第十四章　机械波基础

mechanical wave

1、理解波、波的分类及横波、纵波、波面、波线等基本概念;

2、掌握波动特征量-波长、周期、波速等概念及其决定因素与相互关系;（重点）

3、理解平面简谐波表达式及其物理意义;（重点）

4、理解波的能量特征及能流、能流密度;（难点）

5、理解惠更斯原理和波的叠加原理;

6、掌握波的相干条件，能应用相位差和波程差分析、确定相干波叠加后振幅加强和减弱的条件;（重点）

7、掌握驻波的波腹、波节位置确定;（重点）
8、理解驻波的相位关系、能量关系;
9、理解弦上驻波波长、半波损失（难点）
10、了解多普勒效应 .

第十四章 机械波基础
第一讲

14.1 机械波的形成与传播

波产生的条件
波的图像描述
波的分类
描述波动的基本物理量

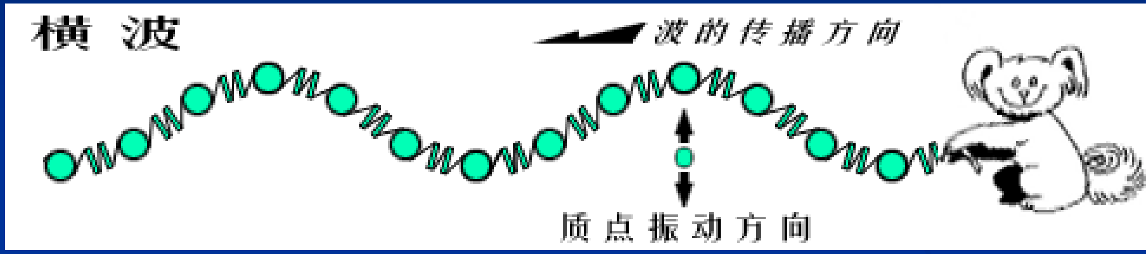
14.2 平面简谐波的表达式

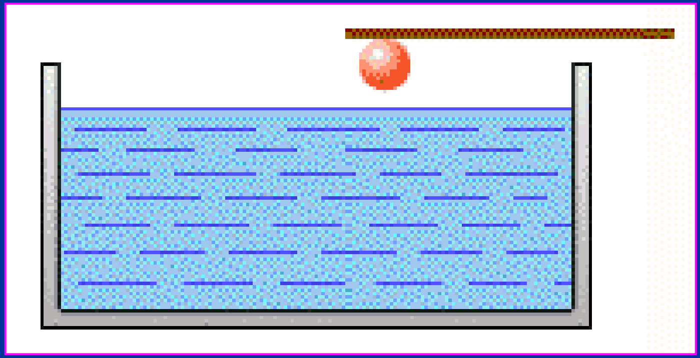
