

第二十四讲 内积空间的定义与基本性质

一、内积空间的定义

二、内积空间中向量的长度

三、内积空间中向量的夹角

四、 n 维内积空间中内积的矩阵表示

五、内积子空间



问题的引入:

1、线性空间中，向量之间的基本运算为线性运算，其具体模型为几何空间 R^2 、 R^3 ，但几何空间的度量性质(如长度、夹角)等在一般线性空间中并没有涉及。

2、在解析几何中，向量的长度，夹角等度量性质都可以通过内积反映出来：

长度： $|\alpha| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}$

夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle$: $\cos \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha||\beta|}$

3、几何空间中向量的内积具有比较明显的代数性质。

一、内积空间的定义

1. 定义

设 V 是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间，对 V 中任意两个向量 α 、 β ，定义一个二元实函数，记作 (α, β) ，若 (α, β) 满足性质： $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, \forall k \in \mathbf{R}$

$$1^\circ (\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) \quad (\text{对称性})$$

$$2^\circ (k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta) \quad (\text{数乘})$$

$$3^\circ (\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma) \quad (\text{可加性})$$

$$4^\circ (\alpha, \alpha) \geq 0, \text{ 当且仅当 } \alpha = 0 \text{ 时 } (\alpha, \alpha) = 0. \quad (\text{正定性})$$

则称 (α, β) 为 α 和 β 的**内积**，并称这种定义了内积的实数域 \mathbf{R} 上的线性空间 V 为**内积空间**。

注： 内积空间 V 是特殊的线性空间

- ① V 为实数域 \mathbf{R} 上的线性空间；
- ② V 除向量的线性运算外，还有“内积”运算；
- ③ $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}$.

例1. 在 R^n 中, 对于向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

1) 定义 $(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ (1)

易证 (α, β) 满足定义中的性质 $1^\circ \sim 4^\circ$.

这样 R^n 对于内积 (α, β) 就成为一个内积空间.

(当 $n = 3$ 时, 1) 即为几何空间 R^3 中内积在直角坐标系下的表达式. (α, β) 即 $\alpha \cdot \beta$.)

2) 定义

$$(\alpha, \beta)' = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + \cdots + k a_k b_k + \cdots + n a_n b_n$$

易证 $(\alpha, \beta)'$ 满足定义中的性质 $1^\circ \sim 4^\circ$.

从而 \mathbf{R}^n 对于内积 $(\alpha, \beta)'$ 也构成一个内积空间.

注意: 由于对 $\forall \alpha, \beta \in V$, 未必有 $(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)'$

所以1), 2) 是两种不同的内积.

从而 \mathbf{R}^n 对于这两种内积就构成了不同的内积空间.

例2. $C(a,b)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的所有实连续函数所成线性空间, 对于函数 $f(x), g(x)$, 定义

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (2)$$

则 $C(a,b)$ 对于 (2) 作成是一个内积空间.

证: $\forall f(x), g(x), h(x) \in C(a,b), \quad \forall k \in R$

$$1^\circ. (f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b g(x)f(x) dx = (g, f)$$

$$\begin{aligned} 2^\circ. (kf, g) &= \int_a^b kf(x)g(x) dx = k \int_a^b f(x)g(x) dx \\ &= k(f, g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3^\circ. (f+g, h) &= \int_a^b (f(x) + g(x))h(x) dx \\
 &= \int_a^b f(x)h(x) dx + \int_a^b g(x)h(x) dx \\
 &= (f, h) + (g, h)
 \end{aligned}$$

$$4^\circ. (f, f) = \int_a^b f^2(x) dx$$

$$\because f^2(x) \geq 0, \quad \therefore (f, f) \geq 0.$$

且若 $f(x) \neq 0$, 则 $f^2(x) > 0$, 从而 $(f, f) > 0$.

故 $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

因此, (f, g) 为内积, $C(a, b)$ 为内积空间.

