高等代数中的一些问题

博士家园　xida

1　简单一些的问题

问题1. 设 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 是一个实系数的 n 个变元的多项式, 如果 f 在 $\mathbb{R}^n$ 中的某个开球上的值为零, 求证 f 是零多项式.

证明: 通过适当的仿射变换可以不妨假设这个开球就是单位球. 把 f 中次数为 d 的单项式写在一起, 记作 F_d, 那么

$$f=F_n+F_{n-1}+\cdots+F_1+F_0.$$

我们只要证明每个 F_d 都是零多项式即可. 由于 F_d 是齐次的, 所以对任何实数 λ 都有

$$F_d(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)=\lambda^d F_d(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

考虑关于变元 t 的多项式

$$f(tx)=f(tx_1,\ldots,tx_n)=t^nF_n+t^{n-1}F_{n-1}+\cdots+tF_1+F_0,$$

如果某个 F_d 不是零多项式, 则存在某个向量 $a=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ 使得 $F_d(a)\neq 0$. 从而 $(F_n(a),F_{n-1}(a),\ldots,F_0(a))$ 不是零向量. 由于存在无穷多个实数 t 使得 ta 落在单位球内部, 取其中 $n+1$ 个不同的, 非零的记作 $t_1,\ldots,t_{n+1}$. 那么由 $f(t_ia)=0$ 得到

$$\begin{aligned}
&t_1^nF_n(a)+t_1^{n-1}F_{n-1}(a)+\cdots+t_1F_1(a)+F_0(a)=0\\
&t_2^nF_n(a)+t_2^{n-1}F_{n-1}(a)+\cdots+t_2F_1(a)+F_0(a)=0\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&t_{n+1}^nF_n(a)+t_{n+1}^{n-1}F_{n-1}(a)+\cdots+t_{n+1}F_1(a)+F_0(a)=0
\end{aligned}$$

系数矩阵是一个 Vandermonde 矩阵, 不可能有非零解, 矛盾. □

这个题目是我在看代数几何的时候想起来的. 它的意义就是说明非平凡的仿射代数簇是没有内点的, 从而 Zariski 拓扑是个比欧式拓扑粗糙的多的拓扑. 证明中用到一个事实: 非零的多项式一定在某点处不为 0（必须要求基域有无穷多个元素, 比如 $\mathbb{C}, \mathbb{R}$）, 请大家回忆下它的证明（对变元个数归纳）.

接下来这个题目是南开大学的一道考研题, 论坛上讨论过, 这里再作一个总结.

问题2. 设 A 是一个元素都是整数的反对称矩阵, 求证 A 的行列式是一个完全平方数.

这个问题不难, 但是很有意义. 在给出证明前, 先回忆一下二次型的基本知识.

我们知道一个数域 F 上的对称矩阵 B 总是合同于一个对角矩阵 D: $P'BP = D$. 而且这里的 P 也是一个 F 上的矩阵（回忆一下化二次型为标准形的算法, 就是用对角元反复打洞, 整个步骤都在数域 F 内进行）. 简单讲, $\mathbb{Q}$ 上的对称矩阵在 Q 内合同于一个对角矩阵, $\mathbb{R}$ 上的对称矩阵在 $\mathbb{R}$ 内合同于一个对角矩阵. 这和矩阵的相似是很不一样的, 以有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的对称矩阵为例, 它的特征值肯定是实数, 但是可能是无理数, 所以它在 $\mathbb{Q}$ 内合同于一个 $\mathbb{Q}$ 上的对角矩阵, 在 $\mathbb{R}$ 内相似于一个 $\mathbb{R}$ 上的对角矩阵, 但是未必在 $\mathbb{Q}$ 内相似于 $\mathbb{Q}$ 上的对角矩阵.

回到原来的问题上来: 我们知道 $|A|$ 一定是个整数, 我们只要能证明 $|A|$ 是一个有理数的平方, 那么它就必然是一个整数的平方. 所以我们可以把 A 看成有理数域内的矩阵, 通过合同变换（整个合同的步骤在有理数域内进行）, 把 A 化成形如

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & a_s \\ -a_s & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

的有理数上矩阵, 就可以证明结论. 而这一切与对称矩阵化为对角形完全类似, 也是通过打洞来实现.

