《工程电磁场》复习重点及历年真题

死抠

2019 年 12 月 27 日

目录

Chapter 1

知识点总结

1.1 矢量分析与场论思想

重点为：方向导数、梯度、散度、环量、旋度、散度定理、斯托克斯定理的计算

1. (方向导数)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

其中 $\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}$，$\cos\beta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}$，$\cos\gamma = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}$。

2. (梯度)

$$\mathrm{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z$$

其中梯度的运算与微分运算类似，这里不再赘述。

3. (散度)

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

散度的运算公式

(1) $\mathrm{div}(C\vec{A}) = C\,\mathrm{div}\,\vec{A}$

(2) $\mathrm{div}(u\vec{A}) = u\,\mathrm{div}\,\vec{A} + \mathrm{grad}\,u \bullet \vec{A}$

(3) $\mathrm{div}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \mathrm{div}\,\vec{A} \pm \mathrm{div}\,\vec{B}$

散度定理

$$\oiint_S \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{A}\mathrm{d}V$$

4. (旋度)

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

旋度的运算公式

(1) $\mathrm{rot}(C\vec{A}) = C\,\mathrm{rot}\,\vec{A}$

(2) $\mathrm{rot}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \mathrm{rot}\,\vec{A} \pm \mathrm{rot}\,\vec{B}$

(3) $\mathrm{rot}(u\vec{A}) = u\,\mathrm{rot}\,\vec{A} + \mathrm{grad}\,u \times \vec{A}$

(4) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, u) = 0$(重要的矢量恒等式)

(5) $\mathrm{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \bullet \mathrm{rot}\, \vec{A} - \vec{A} \bullet \mathrm{rot}\, \vec{B}$

(6) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \vec{A}) = 0$(重要的矢量恒等式)

斯托克斯定理

$$\oint_l \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \mathrm{rot}\, \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

5. (哈密尔顿 (纳布拉) 算子)

$$\triangledown = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

因此，梯度

$$\mathrm{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z = \triangledown u$$

散度

$$\mathrm{div}\, \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \triangledown \bullet \vec{A}$$

旋度

$$\mathrm{rot}\, \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \triangledown \times \vec{A}$$

拉普拉斯算子

$$\triangledown^2 = \triangledown \bullet \triangledown = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\triangledown$ 算子常用运算公式

(1) 散度定理

$$\iiint_V \triangledown \bullet \vec{A} \mathrm{d}V = \oiint_S \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

(2) 斯托克斯定理

$$\iint_S \triangledown \times \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \oint_l \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

6. (常用坐标系中的有关公式) 拉梅系数

$$h_u, h_v, h_w$$

若

$$\mathrm{d}\vec{l} = h_u \mathrm{d}\vec{u} + h_v \mathrm{d}\vec{v} + h_w \mathrm{d}\vec{w}$$

则有

$$\triangledown a = \frac{1}{h_u}\frac{\partial a}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial a}{\partial v}\vec{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial a}{\partial w}\vec{e}_w$$

$$\triangledown \bullet \vec{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(A_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(A_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(A_w h_u h_v)\right]$$

$$\triangledown \times \vec{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\vec{e}_u & h_v\vec{e}_v & h_w\vec{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

那么在柱面坐标系中有

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\vec{r} + r\mathrm{d}\vec{\alpha} + \mathrm{d}\vec{z}$$

即

$$h_u = 1, h_v = r, h_w = 1$$

那么在球面坐标系中有

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\vec{r} + r\mathrm{d}\vec{\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\vec{\alpha}$$

即

$$h_u = 1, h_v = r, h_w = r\sin\theta$$

1.2 静电场的基本原理

重点为：电场强度、电位移矢量、极化强度、极化电荷体密度、极化电荷面密度的计算，电位与电场强度的关系，衔接条件

1．(电场强度)

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{e}_R$$

电荷线密度

$$\tau = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$$

电荷面密度

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$$

电荷体密度

$$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$$

线电荷产生的电场强度

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\tau\vec{e}_R}{R^2}\mathrm{d}l$$

面电荷产生的电场强度

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma\vec{e}_R}{R^2}\mathrm{d}S$$

体电荷产生的电场强度

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho\vec{e}_R}{R^2}\mathrm{d}V$$

2．(电位)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho}{R}\mathrm{d}V + C$$

面、线情况下的电位不再赘述，电位与电场强度的关系

$$E = -\nabla\varphi$$

静电场环路定理的微分形式

$$\nabla\times\vec{E} = 0$$

静电场环路定理的积分形式

$$\oint_l E\bullet\mathrm{d}\vec{l} = 0$$

高斯通量定理的微分形式

$$\nabla\bullet\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

高斯通量定理的积分形式

$$\oiint_S \vec{E}\bullet\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \nabla\bullet\vec{E}\mathrm{d}V = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}V = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