2. 内积的简单性质

V 为欧氏空间, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, \forall k \in R$

$$1) (\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta), (k\alpha, k\beta) = k^2(\alpha, \beta)$$

$$2) (\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$$

$$\text{推广: } (\alpha, \sum_{i=1}^s \beta_i) = \sum_{i=1}^s (\alpha, \beta_i)$$

$$3) (0, \beta) = 0$$

二、内积空间中向量的长度

1. 引入长度概念的可能性

1) 在 R^3 向量 α 的长度 (模) $|\alpha| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}$.

2) 欧氏空间 V 中, $\forall \alpha \in V$, $(\alpha, \alpha) \geq 0$

使得 $\sqrt{\alpha \cdot \alpha}$ 有意义.

2. 向量长度的定义

$\forall \alpha \in V$, $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 称为向量 α 的**长度**.

特别地, 当 $|\alpha| = 1$ 时, 称 α 为**单位向量**.

3. 向量长度的简单性质

$$1) \quad |\alpha| \geq 0; \quad |\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$2) \quad |k\alpha| = |k| |\alpha| \quad (3)$$

$$3) \quad \text{非零向量 } \alpha \text{ 的单位化: } \frac{1}{|\alpha|} \alpha .$$

三、内积空间中向量的夹角

1. 引入夹角概念的可能性与困难

1) 在 R^3 中向量 α 与 β 的夹角

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha||\beta|} \quad (4)$$

2) 在一般欧氏空间中推广 (4) 的形式, 首先

应证明不等式: $\left| \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|} \right| \leq 1$

即,

2. 柯西—布涅柯夫斯基不等式

对欧氏空间 V 中任意两个向量 α 、 β ，有

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| |\beta| \quad (5)$$

当且仅当 α 、 β **线性相关** 时等号成立.

证：当 $\beta = 0$ 时， $(\alpha, 0) = 0$ ， $|\beta| = 0$

$\therefore (\alpha, \beta) = |\alpha| |\beta| = 0$. 结论成立.

当 $\beta \neq 0$ 时，作向量 $\gamma = \alpha + t\beta$ ， $t \in R$

由内积的正定性, 对 $\forall t \in R$, 皆有

$$\begin{aligned}(\gamma, \gamma) &= (\alpha + t\beta, \alpha + t\beta) \\ &= (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta)t + (\beta, \beta)t^2 \geq 0\end{aligned}\tag{6}$$

取 $t = -\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}$ 代入 (6) 式, 得

$$(\alpha, \alpha) - 2(\alpha, \beta)\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} + (\beta, \beta)\frac{(\alpha, \beta)^2}{(\beta, \beta)^2} \geq 0$$

$$\text{即 } (\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$$

两边开方, 即得 $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\|\|\beta\|.$

当 α 、 β 线性相关时，不妨设 $\alpha = k\beta$

于是， $|(\alpha, \beta)| = |(k\beta, \beta)| = |k(\beta, \beta)| = |k||\beta|^2$.

$$|\alpha||\beta| = |k\beta||\beta| = |k||\beta|^2$$

$\therefore |(\alpha, \beta)| = |\alpha||\beta|$. (5)式等号成立.

反之，若 (5) 式等号成立，由以上证明过程知

或者 $\beta = 0$ ，或者 $\alpha - \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}\beta = 0$

也即 α 、 β 线性相关.

3. 柯西—布涅柯夫斯基不等式的应用

1)

柯西
不等式

$$\begin{aligned} & \left| a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \right| \\ & \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \end{aligned} \quad (7)$$

$$a_i, b_i \in R, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

2)

施瓦兹
不等式

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

证： 在 $C(a,b)$ 中， $f(x)$ 与 $g(x)$ 的内积定义为

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

由柯西—布涅柯夫斯基不等式有

$$|(f(x), g(x))| \leq \|f(x)\| \|g(x)\|$$

从而得证.

3)

三角
不等式

对欧氏空间中的任意两个向量 α 、 β , 有

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (7)$$

证: $|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta)$

$$= (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta)$$

$$\leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2$$

两边开方, 即得 (7) 成立.

