# 第二十六讲 正交子空间与最小二乘问题

一、正交子空间

二、子空间的正交补

三、向量到子空间的距离

四、最小二乘问题

HOME

ENTER

# 一、欧氏空间中的正交子空间

## 1. 定义：

**1)** $V_1$与$V_2$是欧氏空间V中的两个子空间，如果对

$\forall \alpha \in V_1$，$\beta \in V_2$，恒有

$$(\alpha, \beta) = 0,$$

则称子空间 $V_1$ 与 $V_2$为**正交的**，记作 $V_1 \perp V_2$.

**2)** 对给定向量$\alpha \in V$，如果对 $\forall \beta \in V_1$，恒有

$$(\alpha, \beta) = 0,$$

则称向量$\alpha$与子空间 $V_1$ 正交，记作 $\alpha \perp V_1$.

**注：**

① $V_1 \perp V_2$ 当且仅当 $V_1$ 中每个向量都与 $V_2$ 正交.

② $V_1 \perp V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$

$(\because \quad \forall \alpha \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow (\alpha,\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0.)$

③ 当 $\alpha \perp V_1$ 且 $\alpha \in V_1$ 时，必有 $\alpha = 0.$

## 2. 两两正交的子空间的和必是直和.

证明：设子空间 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 两两正交，

要证明 $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$， 只须证：

$V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ 中零向量分解式唯一.

设 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = 0, \quad \alpha_i \in V_i, \quad i = 1, 2, \cdots, s$

$\because \quad V_i \perp V_j, i \neq j$

$\therefore \quad (\alpha_i, 0) = (\alpha_i, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s) = (\alpha_i, \alpha_i) = 0$

由内积的正定性，可知 $\alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, s.$

# 二、子空间的正交补

## 1. 定义:

如果欧氏空间V的子空间 $V_1, V_2$ 满足 $V_1 \perp V_2$，并且 $V_1 + V_2 = V$，则称 $V_2$ 为 $V_1$ 的**正交补**.

**2.** $n$ 维欧氏空间V的每个子空间 $V_1$ 都有唯一正交补.

**证明:** 当 $V_1 = \{0\}$ 时，V就是 $V_1$ 的唯一正交补.

当 $V_1 \neq \{0\}$ 时，$V_1$ 也是有限维欧氏空间.

取 $V_1$ 的一组正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$,

由定理1，它可扩充成V的一组正交基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m,\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n,$$

记子空间 $L\left(\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n\right)=V_2.$

显然， $V_1+V_2=V.$

又对 $\forall\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_m\varepsilon_m\in V_1,$

$$\beta=x_{m+1}\varepsilon_{m+1}+\cdots+x_n\varepsilon_n\in V_2,$$

$$(\alpha,\beta)=(\sum_{i=1}^{m}x_i\varepsilon_i,\sum_{j=m+1}^{n}x_j\varepsilon_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}x_ix_j(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$$

$\therefore\ V_1\perp V_2.$ 即 $V_2$ 为 $V_1$ 的正交补.

再证**唯一性**. 设 $V_2, V_3$ 是 $V_1$ 的正交补，则

$$V = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_3$$

对 $\forall \alpha \in V_2$，由上式知 $\alpha \in V_1 \oplus V_3$

即有 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_3,\quad \alpha_1 \in V_1,\quad \alpha_3 \in V_3$

又 $V_1 \perp V_2,\quad V_1 \perp V_3 \quad \therefore \quad \alpha_1 \perp \alpha_3, \alpha \perp \alpha_1,$

从而有 $(\alpha, \alpha_1) = (\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_3, \alpha_1)$

$$= (\alpha_1, \alpha_1) = 0$$

由此可得 $\alpha_1 = 0$，即有 $\alpha \in V_3 \quad \therefore \quad V_2 \subseteq V_3.$

同理可证 $V_3 \subseteq V_2$，$\therefore \quad V_2 = V_3.$ 唯一性得证.

**注：** ① 子空间W的正交补记为 $W^{\perp}$. 即

$$W^{\perp}=\{\alpha\in V \mid \alpha\perp W\}$$

② $n$ 维欧氏空间V的子空间W满足:

i) $(W^{\perp})^{\perp}=W$

ii) $\dim W+\dim W^{\perp}=\dim V=n$

iii) $W\oplus W^{\perp}=V$

iv) W的正交补 $W^{\perp}$ 必是W的余子空间.

但一般地，子空间W的余子空间未必是其正交补.

## 3．内射影

设W是欧氏空间V的子空间，由 $V=W\oplus W^{\perp}$,

对 $\forall \alpha\in V$，有唯一的$\alpha_1\in W$，$\alpha_2\in W^{\perp}$, 使

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$$

称$\alpha_1$为$\alpha$在子空间W上的**内射影**.

# 三、向量到子空间的距离

## 1. 向量间的距离

(1) 定义：长度 $|\alpha-\beta|$ 称为向量 $\alpha$ 和 $\beta$ 的距离，记为

$$d(\alpha,\beta).$$

(2) 基本性质

① $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$

② $d(\alpha,\beta)\geq 0$, 并且仅当 $\alpha=\beta$ 时等号才成立;

③（三角形不等式）$d(\alpha,\beta)\leq d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$.

