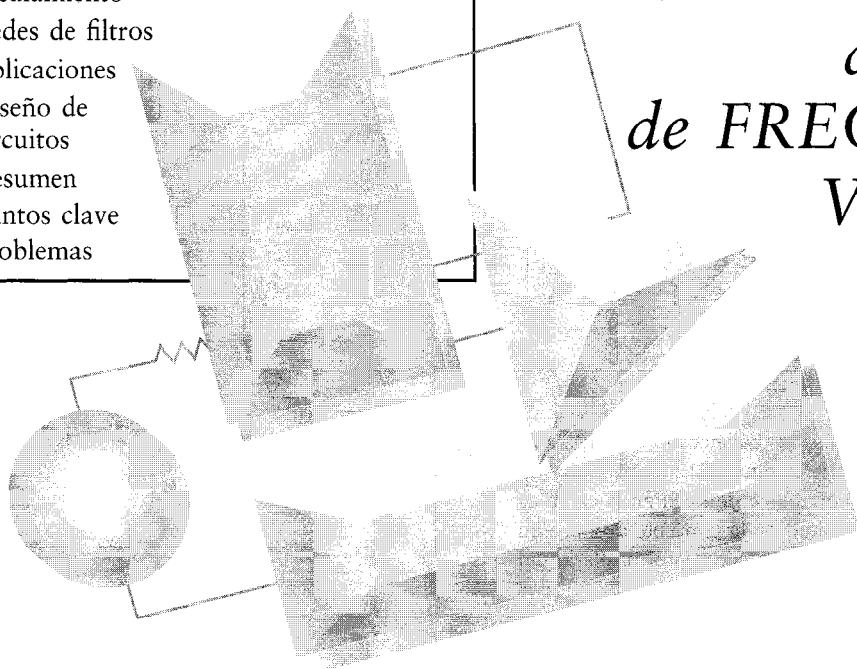


FIGURA P12.61

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

- 13.1** Análisis de la respuesta de frecuencia variable
- 13.2** Análisis de frecuencia senoidal
- 13.3** Circuitos resonantes
- 13.4** Escalamiento
- 13.5** Redes de filtros
- 13.6** Aplicaciones
- 13.7** Diseño de circuitos
- 13.8** Resumen
Puntos clave
Problemas

CAPÍTULO
13**FUNCIONAMIENTO
de la RED
de FRECUENCIA
*VARIABLE***

En el capítulo 9 demostramos que una red que contiene un capacitor y una bobina opera de manera diferente si se cambia de la frecuencia de la red de potencia de 60 Hz de Estados Unidos a la frecuencia de aviación de 400 Hz. Este fenómeno, aunque no es sorprendente ya que la impedancia de ambos elementos de circuito depende de la frecuencia, indica que si la frecuencia de las fuentes de la red varía en algún rango, podemos esperar que también la red experimente variaciones en respuesta a esos cambios de frecuencia.

Consideré por un momento su amplificador estereofónico. La señal de entrada contiene ondas de sonido con frecuencias que van de principio a fin; y, sin embargo, el amplificador debe ampliar cada componente de frecuencia exactamente en la misma proporción a fin de alcanzar una reproducción perfecta del sonido. Esto no es una tarea trivial; y cuando usted compra un muy buen amplificador,

parte del precio refleja el diseño necesario para lograr una amplificación constante sobre la amplia gama de frecuencias.

En este capítulo examinaremos el funcionamiento de redes eléctricas cuando son excitadas por fuentes de frecuencia variable. Estos efectos son importantes en el análisis y diseño de redes reales como filtros, sintonizadores y amplificadores que tienen una extensa aplicación en sistemas de comunicación y de control. La terminología y las técnicas del análisis de respuesta de frecuencia se introducen incluyendo gráficas estándar (gráficas de Bode) para describir gráficamente el funcionamiento de la red. En particular, la construcción e interpretación de la gráfica de Bode se discuten en detalle.

Se introduce el concepto de resonancia con referencia a la selectividad en frecuencia y sintonía. Se definen y discuten los diferentes parámetros utilizados

para definir la selectividad, tales como el ancho de banda, la frecuencia de corte y el factor de calidad. También se presenta el escalamiento de la red para magnitud y fase.

Se examinan redes con propiedades de filtrado especiales. Específicamente, se discuten los filtros pasa

bajas, pasa altas, pasa banda y rechazo de banda. Se presentan técnicas para diseñar filtros activos (que contienen amps-op). Finalmente, también se examinan el uso apropiado de PSPICE para producir análisis de respuesta de frecuencia de redes y la interpretación de los resultados. ■

13.1 Análisis de la respuesta de frecuencia variable

En los capítulos anteriores investigamos la respuesta de redes *RCL* a entradas senoidales. En particular consideramos las entradas senoidales de 60 Hz. En este capítulo permitiremos que la frecuencia de excitación sea una variable y evaluaremos el desempeño de la red como función de la frecuencia. Para comenzar, consideremos el efecto de variar la frecuencia en elementos con los que ya estamos completamente familiarizados —la resistencia, bobina y condensador—. La impedancia de la resistencia en el dominio de frecuencia que se muestra en la figura 13.1 es:

$$\mathbf{Z}_R = R = R \angle 0^\circ$$

La magnitud y fase son constantes e independientes de la frecuencia. Esbozos de la magnitud y fase de \mathbf{Z}_R se muestran en la figura 13.1b y c. Obviamente, esta es una situación muy simple.

Para la bobina de la figura 13.2a, la impedancia \mathbf{Z}_L en el dominio de frecuencia es

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = \omega L \angle 90^\circ$$

La fase es constante a 90° pero la magnitud de \mathbf{Z}_L es directamente proporcional a la frecuencia. Las figuras 13.2b y c muestran esbozos de la magnitud y fase de \mathbf{Z}_L contra la frecuencia. Observe que a bajas frecuencias la impedancia de la bobina es realmente pequeña. De hecho, en cd, \mathbf{Z}_L es cero y la bobina aparece como un corto circuito. A la inversa, al incrementarse la frecuencia se incrementa también la impedancia.

A continuación consideremos el capacitor de la figura 13.3a. La impedancia es

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$

De nuevo la fase de la impedancia es constante, pero ahora la magnitud es inversamente proporcional a la frecuencia, como se muestra en las figuras 13.3b y c. Observe que la impedancia se aproxima a infinito, o a un circuito abierto, conforme ω se aproxima a cero y que \mathbf{Z}_C se aproxima a cero a medida que ω se aproxima a infinito.

Investiguemos un circuito más complejo, es decir, la red *RLC* en serie de la figura 13.4a. La impedancia equivalente es

$$\mathbf{Z}_{eq} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

o

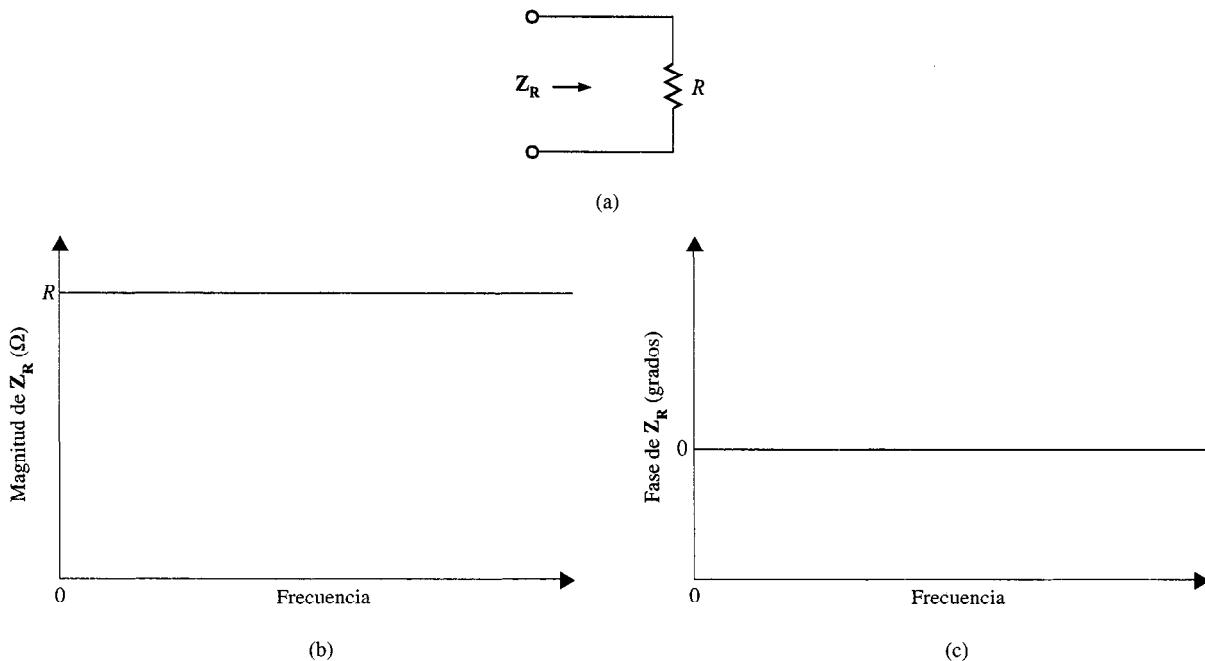


FIGURA 13.1 Impedancia dependiente de la frecuencia de una resistencia.

$$Z_{ec} = \frac{(j\omega)^2 LC + j\omega RC + 1}{j\omega C}$$

En las figuras 13.4b y c se muestran esbozos de la magnitud y fase de esta función.

Observe que a muy bajas frecuencias, el capacitor aparece como un circuito abierto y, por consiguiente, la impedancia es muy grande en esta escala. A altas frecuencias el capacitor tiene un efecto muy pequeño y la impedancia es dominada por la bobina, cuya impedancia se sigue elevando con la frecuencia.

A medida que los circuitos se hacen más complicados, las ecuaciones se vuelven más molestas. En un intento para simplificarlas, hagamos la sustitución $j\omega = s$. (Esta sustitución tiene un significado más importante, que describiremos en capítulos posteriores.) Con esta sustitución, la expresión para Z_{ec} se convierte en

$$Z_{ec} = \frac{s^2 LC + sRC + 1}{sC}$$

Si revisamos los cuatro circuitos investigados hasta aquí, encontraremos que en cada caso la impedancia es la razón de dos polinomios en s y es de la forma general

$$Z(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (13.1)$$

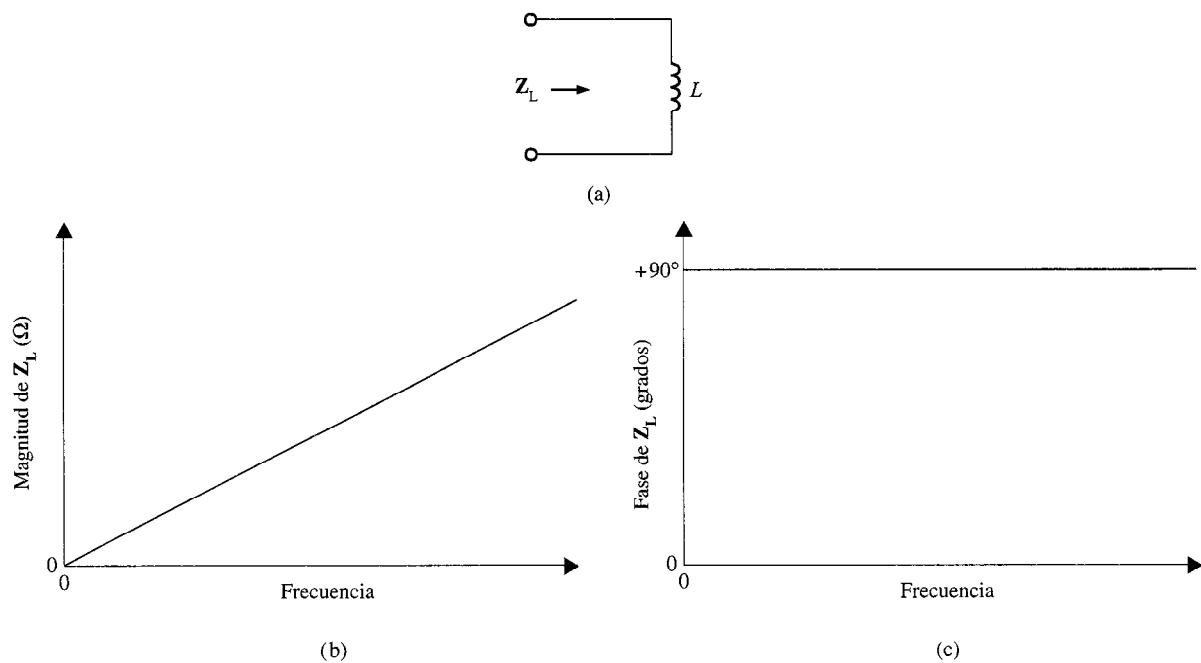


FIGURA 13.2 Impedancia dependiente de la frecuencia de una bobina.

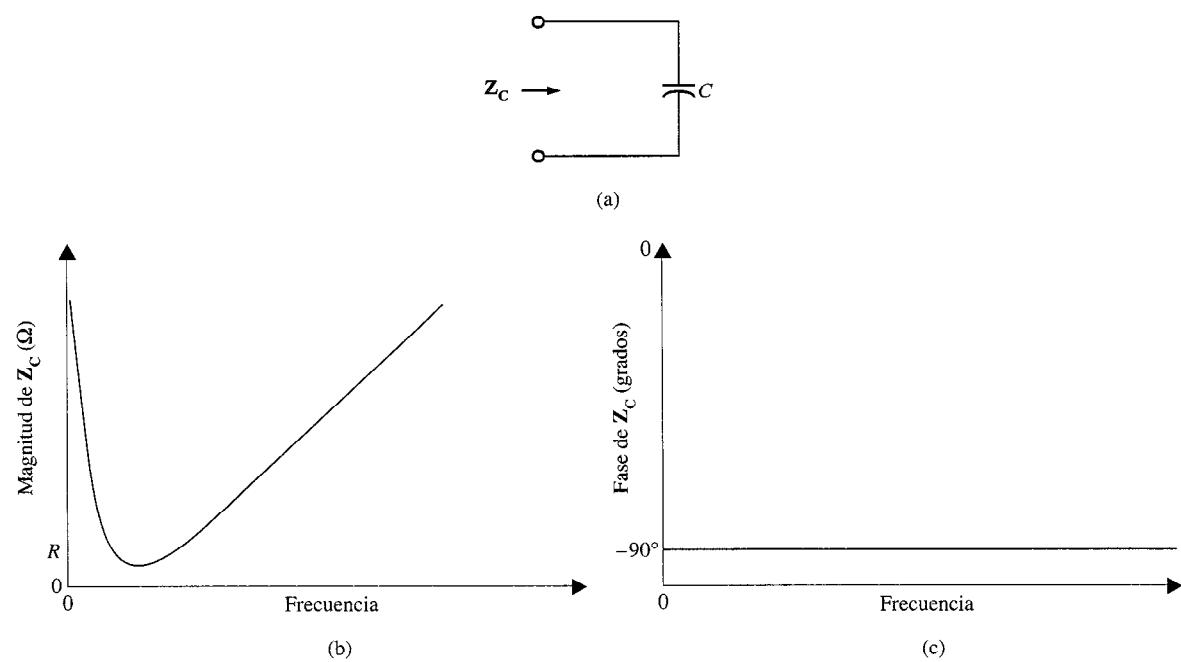


FIGURA 13.3 Impedancia dependiente de la frecuencia de un capacitor.

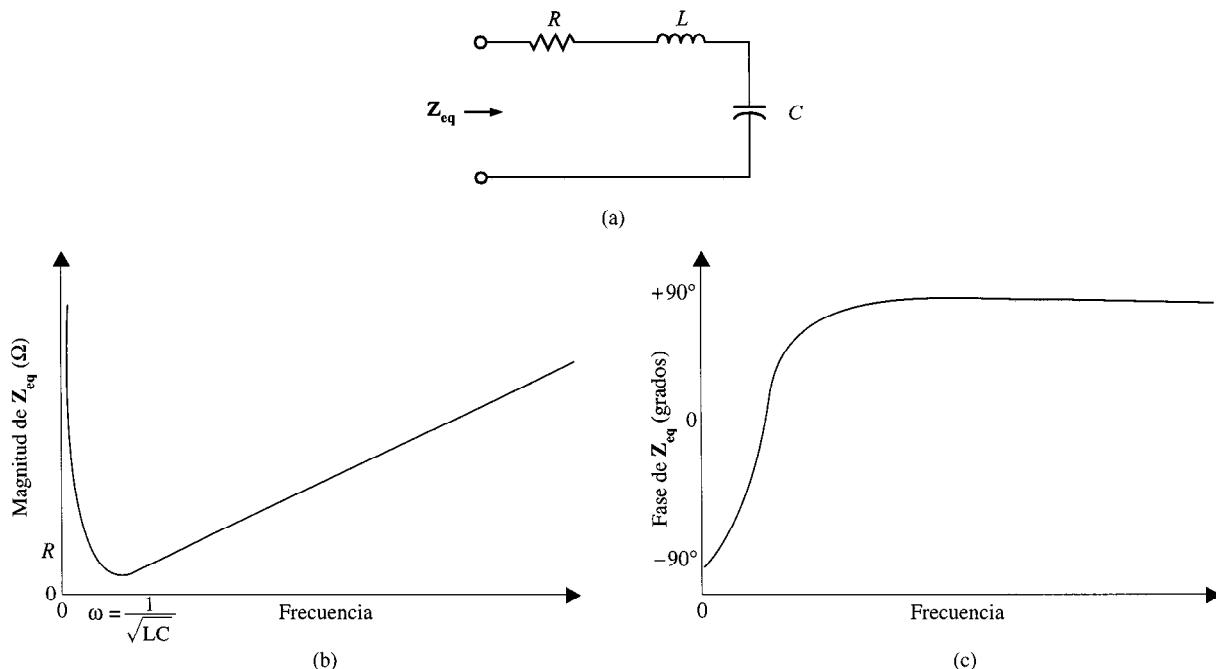


FIGURA 13.4 Impedancia dependiente de la frecuencia de una red RLC en serie.

donde $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios de orden m y n , respectivamente. Un aspecto extremadamente importante de la ecuación (13.1): ésta es válida para impedancias y también para todos los voltajes, las corrientes, las admitancias y las ganancias en la red. La única restricción es que los valores de todos los elementos de circuito (resistencias, capacitores, bobinas y fuentes dependientes) deben ser números reales.

Demostremos la forma en la que el voltaje a través de un elemento en una red RLC en serie varía con la frecuencia.

EJEMPLO 13.1

Considere la red de la figura 13.5a. Deseamos determinar la variación del voltaje de salida como función de la frecuencia en la escala de 0 a 1 kHz.

SOLUCIÓN Usando el divisor de voltaje, la salida puede expresarse como

$$\mathbf{V}_o = \left(\frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \right) \mathbf{V}_s$$

o de forma equivalente

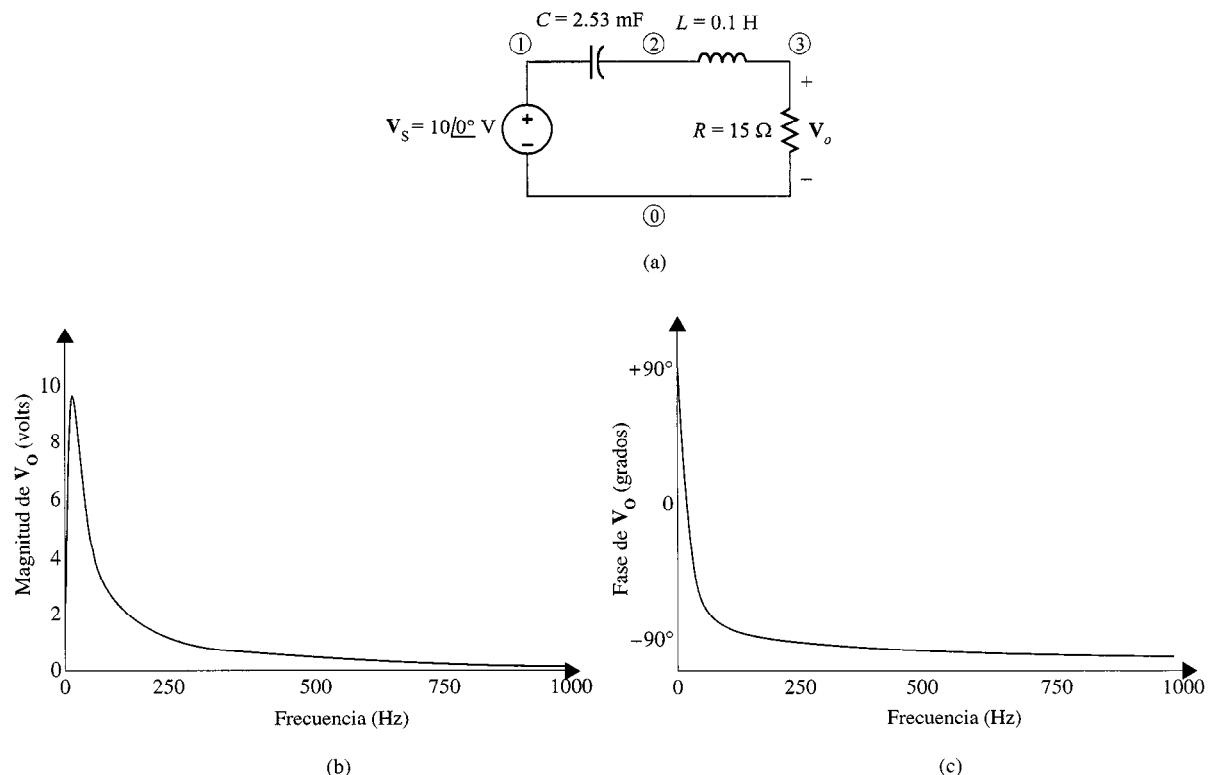


FIGURA 13.5 Simulación de respuesta de frecuencia con PSPICE.

$$\mathbf{V}_o = \left(\frac{j\omega CR}{(j\omega)^2 LC + j\omega CR + 1} \right) \mathbf{V}_s$$

Utilizando los valores de los elementos, la ecuación se convierte en

$$\mathbf{V}_o = \left(\frac{(j\omega)(37.95 \times 10^{-3})}{(j\omega)^2(2.53 \times 10^{-4}) + j\omega(37.95 \times 10^{-3}) + 1} \right) 10 \angle 0^\circ$$

En este punto podemos sustituir simplemente los diferentes valores de la frecuencia en la escala de interés en la ecuación, y determinar la magnitud y fase del voltaje resultantes. Usando un gran número de esos puntos podemos hacer gráficas de la magnitud y fase del voltaje de salida como función de la frecuencia. Este efectivo pero tedioso método puede simplificarse bastante si se aplica el PSPICE. El programa PSPICE para obtener las gráficas es

```
Frequency Dependent Voltage Divider
vin 1 0 ac 10
c 1 2 2.53m
L 2 3 0.1
R 3 0 15
```

```
.ac lin 1000 1 1000
.probe
.end
```

Las gráficas que resultan de la magnitud y la fase se muestran en las figuras 13.5b y c. Llevemos a cabo una simple verificación mental para ver si los resultados son satisfactorios. Para cd, sabemos que la bobina actúa como un corto circuito y el capacitor como un circuito abierto. Como la impedancia del capacitor es infinita, todo el voltaje de la fuente cae ahí y no aparece nada en V_O . Esto es consistente con la gráfica del PSPICE de la magnitud a 0 Hz. Si ahora dejamos que la frecuencia se aproxime a infinito, el capacitor actuará como un corto circuito y la bobina como un circuito abierto. En este momento todo el voltaje cae a través de la bobina y de nuevo V_O es cero, en consistencia con la figura 13.5b. De este modo, nuestros resultados del PSPICE parecen ser correctos.

Las figuras 13.5b y c indican que gran parte de la variación en V_O ocurre a bajas frecuencias y es difícil de resolver. Una técnica estándar empleada por ingenieros consiste en trazar gráficas de la frecuencia sobre un eje logarítmico, que expande la parte de baja frecuencia de las gráficas generando unas gráficas más significativas. Para producir gráficas semilogarítmicas de V_O necesitamos sólo modificar el eje x usando los menús de la utilería .PROBE. Las gráficas de la magnitud y fase resultantes se muestran en las figuras 13.6a y b. Observe cómo la información de baja frecuencia se expande y así es más fácil extraerla. Observe también que el origen de la parte semilogarítmica de la gráfica es 1 Hz y no 0 Hz.

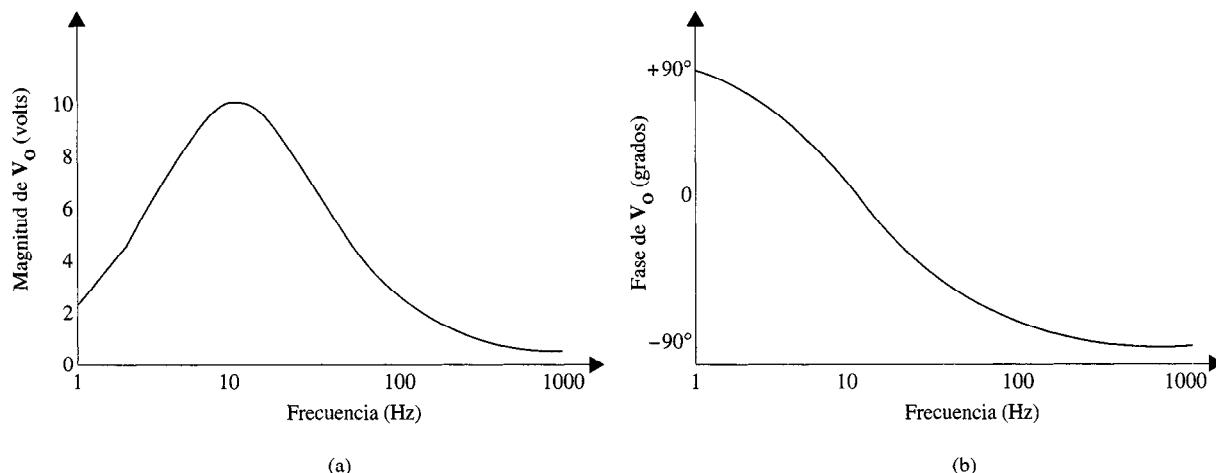


FIGURA 13.6 Resultados del PSPICE con la frecuencia en un eje logarítmico.

Ilustraremos en secciones subsecuentes que el uso de una gráfica semilogarítmica es una herramienta muy útil para obtener la información de la respuesta de frecuencia.

Como una aplicación introductoria del análisis y caracterización de la respuesta de frecuencia variable, consideraremos un amplificador estereofónico. En particular, debemos examinar primero la escala de frecuencia en que el amplificador debe funcionar y ob-

tener después exactamente qué tipo de rendimiento deseamos. La escala de frecuencia del amplificador debe sobrepasar la del oído humano, que es aproximadamente de 50 Hz a 15 000 Hz. En consecuencia, los amplificadores estereofónicos típicos se diseñan para operar en la escala de frecuencia de 50 Hz a 20 000 Hz. Además, queremos preservar la fidelidad de la señal a medida que ésta pasa por el amplificador. De este modo, la señal de salida debe ser un duplicado exacto de la señal de entrada veces un factor de ganancia. Esto requiere que la ganancia sea independiente de la frecuencia en la escala, de frecuencia especificada de 50 Hz a 20 000 Hz. Un esbozo ideal de este requisito de ganancia de 1 000 se muestra en la figura 13.7, donde la región de media banda se define como la porción de la gráfica donde la ganancia es constante y está confinada por dos puntos a los que nos referiremos como f_{LO} y f_{HI} . Observe una vez más que el eje de frecuencia es un eje logarítmico y, de este modo, la respuesta de frecuencia se despliega en una gráfica semilogarítmica.

Un modelo para el amplificador descrito gráficamente en la figura 13.7 se muestra en la figura 13.8a, con el circuito equivalente en el dominio de frecuencia en la figura 13.8b.

Si la entrada es una senoidal en estado estable, podemos usar el análisis de dominio de frecuencia para encontrar la ganancia.

$$G_v(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_s(j\omega)}$$

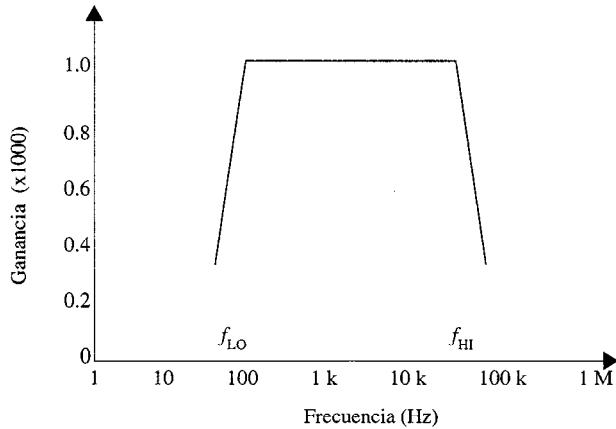


FIGURA 13.7 Requerimientos de respuesta de frecuencia del amplificador.

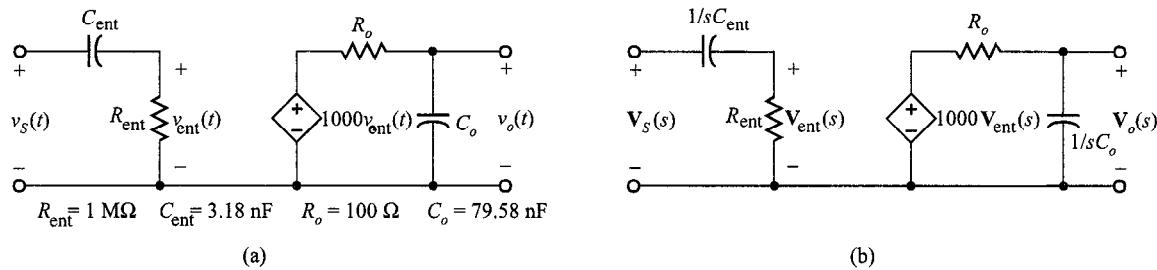


FIGURA 13.8 Red equivalente del amplificador.

la cual con la sustitución $s = j\omega$ puede expresarse como

$$G_v(s) = \frac{V_o(s)}{V_S(s)}$$

Usando el divisor de voltaje encontramos que la ganancia es

$$G_v(s) = \frac{\frac{V_o(s)}{s(s)}}{\frac{V_S(s)}{V_{ent}(s)}} = \frac{V_o(s)}{V_{ent}(s)} = \left[\frac{R_{ent}}{R_{ent} + 1/sC_{ent}} \right] (1000) \left[\frac{1/sC_o}{R_o + 1/sC_o} \right]$$

o

$$G_v(s) = \left[\frac{sC_{ent}R_{ent}}{1 + sC_{ent}R_{ent}} \right] (1000) \left[\frac{1}{1 + sC_oR_o} \right]$$

Usando los valores de los elementos en la figura 13.8a

$$G_v(s) = \left[\frac{s}{s + 100\pi} \right] (1000) \left[\frac{40000\pi}{s + 40000\pi} \right]$$

donde 100π y 40000π son los radianes equivalentes de 50 Hz y 20 000 Hz, respectivamente. Como $s = j\omega$, la función de la red es realmente compleja. Una gráfica exacta de $G_v(s)$ se muestra en la figura 13.9 sobreponiendo sobre el esbozo de la figura 13.7. La gráfica exacta exhibe transiciones suaves en f_{LO} y f_{HI} ; de otra manera, las gráficas coincidirían bastante bien.

Examinemos nuestra expresión para $G_v(s)$ más cerca de la gráfica de la figura 13.9. Suponga que f está completamente dentro de la escala de frecuencia de banda media; es decir,

$$f_{LO} \ll f \ll f_{HI}$$

o

$$100\pi \ll |s| \ll 40000\pi$$

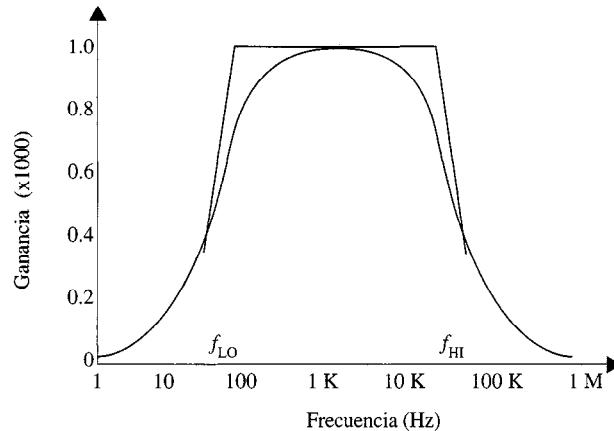


FIGURA 13.9 Ganancia del amplificador exacta y aproximada contra gráficas de frecuencia.

En esas condiciones, la función de la red es

$$\mathbf{G}_v(s) \approx \left[\frac{s}{s} \right] (1000) \left[\frac{1}{1+0} \right]$$

o

$$\mathbf{G}_v(s) = 1000$$

De este modo, completamente dentro de la banda media, la ganancia es constante. Sin embargo, si la frecuencia de excitación decrece hacia f_{LO} , entonces $|s|$ es comparable a 100π y

$$\mathbf{G}_v(s) \approx \left[\frac{s}{s + 100\pi} \right] (1000)$$

Como $R_{ent}C_{ent} = 1/100\pi$, vemos que C_{ent} ocasiona la caída de ganancia a bajas frecuencias. De manera similar, cuando la frecuencia se approxima a f_{HI} la caída de ganancia se debe a C_o .

Mediante este ejemplo de amplificador hemos introducido el concepto de redes dependientes de la frecuencia y demostrado que el rendimiento de la red dependiente de la frecuencia es ocasionado por los elementos reactivos de una red.

Funciones de la red

En la sección anterior introducimos el término *ganancia de voltaje*, $\mathbf{G}_v(s)$. Este término es realmente sólo una de las diversas funciones de la red, designada generalmente como $\mathbf{H}(s)$, que define la razón de respuesta a la entrada. Como la función describe una reacción debida a una excitación en algún otro punto del circuito, las funciones de la red de estación también se llaman *funciones de transferencia*. Además, las funciones de transferencia no están limitadas a razones de voltaje. Lo mismo que en redes eléctricas, las entradas y salidas pueden ser voltajes o corrientes hay cuatro posibles funciones de la red, como se enlista en la tabla 13.1.

T A B L A 13.1

Funciones de transferencia de red

Entrada	Salida	Función de transferencia	Símbolo
Voltaje	Voltaje	Ganancia del voltaje	$\mathbf{G}_v(s)$
Corriente	Voltaje	Transimpedancia	$\mathbf{Z}(s)$
Corriente	Corriente	Ganancia de corriente	$\mathbf{G}_I(s)$
Voltaje	Corriente	Transadmitancia	$\mathbf{Y}(s)$

También hay *funciones de puntos de entrada*, que son impedancias o admitancias definidas en un solo par de terminales. Por ejemplo, la impedancia de entrada de una red es una función de entrada.

E J E M P L O 13.2

Deseamos determinar la admitancia transferida [$\mathbf{I}_2(s)/\mathbf{V}_1(s)$] y la ganancia de voltaje de la red que se muestra en la figura 13.10.

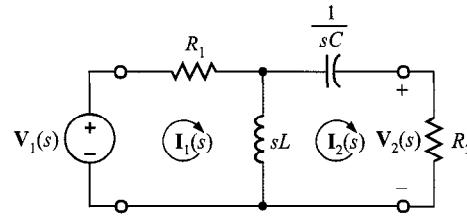


FIGURA 13.10 Circuito empleado en el ejemplo 13.2.

SOLUCIÓN Las ecuaciones de malla para la red son

$$(R_1 + sL)\mathbf{I}_1(s) - sL\mathbf{I}_2(s) = \mathbf{V}_1(s)$$

$$-sL\mathbf{I}_1(s) + \left(R_2 + sL + \frac{1}{sC}\right)\mathbf{I}_2(s) = 0$$

$$\mathbf{V}_2(s) = \mathbf{I}_2(s)R_2$$

Resolviendo las ecuaciones para $\mathbf{I}_2(s)$ se obtiene

$$\mathbf{I}_2(s) = \frac{sL\mathbf{V}_1(s)}{(R_1 + sL)(R_2 + sL + 1/sC) - s^2L^2}$$

Por tanto, la admitancia transferida [$\mathbf{I}_2(s)/\mathbf{V}_1(s)$] es

$$\mathbf{Y}_T(s) = \frac{\mathbf{I}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)} = \frac{LCs^2}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1}$$

y la ganancia de voltaje es

$$\mathbf{G}_V(s) = \frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)} = \frac{LCR_2s^2}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1}$$

Polos y ceros

Como hemos indicado, la función de la red puede expresarse como la razón de los dos polinomios en s . Además, notamos que como los valores de nuestros elementos de circuito, o fuentes controladas, son números reales, los coeficientes de los dos polinomios serán reales. Por tanto, expresaremos una función de red en la forma

$$\mathbf{H}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_ms^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1s + a_0}{b_ns^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0} \quad (13.2)$$

donde $N(s)$ es el polinomio del numerador de grado m y $D(s)$ es el polinomio del denominador de grado n . La ecuación (13.2) también puede escribirse en la forma

$$\mathbf{H}(s) = \frac{K_0(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (13.3)$$

donde K_0 es una constante, z_1, \dots, z_m son las raíces de $N(s)$, y p_1, \dots, p_n son las raíces de $D(s)$. Observe que si $s = z_1$, o z_2, \dots, z_m , entonces $\mathbf{H}(s)$ se hace cero y de aquí z_1, \dots, z_m se llaman ceros de la función de transferencia. De manera similar, si $s = p_1$ o p_2, \dots, p_n , entonces $\mathbf{H}(s)$ se hace infinito y, por consiguiente, p_1, \dots, p_n se llaman polos de la función. Los ceros o los polos realmente son complejos. Sin embargo, si ellos son complejos deben presentarse en pares conjugados, ya que los coeficientes de los polinomios son reales. La representación de la función de la red especificada en la ecuación (13.3) es extremadamente importante y en general se emplea para representar cualquier sistema lineal invariante en el tiempo. La importancia de esta forma se deriva del hecho de que las propiedades dinámicas de un sistema pueden recogerse de un examen de los polos del sistema.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

EJERCICIO Encuentre la impedancia del punto de transmisión en $\mathbf{V}_S(s)$ en el amplificador que se muestra en la figura 13.8b.

Resp. $\mathbf{Z}(s) = R_{\text{ent}} + \frac{1}{sC_{\text{ent}}} = \left[1 + \left(\frac{1}{100\pi s} \right) \right] \text{M}\Omega$

EJERCICIO Encuentre la ubicación del polo y cero en hertz y el valor de K_0 para la red amplificadora de la figura 13.8.

Resp. $z_1 = 0 \text{ Hz (dc)}, p_1 = -50 \text{ Hz}, p_2 = -20000 \text{ Hz}, K_0 = (4 \times 10^7) \pi$.

13.2 Análisis de frecuencia senoidal

Aunque hay casos específicos en los que una red opera a sólo una frecuencia (por ejemplo, la red del sistema de potencia), en general estamos interesados en el comportamiento de una red como función de la frecuencia. En un análisis senoidal de estados estables, la función de la red puede expresarse como

$$\mathbf{H}(j\omega) = M(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad (13.4)$$

donde $M(\omega) = |\mathbf{H}(j\omega)|$ y $\phi(\omega)$ es la fase. Una gráfica de esas dos funciones, que se llaman comúnmente *magnitud* y *características de fase*, despliega la forma en la que la respuesta varía con la frecuencia de entrada ω . Ahora ilustraremos la forma de llevar a cabo un análisis del dominio de frecuencia evaluando simplemente la función en varias frecuencias en la escala de interés.

Respuesta de frecuencia usando una gráfica de Bode

Si las características de la red son trazadas en una escala semilogarítmica, es decir, una escala lineal para la ordenada y una escala logarítmica para la abscisa, se conocen como *gráficas de Bode* (así llamadas en recuerdo de Hendrik W. Bode). Esta gráfica es una

herramienta poderosa en el análisis y en el diseño de sistemas dependientes de la frecuencia y de las redes, como filtros, sintonizadores y amplificadores. Al usar la gráfica, hacemos gráficas de $20 \log_{10} M(\omega)$ contra $\log_{10}(\omega)$ en vez de $M(\omega)$ contra ω . La ventaja de esta técnica es que más que trazar las características punto por punto, podemos emplear aproximaciones en línea recta para obtener la característica de manera muy eficiente. La ordenada para la gráfica de la magnitud es el decibel (dB). Esta unidad fue empleada originalmente para medir la razón de potencias; es decir,

$$\text{número de dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \quad (13.5)$$

Si las potencias son absorbidas por dos resistencias iguales, entonces

$$\begin{aligned} \text{número en dB} &= 10 \log_{10} \frac{|\mathbf{V}_2|^2/R}{|\mathbf{V}_1|^2/R} = 10 \log_{10} \frac{|\mathbf{I}_2|^2 R}{|\mathbf{I}_1|^2 R} \\ &= 20 \log_{10} \frac{|\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{V}_1|} = 20 \log_{10} \frac{|\mathbf{I}_2|}{|\mathbf{I}_1|} \end{aligned} \quad (13.6)$$

El término “dB” ha llegado a ser tan popular que ahora se usa para razones de voltaje y corriente, como se ilustra en la ecuación (13.6), haciendo caso omiso de la impedancia empleada en cada caso.

En el caso senoidal en estado estable, $\mathbf{H}(j\omega)$ en la ecuación (13.3) puede expresarse en general como

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{K_0(j\omega)^{\pm N}(1 + j\omega\tau_1)[1 + 2\zeta_3(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_3)^2]\dots}{(1 + j\omega\tau_a)[1 + 2\zeta_b(j\omega\tau_b) + (j\omega\tau_b)^2]\dots} \quad (13.7)$$

Observe que esta ecuación contiene los siguientes factores típicos:

1. Un factor $K_0 > 0$ independiente de la frecuencia.
2. Los polos o ceros en el origen de la forma $j\omega$, es decir, $(j\omega)^{+N}$ para ceros y $(j\omega)^{-N}$ para polos.
3. Polos o ceros de la forma $(1 + j\omega\tau)$.
4. Polos o ceros cuadráticos de la forma $1 + 2\zeta(j\omega\tau) + (j\omega\tau)^2$.

Tomando el logaritmo de la magnitud de la función $\mathbf{H}(j\omega)$ en la ecuación (13.7) se obtiene

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |\mathbf{H}(j\omega)| &= 20 \log_{10} K_0 \pm 20N \log_{10} |j\omega| \\ &\quad + 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_1| \\ &\quad + 20 \log_{10} |1 + 2\zeta_3(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_3)^2| \\ &\quad + \dots - 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_a| \\ &\quad - 20 \log_{10} |1 + 2\zeta_b(j\omega\tau_b) + (j\omega\tau_b)^2| \dots \end{aligned} \quad (13.8)$$

Observe que hemos usado el hecho de que el logaritmo del producto de dos o más términos es igual a la suma de los logaritmos de los términos individuales, el logaritmo

del cociente de dos términos es igual a la diferencia de los logaritmos de los términos individuales, y el hecho de que $\log_{10}A^n = n \log_{10}A$.

El ángulo de fase para $\mathbf{H}(j\omega)$ es

$$\begin{aligned}\angle \mathbf{H}(j\omega) &= 0 \pm N(90^\circ) + \tan^{-1}\omega\tau_1 \\ &\quad + \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta_3\omega\tau_3}{1-\omega^2\tau_3^2}\right) + \dots \\ &\quad - \tan^{-1}\omega\tau_a - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta_b\omega\tau_b}{1-\omega^2\tau_b^2}\right) \dots\end{aligned}\quad (13.9)$$

Como indican las ecuaciones (13.8) y (13.9), simplemente trazaremos gráficas de cada factor de forma individual en una gráfica común y entonces los sumaremos algebraicamente para obtener las características totales. Examinemos algunos de los términos individuales e ilustremos una manera eficiente de graficarlos en un diagrama de Bode.

Término constante. El término $20 \log_{10}K_0$ representa una magnitud constante con corrimiento de fase cero, como se muestra en la figura 13.11a.

Polos o ceros en el origen. Los polos o ceros en el origen son de la forma $(j\omega)^{\pm N}$, donde + se usa para un cero y - para un polo. La magnitud de esta función

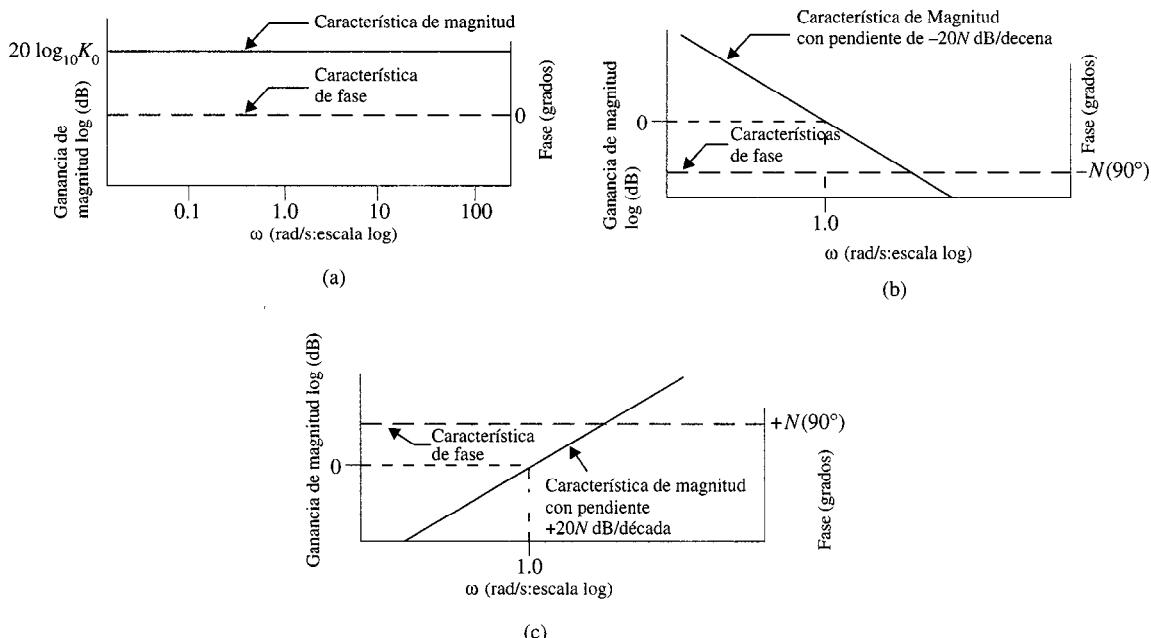


FIGURA 13.11 Características de magnitud y fase para un término constante y polos y ceros en el origen.

es $\pm 20N \log_{10}\omega$, que es una línea recta en papel semilog con una pendiente de $\pm 20N$ dB/década; es decir, el valor cambiará en 20 cada vez que la frecuencia se multiplica por 10, y la fase de esta función es una constante $\pm N(90^\circ)$. La magnitud y fase características para polos y ceros en el origen se muestran en las figuras 13.11b y c, respectivamente.

Polo o cero simple. Se pueden emplear aproximaciones lineales cuando un polo o cero simples de la forma $(1 + j\omega\tau)$ se presenta en la función de la red. Para $\omega\tau \ll 1$, $(1 + j\omega\tau) \approx 1$, y, por tanto, $20 \log_{10}|(1 + j\omega\tau)| = 20 \log_{10}1 = 0$ dB. De forma similar, si $\omega\tau \gg 1$, entonces $(1 + j\omega\tau) \approx j\omega\tau$, y de aquí $20 \log_{10}|(1 + j\omega\tau)| \approx 20 \log_{10}\omega\tau$. Por tanto, para $\omega\tau \ll 1$ la respuesta es 0 dB y para $\omega\tau \gg 1$ la respuesta tiene en el origen una pendiente, que es la misma que la de un polo o cero simple. La intersección de esas dos asíntotas, una para $\omega\tau \ll 1$ y otra para $\omega\tau \gg 1$, es el punto donde $\omega\tau = 1$ o $\omega = 1/\tau$, que se llama *frecuencia de corte*. En esta frecuencia de corte, donde $\omega = 1/\tau$, $20 \log_{10}|(1 + j1)| = 20 \log_{10}(2)^{1/2} = 3$ dB. Por tanto, la curva real se desvía de las asíntotas por 3 dB en la frecuencia de corte. Se puede mostrar que a un medio y dos veces la frecuencia de corte, las desviaciones son 1 dB. El ángulo de fase asociado con un polo o cero simple es $\phi = \tan^{-1}\omega\tau$, el cual es una simple curva arco-tangente. Por tanto, el corrimiento de fase es 45° en la frecuencia de corte, y 26.6° y 63.4° en un medio y dos veces la frecuencia de corte, respectivamente. La curva de la magnitud real para un polo de esta forma se muestra en la figura 13.12a. Para un cero la curva de la magnitud y la asíntota para $\omega\tau \gg 1$ tiene una pendiente positiva, y la curva de fase se extiende de 0° a $+90^\circ$, como se muestra en la figura 13.12b. Si están presentes polos o ceros múltiples de la forma $(1 + j\omega\tau)^N$ entonces la pendiente de la asíntota de alta frecuencia se multiplica por N , la desviación entre la curva real y la asíntota en la frecuencia de corte es $3N$ dB, y la curva de fase se extiende de 0 a $N(90^\circ)$ y es $N(45^\circ)$ en la frecuencia de corte.

Polos o ceros cuadráticos. Los polos o ceros cuadráticos son de la forma $1 + 2\zeta(j\omega\tau) + (j\omega\tau)^2$. Este término es una función no sólo de ω , sino del término sin dimensiones ζ , que se llama *coeficiente de amortiguamiento*. Si $\zeta > 1$ o $\zeta = 1$, las raíces son reales y diferentes o reales e iguales, respectivamente, y ya se ha hablado de estos dos casos. Si $\zeta < 1$, las raíces son complejas conjugadas, y este es el caso que examinaremos ahora. Siguiendo el argumento anterior para un polo o cero simple, la magnitud logarítmica del factor cuadrático es 0 dB para $\omega\tau \ll 1$. Para $\omega\tau \gg 1$,

$$20 \log_{10}|1 - (\omega\tau)^2 + 2j\zeta(\omega\tau)| \approx 20 \log_{10}|(\omega\tau)^2| = 40 \log_{10}|\omega\tau|$$

y, por tanto, para $\omega\tau \gg 1$, la pendiente de la curva de magnitud logarítmica es +40 dB/decena para un cero cuadrático y -40 dB/decena para un polo cuadrático. Entre los dos extremos, $\omega\tau \ll 1$ y $\omega\tau \gg 1$, el comportamiento de la función depende de la razón de amortiguamiento ζ . La figura 13.13a ilustra la manera como la curva de magnitud logarítmica para un *polo* cuadrático cambia como una función de coeficiente de amortiguamiento. El corrimiento de fase para el factor cuadrático es $\tan^{-1}2\zeta\omega\tau/[1 - (\omega\tau)^2]$. La gráfica de fase para *polos* cuadráticos se muestra en la figura 13.13b. Observe que en este caso la fase cambia de 0° a frecuencias para las cuales $\omega\tau \ll 1$ a -180° a frecuencias para las que $\omega\tau \gg 1$. Para ceros cuadráticos, las curvas de magnitud y fase están invertidas; es decir, la curva de magnitud logarítmica tiene una pendiente de +40 dB/decena para $\omega\tau \gg 1$, y la curva de fase es 0° para $\omega\tau \ll 1$ y $+180^\circ$ para $\omega\tau \gg 1$.

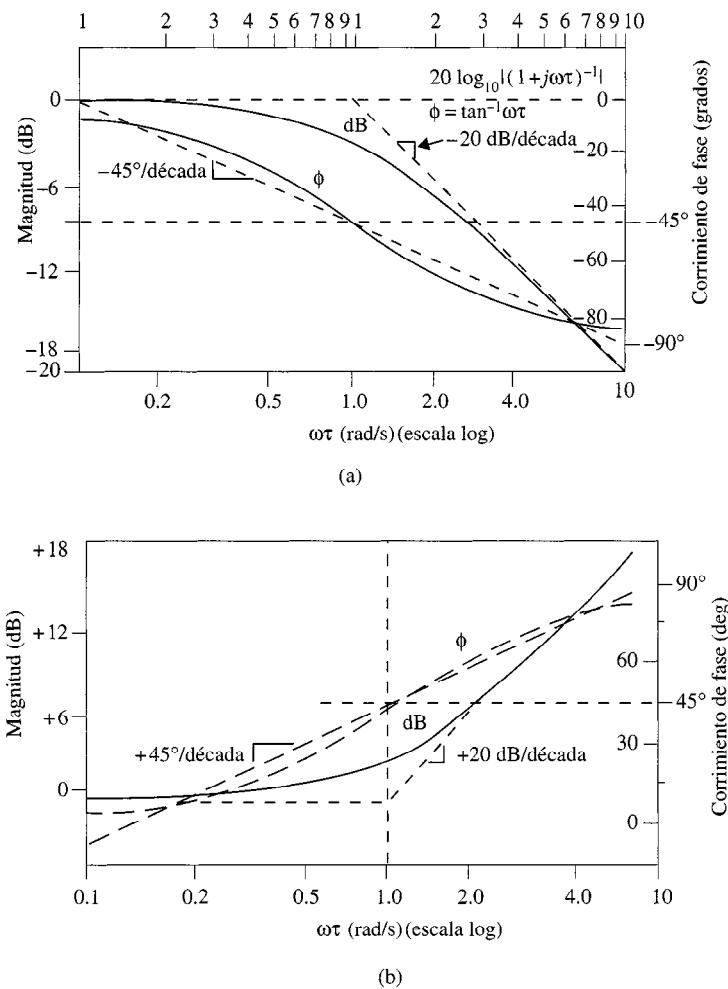


FIGURA 13.12 Gráfica de magnitud y fase a) para un polo simple, y b) para un cero simple.

E J E M P L O 13.3

Queremos generar las gráficas de la magnitud y fase para la función de transferencia

$$G_v(j\omega) = \frac{10(0.1j\omega + 1)}{(j\omega + 1)(0.02j\omega + 1)}$$

SOLUCIÓN Observe que esta función está en forma estándar, ya que cada término es de la forma $(j\omega\tau + 1)$. A fin de determinar las características de magnitud compuesta y fase, haremos gráficas de los términos asintóticos individuales y después los sumaremos como se especifica en las

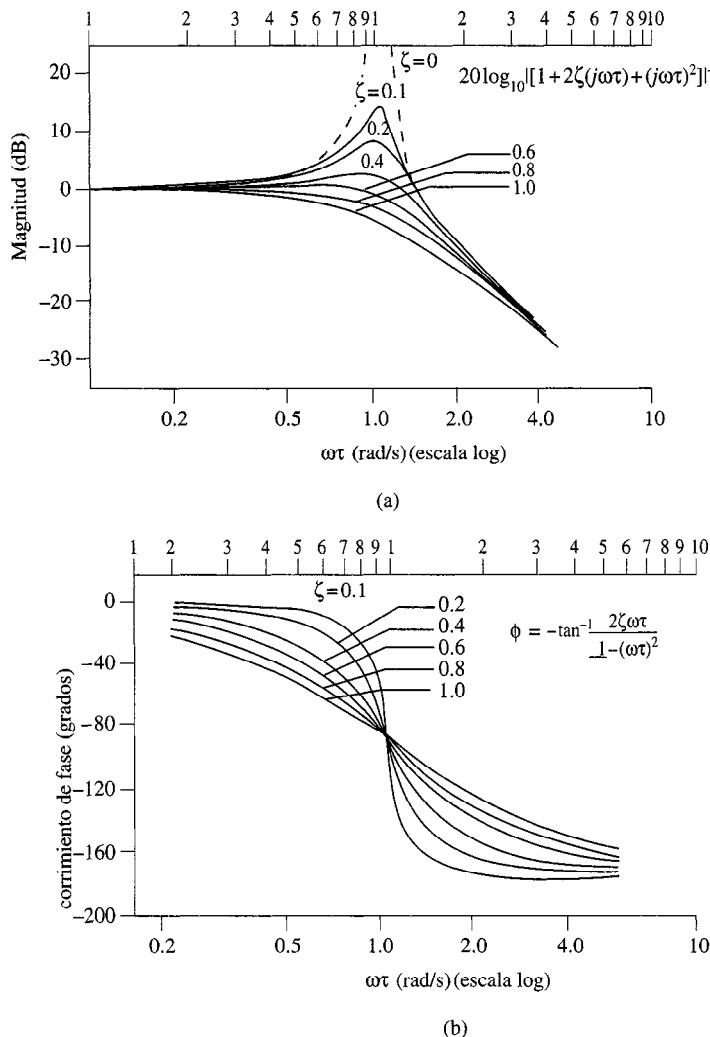
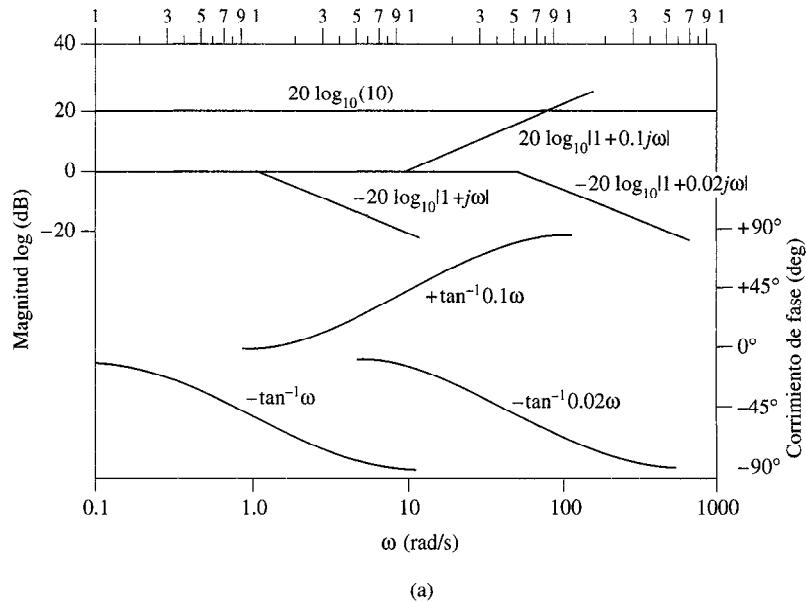
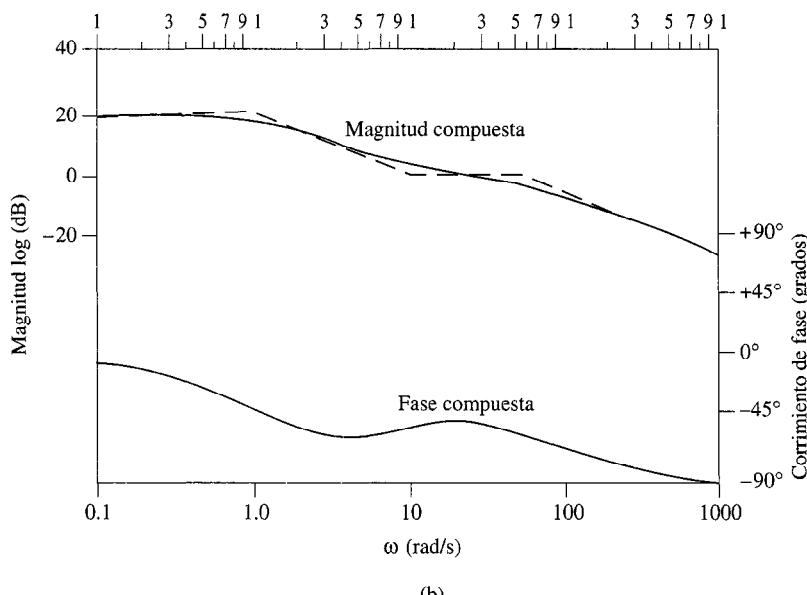


FIGURA 13.13 Características de magnitud y fase para polos cuadráticos.

ecuaciones 13.8 y 13.9. Consideremos primero la gráfica de la magnitud. Como $K_0 = 10$, $20 \log_{10} 10 = 20$ dB, que es una constante independiente de la frecuencia, como se muestra en la figura 13.14a. El cero de la función de transferencia contribuye con un término de la forma $+20 \log_{10} |1 + 0.1j\omega|$, el cual es 0 dB para $0.1\omega \ll 1$, tiene una pendiente de +20 dB/decena para $0.1\omega \gg 1$, y tiene una frecuencia de corte en $\omega = 10$ rad/segundo. Los polos tienen frecuencias de corte en $\omega = 1$ y $\omega = 50$ rad/segundo. El polo con frecuencia de corte en $\omega = 1$ rad/segundo contribuye con un término de la forma $-20 \log_{10} |1 + j\omega|$, el cual es 0 dB para $\omega \ll 1$ y tiene una pendiente de -20 dB/decena para $\omega \gg 1$. Un argumento similar puede hacerse para el polo que tiene una frecuencia de corte en $\omega = 50$ rad/segundo. De todos esos factores se hacen gráficas individuales en la figura 13.14a.

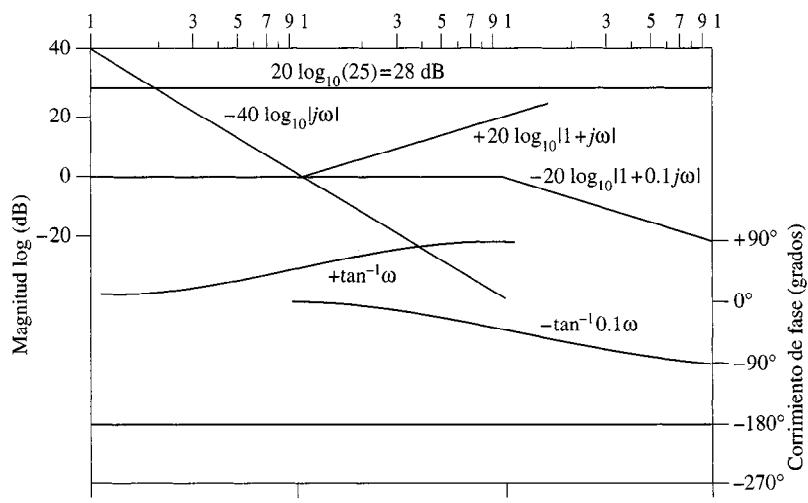


(a)

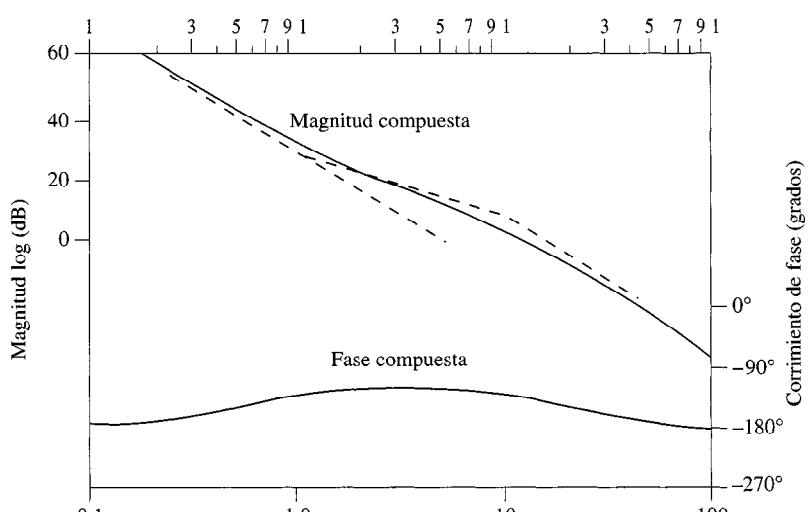


(b)

FIGURA 13.14 a) Componentes de magnitud y fase para los polos y ceros de la función de transferencia del ejemplo 13.3; b) Gráfica de Bode para la función de transferencia del ejemplo 13.3.



(a)



(b)

FIGURA 13.15 a) Componentes de magnitud y fase para los polos y ceros de la función de transferencia del ejemplo 13.4; b) Gráfica de Bode para la función de transferencia del ejemplo 13.4.

Consideré ahora las curvas de fase individuales. El término K_0 no es una función de ω y no contribuye a la fase de la función de transferencia. La curva de fase para el cero es $+ \tan^{-1} 0.1\omega$, el cual es una curva arco-tangente que se extiende de 0° para $0.1\omega \ll 1$ a $+90^\circ$ para $0.1\omega \gg 1$ y tiene una fase de $+45^\circ$ en la frecuencia de corte. Las curvas de fase para los dos polos son $-\tan^{-1}\omega$ y $-\tan^{-1}0.02\omega$. El término $-\tan^{-1}\omega$ es 0° para $\omega \ll 1$, -90° para $\omega \gg 1$, y -45° en la frecuencia de corte $\omega = 1$. De la curva de fase del polo restante se hacen gráficas en una forma similar. Todas las curvas de fase individuales se muestran en la figura 13.14a.

Como se especificó en las ecuaciones (13.8) y (13.9), la magnitud y fase compuesta de la función de transferencia se obtienen simplemente sumando los términos individuales. De las curvas compuestas hay gráficas en la figura 13.14b. Note que la magnitud de la curva real (línea sólida) difiere de la aproximación con línea recta (línea punteada) por 3 dB en las frecuencias de corte y 1 dB a un medio y dos veces las frecuencias de corte.

EJEMPLO 13.4

Dibujemos la gráfica de Bode para la siguiente función de transferencia:

$$G_v(j\omega) = \frac{25(j\omega + 1)}{(j\omega)^2(0.1j\omega + 1)}$$

SOLUCIÓN Una vez más, todos los términos individuales para magnitud y fase tienen sus gráficas en la figura 13.15a. La línea recta con una pendiente de -40 dB/decena es generada por el polo doble en el origen. Esta línea es una gráfica de $-40 \log_{10} \omega$ contra ω y, por consiguiente, pasa a través de 0 dB en $\omega = 1$ rad/segundo. La fase para el polo doble es una constante -180° para todas las frecuencias. Del resto de los términos se hacen gráficas como se ilustró en el ejemplo 13.3.

Los polos compuestos se muestran en la figura 13.15b. Una vez más se obtienen simplemente sumando los términos individuales en la figura 13.15a. Note que respecto a frecuencias para las que $\omega \ll 1$, la pendiente de la curva de magnitud es -40 dB/decena. En $\omega = 1$ rad/segundo, que es la frecuencia de corte del 0, la curva de magnitud cambia la pendiente a -20 dB/década. En $\omega = 10$ rad/segundo, que es la frecuencia de corte del polo, la pendiente de la curva de magnitud cambia a la inversa a -40 dB/decena.

La curva de fase compuesta comienza en -180° , debido al polo doble en el origen. Ya que la primera frecuencia de corte encontrada es un cero, la curva de fase se recorre hacia -90° . Sin embargo, antes de que la fase compuesta alcance -90° , el polo con frecuencia de corte $\omega = 10$ rad/segundo comienza a recorrer la curva compuesta hacia atrás -180° .

El ejemplo 13.4 ilustra la forma como se hacen directamente los términos de la forma $K_0 |(j\omega)^N$. Para términos de esta forma, la pendiente inicial de $-20N$ dB/decena intersectará el eje 0 dB a una frecuencia de $(K_0)^{1/N}$ rad/segundo; es decir, -20

$\log_{10}|K_0/(j\omega)^N| = 0$ dB implica que $K_0/(\omega)^N = 1$, y, por consiguiente, $\omega = (K_0)^{1/N}$ rad/segundo. Observe que la pendiente proyectada de la curva de magnitud en el ejemplo 13.4 intersecta el eje 0-dB en $\omega = (25)^{1/2} = 5$ rad/segundo.

De manera similar, se puede mostrar que para términos de la forma $K_0(j\omega)^N$, la pendiente inicial de $+20N$ dB/decena intersectará al eje 0 dB a una frecuencia de $\omega = (1/K_0)^{1/N}$ rad/segundo; es decir, $+20 \log_{10}|K_0/(j\omega)^N| = 0$ dB implica que $K_0/(\omega)^N = 1$, y por consiguiente $\omega = (1/K_0)^{1/N}$ rad/segundo.

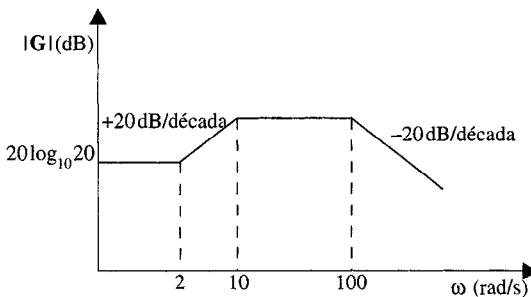
Al aplicar los conceptos que hasta aquí hemos demostrado, normalmente podemos hacer gráficas de la característica de magnitud logarítmica de una función de transferencia directamente en un paso.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D13.3 Esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode, marcando todas las pendientes y puntos críticos de la función

$$G(j\omega) = \frac{10^4(j\omega + 2)}{(j\omega + 10)(j\omega + 100)}$$

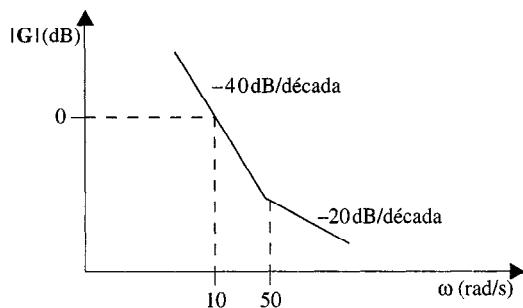
Resp.:



D13.4 Esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode, etiquetando todas las pendientes y puntos críticos para la función

$$G(j\omega) = \frac{100(0.02j\omega + 1)}{(j\omega)^2}$$

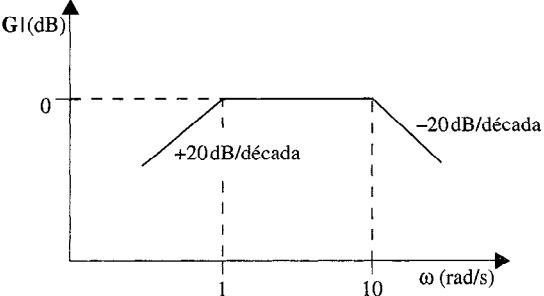
Resp.:



D13.5 Esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode, marcando todas las pendientes y puntos críticos para la función

$$G(j\omega) = \frac{10j\omega}{(j\omega + 1)(j\omega + 10)}$$

Resp.:



E J E M P L O 13.5

Deseamos generar la gráfica de Bode para la siguiente función de transferencia:

$$G_v(j\omega) = \frac{25j\omega}{(j\omega + 0.5)[(j\omega)^2 + 4j\omega + 100]}$$

S O L U C I Ó N Expresando esta función en forma estándar, obtenemos

$$G_v(j\omega) = \frac{0.5j\omega}{(2j\omega + 1)[(j\omega/10)^2 + j\omega/25 + 1]}$$

La gráfica de Bode se muestra en la figura 13.16. La pendiente de baja frecuencia inicial debida al cero en el origen es +20 dB/decena, y esta pendiente interseca la línea 0 dB en $\omega = 1/K_0 = 2$ rad/segundo. En $\omega = 0.5$ rad/segundo, la pendiente cambia de +20 dB/decena a 0 dB/decena debido a la presencia del polo con frecuencia de corte en $\omega = 0.5$ rad/segundo. El término cuadrático tiene una frecuencia central de $\omega = 10$ rad/segundo (es decir, $\tau = 1/10$). Como

$$2\zeta\tau = \frac{1}{25}$$

y

$$\tau = 0.1$$

entonces

$$\zeta = 0.2$$

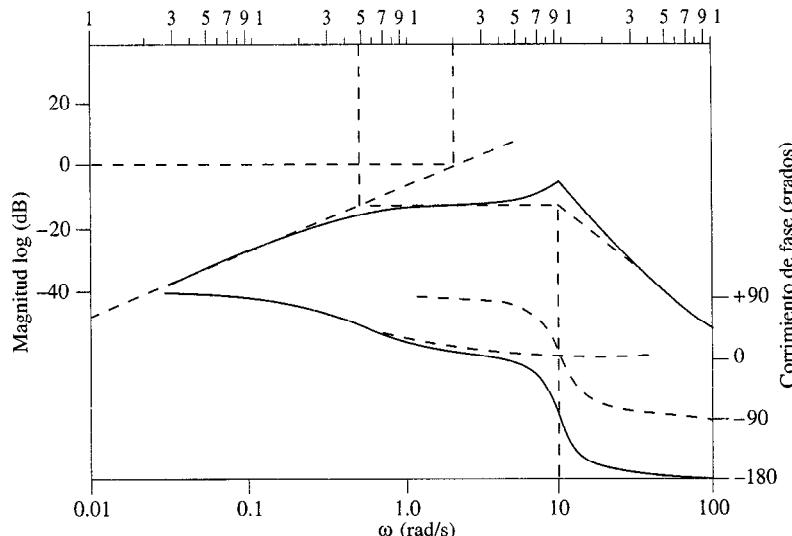


FIGURA 13.16 Gráfica de Bode para la función de transferencia del ejemplo 13.5.

Al trazar la curva en la figura 13.13a con una razón de amortiguamiento de $\zeta = 0.2$ en la frecuencia central $\omega = 10$ rad/segundo, se completa la curva de magnitud compuesta para la función de transferencia.

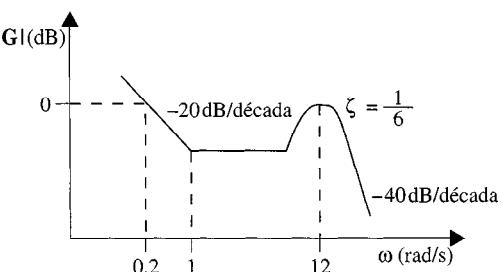
La curva de fase de baja frecuencia inicial es $+90^\circ$, debido al cero en el origen. Esta curva, junto con la curva de fase para el polo simple y la curva de fase para el término cuadrático, como se define en la figura 13.13b, se combinan para dar la curva de fase compuesta.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

- D13.6** Dada la siguiente función $G(j\omega)$, esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode, marcando todas las pendientes y puntos críticos.

$$G(j\omega) = \frac{0.2(j\omega + 1)}{j\omega[(j\omega/12)^2 + j\omega/36 + 1]}$$

Resp.:



Derivación de la función de transferencia usando la gráfica de Bode

EJEMPLO 13.6

Dada la característica de magnitud asintótica que se muestra en la figura 13.17, deseamos determinar la función de transferencia $G_v(j\omega)$.

SOLUCIÓN Como la pendiente inicial es 0 dB/decena y el nivel de la característica es 20 dB, el factor K_0 puede obtenerse de la expresión

$$20 \text{ dB} = 20 \log_{10} K_0$$

y de aquí,

$$K_0 = 10$$

La pendiente -20 dB/decena , que comienza en $\omega = 0.1 \text{ rad/segundo}$, indica que el primer polo tiene una frecuencia de corte en $\omega = 0.1 \text{ rad/segundo}$, y por consiguiente uno de los factores en el denominador es $(10j\omega + 1)$. La pendiente cambia en $+20 \text{ dB/decena}$ en $\omega = 0.5 \text{ rad/segundo}$, indicando que hay un cero presente con una frecuencia de corte en $\omega = 0.5 \text{ rad/segundo}$ y, por consiguiente, el numerador tiene un factor de $(2j\omega + 1)$. Dos polos adicionales están presentes con frecuencias de corte en $\omega = 2 \text{ rad/segundo}$ y $\omega = 20 \text{ rad/segundo}$. Por tanto, la función de transferencia compuesta es

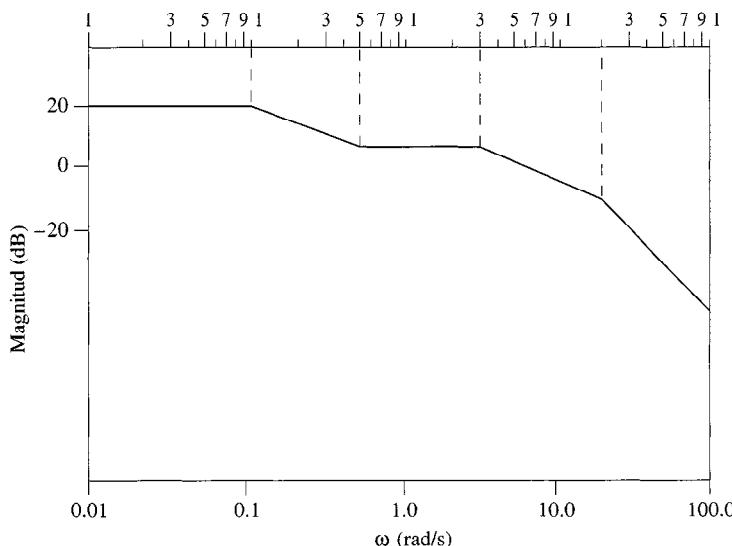


FIGURA 13.17 Gráfica de magnitud de línea recta empleada en el ejemplo 13.6.

$$G_v(j\omega) = \frac{10(2j\omega + 1)}{(10j\omega + 1)(0.5j\omega + 1)(0.05j\omega + 1)}$$

El lector debe notar cuidadosamente las ramificaciones que tiene este ejemplo con respecto al diseño de redes.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D13.7 Determine la función de transferencia $G(j\omega)$ si la aproximación mediante una recta de la característica de magnitud para esta función es como se muestra en la figura D13.7.

$$\text{Resp.: } G(j\omega) = \frac{5 \left(\frac{j\omega}{5} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{50} + 1\right)}{j\omega \left(\frac{j\omega}{20} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{100} + 1\right)}$$

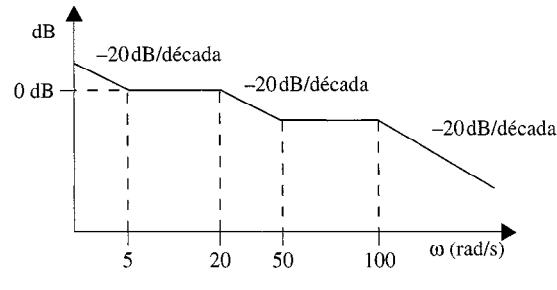


FIGURA D13.7

13.3 Circuitos resonantes

En la figura 13.18 se muestran dos circuitos con características de frecuencia extremadamente importantes. La impedancia de entrada para el circuito *RLC* en serie es

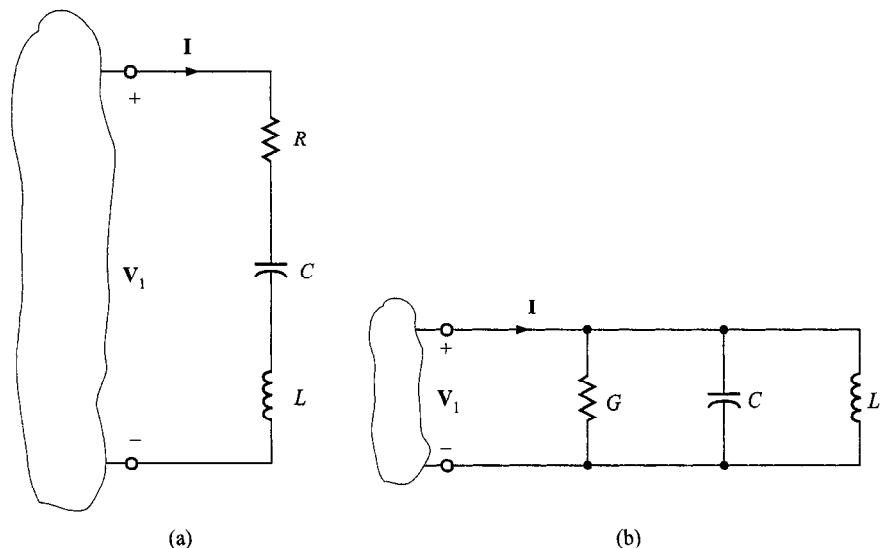


FIGURA 13.18 Circuitos RLC en serie y en paralelo.

$$\mathbf{Z}(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (13.10)$$

y la admitancia de entrada para el circuito RLC en paralelo es

$$\mathbf{Y}(j\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \quad (13.11)$$

Advierta que esas dos ecuaciones tienen la misma forma general. Los términos imaginarios en las ecuaciones anteriores serán cero si

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

El valor de ω que satisface esta ecuación es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (13.12)$$

y en este valor de ω la impedancia del circuito en serie es

$$\mathbf{Z}(j\omega_0) = R \quad (13.13)$$

y la admitancia del circuito en paralelo es

$$\mathbf{Y}(j\omega_0) = G \quad (13.14)$$

Esta frecuencia ω_0 , a la que la impedancia del circuito en serie o la admitancia del circuito en paralelo es puramente real, se llama *frecuencia resonante*, y los circuitos mis-

mos, en esta frecuencia, se dice que están *en resonancia*. La resonancia es una consideración muy importante en el diseño en ingeniería. Por ejemplo, los ingenieros que diseñaban el sistema de control de posición de los vehículos Saturno tuvieron que asegurar que la frecuencia del sistema de control no excitara las frecuencias (de resonancia) de flexión del fuselaje del vehículo. La excitación de las frecuencias de flexión ocasionaría la oscilación, que si continúa sin verificación, daría como resultado una acumulación de tensión hasta que finalmente estallara el vehículo.

En la resonancia, el voltaje y la corriente están en fase y, por consiguiente, el ángulo de fase es cero y el factor de potencia es unitario. En el caso en serie, en la resonancia la impedancia es un mínimo y, por consiguiente, la corriente es máxima para un voltaje dado. La figura 13.19 ilustra la respuesta de frecuencia de los circuitos *RLC* en serie y en paralelo. Advierta que, a bajas frecuencias, la impedancia del circuito en serie está dominada por el término capacitivo y que la admitancia del circuito en paralelo está dominada por el término inductivo. A altas frecuencias, la impedancia del circuito en serie está dominada por el término inductivo, y la admitancia del circuito en paralelo lo está por el término capacitivo.

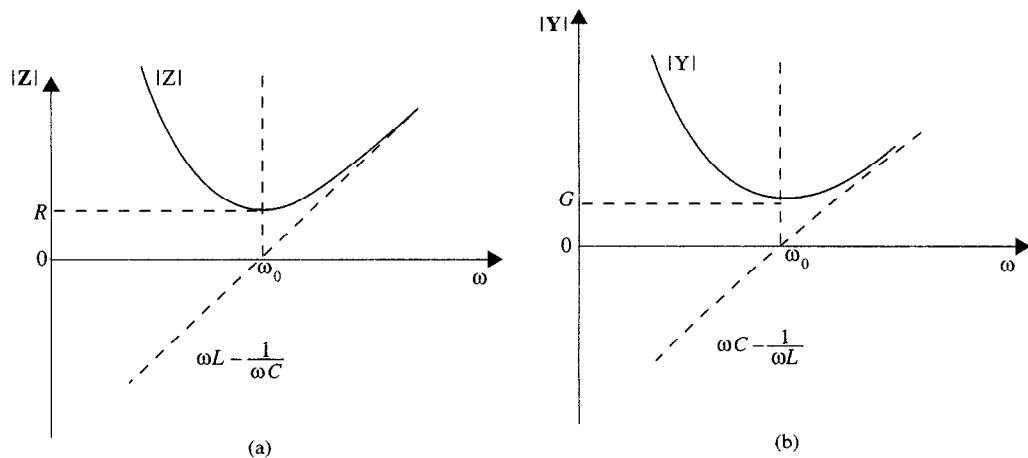


FIGURA 13.19 Respuesta de frecuencia de un circuito *RLC* en a) serie y b) en paralelo.

La resonancia se puede ver desde otra perspectiva —la del diagrama fasorial—. Una vez más consideraremos juntos los casos en serie y en paralelo, a fin de ilustrar las similitudes entre ellos. En el caso en serie, la corriente es común para cada elemento y en el caso en paralelo el voltaje es una variable común. Por tanto, la corriente en el circuito en serie y el voltaje en el circuito en paralelo se emplean como referencias. En la figura 13.20 se muestran diagramas fasoriales para ambos circuitos en los tres valores de la frecuencia $\omega < \omega_0$, $\omega = \omega_0$, y $\omega > \omega_0$.

En el caso en serie, cuando $\omega < \omega_0$, $V_C > V_L$, θ_Z es negativa y el voltaje V_1 se retrasa de la corriente. Si $\omega = \omega_0$, $V_L = V_C$, θ_Z es cero, y el voltaje V_1 está en fase con la corriente. Si $\omega > \omega_0$, $V_L > V_C$, θ_Z es positiva, y el voltaje V_1 adelanta a la corriente. Planteamientos similares pueden hacerse para el caso en paralelo de la figura 13.20b. Debido a la cercana relación entre la resonancia en serie y en paralelo, como se ilustró en el material anterior, concentraremos la mayor parte de nuestra discusión para el caso en serie en los siguientes desarrollos.

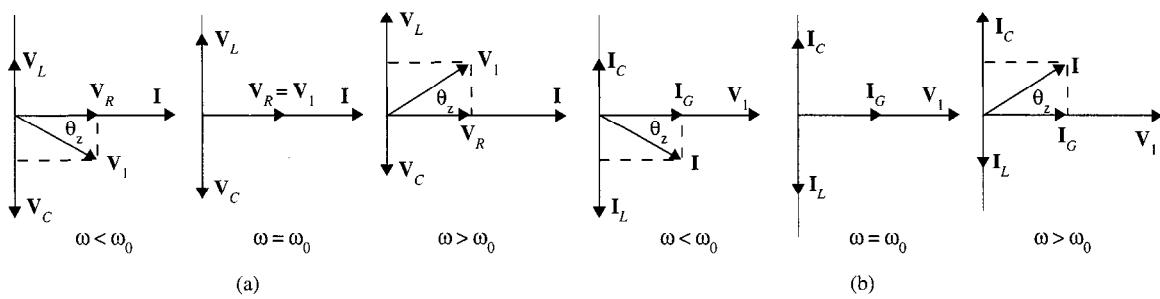


FIGURA 13.20 Diagramas fasoriales para a) un circuito RLC en serie, y b) un circuito GLC en paralelo.

Para el circuito en serie definimos lo que comúnmente se llama *factor de calidad* Q como

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (13.15)$$

Q es un factor muy importante en los circuitos resonantes, y sus ramificaciones se ilustrarán a través de esta sección.

EJEMPLO 13.7

Considere la red que se muestra en la figura 13.21. Determinemos la frecuencia resonante, el voltaje a través de cada elemento en resonancia y el valor del factor de calidad.

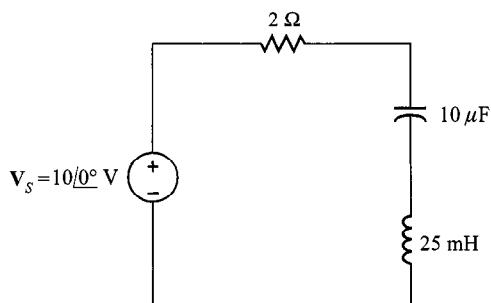


FIGURA 13.21 Circuito en serie.

SOLUCIÓN La frecuencia de resonancia se obtiene de la expresión

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(25)(10^{-3})(10)(10^{-6})}} \\ &= 2\ 000 \text{ rad/segundo} \end{aligned}$$

A esta frecuencia de resonancia

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{V}}{R} = 5 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Por tanto,

$$\mathbf{V}_R = (5 \angle 0^\circ) (2) = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_L = j\omega_0 L \mathbf{I} = 250 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{I}}{j\omega_0 C} = 250 \angle -90^\circ \text{ V}$$

Advierta la magnitud de los voltajes a través de la bobina y del condensador con respecto al voltaje de entrada. Observe también que esos voltajes son iguales y están 180° fuera de fase uno con respecto al otro. Por tanto, el diagrama fasorial para esta condición se muestra en la figura 13.20a para $\omega = \omega_0$. El factor de calidad Q derivado de la ecuación (13.15) es

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{(2)(10^3)(25)(10^{-3})}{2} = 25$$

Es interesante notar que los voltajes a través de la bobina y del capacitor pueden escribirse en términos de Q como

$$|\mathbf{V}_L| = \omega_0 L |\mathbf{I}| = \frac{\omega_0 L}{R} \mathbf{V}_S = Q \mathbf{V}_S$$

y

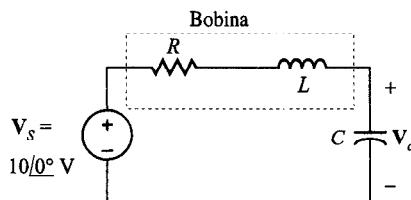
$$|\mathbf{V}_C| = \frac{|\mathbf{I}|}{\omega_0 C} = \frac{1}{\omega_0 C R} \mathbf{V}_S = Q \mathbf{V}_S$$

Este análisis indica que para una corriente dada hay una elevación del voltaje resonante a través de la bobina y del condensador que es igual al producto de Q y el voltaje aplicado.

E J E M P L O 13.8

En el laboratorio de circuitos de una facultad se pidió a los estudiantes construir una red RLC que demostrara la resonancia a $f = 1\ 000$ Hz dada una bobina de 0.02 H que tiene una Q de 200. Un estudiante produce el circuito que se muestra en la figura 13.22, donde la resistencia interna de la bobina está representada por R .

Si el capacitor elegido para demostrar la resonancia fuera un condensador de papel impregnado de aceite clasificado a 300 V, determinemos los parámetros de la red y el efecto de la elección de este capacitor.

FIGURA 13.22 Red resonante *RLC* en serie.

SOLUCIÓN Para la resonancia a 1 000 Hz, el estudiante encontró el valor del capacitor requerido utilizando la expresión

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

la cual da

$$C = 1.27 \mu\text{F}$$

El estudiante seleccionó un condensador de papel impregnado de aceite clasificado a 300 V. El valor de la resistencia se encontró usando la expresión para Q

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = 200$$

o

$$R = 1.59 \Omega$$

En la resonancia, la corriente sería

$$I = \frac{V_s}{R}$$

o

$$I = 6.28 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Cuando se construyó, la corriente midió solamente

$$I \sim 1 \angle 0^\circ \text{ mA}$$

Esta medida indicó claramente que la impedancia vista por la fuente estaba cercana a $10 \text{ k}\Omega$ de resistencia en lugar de 1.59Ω —una diferencia totalmente drástica—. Sospechando que el capacitor seleccionado fue el origen del problema, el estudiante calculó cuál debería ser el voltaje del capacitor. Si operara como se diseñó, entonces en la resonancia,

$$V_C = \frac{V_s}{R} \left(\frac{1}{j\omega C} \right) = QV_s$$

o

$$\mathbf{V}_C = 2000 \angle -90^\circ \text{ V}$$

que es ¡más de seis veces el voltaje estimado del capacitor! Este sobrevoltaje ha dañado al capacitor, por lo que no funcionó apropiadamente. Al seleccionar un nuevo capacitor y al reducirse la fuente de voltaje por un factor de 10, la red funcionó apropiadamente como un circuito de Q alta.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D13.8 Dada la red de la figura D13.8, encuentre el valor C que colocará al circuito en resonancia a 1 800 rad/segundo.

Resp.: $C = 3.09 \mu\text{F}$.

D13.9 Dada la red en D13.8, determine la Q de la red y la magnitud del voltaje a través del capacitor.

Resp.: $Q = 60$, $|\mathbf{V}_C| = 600 \text{ V}$.

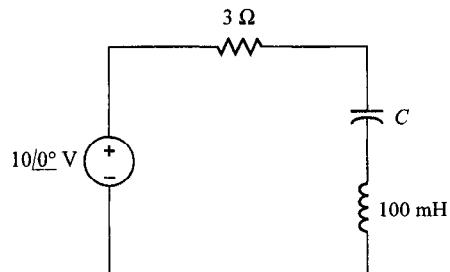


FIGURA D13.8

La impedancia del circuito de la figura 13.18a está dada por la ecuación (13.10), que puede expresarse como una admitancia,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(j\omega) &= \frac{1}{R[1 + j(1/R)(\omega L - 1/\omega C)]} \\ &= \frac{1}{R[1 + j(\omega L/R - 1/\omega CR)]} \\ &= \frac{1}{R[1 + jQ(\omega L/RQ - 1/\omega CRQ)]} \end{aligned} \quad (13.16)$$

Usando el hecho de que $Q = \omega_0 L/R = 1/\omega_0 CR$, la ecuación (13.16) se convierte en

$$\mathbf{Y}(j\omega) = \frac{1}{R[1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)]} \quad (13.17)$$

Como $\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}_1$ y el voltaje a través de la resistencia es $\mathbf{V}_R = \mathbf{I}\mathbf{R}$, entonces

$$\frac{\mathbf{V}_R}{\mathbf{V}_1} = \mathbf{G}_v(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)} \quad (13.18)$$

y la magnitud y la fase son

$$M(\omega) = \frac{1}{[1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2]^{1/2}} \quad (13.19)$$

y

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (13.20)$$

Los esbozos para estas funciones se muestran en la figura 13.23. Observe que el circuito tiene la forma de un filtro para bandas. El ancho de banda, como se muestra, es la diferencia entre las dos frecuencias de potencia media. Como la potencia es proporcional al cuadrado de la magnitud, esas dos frecuencias pueden derivarse haciendo la magnitud $M(\omega) = 1/\sqrt{2}$; esto es,

$$\left| \frac{1}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por tanto,

$$Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1 \quad (13.21)$$

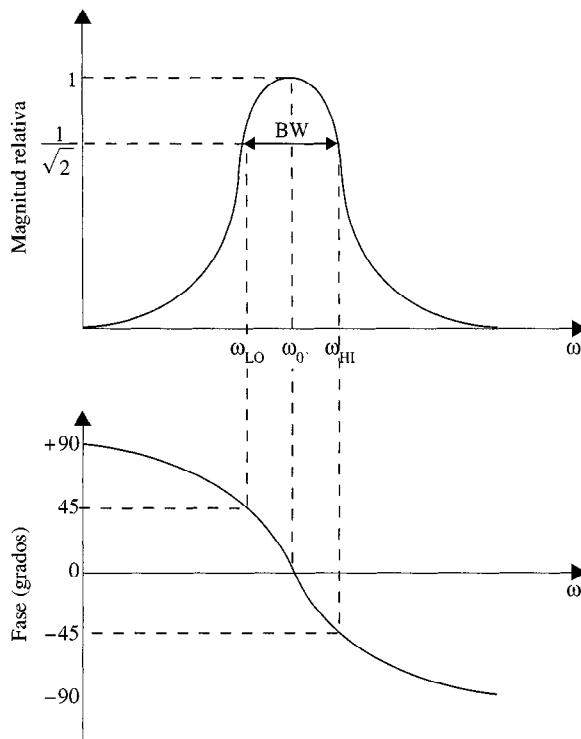


FIGURA 13.23 Curvas de magnitud y fase para la ecuación (13.18).

Resolviendo esta ecuación, obtenemos cuatro frecuencias,

$$\omega = \pm \frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \quad (13.22)$$

Tomando solamente los valores positivos, obtenemos

$$\begin{aligned} \omega_{\text{LO}} &= \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right] \\ \omega_{\text{HI}} &= \omega_0 \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right] \end{aligned} \quad (13.23)$$

La resta de estas dos ecuaciones da el ancho de banda, como se muestra en la figura 13.22:

$$\text{BW} = \omega_{\text{HI}} - \omega_{\text{LO}} = \frac{\omega_0}{Q} \quad (13.24)$$

y multiplicando las dos ecuaciones se obtiene

$$\omega_0^2 = \omega_{\text{LO}} \omega_{\text{HI}} \quad (13.25)$$

la cual ilustra que la frecuencia resonante es la media geométrica de las dos frecuencias de potencia media. Recuerde que las frecuencias de potencia media son los puntos en los que la curva de magnitud logarítmica está por debajo de 3 dB de su valor máximo. Por tanto, la diferencia entre las frecuencias de 3dB, que por supuesto es el ancho de banda, con frecuencia se llama el ancho de banda de 3dB.

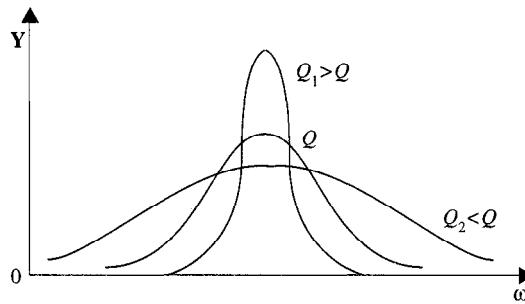
EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D13.10 Para la red de la figura D13.8, calcule las dos frecuencias de potencia media y el ancho de banda de la red.

Resp.: $\omega_{\text{HI}} = 1815 \text{ rad/segundo}$, $\omega_{\text{LO}} = 1785 \text{ rad/segundo}$, $\text{BW} = 30 \text{ rad/segundo}$.

La ecuación (13.15) indica la dependencia de Q sobre R . Un circuito en serie con Q alta tiene un valor pequeño de R , y como ilustraremos más tarde, un circuito en paralelo de Q alta tiene un valor relativamente grande de R .

La ecuación (13.24) ilustra que el ancho de banda es inversamente proporcional a Q . Por tanto, la selectividad de frecuencia del circuito está determinada por el valor de Q . Un circuito de Q alta tiene un ancho de banda pequeño y, por consiguiente, el circuito es muy selectivo. La manera como Q afecta la selectividad de la frecuencia de la red se ilustra gráficamente en la figura 13.24. De aquí que, si pasamos una señal con una amplia escala de frecuencia a través de un circuito con Q alta, solamente los componentes de la frecuencia dentro del ancho de banda de la red no estarán atenuados; es decir, la red actúa como un filtro pasa bandas.

FIGURA 13.24 Respuesta de frecuencia de la red como función de Q .

Q tiene un significado más general que podemos explorar por medio de un análisis de energía del circuito en serie. Recuerde que en el capítulo 6 una bobina almacenaba energía en su campo magnético y un capacitor almacenaba energía en su campo eléctrico. Cuando una red está en resonancia, hay un intercambio continuo de energía entre el campo magnético de la bobina y el campo eléctrico del condensador. Durante cada mitad de ciclo, la energía almacenada dentro del campo magnético de la bobina varía de cero a un valor máximo y regresa nuevamente a cero. El capacitor opera de manera similar. La energía intercambiada tiene lugar de la siguiente manera: durante un cuarto de ciclo, el capacitor absorbe energía tan rápidamente como la bobina se la entrega, y durante el siguiente cuarto de ciclo la bobina absorbe energía con tanta rapidez como el capacitor la libera. Aunque la energía almacenada en cada elemento está variando continuamente, la energía total almacenada en el circuito resonante es constante y, por tanto, no cambia con el tiempo.

A fin de definir Q en términos de la energía, supongamos que la excitación está en la frecuencia ω_0 y que

$$i(t) = I_M \cos \omega_0 t$$

Las energías almacenadas en la bobina y en el condensador son

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L I_M^2 \cos^2 \omega_0 t$$

y

$$w_C(t) = \frac{1}{2} \frac{I_M^2}{\omega_0^2 C} \sin^2 \omega_0 t$$

La energía total almacenada es entonces

$$\begin{aligned} w_S(t) &= w_L(t) + w_C(t) \\ &= \frac{1}{2} I_M^2 \left(L \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^2 C} \sin^2 \omega_0 t \right) \end{aligned}$$

Sin embargo, como $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, la ecuación anterior se reduce a

$$w_S(t) = \frac{1}{2} L I_M^2 \equiv W_S \quad (13.26)$$

que es la energía máxima almacenada en la resonancia.

La energía disipada por ciclo puede derivarse multiplicando la potencia promedio absorbida por la resistencia en el periodo de un ciclo:

$$W_D = \left(\frac{1}{2} I_M^2 R\right) \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (13.27)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{W_S}{W_D} &= \frac{\frac{1}{2} L I_M^2}{\frac{1}{2} I_M^2 R (2\pi/\omega_0)} \\ &= \frac{\omega_0 L}{R} \frac{1}{2\pi} \end{aligned} \quad (13.28)$$

Usando la ecuación (13.16) encontramos que esta ecuación se convierte en

$$\frac{W_S}{W_D} = \frac{Q}{2\pi}$$

o

$$Q = 2\pi \frac{W_S}{W_D} \quad (13.29)$$

donde recordamos que W_S es la máxima energía almacenada en la resonancia y W_D es la energía disipada por ciclo. La importancia de esa definición de Q se deriva del hecho de que esta expresión es aplicable a sistemas acústicos, eléctricos y mecánicos, y, por tanto, generalmente es considerada como la definición básica de Q .

EJEMPLO 13.9

Dado un circuito en serie con $R = 2 \Omega$, $L = 2 \text{ mH}$ y $C = 5 \mu\text{F}$, deseamos determinar la frecuencia resonante, el factor de calidad y el ancho de banda para el circuito. Después determinaremos el cambio en Q y el ancho de banda si R se cambia de 2 a 0.2Ω .

SOLUCIÓN Utilizando la ecuación (13.12), tenemos

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{[(2)(10^{-3})(5)(10^{-6})]^{1/2}} \\ &= 10^4 \text{ rad/segundos} \end{aligned}$$

y por tanto, la frecuencia resonante es $10^4/2\pi = 1592 \text{ Hz}$.

El factor de calidad es

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{(10^4)(2)(10^{-3})}{2} = 10$$

y el ancho de banda es

$$\text{BW} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{10^4}{10} = 10^3 \text{ rad/segundo}$$

Si R se cambia a $R = 0.2 \Omega$, el nuevo valor de Q es 100 y, por tanto, el nuevo ancho de banda es 102 rad/segundo.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

DIS.1 Un circuito en serie está compuesto de $R = 2 \Omega$, $L = 40 \text{ mH}$ y $C = 100 \mu\text{F}$. Determine el ancho de banda de este circuito en torno de su frecuencia resonante.

Resp.: Ancho de banda = 50 rad/segundo, $\omega_0 = 500 \text{ rad/segundo}$.

D13.12 Un circuito RLC en serie tiene las siguientes características. $R = 4 \Omega$, $\omega_0 = 4000 \text{ rad/segundos}$, y el ancho de banda (BW) = 100 rad/segundo. Determine los valores de L y C .

Resp.: $L = 40 \text{ mH}$, $C = 1.56 \mu\text{F}$.

EJEMPLO 13.10

Deseamos determinar los parámetros R , L y C de modo que el circuito que se muestra en la figura 13.25 opere como filtro pasa bandas con una ω_0 de 1 000 rad/segundo y un ancho de banda de 100 rad/segundo.

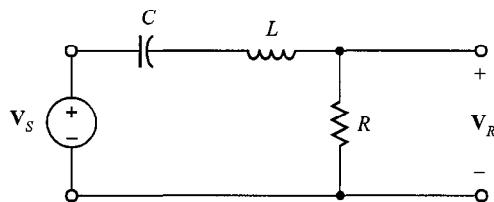


FIGURA 13.25 Circuito RLC en serie.

SOLUCIÓN La ganancia de voltaje para la red es

$$G_v(j\omega) = \frac{(R/L)j\omega}{(j\omega)^2 + (R/L)j\omega + 1/LC}$$

De aquí,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

y como $\omega_0 = 10^3$,

$$\frac{1}{LC} = 10^6$$

El ancho de banda es

$$\text{BW} = \frac{\omega_0}{Q}$$

Entonces

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega_0}{\text{BW}} = \frac{1000}{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Sin embargo,

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

Por tanto,

$$\frac{1000L}{R} = 10$$

Observe que tenemos dos ecuaciones en los tres parámetros del circuito desconocidos R , L y C . De aquí que, si seleccionamos $C = 1 \mu\text{F}$, entonces

$$L = \frac{1}{10^6 C} = 1 \text{ H}$$

y

$$\frac{1000(1)}{R} = 10$$

da

$$R = 100 \Omega$$

Por tanto, los parámetros $R = 100 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ y $C = 1 \mu\text{F}$ producirán las características del filtro apropiadas.

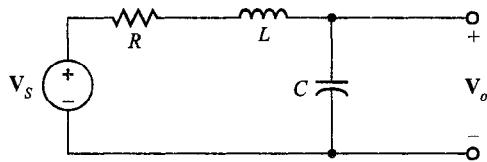


FIGURA 13.26 Circuito resonante en serie.

En los ejemplos 13.7 y 13.8 encontramos que el voltaje a través del condensador o de la bobina en el circuito resonante en serie podría ser completamente alto. De hecho, fue igual a Q veces la magnitud de la fuente de voltaje. Con esto en mente, re-examinemos esta red como se muestra en la figura 13.26. El voltaje de salida para la red es

$$\mathbf{V}_o = \left(\frac{1/j\omega C}{R + j\omega L + 1/j\omega C} \right) \mathbf{V}_s$$

que puede escribirse como

$$\mathbf{V}_o = \frac{\mathbf{V}_s}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}$$

La magnitud de este voltaje puede expresarse como

$$|\mathbf{V}_o| = \frac{|\mathbf{V}_s|}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \quad (13.30)$$

En vista de una discusión previa, podemos suponer que el valor máximo del voltaje de salida ocurriría en la frecuencia resonante ω_0 . Veamos si esta suposición es correcta. La frecuencia a la cual $|\mathbf{V}_o|$ es máximo es el valor diferente de cero de ω , que satisface la ecuación

$$\frac{d|\mathbf{V}_o|}{d\omega} = 0 \quad (13.31)$$

Si llevamos a cabo la operación indicada y resolvemos para ω_{\max} diferente de cero, obtenemos

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} \right)^2} \quad (13.32)$$

Empleando la relación $\omega_0^2 = 1/LC$ y $Q = \omega_0 L/R$, la expresión para ω_{\max} puede escribirse como

$$\begin{aligned} \omega_{\max} &= \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{Q} \right)^2} \\ &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \end{aligned} \quad (13.33)$$

Claramente, $\omega_{\max} \neq \omega_0$; sin embargo, ω_0 se aproxima a ω_{\max} si la Q es alta. En suma, si sustituimos la ecuación (13.33) en la ecuación (13.30) y usamos la relación $\omega_0^2 = 1/LC$ y $\omega_0^2 C^2 R^2 = 1/Q^2$, encontramos que

$$|\mathbf{V}_o|_{\max} = \frac{Q |\mathbf{V}_S|}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}} \quad (13.34)$$

Nuevamente, vemos que $|\mathbf{V}_o|_{\max} \approx Q |\mathbf{V}_S|$ si la red tiene una Q alta.

