

第二十八讲 实对称矩阵的标准形

一、实对称矩阵的一些性质

二、对称变换

三、实对称矩阵可正交相似于实对角矩阵



一、实对称矩阵的一些性质

引理1 设 A 是实对称矩阵，则 A 的特征值皆为实数.

证： 设 λ_0 是 A 的任意一个特征值，则有非零向量

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

满足 $A\xi = \lambda_0\xi$.

$$\text{令 } \bar{\xi} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } \overline{x_i} \text{ 为 } x_i \text{ 的共轭复数,}$$

又由A实对称, 有 $\overline{A} = A$, $A' = A$, $\overline{A\xi} = A\bar{\xi}$

$$\begin{aligned} \therefore \lambda_0 \bar{\xi}' \xi &= \bar{\xi}' (\lambda_0 \xi) = \bar{\xi}' (A\xi) = (\bar{\xi}' A) \xi \\ &= (\bar{\xi}' A') \xi = (A\bar{\xi})' \xi = (\overline{A\xi})' \xi \\ &= (\overline{\lambda_0 \xi})' \xi = (\overline{\lambda_0} \bar{\xi})' \xi = \overline{\lambda_0} \bar{\xi}' \xi \end{aligned}$$

考察等式, $\lambda_0 \overline{\xi}' \xi = \overline{\lambda_0} \overline{\xi}' \xi$

由于 ξ 是非零复向量, 必有

$$\overline{\xi}' \xi = \overline{x_1} x_1 + \overline{x_2} x_2 + \cdots + \overline{x_n} x_n \neq 0$$

故 $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$. $\therefore \lambda_0 \in R$.

引理2 设 A 是实对称矩阵, 在 n 维欧氏空间 R^n 上定义一个线性变换 σ 如下:

$$\sigma(\alpha) = A\alpha, \quad \forall \alpha \in R^n$$

则对任意 $\alpha, \beta \in R^n$, 有

$$(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma(\beta)),$$

或

$$\beta'(A\alpha) = \alpha'(A\beta).$$

证：取 R^n 的一组标准正交基，

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 A ，即

$$\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)A$$

任取 $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in R^n,$

$$\text{即 } \alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n \stackrel{\Delta}{=} (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)X,$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n \stackrel{\Delta}{=} (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)Y,$$

于是

$$\sigma(\alpha) = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)X = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)AX,$$

$$\sigma(\beta) = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)Y = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)AY,$$

又 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是标准正交基,

$$\begin{aligned} \therefore (\sigma(\alpha), \beta) &= (AX)'Y = (X'A')Y = X'AY \\ &= X'(AY) = (\alpha, \sigma(\beta)) \end{aligned}$$

又注意到在 R^n 中 $\alpha = X$, $\beta = Y$,

$$\begin{aligned}\text{即有 } \beta'(A\alpha) &= (\beta, \sigma(\alpha)) = (\sigma(\alpha), \beta) \\ &= (\alpha, \sigma(\beta)) = \alpha'(A\beta).\end{aligned}$$

二、对称变换

1. 定义

设 σ 为欧氏空间 V 中的线性变换, 如果满足

$$(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma(\beta)), \quad \forall \alpha, \beta \in V,$$

则称 σ 为**对称变换**.

2. 基本性质

1) n 维欧氏空间 V 的对称变换与 n 级实对称矩阵在标准正交基下是相互确定的:

① 实对称矩阵可确定一个对称变换.

事实上, 设 $A \in R^{n \times n}$, $A' = A$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基. 定义 V 的线性变换 σ :

$$\sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)A$$

则 σ 即为 V 的对称变换.

② 对称变换在标准正交基下的矩阵是实对称矩阵.

