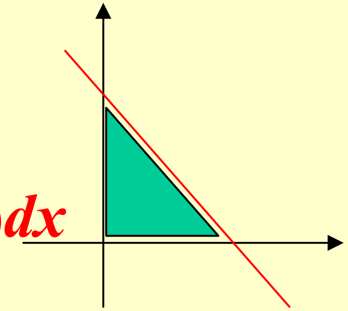
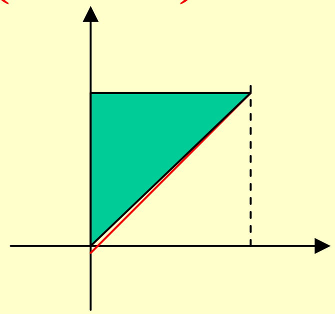
提高练习九参考答案

一、填空题

1. 交换 $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$ 的次序为 $\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$



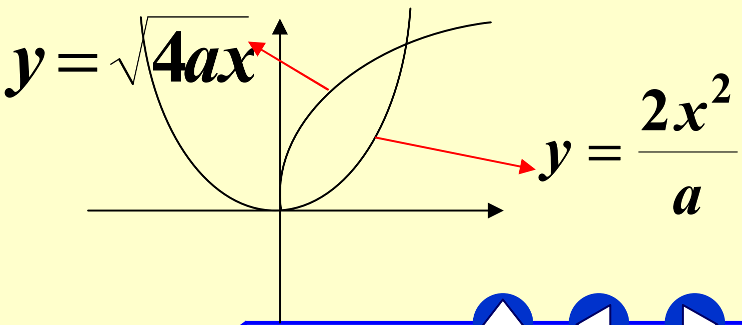
2. 设D=$\{(x,y)|\ 0\le x\le 2, x\le y\le 2\}$, $\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy = \frac{1}{2}(1-e^{-4})$



$$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy = \int_0^2 dy\int_0^y e^{-y^2}dx = \int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$$

3. 求曲线 $y^2 = 4ax, x^2 = \frac{ay}{2}$（$a>0$）所围成图形的面积为 $\frac{2}{3}a^2$

$$A = \int_0^a dx\int_{\frac{2x^2}{a}}^{\sqrt{4ax}} dy$$



4. 设$D: x^2+y^2\le a^2$ $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\sigma = \frac{2}{3}\pi a^3$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho = 2\pi\left(-\frac{1}{3}\right)(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{2}{3}\pi a^3$$

5.设Ω由$z=x^2+y^2$与平面$z=1$围成闭区域，把$I=\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv$化为柱面坐标系下的三次积分为

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz$$

二、选择题

1. 设积分区域D: $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, 则二重积分

$\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = $ (C)

（A）$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho$ （B）$\int_0^{2\pi} d\theta \int_\rho^4 d\rho$

（C）$\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho^2 d\rho$ （D）$\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho d\rho$

2.下列结果中正确的是 （ A ）

(A) 若D: $x^2 + y^2 \le 1$，D_1: $x^2 + y^2 \le 1$，$x, y \ge 0$则

$$\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy = 4\iint\limits_{D_1} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$$

（B）若D: $x^2 + y^2 \le 1$，D_1: $x^2 + y^2 \le 1$，$x, y \ge 0$则

$$\iint\limits_D xydxdy = 4\iint\limits_{D_1} xydxdy$$

(C) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 的几何意义是以 $z=f(x,y)$ 为曲顶，以 D 为底的曲顶柱体的体积的代数和

(D) $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le R^2, z\ge 0, \Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2, x,y,z\ge 0$，

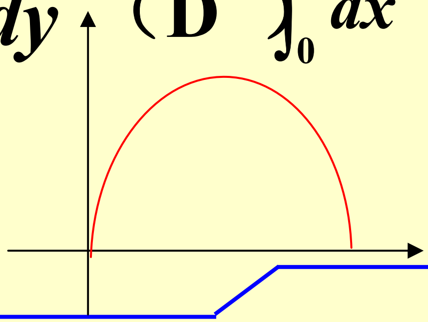
则 $\iint\limits_{\Omega} xdv = 4\iiint\limits_{\Omega_1} xdv$ B,D中，被积函数关于x不是偶函数