平面波表达式的推演
波表达式的物理意义
波表达式的求解

14.1　机械波的形成与传播

一、机械波的形成

1、波动的产生





振动在弹性介质中由近及远地传播，形成波动。

2、产生机械波的条件

波源：　产生机械振动的振源；
弹性介质：传播机械振动。

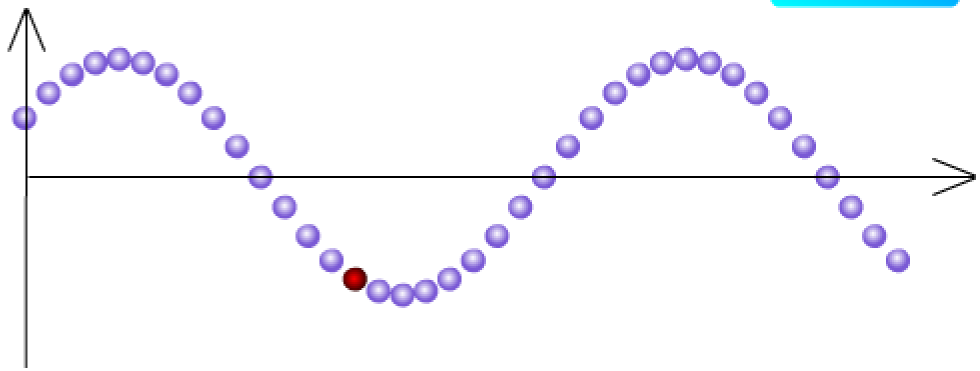
3、波动的特征

- 具有一定的传播速度；
- 伴随着能量的传播；
- 能产生反射、折射、干涉和衍射等现象；

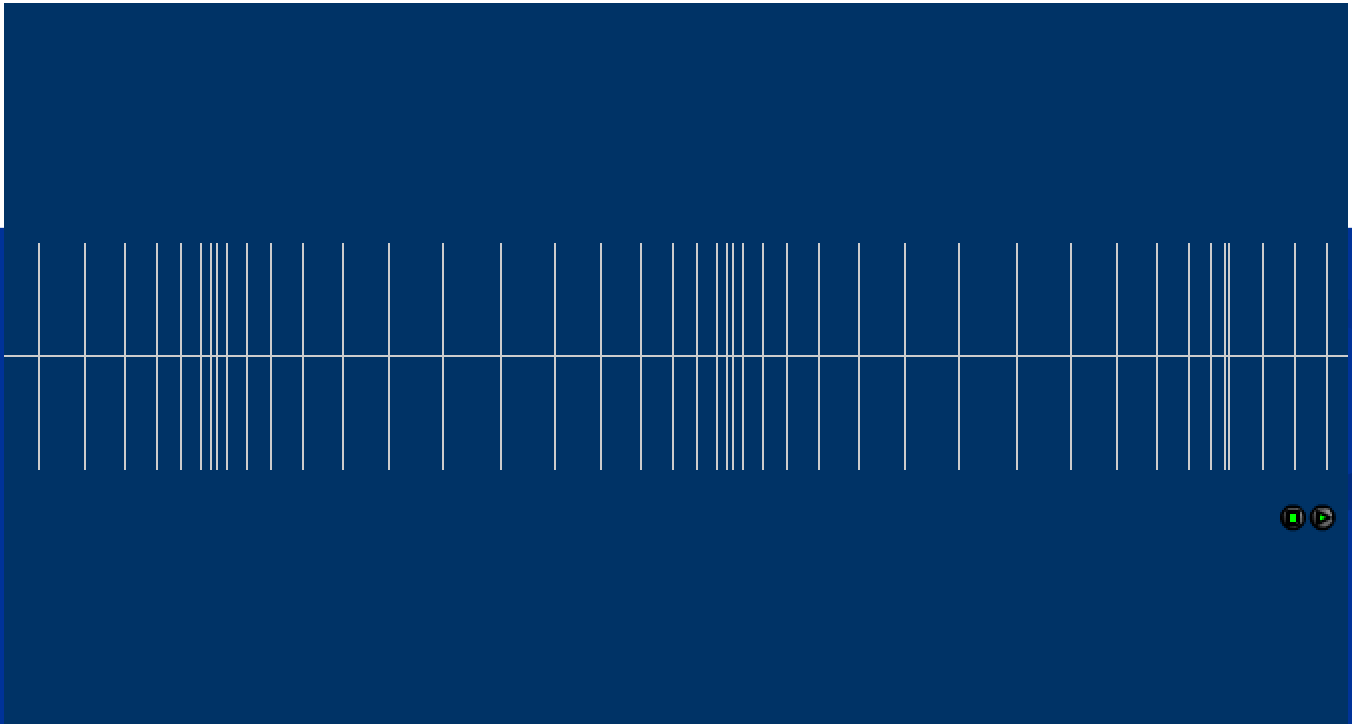
洪恩软件
Human

横波的形成：

开始：



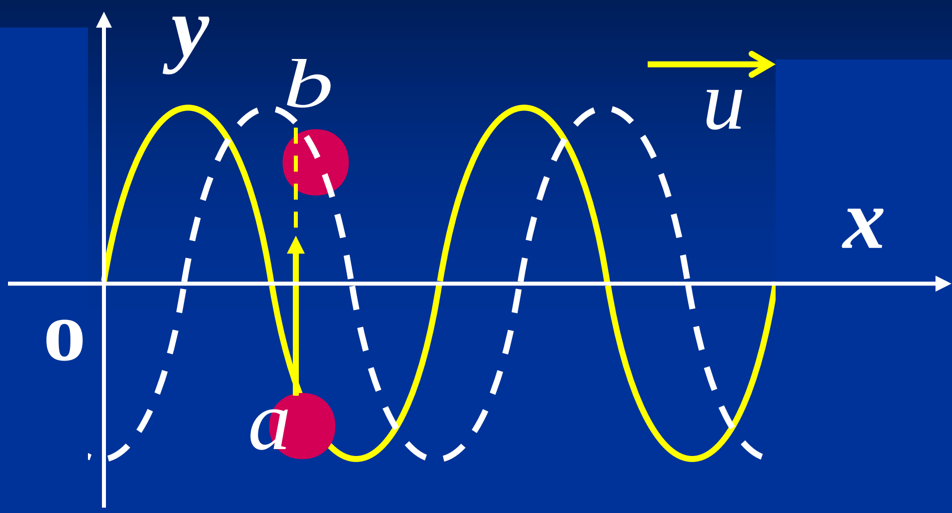
质点的振动方向和传播方向互相垂直的机械波我们称为横波。
点击开始按钮，我们看到机械拨传播时波峰波谷在向前传播，我们仔细观察每一个质点就发现，介质中的质点只是在平衡位置附近做振动而并不随着波传播，波传播的只是振动的形式。



