第四章 连通性

说明：由于本章内容相对比较独立，与其他章节关系不大，所以在课时不足的情况下本章可以不讲，但不会影响整个教学的完整性。同时考虑到学生的需求，所以将本章的教案和课件在此也一起放上，可供学生参阅。

本章的五节分别介绍4类重要的拓扑不变性质. 本章讨论连通性、道路连通性、局部连通性及 其在实分析中的一些简单的应用.

教学重点：连通空间、局部连通空间；教学难点：连通分支.

4.1 连通空间

在拓扑中怎样定义连通, 分隔区间(0, 1), (1, 2)的关系与(0, 1), [1, 2)的关系不同, 虽然他们都 不相交, 但相连的程度不一样.

定义 4.1.1 设$A, B \subset X$， 若$A \cap B^{-} = A^{-} \cap B = \phi$, 则称$A, B$是隔离的.

区间(0, 1)与(1, 2)隔离, 但区间(0, 1)与[1, 2)不隔离.

几个基本事实: (1)两不交的开集是隔离 的; (2)两不交的闭集是隔离的; (3)隔离子集的子集是隔离的 .

定义 4.1.2 X称为不连通的, 若X中有非空的隔离子集A, B使$X = A \cup B$, 即X可表为两非空 隔离集之并. 否则X 称为连通的.

包含多于一个点的离散空间不连通, 平庸空间是连通的.

定理 4.1.1 对空间X， 下述等价:

(1) X是不连通的;

(2) X可表为两非空不交闭集之并;

(3) X可表为两非空不交开集之并;

(4) X存在既开又闭的非空真子集.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)设隔离集A, B之并是$X, B^{-} = B^{-} \cap (A \cup B) = (B^{-} \cap A) \cup (B^{-} \cap B) = B$. 同理, A 也是闭的.

(2)$\Rightarrow$(3)设X是两非空不交闭集A, B之并, 则X是两非空不交开集A, B之 并.

$(3) \Rightarrow (4)$ 设 X 是两非空不交开集 A,B 之并，则 A,B 都是 X 的既开又闭的非空真子集.

$(4) \Rightarrow (1)$ 若 A 是 X 的开闭集，则 $A, X-A$ 隔离.

例 **4.1.1** **Q** 不是 R 的连通子空间，因为 $Q = (Q \cap (-\infty, \pi))(Q \cap (\pi, +\infty))$.

定理 4.1.2 R 是连通的.

证明 若 R 不连通，则 R 是两非空不交闭集 A,B 之并．取定 $a \in A, b \in B$，不妨设 $a < b$.

令 $A^* = [a,b] \cap A, B^* = [a,b] \cap B$ 则 A^*, B^* 是 R 两非空不交闭集且 $[a,b] = A^* \cup B^*$.让 $c = \sup A^*$． 因 A^* 是闭的，$c \in A^*, c < b, (c,b] \subset B^*$，因 B^* 是闭的，$c \in B^*$，从而 $A^* \cap B^* \neq \phi$，矛盾.

定义 4.1.3 若 X 的子空间 Y 是连通的，则称 Y 为连通子集，否则，称为不连通子集.

定理 4.1.3 设 $A, B \subset Y \subset X$,，则 A,B 是 Y 的隔离集 $\Leftrightarrow$ A,B 是 X 的隔离集.

证明 $c_Y(A) \cap B = c_X(A) \cap B \cap Y = c_X(A) \cap B$；同理，$c_Y(B) \cap A = c_X(B) \cap A$.

定理 4.1.4 设 Y 是 X 的连通子集. 如果 X 有隔离子集 A,B 使 $Y \subset A \cup B$，则 $Y \subset A$ 或 $Y \subset B$.

证明 $A \cap Y, B \cap Y$ 是 Y 的隔离集，所以 $A \cap Y = \phi$，或 $B \cap Y = \phi$，于是 $Y \subset A$ 或 $Y \subset B$.

定理 4.1.5 若 Y 是 X 的连通子集且 $Y \subset Z \subset Y^-$，则 Z 是连通的.

证明 若 Z 不连通，X 的非空隔离集 A,B 使 $Z = A \cup B \supset Y$，于是 $Y \subset A$ 或 $Y \subset B$，不妨设 $Y \subset A$，那 么 $Z \subset Y^- \subset A^-$，于是 $B = Z \cap B = \phi$，矛盾.

定理 4.1.6 设 $\{Y_\lambda\}_{\gamma \in \tau}$ 是空间 X 的连通子集族. 如果 $\bigcap_{\gamma \in \tau} Y_\lambda \neq \phi$， 则 X 连通.

