第 6 章　微分方程建模习题解答

6.1　解　设导弹运行曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

即在时刻t，导弹的位置在点$(x(t), y(t))$，这时乙舰的位置在$(1, v_0 t)$。由于导弹始终对准乙舰，而导弹运行方向是沿曲线的切线方向，所以有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0 t - y}{1 - x},$$

整理得

$$v_0 t - y = (1 - x)\frac{dy}{dx},$$

两边对x求导，得

$$v_0 \frac{dt}{dx} - \frac{dy}{dx} = (1 - x)\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx},$$

即

$$v_0 \frac{dt}{dx} = (1 - x)\frac{d^2 y}{dx^2}. \tag{6.1}$$

已知导弹是速度为$5v_0$，即

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 5v_0,$$

由于$\frac{dx}{dt} > 0$，所以$\frac{dx}{dt}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 5v_0$，即

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{5v_0}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \tag{6.2}$$

代入式（6.1），得到运动曲线满足的微分方程为

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}{5(1 - x)}, 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$

可以求出上述微分方程的解析解，并求得当$x = 1$时，$y = 0.2083$。导弹运行的轨迹见图 6.1。

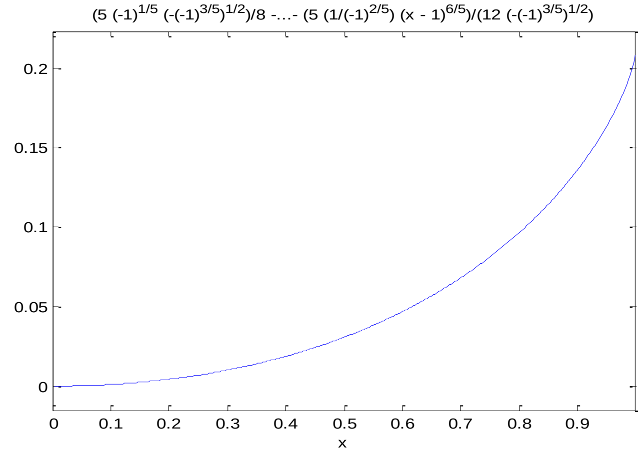

图 6.1　导弹运行的轨迹图

符号求解的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
y=dsolve('D2y=sqrt(1+(Dy)^2)/5/(1-x)','y(0)=0,Dy(0)=0','x')
ezplot(y(1),[0,0.9999]) %符号求解时，得到两个分支，这里画出第一个分支
yy=subs(y(1),'x',1)   %求击中时乙舰行驶的距离
```

也可以利用 Matlab 求数值解，为了利用 Matlab 软件求数值解，需要做变量替换，把上述二阶非线性常微分方程转化为一阶常微分方程组的初值问题，令 $y_1 = y$，$y_2 = \frac{dy}{dx}$，则得到一阶微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = \frac{\sqrt{1+y_2^2}}{5(1-x)}, \\ y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

求解的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
dyy=@(x,yy)[yy(2); sqrt(1+yy(2)^2)/5/(1-x)]; %定义微分方程右端项的匿名函数
yy0=[0,0]'; %初值条件
[x,yy]=ode45(dyy,[0,1-eps],yy0) %为避免奇异点 x=1,右端点取为 1-eps
plot(x,yy(:,1))   %画出轨迹曲线
yys=yy(end,1) %求击中时乙舰行驶的距离
```

数值解的结果和符号解的结果一致。

6.2　解　设法定行车速度为 v_0，交叉路口的宽度为 a，典型的车身长度为 b。考虑到

车通过路口实际上指的是车的尾部必须通过路口，因此，通过路口的时间为$\dfrac{a+b}{v_0}$。

现在计算刹车距离。设w为汽车重量，μ为摩擦系数，显然，地面对汽车的摩擦力为μw，其方向与运动方向相反。汽车在停车过程中，行驶的距离x与时间t的关系可由下面的微分方程

