振动学基础　　第二讲

13.2　简谐振动的能量

13.3　阻尼振动和受迫振动 共振

13.5　简谐振动合成

例13.5 单摆

1、概念

单摆——

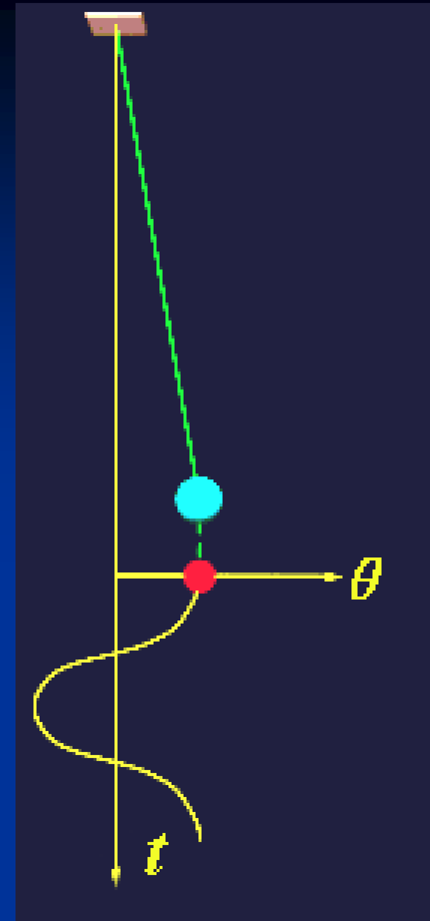
理想化的振动系统：

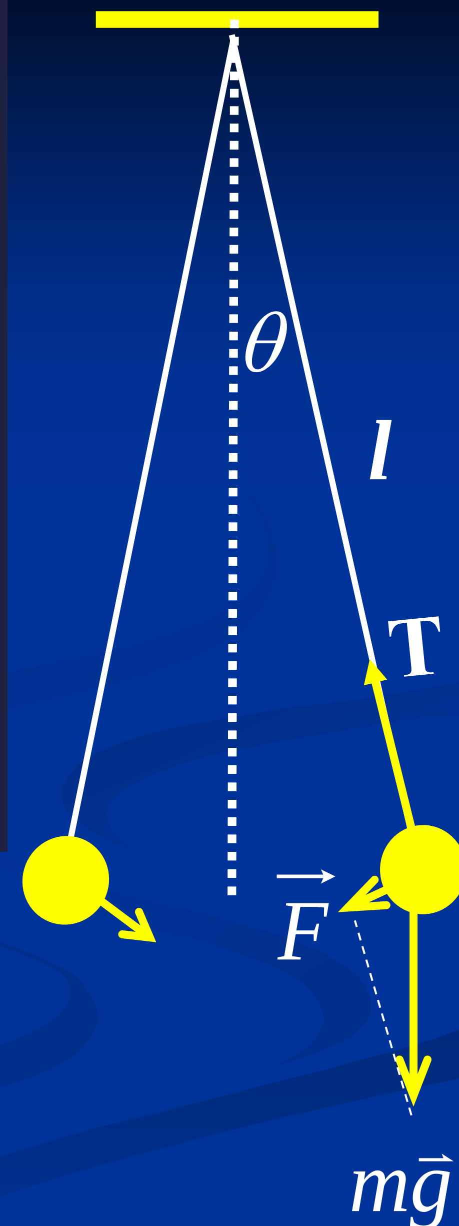
2、运动方程

$$F = -mg\sin\theta$$

$$\approx -mg\theta \text{（摆角小于5°）}$$

$$= m\frac{d^2 s}{dt^2} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$





$$-mg\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

圆频率 $\omega^2 = \frac{g}{l} \qquad \boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{l}}}$

