

模拟考试（三）

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$, 则 ().

(A) $x=1, y=-11$

(B) $x=-1, y=-11$

(C) $x=1, y=11$

(D) $x=-1, y=11$

2. 方程 $e^z = -1$, 则此方程的解集为 ().

(A) $z = (2k-1)i\pi$

(B) $z = (2k-1)\pi$

(C) 空集

(D) $z = i\pi$

3. $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^2+2} dz = ().$

(A) 0

(B) $i\pi$

(C) $-i\pi$

(D) $2i\pi$

4. 函数 $\int_0^z \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式中 z^3 项的系数为 ().

(A) $-\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{4}$

(C) $-\frac{1}{6}$

(D) $-\frac{1}{18}$

5. $z=i$ 是函数 $\frac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$ 的 ().

(A) 本性奇点

(B) 二级极点

(C) 一级极点

(D) 三级极点

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\operatorname{Res}(\sin z \sin \frac{1}{z}, 0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 函数 $f(z) = (z-3)^3$, 则 $f'(3+2i) = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\ln(-1) = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. $e^{2+i} = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 函数 $f(t) = \sin 2t$ 的拉普拉斯变换为_____.

三、计算题 (共 70 分)

1. 计算积分 $\oint_C \frac{2z+3}{z^2+z} dz$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z| = \frac{1}{2}$. (7 分)

2. 计算积分 $\oint_C \frac{\ln z}{(z-1)^3} dz$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z-1| = \frac{1}{2}$. (7 分)

3. 求函数 $\frac{z^2}{z^2+4}$ 在有限奇点处的留数. (7 分)

4. 求函数 $\frac{\cos z}{z^3}$ 在有限奇点处的留数. (7 分)

5. 试将 $f(z) = \frac{1}{z^2 + 5z + 6}$ 在 $2 < |z| < 3$ 内展开成洛朗级数. (10 分)

6. 设 $u(x, y) = x^2 + x - y^2$, 且 $f(0) = 0$, 求解析函数 $f(z) = u + iv$. (10 分)

7. 设 $f(z) = xy^2 + x^2yi$, 判别 $f(z)$ 的可导性与解析性. (12 分)

8. 利用拉普拉斯变换解常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = e^{-t} \\ x(0) = 0, x'(0) = 0 \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$