第十七讲 线性变换的矩阵

一、线性变换与基

二、线性变换与矩阵

三、相似矩阵

HOME ENTER

一、 线性变换与基

1. **设** $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ **是线性空间V的一组基，** σ **为V的线性变换. 则对任意** $\xi\in V$**, 存在唯一的一组数** $x_1,x_2,\cdots,x_n\in P$**, 使** $\xi=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$

从而， $\sigma(\xi)=x_1\sigma(\varepsilon_1)+x_2\sigma(\varepsilon_2)+\cdots+x_n\sigma(\varepsilon_n)$.

由此知，$\sigma(\xi)$ 由 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 完全确定.

所以要求V中任一向量在 σ 下的象，**只需求出V的一组基在 σ 下的象即可.**

2. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是线性空间V的一组基，σ, τ 为V的线性变换，若 $\sigma(\varepsilon_i) = \tau(\varepsilon_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n.$

则 $\sigma = \tau.$

证： 对 $\forall \xi \in V$，$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$

$$\sigma(\xi) = x_1\sigma(\varepsilon_1) + x_2\sigma(\varepsilon_2) + \cdots + x_n\sigma(\varepsilon_n)$$

$$\tau(\xi) = x_1\tau(\varepsilon_1) + x_2\tau(\varepsilon_2) + \cdots + x_n\tau(\varepsilon_n)$$

由已知，即得 $\sigma(\xi) = \tau(\xi)$.　$\therefore\ \sigma = \tau.$

由此知，**一个线性变换完全由它在一组基上的作用所决定.**

3. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间V的一组基，对V中任意n个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，都存在线性变换 σ 使

$$\sigma(\varepsilon_i)=\alpha_i,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

证： $\forall\xi\in V$, 设 $\xi=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$

定义 $\sigma:V\to V$， $\sigma\left(\xi\right)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$,

易知 σ 为V的一个变换，下证它是线性的.

任取 β，$\gamma\in V$，设 $\beta=\sum_{i=1}^{n}b_i\varepsilon_i$，$\gamma=\sum_{i=1}^{n}c_i\varepsilon_i$

则 $\beta+\gamma=\sum_{i=1}^{n}(b_i+c_i)\varepsilon_i$, $\quad k\beta=\sum_{i=1}^{n}(kb_i)\varepsilon_i$

于是 $\sigma(\beta+\gamma)=\sum_{i=1}^{n}(b_i+c_i)\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i$

$$=\sigma(\beta)+\sigma(\gamma)$$

$$\sigma(k\beta)=\sum_{i=1}^{n}(kb_i)\alpha_i=k\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i=k\sigma(\beta)$$

$\therefore$ σ 为V的线性变换.

又 $\varepsilon_i=0\varepsilon_1+\cdots+0\varepsilon_{i-1}+\varepsilon_i+0\varepsilon_{i+1}+\cdots+0\varepsilon_n$

$\therefore$ $\sigma(\varepsilon_i)=\alpha_i$, $\quad i=1,2,\cdots,n$

由2与3即得

定理1　设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为线性空间V的一组基，对V中任意$n$个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，存在**唯一的**线性变换 σ，使

$$\sigma(\varepsilon_i)=\alpha_i,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

即$\left(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\right)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

二、 线性变换与矩阵

1. 线性变换的矩阵

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为数域P上线性空间V的一组基，$\sigma$

为V的线性变换. 基向量的象可以被基线性表出,设

$$\begin{cases} \sigma(\varepsilon_1)=\alpha_{11}\varepsilon_1+\alpha_{21}\varepsilon_2+\cdots+\alpha_{n1}\varepsilon_n \\ \sigma(\varepsilon_2)=\alpha_{12}\varepsilon_1+\alpha_{22}\varepsilon_2+\cdots+\alpha_{n2}\varepsilon_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma(\varepsilon_n)=\alpha_{1n}\varepsilon_1+\alpha_{2n}\varepsilon_2+\cdots+\alpha_{nn}\varepsilon_n \end{cases}$$

用矩阵表示即为

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\cdots,\sigma\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

矩阵A称为**线性变换**σ **在基** $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$**下的矩阵**.

注：① A的第*i*列是$\sigma(\varepsilon_i)$在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标，

它是唯一的．故σ在取定一组基下的矩阵是**唯一的**.

② **单位变换**在任意一组基下的矩阵皆为**单位矩阵**；

零变换在任意一组基下的矩阵皆为**零矩阵**；

数乘变换在任意一组基下的矩阵皆为**数量矩阵**；

例1. 设线性空间P^3的线性变换σ为

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

求σ在标准基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵.

