第三章 子空间、积空间、商空间

介绍三种从原有的拓扑空间或拓扑空间族构造新空间的经典方法, 引入遗传性、可积性、可商性等概念, 这些是研究拓扑性质的基本构架.

教学重点：子空间与积空间；教学难点：子空间、（有限）积空间和商空间

3.1 子空间

对于空间 X 的子集族 $\mathcal{A}$ 及 $Y \subset X$, $\mathcal{A}$ 在 Y 上的限制 $\mathcal{A}|_Y = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$.(定义 3.1.2)

引理 **3.1.2** 设 Y 是空间 (X,τ) 的子集, 则是 Y 上的拓扑.

证 按拓扑的三个条件逐一验证. 如, 设 $\tau_1 \subset \tau_{|Y}, \forall A \in \tau_1, \exists B_A \in \tau$, 使得 $A = B_A \cap Y$, 于是

$\cup \tau_1 = \cup\{B_A \cap Y \mid A \in \tau_1\} = (\cup\{B_A \mid A \in \tau_1\}) \cap Y \in \tau_{|Y}$

定义 **3.1.3** 对 $Y \subset X, (Y, \tau_{|Y})$ 称为 (X,τ) 的子空间, $\tau_{|Y}$ 称为相对拓扑.

"子空间"= "子集"+ "相对拓扑".

易验证, 若 Z 是 Y 的子空间, 且 Y 是 X 的子空间, 则 Z 是 X 的子空间. (定理 3.1.4),

定理 **3.1.5(3.1.7)** 设 Y 是 X 的子空间, $y \in Y$, 则

(1)若 τ, τ^* 分别为 X, Y 的拓扑, 则 $\tau^* = \tau_{|Y}$;

(2)若 $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ 分别为 X, Y 的全体闭集族, 则 $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}|_Y$;

(3)若 $\mathcal{U}_y, \mathcal{U}_y{}^*$ 分别为 y 在 X, Y 中的邻域系, 则 $\mathcal{U}_y{}^* = \mathcal{U}_{y|Y}$;

(4)若 $\mathcal{B}$ 是 X 的基, 则 $\mathcal{B}|_Y$ 是 Y 的基.

证 (2) $F^* \in \mathcal{F}^* \Leftrightarrow Y - F^* \in \tau_Y \Leftrightarrow Y - F^* = U \cap Y,$

$U \in \tau \Leftrightarrow F^* = (X-U) \cap Y, U \in \tau \Leftrightarrow F^* \in \tau_{|Y}$.

(4). U 开于 Y, . 存在 X 的开集 V, 使得 $U = V \cap Y$, . $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$, 满足 $V = \cup\ \mathcal{B}_1$, 则 $U = \cup\,(\mathcal{B}_1|_Y)$.

在 R 的子空间 $(0,+\infty)$ 中 $(0.1]$ 是闭集.

定理 **3.1.6** 设 Y 是 X 的子空间, $A \subset Y$, 则

$(1) d_Y(A) = d_X(A) \cap Y; (2) c_Y(A) = c_X(A) \cap Y$

证 (1) $y \in d_X(A)$ 在 X 中的邻域 $U, U \cap (A - \{y\}) \supset (U \cap Y) \cap (A - \{y\}) \neq \phi$, 所以

$y\in d_X(A)\cap Y$. 反之，设 $y\in d_X(A)\cap Y$, . y 在 Y 中的邻域 V, $\exists y$ 在 X 中的邻域 U 使 $V=U\cap Y$，于是 $V\bigcap(A-\{y\})=(U\bigcap(A-\{y\}))\cap Y=U\cap(A-\{y\})\neq\phi$, 所以 $y\in d(A)$..

(2) $c_Y(A)=A\cup d_Y(A)=A\cup(d_X(A)\cap Y)=(A\cup d_X(A))\cap(A\cup Y)=c_X(A)\cap Y$ · **3.2**

有限积空间

就平面的球形邻域 $B_d(x,\varepsilon)$ 而言, 我们知道球形邻域内含有方形邻域，方形邻域内含有球形邻域 . 从基的角度而言,形如 $B_1(x_1,\varepsilon_1)\times B_2(x_2,\varepsilon_2)$ 的集合就是平面拓扑的基了. 对于两个拓扑空间 X,Y, 在笛卡儿积集 $X\times Y$ 中可考虑形如 $U\times V$ 的集合之全体, 其中 U, V 分别是 X, Y 的开集. 对于有限个空间 $X_1,X_2,...,X_n$, 可考虑形如 $U_1\times U_2\times...\times U_n$ 的集合.

