自动控制原理答案二十八

一、解：(1) 列出输入 U_r 与输出 U_c 之间的微分方程

$$-\frac{u_1(t)}{R_2}+\frac{cd(-u_1(t))}{dt}=\frac{u_r(t)}{R_1}+\frac{u_c(t)}{R_1}$$

$$-\frac{cdu_2(t)}{dt}=\frac{u_1(t)}{R_3}$$

$$-\frac{u_c(t)}{R_5}=\frac{u_2(t)}{R_4}$$

（2）将上式两边拉氏变换并画出系统结构图如图 1 所示。

$$U_1(s)=\frac{-R_2}{R_1(1+R_2C_1S)}[U_r(s)+U_c(s)]$$

$$U_2(s)=\frac{-1}{R_3C_2S)}U_1(s)$$

$$U_c(s)=\frac{-R_5}{R_4}U_2(s)$$

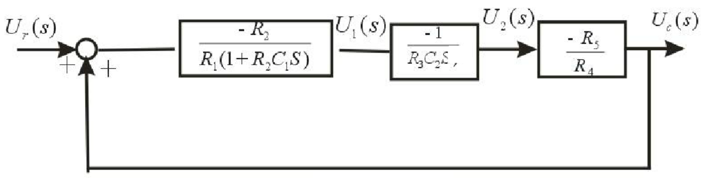


图 1

（3）求闭环传递函数 $U_c(s)/U_r(s)$

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{\frac{-R_2}{R_1(1+R_2C_1S)}*\frac{1}{R_3C_2S}\frac{R_5}{R_4}}{1+\frac{R_2R_5}{R_1R_3R_4C_2S(1+R_2C_1S)}}=\frac{-1}{\frac{R_1R_3R_4}{R_5}C_1C_2S^2+\frac{R_1R_3R_4C_2S}{R_2R_5}+1}$$

二、解：系统的闭环传递函数为

$$G_B(s)=\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G_c(s)}{s(0.1s+1)(0.2s+1)+G_c(s)}$$

系统的闭环特征方程为

$$D(s)=s(0.1s+1)(0.2s+1)+Kp$$
$$=2s^3+30s^2+100s+100Kp$$

列劳斯列阵

s^3	2	100
s^2	30	$100Kp$
s	$\dfrac{30\times 100-2\times 100Kp}{30}$	
s^0	$100Kp$	

若要使系统稳定，其充要条件是劳斯列表的第一列均为正数，得稳定条件为

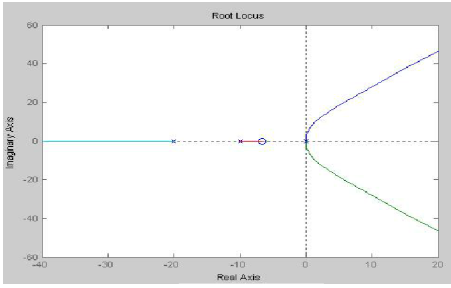
$$100K_p>0$$

$$\frac{30*100-2*100K_p}{30}>0$$

求得 K_p 取值范围：$0<K_p<15$

三、解　法 1　系统特征方程 $s^2(s+10)(s+20)+K^*(s+z)=0$

以 $s=\pm j1$ 代入



$$-199-30j+K^*(j+z)\quad \Rightarrow z=6.63$$

$$-199+30j+K^*(-j+z)\qquad K^*=30$$

作根轨迹：

（1）开环极点和零点

$$P_1=0,P_2=0,P_3=-10,P_4=-20,Z_1=-6.63$$

（2）渐进线：σ_a=(-30+6.63)/(4-1)=－7.79　　φ_a=(2k+1)* 180^0/3=± 60^0，180^0

作根轨迹如右图所示。

解法 2　$D(s)=s^2(s+10)(s+20)+K^*(s+z)=s^4+30s^3+200s^2+K^*s+K^*z=0$

劳斯列表

s^4	1	200	K*z
s^3	30	K*	
s^2	200- K*/30	K*z	
s^1	$K^*-\dfrac{30K^*z}{200-\dfrac{K^*}{30}}$		
s^0	K*z		

