第十六讲 二次曲面与直纹面

一、二次曲面

二、直纹面

三、旋转曲面

四、空间曲线的投影

一、二次曲面

1. 二次曲面的定义

定义：三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面.

平面称为**一次曲面**.

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0.$$

2. 截痕法

用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线（即截痕）的形状，然后加以综合，从而了解曲面全貌的方法.

3. 伸缩变形法

若在xoy面上把点$M(x,y)$变成点$M'(x,\lambda y)$,从而把点M的轨迹C变成点M'的轨迹C'时,称把图形C沿y轴方向伸缩λ倍变成图形C'.

这时

$$C: F(x,y)=0 \xrightarrow[\text{方向伸缩 }\lambda\text{倍}]{\text{把图形}C\text{沿}y\text{轴}} C': F\left(x, \frac{1}{\lambda}y\right)=0$$

例如:

圆 $x^2+y^2=a^2 \xrightarrow[\text{方向伸缩 }\frac{b}{a}\text{倍}]{\text{把图形}C\text{沿}y\text{轴}} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 椭圆

3. 伸缩变形法

若在xoy面上把点$M(x,y)$变成点$M'(x,\lambda y)$，从而把点M的轨迹C变成点M'的轨迹C'时，称把图形C沿y轴方向伸缩λ倍变成图形C'.

$$C: F(x,y)=0 \xrightarrow[\text{方向伸缩 }\lambda\text{倍}]{\text{把图形}C\text{沿}y\text{轴}} C': F(x,\frac{1}{\lambda}y)=0$$

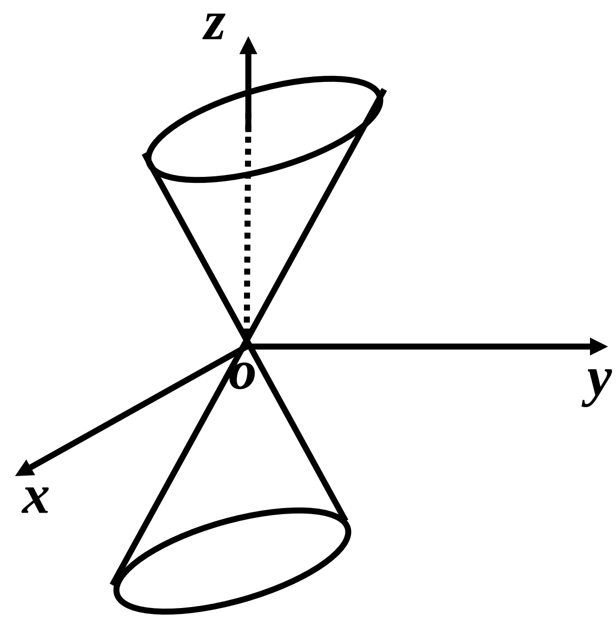
类似地，

圆锥面 $\frac{x^2+y^2}{a^2}=z^2 \xrightarrow[\text{方向伸缩 }\frac{b}{a}\text{倍}]{\text{把图形沿}y\text{轴}} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$ 椭圆锥面

（1）椭圆锥面

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=z^2 \xrightarrow[\text{方向伸缩}\,\frac{b}{a}\,\text{倍}]{\text{把图形沿}y\text{轴}}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$



