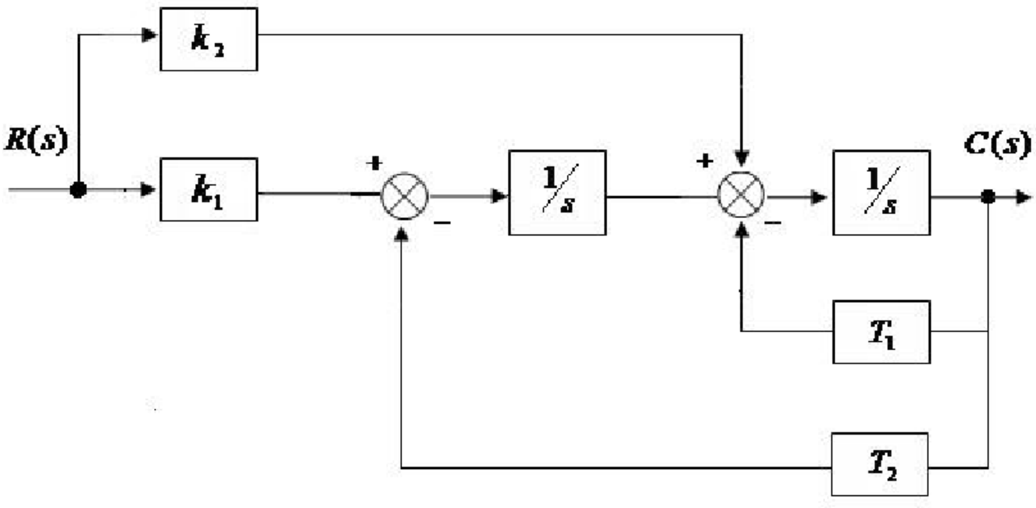
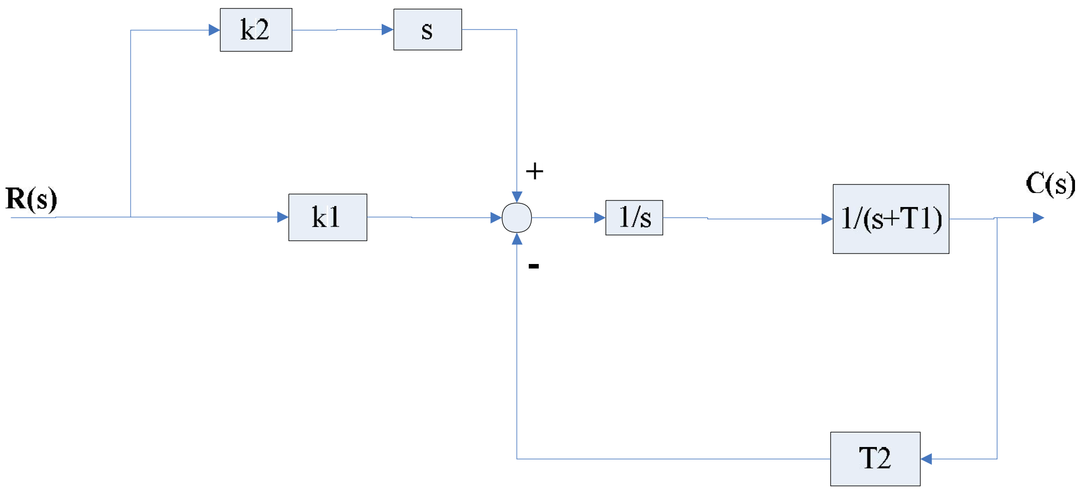
自动控制原理答案二十五

