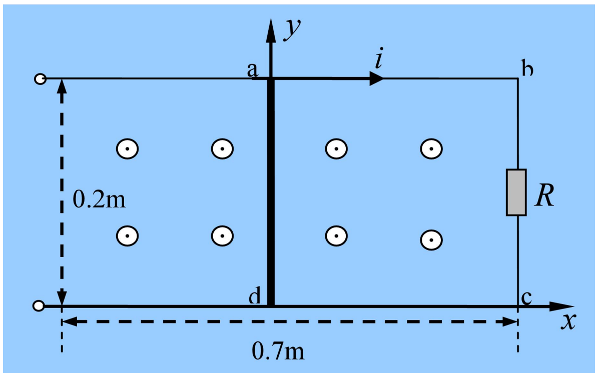
第六章习题及解答

6.1 有一导体滑片在两根平行的轨道上滑动，整个装置位于正弦时变磁场 $\boldsymbol{B}=e_z 5\cos\omega t\ \mathrm{mT}$ 之中，如题 6.1 图所示。滑片的位置由 $x=0.35(1-\cos\omega t)\mathrm{m}$ 确定，轨道终端接有电阻 $R=0.2\Omega$，试求电流 i.



题 6.1 图

解 穿过导体回路 abcda 的磁通为

$$\Phi=\int \boldsymbol{B}\bullet d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_z B\bullet\boldsymbol{e}_z\overline{ad}\times\overline{ab}=5\cos\omega t\times 0.2(0.7-x)$$

$$=\cos\omega t[0.7-0.35(1-\cos\omega t)]=0.35\cos\omega t(1+\cos\omega t)$$

故感应电流为

$$i=\frac{\mathcal{E}_{in}}{R}=-\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

$$=-\frac{1}{R}0.35\omega\sin\omega t(1+2\cos\omega t)\quad -1.75\omega\sin\omega t(1+2\cos\omega t)\mathrm{mA}$$

6.2 一根半径为 a 的长圆柱形介质棒放入均匀磁场 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z B_0$ 中与 z 轴平行。设棒以角速度 ω 绕轴作等速旋转，求介质内的极化强度、体积内和表面上单位长度的极化电荷。

解 介质棒内距轴线距离为 r 处的感应电场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_\phi r\omega\times\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{e}_r r\omega B_0$$

故介质棒内的极化强度为

$$\boldsymbol{P}=X_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 r\omega B_0=\boldsymbol{e}_r(\varepsilon-\varepsilon_0)r\omega B_0$$

极化电荷体密度为

$$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP)=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2\omega B_0$$

$$=-2(\varepsilon-\varepsilon_0)\omega B_0$$

极化电荷面密度为

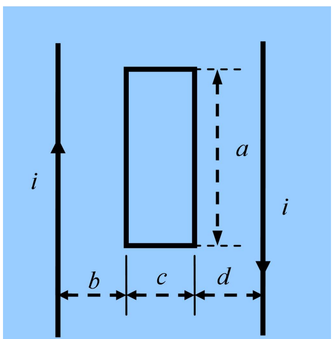
$$\sigma_P=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}=e_r(\varepsilon-\varepsilon_0)r\omega\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{e}_r\big|_{r=a}=(\varepsilon-\varepsilon_0)a\omega B_0$$

则介质体积内和表面上同单位长度的极化电荷分别为

$$Q_P=\pi a^2\times 1\times\rho_P=-2\pi a^2(\varepsilon-\varepsilon_0)\omega B_0$$

$$Q_{PS}=2\pi a\times 1\times\sigma_P=2\pi a^2(\varepsilon-\varepsilon_0)\omega B_0$$

6.3 平行双线传输线与一矩形回路共面，如题 6.3 图所示。



题 6.3 图

设 $a=0.2m$ 、$b=c=d=0.1\text{m}$ 、$i=1.0\cos(2\pi\times10^7t)\text{A}$，求回路中的感应电动势。