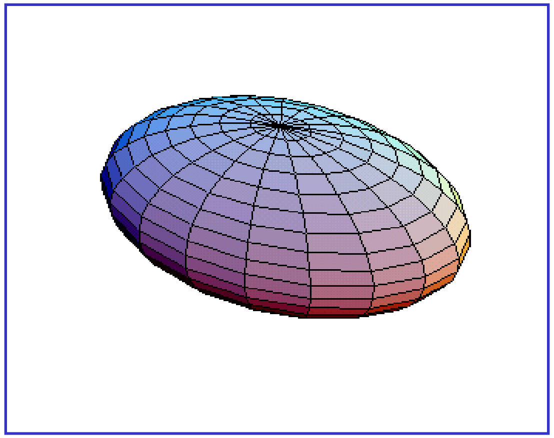
椭圆锥面与三张坐标面的交线：

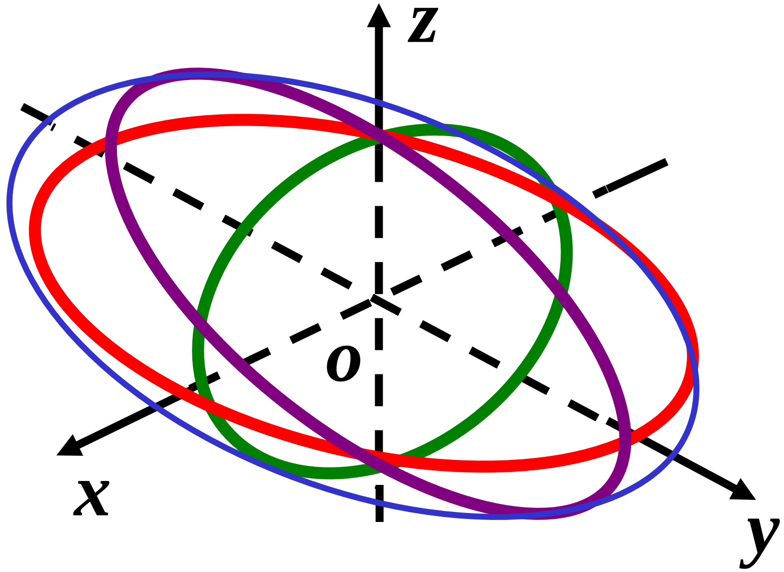
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2,\\ z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=z^2,\\ y=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}=z^2.\\ x=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2t^2}+\dfrac{y^2}{b^2t^2}=1,\\ z=t\end{cases}$$

（2）椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$





$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

把图形沿y轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍

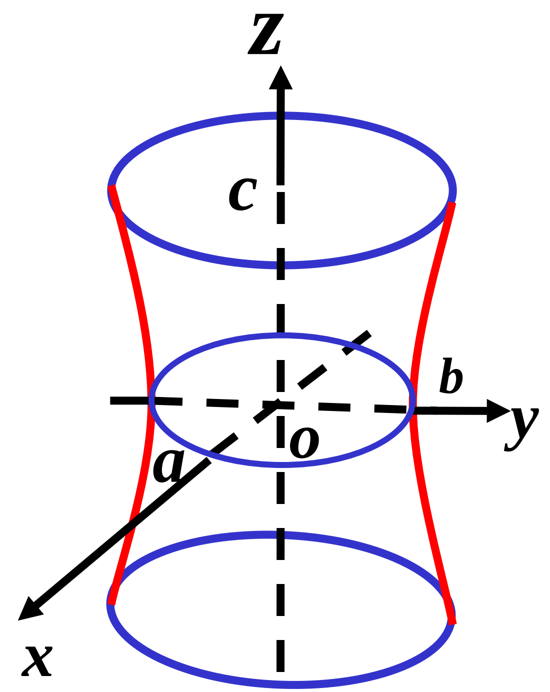
（3）单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

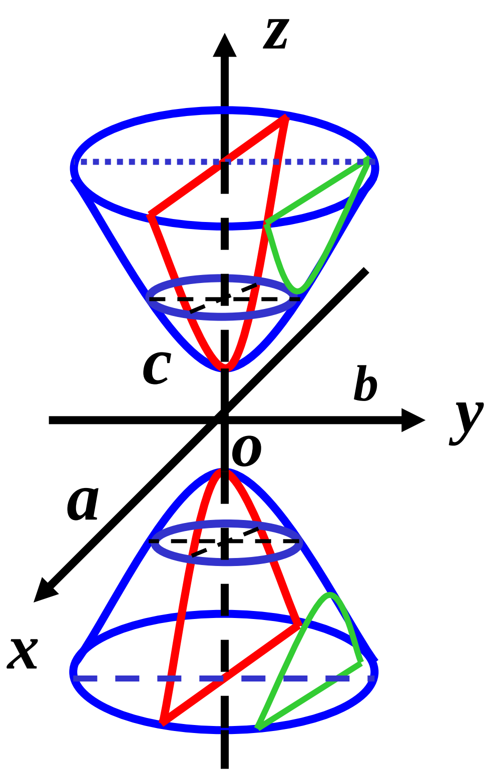
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$\xrightarrow{\text{把图形沿}y\text{轴}}$