首先可以假设 A 的第一行不为零（否则跳过第一行第一列考虑右下角）, 通过置换 A 的行与列我们可以假设 A 形如

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} & * \\ * & A_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ -B_2' & A_{n-2}. \end{pmatrix}.$$

这里 $a \neq 0$, 从而 A_2 可逆. 所以可以用 A_2 打洞消去“B_2, B_2'”:

$$\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ -B_2'A_2^{-1} & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ -B_2' & A_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & -A_2^{-1}B_2 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_{n-2} + B_2'A_2^{-1}B_2 \end{pmatrix}.$$

请大家自行验证这是一个合同变换（关于打洞可以看葵花宝典的第一章），而且整个过程不超出有理数域. 然后对右下角的 $A_{n-2}+B_2'A_2^{-1}B_2$ 重复这个过程就把 A 化成了标准形.

现在设 $P'AP$ 为前面说过的标准形, 那么 $|P|^2\cdot|A|$ 是一个有理数的平方, 而 P 是一个有理数上的可逆矩阵, 所以 $|P|^2$ 也是有理数的平方（其实是 1）, 从而 $|A|$ 是有理数的平方, 从而是整数的平方.

问题3. 设 P,Q 是两个元素都是非负整数的矩阵, 满足 $PQ=I$, 求证 P 和 Q 都是置换矩阵. 这里置换矩阵的定义是每一行和每一列都恰好只有一个 1 的矩阵, 这样的矩阵对应的线性变换把基向量作一个置换, 故得此名.

这个问题是在半单李代数根系的分类里见到的, 背景是说如果两个素根系生成同样的正根, 那么这两个素根系相同. 证明很简单, 左乘一个矩阵 P 就是给 Q 做一些初等行变换, 而元素都是非负整数就给这些行变换加了很多限制, 详细的证明留给大家完成.

问题4. 设 A 是一个实对称矩阵, $\lambda_{\min}$ 和 $\lambda_{\max}$ 为 A 的最小和最大的实特征值, 那么 A 的任何对角元 a_{ii} $(1\le i\le n)$ 都满足 $\lambda_{\min}\le a_{ii}\le\lambda_{\max}$, 而且两个不等式只要有一个的等号成立就会有 $a_{ij}=a_{ij}=0$ $(j\neq i)$.（也就是说 a_{ii} 所在的行和列的其它元素都是 0）

证明: 有这么一个引理, 一个半正定矩阵的对角元总是非负的, 而且如果这个对角元是 0 的话该对角元所在的行与列必然都是 0. 所以只要对 $A+\lambda_{\min}I$ 和 $\lambda_{\max}I-A$ 这两个半正定矩阵应用这个引理即可.（引理的证明仍然见葵花宝典第一章） □

这个结论的几何意义很明确, 把二次型 $X'AX$ 看成单位球面上的连续函数, 它在标准单位坐标 e_i 上的值就是 a_{ii}, 在其特征向量 α_i 上的值为 λ_i. 实际上这个函数的极大值和极小值都在特征向量处取得, 换言之, 单位球面的形变在特征向量处“最严重”.

问题5. 设 A,B 是两个实对称矩阵, 如果 $A+B, A-B, A$ 三者有相同的特征多项式, 求证必有 $B=0$.

这个问题是我自己发现的, 不敢肯定是否已经存在. 证明要用到前一个问题作为引理.

证明: 可以假设 A 是对角形

$$A=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}\quad \lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_n.$$

这个时候 $A\pm B$ 的第一个对角元是 $\lambda_1\pm b_{11}$, 它必须不大于 $A\pm B$ 最大的特征值 λ_1, 所以 $b_{11}=0$, 而且这时 $A\pm B$ 的第一个对角元是 λ_1, 从而 B 的第一行第一列必须都是 0, 从而 B 形如

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&B_2\end{pmatrix}.$$

使用归纳法即可. $\square$

问题6. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 而且 $AB=BA$, 问是否有不等式

$$\mathrm{r}(A^2)+\mathrm{r}(B^2)\geq 2\mathrm{r}(AB)$$

成立?

这是老论坛上一位网友提出的问题, 说这个结论是他在一篇论文中证明了的. 我感觉很有意思, 就试着证明它, 但是怎么也做不出来, 回头构造反例, 也很困难. 这正是这个问题的巧妙之处. 下面给出一个反例:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

这样 $\mathrm{r}(A^2)=0, \mathrm{r}(B^2)=\mathrm{r}(AB)=1$, 从而原不等式不成立.

