《高等数学》第七单元测试卷参考解答

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1. 微分方程的阶是指微分方程中含有未知函数最高阶导数的阶数，因此该方程是<u> 三 </u>阶微分方程.

2．设曲线为 $y=y(x)$，则由题意有：$\underline{y'\dfrac{y}{x}=-1}$即为所求.

3. 对 $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$ 两边求导得 $f'(x)=2f(x)$，解此微分方程得 $\ln f(x)=2x+C$，即 $f(x)=Ce^{2x}$，又由 $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$ 可知，$f(0)=\ln 2$，代入 $f(x)=Ce^{2x}$ 求得 $C=\ln 2$，从而 $f(x)=\underline{\ln 2\cdot e^{2x}}$.

4．该方程为二阶常系数线性齐次微分方程，其特征方程为 $r^2+r-2=0$，解得特征根 $r_1=1, r_2=-2$，从而通解为 $y=\underline{c_1e^x+c_2e^{-2x}}$.

5．以 $r_1=r_2=2$ 为根的一元二次方程是 $r^2-4r+4=0$，从而对应的二阶常系数线性齐次微分方程是 $\underline{y''-4y'+4y=0}$.

6．（1）<u>错误</u>，因为 $y=C_1e^{x+c_2}$ 中的 C_1,C_2 不是相互独立的，事实上，$y=C_1e^{x+C_2}=C_1e^{C_2}e^x=Ce^x$，可见该解中只含有一个任意常数.

（2）<u>正确</u>，根据线性微分方程解的结构理论，由于 y_1,y_2 不相等，所以 y_1-y_2 线性无关且是对应齐次方程的解，从而 $C(y_1-y_2)$ 是对应齐次方程的通解，因此 $y=C(y_1-y_2)+y_2$ 就是该方程的通解.

7. 根据线性微分方程解的结构理论，$y=x-1$ 和 $y=x^2-1$ 是对应齐次线性微分方程的解，又这两个解是线性无关的，所以 $y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)$ 是对应齐次线性微分方程的通解，从而 $\underline{y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1}$ 是该非齐次线性微分方程的通解.

8．方程 $y''=\dfrac{2xy'}{1+x^2}$ 中不显含未知函数 y，因此作变量代换令 $y'=P(x)$，则 $y''=P'(x)$，

代入方程得 $P' = \dfrac{2xP}{1+x^2}$，变量分离法解此方程得 $P = C_1(1+x^2)$，即 $y' = C_1(1+x^2)$，代入初始条件 $y'\big|_{x=0} = 3$ 得 $C_1 = 3$，于是 $y' = 3(1+x^2)$，两边积分得 $y' = x^3 + 3x + C_2$，代入初始条件 $y\big|_{x=0} = 1$ 得 $C_2 = 1$，所以所求特解为 $y = \underline{x^3 + 3x + 1}$.

9．方程 $y''' = y''$ 是三阶常系数线性齐次微分方程，其特征方程为 $r^3 - r^2 = 0$，解得特征根 $r_1 = r_2 = 0, r_3 = 1$，从而通解为 $\underline{y = C_1 e^x + C_2 x + C_3}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1．选(A)；所谓微分方程的阶是指微分方程中含有未知函数最高阶导数的阶数，由此，(B)．(D)中方程是一阶微分方程，而(C)中的方程是三阶微分方程.

2．选(C)；由通解的定义，含有任意常数，且任意常数（相独立）的个数与方程的阶数相同的解称为通解，由此可见，(A)．(B)．(D)均不符合.

3．选(D)；按题意有 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{y}$，即 $ydy = -2xdx$，积分得 $\dfrac{1}{2}y^2 + x^2 = C$，可见，该曲线是椭圆.

4．选(B)；方程 $y' + 2y = 4x$ 为一阶线性微分方程，其通解

$$y = e^{-\int 2dx}\left(\int 4xe^{\int 2dx}dx + C\right) = 2x - 1 + Ce^{-2x}$$

由 $x = 0$ 时 $y = -1$ 知 $C = 0$，所以曲线为 $y = 2x - 1$，由此，当 $x = 1$ 时 $y = 1$.

5．选(C)；将 $y = -x\cos x$ 代入方程 $y' + P(x)y = x\sin x$，求出 $P(x) = -\dfrac{1}{x}$，于是方程通解为 $y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int x\sin x e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx + C\right) = x(-\cos x + C) = Cx - x\cos x$.

6．选(A)；由 $y = f(x)$ 为 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的解，得 $f''(x_0) - 2f'(x_0) + 4f(x_0) = 0$，即 $f''(x_0) = -4f(x_0) < 0$，由极值判定定理知，$f(x)$ 在 x_0 点处取得极大值.

7．选(C)；由线性方程解的结构定理，$y = C_1y_1 + C_2y_2$ 一定是方程的解，当 y_1 与 y_2 线性无关时 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 才是方程的通解.

8．选(B)；解方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 得其通解为 $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$，由 $y\big|_{x=0} = 0$ 得

$C_1=0$，由 $y'|_{x=0}=-2$ 得 $C_2=-1$，所以所求曲线为 $y=-e^x\sin 2x$.

9．选(D)；由特征方程 $r^2-2r=0$ 解得特征根 $r_1=0,r_2=2$，而 $x=xe^{0\cdot x}$，可见 $\lambda=0$ 是特征根单根，所以特解应设为 $y=x(ax+b)e^{0\cdot x}=ax^2+bx$.