事实上, 设 σ 为 n 维欧氏空间 V 上的对称变换,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基, $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$

为 σ 在这组基下的矩阵, 即

$$\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)A$$

或

$$\begin{aligned}\sigma(\varepsilon_i) &= a_{1i}\varepsilon_1 + a_{2i}\varepsilon_2 + \dots + a_{ni}\varepsilon_n \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ki}\varepsilon_k, \quad i = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{于是 } (\sigma(\varepsilon_i), \varepsilon_j) &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} \varepsilon_k, \varepsilon_j \right) = \sum_{k=1}^n a_{ki} (\varepsilon_k, \varepsilon_j) \\ &= a_{ji} (\varepsilon_j, \varepsilon_j) = a_{ji}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varepsilon_i, \sigma(\varepsilon_j)) &= \left(\varepsilon_i, \sum_{k=1}^n a_{kj} \varepsilon_k \right) = \sum_{k=1}^n a_{kj} (\varepsilon_i, \varepsilon_k) \\ &= a_{ij} (\varepsilon_i, \varepsilon_i) = a_{ij}\end{aligned}$$

由 σ 是对称变换, 有 $(\sigma(\varepsilon_i), \varepsilon_j) = (\varepsilon_i, \sigma(\varepsilon_j))$

即 $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$

所以 A 为对称矩阵.

2) (引理3) 对称变换的不变子空间的正交补也是它的不变子空间.

证明: 设 σ 是对称变换, W 为 σ 的不变子空间.

对 $\forall \alpha \in W^\perp$, 要证 $\sigma(\alpha) \in W^\perp$, 即证 $\sigma(\alpha) \perp W$.

任取 $\beta \in W$, 由 W 是 σ -子空间, 有 $\sigma(\beta) \in W$,

$$\text{因此 } (\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma(\beta)) = 0$$

$$\text{即 } \sigma(\alpha) \perp W, \quad \therefore \sigma(\alpha) \in W^\perp.$$

故 W^\perp 也为 σ 的不变子空间.

三、实对称矩阵的正交相似对角化

1. (引理4) 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的.

证: 设实对称矩阵 A 为 R^n 上对称变换 σ 的在标准正交基下的矩阵, λ, μ 是 A 的两个不同特征值, α, β 分别是属于 λ, μ 的特征向量.

则 $\sigma(\alpha) = \lambda\alpha = A\alpha, \quad \sigma(\beta) = \mu\beta = A\beta,$

由 $(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma(\beta))$

有 $(\lambda\alpha, \beta) = (\alpha, \mu\beta),$

即 $\lambda(\alpha, \beta) = \mu(\alpha, \beta).$

又 $\lambda \neq \mu, \quad \therefore (\alpha, \beta) = 0$

即 α, β 正交.

2.

(定理7) 对 $A \in R^{n \times n}, A' = A$, 总有正交矩阵 T , 使

$$T'AT = T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

证： 设 A 为 R^n 上对称变换 σ 在标准正交基下的矩阵.
由实对称矩阵和对称变换互相确定的关系，只需证
 σ 有 n 个特征向量作成的标准正交基即可.

对 R^n 的维数 n 用归纳法.

$n=1$ 时，结论是显然的.

假设 $n-1$ 时结论成立，对 R^n ,设其上的对称变换 σ
有一单位特征向量 α_1 ，其相应的特征值为 λ_1 ，即

$$\sigma(\alpha_1) = \lambda_1 \alpha_1, \quad |\alpha_1| = 1$$

设子空间 $L(\alpha_1) = W$, 显然 W 是 σ -子空间,
则 W^\perp 也是 σ -子空间, 且

$$W \oplus W^\perp = R^n, \quad \dim W^\perp = n - 1$$

又对 $\forall \alpha, \beta \in W^\perp$, 有

$$(\sigma|_{W^\perp}(\alpha), \beta) = (\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma(\beta)) = (\alpha, \sigma|_{W^\perp}(\beta))$$

所以 $\sigma|_{W^\perp}$ 是 W^\perp 上的对称变换.

由归纳假设知 $\sigma|_{W^\perp}$ 有 $n-1$ 个特征向量 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$
构成 W^\perp 的一组标准正交基.

从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ 就是 R^n 的一组标准正交基,
又都是 R^n 的特征向量. 即结论成立.