3. (电位移矢量)

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

其中 $\vec{P}$ 为极化强度，极化电荷体密度

$$\rho_P = -\nabla \bullet \vec{P}$$

极化电荷面密度

$$\sigma_P = \vec{P} \bullet \vec{e}_{\mathrm{n}}$$

高斯通量定理的微分形式

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

高斯通量定理的积分形式

$$\oiint_S \vec{D} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \nabla \bullet \vec{D}\mathrm{d}V = q$$

4. (静电场的辅助方程) 在各向同性的介质中

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

5. (静电场的基本方程与分界面衔接条件) 静电场基本方程

$$\begin{array}{ll} \text{微分形式} & \text{积分形式} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 & \oint_l \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 0 \\ \nabla \bullet \vec{D} = \rho & \oiint_S \vec{D} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = q \end{array}$$

辅助方程为

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

电介质分界面条件

$$\vec{e}_{\mathrm{n}} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \Leftrightarrow E_{2\mathrm{t}} = E_{1\mathrm{t}}$$

$$\vec{e}_{\mathrm{n}} \bullet (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \Leftrightarrow D_{2\mathrm{n}} - D_{1\mathrm{n}} = \sigma$$

1.3 恒定电场的基本原理

重点为：电流密度与电场强度的关系，电流密度的计算，衔接条件

1. (电流密度)

$$J = \rho v = \rho\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho\mathrm{d}S_0\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t\mathrm{d}S_0} = \frac{\rho\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t\mathrm{d}S_0} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t\mathrm{d}S_0} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_0}$$

电流密度与电场强度的关系

$$\vec{J} = \gamma\vec{E} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{1}{\gamma}\vec{J} = \rho_R\vec{J}$$

2. (电动势)

$$e = \int_a^b E_{\mathrm{e}} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

3. (电流连续性) 电荷守恒原理的积分形式

$$\oiint_S \vec{J} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

电荷守恒原理的微分形式

$$\nabla \bullet \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

对于恒定电场 (即 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \frac{\partial q}{\partial t} = 0$) 有恒定电场的电流连续性方程

$$\nabla \bullet \vec{J} = 0$$

$$\oiint_S J \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

4. (恒定电场的基本方程及辅助方程) 恒定电场的基本方程

微分形式	积分形式
$\nabla \bullet \vec{J} = 0$	$\oiint_S \vec{J} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0$
$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\oint_l \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 0$

辅助方程为

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

在均匀媒质中，电位的基本方程

$$\gamma \nabla^2 \varphi = 0$$

5. (导电媒质分界面衔接条件)

$$\vec{e}_\mathrm{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \Leftrightarrow E_{2\mathrm{t}} = E_{1\mathrm{t}}$$

$$\vec{e}_\mathrm{n} \bullet (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = 0 \Leftrightarrow J_{2\mathrm{n}} = J_{1\mathrm{n}}$$

将

$$\vec{E} = -\nabla \varphi, \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

代入上述分界面条件，得到电位应满足的分界面衔接条件

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \gamma \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \end{cases}$$

1.4 恒定磁场的基本原理

重点为：用安培环路定理 (2 种) 计算磁感应强度、磁场强度

1. (毕奥-沙伐定律)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{I \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{e}_R}{R^2} \Leftrightarrow \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{e}_R}{R^2}$$

2. (分布电流的磁感应强度) 点电流

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{e}_R}{R^2}$$

线电流

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{I \mathrm{d}l \times \vec{e}_R}{R^2}$$

面电流

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K} \times \vec{e}_R}{R^2} \mathrm{d}S$$

体电流

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J} \times \vec{e}_R}{R^2} \mathrm{d}V$$

3. (洛伦兹力)

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

4. (磁通连续性定理)

$$\begin{array}{cc} \text{微分形式} & \text{积分形式} \\ \nabla \bullet \vec{B} = 0 & \oiint_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0 \end{array}$$

5. (安培环路定理)

$$\begin{array}{cc} \text{微分形式} & \text{积分形式} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & \oint_l \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I \end{array}$$

6. (磁场强度)

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

其中 $\vec{M}$ 为磁化强度，安培环路定理

$$\begin{array}{cc} \text{微分形式} & \text{积分形式} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} & \oint_l \vec{H} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = I \end{array}$$

