第 8 章　时间序列习题解答

8.1　解　用 $t=1,\cdots,8,9,\cdots,12$ 分别表示 1974 年，…，1981, 1982，…，1985 年，y_t（$t=1,\cdots,8$）表示已知的 8 个观测值。

（1）取预测公式

$$\hat{y}_{t+1}=\frac{y_t+y_{t-1}+y_{t-2}}{3},\quad t=3,\cdots,8,9,\cdots,11,$$

其中 y_t（$t=9,10,11$）分别取为递推预测的预测值 $\hat{y}_t$。

预测的标准误差

$$S_1=\sqrt{\frac{\sum_{t=3}^{8}(\hat{y}_t-y_t)^2}{8-3}}=19.3542.$$

计算的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
yt=[80.8  94.0 88.4 101.5       110.3       121.5       134.7       142.7];
m=length(yt); n=3;
for i=n+1:m+1
       ythat(i)=sum(yt(i-n:i-1))/n; %已知数据的预测值及未来一步预测值
end
ythat
for i=m+1:m+3
       yt(i)=ythat(i);
       ythat(i+1)=sum(yt(i-n+1:i))/n; %求未来多步预测值
end
yhat=ythat(end-3:end)    %显示未来 4 个时刻的预测值
s1=sqrt(mean((yt(n+1:m)-ythat(n+1:m)).^2)) %计算预测的标准误差
```

（2）二次指数平滑法的计算公式为

$$\begin{cases}S_t^{(1)}=\alpha y_t+(1-\alpha)S_{t-1}^{(1)},\\ S_t^{(2)}=\alpha S_t^{(1)}+(1-\alpha)S_{t-1}^{(2)},\end{cases}\tag{8.1}$$

式中 $S_t^{(1)}$ 为一次指数的平滑值；$S_t^{(2)}$ 为二次指数的平滑值。当时间序列 $\{y_t\}$ 从某时期开始具有直线趋势时，可用直线趋势模型

$$\hat{y}_{t+m}=a_t+b_t m,\quad m=1,2,\cdots,\tag{8.2}$$

$$\begin{cases}a_t=2S_t^{(1)}-S_t^{(2)},\\ b_t=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}(S_t^{(1)}-S_t^{(2)}),\end{cases}\tag{8.3}$$

进行预测。

$\alpha=0.3$ 时，预测的标准误差

$$S_2=\sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{8}(\hat{y}_t-y_t)^2}{8-1}}=11.7966.$$

当$\alpha=0.6$，预测的标准差$S_3=7.0136$。

计算的 Matlab 程序如下

```
function xiti81
clc, clear
[sigma1,yhat21]=yucefun(0.3) %求 alpha=0.3 时的预测标准差及预测值
[sigma2,yhat22]=yucefun(0.6) %求 alpha=0.6 时的预测标准差及预测值
function [sigma,yhat2]=yucefun(alpha);
yt=[80.8  94.0 88.4 101.5       110.3       121.5       134.7       142.7];
n=length(yt); st1(1)=mean(yt(1:3)); st2(1)=st1(1);
for i=2:n
    st1(i)=alpha*yt(i)+(1-alpha)*st1(i-1);
    st2(i)=alpha*st1(i)+(1-alpha)*st2(i-1);
end
at=2*st1-st2;
bt=alpha/(1-alpha)*(st1-st2);
yhat=at+bt;
sigma=sqrt(mean((yt(2:end)-yhat(1:end-1)).^2));
m=1:4;
yhat2=at(end)+bt(end)*m; %求 1982 年到 1985 年的预测值
```

（3）从标准差的角度考虑，选择$\alpha=0.6$时的二次指数平滑模型。

（4）利用$\alpha=0.6$时的二次指数平滑模型，得到 1982 年和 1985 年的产量预测值分别为 152.9452 亿米，182.8625 亿米。

8.2　解　取$\alpha=0.3$，计算公式为

$$\begin{cases} S_t^{(1)}=\alpha y_t+(1-\alpha)S_{t-1}^{(1)}, \\ S_t^{(2)}=\alpha S_t^{(1)}+(1-\alpha)S_{t-1}^{(2)}, \\ S_t^{(3)}=\alpha S_t^{(2)}+(1-\alpha)S_{t-1}^{(3)}, \end{cases} \tag{8.4}$$

式中$S_t^{(1)}$、$S_t^{(2)}$、$S_t^{(3)}$分别为一、二、三次指数平滑值。其中初始值

$$S_1^{(0)}=S_2^{(0)}=S_3^{(0)}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=636.2.$$

三次指数平滑法的预测模型为

$$\hat{y}_{t+m}=a_t+b_tm+C_tm^2,\ m=1,2,\cdots, \tag{8.5}$$

其中

$$\begin{cases} a_t = 3S_t^{(1)} - 3S_t^{(2)} + S_t^{(3)}, \\ b_t = \dfrac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}[(6-5\alpha)S_t^{(1)} - 2(5-4\alpha)S_t^{(2)} + (4-3\alpha)S_t^{(3)}], \\ c_t = \dfrac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}[S_t^{(1)} - 2S_t^{(2)} + S_t^{(3)}]. \end{cases} \quad (8.6)$$

由式（8.6），可得到 $t=23$ 时，有

$a_{23} = 2572.2613$，$b_{23} = 259.3374$，$c_{23} = 8.9819$，

于是得到预测模型

$\hat{y}_{23+m} = 8.9819m^2 + 259.3374m + 2572.2613$，

其中 $m=1,2,3$ 分别对应着 1983 年，1984 年和 1985 年销售额的预测值，最后求得 1983 年和 1985 年的预测值分别为 2840.5806 亿元，3431.1106 亿元。

用 Matlab 软件计算时，把表 8.2 中全部数值数据（包括年份数据）保存到纯文本文件 data82.txt 中。计算的 Matlab 程序如下

