

第三章 矩阵代数

矩阵 (**Matrix**) 最早来自于方程组的系数及常数所构成的方阵。这一概念由19世纪英国数学家凯莱首先提出。

矩阵是高等代数中的常见工具，也常见于统计分析等应用数学学科中。在物理学中，矩阵于电路学、力学、光学和量子物理中都有应用；计算机科学中，三维动画制作也需要用到矩阵。矩阵的运算是数值分析领域的重要问题。

第十八讲 矩阵及其运算

一、矩阵概念的引入

二、矩阵的定义

三、矩阵的运算

一、矩阵概念的引入

[illegible]

的解取决于

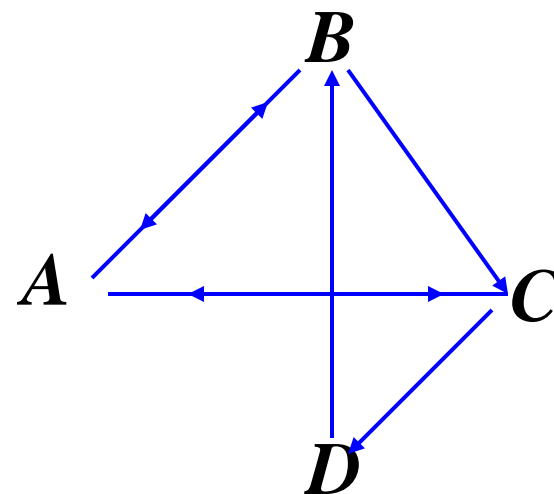
系数	$a_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, n),$
常数项	$b_i(i = 1, 2, \dots, n)$

线性方程组的系数与常数项按原位置可排为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究.

2. 某航空公司在A,B,C,D四城市之间开辟了若干航线, 如图所示表示了四城市间的航班图, 如果从A到B有航班, 则用带箭头的线连接 A 与B.










四城市间的航班图情况常用表格来表示:

		到站			
		A	B	C	D
发站	A		✓	✓	
	B	✓		✓	
	C	✓			✓
	D		✓		

其中 ✓ 表示有航班.

为了便于计算,把表中的 ✓ 改成1,空白地方填上0,就得到一个数表:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>				
<i>B</i>				
<i>C</i>				
<i>D</i>				

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

这个数表反映了四城市间交通联接情况.

二、矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$)
排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

称为 $m \times n$ 矩阵. 简称 $m \times n$ 矩阵. 记作

主对角线

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

副对角线

矩阵A的
(m,n)元

简记为 $A = A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})$.

这 $m \times n$ 个数称为A的元素, 简称为元.

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**,

元素是复数的矩阵称为**复矩阵**.

元素全为零的矩阵称为**零矩阵**, 记为 O 。

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个 2×4 实矩阵,

$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个 3×3 复矩阵,

$(2 \quad 3 \quad 5 \quad 9)$ 是一个 1×4 矩阵,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是一个 3×1 矩阵,

(4) 是一个 1×1 矩阵.

三、 矩阵的运算

- 1、 矩阵的加法
- 2、 矩阵的数乘
- 3、 几类重要方阵
- 4、 矩阵的乘法
- 5、 转置矩阵

1、矩阵的加法

设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, 那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A + B$, 规定为

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

说明 只有当两个矩阵是**同型**矩阵时，才能进行加法运算.

例如
$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

矩阵加法的运算规律

$$(1) A + B = B + A;$$

$$(2) (A + B) + C = A + (B + C).$$

$$(3) -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix} = (-a_{ij}),$$

称为矩阵 A 的负矩阵。

$$(4) A + (-A) = 0, A - B = A + (-B).$$

2、数与矩阵相乘

数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$,规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

数乘矩阵的运算规律:

(设 A 、 B 为 $m \times n$ 矩阵, λ, μ 为数)

$$(1) (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A);$$

$$(2) (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$$

$$(3) \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B;$$

$$(4) 1A = A;$$

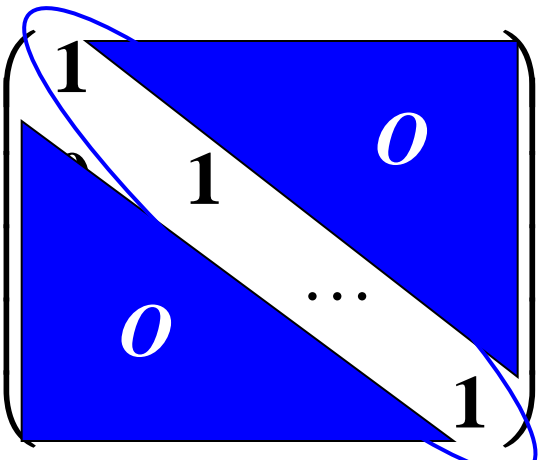
$$(5) 0A = A, \quad (-1)A = -A.$$

矩阵相加与数乘矩阵合起来, 统称为矩阵的**线性运算**.

3、几类重要方阵

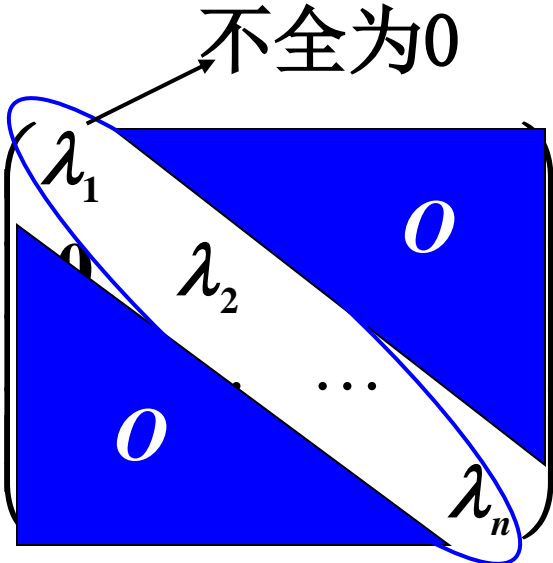
行数与列数都等于 n 的矩阵 A ，称为 n 阶方阵。
可记作 A_n 。

1 单位矩阵

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$


全为1

称为单位矩阵（或单位阵）。

2 形如  的方阵, 称为对角矩阵 (或对角阵) .

