第二十讲 可对角化的条件

一、可对角化的概念

二、几个引理

三、可对角化的条件

四、对角化的一般方法

HOME

ENTER

一、可对角化的概念

定义1：设$\mathscr{A}$是n 维线性空间V的一个线性变换，如果存在V的一组基，使$\mathscr{A}$在这组基下的矩阵为对角矩阵，则称线性变换$\mathscr{A}$可对角化.

定义2：矩阵A是数域 P上的一个 n 级方阵. 如果存在一个P 上的n 级可逆矩阵X ，使$X^{-1}AX$ 为对角矩阵，则称矩阵A可对角化.

二、几个引理

1. 设$\mathscr{A} \in L(V)$, λ是 $\mathscr{A}$的特征值, 则

$$\dim V_\lambda \le \lambda_0 \text{ 的代数重数}$$

即几何重数不超过代数重数. 证明

2. (Th. 8) 设 $\mathscr{A}$为n维线性空间V的一个线性变换,

如果$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_k$ 分别是$\mathscr{A}$ 的属于互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_k$ 的特征向量，则$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_k$ 线性无关.

证明

3.（Th. 9） 设$\mathscr{A}$为线性空间V的一个线性变换，

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_k$是$\mathscr{A}$的不同特征值，而 $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots \xi_{ir_i}$ 是属于特征值λ_i的线性无关的特征向量， $i = 1, 2, \cdots, k,$

则向量 $\xi_{11}, \cdots, \xi_{1r_1}, \cdots, \xi_{k1}, \cdots, \xi_{kr_k}$ 线性无关.

证明.

三、可对角化的条件

1. (Th. 7) 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维线性空间V的一个线性变换，

则 $\mathscr{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

证明

2. (Cor. 1) 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维线性空间V的一个线性变换，

若 $\mathscr{A}$ 在域 P 中有 n 个不同的特征值. 则 $\mathscr{A}$ 可对角化.

证明

3.（Cor. 2） 在复数域C上的线性空间中，

如果线性变换$\mathscr{A}$的特征多项式没有重根，则$\mathscr{A}$可对角化. 证明.

4. $\mathscr{A} \in L(V)$, 可对角化$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{t} \dim V_{\lambda_i} = n.$

(n=dimV,而 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$是$\mathscr{A}$的全部特征值)

5. A$\in L(V)$ 可对角化

$\Leftrightarrow \dim V_{\lambda_i} = \lambda_i$的重shu

6. 设$\mathscr{A}$为n维线性空间V的一个线性变换，

若$\mathscr{A}$在某组基下的矩阵为对角矩阵

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

则 1）$\mathscr{A}$的特征多项式就是

$$f_{\mathscr{A}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n).$$

2）对角矩阵D主对角线上元素除排列次序外是唯一确定的,它们就是$\mathscr{A}$的全部特征根(重根按重数计算).

三、对角化的一般方法

设 $\mathscr{A}$ 为维线性空间V的一个线性变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为V的一组基，$\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为A.

步骤：

1° 求出矩阵A的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$.

2° 对每一个特征值 λ_i ，求出齐次线性方程组

$$\left(\lambda_i E - A\right)X = 0, \qquad i = 1.2.\cdots k.$$

的一个基础解系（此即 $\mathscr{A}$ 的属于 λ_i 的全部线性无关的特征向量在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标）.

3° 若全部基础解系所含向量个数之和等于n，则

$\mathscr{A}$ 有n个线性无关的特征向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，从而 $\mathscr{A}$

（或矩阵A）可对角化．以这些解向量为列，作一个

n阶方阵T，则T可逆，$T^{-1}AT$ 是对角矩阵．而且

T就是基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵.

例1. 设复数域上线性空间V的线性变换$\mathscr{A}$在某组基

$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

问$\mathscr{A}$是否可对角化．在可对角化的情况下，写出

基变换的过渡矩阵．

解：A的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$$

得A的特征值是1、1、－1.

解齐次线性方程组 $(1 \cdot E - A)X = 0$，得 $x_1 = x_3$

故其基础解系为：(1,0,1),(0,1,0)

所以， $\eta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$， $\eta_2 = \varepsilon_2$

是$\mathscr{A}$ 的属于特征值1的两个线性无关的特征向量.

再解齐次线性方程组 $(-1\cdot E-A)X=0$, 得 $\begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=0 \end{cases}$

故其基础解系为：$(1,0,-1)$

所以， $\eta_3=\varepsilon_1-\varepsilon_3$

是$\mathscr{A}$的属于特征值－1的线性无关的特征向量.

η_1,η_2,η_3 线性无关，故$\mathscr{A}$可对角化，且

$\mathscr{A}$在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\left(\eta_1,\eta_2,\eta_3\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

即基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

例2. 问A是否可对角化？若可，求可逆矩阵T，使

$T^{-1}AT$ 为对角矩阵. 这里 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

解: A的特征多项式为

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 1 \\ 2 & \lambda+2 & -2 \\ -3 & -6 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-12\lambda+16=\left(\lambda-2\right)^2\left(\lambda+4\right)$$

得A的特征值是2、2、−4 .