```
clc,clear
dd=textread('data82.txt'); %把全部原始数据保存到纯文本文件 data82.txt 中
yt=dd([2:2:end],:); yt=yt'; yt=nonzeros(yt); %提取零售总额数据并变成列向量
n=length(yt); alpha=0.3; st0=mean(yt(1:3))
st1(1)=alpha*yt(1)+(1-alpha)*st0;
st2(1)=alpha*st1(1)+(1-alpha)*st0;
st3(1)=alpha*st2(1)+(1-alpha)*st0;
for i=2:n
    st1(i)=alpha*yt(i)+(1-alpha)*st1(i-1);
    st2(i)=alpha*st1(i)+(1-alpha)*st2(i-1);
    st3(i)=alpha*st2(i)+(1-alpha)*st3(i-1);
end
xlswrite('lingshou.xls',[st1',st2',st3'])   %把数据写在前三列
at=3*st1-3*st2+st3;
bt=0.5*alpha/(1-alpha)^2*((6-5*alpha)*st1-2*(5-4*alpha)*st2+(4-3*alpha)*st3);
ct=0.5*alpha^2/(1-alpha)^2*(st1-2*st2+st3);
yhat=at+bt+ct;
xlswrite('lingshou.xls',yhat','Sheet1','D2')   %把数据写在第 4 列第 2 行开始的位置
plot(1:n,yt,'D',2:n,yhat(1:end-1),'*')
legend('实际值','预测值',2)   %图注显示在左上角
xishu=[ct(end),bt(end),at(end)]; %二次预测多项式的系数向量
yuce=polyval(xishu,[1:3])   %求预测多项式自变量取值为 1,2，3 时的值
```

8.3 解 记原始的观测数据为 y_t，$t=1,2,\cdots,15$，分别对应 1969 年~1983 年各年度的粮食产量。

（1）修正指数曲线

修正指数曲线用于描述如下一类现象

i）初期增长迅速，随后增长率逐渐降低。

ii）当 $K>0$，$a<0$，$0<b<1$ 时，$t\to\infty$，$ab^t\to 0$，即 $\hat{y}_t \to K$。

它的数学模型为

$$\hat{y}_t = K + ab^t, \tag{8.7}$$

在此数学模型中有三个参数 K, a 和 b 要用历史数据来确定。

当 K 值可预先确定时，采用最小二乘法确定模型中的参数。而当 K 值不能预先确定时，应采用三和法。

把时间序列的 n 个观察值等分为三部分，每部分有 m 期，即 $n = 3m$。

第一部分：$y_1, y_2, \cdots, y_m$；

第二部分：$y_{m+1}, y_{m+2}, \cdots, y_{2m}$；

第三部分：$y_{2m+1}, y_{2m+2}, \cdots, y_{3m}$

令每部分的趋势值之和等于相应的观察值之和，由此给出参数估计值。三和法步骤如下：

记观察值的各部分之和

$$S_1 = \sum_{t=1}^{m} y_t,\ S_2 = \sum_{t=m+1}^{2m} y_t,\ S_3 = \sum_{t=2m+1}^{3m} y_t \tag{8.8}$$

且

