高等数学(二)模拟试题

一、选择题(每小题3分，共24分)

1. 以$y_1=\mathrm{e}^{3x}$，$y=\mathrm{e}^{-x}$为特解的阶数最低的常系数齐次线性微分方程是(A)

(A) $y''-2y'-3y=0$　　(B) $y''-2y'+3y=0$

(C) $y''+2y'+3y=0$　　(D) $y''-2y'-2y=0$

2. 直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$和$\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$所确定的平面方程为(B)

(A) $3(x-1)+2(y-2)-2(z-3)=0$　　(B) $3(x-1)-2(y-2)-2(z-3)=0$

(C) $3(x-1)-2(y-2)+2(z-3)=0$　　(D) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{-2}$

3. 设$z=\mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}}$，则$2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$(C)

(A) 1　　(B) $\dfrac{4x}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}}$　　(C) 0　　(D) $-\dfrac{4x}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}}$

4. 设D是第二象限的第一个有界闭域，且$0<y<1$，则$I_1=\iint_D yx^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$I_2=\iint_D y^2x^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$I_3=\iint_D y^{\frac{1}{2}}x^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$的大小顺序为(D)

(A) $I_1\leqslant I_2\leqslant I_3$　　(B) $I_2\leqslant I_1\leqslant I_3$　　(C) $I_3\leqslant I_2\leqslant I_1$　　(D) $I_3\leqslant I_1\leqslant I_2$

5. Ω为球体：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，则$\iiint_\Omega f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}v=$(C)

(A) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(\rho)\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho$　　(B) $\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

(C) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(\rho)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho$　　(D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(\rho)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho$

6. L为上半圆周$(x-a)^2+y^2=a^2$与x轴围成的闭区域的边界曲线，取逆时针方向，则$\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-2y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-2)\mathrm{d}y=$(B)

(A) $-\pi a^2$　　(B) πa^2　　(C) 0　　(D) $2\pi a^2$

7. 设Σ为旋转抛物面$z=2-x^2-y^2$在xoy平面上方的曲面，则$\iint_\Sigma \mathrm{d}S=$(D)

(A) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$　　(B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$

(C) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$　　(D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$

8. 下列级数发散的是(A)

(A) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^2$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n}$

二、填空题(每空3分，共24分)

1. 微分方程$y''+y'-2y=6\mathrm{e}^{-x}$的一个待定特解$y_1$的形式$y_1=$ $\underline{\ a\mathrm{e}^{-x}\ }$.

2. 母线平行于x轴且通过曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\2x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$的柱面方程是$\underline{\ 3y^2+z^2=18\ }$.

3. 设$z=x\ln(x+y)$，则$\mathrm{d}z\big|_{(1,0)}=$ $\underline{\ \mathrm{d}x+\mathrm{d}y\ }$.

4. $\iint_D(x+x^3y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ $\underline{\ 0\ }$(区域D由抛物线$y=x^2$及直线$y=2$围成).

5. 设D为闭区域：$x^2+y^2\leqslant 4$，$y\geqslant 0$，则$\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$化为极坐标下的二次积分的表达式为$\underline{\ \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\,\mathrm{d}\rho\ }$.

6. 设L是有向闭曲线，若对任意的x，y有$\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y}$，则$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=$ $\underline{\ 0\ }$.

7. 设Σ是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$，取外侧，则$\oiint_\Sigma z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ $\underline{\ \dfrac{4}{3}\pi a^3\ }$.

8. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$绝对收敛，则$\alpha$的取值范围是$\underline{\ \alpha>1\ }$.

三、综合题(请写出求解过程，8小题，共52分)

1. 求过点$(1,-2,0)$，且与直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$垂直的平面方程.　(6分)

平面与直线垂直，那么平面的法向量与直线的方向向量平行

直线的方向向量为$(1,2,1)$

不妨设平面的法向量$\vec{n}=(1,2,1)$

那么平面方程:$1(x-1)+2(y+2)+1(z-0)=0$

即$x+2y+z+3=0$

2. 设$z=f(2x+3y,\ln(2x+y))$，且f具有一阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.　(6分)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2f_1'(2x+3y,\ln(2x+y))+\frac{2}{2x+y}f_2'(2x+3y,\ln(2x+y))$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3f_1'(2x+3y,\ln(2x+y))+\frac{1}{2x+y}f_2'(2x+3y,\ln(2x+y))$$

3. $\iint_D x\sqrt{y}\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由两条抛物线$y=\sqrt{x}$，$y=x^2$所围成的闭区域．（6分）

$$\iint_D x\sqrt{y}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^1 x\left[x^{\frac{3}{4}}-x^3\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{4}{11}-\frac{1}{5}\right]=\frac{6}{55}$$

4. 计算由旋转抛物面$z=6-3x^2-3y^2$及平面$z=0$所围立体的体积．（8分）

设所谓立体区域为Ω

$$\iiint_\Omega \mathrm{d}v=\int_0^6\mathrm{d}z\iint_D\mathrm{d}\sigma,\text{其中}\iint_D\mathrm{d}\sigma=\pi\left(2-\frac{z}{3}\right)$$

$$\iiint_\Omega \mathrm{d}v=\int_0^6 2\pi-\frac{\pi}{3}z\,\mathrm{d}z=12\pi-\frac{\pi}{3}\frac{z^2}{2}\Big|_0^6=6\pi$$

5. 计算$\int_L(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$，其中$L$为曲线$x=2t^2+t+1$，$y=t^2+1$上从点$(1,1)$到点$(4,2)$的一段弧．（6分）

$$\int_L(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_0^1(3t^2+t+2)(4t+1)\mathrm{d}t+\int_0^1(-t^2-t)2t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 10t^3+5t^2+9t+2\,\mathrm{d}t=\frac{10}{4}+\frac{5}{3}+\frac{9}{2}+2=\frac{32}{3}$$

6. 利用高斯公式计算$\oiint_\Sigma xy^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+zx^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 4$及圆锥体$z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$的公共部分的表面，取外侧．（8分）

$x^2+y^2+z^2=4$与$z=\sqrt{x^2+y^2}$交于$\begin{cases}x^2+y^2=2\\ z=\sqrt{2}\end{cases}$

设所围区域为Ω

$$\oiint_\Sigma xy^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+zx^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_\Omega x^2+y^2+z^2\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^4\mathrm{d}r=\frac{32}{5}\left(-\sqrt{2}+2\right)\pi$$

7. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}(2n-1)}$的敛散性．（6分）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n(2n+1)}}{\frac{1}{2^{n-1}(2n-1)}}=\frac{1}{2}<1$$

根据比值判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}(2n-1)}$收敛

8. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$（$|x|<1$）的和函数．（6分）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{4n}\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{x^4}{1-x^4}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\frac{x^4-1+1}{1-x^4}\mathrm{d}x=\int_0^x -1\,\mathrm{d}x+\int_0^x\frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x$$

$$=-x+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=-x+\frac{1}{4}\int_0^x\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\arctan x$$

$$=-x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\arctan x$$