第八讲 有理系数多项式

一、本原多项式

二、整系数多项式的因式分解

问题的引入

1. 由因式分解定理，作为一个特殊情形：

对 $\forall f(x) \in Q[x], \partial\left(f(x)\right) \geq 1$, 则 $f(x)$ 可唯一分解成不可约的有理系数多项式的积.

但是，如何作出它的分解式却很复杂，没有一个一般的方法.

2. 我们知道，在C上只有一次多项式才是不可约多项式；

在 R 上，不可约多项式只有一次多项式与某些二次多项式；

但在Q上有任意次数的不可约多项式．如

$$x^n - 2,\quad \forall n \in Z^+.$$

如何判断Q上多项式的不可约性呢?

3. 有理系数多项式可归结为整系数多项式的问题.

这是因为任一有理数可表成两个整数的商.

事实上，设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$,

则可选取适当整数 c，使 $cf(x)$ 为整系数多项式.

若 $cf(x)$ 的各项系数有公因子，就可以提出来，得

$cf(x)=dg(x)$, 也即 $f(x)=\dfrac{d}{c}g(x)$,

其中 $g(x)$ 是整系数多项式，且各项系数没有异于

± 1 的公因子.

一、本原多项式

定义1.4.8（本原多项式）

设 $g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0\neq 0$,

$b_i\in Z$， $i=0,1,2,\cdots,n$. 若 $b_n,b_{n-1},\cdots,b_1,b_0$ 没有

异于 ± 1 的公因子，即 $b_n,b_{n-1},\cdots,b_1,b_0$ 是互素的，

则称 $g(x)$ 为**本原多项式**.

有关性质

1. $\forall f(x) \in Q[x]$, $\exists r \in Q$, 使 $f(x) = rg(x)$, 其中 $g(x)$为本原多项式.

（除了相差一个正负号外，这种表示法是唯一的）.

2. Gauss引理

定理14.10 两个本原多项式的积仍是本原多项式.

证: 设 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$

$$g(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$$

是两个本原多项式.

$$h(x)=f(x)g(x)=d_{n+m}x^{n+m}+d_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots+d_0$$

反证法. 若 $h(x)$不是本原的，则存在素数 p,

$$p\,|\,d_r,\quad r=0,1,\cdots,n+m.$$

又 $f(x)$是本原多项式，所以 p不能整除 $f(x)$的每一个系数.

令 a_i 为 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 中第一个不能被 p 整除的数，即

$$p\mid a_1,\ \cdots,\ p\mid a_{i-1},\ p\nmid a_i.$$

同理, $g(x)$ 本原，令 b_j 为 $b_0,\cdots,b_m$ 中第一个不能被 p 整除的数，即 $p\mid b_0, p\mid b_1,\cdots, p\mid b_{j-1}, p\nmid b_j.$

又 $d_{i+j}=a_ib_j+a_{i+1}b_{j-1}+\cdots,$

在这里 $p\mid d_{i+j},\ p\nmid a_ib_j,\ p\mid a_{i+1}b_{j-1},\ \cdots$ 矛盾.

故 $h(x)$是本原的.

二、整系数多项式的因式分解

定理1.4.11 若一非零的整系数多项式可分解成两个次数较低的有理系数多项式，则它一定可分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

证： 设整系数多项式 $f(x)$ 有分解式

$$f(x)=g(x)h(x)$$

其中 $g(x),h(x)\in Q[x]$, 且 $\partial\big(g(x)\big),\partial\big(h(x)\big)<\partial\big(f(x)\big)$.

令 $f(x)=af_1(x),\ g(x)=rg_1(x),\ h(x)=sh_1(x)$

这里，$f_1(x),g_1(x),h_1(x)$ 皆为本原多项式，$a\in Z$,

$r,s\in Q$. 于是 $af_1(x)=rsg_1(x)h_1(x)$.

由定理10，$g_1(x)h_1(x)$ 本原， 从而有 $a=\pm rs$,

即 $rs\in Z$. $\therefore f(x)=\big(rsg_1(x)\big)h_1(x)$. 得证.

推论1.4.12

设 $f(x),g(x)$ 是整系数多项式，且 $g(x)$是本原的，若 $f(x)=g(x)h(x)$， $h(x)\in Q[x]$， 则 $h(x)$ 必为整系数多项式.

证： 令 $f(x)=af_1(x),\quad h(x)=ch_1(x),$

$a\in Z, c\in Q,\qquad f_1(x),h_1(x)$本原，

于是有，

$$af_1(x)=g(x)ch_1(x)=cg(x)h_1(x)$$

$\Rightarrow c=\pm a,\quad$ 即 $c\in Z.$

$\therefore\quad h(x)=ch_1(x)$为整系数多项式.

定理1.4.13 设$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一个整系数多项式，而 $\frac{r}{s}$ 是它的一个有理根，其中 r,s 是互素的，则必有

$$s \mid a_n,\quad r \mid a_0.$$

证： $\because \dfrac{r}{s}$ 是 $f(x)$ 的有理根，

$\therefore$ 在有理数域上，$(x-\dfrac{r}{s}) \mid f(x)$，

从而 $(sx-r) \mid f(x)$.