$$\frac{w}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu w, \tag{6.3}$$

求得，其中g是重力加速度。

给出方程（6.3）的初始条件

$$x\big|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=v_0, \tag{6.4}$$

于是，刹车距离就是直到速度$v=0$时汽车驶过的距离。

首先，求解二阶微分方程（6.3），对（6.3）式从 0 到t积分，再利用初始条件（6.4），得到

$$\frac{dx}{dt}=-\mu gt+v_0, \tag{6.5}$$

在$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=v_0$的条件下对（6.5）式从 0 到$t$积分，得

$$x=-\frac{1}{2}\mu gt^2+v_0t. \tag{6.6}$$

在式（6.5）式中令$\dfrac{dx}{dt}=0$，得到刹车所用的时间

$$t_0=\frac{v_0}{\mu g},$$

从而得到

$$x(t_0)=\frac{v_0^2}{2\mu g}。$$

计算黄灯状态的时间

$$y=\frac{x(t_0)+a+b}{v_0}+T,$$

其中T是驾驶员的反应时间。于是

$$y=\frac{v_0}{2\mu g}+\frac{a+b}{v_0}+T.$$

假设$T=1$秒，$a=10$米，$b=4.5$米，另外，选取具有代表性的$\mu=0.2$，当$v_0=30$、50以及 70 公里/小时时，黄灯时间如表 6.1 所示。y与v_0的关系见图 6.2。