4. 内积空间中两非零向量的夹角

定义1: 设 V 为内积空间, α 、 β 为 V 中任意两**非零**向量, α 、 β 的**夹角**定义为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}$$

$$(0 \leq \langle \alpha, \beta \rangle \leq \pi)$$

定义2: 设 α 、 β 为内积空间中两个向量, 若内积

$$(\alpha, \beta) = 0$$

则称 α 与 β **正交** 或 **互相垂直**, 记作 $\alpha \perp \beta$.

注:

① 零向量与任意向量正交.

② $\alpha \perp \beta \iff \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\pi}{2}$, 即 $\cos \langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

5. 勾股定理

设 V 为内积空间, $\forall \alpha, \beta \in V$

$$\alpha \perp \beta \iff |\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

$$\begin{aligned} \text{证: } \mathbf{Q} \quad |\alpha + \beta|^2 &= (\alpha + \beta, \alpha + \beta) \\ &= (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\alpha + \beta|^2 &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 \iff (\alpha, \beta) = 0 \\ &\iff \alpha \perp \beta. \end{aligned}$$

推广： 若内积空间 V 中向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 两两正交，

$$\text{即} \quad (\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{则} \quad |\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_m|^2$$

证： 若 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad i \neq j$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad |\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m|^2 &= \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i, \sum_{j=1}^m \alpha_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^m (\alpha_i, \alpha_i) + \sum_{i \neq j}^m (\alpha_i, \alpha_j) \\ &= \sum_{i=1}^m (\alpha_i, \alpha_i) = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_m|^2. \end{aligned}$$

例3、已知 $\alpha = (2, 1, 3, 2)$, $\beta = (1, 2, -2, 1)$

在通常的内积定义下, 求 $|\alpha|, (\alpha, \beta), \langle \alpha, \beta \rangle, |\alpha - \beta|$.

解: $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$(\alpha, \beta) = 2 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times (-2) + 2 \times 1 = 0 \quad \therefore \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\pi}{2}$$

又 $\alpha - \beta = (1, -1, 5, 1)$

$$\therefore |\alpha - \beta| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

通常称 $|\alpha - \beta|$ 为 α 与 β 的距离, 记作 $d(\alpha, \beta)$.

四、 n 维内积空间中内积的矩阵表示

设 V 为内积空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组基, 对 V 中任意两个向量

$$\alpha = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_n \varepsilon_n$$

$$\beta = y_1 \varepsilon_1 + y_2 \varepsilon_2 + \dots + y_n \varepsilon_n,$$

$$(\alpha, \beta) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i, \sum_{j=1}^n y_j \varepsilon_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\varepsilon_i, \varepsilon_j) x_i y_j \quad (8)$$

$$\text{令 } a_{ij} = (\varepsilon_i, \varepsilon_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$A = (a_{ij})_{n \times n}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\text{则 } (\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = X' A Y \quad (10)$$

定义：矩阵 $A = \begin{pmatrix} (\varepsilon_1, \varepsilon_1) & (\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ (\varepsilon_2, \varepsilon_1) & (\varepsilon_2, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varepsilon_n, \varepsilon_1) & (\varepsilon_n, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n, \varepsilon_n) \end{pmatrix}$

称为基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的度量矩阵.

注:

① 度量矩阵 A 是**实对称矩阵**.

② 由内积的正定性, 度量矩阵 A 还是**正定矩阵**.

事实上, 对 $\forall \alpha \in V, \alpha \neq 0$, 即 $X \neq 0$

有 $(\alpha, \alpha) = X'AX > 0$

$\therefore A$ 为正定矩阵.

③ 由 (10) 知, 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下, 向量的内积由度量矩阵 A 完全确定.

五、内积空间的子空间

欧氏空间 V 的子空间在 V 中所定义的内积之下也是一个欧氏空间，称之为 V 的**欧氏子空间**.