解： Q $\sigma(\varepsilon_1) = \sigma(1,0,0) = (1,0,1)$

$$\sigma(\varepsilon_2) = \sigma(0,1,0) = (0,1,1)$$

$$\sigma(\varepsilon_3) = \sigma(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\therefore \quad \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例2. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m\,(m<n)$为n维线性空间V的子空间W的一组基，把它扩充为V的一组基：$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$.

并定义线性变换σ：
$$\begin{cases}\sigma\varepsilon_i=\varepsilon_i & i=1,2,\cdots,m\\ \sigma\varepsilon_i=0 & i=m+1,\cdots,n\end{cases}$$

则
$$\sigma\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\begin{array}{l}\left(\begin{array}{cccccc}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{array}\right)\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\ \ddots\\ 1\end{array}}\right\}m\text{行}$$

称这样的变换σ为**对子空间W的一个投影**.

易验证$\sigma^2=\sigma$.

2. 线性变换运算与矩阵运算

定理2 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为数域P上线性空间V的一组基，在这组基下，V的每一个线性变换都与 $P^{n\times n}$ 中的唯一一个矩阵对应，且具有以下性质：

① 线性变换的和对应于矩阵的和；

② 线性变换的乘积对应于矩阵的乘积；

③ 线性变换的数量乘积对应于矩阵的数量乘积；

④ 可逆线性变换与可逆矩阵对应，且逆变换对应于逆矩阵.

注： $L(V) \cong P^{n\times n}$ ； $\dim L(V) = n^2$.

事实上，任意取定V的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$后，

对任意 $\sigma \in L(V)$，定义 φ：

$$\varphi：L(V) \to P^{n\times n}, \qquad \varphi(\sigma) = A,$$

这里A为σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵.

则 φ 就是$L(V)$到 $P^{n\times n}$的一个**同构映射**.

（1）双射 （2）保持运算

3．线性变换矩阵与向量在线性变换下的象

定理3 设线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为A，

$\xi\in V$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，

$\sigma(\xi)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，

则有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

证： 由已知有

$$\sigma\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)A,$$

$$\xi=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\sigma(\xi)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

又

$$\sigma(\xi)=\left(\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\cdots,\sigma\varepsilon_n\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

由于$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性无关，所以 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$

4．同一线性变换在不同基下矩阵之间的关系

定理4 设线性空间V的线性变换 σ在两组基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n \qquad (\mathrm{I})$$

$$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n \qquad (\mathrm{II})$$

下的矩阵分别为A、B，且从基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡

矩阵矩阵是X，则

$$B = X^{-1}AX.$$

证：由已知，有

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A,$$

$$\sigma(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)B,$$

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X.$$

于是，$\sigma(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)AX=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)X^{-1}AX.$$

由此即得　$B=X^{-1}AX.$

三、相似矩阵

1. 定义

设A、B为数域P上的两个n级矩阵，若存在**可逆矩阵** $X \in P^{n\times n}$，使得

$$B = X^{-1}AX$$

则称矩阵**A相似于B**，记为 $A \sim B$.

2. 基本性质

（1）相似是一个**等价关系**，即满足如下三条性质：

① 反身性： $A \sim A.$

$$\left(\because \quad A = E^{-1}AE. \right)$$

② 对称性： $A \sim B \Rightarrow B \sim A.$

$$\left(\because \quad B = X^{-1}AX \Rightarrow A = Y^{-1}BY, Y = X^{-1}. \right)$$

③ 传递性： $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C.$

$$\left(\because \quad B = X^{-1}AX,\ C = Y^{-1}BY \right.$$

$$\left. \Rightarrow C = Y^{-1}BY = Y^{-1}(X^{-1}AX)Y = (XY)^{-1}A(XY). \right)$$

（2）

定理5 同一**线性变换在不同基下的矩阵是相似的**；反过来，如果两个矩阵相似，那么它们可以看作同一线性变换在两组基下所对应的矩阵.

证： 前一部分显然成立. 下证后一部分.

设 $A \sim B$, 且A是线性变换σ在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵.

$\because B=X^{-1}AX$，令 $\left(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)X$.

显然，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 也是一组基，且σ在这组基下的矩阵就是B.

（3）相似矩阵的运算性质

① 若 $B_1 = X^{-1}A_1X$，$B_2 = X^{-1}A_2X$，则

$$B_1 + B_2 = X^{-1}(A_1 + A_2)X,$$

$$B_1B_2 = X^{-1}(A_1A_2)X.$$

即， $A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2, A_1A_2 \sim B_1B_2.$

② 若 $B = X^{-1}AX$，$f(x) \in P[x]$，则

$$f(B) = X^{-1}f(A)X.$$

特别地， $B^m = X^{-1}A^mX.$