

江理2018—2019复变考试卷A

一、选择题(每小题3分,共15分)

1. $\frac{(\sqrt{3}-i)^4}{(1-i)^8} = (\quad)$

(A) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(B) $-\frac{1}{8}(1+\sqrt{3}i)$

(C) $\frac{1}{8}(-1+\sqrt{3}i)$

(D) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. 设 $f(z) = 2x^3 + 3y^3i$, 则 $f(z)$ ()

(A) 处处不可导

(B) 仅在 $6x^2 = 9y^2$ 上可导, 处处不解析

(C) 处处解析

(D) 仅在 $(0,0)$ 点可导

3. 下列等式正确的是()

(A) $\text{Ln } i = \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right)i, \ln i = \frac{\pi}{2}i$

(B) $\text{Ln } i = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)i, \ln i = -\frac{\pi}{2}i$

(C) $\text{Ln } i = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)i, \ln i = \frac{\pi}{2}i$

(D) $\text{Ln } i = \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right)i, \ln i = -\frac{\pi}{2}i$

4. $z=0$ 是函数 $\frac{1-\cos z}{z-\sin z}$ 的()

(A) 本性奇点

(B) 可去奇点

(C) 二级极点

(D) 一级极点

5. 设 C 为 $z = (1-i)t$, t 从 1 到 0 的一段, 则 $\int_C \bar{z} dz = (\quad)$

(A) -1

(B) 1

(C) -i

(D) i

二、填空题(每小题3分,共15分)

1. 若 $z + |z| = 2 + i$, 则 $z = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 若 C 为正向圆周 $|z| = \frac{1}{2}$, 则 $\oint_C \frac{1}{z-2} dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 若 $z = 2 - \pi i$, 则 $e^z = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 若 $f(z) = \cos z^2$, 则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处泰勒展开式中 z^4 项的系数 $a_4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 函数 $f(t) = \sin t$ 的拉普拉斯变换 $F(s) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题(70分)

1. 设 $u(x,y) = x - 2xy$ 且 $f(0) = 0$, 求解析函数 $f(z) = u + iv$. (10分)

2. 计算积分 $\oint_C \frac{2e^z}{z^5} dz$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z| = 1$. (7分)

3. 计算积分 $\oint_C \frac{3z+5}{z^2-z} dz$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z| = \frac{1}{2}$. (7分)

4. 求函数 $\frac{1-\cos z}{z^3}$ 在有限奇点处的留数. (7分)

5. 求函数 $\frac{2z^2+1}{z^2+2z}$ 在有限奇点处的留数. (7分)

6. 将 $f(z) = \frac{z}{(z-2)(z-6)}$ 在 $2 < |z| < 6$ 内展开为洛朗级数. (10分)

7. 若函数 $f(z) = ay^3 + bx^2y + i(x^3 + cxy^2)$ 是复平面上的解析函数, 求 a, b, c 的值. (12分)

8. 利用拉普拉斯变换解常微分方程初值问题:
$$\begin{cases} x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = e^{-3t} \\ x(0) = 0, x'(0) = 0 \end{cases}$$