§3.3　二维随机变量函数的分布

一、离散型

问题：已知二维随机变量(X,Y)的分布律，

$g(x,y)$为已知的二元函数，$Z=g(X,Y)$

求：Z 的分布律

当(X,Y)为离散型随机变量时，Z 也为离散型，

$$Z=z_k=g(x_{i_k},y_{j_k})$$

$$P\{Z=z_k\}=\sum_{g(x_{i_k},y_{j_k})=z_k} P\{X=x_{i_k},Y=y_{j_k}\}$$

$$k=1,2,\cdots$$

例1 若X、Y独立，$P\{X=k\}=a_k$, $k=0,1,2,\ldots$, $P\{Y=k\}=b_k$, $k=0,1,2,\ldots$,求$Z=X+Y$的分布律.

解: $P\{Z=r\}=P\{X+Y=r\}$

由独立性

$$=\sum_{i=0}^{r} P\{X=i, Y=r-i\}$$

此即离散卷积公式

$$=\sum_{i=0}^{r} P\{X=i\}P\{Y=r-i\}$$

$$=a_0b_r+a_1b_{r-1}+\ldots+a_rb_0 \qquad r=0,1,2,\ldots$$

例2 若X和Y相互独立,它们分别服从参数为λ_1, λ_2的泊松分布，证明$Z=X+Y$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.

解：依题意

$$P\{X=i\}=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!} \qquad i=0,1,2,\ldots$$

$$P\{Y=j\}=\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^j}{j!} \qquad j=0,1,2,\ldots$$

由卷积公式

$$P\{Z=r\}=\sum_{i=0}^{r}P\{X=i, Y=r-i\}$$

由卷积公式

$$P\{Z=r\}=\sum_{i=0}^{r}P\{X=i,Y=r-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{r}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{i}}{i!}\cdot e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{r-i}}{(r-i)!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}\sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{i!(r-i)!}\lambda_1^{i}\lambda_2^{r-i}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}(\lambda_1+\lambda_2)^{r},\quad r=0,1,\ \ldots$$

即Z服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布.

例3 设X和Y相互独立，$X\sim B(n_1,p),Y\sim B(n_2,p)$,求 $Z=X+Y$ 的分布.

我们给出不需要计算的另一种证法:

回忆第二章对服从二项分布的随机变量所作的直观解释:

若$X\sim B(n_1,p)$,则X是在n_1次独立重复试验中事件A出现的次数,每次试验中A出现的概率都为p.

同样，Y是在n_2次独立重复试验中事件A出现的次数,每次试验中A出现的概率为p.

故$Z=X+Y$是在n_1+n_2次独立重复试验中事件A出现的次数，每次试验中A出现的概率为p，于是Z是以（n_1+n_2，p）为参数的二项随机变量，即$Z \sim B(n_1+n_2, p)$.