记作 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$

3 三角方阵 $\begin{cases} \text{上三角方阵} \\ \text{下三角方阵} \end{cases}$

4、矩阵的乘法(矩阵与矩阵相乘)

设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $m \times s$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 是一个 $s \times n$ 矩阵, 那么规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij})$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n),$$

并把此乘积记作 $C = AB$.

例 1

$$C = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{-2} & \textcolor{red}{4} \\ \textcolor{blue}{1} & \textcolor{blue}{-2} \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{2} & \textcolor{blue}{4} \\ \textcolor{blue}{-3} & \textcolor{blue}{-6} \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & ? \\ & 16 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

例2 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

解 $\because A = (a_{ij})_{3 \times 4}, \quad B = (b_{ij})_{4 \times 3},$

$\therefore C = (c_{ij})_{3 \times 3}.$

故

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}.$$

注意 只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 不存在.

$$\text{---}(1\ 2\ 3)\text{---} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1) = (10).$$

矩阵乘法的运算规律

$$(1) (AB)C = A(BC);$$

$$(2) A(B + C) = AB + AC, (B + C)A = BA + CA;$$

$$(3) \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) \quad (\text{其中 } \lambda \text{ 为数});$$

$$(4) AE = EA = A;$$

$$(5) \text{若 } A \text{ 是 } n \text{ 阶矩阵, 则 } A^k \text{ 为 } A \text{ 的 } k \text{ 次幂, 即}$$
$$A^k = \underbrace{A A \cdots A}_{k \text{ 个}} \text{ 并且 } A^m A^k = A^{m+k}, (A^m)^k = A^{mk}.$$

$(m, k \text{ 为正整数})$

注意 矩阵不满足交换律，即：

$$AB \neq BA, (AB)^k \neq A^k B^k.$$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

则 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$

故 $AB \neq BA.$

例3 计算下列乘积:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2)$$

$$\text{解 } (1) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2) = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 3 \times 1 & 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, 3.$$

$$\text{解} \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{21}b_2 + a_{31}b_3 & a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + a_{32}b_3 & a_{13}b_1 + a_{23}b_2 + a_{33}b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

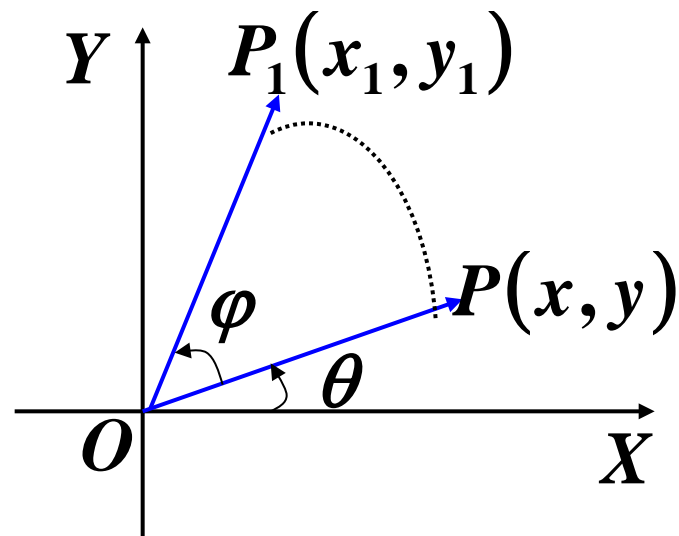
$$= a_{11}b_1^2 + a_{22}b_2^2 + a_{33}b_3^2 + 2a_{12}b_1b_2 + 2a_{13}b_1b_3 + 2a_{23}b_2b_3.$$

实际上，上面的记法也可用于坐标变换.

例如对于二维空间中的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = \cos \varphi x - \sin \varphi y, \\ y_1 = \sin \varphi x + \cos \varphi y. \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{对应} \\ \longleftrightarrow \end{array} \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

这是一个以原点为中心
旋转 φ 角的旋转变换.



运用矩阵的乘法，我们可以将下列线性方程组

[illegible]

写为 $AX = B$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

5、矩阵的转置

定义 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作 A^T 。

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix};$

$$B = (18 \quad 6), \quad B^T = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

对称矩阵

定义 设 A 为 n 阶方阵, 如果满足 $A = A^T$, 即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

则 A 称为**对称矩阵**.

例如 $A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 为对称阵.

转置矩阵的运算性质

$$(1) (A^T)^T = A;$$

$$(2) (A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$(3) (\lambda A)^T = \lambda A^T;$$

$$(4) (AB)^T = B^T A^T.$$

例5 已知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{求 } (AB)^T.$$

解法1

$$\begin{aligned} \because AB &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore (AB)^T = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 14 & -3 \\ 17 & 13 & 10 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

解法2

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

注意：

(1) 只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

(2) 只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘,且矩阵相乘不满足交换律.

(3) 矩阵的数乘运算与行列式的数乘运算不同.

思考题

设 A 与 B 为 n 阶方阵,问等式

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

成立的充要条件是什么?