解　由题给定的电流方向可知，双线中的电流产生的磁感应强度的方向，在回路中都是垂直于纸面向内的。故回路中的感应电动势为

$$\mathcal{E}_{in}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \boldsymbol{B}\cdot dS=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int B_{左}\mathrm{d}S+\int B_{右}\mathrm{d}S\right]$$

式中

$$B_{左}=\frac{\mu_0 i}{2\pi r},\ B_{右}=\frac{\mu_0 i}{2\pi(b+c+d-r)}$$

故

$$\int_s B_{左}\mathrm{d}S=\int_b^{b+c}\frac{\mu_0 i}{2\pi r}a\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 ai}{2\pi}\ln(\frac{b+c}{b})$$

$$\int_s B_{右}\mathrm{d}S=\int_d^{c+d}\frac{\mu_0 i}{2\pi(b+c+d-r)}a\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 ai}{2\pi}\ln(\frac{b+c}{b})$$

则

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{in}&=-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mu_0 ai}{2\pi}\ln(\frac{b+c}{b})\right]\\&=-\frac{\mu_0 a}{\pi}\ln(\frac{b+c}{b})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[1.0\cos(2\pi\times10^7t)]\sqrt{a^2+b^2}\\&=\frac{4\pi\times10^{-7}\times0.2}{\pi}\ln2\sin(2\pi\times10^7t)\times2\pi\times10^7V\\&=3.484\sin(2\pi\times10^7t)V\end{aligned}$$

6.4　有一个环形线圈，导线的长度为 l，分别通过以直流电源供应电压 U_0 和时变电源供应电压 U（t）。讨论这两种情况下导线内的电场强度 **E**。

解　设导线材料的电导率为 γ，横截面积为 S，则导线的电阻为

$$R=\frac{l}{\gamma S}$$

而环形线圈的电感为 L，故电压方程为

$$U=Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

当 $U=U_0$ 时，电流 i 也为直流，$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=0$。故

$$U_0=Ri=\frac{l}{\gamma S}JS=\frac{l}{\gamma}J=lE$$

此时导线内的切向电场为

$$E=\frac{U_0}{l}$$

当 U=U（t）时，$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\neq0$，故

$$\begin{aligned}U(t)&=Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=R\gamma E(t)S+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma E(t)S)\\&=\frac{l}{\gamma S}\gamma E(t)S+L\gamma S\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{lE(t)}{L\gamma S}=\frac{U(t)}{L\gamma S}$$

求解此微分方程就可得到$\boldsymbol{E}(t)$。

6.5 一圆柱形电容器，内导体半径为 a，外导体内半径为 b，长为 l。设外加电压为 $U_0\sin\omega t$，试计算电容器极板间的总位移电流，证明它等于电容器的传导电流。

解 当外加电压的频率不是很高时，圆柱形电容器两极板间的电场分布与外加直流电压时的电场分布可视为相同（准静态电场），即

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\frac{U_0\sin\omega t}{r\ln(b/a)}$$

故电容器两极板间的位移电流密度为

$$\boldsymbol{J}_d=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{e}_r\varepsilon\omega\frac{U_0\cos\omega t}{r\ln(b/a)}$$

则

$$i_d=\int_s\boldsymbol{J}_d\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\frac{\varepsilon\omega U_0\cos\omega t}{r\ln(b/a)}\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(b/a)}\omega U_0\cos\omega t=C\omega U_0\cos\omega t$$

式中，$C=\dfrac{2\pi\varepsilon l}{\ln(b/a)}$是长为 l 的圆柱形电容器的电容。

流过电容器的传导电流为

$$i_c=C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=C\omega U_0\cos\omega t$$

可见

$$i_d=i_c$$

6.6 由麦克斯韦方程组出发，导出点电荷的电场强度公式和泊松方程。

解 点电荷 q 产生的电场满足麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0\text{ 和 }\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$

由$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$得

$$\int_\tau\nabla\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}\tau=\int_\tau\rho\mathrm{d}\tau$$