二、 连续型

问题：已知二维随机变量(X,Y)的概率密度，

$g(x,y)$为已知的二元函数，$Z=g(X,Y)$

求：Z 的概率密度函数

方法：

1） 从求Z 的分布函数出发，将Z 的分布函数转化为(X,Y)的事件的概率

2） 代公式

1、 和的分布：$Z = X + Y$

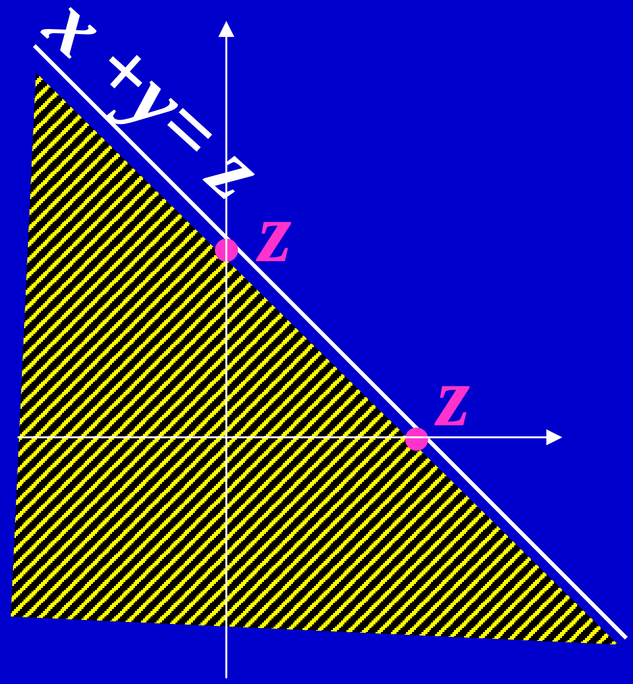
设(X, Y)为连续型随机变量，联合密度函数为 $f(x,y)$, 则

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\}$$

$$= P\{X + Y \le z\}$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy$$



或 $$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,dx$$

$$-\infty < z < +\infty$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx \qquad -\infty<z<+\infty \qquad (1)$$

或 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy \qquad -\infty<z<+\infty \qquad (2)$$

特别地，若X,Y相互独立，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$-\infty<z<+\infty \qquad (3)$$

或 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$$-\infty<z<+\infty \qquad (4)$$