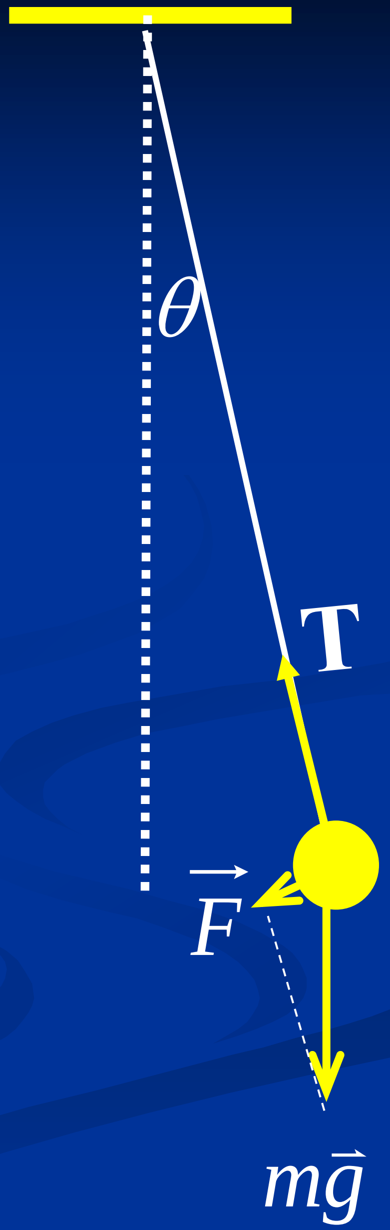
周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

频率 $\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{l}}}$

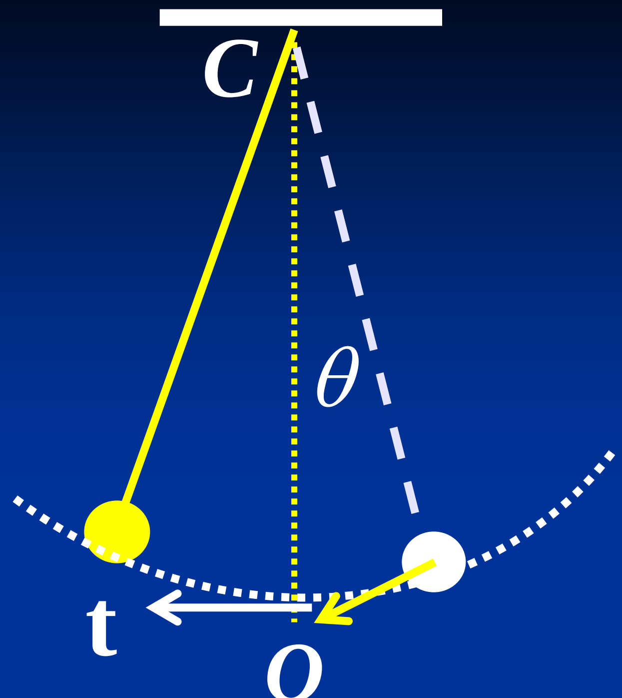
振动方程

摆角 初相

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi)$$



思考



正向 ⟶

$\theta_m=10^o$, $t=0$时， $\theta=5^o$

~~初相φ=5°=0.03π?~~

振动方程：

$$\theta=\theta_m\cos(\omega t+\varphi)$$

初相：

$$\varphi=\arccos 0.5=\frac{\pi}{3}.$$

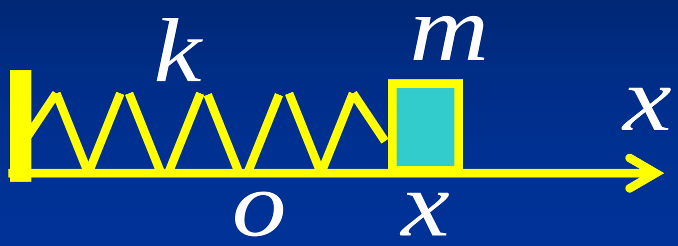
$$\omega t+\varphi=\frac{\pi}{2}$$

奇妙的摆

13.2　简谐振动的能量

一、简谐振动能量表达式

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

动能　$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)$

势能　$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$

特点：动能最大时势能最小，反之亦然。

总能量 $E = E_k + E_p$

$$E = = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\because \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 = \frac{1}{2} kA^2$$

弹簧振子能量守恒

能量大小与振幅的平方成正比。

二、能量平均值

1、动能的时间平均值

$$\overline{E_k}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)dt=\frac{1}{4}mA^2\omega^2=\frac{1}{4}kA^2$$

2、势能的时间平均值

$$\overline{E_p}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)dt=\frac{1}{4}kA^2=\frac{1}{4}mA^2\omega^2$$

结论

简谐运动的动能与势能在一个周期内的平均值相等，它们都等于总能量的一半。

13.3　阻尼振动和受迫振动　共振

一、阻尼振动

振幅随时间的变化而减小的振动称为阻尼振动。

一般阻力与速度大小成正比，方向相反

$$f = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt} \qquad x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta)$$

