第十四章 机械波基础
第 三 讲

14.7 驻波 半波损失

14.9 多普勒效应

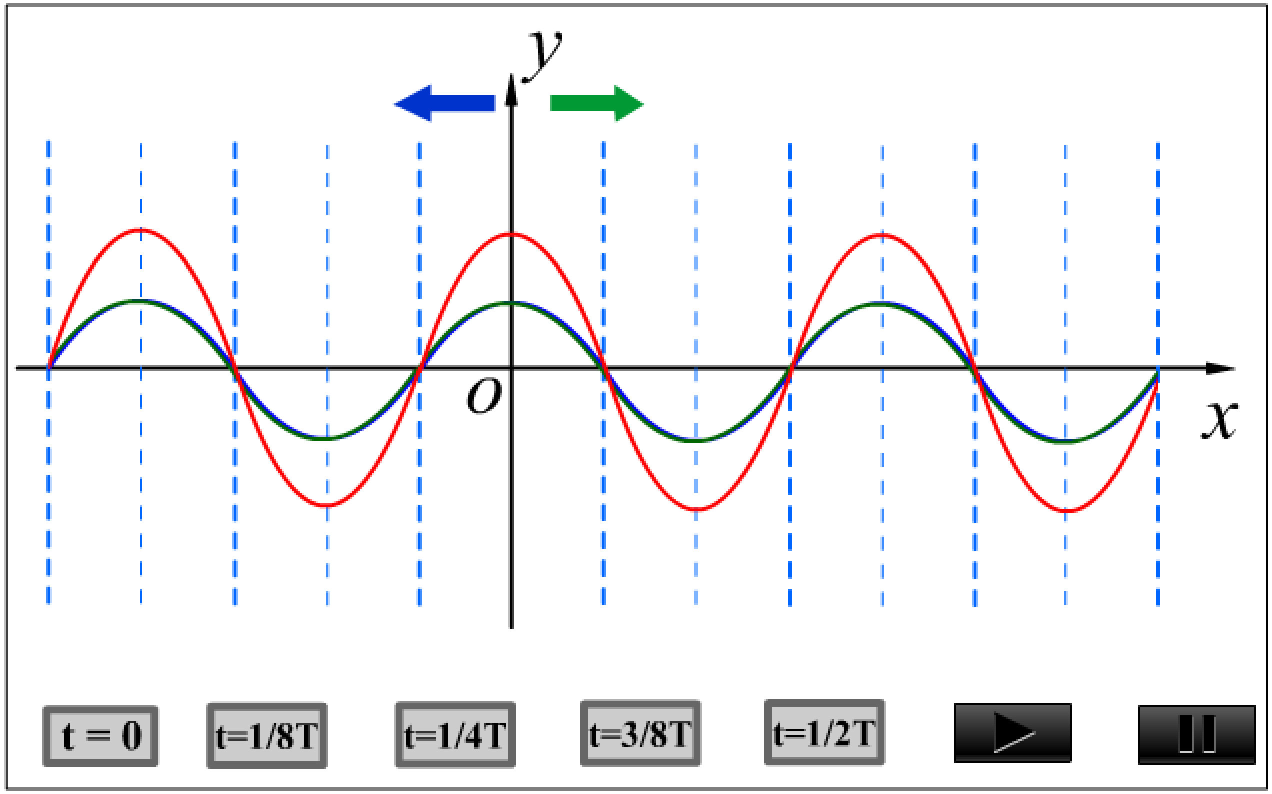
14.7 驻波 半波损失

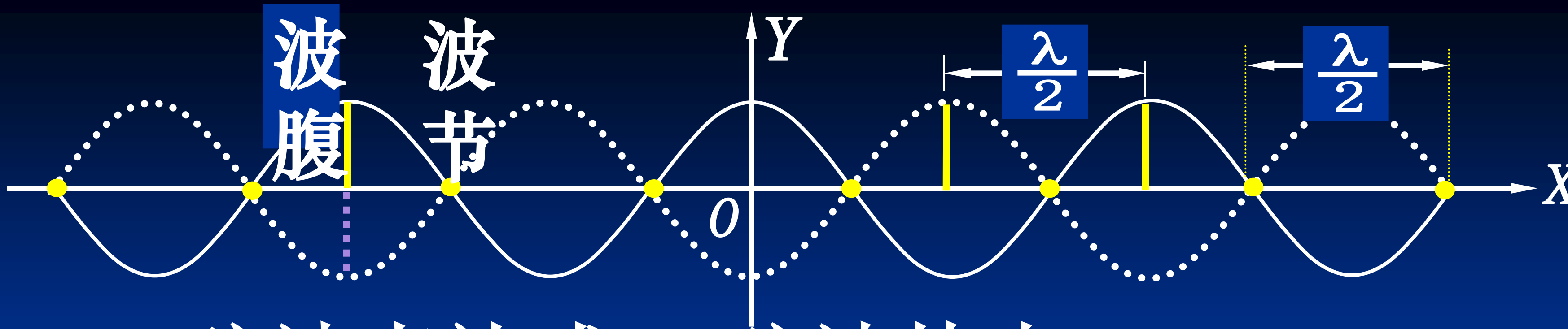
- 一、驻波的形成
- 二、驻波的特点
- 三、弦上的驻波
- 四、半波损失

14-7 驻波 (Standing Waves)