表 6.1　交通信号灯时间对照表

v_0（公里/小时）	30	50	70

y（秒）	4.8659	5.5871	6.7060

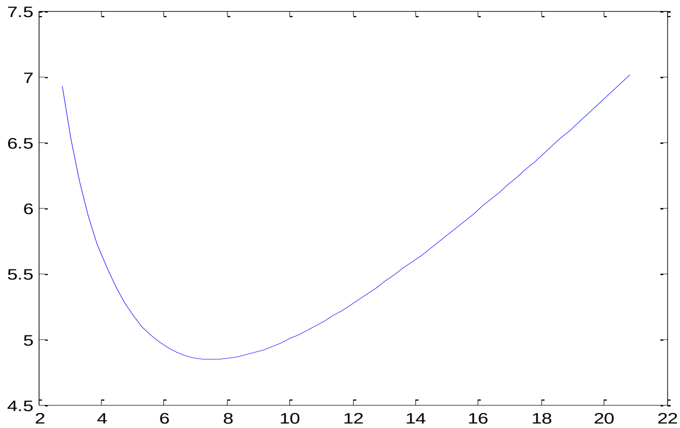

图 6.2　黄灯周期与速度的关系

计算和画图的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
T=1; a=10; b=4.5; mu=0.2; g=9.8;
v0=[30 50 70]*1000/3600; %速度单位换算，化成米/秒
y0=v0/2/mu/g+(a+b)./v0+T
v=[10:75]*1000/3600; %速度单位换算，化成米/秒
y=v/2/mu/g+(a+b)./v+T;
plot(v,y)
```

6.3　解　（1）模型的假设

1）烟草和过滤嘴的长度分别为l_1和l_2，香烟总长$l=l_1+l_2$，毒物M（毫克）均匀分布在烟草中，密度为$w_0=M/l_1$。

2）点燃处毒物随烟雾进入空气和沿香烟穿行的数量比例是$a':a$，$a'+a=1$。

3）未点燃的烟草和过滤嘴对随烟雾穿行的毒物的吸收率（单位时间内毒物被吸收的比例）分别是常数b和β。

4）烟雾沿香烟穿行的速度是常数v，香烟燃烧速度是常数u，且$v>>u$。

（2）模型分析

将一支烟吸完后毒物进入人体的总量（不考虑从空气的烟雾中吸入的）记作Q，在建立模型以得到Q的数量表达式之前，先根据常识分析一下Q应与哪些因素有关，采取什么办法可以降低Q。

首先，提高过滤嘴吸收率β、增加过滤嘴长度l_2、减少烟草中毒物的初始含量M，显然可以降低吸入毒物量Q。其次，当毒物随烟雾沿香烟穿行的比例a和烟雾速度v减少时，预料Q也会降低。至于在假设条件中涉及的其它因素，如烟草对毒物的吸收率b、烟草长度l_1、香烟燃烧速度u，对Q的影响就不容易估计了。

下面通过建模对这些定性分析和提出的问题作出定量的验证和回答。

（3）模型建立

以香烟所在的一端作为坐标原点，以香烟所在的线段作为x轴的正半轴，建立坐标

系。设 $t=0$ 时在 $x=0$ 处点燃香烟，吸入毒物量 Q 由毒物穿过香烟的流量确定，后者又与毒物在烟草中的密度有关，为研究这些关系，定义两个基本函数：

毒物流量 $q(x,t)$ 表示时刻 t 单位时间内通过香烟截面 x 处（$0\le x\le l$）的毒物量；

毒物密度 $w(x,t)$ 表示时刻 t 截面 x 处单位烟草中的毒物含量（$0\le x\le l_1$）。由假设 1，$w(x,0)=w_0$。

如果知道了流量函数 $q(x,t)$，吸入毒物量 Q 就是 $x=l$ 处的流量在吸一支烟时间内的总和。注意到关于烟草长度和香烟燃烧速度的假设，我们得到

$$Q=\int_0^T q(l,t)dt\,,\ T=l_1/u. \tag{6.7}$$

下面分 4 步计算 Q。

i）求 $t=0$ 瞬间由烟雾携带的毒物单位时间内通过 x 处的数量 $q(x,0)$。由假设 4 中关于 $v>>u$ 的假定，可以认为香烟点燃处 $x=0$ 静止不动。

为简单起见，记 $q(x,0)=q(x)$，考察（$x,x+\Delta x$）一段香烟，毒物通过 x 和 $x+\Delta x$ 处的流量分别是 $q(x)$ 和 $q(x+\Delta x)$，根据守恒定律这两个流量之差应该等于这一段未点燃的烟草或过滤嘴对毒物的吸收量，于是由假设 2、4 有

$$q(x)-q(x+\Delta x)=\begin{cases}bq(x)\Delta\tau,\ 0\le x\le l_1,\\ \beta q(x)\Delta\tau,\ l_1\le x\le l,\end{cases}\quad \Delta\tau=\frac{\Delta x}{v},$$

其中 $\Delta\tau$ 是烟雾穿过 Δx 所需时间。令 $\Delta\tau\to 0$ 得到微分方程

$$\frac{dq}{dx}=\begin{cases}-\dfrac{b}{v}q(x),\ 0\le x\le l_1,\\ -\dfrac{\beta}{v}q(x),\ l_1\le x\le l.\end{cases} \tag{6.8}$$

在 $x=0$ 处点燃的烟草单位时间内放出的毒物量记作 H_0，根据假设 1、3、4 可以写出方程（6.8）的初始条件为

$$q(0)=aH_0\,,\ H_0=uw_0. \tag{6.9}$$

求解（6.8）、（6.9）式时先解出 $q(x)$（$0\le x\le l_1$），再利用 $q(x)$ 在 $x=l_1$ 处的连续性确定 $q(x)$（$l_1\le x\le l$）。其结果为

$$q(x)=\begin{cases}aH_0e^{-\frac{bx}{v}},\ 0\le x\le l_1,\\ aH_0e^{-\frac{bl_1}{v}}e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}},\ l_1\le x\le l.\end{cases} \tag{6.10}$$