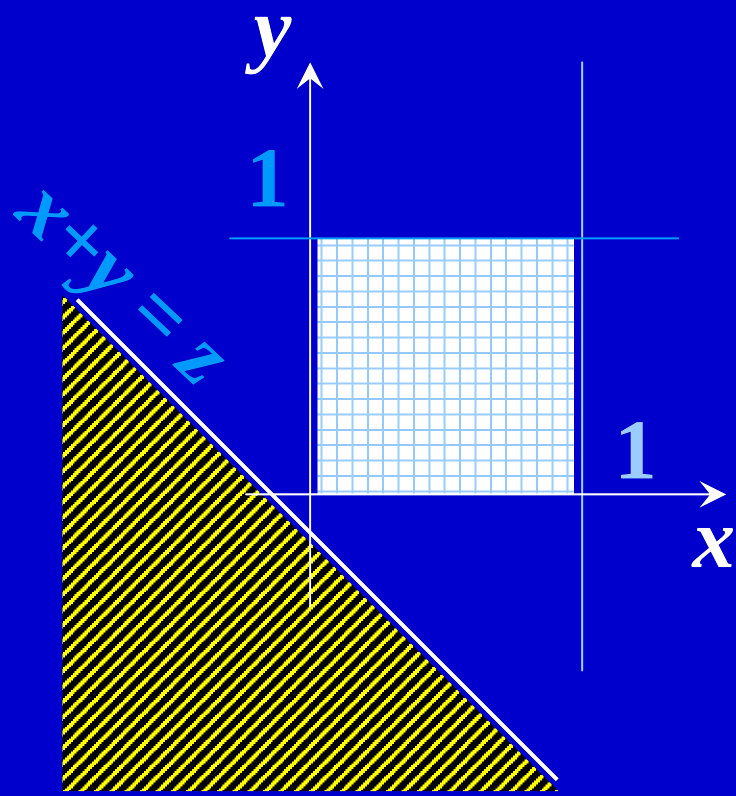
称之为函数$f_X(z)$与$f_Y(z)$的卷积

例4 已知(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$Z=X+Y$,求$f_Z(z)$

解法一 从分布函数出发



$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

当$z<0$时,

$$F_Z(z)=0$$

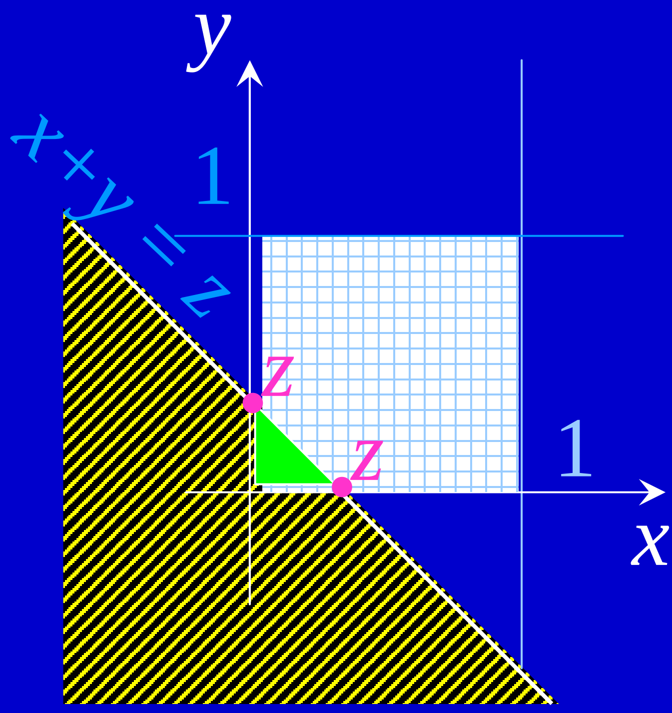
当$0 \le z < 1$时，

$$F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} 1 dy$$

$$= \int_0^z (z-x) dx$$

$$= \frac{z^2}{2}$$

$$f_Z(z) = z$$



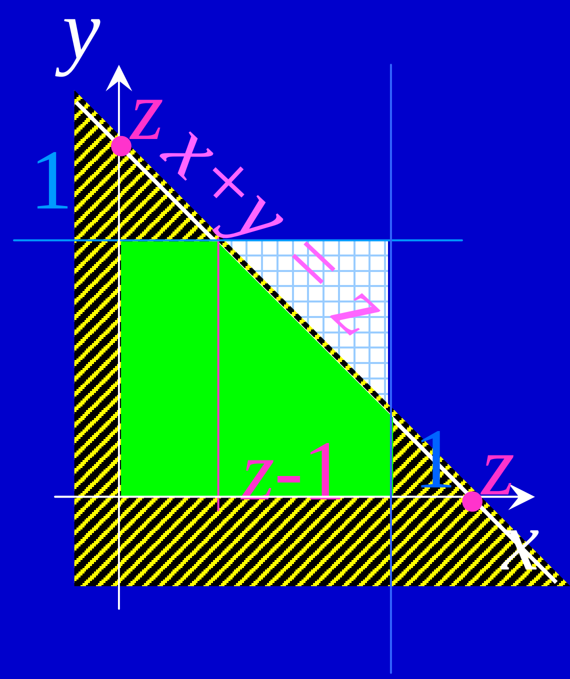
当$1 \le z < 2$时，

$$F_Z(z) = (z-1) + \int_{z-1}^{1} dx \int_0^{z-x} 1 dy$$

$$= z - 1 + \int_{z-1}^{1} (z-x) dx$$

$$= 2z - \frac{z^2}{2} - 1$$

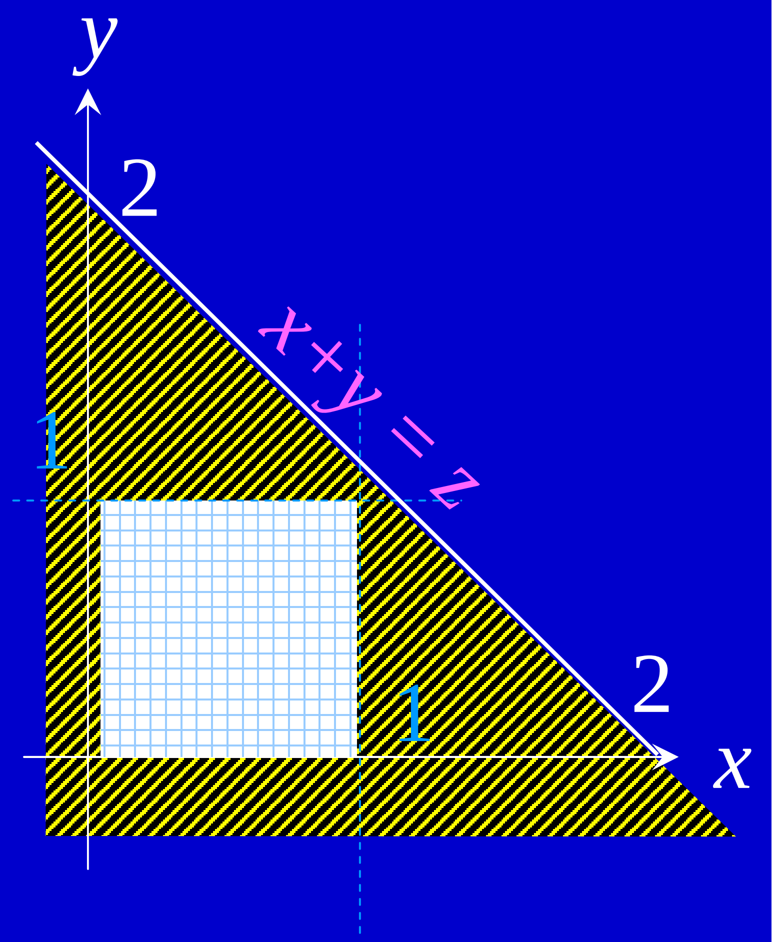
$$f_Z(z) = 2 - z$$



当$z \geq 2$时，

$$F_Z(z) = 1$$