一、驻波的形成

两个振幅相同振动方向相同的**相干波**在同一直线上沿**相反方向传播**时，叠加的结果形成**驻波**





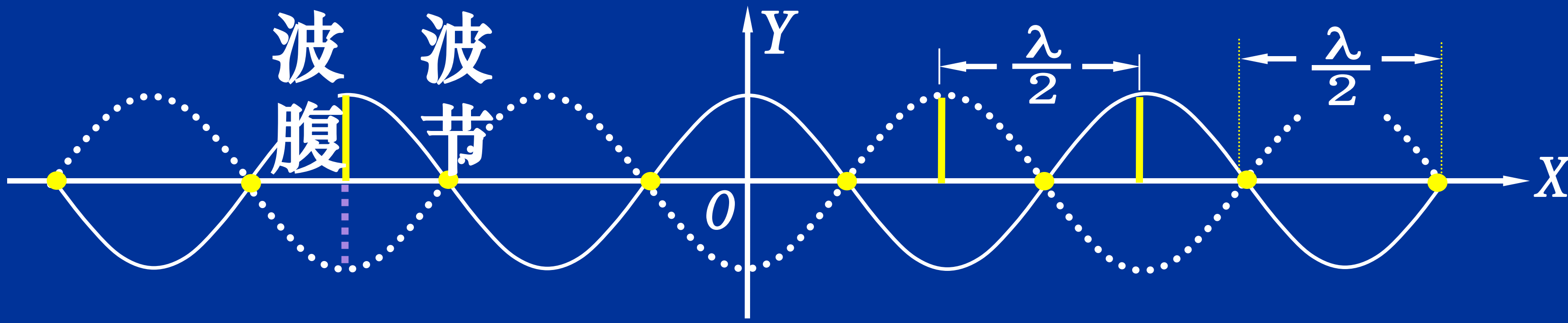
二、驻波表达式　驻波特点

设 $y_1 = A\cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})$

$$y_2 = A\cos 2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda})$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t$$

1）**频率特点**：所有质元作同频率的简谐振动



2）**振幅特点**：各质元振幅不同，存在波腹与波节

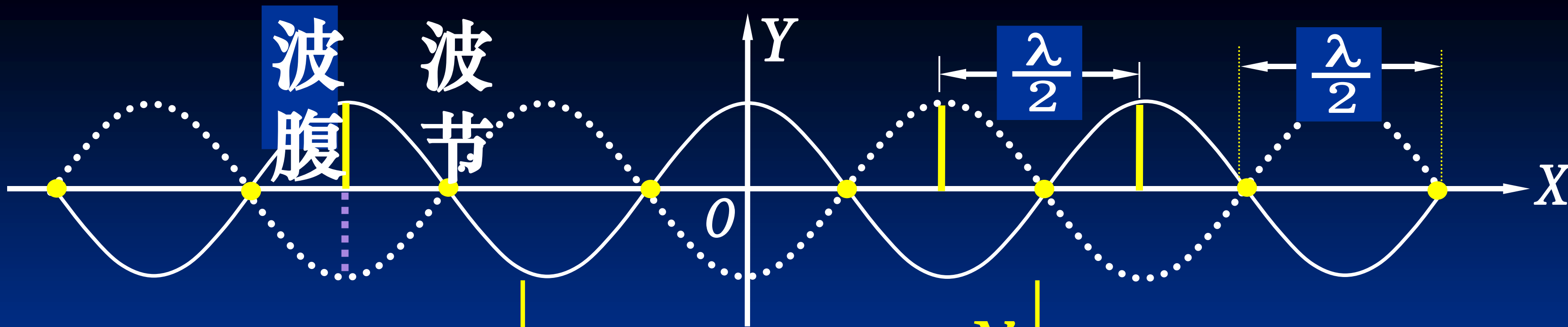
$$y = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t \qquad A_x = \left|2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|$$

波腹 $\frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi, k = 0,\pm1,\pm2\cdots$

此时$\Delta\varphi = 2\cdot 2\pi\frac{x}{\lambda} = 2k\pi \qquad A_x = 2A$

波腹位置 $x = k\frac{\lambda}{2}$

相邻波腹间距 $\Delta x = x_{k+1} - x_k = \lambda/2$



$$A_x = \left| 2A\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|$$

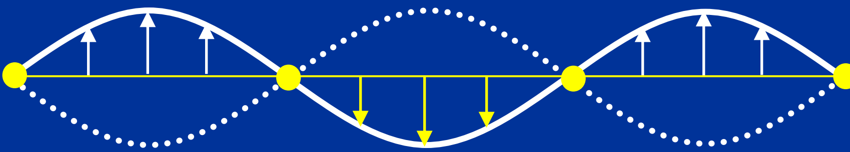
波节 $\dfrac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$

此时$\Delta\varphi = 2 \cdot 2\pi \dfrac{x}{\lambda} = (2k+1)\pi \quad A_x = 0$

波节位置 $x = (2k+1)\dfrac{\lambda}{4}$

相邻波节间距 $\Delta x = x_{k+1} - x_k = \lambda/2$

3）相位特点



$$y=2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t$$

波节位置 $$x=(2k+1)\frac{\lambda}{4}$$

在k=-1至k=0节点之间

$$-\frac{\pi}{2}\le\frac{2\pi x}{\lambda}\le\frac{\pi}{2}$$

$$y=2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t$$

在k=0至k=1节点之间

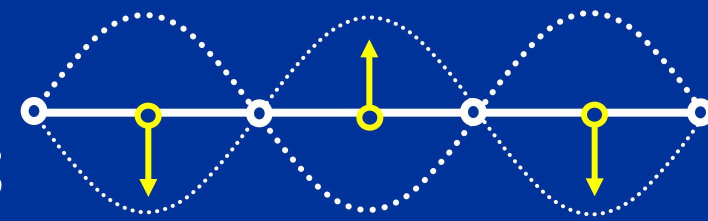
$$\frac{\pi}{2}\le\frac{2\pi x}{\lambda}\le\frac{3\pi}{2}$$

$$y=2A\left|\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|\cos(2\pi\nu t+\pi)$$

相邻波节之间的各点作同频、同相而不同振幅的谐振动；

波节两边各作同频、反相不同振幅的谐振动。

4) 驻波的能量特点



波节体积元不动，动能$E_k=0$;

各质点同时到达最大位移时：

波节处形变最大， 势能最大； 能量表现为势能

当各质点同时通过平衡位置时：波节及其它点无形变，各质点势能为零，能量表现为动能

波腹附近各点速度最大，动能最大;

