## 三、典型例题

**例1** 一个工人生产了3个零件,以事件 $A_i$ 表示他生产的第 $i$ 个零件是合格品 $(i=1,2,3)$, 试用 $A_i$ $(i=1,2,3)$ 表示下列事件:

(1) 只有第一个零件是合格品 $(B_1)$;

(2) 三个零件中只有一个零件是合格品 $(B_2)$;

(3) 第一个是合格品,但后两个零件中至少有一个次品 $(B_3)$;

(4) 三个零件中最多只有两个合格品 $(B_4)$;

(5) 三个零件都是次品 $(B_5)$.

**解** (1) $B_1 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$;

(2) $B_2 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \quad \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \quad \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$;

(3) $B_3 = A_1(\overline{A_2} \quad \overline{A_3})$;

(4) $B_4 = \overline{A_1A_2A_3}$, 或 $B_4 = \overline{A_1} \quad \overline{A_2} \quad \overline{A_3}$;

(5) $B_5 = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, 或 $B_5 = \overline{A_1 \quad A_2 \quad A_3}$.

说明 **一个事件往往有多个等价的表达方式.**

**例2** 设随机事件 $A,B,C$ 满足 $C \supset AB, \overline{C} \supset \overline{A}\,\overline{B}$. 证明: $AC = C\overline{B} \quad AB$.

**证明** 由于 $\overline{C} \supset \overline{A}\,\overline{B}$, 故 $C \subset A \quad B$,

从而 $C\overline{B} \subset (A \quad B)\overline{B} = A\overline{B}$,

$CA\overline{B} \subset C\overline{B} \quad A\overline{B} = C\overline{B}$,

$ACB = C \quad AB = AB$,

故 $AC = AC(B \quad \overline{B}) = ACB \quad AC\overline{B}$

$= C\overline{B} \quad AB$.

**例3** 假设目标出现在射程之内的概率为0.7,这时射击命中目标的概率为0.6,试求两次独立射击至少有一次命中目标的概率.

[思路] 引进事件

$A = \{$目标进入射程$\}$;

$B_i = \{$第$i$次射击命中目标$\}, i = 1,2.$

故所求概率为事件 $B = B_1 \quad B_2$ 的概率,由于目标不在射程之内是不可能命中目标的,因此,可利用全概率公式来求解.

**解** 由题意知

$P(A) = 0.7$, $P(B_i|A) = 0.6$, $(i = 1,2)$

由于 $P(\overline{A}B) = 0$, 因为 $\overline{A}$ 表示目标不在射程之内,因此由全概率公式,有

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = P(AB)$$
$$= P(A)P(B|A)$$
$$= P(A)P(B_1 \quad B_2|A),$$

由题意知 $B_1$ 与 $B_2$ 相互独立,

从而 $P(B_1B_2|A) = P(B_1|A)P(B_2|A)$

$= 0.6 \times 0.6 = 0.36.$

由加法公式得

$$P(B_1 \quad B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A)$$
$$= 0.6 + 0.6 - 0.36$$
$$= 0.84.$$

故 $P(B) = P(A) = P(B_1 \quad B_2|A)$

$= 0.7 \times 0.84 = 0.588.$

**例4** 设有来自三个地区的各10名、15名和25名考生的报名表,其中女生的报名表分别为3份、7份和5份,随机地取一个地区的报名表,从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 $p$;

(2) 已知后抽到的一份表是男生表,求先抽到的一份是女生表的概率 $p$.

[思路] 由于抽到的表与来自哪个地区有关,故此题要用全概率公式来讨论.

**解** 记 $H_i=\{$抽到地区考生的报名表$\}$, $i=1,2,3;$

$A_j=\{$第 $j$ 次抽到报名表是男生的 $\}$, $j=1,2,$

则有 $P(H_i)=\dfrac{1}{3}(i=1,2,3);\quad P(A_1|H_1)=\dfrac{7}{10};$

$$P(A_1|H_2)=\frac{8}{15};\quad P(A_1|H_3)=\frac{20}{25}.$$

(1) 由全概率公式知

$$p=P(\overline{A_1})=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A_1}|H_i)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}.$$

(2) $q=P(\overline{A_1}|A_2)=\dfrac{P(\overline{A_1}A_2)}{P(A_2)}$, 由全概率公式得

$$P(\overline{A_1}A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A_1}A_2|H_i)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}P(\overline{A_1}A_2|H_i),$$

又因为 $P(\overline{A_1}A_2|H_1)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{9}=\dfrac{7}{30},$

$$P(\overline{A_1}A_2|H_2)=\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}=\frac{8}{30},$$

$$P(\overline{A_1}A_2|H_3)=\frac{5}{25}\times\frac{20}{24}=\frac{5}{30}.$$

所以 $P(\overline{A_1}A_2)=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{7}{30}+\dfrac{8}{30}+\dfrac{5}{30}\right]=\dfrac{2}{9},$

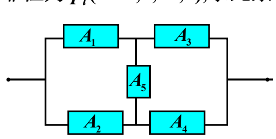
而 $P(A_2)=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A_2|H_i)$

$$=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}P(A_2|H_i)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90},$$

所以 $q=\dfrac{P(\overline{A_1}A_2)}{P(A_2)}=\dfrac{2}{9}\Big/\dfrac{61}{90}=\dfrac{20}{61}.$

**例5** 桥式电路系统由5个元件组成(如图所示),设元件$A_i$的可靠性为 $p_i(i=1,2,\ \ ,5)$,求此系统的可靠性.




[思路] 为了求系统的可靠性,分两种情况讨论:

(1) 当 $A_5$ 工作正常时,相当于 $A_1,A_2$ 并联,与 $A_3,A_4$ 并联电路再串联而得.

