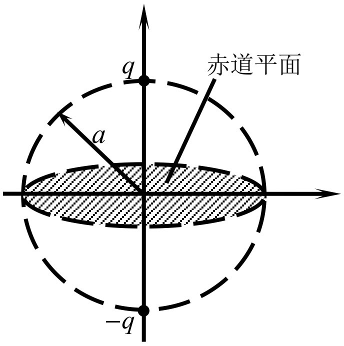
第三章习题及解答

3.1 真空中半径为a的一个球面，球的两极点处分别设置点电荷q和$-q$，试计算球赤道平面上电通密度的通量Φ(如题 3.1 图所示)。

解 由点电荷q和$-q$共同产生的电通密度为



题 3.1 图

$$\boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi}[\frac{\boldsymbol{R}_+}{R_+^3} - \frac{\boldsymbol{R}_-}{R_-^3}] =$$

$$\frac{q}{4\pi}\{\frac{\boldsymbol{e}_r r + \boldsymbol{e}_z(z-a)}{[r^2+(z-a)^2]^{3/2}} - \frac{\boldsymbol{e}_r r + \boldsymbol{e}_z(z+a)}{[r^2+(z+a)^2]^{3/2}}\}$$

则球赤道平面上电通密度的通量

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{D} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{D} \bullet \boldsymbol{e}_z\big|_{z=0} \mathrm{d}S =$$

$$\frac{q}{4\pi}\int_0^a [\frac{(-a)}{(r^2+a^2)^{3/2}} - \frac{a}{(r^2+a^2)^{3/2}}]2\pi r\,\mathrm{d}r =$$

$$\frac{qa}{(r^2+a^2)^{1/2}}\bigg|_0^a = (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)q = -0.293q$$

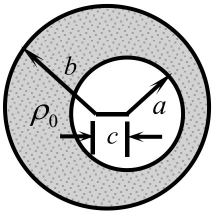
3.2 1911 年卢瑟福在实验中使用的是半径为r_a的球体原子模型，其球体内均匀分布有总电荷量为$-Ze$的电子云，在球心有一正电荷Ze（Z是原子序数，e是质子电荷量），通过实验得到球体内的电通量密度表达式为$\boldsymbol{D}_0 = \boldsymbol{e}_r \frac{Ze}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_a^3}\right)$，试证明之。

解 位于球心的正电荷Ze球体内产生的电通量密度为 $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{e}_r \frac{Ze}{4\pi r^2}$

原子内电子云的电荷体密度为 $\rho = -\frac{Ze}{4\pi r_a^3/3} = -\frac{3Ze}{4\pi r_a^3}$

电子云在原子内产生的电通量密度则为 $\boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{e}_r \frac{\rho 4\pi r^3/3}{4\pi r^2} = -\boldsymbol{e}_r \frac{Ze}{4\pi}\frac{r}{r_a^3}$

故原子内总的电通量密度为 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{e}_r \frac{Ze}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_a^3}\right)$

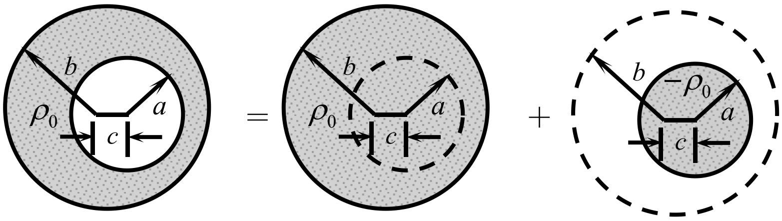


题 3. 3 图(a)

3.3 电荷均匀分布于两圆柱面间的区域中，体密度为$\rho_0\ \mathrm{C/m^3}$，两圆柱面半径分别为a和b，轴线相距为c $(c < b-a)$，如题 3.3 图(a)所示。求空间各部分的电场。

解 由于两圆柱面间的电荷不是轴对称分布，不能直接用高斯定律求解。但可把半径为a的小圆柱面内看作同时具有体密度分别为$\pm\rho_0$的两种电荷分布，这样在半径为b的整个圆柱体内具有体密度为ρ_0的均匀电荷分布，而在半径为a的整个圆柱体内则具有体密度为$-\rho_0$的均匀电荷分布，如题 3.3 图(b)所示。空间任一点的电场是这两种电荷所产生的电场的叠加。

在 $r > b$ 区域中，由高斯定律 $\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$，可求得大、小圆柱中的正、负电荷在点 P 产生的电场分别为 $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{e}_r \frac{\pi b^2 \rho_0}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho_0 b^2 \boldsymbol{r}}{2\varepsilon_0 r^2}$ $\quad \boldsymbol{E}_1' = \boldsymbol{e}_r' \frac{-\pi a^2 \rho_0}{2\pi\varepsilon_0 r'} = -\frac{\rho_0 a^2 \boldsymbol{r}'}{2\varepsilon_0 r'^2}$



题 3. 3 图 (b)

点 P 处总的电场为 $\quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_1' = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\frac{b^2 \boldsymbol{r}}{r^2} - \frac{a^2 \boldsymbol{r}'}{r'^2})$

在 $r < b$ 且 $r' > a$ 区域中，同理可求得大、小圆柱中的正、负电荷在点 P 产生的电场分别为

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{e}_r \frac{\pi r^2 \rho}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho \boldsymbol{r}}{2\varepsilon_0} \qquad \boldsymbol{E}_2' = \boldsymbol{e}_r' \frac{-\pi a^2 \rho}{2\pi\varepsilon_0 r'} = -\frac{\rho a^2 \boldsymbol{r}'}{2\varepsilon_0 r'^2}$$

点 P 处总的电场为 $\quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_2' = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(\boldsymbol{r} - \frac{a^2 \boldsymbol{r}'}{r'^2})$

在 $r' < a$ 的空腔区域中，大、小圆柱中的正、负电荷在点 P 产生的电场分别为

$$\boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{e}_r \frac{\pi r^2 \rho_0}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho_0 \boldsymbol{r}}{2\varepsilon_0} \qquad \boldsymbol{E}_3' = \boldsymbol{e}_r' \frac{-\pi r'^2 \rho_0}{2\pi\varepsilon_0 r'} = -\frac{\rho_0 \boldsymbol{r}'}{2\varepsilon_0}$$

点 P 处总的电场为 $\quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_3 + \boldsymbol{E}_3' = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{c}$

3.4 半径为 a 的球中充满密度 $\rho(r)$ 的体电荷，已知电位移分布为

$$D_r = \begin{cases} r^3 + Ar^2 & (r \le a) \\ \dfrac{a^5 + Aa^4}{r^2} & (r \ge a) \end{cases}$$

其中 A 为常数，试求电荷密度 $\rho(r)$。

解：由 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$，有 $\quad \rho(r) = \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2 D_r)$

故在 $r < a$ 区域 $\quad \rho(r) = \varepsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r^2(r^3 + Ar^2)] = \varepsilon_0(5r^2 + 4Ar)$

在 $r > a$ 区域 $\quad \rho(r) = \varepsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r^2 \frac{(a^5 + Aa^4)}{r^2}] = 0$

3.5 一个半径为 a 薄导体球壳内表面涂覆了一薄层绝缘膜，球内充满总电荷量为 Q 为的体电荷，球壳上又另充有电荷量 Q。已知球内部的电场为 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_r(r/a)^4$，设球内介质为真空。计算：（1） 球内的电荷分布；（2）球壳外表面的电荷面密度。

解 （1） 由高斯定律的微分形式可求得球内的电荷体密度为

$$\rho=\varepsilon_0\nabla\bullet\boldsymbol{E}=\varepsilon_0[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2E)]=\varepsilon_0[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{r^4}{a^4})]=6\varepsilon_0\frac{r^3}{a^4}$$

（2）球体内的总电量Q为 $Q=\int_\tau\rho\mathrm{d}\tau=\int_0^a 6\varepsilon_0\frac{r^3}{a^4}4\pi r^2\mathrm{d}r=4\pi\varepsilon_0 a^2$