二、受迫振动

强迫力　$H_0 \cos pt$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta) + A\cos(pt + \varphi)$$

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}$$

三、共振

当强迫力的频率为某一值时，稳定受迫振动的位移振幅出现最大值的现象，叫做位移共振，简称共振。

振幅

$$A=\frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

当 $\beta\to 0$ 弱阻尼时

共振发生在固有频率处，称 $A\to\infty$

为尖锐共振。

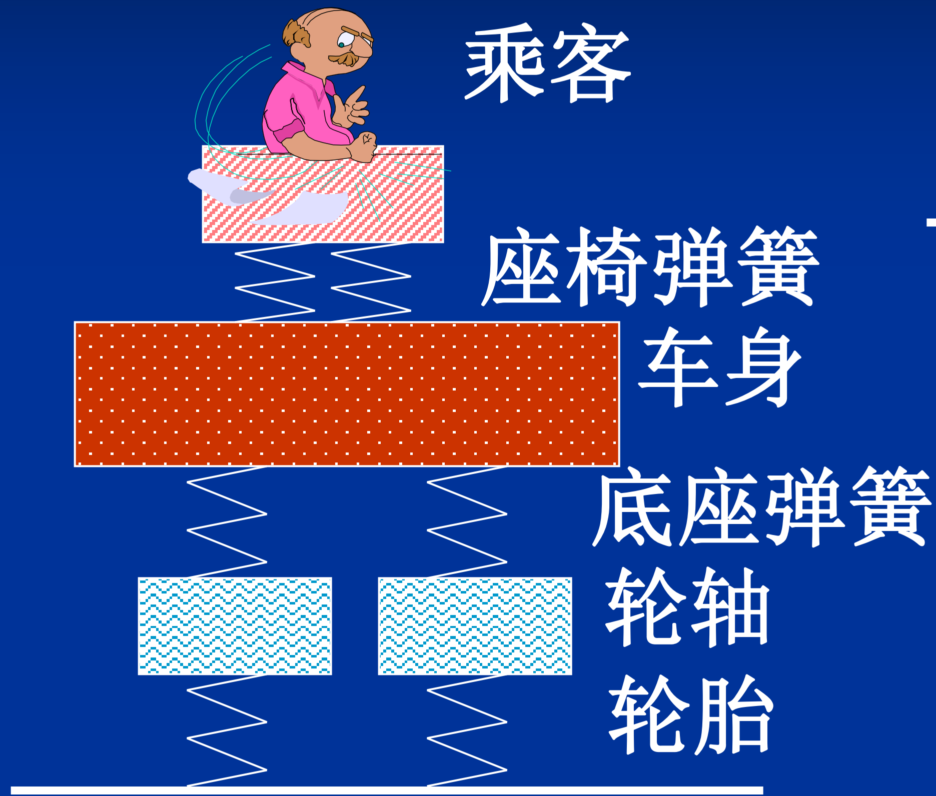
共振的危害

1940年华盛顿的塔科曼大桥建成

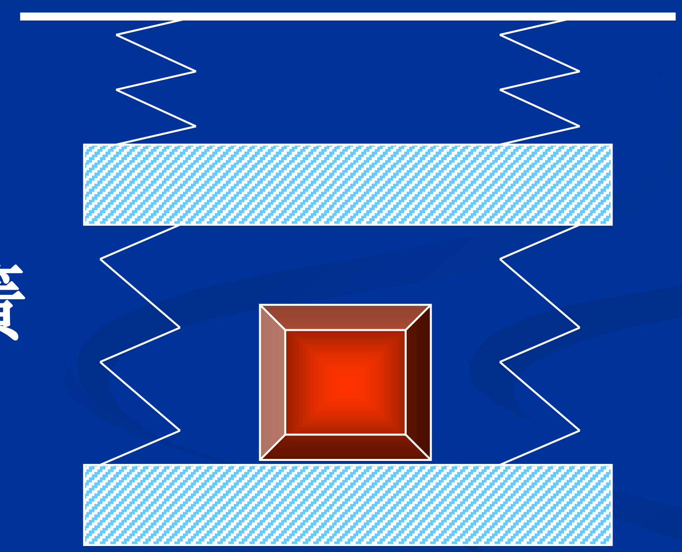
同年7月的一场大风引起桥的共振，使桥摧毁.

