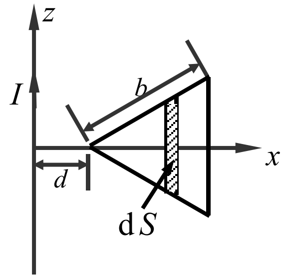
第五章习题及解答

5.1 真空中直线长电流 I 的磁场中有一等边三角形回路，如题 5.1 图所示，求三角形回路内的磁通。

解 根据安培环路定理，得到长直导线的电流 I 产生的磁场

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_{\phi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



题 5.1 图

穿过三角形回路面积的磁通为

$$\Psi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_d^{d+\sqrt{3}b/2}\frac{2}{x}\Big[\int_0^z \mathrm{d}z\Big]\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 I}{\pi}\int_d^{d+\sqrt{3}b/2}\frac{z}{x}\mathrm{d}x$$

由题 5.1 图可知，$z=(x-d)\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{x-d}{\sqrt{3}}$，故得到

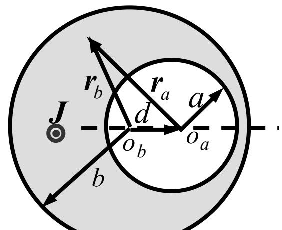
$$\Psi=\frac{\mu_0 I}{\sqrt{3}\pi}\int_d^{d+\sqrt{3}b/2}\frac{x-d}{x}\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 I}{\pi}\Big[\frac{b}{2}-\frac{d}{\sqrt{3}}\ln\Big(1+\frac{\sqrt{3}b}{2d}\Big)\Big]$$

5.2 通过电流密度为 $\boldsymbol{J}$ 的均匀电流的长圆柱导体中有一平行的圆柱形空腔，如题 5.2 图所示。计算各部分的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，并证明腔内的磁场是均匀的。

解 将空腔中视为同时存在 $\boldsymbol{J}$ 和 $-\boldsymbol{J}$ 的两种电流密度，这样可将原来的电流分布分解为两个均匀的电流分布：一个电流密度为 $\boldsymbol{J}$、均匀分布在半径为 b 的圆柱内，另一个电流密度为 $-\boldsymbol{J}$、均匀分布在半径为 a 的圆柱内。由安培环路定律，分别求出两个均匀分布电流的磁场，然后进行叠加即可得到圆柱内外的磁场。

由安培环路定律 $\oint_C \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I$，可得到电流密度为 $\boldsymbol{J}$、均匀分布在半径为 b 的圆柱内的电流产生的磁场为

$$\boldsymbol{B}_b=\begin{cases}\dfrac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}_b & r_b<b\\[2mm] \dfrac{\mu_0 b^2}{2}\dfrac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}_b}{r_b^2} & r_b>b\end{cases}$$



题 5.2 图

电流密度为 $-\boldsymbol{J}$、均匀分布在半径为 a 的圆柱内的电流产生的磁场为

$$\boldsymbol{B}_a=\begin{cases}-\dfrac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}_a & r_a<a\\[2mm] -\dfrac{\mu_0 a^2}{2}\dfrac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}_a}{r_a^2} & r_a>a\end{cases}$$

这里 $\boldsymbol{r}_a$ 和 $\boldsymbol{r}_b$ 分别是点 o_a 和 o_b 到场点 P 的位置矢量。

将 $\boldsymbol{B}_a$ 和 $\boldsymbol{B}_b$ 叠加，可得到空间各区域的磁场为

圆柱外：$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times\left(\frac{b^2}{r_b^2}\boldsymbol{r}_b-\frac{a^2}{r_a^2}\boldsymbol{r}_a\right)\qquad (r_b>b)$$

圆柱内的空腔外：$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times\left(\boldsymbol{r}_b-\frac{a^2}{r_a^2}\boldsymbol{r}_a\right)\qquad (r_b<b,\ r_a>a)$

空腔内：$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times(\boldsymbol{r}_b-\boldsymbol{r}_a)=\frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{d}\qquad (\ r_a<a)$