球内电荷不仅在球壳内表面上感应电荷$-Q$，而且在球壳外表面上还要感应电荷Q，所以球壳外表面上的总电荷为$2Q$，故球壳外表面上的电荷面密度为 $\sigma=\frac{2Q}{4\pi a^2}=2\varepsilon_0$

3.6 两个无限长的同轴圆柱半径分别为$r=a$和$r=b$ $(b>a)$，圆柱表面分别带有密度为σ_1和σ_2的面电荷。（1）计算各处的电位移$\boldsymbol{D}_0$；（2）欲使$r>b$区域内$\boldsymbol{D}_0=0$，则σ_1和σ_2应具有什么关系？

解 （1）由高斯定理$\oint_S\boldsymbol{D}_0\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{S}=q$，当$r<a$时，有 $\boldsymbol{D}_{01}=0$

当$a<r<b$时，有 $2\pi rD_{02}=2\pi a\sigma_1$ ，则 $\boldsymbol{D}_{02}=\boldsymbol{e}_r\frac{a\sigma_1}{r}$

当$b<r<\infty$时，有 $2\pi rD_{03}=2\pi a\sigma_1+2\pi b\sigma_2$ ，则 $\boldsymbol{D}_{03}=\boldsymbol{e}_r\frac{a\sigma_1+b\sigma_2}{r}$

（2）令 $\boldsymbol{D}_{03}=\boldsymbol{e}_r\frac{a\sigma_1+b\sigma_2}{r}=0$，则得到 $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=-\frac{b}{a}$

3.7 计算在电场强度$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x y+\boldsymbol{e}_y x$的电场中把带电量为$-2\mu\mathrm{C}$的点电荷从点$P_1(2,1,-1)$移到点$P_2(8,2,-1)$时电场所做的功：（1）沿曲线$x=2y^2$；（2）沿连接该两点的直线。

解 （1） $W=\int_C\boldsymbol{F}\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{l}=q\int_C\boldsymbol{E}\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{l}=q\int_C E_x\,\mathrm{d}x+E_y\,\mathrm{d}y=$

$$q\int_C y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=q\int_1^2 y\,\mathrm{d}(2y^2)+2y^2\,\mathrm{d}y=q\int_1^2 6y^2\,\mathrm{d}y=14q=-28\times10^{-6}\ (J)$$

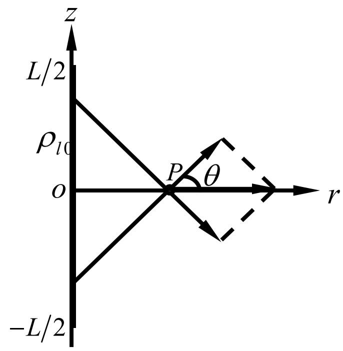
（2）连接点$P_1(2,1,-1)$到点$P_2(8,2,-1)$直线方程为

$$\frac{x-2}{y-1}=\frac{x-8}{y-2}\qquad 即 \qquad x-6y+4=0$$

故$W=q\int_C y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=q\int_1^2 y\,\mathrm{d}(6y-4)+(6y-4)\,\mathrm{d}y=q\int_1^2(12y-4)\,\mathrm{d}y=14q=-28\times10^{-6}\ (J)$

3.8 长度为L的细导线带有均匀电荷，其电荷线密度为ρ_{l0}。（1）计算线电荷平分面上任意点的电位φ；（2）利用直接积分法计算线电荷平分面上任意点的电场$\boldsymbol{E}$，并用$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$核对。

解 （1）建立如题 3.8 图所示坐标系。根据电位的积分表达式，线电荷平分面上任意点P的电位为



题 3.8 图

$$\varphi(r,0)=\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\rho_{l0}\mathrm{d}z'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z'^2}}=$$

$$\frac{\rho_{l0}}{4\pi\varepsilon_0}\ln(z'+\sqrt{r^2+z'^2})\Big|_{-L/2}^{L/2}=$$

$$\frac{\rho_{l0}}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{r^2+(L/2)^2}+L/2}{\sqrt{r^2+(L/2)^2}-L/2}=$$

$$\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{r^2+(L/2)^2}+L/2}{r}$$

（2）根据对称性，可得两个对称线电荷元 $\rho_{l0}\mathrm{d}z'$ 在点 P 的电场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}E_r=\boldsymbol{e}_r\frac{\rho_{l0}\mathrm{d}z'}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z'^2}}\cos\theta=\boldsymbol{e}_r\frac{\rho_{l0}r\mathrm{d}z'}{2\pi\varepsilon_0(r^2+z'^2)^{3/2}}$$

故长为 L 的线电荷在点 P 的电场为

$$\boldsymbol{E}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\int_0^{L/2}\frac{\rho_{l0}r\mathrm{d}z'}{2\pi\varepsilon_0(r^2+z'^2)^{3/2}}=\boldsymbol{e}_r\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{z'}{\sqrt{r^2+z'^2}}\right)\Big|_0^{L/2}=\boldsymbol{e}_r\frac{\rho_{l0}}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{L}{\sqrt{r^2+(L/2)^2}}$$

由 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ 求 $\boldsymbol{E}$，有

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=-\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0}\nabla\left[\ln\frac{L/2+\sqrt{r^2+(L/2)^2}}{r}\right]=$$

$$-\boldsymbol{e}_r\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\ln\left(L/2+\sqrt{r^2+(L/2)^2}\right)-\ln r\right]=$$

$$-\boldsymbol{e}_r\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{r}{\left[L/2+\sqrt{r^2+(L/2)^2}\right]\sqrt{r^2+(L/2)^2}}-\frac{1}{r}\right\}=\boldsymbol{e}_r\frac{\rho_{l0}}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{L}{\sqrt{r^2+(L/2)^2}}$$

3.9 已知无限长均匀线电荷 ρ_l 的电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}$，试用定义式 $\varphi(r)=\displaystyle\int_r^{r_P}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 求其电位函数。其中 r_P 为电位参考点。

解 $$\varphi(r)=\int_r^{r_P}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_r^{r_P}\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_r^{r_P}=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_P}{r}$$

由于是无限长的线电荷，不能将 r_P 选为无穷远点。

3.10 一点电荷 $+q$ 位于 $(-a,0,0)$，另一点电荷 $-2q$ 位于 $(a,0,0)$，求空间的零电位面。

解 两个点电荷 $+q$ 和 $-2q$ 在空间产生的电位

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}-\frac{2q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}\right]$$

令$\varphi(x,y,z)=0$，则有 $$\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}-\frac{2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}=0$$

即 $$4[(x+a)^2+y^2+z^2]=(x-a)^2+y^2+z^2$$

故得 $$(x+\frac{5}{3}a)^2+y^2+z^2=(\frac{4}{3}a)^2$$

由此可见，零电位面是一个以点$(-\frac{5}{3}a,0,0)$为球心、$\frac{4}{3}a$为半径的球面。

3.11 证明习题 3.2 的电位表达式为 $$\varphi(r)=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r}+\frac{r^2}{2r_a}-\frac{3}{2r_a})$$

解 位于球心的正电荷Ze在原子外产生的电通量密度为 $$\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{e}_r\frac{Ze}{4\pi r^2}$$

电子云在原子外产生的电通量密度则为 $$\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{e}_r\frac{\rho 4\pi r_a^3/3}{4\pi r^2}=-\boldsymbol{e}_r\frac{Ze}{4\pi r^2}$$

所以原子外的电场为零。故原子内电位为

$$\varphi(r)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_r^{r_a}D\,\mathrm{d}r=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{r_a}(\frac{1}{r^2}-\frac{r}{r_a^3})\,\mathrm{d}r=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r}+\frac{r^2}{2r_a}-\frac{3}{2r_a})$$

3.12 电场中有一半径为a的圆柱体，已知柱内外的电位函数分别为

$$\begin{cases}\varphi(r)=0 & r\le a\\ \varphi(r)=A(r-\dfrac{a^2}{r})\cos\phi & r\ge a\end{cases}$$

（1）求圆柱内、外的电场强度；
（2）这个圆柱是什么材料制成的？表面有电荷分布吗？试求之。

解 （1）由$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，可得到 $r<a$时，$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=0$