定理 **3.2.2** 设 (X_i,τ_i) 是 n 个拓扑空间, 则 $X=X_1\times X_2\times...\times X_n$ 有唯一的拓扑, 以 X 的子集族 $\mathbf{B}=\{U_1\times U_2\times...\times U_n\,|\,U_i\in\tau_i,i\le n$ 为它的一个基 .

证 验证 **B** 满足定理 2.6.3 的条件(i), (ii). (1) $X=X_1\times X_2\times...\times X_n\in\mathbf{B}$, $\cup\mathbf{B}$=X; (2) 若 $U_1\times U_2\times...\times U_n,V_1\times V_2\times...\times V_n\in\mathbf{B}$, 则

$(U_1\times U_2\times...\times U_n)\cap(V_1\times V_2\times...\times V_n)=(U_1\cap V_1)\times(U_2\cap V_2)\times...\times(U_n\cap V_n)\in\mathbf{B}$.

定义 **3.2.2** 以定理 3.2.2 中 **B** 为基生成 $X=X_1\times X_2\times...\times X_n$ 上的唯一拓扑, 称为拓扑 $\tau_1,\tau_2,...\tau_n$ 的积拓扑. (X,τ) 称为 $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2),...(X_n,\tau_n)$, 的(有限)积空间.

定理 3.2.4 设 $X=X_1\times X_2\times...\times X_n$ 是积空间，**B**i 是 X_i 的基，则 $\mathbf{B}=\{B_1\times B_2\times...\times B_n\,|\,B_i\in$ **Bi**, $i\le n\}$ 是积拓扑 τ 的基.

证 利用定理 2.6.2. 设 $x\in U\in\tau,\exists U_i\in\tau_i$ 使 $x\in U_1\times U_2\times...\times U_n\subset U,\exists B_i\in$ **B**i 使 $x_i\in B_i\subset U_i$, 那么 $x\in B_1\times B_2\times...\times B_n\subset U_1\times U_2\times...\times U_n\subset U$..

例 3.2.1 形如 $(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times...\times(a_n,b_n)$ 的集合构成 R^n 的基.

设 $(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2)$ 是两个度量空间. 令 $\rho(x,y)=\sqrt{\rho_1(x_1,y_1)^2+\rho_2(x_2,y_2)^2}$, 则 ρ 是 $X_1\times X_2$ 上的度量, 导出 X 上的度量拓扑 τ. 对于 n 个度量空间之积可类似地定义. (定义 3.2.1)

定理 **3.2.1** 度量空间的有限积: 积拓扑与度量拓扑一致.

验证$n=2$的情形. 易验证$B_1(x_1,\varepsilon/2)\times B_2(x_2,\varepsilon/2)\subset B(x,\varepsilon)\subset B_1(x_1,\varepsilon)\times B_2(x_2,\varepsilon)$于是每一$B(x,\varepsilon)$是积拓扑的开集, 且每一$B_1(x_1,\varepsilon)\times B_2(x_2,\varepsilon)$是度量拓扑的开集, 所以导出相同的拓扑.

定理 3.2.5 有限积空间$X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$以 $\mathcal{S}=\{p_i^{-1}(U_i)|U_i\in\tau_i, i\le n\}$为子基, 其中$\tau_i$是$X_i$的拓扑, $p_i:X\to X_i$是投射.

仅证$n=2$的情形. $p_1^{-1}(U_1)=U_1\times X_2, p_2^{-1}(U_2)=X_1\times U_2$, 所以

$p_1^{-1}(U_1)\cap p_2^{-1}(U_2)=U_1\times U_2\in\mathcal{B}$.

定义 3.2.3 $f:X\to Y$称为开(闭)映射, 若U开(闭)于X, 则$f(U)$开(闭)于Y.

定理 3.2.6 $p_i:X\to X_i$是满、连续、开映射, 未必是闭映射.

由于 $p_i^{-1}(U_i)=X_1\times X_2\times\ldots\times U_i\times\ldots\times X_n$, 所以 p_i 连续. 由于 $p_i(U_1\times U_2\times\ldots\times U_i\times\ldots\times U_n)=U_i$, 所以是$p_i$开的. 但是$p_1:R^2\to R$不是闭的.

定理 3.2.7 设映射$f:Y\to X$其中X是积空间$X_1\times X_2\times..\times X_n$. 则$f$连续

$\Leftrightarrow\forall i\le n, p_i\circ f:Y\to X_i$连续.

证 充分性. 对X的子基 $\mathcal{S}=\{p_i^{-1}(U_i)|U_i\in\tau_i, i\le n\}, f^{-1}(p_i^{-1}(U_i))=(p_i\circ f)^{-1}(U_i)$开于$Y$.

