练习二十 综合题（一）

一、从2名一年级学生，3名二年级学生，4名三年级学生，1名四年级（毕业班）学生组成的候选人中，拟挑四名学生组成科技小组。试求下列事件的概率：（1）科技小组中各年级学生都有；（2）科技小组中除毕业班外各年级学生都有。

二、从n双鞋子中任取$2r\ (2r<n)$只，求下列事件的概率：（1）没有成对的鞋子；（2）只有一对鞋子；（3）恰有两对鞋子；（4）有r对鞋子。

三、在一张打方格的纸上投一枚直径为1的硬币，方格要多小才能使硬币与线不相交的概率小于1%？

四、飞机有三个不同的部分遭到射击，在第一部分被击中一弹，或第二部分被击中两弹，或第三部分被击中三弹，飞机才能被击落，其命中率与每一部分的面积成正比，设三部分的面积之比为$1:2:7$，若已击中两弹，求飞机被击落的概率。

五、某大学招收新生800，按高考成绩从高分到低分依次录取，设报考该大学的考生共3000人，且考试成绩服从正态分布，已知考生成绩在600分以上的有200人，500分以下的有2075人，问该大学的录取分数线是多少？

六、盒中装有分别标有数字1，2，3，4，5的五个大小相同的球，现从中任取两个，用X表示所取球中最大的数字，求X的分布律。

七、设二维随机变量(X,Y)在区域$D:0<x<1,|y|<x$内服从均匀分布，求关于X的边缘概率密度及随机变量$Z=2X+1$的方差$D(Z)$。

八、设随机变量X与Y相互独立，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，Y服从$(-\pi,\pi)$上的均匀分布，求$Z=X+Y$的概率密度（结果用标准正态分布的分布函数$\Phi(x)$表示）。

九、设连续型随机变量X的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}k x^{a}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}\quad (k>0,a>0)$$

若$E(X)=0.75$，求k和a的值。

十、设随机变量X的概率密度为：$f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty<x<+\infty$

1）求：$E(X)$，$D(X)$；

2）问X与$|X|$是否相关，是否相互独立？为什么？

十一、设随机变量$X\sim N(1,3^2)$，$Y\sim N(0,4^2)$，且X与Y的相关系数$\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，设$Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$，

1）求：$E(Z)$，$D(Z)$；

2）问X与Z是否相关，是否相互独立？为什么？

十二、从1至9这9个数字中，有放回地取3次，每次任取1个，求所取的3个数之积能被10整除的概率。（提示：用对偶律）

十三、设某班车起点站上客人数X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为$p\ (0<p<1)$，且中途下车与否相互独立，以Y表示在中途下车的人数，求：

1）在发车时有n个乘客的条件下，中途有$m\ (0 \le m \le n)$人下车的概率；

2）二维随机变量(X,Y)的分布律。

十四、某流水生产线上每个产品不合格的概率为$p\ (0<p<1)$，各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格产品时即停机检修，设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为X，求$E(X)$，$D(X)$。

练习二十一　综合题（二）

一、某商店负责供应某地区1000人的商品，设某种商品在一段时间内每人需用一件的概率为0.6，并假设在这段时间内各人购买与否彼此无关。问商店应预备多少件这种商品，才能以99.7%的概率保证该商品不会脱销。

二、设总体X的分布律为：

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p\ (0<p<1, k=1,2,\cdots)$$

试求样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的联合分布律。

三、设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从中随机抽取$n=17$的样本，试求：

1）$P\{8.672\sigma^2 \le \sum_{i=1}^{17}(X_i-\mu)^2 \le 27.587\sigma^2\}$

2）$P\{5.812\sigma^2 \le \sum_{i=1}^{17}(X_i-\overline{X})^2 \le 28.845\sigma^2\}$

四、设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$为其一个样本，为$\overline{X}$样本均值，若统计量

$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$，求$E(Y)$。

五、设随机变量X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0<x<\pi\\ 0, & 其它\end{cases}$

对X独立地观察4次，用Y表示观察值大于$\frac{\pi}{3}$的次数，求$E(Y^2)$。

六、设随机变量X的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & 其它\end{cases}\quad(\theta>0)$$

求参数θ的极大似然估计量。

七、设T为电子元件失效时间(单位:小时)其概率密度为:

$$f(t)=\begin{cases}\beta e^{-\beta(t-t_0)}, & t>t_0>0, \beta>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

假定n个元件独立地试验,并已求得其失效时间分别为$T_1,T_2,\cdots,T_n$,

(1) 当t_0为已知时, 求β的极大似然估计量;

(2) 当β为已知时, 求t_0的极大似然估计量.

八、已知某种商标的线的平均抗断强度是275克，标准差是39.7克.现从某厂生产的这种线中抽取36根，测得其抗断强度的平均值$\overline{x}$=267.17克.假设该厂生产的线的抗断强度服从正态分布，且标准差没有改变，对于给定显著性水平α=0.05，问 (1) 能推断线的质量变差了吗?

(2) 若实际上该厂生产的线的平均抗断强度μ=260克，此时犯第二类错误的概率是多少?

九、设总体X的二阶矩存在，$X_1, X_2, \cdots X_n$为总体的一个样本，$\overline{X}$是样本均值，试证：$X_i-\overline{X}$与$X_j-\overline{X}$ $(i \neq j\ ,i,j=1,2,\cdots n)$的相关系数为$\rho=-\dfrac{1}{n-1}$。

综合题（一）参考答案

一、（1）0.1143 （2）0.3429　　二、（1）$\dfrac{C_n^{2r}\,2^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$ （2）$\dfrac{nC_{n-1}^{2r-2}\,2^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$ （3）$\dfrac{C_n^2 C_{n-2}^{2r-4}\,2^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}$ （4）$\dfrac{C_n^r}{C_{2n}^{2r}}$　　三、小于$\dfrac{10}{9}$　　四、0.23

五、512　　六、

X	2 3 4 5
P	0.1 0.2 0.3 0.4

七、$\dfrac{2}{9}$　　八、$\dfrac{1}{2\pi}[\Phi(\dfrac{z+\pi-\mu}{\sigma})-\Phi(\dfrac{z-\pi-\mu}{\sigma})]$　　九、$k=3$，$\alpha=2$　　十、1）$E(X)=0,\ D(X)=2$　　2）不相关，不相互独立　　十一、1）$E(Z)=\dfrac{1}{3},\ D(Z)=3$　　2）不相关，相互独立

十二、0.214　　十三、1）$C_n^m p^m (1-p)^{n-m}\ (0 \le m \le n,\ n=0,1,2,\cdots)$　　2）$C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\ (0 \le m \le n,\ n=0,1,2,\cdots)$　　十四、$\dfrac{1}{p}$，$\dfrac{1-p}{p^2}$

综合题（二）参考答案

一、643　　二、$P\{X_1=x_1, X_2=x_2, \cdots, X_n=x_n\}=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}$ $(0<p<1,\ x_i=1,2,\cdots)$　　三、1）0.90　　2）0.965　　四、$2(n-1)\sigma^2$　　五、5　　六、$\hat{\theta}=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$　　七、1）$\hat{\beta}=\dfrac{1}{\overline{T}-t_0}$　　2）$\hat{t}_0=\min\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$　　八、1）不能　　2）0.2676