力矩作功 刚体定轴转动的动能定理

力的空间累积效应：

$\longrightarrow$ 力的功、动能、动能定理.

力矩的空间累积效应：

$\longrightarrow$ 力矩的功、转动动能、动能定理.

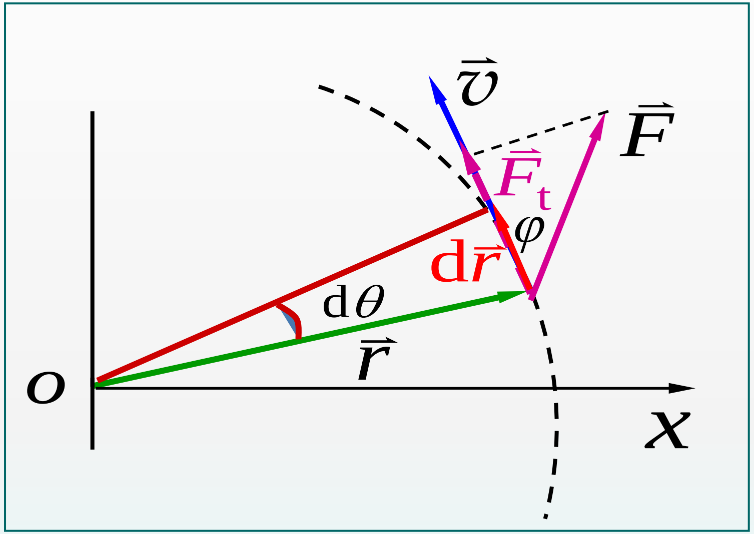
※ 力矩作功

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\varphi\left|dr\right|$$

$$= F_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s \quad = F_{\mathrm{t}}r\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}W = M\mathrm{d}\theta$$

力矩的功 $\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta}$



说明： 所谓力矩的功，**实质上还是力的功**，并无任何关于力矩的功的新的定义，**只是在刚体转动中，用力矩和角位移的积来表示功更为方便**而已。

※ 力矩的功率 $P = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega$

比较 $W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

当 $\vec{M}$ 与 $\vec{\omega}$ 同方向，W 和 P 为正

当 $\vec{M}$ 与 $\vec{\omega}$ 反方向，W 和 P 为负

※ 转动动能 $E_k = \sum_i \dfrac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$ 比较：$E_k = \dfrac{1}{2}mv^2$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_i \Delta m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

※ 刚体绕定轴转动的动能定理

$$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_1} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

$$\boxed{W=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2}$$

——刚体绕定轴转动的动能定理

比较：$\boxed{W=\int \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2}$

说明：

1、动能定理与质点动力学中讲的动能定理相同，只是动能的表示形式不同而已

$$W = E_{k2} - E_{k1}$$

2、对刚体，内力的功总和在任何过程中都为零。

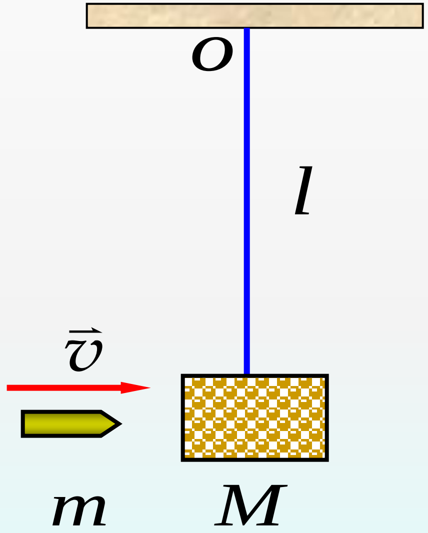
$$\sum W_{内} = 0$$

求沙箱升高的最大高度h

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

讨 论

细绳质量不计
子弹击入沙箱



以子弹和沙箱为系统

动量守恒 ?

角动量守恒 ?

机械能不守恒 ?

$$mv=(m+M)v'$$

$$mvl=(m+M)v'l$$

$$\frac{1}{2}(m+M)v'^{2}=(m+M)gh$$

守恒定律的条件

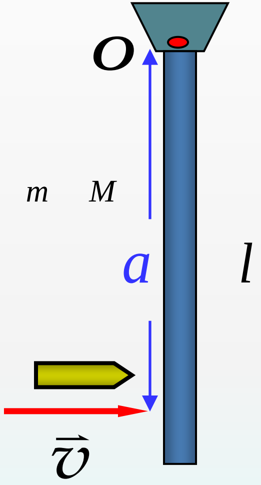
过程问题

求杆的最大摆动角度φ

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}}$$

以子弹和杆为系统

子弹击入杆



动量不守恒 ？

角动量守恒 ？

机械能不守恒 ？

$$amv=(ma^2+\frac{1}{3}Ml^2)\omega$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ml^2+ma^2)\omega^2=$$

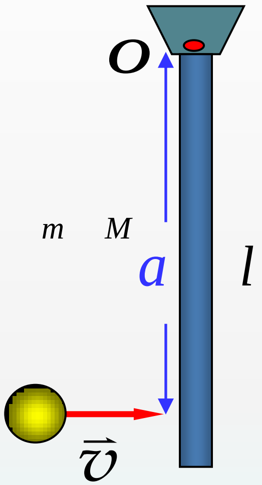
$$mga(1-\cos\phi)+Mg\frac{l}{2}(1-\cos\phi)$$

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}J\omega^2}$$

求杆的最大摆动角度φ

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}}$$

小球与杆弹性碰撞



以弹性球和杆为系统

动量不守恒 ?