不过当 A, B 之中有一个可逆, 或者只有一个 0 特征值的 Jordan 块的时候结论都是对的（至少三阶以下矩阵都是对的）, 所以构造反例的时候必须从两个 Jordan 块开始, 这就增加了难度. 请大家自己证明, 当 A, B 的阶都不大于 3 时不等式是成立的.

问题7 (两半正定矩阵同时合同于对角形). 两个 n 阶半正定矩阵 A,B 可以同时合同于对角形, 即存在可逆矩阵 T 使得 $T'AT, T'BT$ 都是对角矩阵.

这个问题在葵花宝典中有, 可惜那里的证明是错误的, 感谢网友 Inzagi 指出了其中的错误, 这里把正确的解答发上来:

证明: 首先做合同变换把 A 化成标准形 $A\sim\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$, 这时 B 仍然是半正定的, 所以不妨从一开始就假设 A 就是如上的标准形, 并设

$$B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix},\quad B_{12}=B_{21}'.$$

我们要在保持 A 的形状的前提下把 B 化成标准形.

设正交矩阵 Q 使得

$$Q'B_{22}Q=\begin{pmatrix}I_s&0\\0&0\end{pmatrix},$$

那么矩阵

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

的合同变换保持 A 不变, 把 B 化为形如

$$\begin{pmatrix} B_{11} & * & 0 \\ * & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵. 这个时候用 I_r 打洞消去“$*$”的部分, 这还是一个不影响 A 的合同变换, 这就把 A, B 同时变成了准对角形, 接下来就很显然了. $\square$

在证明过程中, 使用了“半正定矩阵的对角元一旦出现 0, 则整行整列都是 0”这个结论.

问题8. 设 A, B 是两个 n 阶复矩阵, 且存在复数 a, b 使得 $AB-BA=aA+bB$, 求证 A, B 可以同时上三角化.

同时上三角化的问题本质上就是寻找公共特征向量.

证明: 如果 a, b 都是 0, 那么交换的矩阵可以同时上三角化, 结论成立. 所以不妨设 $a \neq 0$. 以 B/a 代替 B 我们还可以假设 $a=1$. 记 $C=AB-BA=A+bB$, 则 $CB-BC=C$. 我们来证明 B, C 可以同时上三角化, 那么 $A=C-bB$ 也就被上三角化了. 所以只要证明如下结论:

若两个矩阵 C, B 满足 $CB-BC=C$, 则 C, B 可以同时上三角化.

为此只要找 B, C 的公共特征向量. 设 $Cx=\lambda x$ 是 C 的特征向量,

$$W=\operatorname{span}\{x, Bx, B^2x, \dots\},$$

则 W 是一个 B 不变子空间. 我们来证明 W 也是 C 的不变子空间, 而且有

$$C(B^i x)=\lambda B^i x+（B^{i-1}x, \dots, B^x, x \text{ 的线性组合}）.$$

$i=1$ 时,

$$C(Bx)=(BC+C)x=\lambda Bx+\lambda x,$$

结论成立. 设 $i \le m$ 时结论成立, 则

$$\begin{aligned}C(B^{m+1}x) &= CB(B^m x)\\ &= (BC+C)(B^m x)\\ &= (B+I)(\lambda B^m + \cdots)\\ &= \lambda B^{m+1}x + \cdots\end{aligned}$$

所以 W 确实是 C 的不变子空间, 而且在基 $x, Bx, \ldots$ 下 C 的矩阵是一个对角线上都是 λ 的上三角矩阵. 但是 $C = CB - BC$ 是 W 上两个线性变换之差, 其迹必须是 0, 从而 $\lambda = 0$, 那么 C 是幂零的, 设 N 是 C 的特征子空间, 那么对 $x \in N$ 有

$$C(Bx) = (BC+C)x = 0,$$

所以 N 也是 B 的不变子空间, B 在 N 上有特征向量, 从而 B, C 有共同的特征向量 x.

现在把 x 开拓为整个空间的一组基, B, C 的矩阵形如

$$B = \begin{pmatrix}\lambda & * \\ 0 & B_1\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & C_1\end{pmatrix},$$

那么 $C_1B_1 - B_1C_1 = C_1$, 可以使用归纳假设, 把 B_1, C_1 同时上三角化就证明了结论. □

2 稍难一些的问题

问题9 (Craig-Sakamoto定理)**.** 设 A, B 是两个 n 阶实对称矩阵, 如果对任何实数 x, y 都有等式

$$\det(I - xA - yB) = \det(I - xA)\det(I - yB)$$

成立, 那么必有 $AB = 0$.