(2) 当 $A_5$ 失效时,相当于 $A_1,A_3$ 串联再与 $A_2,A_4$ 串联电路进行并联而得.

**解** 记 $B_i=\{$元件$A_i$正常工作$\}$, $i=1,2,\ \ ,5,$

$C=\{$系统正常工作$\}$.

从而由全概率公式知

$$P(C)=P(B_5)P(C|B_5)+P(\overline{B_5})P(C|\overline{B_5}).$$

而 $P(C|B_5)=P[(B_1\ \ B_2)\ \ (B_3\ \ B_4)]$

$$=[1-(1-p_1)(1-p_2)][1-(1-p_3)(1-p_4)],$$

$$P(C\overline{B}_5)=P(B_1B_3\quad B_2B_4)$$

$$=1-(1-p_1p_3)(1-p_2p_4),$$

所以

$$P(C)=p_5[1-(1-p_1)(1-p_2)][1-(1-p_3)(1-p_4)]$$

$$+(1-p_5)[1-(1-p_1p_3)(1-p_2p_4)].$$

# 三、典型例题

**例1** 已知离散型随机变量 $X$ 的可能取值为 $-2,0,$ $2,\sqrt{5}$,相应的概率依次为 $\frac{1}{a},\frac{3}{2a},\frac{5}{4a},\frac{7}{8a}$,试求概率 $P\{|X|\le 2|X\ge 0\}$.

[思路] 首先根据概率分布的性质求出常数 *a* 的

值, 然后确定概率分布律的具体形式,最后再计

算条件概率.

**解** 利用概率分布律的性质 $\sum_i p_i=1,$

有 $1=\sum_i p_i=\frac{1}{a}+\frac{3}{2a}+\frac{5}{4a}+\frac{7}{8a}=\frac{37}{8a},$

故 $a=\frac{37}{8},$

因此 $X$ 的分布律为

| $X$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $\sqrt{5}$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{8}{37}$ | $\frac{12}{37}$ | $\frac{10}{37}$ | $\frac{7}{37}$ |

从而

$$P\{|X|\le 2|X\ge 0\}=\frac{P\{|X|\le 2,X\ge 0\}}{P\{X\ge 0\}}$$

$$=\frac{P\{X=0\}+P\{X=2\}}{P\{X=0\}+P\{X=2\}+P\{X=\sqrt{5}\}}$$

$$=\frac{22}{29}.$$

**例2** 设离散型随机变量 $X$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a, & -1\le x<1,\\ \frac{2}{3}-a, & 1\le x<2,\\ a+b, & x\ge 2.\end{cases}$$

且 $P\{X=2\}=\frac{1}{2}$,试确定常数 $a,b$,并求 $X$ 的分布律.

[思路] 首先利用分布函数的性质求出常数 *a, b*,

再用已确定的分布函数来求分布律.

**解** 利用分布函数 $F(x)$ 的性质:

$$P\{X=x_i\}=F(x_i)-F(x_i-0),$$

$$F(+\infty)=1,$$

知 $\frac{1}{2}=P\{X=2\}$

$$=(a+b)-(\frac{2}{3}-a)$$

$$=2a+b-\frac{2}{3},$$

且 $a+b=1.$

由此解得 $a=\frac{1}{6},b=\frac{5}{6}.$

因此有 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1}{6}, & -1\le x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$

从而 $X$ 的分布律为

| $X$ | $-1$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |

**例3** 已知随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=Ae^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty.$$

(1) 求系数 $A$;

(2) 求 $X$ 的分布函数 $F(x)$;

(3) 求 $Y=X^2$ 的概率密度.

**解** (1) 由概率密度的性质,有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}\,dx=2\int_{0}^{+\infty}Ae^{-x}\,dx$$

$$=2A,$$

故 $A=\frac{1}{2}$.

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx$,

当 $x<0$ 时,有 $F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{x}\,dx=\frac{1}{2}e^{x}$;

当 $x\ge 0$ 时,有 $F(x)=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{0}e^{x}\,dx+\int_{0}^{x}e^{-x}\,dx]=1-\frac{1}{2}e^{-x}$;

所以 $X$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

(3) 由于 $Y=X^2\ge 0$,

故当 $y\le 0$ 时,有 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0$;

当 $y>0$ 时,有

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$$

$$=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}e^{-x}\,dx,$$

由于 $F_Y'(y)=f_Y(y)$,

故当 $y>0$ 时,有

$$\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dy}[\int_{0}^{\sqrt{y}}e^{-x}\,dx]$$

$$=e^{-\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}},$$

从而, $Y$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

**例4** 设某城市成年男子的身高 $X\sim N(170,6^2)$ (单位: cm)

(1) 问应如何设计公共汽车车门的高度,使男子与车门顶碰头的几率小于 0.01?

(2) 若车门高为 182 cm,求 100 个成年男子与车门顶碰头的人数不多于 2 的概率.

[思路] 设车门高度为 $l$ cm, 那么按设计要求应有 $P\{X>l\}<0.01$,确定 $l$. 第二问首先要求出 100名男子中身高超过 182cm 的人数的分布律,然后用此分布律,求其不超过2的概率.

**解** (1)由题设知 $X \sim N(170,6^2)$,

$$P\{X>l\}=1-P\{X\le l\}$$

$$=1-P\left\{\frac{X-170}{6}\le\frac{l-170}{6}\right\}$$

$$=1-\Phi\left(\frac{l-170}{6}\right)<0.01,$$

即 $\Phi\left(\frac{l-170}{6}\right)>0.99.$ 查表得 $\frac{l-170}{6}>2.33,$

故 $l>183.98(\text{cm}).$

(2) 设任一男子身高超过 182cm 的概率为 $p$.