$$\begin{cases} S_1 = \sum\limits_{t=1}^{m} \hat{y}_t = \sum\limits_{t=1}^{m} (K + ab^t) = mK + ab(1 + b + b^2 + \cdots b^{m-1}) \\ S_2 = \sum\limits_{t=m+1}^{2m} \hat{y}_t = \sum\limits_{t=m+1}^{2m} (K + ab^t) = mK + ab^{m+1}(1 + b + b^2 + \cdots b^{m-1}) \\ S_3 = \sum\limits_{t=2m+1}^{3m} \hat{y}_t = \sum\limits_{t=2m+1}^{3m} (K + ab^t) = mK + ab^{2m+1}(1 + b + b^2 + \cdots b^{m-1}) \end{cases} \tag{8.9}$$

由于

$$(1 + b + b^2 + \cdots b^{m-1})(b - 1) = b^m - 1 \tag{8.10}$$

则根据(8.9)式，得

$$\begin{cases} S_1 = mK + ab\dfrac{b^m - 1}{b - 1} \\ S_2 = mK + ab^{m+1}\dfrac{b^m - 1}{b - 1} \\ S_3 = mK + ab^{2m+1}\dfrac{b^m - 1}{b - 1} \end{cases} \tag{8.11}$$

由（8.11）式，解得

$$\begin{cases} b = \left(\dfrac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1} \right)^{\frac{1}{m}} \\ a = (S_2 - S_1)\dfrac{b-1}{b(b^m-1)^2} \\ K = \dfrac{1}{m}\left[S_1 - \dfrac{ab(b^m-1)}{b-1} \right] \end{cases} \tag{8.12}$$

至此三个参数全部确定了，于是就可以用式（8.7）进行预测。

值得注意的是，并不是任何一组数据都可以用修正指数曲线拟合。采用前应对数据进行检验，检验方法是看给定数据的逐期增长量的比率是否接近某一常数，即 $(y_{t+1}-y_t)/(y_t-y_{t-1})$ 的变化范围很小。

对于该问题的数据进行检验，发现有一个奇异值，我们仍然建立修正指数曲线模型。计算得

$b = 0.8986$，$a = -13.4225$，$K = 14.8439$，

模型的预测标准差为 $S_1 = 0.4240$，1985 年和 1990 年粮食产量的预测值分别为 12.6655，13.5679。

计算的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
t=1969:1983;
yt=[3.78,4.19,4.83,5.46,6.71,7.99,8.60,9.24,9.67,9.87,10.49,10.92,10.93,12.39,12.59];
plot(t,yt,'*-')
n=length(yt); m=n/3; dyt=diff(yt)
for i=1:n-2
    jy(i)=dyt(i+1)/dyt(i); %进行模型检验
end
fw=minmax(jy) %求向量的下限和上限
s1=sum(yt(1:m)), s2=sum(yt(m+1:2*m)), s3=sum(yt(2*m+1:end))
b=((s3-s2)/(s2-s1))^(1/m)
a=(s2-s1)*(b-1)/(b*(b^m-1)^2)
k=(s1-a*b*(b^m-1)/(b-1))/m
yuce=@(t)k+a*b.^t; %定义预测的匿名函数
bzcha=sqrt(mean((yt-yuce(1:n)).^2)) %计算预测的标准差
ythat=yuce([n+2,n+7]) %求 1985 年和 1990 年的预测值
```