证明 若 $\bigcup_{\gamma \in \tau} Y_\lambda$ 是 X 中隔离集 A,B 之并，取定 $x \in \bigcap_{\gamma \in \tau} Y_\lambda \neq \phi$，不妨设 $x \in A$， 则 . $\forall \gamma \in \tau, Y_\gamma \subset A$， 所以 $\bigcup_{\gamma \in \tau} Y_\lambda \subset A$， 于是 $B = \phi$.

定理 4.1.7 设 $Y \subset X$.若 $\forall x, y \in Y, \exists X$ 的连通子集 Yxy 使 $x, y \in Y_{xy} \subset Y$，则 Y 连通.

证明 设 $Y \neq \phi$，取定 $a \in Y$，则 $\bigcup_{\gamma \in \tau} Y_{ay} \subset A$ 且 $a \in \bigcap_{\gamma \in \tau} Y_{ay}$，所以 Y 连通.

定理 4.1.8(连续映射保持) 设 $f: X \to Y$ 连续. 若 X 连通，则 $f(X)$ 连通.

证明 若 $f(X)$ 不连通, 则 $f(X)$ 含有非空的开闭真子集 A. 由于 $f: X \to f(X)$ 连续, 于是 $f_{-1}(A)$ 是 X 的 非空开闭真子集.

连续映射保持性 可商性 拓扑不变性.

有限可积性. 对于拓扑性质 P, 要证有限可积性, 因为 $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ 同胚于 $X_1 \times \ldots \times X_{n-1} \times X_n$, 所以只须证: 若 X, Y 具性质 P, 则 $X \times Y$ 具有性质 P.

定理 4.1.9 (**有限可积性**) 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 连通, 则 $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ 连通.

证明 仅证若 X, Y 连通, 则 $X \times Y$ 连通. 取定 $(a,b) \in X \times Y. \forall (x,y) \in X \times Y$ 令 $S_{xy} = (X \times \{y\})(\{a\} \times Y)$ 由于 $X \times \{y\}$ 同胚于 $X, \{a\} \times Y$ 同胚于 Y, 所以 $X \times \{y\}$, $\{a\} \times Y$, 都连通且 $(a,y) \in (X \times \{y\}) \cap (\{a\} \times Y)$, 由定理41.6, S_{xy} 连通且 $(x,y) \in S_{xy}$, 而由定理 4.1.7 $X \times Y = \{S_{xy} \mid (x,y) \in X \times Y\}$ 连通.

4.2 连通性的某些简单应用

利用 **R** 连通性的证明(定理 4.1.2)知, 区间都是连通的. 区间有 9 类:

无限区间 5 类: $(-\infty,+\infty), (a,+\infty), [a,+\infty), (-\infty,b), (-\infty,b]$,

有限区间 4 类: (a, b), [a, b), (a, b], [a, b].

定理 4.2.1 设 $E \subset R$, 则 E 连通 $\Leftrightarrow$ E 是区间.

证明 若 E 不是区间, $\exists a < c < b$, 使 $a,b \in E$ 但 $c \notin E$ 令 $A = (-\infty,c) \cap E, B = (c,+\infty)$ 则 E 是不交的 非空开集 A, B 之并.

定理 4.2.2 设 X 连通, $f: X \to R$ 连续, 则 $f(X)$ 是 **R** 的一个区间.

注 $x, y \in X$, 如果 t 介于 $f(x)$ 与 $f(y)$ 之间, 则 $\exists z \in X$, 使 $f(z) = t$. 事实上, 不妨设 $f(x) \le t \le f(y)$ 则 $t \in [f(x), f(y)] \subset f(X)$ 所以 $\exists z \in X$, 使 $f(z) = t$.

定理 4.2.3(介值定理) 设 $f: [a,b] \to R$ 连续, 若 r 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间, 则 $\exists z \in [a,b]$ 使 $f(z) = r$.

定理 4.2.4(不动点定理) 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 连续, 则 $z\in[0,1]$ 使 $f(z)=z$.

证明 不妨设 $0<f(0),f(1)<1$. 定义 $F:[0,1]\to R$ 使 $F(x)=x-f(x)$, 则 F 连续且 $F(0)<0<F(1), z\in[0,1]$ 使得 $F(z)=0$, 即 $f(z)=z$.

定义 $f:R\to R^2$ 为 $f(t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$, 则 f 连续且 $f(R)=S^1$, 于是 S^1 是连通的. 对 $x=(x_1,x_2)\in S^1, -x=(-x_1,-x_2)\in S^1$ 称为 x 的对径点, 映射 $r:S^1\to S^1$ 定义为 $r(x)=-x$ 称为对径映射, 则 r 连续.