则 $p=P\{X>182\}=P\left\{\frac{X-170}{6}>\frac{182-170}{6}\right\}$

$$=1-\Phi(2)=0.0228.$$

设 $Y$ 为100 个男子中身高超过 182cm 的人数,

则 $Y\sim B(100,\ 0.0228)$, 其中

$$P\{Y=k\}=\binom{100}{k}\times0.0228^k\times0.9772^{100-k},$$
$$k=0,1,\quad,100.$$

所求概率为

$$P\{Y\le2\}=P\{Y=0\}+P\{Y=1\}+P\{Y=2\},$$

由于 $n=100$ 较大, $p=0.0228$ 较小,故可用泊松分布来计算,其中 $\lambda=np=2.28,$

从而

$$P\{Y\le2\}=\frac{2.28^0\mathrm{e}^{-2.28}}{0!}+\frac{2.28\mathrm{e}^{-2.28}}{1!}+\frac{2.28^2\mathrm{e}^{-2.28}}{2!}$$

$$=0.6013.$$

**例5** 设某仪器上装有三只独立工作的同型号电子元件,其寿命(单位:小时)都服从同一指数分布,其中参数 $\lambda=1/600$,试求在仪器使用的最初200小时内,至少有一只元件损坏的概率$a$.

[思路] 以 $A_i(i=1,2,3)$ 分别表示三个电子元件“在使用的最初 200 小时内损坏”的事件,

于是 $a=P\{A_1\quad A_2\quad A_3\}=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$

$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}),$$

由三个电子元件服从同一分布,

令 $p=P(A_i)\quad(i=1,2,3),$

由指数分布求出 $p$ ,便可得解.

**解** 用 $X_i\ (i=1,2,3)$ 表示第 $i$ 个元件的使用寿命,由题设知 $X_i\ (i=1,2,3)$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{600}\mathrm{e}^{-\frac{x}{600}}, & x>0,\\ 0, & x\le0.\end{cases}$$

从而

$$P\{X_i>200\}=\int_{200}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{200}^{+\infty}\frac{1}{600}\mathrm{e}^{-\frac{x}{600}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}},$$
$$i=1,2,3.$$

又 $P\{X_i>200\}=P(\overline{A_i})=p,$

因此所求概率为

$$\alpha=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

$$=1-p^3=1-(\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}})^3$$

$$=1-\mathrm{e}^{-1}.$$

备用例题

## 三、典型例题

**例1** 在10件产品中有2件一等品、7件二等品和一件次品，从10件产品中不放回地抽取3件，用 $X$ 表示其中的一等品数，$Y$ 表示其中的二等品数. 求：

(1) $(X,Y)$ 的联合分布律;

(2) $X,Y$ 的边缘分布律;

(3) $X$ 和 $Y$ 是否独立;

(4) 在 $X=0$ 的条件下，$Y$ 的条件分布律.

**解** 由题设知 $X$ 只能取 0, 1, 2,

$Y$ 只能取 0, 1, 2, 3.

当 $i+j<2$ 或 $i+j>3$ 时，有

$$P\{X=i,Y=j\}=0.$$

当 $2 \le i+j \le 3$ 时，由古典概率知

$$P\{X=i,Y=j\}=\binom{2}{i}\binom{7}{j}\binom{1}{3-i-j}\Big/\binom{10}{3},$$

$$(i=0,1,2,\ j=0,1,2,3).$$

因此的 $(X,Y)$ 的分布律为

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $\frac{21}{120}$ | $\frac{35}{120}$ |
| 1 | 0 | $\frac{14}{120}$ | $\frac{42}{120}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{121}$ | $\frac{7}{120}$ | 0 | 0 |

(2) $X,Y$ 的边缘分布律为

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $p_{i\bullet}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $\frac{21}{120}$ | $\frac{35}{120}$ | $\frac{56}{120}$ |
| 1 | 0 | $\frac{14}{120}$ | $\frac{42}{120}$ | 0 | $\frac{56}{120}$ |
| 2 | $\frac{1}{120}$ | $\frac{7}{120}$ | 0 | 0 | $\frac{8}{120}$ |
| $p_{\bullet j}$ | $\frac{1}{120}$ | $\frac{21}{120}$ | $\frac{63}{120}$ | $\frac{35}{120}$ | 1 |

(3) 因为 $P\{X=0,Y=0\}=0,$

$$P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{56}{120}\times\frac{1}{120}\neq 0,$$

所以 $X$ 与 $Y$ 不相互独立.

(4) 在 $X=0$ 的条件下，$Y$ 的条件概率为

$$P\{Y=j|X=0\}=\frac{P\{X=0,Y=j\}}{P\{X=0\}},\quad j=0,1,2,3.$$

因此 $Y$ 的条件分布律为

| $Y=j\|X=0$ | 2 | 3 |
|---|---|---|
| $P$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{8}$ |

**例2** 设 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4$独立同分布,且

$P\{\xi_i=0\}=0.6,\quad P\{\xi_i=1\}=0.4,\quad i=1,2,3,4.$

求:(1) 行列式 $\xi=\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \xi_3 & \xi_4\end{vmatrix}$ 的概率分布;

(2) 方程组 $\begin{cases}\xi_1x_1+\xi_2x_2=0\\ \xi_3x_1+\xi_4x_2=0\end{cases}$ 只有零解的概率.

