第十四讲 线性空间的同构

一、同构映射的定义

二、同构的有关结论

引入

我们知道，在数域P上的n维线性空间V中取定一组基后，V中每一个向量α有唯一确定的坐标$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，向量的坐标是P上的n元数组，因此属于P^n. 这样一来，取定了V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$对于V中每一个向量$\alpha$，令$\alpha$在这组基下的坐标$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与$\alpha$对应，就得到V到$P^n$的一个单射

$$\sigma: V \to P^n, \alpha \mapsto (a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

反过来，对于P^n中的任一元素$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ $\alpha=\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_n a_n$ 是V中唯一确定的元素，并且$\sigma(\alpha)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$， 即$\sigma$也是满射.

因此，σ是V到P^n的一一对应.

这个对应的重要必性表现在它与运算的关系上.

任取 $\alpha,\beta \in V$, 设

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n,\quad \beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_n\varepsilon_n,$$

则 $\sigma(\alpha) = (a_1, a_2 \cdots, a_n),\quad \sigma(\beta) = (b_1, b_2, \cdots, b_n),$

从而 $\sigma(\alpha+\beta) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2 \cdots, a_n + b_n)$

$$= (a_1, a_2 \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$$

$$\sigma(k\alpha) = (ka_1, ka_2 \cdots, ka_n) \qquad \forall k \in P$$

$$= k(a_1, a_2 \cdots, a_n) = k\sigma(\alpha),$$

这就是说，向量用坐标表示后，它们的运算可以归结为它们的坐标的运算.

一、同构映射的定义

设V, V'都是数域P上的线性空间，如果映射

σ: $V \to V'$ 具有以下性质：

i) σ为双射

ii) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta), \quad \forall \alpha,\beta \in V$

iii) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha), \quad \forall k \in P, \forall \alpha \in V$

则称σ是V到V'的一个**同构映射**，并称线性空间

V与V'**同构**，记作 $V \cong V'$.

例1、V为数域P上的n维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为V的一组基，则前面V到P^n的一一对应

$$\sigma: V \to P^n,$$

$$\alpha \mapsto (a_1,a_2,\cdots,a_n) \qquad \forall \alpha \in V$$

这里$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为α在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$基下的坐标，

就是一个V到P^n的同构映射，所以 $V \cong P^n$.

二、同构的有关结论

1、数域P上任一n维线性空间都与P^n同构.

2、设V, V'是数域P上的线性空间，σ是V到V'的同构映射，则有

1） $\sigma(0)=0,\ \sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha).$

2） $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)$

$$=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r),$$

$$\alpha_i\in V,\quad k_i\in P,\quad i=1,2,\cdots,r.$$

3）V中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关（线性无关）

的充要条件是它们的象 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$

线性相关（线性无关）.

4） $\dim V=\dim V'$.

5）σ：$V\to V'$ 的逆映射 σ^{-1} 为 V'到V 的同构映射.

6） 若W是V的子空间，则W在 σ 下的象集

$$\sigma(W)=\{\sigma(\alpha)\mid\alpha\in W\}$$

是的 V'子空间，且 $\dim W=\dim\sigma(W)$.

证： 1）在同构映射定义的条件iii) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$

中分别取 $k=0$与$k=-1$, 即得

$$\sigma(0)=0,\ \sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$$

2）这是同构映射定义中条件ii)与iii)结合的结果.

3）因为由 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$

可得 $k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)=0$

反过来，由 $k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)=0.$

可得 $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)=0.$

而 σ 是一一对应，只有 $\sigma(0)=0.$

所以可得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$

因此，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关（线性无关）

$\Leftrightarrow \sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$ 线性相关（线性无关）.

4）设 $\dim V=n$，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为V 中任意一组基.

由2）3）知，$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 为 σ 的一组基.

所以 $\dim V'=n=\dim V.$

5）首先 $\sigma^{-1}: V' \to V$ 是1－1对应，并且

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = I_{V'}, \quad \sigma^{-1} \circ \sigma = I_V, \quad \text{I为恒等变换.}$$

任取 $\alpha', \beta' \in V'$， 由于σ 是同构映射，有

$$\sigma(\sigma^{-1}(\alpha'+\beta')) = \sigma \circ \sigma^{-1}(\alpha'+\beta') = \alpha'+\beta'$$

$$= \sigma \circ \sigma^{-1}(\alpha') + \sigma \circ \sigma^{-1}(\beta') = \sigma(\sigma^{-1}(\alpha')) + \sigma(\sigma^{-1}(\beta'))$$

$$= \sigma(\sigma^{-1}(\alpha') + \sigma^{-1}(\beta'))$$

再由σ是单射，有 $\sigma^{-1}(\alpha'+\beta') = \sigma^{-1}(\alpha') + \sigma^{-1}(\beta')$

同理，有 $\sigma^{-1}(k\alpha') = k\sigma^{-1}(\alpha'), \quad \forall \alpha' \in V', \forall k \in P$

所以, σ^{-1}为V'到V的同构映射.

