第十六讲 线性变换的性质与性质

一、线性变换的定义

二、线性变换的简单性质

三、线性变换的运算

四、矩阵秩的求法

HOME

ENTER

引入

在讨论线性空间的**同构**时，我们考虑的是一种保持向量的加法和数量乘法的一一对应．我们常称两线性空间之间保持加法和数量乘法的映射为**线性映射**．本节要讨论的是在线性空间**V上的线性映射**

——**线性变换.**

一、 线性变换的定义

设V为数域P上的线性空间，若变换 $\sigma: V \to V$

满足：$\forall \alpha, \beta \in V$，$k \in P$

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$$

$$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$$

则称 σ 为线性空间**V上的线性变换.**

注： 几个特殊线性变换

单位变换（恒等变换）： $E: V \to V$，α a α，$\forall \alpha \in V$

零变换： $0: V \to V$，α a 0，$\forall \alpha \in V$

由数k决定的**数乘变换：** $K: V \to V$，α a $k\alpha$，$\forall \alpha \in V$

事实上，$\forall \alpha, \beta \in V$，$\forall m \in P$，

$$K(\alpha+\beta) = k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta = K(\alpha) + K(\beta),$$

$$K(m\alpha) = km\alpha = mk\alpha = mK(\alpha).$$

例1. $V = R^2$(实数域上二维向量空间)，把V中每一向量绕坐标原点旋转 θ 角，就是一个线性变换，用T_θ 表示，即

$$T_\theta : R^2 \to R^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

这里，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

易验证：$\forall \alpha, \beta \in R^2, \forall k \in R$

$$T_\theta(\alpha+\beta) = T_\theta(\alpha) + T_\theta(\beta)$$

$$T_\theta(k\alpha) = kT_\theta(\alpha)$$

例2. $V=P[x]$或$P[x]_n$上的求微商是一个 线性变换，用D表示，即

$$D:V\to V,\ D(f(x))=f'(x),\ \forall f(x)\in V$$

例3. 闭区间 $[a,b]$上的全体连续函数构成的线性空间$C(a,b)$上的变换

$$J:C(a,b)\to C(a,b),\ J\left(f(x)\right)=\int_a^x f(t)dt$$

是一个线性变换.

二、 线性变换的简单性质

1．σ为V的线性变换，则

$$\sigma(0)=0,\ \ \sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha).$$

2．线性变换保持线性组合及关系式不变，即

若 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$,

则 $\sigma(\beta)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)$.

3．线性变换把线性相关的向量组变成线性相关的向量组. 即

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，则 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$ 也线性相关.

事实上，若有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

则由2即有，$k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)=0$

注意：3的逆不成立，即 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$ 线性相关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 未必线性相关.

事实上，线性变换可能把线性无关的向量组变成线性相关的向量组. 如零变换.

练习： 下列变换中，哪些是线性变换？

√ 1. 在 R^3中，$\sigma\left(x_1,x_2,x_3\right)=(2x_1,x_2,x_2-x_3)$.

2. 在$P[x]_n$中，$\sigma\left(f(x)\right)=f^2(x)$.

3. 在线性空间V中，$\sigma\left(\xi\right)=\xi+\alpha$，$\alpha\in V$ 非零固定.

√ 4. 在 $P^{n\times n}$中，$\sigma\left(X\right)=AX$，$A\in P^{n\times n}$ 固定.

5. 复数域C看成是自身上的线性空间，$\sigma(x)=\overline{x}$.

√ 6. C看成是实数域R上的线性空间，$\sigma(x)=\overline{x}$.

三、线性变换的运算

1、 线性变换的乘积

2、 线性变换的和

3、 线性变换的数量乘法

4、 线性变换的逆

5、 线性变换的多项式

1、 线性变换的乘积

1. 定义

设 σ,τ 为线性空间V的两个线性变换，定义它们

的**乘积** $\sigma\tau$ 为：$(\sigma\tau)(\alpha)=\sigma\left(\tau(\alpha)\right),\ \forall\alpha\in V$

则 $\sigma\tau$ 也是V的线性变换.

