§3.2 边缘分布及随机变量的独立性

一、边缘分布

例1　把一枚均匀硬币抛掷三次，设X为三次抛掷中正面出现的次数，而Y为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值，求(X,Y)的分布律．

解：（X, Y）可取值(0,3),(1,1),(2,1),(3,3)

$P\{X=0, Y=3\}=(1/2)^3=1/8$

$P\{X=1, Y=1\}=3(1/2)^3=3/8$

$P\{X=2, Y=1\}=3/8$

$P\{X=3, Y=3\}=1/8$

列表如下

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

二维联合分布全面地反映了二维随机变量(X,Y)的取值及其
量X,Y也具有自己的
二者之间有什么关系

注意这两个分布正好是表2的行和与列和.

Y \ X	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

从表中不难求得:

$P\{X=0\}=1/8$, $P\{X=1\}=3/8$

$P\{X=2\}=3/8$, $P\{X=3\}=1/8$,

$P\{Y=1\}=P\{X=1, Y=1\}+P\{X=2, Y=1\}=3/8+3/8=6/8$,

$P\{Y=3\}=P\{X=0, Y=3\}+P\{X=3, Y=3\}=1/8+1/8=2/8$.

如下表所示

Y \ X	1	3	$P(X=x_i)$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$P(Y=y_i)$	6/8	2/8	1

我们常将边缘分布律写在联合分布律表格的边缘上，由此得出边缘分布这个名词.

联合分布与边缘分布的关系

X \ Y	1	3	$P(X=x_i)$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$P(Y=y_i)$	6/8	2/8	1

由联合分布可以确定边缘分布；

但由边缘分布一般不能确定联合分布.

一般，对任意$r.v\ (X,Y)$，

X和Y的联合分布函数为

$$F(x,y)$$

则(X,Y)关于X的边缘分布函数为

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=F(x,+\infty)$$

(X,Y)关于Y的边缘分布函数为

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=F(+\infty,y)$$

对离散型 $r.v\,(X,Y)$,

X和Y 的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

则(X,Y)关于X的边缘分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_{i\bullet}=\sum_j p_{ij},\quad i=1,2,\cdots$$

(X,Y)关于Y 的边缘分布律为

$$P\{Y=y_j\}=p_{\bullet j}=\sum_i p_{ij},\quad j=1,2,\cdots$$

对连续型 $r.v\ (X,Y)$，

X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)$$

则(X,Y)关于X的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

(X,Y)关于Y的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

例2 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0\ , & 其它 \end{cases}$$

求 (1) c的值； （2）两个边缘概率密度。

解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$

由

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$$

确定C

$$=\int_0^1[\int_0^x cy(2-x)dy]dx$$

$$=c\int_0^1[x^2(2-x)/2]dx = 5c/24=1,$$

$$\Longrightarrow c=24/5$$

例2 设(X,Y)的概率密度是

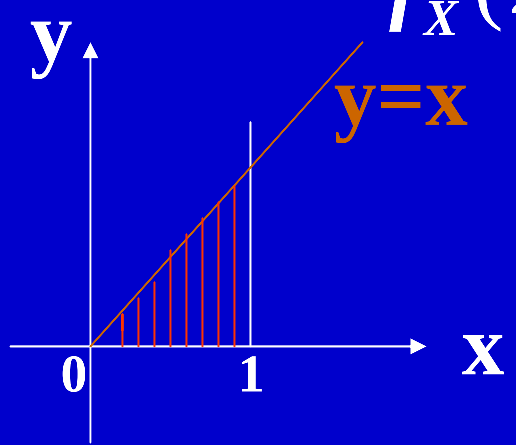
$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le \\ 0\quad, & 其 \end{cases}$$

注意积分限

求 (1) c的值; (2) 两个边缘概率密度 .

解: (2)

$$f_X(x)=\int_0^x \frac{24}{5}y(2-x)dy$$



$$=\frac{12}{5}x^2(2-x),\quad 0\le x\le 1$$

注意取值范围

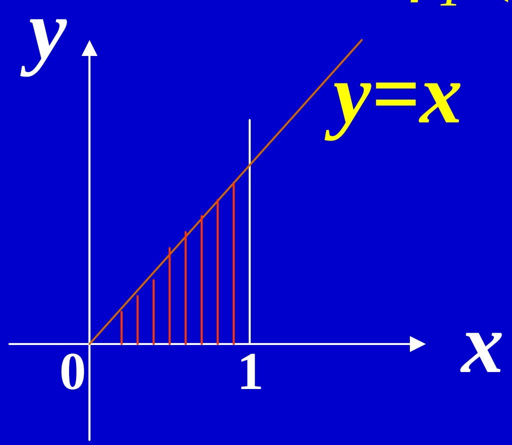
例2 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0 \quad , & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1) c的值; (2) 两个边缘概率