EJEMPLO 13.11

Dada la red de la figura 13.26, deseamos determinar ω_0 y ω_{\max} para $R = 50 \Omega$ y $R = 1 \Omega$ si $L = 50 \text{ mH}$ y $C = 5 \mu\text{F}$.

SOLUCIÓN Los parámetros de la red dan

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(5)(10^{-2})(5)(10^{-6})}} \\ &= 2000 \text{ rad/segundos} \end{aligned}$$

Si $R = 50 \Omega$, entonces

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega_0 L}{R} \\ &= \frac{(2000)(0.05)}{50} \\ &= 2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \omega_{\max} &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \\ &= 2000 \sqrt{1 - \frac{1}{8}} \\ &= 1871 \text{ rad/segundo.} \end{aligned}$$

Si $R = 1 \Omega$, entonces $Q = 100$ y $\omega_{\max} = 2000 \text{ rad/segundo}$.

Una gráfica de $|\mathbf{V}_o|$ contra la frecuencia para la red con $R = 50 \Omega$ y $R = 1 \Omega$ se muestra en las figuras 13.27a y b, respectivamente. Note que cuando la Q de la red es pequeña, la respuesta de frecuencia no es selectiva

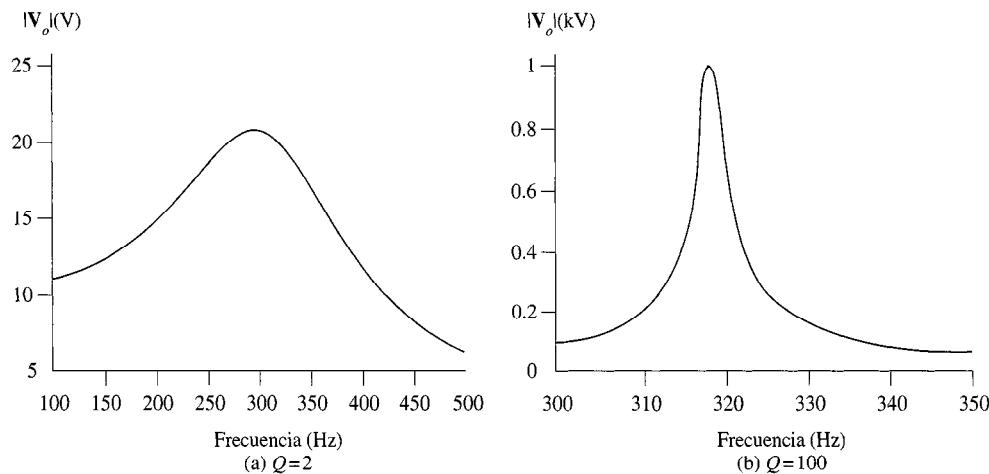


FIGURA 13.27 Gráficas de respuesta de frecuencia para la red de la figura 13.26 con a) $R = 50 \Omega$, y b) $R = 1 \Omega$.

y $\omega_0 \neq \omega_{\text{máx}}$. Sin embargo, si la Q es grande, la respuesta de frecuencia es muy selectiva y $\omega_0 \cong \omega_{\text{máx}}$.

E J E M P L O 13.12

El 1 de julio de 1940, el tercer puente más largo de Estados Unidos, el puente Tacoma Narrows, fue abierto al tráfico a través de Puget Sound, en Washington. El 7 de noviembre de 1940 la estructura se colapsó, en lo que ha sido la falla estructural más célebre en este siglo. Una fotografía del puente, tomada cuando estaba oscilando justo antes de que se rompiera, se muestra en la figura 13.28. La explicación del desastre en términos cuantitativos es una prueba para los ingenieros civiles y los expertos en estructuras y se han presentando varias teorías. Sin embargo, el denominador común en cada explicación es que el viento que soplaban a través del puente ocasionó que toda la estructura entrara en resonancia a tal grado que el puente mismo se rompiera. Uno puede teorizar que el viento, fluctuando a una frecuencia cercana a la frecuencia natural del puente (0.2 Hz), impulsara la estructura a la resonancia. De este modo, el puente puede ser modelado gruesamente como un sistema de segundo orden. Diseñemos una red RLC resonante para demostrar el movimiento vertical del puente e investigar el efecto de la frecuencia del viento.

SOLUCIÓN La red RLC que se muestra en la figura 13.29 es un sistema de segundo orden, donde $v_{\text{ent}}(t)$ es análogo a la deflexión vertical del camino del puente (1 volt = 1 pie). Los valores de C , L , R_1 y R_2 pueden derivarse de los datos tomados del sitio y de los modelos a escala como se lista a continuación.

$$\text{Deflexión vertical en la falla} \approx 4 \text{ pies}$$

$$\text{Velocidad del viento en la falla} \approx 42 \text{ mph}$$

$$\text{Frecuencia resonante} = f_0 \approx 0.2 \text{ Hz}$$

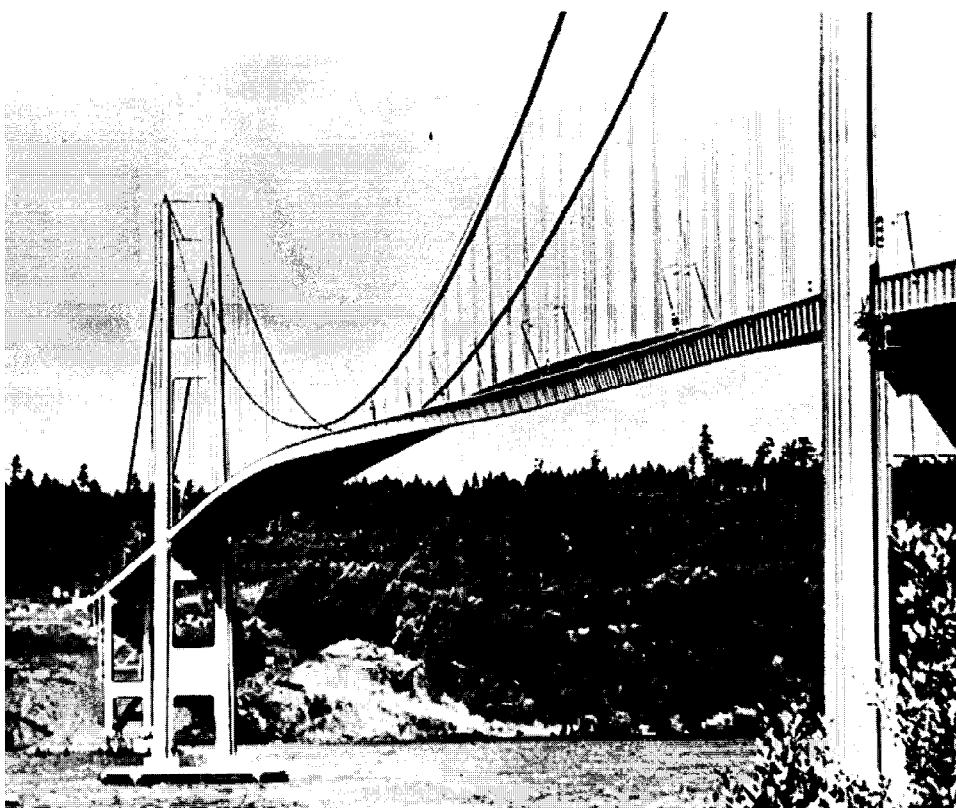


FIGURA 13.28 Puente de Tacoma Narrows al borde del colapso. (Utilizada con permiso de la División de Colecciones Especiales, Bibliotecas de la Universidad de Washington. Foto de Farguharson, negativo número 12.)

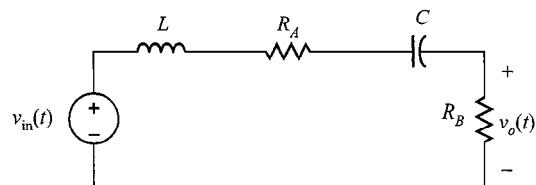


FIGURA 13.29 Red RLC resonante para una simulación simple del puente de Tacoma Narrows.

El voltaje de salida puede expresarse como

$$V_o(j\omega) = \frac{j\omega \left(\frac{R_B}{L} \right) V_{\text{ent}}(j\omega)}{-\omega^2 + j\omega \left(\frac{R_A + R_B}{L} \right) + \frac{1}{LC}}$$

de lo cual podemos fácilmente extraer las siguientes expresiones

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi(0.2)\text{r/s}$$

$$2\zeta\omega_o = \frac{R_A + R_B}{L}$$

y

$$\frac{\mathbf{V}_o(j\omega_0)}{\mathbf{V}_{\text{ent}}(j\omega_0)} = \frac{R_B}{R_A + R_B} \approx \frac{4 \text{ pies}}{42 \text{ mph}}$$

Elijamos $R_B = 1 \Omega$ y $R_A = 9.5 \Omega$. No teniendo datos para la razón de amortiguamiento ζ , seleccionaremos $L = 20 \text{ H}$, lo cual da $\zeta = 0.209$ y $Q = 2.39$, que parece razonable para esa larga estructura. Dadas las elecciones anteriores, el valor requerido del condensador es $C = 31.66 \text{ mF}$. Usando estos valores del circuito, simularemos ahora el efecto de vientos de 42 mph que fluctúan a 0.05 Hz, 0.1 Hz y 0.2 Hz, usando el siguiente programa de PSPICE.

```
Tacoma Narrows Simulation using Forced Resonance
* 1 V at Vin represents 1 mph of wind speed.
* 1 Hz at Vin represents 1 Hz in wind velocity.
* 1 V at Vo (V4) represents 1 foot of deflection.
*
Vin 1 0 sin (0 42 0.05 1 0 0)
L 1 2 20
RA 2 3 9.5
C 3 4 31.66m
RB 4 0 1
.tran 1m 40
.probe
.end
```

Los resultados se muestran en la figura 13.30. Note que a 0.05 Hz la deflexión vertical (1 pie/V) es solamente 0.44 pies, mientras que a 0.1 Hz el puente se ondula cerca de 1.07 pies. Finalmente, a la frecuencia de resonancia del puente de 0.2 Hz, el puente oscila 3.77 pies —falla catastrófica—.

Claramente hemos usado una aproximación en extremo simplista para modelar algo tan complicado como el puente de Tacoma Narrows. Sin embargo, revisaremos este caso en el capítulo 16 y lo examinaremos más de cerca con un modelo más exacto (K. Y. Billah y R.H. Scalan, “Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks,” American Journal of Physics volumen 59, no. 2, pp. 118–124).

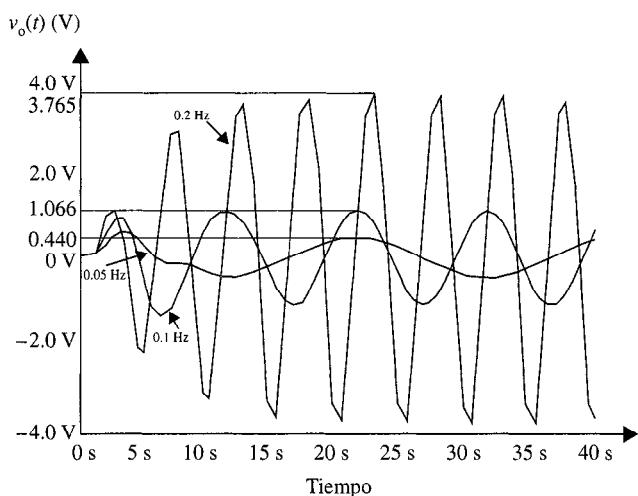


FIGURA 13.30 Deflexión vertical simulada (1 volt = 1 pie) para el puente de Tacoma Narrows para frecuencias de corrimiento del viento de 0.05, 0.1 y 0.2 Hz.

En nuestra presentación de resonancia, hasta este momento hemos centrado la mayor parte de nuestra discusión en el circuito resonante en serie. Debemos recordar, sin embargo, que las ecuaciones para la impedancia del circuito en serie y la admitancia del circuito en paralelo son similares. Por tanto, las redes poseen propiedades similares, como lo ilustraremos en los siguientes ejemplos.

Considere la red que se muestra en la figura 13.31. La fuente de corriente I_s puede expresarse como

$$\begin{aligned} I_s &= I_G + I_C + I_L \\ &= V_s G + j\omega C V_s + \frac{V_s}{j\omega L} \\ &= V_s \left[G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right] \end{aligned}$$

Cuando la red está en resonancia,

$$I_s = GV_s$$

es decir, toda la corriente de la fuente fluye a través de la conductancia G . ¿Significa esto que no hay corriente en L o en C ? ¡Definitivamente, no! I_C e I_L son iguales en magnitud, pero 180° fuera de fase entre ellas. Por tanto, I_x , como se muestra en la figura 13.31, es cero. Además, si $G = 0$, la corriente de la fuente es 0. Lo que realmente tiene lugar, sin embargo, es un intercambio de energía entre el campo eléctrico del capacitor y el campo magnético de la bobina. Cuando uno se incrementa, el otro disminuye, y viceversa.

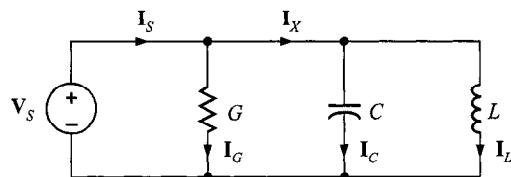


FIGURA 13.31 Circuito RLC paralelo.

EJEMPLO 13.13

La red de la figura 13.31 tiene los siguientes parámetros:

$$V_s = 120 \angle 0^\circ \text{ V}, G = 0.01 \text{ S}, C = 600 \mu\text{F}, \text{ y } L = 120 \text{ mH}$$

Si la fuente opera a la frecuencia resonante de la red, calcule todas las corrientes de rama.

SOLUCIÓN La frecuencia resonante para la red es

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(120)(10^{-3})(600)(10^{-6})}} \\ &= 117.85 \text{ rad/segundo}\end{aligned}$$

A esta frecuencia

$$Y_C = j\omega_0 C = j7.07 \times 10^{-2} \text{ S}$$

y

$$Y_L = -j \left(\frac{1}{\omega_0 L} \right) = -j7.07 \times 10^{-2} \text{ S}$$

Las corrientes de rama son entonces

$$I_G = GV_s = 1.2 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$I_C = Y_C V_s = 8.49 \angle 90^\circ \text{ A}$$

$$I_L = Y_L V_s = 8.49 \angle -90^\circ \text{ A}$$

e

$$I_s = I_G + I_C + I_L = 1.2 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Como indica el análisis, la fuente suministra solamente las pérdidas en el elemento resistivo. Además, el voltaje y la corriente de la fuente están en fase y, por tanto, el factor de potencia es unitario.

E J E M P L O 13.14

Dado el circuito *RLC* en paralelo de la figura 13.32,

- Derive la expresión de la frecuencia resonante, las frecuencias de potencia media, el ancho de banda y el factor de calidad para la transferencia característica $\frac{V_{\text{sal}}}{I_{\text{ent}}}$ en términos de los parámetros R , L y C del circuito.
- Calcule las cantidades del inciso (a) si $R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 10 \text{ mH}$ y $C = 100 \mu\text{F}$.

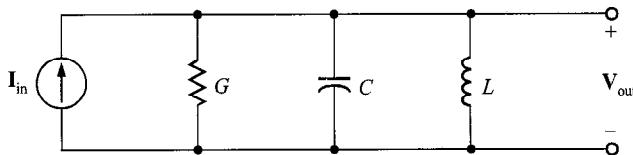


FIGURA 13.32 Circuito utilizado en el ejemplo 13.14.

S O L U C I Ó N a) El voltaje de salida puede escribirse como

$$\frac{V_{\text{sal}}}{I_{\text{ent}}} = \frac{I_{\text{ent}}}{Y_T}$$

y, por tanto, la magnitud de la transferencia característica puede expresarse como

$$\left| \frac{V_{\text{sal}}}{I_{\text{ent}}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1/R^2) + (\omega C - 1/\omega L)^2}}$$

La transferencia característica es un máximo en la frecuencia resonante

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (13.35)$$

y en esta frecuencia

$$\left| \frac{V_{\text{sal}}}{I_{\text{ent}}} \right|_{\text{máx}} = R \quad (13.36)$$

Como demostramos anteriormente, en las frecuencias de potencia media la magnitud es igual a $1/\sqrt{2}$ de su máximo valor, y de aquí que las frecuencias de potencia media pueden obtenerse de la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{(1/R^2) + (\omega C - 1/\omega L)^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Resolviendo esta ecuación y tomando sólo los valores positivos de ω se obtiene

$$\omega_{LO} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC}} \quad (13.37)$$

y

$$\omega_{HI} = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC}} \quad (13.38)$$

Restando esas dos frecuencias de potencia media se obtiene el ancho de banda

$$BW = \omega_{HI} - \omega_{LO} \quad (13.39)$$

$$= \frac{1}{RC}$$

Por tanto, el factor de calidad es

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega_0}{BW} \\ &= \frac{RC}{\sqrt{LC}} \\ &= R \sqrt{\frac{C}{L}} \end{aligned} \quad (13.40)$$

Usando las ecuaciones (13.35), (13.39) y (13.40), podemos escribir las ecuaciones (13.37) y (13.38) como

$$\omega_{LO} = \omega_0 \left[\frac{-1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1} \right] \quad (13.41)$$

$$\omega_{HI} = \omega_0 \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1} \right] \quad (13.42)$$

b) Usando los valores dados para los componentes del circuito, encontramos que

$$= \frac{1}{\sqrt{(10^{-2})(10^{-4})}} = 10^3 \text{ rad/segundos}$$

Las frecuencias de potencia media son

$$\begin{aligned} \omega_{LO} &= \frac{-1}{(2)(10^3)(10^{-4})} + \sqrt{\frac{1}{[(2)(10^{-1})]^2} + 10^6} \\ &= 995 \text{ rad/segundo} \end{aligned}$$

y

$$\omega_{HI} = 1005 \text{ rad/segundo}$$

Por tanto, el ancho de banda es

$$BW = \omega_{HI} - \omega_{LO} = 10 \text{ rad/segundo}$$

y

$$Q = 10^3 \sqrt{\frac{10^{-4}}{10^{-2}}} = 100$$

E J E M P L O 13.15

Las estaciones de radio WHEW y WHAT transmiten en la misma área de escucha: la WHEW transmite a 100 MHz y la WHAT a 98 MHz. Un amplificador de sintonía de una sola etapa, como el que se muestra en la figura 13.33, puede usarse como sintonizador para filtrar una de las estaciones. Sin embargo, los amplificadores de sintonía de una sola etapa tienen una selectividad pobre debido a su amplio ancho de banda. A fin de reducir el ancho de banda (incrementar el factor de calidad) de los amplificadores de sintonía de una sola etapa, los diseñadores emplean una técnica llamada sintonía sincrónica. En este proceso, amplificadores de sintonía idénticos se conectan en cascada, como se muestra en la figura 13.34. Para demostrar este fenómeno, usemos el PSPICE para generar una gráfica de Bode para el amplificador que se muestra en la figura 13.33 cuando sintoniza la WHEW (100 MHz), utilizando una, dos, tres y cuatro etapas de amplificación.

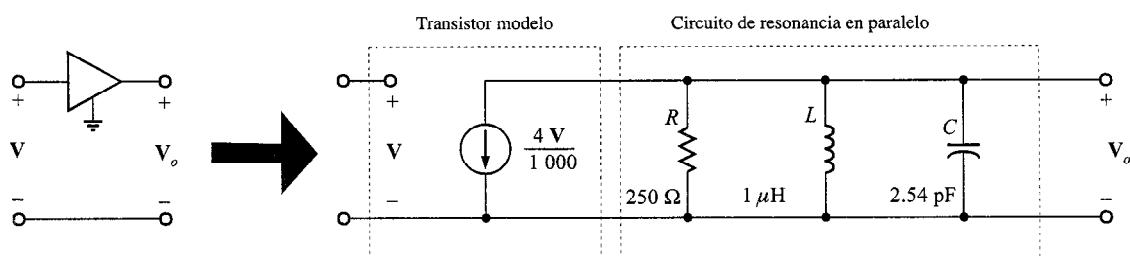


FIGURA 13.33 Amplificador de sintonía de una sola etapa.

SOLUCIÓN Usando el circuito para un amplificador de una sola etapa, que se muestra en la figura 13.33, el programa PSPICE para un amplificador de cuatro etapas sintonizado sincrónicamente se enlistó abajo.

```
Radio Tuner Example
*
* Stage One
*
```

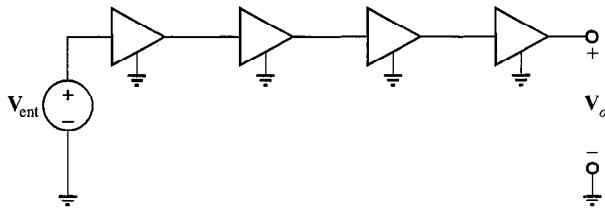


FIGURA 13.34 Cuatro etapas de amplificador de sintonía idénticas.

```

* Since Vin is 1 V at 0 degrees, the
* output voltage is the gain!
*
Vin 1 0 ac 1
R1dummy 1 0 1000meg
G1 0 2 1 0 4m
R1 2 0 250
L1 2 0 10n
C1 2 0 254p; required for 100 MHz tuning *
*
* Stage Two
*
G2 0 3 2 0 4m
R2 3 0 250
L2 3 0 10n
C2 3 0 254p
*
* Stage Three
*
G3 0 4 3 0 4m
R3 4 0 250
L3 4 0 10n
C3 4 0 254p
*
* Stage Four
*
G4 0 5 4 0 4m
R4 5 0 250
L4 5 0 10n
C4 5 0 254p
*
.ac dec 1000 90meg 110meg
.probe
.end

```

El comando de la gráfica en el programa indica que la estamos trazando en una escala de 90 MHz a 110 MHz, usando 1 000 puntos por década.

En la gráfica de Bode de la figura 13.35 vemos que incrementar el número de etapas realmente hace disminuir el ancho de banda sin alterar la

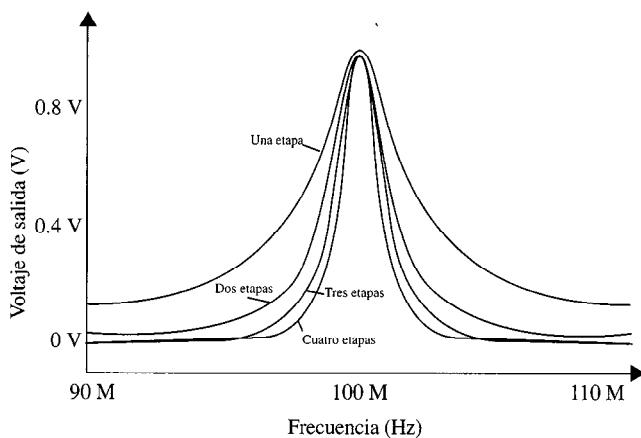


FIGURA 13.35 Gráficas de Bode para amplificadores de sintonía de 1, 2, 3 y 4 etapas.

frecuencia central. Como resultado, el factor de calidad y la selectividad se incrementan. En concordancia, conforme agregamos etapas, la ganancia en 98 MHz (frecuencia de WHAT) disminuye y la estación queda fuera.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D13.13 Un circuito *RLC* en paralelo tiene los siguientes parámetros: $R = 2 \text{ k}\Omega$, $BW = 1000 \text{ rad/segundo}$ y $Q = 120$. Determine la frecuencia resonante, la Q y el ancho de banda del circuito.

Resp.: $\omega_0 = 577 \text{ rad/segundo}$, $Q = 173$ y $BW = 3.33 \text{ rad/segundo}$.

D13.14 Un circuito *RLC* en paralelo tiene los siguientes parámetros: $R = 6 \text{ k}\Omega$, $BW = 1000 \text{ rad/segundo}$ y $Q = 120$. Determine los valores de L , C y ω_0 .

Resp.: $L = 417.5 \mu\text{H}$, $C = 0.167 \mu\text{F}$ y $\omega_0 = 119760 \text{ rad/segundo}$.

En general, la resistencia del devanado de una bobina no puede ser ignorada, y de aquí que un circuito resonante en paralelo más práctico es el que se muestra en la figura 13.36. La admitancia de entrada de este circuito es

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= j\omega C + \frac{1}{R+j\omega L} \\ &= j\omega C + \frac{R-j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ &= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right) \end{aligned}$$

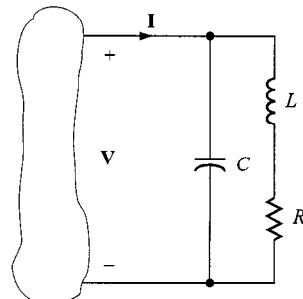


FIGURA 13.36 Circuito resonante en paralelo práctico.

La frecuencia resonante a la que la admitancia es puramente real es

$$\omega_r C - \frac{\omega_r L}{R^2 + \omega_r^2 L^2} = 0$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \quad (13.43)$$

EJEMPLO 13.16

Dado el circuito tanque de la figura 13.37, determinemos ω_0 y ω_r para $R = 50 \Omega$ y $R = 5 \Omega$.

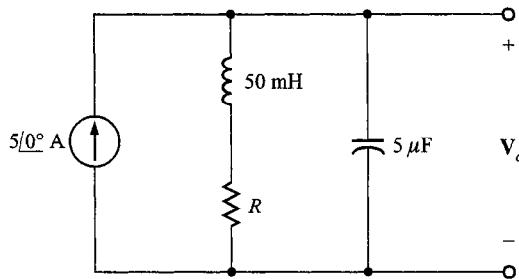


FIGURA 13.37 Circuito tanque utilizado en el ejemplo 13.16.

SOLUCIÓN Utilizando los valores de los parámetros de la red, obtenemos

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(0.05)(5)(10^{-6})}} \\ &= 2\,000 \text{ rad/segundo} \\ &= 318.3 \text{ Hz}\end{aligned}$$

Si $R = 50 \Omega$, entonces

$$\begin{aligned}\omega_r &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{(0.05)(5)(10^{-6})} - \left(\frac{50}{0.05}\right)^2} \\ &= 1\,732 \text{ rad/segundo} \\ &= 275.7 \text{ Hz}\end{aligned}$$

Si $R = 5 \Omega$, entonces

$$\begin{aligned}\omega_r &= \sqrt{\frac{1}{(0.05)(5)(10^{-6})} - \left(\frac{5}{0.05}\right)^2} \\ &= 1997 \text{ rad/segundo} \\ &= 317.9 \text{ Hz}\end{aligned}$$

Advierta que conforme $R \rightarrow 0$, $\omega_r \rightarrow \omega_0$. Este hecho también se ilustra en las curvas de respuesta de frecuencia en las figuras 13.38a y b, donde hemos hecho una gráfica de $|V_o|$ contra la frecuencia para $R = 50 \Omega$ y $R = 5 \Omega$, respectivamente.

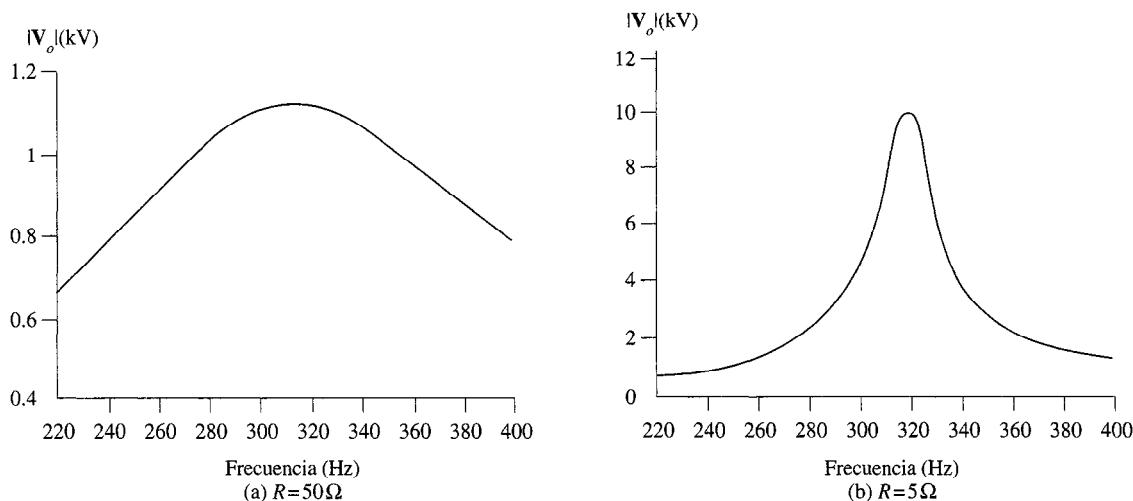


FIGURA 13.38 Curvas de respuesta de frecuencia para el ejemplo 13.16.

Tratemos ahora de relacionar algunas de las cosas que hemos aprendido acerca de la resonancia para las gráficas de Bode presentadas anteriormente. La admitancia para el circuito resonante en serie es

$$\begin{aligned}Y(j\omega) &= \frac{1}{R + j\omega L + 1/j\omega C} \\ &= \frac{j\omega C}{(j\omega)^2 LC + j\omega CR + 1} \quad (13.44)\end{aligned}$$

La forma estándar para el factor cuadrático es

$$(j\omega\tau)^2 + 2\zeta\omega\tau j + 1$$

donde $\tau = 1/\omega_0$, y de aquí que en general, el factor cuadrático puede escribirse como

$$\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} + \frac{2\zeta\omega}{\omega_0} j + 1 \quad (13.45)$$

Si comparamos ahora esta forma del factor cuadrático con el denominador de $Y(j\omega)$, encontramos que

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_0} = CR$$

y por tanto,

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Sin embargo, de la ecuación (13.15),

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

y de aquí,

$$Q = \frac{1}{2\zeta} \quad (13.46)$$

Para ilustrar el significado de esta ecuación, considere la gráfica de Bode para la función $Y(j\omega)$. La gráfica tiene una pendiente inicial de +20 dB/década debido al cero en el origen. Si $\zeta > 1$, los polos representados por el factor cuadrático en el denominador simplemente harán caer la respuesta de la frecuencia, como se ilustra en la figura 13.13a, y a altas frecuencias la pendiente de la característica compuesta será -20 dB/década. Observe de la ecuación (13.46) que si $\zeta > 1$, la Q del circuito será muy pequeña. Sin embargo, si $0 < \zeta < 1$, la respuesta de la frecuencia tendrá un pico, como se muestra en la figura 13.13a, y la agudeza del pico será controlado por ζ . Si ζ es muy pequeña, el pico de la respuesta de frecuencia es muy angosto, la Q de la red es muy grande y el circuito es muy selectivo al filtrar la señal de entrada. La ecuación (13.46) junto con la figura 13.24 ilustran las conexiones entre la respuesta de la frecuencia, la Q y la ζ de una red.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D13.15 Escriba un programa de PSPICE y úselo para hacer la gráfica de la respuesta de la frecuencia del voltaje V_C en la red de la figura D13.15 en una escala de frecuencia de 100 a 1 000 Hz usando 50 puntos.

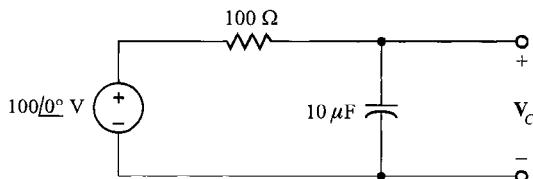
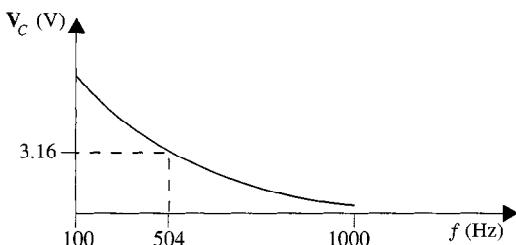


FIGURA D13.15

Resp.:



13.4 Escalamiento

A lo largo de este libro hemos empleado una serie de ejemplos para ilustrar los conceptos que se han discutido. En muchos casos los valores reales de los parámetros fueron irreales en un sentido práctico, aunque pudieron haber simplificado la presentación. En esta sección ilustraremos la manera de *escalar* los circuitos para hacerlos más reales.

Hay dos maneras de escalar un circuito: *escalado de magnitud o impedancia* y *escalado de frecuencia*. Para escalar en magnitud un circuito simplemente multiplicamos la impedancia de cada elemento por un factor de escala K_M . Por tanto, un resistencia R se hace $K_M R$. Multiplicar la impedancia de una bobina $j\omega L$ por K_M da una nueva bobina $K_M L$, y multiplicar la impedancia de un capacitor $1/j\omega C$ por K_M da un nuevo capacitor C/K_M . Por tanto, al escalar la magnitud

$$\begin{aligned} R' &\rightarrow K_M R \\ L' &\rightarrow K_M L \\ C' &\rightarrow \frac{C}{K_M} \end{aligned} \tag{13.47}$$

como

$$\omega_0' \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{K_M LC / K_M}} = \omega_0$$

y Q' es

$$Q' = \frac{\omega_0 L'}{R'} = \frac{\omega_0 K_M L}{K_M R} = Q$$

La frecuencia resonante, el factor de calidad y, por tanto, el ancho de banda no se afectan al escalar la magnitud.

Al escalar la frecuencia, el factor de escala se denota como K_F . La resistencia es independiente de la frecuencia y, por consiguiente, no es afectada por el escalamiento. La nueva bobina L' , que tiene la misma impedancia en la frecuencia escalada ω_1' , debe satisfacer la ecuación

$$j\omega_1 L = j\omega_1' L'$$

donde $\omega_1' = k_F \omega_1$. Por tanto,

$$j\omega_1 L = jK_F \omega_1 L'$$

De aquí que el valor de la nueva bobina es

$$L' = \frac{L}{K_F}$$

Utilizando un argumento similar, encontramos que

$$C' = \frac{C}{K_F}$$

Por tanto, para escalar la frecuencia por un factor K_F ,

$$R' \rightarrow R$$

$$L' \rightarrow \frac{L}{K_F} \quad (13.48)$$

$$C' \rightarrow \frac{C}{K_F}$$

Observe que

$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{(L/K_F)(C/K_F)}} \neq K_F \omega_0$$

y

$$Q' = \frac{K_F \omega_0 L}{R K_F} = Q$$

y, por tanto,

$$\text{BW}' = K_F(\text{BW})$$

De aquí que la frecuencia de resonancia y el ancho de banda del circuito son afectados por el escalamiento de la frecuencia.

EJEMPLO 13.17

Si los valores de los parámetros del circuito de la figura 13.36 son $R = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ y $C = \frac{1}{2} \text{ F}$, determinemos los valores de los elementos si el circuito se escala en magnitud por un factor $K_M = 10^2$ y se escala en la frecuencia por un factor $K_F = 10^6$.

SOLUCIÓN El escalamiento en magnitud da

$$R' = 2K_M = 200 \Omega$$

$$L' = (1)K_M = 100 \text{ H}$$

$$C' = \frac{1}{2} \frac{1}{K_M} = \frac{1}{200} \text{ F}$$

Aplicando el escalamiento de frecuencia a esos valores da los resultados finales:

$$R'' = 200 \Omega$$

$$L'' = \frac{100}{K_F} = 100 \mu\text{H}$$

$$C'' = \frac{1}{200} \frac{1}{K_F} = 0.005 \mu\text{F}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

Dato: Una red RLC tiene los siguientes valores de sus parámetros: $R = 10 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ y $C = 2 \text{ F}$. Determine los valores de los elementos del circuito si el circuito se

escala en magnitud por un factor de 100 y se escala en frecuencia por un factor de 10 000.

Resp.: $R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $C = 2 \mu\text{F}$.

13.5 Redes de filtros

Filtros pasivos

Una red de filtros generalmente se diseña para pasar señales con una escala específica de frecuencia y para rechazar o atenuar las señales cuyo espectro de frecuencia está fuera de esta pasabandas. Los filtros más comunes son filtros *pasabajos*, que pasan bajas frecuencias y rechazan altas frecuencias; filtros *pasaaltas*, que pasan altas frecuencias y bloquean frecuencias bajas; filtros *pasabandas*, que pasan alguna banda particular de frecuencias y rechazan todas las frecuencias fuera de la escala; y filtros de *rechazo de bandas*, que están diseñados específicamente para rechazar una banda particular de frecuencias y pasar todas las otras frecuencias.

La característica ideal de frecuencia para un filtro pasabajos se muestra en la figura 13.39a. También se muestra una característica típica o físicamente realizable. Idealmente, quisiéramos que el filtro de pasabajos pasara todas las frecuencias hasta alguna frecuencia w_0 y no pasara frecuencias arriba de ese valor; sin embargo, no es posible diseñar tal filtro con elementos lineales de circuito. De aquí que debemos estar satisfechos al emplear filtros que realmente podemos construir en el laboratorio, y esos filtros tienen características de frecuencia que simplemente no son ideales.

Una red de filtros pasabajos simple se muestra en la figura 13.39b. La ganancia de voltaje para la red es

$$G_v(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (13.49)$$

que puede escribirse como

$$G_v(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad (13.50)$$

donde $\tau = RC$ es la constante del tiempo. La característica de amplitud es

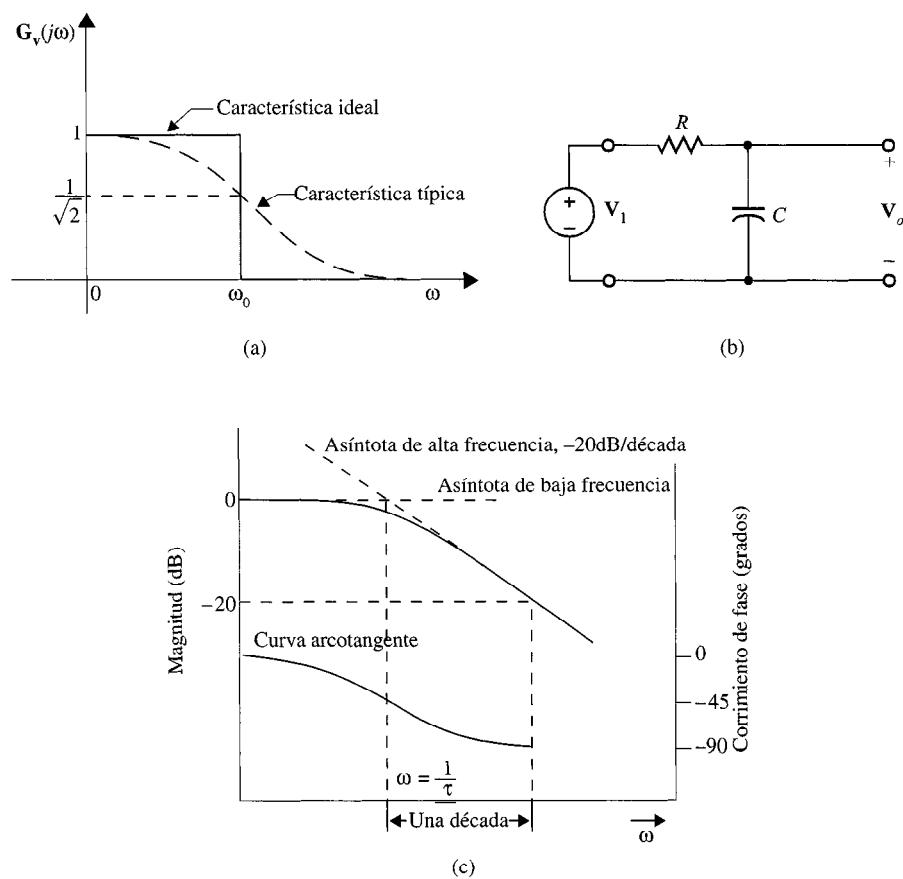


FIGURA 13.39 Circuito del filtro pasa bajas y sus características de frecuencia.

$$M(\omega) = \frac{1}{[1 + (\omega\tau)^2]^{1/2}} \quad (13.51)$$

y la característica de fase es

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\omega\tau \quad (13.52)$$

Observe que en la frecuencia de corte, $\omega = 1/\tau$ y la amplitud es

$$M\left(\omega = \frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (13.53)$$

La frecuencia de corte también se llama comúnmente *frecuencia de potencia media*. Este nombre se deriva del hecho de que si el voltaje o corriente es $1/\sqrt{2}$ de su valor máximo, entonces la potencia, que es proporcional al cuadrado del voltaje o corriente, es la mitad de su valor máximo.

La magnitud, en decibeles, y las curvas de fase para este circuito pasabajas simple se muestran en la figura 13.39c. Advierta que la curva de magnitud es plana para bajas frecuencias y cae para altas frecuencias. La fase se recorre de 0° a bajas frecuencias a -90° a altas frecuencias.

La característica de frecuencia ideal para un filtro pasaaltas se muestra en la figura 13.40a, junto con una característica típica que podemos alcanzar con componentes de circuito lineal. Idealmente, el filtro pasaaltas pasa todas las frecuencias por encima de alguna frecuencia ω_0 y ninguna frecuencia por debajo de ese valor.

Una red de filtros pasaaltas simple se muestra en la figura 13.40b. Ésta es la misma red que se muestra en la figura 13.39b, excepto que el voltaje de salida se toma a través de la resistencia. La ganancia de voltaje para esta red es

$$G_v(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \quad (13.54)$$

donde una vez más $\tau = RC$. La magnitud de esta función es

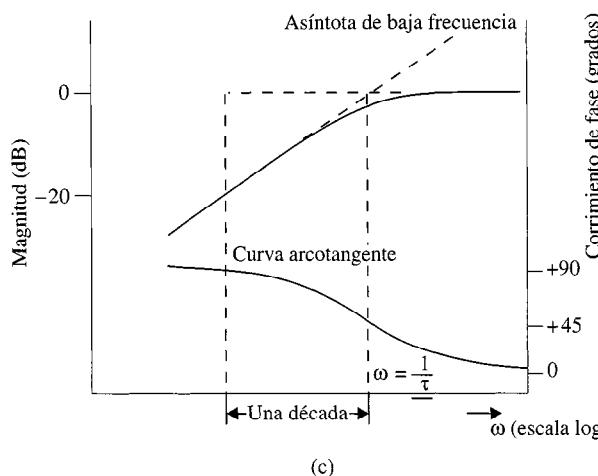
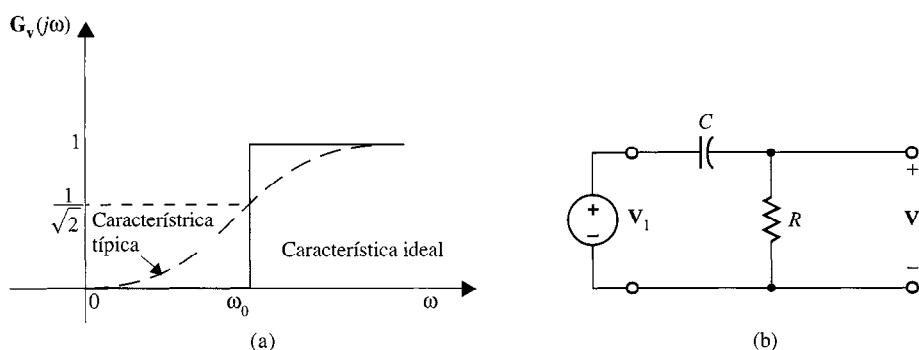


FIGURA 13.40 Circuito del filtro pasaaltas y sus frecuencias características.

$$M(\omega) = \frac{\omega\tau}{[1 + (\omega\tau)^2]^{1/2}} \quad (13.55)$$

y la fase es

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\omega\tau \quad (13.56)$$

La frecuencia de potencia media es $\omega = 1/\tau$, y la fase en esta frecuencia es 45° .

Las curvas de magnitud y fase para este filtro pasaaltas se muestran en la figura 13.40c. En bajas frecuencias la curva de magnitud tiene una pendiente de +20 dB/década debido al término $\omega\tau$ en el numerador de la ecuación (13.55). Entonces en la frecuencia de corte la curva comienza a aplanarse. La curva de fase se deriva de la ecuación (13.56).

Las características de amplitud ideal y típica para filtros pasabandas y de rechazo de banda simples se muestran en las figuras 13.41a y b, respectivamente. Redes simples que son capaces de realizar las características típicas de cada filtro se muestran en las figuras 13.41c y d. ω_0 es la frecuencia central del paso o del rechazo de banda y la frecuencia a la cual ocurre la amplitud máxima o mínima. ω_{LO} y ω_{HI} son frecuencias de corte inferior y superior o *frecuencias de corte*, donde la amplitud es $1/\sqrt{2}$ del valor máximo. El ancho del paso o rechazo de banda se llama *ancho de banda*, y de aquí

$$BW = \omega_{HI} - \omega_{LO} \quad (13.57)$$

Para ilustrar estos puntos, consideremos filtro pasabandas. La función de transferencia de voltaje es

$$G_v(j\omega) = \frac{R}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

y, por tanto, la característica de la amplitud es

$$M(\omega) = \frac{RC\omega}{\sqrt{(RC\omega)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

A bajas frecuencias

$$M(\omega) \approx \frac{RC\omega}{1} \approx 0$$

A altas frecuencias

$$M(\omega) \approx \frac{RC\omega}{\omega^2 LC} \approx \frac{R}{\omega L} \approx 0$$

En la escala de frecuencia media $(RC\omega)^2 \gg (\omega^2 LC - 1)^2$, y de este modo $M(\omega) \approx 1$. Por tanto, la característica de frecuencia para este filtro se muestra en la figura 13.41e. La frecuencia central es $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. En la frecuencia de corte inferior

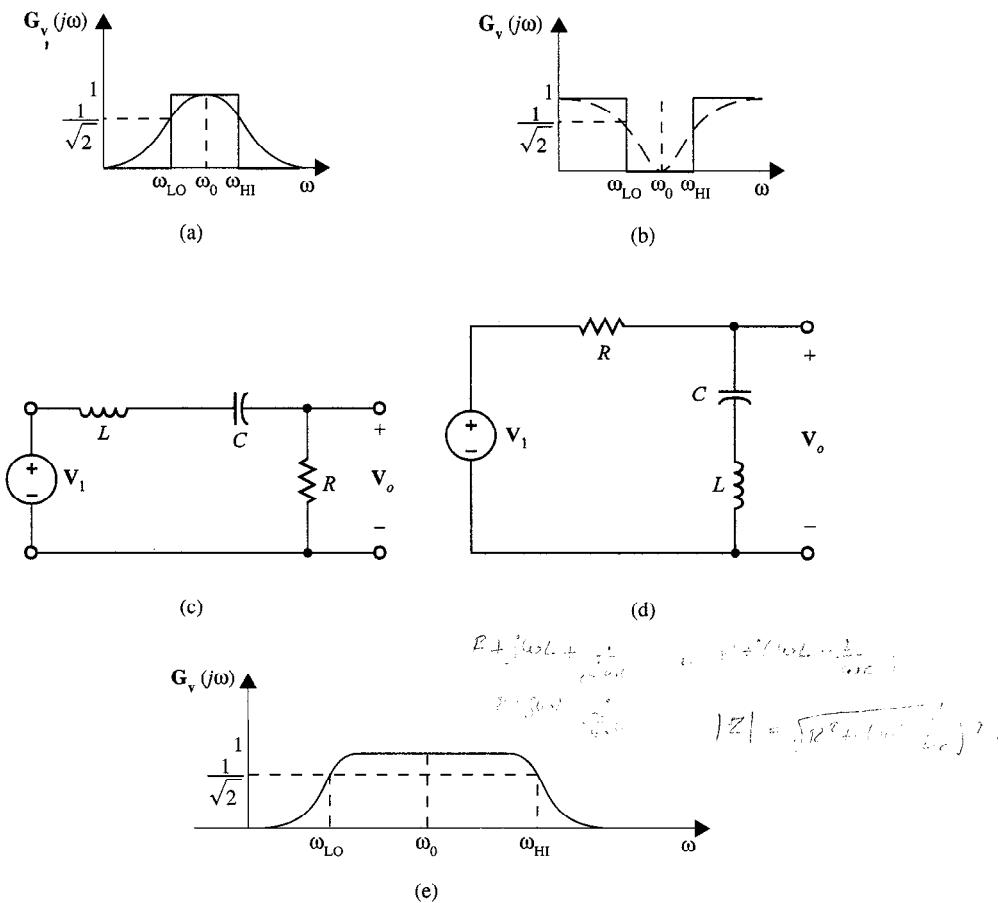


FIGURA 13.41 Filtros pasabandas y de rechazo de banda y sus características.

$$\omega^2LC - 1 = -RC\omega$$

O

$$\omega^2 + \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 = 0$$

Resolviendo esta expresión para ω_{LO} , obtenemos

$$\omega_{LO} = \frac{-(R/L) + \sqrt{(R/L)^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

En la frecuencia de corte superior

$$\omega^2LC - 1 = +RC\omega$$

O

$$\omega^2 - \frac{R}{L} \omega - \omega_0^2 = 0$$

Resolviendo esta expresión para ω_{HI} , obtenemos

$$\omega_{HI} = \frac{+(R/L) + \sqrt{(R/L)^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

Por tanto, el ancho de banda del filtro es

$$BW = \omega_{HI} - \omega_{LO} = \frac{R}{L}$$

EJEMPLO 13.18

Considere la red dependiente de la frecuencia de la figura 13.42. Dados los siguientes valores de los parámetros del circuito: $L = 159 \mu H$, $C = 159 \mu F$ y $R = 10 \Omega$, demostremos que esta red puede usarse para producir un filtro pasabajas o pasaaltas.

SOLUCIÓN Se encuentra por división de voltaje que la ganancia de voltaje V_R/V_S es

$$\begin{aligned} \frac{V_R}{V_S} &= \frac{R}{j\omega L + R + 1/(j\omega C)} = \frac{j\omega \left(\frac{R}{L}\right)}{(j\omega)^2 + j\omega \left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}} \\ &= \frac{(62.8 \times 10^3)j\omega}{-\omega^2 + (62.8 \times 10^3)j\omega + 39.4 \times 10^6} \end{aligned}$$

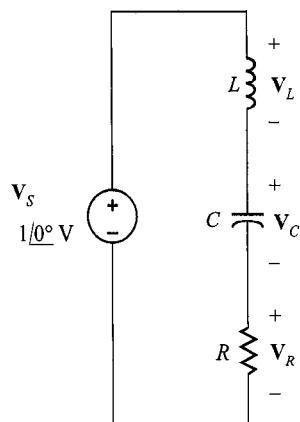


FIGURA 13.42 Circuito utilizado en el ejemplo 13.18.

que es la función de transferencia para un filtro pasabandas. En la resonancia, $\omega^2 = 1/LC$, y de aquí

$$\frac{V_R}{V_S} = 1$$

Ahora consideramos la ganancia V_L/V_S

$$\begin{aligned} \frac{V_L}{V_S} &= \frac{j\omega L}{j\omega L + R + 1/(j\omega C)} = \frac{-\omega^2}{(j\omega)^2 + j\omega \left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}} \\ &= \frac{-\omega^2}{-\omega^2 + (62.8 \times 10^3)j\omega + 39.4 \times 10^6} \end{aligned}$$

que es una función de transferencia de filtro pasaaltas de segundo orden. De nuevo, en la resonancia,

$$\frac{\mathbf{V}_L}{\mathbf{V}_S} = \frac{j\omega L}{R} = jQ = j0.1$$

De manera similar, la ganancia $\mathbf{V}_C/\mathbf{V}_S$ es

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}_C}{\mathbf{V}_S} &= \frac{1/(j\omega C)}{j\omega L + R + 1/(j\omega C)} = \frac{\frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + j\omega\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}} \\ &= \frac{39.4 \times 10^6}{-\omega^2 + (62.8 \times 10^3)j\omega + 39.4 \times 10^6}\end{aligned}$$

que es una función de transferencia de filtro pasabajas de segundo orden. En la frecuencia resonante,

$$\frac{\mathbf{V}_C}{\mathbf{V}_S} = \frac{1}{j\omega CR} = -jQ = -j0.1$$

De este modo, un circuito produce tres diferentes filtros dependiendo de dónde se tome la salida. Esto puede verse en la gráfica de Bode para cada uno de los tres voltajes en la figura 13.43, donde \mathbf{V}_S se fija a $1 \angle 0^\circ$ V.

Sabemos que la ley de voltaje de Kirchhoff debe satisfacerse todas las veces. Observe de la gráfica de Bode que $\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_C + \mathbf{V}_L$ también es igual a \mathbf{V}_S ¡en todas las frecuencias! Finalmente, demostremos la LVK sumando \mathbf{V}_R , \mathbf{V}_L y \mathbf{V}_C .

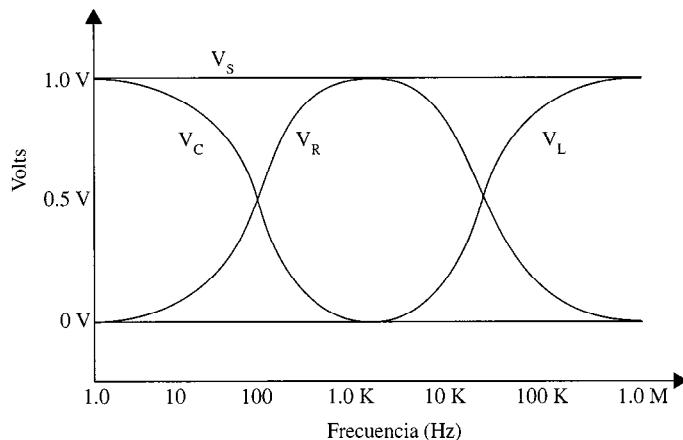


FIGURA 13.43 Gráficas de Bode para la red de la figura 13.42.

$$\mathbf{V}_L + \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_C = \frac{\left((j\omega)^2 + j\omega\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)\mathbf{V}_S}{(j\omega)^2 + j\omega\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{\sqrt{LC}}} = \mathbf{V}_S$$

De este modo, aunque \mathbf{V}_S se distribuye entre la resistencia, el condensador y la bobina con base en la frecuencia, la suma de los tres voltajes reconstruye totalmente a \mathbf{V}_S .

EJEMPLO 13.19

Un sistema de transmisión telefónica sufre una interferencia de 60 Hz ocasionada por las líneas de potencia cercanas. Usemos la red de la figura 13.44 para diseñar un simple filtro notch para eliminar la interferencia de 60 Hz.

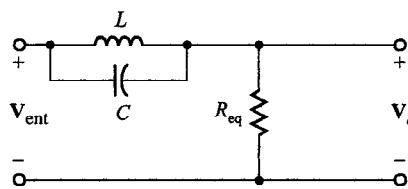


FIGURA 13.44 Circuito utilizado en el ejemplo 13.19.

SOLUCIÓN La resistencia R_{ec} representa la resistencia equivalente del sistema telefónico a la derecha de la combinación LC . La combinación LC paralela tiene una impedancia equivalente de

$$\mathbf{Z} = (j\omega L)/(1/j\omega C) = \frac{(L/C)}{j\omega L + 1/(j\omega C)}$$

Ahora, la función de transferencia del voltaje es

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_{ent}} = \frac{R_{ec}}{R_{ec} + \mathbf{Z}} = \frac{R_{ec}}{R_{ec} + \frac{(L/C)}{j\omega L + 1/(j\omega C)}}$$

que puede escribirse

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_{ent}} = \frac{(j\omega)^2 + \frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + \left(\frac{j\omega}{R_{ec}C}\right) + \frac{1}{LC}}$$

Advierta que en la resonancia, el numerador y por ello \mathbf{V}_o van a cero. Queremos que la resonancia ocurra a 60 Hz. De este modo

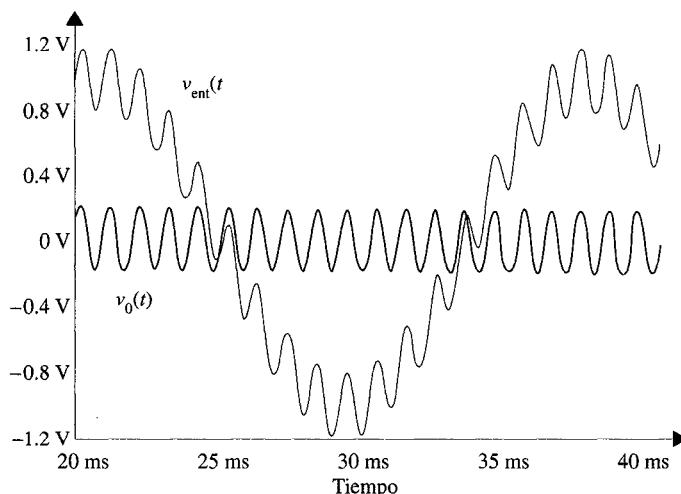


FIGURA 13.45 Análisis transitorio de la red de la figura 13.44.

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi(60) = 120\pi$$

Si seleccionamos $C = 100 \mu\text{F}$, entonces el valor requerido para L es 70.3 mH —ambos son valores razonables—. Para demostrar la efectividad del filtro, hagamos que el voltaje de entrada consista en una senoidal de 60 Hz y una senoidal de 1 000 Hz de la forma

$$v_{\text{ent}}(t) = 1 \text{ sen}[(2\pi)60t] + 0.2 \text{ sen}[(2\pi)1\,000t]$$

Los resultados de PROBE de un análisis transitorio de PSPICE se muestran en la figura 13.45. Note que el voltaje de salida, como se desea, no contiene ninguna interferencia de 60 Hz.

El programa es el siguiente:

```
EXAMPLE 13.17
V1 1 0 AC 2 0
R 1 2 2K
C 2 0 SUF
.AC DEC 10 1 1000
.PROBE
.END
```

La gráfica de salida se muestra en la figura 13.38b.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D13.17 Dada la red de filtros que se muestra en la figura D13.17, esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode para $G_v(j\omega)$.

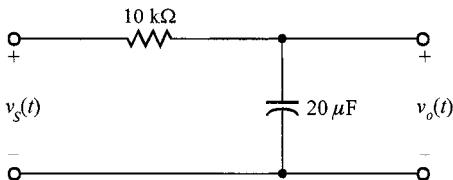
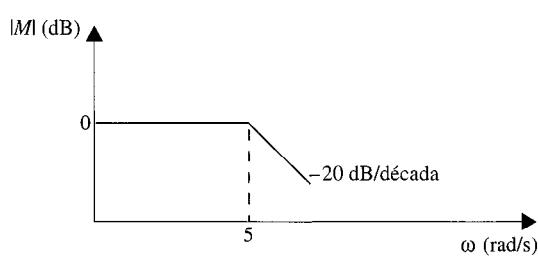


FIGURA D13.17

Resp.:
|M| (dB)

D13.18 Dada la red de filtros de la figura D13.18, esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode para $G_v(j\omega)$.

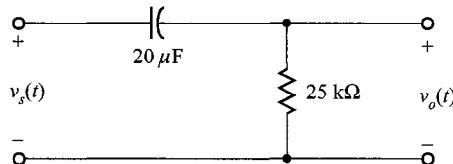
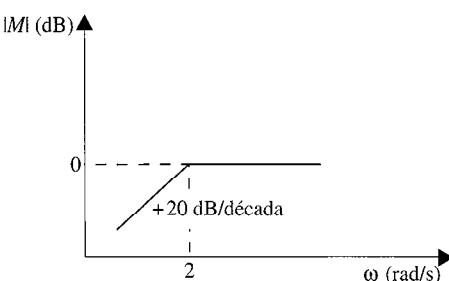


FIGURA D13.18

Resp.:
|M| (dB)

D13.19 Una red de filtro pasabandas se muestra en la figura D13.19. Esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode $G_v(j\omega)$.

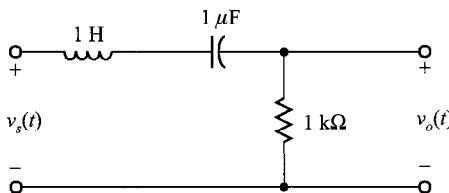
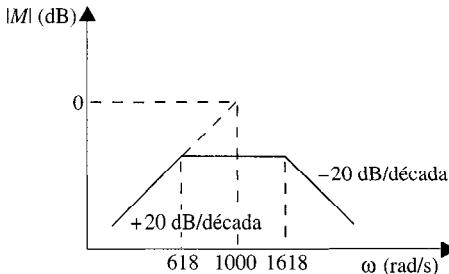


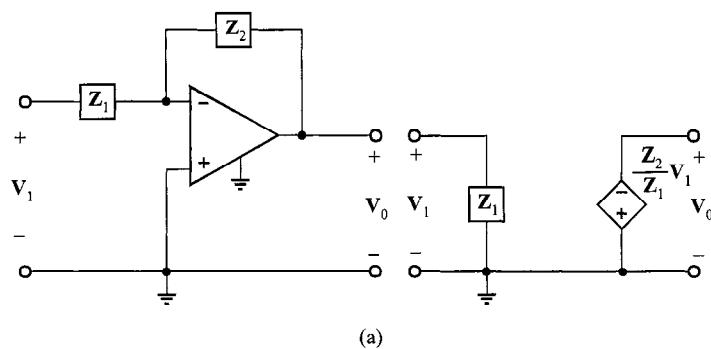
FIGURA D13.19

Resp.:
|M| (dB)**Filtros activos**

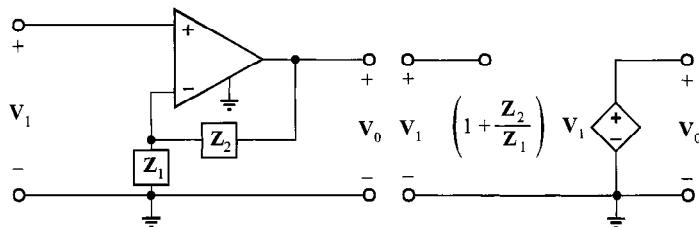
En la sección anterior vimos que las cuatro clases principales de filtros (*pasaaltas*, *pasaaltas*, *pasabandas* y *rechazo de banda*) son realizables con circuitos de elementos pasivos simples. Sin embargo, los filtros pasivos tienen algunos inconvenientes serios. Un problema obvio es la inhabilidad para generar una red con una ganancia > 1, ya que una red únicamente pasiva no puede agregar energía a la señal. Otro inconveniente serio de los filtros pasivos es la necesidad en muchas topologías de elementos inductivos. Los inductores son generalmente caros y, por lo común, no están disponibles en valores pre-

cisos. Además, los inductores usualmente vienen en formas raras (toroides, bobinas, núcleos en E, etc) y no son manejables con facilidad por las máquinas ensambladoras de tableros de circuitos impresos automáticos existentes. Aplicando amplificadores operacionales en circuitos de realimentación lineales, uno puede generar todos los tipos de filtros primarios usando solamente resistencias, capacitores y los circuitos de los amps-op integrados mismos. Las únicas excepciones a esto son aplicaciones que involucran muy altas frecuencias y/o altas potencias.

Los circuitos equivalentes para los amplificadores operacionales derivados en el capítulo 3 también son válidos en el caso senoidal de estado estable, cuando reemplazamos las resistencias presentes con impedancias. Los circuitos equivalentes para los circuitos de amps-op inversores y no inversores se muestran en las figuras 13.46a y b, respectivamente. Las características del filtro particular se obtienen seleccionando juiciosamente las impedancias Z_1 y Z_2 .



(a)



(b)

FIGURA 13.46 Circuitos equivalentes para los circuitos del amplificador operacional a) inversor, y b) no inversor.

E J E M P L O 13.20

Determinemos las características del filtro de la red que se muestra en la figura 13.47.

SOLUCIÓN Las impedancias como se ilustran en la figura 13.46a son

$$Z_1 = R_1$$

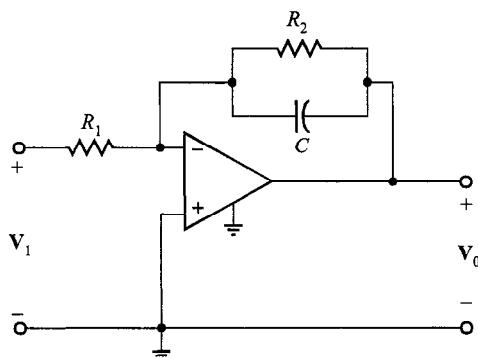


FIGURA 13.47 Circuito de filtro del amplificador operacional.

y

$$Z_2 = \frac{R_2 / j\omega C}{R_2 + 1 / j\omega C} = \frac{R_2}{j\omega R_2 C + 1}$$

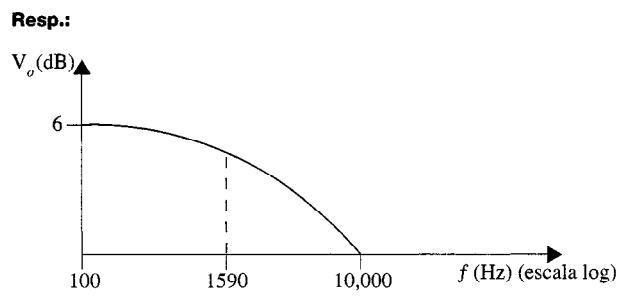
Por tanto, la ganancia de voltaje de la red es

$$G_v(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{-R_2 / R_1}{j\omega R_2 C + 1}$$

Advierta que la función de transferencia es la de un filtro pasabajas.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D13.20 Use PSPICE para generar la gráfica de Bode para la red de la figura 13.47 en la escala de frecuencia de 100 Hz a 10 kHz. Los valores de los parámetros son $R_1 = 500 \Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ y $C_1 = 0.1 \mu\text{F}$, y los parámetros del amp-op son $R_i = \infty$, $R_o = 0$ y $A = 10^5$. Además, encuentre la frecuencia de corte.

**EJEMPLO 13.21**

Mostraremos que la característica de amplitud para la red de filtros de la figura 13.48a es como se muestra en la figura 13.48b.

SOLUCIÓN Comparando esta red con la de la figura 13.46b, vemos que

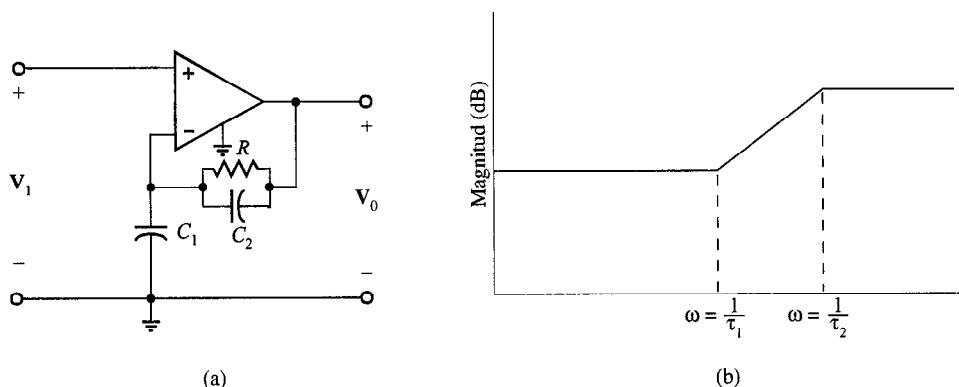


FIGURA 13.48 Circuito del amplificador operacional y su característica de amplitud.

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$$

y

$$Z_2 = \frac{R}{j\omega RC_2 + 1}$$

Por tanto, la ganancia de voltaje para la red como función de la frecuencia es

$$\begin{aligned} G_v(j\omega) &= \frac{V_o(j\omega)}{V_1(j\omega)} = 1 + \frac{R/(j\omega RC_2 + 1)}{1/j\omega C_1} \\ &= \frac{j\omega(RC_1 + RC_2) + 1}{j\omega RC_2 + 1} \\ &= \frac{j\omega\tau_1 + 1}{j\omega\tau_2 + 1} \end{aligned}$$

donde $\tau_1 = R(C_1 + C_2)$ y $\tau_2 = RC_2$. Como $\tau_1 > \tau_2$, la característica de amplitud es de la forma mostrada en la figura 13.48b. Observe que las bajas frecuencias tienen una ganancia de 1; sin embargo, las frecuencias altas son amplificadas. El valor exacto de la amplificación se determina mediante la selección de los parámetros del circuito.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D13.21 Dada la red de filtros que se muestra en la figura D13.21, determine la función de transferencia $G_v(j\omega)$, esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode para $G_v(j\omega)$ e identifique las características de filtro de la red.

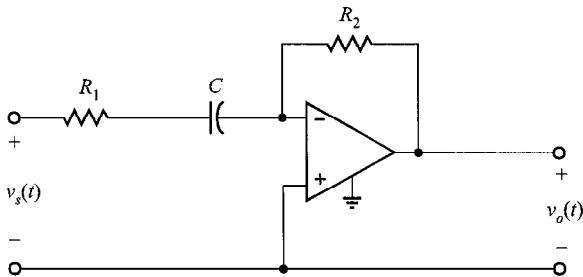
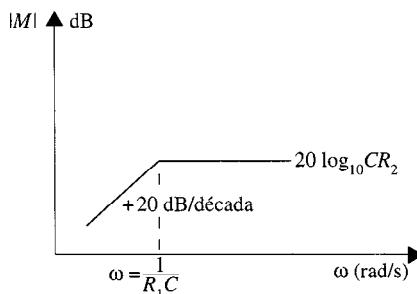


FIGURA D13.21

Resp.: $G_v(j\omega) = \frac{-j\omega CR_2}{1+j\omega CR_1}$; esto es filtros pasaaltas.



Todos los circuitos considerados hasta aquí, en esta sección, son filtros de primer orden. En otras palabras, todos ellos no tienen más de un polo y/o un cero. En muchas aplicaciones se desea generar un circuito con una selectividad de frecuencia mayor que la producida por circuitos de primer orden. El siguiente paso lógico es considerar la clase de filtros de segundo orden. Para la mayoría de las aplicaciones de filtros activos, si se desea un orden mayor de dos, usualmente uno toma dos o más circuitos de filtros activos y los coloca en serie de modo que la respuesta total sea la respuesta de más alto orden deseada. Esto se hace porque los filtros de primer y segundo orden se comprenden bien y se obtienen fácilmente con circuitos con amps-op simples.

En general, los filtros de segundo orden tendrán una función de transferencia con un denominador que contiene polos cuadráticos de la forma $s^2 + As + B$. Para circuitos pasaaltas y pasabajas, $B = \omega_c^2$ y $A = 2\zeta\omega_c$. Para esos circuitos, ω_c es la frecuencia de corte, y ζ es la razón de amortiguamiento discutida anteriormente. Usando el operador de salida VDB con la parte del análisis de AC de PSPICE, uno puede conocer fácilmente la frecuencia de corte encontrando el corrimiento apropiado en la respuesta en decibellos.

Para circuitos de pasabandas $B = \omega_0^2$ y $A = \omega_0/Q$, donde ω_0 es la frecuencia central y Q es el factor de calidad para el circuito. Observe que $Q = 1/2\zeta$. Q es una medida de la selectividad de esos circuitos. El ancho de banda es ω_0/Q , como se discutió anteriormente.

La función de transferencia de segundo orden del filtro activo pasabajas de segundo orden puede generalmente escribirse como

$$H(s) = \frac{H_0\omega_c^2}{s^2 + 2\zeta\omega_c s + \omega_c^2} \quad (13.58)$$

donde H_0 es la ganancia de cd. Un circuito que exhibe esta función de transferencia se ilustra en la figura 13.49, y tiene la siguiente función de transferencia:

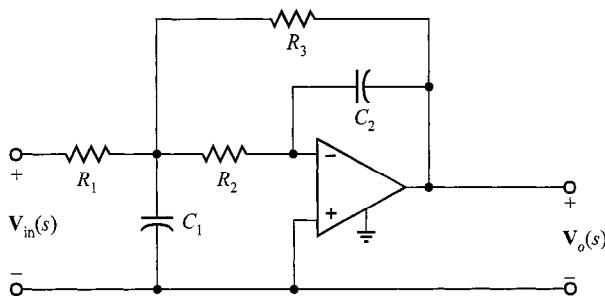


FIGURA 13.49 Filtro pasabajas de segundo orden.

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{-\left(\frac{R_3}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_3 R_2 C_1 C_2}\right)}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_3 C_1}\right) + \frac{1}{R_3 R_2 C_1 C_2}} \quad (13.59)$$

EJEMPLO 13.22

Deseamos determinar la razón de amortiguamiento, frecuencia de corte y la ganancia de cd H_o para la red de la figura 13.49 si $R_1 = R_2 = R_3 = 5 \text{ k}\Omega$ y $C_1 = C_2 = 0.1 \mu\text{F}$.

SOLUCIÓN Comparando las ecuaciones (13.58) y (13.59), encontramos que

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{R_3 R_2 C_1 C_2}}$$

$$2\zeta\omega_c = \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

y por tanto,

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \sqrt{R_2 R_3}$$

Además, notamos que

$$H_o = -\frac{R_3}{R_1}$$

Sustituyendo los valores de los parámetros dados en la ecuación precedente, se obtiene

$$\omega_c = 2000 \text{ rad/segundo} = 318 \text{ Hz}$$

$$\zeta = 1.5$$

y

$$H_o = -1$$

E J E M P L O 13.23

Deseamos variar los condensadores C_1 y C_2 en el ejemplo 13.22 para alcanzar las razones de amortiguamiento de 1.0, 0.75, 0.50 y 0.25 mientras mantenemos ω_c constante en 2 000 rad/segundo.

SOLUCIÓN Como se muestra en la ecuación de la frecuencia de corte en el ejemplo 13.22, si ω_c permanece constante a 2 000 rad/segundo, el producto de C_1 y C_2 debe permanecer constante. Usando los valores del ejemplo 13.22, tenemos

$$C_1 C_2 = (10)^{-14}$$

o

$$C_2 = \frac{(10)^{-14}}{C_1}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación para la razón de amortiguamiento, se obtiene

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{\sqrt{10^{-14}}}{\sqrt{C_1} \sqrt{C_1}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \right] \sqrt{R_2 R_3} \\ &= \frac{(0.15)(10^{-6})}{C_1}\end{aligned}$$

o

$$C_1 = \frac{(0.15)(10^{-6})}{\zeta}$$

Por tanto, para $\zeta = 1.0, 0.75, 0.50$ y 0.25 , los valores correspondientes para C_1 son $0.15, 0.20, 0.30$ y $0.6 \mu\text{F}$, respectivamente. Los valores de C_2 que corresponden a esos valores de C_1 son $67, 50, 33$ y 17 nF , respectivamente.

Este ejemplo ilustra que podemos ajustar los parámetros de la red para alcanzar una respuesta transitoria específica mientras se mantiene la frecuencia de corte del filtro constante. De hecho, como regla general diseñamos filtros con características específicas mediante la manipulación apropiada de los parámetros de la red.

E J E M P L O 13.24

Usaremos ahora PSPICE para demostrar que la respuesta transitoria de los circuitos generados en el ejemplo 13.23 exhibirá una elevación y resonancia que se incrementan a medida que ζ disminuye. Aplicaremos una función de paso de -1V para la entrada de la red y emplearemos el modelo de amp-op con $R_i = \infty \Omega$, $R_o = 0 \Omega$ y $A = 10^5$.

SOLUCIÓN El siguiente programa PSPICE producirá la respuesta transitoria para los cuatro casos de amortiguamiento. Los valores para C_1 y C_2 están dados para una razón de amortiguamiento de 0.5.

```
TRANSIENT RESPONSE FOR EXAMPLE 13.24
R1 1 2 5K
R2 2 3 5K
R3 2 4 5K
* Change these two values to set  $\zeta$ 
C1 2 0 0.3UF
C2 3 4 33NF
VIN 1 0 PWL (0 0 1MS 0 1.001MS -1V 50MS -1V)
* Op-Amp dependent generator A=1E5
EOUT 4 0 3 0 -1E5
.TRAN 0.2MS 10MS
.PROBE
.END
```

Los resultados se muestran en la figura 13.50. Las curvas indican que $\zeta = 0.75$ podría ser un buen compromiso de diseño entre la respuesta de paso rápido y mínima elevación.

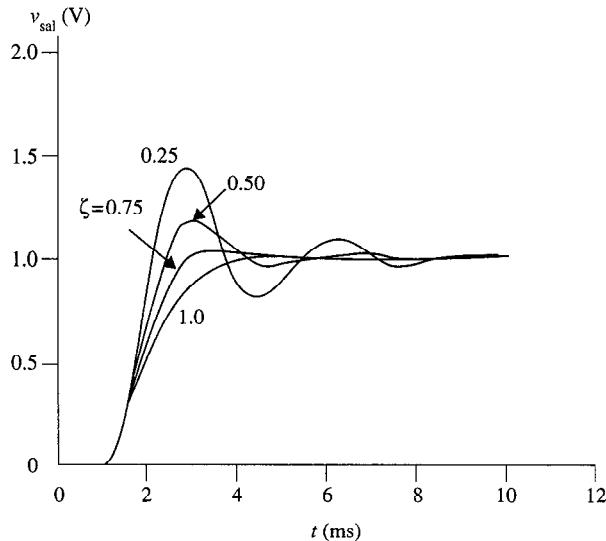


FIGURA 13.50 Análisis transitorio del ejemplo 13.23.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

- D13.22 Verifique que la ecuación 13.59 es la función de transferencia para la red de la figura 13.49.

Cuando un circuito o dispositivo particular se emplea rutinariamente o se repite dentro de un circuito, con frecuencia es conveniente definir a qué se refiere PSPICE con un *subcircuito*. El subcircuito, que define un grupo de elementos de circuito, automáticamente se inserta siempre que se hace referencia al subcircuito. Los subcircuitos pueden contener cualquier número de elementos, incluso otros subcircuitos. La forma general para el comando del subcircuito es

donde SUBNAM es el nombre del subcircuito y N₁, N₂, N₃, ... son los nudos usados para conectar el subcircuito a la red. Los comandos .ENDS <SUBNAM> son los últimos comandos en el subcircuito y <SUBNAM> es necesaria solamente cuando los subcircuitos están anidados. Los elementos que definen el subcircuito están enlistados entre los comandos .SUBCKT y .ENDS.

Los subcircuitos se llaman con el comando

YYYYYYYYY N₁ < N₂ N₃ . . . > SUBNAME

donde N_1 , N_2 , N_3 , ... definen los nodos en la red a la que el subcircuito está conectado. Advierta que los nudos mencionados en el comando .SUBCKT no son necesariamente numerados del mismo modo que los definidos en la llamada al subcircuito. En contraste con los nodos *locales* usados para definir el circuito, los nodos usados en la llamada del subcircuito se llaman *globales*, excepto en casos donde los subcircuitos están anidados. El nodo de referencia siempre es global y no necesita ser definido dentro del comando .SUBCKT.

E J E M P L O 13.25

Un filtro pasabajas se muestra en la figura 13.51a. Usemos el PSPICE para trazar gráficas de la frecuencia de respuesta del filtro en la escala de 1 a 10 000 Hz usando 10 puntos por década.

SOLUCIÓN Usaremos un subcircuito para definir op-amp usando el modelo que se muestra en la figura 13.51b. Los nodos locales usados para el subcircuito también se muestran en la figura 13.51b. Los nodos globales usados para la red original se muestran en la figura 13.51a. El programa PSPICE para trazar gráficas de la respuesta de frecuencia es el que sigue.

EXAMPLE 13.25					
VS	1	0	AC	12	0
R1	1	2	100		
R2	2	3	100		
R3	5	0	5K		

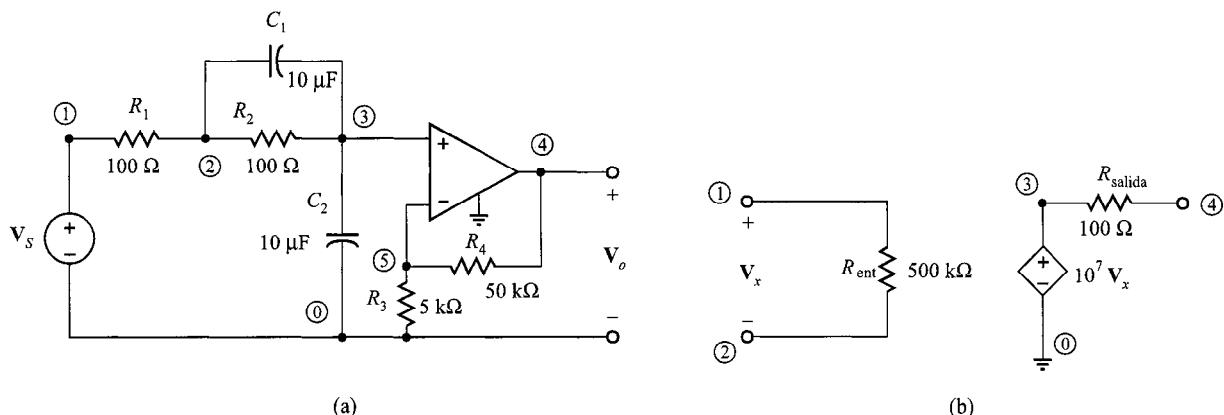


FIGURA 13.51 Circuitos utilizados en el ejemplo 13.25: a) filtro pasabajas; b) subcircuito de amp-op.

```

R4    4    5    50K
C1    2    3    10U
C2    3    0    10U
X1    3    5    4    OPAMP
*ANALYSIS
.AC DEC 10 1 10K
.PROBE
* OPAMP SUBCIRCUIT
.SUBCKT OPAMP 1 2 4
RIN    1 2 500K
ROUT    3 4 100
EOUT    3 0 1 2 1E7
.ENDS
*
.END

```

La gráfica de la respuesta de frecuencia se muestra en la figura 13.52.

E J E M P L O 13.26

Una red de filtro pasaaltas se muestra en la figura 13.53a. Usemos el PSPICE para trazar gráficas de la respuesta de frecuencia del filtro en la escala de 1 a 100 kHz usando 10 puntos por década.

SOLUCIÓN El subcircuito para amp-op se muestra en la figura 13.53b, y el programa PSPICE para trazar gráficas de la respuesta de frecuencia es el que sigue.

```

EXAMPLE 13.26
VS    1    0    AC    12 0
R1    1    2    100
R2    2    3    100

```

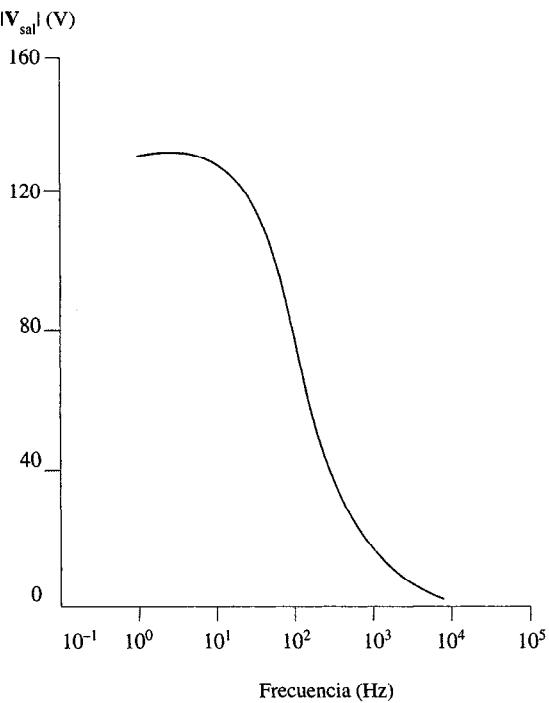


FIGURA 13.52 Gráfica de respuesta de frecuencia para la red del ejemplo 13.25.

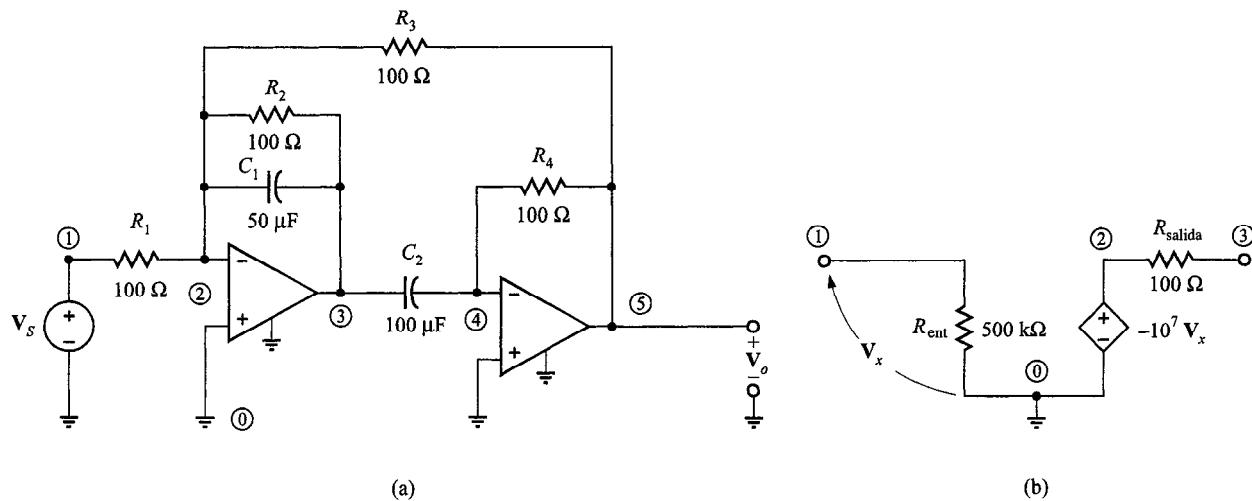


FIGURA 13.53 Circuitos utilizados en el ejemplo 13.26; a) filtro pasaaltas; b) subcircuito de amp-op.

```

R3 2 5 100
R4 4 5 100
C1 2 3 50U
C2 3 4 100U
X1 2 3 OPAMP
X2 4 5 OPAMP
*ANALYSIS
.AC DEC 10 1 100K
.PROBE
*OPAMP
.SUBCKT OPAMP 1 3
RIN 1 0 500K
ROUT 2 3 100
EOUT 2 0 1 0 -1E7
.ENDS
*
.END

```

La gráfica de la respuesta de frecuencia se muestra en la figura 13.54.

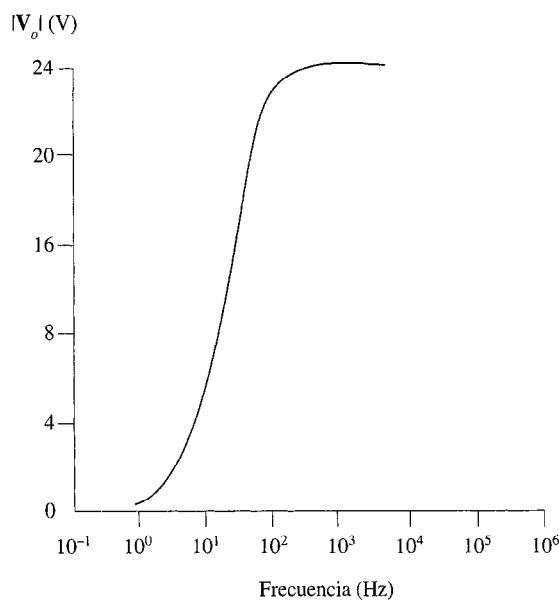


FIGURA 13.54 Gráfica de respuesta de frecuencia para la red del ejemplo 13.26.

La función de transferencia general para el filtro pasabanda de segundo orden es

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{sH_o}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_0^2} \quad (13.60)$$

Como se discutió anteriormente, ω_0 es la frecuencia central de la característica del pasabandas y Q es el factor de calidad. Recuerde que para filtros pasabajos, H_0 era la ganancia de pasabandas o de cd. Para un filtro pasabandas, la ganancia es máxima en la frecuencia central, ω_0 . Para encontrar esta ganancia máxima sustituimos $s = j\omega_0$ en la expresión anterior para obtener

$$\frac{V_o(j\omega_0)}{V_s(j\omega_0)} = \frac{j\omega_0 H_0}{-\omega_0^2 + j\omega_0(\omega_0/Q) + \omega_0^2}$$

$$= \frac{QH_0}{\omega_0}$$
(13.61)

Además, la diferencia entre las frecuencias de potencia media alta y baja (es decir, $\omega_{HI} - \omega_{LO}$) es, por supuesto, el ancho de banda

$$\omega_{HI} - \omega_{LO} = BW = \frac{\omega_0}{Q}$$
(13.62)

Q es una medida de la selectividad del filtro pasabandas y, como la ecuación indica, conforme Q se incrementa, el ancho de banda disminuye.

Una aplicación de amp-op de un filtro pasabandas se muestra en la figura 13.55. La función de transferencia para esta red es

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{-\left(\frac{1}{R_1 C_1}\right)s}{s^2 + \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2}\right)s + \frac{1 + R_1/R_3}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$
(13.63)

Al comparar esta expresión con la expresión más general para los filtros pasabandas, se obtienen las siguientes definiciones:

$$\omega_0 = \left(\frac{1 + R_1/R_3}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right)^{1/2}$$

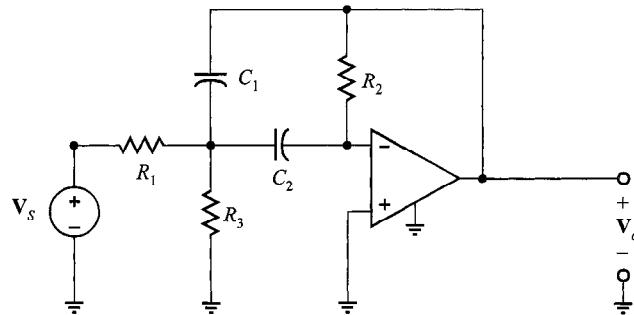


FIGURA 13.55 Filtro pasabandas de segundo orden.

$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{R_2 C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (13.64)$$

$$\frac{Q}{\omega_0} \omega_0 = \frac{R_2 C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left(\frac{1 + R_1/R_3}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right)^{1/2}$$

Estas expresiones pueden simplificarse para dar

$$Q = \frac{(1 + R_1/R_3)^{1/2}}{1 + C_1/C_2} \left(\frac{R_2 C_1}{R_1 C_2} \right)^{1/2} \quad (13.65)$$

$$\text{BW} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \quad (13.66)$$

y

$$\left. \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} \right|_{\omega = \omega_0} = \frac{Q H_0}{\omega_0} = -\frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{1 + C_1/C_2} \right) \quad (13.67)$$

EJEMPLO 13.27

Deseamos encontrar una nueva expresión para las ecuaciones (13.64) a (13.67) bajo la condición de que $C_1 = C_2 = C$.

SOLUCIÓN Usando la condición, las ecuaciones se reducen a

$$\omega_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1 + R_1/R_3}{R_1 R_2}}$$

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \sqrt{1 + \frac{R_1}{R_3}}$$

$$\text{BW} = \frac{2}{R_2 C}$$

y

$$\left. \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} \right|_{\omega = \omega_0} = -\frac{R_2}{2R_1}$$

E J E M P L O 13.28

Utilicemos las ecuaciones del ejemplo 13.27 para diseñar un filtro pasabandas de la forma que se muestra en la figura 13.55 con un $BW = 2\,000 \text{ rad/s}$, $(V_o/V_S)(\omega_0) = -5$ y $Q = 3$. Use $C = 0.1 \mu\text{F}$, y determine la frecuencia central del filtro.

S o l u c i ó n Usando las ecuaciones del filtro, encontramos que

$$BW = \frac{2}{R_2 C}$$

$$2\,000 = \frac{2}{R_2(10)^{-7}}$$

$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$\frac{V_o}{V_S}(\omega_0) = -\frac{R_2}{2R_1}$$

$$-5 = -\frac{10\,000}{2R_1}$$

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

y

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \sqrt{1 + \frac{R_1}{R_3}}$$

$$3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{10\,000}{1\,000}} \sqrt{1 + \frac{1\,000}{R_3}}$$

o

$$R_3 = 385 \Omega$$

Por tanto, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 385 \Omega$ y $C = 0.1 \mu\text{F}$ definen completamente al filtro pasabandas que se muestra en la figura 13.48. La frecuencia central del filtro es

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1 + R_1/R_3}{R_1 R_2}} \\ &= \frac{1}{10^{-7}} \sqrt{\frac{1 + (1\,000/385)}{(1\,000)(10\,000)}} \\ &= 6\,000 \text{ rad/segundo.} \end{aligned}$$

E J E M P L O 13.29

Deseamos utilizar PSPICE para trazar la gráfica de Bode para el filtro diseñado en el ejemplo 13.28. Emplearemos el modelo de amp-op, en el cual $R_i = \infty$, $R_o = 0$ y $A = 10^5$, y trazaremos gráficas en la escala de frecuencia de 600 a 60 kHz usando 30 puntos por década.

SOLUCIÓN El circuito equivalente para el filtro se muestra en la figura 13.56a. El programa de PSPICE es el que sigue:

```
SECOND-ORDER BAND-PASS FILTER EXAMPLE
VIN 1 0 AC 1 0
R1 1 2 1K
C1 2 4 0.1UF
C2 2 3 0.1UF
R2 3 4 10K
R3 2 0 385
E1 4 0 0 3 1E5
.AC DEC 30 600 60K
.PROBE
.END
```

La gráfica de Bode se muestra en la figura 13.56b. Como puede verse por la gráfica, la frecuencia central es 6 krad/seg y $BW = 2$ krad/seg.

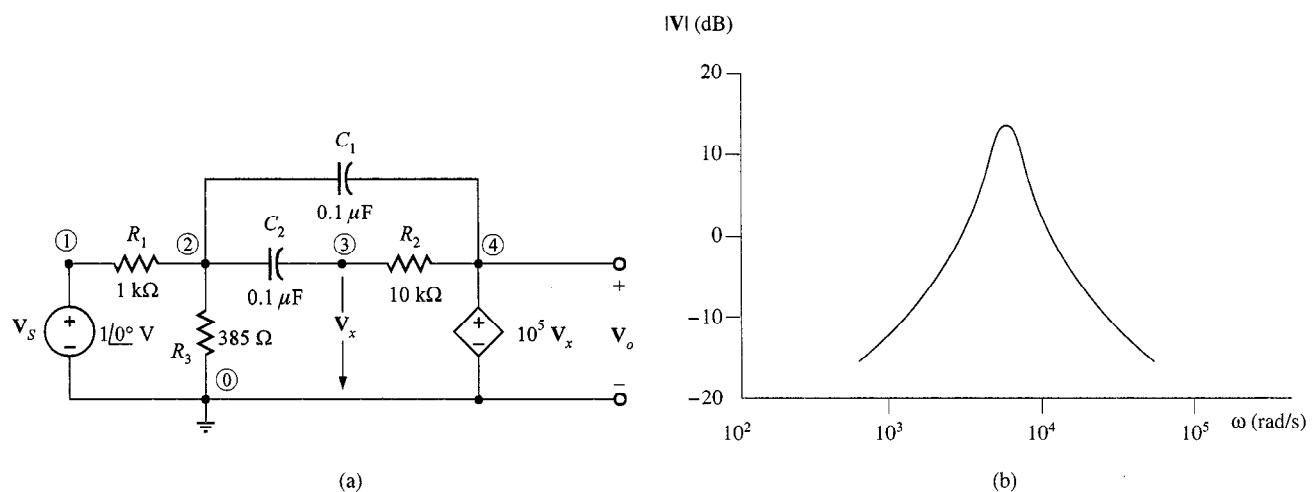


FIGURA 13.56 Figuras empleadas en el ejemplo 13.29: a) circuitos equivalentes del filtro pasabandas; b) gráfica de Bode.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D13.23 Verifique que la ecuación 13.63 es la función de transferencia para el filtro pasabandas de la figura 13.48.

Es instructivo examinar brevemente las limitaciones de la respuesta de frecuencia de un amp-op. Hasta aquí, nuestro modelado del amp-op ha estado limitado para una ganancia, una resistencia de entrada y una resistencia de salida finitas. El lector astuto puede haber notado que este modelo tiene una respuesta de frecuencia infinita (es decir, no hay polos o ceros en la ganancia delantera, A). Como ingenieros desarrolladores, deberíamos ser escépticos cuando una respuesta infinita se asocia con un sistema físico real. Por supuesto, los amplificadores operacionales reales tienen una respuesta de frecuencia finita, y su ganancia delantera se representa de manera más realista como

$$A(j\omega) = \frac{A_o[1 + j(f/f_{z_1})][1 + j(f/f_{z_2})] \dots}{[1 + j(f/f_{p_1})][1 + j(f/f_{p_2})] \dots}$$

donde $1 + j(f/f_{p_1}) = 1 + j\omega\tau_{p_1}$, donde $\omega = 2\pi f$ y $\tau_{p_1} = 1/2\pi f_{p_1}$.

Hay, sin embargo, una gran clase de op-amps que está diseñada específicamente para tener una respuesta de ganancia delantera de un solo polo, que asegura una operación estable y fiable en una amplia gama de aplicaciones. La ganancia de un solo polo del amplificador puede escribirse como

$$A = \frac{A_o}{1 + j(f/f_p)}$$

Los valores típicos de f_p están en la escala de 5 a 30 Hz. Estos datos nos impulsan a preguntar si tal polo de baja frecuencia no limita severamente la utilidad del amplificador. El siguiente ejemplo ilustrará que la respuesta de frecuencia está limitada realmente por un factor conocido como el producto de ganancia del ancho de banda, GBW, que para un op-amp de un solo polo es $GBW = A_o f_p$.

E J E M P L O 13.30

Considere el circuito amortiguador del amp-op de ganancia unitaria que se muestra en la figura 13.57a. Mostremos que el dispositivo actúa como un filtro pasabajos.

SOLUCIÓN El circuito equivalente para el amplificador se muestra en la figura 13.57b, donde hemos supuesto que $R_i = \infty$, $R_o = 0$ y $\mathbf{A} = A_o/[1 + j(f/f_p)]$. La LVK da

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_S - \mathbf{AV}_e$$

o

$$(\mathbf{A} + 1)\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_S$$

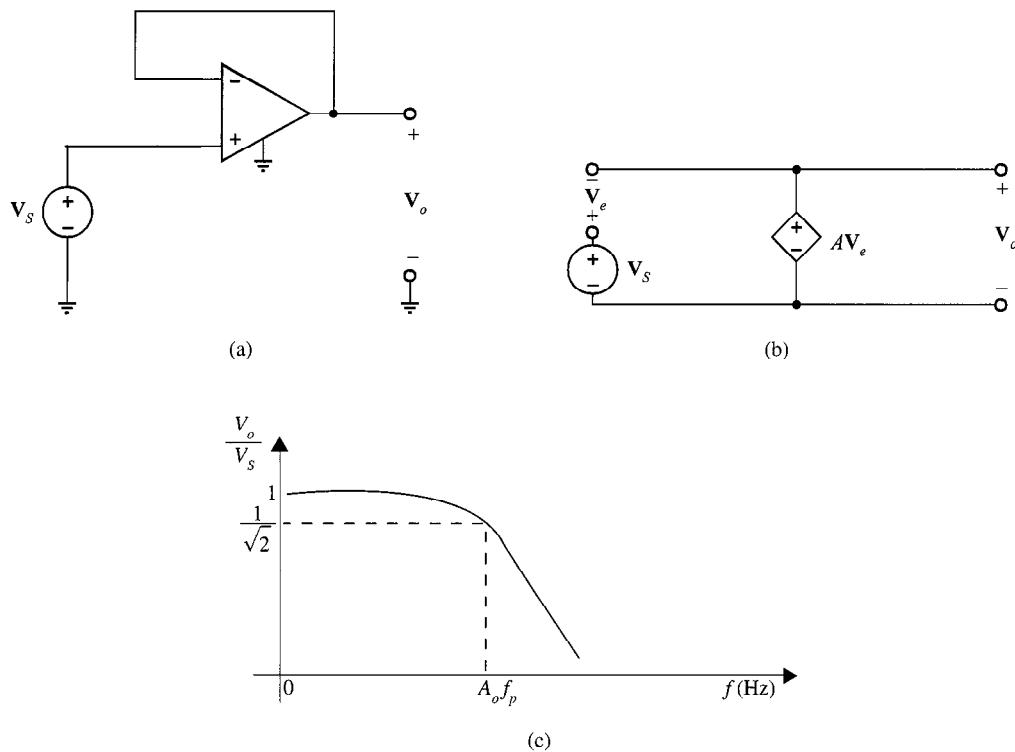


FIGURA 13.57 Figuras utilizadas en el ejemplo 13.30: a) amplificador amortiguador; b) circuito equivalente del amplificador amortiguador; c) respuesta de frecuencia del amplificador amortiguado de ganancia unitaria.

Sin embargo,

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_s - \mathbf{V}_o$$

y, por tanto,

$$(\mathbf{A} + 1)\mathbf{V}_o = \mathbf{A}\mathbf{V}_s$$

y

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} = \frac{\mathbf{A}}{1 + \mathbf{A}}$$

Sustituyendo para \mathbf{A} , da

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} &= \frac{A_o/[1 + j(f/f_p)]}{1 + A_o/[1 + j(f/f_p)]} \\ &= \frac{A_o}{1 + j(f/f_p) + A_o} \end{aligned}$$

Suponiendo que $A_o \gg 1$, la función se reduce a

$$\frac{V_o}{V_s} \approx \frac{A_o}{A_o + j(f/f_p)}$$

$$\approx \frac{1}{1 + j(f/f_p A_o)}$$

De este modo, a bajas frecuencias $V_o/V_s = 1$ y a muy altas frecuencias ($f \gg A_o f_p$), la ganancia es $V_o/V_s \equiv 1/j(f/f_p A_o) = -j(A_o f_p/f)$. Por tanto, el amp-op se ve como un filtro pasabajos con una frecuencia de corte igual a $f_c = A_o f_p$ (es decir, $\omega_c = 2\pi A_o f_p$), como se muestra en la figura 13.57c.

El circuito equivalente para un amp-op de un solo polo se muestra en la figura 13.58. El polo de baja frecuencia se ajusta a $f_p = 1/2\pi RC$. Por ejemplo, si $R = 100 \text{ k}\Omega$ y $C = 159 \text{ nF}$, el amp-op tendría un polo en 10 Hz. En la red equivalente, la primera fuente dependiente diseña la ganancia de cd. La segunda fuente dependiente amortigua la salida, por lo que la frecuencia del polo no será afectada por la impedancia de la carga de salida.

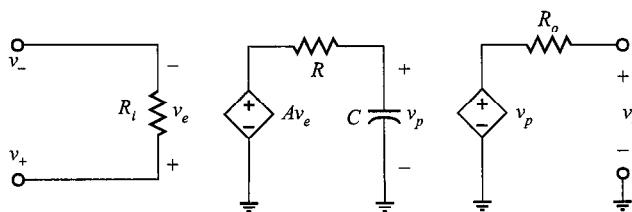


FIGURA 13.58 Circuito equivalente de amp-op de un solo polo.

E J E M P L O 13.31

Dada la red de filtro pasaaltas que se muestra en la figura D13.21 con $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ y $C = 1.59 \text{ nF}$, deseamos determinar la frecuencia de corte f_c y usar el PSPICE para generar la gráfica de Bode para los modelos de amp-op simple y de un polo. Usaremos $A = (2)10^5$, $R_i = \infty$ y $R_o = 0$ para el modelo de amp-op simple. Para el modelo de un solo polo usaremos $f_p = 5 \text{ Hz}$.

SOLUCIÓN La función de transferencia para el filtro es

$$\frac{V_o(s)}{V_s} = \frac{R_2 C_s}{R_1 C_s + 1}$$

Por tanto,

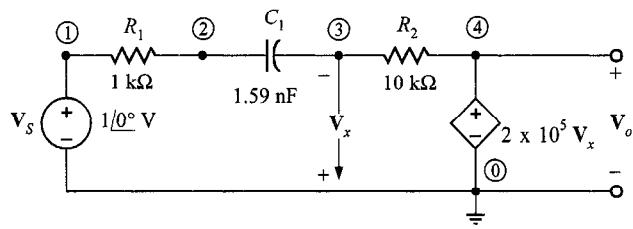
$$\omega_c = \frac{1}{R_1 C}$$

o

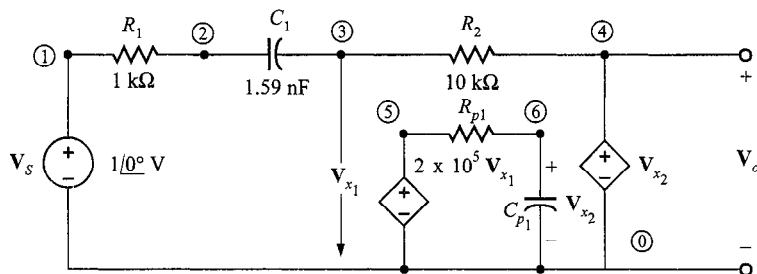
$$\begin{aligned}
 f_c &= \frac{1}{2\pi R_1 C} \\
 &= \frac{1}{2\pi(10)^3(1.59)(10)^{-9}} \\
 &= 100 \text{ kHz}
 \end{aligned}$$

El circuito equivalente del PSPICE para el filtro usando el modelo del amp-op simple se muestra en la figura 13.59a. El programa PSPICE, que produce una gráfica de Bode en la escala de frecuencia de 1 kHz a 1 MHz usando 20 puntos por década, es el siguiente.

```
HIGH-PASS FILTER WITH SIMPLE OP-AMP MODEL
VIN 1 0 AC 1 0
R1 1 2 1K
C1 2 3 1.59NF
R2 3 4 10K
E1 4 0 0 3 2E5
.AC DEC 20 1K 1000K
.PROBE
.END
```



(a)



(b)

FIGURA 13.59 Circuitos utilizados en el ejemplo 13.31: a) filtro pasaaltas con modelo de amp-op simple; b) filtro pasaaltas con modelo de amp-op de un solo polo.

El circuito equivalente del PSPICE para el filtro con el modelo de amp-op de un solo polo se muestra en la figura 13.59b, donde hemos usado $R_{p_1} = 100 \text{ k}\Omega$ y $C_{p_1} = 318.3 \text{ nF}$ para satisfacer la condición $f_p = 5 \text{ Hz}$. El programa del PSPICE para generar la gráfica de Bode para esta red es el siguiente.

```
HIGH-PASS FILTER WITH SINGLE-POLE OP-AMP MODEL
VIN 1 0 AC 1 0
R1 1 2 1K
C1 2 3 1.59NF
R2 3 4 10K
E1 5 0 0 3 2E5
RP1 5 6 100K
CP1 6 0 318.3NF
E2 4 0 6 0 1
.AC DEC 20 1K 1000K
.PROBE
.END
```

Las gráficas de Bode para el filtro con ambos modelos de amp-op se muestran en la figura 13.60. Note que el amp-op con un solo polo interno hace caer la característica de alta frecuencia, generando una respuesta de frecuencia compuesta similar a la de un filtro pasabandas.