事实上，$(\sigma\tau)(\alpha+\beta)=\sigma(\tau(\alpha+\beta))=\sigma(\tau(\alpha)+\tau(\beta))$

$$=\sigma(\tau(\alpha))+\sigma(\tau(\beta))=(\sigma\tau)(\alpha)+(\sigma\tau)(\beta),$$

$$(\sigma\tau)(k\alpha)=\sigma(\tau(k\alpha))=\sigma(k\tau(\alpha))=k\sigma(\tau(\alpha))=k(\sigma\tau)(\alpha)$$

2．基本性质

（1）满足结合律：$(\sigma\tau)\delta = \sigma(\tau\delta)$

（2）$E\sigma = \sigma E = \sigma$，E为单位变换

（3）交换律一般不成立，即一般地，

$$\sigma\tau \neq \tau\sigma.$$

例1. 线性空间 $R[x]$中，线性变换

$$D\big(f(x)\big)=f'(x)$$

$$J\big(f(x)\big)=\int_0^x f(t)dt$$

$$(DJ)\big(f(x)\big)=D\left(\int_0^x f(t)dt\right)=f(x),$$ 即 $DJ=E$.

而，

$$(JD)\big(f(x)\big)=J\big(f'(x)\big)=\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)$$

$\therefore\ DJ\neq JD.$

例2. 设A、B $\in P^{n\times n}$为两个给定的矩阵，定义变换

$$\left.\begin{aligned}\sigma(X)&=AX,\\ \tau(X)&=XB,\end{aligned}\right.\qquad \forall X\in P^{n\times n}$$

则 σ,τ 皆为 $P^{n\times n}$ 的线性变换，且对 $\forall X\in P^{n\times n}$, 有

$$(\sigma\tau)(X)=\sigma(\tau(X))=\sigma(XB)=A(XB)=AXB,$$

$$(\tau\sigma)(X)=\tau(\sigma(X))=\tau(AX)=(AX)B=AXB.$$

$$\therefore\quad \sigma\tau=\tau\sigma.$$

2、 线性变换的和

1. 定义

设 σ, τ 为线性空间V的两个线性变换，定义它们的**和** $\sigma+\tau$为：$(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha), \forall \alpha \in V$

则$\sigma+\tau$也是V的线性变换.

事实上，$(\sigma+\tau)(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha+\beta)+\tau(\alpha+\beta)$

$=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)+\tau(\alpha)+\tau(\beta)=(\sigma+\tau)(\alpha)+(\sigma+\tau)(\beta),$

$(\sigma+\tau)(k\alpha)=\sigma(k\alpha)+\tau(k\alpha)=k\sigma(\alpha)+k\tau(\alpha)$

$=k(\sigma(\alpha)+\tau(\alpha))=k(\sigma+\tau)(\alpha).$

2．基本性质

（1）满足交换律：$\sigma+\tau=\tau+\sigma$

（2）满足结合律：$(\sigma+\tau)+\delta=\sigma+(\tau+\delta)$

（3）$0+\sigma=\sigma+0=\sigma$，0为零变换.

（4）乘法对加法满足左、右分配律：

$$\sigma(\tau+\delta)=\sigma\tau+\sigma\delta$$

$$(\tau+\delta)\sigma=\tau\sigma+\delta\sigma$$

3．负变换

设 σ 为线性空间V的线性变换，定义变换 $-\sigma$ 为：

$$(-\sigma)(\alpha)=-\sigma(\alpha),\qquad \forall \alpha \in V$$

则 $-\sigma$ 也为V的线性变换，称之为 σ 的**负变换**.

注： $(-\sigma)+\sigma=0$

3、 线性变换的数量乘法

1. 定义

设 σ 为线性空间V的线性变换，$k \in P$，定义 k 与 σ 的**数量乘积** $k\sigma$ 为:

$$(k\sigma)(\alpha) = k\sigma(\alpha), \qquad \forall \alpha \in V$$

则 $k\sigma$ 也是V的线性变换.

