第二章习题及解答

2.1 一个平行板真空二极管内的电荷体密度为$\rho=-\dfrac{4}{9}\varepsilon_0U_0d^{-4/3}x^{-2/3}$，式中阴极板位于$x=0$，阳极板位于$x=d$，极间电压为$U_0$。如果$U_0=40\,\mathrm{V}$、$d=1\,\mathrm{cm}$、横截面$S=10\,\mathrm{cm}^2$，求：（1）$x=0$和$x=d$区域内的总电荷量$Q$；（2）$x=d/2$和$x=d$区域内的总电荷量$Q'$。

解 （1）
$$Q=\int_\tau\rho\,\mathrm{d}\tau=\int_0^d(-\frac{4}{9}\varepsilon_0U_0d^{-4/3}x^{-2/3})S\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{3d}\varepsilon_0U_0S=-4.72\times10^{-11}\,\mathrm{C}$$

（2）
$$Q'=\int_{\tau'}\rho\,\mathrm{d}\tau=\int_{d/2}^{d}(-\frac{4}{9}\varepsilon_0U_0d^{-4/3}x^{-2/3})S\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{3d}(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}})\varepsilon_0U_0S=-0.97\times10^{-11}\,\mathrm{C}$$

2.2 一个体密度为$\rho=2.32\times10^{-7}\,\mathrm{C/m^3}$的质子束，通过$1000\,\mathrm{V}$的电压加速后形成等速的质子束，质子束内的电荷均匀分布，束直径为$2\,\mathrm{mm}$，束外没有电荷分布，试求电流密度和电流。

解 质子的质量$m=1.7\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$、电量$q=1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$。由
$$\frac{1}{2}mv^2=qU$$
得
$$v=\sqrt{2mqU}=1.37\times10^6\quad\mathrm{m/s}$$
故
$$J=\rho v=0.318\qquad\mathrm{A/m^2}$$
$$I=J\pi(d/2)^2=10^{-6}\quad\mathrm{A}$$

2.3 一个半径为a的球体内均匀分布总电荷量为Q的电荷，球体以匀角速度ω绕一个直径旋转，求球内的电流密度。

解 以球心为坐标原点，转轴（一直径）为z轴。设球内任一点P的位置矢量为$\boldsymbol{r}$，且$\boldsymbol{r}$与z轴的夹角为θ，则P点的线速度为
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_\phi\omega r\sin\theta$$
球内的电荷体密度为
$$\rho=\frac{Q}{4\pi a^3/3}$$
故
$$\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{Q}{4\pi a^3/3}\omega r\sin\theta=\boldsymbol{e}_\phi\frac{3Q\omega}{4\pi a^3}r\sin\theta$$

2.4 一个半径为a的导体球带总电荷量为Q，同样以匀角速度ω绕一个直径旋转，求球表面的面电流密度。

解 以球心为坐标原点，转轴（一直径）为z轴。设球面上任一点P的位置矢量为$\boldsymbol{r}$，且$\boldsymbol{r}$与z轴的夹角为θ，则P点的线速度为
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_\phi\omega a\sin\theta$$
球面的上电荷面密度为
$$\sigma=\frac{Q}{4\pi a^2}$$

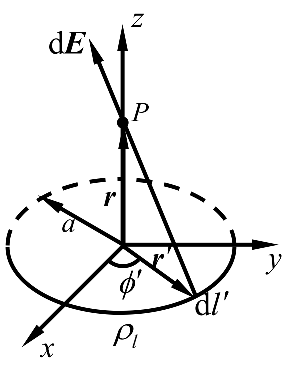
故
$$\boldsymbol{J}_S=\sigma\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{Q}{4\pi a^2}\omega a\sin\theta=\boldsymbol{e}_\phi\frac{Q\omega}{4\pi a}\sin\theta$$

2.5 两点电荷 $q_1=8\text{C}$ 位于 z 轴上 $z=4$ 处，$q_2=-4\text{C}$ 位于 y 轴上 $y=4$ 处，求 $(4,0,0)$ 处的电场强度。

解 电荷 q_1 在 $(4,0,0)$ 处产生的电场为
$$\boldsymbol{E}_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1'\right|^3}=\frac{2}{\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_z4}{(4\sqrt{2})^3}$$
电荷 q_2 在 $(4,0,0)$ 处产生的电场为
$$\boldsymbol{E}_2=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2'\right|^3}=-\frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_y4}{(4\sqrt{2})^3}$$
故 $(4,0,0)$ 处的电场为
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=\frac{\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z2}{32\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}$$