（2）Compertz 曲线

Compertz 曲线的一般形式

$$\hat{y}_t = Ka^{b^t}, K>0, 0<a\neq 1, 0<b\neq 1, \tag{8.13}$$

采用 Compertz 曲线前应对数据进行检验，检验方法是看给定数据的对数逐期增长量的比率是否接近某一常数 b。即

$$\frac{\ln y_{t+1} - \ln y_t}{\ln y_t - \ln y_{t-1}} \approx b, \tag{8.14}$$

Compertz 曲线用于描述这样一类现象：初期增长缓慢，以后逐渐加快。当达到一

定程度后，增长率又逐渐下降。

参数估计方法如下：

式（8.13）两边取对数，得

$$\ln \hat{y}_t = \log K + (\ln a) b^t \tag{8.15}$$

记

$$\hat{y}'_t = \ln \hat{y}_t \text{ , } K' = \ln K \text{ , } a' = \ln a$$

得

$$\hat{y}'_t = K' + a' b^t$$

仿照修正指数曲线的三和法估计参数，令

$$S_1 = \sum_{t=1}^{m} y'_t \text{ , } S_2 = \sum_{t=m+1}^{2m} y'_t \text{ , } S_3 = \sum_{t=2m+1}^{3m} y'_t \tag{8.16}$$

其中 $y'_t = \ln y_t$。则类似式（8.12），得

$$\begin{cases} b = \left(\dfrac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1} \right)^{\frac{1}{m}} \\ a' = (S_2 - S_1) \dfrac{b-1}{b(b^m - 1)^2} \\ K' = \dfrac{1}{m} \left[S_1 - \dfrac{a' b (b^m - 1)}{b - 1} \right] \end{cases} \tag{8.17}$$

利用式（8.17）求得

$b = 0.8244$， $a' = -1.7075$， $a = 0.1813$，

$K' = 2.5804$， $K = 13.2021$，

从而粮食产量的 Compertz 曲线方程为

$\hat{y}_t = 13.2021 \times 0.1813^{0.8244}$，

模型的预测标准差为 0.3772，1985 年和 1990 年粮食产量的预测值分别为 12.383，12.884。

计算的 Matlab 程序如下

```
clc,clear
y=[3.78,4.19,4.83,5.46,6.71,7.99,8.60,9.24,9.67,9.87,10.49,10.92,10.93,12.39,12.59];
yt=log(y); n=length(yt);m=n/3;
s1=sum(yt(1:m)), s2=sum(yt(m+1:2*m)), s3=sum(yt(2*m+1:end))
b=((s3-s2)/(s2-s1))^(1/m)
a2=(s2-s1)*(b-1)/(b*(b^m-1)^2)
k2=(s1-a2*b*(b^m-1)/(b-1))/m
a=exp(a2), k=exp(k2)   %原始模型中的参数取值
yuce=@(t) k*a.^(b.^t); %定义预测的匿名函数
yhat=yuce(1:n) %计算观测数据的预测值
```

```
bzcha=sqrt(mean((y-yhat).^2)) %计算模型的预测标准差
ythat=yuce([n+2,n+7]) %求 1985 年和 1990 年的预测值
```

（3）Logistic 曲线（生长曲线）

生物的生长过程经历发生、发展到成熟三个阶段，在三个阶段生物的生长速度是不一样的，例如南瓜的重量增长速度，在第一阶段增长的较慢，在发展时期则突然加快，而到了成熟期又趋减慢，形成一条 S 形曲线，这就是有名的 Logistic 曲线（生长曲线），很多事物，如技术和产品发展进程都有类似的发展过程，因此 Logistic 曲线在预测中有相当广泛的应用。

Logistic 曲线的一般数学模型是

$$\frac{dy}{dt}=ry(1-\frac{y}{L}) \tag{8.18}$$

式中 y 为预测值，L 为 y 的极限值，r 为增长率常数，$r>0$。解此微分方程得

$$y=\frac{L}{1+ce^{-rt}} \tag{8.19}$$

式中 c 为常数。

下面我们记 Logistic 曲线的一般形式为

$$y_t=\frac{1}{K+ab^t}，\ K>0，\ a>0，\ 0<b\neq 1 \qquad (8.19)$$

检验能否使用 Logistic 曲线的方法，是看给定数据倒数的逐期增长量的比率是否接近某一常数 b。即

$$\frac{1/y_{t+1}-1/y_t}{1/y_t-1/y_{t-1}}\approx b \tag{8.20}$$

Logistic 曲线中参数估计方法如下：

作变换

$$y'_t=\frac{1}{y_t}$$

得

$$y'_t=K+ab^t$$

仿照修正指数曲线的三和法估计参数，令

$$S_1=\sum_{t=1}^{m}y'_t\ ,S_2=\sum_{t=m+1}^{2m}y'_t\ ,S_3=\sum_{t=2m+1}^{3m}y'_t \tag{8.21}$$