6）首先， $\sigma(W)\subseteq\sigma(V)=V'$

且Q $0=\sigma(0)\in\sigma(W)$， $\therefore\ \sigma(W)\neq\varnothing$

其次，对 $\forall\alpha',\beta'\in\sigma(W)$，有$W$中的向量 α,β

使 $\sigma(\alpha)=\alpha',\sigma(\beta)=\beta'$.

于是有 $\alpha'+\beta'=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)=\sigma(\alpha+\beta)$

$$k\alpha'=k\sigma(\alpha)=\sigma(k\alpha),\ \forall k\in P$$

由于W为子空间，所以 $\alpha+\beta\in W$，$k\alpha\in W$.

从而有 $\alpha'+\beta'\in\sigma(W)$，$k\alpha'\in\sigma(W)$.

所以 $\sigma(W)$ 是 V' 的子空间.

显然，σ 也为W到 $\sigma(W)$ 的同构映射，即

$$W \cong \sigma(W)$$

故 $\dim W = \dim \sigma(W)$.

注

由2可知，同构映射保持零元、负元、线性组合及线性相关性，并且同构映射把子空间映成子空间.

3、两个同构映射的乘积还是同构映射.

证：设 σ: $V \to V'$，$\tau: V' \to V''$ 为线性空间的同构映射，则乘积 $\tau \circ \sigma$ 是 V 到 V'' 的1－1对应.

任取 $\alpha, \beta \in V$，$k \in P$，有

$$\tau \circ \sigma(\alpha+\beta) = \tau(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta))$$

$$= \tau(\sigma(\alpha)) + \tau(\sigma(\beta)) = \tau \circ \sigma(\alpha) + \tau \circ \sigma(\beta)$$

$$\tau \circ \sigma(k\alpha) = \tau(\sigma(k\alpha)) = \tau(k\sigma(\alpha))$$

$$= k\tau(\sigma(\alpha)) = k\tau \circ \sigma(\alpha)$$

所以，乘积 $\tau \circ \sigma$ 是 V 到 V'' 的同构映射.

注

同构关系具有：

反身性： $V \overset{I_V}{\cong} V$

对称性： $V \overset{\sigma}{\cong} V' \Rightarrow V' \overset{\sigma^{-1}}{\cong} V$

传递性：$V \overset{\sigma}{\cong} V',\ V' \overset{\tau}{\cong} V'' \Rightarrow V \overset{\tau\circ\sigma}{\cong} V''$

4、数域P上的两个有限维线性空间 V_1, V_2同构

$$\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2.$$

证： "$\Rightarrow$" 若$V_1 \cong V_2$,由性质2之4）即得

$$\dim V_1 = \dim V_2.$$

"$\Leftarrow$" 若 $\dim V_1 = \dim V_2$,

由性质1，有 $V_1 \cong P^n$, $V_2 \cong P^n$

$$\therefore V_1 \cong V_2.$$

例2、把复数域看成实数域R上的线性空间，

证明： $C \cong R^2$

证：证维数相等.

首先，$\forall x \in C$， x 可表成 $x = a1 + bi$， $a, b \in R$

其次，若 $a1+bi=0$，则 $a=b=0$.

所以，1，i 为C的一组基， $\dim C = 2$.

又， $\dim R^2 = 2$

所以， $\dim C = \dim R^2$. 故， $V_1 \cong V_2$.

例3、在 P^4 中，设

$$\alpha_1 = (1,2,1,0),\ \ \alpha_2 = (-1,1,1,1)$$

$$\beta_1 = (2,-1,0,1),\ \ \beta_2 = (1,-1,3,7)$$

1） 求 $L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$ 的维数的与一组基；

2） 求 $L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)$ 的维数的与一组基.

解：1) 任取 $\gamma \in L(\alpha_1,\alpha_2) \cap L(\beta_1,\beta_2)$

设 $\gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2$,

则有 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 - y_1\beta_1 - y_2\beta_2 = 0$,

即 $$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2y_1 - y_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3y_2 = 0 \\ x_1 - y_1 - 7y_2 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

解 (*) 得 $$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 4t \\ y_1 = -3t \\ y_2 = t \end{cases}$$ （t 为任意数）

$$\therefore \quad \gamma = t(-\alpha_1 + 4\alpha_2) = t(\beta_2 - 3\beta_1)$$

令 t=1，则得 $L(\alpha_1, \alpha_2) \cap L(\beta_1, \beta_2)$ 的一组基

$$\gamma = -\alpha_1 + 4\alpha_2 = (-5, 2, 3, 4)$$

$\therefore \quad L(\alpha_1, \alpha_2) \cap L(\beta_1, \beta_2) = L(\gamma)$ 为一维的.

2) $L(\alpha_1, \alpha_2) + L(\beta_1, \beta_2) = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$

对以 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 为列向量的矩阵A作初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\2&1&-1&-1\\1&1&0&3\\0&1&1&7\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&3&-5&-3\\0&2&-2&2\\0&1&1&7\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&0&-2&-6\\0&1&-1&1\\0&0&2&6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&1&-1&1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

由B知，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$为 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 的一个极大无关组.

$\therefore\ L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1)$ 为3维的，

$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 为其一组基.