第十四讲 点、线、面的位置关系

一、点到直线和平面的距离

二、平面与平面的关系

三、直线与平面的关系

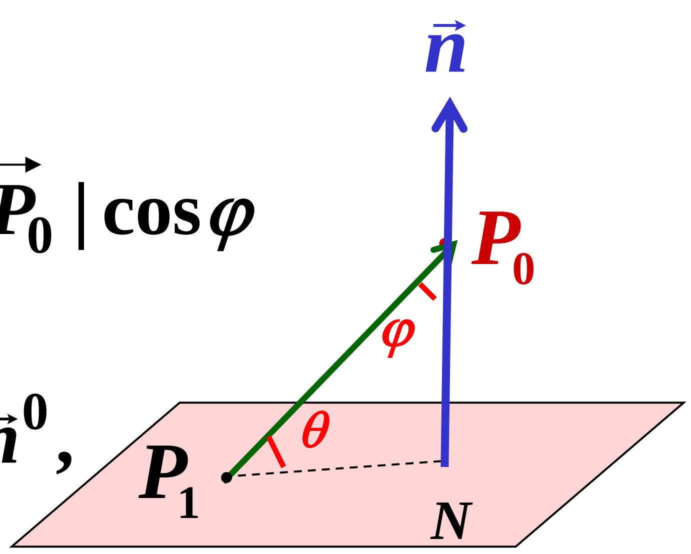
四、直线与直线的关系

一、点到直线和平面的距离

1. 点到平面的距离

例1 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面 $Ax+By+Cz=D$ 外一点，求 P_0 到平面的距离.

解 对$\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$,



$$d = |\overrightarrow{NP_0}| = |\overrightarrow{P_1P_0}|\sin\theta = |\overrightarrow{P_1P_0}|\cos\varphi$$

$$= \left|\overrightarrow{P_1P_0}\right| \cdot \frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}^0}{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right| \cdot \left|\vec{n}^0\right|} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}^0,$$

$$\because \overrightarrow{P_1P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1),$$

$$\vec{n}^0 = \pm\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

$$\therefore d = \left|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}^0\right|$$

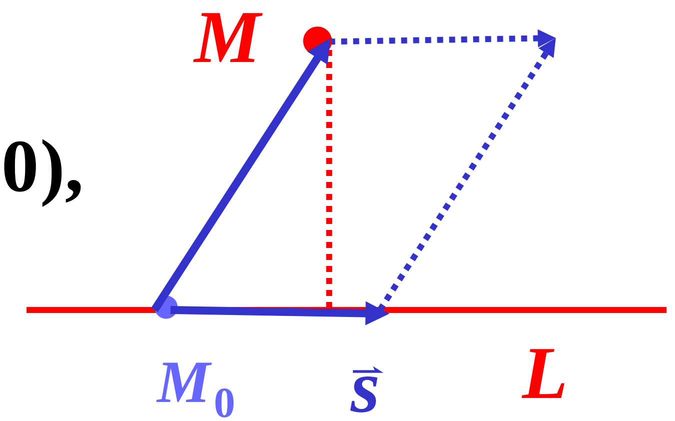
$$= \left|\frac{A(x_0 - x_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

$$= \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$ **点到平面的距离公式**

2. 点到直线的距离

例2 求一点$M(2,1,3)$到直线L: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$的距离.