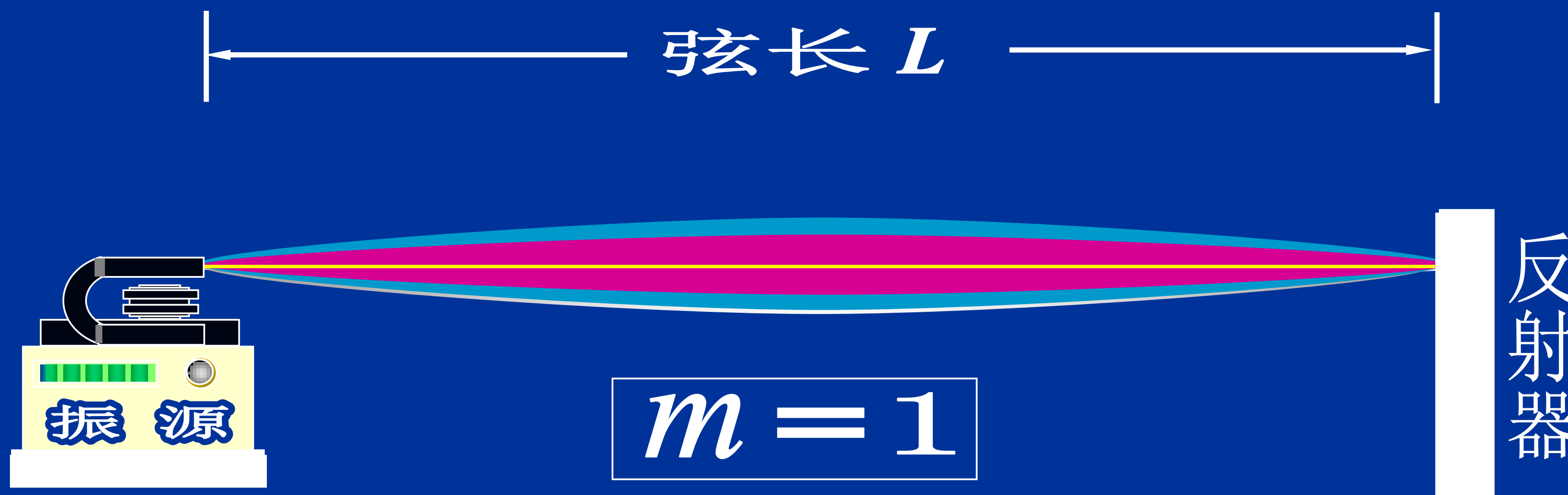
驻波的能量分段守恒。能量在波节势能与波腹动能之间相互转移。

	行波	驻波 二维驻波
（1）振幅	每个质元都以相同的振幅振动；	不同质元的振幅不同，存在波腹和波节。
（2）能量	行波：能量随波传播；	能量不能流过波节，波节”静止” 呈“常驻状态”。它只在振动动能和弹性势能之间交替变换。

