第 2 章　整数规划习题解答

2.1　解　做变量替换 $y = x_1x_2$，则有如下关系

$x_1 + x_2 - 1 \le y \le x_1$，

$x_1 + x_2 - 1 \le y \le x_2$，

从而可以得到如下的线性 $0-1$ 规划

$$\max \quad z = x_1 + y - x_3,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 3, \\ x_1 + x_2 - 1 \le y \le x_1, \\ x_1 + x_2 - 1 \le y \le x_2, \\ x_j = 0\text{或}1, \quad (j = 1,2,3), \\ y = 0\text{或}1. \end{cases}$$

2.2　解　令

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{在备选校址}B_i\text{建学校}, \\ 0, & \text{在备选校址}B_i\text{不建学校}, \end{cases}$$

由于小区 A_1 可以被备选校址 B_1，B_2，B_3 处所建的学校覆盖，则有约束条件

$x_1 + x_2 + x_3 \ge 1$，

类似地，可以写出其它的约束条件，建立如下的 0-1 整数规划模型

$$\min \quad \sum_{i=1}^{6} x_i$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ x_2 + x_4 \ge 1, \\ x_3 + x_5 \ge 1, \\ x_4 + x_6 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ x_5 + x_6 \ge 1, \\ x_1 \ge 1 \\ x_2 + x_4 + x_6 \ge 1 \end{cases}$$

计算的 Lingo 程序如下

```
model:
sets:
var/1..6/:x;
endsets
min=@sum(var:x);
x(1)+x(2)+x(3)>1;
```

x(2)+x(4)>1;
x(3)+x(5)>1;
x(4)+x(6)>1;
x(5)+x(6)>1;
x(1)>1;
x(2)+x(4)+x(6)>1;
end

求得在备选校址 B_1，B_4，B_5 建小学。

2.3 解 用 $j=1,2,3,4$ 分别表示甲、乙、丙、丁四个企业，c_{ij} 表示第 i（$i=1,\cdots,6$）台设备分配给第 j 个企业创造的利润，引进 $0-1$ 变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{台设备分配给第}j\text{个企业}\\ 0, & \text{第}i\text{台设备不分配给第}j\text{个企业}\end{cases},\quad i=1,\cdots,6,\quad j=1,2,3,4$$

则问题的数学模型为

$$\max \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{6} x_{ij}\ge 1, & j=1,2,3,4\\ \sum_{j=1}^{4} x_{ij}=1, & i=1,\cdots,6\\ x_{ij}=0\text{或}1, & i=1,\cdots,6;\ j=1,2,3,4\end{cases}$$

计算的 Lingo 程序如下

```
model:
sets:
shebei/1..6/;
qiye/1..4/;
link(shebei,qiye):c,x;
endsets
data:
c=4 2   3   4
6   4   5   5
7   6   7   6
7   8   8   6
7   9   8   6
7   10  8   6;
enddata
max=@sum(link:c*x);
@for(qiye(j):@sum(shebei(i):x(i,j))>1);
@for(shebei(i):@sum(qiye(j):x(i,j))=1);
@for(link:@bin(x));
end
```

求得 $x_{14}=1$，$x_{21}=1$，$x_{31}=1$，$x_{43}=1$，$x_{52}=1$，$x_{62}=1$。最大利润为44。

2.4 解 问题（1）

记 $i=1,2,3,4$ 分别表示高低杠，平衡木，跳马，自由体操四项运动。引进决策变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{第}j\text{个人参加第}i\text{个项目}\\ 0, & \text{第}j\text{个人不参加第}i\text{个项目}\end{cases},\quad i=1,2,3,4,\quad j=1,2,\cdots,10$$

c_{ij} 表示在某种情形下第 j 个人参加第 i 个项目的得分

建立如下的非线性整数规划模型

$$\max \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{10} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{10} x_{ij}=6, \quad i=1,2,3,4\\ \sum\limits_{j=1}^{10}\prod\limits_{i=1}^{4} x_{ij}=4\end{cases}$$