二、横波与纵波

分类标准

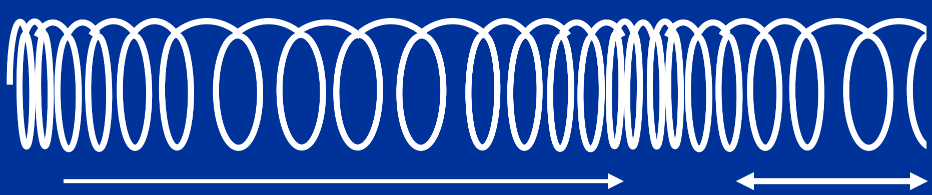
质点振动方向与波传播方向的关系



1、横波

振动方向与传播方向垂直。

波峰 波谷



波的传播方向向右

质点振动方向水平

2、纵波

振动方向与波传播方向平行。

疏密状态沿波传播方向移动。

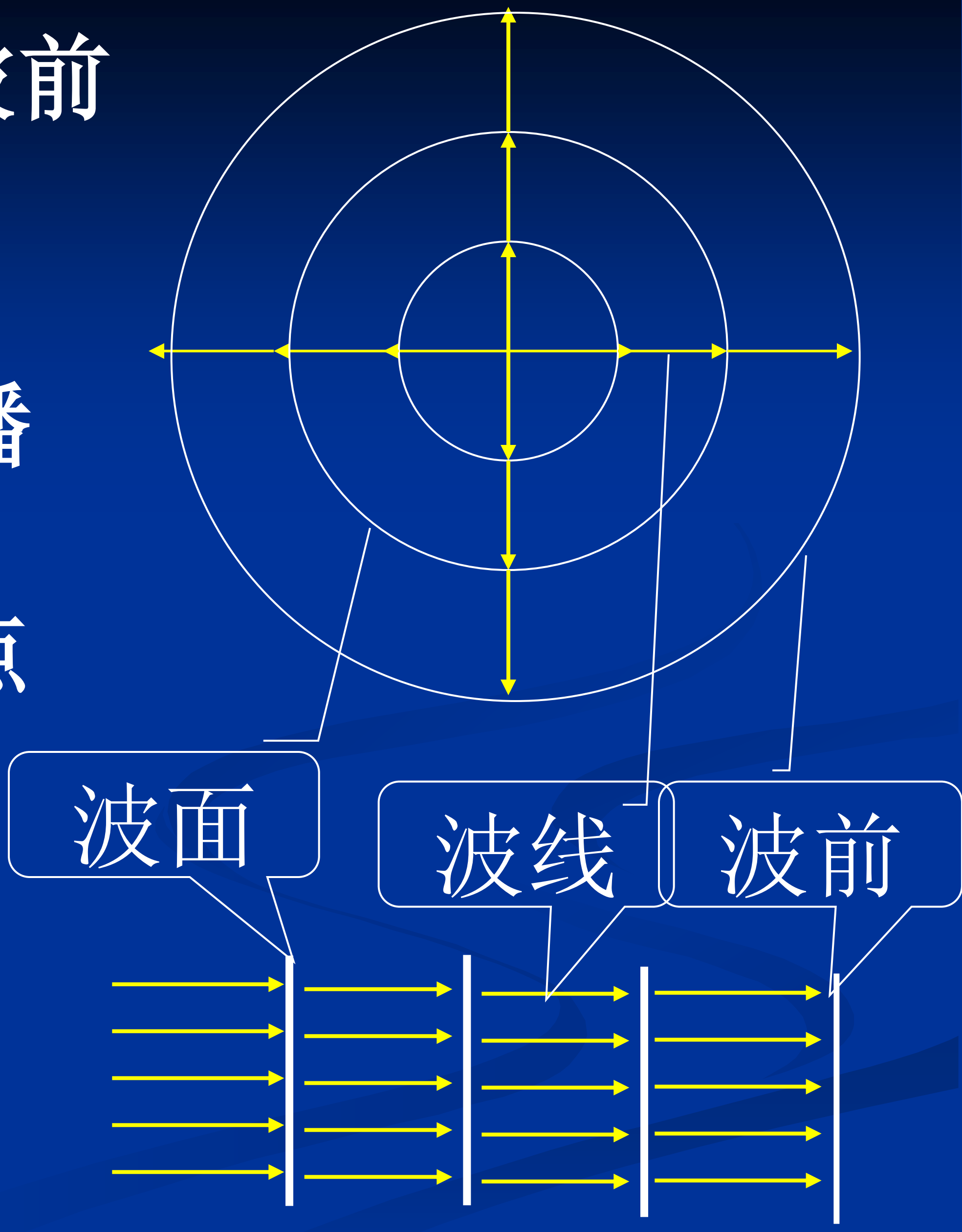
三、波线、波面、波前

1、概念

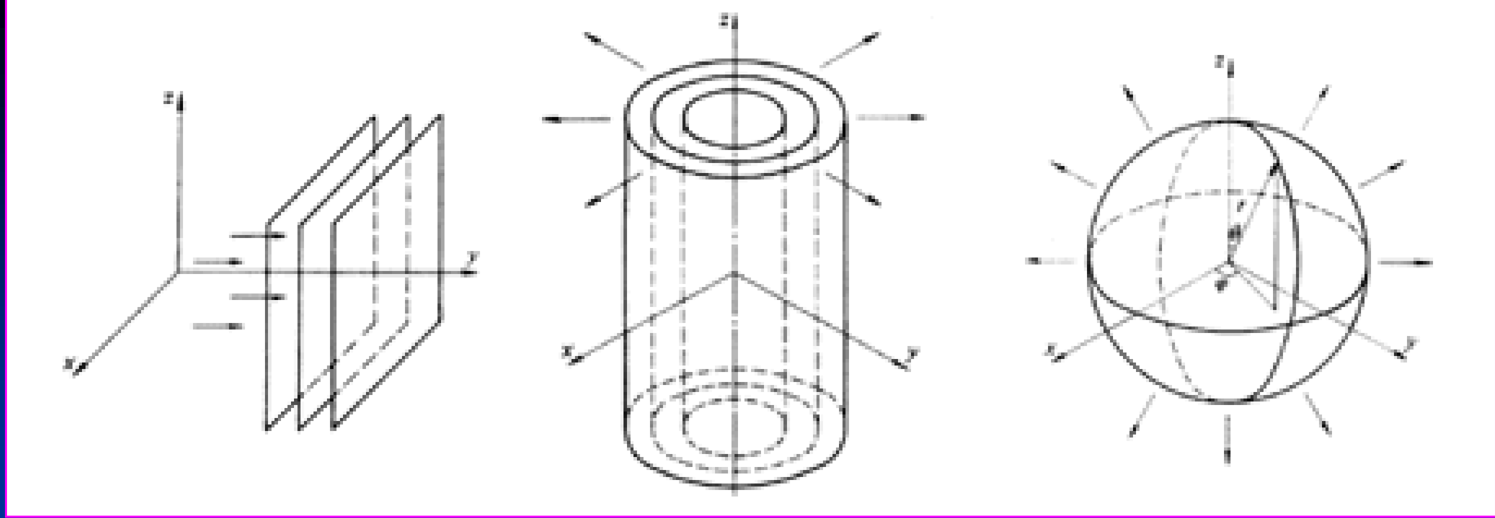
波线：描述波的传播方向；

波面：相位相同的点所连成的曲面

波前：在某一时刻，最前方的波面。



2、分类



平面波：波前为平面；

柱面波：波前为柱面，由线状波源产生；

球面波：波前为球面，由点波源产生；

波动的分类

- 按质点运动方向与波传播方向关系—横波和纵波
- 按波前形状——平面波、球面波、柱面波
- 按波动的传播特性——行波和驻波
- 按波源物理性质——光波、声波、水波等