定理 4.2.5(Borsuk-Ulam 定理) 设 $f:S^1\to R$ 连续, 则 $x\in S^1$, 使 $f(x)=f(-x)$.

证明 定义 $F:S^1\to R$ 为 $F(x)=f(x)-f(-x)$, 则 F 连续. 若 $a\in S^1$, 使得 $f(a)\neq f(-a)$ 则 $F(a)\cdot F(-a)<0$, 由定理 4.2.2, $\exists z\in S^1$, 使得 $F(z)=0$, 即 $f(z)=f(-z)$.

定理 4.2.6 $R^n-\{0\}$ 连通, 其中 $n>1, 0=(0,0,\ldots,0)\in R^n$.

证明 只证 n=2 的情形. 令 $A=[0,+\infty)\times(R-\{0\}), B(-\infty,0]\times(R-\{0\})$, 则

$A\cup B=R^n-\{0\}$. 由于 $(0,+\infty)\times(R-\{0\})\subset A\subset[0,+\infty)\times(R-\{0\})$, 所以 A 连通. 同理 B 连通, 从而 A,B 连通.

定理 4.2.7 R^2 与 R 不同胚.

证明 若存在同胚 $f:R^2\to R$, 令 $g=f_{R^2-\{0\}}:R^2-\{0\}\to R$, 则 g 连续, 从而 $g(R^2-\{0\})=R^2-\{0\}$ 连通, 矛盾.

4.3 连通分支

将不连通集分解为一些"最大"连通子集("连通分支")之并.

定义 4.3.1 $x,y\in X$ 称为连通的, 若 X 的连通子集同时含 x,y, 记为 $x\sim y$. 点的连通关系~是等价关系: $(1)x\sim x;(2)x\sim y\Leftrightarrow y\sim x;(3)x\sim y,y\sim z\Rightarrow x\sim z$.

定义 4.3.2 空间 X 关于点的连通关系的每一等价类称为 X 的一个连通分支.

x~y$\Leftrightarrow$x, y 属于 X 的同一连通分支. X 是 X 的全体连通分支的互不相交并.

定理 4.3.1 设 C 是空间 X 的连通分支, 则

(1)若Y是X 的连通子集且$Y \cap C \neq \phi$, 则$Y \subset C$;

(2)C 是连通的闭集.

证明 (1)取定$x \in Y \cap C, \forall y \in Y$ 则$x \sim y$所以 $y \in C$.

(2)取定$c \in C, \forall x \in C, \exists X$的连通集$Y_x(c, x \in Y_x)$，由于$Y_x \cap C \neq \phi, Y_x \subset C$，于是$C = \cup\{Y_x \mid x \in C\}$且$c \in \cap\{Y_x \mid x \in C\}$, 所以 C 是连通的. 从而 C^-连通且$C^- \cap C \neq \phi$, 于是$C^- \subset C$, 故 C 闭.

以上说明：连通分支是最大的连通子集.

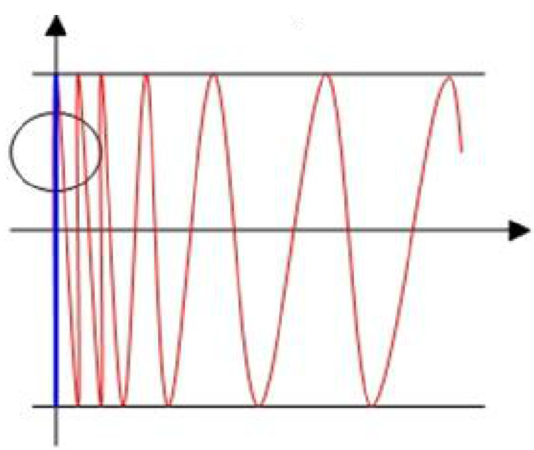
连通分支可以不是开集. Q的连通分支都是单点集, 不是Q的开子集$\forall x, y \in Q$, 由定理 4.2.1, 不存在Q的连通子集同时含有x, y,所以Q的连通分支都是单点集

4.4 局部连通空间

例 4.4.1 (拓扑学家的正弦曲线) 令

$S = \{(x, \sin(1/x) \mid x \in (0,1]\}, T = \{0\} \times [-1,1], S_1 = S \cup T$,

则$\bar{S} = S_1$, 于是 S, S_1 连通. 在 S_1 中, S 中点与 T 中点的“较小的”邻域表现出不同的连通性



$S_1 = S \cup T = \bar{S}$

定义 4.4.1 设$x \in X$若x的每一邻域U中都含有x的某一连通的邻域V, 称X在x是局部连通的. 空间X称为局部连通的, 若X在每一点是局部连通的.

