提高练习六参考答案

一、选择题：

1．C 是任意常数，则微分方程 $y'=3y^{\frac{2}{3}}$ 的一个特解是（ A ）

（A）$y=(x+2)^3$　(B) $y=x^3+1$　(C) $y=(x+C)^3$　(D) $y=C(x+1)^3$

2．常微分方程 $y''+(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0$，（其中 λ_1,λ_2 是不等的系数），在初始条件 $y\big|_{x=0}=y'\big|_{x=0}=0$ 特解是(A)

（A）$y=0$　(B) $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$

(C) $y=\lambda_1\lambda_2 x^2$　（D）$y=(\lambda_1+\lambda_2)x^2$

3. $y=e^{2x}$是微分方程$y''+py'+6y=0$的一个特解，则此方程的通解是(C)

（A）$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}$ （B）$y=(c_1+xc_2)e^{2x}$

（C）$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ D）$y=e^{2x}(c_1\sin 3x+c_2\cos 3x)$

4. $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$是微分方程__B___的通解

（A）$y''+y=0$ （B）$y''-y=0$

（C）$y''+y'=0$ （D）$y''-y'=0$

5. 微分方程$y''-y=e^{x}+1$的特解y^*形式为 (B)

（A）$ae^{x}+b$ （B）$axe^{x}+b$

（C）$ae^{x}+bx$ （D）$axe^{x}+bx$

二、填空题：

1. 微分方程$(7x^2-6y)dx+dy=0$的阶数是______。一阶

2. 积分曲线$y=(c_1+c_2x)e^{2x}$中满足 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$的

曲线是______ $y=xe^{2x}$

3. 以$\lambda_1=\lambda_2=2$为特征根的阶数最低的常系数线性齐次微分

方程是______ $y''-4y'+4y=0;$

4. 以$e^x, e^x\sin x, e^x\cos x$为特解的阶数最低的常系数线性齐

次微分方程是______ $y'''-3y''+4y'-2y=0;$

5. 微分方程$y'-2y=3$通解$y=$ $Ce^{2x}-\frac{3}{2}$

三、求解下列微分方程

1．求$ydx-(3x+2y^5)dy=0$满足$y|_{x=0}=2$的特解

解：方程化为 $\frac{dx}{dy}=3\frac{x}{y}+2y^4$,常数变易法 (也可直接用公式)

先解$\frac{dx}{dy}=3\frac{x}{y}$得$x=Cy^3$，令$x=C(x)y^3$,

$\frac{dx}{dy}=C'(x)y^3+3C(x)y^2$,代入原方程

$C'(x)=2y$, $C(x)=y^2+C$，通解 $x=(y^2+C)y^3$

代入$y|_{x=0}=2$, $x=(y^2-4)y^3$

2．求$(x-y\cos\frac{y}{x})dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$的通解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\sec\frac{y}{x},\qquad 令\frac{y}{x}=u,y=xu,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

$$x\frac{du}{dx}=-\sec u,\quad \cos u du=-\frac{1}{x}dx,\quad \sin u=-\ln|x|+C$$

$$\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C$$

3．$y''-y'=x$

解：令$y'=P(x),y''=\frac{dP}{dx}$,

$$y'=P(x)=-x-1+C_1e^x$$

$$y(x)=-\frac{x^2}{2}-x+C_1e^x+C_2$$

另解 $r^2-r=0,r_1=1,r_2=0,$

$y^*=x(ax+b)$代入原方程

$$a=-\frac{1}{2},b=-1$$

$$y(x)=C_1e^x+C_2-\frac{x^2}{2}-x$$

4. $xy' + y - y^{\frac{1}{2}}\ln x = 0$

解：贝努利方程$n = \dfrac{1}{2}$.　令$z = y^{\frac{1}{2}}$,

$$y^{\frac{1}{2}} = \ln x - 2 + \frac{C}{\sqrt{x}}$$

5. $y' = \cos(x - y)$.　(提示 令$x - y = z$)

解：令$x - y = z, dz = dx - dy$

原式化为$(1 - \cos z)dx = dz$.得$x = -\cot\dfrac{x - y}{2} + C$

四、求方程$y''-5y'+6y=xe^{2x}$的通解

解 特征方程 $r^2-5r+6=0,$

特征根 $r_1=2,\ r_2=3,$

对应齐次方程通解 $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x},$

$\because \lambda=2$是单根 设 $y^*=x(Ax+B)e^{2x},$

代入方程, 得 $A=-\frac{1}{2}, B=-1$

于是$y^*=-x(\frac{1}{2}x+1)e^{2x}$

原方程通解为$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-x(\frac{1}{2}x+1)e^{2x}.$

五、已知函 $y = f(x)$ 的图形经过原点和点 M（1，2），且满

足微分方程 $y'' + \dfrac{2}{1-y}y'^2 = 0$,求 $f(x)$.

解：令 $y' = p(y)$,则 $y'' = p \cdot \dfrac{dp}{dy}$;

$$p = C_1(y-1)^2 \Rightarrow \ y = 1 - \frac{1}{C_1 x + C_2}$$

代入 $f(0) = 0, f(1) = 2; f(x) = \dfrac{2x}{2x-1}$

六、设二阶常数线性微分方程$y'' + ay' + \beta y = \gamma e^{x}$的一个特解为$y = e^{2x} + (1 + x)e^{x}$,试确定常数$\alpha,\beta,\gamma$,并求该方程的通解。

解：把特解代入方程，比较等式两端

$$\begin{cases} 4 + 2\alpha + \beta = 0 \\ 1 + \alpha + \beta = 0 \\ 3 + 2\alpha + \beta = \gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha = -3,\ \ \beta = 2,\ \ \gamma = -1$$

通解为$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + (1 + x)e^{x}$

七、函数 $f(x)$在 $x>0$ 内二阶导函数连续且 $f(1)=2$，以及

$$f'(x)-\frac{f(x)}{x}-\int_1^x\frac{f(t)}{t^2}dt=0,\text{求} f(x).$$

解：$f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}=\displaystyle\int_1^x\frac{f(t)}{t^2}dt$,两边求导得$f''(x)-\dfrac{f'(x)}{x}=0$

即$y''=\dfrac{y'}{x}$,令$y'=p(x),y''=\dfrac{dp}{dx}$,解得$p(x)=C_1x$ 由$f'(1)=2$

得$C_1=2.\therefore y=x^2+C_2$,再代入$f(1)=2$，$C_2=1$

$f(x)=x^2+1$