方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍



（4） 双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



$$-\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

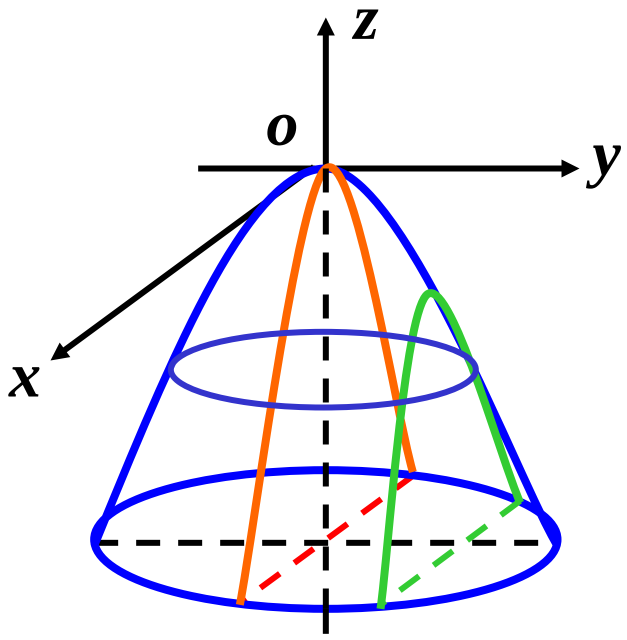
$\xrightarrow{\text{把图形沿}y\text{轴}}$

方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍

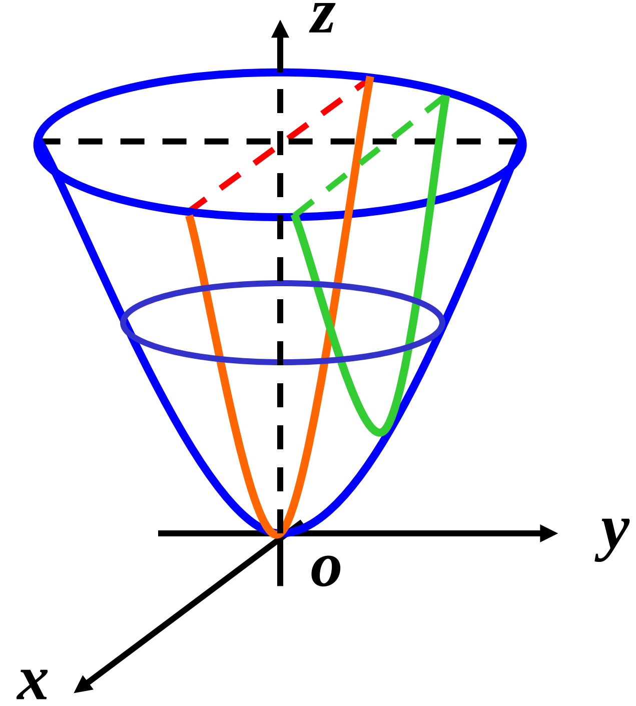
（5） 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \qquad \frac{x^2+y^2}{a^2}=z$$