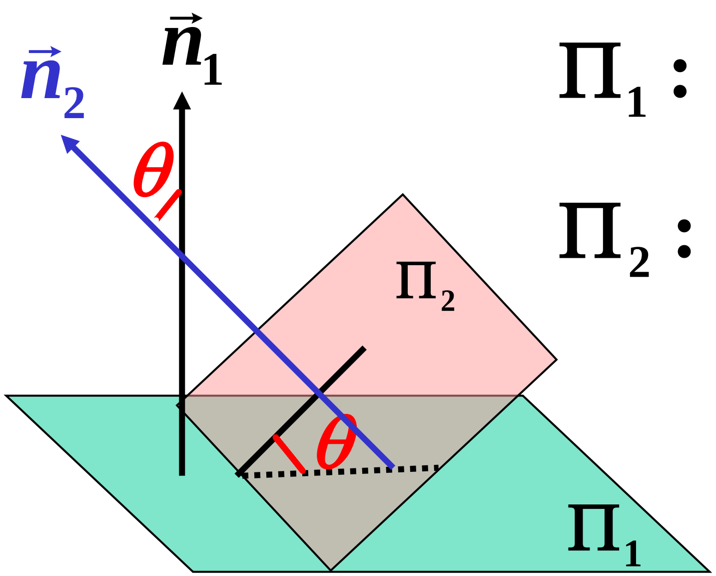


解: 在直线上L任取一点 $M_0(-1,1,0)$,

则$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|}=\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{14}}=\frac{6\sqrt{21}}{7}.$$

二、平面与平面的关系

定义 两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.（取锐角）



$$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1),$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2} + C_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2} + C_2^{\ 2}}}$$

两平面夹角余弦公式

两平面位置的特殊情况：

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

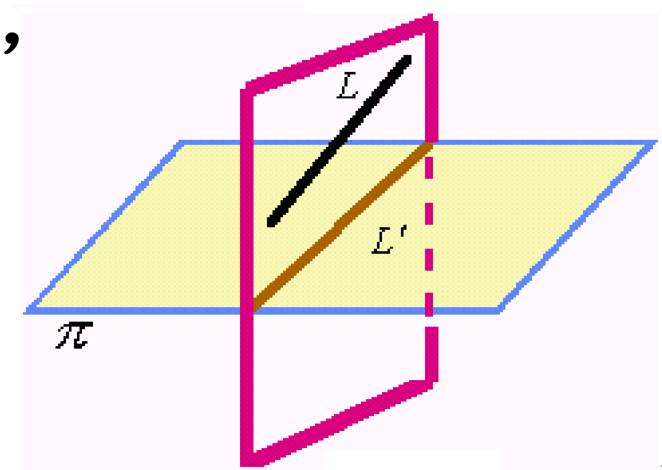
(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}.$

例3 求直线 $L:\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面

$\pi: x+y+z=0$ 上的投影直线 L' 的方程.

解: 首先求出直线L在平面π上的投影柱面方程.

由于投影柱面过L且与π垂直,



所以可设投影柱面方程为

$$x+y-z-1+$$
$$+\lambda(x-y+z+1)=0,$$

即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0,$

平面π: $x+y+z=0$

即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0,$

由于投影柱面与所给平面垂直，故

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$$

整理得 $\lambda+1=0$, 解得$\lambda=-1.$

故所求投影柱面方程为

$2y-2z-2=0,$ 即 $y-z-1=0,$

从而，所求投影直线的方程为:

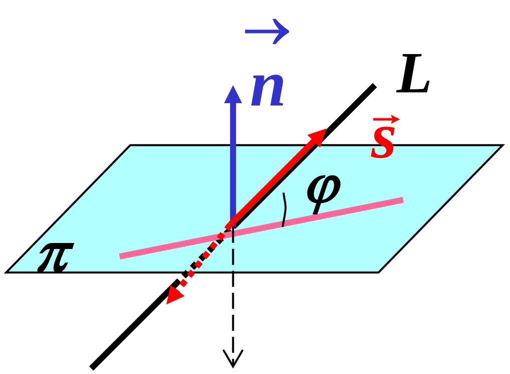
$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$$

三、直线与平面的夹角

定义 直线和它在平面上的投影直线的夹角 φ 称为直线与平面的夹角，规定 $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

若 $\pi: \quad Ax + By + Cz + D = 0, \quad \vec{n} = (A, B, C),$

$$L: \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$



$\vec{s} = (m, n, p),$

则 $(\widehat{\vec{s}, \vec{n}}) = \dfrac{\pi}{2} - \varphi,$ 或 $(\widehat{\vec{s}, \vec{n}}) = \dfrac{\pi}{2} + \varphi,$

$\therefore \cos(\widehat{\vec{s}, \vec{n}}) = \pm \sin \varphi,$

$$\therefore \cos(\widehat{\vec{s},\vec{n}}) = \pm \sin\varphi,$$

$$\therefore \sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

直线与平面的特殊位置关系:

(1) $L \perp \pi \iff \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}.$

(2) $L // \pi \iff Am + Bn + Cp = 0.$

例 4 设直线$L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面$\pi: x-y+2z=3$，求直线与平面的夹角.