2．基本性质

(1) $(kl)\sigma = k(l\sigma)$

(2) $(k+l)\sigma = k\sigma + l\sigma$

(3) $k(\sigma+\tau) = k\sigma + k\tau$

(4) $1\sigma = \sigma$

注： 线性空间V上的全体线性变换所成集合对于线性变换的加法与数量乘法构成数域P上的一个线性空间，记作 $L(V)$.

4、 线性变换的逆

1. 定义

设 σ 为线性空间V的线性变换，若有V的变换 τ 使

$$\sigma\tau = \tau\sigma = E$$

则称 σ 为可逆变换，称 τ 为 σ 的逆变换，记作 σ^{-1}.

2. 基本性质

(1) 可逆变换 σ 的逆变换 σ^{-1} 也是V的线性变换.

证： 对 $\forall \alpha, \beta \in V$，$\forall k \in P$,

$$\sigma^{-1}(\alpha+\beta)=\sigma^{-1}\left(\left(\sigma\sigma^{-1}\right)(\alpha)+\left(\sigma\sigma^{-1}\right)(\beta)\right)$$

$$=\sigma^{-1}\left(\sigma\left(\sigma^{-1}(\alpha)+\sigma^{-1}(\beta)\right)\right)$$

$$=\left(\sigma^{-1}\sigma\right)\left(\sigma^{-1}(\alpha)+\sigma^{-1}(\beta)\right)$$

$$=\sigma^{-1}(\alpha)+\sigma^{-1}(\beta)$$

$$\sigma^{-1}(k\alpha)=\sigma^{-1}\left(k\left(\sigma\sigma^{-1}\right)(\alpha)\right)=\sigma^{-1}\left(k\left(\sigma\left(\sigma^{-1}(\alpha)\right)\right)\right)$$

$$=\sigma^{-1}\left(\sigma\left(k\left(\sigma^{-1}(\alpha)\right)\right)\right)=k\left(\sigma^{-1}(\alpha)\right)=k\sigma^{-1}(\alpha)$$

$\therefore$ σ^{-1} 是V的线性变换.

(2) 线性变换 σ 可逆 $\Leftrightarrow$ 线性变换 σ 是一一对应.

5、线性变换的多项式

1. 线性变换的幂

设 σ 为线性空间V的线性变换，n为自然数，定义

$$\sigma^n = \underbrace{\sigma\sigma\cdots\sigma}_{n},$$

称之为 σ 的n次幂.

当 $n=0$ 时，规定 $\sigma^0 = E$（单位变换）.

注:

① 易证 $\sigma^{m+n}=\sigma^m\sigma^n,\ \left(\sigma^m\right)^n=\sigma^{mn},\qquad m,n\geq 0$

② 当 σ为可逆变换时，定义σ 的负整数幂为

$$\sigma^{-n}=\left(\sigma^{-1}\right)^n$$

③ 一般地，$\left(\sigma\tau\right)^n\neq\sigma^n\tau^n$.

2．线性变换的多项式

设 $f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0\in P[x]$,

σ 为V的一个线性变换，则

$$f(\sigma)=a_m\sigma^m+\cdots+a_1\sigma+a_0 E$$

也是V的一个线性变换，称 $f(\sigma)$为线性变换 σ 的**多项式**.

注： ① 在 $P[x]$ 中，若

$$h(x)=f(x)+g(x),\quad p(x)=f(x)g(x)$$

则有，$h(\sigma)=f(\sigma)+g(\sigma),$

$$p(\sigma)=f(\sigma)g(\sigma)$$

② 对 $\forall f(x),g(x)\in P[x],$ 有

$$f(\sigma)+g(\sigma)=g(\sigma)+f(\sigma)$$

$$f(\sigma)g(\sigma)=g(\sigma)f(\sigma)$$

即线性变换的多项式满足加法和乘法交换律.

例1 $V=P[x]_n$上的求微商是一个 线性变换，

用D表示，即

$$D:V\to V,\quad D(f(x))=f'(x),\ \forall f(x)\in V$$

$(1)\ D^n=0$