（3）驻波的实质

驻波的实质是一种特殊形式的**简谐运动**。之所以叫做驻波在于这个运动可以看作为沿相反方向行进的二个波的叠加。

弦的驻波视觉现象示意

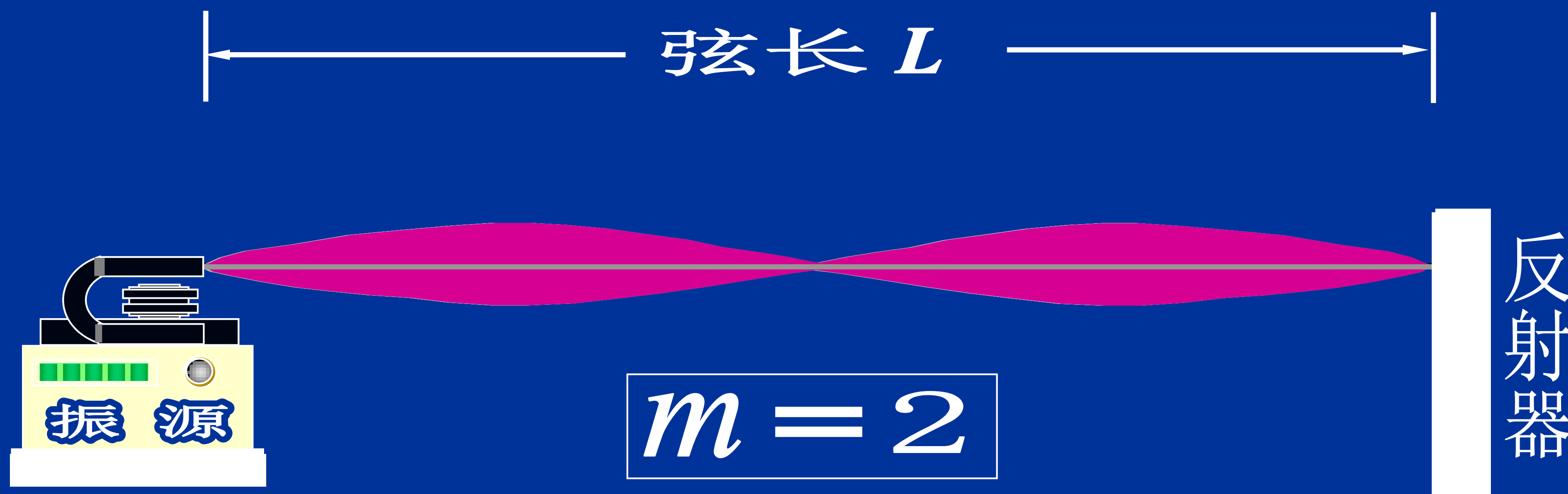


弦的驻波条件

$$L = m\frac{\lambda}{2}$$

$$(m = 1, 2, 3, \cdots)$$

弦的驻波视觉现象示意



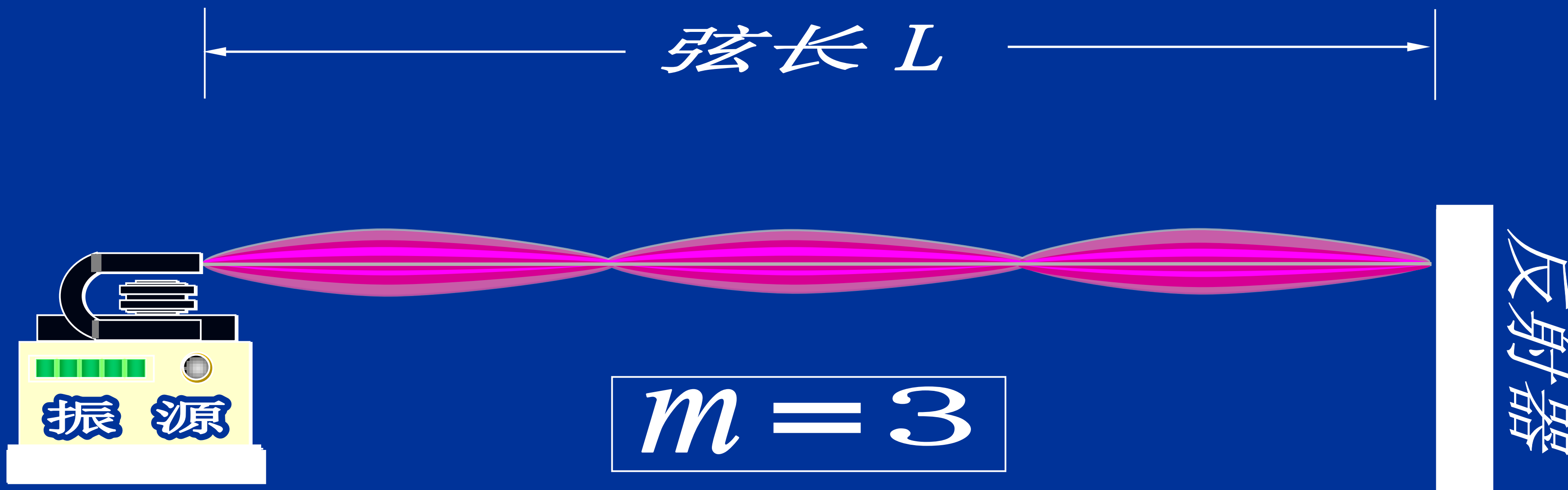
调频率改变波长λ

弦的驻波条件

$$L = m\frac{\lambda}{2}$$

$(m = 1, 2, 3, \cdots)$

弦的驻波视觉现象示意



调频率改变波长l

弦的驻波条件

$$L = m\frac{\lambda}{2}$$

（$m = 1, 2, 3, \cdots$）

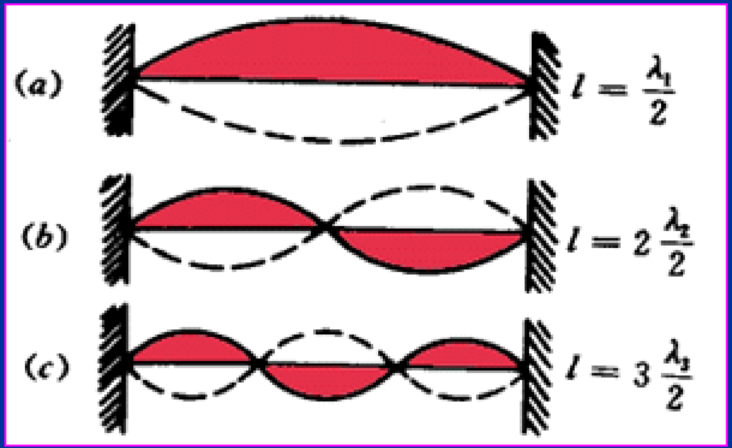
三、弦上的驻波

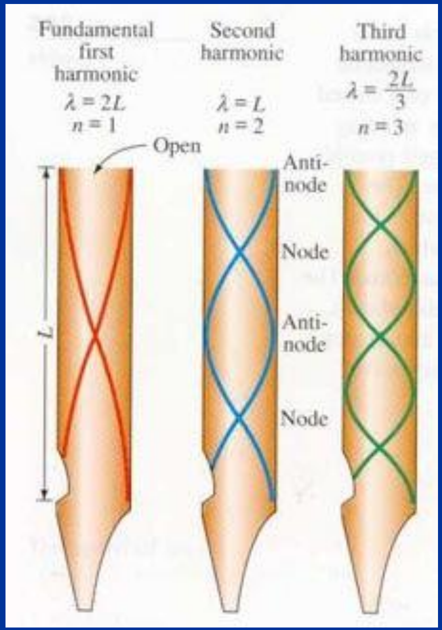
长为 l 的绳上驻波的波长

$$l = n\frac{\lambda_n}{2}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$\nu_n = n\frac{u}{2l}, \qquad n = 1,2,\ldots$$





