第十章　电磁感应 *Electromagnetic Induction*
电　磁　场 *Electromagnetic Field*

10.6　磁场的能量

磁场能量密度

Energy of Magnetic Field

一、自感线圈的磁能

复习： 前面讲过，在电容器充电过程中，外力克服静电力作功，将外力作功→静电能。

当极板电压为U时，电容器储存的静电能为：

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2$$

当某点处的电场强度为E 时，该点附近的电场能量密度为：

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

在电流激发磁场的过程中，也是要供给能量的，所以磁场也应具有能量。

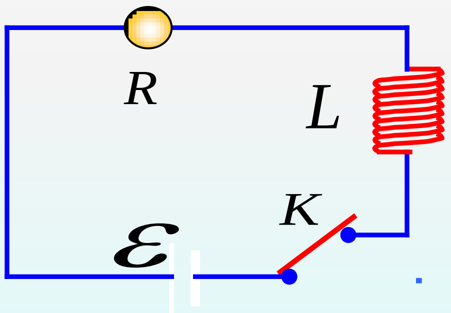
可以仿照研究静电场能量的方法来讨论磁场的能量。

一、自感线圈的磁能

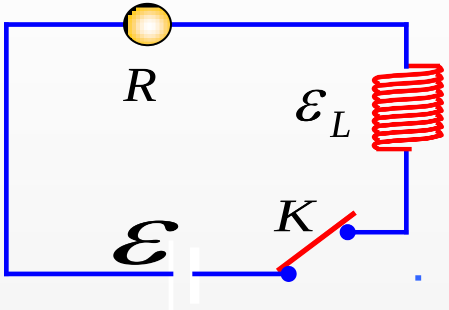
对于一个通电的线圈也会储存一定的能量，其所储存的磁能可以通过电流建立过程中电源抵抗感应电动势作功来计算；

如图：自感为L，电阻为R，电源的电动势为 ε

当K闭合时，由于自感现象，线圈中的电流逐渐增大，最后电流达到稳定值。在这段时间内，电路中的电流在增大，因而有反方向的自感电动势 ε_L存在，电源 ε 不仅要供给电路中产生焦耳热的能量，而且还要反抗自感电动势作功。



一、自感线圈的磁能



在开关接通后的一段时间内 $(0 \sim t_0)$，回路中电流从 0 增加到稳定值 I，设 t 时刻，回路电流 $i(t)$，自感电动势 ε_L，

由全电路欧姆定律： $\varepsilon + \varepsilon_L = iR$

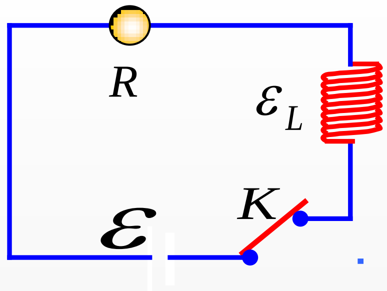
$$\varepsilon_L = -L\frac{di}{dt}, \qquad \varepsilon = L\frac{di}{dt} + iR$$

$0 \sim t_0$ 时间内，电源 ε 所作的功为：

$$\int_0^{t_0} \varepsilon i dt = \int_0^{I} L i di + \int_0^{t_0} i^2 R dt = \frac{1}{2}LI^2 + \int_0^{t_0} i^2 R dt$$

一、自感线圈的磁能

$0\sim t_0$ 时间内，电源$\boldsymbol{\varepsilon}$ 所作的功为：



$$\int_0^{t_0}\varepsilon i dt=\frac{1}{2}LI^2+\int_0^{t_0}i^2Rdt$$

$0\sim t_0$时间内回路电阻R所放出的焦耳热

$0\sim t_0$时间内电源反抗自感电动势所作的功

$0\sim t_0$时间间隔内电源所作的功，即电源提供的能量

电流在线圈内建立磁场的过程中，电源供给的能量分成两个部分：一部分转换为热能，另一部分则转换成线圈内的磁场能量。即，电源反抗自感电动势所作的功在建立磁场过程中转换成线圈内磁场的能量，储存在螺线管内。