解 $\vec{n}=\{1,-1,2\}$, $\vec{s}=\{2,-1,2\}$,

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$=\frac{|1\times 2+(-1)\times(-1)+2\times 2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

$\therefore$ $\varphi=\arcsin\dfrac{7}{3\sqrt{6}}$ 为所求夹角.

四、直线与直线的关系

1.定义 两直线的方向向量的夹角称为两直线的夹角（规定为锐角）.

若直线 L_1: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$,

直线 L_2: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$,

则 $\cos(\widehat{L_1,L_2})=\dfrac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$.

两直线的特殊位置关系：

(1) $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$

(2) $L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}.$

2. 异面直线的判定：

若直线 $L_1: \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1},$

直线 $L_2: \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2},$

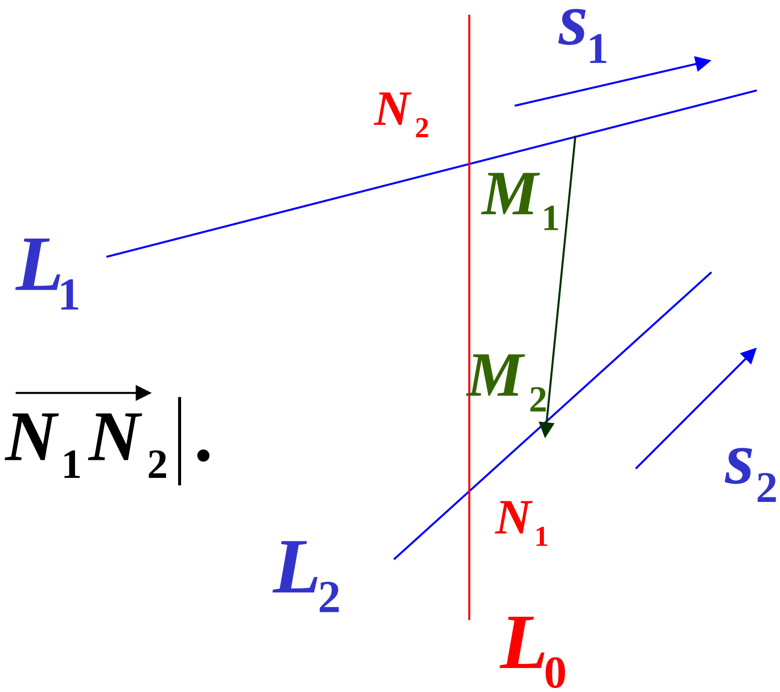
$M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是 L_1 和 L_2 上两个点

根据三向量共面的条件，我们有下面命题：

命题2.4.11 L_1 和 L_2 是异面直线当且仅当

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

当 L_1 和 L_2 是异面直线时,如何求它们之间的最短距离和公垂线?



如图, 设公垂线为 L_0 ,

则它们的最短距离为 $d=\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right|$.

设 L_0 的方向向量为 s_0 ,

则可取 $s_0 = s_1 \times s_2$，于是

$$d=\left|\Pr j_{\overrightarrow{N_1N_2}}\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\Pr j_{s_0}\overrightarrow{M_1M_2}\right|$$

$$=\frac{\left|s_0\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|s_0\right|}=\frac{\left|(s_1\times s_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|s_1\times s_2\right|}.$$

例5 证明直线 $L_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+2}{-3}$ 和直线 $L_2:$ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ 是异面直线，并求它们的距离.