如何减振？

$$\omega_{外} >> \omega \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$



汽车的减振系统



多级低通滤波

问题： 弹簧串、并联后的劲度系数？

振动技术在筑路工程中的典型应用

振动摊铺机：先将物料撒布在整个宽度上，再利用激振器对被摊铺物料进行熨平和压实。

振动压路机：依靠高速旋转的偏心质量块产生离心力，使振动碾作受迫振动压实路面。

13.5 简谐振动的合成

一、**同方向同频率**简谐运动的合成

某质点同时参与两个同频率且在同一条直线上的简谐运动

$$x_1 = \boxed{A_1\cos(\omega t+\varphi_1)} \quad x_2 = \boxed{A_2\cos(\omega t+\varphi_2)}$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$= A_1\cos\omega t\cos\varphi_1 - A_1\sin\omega t\sin\varphi_1$$

$$+A_2\cos\omega t\cos\varphi_2 - A_2\sin\omega t\sin\varphi_2$$

$$x=\left(A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2\right)\cos\omega t$$

$$-\left(A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2\right)\sin\omega t$$

$$\boxed{x=A\cos\varphi\cos\omega t-A\sin\varphi\sin\omega t}$$

$$\boxed{=A\cos\left(\omega t+\varphi\right)}$$

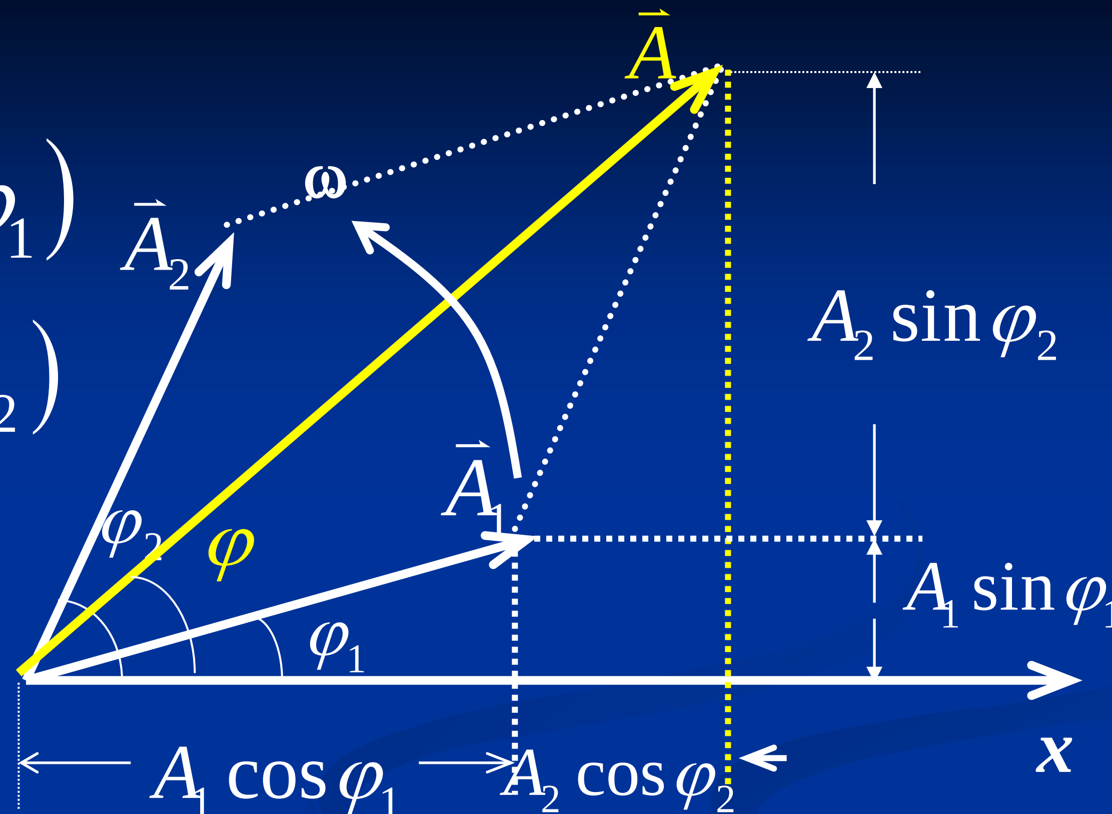
$$\boldsymbol{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}}$$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

