《复变函数与积分变换》2019–2020 上学期期末考试卷*

秦淑雅† fyw‡ wzj§

2019 年 11 月 15 日

1 选择题 (每题 3 分，15 分)

1. 在复平面上方程 $|z+3|-|z-1|=0$ 表示 ( ).

(A) 直线 (B) 圆周 (C) 椭圆 (D) 抛物线

2. 设 $f(z)=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$，则 $f(1+\mathrm{i})=$ ( ).

(A) 2 (B) 2i (C) $1+\mathrm{i}$ (D) $2+2\mathrm{i}$

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n$ 的收敛半径 $R=$ ( ).

(A) e (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{\mathrm{e}}$

4. 函数 $f(z)=z\,\mathrm{Im}\,z$ 在复平面上有定义且 ( ).

(A) 在 $z=0$ 解析 (B) 处处解析 (C) 处处不解析 (D) 以上都不对

5. $z=0$ 是函数 $\frac{\tan z}{z}$ 的 ( ).

(A) 本性奇点 (B) 可去奇点 (C) 一级极点 (D) 二级极点

2 填空题 (每题 3 分，15 分)

1. 设 $z=2-2\mathrm{i}$. 则其三角表示式为________________.

2. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $z=2+\mathrm{i}$ 处收敛，那么该级数在 $z=2$ 处的敛散性为________________.

3. $\int_0^{\mathrm{i}}9z^2\,\mathrm{d}z=$________________.

4. $\ln\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)=$________________.

5. 函数 $f(t)=\mathrm{e}^t-\sin t$ 的拉普拉斯变换为________________.

3 计算题 (70 分)

1. (10 分) 已知调和函数 $u=x^2-y^2+xy, f(\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$，求解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$，并求 $f'(z)$.

2. (7 分) 计算积分 $\oint_C\frac{z\mathrm{e}^z}{z-1}\,\mathrm{d}z$ 的值，其中 C 为正向圆周 $|z|=2$.

*题库 1103A13

†编辑

‡题目提供者

§题目提供者

3. (7 分) 计算积分 $\oint_C \frac{z\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}z$ 的值，其中 C 为正向圆周 $|z|=2$.

4. (7 分) 求函数 $\frac{\mathrm{e}^z}{z(z+1)}$ 在有限奇点处的留数.

5. (7 分) 求函数 $\frac{z^2-\cos z}{z^3}$ 在有限奇点处的留数.

6. (10 分) 求函数 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ 在 $2<|z-\mathrm{i}|<\infty$ 内展开成洛朗级数.

7. (12 分) 证明题：$f(z)=u+\mathrm{i}v$ 与 $\overline{f(z)}$ 在某区域 D 内都解析，试证 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一常数.

8. (10 分) 利用拉普拉斯变换解常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} x''(t)+4x'(t)+3x(t)=\mathrm{e}^t, \\ x(0)=0, x'(0)=0. \end{cases}$$