弦线上的驻波波长、频率不连续。
这些频率称为本征频率，
对应的振动方式称为简正模式。

最低的频率—基频，
其它整倍数频率—谐频。

四、半波损失

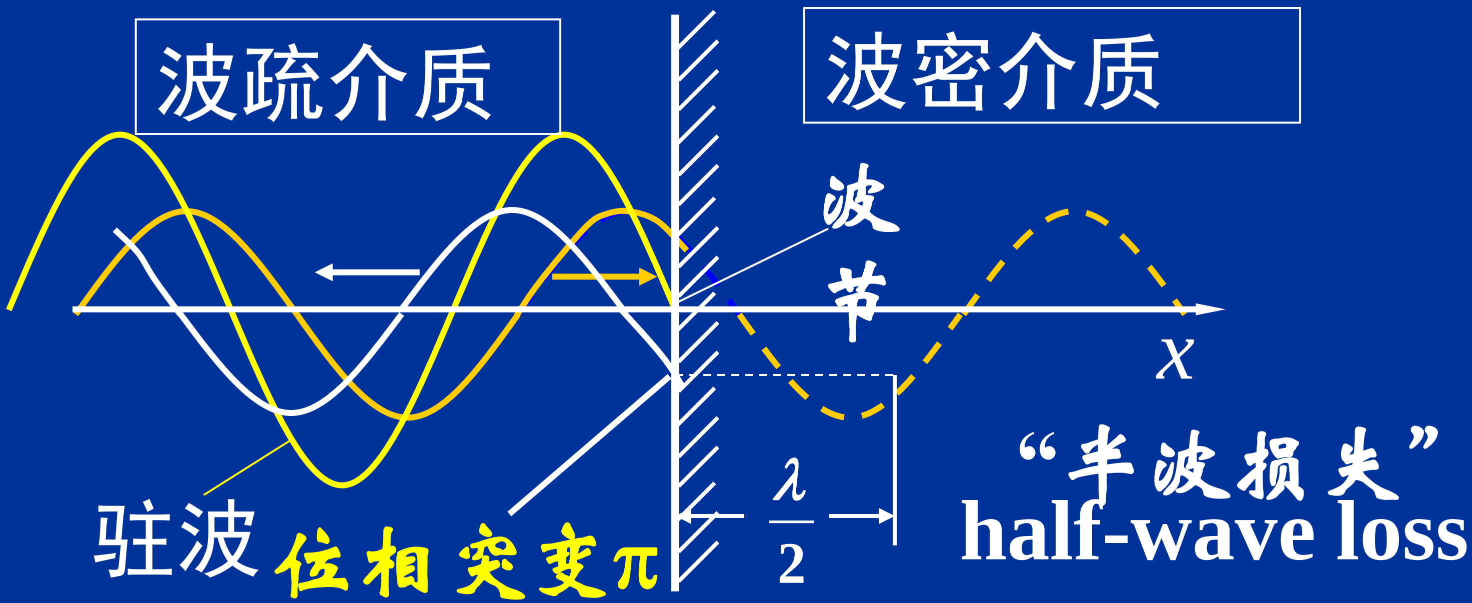
波密介质： *密度ρ与波速u的乘积ρu较大的介质。*

波疏介质： *密度ρ与波速u的乘积ρu较小的介质。*

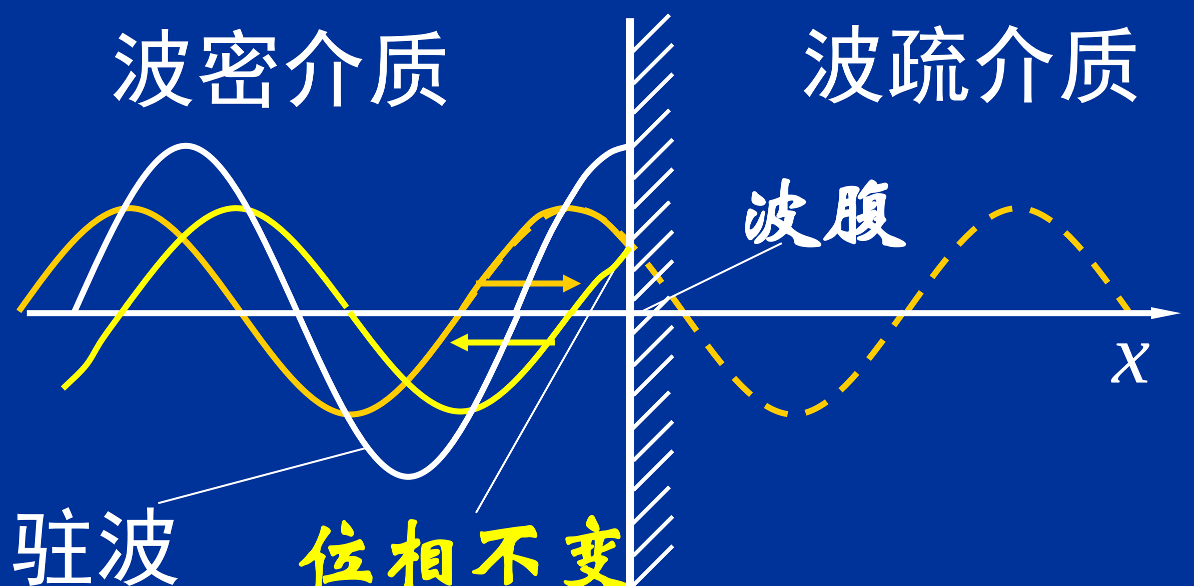
半波损失—当波从波疏介质传播到波密介质分界面并反射时，反射波的振动相位总是与入射波的振动相位相反，即相差为π，反射处总是出现波节。

反之，波由波密介质垂直入射到波疏介质时，反射波的振动相位总是与入射波的振动相位相同，反射处总是出现波腹。

入射波和反射波的波形



波疏介质
波密介质
波
节
x
λ
2
"半波损失"
half-wave loss
驻波
位相突变π



波密介质
波疏介质
波腹
x
驻波
位相不变

例14.6、一沿x轴方向传播的入射波的表达式为：

$$y_1 = A\cos 2\pi(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}} - \frac{x}{\lambda}) \ \ (SI)$$

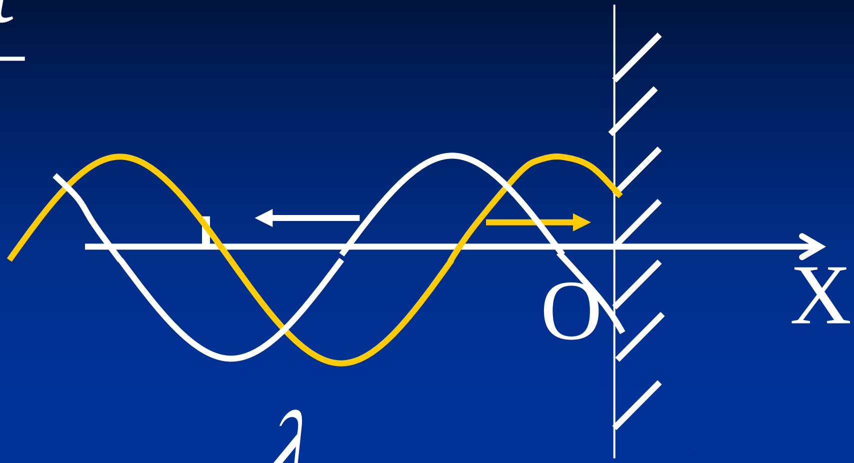
在x= 0处发生反射，反射点为一波节，求(1)反射波的表达式。(2)驻波的表达式。(3)波节波腹的位置坐标

