习题测试（二）答案

一、 选择题

1．已知$X=\{a,b,c,d\}$，下列集族中，（ A ）是X上的拓扑．

A $T=\{X,\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\}\}$；　B $T=\{X,\varnothing,,\{a,b,c\},\{a,b,d\}\}$；

C $T=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,c,d\}\}$；　D $T=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\}\}$．

2．已知$X=\{a,b,c,d\}$，拓扑$\mathcal{T}=\{X,\varnothing,\{a\}\}$，则$\overline{\{c\}}=$（ D ）．

A $\varnothing$；　B X；　C $\{a,c\}$；　D $\{b,c,d\}$．

3．已知X是一个离散拓扑空间，A是X的子集，则下列结论中正确的是（A ）．

A $d(A)=\varnothing$；　B $d(A)=X-A$；

C $d(A)=A$；　D $d(A)=X$．

4．平庸空间的任一非空真子集为(D)．

A 开集；　B 闭集；　C 即开又闭；　D 非开非闭 ．

5．设X是拓扑空间，下面不正确的命题是（A ）．

A 若X是正规空间，则X是T_1空间；

B 若X是T_0且正则，则X是T_1空间；

C 若X是T_3空间，则X是正则T_1空间；

D 若X是T_4空间，则X是完全正则空间．

二、判断题

1．设X=$\{a,b,c\}$，$\mathcal{T}$=$\{X,\emptyset,\{a\}\}$，则$\mathcal{T}$是X上的拓扑（ T ）。

2.一个集合是开集当且仅当这个集合是它当中每一点的一个邻域(T)。

3．一个集合的闭包是包含这个集合的最小的闭集(T)。

4．同一个集合上的两个拓扑空间之间的映射是恒同映射(F)。

5．从离散空间到任意拓扑空间的映射都是连续映射(T)。

6．开集个数最多的拓扑空间是平庸空间(F)。

7．离散空间中的所有开集都是闭集(T)。

8．可分性关于闭子空间遗传（ T ）。

9．拓扑空间中任何一点的两个邻域的交仍然是该点的一个领域(T)。

10．包含可数多个点的离散空间是 A_2 空间(T)。

11．实数空间是紧致空间(F)。

12．T_2空间下的闭子空间是紧的(T)。

三．证明题

1. 设 X 拓扑空间，Y 是 X 的子集，问：如何在 Y 上定义一个 Y 的子集族$\mathcal{T}_Y$使得（$Y, \mathcal{T}_Y$）为拓扑空间？写出$\mathcal{T}_Y$并证明它是 Y 的拓扑。

证明：作集族$\mathcal{T}_Y=\{A\cap Y|A\in\mathcal{T}\}$,下证$\mathcal{T}_Y$为 Y 的拓扑。

（1）由于 $X\in\mathcal{T}$，$Y=X\cap Y$，所以 $Y\in\mathcal{T}_Y$；由于$\phi\in\mathcal{T}$，$\phi=\phi\cap Y$，所以$\phi\in\mathcal{T}_Y$；

（2）如果 A，$B\in\mathcal{T}_Y$，则存在 A^*，$B^*\in\mathcal{T}$，使得 $A=A^*\cap Y$，$B=B^*\cap Y$，

于是 $A\cap B=(A^*\cap Y)\cap(B^*\cap Y)=(A^*\cap B^*)\cap Y$，因 $A^*\cap B^*\in\mathcal{T}$，所以 $A\cap B\in\mathcal{T}_Y$;

（3）设$\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}$，则$\forall A\in\mathcal{T}_1$，$\exists A^*\in\mathcal{T}$，使得 $A=A^*\cap Y$，所以$\cup_{A\in\mathcal{T}1}A=\cup_{A\in\mathcal{T}1}(A^*\cap Y)$

$=(\cup_{A\in\mathcal{T}1}A^*)\cap Y$，由于$\cup_{A\in\mathcal{T}1}A^*\in\mathcal{T}$，所以$\cup_{A\in\mathcal{T}1}A\in\mathcal{T}_1$

综上可知，$\mathcal{T}_Y$是 Y 的一个拓扑。

2．设 X 是一个拓扑空间，A，B 是 X 的子集，且 $A\subset B$，证明 $d(A)\subset d(B)$.

证明：对于任意 $x\in d(A)$，设 U 是 x 的任何一个邻域，则有 $U\cap(A-\{x\})\neq\phi$，

由于 $A\subset B$，从而 $U\cap(B-\{x\})\supset U\cap(A-\{x\})\neq\phi$，因此 $x\in d(B)$，

故 $d(A)\subset d(B)$.

3．每个完全正则空间都是正则空间.

证明：设 X 是完全正则的，$x\in X, B$ 是 X 的一闭集，且 $x\notin B$，因 X 是完全正则的，则存在连续映射 $f: X\to[0,1]$ 使得 $f(x)=0, f(B)\subset\{1\}$，

令 $U=f^{-1}([0,\frac{1}{2})), V=f^{-1}([\frac{1}{2},1))$，

因 f 是连续，$[0,\frac{1}{2}),[\frac{1}{2},1)$ 是子空间[0,1]的开集，所以 U，V 是 X 中的开集，且有

$x \in U, y \in V, U \cap V = \varnothing$，所以 X 是正则空间。

4．证明：若 X 是 T_3 空间，则 X 是 T_2 空间.

证明：设 X 是 T_3 空间，则 X 是正则的 T_1 空间。

$\forall x, y \in X, x \neq y$，则有 $x \notin \{y\}$，又因 X 是 T_1 空间，则 $\{y\}$ 是 X 的闭集，由 X 是正则的，

$\exists U \in N(x), V \in N(\{y\}), U \cap V = \varnothing$，所以 X 是 T_2 空间。

5．证明：从紧致空间到 Hausdorff 空间的任何连续双射是同胚。

证明：设 $f: X \to Y$ 为连续双射，其中 X 是紧致空间，Y 是 T_2 空间，下面证明证明 f^{-1} 连续，只需证明 f 为闭映射。

设 C 是 X 的任意闭集，下证 f(C) 是 Y 中的闭集。由 X 是紧致空间及紧致性对闭子空间的可遗传性知 C 是 X 的紧致子集。再由 f 是连续映射，从而 f(C) 是 Y 中的紧致子集。而 Y 是 T_2 空间，所以 f(C) 是 Y 中的闭集。