第五讲 线性方程组有解的判定定理

一、有解判定定理

二、线性方程组的解法

三、小结

HOME

ENTER

一、有解判定定理

问题：如何利用系数矩阵 A 和增广矩阵 B 的秩，讨论线性方程组 $Ax=b$ 的解.

定理1　n 元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A)<n$.

证　必要性　设方程组 $Ax=0$ 有非零解，

设$R(A)=n$,则在A中应有一个n阶非零子式D_n，从而

D_n所对应的 n个方程只有零解 (根据Cramer定理),

这与原方程组有非零解相矛盾，

$\therefore \quad R(A)=n$ 不能成立. 即 $R(A)<n$.

充分性 设 $R(A)=r<n$,

则 A 的行阶梯形矩阵只含 r 个非零行，

从而知其有 $n-r$ 个自由未知量.

任取一个自由未知量为 1 ，其余自由未知量为 0 ，

即可得方程组的一个非零解.

定理2　n 元非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 $B=(A,b)$ 的秩.

证　必要性　设方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 有解,

设$\boldsymbol{R(A)<R(B)}$,

则B的行阶梯形矩阵中最后一个非零行对应矛盾方程 0 ＝ 1 ,

这与方程组有解相矛盾. 因此 $\boldsymbol{R(A)=R(B)}$.

充分性　设 $R(A)=R(B)$,

设 $R(A)=R(B)=r\ (r\leq n)$,

则 B 的行阶梯形矩阵中含 r 个非零行,

把这 r 行的第一个非零元所对应的未知量作为非自由未知量,

其余 $n-r$ 个作为自由未知量,

并令 $n-r$ 个自由未知量全取0,

即可得方程组的一个解.　　　　证毕

小结 $R(A)=R(B)=n \Leftrightarrow Ax=b$有唯一解

$R(A)=R(B)<n \Leftrightarrow Ax=b$有无穷多解.

定义：含有个参数的方 程组的任一解，称为线 性方程组的通解.

齐次线性方程组：系数矩阵化成行最简形矩阵，便可写出其通解；

非齐次线性方程组：增广矩阵化成行阶梯形矩阵，便可判断其是否有解．若有解，化成行最简形矩阵，便可写出其通解；

二、线性方程组的解法

例1 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

解 对系数矩阵 A 施行初等行变换：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2 \div (-3)}{\overset{r_3 - r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1 - 2r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - \frac{5}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0, \end{cases}$$

由此即得 $\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \dfrac{5}{3}x_4, \\ x_2 = -2x_3 - \dfrac{4}{3}x_4, \end{cases}$ (x_3, x_4 可任意取值).

令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$，把它写成通常的参数形式

$$\begin{cases} x_1 = 2c_2 + \dfrac{5}{3}c_2, \\ x_2 = -2c_2 - \dfrac{4}{3}c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases} \qquad \therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例２ 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

解 对增广矩阵B进行初等变换，

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1}}{\sim}_{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

显然，$R(A) = 2,\ R(B) = 3,$ 故方程组无解.

例３ 求解非齐次方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}.$$

解 对增广矩阵B进行初等变换

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于$R(A)=R(B)=2$, 故方程组有解，且有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_3 = 2x_4 + 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_2 = x_2 + 0x_4 \\ x_3 = 0x_2 + 2x_4 + 1/2 \\ x_4 = 0x_2 + x_4 \end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中x_2, x_4任意.

例4 证明方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$$
有解的充要条件是$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$.在有解的情况下，求出它的一切解.

证 对增广矩阵B进行初等变换，

方程组的增广矩阵为

$$
B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix}
$$

$$
\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{5} a_i \end{pmatrix}
$$

由$R(A)=R(B)$

$$
\Rightarrow \sum_{i=1}^{5} a_i = 0
$$

$\therefore$ 方程组有解的充要条件是 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0.$

由于原方程组等价于方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \end{cases}$

由此得通解：

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \\ x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \\ x_3 = a_3 + a_4 + x_5 \\ x_4 = a_4 + x_5 \end{cases}$$

$(x_5$为任意实数$).$

例５ 设有线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

问λ取何值时,有解?有无穷多个解?

解 对增广矩阵 $B=(A,b)$ 作初等行变换,

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

(1) 当$\lambda = 1$时,

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = R(B) < 3$,方程组有无穷多解.

其通解为 $\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

$(x_2,\ x_3$为任意实数$)$.

(2) 当$\lambda \neq 1$时,

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2+\lambda & (1+\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

这时又分两种情形:

1) $\lambda \neq -2$时, $R(A) = R(B) = 3$, 方程组有唯一解:

$$x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \quad x_2 = \frac{1}{\lambda+2}, \quad x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}.$$

2) $\lambda=-2$时,

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 3 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$R(A)\neq R(B)$,故方程组无解.

三、小结

齐次线性方程组 $Ax = 0$

$R(A) = n \Leftrightarrow Ax = 0$只有零解;

$R(A) < n \Leftrightarrow Ax = 0$有非零解.

非齐次线性方程组 $Ax = b$

$R(A) = R(B) = n \Leftrightarrow Ax = b$有唯一解;

$R(A) = R(B) < n \Leftrightarrow Ax = b$有无穷多解.

思考题

讨论线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - p x_3 + 15x_4 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = t \end{cases}$$

当p,t取何值时,方程组无解?有唯一解?有无穷多解?在方程组有无穷多解的情况下,求出一般解.

思考题解答

解

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -p & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & t \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -p-6 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 9 & t-1 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -p+2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & t+5 \end{array}\right)$$

(1)当$p \neq 2$时,$R(A)=R(B)=4$,方程组有唯一解;

(2)当$p=2$时,有

$$B\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & t+5 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 \end{array}\right)$$

当$t \neq 1$时，$R(A)=3<R(B)=4$，方程组无解；

当$t=1$时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有无穷多解.

且

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

与原方程组同解的方程 组为

$$\begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_4 = 2, \end{cases}$$

故原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (k \in R).$$