《数学物理方法》样卷 (1.01) 版

github

2019 年 5 月 17 日

样卷 1

一、填空题 (每小题 5 分, 共 30 分)

1. 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-5x}$ 傅立叶变换为____________

2. 函数 $f(t)=2$ 拉普拉斯变换为____________

3. 稳定场方程的标准形式为: ____________

4. 定解问题分为____________、____________ 和____________

5. 长为 1 的均匀杆, 侧面绝缘, 一端温度为零, 另一端有恒定热流 q 进入 (即单位时间内通过单位截面积流入的热量为 q), 杆的初始温度分布是 $\dfrac{x(l-x)}{2}$, 写出相应的定解问题: ____________

6. 本征值问题 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X_x|_{x=0}=0, X_x|_{x=l}=0 \end{cases}$ 的本征值为: __________, 本征函数为: __________

二、求 $x''(t)+4x(t)=2\mathrm{e}^t$ 满足条件 $x'(0)=x(0)=0$, 在 $t>0$ 时的解. (本小题 15 分)

三、求解初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} \quad (-\infty<x<+\infty) \\ u|_{t=0}=x^2 \\ u_t|_{t=0}=1 \end{cases}$$

(本小题 15 分)

四、今有一弦, 其两端固定在 $x=0$ 和 $x=l$ 两处, 在开始的一瞬间, 它的形状是一条以 $x=\dfrac{l}{2}$ 点的铅垂线为对称轴的抛物线, 没有初速度. 其弦振动的规律可用以下定解问题描述:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \qquad (0<x<l, t>0) \\ u|_{x=0}=0, u|_{x=l}=0, \\ u|_{t=0}=\dfrac{4h}{l^2}(l-x)x, u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

试用分离变量法解定解问题. (本小题 20 分)

五、求解定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \\ u|_{y=0}=8\mathrm{e}^{2x} \end{cases}$$

(本小题 20 分)

样卷 1 答案

一、填空题 (每小题 5 分, 共 30 分)

1. 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-5x}$ 傅立叶变换为 $\underline{\dfrac{1}{5+\mathrm{i}\omega}}$

2. 函数 $f(t)=2$ 拉普拉斯变换为 $\underline{\dfrac{2}{p}(\mathrm{Re}\,p>0)}$

3. 稳定场方程的标准形式为: $\underline{\triangle u=-h}$

4. 定解问题分为<u>初值问题</u>、<u>边值问题</u>和<u>混合问题</u>

5. 长为 1 的均匀杆, 侧面绝缘, 一端温度为零, 另一端有恒定热流 q 进入 (即单位时间内通过单位截面积流入的热量为 q), 杆的初始温度分布是 $\dfrac{x(l-x)}{2}$, 写出相应的定解问题:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & (0<x<l,t>0) \\ u|_{t=0}=\dfrac{x(l-x)}{2} & (0\leqslant x\leqslant l) \\ u|_{x=0}=0,ku_x|_{x=l}=q & (t>0) \end{cases}$$

6. 本征值问题 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X_x|_{x=0}=0,\ X_x|_{x=l}=0 \end{cases}$ 的本征值为: $\underline{\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2,n=1,2,3\ldots}$, 本征函数为: $\underline{X_n(x)=\cos\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right),n=1,2,3\ldots}$

二、求 $x''(t)+4x(t)=2\mathrm{e}^t$ 满足条件 $x'(0)=x(0)=0$, 在 $t>0$ 时的解. (本小题 15 分)

解: 方程两端对变量 t 取拉氏变换, 得 ……2 分

$$p^2\mathscr{L}[x(t)]+4\mathscr{L}[x(t)]=\frac{2}{p-1} \qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

故: $\mathscr{L}[x(t)]=\dfrac{2}{(p-1)(p^2+4)}=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{p}{p^2+4}-\dfrac{1}{p^2+4}\right)$ ……5 分

故: $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{p}{p^2+4}-\dfrac{1}{p^2+4}\right)\right]$ ……2 分

$$x(t)=\frac{1}{5}H(t)\left(2\mathrm{e}^t-2\cos 2t-\sin 2t\right) \qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

三、求解初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & (-\infty<x<+\infty) \\ u|_{t=0}=x^2 \\ u_t|_{t=0}=1 \end{cases}$$

(本小题 15 分)

解: 由达朗贝尔公式:

$$u=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad \cdots\cdots 5\text{ 分}$$

$$\varphi(x)=u|_{t=0}=x^2;\psi(x)=u_t|_{t=0}=1 \qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

得: $u=\dfrac{1}{2}\left[(x+t)^2+(x-t)^2\right]+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}1\,\mathrm{d}\xi$ ……2 分

$$u=x^2+t^2+t \qquad \cdots\cdots 5\text{ 分}$$

四、今有一弦, 其两端固定在 $x=0$ 和 $x=l$ 两处, 在开始的一瞬间, 它的形状是一条以 $x=\dfrac{l}{2}$ 点的铅垂线为对称轴的抛物线, 没有初速度. 其弦振动的规律可用以下定解问题描述:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,(0<x<l,t>0) \\ u|_{x=0}=0,u|_{x=l}=0, \\ u|_{t=0}=\dfrac{4h}{l^2}(l-x)x,u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