**[思路]** 要求行列式 $\xi$ 的分布律,先要将 $\xi$ 的所有可能值找到,然后利用独立性将取这些值的概率计算出来，而第二问就是求系数行列式 $\xi\neq0$ 的概率.

**解** (1) 记 $\eta_1=\xi_1\xi_4,\eta_1=\xi_2\xi_3,$

则 $\xi=\xi_1\xi_4-\xi_2\xi_3=\eta_1-\eta_2,$

由于 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4$相互独立,故$\eta_1,\eta_2$也相互独立,

且$\eta_1,\eta_2$都只能取 0, 1 两个值,

而 $P\{\eta_1=1\}=P\{\eta_2=1\}=P\{\xi_2=1,\xi_3=1\}$

$=P\{\xi_2=1\}P\{\xi_3=1\}=0.16,$

$P\{\eta_1=0\}=P\{\eta_2=0\}=1-0.16=0.84.$

随机变量 $\xi=\eta_1-\eta_2$ 有3个可能取值 $-1, 0, 1.$

$P\{\xi=-1\}=P\{\eta_1=0,\eta_2=1\}=P\{\eta_1=0\}P\{\eta_2=1\}$

$=0.84\times0.16=0.1344,$

$P\{\xi=1\}=P\{\eta_1=1,\eta_2=0\}$

$=P\{\eta_1=1\}P\{\eta_2=0\}$

$=0.16\times0.84=0.1344,$

$P\{\xi=0\}=1-P\{\xi=-1\}-P\{\xi=1\}=0.7312.$

于是行列式 $\xi$ 的分布律为

| $\xi$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.1344 | 0.7312 | 0.1344 |

(2) 由于齐次方程

$\begin{cases}\xi_1x_1+\xi_2x_2=0\\ \xi_3x_1+\xi_4x_2=0\end{cases}$

只有零解的充要条件是系数行列式不为0, 等价于

$P\{\xi\neq0\}=1-P\{\xi=0\}=1-0.7312=0.2688.$

**例3** 设随机变量 $(X,Y)$ 服从

$D=\{(x,y)|y\geq0,\ x^2+y^2\leq1\}$ 上的均匀分布, 定义随机变量 $U,V$ 如下

$$U=\begin{cases}0, & X<0,\\ 1, & 0\leq X<Y,\\ 2, & X\geq Y.\end{cases}\quad V=\begin{cases}0, & X\geq\sqrt{3}Y,\\ 1, & X<\sqrt{3}Y.\end{cases}$$

求 $(U,V)$ 的联合概率分布,并计算 $P\{UV\neq0\}$.

**[思路]** 写出 $(U,V)$ 的所有可能取值,并利用均匀分布的特征计算其取值的概率.

**解** 由题设知 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

$(U,V)$ 有6个可能取值:

(0,0) (0,1) (1,0) (1,1) (2,0) (2,1)

$P=\{U=0,V=0\}=P(\varnothing)=0,$

$P=\{U=1,V=0\}=P(\varnothing)=0,$

$P=\{U=1,V=1\}=P\{0\leq X<Y,X<\sqrt{3}Y\}$

$$= P\{0 \le X < Y\} = \iint_{0 \le x < y} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= \iint_{0 \le x < y} \frac{2}{\pi} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{4}.$$

$$P = \{U = 0, V = 1\} = P\{X < 0, X < \sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{X < 0\} = \frac{1}{2},$$

$$P = \{U = 2, V = 0\} = P\{Y \le X, X \ge \sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{X \ge \sqrt{3}Y\} = \frac{1}{6},$$

$$P = \{U = 2, V = 1\} = P\{Y \le X, X < \sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{Y \le X < \sqrt{3}Y\} = \frac{1}{12}.$$

所以 $(U,V)$ 的联合概率分布为

| $V \backslash U$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{12}$ |

从而

$$P\{UV \ne 0\}$$

$$= P\{U = 1, V = 1\} + P\{U = 2, V = 1\}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

**例4** 设随机变量 $(X,Y)$ 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} cxe^{-y}, & 0 < x < y < +\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求常数 $c$;

(2) $X$ 与 $Y$ 是否独立?为什么?

(3) 求 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$;

(4) 求 $P\{X < 1 | Y < 2\}, P\{X < 1 | Y = 2\}$;

(5) 求 $(X,Y)$ 的联合分布函数;

(6) 求 $Z = X + Y$ 的密度函数;

(7) 求 $P\{X + Y < 1\}$; (8) 求 $P\{\min(X,Y) < 1\}$.

**解** (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$, 得

$$1 = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}y \int_0^y cxe^{-y} \mathrm{d}x = \frac{c}{2}\int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} \mathrm{d}y = \frac{c}{2}\Gamma(3) = c,$$

$\Rightarrow c = 1.$

$$(2)\quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_x^{+\infty} xe^{-y}\mathrm{d}y, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \int_0^y xe^{-y}\mathrm{d}x, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} y^2 e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

由于在 $0 < x < y < +\infty$ 上, $f(x,y) \ne f_X(x) \cdot f_Y(y)$,
故 $X$ 与 $Y$ 不独立.

(3) $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$$=\begin{cases}\dfrac{2x}{y^2}, & 0<x<y<+\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\begin{cases}e^{x-y}, & 0<x<y<+\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(4) $P\{X<1|Y<2\}=\dfrac{P\{X<1,Y<2\}}{P\{Y<2\}}$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{2}f(x,y)\,dx\,dy}{\int_{-\infty}^{2}f_Y(y)\,dy}=\frac{\int_0^1 dx\int_x^2 xe^{-y}\,dy}{\int_0^2\frac{1}{2}y^2e^{-y}\,dy}$$

$$=\frac{1-2e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-2}}{1-5e^{-2}}.$$

又由条件密度的性质知

$$P\{X<1|Y=2\}=\int_{-\infty}^{1}f_{X|Y}(x|2)\,dx,$$

而 $f_{X|Y}(x|2)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

从而有

$$P\{X<1|Y=2\}=\int_0^1\frac{x}{2}dx=\frac{1}{4}.$$

(5) 由于 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$, 故有:

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时,有 $F(x,y)=0$.