四、波长、波的周期和频率、波速

1、波长——反映波动的空间周期性

定义：

同一波线上相位差为2π的两个振动质点之间的距离，或沿波的传播方向，相邻的两个同相质点之间的距离叫波长。

横波：相邻两个波峰或波谷之间的距离
纵波：相邻两个密部或疏部之间的距离

2、周期和频率——反映波动的时间周期性

周期： 波传播一个波长所需要时间——周期T

频率： 周期的倒数——频率，用ν 表示

$$\nu = 1/T$$

说明：

波的周期等于波源振动的周期；

波的周期只与振源有关，与传播介质无关。

3、波速u ⟶ 相速

相位

定义：在波动过程中，某一振动状态在单位时间内所传播的距离。

*固体媒质中横波和纵波的波速

横波 $$u=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G——切变弹性模量

纵波 $$u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

Y——杨氏弹性模量

* 在液体和气体中的纵波波速

$$u=\sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

B——体变弹性模量

* 弦线上横波的波速

$$u=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

T为弦上的张力

μ为质量线密度

4、三者关系式

$$u=\frac{\lambda}{T}=\lambda\nu$$

小结：

频率、周期： 决定于波源

波速： 决定于传输介质的密度和弹性模量

波长： 由波源和传输介质共同确定

地震波分为纵波和横波。

纵波每秒钟传播速度5~6千米，能引起地面**上下跳动**；**横波**传播速度较慢，每秒3~4千米，能引起地面**水平晃动**。

纵波衰减快，离震中较远处，只感到水平晃动。

一般情况下，地震时地面总是先上下跳动，后水平晃动，根据时间间隔间隔可判断震中位置。

14.2 平面简谐波的表达式
波动微分方程

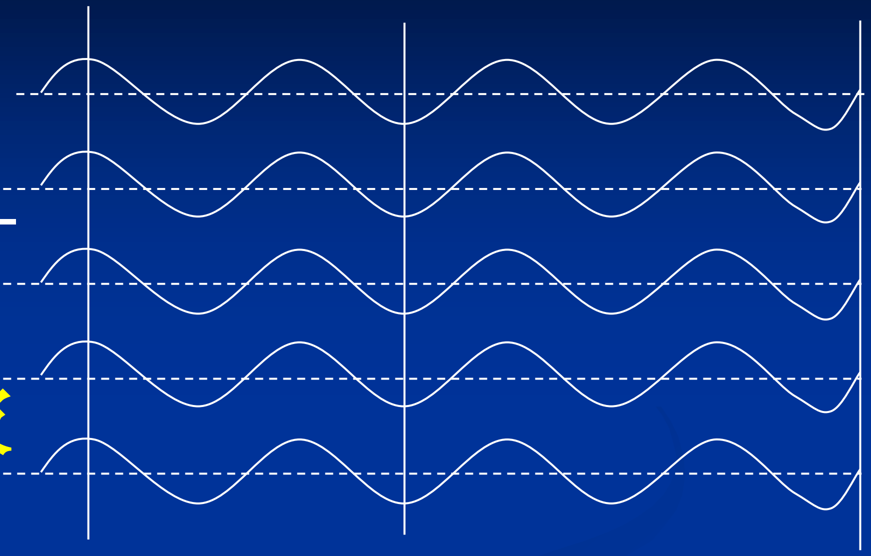
平面简谐波表达式的推演

波表达式的物理意义

波表达式的求解

一、平面简谐波的表达式推演

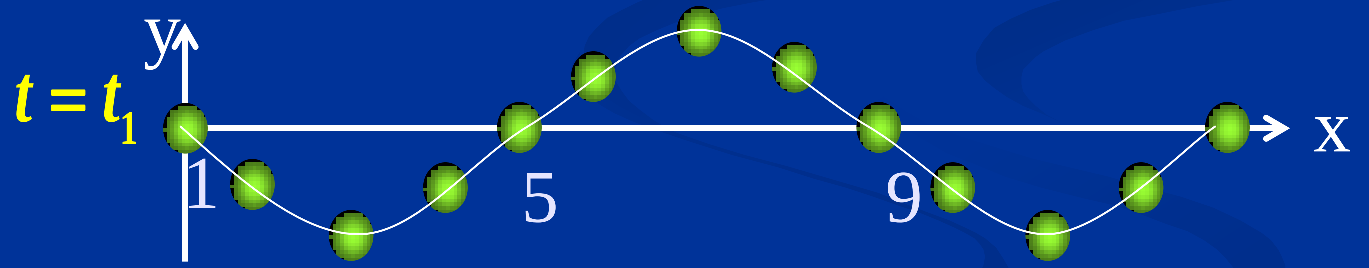
1、平面简谐波



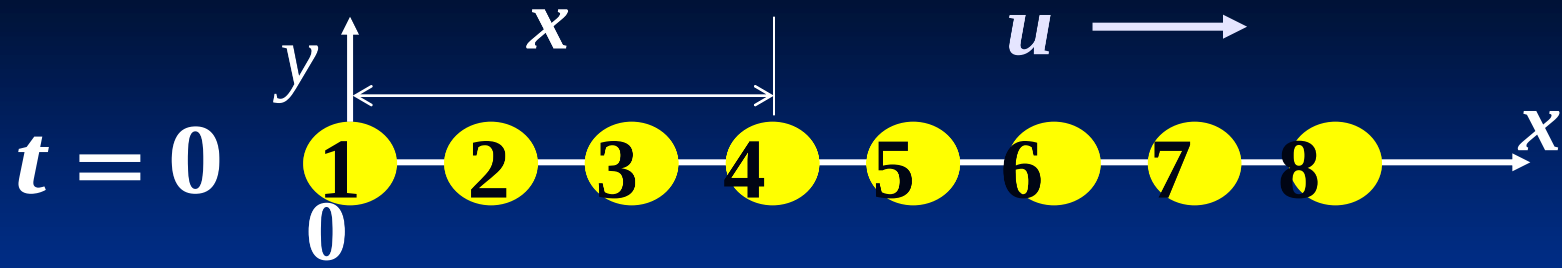
各个质点均作简谐振动——简谐波。

波面为平面—平面简谐波

2、平面简谐波的表达式



质元振动位移 y 随其平衡位置 x 和时间 t 变化的数学表达式，即$y=f(x,t)$



已知： ①原点O的振动方程 $y_0 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

②波向右传播，传播速率为 u

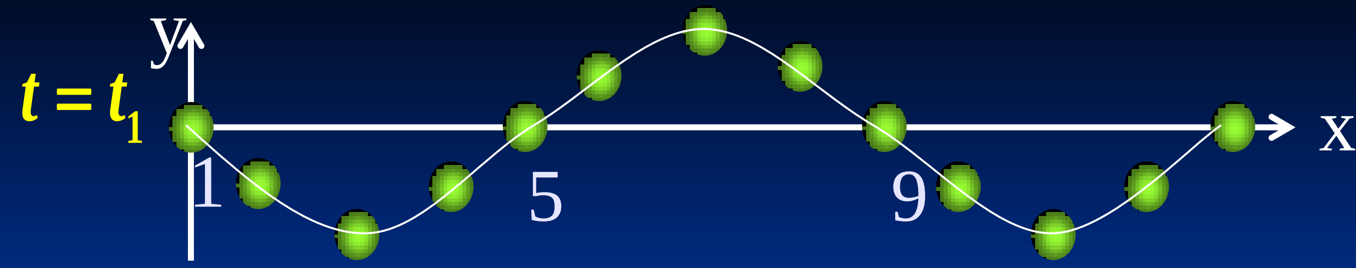
思路： ① x>0处质点4是早于还是晚于原点1?

