一、选择题(每小题3分，共24分)

1．微分方程$y'=p(x)y$的通解是(　)

(A) $y=\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$　　(B) $y=C\mathrm{e}^{\int -p(x)\mathrm{d}x}$

(C) $y=C\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$　　(D) $y=Cp(x)$

2．已知曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\x+y+z=a\end{cases}$在$yoz$坐标面上的投影曲线为$\begin{cases}y^2+yz+z^2=1\\x=0\end{cases}$，则$a=$(　)

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2

3．设$z=\mathrm{e}^y\tan x$，则$\mathrm{d}z=$(　)

(A) $\mathrm{e}^y\tan x\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y\sec^2 x\,\mathrm{d}y$　　(B) $\dfrac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y\tan x\,\mathrm{d}y$

(C) $\mathrm{e}^x\tan y\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\sec^2 y\,\mathrm{d}y$　　(D) $\mathrm{e}^y\sec^2 x\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y\tan x\,\mathrm{d}y$

4．设积分区域D: $x^2+y^2\leqslant 4$，则二重积分$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(　)

(A) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^2\mathrm{d}\rho$　(B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\rho^4\mathrm{d}\rho$　(C) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\mathrm{d}\rho$　(D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho\,\mathrm{d}\rho$

5．设Ω由圆锥面$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=0$围成的闭区域，则$\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}v=$(　)

(A) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho}z\,\mathrm{d}z$　　(B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho}z\,\mathrm{d}z$

(C) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho}z\,\mathrm{d}z$　　(D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho}z\,\mathrm{d}z$

6．设L为圆周$\begin{cases}x=a\cos t,\\y=a\sin t,\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，则$\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=$(　)

(A) a^3　(B) πa^3　(C) $2\pi a^3$　(D) $3\pi a^3$

7．L为平面闭区域：$-1\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$的正向边界，则

$\int_L\left(\frac{1}{2}y+3x\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{2}x-y\sin y\right)\mathrm{d}y=$(　)

(A) -2　(B) 2　(C) -1　(D) 1

8．设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$ $(0<R<+\infty)$，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{x}{2}\right)^n$的收敛半径为(　)

(A) $\dfrac{R}{2}$　(B) $2R$　(C) R　(D) $\dfrac{2}{R}$

二、填空题(每空3分，共24分)

1. 以e^x，$x\mathrm{e}^x$为解的阶数最低的常系数线性齐次微分方程是____________________.

2. 过点$A(1,-2,1)$且以$\vec{n}=(1,2,3)$为法向量的平面方程是____________________.

3. 设$z=\sin(x^2+y)$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ____________________.

4. 设D是圆环形闭区域$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，那么$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma=$ ____________________

5. 设Ω为球体：$x^2+y^2+z^2\leqslant 4$，则$\iiint_\Omega x^2\sin(yz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$ ____________________.

6. L为抛物线$x=y^2$上从点$(1,-1)$到$(1,1)$的一段弧，则$\int_L xy\,\mathrm{d}y=$ ____________________.

7. $\oiint_\Sigma(xy+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(xz+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+(x+yz)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$ ____________________，其中Σ是由六张平面$x=1$、$x=2$、$y=1$、$y=2$、$z=1$、$z=3$围成的六面体的表面，取内侧.

8. 级数$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}+\ldots$是____________________(填收敛或发散).

三、综合题(请写出求解过程，8小题，共52分)

1. 求过点$(2,0,-3)$，且与直线$\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$垂直的平面方程. (6分)

2. 设$z=x^y\,(x>0)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. (6分)

3. 计算$\iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$. (6分)

4. 计算$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$为旋转抛物面$z=x^2+y^2$与平面$z=4$所围成的区域. (6分)

5. L是圆环区域D：$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$的正向边界曲线，计算曲线积分

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\left[xy^2+y\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y.$$ (8分)

6. 计算$\iint_{\Sigma}\frac{2}{z}\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$在平面$z=\frac{1}{2}$上方的部分. (8分)

7. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$的敛散性. (6分)

8. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$在收敛域$(-1,1)$的和函数$s(x)$. (6分)