总的得分为 212.3。

使用计算机进行计算时，首先构造纯文本文件sj.txt，把原始的4个项目，10个人的数据放在纯文件中，然后把分数和概率之间的符号“~”替换成空格，具体数据格式如下：

8.4	0.15	9.3	0.1	8.4	0.1	8.1	0.1	8.4	0.15	9.4	0.1	9.5	0.1	8.4	0.1	8.4	0.15	9.0	0.1
9.5	0.5	9.5	0.1	8.8	0.2	9.1	0.5	9.5	0.5	9.6	0.1	9.7	0.1	8.8	0.2	9.5	0.5	9.2	0.1
9.2	0.25	9.6	0.6	9.0	0.6	9.3	0.3	9.2	0.25	9.7	0.6	9.8	0.6	9.0	0.6	9.2	0.25	9.4	0.6
9.4	0.1	9.8	0.2	10	0.1	9.5	0.1	9.4	0.1	9.9	0.2	10	0.2	10	0.1	9.4	0.1	9.7	0.2
8.4	0.1	8.4	0.15	8.1	0.1	8.7	0.1	9.0	0.1	8.7	0.1	8.4	0.1	8.8	0.05	8.4	0.1	8.1	0.1
8.8	0.2	9.0	0.5	9.1	0.5	8.9	0.2	9.2	0.1	8.9	0.2	8.8	0.2	9.2	0.05	8.8	0.1	9.1	0.5
9.0	0.6	9.2	0.25	9.3	0.3	9.1	0.6	9.4	0.6	9.1	0.6	9.0	0.6	9.8	0.5	9.2	0.6	9.3	0.3
10	0.1	9.4	0.1	9.5	0.1	9.9	0.1	9.7	0.2	9.9	0.1	10	0.1	10	0.4	9.8	0.2	9.5	0.1
9.1	0.1	8.4	0.1	8.4	0.15	9.0	0.1	8.3	0.1	8.5	0.1	8.3	0.1	8.7	0.1	8.4	0.1	8.2	0.1
9.3	0.1	8.8	0.2	9.5	0.5	9.4	0.1	8.7	0.1	8.7	0.1	8.7	0.1	8.9	0.2	8.8	0.2	9.2	0.5
9.5	0.6	9.0	0.6	9.2	0.25	9.5	0.5	8.9	0.6	8.9	0.5	8.9	0.6	9.1	0.6	9.0	0.6	9.4	0.3
9.8	0.2	10	0.1	9.4	0.1	9.7	0.3	9.3	0.2	9.1	0.3	9.3	0.2	9.9	0.1	10	0.1	9.6	0.1
8.7	0.1	8.9	0.1	9.5	0.1	8.4	0.1	9.4	0.1	8.4	0.15	8.4	0.1	8.2	0.1	9.3	0.1	9.1	0.1
8.9	0.2	9.1	0.1	9.7	0.1	8.8	0.2	9.6	0.1	9.5	0.5	8.8	0.1	9.3	0.5	9.5	0.1	9.3	0.1
9.1	0.6	9.3	0.6	9.8	0.6	9.0	0.6	9.7	0.6	9.2	0.25	9.2	0.6	9.5	0.3	9.7	0.5	9.5	0.6
9.9	0.1	9.6	0.2	10	0.2	10	0.1	9.9	0.2	9.4	0.1	9.8	0.2	9.8	0.1	9.9	0.3	9.8	0.2

提出最低分的Matlab程序：

```
load sj.txt
fen=sj(:,1:2:20);
gai=sj(:,2:2:20);
for i=1:4
    for j=1:10
        low(i,j)=min(fen(4*i-3:4*i,j));
    end
end
dlmwrite('data2.txt',low)    %把最低分的矩阵写到纯文本文件data2.txt，供Lingo使用
```