x 处的质元比原点晚振动时间$\Delta t = x/u$

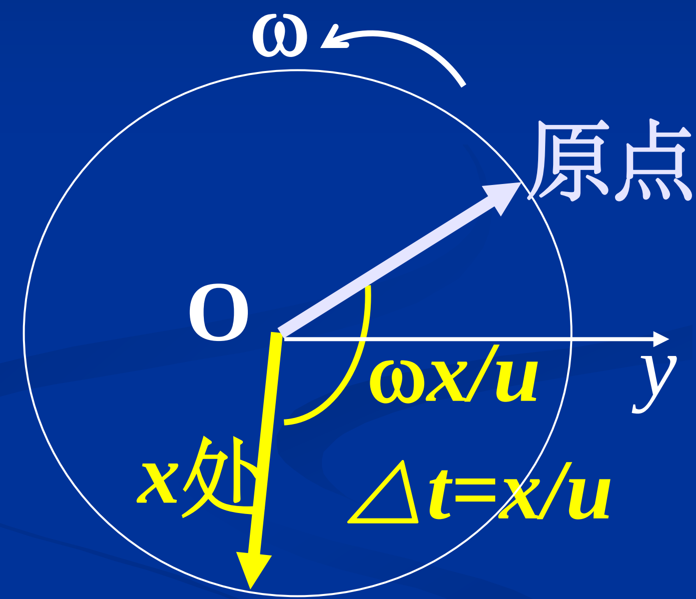
②x>0处的质点相位是超前还是落后原点?

相位落后多少?

相位落后：$\omega\Delta t = \omega x/u$



x处质元的振动相位落后：$\omega x/u$



③位于 x处质点的振动方程

t 时刻，x处质元的振动与原点在（$t- x/u$）时刻时相同

$$y_P = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$= A\cos(\omega t+\varphi_0-\omega\frac{x}{u})$$

简谐波表达式
波函数
波动方程

平面简谐波的表达式（波函数）

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0]$$

$$y = A\cos[2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0]$$

$$y = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut - x) + \varphi_0]$$

$$y = A\cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right)$$

波数

$$k = 2\pi / \lambda$$

3、波动中质点的**振动速度**和加速度

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$a=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-A\omega^2\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

4、沿**X轴负方向**传播的平面简谐波的表达式

$$y=A\cos\omega[(t+\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

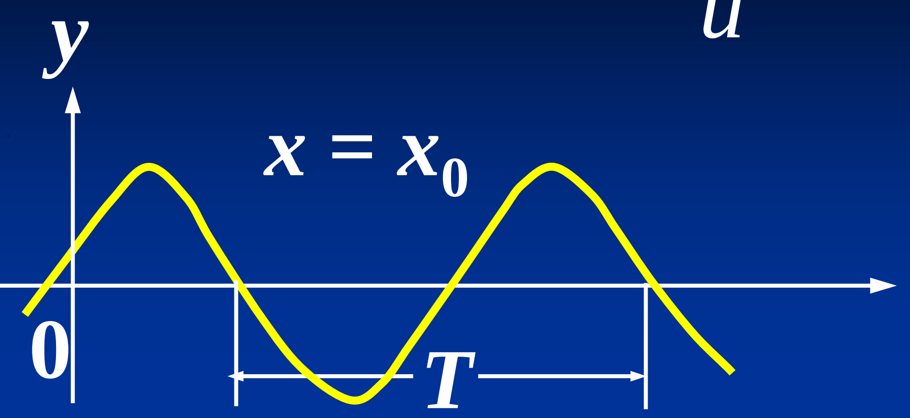
$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

二、波表达式物理意义

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

1、令 $x = x_0$，

$$y = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x_0}{\lambda} + \varphi_0\right)$$