Craig-Sakamoto定理是统计学中的重要定理, 关于其证明以及其对于统计学的重要意义大家可以 Google 一下, 会找到不少资料. 这里的证明是我 Google 来的, 很巧妙.

证明: 对于一个矩阵 C, 记 $\rho(C)$ 为 C 的谱半径. 给 A, B 乘以合适的常数以后我们总可以假定 $\rho(A) = \rho(B) = 1$. 此外, 我们可以在 A 是标准形

$$A = \operatorname{diag}\{1, a_2, \ldots, a_n\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{n-1}\end{pmatrix} \quad (1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n).$$

的前提下讨论（给 A,B 同时施以正交变换不影响条件和结论）. 我们断言这个时候 B 必然形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{n-1} \end{pmatrix}.$$

这是因为当 $r>1$ 时, A/r 和 B/r 的特征值都落在开区间 $(-1,1)$ 内, 所以 $I-A/r$ 和 $I\pm B/r$ 都是可逆的, 从而

$$\det(I-\frac{A}{r}\pm\frac{B}{r})=\det(I-\frac{A}{r})\det(I\pm\frac{B}{r})\neq 0.$$

这说明 $r>1$ 时 r 不是 $A\pm B$ 的特征值. 另一方面我们有

$$\det(I-A\pm B)=\det(I-A)\det(I\pm B)=0,$$

所以 $A\pm B$ 的特征值的最大者都是 1, 所以 $A\pm B$ 的对角元都不能超过 1, 所以必须有 $b_{11}=0$, 而且这个时候 $A\pm B$ 的第一个对角元都是 1, 等于其极大特征值, 所以第一行第一列的所有非对角元素必须都是 0, 从而说明 B 的确是上面所说的形式.

接下来就可以用归纳法了: 当 $x\neq 1$ 时,

$$\begin{cases} \det(I-xA-yB)=(1-x)\det(I_{n-1}-xA_{n-1}-yB_{n-1}) \\ \det(I-xA)=(1-x)\det(I_{n-1}-xA_{n-1}) \\ \det(I-yB)=\det(I_{n-1}-yB_{n-1}) \end{cases}.$$

所以 $x\neq 1$ 时有

$$\det(I_{n-1}-xA_{n-1}-yB_{n-1})=\det(I_{n-1}-xA_{n-1})\det(I_{n-1}-yB_{n-1})$$

成立, 再根据连续性即得上式对任何 $x,y\in R$ 都成立. 根据归纳假设, $A_{n-1}B_{n-1}=0$, 从而 $AB=0$, 得证. □

下面这个问题在老论坛上出现了好几次, 也有不少证明方法, 可惜扰动法太麻烦, 外积的方法太“高深”. 这里给一个思路比较明晰的证明.

问题10. 设 $M=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, 如果实方阵 A 满足 $M=A'MA$, 求证 $\det A=1$.

所有满足 $M=A'MA$ 的方阵 A 全体组成的集合为 S. 显然若 $A\in S$, $B\in S$, 那么就有 $AB\in S$. 我们要证明

(1) 若 $A\in S$, 那么 $A^{-1}\in S$, $A'\in S$.

证明: $A^{-1}\in S$ 是很好证的, 两边同时用 A^{-1} 作合同变换即可. 至于 $A'\in S$, 注意到 $M^2=-I_{2n}$, 所以

$$\begin{cases} (AM)M=(AM)A'MA=(AMA')MA \\ (AM)M=-AI_{2n}=MMA \end{cases} \Rightarrow (AMA')MA=MMA\Rightarrow M=AMA'.$$

所以 $A'\in S$.

(2) 设 $H\in S$ 且 H 正定, H 的平方根为 P, 则 $P\in S$.

证明: 由已知可得 $M=HMH$, $H^{-1}M=MH$, 从而对任何多项式 $f(x)$ 有 $f(H^{-1})M=Mf(H)$. 设 H 特征值为 $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_{2n}\}$, 正交矩阵 O 使得 $O'HO=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_{2n}\}$, 那么 $O'PO=\operatorname{diag}\{\mathfrak{sl}_2\lambda_1,\ldots,\mathfrak{sl}_2\lambda_{2n}\}$. 我们可以用拉格朗日插值来求出 f 使得 $f(\lambda_i)=\mathfrak{sl}_2\lambda_i$, $f(1/\lambda_i)=1/\mathfrak{sl}_2\lambda_i$ $(1\le i\le 2n)$, 这样就有 $f(H)=P$, $f(H^{-1})=P^{-1}$, 从而 $P\in S$.