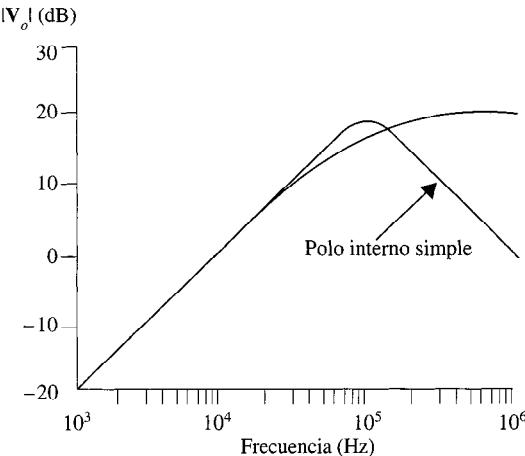


FIGURA 13.60 Gráficas de Bode para un filtro pasaaltas utilizando diferentes modelos de amps-op.

13.6 Aplicaciones

E J E M P L O 13.32

El convertidor de ca-cd de la figura 13.61a está diseñado para usarse con una calculadora manual. Ignoraremos la carga de salida por ahora; esto se trata en el problema 13.73. Idealmente, el circuito debería convertir un

voltaje senoidal de 120 V rms a una salida de 9V de cd. En la realidad la salida es

$$v_O(t) = 9 + 0.5 \operatorname{sen} 377t$$

Utilicemos el filtro pasabajas para reducir la componente de $v_O(t)$.

SOLUCIÓN El circuito equivalente de Thévenin para el convertidor se muestra en la figura 13.61b. Colocando un capacitor a través de las terminales de salida, como se muestra en la figura 13.61c, creamos un filtro pasabajas en la salida. La función de transferencia del convertidor filtrado es

$$\frac{V_{OF}}{V_{Th}} = \frac{1}{1 + sR_{Th}C}$$

la cual tiene un polo a una frecuencia de $f = 1/2\pi R_{Th}C$. Para obtener una atenuación significativa a 60 Hz, eligiremos colocar el polo a 6 Hz, dando la ecuación

$$\frac{1}{2\pi R_{Th}C} = 6$$

o

$$C = 53.05 \mu F$$

Para verificar nuestro trabajo, llevemos a cabo una simulación transitoria de PSPICE del funcionamiento del convertidor. La red del PSPICE se muestra en la figura 13.61d y el programa del PSPICE es

```
Example 13.32
*
* Vth is the Thévenin equivalent voltage for both
* the 9 V dc component and the 0.5 V ac component
*
Vth 1 0 sin (9 0.5 60 0 0)
Rth 1 2 500
C 2 0 53.05u
.tran 6u 67m; this will produce data for 4 cycles
.probe
.end
```

La figura 13.61 muestra la salida sin filtrado, $v_O(t)$, y con filtrado, $v_{OF}(t)$. El filtro ha reducido con éxito la componente indeseable de 60 Hz por un factor de aproximadamente seis.

EJEMPLO 13.33

La antena de un radio de FM recoge las estaciones a lo largo de toda la escala de frecuencia de la FM —aproximadamente 87.5 MHz a 108 MHz—. La círcuitería del radio debe tener la capacidad para rechazar, en primer lugar, todas

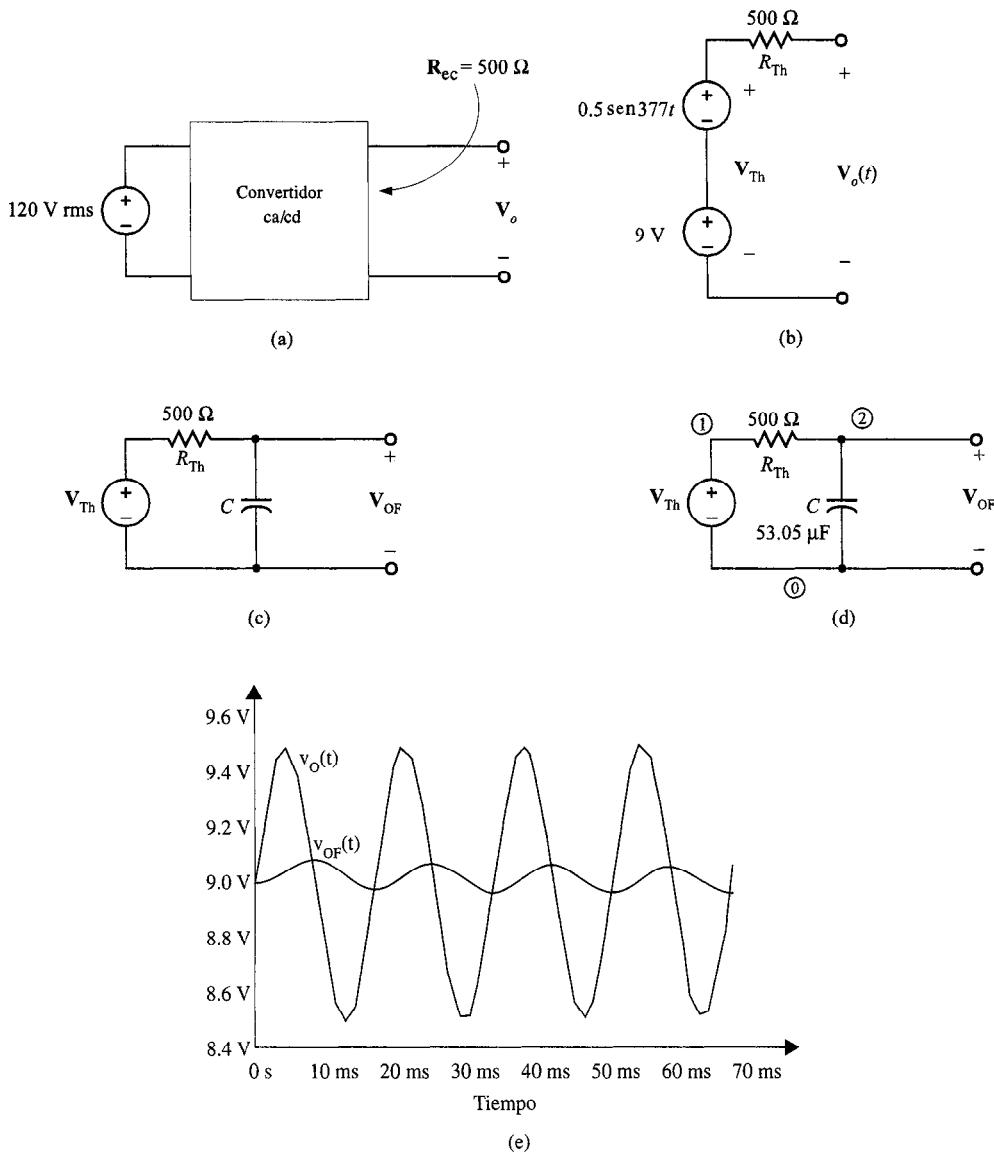


FIGURA 13.61 Circuitos y gráficas de salida para un convertidor de ca/cd.

las estaciones, excepto la que el oyente quiere oír, y entonces elevar la señal de la diminuta antena. Un amplificador de sintonía que incorpore resonancia en paralelo puede ejecutar simultáneamente ambas tareas.

La red que se muestra en la figura 13.62a es un modelo de circuito para un amplificador transistorizado de sintonía de una sola etapa, donde la resistencia, el condensador y la bobina son elementos discretos. Encontraremos la función de transferencia $V_O(s)/V_A(s)$ donde $V_A(s)$ es el voltaje de la antena y el valor de C para ganancia máxima a 91.1 MHz. Finalmente, verificaremos nuestro trabajo usando PSPICE.

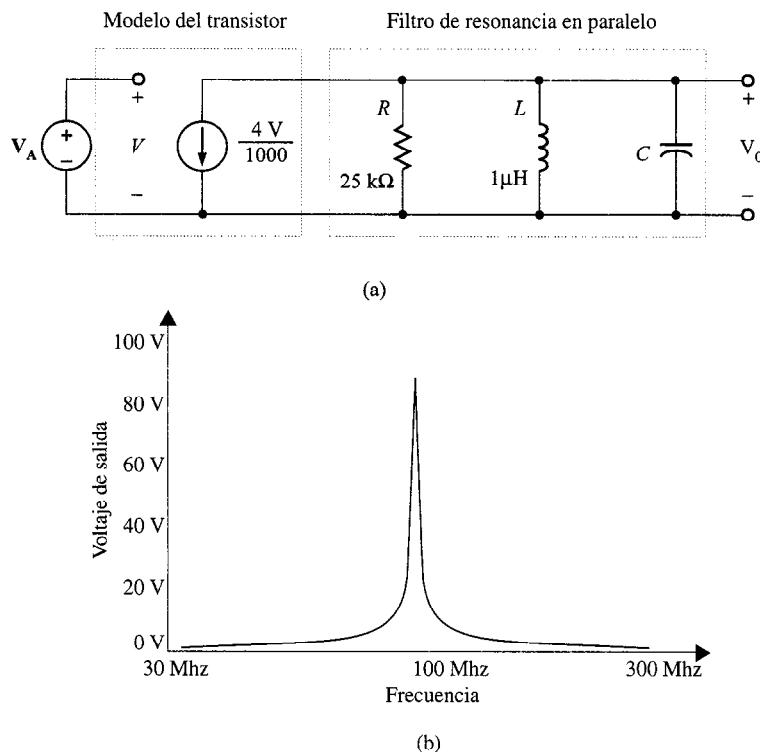


FIGURA 13.62 Circuito y gráfica de Bode para un amplificador de sintonía con resonancia en paralelo.

S O L U C I O N Como $\mathbf{V}(s) = \mathbf{V}_A(s)$, la función de transferencia es

$$\frac{\mathbf{V}_0(s)}{\mathbf{V}_A(s)} = -\frac{4}{1000} \left[R // sL // \frac{1}{sC} \right]$$

o

$$\frac{\mathbf{V}_0(s)}{\mathbf{V}_A(s)} = -\frac{4}{1000} \left[\frac{s/C}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \right]$$

La red de resonancia paralela es realmente un filtro pasa bandas. La ganancia máxima ocurre en la frecuencia central, f_0 . Esta condición corresponde a un valor mínimo en el denominador. Aislando el polinomio del denominador $D(s)$, y haciendo $s = j\omega$, tenemos

$$D(j\omega) = \frac{R}{LC} - \omega^2 + \frac{j\omega}{C}$$

la cual tiene un valor mínimo cuando la parte real se hace cero, o

$$\frac{1}{LC} - \omega_0^2 = 0$$

dando una frecuencia central de

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

De este modo, para una frecuencia central de 91.1 MHz, tenemos

$$2\pi(91.1 \times 10^6) = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

y el valor requerido del capacitor es

$$C = 3.05 \text{ pF}$$

El siguiente programa del PSPICE genera una gráfica de Bode, que se muestra en la figura 13.62b, para el amplificador sintonizado. Y justo como lo di-señamos, la frecuencia central está en 91.1 MHz.

Example 13.33

```

*
* Since Va, the antenna voltage is 1 V at 0 degrees,
* the output voltage is the same as the gain.
*
Va 1 0 ac 1
Rdummy 1 0 1000meg; PSPICE requires that all nodes have
*           at least 2 connections. Rdummy will
*           not affect circuit performance.
*
Gsource 2 0 1 0 4m; dependent source
R 2 0 25k
L 2 0 1u
C 2 0 3.05p
.ac dec 100 30meg 300meg
.probe
.end

```

13.7 Diseño de circuitos

A través de este capítulo hemos presentado un número de ejemplos de diseño. En esta sección consideraremos algunos adicionales que también tienen ramificaciones prácticas.

E J E M P L O 13.34

Los discos compactos (CD) han llegado a ser un medio muy popular para grabar y tocar música. Los CD almacenan información de forma digital; es decir,

la música se muestrea a una velocidad muy alta y las muestras se graban en el disco. El truco es muestrear tan rápidamente que la reproducción suene continua. El estándar de velocidad de muestreo de la industria es 44.1 kHz —una muestra cada 22.7 μ s.

Un aspecto interesante con respecto a la conversión de digital a analógica que toma lugar dentro de un DC se llama criterio de Nyquist. Este criterio afirma que, en la conversión analógica, cualesquiera componentes de la señal a frecuencias por encima de la mitad de la velocidad de muestreo (22.05 kHz, en este caso) no pueden ser reproducidas con fidelidad. Por tanto, los técnicos de grabación filtran esas frecuencias antes que ocurra cualquier muestreo, dando alta fidelidad al escucha.

Diseñemos una serie de filtros pasabajas para llevar a cabo esta tarea.

SOLUCIÓN Suponga, por ejemplo, que nuestra especificación para el filtro es una ganancia unitaria en DC y 20 dB de atenuación a 22.05 kHz. Consideraremos primero el filtro RC simple de la figura 13.63.

Se encuentra fácilmente que la función de transferencia es

$$G_{v1}(s) = \frac{V_{o1}}{V_{\text{ent}}} = \frac{1}{1 + sRC}$$

Como una función de transferencia de un solo polo se atenúa a 20 dB/década, debemos colocar la frecuencia del polo una decena antes del punto -20 dB de 22.05 kHz.

De este modo,

$$f_p = \frac{1}{2\pi RC} = 2.205 \text{ kHz}$$

Si elegimos arbitrariamente $C = 1 \text{ nF}$, el valor resultante para R es $72.18 \text{ k}\Omega$, el cual es razonable. Una gráfica de Bode de la magnitud de $G_{v1}(s)$ se muestra en la figura 13.64. Todas las especificaciones se cumplen, pero al costo de una atenuación severa en la escala de frecuencia audible. Esto es indeseable.

Un filtro mejorado se muestra en la figura 13.65. Es un filtro pasabajas de dos etapas, con etapas de filtro idénticas, separadas por un amortiguador de ganancia unitaria.

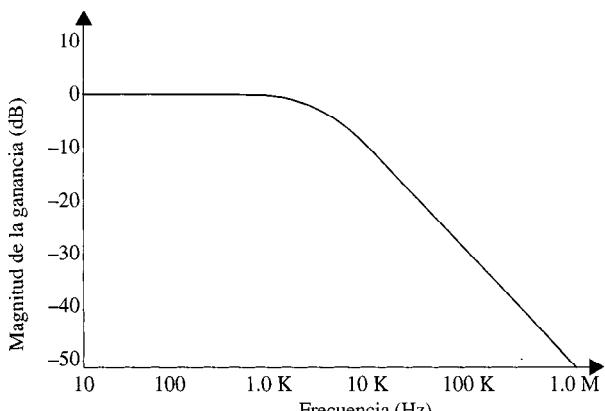


FIGURA 13.64 Gráfica de Bode para un filtro de un solo polo.

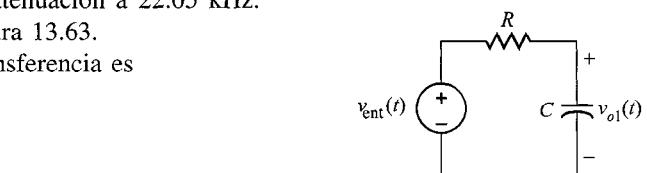


FIGURA 13.63 Filtro pasabajas de un solo polo.

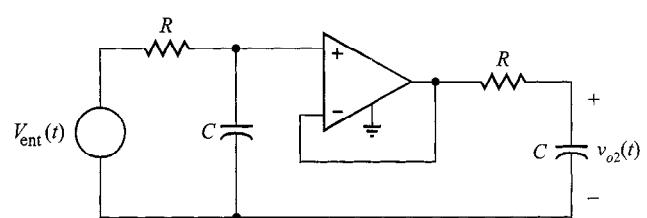


FIGURA 13.65 Filtro amortiguador de dos etapas.

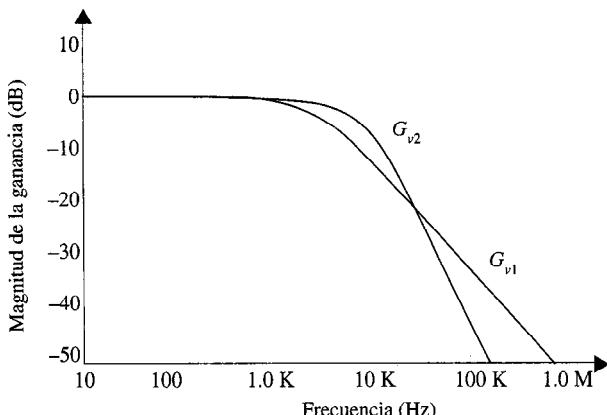


FIGURA 13.66 Gráfica de Bode para filtros: de una sola etapa y dos etapas.

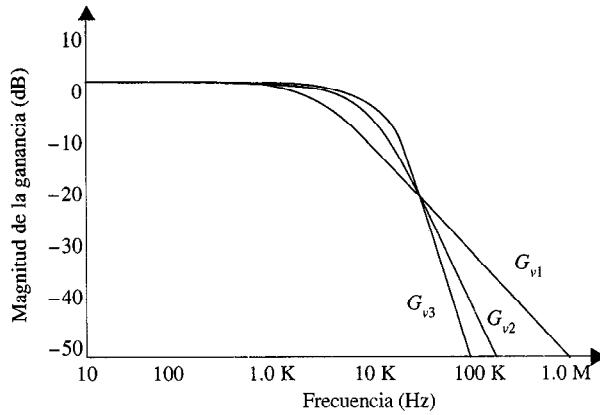


FIGURA 13.67 Gráficas de Bode para filtros: de una, dos y tres etapas.

La presencia del amp-op nos permite considerar las etapas de forma independiente. Así, la función de transferencia se convierte en

$$G_{v2}(s) = \frac{V_{o2}}{V_{\text{ent}}} = \frac{1}{[1 + sRC]^2}$$

Para encontrar las frecuencias requeridas del polo, empleemos la ecuación para $G_{v2}(s)$ a 22.05 kHz, como sabemos que la ganancia debe ser 0.1 (atenuada 20 dB) en esa frecuencia. Usando la sustitución $s = j\omega$, podemos expresar la magnitud de $G_{v2}(s)$ como

$$|G_{v2}| = \left\{ \frac{1}{1 + (22,050/f_p)^2} \right\} = 0.1$$

y se encuentra que la frecuencia del polo es 7.35 kHz. El valor correspondiente de la resistencia es 21.65 kΩ. Las gráficas de Bode para G_{v1} y G_{v2} se muestran en la figura 13.66. Observe que el filtro de dos etapas tiene un ancho de banda, que mejora la fidelidad de la grabación.

Tratemos una mejora extra —expandiendo el filtro de dos etapas a un filtro de cuatro etapas—. Nuevamente, la magnitud de ganancia es 0.1 a 22.05 kHz y puede escribirse como

$$|G_{v3}| = \left\{ \frac{1}{[1 + (22,050/f_p)^2]^2} \right\} = 0.1$$

Las frecuencias resultantes del polo están a 15 kHz y el valor requerido de la resistencia es 10.61 kΩ. La figura 13.67 muestra las tres gráficas de Bode. Obviamente, el filtro de cuatro etapas, que tiene el ancho de banda más amplio, es la mejor opción.

E J E M P L O 13.35

El circuito de la figura 13.68a se llama filtro de notch. En un esbozo de la gráfica de Bode en la figura 13.68b, vemos que en la frecuencia del notch, f_n , la ganancia de la función de transferencia es cero, mientras que a frecuencias por encima y por abajo de f_n la ganancia es unitaria. Diseñemos un filtro notch para eliminar el molesto zumbido de 60 Hz del voltaje de salida de un tocacintas y generar su gráfica de Bode usando el PSPICE.

SOLUCIÓN La Figura 13.68c muestra un diagrama a bloques para la instrumentación del filtro. El voltaje V_{cinta} contiene la música deseada pero también el zumbido indeseado. Después del filtrado, el voltaje V_{amp} no tendrá una componente de 60 Hz y alguna atenuación a frecuencias alrededor de 60 Hz. Un circuito equivalente para el diagrama a bloques, que incluye un equivalente de Thévenin para el tocacintas y una resistencia equivalente para el amplificador de potencia, se muestra en la figura 13.68d. Aplicando un divisor de voltaje, se encuentra que la función de transferencia es

$$\frac{V_{\text{amp}}}{V_{\text{cinta}}} = \frac{R_{\text{amp}}}{R_{\text{amp}} + R_{\text{cinta}} + \left(sL/\left(\frac{1}{Cs}\right) \right)}$$

Después de alguna manipulación, la función de transferencia puede escribirse como

$$\frac{V_{\text{amp}}}{V_{\text{cinta}}} = \frac{R_{\text{amp}}}{R_{\text{amp}} + R_{\text{cinta}}} \left[\frac{s^2LC + 1}{s^2LC + s\left(\frac{L}{R_{\text{cinta}} + R_{\text{amp}}}\right) + 1} \right]$$

Vemos que la función de transferencia contiene dos ceros y dos polos. Haciendo $s = j\omega$, se encuentran las frecuencias cero

$$\omega_z = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Obviamente, quisiéramos que las frecuencias cero estuvieran a 60 Hz. Si elegimos arbitrariamente $C = 10 \mu\text{F}$, entonces $L = 0.704 \text{ mH}$. El siguiente programa del PSPICE produce la gráfica de Bode en la figura 13.68e. Como vemos, hay realmente transmisión cero a 60 Hz.

Example 13.35

*

- * Vtape and Rtape make up the Thevenin Eq.
- * for the tape deck.
- * Since Vtape is 1 V at 0 degrees, the output
- * and the gain are the same.
- *

```
Vtape 1 0 ac 1
Rtape 1 2 50
```

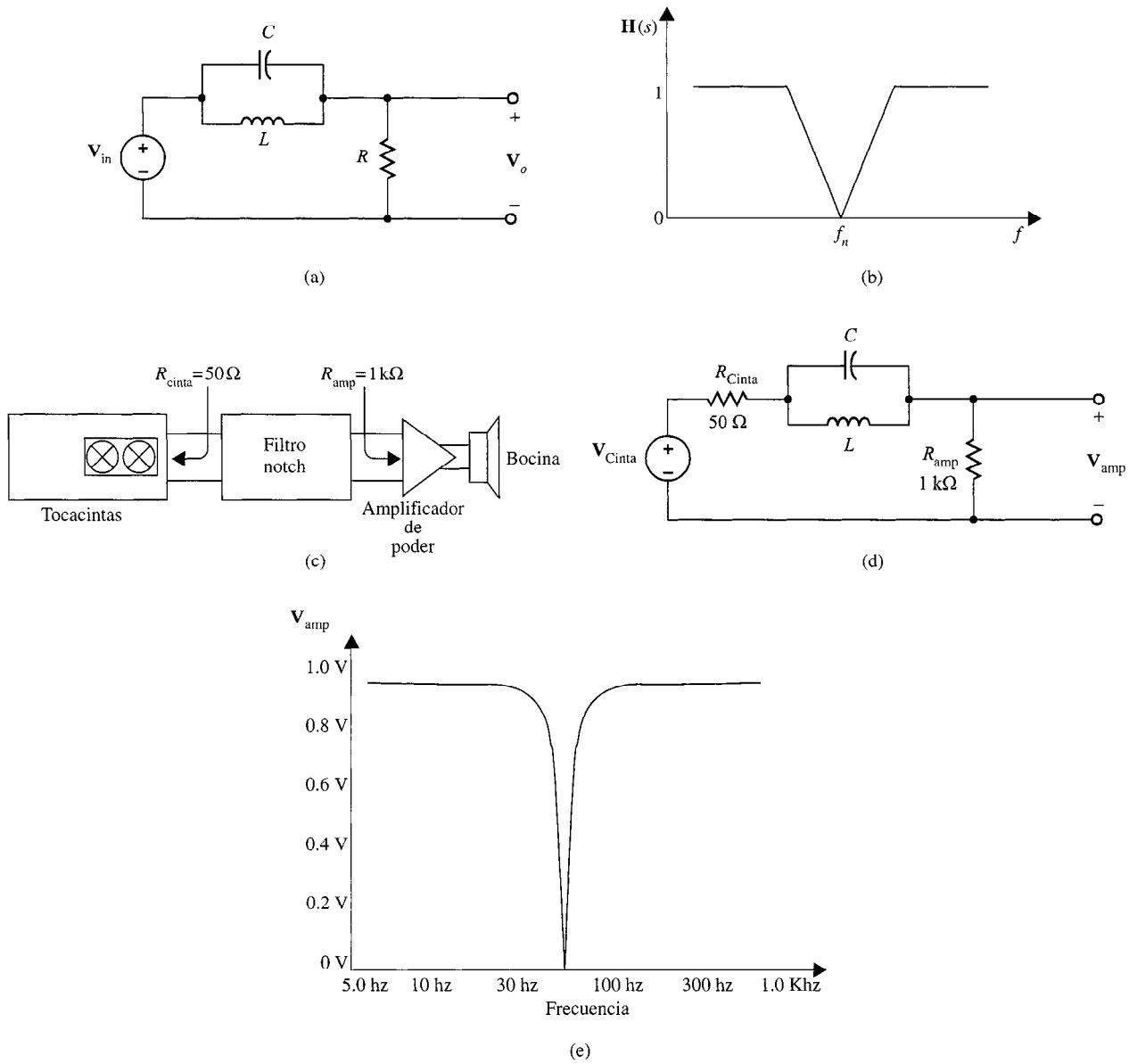


FIGURA 13.68 Circuitos y gráficas de Bode para un filtro notch de 60 Hz.

```

C 3 2 10u
L 3 2 .704
Ramp 3 0 1000
.ac dec 100 6 6000
.probe
.end

```

E J E M P L O 13.36

En la industria de grabación de música se hacen modificaciones al contenido de frecuencia de la música antes de imprimir el vinilo para crear los discos LP y los sencillos. Específicamente, los sonidos de baja frecuencia (bajos) son atenuados (desenfatizados) y las altas frecuencias son elevadas (enfatizadas). Cuando usted toca un disco en su fonógrafo, la frecuencia contenida debe ser reconstruida para conservar la fidelidad. Por ello, la RIAA (Asociación de la Industria de la Grabación de América) creó funciones de transferencia estándar para los filtros de grabación y de reproducción. La función de transferencia del filtro de grabación es

$$\mathbf{H}_R(s) = \frac{A_O(1 + s\tau_{z1})(1 + s\tau_{z2})}{1 + s\tau_p}$$

donde las constantes de tiempo son $\tau_{z1} = 75 \mu s$, $\tau_{z2} = 3180 \mu s$ y $\tau_p = 318 \mu s$. La constante A_O se elige de manera que \mathbf{H}_R tenga una magnitud de 1 a 1 000 Hz. Por supuesto, para una reconstrucción perfecta, el filtro de reproducción, que está dentro de su estéreo, debe tener la siguiente función de transferencia.

$$\mathbf{H}_P(s) = \frac{1}{\mathbf{H}_R(s)}$$

Usando el circuito de la figura 13.69, donde V_{fono} es la salida del fonógrafo, diseñemos el filtro de reproducción.

SOLUCIÓN En primer lugar, encontraremos la ganancia de V_{fono} a V_1 . Como la resistencia de entrada en el op-amp es infinita, podemos escribir

$$\frac{V_1}{V_{\text{fono}}} = \frac{\left(R_2/\!/ \frac{1}{sC_1}\right)}{\left(R_2/\!/ \frac{1}{sC_1}\right) + R_1}$$

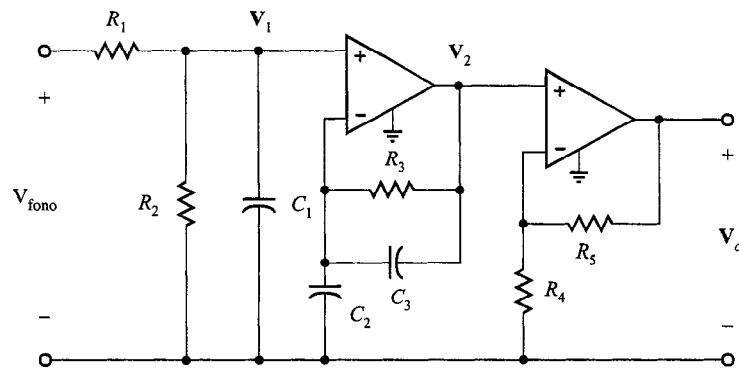
que, después de algún rearrreglo, puede expresarse como

$$\frac{V_1}{V_{\text{fono}}} = \left(\frac{R_2}{R_2 + R_1}\right) \frac{1}{sC_1(R_2/R_1) + 1}$$

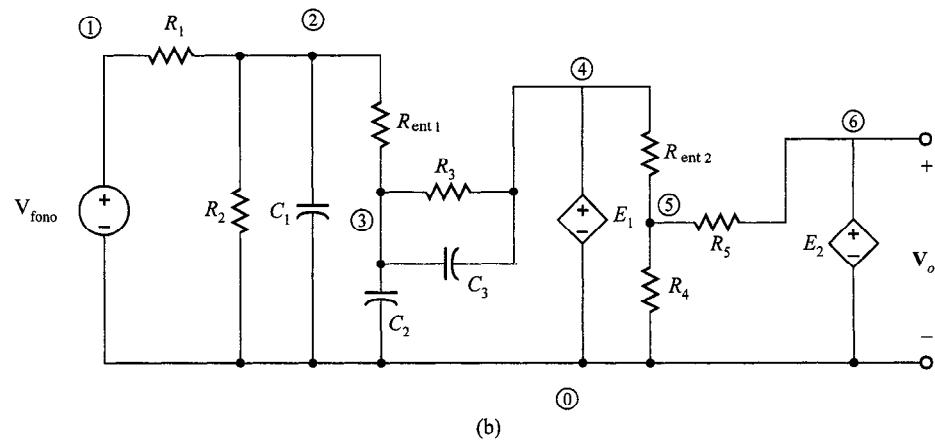
El primer op-amp tiene una ganancia de

$$\frac{V_2}{V_1} = 1 + \left(\frac{\frac{R_3/\!/ \frac{1}{sC_3}}{\frac{1}{sC_2}}}{\frac{1}{sC_2}}\right)$$

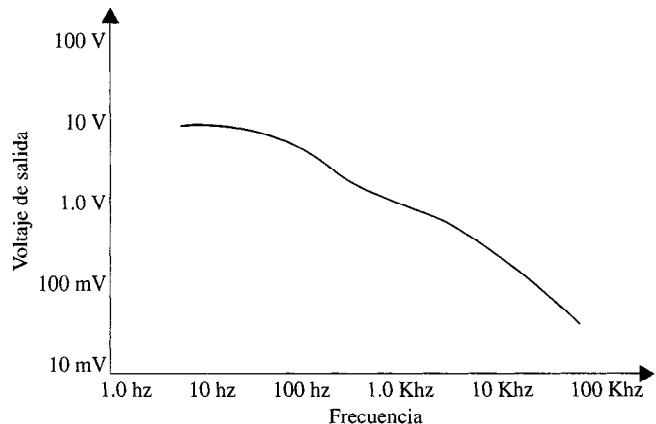
que puede expresarse en la forma



(a)



(b)



(c)

FIGURA 13.69 Filtro de reproducción de fonógrafo RIAA y gráfica de Bode.

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{1 + sR_3(C_2 + C_3)}{1 + sR_3C_3} \right)$$

Como el segundo amp-op es una etapa de ganancia no inversora simple, la función de transferencia total es

$$\frac{V_o}{V_{fono}} = \left(\frac{R_2}{R_2 + R_1} \right) \left(1 + \frac{R_5}{R_4} \right) \left(\frac{1}{sC_1(R_2//R_1) + 1} \right) \left(\frac{1 + sR_3(C_2 + C_3)}{1 + sR_3C_3} \right)$$

Basada en los estándares de la RIAA, enlistados anteriormente, la siguiente relación de constante de tiempo debe cumplirse.

$$R_3(C_2 + C_3) = 318 \mu\text{s}$$

$$R_3C_3 = 75 \mu\text{s}$$

$$(R_1//R_2)C_1 = 3180 \mu\text{s}$$

También la constante A_O es

$$\frac{1}{A_O} = \left(\frac{R_2}{R_2 + R_1} \right) \left(\frac{R_4 + R_5}{R_4} \right)$$

y deben elegirse para una magnitud de ganancia de 1 a $f = 1000$ Hz. Seleccionemos arbitrariamente $R_3 = 15 \text{ k}\Omega$. Esto genera un $C_3 = 16.2 \text{ nF}$ y $C_2 = 5 \text{ nF}$. A continuación, si hacemos $C_1 = 50 \text{ nF}$, la combinación en paralelo $R_1//R_2$ será $63.6 \text{ k}\Omega$. Con propósitos de conveniencia, sea $R_1 = R_2 = R_5 = 127.2 \text{ k}\Omega$. Para encontrar R_4 debemos conocer la magnitud de $\mathbf{H}_p(s)$ a 1000 Hz. Haciendo $s = j2000\pi$, encontramos que

$$|\mathbf{H}_p(j2000\pi)| = 1 = \left(\frac{R_2}{R_2 + R_1} \right) \left(1 + \frac{R_5}{R_4} \right) (0.1010)$$

Usando los valores anteriores para R_1 , R_2 y R_5 ,

$$R_5 = 18.80R_4$$

o

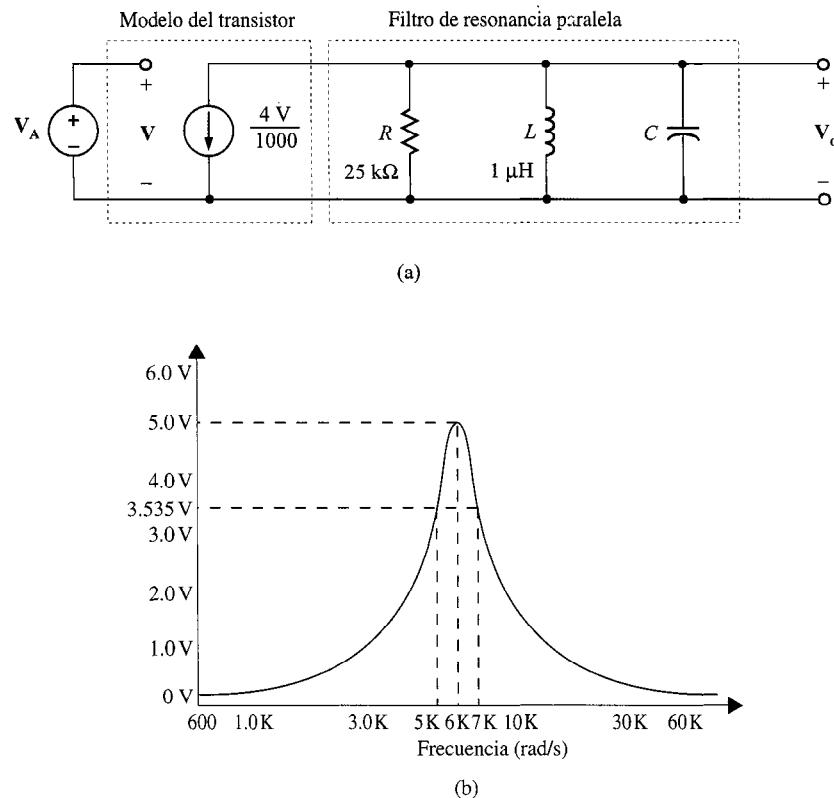
$$R_4 = 6.77 \text{ k}\Omega$$

Obviamente, con ocho componentes externas hay un número infinito de soluciones para esta aplicación.

El circuito del PSPICE se muestra en la figura 13.69b y el programa es el siguiente. El amp-op tiene $R_{ent} = 10 \text{ M}\Omega$, $R_o = 0 \Omega$ y $A = 10^5$. La gráfica de Bode resultante en la figura 13.69c despliega los atributos de un sistema de dos polos, un cero simple y tiene la ganancia unitaria requerida a 1000 Hz.

Example 13.36 RIAA Playback Filter

```
Vphono 1 0 ac 1
r1 1 2 127.2k
r2 2 0 127.2k
```

**FIGURA 13.70**

```

c1 2 0 50n
c2 3 0 16.2n
c3 3 4 5n
r3 3 4 15k
r4 5 0 6.77k
r5 5 6 127.2k
*
* First stage op-amp
*
Rin1 2 3 10meg
e1 4 0 2 3 100k
*
* Second stage op-amp
*
Rin2 4 5 10meg
e2 6 0 4 5 100k
*
.ac dec 100 5 50k
.probe
.end

```

13.8 Resumen

En este capítulo hemos examinado las características de frecuencia de las redes. Se ha introducido la función de la red y ha sido analizada la respuesta de frecuencia de una red usando las gráficas de polos cero y de Bode. Esas gráficas son muy importantes debido a que indican el comportamiento de la red como una función de la frecuencia.

Se han presentado y discutido los circuitos resonantes. En la resonancia el voltaje y la corriente de entrada a una red están en fase y el factor de potencia es unitario. Se han estudiado el ancho de banda, las frecuencias de potencia media y el factor de calidad para circuitos resonantes y se ha presentado el escalamiento de la red como una ayuda al diseño de redes con valores prácticos de los elementos del circuito.

Se introdujeron los filtros pasivos y activos. Se examinaron los filtros pasabajas, pasaaltas, pasabandas y los de rechazo de banda. Se presentaron y discutieron procedimientos para el análisis y diseño de filtros activos.

Finalmente, el PSPICE fue usado para analizar los filtros y trazar gráficas de sus respuestas de frecuencia y transitorias.

Puntos clave

- Hay cuatro funciones de transferencia o de red comunes: $Z(j\omega)$ es la razón del voltaje de salida a la corriente de entrada, $Y(j\omega)$ es la razón de la corriente de salida al voltaje de entrada, $G_v(j\omega)$ es la razón del voltaje de salida al voltaje de entrada, y $G_I(j\omega)$ es la razón de la corriente de salida a la corriente de entrada.
- Los valores de la variable de frecuencia general s que hacen que la magnitud de la función de la red se haga cero se llaman *ceros* de esa función; de otra forma, los valores s que conducen la magnitud a infinito se llaman *polos*.
- Las gráficas de Bode son gráficas semilogarítmicas de la magnitud y fase de las funciones de transferencia como una función de la frecuencia.
- Las aproximaciones de línea recta se pueden usar para esbozar rápidamente las características de magnitud de una gráfica de Bode. El error entre la curva real y la aproximación con línea recta puede calcularse, si es necesario.
- La frecuencia resonante se define como la frecuencia a la que la impedancia de un circuito RLC en serie o la admitancia de un circuito RLC en paralelo es puramente real.
- El factor de calidad Q es una medida de la agudeza del pico de resonancia. Cuanto más alta es la Q , más agudo es el pico.
- Las frecuencias de rompimiento, de corte o de potencia media son las frecuencias a las que la característica de la magnitud de un filtro es $1/\sqrt{2}$ de su valor máximo.
- Los valores irreales de los parámetros de elementos pasivos de circuito pueden ser escalados en magnitud y frecuencia para producir valores realistas de elementos de circuito.
- Los cuatro tipos más comunes de redes de filtros son pasabajas, pasaaltas, pasabandas y de rechazo de banda.
- El ancho de banda de un filtro pasabandas o de rechazo de banda se define como la diferencia de frecuencia entre los puntos de potencia media.

- El diseño de ciertos filtros, por ejemplo, pasabajos, pasaaltas, etcétera, con características específicas pueden llevarse a cabo rápidamente a partir del conocimiento de las funciones de transferencia.

Problemas

13.1. Determine la impedancia de entrada en las terminales de entrada de la red que se muestra en la figura P13.1 como una función de s .

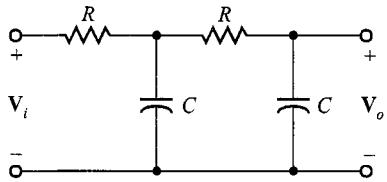


FIGURA P13.1

13.2. Encuentre la impedancia transferida $V_o(s)/I_s(s)$ para la red que se muestra en la figura P13.2.

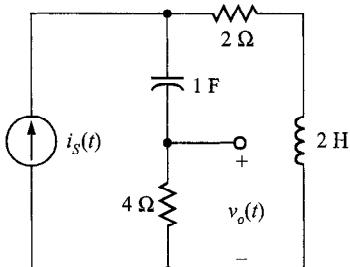


FIGURA P13.2

13.3. Determine la función de transferencia de voltaje V_o/V_i como una función de s para la red que se muestra en la figura P13.3.

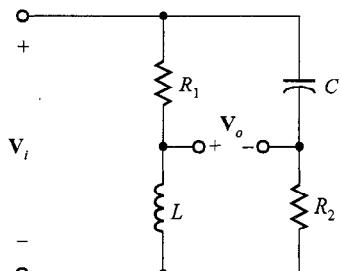


FIGURA P13.3

13.4. Dibuje la gráfica de Bode para la función de la red

$$H(j\omega) = \frac{j\omega 5 + 1}{j\omega 20 + 1}$$

13.5. Dibuje la gráfica de Bode para la función de la red

$$H(j\omega) = \frac{j\omega 2 + 1}{j\omega 10 + 1}$$

13.6. Dibuje la gráfica de Bode para la función de la red

$$H(j\omega) = \frac{10(10j\omega + 1)}{(100j\omega + 1)(j\omega + 1)}$$

13.7. Dibuje la gráfica de Bode para la función de la red

$$H(j\omega) = \frac{10j\omega + 1}{j\omega(0.1j\omega + 1)}$$

13.8. Dibuje la gráfica de Bode para la función de la red

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega + 1)(0.1j\omega + 1)}$$

13.9. Dibuje la gráfica de Bode para la función de la red

$$H(j\omega) = \frac{16}{(j\omega)^2(j\omega 2 + 1)}$$

13.10. Esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode para la función de transferencia

$$H(j\omega) = \frac{640(j\omega + 1)(0.02j\omega + 1)}{(j\omega)^2(j\omega + 10)}$$

13.11. Esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode para la función de transferencia

$$G(j\omega) = \frac{10j\omega}{(j\omega + 1)(j\omega + 10)^2}$$

13.12. Esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode para la función de transferencia

$$G(j\omega) = \frac{400(j\omega + 2)(j\omega + 50)}{-\omega^2(j\omega + 200)^2}$$

13.13. Esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode para la función de transferencia

$$H(j\omega) = \frac{10^5(5j\omega + 1)^2}{(j\omega)^2(j\omega + 10)(j\omega + 50)^2}$$

13.14. Esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode para la función de transferencia

$$H(j\omega) = \frac{10^2(j\omega)^2}{(j\omega + 1)(j\omega + 10)^2(j\omega + 100)}$$

13.15. Esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode para la función de transferencia

$$G(j\omega) = \frac{64(j\omega + 1)^2}{-\omega^3(0.1j\omega + 1)}$$

13.16. Esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode para la función de transferencia

$$G(j\omega) = \frac{-\omega^2}{(j\omega + 1)^3}$$

13.17. Esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode para la función de transferencia

$$G(j\omega) = \frac{-\omega^2 10^4}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 10)(j\omega + 100)^2}$$

13.18. Esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode para la función de transferencia

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 2)(j\omega + 100)}{j\omega(-\omega^2 + 4j\omega + 100)}$$

13.19. Dibuje la gráfica de Bode para la función de la red.

$$H(j\omega) = \frac{72(j\omega + 2)}{j\omega[(j\omega)^2 + 2.4j\omega + 144]}$$

13.20. Esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode para la función de transferencia

$$G(j\omega) = \frac{j\omega(j\omega + 100)}{(j\omega + 1)(-\omega^2 + 6j\omega + 400)}$$

13.21. Esboce la característica de magnitud de la gráfica de Bode para la función de transferencia

$$G(j\omega) = \frac{10^4(j\omega + 1)(-\omega^2 + 6j\omega + 225)}{j\omega(j\omega + 50)^2(j\omega + 450)}$$

13.22. Determine $H(j\omega)$ si la característica de amplitud para $H(j\omega)$ se muestra en la figura P13.22.

13.23. La característica de magnitud para un filtro de rechazo de banda se muestra en la figura P13.23. Determine $H(j\omega)$.

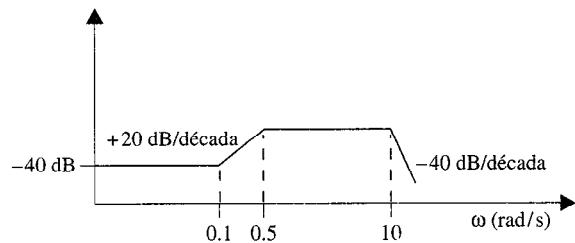


FIGURA P13.22

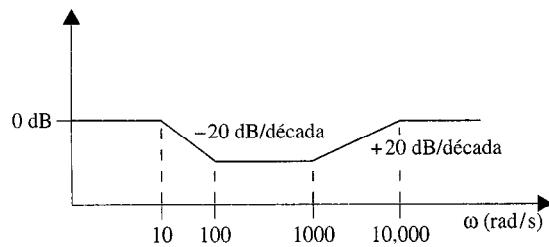


FIGURA P13.23

13.24. Encuentre $H(j\omega)$ si su característica de magnitud es la que se muestra en la figura P13.24.

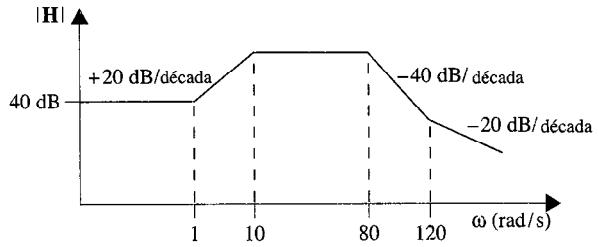


FIGURA P13.24

13.25. Encuentre $H(j\omega)$ si su característica de magnitud se muestra en la figura P13.25.

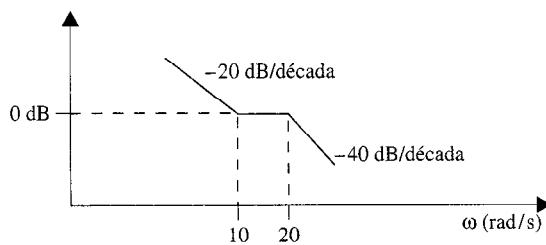


FIGURA P13.25

13.26. Encuentre $\mathbf{H}(j\omega)$ si su característica de amplitud se muestra en la figura P13.26.

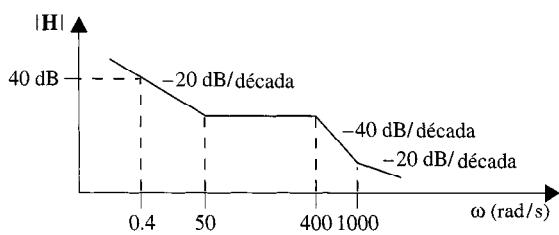


FIGURA P13.26

13.27. Determine $\mathbf{H}(j\omega)$ si su característica de magnitud se muestra en la figura P13.27.

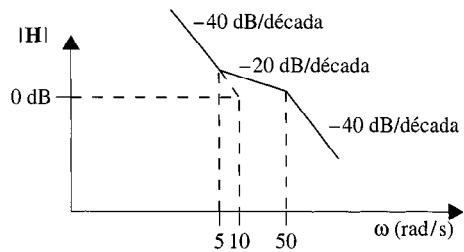


FIGURA P13.27

13.28. Encuentre $\mathbf{H}(j\omega)$ si su característica de amplitud se muestra en la figura P13.28.

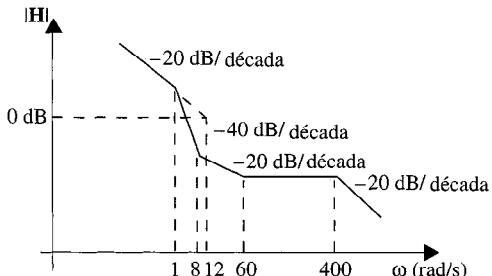


FIGURA P13.28

13.29. Dada la característica de magnitud de la figura P13.29, encuentre $\mathbf{G}(j\omega)$.

13.30. Dada la característica de magnitud de la figura P13.30, encuentre $\mathbf{H}(j\omega)$.

13.31. Encuentre $\mathbf{H}(j\omega)$ si su característica de magnitud es la que se muestra en la figura P13.31.

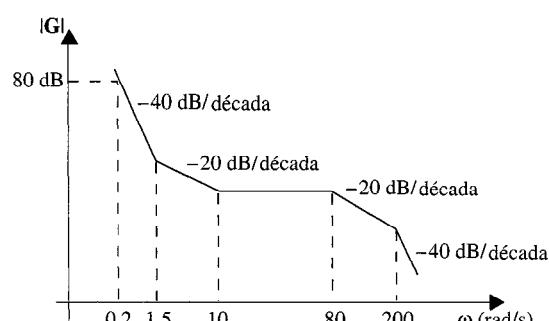


FIGURA P13.29

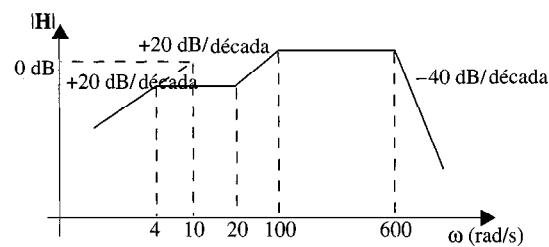


FIGURA P13.30

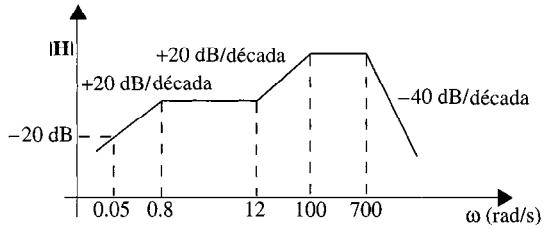


FIGURA P13.31

13.32. Encuentre $\mathbf{H}(j\omega)$ para la característica de magnitud que se muestra en la figura P13.32.

13.33. Encuentre $\mathbf{G}(j\omega)$ si la característica de amplitud para esta función se muestra en la figura P13.33.

13.34. Un circuito *RLC* en serie entra en resonancia a 2 000 rad/s. Si $C = 20 \mu\text{F}$ y se sabe que la impedancia en la resonancia es 2.4Ω , calcule el valor de L , la Q del circuito y el ancho de banda.

13.35. Un circuito resonante en serie tiene una Q de 120 y una frecuencia resonante de 60 000 rad/s. Determine la frecuencia de potencia media y el ancho de banda del circuito.

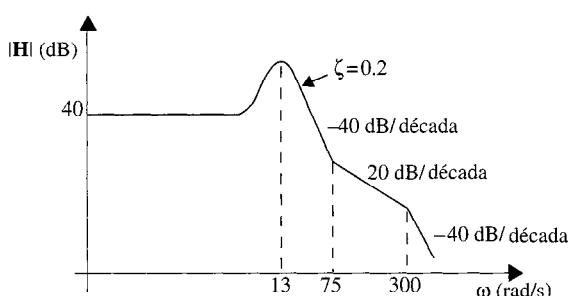


FIGURA P13.32

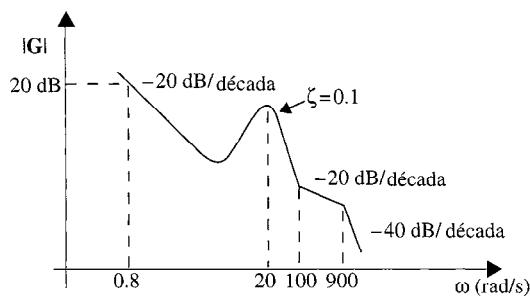


FIGURA P13.33

- 13.36.** El circuito *RLC* en serie de la figura P13.36 es impulsado por una fuente de frecuencia variable. Si la frecuencia resonante de la red se selecciona como $\omega_0 = 1\ 200$ rad/segundo, encuentre el valor de C . Además, calcule la corriente en la resonancia y a $\omega_0/4$ y $4\omega_0$.

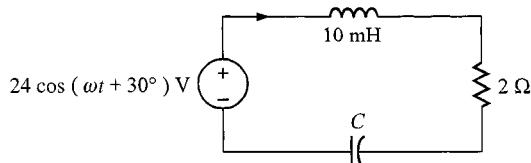


FIGURA P13.36

- 13.37.** Dado el circuito *RLC* en serie en la figura P13.37,
- Derive la expresión para las frecuencias de potencia media, la frecuencia resonante, el ancho de banda y el factor de calidad para la características de transferencia I/V_{ent} en términos de R , L , C .
 - Calcule las cantidades en la parte a) si $R = 10\ \Omega$, $L = 100\ \text{mH}$ y $C = 10\ \mu\text{F}$.

- 13.38.** Dada la red de la figura P13.38, encuentre ω_0 , Q , $\omega_{\text{máx}}$ y $|V_o|_{\text{máx}}$.

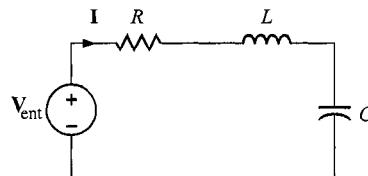


FIGURA P13.37

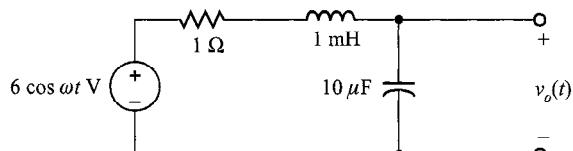


FIGURA P13.38

- 13.39.** Repita el problema 13.38 si el valor de R cambia a $0.1\ \Omega$.

- 13.40.** Determine ω_0 y Q para la red de la figura P13.40.

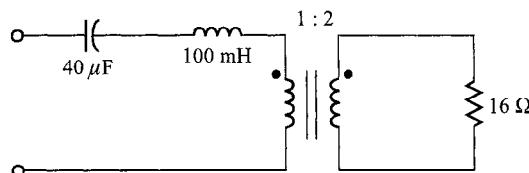


FIGURA P13.40

- 13.41.** Encuentre el valor de n en el circuito de la figura P13.41 para obtener a Q de 50.

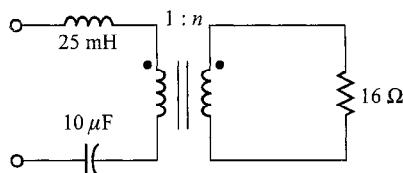


FIGURA P13.41

- 13.42.** En la red de la figura P13.42, $\omega_0 = 1\ 000$ rad/segundo y en la frecuencia la impedancia vista por fuente es $4\ \Omega$. Si $L = 20\ \text{mH}$, determine la Q de la red y el ancho de banda.

- 13.43.** Un circuito *RLC* en serie es impulsado por un generador de señales. Se sabe que la frecuencia resonante de la red es $1\ 600$ rad/segundo, y en esa frecuencia la impedancia

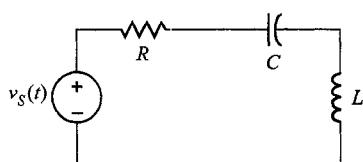


FIGURA P13.42

vista por el generador de señales es 3Ω . Si $C = 20 \mu\text{F}$, encuentre L , Q y el ancho de banda.

- 13.44.** Dado el circuito RLC en serie de la figura P13.44, si $R = 10 \Omega$, encuentre los valores de L y C tales que la red tenga una frecuencia resonante de 100 kHz y un ancho de banda de 1 kHz .

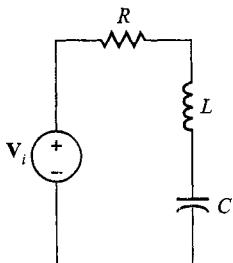


FIGURA P13.44

- 13.45.** Una fuente de voltaje de frecuencia variable impulsa la red de la figura P13.45. Determine la frecuencia resonante, Q , BW y la potencia promedio disipada por la red en la resonancia.

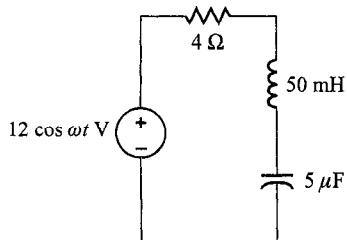


FIGURA P13.45

- 13.46.** En la red de la figura P13.46, el valor de la bobina es 30 mH y el circuito es impulsado por una fuente de frecuencia variable. Si la magnitud de la corriente en la resonancia es 12 A , $\omega_0 = 1000 \text{ rad/segundo}$, y $L = 10 \text{ mH}$, encuentre C , Q y el ancho de banda del circuito.

- 13.47.** Un circuito RLC en paralelo resonante con una frecuencia de resonancia de 20000 rad/s tiene una admitancia

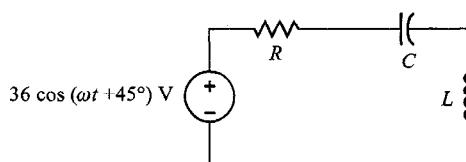


FIGURA P13.46

en la resonancia de 1 mS . Si la capacitancia de la red es $5 \mu\text{F}$, encuentre los valores de R y L .

- 13.48.** Un circuito RLC en paralelo resonante tiene una resistencia de 200Ω . Si se sabe que el ancho de banda es 80 rad/s y la frecuencia de potencia media inferior es 800 rad/s , encuentre los valores de los parámetros L y C .

- 13.49.** Un circuito RLC en paralelo, que es impulsado por una fuente de corriente de 2 A y frecuencia variable, tiene los siguientes valores: $R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 100 \text{ mH}$ y $C = 10 \mu\text{F}$. Encuentre el ancho de banda de la red, las frecuencias de potencia media y el voltaje a través de la red en las frecuencias de potencia media.

- 13.50.** Un circuito RLC en paralelo, que es impulsado por una fuente de 10 A de frecuencia variable, tiene los siguientes parámetros: $R = 500 \Omega$, $L = 0.5 \text{ mH}$ y $C = 20 \mu\text{F}$. Encuentre la frecuencia resonante, Q , la potencia promedio disipada en la frecuencia resonante, el ancho de banda y la potencia promedio disipada en las frecuencias de potencia media.

- 13.51.** Considere la red de la figura P13.51. Si $R = 2 \text{ k}\Omega$, $L = 20 \text{ mH}$, $C = 50 \mu\text{F}$ y $R_S = \infty$, determine la frecuencia resonante ω_0 , la Q de la red y el ancho de banda de la red. ¿Qué impacto tiene una R_S de $10 \text{ k}\Omega$ en las cantidades determinadas?

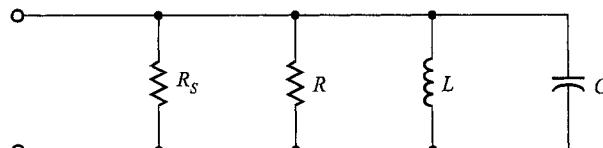


FIGURA P13.51

- 13.52.** La fuente en la red de la figura P13.52 es $i_S(t) = \cos 1000t + \cos 1500t \text{ A}$. $R = 200 \Omega$ y $C = 500 \mu\text{F}$. Si $\omega_0 = 1000 \text{ rad/segundo}$, encuentre L , Q y el BW. Calcule el voltaje de salida $v_o(t)$ y discuta la magnitud del voltaje de salida en las dos frecuencias de entrada.

- 13.53.** Determine los parámetros de un circuito resonante en paralelo que tiene las siguientes propiedades: $\omega_0 = 2 \text{ Mrad/segundo}$, $BW = 20 \text{ krad/segundo}$ y una impedancia en la resonancia de 2000Ω .

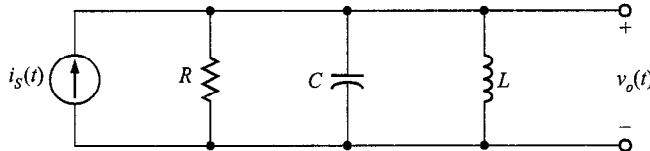


FIGURA P13.52

13.54. Determine el valor de C en la red que se muestra en la figura P13.54 a fin de que el circuito esté en resonancia.

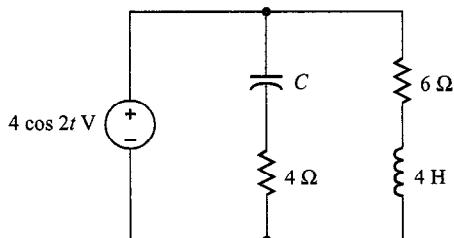


FIGURA P13.54

13.55. Determine la ecuación para la frecuencia resonante diferente de cero de la impedancia que se muestra en la figura P13.55.

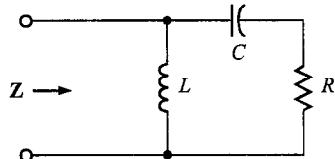


FIGURA P13.55

13.56. Trace I_x en la red de la figura P13.56, usando PSPICE. Use 5 puntos por década en la escala de frecuencia de 0.1 a 10 MHz.

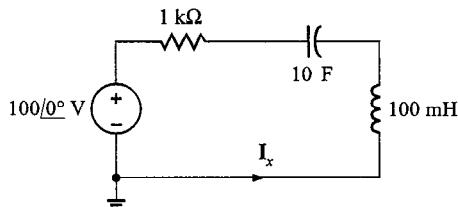


FIGURA P13.56

13.57. Dada la red de la figura P13.57, use 5 puntos por década para trazar gráficas de la respuesta de frecuencia de V en la escala de 0.1 Hz a 1 MHz, usando PSPICE.

13.58. Dada la red de la figura P13.58, trace V_o usando PSPICE. Use 5 puntos por decena en la escala de 0.1 Hz a 1 MHz.

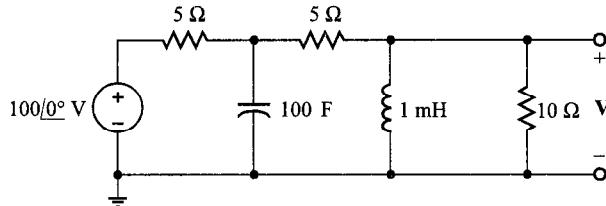


FIGURA P13.57

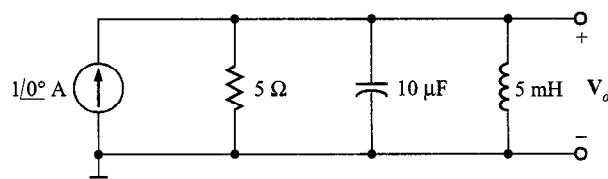


FIGURA P13.58

13.59. Determine los nuevos parámetros de la red que se muestra en la figura P13.59, si $Z_{\text{nueva}} = 1000Z_{\text{ant}}$.

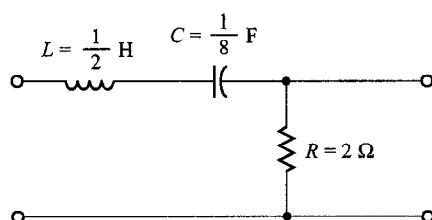


FIGURA P13.59

13.60. Determine los nuevos parámetros de la red del problema 13.59 si $\omega_{\text{nueva}} = 10^5\omega_{\text{ant}}$.

13.61. Dada la red de la figura P13.61, esboce la característica de magnitud de la función de transferencia

$$G_v(j\omega) = \frac{V_o}{V_1} (j\omega)$$

Identifique el tipo de filtro.

13.62. Determine qué tipo de filtro representa la red que se muestra en la figura P13.62 determinando el voltaje de la función de transferencia.

13.63. Dada la red en celosía que se muestra en la figura P13.63, determine qué tipo de filtro representa esta red indicando la función de transferencia de voltaje.

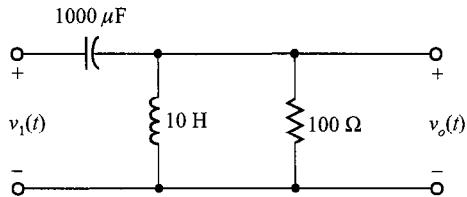


FIGURA P13.61

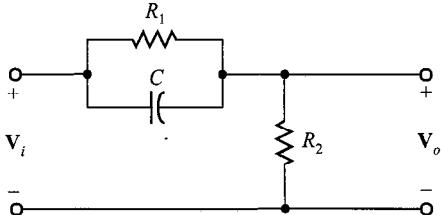


FIGURA P13.62

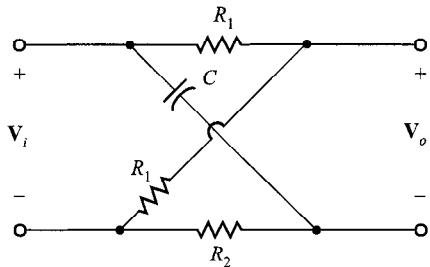


FIGURA P13.63

13.64. Dada la red de la figura P13.64, y empleando el seguidor de voltaje analizado en capítulo 3, determine la función de transferencia de voltaje y su magnitud característica. ¿Qué tipo de filtro representa la red?

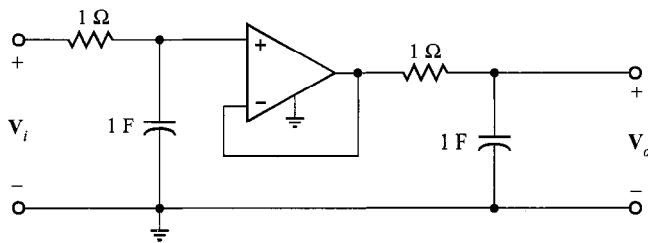


FIGURA P13.64

13.65. Repita el problema 13.61 para la red que se muestra en la figura P13.65.

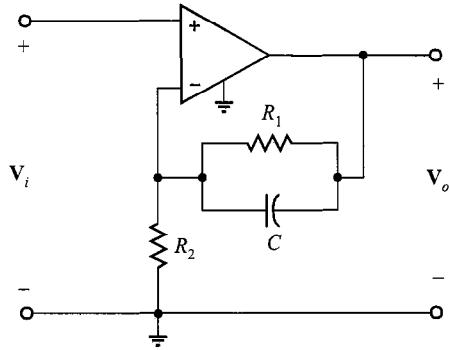


FIGURA P13.65

13.66. Use PSPICE para trazar gráficas de la respuesta de frecuencia del filtro activo que se muestra en la figura P13.66. Trace gráficas en la escala de 1 Hz a 10 kHz usando 10 por decena. Para el modelo de amp-op use $R_{\text{ent}} = 500 \text{ k}\Omega$, $R_{\text{sal}} = 100 \Omega$ y $A = 10^7$. ¿Qué tipo de filtro es éste?

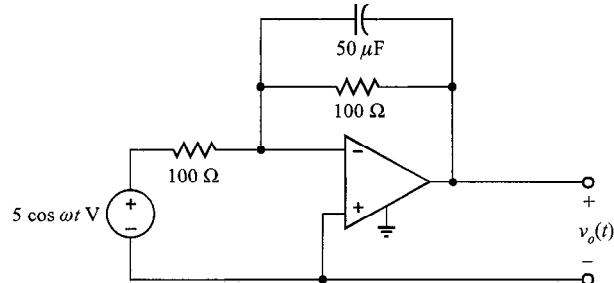


FIGURA P13.66

13.67. Si dos filtros pasabajas de primer orden se colocan en serie, el resultado es un filtro de segundo orden. Encuentre H_o , ζ y ω_c para la red de la figura P13.67.

13.68. Dado el filtro pasabajas de segundo orden de la figura P13.67, diseñe un filtro que tenga $H_o = 100$ y $f_c = 5 \text{ kHz}$. Sean $R_1 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, y sea $R_2 = R_4$ y $C_1 = C_2$. Verifique los resultados con PSPICE generando una gráfica de Bode para la red en el rango de 500 Hz a 50 kHz usando 20 puntos por decena. Use un modelo de op-amp con $R_i = \infty$, $R_o = 0$ y $A = (2)10^5$.

13.69. Diseñe un filtro pasabajas activo de primer orden de la forma que se muestra en la figura 13.39, que tenga una ganancia de cd de -20 y una frecuencia de corte de 50 kHz . Suponga que $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$.

13.70. El filtro pasabajas de segundo orden que se muestra en la figura P13.70 tiene la función de transferencia

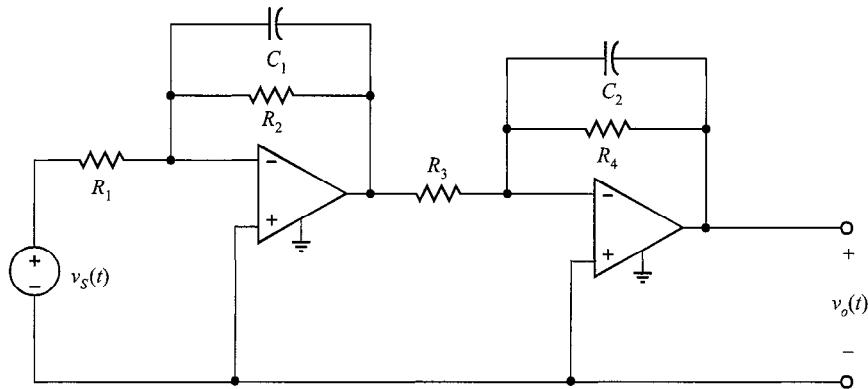


FIGURA P13.67

$$\frac{V_o}{V_1}(s) = \frac{\frac{-R_3}{R_1} \left(\frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \right)}{s^2 + \frac{s}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

Diseñe un filtro con $H_o = -10$ y $f_c = 5$ kHz, suponiendo que $C_1 = C_2 = 10$ nF y $R_1 = 1$ k Ω .

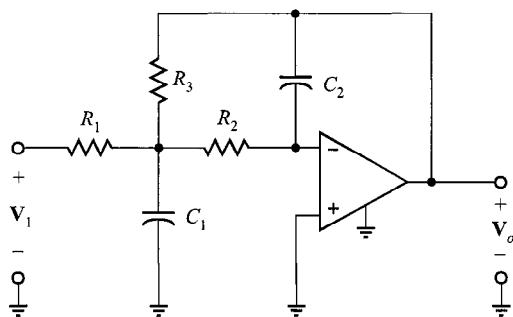


FIGURA P13.70

13.71. Diseñe un filtro pasaaltas activo de segundo orden con $\omega_c = 10$ krad/segundo, $H_o = -5$, y $\zeta = 1$. Sean $C_2 = C_1 = C$ y $R_1 = 1$ k Ω (véase figura 13.53).

13.72. Usando las ecuaciones para un filtro general pasabandas de segundo orden, diseñe un filtro con una ganancia de frecuencia central de -5 , $\omega_0 = 50$ krad/segundo y un BW = 10 krad/segundo. Sea $C_1 = C_2 = C$ y $R_1 = 1$ k Ω . ¿Cuál es la Q de este circuito? Use PSPICE para generar una gráfica de Bode para el filtro en la escala de 100 Hz a 100 kHz usando treinta puntos por década. Use un modelo de amp-op con $R_i = \infty$, $R_o = 0$ y $A = (2)10^5$.

13.73. Remítase a la aplicación del filtro pasabajos convertidor de ca/cd del ejemplo 13.32. Si ponemos el convertidor para dar potencia a una calculadora, la corriente de carga puede ser modelada por una resistencia como se muestra en la figura P13.73. La resistencia de carga afectará la magnitud de la componente de cd de V_{OF} y la frecuencia del polo. Trace gráficas de la frecuencia del polo y la razón de la componente de 60 Hz del voltaje de salida a la componente de cd de V_{OF} contra R_L para $100 \Omega \leq R_L \leq 100$ k Ω . Comente sobre las limitaciones aconsejables sobre R_L si

- a) La componente de cd de V_{OF} permanece dentro de 20% de su valor ideal de 9V.
- b) La componente de 60Hz de V_{OF} permanece en menos del 1% de la componente de cd.

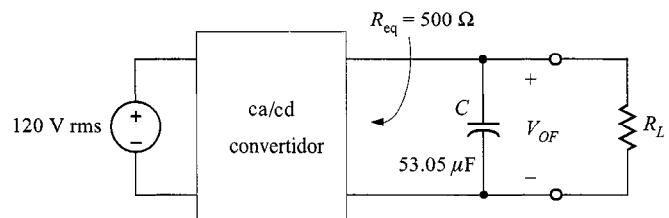


FIGURA P13.73

13.74. Con referencia al ejemplo 13.35, diseñe un filtro de notch para el tocadiscos para su uso en Europa donde las instalaciones de potencia generan a 50 Hz.

13.75. Para reducir el ancho de banda (incrementar el factor de calidad) de amplificadores de sintonía de una sola etapa tal como el amplificador del ejemplo 13.33, los diseñadores emplean una técnica llamada sintonización sincrónica. En este proceso, amplificadores de sintonía idénticos se conectan en cascada, como se muestra en la figura P13.75. Para demostrarlo, use PSPICE para generar la gráfica de Bode para el am-

plificador de sintonía del ejemplo 13.33 sintonizado a 100 MHz con $R = 250 \Omega$. Repita para un filtro de dos etapas, otro de tres etapas y otro de cuatro etapas. Comente cuantitativamente el efecto de múltiples etapas sobre el ancho de banda. ¿Cuáles son las ramificaciones técnicas de un amplificador de sintonía de Q alta en un radioreceptor?

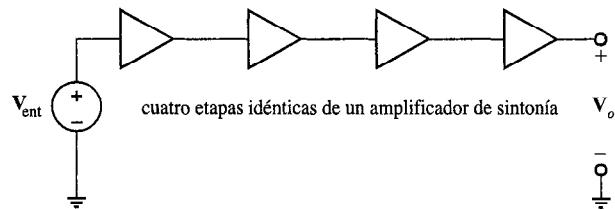


FIGURA P13.75

13.76. El circuito de la figura P13.76 es un filtro notch T dual. Tiene una ventaja distinta sobre el filtro notch del ejemplo 13.35, pues éste no contiene capacitores, que tienden a ser voluminosos y pesados. Derive la función de transferencia para el filtro notch T dual y use PSPICE para verificar su trabajo para los valores de los componentes $C = 100 \text{ nF}$ y $R = 1590 \Omega$.

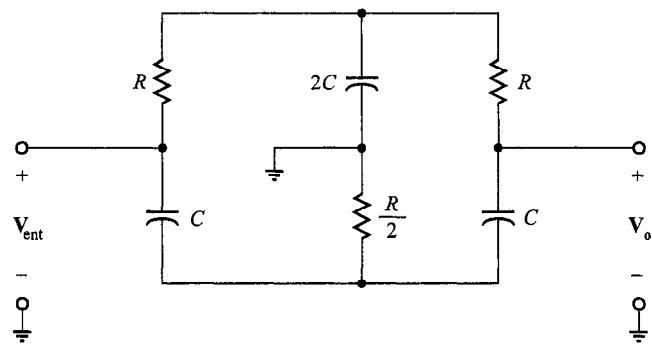


FIGURA P13.76

13.77. Para el filtro pasabajas activo de la figura P13.77, elija R_2 y C tales que $H_o = -7$ y $f_c = 10 \text{ kHz}$.

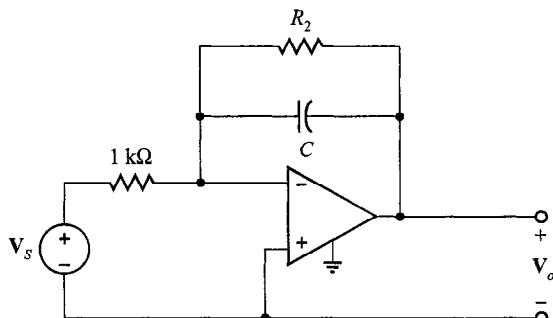


FIGURA P13.77

13.78. Para el filtro pasabajas activo de la figura P13.78, elija C , R_1 y R_2 tales que $H_o = 5$ y $f_c = 3 \text{ kHz}$.

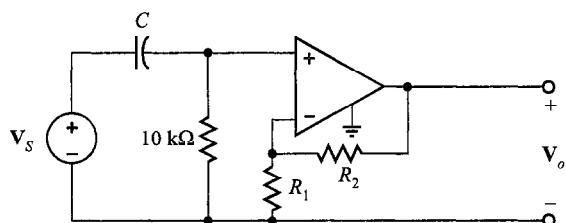


FIGURA P13.78

- 14.1** Parámetros de admitancia
- 14.2** Parámetros de impedancia
- 14.3** Parámetros híbridos
- 14.4** Parámetros de transmisión
- 14.5** Conversión de parámetros
- 14.6** Interconexión de dos puertos
- 14.7** Dos puertos empotrados en una red
- 14.8** Resumen
Puntos clave
Problemas

REDES de DOS PUERTOS

Decimos que la red lineal de la figura 14.1a tiene un solo *puerto*, es decir, un solo par de terminales. El par de terminales *A-B* que constituye este puerto puede representar un solo elemento (por ejemplo, R , L o C), o puede ser cualquier interconexión de esos elementos. La red lineal de la figura 14.1b se llama transductor de dos puertos. Como regla general, las terminales *A-B* representan el puerto de entrada y las terminales *C-D* representan el puerto de salida.

Estudiamos los transductores de dos puertos y los parámetros que los describen por varias razones. Por ejemplo, la mayoría de los circuitos o sistemas tienen al menos dos puertos. Podemos colocar una señal de entrada en un puerto y obtener una señal de salida en el otro. Los parámetros de los dos puertos describen por completo su comportamiento en términos del voltaje y corriente de cada puerto. Así, conocer los parámetros de una red de dos puertos nos permite describir su operación cuando ésta se conecta a una red más grande. Las redes de dos puertos también son importantes al diseñar dispositivos electrónicos y componentes de sistemas.

Por ejemplo, en electrónica, las redes de dos puertos se emplean para diseñar componentes como transistores y amps-op. Otros ejemplos de componentes modelados por el transductor de dos puertos son los transformadores y las líneas de transmisión.

En general, describimos al transductor de dos puertos como una red que consiste en elementos R , L y C , transformadores, amps-op, fuentes dependientes, pero no fuentes independientes. La red tiene un puerto de entrada y un puerto de salida, y como en el caso de los amplificadores operacionales, puede haber una terminal común para ambos puertos.

Se examinan cuatro tipos populares de parámetros para transductores de dos puertos: de admitancia, impedancia, híbridos y de transmisión. Demostramos la utilidad de cada conjunto de parámetros, mostramos cómo están relacionados uno con el otro y, finalmente, ilustramos cómo las redes de dos puertos pueden interconectarse en paralelo, en serie o en cascada. ■

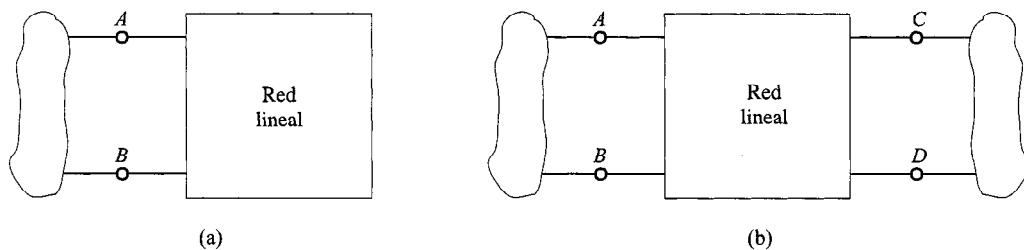


FIGURA 14.1 a) Red de un solo puerto; b) red de dos puertos.

14.1 Parámetros de admitancia

En la red de dos puertos que se muestra en la figura 14.2 es habitual etiquetar los voltajes y corrientes como se muestra; es decir, las terminales superiores son positivas con respecto a las terminales inferiores y las corrientes entran al transductor de dos puertos en las terminales superiores, y ya que la LCK se debe satisfacer en cada puerto, la corriente sale de los dos puertos en las terminales inferiores. Como la red es lineal y no contiene fuentes independientes, puede aplicarse el principio de superposición para determinar la corriente I_1 , que puede escribirse como la suma de dos componentes, una debida a V_1 y otra debida a V_2 . Aplicando este principio, podemos escribir

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2$$

donde y_{11} y y_{12} son esencialmente constantes de proporcionalidad con unidades de siemens. De manera similar, I_2 puede escribirse como

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$$

Por tanto, las dos ecuaciones que describen a los dos puertos son

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \quad (14.1)$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$$

o en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

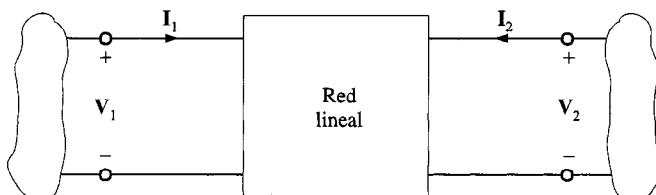


FIGURA 14.2 Red de dos puertos generalizada.

Observe que el subíndice 1 se refiere al puerto de entrada y el subíndice 2 se refiere al puerto de salida, y las ecuaciones describen lo que llamaremos los *parámetros Y* para una red. Si se conocen esos parámetros y_{11} , y_{12} , y_{21} y y_{22} , la operación de entrada/salida de los dos puertos está completamente definida.

De la ecuación (14.1) podemos determinar los parámetros Y de la siguiente manera. Observe según las ecuaciones que y_{11} es igual a I_1 dividido entre V_1 con la salida en corto circuito (es decir, $V_2 = 0$).

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad (14.2)$$

Como y_{11} es una admitancia en la entrada medida en siemens con la salida en corto circuito, ésta se llama *admitancia de entrada de corto circuito*. Las ecuaciones indican que los otros parámetros Y pueden determinarse de manera similar:

$$\begin{aligned} y_{12} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \\ y_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \\ y_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \end{aligned} \quad (14.3)$$

y_{12} y y_{21} se llaman *admitancias de transferencia de corto circuito*, y y_{22} se denomina *admitancia de salida de corto circuito*. A los parámetros Y como grupo se les conoce como *parámetros de admitancia de corto circuito*. Advierta que aplicando las definiciones anteriores, esos parámetros pueden determinarse experimentalmente por dos puertos cuya configuración real es desconocida.

E J E M P L O 14.1

Deseamos determinar los parámetros Y para los dos puertos que se muestran en la figura 14.3a. Una vez que se conozcan esos parámetros, determinaremos la corriente en una carga de 4Ω , que se conecta al puerto de salida cuando una fuente de corriente de 2 A se aplica en el puerto de entrada.

SOLUCIÓN De la figura 14.3b notamos que

$$I_1 = V_1 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right)$$

Por tanto,

$$y_{11} = \frac{3}{2} \text{ S}$$

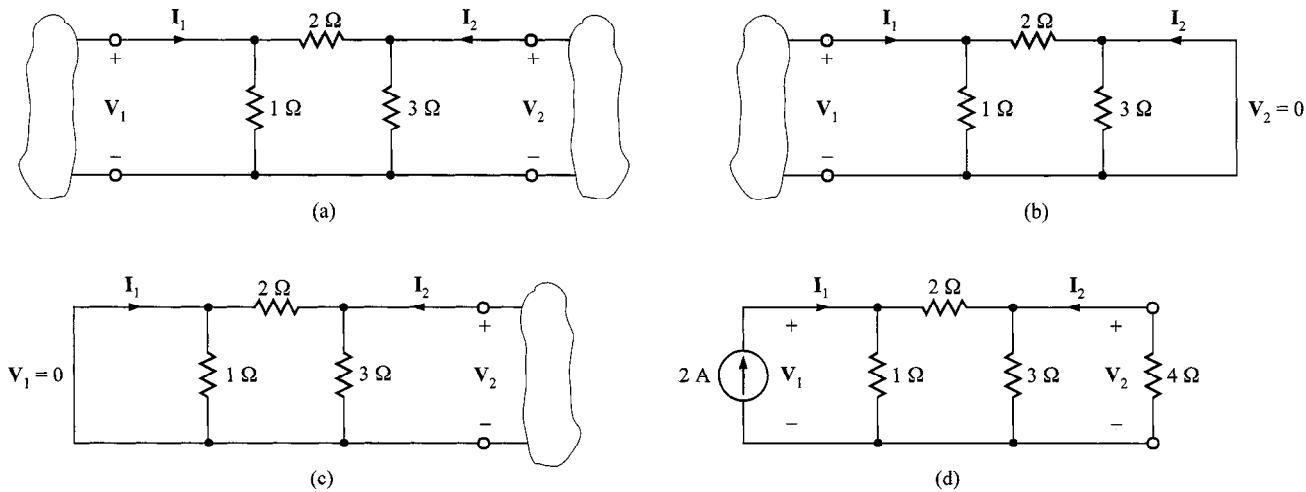


FIGURA 14.3 Redes empleadas en el ejemplo 14.1.

como se muestra en la figura 14.3c,

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{\mathbf{V}_2}{2}$$

y de aquí,

$$\mathbf{y}_{12} = -\frac{1}{2} \text{ S}$$

También, \mathbf{y}_{21} se calcula de la figura 14.3b utilizando la ecuación

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{\mathbf{V}_1}{2}$$

y, por tanto,

$$\mathbf{y}_{21} = -\frac{1}{2} \text{ S}$$

Finalmente, \mathbf{y}_{22} puede derivarse de la figura 14.3c usando

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

y

$$\mathbf{y}_{22} = \frac{5}{6} \text{ S}$$

Por tanto, las ecuaciones que describen los mismos dos puertos son

$$\mathbf{I}_1 = \frac{3}{2} \mathbf{V}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{1}{2} \mathbf{V}_1 + \frac{5}{6} \mathbf{V}_2$$

Esas ecuaciones pueden emplearse ahora para determinar la operación de los dos puertos para algún conjunto de condiciones de las terminales. Las condiciones de las terminales que examinaremos se muestran en la figura 14.3d. De esta figura notamos que

$$\mathbf{I}_1 = 2 \text{ A} \quad \mathbf{V}_2 = -4\mathbf{I}_2$$

Combinando éstas con las ecuaciones anteriores de los dos puertos se obtiene

$$2 = \frac{3}{2} \mathbf{V}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{V}_2$$

$$0 = -\frac{1}{2} \mathbf{V}_1 + \frac{13}{12} \mathbf{V}_2$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{13}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe con cuidado que esas ecuaciones son simplemente las ecuaciones nodales para la red de la figura 14.3d. Resolviendo las ecuaciones, obtenemos $\mathbf{V}_2 = \frac{8}{11} \text{ V}$ y, por tanto, $\mathbf{I}_2 = -\frac{2}{11} \text{ A}$.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D14.1 Encuentre los parámetros Y para la red de dos puertos que se muestra en la figura D14.1.

Resp.: $\mathbf{y}_{11} = \frac{1}{14} \text{ S}$, $\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21} = -\frac{1}{21} \text{ S}$, $\mathbf{y}_{22} = \frac{1}{7} \text{ S}$.

D14.2 Si se conecta una fuente de 10 A a la entrada de los dos puertos de la figura D14.1, encuentre la corriente en una resistencia de 5Ω conectada al puerto de salida.

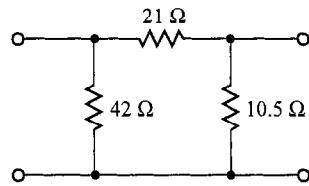


FIGURA D14.1

Resp.: $\mathbf{I}_2 = -4.29 \text{ A}$.

14.2 Parámetros de impedancia

Una vez más si suponemos que los dos puertos son una red lineal que no contiene fuentes independientes, entonces por medio de la superposición podemos escribir los voltajes de entrada y salida como la suma de dos componentes, uno debido a \mathbf{I}_1 y otro a \mathbf{I}_2 :

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \quad (14.4)$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

Esas ecuaciones, que describen los dos puertos, también pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (14.5)$$

Como los parámetros Y, estos *parámetros Z* se pueden derivar como sigue:

$$\mathbf{z}_{11} = \left. \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \right|_{\mathbf{I}_2 = 0}$$

$$\mathbf{z}_{12} = \left. \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{I}_1 = 0} \quad (14.6)$$

$$\mathbf{z}_{21} = \left. \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1} \right|_{\mathbf{I}_2 = 0}$$

$$\mathbf{z}_{22} = \left. \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{I}_1 = 0}$$

En las ecuaciones anteriores, formar $\mathbf{I}_1 = 0$ o $\mathbf{I}_2 = 0$ es equivalente a poner en circuito abierto el puerto de entrada o el de salida. Por tanto, los parámetros Z se llaman *parámetros de impedancia de circuito abierto*. \mathbf{z}_{11} se llama *impedancia de entrada de circuito abierto*, \mathbf{z}_{22} se denomina *impedancia de salida de circuito abierto* y \mathbf{z}_{12} y \mathbf{z}_{21} son las *impedancias de transferencia de circuito abierto*.

EJEMPLO 14.2

Deseamos encontrar los parámetros Z para la red de la figura 14.4a. Una vez que se conocen los parámetros, los usamos para encontrar la corriente en una resistencia de 4Ω que está conectada a las terminales de salida cuando se conecta a la entrada una fuente de $12 \angle 0^\circ \text{ V}$ con una impedancia interna de $1 + j0 \Omega$.

SOLUCIÓN De la figura 14.4a notamos que

$$\mathbf{z}_{11} = 2 - j4 \Omega$$

$$\mathbf{z}_{12} = -j4 \Omega$$

$$\mathbf{z}_{21} = -j4 \Omega$$

$$\mathbf{z}_{22} = -j4 + j2 = -j2 \Omega$$

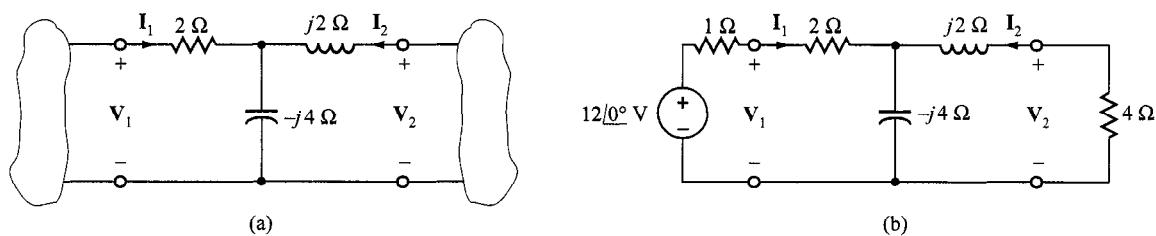


FIGURA 14.4 Circuitos empleados en el ejemplo 14.2.

Las ecuaciones para los dos puertos son, por consiguiente,

$$\mathbf{V}_1 = (2 - j4)\mathbf{I}_1 - j4\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V}_2 = -j4\mathbf{I}_1 - j2\mathbf{I}_2$$

Las condiciones de las terminales para la red que se muestra en la figura 14.b son

$$\mathbf{V}_1 = 12 \angle 0^\circ - (1) \mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = -4\mathbf{I}_2$$

Combinar estas con las ecuaciones de los dos puertos da

$$12 /0^\circ = (3 - j4)\mathbf{I}_1 - j4\mathbf{I}_2$$

$$0 = -j4\mathbf{I}_1 + (4 - j2)\mathbf{I}_2$$

Es interesante notar que esas ecuaciones son las ecuaciones de anillo para la red. Si resolvemos las ecuaciones para I_2 , obtenemos $I_2 = 1.61 \angle 137.73^\circ$ A, que es la corriente en la carga de 4Ω .

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D14.3 Encuentre los parámetros Z para red de la figura D14.3. Despues calcule la corriente en una carga de 4 Ω si se conecta en el puerto de entrada una carga de 24 $/0^\circ$ V.

Resp.: $I_2 = -0.73 /0^\circ \text{ A}$

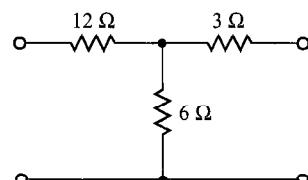


FIGURA D14.3

14.3 Parámetros híbridos

Bajo las suposiciones utilizadas para desarrollar los parámetros Y y Z, podemos obtener lo que comúnmente se llaman *parámetros híbridos*. En el par de ecuaciones que definen

esos parámetros, \mathbf{V}_1 e \mathbf{I}_2 son las variables independientes. Por tanto, las ecuaciones de los dos puertos en términos de los parámetros híbridos son

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2\end{aligned}\quad (14.7)$$

o en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad (14.8)$$

Esos parámetros son especialmente importantes en el análisis de circuitos de transistores. Los parámetros se determinan por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_{11} &= \left. \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \right|_{\mathbf{V}_2=0} \\ \mathbf{h}_{12} &= \left. \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} \right|_{\mathbf{I}_1=0} \\ \mathbf{h}_{21} &= \left. \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} \right|_{\mathbf{V}_2=0} \\ \mathbf{h}_{22} &= \left. \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2} \right|_{\mathbf{I}_1=0}\end{aligned}\quad (14.9)$$

Los parámetros \mathbf{h}_{11} , \mathbf{h}_{12} , \mathbf{h}_{21} y \mathbf{h}_{22} representan la *impedancia de entrada de corto circuito*, la *ganancia de voltaje inversa de circuito abierto*, la *ganancia de corriente hacia adelante de corto circuito* y la *admitancia de salida de circuito abierto*, respectivamente. Debido a esta mezcla de parámetros, se llaman *parámetros híbridos*. En el análisis de circuitos de transistores \mathbf{h}_{11} , \mathbf{h}_{12} , \mathbf{h}_{21} y \mathbf{h}_{22} normalmente se marcan como \mathbf{h}_i , \mathbf{h}_r , \mathbf{h}_f y \mathbf{h}_o .

EJEMPLO 14.3

Un circuito equivalente para el amps-op de la figura 14.5a se muestra en la figura 14.5b. Determinaremos los parámetros híbridos para esta red.

SOLUCIÓN El parámetro \mathbf{h}_{11} se deriva de la figura 14.5c. Con la salida en corto, \mathbf{h}_{11} es una función sólo de R_i , R_1 y R_2 , y

$$\mathbf{h}_{11} = R_i + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

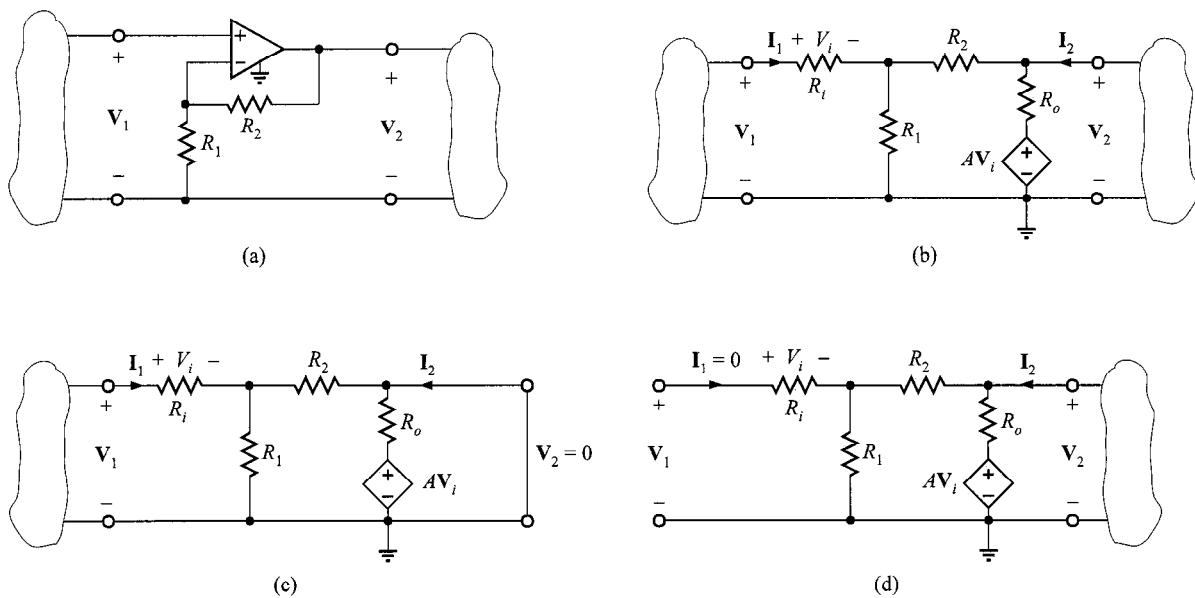


FIGURA 14.5 Circuitos empleados en el ejemplo 14.3.

La figura 14.5d se usa para derivar \mathbf{h}_{12} . Como $\mathbf{I}_1 = 0$, $\mathbf{V}_i = 0$ y la relación entre \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 es un simple divisor de voltaje.

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

Por tanto,

$$\mathbf{h}_{12} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

La LVK y la LCK puede aplicarse a la figura 14.5c para determinar \mathbf{h}_{21} . Las dos ecuaciones que relacionan \mathbf{I}_2 a \mathbf{I}_1 son

$$\mathbf{I}_2 = \frac{-A\mathbf{V}_i}{R_s} - \frac{\mathbf{I}_1 R_1}{R_s + R_2}$$

Por tanto,

$$\mathbf{h}_{21} = - \left(\frac{AR_i}{R_o} + \frac{R_1}{R_1+R_2} \right)$$

Finalmente, la relación entre I_2 y V_2 en la figura 14.5d es

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} = \frac{R_o(R_1 + R_2)}{R_o + R_1 + R_2}$$

y, por tanto,

$$h_{22} = \frac{R_o + R_1 + R_2}{R_o(R_1 + R_2)}$$

Las ecuaciones de la red son, por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= \left(R_i + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) \mathbf{I}_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= - \left(\frac{A R_i}{R_o} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \mathbf{I}_1 + \frac{R_o + R_1 + R_2}{R_o(R_1 + R_2)} \mathbf{V}_2\end{aligned}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D14.4 Encuentre los parámetros híbridos para la red que se muestra en la figura D14.3.

Resp.: $\mathbf{h}_{11} = 14 \Omega$, $\mathbf{h}_{12} = \frac{2}{3}$, $\mathbf{h}_{21} = -\frac{2}{3}$, $\mathbf{h}_{22} = \frac{1}{9} \text{ S}$.

D14.5 Si se conecta una carga de 4Ω al puerto de salida de la red examinada en el ejercicio de entrenamiento 14.4, determine la impedancia de entrada de los dos puertos con la carga conectada.

Resp.: $\mathbf{Z}_i = 15.23 \Omega$.

14.4 Parámetros de transmisión

Los parámetros finales que discutiremos se llaman *parámetros de transmisión*. Éstos se definen mediante las ecuaciones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{AV}_2 - \mathbf{BI}_2 \quad (14.10)$$

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{CV}_2 - \mathbf{DI}_2$$

o en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (14.11)$$

Esos parámetros son muy útiles en el análisis de circuitos conectados en cascada, como demostraremos posteriormente. Los parámetros se determinan vía las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} \right|_{\mathbf{I}_2 = 0}$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\mathbf{V}_1}{-\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{V}_2 = 0} \quad (14.12)$$

$$\mathbf{C} = \left. \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2} \right|_{\mathbf{I}_2 = 0}$$

$$\mathbf{D} = \left. \frac{\mathbf{I}_1}{-\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{V}_2 = 0}$$

A, B, C y D representan la *razón de voltaje de circuito abierto*, la *impedancia de transferencia de circuito abierto* y la *razón de corriente de corto circuito negativo*, respectivamente. Por razones obvias a los parámetros de transmisión comúnmente se les llama *parámetros ABCD*.

EJEMPLO 14.4

Determinaremos ahora los parámetros de transmisión para la red de la figura 14.6a.

SOLUCIÓN La forma más conveniente en la que podemos atacar este tipo de problema es suponer un valor para una de las variables en un parámetro

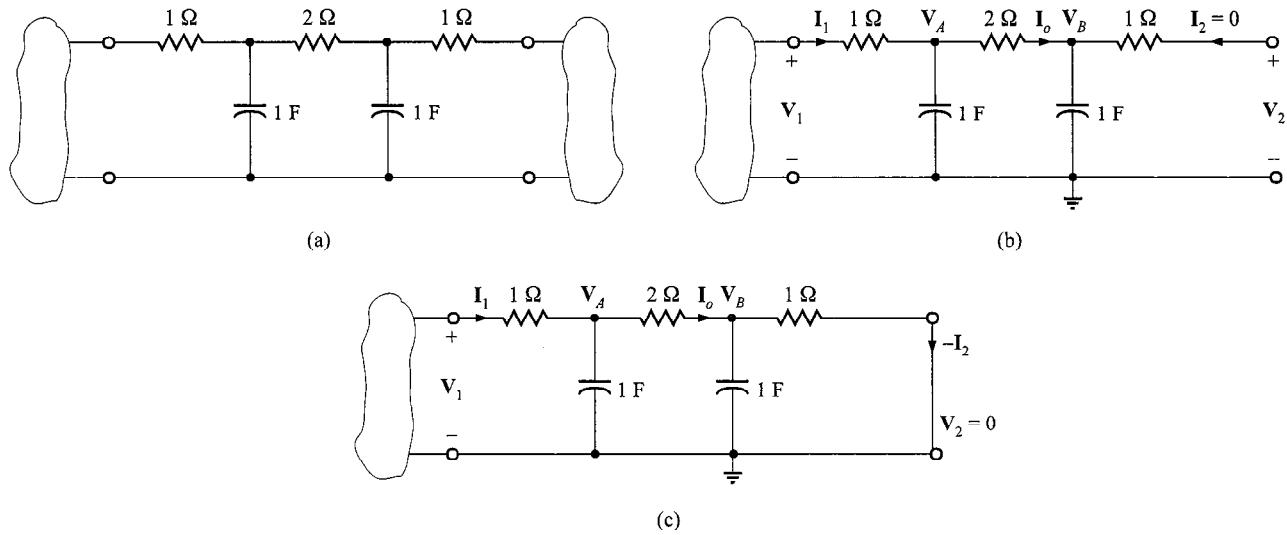


FIGURA 14.6 Circuitos utilizados en el ejemplo 14.4.

y resolver la red para la otra variable usando la LVK y la LCK. Para simplificar nuestro análisis, también hemos definido las variables \mathbf{V}_A , \mathbf{V}_B e \mathbf{I}_o , como se muestra en las figuras 14.6b y c.

El parámetro A se deriva de la figura 14.6b. Si suponemos que $\mathbf{V}_2 = 1 \text{ V}$, entonces $\mathbf{V}_B = 1 \text{ V}$ e $\mathbf{I}_o = j\omega \text{ A}$, y de aquí

$$\mathbf{V}_A = 2\mathbf{I}_o + \mathbf{V}_B = 2j\omega + 1 \text{ V}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1 &= j\omega \mathbf{V}_A + \mathbf{I}_o \\ &= -2\omega^2 + 2j\omega \text{ A}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= (1)\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_A \\ &= -2\omega^2 + 4j\omega + 1 \text{ V}\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\mathbf{A} = -2\omega^2 + 4j\omega + 1$$

La figura 14.6c se usa para derivar el parámetro B. Suponiendo que $-\mathbf{I}_2 = 1 \text{ A}$, entonces $\mathbf{V}_B = 1 \text{ V}$, $\mathbf{I}_o = 1 + j\omega \text{ A}$, y

$$\mathbf{V}_A = 2\mathbf{I}_o + \mathbf{V}_B = 3 + j2\omega \text{ V}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1 &= \mathbf{I}_o + j\omega \mathbf{V}_A \\ &= (1 + j\omega) + j\omega(3 + 2\omega) \\ &= 1 + 4j\omega - 2\omega^2 \text{ A}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= (1)\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_A \\ &= 4 + 6j\omega - 2\omega^2 \text{ V}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{B} = 4 + 6j\omega - 2\omega^2$$

Del análisis precedente utilizado para derivar el parámetro A, encontramos que

$$\mathbf{C} = -2\omega^2 + 2j\omega$$

De manera similar se sigue de la derivación del parámetro B que

$$\mathbf{D} = -2\omega^2 + 4j\omega + 1$$

Por tanto, las ecuaciones de los dos puertos son

$$\mathbf{V}_1 = (-2\omega^2 + 4j\omega + 1)\mathbf{V}_2 - (-2\omega^2 + 6j\omega + 4)\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{I}_1 = (-2\omega^2 + 2j\omega)\mathbf{V}_2 - (-2\omega^2 + 4j\omega + 1)\mathbf{I}_2$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D14.6 Calcule los parámetros de transmisión para los dos puertos de la figura D14.1.

Resp.: $A = 3$, $B = 21 \Omega$, $C = \frac{1}{6} S$, $D = \frac{3}{2}$.

14.5 Conversión de parámetros

Si existen todos los parámetros de dos puertos para una red, es posible relacionar un conjunto de parámetros con otro ya que los parámetros interrelacionan las variables \mathbf{V}_1 , \mathbf{I}_1 , \mathbf{V}_2 e \mathbf{I}_2 . Los siguientes ejemplos ilustran la forma de determinar un conjunto de parámetros a partir de otro.

EJEMPLO 14.5

Mostremos cómo determinar los parámetros híbridos si se conocen los parámetros Z.

SOLUCIÓN Las ecuaciones de los dos puertos que incluyen los parámetros Z son

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

Si resolvemos la segunda ecuación de parámetros Z para \mathbf{I}_2 , estará directamente en la forma de la segunda ecuación de parámetro híbrido. Por tanto,

$$\mathbf{I}_2 = \frac{-\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{22}} \mathbf{I}_1 + \frac{1}{\mathbf{z}_{22}} \mathbf{V}_2$$

Sustituyendo esta ecuación para \mathbf{I}_2 en la primera ecuación de parámetro Z, obtenemos

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{z}_{11}\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{22}} \mathbf{I}_1 + \frac{\mathbf{z}_{12}}{\mathbf{z}_{22}} \mathbf{V}_2$$

La comparación de las ecuaciones para \mathbf{I}_2 y \mathbf{V}_1 en términos de los parámetros Z con las ecuaciones de definición de los parámetros híbridos muestra que

$$\mathbf{h}_{11} = \frac{\Delta_Z}{\mathbf{z}_{22}} \quad \mathbf{h}_{12} = \frac{\mathbf{z}_{12}}{\mathbf{z}_{22}}$$

$$\mathbf{h}_{21} = \frac{-\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{22}} \quad \mathbf{h}_{22} = \frac{1}{\mathbf{z}_{22}}$$

donde $\Delta_Z = \mathbf{z}_{11}\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}$.

La tabla 14.1 enlista todas las fórmulas de conversión que relacionan un conjunto de parámetros de dos puertos con otro. Advierta que Δ_Z , Δ_Y , Δ_H , y Δ_T se refieren a los determinantes de las matrices para los parámetros Z, Y, hibridos y ABCD, respectivamente. Por tanto, dado un conjunto de parámetros para una red, podemos utilizar la tabla 14.1 para encontrar los otros.

