答案未经验证，如有误请同学指出

第五单元　定积分测试题详细解答

一、填空题

1、$\underline{\frac{3}{2}\pi}$　$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2 x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\frac{1-\cos 2x}{2})dx=\frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos 2xdx$

$=\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{4}\sin 2x|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}=\frac{3}{2}\pi$。

2、$\underline{\frac{2}{3}(5^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}})}$　$\int_1^4\sqrt{1+x}dx=\int_1^4(1+x)^{\frac{1}{2}}d(1+x)=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(1+x)^{\frac{3}{2}}|_1^4=\frac{2}{3}(5^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}})$。

3、$\underline{\frac{5\sqrt{2}}{12}+\frac{2}{3}}$　$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2 x)d\cos x=\frac{1}{3}\cos^3 x|_0^{\frac{\pi}{4}}-\cos x|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{12}+\frac{2}{3}$。

4、$\underline{\frac{\pi^2}{8}}$　$\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1\arcsin xd(\arcsin x)=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2|_0^1=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2=\frac{\pi^2}{8}$。

5、$\underline{\frac{2}{3}}$　$\int_0^2(1-x)^2dx=\int_0^2(x^2-2x+1)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)_0^2=\frac{2}{3}$

6、$2x\cos x^2 f(\sin x^2)-3f(3x)$

7、$\underline{\frac{1}{4}}$　两边求导：$2xf(x^2-2)=1$，令　$x=2$ 得 $f(2)=\frac{1}{4}$

8、$\underline{2}$　$\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{e^3}(1+\ln x)^{-\frac{1}{2}}d(1+\ln x)=2\sqrt{1+\ln x}\Big|_1^{e^3}=2$

9、$\underline{\frac{1}{2}\ln 2}$　$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1})dx=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^{+\infty}$

$=\lim_{x\to+\infty}(\ln x-\ln\sqrt{x^2+1})-0+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2$

10、$\underline{0}$　$\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{2\sin x\cdot(x^4+3x^2+1)}{1+x^2}+\cos x]dx=2\int_0^{\pi}\cos xdx=2\sin x\Big|_0^{\pi}=0$

11、$\underline{f(x)+C}$　，　$\underline{\frac{1}{2}[f(2b)-f(2a)]}$

$\int f'(x)dx=f(x)+C$

$$\int_a^b f'(2x)dx \underline{\underline{令u=2x}} \int_{2a}^{2b} f(u)\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}f(u)\Big|_{2a}^{2b} = \frac{1}{2}[f(2b)-f(2a)]$$

12、$\underline{4(\sqrt{2}-1)}$ 原式 $=\int_0^{\pi}\sqrt{(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})^2}dx = \int_0^{\pi}|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}|dx$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})dx$$

$$=2[(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})\Big|_0^{\pi/2}-(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})\Big|_{\pi/2}^{\pi}]$$

$$=4(\sqrt{2}-1)$$

二、选择题

1、选（C）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$$

2、选（A）$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\sin(t-x)dt=\frac{d}{dx}\left[-\cos(t-x)\right]_0^x=-\sin x$

3、选（C）$\int_{-2}^{2}(|x|+x)e^{|x|}dx=\int_{-2}^{0}0dx+\int_0^2 2xe^x dx=2xe^x\Big|_0^2-2e^x\Big|_0^2=2e^2+2$

4、选（D）$n\int_0^1 xf''(2x)dx$ 令 $2x=t$ 得 $n\int_0^2\frac{t}{2}f''(t)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{n}{4}\int_0^2 tf''(t)dt$

$\therefore n=4$

5、选（B）两边求导 $f'(x)=2f(x)$

6、选（D） 因为 $M=0, N=0+2\int_0^{\pi/2}\cos^2 xdx>0$，$P=0-2\int_0^{\pi/2}\cos^2 xdx<0$

7、选（B） $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}\underline{\underline{\frac{0}{0}}}\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos(t^2)dt}{x^{10}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2-2\cos x^4}{10x^8}=\frac{\frac{x^8}{2}}{5x^8}=\frac{1}{10}$

8、选（A） $F'(x)=f(e^{-x})(e^{-x})'-f(x^2)(x^2)'=-e^{-x}f(e^{-x})-2xf(x^2)$。

9、选（B） 因为 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt$，则有

$$F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(t)}dt<0，\quad F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$$

又 $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$. 可知 $F(x)$ 是严格增的，由介值定理知存在唯一的一个 ξ，

使 $F(\xi)=0$。

10、选（A）首先通过积分换元，把被积函数中的参变量 x “解脱”出来：

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)d(x^2-t^2)\overset{x^2-t^2=u}{=\!=\!=\!=\!=}-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)du=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du$$

