第六讲 重因式

一、k 重因式

二、重因式的判别与求法

三、思考题

一、k重因式

定义 设 $p(x)$为数域P的不可约多项式，$f(x) \in P[x]$，

若 $p^k(x) \mid f(x)$，但 $p^{k+1}(x) \nmid f(x)$，

则称 $p(x)$ 为 $f(x)$的 k重因式.

若 $k > 1$, 则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的重因式.

若 $k = 1$, 则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的单因式.

（若 k=0，$p(x)$不是 $f(x)$的因式）

二、重因式的判别和求法

1. 若 $f(x)$ 的标准分解式为：

$$f(x) = cp^{r_1}{}_1(x)p^{r_2}{}_1(x)\cdots p^{r_s}{}_s(x)$$

则 $p_i(x)$ 为 $f(x)$ 的 r_i 重因式． $i = 1, 2, \cdots s$

$r_i = 1$ 时， $p_i(x)$ 为单因式；

$r_i > 1$ 时，$p_i(x)$ 为重因式．

2. 定理1.3.4

若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式$(k \geq 1)$,

则它是 $f(x)$的微商 $f'(x)$ 的 $k-1$重因式.

证: 假设 $f(x)$ 可分解为

$$f(x) = p^k(x)g(x), \quad \text{其中 } p(x) \nmid g(x).$$

$$\therefore \quad f'(x) = p^{k-1}(x)\left(kg(x)p'(x) + p(x)g'(x)\right)$$

$$\Rightarrow p^{k-1}(x) \mid f'(x).$$

令 $h(x)=kg(x)p'(x)+p(x)g'(x)$，

$\because$ $p(x)\nmid g(x)$ 且 $p(x)\nmid p'(x)$，

$\therefore$ $p(x)\nmid kg(x)p'(x)$，$\Rightarrow p(x)\nmid h(x)$

$\Rightarrow p^k(x)\nmid f'(x)$

$\therefore p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式

注意 定理6的逆命题不成立，即

$p(x)$ 为 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式，但 $p(x)$ 未必是 $f(x)$ 的 k 重因式.

推论1.3.5

若不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的 k重因式$(k \geq 1)$，则$p(x)$是 $f(x), f'(x), \cdots, f^{(k-1)}(x)$的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$的因式.

推论1.3.6

不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的重因式

$\Leftrightarrow$ $p(x)$是$f(x)$与 $f'(x)$的公因式.

推论1.3.7

多项式 $f(x)$没有重因式$\Leftrightarrow(f(x),f'(x))=1.$

性质1

$f(x)\in P[x]$，若 $(f(x),f'(x))=p_1^{r_1}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$，

其中 $p_i(x)$ 为不可约多项式，则 $p_i(x)$ 为 $f(x)$

的 r_{i+1} 重因式.

说明

根据推论3、4可用辗转相除法，求出 $(f(x), f'(x))$ 来判别 $f(x)$是否有重因式．若有重因式，还可由 $(f(x), f'(x))$ 的结果写出来.

例1. 判别多项式 $f(x)$ 有无重因式.

$$f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$$

性质2

不可约多项式 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式

$\Leftrightarrow p(x)$ 为 $(f(x), f'(x))$ 的 $k-1$ 重因式.

注:

$f(x)$ 与 $\dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 有完全相同的不可约因式,

且 $\dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 的因式皆为单因式.

例2 设 $f(x)=x^5-6x^4+16x^3-24x^2+20x-8,$

求一个多项式与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式，

但无重因式。

解： 所求多项式为：

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=x^3-4x^2+6x-4.$$

思考题

1. 设 $f(x)=x^3+ax+b\in P[x]$.

求 $f(x)$有重因式的充分必要条件.

2. 设复系数多项式 $f(x)$ 没有重因式, 证明:

$$(f(x)+f'(x), f(x))=1.$$