S_1 是连通, 非局部连通的. 多于一点的离散空间是局部连通, 非连通的.

定理 4.4.1 对空间 X，下述等价:

(1) X 是局部连通;

(2) X 的任一开集的任一连通分支是开集;

(3) X 有一个基, 每一元是连通的.

证明 $(1)\Rightarrow(2)$设 C 是 X 的开集 U 的连通分支. $\forall x\in C,\exists x$ 的连通的邻域 $V\subset U$，于是 $V\cap C\neq\phi, V\subset C$，所以 C 是 x 的邻域，故 C 开.

$(2)\Rightarrow(3)$令 $\mathcal{B}=\{C\subset X\mid C$ 是 X 的开集 U 的连通分支$\}$，则 $\mathcal{B}$ 是 X 的基.

$(3)\Rightarrow(1)$设 U 是 x 的邻域, 存在开集 V 使 $x\in V\subset U$,，连通开集 C 使 $x\in C\subset V\subset U$，所以 X 局部连通.

定理 4.4.2 设 $f:X\to Y$ 是连续开映射. 若 X 局部连通, 则 $f(X)$ 局部连通.

证明. $\forall y\in f(X)$，及 y 在 $f(X)$ 中的邻域 U，取 $x\in f^{-1}(y)$，则 $f^{-1}(U0$ 是 x 的邻域, X 的连通开集 V 使 $x\in V\subset f^{-1}(U)$，于是 $y=f(x)\in f(V)\subset U$.

定理 4.4.3 局部连通性是有限可积性, 即设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 局部连通, 则 $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ 局部连通.

证明 仅证若 X_1,X_2 局部连通, 则 $X_1\times X_2$ 局部连通. 设 $\mathcal{B}_1$，$\mathcal{B}_2$ 分别是 X_1,X_2 的由连通开集组成的基, 则$\{B_1\times B_2\mid B_1\in\mathcal{B}_1, B_2\in\mathcal{B}_2\}$是 $X_1\times X_2$ 的由连通开集组成的基(定理 3.2.4).

4.5 道路连通空间

定义 4.5.1 设 X 是拓扑空间, 连续映射 $f:[0,1]\to X$ 称为 X 中的一条道路, $f(0),f(1)$ 分别称为 f 的起点和终点, f 称为从 $f(0)$ 到 $f(1)$ 的一条道路, $f([0,1])$ 称为 X 中的一条曲线. 若 $f(0)=f(1)$，f 称为闭路.

定义 4.5.2 对空间 X，如果 $\forall x,y\in X,\exists X$ 中从 x 到 y 的道路, 则称 X 是道路连通的.

类似可定义道路连通子集.

R 是道路连通的, $\forall x,y\in R$，定义 $f:[0,1]\to R$ 为 $f(t)=(1-t)x+ty$.

定理 4.5.1 道路连通 $\Rightarrow$ 连通.

$\mathcal{B}$ 设 X 道路连通. $\forall x, y \in X, \exists X$ 中从 x 到 y 的道路 $f:[0,1] \to X$，这时 $f([0,1])$ 是 X 中含 x, y 的连通子集, 所以 X 连通.

拓扑学家正弦曲线 S_1 是连通, 非道路连通的空间.

定理 4.5.2 设 $f: X \to Y$ 连续. 若 X 道路连通, 则 $f(X)$ 道路连通.

证明 $\forall y_1, y_2 \in f(X), \exists x_1, x_2 \in X$ 使 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$，存在道路 $g:[0,1] \to X$ 使 $g(0) = x_1, g(1) = x_2$，则 $f \circ g: [0, 1] \to Y$ 是 f(X)中从 y_1 到 y_2 的道路.

定理 4.5.3 道路连通性是有限可积性.

证明 仅证若 X_1, X_2 是道路连通, 则 $X_1 \times X_2$ 道路连通.

$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$，则存在道路 $f_i:[0,1] \to X_1 \times X_2$ 使 $f_i(0) = x_i, f_i(1) = y_i$，定义 $f:[0,1] \to X_1 \times X_2$ 为 $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$，则 f 是从 x 到 y 的道路.

可引进局部道路连通空间的概念. 同时, 与连通分支类似，可建立道路连通分支: 空间中最大的道路连通子集.