## 2.向量到子空间的距离

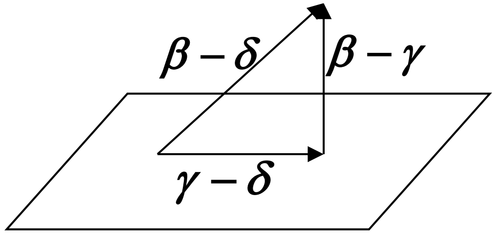
(1) 固定向量 $\alpha$，如果与子空间 $W$ 中每个向量垂直，

称 $\alpha$ 垂直于子空间 $W$ 记 $\alpha \perp W$.

如果 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$，则

$$\alpha \perp W \Leftrightarrow \alpha \perp \alpha_i, i = 1, 2, \cdots, k.$$

(2) 向量到子空间中的各向量的距离以垂线为最短.




如图示意，对给定 $\beta$，设 $\gamma$ 是 $W$ 中的满足 $\beta-\gamma \perp W$ 的向量，要证明

对 $\forall\delta\in W$ 有 $|\beta-\gamma|\le|\beta-\delta|$ （1）

证明：$\beta-\delta=(\beta-\gamma)+(\gamma-\delta)$, 因 $W$ 是子空间,

$\gamma\in W,\delta\in W$， 则 $\gamma-\delta\in W$, 故 $\beta-\gamma\perp\gamma-\delta$

由勾股定理 $|\beta-\gamma|^2+|\gamma-\delta|^2=|\beta-\delta|^2$

即（1）成立.

## 四、 最小二乘问题

**1.问题提出**，实系数线性方程组

$$AX=b, A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times s}, b=\left[b_1,b_2,\cdots,b_n\right]' \qquad (2)$$

可能无解，即任意 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都可能使

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n-b_i\right)^2 \qquad (3)$$

不等于零，设法找实数组 $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0$ 使（3）最小

这样的 $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0$ 为方程组（2）的最小二乘解，

此问题叫最小二乘法问题.

## 2.问题的解决

在（1）之下再设

$$Y=\left[\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j,\sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_j,\cdots,\sum_{j=1}^{n}a_{nj}x_j,\right]'=AX \qquad （4）$$

用距离的概念，（3）就是 $|Y-B|^2$.

由（4）知

$$Y=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s, A=\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right]$$

找 $X$ 使（3）最小，等价于找子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

中向量 $Y$ 使 $B$ 到它的距离 $(|Y-B|)$ 比到 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

中其它向量的距离都短.

设 $C=B-Y=B-AX$，为此必 $C\perp L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

这等价于 $(C,\alpha_1)=(C,\alpha_2)=\cdots=(C,\alpha_s)=0,$ （5）

即 $\alpha_1'C=0,\alpha_2'C=0,\cdots,\alpha_s'C=0,$

这样（5）等价于 $A'\left(B-AX\right)=0$ 或 $A'AX=A'B$（6）

（6）就是最小二乘解所满足的代数方程.

例. 已知某种材料在生产过程中的废品率 $y$ 与某种化学成份 $x$ 有关. 下列表中记载了某工厂生产中 $y$ 与相应的 $x$ 的几次数值：

| $y(\%)$ | 1.00 | 0.9 | 0.9 | 0.81 | 0.60 | 0.56 | 0.35 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(\%)$ | 3.6 | 3.7 | 3.8 | 3.9 | 4.0 | 4.1 | 4.2 |

我们想找出 $y$ 对 $x$ 的一个近似公式.

解　把表中数值画出图来看，发现它的变化趋势近于一条直线.因此我们决定选取 $x$ 的一次式 $ax+b$ 来表达.当然最好能选到适当的 $a,b$ 使得下面的等式

$$3.6a+b-1.00=0,\quad 3.7a+b-0.9=0$$

$$3.8a+b-0.9=0,\quad 3.9a+b-0.81=0,$$

$$4.0a+b-0.60=0,\quad 4.1a+b-0.56=0,$$

$$4.2a+b-0.35=0$$

都成立.实际上是不可能的。任何 $a,b$ 代入上面各式都发生些误差.于是想找到 $a,b$ 使得上面各式的误差的平方和最小，即找 $a,b$ 使

$$(3.6a+b-1.00)^2+(3.7a+b-0.9)^2+(3.8a+b-0.9)^2$$
$$+(3.9a+b-0.81)^2+(4.0a+b-0.60)^2+(4.1a+b-0.56)^2$$
$$+(4.2a+b-0.35)^2$$

最小.易知

$$A=\begin{pmatrix}3.6 & 1\\ 3.7 & 1\\ 3.8 & 1\\ 3.9 & 1\\ 4.0 & 1\\ 4.1 & 1\\ 4.2 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1.00\\ 0.90\\ 0.90\\ 0.81\\ 0.60\\ 0.56\\ 0.35\end{pmatrix}$$

最小二乘解 $a,b$ 所满足的方程就是

$$A'A\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}-A'B=0,$$

即为

$$\begin{cases}106.75a+27.3b-19.675=0\\ 27.3a+7b-5.12=0\end{cases}$$

解得

$$a = -1.05, b = 4.81$$（取三位有效数字）.