式中 $\boldsymbol{d}$ 是点和 o_b 到点 o_a 的位置矢量。由此可见，空腔内的磁场是均匀的。

5.3 下面的矢量函数中哪些可能是磁场？如果是，求其源变量 $\mathbf{J}$。

(1) $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_r ar$ ，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ （圆柱坐标）

(2) $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_x(-ay)+\boldsymbol{e}_y ax,\ \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$

(3) $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_x ax-\boldsymbol{e}_y ay,\ \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$

(4) $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\phi ar$ ，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ （球坐标系）

解 根据恒定磁场的基本性质，满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 的矢量函数才可能是磁场的场矢量，否则，不是磁场的场矢量。若是磁场的场矢量，则可由 $\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}$ 求出源分布。

（1）在圆柱坐标中 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ar^2)=2a\neq 0$

该矢量不是磁场的场矢量。

（2）$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{\partial}{\partial x}(-ay)+\frac{\partial}{\partial y}(ax)=0$$

该矢量是磁场的矢量，其源分布为 $\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -ay & ax & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_z 2a$

（3）$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{\partial}{\partial x}(ax)+\frac{\partial}{\partial y}(-ay)=0$$

该矢量是磁场的场矢量，其源分布为 $\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ ax & -ay & 0\end{vmatrix}=0$

（4） 在球坐标系中 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(ar)=0$

该矢量是磁场的场矢量，其源分布为

$$\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ 0 & 0 & ar^2\sin\theta\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_r a\,\mathrm{ctag}\,\theta-\boldsymbol{e}_\theta 2a$$

5.4 由矢量位的表示式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int_\tau\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}\tau'$ 证明磁感应强度的积分公式

$$B(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{J(r')\times R}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

并证明$\nabla\cdot B=0$

解：$$B(r)=\nabla\times A(r)=\nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\frac{J(r')}{R}\mathrm{d}\tau'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\nabla\times\frac{J(r')}{R}\mathrm{d}\tau'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau J(r')\times\nabla(\frac{1}{R})\mathrm{d}\tau'=$$

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau J(r')\times(-\frac{R}{R^3})\mathrm{d}\tau'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\frac{J(r')\times R}{R^3}\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot B=\nabla\cdot[\nabla\times A(r)]=0$$

5.5 有一电流分布$J(r)=e_z rJ_0(r\le a)$，求矢量位$A(r)$和磁感应强度$B(r)$。

解 由于电流只有e_z分量，且仅为r的函数，故$A(r)$也只有e_z分量，且仅为r的函数，即$A(r)=e_zA_z(r)$。在圆柱坐标系中，由$A_z(r)$满足的一维微分方程和边界条件，即可求解出$\mathbf{A}(\mathbf{r})$，然后由$B(r)=\nabla\times A(r)$可求出$B(r)$。

记$r\le a$和$r\ge a$的矢量位分别为$A_1(r)$和$A_2(r)$。由于在$r\ge a$时电流为零，所以

$$\nabla^2A_{z1}(r)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial A_{z1}}{\partial r})=-\mu_0J_0r \qquad (r\le a)$$

$$\nabla^2A_{z2}(r)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial A_{z2}}{\partial r})=0 \qquad (r\ge a)$$

由此可解得

$$A_{z1}(r)=-\frac{1}{9}\mu_0J_0r^3+C_1\ln r+D_1$$

$$A_{z2}(r)=C_2\ln r+D_2$$

$A_{z1}(r)$和$A_{z2}(r)$满足的边界条件为

① $r\to0$时，$A_{z1}(r)$为有限值

② $r=a$时，$A_{z1}(a)=A_{z2}(a)$，$\frac{\partial A_{z1}}{\partial r}\Big|_{r=a}=\frac{\partial A_{z2}}{\partial r}\Big|_{r=a}$

由条件①、②，有　$C_1=0$，$-\frac{1}{9}\mu_0J_0a^3=C_2\ln a+D_2$，$-\frac{1}{3}\mu_0J_0a^2=C_2\frac{1}{a}$