注意积分限

解: (2) $f_Y(y)=\int_y^1 \frac{24}{5} y(2-x)dx$



$$=\frac{24}{5} y\left(\frac{3}{2}-2y+\frac{y^2}{2}\right), \quad 0\le y\le 1$$

注意取值范围

即

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{12}{5}x^2(2-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{24}{5}y(\dfrac{3}{2}-2y+\dfrac{y^2}{2}), & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

例3 设二维连续型随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中k为常数. 求

1）常数k;

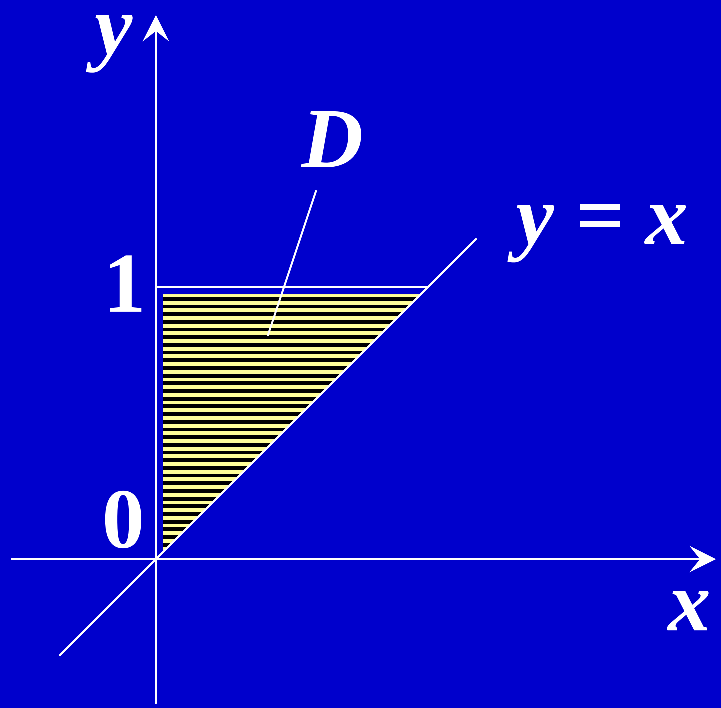
2）$P\{X+Y\ge 1\}$, $P\{X<0.5\}$;

3）联合分布函数$F(x,y)$;

4）边缘概率密度与边缘分布函数

解　令 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le y, 0\le y\le 1\}$

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$



$\Longrightarrow$ $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=1$

$\int_0^1 dy\int_0^y kxydx$

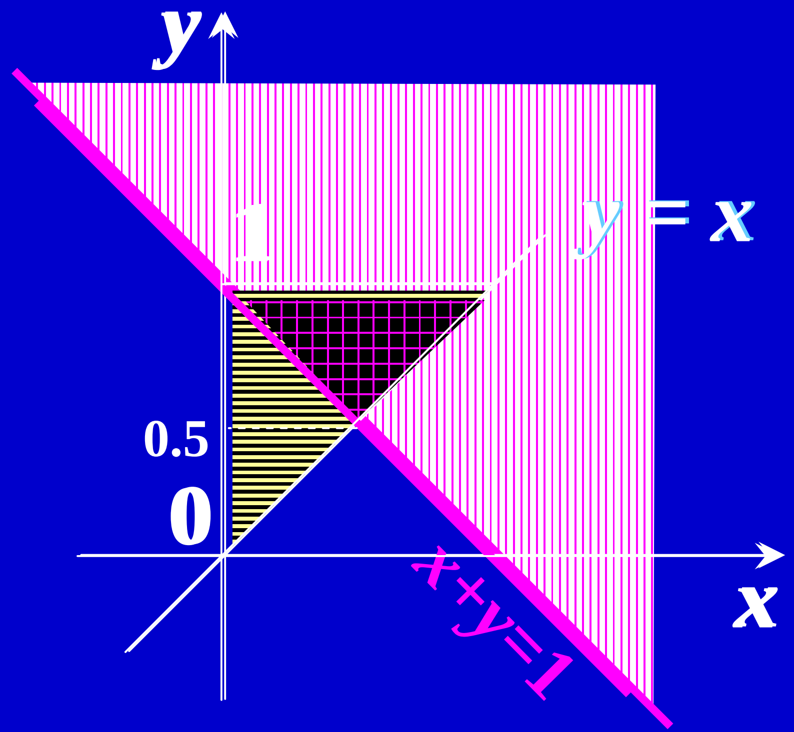
$=k\int_0^1 y\dfrac{y^2}{2}dy=\dfrac{k}{8}$