T A B L A 14.1

Fórmulas de conversión de parámetros de dos puntos

$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{22} & -\mathbf{y}_{12} \\ \Delta_Y & \Delta_Y \\ -\mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{11} \\ \frac{1}{\Delta_Y} & \frac{1}{\Delta_Y} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \Delta_T \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} \\ \frac{1}{\mathbf{C}} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \Delta_H & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{22} & \mathbf{h}_{22} \\ -\mathbf{h}_{21} & 1 \\ \mathbf{h}_{22} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{z}_{22}}{\Delta_Z} & -\frac{\mathbf{z}_{12}}{\Delta_Z} \\ -\frac{\mathbf{z}_{21}}{\Delta_Z} & \frac{\mathbf{z}_{11}}{\Delta_Z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\Delta_T \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ -\frac{1}{\mathbf{B}} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{h}_{11}} & -\mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{11} \\ \mathbf{h}_{21} & \frac{\Delta_H}{\mathbf{h}_{11}} \\ \frac{\mathbf{h}_{21}}{\mathbf{h}_{11}} & \mathbf{h}_{11} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{z}_{11}}{\mathbf{z}_{21}} & \frac{\Delta_Z}{\mathbf{z}_{21}} \\ \frac{1}{\mathbf{z}_{21}} & \frac{\mathbf{z}_{22}}{\mathbf{z}_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\mathbf{y}_{22} & -1 \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{21} \\ -\Delta_Y & -\mathbf{y}_{11} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\Delta_H & -\mathbf{h}_{11} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{21} \\ -\mathbf{h}_{22} & -1 \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{21} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_Z}{\mathbf{z}_{22}} & \frac{\mathbf{z}_{12}}{\mathbf{z}_{22}} \\ -\frac{\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{22}} & \frac{1}{\mathbf{z}_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{11} \\ \mathbf{y}_{21} & \Delta_Y \\ \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \Delta_T \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \\ -\frac{1}{\mathbf{D}} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix}$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D14.7 Determine los parámetros Y para dos puertos si los parámetros Z son

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Resp.: $\mathbf{y}_{11} = \frac{1}{14}$ S, $\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21} = -\frac{1}{21}$ S, $\mathbf{y}_{22} = \frac{1}{7}$ S.

14.6 Interconexión de dos puertos

La importancia de los circuitos de dos puertos interconectados se deriva del hecho de que cuando se diseñan sistemas complejos es por lo general mucho más fácil diseñar un número de subsistemas más simples que después se pueden interconectar para formar el sistema completo. Si se trata cada subsistema como una red de dos puertos, las técnicas de interconexión descritas en esta sección proporcionan una idea de la forma como un circuito puede analizarse y/o diseñarse. Por ello, ilustraremos ahora las técnicas para tratar una red como una combinación de subredes. Analizaremos, por consiguiente, una red de dos puertos como una interconexión de dos puertos más simples. Aunque dos puertos pueden interconectarse de varias maneras, trataremos sólo tres tipos de conexiones: en paralelo, en serie y en cascada.

A fin de que sean válidas las interconexiones para los dos puertos, se deben llenar ciertos requisitos específicos que se señalan en el libro titulado *Network Analysis and Synthesis*, de L. Weinberg, McGraw-Hill Book Co., 1962. Los ejemplos siguientes servirán para ilustrar las técnicas de interconexión.

Interconexión en paralelo

Suponga que los dos puertos N se componen de los dos puertos N_a y N_b que están interconectados como se muestra en la figura 14.7. Las ecuaciones que definen las redes N_a y N_b son

$$\mathbf{I}_{1a} = \mathbf{y}_{11a}\mathbf{V}_{1a} + \mathbf{y}_{12a}\mathbf{V}_{2a} \quad (14.13)$$

$$\mathbf{I}_{2a} = \mathbf{y}_{21a}\mathbf{V}_{1a} + \mathbf{y}_{22a}\mathbf{V}_{2a}$$

$$\mathbf{I}_{1b} = \mathbf{y}_{11b}\mathbf{V}_{1b} + \mathbf{y}_{12b}\mathbf{V}_{2b} \quad (14.14)$$

$$\mathbf{I}_{2b} = \mathbf{y}_{21b}\mathbf{V}_{1b} + \mathbf{y}_{22b}\mathbf{V}_{2b}$$

Siempre que las características terminales de las dos redes N_a y N_b no sean alteradas por la interconexión que se ilustra en la figura 14.7, entonces

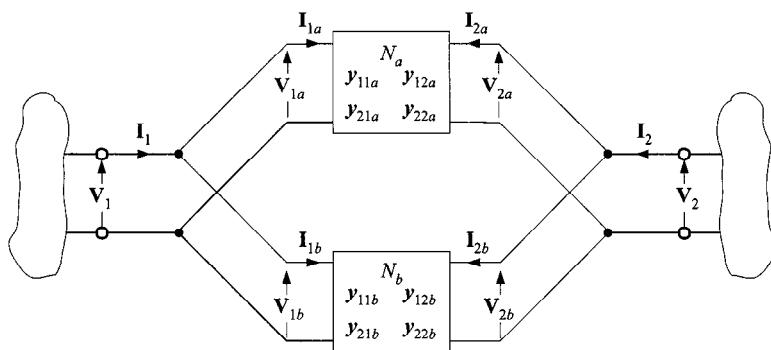


FIGURA 14.7 Interconexión de dos puertos en paralelo.

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1a} = \mathbf{V}_{1b}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{2a} = \mathbf{V}_{2b} \quad (14.15)$$

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{1a} + \mathbf{I}_{1b}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{2a} + \mathbf{I}_{2b}$$

$$\mathbf{I}_1 = (\mathbf{y}_{11a} + \mathbf{y}_{11b})\mathbf{V}_1 + (\mathbf{y}_{12a} + \mathbf{y}_{12b})\mathbf{V}_2 \quad (14.16)$$

$$\mathbf{I}_2 = (\mathbf{y}_{21a} + \mathbf{y}_{21b})\mathbf{V}_1 + (\mathbf{y}_{22a} + \mathbf{y}_{22b})\mathbf{V}_2$$

Por tanto, los parámetros Y para toda la red son

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11a} + \mathbf{y}_{11b} & \mathbf{y}_{12a} + \mathbf{y}_{12b} \\ \mathbf{y}_{21a} + \mathbf{y}_{21b} & \mathbf{y}_{22a} + \mathbf{y}_{22b} \end{bmatrix} \quad (14.17)$$

y de aquí que para determinar los parámetros Y para toda la red, simplemente sumamos los parámetros Y de las dos redes N_a y N_b .

E J E M P L O 14.6

Deseamos determinar los parámetros Y para la red que se muestra en la figura 14.8a considerando que es una combinación de dos redes en paralelo como se muestra en la figura 14.8b. A la red capacitiva se le denominará N_a y a la red resistiva N_b .

SOLUCIÓN Los parámetros Y para N_a son

$$\mathbf{y}_{11a} = j\frac{1}{2} \text{ S} \quad \mathbf{y}_{12a} = -j\frac{1}{2} \text{ S}$$

$$\mathbf{y}_{21a} = -j\frac{1}{2} \text{ S} \quad \mathbf{y}_{22a} = j\frac{1}{2} \text{ S}$$

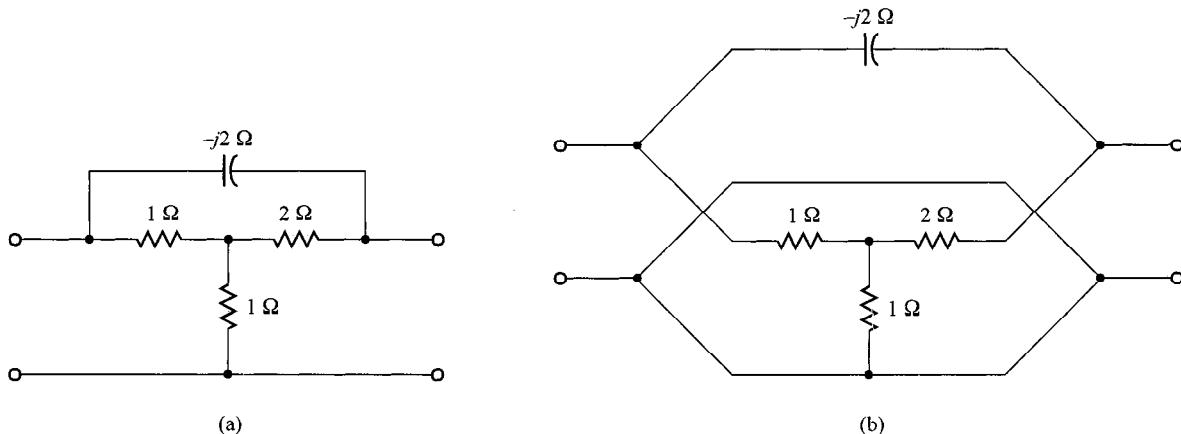


FIGURA 14.8 Red compuesta por la combinación de dos subredes en paralelo.

Y los parámetros Y para N_b son

$$\mathbf{y}_{11b} = \frac{3}{5} \text{ S} \quad \mathbf{y}_{12b} = -\frac{1}{5} \text{ S}$$

$$\mathbf{y}_{21b} = -\frac{1}{5} \text{ S} \quad \mathbf{y}_{22b} = \frac{2}{5} \text{ S}$$

De aquí, los parámetros Y para la red de la figura 14.8 son

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{3}{5} + j\frac{1}{2} \text{ S} \quad \mathbf{y}_{12} = -(\frac{1}{5} + j\frac{1}{2}) \text{ S}$$

$$\mathbf{y}_{21} = -(\frac{1}{5} + j\frac{1}{2}) \text{ S} \quad \mathbf{y}_{22} = \frac{2}{5} + j\frac{1}{2} \text{ S}$$

Para apreciar la simplicidad de este enfoque, el lector sólo necesita tratar de encontrar directamente los parámetros Y para la red de la figura 14.8a.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

Tarea Encuentre los parámetros Y de la red de la figura D14.1 considerando a la red como una interconexión de dos puertos en paralelo como se muestra en la figura D14.8.

Resp.: $\mathbf{y}_{11} = \frac{1}{14} \text{ S}$, $\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21} = -\frac{1}{21} \text{ S}$, $\mathbf{y}_{22} = \frac{1}{7} \text{ S}$.

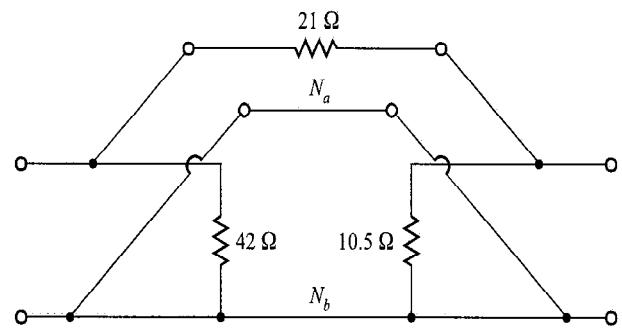


FIGURA D14.8

Interconexión en serie

Considere los dos puertos N , que se componen con la conexión en serie de N_a y N_b , como se muestra en la figura 14.9. Las ecuaciones que definen a las redes individuales de dos puertos N_a y N_b son

$$\mathbf{V}_{1a} = \mathbf{z}_{11a}\mathbf{I}_{1a} + \mathbf{z}_{12a}\mathbf{I}_{2a} \quad (14.18)$$

$$\mathbf{V}_{2a} = \mathbf{z}_{21a}\mathbf{I}_{1a} + \mathbf{z}_{22a}\mathbf{I}_{2a}$$

$$\mathbf{V}_{1b} = \mathbf{z}_{11b}\mathbf{I}_{1b} + \mathbf{z}_{12b}\mathbf{I}_{2b} \quad (14.19)$$

$$\mathbf{V}_{2b} = \mathbf{z}_{21b}\mathbf{I}_{1b} + \mathbf{z}_{22b}\mathbf{I}_{2b}$$

Una vez más, y siempre que no se alteren las características terminales de las dos redes N_a y N_b por la interconexión en serie, entonces

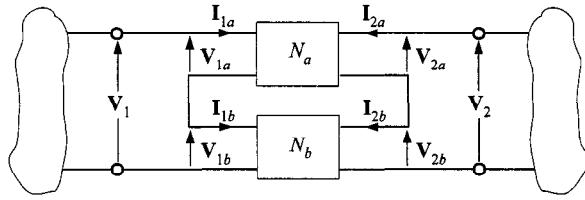


FIGURA 14.9 Interconexión de dos puertos en serie.

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1 &= \mathbf{I}_{1a} = \mathbf{I}_{1b} \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{I}_{2a} = \mathbf{I}_{2b}\end{aligned}\quad (14.20)$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= \mathbf{V}_{1a} + \mathbf{V}_{1b} = (\mathbf{z}_{11a} + \mathbf{z}_{11b})\mathbf{I}_1 + (\mathbf{z}_{12a} + \mathbf{z}_{12b})\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{V}_{2a} + \mathbf{V}_{2b} = (\mathbf{z}_{21a} + \mathbf{z}_{21b})\mathbf{I}_1 + (\mathbf{z}_{22a} + \mathbf{z}_{22b})\mathbf{I}_2\end{aligned}\quad (14.21)$$

Por tanto, los parámetros Z para toda la red son

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11a} + \mathbf{z}_{11b} & \mathbf{z}_{12a} + \mathbf{z}_{12b} \\ \mathbf{z}_{21a} + \mathbf{z}_{21b} & \mathbf{z}_{22a} + \mathbf{z}_{22b} \end{bmatrix} \quad (14.22)$$

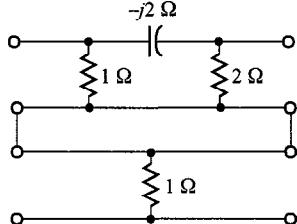
Por consiguiente, los parámetros Z para toda la red son igual a la suma de los parámetros Z para las redes N_a y N_b .**EJEMPLO 14.7**

FIGURA 14.10
Red de la figura
14.8a redibujada
como una
interconexión de dos
redes en serie.

Determinemos los parámetros Z para la red que se muestra en la figura 14.8a. El circuito se dibuja otra vez en la figura 14.10, ilustrando una conexión en serie. A la red superior se le marca con N_a y a la inferior con N_b .

SOLUCIÓN Los parámetros Z para N_a son

$$\mathbf{z}_{11a} = \frac{2 - 2j}{3 - 2j} \Omega \quad \mathbf{z}_{12a} = \frac{2}{3 - 2j} \Omega$$

$$\mathbf{z}_{21a} = \frac{2}{3 - 2j} \Omega \quad \mathbf{z}_{22a} = \frac{2 - 4j}{3 - 2j} \Omega$$

y los parámetros Z para N_b son

$$\mathbf{z}_{11b} = \mathbf{z}_{12b} = \mathbf{z}_{21b} = \mathbf{z}_{22b} = 1 \Omega$$

De aquí que los parámetros Z para toda la red son

$$\mathbf{z}_{11} = \frac{5 - 4j}{3 - 2j} \Omega \quad \mathbf{z}_{12} = \frac{5 - 2j}{3 - 2j} \Omega$$

$$\mathbf{z}_{21} = \frac{5 - 2j}{3 - 2j} \Omega \quad \mathbf{z}_{22} = \frac{5 - 6j}{3 - 2j} \Omega$$

Podemos verificar fácilmente esos resultados contra los obtenidos en el ejemplo 14.6 aplicando las fórmulas de conversión de la tabla 14.1.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D14.9 Encuentre los parámetros Z de la red de la figura D14.3 considerando que el circuito es una interconexión en serie de dos puertos, como se muestra en la figura D14.9.

Resp.: $z_{11} = 18 \Omega$, $z_{12} = z_{21} = 6 \Omega$, $z_{22} = 9 \Omega$.

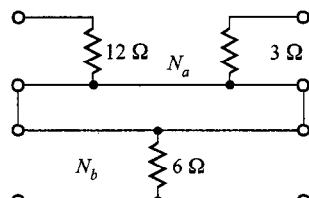


FIGURA D14.9

Interconexión en cascada

Dos puertos están compuestos por la interconexión en cascada de N_a y N_b , como se muestra en la figura 14.11, donde las ecuaciones de parámetros para N_a y N_b son

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1a} \\ \mathbf{I}_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{B}_a \\ \mathbf{C}_a & \mathbf{D}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{2a} \\ -\mathbf{I}_{2a} \end{bmatrix} \quad (14.23)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1b} \\ \mathbf{I}_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_b & \mathbf{B}_b \\ \mathbf{C}_b & \mathbf{D}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{2b} \\ -\mathbf{I}_{2b} \end{bmatrix} \quad (14.24)$$

En la figura 14.11, sin embargo, notamos que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1a} \\ \mathbf{I}_{1a} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{2a} \\ -\mathbf{I}_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1b} \\ \mathbf{I}_{1b} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{2b} \\ -\mathbf{I}_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

y, por tanto, las ecuaciones para toda la red son

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{B}_a \\ \mathbf{C}_a & \mathbf{D}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_b & \mathbf{B}_b \\ \mathbf{C}_b & \mathbf{D}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (14.25)$$

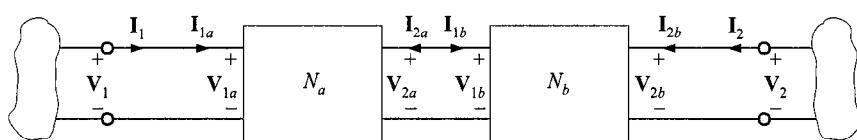


FIGURA 14.11 Interconexión de dos redes en cascada.

De aquí que los parámetros de transmisión para toda la red se derivan mediante la multiplicación matricial, como se indicó con anterioridad. El orden de la multiplicación matricial es importante y se lleva a cabo en el orden en que las redes están interconectadas.

La interconexión en cascada es muy útil. Muchos sistemas grandes pueden diseñarse convenientemente como la interconexión en cascada de varias etapas. Por ejemplo, la señal muy débil recogida por una antena de radio pasa a través de varias etapas sucesivas de amplificación, cada una de las cuales puede ser diseñada como dos puertos. Además, en contraste con los otros esquemas de interconexión, no se hacen restricciones a los parámetros de N_a y N_b al obtener los parámetros de los dos puertos que resultan de su interconexión.

EJEMPLO 14.8

Reexaminemos el circuito que consideramos en el ejemplo 14.4 y derivemos sus parámetros de dos puertos considerándolo como una conexión en cascada de dos redes como se muestra en la figura 14.12.

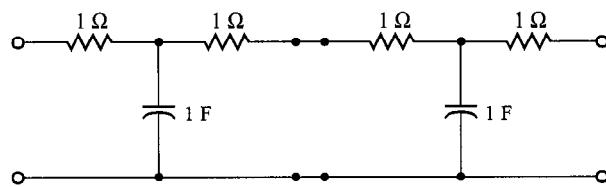


FIGURA 14.12 Dos puertos de la figura 14.6 redibujados como una conexión de dos redes en cascada.

SOLUCIÓN Los parámetros ABCD para las redes T idénticas pueden calcularse fácilmente como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 1 + j\omega & \mathbf{B} &= 2 + j\omega \\ \mathbf{C} &= j\omega & \mathbf{D} &= 1 + j\omega \end{aligned}$$

Por tanto, los parámetros de transmisión para toda la red son

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + j\omega & 2 + j\omega \\ j\omega & 1 + j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + j\omega & 2 + j\omega \\ j\omega & 1 + j\omega \end{bmatrix}$$

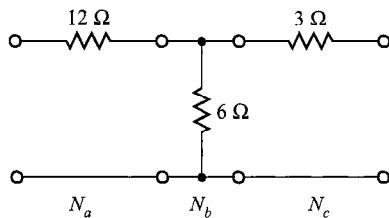
Llevando a cabo la multiplicación matricial, obtenemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 4j\omega - 2\omega^2 & 4 + 6j\omega - 2\omega^2 \\ 2j\omega - 2\omega^2 & 1 + 4j\omega - 2\omega^2 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

Ejemplo Encuentre los parámetros de transmisión de la red de la figura D14.3 considerando al circuito como una interconexión en cascada de los tres dos puertos como se muestra en la figura D14.10.

Resp.: $A = 3$, $B = 21 \Omega$, $C = \frac{1}{6} S$, $D = \frac{3}{2}$.

**FIGURA D14.10**

14.7 Dos puertos empotados en una red

Podemos encontrar situaciones en las que dos puertos son una parte integral de una red más grande. Por ejemplo, los dos puertos pueden ser algún tipo de "caja negra" donde todo lo que se conoce en relación con ésta es un conjunto de parámetros de dos puertos. Trataremos ahora de ilustrar que todas las técnicas que hemos descrito antes también pueden aplicarse fácilmente en esas situaciones.

Considere el siguiente ejemplo de dos puertos empotados en una red grande.

EJEMPLO 14.9

Considere la red de la figura 14.13a. Se sabe que los parámetros híbridos de los dos puertos son

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 1 & 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Deseamos determinar el voltaje de salida V_o de toda la red.

SOLUCIÓN Nuestro enfoque del problema será como sigue. Primero encontraremos la impedancia de entrada de los dos puertos, la sumaremos a la resistencia de 100Ω y reflejaremos esta impedancia al lado izquierdo del transformador. Entonces resolveremos el circuito de dos mallas en el que el transformador y todo lo que está a la derecha de éste está representado por la impedancia reflejada. El voltaje y la corriente en el lado izquierdo del transformador será entonces reflejado al lado derecho. El voltaje y corriente últimos se utilizarán junto con los parámetros de los dos puertos para determinar la corriente en la carga y, por tanto, V_o .

Las ecuaciones para los dos puertos que se muestran aislados en la figura 14.13b son

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

Sin embargo,

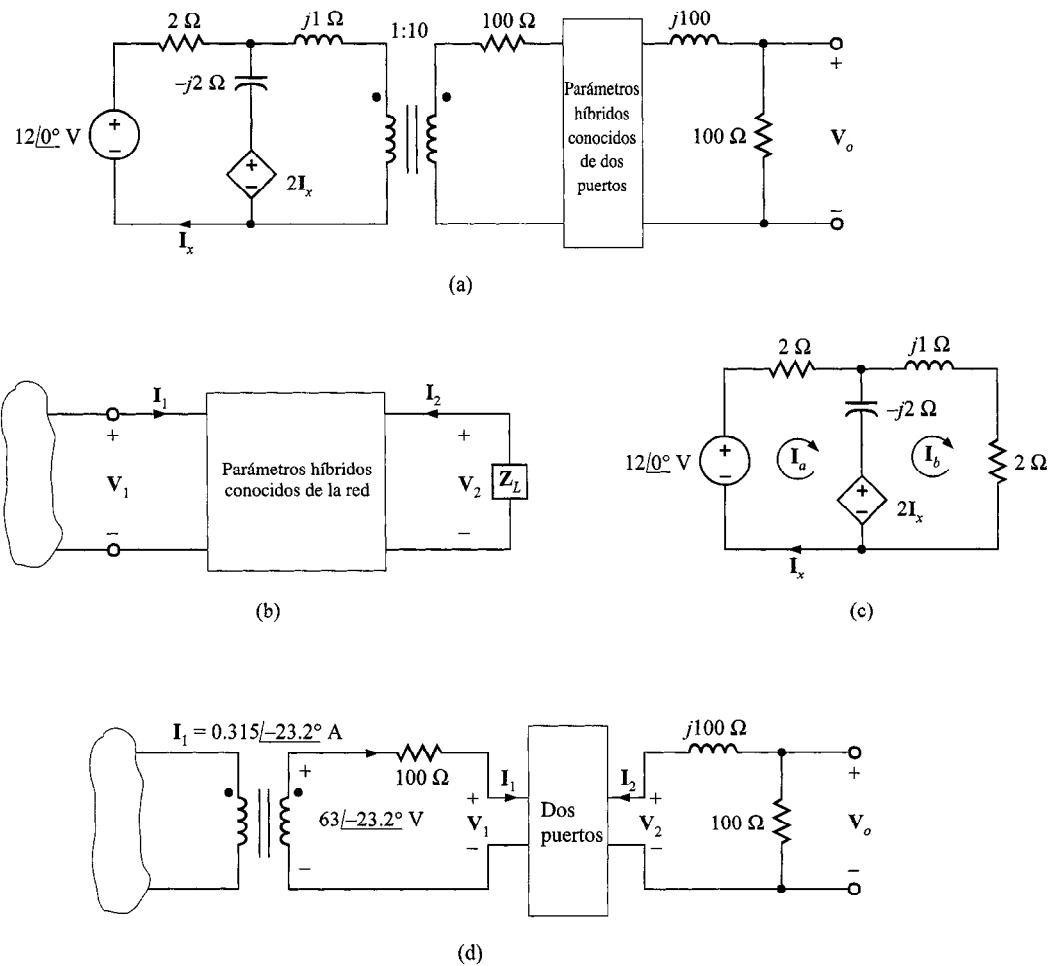


FIGURA 14.13 Circuitos utilizados en el ejemplo 14.9.

$$\mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_2 \mathbf{Z}_L$$

Por tanto,

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11} \mathbf{I}_1 - \mathbf{h}_{12} \mathbf{Z}_L \mathbf{I}_2$$

$$0 = \mathbf{h}_{21} \mathbf{I}_1 - (1 + \mathbf{h}_{22} \mathbf{Z}_L) \mathbf{I}_2$$

Resolviendo las dos ecuaciones para \mathbf{I}_1 , y formando entonces la razón $\mathbf{V}_1/\mathbf{I}_1$, se obtiene

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{h}_{11} - \frac{\mathbf{h}_{12} \mathbf{h}_{21} \mathbf{Z}_L}{1 + \mathbf{h}_{22} \mathbf{Z}_L}$$

donde los parámetros híbridos están dados y $\mathbf{Z}_L = 100 + j100 \Omega$. \mathbf{Z}_{ent} es, por consiguiente, 100Ω y de aquí que cuando esta impedancia se suma a

los $100\ \Omega$ en la figura 14.13a y se refleja al lado izquierdo del transformador, obtenemos la red de la figura 14.13c. Las ecuaciones de anillo para esta red son

$$\begin{aligned} I_a &= I_x \\ (2 - j2)I_a - (-j2)I_b &= 12 \angle 0^\circ - 2I_a \\ -(-j2)I_a + (2 - j1)I_b &= 2I_a \end{aligned}$$

Resolviendo esas ecuaciones se obtiene $I_b = 3.15 \angle -23.2^\circ$ A y, por consiguiente, el voltaje en el lado izquierdo del transformador es $6.30 \angle -23.2^\circ$ V. La reflexión del voltaje y de la corriente al lado derecho del transformador da los resultados que se muestran en la figura 14.12d. Observe que $I_1 = 0.315 \angle -23.2^\circ$ A y que $V_2 = -I_2(100 + j100)$. La ecuación para los dos puertos que relaciona las corrientes de entrada y salida es

$$\begin{aligned} I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \\ &= h_{21}I_1 - I_2(100 + j100)10^{-3} \\ &= \frac{1(I_1)}{1 + (100 + j100)} 10^{-3} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} V_o &= -100I_2 \\ &= -28.52 \angle -28.4^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D14.11 Dada la red de la figura D14.11, determine V_o si los parámetros híbridos de los dos puertos son

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

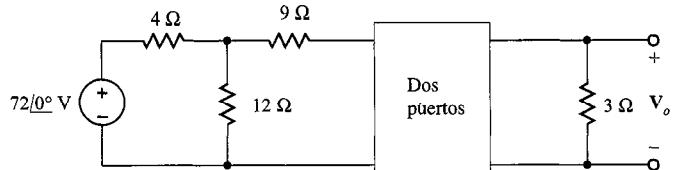


FIGURA D14.11

Resp.: $V_o = 3 \angle 0^\circ$ V.

14.8 Resumen

En este capítulo se han descrito redes de dos puertos utilizando parámetros de admittance, impedancia, híbridos y de transmisión. Se han descrito circuitos equivalentes para

redes de dos puertos y se han presentado fórmulas para cambiar de un conjunto de parámetros a otro.

Finalmente, hemos mostrado que dos puertos pueden tratarse como una interconexión de redes más simples. Las interconexiones descritas son en paralelo, en serie y en cascada.

Puntos clave

- Cuatro de los parámetros más comunes utilizados para describir una red de dos puertos son los parámetros de admitancia, impedancia, híbridos y de transmisión.
- Si existen todos los parámetros de dos puertos para una red, puede utilizarse un conjunto de fórmulas de conversión para relacionar un conjunto de parámetros de dos puertos con otro.
- Cuando se interconectan dos puertos, los parámetros Y se suman en la conexión en paralelo, los parámetros Z se suman en una conexión en serie y los parámetros de transmisión en forma matricial se multiplican en una conexión en cascada.

Problemas

- 14.1.** Dadas las dos redes de la figura P14.1, encuentre los parámetros Y para el circuito en a) y los parámetros Z para el circuito en b).

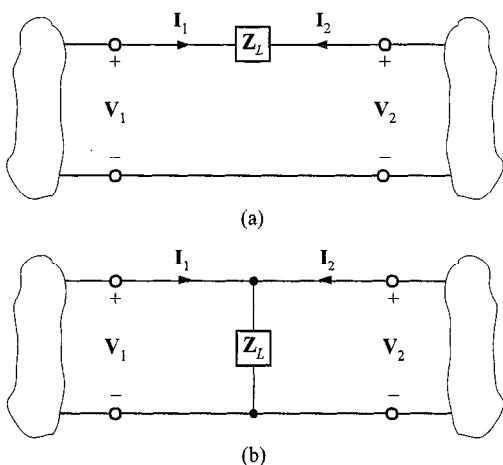


FIGURA P14.1

- 14.2.** Encuentre los parámetros Y para la red de dos puertos que se muestra en la figura P14.2.

- 14.3.** Encuentre los parámetros Y para la red de dos puertos que se muestra en la figura P14.3.

- 14.4.** Si se conecta una fuente de 12A en el puerto de entrada de la red que se muestra en la figura P14.2, encuentre la corriente en una resistencia de carga de $4\ \Omega$.

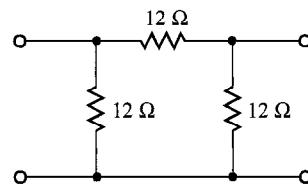


FIGURA P14.2

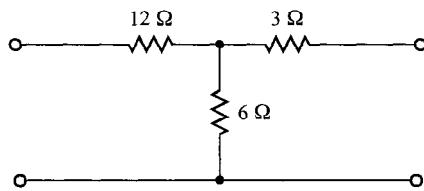


FIGURA P14.3

- 14.5.** Encuentre los parámetros Y para la red de dos puertos de la figura P14.5.

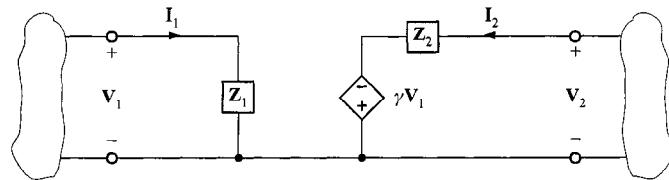


FIGURA P14.5

- 14.6.** Determine los parámetros Y para la red que se muestra en la figura P14.6.

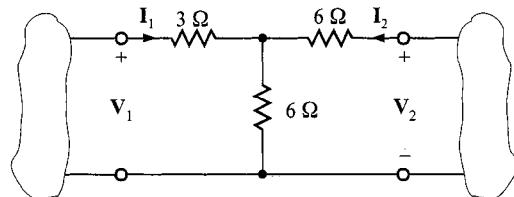


FIGURA P14.6

14.7. Encuentre los parámetros Z para los dos puertos de la figura P14.7.

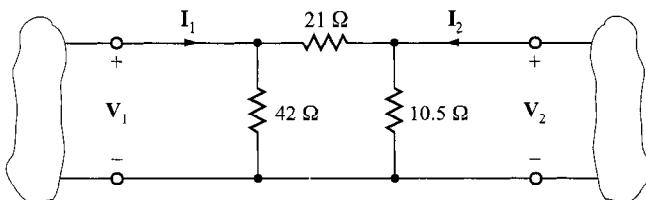


FIGURA P14.7

14.8. Encuentre los parámetros Z para la red de la figura P14.5.

14.9. Determine los parámetros Z para la red de dos puertos que se muestra en la figura P14.9.

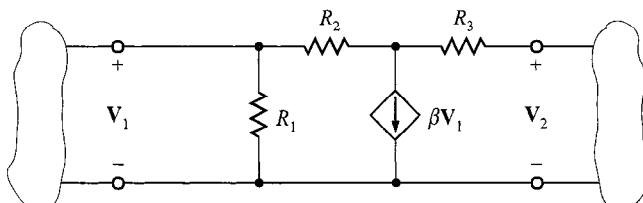


FIGURA P14.9

14.10. Encuentre los parámetros Z para los dos puertos que se muestran en la figura P14.10 y determine la ganancia de voltaje de todo el circuito con una carga de $4\text{ k}\Omega$ unida a la salida.

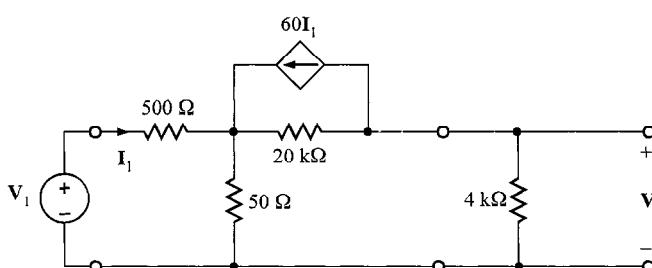


FIGURA P14.10

14.11. Encuentre los parámetros Z para la red de dos puertos que se muestra en la figura P14.11.

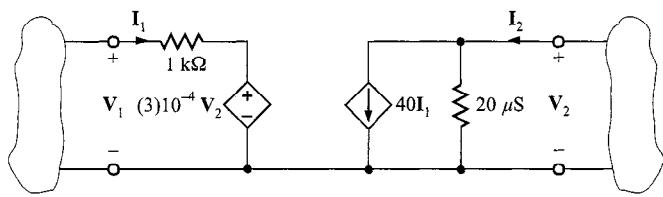


FIGURA P14.11

14.12. Encuentre la ganancia de voltaje de los dos puertos de la figura P14.11 si se conecta una carga de $12\text{ k}\Omega$ al puerto de salida.

14.13. Encuentre la impedancia de entrada de la red de la figura P14.11.

14.14. Determine los parámetros de admitancia para la red que se muestra en la figura P14.14.

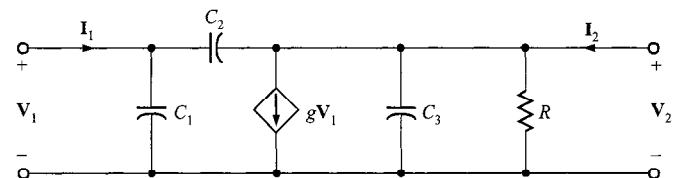


FIGURA P14.14

14.15. Encuentre los parámetros Z de los dos puertos de la figura P14.15.

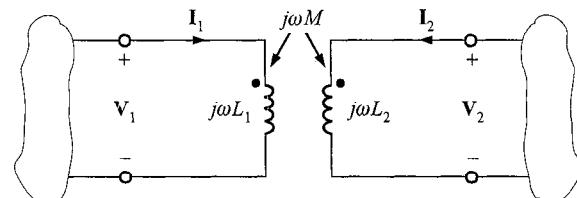


FIGURA P14.15

14.16. Determine los parámetros Z para la red de dos puertos de la figura P14.16.

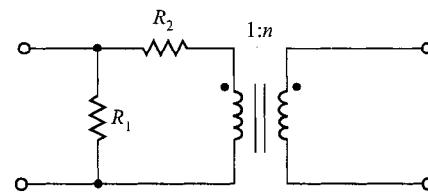


FIGURA P14.16

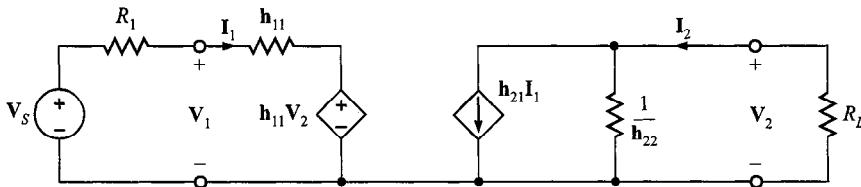


FIGURA P14.18

14.17. Calcule los parámetros híbridos para la red de la figura D14.1.

14.18. Considere la red de la figura P14.18. Los dos puertos son un modelo híbrido para un transistor básico. Determine la ganancia de voltaje de toda la red, V_2/V_s , si se aplica una fuente V_s con resistencia interna R_1 en la entrada de los dos puertos y se conecta una carga R_L en el puerto de salida.

14.19. Encuentre los parámetros híbridos para la red del problema 14.2.

14.20. Determine los parámetros híbridos para la red que se muestra en la figura P14.20.

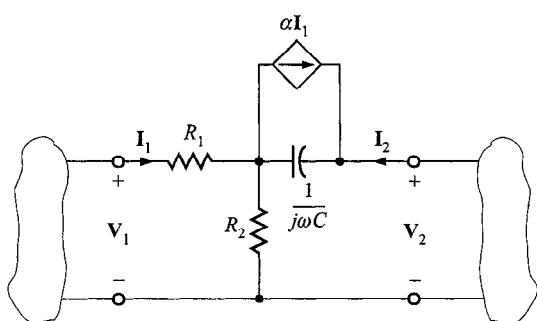


FIGURA P14.20

14.21. Encuentre los parámetros ABCD para las redes de la figura P14.1.

14.22. Encuentre los parámetros de transmisión para la red de la figura P14.22.

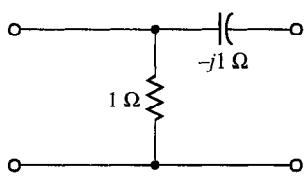


FIGURA P14.22

14.23. Encuentre los parámetros de transmisión para la red que se muestra en la figura P14.3.

14.24. Encuentre los parámetros ABCD para el circuito de la figura P14.5.

14.25. Determine los parámetros de transmisión para la red de la figura P14.25.

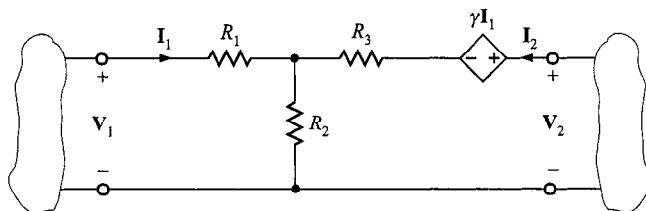


FIGURA P14.25

14.26. Encuentre los parámetros de transmisión para el circuito de la figura P14.26.

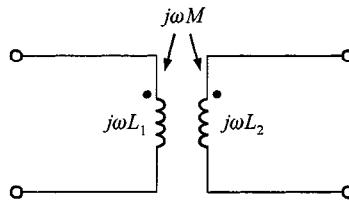


FIGURA P14.26

14.27. Dada la red de la figura P14.27, encuentre los parámetros de transmisión para los dos puertos y entonces encuentre I_o utilizando las condiciones terminales.

14.28. Muestre que la red de la figura P14.28 no tiene un conjunto de parámetros Y a menos que la fuente tenga una impedancia interna.

14.29. Dibuje el diagrama del circuito para la red que tiene los siguientes parámetros Z:

$$[Z] = \begin{bmatrix} 6-j2 & 4-j6 \\ 4-j6 & 7+j2 \end{bmatrix}$$

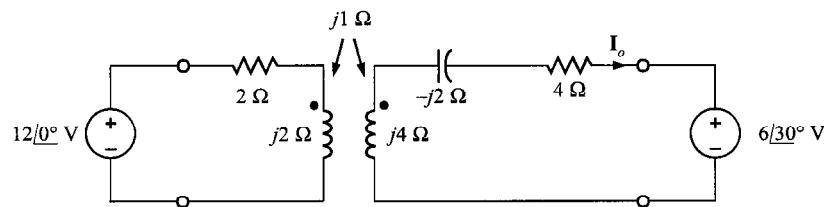


FIGURA P14.27

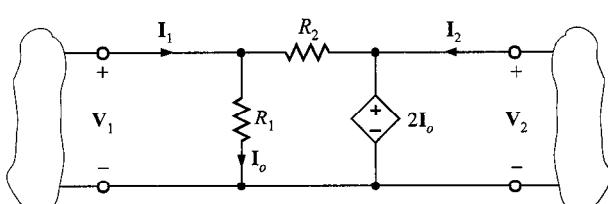


FIGURA P14.28

- 14.30.** Dibuje el diagrama del circuito (con todos los elementos pasivos en ohms) para la red que tiene los siguientes parámetros Y:

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

- 14.31.** Encuentre los parámetros Z en términos de los parámetros ABCD.

- 14.32.** Los siguientes son los parámetros híbridos para una red

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & 2 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Determine los parámetros Y para la red.

- 14.33.** Si se sabe que los parámetros Y para una red son

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

encuentre los parámetros Z.

- 14.34.** Encuentre la admitancia de entrada de los dos puertos de la figura P14.34 en términos de los parámetros Y y la carga Y_L .

- 14.35.** Encuentre la ganancia de voltaje V_2/V_1 para la red de la figura P14.35 utilizando los parámetros Z.

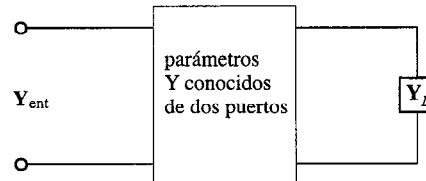


FIGURA P14.34

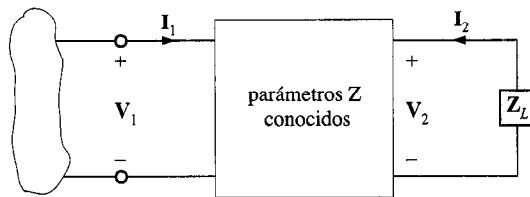


FIGURA P14.35

- 14.36.** Encuentre los parámetros Y de los dos puertos de la figura P14.36. Encuentre la admittance de entrada de la red cuando se conecta el condensador al puerto de salida.

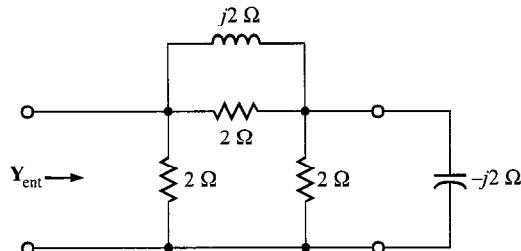


FIGURA P14.36

- 14.37.** Encuentre los parámetros Y para la red de la figura P14.37.

- 14.38.** Determine los parámetros Y para la red que se muestra en la figura P14.38.

- 14.39.** Encuentre los parámetros Z para los dos puertos de la figura P14.39, y entonces determine I_o para las condiciones terminales especificadas.

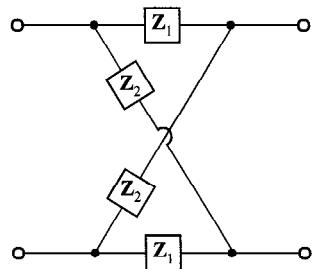


FIGURA P14.37

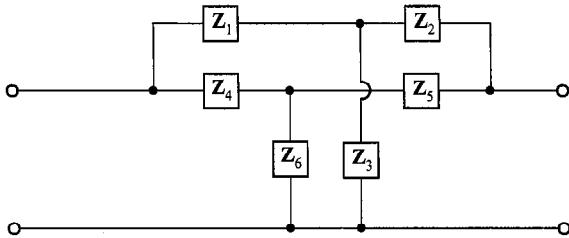


FIGURA P14.38

14.40. Encuentre los parámetros ABCD para el circuito de la figura P14.40.

14.41. Encuentre los parámetros de transmisión para los dos puertos de la figura P14.41.

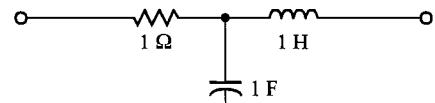


FIGURA P14.40

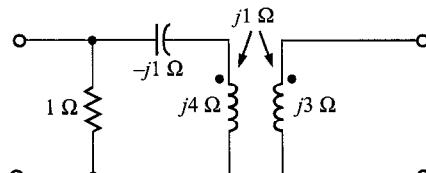


FIGURA P14.41

14.42. Encuentre los parámetros de transmisión de los dos puertos de la figura P14.42 y entonces use las condiciones terminales para calcular I_o .

14.43. Encuentre los parámetros de transmisión de los dos puertos de la figura P14.43 y entonces use las condiciones terminales para calcular I_o .

14.44. Determine el voltaje de salida V_o en la red de la figura P14.44 si los parámetros Z para los dos puertos son

$$Z = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

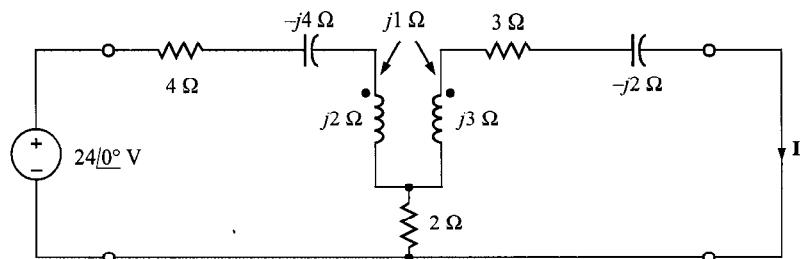


FIGURA P14.39

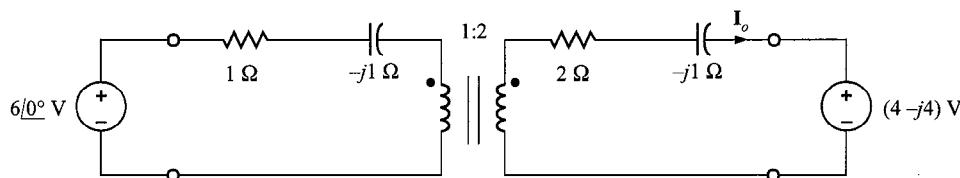


FIGURA P14.42

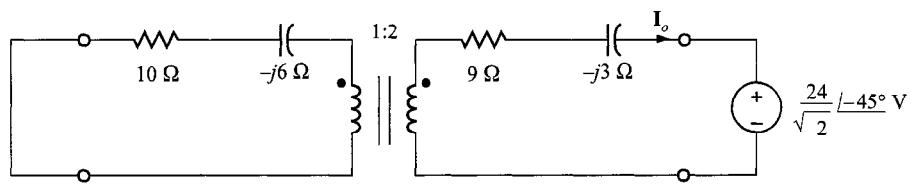


FIGURA P14.43

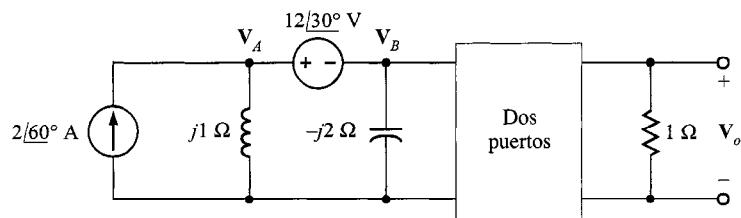
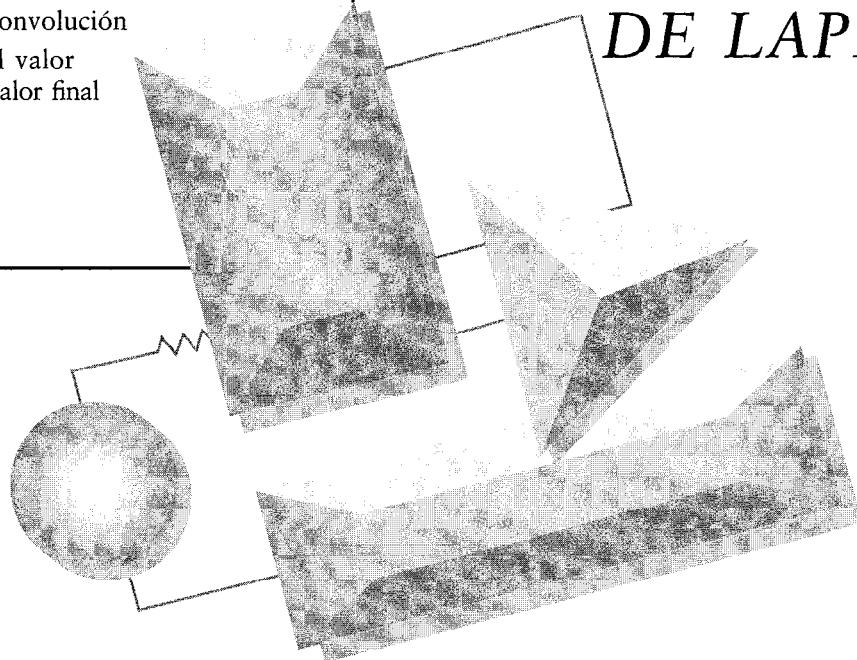


FIGURA P14.44

- 15.1** Definición
- 15.2** Dos funciones singulares importantes
- 15.3** Pares de transformadas
- 15.4** Propiedades de la transformada
- 15.5** Desarrollo de la transformada inversa
- 15.6** Integral de convolución
- 15.7** Teoremas del valor inicial y del valor final
- 15.8** Aplicaciones
- 15.9** Resumen
Puntos clave
Problemas

**TRANSFORMADA
DE LAPLACE**

Introduciremos ahora la transformada de Laplace. Ésta es una técnica muy importante porque si tenemos un conjunto dado de condiciones iniciales, obtendremos mediante una operación la respuesta total del circuito que se forma con las respuestas natural y forzada.

Nuestra aplicación de la transformada de Laplace para resolver problemas de circuitos es análoga a la del uso de fasores en el análisis del estado estable senoidal. Al usar la transformada de Laplace transformamos el problema del circuito del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia compleja, resolvemos el problema usando el álgebra en el dominio de la frecuencia

compleja y, después, convertimos la solución en el dominio de frecuencia compleja de regreso al dominio del tiempo. Por tanto, como veremos, la transformada de Laplace es una transformada integral que convierte un conjunto de ecuaciones integrodiferenciales lineales simultáneas a un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas.

Nuestro método es definir la transformada de Laplace, derivar algunos de los pares de transformadas, considerar algunas de las propiedades importantes de la transformada, ilustrar la operación de la transformada inversa, introducir la integral de convolución y, finalmente, aplicar la transformada al análisis del circuito. ■

15.1 Definición

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ se define por la ecuación

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathbf{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (15.1)$$

donde s es la frecuencia compleja

$$s = \sigma + j\omega \quad (15.2)$$

y la función $f(t)$ se supone que posee la propiedad de que

$$f(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

Observe que la transformada de Laplace es unilateral ($0 \leq t < \infty$), en contraste con la transformada de Fourier (véase el capítulo 17), que es bilateral ($-\infty < t < \infty$). En nuestro análisis de circuitos utilizando la transformada de Laplace, enfocaremos nuestra atención en el intervalo de tiempo $t \geq 0$. Es importante notar que las condiciones iniciales explican la operación del circuito antes de $t = 0$, y, por tanto, nuestro análisis describirá la operación del circuito para $t \geq 0$.

A fin de que una función $f(t)$ posea una transformada de Laplace, debe satisfacer la condición

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma t} |f(t)| dt < \infty \quad (15.3)$$

para algún valor real de σ . Debido al factor de convergencia $e^{-\sigma t}$, hay un número de funciones importantes que tienen transformadas de Laplace, aun cuando no exista una transformada de Fourier de esas funciones. Todas las entradas que aplicaremos a los circuitos poseen transformadas de Laplace. Las funciones que no tienen transformadas de Laplace (por ejemplo, e^{t^2}) no son de nuestro interés en el análisis de circuitos.

La transformada inversa de Laplace, que es análoga a la transformada inversa de Fourier, se define mediante la relación

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} \mathbf{F}(s) e^{st} ds \quad (15.4)$$

donde σ_1 es real y $\sigma_1 > \sigma$ en la ecuación (15.3). La evaluación de esta integral está basada en la teoría de variable compleja, y, por tanto, evitaremos su uso desarrollando y utilizando un conjunto de pares de transformadas de Laplace.

15.2 Dos funciones singulares importantes

Hay dos funciones singulares que son muy importantes en el análisis de circuitos: 1) la función de escalón unitario, $u(t)$, discutida en el capítulo 7, y 2) la función de impulso

unitario o delta, $\delta(t)$. Se llaman *funciones singulares* debido a que no son finitas o no poseen derivadas finitas en cualquier parte. Son modelos matemáticos para las señales que empleamos en el análisis de circuitos.

La función de escalón unitario $u(t)$ que se muestra en la figura 15.1a se definió en la sección 7.4 como

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Recuerde que la analogía física de esta función, como se ilustró anteriormente, corresponde a cerrar un conmutador en $t = 0$ y conectar una fuente de voltaje de 1 volt o una fuente de corriente de 1 ampere a un circuito dado. El siguiente ejemplo ilustra el cálculo de la transformada de Laplace para funciones de escalón unitario.

EJEMPLO 15.1

Determinemos la transformada de Laplace para las formas de onda de la figura 15.1.

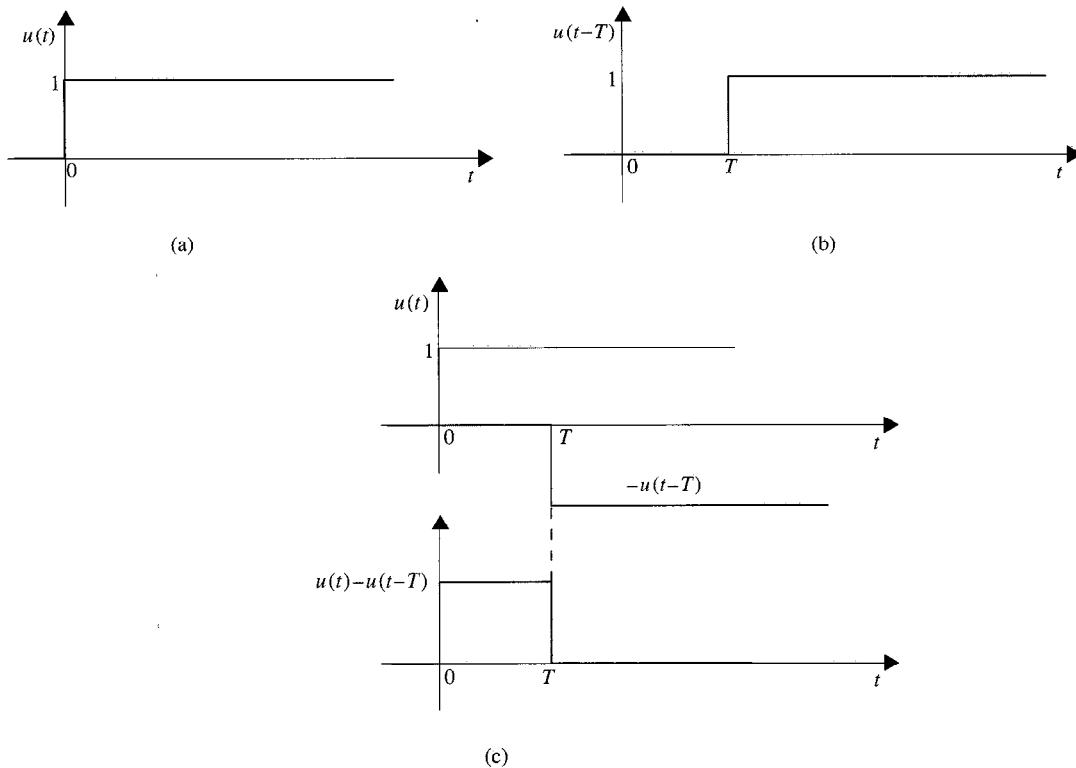


FIGURA 15.1 Representaciones de la función de paso unitario.

SOLUCIÓN La transformada de Laplace para la función de paso unitario de la figura 15.1a es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(s) &= \int_0^\infty u(t)e^{-st} dt \\
 &= \int_0^\infty 1 e^{-st} dt \\
 &= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{1}{s} \quad \sigma > 0
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathbf{F}(s) = \frac{1}{s}$$

La transformada de Laplace de la función de paso unitario recorrida en el tiempo que se muestra en la figura 15.1b es

$$\mathbf{F}(s) = \int_0^\infty u(t-a)e^{-st} dt$$

Observe que

$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & a < t < \infty \\ 0 & t < a \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(s) &= \int_a^\infty e^{-st} dt \\
 &= \frac{e^{-as}}{s}, \quad \sigma > 0
 \end{aligned}$$

Finalmente, la transformada de Laplace del pulso que se muestra en la figura 15.1c es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(s) &= \int_0^\infty [u(t) - u(t-T)] e^{-st} dt \\
 &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s}, \quad \sigma > 0
 \end{aligned}$$

La función de impulso unitario puede representarse en el límite por el pulso rectangular que se muestra en la figura 15.2a cuando $a \rightarrow 0$. La función se define por la siguiente:

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad t \neq t_0$$

$$\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad \epsilon > 0$$

El impulso unitario es cero excepto en $t = t_0$, donde no está definida, pero tiene área unitaria (algunas veces denominada *intensidad*). Representamos la función de impulso unitario en una gráfica, como se muestra en la figura 15.2b.

Una propiedad importante de la función de impulso unitario es lo que con frecuencia se llama *propiedad de muestreo*, que se exhibe por la siguiente integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} f(t_0) & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0 & t_0 < t_1, t_0 > t_2 \end{cases}$$

para una t_0 finita y cualquier $f(t)$ continua en t_0 . Advierta que la función impulso unitario simplemente muestra el valor de $f(t)$ en $t = t_0$.

EJEMPLO 15.2

Determinemos la transformada de Laplace de una función impulso.

SOLUCIÓN La transformada de Laplace de la función impulso es

$$F(s) = \int_0^\infty \delta(t - t_0) e^{-st} dt$$

Utilizando la propiedad de muestreo de la función delta, obtenemos

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = e^{-t_0 s}$$

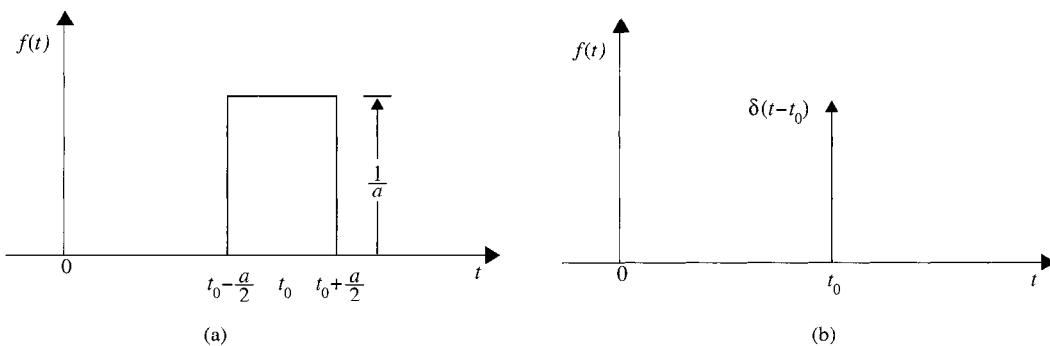


FIGURA 15.2 Representaciones de impulso unitario.

En el límite cuando $t_0 \rightarrow 0$, $e^{-t_0 s} \rightarrow 1$, y, por tanto,

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathbf{F}(s) = 1$$

15.3 Pares de transformadas

Ilustraremos ahora el desarrollo de varios pares de transformadas básicos que son muy útiles en el análisis de circuitos.

EJEMPLO 15.3

Encontremos la transformada de Laplace de $f(t) = t$.

SOLUCIÓN La transformada de Laplace de la función $f(t) = t$ es

$$\mathbf{F}(s) = \int_0^\infty t e^{-st} dt$$

Para integrar la función por partes, hacemos

$$u = t \quad y \quad dv = e^{-st} dt$$

Entonces

$$du = dt \quad y \quad v = \int e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \frac{-t}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s} dt \\ &= \frac{1}{s^2}, \quad \sigma > 0 \end{aligned}$$

EJEMPLO 15.4

Determinemos la transformada de Laplace de la función coseno.

SOLUCIÓN La transformada de Laplace para la función coseno es

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \int_0^\infty \cos \omega t e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}}{2} e^{-st} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty \frac{e^{-(s-j\omega)t} + e^{-(s+j\omega)t}}{2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) \quad \sigma > 0 \\
 &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

Una pequeña tabla de pares de transformadas de Laplace útiles se muestra en la tabla 15.1.

T A B L A 15.1
Tabla corta de pares de transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{t^n e^{-at}}{n!}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
$\operatorname{sen} bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$e^{-at} \operatorname{sen} bt$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
$e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$

Una vez que se conocen los pares de transformadas, podemos fácilmente ir y regresar entre el dominio del tiempo y el dominio de frecuencia compleja sin tener que usar las ecuaciones (15.1) y (15.4).

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D15.1 Si $f(t) = e^{-at}$, demuestre que $\mathbf{F}(s) = 1/(s + a)$.

D15.2 Si $f(t) = \operatorname{sen}\omega t$, demuestre que $\mathbf{F}(s) = \omega/(s^2 + \omega^2)$.

15.4 Propiedades de la transformada

Presentamos ahora un número de propiedades importantes de la transformada de Laplace e ilustramos su utilidad mediante ejemplos.

TEOREMA 1

$$\mathcal{L}[Af(t)] = A\mathbf{F}(s) \quad (15.5)$$

La transformada se define como

$$\mathcal{L}[Af(t)] = \int_0^\infty Af(t)e^{-st} dt$$

Como A no es función del tiempo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[Af(t)] &= A \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \\ &= A\mathbf{F}(s) \end{aligned}$$

TEOREMA 2

$$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = \mathbf{F}_1(s) \pm \mathbf{F}_2(s) \quad (15.6)$$

por definición

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] &= \int_0^\infty [f_1(t) \pm f_2(t)]e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty f_1(t)e^{-st} dt \pm \int_0^\infty f_2(t)e^{-st} dt \\ &= \mathbf{F}_1(s) \pm \mathbf{F}_2(s) \end{aligned}$$

TEOREMA 3

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \mathbf{F}\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0 \quad (15.7)$$

La transformada de Laplace de $f(at)$ es

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty f(at)e^{-st} dt$$

Sea ahora $\lambda = at$ y $d\lambda = a dt$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(at)] &= \int_0^\infty f(\lambda)e^{-(\lambda/a)s} \frac{d\lambda}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\infty f(\lambda)e^{-(s/a)\lambda} d\lambda \\ &= \frac{1}{a} \mathbf{F}\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0 \end{aligned}$$

EJEMPLO 15.5

Deseamos encontrar la transformada de Laplace de $f(t) = \cos \omega t$.

SOLUCIÓN Hemos encontrado que $\mathcal{L}[\cos \omega t] = s/(s^2 + \omega^2)$. Por tanto, usando el teorema 3 se obtiene

$$\begin{aligned} \cos \omega \left(\frac{t}{2} \right) &= \frac{4S}{(2s)^2 + \omega^2} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2/4} \end{aligned}$$

lo cual debería ser completamente obvio, ya que $\mathcal{L}[\cos \alpha t] = s/(s^2 + \alpha^2)$, donde en este caso $\alpha = \omega/2$.

TEOREMA 4

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)u(t - t_0)] = e^{-t_0 s} \mathbf{F}(s) \quad t_0 \geq 0 \quad (15.8)$$

Este teorema, comúnmente conocido como el teorema de corrimiento, se ilustra como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] &= \int_0^\infty f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st} dt \\ &= \int_{t_0}^\infty f(t-t_0)e^{-st} dt\end{aligned}$$

Si hacemos ahora $\lambda = t - t_0$ y $d\lambda = dt$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] &= \int_0^\infty f(\lambda) e^{-s(\lambda+t_0)} d\lambda \\ &= e^{-t_0 s} \int_0^\infty f(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \\ &= e^{-t_0 s} \mathbf{F}(s) \quad t_0 \geq 0\end{aligned}$$

EJEMPLO 15.6

Determinemos la transformada de Laplace de $f(t) = (t-1)u(t-1)$.

SOLUCIÓN Si $f(t) = (t-1)u(t-1)$, entonces empleando el teorema 4, encontramos que

$$\mathcal{L}[(t-1)u(t-1)] = e^{-s} \mathcal{L}[t] = \frac{e^{-s}}{s^2}$$

TEOREMA 5

$$\mathcal{L}[f(t)u(t-t_0)] = e^{-t_0 s} \mathcal{L}[f(t+t_0)] \quad (15.9)$$

Por definición

$$\mathcal{L}[f(t)u(t-t_0)] = \int_0^\infty f(t)u(t-t_0)e^{-st} dt$$

Sea ahora $\lambda = t - t_0$ y $d\lambda = dt$, y, por tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)u(t-t_0)e^{-st} dt &= \int_{-t_0}^\infty f(\lambda+t_0)u(\lambda)e^{-s(\lambda+t_0)} d\lambda \\ &= \int_0^\infty f(\lambda+t_0)e^{-s(\lambda+t_0)} d\lambda \\ &= e^{-t_0 s} \mathcal{L}[f(t+t_0)]\end{aligned}$$

E J E M P L O 15.7

Encontremos la transformada de Laplace de $f(t) = tu(t - 1)$.

SOLUCIÓN Si $f(t) = tu(t - 1)$, entonces $\mathcal{L}[f(t)]$ puede encontrarse a partir del teorema 5 como

$$\mathcal{L}[tu(t - 1)] = e^{-s} \mathcal{L}[t + 1]$$

$$= e^{-s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$$

T E O R E M A 6

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \mathbf{F}(s + a) \quad (15.10)$$

Por definición,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-at}f(t)] &= \int_0^\infty e^{-at}f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t} dt \\ &= \mathbf{F}(s + a) \end{aligned}$$

E J E M P L O 15.8

Utilice la transformada de Laplace de $\cos \omega t$ para encontrar la transformada de Laplace de $e^{-at} \cos \omega t$.

SOLUCIÓN Como se sabe que la transformada de Laplace de $\cos \omega t$ es

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

entonces

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

TEOREMA 7

$$\mathcal{L}[tf(t)] = \frac{-d\mathbf{F}(s)}{ds} \quad (15.11)$$

Por definición

$$\mathbf{F}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}(s)}{ds} &= \int_0^\infty f(t)(-te^{-st}) dt \\ &= - \int_0^\infty tf(t)e^{-st} dt \\ &= -\mathcal{L}[tf(t)] \end{aligned}$$

EJEMPLO 15.9

Demostremos el uso del teorema 7.

SOLUCIÓN Para comenzar, sabemos que

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

Entonces

$$\mathcal{L}[tu(t)] = \frac{-d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$$

Continuando, notamos que

$$\mathcal{L}[t^2u(t)] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^3}$$

y

$$\mathcal{L}[t^3u(t)] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^3}\right) = \frac{3!}{s^4}$$

y en general,

$$\mathcal{L}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

T E O R E M A 8

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty \mathbf{F}(\lambda) d\lambda \quad (15.12)$$

Por definición,

$$\int_0^\infty f(t) e^{-\lambda t} dt = \mathbf{F}(\lambda)$$

Por tanto,

$$\int_s^\infty \int_0^\infty f(t) e^{-\lambda t} dt d\lambda = \int_s^\infty \mathbf{F}(\lambda) d\lambda$$

Como $f(t)$ es Laplace transformable, podemos cambiar el orden de integración de modo que

$$\int_0^\infty f(t) \int_s^\infty e^{-\lambda t} d\lambda dt = \int_s^\infty \mathbf{F}(\lambda) d\lambda$$

y de aquí,

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \int_s^\infty \mathbf{F}(\lambda) d\lambda$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty \mathbf{F}(\lambda) d\lambda$$

E J E M P L O 15.10

Demostremos el teorema 8.

S O L U C I Ó N Si $f(t) = te^{-at}$, entonces

$$\mathbf{F}(\lambda) = \frac{1}{(\lambda + a)^2}$$

Por tanto,

$$\int_s^\infty \mathbf{F}(\lambda) d\lambda = \int_s^\infty \frac{1}{(\lambda + a)^2} d\lambda = \frac{-1}{\lambda + a} \Big|_s^\infty = \frac{1}{s + a}$$

De aquí,

$$f_1(t) = \frac{f(t)}{t} = \frac{te^{-at}}{t} = e^{-at} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_1(s) = \frac{1}{s+a}$$

Los dos teoremas restantes en esta sección son muy útiles para la solución de ecuaciones integrodiferenciales, y los emplearemos en este capítulo más tarde para analizar circuitos descritos por esas ecuaciones.

TEOREMA 9

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n \mathbf{F}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s^0 f^{n-1}(0) \quad (15.13)$$

Comencemos analizando $\mathcal{L}[df(t)/dt]$. Por definición,

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Utilizar la integración por partes nos da

$$\begin{aligned} u &= e^{-st} & dv &= \frac{df(t)}{dt} dt = df(t) \\ du &= -se^{-st} dt & v &= f(t) \end{aligned}$$

De aquí,

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = f(t)e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

Si suponemos que existe la transformada de Laplace de la función $f(t)$ de

modo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$$

entonces

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = -f(0) + s\mathbf{F}(s)$$

Utilizando este resultado, podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] &= s\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) \\ &= s[s\mathbf{F}(s) - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2\mathbf{F}(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

Continuando en esta forma podemos demostrar la afirmación original.

TEOREMA 10

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\lambda) d\lambda\right] = \frac{1}{s} \mathbf{F}(s) \quad (15.14)$$

Comenzamos con la expresión

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\lambda) d\lambda\right] = \int_0^\infty \int_0^t f(\lambda) d\lambda e^{-st} dt$$

Integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned} u &= \int_0^t f(\lambda) d\lambda & dv &= e^{-st} dt \\ du &= f(t) dt & v &= -\frac{1}{s} e^{-st} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\lambda) d\lambda\right] &= \frac{-e^{-st}}{s} \int_0^t f(\lambda) d\lambda \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} \mathbf{F}(s) \end{aligned}$$

En el capítulo emplearemos después este teorema cuando examinemos ecuaciones integrodiferenciales. Los teoremas que hemos presentado se enlistan en la tabla 15.2 para una referencia rápida.

EJEMPLO 15.11

Empleemos la transformada de Laplace para resolver la ecuación

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) + \int_0^t y(\lambda) e^{-2(t-\lambda)} d\lambda = 10u(t) \quad y(0) = 0$$

SOLUCIÓN Aplicando la transformada, obtenemos

$$s\mathbf{Y}(s) + 2\mathbf{Y}(s) + \frac{\mathbf{Y}(s)}{s+2} = \frac{10}{s}$$

$$\mathbf{Y}(s) \left(s+2 + \frac{1}{s+2}\right) = \frac{10}{s}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{10(s+2)}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

T A B L A 15.2

Algunas propiedades útiles de la transformada de Laplace

$f(t)$	$\mathbf{F}(s)$
$Af(t)$	$A\mathbf{F}(s)$
$f_1(t) \pm f_2(t)$	$\mathbf{F}_1(s) \pm \mathbf{F}_2(s)$
$f(at)$	$\frac{1}{a} \mathbf{F}\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
$f(t - t_0)u(t - t_0), t_0 \geq 0$	$e^{-t_0 s} \mathbf{F}(s)$
$f(t)u(t - t_0)$	$e^{-t_0 s} \mathcal{L}[f(t - t_0)]$
$e^{-at}f(t)$	$\mathbf{F}(s + a)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n \mathbf{F}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - s^0 f^{n-1}(0)$
$tf(t)$	$-\frac{d\mathbf{F}(s)}{ds}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty \mathbf{F}(\lambda) d\lambda$
$\int_0^t f(\lambda) d\lambda$	$\frac{1}{s} \mathbf{F}(s)$
$\int_0^t f_1(\lambda) f_2(t - \lambda) d\lambda$	$\mathbf{F}_1(s) \mathbf{F}_2(s)$

Esta es la solución de la ecuación integrodiferencial lineal de coeficientes constantes en el dominio s . Sin embargo, queremos la solución $y(t)$ en el dominio del tiempo. $y(t)$ se obtiene llevando a cabo la transformada inversa, que es el tema de la siguiente sección, y la solución $y(t)$ se deriva en el ejemplo 15.13.

E J E R C I C I O S D E E N T R E N A M I E N T O

D15.3 Encuentre $\mathbf{F}(s)$ si $f(t) = \frac{1}{2}(t - 4e^{-2t})$.

Resp: $\mathbf{F}(s) = \frac{1}{2s^2} - \frac{2}{s+2}$.

D15.4 Si $f(t) = te^{-(t-1)}u(t-1) - e^{-(t-1)}u(t-1)$, determine $\mathbf{F}(s)$ utilizando el teorema de corrimiento.

Resp: $\mathbf{F}(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}$.

D15.5 Encuentre $\mathbf{F}(s)$ si $f(t) = e^{-4t}(t - e^{-t})$. Utilice el teorema 2.

Resp: $\mathbf{F}(s) = \frac{1}{(s+4)^2} - \frac{1}{s+5}$.

D15.6 Encuentre la transformada de Laplace de la función $te^{-4x}/(a^2 + 4)$.

Resp: $\mathbf{F}(s) = \frac{e^{-4x}}{s^2(a^2 + 4)}$.

D15.7 Si $f(t) = \cos \omega t u(t-1)$, encuentre $\mathbf{F}(s)$ utilizando el teorema 5.

Resp: $\mathbf{F}(s) = e^{-s} \left(\frac{s \cos \omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega \sin \omega}{s^2 + \omega^2} \right)$.

D15.8 Utilice el teorema 7 para demostrar que $\mathcal{L}[te^{-at}] = 1/(s+a)^2$.

15.5 Desarrollo de la transformada inversa

Mientras comenzamos nuestra discusión de este tema, señalemos el procedimiento que utilizaremos para aplicar la transformada de Laplace al análisis de circuitos. Primero, transformaremos el problema del dominio del tiempo al dominio de frecuencia compleja, es decir, el dominio s . A continuación resolveremos algebraicamente las ecuaciones del circuito en el dominio de frecuencia compleja. Finalmente, transformaremos la solución del dominio s de regreso al dominio del tiempo. Esta última operación es la que discutiremos ahora.

La solución algebraica de las ecuaciones de circuito en el dominio de frecuencia compleja genera una función racional de s de la forma

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{P}(s)}{\mathbf{Q}(s)} = \frac{a_ms^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1s + a_0}{b_ns^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0} \quad (15.15)$$

Las raíces del polinomio $\mathbf{P}(s)$, es decir, $-z_1, -z_2 \dots -z_m$, se llaman *ceros* de la función $\mathbf{F}(s)$ debido a que en esos valores de s , $\mathbf{F}(s) = 0$. De manera similar, las raíces del polinomio $\mathbf{Q}(s)$, es decir, $-p_1, -p_2 \dots -p_n$, se llaman *polos* de $\mathbf{F}(s)$, ya que en esos valores de s , $\mathbf{F}(s)$ se hace infinita.

Si $\mathbf{F}(s)$ es una función racional apropiada de s , entonces $n > m$. Sin embargo, si no es este el caso, simplemente dividimos $\mathbf{P}(s)$ entre $\mathbf{Q}(s)$ para obtener un cociente y un residuo; es decir,

$$\frac{\mathbf{P}(s)}{\mathbf{Q}(s)} = C_{m-n}s^{m-n} + \dots + C_2s^2 + C_1s + C_0 + \frac{\mathbf{P}_1(s)}{\mathbf{Q}(s)} \quad (15.16)$$

Ahora $\mathbf{P}(s)/\mathbf{Q}(s)$ es una función de s racional apropiada. Examinemos las posibles formas de las raíces de $\mathbf{Q}(s)$.

1. Si las raíces son simples, $\mathbf{P}(s)/\mathbf{Q}(s)$ pueden expresarse en forma de fracciones parciales como

$$\frac{\mathbf{P}_1(s)}{\mathbf{Q}(s)} = \frac{K_1}{s + p_1} + \frac{K_2}{s + p_2} + \dots + \frac{K_n}{s + p_n} \quad (15.17)$$

2. Si $\mathbf{Q}(s)$ tiene raíces complejas simples, aparecerán en pares complejos conjugados y la expansión en fracciones parciales de $\mathbf{P}_1(s)/\mathbf{Q}(s)$ para cada par de raíces complejas conjugadas será de la forma

$$\frac{\mathbf{P}_1(s)}{\mathbf{Q}_1(s)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)} = \frac{K_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K_1^*}{s + \alpha + j\beta} + \dots \quad (15.18)$$

donde $\mathbf{Q}(s) = \mathbf{Q}_1(s)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)$ y K_1^* es el complejo conjugado de K_1 .

3. Si $\mathbf{Q}(s)$ tiene una raíz de multiplicidad r , la expansión en fracciones parciales para cada una de tales raíces será de la forma

$$\frac{\mathbf{P}_1(s)}{\mathbf{Q}_1(s)(s + p_1)^r} = \frac{K_{11}}{(s + p_1)} + \frac{K_{12}}{(s + p_1)^2} + \dots + \frac{K_{1r}}{(s + p_1)^r} \quad (15.19)$$

La importancia de esas expansiones en fracciones parciales se deriva del hecho de que una vez que la función $\mathbf{F}(s)$ se expresa en esta forma, las transformadas de Laplace inversas individuales pueden obtenerse de pares de transformadas conocidas y tabuladas. La suma de esas transformadas de Laplace inversas dan entonces la función del tiempo deseada, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}(s)]$.

Polos simples

Supongamos que todos los polos de $\mathbf{F}(s)$ son simples, por lo que la expansión en fracciones parciales de $\mathbf{F}(s)$ es de la forma

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{P}(s)}{\mathbf{Q}(s)} = \frac{K_1}{s + p_1} + \frac{K_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s + p_n} \quad (15.20)$$

Entonces la constante K_i puede calcularse multiplicando ambos lados de esta ecuación por $(s + p_i)$ y evaluando la ecuación en $s = -p_i$; es decir,

$$\left. \frac{(s + p_i)\mathbf{P}(s)}{\mathbf{Q}(s)} \right|_{s = -p_i} = 0 + \cdots + 0 + K_i + 0 + \cdots + 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15.21)$$

Una vez que se conocen todos los términos K_i la función del tiempo $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}(s)]$ puede obtenerse utilizando el par de transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + a} \right] = e^{-at} \quad (15.22)$$

EJEMPLO 15.12

Dado que

$$\mathbf{F}(s) = \frac{12(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)(s+5)}$$

encontremos la función $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}(s)]$.

SOLUCIÓN Expresando $\mathbf{F}(s)$ en una expansión en fracciones parciales, obtenemos

$$\frac{12(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)(s+5)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+4} + \frac{K_3}{s+5}$$

Para determinar K_0 , multiplicamos ambos lados de la ecuación por s para obtener la ecuación

$$\frac{12(s+1)(s+3)}{(s+2)(s+4)(s+5)} = K_0 + \frac{K_1 s}{s+2} + \frac{K_2 s}{s+4} + \frac{K_3 s}{s+5}$$

La evaluación de la ecuación en $s = 0$ da

$$\frac{(12)(1)(3)}{(2)(4)(5)} = K_0 + 0 + 0 + 0$$

o

$$K_0 = \frac{36}{40}$$

De manera similar,

$$(s+2)\mathbf{F}(s) \Big|_{s=-2} = \frac{12(s+1)(s+3)}{s(s+4)(s+5)} \Big|_{s=-2} = K_1$$

o

$$K_1 = 1$$

Utilizando el mismo método, encontramos que $K_2 = \frac{36}{8}$ y $K_3 = -\frac{32}{5}$. De aquí, $\mathbf{F}(s)$ puede escribirse como

$$\mathbf{F}(s) = \frac{36/40}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{36/8}{s+4} - \frac{32/5}{s+5}$$

Entonces $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}(s)]$ es

$$f(t) = \left(\frac{36}{40} + 1e^{-2t} + \frac{36}{8} e^{-4t} - \frac{32}{5} e^{-5t} \right) u(t)$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO**D15.9** Si $\mathbf{F}(s) = 12(s+2)/s(s+1)$, encuentre $f(t)$.**Resp.: $f(t) = (24 - 12e^{-t})u(t)$.****D15.9** Encuentre $f(t)$ si $\mathbf{F}(s) = 10(s+6)/(s+1)(s+3)$.**Resp.: $f(t) = (25e^{-t} - 15e^{-3t})u(t)$.****Polos complejos conjugados**

Supongamos que $\mathbf{F}(s)$ tiene un par de polos complejos conjugados. La expansión en fracciones parciales de $\mathbf{F}(s)$ puede entonces escribirse como

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{P}_1(s)}{\mathbf{Q}_1(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)} = \frac{K_1}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K_1^*}{s+\alpha+j\beta} + \dots \quad (15.23)$$

La constante K_1 puede determinarse entonces utilizando el procedimiento empleado para polos simples; es decir,

$$(s + \alpha - j\beta)F(s) \Big|_{s = -\alpha + j\beta} = K_1 \quad (15.24)$$

En este caso K_1 es en general un número complejo conjugado que puede expresarse como $|K_1| \angle \theta$. Entonces $K_1^* = |K_1| \angle -\theta$. De aquí, la expansión en fracciones parciales puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{|K_1| \angle \theta}{s + \alpha - j\beta} + \frac{|K_1| \angle -\theta}{s + \alpha + j\beta} + \dots \\ &= \frac{|K_1| e^{j\theta}}{s + \alpha - j\beta} + \frac{|K_1| e^{-j\theta}}{s + \alpha + j\beta} + \dots \end{aligned} \quad (15.25)$$

La función del tiempo correspondiente es entonces de la forma

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = |K_1| e^{j\theta} e^{-(\alpha - j\beta)t} + |K_1| e^{-j\theta} e^{-(\alpha + j\beta)t} + \dots \\ &= |K_1| e^{-\alpha t} [e^{j(\beta t + \theta)} + e^{-j(\beta t + \theta)}] + \dots \\ &= 2|K_1| e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta) + \dots \end{aligned} \quad (15.26)$$

EJEMPLO 15.13

Determinemos la función del tiempo $y(t)$ para la función

$$Y(s) = \frac{10(s+2)}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

SOLUCIÓN Expresando la función en una expansión de fracciones parciales, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{10(s+2)}{s(s+2-j1)(s+2+j1)} &= \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+2-j1} + \frac{K_1^*}{s+2+j1} \\ \frac{10(s+2)}{s^2 + 4s + 5} \Big|_{s=0} &= K_0 \\ 4 &= K_0 \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} \frac{10(s+2)}{s(s+2+j1)} \Big|_{s=-2+j1} &= K_1 \\ 2.236 \angle -153.43^\circ &= K_1 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$2.236 \angle 153.43^\circ = K_1^*$$

La expresión en fracciones parciales de $\mathbf{Y}(s)$ es entonces

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{4}{s} + \frac{2.236 \angle -153.43^\circ}{s + 2 - j1} + \frac{2.236 \angle 153.43^\circ}{s + 2 + j1}$$

y, por tanto,

$$y(t) = [4 + 4.472 e^{-2t} \cos(t - 153.43^\circ)] u(t)$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

DIST Determine $f(t)$ si $\mathbf{F}(s) = s/(s^2 + 4s + 8)$.

Resp. $f(t) = 1.41 e^{-2t} \cos(2t + 45^\circ) u(t)$.

Polos múltiples

Supongamos que $\mathbf{F}(s)$ tiene un polo de multiplicidad r . Entonces $\mathbf{F}(s)$ puede escribirse en una expansión de fracciones parciales de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \frac{\mathbf{P}_1(s)}{\mathbf{Q}_1(s)(s + p_1)^r} \\ &= \frac{K_{11}}{s + p_1} + \frac{K_{12}}{(s + p_1)^2} + \dots + \frac{K_{1r}}{(s + p_1)^r} + \dots \end{aligned} \quad (15.27)$$

Empleando el método para un polo simple, podemos evaluar K_{1r} como

$$(s + p_1)^r \mathbf{F}(s) \Big|_{s = -p_1} = K_{1r} \quad (15.28)$$

A fin de evaluar K_{1r-1} multiplicamos $\mathbf{F}(s)$ por $(s + p_1)^r$ como lo hicimos para determinar K_{1r} ; sin embargo, antes de evaluar la ecuación en $s = p_1$, tomamos la derivada con respecto a s . La prueba de que esto dará K_{1r-1} puede obtenerse multiplicando ambos lados de la ecuación (15.27) por $(s + p_1)^r$ y entonces tomando la derivada con respecto a s . Ahora cuando evaluamos la ecuación en $s = -p_1$, el único término que permanece en el lado derecho de la ecuación es K_{1r-1} , y por consiguiente,

$$\frac{d}{ds} [(s + p_1)^r \mathbf{F}(s)] \Big|_{s = -p_1} = K_{1r-1} \quad (15.29)$$

K_{1r-2} puede calcularse de forma similar, y en ese caso la ecuación es

$$\frac{d^2}{ds^2} [(s + p_1)^r \mathbf{F}(s)] \Big|_{s = -p_1} = (2!)K_{1r-2} \quad (15.30)$$

La expresión general para este caso es

$$K_{1j} = \frac{1}{(r-j)!} \frac{d^{r-j}}{ds^{r-j}} [(s + p_1)^r \mathbf{F}(s)] \Big|_{s = -p_1} \quad (15.31)$$

Ilustremos este procedimiento con un ejemplo.

EJEMPLO 15.14

Dada la siguiente función $\mathbf{F}(s)$, determinemos la función de tiempo correspondiente $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}(s)]$.

$$\mathbf{F}(s) = \frac{10(s+3)}{(s+1)^3(s+2)}$$

SOLUCIÓN Expresando $\mathbf{F}(s)$ como una expansión en fracciones parciales, obtenemos

$$\mathbf{F}(s) = \frac{10(s+3)}{(s+1)^3(s+2)} = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)^3} + \frac{K_2}{s+2}$$

Entonces

$$(s+1)^3 \mathbf{F}(s) \Big|_{s=-1} = K_{13}$$

$$20 = K_{13}$$

K_{12} se determina ahora mediante la ecuación

$$\frac{d}{ds} [(s+1)^3 \mathbf{F}(s)] \Big|_{s=-1} = K_{12}$$

$$\frac{-10}{(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = -10 = K_{12}$$

En forma similar K_{11} se calcula de la ecuación

$$\frac{d^2}{ds^2} [(s+1)^3 \mathbf{F}(s)] \Big|_{s=-1} = 2K_{11}$$

$$\frac{20}{(s+2)^3} \Big|_{s=-1} = 20 = 2K_{11}$$

Por tanto,

$$10 = K_{11}$$

Además,

$$(s+2)\mathbf{F}(s) \Big|_{s=-2} = K_2$$

$$-10 = K_2$$

De aquí, $\mathbf{F}(s)$ puede expresarse como

$$\mathbf{F}(s) = \frac{10}{s+1} - \frac{10}{(s+1)^2} + \frac{20}{(s+1)^3} - \frac{10}{s+2}$$

Empleamos ahora el par de transformadas

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+a)^n+1} \right] = \frac{t^n}{n!} e^{-at}$$

y de aquí,

$$f(t) = (10e^{-t} - 10te^{-t} + 10t^2e^{-t} - 10e^{-2t})u(t)$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D15.12 Determine $f(t)$ si $\mathbf{F}(s) = s/(s+1)^2$.

Resp.: $f(t) = (e^{-t} - te^{-t})u(t)$.

D15.13 Si $\mathbf{F}(s) = (s+2)/s^2(s+1)$, encuentre $f(t)$.

Resp.: $f(t) = (-1 + 2t + e^{-t})u(t)$.

15.6 Integral de convolución

La convolución es un concepto importante y tiene una amplia aplicación en el análisis de circuitos y sistemas. Primero ilustraremos la conexión que existe entre la integral de convolución y la transformada de Laplace. Entonces indicaremos la forma como se aplica la integral de convolución al análisis de circuitos.

TEOREMA 11

Si

$$f(t) = \int_0^t f_1(t-\lambda)f_2(\lambda)d\lambda = \int_0^t f_1(\lambda)f_2(t-\lambda)d\lambda \quad (15.32)$$

y

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathbf{F}(s), \mathcal{L}[f_1(t)] = \mathbf{F}_1(s), \text{ y } \mathcal{L}[f_2(t)] = \mathbf{F}_2(s),$$

entonces

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_1(s)\mathbf{F}_2(s) \quad (15.33)$$

Nuestra demostración comienza con la definición

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(t-\lambda)f_2(\lambda)d\lambda \right] e^{-st}dt$$

Ahora forzamos la función al formato apropiado introduciendo en la integral dentro de los corchetes la función de paso unitario $u(t-\lambda)$. Podemos hacer esto debido a que

$$u(t-\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{para } \lambda < t \\ 0 & \text{para } \lambda > t \end{cases} \quad (15.34)$$

La primera condición en la ecuación (15.34) asegura que la inserción de la función de paso unitario no tiene impacto dentro de los límites de integración. La segunda condición en la ecuación (15.34) nos permite cambiar el límite superior de integración de ∞ . Por tanto,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f_1(t-\lambda)u(t-\lambda)f_2(\lambda)d\lambda \right] e^{-st}dt$$

que puede escribirse como

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f_2(\lambda) \left[\int_0^\infty f_1(t-\lambda)u(t-\lambda)e^{-st}dt \right] d\lambda$$

Advierta que la integral dentro de los corchetes es el teorema de corrimiento ilustrado en el ejemplo 15.6. De aquí, la ecuación puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty f_2(\lambda) \mathbf{F}_1(s) e^{-s\lambda} d\lambda \\ &= \mathbf{F}_1(s) \int_0^\infty f_2(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \\ &= \mathbf{F}_1(s)\mathbf{F}_2(s) \end{aligned}$$

Observe que la convolución en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación en el dominio de frecuencia.

Ilustremos ahora el uso del teorema 11 en la evaluación de una transformada de Laplace inversa.

EJEMPLO 15.15

La función de transferencia para una red está dada por la expresión

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_0(s)}{\mathbf{V}_S(s)} = \frac{10}{s+5}$$

La entrada es un función de paso unitario $\mathbf{V}_S(s) = \frac{1}{s}$. Utilicemos la convolución para determinar el voltaje de salida $v_0(t)$.

SOLUCIÓN Como $\mathbf{H}(s) = \frac{10}{(s+5)}$, $h(t) = 10e^{-5t}$, por tanto

$$\begin{aligned} v_o(t) &= \int_0^t 10u(\lambda)e^{-5(t-\lambda)}d\lambda \\ &= 10e^{-5t} \int_0^t e^{5\lambda}d\lambda \\ &= \frac{10e^{-5t}}{5} [e^{5t} - 0] \\ &= 2[1 - e^{-5t}]u(t) \end{aligned}$$

Por comparación, determinemos $v_0(t)$ de $\mathbf{H}(s)$ y $\mathbf{V}_S(s)$ usando el método de expansión en fracciones parciales. $\mathbf{V}_0(s)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0(s) &= \mathbf{H}(s)\mathbf{V}_S(s) \\ &= \frac{10}{s(s+5)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+5} \end{aligned}$$

Evaluando las constantes, obtenemos $K_0 = 2$ y $K_1 = -2$.

Por tanto,

$$\mathbf{V}_0(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+5}$$

y de aquí

$$v_0(t) = 2[1 - e^{-5t}]u(t)$$

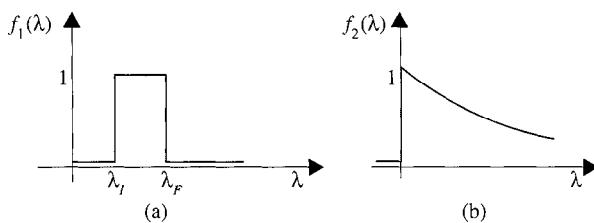


FIGURA 15.3 Dos funciones $f_1(\lambda)$ y $f_2(\lambda)$.

Aunque podemos emplear la convolución para derivar una transformada inversa de Laplace, el ejemplo, aunque completamente simple, ilustra que éste es un método muy pobre. Si la función $F(s)$ es muy complicada, las matemáticas pueden llegar a ser difíciles de manejar. La convolución es, sin embargo, una herramienta más poderosa y útil. Para comprender su utilidad, interpretemos la operación de la integral de convolución examinándola desde un punto de vista gráfico.

Suponga que las funciones $f_1(\lambda)$ y $f_2(\lambda)$ son como se muestra en la figura 15.3. Si $f_2(\lambda) = e^{-\alpha\lambda}u(\lambda)$, la función corrida en el tiempo

$$f_2(\lambda - t) = e^{-\alpha(\lambda - t)}u(\lambda - t)$$

es como se muestra en la figura 15.4a. Si ahora cambiamos el signo del argumento de modo que la función sea

$$f_2(t - \lambda) = e^{-\alpha(t - \lambda)}u(t - \lambda)$$

entonces la función está doblada o reflejada alrededor del punto $\lambda = t$, como se muestra en la figura 15.4b. El integrando de la integral de convolución, $f_1(\lambda)f_2(t - \lambda)$, no será cero sólo cuando las dos funciones se superpongan. La superposición, o producto de las dos funciones, para varios valores de t se muestra sombreada en la figura 15.5. La integral de convolución para varios valores de t es igual al área sombreada que se muestra en la figura 15.5. Una gráfica de esas áreas a medida que t varía se muestra en la figura 15.6. Si hemos corrido y doblado la función $f_1(\lambda)$, multiplicado ésta por $f_2(\lambda)$ e integrado, obtendremos de nuevo la curva de la figura 15.6.

Esta explicación gráfica de la convolución ha proporcionado de un modo aclarador alguna idea adicional. También sirve, sin embargo, para ilustrar que la *convolución es una herramienta de simulación muy importante*. Por ejemplo, si conocemos la respuesta de impulso de una red, podemos utilizar la convolución para determinar la respuesta de la red a una entrada que puede disponerse sólo como una curva experimen-

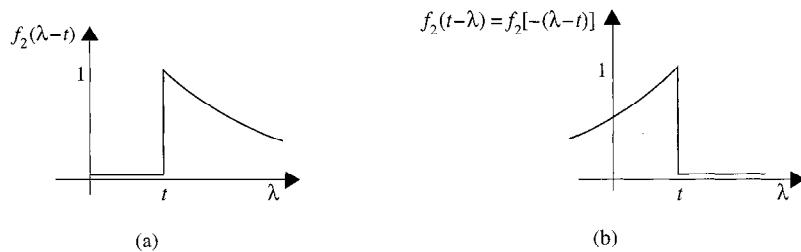


FIGURA 15.4 Operación de corrimiento y doblamiento sobre $f_2(\lambda)$.

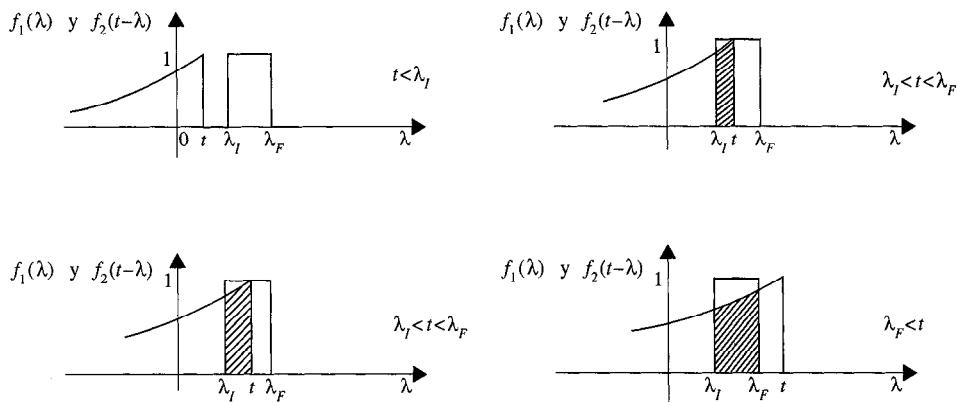


FIGURA 15.5 El producto de las funciones $f_1(\lambda)$ y $f_2(t - \lambda)$ se muestra con sombreado en las figuras para diferentes valores de t .

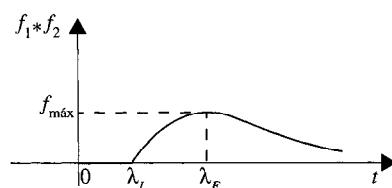


FIGURA 15.6 Gráfica de la integral de convolución.

tal obtenida en el laboratorio. Así, la convolución nos permite obtener la respuesta de la red a entradas que no pueden escribirse como funciones analíticas, pero que pueden simularse en una computadora digital.

15.7 Teorema del valor inicial y del valor final

Suponga que deseamos determinar el valor inicial o el final de la respuesta de un circuito en el dominio del tiempo a partir de la transformada de Laplace de la función en el dominio s sin llevar a cabo la transformada inversa. Si determinamos la función $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, podemos encontrar el valor inicial al evaluar $f(t)$ cuando $t \rightarrow 0$ y el valor final evaluando $f(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Esto sería muy conveniente, sin embargo, si pudiéramos determinar simplemente los valores inicial y final de $F(s)$ sin tener que llevar a cabo la transformada inversa. Los teoremas de los valores inicial y final nos permiten hacer justo eso.

El *teorema del valor inicial* establece que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (15.35)$$

siempre que $f(t)$ y su primera derivada sean transformables.

La prueba de este teorema emplea la transformada de Laplace de la función $df(t)/dt$.

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = s\mathbf{F}(s) - f(0)$$

Tomando el límite de ambos lados conforme $s \rightarrow \infty$, encontramos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [s\mathbf{F}(s) - f(0)]$$

y como

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} dt = 0$$

entonces

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathbf{F}(s)$$

que es, por supuesto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathbf{F}(s)$$

El *teorema del valor final* afirma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathbf{F}(s) \quad (15.36)$$

con tal de que $f(t)$ y su primera derivada sean transformables y que $f(\infty)$ exista. Este último requisito significa que los polos de $\mathbf{F}(s)$ deben tener partes reales negativas, con la excepción que puede haber un polo simple en $s = 0$.

La prueba de este teorema también incluye la transformada de Laplace de la función $df(t)/dt$.

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = s\mathbf{F}(s) - f(0)$$

Tomar el límite de ambos lados conforme $s \rightarrow 0$ nos da

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [s\mathbf{F}(s) - f(0)]$$

Por tanto,

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [s\mathbf{F}(s) - f(0)]$$

y

$$f(\infty) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathbf{F}(s) - f(0)$$

y de aquí,

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathbf{F}(s)$$

EJEMPLO 15.16

Determinemos los valores inicial y final para la función

$$\mathbf{F}(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

y la correspondiente función del tiempo

$$f(t) = 5 + 5\sqrt{2} e^{-t} \cos(t - 135^\circ)$$

SOLUCIÓN Aplicando el teorema del valor inicial, tenemos

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathbf{F}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{10(s+1)}{s^2 + 2s + 2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Los polos de $\mathbf{F}(s)$ son $s = 0$ y $s = -1 \pm j1$, por lo que el teorema del valor final es aplicable. Así,

$$\begin{aligned} f(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\mathbf{F}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(s+1)}{s^2 + 2s + 2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Observe que esos valores pueden obtenerse directamente de la función del tiempo $f(t)$.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

EJEMPLO Encuentre los valores inicial y final de la función $f(t)$ si $\mathbf{F}(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ está dada por la expresión

$$\mathbf{F}(s) = \frac{(s+1)^2}{s(s+2)(s^2 + 2s + 2)}$$

Resp.: $f(0) = 0$ y $f(\infty) = \frac{1}{4}$.

15.8 Aplicaciones

Como preludio al siguiente capítulo, en el que emplearemos la potencia y versatilidad de la transformada de Laplace en una amplia variedad de problemas de análisis de circuitos, demostraremos ahora cómo las técnicas señaladas en este capítulo pueden usarse en la solución de un problema de circuitos vía la ecuación diferencial que describe la red.

EJEMPLO 15.17

Considere la red que se muestra en la figura 15.7a. Suponga que la red está en estado estable antes de $t = 0$. Encontremos la corriente $i(t)$ para $t > 0$.

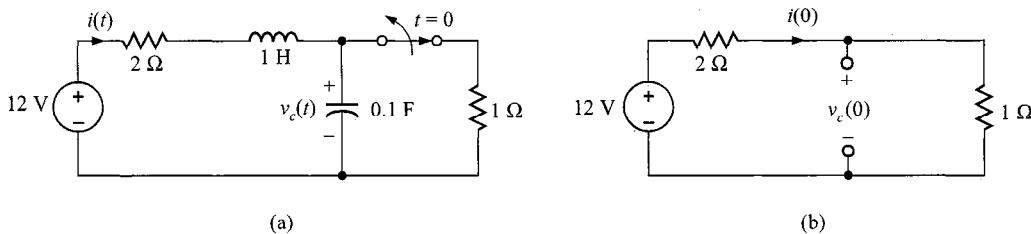


FIGURA 15.7 Circuitos utilizados en el ejemplo 15.17.

SOLUCIÓN En el estado estable antes de $t = 0$, la red es como se muestra en la figura 15.7b, ya que la bobina actúa como un corto circuito para cd, y el condensador como un circuito abierto para cd. En la figura 15.7b notamos que $i(0) = 4 \text{ A}$ y $v_C(0) = 4 \text{ V}$. para $t > 0$, la ecuación de la LVK para la red es

$$12u(t) = 2i(t) + 1 \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{0.1} \int_0^t i(x)dx + v_C(0)$$

Utilizando los resultados del ejemplo 15.1 y los teoremas 9 y 10, la expresión de la transformada se convierte en

$$\frac{12}{s} = 2\mathbf{I}(s) + s\mathbf{I}(s) - i(0) + \frac{10}{s} \mathbf{I}(s) + \frac{v_C(0)}{s}$$

Usando las condiciones iniciales, la ecuación se vuelve

$$\frac{12}{s} = \mathbf{I}(s) \left(2 + s + \frac{10}{s} \right) - 4 + \frac{4}{s}$$

O

$$\mathbf{I}(s) = \frac{4(s+2)}{s^2 + 2s + 10} = \frac{4(s+2)}{(s+1-j3)(s+1+j3)}$$

y entonces

$$K_1 = \frac{4(s+2)}{s+1+j3} \Big|_{s=-1+j3}$$

$$= 2.11 \angle -18.4^\circ$$

Por tanto,

$$i(t) = 2(2.11)e^{-t} \cos(3t - 18.4^\circ) \text{ A}$$

Advierta que esta expresión satisface la condición inicial $i(0) = 4 \text{ A}$.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D15.15 Suponiendo que la red de la figura D15.15 está en estado estable antes de $t = 0$, encuentre $i(t)$ para $t > 0$.

Resp.: $i(t) = 3 - e^{-2t} \text{ A}$.

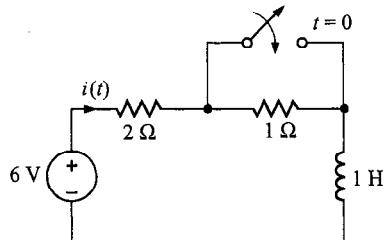


FIGURA D15.15

15.9 Resumen

En este capítulo hemos introducido una técnica de análisis muy poderosa llamada transformada de Laplace. Esta técnica nos permite transformar ecuaciones integrodiferenciales lineales en el dominio del tiempo en ecuaciones algebraicas en el dominio s . Esas ecuaciones pueden resolverse algebraicamente en el dominio s y la solución transformada de regreso al dominio del tiempo. La transformación del dominio s al dominio del tiempo se llevó a cabo usando un método de expansión en fracciones parciales para funciones que contienen polos simples, múltiples y complejos conjugados. Se introdujo la integral de convolución como un método para determinar la respuesta de una red a una entrada que puede estar disponible como una curva experimental. Se presentaron los teoremas del valor inicial y final, y se mostró que los valores inicial y final de una función del tiempo podían obtenerse directamente de la función en el dominio de frecuencia. Finalmente, la técnica de la transformada fue empleada para resolver algunos problemas de circuitos.

Puntos clave

- La transformada de Laplace nos permite convertir un problema del dominio del tiempo al dominio de frecuencia compleja, resolver el problema utilizando álgebra en el dominio s , y entonces convertir la solución en el dominio s de regreso al dominio del tiempo.

- La transformada de Laplace se define como

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathbf{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

- Existe un conjunto de pares de transformadas que nos permite transformar una función del dominio del tiempo al dominio s y viceversa.
- Se han presentado diez propiedades importantes de la transformada de Laplace que facilitan su uso.
- La transformada de Laplace puede usarse para resolver problemas de circuitos. La solución completa se obtiene ya que las condiciones iniciales se incluyen automáticamente en el proceso de transformación.
- El método de expansión en fracciones parciales puede aplicarse para determinar la integral inversa de funciones que contienen polos simples, múltiples y complejos conjugados.
- La integral de convolución puede usarse para determinar la transformada de Laplace inversa.
- Los teoremas del valor inicial y final pueden aplicarse para determinar los valores inicial y final de las funciones en el dominio del tiempo cuando se conocen sus transformadas de Laplace.
- La transformada de Laplace puede usarse para resolver ecuaciones integrodiferenciales. La solución completa se obtiene ya que las condiciones iniciales se incluyen automáticamente en el proceso de transformación.