求解上述非线性 0-1 整数规划模型的 Lingo 程序：

```
model:
sets:
xm/1..4/;
yd/1..10/:y;
links(xm,yd):c,x;
endsets
data:
c=@file(data2.txt);
enddata
max=@sum(links:c*x);
@for(xm(i):@sum(yd(j):x(i,j))=6);
```

```
@sum(yd(j):x(1,j)*x(2,j)*x(3,j)*x(4,j))=4;
@for(links:@bin(x));
@for(yd:@bin(y));
end
```

下面我们通过巧妙地引进$0-1$变量

$$y_j=\begin{cases}1, \text{第}j\text{人参加全能比赛}, \\ 0, \text{第}j\text{人不参加全能比赛},\end{cases}$$

建立线性0-1整数规划模型

$$\max \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{10} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{10} x_{ij}=6, \quad i=1,2,3,4 \\ 4y_j \le \sum_{i=1}^{4} x_{ij} \le 3+y_j, \quad j=1,2,\cdots,10 \\ \sum_{j=1}^{10} y_j = 4 \end{cases}$$

计算的Lingo程序如下：

```
model:
sets:
xm/1..4/;
yd/1..10/:y;
links(xm,yd):c,x;
endsets
data:
c=@file(data2.txt);
enddata
max=@sum(links:c*x);
@for(xm(i):@sum(yd(j):x(i,j))=6);
@for(yd(j):4*y(j)<@sum(xm(i):x(i,j));@sum(xm(i):x(i,j))<3+y(j)
);
@sum(yd:y)=4;
@for(links:@bin(x));
@for(yd:@bin(y));
End
```

计算得分均值的 Matlab 程序：

```
load sj.txt
fen=sj(:,1:2:20);
gai=sj(:,2:2:20);
for i=1:4
    for j=1:10
        zhun(i,j)=fen(4*i-3:4*i,j)'*gai(4*i-3:4*i,j);
    end
end
dlmwrite('data3.txt',zhun)
```

在均值情形下最后的总得分为225.1。

问题（2）

我们把团体总分236.2作为一个约束条件，得分的概率作为目标函数，建立0-1整数规划模型。用$k=1,2,3,4$记运动员参加项目得到了第k种得分，a_{ijk},b_{ijk}表示第j个运动员参加第i个项目得到的第k种得分值及概率。记p_{ij}为运动员j参加第i个项目的某种得分的概率。

引进$0-1$变量

$$z_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{运动员}j\text{参加项目}i\text{得到}a_{ijk}\text{分}\\ 0, & \text{运动员}j\text{参加}i\text{项目没得到}a_{ijk}\text{分}\end{cases}$$

建立如下的整数规划模型：

$$\max \prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{10} p_{ij}^{\ x_{ij}}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases}\sum_{j=1}^{10} x_{ij}=6, \quad i=1,2,3,4\\ 4y_j\le \sum_{i=1}^{4} x_{ij}\le 3+y_j, \quad j=1,2,\cdots,10\\ \sum_{j=1}^{10} y_j=4\\ p_{ij}=\sum_{k=1}^{4} b_{ijk}z_{ijk},\ i=1,2,3,4;\ j=1,2,\cdots,10\\ c_{ij}=\sum_{k=1}^{4} a_{ijk}z_{ijk},\ i=1,2,3,4;\ j=1,2,\cdots,10\\ \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{10} c_{ij}x_{ij}\ge 236.2\\ \sum_{j=1}^{4} z_{ijk}\le 1,\ i=1,2,3,4;\ j=1,2,\cdots,10\\ x_{ij}=\sum_{k=1}^{4} z_{ijk}, \quad i=1,2,3,4;\ j=1,2,\cdots,10\end{cases}$$

为了便于Lingo求解，目标函数$\max \prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{10} p_{ij}^{\ x_{ij}}$，等价地改写为