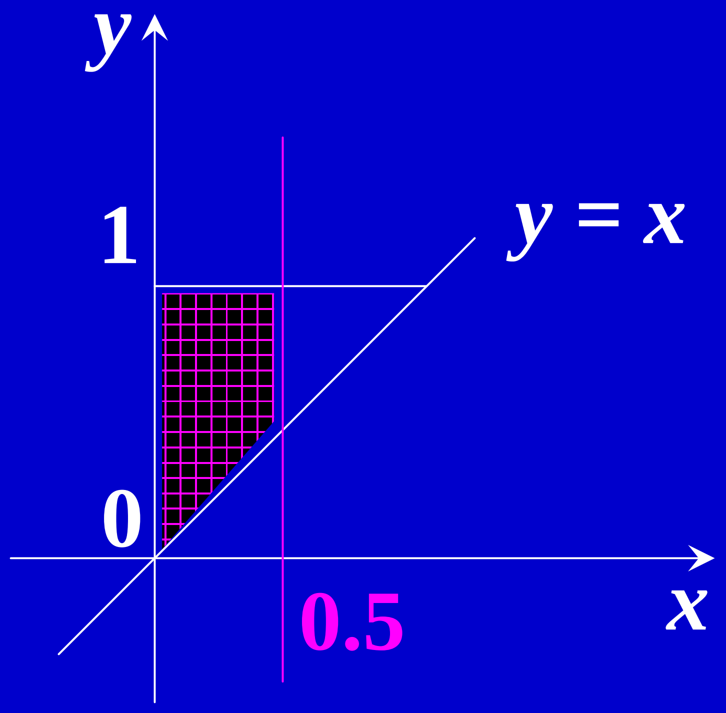
$\Longrightarrow$ $k=8$

(2) $P\{X+Y\geq 1\}$

$$=\int_{0.5}^{1}dy\int_{1-y}^{y}8xydx$$

$$=\frac{5}{6}$$





$P\{X<0.5\}$

$$=\int_{0}^{0.5}dx\int_{x}^{1}8xydy$$

$$=\frac{7}{16}$$

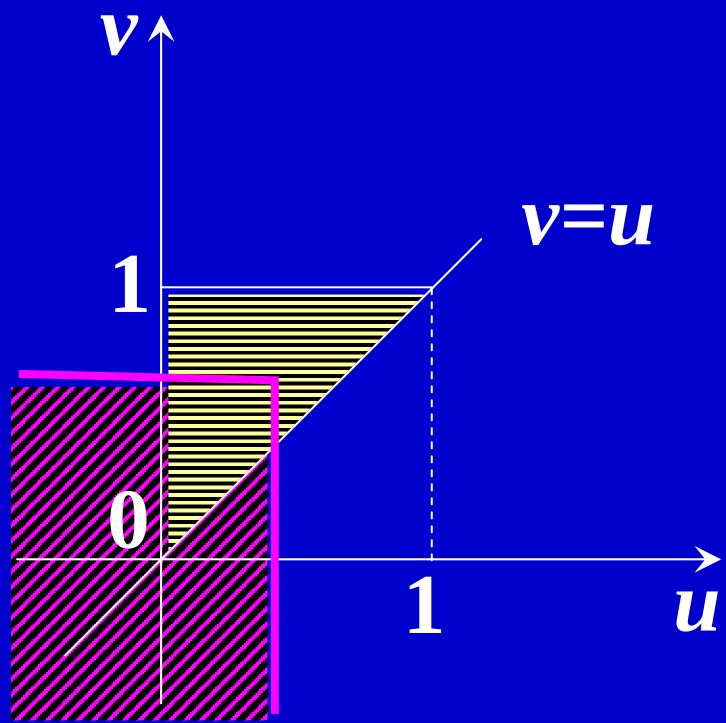
$$(3)\quad F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv$$