Problemas

15.1. Encuentre la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = te^{-at}\delta(t - 1)$$

15.2. Encuentre $\mathbf{F}(s)$ si $f(t) = e^{-at} \operatorname{sen}(\omega t)u(t - 1)$.

15.3. Si $f(t) = t \cos(\omega t)u(t - 1)$, encuentre $\mathbf{F}(s)$.

15.4. Encuentre $\mathbf{F}(s)$ si $f(t) = te^{-at}u(t - 4)$.

15.5. Use el teorema de corrimiento para determinar $\mathcal{L}[f(t)]$, donde

$$f(t) = [e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}]u(t-2)$$

15.6. Use el teorema de corrimiento para determinar $\mathcal{L}[f(t)]$, donde

$$f(t) = [t-1 + e^{-(t-1)}]u(t-1)$$

15.7. Utilice el teorema 5 para encontrar $\mathcal{L}[f(t)]$ si

$$f(t) = e^{-at}u(t-1)$$

15.8. Utilice el teorema 6 para encontrar $\mathcal{L}[f(t)]$ si

$$f(t) = te^{-at}u(t-1)$$

15.9. Dadas las siguientes funciones $\mathbf{F}(s)$, encuentre $f(t)$.

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{10s}{(s+1)(s+4)}$

15.10. Dadas las siguientes funciones $\mathbf{F}(s)$, encuentre $f(t)$.

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{s+10}{(s+4)(s+6)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{24}{(s+2)(s+8)}$

15.11. Dadas las siguientes funciones $\mathbf{F}(s)$, encuentre $f(t)$.

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{s^2+s+1}{s(s+1)(s+2)}$

15.12. Dadas las siguientes funciones $\mathbf{F}(s)$, encuentre $f(t)$.

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{(s+2)(s+4)(s+6)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{(s+3)(s+6)}{s(s^2 + 10s + 24)}$

15.13. Dadas las siguientes funciones $\mathbf{F}(s)$, encuentre $f(t)$.

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 2}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{10(s+2)}{s^2 + 4s + 5}$

15.14. Dadas las siguientes funciones $\mathbf{F}(s)$, encuentre la transformada de Laplace inversa de cada función.

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{10(s+1)}{s^2 + 2s + 2}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{s+1}{s(s^2 + 4s + 5)}$

15.15. Dadas las siguientes funciones $\mathbf{F}(s)$, encuentre $f(t)$.

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{s(s+6)}{(s+3)(s^2 + 6s + 18)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{(s+4)(s+8)}{s(s^2 + 8s + 32)}$

15.16. Dadas las siguientes funciones $\mathbf{F}(s)$, encuentre $f(t)$.

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{s+2}{(s^2 + 4s + 5)(s^2 + 4s + 8)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{s(s+2)}{s^2 + 2s + 2}$

15.17. Dadas las siguientes funciones $\mathbf{F}(s)$, encuentre $f(t)$.

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s^2 + 4s + 8)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{(s+2)^2}{s^2 + 4s + 8}$

15.18. Dadas las siguientes funciones $\mathbf{F}(s)$, encuentre $f(t)$.

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{(s+1)(s+4)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{s+10}{s^2}$

15.19. Dadas las siguientes funciones $\mathbf{F}(s)$, encuentre la transformada de Laplace inversa de cada función.

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{s+1}{s^2(s+2)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+4)}$

15.20. Dadas las siguientes funciones $\mathbf{F}(s)$, encuentre $f(t)$.

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{s+8}{s^2(s+6)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2}$

15.21. Dadas las siguientes funciones $\mathbf{F}(s)$, encuentre $f(t)$.

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{s+6}{s(s+1)^2}$

15.22. Dadas las siguientes funciones $\mathbf{F}(s)$, encuentre $f(t)$.

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{s^2}{(s+1)^2(s+2)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{s^2 + 9s + 20}{s(s+4)^3(s+5)}$

15.23. Encuentre $f(t)$ si $\mathbf{F}(s)$ está dada por la expresión.

$$\mathbf{F}(s) = \frac{s(s+1)}{(s+2)^3(s+3)}$$

15.24. Encuentre $f(t)$ si $\mathbf{F}(s)$ está dada por la expresión.

$$\mathbf{F}(s) = \frac{12(s+2)}{s^2(s+1)(s^2 + 4s + 8)}$$

15.25. Encuentre la transformada de Laplace inversa de las siguientes funciones;

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s}$

c) $\mathbf{F}(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s+2}$

15.26. Encuentre la transformada de Laplace inversa de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{(s+1)e^{-s}}{s(s+2)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{10e^{-2s}}{(s+1)(s+3)}$

15.27. Encuentre la transformada de Laplace inversa $f(t)$ si $\mathbf{F}(s)$ es

$$\mathbf{F}(s) = \frac{se^{-s}}{(s+1)(s+2)}$$

15.28. Encuentre $f(t)$ si $\mathbf{F}(s)$ está dada por las siguientes funciones:

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{(s^2 + 2s + 3)e^{-2s}}{s(s+1)(s+2)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{(s+2)e^{-4s}}{s^2(s+1)}$

15.29. Encuentre $f(t)$ si $\mathbf{F}(s)$ está dada por las siguientes funciones:

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{2(s+1)e^{-s}}{(s+2)(s+3)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{10(s+2)e^{-2s}}{(s+1)(s+4)}$

15.30. Utilice transformadas de Laplace para encontrar $y(t)$ si

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) + 4 \int_0^t y(x) dx = u(t), \quad y(0) = 0, \quad t > 0$$

15.31. Resuelva la siguiente ecuación integrodiferencial utilizando transformadas de Laplace.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) + \int_0^t y(\lambda) d\lambda = 1 - e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \quad t > 0$$

15.32. Determine $y(t)$ en la siguiente ecuación si todas las condiciones iniciales son cero.

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{4d^2y(t)}{dt^2} + \frac{3dy(t)}{dt} = 10e^{-2t}$$

15.33. Resuelva las siguientes ecuaciones integrodiferenciales utilizando transformadas de Laplace.

a) $\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) = e^{-t}, \quad x(0) = 1$

b) $\frac{dx(t)}{dt} + 4x(t) = 2u(t), \quad x(0) = 2$

15.34. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando transformadas de Laplace.

a) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2dy(t)}{dt} + y(t) = e^{-2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0$

b) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{4dy(t)}{dt} + 4y(t) = u(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

15.35. Encuentre $f(t)$ utilizando la convolución si $\mathbf{F}(s)$ es

$$\mathbf{F}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

15.36. Utilice la convolución para encontrar $f(t)$ si

$$\mathbf{F}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$$

15.37. Determine los valores inicial y final de $f(t)$ si $\mathbf{F}(s)$ está dada por las expresiones:

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{2(s+2)}{s(s+1)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{2(s^2 + 2s + 6)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

c) $\mathbf{F}(s) = \frac{2s^2}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}$

15.38. Encuentre los valores inicial y final de la función del tiempo $f(t)$ si $\mathbf{F}(s)$ está dada como

a) $\mathbf{F}(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+3)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{(s+6)(s^3 + 4s^2 + 8s + 10)}$

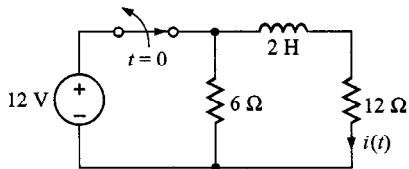
c) $\mathbf{F}(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 2}$

15.39. Encuentre los valores finales de la función del tiempo dado que

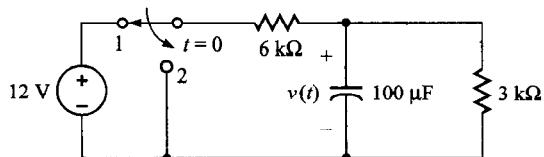
a) $\mathbf{F}(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s-3)}$

b) $\mathbf{F}(s) = \frac{10}{s^2 + 4}$

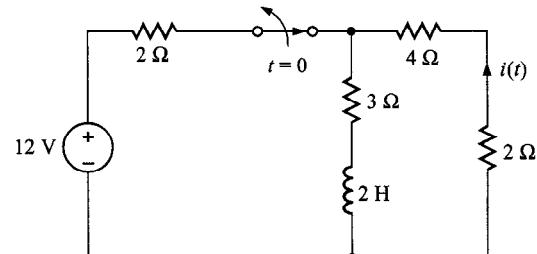
15.40. En la red de la figura P15.40, el conmutador se abre en $t = 0$. Utilice transformadas de Laplace para encontrar $i(t)$ para $t > 0$.

**FIGURA P15.40**

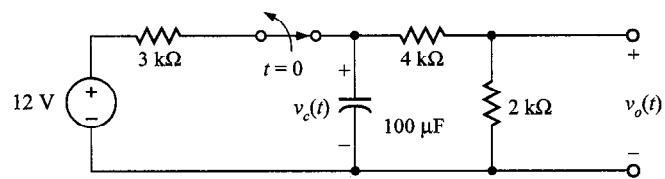
- 15.41.** En el circuito de la figura P15.41 el conmutador se mueve de la posición 1 a la posición 2 en $t = 0$. Utilice transformadas de Laplace para encontrar $v(t)$ para $t > 0$.

**FIGURA P15.41**

- 15.42.** El conmutador en el circuito de la figura P15.42 se abre en $t = 0$. Encuentre $i(t)$ para $t > 0$ usando transformadas de Laplace.

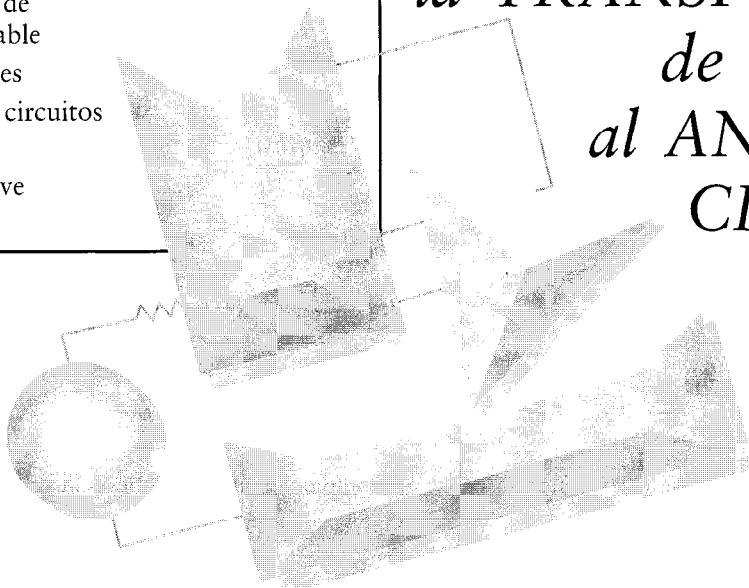
**FIGURA P15.42**

- 15.43.** En la red de la figura P15.43 el conmutador se abre en $t = 0$. Utilice transformadas de Laplace para encontrar $v_o(t)$ para $t > 0$.

**FIGURA P15.43**

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

- 16.1** Soluciones de circuito de Laplace
- 16.2** Modelos de elementos de circuito
- 16.3** Técnicas de análisis
- 16.4** Función de transferencia
- 16.5** Conexión de la gráficas de polocero/gráfica de Bode
- 16.6** Respuesta de estado estable
- 16.7** Aplicaciones
- 16.8** Diseño de circuitos
- 16.9** Resumen
Puntos clave
Problemas

CAPÍTULO
16*APLICACIÓN de
la TRANSFORMADA
de LAPLACE
al ANÁLISIS de
CIRCUITOS*

Demostramos en el capítulo 15 cómo la transformada de Laplace puede usarse para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Como todas las redes lineales con las cuales estamos tratando pueden describirse mediante ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, el uso de la transformada de Laplace para el análisis de circuitos parecería ser un método apropiado. Las características terminales para cada elemento del circuito pueden describirse en el dominio s transformando las ecuaciones apropiadas del dominio del tiempo. Las leyes de Kirchhoff cuando se aplican a un circuito producen un conjunto de ecuaciones integrodiferenciales en términos de las características terminales de los elementos de la red, que cuando se trasforman dan un conjunto de ecuaciones algebraicas en el dominio s . Por tanto, un análisis en el dominio complejo de frecuencia en el que los elementos pasivos de la red están representados por su impedancia

transformada o admitancia, y las fuentes (independientes o dependientes) que están representadas en términos de sus variables de transformada, pueden llevarse al cabo. Éste tipo de análisis en el dominio s es algebraico y se aplicarán todas las técnicas derivadas en el análisis de cd. Por tanto, el análisis es similar al análisis de cd de redes resistivas, y todas las técnicas de análisis de redes y los teoremas de redes que se aplicaron en el análisis de cd son válidos en el dominio s (por ejemplo, el análisis nodal, el análisis de malla, la superposición, la transformación de fuentes, el teorema de Thévenin, el teorema de Norton y las combinaciones de impedancia o admitancia). Por tanto, nuestro método será transformar cada elemento del circuito, dibujar un circuito equivalente en el dominio s , y después, utilizando la red transformada, resolver las ecuaciones del circuito algebraicamente en el dominio s . Finalmente, una tabla de pares de transformadas puede emplearse para obtener una solución

completa (transitoria más estado estable). Nuestro método en este capítulo consiste en emplear los modelos de los elementos del circuito y demostrar, utilizando

varios ejemplos, muchos de los conceptos y técnicas que se han presentado anteriormente. ■

16.1 Soluciones de circuito de Laplace

Para introducir la utilidad de la transformada de Laplace en el análisis de circuitos, consideremos el circuito *RL* en serie que se muestra en la figura 16.1. En particular, encontraremos la corriente, $i(t)$.

Usando la ley de voltaje de Kirchhoff, podemos escribir la ecuación diferencial en el dominio del tiempo,

$$v_S(t) = L \left(\frac{di(t)}{dt} \right) + Ri(t)$$

La ecuación diferencial complementaria es

$$L \left(\frac{di(t)}{dt} \right) + Ri(t) = 0 \quad (16.1)$$

y tiene la solución

$$i_C(t) = K_C e^{-\alpha t}$$

Sustituyendo $i_C(t)$ en la ecuación complementaria se obtiene la relación

$$R - \alpha L = 0$$

o

$$\alpha = \frac{R}{L} = 1000$$

La solución particular es de la misma forma que la función forzante $v_S(t)$.

$$i_p(t) = K_p$$

Sustituyendo $i_p(t)$ en la ecuación diferencial original se obtiene la expresión

$$1 = RK_p$$

o

$$K_p = 1/R = 1/100$$

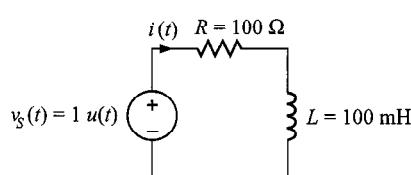


FIGURA 16.1 Red *RL* en serie.

La solución final es la suma de $i_p(t)$ e $i_C(t)$,

$$i(t) = K_p + K_C e^{-\alpha t} = \frac{1}{100} + K_C e^{-1000t}$$

Para encontrar K_C debemos usar el valor de la corriente en algún instante de tiempo particular. Para $t < 0$, la función de paso unitaria es cero y también lo es la corriente. En $t = 0$, el paso unitario se va a uno; sin embargo, la bobina fuerza a la corriente a permanecer instantáneamente en cero. Por tanto, en $t = 0$ podemos escribir

$$i(0) = 0 = K_p + K_C$$

o

$$K_C = -K_p = -\frac{1}{100}$$

De este modo, la corriente es

$$i(t) = 10(1 - e^{-1000t})u(t) \text{ mA}$$

Tratemos ahora un método diferente para el mismo problema. Haciendo uso de la tabla 15.2, tomemos la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación (16.1).

$$\mathcal{L}[v_S(t)] = \mathbf{V}_S(s) = L[s\mathbf{I}(s)] + R\mathbf{I}(s)$$

Ahora el circuito está representado no por una ecuación diferencial en el dominio del tiempo, sino más bien por una expresión algebraica en el dominio s . Resolviendo para $\mathbf{I}(s)$ podemos escribir

$$\mathbf{I}(s) = \frac{\mathbf{V}_S(s)}{sL + R} = \frac{1}{s[sL + R]}$$

Encontramos $i(t)$ usando la transformada de Laplace inversa. Primero, expresemos $\mathbf{I}(s)$ como una suma de productos parciales

$$\mathbf{I}(s) = \frac{1/L}{s\left[s + \frac{R}{L}\right]} = \frac{1}{sR} - \frac{1}{R\left[s + \frac{R}{L}\right]}$$

La transformada inversa es simplemente

$$i(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

Dados los valores de los elementos del circuito en la figura 16.1, la corriente es

$$i(t) = 10(1 - e^{-1000t})u(t) \text{ mA}$$

que es exactamente la misma que la obtenida usando el método de la ecuación diferencial. Observe con cuidado que la solución que utiliza el método de la transformada de Laplace obtiene la solución completa en un paso.

Hemos mostrado que la transformada de Laplace puede ser usada para transformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica. Como las relaciones de voltaje-corriente para las resistencias, capacitores y bobinas incluyen sólo constantes, derivadas e integrales, podemos representar y resolver cualquier circuito en el dominio s .

16.2 Modelos de elementos de circuito

La técnica de la transformada de Laplace empleada al principio implica que las características terminales de los elementos del circuito se pueden exponer como expresiones algebraicas en el dominio s . Examinemos esas características para la resistencia, el capacitor y la bobina.

La relación corriente-voltaje para una resistencia en el dominio del tiempo usando la convención pasiva de signos es

$$v(t) = R i(t) \quad (16.2)$$

Usando la transformada de Laplace, esta relación en el dominio s es

$$\mathbf{V}(s) = R \mathbf{I}(s) \quad (16.3)$$

Por tanto, las representaciones en el dominio de tiempo y en el dominio de frecuencia compleja de este elemento son como se muestra en la figura 16.2a.

Las relaciones en el dominio del tiempo para un capacitor que utiliza la convención pasiva de signos es

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(x) dx + v(0) \quad (16.4)$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (16.5)$$

Las ecuaciones en el dominio s para el condensador son

$$\mathbf{V}(s) = \frac{\mathbf{I}(s)}{sC} + \frac{v(0)}{s} \quad (16.6)$$

$$\mathbf{I}(s) = sC\mathbf{V}(s) - Cv(0) \quad (16.7)$$

y de aquí que la representación del dominio s de este elemento es como se muestra en la figura 16.2b.

Para la bobina, las relaciones corriente-voltaje que utilizan la convención pasiva de signos son

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (16.8)$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(x) dx + i(0) \quad (16.9)$$

Las relaciones en el dominio s son entonces

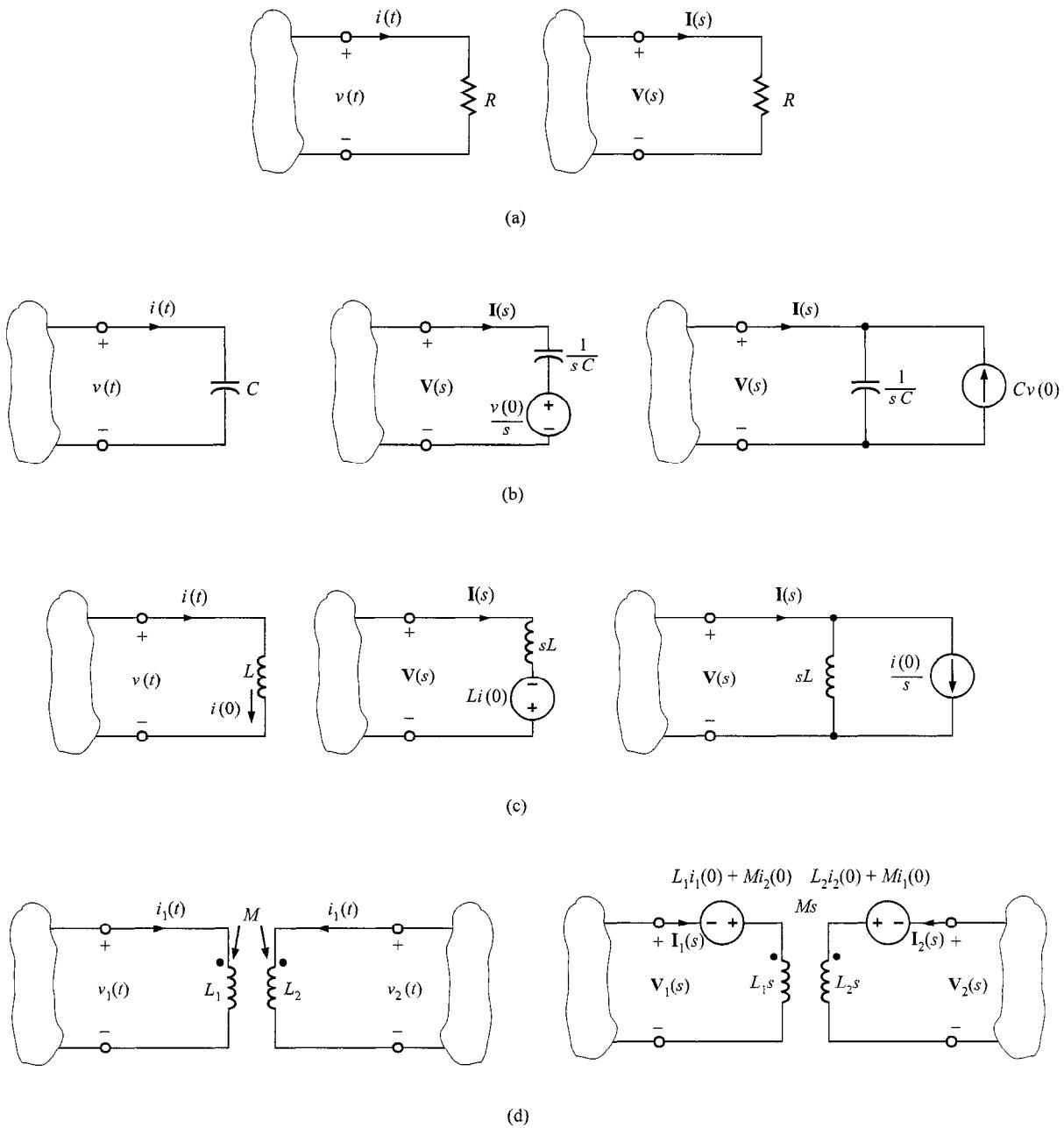


FIGURA 16.2 Representaciones de elementos de circuito en el dominio del tiempo y en el dominio s .

$$\mathbf{V}(s) = sL\mathbf{I}(s) - Li(0) \quad (16.10)$$

$$\mathbf{I}(s) = \frac{\mathbf{V}(s)}{sL} + \frac{i(0)}{s} \quad (16.11)$$

La representación en el dominio s de este elemento se muestra en la figura 16.2c.

Al usar la convención pasiva de signos, encontramos que las relaciones voltaje-corriente para las bobinas acopladas que se muestran en la figura 16.2d son

$$\begin{aligned} v_1(t) &= L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) &= L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \end{aligned} \quad (16.12)$$

Las relaciones en el dominio s son entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1(s) &= L_1 s \mathbf{I}_1(s) - L_1 i_1(0) + M s \mathbf{I}_2(s) - M i_2(0) \\ \mathbf{V}_2(s) &= L_2 s \mathbf{I}_2(s) - L_2 i_2(0) + M s \mathbf{I}_1(s) - M i_1(0) \end{aligned} \quad (16.13)$$

La fuentes de voltaje y corriente independientes y dependientes también pueden representarse por sus transformadas; es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1(s) &= \mathcal{L}[v_1(t)] \\ \mathbf{I}_2(s) &= \mathcal{L}[i_2(t)] \end{aligned} \quad (16.14)$$

y si $v_1(t) = Ai_2(t)$, que representa una fuente de voltaje controlada por corriente, entonces

$$\mathbf{V}_1(s) = A \mathbf{I}_2(s) \quad (16.15)$$

El lector deberá notar cuidadosamente la dirección de las fuentes de corriente y la polaridad de las fuentes de voltaje en la red transformada que resulta de las condiciones iniciales. Si la polaridad del voltaje inicial o la dirección de la corriente inicial se invierte, las fuentes en el circuito transformado que resulten de la condición inicial también se invierten.

16.3 Técnicas de análisis

Ahora que tenemos la representación en el dominio s para los elementos del circuito, estamos en posición para analizar redes usando un circuito transformado.

E J E M P L O 16.1

Dada la red de la figura 16.3a, dibujemos el circuito equivalente en el dominio s y encontremos el voltaje de salida en los dominios s y del tiempo.

SOLUCIÓN La red en el dominio s se muestra en la figura 16.3b. Podemos escribir el voltaje de salida como

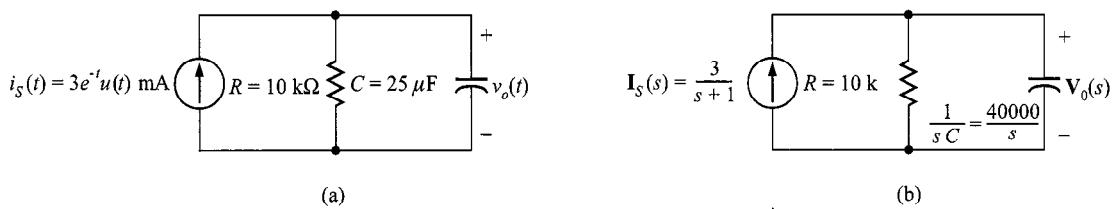


FIGURA 16.3 Representaciones de una red RC en paralelo en el dominio del tiempo y en el dominio s .

$$\mathbf{V}_o(s) = \left[R // \frac{1}{sC} \right] \mathbf{I}_S(s)$$

$$\mathbf{V}_0(s) = \left[\frac{1/C}{s + (1/RC)} \right] \mathbf{I}_S(s)$$

Dados los valores de los elementos, $\mathbf{V}_0(s)$ se convierte en

$$\mathbf{V}_0(s) = \left(\frac{40\ 000}{s+4}\right)\left(\frac{0.003}{s+1}\right) = \frac{120}{(s+4)(s+1)}$$

Expandiendo $\mathbf{V}_o(s)$ en fracciones parciales, da

$$\mathbf{V_o}(s) = \frac{120}{(s+4)(s+1)} = \frac{40}{s+1} - \frac{40}{s+4}$$

Llevando a cabo la transformada de Laplace inversa da la representación en el dominio del tiempo

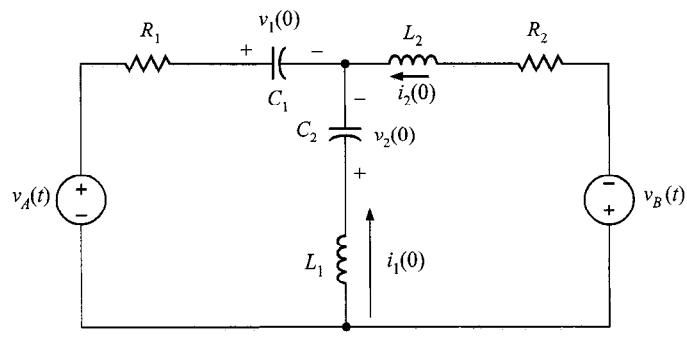
$$v_o(t) = 40 [e^{-t} - e^{-4t}] u(t) \text{ V}$$

Ahora que hemos demostrado el uso de la transformada de Laplace en la solución de un circuito simple, consideremos el caso más general. Observe que en la figura 16.2 hemos mostrado dos modelos para el capacitor y la bobina cuando las condiciones iniciales están presentes. Consideraremos ahora un ejemplo en el cual ilustraremos el uso de esos modelos al derivar las ecuaciones nodales y de malla para el circuito.

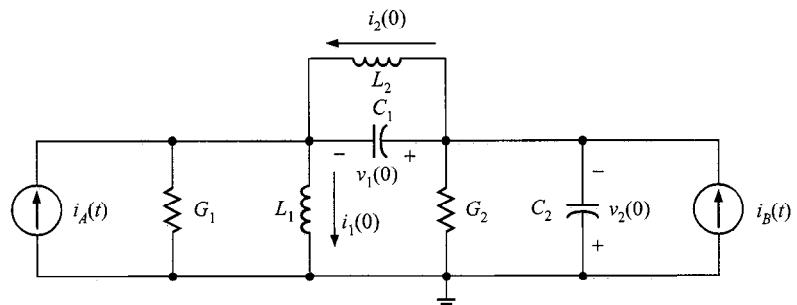
E J E M P L O 16.2

Dados los circuitos de la figura 16.4a y b, deseamos escribir las ecuaciones de anillo en el dominio s para la red de la figura 16.4a y las ecuaciones nodales en el dominio s para la red de la figura 16.4b.

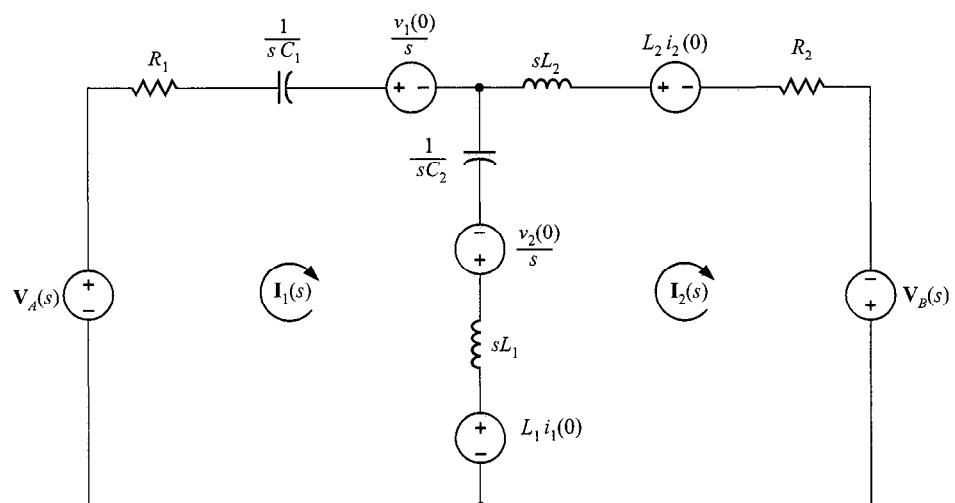
SOLUCIÓN El circuito transformado para la red de la figura 16.4a se muestra en la figura 16.4c. Las ecuaciones de anillo para esta red son



(a)

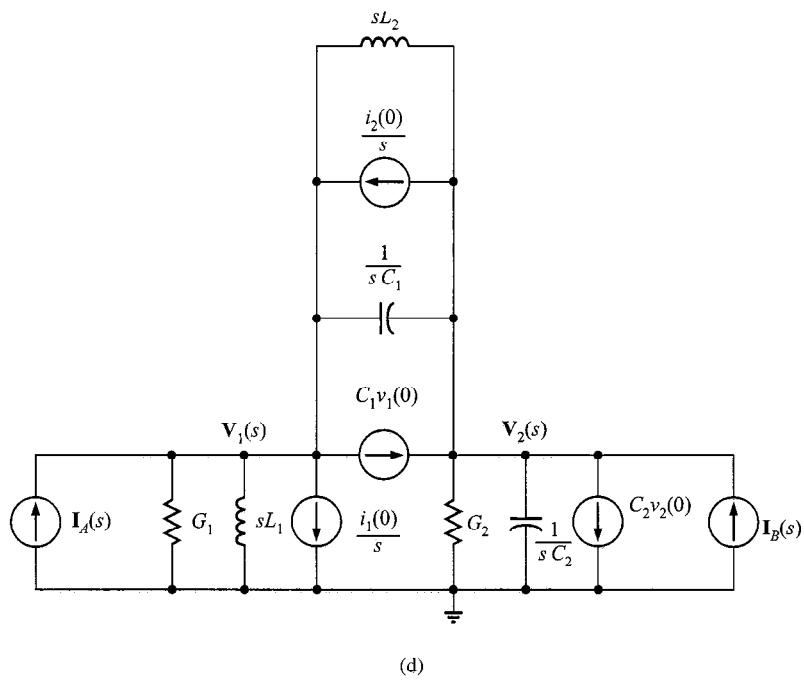


(b)



(c)

FIGURA 16.4 Circuitos utilizados en el ejemplo 16.2.

**FIGURA 16.4 (Continuación).**

$$\left(R_1 + \frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2} + sL_1\right) \mathbf{I}_1(s) - \left(\frac{1}{sC_2} + sL_1\right) \mathbf{I}_2(s)$$

$$= \mathbf{V}_A(s) - \frac{v_1(0)}{s} + \frac{v_2(0)}{s} - L_1 i_1(0)$$

$$- \left(\frac{1}{sC_2} + sL_1\right) \mathbf{I}_1(s) + \left(\frac{1}{sC_2} + sL_1 + sL_2 + R_2\right) \mathbf{I}_2(s)$$

$$= L_1 i_1(0) - \frac{v_2(0)}{s} - L_2 i_2(0) + \mathbf{V}_B(s)$$

El circuito transformado para la red de la figura 16.4b se muestra en la figura 16.4d. Las ecuaciones nodales para esta red son

$$\left(G_1 + \frac{1}{sL_1} + sC_1 + \frac{1}{sL_2}\right) \mathbf{V}_1(s) - \left(\frac{1}{sL_2} + sC_1\right) \mathbf{V}_2(s)$$

$$= \mathbf{I}_A(s) - \frac{i_1(0)}{s} + \frac{i_2(0)}{s} - C_1 v_1(0)$$

$$-\left(\frac{1}{sL_2} + sC_1\right)\mathbf{V}_1(s) + \left(\frac{1}{sL_2} + sC_1 + G_2 + sC_2\right)\mathbf{V}_2(s)$$

$$= C_1 v_1(0) - \frac{i_2(0)}{s} - C_2 v_2(0) + \mathbf{I}_B(s)$$

El ejemplo 16.2 intenta ilustrar la manera como se emplean dos representaciones en el dominio s de los elementos del circuito bobina y capacitor cuando las condiciones iniciales están presentes. En los siguientes ejemplos ilustraremos el uso de varias de técnicas de análisis al obtener la respuesta completa de una red transformada. Los circuitos analizados se han elegido específicamente para demostrar el uso de la transformada de Laplace en circuitos con una variedad de elementos pasivos y activos.

EJEMPLO 16.3

Considere la red que se muestra en la figura 16.5a. Determinemos los voltajes nodales $v_1(t)$ y $v_2(t)$ usando análisis nodal y superposición.

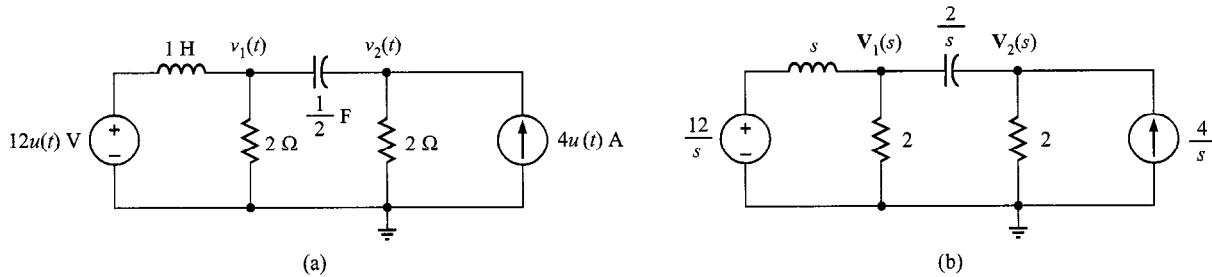


FIGURA 16.5 Circuitos utilizados en el ejemplo 16.3.

SOLUCIÓN La red transformada se muestra en la figura 16.5b. Las ecuaciones nodales para la red son

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1(s) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2} + \frac{s}{2} \right) - \mathbf{V}_2(s) \left(\frac{s}{2} \right) &= \frac{12}{s^2} \\ -\mathbf{V}_1(s) \left(\frac{s}{2} \right) + \mathbf{V}_2(s) \left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2} \right) &= \frac{4}{s}\end{aligned}$$

Las ecuaciones en forma matricial son

$$\begin{bmatrix} \frac{s^2 + s + 2}{2s} & \frac{-s}{2} \\ \frac{-s}{2} & \frac{s+1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{V}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{s^2} \\ \frac{4}{s} \end{bmatrix}$$

Resolviendo para los voltajes nodales, obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{V}_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{s^2 + s + 2}{2s} & \frac{-s}{2} \\ \frac{-s}{2} & \frac{s + 1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{12}{s^2} \\ \frac{4}{s} \end{bmatrix} \\ &= \frac{4s}{2s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} \frac{s + 1}{2} & \frac{s}{2} \\ \frac{s}{2} & \frac{s^2 + s + 2}{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12}{s^2} \\ \frac{4}{s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4(s^2 + 3s + 3)}{s(s^2 + 3s/2 + 1)} \\ \frac{4(s^2 + 4s + 2)}{s(s^2 + 3s/2 + 1)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Determinemos ahora $v_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{V}_1(s)]$ y $v_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{V}_2(s)]$. $\mathbf{V}_1(s)$ puede escribirse como

$$\mathbf{V}_1(s) = \frac{4(s^2 + 3s + 3)}{s(s^2 + \frac{3}{2}s + 1)} = \frac{4(s^2 + 3s + 3)}{s[s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)][s + \frac{3}{4} - j(\sqrt{7}/4)]}$$

Por tanto,

$$\frac{4(s^2 + 3s + 3)}{s[s + \frac{3}{4} - j(\sqrt{7}/4)][s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)]} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + \frac{3}{4} - j(\sqrt{7}/4)} + \frac{K_1^*}{s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)}$$

Evaluando las constantes K_0 y K_1 , obtenemos

$$\left. \frac{4(s^2 + 3s + 3)}{s^2 + \frac{3}{2}s + 1} \right|_{s=0} = K_0$$

$$12 = K_0$$

y

$$\left. \frac{4(s^2 + 3s + 3)}{s[s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)]} \right|_{s = -3/4 + j\sqrt{7}/4} = K_1$$

$$4 \angle 180^\circ = K_1$$

Por tanto,

$$v_1(t) = \left[12 + 8e^{-(3/4)t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t + 180^\circ\right) \right] u(t) \text{ V}$$

De manera similar,

$$V_2(s) = \frac{4(s^2 + 4s + 2)}{s(s^2 + \frac{3}{2}s + 1)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + \frac{3}{4} - j(\sqrt{7}/4)} + \frac{K_1^*}{s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)}$$

Evaluando las constantes K_0 y K_1 , obtenemos

$$\left. \frac{4(s^2 + 4s + 2)}{s^2 + \frac{3}{2}s + 1} \right|_{s=0} = K_0$$

$$8 = K_0$$

y

$$\left. \frac{4(s^2 + 4s + 2)}{s[s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)]} \right|_{s = -3/4 + j(\sqrt{7}/4)} = K_1$$

$$5.66 \angle -110.7^\circ = K_1$$

Por tanto,

$$v_2(t) = \left[8 + 11.32e^{-(3/4)t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t - 110.7^\circ\right) \right] u(t) \text{ V}$$

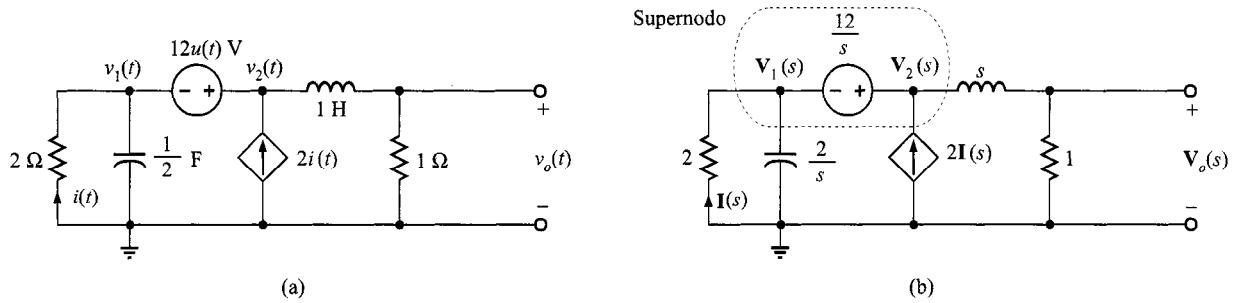
Es interesante notar que como $t \rightarrow \infty$, las fuentes en el circuito parecen ser fuentes de cd. En el caso de cd la bobina actúa como un corto circuito y el condensador actúa como un circuito abierto. En esas condiciones el voltaje $v_1(\infty) = 12 \text{ V}$, y el voltaje $v_2(\infty) = 8 \text{ V}$. Es tranquilizador darse cuenta que las ecuaciones para $v_1(t)$ y $v_2(t)$ dan también esos resultados.

E J E M P L O 16.4

Considere la red que se muestra en la figura 16.6a. Deseamos determinar el voltaje de salida $v_o(t)$.

SOLUCIÓN Conforme comenzamos a atacar el problema notamos dos cosas. Primero, debido a que la fuente $12u(t)$ está conectada entre $v_1(t)$ y $v_2(t)$, tenemos un supernodo. Segundo, si se conoce $v_2(t)$, $v_o(t)$ puede fácilmente obtenerse mediante la división de voltaje, de aquí que, utilizaremos el análisis nodal junto con la división de voltaje para obtener una solución.

La red transformada se muestra en la figura 16.6b. La LCK para el supernodo es

**FIGURA 16.6** Circuitos utilizados en el ejemplo 16.4.

$$\frac{V_1(s)}{2} + V_1(s) \frac{s}{2} - 2I(s) + \frac{V_2(s)}{s+1} = 0$$

Sin embargo,

$$I(s) = -\frac{V_1(s)}{2}$$

y

$$V_1(s) = V_2(s) - \frac{12}{s}$$

Sustituyendo las dos últimas ecuaciones en la primera ecuación se obtiene

$$\left[V_2(s) - \frac{12}{s} \right] \frac{s+3}{2} + \frac{V_2(s)}{s+1} = 0$$

o

$$V_2(s) = \frac{12(s+1)(s+3)}{s(s^2+4s+5)}$$

Empleando un divisor de voltaje, obtenemos

$$\begin{aligned} V_o(s) &= V_2(s) \frac{1}{s+1} \\ &= \frac{12(s+3)}{s(s^2+4s+5)} \\ &= \frac{12(s+3)}{s(s+2-j1)(s+2+j1)} \end{aligned}$$

que puede escribirse como

$$\frac{12(s+3)}{s(s+2-j1)(s+2+j1)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+2-j1} + \frac{K_1^*}{s+2+j1}$$

Evaluando las constantes, obtenemos

$$\left. \frac{12(s+3)}{s^2 + 4s + 5} \right|_{s=0} = K_0$$

$$\frac{36}{5} = K_0$$

y

$$\left. \frac{12(s+3)}{s(s+2+j1)} \right|_{s=-2+j1} = K_1$$

$$3.79 \angle 161.57^\circ = K_1$$

Por tanto,

$$v_o(t) = [7.2 + 7.58e^{-2t} \cos(t + 161.57^\circ)]u(t) \text{ V}$$

EJEMPLO 16.5

Examinemos la red de la figura 16.7a. Deseamos determinar el voltaje de salida $v_o(t)$.

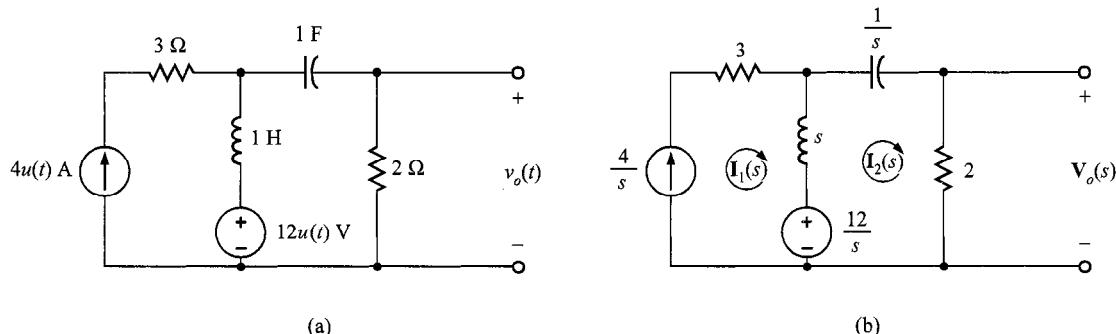


FIGURA 16.7 Circuitos utilizados en el ejemplo 16.5.

SOLUCIÓN Resolveremos este problema usando ecuaciones de malla.

La red transformada se muestra en la figura 16.7b. La LVK para la malla del lado derecho es

$$\frac{12}{s} - [\mathbf{I}_2(s) - \mathbf{I}_1(s)]s - \frac{\mathbf{I}_2(s)}{s} - 2\mathbf{I}_2(s) = 0$$

Sin embargo, $\mathbf{I}_1(s) = 4/s$, y de aquí

$$\mathbf{I}_2(s) = \frac{4(s+3)}{(s+1)^2}$$

Por tanto,

$$\mathbf{V}_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

$\mathbf{V}_o(s)$ puede escribirse como

$$\mathbf{V}_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2} = \frac{K_{11}}{(s+1)^2} + \frac{K_{12}}{s+1}$$

Evaluando las constantes, obtenemos

$$8(s+3) \Big|_{s=-1} = K_{11}$$

$$16 = K_{11}$$

y

$$\frac{d}{ds} [8(s+3)] \Big|_{s=-1} = K_{12}$$

$$8 = K_{12}$$

Por tanto,

$$v_o(t) = (16te^{-t} + 8e^{-t})u(t) \text{ V}$$

E J E M P L O 16.6

Determinemos el voltaje $v_o(t)$ en la red de la figura 16.8a utilizando el teorema de Thévenin.

SOLUCIÓN La red transformada se muestra en la figura 16.8b. El voltaje de circuito abierto puede calcularse de la red de la figura 16.8c. Observe que

$$\mathbf{V}_{oc}(s) + \mathbf{V}'_x(s) = \frac{\mathbf{V}'_x(s)}{2}$$

Por tanto,

$$\mathbf{V}'_x(s) = -2\mathbf{V}_{oc}(s)$$

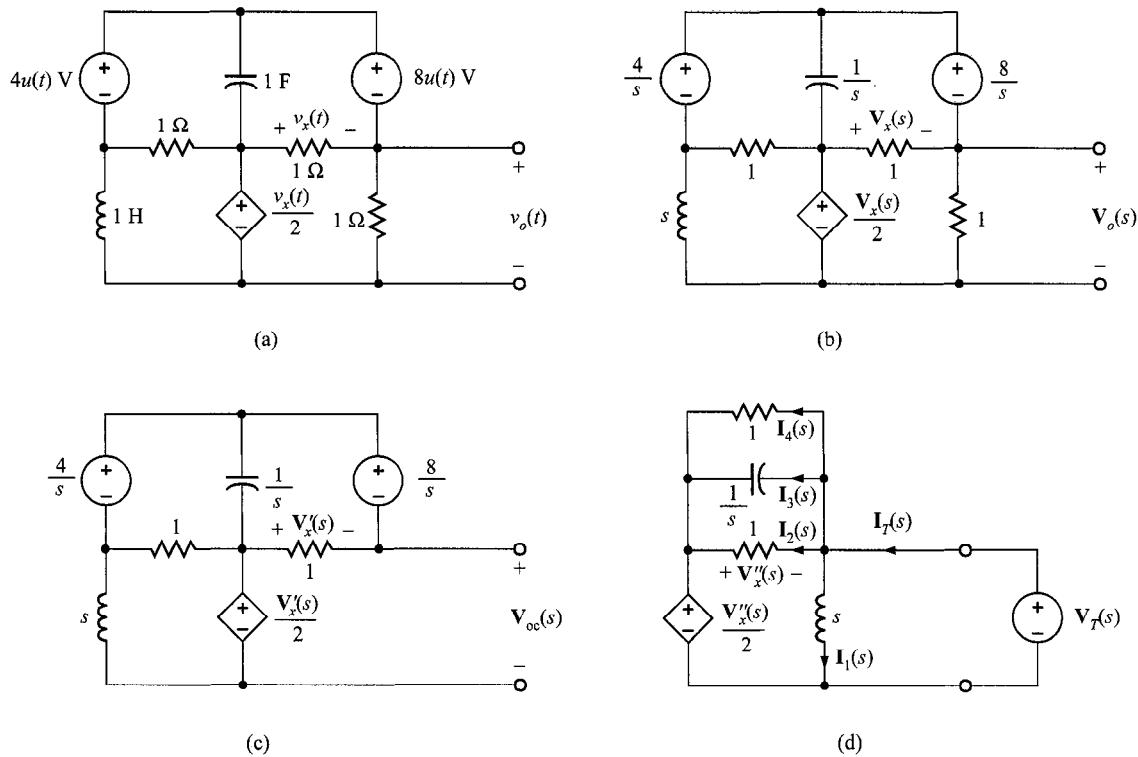


FIGURA 16.8 Circuitos utilizados en el ejemplo 16.6.

La LCK en el supernodo que incluye las dos fuentes independientes es

$$\frac{V_{oc}(s) + (4/s)}{s} + \frac{V_{oc}(s) + (4/s) - \frac{1}{2}(-2V_{oc}(s))}{1} + \frac{V_{oc}(s) + (8/s) - \frac{1}{2}(-2V_{oc}(s))}{1/s} + \frac{V_{oc}(s) - \frac{1}{2}(-2V_{oc}(s))}{1} = 0$$

Resolviendo esta ecuación para $V_{oc}(s)$ se obtiene

$$V_{oc}(s) \left(\frac{1}{s} + 2 + 2s + 2 \right) = -\left(\frac{4}{s^2} + \frac{4}{s} + 8 \right)$$

o

$$V_{oc}(s) = \frac{-(8s^2 + 4s + 4)}{s(2s^2 + 4s + 1)}$$

A fin de determinar la impedancia equivalente de Thévenin, haremos cero las fuentes independientes y aplicaremos una fuente de prueba $V_T(s)$ en las

terminales del circuito abierto como se muestra en la figura 16.8d. La LVK ilustra que

$$\mathbf{V}_T(s) + \mathbf{V}_x''(s) - \frac{\mathbf{V}_x''(s)}{2} = 0$$

por que

$$-\frac{\mathbf{V}_x''(s)}{2} = \mathbf{V}_T(s)$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_T(s) &= \mathbf{I}_1(s) + \mathbf{I}_2(s) + \mathbf{I}_3(s) + \mathbf{I}_4(s) \\ &= \frac{\mathbf{V}_T(s)}{s} + \frac{\mathbf{V}_T(s) - (-\mathbf{V}_T(s))}{1} + \frac{\mathbf{V}_T(s) - (-\mathbf{V}_T(s))}{1/s} + \frac{\mathbf{V}_T(s) - (-\mathbf{V}_T(s))}{1} \\ &= \mathbf{V}_T(s) \left(\frac{1}{s} + 2 + 2s + 2 \right)\end{aligned}$$

Y de aquí,

$$\mathbf{Z}_{Th}(s) = \frac{\mathbf{V}_T(s)}{\mathbf{I}_T(s)} = \frac{s}{2s^2 + 4s + 1}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_o(s) &= \frac{\mathbf{V}_{oc}(s)}{\mathbf{Z}_{Th}(s) + 1} \quad (1) \\ &= \frac{-(8s^2 + 4s + 4)}{s(2s^2 + 5s + 1)}\end{aligned}$$

Esta función puede expresarse en la forma

$$\frac{-2(2s^2 + 1s + 1)}{s(s^2 + \frac{5}{2}s + \frac{1}{2})} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + 0.22} + \frac{K_2}{s + 2.28}$$

Resolviendo para K_0 , K_1 y K_2 en la forma ilustrada antes da

$$K_0 = -4$$

$$K_1 = 2.9$$

y

$$K_2 = -2.9$$

Por tanto,

$$v_o(t) = [-4 + 2.9e^{-0.22t} - 2.9e^{-2.28t}] u(t) \text{ V}$$

E J E M P L O 16.7

Deseamos encontrar los parámetros Y para la red de dos puertos que se muestra en la figura 16.9a. Entonces use las ecuaciones de dos puertos para encontrar $v_2(t)$ si se conecta a la entrada una fuente de corriente de $1u(t)A$.

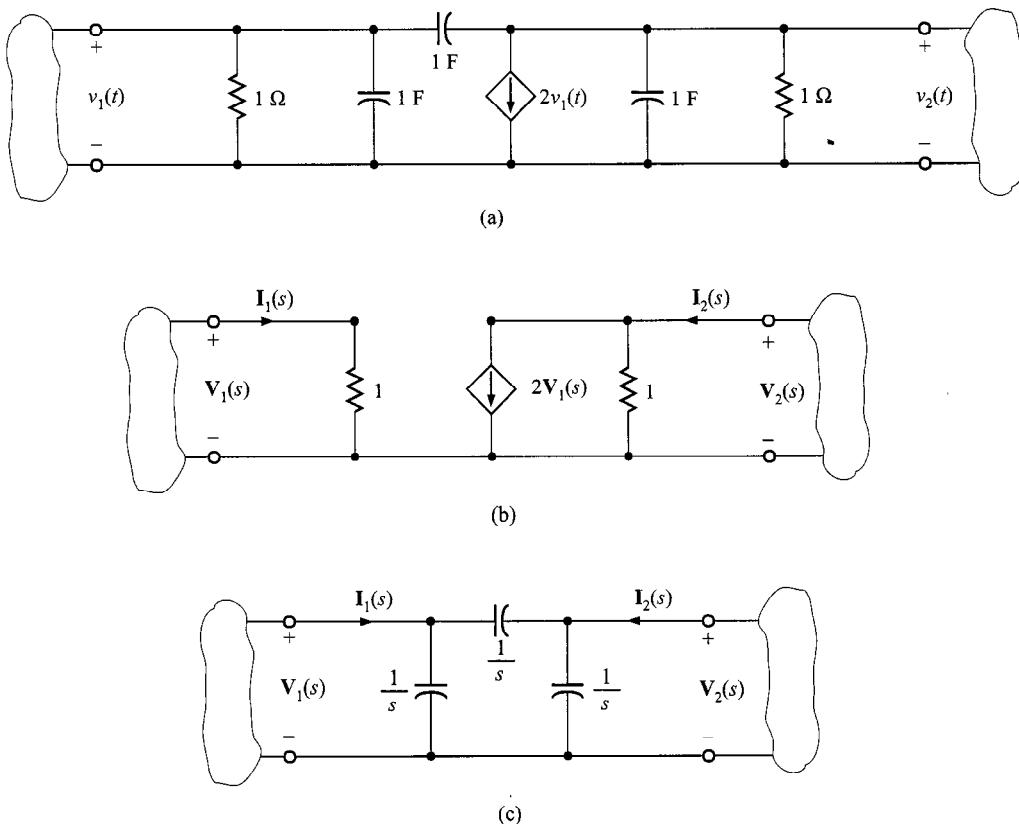


FIGURA 16.9 Circuitos utilizados en el ejemplo 16.7.

SOLUCIÓN Los parámetros Y para la red de la figura 16.9a pueden encontrarse a partir de los parámetros Y de las redes de las figuras 16.9b y c. Conectando las redes de la figura 16.9b y c en paralelo, generamos la red original de la figura 16.9a. Por tanto, calcularemos los parámetros Y para los dos puertos de la figura 16.9b y c y los sumaremos para determinar los parámetros Y para la red de la figura 16.9a.

Usando las técnicas de la sección 14.1, encontramos que los parámetros para la red de la figura 16.9b son

$$\mathbf{y}_{11}(s) = \left. \frac{\mathbf{I}_1(s)}{\mathbf{V}_1(s)} \right|_{\mathbf{V}_2(s)=0} = 1$$

$$\mathbf{y}_{12}(s) = \frac{\mathbf{I}_1(s)}{\mathbf{V}_2(s)} \Big|_{\mathbf{V}_1(s)=0} = 0$$

$$\mathbf{y}_{21}(s) = \frac{\mathbf{I}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)} \Big|_{\mathbf{V}_2(s)=0} = 2$$

$$\mathbf{y}_{22}(s) = \frac{\mathbf{I}_2(s)}{\mathbf{V}_2(s)} \Big|_{\mathbf{V}_1(s)=0} = 1$$

Por tanto,

$$\mathbf{Y}_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

En forma similar encontramos que los parámetros Y para la red de la figura 16.9c son

$$\mathbf{Y}_2(s) = \begin{bmatrix} 2s & -s \\ -s & 2s \end{bmatrix}$$

Por tanto, los parámetros Y para toda la red de la figura 16.9a son

$$\mathbf{Y}_T(s) = \begin{bmatrix} 1+2s & -s \\ 2-s & 1+2s \end{bmatrix}$$

Si se aplica una fuente de corriente de $1u(t)$ A a la entrada de la red de la figura 16.9a, las ecuaciones para la red transformada son

$$\begin{bmatrix} 2s+1 & -s \\ 2-s & 2s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{V}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{s}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

y de aquí,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{V}_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{3s^2+6s+1} \begin{bmatrix} 2s+1 & s \\ s-2 & 2s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{s}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{V}_2(s) = \frac{s-2}{s(3s^2+6s+1)}$$

que puede escribirse como

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_2(s) &= \frac{1}{3} \left[\frac{s-2}{s(s+1.82)(s+0.18)} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+1.82} + \frac{K_2}{s+0.18} \right)\end{aligned}$$

Usando los procedimientos ilustrados anteriormente, encontramos que $K_0 = -6$, $K_1 = -1.28$ y $K_2 = 7.38$. Por tanto,

$$v_2(t) = \frac{1}{3} (-6 - 1.28e^{-1.82t} + 7.38e^{-0.18t}) u(t)$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D16.1 Encuentre $i_o(t)$ en la red de la figura D16.1 usando ecuaciones nodales.

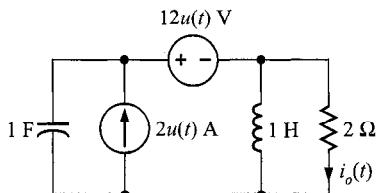


FIGURA D16.1

Resp.: $i_o(t) = 6.35e^{-t/4} \cos[(\sqrt{15}/4)t - 156.72^\circ]u(t)$ A.

D16.2 Encuentre $v_o(t)$ en la red de la figura D16.2 usando ecuaciones de malla.

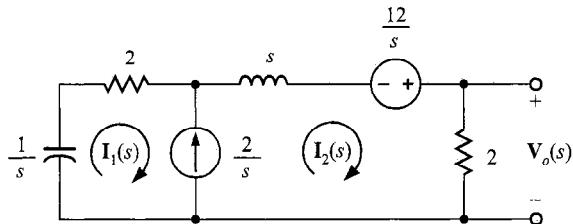


FIGURA D16.2

Resp.: $v_o(t) = (4 - 8.93e^{-3.73t} + 4.93e^{-0.27t})u(t)$ V.

D16.3 Resuelva el ejercicio de entrenamiento D16.2 usando el teorema de Thévenin.

Ilustraremos ahora el uso de la transformada de Laplace en el análisis transitorio de circuitos. Analizaremos redes como las consideradas en los capítulos 7 y 8. Nuestro método será primero determinar las condiciones iniciales para los capacitores y las bobinas de la red, y después emplearemos los modelos de los elementos que fueron especificados al inicio de este capítulo junto con las técnicas de análisis de circuitos para obtener una solución. Los siguientes ejemplos demostrarán el método.

EJEMPLO 16.8

Determinemos el voltaje de salida de la red que se muestra en la figura 16.10a.

SOLUCIÓN En $t = 0$, el voltaje inicial a través del capacitor es 1 V, y la corriente inicial extraída a través de la bobina es 1 A. El circuito para $t > 0$ se muestra en la figura 16.10b con las condiciones iniciales. La red transformada se muestra en la figura 16.10c.

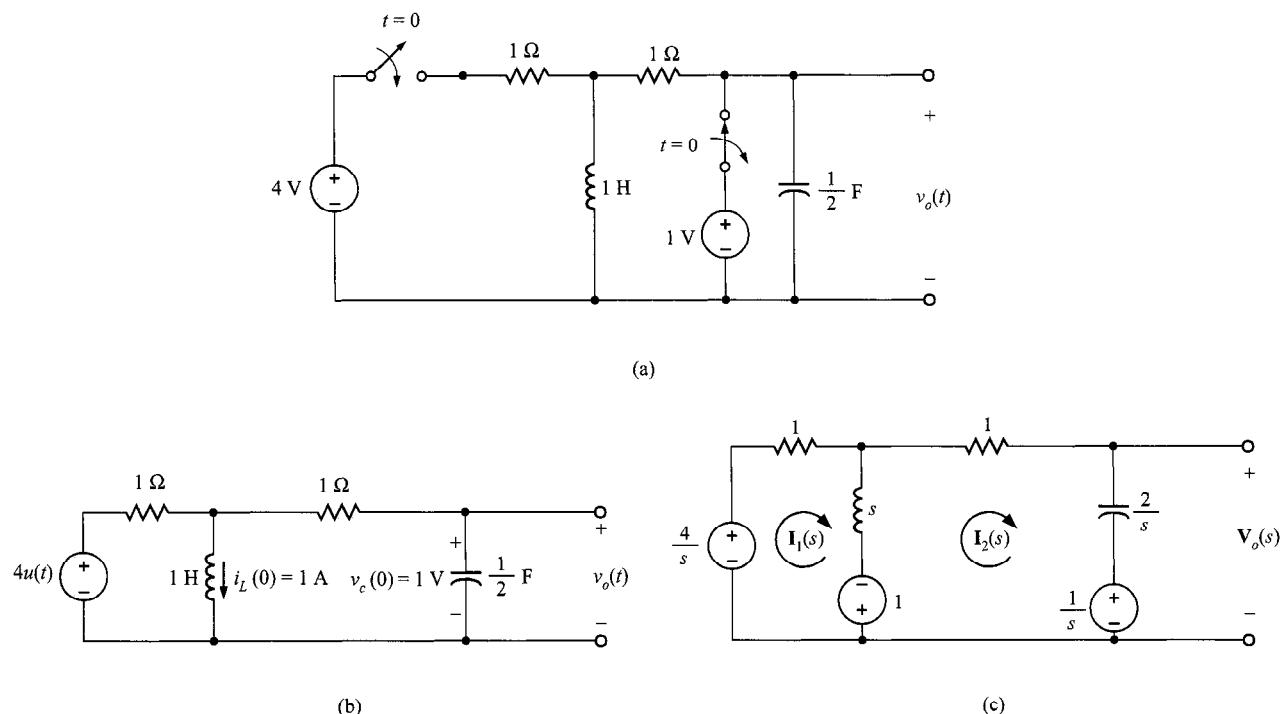


FIGURA 16.10 Circuitos empleados en el ejemplo 16.8.

Las ecuaciones de malla para la red transformada son

$$(s + 1)\mathbf{I}_1(s) - s\mathbf{I}_2(s) = \frac{4}{s} + 1$$

$$-s\mathbf{I}_1(s) + \left(s + \frac{2}{s} + 1\right)\mathbf{I}_2(s) = \frac{-1}{s} - 1$$

que pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} s+1 & -s \\ -s & \frac{s^2+s+2}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(s) \\ \mathbf{I}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s} \\ \frac{-(s+1)}{s} \end{bmatrix}$$

Resolviendo para las corrientes, obtenemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(s) \\ \mathbf{I}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & -s \\ -s & \frac{s^2+s+2}{s} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s} \\ \frac{-(s+1)}{s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{s}{2s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s^2 + s + 2 & s \\ s & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s} \\ \frac{-(s+1)}{s} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{4s^2 + 6s + 8}{s(2s^2 + 3s + 2)} \\ \frac{2s - 1}{2s^2 + 3s + 2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

El voltaje de salida es entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_o(s) &= \frac{2}{s} \mathbf{I}_2(s) + \frac{1}{s} \\
 &= \frac{2}{s} \left(\frac{2s - 1}{2s^2 + 3s + 2} \right) + \frac{1}{s} \\
 &= \frac{s + \frac{7}{2}}{s^2 + \frac{3}{2}s + 1}
 \end{aligned}$$

Esta función puede escribirse en una expansión de fracciones parciales como

$$\frac{s + \frac{7}{2}}{s^2 + \frac{3}{2}s + 1} = \frac{K_1}{s + \frac{3}{4} - j(\sqrt{7}/4)} = \frac{K_1^*}{s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)}$$

Evaluando las constantes, obtenemos

$$\frac{s + \frac{7}{2}}{s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)} \Bigg|_{s = -(3/4) + j(\sqrt{7}/4)} = K_1$$

$$2.14 \angle -76.5^\circ = K_1$$

Por tanto,

$$v_o(t) = \left[4.29 e^{-(3/4)t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t - 76.5^\circ\right) \right] u(t) \text{ V}$$

E J E M P L O 16.9

Deseamos encontrar el voltaje de salida $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura 16.11a.

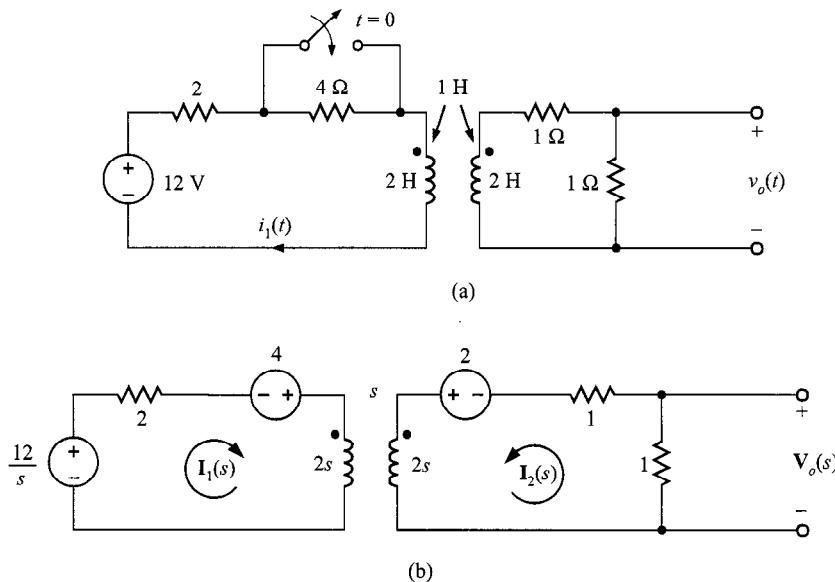


FIGURA 16.11 Circuitos utilizados en el ejemplo 16.9.

S o l u c i ó n En el estado estable antes de $t = 0$, la corriente $i_1(0)$ es

$$i_1(0) = \frac{12}{2+4} = 2 \text{ A}$$

Hence,

$$L_1 i_1(0) = 4$$

$$M i_1(0) = 2$$

Usando esos datos, obtenemos la red transformada como se muestra en la figura 16.11b. Las ecuaciones de malla para esta red son

$$(2s + 2)\mathbf{I}_1(s) + s\mathbf{I}_2(s) = \frac{12}{s} + 4$$

$$s\mathbf{I}_1(s) + (2s + 2)\mathbf{I}_2(s) = 2$$

Resolviendo esas ecuaciones para las corrientes de malla, obtenemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(s) \\ \mathbf{I}_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{3s^2 + 8s + 4} \begin{bmatrix} 2s + 2 & -s \\ -s & 2s + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4s + 12}{s} \\ 2 \end{bmatrix}$$

lo cual da

$$\mathbf{I}_2(s) = \frac{-8}{3s^2 + 8s + 4}$$

y

$$\mathbf{V}_o(s) = -1\mathbf{I}_2(s) = \frac{\frac{8}{3}}{s^2 + \frac{8}{3}s + \frac{4}{3}}$$

Esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{\frac{8}{3}}{s^2 + \frac{8}{3}s + \frac{4}{3}} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+\frac{2}{3}}$$

Resolviendo para las constantes se obtiene $K_1 = -2$ y $K_2 = 2$. Por tanto,

$$v_o(t) = 2(e^{-(2/3)t} - e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D16.4 Resuelva el problema 7.1 utilizando transformadas de Laplace.

Resp.: $v_C(t) = 4e^{-1.2t}$ V.

D16.5 Resuelva el ejercicio de entrenamiento D7.2 usando transformadas de Laplace.

Resp.: $i_1(t) = 1e^{-9t}$ A

D16.6 Resuelva el ejercicio de entrenamiento D7.4 usando transformadas de Laplace.

Resp.: $v_o(t) = 6 - \frac{10}{3}e^{-2t}$ V.

D16.7 Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura D16.7.

Resp.: $v_o(t) = 1.13(e^{-2.55t} - e^{-0.78t})u(t)$ V.

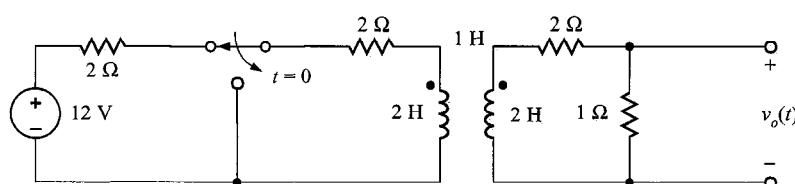


FIGURA D16.7

EJEMPLO 16.10

En este ejemplo analizamos el circuito del ejemplo 7.8 usando transformadas de Laplace. El circuito y la entrada se redibujan en la figura 16.12. Deseamos encontrar la expresión para el voltaje de salida $v_o(t)$ para $t > 0$.

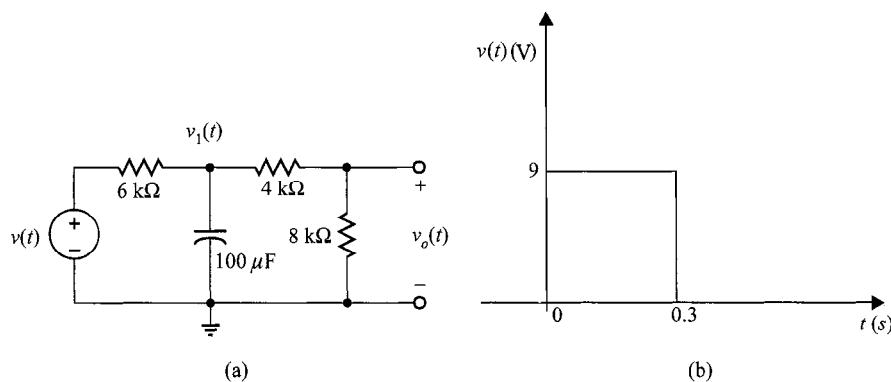


FIGURA 16.12 Red a) y entrada b) utilizada en el ejemplo 16.10.

SOLUCIÓN La LCK puede usarse para calcular el voltaje nodal $\mathbf{V}_1(s)$ y entonces puede emplearse un divisor de voltaje simple para encontrar $\mathbf{V}_o(s)$. La LCK da

$$\frac{\mathbf{V}_1(s) - \mathbf{V}(s)}{6\,000} + \frac{\mathbf{V}_1(s)}{1/10^{-4}s} + \frac{\mathbf{V}_1(s)}{12\,000} = 0$$

Resolviendo esta ecuación para $\mathbf{V}_1(s)$, obtenemos

$$\mathbf{V}_1(s) = \frac{\mathbf{V}(s)}{6\,000(10^{-4}s + 2.5 \times 10^{-4})}$$

Observe que

$$\mathbf{V}_o(s) = \frac{8\,000}{4\,000 + 8\,000} \quad \mathbf{V}_1(s)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_o(s) &= \frac{2\mathbf{V}(s)}{1.8s + 4.5} \\ &= \frac{1}{0.9} \frac{\mathbf{V}(s)}{s + 2.5}\end{aligned}$$

La expresión para $\mathbf{V}(s) = \mathcal{L}[v(t)]$, donde $v(t)$ es como se muestra en la figura 16.12b, es

$$\mathbf{V}(s) = 9 \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-0.3s}}{s} \right)$$

Sustituyendo esta ecuación en la expresión para $\mathbf{V}_o(s)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_o(s) &= \left(\frac{1}{0.9} \right) \frac{1}{s + 2.5} (9) \frac{1 - e^{-0.3s}}{s} \\ &= \frac{10(1 - e^{-0.3s})}{s(s + 2.5)}\end{aligned}$$

Como

$$\frac{10}{s(s+2.5)} = \frac{4}{s} - \frac{4}{s+2.5}$$

entonces

$$V_o(s) = \left(\frac{4}{s} - \frac{4}{s+2.5} \right) (1 - e^{-0.3s})$$

y por tanto

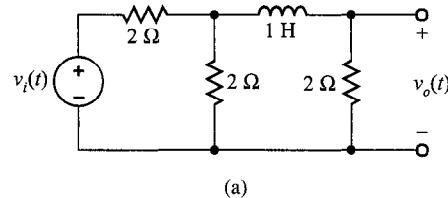
$$v_o(t) = (4 - 4e^{-2.5t})u(t) - (4 - 4e^{-2.5(t-0.3)})u(t-0.3) \text{ V}$$

Esta expresión es, por supuesto, idéntica a la obtenida en el ejemplo 7.8.

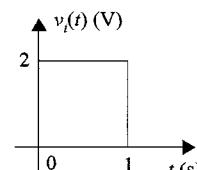
EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D16.8 Encuentre la expresión para el voltaje $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura D16.8a si la entrada es como se muestra en la figura D16.8b.

Resp.: $v_o(t) = \frac{2}{3}[(1 - e^{-3t})u(t) - (1 - e^{-3(t-1)})u(t-1)] \text{ V.}$



(a)



(b)

FIGURA D16.8

16.4 Función de transferencia

En el capítulo 13 presentamos el concepto de función de red o de transferencia. Ésta esencialmente no es más que la razón de alguna variable de salida a alguna variable de entrada. Si ambas variables son voltajes, la función de transferencia es una ganancia de voltaje. Si ambas variables son corrientes, la función de transferencia es una ganancia de corriente. Si una variable es un voltaje y la otra es una corriente, la función de transferencia se vuelve una transferencia de admitancia o impedancia.

Al derivar una función de transferencia, todas las condiciones iniciales se hacen igual a cero. Además, si la salida es generada por más de una fuente de entrada en una red, la superposición puede emplearse junto con la función de transferencia para cada fuente.

Para presentar este concepto de una manera más formal, supongamos que la relación de entrada/salida para un circuito lineal es

$$\begin{aligned} b_n \frac{d^n y_o(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y_o(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{dy_o(t)}{dt} + b_0 y_o(t) \\ = a_m \frac{d^m x_i(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x_i(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx_i(t)}{dt} + a_0 x_i(t) \end{aligned}$$

Si todas las condiciones iniciales son cero, la transformada de la ecuación es

$$\begin{aligned} (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0) \mathbf{Y}_o(s) \\ = (a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0) \mathbf{X}_i(s) \end{aligned}$$

o

$$\frac{\mathbf{Y}_o(s)}{\mathbf{X}_i(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

Esta razón de $\mathbf{Y}_o(s)$ a $\mathbf{X}_i(s)$ se llama *función de red* o *de transferencia*, que denotamos como $\mathbf{H}(s)$; es decir,

$$\frac{\mathbf{Y}_o(s)}{\mathbf{X}_i(s)} = \mathbf{H}(s)$$

o

$$\mathbf{Y}_o(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{X}_i(s) \quad (16.16)$$

Esta ecuación establece que la respuesta de salida $\mathbf{Y}_o(s)$ es igual a la función de la red multiplicada por la entrada $\mathbf{X}_i(s)$. Observe que si $x_i(t) = \delta(t)$ y, por tanto, $\mathbf{X}_i(s) = 1$, la respuesta de impulso es igual a la transformada de Laplace inversa de la función de la red. Este es un concepto extremadamente importante porque ilustra que si conocemos la respuesta de impulso de una red, podemos encontrar la respuesta debida a alguna otra función forzante usando la ecuación (16.16).

En este punto es informativo revisar brevemente la respuesta natural de redes de primer y segundo orden. Hemos demostrado en el capítulo 7 que si un solo elemento de almacenamiento está presente, la respuesta natural de una red para una condición inicial siempre es de la forma

$$x(t) = X_0 e^{-t/\tau_C}$$

donde $x(t)$ puede ser $v(t)$ o $i(t)$, X_0 es el valor inicial $x(t)$, y τ_C es la constante de tiempo de la red.

Como se ilustró en el capítulo 8, la respuesta natural de una red de segundo orden está controlada por las raíces de la *ecuación característica*, la cual es de la forma

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

donde ζ es la *razón de amortiguamiento* y ω_0 es la *frecuencia natural no amortiguada*. Esos dos factores clave, ζ y ω_0 , controlan la respuesta, y hay básicamente tres casos de interés.

Caso 1, $\zeta > 1$: Red sobreamortiguada. Las raíces de la ecuación característica son $s_1, s_2 = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$ y, por consiguiente, la respuesta de la red es de la forma

$$x(t) = K_1 e^{-(\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1})t} + K_2 e^{-(\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1})t}$$

Caso 2, $\zeta < 1$: Red subamortiguada. Las raíces de la ecuación característica son $s_1, s_2 = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$ y, por tanto, la respuesta de la red es de la forma

$$x(t) = K e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$$

Caso 3, $\zeta = 1$: Red críticamente amortiguada. Las raíces de la ecuación característica son $s_1, s_2 = -\omega_0$, y de aquí la respuesta es de la forma

$$x(t) = K_1 t e^{-\omega_0 t} + K_2 e^{-\omega_0 t}$$

Es muy importante que el lector advierta que la ecuación característica es el denominador de la función de transferencia $H(s)$, y las raíces de esta ecuación, que son los polos de la red, determinan la forma de la respuesta natural de la red.

Un método conveniente para desplegar los polos y ceros de la red en forma gráfica es el uso de una gráfica de polo-cero. Una gráfica de polo-cero de una función puede lograrse usando lo que comúnmente se llama el plano *complejo* o *plano s*. En el plano complejo la abscisa es σ y la ordenada es $j\omega$. Los ceros están representados por los polos finitos y ceros especificados por la función de la red o de respuesta, debemos señalar que una función racional debe tener el mismo número de polos y ceros. Por tanto, si $n > m$, hay $n - m$ ceros del punto a infinito, y si $n < m$, hay $m - n$ polos del punto a infinito. Un ingeniero de sistemas puede decir mucho acerca de la operación de una red o sistema simple examinando su gráfica de polo-cero.

A fin de correlacionar la respuesta natural de una red con una condición inicial con la ubicación de los polos de la red, hemos ilustrado en la figura 16.13 la correspondencia para los tres casos: sobreamortiguado, subamortiguado y críticamente amortiguado. Observe que si los polos de la red son reales y diferentes, la respuesta es lenta y, por consiguiente, a $x(t)$ le toma largo tiempo alcanzar el cero. Si los polos de la red son complejos conjugados, la respuesta es rápida; sin embargo, se pasa del límite y finalmente se amortigua. La línea divisoria entre los casos sobreamortiguado y subamortiguado es el caso críticamente amortiguado en el cual las raíces son reales e iguales. En este caso la respuesta transitoria cae tan rápidamente como es posible, sin pasarse del límite.

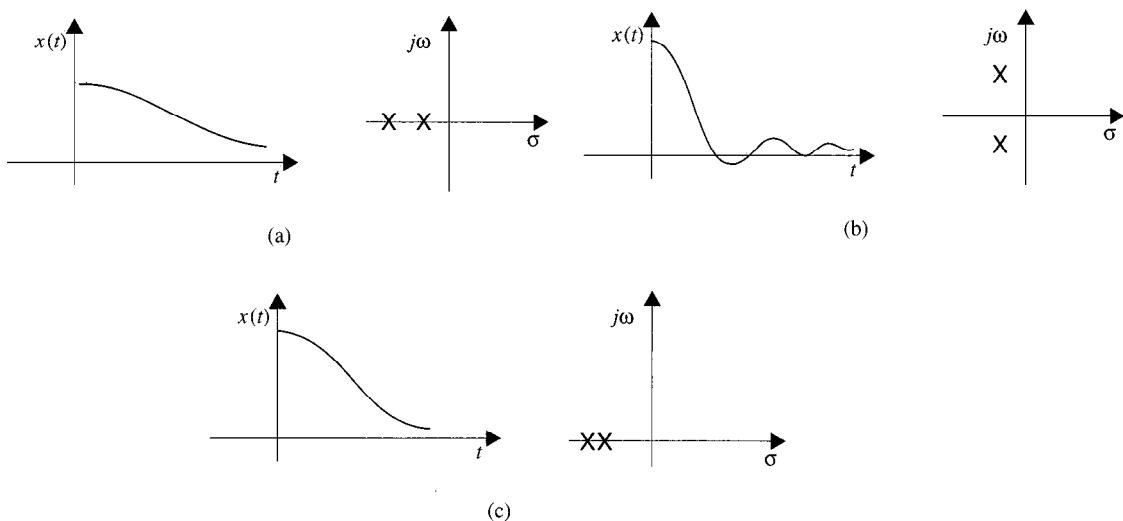


FIGURA 16.13 Respuesta natural de una red de segundo orden junto con la localización de los polos de la red para los tres casos: a) sobreamortiguado; b) subamortiguado; c) críticamente amortiguado.

EJEMPLO 16.11

Si la respuesta de impulso de una red es $h(t) = e^{-t}$, determinemos la respuesta $v_o(t)$ para una entrada $v_i(t) = 10e^{-2t}u(t)$ V.

SOLUCIÓN Las variables transformadas son

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\mathbf{V}_i(s) = \frac{10}{s+2}$$

Por tanto,

$$\mathbf{V}_o(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{V}_i(s)$$

$$= \frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

y de aquí,

$$v_o(t) = 10(e^{-t} - e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

La importancia de la función de transferencia se deriva del hecho de que ésta proporciona al ingeniero de sistemas una gran cantidad de conocimiento acerca de la operación del sistema, ya que sus propiedades dinámicas están gobernadas por los polos del sistema.

E J E M P L O 16.12

Derivemos la función de transferencia $V_o(s)/V_i(s)$ para la red de la figura 16.14a.

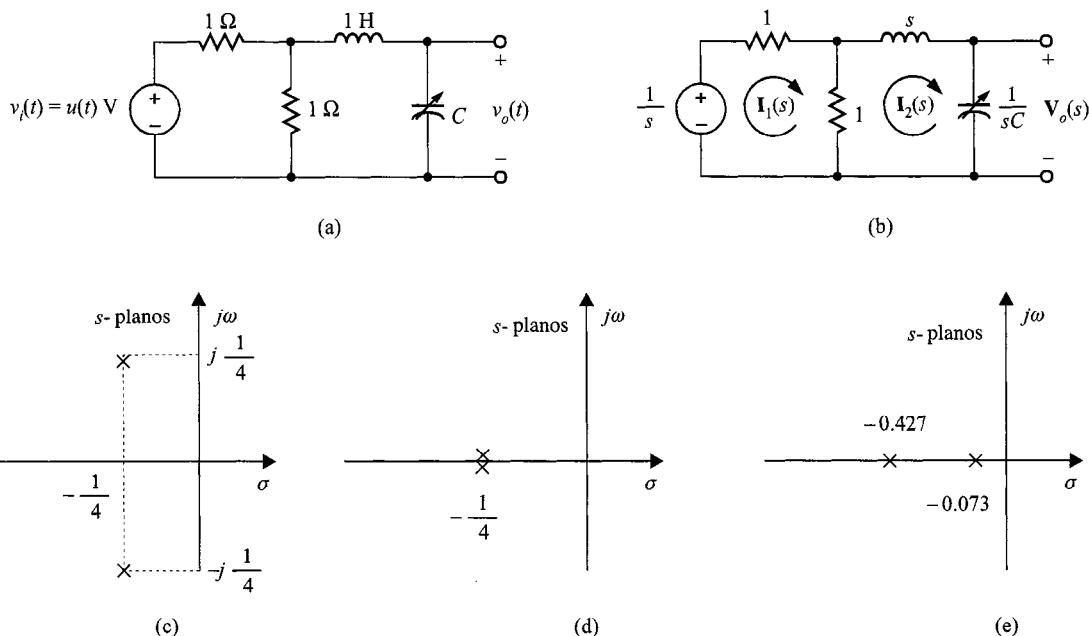


FIGURA 16.14 Redes y gráficas de polo cero utilizadas en el ejemplo 16.12.

S O L U C I Ó N Nuestra variable de salida es el voltaje a través de un capacitor variable y el voltaje de entrada es un paso unitario. La red transformada se muestra en la figura 16.14b. Las ecuaciones de anillo para la red son

$$\begin{aligned} 2\mathbf{I}_1(s) - \mathbf{I}_2(s) &= V_i(s) \\ -\mathbf{I}_1(s) + \left(s + \frac{1}{sC} + 1\right)\mathbf{I}_2(s) &= 0 \end{aligned}$$

y la ecuación de salida es

$$V_o(s) = \frac{1}{sC} \mathbf{I}_2(s)$$

En esas ecuaciones encontramos que la función de transferencia es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/2C}{s^2 + \frac{1}{2}s + 1/C}$$

Como la función de transferencia es dependiente del valor del capacitor, examinemos la función de transferencia y la respuesta de salida para tres valores del capacitor.

a) $C = 8 \text{ F}$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)} &= \frac{\frac{1}{16}}{(s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{8})} \\ &= \frac{\frac{1}{16}}{(s + \frac{1}{4} - j\frac{1}{4})(s + \frac{1}{4} + j\frac{1}{4})}\end{aligned}$$

La respuesta de salida es

$$\mathbf{V}_o(s) = \frac{\frac{1}{16}}{s(s + \frac{1}{4} - j\frac{1}{4})(s + \frac{1}{4} + j\frac{1}{4})}$$

Como se ilustró en capítulo 8, los polos de la función de transferencia, que son las raíces de la ecuación característica, son complejos conjugados, como se muestra en la figura 16.14c; por consiguiente, la respuesta de salida será *subamortiguada*. La respuesta de salida como función del tiempo es

$$v_o(t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t/4} \cos \left(\frac{t}{4} + 135^\circ \right) \right] u(t) \text{ V}$$

Observe que para valores grandes del tiempo las oscilaciones transitorias, representadas por el segundo término de la respuesta, se vuelven insignificantes y la salida se establece a un valor de $\frac{1}{2} \text{ V}$. Esto también puede verse directamente en el circuito, ya que para grandes valores del tiempo la entrada se ve como un fuente de cd, la bobina actúa como un corto circuito, el capacitor actúa como un circuito abierto y las resistencias forman un divisor de voltaje.

b) $C = 16 \text{ F}$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)} &= \frac{\frac{1}{32}}{s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{16}} \\ &= \frac{\frac{1}{32}}{(s + \frac{1}{4})^2}\end{aligned}$$

La respuesta de salida es

$$\mathbf{V}_o(s) = \frac{\frac{1}{32}}{s(s + \frac{1}{4})^2}$$

Como los polos de la función de transferencia son reales e iguales como se muestra en la figura 16.14d, la respuesta de salida será *críticamente amortiguada*. $v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{V}_o(s)]$ es

$$v_o(t) = \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{t}{8} + \frac{1}{2} \right) e^{-t/4} \right] u(t) \text{ V}$$

c) $C = 32 \text{ F}$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)} &= \frac{\frac{1}{64}}{s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{32}} \\ &= \frac{\frac{1}{64}}{(s + 0.427)(s + 0.073)} \end{aligned}$$

La respuesta de salida es

$$\mathbf{V}_o(s) = \frac{\frac{1}{64}}{s(s + 0.427)(s + 0.073)}$$

Los polos de la función de transferencia son reales y diferentes como se muestra en la figura 16.14e y, por consiguiente, la respuesta de salida será *sobreamortiguada*. La respuesta como función de tiempo es

$$v_o(t) = (0.5 + 0.103e^{-0.427t} - 0.603e^{-0.073t})u(t) \text{ V}$$

Aunque los valores seleccionados para los parámetros de la red no son muy prácticos, se recuerda al lector que el escalamiento de la magnitud y frecuencia, como se señala en el capítulo 13, también puede aplicarse aquí.

EJEMPLO 16.13

Para la red de la figura 16.15a calculemos: a) la función de transferencia, b) el tipo de amortiguamiento exhibido por la red, y c) la respuesta del paso unitario.

SOLUCIÓN Recuerde que el voltaje a través de las terminales de entrada del amp-op es 0 y, por tanto, la LCK en el nodo etiquetado como $\mathbf{V}_1(s)$ en la figura 16.15b da la siguiente ecuación:

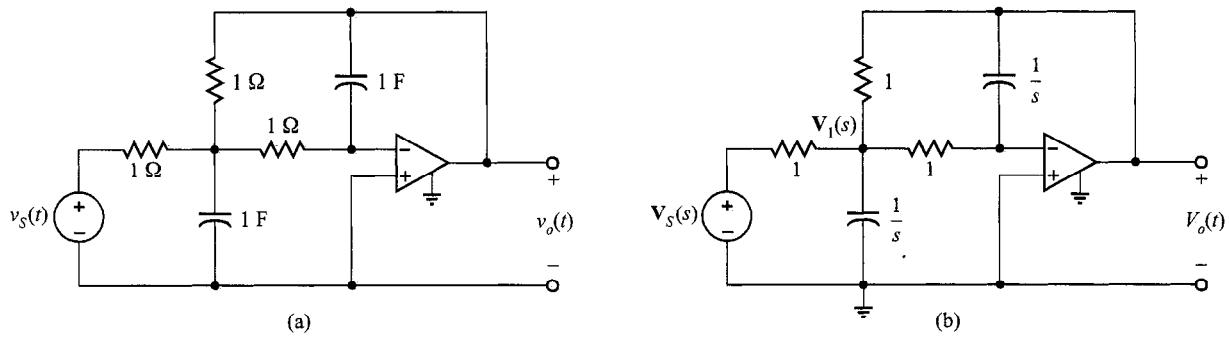


FIGURA 16.15 Circuitos utilizados en el ejemplo 16.13.

$$\frac{\mathbf{V}_s(s) - \mathbf{V}_1(s)}{1} = s\mathbf{V}_1(s) + \frac{\mathbf{V}_1(s) - \mathbf{V}_o(s)}{1} + \frac{\mathbf{V}_1(s)}{1}$$

Como la corriente en la terminal de entrada negativa del amp-op es 0, la LCK requiere que

$$s\mathbf{V}_o(s) = -\frac{\mathbf{V}_1(s)}{1}$$

Combinando las dos ecuaciones se obtiene la función de transferencia

$$\frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_s(s)} = \frac{-1}{s^2 + 3s + 1}$$

la cual se puede expresar en la forma

$$\frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_s(s)} = \frac{-1}{(s + 2.62)(s + 0.38)}$$

Como las raíces son reales y distintas, la respuesta de paso de la red será sobreamortiguada. La respuesta de paso es

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_o(s) &= \frac{-1}{s(s + 2.62)(s + 0.38)} \\ &= \frac{-1}{s} + \frac{-0.17}{s + 2.62} + \frac{1.17}{s + 0.38}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$v_o(t) = (-1 - 0.17e^{-2.62t} + 1.17e^{-0.38t})u(t) \text{ V}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D16.9 Si se conoce que la respuesta de impulso unitario de una red es $\frac{10}{9}(e^{-t} - e^{-10t})$, determine la respuesta de paso unitario.

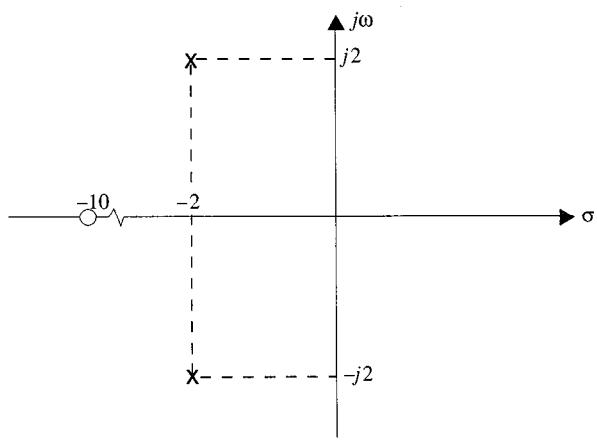
Resp. $x(t) = (1 - \frac{10}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{-10t})u(t)$.

D16.10 La función de transferencia para una red es

$$H(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 4s + 8}$$

Determine la gráfica del polocero de $H(s)$, el tipo de amortiguamiento exhibido por la red y la respuesta de paso unitario de la red.

Resp. La red es subamortiguada; $x(t) = [\frac{10}{8} + 1.46e^{-2t} \cos(2t - 210.96^\circ)]u(t)$.



Recuerde de nuestra discusión previa que si una red de segundo orden es subamortiguada, la ecuación característica de la red es de la forma

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

y las raíces de esta ecuación, que son los polos de la red, son de la forma

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Las raíces s_1 y s_2 , cuando se grafican en el plano s , generalmente aparecen como muestra la figura 16.16, donde

$$\zeta = \text{razón de amortiguamiento}$$

$$\omega_0 = \text{frecuencia natural no amortiguada}$$

y como se muestra en la figura 16.16,

$$\zeta = \cos \theta$$

Es importante para el lector notar que la razón de amortiguamiento y la frecuencia natural no amortiguada son exactamente las mismas cantidades que las empleadas en el capítulo 13 cuando se determinó la respuesta de frecuencia de la red. Encontramos que son las mismas cantidades que gobiernan la respuesta transitoria de la red.

EJEMPLO 16.14

Examinemos el efecto de la posición del polo en el plano s sobre la respuesta transitoria de la red RLC de segundo orden en serie que se muestra en la figura 16.17.

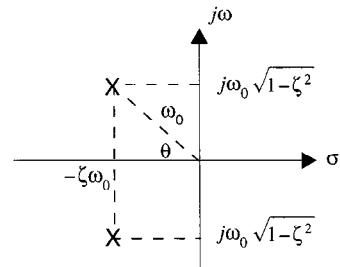
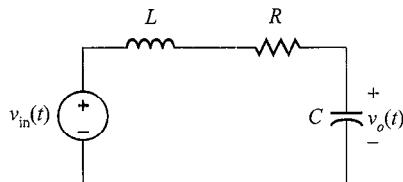


FIGURA 16.16
Localizaciones del polo para una red subamortiguada de segundo orden.

**FIGURA 16.17** Red RLC en serie.

SOLUCIÓN La función de transferencia de la ganancia de voltaje es

$$G_v(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Para este análisis hacemos $\omega_0 = 2000$ rad/segundo para $\zeta = 0.25, 0.50, 0.75$ y 1.0 . De la ecuación anterior vemos que

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2} = 2.5 \times 10^{-7}$$

y

$$R = 2\zeta \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Si arbitrariamente hacemos $L = 10$ mH, entonces $C = 25$ μ F. También para $\zeta = 0.25, 0.50, 0.75$ y 1.0 , $R = 10 \Omega, 20 \Omega, 30 \Omega$ y 40Ω , respectivamente. En el rango de los valores de ζ , la red va de subamortiguada a críticamente amortiguada. Como los polos son complejos para sistemas subamortiguados, los componentes reales e imaginarios y la magnitud de los polos de $G_v(s)$ están dados en la tabla 16.1 para los valores de ζ enlistados anteriormente.

T A B L A 16.1

Localizaciones del polo para $\zeta = 0.25$ a 1.0 .

Razón de amortiguamiento	Real	Imaginario	Magnitud
1.00	2000.0	0.0	2000.0
0.75	1500.0	1322.9	2000.0
0.50	1000.0	1732.1	2000.0
0.25	500.0	1936.5	2000.0

La figura 16.18 muestra los diagramas de polo cero para cada valor de ζ . Primero note que todos los polos yacen en un círculo; de este modo, las magnitudes del polo son constantes, consistentes con la tabla 16.1. Segundo, conforme ζ decrece, la parte real del polo disminuye mientras la parte

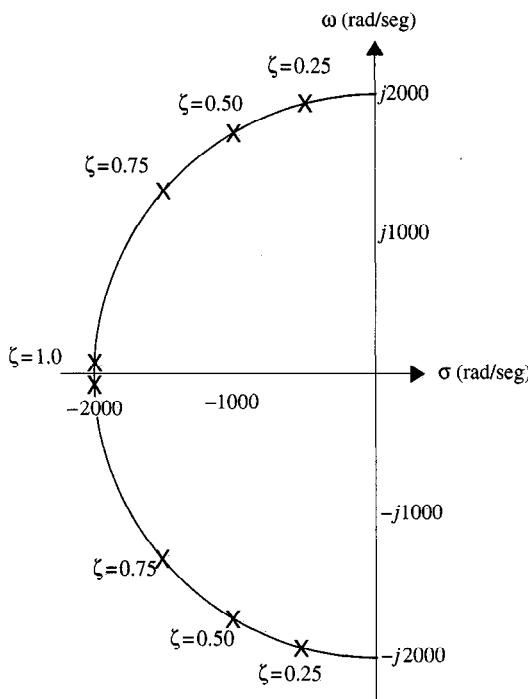


FIGURA 16.18 Diagramas de polocero para $\zeta = 0.25$ a 1.0.

imaginaria se incrementa. De hecho, cuando ζ va a cero, el polo se vuelve imaginario.

Una simulación de PSPICE de una excitación transitoria de paso unitario para los cuatro valores de R se muestra en la figura 16.19. Vemos que a medida que ζ disminuye, la respuesta excesiva en el voltaje de salida se incrementa. Además, cuando la red es críticamente amortiguada ($\zeta = 1$) no hay ninguna respuesta excesiva. En la mayoría de las aplicaciones, la respuesta excesiva no se desea. Para corregir esto, la razón de amortiguamiento, ζ , deberá incrementarse, lo cual para este circuito requerirá un incremento en el valor de la resistencia.

E J E M P L O 16.15

Reabordemos el desastre del puente Tacoma Narrows expuesto en el ejemplo 13.12. Una fotografía del puente cuando se colapsa se muestra en la figura 16.20.

En el capítulo 13 supusimos que la caída del puente fue provocada por el viento que lo hizo oscilar a una frecuencia cercana a la del propio puente (0.2Hz). Encontramos que pudimos crear un circuito RLC, que se muestra la figura 13.28 que entra en resonancia a 0.2Hz y que tiene una salida de voltaje consistente con la deflexión vertical del puente. Este tipo de resonancia forzada nunca pasó en Tacoma Narrows. El verdadero culpable no fueron las fluctuaciones del viento, sino el puente mismo. Esto se explica a fondo en el artículo "Resonance, Tacoma Narrows Bridge Failure, and Un-

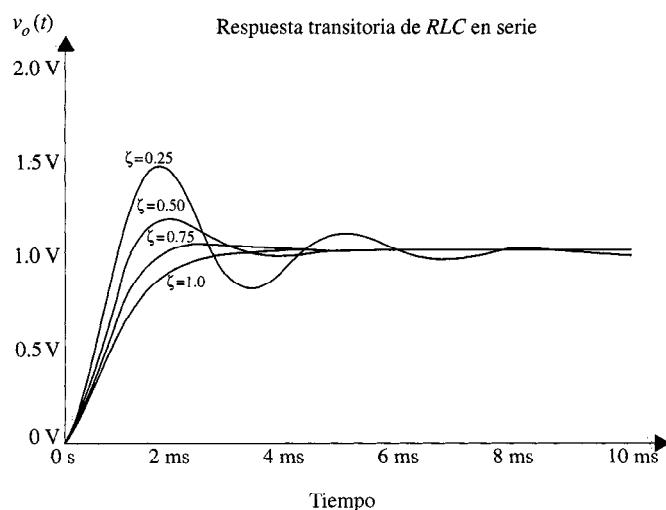


FIGURA 16.19 Salida de respuesta transitoria del PSPICE para $\zeta = 0.25$ a 1.0.



FIGURA 16.20 Puente Tacoma Narrows al colapsarse el 7 de noviembre de 1940. (Usada con permiso de la División de Colección Especial, de la Biblioteca de la Universidad de Washington. Foto de Farguharson, negativo número 12.)

dergraduate Physics Textbooks”, de K. Y. Billah y R. H. Scalan, publicado en *American Journal of Physics*, vol. 59, no. 2 pp. 118-124, en el cual los autores determinaron que los cambios en la velocidad del viento afectaron los coeficientes de la ecuación diferencial de segundo orden que modela el comportamiento resonante. En particular, la razón de amortiguamiento, ζ , fue dependiente de la velocidad del viento y está dada aproximadamente como

$$\zeta = 0.00460 - 0.00013U \quad (16.17)$$

donde U es la velocidad del viento en millas por hora. Observe, como se muestra en la figura 16.21, que ζ se vuelve negativa a velocidades del viento que exceden 35 mph —un punto que demostraremos más tarde—. Además, Billah y Scalan reportan que el puente resonó de forma torcida, lo cual puede verse fácilmente en la figura 13.28, y se describe mediante la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{d\theta(t)}{dt} + \omega_0^2\theta(t) = 0$$

o

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (16.18)$$

donde $\theta(t)$ es el ángulo de torcimiento en grados y la velocidad del viento está implícita en ζ a través de la ecuación (16.17). Billah y Scalan enlistan los siguientes datos obtenidos por observación directa en el sitio del puente o a través de experimentos con modelos a escala posteriores.

Velocidad del viento al momento de la falla ≈ 42 mph

Torsión en el momento de la falla $\approx \pm 12^\circ$

Tiempo para la falla ≈ 45 minutes

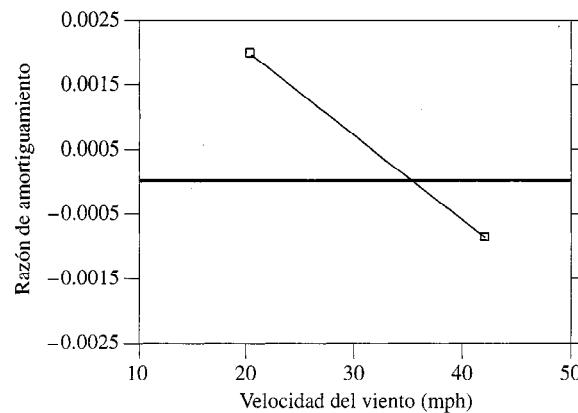


FIGURA 16.21 Razón de amortiguamiento contra velocidad del viento para un modelo de torsión de segundo orden del puente Tacoma Narrows.

Comenzaremos las oscilaciones de torsión utilizando una condición inicial en $\theta(0)$ y veremos si las oscilaciones del puente aumentan o disminuyen con el tiempo. Diseñemos ahora una red que simule el verdadero desastre de Tacoma Narrow.

SOLUCIÓN Primero resolveremos para $\ddot{\theta}(t)$ en la ecuación (16.18)

$$\ddot{\theta} = -2\zeta\omega_0\dot{\theta} - \omega_0^2\theta \quad (16.19)$$

$$\ddot{\theta} = -2(2\pi)(0.2)(0.0046 - 0.00013U)\dot{\theta} - [2(2\pi)(0.2)]^2\theta$$

o

$$\ddot{\theta} = -(0.01156 - 0.00033U)\dot{\theta} - 1.579\theta$$

Deseamos ahora modelar esta ecuación para producir un voltaje proporcional a $\ddot{\theta}(t)$. Podemos llevar a cabo esto usando el circuito de amp-op integrador que se muestra en la figura 16.22.

La operación de circuitos puede quizás entenderse mejor primero haciendo que el voltaje v_α sea proporcional a $\dot{\theta}(t)$ donde 1 volt representa 1 grado/seg². De este modo, la salida del primer integrador, v_ω , debe ser

$$v_\omega = -\frac{1}{R_\omega C_\omega} \int v_\alpha dt$$

o, ya que $R_\omega = 1 \Omega$ y $C_\omega = 1 F$,

$$v_\omega = - \int v_\alpha dt$$

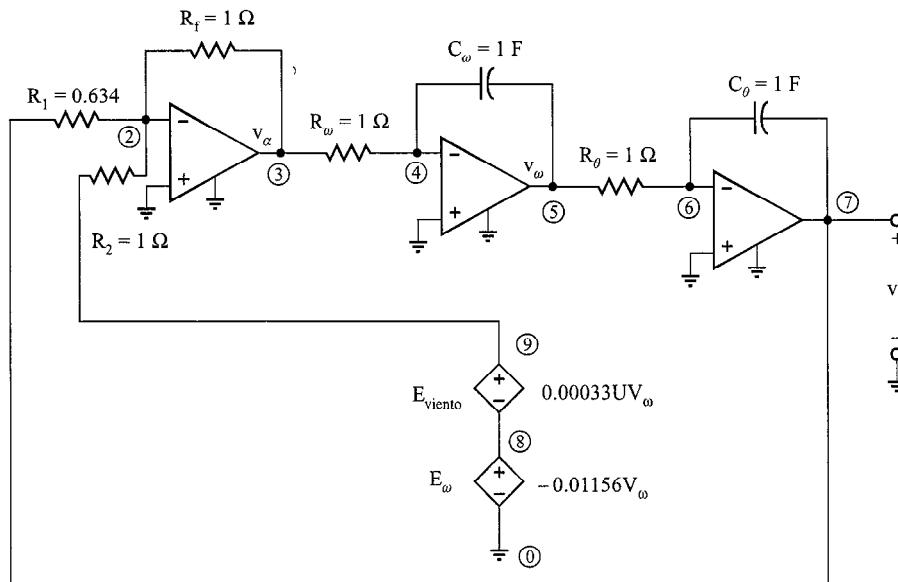


FIGURA 16.22 Diagrama del circuito para las simulaciones del puente de Tacoma Narrows.

Así que v_ω es proporcional a $-\dot{\theta}(t)$ y 1 volt es igual a -1 grado/seg. De manera similar, la salida del segundo integrador debe ser

$$v_\theta = - \int v_\omega dt$$

donde $v_\theta(t)$ es proporcional a $\theta(t)$ y 1 volt es igual a 1 grado. La salida de los integradores están entonces realimentadas como entradas al op-amp sumador. Observe que las fuentes dependientes, E_ω y E_{viento} , recrean el coeficiente en $\dot{\theta}(t)$ en la ecuación (16.17), es decir,

$$2\zeta\omega_o = (2)(0.2)(2\pi)\zeta = 0.01156 - 0.00033U$$

Para simular varias velocidades del viento, necesitamos solamente cambiar el factor de ganancia de E_{viento} . Finalmente, podemos resolver el circuito para $v_\alpha(t)$.

$$v_\alpha = - \left(\frac{R_f}{R_2} \right) (E_\omega - E_{viento}) - \left(\frac{R_f}{R_1} \right) v_\theta$$

que es igual a la ecuación (16.19) si

$$\frac{R_f}{R_1} = \omega_0^2 = [2\pi(0.2)]^2 = 1.579$$

y

$$\frac{R_f}{R_2} [E_\omega - E_{viento}] = 2\zeta\omega_o$$

o

$$\frac{R_f}{R_2} = 1$$

De este modo, si $R_f = R_2 = 1$ y $R_1 = 0.634$, el circuito simulará el movimiento de torsión del puente. Comenzaremos las oscilaciones de torsión usando una condición inicial $\theta(0)$ y veremos si las oscilaciones del puente disminuyen o aumentan en el tiempo. El programa PSPICE para el circuito de la figura 16.22 para una velocidad del viento de 20 mph y 1 grado de torsión en $t = 0$ es

```
Tacoma Narrows Bridge simulation at 20 mph
* Output proportional to twist is at node 7.
R1      2 7 0.634
R2      2 9 1
Rf      2 3 1
Eopamp1 3 0 0 2 100k
Romega  3 4 1
Comega  4 5 1
Eopamp2 5 0 0 4 100k
```

```

Rtheta 5 6 1
Ctheta 7 6 1 ic=1 ; initial twist of 1 degree
Eopamp3 7 0 0 6 100k
Eomega 8 0 0 5 0.01156
Ewind 9 8 5 0 0.00660 ; gain = 0.00033U
.tran 1 2700 uic
.probe
.end

```

El voltaje de salida correspondiente se muestra en la figura 16.23. Observe que el puente se tuerce a una frecuencia de 0.2 Hz y las oscilaciones decrecen exponencialmente indicando una situación no destructiva.