据散度定理，上式即为

$$\oint_s\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=q$$

利用球对称性，得

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{e}_r\frac{q}{4\pi r^2}$$

故得点电荷的电场表示式

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

由于$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，可取$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，则得

$$\nabla\times\boldsymbol{D}=\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\varepsilon\nabla\cdot\nabla\varphi=-\varepsilon\nabla^2\varphi=\rho$$

即得泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

6.7　试将麦克斯方程的微分形式写成八个标量方程：（1）在直角坐标中；（2）在圆柱坐标中；（3）在球坐标中。

解　（1）在直角坐标中

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \\
\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \\
\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu\frac{\partial H_x}{\partial t} \\
\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t} \\
\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}
\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

（2）在圆柱坐标中

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = J_r + \frac{\partial D_r}{\partial t} \\
&\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\phi + \frac{\partial D_\phi}{\partial t} \\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} = J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H_r}{\partial t} \\
&\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\mu\frac{\partial H_\phi}{\partial t} \\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \phi} = -\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}
\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

（3）在球坐标系中

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{r\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta H_\phi)-\frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}]=J_r+\frac{\partial D_r}{\partial t}\\
&\frac{1}{r}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi)]=J_\theta+\frac{\partial D_\theta}{\partial t}\\
&\frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta)-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}]=J_\phi+\frac{\partial D_\phi}{\partial t}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{r\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\phi)-\frac{\partial E_\theta}{\partial\phi}]=-\mu\frac{\partial H_r}{\partial t}\\
&\frac{1}{r}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rE_\phi)]=-\mu\frac{\partial H_\theta}{\partial t}\\
&\frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta)-\frac{\partial E_r}{\partial\theta}]=-\mu\frac{\partial H_\phi}{\partial t}
\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2B_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta B_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi}=0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2D_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta D_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}=\rho$$

6.8 已知在空气中$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y0.1\sin10\pi x\cos(6\pi\times10^9t-\beta z)$，求$\boldsymbol{H}$和$\beta$。

提示：将$\boldsymbol{E}$代入直角坐标中的波方程，可求得β。

解 电场$\boldsymbol{E}$应满足波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$$

将已知的$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_y$代入方程，得

$$\frac{\partial^2E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_y}{\partial z^2}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2E_y}{\partial t^2}=0$$

式中

$$\frac{\partial^2E_y}{\partial x^2}=-0.1(10\pi)^2\sin10\pi x\cos(6\pi\times10^9t-\beta z)$$

$$\frac{\partial^2E_y}{\partial z^2}=0.1\sin10\pi x[-\beta^2\cos(6\pi\times10^9t-\beta z)]$$

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2E_y}{\partial t^2}=0.1\mu_0\varepsilon_0\sin10\pi x[-(6\pi\times10^9)^2\cos(6\pi\times10^9t-\beta z)]$$

故得

$$-(10\pi)^2-\beta^2+\mu_0\varepsilon_0(6\pi\times10^9)^2=0$$

则

$$\beta=\pi\sqrt{300}=54.41\text{rad/m}$$

由

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

得

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=-\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\mu_0}[-\boldsymbol{e}_x\frac{\partial E_y}{\partial z}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial E_y}{\partial x}]$$

$$=-\frac{1}{\mu_0}[-\boldsymbol{e}_x 0.1\beta\sin 10\pi x\sin(6\pi\times 10^9 t-\beta z)$$

$$+\boldsymbol{e}_z 0.1\times 10\pi\cos 10\pi x\cos(6\pi\times 10^9 t-\beta z)]$$

将上式对时间 t 积分，得

$$\boldsymbol{H}=-\frac{1}{\mu_0\times 6\pi\times 10^9}[\boldsymbol{e}_x 0.1\beta\sin 10\pi x\cos(6\pi\times 10^9 t-\beta z]$$

$$+\boldsymbol{e}_z\pi\cos 10\pi x\sin(6\pi\times 10^9 t-\beta z)$$

$$=-\boldsymbol{e}_x 2.3\times 10^{-4}\sin 10\pi x\cos(6\pi\times 10^9 t-54.41z)$$

$$-\boldsymbol{e}_z 1.33\times 10^{-4}\cos 10\pi x\sin(6\pi\times 10^9 t-54.41z)\text{A/m}$$

