第二十七讲 正交变换

一、一般内积空间中的正交变换

二、n维内积空间中的正交变换

三、内积空间的同构

四、同构的基本性质

HOME

ENTER

从几何上看，正交变换是保持图形形状与大小不变的几何变换，如旋转、轴对称以及这些变换的复合。

正交变换在许多领域有重要的应用价值，如信号处理与图像处理中的傅里叶变换、离散余弦变换、沃尔什变换都是正交变换，傅里叶变换在图像增强、修复、识别等方面有重要用途。

一、一般内积空间中的正交变换

1. 定义

欧氏空间V的线性变换 σ 如果保持向量的内积不变，

即，

$$\big(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\big)=(\alpha,\beta),\quad \forall\alpha,\beta\in V$$

则称 σ 为**正交变换.**

注： 内积空间中的正交变换是几何空间中保持长度不变的正交变换的推广.

2. 内积空间中的正交变换的刻划

（定理4）设 σ是内积空间V的一个线性变换.

下述命题是等价的:

1） σ 是正交变换;

2） σ 保持向量长度不变，即

$$|\sigma(\alpha)| = |\alpha|, \qquad \forall \alpha \in V;$$

3） σ 保持向量间的距离不变，即

$$d\big(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)\big) = d\big(\alpha, \beta\big), \qquad \forall \alpha, \beta \in V$$

证明： 首先证明1)与2)等价.

1) $\Rightarrow$ 2): 若 σ 是正交变换，则

$$\big(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha)\big)=(\alpha,\alpha),\quad \forall\alpha\in V$$

即，$$|\sigma(\alpha)|^2=|\alpha|^2$$

两边开方得，$$|\sigma(\alpha)|=|\alpha|,\quad \forall\alpha\in V,$$

2) $\Rightarrow$ 1): 若 σ 保持向量长度不变，则对 $\forall\alpha,\beta\in V$

有 $$\big(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha)\big)=(\alpha,\alpha), \tag{1}$$

$$\big(\sigma(\beta),\sigma(\beta)\big)=(\beta,\beta), \tag{2}$$

$$\big(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha+\beta)\big)=(\alpha+\beta,\alpha+\beta), \qquad (3)$$

把(3)展开得，

$$\big(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha)\big)+2\big(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\big)+\big(\sigma(\beta),\sigma(\beta)\big)$$

$$=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)$$

再由(1)(2)即得，

$$\big(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\big)=(\alpha,\beta)$$

$\therefore$ σ 是正交变换.

再证明2)与3)等价.

2) ⇒ 3): $\because \quad \sigma(\alpha)-\sigma(\beta)=\sigma(\alpha-\beta),$

$$\therefore \quad d\big(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\big)=\left|\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)\right|$$

$$=\left|\sigma(\alpha-\beta)\right|=\left|\alpha-\beta\right| \quad \text{（根据2)）}$$

$$=d(\alpha,\beta)$$

故 3）成立.

3) ⇒ 2): 若 $d\big(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\big)=d\big(\alpha,\beta\big), \quad \forall \alpha,\beta\in V$

则有， $d\big(\sigma(\alpha),\sigma(0)\big)=d\big(\alpha,0\big), \quad \forall \alpha\in V$

即， $\left|\sigma(\alpha)\right|=\left|\alpha\right|, \quad \forall \alpha\in V.$ 故 2）成立.

二、n维内积空间中的正交变换

1. n维内积空间中的正交变换是保持标准正交基不变的线性变换.

1). 若σ是n维内积空间V的正交变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是V的标准正交基，则 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 也是V的标准正交基.

事实上，由正交变换的定义及标准正交基的性质即有，

$$\big(\sigma(\varepsilon_i),\sigma(\varepsilon_j)\big)=(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

2). 若线性变换σ使V的标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$变成标准正交基$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$，则$\sigma$为V的正交变换.

证明：任取$\alpha,\beta\in V$，设

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots x_n\varepsilon_n$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots y_n\varepsilon_n,$$

由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为标准正交基，有

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

又 $\sigma(\alpha)=\sum_{i=1}^{n} x_i\sigma(\varepsilon_i)$, $\sigma(\beta)=\sum_{j=1}^{n} y_j\sigma(\varepsilon_j)$

由于$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$为标准正交基，得

$$\left(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\therefore$ $\left(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\right)=(\alpha,\beta)$

故σ是正交变换.