$$f_Z(z) = 0$$



$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \text{或} z \geq 2 \\ z, & 0 < z \leq 1 \\ 2 - z, & 1 < z < 2 \end{cases}$$

解法二（图形定限法）

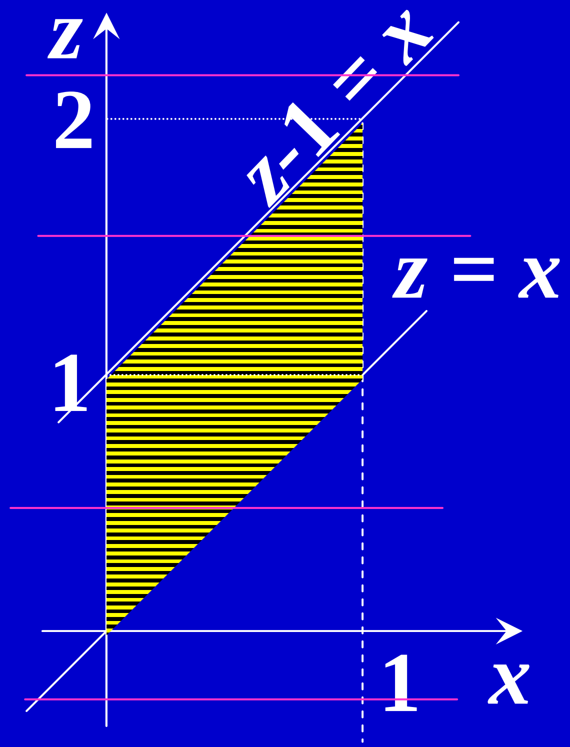
显然X,Y相互独立,且

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\int_0^1 f_Y(z-x)dx$$

$$f_Y(z-x)=\begin{cases}1, & z-1<x<z\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



$$\int_0^1 f_Y(z-x)dx = \begin{cases} 0, & z \le 0 \text{或} z \ge 2, \\ \int_0^z 1dx, & 0 < z \le 1, \\ \int_{z-1}^1 1dx, & 1 < z < 2, \end{cases}$$

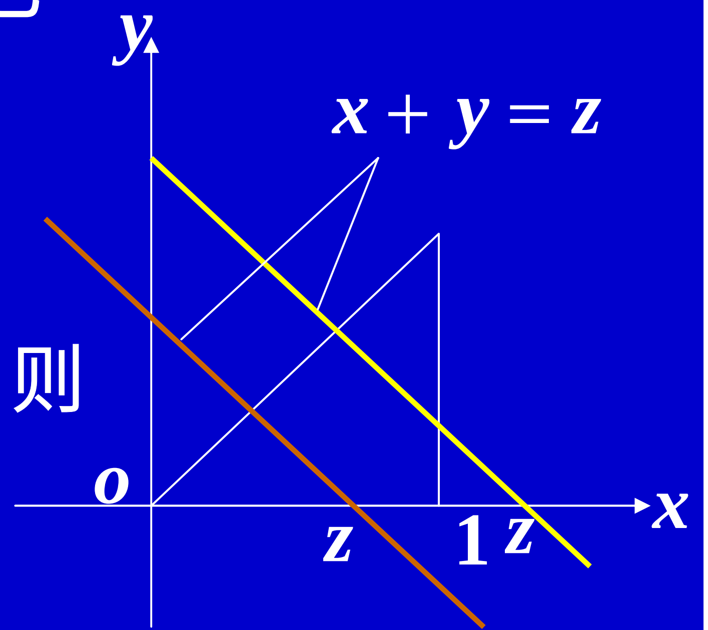
$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \text{或} z \ge 2 \\ z, & 0 < z \le 1 \\ 2-z, & 1 < z < 2 \end{cases}$$

