# 江理2018－2019复变考试卷A参考答案

一、选择题(每小题3分，共15分)

1．$\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^8}=$ ( D )

(A) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ (B) $-\dfrac{1}{8}(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})$

(C) $\dfrac{1}{8}(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})$ (D) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

2．设$f(z)=2x^3+3y^3\mathrm{i}$，则$f(z)$ ( B )

(A) 处处不可导 (B) 仅在$6x^2=9y^2$上可导，处处不解析

(C) 处处解析 (D) 仅在$(0,0)$点可导

3．下列等式正确的是 ( C )

(A) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}$, $\ln\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$ (B) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}$, $\ln\mathrm{i}=-\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$

(C) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}$, $\ln\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$ (D) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}$, $\ln\mathrm{i}=-\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$

4．$z=0$是函数$\dfrac{1-\cos z}{z-\sin z}$的 ( D )

(A) 本性奇点 (B) 可去奇点 (C) 二级极点 (D) 一级极点

5．设C为$z=(1-\mathrm{i})t$，$t$从1到0的一段，则$\displaystyle\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z=$ ( A )

(A) $-1$ (B) 1 (C) $-\mathrm{i}$ (D) $\mathrm{i}$

二、填空题(每小题3分，共15分)

1．若$z+|z|=2+\mathrm{i}$，则$z=$ $\underline{\quad 3/4+\mathrm{i}\quad}$.

2．若C为正向圆周$|z|=\dfrac{1}{2}$，则$\displaystyle\oint_C \frac{1}{z-2}\mathrm{d}z=$ $\underline{\quad 0\quad}$.

3．若$z=2-\pi\mathrm{i}$，则$\mathrm{e}^z=$ $\underline{\quad -\mathrm{e}^2\quad}$.

4．若$f(z)=\cos z^2$，则$f(z)$在$z=0$处泰勒展开式中$z^4$项的系数$a_4=$ $\underline{\quad -1/2\quad}$.

5．函数$f(t)=\sin t$的拉普拉斯变换$F(s)=$ $\underline{\quad 1/(s^2+1)\quad}$.

三、计算题(70分)

1．设$u(x,y)=x-2xy$且$f(0)=0$，求解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$. (10分)

解：解析函数的$u,v$必定满足C.－R.方程，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=1-2y\rightarrow v=y-y^2+\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2x=-\varphi'(x)\rightarrow\varphi(x)=x^2+C$$

由于$f(0)=0$，$C=0$，即$f(z)=x-2xy+\mathrm{i}(y-y^2+x^2)$ □

2. 计算积分$\oint_C\frac{2\mathrm{e}^z}{z^5}\mathrm{d}z$的值，其中C为正向圆周$|z|=1$. (7分)

解：根据高阶导数公式$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$

$$\oint_C\frac{2\mathrm{e}^z}{(z-0)^5}\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{4!}(2\mathrm{e}^z)^{(4)}\Big|_{z=0}=\frac{\pi\mathrm{i}}{6}$$ □

3. 计算积分$\oint_C\frac{3z+5}{z^2-z}\mathrm{d}z$的值，其中C为正向圆周$|z|=\frac{1}{2}$. (7分)

解：$\oint_C\frac{3z+5}{z^2-z}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{3z+5}{z(z-1)}=2\pi\mathrm{i}\frac{3z+5}{z-1}\Big|_{z=0}=-10\pi\mathrm{i}$ □

4. 求函数$\frac{1-\cos z}{z^3}$在有限奇点处的留数. (7分)

解：$\cos z=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$，$1-\cos z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$

$$\frac{1-\cos z}{z^3}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-3}}{(2n)!},\ \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1-\cos z}{z^3}=c_{-1}=\frac{1}{2}$$ □

5. 求函数$\frac{2z^2+1}{z^2+2z}$在有限奇点处的留数. (7分)

解：$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{2z^2+1}{z^2+2z}=\frac{2z^2+1}{z+2}\Big|_{z=0}=\frac{1}{2}$，$\operatorname*{Res}_{z=-2}\frac{2z^2+1}{z^2+2z}=\frac{2z^2+1}{z}\Big|_{z=-2}=-\frac{9}{2}$ □

6. 将$f(z)=\frac{z}{(z-2)(z-6)}$在$2<|z|<6$内展开为洛朗级数. (10分)

解：
$$f(z)=\frac{z}{4}\left[\frac{1}{z-6}-\frac{1}{z-2}\right]=\frac{z}{4}\left[-\frac{1}{6}\frac{1}{1-z/6}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z}\right]$$
$$=\frac{z}{4}\left[-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(z/6)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(2/z)^n\right]$$
$$=-\frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(z/6)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(2/z)^n\right]$$ □

7. 若函数$f(z)=ay^3+bx^2y+\mathrm{i}(x^3+cxy^2)$是复平面上的解析函数，求$a,b,c$的值. (12分)

解：若$f(z)$为解析函数，则其实部、虚部满足C.－R.方程

设$u=ay^3+bx^2y$, $v=x^3+cxy^2$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2bxy=2cxy=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=3ay^2+bx^2=-3x^2-cy^2=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=c\\3a=-c\\b=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=c=-3\end{cases}$$

那么$a=1$, $b=c=-3$ □

8. 利用拉普拉斯变换解常微分方程初值问题：$\begin{cases}x''(t)+6x'(t)+9x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\\x(0)=0,\ x'(0)=0\end{cases}$

解：设$\mathscr{L}[x]=X(s)$, 对等式两边作拉普拉斯变换

$\mathscr{L}[x''+6x'+9x]=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+6sX(s)-6x(0)+9X(s)$

$=s^2X(s)+6sX(s)+9X(s)=1/(s+3)$

那么有$X(s)=1/(s+3)^3$

根据拉普拉斯变换的微分性质$F''(s)=\mathscr{L}[t^2f(t)]$

$1/(s+3)^3=[1/(s+3)]''/2=\mathscr{L}[t^2\mathrm{e}^{-3t}]/2$

那么$x(t)=t^2\mathrm{e}^{-3t}/2$ □