ii）在香烟燃烧过程的任意时刻 t，求毒物单位时间内通过 $x=l$ 的数量 $q(l,t)$。

因为在时刻 t 香烟燃至 $x=ut$ 处，记此时点燃的烟草单位时间放出的毒物量为 $H(t)$，则

$$H(t)=uw(ut,t), \tag{6.11}$$

根据与第 i）步完全相同的分析和计算可得

$$q(x,t)=\begin{cases} aH(t)e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}, ut\le x\le l_1, \\ aH(t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}}e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, l_1\le x\le l. \end{cases} \quad (6.12)$$

实际上在（6.10）式中将坐标原点平移至 $x=ut$ 处即可得到（6.12）式。由（6.11）、（6.12）式能够直接写出

$$q(l,t)=auw(ut,t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}. \quad (6.13)$$

iii）确定 $w(ut,t)$

因为在吸烟过程中未点燃的烟草不断地吸收烟雾中的毒物，所以毒物在烟草中的密度 $w(x,t)$ 由初始值 w_0 逐渐增加。考察烟草截面 x 处 Δt 时间内毒物密度的增量 $w(x,t+\Delta t)-w(x,t)$，根据守恒定律它应该等于单位长度烟雾中的毒物被吸收的部分，按照假设 3、4 有

$$w(x,t+\Delta t)-w(x,t)=b\frac{q(x,t)}{v}\Delta t,$$

令 $\Delta t\to 0$ 并将（6.11），（6.12）式代入得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{abu}{v}w(ut,t)e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}, \\ w(x,0)=w_0. \end{cases} \quad (6.14)$$

方程（6.14）的解为

$$\begin{cases} w(x,t)=w_0\left[1+\dfrac{a}{a'}e^{-\frac{bx}{v}}(e^{\frac{but}{v}}-e^{\frac{abut}{v}})\right], \\ w(ut,t)=\dfrac{w_0}{a'}(1-ae^{-\frac{a'but}{v}}), \end{cases} \quad (6.15)$$

其中 $a'=1-a$。

iv）计算 Q

将式（6.15）代入式（6.13）得

$$q(l,t)=\frac{auw_0}{a'}e^{-\frac{bl_1}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}(e^{-\frac{but}{v}}-ae^{-\frac{abut}{v}}), \quad (6.16)$$

最后将式（6.16）代入式（6.7）作积分得到

$$Q=\int_0^{l_1/u}q(l,t)dt=\frac{aw_0v}{a'b}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}(1-e^{-\frac{a'bl_1}{v}}). \quad (6.17)$$

为便于下面的分析将上式化作

$$Q=aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\cdot\frac{1-e^{-\frac{a'bl_1}{v}}}{\frac{a'bl_1}{v}}, \quad (6.18)$$

记

$$r=\frac{a'bl_1}{v}，\ \varphi(r)=\frac{1-e^{-r}}{r}，\tag{6.19}$$

则式（6.18）可写作

$$Q=aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\varphi(r).\tag{6.20}$$

式（6.19）、(6.20）式是我们得到的最终结果，表示了吸入毒物量Q与a,M,β,l_2,v,b,l_1等诸因素之间的数量关系。

（4）结果分析

i）Q与烟草毒物量M、毒物随烟雾沿香烟穿行比例a成正比（因为$\varphi(r)$起的作用较小，这里忽略$\varphi(r)$中的$a'(=1-a)$）。设想将毒物M集中在$x=l$处，则吸入量为aM。