对于 X, Y 不相互独立的情形可同样的用通过分布函数求密度函数与直接求密度函数两种方法求和的分布

例5 已知 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$Z = X + Y$,求 $f_Z(z)$



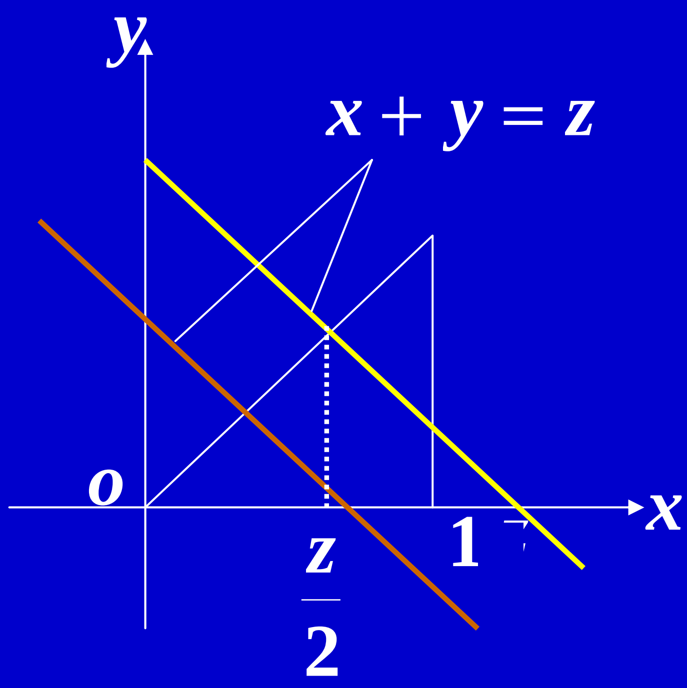
解法一 （通过分布函数）

设 $Z = X + Y$ 的分布函数为 $F_Z(z)$,则

(1) 当 $z \le 0$ 时, $F_Z(z) = 0$

当 $z \ge 2$ 时, $F_Z(z) = 1$

(2) 当$0 < z \le 1$时,



$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\}$$

$$= \int_0^{\frac{z}{2}} \int_y^{z-y} 3x\,dx\,dy = \frac{3}{8} z^3$$

(3) 当$1 < z < 2$时,

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\}$$

$$= \int_0^{\frac{z}{2}} \int_0^{x} 3x\,dy\,dx + \int_{\frac{z}{2}}^{1} \int_0^{z-x} 3x\,dy\,dx$$

$$= \frac{3}{2} z - \frac{z^3}{8} - 1$$

$$\therefore\ f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{9}{8}z^2, & 0<z\le 1\\ \dfrac{3}{2}(1-\dfrac{z^2}{4}), & 1<z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

解法二　（图形定限法）

由公式（1）　$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

$$f(x,z-x)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, x<z<2x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