由此可解得　$C_2=-\frac{1}{3}\mu_0J_0a^3$，$D_2=-\frac{1}{3}\mu_0J_0a^3(\frac{1}{3}-\ln a)$

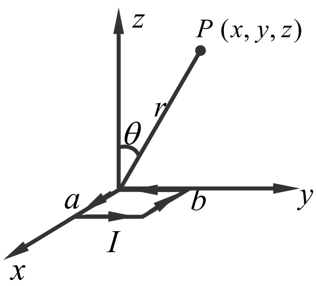
故

$$A_{z1}(r)=-\frac{1}{9}\mu_0J_0r^3+D_1 \qquad (r\le a)$$

$$A_{z2}(r)=-\frac{1}{3}\mu_0J_0a^3\ln r-\frac{1}{3}\mu_0J_0a^3(\frac{1}{3}-\ln a) \qquad (r\ge a)$$

式中常数D_1由参考点确定，若令$r=0$时，$A_{z1}(r)=0$，则有$D_1=0$。

空间的磁感应强度为



题 5.6 图

$$\boldsymbol{B}_1(r)=\nabla\times\boldsymbol{A}_1(r)=\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{3}\mu_0 J_0 r^2 \qquad (r<a)$$

$$\boldsymbol{B}_2(r)=\nabla\times\boldsymbol{A}_2(r)=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 J_0 a^3}{3r} \qquad (r>a)$$

5.6 如题 5.6 图所示，边长分别为 a 和 b 、载有电流 I 的小矩形回路。

（1）求远处的任一点 $P(x,y,z)$ 的矢量位 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，并证明它可以写成 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\dfrac{\mu_0\boldsymbol{p}_m\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}$。其中 $\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{e}_z Iab$；

（2）由 $\boldsymbol{A}$ 求磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，并证明 $\boldsymbol{B}$ 可以写成

$$\boldsymbol{B}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla(\boldsymbol{d}\Omega)$$ 式中 $\boldsymbol{d}\Omega=\dfrac{ab\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}$ 场点对小电流回路所张的立体角。

解 （1）电流回路的矢量位为 $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C\frac{1}{R}\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$$

式中：$R=[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{1/2}=[r^2-2r\sin\theta\ (x'\cos\phi+y'\sin\phi\ )+x'^2+y'^2]^{1/2}$

根据矢量积分公式 $\oint_C\Psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\Psi$，有 $$\oint_C\frac{1}{R}\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\times\nabla'(\frac{1}{R})$$

而 $$\nabla'(\frac{1}{R})=-\nabla(\frac{1}{R})$$

所以 $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\times\nabla(\frac{1}{R})$$

对于远区场，$r>>x', r>>y'$，所以 $R\approx r$，故

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\times\nabla(\frac{1}{r})=-\frac{\mu_0}{4\pi}[I\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}']\times\nabla(\frac{1}{r})=-\frac{\mu_0}{4\pi}(\boldsymbol{e}_z Iab)\times\nabla(\frac{1}{r})=$$

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{p}_m\times(-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3})=\frac{\mu_0\boldsymbol{p}_m\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}$$

（2）由于 $$\boldsymbol{A}(r)=-\frac{\mu_0}{4\pi}p_m\boldsymbol{e}_z\times(-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3})=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 p_m}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}$$

故 $$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)-\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)=\frac{\mu_0 p_m}{4\pi\ \ r^3}(\boldsymbol{e}_r 2\cos\theta+\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta)$$

又由于 $$\boldsymbol{e}_r 2\cos\theta+\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta=-r^3\nabla(\frac{\cos\theta}{r^2})=-r^3\nabla(\frac{\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2})$$

故 $$\boldsymbol{B}=-\frac{\mu_0 p_m}{4\pi}\nabla(\frac{\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2})=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla(\frac{ab\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2})=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla(\mathrm{d}\Omega)$$

5.7 半径为 a 磁介质球，具有磁化强度为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{e}_z(Az^2+B)$$

其中 A 和 B 为常数，求磁化电流和等效磁荷。

解 磁介质球内的磁化电流体密度为 $\boldsymbol{J}_m=\nabla\times\boldsymbol{M}=-\boldsymbol{e}_z\times\nabla(Az^2+B)=-\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_z 2Az=0$

