第三讲 多项式的最高公因式

一、公因式与最高公因式的定义

二、最高公因式的存在性与求法

三、思考题

一、公因式、最高公因式

1．公因式： $f(x)$、$g(x)\in P[x]$，若 $\varphi(x)\in P[x]$，

满足：$\varphi(x)\,|\,f(x)$ 且 $\varphi(x)\,|\,g(x)$，

则称 $\varphi(x)$为 $f(x)$、$g(x)$ 的**公因式**.

2．最高公因式： $f(x)$、$g(x)\in P[x]$，若 $d(x)\in P[x]$

满足：i) $d(x)\,|\,f(x)$，$d(x)\,|\,g(x)$；

ii) 若 $\varphi(x)\in P[x]$，$\varphi(x)\,|\,f(x)$且$\varphi(x)\,|\,g(x)$，则

$\varphi(x)\,|\,d(x)$.

则称 $d(x)$ 为 $f(x)$、$g(x)$的**最高公因式（也称为最大公因式）**.

注：① $f(x)$、$g(x)$的首项系数为1的最高公因式记作：

$(f(x)、g(x))$.

② $\forall f(x)\in P[x]$，$f(x)$ 是 $f(x)$ 与零多项式0的最高公因式.

③ 两个零多项式的最高公因式为0.

若 $f(x), g(x)$ 不全为零，则 $(f(x), g(x))\neq 0$.

④ 最高公因式不是唯一的，但首项系数为1的最大公因式是唯一的.（若 $d_1(x)$、$d_2(x)$ 为 $f(x)$、$g(x)$ 的最大公因式，则 $d_1(x)=cd_2(x)$，c为非零常数.）

二、最高公因式的存在性与求法

引理： 若等式 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 成立，则 $f(x)$、$g(x)$ 与 $g(x)$、$r(x)$ 有相同的公因式，从而

$$(f(x),g(x))=(g(x),f(x))\,.$$

定理2 对 $\forall f(x)$、$g(x)\in P[x]$，在 $P[x]$ 中存在一个最大公因式 $d(x)$，且 $d(x)$ 可表成 $f(x)$、$g(x)$ 的一个组合，即 $\exists u(x)$、$v(x)\in P[x]$，使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

证： 若 $f(x)$、$g(x)$有一为0，如 $g(x)=0$，则 $f(x)$

就是一个最大公因式．且 $f(x)=1\cdot f(x)+0\cdot g(x)$.

考虑一般情形：$f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$,

用 $g(x)$ 除 $f(x)$ 得：

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$$

其中 $\partial(r_1(x))<\partial(g(x))$ 或 $r_1(x)=0$.

若 $r_1(x)\neq 0$，用 $r_1(x)$ 除 $g(x)$，得：

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)$$

其中 $\partial(r_2(x)) < \partial(r_1(x))$ 或 $r_2(x) = 0$.

若 $r_2(x) \neq 0$ ，用 $r_2(x)$ 除 $r_1(x)$ ，得

$$r_1(x) = q_3(x) r_2(x) + r_3(x), \qquad \cdots\cdots$$

如此辗转下去，显然，所得余式的次数不断降低，

即 $\quad \partial(g(x)) > \partial(r_1(x)) > \partial(r_2(x)) > \cdots\cdots$

因此，有限次后，必然有余式为0．设

$$r_{s+1}(x) = 0.$$

于是我们有一串等式

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$$

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)$$

$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{\mathrm{i}-2}(x)=q_{\mathrm{i}}(x)r_{\mathrm{i}\text{-}1}(x)+r_{\mathrm{i}}(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{\mathrm{s}-3}(x)=q_{\mathrm{s}-1}(x)r_{\mathrm{s}-2}(x)+r_{\mathrm{s}-1}(x)$$

$$r_{\mathrm{s}-2}(x)=q_{\mathrm{s}}(x)r_{\mathrm{s}-1}(x)+r_{\mathrm{s}}(x)$$

$$r_{\mathrm{s}-1}(x)=q_{\mathrm{s}+1}(x)r_{\mathrm{s}}(x)+0$$

从而有 $(f(x), g(x))=(g(x), r_1(x))$

$$=(r_1(x), r_2(x))$$

$$=\cdots$$

$$=(r_{s-1}(x), r_s(x))$$

$$=(r_s(x),0)$$

再由上面倒数第二个式子开始往回迭代，逐个消去

$r_{s-1}(x),\cdots,r_1(x)$ 再并项就得到

$$r_s(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

说明:

① 定理 2 中用来求最大公因式的方法，通常称为**辗转相除法（也称欧几里德算法）.**

② 定理 2 中最大公因式 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$ 中的 $u(x)$、$v(x)$ 不唯一.

③ 对于 $d(x), f(x), g(x)\in P[x]$, $\exists u(x), v(x)\in P[x]$, 使 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$, 但是 $d(x)$未必是 $f(x), g(x)$的最大公因式.

如： $f(x)=x^2-1$, $g(x)=1$ ，则 $(f(x)、g(x))=1.$

取 $u(x)=-1,\ v(x)=x^2$ ，有 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1,$

取 $u(x)=0,\ v(x)=1$ ，也有 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1,$

取$u(x)=-2, v(x)=2x^2-1$, 也有$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$

事实上, 若 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$, 则对 $\forall h(x)$,

$$[u(x)-h(x)\mathrm{g}(x)]f(x)+[v(x)+h(x)f(x)]\mathrm{g}(x)=d(x)$$

成立.

④ 若 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，且

$$d(x)\,|\,f(x),\quad d(x)\,|\,g(x)$$

则 $d(x)$ 为 $f(x)$、$g(x)$ 的最公因式.

证： 设 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$、$g(x)$ 的任一公因式，则

$$\varphi(x)\,|\,f(x),\quad \varphi(x)\,|\,g(x),$$

从而 $\varphi(x)\,|\,(u(x)f(x)+v(x)g(x),$

即 $\varphi(x)\,|\,d(x).$

$\therefore$ $d(x)$为 $f(x)$、$g(x)$ 的最大公因式.

例1　$f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2,$

$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2,$

求 $(f(x)$、$g(x))$，并求 $u(x),v(x)$ 使

$$(f(x)、g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

解:

$$\begin{array}{r|l|l|l}
 & \qquad g(x) & \qquad f(x) & \\
x+1 & x^4+x^3-x^2-2x-2 & x^4+2x^3-x^2-4x-2 & 1 \\
=q_2(x) & x^4 \quad -2x^2 & x^4+x^3-x^2-2x-2 & =q_1(x) \\ \cline{2-3}
 & \quad x^3+x^2-2x-2 & r_1(x)=x^3 \quad -2x & x \\
 & \quad x^3 \quad -2x & \qquad x^3 \quad -2x & =q_3(x) \\ \cline{2-3}
 & r_2(x)= x^2 \quad -2 & \qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$$\therefore \quad (f(x), g(x)) = x^2-2$$

且由 $\begin{cases} f(x) = g(x) + r_1(x) \\ g(x) = (x+1)r_1(x) + r_2(x) \end{cases}$，得

$$x^2-2 = -(x+1)f(x) + (x+2)g(x).$$

注:

若仅求 $(f(x)、g(x))$，为了避免辗转相除时出现分数运算，可用一个数乘以除式或被除式(从一开始就可以)，这是因为 $f(x)$ 和 $cf(x)$ 具有完全相同的因式，即

$$(f(x),g(x))=(c_1f(x),g(x))$$

$$=(f(x),c_2g(x))=(c_1f(x),c_2g(x)),$$

c_1, c_2 为非零常数.

思考题

1. 设 $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$

$$g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$$

求 $(f(x)、g(x))$，并求 $u(x),v(x)$ 使

$$(f(x)、g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

2. 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$，$g(x)=x^3+tx+u$

的最高公因式是一个2次多项式，求 t, u 的值。