一、系统结构图如图 1 所示，求 $\dfrac{C(s)}{R(s)}$



等效变换得：



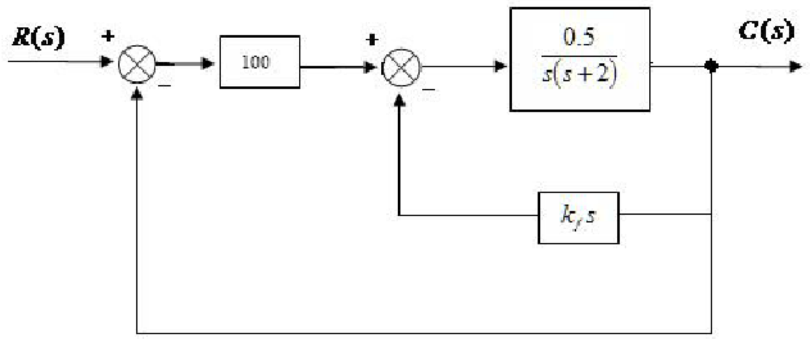
用信号流图法。

前向通路有 2 条：$k_2\, s\, \dfrac{1}{s}\dfrac{1}{s+T_1}$ 和 $k_1\dfrac{1}{s}\dfrac{1}{s+T_1}$

回路只有一条：$-T_2\dfrac{1}{s}\dfrac{1}{s+T_1}$ ，而且与两条前向通路都有接触。

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{k_2}{s+T_1}+\frac{k_1}{s(s+T_1)}}{1+\frac{T_2}{s(s+T_1)}}=\frac{k_2 s+k_1}{s^2+T_1 s+T_2}$$ （过程 8 分，结果 2 分）

二、已知系统的结构图如图 2 所示，若$r(t)=2\times 1(t)$时，当$k_f\neq 0$时，若要使$\sigma_P=20\%$，试求k_f应为多大？并求出此时的过渡时间t_s的值。



解： 闭环传递函数为：

$$\phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{50}{s^2+(2+0.5k_f)s+50}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$ (3 分)

可得： $\omega_n=7.07\,(rad/s)$ (0.5 分)

$$\xi=\frac{2+0.5k_f}{2\sqrt{50}}$$ (2 分)

山题上给出的条件：$\sigma_P=20\%=e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times 100\%$ (2 分)

得： $\xi=0.46$ (0.5 分)

代入$\xi=\frac{2+0.5k_f}{2\sqrt{50}}$， 得： k_f=9 (1 分)

调整时间t_s为：

当$\Delta=5\%$时，$t_s=\frac{3}{\xi\omega_n}=\frac{3}{7.07\times 0.46}=0.922(s)$ (0.5 分)

当 $\Delta = 2\%$ 时，$t_s = \dfrac{4}{\xi\omega_n} = \dfrac{4}{7.07\times 0.46} = 1.230(s)$(0.5 分)

三、设单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{k}{s\left(1+\frac{1}{3}s\right)\left(1+\frac{1}{6}s\right)}$$

若要闭环特征方程的根的实部均小于 -1，问 k 的取值范围。

解：

系统闭环特征方程为：

$$D(s) = s\left(1+\frac{1}{3}s\right)\left(1+\frac{1}{6}s\right) + k = 0 \qquad (3\ 分)$$

即 $\quad D(s) = s^3 + 9s^2 + 18s + 18k = 0$

若要闭环特征方程的根的实部均小于 -1，可令 $s = s_1 - 1$，将 s 平面映射为 s_1 平面，

只要特征根全部处于 s_1 平面的左半平面就可以了。

$$D(s_1) = (s_1-1)^3 + 9(s_1-1)^2 + 18(s_1-1) + 18k = 0$$

整理得： $\quad D(s) = s_1^3 + 6s_1^2 + 3s_1 + 18k - 10 = 0$

列劳斯表 (5 分)

$$\begin{array}{lll}
s_1^3 & 1 & 3 \\
s_1^2 & 6 & 18k-10 \\
s_1^1 & \dfrac{14-9k}{3} & 0 \\
s_1^0 & 18k-10 &
\end{array}$$

要使 $D(s_1)$ 的根全处于 s_1 的左半平面，则：

$$\frac{14-9k}{3} > 0 \quad 并且\ 18k-10 > 0$$

解出 $\quad \dfrac{14}{9} > k > \dfrac{5}{9}$

即当 $\dfrac{14}{9} > k > \dfrac{5}{9}$ 时，可使 $D(s)$ 的根实部全小于-1。 (2 分)