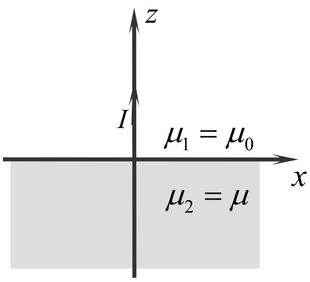
等效磁荷体密度为 $\rho_m = -\nabla \cdot \boldsymbol{M} = -\frac{\partial}{\partial z}(Az^2 + B) = -2Az$

磁介质球表面的磁化电流面密度为

$$\boldsymbol{J}_{mS} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n}\big|_{r=a} = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_r (Aa^2 \cos^2\theta + B) = \boldsymbol{e}_\phi (Aa^2 \cos^2\theta + B)\sin\theta$$

等效磁荷面密度为

$$\sigma_m = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{M}\big|_{r=a} = \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_z (Aa^2 \cos^2\theta + B) = (Aa^2 \cos^2\theta + B)\cos\theta$$



题 5.8 图

5.8 如题 5.8 所示图，无限长直线电流 I 垂直于磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种磁介质的分界面，试求：（1）两种磁介质中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$；（2）磁化电流分布。

解 （1）由安培环路定理，可得 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_\phi \frac{I}{2\pi r}$

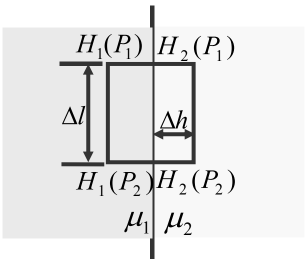
所以得到

$$\boldsymbol{B}_1 = \mu_0 \boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \mu \boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_\phi \frac{\mu I}{2\pi r}$$

（2）磁介质在的磁化强度 $\boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_\phi \frac{(\mu - \mu_0)I}{2\pi\mu_0 r}$

则磁化电流体密度 $\boldsymbol{J}_m = \nabla \times \boldsymbol{M} = \boldsymbol{e}_z \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rM_\phi) = \boldsymbol{e}_z \frac{(\mu - \mu_0)I}{2\pi\mu_0}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}(r \cdot \frac{1}{r}) = 0$



题 5.9 图

在 $r = 0$ 处，$\boldsymbol{B}_2$ 具有奇异性，所以在磁介质中 $r = 0$ 处存在磁化线电流 I_m。以 z 轴为中心、r 为半径作一个圆形回路 C，由安培环路定理，有

$$I + I_m = \frac{1}{\mu_0}\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\mu I}{\mu_0}$$

故得到 $I_m = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)I$

在磁介质的表面上，磁化电流面密度为

$$\boldsymbol{J}_{mS} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{e}_z\big|_{z=0} = \boldsymbol{e}_r \frac{(\mu - \mu_0)I}{2\pi\mu_0 r}$$

5.9 已知一个平面电流回路在真空中产生的磁场强度为 $\boldsymbol{H}_0$，若此平面电流回路位于磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种均匀磁介质的分界平面上，试求两种磁介质中的磁场强度 $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$。

解 由于是平面电流回路，当其位于两种均匀磁介质的分界平面上时，分界面上的磁场只有法向分量，根据边界条件，有 $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}$。在分界面两侧作一个小矩形回路，分别就真空和存在介质两种不同情况，应用安培环路定律即可导出 $\boldsymbol{H}_1$、$\boldsymbol{H}_2$ 与 $\boldsymbol{H}_0$ 的关系。

在分界面两侧，作一个尺寸为 $2\Delta h \times \Delta l$ 的小矩形回路，如题 5.9 图所示。根据安培环路定律，

有 $$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H_1(P_1)\Delta h + H_2(P_1)\Delta h - H_1(P_2)\Delta h - H_2(P_2)\Delta h = I \quad (1)$$

因 $\boldsymbol{H}$ 垂直于分界面，所以积分式中 $\boldsymbol{H}\cdot\Delta\boldsymbol{l}=0$。这里 I 为与小矩形回路交链的电流。

