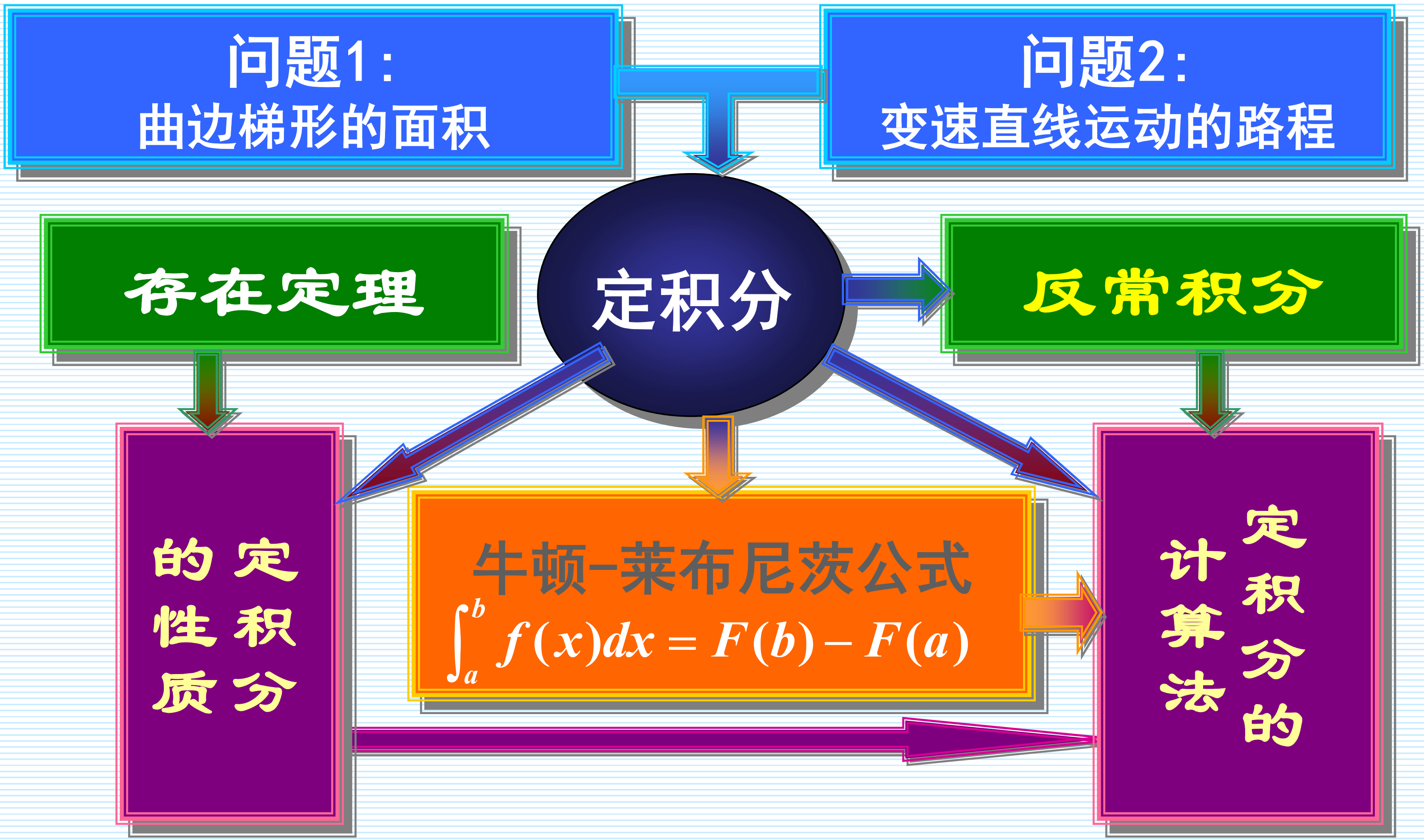
高等数学(一)

第五章 定 积 分

习 题 课

一、主要内容


问题1：
曲边梯形的面积
问题2：
变速直线运动的路程
定积分
存在定理
反常积分
定积分的性质
牛顿–莱布尼茨公式
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
定积分的计算法

定理（微积分基本公式） 如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

牛顿—莱布尼茨公式

表明：一个连续函数在区间$[a,b]$上的定积分等于它的任一原函数在区间$[a,b]$上的增量.