试用分离变量法解定解问题. (本小题 20 分)

解: 先求满足方程和边界条件得解. 设解为

$$u(x,t)=X(x)T(t) \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

代入方程得

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$$

除以 $a^2X(x)T(t)$ 有

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

得到两个常微分方程

$$\begin{aligned} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ T''(t)+\lambda a^2T(t)=0 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

本征值问题为

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0,X(l)=0 \end{cases}$$

故本征值

$$\lambda=\lambda_n=\left[\frac{n\pi}{l}\right]^2,n=1,2,\ldots \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

相应的本征函数为

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

方程 $T''(t)+\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2T(t)=0$, 通解为

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

利用解的叠加原理, 可得满足方程和边界条件的级数形式解

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad \cdots\cdots 1 \text{ 分}$$

由初始条件 $u_t|_{t=0}$, 得 $D_n=0$, $\cdots\cdots 2$ 分
由 $u|_{t=0}=\dfrac{4h}{l^2}(l-x)x$ 得 $u(x,0)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{4h}{l^2}(l-\zeta)\zeta\sin\frac{n\pi}{l}\zeta\,\mathrm{d}\zeta=\frac{16h}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi),n=1,2,\ldots \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

于是:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{32h}{(2k+1)^3\pi^3}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l} \qquad \cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

五、求解定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u|_{y=0} = 8\mathrm{e}^{2x} \end{cases}$$

(本小题 20 分)

解: 设解为

$$u(x,t) = X(x)Y(y) \qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

代入方程得

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{-Y(y)} = \lambda \qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

即:

$$\begin{aligned} X'(x) - \lambda X(x) &= 0 \\ Y'(y) + \lambda Y(y) &= 0 \qquad \cdots\cdots 4\text{ 分} \end{aligned}$$

其解分别为

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1\mathrm{e}^{\lambda x} \\ Y(y) &= c_2\mathrm{e}^{-\lambda y} \qquad \cdots\cdots 2\text{ 分} \end{aligned}$$

通解为

$$u(x,y) = c\mathrm{e}^{\lambda x - \lambda y} \qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

由

$$u|_{y=0} = 8\mathrm{e}^{2x} \qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

得

$$c = 8, \lambda = 2 \qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

于是

$$u(x,y) = 8\mathrm{e}^{2x-2y} \qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

样卷 2

一、填空题 (每小题 5 分, 共 30 分)

1. 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ 傅立叶变换为________________

2. 函数 $f(t)=t^2$ 拉普拉斯变换为________________

3. 有一个均匀杆, 只要杆中任意一段有纵向位移或速度, 必导致相邻段的压缩或伸长, 这种伸缩继续, 就会有纵波沿着杆传播. 该杆的杨氏模量为 E ; 密度为 ρ ; 单位长度的杆沿杆长方向所受的外力为 F . 该杆的纵振动方程为________________

4. 三类典型的数学物理方程分别为________________、________________ 和________________

5. 长为 1 两端固定的弦作振幅极其微小的横振动, 写出其定解条件: ________________

6. 本征值问题 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X|_{x=0}=0, X|_{x=l}=0 \end{cases}$ 的本征值为: ____________, 本征函数为: ____________

二、求 $x''(t)+x(t)=\mathrm{e}^t$ 满足条件 $x'(0)=x(0)=0$, 在 $t>0$ 时的解. (本小题 15 分)

三、求解初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad (-\infty<x<+\infty) \\ u(x,0)=\cos x \\ u_t(x,0)=\mathrm{e}^{-1} \end{cases}$$

(本小题 15 分)

四、长为 l 的杆, 一端固定, 另一端受力 F_0 而伸长. 细杆在放手后的振动规律可表示为定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \qquad (0<x<l, t>0) \\ u|_{x=0}=0, u_x|_{x=l}=0, \\ u|_{t=0}=\dfrac{F_0}{YS}x, u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

试用分离变量法解定解问题. (本小题 20 分)

五、求解定解问题:

$$\begin{cases} 3\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \\ u|_{y=0}=4\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

(本小题 20 分)

样卷 2 答案

一、填空题 (每小题 5 分, 共 30 分)

1. 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ 傅立叶变换为 $\underline{\dfrac{1}{1+\mathrm{i}\omega}}$

2. 函数 $f(t)=t^2$ 拉普拉斯变换为 $\underline{\dfrac{2}{p^3}(\mathrm{Re}\, p>0)}$

3. 有一个均匀杆, 只要杆中任意一段有纵向位移或速度, 必导致相邻段的压缩或伸长, 这种伸缩继续, 就会有纵波沿着杆传播. 该杆的杨氏模量为 E ; 密度为 ρ ; 单位长度的杆沿杆长方向所受的外力为 F . 该杆的纵振动方程为 $\underline{u_{tt}=a^2u_{xx}+f \quad \left[a^2=\dfrac{E}{\rho}, f=\dfrac{F(x,t)}{\rho}\right]}$

