第六章 分离性公理

本章介绍分离性公理与可度量化定理, 其中包含著名的 Urysohn 引理、Tietze 扩张定理和 Urysohn 嵌入定理, 这是全书中最难证明的几个重要定理. 几类分离性公理的刻画及相互关系(6.1-6.4)是本章的主要内容.

教学重点: T_0、T_1、Hausdorff 空间、正则、正规、T_3、T_4空间;

教学难点: 分离性公理.

6.1 $T_0,T_1,Hausdorff$ 空间

定义 **6.1.1** X 称为T_0空间, 若 X 中任两个不同点中必有一点有一个开邻域不包含另一点, 即 $\forall x \neq y \in X$, 或者x有开邻域U 不含y, 或者y 有开邻域V 不含x.

定理 **6.1.1** X 是$T_0 \Leftrightarrow \forall x \neq y \in X, \{x\}^- \neq \{y\}^-$.

证, 若 x 有邻域 U 使 $y \notin U$, $x \in \{y\}^{-'}$, 所以$\{x\}^- \neq \{y\}^-$. 同理, 若 y 有邻域 V 使 $x \notin V$, 那么$\{x\}^- \neq \{y\}^-$

"$\Leftarrow$"$\forall x \neq y \in X$. 由于$\{x\}^- \neq \{y\}^-$, 不妨设$\{x\}^- - \{y\}^- \neq \phi$, 如果$x \in \{y\}^-$那么$\{x\}^- \subset \{y\}^-$, 矛盾, 于是$x \notin \{y\}^-$, 所以$x \in \{y\}^{-'}$.

定义 **6.1.2** X 称为 T_1 空间, 若 X 中任两不同点中每一点有一个开邻域不包含另一点, 即. $\forall x \neq y \in X, \exists x$的邻域 U 使$y \in U$.

$T_1 \Rightarrow T_0$, 反之不成立, 如$X = \{0,1\}, \tau = \{\phi, \{0\}, X\}$.

定理 **6.1.2** X 是$T_1 \Leftrightarrow \forall x \in X, \{x\}$是闭集.

证 "$\Rightarrow$"$\forall x \neq y \in X$ 存在y 的邻域 U 使$x \notin U$, 那么$y \notin \{x\}^-$, 从而$\{x\} = \{x\}^-$

"$\Leftarrow$"$\forall x \neq y \in X, x$ 有开邻域$\{y\}'$使$y \notin \{y\}'$, y有开邻域$\{x\}_{/}$使$x \notin \{x\}'$

单点集是闭集等价于有限集是闭集, 因为$\{x_1, x_2 \dots x_n\} = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\}$

定理 **6.1.3** 设X 是T_1空间, $A \subset X$. 则$x \in d(A) \Leftrightarrow \forall x$的邻域$U, U \cap A$是无限集.

只须证"$\Rightarrow$". 若不然, . $\exists x$的邻域U 使$U \cap A$ 是有限集, 则 $B = U \cap A - \{x\}$是闭集, 于是

$U-B$ 是 x 的开邻域且 $(U-B)\cap A=\phi$，矛盾.

定义 **6.1.3** X 称为 T_2 空间或 Hausdorff 空间，若 X 中不同点存在互不相交的开邻域. 即 $\forall x\neq y\in X$，分别 x,y 的邻域 U,V 使得 $U\cap V=\phi$.

$T_2\Rightarrow T_1$，反之不成立.

例 **6.1.1** 含有无限多个点的有限补空间 X: T_1 非 T_2.

X 的每一有限子集是闭集，所以 X 是 T_1 空间. 由于 X 中任两个非空开集必定相交，所以 X 不是 T_2 空间.

定理 **6.1.5** T_2 空间中，任意收敛序列有唯一极限点 .

证 设 T_2 空间 X 中的序列 $x_i\rightarrow y_1$,，又有 $x_i\rightarrow y_2$ 且 $y_1\neq y_2$，分别 y_1,y_2 的开邻域 V_1,V_2 使 $V_1\cap V_2=\phi,\exists n\in Z_-$，使 $\forall i>n$ 有 $x_i\in V_1\cap V_2$ 矛盾.

在 T_1 空间中，定理 6.1.5 可以不成立. 如对例 6.1.1 中的空间 X，X 中的任一由两两不同点构 成的序列 $\{x_i\}$ 收敛于任意 $x\in X$. 事实上，设 U 是 x 的开邻域，则 U' 是有限集，$\exists n\in Z_-$.，使当 $i>n$ 时 有 $x_i\in U$，所以 $x_i\rightarrow x$,.