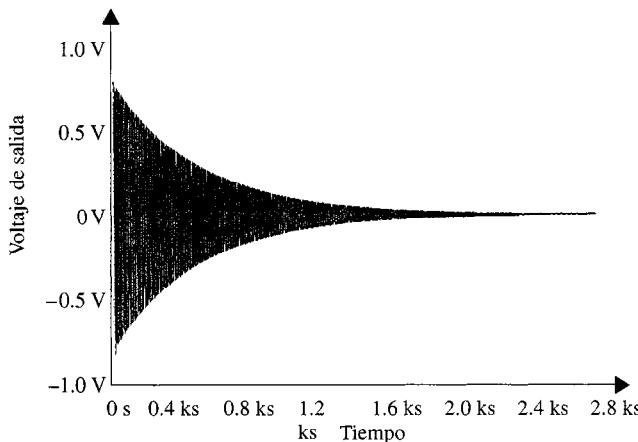


FIGURA 16.23 Simulación del puente Tacoma Narrows con velocidad del viento de 20 mph y un grado de torsión en condición inicial.

La figura 16.24 muestra la salida para vientos de 35 mph y una torsión inicial de 1 grado. Observe que las oscilaciones ni aumentan ni disminuyen. Esto indica que la razón de amortiguamiento es cero.

Finalmente, la simulación a una velocidad del viento de 42 mph y 1 grado de torsión inicial se muestra en la figura 16.25. La torsión se hace más y más pronunciada, hasta que después de 45 minutos el puente se tuerce ± 12.5 grados, lo que concuerda con los valores reportados por Billah y Scalan para el colapso.

La dependencia de la razón de amortiguamiento de la velocidad del viento también puede demostrarse investigando cómo cambian los polos del sistema con el viento. La ecuación característica para el sistema es

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

O

$$s^2 + (0.01156 - 0.00033U)s + 1.579 = 0$$

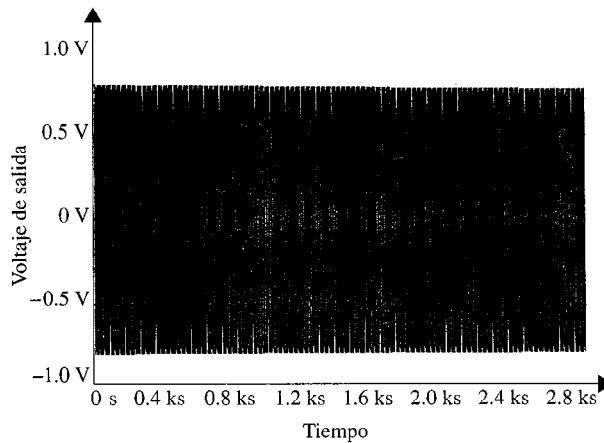


FIGURA 16.24 Simulación del puente Tacoma Narrows con velocidad del viento de 35 mph y un grado de torsión inicial.

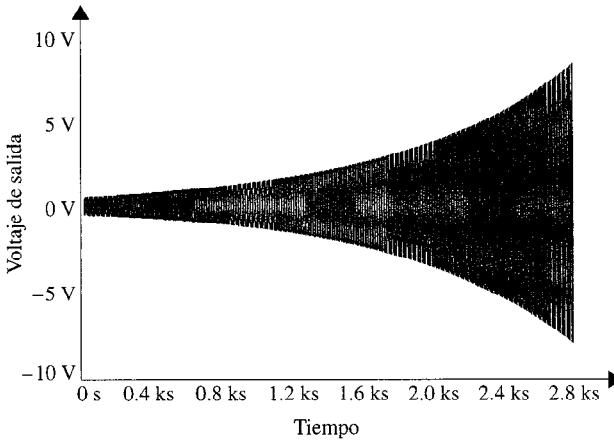


FIGURA 16.25 Simulación del puente Tacoma Narrows con velocidad del viento de 42 mph y un grado de torsión inicial.

Las raíces de la ecuación característica dan las localizaciones del polo. La figura 16.26 muestra los polos del sistema a la velocidad del viento de 20, 35 y 42 mph. Observe que a 20 mph la situación estable se muestra en la figura 16.23, y los polos están en la mitad izquierda del plano s . A 35 mph ($\zeta = 0$) los polos están sobre el eje $j\omega$ y el sistema es oscilatorio como se muestra en la figura 16.24. Finalmente, a 42 mph vemos que los polos están en la mitad derecha del plano s , y de la figura 16.25 sabemos que es un sistema inestable. Esta relación entre la localización de los polos y la respuesta transitoria es cierta para todos los sistemas —los polos del medio plano de la derecha dan como resultado sistemas inestables.

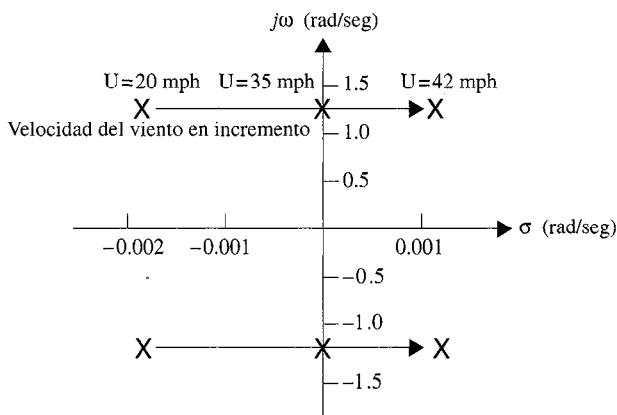


FIGURA 16.26 Gráfica de polo cero para el modelo de segundo orden del puente Tacoma Narrows con velocidad de viento de 20, 35 y 42 mph.

16.5 Conexión de las gráficas de polo cero/gráfica de Bode

En el capítulo 13 introdujimos la gráfica de Bode como una herramienta de análisis para estudios de respuesta de frecuencia senoidal. Investiguemos ahora la relación entre la gráfica de polo cero del plano s y la gráfica de Bode. Como ejemplo, considere la función de transferencia del filtro RLC pasaaltas que se muestra en la figura 16.27.

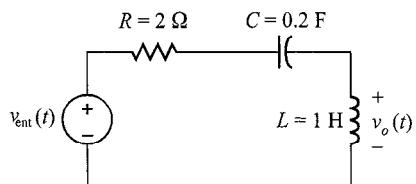


FIGURA 16.27 Filtro RLC pasaaltas.

La función de transferencia es

$$G_v(s) = \frac{sL}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{s^2}{s^2 + s\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}}$$

Usando los valores de los elementos, la función de transferencia se convierte en

$$G_v(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2s + 5} = \frac{s^2}{(s + 1 + j2)(s + 1 - j2)}$$

Vemos que la función de transferencia tiene dos ceros en el origen ($s = 0$) y dos polos complejos conjugados $s = -1 \pm j2$. La gráfica estándar de polo cero para esta función se muestra en la figura 16.28a. Una gráfica del plano s tridimensional de la magnitud de $G_v(s)$ se muestra en la figura 16.28b. Observe cuidadosamente que cuando $s = 0$, $G_v(s) = 0$, y cuando $s = -1 \pm j2$, la función es infinita.

Recordemos que la gráfica de Bode de una magnitud de la función de transferencia es en realidad una gráfica de la magnitud de la ganancia contra frecuencia. El dominio de frecuencia, donde $s = j\omega$, corresponde al eje $j\omega$ en el plano s obtenido al poner σ , la parte real de s , igual a cero. De este modo, el dominio de frecuencia corresponde directamente a la parte del dominio s , donde $\sigma = 0$, como se ilustra en la gráfica tridimensional de la figura 16.28c.

Desarrollaremos la gráfica de Bode rotando primero la figura 16.28c de modo que el eje real sea perpendicular a la página, como se muestra en la figura 16.28d. Observe que el máximo de la función de transferencia ocurre en $\omega = \sqrt{5} = 2.24$ rad/segundo, que es la magnitud de las frecuencias de polo complejo. Además, la simetría del polo alrededor del eje real llega a ser evidente con facilidad. Como resultado de esta simetría, podemos limitar nuestro análisis a valores positivos de $j\omega$, sin pérdida de información. Esta gráfica para $\omega \geq 0$ se muestra en la figura 16.28e donde se hace una gráfica de la frecuencia en Hz más que en rad/segundo. Finalmente, convirtiendo la magnitud de la función de transferencia a dB y usando un eje logarítmico para la frecuencia, producimos la gráfica de Bode de la figura 16.28f.

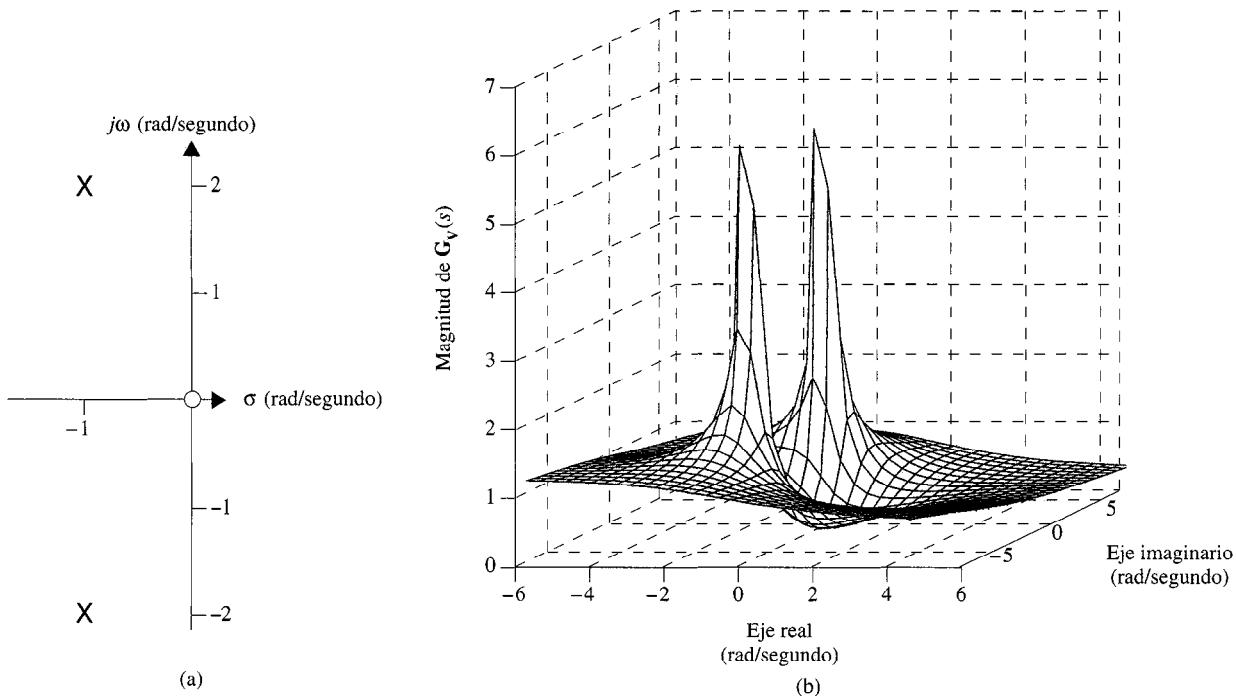
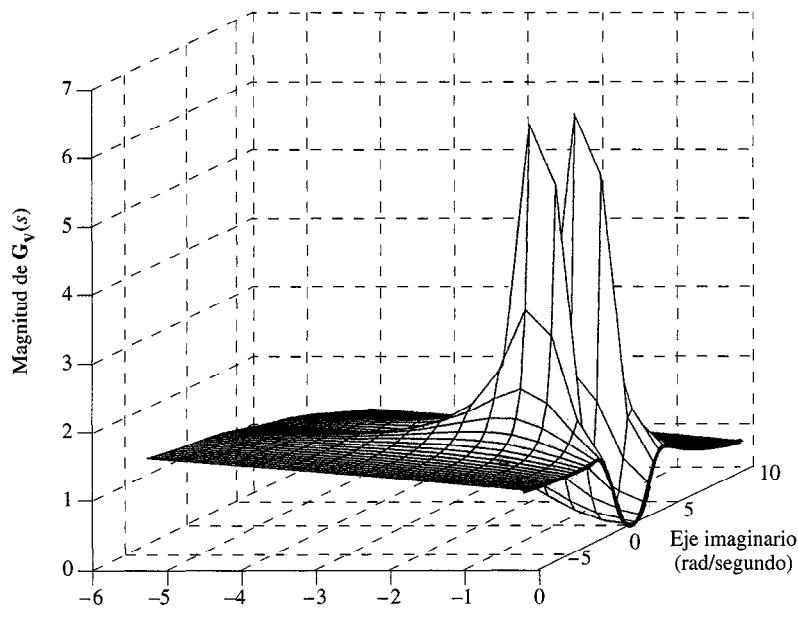
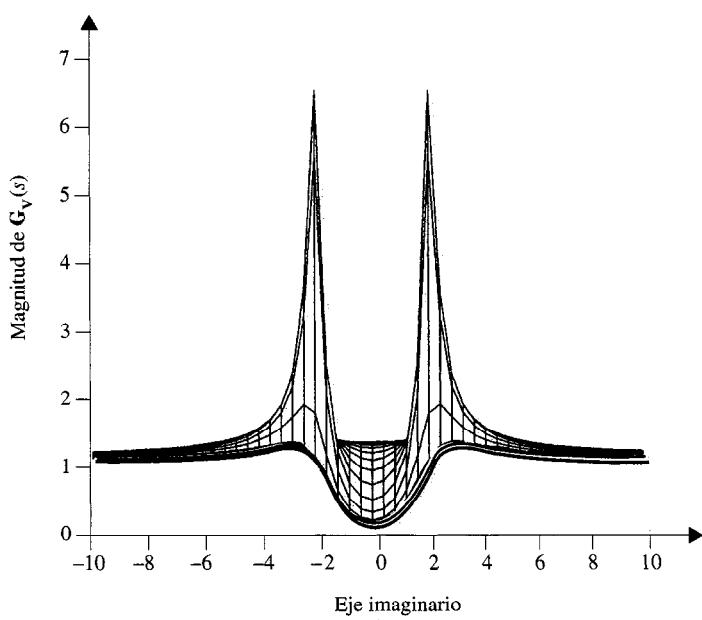


FIGURA 16.28 Figuras utilizadas para demostrar la conexión gráfica de Bode/gráfica de polo cero

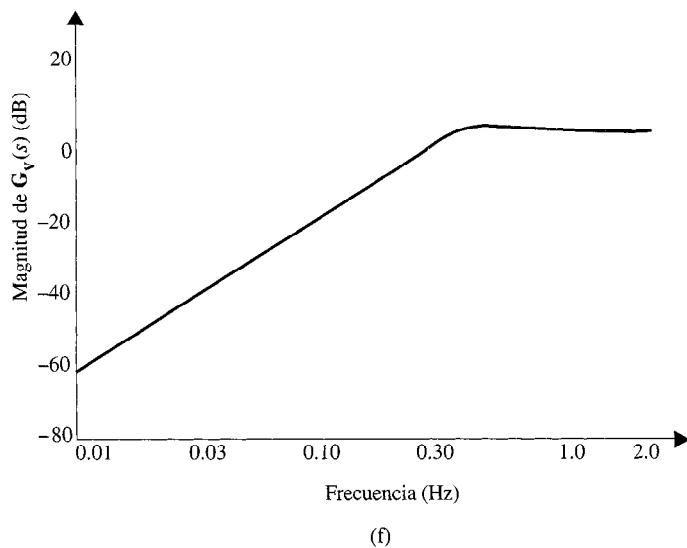
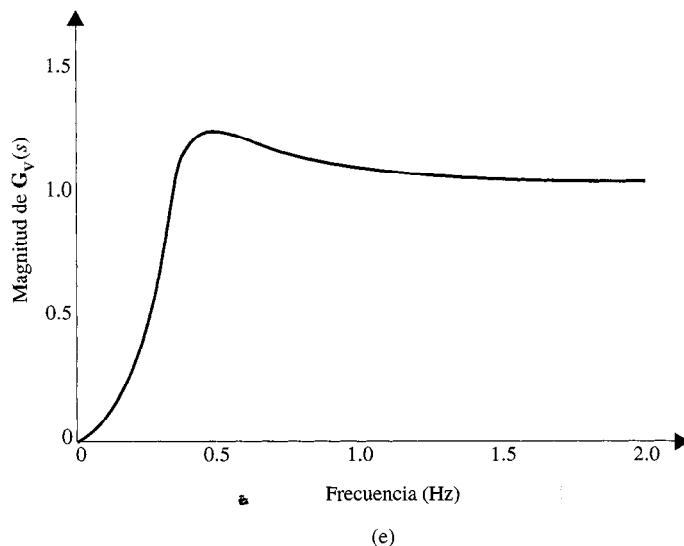


(c)



(d)

FIGURA 16.28 (Continuación).

**FIGURA 16.28 (Continuación)**

16.6 Respuesta de estado estable

En la sección 16.3 hemos demostrado, mediante varios ejemplos, el poder de la técnica de la transformada de Laplace al determinar la respuesta completa de una red. Esta respuesta completa comprende términos transitorios que desaparecen a medida que $t \rightarrow \infty$ y términos de estado estable que siempre están presentes. Examinemos ahora un método con el cual determinemos directamente la respuesta de un estado es-

table de una red. Recordemos de los ejemplos anteriores que la respuesta de la red puede escribirse como

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{X}(s) \quad (16.20)$$

donde $\mathbf{Y}(s)$ es la salida o respuesta, $\mathbf{X}(s)$ es la entrada o función forzante y $\mathbf{H}(s)$ es la función de la red o función de transferencia definida en la sección 13.1. La parte transitoria de la respuesta $\mathbf{Y}(s)$ resulta de los polos de $\mathbf{H}(s)$, y la parte de estado estable de la respuesta resulta de los polos de la función de entrada o forzante.

Como un paralelo directo a la respuesta senoidal de una red como la que se señaló en la sección 9.2, suponemos que la función forzante es de la forma

$$x(t) = X_M e^{j\omega_0 t} \quad (16.21)$$

que por la identidad de Euler puede escribirse como

$$x(t) = X_M \cos \omega_0 t + jX_M \sin \omega_0 t \quad (16.22)$$

La transformada de Laplace de la ecuación (16.21) es

$$\mathbf{X}(s) = \frac{X_M}{s - j\omega_0} \quad (16.23)$$

y por tanto,

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s) \left(\frac{X_M}{s - j\omega_0} \right) \quad (16.24)$$

En este punto tácitamente suponemos que $\mathbf{H}(s)$ no tiene ningún polo de la forma $(s - j\omega_k)$. Sin embargo, si este es el caso, simplemente encontramos dificultades al definir la respuesta de estado estable.

Llevando a cabo una expansión en fracciones parciales de la ecuación (16.24) se obtiene

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{X_M \mathbf{H}(j\omega_0)}{s - j\omega_0} + \text{términos que ocurren debido a los polos de } \mathbf{H}(s) \quad (16.25)$$

El primer término a la derecha del signo igual puede expresarse como

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{X_M |\mathbf{H}(j\omega_0)| e^{j\phi(j\omega_0)}}{s - j\omega_0} + \dots \quad (16.26)$$

ya que $\mathbf{H}(j\omega_0)$ es una cantidad compleja con una magnitud y fase que son una función de $j\omega_0$.

Llevando a cabo la transformada inversa de la ecuación (16.26), obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= X_M |\mathbf{H}(j\omega_0)| e^{j\omega_0 t} e^{j\phi(j\omega_0)} + \dots \\ &= X_M |\mathbf{H}(j\omega_0)| e^{j(\omega_0 t + \phi(j\omega_0))} + \dots \end{aligned} \quad (16.27)$$

y de aquí la respuesta de estado estable es

$$y_{ss}(t) = X_M |\mathbf{H}(j\omega_0)| e^{j(\omega_0 t + \phi(j\omega_0))} \quad (16.28)$$

Como la función forzante real es $X_M \cos \omega_0 t$, que es la parte real de $X_M e^{j\omega_0 t}$, la respuesta de estado estable es la parte real de la ecuación (16.28)

$$y_{ss}(t) = X_M |\mathbf{H}(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \phi(j\omega_0)] \quad (16.29)$$

En general, la función forzante puede tener un ángulo de fase θ . En este caso, θ simplemente se suma a $\phi(j\omega_0)$, por lo que la fase resultante de la respuesta es $\phi(j\omega_0) + \theta$.

EJEMPLO 16.16

Para el circuito que se muestra en la figura 16.29a, deseamos determinar el voltaje de estado estable $v_{os}(t)$ para $t > 0$ si las condiciones iniciales son cero.

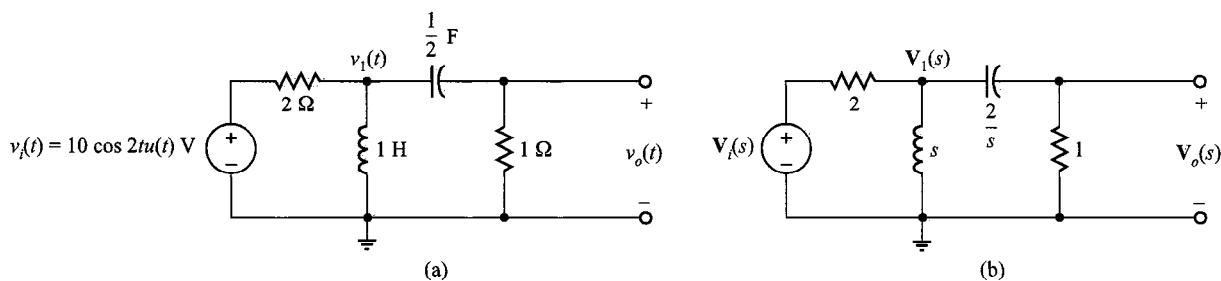


FIGURA 16.29 Circuito utilizado en el ejemplo 16.16.

SOLUCIÓN Como se ilustró anteriormente, este problema pudo resolverse usando diversas técnicas, como las ecuaciones nodales, las ecuaciones de malla, la transformación de fuentes y el teorema de Thévenin. Emplearemos las ecuaciones nodales para obtener la solución. La red transformada que usa los valores de la impedancia para los parámetros se muestra en la figura 16.29b. Las ecuaciones nodales para esta red son

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{s} + \frac{s}{2}\right) \mathbf{V}_1(s) - \left(\frac{s}{2}\right) \mathbf{V}_o(s) &= \frac{1}{2} \mathbf{V}_i(s) \\ - \left(\frac{s}{2}\right) \mathbf{V}_1(s) + \left(\frac{s}{2} + 1\right) \mathbf{V}_o(s) &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esas ecuaciones para $\mathbf{V}_o(s)$, obtenemos

$$\mathbf{V}_o(s) = \frac{s^2}{3s^2 + 4s + 4} \mathbf{V}_i(s)$$

Observe que esta ecuación es de la forma de la ecuación (16.20), donde $\mathbf{H}(s)$ es

$$\mathbf{H}(s) = \frac{s^2}{3s^2 + 4s + 4}$$

Como la función forzante es $10 \cos 2t u(t)$, entonces $V_M = 10$ y $\omega_0 = 2$. De aquí,

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(j2) &= \frac{(j2)^2}{3(j2)^2 + 4(j2) + 4} \\ &= 0.354 \angle 45^\circ\end{aligned}$$

Por tanto,

$$|\mathbf{H}(j2)| = 0.354$$

$$\phi(j2) = 45^\circ$$

y de aquí, la respuesta de estado fijo es

$$\begin{aligned}v_{oss}(t) &= V_M |\mathbf{H}(j2)| \cos[2t + \phi(j2)] \\ &= 3.54 \cos(2t + 45^\circ)\end{aligned}$$

La respuesta completa (transitoria más estado estable) puede obtenerse de la expresión

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_o(s) &= \frac{s^2}{3s^2 + 4s + 4} \mathbf{V}_i(s) \\ &= \frac{s^2}{3s^2 + 4s + 4} \left(\frac{10s}{s^2 + 4} \right) \\ &= \frac{10s^3}{(s^2 + 4)(3s^2 + 4s + 4)}\end{aligned}$$

Al determinar la transformada de Laplace inversa de esta función usando las técnicas del capítulo 15, obtenemos

$$v_o(t) = 3.54 \cos(2t + 45^\circ) + 1.44e^{-(2/3)t} \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}t - 55^\circ\right) V$$

Observe que conforme $t \rightarrow \infty$ el segundo término se aproxima a cero, y de este modo la respuesta de estado estable es

$$v_{oss}(t) = 3.54 \cos(2t + 45^\circ) V$$

la cual puede ser fácilmente comprobada usando un análisis fasorial.

Es interesante notar que podemos usar una gráfica de polo-zero para determinar la magnitud y fase de una función $\mathbf{F}(s)$ en alguna frecuencia específica ω . El siguiente ejemplo ilustra la técnica gráfica.

E J E M P L O 16.17

Dada una red que tiene la función de transferencia de voltaje

$$G_v(s) = \frac{20s(s+1)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

Dibujemos la gráfica de polo cero para esta función y encontremos gráficamente la magnitud y fase en $s = j4$ r/s.

S o l u c i ó n La función de transferencia puede escribirse en la forma

$$G_v(s) = \frac{20s(s+1)}{(s+3)(s+2+j2)(s+2-j2)}$$

la cual tiene la gráfica de polo cero que se muestra en la figura 16.30a. Examinemos el término $s + 3$. En la frecuencia deseada $s = j4$, este término se vuelve $3 + j4$ que tiene una magnitud de

$$C = |3 + j4| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

y un ángulo de fase de

$$\theta_C = \angle 3 + j4 = \tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right) = 53.1^\circ$$

de esta forma el término $(s + 3)$ evaluado en $s = j4$ es

$$(s + 3)|_{s=j4} = C \angle \theta_C = 5 \angle 53.1^\circ$$

Este término está representado por el vector apropiado que se muestra en la figura 16.30b. Usando esta técnica para representar los términos restantes, encontramos que

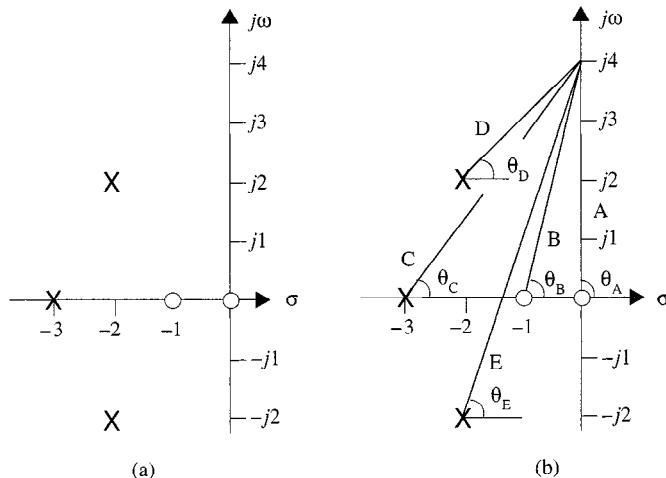


FIGURA 16.30 Gráficas de polo cero para el ejemplo 16.17.

$$G_v(j4) = \frac{20(A \angle \theta_A)(B \angle \theta_B)}{(C \angle \theta_C)(D \angle \theta_D)(E \angle \theta_E)}$$

donde cada vector en ecuación se muestra en la figura 16.30b. Usando el valor para cada vector obtenemos

$$\begin{aligned} G_v(j4) &= \frac{20(4 \angle 90^\circ)(4.12 \angle 75.96^\circ)}{(5 \angle 53.13^\circ)(6.32 \angle 71.57^\circ)(2.83 \angle 45^\circ)} \\ &= 3.7 \angle -3.7^\circ \end{aligned}$$

y de aquí que el valor de $G_v(s)$ en $s = j4$ es $3.69 \angle -3.7^\circ$.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D16.11 Determine el voltaje de estado estable $v_{oss}(t)$ en la red de la figura D16.11 para $t > 0$ si las condiciones iniciales en la red son cero.

Resp.: $v_{oss}(t) = 3.95 \cos(2t - 99.46^\circ)$ V.

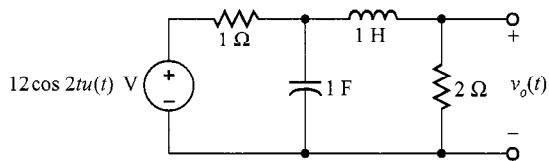


FIGURA D16.11

16.7 Aplicaciones

EJEMPLO 16.18

Como se mencionó en la sección 13.8, la Asociación de la Industria de Grabación de América (RIAA) utiliza la grabación estandarizada y filtros de reproducción para mejorar la calidad de las grabaciones de los discos fonográficos. Este proceso se demuestra en la figura 16.31. Durante una sesión de grabación, la voz o señal musicales pasada a través del filtro de grabación, que quita fuerza al contenido de los bajos. Esta señal filtrada se graba entonces en el vinilo. En la reproducción, la aguja fonográfica percibe el mensaje grabado y reproduce la señal filtrada, que pasa al filtro de reproducción. El propósito del filtro de reproducción es dar fuerza al contenido de los bajos y reconstruir la señal de voz/música original. A continuación, la señal reconstruida puede ser amplificada y enviada a las bocinas.

Examinemos los diagramas de polo cero para los filtros de grabación y reproducción.

SOLUCIÓN La función de transferencia para el filtro de grabación es

$$G_{vR}(s) = \frac{K(1 + s\tau_{z1})(1 + s\tau_{z2})}{1 + s\tau_p}$$

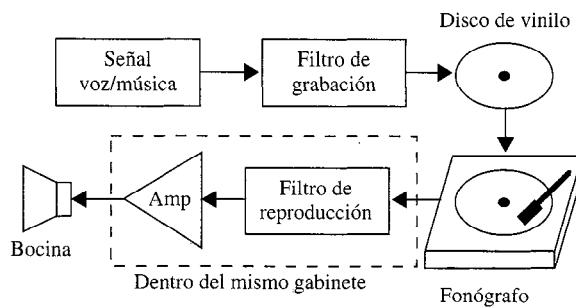


FIGURA 16.31 Diagrama a bloques para grabación y reproducción de discos fonográficos

donde las constantes de tiempo son $\tau_{z1} = 75 \mu\text{s}$, $\tau_{z2} = 3180 \mu\text{s}$, y $\tau_p = 318 \mu\text{s}$ y K es una constante elegida de modo que G_{vR} tenga una magnitud de 1 a 1 000 Hz. Las frecuencias resultantes de polo y cero en radianes/segundos son

$$\omega_{z1} = 1/\tau_{z1} = 13.33 \text{ kr/s}$$

$$\omega_{z2} = 1/\tau_{z2} = 314.46 \text{ r/s}$$

$$\omega_p = 1/\tau_p = 3.14 \text{ kr/s}$$

La figura 16.32a muestra el diagrama de polocero para el filtro de grabación.

La función de transferencia del filtro de reproducción es el recíproco de la función de transferencia de grabación.

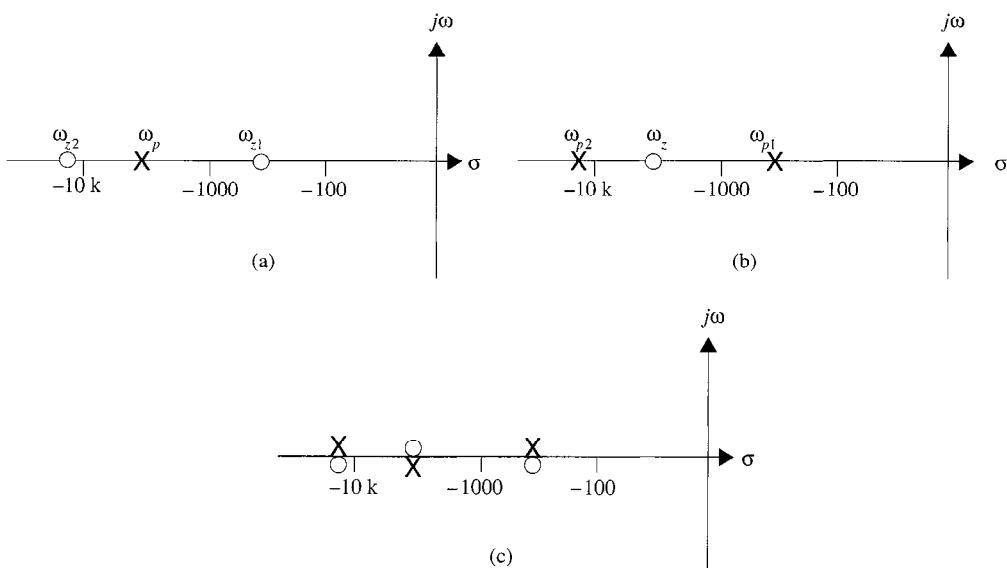


FIGURA 16.32 Diagramas de polo cero para filtros fonográficos RIAA.

$$\frac{G_{vP}(s)}{G_{vR}(s)} = \frac{A_o(1+s\tau_z)}{(1+s\tau_{p1})(1+s\tau_{p2})}$$

donde las constantes de tiempo son ahora $\tau_{p1} = 75 \mu s$, $\tau_{p2} = 3180 \mu s$, $\tau_z = 318 \mu s$ y A_o is $1/K$. Las frecuencias de polo y cero en radianes/segundo son

$$\omega_{p1} = 1/\tau_{z1} = 13.33 \text{ kr/s}$$

$$\omega_{p2} = 1/\tau_{z2} = 314.46 \text{ r/s}$$

$$\omega_z = 1/\tau_p = 3.14 \text{ kr/s}$$

que dan el diagrama de polo cero de la figura 16.32b. La señal de voz/música finalmente pasa a través de ambos filtros antes de pasar al amplificador. En el dominio s , esto es equivalente a multiplicar $V_s(s)$ por $G_{vR}(s)$ y $G_{vP}(s)$. En el diagrama de polo cero, simplemente superimpondremos los diagramas de polo cero de los dos filtros como se muestra en la figura 16.32c. Observe que en cada frecuencia de polo hay un cero y viceversa. Los pares de polo cero se cancelan entre sí dando un diagrama de polo cero que no contiene polos o ceros. Este efecto puede verse matemáticamente multiplicando las dos funciones de transferencia, $G_{vR}(s)G_{vP}(s)$, lo que da un producto independiente de s . De este modo, la señal original de voz/música se reconstruye y la fidelidad se preserva.

16.8 Diseño de circuitos

EJEMPLO 16.19

En una red de computadoras grande, dos computadoras están transfiriendo datos digitales por un solo alambre a una razón de 1000 bits/segundo. La forma de onda del voltaje, v_{datos} , en la figura 16.33 muestra una secuencia posible de bits que alternan entre valores “altos” y “bajos”. Presente también en el medio está una fuente de 100 kHz (628 krad/segundo) de ruido que corrompe los datos.

Es necesario filtrar el ruido sin destruir la forma de onda de los datos. Coloquemos el filtro pasa, bajas activo de segundo orden de la figura 16.34 en la trayectoria de los datos, de modo que los datos y las señales de ruido pasen a través de éste.

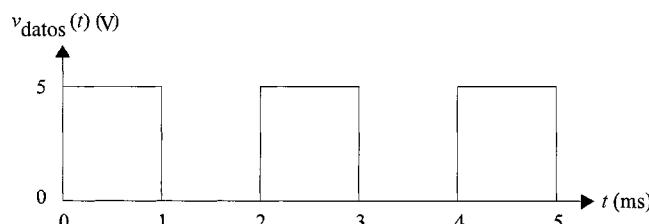
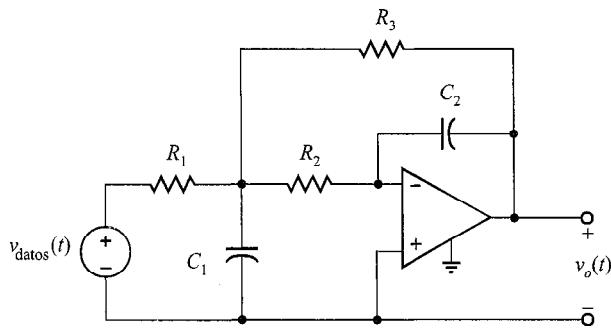


FIGURA 16.33 Forma de onda de datos digitales a 1000 bits/segundos.

**FIGURA 16.34** Filtro pasabajas de segundo orden.

SOLUCIÓN Se encuentra que la función de transferencia del filtro será

$$G_v(s) = \frac{V_o(s)}{V_{datos}(s)} = \frac{-\left(\frac{R_3}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}\right)}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_3 C_1}\right) + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

Para simplificar nuestro trabajo, sean $R_1 = R_2 = R_3 = R$. De nuestro trabajo en el capítulo 13, sabemos que la ecuación característica de un sistema de segundo orden puede expresarse como

$$s^2 + 2s\zeta\omega_o + \omega_o^2 = 0$$

Comparando las dos ecuaciones anteriores, encontramos que

$$\omega_o = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$$

$$2\zeta\omega_o = \frac{3}{RC_1}$$

y por tanto,

$$\zeta = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$$

Los polos del filtro están en

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_o \pm \omega_o\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Para eliminar el ruido de 100 kHz, al menos un polo deberá estar por debajo de 100 kHz como se muestra en la gráfica de Bode esbozada en la figura 16.35. Colocando un polo por debajo de 100 kHz, la ganancia del filtro será completamente pequeña a 100 kHz, filtrando efectivamente el ruido.

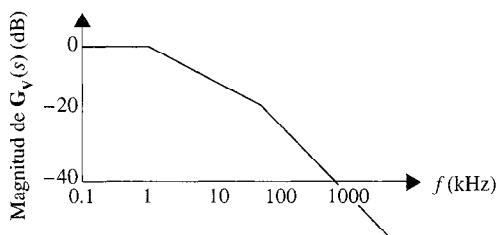


FIGURA 16.35 Esbozo del diagrama de Bode para un filtro pasabajas de segundo orden.

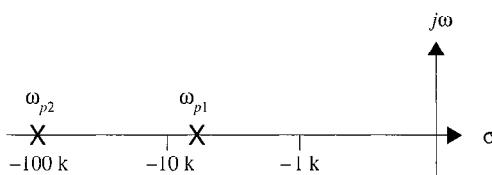


FIGURA 16.36 Diagrama polo cero para un filtro de pasabajas.

Si arbitrariamente elegimos un sistema sobreamortiguado con $\omega_0 = 25 \text{ krad/segundo}$ y $\zeta = 2$, el filtro resultante es sobreamortiguado con polos en $s_1 = -6.7 \text{ krad/segundo}$ y $s_2 = -93.3 \text{ krad/segundo}$. El diagrama de polo cero para el filtro se muestra en la figura 16.36.

Si hacemos $R = 40 \text{ k}\Omega$, entonces podemos escribir

$$\omega_o = 25000 = \frac{1}{40000\sqrt{C_1 C_2}}$$

O

$$C_1 C_2 = 10^{-18}$$

También,

$$\zeta = 2 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$$

la cual puede expresarse como

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{16}{9}$$

Resolviendo para C_1 y C_2 se obtiene

$$C_1 = 0.75 \text{ nF}$$

$$C_2 = 1.33 \text{ nF}$$

La figura 16.37 muestra el circuito de PSPICE para simular el filtro donde la senoide de 100 kHz simula la fuente de ruido.

El programa de PSPICE es

```
Second order filter for data transfer
VDATA 1 0 PULSE (0 5 0 1N 1N 1M 2M)
VNOISE 2 1 SIN (0 2 100K 0 0 0)
R1 2 3 40K
```

```

R2 3 4 40K
R3 3 6 40K
C1 3 0 0.75N
C2 4 6 1.33N
* OP AMP MODEL
RIN 4 0 1MEG
EGAIN 5 0 0 4 100K
RO 5 6 50
.TRAN 100U 2M
.PROBE
.END

```

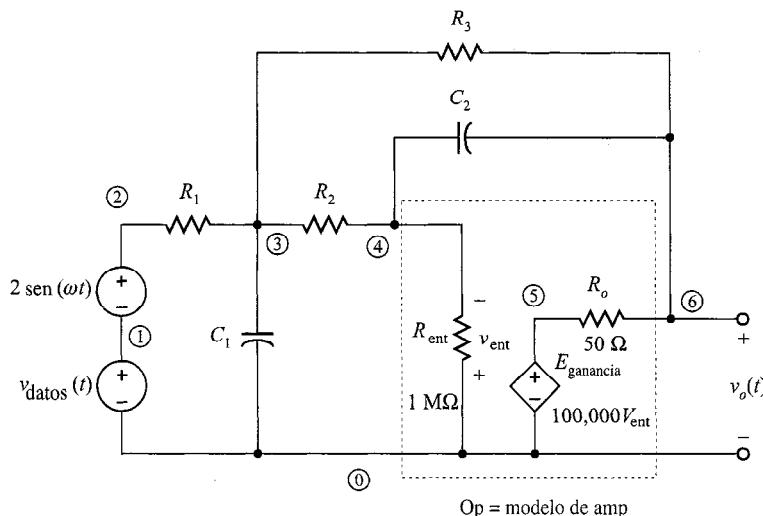


FIGURA 16.37 Circuito del PSPICE para el filtro de segundo orden.

En la figura 16.38 se muestran gráficas para la entrada al filtro y para el voltaje de salida para 2 mseg. Observe que la entrada realmente contiene mucho menos del ruido de 100 kHz. También los tiempos de rápido ascenso y caída de la señal de datos son más lentos en el voltaje de salida. Haciendo caso omiso de esta respuesta más lenta, el voltaje de salida es suficientemente rápido para mantener el ritmo con la velocidad de transferencia de 1 000 bits/segundo.

Incrementemos la velocidad de transferencia de datos de 1 000 a 25 000 bits/seg, como se muestra en la figura 16.39.

Una nueva simulación de PSPICE requiere que cambiemos el comando de v_{datos} como sigue.

```
VDATA 1 0 PULSE(0 5 0 1N 1N 40U 80U)
```

La señal de entrada y salida total tiene una gráfica en la figura 16.40 para 200 μ s. Ahora la salida no puede mantener el ritmo con la entrada y la información de datos se pierde. Investiguemos por qué ocurre esto. Sabemos que el filtro es de segundo orden con polos en s_1 y s_2 . Si representamos la

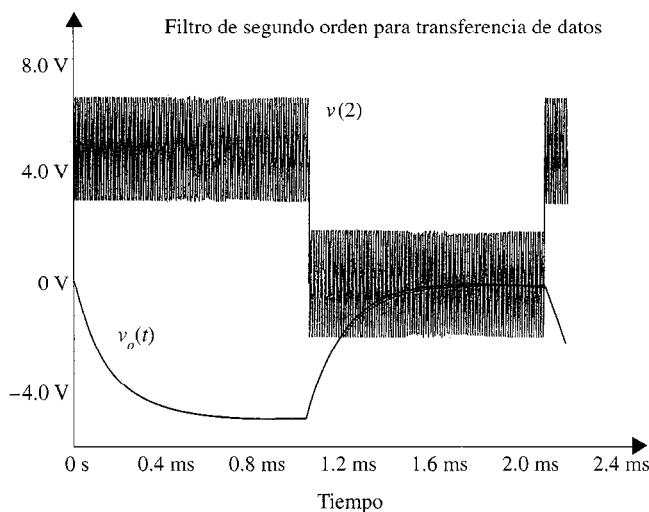


FIGURA 16.38 Salidas del PSPICE para el nodo 2 y $v_o(t)$.

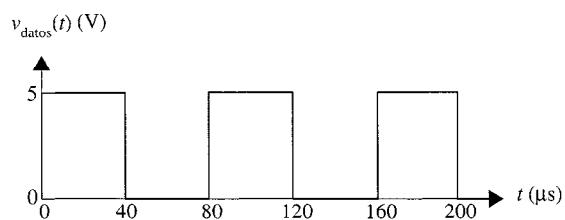


FIGURA 16.39 Forma de onda de datos digitales a 25 000 bits/seg.

entrada de datos como una función de paso de 5 V, el voltaje de salida es

$$V_o(s) = G_v(s) \left(\frac{5}{s}\right) = \frac{K}{(s + s_1)(s + s_2)} \left(\frac{5}{s}\right)$$

donde K es una constante. Como el filtro es sobreamortiguado, s_1 y s_2 son reales y positivas. Una expansión en fracciones parciales de $V_o(s)$ es de la forma

$$V_o(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s + s_1)} + \frac{K_3}{(s + s_2)}$$

dando la expresión del dominio del tiempo

$$v_o(t) = [K_1 + K_2 e^{-s_1 t} + K_3 e^{-s_2 t}] u(t)$$

donde K_1 , K_2 y K_3 son constantes reales. Las constantes de tiempo exponenciales son los recíprocos de las frecuencias de los polos.

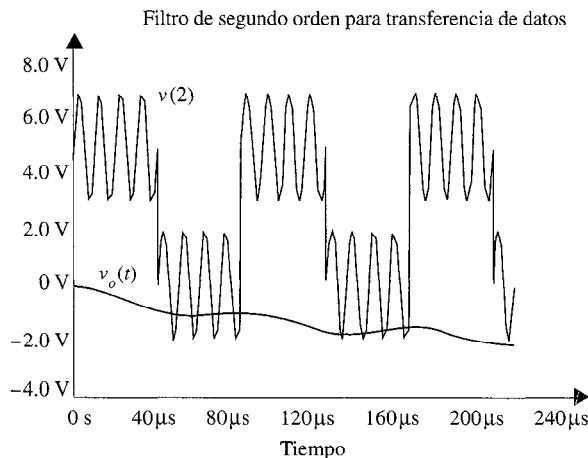


FIGURA 16.40 Salida del PSPICE para el nodo 2 y $v_o(t)$ con velocidad de transferencia de datos de 25 000 bits/seg.

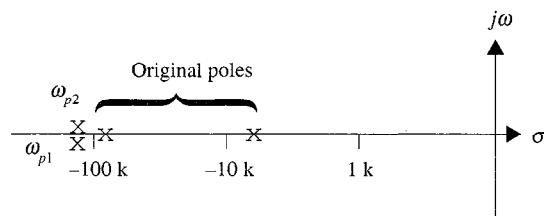


FIGURA 16.41 Diagrama de polo cero para el sistema original y críticamente amortiguado.

$$\tau_1 = \frac{1}{s_1} = \frac{1}{6.7K} = 149 \mu\text{s}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{s_2} = \frac{1}{93.3K} = 10.7 \mu\text{s}$$

Como las exponentiales alcanzan el estado estable en aproximadamente 5τ , la exponencial asociada con τ_2 afecta la salida en cerca de 50 μs y la exponencial en τ_1 alcanzará el estado estable después de cerca de 750 μs . De la figura 16.39 vemos que a una velocidad de transferencia de datos de 25 000 bits/seg, cada bit (un valor de voltaje “alto” o “bajo”) ocupa un lapso de tiempo de 40 μs . Por tanto, la exponencial asociada con s_1 , y de este modo $v_o(t)$, está aún lejos de su condición de estado estable cuando el siguiente bit se transmite. En pocas palabras, s_1 es demasiado pequeño.

Remediamos esta situación incrementando las frecuencias de los polos y cambiando a un sistema críticamente amortiguado, $\zeta = 1$. Si seleccionamos $\omega_o = 125$ krad/seg, los polos estarán en $s_1 = s_2 = -125$ krad/seg o 19.9 KHz —ambos por debajo del ruido de 100 KHz que deseamos filtrar—. La figura 16.41 muestra que las nuevas posiciones de los polos se movieron a la izquierda de sus posiciones iniciales, lo cual esperamos que genere una respuesta más rápida del tren de pulsos v_{datos} .

Ahora las expresiones para ω_o y ζ son

$$\omega_o = 125\,000 = \frac{1}{40\,000\sqrt{C_1 C_2}}$$

o

$$C_1 C_2 = 4 \times 10^{-20}$$

También

$$\zeta = 1 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$$

la cual puede expresarse como

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{4}{9}$$

Resolviendo para C_1 y C_2 se obtiene

$$C_1 = 300 \text{ pF}$$

$$C_2 = 133.3 \text{ pF}$$

Una simulación que usa esos nuevos valores de capacitores produce los datos de entrada y salida de la figura 16.42. Ahora el voltaje de salida alcanza los niveles “alto” y “bajo” justo antes que v_{datos} haga su siguiente transmisión y el ruido de 100 kHz se reduce aún más.

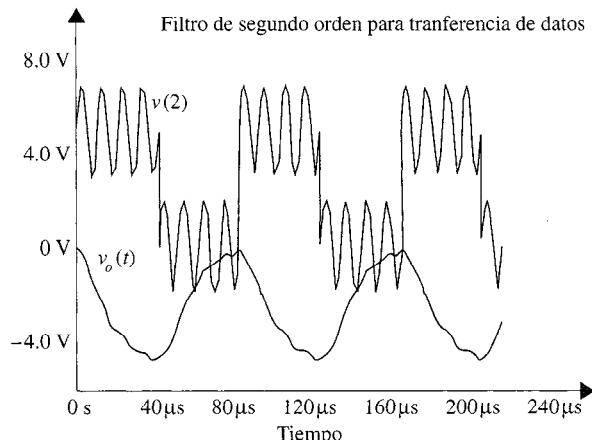


FIGURA 16.42 Salidas del PSPICE para el nodo 2 y $v_o(t)$ para el sistema críticamente amortiguado.

16.9 Resumen

En este capítulo hemos aplicado la potencia de la transformada de Laplace al análisis de circuitos. Hemos demostrado cómo se describen los elementos de circuito en el dominio s , y hemos usado todas las técnicas de análisis de redes y teoremas de redes derivados en el análisis de cd para obtener una solución. El análisis de estado estable y transitorio se ha llevado a cabo. Se mostró la facilidad con la cual uno puede deter-

minar la respuesta de una red para entradas complejas usando la transformada de Laplace.

Hemos tratado de proporcionar algunas ligas entre la gráfica de polo cero y las respuestas transitoria y de frecuencia. Finalmente, hemos demostrado el uso de la transformada de Laplace en la solución de algunos problemas prácticos.

Puntos clave

- Los elementos de circuito y sus condiciones iniciales pueden representarse en el dominio s mediante un circuito equivalente.
- Todas las técnicas de análisis de redes de cd pueden aplicarse a redes representadas en el dominio s .
- La respuesta de una red obtenida que usan la transformada de Laplace es la respuesta completa (es decir, estado estable más transitorio).
- La respuesta de estado estable de una red puede obtenerse por medio de una evaluación de la función de la red en la frecuencia de la función forzante.
- Una vez que las condiciones iniciales de una red se encuentran, la transformada de Laplace da la respuesta transitoria de la red resolviendo un conjunto de ecuaciones algebraicas en el dominio s y, después, determinando la transformada de Laplace inversa de la variable deseada.
- En una red, las raíces de la ecuación característica determinan la respuesta de la red.
- Representando formas de onda complejas al usar la transformada de Laplace, la respuesta de una red a entradas complejas puede obtenerse de manera directa.
- La transformada de Laplace inversa de la función de transferencia de la red es la respuesta de impulso de la red.

Problemas

- 16.1.** Para la red de la figura P16.1, determine el valor del voltaje de salida cuando $t \rightarrow \infty$.

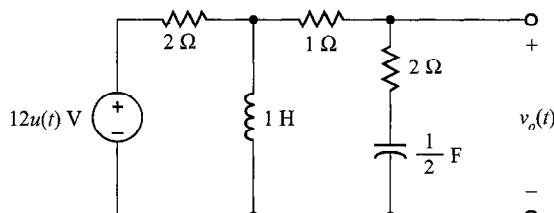


FIGURA P16.1

- 16.2.** Para la red de la figura P16.2 determine el voltaje de salida $v_o(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

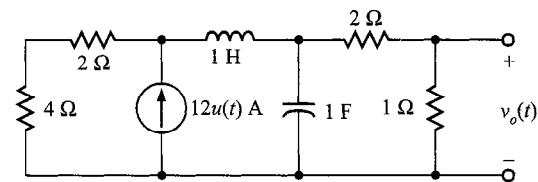


FIGURA P16.2

- 16.3.** Dada la red que se muestra en la figura P16.3, determine el voltaje de salida $v_o(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

- 16.4.** Utilice la transformada de Laplace y el análisis nodal para encontrar $i_1(t)$ para $t > 0$ en la red que se muestra en la figura P16.4. Suponga condiciones iniciales cero.

- 16.5.** Para la red que se muestra en la figura P16.5, encuentre $v_o(t)$, $t > 0$, utilizando ecuaciones nodales.

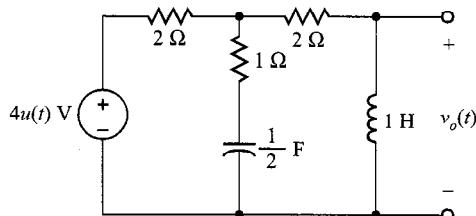


FIGURA P16.3

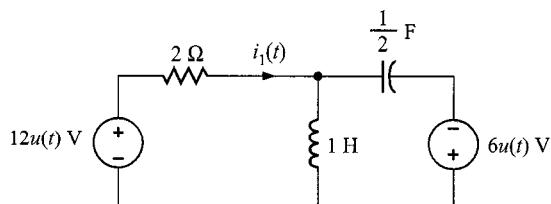


FIGURA P16.4

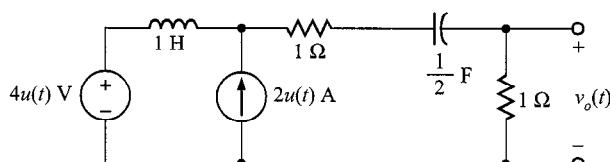


FIGURA P16.5

16.6. Encuentre $v_o(t)$, $t > 0$, en la red que se muestra en la figura P16.6 usando ecuaciones nodales.

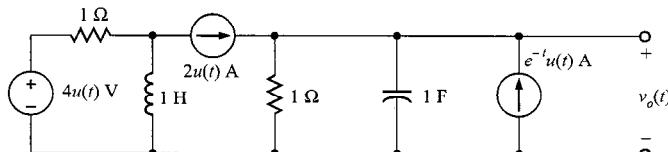


FIGURA P16.6

16.7. Encuentre $v_o(t)$, $t > 0$, en la red de la figura P16.7 utilizando análisis nodal.

16.8. Para la red que se muestra en la figura P16.8, encuentre $v_o(t)$, $t > 0$, usando ecuaciones nodales.

16.9. Utilice las ecuaciones de malla para encontrar $v_o(t)$, $t > 0$, en la red de la figura P16.9.

16.10. Para la red que se muestra en la figura P16.10, encuentre $v_o(t)$, $t > 0$, utilizando ecuaciones de malla.

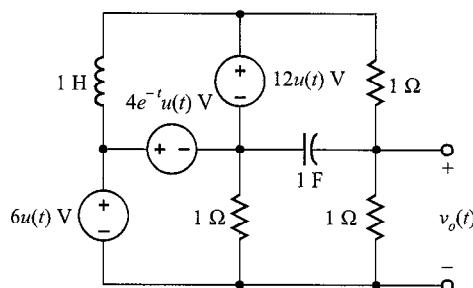


FIGURA P16.7

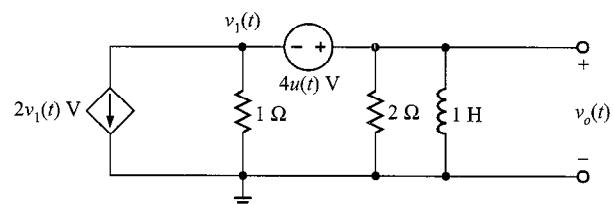


FIGURA P16.8

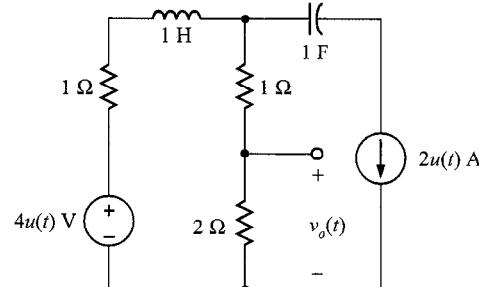


FIGURA P16.9

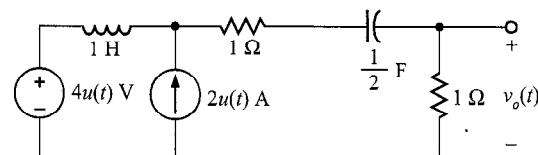


FIGURA P16.10

16.11. Pára la red que se muestra en la figura P16.11, encuentre $v_o(t)$, $t > 0$, utilizando ecuaciones de malla.

16.12. Dada la red de la figura P16.12, encuentre $i_o(t)$, $t > 0$, utilizando ecuaciones de anillo.

16.13. Utilice ecuaciones de malla para encontrar $i_o(t)$, $t > 0$, en la red que se muestra en la figura P16.13.

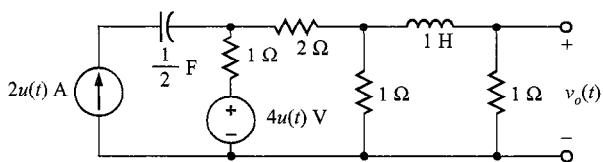


FIGURA P16.11

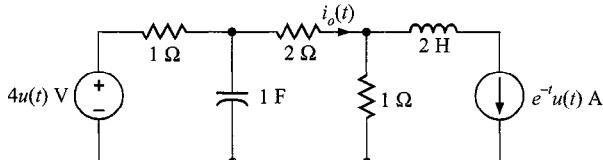


FIGURA P16.12

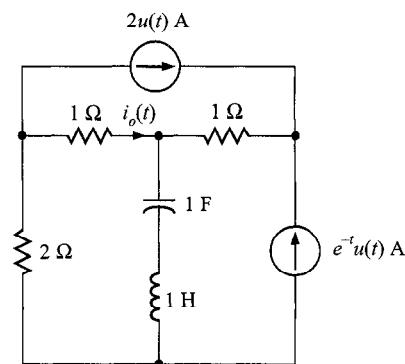


FIGURA P16.13

16.14. Utilice ecuaciones de malla para encontrar $v_o(t)$, $t > 0$, en la red que se muestra en la figura P16.14.

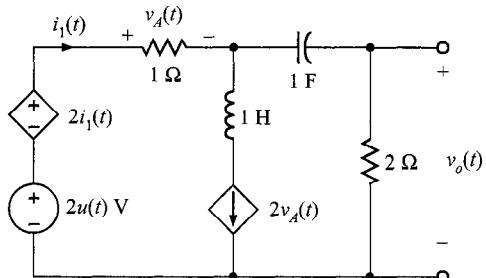


FIGURA P16.14

16.15. Utilice la superposición para resolver el problema 16.5.

16.16. Utilice la transformación de fuentes para resolver el problema 16.5.

16.17. Utilice el teorema de Thévenin para resolver el problema 16.5.

16.18. Utilice el teorema de Thévenin para resolver el problema 16.9.

16.19. Utilice ecuaciones de malla para resolver el problema 16.10.

16.20. Utilice el teorema de Thévenin para resolver el problema 16.12.

16.21. Utilice el teorema de Thévenin para encontrar $v_o(t)$, $t > 0$, en la red de la figura P16.21.

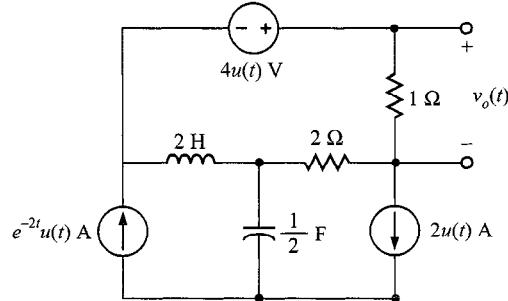


FIGURA P16.21

16.22. Utilice el teorema de Thévenin para encontrar $v_o(t)$, $t > 0$, en la red que se muestra en la figura P16.22.

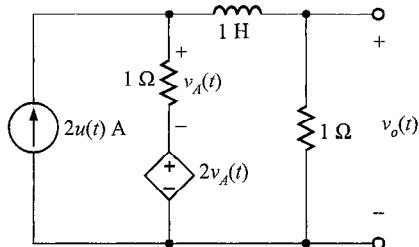


FIGURA P16.22

16.23. Encuentre los parámetros de transmisión para la red de la figura P16.23.

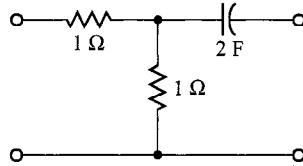
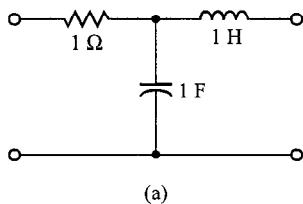
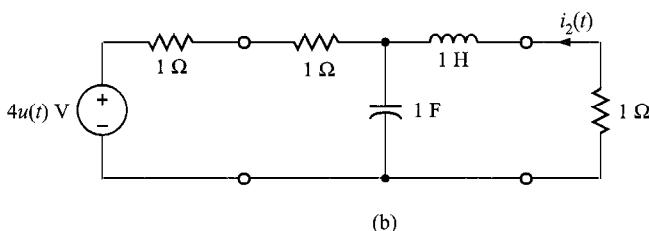


FIGURA P16.23

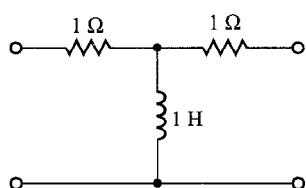
16.24. Encuentre los parámetros Z de la red de dos puertos de la figura P16.24a. Utilizando esos parámetros, determine $i_2(t)$ en la red de la figura P16.24b.



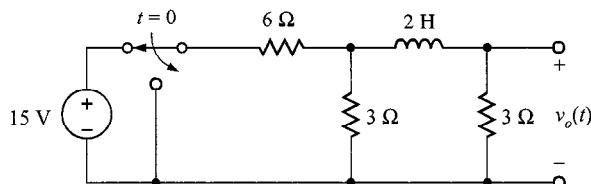
(a)

**FIGURA P16.24**

16.25. Encuentre los parámetros de transmisión de la red de la figura P16.25.

**FIGURA P16.25**

16.26. Encuentre $v_o(t)$, $t > 0$, en la red que se muestra en la figura P16.26 utilizando transformadas de Laplace. Suponga que el circuito ha alcanzado el estado estable en $t = 0$.

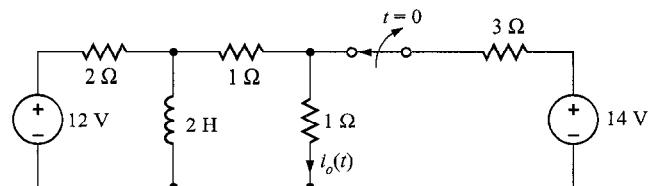
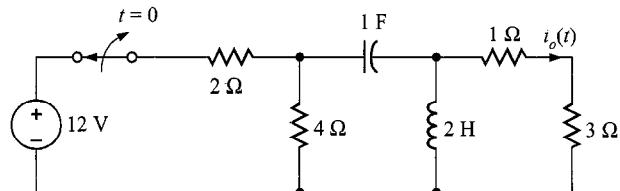
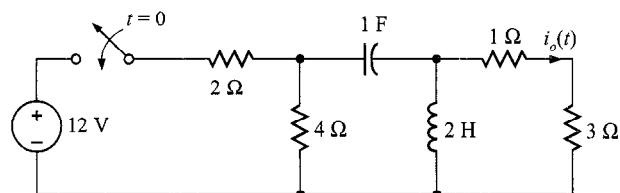
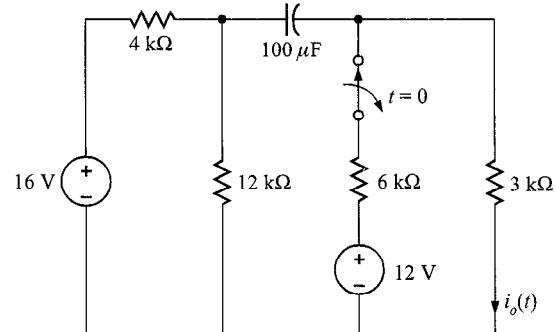
**FIGURA P16.26**

16.27. Encuentre $i_o(t)$, $t > 0$, en la red que se muestra en la figura P16.27.

16.28. Encuentre $i_o(t)$, $t > 0$, en la red que se muestra en la figura P16.28.

16.29. Encuentre $i_o(t)$, $t > 0$, en la red que se muestra en la figura P16.29.

16.30. Encuentre $i_o(t)$, $t > 0$, en la red de la figura P16.30.

**FIGURA P16.27****FIGURA P16.28****FIGURA P16.29****FIGURA P16.30**

16.31. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$, en la red de la figura. P16.31.

16.32. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$, en la red de la figura. P16.32.

16.33. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$, en la red de la figura. P16.33.

16.34. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$, en la red de la figura. P16.34.

16.35. Encuentre $i_o(t)$ para $t > 0$, en la red de la figura P16.35.

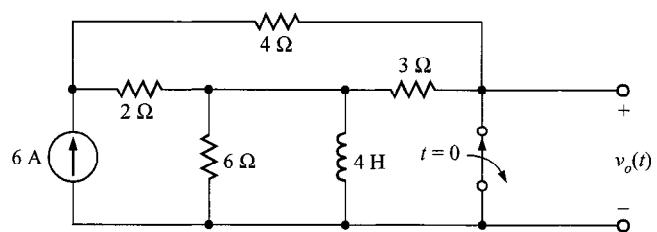


FIGURA P16.31

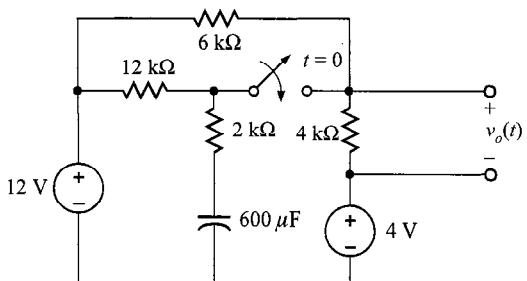


FIGURA P16.32

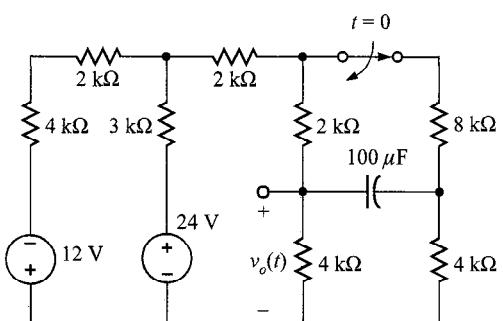


FIGURA P16.33

16.36. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$, en la red de la figura P16.36.

16.37. Encuentre $v_o(t)$ para $t > 0$, en la red de la figura P16.37.

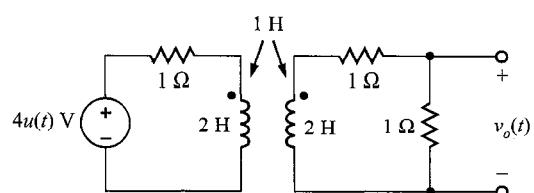


FIGURA P16.34

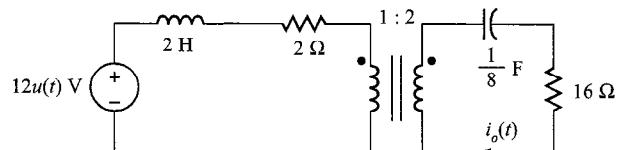


FIGURA P16.35

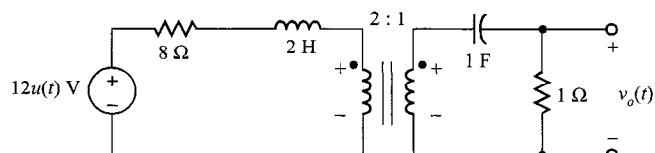


FIGURA P16.37

16.38. Determine los valores inicial y final del voltaje $v_o(t)$ en la red de la figura P16.38.

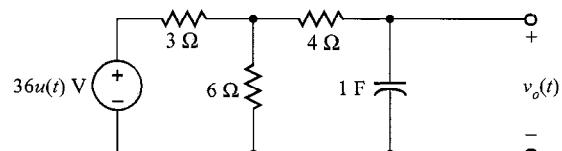


FIGURA P16.38

16.39. Determine los valores inicial y final del voltaje $v_o(t)$ en la red de la figura P16.39.

16.40. Encuentre los valores inicial y final del voltaje $v_o(t)$ en la red de la figura P16.40.

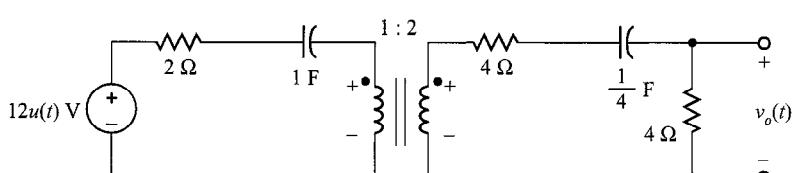


FIGURA P16.36

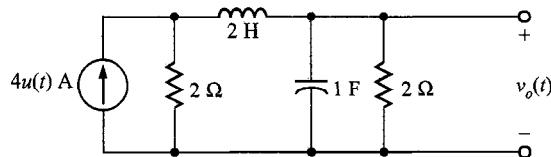


FIGURA P16.39

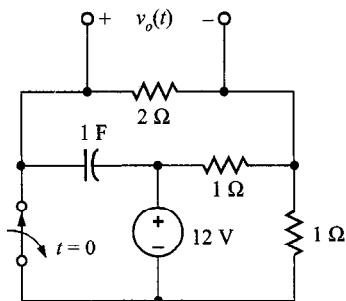
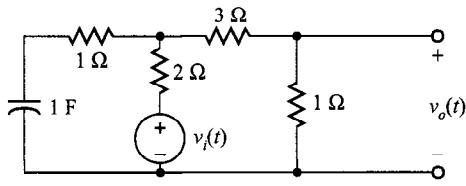
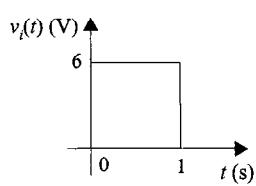


FIGURA P16.40

- 16.41.** Determine el voltaje de salida $v_o(t)$ en la red de la figura P16.41a si la entrada está dada por la fuente de la figura P16.41b.



(a)

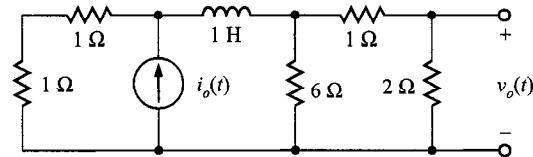


(b)

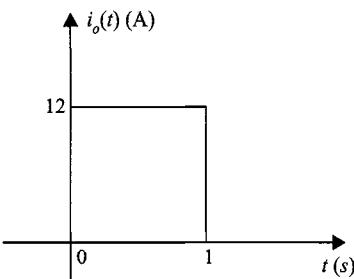
FIGURA P16.41

- 16.42.** Encuentre el voltaje de salida $v_o(t)$, $t > 0$, en la red de la figura P16.42a si la entrada está representada por la forma de onda que se muestra en la figura P16.42b.

- 16.43.** Encuentre la función de transferencia $V_o(s)/V_i(s)$ para la red que se muestra en la figura P16.43.



(a)



(b)

FIGURA P16.42

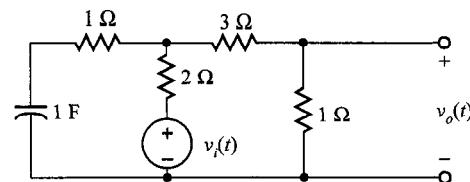


FIGURA P16.43

- 16.44.** Determine la función de transferencia $I_o(s)/I_i(s)$ para la red que se muestra en la figura P16.44.

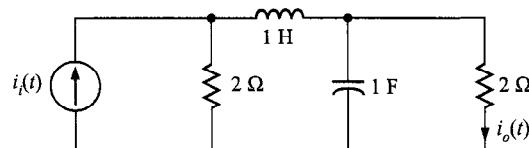


FIGURA P16.44

- 16.45.** Encuentre la función de transferencia para la red de la figura P16.45.

- 16.46.** Encuentre la función de transferencia para la red que se muestra en la figura P16.46.

- 16.47.** Encuentre la función de transferencia para la red que se muestra en la figura P16.47.

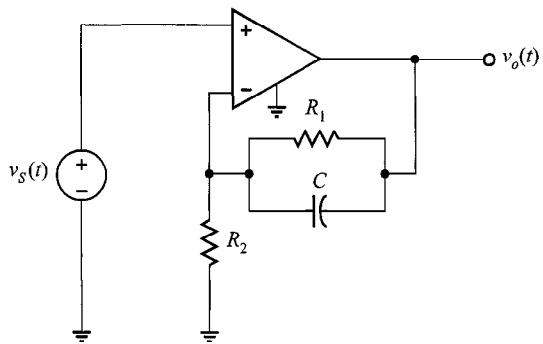


FIGURA P16.45

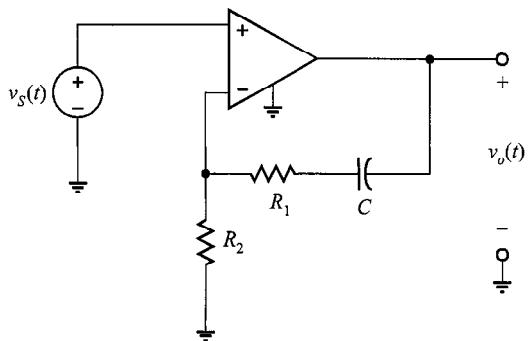


FIGURA P16.46

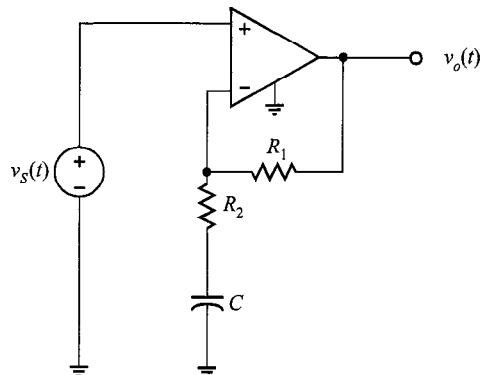


FIGURA P16.47

16.48. Determine la función de transferencia para la red que se muestra en la figura P16.48. Si una función de paso se aplica a la red, ¿qué tipo de amortiguamiento exhibirá?

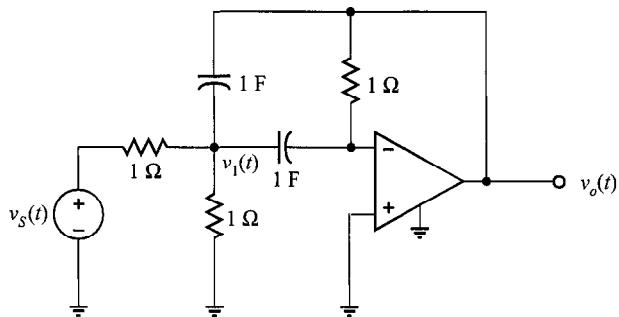


FIGURA P16.48

16.49. Encuentre la función de transferencia para la red de la figura P16.49. Si una función de paso se aplica a la red, ¿será la respuesta sobreamortiguada, subamortiguada, o críticamente amortiguada?

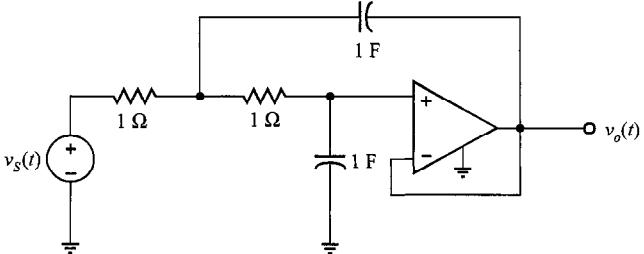


FIGURA P16.49

16.50. La respuesta de voltaje de la red a una entrada de paso unitario es

$$V_o(s) = \frac{2(s+1)}{s(s^2 + 12s + 27)}$$

¿Es sobreamortiguada la respuesta?

16.51. La función de transferencia de la red está dada por la expresión

$$G(s) = \frac{100s}{s^2 + 22s + 40}$$

Determine la razón de amortiguamiento, la frecuencia natural no amortiguada y el tipo de respuesta que será exhibida por la red.

16.52. La respuesta de la corriente de una red a la entrada de paso unitario es

$$I_o(s) = \frac{10(s+2)}{s^2(s^2 + 11s + 30)}$$

¿La respuesta es subamortiguada?

16.53. La respuesta de voltaje de una red a una entrada de paso unitario es

$$V_o(s) = \frac{10}{s(s^2 + 8s + 16)}$$

¿La respuesta es críticamente amortiguada?

16.54. Encuentre la respuesta de estado estable $v_o(t)$ para la red de la figura P16.54.

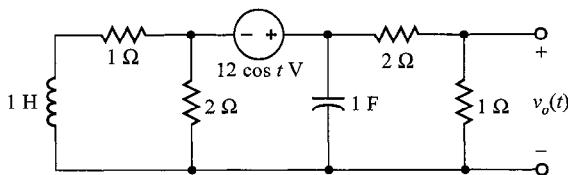


FIGURA P16.54

16.55. Encuentre la respuesta de estado estable $i_o(t)$ para la red que se muestra en la figura P16.55.

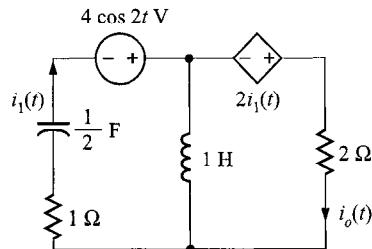


FIGURA P16.55

16.56. Determine la respuesta de estado estable $v_o(t)$ para la red de la figura P16.56.

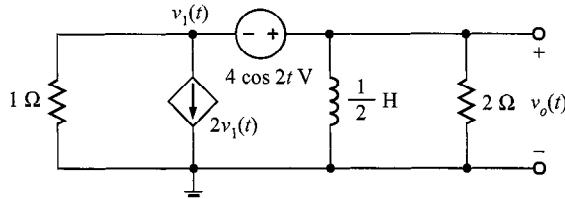


FIGURA P16.56

16.57. Determine la respuesta de estado estable $i_o(t)$ para la red de la figura P16.57.

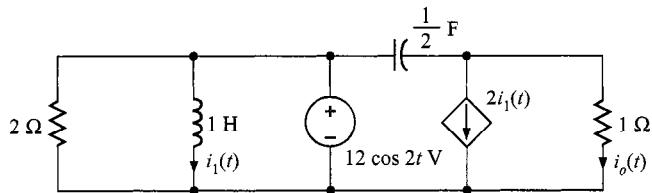


FIGURA P16.57

16.58. Encuentre la respuesta de estado estable $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P16.58.

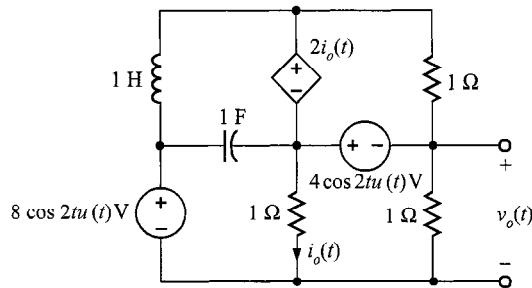


FIGURA P16.58

16.59. Encuentre la respuesta de estado estable $v_o(t)$ para $t > 0$ en la red de la figura P16.59.

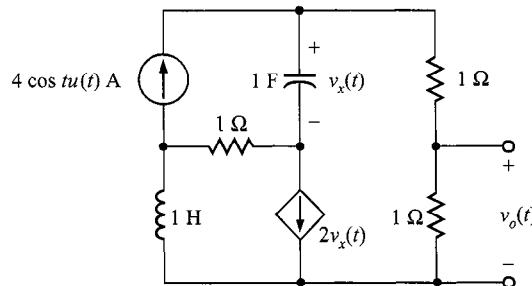


FIGURA P16.59

16.60. Para la red de la figura P16.60, elija el valor de C para amortiguamiento crítico.

16.61. Para el filtro de la figura P16.61, elija los valores de C_1 y C_2 para colocar los polos en $s = -2$ y $s = -5$ rad/s.

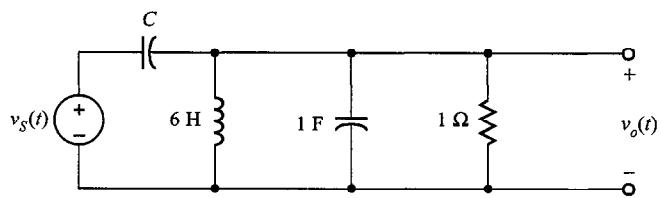


FIGURA P16.60

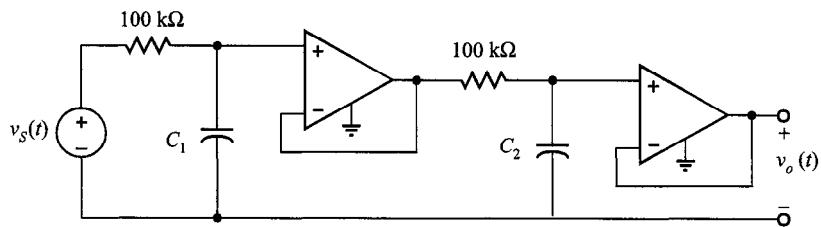
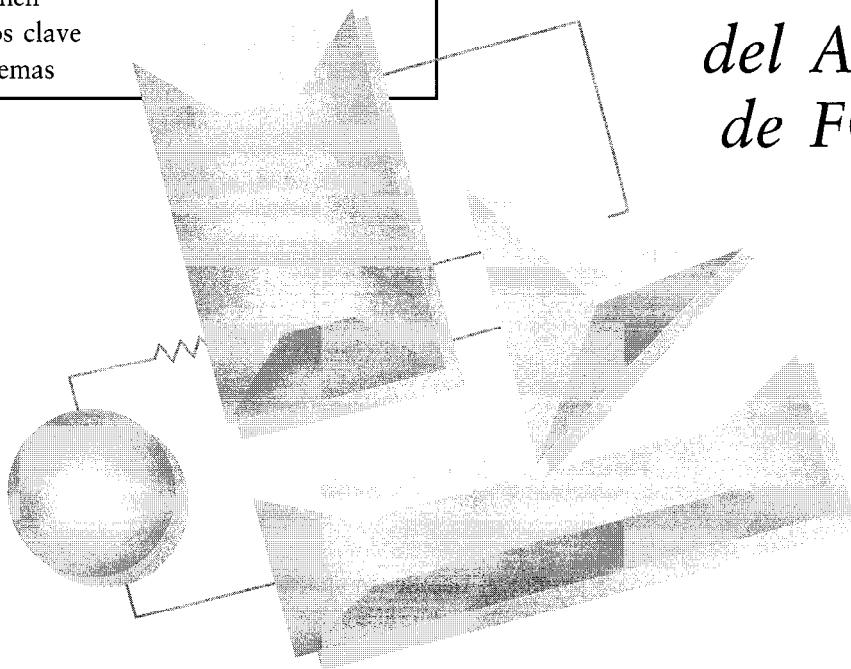


FIGURA P16.61

- 17.1** Series de Fourier
- 17.2** Transformada de Fourier
- 17.3** Aplicaciones
- 17.4** Diseño de circuitos
- 17.5** Resumen
- Puntos clave
- Problemas

TÉCNICAS del ANÁLISIS de FOURIER



En este capítulo examinamos dos temas muy importantes: las series de Fourier y la transformada de Fourier. Esas dos técnicas expanden en sumo grado nuestras capacidades de análisis de circuitos debido a que proporcionan medios de tratar de manera efectiva con señales periódicas no senoidales y señales no periódicas. Utilizando las series de Fourier mostramos que podemos determinar la respuesta de estado estable de

una red a una entrada periódica no senoidal. La transformada de Fourier nos permitirá analizar circuitos con entradas no periódicas, transformando el problema al dominio de frecuencia, resolverlo algebraicamente y entonces transformarlo de regreso al dominio del tiempo de forma similar a la utilizada con las transformadas de Laplace. ■

17.1 Series de Fourier

Una función periódica es la que satisface la relación

$$f(t) = f(t + nT_0), \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

para todo valor de t donde T_0 es el periodo. Como hemos mostrado en capítulos anteriores, la función senoidal es una función periódica muy importante. Sin embargo, hay

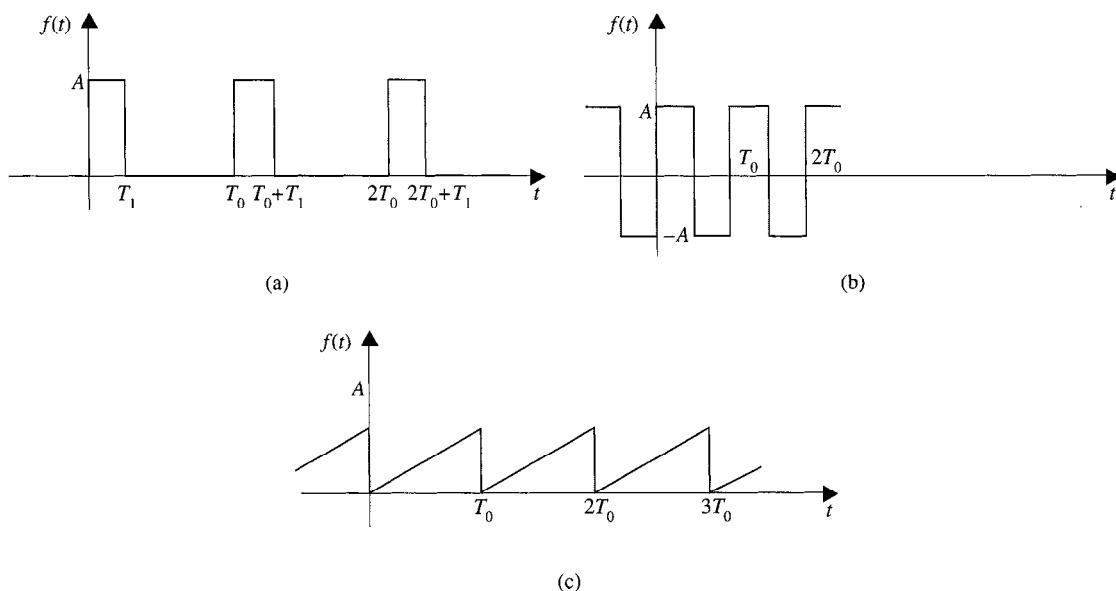


FIGURA 17.1 Algunas señales periódicas útiles.

muchas otras funciones periódicas que tienen aplicaciones amplias. Por ejemplo, los generadores de señales de laboratorio producen los trenes de pulsos y señales de onda cuadrada que se muestran en la figura 17.1a. y b, que se usan para circuitos de prueba. El osciloscopio es otro instrumento del laboratorio y la barrida de su rayo electrónico sobre la cara del tubo del rayo catódico se controla por una señal triangular de la forma que se muestra en la figura 17.1c.

Las técnicas que exploraremos están basadas en el trabajo de Jean Baptiste Joseph Fourier. Aunque nuestros análisis se limitarán a circuitos eléctricos, es importante señalar que las técnicas son aplicables a un amplia gama de problemas de ingeniería. De hecho, fue el trabajo de Fourier para el flujo de calor el que condujo a las técnicas que presentaremos aquí.

En su trabajo, Fourier demostró que una función periódica $f(t)$ podía expresarse como la suma de funciones senoidales. Por tanto, supuesto este dato y el hecho de que si una función periódica se expresa como una suma de funciones linealmente independientes, cada función en la suma debe ser periódica con el mismo periodo, y la función $f(t)$ puede expresarse en la forma

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (17.1)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T_0$ y a_0 es el valor promedio de la forma de onda. Un examen de esta expresión ilustra que han sido incluidas todas las formas de onda senoidales que son periódicas con periodo T_0 . Por ejemplo, para $n = 1$, un ciclo cubre T_0 segundos y $D_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1)$ se llama la *fundamental*. Para $n = 2$, caen dos ciclos en T_0 segundos y el término $D_2 \cos(2\omega_0 t + \theta_2)$ se llama la *segunda armónica*. En general, para

$n = k$, k ciclos caen en T_0 segundos y $D_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$ es el término de la k ésima armónica.

Como la función $\cos(n\omega_0 t + \theta_n)$ puede escribirse en forma exponencial utilizando la identidad de Euler o como una suma de términos coseno y seno de la forma $\cos n\omega_0 t$ y $\sin n\omega_0 t$, como se demostró en el capítulo 9, la serie de la ecuación (17.1) puede escribirse como

$$f(t) = a_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (17.2)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \quad (17.3)$$

Utilizando la relación de la parte real empleada como una transformación entre el dominio de tiempo y el dominio de frecuencia, podemos expresar $f(t)$ como

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} [(D_n \angle \theta_n) e^{jn\omega_0 t}] \quad (17.4)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} (2c_n e^{jn\omega_0 t}) \quad (17.5)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} [(a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t}] \quad (17.6)$$

Esas ecuaciones nos permiten escribir la serie de Fourier en un número de formas equivalentes. Observe que el *fasor* para la n ésima armónica es

$$D_n \angle \theta_n = 2c_n = a_n - jb_n \quad (17.7)$$

El método que tomaremos consistirá en representar una entrada periódica no senoidal mediante una suma de funciones exponenciales complejas, que debido a la identidad de Euler es equivalente a una suma de senos y cosenos. Usaremos entonces 1) la propiedad de superposición de los sistemas lineales, y 2) nuestro conocimiento de que la respuesta de estado estable de un sistema lineal, invariante en el tiempo, a una entrada senoidal de frecuencia ω_0 es una función senoidal de la misma frecuencia, para determinar la respuesta de tal sistema.

A fin de ilustrar la forma en la que se puede representar una señal periódica no senoidal mediante una serie de Fourier, considere la función periódica que se muestra en la figura 17.2a. En las figuras 17.2b-d podemos ver el impacto del uso de un número específico de términos en la serie para representar la función original. Observe que la serie representa más claramente a la función original conforme empleamos más y más términos.

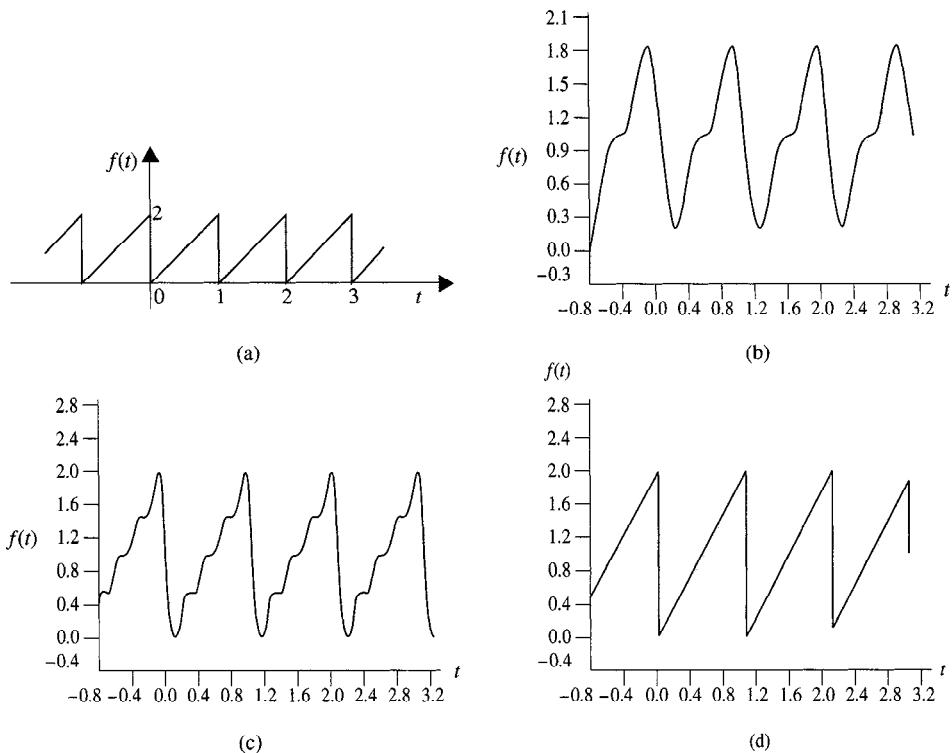


FIGURA 17.2 Una función periódica a) y su representación mediante un número fijo de términos de la serie de Fourier: b) 2 términos; c) 4 términos; d) 100 términos.

Serie de Fourier exponencial

Cualquier señal periódica físicamente realizable puede representarse en el intervalo $t_1 < t < t_1 + T_0$ mediante la serie de Fourier exponencial

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \quad (17.8)$$

donde los \mathbf{c}_n son los coeficientes de Fourier (fasores) complejos. Esos coeficientes se derivan como sigue. Multiplicando ambos lados de la ecuación (17.8) por $e^{-jk\omega_0 t}$ e integrando sobre el intervalo t_1 a $t_1 + T_0$, obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_1 + T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_{t_1}^{t_1 + T_0} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \right) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \mathbf{c}_k T_0$$

como

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{j(n-k)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq k \\ T_0 & \text{para } n = k \end{cases}$$

Por tanto, los coeficientes de Fourier están definidos por la ecuación

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (17.9)$$

El siguiente ejemplo ilustra la manera como podemos representar una señal periódica mediante una serie de Fourier exponencial.

EJEMPLO 17.1

Deseamos determinar la serie de Fourier exponencial de la forma de onda del voltaje periódica que se muestra en la figura 17.3.

SOLUCIÓN Los coeficientes de Fourier se determinan usando la ecuación (17.9) al integrar un periodo completo de la forma de onda.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{-T/4} -Ve^{-jn\omega_0 t} dt + \int_{-T/4}^{T/4} Ve^{-jn\omega_0 t} dt + \int_{T/4}^{T/2} -Ve^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{V}{jn\omega_0 T} \left[+e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-T/2}^{-T/4} -e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-T/4}^{T/4} +e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{T/4}^{T/2} \right] \\ &= \frac{V}{jn\omega_0 T} (2e^{jn\pi/2} - 2e^{-jn\pi/2} + e^{-jn\pi} - e^{+jn\pi}) \\ &= \frac{V}{n\omega_0 T} \left[4 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} - 2 \operatorname{sen}(n\pi) \right] \\ &= 0 \quad \text{para } n \text{ par} \\ &= \frac{2V}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \quad \text{para } n \text{ impar} \end{aligned}$$

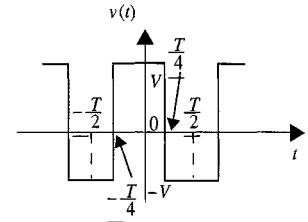


FIGURA 17.3 Forma de onda de voltaje periódico.

c_0 corresponde al valor promedio de la forma de onda. Este término puede evaluarse usando la ecuación original para c_n . Por tanto,

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t) dt \\
&= \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} -V dt + \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} V dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} -V dt \right] \\
&= \frac{1}{T} \left[-\frac{VT}{4} + \frac{VT}{2} - \frac{VT}{4} \right] = 0
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$v(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} e^{jn\omega_0 t}$$

Esta ecuación puede escribirse como

$$\begin{aligned}
v(t) &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} e^{jn\omega_0 t} + \sum_{\substack{n=-1 \\ n \text{ impar}}}^{-\infty} \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} e^{jn\omega_0 t} \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \left(\frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) e^{jn\omega_0 t} + \left(\frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right)^* e^{-jn\omega_0 t}
\end{aligned}$$

Como un número más su complejo conjugado es igual a dos veces la parte real del número, $v(t)$ puede escribirse como

$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} e^{jn\omega_0 t} \right)$$

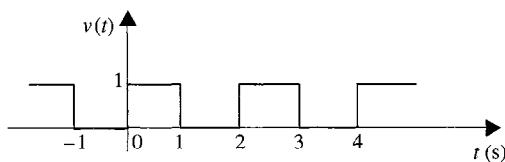
O

$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{4V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos n\omega_0 t$$

Observe que este mismo resultado pudo haberse obtenido integrando sobre el intervalo $-T/4$ a $3T/4$.

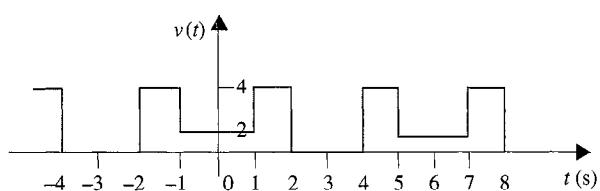
EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D17.1 Encuentre los coeficientes de Fourier para la forma de onda de la figura D17.1

**FIGURA D17.1**

Resp.: $c_n = \frac{1 - e^{-jn\pi}}{j2\pi n}$, $c_0 = \frac{1}{2}$.

D17.2 Encuentre los coeficientes de Fourier para la forma de onda de la figura D17.2

**FIGURA D17.2**

Resp.: $c_n = \frac{2}{n\pi} \left(2 \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{3} - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \right)$, $c_0 = 2$.

Serie de Fourier trigonométrica

Examinemos otra forma de las series de Fourier. Como

$$2c_n = a_n - jb_n \quad (17.10)$$

examinaremos esta cantidad $2c_n$ y la separaremos en sus partes real e imaginaria. Usando la ecuación (17.9) encontramos que

$$2c_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1 + T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (17.11)$$

Utilizando la identidad de Euler, podemos escribir esta ecuación en la forma

$$\begin{aligned} 2c_n &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1 + T_0} f(t) (\cos n\omega_0 t - j \operatorname{sen} n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1 + T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt - j \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1 + T_0} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

De la ecuación (17.10) notamos que

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1 + T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (17.12)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1 + T_0} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt \quad (17.13)$$

Estos son los coeficientes de la serie de Fourier descrita por la ecuación (17.3), a la que llamamos *serie de Fourier trigonométrica*. Esas ecuaciones se derivan directamente.

mente, en la mayoría de los libros de texto, utilizando las propiedades de ortogonalidad de las funciones coseno y seno. Observe que ahora podemos evaluar c_n , a_n , b_n , y como

$$2c_n = D_n / \underline{\theta_n} \quad (17.14)$$

podemos derivar los coeficientes para la *serie de Fourier coseno* descrita por la ecuación (17.1). Esta forma de la serie de Fourier es particularmente útil porque nos permite representar cada armónica de la función como un fasor.

De la ecuación (17.9) notamos que c_0 , que se escribe como a_0 , es

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1 + T_0} f(t) dt \quad (17.15)$$

Este es el valor promedio de la señal $f(t)$ y con frecuencia puede ser evaluada directamente de la forma de onda.

Simetría y la serie de Fourier trigonométrica

Si una señal exhibe ciertas propiedades de simetría, podemos tomar ventaja de esas propiedades simplificando el cálculo de los coeficientes de Fourier. Hay tres tipos de simetría: 1) simetría de la función par, 2) simetría de la función impar, y 3) simetría de media onda.

Simetría de la función par. Se dice que una función es par si

$$f(t) = f(-t) \quad (17.16)$$

Una función par es simétrica alrededor del eje vertical, y un ejemplo notable es la función $\cos n\omega_0 t$. Observe que la forma de onda de la figura 17.3 también exhibe simetría de función par. Determinemos ahora las expresiones para los coeficientes de Fourier si la función satisface la ecuación (17.16).

Si hacemos $t_1 = -T_0/2$ en la ecuación (17.15), obtenemos

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt$$

que puede escribirse como

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 f(t) dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt$$

Si ahora cambiamos la variable en la primera integral (es decir, sea $t = -x$), entonces $f(-x) = f(x)$, $dt = -dx$, y el intervalo de integración es de $x = T_0/2$ a 0. Por tanto, la ecuación anterior se convierte en

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 f(x)(-dx) + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt \\
&= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(x) dx + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt \\
&= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt
\end{aligned} \tag{17.17}$$

Los otros coeficientes de Fourier se derivan de una manera similar. El coeficiente a_n puede escribirse como

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 f(t) \cos n\omega_0 t dt + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

Empleando el cambio de variable que condujo a la ecuación (17.17), podemos expresar la ecuación anterior como

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 f(x) \cos(-n\omega_0 x)(-dx) + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\
&= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(x) \cos n\omega_0 x dx + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\
&= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt
\end{aligned} \tag{17.18}$$

Una vez más siguiendo el desarrollo anterior, podemos escribir la ecuación para el coeficiente b_n como

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 f(t) \sin n\omega_0 t dt + \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

El cambio de variable empleado previamente da

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 f(x) \sin(-n\omega_0 x)(-dx) + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \\
&= \frac{-2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(x) \sin n\omega_0 x dx + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \\
&= 0
\end{aligned} \tag{17.19}$$

El análisis anterior indica que la serie de Fourier para una función par periódica consiste sólo en un término constante y términos coseno. Por tanto, si $f(t)$ es par, $b_n = 0$ y de las ecuaciones (17.10) y (17.14), c_n son reales y θ_n son múltiplos de 180° .

Simetría de función impar. Se dice que una función es impar si

$$f(t) = -f(-t) \quad (17.20)$$

Un ejemplo de una función impar es $\sin \omega_0 t$. Otro ejemplo es la forma de onda de la figura 17.4a. Siguiendo el desarrollo matemático que condujo a las ecuaciones (17.17) a (17.19), podemos mostrar que para una función impar los coeficientes son

$$a_0 = 0 \quad (17.21)$$

$$a_n = 0 \quad \text{para toda } n > 0 \quad (17.22)$$

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt \quad (17.23)$$

Por tanto, si $f(t)$ es impar, $a_n = 0$, y de las ecuaciones (17.10) y (17.14), los c_n son sólo imaginarios y θ_n son múltiplos impares de 90° .

Simetría de media onda. Se dice que una función posee *simetría de media onda* si

$$f(t) = -f\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \quad (17.24)$$

Básicamente, esta ecuación establece que cada medio ciclo es una versión invertida del medio ciclo adyacente; es decir, si la forma de onda de $-T_0/2$ a 0 se invierte, es idén-

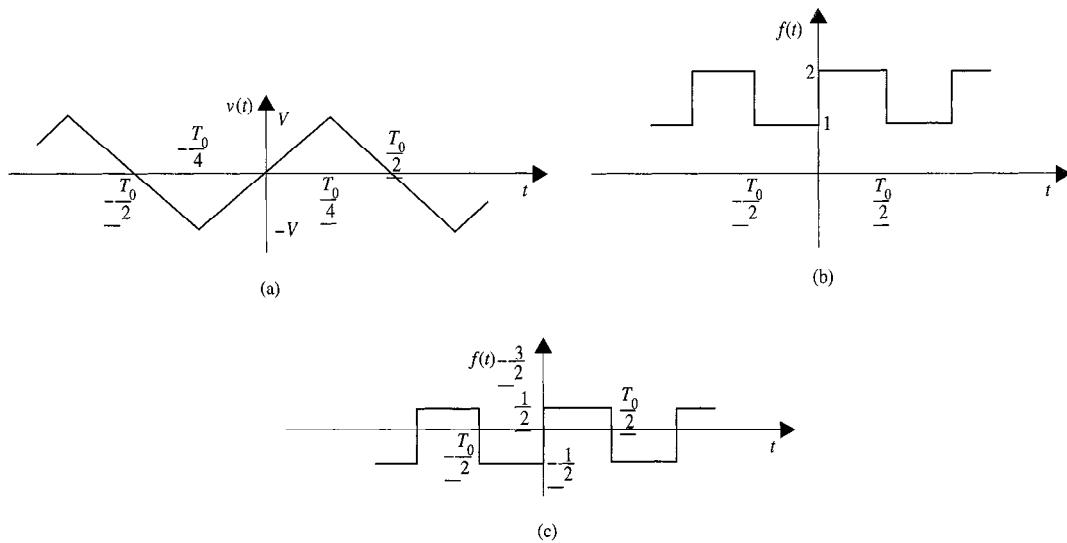


FIGURA 17.4 Tres formas de onda; a) y c) poseen simetría de media onda.

tica a la forma de onda de 0 a $T_0/2$. Las formas de onda que se muestran en las figuras 17.4a y c poseen simetría de media onda.

Una vez más podemos derivar las expresiones para los coeficientes de Fourier, en este caso repitiendo el desarrollo matemático que condujo a las ecuaciones para la simetría de la función par utilizando el cambio de variable $t = x + T_0/2$ y la ecuación (17.24). Los resultados de este desarrollo son las siguientes ecuaciones:

$$a_0 = 0 \quad (17.25)$$

$$a_n = b_n = 0 \quad \text{para } n \text{ par} \quad (17.26)$$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad \text{para } n \text{ impar} \quad (17.27)$$

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad \text{para } n \text{ impar} \quad (17.28)$$

Las siguientes ecuaciones son con frecuencia útiles en la evaluación de coeficientes de series de Fourier trigonométricas:

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

$$\int x \sin ax dx = \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{1}{a} x \cos ax$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{1}{a} x \sin ax \quad (17.29)$$

EJEMPLO 17.2

Deseamos encontrar la serie de Fourier trigonométrica para la señal periódica de la figura 17.3.

SOLUCIÓN La forma de onda exhibe simetría de función par y, por consiguiente,

$$a_0 = 0$$

$$b_n = 0 \quad \text{para toda } n$$

La forma de onda exhibe simetría de media onda y, por tanto,

$$a_n = 0 \quad \text{para } n \text{ par}$$

De aquí,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{4}{T_0} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad \text{para } n \text{ impar} \\
 &= \frac{4}{T} \left(\int_0^{T/4} V \cos n\omega_0 t \, dt - \int_{T/4}^{T/2} V \cos n\omega_0 t \, dt \right) \\
 &= \frac{4V}{\omega_0 T} \left(\left. \sin n\omega_0 t \right|_0^{T/4} - \left. \sin n\omega_0 t \right|_{T/4}^{T/2} \right) \\
 &= \frac{4V}{n\omega_0 T} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin n\pi + \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\
 &= \frac{8V}{n2\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad \text{para } n \text{ impar} \\
 &= \frac{4V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad \text{para } n \text{ impar}
 \end{aligned}$$

El lector debería comparar este resultado con el obtenido en el ejemplo 17.1.

EJEMPLO 17.3

Determinemos la expansión con serie de Fourier trigonométrica de la forma de onda que se muestra en la figura 17.4a.

