第二讲 整除的概念

一、带余除法

二、整除的定义

三、整除的性质

四、思考题

一、带余除法

定理1.1.1 对 $\forall f(x), g(x) \in P[x], g(x) \neq 0,$

一定存在 $q(x), r(x) \in P[x],$ 使

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

成立，其中 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$ 或 $r(x) = 0,$

并且这样的 $g(x), r(x)$ 是唯一决定的.

称 $q(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商，$r(x)$为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式.

Proof：先证存在性.

① 若 $f(x)=0$， 则令 $q(x)=r(x)=0.$ 结论成立.

② 若 $f(x)\neq 0$， 设 $f(x),g(x)$的次数分别为 $n,m,$

当 $n<m$ 时， 显然取 $q(x)=0, r(x)=f(x)$即有

$f(x)=q(x)g(x)+r(x),$ 结论成立.

下面讨论 $n\geq m$ 的情形，对 n作数学归纳法.

次数为 0 时结论显然成立.

假设对次数小于n的 $f(x)$，结论已成立.

现在来看次数为n的情形.

设 $f(x)$的首项为ax^n，$g(x)$的首项为bx^m, $(n\geq m)$

则 $b^{-1}ax^{n-m}g\left(x\right)$ 与 $f(x)$首项相同， 因而，多项式

$$f_1(x)=f(x)-b^{-1}ax^{n-m}g\left(x\right)$$

的次数小于n或f_1为0.

若 $f_1\left(x\right)=0$, 令 $q(x)=b^{-1}ax^{n-m}, r(x)=0$ 即可.

若 $\partial\left(f_1\left(x\right)\right)<n$, 由归纳假设，存在 $q_1(x), r_1(x)$

使得 $f_1\left(x\right)=q_1\left(x\right)g\left(x\right)+r_1\left(x\right)$

其中 $\partial\left(r_1(x)\right) < \partial\left(g(x)\right)$ 或者 $r_1(x) = 0$. 于是

$$f(x) = \left(b^{-1}ax^{n-m} + q_1(x)\right)g(x) + r_1(x).$$

即有 $q(x) = b^{-1}ax^{n-m} + q_1(x)$, $r(x) = r_1(x)$ 使

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

成立.

由归纳法原理，对 $\forall f(x), g(x) \neq 0$, $q(x), r(x)$

的存在性得证.

再证唯一性.

若同时有 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$,

其中 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$或$r(x)=0$.

和 $f(x)=q'(x)g(x)+r'(x)$,

其中$\partial(r'(x))<\partial(g(x))$或$r'(x)=0$.

则 $q(x)g(x)+r(x)=q'(x)g(x)+r'(x)$

即 $(q(x)-q'(x))g(x)=r'(x)-r(x)$.

若$q(x)\neq q'(x)$，由$g(x)\neq 0$，有$r'(x)-r(x)\neq 0$

$$\therefore \partial\big(q(x)-q'(x)\big)+\partial\big(g(x)\big)=\partial\big(r'(x)-r(x)\big)$$

$$\leq \max\big(\partial(r),\partial(r')\big)$$

$$<\partial\big(g(x)\big)$$

但 $\partial\big(q(x)-q'(x)\big)+\partial\big(g(x)\big)\geq\partial\big(g(x)\big)$，矛盾.

所以 $q(x)=q'(x)$，从而 $r'(x)=r(x)$.

唯一性得证.

例1. 求 x^2-3x+1 除 $3x^3+4x^2-5x+6$ 的商和余式

解:

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2-3x+1 & 3x^3+4x^2-5x+6 & 3x+13 \\
 & 3x^3-9x^2+3x & \\
\hline
 & 13x^2-8x+6 & \\
 & 13x^2-39x+13 & \\
\hline
 & \qquad\qquad 31x-7 &
\end{array}
$$

所以，

$$3x^3+4x^2-5x+6=(3x+13)(x^2-3x+1)+(31x-7).$$

二、整除的定义

1．定义1.1.3

设 $f(x), g(x) \in P[x]$，若存在 $h(x) \in P[x]$ 使

$$f(x) = g(x)h(x)$$

则称 $g(x)$整除 $f(x)$，记作 $g(x) \mid f(x)$.

