高等数学（一）模拟试卷及解答

一、填空题（$3\times 8=24$分）

1. 当$a=$__1__时，$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ a+x, & x\geq 0 \end{cases}$ 在$x=0$处连续.

2. $f'(0)=3$，且$f(0)=2$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=$___3___.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (e^{t^2}-1)dt}{4x^3}=\dfrac{1}{12}$.

4. 曲线$y=x^2$与$y=3x$所围图形的面积为 $\dfrac{9}{2}$.

5. 曲线$y=\dfrac{3x^2+7}{x^2+2}$的一条水平渐近线为________$y=3$________.

6.$\int\sqrt{t\sqrt{t}}dt=$______$\dfrac{4}{7}t^{\frac{7}{4}}+C$____________

7.设$f(x)$的一个原函数为$\dfrac{\cos x}{x}$，则$\int f(x)dx=$______$\dfrac{\cos x}{x}+C$____________

8. 曲线 $y=f(x)$ （其中 $f'(x)$ 为连续函数）在区间[a,b]的长度为___$\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$______________

二、选择题（$3\times 8=24$分）

1. $x\to 0$时，$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$是关于x^2的(　B　).

（A）同阶而不等价的无穷小　　（B）低阶无穷小

（C）等价无穷小　　（D）高阶无穷小

2. 设$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则$f(x)$在$x=0$处(　B　).

（A）不连续也不可导　　（B）连续不可导

（C）可导不连续　　（D）连续且可导

3. 当$x<x_0$时，$f'(x)>0$；当$x>x_0$时，$f'(x)<0$，则x_0必定为函数$f(x)$的(　D　).

（A）驻点　（B）极大值点　（C）极小值点　（D）以上都不对

4. $F(x)$是$f(x)$的一个原函数，C为任意常数，则$f(x)$的不定积分可表示为(　B　).

（A） $F(x)+\cos C$ （B） $F(x)+\ln C \quad (C>0)$

（C） $F(x)+e^{C}$ (D) $F(x)+\sqrt{C^2+2}$

5．在 $f(x)$ 连续的条件下，下列各式中正确的是(　C　).

（A） $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx=f(x)$ （B） $\frac{d}{dx}\int_b^a f(x)dx=f(x)$

（C） $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ （D） $\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)dx=f(x)$

6. 设 $f'(\cos^2 x)=\sin^2 x-1$,且 $f(0)=0$,则 $f(x)$=(　D　)

（A） $\frac{1}{2\cos^2 x}$ （B） $\frac{1}{2}x^2$ （C） $-\frac{1}{2}\cos^4 x$ （D） $-\frac{1}{2}x^2$

7. 设 $F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，其中 $f(x)$ 为连续函数，则 $\lim_{x\to a}F(x)$=(　A　)

（A） $f(a)$ （B）1 （C）0 （D）不存在

8. 用极坐标计算曲线 $\rho=2\sin\theta$ 所围图形面积时,积分区间是(　C　)

（A） $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ （B） $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ （C） $[0,\pi]$ （D） $[0,2\pi]$

三、综合题

1. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{2x}$

解：原式= $\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{-3x}\right]^{-\frac{2}{3}}=e^{-\frac{2}{3}}$.

另解：原式= $\lim_{x\to\infty}e^{2x\ln\left(1-\frac{1}{3x}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}2x\left(-\frac{1}{3x}\right)}=e^{-\frac{2}{3}}$.

2. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

或： $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$,

3. 求由 $xy=e^{x+y}$ 所确定函数 $y=f(x)$ 的微分 dy.

解： $y+xy'=e^{x+y}(1+y')$，

$$y'=\frac{xy-y}{x-xy}, \qquad dy=\frac{xy-y}{x-xy}dx.$$

4. $\int\frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x}dx$

$$=\int\frac{d\cos 2x}{\cos 2x-7}=\ln\left|\cos 2x-7\right|+C.$$

另解：原式$=\int\frac{2\sin x d\sin x}{3+\sin^2 x}=\int\frac{d\sin^2 x}{3+\sin^2 x}=\ln(3+\sin^2 x)+C$.

5. $\int\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$

解：设 $x=3\sin t$， $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

则原式$=\int\frac{9\sin^2 t}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}3\cos t dt=\frac{9}{2}\int(1-\cos 2t)dt=\frac{9}{2}t-\frac{9}{4}\sin 2t+C$

$$=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+C.$$

6. $\int_0^3 x\,|x-1|\,dx$

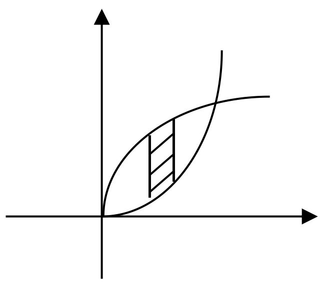
$$=\int_0^1 x(1-x)dx+\int_1^3 x(x-1)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1=4\frac{5}{6}.$$

7. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}=\arctan(x+2)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\arctan 2.$$

8、求曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 所围成图形绕 x 轴旋转一周所形成旋转体的体积.

解 ：如图： $dV=(\pi x-\pi x^4)dx$，



$$V=\pi\int_0^1(x-x^4)dx$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{3\pi}{10}.$$

9. （6 分）若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$ ，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$，证明：在(x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$