当 $0\le y<x<+\infty$ 时, 有

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$

$$=\int_0^y dv\int_0^v ue^{-v}\,du=\frac{1}{2}\int_0^y v^2e^{-v}\,dv$$

$$=1-(\frac{y^2}{2}+y+1)e^{-y}.$$

当 $0\le x<y<+\infty$ 时, 有

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\int_0^x du\int_u^y ue^{-v}\,dv$$

$$=\int_0^x u(e^{-u}-e^{-y})\,du$$

$$=1-(x+1)e^{-x}-\frac{1}{2}x^2e^{-y}.$$

故得

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{ 或 }y<0,\\ 1-(\frac{y^2}{2}+y+1)e^{-y}, & 0\le y<x<\infty,\\ 1-(x+1)e^{-x}-\frac{1}{2}x^2e^{-y}, & 0\le x<y<\infty.\end{cases}$$

(6) 根据 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,dx$,

由于要被积函数 $f(x,z-x)$ 非零,只有当

$0<x<z-x$,即 $0<x<\dfrac{z}{2}$ 时，从而有:

当 $z<0$ 时, $f_Z(z)=0$;

当 $z\ge 0$ 时, $f_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}xe^{-(z-x)}\,dx$

$$=e^{-z}\int_0^{\frac{z}{2}}xe^{x}\,dx$$

$$=e^{-z}+(\frac{z}{2}-1)e^{-\frac{z}{2}};$$

因此 $f_Z(z)=\begin{cases}e^{-z}+\left(\dfrac{z}{2}-1\right)e^{-\frac{z}{2}} & z\ge 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$

(7) $P\{X+Y<1\}=\int_{-\infty}^{1} f_Z(z)\,\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1[\mathrm{e}^{-z}+(\frac{z}{2}-1)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}]\,\mathrm{d}z=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-1}.$$

(8) $P\{\min(X,Y)<1\}=1-P\{\min(X,Y)\geq 1\}$

$$=1-P\{X\geq 1,Y\geq 1\}$$

$$=1-\int_1^{+\infty}\mathrm{d}v\int_0^v u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}u$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}v^2\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v=1-\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1}.$$

**例5** 设随机变量 $(X,Y)$ 在矩形

$$G=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 1\}$$

上服从均匀分布，试求边长为 $X$ 和 $Y$ 的矩形面积 $S$ 的概率密度 $f(s)$.

**解** 由题设知二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 若\ (x,y)\in G,\\ 0, & 若\ (x,y)\notin G.\end{cases}$$

$S=X\cdot Y$，设 $F(s)=P\{S\leq s\}$ 为 $S$ 的分布函数，

则当 $s<0$ 时，$F(s)=P\{XY\leq s\}=0$，

当 $s\geq 2$ 时，$F(s)=P\{XY\leq s\}=1$，

当 $0\leq s<2$ 时，

$$F(s)=P\{S\leq s\}=P\{XY\leq s\}=1-P\{XY>s\}$$

$$=1-\iint_{xy>s}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1-\int_s^2\mathrm{d}x\int_{\frac{s}{x}}^1\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s).$$

故 $f(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln s), & 0\leq s<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

备用例题

# 三、典型例题

**例1** 设 $X$ 服从几何分布，它的分布律为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots,$$

求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

**解** $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}p$ （其中 $q=1-p$）

$$=p\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p},$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot q^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot q^{k-1}$$

$$=\frac{p(1+q)}{(1-q)^3}=\frac{1+q}{p^2},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$

**例2** 从数字0, 1, 2, …, $n$中任取两个不同的数字，求这两个数字之差的绝对值的数学期望 .

**解** 设 $X$ 为所选的两个数字之差的绝对值，

则 $X$ 的所有可能取值为 $1,2,3,\cdots,n$，

$$P\{X=1\}=n\Big/\binom{n+1}{2},\ P\{X=2\}=(n-1)\Big/\binom{n+1}{2},$$

一般的 $P\{X=k\}=(n-k+1)\Big/\binom{n+1}{2},\ k=1,2,\cdots,n.$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot(n-k+1)\Big/\binom{n+1}{2}=\frac{n+2}{3}.$$

**例3** 设随机变量 $X$ 取非负整数值 $n \geq 0$ 的概率为 $p_n = \dfrac{AB^n}{n!}$，已知 $E(X)=a$，求 $A$ 与 $B$ 的值.

**解** 因为 $p_n$ 是 $X$ 的分布列,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\{X=n\} = \sum_{n=0}^{\infty} A \cdot \frac{B^n}{n!} = Ae^B = 1, \quad 得 A = e^{-B},$$

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} nA \cdot \frac{B^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A \cdot B^n}{(n-1)!} = ABe^B = a,$$

因此 $A = e^{-a}, \quad B = a.$

**例4** 某银行开展定期定额有奖储蓄，定期一年，定额60元，按规定10000个户头中，头等奖一个，奖金500元；二等奖10个，各奖100元；三等奖100个，各奖10元；四等奖1000个，各奖2元. 某人买了五个户头，他期望得奖多少元？

**解** 因为任何一个户头获奖都是等可能的，先计算一个户头的得奖金数 $X$ 的期望.

分布列为

| $X$ | 500 | 100 | 10 | 2 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{10^4}$ | $\frac{1}{10^3}$ | $\frac{1}{10^2}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{8889}{10^4}$ |