$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{10} x_{ij}\ln(p_{ij})$，我们把约束条件修改为

$$
\text{s.t.}\quad \begin{cases}
\sum_{j=1}^{10} x_{ij} = 6, \quad i = 1,2,3,4 \\
4y_j \le \sum_{i=1}^{4} x_{ij} \le 3 + y_j, \quad j = 1,2,\cdots,10 \\
\sum_{j=1}^{10} y_j = 4 \\
p_{ij} = \sum_{k=1}^{4} b_{ijk} z_{ijk},\ i = 1,2,3,4;\ j = 1,2,\cdots,10 \\
c_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a_{ijk} z_{ijk},\ i = 1,2,3,4;\ j = 1,2,\cdots,10 \\
\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{10} c_{ij} x_{ij} \ge 236.2 \\
\sum_{j=1}^{4} z_{ijk} = 1,\ i = 1,2,3,4;\ j = 1,2,\cdots,10
\end{cases}
$$

提出得分和概率数据的Matlab程序为

```
load sj.txt
fen=sj(:,1:2:20);p=sj(:,2:2:20);
fid1=fopen('fen.txt','w');
fid2=fopen('gai.txt','w');
for i=1:4
    for j=1:10
        for k=1:4
            fprintf(fid1,'%f\n',fen(4*(i-1)+k,j));
            fprintf(fid2,'%f\n',p(4*(i-1)+k,j));
        end
    end
end
fclose(fid1);fclose(fid2);
```

整数规划的Lingo程序为:

```
model:
sets:
  xm/1..4/;
  yd/1..10/:y;
  pm/1..4/;
  link(xm,yd):c,x,p;
  link2(xm,yd,pm):a,z,b;
endsets
data:
a=@file('fen.txt');
b=@file('gai.txt');
@text(shuchu.txt)=x;
enddata
max=@exp(@sum(link:x*@log(p)));
!参赛约束;
```

```
@for(xm(i): @sum(yd(j):x(i,j))=6);
@for(yd(j):@sum(xm(i):x(i,j))>4*y(j));
@for(yd(j):@sum(xm(i):x(i,j))<3+y(j));
@sum(yd:y)=4;
!夺冠约束;
@sum(link:c*x)>=236.2;
@for(xm(i): @for(yd(j): p(i,j)=@sum(pm(k): b(i,j,k)*z(i,j,k))));
@for(xm(i): @for(yd(j): c(i,j)=@sum(pm(k): a(i,j,k)*z(i,j,k))));
@for(xm(i): @for(yd(j): @sum(pm(k): z(i,j,k))=1));
@for(yd:@bin(y));
@for(link:@bin(x));
@for(link2: @bin(z));
end
```

可得目标函数的最大值为 $P = 6.912\times10^{-19}$，说明该队无论以什么阵容出场，获得冠军的可能性几乎是不可能的。根据每个运动员参加每个项目的得分均值，可以得到以该阵容出场时，得分的数学期望为222.9。

记 C_{ij} 为第 j 个人参加第 i 个项目的得分的随机变量，总得分随机变量

$$S = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{10} x_{ij}C_{ij}$$

我们假设总得分 S 服从正态分布，类似地可以求得最乐观情形下，该队的总得分为236.9。所以 $S \in [212.3, 236.9]$。

易知各个 C_{ij} 均为相互独立的随机变量，所以总分的期望值

$$E(S) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{10} x_{ij}E(C_{ij})$$

总分的方差为

$$D(S) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{10} x_{ij}D(C_{ij})$$

上面已求出 $E(S) = 222.9$，计算得

$$D(S) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{10} x_{ij}\left(E(C_{ij}^2) - (E(C_{ij}))^2\right) = 2.309$$

要求出以上述阵容出场有90%把握得到的分数，就是求 s，满足 $P\{S \ge s\} = 0.9$。由中心极限定理得

$$P\{S \ge s\} = P\left\{\frac{S - E(S)}{\sqrt{D(S)}} \ge \frac{s - E(S)}{\sqrt{D(S)}}\right\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{s - E(S)}{\sqrt{D(S)}}\right) = 0.9$$

根据标准正态分布表可得

$$\frac{s - E(S)}{\sqrt{D(S)}} = -1.29, \quad s = 216.02 .$$