$r>a$时，$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=-\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}[A(r-\frac{a^2}{r})\cos\phi]-\boldsymbol{e}_\phi\frac{\partial}{r\partial\phi}[A(r-\frac{a^2}{r})\cos\phi]=$$

$$-\boldsymbol{e}_rA(1+\frac{a^2}{r^2})\cos\phi+\boldsymbol{e}_\phi A(1-\frac{a^2}{r^2})\sin\phi$$

（2）该圆柱体为等位体，所以是由导体制成的，其表面有电荷分布，电荷面密度为

$$\sigma=\varepsilon_0\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{E}\big|_{r=a}=\varepsilon_0\boldsymbol{e}_r\bullet\boldsymbol{E}\big|_{r=a}=-2\varepsilon_0A\cos\phi$$

3.13 验证下列标量函数在它们各自的坐标系中满足$\nabla^2\varphi=0$

（1）$\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}$ 其中$h^2=k^2+l^2$；

（2）$r^n[\cos(n\phi)+A\sin(n\phi)]$ 圆柱坐标；

（3）$r^{-n}\cos(n\phi)$ 圆柱坐标；

（4）$r\cos\phi$ 球坐标；

（5）$r^{-2}\cos\phi$ 球坐标。

解 （1）在直角坐标系中 $\nabla^2\varphi=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

而
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}]=-k^2\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}]=-l^2\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}]=h^2\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}$$

故
$$\nabla^2\varphi=(-k^2-l^2+h^2)\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}=0$$

（2）在圆柱坐标系中 $\nabla^2\varphi=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial\varphi}{\partial r})+\dfrac{\partial^2\varphi}{r^2\partial\phi^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

而
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\varphi}{\partial r})=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\{r\frac{\partial}{\partial r}r^n[\cos(n\phi)+A\sin(n\phi)]\}=n^2r^{n-2}[\cos(n\phi)+A\sin(n\phi)]$$
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=-n^2r^{n-2}[\cos(n\phi)+A\sin(n\phi)]\}$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}r^{-n}[\cos(n\phi)+A\sin(n\phi)]=0$$

故
$$\nabla^2\varphi=0$$

（3）
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\varphi}{\partial r})=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\{r\frac{\partial}{\partial r}[r^{-n}\cos(n\phi)]\}=n^2r^{-n-2}\cos(n\phi)$$
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=-n^2r^{-n-2}\cos(n\phi)$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}[r^{-n}\cos(n\phi)]=0$$

故
$$\nabla^2\varphi=0$$

（4）在球坐标系中 $\nabla^2\varphi=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta})+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$

而
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta)]=\frac{2}{r}\cos\theta$$
$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta})=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta)]=$$
$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(-r\sin^2\theta)=-\frac{2}{r}\cos\theta$$
$$\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}(r\cos\theta)=0$$

故
$$\nabla^2\varphi=0$$

（5）　$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2\frac{\partial}{\partial r}(r^{-2}\cos\theta)]=\frac{2}{r^2}\cos\theta$$

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta})=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(r^{-2}\cos\theta)]=$$

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(-r^{-2}\sin^2\theta)=-\frac{2}{r^4}\cos\theta$$

$$\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}(r^{-2}\cos\theta)=0$$

故　$$\nabla^2\varphi=0$$

3.14　已知 $y>0$ 的空间中没有电荷，下列几个函数中哪些是可能的电位的解？

（1）$e^{-y}\cosh x$；

（2）$e^{-y}\cos x$；

（3）$e^{-\sqrt{2}y}\cos x\sin x$

（4）$\sin x\sin y\sin z$。

解　（1）$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{-y}\cosh x)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^{-y}\cosh x)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{-y}\cosh x)=2e^{-y}\cosh x\neq 0$$

所以函数 $e^{-y}\cosh x$ 不是 $y>0$ 空间中的电位的解；

（2）$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{-y}\cos x)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^{-y}\cos x)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{-y}\cos x)=-e^{-y}\cos x+e^{-y}\cos x=0$$

所以函数 $e^{-y}\cos x$ 是 $y>0$ 空间中可能的电位的解；

（3）$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{-\sqrt{2}y}\cos x\sin x)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^{-\sqrt{2}y}\cos x\sin x)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{-\sqrt{2}y}\cos x\sin x)=$$

$$-4e^{-\sqrt{2}y}\cos x\sin x+2e^{-\sqrt{2}y}\cos x\sin x\neq 0$$

所以函数 $e^{-\sqrt{2}y}\cos x\sin x$ 不是 $y>0$ 空间中的电位的解；

（4）$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin x\sin y\sin z)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sin x\sin y\sin z)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sin x\sin y\sin z)=$$

$$-3\sin x\sin y\sin z\neq 0$$

所以函数 $\sin x\sin y\sin z$ 不是 $y>0$ 空间中的电位的解。

3.15 中心位于原点，边长为 L 的电介质立方体的极化强度矢量为 $\boldsymbol{P}=P_0(\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z)$。（1）计算面束缚电荷密度和体束缚电荷密度；（2）证明总的束缚电荷为零。

解　（1）　$$\rho_P=-\nabla\bullet\boldsymbol{P}=-3P_0$$

$$\sigma_P(x=\frac{L}{2})=\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{P}\Big|_{x=L/2}=\boldsymbol{e}_x\bullet\boldsymbol{P}\Big|_{x=L/2}=\frac{L}{2}P_0$$

$$\sigma_P(x=-\frac{L}{2})=\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{P}\Big|_{x=-L/2}=-\boldsymbol{e}_x\bullet\boldsymbol{P}\Big|_{x=-L/2}=\frac{L}{2}P_0$$

同理　$$\sigma_P(y=\frac{L}{2})=\sigma_P(y=-\frac{L}{2})=\sigma_P(z=\frac{L}{2})=\sigma_P(z=-\frac{L}{2})=\frac{L}{2}P_0$$

（2） $q_P = \int_\tau \rho_P \,\mathrm{d}\tau + \oint_S \sigma_P \,\mathrm{d}S = -3P_0L^3 + 6L^2 \times \frac{L}{2}P_0 = 0$

3.16 一半径为 R_0 的介质球，介电常数为 $\varepsilon_r\varepsilon_0$，其内均匀分布自由电荷 ρ，证明中心点的电位为 $\frac{2\varepsilon_r+1}{2\varepsilon_r}(\frac{\rho}{3\varepsilon_0})R_0^2$

解 由 $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = q$，可得到

$r<R_0$ 时， $4\pi r^2 D_1 = \frac{4\pi r^3}{3}\rho$

即 $D_1 = \frac{\rho r}{3}$， $E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_r\varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_r\varepsilon_0}$

$r>R_0$ 时， $4\pi r^2 D_2 = \frac{4\pi R_0^3}{3}\rho$

即 $D_2 = \frac{\rho R_0^3}{3r^2}$， $E_2 = \frac{D_1}{\varepsilon_0} = \frac{\rho R_0^3}{3\varepsilon_0 r^2}$

故中心点的电位为

$$\varphi(0) = \int_0^{R_0} E_1\,\mathrm{d}r + \int_{R_0}^{\infty} E_2\,\mathrm{d}r = \int_0^{R_0}\frac{\rho r}{3\varepsilon_r\varepsilon_0}\mathrm{d}r + \int_{R_0}^{\infty}\frac{\rho R_0^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{\rho R_0^2}{6\varepsilon_r\varepsilon_0} + \frac{\rho R_0^2}{3\varepsilon_0} = \frac{2\varepsilon_r+1}{2\varepsilon_r}(\frac{\rho}{3\varepsilon_0})R_0^2$$

3.17 一个半径为 R 的介质球，介电常数为 ε，球内的极化强度 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{e}_r K/r$，其中 K 为一常数。（1） 计算束缚电荷体密度和面密度；（2） 计算自由电荷密度；（3）计算球内、外的电场和电位分布。

解 （1） 介质球内的束缚电荷体密度为 $\rho_p = -\nabla\cdot\boldsymbol{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{K}{r}) = -\frac{K}{r^2}$

