

第十二讲 子空间的交与和

一、子空间的交

二、子空间的和

三、子空间交与和的有关性质



一、子空间的交

1、定义

设 V_1 、 V_2 为线性空间 V 的子空间，则集合

$$V_1 \cap V_2 = \{a \mid a \in V_1 \text{ 且 } a \in V_2\}$$

也为 V 的子空间，称之为 V_1 与 V_2 的**交空间**.

事实上， $0 \in V_1, 0 \in V_2, \therefore 0 \in V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$

任取 $\alpha, \beta \in V_1 \cap V_2$ ，即 $\alpha, \beta \in V_1$ ，且 $\alpha, \beta \in V_2$ ，

则有 $\alpha + \beta \in V_1, \alpha + \beta \in V_2, \therefore \alpha + \beta \in V_1 \cap V_2$

同时有 $k\alpha \in V_1, k\alpha \in V_2, \therefore k\alpha \in V_1 \cap V_2, \forall k \in P$

故 $V_1 \cap V_2$ 为 V 的子空间.

显然有, $V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1$,

$$(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3)$$

2、推广——多个子空间的交

V_1, V_2, \dots, V_s 为线性空间 V 的子空间, 则集合

$$V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_s = \bigcap_{i=1}^s V_i = \{ \alpha \mid \alpha \in V_i, i = 1, 2, 3, \dots, s \}$$

也为 V 的子空间, 称为 V_1, V_2, \dots, V_s 的交空间.

二、子空间的和

1、定义

设 V_1 、 V_2 为线性空间 V 的子空间，则集合

$$V_1 + V_2 = \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in V_1, a_2 \in V_2\}$$

也为 V 的子空间，称之为 V_1 与 V_2 的**和空间**.

事实上， $\mathbf{0} \in V_1, \mathbf{0} \in V_2, \therefore \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in V_1 + V_2 \neq \emptyset$

任取 $\alpha, \beta \in V_1 + V_2$ ， 设 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2$ ，
其中， $\alpha_1, \beta_1 \in V_1, \alpha_2, \beta_2 \in V_2$ ， 则有

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) \in V_1 + V_2\end{aligned}$$

$$k\alpha = k(\alpha_1 + \alpha_2) = k\alpha_1 + k\alpha_2 \in V_1 + V_2, \quad \forall k \in P$$

显然有, $V_1 + V_2 = V_2 + V_1$,

$$(V_1 + V_2) + V_3 = V_1 + (V_2 + V_3)$$

2、推广——多个子空间的和

$V_1, V_2, \mathbf{L}, V_s$ 为线性空间 V 的子空间, 则集合

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s V_i &= V_1 + V_2 + \mathbf{L} + V_s \\ &= \{ \alpha_1 + \alpha_2 + \mathbf{L} + \alpha_s \mid \alpha_i \in V_i, i = 1, 2, 3, \mathbf{L}, s \} \end{aligned}$$

也为 V 的子空间, 称为 $V_1, V_2, \mathbf{L}, V_s$ 的**和空间**.

注意:

V 的两子空间的并集未必为 V 的子空间. 例如

$$V_1 = \{(a, 0, 0) \mid a \in R\}, \quad V_2 = \{(0, b, 0) \mid b \in R\}$$

皆为 R^3 的子空间, 但是它们的并集

$$\begin{aligned} V_1 \cup V_2 &= \{(a, 0, 0), (0, b, 0) \mid a, b \in R\} \\ &= \{(a, b, 0) \mid a, b \in R \text{ 且 } a, b \text{ 中至少有一是 } 0\} \end{aligned}$$

并不是 R^3 的子空间. 因为它对 R^3 的运算不封闭, 如

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0) \in V_1 \cup V_2$$

$$\text{但是 } (1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0) \notin V_1 \cup V_2$$

三、子空间的交与和的有关性质

1、 设 V_1, V_2, W 为线性空间 V 的子空间

1) 若 $W \subseteq V_1, W \subseteq V_2$, 则 $W \subseteq V_1 \cap V_2$.

2) 若 $V_1 \subseteq W, V_2 \subseteq W$, 则 $V_1 + V_2 \subseteq W$.