四、已知一单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k(s+1)}{s(s-3)}$$

画出根轨迹，确定使闭环系统稳定的k值范围。

解：

（1） 极点$P_1=0, P_2=3$， 零点$Z_1=-1$

（2） 确定分离点与会合点：

山 $\frac{d}{ds}\left(\frac{s(s-3)}{k(s+1)}\right)=0$

得 $s^2+2s-3=0$

解得 $s_1=-3, s_2=1$

（3） 根轨迹与虚轴的交点：

特征方程为

$f(s)=s^2+(k-3)s+k=0$

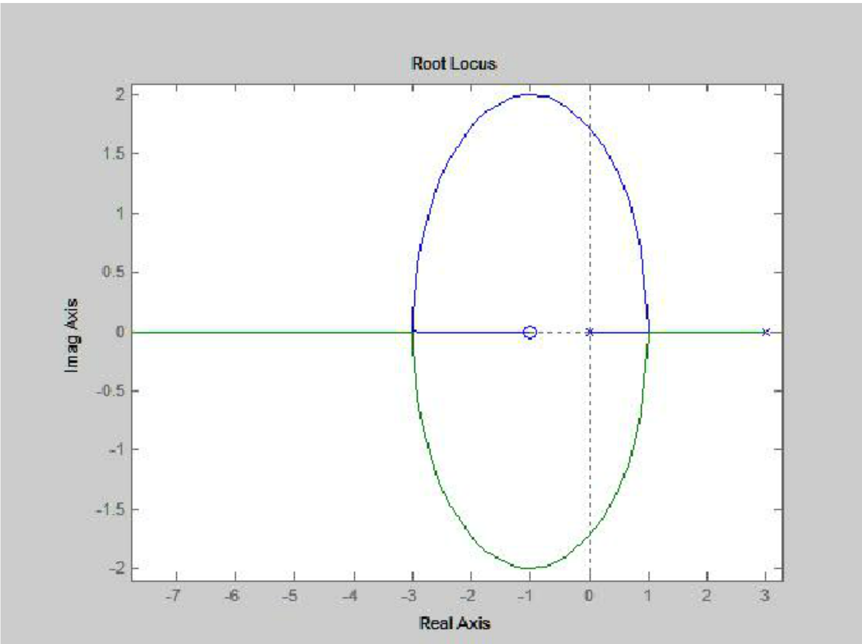
令$s=j\omega$ 代入上式得：

$k-\omega^2+(k-3)\omega j=0$

山虚部和实部分别等于零，可得：

$\omega=\pm j\sqrt{3},\ \ k=3$ (过程 8 分)

根轨迹如图所示：(5 分)



山系统稳定的条件知，当$k>3$时，闭环系统稳定。(2 分)

五、已知开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{100}{s(s+1)\left(s+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\left(s+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)}$$

作出其奈奎斯特图，并判断闭环系统的稳定性。

解：$G(s)H(s)=\frac{100}{s(s+1)\left(s+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\left(s+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)}$

令 $s=j\omega$ 代入上式得

幅频 $|G(j\omega)H(j\omega)|=\frac{100}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}}$

相频 $\angle G(j\omega)H(j\omega)=-90^\circ-\arctan\omega-\arctan(2\omega+\sqrt{3})-\arctan(2\omega-\sqrt{3})$

实频 $U(\omega)=-\frac{100(2-\omega^2)}{(1+\omega^2)\left[(1-\omega^2)^2+\omega^2\right]}$

虚频 $V(\omega)=\frac{100(2\omega^2-1)}{\omega(1+\omega^2)\left[(1-\omega^2)^2+\omega^2\right]}$