7. (恒定磁场的基本方程与分界面衔接条件) 恒定磁场的基本方程

$$\begin{array}{cc} \text{微分形式} & \text{积分形式} \\ \nabla \bullet \vec{B} = 0 & \oiint_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} & \oint_l \vec{H} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = I \end{array}$$

辅助方程为

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

媒质分界面的衔接条件

$$\vec{e}_{\mathrm{n}} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$$

$$\vec{e}_{\mathrm{n}} \bullet (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \Leftrightarrow B_{2\mathrm{n}} = B_{1\mathrm{n}}$$

其中 $\vec{K}$ 为分界面的自由面电流密度

1.5 时变电磁场的基本原理

重点为：位移电流、全电流 ($\vec{J}_{\mathrm{C}}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 是重点) 的计算

1. (时变场中的运动回路) 电磁感应定律

$$\begin{array}{cc} \text{微分形式} & \text{积分形式} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) & \oint_l \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet \mathrm{d}\vec{S} + \oint_l (\vec{v} \times \vec{B}) \bullet \mathrm{d}\vec{l} \end{array}$$

2. (时变场的电流连续性)

$$\nabla \bullet \left(\vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

3. (全电流定律)

$$\begin{array}{cc} \text{微分形式} & \text{积分形式} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\mathrm{C}} + \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \oint_l \vec{H} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = i_{\mathrm{C}} + i_{\mathrm{d}} + i_v \end{array}$$

4. (电磁场的基本方程组)

微分形式	积分形式
$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_{\mathrm{C}}+\rho\vec{v}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$\oint_l \vec{H}\bullet\mathrm{d}\vec{l}=\iint_S\vec{J}_{\mathrm{C}}\bullet\mathrm{d}\vec{S}+\iint_S\rho\vec{v}\bullet\mathrm{d}\vec{S}+\iint_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\bullet\mathrm{d}\vec{S}$
$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\oint_l \vec{E}\bullet\mathrm{d}\vec{l}=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet\mathrm{d}\vec{S}$
$\nabla\bullet\vec{B}=0$	$\oiint_S\vec{B}\bullet\mathrm{d}\vec{S}=0$
$\nabla\bullet\vec{D}=\rho$	$\oiint_S\vec{D}\bullet\mathrm{d}\vec{S}=q$

在各向同性媒质中，辅助方程为

$$\begin{aligned}\vec{D}&=\varepsilon\vec{E},\\ \vec{B}&=\mu\vec{H},\\ \vec{J}_{\mathrm{C}}&=\gamma\vec{E}\end{aligned}$$

媒质分界面衔接条件

$$\begin{array}{cc}\vec{e}_{\mathrm{n}}\bullet(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma & \vec{e}_{\mathrm{n}}\bullet(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\\ \vec{e}_{\mathrm{n}}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 & \vec{e}_{\mathrm{n}}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{K}\end{array}$$

Chapter 2

重点习题

2.1 课后习题 1-6，1-9，1-14，1-16，1-21，1-22，1-24，2-5，2-6，2-7，2-10，2-13，2-15，2-16，3-1，4-7，4-8，4-10，5-4，5-5，5-7，5-8，5-13

2.2 书中例题 设跨步电压安全限值为 U_0，入地电流为 I，试确定课本 78 页图 3-4-6 所示的浅埋半球接地体附近地面的危险区

Chapter 3

历年真题

3.1 试卷编号：1819010634C

1．(10 分) 求函数 $\varphi = xyz$ 在点 $(5,2,1)$ 处沿着点 $(5,1,2)$ 到 $(9,4,19)$ 方向的方向导数。

2．(10 分) 已知标量场 $u = \mathrm{e}^x \sin y$，求 ∇u。

3．(10 分) 已知 $\vec{A} = xy^2 z\vec{r}(\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$，求 $\operatorname{div}\vec{A}$ 在 $M(3,3,2)$ 处的值。

4．(10 分) 已知 $\vec{A} = xz^3\vec{e}_x - 2x^2yz\vec{e}_y + 2yz^4\vec{e}_z$，求 $\vec{A}$ 在 $M(1,-1,-1)$ 点的旋度。