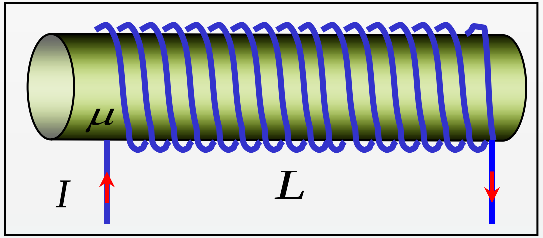
一、自感线圈的磁能

具有自感系数为 L 的线圈通有电流 I 时所具有的磁能为：

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2}$$

二、磁场能量

以通电长直螺线管为例：



$$B = \mu n I, \quad L = \mu n^2 V,$$

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}V$$

磁场占据的空间体积

$$\boxed{w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2}\cdot\frac{B^2}{\mu},}$$

各向同性的均匀介质：
$B = \mu H,$

$$\boxed{w_m = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}BH}$$

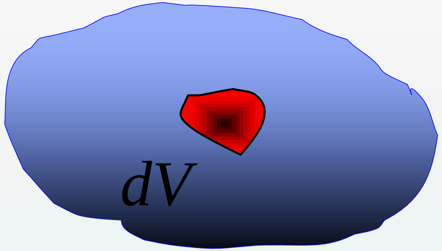
二、磁场能量

1、磁场能量密度

$$\boxed{w_{\mathrm{m}} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}BH}$$

可证明此磁场能量密度公式对任何磁场普遍成立

2、磁场能量



$$B = B(x, y, z)$$

$$w_m = w_m(x, y, z) = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$$

$$dW_m = w_m(x, y, z)dV,$$

$$W_m = \int_V w_m(x, y, z)dV,$$

$$\boxed{W_m = \int_V \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}dV}$$

3、电场能量与磁场能量比较

电场能量	磁场能量
电容器储存的电场能量 $W_e=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU=\frac{Q^2}{2C}$	自感线圈储存的磁场能量 $W_m=\frac{1}{2}LI^2$
电场能量密度 $w_e=\frac{1}{2}ED=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$	磁场能量密度 $w_m=\frac{1}{2}BH=\frac{B^2}{2\mu}$
电场能量 $W_e=\int_V w_e \mathrm{d}V$	磁场能量 $W_m=\int_V w_m \mathrm{d}V$

4、磁场能量的计算

1）先确定磁场能量密度:

$$\boxed{w_{\mathrm{m}} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}BH}$$

2）磁场中体积元 dV 内的磁场能量: $dW_m = w_m dV$

3）体积V内的磁场能量:

$$W_m = \int_V w_m dV$$

积分应遍及体积V内磁场空间

载流线圈的磁场能量:

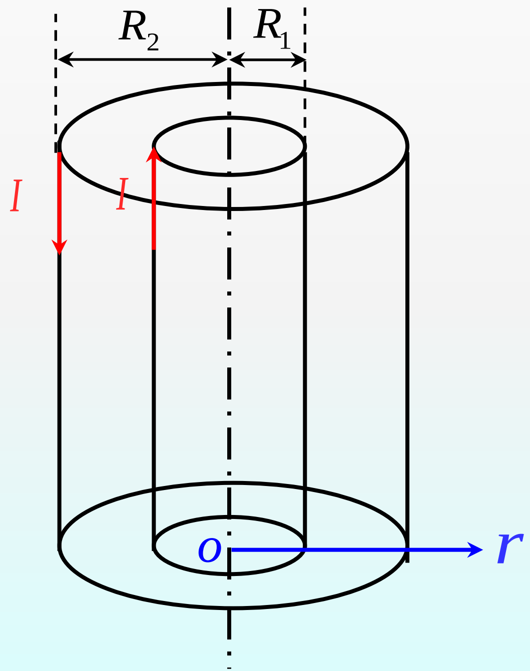
$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