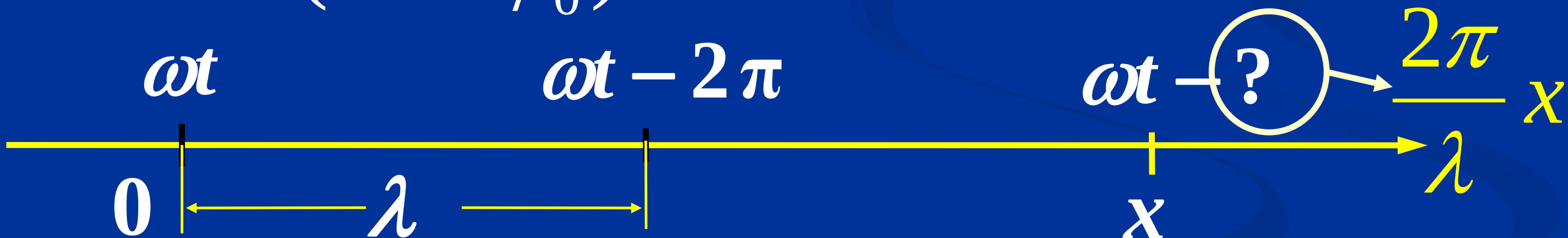


—x_0处质元振动方程

$$y(\lambda, t) = A\cos(\omega t + \varphi_0 - 2\pi)$$

$$= A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

相距为λ的两点振动方程相同

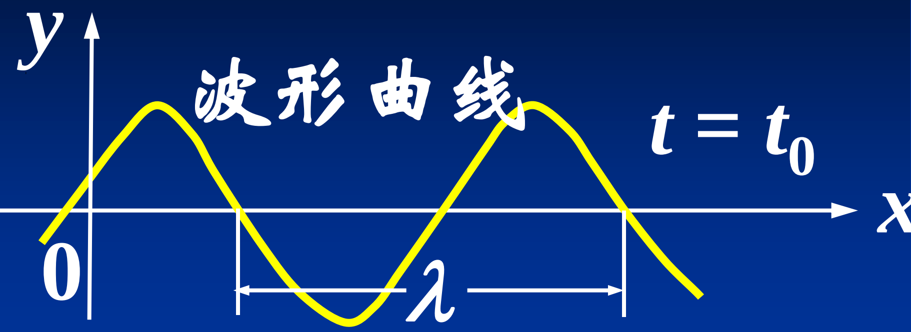


沿波传播方向每增加λ的距离，相位落后2π。

因此，x点比0点相位落后 $\frac{2\pi}{\lambda}x$。

2、t 一定，则位移仅是坐标的函数，其图形为波形曲线，对于 $t=t_0$

$$y = A\cos\left(\omega t_0 - \frac{\omega x}{u} + \varphi_0\right)$$



$t=nT+t_0$

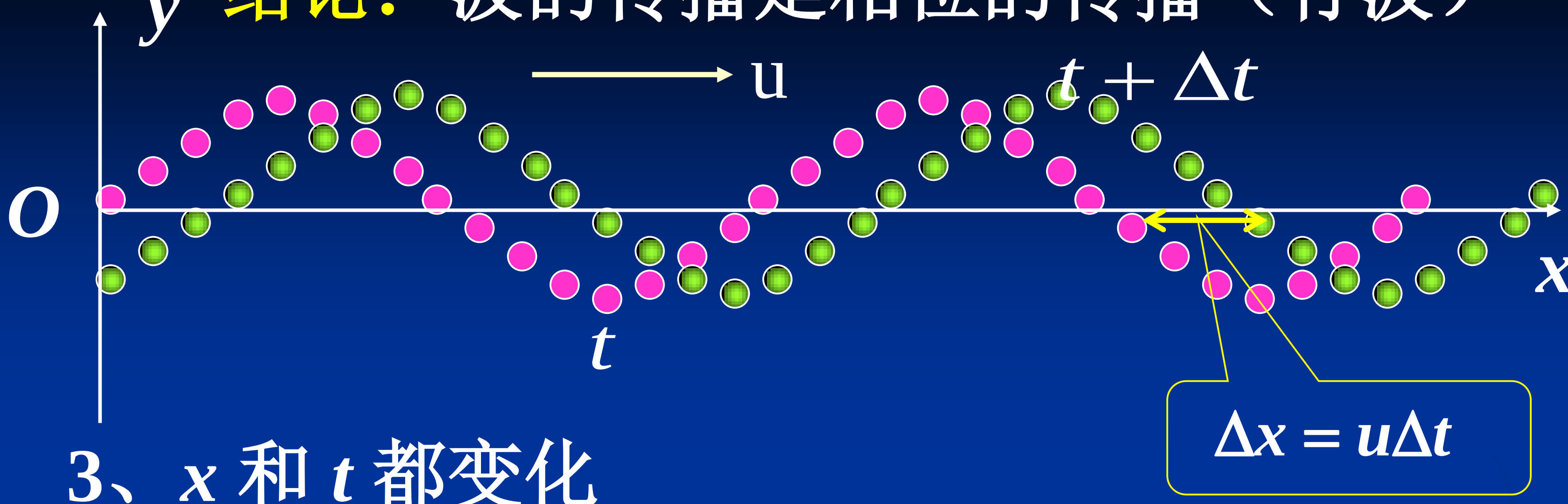
$$y(x,T) = A\cos[\omega(T - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

$$= A\cos(2\pi - \frac{\omega x}{u} + \varphi_0) = y(x,0)$$

每经历一个时间周期T，波形曲线相同

在波传播过程中，每经历一个周期T，各质点的相位增加2π；任意质点的相位随时间t增加 $\frac{2\pi}{T}t$

结论：波的传播是相位的传播（行波）



3、*x* 和 *t* 都变化

若t增加Δt，x增加$\Delta x=u\Delta t$,则y不变——

x处振动状态经Δt时间传播 Δx的距离

相应波形曲线沿传播方向移动Δx的距离.

(x,t)与（$x+\Delta x, t+\Delta t$)处的相位相同

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(ut-x\right)=\frac{2\pi}{\lambda}[u(t+\Delta t)-(x+\Delta x)]$$

总结：$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

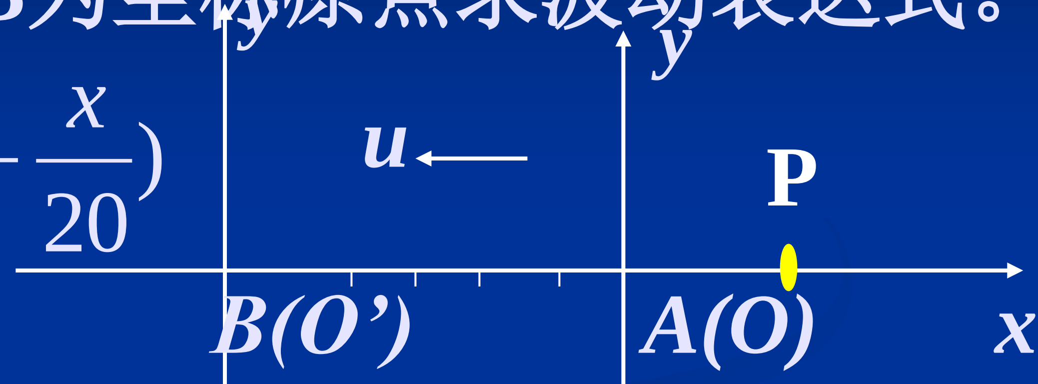
波传播过程中，一方面振动相位随时间*t*增加，每经历单位时间质点的相位增加（**2π/*T*).**
因而每经历时间***t***，任一质点的相位增加**(2π*t*/*T*);**

另一方面，沿传播方向每前进单位距离的质点相位落后**(2π/*λ*)**，因而每沿传播方向增加距离***x***，该质元的相位滞后**(2π*x*/*λ*)**

所以*x*处质点*t*时刻的相位为 $\varphi_0+\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x$

波动表达式：$y(x,t)=A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0)$

例 一平面简谐波在介质中以速度 $u = 20\ \mathrm{m\ s^{-1}}$，沿 Ox 轴的负向传播。已知 A 点的振动方程为 $y = 3\cos(4\pi t)$，则（1）以 A 点为坐标原点求波动表达式；（2）以距 A 点5m处的 B 为坐标原点求波动表达式。



