# 提高练习五

## 一、填空题：

1．设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，

则$\dfrac{d}{dx}\int_{3x}^{\sin x^2} f(t)dt =$ $\underline{2xf(\sin x^2)\cos x^2 - 3f(3x)}$

2．设函数$f(x)$在$[0,4]$上连续，且

$\int_1^{x^2-2} f(t)dt = x - \sqrt{3}$，则$f(2)=$ $\underline{\dfrac{1}{4}}$。

3．$\int_0^2 f(x)dx=$ $\underline{\dfrac{5}{6}}$。其中$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 2-x & 1 < x \le 2 \end{cases}$

4．$\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x(x^2+1)} =$ $\underline{\dfrac{1}{2}\ln 2}$

5. $\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{2\sin x\cdot(x^4+3x^2+1)}{1+x^2}+\cos x\right]dx=$ $\underline{\ 0\ }$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p>0)=$ $\underline{\frac{1}{p+1}}$

二、选择题

1. 设 $F(x)=\frac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，其中 $f(x)$ 为连续函数，

则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$ 等于（ $B$ ）

（A）$a^2$ (B) $a^2f(a)$ (C) 0 (D) 不存在

2. 若函数 $f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t-x)dt$，则 $f(x)$等于（ A ）

（A）$-\sin x$ (B) $-1+\cos x$

（C）$\sin x$ (D) 0.

3. 若连续函数 $f(x)$满足关系 $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$，

则 $f(x)$=（ B ）

（A）$e^2\ln 2$ (B) $e^{2x}\ln 2$

(C) $e^2+\ln 2-1$ (D) $e^{2x}+\ln 2-1$

三、计算　$1.\int_0^2 x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$

解：原式 $=\dfrac{1}{2}\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx^2=\dfrac{1}{2}\int_0^4 u\sqrt{4-u}\,du$

令 $\sqrt{4-u}=t$, 则 $u=4-t^2, du=-2tdt$

$$\therefore \int_0^2 x^3\sqrt{4-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_2^0 (4-t^2)t\cdot 2tdt$$

$$=\int_0^2 (4-t^2)t^2dt=(\frac{4}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5)\Big|_0^2$$

$$=\frac{4}{3}\cdot 2^3-\frac{1}{5}\cdot 2^5=\frac{64}{15}$$

$$2.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}dx$$

$$解:\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-(\sin x+\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2(\sqrt{2}-1)$$

四、求$a,b$的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt=1.$

解：$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{b-\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{b-\cos x}=1$$

要使上式成立，须 $b=1$, (若$b\neq 1$,则极限为0)

由此$a=4$

五、设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且

$$f(x)>0, F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{dt}{f(t)} \qquad (x\in[a,b])$$

证明：（1）$F'(x)\ge 2$

(2 )方程$F(x)=0$在区间$(a,b)$内有且只有一个根。

证: $$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\ge 2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}=2$$

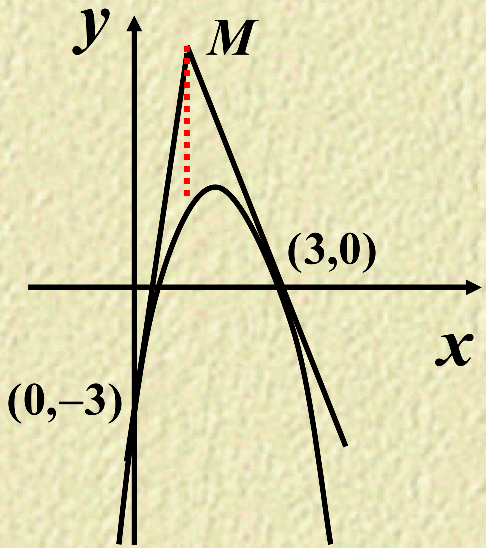
$$F(a)=\int_b^a \frac{dt}{f(t)}=-\int_a^b \frac{dt}{f(t)}<0,\ F(b)=\int_b^a f(t)dt>0,$$

由零点定理,$\exists\xi\in(a,b)$,使$F(\xi)=0$

由$F'(x)\ge 2>0$,$F(x)$在$[a,b]$上单增

所以方程$F(x)=0$在区间$(a,b)$内有且只有一个根。

六、求抛物线$y=-x^2+4x-3$及其在 (0,-3)和(3,0)处的切线所围图形的面积。




解：$y'=-2x+4,$

$$y'\big|_{x=0}=4,\ y'\big|_{x=3}=-2,$$

两切线方程分别为

$y=4x-3,\ y=-2(x-3)$ 交点为$(\frac{3}{2},3)$

在$[0,\frac{3}{2}]$上$\mathrm{d}A=[4x-3-(-x^2+4x-3)]dx=x^2dx$

在$[\frac{3}{2},3]$上$\mathrm{d}A=[-2x+6-(-x^2+4x-3)]dx=(x^2-6x+9)dx$

$\therefore$所求面积为$A=\int_0^{3/2}x^2dx+\int_{3/2}^{3}(x^2-6x+9)dx=\frac{9}{4}$

七、求曲线$y=1+3\sin t, x=2+3\sin t(0\le t\le \frac{\pi}{2})$的弧长。

解：　$y_t'=3\cos t, x_t'=3\cos t$

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt=3\sqrt{2}$$

八、求由平面图形$y=\cos x-\sin x, y=0\ \ (0\le x\le \frac{\pi}{4})$绕$x$轴旋转的旋转体体积。

解：$V=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\pi(\cos x-\sin x)^2dx$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\cos x\sin x)dx=\pi(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})$$