定积分的计算法

（1）换元法

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

换元公式

（2）分部积分法

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

分部积分公式

反常积分（广义积分）

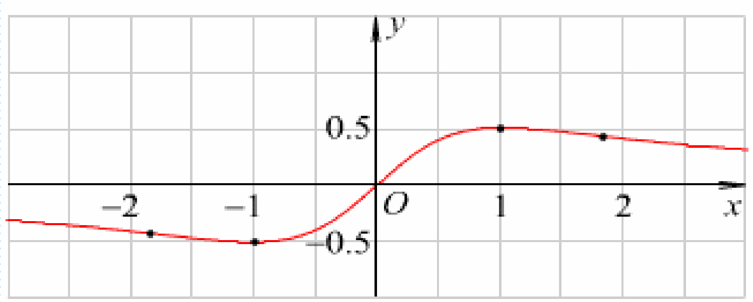
(1)无穷限的反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx+\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$$



(2)无界函数的反常积分

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}dx =$$

$$\int_0^{1}\frac{1}{x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$$

二、典型例题

例1 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}dx.$

解 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x-\cos x| dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x-\cos x)dx$$

$$=2\sqrt{2}-2.$$

例2　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$

解　由 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$，设 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$，

则 $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$，

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = 0.$$

故得 $2I = \frac{\pi}{2}$，　即 $I = \frac{\pi}{4}$.

设 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}{\sin(\frac{\pi}{2} - t) + \cos(\frac{\pi}{2} - t)} dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt$$

例3 求 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx.$

x	0	$\ln 2$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$

解 令 $e^{-x}=\sin t,$

则 $x=-\ln\sin t,\ dx=-\dfrac{\cos t}{\sin t}dt.$

$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos t\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right)dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

x	0	$\ln 2$
t	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

另令 $\sqrt{1-e^{-2x}}=t,$ $x=-\dfrac{1}{2}\ln(1-t^2),\ dx=\dfrac{t}{1-t^2}dt,$

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx=\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{t^2}{1-t^2}dt=\left[-t+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]\Big|_0^{\sqrt{3}/2}$$

例4 求 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[\frac{\sin x}{x^8+1}+\sqrt{\ln^2(1-x)}]dx.$

解 原式 $=0+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\ln(1-x)|dx$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(1-x)dx-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\ln(1-x)dx$$

$$=x\ln(1-x)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{x}{1-x}dx$$

$$-x\ln(1-x)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{1-x}dx=\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{2}.$$

例5 求 $\int_{-2}^{2}\min\{\frac{1}{|x|},x^2\}dx.$

解 $\because \min\{\frac{1}{|x|},x^2\}=\begin{cases} x^2, & |x|\le 1 \\ \frac{1}{|x|}, & |x|>1 \end{cases}$ 是偶函数,

$$原式=2\int_0^2\min\{\frac{1}{|x|},x^2\}dx$$

$$=2\int_0^1 x^2dx+2\int_1^2\frac{1}{x}dx=\frac{2}{3}+2\ln 2.$$

例6 设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$，求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx$.

解 原式 $=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)d(x-1)^3$

$$=\frac{1}{3}[f(x)(x-1)^3]\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 f'(x)(x-1)^3dx$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^1 e^{-x^2+2x}(x-1)^3dx$$

$$=-\frac{e}{6}\int_0^1 e^{-(x-1)^2}(x-1)^2d(x-1)^2$$

$$\overset{\text{令}(x-1)^2=u}{=\!=\!=\!=\!=}-\frac{1}{6}\int_1^0 ue^{-u}du=\frac{1}{6}(e-2).$$

例7 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$.

证明 $$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\ge(b-a)^2.$$

证 作辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\int_a^x\frac{dt}{f(t)}-(x-a)^2,$$

$$\because F'(x)=f(x)\int_a^x\frac{1}{f(t)}dt+\int_a^x f(t)dt\cdot\frac{1}{f(x)}-2(x-a)$$

$$=\int_a^x\frac{f(x)}{f(t)}dt+\int_a^x\frac{f(t)}{f(x)}dt-\int_a^x 2dt,$$

$$\because f(x) > 0, \quad \therefore \frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} \geq 2$$

即 $F'(x) = \int_a^x \left(\frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} - 2\right)dt \geq 0$

$F(x)$ 单调增加.

又 $\because F(a) = 0, \quad \therefore F(b) \geq F(a) = 0,$

即 $\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2.$

例8 设$f(x)$、$g(x)$在区间$[a,b]$上均连续，证明：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

(柯西—施瓦茨不等式）

证 $\forall t \in R$, $\int_a^b (tf(x)+g(x))^2 dx \ge 0$

即$t^2\int_a^b f^2(x)dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \ge 0$

$$\therefore \Delta = 4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \le 0$$

$$\therefore \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

例7 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$.

证明 $\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \ge (b-a)^2$.

例8 设$f(x)$、$g(x)$在区间$[a,b]$上均连续，证明：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

在柯西—施瓦茨不等式中$f(x)$用$\sqrt{f(x)}$代,

$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$即可得例8中不等式

例9　求下列广义积分：

$$(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9};\quad (2)\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$$

解　(1) 原式 $=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+9}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$

$$=\lim_{t\to-\infty}\int_t^0\frac{dx}{(x+2)^2+5}+\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{dx}{(x+2)^2+5}$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_t^0+\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_0^t$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

(2) $\because \lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = \infty,$

$\therefore x = 1$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

$$原式 = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{d(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{2^2-(1+\frac{1}{x})^2}}\right]$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin\frac{1+\frac{1}{x}}{2}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{2} = \frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{4}.$$

$P244,9(2)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$

解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot(\int_0^x e^{t^2}dt)'}{xe^{2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{1+2x^2}=2$$

10. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in[0,1) \\ x & x\in[1,2] \end{cases}$. 求 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $[0,2]$ 上的表达式，并讨论 $\varphi(x)$ 在 $(0,2)$ 内的连续性.