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，

$F(x,y)=0$

当 $0\le x<1$

$0\le y<x$ 时，



$$F(x,y)=\int_0^y dv\int_0^v 8uv\,du=y^4$$

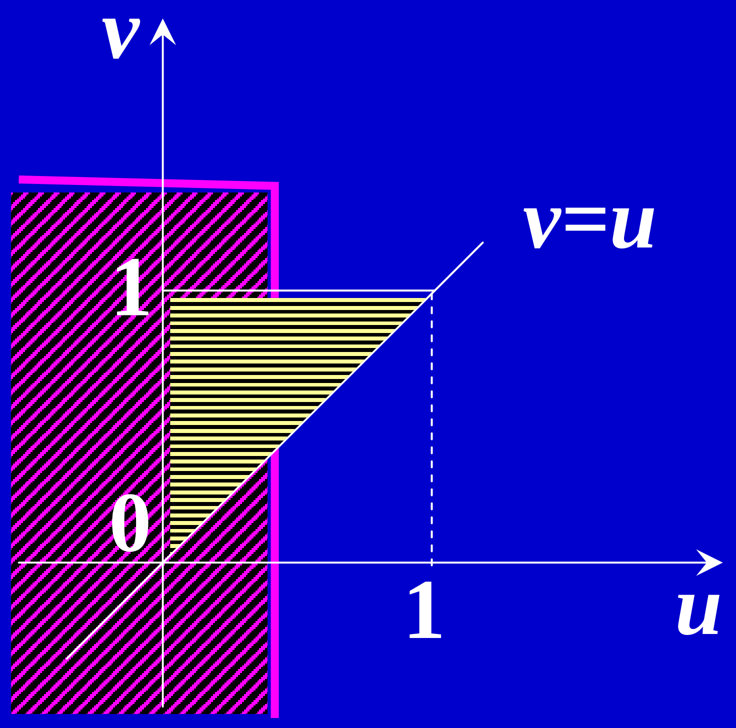
当 $0\le x<1,\ x\le y<1$ 时，

$$F(x,y)=\int_0^x du\int_u^y 8uv\,dv=2x^2y^2-x^4$$

当 $0 \le x < 1, y \ge 1$ 时,

$$F(x,y) = \int_0^x du \int_u^1 8uv\,dv$$

$$= 2x^2 - x^4$$

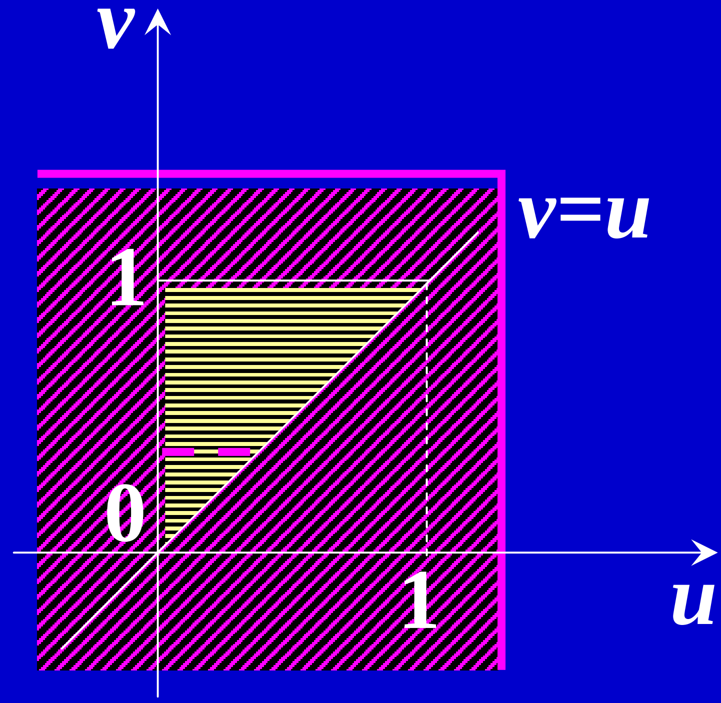


当 $x \geq 1$

$0 \leq y < x$ 时,

$$F(x,y)$$

$$= \int_0^y dv \int_0^v 8uvdu = y^4$$



当 $x \geq 1$

$y \geq x$ 时,

$$F(x,y) = 1$$

$$
F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0 \\ y^4, & 0 \le x < 1,\ 0 \le y < x, \\ 2x^2y^2 - y^4, & 0 \le x < 1,\ x \le y < 1, \\ 2x^2 - x^4, & 0 \le x < 1,\ y \ge 1, \\ y^4, & x \ge 1,\ 0 \le y < x, \\ 1, & x \ge 1,\ y \ge x, \end{cases}
$$

(4) $F_X(x) = F(x, +\infty)$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x^2 - x^4, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$F_Y(y) = F(+\infty, y)$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y^4, & 0 \le y < 1, \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}4x-4x^3, & 0\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