6.9 已知自由空间中球面波的电场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_\theta\frac{E_0}{r}\sin\theta\cos(\omega t-kr)$$

求 $\boldsymbol{H}$ 和 k。

解 可以和前题一样将 $\boldsymbol{E}$ 代入波动方程来确定 k，也可以直接由麦克斯韦方程求与 $\boldsymbol{E}$ 相伴的磁场 $\boldsymbol{H}$。而此磁场又要产生与之相伴的电场，同样据麦克斯韦方程求得。将两个电场比较，即可确定 k 的值。两种方法本质上是一样的。

由

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

得

$$\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=-\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{\boldsymbol{e}_\phi}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta)$$

$$=-\frac{1}{\mu_0 r}\boldsymbol{e}_\phi\frac{\partial}{\partial r}[E_0\sin\theta\cos(\omega t-kr)]$$

$$=\boldsymbol{e}_\phi\frac{k}{\mu_0 r}E_0\sin\theta\sin(\omega t-kr)$$

将上式对时间 t 积分，得

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{k}{\omega\mu_0 r}E_0\sin\theta\cos(\omega t-kr)\tag{1}$$

将式（1）代入

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

得

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\times\boldsymbol{H}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}[\boldsymbol{e}_r\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta H_\phi)-\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta H_\phi)]$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\boldsymbol{e}_r\frac{2kE_0}{\omega\mu_0 r^2}\cos(\omega t-kr)-\boldsymbol{e}_\theta\frac{k^2E_0\sin\theta}{\omega\mu_0 r}\sin(\omega t-kr)\right]$$

将上式对时间 t 积分，得

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\boldsymbol{e}_r\frac{2kE_0}{\omega^2\mu_0 r^2}\sin(\omega t-kr)+\boldsymbol{e}_\theta\frac{k^2E_0}{\omega^2\mu_0 r}\sin\theta\cos(\omega t-kr)\right] \tag{2}$$

将已知的

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_\theta\frac{E_0}{r}\sin\theta\cos(\omega t-kr)$$

与式（2）比较，可得

含 $\dfrac{1}{r^2}$ 项的 E_r 分量应略去，且 $k^2=\omega\mu_0\varepsilon_0$，即

$$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

将 $k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ 代入式（1），得

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\omega\mu_0 r}E_0\sin\theta\cos(\omega t-kr)$$

$$=\boldsymbol{e}_\phi\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{E_0}{r}\sin\theta\cos(\omega t-kr)\mathfrak{A}$$

6.10 试推导在线性、无损耗、各向同性的非均匀媒质中用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示麦克斯韦方程。

解 注意到非均匀媒质的参数 μ,ε 是空间坐标的函数，因此

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\times(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu})=\nabla(\frac{1}{\mu})\times\boldsymbol{B}+\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{B}$$

$$=-\frac{1}{\mu^2}\nabla\mu\times\boldsymbol{B}+\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{B}$$

而

$$\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial(\varepsilon\boldsymbol{E})}{\partial t}=\boldsymbol{J}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

因此，麦克斯韦第一方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

变为

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{1}{\mu}\nabla\mu\times\boldsymbol{B}$$

又

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varepsilon+\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho$$

故麦克斯韦第四方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ 变为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\varepsilon\cdot\boldsymbol{E}$$

则在非均匀媒质中，用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示的麦克斯韦方程组为

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{1}{\mu}\nabla\mu\times\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\varepsilon\cdot\boldsymbol{E}$$