SOLUCIÓN La función no sólo exhibe simetría de función impar, sino también posee simetría de media onda. Por tanto, sólo es necesario determinar los coeficientes b_n para n impar. Observe que

$$v(t) = \begin{cases} \frac{4Vt}{T_0} & 0 \leq t \leq T_0/4 \\ 2V - \frac{4Vt}{T_0} & T_0/4 < t \leq T_0/2 \end{cases}$$

Los coeficientes b_n son entonces

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/4} \frac{4Vt}{T_0} \sin n\omega_0 t \, dt + \frac{4}{T_0} \int_{T_0/4}^{T_0/2} \left(2V - \frac{4Vt}{T_0} \right) \sin n\omega_0 t \, dt$$

La evaluación de esas integrales es tediosa pero directa y da

$$b_n = \frac{8V}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \quad \text{para } n \text{ impar}$$

De aquí, la expansión en serie de Fourier es

$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{8V}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} n\omega_0 t$$

EJEMPLO 17.4

Deseamos encontrar la expansión en serie de Fourier trigonométrica de la forma de onda de la figura 17.4b.

SOLUCIÓN Observe que esta forma de onda tiene un valor promedio de $\frac{3}{2}$. Por tanto, en lugar de determinar la expansión en serie de Fourier de $f(t)$, determinaremos la serie de Fourier para $f(t) - \frac{3}{2}$, que es la forma de onda que se muestra en la figura 17.4c. La última forma de onda posee simetría de media onda. La función también es impar y, por tanto,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} \frac{1}{2} \operatorname{sen} n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T_0} \left(\frac{-1}{n\omega_0} \cos n\omega_0 t \Big|_0^{T_0/2} \right) \\ &= \frac{-2}{n\omega_0 T_0} (\cos n\pi - 1) \\ &= \frac{2}{n\pi} \quad n \text{ impar} \end{aligned}$$

Por tanto, la expansión en serie de Fourier para $f(t) - \frac{3}{2}$ es

$$f(t) - \frac{3}{2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} n\omega_0 t$$

O

$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} n\omega_0 t$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D17.2 Determine el tipo de simetría exhibido por las formas de onda de las figuras D17.2 y D17.3.

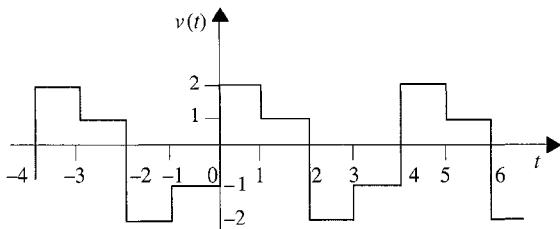


FIGURA D17.3

Resp.: La figura D17.2, simetría par; la figura D17.3, simetría de media onda.

D17.3 Encuentre la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda de voltaje de la figura D17.2.

Resp.: $v(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \left(2 \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{3} - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \right) \cos \frac{n\pi}{3} t \text{ V.}$

D17.4 Encuentre la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda de voltaje de la figura D17.3

Resp.: $v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} t + \frac{2}{\pi} (2 - \operatorname{cos} n\pi) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} t \text{ V.}$

Hemos tratado de indicar la ventaja de reconocer la simetría en una forma de onda. Sin embargo, es interesante para nosotros notar que cualquier señal $f(t)$ puede ser resuelta en dos componentes: una componente par $f_e(t)$ y una componente impar $f_o(t)$. En otras palabras,

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t) \quad (17.30)$$

De esta ecuación podemos escribir

$$f(-t) = f_e(-t) + f_o(-t)$$

Sin embargo, para una función par $f_e(-t) = f_e(t)$ y para una función impar $f_o(-t) = -f_o(t)$.

De aquí,

$$f(-t) = f_e(t) - f_o(t) \quad (17.31)$$

Resolviendo las ecuaciones (17.30) y (17.31) para las componentes par e impar de la señal se obtiene

$$f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \quad (17.32)$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \quad (17.33)$$

Indiquemos ahora cómo esas ecuaciones se pueden usar para determinar los coeficientes de Fourier de una forma de onda periódica.

EJEMPLO 17.5

Determinemos los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda de la figura 17.5a por medio de las ecuaciones (17.26) y (17.27).

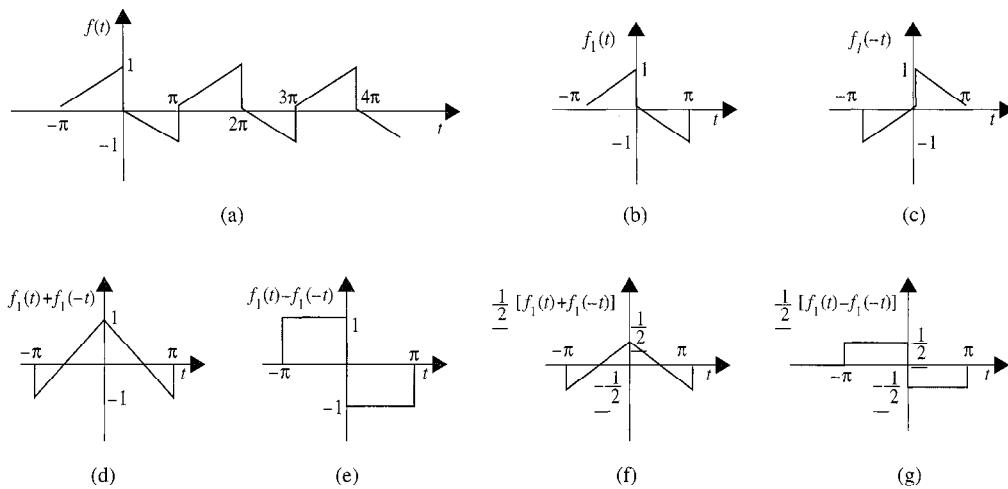


FIGURA 17.5 Figuras utilizadas en el ejemplo 17.5.

S O L U C I Ó N En la figura 17.5b se muestra un periodo de la función. Las figuras 17.5b-g se usan para calcular las funciones par e impar $f_e(t)$ y $f_o(t)$. Observe que

$$f_e(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{\pi} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

y

$$f_o(t) = -\frac{1}{2} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

De la forma de onda original notamos que $\omega_0 = 2\pi/2\pi = 1$ y que el valor promedio de $f(t) = 0$ y de aquí $a_0 = 0$. Para $f_e(t)$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{t}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \cos nt dt \\ &= \frac{-2}{\pi^2} \int_0^\pi t \cos nt dt + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nt dt \\ &= \frac{-2}{\pi^2} \left(\frac{1}{n^2} \cos nt + \frac{t}{n} \sin nt \right)_0^\pi + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sin nt \right)_0^\pi \\ &= \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{4}{\pi^2 n^2} & \text{para } n \text{ impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Para $f_o(t)$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi -\frac{1}{2} \sin nt dt \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin nt dt \\
 &= \frac{1}{\pi n} (\cos nt) \Big|_0^\pi \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{-2}{\pi n} & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Aunque el uso de la técnica empleada en el ejemplo no necesariamente proporciona una alternativa factible para calcular los coeficientes de Fourier trigonométricos, proporciona una idea adicional cuando se examinan formas de onda por simetría.

Análisis PSPICE

Cuando se lleva a cabo un análisis transitorio mediante el PSPICE, también puede ejecutarse un análisis de Fourier. El comando de control para el análisis de Fourier es

```
.FOUR FREQ OV1 <OV2 OV3...>
```

donde .FOUR indica que se pide un análisis de Fourier, FREQ es la frecuencia fundamental de la forma de onda, y OV representa la(s) variable(s) de interés. El comando de control para el análisis de Fourier sigue al comando de control del análisis transitorio, que recordamos del capítulo 7, es de la forma

```
.TRAN TSTEP TSTOP TSTART TMAX
```

El análisis de Fourier se lleva a cabo sobre el intervalo de TSTOP - 1/FREQ a TSTOP. Para exactitud máxima, TMAX debe ser igual al periodo de la forma de onda dividida entre 100 (es decir, 1/100 FREQ).

Para facilitar el uso del PSPICE, la red que se utiliza en un análisis de serie de Fourier es una fuente de voltaje en paralelo con una resistencia de 1 Ω. La fuente de voltaje define la forma de onda particular bajo investigación, y la salida que resulta del análisis es el nivel de cd de la forma de onda y las primeras nueve armónicas.

Debido a la manera como el algoritmo del PSPICE selecciona un ángulo de referencia, debemos normalizar la magnitud y fase de los componentes calculados analíticamente para obtener una comparación directa entre esos componentes calculados y los generados por el PSPICE. Los componentes de magnitud se normalizan dividiendo todos los componentes entre la magnitud del fundamental y los componentes de fase se

normalizan restando del ángulo de fase de cada componente el ángulo de fase del fundamental. Un ejemplo de esta normalización es el que sigue.

Número de armónica	Componente de Fourier	Componente normalizado	Ángulo de fase	Ángulo de fase normalizado
1	1.949	1	70.396	0
2	1.856	0.9524	50.792	-19.6
3	1.708	0.8762	31.188	-39.208
4	1.511	0.775	11.584	-58.812

E J E M P L O 17.6

Considere la forma de onda de la figura 17.6. Utilicemos PSPICE para encontrar el nivel de cd de la forma de onda y las primeras nueve armónicas.

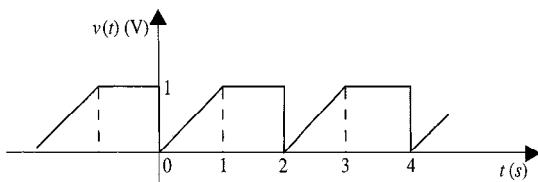


FIGURA 17.6 Forma de onda utilizada en el ejemplo 17.6.

S O L U C I Ó N El programa de PSPICE es como sigue.

```
EXAMPLE 17.6
V1 1 0 PWL (0 0 1 1 2 1)
R1 1 0 1
.OPTIONS LIMPTS=201 ITL5=1000
.TRAN .01 2 0 .02
.FOUR .5 V(1)
.END
```

El primer comando indica que se usan 201 puntos para especificar la forma de onda, y se usan 1 000 iteraciones para converger en una solución. Ambos números son mínimos y normalmente se requieren números mayores para obtener una solución exacta.

El programa de salida es

```
FOURIER COMPONENTS OF TRANSIENT RESPONSE V(1)
DC COMPONENT=7.474811E-01
HARMONIC FREQUENCY FOURIER NORMALIZED PHASE NORMALIZED
NO (HZ) COMPONENT COMPONENT (DEG) PHASE (DEG)
1 5.000E-01 3.800E-01 1.000E+00 -1.469E+02 0.000E+00
2 1.000E+00 1.592E-01 4.189E-01 -1.782E+02 -3.131E+01
```

3	1.500E+00	1.095E-01	2.882E-01	-1.654E+02	-1.856E+01
4	2.000E+00	7.963E-02	2.095E-01	-1.764E+02	-2.950E+01
5	2.500E+00	6.487E-02	1.707E-01	-1.683E+02	-2.144E+01
6	3.000E+00	5.313E-02	1.398E-01	-1.746E+02	-2.768E+01
7	3.500E+00	4.621E-02	1.216E-01	-1.686E+02	-2.168E+01
8	4.000E+00	3.990E-02	1.050E-01	-1.727E+02	-2.587E+01
9	4.500E+00	3.593E-02	9.454E-02	-1.679E+02	-2.102E+01

Observe que aunque el nivel de cd es claramente 0.75, el programa da 0.7475. Tales inexactitudes pueden corregirse con más puntos e iteraciones.

E J E M P L O 17.7

Llevemos a cabo un análisis de Fourier usando PSPICE en la forma de onda que se muestra en la figura 17.7.

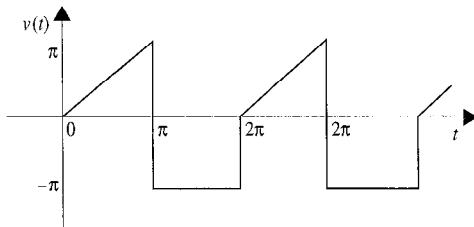


FIGURA 17.7 Forma de onda utilizada en el ejemplo 17.7.

S O L U C I Ó N El programa de PSPICE es

```
EXAMPLE 17.7
.OPTIONS LIMP TS=701 ITL5=10000
V1 1 0 PWL(0 0 3.1415 3.1416 3.1416 0 3.1417 -3.1416
+6.2831 -3.1416 6.2832 0)
R1 1 0 1
.TRAN .01 6.2832 0 .062832
.FOUR .1592 V(1)
.END
```

El programa de salida es

```
FOURIER COMPONENTS OF TRANSIENT RESPONSE V(1)
DC COMPONENT=-7.872032E-01

HARMONIC FREQUENCY FOURIER NORMALIZED PHASE      NORMALIZED
NO (HZ)      COMPONENT      COMPONENT      (DEG)      PHASE (DEG)
1 1.592E-01  3.065E+00  1.000E+00  -1.170E+01  0.000E+00
2 3.184E-01  4.999E-01  1.631E-01  -1.794E+02  -1.677E+02
3 4.776E-01  1.002E+00  3.269E-01  -3.188E+00  8.512E+00
4 6.368E-01  2.500E-01  8.156E-02  -1.789E+02  -1.672E+02
```

5	7.960E-01	6.001E-01	1.958E-01	-9.979E-01	1.070E+01
6	9.552E-01	1.667E-01	5.438E-02	-1.783E+02	-1.666E+02
7	1.114E+00	4.285E-01	1.398E-01	2.698E-01	1.197E+01
8	1.274E+00	1.250E-01	4.079E-02	-1.777E+02	-1.660E+02
9	1.433E+00	3.333E-01	1.088E-01	1.229E+00	1.293E+01

Este análisis parece ser más exacto debido al gran número de puntos e iteraciones.

Corrimiento del tiempo

Examinemos ahora el efecto de correr en el tiempo una forma de onda periódica $f(t)$ definida por la ecuación

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Observe que

$$\begin{aligned} f(t - t_0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0(t - t_0)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{-jnt_0}) e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \quad (17.34)$$

Como e^{-jnt_0} corresponde al corrimiento de fase, los coeficientes de Fourier de la función corrida en el tiempo son los coeficientes de Fourier de la función original con el ángulo corrido por una cantidad directamente proporcional a la frecuencia. Por tanto, el corrimiento en el tiempo en el dominio del tiempo corresponde a un corrimiento de fase en el dominio de frecuencia.

E J E M P L O 17.8

Retrasemos en el tiempo la forma de onda de la figura 17.3 por un cuarto de periodo y calculemos la serie de Fourier.

SOLUCIÓN La forma de onda de la figura 17.3 retrasada en el tiempo por $T_0/4$,

$$n\omega_0 t_d = n \frac{2\pi}{T_0} \frac{T_0}{4} = n \frac{\pi}{2} = n 90^\circ$$

Por tanto, usando la ecuación (17.34) y los resultados del ejemplo 17.1, los coeficientes de Fourier para la forma de onda recorrida en el tiempo son

$$c_n = \frac{2V}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \angle -n 90^\circ \quad n \text{ impar}$$

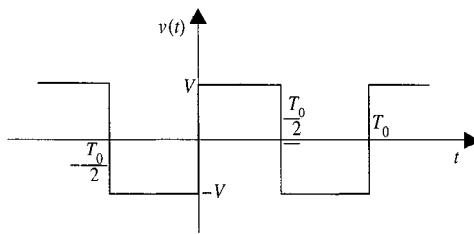


FIGURA 17.8 Forma de onda de la figura 17.3 recorrida en el tiempo por $T_0/4$.

y, por tanto,

$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{4V}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos(n\omega_0 t - n 90^\circ)$$

Si calculamos los coeficientes de Fourier para la forma de onda corrida en el tiempo de la figura 17.8, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 -Ve^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} Ve^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{2V}{jn\pi} \text{ para } n \text{ impar} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{c}_n = \frac{2V}{n\pi} / -90^\circ \quad n \text{ impar}$$

Como \$n\$ es impar, podemos mostrar que esta expresión es equivalente a la obtenida anteriormente.

En general, podemos calcular el corrimiento de fase en grados utilizando la expresión

$$\text{corrimiento de fase (grados)} = \omega_0 t_d = (360^\circ) \frac{t_d}{T_0} \quad (17.35)$$

por lo que un corrimiento en el tiempo de un periodo de un cuarto corresponde a 90° de corrimiento en la fase.

Como otra faceta interesante del corrimiento en el tiempo, considere una función \$f_1(t)\$ que no es cero en el intervalo \$0 \leq t \leq T_0/2\$ y es cero en el intervalo \$T_0/2 < t \leq T_0\$. Con propósitos de ilustración, supongamos que \$f_1(t)\$ es la forma de onda triangular

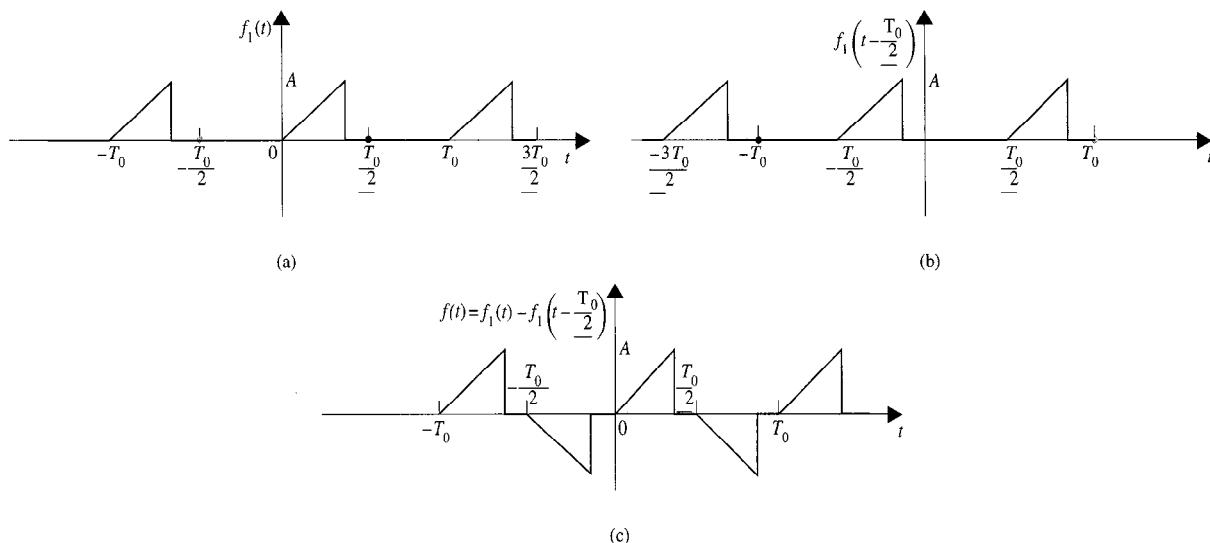


FIGURA 17.9 Formas de onda que ilustran la generación de la simetría de media onda.

que se muestra en la figura 17.9a. $f_1(t - T_0/2)$ se muestra entonces en la figura 17.9b. Entonces la función $f(t)$ definida como

$$f(t) = f_1(t) - f_1\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \quad (17.36)$$

se muestra en la figura 17.9c. Observe que $f(t)$ tiene simetría de media onda. Además, advierta que si

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{-jn\omega_0 t}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) - f_1\left(t - \frac{T_0}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n (1 - e^{-jnt\pi}) e^{jn\omega_0 t} \\ &= \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases} \quad (17.37) \end{aligned}$$

Por tanto, vemos que cualquier función con simetría de media onda puede expresarse en la forma de la ecuación (17.36), donde la serie de Fourier está definida por la ecuación (17.37), y \mathbf{c}_n es el coeficiente de Fourier para $f_1(t)$.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D17.6 Si la forma de onda de la figura D17.1 está retrasada en el tiempo 1 segundo, obtenemos la forma de onda de la figura D17.6. Calcule los coeficientes de Fourier exponenciales para la forma de onda de la figura D17.6 y muestre que difieren de los coeficientes para la forma de onda de la figura D17.1 en un ángulo de $n(180^\circ)$.

$$\text{Resp.: } c_0 = \frac{1}{2}, c_n = -\left(\frac{1 - e^{-jn\pi}}{j2\pi n}\right).$$

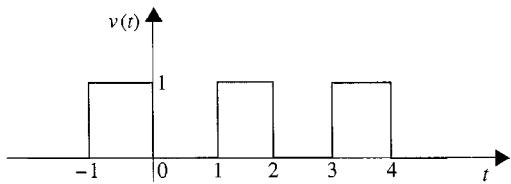


FIGURA D17.6

Generación de formas de onda

La magnitud de las armónicas en una serie de Fourier es independiente de la escala de tiempo para una forma de onda dada. Por tanto, las ecuaciones para una variedad de formas de onda puede darse en forma tabular sin expresar una escala de tiempo específica. La tabla 17.1 es un conjunto de ondas periódicas que ocurren comúnmente donde ha sido usada la ventaja de la simetría para simplificar los coeficientes. Esas formas de onda pueden usarse para generar otras formas de onda. El nivel de una onda puede ajustarse cambiando la componente del valor promedio, el tiempo puede recorrerse ajustando el ángulo de las armónicas y se pueden sumar dos formas de onda para producir una tercera; por ejemplo, las formas de onda de la figura 17.10a y b pueden sumarse para producir la forma de onda de la figura 17.10c.

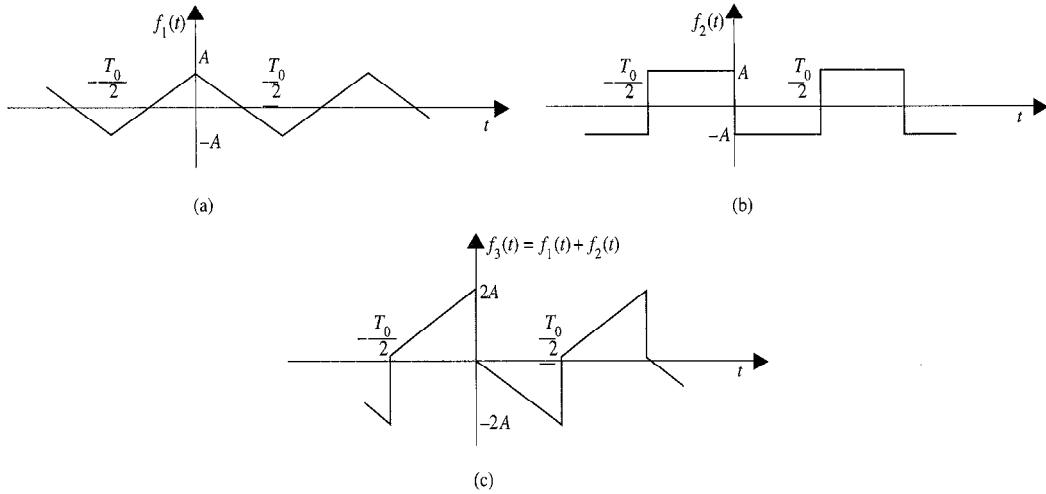
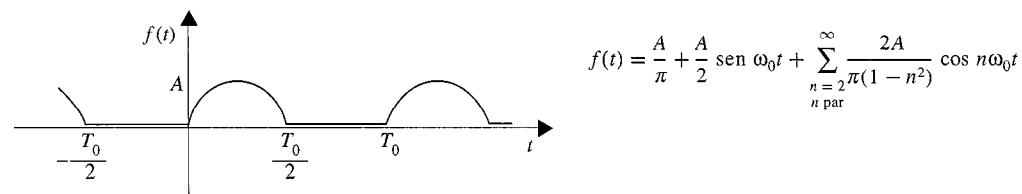
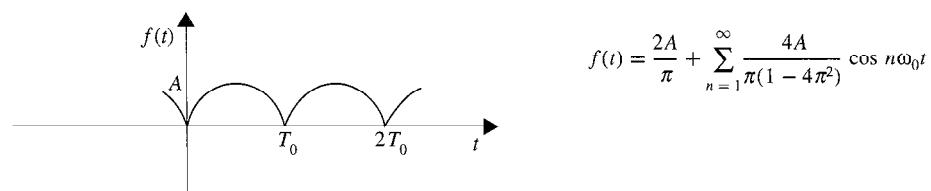
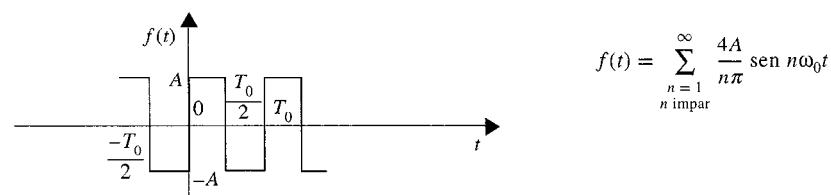
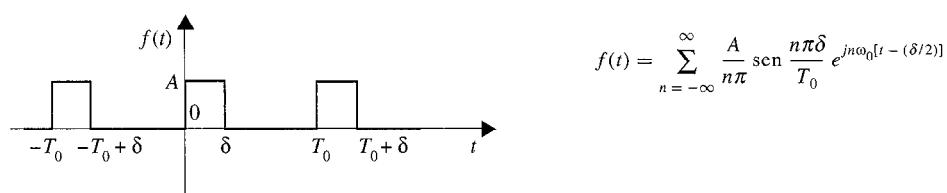
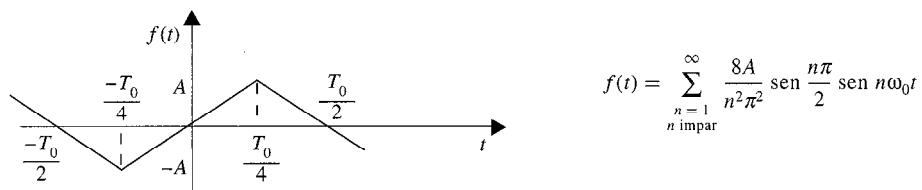
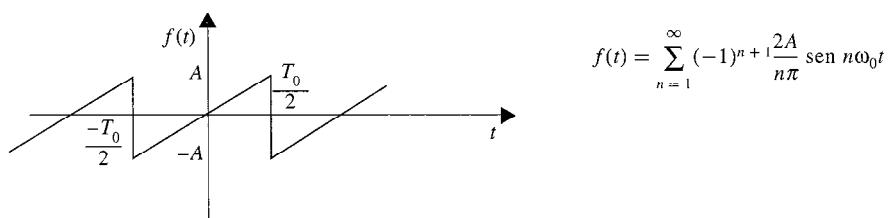
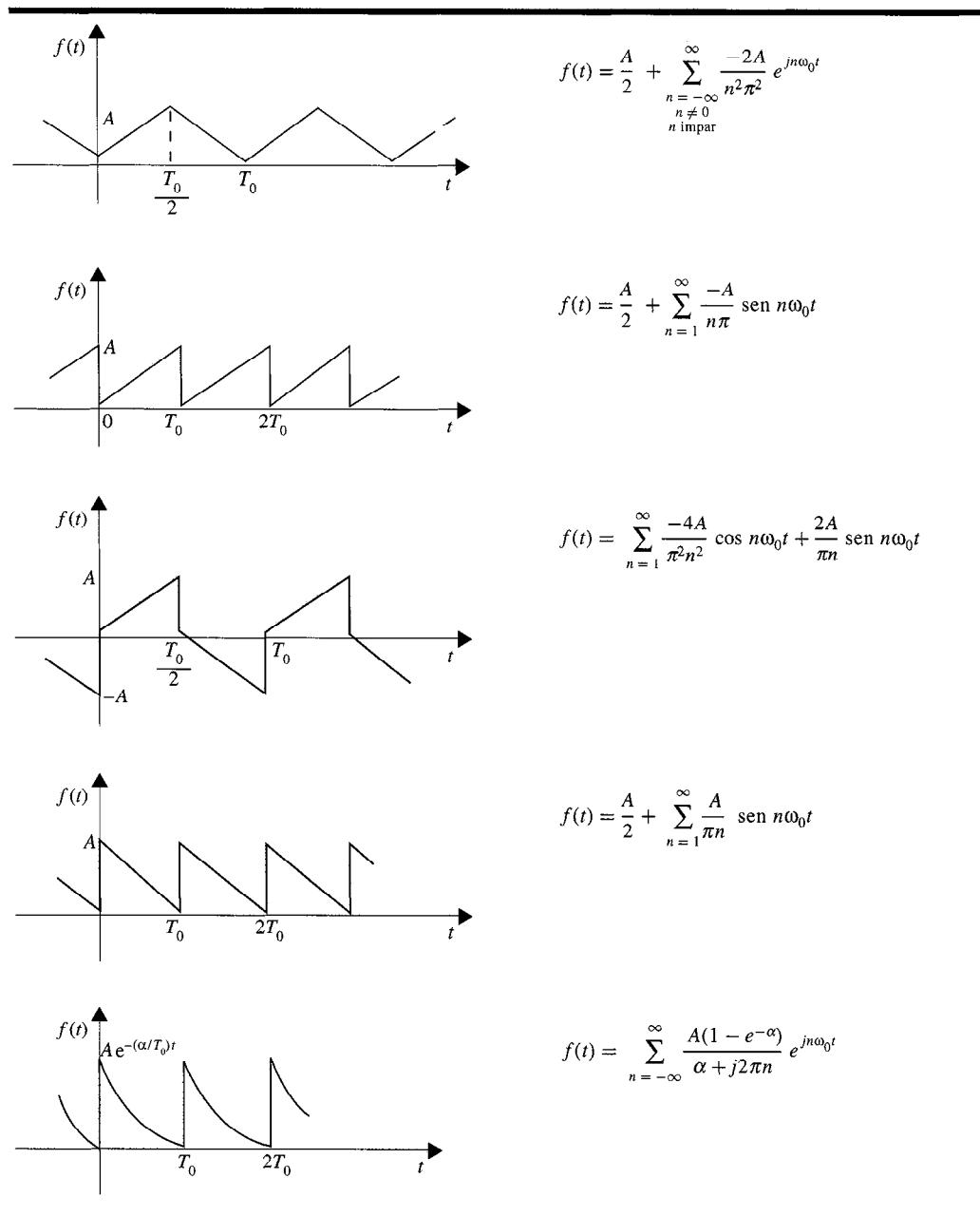


FIGURA 17.10 Ejemplo de generación de formas de onda.

T A B L A 17.1

Serie de Fourier para algunas formas de onda comunes



T A B L A 17.1 (Continuación).

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D17.7 En la figura D17.7 se muestran dos formas de onda periódicas. Calcule la serie de Fourier exponencial para cada forma de onda, y entonces sume los resultados para obtener la serie de Fourier para la forma de onda de la figura D17.2.

Resp.:

$$v_1(t) = \frac{2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} e^{jn\omega_0 t},$$

$$v_2(t) = \frac{4}{3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{4}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{3} - \sin \frac{2n\pi}{3} \right) e^{jn\omega_0 t}.$$

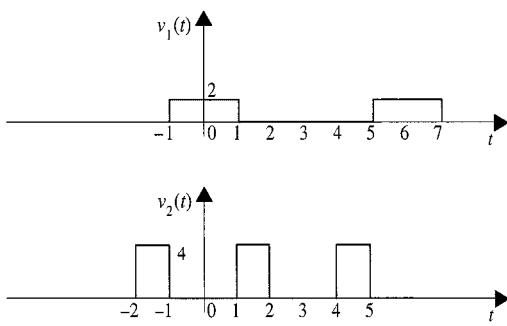


FIGURA D17.7

Espectro de frecuencia

El *espectro de frecuencia* de la función $f(t)$ expresada como una serie de Fourier consiste en una gráfica de la amplitud de las armónicas contra la frecuencia, que llamamos el *espectro de amplitud*, y una gráfica de la fase de las armónicas contra la frecuencia, que llamamos el *espectro de fase*. Como los componentes de la frecuencia son discretos, los espectros se llaman *espectros de líneas*. Tales espectros ilustran el contenido de frecuencia de la señal. Las gráficas de los espectros de amplitud y fase se basan en las ecuaciones (17.1), (17.3) y (17.17), y representan la amplitud y la fase de la señal en frecuencias específicas.

E J E M P L O 17.9

La serie de Fourier para la forma de onda de tipo triangular que se muestra en la figura 17.10c con $A = 5$ está dada por la ecuación

$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \left(\frac{20}{n\pi} \sin n\omega_0 t - \frac{40}{n^2\pi^2} \cos n\omega_0 t \right)$$

Deseamos trazar gráficas de los primeros cuatro términos de los espectros de fase y de amplitud para esta señal.

SOLUCIÓN Como $D_n / \theta_n = a_n - jb_n$, los primeros cuatro términos para esta señal son

$$D_1 / \theta_1 = -\frac{40}{\pi^2} - j \frac{20}{\pi} = 7.5 \angle -122^\circ$$

$$D_3 / \theta_3 = -\frac{40}{9\pi^2} - j \frac{20}{3\pi} = 2.2 \angle -102^\circ$$

$$D_5 \angle \theta_5 = -\frac{40}{25\pi^2} - j \frac{20}{5\pi} = 1.3 \angle -97^\circ$$

$$D_7 \angle \theta_7 = -\frac{40}{49\pi^2} - j \frac{20}{7\pi} = 0.91 \angle -95^\circ$$

Por tanto, las gráficas de la amplitud y fase contra ω son como se muestra en la figura 17.11.

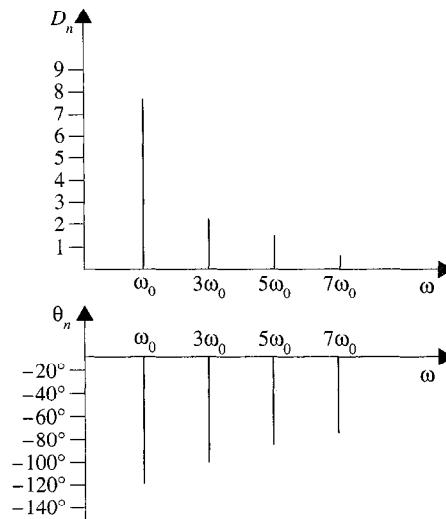


FIGURA 17.11 Espectros de amplitud y fase.

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D17.8 Determine la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda del voltaje de la figura D17.8 y trace gráficas de los primeros cuatro términos de los espectros de amplitud y fase para esta señal.

Resp.: $a_0 = \frac{1}{2}$, $D_1 = -j(1/\pi)$, $D_2 = -j(1/2\pi)$, $D_3 = -j(1/3\pi)$, $D_4 = -j(1/4\pi)$.

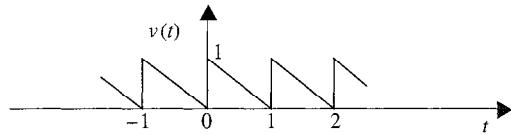


FIGURA D17.8

Respuesta de la red en estado estable

Si una señal periódica se aplica a una red, la respuesta del voltaje o corriente de estado estable en algún punto del circuito puede encontrarse de la siguiente manera. Primero, representamos la función forzante periódica mediante una serie de Fourier. Si la función

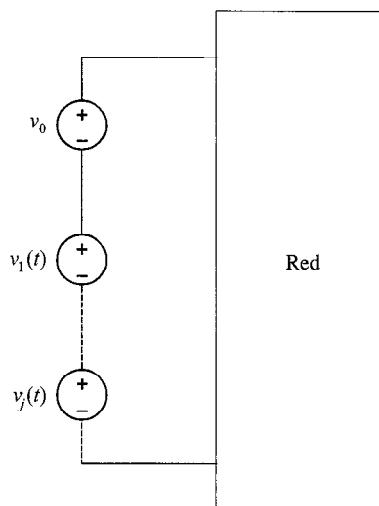


FIGURA 17.12 Red con una función forzante de voltaje periódica.

forzante periódica de entrada para una red es un voltaje, la entrada puede expresarse en la forma

$$v(t) = v_0 + v_1(t) + v_2(t) + \dots$$

y, por tanto, puede representarse en el dominio del tiempo como se muestra en la figura 17.12. Cada fuente tiene su propia amplitud y frecuencia. A continuación determinamos la respuesta debida a cada componente de la serie de Fourier de entrada; es decir, utilizamos un análisis fasorial en el dominio de frecuencia para determinar la respuesta de la red debida a cada fuente. La respuesta de la red debida a cada fuente en el dominio de frecuencia es entonces transformada al dominio del tiempo. Finalmente, agregamos las soluciones en el dominio del tiempo debidas a cada fuente usando el principio de superposición para obtener la serie de Fourier para la respuesta total de la red en *estado estable*.

E J E M P L O 17.10

Deseamos determinar el voltaje de estado estable $v_o(t)$ de la figura 17.13 si el voltaje de entrada $v(t)$ está dado por la expresión

$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \left(\frac{20}{n\pi} \sin 2nt - \frac{40}{n^2\pi^2} \cos 2nt \right) V$$

SOLUCIÓN Observe que esta fuente no tiene término constante, y, por tanto, su valor de cd es cero. La amplitud y fase para los primeros cuatro términos de esta señal están dados en el ejemplo 17.9, y, por tanto, la señal $v(t)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} v(t) &= 7.5 \cos(2t - 122^\circ) + 2.2 \cos(6t - 102^\circ) + 1.3 \cos(10t - 97^\circ) \\ &\quad + 0.91 \cos(14t - 95^\circ) + \dots \end{aligned}$$

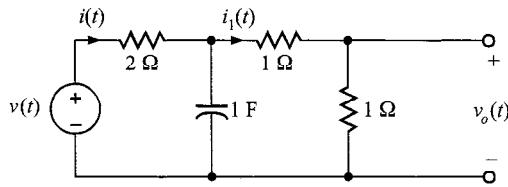


FIGURA 17.13 Circuito RC empleado en el ejemplo 17.10.

De la red encontramos que

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{2 + \frac{2/j\omega}{2 + 1/j\omega}} = \frac{\mathbf{V}(1 + 2j\omega)}{4 + 4j\omega}$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{I}(1/j\omega)}{2 + 1/j\omega} = \frac{\mathbf{I}}{1 + 2j\omega}$$

$$\mathbf{V}_o = (1)\mathbf{I}_1 = 1 \cdot \frac{\mathbf{V}(1 + 2j\omega)}{4 + 4j\omega} \frac{1}{1 + 2j\omega} = \frac{\mathbf{V}}{4 + 4j\omega}$$

Por tanto, como $\omega_0 = 2$,

$$\mathbf{V}_o(n) = \frac{\mathbf{V}(n)}{4 + j8n}$$

Los componentes individuales de la salida debida a los componentes de la fuente de entrada son entonces

$$\mathbf{V}_o(\omega_0) = \frac{7.5 \angle -122^\circ}{4 + j8} = 0.84 \angle -185.4^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_o(3\omega_0) = \frac{2.2 \angle -102^\circ}{4 + j24} = 0.09 \angle -182.5^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_o(5\omega_0) = \frac{1.3 \angle -97^\circ}{4 + j40} = 0.03 \angle -181.3^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_o(7\omega_0) = \frac{0.91 \angle -95^\circ}{4 + j56} = 0.016 \angle -181^\circ \text{ V}$$

De aquí, el voltaje de salida de estado estable $v_o(t)$ puede escribirse como

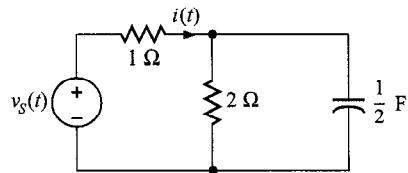
$$v_o(t) = 0.84\cos(2t - 185.4^\circ) + 0.09\cos(6t - 182.5^\circ)$$

$$+ 0.03\cos(10t - 181.3^\circ) + 0.016\cos(14t - 181^\circ) + \dots$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D17.9 Determine la expresión para la corriente de estado estable $i(t)$ en la figura D17.9 si el voltaje de entrada $v_S(t)$ está dado por la expresión

$$v_S(t) = \frac{20}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-40}{\pi(4n^2 - 1)} \cos 2nt \text{ V}$$

**FIGURA D17.9**

Resp.: $i(t) = 2.12 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-40}{\pi(4n^2 - 1)} \frac{1}{A_n} \cos(2nt - \theta_n) \text{ A.}$

Potencia promedio

Hemos mostrado que cuando una red lineal se fuerza con una señal periódica no senoidal, los voltajes y corrientes a través de la red son de la forma

$$v(t) = V_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{v_n})$$

e

$$i(t) = I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{i_n})$$

Si empleamos la convención de signos pasiva y suponemos que el voltaje a través de un elemento y la corriente a lo largo de éste están dados por las ecuaciones anteriores, entonces de la ecuación (10.6)

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t)i(t) dt \end{aligned}$$

Observe que el integrando incluye el producto de dos series infinitas. Sin embargo, la determinación de la potencia promedio es realmente más fácil de lo que parece. Primero, note que el producto $V_{dc}I_{dc}$ cuando se integra en un periodo y se divide entre el periodo es simplemente $V_{dc}I_{dc}$. Segundo, el producto de V_{dc} y cualquier armónica de la corriente o I_{dc} y cualquier armónica del voltaje cuando se integra en un periodo da cero. Tercero, el producto de cualesquiera dos armónicas diferentes del voltaje y de la corriente cuando se integran en un periodo dan cero. Finalmente, los términos no cero resultan sólo de los productos del voltaje y corriente en la misma frecuencia. De aquí, utilizando el desarrollo matemático que sigue a la ecuación (10.6), encontramos que

$$P = V_{dc}I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2} \cos(\theta_{v_n} - \theta_{i_n}) \quad (17.38)$$

EJEMPLO 17.11

En la red de la figura 17.14, $v(t) = 42 + 16 \cos(377t + 30^\circ) + 12 \cos(754t - 20^\circ)$ V. Deseamos calcular la corriente $i(t)$ y determinar la potencia promedio absorbida por la red.

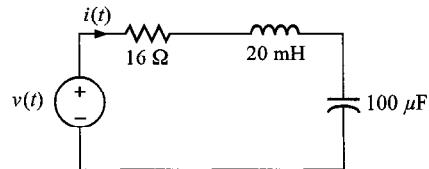


FIGURA 17.14 Red utilizada en el ejemplo 17.11.

SOLUCIÓN El condensador actúa como un circuito abierto para cd, y, por tanto, $I_{dc} = 0$. En $\omega = 377$ rad/segundo,

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j(377)(100)10^{-6}} = -j26.53 \Omega$$

$$j\omega L = j(377)(20)10^{-3} = j7.54 \Omega$$

De aquí,

$$\mathbf{I}_{377} = \frac{16 \angle 30^\circ}{16 + j7.54 - j26.53} = 0.64 \angle 79.88^\circ \text{ A}$$

En $\omega = 754$ rad/segundo,

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j(754)(100)10^{-6}} = -j13.26 \Omega$$

$$j\omega L = j(754)(20)10^{-3} = j15.08 \Omega$$

De aquí,

$$\mathbf{I}_{754} = \frac{12 \angle -20^\circ}{16 + j15.08 - j13.26} = 0.75 \angle -26.49^\circ \text{ A}$$

Por tanto, la corriente $i(t)$ es

$$i(t) = 0.64 \cos(377t + 79.88^\circ) + 0.75 \cos(754t - 26.49^\circ) \text{ A}$$

y la potencia promedio absorbida por la red es

$$\begin{aligned}
 P &= (42)(0) + \frac{(16)(0.64)}{2} \cos(30^\circ - 79.88^\circ) \\
 &\quad + \frac{(12)(0.75)}{2} \cos(-20^\circ + 26.49^\circ) \\
 &= 7.77 \text{ W}
 \end{aligned}$$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

DIFÍCIL En las terminales de una red de dos puertos, el voltaje $v(t)$ y la corriente $i(t)$ están dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= 64 + 36\cos(377t + 60^\circ) \\
 &\quad - 24\cos(754t + 102^\circ) \text{ V}
 \end{aligned}$$

$$i(t) = 1.8 \cos(377t + 45^\circ) + 1.2 \cos(754t + 100^\circ) \text{ A}$$

Encuentre la potencia promedio absorbida por la red.

Resp.: $P_{\text{prom}} = 16.91 \text{ W}$.

17.2 Transformada de Fourier

Las secciones anteriores de este capítulo han ilustrado que la serie de Fourier exponencial puede usarse para representar una señal periódica para todo tiempo. Consideraremos ahora una técnica para representar una señal aperiódica para todos los valores del tiempo.

Suponga una señal aperiódica $f(t)$ como la que se muestra en la figura 17.15a. Construimos ahora una nueva señal $f_p(t)$ que es idéntica a $f(t)$ en el intervalo $-T/2$ a $T/2$, pero es *periódica* con periodo T como se muestra en la figura 17.15b. Como $f_p(t)$ es periódica, puede representarse en el intervalo $-\infty$ a ∞ mediante una serie de Fourier exponencial.

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (17.39)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) e^{-j n \omega_0 t} dt \quad (17.40)$$

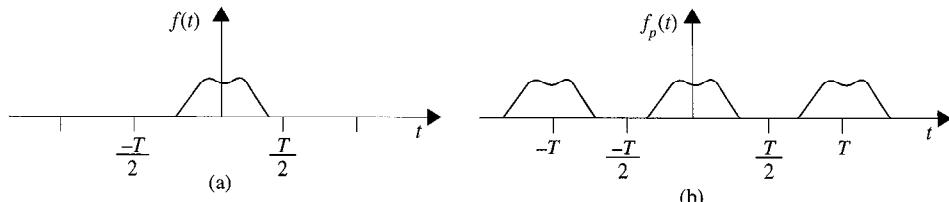


FIGURA 17.15 Señales aperiódica y periódica.

y

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (17.41)$$

En este punto notamos que si tomamos el límite de la función $f_p(t)$ cuando $T \rightarrow \infty$, la señal periódica de la figura 17.15b se aproxima a la señal aperiódica de la figura 17.15a; es decir, las señales llenas de repeticiones centradas en $-T$ y $+T$ de la figura 17.15b se mueven a infinito.

El espectro de líneas para la señal periódica existe para frecuencias armónicas ($n\omega_0$) y el espaciado incremental entre las armónicas es

$$\Delta\omega = (n + 1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (17.42)$$

Conforme $T \rightarrow \infty$, las líneas en el espectro de frecuencia para $f_p(t)$ se vuelven más cercanas, $\Delta\omega$ se aproxima a la diferencial $d\omega$ y $n\omega_0$ puede tomar cualquier valor de ω . En esas condiciones el espectro de las líneas se convierte en un espectro continuo. Como a medida que $T \rightarrow \infty$, $c_n \rightarrow 0$ en la ecuación (17.40), examinaremos el producto $c_n T$ donde

$$c_n T = \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

En el límite, cuando $T \rightarrow \infty$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (c_n T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

que en vista de la discusión previa puede escribirse como

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (c_n T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Esta integral es la transformada de Fourier de $f(t)$, que denotaremos como $F(\omega)$, y de aquí

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (17.43)$$

De manera similar, $f_p(t)$ puede expresarse como

$$\begin{aligned} f_p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n T) e^{jn\omega_0 t} \frac{1}{T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n T) e^{jn\omega_0 t} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \end{aligned}$$

que en el límite cuando $T \rightarrow \infty$ se vuelve

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (17.44)$$

Las ecuaciones (17.43) y (17.44) constituyen lo que se llama *par de transformadas de Fourier*. Como $\mathbf{F}(\omega)$ es la transformada de $f(t)$ y $f(t)$ es la transformada de Fourier inversa de $\mathbf{F}(\omega)$, normalmente se expresan en la forma

$$\mathbf{F}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (17.45)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{F}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (17.46)$$

Algunos pares de transformadas importantes

Hay un número importante de pares de transformadas de Fourier; en el siguiente material derivaremos un número de ellas, y entonces enlistaremos algunas de las más comunes en forma de tabla.

EJEMPLO 17.12

Deseamos derivar la transformada de Fourier para el pulso de voltaje que se muestra en la figura 17.16a.

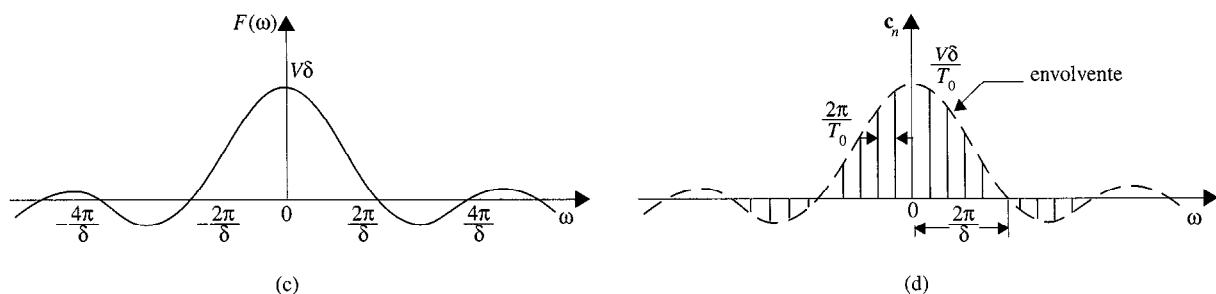
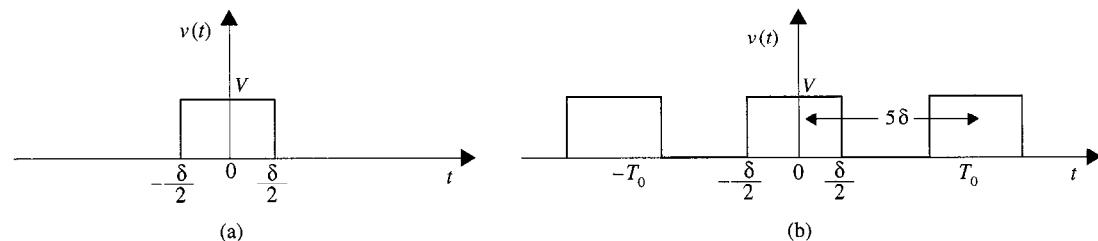


FIGURA 17.16 Pulsos y sus espectros.

SOLUCIÓN Utilizando la ecuación (17.45), la transformada de Fourier es

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\omega) &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} V e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{V}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\delta/2}^{\delta/2} \\ &= V \frac{e^{-j\omega\delta/2} - e^{+j\omega\delta/2}}{-j\omega} \\ &= V\delta \frac{\sin(\omega\delta/2)}{\omega\delta/2}\end{aligned}$$

Por tanto, la transformada de Fourier para la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t \leq -\frac{\delta}{2} \\ V & -\frac{\delta}{2} < t \leq \frac{\delta}{2} \\ 0 & \frac{\delta}{2} < t < \infty \end{cases}$$

es

$$\mathbf{F}(\omega) = V\delta \frac{\sin(\omega\delta/2)}{\omega\delta/2}$$

En la figura 17.16c se muestra una gráfica de esta función. Exploraremos este ejemplo aún más. Considere ahora el tren de pulsos que se muestra en la figura 17.16b. Utilizando las técnicas que han sido demostradas con anterioridad, podemos mostrar que los coeficientes de Fourier para esta forma de onda son

$$\mathbf{c}_n = \frac{V\delta}{T_0} \frac{\sin(n\omega_0\delta/2)}{n\omega_0\delta/2}$$

El espectro de líneas para $T_0 = 5\delta$ se muestran en la figura 17.16d.

Lo que las ecuaciones y figuras de este ejemplo indican es que conforme $T_0 \rightarrow \infty$ y la función periódica se vuelve aperiódica, las líneas en el espectro discreto se hacen más densas y la amplitud más pequeña, y el espectro de amplitud cambia de un espectro discreto a un espectro continuo. Observe que la envolvente para el espectro discreto tiene la misma forma que el espectro continuo. Como la serie de Fourier representa la amplitud y fase de la señal a frecuencias específicas, la transformada de Fourier también especifica el contenido de frecuencia de una señal.

E J E M P L O 17.13

Encuentre la transformada de Fourier para la función de impulso unitario $\delta(t)$.

S O L U C I Ó N La transformada de Fourier de la función de impulso unitario $\delta(t - a)$ es

$$\mathbf{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) e^{-j\omega t} dt$$

Utilizando la propiedad de muestreo del impulso unitario, encontramos que

$$\mathbf{F}(\omega) = e^{-j\omega a}$$

y si $a = 0$, entonces

$$\mathbf{F}(\omega) = 1$$

Observe entonces que la $\mathbf{F}(\omega)$ para $f(t) = \delta(t)$ es *constante para todas las frecuencias*. Esta es una propiedad importante, por lo que la veremos más tarde.

E J E M P L O 17.14

Deseamos determinar la transformada de Fourier de la función $f(t) = e^{j\omega_0 t}$.

S O L U C I Ó N En este caso notamos que si $\mathbf{F}(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$, entonces

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

Por tanto, $f(t) = e^{j\omega_0 t}$ y $\mathbf{F}(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ representan un par de transformadas de Fourier.

E J E M P L O 17.15

Determinemos la transformada de Fourier de la función $f(t) = \cos\omega_0 t$.

S O L U C I Ó N La transformada de Fourier de la función $f(t) = \cos\omega_0 t$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega_0 t e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Utilizando los resultados del ejemplo 17.14, obtenemos

$$\mathbf{F}(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

E J E M P L O 17.16

Determinemos la transformada de Fourier de la función $f(t) = e^{-at}u(t)$.

S o l u c i ó n La transformada de Fourier de esta función es

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{-1}{a+j\omega} e^{-at}e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

para $a > 0$ ya que $e^{-at} \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.

Un número de útiles pares de transformada de Fourier se muestran en la tabla 17.2.

T A B L A 17.2
Pares de transformadas de Fourier

$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t - a)$	$e^{-j\omega a}$
A	$2\pi A\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\sin\omega_0 t$	$j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$e^{-\alpha t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega_0 t u(t), a > 0$	$\frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at}\sin\omega_0 t u(t), a > 0$	$\frac{\omega_0}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$

EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

D17.11 Si $f(t) = \sin\omega_0 t$, encuentre $\mathbf{F}(\omega)$.

Resp.: $\mathbf{F}(\omega) = \pi j[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$.

Algunas propiedades de la transformada de Fourier

Examinemos ahora algunas de las propiedades de la transformada de Fourier definida por la ecuación

$$\mathbf{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Utilizando la identidad de Euler, podemos escribir esta función como

$$\mathbf{F}(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) \quad (17.47)$$

donde

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\omega t dt \quad (17.48)$$

$$B(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin\omega t dt \quad (17.49)$$

De la ecuación (17.47) notamos que

$$\mathbf{F}(\omega) = |\mathbf{F}(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (17.50)$$

donde

$$|\mathbf{F}(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad (17.51)$$

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \quad (17.52)$$

Dadas las definiciones anteriores, podemos mostrar que

$$\begin{aligned} A(\omega) &= A(-\omega) \\ B(\omega) &= -B(-\omega) \\ \mathbf{F}(-\omega) &= \mathbf{F}^*(\omega) \end{aligned} \quad (17.53)$$

Las ecuaciones (17.53) establecen simplemente que $A(\omega)$ es una función par de ω , $B(\omega)$ es una función impar de ω , y $\mathbf{F}(\omega)$ evaluada en $-\omega$ es el complejo conjugado de $\mathbf{F}(\omega)$. Por tanto, $|\mathbf{F}(\omega)|$ es una función par de ω y $\theta(\omega)$ es una función impar de ω . Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier se presentan ahora en rápida sucesión.

Linealidad. Si $\mathcal{F}[f_1(t)] = \mathbf{F}_1(\omega)$ y $\mathcal{F}[f_2(t)] = \mathbf{F}_2(\omega)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[af_1(t) + bf_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [af_1(t) + bf_2(t)]e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} af_1(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} bf_2(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= a\mathbf{F}_1(\omega) + b\mathbf{F}_2(\omega)\end{aligned}\tag{17.54}$$

Escala de tiempo. Si $\mathcal{F}[f(t)] = \mathbf{F}(\omega)$, entonces si $a > 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(at)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt \\ &\text{Si ahora hacemos } x = at, \text{ entonces} \\ \mathcal{F}[f(at)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x/a} \frac{dx}{a} \\ &= \frac{1}{a} \mathbf{F}\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}\tag{17.55}$$

y si $a < 0$, entonces siguiendo el desarrollo anterior,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(at)] &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(x)e^{-j\omega x/a} \frac{dx}{a} \\ &= -\frac{1}{a} \mathbf{F}\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}\tag{17.56}$$

Corrimiento del tiempo. Si $\mathcal{F}[f(t)] = \mathbf{F}(\omega)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt \\ &\text{Si ahora hacemos } x = t - t_0, \text{ entonces} \\ \mathcal{F}[f(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x + t_0)} dx \\ &= e^{-j\omega t_0} \mathbf{F}(\omega)\end{aligned}\tag{17.57}$$

Modulación. Si $\mathcal{F}[f(t)] = \mathbf{F}(\omega)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\
&= \mathbf{F}(\omega - \omega_0)
\end{aligned} \tag{17.58}$$

Diferenciación. Si $f(t)$ es una función que es continua en cualquier intervalo finito, es absolutamente integrable, y su primera derivada es continua por secciones y absolutamente integrable, entonces

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt$$

Utilizando integración por partes, obtenemos

$$\mathcal{F}[f'(t)] = f(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} j\omega f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Como $f(t)$ es absolutamente integrable,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |f(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |f(t)| = 0$$

y, por tanto,

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega \mathbf{F}(\omega) \tag{17.59}$$

La aplicación repetida de esta técnica en las condiciones enlistadas con anterioridad da

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n \mathbf{F}(\omega) \tag{17.60}$$

Es importante notar que la ecuación (17.59) no garantiza la existencia de $\mathcal{F}[f'(t)]$. Simplemente establece que *si* la transformada existe, está dada por la ecuación (17.59).

Convolución del tiempo. Si $\mathcal{F}[f_1(t)] = \mathbf{F}_1(\omega)$ y $\mathcal{F}[f_2(t)] = \mathbf{F}_2(\omega)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx\right] &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} f_1(x) \int_{t=-\infty}^{\infty} f_2(t-x) e^{-j\omega t} dt dx
\end{aligned}$$

Si ahora hacemos $u = t - x$, entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx\right] &= \int_{x=-\infty}^{\infty} f_1(x) \int_{u=-\infty}^{\infty} f_2(u)e^{-j\omega(u+x)}du dx \\
 &= \int_{x=-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{-j\omega x} \int_{u=-\infty}^{\infty} f_2(u)e^{-j\omega u}du dx \\
 &= \mathbf{F}_1(\omega)\mathbf{F}_2(\omega)
 \end{aligned} \tag{17.61}$$

Deberemos notar con mucho cuidado la propiedad de convolución del tiempo de la transformada de Fourier. Con referencia a la figura 17.17, esta propiedad establece que si $\mathbf{V}_i(\omega) = \mathcal{F}[v_i(t)]$, $\mathbf{H}(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$, y $\mathbf{V}_o(\omega) = \mathcal{F}[v_o(t)]$, entonces

$$\mathbf{V}_o(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{V}_i(\omega) \tag{17.62}$$

donde $\mathbf{V}_i(\omega)$ representa la señal de entrada, $\mathbf{H}(\omega)$ es la función de transferencia de la red y $\mathbf{V}_o(\omega)$ representa la señal de salida. La ecuación (17.62) tácitamente supone que las condiciones iniciales de la red son cero.

La tabla 17.3 proporciona una corta lista de las propiedades de la transformada de Fourier.

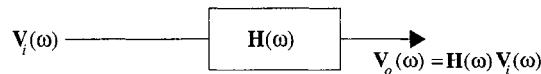


FIGURA 17.17 Representación de la propiedad de convolución del tiempo.

T A B L E 17.3

Propiedades de la transformada de Fourier

$f(t)$	$\mathbf{F}(\omega)$
$Af(t)$	$A\mathbf{F}(\omega)$
$f_1(t) \pm f_2(t)$	$\mathbf{F}_1(\omega) \pm \mathbf{F}_2(\omega)$
$f(at)$	$\frac{1}{a} \mathbf{F}\left(\frac{\omega}{a}\right), a > 0$
$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} \mathbf{F}(\omega)$
$e^{j\omega t_0} f(t)$	$\mathbf{F}(\omega - \omega_0)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n \mathbf{F}(\omega)$
$t^n f(t)$	$(j\omega)^n \frac{d^n \mathbf{F}(\omega)}{d\omega^n}$
$f(t) \cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2} [\mathbf{F}(\omega - \omega_0) + \mathbf{F}(\omega + \omega_0)]$
$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx$	$\mathbf{F}_1(\omega)\mathbf{F}_2(\omega)$
$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_1(x)\mathbf{F}_2(\omega - x)dx$

E J E M P L O 17.17

Determinemos la transformada de Fourier de la función $f(t - t_0) = e^{-(t-t_0)} u(t - t_0)$.

S O L U C I Ó N Por definición,

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

la cual puede escribirse usando la propiedad de corrimiento del tiempo como

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t - t_0)] &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} u(t) e^{-j\omega t} dt\end{aligned}$$

que de los resultados del ejemplo 17.16 es

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \frac{e^{-j\omega t_0}}{1 + j\omega}$$

E J E M P L O 17.18

Determinemos la transformada de Fourier de la función

$$f(t) = \frac{d}{dt} [e^{-at} u(t)] = -ae^{-at} u(t) + e^{-at} \delta(t)$$

S O L U C I Ó N $\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [-ae^{-at} u(t) + e^{-at} \delta(t)] e^{-j\omega t} dt$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{-a}{a + j\omega} + 1$$

$$= \frac{j\omega}{a + j\omega}$$

La transformada también puede ser evaluada utilizando la propiedad de diferenciación; es decir, si

$$\mathcal{F}[e^{-at} u(t)] = \frac{1}{a + j\omega}$$

entonces

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}(e^{-at}u(t))\right] = j\omega \left(\frac{1}{a+j\omega}\right) = \frac{j\omega}{a+j\omega}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D17.13 Si $\mathcal{F}[e^{-t}u(t)] = 1/(1 + j\omega)$, use la propiedad de escala de tiempo de la transformada de Fourier para encontrar $\mathcal{F}[e^{-at}u(t)]$, $a > 0$.

Resp.: $\frac{1}{a + j\omega}$.

D17.14 Use la propiedad $\mathcal{F}[t^n f(t)] = j^n [d^n F(\omega)/d\omega^n]$ para determinar la transformada de Fourier de $te^{-at}u(t)$, $a > 0$.

Resp.: $\frac{1}{(a + j\omega)^2}$.

D17.14 Determine la salida $v_o(t)$ en la figura D17.14 si la señal de entrada $v_i(t) = e^{-t}u(t)$, la respuesta de impulso de la red $h(t) = e^{-2t}u(t)$, y todas las condiciones iniciales son cero.

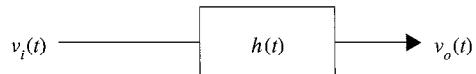


FIGURA D17.14

Resp.: $v_o(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$ V.

Teorema de Parseval

Un planteamiento matemático del teorema de Parseval es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (17.63)$$

Esta relación puede derivarse fácilmente como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(-\omega)t} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

La importancia del teorema de Parseval puede verse si imaginamos que $f(t)$ representa la corriente en una resistencia de 1Ω . Como $f^2(t)$ es la potencia y la integral de la potencia con respecto al tiempo es la energía, la ecuación (17.63) muestra que podemos calcular esta energía de 1Ω o energía normalizada en el dominio del tiempo o en el dominio de frecuencia.

Aplicaciones

Apliquemos ahora a problemas de circuitos algunas de los conocimientos adquiridos sobre la transformada de Fourier.

EJEMPLO 17.19

Usando la técnica de la transformada, deseamos determinar $v_o(t)$ en la figura 17.18 si a) $v_i(t) = 5e^{-2t}u(t)$ V y b) $v_i(t) = 5 \cos 2t$ V.

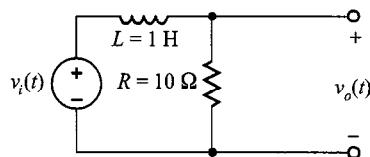


FIGURA 17.18 Circuito RL simple.

SOLUCIÓN a) En este caso como $v_i(t) = 5e^{-2t}u(t)$ V, entonces

$$V_i(\omega) = \frac{5}{2 + j\omega} \text{ V}$$

$\mathbf{H}(\omega)$ para la red es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{R}{R + j\omega L}$$

$$= \frac{10}{10 + j\omega}$$

De la ecuación (17.62),

$$\begin{aligned} V_o(\omega) &= \mathbf{H}(\omega)V_i(\omega) \\ &= \frac{50}{(2 + j\omega)(10 + j\omega)} \\ &= \frac{50}{8} \left(\frac{1}{2 + j\omega} - \frac{1}{10 + j\omega} \right) \text{ V} \end{aligned}$$

Porque de la tabla 17.3 vemos que

$$v_o(t) = 6.25 [e^{-2t}u(t) - e^{-10t}u(t)] \text{ V}$$

b) En este caso, como $v_i(t) = 5 \cos 2t$,

$$V_i(\omega) = 5\pi[\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)] \text{ V}$$

El voltaje de salida en el dominio de frecuencia es entonces

$$V_o(\omega) = \frac{50\pi[\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)]}{(10 + j\omega)}$$

Utilizando la transformada de Fourier inversa obtenemos

$$v_o(t) = \mathcal{F}^{-1}[V_o(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 50\pi \frac{\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)}{10 + j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

Empleando la propiedad de muestreo de la función de impulso unitario, obtenemos

$$\begin{aligned} v_o(t) &= 25 \left(\frac{e^{j2t}}{10 + j2} + \frac{e^{-j2t}}{10 - j2} \right) \\ &= 25 \left(\frac{e^{j2t}}{10.2e^{j11.31^\circ}} + \frac{e^{-j2t}}{10.2e^{-j11.31^\circ}} \right) \\ &= 4.90 \cos(2t - 11.31^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

Este resultado puede verificarse fácilmente utilizando análisis fasorial.

EJEMPLO 17.20

Considere la red que se muestra en la figura 17.19a. Esta red representa un simple filtro pasabajas como se mostró en el capítulo 13. Deseamos ilustrar el impacto de esta red en la señal de entrada examinando las características de frecuencia de la señal de salida y la relación entre la energía de 1 Ω o normalizada en la entrada y en la salida de la red.

SOLUCIÓN La función de transferencia de la red es

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{1/RC + j\omega} = \frac{5}{5 + j\omega} = \frac{1}{1 + 0.2j\omega}$$

La transformada de Fourier de la señal de entrada es

$$V_i(\omega) = \frac{20}{20 + j\omega} = \frac{1}{1 + 0.05j\omega}$$

Entonces, utilizando la ecuación (17.62), la transformada de Fourier de la salida es

$$V_o(\omega) = \frac{1}{(1 + 0.2j\omega)(1 + 0.05j\omega)}$$

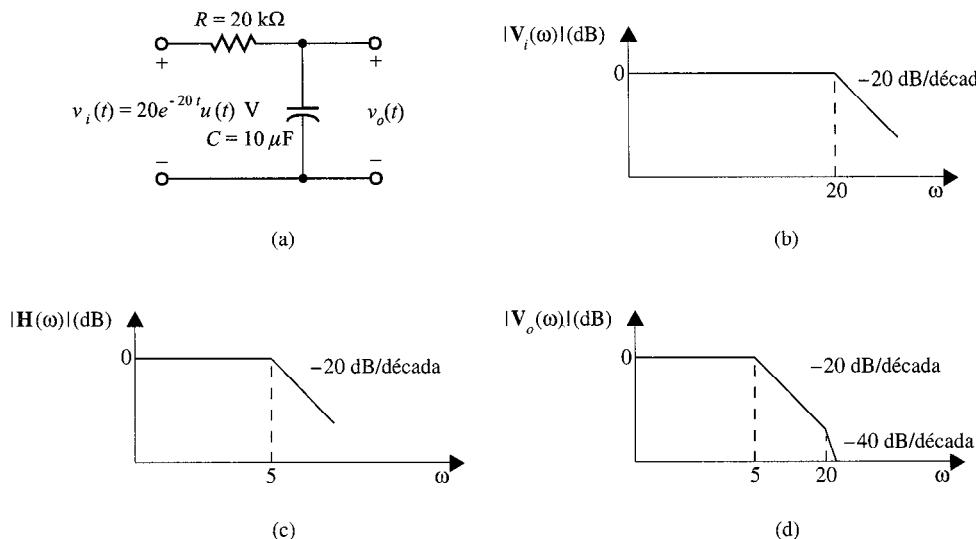


FIGURA 17.19 Filtro pasabajas, su característica de frecuencia y sus espectros de entrada y salida.

Utilizando las técnicas del capítulo 13, notamos que la línea recta de la gráfica de magnitud logarítmica (frecuencia característica) para esas funciones se muestra en las figuras 17.19b-d. Observe que el filtro pasabajas pasa las bajas frecuencias de la señal de entrada pero atenúa las altas frecuencias.

La energía normalizada en la entrada del filtro es

$$\begin{aligned} W_i &= \int_0^\infty (20e^{-20t})^2 dt \\ &= \frac{400}{-40} e^{-40t} \Big|_0^\infty \\ &= 10 \text{ J} \end{aligned}$$

La energía normalizada en la salida del filtro puede calcularse utilizando el teorema de Parseval. Como

$$V_o(\omega) = \frac{100}{(5+j\omega)(20+j\omega)}$$

y

$$|V_o(\omega)|^2 = \frac{10^4}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 400)}$$

$|V_o(\omega)|^2$ es una función par, y por tanto,

$$W_o = 2 \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_0^{\infty} \frac{10^4 d\omega}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 400)}$$

Sin embargo, podemos usar el hecho de que

$$\frac{10^4}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 400)} = \frac{10^4/375}{\omega^2 + 25} - \frac{10^4/375}{\omega^2 + 400}$$

Entonces

$$\begin{aligned} W_o &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\infty} \frac{10^4/375}{\omega^2 + 25} d\omega - \int_0^{\infty} \frac{10^4/375}{\omega^2 + 400} d\omega \right) \\ &= \frac{10^4}{375} \left(\frac{1}{\pi} \right) \left[\frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{20} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= 2.0 \text{ J} \end{aligned}$$

El ejemplo 17.20 ilustra el efecto que $\mathbf{H}(\omega)$ tiene en el espectro de frecuencia de la señal de entrada. En general, $\mathbf{H}(\omega)$ puede seleccionarse para dar forma a ese espectro de alguna manera prescrita. Como ilustración de este efecto, considere los espectros de frecuencia *ideal* que se muestran en la figura 17.20. En la figura 17.20a se muestra un espectro de magnitud de entrada ideal $|V_i(\omega)|$, $|\mathbf{H}(\omega)|$ y el espectro de magnitud de salida $|V_o(\omega)|$, que están relacionados por la ecuación (17.62), se muestran en las figuras 17.20b-e para un filtro *ideal* pasabajas, pasaaltas, pasabandas y de eliminación de bandas, respectivamente.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

D17.6 Calcule el contenido de energía total de 1Ω de la señal $v_i(t) = e^{-2t}u(t)$ usando los métodos de dominio de tiempo y dominio de frecuencia.

Resp.: $W_T = 0.25 \text{ J}$.

D17.6 Calcule el contenido de energía de 1Ω de la señal $v_1(t) = e^{-2t}u(t)$ en el intervalo de frecuencia de 0 a 1 rad/segundo.

Resp.: $W = 0.07 \text{ J}$.

Notamos que mediante el uso del teorema de Parseval podemos calcular el contenido de energía total de una señal utilizando un método de dominio de tiempo o de dominio de frecuencia. Sin embargo, el dominio de frecuencia es más flexible pues nos permite determinar el contenido de energía de una señal en alguna banda específica de frecuencia.

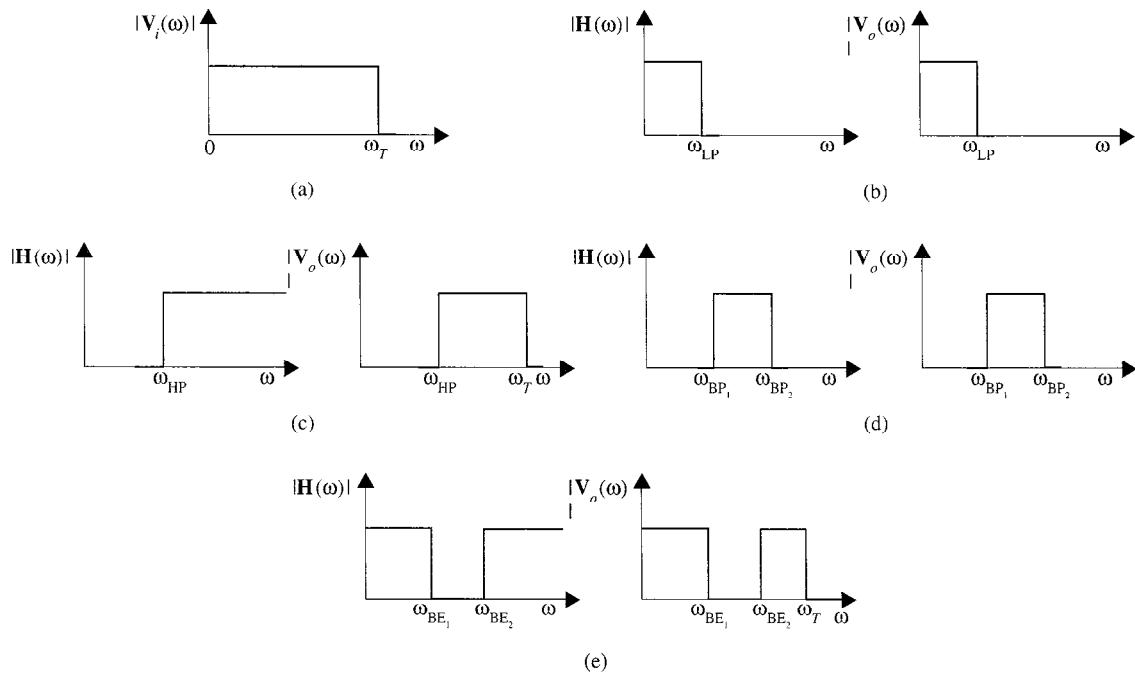


FIGURA 17.20 Espectros de frecuencia para la entrada y salida de filtros ideales pasabajas, pasaaltas, pasabandas y de eliminación de banda.



Aplicaciones

E J E M P L O 17.21

En la radio de AM (amplitud modulada), hay dos formas de onda muy importantes: la señal, $s(t)$, y la portadora. Toda la información que deseamos transmitir –voz, música, etcétera– está contenida en la forma de onda de la señal, que en esencia es transportada por la portadora. Por tanto, la transformada de Fourier de $s(t)$ contiene frecuencias de cerca de 50 Hz a 20 000 Hz. La portadora $c(t)$, es una senoide oscilatoria a una frecuencia mucho mayor que la de $s(t)$. Por ejemplo, las reglas y regulaciones de la FCC (Comisión Federal de Comunicaciones) han asignado el intervalo de frecuencia de 540 kHz a 1.7 MHz para las frecuencias portadoras de una estación de radio de AM. Incluso la asignación de la frecuencia portadora más baja posible de 540 kHz es mucho mayor que las frecuencias de audio en $s(t)$. De hecho, cuando una estación radia sus siglas y frecuencia, están diciéndole la frecuencia de la portadora que la FCC ha asignado a esa estación.

En casos simples, la señal, $s(t)$, se modifica para producir un voltaje de la forma

$$v(t) = [A + s(t)]\cos(\omega_c t)$$

donde A es una constante y ω_a es la frecuencia portadora en radianes/segundo. Este voltaje, $v(t)$, con la señal “codificada” dentro de él, se manda a la antena y es radiada al público cuyos radios “recogen” una réplica débil de la forma de onda $v(t)$.

Tracemos una gráfica de la magnitud de la transformada de Fourier de $s(t)$ y $v(t)$ dado que $s(t)$ es

$$s(t) = \cos(2\pi f_a t)$$

donde f_a es 1 000 Hz, la frecuencia portadora es 900 kHz y la constante A es la unidad.

SOLUCIÓN La transformada de Fourier de $s(t)$ es

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathcal{F}[\cos(\omega_a t)] = \pi\delta(\omega - \omega_a) + \pi\delta(\omega + \omega_a)$$

y se muestra en la figura 17.21.

El voltaje $v(t)$ puede expresarse en la forma

$$v(t) = [1 + s(t)]\cos(\omega_c t) = \cos(\omega_c t) + s(t)\cos(\omega_c t)$$

La transformada de Fourier para la portadora es

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_c t)] = \pi\delta(\omega - \omega_c) + \pi\delta(\omega + \omega_c)$$

El término $s(t)\cos(\omega_c t)$ puede escribirse como

$$s(t)\cos(\omega_c t) = s(t) \left\{ \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2} \right\}$$

Usando la propiedad de modulación como se da en la ecuación (17.58), podemos expresar la transformada de Fourier de $s(t)\cos(\omega_c t)$ como

$$\mathcal{F}[s(t)\cos(\omega_c t)] = \frac{1}{2} \{ \mathbf{S}(\omega - \omega_c) + \mathbf{S}(\omega + \omega_c) \}$$

Empleando $\mathbf{S}(\omega)$ anterior encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[s(t)\cos(\omega_c t)] &= \mathcal{F}[\cos(\omega_a t)\cos(\omega_c t)] \\ &= \frac{\pi}{2} \{ \delta(\omega - \omega_a - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_a - \omega_c) + \delta(\omega - \omega_a \\ &\quad + \omega_c) + \delta(\omega + \omega_a + \omega_c) \} \end{aligned}$$

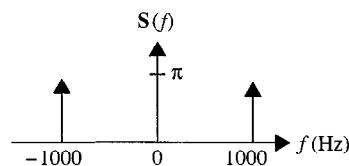


FIGURA 17.21 Magnitud de la transformada de Fourier para $s(t)$ contra la frecuencia.

Finalmente, la transformada de Fourier de $v(t)$ es

$$\begin{aligned} V(\omega) = \frac{\pi}{2} & \{ 2\delta(\omega - \omega_c) + 2\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_a - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_a \\ & - \omega_c) + \delta(\omega - \omega_a + \omega_c) + \delta(\omega + \omega_a + \omega_c) \} \end{aligned}$$

la cual se muestra en la figura 17.22. Observe que $S(\omega)$ está centrada alrededor de la frecuencia portadora. Este es el efecto de la modulación.

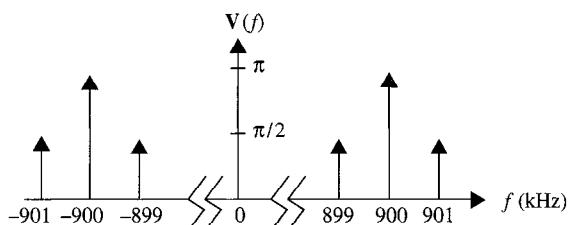


FIGURA 17.22 Transformada de Fourier de la forma de onda transmitida $v(t)$ contra la frecuencia.

17.4 Diseño de circuitos

E J E M P L O 17.22

Dos estaciones de AM cercanas radian con las frecuencias portadoras

$$f_1 = 900 \text{ kHz}$$

y

$$f_2 = 960 \text{ kHz}$$

respectivamente. Para simplificar el análisis, supondremos que las señales de información, $s_1(t)$ y $s_2(t)$, son idénticas. Se sigue que las transformadas de Fourier $S_1(\omega)$ y $S_2(\omega)$ son también idénticas, y en la figura 17.23 se muestra un bosquejo del aspecto que podrían tener.

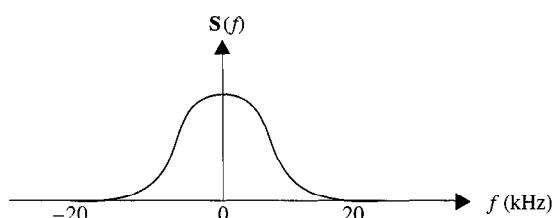


FIGURA 17.23 Bosquejo de una transformada de Fourier de AM arbitraria.

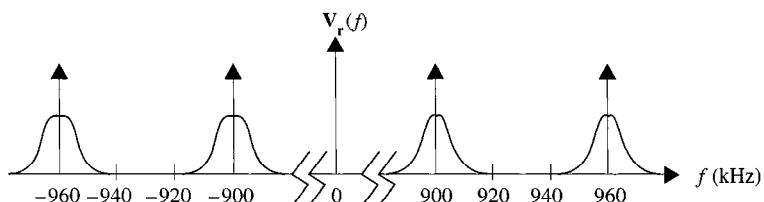


FIGURA 17.24 Transformada de Fourier de la forma de onda de la antena, $v_r(t)$.

Las formas de onda radiadas son

$$v_1(t) = [1 + s_1(t)]\cos(\omega_1 t)$$

y

$$v_2(t) = [1 + s_2(t)]\cos(\omega_2 t)$$

Una antena en la vecindad “recogería” ambas transmisiones. Suponiendo que $v_1(t)$ y $v_2(t)$ son de igual intensidad en la antena, el voltaje recibido es

$$v_r(t) = K[v_1(t) + v_2(t)]$$

donde K es una constante mucho menor que 1. Los voltajes de antena típicos están en el intervalo de los uV-a-mV. Un bosquejo de la transformada de Fourier de $v_r(t)$ se muestra en la figura 17.24.

Antes de pasar $v_r(t)$ a la circuitería de amplificación y decodificación, debemos emplear primero un sintonizador para seleccionar una estación particular. Diseñemos un filtro pasa bandas RLC que contenga un capacitor variable que sirva como sintonizador. Tal circuito se muestra en la figura 17.25.

SOLUCIÓN Se encuentra fácilmente que la función de transferencia es

$$G_v(s) = \frac{V_o(s)}{V_r(s)} = \frac{s \left(\frac{R}{L} \right)}{s^2 + s \left(\frac{R}{L} \right) + \frac{1}{LC}}$$

Como se mostró en el capítulo 13, la frecuencia central y el ancho de banda pueden expresarse en hertz como

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

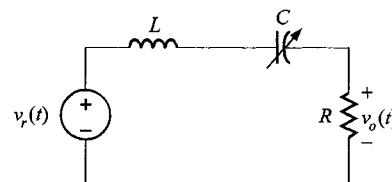


FIGURA 17.25 Circuito RLC del sintonizador de filtro pasabandas.

y

$$\text{BW} = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L}$$

Como las dos frecuencias portadoras están separadas por sólo 60 kHz, el filtro pasabandas debe ser menor que 60 kHz. Elijamos arbitrariamente un ancho de banda de 10 kHz y $R = 10 \Omega$. Basado en esta selección, nuestro diseño incluye determinar los valores L y C resultantes. De la expresión para el ancho de banda,

$$L = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{\text{BW}}$$

o

$$L = 159.2 \mu\text{H}$$

Colocando la frecuencia central en 900 kHz, encontramos que C es

$$C = \frac{1}{L[2\pi f_o]^2}$$

o

$$C = 196.4 \text{ pF}$$

Para sintonizar a 960 kHz sólo necesitamos cambiar C a 172.6 pF y el ancho de banda permanece sin cambio. Un gráfico de Bode de la magnitud de $G_v(s)$ sintonizado a 960 kHz se muestra en la figura 17.26. Observe que la emisión a 900 kHz, aunque atenuada, no se elimina por completo. Si éste es un problema, podemos reducir el ancho de banda a través de R y/o L o diseñar un filtro sintonizador más complejo.

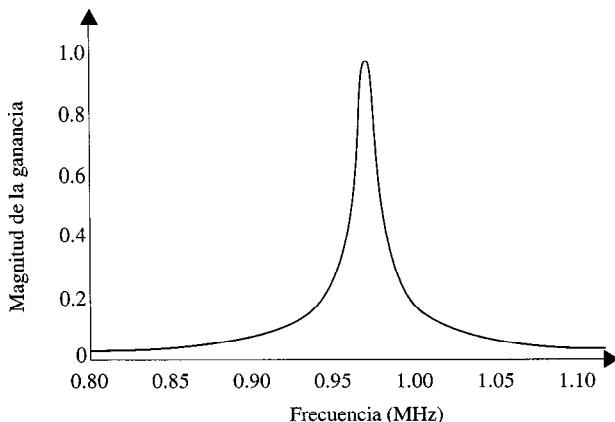


FIGURA 17.26 Gráfica de Bode para el circuito sintonizador RLC de la figura 17.25.

17.5 Resumen

Hemos mostrado que la técnica de la serie de Fourier nos proporciona un medio efectivo para tratar circuitos eléctricos forzados con entradas que son periódicas. La serie de Fourier para una señal particular puede expresarse en varias formas equivalentes diferentes. Si la señal periódica muestra alguna forma de simetría, ésta puede usarse para simplificar los cálculos involucrados al determinar los coeficientes de Fourier que se emplean para describir la forma de onda. Encontramos que la respuesta de estado estable de una red a una entrada periódica incluye expresar la entrada como una serie de Fourier, determinar la respuesta del circuito a cada componente de la entrada y sumar la respuesta debida a cada componente de la entrada para determinar la respuesta total de la red.

La transformada de Fourier nos proporciona una técnica para analizar circuitos con funciones forzantes aperiódicas. Se ha presentado un número de pares de transformadas de Fourier junto con algunas propiedades importantes de la transformada de Fourier. Dos relaciones importantes desde el punto de vista del análisis de circuitos son el teorema de Parseval y la ecuación $\mathbf{Y}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{X}(\omega)$, donde $\mathbf{Y}(\omega)$ y $\mathbf{X}(\omega)$ representan la transformada de Fourier de la entrada y salida del circuito, respectivamente, y $\mathbf{H}(\omega)$ es la función de transferencia del circuito. Hemos mostrado que el teorema de Parseval nos permite calcular la energía en una señal en el dominio de frecuencia e incluso determinar la cantidad de energía de la señal que está contenida dentro de cierto intervalo de frecuencias. Se demostró que la relación de entrada-salida en el dominio de frecuencia es un medio efectivo para calcular la respuesta del circuito a entradas aperiódicas.

Puntos clave

- Una función periódica satisface la relación $f(t) = f(t + nT_0)$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$
- Una función periódica no senoidal puede representarse mediante una suma de funciones senoidales.
- Una serie de Fourier puede expresarse en forma exponencial o trigonométrica.
- Una función periódica que exhibe simetría de función par puede expresarse por una serie de Fourier que contenga sólo un término constante y términos coseno.
- Una función periódica que exhibe simetría de función impar puede expresarse con una serie de Fourier que contenga solamente términos seno.
- Un corrimiento del tiempo de una señal periódica en el dominio del tiempo corresponde a un corrimiento de la fase en el dominio de frecuencia.
- Los espectros de frecuencia de una función expresada como una serie de Fourier se llama espectro de línea, ya que los componentes de la frecuencia son discretos.
- La respuesta de la red a una entrada periódica no senoidal puede obtenerse expresando la entrada como una serie de Fourier, utilizando análisis fasorial para determinar la respuesta de cada fuente en la serie, transformando, después las respuestas individuales al dominio del tiempo y aplicando la superposición.

Problemas

17.1. Encuentre la serie de Fourier exponencial para la señal que se muestra en la figura P17.1.

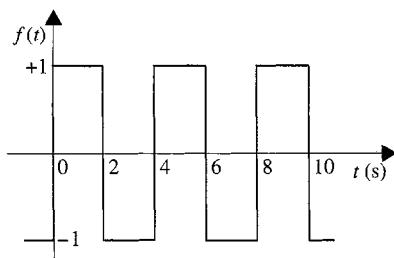


FIGURA P17.1

17.2. Encuentre la serie de Fourier exponencial para el tren de pulsos periódico que se muestra en la figura P17.2.

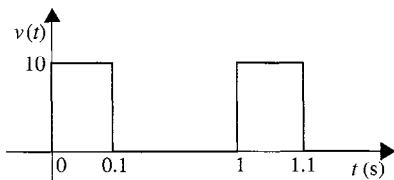


FIGURA P17.2

17.3. Encuentre la serie de Fourier exponencial para la señal periódica que se muestra en la figura P17.3.

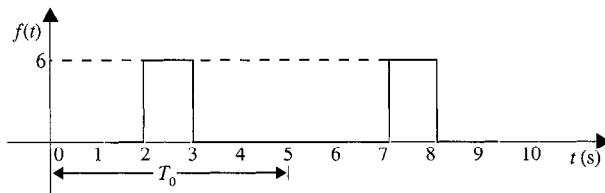
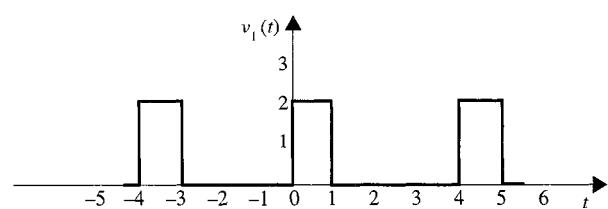


FIGURA P17.3

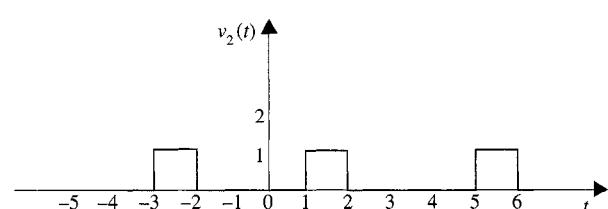
17.4. Calcule la serie de Fourier exponencial para la forma de onda que es la suma de dos formas de onda de la figura P17.4, calculando la serie de Fourier exponencial de las dos formas de onda y sumándolas.

17.5. Use el PSPICE para encontrar los coeficientes de Fourier para la forma de onda de la figura P17.11.

17.6. Use el PSPICE para encontrar los coeficientes de Fourier para la forma de onda de la figura P17.24.



(a)



(b)

FIGURA P17.4

17.7. Use el PSPICE para encontrar los coeficientes de Fourier para la forma de onda de la figura P17.23.

17.8. Dada la forma de onda de la figura P17.8, determine el tipo de simetría que existe si el origen se selecciona en a) l_1 y b) l_2 .

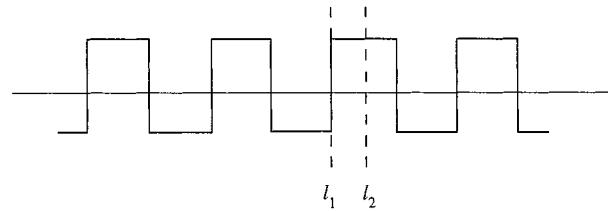


FIGURA P17.8

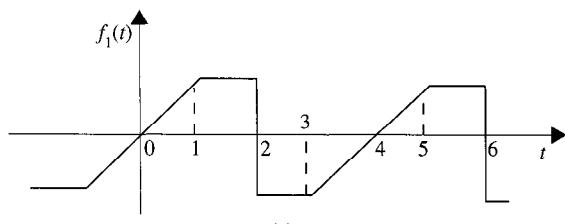
17.9. ¿Qué tipo de simetría es exhibido por las dos formas de onda de la figura P17.9?

17.10. Dada la forma de onda de la figura P17.10, muestre que

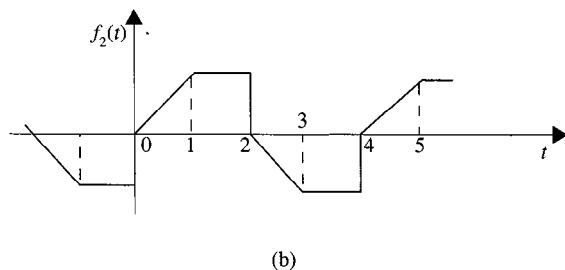
$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-A}{n\pi} \sin \frac{2\pi n}{T_0} t$$

17.11. Derive la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda que se muestra en la figura P17.11.

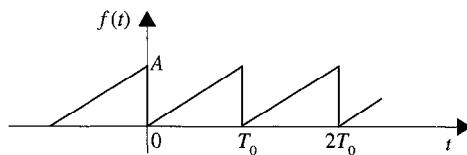
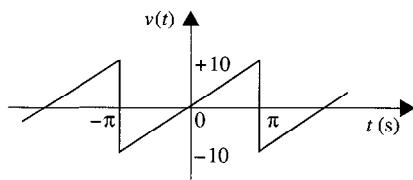
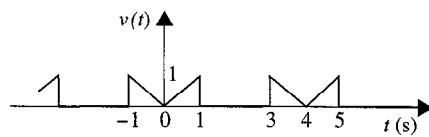
17.12. Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda de la figura P17.12.



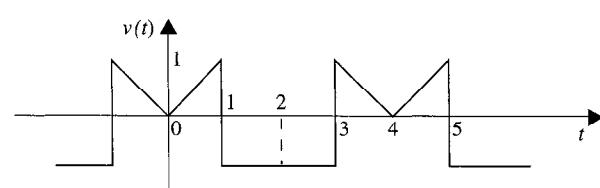
(a)



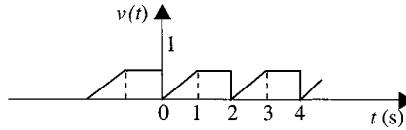
(b)

FIGURA P17.9**FIGURA P17.10****FIGURA P17.11****FIGURA P17.12**

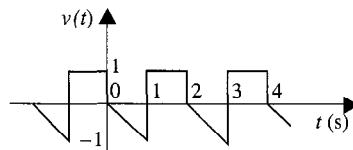
17.13. Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda de la figura P17.13.

**FIGURA P17.13**

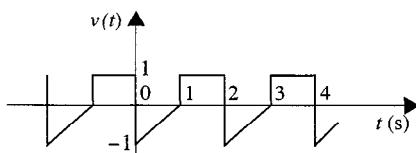
17.14. Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda de la figura P17.14.

**FIGURA P17.14**

17.15. Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda de la figura P17.15.

**FIGURA P17.15**

17.16. Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda de la figura P17.16.

**FIGURA P17.16**

17.17. Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda de la figura P17.17.

17.18. Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda que se muestra en la figura P17.18.

17.19. Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda de la figura P17.9a.

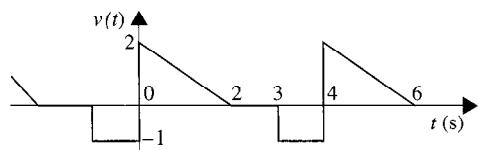


FIGURA P17.17

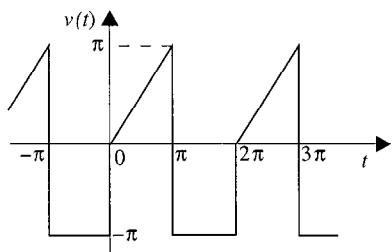


FIGURA P17.18

- 17.20. Derive la serie de Fourier trigonométrica para la función $v(t) = A |\operatorname{sen} t|$ que se muestra en la figura P17.20.

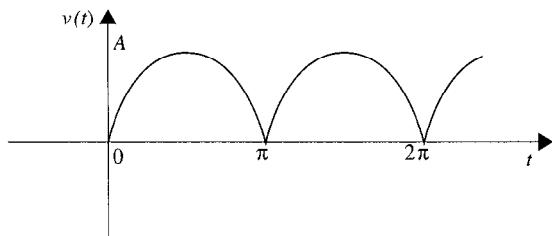


FIGURA P17.20

- 17.21. Derive la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda que se muestra en la figura P17.21.

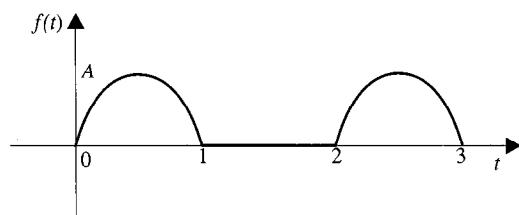


FIGURA P17.21

- 17.22. Encuentre la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda que se muestra en la figura P17.22.

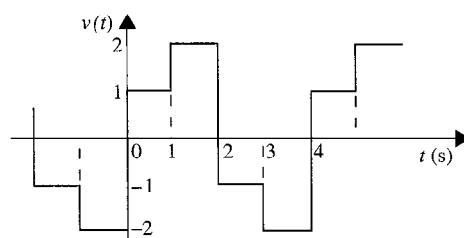


FIGURA P17.22

- 17.23. Encuentre la serie de Fourier trigonométrica para la función que se muestra en la figura P17.23.

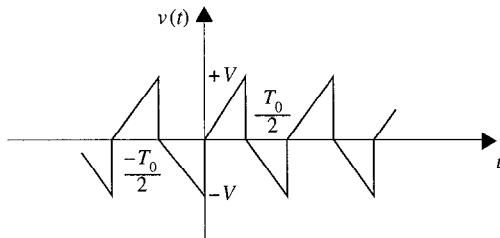


FIGURA P17.23

- 17.24. Encuentre la serie de Fourier trigonométrica para la forma de onda periódica que se muestra en la figura P17.24.

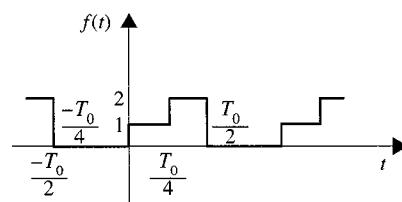


FIGURA P17.24

- 17.25. El espectro discreto de líneas para una función periódica $f(t)$ se muestra en la figura P17.25. Determine la expresión para $f(t)$.

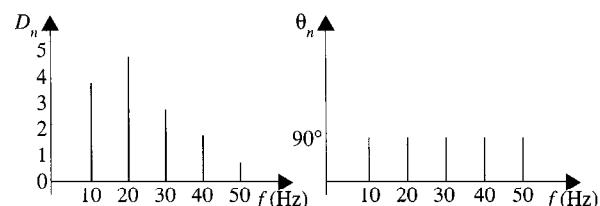


FIGURA P17.25

17.26. Los espectros de amplitud y el de fase para una función periódica $v(t)$ que tiene sólo un pequeño número de términos se muestra en la figura P17.26. Determine la expresión para $v(t)$ si $T_0 = 0.1$ segundos.

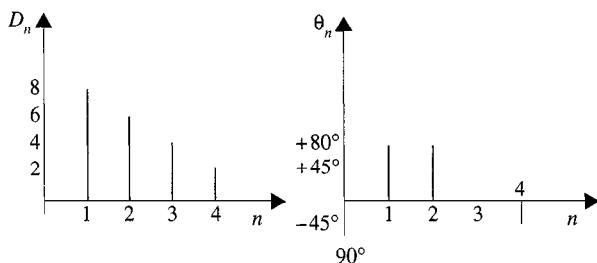


FIGURA P17.26

17.27. Trace una gráfica de los primeros cuatro términos del espectro de amplitud y del de fase para la señal

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos n\omega_0 t + \frac{6}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$

n impar

17.28. Determine la respuesta de estado estable de la corriente $i_o(t)$ en el circuito que se muestra en la figura P17.28 si el voltaje de entrada se describe por la forma de onda que se muestra en el problema 17.11.

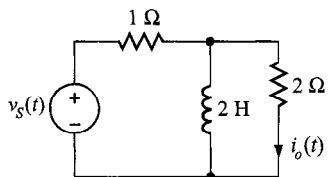


FIGURA P17.28

17.29. Encuentre la corriente $i(t)$ de estado estable de la red de la figura P17.29a si la señal de entrada es la que se muestra en la figura P17.29b.

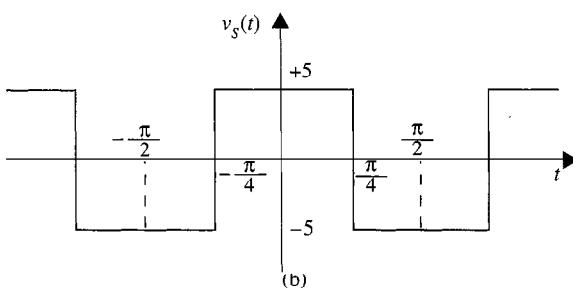
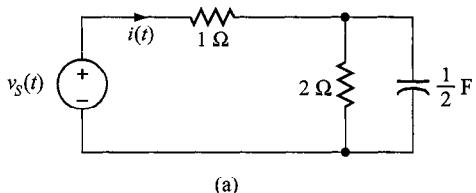


FIGURA P17.29

17.30. Si el voltaje de entrada del problema 17.28 es

$$v_s(t) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 0.2 \pi n t \text{ V}$$

encuentre la expresión para la corriente de estado estable $i_o(t)$.

17.31. Determine los primeros tres términos del voltaje de estado estable $v_o(t)$ de la figura P17.31 si el voltaje de entrada es una señal periódica de la forma

$$v(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (\cos n\pi - 1) \sin nt \text{ V}$$

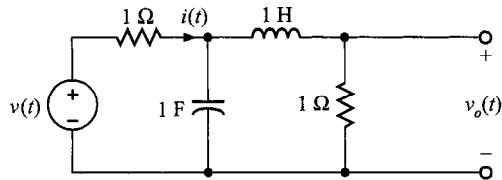


FIGURA P17.31

17.32. La corriente $i_s(t)$ que se muestra en la figura P17.32a se aplica al circuito que se muestra en la figura P17.32b. Determine la expresión para la corriente de estado estable $i_o(t)$ utilizando las primeras cuatro armónicas.

17.33. Determine el voltaje de estado estable $v_o(t)$ en la red de la figura P17.33a si la corriente de entrada está dada en la figura P17.33b.

17.34. Encuentre la potencia promedio absorbida por la red de la figura P17.34 si

$$v(t) = 12 + 6\cos(377t - 10^\circ) + 4\cos(754t - 60^\circ) \text{ V}$$

$$\begin{aligned} i(t) = & 0.2 + 0.4\cos(377t - 150^\circ) \\ & - 0.2\cos(754t - 80^\circ) + 0.1\cos(1131t - 60^\circ) \text{ A} \end{aligned}$$

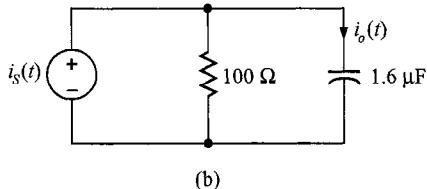
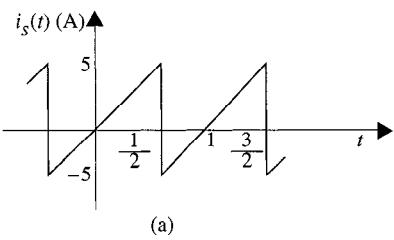


FIGURA P17.32

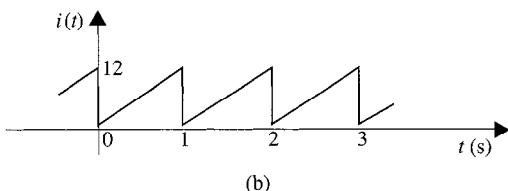
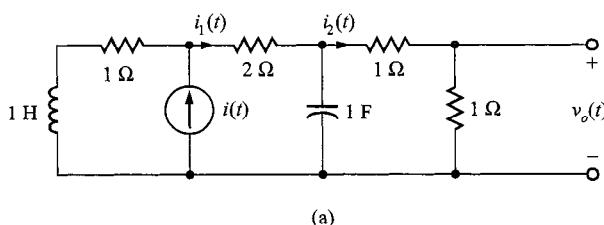


FIGURA P17.33

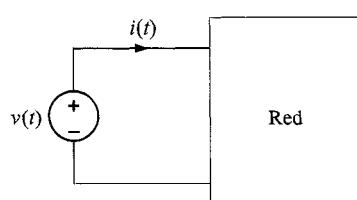


FIGURA P17.34

17.35. Encuentre la potencia promedio absorbida por la red de la figura P17.35 si $v(t) = 60 + 36\cos(377t + 45^\circ) + 24\cos(754t - 60^\circ)$ V.

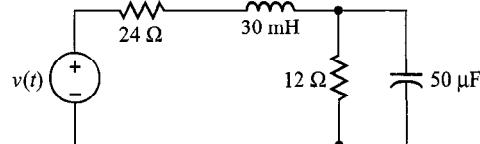


FIGURA P17.35

17.36. Encuentre la potencia promedio absorbida por la resistencia de 12Ω en la red de la figura P17.35 si $v(t) = 50 + 25\cos(377t - 45^\circ) + 12.5\cos(754t + 45^\circ)$ V.

17.37. Determine la transformada de Fourier de la forma de onda que se muestra en la figura P17.37.

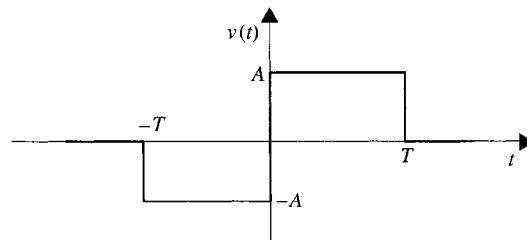


FIGURA P17.37

17.38. Derive la transformada de Fourier para las siguientes funciones:

- $f(t) = e^{-2t}\cos 4t u(t).$
- $f(t) = e^{-2t}\sin 4t u(t).$

17.39. Muestre que

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)F_2(\omega - x) dx$$

17.40. Encuentre la transformada de Fourier de la función $f(t) = e^{-a|t|}$.

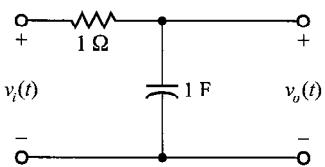
17.41. Encuentre la transformada de Fourier de la función $f(t) = 12e^{-2|t|}\cos 4t$.

17.42. Determine la señal de salida $v_o(t)$ de una red con señal de entrada $v_i(t) = 3e^{-t}u(t)$ y con respuesta de impulso de la red $h(t) = e^{-2t}u(t)$. Suponga que todas las condiciones iniciales son cero.

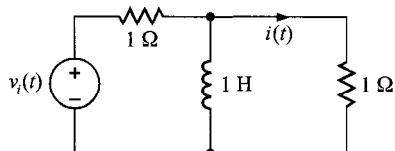
17.43. La señal de entrada a la red es $v_i(t) = e^{-3t}u(t)$. La función de transferencia de la red es $H(j\omega) = 1/(j\omega + 4)$. Encuentre la salida de la red $v_o(t)$ si las condiciones iniciales son cero.

17.44. Use la técnica de la transformada para encontrar $v_o(t)$ en la red de la figura P17.33a, si a) $i(t) = 4(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$ A, y b) $i(t) = 12 \cos 4t$ A.

- 17.45.** La señal de entrada para la red de la figura P17.45 es $v_i(t) = 10e^{-5t}u(t)$ V. Determine el contenido total de energía de 1Ω de la salida $v_o(t)$.

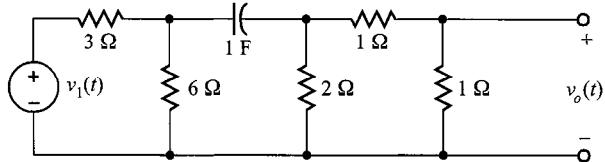
**FIGURA P17.45**

- 17.46.** Use la transformada de Fourier para encontrar $i(t)$ en la red de la figura P17.46 si $v_i(t) = 2e^{-t}u(t)$.

