提高题十　参考解答

一、填空题

1．设 L 是 xoy 平面上沿逆时针方向绕行的闭曲线，且 $\oint_L (x-2y)dx+(4x+3y)dy=9$，则 L 所围成的区域 D 的面积为______________．$\dfrac{3}{2}$

2．$\int_\Gamma x^3dx+3y^2dy+x^2ydz=$____$-\dfrac{39}{4}$____，其中$\Gamma$是从点 $A(1,\ 2,\ 3)$到点$O(0,\ 0,\ 0)$的直线段 AO．

3. 设 L 是圆周 $x^2+y^2=1$，取顺时针方向，则 $I_1=\oint_L x^6 ds$ 与 $I_2=\oint_L y^6 ds$ 的大小关系是 $\underline{\quad I_1=I_2 \quad}$.

4. 设 $P(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上有连续的一阶偏导数，又 Σ 是 Ω 的光滑边界曲面，取外侧，由 Gauss 公式

$$\oiint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \underline{\qquad\qquad}. \qquad \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dv$$

二、选择题

1．设 Σ 为 $z=2-x^2-y^2$ 在 xoy 平面上方的曲面，则 $\iint_{\Sigma} dS=$ （ D ）.

(A) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho$ (B) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho$

(C) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho$ (D) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho$

2．设Σ是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$,取外侧,则$\iint\limits_{\Sigma} zdzdy=$（$A$）.

(A) 0　（B）$\frac{4}{3}\pi a^3$　（C）$4\pi a^3$　（D）$\frac{1}{2}\pi a^4$

3．设曲面Σ为$z=0$, $|x|\le 1$, $|y|\le 1$，取下侧，D为平面区域$|x|\le 1$, $|y|\le 1$，则$\iint\limits_{\Sigma} dxdy=$（ C ）.

（A）1　（B）$\iint\limits_{D} dxdy$　（C）$-\iint\limits_{D} dxdy$　（D）0

4．设曲线积分$\int_C xy^2dx+y\varphi(x)dy$与路径无关,其中$\varphi(x)$具有连续的导函数,且$\varphi(0)=0$,则$\int_{(0,\,0)}^{(1,\,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy=$（$B$）.

（A）$\frac{3}{8}$　（B）$\frac{1}{2}$　（C）$\frac{3}{4}$　（D）1

三、计算

1．计算$\int_L (6x^2-5y^2)dx$，设 L 为$x^2=2y$从$O(0,\ 0)$到$A(2,\ 2)$的弧段.

解：原式$=\int_0^2 (6x^2-5\cdot\frac{x^4}{4})dx=8$

2．计算 $\int_L (3x+2y)dx-(x-4y)dy$，$L$为

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ 取逆时针方向.

解: 令$x=a\cos\theta, y=b\sin\theta.$　　原式$=-3\pi ab$

或$=\iint\limits_D (-3)d\sigma=-3\pi ab$（格林公式）

3. 计算 $\iint_{\Sigma} z^2 dS$, Σ为柱面 $x^2+y^2=4,\ \ 0\le z\le 6$.

解曲面$\Sum$在yoz面上的投影区域 $D_{yz}: -2\le y\le 2, 0\le z\le 6$

$$x=\sqrt{4-y^2}, \sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}=\frac{2}{\sqrt{4-y^2}},$$ 由对称性

$$\text{原式}=2\iint_{yz} z^2\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}dydz=288\pi$$

4．验证 $(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$ 是全微分，并求其一个原函数.

解：$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y-2y\sin x;$

$$u(x,y)=\int_0^x 2xdx+\int_0^y(2y\cos x-x^2\sin y)dx$$

$$=x^2\cos y+y^2\cos x$$ （曲线积分法）

5. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2-yz)dydz+(y^2-zx)dzdx+2zdxdy$，$\Sigma$是 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=0$ 所截部分的外侧.

解： 补$\sum: z=0(x^2+y^2\le 1)$取上侧,

$$Ge=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_{z=0}}-\iint\limits_{\Sigma_{z=0}}=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2)dxdydz-0$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{1-r}2(\cos\theta+\sin\theta+1)dz=\frac{2}{3}\pi$$

6. 从过点$O(0,\ 0)$和$A(\pi,\ 0)$的曲线族$y=a\sin x(a>0)$中求出一条曲线 L 使沿该曲线从 O 到 A 的曲线积分 $\int_{OA}(1+y^3)dx+(2x+y)dy$值最小.

解：$\int_{OA}(1+y^3)dx+(2x+y)$

$$=\int_0^{\pi}[(1+a^3\sin^3 x)+(2x+a\sin x)a\cos x]$$

$$=\frac{4}{3}a^3-4a+\pi$$

设$f(a)=\frac{4}{3}a^3-4a+\pi$；　令$f'(a)=4a^2-4=0$

得$a=1$，又$f''(1)=8>0$，$\therefore\ f(1)=\pi-\frac{8}{3}$为极小值．

即原积分值最小$\pi-\frac{8}{3}$

7. 已知 $f(x,y,z)$ 连续，Σ是平面 $x-y+z=1$在第四卦限的部分，取上侧，计算（提示：用两类曲面积分的关系）

$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dxdz+[f(x,y,z)+z]dxdy\cdot$$

解： Σ的法向量为$\{1,-1,1\}$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$Ge=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x-2f(x,y,z)-y+f(x,y,z)+z]dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}dxdy=\frac{1}{2}$$