

第四章习题及解答

4.1 如题 4.1 图所示为一长方形截面的导体槽，槽可视为无限长，其上有一块与槽相绝缘的盖板，槽的电位为零，上边盖板的电位为 U_0 ，求槽内的电位函数。

解 根据题意，电位 $\varphi(x, y)$ 满足的边界条件为

$$\textcircled{1} \quad \varphi(0, y) = \varphi(a, y) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \varphi(x, 0) = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \varphi(x, b) = U_0$$

根据条件①和②，电位 $\varphi(x, y)$ 的通解应取为

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

由条件③，有

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

两边同乘以 $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ ，并从 0 到 a 对 x 积分，得到

$$A_n = \frac{2U_0}{a \sinh(n\pi b/a)} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx =$$

$$\frac{2U_0}{n\pi \sinh(n\pi b/a)} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4U_0}{n\pi \sinh(n\pi b/a)}, & n=1, 3, 5, \dots \\ 0, & n=2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

故得到槽内的电位分布
$$\varphi(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n \sinh(n\pi b/a)} \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

4.2 两平行无限大导体平面，距离为 b ，其间有一极薄的导体片由 $y=d$ 到 $y=b$ ($-\infty < x < \infty$)。上板和薄片保持电位 U_0 ，下板保持零电位，求板间电位的解。设在薄片平面上，从 $y=0$ 到 $y=d$ ，电位线性变化， $\varphi(0, y) = U_0 y/d$ 。

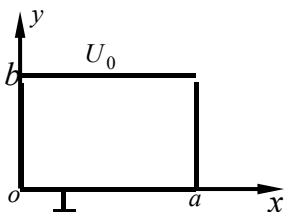
解 应用叠加原理，设板间的电位为

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)$$

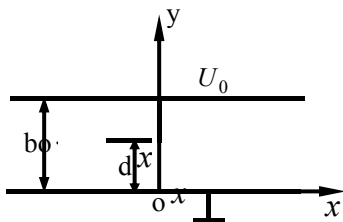
其中， $\varphi_1(x, y)$ 为不存在薄片的平行无限大导体平面间（电压为 U_0 ）的电位，即 $\varphi_1(x, y) = U_0 y/b$ ； $\varphi_2(x, y)$ 是两个电位为零的平行导体板间有导体薄片时的电位，其边界条件为：

$$\textcircled{1} \quad \varphi_2(x, 0) = \varphi_2(x, b) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \varphi_2(x, y) = 0 \quad (|x| \rightarrow \infty)$$



题 4.1 图



题 4.2 图

$$\textcircled{3} \quad \varphi_2(0, y) = \varphi(0, y) - \varphi_1(0, y) = \begin{cases} U_0 - \frac{U_0}{b}y & (0 \leq y \leq d) \\ \frac{U_0}{d}y - \frac{U_0}{b}y & (d \leq y \leq b) \end{cases}$$

根据条件①和②, 可设 $\varphi_2(x, y)$ 的通解为 $\varphi_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi y}{b}) e^{-\frac{n\pi}{b}|x|}$

$$\text{由条件③有} \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi y}{b}) = \begin{cases} U_0 - \frac{U_0}{b}y & (0 \leq y \leq d) \\ \frac{U_0}{d}y - \frac{U_0}{b}y & (d \leq y \leq b) \end{cases}$$

两边同乘以 $\sin(\frac{n\pi y}{b})$, 并从 0 到 b 对 y 积分, 得到

$$A_n = \frac{2U_0}{b} \int_0^d (1 - \frac{y}{b}) \sin(\frac{n\pi y}{b}) dy + \frac{2U_0}{b} \int_d^b (\frac{1}{d} - \frac{1}{b}) y \sin(\frac{n\pi y}{b}) dy = \frac{2U_0}{(\pi n)^2} \frac{b}{d} \sin(\frac{n\pi d}{b})$$

$$\text{故得到} \quad \varphi(x, y) = \frac{U_0}{b}y + \frac{2bU_0}{d\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(\frac{n\pi d}{b}) \sin(\frac{n\pi y}{b}) e^{-\frac{n\pi}{b}|x|}$$

4.3 求在上题的解中, 除开 $U_0 y/b$ 一项外, 其他所有项对电场总储能的贡献。并按

$$C_f = \frac{2W_e}{U_0^2} \text{ 定出边缘电容。}$$

解 在导体板 ($y=0$) 上, 相应于 $\varphi_2(x, y)$ 的电荷面密度

$$\sigma_2 = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{2\varepsilon_0 U_0}{\pi d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{n\pi d}{b}) e^{-\frac{n\pi}{b}|x|}$$

则导体板上 (沿 z 方向单位长) 相应的总电荷

$$q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_2 dx = 2 \int_0^{\infty} \sigma_2 dx = -2 \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_0 U_0}{n\pi d} \sin(\frac{n\pi d}{b}) e^{-\frac{n\pi}{b}x} dx = -\frac{4\varepsilon_0 U_0 b}{\pi^2 d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(\frac{n\pi d}{b})$$

$$\text{相应的电场储能为} \quad W_e = \frac{1}{2} q_2 U_0 = -\frac{2\varepsilon_0 b U_0^2}{\pi^2 d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(\frac{n\pi d}{b})$$

$$\text{其边缘电容为} \quad C_f = \frac{2W_e}{U_0^2} = \frac{4\varepsilon_0 b}{\pi^2 d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(\frac{n\pi d}{b})$$

4.4 如题 4.4 图所示的导体槽, 底面保持电位 U_0 , 其余两面电位为零, 求槽内的电位的解。

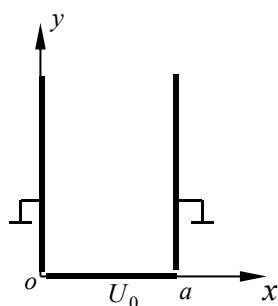
解 根据题意, 电位 $\varphi(x, y)$ 满足的边界条件为

$$\textcircled{1} \quad \varphi(0, y) = \varphi(a, y) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \varphi(x, y) \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty)$$

$$\textcircled{3} \quad \varphi(x, 0) = U_0$$

根据条件①和②, 电位 $\varphi(x, y)$ 的通解应取为



题 4.4 图

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\pi y/a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

由条件③, 有 $U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

两边同乘以 $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, 并从 0 到 a 对 x 积分, 得到

$$A_n = \frac{2U_0}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{2U_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4U_0}{n\pi}, & n=1, 3, 5, \dots \\ 0, & n=2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

故得到槽内的电位分布为 $\varphi(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\pi y/a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

4.5 一长、宽、高分别为 a 、 b 、 c 的长方体表面保持零电位, 体积内填充密度为

$$\rho = y(y-b) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)$$

的电荷。求体积内的电位 φ 。

解 在体积内, 电位 φ 满足泊松方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} y(y-b) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right) \quad (1)$$

长方体表面 S 上, 电位 φ 满足边界条件 $\varphi|_S = 0$ 。由此设电位 φ 的通解为

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{mnp} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{c}\right)$$

代入泊松方程 (1), 可得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{mnp} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2 \right] \times \\ \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{c}\right) = y(y-b) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)$$

由此可得

$$A_{mnp} = 0 \quad (m \neq 1 \text{ 或 } p \neq 1) \\ \sum_{p=1}^{\infty} A_{1n1} \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2 \right] \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = y(y-b) \quad (2)$$

由式 (2), 可得

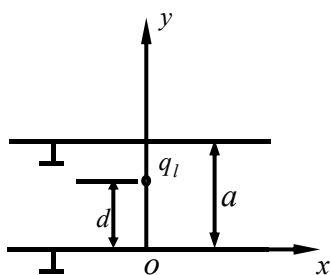
$$A_{1n1} \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2 \right] = \frac{2}{b} \int_0^b y(y-b) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy = \frac{4}{b} \left(\frac{b}{n\pi}\right)^3 (\cos n\pi - 1) = \\ \begin{cases} -\frac{8b^2}{(n\pi)^3} & n=1, 3, 5, \dots \\ 0 & n=2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