把图形沿y轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍

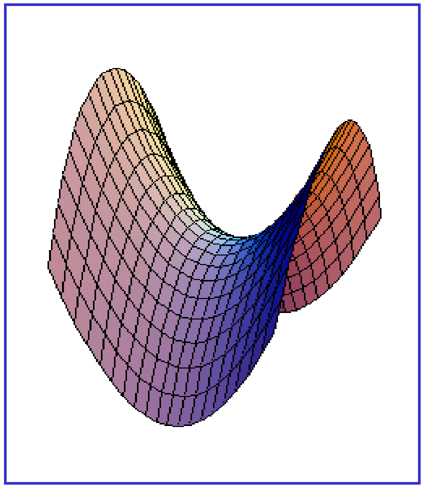


$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$



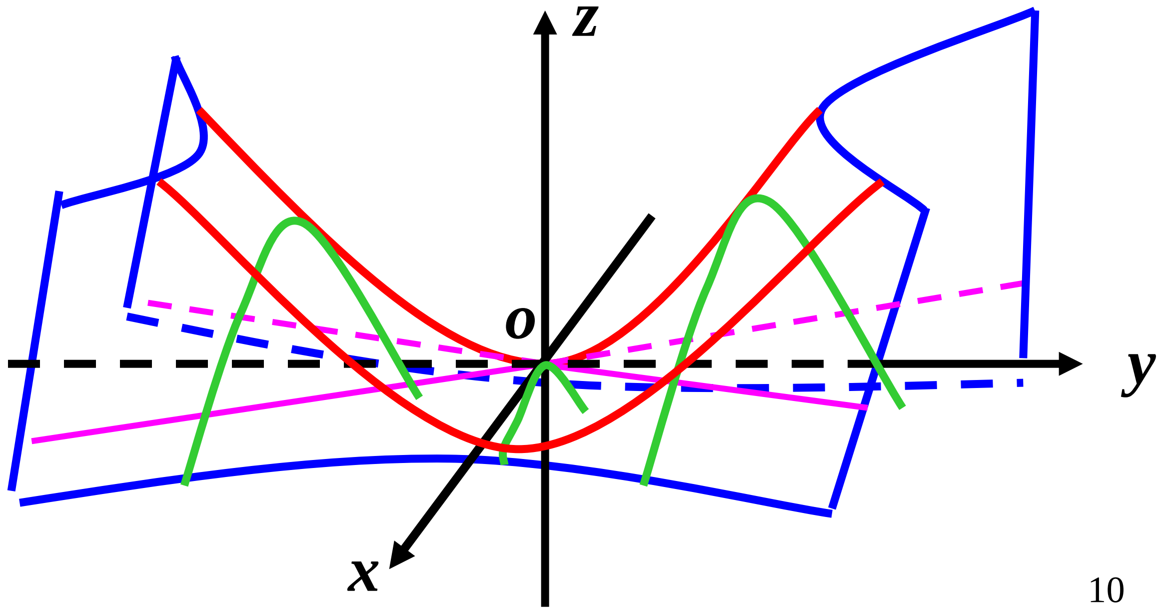
（6） 双曲抛物面（马鞍面）

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$



用截痕法讨论：

图形如右下：



几种常见曲面

1 平面

2 球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \qquad z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

3 柱面（圆柱面、椭圆柱面、抛物柱面、双曲柱面）$F(x,y)=0, G(y,z)=0, H(x,z)=0.$

4 锥面

$$z^2=x^2+y^2, \qquad z=\pm\sqrt{x^2+y^2},$$

$$4z^2=25(x^2+y^2), \qquad z=2\pm\frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}.$$