在 $r=R$ 的球面上，束缚电荷面密度为 $\sigma_p = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}\big|_{r=R} = \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{P}\big|_{r=R} = \frac{K}{R}$

（2）由于 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$，所以 $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E} + \nabla\cdot\boldsymbol{P} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\nabla\cdot\boldsymbol{D} + \nabla\cdot\boldsymbol{P}$

即 $(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \nabla\cdot\boldsymbol{P}$

由此可得到介质球内的自由电荷体密度为 $\rho = \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon_0}\nabla\cdot\boldsymbol{P} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon_0}\rho_p = \frac{\varepsilon K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}$

总的自由电荷量 $q = \int_\tau \rho\mathrm{d}\tau = \frac{\varepsilon K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\int_0^R \frac{1}{r^2}4\pi r^2\mathrm{d}r = \frac{4\pi\varepsilon RK}{\varepsilon-\varepsilon_0}$

（3）介质球内、外的电场强度分别为

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\boldsymbol{P}}{\varepsilon-\varepsilon_0} = \boldsymbol{e}_r\frac{K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)r} \qquad (r<R)$$

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_r\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\boldsymbol{e}_r\frac{\varepsilon RK}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}\qquad(r>R)$$

介质球内、外的电位分别为

$$\varphi_1=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_r^R E_1\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}E_2\mathrm{d}r=$$

$$\int_r^R\frac{K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)r}\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}\frac{\varepsilon RK}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}\mathrm{d}r=$$

$$\frac{K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)}\ln\frac{R}{r}+\frac{\varepsilon\quad K}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}\qquad(r\le R)$$

$$\varphi_2=\int_r^{\infty}E_2\mathrm{d}r=\int_r^{\infty}\frac{\varepsilon RK}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}\mathrm{d}r=\frac{\varepsilon RK}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r}\qquad(r\ge R)$$

3.18 （1）证明不均匀电介质在没有自由电荷密度时可能存在束缚电荷体密度；（2）导出束缚电荷密度 ρ_P 的表达式。

解 （1）由 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$，得束缚电荷体密度为 $\rho_P=-\nabla\bullet\boldsymbol{P}=-\nabla\bullet\boldsymbol{D}+\varepsilon_0\nabla\bullet\boldsymbol{E}$

在介质内没有自由电荷密度时，$\nabla\bullet\boldsymbol{D}=0$，则有 $\rho_P=\varepsilon_0\nabla\bullet\boldsymbol{E}$

由于 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，有 $\nabla\bullet\boldsymbol{D}=\nabla\bullet(\varepsilon\boldsymbol{E})=\varepsilon\nabla\bullet\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\bullet\nabla\varepsilon=0$

所以 $$\nabla\bullet\boldsymbol{E}=-\frac{\boldsymbol{E}\bullet\nabla\varepsilon}{\varepsilon}$$

由此可见，当电介质不均匀时，$\nabla\bullet\boldsymbol{E}$ 可能不为零，故在不均匀电介质中可能存在束缚电荷体密度。

（2）束缚电荷密度 ρ_P 的表达式为 $\rho_P=\varepsilon_0\nabla\bullet\boldsymbol{E}=-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\boldsymbol{E}\bullet\nabla\varepsilon$

3.19 两种电介质的相对介电常数分别为 ε_{r1}=2 和 ε_{r2}=3，其分界面为 z=0 平面。如果已知介质 1 中的电场的

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_x 2y-\boldsymbol{e}_y 3x+\boldsymbol{e}_z(5+z)$$

那么对于介质 2 中的 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_2$，我们可得到什么结果？能否求出介质 2 中任意点的 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_2$？

解 设在介质 2 中

$$\boldsymbol{E}_2(x,y,0)=\boldsymbol{e}_x E_{2x}(x,y,0)+\boldsymbol{e}_y E_{2y}(x,y,0)+\boldsymbol{e}_z E_{2z}(x,y,0)$$

$$\boldsymbol{D}_2=\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\boldsymbol{E}_2=3\varepsilon_0\boldsymbol{E}_2$$

在 $z=0$ 处，由 $\boldsymbol{e}_z\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0$ 和 $\boldsymbol{e}_z\bullet(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=0$，可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_x 2y-\boldsymbol{e}_y 3x=\boldsymbol{e}_x E_{2x}(x,y,0)+\boldsymbol{e}_y E_{2y}(x,y,0)\\ 2\times 5\varepsilon_0=3\varepsilon_0 E_{2z}(x,y,0)\end{cases}$$

于是得到 $E_{2x}(x,y,0)=2y$

$E_{2y}(x,y,0)=-3x$

$E_{2z}(x,y,0)=10/3$

故得到介质 2 中的 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 在 $z=0$ 处的表达式分别为
$$\boldsymbol{E}_2(x,y,0)=\boldsymbol{e}_x 2y-\boldsymbol{e}_y 3x+\boldsymbol{e}_z(10/3)$$
$$\boldsymbol{D}_2(x,y,0)=\varepsilon_0(\boldsymbol{e}_x 6y-\boldsymbol{e}_y 9x+\boldsymbol{e}_z 10)$$

不能求出介质 2 中任意点的 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_2$。由于是非均匀场，介质中任意点的电场与边界面上的电场是不相同的。

3.20 电场中一半径为 a、介电常数为 ε 的介质球，已知球内、外的电位函数分别为
$$\varphi_1=-E_0 r\cos\theta+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}a^3E_0\frac{\cos\theta}{r^2}\qquad r\ge a$$
$$\varphi_2=-\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0 r\cos\theta\qquad r\le a$$
验证球表面的边界条件，并计算球表面的束缚电荷密度。

解 在球表面上
$$\varphi_1(a,\theta)=-E_0 a\cos\theta+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}aE_0\cos\theta=-\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0 a\cos\theta$$
$$\varphi_2(a,\theta)=-\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0 a\cos\theta$$
$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=a}=-E_0\cos\theta-\frac{2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\cos\theta=-\frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\cos\theta$$
$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=a}=-\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\cos\theta$$
故有 $\quad \varphi_1(a,\theta)=\varphi_2(a,\theta)$， $\quad \varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=a}=\varepsilon\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=a}$

可见 φ_1 和 φ_2 满足球表面上的边界条件。

球表面的束缚电荷密度为
$$\sigma_p=\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{P}_2\Big|_{r=a}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\boldsymbol{e}_r\bullet\boldsymbol{E}_2=-(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=a}=\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\cos\theta$$

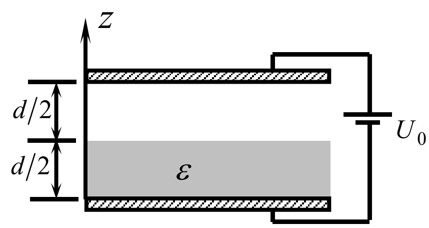
3.21 平行板电容器的长、宽分别为 a 和 b，极板间距离为 d。电容器的一半厚度（$0\sim\dfrac{d}{2}$）用介电常数为 ε 的电介质填充，如题 3.21 图所示。

(1)（1） 板上外加电压 U_0，求板上的自由电荷面密度、束缚电荷；

(2)（2） 若已知板上的自由电荷总量为 Q，求此时极板间电压和束缚电荷；

(3)（3） 求电容器的电容量。

解 （1） 设介质中的电场为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_z E$，空气中的电场为 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{e}_z E_0$。由 $D=D_0$，有
$$\varepsilon E=\varepsilon_0 E_0$$
又由于
$$E\frac{d}{2}+E_0\frac{d}{2}=-U_0$$
由以上两式解得
$$E=-\frac{2\varepsilon_0 U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}\ ,\quad E_0=-\frac{2\varepsilon U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$$



题 3.21 图

故下极板的自由电荷面密度为 $\sigma_{下} = \varepsilon E = -\dfrac{2\varepsilon_0 \varepsilon U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$

上极板的自由电荷面密度为 $\sigma_{上} = -\varepsilon_0 E_0 = \dfrac{2\varepsilon_0 \varepsilon U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$