故
$$\varphi(x, y, z) = -\frac{8b^2}{\pi^5 \varepsilon_0} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3 \left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2 \right]} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)$$

4.6 如题 4.6 图所示的一对无限大接地平行导体板，板间有一与 z 轴平行的线电荷 q_l ，其位置为 $(0, d)$ 。求板间的电位函数。

解 由于在 $(0, d)$ 处有一与 z 轴平行的线电荷 q_l ，以 $x=0$ 为界将场空间分割为 $x>0$ 和 $x<0$ 两个区域，则这两个区域中的电位 $\varphi_1(x, y)$ 和 $\varphi_2(x, y)$ 都满足拉普拉斯方程。而在 $x=0$ 的分界面上，可利用 δ 函数将线电荷 q_l 表示成电荷面密度 $\sigma(y) = q_l \delta(y - y_0)$ 。

电位的边界条件为



题 4.6 图

$$\begin{aligned} \text{① } & \varphi_1(x, 0) = \varphi_1(x, a) = 0 \\ & \varphi_2(x, 0) = \varphi_2(x, a) = 0 \\ \text{② } & \varphi_1(x, y) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty) \\ & \varphi_2(x, y) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty) \\ \text{③ } & \varphi_1(0, y) = \varphi_2(0, y) \\ & \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = -\frac{q_l}{\varepsilon_0} \delta(y - d) \end{aligned}$$

由条件①和②，可设电位函数的通解为

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\pi x/a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (x > 0) \\ \varphi_2(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{n\pi x/a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (x < 0) \end{aligned}$$

由条件③，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (1)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = \frac{q_l}{\varepsilon_0} \delta(y - d) \quad (2)$$

由式 (1)，可得

$$A_n = B_n \quad (3)$$

将式 (2) 两边同乘以 $\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$ ，并从 0 到 a 对 y 积分，有

$$A_n + B_n = \frac{2q_l}{n\pi\varepsilon_0} \int_0^a \delta(y - d) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy = \frac{2q_l}{n\pi\varepsilon_0} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \quad (4)$$

由式 (3) 和 (4) 解得

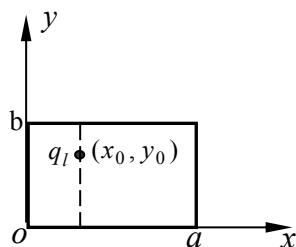
$$A_n = B_n = \frac{q_l}{n\pi\varepsilon_0} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right)$$

故
$$\varphi_1(x, y) = \frac{q_l}{\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) e^{-n\pi x/a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (x > 0)$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{q_l}{\pi \varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) e^{n\pi x/a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (x < 0)$$

4.7 如题 4.7 图所示的矩形导体槽的电位为零, 槽中有一与槽平行的线电荷 q_l 。求槽内的电位函数。

解 由于在 (x_0, y_0) 处有一与 z 轴平行的线电荷 q_l , 以 $x = x_0$ 为界将场空间分割为 $0 < x < x_0$ 和 $x_0 < x < a$ 两个区域, 则这两个区域中的电位 $\varphi_1(x, y)$ 和 $\varphi_2(x, y)$ 都满足拉普拉斯方程。而在 $x = x_0$ 的分界面上, 可利用 δ 函数将线电荷 q_l 表示成电荷面密度 $\sigma(y) = q_l \delta(y - y_0)$, 电位的边界条件为



题 4.7 图

$$\textcircled{1} \quad \varphi_1(0, y) = 0, \quad \varphi_2(a, y) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \varphi_1(x, 0) = \varphi_1(x, b) = 0$$

$$\varphi_2(x, 0) = \varphi_2(x, b) = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \varphi_1(x_0, y) = \varphi_2(x_0, y)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_0} = -\frac{q_l}{\varepsilon_0} \delta(y - y_0)$$

由条件①和②, 可设电位函数的通解为

$$\varphi_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \quad (0 < x < x_0)$$

$$\varphi_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x)\right] \quad (x_0 < x < a)$$

由条件③, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x_0)\right] \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cosh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cosh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x_0)\right] = \frac{q_l}{\varepsilon_0} \delta(y - y_0) \quad (2)$$

由式 (1), 可得

$$A_n \sinh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) - B_n \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x_0)\right] = 0 \quad (3)$$

将式 (2) 两边同乘以 $\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$, 并从 0 到 b 对 y 积分, 有

$$A_n \cosh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) + B_n \cosh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x_0)\right] = \frac{2q_l}{n\pi \varepsilon_0} \int_0^b \delta(y - y_0) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy = \frac{2q_l}{n\pi \varepsilon_0} \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \quad (4)$$

由式 (3) 和 (4) 解得

$$A_n = \frac{2q_l}{\sinh(n\pi a/b)} \frac{1}{n\pi\epsilon_0} \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a-x_0)\right] \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right)$$

$$B_n = \frac{2q_l}{\sinh(n\pi a/b)} \frac{1}{n\pi\epsilon_0} \sinh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right)$$

故

$$\varphi_1(x, y) = \frac{2q_l}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sinh(n\pi a/b)} \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a-x_0)\right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (0 < x < x_0)$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{2q_l}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sinh(n\pi a/b)} \sinh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a-x)\right] \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (x_0 < x < a)$$

若以 $y = y_0$ 为界将场空间分割为 $0 < y < y_0$ 和 $y_0 < y < b$ 两个区域, 则可类似地得到

$$\varphi_1(x, y) = \frac{2q_l}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sinh(n\pi b/a)} \sinh\left[\frac{n\pi}{a}(b-y_0)\right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi x_0}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (0 < y < y_0)$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{2q_l}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sinh(n\pi b/a)} \sinh\left(\frac{n\pi y_0}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x_0}{a}\right) \sinh\left[\frac{n\pi}{a}(b-y)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (y_0 < y < b)$$

4.8 如题 4.8 图所示, 在均匀电场 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_x E_0$ 中垂直于电场方向放置一根无限长导体圆柱, 圆柱的半径为 a 。求导体圆柱外的电位 φ 和电场 \mathbf{E} 以及导体表面的感应电荷密度 σ 。

解 在外电场 \mathbf{E}_0 作用下, 导体表面产生感应电荷, 圆柱外的电位是外电场 \mathbf{E}_0 的电位 φ_0 与感应电荷的电位 φ_{in} 的叠加。由于导体圆柱为无限长, 所以电位与变量 z 无关。在圆柱面坐标系中, 外电场的电位为 $\varphi_0(r, \phi) = -E_0 x + C = -E_0 r \cos \phi + C$ (常数 C 的值由参考点确定), 而感应电荷的电位 $\varphi_{in}(r, \phi)$ 应与 $\varphi_0(r, \phi)$ 一样按 $\cos \phi$ 变化, 而且在无限远处为 0。由于导体是等位体, 所以 $\varphi(r, \phi)$ 满足的边界条件为

$$\textcircled{1} \quad \varphi(a, \phi) = C$$

$$\textcircled{2} \quad \varphi(r, \phi) \rightarrow -E_0 r \cos \phi + C \quad (r \rightarrow \infty)$$

$$\text{由此可设} \quad \varphi(r, \phi) = -E_0 r \cos \phi + A_1 r^{-1} \cos \phi + C$$

$$\text{由条件}\textcircled{1}, \text{有} \quad -E_0 a \cos \phi + A_1 a^{-1} \cos \phi + C = C$$

