第三十二讲 规范形与惯性定理

一、复数域上二次型的标准形

二、实数域上二次型的标准形

三、小结

HOME

ENTER

问题的产生：

1、二次型的标准形不是唯一的，与所作的非退化线性替换有关.

如：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_2$

(1)作非退化线性替换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

得标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2-2y_2^2+6y_3^2$

(2)作非退化线性替换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1/2&1\\1&1/2&-1/3\\0&0&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$

得标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=2z_1^2-\frac{1}{2}z_2^2+\frac{2}{3}z_3^2$

2、二次型经过非退化线性替换所得的标准形中，系数不为零的平方项的个数是唯一确定的，与所作的非退化线性替换无关.

∵若 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 作非退化线性替换 $X=CY$ 化为标准形 $Y'DY$，则有 $D=C'AC$，

秩$(D)=$秩$(C'AC)=$秩(A)

定义 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 的**秩**等于矩阵A的秩，即秩 f =秩（A）.

而秩(D) 等于D 的主对角线上不为零的元素的个数.

3. 问题：如何在一般数域P上，进一步“规范” 平方项非零系数的形式？（这样产生了**唯一性**的问题）

一、复数域上的二次型的规范形

1. 复二次型的规范形的定义

设复二次型 $f(X)=X'AX, A'=A\in\mathbb{C}^{n\times n}$

经过非退化线性替换 $X=CY$，$C\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 可逆，得

标准形 $f(X)=Y'(C'AC)Y=d_1y_1^2+\cdots+d_ry_r^2.$

$d_i\neq 0$，$i=1,2\cdots r$， 这里 $r=$秩 $f=$秩（A）.

再作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\ \quad \cdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r, \\ y_{r+1} = z_{r+1} \\ \quad \cdots \\ y_n = z_n \end{cases}$$

或 Y=DZ,

$$D = diag(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 1, \cdots, 1),$$

则 $f(X) = Z'(D'C'ACD)Z = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2.$

称之为复二次型 $f(X)$的**规范形**.

注意：

①复二次型的规范形中平方项的系数只有**1**和**0**两种.

②复二次型的规范形是唯一的，由秩 f 确定.

2.（定理3）任一复二次型经过适当的非退化线性替换可化为规范形，且规范形唯一.

推论1. 任一复对称矩阵A**合同于**对角矩阵$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中$r=$秩$(A)$.

推论2. 两个复对称矩阵A、B合同 $\Leftrightarrow$ 秩$(A)=$秩(B).

二、实数域上的二次型的规范形

1. 实二次型的规范形的定义

设实二次型 $f(X)=X'AX$，$A'=A\in \mathbf{R}^{n\times n}$ 经过

非退化线性替换 $X=CY$，$C\in \mathbf{R}^{n\times n}$ 可逆，得标准形

$$f(X)=Y'(C'AC)Y$$

$$=d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2,$$

其中 $d_i>0$, $i=1,2\cdots r$, $r=$ 秩 $f=$ 秩(A).

再作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\ \quad \cdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r, \\ y_{r+1} = z_{r+1} \\ \quad \cdots \\ y_n = z_n \end{cases}$$

或 $Y = DZ$, (同前)

$$D = diag(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 1, \cdots, 1)$$

则 $f(X) = Z'(D'C'ACD)Z$

$$= z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

称之为实二次型 $f(X)$ 的**规范形**.

注意

①实二次型的规范形中平方项的系数只有1，－1，0三种.

②实二次型的规范形中平方项的系数中1的个数与－1的个数之和 = 秩 f = 秩(A)是唯一确定的.

③规范形是唯一的.

2、(定理4) 惯性定理：任一实二次型可经过适当的非退化线性替换化成规范形，且规范形是唯一.

证明：只证唯一性.

设实二次型 $f(X)=X'AX$ 经过非退化线性替换

$X=BY$ 化成规范形

$$\boldsymbol{f(X)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2} \qquad （1）$$

经过非退化线性替换 $X=CZ$ 化成规范形

$$\boldsymbol{f(X)=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2} \qquad （2）$$

只需证 $p=g.$ 用反证法，设 $p>g$

由**(1)**、**(2)**，有

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

$$=z_1^2+\ \cdots\ +z_q^2-z_{q+1}^2-\ \cdots\ -z_r^2 \qquad (3)$$

且 $Z=C^{-1}X=C^{-1}(BY)=(C^{-1}B)Y$

令 $C^{-1}B=G=(g_{ij})\in \mathrm{R}^{n\times n}$，则$G$可逆，且有

$$\begin{cases} z_1=g_{11}y_1+\cdots+g_{1n}y_n \\ z_2=g_{21}y_1+\cdots+g_{2n}y_n \\ \quad\vdots \\ z_n=g_{n1}y_n+\cdots+g_{nn}y_n \end{cases} \quad 即\ \ Z=GY. \qquad (4)$$

考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} g_{11}y_1 + \cdots + g_{1n}y_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{q1}y_1 + \cdots + g_{qn}y_n = 0 \\ y_{p+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

方程组（5）中未知量的个数为n，方程的个数为

$q+(n-p)=n-(p-q)<n$, 所以（5）有非零解.