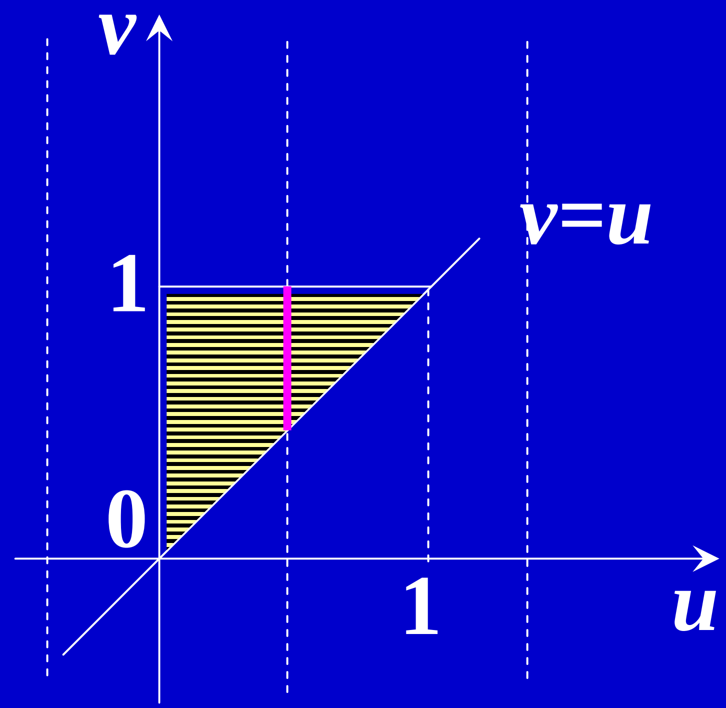
$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0\le y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

也可以直接由联合密度求边缘密度，再积分求边缘分布函数。 例如

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_x^1 8xv\,dv, & 0\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}4x-4x^3, & 0\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



二、 随机变量的独立性

1、两个随机变量的相互独立性

定义 设(X,Y)为二维随机变量，若对于任何实数 x, y 都有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$$

则称随机变量X和Y相互独立

由定义可知

二维随机变量 (X, Y) 相互独立

$$\Longleftrightarrow \quad F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall a < b, c < d$$

$$P\{a < X \le b, c < Y \le d\}$$

$$= P\{a < X \le b\} P\{c < Y \le d\}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall a, c \in R$$

$$P\{X > a, Y > c\} = P\{X > a\} P\{Y > c\}$$

二维离散型随机变量(X, Y)相互独立

$\Longleftrightarrow$ $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$

即 $p_{ij} = p_{i\bullet} p_{\bullet j}$

二维连续型随机变量(X, Y)相互独立

$\Longleftrightarrow$ $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (a.e.)$

二维随机变量 (X, Y)相互独立,
则边缘分布完全确定联合分布

命题 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 相互独立

$\Longleftrightarrow \rho = 0$

证 $\longrightarrow$ 对任何 x,y 有

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

取 $x = \mu_1, y = \mu_2$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$

故 $\rho = 0$

将 $\rho = 0$ 代入 $f(x, y)$ 即得

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

例4 已知 (X, Y) 的联合概率密度为

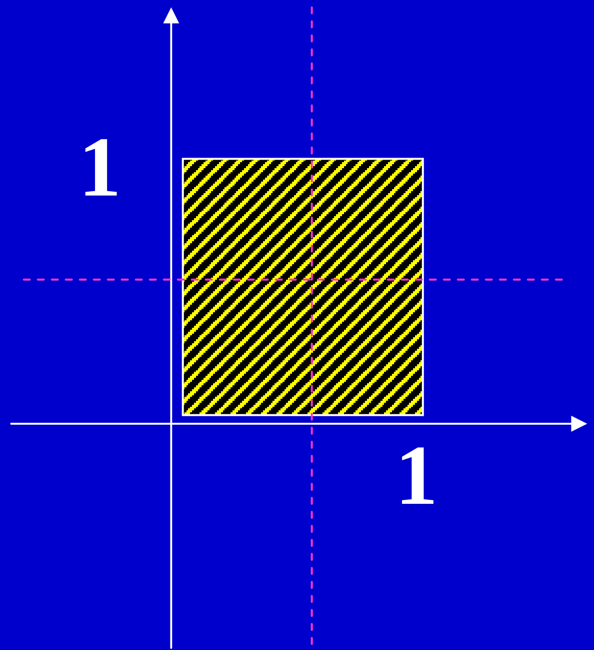
(1) $$f_1(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) $$f_2(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