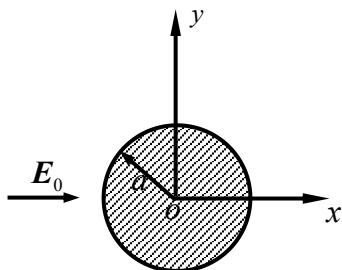
$$\text{于是得到} \quad A_1 = a^2 E_0$$

故圆柱外的电位为

$$\varphi(r, \phi) = (-r + a^2 r^{-1}) E_0 \cos \phi + C$$

若选择导体圆柱表面为电位参考点, 即 $\varphi(a, \phi) = 0$, 则 $C = 0$ 。

导体圆柱外的电场则为



题 4.8 图

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi(r, \phi) = -\mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = -\mathbf{e}_r \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) E_0 \cos \phi + \mathbf{e}_\phi \left(-1 + \frac{a^2}{r^2}\right) E_0 \sin \phi$$

$$\text{导体圆柱表面的电荷面密度为 } \sigma = -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi(r, \phi)}{\partial r} \right|_{r=a} = 2\varepsilon_0 E_0 \cos \phi$$

4.9 在介电常数为 ε 的无限大的介质中, 沿 z 轴方向开一个半径为 a 的圆柱形空腔。沿 x 轴方向外加一均匀电场 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_x E_0$, 求空腔内和空腔外的电位函数。

解 在电场 \mathbf{E}_0 的作用下, 介质产生极化, 空腔表面形成极化电荷, 空腔内、外的电场 \mathbf{E} 为外加电场 \mathbf{E}_0 与极化电荷的电场 \mathbf{E}_p 的叠加。外电场的电位为 $\varphi_0(r, \phi) = -E_0 x = -E_0 r \cos \phi$ 而感应电荷的电位 $\varphi_{in}(r, \phi)$ 应与 $\varphi_0(r, \phi)$ 一样按 $\cos \phi$ 变化, 则空腔内、外的电位分别为 $\varphi_1(r, \phi)$ 和 $\varphi_2(r, \phi)$ 的边界条件为

$$\textcircled{1} \quad r \rightarrow \infty \text{ 时, } \varphi_2(r, \phi) \rightarrow -E_0 r \cos \phi;$$

$$\textcircled{2} \quad r = 0 \text{ 时, } \varphi_1(r, \phi) \text{ 为有限值};$$

$$\textcircled{3} \quad r = a \text{ 时, } \varphi_1(a, \phi) = \varphi_2(a, \phi), \quad \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$$

由条件①和②, 可设

$$\varphi_1(r, \phi) = -E_0 r \cos \phi + A_1 r \cos \phi \quad (r \leq a)$$

$$\varphi_2(r, \phi) = -E_0 r \cos \phi + A_2 r^{-1} \cos \phi \quad (r \geq a)$$

$$\text{带入条件③, 有 } A_1 a = A_2 a^{-1}, \quad -\varepsilon_0 E_0 + \varepsilon_0 A_1 = -\varepsilon E_0 - \varepsilon a^{-2} A_2$$

$$\text{由此解得 } A_1 = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0, \quad A_2 = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} a^2 E_0$$

$$\text{所以 } \varphi_1(r, \phi) = -\frac{2\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 r \cos \phi \quad (r \leq a)$$

$$\varphi_2(r, \phi) = -\left[1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] E_0 r \cos \phi \quad (r \geq a)$$

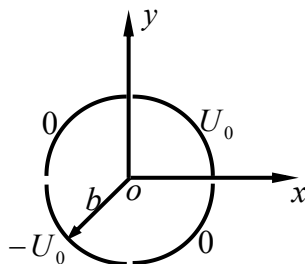
4.10 一个半径为 b 、无限长的薄导体圆柱面被分割成四个四分之一圆柱面, 如题 4.10 图所示。第二象限和第四象限的四分之一圆柱面接地, 第一象限和第三象限分别保持电位 U_0 和 $-U_0$ 。

求圆柱面内部的电位函数。

解 由题意可知, 圆柱面内部的电位函数满足边界条件为

$$\textcircled{1} \quad \varphi(0, \phi) \text{ 为有限值};$$

$$\textcircled{2} \quad \varphi(b, \phi) = \begin{cases} U_0 & 0 < \phi < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < \phi < \pi \\ -U_0 & \pi < \phi < 3\pi/2 \\ 0 & 3\pi/2 < \phi < 2\pi \end{cases};$$



题 4.10 图

由条件①可知, 圆柱面内部的电位函数的通解为

$$\varphi(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \sin n\phi + B_n \cos n\phi) \quad (r \leq b)$$

代入条件②, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} b^n (A_n \sin n\phi + B_n \cos n\phi) = \varphi(b, \phi)$

由此得到

$$A_n = \frac{1}{b^n \pi} \int_0^{2\pi} \varphi(b, \phi) \sin n\phi d\phi = \frac{1}{b^n \pi} \left[\int_0^{\pi/2} U_0 \sin n\phi d\phi - \int_{\pi}^{3\pi/2} U_0 \sin n\phi d\phi \right] = \frac{U_0}{b^n n \pi} (1 - \cos n\pi) =$$

$$\begin{cases} \frac{2U_0}{n\pi b^n}, & n=1, 3, 5, \dots \\ 0, & n=2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$B_n = \frac{1}{b^n \pi} \int_0^{2\pi} \varphi(b, \phi) \cos n\phi d\phi = \frac{1}{b^n \pi} \left[\int_0^{\pi/2} U_0 \cos n\phi d\phi - \int_{\pi}^{3\pi/2} U_0 \cos n\phi d\phi \right] =$$

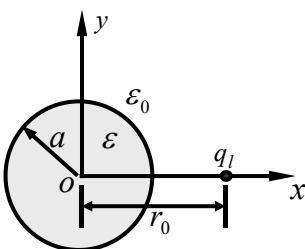
$$\frac{U_0}{b^n n \pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{2U_0}{n\pi b^n}, & n=1, 3, 5, \dots \\ 0, & n=2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

故 $\varphi(r, \phi) = \frac{2U_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{b}\right)^n [\sin n\phi + (-1)^{\frac{n+3}{2}} \cos n\phi] \quad (r \leq b)$

4.11 如题 4.11 图所示, 一无限长介质圆柱的半径为 a 、介电常数为 ε , 在距离轴线 $r_0 (r_0 > a)$ 处, 有一与圆柱平行的线电荷 q_l , 计算空间各部分的电位。

解 在线电荷 q_l 作用下, 介质圆柱产生极化, 介质圆柱内外的电位 $\varphi(r, \phi)$ 均为线电荷 q_l 的电位 $\varphi_l(r, \phi)$ 与极化电荷的电位 $\varphi_p(r, \phi)$ 的叠加, 即 $\varphi(r, \phi) = \varphi_l(r, \phi) + \varphi_p(r, \phi)$ 。线电荷 q_l 的电位为

$$\varphi_l(r, \phi) = -\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln R = -\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi} \quad (1)$$



题 4.11 图

而极化电荷的电位 $\varphi_p(r, \phi)$ 满足拉普拉斯方程, 且是 ϕ 的偶函数。

介质圆柱内外的电位 $\varphi_1(r, \phi)$ 和 $\varphi_2(r, \phi)$ 满足的边界条件为分别为

- ① $\varphi_1(0, \phi)$ 为有限值;
- ② $\varphi_2(r, \phi) \rightarrow \varphi_l(r, \phi) \quad (r \rightarrow \infty)$
- ③ $r = a$ 时, $\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$

由条件①和②可知, $\varphi_1(r, \phi)$ 和 $\varphi_2(r, \phi)$ 的通解为

$$\varphi_1(r, \phi) = \varphi_l(r, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\phi \quad (0 \leq r \leq a) \quad (2)$$

$$\varphi_2(r, \phi) = \varphi_l(r, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-n} \cos n\phi \quad (a \leq r < \infty) \quad (3)$$

将式 (1) ~ (3) 带入条件③, 可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n a^n \cos n\phi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a^{-n} \cos n\phi \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \varepsilon n a^{n-1} + B_n \varepsilon_0 n a^{-n-1}) \cos n\phi = (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\partial \ln R}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (5)$$