又 r,s 互素，$\therefore sx-r$ 本原．由上推论，有

$$f(x)=(sx-r)(b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0)$$

$b_i \in Z$， $i=0,1,\cdots,n-1$. 比较两端系数，得

$a_n = sb_{n-1}$， $a_0=-rb_0$. 所以，$s \mid a_n$， $r \mid a$.

注意

定理12是判断整系数多项式有理根的一个必要条件，而非充分条件.

例1 求方程 $2x^4-x^3+2x-3=0$ 的有理根.

解: 可能有理根为 $\pm 1,\ \pm 3,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},$

用综合除法可知，只有1为根.

例2 证明：$f(x)=x^3-5x+1$ 在 Q 上不可约.

证： 若 $f(x)$ 可约，则 $f(x)$ 至少有一个一次因式，

也即有一个有理根.

但 $f(x)$ 的有理根只可能是 ± 1，而

$f(1)=-3$，$f(-1)=5$. 矛盾.

所以 $f(x)$ 不可约.

定理1.4.16　艾森斯坦因Eisenstein判别法

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,

是一个整系数多项式，若有一个素数 p，使得

1°　$p \nmid a_n$

2°　$p \mid a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$

3°　$p^2 \nmid a_0$

则 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的.

证： 若 $f(x)$ 在 Q 上可约，由定理11，

$f(x)$ 可分解为两次数较低的整系数多项式积

$$f(x)=(b_l x^l+b_{l-1}x^{l-1}+\cdots+b_0)(c_m x^m+c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_0)$$

$$b_i, c_j\in Z,\quad l,m<n,\quad l+m=n$$

$\therefore\quad a_n=b_l c_m,\quad a_0=b_0 c_0.$

$\because\quad p\mid a_0,\quad\therefore\quad p\mid b_0$ 或 $p\mid c_0$,

又 $p^2\nmid a_0,\quad\therefore\quad p$ 不能同时整除 b_0, c_0.

不妨设 $p\mid b_0$ 但 $p\nmid c_0$.

另一方面，$p \nmid a_n$. $\therefore$ $p \nmid b_l$，$p \nmid c_m$.

假设 $b_0, b_1, \cdots, b_l$ 中第一个不能被 p 整除的数为 b_k,

比较两端 x^k 的系数，得

$$a_k = b_k c_0 + b_{k-1} c_1 + \cdots + b_0 c_k$$

上式中 $a_k, b_{k-1}, \cdots, b_0$ 皆能被 p 整除,

$\therefore p \mid b_k c_0 \Rightarrow p \mid b_k$ 或 $p \mid c_0$. 矛盾.

故 $f(x)$不可约.

例3 证明：$x^n + 2$ 在 Q 上不可约.

证：（令 $p = 2$ 即可）.

(可见存在任意次数的不可约有理系数多项式)

例4 判断 $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^p}{p!}$,

（p 为素数）在 Q 上是否可约.

解： 令 $g(x)=p!f(x)$，即

$$g(x)=p!+p!x+\frac{p!}{2}x^2+\cdots+\frac{p!}{(p-1)!}x^{p-1}+x^p,$$

则 $g(x)$为整系数多项式.

$\because\ p\nmid 1,\quad p\mid\frac{p!}{(p-1)!},\frac{p!}{(p-2)!},\cdots,p!,$

但 $p^2\nmid p!,$

$\therefore g(x)$ 在 Q上不可约， 从而 $f(x)$在Q上不可约.

注意

① **Eisenstein判别法是判断不可约的充分条件，而非必要条件．也就是说，如果一个整系数多项式不满足Eisenstein判别法条件，则它可能是可约的，也可能是不可约的．**

② **有些整系数多项式 $f(x)$ 不能直接用Eisenstein判别法来判断是其是否可约，此时可考虑用适当的代换 $ax+b\,(a,b\in Z, a\neq 0)$，使 $f(ay+b)=g(y)$ 满足Eisenstein判别法条件，从而来判定原多项式 $f(x)$ 不可约．**

命题

有理系数多项式 $f(x)$在有理系数上不可约

$\Longleftrightarrow$ 对$\forall a,b\in Q\ (a\neq 0)$, 多项式 $g(x)=f(ax+b)$

在有理数域上不可约.

例5 证明：$f(x)=x^2+1$ 在 Q 上不可约.

证： 作变换 $x=y+1$, 则

$$f(x)=y^2+2y+2,$$

取 $p=2$, 由Eisenstein判别法知，

y^2+2y+2 在 Q 上不可约，

所以 $f(x)$ 在 Q 上不可约.

说明：

对于许多 Q 上的多项式来说，作适当线性代换后再用Eisenstein判别法判定它是否可约是一个较好的办法，但未必总是凑效的．也就是说，存在 Q上的多项式 $f(x)$, 无论作怎样的代换 $x=ay+b$, 都不能使 $f(ay+b)=g(y)$ 满足爱森斯坦因判别法的条件，即找不到相应的素数 p．如，$f(x)=x^3+x+1.$

练习

P 为素数， $f(x)=x^p+px+1$， 证明：

$f(x)$ 在 Q 上不可约.