对平面电流回路两侧为真空的情况，则有

$$\oint_C \boldsymbol{H}_0\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2H_0(P_1)\Delta h - 2H_0(P_2)\Delta h = I \quad (2)$$

由于 P_1 和 P_2 是分界面上任意两点，由式（1）和（2）可得到 $\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2=2\boldsymbol{H}_0$

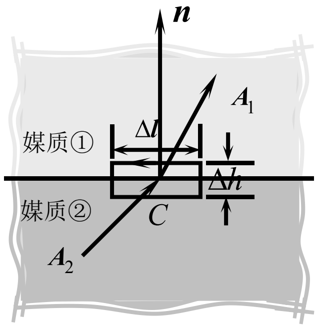
即 $$\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_1}+\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_2}=2\boldsymbol{H}_0$$

于是得到 $$\boldsymbol{B}=\frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\boldsymbol{H}_0$$

故有 $$\boldsymbol{H}_1=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_1}=\frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\boldsymbol{H}_0 \qquad \boldsymbol{H}_2=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_2}=\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\boldsymbol{H}_0$$

5.10 证明：在不同介质分界面上矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的切向分量是连续的。

解 由 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 得 $$\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \quad (1)$$



题 5.10 图

在媒质分界面上任取一点 P，围绕点 P 任作一个跨越分界面的狭小矩形回路 C，其长为 Δl、宽为 Δh，如题 5.10 图所示。将式（1）应用于回路 C 上，并令 Δh 趋于零，得到

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{A}_1\bullet\Delta\boldsymbol{l}-\boldsymbol{A}_2\bullet\Delta\boldsymbol{l}=\lim_{\Delta h\to 0}\int_S \boldsymbol{B}\bullet d\boldsymbol{S}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 为有限值，上式右端等于零，所以

$$\boldsymbol{A}_1\bullet\Delta\boldsymbol{l}-\boldsymbol{A}_2\bullet\Delta\boldsymbol{l}=0$$

由于矢量 $\Delta\boldsymbol{l}$ 平行于分界面，故有

$$A_{1t}=A_{2t}$$

5.11 一根极细的圆铁杆和一个很薄的圆铁盘样品放在磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中，并使它们的轴与 $\boldsymbol{B}_0$ 平行，（铁的磁导率为 μ）。求两样品内的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$；若已知 $B_0=1\mathrm{T}$、$\mu=5000\mu_0$，求两样品内的磁化强度 M。

解 对于极细的圆铁杆样品，根据边界条件 $H_{1t}=H_{2t}$，有

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{B}_0/\mu_0$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}=\frac{\mu}{\mu_0}\boldsymbol{B}_0$$

$$M=\frac{B}{\mu_0}-H=\frac{1}{\mu_0}(\frac{\mu}{\mu_0}-1)B_0=\frac{4999}{\mu_0}$$

对于很薄的圆铁盘样品，根据边界条件 $B_{1n}=B_{2n}$，有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu=\boldsymbol{B}_0/\mu$$

$$M=\frac{B}{\mu_0}-H=(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu})B_0=\frac{4999}{5000\mu_0}$$

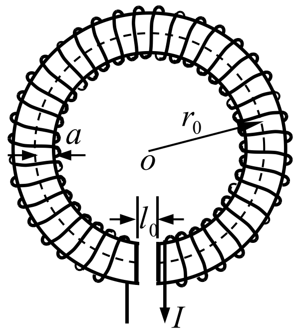
5. 12 如题 5.12 图所示，一环形螺线管的平均半径 $r_0=15$ cm，其圆形截面的半径 $a=2$ cm，铁芯的相对磁导率 $\mu_r=1400$，环上绕 $N=1000$ 匝线圈，通过电流 $I=0.7A$。