6.11 写出在空气和 $\mu=\infty$ 的理想磁介质之间分界面上的边界条件。

解 空气和理想导体分界面的边界条件为

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_s$$

根据电磁对偶原理，采用以下对偶形式

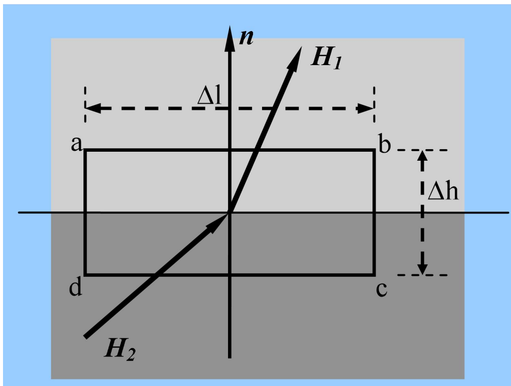
$$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{J}_s\to\boldsymbol{J}_{ms}$$

即可得到空气和理想磁介质分界面上的边界条件

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=0$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{J}_{ms}$$

式中，$\boldsymbol{J}_{ms}$ 为表面磁流密度。



题 6.12 图

6.12 提出推导 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{J}_s$ 的详细步骤。

解 如题 6.12 图所示，设第 2 区为理想导体（$\gamma_2=\infty$）。在分界面上取闭合路径 $abcda,\overline{ab}=\overline{cd}=\Delta l,\overline{bc}=\overline{da}=\Delta h\to 0$。对该闭合路径应用麦克斯韦第一方程可得

$$\oint_C\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_a^b\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_b^c\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_c^d\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_d^a\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$\approx\boldsymbol{H}_1\cdot\Delta\boldsymbol{l}-\boldsymbol{H}_2\cdot\Delta\boldsymbol{l}=\lim_{\Delta h\to 0}\left(\int_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_S\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right)\qquad(1)$$

因为 $\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ 为有限值，故上式中

$$\lim_{\Delta h\to 0}\int_S\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

而(1)式中的另一项

$$\lim_{\Delta h\to 0}\int_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

为闭合路径所包围的传导电流。取 $\boldsymbol{N}$ 为闭合路径所围面积的单位矢量（其指向与闭合路径的绕行方向成右手螺旋关系），则有

$$\lim_{\Delta h\to 0}\int_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{J}_s\cdot\boldsymbol{N}\Delta\boldsymbol{l}$$

因

$$\Delta\boldsymbol{l}=(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{n})\Delta l$$

故式（1）可表示为

$$(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\cdot(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{n})\Delta l=\boldsymbol{J}_s\cdot\boldsymbol{N}\Delta l\qquad(2)$$

应用矢量运算公式 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}$，式（2）变为

$$[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)]\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{J}_s\cdot\boldsymbol{N}$$

故得

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_s \qquad (3)$$

由于理想导体的电导率 $\gamma_2=\infty$，故必有 $\boldsymbol{E}_2=0,\ \boldsymbol{H}_2=0$，故式（3）变为

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{J}_s$$

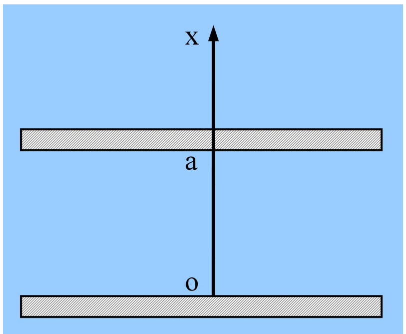
6.13 在由理想导电壁（$\gamma=\infty$）限定的区域 $0\le x\le a$ 内存在一个由以下各式表示的电磁场：

$$E_y=H_0\mu\omega(\frac{a}{\pi})\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(kz-\omega t)$$

$$H_x=H_0k(\frac{a}{\pi})\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(kz-\omega t)$$

$$H_z=H_0\cos(\frac{\pi x}{a})\cos(kz-\omega t)$$

这个电磁场满足的边界条件如何？导电壁上的电流密度的值如何？



题 6.13 图

解 如题 6.13 图所示，应用理想导体的边界条件可以得出

在 x=0 处，$E_y=0,\ H_x=0$

$$H_z=H_0\cos(kz-\omega t)$$

在 x=a 处，$E_y=0,\ H_x=0$

$$H_z=-H_0\cos(kz-\omega t)$$

上述结果表明，在理想导体的表面，不存在电场的切向分量 E_y 和磁场的法向分量 H_x。

另外，在 x=0 的表面上，电流密度为

$$\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}\,|_{x=0}=\boldsymbol{e}_x\times(\boldsymbol{e}_xH_x+\boldsymbol{e}_zH_z)\,|_{x=0}$$
$$=\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_z\,H_z\big|_{x=0}=-\boldsymbol{e}_yH_0\cos(kz-\omega t)$$