4. 三类典型的数学物理方程分别为<u>波动方程</u>、<u>输运方程</u>和<u>稳定场方程</u>

5. 长为 1 两端固定的弦作振幅极其微小的横振动, 写出其定解条件: $\underline{\begin{cases}u|_{x=0}=0\\ u|_{x=l}=0\end{cases} \quad \begin{cases}u|_{t=0}=\varphi(x)\\ u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}}$

6. 本征值问题 $\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ X|_{x=0}=0, X|_{x=l}=0\end{cases}$ 的本征值为: $\underline{\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2, n=1,2,3\dots}$, 本征函数为: $\underline{X_n(x)=\sin\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right), n=1,2,3\dots}$

二、求 $x''(t)+x(t)=\mathrm{e}^t$ 满足条件 $x'(0)=x(0)=0$, 在 $t>0$ 时的解. (本小题 15 分)

解: 方程两端对变量 t 取拉氏变换, 得 ······2 分

$$p^2\mathscr{L}[x(t)]+\mathscr{L}[x(t)]=\frac{1}{p-1} \qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

故: $\mathscr{L}[x(t)]=\dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{p}{p^2+1}-\dfrac{1}{p^2+1}\right)$ ······5 分

故: $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{p}{p^2+1}-\dfrac{1}{p^2+1}\right)\right]$ ······2 分

$$x(t)=\frac{1}{2}H(t)\left(\mathrm{e}^t-\cos t-\sin t\right) \qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

三、求解初值问题:

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad (-\infty<x<+\infty)\\ u(x,0)=\cos x\\ u_t(x,0)=\mathrm{e}^{-1}\end{cases}$$

(本小题 15 分)

解: 由达朗贝尔公式:

$$u=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad \cdots\cdots 5\text{ 分}$$

$$\varphi(x)=u(x,0)=\cos x; \psi(x)=u_t(x,0)=\mathrm{e}^{-1} \qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

得: $u=\dfrac{1}{2}[\cos(x+at)+\cos(x-at)]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{d}\xi$ ······2 分

$$u=\cos x\cos(at)+\frac{1}{\mathrm{e}}t \qquad \cdots\cdots 5\text{ 分}$$

四、长为 l 的杆, 一端固定, 另一端受力 F_0 而伸长. 细杆在放手后的振动规律可表示为定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & (0<x<l,t>0) \\ u|_{x=0}=0, u_x|_{x=l}=0, \\ u|_{t=0}=\dfrac{F_0}{YS}x, u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

试用分离变量法解定解问题. (本小题 20 分)

解: 先求满足方程和边界条件得解. 设解为

$$u(x,t)=X(x)T(t) \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

代入方程得

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$$

除以 $a^2X(x)T(t)$ 有

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

得到两个常微分方程

$$\begin{aligned} X''(x)+\lambda X(x)&=0 \\ T''(t)+\lambda a^2T(t)&=0 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

本征值问题为

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ X(0)=0, X'(l)=0 \end{cases}$$

故本征值

$$\lambda=\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2, n=0,1,2,\dots \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

相应的本征函数为

$$X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

方程 $T''(t)+\left[\dfrac{(2n+1)\pi a}{2l}\right]^2T(t)=0$, 通解为

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t+D_n\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

利用解的叠加原理, 可得满足方程和边界条件的级数形式解

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t+D_n\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x \qquad \cdots\cdots 1 \text{ 分}$$

由初始条件 $u_t|_{t=0}=0$, 得 $D_n=0$ ……2 分

由 $u|_{t=0}=\dfrac{F_0}{YS}x$, 得 $u(x,0)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{F_0}{YS}\zeta\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}\zeta\,\mathrm{d}\zeta=\frac{8F_0l}{YS\pi^2}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}, n=0,1,2,\dots \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

于是:

$$u(x,t)=\frac{8F_0l}{YS\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \qquad \cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

五、求解定解问题:

$$\begin{cases} 3\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \\ u|_{y=0}=4\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

(本小题 20 分)

解: 设解为

$$u(x,t) = X(x)Y(y) \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

代入方程得

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{-\frac{3}{2}Y(y)} = -\lambda \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

即:

$$X'(x) - \lambda X(x) = 0$$

$$Y'(y) + \frac{3}{2}\lambda Y(y) = 0 \qquad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

其解分别为

$$X(x) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda x}$$

$$Y(y) = c_2 \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\lambda y} \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

通解为

$$u(x,y) = c\mathrm{e}^{\lambda x - \frac{3}{2}\lambda y} \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

由

$$u|_{y=0} = 4\mathrm{e}^{-x} \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

得

$$c = 4, \lambda = -1 \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

于是

$$u(x,y) = 4\mathrm{e}^{-x+\frac{3}{2}y} \qquad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$