$X$ 的数学期望为

$$E(X) = \frac{1}{10^4} \times 500 + \frac{1}{10^3} \times 100 + \frac{1}{10^2} \times 10 + \frac{1}{10} \times 2$$

$$= 0.45\,(元),$$

买五个户头的期望得奖金额为

$$E(5X) = 5E(X) = 5 \times 0.45 = 2.25\,(元).$$

**例5** 设随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2)^{\alpha}, & -1<\alpha<1, \\ 0, & 其他. \end{cases} \quad (x<0)$$

求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

**解** 因为 $f(x)$ 是偶函数,

所以 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} cx(1-x^2)^{\alpha}\mathrm{d}x = 0,$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2)$$

$$= \int_{-1}^{1} cx^2(1-x^2)^{\alpha}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{c}{2(\alpha+1)} x(1-x^2)^{\alpha+1}\Big|_{-1}^{1} + \frac{c}{2(\alpha+1)} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\alpha+1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2(\alpha+1)} \boxed{\int_{-1}^{1} c(1-x^2)^{\alpha}\mathrm{d}x} - \frac{1}{2(\alpha+1)} \boxed{\int_{-1}^{1} cx^2(1-x^2)^{\alpha}\mathrm{d}x}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x = 1 \qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = D(X)$$

于是 $D(X) = \dfrac{1}{2(\alpha+1)} - \dfrac{1}{2(\alpha+1)} D(X),$

故 $D(X) = \dfrac{1}{2\alpha+3}.$

**例6** 设随机变量 $X$ 的概率密度 $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，

求 $E[\min(|X|,1)]$.

**解** $E[\min(|X|,1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \min(|x|,1) f(x)\mathrm{d}x$

$$= \int_{|x|<1} |x| f(x)\mathrm{d}x + \int_{|x|\geq 1} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{|x|\geq 1} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\ln 2 + \frac{1}{2}.$$

**例7** 设二维连续型随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度

函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y), 0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2},\\ 0, \qquad 其他\end{cases}$

且 $Z=\cos(X+Y)$, 求 $E(Z)$ 和 $D(Z)$.

**解** $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos(x+y)\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[\cos 2x-\cos(\pi+2x)]\mathrm{d}x=0,$$

$D(Z)=E(Z^2)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos^2(x+y)\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos^3 x-\cos^3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{9}.$$

**例8** 设二维连续型随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度

函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{7}(x^2+\frac{1}{2}xy), 0<x<1, 0<y<2,\\ 0, \qquad 其他\end{cases}$

求 $(X,Y)$ 的协方差矩阵及相关系数.

**解** $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}x(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{12}{7}x^3+\frac{6}{7}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{7},$$

$$E(X^2)=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}x^2(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{39}{70},$$

故 $D(X)=\frac{39}{70}-\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{23}{490},$

因为 $E(Y)=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}y(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{8}{7},$

$$E(Y^2)=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}y^2(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{34}{21},$$

故 $D(Y)=\frac{34}{21}-\left(\frac{8}{7}\right)^2=\frac{46}{147},$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}xy(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{17}{21},$$

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$=\frac{17}{21}-\frac{5}{7}\times\frac{8}{7}=-\frac{1}{147},$$

于是 $(X,Y)$ 的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix}\frac{23}{490} & -\frac{1}{147}\\ -\frac{1}{147} & \frac{46}{147}\end{pmatrix}.$

$X$ 与 $Y$ 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{\sqrt{15}}{69}.$

备用例题

## 三、典型例题

**例1** 假设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本,已知 $E(X^k)=\alpha_k(k=1,2,3,4)$. 证明:当 $n$ 充分大时,随机变量 $Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布,并指出其分布参数.

**解** 因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布,

所以 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 也独立同分布,

且 $E(X_i^2)=\alpha_2$,

$D(X_i^2)=E(X_i^4)-(EX_i^2)^2=\alpha_4-\alpha_2^2$,

根据独立同分布的中心极限定理知

$$V_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\alpha_2}{\sqrt{n(\alpha_4-\alpha_2^2)}}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\alpha_2}{\sqrt{\frac{1}{n}(\alpha_4-\alpha_2^2)}}=\frac{Z_n-\alpha_2}{\sqrt{\frac{1}{n}(\alpha_4-\alpha_2^2)}}$$

的极限分布是标准正态分布.

故当 $n$ 充分大时,

$V_n$ 近似服从标准正态分布,

从而当 $n$ 充分大时,

$Z_n=\sqrt{\frac{1}{n}(\alpha_4-\alpha_2^2)}V_n+\alpha_2$ 近似服从

参数为 $\mu=\alpha_2$, $\sigma^2=\frac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n}$ 的正态分布.

**例2** 现有一批种子, 其中良种占 $\frac{1}{6}$, 今在其中任选 6000 粒, 试问在这些种子中良种所占的比例与 $\frac{1}{6}$ 之差的绝对值小于 $\frac{1}{1000}$ 的概率是多少?

**解** 令 $X_i=\begin{cases}1, & 第\, i\, 粒是良种,\\ 0, & 第\, i\, 粒不是良种,\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n.$

则 $P(X_i=1)=\frac{1}{6}$, 记 $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$,

则 $Y_n\sim B\left(n,\frac{1}{6}\right)$, $n=6000.$

根据题意, 所求概率为

$$P\left(\left|\frac{Y_n}{6000}-\frac{1}{6}\right|\le\frac{1}{1000}\right)=P(|Y_n-1000|\le 6),$$

因为 $Y_n\sim B\left(6000,\ \frac{1}{6}\right)$,

由中心极限定理有:

$Y_n$ 近似服从 $N\left(1000,\ 1000\times\frac{5}{6}\right)$,

所以 $P\left(\left|\frac{Y_n}{6000}-\frac{1}{6}\right|\le\frac{1}{1000}\right)$

$$=P\left(\left|\frac{Y_n-1000}{\sqrt{1000\times5/6}}\right|\le\frac{6}{\sqrt{1000\times5/6}}\right)$$

$$=2\Phi\left(\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{5000}}\right)-1=2\Phi(0.208)-1$$

$$=2\times0.5832-1=0.1664.$$

**例3** 假设测量的随机误差 $X\sim N(0,10^2)$, 试求在 100 次独立重复测量中, 至少有 3 次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 $\alpha$, 并利用泊松分布求出 $\alpha$ 的近似值 (要求小数点后取两位有效数字, $\Phi(1.96)=0.975$).