2.6 一个半圆环上均匀分布线电荷 ρ_l，求垂直于圆平面的轴线上 $z=a$ 处的电场强度 $\boldsymbol{E}(0,0,a)$，设半圆环的半径也为 a，如题 2.6 图所示。

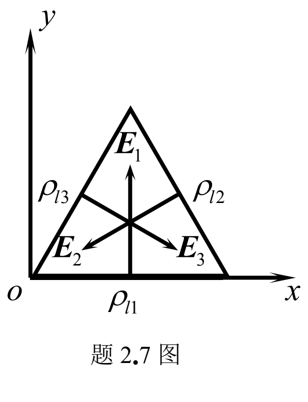
解 半圆环上的电荷元 $\rho_l\,\mathrm{d}l'=\rho_l a\,\mathrm{d}\phi'$ 在轴线上 $z=a$ 处的电场强度为
$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{\rho_l a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{(\sqrt{2}a)^3}\mathrm{d}\phi'=$$
$$\frac{\rho_l}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{e}_z-(\boldsymbol{e}_x\cos\phi'+\boldsymbol{e}_y\sin\phi')}{a}\mathrm{d}\phi'$$
在半圆环上对上式积分，得到轴线上 $z=a$ 处的电场强度为
$$\boldsymbol{E}(0,0,a)=\int\mathrm{d}\,\boldsymbol{E}=$$
$$\frac{\rho_l}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[\boldsymbol{e}_z-(\boldsymbol{e}_x\cos\phi'+\boldsymbol{e}_y\sin\phi')]\mathrm{d}\phi'=\frac{\rho_l(\boldsymbol{e}_z\pi-\boldsymbol{e}_x2)}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a}$$



题 2.6 图

2.7 三根长度均为 L，均匀带电荷密度分别为 ρ_{l1}、ρ_{l2} 和 ρ_{l3} 地线电荷构成等边三角形。设 $\rho_{l1}=2\rho_{l2}=2\rho_{l3}$，计算三角形中心处的电场强度。

解 建立题 2.7 图所示的坐标系。三角形中心到各边的距离为
$$d=\frac{L}{2}\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{6}L$$
则
$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_y\frac{\rho_{l1}}{4\pi\varepsilon_0 d}(\cos30^\circ-\cos150^\circ)=\boldsymbol{e}_y\frac{3\rho_{l1}}{2\pi\varepsilon_0 L}$$
$$\boldsymbol{E}_2=-(\boldsymbol{e}_x\cos30^\circ+\boldsymbol{e}_y\sin30^\circ)\frac{3\rho_{l2}}{2\pi\varepsilon_0 L}=-(\boldsymbol{e}_x\sqrt{3}+\boldsymbol{e}_y)\frac{3\rho_l}{8\pi\varepsilon_0}$$



题 2.7 图

$$\boldsymbol{E}_3=(\boldsymbol{e}_x\cos30^\circ-\boldsymbol{e}_y\sin30^\circ)\frac{3\rho_{l3}}{2\pi\varepsilon_0L}=(\boldsymbol{e}_x\sqrt{3}-\boldsymbol{e}_y)\frac{3\rho_{l1}}{8\pi\varepsilon_0L}$$

故等边三角形中心处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3=$$

$$\boldsymbol{e}_y\frac{3\rho_{l1}}{2\pi\varepsilon_0L}-(\boldsymbol{e}_x\sqrt{3}+\boldsymbol{e}_y)\frac{3\rho_{l1}}{8\pi\varepsilon_0L}+(\boldsymbol{e}_x\sqrt{3}-\boldsymbol{e}_y)\frac{3\rho_{l1}}{8\pi\varepsilon_0L}=\boldsymbol{e}_y\frac{3\rho_{l1}}{4\pi\varepsilon_0L}$$

2.8 一点电荷 $+q$ 位于 $(-a,0,0)$ 处，另一点电荷 $-2q$ 位于 $(a,0,0)$ 处，空间有没有电场强度 $\boldsymbol{E}=0$ 的点？

解 电荷 $+q$ 在 (x,y,z) 处产生的电场为

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{e}_x(x+a)+\boldsymbol{e}_yy+\boldsymbol{e}_zz}{[(x+a)^2+y^2+z^2]^{3/2}}$$