5 椭圆抛物面、旋转抛物面

$$z=x^2+y^2,\quad z=x^2+2y^2,$$

$$z=6-(x^2+y^2).$$

作空间区域简图的步骤：

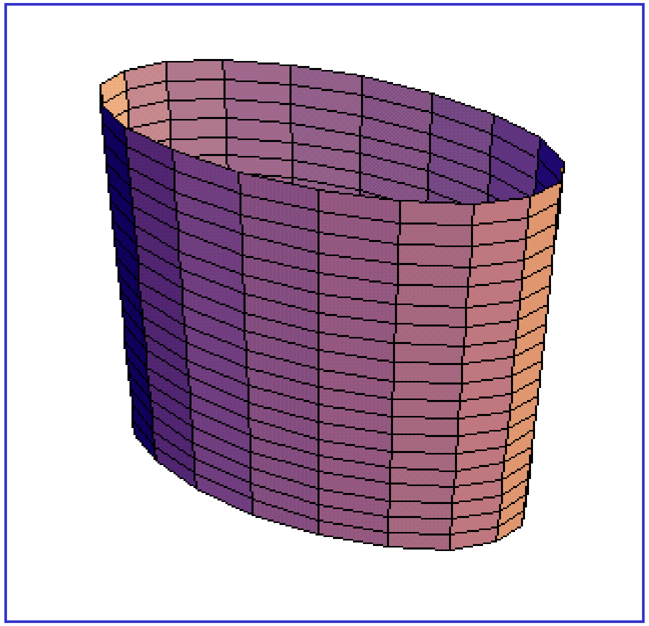
1 分析所给曲面的特征

2 求出围成立体的曲面之间的交线

3 画图：先画出易于画出的交线，对于难于画出的交线最后顺势画出

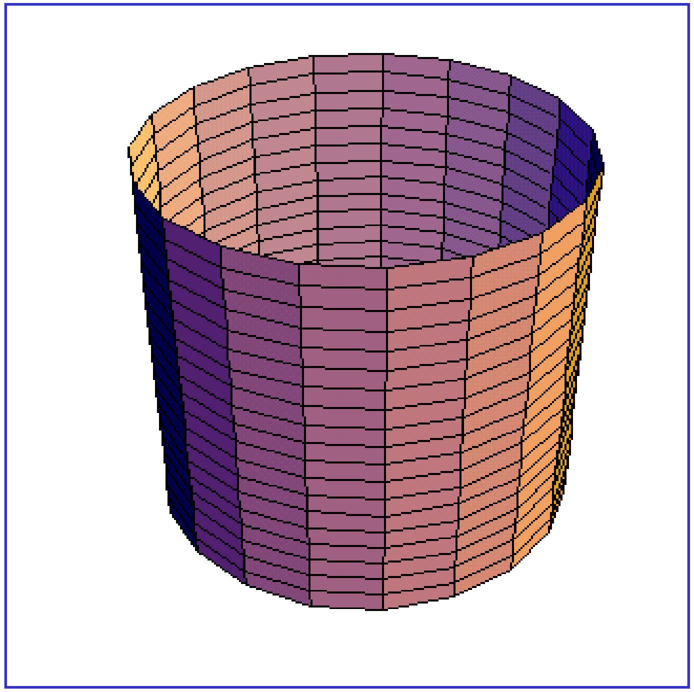
任一二次曲面可经过坐标系的平移或旋转变成下面的曲面方程之一：

(1) 椭圆柱面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(ab\neq 0)$