ii）因子$e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$体现了过滤嘴减少毒物进入人体的作用，提高过滤嘴吸收率β和增加长度l_2能够对Q起到负指数衰减的效果，并且β和l_2在数量上增加一定比例时起的作用相同。降低烟雾穿行速度v也可减少Q。设想将毒物M集中在$x=l_1$处，利用上述建模方法不难证明，吸入毒物量为$aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}$。

iii）因子$\varphi(r)$表示的是由于未点燃烟草对毒物的吸收而起到的减少Q的作用。虽然被吸收的毒物还要被点燃，随烟雾沿香烟穿行而部分地进入人体，但是因为烟草中毒物密度$w(x,t)$越来越高，所以按照固定比例跑到空气中的毒物增多，相应地减少了进入人体的毒物量。

根据实际资料$r=\frac{a'bl_1}{v}<<1$，在式（6.19）中$\varphi(r)$中的e^{-r}取 Taylor 展开的前 3 项可得$\varphi(r)\approx 1-r/2$，于是式（6.20）为

$$Q\approx aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(1-\frac{a'bl_1}{2v}\right).\tag{6.21}$$

可知，提高烟草吸收率b和增加长度l_1（毒物量M不变）对减少Q的作用是线性的，与β和l_2的负指数衰减作用相比，效果要小得多。

iv）为了更清楚地了解过滤嘴的作用，不妨比较两支香烟，一支是上述模型讨论的，另一支长度为l，不带过滤嘴，参数w_0,b,a,v与第一支相同，并且吸到$x=l_1$处就扔掉。

吸第一支和第二支烟进入人体的毒物量分别记作Q_1和Q_2，Q_1当然可由式（6.17）给出，Q_2也不必重新计算，只需把第二支烟设想成吸收率为b（与烟草相同）的假过滤嘴香烟就行了，这样由式（6.17）可以直接写出

$$Q_2=\frac{aw_0v}{a'b}e^{-\frac{bl_2}{v}}(1-e^{-\frac{a'bl_1}{v}}),\tag{6.22}$$

与式（6.17）给出的Q_1相比，我们得到

$$\frac{Q_1}{Q_2}=e^{-\frac{(\beta-b)l_2}{v}},\tag{6.23}$$

所以只要$\beta>b$就有$Q_1<Q_2$，过滤嘴是起作用的。并且，提高吸收率之差$\beta-b$与加

长过滤嘴长度l_2，对于降低比例Q_1/Q_2的效果相同。不过提高β需要研制新材料，将更困难一些。

6.4　解　设λ（$\lambda>0$为常数）为销售量衰减因子，则根据上述假设建立如下模型

$$\frac{ds}{dt}=pa(t)\left(1-\frac{s(t)}{M}\right)-\lambda s(t)\,, \qquad (6.24)$$

其中p为响应系数，即$a(t)$对$s(t)$的影响力，p为常数。

由式（6.24）可以看出，当$s=M$时，或当$a(t)=0$时，都有

$$\frac{ds}{dt}=-\lambda s\,. \qquad (6.25)$$

假设选择如下广告策略

$$a(t)=\begin{cases}a/\tau, & 0<t<\tau,\\ 0, & t\ge\tau.\end{cases} \qquad (6.26)$$

将其代入式（6.24）有

$$\frac{ds}{dt}+(\lambda+\frac{pa}{M\tau})s=\frac{pa}{\tau}\,,\quad 0<t<\tau\,, \qquad (6.27)$$

令

$$\lambda+\frac{pa}{M\tau}=b\,,\quad \frac{pa}{\tau}=c\,,$$

这时，式（6.27）可写为

$$\frac{ds}{dt}+bs=c\,, \qquad (6.28)$$

若令$s(0)=s_0$，则式（6.28）的解为

$$s(t)=\frac{c}{b}(1-e^{-bt})+s_0e^{-bt}\,. \qquad (6.29)$$

当$t\ge\tau$时，根据式（6.26），则式（6.24）化为式（6.25），其解为$s(t)=s(\tau)e^{\lambda(\tau-t)}$，故

$$s(t)=\begin{cases}\dfrac{c}{b}(1-e^{-bt})+s_0e^{-bt}, 0<t\le\tau,\\ s(\tau)e^{\lambda(\tau-t)}, \qquad t\ge\tau.\end{cases}$$

6.5　解　（1）求数值解时，需要做变量替换，把二阶方程化成一阶方程组，令$y_1=y$，$y_2=y'$，得如下的一阶方程组

$$\begin{cases}y_1'=y_2, & y_1(\dfrac{\pi}{2})=2,\\ y_2'=(\dfrac{n^2}{x^2}-1)y_1-\dfrac{y_2}{x}, & y_2(\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{2}{\pi}.\end{cases}$$

求解的Matlab程序如下

