第十二单元　无穷级数测试题详细解答

一、填空题

1、前三项即是当n分别取1,2,3时对应的项，该级数的前三项为：$\underline{\mathbf{\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots}}$

2、由于该级数的奇数项为正值，偶数项为负值，所以其一般项为：$\underline{(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}}$。

3、由级数收敛的必要条件，知$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{6}-u_n)=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\underline{\frac{1}{6}}$。

4、由于$s_n=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{1}\to\infty(n\to\infty)$，所以该级数是<u>　发散　</u>的。另，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$为正项级数，由比较审敛法也可知该级数发散。

5、$u_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+1}{n}-\frac{n}{n-1}=\underline{-\frac{1}{n(n-1)}}$。

6、若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，由比较审敛法：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^4}{a^2}=\lim\limits_{n\to\infty}a^2=0$，可见级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^4$收敛；反之，若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^4$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$不一定收敛，例如当$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^4=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^4$收敛的<u>充分</u>条件。

7、<u>收敛</u>；<u>发散</u>。

8、因为$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}$，所以收敛半径$R=3$，又当$x=\pm 3$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$发散，所以级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$的收敛域是$\underline{(-3,3)}$。

9、因为$\frac{1}{3+x}=\frac{1}{4+(x-1)}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{4})^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^{n+1}}$，由此

可知 $a_n = \underline{(-1)^n \frac{1}{4^{n+1}}}$。

10、因为当 $1 \ge a > 0$ 时，$1 + a^n \le 2$，$\frac{1}{1+a^n} \ge \frac{1}{2}$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 发散；

当 $\underline{a > 1}$ 时，$1 + a^n > a^n$，$\frac{1}{1+a^n} < \frac{1}{a^n}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 是公比为 $\frac{1}{a} < 1$ 的等比级数，从而

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 收敛。

11、因为 $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in R$，所以 $\cos(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n}}{(2n)!}$，

从而 $\int_0^x \cos(t^2) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n}}{(2n)!} dt = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} \quad x \in R}$。

12、因为 $f(x)$ 在 $x \ne (2k+1)\pi,\ k \in Z$ 处连续，由收敛定理知：$S(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = \underline{0}$；

$S(\pi) = \frac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2} = \underline{-\frac{\pi}{2}}$；$S(\frac{3\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2}) = f(2\pi - \frac{\pi}{2}) = f(-\frac{\pi}{2}) = \underline{-\frac{\pi}{2}}$。

二、选择题

1、选<u>(B)</u>，等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 的公比为 q，当 $|q| < 1$ 时收敛。

2、选<u>(B)</u>，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，由此可知若 $\lim_{n\to\infty} u_n \ne 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散却不一定有 $\lim_{n\to\infty} u_n \ne 0$，例如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，而 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，所以 $\lim_{n\to\infty} u_n \ne 0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散充分条件。

3、选<u>(C)</u>；通过反例进行排除，例如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n+1}$ 均发散，但

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛，说明（A）错；又由于收敛级数的和与差收敛，可知（B）、（D）错。

4、选(C)，由 $p-$级数的敛散性知，当 $p-2>1$，即 $p>3$ 时，所给级数收敛。

5、选(B)，由收敛级数去掉有限项后不改变收敛性的性质知（B）中级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 去掉前 1000 项后所得级数，是收敛的，另外，（A）、（C）、（D）中级数的一般项不趋于零，可知这些级数都是发散的。

6、选(D)，由比较审敛法的极限形式易判断（A）、（C）中的级数收敛，（D）中的级数发散，由莱布尼兹审敛法可以判断（B）中的交错级数收敛。

7、选(C)，由比值审敛法知（A）、（B）正确，对于（D），由 $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1\Rightarrow u_{n+1}>u_n$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，对于（C），例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 满足 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，但该级数发散。

8、选(D)，泰勒级数中 $(x-x_0)^n$ 项的系数是 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$。

9、选(A)，因 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{3^n}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3}{3^n}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}x^n$，而幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3}{3^n}x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}x^n$ 的收敛半径都是 3，从而幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{3^n}x^n$ 的收敛半径也是 3。

10、选(C)，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，即

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots=2 \qquad (1)$$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，即

$$a_1+a_3+a_5+\cdots=5 \qquad (2)$$

根据收敛级数的性质，将(2)式乘 2 后减去(1)式，得 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots=8$。

11、选<u>(B)</u>，因为$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\frac{1}{2})^n$在$x=-\frac{1}{2}$处收敛，由阿贝尔定理可知，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\frac{1}{2})^n$的收敛半径至少是$\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|=1$，并当$\left|x-\frac{1}{2}\right|<1$时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\frac{1}{2})^n$绝对收敛，现$x=\frac{4}{3}$满足$\left|x-\frac{1}{2}\right|<1$，故在$x=\frac{4}{3}$处，级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\frac{1}{2})^n$绝对收敛。

12、选<u>(A)</u>，因为求$f(x)$在$[0,\ \pi]$上的正弦级数，就是要将$f(x)$进行奇延拓成为奇函数，而选项中只有（A）是符合$f(x)$奇延拓后的奇函数。

三、计算解答

1、（1）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=1\neq 0$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$发散。