$\omega=0$ 时，$U(0)=-200$，$V(0)=-\infty$

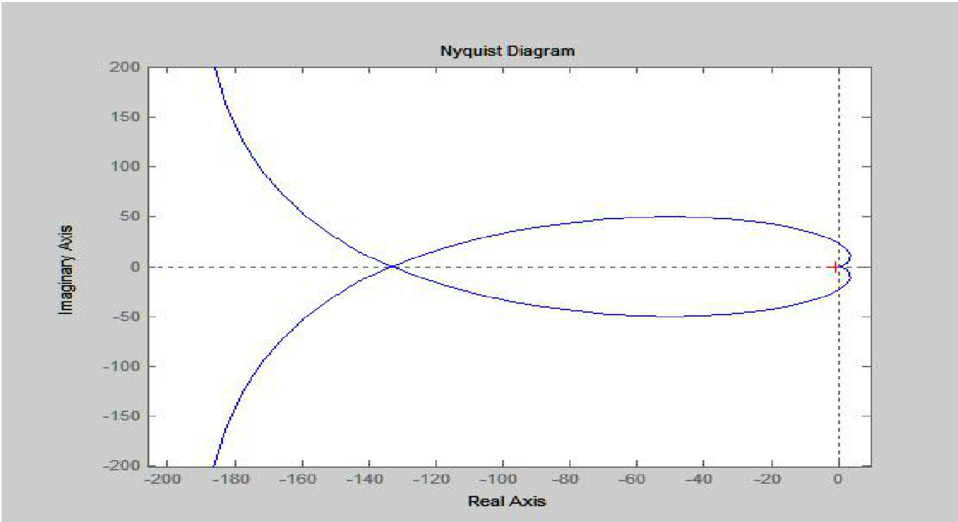
与实轴的交点，令 $V(\omega)=0$，解得

$$\omega=\pm\sqrt{0.5}，\quad 则 U(\sqrt{0.5})=-\frac{400}{3}$$

与虚轴的交点，令 $U(\omega)=0$，解得

$$\omega=\pm\sqrt{2}，\quad 则 V(\sqrt{2})=\frac{100}{3\sqrt{2}}$$ (过程 8 分)

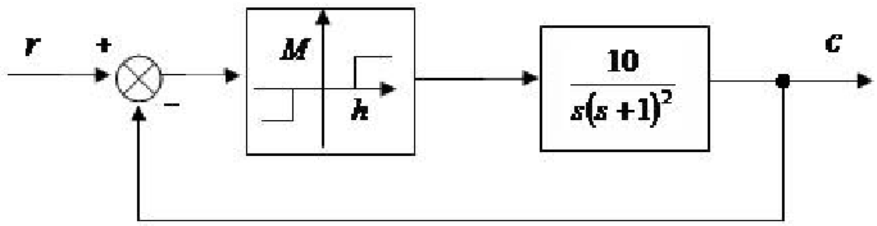
则奈奎斯特图如图如示：　(5 分)



山开环传递函数可知，开环正实部极点个数 $P=0$

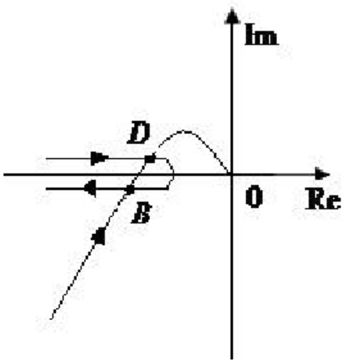
又因为 ω 从 0 到 ∞ 在 $(-1,j0)$ 点的左侧有一次负穿越，可知闭环系统不稳定。(2 分)

六、设某非线性系统的方框图如图所示。M=2，h=0.5,分析该系统的稳定性。若存在自持振荡，找出自持振荡的频率和振幅。



解： $N(A)=\dfrac{4M}{\pi A}\sqrt{1-\left(\dfrac{h}{A}\right)^2}$

在复平面画出 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 和 $G(j\omega)$ 曲线相交于 B，D 两点。



(5 分)

山稳定性分析可知，B 点是稳定的自持振荡，D 点不是。

由 $-\frac{1}{N(A)}=G(j\omega)$，(5 分)

即 $-\frac{20\omega+j(1-\omega^2)}{\omega\left[(1-\omega^2)^2+4\omega^2\right]}=-\frac{\pi A}{8\sqrt{1-\left(\frac{0.5}{A}\right)^2}}$