解 当 $0\le x\le 1$ 时，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x t^2dt=\dfrac{1}{3}x^3$;

当 $1<x\le 2$ 时，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 t^2dt+\int_1^x tdt$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}$$

$$\therefore \varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3 & 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6} & 1<x\le 2 \end{cases}$$

连续性证略

P270 总习题五：11．设 $f(x)$为连续函数，证明

$$\int_0^x f(t)(x-t)dt = \int_0^x [\int_0^t f(u)du]dt.$$

$$\int_0^x [\int_0^t f(u)du]dt = t\int_0^t f(u)du \Big|_0^x - \int_0^x td[\int_0^t f(u)du]$$

$$= x\int_0^x f(u)du - \int_0^x tf(t)dt$$

$$= x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = \int_0^x f(t)(x-t)dt$$

$$g(x) = \int_0^x f(t)(x-t)dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x f(t)tdt$$

$$g'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \{\int_0^x [\int_0^t f(u)du]dt\}'$$

若函数 $f(x)=\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(t-x)dt$，则 $f(x)$等于 $\underline{\ A\ }$

（A） $-\sin x$ (B) $-1+\cos x$

（C） $\sin x$ (D) 0.

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t-x)dt,$$ 令 $t-x=u,\quad dt=du$

$$\int_0^x \sin(t-x)dt=\int_{-x}^0 \sin u du$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_{-x}^0 \sin u du=-\sin(-x)\cdot(-1)=-\sin x$$

$$\varphi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\mathrm{d}t$$

$$\varphi'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,t)\mathrm{d}t+f(x,\beta(x))\beta'(x)-f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$$

设 $p>0$, 证明 $\dfrac{p}{p+1} < \int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^p} < 1.$

证明 $$1 > \frac{1}{1+x^p} = \frac{1+x^p-x^p}{1+x^p} = 1-\frac{x^p}{1+x^p} > 1-x^p$$

因为 $$\int_0^1 (1-x^p)dx < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} < \int_0^1 dx$$

而 $$\int_0^1 dx = 1, \quad \int_0^1 (1-x^p)dx = \left(x-\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{p}{1+p}$$

$$\therefore \frac{p}{1+p} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} < 1$$

计算极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p>0)$$

解: $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}[(\frac{1}{n})^p+(\frac{2}{n})^p+\cdots(\frac{n}{n})^p]\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^p\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}$$

测验题

一、 选择题：

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=$

（A） 0； （B） $\frac{1}{2}$；

（C） $\frac{\pi}{4}$； （D） $\frac{\pi}{2}$.

C

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

2、$\frac{d}{dx}\int_0^x \ln(t^2+1)\,dt=$（ A ）

（A） $\ln(x^2+1)$； （B） $\ln(t^2+1)$；

（C） $2x\ln(x^2+1)$； （D） $2t\ln(t^2+1)$.

3、$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} = ($ C $)$

（A） 0;　　（B） 1;

（C） $\dfrac{1}{3}$;　　（D） ∞ .

4.、定积分$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$的值是（ D ）

（A） e;　　（B） $\dfrac{1}{2}$;

（C） $e^{\frac{1}{2}}$;　　（D） 2 .

5、广义积分 $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=$ （ C ）

（A） $\ln 4$ ；　　（B） 0 ；

（C） $\frac{1}{3}\ln 4$ ；　　（D）发散.

6、广义积分 $\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}=$ （ D ）

（A） $1-\ln 3$ ；　　（B） $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$ ；

（C） $\ln 3$ ；　　（D）发散.

证明不等式:

$$\frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \le \frac{\pi}{6} \qquad (n \ge 2).$$

证:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \ge \int_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

确定 A、B 使下式成立

$$\int \frac{dx}{(1+2\cos x)^2} = \frac{A\sin x}{1+2\cos x} + B\int \frac{dx}{1+2\cos x}.$$

解：由题设移项整理得

$$\int \frac{1-B-2B\cos x}{(1+2\cos x)^2}dx = \frac{A\sin x}{1+2\cos x} + C$$

由不定积分的定义：有

$$\left(\frac{A\sin x}{1+2\cos x}\right)' = \frac{1-B-2B\cos x}{(1+2\cos x)^2}$$

$$\frac{A\cos x(1+2\cos x)+2A\sin^2 x}{(1+2\cos x)^2} = \frac{A\cos x+2A}{(1+2\cos x)^2} = \frac{1-B-2B\cos x}{(1+2\cos x)^2}$$

对比导数：$\begin{cases} A=-2B \\ 2A=1-B \end{cases} \Rightarrow A=\dfrac{2}{3},\quad B=-\dfrac{1}{3}$