(3) 设 $A\in S$, A 的极分解为 $A=HQ$, 这里 H 正定, Q 正交, 则 $H\in S$, $Q\in S$.

证明: $A\in S, A'\in S\Rightarrow AA'\in S\Rightarrow \sqrt{AA'}=H\in S\Rightarrow Q=AH^{-1}\in S$.

(4) 设 $Q\in S$, Q 正交, 则 $\det Q=1$.

证明: 设 $Q=\begin{pmatrix} C & D \\ E & F\end{pmatrix}$, 则 $MQ=QM$, 从而 $C=F, D=-E$, 所以 $Q=\begin{pmatrix} C & D \\ -D & C\end{pmatrix}$. Q 正交说明 $CC'+DD'=I_n$, $CD'=DC'$. 从而 $(C+iD)(C'-iD')=I_n$, 则

$$\begin{vmatrix} C & D \\ -D & C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C & D \\ iC-D & C+iD\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C-iD & D \\ 0 & C+iD\end{vmatrix}=|C+iD|\cdot|C-iD|=1,$$

从而 $\det Q=1$.

(5) 设 $H\in S$, H 正定, 则 $\det H=1$.

证明: 由 $M=HMH$ 可得 $(\det H)^2=1$. 但是 H 正定, 所以 $\det H=1$.

综合 (3), (4), (5), 我们就得到了问题的证明.

这里的 S 实际上构成一个群, 叫做辛群. 这个证明就是利用了 S 的群结构, 去证明 S 在极分解下保持不变, 然后对正定矩阵和正交矩阵分别加以验证即可. 这个证明同样适用于复矩阵的情况.

注. $\begin{vmatrix} C & D \\ -D & C\end{vmatrix}=|C+iD|\cdot|C-iD|$ 应该是一个熟知的结论, 为了方便大家起见文中给出了证明, 就是两步简单的行列变换.

问题11 (不可逆矩阵空间最大维数). 设 M 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 的一个子空间, 如果 M 中的矩阵都是不可逆矩阵, 那么 M 的维数最大可能是多少?

这个问题的答案并不难猜, 是 $n(n-1)$. 例子也很好举: 第一行都是 0, 其它位置为任意复数的全体 $n\times n$ 矩阵构成的子空间就满足要求. 但是证明 M 的维数不可能比这更大却是一件很困难的事. 我们来证明一个更强的结论:

命题. 如果 M 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 的子空间而且 M 中的矩阵的秩都不超过 r, 那么 M 的维数至多为 rn.

证明: 首先我们可以不妨假设 M 中含有一个矩阵 A,

$$A=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

这里 $0<r\leq n-1$.（否则的话就把 M 中的矩阵 X 都变成 PXQ）我们断言

(1) 这个时候 M 中的矩阵都形如

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & 0\end{pmatrix}.$$

这里 B_{11} 是 $r\times r$ 矩阵, 而且 $B_{21}B_{12}=0$.

(1) 的证明: 对任意的 $B\in M$, 设

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix},$$

那么对任何复数 t, $tA+B$ 仍然是 M 中秩不超过 r 的矩阵, 所以其任何 $r+1$ 阶的子式必须为 0, 即

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} tI_r+B_{11} & \beta_j\\ \alpha_i & b_{ij}\end{vmatrix}=0.$$

这里 b_{ij} 表示 B_{22} 的第 (i,j) 个元素, α_i 表示 B_{21} 的第 i 行, β_j 表示 B_{12} 的第 j 列.

这个行列式展开以后是 t 的一个多项式, 由于它必须恒等于 0, 所以首项 t^r 的系数 $b_{ij}=0$, 从而 $B_{22}=0$. 而且当 tI_r+B_{11} 可逆的时候根据打洞的技巧,

$$\begin{aligned}\Delta(t)&=|tI_r+B_{11}|\cdot|0-\alpha_i(tI_r+B_{11})^{-1}\beta_j|\\ &=-\alpha_i\beta_j|(tI_r+B_{11})^*|.\end{aligned}$$

所以 $-\alpha_i\beta_j=0$, 从而 $B_{21}B_{12}=0$, 引理成立.