证明: $M_1(1,2,-2)$, $M_2(1,1,-1)$ 分别是 L_1 和 L_2 上的点，于是 $\overrightarrow{M_1M_2}=(0,-1,1)$. 因为

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

所以 L_1 和 L_2 是异面直线.

L_1 和 L_2 的公垂线方向向量 $s_0 = s_1 \times s_2 = (5,-8,-9)$,

所以 L_1 和 L_2 的距离

$$d = \frac{\left| s_0 \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \right|}{\left| s_0 \right|} = \frac{1}{\sqrt{5^2 + (-8)^2 + (-9)^2}} = \frac{1}{\sqrt{170}}.$$

注: 若两条直线共线, 则它们的距离为零;

若两条直线平行, 则它们的距离为其中一条直线上任一点到另一条直线的距离, 此时可用点到直线的距离公式来求.

五、直线与平面的交点

例6 求直线 $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 与平面

$x+2y+2z+6=0$ 的交点.

解 所给直线的参数方程为 $\begin{cases} x=3t-3 \\ y=-2t-2, \\ z=t \end{cases}$

联立参数方程与平面方程解得 $t=1$，故所求

交点为 $(0,-4,1)$.

例7 求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $L: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

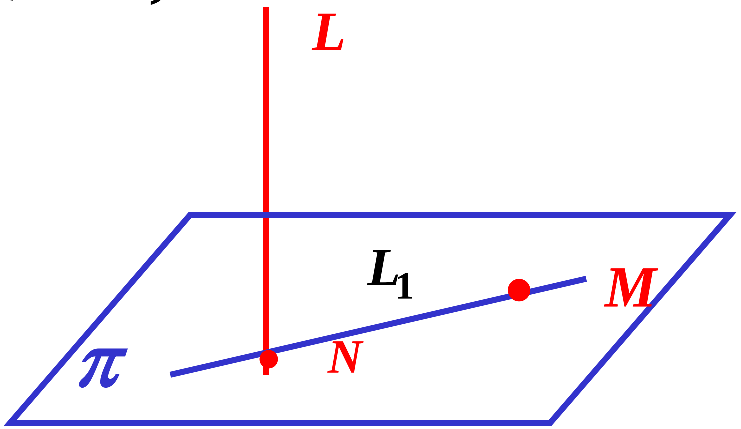
解 先作过点M且与已知直线L垂直的平面 π:

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0.$$

再求已知直线L与该平面的交点N,

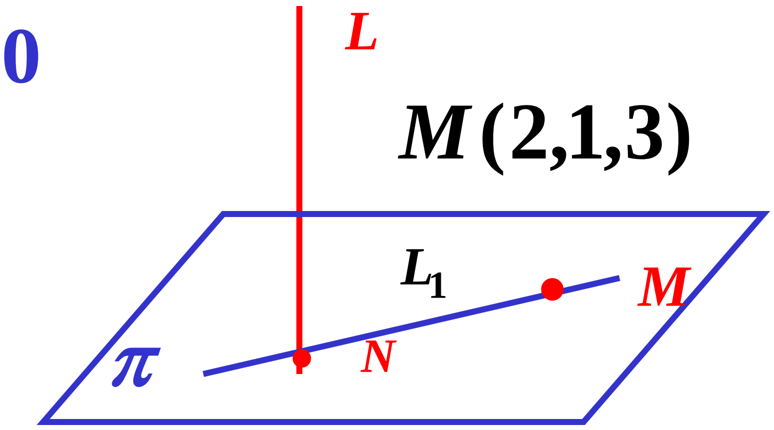
令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t,$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$$



$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

$$\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = 2t+1 \\ z = -t \end{cases}$$



代入平面方程得 $t=\dfrac{3}{7}$，得交点为 $N\left(\dfrac{2}{7},\ \dfrac{13}{7},\ -\dfrac{3}{7}\right)$,

取所求直线的方向向量为：

$$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{2}{7}-2,\ \frac{13}{7}-1,\ -\frac{3}{7}-3\right)=\left(-\frac{12}{7},\ \frac{6}{7},\ -\frac{24}{7}\right),$$

故所求直线方程为 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$.