习题测试（一）答案

一、选择题

1．设 $X=\{a,b,c\}$，下列集族中，（ B ）是 X 上的拓扑．

A $T=\{X,\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{c\}\}$； B $T=\{X,\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$；

C $T=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,c\}\}$； D $T=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\}\}$．

2．已知 $X=\{a,b,c,d\}$，拓扑 $\mathcal{T}=\{X,\varnothing,\{a\}\}$，则 $\overline{\{b\}}=$（ D ）

A $\varnothing$； B X； C $\{b\}$； D $\{b,c,d\}$．

3．设 X 是一个拓扑空间，A，B 是 X 的子集，则下列关系中错误的是（ C ）

A $d(A\cup B)=d(A)\cup d(B)$； B $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

C $d(A\cap B)=d(A)\cap d(B)$； D $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$．

4．离散空间的任一子集为(C)

A 开集； B 闭集；
C 既开又闭； D 非开非闭．

5．设 X 是拓扑空间，$\{x_k\}$ 是 X 中的收敛序列，则下面正确的命题是（ B ）

A 对于任何拓扑空间 X，$\{x_k\}$ 的极限唯一；

B 若 X 是 Hansodorff 空间，则 $\{x_k\}$ 的极限唯一；

C 若 X 是第一可数的，则 $\{x_k\}$ 的极限唯一；

D 若 X 是正则的，则 $\{x_k\}$ 的极限唯一．

二、填空题

1．设 $X=\{a,b,c\}$，则 X 的平庸拓扑为 <u>$\mathcal{T}=\{X,\phi\}$</u> 。

2．设 X，Y 是两个拓扑空间，$f:X\to Y$ 是一个映射，若 X 中任何一个闭集 U 的象集 $f(U)$ 是 Y 中的一个闭集，则称映射 f 是一个 <u>闭映射</u> 。

3．设 $X=\{1,2,3\}$，$\mathcal{T}=\{\varnothing,X,\{1,2\},\{1,3\},\{1\},\{2\}\}$ 是 X 的拓扑，$A=\{1,2\}$，则 X 的子空间 A 的拓扑为 <u>$\mathcal{T}=\{\phi,A,\{1\},\{2\}\}$</u>。

4．若拓扑空间 X 中有一个可数子集 D 满足 $\overline{D}=X$，则 X 称为的 可分 空间；

5．正规空间对于 闭 （开或闭）子空间遗传．

6．拓扑空间 (X,T) 的子集 U 称为点 x 的邻域，如果存在开集 $\boldsymbol{V}$ 使得 $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{V}\subseteq \boldsymbol{U}.$。

7．点 x 是拓扑空间 (X,T) 的子集 A 的聚点是指对任一的 U_x, 都有 $U_x\cap\{A-\{x\}\}\neq\varnothing$.

8．正规的 T_1 空间 称为 T_4 空间。

9．拓扑学的中心任务是研究 拓扑不变性。

10．称 X 是紧致空间，若对 X 的任一开覆盖都有有限的子覆盖。

三、证明题

1．设 X 是一个集合，$\mathcal{T}=\{U\,|\,X-U\text{是}X\text{的一个可数子集}\}\cup\{\varnothing\}$，证明：$\mathcal{T}$ 是 X 的一个拓扑．

证明：（1） $X\in T$，因 $X-X=\varnothing$；又由定义有 $\varnothing\in T$；

（2）设 $A,B\in T$，若 A 和 B 之中有一个是空集，则 $A\cap B=\varnothing\in T$．若 A 和 B 都不为空，则 $A\cap B=A'\cup B'$ 是一个可数子集，所以 $A\cap B\in T$；

（3）设 $T_1\subset T$，则 $\forall U\in T_1, U'$ 是一个可数子集，所以 $\bigcup_{u\in T_1}U=\bigcap_{u\in T_1}U'$ 是一个可数子集；

即 $\bigcup T_1\in T$．综上可知，T 是 X 的一个拓扑．

2．设 $\mathcal{T}_1$ 与 $\mathcal{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑，$\mathcal{T}_1\cap\mathcal{T}_2$，$\mathcal{T}_1\cup\mathcal{T}_2$ 是否为 X 上的拓扑？若是请给出证明，若不是举出反例