讨论X ,Y 是否独立？

解

(1) 由图可知边缘概率密度为



$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

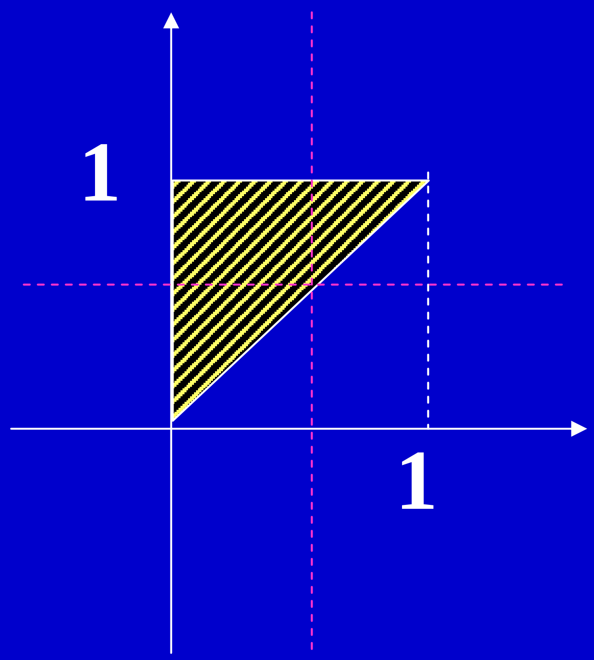
$$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

显然,

$$f_1(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

故X,Y相互独立

(2) 由图可知边缘概率密度为



$$f_X(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

显然,

$$f_2(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$$

故X, Y不独立

判断二维连续型随机变量相互独立的两个重要结论

1、 设$f(x,y)$是二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度函数，$r(x)$, $g(y)$为非负可积函数，且

$$f(x,y)=r(x)g(y)\qquad (a.e.)$$

则(X,Y)相互独立

且

$$f_X(x)=\frac{r(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}r(x)dx}\qquad (a.e.)$$

$$f_Y(y)=\frac{g(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)dy}\qquad (a.e.)$$

利用此结果，不需计算即可得出(1)中的随机变量 X 与 Y 是相互独立的.

再如，服从矩形域$\{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\}$上的均匀分布的二维随机变量$(X,Y)$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & a < x < b, c < y < d \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

X,Y 是相互独立的. 且其边缘分布也是均匀分布

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{d-c}, & c < y < d \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

若

$$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-2x-3y} & x>0, y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则 X, Y 是相互独立的. 且其边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

若

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-3y} & -1<x<2, y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则 X, Y 是相互独立的. 且其边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}, & -1<x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} 3e^{-3y}, & y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

对于分布函数也有类似的结果

设$F(x,y)$是二维连续型随机变量(X,Y)的联合分布函数，则(X,Y)相互独立的充要条件为

$$F(x,y)=R(x)G(y)$$

且

$$F_X(x)=\frac{R(x)}{R(+\infty)}$$

$$F_Y(y)=\frac{G(y)}{G(+\infty)}$$

2、 设 X,Y 为相互独立的随机变量，$u(x), v(y)$为连续函数, 则$U = u(X),V = v(Y)$也相互独立.

事实上，设X 与Y 的概率密度函数分别为$f_X(x)$, $f_Y(y)$, 则

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

因此， $F_{UV}(u,v) = P\{U \le u, V \le v\}$

$$= P\{u(X) \le u, v(Y) \le v\} = \iint_{\substack{u(x)\le u \\ v(y)\le v}} f_X(x)f_Y(y)dxdy$$

$$= \int_{u(x)\le u} f_X(x)dx \int_{v(y)\le v} f_Y(y)dy$$

$$= P\{u(X) \le u\}P\{v(Y) \le v\} = F_U(u)F_V(v)$$

例如，若 X, Y 为相互独立的随机变量

则 $aX+b,\ cY+d$ 也相互独立；

X^2, Y^2 也相互独立；

随机变量相互独立的概念
可以推广到 n 维随机变量

若 $P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$

$= P\{X_1 \le x_1\}P\{X_2 \le x_2\}\cdots P\{X_n \le x_n\}$

则称随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立

注意 若两个随机变量相互独立，且又有相同的分布，不能说这两个随机变量相等. 如

X	-1	1
P	0.5	0.5

Y	-1	1
P	0.5	0.5

X, Y 相互独立，则

$X \backslash Y$	-1	1
-1	0.25	0.25
1	0.25	0.25

$P\{X = Y\} = 0.5$, 故不能说 $X = Y$.