由此， 原式$=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(u)du=xf(x^2)$。

11、选（A）设 $\int_0^1 f(t)dt=a$，则有恒等式 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$。为求常数 a，两边取由 0 到 1 的积分得 $a=\int_0^1 xdx+2a$，解得 $a=-\int_0^1 xdx=-\frac{1}{2}$。由此，$f(x)=x-1$。

12、选（A） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2}{1}=1$

三、计算解答

1、计算下列各题

（1）解：$\int_0^2 x^3\sqrt{4-x^2}dx$ 令 $x=2\sin t$ 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^3 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos tdt=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x-1)\cos^2 td\cos t$$

$$=32(\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 t)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{64}{15}$$

（2）解：$\int_{-1}^4 x\sqrt{|x|}dx=\int_{-1}^1 x\sqrt{|x|}dx+\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_1^4=\frac{62}{5}$

（3）解：$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\arcsin xd\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

（4）解：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos^2 x)^2dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2+2x\cos^2 x+\cos^4 x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2+\cos^4 x)dx$

$$=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1+\cos 2x}{2})^2dx=\frac{\pi^3}{12}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$$

$$=\frac{\pi^3}{12}+\frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{8}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{12}+\frac{3\pi}{8}$$

（5）解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \sin^2 t dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$。

（6）解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2(1+x)}=\dfrac{1}{2}$。

2、解：$\lim\limits_{x\to12}\dfrac{\int_{12}^x[\int_t^{12} tf(u)du]dt}{(12-x)^3}=\lim\limits_{x\to12}\dfrac{x\int_x^{12} f(u)du}{-3(12-x)^2}=\lim\limits_{x\to12}\dfrac{x\int_{12}^x f(u)du}{3(12-x)^2}$

$=\lim\limits_{x\to12}\dfrac{\int_{12}^x f(u)du+xf(x)}{-6(12-x)}=\lim\limits_{x\to12}\dfrac{f(x)+f(x)+xf'(x)}{6}$

$=\dfrac{12\times997}{6}=1994$

3、解：$\because f(\dfrac{1}{x})=\int_1^{\frac{1}{x}}\dfrac{\ln t}{1+t}dt \xlongequal{t=\frac{1}{u}} \int_1^x \dfrac{\ln\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}\cdot(-\dfrac{1}{u^2})du$

$=\int_1^x \dfrac{\ln u}{u^2+u}du=\int_1^x \dfrac{\ln u}{u(u+1)}du=\int_1^x \dfrac{\ln t}{t(t+1)}dt$

$\therefore f(x)+f(\dfrac{1}{x})=\int_1^x \dfrac{\ln t}{1+t}dt+\int_1^x \dfrac{\ln t}{t(t+1)}dt=\int_1^x[\dfrac{\ln t}{1+t}+\dfrac{\ln t}{t(t+1)}]dt$

$=\int_1^x \dfrac{\ln t}{t}dt=\dfrac{1}{2}\ln^2 t\,|_1^x=\dfrac{1}{2}\ln^2 x$

4、解：$\because \int_0^\pi \sqrt{1-\cos2x}dx=\int_0^\pi \sqrt{2\sin^2 x}dx=\sqrt{2}\int_0^\pi \sin x dx=-\sqrt{2}\cos x\,|_0^\pi=2\sqrt{2}$

令 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+2\sqrt{2}$ 则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-x}{ex}$

令 $f'(x)=0\Rightarrow$ 驻点 $x=e$

在 $(0,e)$ 内，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加. 在 $(e,+\infty)$ 内 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少

又 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x-\dfrac{x}{e})=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-\dfrac{x}{e})=-\infty$

而 $f(e)=2\sqrt{2}>0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,e)$ 内有且仅有一个零点，在 $(e,+\infty)$ 内有且仅有一个零点

即 方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_0^\pi\sqrt{1-\cos2x}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根

5、解：证：$|\int_0^a f(x)dx|=|\int_0^a[f(0)+f'(\xi)x]dx|$ 其中 $\xi\in(0,x)$

$$=\left|\int_0^a f'(\xi)xdx\right|=\left|\frac{x^2}{2}f'(\xi)\Big|_0^a\right|=\left|\frac{a^2}{2}f'(\xi)\right|\le\frac{Ma^2}{2}$$

6、解：$\because h(x)=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$

$\therefore h'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=g(x)$

$\therefore \int_0^x h'(x)dx=\int_0^x g(x)dx$

即 $h(x)\big|_0^x=\int_0^x g(u)du \qquad \Rightarrow \qquad h(x)-h(0)=\int_0^x g(u)du$

而 $h(0)=0 \quad \therefore h(x)=\int_0^x g(u)du \quad h''(x)=g'(x)=f(x)$