旋转矢量法

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

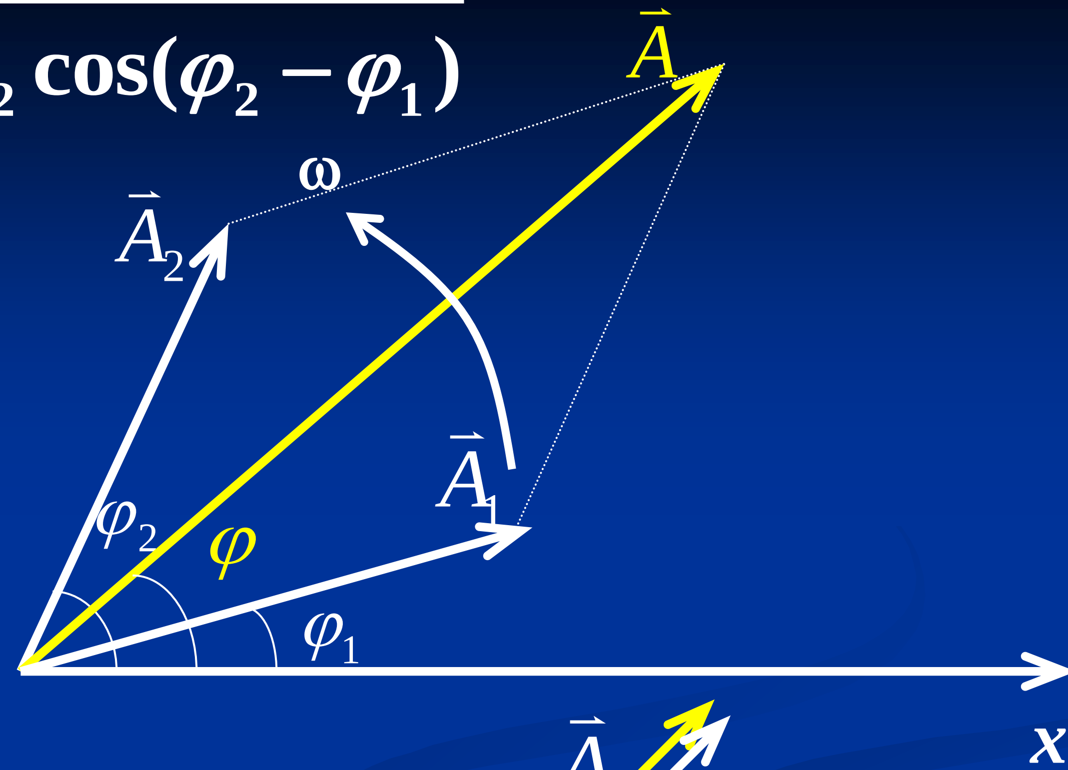


$$\boldsymbol{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\boldsymbol{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$



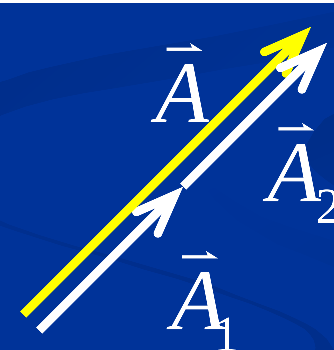
3、讨论

(1)当$\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi$

$$k=0,1,2,\cdots$$

$$A=A_1+A_2$$

合振幅最大，$\varphi=\varphi_1$或$\varphi=\varphi_2$



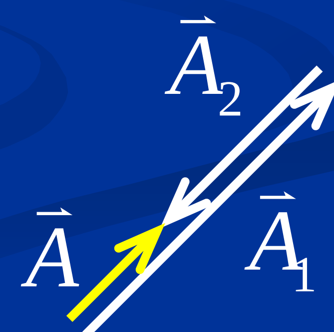
(2)当$\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k-1)\pi$

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$

合振幅最小

$\varphi=\varphi_2$(当$A_2>A_1$)

$\varphi=\varphi_1$(当$A_2<A_1$)



例：两个同方向、同频率的谐振动，其合成振动的振幅为0.2m，合振动位相超前第一振动π/6，已知第一振动的振幅为0.173m，求第二振动的振幅及一、二振动的位相差。

解：设 $x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1), x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = x - x_1$$

