模拟考试（四）答案

一、选择题 （每小题 3 分，共 15 分）

1．$\sqrt{3}+i$ 的三角表示式是 (　　D　　).

(A)　$-2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$　　(B)　$-2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$

(C)　$2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$　　(D)　$2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

2．设 $f(z)=\operatorname{Im} z$，则 $f(z)$ (　　A　　).

(A)　处处不可导　　(B)　处处解析

(C)　仅在虚轴上可导　　(D)　仅在 $(0,0)$ 点可导

3．设 $\dfrac{z^2}{e^{\frac{1}{z}}}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z^n, |z|>0,$ 则 $a_{-7}=$ (　　D　　).

(A)　$\frac{1}{7!}$　　(B)　$-\frac{1}{7!}$　　(C)　$\frac{1}{9!}$　　(D)　$-\frac{1}{9!}$

4．下列公式不成立的是(　　B　　).

(A)　$Lnz_1z_2=Lnz_1+Lnz_2$　　(B)　$Ln^2z=2Lnz$

(C)　$e^{z+z}=e^ze^z$　　(D)　$z^\alpha=e^{\alpha Lnz}$

5．$z=0$ 是函数 $\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}$ 的(　C　　).

(A)　一级极点　　(B)　可去奇点

(C)　非孤立奇点　　(D)　本性奇点

二、填空题 （每小题 3 分，共 15 分）

1．$\int_{-2}^{-2+i}(2+z)^2dz=\underline{-\frac{i}{3}}$

2．函数 $f(z)=\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处泰勒展开式中 z^4 项的系数为$\underline{-\frac{1}{4}}$

3．$\ln(2i)=\underline{\ln 2+\frac{\pi}{2}i}$

4．$\sqrt{1}$ =$\underline{1, -1}$

5．函数 $f(t)=\sin t$ 的拉普拉斯变换为$\underline{\dfrac{1}{s^2+1}}$.

三、计算题 （共 70 分）

1．计算积分$\oint_C \dfrac{e^z}{z^2-z}dz$ 的值，其中 C 为正向圆周$|z-1|=\dfrac{1}{10}$.（7 分）

解：$\oint_C \dfrac{e^z}{z^2-z}dz=\oint_C \dfrac{\frac{e^z}{z}}{z-1}dz$

$$=2\pi i\,[\frac{e^z}{z}]_{z=1}$$

$$=2\pi i\,e$$

2．计算积分$\oint_C \dfrac{\cos z}{z^4}dz$ 的值，其中 C 为正向圆周$|z|=1$.（7 分）

解：由高阶导数公式

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^4}dz=\frac{2\pi i}{3!}(\cos z)^{(3)}\Big|_{z=0}$$

$$=0$$

3．求函数$\dfrac{\sin z}{z^2-9}$在有限奇点处的留数. （7 分）

解：因为$z^2-9=(z+3)(z-3)$，所以$z=3, z=-3$为$\dfrac{\sin z}{z^2-9}$的一级极点

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),3]=\lim_{z\to 3}(z-3)\times\frac{\sin z}{z^2-9}=\frac{\sin 3}{6}$$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),-3]=\lim_{z\to -3}(z+3)\times\frac{\sin z}{z^2-9}=\frac{\sin 3}{6}$$

4．求函数$z^2\sin\dfrac{1}{z}$在有限奇点处的留数. （7 分）

解：因为$z=0$为$z^2\sin\dfrac{1}{z}$的奇点

$$z^2\sin\frac{1}{z}=z^2(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}-\cdots)$$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=1$$

5．试将$f(z)=\dfrac{1}{z^2-7z+12}$在$3<|z|<4$内展开成洛朗级数.（10 分）

解：在$3<|z|<4$内

$$f(z)=\frac{1}{z^2-7z+12}$$

$$=\frac{1}{(z-3)(z-4)}$$

$$=\frac{1}{z-4}-\frac{1}{z-3}$$

$$=\frac{1}{-4(1-\frac{z}{4})}-\frac{1}{z(1-\frac{3}{z})}$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{4})^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z}(\frac{3}{z})^n$$

6．已知$v=\arctan\frac{y}{x},x>0$，求解析函数$f(z)=u+iv$.（10 分）

解: $v_x=-\frac{y}{x^2+y^2}$ $\quad v_y=-\frac{x}{x^2+y^2}$

由$f(z)$解析

$u_x=v_y=\frac{x}{x^2+y^2}$

$u_y=-v_x=\frac{y}{x^2+y^2}$ $\qquad u(x,y)=\int u_x dx=\int\frac{x}{x^2+y^2}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\varphi(y)$

$u_y=\frac{y}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=\frac{y}{x^2+y^2}$ $\qquad \therefore u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+c$

即$f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C+i\arctan\frac{y}{x})$

归 0 法得: $f(z)=\ln z+c$

7．如果$f(z)=u+iv$在 D 解析，Ref在 D 内恒为常数，证明$f(z)$是常数.（12 分）

解： 因为$f(z)=u+iv$在 D 解析

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

若 Re$f=u=$ 常数，则 $v_y=0$，$v_x=0$，

可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

所以 $f(z)$ 是常数

8. 利用拉氏变换求解微分方程 $y''(t)-2y'(t)+y(t)=e^{t}$，$y(0)=y'(0)=0$.（10 分）

解: 设 $L[y(t)]=Y(s)$, 则

$$s^{2}Y(s)-2sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s-1}\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s-1)^{3}}.$$

又 $L\,[e^{t}]=\dfrac{1}{s-1}$, 由卷积定理得 $L^{-1}[\dfrac{1}{(s-1)^{2}}]=e^{t}*e^{t}=te^{t}$.

再有卷积定理得

故 $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[\dfrac{1}{s-1}\dfrac{1}{(s-1)^{2}}]=e^{t}*te^{t}=\dfrac{t^{2}}{2}e^{t}$.