电介质中的极化强度 $\boldsymbol{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{e}_z \dfrac{2\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$

故下表面上的束缚电荷面密度为 $\sigma_{p下} = -\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{P} = \dfrac{2\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$

上表面上的束缚电荷面密度为 $\sigma_{p上} = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{P} = -\dfrac{2\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$

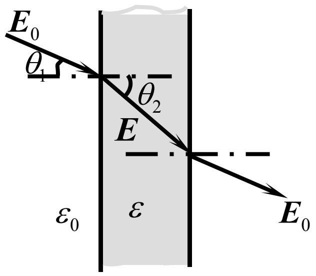
（2）由 $\sigma = \dfrac{Q}{ab} = \dfrac{2\varepsilon_0 \varepsilon U}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$

得到 $U = \dfrac{(\varepsilon+\varepsilon_0)dQ}{2\varepsilon_0 \varepsilon ab}$

故 $\sigma_{p下} = \dfrac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{\varepsilon ab}$

$\sigma_{p上} = -\dfrac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{\varepsilon ab}$

（3）电容器的电容为 $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{2\varepsilon_0 \varepsilon ab}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$



题 3.22 图

3.22 厚度为t、介电常数为$\varepsilon = 4\varepsilon_0$的无限大介质板，放置于均匀电场$\boldsymbol{E}_0$中，板与$\boldsymbol{E}_0$成角$\theta_1$，如题 3.22 图所示。求：（1）使$\theta_2 = \pi/4$的$\theta_1$值；（2）介质板两表面的极化电荷密度。

解 （1）根据静电场的边界条件，在介质板的表面上有 $\dfrac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$

由此得到 $\theta_1 = \tan^{-1}\dfrac{\varepsilon_0 \tan\theta_2}{\varepsilon} = \tan^{-1}\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \tan^{-1}\dfrac{1}{4} = 14^\circ$

（2）设介质板中的电场为$\boldsymbol{E}$，根据分界面上的边界条件，有$\varepsilon_0 E_{0n} = \varepsilon E_n$，即

$$\varepsilon_0 E_0 \cos\theta_1 = \varepsilon E_n$$

所以 $E_n = \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_0 \cos\theta_1 = \dfrac{1}{4} E_0 \cos 14^\circ$

介质板左表面的束缚电荷面密度 $\sigma_p = -(\varepsilon-\varepsilon_0)E_n = -\dfrac{3}{4}\varepsilon_0 E_0 \cos 14^\circ = -0.728\varepsilon_0 E_0$

介质板右表面的束缚电荷面密度 $\sigma_p = (\varepsilon-\varepsilon_0)E_n = \dfrac{3}{4}\varepsilon_0 E_0 \cos 14^\circ = 0.728\varepsilon_0 E_0$

3.23 在介电常数为ε的无限大均匀介质中，开有如下的空腔，求各腔中的$\boldsymbol{E}_0$和$\boldsymbol{D}_0$：

（1）平行于$\boldsymbol{E}$的针形空腔；

（2）底面垂直于$\boldsymbol{E}$的薄盘形空腔；

（3）小球形空腔（见第四章 4.14 题）。

解 （1）对于平行于 $\boldsymbol{E}$ 的针形空腔，根据边界条件，在空腔的侧面上，有 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{E}$ 。故在针形空腔中

$$\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{E}\ ,\quad \boldsymbol{D}_0=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$

（2）对于底面垂直于 $\boldsymbol{E}$ 的薄盘形空腔，根据边界条件，在空腔的底面上，有 $\boldsymbol{D}_0=\boldsymbol{D}$ 。故在薄盘形空腔中

$$\boldsymbol{D}_0=\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\ ,\quad \boldsymbol{E}_0=\frac{\boldsymbol{D}_0}{\varepsilon_0}=\frac{\varepsilon\boldsymbol{E}}{\varepsilon_0}$$

3.24 在面积为 S 的平行板电容器内填充介电常数作线性变化的介质，从一极板 $(y=0)$ 处的 ε_1 一直变化到另一极板 $(y=d)$ 处的 ε_2，试求电容量。

解 由题意可知，介质的介电常数为 $\varepsilon=\varepsilon_1+y(\varepsilon_2-\varepsilon_1)/d$

设平行板电容器的极板上带电量分别为 $\pm q$，由高斯定理可得

$$D_y=\sigma=\frac{q}{S}$$

$$E_y=\frac{D_y}{\varepsilon}=\frac{q}{[\varepsilon_1+y(\varepsilon_2-\varepsilon_1)/d]S}$$

所以，两极板的电位差 $U=\int_0^d E_y\,\mathrm{d}\,y=\int_0^d\frac{q}{[\varepsilon_1+y(\varepsilon_2-\varepsilon_1)/d]S}\mathrm{d}\,y=\frac{qd}{S(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

故电容量为 $C=\frac{q}{U}=\frac{S(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{d\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}$

3.25 一体密度为 $\rho=2.32\times10^{-7}\ \mathrm{C/m^3}$ 的质子束，束内的电荷均匀分布，束直径为 $2\,\mathrm{mm}$，束外没有电荷分布，试计算质子束内部和外部的径向电场强度。

解 在质子束内部，由高斯定理可得 $2\pi rE_r=\frac{1}{\varepsilon_0}\pi r^2\rho$

故
$$E_r=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}=\frac{2.32\times10^{-7}r}{2\times8.854\times10^{-12}}=1.31\times10^4 r\quad \mathrm{V/m}\qquad (r<10^{-3}\ \mathrm{m})$$

在质子束外部，有 $2\pi rE_r=\frac{1}{\varepsilon_0}\pi a^2\rho$

故
$$E_r=\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}=\frac{2.32\times10^{-7}\times10^{-6}}{2\times8.854\times10^{-12}r}=1.31\times10^{-2}\frac{1}{r}\quad \mathrm{V/m}\qquad (r>10^{-3}\ \mathrm{m})$$

3.26 考虑一块电导率不为零的电介质 (γ,ε)，设其介质特性和导电特性都是不均匀的。证明当介质中有恒定电流 $\boldsymbol{J}$ 时，体积内将出现自由电荷，体密度为 $\rho=\boldsymbol{J}\bullet\nabla(\varepsilon/\gamma)$。试问有没有束缚体电荷 ρ_P？若有则进一步求出 ρ_P。

解 $$\rho=\nabla\bullet\boldsymbol{D}=\nabla\bullet(\varepsilon\boldsymbol{E})=\nabla\bullet(\frac{\varepsilon}{\gamma}\boldsymbol{J})=\boldsymbol{J}\bullet\nabla(\frac{\varepsilon}{\gamma})+\frac{\varepsilon}{\gamma}\nabla\bullet\boldsymbol{J}$$

对于恒定电流，有 $\nabla\bullet\boldsymbol{J}=0$，故得到 $\rho=\boldsymbol{J}\bullet\nabla(\varepsilon/\gamma)$

介质中有束缚体电荷 ρ_P，且

$$\rho_P=-\nabla\bullet\boldsymbol{P}=-\nabla\bullet\boldsymbol{D}+\varepsilon_0\nabla\bullet\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{J}\bullet\nabla(\frac{\varepsilon}{\gamma})+\varepsilon_0\nabla\bullet(\frac{\boldsymbol{J}}{\gamma})=-\boldsymbol{J}\bullet\nabla(\frac{\varepsilon}{\gamma})+\boldsymbol{J}\bullet\nabla(\frac{\varepsilon_0}{\gamma})=-\boldsymbol{J}\bullet\nabla(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\gamma})$$

3.27 填充有两层介质的同轴电缆，内导体半径为a，外导体内半径为c，介质的分界面半径为b。两层介质的介电常数为ε_1和ε_2，电导率为γ_1和γ_2。设内导体的电压为U_0，外导体接地。求：（1）两导体之间的电流密度和电场强度分布；（2）介质分界面上的自由电荷面密度；（3）同轴线单位长度的电容及漏电阻。

解 （1）设同轴电缆中单位长度的径向电流为I，则由$\int_S \boldsymbol{J}\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{S}=I$，可得电流密度