5．(10 分) 一个半径为 a 的无限长圆柱，圆柱表面均匀分布面电荷密度 ρ_S，求圆柱面内、外的电场强度。

6．(10 分) 给定平行板电容器的尺寸、电介质的介电常数，如图 3.1 所示，给定极板总电荷量下，求电容器中的电场强度。

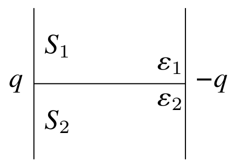

图 3.1

7．(15 分) 如图 3.2 所示，试确定浅埋半球接地体的危险半径 r_0，设跨步电压安全限值为 U_0，入地电流为 I，土壤的电导率为 γ，跨步距离为 b。

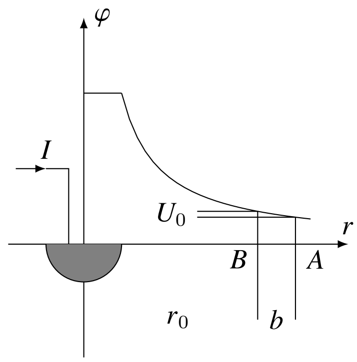

图 3.2

8．(10 分) 如图 3.3 所示，已知无穷长电流和两种媒质的磁导率，求两种媒质中的磁感应强度。

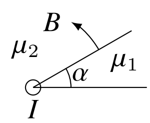

图 3.3

9．(15 分) 一个球形电容器的内、外半径分别为 a 和 b，内、外导体间材料的介电常数为 ε、电导率为 γ，在内、外导体间加低频电压 $u = U_m \cos \omega t$。求内外导体间的全电流。

Chapter 4

历年真题参考答案

4.1 试卷编号：1819010634C

1. **(10 分)** 求函数 $\varphi = xyz$ 在点 $(5,2,1)$ 处沿着点 $(5,1,2)$ 到 $(9,4,19)$ 方向的方向导数。

解

$$\nabla\varphi\big|_{(5,2,1)} = (yz\vec{e}_x + xz\vec{e}_y + xy\vec{e}_z)\big|_{(5,2,1)} = 2\vec{e}_x + 5\vec{e}_y + 10\vec{e}_z$$

沿着点 $(5,1,2)$ 到 $(9,4,19)$ 方向的单位矢量为

$$\vec{a} = \frac{4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 17\vec{e}_z}{\sqrt{4^2+3^2+17^2}} = \frac{4}{\sqrt{314}}\vec{e}_x + \frac{3}{\sqrt{314}}\vec{e}_y + \frac{17}{\sqrt{314}}\vec{e}_z$$

则函数 $\varphi = xyz$ 在点 $(5,2,1)$ 处沿着点 $(5,1,2)$ 到 $(9,4,19)$ 方向的方向导数为

$$\nabla\varphi\big|_{(5,2,1)} \bullet \vec{a} = \frac{193}{\sqrt{314}}$$

2. **(10 分)** 已知标量场 $u = \mathrm{e}^x \sin y$，求 ∇u。

解

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y = \mathrm{e}^x \sin y\vec{e}_x + \mathrm{e}^x \cos y\vec{e}_y$$

3. **(10 分)** 已知 $\vec{A} = xy^2z\vec{r}(\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$，求 $\operatorname{div}\vec{A}$ 在 $M(3,3,2)$ 处的值。

解

$$\vec{A} = x^2y^2z\vec{e}_x + xy^3z\vec{e}_y + xy^2z^2\vec{e}_z$$

则

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{A}\Big|_M &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Bigg|_M \\ &= \left(2xy^2z + 3xy^2z + 2xy^2z\right)\big|_M \\ &= 378\end{aligned}$$

4. **(10 分)** 已知 $\vec{A} = xz^3\vec{e}_x - 2x^2yz\vec{e}_y + 2yz^4\vec{e}_z$，求 $\vec{A}$ 在 $M(1,-1,-1)$ 点的旋度。

解

$$\nabla\times\vec{A}\Big|_M=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4\end{vmatrix}\Bigg|_M=\left(2z^4+2x^2y\right)\vec{e}_x+3xz^2\vec{e}_y-4xyz\vec{e}_z\Big|_M$$
$$=3\vec{e}_y-4\vec{e}_z$$

5. (10 分) 一个半径为 a 的无限长圆柱，圆柱表面均匀分布面电荷密度 ρ_S，求圆柱面内、外的电场强度。

解 在无限长圆柱轴线上作一以轴线为中心，半径为 r，高为 h 的高斯圆柱面，设 $\vec{E}_r$ 为沿半径方向的电场强度
当 $r<a$ 时，根据高斯通量定理，显然有 $\vec{E}_r=0$
当 $r\geqslant a$ 时，根据对称性，上下面的电场强度为 0，根据高斯通量定理

$$\oiint_S\vec{E}\mathrm{d}\vec{S}=2\pi\vec{E}_r rh=\frac{2\pi ah\rho_S}{\varepsilon_0}$$