**解** 设 $p$ 为每次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率,

$$p=P\{|X|>19.6\}=P\left\{\frac{|X|}{10}>\frac{19.6}{10}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{|X|}{10} > 1.96\right\} = 2 \cdot P\left\{\frac{X}{10} > 1.96\right\}$$

$$= 2 - 2\Phi(1.96) = 0.05,$$

设 $k$ 为100次独立测量中事件 $\{|X| > 19.6\}$ 出现的次数,

则 $k$ 服从参数为 $n = 100, p = 0.05$ 的二项分布,

故 $\alpha = P\{k \ge 3\} = 1 - P\{k < 3\}$

$$= 1 - 0.95^{100} - 100 \times 0.95^{99} \times 0.05 - \frac{100 \times 99}{2} \times 0.95^{98} \times 0.05^2$$

由**泊松定理**知,

$k$ 近似服从参数 $\lambda = np = 100 \times 0.05$ 的泊松分布,

故 $\alpha = P\{k \ge 3\} = 1 - P\{k < 3\}$

$$\approx 1 - \frac{5^0 e^{-5}}{0!} - \frac{5e^{-5}}{1!} - \frac{5^2 e^{-5}}{2!}$$

$$= 1 - e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{25}{2}\right) \approx 0.87.$$

备用例题

# 三、典型例题

**例1** 设 $X$ 服从 $N(0,1)$, $(X_1, X_2, \quad, X_6)$为来自总体 $X$ 的简单随机样本,

$$Y = (X_1 + X_2 + X_3)^2 + (X_4 + X_5 + X_6)^2$$

试决定常数 $C$, 使得 $CY$ 服从 $\chi^2$ 分布.

**解** 根据正态分布的性质,

$$X_1 + X_2 + X_3 \sim N(0,3),$$

$$X_4 + X_5 + X_6 \sim N(0,3),$$

则 $\dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}} \sim N(0,1),$

$$\frac{X_4 + X_5 + X_6}{\sqrt{3}} \sim N(0,1),$$

故 $\left(\dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi^2(1),$

$$\left(\frac{X_4 + X_5 + X_6}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi^2(1),$$

因为 $X_1, X_2, \quad, X_6$ 相互独立及 $\chi^2$ 分布的可加性,

$$\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{X_4 + X_5 + X_6}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}[(X_1 + X_2 + X_3)^2 + (X_4 + X_5 + X_6)^2] \sim \chi^2(2),$$

所以 $C = \dfrac{1}{3}$, $CY$ 服从 $\chi^2$ 分布.

**例2** 设 $\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的容量为 $n$ 的两样本 $(X_{11}, X_{12}, \quad, X_{1n})$ 和 $(X_{21}, X_{22}, \quad, X_{2n})$ 的样本均值, 试确定 $n$, 使得这两个样本均值之差超过 $\sigma$ 的概率大约为0.01.

**解** $\overline{X}_1 \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$, $\quad \overline{X}_2 \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$,

则 $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(0, \dfrac{2\sigma^2}{n}\right)$,

$$P\{|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| > \sigma\} = P\left\{\left|\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{2/n}\,\sigma}\right| > \sqrt{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$= 1 - P\left\{\left|\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2/n}\sigma}\right| \le \sqrt{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$\approx 1 - \left[\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right] = 2 - 2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = 0.01,$$

有 $\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \approx 0.995$, 查标准正态分布表知

$\sqrt{\frac{n}{2}} = 2.58,$ 于是 $n = 14.$

**例3** 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,从此总体中取一个容量为 $n = 16$ 的样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_{16})$, 求概率

(1) $P\left\{\frac{\sigma^2}{2} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \le 2\sigma^2\right\}$;

(2) $P\left\{\frac{\sigma^2}{2} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \le 2\sigma^2\right\}$.

**解** (1) 因为 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 是来自正态总体的样本,

所以 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$,

于是 $P\left\{\frac{\sigma^2}{2} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \le 2\sigma^2\right\}$

$$= P\left\{8 \le \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{16}(X_i - \mu)^2 \le 32\right\}$$

$$= P\{8 \le \chi^2(16) \le 32\}$$

$$= P\{\chi^2(16) \le 32\} - P\{\chi^2(16) \le 8\}$$

$$= [1 - P\{\chi^2(16) \ge 32\}] - [1 - P\{\chi^2(16) \ge 8\}]$$

$$= 0.94;$$

(2)因为 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$,

于是 $P\left\{\frac{\sigma^2}{2} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \le 2\sigma^2\right\}$

$$= P\left\{8 \le \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{16}(X_i - \overline{X})^2 \le 32\right\}$$

$$= P\{8 \le \chi^2(15) \le 32\}$$

$$= P\{\chi^2(15) \ge 8\} - P\{\chi^2(15) \ge 32\} = 0.98.$$

备用例题

## 三、典型例题

**例1** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自参数为 $p$ 的 $(0-1)$ 分布的一个样本,求参数 $p$ 的最大似然估计量 $\hat{p}$,并验证它是达到方差界的无偏估计量.