6.2 正则，正规，T_3,T_4 空间

定义 **6.2.1**(集的邻域) 设 $A,U\subset X$，若 $A\subset U^o$，称 U 是 A 的邻域. 若 U 还是开(闭)集，称 U 是 A 的开(闭)邻域.

定义 **6.2.2** X 称为正则空间，如果 $\forall x\in X$，及 X 的不含 x 的闭集 A，则 x 与 A 有不相交的开邻 域，即X 的不交开集 U,V 使 $x\in U$ 且 $A\subset V$.

定理 **6.2.1** X 是正则空间 $\Leftrightarrow\forall x\in X$ 及 x 的开邻域 U,∃开集 V 使 $x\in V\subset V^-\subset U$.

证"$\Rightarrow$"对 x 的开邻域 $U,x\notin U'$,$\exists X$ 的不交开集 U_1,V_1 使 $x\in U_1,U'\subset V_1$，从 而

$x\in U_1\subset U_1^-\subset V_1'^-\subset U$,

"$\Leftarrow$"$\forall x\in X$ 及 X 的闭集 A 使 $x\notin A$，那么 $x\in A'$,∃开集 V 使 $x\in V\subset V^-\subset A'$,令 $U=V^{-'}$,则 V, U 是不交开集且 $x\in V,A\subset U$.

定义 **6.2.3** X 称为正规空间, 如果 X 中不交闭集存在不交的开邻域 , 即若 A, B 是 X 的不交的 闭集, 存在不交开集 U, V 使 $A \subset U, B \subset V$.

定理 **6.2.2** 是正规空间 $\Leftrightarrow \forall A \subset X$ 为闭集及 A 的开邻域 U, $\exists$ 开集 V 使 $A \subset V \subset V^- \subset U$

与定理 6.2.1 的证明类似.

例6.2.1正则+正规未必是 T_0 .

令 $X = \{1,2,3\}, \tau = \{\phi, \{1\}, \{2,3\}, X\}$, 则 (X, τ) 是拓扑空间. 由于 X 的开集也是闭集, 所以 X 是正则、正规空间. 由两点 2, 3 可见, X 不是 T_0 空间.

例 **6.2.2**(Smirnov 删除序列拓扑) Hausdorff空间, 非正则空间.

R 的通常拓扑为 τ . 令 $K = \{1/n \mid n \in Z_-\}, \tau^* = \{G - E \mid G \in \tau, E \subset K\}$. 可以验证 τ^* 是 **R** 上的拓扑且 $\tau \subset \tau^*$. 于是 (R, τ^*) 是 T_2 空间. 由于 (R, τ^*) 的闭集K与 0 没有不交的开邻域, 所以 (R, τ^*) 不是正则空间.

正则 $\tilde{\Leftrightarrow}$ 正规, 关键在于"单点集未必是闭集".

定义 **6.2.4** T_3 = 正则+ T_1 , T_4 正规+ T_1 .

$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$

定理 **6.2.3** 度量空间 $\Rightarrow T_4$.

证 对度量空间 (X, ρ) , 先证 X 是 $T_2, \forall x \neq y \in X, \rho(x, y) = 2\varepsilon > 0,$ 则 $B(x, \varepsilon), B(y, \varepsilon)$ 是 x, y 的不交的开邻域.

设 A, B 是 X 的不交的非空闭集. $\forall x, y \in X$, 由定理 2.4.9, 如果 $x \notin B$, 则 $\rho(x, B) > 0$; 如果 $y \notin A$,则 $\rho(y, A) > 0$. 记 $\rho(x, B) = 2\varepsilon(x), \rho(y, A) = 2\delta(x)$, 并令 $U = \cup_{x \in A} B(x, \varepsilon(x)), V = \cup_{y \in B} B(y, \varepsilon(y))$ 则 U, V 分别是 A, B 的开邻域. 以下证明 $U \cap V = \phi$.

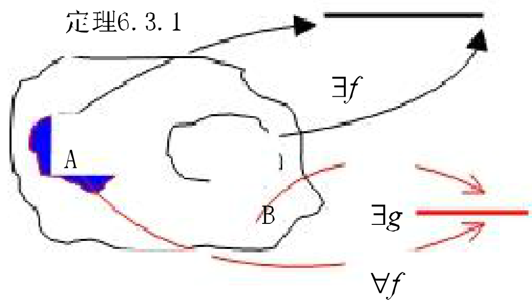
若不然, $\exists z \in U \cap V, \exists x_1 \in A, \exists y_1 \in B$, 使 $z \in B(x_1, \varepsilon(x_1)) \cap B(y_1, \varepsilon(y_1))$ 于 是

$\rho(x_1, y_1) \le \rho(x_1, z) + \rho(z, y_1) < 2\varepsilon(x_1) = \rho(x_1, B)$, 矛盾.