即

$$\vec{E}_r=\frac{a\rho_S}{r\varepsilon_0}$$

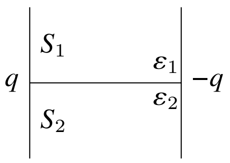

图 4.1

6. (10 分) 给定平行板电容器的尺寸、电介质的介电常数，如图 4.1 所示，给定极板总电荷量下，求电容器中的电场强度。

解 在介质分界面上

$$E_{1\mathrm{t}}=E_{2\mathrm{t}}$$

电场强度和电位移矢量均与电介质分界面平行，设 $E_1=E_2=E$，则

$$D_1=\varepsilon_1E$$
$$D_2=\varepsilon_2E$$

导体表面电荷面密度 σ 与该处的电位移矢量 D 相等，故

$$D_1S_1+D_2S_2=\sigma_1S_1+\sigma_2S_2=q$$
$$\varepsilon_1S_1E+\varepsilon_2S_2E=q$$

故

$$E=\frac{q}{\varepsilon_1S_1+\varepsilon_2S_2}$$
$$D_1=\frac{\varepsilon_1q}{\varepsilon_1S_1+\varepsilon_2S_2}$$
$$D_2=\frac{\varepsilon_2q}{\varepsilon_1S_1+\varepsilon_2S_2}$$

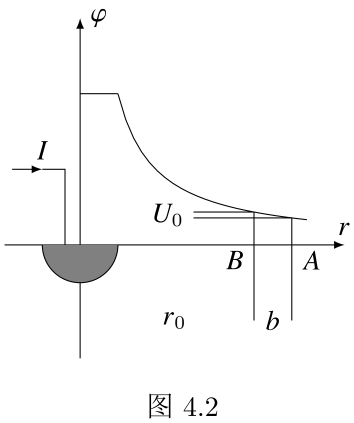

图 4.2

7. (15 分) 如图 4.2 所示，试确定浅埋半球接地体的危险半径 r_0，设跨步电压安全限值为 U_0，入地电流为 I，土壤的电导率为 γ，跨步距离为 b。

解 电流密度

$$J=\frac{I}{2\pi r^2}$$

则

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma r^2}$$

电位

$$\varphi(r) = \int_r^{+\infty} E\mathrm{d}r = \frac{I}{2\pi\gamma r}$$

跨步电压

$$\varphi(r-b) - \varphi(r) = \frac{bI}{2\pi\gamma(r-b)r} \approx \frac{bI}{2\pi\gamma r^2} \xlongequal{令} U_0$$

解得

$$r_0 = \sqrt{\frac{bI}{2\pi\gamma U_0}}$$

8. (10 分) 如图 4.3 所示，已知无穷长电流和两种媒质的磁导率，求两种媒质中的磁感应强度。

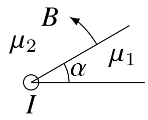

图 4.3

解 根据安培环路定理、媒质分界面的衔接条件

$$\oint_l \vec{H} \bullet \mathrm{d}l = \oint_{l_1} \frac{\vec{B}}{\mu_1}\mathrm{d}l + \oint_{l_2} \frac{\vec{B}}{\mu_2}\mathrm{d}l = B\left(\frac{\alpha r}{\mu_1} + \frac{(2\pi-\alpha)r}{\mu_2}\right) = I$$

其中 l 为以电流为中心，半径为 r 的圆，l_1, l_2 分别为 l 在媒质 μ_1、μ_2 中的部分，解得

$$B = \frac{I\mu_1\mu_2}{(\alpha\mu_2 + (2\pi-\alpha)\mu_1)r}$$

9. (15 分) 一个球形电容器的内、外半径分别为 a 和 b，内、外导体间材料的介电常数为 ε、电导率为 γ，在内、外导体间加低频电压 $u = U_m \cos\omega t$。求内外导体间的全电流。

解 根据高斯通量定理

$$\oiint_S \vec{D} \bullet \mathrm{d}S = 4\pi r^2 D = Q$$

其中 S 为球心在球形电容器球心，半径为 $r(a < r < b)$ 的球面，解得

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

联立

$$\int_a^b E\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = u = U_m\cos\omega t$$

解得

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon ab U_m \cos\omega t}{b-a}$$

则

$$J = \gamma E = \frac{ab\gamma U_m \cos\omega t}{(b-a)r^2}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\varepsilon\omega ab U_m \sin\omega t}{(b-a)r^2}$$

全电流密度

$$\frac{abU_m}{(b-a)r^2}(\gamma\cos\omega t - \varepsilon\omega\sin\omega t)$$

全电流

$$\frac{4\pi abU_m}{b-a}(\gamma\cos\omega t - \varepsilon\omega\sin\omega t)$$