解： 反射波 $y_2 = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + \pi]$

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2})\cos(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \frac{\pi}{2})$$

$$= 2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}$$

$$y = 2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}$$



波节位置 $\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$

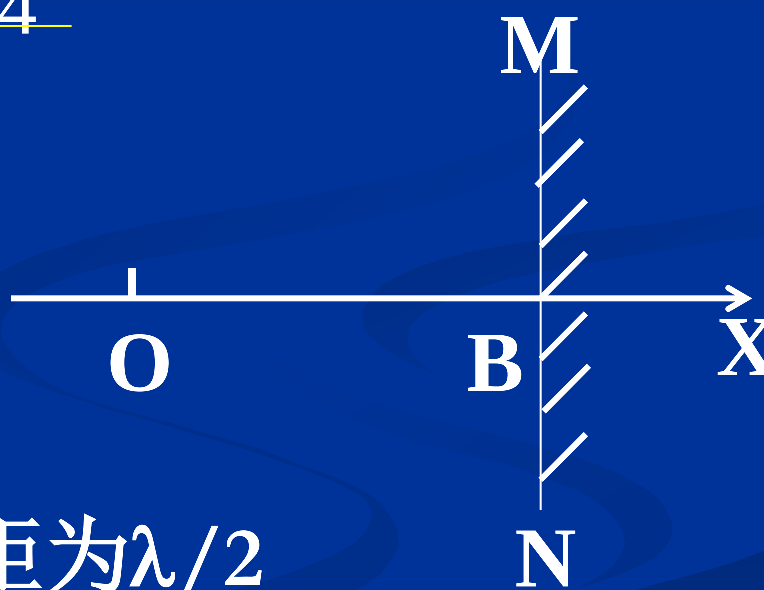
$$\Rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm k\pi \quad x = -k\frac{\lambda}{2}(k = 0,1,2\ldots)$$

波腹位置

$$\left|\sin\frac{2\pi x'}{\lambda}\right| = 1 \Rightarrow \frac{2\pi x'}{\lambda} = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$x' = -(2k+1)\frac{\lambda}{4}(k = 0,1,2\ldots)$$

波动三（39）1. 如图, 在X=0处有一平面余弦波波源, 其振动方程是$Y=A\cos(\omega t+\pi)$, 在距O点为1.25λ处有一波密媒质界面MN, 则O、B间产生的驻波波节的坐标是 $\frac{\lambda}{4};\frac{3\lambda}{4};\frac{5\lambda}{4}$ ，波腹的坐标是 $0;\frac{\lambda}{2};\lambda.$

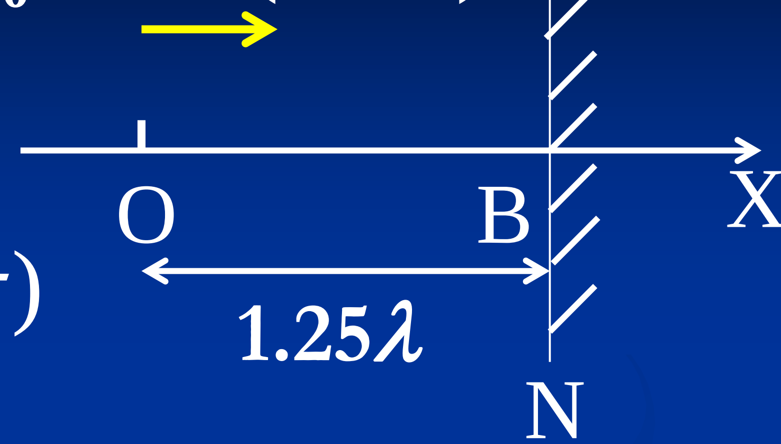


B点为波节，且相邻波节间距为λ/2

相邻波节的中点为波腹，可推测结果。

反射波在O点的初相：

$$Y_0=A\cos(\omega t+\pi)$$



$$\pi-\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2\overline{OB}-\pi=-5\pi$$

$$y_{入}=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\pi)$$

$$y_{反}=A\cos(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x-5\pi)$$

$$\Delta\varphi=\pi-\frac{2\pi}{\lambda}x-(-5\pi+\frac{2\pi}{\lambda}x)=6\pi-\frac{4\pi}{\lambda}x$$

$$=\begin{cases}2k\pi,\text{波腹} & 0;\frac{\lambda}{2};\lambda. \\ (2k+1)\pi,\text{波节} & \frac{\lambda}{4};\frac{3\lambda}{4};\frac{5\lambda}{4}\end{cases}$$