则类似式（8.12），得

$$
\begin{cases}
b = \left(\dfrac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1} \right)^{\frac{1}{m}} \\
a = (S_2 - S_1) \dfrac{b-1}{b(b^m - 1)^2} \\
K = \dfrac{1}{m} \left[S_1 - \dfrac{ab(b^m - 1)}{b-1} \right]
\end{cases}
\tag{8.22}
$$

由式（8.22），得

$$b = 0.7501，\ a = 0.2796，\ K = 0.0805$$

从而收音机销售量的 Logistic 曲线方程为

$$\hat{y}_t = \frac{1}{0.0805 + 0.2796 \times 0.7501^t}，$$

模型的预测标准差为 0.3892。将$t = 17, 22$代入方程，1985 年和 1990 年粮食产量的预测值分别为 12.1068，12.3467。

计算的 MATLAB 程序如下

```
clc,clear
y=[3.78,4.19,4.83,5.46,6.71,7.99,8.60,9.24,9.67,9.87,10.49,10.92,10.93,12.39,12.59];
yt=1./y; n=length(yt);m=n/3;
s1=sum(yt(1:m)); s2=sum(yt(m+1:2*m)); s3=sum(yt(2*m+1:end));
b=((s3-s2)/(s2-s1))^(1/m)
a=(s2-s1)*(b-1)/(b*(b^m-1)^2)
k=(s1-a*b*(b^m-1)/(b-1))/m
yuce=@(t) 1./(k+a*b.^t); %定义预测的匿名函数
yhat=yuce(1:n) %计算观测数据的预测值
bzcha=sqrt(mean((y-yhat).^2)) %计算模型的预测标准差
ythat=yuce([n+2,n+7]) %求 1985 年和 1990 年的预测值
```

8.4 解 记原始数据序列为$\{x_t\}$，进行一阶差分变换后的序列为$\{y_t\}$，其中$y_t = x_{t+1} - x_t$。

（1）使用 Matlab 软件，求得

$$y_t = 1.253 y_{t-1} - 0.3522 y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.5022 \varepsilon_{t-1}。$$

（2）未来 10 年的预测值分别为

6419.4474，6668.7704，6861.1915，7014.4250，7138.6091，7240.2050，7323.7357，7392.5920，7449.4283，7496.3755。

用Matlab软件计算时，首先把表中的全部原始数据（包括年代）保存到纯文本文件data84.txt中，计算的Matlab程序如下

```
clc, clear
a=textread('data84.txt');
xt=a(:,[2:2:end]); xt=nonzeros(xt); %把原始数据按照时间先后次序展成列向量
yt=diff(xt); %对原始数据进行差分变换
m=armax(yt,[2,1]) %拟合 arma 模型
yd=yt;
for i=1:10
    tt1=predict(m,[yd;0]); %计算一步预测值
    tt2=tt1{:}(end); %提出最后的一个预测值
    ythat(i)=tt2; %保存第 i 个预测值
    yd=[yd;tt2]; %构造下一步预测的数据
end
ythat %显示差分数据的预测值
xthat=xt(end)+cumsum(ythat) %计算原始数据的预测值
```

8.5　解　（1）序列时序图

记原始序列为$\{x_t\}$，序列时序图如图 8.1 所示，时序图显示该序列大致具有 12 个周期变化，周期的长度为 9 年或 10 年，下面使用周期$T=10$年进行计算。

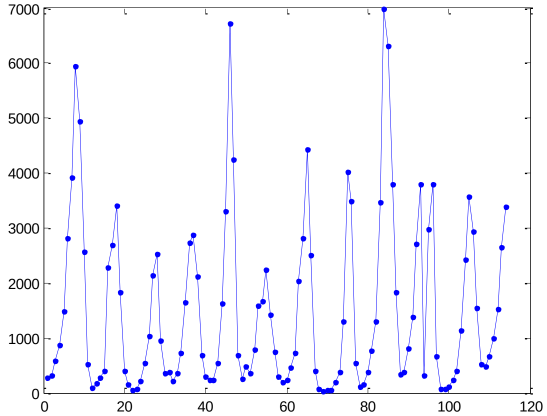

图 8.1　山猫原始数据的时序图

（2）差分平稳

对原序列做 12 步差分，消除季节趋势，得到序列$\{y_t\}$，其中$y_t = x_{t+10} - x_t$，差分后序列图如图 8.2 所示。时序图显示差分后序列基本平稳了。