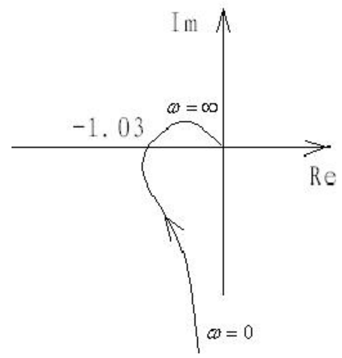
令 $200-\dfrac{K^*}{30}$=0，　$K^*-\dfrac{30K^*z}{200-\dfrac{K^*}{30}}$=0

得：$6000-K^*-900z=0$，　$K^*=6000-900z$

辅助方程$(200-\frac{K^*}{30})s^2+K^*z=0$，$s=\pm j$　　则$K^*=\frac{30\times 200}{1+30z}$

求出 z=6.633，K*=30

四、解：



$$G(s)=\frac{86}{s(1+0.02s)(1+0.03s)}$$

$s\to j\omega$

$$G(j\omega)=\frac{86}{j\omega(1+0.02j\omega)(1+0.03j\omega)}=\frac{-43\omega+j86(0.006\omega^2-1)}{\omega[1+(0.02\omega)^2][1+(0.03\omega)^2]}$$

与实轴交点

$0.006\omega^2-1=0$　　$\omega=40.825$

G(j40.8)=-1.032>1

作极坐标图如右图所示。

∴N= -2，山奈奎斯特稳定判据：Z =P –N=0-(-2)=2　∴系统不稳定。

（2）　$G(j\omega)=\frac{-Kj(1-j\omega T_1)(1-j\omega T_2)}{\omega(1+\omega^2T_1{}^2)(1+\omega^2T_2{}^2)}=\frac{-K\omega(T_1+T_2)+jK(T_1T_2\omega^2-1)}{\omega(1+\omega^2T_1{}^2)(1+\omega^2T_2{}^2)}$

令　$K(T_1T_2\omega^2-1)=0$ 求得 $\omega^2=\frac{1}{T_1T_2}$ 代入实部，使其小于－1

$$\frac{K(T_1+T_2)}{(1+\omega^2T_1{}^2)(1+\omega^2T_2{}^2)}<1$$

求得系统稳定 K 和T_1,T_2应保持下式关系如下：　$\frac{KT_1T_2}{(T_1+T_2)}<1$

五、解：(1)G(s)=$\frac{ke^{-10s}}{s(100s+1)}=\frac{0.01ke^{-10s}}{s(s+0.01)}=e^{-10s}$G1(s)

G1(s)=　$\frac{0.01k}{s(s+0.01)}=\frac{k}{s}-\frac{k}{(s+0.01)}$

G1(z)=　$\frac{kz}{z-1}-\frac{kz}{z-e^{-0.01TS}}=\frac{kz}{z-1}-\frac{kz}{z-0.9}$

若 G(z)=　Z^{-1}G1(z),则闭环脉冲传递函数为

$$\phi(Z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{0.1k}{(z-1)(z-0.9)+0.1k}$$

（2）将 z=$\frac{w+1}{w-1}$代入闭环脉冲传递函数的分母并使之为 0，得

$(\frac{w+1}{w-1})^2$-1.9（$\frac{w+1}{w-1}$）+0.9+0.1k=0

即 $0.1kw^2+(0.2-0.2k)w+(0.1k+3.8)=0$

则系统稳定的充分必要条件为 0.2－0. 2k>0,即 0<k<1

六、解：（1）山传递函数与可控规范型的关系可知$G(s)=\dfrac{1}{s^2+3s+2}$

（2）$[sI-A]^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$

$$x(t)=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}BU(s)\right]=L^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$=L^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{(s+2)}\\ \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{(s+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}-e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{-t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

（3）特征根为-1，-2，

$T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$，$T^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

$\hat{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\hat{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix},\ \hat{C}=CT=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$