当 $r < r_0$ 时, 将 $\ln R$ 展开为级数, 有 $\ln R = \ln r_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\phi$ (6)

带入式 (5), 得 $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \varepsilon n a^{n-1} + B_n \varepsilon_0 n a^{-n-1}) \cos n\phi = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) q_l}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{n-1} \cos n\phi$ (7)

由式 (4) 和 (7), 有 $A_n a^n = B_n a^{-n}$

$$A_n \varepsilon n a^{n-1} + B_n \varepsilon_0 n a^{-n-1} = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) q_l}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{n-1}$$

由此解得 $A_n = -\frac{q_l(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon + \varepsilon_0)} \frac{1}{nr_0^n}$, $B_n = -\frac{q_l(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon + \varepsilon_0)} \frac{a^{2n}}{nr_0^n}$

故得到圆柱内、外的电位分别为

$$\varphi_1(r, \phi) = -\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi} - \frac{q_l(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon + \varepsilon_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\phi \quad (8)$$

$$\varphi_2(r, \phi) = -\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi} - \frac{q_l(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon + \varepsilon_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n \cos n\phi \quad (9)$$

讨论: 利用式 (6), 可将式 (8) 和 (9) 中得第二项分别写成为

$$\begin{aligned} -\frac{q_l(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon + \varepsilon_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\phi &= \frac{q_l(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon + \varepsilon_0)} (\ln R - \ln r_0) \\ -\frac{q_l(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon + \varepsilon_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n \cos n\phi &= \frac{q_l(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon + \varepsilon_0)} (\ln R' - \ln r) \end{aligned}$$

其中 $R' = \sqrt{r^2 + (a^2/r_0)^2 - 2r(a^2/r_0) \cos \phi}$ 。因此可将 $\varphi_1(r, \phi)$ 和 $\varphi_2(r, \phi)$ 分别写成为

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \phi) &= -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{2\varepsilon_0 q_l}{\varepsilon + \varepsilon_0} \ln R - \frac{q_l(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon + \varepsilon_0)} \ln r_0 \\ \varphi_2(r, \phi) &= -\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln R - \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{-(\varepsilon - \varepsilon_0) q_l}{\varepsilon + \varepsilon_0} \ln R' - \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) q_l}{\varepsilon + \varepsilon_0} \ln r \end{aligned}$$

由所得结果可知, 介质圆柱内的电位与位于 $(r_0, 0)$ 的线电荷 $\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} q_l$ 的电位相同, 而介

质圆柱外的电位相当于三根线电荷所产生, 它们分别为: 位于 $(r_0, 0)$ 的线电荷 q_l ; 位于 $(\frac{a^2}{r_0}, 0)$

的线电荷 $-\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} q_l$; 位于 $r = 0$ 的线电荷 $\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} q_l$ 。

4.12 将上题的介质圆柱改为导体圆柱, 重新计算。

解 导体圆柱内的电位为常数, 导体圆柱外的电位 $\varphi(r, \phi)$ 均为线电荷 q_l 的电位 $\varphi_l(r, \phi)$ 与

感应电荷的电位 $\varphi_{in}(r, \phi)$ 的叠加, 即 $\varphi(r, \phi) = \varphi_l(r, \phi) + \varphi_{in}(r, \phi)$ 。线电荷 q_l 的电位为

$$\varphi_l(r, \phi) = -\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln R = -\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi} \quad (1)$$

而感应电荷的电位 $\varphi_{in}(r, \phi)$ 满足拉普拉斯方程, 且是 ϕ 的偶函数。

$\varphi(r, \phi)$ 满足的边界条件为

$$\textcircled{1} \quad \varphi(r, \phi) \rightarrow \varphi_l(r, \phi) \quad (r \rightarrow \infty);$$

$$\textcircled{2} \quad \varphi(a, \phi) = C。$$

由于电位分布是 ϕ 的偶函数, 并由条件 $\textcircled{1}$ 可知, $\varphi(r, \phi)$ 的通解为

$$\varphi(r, \phi) = \varphi_l(r, \phi) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{-n} \cos n\phi \quad (2)$$

将式 (1) 和 (2) 带入条件 $\textcircled{2}$, 可得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^{-n} \cos n\phi = C + \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \phi} \quad (3)$$

将 $\ln \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \phi}$ 展开为级数, 有

$$\ln \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \phi} = \ln r_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \cos n\phi \quad (4)$$

带入式 (3), 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^{-n} \cos n\phi = C + \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln r_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \cos n\phi \right] \quad (5)$$

由此可得

$$A_0 = C + \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0, \quad A_n = -\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0 n} \left(\frac{a^2}{r_0}\right)^n$$

故导体圆柱外的电为

$$\begin{aligned} \varphi(r, \phi) = & -\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi} + \\ & \left(C + \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0 \right) - \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n \cos n\phi \end{aligned} \quad (6)$$

讨论: 利用式 (4), 可将式 (6) 中的第二项写成为

$$-\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n \cos n\phi = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} (\ln R' - \ln r)$$

其中 $R' = \sqrt{r^2 + (a^2/r_0)^2 - 2r(a^2/r_0) \cos \phi}$ 。因此可将 $\varphi(r, \phi)$ 写成为

$$\varphi(r, \phi) = -\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln R + \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln R' - \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C + \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0$$

由此可见, 导体圆柱外的电位相当于三根线电荷所产生, 它们分别为: 位于 $(r_0, 0)$ 的线电荷 q_l ;

位于 $(\frac{a^2}{r_0}, 0)$ 的线电荷 $-q_l$; 位于 $r = 0$ 的线电荷 q_l 。

4.13 在均匀外电场 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_z E_0$ 中放入半径为 a 的导体球，设 (1) 导体充电至 U_0 ；(2) 导体上充有电荷 Q 。试分别计算两种情况下球外的电位分布。

解 (1) 这里导体充电至 U_0 应理解为未加外电场 \mathbf{E}_0 时导体球相对于无限远处的电位为 U_0 ，此时导体球面上的电荷密度 $\sigma = \varepsilon_0 U_0 / a$ ，总电荷 $q = 4\pi\varepsilon_0 a U_0$ 。将导体球放入均匀外电场 \mathbf{E}_0 中后，在 \mathbf{E}_0 的作用下，产生感应电荷，使球面上的电荷密度发生变化，但总电荷 q 仍保持不变，导体球仍为等位体。

设 $\varphi(r, \theta) = \varphi_0(r, \theta) + \varphi_{in}(r, \theta)$ ，其中

$$\varphi_0(r, \theta) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$$

是均匀外电场 \mathbf{E}_0 的电位， $\varphi_{in}(r, \theta)$ 是导体球上的电荷产生的电位。

电位 $\varphi(r, \theta)$ 满足的边界条件为

$$\textcircled{1} \quad r \rightarrow \infty \text{ 时, } \varphi(r, \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta ;$$

$$\textcircled{2} \quad r = a \text{ 时, } \varphi(a, \theta) = C_0, \quad -\varepsilon_0 \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = q$$

其中 C_0 为常数，若适当选择 $\varphi(r, \theta)$ 的参考点，可使 $C_0 = U_0$ 。

由条件①，可设 $\varphi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + A_1 r^{-2} \cos \theta + B_1 r^{-1} + C_1$

代入条件②，可得到 $A_1 = a^3 E_0$ ， $B_1 = a U_0$ ， $C_1 = C_0 - U_0$

若使 $C_0 = U_0$ ，可得到 $\varphi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + a^3 E_0 r^{-2} \cos \theta + a U_0 r^{-1}$

$$(2) \text{ 导体上充电荷 } Q \text{ 时, 令 } Q = 4\pi\varepsilon_0 a U_0, \text{ 有 } U_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

利用 (1) 的结果，得到 $\varphi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + a^3 E_0 r^{-2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