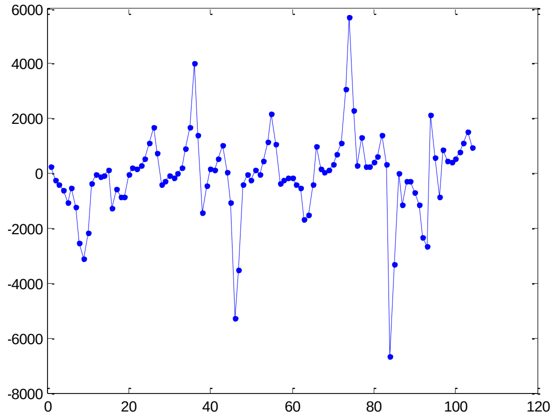

图 8.2　季节差分后数据的时序图

（3）模型拟合

根据差分后序列的自相关（图 8.3）和偏自相关（图 8.4）的性质，尝试拟合 ARMA 模型，拟合的 ARMA（1,10）模型较理想，并且通过了白噪声检验，说明低阶的 ARMA 模型不适合拟合这个序列。由于模型的参数较多，这里我们就不给出具体的模型了。

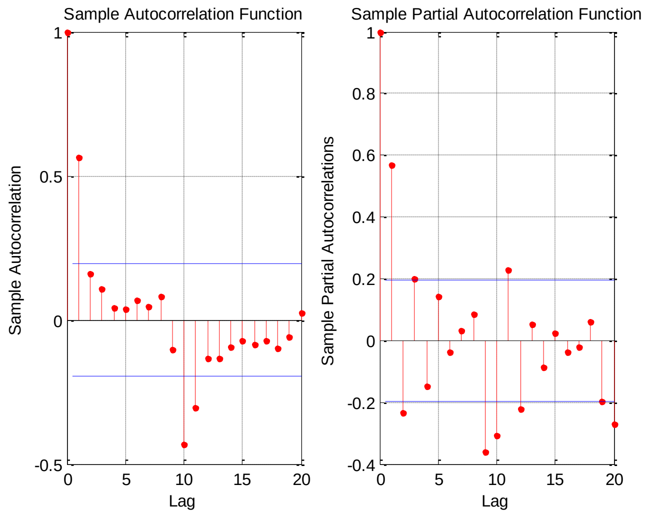

图 8.3 自相关函数图　　图 8.4 偏自相关函数图

（4）求预测值

利用 Matlab 软件求得下两个年度的预测值为 4296，3656。

计算的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
a=textread('data819.txt'); %把原始数据保存到纯文本文件 data819.txt
a=a'; a=nonzeros(a); n=length(a);
plot(a,'.-')
for i=11:n
    b(i-10)=a(i)-a(i-10); %进行季节差分变换
end
b=b'; figure,plot(b,'.-')
figure, subplot(121), autocorr(b)
```