2. n维内积空间V中的线性变换 σ是正交变换

$\Longleftrightarrow$ σ在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

证明："$\Rightarrow$" 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为V的标准正交基，且

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\cdots,\sigma\varepsilon_n)$$
$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

当σ是正交变换时，由1知，$\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\cdots,\sigma\varepsilon_n$ 也是V的标准正交基，而由标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到标准正交基$\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\cdots,\sigma\varepsilon_n$的过渡矩阵是正交矩阵.

所以，A是正交矩阵.

"$\Leftarrow$" 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为V的标准正交基，且

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

即，$$(\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\cdots,\sigma\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

由于当A是正交矩阵时，$\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\cdots,\sigma\varepsilon_n$ 也是V的标准正交基， 再由1即得 σ 为正交变换.

3. 内积空间V的正交变换是V到自身的同构映射.

因而有，

1）正交变换的逆变换是正交变换；

（由同构的对称性可得之）

2）正交变换的乘积还是正交变换.

（由同构的传递性可得之）

4. n维内积空间中正交变换的分类：

设 n 维内积空间V中的线性变换 σ 在标准正交基

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵是正交矩阵A，则 $|A|=\pm 1.$

1）如果 $|A|=1$，则称 σ 为**第一类的（旋转）；**

2）如果 $|A|=-1$，则称 σ 为**第二类的.**

例、在内积空间中任取一组标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$,

定义线性变换 σ 为:

$$\sigma\varepsilon_1 = -\varepsilon_1$$

$$\sigma\varepsilon_i = \varepsilon_i, \qquad i = 2, 3, \cdots n.$$

则 σ 为第二类的正交变换，也称之为**镜面反射**.

三、欧氏空间的同构

定义： 实数域R上内积空间V与V'称为**同构**，

如果由V到V'有一个1－1对应σ ，适合

1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),$

2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha),$ $\quad\forall\alpha,\beta\in V,\quad\forall k\in R$

3) $\big(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\big)=(\alpha,\beta),$

这样的映射σ称为内积空间V到V'的**同构映射**.

四、同构的基本性质

1、若 σ 是内积空间V到V'的同构映射，则 σ 也是线性空间V到V'同构映射.

2、如果 σ 是有限维内积空间V到V'的同构映射，则 $\dim V = \dim V'$.

3、任一 n 维内积空间V必与 R^n 同构.

证：设V为n维欧氏空间， $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为V的一组标准正交基，在这组基下，V中每个向量 α 可表成

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n, \qquad x_i \in R$$

作对应 $\sigma : V \to R^n$， $\sigma(\alpha) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

易证 σ 是V到 R^n 的 $1-1$ 对应.

且 σ 满足同构定义中条件1）、2）、3），

故 σ 为由V到 R^n 的同构映射，从而V与 R^n 同构.

4、同构作为欧氏空间之间的关系具有：

(i) 反身性；(ii) 对称性；(iii) 传递性.

① 单位变换 I_V 是欧氏空间V到自身的同构映射.

② 若欧氏空间V到V'的同构映射是 σ，则 σ^{-1} 是欧氏空间V'到V的同构映射.

事实上，σ 首先是线性空间的同构映射.

其次，对 $\forall \alpha, \beta \in V'$，有

$$(\alpha, \beta) = \left(\sigma(\sigma^{-1}(\alpha)), \sigma(\sigma^{-1}(\beta))\right) = \left(\sigma^{-1}(\alpha), \sigma^{-1}(\beta)\right)$$

$\therefore$ σ^{-1} 为欧氏空间V'到V的同构映射.

③ 若σ,τ分别是欧氏空间V到V'、V'到V''的同构映射，

则$\tau\sigma$是欧氏空间V到V''的同构映射.

事实上，首先，$\tau\sigma$ 是线性空间V到V''的同构映射.

其次，对 $\forall\alpha,\beta\in V$，有

$$\big(\tau\sigma(\alpha),\tau\sigma(\beta)\big)=\big(\tau(\sigma(\alpha)),\tau(\sigma(\beta))\big)$$

$$=\big(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\big)$$

$$=(\alpha,\beta)$$

$\therefore$ $\tau\sigma$ 为欧氏空间V到V''的同构映射.

5、两个有限维欧氏空间V与V'同构

$\Longleftrightarrow \dim V = \dim V'.$