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{e}_r\frac{I}{2\pi r}\qquad(a<r<c)$$

介质中的电场
$$\boldsymbol{E}_1=\frac{\boldsymbol{J}}{\gamma_1}=\boldsymbol{e}_r\frac{I}{2\pi r\gamma_1}\qquad(a<r<b)$$

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{\boldsymbol{J}}{\gamma_2}=\boldsymbol{e}_r\frac{I}{2\pi r\gamma_2}\qquad(b<r<c)$$

由于
$$U_0=\int_a^b\boldsymbol{E}_1\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_b^c\boldsymbol{E}_2\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{I}{2\pi\gamma_1}\ln\frac{b}{a}+\frac{I}{2\pi\gamma_2}\ln\frac{c}{b}$$

于是得到
$$I=\frac{2\pi\gamma_1\gamma_2U_0}{\gamma_2\ln(b/a)+\gamma_1\ln(c/b)}$$

故两种介质中的电流密度和电场强度分别为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{e}_r\frac{\gamma_1\gamma_2U_0}{r[\gamma_2\ln(b/a)+\gamma_1\ln(c/b)]}\qquad(a<r<c)$$

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_r\frac{\gamma_2U_0}{r[\gamma_2\ln(b/a)+\gamma_1\ln(c/b)]}\qquad(a<r<b)$$

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_r\frac{\gamma_1U_0}{r[\gamma_2\ln(b/a)+\gamma_1\ln(c/b)]}\qquad(b<r<c)$$

（2）由$\sigma=\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{D}$可得，介质 1 内表面的电荷面密度为

$$\sigma_1=\varepsilon_1\boldsymbol{e}_r\bullet\boldsymbol{E}_1\big|_{r=a}=\frac{\varepsilon_1\gamma_2U_0}{a[\gamma_2\ln(b/a)+\gamma_1\ln(c/b)]}$$

介质 2 外表面的电荷面密度为

$$\sigma_2=-\varepsilon_2\boldsymbol{e}_r\bullet\boldsymbol{E}_2\big|_{r=c}=-\frac{\varepsilon_2\gamma_1U_0}{c[\gamma_2\ln(b/a)+\gamma_1\ln(c/b)]}$$

两种介质分界面上的电荷面密度为

$$\sigma_{12}=-(\varepsilon_1\boldsymbol{e}_r\bullet\boldsymbol{E}_1-\varepsilon_2\boldsymbol{e}_r\bullet\boldsymbol{E}_2)\big|_{r=b}=-\frac{(\varepsilon_1\gamma_2-\varepsilon_2\gamma_1)U_0}{b[\gamma_2\ln(b/a)+\gamma_1\ln(c/b)]}$$

（3）同轴线单位长度的漏电阻为
$$R=\frac{U_0}{I}=\frac{\gamma_2\ln(b/a)+\gamma_1\ln(c/b)}{2\pi\gamma_1\gamma_2}$$

由静电比拟，可得同轴线单位长度的电容为
$$C=\frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2\ln(b/a)+\varepsilon_1\ln(c/b)}$$

3.28 半径为R_1和R_2 $(R_1 < R_2)$的两个同心的理想导体球面间充满了介电常数为ε、电导率为$\gamma = \gamma_0(1 + K/r)$的导电媒质($K$为常数)。若内导体球面的电位为$U_0$，外导体球面接地。试求：（1）媒质中的电荷分布；（2）两个理想导体球面间的电阻。

解 设由内导体流向外导体的电流为I，由于电流密度成球对称分布，所以

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{e}_r \frac{I}{4\pi r^2} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

电场强度 $$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{J}}{\gamma} = \boldsymbol{e}_r \frac{I}{4\pi\gamma_0(r+K)r} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

由两导体间的电压 $$U_0 = \int_{R_1}^{R_2} \boldsymbol{E} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{4\pi\gamma_0(r+K)r}\mathrm{d}r = \frac{I}{4\pi\gamma_0 K}\ln\left[\frac{R_2(R_1+K)}{R_1(R_2+K)}\right]$$

可得到 $$I = \frac{4\pi\gamma_0 K U_0}{\ln\left[\dfrac{R_2(R_1+K)}{R_1(R_2+K)}\right]}$$

所以 $$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{e}_r \frac{\gamma_0 K U_0}{r^2 \ln\left[\dfrac{R_2(R_1+K)}{R_1(R_2+K)}\right]}$$

媒质中的电荷体密度为 $$\rho = \boldsymbol{J} \bullet \nabla\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right) = \frac{\varepsilon K^2 U_0}{\ln\left[\dfrac{R_2(R_1+K)}{R_1(R_2+K)}\right]} \frac{1}{(r+K)^2 r^2}$$

媒质内、外表面上的电荷面密度分别为

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon}{\gamma}\boldsymbol{e}_r \bullet \boldsymbol{J}\Big|_{r=R_1} = \frac{\varepsilon K U_0}{\ln\left[\dfrac{R_2(R_1+K)}{R_1(R_2+K)}\right]} \frac{1}{(R_1+K)R_1}$$

$$\sigma_2 = -\frac{\varepsilon}{\gamma}\boldsymbol{e}_r \bullet \boldsymbol{J}\Big|_{r=R_2} = -\frac{\varepsilon K U_0}{\ln\left[\dfrac{R_2(R_1+K)}{R_1(R_2+K)}\right]} \frac{1}{(R_2+K)R_2}$$

（2）两理想导体球面间的电阻

$$R = \frac{U_0}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma_0 K}\ln\frac{R_2(R_1+K)}{R_1(R_2+K)}$$

3.29 电导率为γ的无界均匀电介质内，有两个半径分别为R_1和R_2的理想导体小球，两球之间的距离为$d(d >> R_1, d >> R_2)$，试求两小导体球面间的电阻。

解 此题可采用静电比拟的方法求解。假设两小球分别带电荷q和$-q$，由于两球间的距离$d >> R_1$、$d >> R_2$，可近似认为小球上的电荷均匀分布在球面上。由电荷q和$-q$的电位叠加求出两小球表面的电位差，即可求得两小导体球面间的电容，再由静电比拟求出两小导体球面间的电阻。

设两小球分别带电荷q和$-q$，由于$d >> R_1$、$d >> R_2$，可得到两小球表面的电位为

$$\varphi_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{d-R_2})$$

$$\varphi_2=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{d-R_1})$$

所以两小导体球面间的电容为 $$C=\frac{q}{\varphi_1-\varphi_2}=\frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{d-R_1}-\frac{1}{d-R_2}}$$

由静电比拟，得到两小导体球面间的电导为 $$G=\frac{I}{\varphi_1-\varphi_2}=\frac{4\pi\gamma}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{d-R_1}-\frac{1}{d-R_2}}$$

故两个小导体球面间的电阻为 $$R=\frac{1}{G}=\frac{1}{4\pi\gamma}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{d-R_1}-\frac{1}{d-R_2})$$

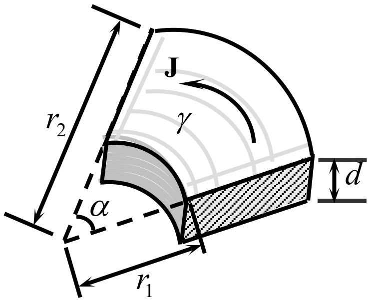
3.30 在一块厚度 d 的导电板上， 由两个半径为 r_1 和 r_2 的圆弧和夹角为 α 的两半径割出的一块扇形体，如题 3.30 图所示。求：（1）沿厚度方向的电阻；（2）两圆弧面之间的电阻；沿 α 方向的两电极的电阻。设导电板的电导率为 γ。