```
subplot(122), parcorr(b)
cs=armax(b,[1,10]) %拟合模型
figure, myres=resid(cs,b); %计算残差向量并画出残差的自相关函数图
[h1,p1,st1]=lbqtest(myres,'lags',6) %进行 LBQ 检验
[h2,p2,st2]=lbqtest(myres,'lags',12)
[h3,p3,st3]=lbqtest(myres,'lags',18)
bhat1=predict(cs,[b;0]);
bhat(1)=bhat1{:}(end); %求差分序列第一个预测值
bhat2=predict(cs,[b;bhat(1);0]);
bhat(2)=bhat2{:}(end); %求差分序列的第二个预测值
ahat(1)=a(end-9)+bhat(1); %求原始序列的预测值
ahat(2)=a(end-8)+bhat(2)
```

8.6 解 （1）对所给时间序列建模

i）首先对此序列进行观察分析

图 8.5 为数据曲线图，可以看出具有指数上升趋势，因此，我们对确定性部分先拟合一个指数增长模型，即

$$X_t=\mu_t+Y_t,\quad \mu_t=R_1e^{r_1t},$$

这里各季度依次编号为$t=1,2,\cdots,100$。

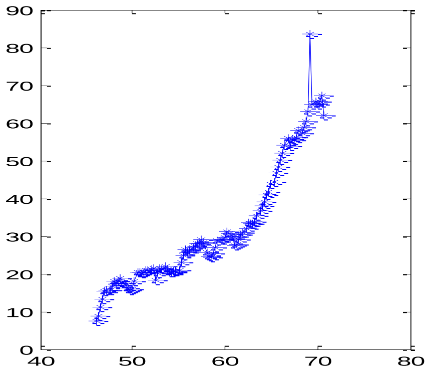

图 8.5 耐用品支出曲线图

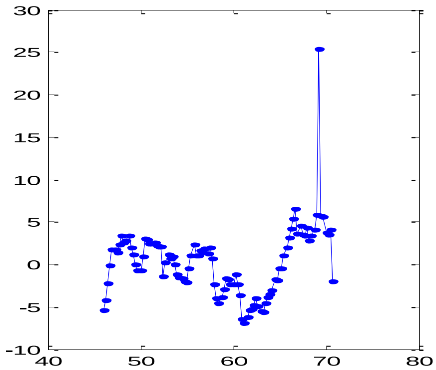

图 8.6 剩余序列数据图

ii）确定性趋势的拟合

为了能用线性最小二乘法估计参数R_1和r_1，把$\mu_t=R_1e^{r_1t}$两边取对数得

$$\ln\mu_t=\ln R_1+r_1t,$$

利用观测数据求得$\hat{R}_1=12.6385$，$\hat{r}_1=0.0162$。剩余平方和为 1683.5371。剩余序列Y_t如图 8.6 所示，可以认为是平稳的。

iii）对剩余序列拟合 ARMA 模型

Y_t的自相关与偏自相关如图 8.7 所示，可初步断定Y_t的适应模型为 AR 模型，逐步增加 AR 模型阶数进行拟合，其残差方差图如图 8.8 所示，因此，合适的模型为 AR（2），即

$$Y_t=\varphi_1Y_{t-1}+\varphi_2Y_{t-2}+a_t,$$

参数估计为$\hat{\varphi}_1=0.5451$，$\hat{\varphi}_2=0.2478$。

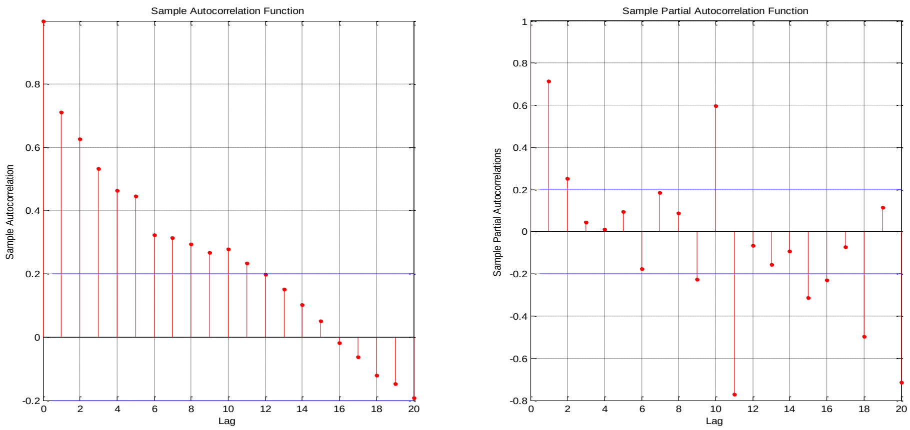

图 8.7　剩余序列的相关函数图

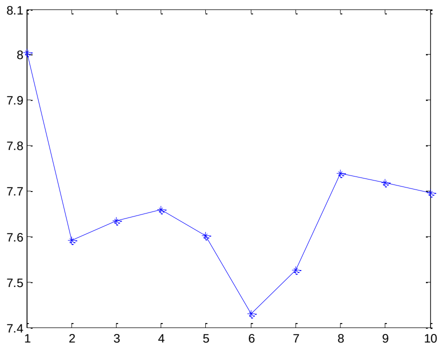

图 8.8　残差方差图

上面进行计算和画图的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
a=load('data79.txt'); %把原始所有四个季度的数据保存到纯文本文件
a=a'; a=a(:); %把数据变成列向量
n=length(a);
t0=[46:1/4:71-1/4]';
t=[1:100]';
xishu=[ones(n,1),t];
cs=xishu\log(a);
cs(1)=exp(cs(1))
ahat=cs(1)*exp(cs(2)*t);
cha=a-ahat;
res=sum(cha.^2)
subplot(121), plot(t0,a,'*-')
subplot(122), plot(t0,cha,'.-')
figure, subplot(121), autocorr(cha)
subplot(122), parcorr(cha)
for i=1:10
    cs2{i}=ar(cha,i); %拟合模型
    cha2=resid(cs2{i},cha); %计算残差向量
```

```
    myvar(i)=sum(cha2.^2)/(100-i); %计算残差方差
end
figure, plot(myvar,'*-')
```