在 x=a 的表面上，电流密度则为

$$\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}\,|_{x=a}=-\boldsymbol{e}_x\times(\boldsymbol{e}_xH_x+\boldsymbol{e}_zH_z)\,|_{x=a}$$
$$=-\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_z\,H_z\big|_{x=a}=-\boldsymbol{e}_yH_0\cos(kz-\omega t)$$

6.14 海水的电导率 $\gamma=4\text{S/m}$，在频率 f=1GHz 时的相对介电常数 $\varepsilon_r\approx 81$。如果把海水视为一等效的电介质，写出 $\boldsymbol{H}$ 的微分方程。对于良导体，例如铜，$\varepsilon_r=1,\gamma=5.7\times10^7\ \text{S/m}$，比较在 f=1GHz 时的位移电流和传导电流的幅度。可以看出，即使在微波频率下，良导体中的位移电流也是可以忽略的。写出 $\boldsymbol{H}$ 的微分方程。

解 对于海水，$\boldsymbol{H}$ 的微分方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+j\omega\boldsymbol{D}=\gamma\boldsymbol{E}+j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=j\omega(\varepsilon-j\frac{\gamma}{\omega})\boldsymbol{E}$$

即把海水视为等效介电常数为 $\varepsilon_c=\varepsilon-j\dfrac{\gamma}{\omega}$ 的电介质。代入给定的参数，得

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = j2\pi \times 10^9 (81 \times \frac{10^{-9}}{36\pi} - j\frac{4}{2\pi \times 10^9})\boldsymbol{E}$$
$$= j(4.5 - j4)\boldsymbol{E} = (4 + j4.5)\boldsymbol{E}$$

对于铜，传导电流的幅度为γE，位移电流的幅度$\omega\varepsilon E$。故位移电流与传导电流的幅度之比为

$$\frac{\omega\varepsilon}{\gamma} = \frac{2\pi f \varepsilon_r \varepsilon_0}{\gamma} = \frac{2\pi f \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}{5.7 \times 10^7} = 9.75 \times 10^{-13} f$$

可见，即使在微波频率下，铜中的位移电流也是可以忽略不计的。故对于铜，$\boldsymbol{H}$ 的微分方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \gamma \boldsymbol{E} = 5.7 \times 10^7 \boldsymbol{E}$$

6.15 计算题 6.13 中的能流密度矢量和平均能流密度矢量。

解 瞬时能流密度矢量为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_y E_y \times (\boldsymbol{e}_x H_x + \boldsymbol{e}_z H_z) = \boldsymbol{e}_x E_y H_z - \boldsymbol{e}_z E_y H_x$$
$$= \boldsymbol{e}_x H_0^2 \mu\omega \frac{a}{\pi} \sin(\frac{\pi x}{a}) \cos(\frac{\pi x}{a}) \sin(kz - \omega t) \cos(kz - \omega t)$$
$$- \boldsymbol{e}_z H_0^2 \mu\omega k (\frac{a}{\pi})^2 \sin^2(\frac{\pi x}{a}) \sin^2(kz - \omega t)$$
$$= \boldsymbol{e}_x \frac{1}{2} H_0^2 \mu\omega \frac{a}{\pi} \sin(\frac{\pi x}{a}) \cos(\frac{\pi x}{a}) \sin 2(kz - \omega t)$$
$$- \boldsymbol{e}_z \frac{1}{2} H_0^2 \mu\omega k (\frac{a}{\pi})^2 \sin^2(\frac{\pi x}{a}) [1 - \cos 2(kz - \omega t)]$$