4.14 如题 4.14 图所示，无限大的介质中外加均匀电场 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_z E_0$ ，在介质中有一个半径为 a 的球形空腔。求空腔内、外的电场 \mathbf{E} 和空腔表面的极化电荷密度（介质的介电常数为 ε ）。

解 在电场 \mathbf{E}_0 的作用下，介质产生极化，空腔表面形成极化电荷，空腔内、外的电场 \mathbf{E} 为外加电场 \mathbf{E}_0 与极化电荷的电场 \mathbf{E}_p 的叠加。设空腔内、外的电位分别为 $\varphi_1(r, \theta)$ 和 $\varphi_2(r, \theta)$ ，则边界条件为

$$\textcircled{1} \quad r \rightarrow \infty \text{ 时, } \varphi_2(r, \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta ;$$

$$\textcircled{2} \quad r = 0 \text{ 时, } \varphi_1(r, \theta) \text{ 为有限值;}$$

$$\textcircled{3} \quad r = a \text{ 时, } \varphi_1(a, \theta) = \varphi_2(a, \theta), \quad \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$$

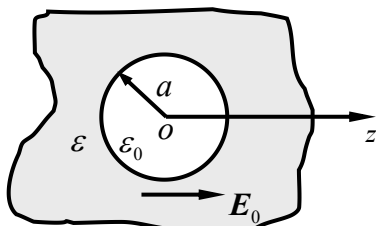
由条件①和②，可设

$$\varphi_1(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + A_1 r \cos \theta$$

$$\varphi_2(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + A_2 r^{-2} \cos \theta$$

带入条件③，有

$$A_1 a = A_2 a^{-2}, \quad -\varepsilon_0 E_0 + \varepsilon_0 A_1 = -\varepsilon E_0 - 2\varepsilon a^{-3} A_2$$



题 4.14 图

由此解得 $A_1 = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} E_0$, $A_2 = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} a^3 E_0$

所以 $\varphi_1(r, \theta) = -\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 r \cos \theta$

$$\varphi_2(r, \theta) = -\left[1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^3\right] E_0 r \cos \theta$$

空腔内、外的电场为

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \varphi_1(r, \theta) = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \mathbf{E}_0$$

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla \varphi_2(r, \theta) = \mathbf{E}_0 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)E_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^3 [\mathbf{e}_r 2\cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta]$$

空腔表面的极化电荷面密度为

$$\sigma_p = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2|_{r=a} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_2|_{r=a} = -\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 \cos \theta$$

4.15 如题 4.15 图所示, 空心导体球壳的内、外半径分别为 r_1 和 r_2 , 球的中心放置一个电偶极子 \mathbf{P} , 球壳上的电荷量为 Q 。试计算球内、外的电位分布和球壳上的电荷分布。

解 导体球壳将空间分割为内外两个区域, 电偶极子 \mathbf{P} 在球壳内表面上引起感应电荷分布, 但内表面上的感应电荷总量为零, 因此球壳外表面上电荷总量为 Q , 且均匀分布在外表面上。

球壳外的场可由高斯定理求得为

$$\mathbf{E}_2(r) = \mathbf{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\varphi_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

外表面上的电荷面密度为 $\sigma_2 = \frac{Q}{4\pi r_2^2}$

设球内的电位为 $\varphi_1(r, \theta) = \varphi_p(r, \theta) + \varphi_{in}(r, \theta)$, 其中

$$\varphi_p(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2} P_1(\cos \theta)$$

是电偶极子 \mathbf{P} 的电位, $\varphi_{in}(r, \theta)$ 是球壳内表面上的感应电荷的电位。

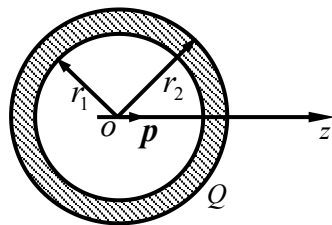
$\varphi_{in}(r, \theta)$ 满足的边界条件为

① $\varphi_{in}(0, \theta)$ 为有限值;

② $\varphi_1(r_1, \theta) = \varphi_2(r_2)$, 即 $\varphi_{in}(r_1, \theta) + \varphi_p(r_1, \theta) = \varphi_2(r_2)$, 所以

$$\varphi_{in}(r_1, \theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} P_1(\cos \theta)$$

由条件①可知 $\varphi_{in}(r, \theta)$ 的通解为 $\varphi_{in}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta)$



题 4.15 图

由条件②, 有
$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n r_1^n P_n(\cos \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} P_1(\cos \theta)$$

比较两端 $P_n(\cos \theta)$ 的系数, 得到

$$A_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2}, \quad A_1 = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r_1^3},$$

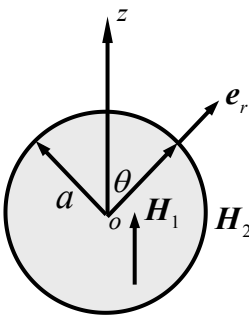
$$A_n = 0 \quad (n \geq 2)$$

最后得到
$$\varphi_1(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_1^3} \right) \cos \theta$$

球壳内表面上的感应电荷面密度为
$$\sigma_1 = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right|_{r=r_1} = \epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{r=r_1} = -\frac{3p}{4\pi r_1^3} \cos \theta$$

感应电荷的总量为
$$q_1 = \oint_S \sigma_1 dS = -\frac{3p}{4\pi r_1^3} \int_0^\pi \cos \theta \cdot 2\pi r_1^2 \sin \theta d\theta = 0$$

4.16 欲在一个半径为 a 的球上绕线圈使在球内产生均匀场, 问线圈应如何绕 (即求绕线的密度)?



题 4.16 图

解 设球内的均匀场为 $H_1 = e_z H_0$ ($r < a$), 球外的场为 H_2 ($r > a$), 如题 4.16 图所示。根据边界条件, 球面上的电流面密度为

$$J_s = n \times (H_2 - H_1) \Big|_{r=a} = e_r \times (H_2 - e_z H_0) \Big|_{r=a} = e_r \times H_2 \Big|_{r=a} + e_\phi H_0 \sin \theta$$

若令 $e_r \times H_2 \Big|_{r=a} = 0$, 则得到球面上的电流面密度为 $J_s = e_\phi H_0 \sin \theta$ 这表明球面上的绕线密度正比于 $\sin \theta$, 则将在球内产生均匀场。

4.17 一个半径为 R 的介质球带有均匀极化强度 P 。

(1) 证明: 球内的电场是均匀的, 等于 $-\frac{P}{\epsilon_0}$;

(2) 证明: 球外的电场与一个位于球心的偶极子 $P\tau$ 产生的电场相同, $\tau = \frac{4\pi R^3}{3}$ 。

解 (1) 当介质极化后, 在介质中会形成极化电荷分布, 本题中所求的电场即为极化电荷所产生的场。由于是均匀极化, 介质球体内不存在极化电荷, 仅在介质球面上有极化电荷面密度, 球内、外的电位满足拉普拉斯方程, 可用分离变量法求解。

建立如题 4.17 图所示的坐标系, 则介质球面上的极化电荷面密度为

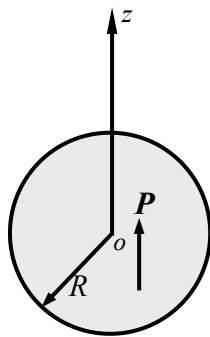
$$\sigma_p = P \cdot n = P \cdot e_r = P \cos \theta$$

介质球内、外的电位 φ_1 和 φ_2 满足的边界条件为

- ① $\varphi_1(0, \theta)$ 为有限值;
- ② $\varphi_2(r, \theta) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$);
- ③ $\varphi_1(R, \theta) = \varphi_2(R, \theta)$

$$\epsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = P \cos \theta$$

因此, 可设球内、外电位的通解为



题 4.17 图

$$\varphi_1(r, \theta) = A_1 r \cos \theta$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \frac{B_1}{r^2} \cos \theta$$