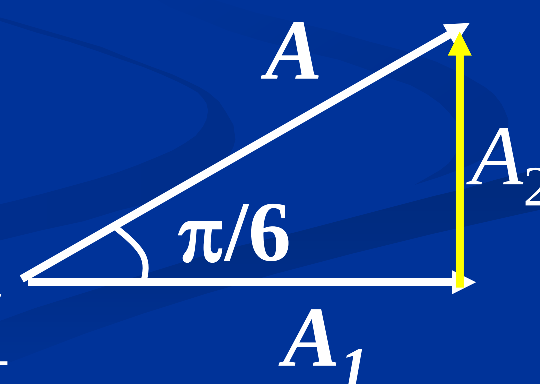
$$x_2 = A\cos(\omega t+\varphi) + A_1\cos(\omega t+\varphi_1+\pi)$$

$$\therefore A_2 = \sqrt{A_1^2 + A^2 + 2A_1A\cos(\varphi_1+\pi-\varphi)}$$

$\varphi-\varphi_1 = \pi/6$ $\quad$ $\boldsymbol{A_2=0.1cm}$

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1) = \frac{A^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2}$$

$=2.05\times10^{-3}$ $\quad \varphi_2-\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$



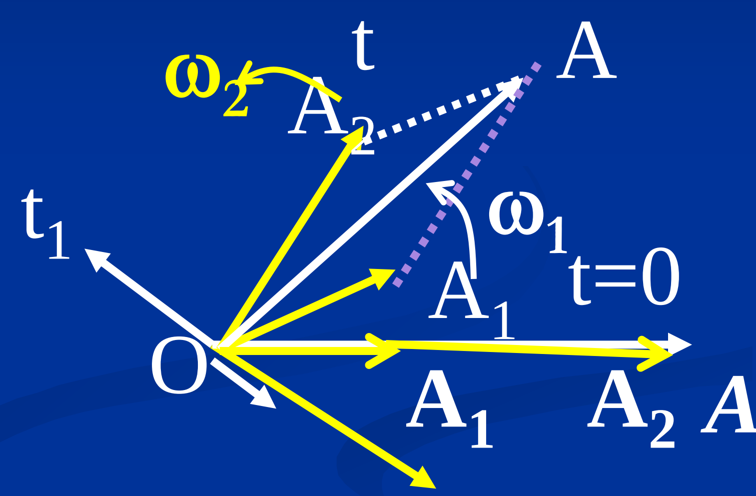
三、同方向、不同频率谐振动的合成

$$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t \quad x_2 = A_2 \cos \omega_2 t$$

t=0时合振动振幅最大，为$A=A_1+A_2$;

设$\omega_2>\omega_1$,

经历时间 $$t_1 = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$



$$\Delta\varphi = (\omega_2 - \omega_1)t_1 = \pi$$

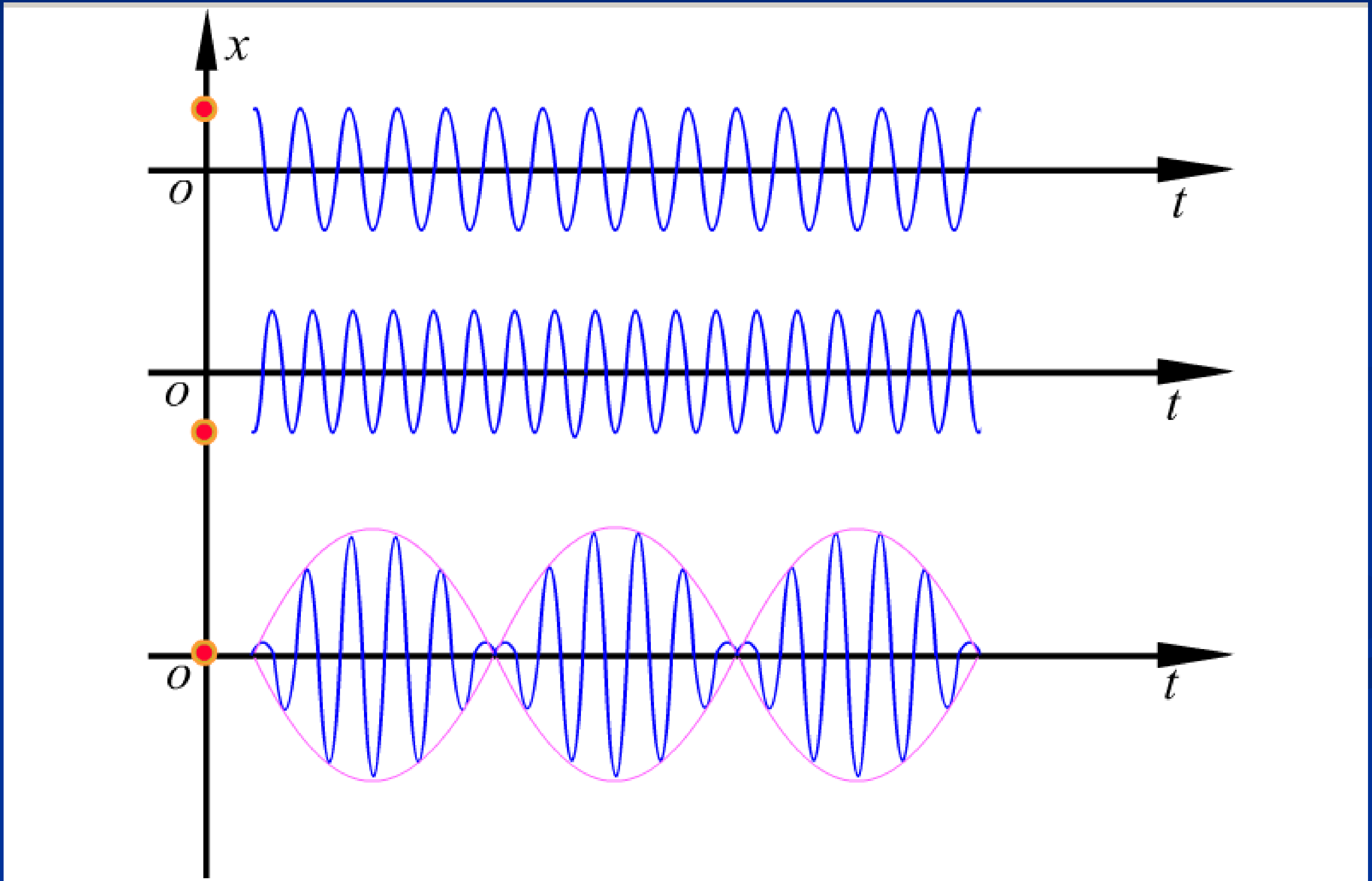
合振幅达最小 $A=A_1-A_2$;