2．说明

① $g(x) \mid f(x)$时，称 $g(x)$为 $f(x)$的因式，$f(x)$ 为 $g(x)$的倍式.

② $g(x)$不能整除 $f(x)$时记作：$g(x) \nmid f(x)$.

③ 允许 $g(x)=0$，此时有 $0=0h(x)$， $\forall h(x)\in P[x]$

即 $0|0$.

$$\text{区别:}\begin{cases} 0|0 & \text{零多项式整除零多项式，有意义.} \\ \dfrac{0}{0} & \text{除数为零，无意义.} \end{cases}$$

④ 当 $g(x)\,|\,f(x)$ 时， 如果 $g(x)\neq 0$，则 $g(x)$ 除

$f(x)$所得的商可表成 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

３．整除的判定

定理1.1.4 $\forall f(x), g(x) \in P[x],\ g(x) \neq 0,$

$$g(x) \mid f(x) \Longleftrightarrow g(x)\text{除 } f(x)\text{的余式}\, r(x) = 0.$$

证明： 由带余除法可得。

三. 整除的性质

1) 对 $\forall f(x)\in P[x]$, 有 $f(x)\,|\,f(x)$, $f(x)\,|\,0$;

对 $\forall f(x)\in P[x]$, $\forall a\in P, a\neq 0$, 有 $a\,|\,f(x)$.

即，任一多项式整除它自身；

零多项式能被任一多项式整除；

零次多项式整除任一多项式.

2) 若 $f(x)\,|\,g(x)$, 则 $af(x)\,|\,bg(x)$, $\forall a,b\in P\,(a\neq 0)$.

$a\neq 0$时, $f(x)$与$a\,f(x)$有相同的因式和倍式.

3) 若 $g(x)\mid f(x)$，$f(x)\mid g(x)$，则

$$f(x)=cg(x),\ \ c\neq 0.$$

证： $f(x)\mid g(x)\Rightarrow \exists h_1(x)$ 使得 $g(x)=f(x)h_1(x)$;

$g(x)\mid f(x)\Rightarrow \exists h_2(x)$ 使得 $f(x)=g(x)h_2(x)$.

$$\Rightarrow f(x)=h_1(x)h_2(x)f(x).$$

若 $f(x)=0$, 则 $g(x)=0$,

$\therefore\ f(x)=cg(x)$，$\forall c\in \mathrm{P}, c\neq 0$

若 $f(x)\neq 0$, 则 $h_1(x)h_2(x)=1$

$$\Rightarrow \partial\left(h_1(x)\right) + \partial\left(h_2(x)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \partial\left(h_1(x)\right) = \partial\left(h_2(x)\right) = 0.$$

$\therefore \quad h_1(x), h_2(x)$ 皆为非空常数.

故有 $f(x) = cg(x)$，$c \neq 0$ 成立.

4) 若 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid h(x)$，$f(x) \mid h(x)$

（整除关系的传递性）

5) 若 $f(x) \mid g_i(x)$, $i = 1,2,\cdots,r$

则对 $\forall u_i(x) \in P[x]$, $i = 1,2,\cdots,r$ 有

$$f(x) \mid (u_1(x)g_1(x) + u_2(x)g_2(x) + \cdots u_r(x)g_r(x))$$

注： 反之不然．如 $f(x) = 3x - 2$,

$$g_1(x) = x^2 + 1, \quad g_2(x) = 2x + 3,$$

$$u_1(x) = -2, \quad u_2(x) = x,$$

$$(u_1(x)g_1(x) + u_2(x)g_2(x) = -2 + 3x,$$

$$\therefore \ f(x) \mid \left(u_1(x)g_1(x) + u_2(x)g_2(x)\right)$$

但 $f(x) \nmid g_1(x)$, $f(x) \nmid g_2(x)$.

6) 整除不变性：

两多项式的整除关系不因系数域的扩大而改变.

思考题

1． 求实数 m,p,q 满足什么条件时多项式

x^2+mx-1 整除多项式 x^3+px+q.

2. 设 $f(x)\in P[x]$, $f(x)=f(-x)$, 如果

$(x-a)\mid f(x)$, 证明：$(x^2-a^2)\mid f(x)$.