由条件③, 有 $A_1 R = \frac{B_1}{R^2}, \quad \varepsilon_0(A_1 + \frac{2B_1}{R^3}) = P$

解得 $A_1 = \frac{P}{3\varepsilon_0}, \quad B_1 = \frac{PR^3}{3\varepsilon_0}$

于是得到球内的电位 $\varphi_1(r, \theta) = \frac{P}{3\varepsilon_0} r \cos \theta = \frac{P}{3\varepsilon_0} z$

故球内的电场为 $\mathbf{E}_1 = -\nabla \varphi_1 = -\mathbf{e}_z \frac{P}{3\varepsilon_0} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$

(2) 介质球外的电位为

$$\varphi_2(r, \theta) = \frac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{4\pi R^3 P}{3} \cos \theta = \frac{P\tau}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos \theta$$

其中 $\tau = \frac{4\pi R^3}{3}$ 为介质球的体积。故介质球外的电场为

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla \varphi_2(r, \theta) = -\mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} = \frac{P\tau}{4\pi\varepsilon_0 r^3} (\mathbf{e}_r 2 \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta)$$

可见介质球外的电场与一个位于球心的偶极子 $\mathbf{P}\tau$ 产生的电场相同。

4.18 半径为 a 的接地导体球, 离球心 r_1 ($r_1 > a$) 处放置一个点电荷 q , 如题 4.18 图所示。用分离变量法求电位分布。

解 球外的电位是点电荷的电位与球面上感应电荷产生的电位的叠加, 感应电荷的电位满足拉普拉斯方程。用分离变量法求解电位分布时, 将点电荷的电位在球面上按勒让德多项式展开, 即可由边界条件确定通解中的系数。

设 $\varphi(r, \theta) = \varphi_0(r, \theta) + \varphi_{in}(r, \theta)$, 其中

$$\varphi_0(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta}}$$

是点电荷 q 的电位, $\varphi_{in}(r, \theta)$ 是导体球上感应电荷产生的电位。

电位 $\varphi(r, \theta)$ 满足的边界条件为

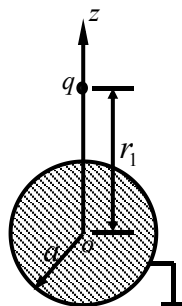
① $r \rightarrow \infty$ 时, $\varphi(r, \theta) \rightarrow 0$;

② $r = a$ 时, $\varphi(a, \theta) = 0$ 。

由条件①, 可得 $\varphi_{in}(r, \theta)$ 的通解为

$$\varphi_{in}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{-n-1} P_n(\cos \theta)$$

为了确定系数 A_n , 利用 $1/R$ 的球坐标展开式



题 4.18 图

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P_n(\cos \theta) & (r \leq r_1) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) & (r \geq r_1) \end{cases}$$

将 $\varphi_0(r, \theta)$ 在球面上展开为 $\varphi_0(a, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r_1^{n+1}} P_n(\cos \theta)$

代入条件②, 有 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^{-n-1} P_n(\cos \theta) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r_1^{n+1}} P_n(\cos \theta) = 0$

比较 $P_n(\cos \theta)$ 的系数, 得到 $A_n = -\frac{qa^{2n+1}}{4\pi\epsilon_0 r_1^{n+1}}$

故得到球外的电位为 $\varphi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(r_1 r)^{n+1}} P_n(\cos \theta)$

讨论: 将 $\varphi(r, \theta)$ 的第二项与 $1/R$ 的球坐标展开式比较, 可得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(r_1 r)^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \frac{a/r_1}{\sqrt{r^2 + (a^2/r_1)^2 - 2r(a^2/r_1)\cos \theta}}$$

由此可见, $\varphi(r, \theta)$ 的第二项是位于 $r' = a^2/r_1$ 的一个点电荷 $q' = -qa/r_1$ 所产生的电位, 此电荷正是球面上感应电荷的等效电荷, 即像电荷。

4.19 一根密度为 q_l 、长为 $2a$ 的线电荷沿 z 轴放置, 中心在原点上。证明: 对于 $r > a$ 的点, 有

$$\varphi(r, \theta) = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{r} + \frac{a^3}{3r^3} P_2(\cos \theta) + \frac{a^5}{5r^5} P_4(\cos \theta) + \dots \right)$$

解 线电荷产生的电位为

$$\varphi(r, \theta) = \frac{q_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{1}{R} dz' = \frac{q_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta}} dz'$$

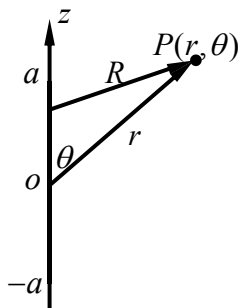
对于 $r > a$ 的点, 有

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z')^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

故得到

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \frac{q_l}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-a}^a \frac{(z')^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) dz' = \\ &= \frac{q_l}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{a^{n+1} - (-a)^{n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{r} + \frac{a^3}{3r^3} P_2(\cos \theta) + \frac{a^5}{5r^5} P_4(\cos \theta) + \dots \right) \end{aligned}$$

4.20 一个半径为 a 的细导线圆环, 环与 xy 平面重合, 中心在原点上, 环上总电荷量为 Q , 如题 4.20 图所示。证明: 空间任意点电位为

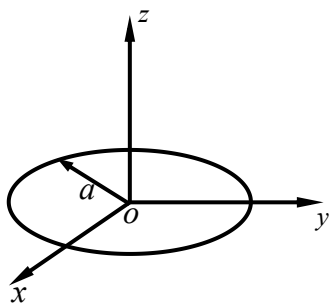


题 4.19 图

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 P_2(\cos\theta) + \frac{3}{8} \left(\frac{r}{a} \right)^4 P_4(\cos\theta) + \dots \right] \quad (r \leq a)$$

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos\theta) + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{r} \right)^4 P_4(\cos\theta) + \dots \right] \quad (r \geq a)$$

解 以细导线圆环所在的球面 $r = a$ 把场区分为两部分, 分别写出两个场域的通解, 并利用 δ 函数将细导线圆环上的线电荷 Q 表示成球面 $r = a$ 上的电荷面密度



题 4.20 图

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}) = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(\cos\theta)$$

再根据边界条件确定系数。

设球面 $r = a$ 内、外的电位分别为 $\varphi_1(r, \theta)$ 和 $\varphi_2(r, \theta)$, 则边界条件为:

- ① $\varphi_1(0, \theta)$ 为有限值;
- ② $\varphi_2(r, \theta) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$
- ③ $\varphi_1(a, \theta) = \varphi_2(a, \theta)$,

$$\epsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) \bigg|_{r=a} = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(\cos\theta)$$

根据条件①和②, 可得 $\varphi_1(r, \theta)$ 和 $\varphi_2(r, \theta)$ 的通解为

$$\varphi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \quad (1)$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta) \quad (2)$$

代入条件③, 有

$$A_n a^n = B_n a^{-n-1} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [A_n n a^{n-1} + B_n (n+1) a^{-n-2}] P_n(\cos\theta) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \delta(\cos\theta) \quad (4)$$

将式(4)两端同乘以 $P_m(\cos\theta) \sin\theta$, 并从 0 到 π 对 θ 进行积分, 得

$$A_n n a^{n-1} + B_n (n+1) a^{-n-2} = \frac{(2n+1)Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^\pi \delta(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{(2n+1)Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} P_n(0) \quad (5)$$

其中

$$P_n(0) = \begin{cases} 0 & n=1, 3, 5, \dots \\ (-1)^{n/2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} & n=2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

由式(3)和(5), 解得 $A_n = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^{n+1}} P_n(0)$, $B_n = \frac{Q a^n}{4\pi\epsilon_0} P_n(0)$

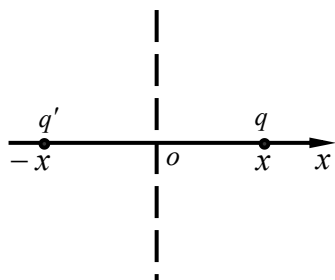
代入式(1)和(2), 即得到

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \frac{3}{8} \left(\frac{r}{a} \right)^4 P_4(\cos \theta) + \dots \right] \quad (r \leq a)$$