（1）计算螺旋管的电感；

（2）在铁芯上开一个 $l_0=0.1\text{cm}$ 的空气隙，再计算电感。（假设开口后铁芯的 μ_r 不变）

（3）求空气隙和铁芯内的磁场能量的比值。

解 （1）由于 $a<<r_0$，可认为圆形截面上的磁场是均匀的，且等于截面的中心处的磁场。



题 5.12 图

由安培环路定律，可得螺旋管内的磁场为 $H=\dfrac{NI}{2\pi r_0}$

与螺线管铰链的磁链为 $\Psi=NS\mu H=\dfrac{\mu a^2N^2I}{2r_0}$

故螺线管的电感为

$$L=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu a^2N^2}{2r_0}=\frac{1400\times4\pi\times10^{-7}\times0.02^2\times1000^2}{2\times0.15}=2.346\ \text{H}$$

（2）当铁芯上开有小空气隙时，由于可隙很小，可忽略边缘效应，则在空气隙与铁芯的分界面上，磁场只有法向分量。根据边界条件，有 $\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{B}_\mu=\boldsymbol{B}$，但空气隙中的磁场强度 $\boldsymbol{H}_0$ 与铁芯中的磁场强度 $\boldsymbol{H}_\mu$ 不同。根据安培环路定律，有

$$H_0l_0+H_\mu(2\pi r_0-l_0)=NI$$

又由于 $B_0=\mu_0H_0$、$B_\mu=\mu_0\mu_rH_\mu$ 及 $B_0=B_\mu=B$，于是可得 $B=\dfrac{\mu_0\mu_rNI}{\mu_rl_0+(2\pi r_0-l_0)}$

所以螺线管得磁链为 $\Psi=NSB=\dfrac{\pi\mu_0\mu_ra^2N^2I}{\mu_rl_0+(2\pi r_0-l_0)}$

故螺线管得电感为

$$L=\frac{\Psi}{I}=\frac{\pi\mu_0\mu_ra^2N^2}{\mu_rl_0+(2\pi r_0-l_0)}=\frac{4\pi^2\times10^{-7}\times1400\times0.02^2\times1000^2}{1400\times0.001+2\times\pi\times0.15-0.001}=0.944\ \text{H}$$

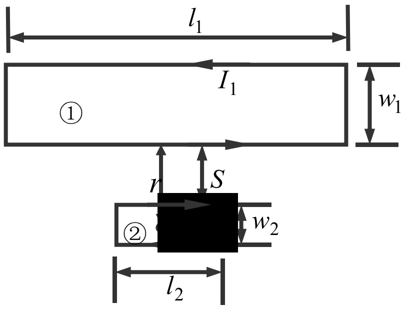
（3）空气隙中的磁场能量为 $W_{m0}=\dfrac{1}{2}\mu_0H_0^2Sl_0$

铁芯中的磁场能量为 $W_{m\mu}=\dfrac{1}{2}\mu_0\mu_rH_\mu^2S(2\pi r_0-l_0)$

故 $\dfrac{W_{m0}}{W_{m\mu}}=\dfrac{\mu_rl_0}{2\pi r_0-l_0}=\dfrac{1400\times0.001}{2\pi\times0.15-0.001}=1.487$

5.13 证明：单匝线圈励磁下磁路的自感量为 $L_0=1/R_m$，R_m 为磁路的磁阻，故 NI 激励下，电感量为 $L=N^2/R_m$。磁路中单匝激励下的磁场储能 $W_{m0}=R_m\Phi_0^2/2$，则 NI 激励下的 $W_m=N^2W_{m0}$。

解 在单匝线圈励磁下，设线圈中的电流为 I，有 $\Phi_0 = L_0 I = \dfrac{I}{R_m}$。则在 NI 激励下，磁路的磁通为
$$\Psi = N^2 \Phi_0 = \frac{N^2 I}{R_m}$$
故电感量为
$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N^2}{R_m}$$
在单匝线圈励磁下，$W_{m0} = \dfrac{1}{2} L_0 I^2 = \dfrac{I^2}{2R_m} = \dfrac{R_m}{2}\Phi_0^2$。在 NI 激励下，磁路的磁能为
$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{N^2 I^2}{2R_m} = \frac{N^2 R_m}{2}\Phi_0^2 = N^2 W_{m0}$$

