第二十二讲 线性方程组

一、齐次和非齐次线性方程组

二、线性方程组解的情况

三、线性方程组的解法

一、齐次和非齐次线性方程组

1. 考察一般线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}, \qquad (1)$$

其中$x_1, x_2, \cdots, x_n$为未知量，s为方程个数.

$a_{ij}\ (i = 1,2,\cdots,s;\ j = 1,2,\cdots,n)$称为方程组系数；

$b_i\ (i = 1,2,\cdots,s)$称为常数项.

运用矩阵的乘法，我们可以将下列线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

写为 $AX = B$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

若令

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \bigg| & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \bigg| & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \bigg| & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} & \bigg| & b_m \end{pmatrix}$$

$$= (A \mid B),$$

则称 $\tilde{A}$ 为线性方程组（1）的增广矩阵.

若B为零向量，则方程组(1)变为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

称线性方程组（2）为齐次线性方程组，其矩阵表示为

$$AX = \vec{0}.$$

若 (1)中至少有一个 b_i 不为零，则称之为非齐次线性方程组.

对线性方程组的研究，中国比欧洲至少早1500年，记载在公元初《九章算术》方程章中。线性方程组有广泛应用，熟知的线性规划问题即讨论对解有一定约束条件的线性方程组问题。线性方程组是最简单也是最重要的一类代数方程组。大量的科学技术问题，最终往往归结为解线性方程组，因此线性方程组的数值解法在计算数学中占有重要地位。

二、线性方程组解的情况

设直线 L 的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1, \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2, \end{cases}$$

平面π的方程为

$$A_3x+B_3y+C_3z=D_3.$$

则直线L与平面π有如下三种位置关系:

(1) 相交于一点;

(2) 平行但直线不在平面上;

(3) 直线在平面上.

对该几何关系，从代数上可理解为：

线性方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1, \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2, \\ A_3x+B_3y+C_3z=D_3 \end{cases}$$

(1) 有唯一解;

(2) 有无穷多解;

(3) 无解.

所以非齐次线性方程组的解的情况为

(1) 无解； **(2)** 有唯一解； **(3)** 有无穷多解.

思考：齐次线性方程组的解的情况？

答：齐次线性方程组一定有解，至少有零解.具体情况为:

(1) 有唯一解(只有零解)；

(2) 有无穷多解.

定理3.4.1 若线性方程组 $AX=B$ 有两个不同的解 $X_1 \neq X_2$, 则它必有无穷多解.

证明: 令 $X(t)=X_1+t(X_2-X_1)$, 则

$$
\begin{aligned}
AX(t) &= A[X_1+t(X_2-X_1)] \\
&= AX_1+tA(X_2-X_1) \\
&= AX_1+tAX_2-tAX_1 \\
&= B+tB-tB=B.
\end{aligned}
$$

所以 $X(t)$是方程组 $AX=B$ 的解,且 $X(t)$ 随着 t 的变化变化而变化，当 t 取遍无穷多数时，该方程组有无穷多解.

三、线性方程组解的解法

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}, \qquad (1)$$

所谓方程组(1)的一个解就是指由n个数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 组成的有序数组 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$. 当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别用 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 代入后, (1)中的等式为恒等式.

定义3. 4. 2 设A_1,A_2是两个$m\times n$的矩阵，

$X=(x_1,x_2,\ldots x_n)^T,B_1,B_2$是两个$m\times 1$的

矩阵，如果线性方程组

$$A_1X=B_1 \qquad (1)$$

与

$$A_2X=B_2 \qquad (2)$$

有相同的解集合，即(1)的解全是(2)的解, 且

(2)的解也都是(1)的解，则称(1)和(2)是**同解的.**

1、用消元法解线性方程组

分析：用消元法解下列方程组的过程.

引例：求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \quad \div 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, & ④ \end{cases}$$

$$B = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

增广矩阵

解　(1) $\xrightarrow[③\div 2]{①\leftrightarrow ②}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, & ④ \end{cases}$$

$\dfrac{r_1 \leftrightarrow r_2}{r_3 \div 2}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

$\xrightarrow[④-3①]{\substack{②-③ \\ ③-2①}}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ \cancel{2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0,} & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3, & ④ \end{cases}$$

$\dfrac{\substack{r_2 - r_3 \\ r_3 - 2r_1}}{r_4 - 3r_1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{③+5② \\ ④-3②}]{② \times \frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3, & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[④-2③]{③ \leftrightarrow ④}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ x_4 = -3, & ③ \\ 0 = 0, & ④ \end{cases}$$

$$\underset{r_4 - 3r_2}{\overset{\substack{r_2 \div 2 \\ r_3 + 5r_2}}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4 - 2r_3}{\overset{r_3 \leftrightarrow r_4}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是解得 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$ 其中x_3为任意取值.

或令$x_3 = c$,方程组的解可记作

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{即} x = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad （2）$$

其中c为任意常数.

1．上述解方程组的方法称为消元法。

2．始终把方程组看作一个整体变形，用到如下三种变换

（1）交换方程次序；

（ ⓘ与ⓙ相互替换）

（2）以不等于 0 的数乘某个方程；

（以 ⓘ$\times k$ 替换ⓘ）

（3）一个方程加上另一个方程的k倍.

（以 ⓘ$+k$ⓙ 替换ⓘ）

3．上述三种变换都是可逆的.