**FIGURA P17.46**

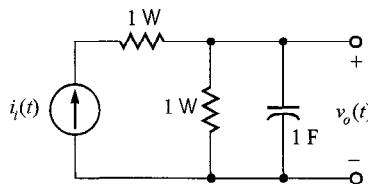
- 17.47.** Use la técnica de la transformada para encontrar $v_o(t)$ en la red de la figura P17.47 si a) $v_1(t) = 4e^{-t}u(t)$ V y b) $v_1(t) = 4(e^{-2t} + 2e^{-4t})u(t)$ V.

- 17.48.** Calcule el contenido de energía de 1Ω de la señal $v_o(t)$ en la figura P17.45 en el intervalo de frecuencia de $\omega = 2$ a $\omega = 4$ rad/segundo.

**FIGURA P17.47**

- 17.49.** Determine el contenido de energía de 1Ω de la señal $v_o(t)$ en la figura P17.45 en el intervalo de frecuencia de 0 a 1 rad/segundo.

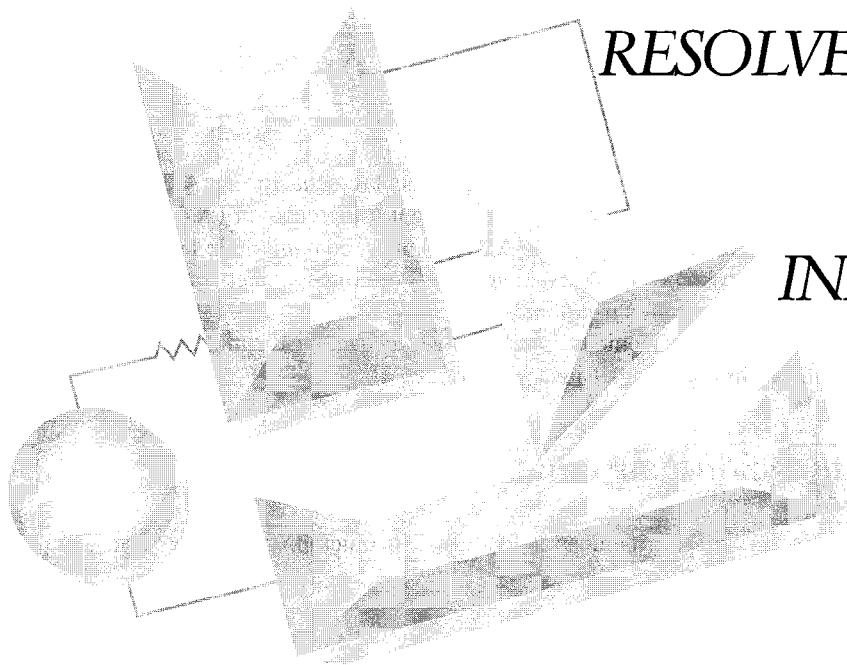
- 17.50.** Determine el voltaje $v_o(t)$ en el circuito que se muestra en la figura P17.50, utilizando la transformada de Fourier si $i_i(t) = 2e^{-4t}u(t)$ A.

**FIGURA P17.50**

- 17.51.** Compare la energía de 1Ω en la entrada y en la salida de la red del problema 17.50 para la función forzante de entrada dada.

- A.1** Eliminación gausiana
- A.2** Determinantes
- A.3** Matrices

TÉCNICAS para RESOLVER ECUACIONES SIMULTÁNEAS LINEALMENTE INDEPENDIENTES



En la solución de varios problemas de circuitos encontramos un sistema de ecuaciones simultáneas de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde las x y las b son voltajes y corrientes típicas, o corrientes y voltajes, respectivamente.

Como el título lo señala, suponemos que las ecuaciones son linealmente *independientes*. Como un breve recordatorio del significado de la independencia lineal, considere las siguientes ecuaciones de la LCK escritas para cada nodo de una red de tres nodos:

$$\frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 - 4 = 0 \tag{A.2}$$

$$-\frac{1}{2}V_1 + \frac{5}{6}V_2 + 5 = 0 \tag{A.3}$$

$$-V_1 - \frac{1}{3}V_2 - 1 = 0 \tag{A.4}$$

donde V_1 y V_2 son voltajes nodales que se miden con respecto al tercer nodo (referencia). La independencia lineal implica que no podemos encontrar constantes a_1 , a_2 y a_3 tales que

$$a_1\left(\frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 - 4\right) + a_2\left(-\frac{1}{2}V_1 + \frac{5}{6}V_2 + 5\right) + a_3\left(-V_1 - \frac{1}{3}V_2 - 1\right) = 0 \quad (\text{A.5})$$

Sin embargo, en este caso si seleccionamos $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} +\frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 - 4 - \frac{1}{2}V_1 + \frac{5}{6}V_2 + 5 - V_1 - \frac{1}{3}V_2 - 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Dicho de otra manera, esto significa, por ejemplo, que las ecuaciones (A.2) y (A.3) pueden usarse para obtener la ecuación (A.4), y por tanto, la ecuación (A.4) es linealmente *dependiente* de las ecuaciones (A.2) y (A.3). Además, cualquiera de las dos ecuaciones pueden usarse para obtener la tercera ecuación. Por consiguiente, sólo dos de las tres ecuaciones son linealmente *independientes*.

Describiremos ahora dos técnicas para resolver ecuaciones simultáneas linealmente independientes: eliminación gausiana y matrices.

A.1 Eliminación gausiana

El siguiente ejemplo servirá para demostrar los pasos involucrados al aplicar esta técnica.

EJEMPLO A.1

Encontremos la solución del siguiente conjunto de ecuaciones:

$$7X_1 - 4X_2 - X_3 = 4 \quad (\text{A.6})$$

$$-4X_1 + 7X_2 - 2X_3 = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$-X_1 - 2X_2 + 3X_3 = -1 \quad (\text{A.8})$$

SOLUCIÓN El algoritmo (es decir, el procedimiento paso por paso) para aplicar el método de eliminación gausiana se lleva a cabo de la siguiente manera sistemática. Primero, resolvemos la ecuación (A.6) para la variable X_1 en términos de las otras variables X_2 y X_3 .

$$X_1 = \frac{4}{7} + \frac{4}{7}X_2 + \frac{1}{7}X_3 \quad (\text{A.9})$$

Sustituimos entonces este resultado en las ecuaciones (A.7) y (A.8) para obtener

$$\frac{33}{7}X_2 - \frac{18}{7}X_3 = \frac{16}{7} \quad (\text{A.10})$$

$$-\frac{18}{7}X_2 + \frac{20}{7}X_3 = -\frac{3}{7} \quad (\text{A.11})$$

Continuando la reducción resolvemos ahora la ecuación (A.10) para X_2 en términos de X_3 :

$$X_2 = \frac{16}{33} + \frac{18}{33}X_3 \quad (\text{A.12})$$

Sustituyendo esta expresión para X_2 en la ecuación (A.11) se obtiene

$$\frac{336}{231}X_3 = \frac{189}{231}$$

o

$$X_3 = 0.563 \quad (\text{A.13})$$

Ahora volviendo hacia atrás a través de las ecuaciones, podemos determinar X_2 de la ecuación (A.12) como

$$X_2 = 0.792$$

y X_1 de la ecuación (A.9) como

$$X_1 = 1.104$$

En este ejemplo simple no hemos hablado de cosas como coeficientes cero o el impacto de los errores por redondeo. Hemos, sin embargo, ilustrado el procedimiento básico.

Debido a la manera muy metódica en la que la eliminación toma lugar, el algoritmo es fácilmente adaptable al análisis con computadora, y códigos de computadora eficientes que implementan la técnica están disponibles en paquetes de software estándar (por ejemplo, véase las subrutinas de sistemas lineales en la Biblioteca de Subrutinas IMSL). Además, hay un gran número de programas individuales escritos para implementar la técnica de eliminación gausiana (por ejemplo, Stephen W. Director, *Circuit Theory: A Computational Approach*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1975, pp. 73-76).

A.2 Determinantes

Un determinante de orden n es un arreglo cuadrado de elementos a_{ij} arreglados como sigue:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{A.14})$$

El cofactor c_{ij} del elemento a_{ij} está dado por la expresión

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij} \quad (\text{A.15})$$

donde A_{ij} es el determinante que permanece después de que el i ésimo elemento y la j ésima columna se borran.

E J E M P L O A.2

Dado el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

encuentre el cofactor del elemento a_{21} .

S O L U C I Ó N El cofactor c_{21} para el elemento a_{21} es

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

El valor numérico del determinante es igual a la suma de productos de elementos en cualquier renglón o columna y sus cofactores.

E J E M P L O A.3

Determinemos el valor del determinante del ejemplo A.2 usando el primer renglón o la segunda columna.

S O L U C I Ó N Usando el primer renglón

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}A_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}A_{13} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Aunque los determinantes de 2 por 2 pueden evaluarse de la misma manera, como se ilustró arriba, el resultado es simplemente

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \quad (\text{A.16})$$

Por tanto, Δ es

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Si en lugar de utilizar el primer renglón hubiéramos usado la segunda columna, hubiéramos obtenido

$$\begin{aligned}
\Delta &= a_{12}(-1)^{1+2}A_{12} + a_{22}(-1)^{2+2}A_{22} + a_{32}(-1)^{3+2}A_{32} \\
&= -a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} - a_{32}A_{32} \\
&= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})
\end{aligned}$$

Podemos evaluar el determinante usando cualquier renglón o columna.

El método para resolver el conjunto de ecuaciones simultáneas de la forma mostrada en la ecuación (A.1) usando determinantes se conoce como la *regla de Cramer*. La regla de Cramer afirma que si $\Delta \neq 0$ (es decir, las ecuaciones son linealmente independientes), el valor de la variable x_1 en la ecuación (A.1) está dado por la expresión

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{2n} & a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (\text{A.17})$$

Donde Δ_1 es el determinante Δ en el que la primera columna se reemplaza con la columna de coeficientes. En el caso general, x_i está dada por una expresión similar a la ecuación (A.17) con la i ésima columna reemplazada por la columna de coeficientes.

EJEMPLO A.4

Resolvamos las siguientes ecuaciones usando determinantes.

$$2I_1 - 4I_2 = 8$$

$$-4I_1 + 6I_2 = -4$$

SOLUCIÓN En este caso, Δ definida por la ecuación (A.16) es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = (2)(6) - (-4)(-4) = -4$$

Entonces usando la ecuación (A.17)

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{(8)(6) - (-4)(-4)}{-4} = -8$$

E

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -4 & -4 \\ \end{vmatrix}}{-4} = \frac{(2)(-4) - (-4)(8)}{-4} = -6$$

EJEMPLO A.5

Determinemos la solución de las siguientes ecuaciones usando determinantes

$$2V_1 - V_2 = 8$$

$$-V_1 + 3V_2 - 2V_3 = 3$$

$$-2V_2 + 4V_3 = -8$$

Solución El determinante para este sistema de ecuaciones es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Al evaluar el determinante usando la primera columna, obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta &= 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2(12 - 4) + 1(-4) = 12 \end{aligned}$$

Entonces

$$V_1 = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \\ -8 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Al evaluar el determinante usando el primer renglón se obtiene

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{12} \left[8(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{12} [8(12 - 4) + 1(12 - 16)] \\ &= 5 \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -8 & 4 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{12} \left[2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} + 8(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \right] \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
 V_3 &= \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{12} \left[2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} - 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} \right] \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

A.3 Matrices

Una matriz se define como un arreglo rectangular de números en renglones y columnas y se escribe en la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Este arreglo se llama matriz de m por n ($m \times n$) debido a que tiene m renglones y n columnas. Una matriz es una manera conveniente de representar arreglos de números; sin embargo, uno debe recordar que la matriz misma no tiene valor numérico. En el arreglo anterior los números de las funciones a_{ij} se llaman *elementos* de la matriz. Cualquier matriz que tenga el mismo número de renglones y de columnas se llama *matriz cuadrada*. La suma de los elementos diagonales de una matriz cuadrada se llama *traza* de la matriz.

E J E M P L O A.6

¿Las siguientes son matrices?

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

S O L U C I Ó N Sí.

La matriz *identidad* es una matriz diagonal en la que todos los elementos diagonales son iguales a uno.

E J E M P L O A.7

¿Las siguientes son matrices identidad?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

S O L U C I Ó N Sí.

Se dice que las matrices A y B son *iguales* si sus elementos correspondientes son iguales. En otras palabras, $A = B$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para toda i y j .

E J E M P L O A.8

Si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

¿Es $A = B$?

S O L U C I Ó N $A = B$ debido a que $a_{ij} = b_{ij}$ para toda i y j .

La suma y resta de dos matrices del mismo orden (es decir, $m \times n$) se lleva a cabo de la siguiente manera:

$$C = A \pm B \tag{A.18}$$

0

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \quad \text{para todas } i \text{ y } j$$

Es decir, los elementos de \mathbf{C} son la suma o resta de los elementos correspondientes de \mathbf{A} y \mathbf{B} .

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

EJEMPLO A.9

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Encuentre $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, y $\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}$.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Dada una matriz \mathbf{A} y un escalar λ , la *multiplicación* de \mathbf{A} por el escalar λ , escrita $\lambda\mathbf{A}$, se define como

$$\lambda\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

EJEMPLO A.10

Si $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

entonces encuentre $\lambda_1\mathbf{A}$ y $\lambda_2\mathbf{A}$.

SOLUCIÓN

$$\lambda_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -8 & -12 \\ -2 & -6 & -10 \end{bmatrix}$$

Considere ahora la multiplicación de dos matrices. Si tenemos una matriz \mathbf{A} de $m \times n$ y una matriz \mathbf{B} de $n \times r$, el producto \mathbf{AB} se define como la matriz \mathbf{C} $m \times r$, cuyos elementos están dados por la expresión

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r \quad (\text{A.20})$$

Advierta que el producto \mathbf{AB} se define sólo cuando el número de columnas de \mathbf{A} es igual al número de renglones de \mathbf{B} .

EJEMPLO A.11

Suponga que las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} se definen como sigue:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Encuentre el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

SOLUCIÓN Note que en la fórmula anterior, $m = 3$, $n = 2$, $r = 2$. Usando esta fórmula, podemos calcular

$$c_{11} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} b_{k2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$

⋮

Esos elementos forman el arreglo

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

Una inspección cuidadosa del producto anterior ilustra que la multiplicación es una operación “renglón por columna”. En otras palabras, cada elemento en un renglón de la primera matriz se multiplica por el elemento correspondiente en una columna de la segunda matriz y entonces los productos se suman. Esta operación se diagrama como sigue:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & b_{1j} & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{array} \right] \quad (\text{A.21})$$

Los siguientes ejemplos ilustran la técnica del cálculo.

EJEMPLO A.12

Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Encuentre AB y CD .

SOLUCIÓN

$$AB = \begin{bmatrix} (1)(2) + (3)(3) & (1)(1) + (3)(5) \\ (2)(2) + (4)(3) & (2)(1) + (4)(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 16 & 22 \end{bmatrix}$$

$$CD = \begin{bmatrix} (1)(1) + (2)(2) \\ (3)(1) + (4)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

La matriz de orden $n \times m$ obtenida al intercambiar los renglones y las columnas de una matriz A $m \times n$ se llama la *transpuesta* de A y se denota por A^T .

EJEMPLO A.13

Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Encuentre \mathbf{A}^T y \mathbf{B}^T .

SOLUCIÓN

$$\mathbf{A}^T = [1 \ 2 \ 3]$$

y

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Como se definió para los determinantes, el *cofactor* A_{ij} del elemento a_{ij} de cualquier matriz cuadrada \mathbf{A} es igual al producto $(-1)^{i+j}$ y el determinante de la submatriz obtenida de \mathbf{A} al borrar el renglón i y la columna j .

EJEMPLO A.14

Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Encuentre los cofactores A_{11} , A_{12} y A_{21} .

SOLUCIÓN Los cofactores A_{11} , A_{12} y A_{21} son

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}),$$

$$A_{21} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$$

El *adjunto* de la matriz \mathbf{A} ($\text{adj } \mathbf{A}$) es la transpuesta de la matriz obtenida de \mathbf{A} al reemplazar cada elemento a_{ij} por sus cofactores A_{ij} . Es otras palabras, si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

entonces

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Si A es una matriz cuadrada y si existe una matriz cuadrada A^{-1} tal que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad (\text{A.22})$$

entonces A^{-1} se llama la *inversa* de A . Se puede mostrar que la inversa de la matriz A es igual al adjunto dividido entre el determinante (escrito aquí como $|A|$); es decir,

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} \quad (\text{A.23})$$

EJEMPLO A.15

Dada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Encuentre A^{-1} y B^{-1} .

SOLUCIÓN

$$|A| = (2)(4) - (1)(3) = 5$$

y

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

También

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}| &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 - 5 + 21 = 18 \end{aligned}$$

y

$$\text{adj } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos ahora las herramientas necesarias para resolver las ecuaciones (A.1) utilizando matrices. El siguiente ejemplo ilustra el método.

EJEMPLO A.16

Las ecuaciones nodales para una red son

$$2V_1 + 3V_2 + V_3 = 9$$

$$V_1 + 2V_2 + 3V_3 = 6$$

$$3V_1 + V_2 + 2V_3 = 8$$

Resolvamos este conjunto de ecuaciones usando análisis matricial.

SOLUCIÓN Observe que este conjunto de ecuaciones simultáneas puede escribirse como una sola ecuación matricial de la forma

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

o

$$AV = I$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por A^{-1} se obtiene

$$A^{-1}AV = A^{-1}I$$

o

$$V = A^{-1}I$$

A^{-1} se calculó en el ejemplo A.15. Empleando esa inversa aquí, obtenemos

$$V = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

o

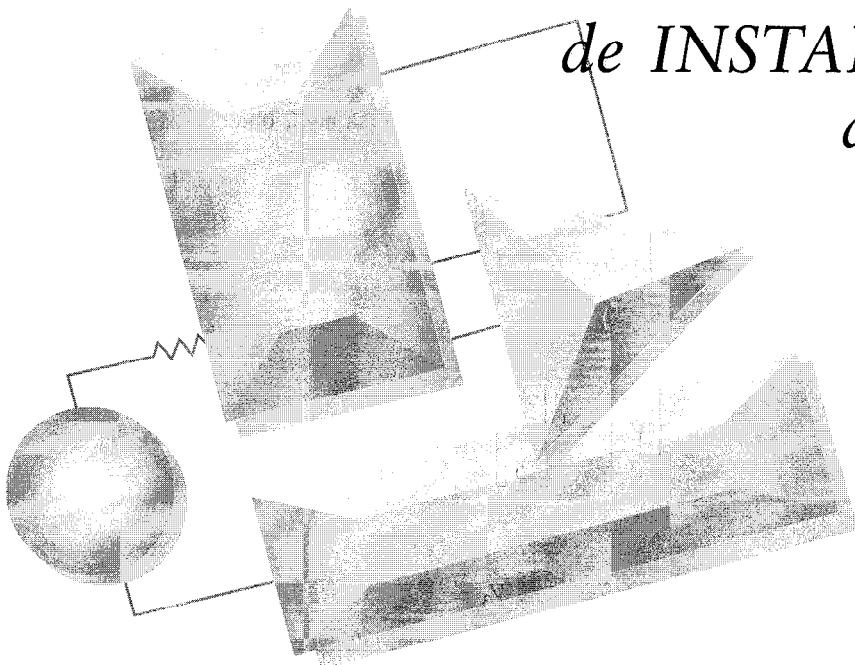
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y de aquí,

$$V_1 = \frac{35}{18}, V_2 = \frac{29}{18}, \text{ y } V_3 = \frac{5}{18}$$

- B.1** PSPICE para MS-WINDOWS
- B.2** PSPICE para MS-DOS

PROCEDIMIENTO *de INSTALACIÓN* *del PSPICE*



La instalación del PSPICE variará dependiendo del número de versión del programa PSPICE, si es una instalación bajo DOS o WINDOWS, y de la configuración de su computadora. Estas instrucciones de instalación pueden no ser exactamente las necesarias para su situación, pero servirán como guía en cualquier caso. Como regla general, cuando instale la versión para WINDOWS, ejecute A:SETUP.EXE y siga las instrucciones que se despliegan en la pantalla; y cuando instale la versión DOS, ejecute A:INSTALL.EXE y siga las instrucciones que se despliegan en la pantalla.

B.1 PSPICE para MS-WINDOWS

1. Inserte el ‘disco de instalación 1 de 2 de PSPICE para WINDOWS,
2. Seleccione la opción ‘File’ de la barra de menú de MS-WINDOWS
3. Seleccione la opción ‘Run’ del ‘menú File’
4. Escriba ‘A:SETUP’ y presione ENTER

5. Resalte la opción “Install Design Evaluation Version”
6. Coloque el cursor en ‘Ok’ y presione el botón izquierdo del mouse
7. Presione en ‘Ok’ para aceptar el directorio de instalación propuesto, ‘C:\MSIMEV53’
8. Inserte el disco de instalación 2 de 2 de ‘PSPICE para WINDOWS cuando se pida
9. Coloque el cursor en ‘Ok’ y presione el botón izquierdo del mouse
10. Coloque el cursor en ‘Yes’ y presione el botón izquierdo del mouse para crear un grupo central de diseño con íconos para los programas
11. Coloque el cursor en ‘Yes’ y presione el botón izquierdo del mouse para agregar una trayectoria al archivo autoexec.bat
12. Coloque el cursor en ‘Ok’ y presione el botón izquierdo del mouse para confirmar la instrucción para modificar el archivo autoexec.bat
13. Coloque el cursor en ‘Ok’ y presione el botón izquierdo del mouse para indicar la unidad de arranque correcta de la computadora
14. Coloque el cursor en ‘Ok’ y presione el botón izquierdo del mouse para modificar finalmente el archivo autoexec.bat
15. Coloque el cursor en ‘Yes’ y presione el botón izquierdo del mouse para correr el programa DOS SETUPDEV.EXE
16. Seleccione el número que corresponde al monitor de su computadora
17. Seleccione el número que corresponde al puerto de impresión que desea
18. Seleccione el número que corresponda al tipo de impresora conectado al puerto seleccionado en el paso anterior
19. Presione 4 y ENTER para salvar sus selecciones
20. Presione 0 y ENTER para salir del programa
21. Coloque el cursor en ‘Ok’ y presione el botón izquierdo del mouse para salir del programa de instalación

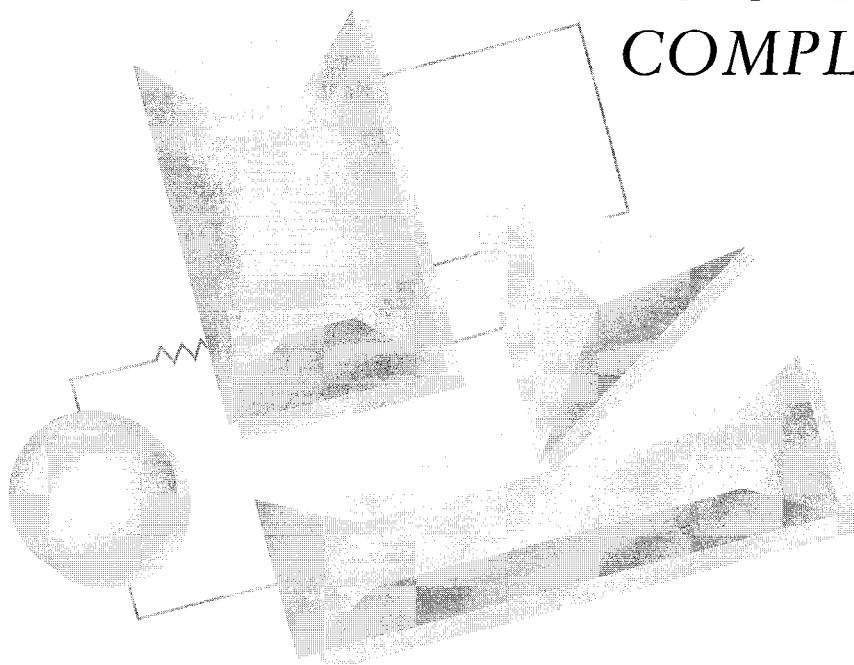
3.2 PSPICE para MS-DOS

1. Inserte el ‘disco de instalación 1 de 3 de PSPICE para DOS’
2. En el prompt “C:>” escriba ‘A:INSTALL’ y presione ENTER
Se despliega una caja de información detallando la instalación
3. Presione cualquier tecla para continuar
Se despliega una caja de diálogo que muestra la unidad de arranque de la computadora
4. Presione ENTER para continuar
5. Presione ENTER para aceptar el directorio “C:MSVAL60”, para la instalación
6. Inserte el ‘disco de instalación 2 de 3 de PSPICE para DOS’ cuando se pida
7. Presione ENTER
8. Inserte el ‘disco de instalación 3 de 3 de PSPICE para DOS’ cuando se pida
9. Presione ENTER
Aparece una caja de diálogo que explica que se hará una modificación al archivo AUTOEXEC.BAT

- 10.** Presione Y
Aparece una caja de diálogo que explica que se hará otra modificación al archivo AUTOEXEC.BAT
- 11.** Presione Y
- 12.** Utilizando las teclas con flechas, resalte la selección “Go Ahead and Modify”
- 13.** Presione ENTER
- 14.** Presione ENTER para confirmar la instrucción para modificar el archivo AUTOEXEC.BAT
Aparece una caja de diálogo preguntando si usted desea ejecutar SETUPDEV
- 15.** Presione Y
- 16.** Seleccione el número que corresponde al monitor de su computadora
- 17.** Presione ENTER
- 18.** Seleccione el número que corresponde al puerto de impresión deseado
- 19.** Presione ENTER
- 20.** Seleccione el número que corresponde al tipo de impresora al puerto seleccionado en el paso anterior
- 21.** Presione ENTER
- 22.** Presione 4 y ENTER para salvar sus selecciones
- 23.** Presione 0 y ENTER para salir del programa
- 24.** Presione ENTER
- 25.** Presione ENTER
- 26.** Presione ENTER

A P É N D I C E
C

NÚMEROS COMPLEJOS



Los números complejos se representan típicamente en tres formas: exponencial, polar o rectangular. En la forma exponencial un número complejo A se escribe como

$$A = ze^{j\theta} \quad (C.1)$$

La cantidad real z se conoce como la amplitud o magnitud, la cantidad real θ se llama *ángulo*, y j es el operador imaginario $j = \sqrt{-1}$. θ puede expresarse en radianes o grados.

La forma polar de un número complejo A , que es simbólicamente equivalente a la forma exponencial, se escribe como

$$A = z \angle \theta \quad (C.2)$$

y la representación rectangular de un número complejo se escribe como

$$A = x + jy \quad (C.3)$$

donde x es la parte real de A y y es la parte imaginaria de A .

La conexión entre las diversas representaciones de \mathbf{A} puede verse mediante la identidad de Euler, la cual es,

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (\text{C.4})$$

Utilizando esta identidad, el número complejo \mathbf{A} puede escribirse como

$$\mathbf{A} = ze^{j\theta} = z \cos \theta + jz \sin \theta \quad (\text{C.5})$$

que podemos escribir como

$$\mathbf{A} = x + jy$$

Igualando las partes real e imaginaria de esas dos ecuaciones se obtiene

$$x = z \cos \theta \quad (\text{C.6})$$

$$y = z \sin \theta$$

De esas ecuaciones obtenemos

$$x^2 + y^2 = z^2 \cos^2 \theta + z^2 \sin^2 \theta = z^2 \quad (\text{C.7})$$

Por tanto,

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{C.8})$$

Adicionalmente,

$$\frac{z \sin \theta}{z \cos \theta} = \tan \theta = \frac{y}{x}$$

y de aquí,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (\text{C.9})$$

Las interrelaciones entre las tres representaciones de un número complejo son como sigue.

Exponencial	Polar	Rectangular
$ze^{j\theta}$	$z \angle \theta$	$x + jy$
$\theta = \tan^{-1} y/x$	$\theta = \tan^{-1} y/x$	$x = z \cos \theta$
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$y = z \sin \theta$

Mostraremos ahora que las operaciones de suma, resta, multiplicación y división se aplican a números complejos de la misma forma que se aplican a números reales.

La *suma* de dos números complejos $\mathbf{A} = x_1 + jy_1$ y $\mathbf{B} = x_2 + jy_2$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2 \\ &= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Es decir, simplemente sumamos las partes reales individuales, y sumamos las partes reales imaginarias para obtener los componentes del número complejo resultante.

EJEMPLO C.1

Suponga que deseamos calcular la suma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ si $\mathbf{A} = 5 \angle 36.9^\circ$ y $\mathbf{B} = 5 \angle 53.1^\circ$.

SOLUCIÓN Primero, debemos convertir de la forma polar a la rectangular.

$$\mathbf{A} = 5 \angle 36.9^\circ = 4 + j3$$

$$\mathbf{B} = 5 \angle 53.1^\circ = 3 + j4$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= 4 + j3 + 3 + j4 = 7 + j7 \\ &= 9.9 \angle 45^\circ\end{aligned}$$

La *diferencia* de dos números complejos $\mathbf{A} = x_1 + jy_1$ y $\mathbf{B} = x_2 + jy_2$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{A} - \mathbf{B} &= (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) \\ &= (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)\end{aligned}\tag{C.11}$$

Es decir, simplemente restamos las partes reales individuales y restamos las partes imaginarias individuales para obtener los componentes del número complejo resultante.

EJEMPLO C.2

Calculemos la diferencia $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ si $\mathbf{A} = 5 \angle 36.9^\circ$ y $\mathbf{B} = 5 \angle 53.1^\circ$.

SOLUCIÓN Convertimos ambos números de la forma polar a la rectangular,

$$\mathbf{A} = 5 \angle 36.9^\circ = 4 + j3$$

$$\mathbf{B} = 5 \angle 53.1^\circ = 3 + j4$$

entonces

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (4 + j3) - (3 + j4) = 1 - j1 = \sqrt{2} \angle -45^\circ$$

El *producto* de dos números complejos $\mathbf{A} = z_1 \angle \theta_1 = x_1 + jy_1$, y $\mathbf{B} = z_2 \angle \theta_2 = x_2 + jy_2$ es

$$\mathbf{AB} = (z_1 e^{j\theta_1}) (z_2 e^{j(\theta_2)}) = z_1 z_2 \angle \theta_1 + \theta_2\tag{C.12}$$

E J E M P L O C.3

Dada $\mathbf{A} = 5 \angle 36.9^\circ$ y $\mathbf{B} = 5 \angle 53.1^\circ$, deseamos calcular el producto en forma rectangular y polar.

S O L U C I Ó N

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= (5 \angle 36.9^\circ) (5 \angle 53.1^\circ) = 25 \angle 90^\circ \\ &= (4 + j3)(3 + j4) \\ &= 12 + j16 + j9 + j^212 \\ &= 25j \\ &= 25 \angle 90^\circ\end{aligned}$$

El cociente de dos números complejos $\mathbf{A} = z_1 \angle \theta_1 = x_1 + jy_1$ y $\mathbf{B} = z_2 \angle \theta_2 = x_2 + jy_2$ es

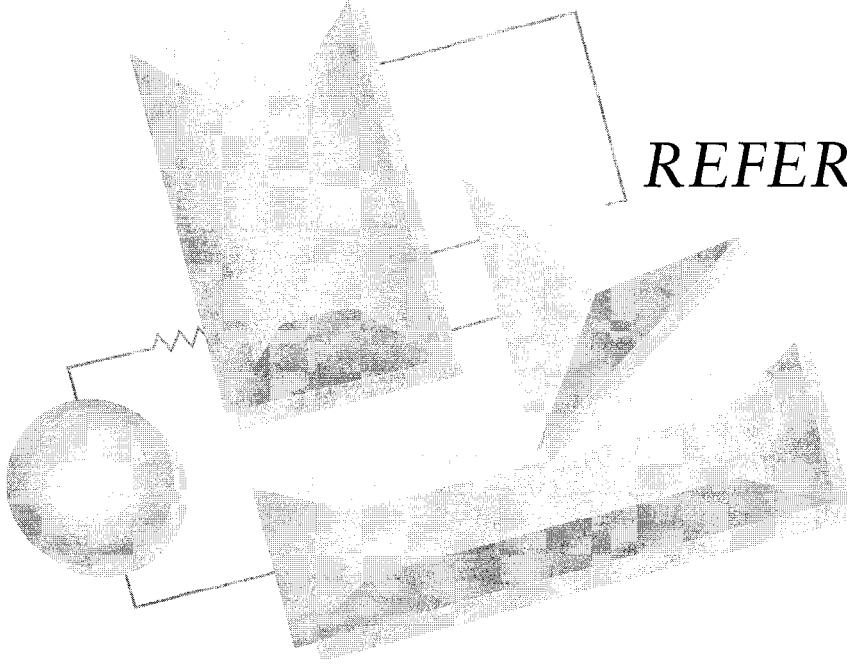
$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{z_1 e^{j\theta_1}}{z_2 e^{j\theta_2}} = \frac{z_1}{z_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{z_1}{z_2} \angle \theta_1 - \theta_2 \quad (\text{C.13})$$

E J E M P L O C.4

Dada $\mathbf{A} = 10 \angle 30^\circ$ y $\mathbf{B} = 5 \angle 53.1^\circ$, deseamos determinar el cociente \mathbf{A}/\mathbf{B} en forma polar y rectangular.

S O L U C I Ó N

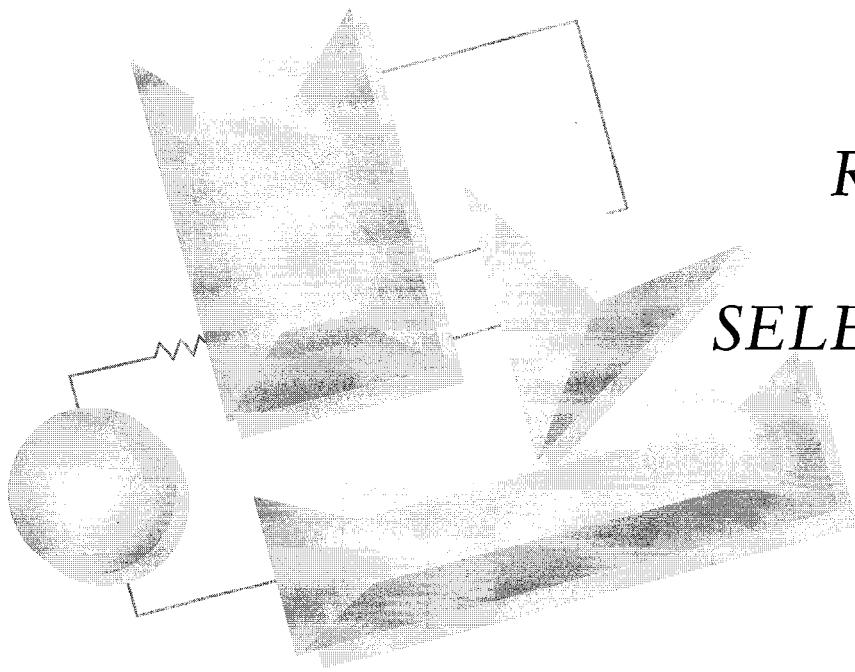
$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} &= \frac{10 \angle 30^\circ}{5 \angle 53.1^\circ} \\ &= 2 \angle -23.1^\circ \\ &= 1.84 - j0.79\end{aligned}$$



REFERENCIAS

- [1] IRWIN, J. DAVID, *Basic Engineering Circuit Analysis*, 4th ed., Macmillan Publishing Co., New York, 1993.
- [2] TUINENGA, PAUL W., SPICE, *A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSPICE*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1988.
- [3] VLADIMIRESCU A., and LIU SALLY, "The Simulation of MOS Integrated Circuits Using SPICE 2," Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, Calif., UCB/ERL M80/7, February 1980.
- [4] VLADIMIRESCU, A., NEWTON, A. R., and PEDERSON, D.O., "SPICE Version 2F.1 User's Guide," Department of Electrical Engineering and Computer Science. University of California, Berkeley, Calif., February 1980.
- [5] NAGLE, L. W., "SPICE 2: A Program to Simulate Semiconductor Circuits," Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, Calif. ERL M250, May 1975.
- [6] HAYT, W. H., JR, and KEMMERLY, JACK E., *Engineering Circuit Analysis*, 4th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.
- [7] NILSSON, J. W., *Electric Circuits*, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1986.
- [8] JOHNSON, D. E., HILBURN, J. L., and JOHNSON, J. R., *Basic Electric Circuit Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1978.
- [9] BORROW, L. S., *Elementary Linear Circuit Analysis*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1981.
- [10] BLACKWELL, W. A., and GRIGSBY, L. L., *Introductory Network Theory*, PWS Engineering, Boston, 1985.
- [11] BALABANIAN, N., *Fundamentals of Circuit Theory*, Allyn & Bacon, Inc., Boston, 1961.
- [12] KIRWIN, G. J., and GRODZINSKY, S. E., *Basic Circuit Analysis*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1980.
- [13] ASELTINE, J. A., *Transform Methods in Linear System Analysis*, McGraw-Hill, Book Company, New York, 1958.

-
- [14] CHAN, SHU-PARK, CHAN, SHU-YAN, and CHAN, SHU-GAR, *Analysis of Linear Networks and Systems*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1972.
 - [15] CHEN, WAI-KAI, *Linear Networks and Systems*, Brooks/Cole Engineering Division of Wadsworth, Inc., Monterey, Calif., 1983.
 - [16] FRIEDLAND, B., WING, O., and ASH, R., *Principles of Linear Networks*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.
 - [17] KUO, F. F., *Network Analysis and Synthesis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.
 - [18] LEY, B. J., LUTZ, S. G., and REHBERG, C. F., *Linear Circuit Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.
 - [19] SU, K. L., *Fundamentals of Circuit, Electronics and Signal Analysis*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1978.
 - [20] TRICK, T. N., *Introduction to Circuit Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1977.
 - [21] VAN VALKENBURG, M. E., and KINARIWALA, B. K., *Linear Circuits*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.
 - [22] FITZGERALD, A. E., HIGGINBOTHAM, E. E., and GRABEL, A., *Basic Electrical Engineering*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1981.
 - [23] CARLSON, A. B., and GISSER, D. G., *Electrical Engineering*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1981.
 - [24] VAN VALKENBURG, M. E., *Analog Filter Design*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1982.
 - [25] CHENG, D. K., *Analysis of Linear Systems*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1959.
 - [26] WEINBERG, L. *Network Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
 - [27] STREMLER, F. G., *Introduction to Communication Systems*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1977.



RESPUESTAS a PROBLEMAS SELECCIONADOS

Capítulo 1

- 1.1.** $Q = 0.5 \text{ C}$ **1.2.** $t = 50 \text{ s}$. **1.4.** $dq = 1080 \text{ C}$
1.8. $V = 100 \text{ volts}$ **1.9.** a) $Q = 10 \text{ mC}$, b) $I = 10 \text{ A}$
1.13. a) $P = 30 \text{ W}$ (ABS) b) $P = -16 \text{ W}$ (ABS)
1.16. a) $P_{12V} = -12 \text{ W}$, $P_1 = 4 \text{ W}$, $P_2 = 8 \text{ W}$ b) $P_{24V} = -48 \text{ W}$, $P_1 = 32 \text{ W}$, $P_{8V} = 16 \text{ W}$ **1.19.** $P_{vs} = 48 \text{ W}$ (ABS)
1.22. $V_x = 18 \text{ V}$

Capítulo 2

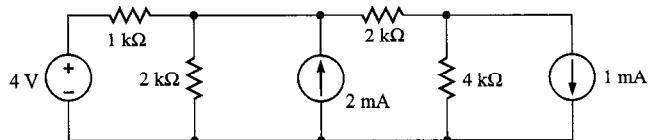
- 2.1.** $P = 9 \text{ W}$ **2.4.** $I = .03 \text{ mA}$, $P = 1.8 \text{ mW}$ **2.6.** $V_s = 5 \text{ V}$ **2.9.** $I_1 = 12 \text{ mA}$, $I_2 = 6 \text{ mA}$ **2.12.** $I_x = 4 \text{ mA}$
2.16. $V_{AC} = 10 \text{ V}$ **2.20.** $P_{12V} = -1.2 \text{ mW}$, $P_{40k} = 0.4 \text{ mW}$
2.23. $I_o = 90 \text{ mA}$ **2.27.** $R_{ENT} = 9 \text{ k}\Omega$ **2.29.** $R_{AB} = 5 \text{ k}\Omega$ **2.33.** $V_o = 1.33 \text{ V}$ **2.37.** $V_{sal} = -2.67 \text{ V}$
2.40. $I_o = 3/8 \text{ mA}$ **2.44.** $I_o = 0$ **2.48.** $V_s = 24 \text{ V}$
2.51. $I_o = 1 \text{ mA}$ **2.55.** $V_s = 3 \text{ V}$ **2.59.** $I_o = -4 \text{ mA}$
2.63. $P = 3 \text{ mW}$ **2.67.** $I_L = 18.2 \text{ mA}$ **2.72.** $R = 2.5 \text{ }\Omega$, $P = 1 \text{ mW}$ **2.76.** $R_{se} = 72.5 \text{ }\Omega$ **2.80.** $A_p = 14,226$

Capítulo 3

- 3.1.** $I_o = 1 \text{ mA}$ **3.2.** $V_o = 108/7 \text{ V}$, $I_o = -4/7 \text{ mA}$
3.4. $I_o = 1.25 \text{ mA}$ **3.7.** $I_o = -0.9 \text{ mA}$ **3.11.** $I_o = 1.5 \text{ mA}$ **3.15.** $I_o = -1.5 \text{ mA}$ **3.19.** $V_o = 0$, $I_o = 2 \text{ mA}$
3.21. $V_o = 20 \text{ V}$ **3.23.** $V_o = 15 \text{ V}$ **3.26.** $V_o = 4 \text{ V}$
3.30. $V_o = 4 \text{ V}$ **3.34.** $I_o = 7 \text{ mA}$ **3.38.** $V_o = 2.5 \text{ V}$

3.41. $V_o = 4 \text{ V}$ **3.45.** $V_o = 6 \text{ V}$

3.48.



3.52. a) 5 ramas, 5 ligas; b) 5 ramas, 4 ligas.

3.54. a) $i_1 - i_2 = 0$

$$i_4 + i_3 - i_2 = 0$$

$$i_4 + i_5 - i_7 = 0$$

$$i_6 - i_7 = 0$$

b) $i_1 + i_2 = 0$

$$i_2 - i_3 - i_7 = 0$$

$$i_2 + i_4 + i_6 = 0$$

$$i_7 - i_5 + i_6 = 0$$

3.57. $I_B + \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} = 0$

$$I_B + \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_3} + I_A = 0$$

$$-I_A + \frac{V_3}{R_4} + \frac{V_3}{R_5} = 0$$

3.61. $v_o/i_s = -1$ **3.65.** $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$

Capítulo 4

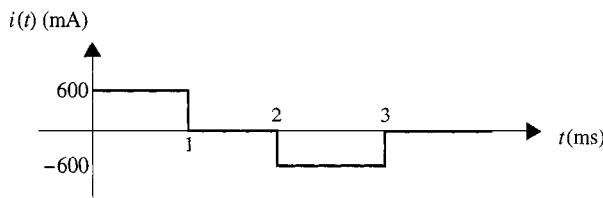
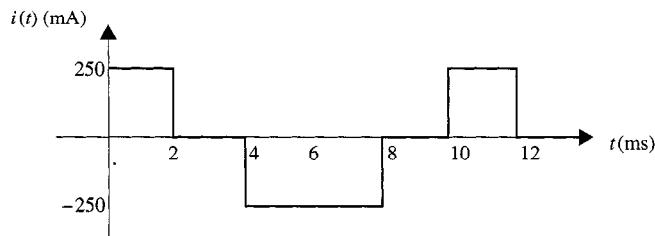
- 4.1.** $I_o = 0.5 \text{ mA}$ **4.3.** $V_o = -3 \text{ V}$ **4.6.** $I_o = 12/31 \text{ mA}$
4.10. $V_o = 144/13 \text{ V}$ **4.12.** $V_o = 8 \text{ V}$ **4.17.** $I_o = -2 \text{ mA}$
4.21. $V_o = 4 \text{ V}$ **4.25.** $V_o = 8 \text{ V}$ **4.29.** $I_o = 12/31 \text{ mA}$
4.32. $I_o = 5/4 \text{ mA}$ **4.36.** $V_o = 8/5 \text{ V}$ **4.39.** $I_o = -3/2 \text{ mA}$
4.42. $I_o = \frac{6}{19} \text{ mA}$ **4.48.** $V_o = -\frac{7}{8} \text{ V}$ **4.50.** $I_o = 1.2 \text{ mA}$ **4.52.** $V_o = \frac{48}{7} \text{ V}$
4.55. $R_L = \frac{20}{9} \text{ k}\Omega, P = \frac{16}{5} \text{ mW}$ **4.58.** $R_L = 2 \text{ k}\Omega, P = \frac{25}{2} \text{ mW}$ **4.61.** $R_{TH} = 3.6 \text{ k}\Omega$ **4.64.** $R_{TH} = \frac{28}{15} \text{ k}\Omega$

Capítulo 5

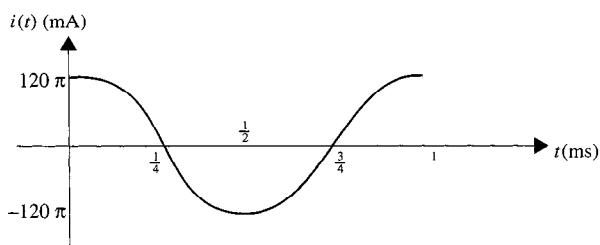
- 5.1.** $V_o = 15.429 \text{ V}$ **5.4.** $V_o = -1.75 \text{ V}$ **5.7.** $I_o = 58.33 \text{ mA}$
5.11. $I_o = 2.25 \text{ mA}$ **5.14.** $I_o = 5.2 \text{ mA}$
5.18. $I_o = 8.267 \text{ V}$ **5.22.** $V_o = 20 \text{ V}$ **5.26.** $I_o = -40 \text{ mA}$
5.30. $I_o = -1.33 \text{ mA}$ **5.34.** $V_o = 5 \text{ V}$,
GANANCIA = 1 **5.38.** $V_o = 5 \text{ V}$

Capítulo 6

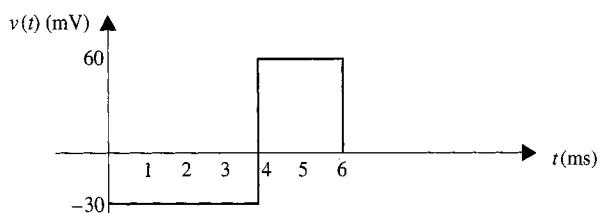
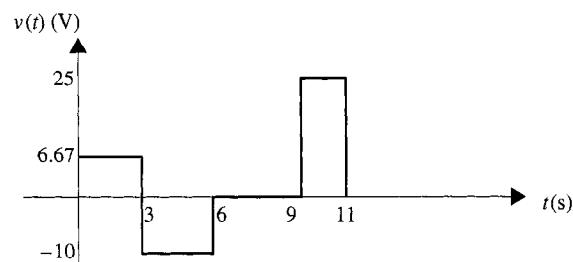
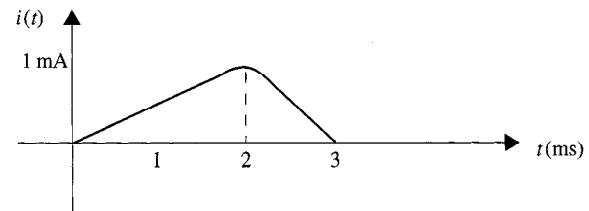
- 6.1.** $V = 40 \text{ V}$ **6.4.** $Q_1 = 36 \mu\text{C}, Q_2 = 72 \mu\text{C}$,
 $W = 648 \mu\text{J}$
- 6.7.**

**6.11.**

6.14. $i(t) = 0.12 \pi \cos 2000 \pi t$



6.18. a) $v(t) = 75.4 \cos 377t \text{ A}$, **b)** $w(t) = 0.2 \sin^2 377t \text{ J}$

6.22.**6.25.****6.29.**

6.33. $C_{\max} = 8 \mu\text{F}, C_{\min} = \frac{1}{2} \mu\text{F}$ **6.36.** $C_{AB} = 1.32 \mu\text{F}$

6.39. a) $C_T = 10 \mu\text{F}$, **b)** $C_T = 10 \mu\text{F}$ **6.42.** $L = 2 \text{ mH}$
6.45. a) $L_T = 21.47 \text{ mH}$, **b)** $L_T = 20.8 \text{ mH}$

Capítulo 7

- 7.1.** $v_o(t) = 4e^{-t/1.2} \text{ V}$ **7.3.** $i(t) = 2 \text{ A } t < 0$
 $= 4e^{-9t} \text{ A } t > 0$

7.7. $i_o(t) = 1 \text{ A}$ **7.11.** $v_o(t) = 6 \text{ V } t < 0$
 $= 8 + 1e^{-t/0.8} \text{ V } t > 0$

7.14. $i_o(t) = 8.4 \text{ V } t < 0$
 $= 2 - 3.2e^{-3t} \text{ V } t > 0$

7.18. $i_o(t) = 1 \text{ mA } t < 0$
 $= 2 + 0.5e^{-t/0.266} \text{ mA } t > 0$

7.22. $v_o(t) = 12 \text{ V } t < 0$
 $= 1.5e^{-t/0.6} \text{ V } t > 0$

7.26. $v_o(t) = -4.4e^{-t/0.37} \text{ V } t > 0$ **7.29.** $v_o(t) = 6 + 2e^{-t/0.4} \text{ V } t > 0$

7.33. $v_o(t) = +6e^{-t/0.15} \text{ V } t > 0$ **7.37.** $i_o(t) = 2.4e^{-3.6t} \text{ V } t > 0$ **7.41.** $v_o(t) = -6e^{-4t} \text{ V } t > 0$

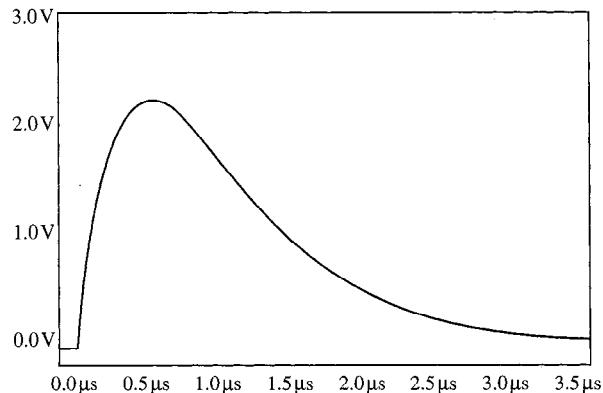
7.46. $i_o(t) = \frac{2}{3} + \left(-2 - \frac{2}{3} \right) e^{-t/0.53} \text{ mA } t > 0$

7.50. $v_o(t) = 8e^{-24t} \text{ V } t > 0$ **7.54.** $v_o(t) = 16 - 7e^{-t/2/3} \text{ V } t > 0$

Capítulo 8

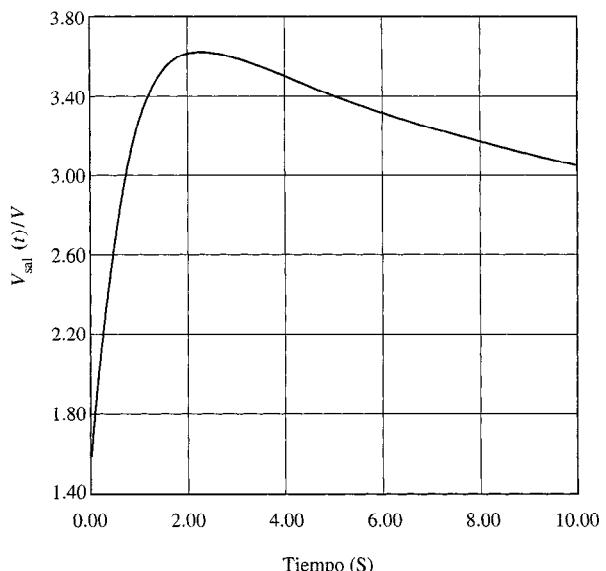
8.1. a) $s^2 + 6s + 8 = 0$ **b)** $s = -2, s = -4$ **c)** $i_o(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-4t} \text{ A}$ **8.5.** Subamortiguado **8.9.** $v(t) = 5e^{-5t} - 225te^{-5t} \text{ V}$

8.16. $v_o(t) = 1.2 \times 10^7 te^{-2 \times 10^6 t} \text{ V}$

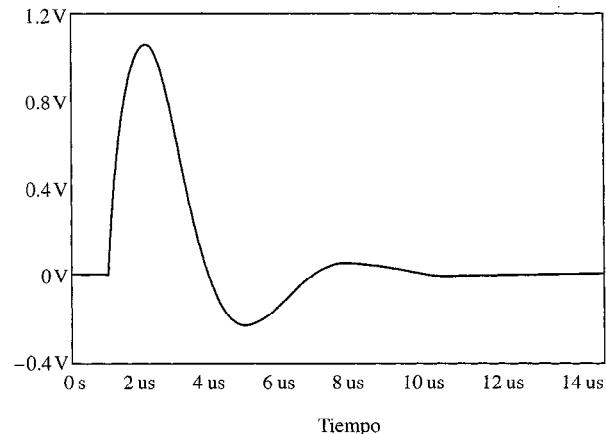


8.18. $v(t) = 8 - 10e^{-t} + 2e^{-5t}$

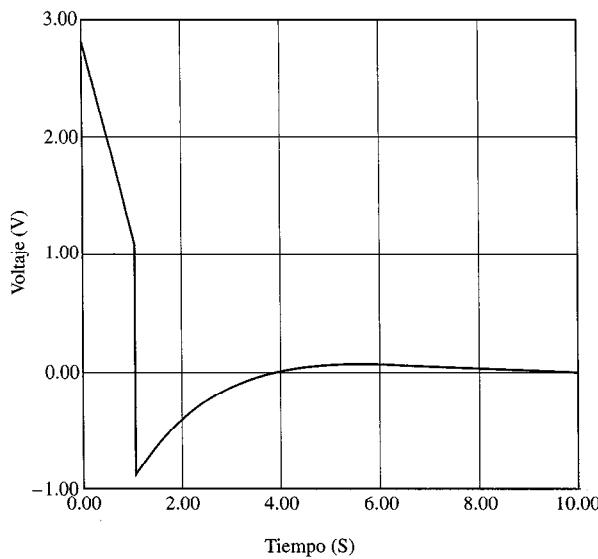
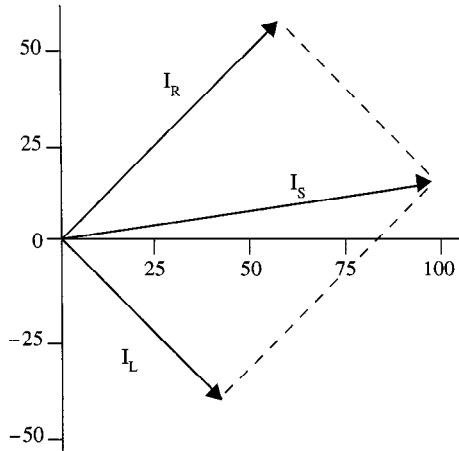
8.21.



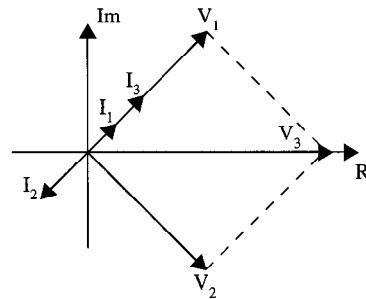
8.26. $v_o(t) = 2e^{-5 \times 10^5 t} \text{ sen } 10^6 t \text{ V}$



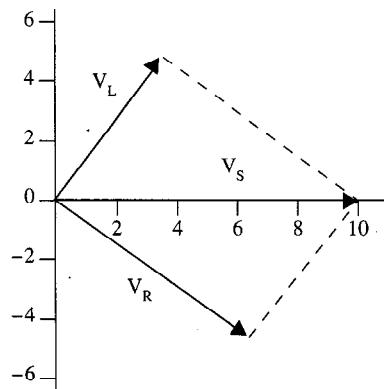
8.29.

9.42. $v_o(t) = 2.4 \cos(5000t + 45^\circ)$ V

9.48.



Capítulo 9

9.1. $v_1(t)$ y $v_2(t)$ están en fase9.4. i_1 adelanta i_2 por -85° i_2 adelanta i_3 por 145° i_1 adelanta i_3 por 60° 9.7. a) $\mathbf{I}_1 = 8 \angle 68^\circ$ A, $i_1(t) = 8 \cos(377t + 68^\circ)$ A; b) \mathbf{I}_2 $= 4 \angle 64^\circ$ A, $i_2(t) = 4 \cos(377t + 64^\circ)$ A9.13. a) $\mathbf{Z}_{ab} = 1 \Omega$, b) $\mathbf{Z}_{ab} = 1 \Omega$ 9.17. $\mathbf{Z} = 0.8 - j0.4 \Omega$ 9.20. $\mathbf{Z} = \frac{3}{2} + j\frac{1}{2} \Omega$ 9.23. $C = 160 \mu\text{F}$ 9.27. $C = 123 \mu\text{F}$ 9.30. $\mathbf{I} = 6 \angle -53^\circ$ A 9.36. $\mathbf{V}_o = 8.5 \angle -41.76^\circ$ V9.38. $i(t) = 2 \cos(100t - 36.87^\circ)$ A9.52. $\mathbf{V}_o = 9.41 \angle 11.31^\circ$ V 9.56. $\mathbf{I}_o = 1.212 \angle 45^\circ$ A9.60. $\mathbf{V}_o = -8 + j3$ V 9.64. $\mathbf{I}_o = (2 + j2)$ A9.68. $\mathbf{I}_o = 2 \angle -36.87^\circ$ A

$$9.70. \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = -g_m \left(\frac{R_1}{R_1 + R_s} \right) \left(\frac{\frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L + \frac{1}{j\omega C}}}{R_2 + R_L + \frac{1}{j\omega C}} \right)$$

9.73. $\mathbf{V}_o = 5.54 \angle 86^\circ$ V 9.76. $\mathbf{V}_o = -5 \angle 11.31^\circ$ V9.80. $\mathbf{V}_o = 3.24 \angle 2.8^\circ$ V 9.83. $\mathbf{V}_o = 5.54 \angle 86^\circ$ V9.86. $\mathbf{V}_{oc} = -4 + j4$ V, $\mathbf{Z}_{TH} = \frac{1+j3}{1-j1} \Omega$ 9.89. $\mathbf{I}_L = 2.95 \angle -38^\circ$ A

Capítulo 10

10.1. 0 W 10.3. $P_{4V} = 2.51$ W 10.6. $P = 1.58$ W10.10. $P = 36$ W 10.13. $P = 31$ W 10.16. $P = 4$ mW10.19. $P = 5.28$ W 10.22. $P = 47.8$ W 10.26. $P = 13$ W10.30. $P = 5$ W 10.34. $V_{rms} = 2.3$ V

- 10.38.** $I_{rms} = 1.29 \text{ A}$ **10.42.** $V_{rms} = 2.67 \text{ V}$ **10.45.** $I_{rms} = 0.94 \text{ A}$ **10.49.** $fp = 0.91$ retrasado **10.53.** $Z_{\text{Línea}} = 0.062 + j0.083 \Omega$, $\mathbf{V}_{\text{ENT}} = 237 \angle 1.19^\circ \text{ V}$ **10.55.** $\mathbf{V}_s = 512 \angle 26.6^\circ \text{ V}$ **10.58.** $\mathbf{V}_s = 303 \angle 12.4^\circ \text{ V}$
10.61. $C = 586 \mu\text{F}$ **10.65.** $fp = 0.87$ retrasado
10.67. $P = 37.44 \text{ W}$ **10.70.** $I = 237 \text{ mA}$

Capítulo 11

- 11.3.** $\mathbf{I}_{an} = 2.45 \angle -14^\circ \text{ A}$, $\mathbf{I}_{bn} = 2.45 \angle -134^\circ \text{ A}$, $\mathbf{I}_{cn} = 2.45 \angle -254^\circ \text{ A}$ **11.6.** $\mathbf{I}_{AN} = 5.56 \angle 6.3^\circ \text{ A}$, $\mathbf{V}_{AN} = 111.1 \angle 59.4^\circ \text{ V}$ **11.9.** $\mathbf{V}_{an} = 217.4 \angle 40^\circ \text{ V}$ **11.12.** $Z_L = 12 + j10 \Omega$ **11.15.** $Z_{\text{línea}} = 9.94 \angle 139^\circ \Omega$
11.18. $\mathbf{V}_L = 197 \text{ V}$ **11.21.** $\mathbf{I}_{aA} = 13.1 \angle -23.3^\circ \text{ A}$
11.29. $\mathbf{V}_{ab} = 178.5 \angle 73.7^\circ \text{ V}$ **11.33.** $\mathbf{I}_{AN} = 9.37 \angle -4.4^\circ \text{ A}$
11.37. $\mathbf{I}_{ab} = 8.64 \angle 57.9^\circ \text{ A}$ **11.41.** $S_3\phi = 522.8 \text{ VA}$
11.44. $I_L = 81.58 \text{ A}$ **11.48.** $I_L = 50.06 \text{ A}$ **11.51.** Carga = 20 kVA con fp de 0.6 retrasado **11.57.** $P = 20$ 687 W

Capítulo 12

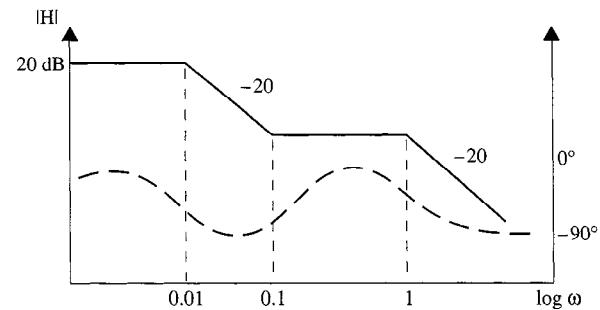
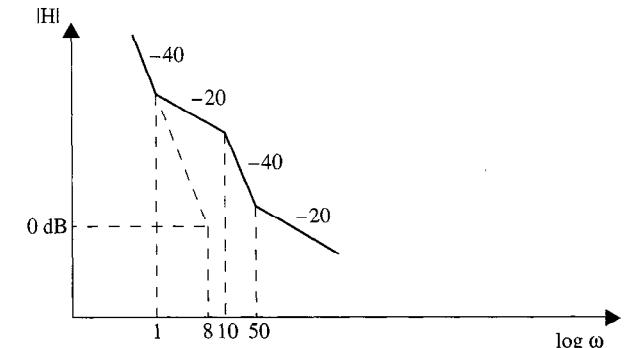
- 12.1. a)** $v_a(t) = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$
 $v_b(t) = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$
(b) $v_a(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$
 $v_b(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$
12.3. $V_o = 5.33 \angle -123.7^\circ \text{ V}$
12.5. $V_1 = I_1 R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} (I_1 - I_2) + R_2 (I_1 - I_2) + V_2$
 $0 = \frac{1}{j\omega C_1} (I_2 - I_1) + j\omega L_1 I_2 + j\omega M I_3 + R_3 I_2 + \frac{1}{j\omega C_2} (I_2 - I_3)$
 $V_2 = R_2 (I_3 - I_1) + \frac{1}{j\omega C_2} (I_3 - I_2) + R_4 I_3 + j\omega L_3 I_3 + j\omega M I_2$
12.7. $\mathbf{V}_o = 2.15 \angle -157.3^\circ \text{ V}$ **12.10.** $\mathbf{V}_o = 5.82 \angle 86.3^\circ \text{ V}$
12.13. $v_1(t) = -6.0 \text{ sen}(377t - 20^\circ) + 1.3 \text{ sen}(377t - 50^\circ) \text{ V}$
 $v_2(t) = 1.6 \text{ sen}(377t - 50^\circ) - 2.6 \text{ sen}(377t - 20^\circ) \text{ V}$
12.16. $C = 166 \mu\text{F}$ **12.19.** $\mathbf{V}_o = 5.57 \angle 89.89^\circ \text{ mV}$
12.23. $Z = 4.54 - j1.69 \Omega$ **12.26.** $\mathbf{I}_1 = 4.7 \angle 18.7^\circ \text{ A}$,
 $\mathbf{V}_1 = 15 \angle 37.1^\circ \text{ V}$, $\mathbf{I}_2 = 2.35 \angle 18.7^\circ \text{ A}$, $\mathbf{V}_2 = 30 \angle 37.1^\circ \text{ V}$

- 12.30.** $\mathbf{I} = 2.61 \angle -33.4^\circ \text{ A}$ **12.34.** $\mathbf{V} = 15.86 \angle -43^\circ \text{ V}$
12.37. $n = 20$ **12.40.** $I_2 = 0.88 \angle 60.86^\circ \text{ A}$ **12.43.** $\mathbf{V}_S = 107 \angle -20^\circ \text{ V}$ **12.47.** $Z_{\text{ent}} = 0.371 \angle 21.8^\circ \Omega$
12.54. $S = 360 \text{ kVA}$ **12.58.** $V = 245 \text{ V}_{rms}$ **12.61.** $V_{ab} = 24.8 \text{ V}_{rms}$

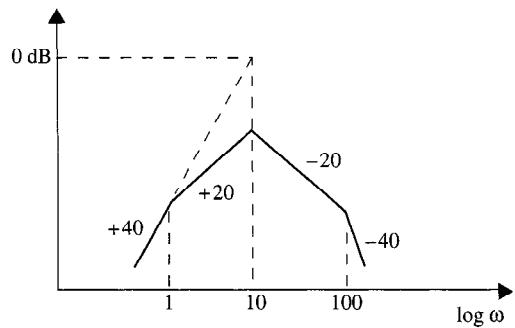
Capítulo 13

$$13.1. Z_{\text{ENT}} = \frac{sCR^2 + 3R + \frac{1}{sC}}{sCR + 2}$$

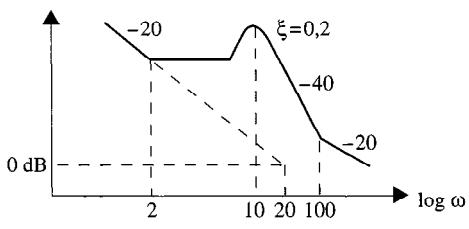
$$13.3. \frac{V_o}{V_i} = \frac{s(L - R_1 R_2 C)}{s^2 L C R_2 + s(L + R_1 R_2 C) + R_1}$$

13.6.**13.10.**

13.14.



13.18.



$$13.22. H(j\omega) = \frac{0.01(1 + 10j\omega)}{(1 + 2j\omega)(0.1j\omega + 1)^2}$$

$$13.25. H(j\omega) = \frac{10 \left(\frac{j\omega}{10} + 1 \right)}{j\omega \left(\frac{j\omega}{20} + 1 \right)^2}$$

$$13.28. H(j\omega) = \frac{12 \left(\frac{j\omega}{8} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{60} + 1 \right)}{(j\omega)(j\omega + 1) \left(\frac{j\omega}{400} + 1 \right)}$$

$$13.32. H(j\omega) = \frac{100 \left(\frac{j\omega}{75} + 1 \right)}{\left[\frac{-\omega^2}{169} + \frac{4j\omega}{13} + 1 \right] \left(1 + \frac{j\omega}{300} \right)}$$

$$13.36. C = 69.4 \mu F, I \left(\frac{\omega_o}{4} \right) = .533 / 117.45^\circ A, I(4\omega_o)$$

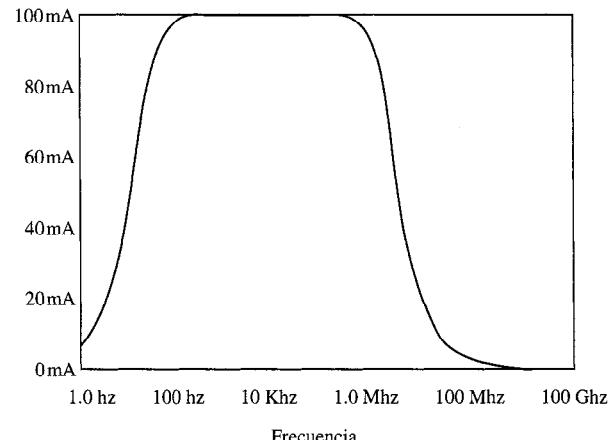
$$= .533 / -57.45^\circ A \quad 13.40. \omega_o = 500, Q = 12.5$$

$$13.44. L = 1.59 \text{ mH}, C = .59 \text{ nF} \quad 13.47. L = 0.5 \text{ mH}$$

$$13.51. \omega_o = 1000 \text{ r/s}, Q = 100, BW = 10 \text{ r/s}$$

$$13.53. Q = 100, L = 0.1 \text{ H}, C = 2.5 \text{ fF}$$

13.56.



$$13.59. R = 2 \text{ k}\Omega, L = 500 \text{ H}, C = \frac{1}{8} \text{ mF}$$

$$13.62. \frac{V_o}{V_i} = \frac{j\omega + \frac{R_2}{CR_1R_2}}{j\omega + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}}, \text{ Filtro pasaaltas}$$

$$13.65. \frac{V_o}{V_i} = \frac{j\omega \left(\frac{CR_1R_2}{R_1 + R_2} \right) + 1}{j\omega CR_1 + 1} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right), \text{ Filtro pasabajos}$$

$$13.69. R_2 = 20 \text{ k}\Omega, C = 159 \text{ pF}$$

Capítulo 14

$$14.1. \text{ a) } y_{11} = y_{22} = \frac{1}{Z_L}, y_{21} = y_{12} = -\frac{1}{Z_L}; \text{ b) } z_{11} = z_{12} =$$

$$z_{21} = z_{22} = Z_L \quad 14.3. y_{11} = \frac{1}{14} S, y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{21} S, y_{22}$$

$$= \frac{1}{7} S \quad 14.6. y_{11} = \frac{1}{6} S, y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{12} S, y_{22} = \frac{1}{8} S$$

$$14.8. z_{11} = Z_1, Z_{12} = 0, z_{21} = -\gamma Z_1, z_{22} = Z_2$$

$$14.11. z_{11} = 400 \Omega, z_{12} = 15 \Omega, z_{21} = -2 \text{ M}\Omega, z_{22} = 50 \text{ k}\Omega$$

$$14.15. z_{11} = j\omega L_1, z_{12} = z_{21} = j\omega M, z_{22} = j\omega L_2$$

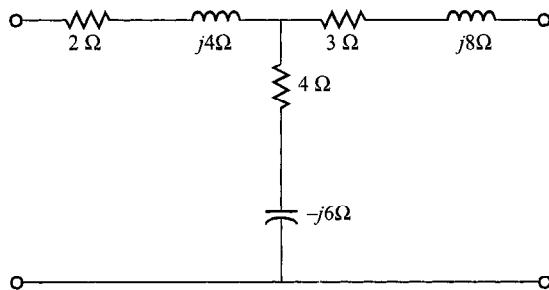
$$14.17. h_{11} = 14 \Omega, h_{12} = \frac{2}{3}, h_{21} = \frac{-2}{3}, h_{22} = \frac{1}{9} S$$

$$14.19. h_{11} = 6\Omega, h_{12} = \frac{1}{2}, h_{21} = \frac{-1}{2}, h_{22} = \frac{1}{8} S$$

14.21. $A = 1$, $B = Z_2$, $C = 0$, $D = 1$ **14.24.** $A = \frac{-1}{\gamma}$,

$$B = \frac{-Z_2}{\gamma}, C = \frac{-1}{\gamma Z_1}, D = \frac{-Z_2}{\gamma Z_1} \quad \text{14.26. } A = \frac{L_1}{M}, B = j\omega \left[\frac{L_1 L_2 - M^2}{M} \right], C = \frac{1}{j\omega M}, D = \frac{L_2}{M}$$

14.29.



14.36. $Y_{emt} = 15 S$ **14.38.** $y_{11} = \frac{Z_2 + Z_3}{\Delta z_{123}} + \frac{Z_5 + Z_6}{\Delta z_{456}}$

$$y_{12} = y_{21} = \frac{-Z_3}{\Delta z_{123}} - \frac{Z_6}{\Delta z_{456}}$$

$$y_{22} = \frac{Z_1 + Z_3}{\Delta z_{123}} + \frac{Z_4 + Z_6}{\Delta z_{456}}$$

14.40. $A = 1 + j\omega$, $B = 1 + j\omega - \omega^2$, $C = j\omega$, $D = 1 - \omega^2$

14.43. $I_o = 0.3 \angle 75.6^\circ A$

Capítulo 15

15.1. $F(s) = e^{-s}/e^a$ **15.4.** $F(s) = e^{-4s} \left[\frac{e^{-4a}}{(s+a)^2} + \frac{4e^{-4a}}{s+a} \right]$

15.7. $F(s) = e^{-(s+a)/(s+a)}$ **15.9. a)** $f(t) =$

$$4(e^{-t} - e^{-2t}) u(t); \text{ b)} f(t) = \left(\frac{-10}{3} e^{-t} + \frac{40}{3} e^{-4t} \right) u(t)$$

15.12. a) $f(t) = \left(\frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{3}{4} e^{-6t} \right) u(t)$

b) $f(t) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} e^{-4t} \right) u(t)$

15.15. a) $f(t) = (-e^{-3t} + 2(1)e^{-3t} \cos 3t) u(t)$

b) $f(t) = (1 + 2 \left(\frac{1}{2} \right) e^{-4t} \cos(4t - 90^\circ)) u(t)$

15.19. a) $f(t) = \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} e^{-2t} \right] u(t)$

b) $f(t) = \left[\frac{1}{9} e^{-t} + \frac{2}{3} t e^{-t} - \frac{1}{9} e^{-4t} \right] u(t)$

15.22. a) $f(t) = (te^{-t} - 3e^{-t} + 4e^{-2t}) u(t)$

b) $f(t) = \left(\frac{1}{16} - \frac{t}{4} e^{-4t} - \frac{1}{16} e^{-4t} \right) u(t)$

15.25. a) $f(t) = e^{-(t-1)} u(t-1)$

b) $f(t) = u(t) - u(t-2)$

c) $f(t) = e^{-2t} u(t) - e^{-2(t-1)} u(t-1)$

15.29. a) $f(t) = (-2e^{-2(t-1)} + 4e^{-3(t-1)}) u(t-1)$

b) $f(t) = \left(\frac{10}{3} e^{-(t-2)} + \frac{20}{3} e^{-4(t-2)} \right) u(t-2)$

15.32. $y(t) = \left(\frac{5}{3} - 5e^{-t} + 5e^{-2t} - \frac{5}{3} e^{-3t} \right) u(t)$

15.35. $f(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) u(t)$ **15.38. a)** $f(0) = 10, f(\infty) = 0$; **b)** $f(0) = 0, f(\infty) = 0$; **c)** $f(0) = 2, f(\infty) = 0$

15.41. $v(t) = 4e^{-5t} V$

Capítulo 16

16.1. $v_o(\infty) = 0 V$ **16.3.** $v_o(\infty) = 0 V$ **16.5.** $v_o(t) = 2\sqrt{2} e^{-t} \cos(t - 45^\circ) u(t) V$ **16.8.** $v_o(t) = \frac{24}{7} e^{-\frac{2}{7}t} u(t) V$

16.10. $v_o(t) = 2\sqrt{2} e^{-t} \cos(t - 45^\circ) u(t) V$ **16.13.** $i_o(t) = (-2 + 2e^{-t} + 0.074e^{-0.382t} - 3.17e^{-2.62t}) u(t) A$

16.15. $v_o(t) = 2\sqrt{2} e^{-t} \cos(t - 45^\circ) u(t) V$ **16.17.** $v_o(t) = 2\sqrt{2} e^{-t} \cos(t - 45^\circ) u(t) V$ **16.20.** $i_o(t) =$

$$\left(1 - \frac{2}{3} e^{-\frac{4}{3}t} \right) u(t) A$$

16.23. $A = 2, B = \frac{s+1}{s}, C = 1,$

$$D = \frac{2s+1}{2s}$$

16.26. $v_o(t) = 3e^{-2.5t} u(t) V$ **16.29.** $i_o(t) =$

$$(-1.61e^{-0.82t} + 0.61e^{-0.31t}) u(t) A$$

16.31. $v_o(t) = (4 + 12e^{-1.5t}) u(t) V$ **16.34.** $v_o(t) = 1.15(e^{-0.42t} - e^{-1.58t}) u(t) V$

16.37. $v_o(t) = 2.27(-e^{-5.65t} + e^{-0.35t}) u(t) V$

16.40. $v_o(0) = -4.8 V, v_o(\infty) = 0$

16.44. $\frac{I_o}{I_i} = \frac{2}{2s^2 + 5s + 4}$

16.47. $\frac{v_o}{v_s} = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right)^s + \frac{\frac{1}{(R_1 + R_2)C}}{s + \frac{1}{R_2 C}}$

16.51. $\omega_o = \sqrt{40}, \xi = \frac{11}{2\sqrt{10}}, \text{ sobre amortiguado}$

16.54. $H(j1) = 0.26 \angle -47.2^\circ$

16.57. $i_o(t) = 12\sqrt{2} \cos(2t + 45^\circ)$ A

Capítulo 17

17.1. $f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2}{jn\pi} e^{jnw_0 t}$

17.3. $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{6}{n\pi} e^{-jn\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right) e^{jn\frac{2\pi}{5}t}$

17.9. $f_1(t)$ es una función impar, $f_2(t)$ exhibe simetría de media onda

Simetría **17.12.** nivel cd = $\frac{1}{4}$, $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right)$

$$+ \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

17.14. nivel cd = $\frac{3}{4}$, $a_n =$

$$\frac{1}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1), b_n = \frac{-1}{n\pi} \quad \text{17.18. } a_o = \frac{-\pi}{4}, a_n =$$

$$\frac{1}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1), b_n = \frac{1}{n} (1 - 2 \cos n\pi)$$

17.22. $v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{-2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos n\omega_o t + \frac{6}{n\pi} \sin n\omega_o t$

17.25. $f(t) = 3 - 4 \sin 20\pi t - 5 \sin 40\pi t - 3 \sin 60\pi t - 2 \sin 80\pi t - \sin 100\pi t$

17.28. $A_n = \left| \frac{2+j6n}{j2n} \right|$

$$i_o(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{20}{n\pi} \left(\frac{1}{A_n} \right) \cos(nt - 90^\circ - \theta_n) A$$

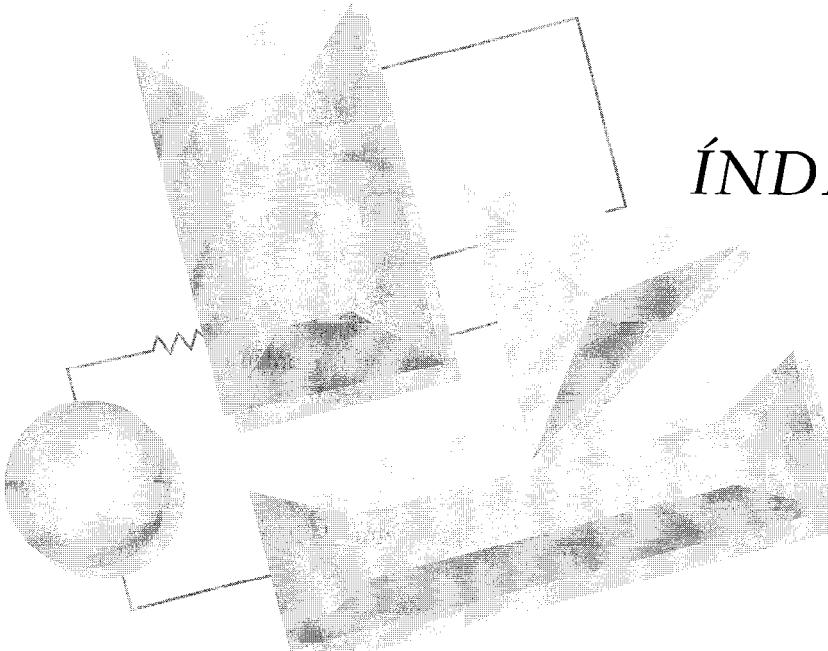
17.31. $v_o(0) = 0.25 \angle 0^\circ$, $v_o(1) = 0.28 \angle 26.6^\circ$, $v_o(2) = 0$,
 $v_o(3) = 0.023 \angle -49^\circ$ **17.34.** $P_{\text{prom}} = 1.1$ W

17.38. a) $F(\omega) = \frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$

b) $F(\omega) = \frac{\omega_0}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$

17.41. $F(\omega) = \frac{24}{4 + (\omega - 4)^2} + \frac{24}{4 + (\omega + 4)^2}$

17.45. $W = \frac{5}{3}$ J **17.48.** $W = 0.21$ J



ÍNDICE

A

- Acoplamiento magnético, 566
- Acoplamiento, 130
 - activo, 10
- Aditividad, 170
- Adjunto de una matriz, 103, 109, 920
- Admitancia, 414
 - capacitor, 415
 - circuito abierto, 726
 - conexiones en paralelo, 415
 - conexiones en serie, 415
 - corto circuito, 721
 - entrada, 721
 - inductor, 415
 - parámetros, 720-723, 732, 735, 800
 - resistencia, 415
 - salida, 721, 726
 - transferencia, 721, 729, 808
- Amortiguamiento crítico, 356, 810
- Ampere, 2, 3
- Amperímetro, 68, 153
- Amplificador aislador, 150, 693
- Amplificador de instrumentación, 147
- Amplificador diferencial, 146
- Amplificador no inversor, 148
- Amplificador operacional, 139-157, 233-235, 240-249, 274-227, 676-696, 702, 706, 815, 821
- Amplificador; véase Amplificador operacional
- Amplitud:
 - de una senoidal, 394
 - espectro, 875
 - respuesta, 615-637
- Análisis de circuito, 33, 118-128, 428, 433, 784, 796, 803
- Análisis nodal, 97-118, 428, 433, 792, 795
- Análisis por fase, 529
- Análisis transitorio:
 - de primer orden, 290-339
 - de segundo orden, 351-387, 810-828
- Ancho de banda, 664, 659, 670, 692, 901
 - circuito RLC en paralelo, 658
 - circuito RLC en serie, 645
 - conexiones en serie, 415
- Ángulo de factor de potencia:
 - adelantado, 476
 - retrasado, 476
- Ángulo de fase adelantada, 395, 476
- Ángulo de fase retrasada, 395, 476,

- Ángulo:
 factor de potencia, 476
 fase, 395
- Aplicaciones, 77, 152, 203, 238, 277, 336, 377, 501, 552, 599, 696, 777, 893, 897
- Árbol, 130
- Argumento, 394
- Armónicos, 853
- Autoinductancia, 262, 567
- Autotransformador, 591
- B**
- Batería, 4, 8, 11
- Bobina móvil de imán fijo, 68
- Bobina potencial, 487
- Bobinas, acopladas magnéticamente, 566
- C**
- Ca, 4
- Ca, análisis de estado estable, 393, 425, 428, 828, 876
- Cable neutro, 525
- Campo eléctrico, 255
- Campo magnético, 252, 261, 566
- Candela, 2
- Capacitancia, 253
 Equivalente, 267–271
- Capacitor, 253
 circuito equivalente de dominio s , 787
- corriente, 255
- energía almacenada, 256
- impedancia, 412
- relación fasorial, 410
- voltaje inicial, 268
- voltaje, 255
- Capacitores:
 en paralelo, 269
 en serie, 267
- Característica de magnitud, 625
- Carga conectada en Y, 526
- Carga eléctrica, 3, 255
- Carga, 3, 255
- Carga:
 balanceada, 526
 conectada en delta, 527
 conectada en Y, 526
 trifásica, 526
- Cd, 4
- Ceros complejos, 628, 766
- Ceros de primer orden en gráficas de Bode, 628
- Ceros, 624
- Ciclos por segundo, 394
- Circuito abierto:
 parámetros de impedancia, 723
 voltaje, 186
- Circuito, 2, 27
- Circuito de Q alta, 645
- Circuito no planar, 129
- Circuito resistivo, 26
- Circuito sin fuentes, 291, 297, 318
- Circuitos de segundo orden, 351–387
- Circuitos equivalentes, 171
 Norton, 184–199
 Thévenin, 184–199
 transformación D-Y, 55
 transformadores, 585
- Circuitos RC y RL de primer orden, 290
- Circuitos trifásicos balanceados, 523
 conexión Y-D, 524
 conexión Y-Y, 527
 fuente D conectada, 531
- Coárboles, 130
- Coeficiente de acoplamiento, 575
- Coeficiente de amortiguamiento, 387
- Cofactor, 911, 920
- Componente transversal, 479
- Condiciones iniciales, 296, 301, 324, 787
- Conductancia, 23, 415
- Conductor de tierra, 493
- Conductor, 27
 conectado, 129
- Conexión delta, 527, 532, 596
- Conexiones en paralelo, 45, 269, 272, 413, 415, 733

- Conexiones en Y, 526-527
 Conservación de la energía, 10, 14
 Constante de tiempo, 290, 24
 Convención de punto, 567
 Convención de signos pasiva, 8, 17
 Convención de signos, 8
 Conversiones de parámetros, 731-732
 Corriente alterna, 4
 Corriente directa (cd), 4
 Corriente, 3
 alterna, 4
 de corto circuito, 23, 185
 de lazo, 119
 de malla, 119
 directa, 4
 divisora, 46, 50, 427
 ley de Kirchhoff, 28
 medición, 68
 valores, 5
 Corto virtual, 140
 Corto circuito, 23
 corriente, 185, 436,
 parámetros de admitancia,
 720-723
 Coulomb, 3
 Choque eléctrico, 99, 492, 598
- D**
- Década, 628
 Decibel, 626
 Desfibrilador, 384
 Determinante, 103, 109, 911
 Devanado del transformador primario,
 585
 Devanado del transformador
 secundario, 585
 Devanado:
 primario, 585
 secundario, 585
 Dieléctrico, 253
 Diferenciación, 761, 889
 Diferenciador, 274
 Diodo, 22
 Diseño de filtros; véase Filtros, diseño
 Diseño, 79, 153, 245, 279, 338,
- 381, 509, 555, 603, 701, 835,
 899
 abierto, 23
 corto, 63
 lineal, 175
 modelos, 786
 no planar, 129
 Norton equivalente, 184-199, 432,
 436, 585
 pasivo, 10
 planar, 129
 resonante, 637
 Thévenin equivalente, 184-199,
 200, 432, 435, 585, 798
 Dispositivo físico, 3
 Divisor:
 de corriente, 46
 de voltaje, 39
 Dominio s, 764, 774, 778, 783
 Dos puertos interconectados, 733
- E**
- Ecuación característica, 353, 809
 Ecuación diferencial, 292, 352, 399
 solución complementaria, 293
 solución en estado estable, 294
 solución integral particular, 293
 solución mediante transformada de
 Laplace, 762
 Ecuaciones diferenciales de primer
 orden, 292
 Ecuaciones diferenciales de segundo
 orden, 351-387
 Electrocardiograma, 498
 Elemento activo, 10
 Elemento pasivo, 10
 Elementos de almacenamiento,
 252
 Elementos sin pérdidas, 460, 581
 Eliminación gausiana, 102, 910
 Energía normalizada, 893
 Energía, 4, 6
 cálculo usando el teorema de
 Parseval, 893
 en bobinas magnéticamente

- acopladas, 573
 en un capacitor, 256
 en un circuito resonante, 645-647
 en un inductor, 262
Entrada de amplificador operacional
 no inversor, 140
Entrada inversora del amplificador operacional, 140
Entrada:
 admitancia, 414, 721
 impedancia, 411, 724
 inversión, 140
 resistencia, 148, 235
 sin inversión, 140
Escala de magnitud, 665
Escala, 170
 frecuencia, 665
 magnitud, 665
Escalón:
 función, 315, 750
 respuesta, 317, 816-819
Espectro continuo en frecuencia, 882
Espectro de amplitud discreta, 875
Espectro de fase discreta, 875
Espectro:
 amplitud, 875, 882
 fase, 875
 frecuencia, 875
Expansión de fracción parcial, 764
Exponencial:
 forma de un número complejo, 298
 función forzada, 311
 series de Fourier, 854
Extensómetro, 75
- F**
- Factor de calidad (Q), 640
Factores cuadráticos, 626, 628, 630
Falla, 494
Farad, 253
Fase:
 ángulo, 395
 característica, 625
 corriente, 529, 535, 536
 corrimiento, 869
 espectro, 875
 secuencia, 526
 voltaje, 529, 534, 536
- Fasor:**
 concepto, 403, 853
 diagramas, 422
Fibrilación ventricular, 492
Filtro eléctrico; véase **Filtros**
Filtro pasaaltas, 667, 669, 672, 676, 685, 896
Filtro pasabajas, 667, 668, 672, 676, 684, 896
Filtro pasabanda, 644, 667, 671, 676, 687, 690, 699, 896
Filtros:
 activo, 676
 de notch, 703
 diseño, 690
 ideal, 668, 669
 pasaaltas, 667, 669, 672, 676, 685, 896
 pasabajas, 667, 668, 672, 676, 684, 696
 pasabanda, 667, 671, 672, 676, 896
 pasivo, 667
 rechazabanda, 667, 671, 674, 676, 704, 896
Flujo magnético, 261, 566
Forma polar de un número complejo, 928
Forma rectangular de un número complejo, 928
Fórmula de Euler, 401
Fourier:
 análisis, 851-902
 coeficientes, 854, 857
 integral, 883
Frecuencia angular, 394
Frecuencia central, 645, 680
Frecuencia de corte, 670
Frecuencia de potencia media baja, 645
Frecuencia de potencia media superior, 645
Frecuencia de potencia media, 668
Frecuencia natural no amortiguada, 353, 810
Frecuencia natural, 355, 810
Frecuencia pulsatoria, 394
Frecuencia resonante, 638
 circuito en serie, 638
 circuito paralelo, 638
 relación con las frecuencias de potencia media, 645

- Frecuencia:
 análisis, 625-637
 angular, 394
 compleja, 749
 corte, 628
 dominio, 405
 escala, 665
 espectro, 875, 884
 fundamental, 852
 natural, 355, 810
 potencia media, 668
 radián, 394
 resonante, 638
 respuesta, 615, 816
- Fuente conectada en Y, 527
- Fuente controlada:
 corriente, 13
 voltaje, 13
- Fuente de corriente:
 dependiente, 13
 independiente, 11
- Fuente de prueba, 187, 435
- Fuente dependiente, 12, 116, 126
 corriente controlada, 13
 voltaje controlado, 13
- Fuente polifásica, 525
- Fuente trifásica, 525
- Fuente:
 alambre triple de fase simple, 488-491
 balanceada, 523-525
 constante, 11
 controlada, 13
 corriente, 11
 dependiente, 12
 ideal, 17
 independiente, 11
 práctica, 179-182
 senoidal, 398
 transformación, 179-184, 428
 voltaje, 11
- Fuentes de cd, 11, 13
- Fuentes ideales, 179
- Fuentes prácticas:
 corriente, 179-182
 voltaje, 179-182
- Fuerza electromotriz, 4
- Función de compuerta, 319
- Función de escalón unitario, 315, 749
- Función de impulso unitario, 749, 809
- Función delta, 749
- Función forzada compleja, 401
- Función forzada, 809
 compleja, 401
 exponencial, 311, 320
 lineal por tramos, 323
 pulso, 315, 320
 senoidal, 321, 398
- Función no periódica, 851, 881
- Función periódica, 851
 valor efectivo, 471
- Función racional, 764, 810
- Función senoidal, 394-398
 amplitud, 394
 ángulo de fase, 395
 frecuencia, 394
 periodo, 394
 transformada de Fourier, 885
 transformada de Laplace, 753-754
 valor máximo, 394, 472
 valor promedio, 471-472
 valor rms, 472
- Función singular, 315, 750
- Funciones de entrada, 411, 623
- Fusible, 493
- G**
- Galvanómetro, 74
- Ganancia, 140, 142, 237, 808
- Giga, 2
- Gráfica de Bode, 625, 825
- Gráfica de polos ceros, 810-828
- Gráfico, 129
 conexo, 129
 teoría, 129, 139
- Grupo de corte, 130
- Grupos de corte fundamentales, 133
- H**
- Henry, 262
- Hertz, 394
- Homogeneidad, 170

I

Identidades trigonométricas, 396

Imaginario:

 componente, 402, 927

 número, 927

 operador, 927

 parte, 401, 927

Impedancia de fuentes:

 corriente, 11, 100, 123

 voltaje, 11, 111, 119

Impedancia reflejada, 583

Impedancia, 411

 circuito abierto, 724

 corto circuito, 726

 entrada, 724

 equivalente de Thévenin, 432, 435

 equivalente, 413

 escala, 665

 parámetros, 723

 salida, 724

 transferencia, 623, 724

Impulso:

 función, 315, 752

 intensidad, 752

 respuesta, 809

Inductancia mutua, 567

 circuito equivalente de dominio s ,
 787

Inductancia:

 auto, 262, 576

 Equivalente, 271-274

 mutua, 567

Inductor, 260

 características, 260-262

 circuito equivalente de dominio s ,
 787

 corriente inicial, 272-273

 corriente, 262

 energía almacenada, 262

 ideal, 266

 impedancia, 412

 relación fasorial, 409

 voltaje, 262

Inductores:

 en paralelo, 272

en serie, 271

Integrador, 275

Integral de convolución, 770

Interconexión en cascada, 737

Interconexiones de dos puertos, 733-
 739

Interruptor accionado por corriente de
 pérdida a tierra, 494

Interruptor, 290

Interruptores de circuito, 493, 497
 interruptores, 493, 497

Inversa:

 matriz, 101, 921

 Transformada de Fourier, 883

 Transformada de Laplace, 764

J

Joule (J), 4

K

Kelvin (grado), 2

Kilo, 2

L

Ley de Ampére, 580

Ley de Faraday, 566

ley de Ohm, 21

Leyes de Kirchhoff:

 ley de corriente (LCK), 28, 425, 783

 ley de voltaje (LVK), 32, 425, 783

Línea de disparo, 378

Línea:

 corriente, 529, 535, 536

 espectro, 875

 voltaje, 529, 532, 536

Linealidad, 170, 888

Líneas de flujo, 261, 566

M

Malla:

- análisis, 119, 434
 corriente, 119
Mallas fundamentales, 137
Matrices, 100, 915
 multiplicación, 918
 resta, 917
 suma, 917
Matriz identidad, 916
Matriz simétrica, 106, 121
Matriz, 915
 adjunta, 103, 109, 920
 cofactor, 920
 columna, 915
 cuadrada, 915
 determinante, 103, 109, 921
 diagonal, 915
 elementos, 915
 identidad, 916
 inversa, 101, 103, 921
 renglón, 915
 simétrica, 105, 107, 121
 transpuesta, 919
 traza, 915
Medición de potencia, 77, 485, 544
Medición del factor de potencia, 548
Mediciones de cd, 68
Medidor de aguja de D'Arsonval, 68
Mega, 2
Método de dos watímetros, 546
Método de variable de estado, 295
Micro, 2
Mili, 2
Modelo de amplificador operacional ideal, 140, 142
Modelo matemático, 10
Modelos de circuitos, 266, 786
- N**
 nano, 2
Nodo de referencia, 97
Nodo, 27, 30
Norton equivalente, 184-199, 585
Notación de doble subíndice, 34, 214
- Números complejos, 401, 927-930
 ángulo, 927
 complejo conjugado, 478, 628
 división, 930
 forma exponencial, 401, 928
 forma polar, 928
 forma rectangular, 401, 928
 igual, 928
 magnitud, 927
 multiplicación, 930
 parte imaginaria, 401, 927
 parte real, 401, 927
 resta, 929
 suma, 929
- O**
- Ohm, 21
Óhmetro, 74
Op-amp; véase Amplificador operacional
Oscilaciones transitorias, 357
- P**
- Parámetros ABCD, 728-731
 Parámetros de dos puertos:
 admitancia, 720, 800
 híbridos, 725
 impedancia, 723
 transmisión, 728
 Parámetros de transmisión, 728-731
 Parámetros de Y, 720-723, 800
 Parámetros híbridos, 725
 Parámetros Z, 723-725
 Parámetros:
 admitancia de corto circuito (Y), 720-723, 800
 híbridos (h), 725-728
 impedancia de circuito abierto (Z), 723-725
 transmisión (ABCD), 728-731
 Período, 394
 Permeancia, 567
 Permitividad, 254
 Pico, 2

- Plano complejo, 810, 826
 Plano *s*, 810
 Polo, 624, 810
 Polos complejos, 628, 766
 Polos de primer orden:
 en expansiones de fracciones parciales, 764
 en gráficas de Bode, 628
 Potencia aparente, 475
 Potencia compleja, 478
 Potencia en cuadratura, 478
 Potencia instantánea, 23, 458
 Potencia promedio, 459, 879
 Potencia reactiva, 478
 Potencia real, 478
 Potencia; véase también Transferencia
 máxima de potencia:
 absorbida, 7
 aparente, 475, 479
 compleja, 478
 corrección de factor, 483, 550
 cuadratura, 478
 entregada, 7
 factor, 475
 instantánea, 22, 458
 medición de factor, 548
 medición, 77, 485, 544
 promedio, 459, 478, 879
 reactiva, 478
 real, 478
 triángulo, 479
 trifásica, 525, 541
 Potencial, 4
 Principio de superposición; véase
 Superposición,
 Producto de ganancia por ancho de banda, 692
 Propiedades de muestreo, 752, 885
 P_{SPICE}:
 análisis de ca:
 ejemplos, 439-442, 618-620,
 652-655, 659-661, 683-708,
 818-825
 planteamiento del control de solución, 439
 variables de salida:
 DB, 439
 fase, 439
 magnitud, 439
 parte imaginaria, 439
 parte real, 439
 análisis de cd:
 PROBE, 221
 amplificadores operacionales, 233-236
 ejemplos, 234-236, 240-249,
 281-282
 modelado, 234
 análisis de Fourier, 866-869
 análisis transitorio, 319-324
 comandos de control de solución, 323
 comandos, 324
 condiciones iniciales, 324
 ejemplos, 325-334, 370-376,
 384-386
 especificaciones de salida
 barido de cd, 236
 ca, 439
 cd:
 dependiente:
 fuente de corriente controlada
 por corriente, 219, 229
 fuente de corriente controlada
 por voltaje, 218, 228
 fuente de voltaje controlada por
 corriente, 219, 220
 fuente de voltaje controlada por
 voltaje, 218, 231
 independiente, 217
 circuitos RLC, 370-376
 comando de control de solución:
 .DC, 220
 .OP, 220
 .TF, 220
 comando de especificaciones
 de salida, 221
 comando de título, 214
 comando fin, 221
 comandos de control de solución:
 .AC, 439
 .DC, 220

- .FOUR, 866
 - .OP, 220
 - .TF, 220
 - .TRAN, 323
 - comandos de especificación de salida:
 - .PRINT, 221
 - .PROBE, 221
 - dependiente del tiempo:
 - constante de tiempo, 321
 - exponencial, 320-321, 329-375
 - descripción, 212-213
 - ejemplos de filtro, 674, 683-708, 835-841
 - ejemplos, 222-249, 281-282
 - factores de escala, 216
 - fuente de voltaje simulada, 217, 222, 227, 229, 230, 232, 325
 - fuentes:
 - instalación, 924-926
 - lineal por tramos, 323, 374
 - puente Tacoma Narrows, 652-655, 818-825
 - pulso, 320, 332-334
 - ancho de pulso, 320
 - periodo, 320
 - tiempo de ascenso, 320
 - tiempo de caída, 320
 - senoidal, 321, 329, 331, 375
 - amplitud, 322
 - contratensión, 322
 - factor de amortiguamiento, 322
 - frecuencia, 322
 - retraso, 322
 - subcircuito, 684
 - transformadas ideales, 589-591
 - comando de comentarios, 214
 - en línea, 214, 229
 - línea, 214
 - comando de rama:
 - capacitor, 215, 282, 320
 - circuito acoplado magnéticamente, 577
 - fuentes:
 - dependientes, 217-220
 - independientes, 217
 - inductor, 215, 320
 - resistores, 216
 - marca de continuación (+), 214
 - Pulso:
 - rectangular, 316, 320
 - respuesta, 315
 - tren, 317
 - Puente de Wheatstone, 74
 - Puerto, 719
 - Pulso rectangular, 316, 320
- R**
- Raíz cuadrática media (rms), 471-475
 - Rama, 67
 - árbol, 130
 - Razón de amortiguamiento, 357, 628, 810
 - Razón de espiras, 582
 - Reactancia capacitiva, 412
 - Reactancia inductiva, 412
 - Reactancia:
 - capacitiva, 412
 - inductiva, 412
 - Rechazo de banda (o eliminación de banda)
 - filtro, 667, 671, 674, 676, 704, 896
 - Red celular, 59, 238
 - Red de parámetros concentrados, 27
 - Red de un puerto, 720
 - Red planar, 118, 129
 - Red:
 - activa, 10
 - de dos puertos, 719
 - función, 623, 809
 - pasiva, 10
 - resonante, 637
 - teoremas, 170, 203
 - topología, 129-139
 - Redes de filtros activos, 676
 - Referencia de polaridad, 5
 - Regla de Cramer, 9, 3
 - Regla de la mano derecha, 567
 - Resistencia del cuerpo, 496
 - Resistencia interna, 68, 179, 266

- Resistencia, 21-22
 cero, 23
 combinación en paralelo, 52
 combinación en serie, 51
 entrada, 140, 148, 235
 infinita, 23
 interna, 68, 179, 266
 medición, 74
 salida, 140, 235
 Thévenin, 186
- Resistencia, 21-22
 impedancia de, 412
 lineal, 22
 relación fasorial para, 407
- Resonancia en paralelo, 656-659
- Resonancia, 639
 en paralelo, 639, 656-659
 en serie, 637-656
- Respuesta compleja, 783
- Respuesta críticamente amortiguada, 356, 364, 811, 814
- Respuesta en estado estable; véase *también* respuesta,
 estado estable,
 senoidal:
- Respuesta forzada, 293, 311, 398
- Respuesta natural, 293, 355, 810
- Respuesta senoidal de estado estable,
 véase Respuesta:
 estado estable senoidal,
- Respuesta sin fuentes, 291, 297, 318
- Respuesta sobreamortiguada, 355,
 359, 368, 810
- Respuesta subamortiguada, 355, 357,
 810
- Respuesta transitoria, 290-339, 351-
 387, 682, 810-828
- Respuesta:
 amplitud, 615-637
 completa, 293, 300-302, 318, 353
 estado estable senoidal, 398-403,
 425-442, 828-833
 exponencial, 330-331
 fase, 625-630
 forzada, 297-335
 frecuencia, 638
 impulso, 809
- lineal por pedazos, 335
 natural, 293, 355
 pulso, 332-335
 senoidal amortiguada, 331-332
- S**
- Secuencia abc, 526
 Secuencia de fase negativa, 526
 Secuencia de fase positiva, 526
 Segundo, 2
 Seguridad, 7, 99, 491-501, 598-599
 Senoidal amortiguada, 657
 Senoidal:
 amortiguada, 321, 357
 compleja, 401
 Sensitividad, 73, 237
 Señal de error, 142
 Serie de Fourier trigonométrica, 857
 Series de Fourier:
 coseno, 852
 exponencial, 854
 trigonométrica, 857
 Series:
 conexiones de dos puertos, 735
 resonancia, 637-656
 Siemens, 23, 414
 Simetría de función impar, 860
 Simetría de la función par, 858
 Simetría de media onda, 860
 Simetría:
 función impar, 860
 función par, 858
 media onda, 860
 Sistema de ignición, 381
 Sistema de tres alambres de una sola
 fase, 488-491
 Sistema Internacional de Unidades
 (SI), 2
 Sistema trifásico balanceado, 523
 Sistema Y-Y, 527
 Supernodo, 114, 428, 433
 Superposición, 173-179, 185, 318,
 428, 433, 783
 Susceptancia capacitiva, 415
 Susceptancia, 415

T

Teorema de desplazamiento, 756
 Teorema de Norton, 184-199, 428,
 433, 585
 teorema de Parseval, 892
 Teorema de Thévenin, 184-199, 428,
 433, 466, 585, 783
 Teorema del valor final, 774
 Teorema del valor inicial, 774
 Tera, 2
 Thévenin equivalente:
 circuito, 184-199, 302, 428, 433,
 585, 798
 impedancia, 432, 435
 resistencia, 186
 Tierra, 99
 Topología, 129-139
 Transferencia máxima de potencia:
 circuitos ca, 466-470
 circuitos cd, 200-203
 Transferencia:
 admitancia, 623, 721, 808
 curvas, 150
 función, 623, 808
 gráficas, 150
 impedancia, 623, 724, 808
 Transformación delta-Y, 55, 419,
 538

Transformación:
 delta-Y, 55, 419
 fuente, 179-184
 Y-delta, 55, 419
 Transformaciones Y-D, 55, 419
 Transformaciones Y-delta, 55, 419
 Transformada de Fourier:
 definición, 883
 derivación, 881-883
 inversa, 883
 pares, 883
 propiedades, 887

Transformada de Laplace:
 aplicaciones a análisis de circuitos,
 777, 783-842
 aplicaciones a ecuaciones diferen-
 ciales, 762
 definición, 749,

inversa, 764
 par, 754
 propiedades, 763
 teorema del valor final, 774
 teorema del valor inicial, 774

Transformada:
 de Fourier, 881
 de Laplace, 748
 Transformador de núcleo magnético,
 576

Transformador ideal, 579, 591

Transformador:
 auto, 591
 circuito equivalente, 585, 589
 ideal, 579, 591
 impedancia reflejada, 583
 núcleo magnético, 579
 primario, 585
 razón de espiras, 582
 secundario, 585
 trifásico, 594

Transformadores trifásicos, 594

Transistor, 12, 139

Trayectoria cerrada, 27

Trayectoria, cerrada, 27

U

Unidad de descarga capacitiva, 377
 Unidades SI, 2
 Unidades, 2
 SI, 2
 Unión de Euler, 01

V

Valor efectivo, 471
 Valor promedio, 459
 Var, 479
 Volt, 4
 Volt-ampere, 479
 Voltaje de nodo, 97
 Voltaje, 4
 división, 39, 72
 fase, 529, 536

fuente, 10-13, 525
línea, 529, 536
medición, 71
seguidor, 150
Voltímetro, 71

W

Watt, 8
Watímetro, 77, 485, 544