当 $z < 0$ 或 $z > 2$,

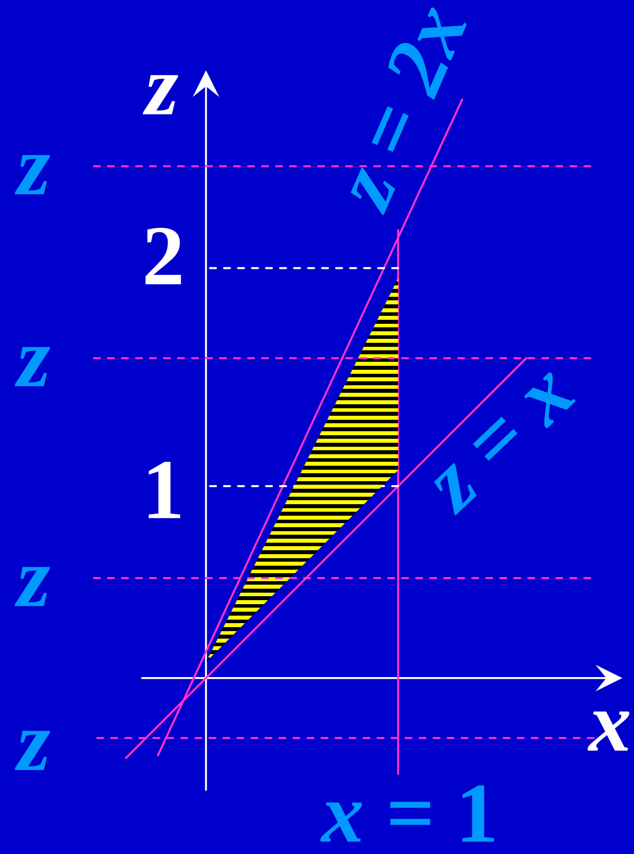
$$f_Z(z) = 0$$

当 $0 < z < 1$,

$$f_Z(z) = \int_{z/2}^{z} 3x\,dx = \frac{9}{8}z^2$$

当 $1 < z < 2$,

$$f_Z(z) = \int_{z/2}^{1} 3x\,dx = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{z^2}{4}\right)$$



$$\therefore\ f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{9}{8}z^2, & 0<z<1\\ \dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{z^2}{4}\right), & 1<z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

解法三　（不等式组定限法）

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$

考虑被积函数取非零值的区域

$$\begin{cases} 0<x<1 \\ 0<z-x<x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ \frac{z}{2}<x<z \end{cases} \quad (*)$$

由此不等式边边相等，解得 **z** 轴上的三个分界点 **0，1，2**

当 $z<0$ 或 $z\geq 2$ 时不等式组 (*) 无解

当 $0\leq z<1$ 时不等式组(*) 解为 $\frac{z}{2}<x<z$

当 $1\leq z<2$ 时不等式组(*) 解为 $\frac{z}{2}<x<1$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_{z/2}^{z}3x\,dx=\frac{9}{8}z^2 & 0\le z<1\\ \int_{z/2}^{1}3x\,dx=\frac{3}{2}(1-\frac{z^2}{4}) & 1\le z<2\\ 0 & 其他\end{cases}$$

正态随机变量的情形

1） 若X,Y相互独立，$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

则 $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立

$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1,2,\cdots,n$

则 $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$

2） 若$(X,Y) \sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$

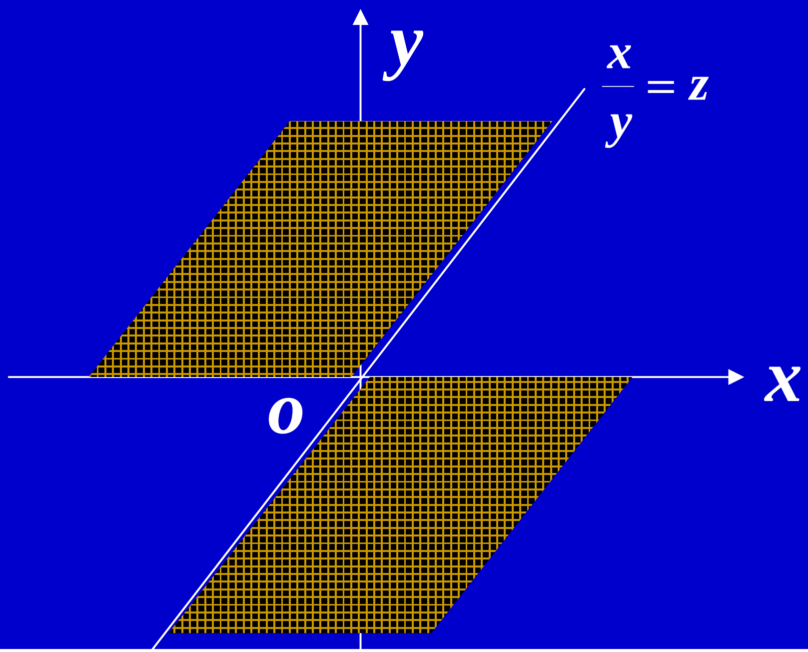
则 $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)$

