第 1 章　线性规划习题解答

1.1　解　（1）求解的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
c=[3 -1 -1];
a=[1 -2 1; 4 -1 -2]; b=[11,-3]';
aeq=[-2 0 1]; beq=1;
[x,y]=linprog(-c,a,b,aeq,beq,zeros(3,1))
y=-y %换算到目标函数极大化
```

求得

$x_1 = 4$，$x_2 = 1$，$x_3 = 9$，$z = 2$.

（2）求解的 Lingo 程序如下

```
model:
sets:
col/1..3/:c,x;
row/1..2/:b;
links(row,col):a;
endsets
data:
c=3 -1 -1;
a=1 -2 1 4 -1 -2;
b=11 -3;
enddata
max=@sum(col:c*x);
@for(row(i):@sum(col(j):a(i,j)*x(j))<b(i));
-2*x(1)+x(3)=1;
end
```

1.2　解　先把模型做变量替换，化成线性规划模型，详细内容参见本章例 1.4。

（1）求解的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
c=1:4; c=[c,c]';
aeq=[1 -1 -1 1; 1 -1 1 -3; 1 -1 -2 3];
beq=[0 1 -1/2];
aeq=[aeq,-aeq];
[uv,val]=linprog(c,[],[],aeq,beq,zeros(8,1))
x=uv(1:4)-uv(5:end)
```

求得

$x_1 = 0.25$，$x_2 = 0$，$x_3 = 0$，$x_4 = -0.25$

（2）使用 Lingo 软件求解时，Lingo 软件会自动线性化，计算的 Lingo 程序如下

```
model:
sets:
col/1..4/:c,x;
row/1..3/:b;
links(row,col):a;
endsets
data:
c=1 2 3 4;
```

```
a=1 -1 -1 1    1 -1 1 -3    1 -1 -2 3;
b=0 1 -0.5;
enddata
min=@sum(col:c*@abs(x));
@for(row(i):@sum(col(j):a(i,j)*x(j))=b(i));
@for(col:@free(x));    !x 的取值可正可负;
end
```

1.3　解　对产品 I 来说，设以 A_1，A_2 完成 A 工序的产品分别为 x_1，x_2 件，转入 B 工序时，以 B_1，B_2，B_3 完成 B 工序的产品分别为 x_3，x_4，x_5 件；对产品 II 来说，设以 A_1，A_2 完成 A 工序的产品分别为 x_6，x_7 件，转入 B 工序时，以 B_1 完成 B 工序的产品为 x_8 件；对产品 III 来说，设以 A_2 完成 A 工序的产品为 x_9 件，则以 B_2 完成 B 工序的产品也为 x_9 件。由上述条件可得

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + x_5,$$

$$x_6 + x_7 = x_8.$$

由题目所给的数据可建立如下的线性规划模型

$$\begin{aligned}
\min \quad z = {} & (1.25-0.25)(x_1+x_2) + (2-0.35)x_8 + (2.8-0.5)x_9 \\
& -\frac{300}{6000}(5x_1+10x_6) - \frac{321}{10000}(7x_2+9x_7+12x_9) \\
& -\frac{250}{4000}(6x_3+8x_8) - \frac{783}{7000}(4x_4+11x_9) - \frac{200}{4000}\times 7x_5,
\end{aligned}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases}
5x_1 + 10x_6 \le 6000, \\
7x_2 + 9x_7 + 12x_9 \le 10000, \\
6x_3 + 8x_8 \le 4000, \\
4x_4 + 11x_9 \le 7000, \\
7x_5 \le 4000, \\
x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + x_5, \\
x_6 + x_7 = x_8, \\
x_i \ge 0, i = 1,2,\cdots,9.
\end{cases}$$

求解的 Lingo 程序如下

```
model:
sets:
product/1..3/:a,b;
row/1..5/:c,d,y; !y 为中间变量;
num/1..9/:x;
endsets
data:
a=0.25 0.35 0.5;
b=1.25 2 2.8;
c=6000 10000 4000 7000 4000;
d=300 321 250 783 200;
```

```
enddata
max=(b(1)-a(1))*(x(1)+x(2))+(b(2)-a(2))*x(8)+(b(3)-a(3))*x(9)-@sum(row: d/c*y);
y(1)=5*x(1)+10*x(6);    !写出中间变量之间的关系;
y(2)=7*x(2)+9*x(7)+12*x(9);
y(3)=6*x(3)+8*x(8);
y(4)=4*x(4)+11*x(9);
y(5)=7*x(5);
@for(row:y<c); !写出不等式约束;
x(1)+x(2)=x(3)+x(4)+x(5); !写出等式约束;
x(6)+x(7)=x(8);
end
```