例6 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-(x+y)} \\ 0, \end{cases}$$

问X和Y是否独立？

对一切x, y，均有：

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

故X,Y独立

解：$f_X(x)=\int_0^{+\infty} xe^{-(x+y)}dy = xe^{-x}, \quad x>0$

$$f_Y(y)=\int_0^{+\infty} xe^{-(x+y)}dx = e^{-y}, \quad y>0$$

即：

$$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & 其它 \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

若(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

情况又怎样？

解： $$f_X(x)=\int_x^1 2dy=2(1-x),\qquad 0<x<1$$

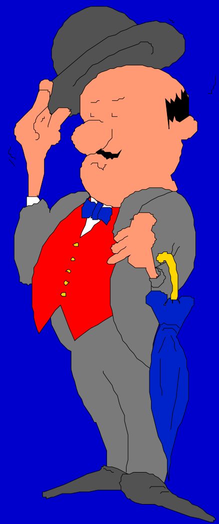
$$f_Y(y)=\int_0^y 2dx=2y,\qquad 0<y<1$$

由于存在面积不为0的区域，

$$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$$

故X和Y不独立．

例7　　甲乙两人约定中午12时30分在某地会面. 如果甲来到的时间在12:15到12:45之间是均匀分布. 乙独立地到达,而且到达时间在12:00到13:00之间是均匀分布. 试求先到的人等待另一人到达的时间不超过5分钟的概率. 又甲先到的概率是多少？



解: 设X为甲到达时刻,Y为乙到达时刻

以12时为起点,以分为单位,依题意,

$$X \sim U(15,45),\quad Y \sim U(0,60)$$

解: 设X为甲到达时刻， Y为乙到达时刻

以12时为起点，以分为单位，依题意，

$X \sim U(15,45)$, $Y \sim U(0,60)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & 15<x<45\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0<y<60\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

