7 线性变换

7.1 三阶行列式$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$有3个不同的特征值，且$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，如果$\beta=\alpha_1+m\alpha_2+\alpha_3$，求方程组$Ax=\beta$的通解.

7.2 证明：n阶矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&1&1\\1&1&\cdots&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&n-1\\0&0&\cdots&0&n\end{bmatrix}$相似.

7.3 设$R_n[x]$表示实数R上的次数不大于n的多项式全体, 可以证明$R_n[x]$是一线性空间，证明: $1,x-1,x^2+1$是$R_2[x]$的一组基, 并求x^2+x+1在该基下的坐标.

7.4 设n阶方阵A满足

$$A^2=2A, Rank(A)=r,$$

(1) 证明$Rank(A-2E)=r$,其中E为n阶单位矩阵;

(2) 证明: 矩阵A相似于对角矩阵;

(3) 计算行列式$|A-E|$的值.

7.5 设$A=\begin{bmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{bmatrix}$, 计算$A^m$.

7.6 设V是数域R上的n维线性空间, σ,ϕ是V上的线性变换, 且$\sigma^2=0,\phi^2=0$, $\phi\sigma+\sigma\phi=E_V$, 其中$E_V$是$V$的恒等变换. 求证: $(1). V=\ker\sigma+\ker\phi$; (2) V必为偶数维线性空间.

7.7 在R^4中, 求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵并求向量$\xi=(1,0,0,0)$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标, 其中$\alpha_1=(1,2,-1,0),\alpha_2=(1,-1,1,1),\alpha_3=(-1,2,1,1),\alpha_4=(-1,-1,0,1),\beta_1=(2,1,0,1),\beta_2=(0,1,2,2),\beta_3=(-2,1,1,2),\beta_4=(1,3,1,2)$

7.8 设W_1,W_2分布是其次线性方程组$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$与$x_1=x_2=\cdots=x_n$的解空间, 证明$R^n=W_1\oplus W_2$.

7.9 设V_1, V_2是线性空间V的2个真子空间，证明V中存在α，使得$\alpha \notin V_1$ *and* $\alpha \notin V_2$.

7.10 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $W = \{B \in R^{3\times 3} | AB = BA\}$.

(1) 证明: W为$R^{3\times 3}$的一个子空间;

(2) 求W的维数和一组基;

7.11 设A为3×3矩阵, α, β为A的分别属于特征值$-1, 1$的特征向量, 向量γ满足$A\gamma = \beta + \gamma$.

(1)证明: α, β, γ线性无关;

(2)令$P = (\alpha, \beta, \gamma)$, $B = P^{-1}AP$, 求B.

(3)矩阵B是否可以对角化.

7.12 设R^2中线性变换σ_1在基底$\alpha_1 = (1, 2), \alpha_2 = (2, 1)$下的矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, 线性变换$\sigma_2$在基底$\beta_1 = (1, 1), \beta_2 = (1, 2)$下的矩阵为$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. 设$\alpha = (3, 3)$.

(1) 计算$\sigma_1 + \sigma_2$在基底β_1, β_2下的矩阵C.

(2) 计算$\sigma_1\sigma_2$在基底α_1, α_2下的矩阵D.

(3) 计算$\sigma_1\alpha$在基底α_1, α_2下的坐标.

(4) 计算$\sigma_2\alpha$在基底β_1, β_2下的坐标.