电荷 $-2q$ 在 (x,y,z) 处产生的电场为

$$\boldsymbol{E}_2=-\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{e}_x(x-a)+\boldsymbol{e}_yy+\boldsymbol{e}_zz}{[(x-a)^2+y^2+z^2]^{3/2}}$$

(x,y,z) 处的电场则为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$。令 $\boldsymbol{E}=0$，则有

$$\frac{\boldsymbol{e}_x(x+a)+\boldsymbol{e}_yy+\boldsymbol{e}_zz}{[(x+a)^2+y^2+z^2]^{3/2}}=\frac{2[\boldsymbol{e}_x(x-a)+\boldsymbol{e}_yy+\boldsymbol{e}_zz]}{[(x-a)^2+y^2+z^2]^{3/2}}$$

由上式两端对应分量相等，可得到

$$(x+a)[(x-a)^2+y^2+z^2]^{3/2}=2(x-a)[(x+a)^2+y^2+z^2]^{3/2} \qquad ①$$

$$y[(x-a)^2+y^2+z^2]^{3/2}=2y[(x+a)^2+y^2+z^2]^{3/2} \qquad ②$$

$$z[(x-a)^2+y^2+z^2]^{3/2}=2z[(x+a)^2+y^2+z^2]^{3/2} \qquad ③$$

当 $y\neq0$ 或 $z\neq0$ 时，将式②或式③代入式①，得 $a=0$。所以，当 $y\neq0$ 或 $z\neq0$ 时无解；

当 $y=0$ 且 $z=0$ 时，由式①，有

$$(x+a)(x-a)^3=2(x-a)(x+a)^3$$

解得

$$x=(-3\pm2\sqrt{2})a$$

但 $x=-3a+2\sqrt{2}a$ 不合题意，故仅在 $(-3a-2\sqrt{2}a,0,0)$ 处电场强度 $\boldsymbol{E}=0$。

2．9 一个很薄的无限大导电带电面，电荷面密度为 σ。证明：垂直于平面的 z 轴上 $z=z_0$ 处的电场强度 E 中，有一半是有平面上半径为 $\sqrt{3}z_0$ 的圆内的电荷产生的。

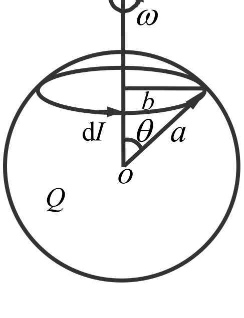
解 半径为 r、电荷线密度为 $\rho_l=\sigma\,\mathrm{d}r$ 的带电细圆环在 z 轴上 $z=z_0$ 处的电场强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_z\frac{r\sigma z_0\,\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0(r^2+z_0^2)^{3/2}}$$

故整个导电带电面在 z 轴上 $z=z_0$ 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_z\int_0^\infty\frac{r\sigma z_0\,\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0(r^2+z_0^2)^{3/2}}=-\boldsymbol{e}_z\frac{\sigma z_0}{2\varepsilon_0}\frac{1}{(r^2+z_0^2)^{1/2}}\Bigg|_0^\infty=\boldsymbol{e}_z\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

而半径为 $\sqrt{3}z_0$ 的圆内的电荷产生在 z 轴上 $z=z_0$ 处的电场强度为



题 2.10 图

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{e}_z \int_0^{\sqrt{3}z_0} \frac{r\sigma z_0 \,\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0 (r^2+z_0^2)^{3/2}} = -\boldsymbol{e}_z \frac{\sigma z_0}{2\varepsilon_0} \frac{1}{(r^2+z_0^2)^{1/2}}\Bigg|_0^{\sqrt{3}z_0} = \boldsymbol{e}_z \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}$$

2.10 一个半径为a的导体球带电荷量为Q，当球体以均匀角速度ω绕一个直径旋转，如题2.10图所示。求球心处的磁感应强度$\boldsymbol{B}$。

解 球面上的电荷面密度为

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

当球体以均匀角速度ω绕一个直径旋转时，球面上位置矢量$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_r a$点处的电流面密度为

$$\boldsymbol{J}_S = \sigma \boldsymbol{v} = \sigma \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \sigma \boldsymbol{e}_z \omega \times \boldsymbol{e}_r a =$$

$$\boldsymbol{e}_\phi \omega\sigma a \sin\theta = \boldsymbol{e}_\phi \frac{\omega Q}{4\pi a}\sin\theta$$