为求平均能流密度矢量，先将电磁场各个分量写成复数形式

$$E_y = H_0 \mu\omega (\frac{a}{\pi}) \sin(\frac{\pi x}{a}) e^{-jkz + j\frac{\pi}{2}}$$

$$H_x = H_0 k (\frac{a}{\pi}) \sin(\frac{\pi x}{a}) e^{-jkz + j\frac{\pi}{2}}$$

$$H_z = H_0 \cos(\frac{\pi x}{a}) e^{-jkz}$$

故平均能流密度矢量为

$$\boldsymbol{S}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_x E_y H_z^* - \boldsymbol{e}_z E_y H_x^*]$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_x H_0^2 \mu\omega \frac{a}{\pi} \sin(\frac{\pi x}{a}) \cos(\frac{\pi x}{a}) e^{j\frac{\pi}{2}}]$$
$$- \boldsymbol{e}_z H_0^2 \mu\omega k (\frac{a}{\pi})^2 \sin^2(\frac{\pi x}{a}) = -\boldsymbol{e}_z \frac{1}{2} H_0^2 \mu\omega k (\frac{a}{\pi})^2 \sin^2(\frac{\pi x}{a})$$

6.16 写出存在电荷ρ和电流密度$\boldsymbol{J}$ 的无损耗媒质中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的波动方程。

解 存在外加源ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 时，麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{4}$$

对式（1）两边取旋度，得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{E})$$

而

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \nabla^2 \boldsymbol{H}$$

故

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) = \nabla^2 \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{E}) \tag{5}$$

将式（2）和式（3）代入式（5），得

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \boldsymbol{J}$$

这就是 $\boldsymbol{H}$ 的波动方程，是二阶非齐次方程。

同样，对式（2）两边取旋度，得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{H})$$

即

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{H}) \tag{6}$$

将式（1）和式（4）代入式（6），得

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho$$

此即 $\boldsymbol{E}$ 满足的波动方程。

对于正弦时变场，可采用复数形式的麦克斯韦方程表示

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + j\omega\varepsilon \boldsymbol{E} \tag{7}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu \boldsymbol{H} \tag{8}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{9}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{10}$$

对式（7）两边取旋度，得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{J} + j\omega\varepsilon \nabla \times \boldsymbol{E}$$

利用矢量恒等式

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = -\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \nabla^2 \boldsymbol{H}$$

得

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \nabla^2 \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{J} + j\omega\varepsilon \nabla \times \boldsymbol{E} \tag{11}$$

将式（8）和式（9）代入式（11），得

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + \omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{H} = -\nabla \times \boldsymbol{J}$$

此即 $\boldsymbol{H}$ 满足的微分方程，称为非齐次亥姆霍兹方程。

同样，对式（8）两边取旋度，得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu \nabla \times \boldsymbol{H}$$

即

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{H} = -j\omega\mu \nabla \times \boldsymbol{H} \tag{12}$$

将式（7）和式（10）代入式（12），得

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{E} = j\omega\mu \boldsymbol{J} + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho$$

此即 $\boldsymbol{E}$ 满足的微分方程，亦称非齐次亥姆霍兹方程。

6.17 在应用电磁位时，如果不采用洛伦兹条件，而采用所谓的库仑规范，令 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，试导出 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 所满足的微分方程。

解 将电磁矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的关系式

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$$

和电磁标量位 φ 的关系式

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

代入麦克斯韦第一方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

得

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$= \boldsymbol{J} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

利用矢量恒等式

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$$

得

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} = \mu\boldsymbol{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) \tag{1}$$

又由

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$$

得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \nabla\cdot(-\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

即

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2}$$

按库仑规范，令 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，将其代入式（1）和式（2）得

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu\boldsymbol{J} + \mu\varepsilon\nabla(\frac{\partial\varphi}{\partial t}) \tag{3}$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{4}$$

式（3）和式（4）就是采用库仑规范时，电磁场 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 所满足的微分方程。

6.18 设电场强度和磁场强度分别为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\cos(\omega t + \psi_e)$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0\cos(\omega t + \psi_m)$$