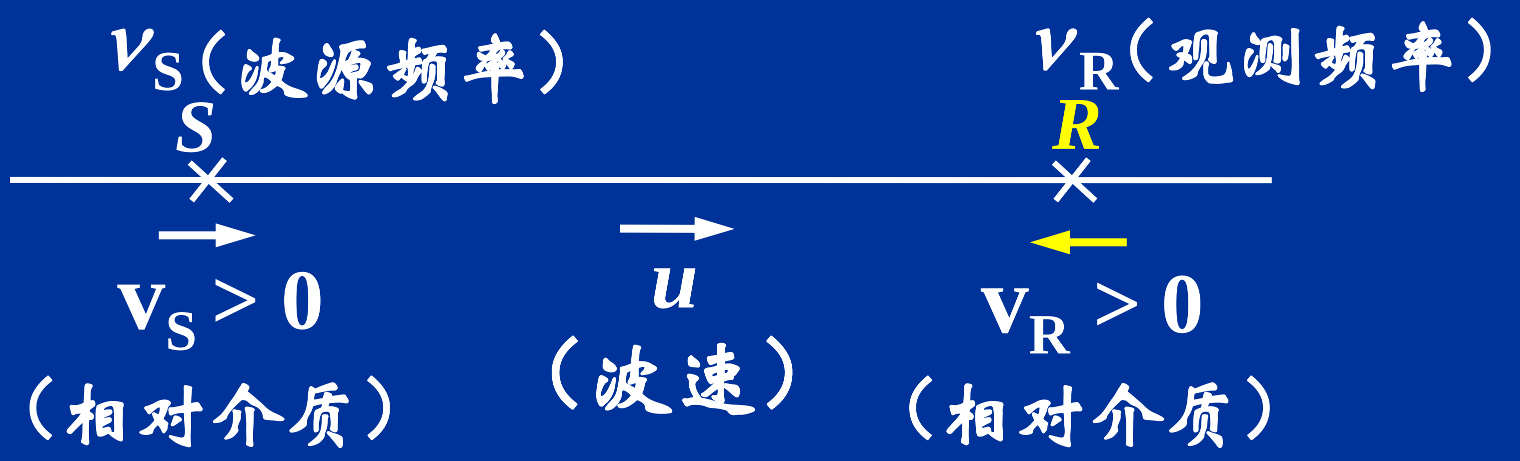
$$0\le x\le 1.25\lambda$$

14.8 多普勒效应(Doppler effect)

由于波源和观察者的运动，而使观测的频率不同于波源频率的现象。

一、机械波的多普勒效应

设运动在波源 S 和观测者R的连线方向上，以二者相向运动的方向为速度的正方向。



一、 波源不动，观察者相对介质运动

若观察者以速度v_R向着波源运动

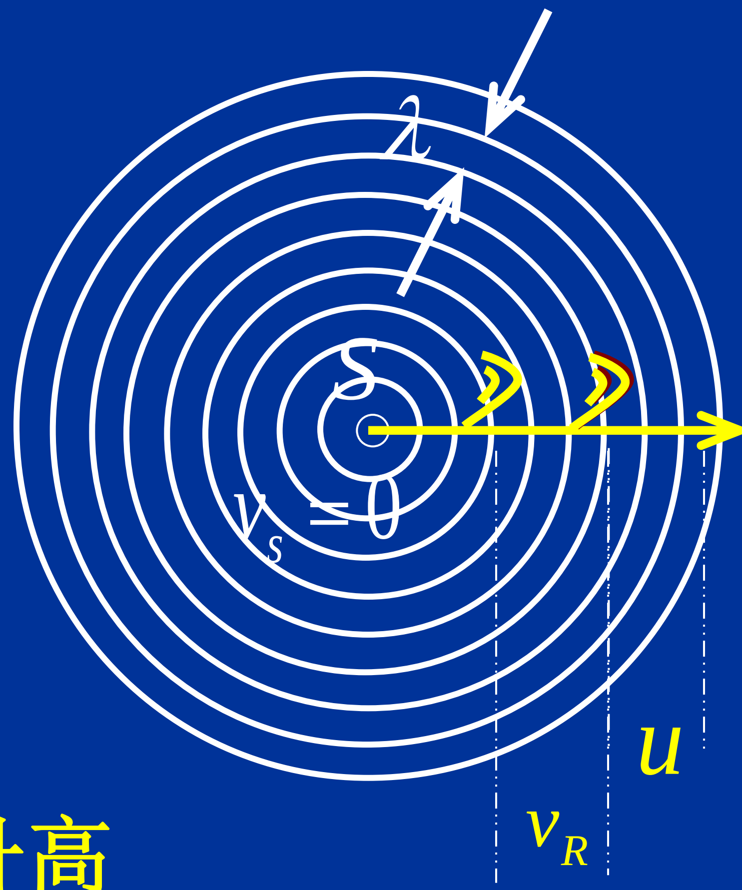
$$\nu_R = \frac{u+v_R}{\lambda}$$

$$= \frac{u+v_R}{u/\nu_w} = \frac{u+v_R}{u}\nu_w$$

$$= \frac{u+v_R}{u}\nu_S$$

$$\nu_R = \frac{u+v_R}{u}\nu_S$$

频率升高



若观察者以速度v_R离开波源运动，同理可得观察者接受到的频率：

$$\nu_R = \frac{u - v_R}{u} \nu_S$$

频率降低

规定观察者向着波源运动时的速度取正，反之取负，则

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u} \nu_S$$

二、 观察者不动，波源相对介质运动

若波源静止时的波长为λ=*uT*

波源运动，在介质中的波长

$$\lambda' = \lambda_S - v_S T_S$$

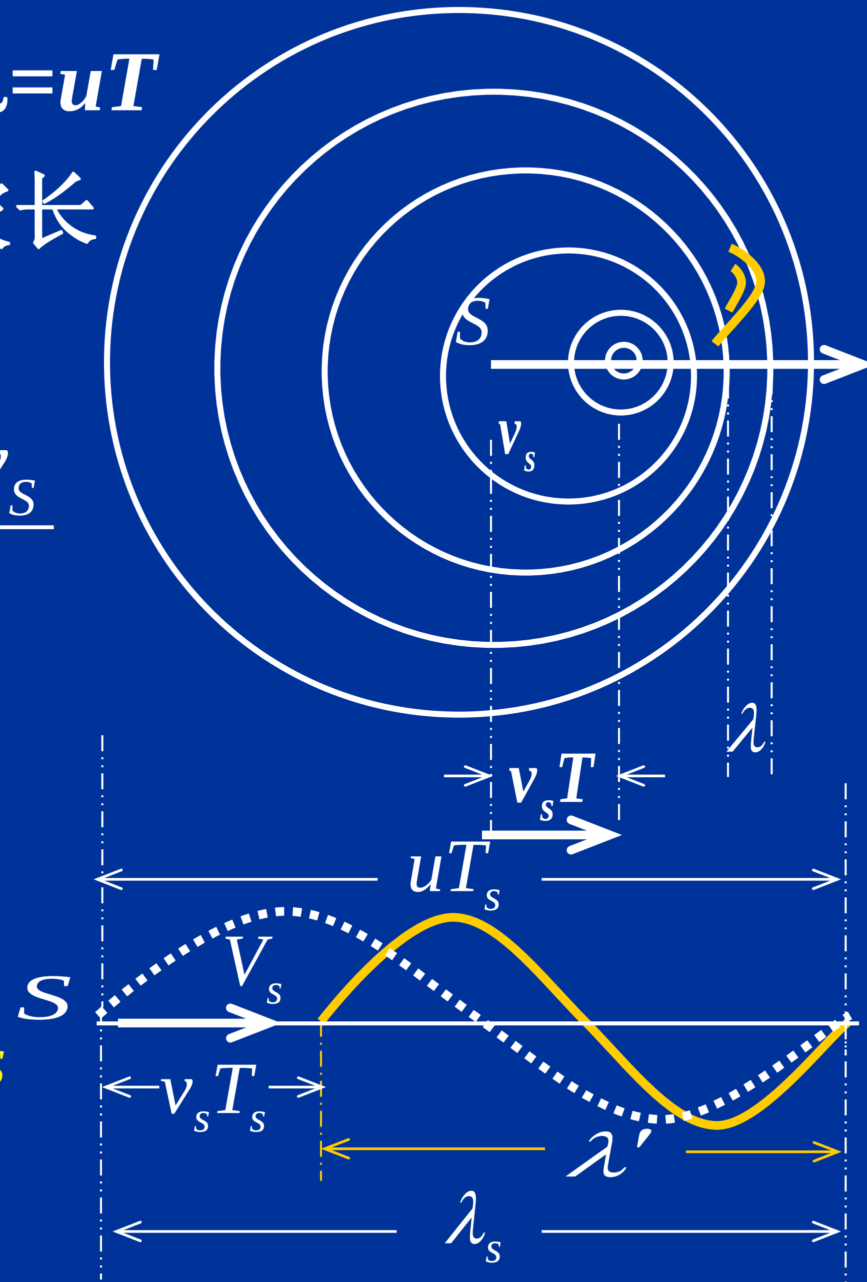
$$= (u - v_S) T_S = \frac{u - v_S}{\nu_S}$$