解 （1）设沿厚度方向的两电极的电压为 U_1，则有

$$E_1=\frac{U_1}{d}$$

$$J_1=\gamma E_1=\frac{\gamma U_1}{d}$$

$$I_1=J_1S_1=\frac{\gamma U_1}{d}\cdot\frac{\alpha}{2}(r_2^2-r_1^2)$$



题 3.30 图

故得到沿厚度方向的电阻为

$$R_1=\frac{U_1}{I_1}=\frac{2d}{\alpha\gamma(r_2^2-r_1^2)}$$

（2）设内外两圆弧面电极之间的电流为 I_2，则

$$J_2=\frac{I_2}{S_2}=\frac{I_2}{\alpha rd}\qquad E_2=\frac{J_2}{\gamma}=\frac{I_2}{\gamma\alpha rd}$$

$$U_2=\int_{r_1}^{r_2}E_2\mathrm{d}r=\frac{I_2}{\gamma\alpha d}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

故得到两圆弧面之间的电阻为

$$R_2=\frac{U_2}{I_2}=\frac{1}{\gamma\alpha d}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

（3）设沿 α 方向的两电极的电压为 U_3，则有 $$U_3=\int_0^{\alpha}E_3r\mathrm{d}\phi$$

由于 E_3 与 ϕ 无关，所以得到

$$\boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{e}_\phi \frac{U_3}{\alpha r}$$

$$\boldsymbol{J}_3 = \gamma \boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{e}_\phi \frac{\gamma U_3}{\alpha r}$$

$$I_3 = \int_{S_3} \boldsymbol{J}_3 \bullet \boldsymbol{e}_\phi \mathrm{d}S = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\gamma d U_3}{\alpha r} \mathrm{d}r = \frac{\gamma d U_3}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

故得到沿α方向的电阻为 $R_3 = \dfrac{U_3}{I_3} = \dfrac{\alpha}{\gamma d \ln(r_2/r_1)}$

3.31 圆柱形电容器外导体内半径为b，内导体半径为a。当外加电压U固定时，在b一定的条件下，求使电容器中的最大电场强度取极小值$E_{\min}$的内导体半径a的值和这个$E_{\min}$的值。

解 设内导体单位长度带电荷为ρ_l，由高斯定理可求得圆柱形电容器中的电场强度为

$$E(r) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

由内外导体间的电压 $U = \int_a^b E \mathrm{d}r = \int_a^b \dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r} \mathrm{d}r = \dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{b}{a}$

得到 $\rho_l = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln(b/a)}$

由此得到圆柱形电容器中的电场强度与电压的关系式 $E(r) = \dfrac{U}{r \ln(b/a)}$

在圆柱形电容器中，$r = a$处的电场强度最大 $E(a) = \dfrac{U}{a \ln(b/a)}$

令$E(a)$对a的导数为零，即 $\dfrac{\partial E(a)}{\partial a} = -\dfrac{1}{a^2} \dfrac{\ln(b/a) - 1}{\ln^2(b/a)} = 0$

由此得到 $\ln(b/a) = 1$

故有 $a = \dfrac{b}{e} \approx \dfrac{b}{2.718}$

$$E_{\min} = \frac{e}{b} U = 2.718 \frac{U}{b}$$

3.32 证明：同轴线单位长度的静电储能W_e等于$\dfrac{q_l^2}{2C}$。q_l为单位长度上的电荷量，C为单位长度上的电容。

解 由高斯定理可求得圆柱形电容器中的电场强度为 $E(r) = \dfrac{q_l}{2\pi\varepsilon r}$

内外导体间的电压为

$$U = \int_a^b E \mathrm{d}r = \int_a^b \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon r} \mathrm{d}r = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a}$$

则同轴线单位长度的电容为 $C=\dfrac{q_l}{U}=\dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$

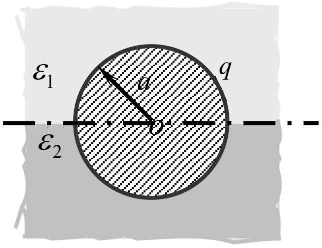
同轴线单位长度的静电储能为 $W_e=\dfrac{1}{2}\int_{\tau}\varepsilon E^2\,\mathrm{d}\tau=\dfrac{1}{2}\int_a^b\varepsilon(\dfrac{q_l}{2\pi\varepsilon r})^2 2\pi r\,\mathrm{d}r=\dfrac{1}{2}\dfrac{q_l^2}{2\pi\varepsilon}\ln(b/a)=\dfrac{1}{2}\dfrac{q_l^2}{C}$

3.33 如题 3.33 图所示，一半径为 a、带电量 q 的导体球，其球心位于两种介质的分界面上，此两种介质的电容率分别为 ε_1 和 ε_2，分界面为无限大平面。求：（1）导体球的电容；（2） 总的静电能量。

解 （1）由于电场沿径向分布，根据边界条件，在两种介质的分界面上 $E_{1t}=E_{2t}$，故有 $E_1=E_2=E$。由于 $D_1=\varepsilon_1E_1$、$D_2=\varepsilon_2E_2$，所以 $D_1\neq D_2$。由高斯定理，得到

$$D_1S_1+D_2S_2=q$$

即 $$2\pi r^2\varepsilon_1E+2\pi r^2\varepsilon_2E=q$$



题 3.33 图

所以 $$E=\frac{q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

导体球的电位

$$\varphi(a)=\int_a^{\infty}E\,\mathrm{d}r=\frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\int_a^{\infty}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a}$$

故导体球的电容 $C=\dfrac{q}{\varphi(a)}=2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a$

（2） 总的静电能量为 $W_e=\dfrac{1}{2}q\varphi(a)=\dfrac{q^2}{4\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a}$

3.34 把一带电量 q、半径为 a 的导体球切成两半，求两半球之间的电场力。

解 先利用虚位移法求出导体球表面上单位面积的电荷受到的静电力 $\boldsymbol{f}$，然后在半球面上对 $\boldsymbol{f}$ 积分，求出两半球之间的电场力。

导体球的电容为 $C=4\pi\varepsilon_0a$

故静电能量为 $W_e=\dfrac{q^2}{2C}=\dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0a}$

根据虚位移法，导体球表面上单位面积的电荷受到的静电力

$$f=-\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial W_e}{\partial a}=-\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial a}(\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0a})=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0a^4}$$

方向沿导体球表面的外法向，即 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{e}_rf=\dfrac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0a^4}\boldsymbol{e}_r$

这里 $\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_x\sin\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_y\sin\theta\sin\phi+\boldsymbol{e}_z\cos\theta$

在半球面上对 $\boldsymbol{f}$ 积分，即得到两半球之间的静电力为

$$\boldsymbol{F}=\int\boldsymbol{f}\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\boldsymbol{e}_r\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0a^4}a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\boldsymbol{e}_z\frac{2\pi a^2q^2}{32\pi^2\varepsilon_0a^4}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0a^2}\boldsymbol{e}_z$$

3.35 如题 3.35 图所示，两平行的金属板，板间距离为 d，竖直地插入在电容率为 ε 的液

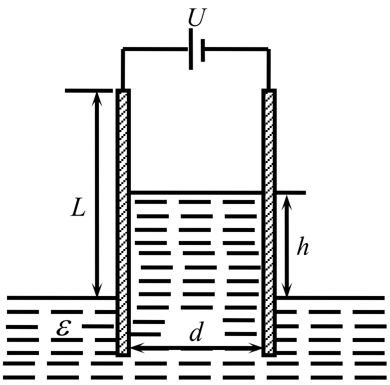
体中，两板间加电压U，证明液面升高

$$h=\frac{1}{2\rho g}(\varepsilon-\varepsilon_0)(\frac{U}{d})^2$$

其中ρ为液体的质量密度。

解 设金属板的宽度为a、高度为L。当金属板间的液面升高为h时，其电容为

$$C=\frac{\varepsilon ah}{d}+\frac{\varepsilon_0 a(L-h)}{d}$$



题 3.35 图

金属板间的静电能量为

$$W_e=\frac{1}{2}CU^2=\frac{aU^2}{2d}[h\varepsilon+(L-h)\varepsilon_0]$$

液体受到竖直向上的静电力为

$$F_e=\frac{\partial W_e}{\partial h}=\frac{aU^2}{2d}(\varepsilon-\varepsilon_0)$$

