第十八讲 特征值与特征向量

一、特征值与特征向量的定义

二、特征值与特征向量的求法

三、特征子空间

HOME

ENTER

§4 特征值与特征向量

一、　特征值与特征向量

二、　特征值与特征向量的求法

三、　特征子空间

四、　特征多项式的有关性质

引入

有限维线性空间V中取定一组基后，V的任一线性变换都可以用矩阵来表示．为了研究线性变换性质，希望这个矩阵越简单越好，如对角矩阵．

从本节开始，我们主要讨论，如何选择一组适当的基，使V的某个线性变换在这组基下的矩阵就是一个对角矩阵?

一、特征值与特征向量

定义： 设 σ 是数域P上线性空间V的一个线性变换，

若对于P中的一个数 λ_0，存在一个V的**非零**向量 ξ,

使得

$$\sigma(\xi) = \lambda_0 \xi \quad ,$$

则称 λ_0为σ的一个**特征值**，称 ξ 为 σ 的属于特征值

λ_0 的**特征向量**.

注：① 几何意义：特征向量经线性变换后方向保持相同 $(\lambda_0 > 0)$ 或相反 $(\lambda_0 < 0)$. $\lambda_0 = 0$ 时，$\sigma(\xi) = 0$.

② 若 ξ 是 σ 的属于特征值 λ_0 的特征向量，则 $k\xi \quad (k \in P, k \neq 0)$ 也是 σ 的属于 λ_0 的特征向量.

$$\left(\text{Q} \quad \sigma(k\xi) = k\sigma(\xi) = k(\lambda_0\xi) = \lambda_0(k\xi) \right)$$

由此知，特征向量不是被特征值所唯一确定的，但是特征值却是被特征向量所唯一确定的，即若 $\sigma(\xi) = \lambda\xi$ 且 $\sigma(\xi) = \mu\xi$ ，则 $\lambda = \mu$.

二、特征值与特征向量的求法

分析： 设 $\dim V = n$，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是V的一组基，线性变换σ在这组基下的矩阵为A.

设λ_0是σ的特征值，它的一个特征向量ξ在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$下的坐标记为$\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$，

则$\sigma(\xi)$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$下的坐标为$A\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$，

而$\lambda_0\xi$ 的坐标是 $\lambda_0\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$，　又 $\sigma(\xi)=\lambda_0\xi$

于是 $A\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$，　从而 $(\lambda_0 E-A)\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}=0.$

即 $\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$ 是线性方程组 $(\lambda_0 E-A)X=0$ 的解，

又 $\because \xi\neq 0$，$\therefore \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}\neq 0$，

从而 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 有非零解.

所以它的系数行列式 $|\lambda_0 E - A| = 0.$

以上分析说明：

若 λ_0 是 σ 的特征值，则 $|\lambda_0 E - A| = 0.$

反之，若 $\lambda_0 \in P$ 满足 $|\lambda_0 E - A| = 0,$

则齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 有非零解.

若 $(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n})'$ 是 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 一个非零解，

则向量 $\xi = x_{01}\varepsilon_1 + \cdots + x_{0n}\varepsilon_n$ 就是 σ 的属于 λ_0 的一个特征向量.

1. 特征多项式的定义

设 $A \in P^{n\times n}$，λ 是一个文字，矩阵 $\lambda E - A$ 称为

A的**特征矩阵**，它的行列式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \triangleq f_A(\lambda)$$

称为A的**特征多项式**.

（ $f_A(\lambda)$是数域P上的一个n次多项式）

注：

① 若矩阵A是线性变换 σ 关于V的一组基的矩阵，而 λ_0 是 σ 的一个特征值，则 λ_0 是特征多项式 $f_A(\lambda)$ 的根，即 $f_A(\lambda_0)=0.$

反之，若 λ_0 是A的特征多项式的根，则 λ_0 就是 σ 的一个特征值．（所以，特征值也称**特征根.**）

② 矩阵A的特征多项式的根有时也称为<u>A的特征值</u>，而相应的线性方程组 $(\lambda E-A)X=0$ 的非零解也就称为<u>**A的属于这个特征值的特征向量**</u>.