6.3 Urysohn 引理和 Tietze 扩张定理

用函数分离与存在连续扩张的方式刻画正规性.

定理 **6.3.1**(Urysohn 引理) X 是正规空间 $\Leftrightarrow$ 对 X 的任两不交闭集 A,B，存在连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使 $f(A)\subset\{0\},f(B)\subset\{1\}$.



定理6. 3. 4

应用一例.

定理 **6.3.2** T_4 空间中任意多于一点的连通子集是不可数集.

设 C 是 T_4 空间 X 的多于一点的连通集. 取定 $x\neq y\in C$，存在一连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使 $f(x)=0,f(y)=1$.由 C 连通, $f(C)=[0,1]$ ，于是 C 是不可数集.

定理 **6.3.4(Tietze** 扩张定理) X 是正规空间 $\Leftrightarrow$ 对 X 的任一闭集 A 及连续映射 $f:A\to[a,b]$，存在连续映射 $g:X\to[a,b]$ 是 f 的扩张，即 $g_{|A}=f$.

6.4 完全正则空间 , Tychonoff 空间

定义 **6.4.1** X 称为完全正则空间，如果 $\forall x\in X$ 及不含 x 的闭集 B，存在连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使 $f(x)=0.f(B)\subset\{1\}$. 完全正则的 T_1 空间称为 Tychonoff 空间 ，或 $T_{3.5}$ 空间.定理 **6.4.1** 完全正则 $\Rightarrow$ 正则.

证 $\forall x\in X$ 及不含 x 的闭集 A，存在连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使 $f(x)=0.f(A)\subset\{1\}$. 令 $U=f^{-1}([0,1/2)),V=f^{-1}((1/2,1])$ 则 U, V 是 X 的不交开集且 $x\in U.A\subset V$.

定理 **6.4.2** 正则+正规 $\Rightarrow$ 完全正则.

证 $\forall x\in X$ 及不含 x 的闭集 B，由正则性,存在开集 U 使 $x\in U\subset U^-\subset B'$,则 U^-,B 是 X 的不交闭集, 由 Urysohn 引理,.存在连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使 $f(U^-)\subset\{0\}.f(B)\subset\{1\}$ ，这时

$f(x)=0$.

定理 **6.4.3**(Tychonoff 定理) 正则+Lindelof$\Rightarrow$正规 .

证 对正则 Lindelof 空间 X 的不交闭集 $A,B,\forall x\in A,x\notin B,\exists$开集$U_x$使$x\in U\subset U^-\subset B'$ 的覆盖$\{U_x\mid x\in A\}$存在可数子覆盖$\{U_i\}_{i\in Z_+}$，这时每一$U_i^-\cap B=\phi$. 同理，B 有可数开覆盖$\{V_i\}_{i\in Z_+}$使每一$V_i^-\cap A=\phi$。

令$U_n^*=U_n-\cup_{i\le n}V_i^-,V_n^*=V_n-\cup_{i\le n}U_i^-$，则$U_n^*,V_n^*$是开集且$\forall m,n\in Z_-$有$U_n^*\cap V_m^*=\phi$.

再令$U=\cup_{n\in Z_+}U_n^*,V=\cup_{n\in Z_+}V_n^*$，则$U,V$是$X$的不交开集且$A\subset U,B\subset V$.

6.5 分离性公理与子空间、积空间和商空间

一、分离性公理是拓扑性质

定理 **6.5.1** 设空间X,Y同胚，若 X是完全正则，则Y也是完全正则.

证 设同胚$h:X\to Y.\forall y\in Y$及不含y 的闭集B，则 X 中的闭集$h^{-1}(B)$不含$h^{-1}(y)$，存在连续映射$f:X\to[0,1]$使$f(h^{-1}(y))=0$且$f(h^{-1}(B))\subset\{1\}$，于是$g=f\circ h^{-1}:Y\to[0,1]$连续且$g(y)=0,g(B)\subset\{1\}$.

二、$T_0-T_{3.5}$、正则、完全正则是可遗传性质,T_4、正规是闭遗传性质.

定理 **6.5.2** 正则性是可遗传性质.

证 设X是正则空间， $Y\subset X,\forall y\in Y$及不含$y$ 的闭集$B,\exists X$的闭集B^*使$B^*\bigcap Y=B$，那么$y\in B^*$，存在X中不交开集U^*,V^*使$y\in U^*$且$B\subset V^*$，从而
$y\in U^*\cap Y,B=B^*\cap Y\subset V^*\cap Y$.

三、$T_0-T_{3.5}$、正则、完全正则是有限可积性质 ，T_4、正规不是有限可积的.

定理 **6.5.3** 完全正则性是有限可积性.