而液体所受重力

$$F_g=mg=ahd\rho g$$

F_e与F_g相平衡，即 $\dfrac{aU^2}{2d}(\varepsilon-\varepsilon_0)=ahdg$

故得到液面上升的高度

$$h=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)U^2}{2d^2\rho g}=\frac{1}{2\rho g}(\varepsilon-\varepsilon_0)(\frac{U}{d})^2$$

3.36 可变空气电容器，当动片由0°至180°电容量由25至$350p$F直线地变化，当动片为θ角时，求作用于动片上的力矩。设动片与定片间的电压为$U_0=400\text{V}$。

解 当动片为θ角时，电容器的电容为

$$C_\theta=25+\frac{350-25}{180^\circ}\theta=25+1.81\theta\ \ P\text{F}=\ (25+1.81\theta)\times10^{-12}\ \ \text{F}$$

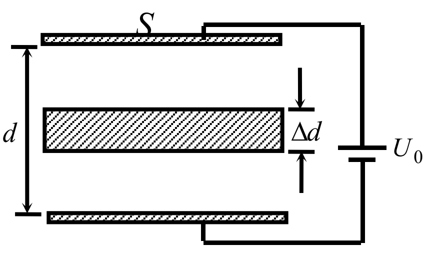
此时电容器中的静电能量为 $W_e=\dfrac{1}{2}C_\theta U_0^2=\dfrac{1}{2}(25+1.81\theta)\times10^{-12}U_0^2$

作用于动片上的力矩为 $T=\dfrac{\partial W_e}{\partial\theta}=\dfrac{1}{2}\times1.81\times10^{-12}U_0^2=1.45\times10^{-7}\ \ Nm$

3.37 平行板电容器的电容是ε_0S/d，其中S是板的面积，d为间距，忽略边缘效应。

（1）如果把一块厚度为Δd的不带电金属插入两极板之间，但不与两极接触，如题 3.37(a)图所示。则在原电容器电压U_0一定的条件下，电容器的能量如何变化？电容量如何变化？

（2）如果在电荷q一定的条件下，将一块横截面为ΔS、介电常数为ε的电介质片插入电容器(与电容器极板面积基本上垂直地插入，如题 3.37(b)图所示，则电容器的能量如何变化？电容量又如何变化？



题 3.37 图(a)

解 （1）在电压U_0一定的条件下，未插入金属板前，极板间的电场为

$$E_0 = \frac{U_0}{d}$$

电容为 $\quad C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

静电能量为 $\quad W_{e0} = \dfrac{1}{2} C_0 U_0^2 = \dfrac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2d}$

当插入金属板后，电容器中的电场为 $\quad E = \dfrac{U_0}{d - \Delta d}$

此时静电能量和电容分别为 $\quad W_e = \dfrac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\dfrac{U_0}{d - \Delta d} \right)^2 S(d - \Delta d) = \dfrac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2(d - \Delta d)}$

$$C = \frac{2W_e}{U_0^2} = \frac{\varepsilon_0 S}{d - \Delta d}$$

故电容器的电容及能量的改变量分别为

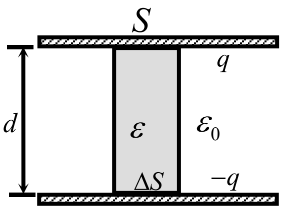
$$\Delta C = C - C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - \Delta d} - \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 S \Delta d}{d(d - \Delta d)}$$

$$\Delta W_e = W_e - W_{e0} = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2 \Delta d}{2d(d - \Delta d)}$$

（2）在电荷 q 一定的条件下，未插入电介质板前，极板间的电场为 $\quad E_0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{q}{\varepsilon_0 S}$

静电能量为 $\quad W_{e0} = \dfrac{q^2}{2C_0} = \dfrac{dq^2}{2\varepsilon_0 S}$

当插入电介质板后，由介质分界面上的边界条件 $E_{1t} = E_{2t}$，有 $\quad E_1 = E_2 = E$



题 3.37 图 (b)

再由高斯定理可得 $\quad E\varepsilon\Delta S + E\varepsilon_0 (S - \Delta S) = q$

于是得到极板间的电场为 $\quad E = \dfrac{q}{\varepsilon\Delta S + \varepsilon_0 (S - \Delta S)}$

两极板间的电位差位 $\quad U = Ed = \dfrac{qd}{\varepsilon\Delta S + \varepsilon_0 (S - \Delta S)}$

此时的静电能量为 $\quad W_e = \dfrac{1}{2} qU = \dfrac{1}{2} \dfrac{q^2 d}{\varepsilon\Delta S + \varepsilon_0 (S - \Delta S)}$

其电容为 $\quad C = \dfrac{\varepsilon\Delta S + \varepsilon_0 (S - \Delta S)}{d}$

故电容器的电容及能量的改变量分别为 $\quad \Delta C = \dfrac{(\varepsilon - \varepsilon_0)\Delta S}{d}$

$$\Delta W_e = -\frac{1}{2} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) q^2 d}{\varepsilon_0 S[\varepsilon\Delta S + \varepsilon_0 (S - \Delta S)]}$$

3.38 如果不引入电位函数，静电问题也可以通过直接求解法求解 $\boldsymbol{E}$ 的微分方程而得解决。

（1）证明：有源区 $\boldsymbol{E}$ 的微分方程为 $\nabla^2\boldsymbol{E}=\dfrac{\nabla\rho_t}{\varepsilon_0}$， $\rho_t=\rho+\rho_P$；

（2）证明：$\boldsymbol{E}$ 的解是 $\boldsymbol{E}=-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_\tau\frac{\nabla'\rho_t}{R}\mathrm{d}\tau'$

解 （1）由 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，可得 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=0$，即 $\nabla(\nabla\bullet\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=0$

又
$$\nabla\bullet\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\bullet(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{P})=\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho+\rho_P)$$

故得到
$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\frac{\nabla(\rho+\rho_P)}{\varepsilon_0}=\frac{\nabla\rho_t}{\varepsilon_0}$$

（2）在直角坐标系中 $\nabla^2\boldsymbol{E}=\dfrac{\nabla\rho_t}{\varepsilon_0}$ 的三个分量方程为

$$\nabla^2E_x=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\rho_t}{\partial x},\quad \nabla^2E_y=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\rho_t}{\partial y},\quad \nabla^2E_z=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\rho_t}{\partial z}$$

其解分别为

$$E_x=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{1}{R}\frac{\partial\rho_t}{\partial x'}\mathrm{d}\tau'$$

$$E_y=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{1}{R}\frac{\partial\rho_t}{\partial y'}\mathrm{d}\tau'$$

$$E_z=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{1}{R}\frac{\partial\rho_t}{\partial z'}\mathrm{d}\tau'$$

故
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_x+\boldsymbol{e}_yE_y+\boldsymbol{e}_zE_z=$$
$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{1}{R}[\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\rho_t}{\partial x'}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\rho_t}{\partial y'}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\rho_t}{\partial z'}]\mathrm{d}\tau'=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{\nabla'\rho_t}{R}\mathrm{d}\tau'$$

3.39 证明：$\displaystyle\int_\tau\nabla'(\frac{\rho_t}{R})\mathrm{d}\tau'=0$

解 由于 $\nabla'(\dfrac{\rho_t}{R})=\rho_t\nabla'(\dfrac{1}{R})+\dfrac{\nabla'\rho_t}{R}=\rho_t\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}+\dfrac{\nabla'\rho_t}{R}$ ，所以

$$\int_\tau\nabla'(\frac{\rho_t}{R})\mathrm{d}\tau'=\int_\tau\rho_t\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau'+\int_\tau\frac{\nabla'\rho_t}{R}\mathrm{d}\tau'=4\pi\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\int_\tau\frac{\nabla'\rho_t}{R}\mathrm{d}\tau'$$

由题 3.38(2)可知
$$\int_\tau\frac{\nabla'\rho_t}{R}\mathrm{d}\tau'=-4\pi\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$

故
$$\int_\tau\nabla'(\frac{\rho_t}{R})\mathrm{d}\tau'=-4\pi\varepsilon_0\boldsymbol{E}+4\pi\varepsilon_0\boldsymbol{E}=0$$