得： $1-\omega^2=0$

将 M=2，h=0.5 代入上式，得 $\omega=1, A_B=12.723, A_D=0.5$ (1 分)

当 $A>12.723$ 时，系统稳定；当 $0.5\le A<12.723$ 时，系统不稳定；(2 分)
当 $A=12.723$ 时，系统产生自持振荡，且频率 $\omega=1$ (2 分)

七、已知最小相位开环系统的对数幅频特性曲线如图 5 所示，求（1）系统的开环传递函数；（2）利用稳定裕度判断系统的稳定性。

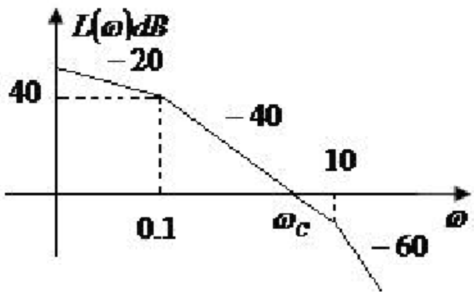


图 5

解：（1）从对数幅频特性曲线可知，系统为 I 型，开环传递函数为：

$$G(s)H(s)=\frac{k}{s\left(\frac{1}{0.1}s+1\right)\left(\frac{1}{10}s+1\right)}=\frac{k}{s(10s+1)(0.1s+1)}$$

低频段 $20\lg k-20\lg 0.1=40$ 得：$k=10$ (K 值 2 分,传递函数正确给 8 分)

（2）$\left|G(j\omega_c)H(j\omega_c)\right|=\frac{10}{\omega_c\sqrt{1+(10\omega_c)^2}\sqrt{1+(0.1\omega_c)^2}}=1$ (2 分)

整理得：$\omega_c^2\left[1+(10\omega_c)^2\right]\left[1+(0.1\omega_c)^2\right]=100$

可得： $\omega_c=1$ (2 分) 代入相频特性可得：

$$\angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)=-90^\circ-\arctan\frac{\omega_c}{0.1}-\arctan\frac{\omega_c}{10}=-180.04^\circ$$

相位裕度为 $\gamma=180^\circ+\angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)=0^\circ$ (2 分)

可知系统临界稳定。(1 分)

八、已知离散系统如图 6 所示，其中 $T=0.5s$。求当采样周期为 $T_1=0.4s$ 时，使系统稳定的 k 值范围。

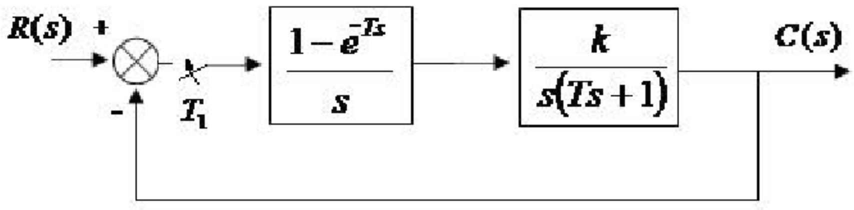


图 6

解：当有零阶保持器时，前向通路的传递函数为

$$G(s)=\frac{1-e^{-T_1 s}}{s}\cdot\frac{k}{s(Ts+1)}$$ (2 分)

$$G(z)=k\left[\frac{Ts}{z-1}-\frac{T\left(1-e^{-T_1/T}\right)}{z-e^{-T_1/T}}\right]$$

当 $T_1=0.4$，$T=0.5$ 时，$G(z)=\dfrac{0.125k(z+0.76)}{(z-1)(z-0.45)}$ (2 分)

系统的闭环特性方程为： (2 分)

$$1+G(z)=1+\frac{0.125k(z+0.76)}{(z-1)(z-0.45)}=0$$

即 $z^2+(0.125k-1.45)z+(0.45+0.095k)=0$.

做 W 变换并整理，得：

$0.22kW^2+2(0.55-0.095k)W+(2.9-0.03k)=0$ (2 分)

山劳思判据得 $0<k<5.79$,此时系统稳定。(2 分)