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{r} \right)^4 P_4(\cos \theta) + \dots \right] \quad (r \geq a)$$

4.21 一个点电荷 q 与无限大导体平面距离为 d ，如果把它移到无穷远处，需要作多少功？

解 利用镜像法求解。当点电荷 q 移动到距离导体平面为 x 的点 P 处时，其像电荷 $q' = -q$ ，与导体平面相距为 $x' = -x$ ，如题 4.21 图所示。像电荷 q' 在点 P 处产生的电场为



题 4.21 图

$$E'(x) = e_x \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 (2x)^2}$$

所以将点电荷 q 移到无穷远处时，电场所作的功为

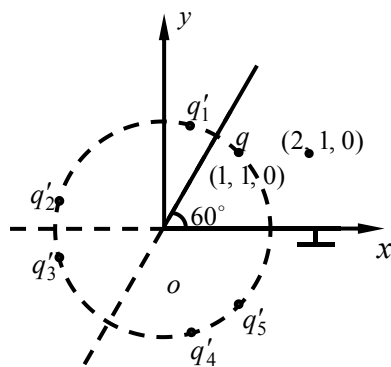
$$W_e = \int_d^\infty q E'(x) \cdot dx = \int_d^\infty \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 (2x)^2} dx = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d}$$

$$\text{外力所作的功为 } W_o = -W_e = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d}$$

4.22 如题 4.22 图所示，一个点电荷 q 放在 60° 的接地导体角域内的点 $(1, 1, 0)$ 处。求：(1) 所有镜像电荷的位置和大小；(2) 点 $x = 2, y = 1$ 处的电位。

解 (1) 这是一个多重镜像的问题，共有 5 个像电荷，分布在以点电荷 q 到角域顶点的距离为半径的圆周上，并且关于导体平面对称，其电荷量的大小等于 q ，且正负电荷交错分布，其大小和位置分别为

$$\begin{aligned} q'_1 = -q, & \begin{cases} x'_1 = \sqrt{2} \cos 75^\circ = 0.366 \\ y'_1 = \sqrt{2} \sin 75^\circ = 1.366 \end{cases} \\ q'_2 = q, & \begin{cases} x'_2 = \sqrt{2} \cos 165^\circ = -1.366 \\ y'_2 = \sqrt{2} \sin 165^\circ = 0.366 \end{cases} \\ q'_3 = -q, & \begin{cases} x'_3 = \sqrt{2} \cos 195^\circ = -1.366 \\ y'_3 = \sqrt{2} \sin 195^\circ = -0.366 \end{cases} \\ q'_4 = q, & \begin{cases} x'_4 = \sqrt{2} \cos 285^\circ = 0.366 \\ y'_4 = \sqrt{2} \sin 285^\circ = -1.366 \end{cases} \\ q'_5 = -q, & \begin{cases} x'_5 = \sqrt{2} \cos 315^\circ = 1 \\ y'_5 = \sqrt{2} \sin 315^\circ = -1 \end{cases} \end{aligned}$$



题 4.22 图

(2) 点 $x = 2, y = 1$ 处电位

$$\varphi(2, 1, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} + \frac{q'_1}{R_1} + \frac{q'_2}{R_2} + \frac{q'_3}{R_3} + \frac{q'_4}{R_4} + \frac{q'_5}{R_5} \right) =$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}(1-0.597+0.292-0.275+0.348-0.477)=\frac{0.321}{4\pi\epsilon_0}q=2.88\times 10^9 q \text{ (V)}$$

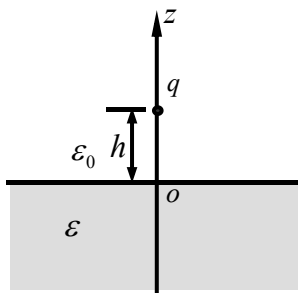
4.23 一个电荷量为 q 、质量为 m 的小带电体，放置在无限大导体平面下方，与平面相距为 h 。求 q 的值以使带电体上受到的静电力恰与重力相平衡（设 $m=2\times 10^{-3}\text{ kg}$ ， $h=0.02\text{ m}$ ）。

解 将小带电体视为点电荷 q ，导体平面上的感应电荷对 q 的静电力等于镜像电荷 q' 对 q 的作用力。根据镜像法可知，镜像电荷为 $q'=-q$ ，位于导体平面上方为 h 处，则小带电体 q 受到的

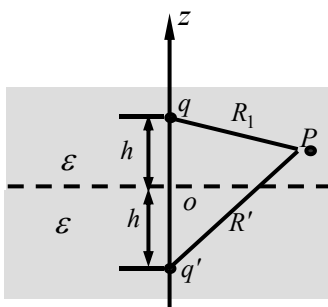
$$\text{静电力为 } f_e = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2h)^2}$$

$$\text{令 } f_e \text{ 的大小与重力 } mg \text{ 相等，即 } \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2h)^2} = mg$$

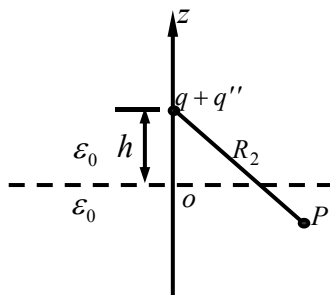
$$\text{于是得到 } q = 4h\sqrt{\pi\epsilon_0 mg} = 5.9\times 10^{-8}\text{ C}$$



题 4.24 图 (a)



题 4.24 图 (b)



题 4.24 图 (c)

4.24 如题 4.24 (a) 图所示，在 $z < 0$ 的下半空间是介电常数为 ϵ 的介质，上半空间为空气，距离介质平面距为 h 处有一点电荷 q ，求：(1) $z > 0$ 和 $z < 0$ 的两个半空间内的电位；(2) 介质表面上的极化电荷密度，并证明表面上极化电荷总电量等于镜像电荷 q' 。

解 (1) 在点电荷 q 的电场作用下，介质分界面上出现极化电荷，利用镜像电荷替代介质分界面上的极化电荷。根据镜像法可知，镜像电荷分布为（如题 4.24 图 (b)、(c) 所示）

$$q' = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}q, \text{ 位于 } z = -h$$

$$q'' = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}q, \text{ 位于 } z = h$$

上半空间内的电位由点电荷 q 和镜像电荷 q' 共同产生，即

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} - \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}} \right\}$$

下半空间内的电位由点电荷 q 和镜像电荷 q'' 共同产生，即 $\varphi_2 = \frac{q+q''}{4\pi\epsilon R_2} = \frac{q}{2\pi(\epsilon + \epsilon_0)} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}}$

(2) 由于分界面上无自由电荷分布，故极化电荷面密度为

$$\sigma_p = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \Big|_{z=0} = \varepsilon_0 (E_{1z} - E_{2z}) \Big|_{z=0} = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) h q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

极化电荷总电量为

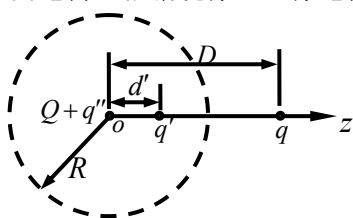
$$q_p = \int_S \sigma_p dS = \int_0^\infty \sigma_p 2\pi r dr = - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) h q}{\varepsilon + \varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{r}{(r^2 + h^2)^{3/2}} dr = - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) q}{\varepsilon + \varepsilon_0} = q'$$

4.25 一个半径为 R 的导体球带有电荷量为 Q ，在球体外距离球心为 D 处有一个点电荷 q 。

(1) 求点电荷 q 与导体球之间的静电力；(2) 证明：当 q 与 Q 同号，且 $\frac{Q}{q} < \frac{RD^3}{(D^2 - R^2)^2} - \frac{R}{D}$

