第一章 朴素集合论

点集拓扑学(Point-set Topology)现称一般拓扑学(General Topology)，它的起源与出发点都是集合论。作为基本的点集拓扑学知识，所需的只是一些朴素集合论的预备知识。本章介绍本书中要用到的一些集合论内容，主要涉及集合及集族的运算、等价关系、映射、可数集、选择公理等，作为一教材，讲义对各部分内容均有较系统的论述，作为授课，我们只强调一些基本内容，而已有过了解的知识不提或少提。

记号：$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$分别表示整数集，正整数集，实数集和有理数集。

一. 集合的运算

幂集$\mathcal{P}(X)$，交$\cap$、并$\cup$、差$-$(补, 余$A^c, A^/$).

运算律：De Morgan 律：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

利用集合的包含关系证明

类似可定义任意有限个集的交或并, 如记

$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=(A_1\cup\ldots\cup A_{n-1})\cup A_n=\bigcup_{i\le n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ A_i. 规定 0 个集之并是ϕ，不用 0 个集之交.

二. 关系

R是集合X的一个关系, 即$R\subset X\times X, (x,y)\in R$, 记为$xRy$, 称 x与 y是R相关的。

R称为自反的, 若$\forall x\in X$, xRx;

R 称为对称的, 若 xRy, 则 yRx;

R 称为传递的, 若 xRy, yRz, 则 xRz.

等价关系: 自反、对称、传递的关系.

设 R 是 X 上等价关系, $\forall x\in X$, x 的 R 等价类或等价类$[x]_R$或$[x]$为$\{y\in X\mid xRy\}$, $[x]_R$的元称为$[x]_R$ 的代表元; 商集 $X/R=\{[x]_R\mid x\in X\}$.

定理 1.4.1 设 R 是非空集合 X 的等价关系, 则

(1) $\forall x\in X, x\in[x]_R$;

(2) $\forall x, y\in X$，或者$[x]_R=[y]_R$，或者$[x]_R\cap[y]_R=\phi$

三. 映射

函数：$f: X\to Y$.　　像：$\forall A\subset X, f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$；

原像：$\forall B \subset Y, f_{-1}(B)=\{x \in X \mid f(x) \in B\}$

满射、单射、一一映射(双射)、可逆映射、常值映射、恒同映射 i_X、限制 $f_{|A}$、扩张、内射 $i_{X|A:} A \to X$。

集合 $X_i, i \le n$，笛卡儿积 $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \prod_{1\le i\le n} X_i = \prod_{i-1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2 \ldots x_n) | x_i \in X_i, i \le n\}$ 到第 i 个坐标集 X_i 的投射 $p_i : X \to X_i$ 定义为 $p(x) = x_i$，其中 $x=(x_1, .., x_n)$.

对等价关系 R, 集合 X 到商集 X/R 的自然投射 $p: X \to X/R$ 定义为 $p(x)=[x]_R$.

四. 集族

数列 $\{\mathrm{x_n}\}=\{\mathrm{x_n}\}_{n\in Z_+}$，有标集族 $\{\mathrm{A}_\gamma\}_{\gamma\in\tau}$，指标集 Γ，与 $\{A_\gamma | \gamma \in \tau\}$ 不同，可记有标集族 $\mathrm{A}=\{A_\gamma\}_{\gamma\in A}$；类似地，定义其并 $\bigcup_{\gamma\in\tau} A_\lambda$ (或 $\cup$ A)、交 $\bigcap_{\gamma\in\tau} A_\lambda$ (或 $\cap$ A)，不定义 0 个集的交. 与有限集族有相同的运 算律，如 De Morgan 律

$A - \bigcup_{\gamma\in\tau} A_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\tau}(A - A_\gamma), A - \bigcap_{\gamma\in\tau} A_\gamma = \bigcup_{\gamma\in\tau} A_\gamma$,

映射对应的集族性质: $f(\bigcup_{\gamma\in\tau} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\tau} f(A_\gamma), f(\bigcap_{\gamma\in\tau} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma\in\tau} f(A_\gamma)$'

$f^{-1}(\bigcup_{\gamma\in\tau} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\tau} f^{-1}(B_\gamma), f^{-1}(\bigcap_{\gamma\in\tau} B_\gamma) = \bigcap_{\gamma\in\tau} f^{-1}(B_\gamma)$

五. 无限集

通过一一映射来确定两集合的个数的多少.

有限集(ϕ 或与某 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 有一一映射)，无限集，可数集(ϕ 或存在 X 到 **Z** 的单射)，不可数集.

易验证: 有限集是可数集，可数集的子集是可数集，可数集的映像是可数集.

定理 ：X 是可数集 $\Leftrightarrow$ X 是 $\mathbb{Z}_+$ 的映像.

由此, $\mathbb{Q}$ 是可数集，两可数集的笛卡儿积集是可数集，可数个可数集之并集是可数集.

$\mathbb{R}$ 是不可数集.

直观上，集合 A中元素的个数称为该集合的基数，记为card A, 或|A|. $|\mathbb{Z}_+|=a$, $|\mathbb{R}|=c$. 若存在从集合 A 到集合 B 的单射，则定义|A|≤|B|.

连续统假设： 不存在基数 α，使得 $a<\alpha<c$.

选择公理： 若 $\mathcal{A}$ 是由非空集构成的集族，则 $\forall A \in \mathcal{A}$，可取定 $\varepsilon(A) \in A$..

由选择公理可证明，若 α,β 是基数，则下述三式中有且仅有一成立：$\alpha < \beta, \alpha = \beta, \alpha > \beta$