```
clc, clear
y=dsolve('x^2*D2y+x*Dy+(x^2-1/4)*y','y(pi/2)=2,Dy(pi/2)=-2/pi','x');
```

```
pretty(y) %分数线居中的显示格式
ezplot(y) %画符号函数的图形
hold on %图形保持命令
dy=@(x,y) [y(2); (1/4/x^2-1)*y(1)-y(2)/x]; %定义微分方程组的右端项
[x,y]=ode45(dy,[pi/2,8],[2,-2/pi]); %调用求数值解的命令
plot(x,y(:,1),'*') %画数值解的图形
legend('符号解','数值解') %对图形进行标注
```

求得的符号解和数值解的图形见图6.3，可见解析解和数值解吻合得很好。

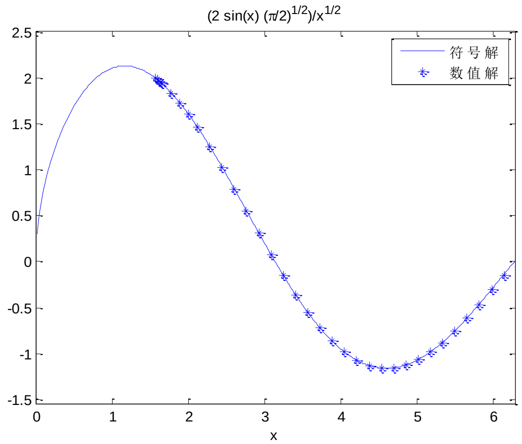

图6. 3 微分方程符号解和数值解的对照

（2）做变量替换，令 $y_1 = y$， $y_2 = y'$，得如下的一阶方程组

$$\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(0) = 1, \\ y_2' = -y_1 \cos x, & y_2(0) = 0. \end{cases}$$

求解的Matlab程序如下