经历时间 $$t_2 = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}, \Delta\varphi = (\omega_2 - \omega_1)t_2 = 2\pi$$

A_2超前A_1一圈，二者同相，$A=A_1+A_2$;

合振动幅度有规律地时强时弱的现象被称为**拍**。一次强弱变化称为一拍，**每秒钟的拍数叫拍频。**

$$\nu = |\nu_2 - \nu_1|$$



四、两个相互垂直的同频率简谐振动的合成

某质点同时参与两个同频率的互相垂直方向的简谐运动

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

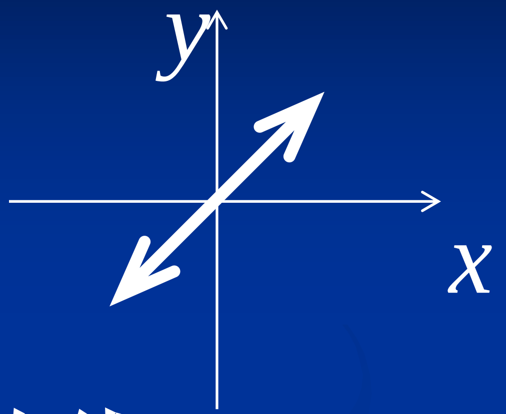
合振动的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

是个椭圆方程，具体形状由相位差决定。

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

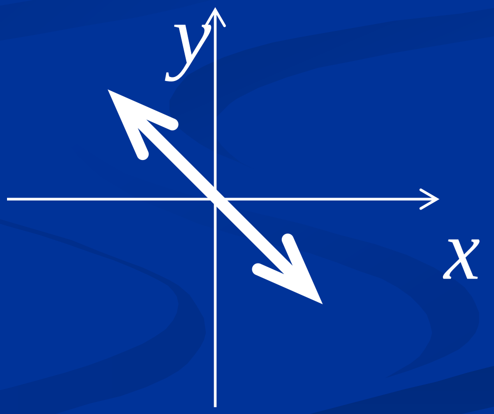
讨论1 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=0$



$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}=0 \qquad y=\frac{A_2}{A_1}x$$

合振动的轨迹是一条通过原点的直线

讨论2 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pi$

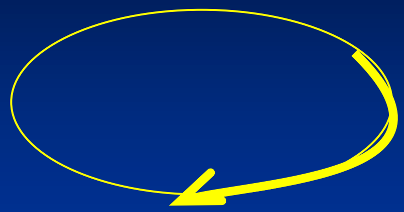


$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{2xy}{A_1A_2}=0 \qquad y=-\frac{A_2}{A_1}x$$