解(1) $y = 3\cos 4\pi(t + \frac{x}{20})$

$T=2\pi/\omega=0.5\mathrm{s}$

$\lambda=uT=10\mathrm{m}$

B点振动表达式为:

$$y_B = 3\cos(4\pi t - \pi)$$

$$y' = 3\cos 4\pi(t + \frac{x'-5}{20})$$

(2)波动表达式为:

$$y' = 3\cos[4\pi(t + \frac{x'}{20}) - \pi]$$

$$= 3\cos\left[4\pi(t + \frac{x'}{20}) - \pi\right]$$

例14-1　横波沿一张紧的长绳传播，波动表达式为： $y=0.04\cos\pi(5x-200t)$。求（1）A , ν , λ , u ;（4）如每米弦的质量为0.05kg m^{-1}，求绳中张力.

解：将表达式写成标准形式

$$y=0.04\cos 2\pi\left(\frac{t}{1/100}-\frac{x}{2/5}\right)$$

$$A=0.04\text{m} \qquad T=0.01\text{s}$$

$$\nu=\frac{1}{T}=100\text{Hz} \qquad \lambda=\frac{2}{5}=0.4\text{m}$$

$$u=\frac{\lambda}{T}=\frac{0.4}{0.01}=40\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\because \quad u=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$T=u^2\mu$$

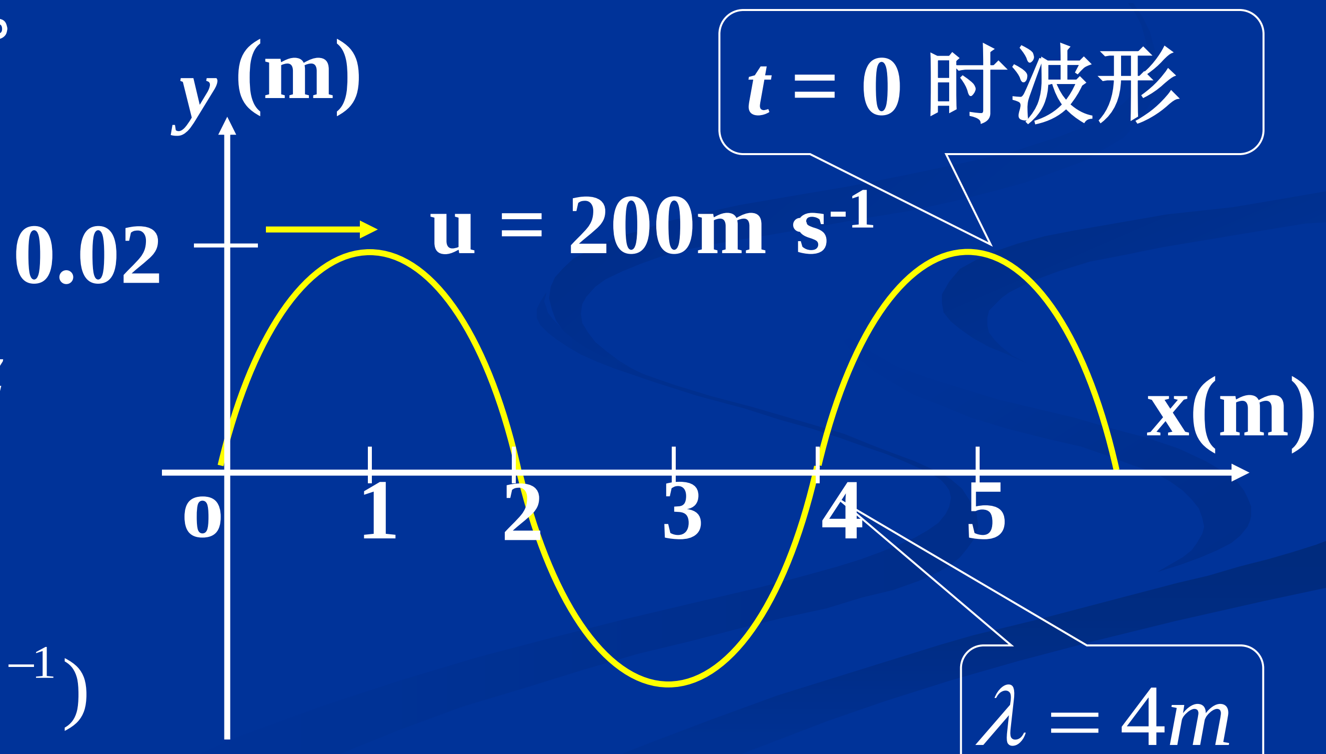
$$=40^2\times 0.05\text{N}$$

$$=80\text{N}$$

例：一平面简谐波以波速 $u = 200\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 沿 x 轴正方向传播, 在 $t = 0$ 时刻的波形如图所示。