求得最优解

$x_1=1200$，$x_2=230.0493$，$x_3=0$，$x_4=858.6207$，

$x_5=571.4286$，$x_6=0$，$x_7=500$，$x_8=500$，$x_9=324.1379$，

最优值为 $z=1146.567$ 元。

该题实际上应该为整数规划问题（Lingo 程序中加约束@for(num:@gin(x));）。对应整数规划的最优解为

$x_1=1200$，$x_2=230$，$x_3=0$，$x_4=859$，

$x_5=571$，$x_6=0$，$x_7=500$，$x_8=500$，$x_9=324$，

最优值为 $z=1146.414$ 元。

1.4 解 用 $i=1,2,3,4$ 分别表示货物 1，货物 2，货物 3 和货物 4；$j=1,2,3$ 分别表示前舱，中舱和后舱。设 x_{ij}（$i=1,2,3,4$，$j=1,2,3,4$）表示第 i 种货物装在第 j 个货舱内的重量，$w_j,v_j\ (j=1,2,3)$ 分别表示第 j 个舱的重量限制和体积限制，$a_i,b_i,c_i\ (i=1,2,3,4)$ 分别表示可以运输的第 i 种货物的重量，单位重量所占的空间和单位货物的利润。则

（1）目标函数

$$z=c_1\sum_{j=1}^{3}x_{1j}+c_2\sum_{j=1}^{3}x_{2j}+c_3\sum_{j=1}^{3}x_{3j}+c_4\sum_{j=1}^{3}x_{4j}=\sum_{i=1}^{4}c_i\sum_{j=1}^{3}x_{ij}$$

（2）约束条件

i）四种货物的重量约束

$$\sum_{j=1}^{3}x_{ij}\le a_i,\quad i=1,2,3,4$$

ii）三个货舱的重量限制

$$\sum_{i=1}^{4}x_{ij}\le w_j,\quad j=1,2,3$$

iii）三个货舱的体积限制

$$\sum_{i=1}^{4}b_i x_{ij}\le v_j,\quad j=1,2,3$$

iv）三个货舱装入货物的平衡限制

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} x_{i1}}{10} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_{i2}}{16} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_{i3}}{8}$$

综上所述，我们建立如下线性规划模型

$$\max \ z = \sum_{i=1}^{4} c_i \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1,2,3,4$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \le w_j, \quad j = 1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{4} b_i x_{ij} \le v_j, \quad j = 1,2,3$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} x_{i1}}{10} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_{i2}}{16} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_{i3}}{8}$$

求解上述线性规划模型时，尽量用 Lingo 软件，如果使用 Matlab 软件求解，需要做变量替换，把二维决策变量化成一维决策变量，很不方便。

编写如下的 MATLAB 程序

```
clc,clear
c=[3100;3800;3500;2850];
c=c*ones(1,3);
c=c(:);
a1=zeros(4,12);
for i=1:4
    a1(i,i:4:12)=1;
end
b1=[18;15;23;12];
a2=zeros(3,12);
for i=1:3
    a2(i,4*i-3:4*i)=1;
end
b2=[10 16 8]';
bb=[480;650;580;390];
a3=zeros(3,12);
for j=1:3
    a3(j,4*j-3:4*j)=bb;
end
b3=[6800 8700 5300]';
a=[a1;a2;a3];b=[b1;b2;b3];
aeq=zeros(2,12);
aeq(1,1:4)=1/10;
aeq(1,5:8)=-1/16;
aeq(2,5:8)=1/16;
aeq(2,9:12)=-1/8;
```

```
beq=zeros(2,1);
[x,y]=linprog(-c,a,b,aeq,beq,zeros(12,1));
x=reshape(x,[4,3]);
x=sum(x'),y=-y
```

求得运输 4 种货物的吨数分别为 0 吨，15 吨，15.9474 吨，3.0526 吨。总利润为 1.2152×10^5 元。

求解的 Lingo 程序如下

```
model:
sets:
wu/1..4/:a,b,c,y;    !y 为 4 种物资的量;
cang/1..3/:w,v;
link(wu,cang):x;
endsets
data:
a=18 15 23 12;
  b=480 650 580 390;
c=3100 3800 3500 2850;
w=10 16 8;
v=6800    8700    5300;
enddata
max=@sum(wu(i):c(i)*@sum(cang(j):x(i,j)));
@for(wu(i):@sum(cang(j):x(i,j))<a(i));
@for(cang(j):@sum(wu(i):x(i,j))<w(j));
@for(cang(j):@sum(wu(i):b(i)*x(i,j))<v(j));
@for(cang(j)|j#le#2:@sum(wu(i):x(i,j))/w(j)=@sum(wu(i):x(i,j+1))/w(j+1));
@for(wu(i):y(i)=@sum(cang(j):x(i,j)));
end
```