第二十七讲 行列式的展开

一、引言

二、余子式与代数余子式的定义

三、行列式按行(列)展开

一、引言

先回忆一下三阶行列式的计算：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

可以观察到如下事实：

(1) $\boldsymbol{a_{1j}}$后面的行列式是由三阶行列式划去该元素所在的行和列后剩下的二阶行列式；

(2) $\boldsymbol{a_{1j}}$前面的符号由$\boldsymbol{(-1)^{1+j}}$决定.

二、余子式与代数余子式的定义

定义1 在n阶行列式$|a_{ij}|$中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}；记$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，

A_{ij}叫做元素a_{ij}的代数余子式.

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}.$$

行列式的每个元素分别对应着一个余子式和一个代数余子式.

仿照二、三阶行列式的定义，设已经有了n-1阶行列式的定义，则定义n阶行列式如下：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1j}A_{1j}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}$$

引理1 一个n阶行列式D，如果其中第i行所有元素除a_{ij}外都为零，则$D = a_{ij} A_{ij}$.

证明分析

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & & 0 & a_{ij} & 0 & & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= (-1)^{n-i} \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \\
0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{(n-i)+(n-j)} \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij}
\end{vmatrix}
$$

由于 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij} \end{vmatrix}$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n)} b_{1 j_1} b_{2 j_2} \cdots b_{n-1, j_{n-1}} b_{n j_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_{n-1})} b_{1 j_1} b_{2 j_2} \cdots b_{n-1, j_{n-1}} \cdot a_{ij}$$

$$= a_{ij} M_{ij}$$

所以

$$D=(-1)^{2n-i-j}a_{ij}M_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\cdot a_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

定理 设$D=|a_{ij}|_{n\times n}$，A_{ij}表示元素a_{ij}的代数余子式，则下列公式成立：

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases}D, & k=i\\ 0, & k\neq i\end{cases}$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases}D, & l=j\\ 0, & l\neq j\end{cases}$$

即

$$\sum_{s=1}^{n}a_{ks}A_{is}=\begin{cases}D, & k=i\\ 0, & k\neq i\end{cases},\qquad \sum_{s=1}^{n}a_{sl}A_{sj}=\begin{cases}D, & l=j\\ 0, & l\neq j\end{cases}$$

证明 行列式 D 可以表示为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由行列式性质 3 得

$$= \begin{vmatrix} \\ a_{i1}\ 0\cdots 0 \\ \\ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \\ 0\ a_{i2}\ 0\cdots 0 \\ \\ \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \\ 0\cdots 0\ a_{in} \\ \\ \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$ （引理）

对于$k \neq i$的情形，这是因为

$$x_1 A_{k1} + x_2 A_{k2} + \cdots + x_n A_{kn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

令 $x_1 = a_{k1}$，$x_2 = a_{k2}, \cdots$，$x_n = a_{kn}$，则有

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (k) \\ \\ \\ \end{array}=0\,.$$

同理可以证明列的情形.

例1 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

（答案：32）

例2 证明**Vandermonde**行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^{\ 2} & a_2^{\ 2} & \cdots & a_{n-1}^{\ 2} & a_n^{\ 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{\ n-1} & a_2^{\ n-1} & \cdots & a_{n-1}^{\ n-1} & a_n^{\ n-1} \end{vmatrix}=\sum_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j).$$

证明 对 n 用数学归纳法.

(1) 当$n=2$时, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=a_2-a_1.$

(2) 假设对于 n-1 阶Vandermonde行列式结论成立，下证 n 阶的情形也成立.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^{\ 2} - a_1 a_2 & \cdots & \cdots & a_n^{\ 2} - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_2^{\ n-1} - a_1 a_2^{\ n-2} & \cdots & \cdots & a_n^{\ n-1} - a_1 a_n^{\ n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \prod_{2 \le j < i \le n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j)$$

实例：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix} = (3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4) = 12.$$

例3 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2$.

证明

对 D_1 作运算 $r_i + kr_j$，把 D_1 化为下三角形行列式

设为 $$\boldsymbol{D_1} = \begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{kk};$$

对 D_2 作运算 $c_i + kc_j$，把 D_2 化为下三角形行列式

设为 $$\boldsymbol{D_2} = \begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} = q_{11} \cdots q_{nn}.$$

对 D 的前 k 行作运算 $r_i + kr_j$，再对后 n 列作运算 $c_i + kc_j$，把 D 化为下三角形行列式

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} p_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{matrix}} & \mathbf{0} \\ \begin{matrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} q_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{matrix}} \end{vmatrix},$$

故 $\boldsymbol{D} = p_{11} \cdots p_{kk} \cdot q_{11} \cdots q_{nn} = D_1 D_2.$

例4

已知 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & f \\ b_1 & b_2 & b_3 & f \\ c_1 & c_2 & c_3 & f \\ d_1 & d_2 & d_3 & f \end{vmatrix}$，求 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$.

（答案：0）