合振动的轨迹是一条通过原点的直线

讨论3 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi / 2$

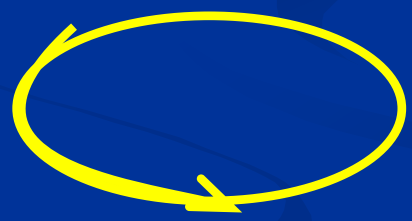
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$



合振动的轨迹是的椭圆方程，
且顺时针旋转

讨论4 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 3\pi / 2$

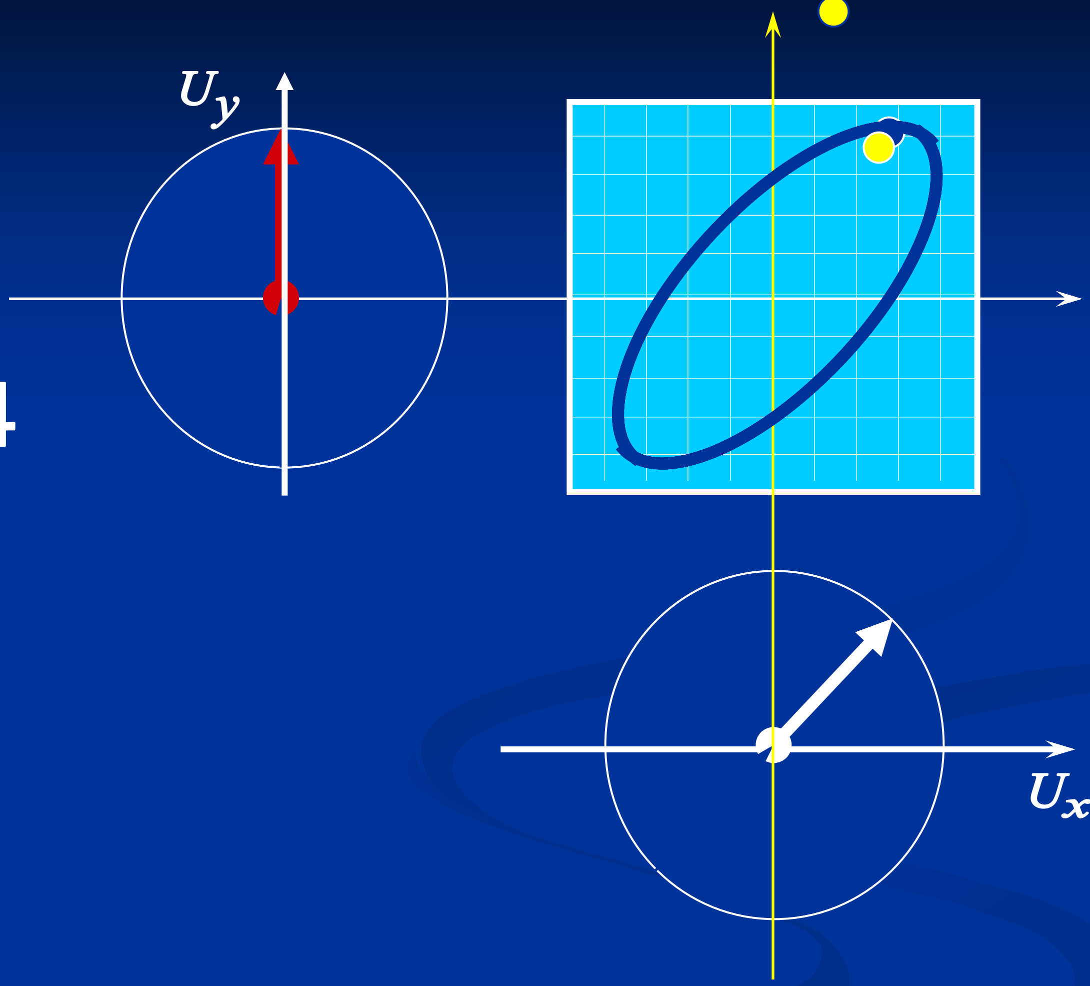
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$



合振动的轨迹是椭圆方程，且逆时针旋转

$$f_x : f_y = 1:1$$

$$\varphi_x - \varphi_y = \pi/4$$



$$f_x : f_y = 2:1$$

$$\varphi_x - \varphi_y = \pi/2$$