2. 求特征值与特征向量的一般步骤

i) 在V中任取一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,写出 σ 在这组基下的矩阵A.

ii) 求A的特征多项式 $|\lambda E - A|$ 在P上的全部根,它们就是 σ 的全部特征值.

iii) 把所求得的特征值逐个代入方程组

$$(\lambda E - A)X = 0$$

并求出它的一组基础解系.(它们就是属于这个特征值的全部线性无关的特征向量在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标.)

如果特征值 λ_0 对应方程组的基础解系为：

$$(c_{11},c_{12},\cdots,c_{1n}),(c_{21},c_{22},\cdots,c_{2n}),\cdots,(c_{r1},c_{r2},\cdots,c_{rn})$$

则 $\eta_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\varepsilon_j,\quad i=1,2,\cdots,r$

就是属于这个特征值 λ_0 的全部线性无关的特征向量.

而 $\xi=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_r\eta_r$,

（其中， $k_1,k_2,\cdots,k_r\in P$ 不全为零）

就是 σ 的属于 λ_0 的全部特征向量.

例1.在线性空间V中，数乘变换K在任意一组基下的矩阵都是数量矩阵kE，它的特征多项式是

$$|\lambda E - kE| = (\lambda - k)^n.$$

故数乘法变换K的特征值只有数k，且

对 $\forall \xi \in V \quad (\xi \neq 0)$，皆有 $K(\xi) = k\xi.$

所以，V中任一非零向量皆为数乘变换K的特征向量.

例2. 设线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

求 σ 的特征值与特征向量.

解： A的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 5)$$

故 σ 的特征值为： $\lambda_1 = -1$（二重），$\lambda_2 = 5$

把 $\lambda=-1$ 代入齐次方程组 $(\lambda E-A)X=0$，得

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\end{cases}\qquad 即\quad x_1+x_2+x_3=0$$

它的一个基础解系为：$(1,0,-1)$，$(0,1,-1)$

因此，属于-1 的两个线性无关的特征向量为

$$\xi_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3,\quad \xi_2=\varepsilon_2-\varepsilon_3$$

而属于-1 的全部特征向量为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2,\qquad (k_1,k_2\in P\ 不全为零\ )$$

把 $\lambda=5$ 代入齐次方程组 $(\lambda E-A)X=0$，得

$$\begin{cases} 4x_1-2x_2-2x_3=0 \\ -2x_1+4x_2-2x_3=0 \\ -2x_1-2x_2+4x_3=0 \end{cases}$$

解得它的一个基础解系为：(1,1,1)

因此，属于5的一个线性无关的特征向量为

$$\xi_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

而属于5的全部特征向量为

$$k_3\xi_3,\qquad (k_3\in P，\ k_3\neq 0\ )$$

三、特征子空间

定义： 设σ为n维线性空间V的线性变换，λ_0为σ的一个特征值，令V_{λ_0}为σ的属于λ_0的全部特征向量再添上零向量所成的集合，即 $V_{\lambda_0}=\{\alpha \mid \sigma\alpha=\lambda_0\alpha\}$

则V_{λ_0}是V的一个子空间, 称之为σ的一个**特征子空间**.

Q $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)=\lambda_0\alpha+\lambda_0\beta=\lambda_0(\alpha+\beta)$

$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)=k(\lambda_0\alpha)=\lambda_0(k\alpha)$

$\therefore\ \alpha+\beta\in V_{\lambda_0},\qquad k\alpha\in V_{\lambda_0}$

注：

若σ在n维线性空间V的某组基下的矩阵为A，则

$$\dim V_{\lambda_0} = n - \text{秩}(\lambda_0 E - A)$$

即特征子空间 V_{λ_0}的维数等于齐次线性方程组

$$(\lambda_0 E - A)X = 0 \qquad (*)$$

的解空间的维数，且由方程组(*)得到的属于λ_0的全部线性无关的特征向量就是V_{λ_0}的一组基.