例10-12： 一同轴电缆，由半径分别为R_1、 R_2的两同轴导体圆柱面组成，电流 I 从中间导体圆柱面流入，从外层圆柱面流出构成闭合回路，求：长为l 的一段电缆内的磁场能量。

解： 1、方法一：

由安培环路定理可得：

$$B=\begin{cases}0, & (r<R_1)\\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}, & (R_1<r<R_2)\\ 0, & (R_2<r)\end{cases}$$



对 $R_1<r<R_2$ 区域，磁能密度：

$$w_m=\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

例10-12： 一同轴电缆，由半径分别为R_1、R_2的两同轴导体圆柱面组成，电流 I 从中间导体圆柱面流入，从外层圆柱面流出构成闭合回路，求：长为l 的一段电缆内的磁场能量。

解： 作一半径为 r，长为 l，厚为dr的薄圆柱面，

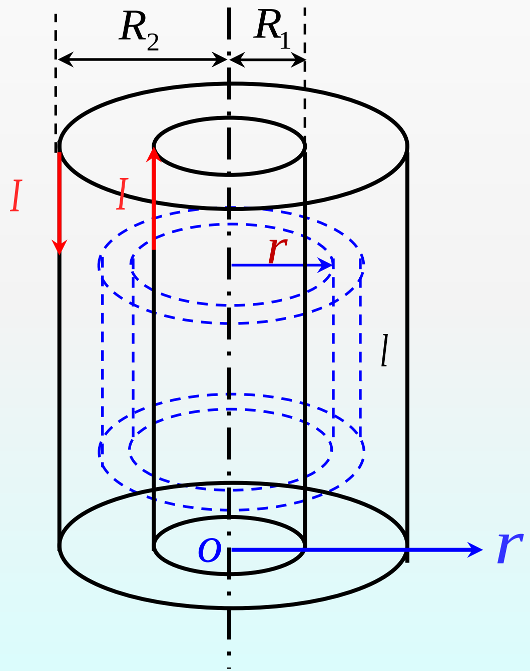
$$dV = 2\pi r l dr$$

薄圆柱面的磁场能量为：

$$dW_m = w_m dV = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \cdot \frac{dr}{r}$$

长为l 的一段电缆内的磁场能量为：

$$W_m = \int dW_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \cdot \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln\frac{R_2}{R_1}$$



例10-12：一同轴电缆，由半径分别为R_1、R_2的两同轴导体圆柱面组成，电流 I 从中间导体圆柱面流入，从外层圆柱面流出构成闭合回路，求：长为l 的一段电缆内的磁场能量。

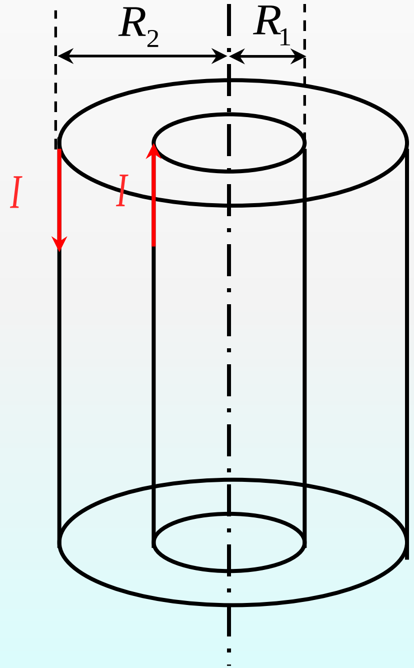
解： 2、方法二：

长为l 的一段电缆内的自感系数为：

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

长为l 的一段电缆内的磁场能量为：

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



小 结：

1、自感线圈的磁能：

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2}$$

2、磁场能量密度：

$$\boxed{w_{\mathrm{m}} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}BH}$$

3、磁场能量：

$$\boxed{W_m = \int_V w_m(x, y, z)dV}$$