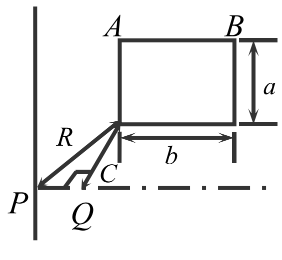


题 5.14 图

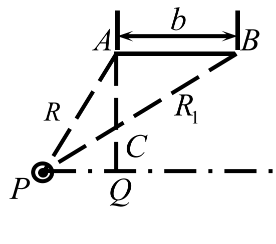
5.14 如题 5.14 图所示，两个长的矩形线圈，放置在同一平面上，长度分别为 l_1 和 l_2，宽度分别为 w_1 和 w_2，两线圈最近的边相距为 S，两线圈中分别载有电流 I_1 和 I_2。设 $l_1 >> l_2$，且两线圈都只有一匝，略去端部效应。证明：两线圈的互感是
$$M = \frac{\mu_0 l_2}{2\pi} \ln \frac{(S + w_1)(S + w_2)}{S(S + w_1 + w_2)}$$

解 由于 $l_1 >> l_2$，因此可近似认为线圈①中的电流在线圈②的回路中产生的磁场与两根无限长的平行直线电流产生的磁场相同。线圈①中的电流 I_1 在线圈②的回路中产生的磁场为
$$B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + w_1}\right)$$
与线圈②交链的磁通 Ψ_{12} 为
$$\Psi_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_S^{S+w_2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + w_1}\right) l_2 \, \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I_1 l_2}{2\pi}\left[\ln\frac{S + w_2}{S} - \ln\frac{S + w_1 + w_2}{S + w_1}\right] =$$
$$\frac{\mu_0 I_1 l_2}{2\pi} \ln \frac{(S + w_1)(S + w_2)}{S(S + w_1 + w_2)}$$
故两线圈间的互感为
$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 l_2}{2\pi} \ln \frac{(S + w_1)(S + w_2)}{S(S + w_1 + w_2)}$$

5.15 长直导线附近有一矩形回路，回路与导线不共面，如题 5.15 图(a)所示。证明：直导线与矩形回路间的互感是



题 5.15 图(a)



题 5.15 图(b)

解　设长直导线中的电流为I，则其产生的磁场为　$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

由题 5.15 图(b)可知，与矩形回路交链的磁通$\varPsi$为

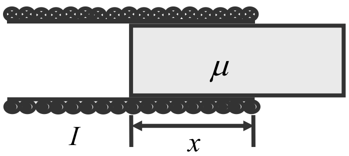
$$\varPsi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 aI}{2\pi}\int_R^{R_1}\frac{1}{r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 aI}{2\pi}\ln\frac{R_1}{R}$$

其中　$R_1=[C^2+(b+\sqrt{R^2-C^2})^2]^{1/2}=[R^2+b^2+2b\sqrt{R^2-C^2}]^{1/2}$

故直导线与矩形回路间的互感为

$$M=\frac{\varPsi}{I}=\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{R_1}{R}=\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{[R^2+b^2+2b\sqrt{R^2-C^2}]^{1/2}}{R}=$$

$$-\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{R}{[2b(R^2-C^2)^{1/2}+b^2+R^2]^{1/2}}$$



题 5.16 图

5.16　如题 5.16 图所示的长螺旋管，单位长度密绕n匝线圈，通过电流I，铁心的磁导率为μ、截面积为S，求作用在它上面的磁场力。

解　由安培环路定理可得螺旋管内的磁场为　$H=nI$

设铁心在磁场力的作用下有一位移$\mathrm{d}x$，则螺旋管内改变的磁场能量为

$$\mathrm{d}W_m=\frac{\mu}{2}H^2S\,\mathrm{d}x-\frac{\mu_0}{2}H^2S\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)n^2I^2S\,\mathrm{d}x$$

则作用在铁心上的磁场力为　$F_x=\dfrac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}x}\Big|_{I=c}=\dfrac{1}{2}(\mu-\mu_0)n^2I^2S$

磁力有将铁心拉进螺旋管的趋势。