$$\nu_w = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{u - v_s} \nu_S$$

波的频率为：

$$\nu_R = \nu_w = \frac{u}{u - v_s} \nu_S$$

频率升高



当波源以速度v_s远离观察者运动时

$$\nu_R = \nu_w = \frac{u}{u - v_s}\nu_S$$

频率升高

当波源以速度v_s远离观察者运动时，可得观察者接受到的频率：

$$\nu_R = \frac{u}{u + v_s}\nu_S$$

频率降低

三、波源和观察者同时相对于介质运动

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_s} \nu_S$$

v_R：观察者向着波源运动时为正，观察者背着波源运动时为负；

v_s：波源向着观察者运动时为正，波源背着观察者运动时为负。

波源与观察者相互接近时，频率升高；波源与观察者彼此分离时，频率降低。

- 多普勒效应可测定流体的流速，振动体的振动速度、潜艇的速度和监测车速
- 在医学上，如做超声心动、多普勒血流仪。

例14.7、一警报器发射频率为1000Hz的声波，离观察者向一固定的目标物运动，其速度为10m/s，试问：（1）观察者直接听到从警报器传来声音的频率为多少？（2）观察者听到从目标物反射回来的声音频率为多少？（3）听到拍频是多少？（空气中声速330m/s)

解（1）已知ν =1000Hz，u=330m $\cdot$s^{-1}，警报器背着观察者运动，应取v_s=-10m $\cdot$s^{-1}。因而观察者听到的频率为

$$\nu_1 = \frac{u}{u - v_s}\nu_S = \frac{330}{330-(-10)} \times 1000 = 970.6Hz$$

(2)警报器向着目标运动, v_s=10m ·s^{-1}目标物接收到声波的频率为

$$\nu' = \frac{u}{u - v_s}\nu = \frac{330}{330-10} \times 1000 = 1031.3Hz$$

观察者和目标物相对静止，接收到的反射波频率同上。

(3)拍频：观察者听到警报器的声音和反射的声音频率差

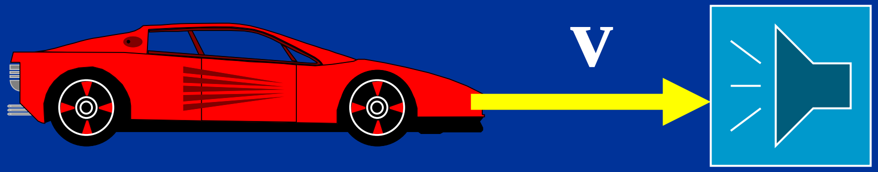
$$\Delta\nu = \nu' - \nu_1 = 60.7Hz$$

例：利用多普勒效应监测汽车行驶的速度。一固定波源发出频率为100kHZ的超声波，当汽车迎着波源驶来时，与波源安装在一起的接收器接收到从汽车反射回来的超声波频率为110kHZ，已知空气中声速为330m/s，求汽车行驶的速度。

解：分为两个过程：

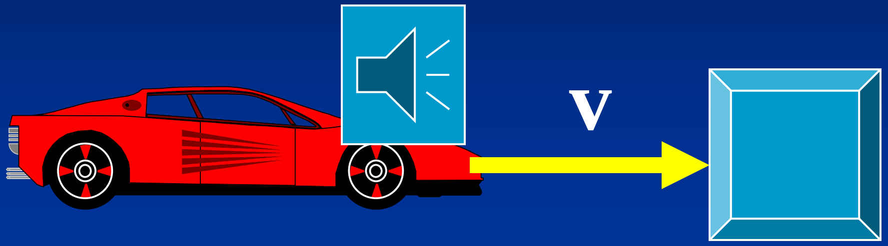
第一步行驶的汽车v_R接收到的波的频率为：

$$\nu_1 = \frac{u + v_R}{u}\nu_S$$



第二步静止的接收器收到行驶的汽车发出的波的频率为：

$$\nu_2 = \frac{u}{u - v_R}\nu_1$$



$$\nu_2 = \frac{u + v_R}{u - v_R}\nu_S$$

$$\Rightarrow v_R = \frac{\nu_2 - \nu_S}{\nu_1 + \nu_S}u$$

$$= \frac{110 - 100}{110 + 100} \times 330 = 15.7 m / s$$