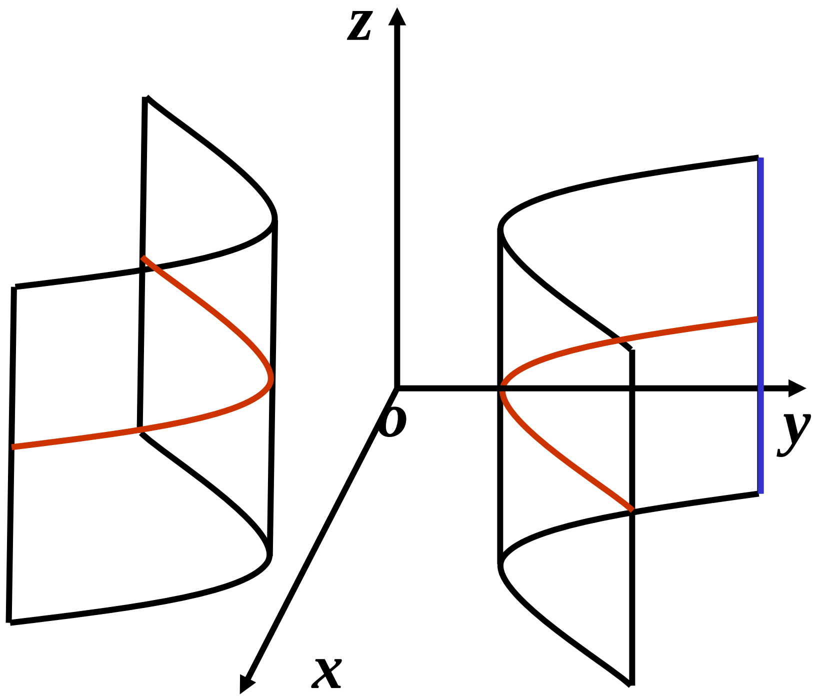


(1) 椭圆柱面： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(ab\neq 0)$

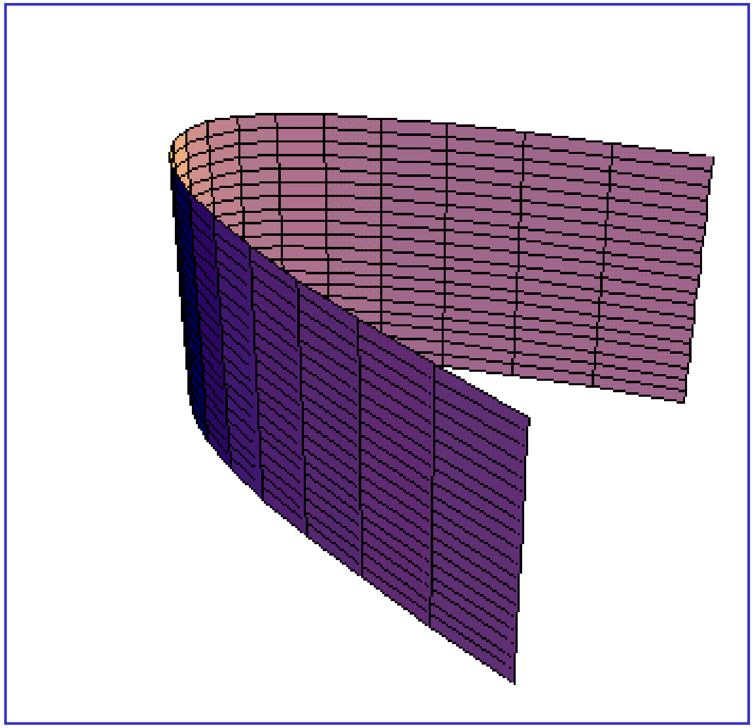
特别的，当$a=b$时，为圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.



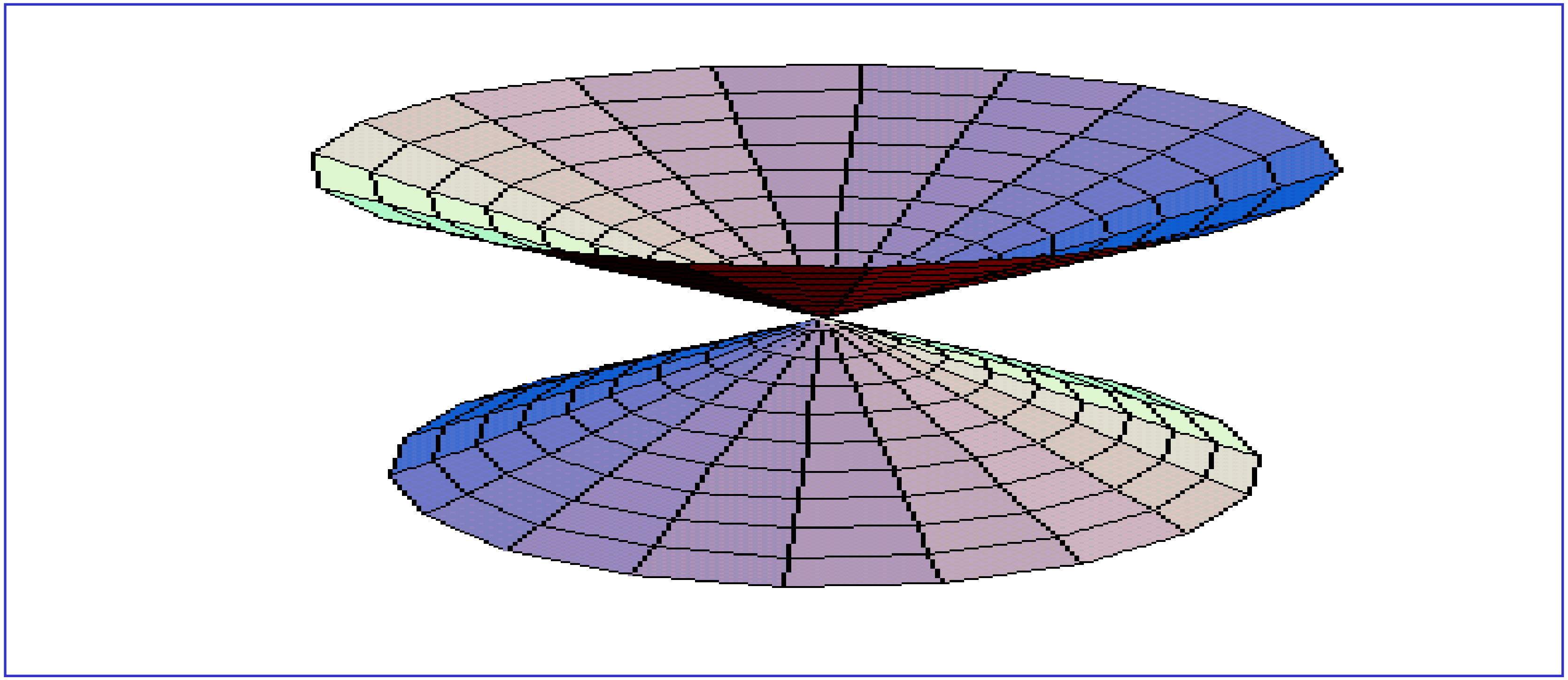
(2) 双曲柱面： $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \, (ab \neq 0)$