角动量守恒 ?

机械能守恒 ?

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}J\omega^2}$$

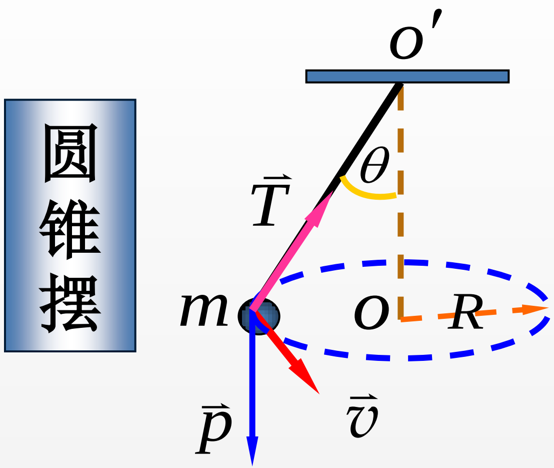
$$amv=amv'+(\frac{1}{3}Ml^2)\omega$$

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ml^2)\omega^2$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ml^2)\omega^2=Mg\frac{l}{2}(1-\cos\phi)$$

守恒定律的条件

过程问题



圆锥摆系统

动量不守恒 ？

角动量守恒 ？

机械能守恒 ？

$$\boxed{\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}}$$

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}}$$

对O'点 $\sum\vec{M}\neq 0$，$\vec{L}\neq$恒矢量

对O点 $\sum\vec{M}=0$，$\vec{L}=$恒矢量

$$L=Rmv$$

$$\sum W_{外}=0 \qquad E=\frac{1}{2}mv^2=C$$

守恒定律的条件

M, L是对哪一点?

例题　留声机的转盘绕通过盘心垂直盘面的轴以角速率 ω 作匀速转动。放上唱片后，唱片将在摩擦力作用下随转盘一起转动。设唱片的半径为 R，质量为 m，它与转盘间的摩擦系数为 μ，求：(1) 唱片与转盘间的摩擦力矩；(2) 唱片达到角速度 ω 时需要多长时间；(3) 在这段时间内，转盘的驱动力矩做了多少功？

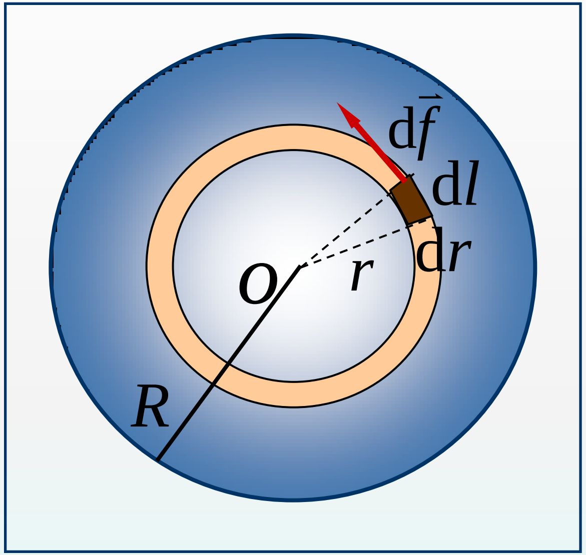
用微积分思想和方法

解（1）如图取面积元$ds = dr dl$，该面元所受的摩擦力为

$$df = \frac{\mu mg}{\pi R^2} dr dl$$

此力对点O的力矩为

$$dM' = r df = \frac{\mu mg}{\pi R^2} r dr dl$$

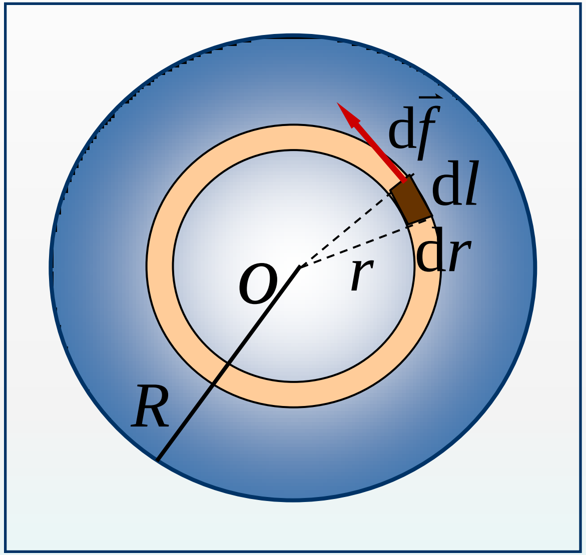


用微积分思想和方法

于是，在宽为dr的圆环上，唱片所受的摩擦力矩为

$$\mathrm{d}M=\frac{\mu mg}{\pi R^2}r\mathrm{d}r(2\pi r)$$

$$=\frac{2\mu mg}{R^2}r^2\mathrm{d}r$$



唱片与转盘间总的摩擦力矩为：

$$M=\frac{2\mu mg}{R^2}\int_0^R r^2\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\mu Rmg$$

（2） 由转动定律求 α，（唱片 $J = m R^2/2$ ）

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{4\mu g}{3R}$$ （作匀加速转动）

由 $\omega = \omega_0 + \alpha t$ 可求得：$$t = \frac{3\omega R}{4\mu g}$$

（3） 由 $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$ 可得在

0 到 t 的时间内，转过的角度为：$$\theta = \frac{3\omega^2 R}{8\mu g}$$

驱动力矩做的功为：

$$W = \int M d\theta = M\theta = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2$$

END