若$(A) \xrightarrow{ⓘ \leftrightarrow ⓙ} (B)$，则$(B) \xrightarrow{ⓘ \leftrightarrow ⓙ} (A)$;

若$(A) \xrightarrow{ⓘ \times k} (B)$，则$(B) \xrightarrow{ⓘ \div k} (A)$;

若$(A) \xrightarrow{ⓘ + k ⓙ} (B)$，则$(B) \xrightarrow{ⓘ - k ⓙ} (A)$.

由于三种变换都是可逆的，所以变换前的方程组与变换后的方程组是同解的．故这三种变换是同解变换.

对增广矩阵只进行初等行变换化成阶梯形矩阵后，阶梯形矩阵对应的方程组与原方程组是同解的.

初等变换的作用：求解一般线性方程组.

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \qquad (1)$$

首先检查x_1 的系数，如果x_1 的系数$a_{11},a_{21},\cdots,a_{s1}$
全部为零，那么方程组（1）的未知数仅为$x_2,x_3,\cdots,x_n$

如果x_1 的系数不全为零，那么可以利用初等变换 3，可以设 $a_{11}\neq 0$ 利用初等变换2，分别把第一个方程的 $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍加到第 i 个方程 $(i=2,3,\cdots,n)$ ，方程组（1）变为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a'_{s2}x_2+\cdots+a'_{sn}x_n=b'_s \end{cases} \qquad (2)$$

其中 $a'_{ij}=a_{ij}-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}\cdot a_{1j}\quad i=2,3,\cdots,s;\ j=2,3,\cdots,n$

$$b'_i=b_i-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\cdot b_1\quad i=2,3,\cdots,s;$$

若我们能够求解如下方程组

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{s2}x_2 + \cdots + a'_{sn}x_n = b' \end{cases} \qquad (3)$$

则可将方程组（3）的解代入（2）的第一个方程中，求出 x_1 的值，这就得到（2）的解.

注意：由于上述求解过程都是互逆的，因此方程组（2）与方程组（1）是同解方程.

对方程组（3）再进行上述变换，并一步步作下去，如果

1. 得到如下的阶梯形方程组（$r < n$）：

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \\ \qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

其中 $c_{ii} \neq 0 \;\; i = 1,2,\cdots,r.$

（I）易见，当$d_{r+1}\neq 0$,方程组（4）无解，从而

①无解；

（II）若$d_{r+1}=0$，此时方程组（4）可以化为

$$\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots c_{1r}x_r=d_1-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n} \\ \boldsymbol{c_{22}x_2+\cdots c_{2r}x_r=d_2-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{c_{rr}x_r=d_r-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n} \end{array}\right. \quad \textbf{(5)}$$

任给$x_{r+1},\cdots,x_n$一组值，就唯一给出$x_1,x_2,\cdots,x_r$的值，也就是得到方程组⑸的一个解。

一般地，对于方程组（5），通过$x_{r+1},\cdots,x_n$可以表示出$x_1,x_2,\cdots,x_r$的值，这样一组表达式称为方程组（1）的一般解，其中$x_{r+1},\cdots,x_n$称为自由未知量。

2. 如果方程组（3）经过初等变换后化为如下方程组($r = n$):

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad\qquad c_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n \end{cases} \quad (6)$$

其中$c_{ii} \neq 0$, $i = 1,2,\cdots,n.$

这时方程组（6）有唯一解，从而（1）有唯一解.

综上所述，有如下结果：

1、若方程组（1）化为如下阶梯形方程组（r < n）

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \\ \qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

(I) 如果$d_{r+1} \neq 0$，方程组 ① 无解；

（II） 如果$d_{r+1} = 0$，方程组 ① 有无穷多组解.

(这是由于解的表达式中有自由未知量)

2. 如果方程组（1）化为如下方程组($r = n$):

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad\qquad c_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n \end{cases}$$

其中$c_{ii} \neq 0$，$i = 1,2,\cdots,n.$

这时 ① 有唯一解；

因为在上述变换过程中，仅仅只对方程组的系数和常数进行运算，未知量并未参与运算. 则对方程组的变换完全可以转换为对矩阵***B***(方程组（**1**）的增广矩阵）的变换.

将上述非奇次线性方程组的理论应用于齐次线性方程组可有如下结论：

推论3.4.4 在齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

中，如果$s < n$，则该方程组有非零解.

例2 求下述方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases} \qquad (1)$$

解： 对增广矩阵B施行初等行变换：

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 3 & 4 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right)$$

$$B=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 3 & 4 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right) \underline{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underline{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 3 & \frac{23}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

写出增广矩阵的相应方程组

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 - 2x_5 = -\frac{9}{2} \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 + 3x_5 = \frac{23}{2} \end{cases} \quad (2)$$

且 (1)和(2)是同解方程组,得解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + 2x_5 - \frac{9}{2}, \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 + x_4 - 3x_5 + \frac{23}{2}, \\ x_3 = p, \\ x_4 = q, \\ x_5 = r, \end{cases}$$

其中p,q,r是任意常数.

对于齐次线性方程组，由于其总是有解的(一定有零解)，所以我们会关心齐次线性方程组什么时候只有零解，什么时候有非零解.

当齐次方程组的方程个数与未知数个数相等时，其系数矩阵是方阵，从而讨论其可逆性有意义，下面我们通过齐次线性方程组的系数矩阵的可逆性给出齐次线性方程组是否有非零解的一个充分必要条件.

定理3.4.8 设 A 是 n 方阵，则齐次线性方程组

$$AX = 0$$

有非零解当且仅当 A 不可逆.