江理17级大一下学期高数期中考试题目及参考答案

$By-$江理竞赛小分队552839044

一、选择题

1.下列方程中,设y_1,y_2是它的解,可以推知y_1+y_2也是它的解得方程是(B)

(A)$y'+p(x)y+q(x)=0$　　(B)$y''+p(x)y'+q(x)y=0$

(C)$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$　　(D)$y''+p(x)y'+q(x)=0$

解析:

(A)若y_1,y_2是$y'+p(x)y+q(x)=0$的解

则$\begin{cases} {y_1}'+p(x)y_1=-q(x) \\ {y_2}'+p(x)y_2=-q(x) \end{cases}$,显然不正确

(B)若y_1,y_2是$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的解

则$\begin{cases} {y_1}''+p(x){y_1}'+q(x)y_1=0 \\ {y_2}''+p(x){y_2}'+q(x)y_2=0 \end{cases}$

$\Rightarrow\ {y_1}''+{y_2}''+p(x)({y_1}'+{y_2}')+q(x)(y_1+y_2)=0$,显然正确

其余两项同理

2.微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$是(B)

(A)可分离变量的微分方程　　(B)齐次微分方程

(C)一阶线性非齐次微分方程　　(D)二阶微分方程

3.二阶齐次线性微分方程$y''+y=0$的通解为$y=$(D)

(A)$C_1\cos x$　　(B)$C_2\sin x$

(C)$(C_1+C_2)(\cos x+\sin x)$　　(D)$C_1\cos x+C_2\sin x$

解析:

$y''+y=0$的特征方程是$r^2+1=0$

解得:$r=\pm i$,因此通解为$C_1\cos x+C_2\sin x$

4.两向量$\vec{a}\cdot\vec{b}$平行的充要条件是(C)

(A)$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}$　　(B)$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

(C)$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$　　(D)$\vec{a}\times\vec{b}=0$

5.设$\vec{a}=(2,4,-1),\vec{b}=(0,-2,2)$,则同时与$\vec{a},\vec{b}$垂直的单位向量$\vec{n}=$(D)

(A)$6\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$　　(B)$-6\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$

(C) $\frac{1}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|}\left(6\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}\right)$ (D) $\frac{\pm 1}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}\left(6\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}\right)$

6.若平面$Ax+By+Cz+D=0$过x轴,则(A)

(A)$A=D=0$ (B)$B=0,C\neq 0$

(C)$B\neq 0,C=0$ (D)$B=C=0$

7.设$f(x,y)=x^2+(y-3)\arctan\frac{x}{y}$,则$f_x(2,3)=$(D)

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

解析:

$$f_x(2,3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h,3)-f(2,3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=4$$

8.设$z=x^2y+3xy^2+x$,则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$(C)

(A)$x+3y$ (B)$2x+3y$

(C)$2x+6y$ (D)$2x+6y+1$

解析:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+3y^2+1,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x+6y$$

9.若$z=\mathrm{e}^{-x+y}$,则$\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=$(A)

(A)$-\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ (B)$\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

(C)$\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ (D)$-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

解析:

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-x+y},\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,1)}=-1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{-x+y},\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,1)}=1$$

因此$\mathrm{d}z=-\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

二、填空题

1.微分方程$(y'')^3+\sin xy'=0$的阶数为__2__

2.方程$y\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y$的通解为$y=$__$Cx$__

解析:

$y\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln C \Rightarrow y = Cx$

3.微分方程$y^{(4)}\sin x - y' = e^x$的通解中所含相互独立的任意常数的个数为 $\underline{\ 4\ }$

4.设向量$\vec{a}$的方向角为α,β,γ,满足$\cos\alpha = 1$时,向量$\vec{\alpha}$垂直于 $\underline{\ yoz\ }$ 坐标面

5.过点$(1,0,1)$及以$(2,2,4)$为方向向量的直线的参数方程是

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 2t \qquad (t\text{为参数}) \\ z = 4t+1 \end{cases}$$

6.圆锥面$z = \sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=2$所围立体在xoy平面上投影曲线方程是

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

7.函数$z = \ln(x^2+y^2-4)$的定义域D是 $\underline{\ \{(x,y)|x^2+y^2>4\}\ }$

8.设$z = 3x^2y^2 + e^{x^2y}$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ $\underline{\ 6xy^2 + 2xy\,e^{x^2y}\ }$

9.设$z = \ln(2x+y)$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} =$ $\underline{\ -\dfrac{2}{(2x+y)^2}\ }$

解析:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{2x+y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{2}{(2x+y)^2}$$

三、综合题

1.求方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$的通解

解析:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$$

运用一阶线性非齐次方程公式

$$= e^{\frac{1}{x}}x^2\left[\int e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x + C\right] = e^{\frac{1}{x}}x^2\left[\int e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right) + C\right]$$

$=e^{\frac{1}{x}}x^2\left[e^{-\frac{1}{x}}+C\right]=x^2+Cx^2e^{\frac{1}{x}}$

2.求方程$y''-2y'-3y=3x+1$的通解

解析:

方程对应的齐次方程为$y''-2y'-3y=0$

其特征方程为$r^2-2r-3=0$,解得:$r_1=-1,r_2=3$

因此齐次的通解为$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$

设特解$y^*=ax+b$,代入方程得:

$-2a-3(ax+b)=3x+1$,解得:$a=-1,b=\frac{1}{3}$

3.设$z=e^{u+v}$,而$u=xy,v=x-y$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

解析:

$z=e^{xy+x-y},\frac{\partial z}{\partial x}=(y+1)e^{xy+x-y},\frac{\partial z}{\partial y}=(x-1)e^{xy+x-y}$

4.求曲面$2x^2+3y^2+z^2=6$在点$(1,1,1)$处的切平面和法线方程

解析:

设$F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$

$F_x=4x,F_y=6y,F_z=2z\Rightarrow F_x\big|_{(1,1,1)}=4,F_y\big|_{(1,1,1)}=6,F_z\big|_{(1,1,1)}=2$

切平面方程:$4(x-1)+6(y-1)+2(z-1)=0$

法线方程:$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-1}{2}$

5.求函数$f(x,y)=x+y-x^2-y^2$在曲线$x^2+y^2=1$上的最大值和最小值

解析:

此题99%出错了,应改为在曲线$x^2+y^2=1$所围的区域及曲线上的最值

$f_x(x,y)=1-2x\overset{令}{=\!=}0,f_y(x,y)=1-2y\overset{令}{=\!=}0$,解得$x=y=\frac{1}{2}$

$f_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-2,f_{yy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-2,f_{xy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=0$

$f_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot f_{yy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-f_{xy}{}^2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)>0$且$f_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)<0$

因此$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$为$f(x,y)$在区域内的极大值,极大值为$\frac{1}{2}$

考虑边界点,联立$\begin{cases}f(x,y)=x+y-x^2-y^2\\x^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow f(x,y)=x+y-1$

易得:在边界上$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$为$f(x,y)$的最大值点,$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}，\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$为$f(x,y)$的最小值点

综上所述:在区域内及曲线上的最大值为$\frac{1}{2}$,最小值为$-\sqrt{2}-1$