```
clc, clear
yy=@(x)1-1/gamma(3)*x.^2+2/gamma(5)*x.^4-9/gamma(7)*x.^6+55/gamma(9)*x.^8;
x1=0:0.1:2;
y1=yy(x1) %求级数解前5项对应的函数值
plot(x1,y1,'P-'), hold on
dy=@(x,y)[y(2);-y(1)*cos(x)]; %定义微分方程右端项的匿名函数
[x2,y2]=ode45(dy,[0,2],[1;0]);
plot(x2,y2(:,1),'*-r')
legend('级数近似解','数值解',0)
```

求解结果见图6.4，可以看出当 x 较小时，级数解的近似值与数值解吻合得很好。

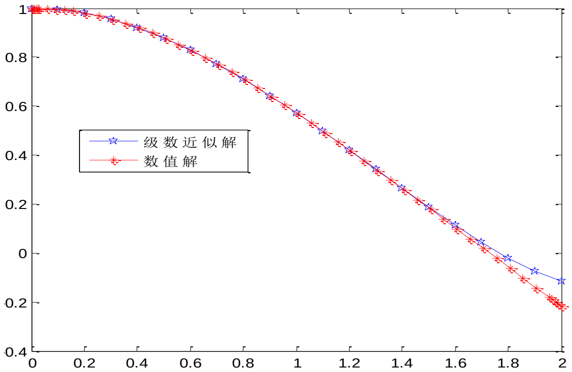

图6.4 级数近似解与数值解的对照图

6.6 解 （1）以 B 为坐标原点，BA 所在的线段为 x 轴的正半轴建立如图6.5所示的坐标系。

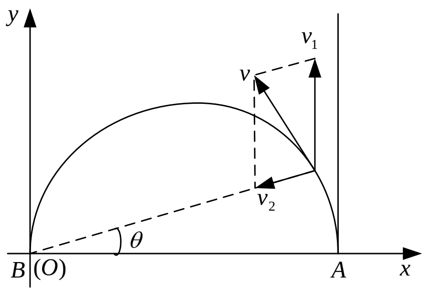

图6.5 渡河示意图

设小船航迹为 $y=y(x)$，由运动力学知，小船实际速度 $v=v_1+v_2$，设小船与 B 点连线与 x 轴正方向夹角为 θ，则

$$v=-iv_2\cos\theta+j(v_1-v_2\sin\theta),$$

即

$$\frac{dx}{dt}=-v_2\cos\theta,\quad \frac{dy}{dt}=v_1-v_2\sin\theta.$$

设小船 t 时刻位于点 (x,y) 处，显然有

$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

即

$$\frac{dx}{dt}=-v_2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{dy}{dt}=v_1-v_2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\left(v_1-v_2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\Big/\left(-v_2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

于是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -k\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} + \dfrac{y}{x}, 0 < x < d, \\ y(d) = 0, \end{cases} \tag{6.30}$$

即为小船航迹应满足的数学模型，它是一阶齐次微分方程。

下面进行模型求解，令 $\dfrac{y}{x} = u$，则 $y = ux$，$\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$，把它们代入式（6.30），整理得

$$x\frac{du}{dx} = -k\sqrt{1+u^2}\ , \tag{6.31}$$

对式（6.31）分离变量并积分，可得

$$\operatorname{arsh} u = \ln(u + \sqrt{1+u^2}) = -k(\ln x + \ln C)\ ,$$

代入初始条件 $x = d$，$u = 0$，得 $C = \dfrac{1}{d}$，所以

$$\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = -k\ln\frac{x}{d} = \ln\left(\frac{x}{d}\right)^{-k}\ ,$$

从而

$$u = \operatorname{sh}\left(\ln\left(\frac{x}{d}\right)^{-k}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{d}\right)^{-k} - \left(\frac{x}{d}\right)^{k}\right],$$

代回 $u = \dfrac{y}{x}$，得

$$y = \frac{x}{2}\left[\left(\frac{x}{d}\right)^{-k} - \left(\frac{x}{d}\right)^{k}\right] = \frac{d}{2}\left[\left(\frac{x}{d}\right)^{1-k} - \left(\frac{x}{d}\right)^{1+k}\right],\ \ 0 \le x \le d\,. \tag{6.32}$$

（2）小船航线的参数方程为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad x(0) = d, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - \dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

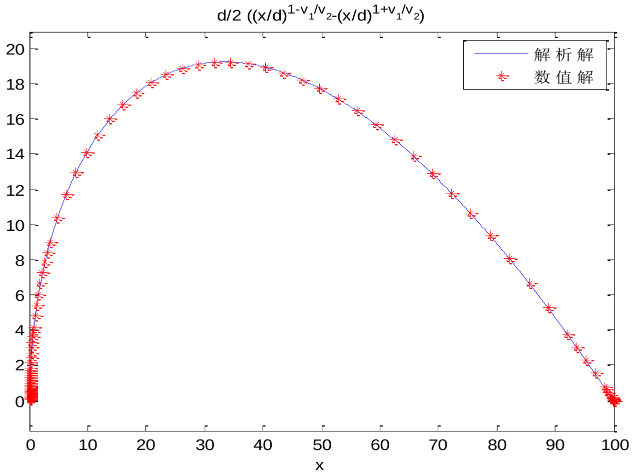

图6. 6 解析解和数值解的对照图

求数值解和画图的Matlab程序如下

```
clc, clear
d=100; v1=1; v2=2; k=v1/v2;
y=@(x)d/2*((x/d).^(1-k)-(x/d).^(1+k)); %定义解析解的匿名函数
ezplot(y,[100,0])   %画解析解的曲线
dxy=@(t,xy)[-2*xy(1)/sqrt(xy(1)^2+xy(2)^2);  1-2*xy(2)/sqrt(xy(1)^2+xy(2)^2)];  %定义微分方程的右端项
[t,xy]=ode45(dxy,[0,66.65],[100;0]); %求数值解，求解的时间区间要逐步试验给出
solu=[t,xy]   %显示数值解
hold on %图形保持
plot(xy(:,1),xy(:,2),'*r') %画数值解
legend('解析解','数值解')
```

通过数值解求出小船渡河的时间为66. 65s，解析解和数值解的对照图见图6. 6。