成立时， F 表现为吸引力。

解 (1) 导体球上除带有电荷量 Q 之外，点电荷 q 还要在导体球上感应出等量异号的两种不同电荷。根据镜像法，像电荷 q' 和 q'' 的大小和位置分别为（如题 4.25 图所示）



题 4.25 图

$$q' = -\frac{R}{D}q, \quad d' = \frac{R^2}{D}$$

$$q'' = -q' = \frac{R}{D}q, \quad d'' = 0$$

导体球自身所带的电荷 Q 则与位于球心的点电荷 Q 等效。故点电荷 q 受到的静电力为

$$F = F_{q' \rightarrow q} + F_{q'' \rightarrow q} + F_{Q \rightarrow q} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0(D-d')^2} + \frac{q(D+q'')}{4\pi\varepsilon_0 D^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{Q + (R/D)q}{D^2} - \frac{Rq}{D[D - (R/D)^2]^2} \right\}$$

(2) 当 q 与 Q 同号，且 F 表现为吸引力，即 $F < 0$ 时，则应有

$$\frac{Q + (R/D)q}{D^2} - \frac{Rq}{D[D - (R/D)^2]^2} < 0$$

由此可得出 $\frac{Q}{q} < \frac{RD^3}{(D^2 - R^2)^2} - \frac{R}{D}$

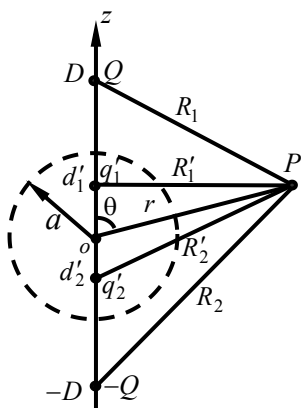
4.26 两个点电荷 Q 和 $-Q$ ，在一个半径为 a 的导体球直径的延长线上，分别位于导体球的两侧且距球心为 D 。

(1) 证明：镜像电荷构成一个电偶极子，位于球心，电偶极矩为 $p = \frac{2a^3Q}{D^2}$ ；

(2) 令 D 和 Q 分别趋于无穷，同时保持 $\frac{Q}{D^2}$ 不变，计算球外的电场。

解 (1) 点电荷 Q 和 $-Q$ 都要在球面上引起等量异号的感应电荷，可分别按照点电荷与不接地导体球面的镜像确定其等效的像电荷。根据镜像法，点电荷 Q 的像电荷为

$$q'_1 = -\frac{a}{D}Q, \quad \text{位于: } d'_1 = \frac{a^2}{D}$$



题 4.26 图

$$q_1'' = -q_1' = \frac{a}{D}Q, \text{ 位于: } d_1'' = 0$$

而点电荷 $-Q$ 的像电荷为

$$q_2' = \frac{a}{D}Q, \text{ 位于: } d_2' = -\frac{a^2}{D}$$

$$q_2'' = -q_2' = -\frac{a}{D}Q, \text{ 位于: } d_2'' = 0$$

如题 4.26 图所示。由此可见，像电荷 q_1'' 和 q_2'' 等值异号，且同时位于球心，故球心处总的像电荷为零；而像电荷 q_1' 和 q_2' 也等值异号，且位置关于球心对称，故构成位于球心的电偶极子，其电偶极矩为

$$p = q_2'(2d_1') = \frac{a}{D}Q \cdot \frac{2a^2}{D} = \frac{2a^3Q}{D^2}$$

(2) 球外的电位由 Q 和 $-Q$ 以及像电荷 q_1' 和 q_2' 共同产生，即

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_1'}{4\pi\epsilon_0 R_1'} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_2'}{4\pi\epsilon_0 R_2'} = \\ & \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD\cos\theta}} - \frac{a/D}{\sqrt{r^2 + (a^2/D)^2 - (2ra^2/D)\cos\theta}} - \right. \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{r^2 + D^2 + 2rD\cos\theta}} + \frac{a/D}{\sqrt{r^2 + (a^2/D)^2 + (2ra^2/D)\cos\theta}} \right\} \end{aligned}$$

当 D 和 Q 分别趋于无穷，同时保持 $\frac{Q}{D^2}$ 不变时，有

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D^2} \left\{ \frac{D^2}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD\cos\theta}} - \frac{aD}{\sqrt{r^2 + (a^2/D)^2 - (2ra^2/D)\cos\theta}} - \right. \\ & \left. \frac{D^2}{\sqrt{r^2 + D^2 + 2rD\cos\theta}} + \frac{aD}{\sqrt{r^2 + (a^2/D)^2 + (2ra^2/D)\cos\theta}} \right\} \approx \\ & \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D^2} \left\{ D \left(1 + \frac{r}{D} \cos\theta \right) - \frac{aD}{r} \left(1 + \frac{a^2}{rD} \cos\theta \right) - D \left(1 - \frac{r}{D} \cos\theta \right) + \frac{aD}{r} \left(1 - \frac{a^2}{rD} \cos\theta \right) \right\} = \\ & \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3} r \cos\theta - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \end{aligned}$$

球外的电场为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\nabla\varphi = & -(\mathbf{e}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3} [-\mathbf{e}_r (1 - \frac{2a^3}{r^3}) \cos\theta + \mathbf{e}_\phi (1 + \frac{a^3}{r^3}) E_0 \sin\theta] = \\ & \mathbf{e}_z \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3} + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\mathbf{e}_r 2 \cos\theta + \mathbf{e}_\phi \sin\theta) \end{aligned}$$

4.27 一根与地面平行架设的圆截面导线，半径为 a ，悬挂高度为 h 。证明：单位长度上圆柱导线与地面间的电容为 $C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1}(h/a)}$ 。

解 地面的影响可用一个像圆柱来等效。设导线单位长度带电荷为 q_l ，则像圆柱单位长度带电荷为 $-q_l$ 。根据电轴法，电荷 q_l 和 $-q_l$ 可用位于电轴上的线电荷来等效替代，如题 4.27 图所示。等效线电荷对导体轴线的偏移为

$$D = h + \sqrt{h^2 - a^2}$$

$$d = h - \sqrt{h^2 - a^2}$$

则导线与地间的电位差为

$$\varphi = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{a-d} - \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{D-a} = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{h^2 - a^2} + (h-a)}{\sqrt{h^2 - a^2} - (h-a)} =$$

$$\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{h^2 - a^2} + h}{a} = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \cosh^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)$$

故单位长度上圆柱导线与地面间的电容为

$$C_0 = \frac{q_l}{\varphi} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1}(h/a)}$$

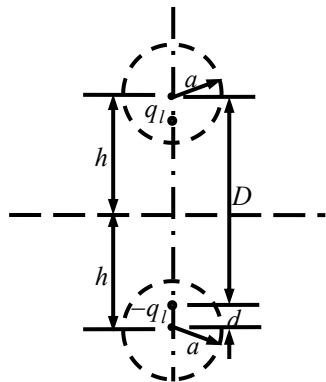
4.28 在上题中设导线与地面间的电压为 U_0 。证明：地面对导线单位长度的作用力

$$F_0 = \frac{\pi\epsilon_0 U_0^2}{\left[\cosh^{-1}(h/a)\right]^2 (h^2 - a^2)^{1/2}}。$$

解 导线单位长度上的电场能量为 $W_e = \frac{1}{2} C_0 U_0^2 = \frac{\pi\epsilon_0 U_0^2}{\cosh^{-1}(h/a)}$

由虚位移法，得到地面对导线单位长度的作用力为

$$F_0 = \frac{\partial W_e}{\partial h} \Big|_{U_0} = \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{\pi\epsilon_0 U_0^2}{\cosh^{-1}(h/a)} \right] = \frac{\pi\epsilon_0 U_0^2}{\left[\cosh^{-1}(h/a)\right]^2 (h^2 - a^2)^{1/2}}$$



题 4.27 图