先到的人等待另一人
到达的时间不超过5分钟
的概率

$x<45, 0<y<$

其它

甲先到
的概率

所求为$P\{|X-Y|\le 5\}$及$P\{X<Y\}$

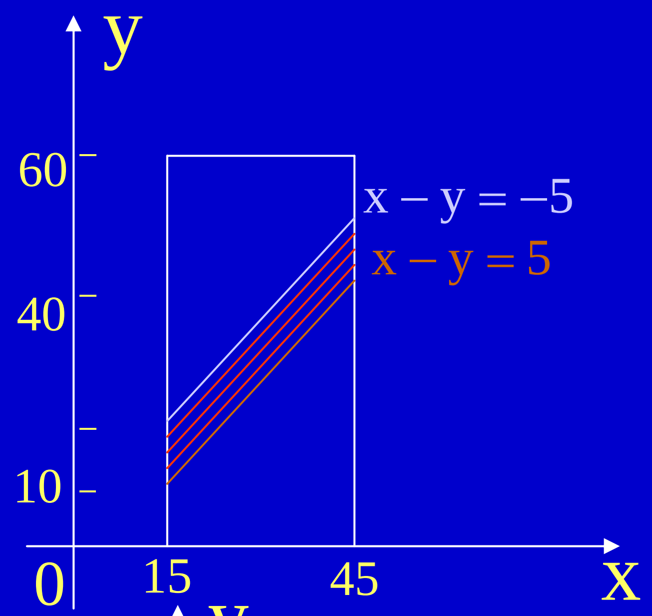
解一：

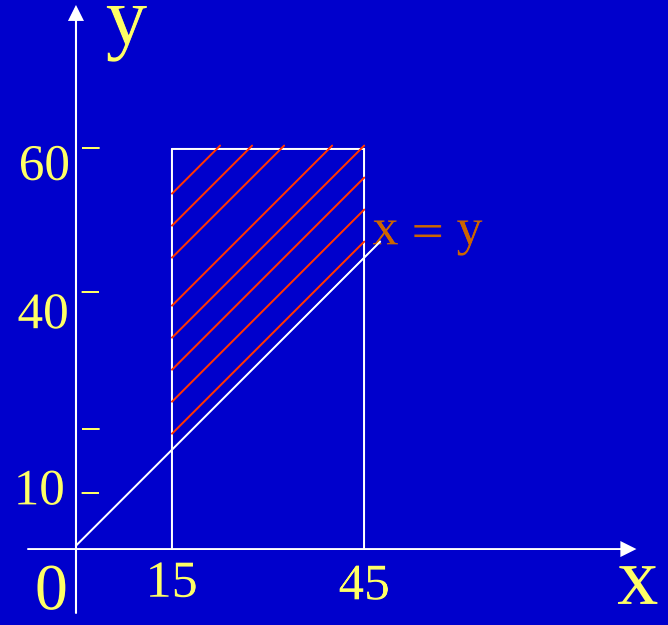
$$P\{|X-Y|\leq 5\}$$

$$=P\{-5<X-Y<5\}$$

$$=\int_{15}^{45}\left[\int_{x-5}^{x+5}\frac{1}{1800}dy\right]dx$$

$$=1/6$$





$$P\{X<Y\}=\int_{15}^{45}\left[\int_{x}^{60}\frac{1}{1800}dy\right]dx$$

$$=1/2$$

解二：$P\{|X-Y|\leq 5\}$

$$=\iint_{|x-y|\leq 5}\frac{1}{1800}\,dxdy$$

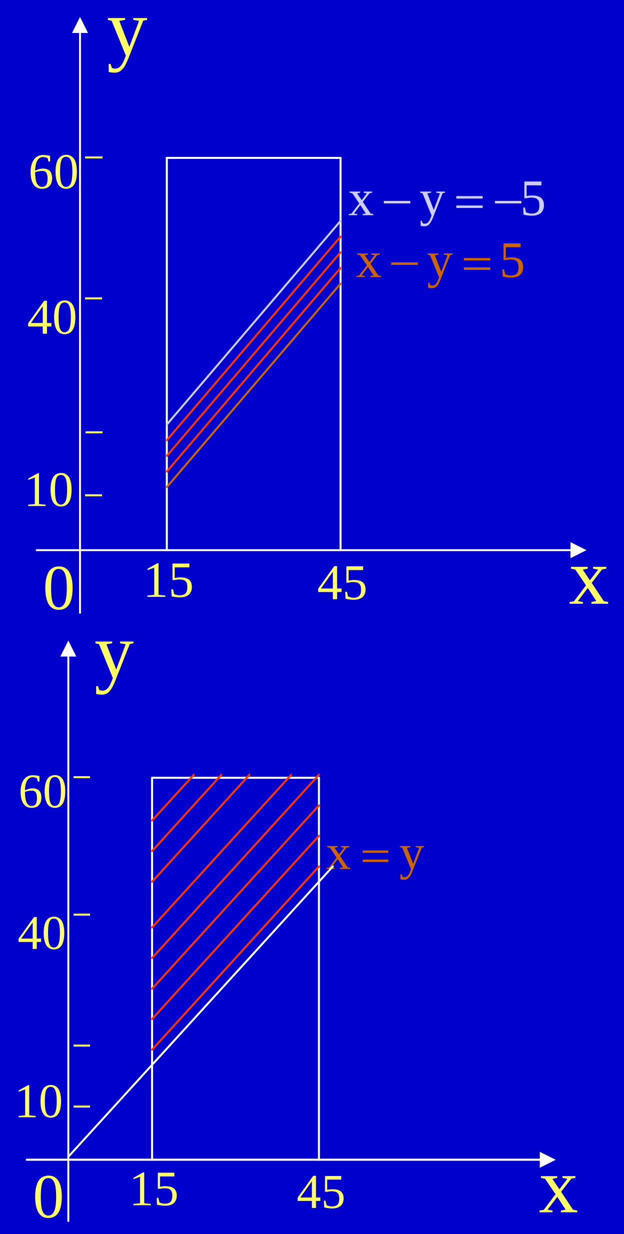
$$=\frac{1}{1800}[60\times 30-2(10\times 30+30\times 30/2)]$$

被积函数为常数，直接求面积

$=1/6$

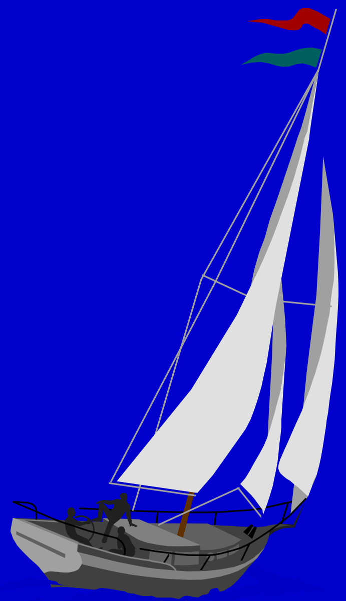
$P\{X<Y\}=P\{X>Y\}$

$=1/2$



类似的问题如：

甲、乙两船同日欲靠同一码头，设两船各自独立地到达，并且每艘船在一昼夜间到达是等可能的．若甲船需停泊1小时，乙船需停泊2小时，而该码头只能停泊一艘船，试求其中一艘船要等待码头空出的概率.



在某一分钟的任何时刻，信号进入收音机是等可能的．若收到两个互相独立的这种信号的时间间隔小于0.5秒，则信号将产生互相干扰．求发生两信号互相干扰的概率．

把长度为a的线段在任意两点折断成为三线段，求它们可以构成三角形的概率.