将球面划分为无数个宽度为$\mathrm{d}l = a\,\mathrm{d}\theta$的细圆环，则球面上任一个宽度为$\mathrm{d}l = a\,\mathrm{d}\theta$细圆环的电流为 $\mathrm{d}I = J_S\,\mathrm{d}l = \dfrac{\omega Q}{4\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$

细圆环的半径为$b = a\sin\theta$，圆环平面到球心的距离$d = a\cos\theta$，利用电流圆环的轴线上的磁场公式，则该细圆环电流在球心处产生的磁场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_z \frac{\mu_0 b^2\,\mathrm{d}I}{2(b^2+d^2)^{3/2}} = \boldsymbol{e}_z \frac{\mu_0 \omega Q a^2 \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta}{8\pi(a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)^{3/2}} = \boldsymbol{e}_z \frac{\mu_0\omega Q \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta}{8\pi a}$$

故整个球面电流在球心处产生的磁场为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_z \displaystyle\int_0^\pi \frac{\mu_0\omega Q\sin^3\theta}{8\pi a}\mathrm{d}\theta = \boldsymbol{e}_z \frac{\mu_0\omega Q}{6\pi a}$

2.11 两个半径为b、同轴的相同线圈，各有N匝，相互隔开距离为d，如题2.11图所示。电流I以相同的方向流过这两个线圈。

（1）求这两个线圈中心点处的磁感应强度$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_x B_x$；

（2）证明：在中点处$\mathrm{d}B_x/\mathrm{d}x$等于零；

（3）求出b与d之间的关系，使中点处$\mathrm{d}^2 B_x/\mathrm{d}x^2$也等于零。

解 （1）由细圆环电流在其轴线上的磁感应强度 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_z \dfrac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$

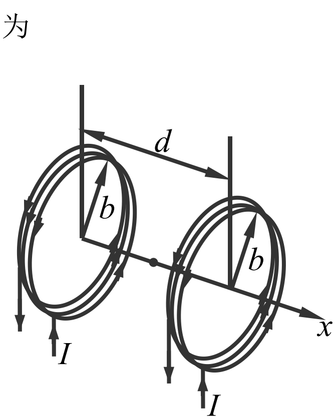
得到两个线圈中心点处的磁感应强度为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_x \dfrac{\mu_0 N I b^2}{(b^2+d^2/4)^{3/2}}$

（2）两线圈的电流在其轴线上$x\ (0<x<d)$处的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_x \left\{ \frac{\mu_0 N I b^2}{2(b^2+x^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 N I b^2}{2[b^2+(d-x)^2]^{3/2}} \right\}$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}B_x}{\mathrm{d}x} = -\frac{3\mu_0 N I b^2 x}{2(b^2+x^2)^{5/2}} + \frac{3\mu_0 N I b^2 (d-x)}{2[b^2+(d-x)^2]^{5/2}}$$

故在中点$x = d/2$处，有



题2.11图

$$\frac{\mathrm{d}\,B_x}{\mathrm{d}\,x}=-\frac{3\mu_0 NIb^2\,d/2}{2[b^2+d^2/4]^{5/2}}+\frac{3\mu_0 NIb^2\,d/2}{2[b^2+d^2/4]^{5/2}}=0$$

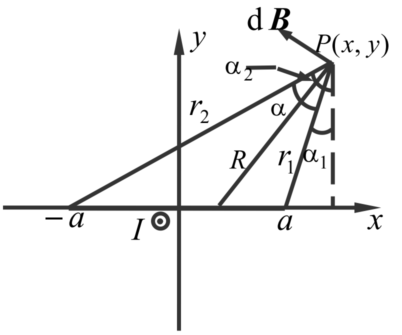
（3）
$$\frac{\mathrm{d}^2 B_x}{\mathrm{d}\,x^2}=\frac{15\mu_0 NIb^2x^2}{2(b^2+x^2)^{7/2}}-\frac{3\mu_0 NIb^2}{2(b^2+x^2)^{5/2}}+$$
$$\frac{15\mu_0 NIb^2(d-x)^2}{2[b^2+(d-x)^2]^{7/2}}-\frac{3\mu_0 NIb^2}{2[b^2+(d-x)^2]^{5/2}}$$

令 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 B_x}{\mathrm{d}\,x^2}\right|_{x=d/2}=0$，有 $$\frac{5d^2/4}{[b^2+d^2/4]^{7/2}}-\frac{1}{[b^2+d^2/4]^{5/2}}=0$$