证仅证若X_1,X_2是完全正则空间，则$X_1\times X_2$是完全正则空间 . $\forall x\in(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$及不含$x$的闭集$B$，分别存在$X_1$的开集$U_1$， X_2 的开集U_2，使得$(x_1,x_2)\in U_1\times U_2\subset X_1\times X_2-B$. 对$i=1,2$.存在连续映射$f_i:X_i\to[0,1]$使得$f_i(x_i)=0,f_i(X_i-U_i)=1$.

定义映射$f:X_1\times X_2\to[0,1]$为$f((y_1,y_2))=\max\{f_1(y_1),f_2(y_2)\}$，易验证，$f$连续且

$f_1((x_1,x_2))=0, \forall y=(y_1,y_2)\in B$, 则 $f(y_1,y_2)\notin U_1\times U_2, \exists i=1$ 或 2 使 $y_i\notin U_i$, 从而 $f_i(y_i)=1$,于是 $f(y)=1$, 即 $f(B)\subset\{1\}$.

本节习题 3 表明: 实数下限拓扑空间 R_l 是 T_4 空间, 但是 $R_l^{\ 2}$ 不是正规空间.

有例子说明, 分离性都不是可商性质.

例 3.3.1 表明, 存在商映射 $q:R\to R/\sim$ 使 $R/\sim$ 是由两点组成的平庸空间 . **R**具有下述介绍的所有 分离性质, 但是 $R/\sim$ 不是 T_0 空间. 因此, 分离公理 T_i 不是可商性质 .

例 **6.5.1** 正则性, 完全正则性, 正规性都不是可商性质.

记 **R** 的子集 $A=(-\infty,0], B=(0,1), C=[1,+\infty)$ 在 **R** 上定义等价关系 ~ 如下 : $\forall x,y\in R, x\sim y\Leftrightarrow x,y$ 同时属于 A,B 或 C 之一. 则商集 $Y=R/\sim$ 为 $\{A,B,C\}$, 商拓扑是{ ϕ, {B}, {A, B}, {B, C}, {A, B, C}}. 易见 Y 是 T_0 空间. 考察 A,B 两点, Y 不是 T_1 空间. 考察两闭集 $\{A\},\{C\}, Y$ 既不是正则空间, 也不是正规空间, 从而 Y 不是完全正则空间(定理 6.4.1).

6.6 可度量化空间

可度量化空间(定义 2.2.3): 空间的拓扑与某一度量拓扑一致.

嵌入: 设 X,Y 是两拓扑空间, 映射 $f:X\to Y$ 称为嵌入, 如果 f 是 X 到 $f(X)$ 的同胚; 也称 X 可嵌入 Y.

回忆 Hilbert 空间 **H**.

定理 **6.6.1**(Urysohn 嵌入定理) 第二可数的 T_3 空间可嵌入 **H**.

证 设 X 是第二可数的正则空间, 则 X 是正规空间(Tychonoff 定理 6.4.3). 设 B 是 X 的不含空集的可数集，令

$$\mathrm{A}=\{(U,V)\in \mathrm{B}\times\mathrm{B}\mid U^-\subset V\}=\{(U_i,V_i)\mid i\in Z_-\},\forall i\in Z_-,$$

因 $U^-\subset V$ 存在连续映射 $f_i:X\to[0,1]$ 使 $f_i(U_i^-)\subseteq\{0\}, f_i(X-V_i)\subseteq\{1\}$.定义 $f:X\to H$ 使 $f(x)=(f_1(x), f_2(x)/2,\ldots,f_i(x)/i,\ldots)$. 则 f 是一个嵌入.

定理 **6.6.2 H** 是可分空间.

证 令 $D=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\},0,0,\ldots)\in H\mid n\in Z_-, y_i\in Q\}$ 则 D 是 **H** 的可数稠密集.只须证,

. $\forall x \in H, \forall \varepsilon > 0 . B(x,\varepsilon) \cap D \neq \phi . \exists n > 0$ 使 $|x_i - y_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}$. 于是

$$y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}, 0, 0, ...) \in D,$$

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i \le n}(x_i - y_i)^2 + \sum_{i \le n} x_i^2} < \sqrt{n(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}})^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon,$$

所以 $y \in B(x,\varepsilon) \cap D.$

定理 6.6.3 下述等价:

(1) X 是第二可数的 T_3 空间;

(2) X 可嵌入 **H**;

(3) X 是可分的度量空间.

证 由已证命题可知 (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) **H** 是可分的度量空间, **H** 的子空间也是可分度量空间, 从而 X 是可分度量空间.

上述定理中的 T_3 条件是必不可少的, 如例 6.2.2 中的空间 (R, τ^*) 使 A_2 的 T_2 空间, 但不是 T_3 空间.