(1) 求 O 点的振动方程并写出波动表达式；

(2) 求 $t = 0.1$ s， $x = 10$ m 处质点的位移、振动速度和加速度。



解：

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = 50Hz$$

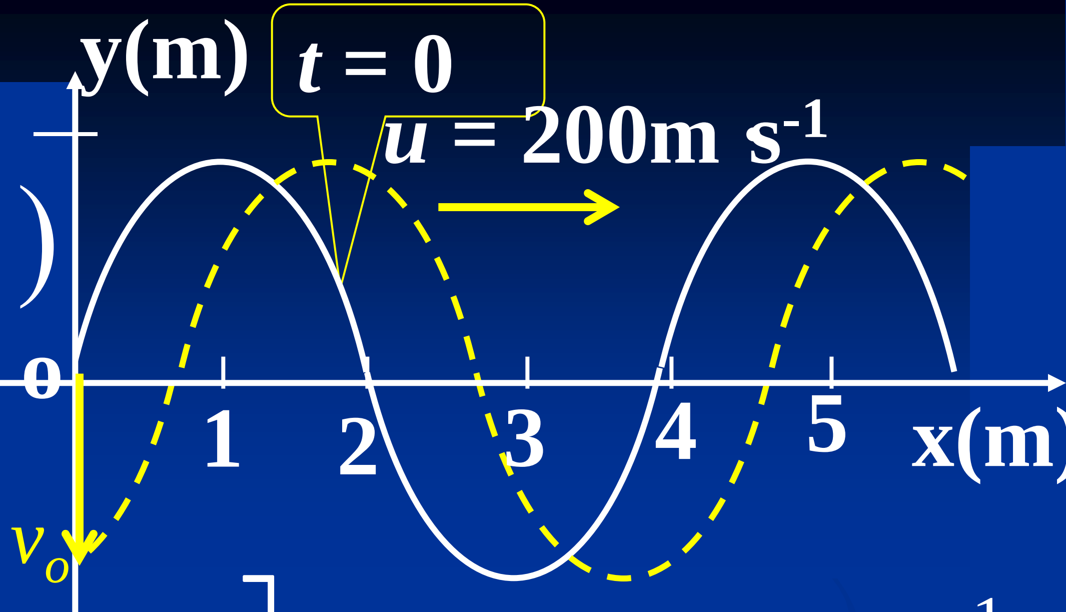
$$\omega = 2\pi\nu$$

$$= 100\pi(s^{-1})$$

(1) O 点振动方程

$$y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$= 0.02\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$y = 0.02\cos\left[100\pi\left(t - \frac{x}{200}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\omega = 100\pi s^{-1}$$

(2) $t = 0.1$ s， $x = 10$ m 处质点

$$y = 0.02\cos\left[100\pi\left(t - \frac{x}{200}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = 0 \quad a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -0.02\times 100\pi\sin\left[100\pi\left(t - \frac{x}{200}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = 2\pi$$

例. 图示为一平面谐波在t=2s时刻的波形图, 波的振幅为0.2m, 周期为4s, 求P处质点的振动方程

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

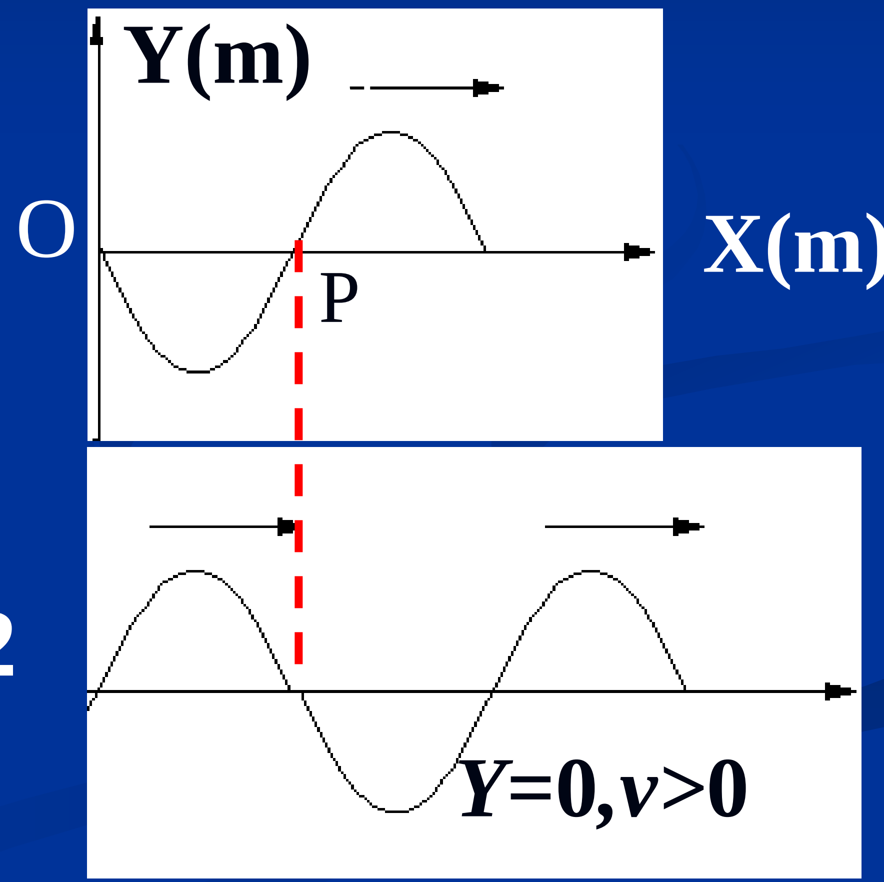
t=2s

$Y_P=0, v_P<0$

$\pi/2=\omega t+\varphi$

$\varphi=\pi/2-\omega t= \pi/2-\pi =-\pi/2$

$$Y_P = 0.2\cos(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2})$$



t=0

三、波动微分方程

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos[\omega(t - \dfrac{x}{u}) + \varphi_0] \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{u^2}\omega^2 A\cos[\omega(t - \dfrac{x}{u}) + \varphi_0] \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

一般情况下，物理量$\xi(x,y,z,t)$在三维空间中以波的形式传播，则波动方程

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

例：一平面简谐波沿x轴正向传播，*A*=10cm, *ω*=7πrad/s,当*t*=1.0s时，x=10cm处质点正通过其平衡位置向y轴负方向运动，而x=20cm处的质点正通过y=5.0cm向y轴正方向运动，设λ>10cm,求该平面波的表达式。

解：设该平面波的表达式为

$$y = 10\cos(7\pi t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0)[cm]$$

$$t = 1.0s, x_1 = 10cm, y_1 = 0, v_1 < 0$$

$$\varphi_1 = 7\pi - \frac{2\pi}{\lambda}x_1 + \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_1 = 7\pi - \frac{2\pi}{\lambda} x_1 + \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$t = 1.0\text{时}, x_2 = 20cm, y_2 = \frac{1}{2} A, v_2 > 0$$

$$\varphi_2 = 7\pi - \frac{2\pi}{\lambda} x_2 + \varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}(20-10) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{5\pi}{6} \qquad \therefore \lambda = 24cm$$

$$\varphi_1 = 7\pi - \frac{20\pi}{\lambda} + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \varphi_0 = -\frac{17}{3}\pi$$

$$y = 10\cos(7\pi t - \frac{2\pi}{24} x - \frac{17}{3}\pi)[cm]$$