第五讲 因式分解与唯一性定理

一、不可约多项式

二、因式分解及唯一性定理

三、思考题

问题的引入

如： $x^4-4=\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)$ （在**有理数域**上）

$=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x^2+2\right)$ （在**实数域**上）

$=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}i\right)\left(x+\sqrt{2}i\right)$ （在**复数域**上）

由此可见，因式分解与多项式系数所在数域有关。

一、不可约多项式

Def. 设 $p(x)\in P[x]$，且 $\partial\left(p(x)\right)\geq 1$，若 $p(x)$ 不能表示成数域 P上两个次数比 $p(x)$低的多项式的乘积，则称 $p(x)$为数域P上的**不可约多项式**.

Remark

① 一个多项式是否不可约**依赖于系数域.**

② 一次多项式总是不可约多项式.

③ 不可约多项式的**次数至少是1.**

④ 多项式 $p(x)\left(\partial(p(x))\geq 1\right)$ 不可约

$\Leftrightarrow p(x)$ 的因式只有非零常数及其自身的非零常数倍.

⑤ 多项式 $p(x)$ 不可约，对 $\forall f(x)\in P[x]$ 有

$$p(x)\,\big|\,f(x) \text{ 或 } \left(p(x), f(x)\right)=1.$$

证：设 $(p(x), f(x))=d(x)$, 则 $d(x)\,\big|\,p(x)$

$\Rightarrow d(x)=a\neq 0$ 或 $d(x)=cp(x),\ c\neq 0$

即 $d(x)=1$, 或 $d(x)=cp(x)$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$(p(x), f(x))=1$ $\quad$ $p(x)\,\big|\,f(x)$

定理1.3.3 设 $p(x)$ 不可约. $\forall f(x), g(x) \in P[x]$，若

$$p(x) \mid f(x)g(x),\ \text{则}\ p(x) \mid f(x)\ \text{或}\ p(x) \mid g(x).$$

证： 若 $p(x) \mid f(x)$, 结论成立 .

若 $p(x)$ 不整除 $f(x)$，则 $(p(x), f(x)) = 1$

$$\xRightarrow{Th4} p(x) \mid g(x).$$

性质1.3.4 若 $p(x)$不可约，$p(x) \mid f_1(x) f_2(x) \cdots f_s(x)$,

则必有某个 $f_i(x)$, 使得 $p(x) \mid f_i(x)$.

二、因式分解及唯一性定理

1. 定理1.3.2 $\forall p(x)\in P(x)$, 若 $\partial(f(x))\geq 1$ ，则 $f(x)$可唯一地分解成数域 P上一些不可约多项式的乘积.

所谓唯一性是说，若有两个分解式

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

则 $s=t$，且适当排列因式的次序后，有

$$p_i(x)=c_iq_i(x)$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,s)$是一些非零常数.

证：对 $f(x)$ 的次数作数学归纳.

1° $\partial(f(x))=1$ 时，结论成立.（一次多项式都不可约）

2° 设对次数低于n的多项式结论成立.

下证 $\partial\big(f(x)\big)=n$ 的情形.

若 $f(x)$是不可约多项式. 结论显然成立.

若 $f(x)$不是不可约多项式，则存在 $f_1(x), f_2(x),$

且 $\partial(f_i(x))<n,\quad i=1,2$ 使 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$

由归纳假设 $f_1(x), f_2(x)$ 皆可分解成不可约多项式的积.

$\therefore\ f(x)$可分解为一些不可约多项式的积.

再证唯一性． 设 $f(x)$有两个分解式

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$

$$=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x) \qquad (1)$$

$p_i(x),q_j(x)\left(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,t.\right)$ 都是不可约多项式.

对 s 作归纳法.

若 $s=1$, 则必有 $s=t=1,\quad f(x)=p_1(x)=q_1(x)$

假设不可约多项式个数为 $s-1$ 时唯一性已证.

由(1) $p_1(x)\,|\,q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$

$\Rightarrow \exists q_j(x)$, 使得 $p_1(x)\,|\,q_j(x)$.

不妨设 $q_j(x)=q_1(x)$, 则 $p_1(x)\,|\,q_1(x)$

$\Rightarrow q_1(x)=c_1 p_1(x),\quad c_1\neq 0$

(1)两边消去 $q_1(x)$, 即得

$$p_2(x)\cdots p_s(x)=c_1^{-1}q_2(x)\cdots q_t(x)$$

由归纳假设有 $s-1=t-1$, $\therefore\ s=t$.

2. 标准分解式： 对 $\forall f(x)\in P[x], \partial\big(f(x)\big)\geq 1,$

$f(x)$ 总可表成

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$$

其中 c 为 $f(x)$的首项系数，$p_i(x)$为互不相同的，首项系数为1的不可约多项式，$r_i\in Z^+$．称之为 $f(x)$ 的**标准分解式**.

Remark

① 若已知两个多项式 $f(x), g(x)$ 的标准分解式，则可直接写出 $\left(f(x), g(x)\right)$.

$\left(f(x), g(x)\right)$ 就是那些同时在 $f(x), g(x)$ 的标准分解式中出现的不可约多项式方幂的乘积，所带方幂指数等于它在 $f(x), g(x)$ 中所带的方幂指数中较小的一个.

例. 若 $f(x), g(x)$ 的标准分解式分别为

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),\quad r_i\geq 0$$

$$g(x)=bp_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x),\quad l_i\geq 0$$

则有 $\left(f(x),g(x)\right)=p_1^{\lambda_1}(x)p_2^{\lambda_2}(x)\cdots p_s^{\lambda_s}(x),$

$$\lambda_i=\min\left(r_i,l_i\right), i=1,2,\cdots,s$$

$$\left[f(x),g(x)\right]=p_1^{u_1}(x)p_2^{u_2}(x)\cdots p_s^{u_s}(x),$$

$$u_i=\max\left(r_i,l_i\right), i=1,2,\cdots,s$$

$$f(x)\big|g(x)\Leftrightarrow r_i\leq l_i,\quad i=1,2,\cdots,s$$

思考题

1. 分别在实数域和复数域上将多项式 x^4+1 进行因式分解.

2. 在 $P[x]$ 中，设 $(f,g_i)=1, i=1,2.$ 证明:

$$(fg_1,g_2)=(g_1,g_2).$$