2、 商的分布： $Z = X / Y$

例如 已知(X, Y)的联合概率密度$f(x,y)$，
令 $Z = X / Y$, 求$f_Z(z)$

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{\frac{X}{Y} \le z\} = \iint_D f(x, y)d\sigma$$

其中积分区域 D为下图中的阴影部分：$\frac{x}{y} \le z$



$$\therefore F_Z(z)=\int_{-\infty}^{0}[\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)dx]dy+\int_{0}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)dx]dy$$

$$\overset{\text{令}x=yu}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{0}[\int_{z}^{-\infty} f(yu,y)ydu]dy+\int_{0}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{z} f(yu,y)ydu]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{z}[\int_{-\infty}^{0} f(yu,y)(-y)dy]du+\int_{-\infty}^{z}[\int_{0}^{+\infty} f(yu,y)ydy]du$$

$$=\int_{-\infty}^{z}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(yu,y)|-y|dy]du$$

于是Z的概率密度为：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(yz,y\right)|y|dy$$

特别地，若X与Y相互独立，则：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(yz\right)\cdot f_Y\left(y\right)|y|dy$$

例6　已知(X, Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求$Z=X/Y$的概率密度函数

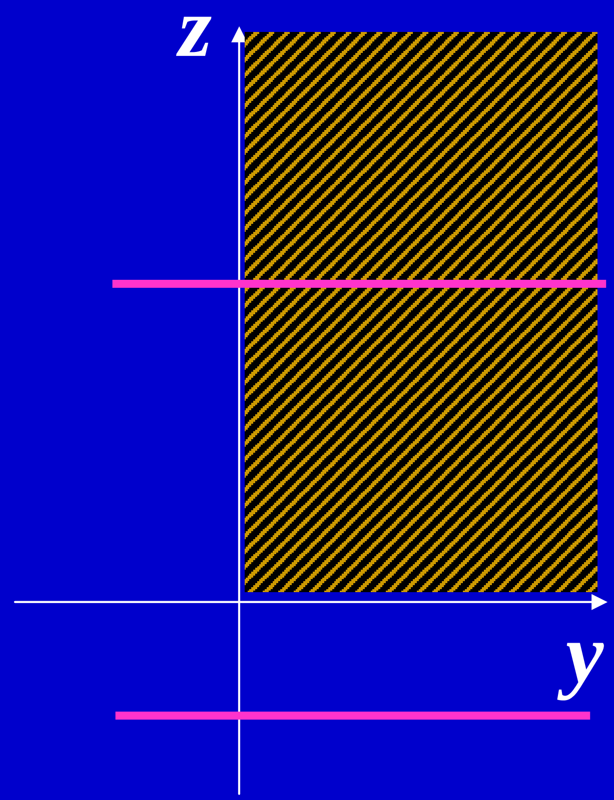
解
$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(zy,y)\,|y|\,dy$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(zy,y)\,|\,y\,|\,dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{+\infty} e^{-y(z+1)}\,y\,dy, & z>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(z+1)^2}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



3、 最大值、最小值的分布

设X 的分布函数为 $F_X(x)$, Y 的分布函数为 $F_Y(y)$,且相互独立,$M=\max\{X,Y\}$,$N=\min\{X,Y\}$,求 M,N 的分布函数.