4 代码实现

直接复制是不能运行的

```
\documentclass{ctexart}
\usepackage{amsmath,upgreek}
\usepackage{fourier}
\usepackage{esint}
\usepackage{physics}
\usepackage[a4paper,top=1.5cm,bottom=1.5cm,left=2cm,right=2cm]{geometry}
\newcommand{\fourch}[4]{\noindent\begin{tabular}{*{4}{@{}p{4.1cm}}}(A)~#1 & (B)~#2 & (C)~#3 & (D)~#4\
    end{tabular}}
\def\leq{\leqslant}
\def\geq{\geqslant}
\def\ee{\mathrm{e}}
\def\ii{\mathrm{i}}
\edef\sum{\sum\limits}
\usepackage{theorem}
{
  \theoremstyle{change}
  \theoremheaderfont{\bfseries}
  \theorembodyfont{\normalfont}
  \newtheorem{ti}{}[section]
}
\renewcommand{\theti}{\arabic{ti}.}
\def\kuo{ (\hspace{1pc})}
\def\hua{ \uline{\hspace{\fill}}}
\title{《复变函数与积分变换》2019--2020上学期期末考试卷\footnote{题库1103A13}}
  \maketitle
  \section{选择题(每题 3 分, 15分)}
  \begin{ti}
    在复平面上方程 $|z + 3| - |z - 1| = 0$ 表示\kuo.

    \fourch{直线}{圆周}{椭圆}{抛物线}
  \end{ti}

  \begin{ti}
    设 $f(z) = x^{2} - y^{2} + 2xy \ii$, 则 $f(1 + \ii) = $\kuo.

    \fourch{$2$}{$2\ii$}{$1 + \ii$}{$2 + 2\ii$}
  \end{ti}

  \begin{ti}
    幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n}} z^{n}$ 的收敛半径 $R = $\kuo.

    \fourch{$\ee$}{$\frac{1}{2}$}{$2$}{$\frac{1}{\ee}$}
  \end{ti}

  \begin{ti}
    函数 $f(z) = z \Im z$ 在复平面上有定义且\kuo.

    \fourch{在 $z = 0$ 解析}{处处解析}{处处不解析}{以上都不对}
  \end{ti}
```

```
\begin{ti}
  $z = 0$ 是函数 $\frac{\tan z}{z}$ 的\kuo.

  \fourch{本性奇点}{可去奇点}{一级极点}{二级极点}
\end{ti}

\section{填空题(每题 3 分, 15分)}

\begin{ti}
  设 $z = 2 - 2 \ii$. 则其三角表示式为\hua.
\end{ti}

\begin{ti}
  若幂级数 $\sum_{n = 0}^{\infty} c_{n} z^{n}$ 在 $z = 2 + \ii$ 处收敛, 那么该级数在 $z = 2$ 处的敛散
      性为\hua.
\end{ti}

\begin{ti}
  $\int_{0}^{\ii} 9 z^{2} \dd{z} = $\hua.
\end{ti}

\begin{ti}
  $\ln(\sqrt{3} + \ii) = $\hua.
\end{ti}

\begin{ti}
  $f(t) = \ee^{t} - \sin t$ 的拉普拉斯变换\hua.
\end{ti}

\section{计算题(70 分)}

\begin{ti}(10 分)
  已知调和函数 $u = x^{2} - y^{2} + xy, f(\ii) = - 1 + \ii$, 求解析函数 $f(z) = u + \ii v$, 并求 $f'(
      z)$.
\end{ti}

\begin{ti}(7 分)
  计算积分 $\oint_{C} \frac{z \ee^{z}}{z - 1} \dd{z}$ 的值, 其中 $C$ 为正向圆周 $|z| = 2$.
\end{ti}

\begin{ti}(7 分)
  计算积分 $\oint_{C} \frac{z \sin z}{\left( z - \frac{\uppi}{2} \right)^{2}} \dd{z}$ 的值, 其中 $C$
      为正向圆周 $|z| = 2$.
\end{ti}

\begin{ti}(7 分)
  求函数 $\frac{\ee^{z}}{z (z + 1)}$ 在有限奇点处的留数.
\end{ti}

\begin{ti}(7 分)
  求函数 $\frac{z^{2} - \cos z}{z^{3}}$ 在有限奇点处的留数.
\end{ti}

\begin{ti}(10 分)
```

```
  求函数 $f(z) = \frac{1}{1 + z^{2}}$ 在 $2 < |z - \ii| < \infty$ 内展开成洛朗级数.
\end{ti}

\begin{ti}(12 分)
  证明题: $f(z) = u + \ii v$ 与 $\overline{ f(z) }$ 在某区域 $D$ 内都解析, 试证 $f(z) = u + \ii v$ 是
      一常数.
\end{ti}

\begin{ti}(10 分)
  利用拉普拉斯变换解常微分方程初值问题:
  \[
    \begin{cases}
      x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = \ee^{t},\\
      x(0) = 0, x'(0) = 0.
    \end{cases}
  \]
\end{ti}
```