（2）解：利用比较审敛法的极限形式，

因$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$发散。

（3）解：利用比值审敛法，

因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}}{\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}(\frac{n}{n+1})^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}=\frac{1}{e}<1$，

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$收敛。

（4）解：利用根值审敛法，

因$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an}{1+n}=a$，

当$a>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{an}{1+n})^n$ 发散；

当$a<1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{an}{1+n})^n$ 收敛；

当$a=1$时，级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{1+n})^n$，因为$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{1+n})^n=\frac{1}{e}\neq 0$，所以发散。

2、（1）解：因$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)}{3^n}}{\frac{n}{3^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1$，

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$绝对收敛。

（2）解：因$\left|(-1)^n\frac{1}{\ln(1+n)}\right|=\frac{1}{\ln(1+n)}>\frac{1}{n}$，

由比较审敛法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{\ln(1+n)}\right|$发散，

又因为$u_n=\frac{1}{\ln(1+n)}>\frac{1}{\ln(2+n)}=u_{n+1}$，$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}=0$，

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(1+n)}$收敛，为条件收敛。

3、(1)解:因为$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}}{\frac{1}{n4^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4(n+1)}=\frac{1}{4}$,所以收敛半径$R=4$，

当$x=-4$时，级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，收敛；当$x=4$时，级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散；

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n4^n}$的收敛域为$[-4,4)$。

（2）解：因为$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=0$，所以收敛半径$R=+\infty$，

从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$的收敛域为$(-\infty,+\infty)$。

（3）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{n+1}{2^{n+1}}x^{2n+2}}{\dfrac{n}{2^n}x^{2n}}\right|=\dfrac{x^2}{2}$，

当 $\dfrac{x^2}{2}<1$，即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^{2n}$ 绝对收敛；

当 $\dfrac{x^2}{2}>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^{2n}$ 发散；

当 $\dfrac{x^2}{2}=1$，即 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$，发散；

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^{2n}$ 的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$。

（4）解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{2+n}{1+(n+1)^2}}{\dfrac{1+n}{1+n^2}}\right|=1$，所以收敛半径 $R=1$，

当 $x=1$ 时，级数变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1+n}{1+n^2}$，由莱布尼兹审敛法知该级数收敛；

当 $x=3$ 时，级数变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1+n}{1+n^2}$，由比较审敛法知该级数发散；

所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1+n}{1+n^2}(x-2)^n$ 的收敛域为 $[1,3)$。

4、（1）解：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+2}{n+1}\right|=1$，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ 的收敛半径为 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$。

令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$，则 $s(x)=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+1})'=(\dfrac{x^2}{1-x})'=\dfrac{2x-x^2}{(1-x)^2}\qquad x\in(-1,1)$。

（2）解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{4n+5}x^4 = x^4$，当 $|x|<1$ 时级数收敛，当 $|x|>1$ 时级数发散，当 $|x|=1$ 时级数发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的收敛域为 $(-1,1)$。

令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$，则 $s(0)=0$，

$$s(x)=s(x)-s(0)=\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'dx=\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n}dx$$

$$=\int_0^x \frac{x^4}{1-x^4}dx=-x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x, \qquad x\in(-1,1)$$

（3）解：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}\right| = 1$，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径为 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 均收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域为 $[-1,1]$。

令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$，则 $s(0)=0$，$xs(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，于是

$$[xs(x)]'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad [xs(x)]''=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

故 $\qquad [xs(x)]'=\int_0^x [xs(x)]''dx=\int_0^x \dfrac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$，

$$xs(x)=\int_0^x [xs(x)]'dx=-\int_0^x \ln(1-x)dx=(1-x)\ln(1-x)+x,$$

从而，当 $x\neq0$ 时，$s(x)=\dfrac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x} \qquad x\in[-1,0)\cup(0,1)$，

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 在 $x=\pm1$ 处收敛，而当 $x=1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

所以，$s(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x}, & x\in[-1,0)\bigcup(0,1)\\ 0, & x=0\\ 1, & x=1\end{cases}$。

5、（1）解：因为 $\boldsymbol{f'(x)=(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$， $x\in(-1,1)$。

所以，$\boldsymbol{\arctan x=\int_0^x(\arctan x)'dx=\int_0^x[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}]dx}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$， $\boldsymbol{x\in[-1,1]}$。 (注意端点收敛性)

（2）解：$f(x)=\dfrac{1}{(2-x)^2}=(\dfrac{1}{2-x})'=\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}})'=\dfrac{1}{2}(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n})'=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{2^n}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{2^{n+1}}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{(m+1)x^m}{2^{m+2}}$， $x\in(-2,2)$。

6、解：$f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}=\dfrac{1}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{1}{5}(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+2})$，其中

$\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{-2+(x-1)}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{2}}=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^n}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^{n+1}}$， $x\in(-1,3)$

$\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{3+(x-1)}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{3}}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-1)^n}{3^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-1)^n}{3^{n+1}}$， $x\in(-2,4)$

所以，$f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}=\dfrac{1}{5}(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+2})=\dfrac{1}{5}[-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-1)^n}{3^{n+1}}]$

$=-\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}[\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}](x-1)^n$， $x\in(-1,3)$