对于特征值2，求出齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的一个基础解系：（－2、1、0），（1、0、1）

对于特征值－4，求出齐次方程组

$$\begin{pmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的一个基础解系： $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1)$

所以A可对角化.

令 $$T=\begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

例3： 在 $P[x]_n (n>1)$ 中，求微分变换$\mathscr{D}$的特征多项式. 并证明：$\mathscr{D}$在任何一组基下的矩阵都不可能是对角矩阵（即$\mathscr{D}$不可对角化）.

解： 在 $P[x]_n$中取一组基: $1,\ x,\ \dfrac{x^2}{2!},\ \cdots,\ \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$

则$\mathscr{D}$在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\left|\lambda E - A\right| = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^n$$

$\therefore$ $\mathscr{D}$的特征值为0（n重）.

又由于对应特征值0的齐次线性方程组 $-AX=0$

的系数矩阵的秩为n－1，从而方程组的基础解系

只含有一个向量，它小于$P[x]_n$的维数n（＞1）.

故$\mathscr{D}$不可对角化 .

Proof:

设 $\dim V_{\lambda_0} = m$, 令 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为 V_{λ_0} 的基,

$$\mathscr{A}(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i$$

扩充基: $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n$ 则

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_0 & \\ & 0 & & * \end{pmatrix}$$

故

$$f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m g(\lambda), \quad \therefore m \le \lambda_0 \text{ 的重数.}$$

返回

定理7 设$\mathscr{A}$为n 维线性空间V 的一个线性变换，

则$\mathscr{A}$可对角化 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$有 n个线性无关的特征向量.

证：设$\mathscr{A}$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$下的矩阵为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

则有 $\mathscr{A}\varepsilon_i=\lambda_i\varepsilon_i$，$i=1,2,\cdots n$

$\therefore \varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$就是$\mathscr{A}$的$n$个线性无关的特征向量.

反之，若$\mathscr{A}$有n个线性无关的特征向量$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，那么就取$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$为基，则在这组基下$\mathscr{A}$的矩阵是对角矩阵.

返回

定理8 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维线性空间V的一个线性变换,

如果 $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_k$ 分别是 $\mathscr{A}$ 的属于互不相同的特征值

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_k$ 的特征向量，则 $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_k$ 线性无关.

证：**对 k 作数学归纳法.**

当 $k=1$ 时, $\because \xi_1 \neq 0$, $\therefore \xi_1$ 线性无关. 命题成立.

假设对于$k-1$来说，结论成立．现设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_k$ 为

$\mathscr{A}$ 的互不相同的特征值，ξ_i 是属于λ_i 的特征向量，

即 $\mathscr{A}\xi_i=\lambda_i\xi_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$

设 $a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_k\xi_k=0,\quad a_i\in P.$ ①

以 λ_k 乘①式的两端，得

$$a_1\lambda_k\xi_1+a_2\lambda_k\xi_2+\cdots a_k\lambda_k\xi_k=0. \qquad ②$$

又对①式两端施行线性变换$\mathscr{A}$，得

$$a_1\lambda_1\xi_1+a_2\lambda_2\xi_2+\cdots a_k\lambda_k\xi_k=0 \qquad ③$$

③式减②式得

$$a_1(\lambda_1-\lambda_k)\xi_1+a_2(\lambda_2-\lambda_k)\xi_2+\cdots+a_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\xi_{k-1}=0$$

由归纳假设，$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{k-1}$ 线性无关，所以

$$a_i(\lambda_i-\lambda_k)=0,\ \ i=1,2,\cdots,k-1$$

但 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 互不相同，所以 $a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=0$

将之代入①，得 $a_k\xi_k=0.$

Q $\xi_k\neq 0,\qquad \therefore\ a_k=0$

故 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 线性无关.

返回

证明：首先，$\mathscr{A}$ 的属于同一特征值 λ_i 的特征向量的非零线性组合仍是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_i 的一个特征向量.

设 $a_{11}\xi_{11}+\cdots+a_{1r_1}\xi_{1r_1}+\cdots+a_{k1}\xi_{k1}+\cdots+a_{kr_k}\xi_{kr_k}=0$, ④

$a_{11},\cdots,a_{1r_1},\cdots,a_{k1},\cdots,a_{kr_k}\in P$

令 $\eta_i=a_{i1}\xi_{i1}+\cdots+a_{ir_i}\xi_{ir_i}$, $i=1,2,\cdots,k$

由④有，$\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_k=0$

若有某个 $\eta_i\neq 0$, 则 η_i是$\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_i 的特征向量． 而$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_k$ 是互不相同的，由定理8，必有所有的 $\eta_i=0$, $i=1,2,\cdots,k$

即 $a_{i1}\xi_{i1}+\cdots+a_{ir_i}\xi_{ir_i}=0$

而 $\xi_{i1},\cdots,\xi_{ir_i}$ 线性无关，所以有

$$a_{i1}=\cdots=a_{ir_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,k$$

故 $\xi_{11},\cdots,\xi_{1r_1},\cdots,\xi_{k1},\cdots,\xi_{kr_k}$ 线性无关.

返回