**解** $f(x; p) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1,$

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i},$$

$$\ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot \ln(1-p),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p},$$

由 $\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p} = 0$, 得 $(1-p)\sum_{i=1}^{n} x_i = p\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$,

故参数 $p$ 的最大似然估计值为 $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$,

参数 $p$ 的最大似然估计量为 $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$,

$$E(\hat{p})=E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=p,$$

所以 $\hat{p}$ 是 $p$ 的无偏估计量.

又因为 $f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x},\quad x=0,1,$

$\ln f(x;p)=x\ln p+(1-x)\ln(1-p),$

$$\frac{\partial \ln f(x;p)}{\partial p}=\frac{x}{p}-\frac{1-x}{1-p},$$

$$E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(x;p)}{\partial p}\right]^2\right\}=\sum_{x=0,1}\left[\frac{x}{p}-\frac{1-x}{1-p}\right]^2 p^x(1-p)^{1-x}$$

$$=\frac{1}{(1-p)^2}\cdot(1-p)+\frac{1}{p^2}\cdot p=\frac{1}{p(1-p)},$$

因为 $f(x;p)$ 的参数 $p$ 的任何一个无偏估计量 $\hat{p}(X_1,X_2,\quad,X_n)$ 都满足不等式

$$D(\hat{p})\geq\frac{n}{E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(x;p)}{\partial p}\right]^2\right\}}=\frac{p(1-p)}{n},$$

对于参数 $p$ 的无偏估计量 $\hat{p}=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,$

$$D(\hat{p})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot p(1-p)=\frac{1}{n}p(1-p),$$

故 $\hat{p}=\bar{X}$ 是总体分布参数 $p$ 的达到方差界的无偏估计量.

**例2** 设某异常区磁场强度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 现对该区进行磁测, 按仪器规定其方差不得超过 0.01, 今抽测 16 个点, 算得 $\bar{x}=12.7,\ s^2=0.0025,$ 问此仪器工作是否稳定 $(\alpha=0.05)$?

**解** $n=16,\quad \alpha=0.05,\quad \chi^2_{0.025}(15)=27.5,$

$\chi^2_{0.975}(15)=6.26,\quad \sigma^2$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=(0.00136,\ 0.00599),$$

由于方差 $\sigma^2$ 不超过 0.01, 故此仪器工作稳定.

备用例题

## 三、典型例题

**例1** 设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取36位考生的成绩, 算得平均成绩为66.5分, 标准差为15分, 问在显著性水平0.05下, 是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70分? 并给出检验过程.

**解** 设该次考试的学生成绩为 $X$, $\quad \alpha=0.05,$

则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本标准差为 $S$,

需检验假设: $H_0:\mu=70,\quad H_1:\mu\neq 70.$

因为 $\sigma^2$ 未知, 故采用 $t$ 检验法, 当 $H_0$ 为真时,

统计量 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\dfrac{\bar{X}-70}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$

查表 8-1 知拒绝域为 $|t|=\dfrac{|\bar{X}-70|}{S/\sqrt{n}}\geq t_{\alpha/2}(n-1),$

由 $n=36,\ \bar{X}=66.5,\ S=15,\ t_{0.025}(35)=2.0301,$

得 $|t|=\dfrac{|\bar{X}-70|}{S/\sqrt{n}}=\dfrac{|66.5-70|}{15/\sqrt{36}}=1.4<2.0301,$

所以接受 $H_0$, 认为全体考生的平均成绩是70分.

**例2** 某砖厂制成两批机制红砖，抽样检查测量砖的抗折强度(千克)，得到结果如下：

第一批：$n_1=10,\ \bar{x}=27.3,\ S_1=6.4;$

第二批：$n_2=8,\ \bar{y}=30.5,\ S_2=3.8;$

已知砖的抗折强度服从正态分布，试检验：

(1)两批红砖的抗折强度的方差是否有显著差异？

(2)两批红砖的抗折强度的数学期望是否有显著差异？（均取$\alpha=0.05$）

**解** (1) 检验假设：$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2.$

用 $F$ 检验法，当 $H_0$ 为真时，

统计量 $F=\dfrac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}}\sim F(n_1-1,\ n_2-1),$

查表 8-1 知拒绝域为

$F\geq F_{\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)$或$F\leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1),$

由$n_1=10, n_2=8, S_1^2=40.96, S_2^2=14.44,$

$F_{0.025}(9,7)=4.82,\quad F_{0.975}(9,7)=\dfrac{1}{F_{0.025}(7,9)}=0.283,$

得 $F=\dfrac{40.96}{14.44}=2.837,$ 显然 $0.283<2.837<4.82,$

所以接受 $H_0$，认为抗折强度的方差没有显著差异.

(2) 检验假设：$H_0:\mu_1=\mu_2,\quad H_1:\mu_1\neq\mu_2,$

用 $t$ 检验法，当 $H_0$ 为真时，

统计量 $t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$

其中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^{\ 2}+(n_2-1)S_2^{\ 2}}{n_1+n_2-2}.$

查表 8-1 知拒绝域为 $|t|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2).$

由$t_{0.025}(10+8-2)=t_{0.025}(16)=2.1199,$

$S_w^2=\dfrac{9\times 40.96+7\times 14.44}{16}=29.3575,\quad S_w=5.418,$

得 $|t|=\dfrac{|\bar{X}-\bar{Y}|}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\dfrac{|27.3-30.5|}{5.418\times 0.474}=1.245<2.1199,$

所以接受 $H_0$，认为抗折强度的期望无显著差异.

备用例题