证明：$T_1\cap T_2$ 是 X 上的拓扑，$T_1\cup T_2$ 不一定是 X 上拓扑。先证明 $T_1\cap T_2$ 是 X 上的拓扑。(1) 因为 T_1 是拓扑，所以 X，$\varnothing\in T_1$；同理由于 T_2 是拓扑，从而 X，$\varnothing\in T_2$，那么 X，$\varnothing\in T_1\cap T_2$；（2）证明 若A，B $\in T_1\cap T_2$，则 $A\cap B\in T_1\cap T_2$ 因为 A，B $\in T_1$，且A，B $\in T_2$，从而 $A\cap B\in T_1$，$A\cap B\in T_2$，所以 $A\cap B$ $\in T_1\cap T_2$；（3）设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是指标集，且 $A_\alpha\in T_1\cap T_2$，去证明 $\bigcup\limits_{\alpha\in A}A_\alpha\in T_1\cap T_2$。由于 $A_\alpha\in T_1$, $A_\alpha\in T_2$，所以由拓扑的定义知 $\bigcup\limits_{\alpha\in A}A_\alpha\in T_1$，$\bigcup\limits_{\alpha\in A}A_\alpha\in T_2$，从而 $\bigcup\limits_{\alpha\in A}A_\alpha\in T_1\cap T_2$。

现举例说明同一个集合上两个拓扑的并不一定是拓扑。

例如，令 $X=\{a,b,c,\}$,$\mathrm{T}_1=\{X, \varnothing,\{a\}\}$,$\mathrm{T}_2=\{X, \varnothing,\{b\}\}$。则易知 T_1 与 T_2 分别是 X 上的拓扑，而 $\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}\notin T_1\cup T_2$ ，所以 $T_1\cup T_2=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\}\}$ 不满足拓扑的定义。

3．证明：拓扑空间 X 是 T_1 的当且仅当 X 的每个单点集都是闭集的.

证明：$\Rightarrow$ 设 $x\in X$ ，下证 $\overline{\{x\}}=\{x\}$ 。对任意 $y\in X, y\neq x$ ，因 X 是 T_1 的，则存在 $U\in N(y), x\notin U$ ，即 $U\cap\{x\}=\varnothing$ ，故 $y\notin\overline{\{x\}}$ ，所以 $\overline{\{x\}}=\{x\}$ 。$\Leftarrow$ $\forall x,y\in X, x\neq y$ ，由假设 $\{x\},\{y\}$ 都是闭集。从而 $\{x\}',\{y\}'$ 分别是 y,x 的开领域，且

$x\notin\{x\}', y\notin\{y\}'$ ，由 T_1 的定义，拓扑空间 X 是 T_1 的。

4．证明：每个正则的 T_0 空间都是 T_3 空间.

证明：设 X 是正则的 T_0 空间，以下只需证 X 是 T_1 的。

$\forall x,y\in X, x\neq y$ ，因 X 是 T_0 空间，则或者 $\exists A\in N(x), y\notin A$ ，或者 $\exists B\in N(y), x\notin B$ 。

若 $\exists A\in N(x), y\notin A$ ，则 $x\notin X\setminus A, X\setminus A$ 是 X 的闭集，因 X 是正则的，

$\exists\, U\in N(x), V\in N(X\setminus A), U\cap V=\varnothing$ ，从而有 $x\in U, y\in X\setminus A\subset V$ ，且 $U\cap V=\varnothing$

若 $\exists B\in N(y), x\notin B$ ，则 $y\notin X\setminus B, X\setminus B$ 是 X 的闭集，因 X 是正则的，

$\exists\, U\in N(y), V\in N(X\setminus B), U\cap V=\varnothing$ ，从而有 $y\in U, x\in X\setminus B\subset V$ ，且 $U\cap V=\varnothing$

所以 X 是 T_1 的，由 X 是正则的，故 X 是 T_3 空间.

5．证明：设 $\mathcal{B}$ 是拓扑空间（X，$\mathcal{T}$）的一个开集族,证明：$\mathcal{B}$ 是拓扑空间（X，$\mathcal{T}$）的一个基当且仅当对于任意的 $x\in X$ 及 X 的任一邻域 U_x ,都存在 $V_x\in\mathcal{B}$，使得 $x\in V_x\subset U_x$ 。

证明：如果 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个基,则对于每一个 $x\in X$ 和 x 的每一个邻域 U_x ,存在 x 的一个开邻域 W_x 使得 $W_x\subset U_x$. 由于 W_x 是一个开集,根据基的定义,存在 $\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{B}$ 使得 $W_x\subseteq\bigcup_{A\in\mathcal{B}_1}A$,

于是由 $x\in\bigcup_{A\in\mathcal{B}_1}A$ 知存在 $V_x\in\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{B}$ 使得 $x\in V_x\subseteq\bigcup_{A\in\mathcal{B}_1}A=W_x\subset U_x$.；

即证明满足定理条件。另一方面，设定理中的条件成立。如果 U 是 X 中的一个开集,则对于每一个 $x\in U$,由于 U 是 x 的一个邻域,故存在 $V_x\in\mathcal{B}$ 使得 $x\in V_x\subseteq U_x$ ，于是 $U=\bigcup_{x\in U}\{x\}\subset\bigcup_{x\in U}V_x\subset U$.因此 $U=\bigcup_{x\in U}V_x$.从而 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个基.