3. 实对称矩阵正交相似实对角矩阵步骤

设 $A \in R^{n \times n}$, $A' = A$

(i) 求出A的所有不同的特征值: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in R$,

其重数 n_1, n_2, \dots, n_r 必满足 $\sum_{i=1}^r n_i = n$;

(ii) 对每个 λ_i , 解齐次线性方程组

$$(\lambda_i E - A)X = 0$$

求出它的一个基础解系: $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}$

它是A的属于特征值 λ_i 的特征子空间 V_{λ_i} 的一组基.

把它们按 *Schmidt* 正交化过程化成 V_{λ_i} 的一组标准正交基 $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{in}$.

(iii) 因为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 互不相同, 所以 $V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j} \ (i \neq j)$

且
$$\sum_{i=1}^r \dim W_{\lambda_i} = n ,$$

$\therefore \eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{1n_1}, \dots, \eta_{r1}, \eta_{r2}, \dots, \eta_{rn_r}$ 就是V的一组标准正交基.

将 $\eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{1n_1}, \dots, \eta_{r1}, \eta_{r2}, \dots, \eta_{rn_r}$ 的分量依次作矩阵 T 的第 $1, 2, \dots, n$ 列, 则 T 是正交矩阵, 且使 $T'AT = T^{-1}AT$ 为对角形.

例1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求一正交矩阵 T 使 $T'AT$ 成对角形.

解：先求A的特征值.

$$\begin{aligned} Q \quad |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & \lambda-1 & 1-\lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & 1-\lambda^2 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\lambda-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)^3(\lambda+3) \end{aligned}$$

A的特征值为 $\lambda_1 = 1$ (三重), $\lambda_2 = 3$.

其次求属于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量，即求解方程组

$$(E - A)X = 0$$

$$\because E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得其基础解

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1, 1, 0, 0) \\ \alpha_2 = (1, 0, 1, 0) \\ \alpha_3 = (-1, 0, 0, 1) \end{cases}$$

把它正交化，得

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 0, 0) \\ \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0) \\ \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1) \end{array} \right.$$

再单位化，得

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \frac{1}{|\beta_1|} \beta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0) \\ \eta_2 = \frac{1}{|\beta_2|} \beta_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0) \\ \eta_3 = \frac{1}{|\beta_3|} \beta_3 = (-\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}}) \end{array} \right.$$

这是特征值 $\lambda_1 = 1$ (三重) 的三个单位正交特征向量, 也即是特征子空间 V_{λ_1} 的一组标准正交基.

再求属于 $\lambda_2 = -3$ 的特征向量, 即解方程组

$$(-3E - A)X = 0$$

$$\mathbf{Q} \quad -3E - A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得其基础解 $\alpha_4 = (1, -1, -1, 1),$

再单位化得 $\eta_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

这样 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 构成 R^4 的一组标准正交基，它们都是A的特征向量，正交矩阵

$$T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

使得

$$T'AT = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}.$$

注：

① 对于实对称矩阵A，使 $T'AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 成立的正交矩阵不是唯一的。而且对于正交矩阵T，还可进一步要求 $|T| = 1$ 。

事实上，如果由上述方法求得的正交矩阵 T

$$T'AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad |T| = -1$$

取正交矩阵 $S = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$,

则 $T_1 = TS$ 是正交矩阵且 $|T_1| = |T||S| = 1$,

同时有 $T_1'AT_1 = (TS)'A(TS) = S'(T'AT)S$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \end{aligned}$$

② 如果不计较主对角线上元素的排列的次序，与实对称矩阵 A 正交相似的对角矩阵是唯一确定的。

③ 因为正交相似的矩阵也是互相合同的，所以可用实对称矩阵的特征值的性质刻画其正定性：

设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 为实对称矩阵 A 的所有特征值

(i) A 为正定的 $\Leftrightarrow \lambda_n > 0$

(ii) A 为半正定的 $\Leftrightarrow \lambda_n \geq 0$

(iii) A 为负定（半负定）的 $\Leftrightarrow \lambda_1 < 0$ ($\lambda_1 \leq 0$)

(iv) A 为不定的 $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0$ 且 $\lambda_n < 0$

④ 实对称矩阵 A 的正、负惯性指数分别为正、负特征值的个数（重根按重数计）。

n -秩(A)是0为 A 的特征值的重数.