(2) 如果 $B,C\in M$, 则 $B_{21}C_{12}+C_{21}B_{12}=0$.

对 $B+C$ 应用前一个引理, 有 $(B_{21}+C_{21})(B_{12}+C_{12})=0$, 展开即得 $B_{21}C_{12}+C_{21}B_{12}=0$.

最后完成证明: 我们来考虑一个线性映射 $f\colon M\to \mathrm{M}_{r\times n}(\mathbb{C})$:

$$f(B)=(B_{11},B_{12}).$$

这个线性映射的核

$$U=\mathrm{Ker}f=\begin{pmatrix}0 & 0\\ B_{21} & 0\end{pmatrix}.$$

下面我们再通过一个线性映射 g 把 U 嵌入到 $\mathrm{M}_{r\times n}(\mathbb{C})$ 的对偶空间 $\mathrm{M}_{r\times n}(\mathbb{C})^*$ 中去:

$$g(B)(X_{11},X_{12})=\mathrm{tr}(B_{21}X_{12}).\quad X\in \mathrm{M}_{r\times n}(\mathbb{C}).$$

考察

$$g(U)^{\perp}=\{X\in \mathrm{M}_{r\times n}(\mathbb{C})\mid g(B)(X)=0,\forall B\in U\}.$$

那么 $\dim g(U)^{\perp}=\dim \mathrm{M}_{r\times n}(\mathbb{C})^*-\dim g(U)=rn-\dim U$. 显然 $f(U)\in g(U)^{\perp}$, 所以

$$\dim f(U)\le rn-\dim U.$$

即 $\dim M=\dim U+\dim f(U)\le rn.$ □

问题12 (交换矩阵空间最大维数). 设 M 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 的一个子空间, 如果 M 中的矩阵两两可以交换, 求证 M 的维数最大是 $[\frac{n^2}{4}]+1$.

证明: 对 n 归纳, $n=1$ 结论显然成立, 设小于 n 的时候结论成立, 来看 n 的情形:

由于 M 中的矩阵两两可以交换, 所以它们可以同时上三角化. 所以无妨假设 M 中的每一个矩阵都是上三角矩阵. 对每个 $A\in M$, 我们截取 A 左上角的 $n-1$ 阶主子阵, 把这个矩阵记作 $f(A)$, 同时截取 A 的右下角的 $n-1$ 阶主子阵, 把它记作 $g(A)$, 那么所有的 $f(A)$ 之间两两可以交换, 所有的 $g(A)$ 两两之间可以交换. 由于 f 和 g 都可以看做是 M 到 $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ 的交换子空间的线性映射, 所以由归纳假设, $\dim f\le[\frac{(n-1)^2}{4}]$, $\dim g\le[\frac{(n-1)^2}{4}]$.

不难看出, $\mathrm{Ker}A$ 中的元素形如 $\begin{pmatrix}0_{n\times n-1} & \alpha\end{pmatrix}$, $\mathrm{Ker}g$ 中的元素形如 $\begin{pmatrix}\beta'\\ 0_{n-1\times n}\end{pmatrix}$. 这里的 α,β 都是 $n\times 1$ 向量. 两者交换意味着 $\beta'\alpha=0$, 即 $\alpha\perp\beta$, 从而 $\mathrm{Ker}f\perp\mathrm{Ker}g$, 所

以 $\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Ker} g \le n$, 从而

$$\begin{aligned}
\dim M = \dim \mathrm{Ker} f + \dim f &= \dim \mathrm{Ker} g + \dim g \\
&\le \frac{\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Ker} g}{2} + [\frac{(n-1)^2}{4}] + 1 \\
&\le \frac{n}{2} + [\frac{(n-1)^2}{4}] + 1 \\
&\le [\frac{n^2}{4}] + 1.
\end{aligned}$$

最后给出构造的例子: $n = 2m$ 是偶数的时候就取形如

$$\begin{pmatrix} \lambda I_m & N \\ 0 & \lambda I_m \end{pmatrix}$$

的矩阵, $n = 2m + 1$ 是奇数的时候就取形如

$$\begin{pmatrix} \lambda I_m & N \\ 0 & \lambda I_{m+1} \end{pmatrix}$$

的矩阵. □