$$F_M(u)=P\{\max\{X,Y\}\le u\}$$

$$=P\{X\le u,Y\le u\}\quad =P\{X\le u\}P\{Y\le u\}$$

$$=F_X(u)F_Y(u)$$

$$F_N(v)=P\{\min\{X,Y\}\le v\}\quad =1-P\{\min\{X,Y\}>v\}$$

$$=1-P\{X>v,Y>v\}\ =1-P\{X>v\}P\{Y>v\}$$

$$=1-(1-F_X(v))(1-F_Y(v))$$

推广至***n*** 个相互独立的 随机变量的情形：

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且

$$X_i \sim F_i(x_i), \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$M = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \qquad N = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

则

$$F_M(u) = \prod_{i=1}^{n} F_i(u) \qquad F_N(v) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_i(v))$$

特例 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} F(x)$,

i.i.d.表示
独立同分布

则

$$F_M(u) = \left[F(u)\right]^n \qquad F_N(v) = 1 - \left[1 - F(u)\right]^n$$

例7 设系统 L 由相互独立的 n 个元件组成，连接方式为

(1) 串联；

(2) 并联；

(3) 冷贮备(起初由一个元件工作，其它 $n-1$ 个元件做冷贮备，当工作元件失效时，贮备的元件逐个地自动替换)；

如果 n 个元件的寿命分别为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 且

$$X_i \sim E(\lambda), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

求在以上 3 种组成方式下，系统 L 的寿命 X 的密度函数.

解

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) $$X=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$$

$$F_X(x)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_{X_i}(x))$$

$$1-F_{X_i}(x)=\begin{cases} e^{-\lambda x}, & x>0, \\ 1, & x\le 0 \end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} n\lambda e^{-n\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

(2) $X = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

$$F_X(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x)$$

$$= \begin{cases} (1-e^{-\lambda x})^n, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

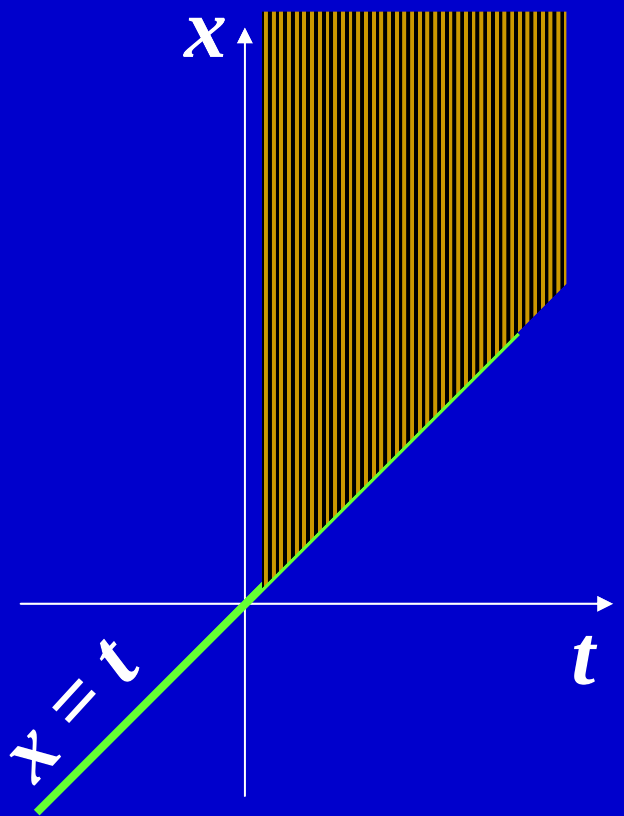
(3) $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$n = 2$ 时,

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x-t)dt$$

$$= \begin{cases} \int_0^x e^{-\lambda t} e^{-\lambda(x-t)} dt, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} xe^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$



可以证明，X_1+X_2 与 X_3 也相互独立，故

$$f_{X_1+X_2+X_3}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1+X_2}(t)f_{X_3}(x-t)dt$$

$$=\begin{cases}\int_0^x te^{-\lambda t}e^{-\lambda(x-t)}dt, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2!}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

归纳地可以证明，

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad (n\ge 2)$$