多元函数连续当且仅当它的每一分量连续.

定理 3.2.8 积拓扑是使每一投射都连续的最小拓扑. 即设τ是积空间$X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$的积拓扑, 若集合 X 的拓扑$\tau^*$满足: 每一投射$p_i:(X,\tau^*)\to X_i$连续, 则$\tau\subset\tau^*$.

证 由于$\{p_i^{-1}(U_i)|U_i\in\tau_i, i\le n\}\subseteq\tau^*$, 所以$\tau\subset\tau^*$.

3.3 商空间

回忆, 商集X/R, 及自然投射$p:X\to X/R$定义为$p(x)=[x]_R$. 问题: 设X是拓扑空间, 要在X/R上定义拓扑, 使p连续的最大的拓扑.

讨论更一般的情形, 设(X,τ)是拓扑空间且$f:X\to Y$ 是满射. 赋予集合Y什么拓扑, 使f

连续的最大的拓扑. 若 f 连续, 且 U 是 Y 的开集, 则 $f^{-1}(U)$ 是 X 的开集. 让 $\tau_1=\{U\subset Y\mid f^{-1}(U)\cup\tau\}$, 易验 证 τ_1 是 Y 上的拓扑.

定义 **3.3.1(3.3.2)** 称 τ_1 是 Y 的相对于 f 满射而言的商拓扑, $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$ 称为商映射. 这时, U 在 Y 中开 $\Leftrightarrow f^{-1}(U)$ 在 X 中开; F 在 Y 中闭 $\Leftrightarrow f^{-1}(F)$ 在 X 中闭.

定理 **3.3.1** 商拓扑是使 f 连续的最大拓扑.

证 设 $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$ 是商映射. 显然, f 是连续的. 如果 τ_2 是 Y 的拓扑使 $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$ 连续, 则 $\forall U\in\tau_2, f^{-1}(U)\in\tau$, 于是 $U\in\tau_1$, 即 $\tau_2\subset\tau_1$,, 所以 τ_1 是使 f 连续的最大拓扑.

定理 **3.3.2** 设 $f:X\to Y$ 是商映射. 对于空间 Z, 映射 $g:Y\to Z$ 连续 $\Leftrightarrow$ 映射 $g\circ f:X\to Z$ 连续.

证 设 $g\circ f:X\to Z$ 连续, $\forall W$ 开于 $Z, (g\circ f)^{-1}(W)=f^{-1}(g^{-1}(W))$ 开于 X, 由于 f 是商映射, 所以 $g^{-1}(W)$ 开于 Y, 故 g 连续.

定理 **3.3.3** 连续, 满开(闭)映射 $\Rightarrow$ 商映射.

证 设 $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ 是连续的满开(闭)映射, τ_1 是 Y 的相对于 f 而言的商拓扑, 要证 $\tau_1=\tau_Y$. 由定理 3.3.1, $\tau_1\supset\tau_Y$. 反之, $\forall V\in\tau_1, f^{-1}(V)\in\tau_X$. 对于开映射的情形 $V=f(f^{-1}(V))\in\tau_Y$,; 对于闭映 射的情形, $V=Y-f(X-f^{-1}(V))\in\tau_Y$, 所以总有 $\tau_1\subset\tau_Y$.

定义 **3.3.3** 设 R 是空间 (X,τ) 的等价关系, 由自然投射 $p_i:X\to X/R$ 确定了 X/R 的商拓扑, 称 $(X/R,\tau_R)$ 为商空间, 这时 $p_i:X\to X/R$ 是商映射.

例 **3.3.1** 在 R 中定义等价关系~:. $\forall x,y\in R, x\sim y\Leftrightarrow$ 或者 $x,y\in Q$, 或者 $x,y\notin Q$ 商空间 **R**/~是由两点组成的平庸空间. 由于 **Q** 在 **R** 中既是开集, 也不是闭集, 所以单点集[**Q**]在 **R**/~中既不是开集,也不是闭集. 习惯上, 把 **R**/~说成是在 **R** 中将所有有理点和所有无理点分别粘合为一点所得到的商空间.

例 3.3.2 在 $[0,1]$ 上定义等价关系 $\sim:\forall x,y\in[0,1], x\sim y\Leftrightarrow$ 或者 $x=y$, 或者 $\{x,y\}=\{0,1\}$. $[0,1]/\sim$ 是 在 $[0,1]$ 中粘合 0, 1 两点所得到的商空间, 这商空间同胚于单位圆周

S_1.