3.$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$化为在直角坐标系下的二次积分的结果为（D）

$$\rho=\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2=x$$

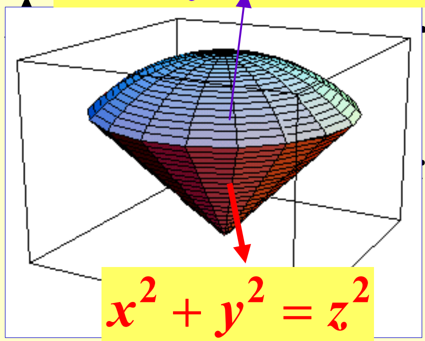
（A）$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$ （B）$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

（C）$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$ （D）$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$



4. Ω 由不等式 $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$， $x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1$ 确定，则

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv =$ （ **D** ）



（A ... $y,z)dxdy$ （B） $\int_0^2 dx \iint\limits_{x^2+y^2\leq z^2} f(x,y,z)dxdy$

（ ... $, y,z)dxdy$ （D） $\int_1^2 dz \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2z-z^2} fdxdy + \int_0^1 dz \iint\limits_{x^2+y^2\leq z^2} fdxdy$

5. Ω 为球体：$x^2+y^2+z^2 \leq 1$，则 $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dv =$（ **B** ）

（A） $\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$ （B） $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 \sin\varphi dr$

（C） $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 \sin\theta dr$ （D） $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 \sin\varphi dr$

三、设 $f(u)$ 具有连续导数，Ω：$x^2+y^2+z^2 \le t^2\,(t>0)$，求

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dv$$

解：原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\pi t^4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^t r^2 f(r)dr$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi\int_0^t r^2 f(r)dr}{\pi t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$$

$$=\begin{cases} f'(0) & \text{若} f(0)=0; \\ \infty & \text{若} f(0)\neq 0. \end{cases}$$

四、设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上连续，证：

$$\lim_{R\to 0}\frac{1}{R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)d\sigma=\pi f(0,0)$$

解：由积分中值定理，$\exists(\xi,\eta)\in D$,使得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\cdot S_D=f(\xi,\eta)\cdot\pi R^2$$

当 $R\to 0$ 时，$f(\xi,\eta)\to f(0,0)$

$$\therefore\lim_{R\to 0}\frac{1}{R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)d\sigma=\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)}\frac{f(\xi,\eta)\cdot\pi R^2}{R^2}$$

$$=\pi f(0,0)$$

五． $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， 且 $f(x)>0$， 求证：

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)^2.$$

证:

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx = \int_a^b\int_a^b f(x)\cdot\frac{1}{f(y)}dydx = \int_a^b\int_a^b f(y)\cdot\frac{1}{f(x)}dxdy$$

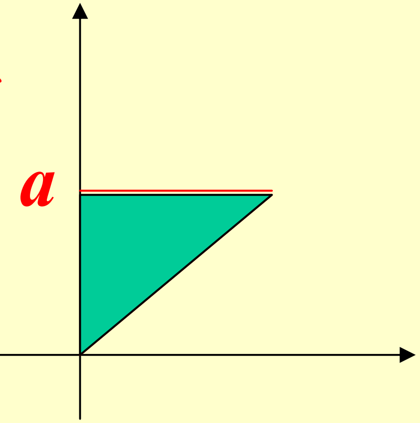
$$\because \frac{\int_a^b\int_a^b f(x)\cdot\frac{1}{f(y)}dydx + \int_a^b\int_a^b f(y)\cdot\frac{1}{f(x)}dxdy}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [f(x)\cdot\frac{1}{f(y)} + f(y)\cdot\frac{1}{f(x)}]dxdy$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b 2dxdy = (b-a)^2$$

六.求证$\int_0^a dy\int_0^y f(x)g'(y)dx=\int_0^a f(x)[g(a)-g(x)]dx$

提示：交换积分顺序



证:

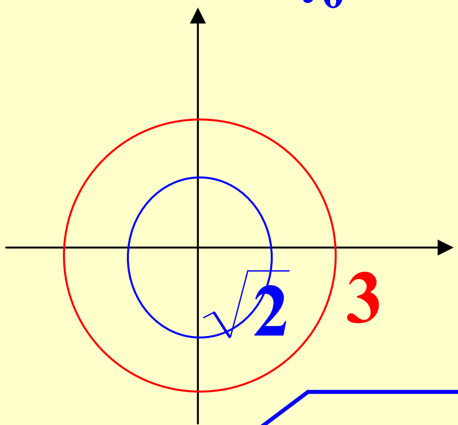
$$\int_0^a dy\int_0^y f(x)g'(y)dx=\int_0^a dx\int_x^a f(x)g'(y)dy$$

$$=\int_0^a f(x)[g(a)-g(x)]dx$$

七、计算$\iint\limits_D \left|x^2+y^2-2\right|dxdy$，其中$D: x^2+y^2\le 3$

解: 原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(\rho^2-2)\rho d\rho+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(2-\rho^2)\rho d\rho$

$$=\frac{5}{2}\pi$$



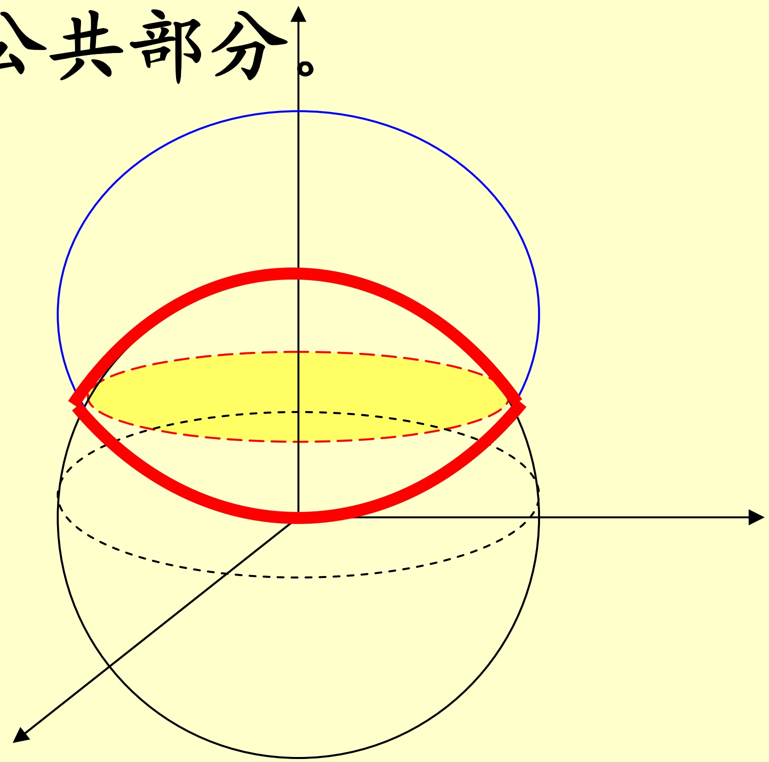
八. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截下部分的面积.

解: 所截部分在xoy平面的投影:$(x-1)^2+y^2\le 1$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2}$$

$$A=\iint_{D_{xy}} dS=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2}\rho d\rho=\sqrt{2}\pi$$

九. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dv$，$\Omega$ 由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 所围区域的公共部分。



解：先二后一法

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{1}{2}} z^2 dz \iint\limits_{D_1: x^2+y^2 \le 1-(z-1)^2} dxdy + \int_{\frac{1}{2}}^{1} z^2 dz \iint\limits_{D_2: x^2+y^2 \le 1-z^2} dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} z^2 \pi[1-(z-1)^2]dz + \int_{\frac{1}{2}}^{1} z^2 \pi(1-z^2)dz = \frac{59}{480}\pi$$