模拟考试（三）答案

一、选择题 （每小题 3 分，共 15 分）

1．若 $\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$，则 (C).

(A) $x=1, y=-11$　　(B) $x=-1, y=-11$

(C) $x=1, y=11$　　(D) $x=-1, y=11$

2．方程 $e^z=-1$，则此方程的解集为 (A).

(A) $z=(2k-1)i\pi$　　(B) $z=(2k-1)\pi$

(C) 空集　　(D) $z=i\pi$

3．$\oint_{|z|=1}\dfrac{\cos z}{z^2+2}dz=$ (A).

(A) 0　　(B) $i\pi$

(C) $-i\pi$　　(D) $2i\pi$

4．函数 $\int_0^z\dfrac{\sin\xi}{\xi}d\xi$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式中 z^3 项的系数为 (D).

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $-\dfrac{1}{4}$　　(C) $-\dfrac{1}{6}$　　(D) $-\dfrac{1}{18}$

5． $z=i$ 是函数 $\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$ 的(B).

(A) 本性奇点　　(B) 二级极点

(C) 一级极点　　(D) 三级极点

二、填空题 （每小题 3 分，共 15 分）

1． $\mathrm{Re}\,s(\sin z\sin\dfrac{1}{z},0)=\underline{0}$

2．函数 $f(z)=(z-3)^3$，则 $f'(3+2i)=\underline{-12}$

3． $\ln(-1)=\underline{\pi i}$

4． $e^{2+i}=\underline{e^2(\cos 1+i\sin 1)}$

5．函数 $f(t)=\sin 2t$ 的拉普拉斯变换为 $\dfrac{2}{s^2+4}$

三、计算题 （共 70 分）

1．计算积分 $\oint_C \dfrac{2z+3}{z^2+z}dz$ 的值，其中 C 为正向圆周 $|z|=\dfrac{1}{2}$.（7 分）

解：$\oint_C \dfrac{2z+3}{z^2+z}dz=\oint_C \dfrac{\dfrac{2z+3}{z+1}}{z}dz$

$$=2\pi i\,[\frac{2z+3}{z+1}]_{z=0}$$

$$=6\pi i$$

2．计算积分 $\oint_C \dfrac{\ln z}{(z-1)^3}dz$ 的值，其中 C 为正向圆周 $|z-1|=\dfrac{1}{2}$.（7 分）

解：由高阶导数公式

$$\oint_C \frac{\ln z}{(z-1)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}(\ln z)''\big|_{z=1}$$

$$=-\pi i$$

3．求函数 $\dfrac{z^2}{z^2+4}$ 在有限奇点处的留数. （7 分）

解：因为 $z^2+4=(z+2i)(z-2i)$，所以 $z=2i, z=-2i$ 为 $\dfrac{z^2}{z^2+4}$ 的一级极点

$$\mathrm{Re}\,s[\frac{z^2}{z^2+4},2i]=\lim_{z\to 2i}(z-2i)\times\frac{z^2}{z^2+4}=i$$

$$\mathrm{Re}\,s[\frac{z^2}{z^2+4},-2i]=\lim_{z\to -2i}(z+2i)\times\frac{z^2}{z^2+4}=-i$$

4．求函数 $\dfrac{\cos z}{z^3}$ 在有限奇点处的留数. （7 分）

解：因为 $z=0$ 为 $\dfrac{\cos z}{z^3}$ 的奇点

$$\frac{\cos z}{z^3}=\frac{1}{z^3}(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots)$$

$$\mathrm{Re}\,s[\frac{\cos z}{z^3},0]=-\frac{1}{2}$$

5．试将 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+5z+6}$ 在 $2<|z|<3$ 内展开成洛朗级数.（10 分）

解：在 $2<|z|<3$ 内

$$f(z)=\frac{1}{z^2+5z+6}$$

$$=\frac{1}{(z+2)(z+3)}$$

$$=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+3}$$

$$=\frac{1}{z(1+\frac{2}{z})}-\frac{1}{3(1+\frac{z}{3})}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{3})^n$$

6．设 $u(x,y)=x^2+x-y^2$, 且 $f(0)=0$，求解析函数 $f(z)=u+iv$.（10 分）

解：$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y$

$$=2x+1+2yi$$

令 $y=0$, 即 $z=x$，得

$$f'(x)=2x+1$$

显然 $\quad f(x)=x^2+x+C$

将 x 换成 z, 得 $\quad f(z)=z^2+z+C$

因为 $f(0)=0$, 所以 $C=0$

得到 $\quad f(z)=z^2+z$

7．设 $f(z)=xy^2+x^2yi$，判别 $f(z)$ 的可导性与解析性.（12 分）

解：$u(x,y)=xy^2, v(x,y)=x^2y$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xy$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2xy$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=x^2$

均连续，要满足$C-R$条件，必须要

$y^2=x^2$， $2xy=-2xy$成立

即仅当$x=y=0$时才成立，函数在该点可导，

但函数$f(z)$处处不解析；

8. 利用拉普拉斯变换解常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} x''(t)+2x'(t)-3x(t)=e^{-t} \\ x(0)=0, x'(0)=0 \end{cases}$$ （10 分）

解：设$\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$，对方程两边取拉普拉斯变换，

并将初始条件代入，则有

$$s^2X(s)+2sX(s)-3X(s)=\frac{1}{s+1}$$

整理后得到

$$X(s)=\frac{1}{(s+3)(s-1)(s+1)}$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{s+3}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{s-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+1}$$

两边取逆变换，得

$$x(t)=\frac{1}{8}e^{-3t}+\frac{1}{8}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}$$