证明其坡印廷矢量的平均值为

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0\cos(\psi_e-\psi_m)$$

解 坡印廷矢量的瞬时值为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}&=\boldsymbol{E}_0\cos(\omega t+\psi_e)\times\boldsymbol{H}_0\cos(\omega t+\psi_m)\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0[\cos(\omega t+\psi_e+\omega t+\psi_m)]+\cos[\omega t+\psi_e-\omega t-\psi_m]\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0[\cos(2\omega t+\psi_e+\psi_m)+\cos(\psi_e-\psi_m)]\end{aligned}$$

故平均坡印廷矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{av}&=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{S}dt\\&=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0[\cos(2\omega t+\psi_e+\psi_m)+\cos(\psi_e-\psi_m)]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0\cos(\psi_e-\psi_m)\end{aligned}$$

6.19 证明在无源空间（$\boldsymbol{J}=0,\rho=0$），可以引入一个矢量位 $\boldsymbol{A}_m$ 和标量位 φ_m，定义为

$$\boldsymbol{D}=-\nabla\times\boldsymbol{A}_m$$

$$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_m-\frac{\partial\boldsymbol{A}_m}{\partial t}$$

试推导 $\boldsymbol{A}_m$ 和 φ_m 的微分方程。

解 无源空间的麦克斯韦方程组为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\tag{1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\tag{2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\tag{3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0\tag{4}$$

据矢量恒等式 $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0$ 和式（4），知 $\boldsymbol{D}$ 可表示为一个矢量的旋度，故令

$$\boldsymbol{D}=-\nabla\times\boldsymbol{A}_m\tag{5}$$

将式（5）代入式（1），得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{A}_m)$$

即

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{H}+\frac{\partial\boldsymbol{A}_m}{\partial t}\right)=0\tag{6}$$

根据矢量恒等式 $\nabla\times\nabla\varphi=0$ 和式（6），知 $\boldsymbol{H}+\frac{\partial\boldsymbol{A}_m}{\partial t}$ 可表示为一个标量的梯度，故令

$$\boldsymbol{H}+\frac{\partial\boldsymbol{A}_m}{\partial t}=-\nabla\varphi_m\tag{7}$$

将式（5）和式（7）代入式（2），得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}_m=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\varphi_m-\frac{\partial\boldsymbol{A}_m}{\partial t})\tag{8}$$

而

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}_m=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_m)-\nabla^2\boldsymbol{A}_m$$

故式（8）变为

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_m)-\nabla^2\boldsymbol{A}_m=-\mu\varepsilon\nabla\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right)-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}_m}{\partial t^2} \tag{9}$$

又将式（7）代入式（3），得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=\nabla\cdot(-\nabla\varphi_m-\frac{\partial\boldsymbol{A}_m}{\partial t})=0$$

即

$$\nabla^2\varphi_m+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_m)=0 \tag{10}$$

令

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_m=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}$$

将它代入式（9）和式（10），即得 $\boldsymbol{A}_m$ 和 φ_m 的微分方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A}_m-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}_m}{\partial t^2}=0$$

$$\nabla^2\varphi_m-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial t^2}=0$$

6.20 给定标量位 $\varphi=x-ct$ 及矢量位 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x(\frac{x}{c}-t)$，式中 $c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$。（1）试证明：$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}$；（2）***B***、***H***、***E*** 和 ***D***；（3）证明上述结果满足自由空间中的麦克斯韦方程。

解 （1）

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{c}-t)=\frac{1}{c}=\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(x-ct)=-c=-\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

故

$$-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\mu_0\varepsilon_0(-\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}})=\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

则

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

（2）

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_y\frac{\partial A_x}{\partial z}-\boldsymbol{e}_z\frac{\partial A_z}{\partial y}=0$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}=0$$

而

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{t}} = -\boldsymbol{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial t}(\frac{x}{c} - t)$$

$$= -\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \frac{\partial}{\partial x}(x - ct) + \boldsymbol{e}_x = 0$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = 0$$

（3）这是无源自由空间的零场，自然满足麦克斯韦方程。