

《高等数学 (一)》 2018-2019 考试卷 A15

编辑整理: 死抠

一. 选择题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$ 为连续函数, 则 $a =$ ____
A. 任意 B. 0 C. 2 D. 1
2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f'(0) =$ ____
A. 1 B. -1 C. 0 D. 不存在
3. 函数 $f(x)$ 有连续二阶导数, 且 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} =$ ____
A. 不存在 B. 0 C. -1 D. -2
4. $\int \sec x \tan x \, dx =$ ____
A. $\tan x + C$ B. $\sec x + C$
C. $\arctan x + C$ D. $\operatorname{arccot} x + C$
5. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-2x} , 则 $f(x)$ 等于 ____
A. $-2e^{-2x}$ B. $-4e^{-2x}$ C. e^{-2x} D. $4e^{-2x}$
6. $\int \cos e^x \, de^x =$ ____
A. $\sin e^x + C$ B. $-\sin e^x + C$
C. $\arcsin e^x + C$ D. $-\arcsin e^x + C$
7. 若 $\int_0^1 (x + k) \, dx = 2$, 则 $k =$ ____
A. 0 B. 1 C. -1 D. $\frac{3}{2}$
8. 下列反常积分中收敛的是 ____
A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$ B. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx$
C. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x} \, dx$ D. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} \, dx$

二. 填空题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} =$ ____
2. $y = x^n$ (n 是正整数) 的 n 阶导数是 ____
3. 当 $a =$ ____ 时函数 $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取极大值
4. $\int \sec x (\sec x - \tan x) \, dx =$ ____

5. 经过点 $(1, 2)$ 且其切线的斜率为 $2x$ 的曲线方程是_____

6. 通过定积分的几何意义知 $\int_{-1}^1 (1+x)\sqrt{1-x^2} \, dx =$ _____

7. 比较大小 $\int_1^3 x^2 \, dx$ _____ $\int_1^3 x^3 \, dx$

8. 由 $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 0$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得立体的体积用定积分表示为_____

三. 大题

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x+3}$

2. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{-t^2} \, dt}{x^3}$

3. 设 $y = \sin(x^2)$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

4. 计算不定积分 $\int \sin^3 x \, dx$

5. 计算不定积分 $\int x \ln x \, dx$

6. 计算广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} \, dx$

7. 计算 $\int_1^5 \frac{\sqrt{u-1}}{u} \, du$

8. 已知

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于1的奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \end{cases},$$

求星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ 围成的平面图形的面积, 其中 $a > 0$

9. 设 $f(x), g(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续, 证明在 (a, b) 内至少存在一个 ξ , 使得

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) \, dx = g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) \, dx$$

(提示: 辅助函数 $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt \int_x^b g(t) \, dt$)