即 $$5d^2/4=b^2+d^2/4$$

故解得 $$d=b$$

2.12 一条扁平的直导体带，宽为$2a$，中心线与z轴重合，通过的电流为I。证明在第一象限内的磁感应强度为 $B_x=-\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}\alpha$，$B_y=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\dfrac{r_2}{r_1}$ 式中α、r_1和r_2如题 2.12 图所示。



题 2.12 图

解 将导体带划分为无数个宽度为$\mathrm{d}\,x'$的细条带，每一细条带的电流$\mathrm{d}I=\dfrac{I}{2a}\mathrm{d}x'$。由安培环路定理，可得位于$x'$处的细条带的电流$\mathrm{d}I$在点$P(x,y)$处的磁场为

$$\mathrm{d}\,B=\frac{\mu_0\,\mathrm{d}\,I}{2\pi R}=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\,x'}{4\pi aR}=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\,x'}{4\pi a[(x-x')^2+y^2]^{1/2}}$$

则 $$\mathrm{d}\,B_x=-\mathrm{d}\,B\sin\theta=-\frac{\mu_0 Iy\,\mathrm{d}\,x'}{4\pi a[(x-x')^2+y^2]}$$

$$\mathrm{d}\,B_y=\mathrm{d}\,B\cos\theta=\frac{\mu_0 I(x-x')\,\mathrm{d}\,x'}{4\pi a[(x-x')^2+y^2]}$$

所以

$$B_x=-\int_{-a}^{a}\frac{\mu_0 Iy\,\mathrm{d}\,x'}{4\pi a[(x-x')^2+y^2]}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\arctan\left(\frac{x'-x}{y}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=$$
$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\arctan\left(\frac{a-x}{y}\right)-\arctan\left(\frac{-a-x}{y}\right)\right]=-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\arctan\left(\frac{x+a}{y}\right)-\arctan\left(\frac{x-a}{y}\right)\right]=$$
$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\alpha_2-\alpha_1)=-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\alpha$$

$$B_y=\int_{-a}^{a}\frac{\mu_0 I(x-x')\,\mathrm{d}\,x'}{4\pi a[(x-x')^2+y^2]}=-\frac{\mu_0 I}{8\pi a}\ln[(x-x')^2+y^2]\Big|_{-a}^{a}=\frac{\mu_0 I}{8\pi a}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

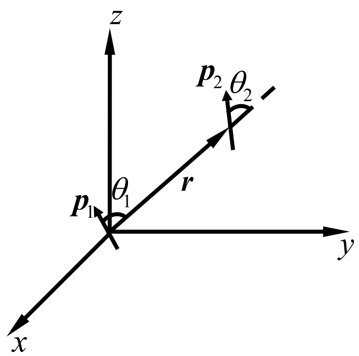
2.13 如题 2.13 图所示，有一个电矩为$\boldsymbol{p}_1$的电偶极子，位于坐标原点上，另一个电矩为$\boldsymbol{p}_2$的电偶极子，位于矢径为$\boldsymbol{r}$的某一点上。试证明两偶极子之间相互作用力为

$$F_r=\frac{3p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi-2\cos\theta_1\cos\theta_2)$$

式中$\theta_1 = <\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_1>$，$\theta_2 = <\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_2>$，$\phi$是两个平面$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_1)$和$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_2)$间的夹角。并问两个偶极子在怎样的相对取向下这个力值最大？

解　电偶极子$\boldsymbol{p}_1$在矢径为$\boldsymbol{r}$的点上产生的电场为

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{3(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{r^3}]$$



题 2.13 图

所以$\boldsymbol{p}_1$与$\mathbf{p}_2$之间的相互作用能为

$$W_e = -\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{3(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2}{r^3}]$$

因为$\theta_1 = <\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_1>$，$\theta_2 = <\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_2>$，则

$$\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r} = p_1 r\cos\theta_1$$

$$\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r} = p_2 r\cos\theta_2$$

又因为ϕ是两个平面$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_1)$和$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_2)$间的夹角，所以有

$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_1)\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_2) = r^2 p_1 p_2 \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi$$

另一方面，利用矢量恒等式可得

$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_1)\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_2) = [(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_1)\times\boldsymbol{r}]\cdot\boldsymbol{p}_2 = [r^2\boldsymbol{p}_1 - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{r}]\cdot\boldsymbol{p}_2 = r^2(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2) - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}_2)$$