iv）建立组合模型

最后我们要以已估计出来的 $R_1, r_1, \varphi_1, \varphi_2$ 的值为初始值用非线性最小二乘法对模型参数进行整体估计，模型整体可写为

$$X_t = \mu_t + Y_t = R_1 e^{r_1 t} + \varphi_1 (X_{t-1} - R_1 e^{r_1(t-1)}) + \varphi_2 (X_{t-2} - R_1 e^{r_1(t-2)}) + a_t$$

最终的参数整体估计为

$$\hat{R}_1 = 12.10；\quad \hat{r}_1 = 0.017，\quad \hat{\varphi}_1 = 0.517，\quad \hat{\varphi}_2 = 0.2397$$

残差平方和为 738.4402，残差自相关图 8.9 表明整体模型是适应的。

（2）对所给的时间序列进行两年（8 个季度）的预报

我们用所建的模型以 1970 年第 4 季度即 $t = 100$ 为原点进行预测，结果如表 8.21 所示。

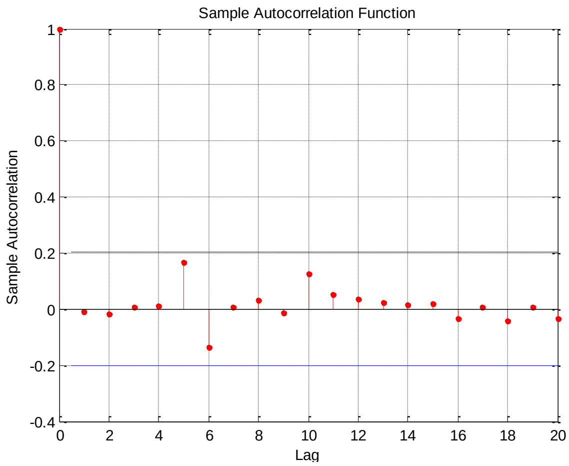

图 8.9　拟合整体模型后的残差自相关图

表 8.21　耐用品支出预测表

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$t+l$	t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	$t+4$	$t+5$	$t+6$	$t+7$	$t+8$
$\hat{X}_t(l)$	62.1	65.8298	66.8384	68.562	70.0083	71.4879	72.9238	74.3507	75.768

计算的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
xt=@(cs,x) cs(1)*(exp(cs(2)*x(:,3))-cs(3)*exp(cs(2)*(x(:,3)-1))-...
    cs(4)*exp(cs(2)*(x(:,3)-2)))+cs(3)*x(:,1)+cs(4)*x(:,2);
cs0=[12.6385,0.0162,0.5451,0.2478]';
a=load('data79.txt');
a=a'; a=a(:); %把数据变成列向量
x=[a(2:end-1),a(1:end-2),[3:100]'];
cs=lsqcurvefit(xt,cs0,x,a(3:end))
res=a(3:end)-xt(cs,x);
```

```
Q=sum(res.^2) %计算残差平方和
autocorr(res) %画残差自相关图
xhat=a;
for j=101:108
    xhat(j)=cs(1)*(exp(cs(2)*j)-cs(3)*exp(cs(2)*(j-1))-...
        cs(4)*exp(cs(2)*(j-2)))+cs(3)*xhat(j-1)+cs(4)*xhat(j-2);
end
xhat101_108=xhat(101:108)
```