2、 设 V_1, V_2 为线性空间 V 的子空间, 则以下三个条件等价:

1) $V_1 \subseteq V_2$

2) $V_1 \cap V_2 = V_1$

3) $V_1 + V_2 = V_2$

3、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 为线性空间 V 中两组向量，则

$$\begin{aligned} & L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \\ &= L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \end{aligned}$$

4、维数公式（定理7）

设 V_1, V_2 为线性空间 V 的两个子空间，则

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

$$\text{或 } \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

注： 从维数公式中可以看到，**子空间的和的维数往往比子空间的维数的和要小.**

例如，在 \mathbf{R}^3 中，设子空间

$$V_1 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad V_2 = L(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

其中， $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$

则， $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 2$

但， $V_1 + V_2 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + L(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \mathbf{R}^3$

$$\dim(V_1 + V_2) = 3$$

由此还可得到， $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$, $V_1 \cap V_2$ 是一直线.

推论： 设 V_1, V_2 为 n 维线性空间 V 的两个子空间，
若 $\dim V_1 + \dim V_2 > n$ ，则 V_1, V_2 必含非零的公共
向量. 即 $V_1 \cap V_2$ 中必含有非零向量.

证： 由维数公式有

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2)$$

又 $V_1 + V_2$ 是 V 的子空间， $\therefore \dim(V_1 + V_2) \leq n$

若 $\dim V_1 + \dim V_2 > n$ ，则 $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$.

故 $V_1 \cap V_2$ 中含有非零向量.

例1、 在 P^n 中, 用 W_1, W_2 分别表示齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \text{L} + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \text{L} + a_{2n}x_n = 0 \\ \text{L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \text{L} + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

与 $\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \text{L} + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \text{L} + b_{2n}x_n = 0 \\ \text{L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \text{L} + b_{tn}x_n = 0 \end{cases} \quad \textcircled{2}$

的解空间, 则 $W_1 \cap W_2$ 就是齐次线性方程组③

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \text{L} + a_{1n}x_n = 0 \\ \text{L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \text{L} + a_{sn}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \text{L} + b_{1n}x_n = 0 \\ \text{L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \text{ L} \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \text{L} + b_{tn}x_n = 0 \end{array} \right. \quad \textcircled{3}$$

的解空间.

证： 设方程组①,②,③分别为

$$AX = 0, \quad BX = 0, \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$$

设 W 为③的解空间, 任取 $X_0 \in W$, 有

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X_0 = 0, \quad \text{从而} \quad \begin{pmatrix} AX_0 \\ BX_0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{即}$$

$$AX_0 = BX_0 = 0. \quad \therefore X_0 \in W_1 \mid W_2$$

反之, 任取, $X_0 \in W_1 \mid W_2$, 则有

$$AX_0 = BX_0 = 0, \quad \text{从而} \quad \begin{pmatrix} AX_0 \\ BX_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X_0 = 0,$$

$$\therefore X_0 \in W$$

故 $W = W_1 \mid W_2$.

例2、在 P^4 中，设

$$\alpha_1 = (1, 2, 1, 0), \quad \alpha_2 = (-1, 1, 1, 1)$$

$$\beta_1 = (2, -1, 0, 1), \quad \beta_2 = (1, -1, 3, 7)$$

- 1) 求 $L(\alpha_1, \alpha_2) \cap L(\beta_1, \beta_2)$ 的维数的与一组基;
- 2) 求 $L(\alpha_1, \alpha_2) + L(\beta_1, \beta_2)$ 的维数的与一组基.

解： 1) 任取 $\gamma \in L(\alpha_1, \alpha_2) \mid L(\beta_1, \beta_2)$

$$\text{设 } \gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2,$$

$$\text{则有 } x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 - y_1\beta_1 - y_2\beta_2 = 0,$$

$$\text{即 } \begin{cases} x_1 - x_2 - 2y_1 - y_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3y_2 = 0 \\ x_1 - y_1 - 7y_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{解 } (*) \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 4t \\ y_1 = -3t \\ y_2 = t \end{cases} \quad (t \text{ 为任意数})$$

$$\therefore \gamma = t(-\alpha_1 + 4\alpha_2) = t(\beta_2 - 3\beta_1)$$

令 $t=1$, 则得 $L(\alpha_1, \alpha_2) \cap L(\beta_1, \beta_2)$ 的一组基

$$\gamma = -\alpha_1 + 4\alpha_2 = (-5, 2, 3, 4)$$

$\therefore L(\alpha_1, \alpha_2) \cap L(\beta_1, \beta_2) = L(\gamma)$ 为一维的.

$$2) \quad L(\alpha_1, \alpha_2) + L(\beta_1, \beta_2) = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$$

对以 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 为列向量的矩阵 A 作初等行变换

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \\
 &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B
 \end{aligned}$$

由B知, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 的一个极大无关组.

$\therefore L(\alpha_1, \alpha_2) + L(\beta_1, \beta_2) = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)$ 为3维的,

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 为其一组基.