10．选(C)；由特征方程 $r^2+4=0$ 解得特征根 $r_1=2i,r_2=-2i$，而 $\cos 2x=e^{0\cdot x}(\cos 2x+0\cdot\sin 2x)$，可见 $\lambda+\omega i=2i$ 是特征根，所以特解应设为 $y=xe^{0\cdot x}(a\cos 2x+b\sin 2x)=x(a\cos 2x+b\sin 2x)$.

三、求解下列微分方程（每小题 5 分，共 20 分）

1．$(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$；

解：变量分离得，$\dfrac{ydy}{y^2+1}=\dfrac{xdx}{x^2-1}$，

两边积分得，$\dfrac{1}{2}\ln(y^2+1)=\dfrac{1}{2}\ln|x^2-1|+\dfrac{1}{2}\ln|C|$，

从而方程通解为 $y^2+1=C(x^2-1)$.

2．$x\dfrac{dy}{dx}=y(\ln y-\ln x)$；

解：整理得，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$，可见该方程是齐次方程，

令 $\dfrac{y}{x}=u$，即 $y=xu$，则 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，代入方程得，$u+x\dfrac{du}{dx}=u\ln u$，

变量分离得，$\dfrac{du}{u(\ln u-1)}=\dfrac{dx}{x}$，积分得，$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln|C|$，

所以原方程的通解为 $\ln\dfrac{y}{x}-1=Cx$，或写为 $y=xe^{Cx+1}$.

3．$xy'+y=xe^x$；

解：整理得，$y'+\dfrac{1}{x}y=e^x$，可见该方程是一阶线性方程，利用公式得通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int e^x e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\int xe^x dx+C\right)=\frac{1}{x}(xe^x-e^x+C).$$

4． $y''+2y'+y=x\sin x$.

解：由特征方程 $r^2+2r+1=0$ 解得特征根 $r_1=r_2=-1$，所以对应齐次方程的通解为 $Y=(C_1x+C_2)e^{-x}$.

又因为 i 不是特征根，所以可设原方程的特解为 $y^*=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$，代入原方程并整理得：$a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2},c=0,d=\frac{1}{2},$， 即 $y^*=(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})\cos x+\frac{1}{2}\sin x$.

所以原方程的通解为 $y=(C_1x+C_2)e^{-x}+(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})\cos x+\frac{1}{2}\sin x$.

四、（6 分）设 $f(x)=x+\int_0^x f(u)du$， $f(x)$ 为可微函数，求 $f(x)$.

解：将 $f(x)=x+\int_0^x f(u)du$ 两边对 x 求导并整理得， $f'(x)-f(x)=1$，这是一阶线性微分方程，所以

$$f(x)=e^{\int dx}(\int e^{\int -1dx}dx+C)=e^x(\int e^{-x}dx+C)=e^x(-e^{-x}+C),$$

又由 $f(x)=x+\int_0^x f(u)du$ 可知 $f(0)=0$， 从而 $C=1$，

所以所求 $f(x)=e^x-1$.　　　　注：这类题不能只求通解，要确定 C

五、（6 分）设 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 都是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的特解，且 $\frac{y_1-y_2}{y_2-y_3}$ 不恒等于常数，证明 $y=(1+C_1)y_1+(C_2-C_1)y_2-C_2y_3$ 为方程的通解（其中 C_1,C_2 为任意常数）.

证明：因为 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 都是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的特解，

所以 y_1-y_2 和 y_2-y_3 都是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 对应齐次方程的解，

又因 $\frac{y_1-y_2}{y_2-y_3}$ 不恒等于常数，所以 y_1-y_2 和 y_2-y_3 线性无关，

从而对应齐次方程的通解为 $Y=C_1(y_1-y_2)+C_2(y_2-y_3)$，

所以原方程的通解为 $y=Y+y_1=C_1(y_1-y_2)+C_2(y_2-y_3)+y_1$，

即 $y=(1+C_1)y_1+(C_2-C_1)y_2-C_2y_3$.

注：本题只说是解，没有说明 y_1-y_2 和 y_2-y_3 线性无关，扣分很重。

六、（8 分）一质量为 m 的质点作直线运动，从速度等于零时刻起，有一个和时间成正比（比例系数为 k_1）的力作用在它上面，此外质点又受到阻力，阻力和速度成正比（比例系数为 k_2），试求此质点的速度和时间的关系.

解：设质点速度和时间的关系为 $v=v(t)$，则由题意有 $mv'=k_1t-k_2v,\ v(0)=0$，

整理得 $v'+\dfrac{k_2}{m}v=\dfrac{k_1}{m}t$，这是一阶线性方程，从而

$$v=e^{-\int\frac{k_2}{m}dt}\left(\int\frac{k_1t}{m}e^{\int\frac{k_2}{m}dt}dt+C\right)=e^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\int\frac{k_1t}{m}e^{\frac{k_2}{m}t}dt+C\right)=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{mk_1}{k_2^2}+Ce^{-\frac{k_2}{m}t},$$

由 $v(0)=0$ 得 $C=\dfrac{mk_1}{k_2^2}$，

所有所求 $v(t)=\dfrac{k_1}{k_2}t-\dfrac{mk_1}{k_2^2}+\dfrac{mk_1}{k_2^2}e^{-\frac{k_2}{m}t}$.