令 $Y_0=(k_1,\cdots,k_p,k_{p+1},\cdots k_n)$ 为（5）的非零解，

则有 $k_{p+1}=\cdots=k_n=0$, 而 $k_1, k_2 \cdots k_p$ 不全为0.

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2 = z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$$

将 Y_0 代入（3）的左端，

得其值为 $k_1^2+\cdots+k_p^2>0$,

由
$$\begin{cases} z_1=g_{11}y_1+\cdots+g_{1n}y_n \\ z_2=g_{21}y_1+\cdots+g_{2n}y_n \\ \vdots \\ z_n=g_{n1}y_n+\cdots+g_{nn}y_n \end{cases} \quad (4)$$
及
$$\begin{cases} g_{11}y_1+\cdots+g_{1n}y_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{q1}y_1+\cdots+g_{qn}y_n=0 \\ y_{p+1}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=0 \end{cases} \quad (5)$$

得 $Z_0=GY_0=(0,\cdots,0,z_{q+1},\cdots,z_n)$

将其代入（3）的右端，得其值为 $-z_{g+1}^2-\cdots-z_r^2\le 0$

矛盾. 所以，$p\le q.$ 同理可证 $q\le p$，故 $p=q.$

定义：实二次型 $f(x_1 \cdots x_n)$ 的规范形

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

中正平方项的个数 p 称为 f 的**正惯性指数**；

负平方项的个数 $r-p$ 称为 f 的**负惯性指数**；

它们的差 $p-(r-p)=2p-r$ 称为 f 的**符号差**.

推论1、任一实对称矩阵A合同于一个形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$ 的对角矩阵 .

其中 ± 1 的个数 $r =$ 秩(A)，+1的个数 p 等于 $X'AX$ 的正惯性指数；—1的个数 $r-p$ 等于 $X'AX$ 的负惯性指数.

推论2、实二次型 f, g 具有相同的规范形

$\Leftrightarrow$ 秩f = 秩g，且 f 的正惯性指数= g的正惯性指数.

推论3、实对称矩阵A、B合同

$\Leftrightarrow$ 秩(A) = 秩(B) 且二次型 $X'AX$与$X'BX$的正惯性指数相等.

例1、 设 $A \in \mathrm{C}^{n \times n}, A' = A$，证明：存在 $B \in \mathrm{C}^{n \times n}$

使 $A = B'B.$

证： 设 $R(A) = r$，则存在可逆矩阵 $C \in \mathrm{C}^{n \times n}$，

使 $C'AC = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D$， 即 $A = (C^{-1})'DC^{-1}$

又 $D' = D$，且 $D^2 = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D$

$$\therefore \quad A = (C^{-1})'D^2C^{-1} = (C^{-1})'D'DC^{-1} = (DC^{-1})'(DC^{-1})$$

令 $B = DC^{-1}$，则 $A = B'B.$

例2、如果两实n元二次型的矩阵是合同的，则认为它们是属于同一类的，那么实数域**R**上的一切n元二次型可分为$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$类.

证：任取实n元二次型 $f(X)=X'AX, A'=A\in \mathbf{R}^{n\times n}$,

设 秩f = 秩$(A)=r$，则 r 的可能取值是**0，1，2，…，** n, 而对任意给定的 $r(0\le r\le n)$, f 的正惯性指数 p 的可能取值是**0，1，…，r** ，共 $r+1$ 种.

即有

$r=0$, $p=0$ ………………………… 1种

$r=1$, $p=0$, 1 ………………………… 2种

$\vdots$

$r=n$, $p=0,1,2,\cdots,n$ ………………………… $n+1$种

故共有 $1+2+\cdots+(n+1)=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 类.

三、小结

基本概念

1、n元复二次型 $f(x_1, x_2 \cdots x_n)$ 的规范形

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$$

这里，r＝秩(f).

2、 n元实二次型 $f(x_1, x_2 \cdots x_n)$的规范形

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

这里，r＝秩(f)，p 称为 f 的正惯性指数；$r-p$ 称为 f 的负惯性指数；$2p-r$ 称为 符号差.

基本结论

定理3、任意一个复系数二次型，经过一适当的非退化线性变换可变成规范形，且规范形是唯一的.

即，任一复对称矩阵A合同于一个对角矩阵

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{其中} r = \text{秩}(A).$$

推论、两个复对称矩阵A、B合同$\Leftrightarrow$ 秩(A) = 秩(B).

定理3、任意一个实二次型，经过一适当的非退化线性变换可变成规范形，且规范形是唯一的.

即，任一实对称矩阵A合同于一个对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 ± 1 的个数等于矩阵 A 的秩.

推论、两个实对称矩阵A、B合同的充要条件是

$秩(A)=秩(B)$，且二次型 $X'AX$ 与 $X'BX$ 的

正惯性指数相等.