因　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　此

$$(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2) = \frac{1}{r^2}[(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_1)\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_2) + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}_2)] = p_1 p_2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi + p_1 p_2\cos\theta_1\cos\theta_2$$

于是得到　　$$W_e = \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi - 2\cos\theta_1\cos\theta_2)$$

故两偶极子之间的相互作用力为

$$F_r = -\frac{\partial W_e}{\partial r}\Big|_{q=const} = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0}(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi - 2\cos\theta_1\cos\theta_2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\frac{1}{r^3}) =$$

$$\frac{3p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi - 2\cos\theta_1\cos\theta_2)$$

由上式可见，当$\theta_1 = \theta_2 = 0$时，即两个偶极子共线时，相互作用力值最大。

2.14　两平行无限长直线电流I_1和I_2，相距为d，求每根导线单位长度受到的安培力$\boldsymbol{F}_m$。

解　无限长直线电流I_1产生的磁场为　　$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{e}_\phi\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$

直线电流I_2每单位长度受到的安培力为　　$\boldsymbol{F}_{m12} = \displaystyle\int_0^1 I_2\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{B}_1\,\mathrm{d}z = -\boldsymbol{e}_{12}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$

式中$\boldsymbol{e}_{12}$是由电流I_1指向电流I_2的单位矢量。

同理可得，直线电流I_1每单位长度受到的安培力为　　$\boldsymbol{F}_{m21} = -\boldsymbol{F}_{m12} = \boldsymbol{e}_{12}\dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$

2.15　一根通电流I_1的无限长直导线和一个通电流I_2的圆环在同一平面上，圆心与导线的距离为d，如题 2.15 图所示。证明：两电流间相互作用的安培力为

$$F_m = \mu_0 I_1 I_2 (\sec\alpha - 1)$$

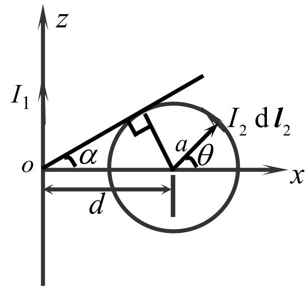
这里α是圆环在直线最接近圆环的点所张的角。

解 无限长直线电流I_1产生的磁场为

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{e}_\phi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

圆环上的电流元$I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$受到的安培力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_m = I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{B}_1 = \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{e}_y \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}$$



题 2.15 图

由题 2.15 图可知 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 = (-\boldsymbol{e}_x \sin\theta + \boldsymbol{e}_z \cos\theta) a\,\mathrm{d}\theta$

$$x = d + a\cos\theta$$

所以 $$\boldsymbol{F}_m = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi(d + a\cos\theta)} (-\boldsymbol{e}_z \sin\theta - \boldsymbol{e}_x \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta =$$

$$-\boldsymbol{e}_x \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{(d + a\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta = -\boldsymbol{e}_x \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi}\left(-\frac{2\pi}{a} + \frac{d}{a}\frac{2\pi}{\sqrt{d^2 - a^2}}\right) = -\boldsymbol{e}_x \mu_0 I_1 I_2 (\sec\alpha - 1)$$

2.16 证明在不均匀的电场中，某一电偶极子$\boldsymbol{p}$绕坐标原点所受到的力矩为$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}$。

解 如题 2.16 图所示，设$\boldsymbol{p} = q\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ ($\mathrm{d}l << 1$)，则电偶极子$\boldsymbol{p}$绕坐标原点所受到的力矩为

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r}_2 \times q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_2) - \boldsymbol{r}_1 \times q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1) =$$

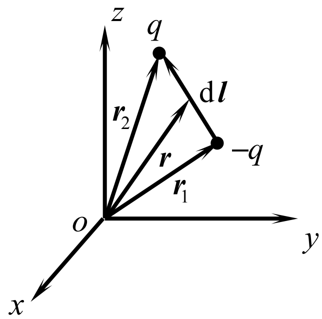
$$(\boldsymbol{r} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{2}) \times q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{2}) - (\boldsymbol{r} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{2}) \times q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{2}) =$$

$$q\boldsymbol{r} \times [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{2}) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{2})] + \frac{q}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{2}) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{2})]$$

当$\mathrm{d}l << 1$时，有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{2}) \approx \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + (\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{2}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{2}) \approx \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - (\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{2}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$



题 2.16　图

故得到

$$\boldsymbol{T} \approx \boldsymbol{r} \times (q\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + q\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) =$$
$$\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$$