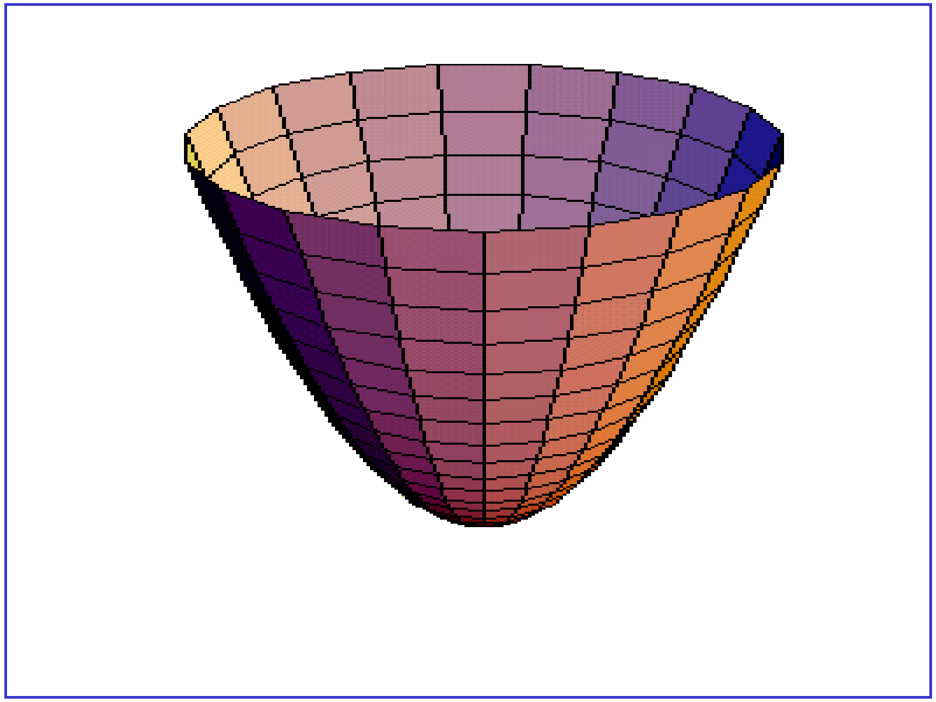
(3) 抛物柱面：$ax^2 = y\ (a > 0)$.



(四) 锥面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$

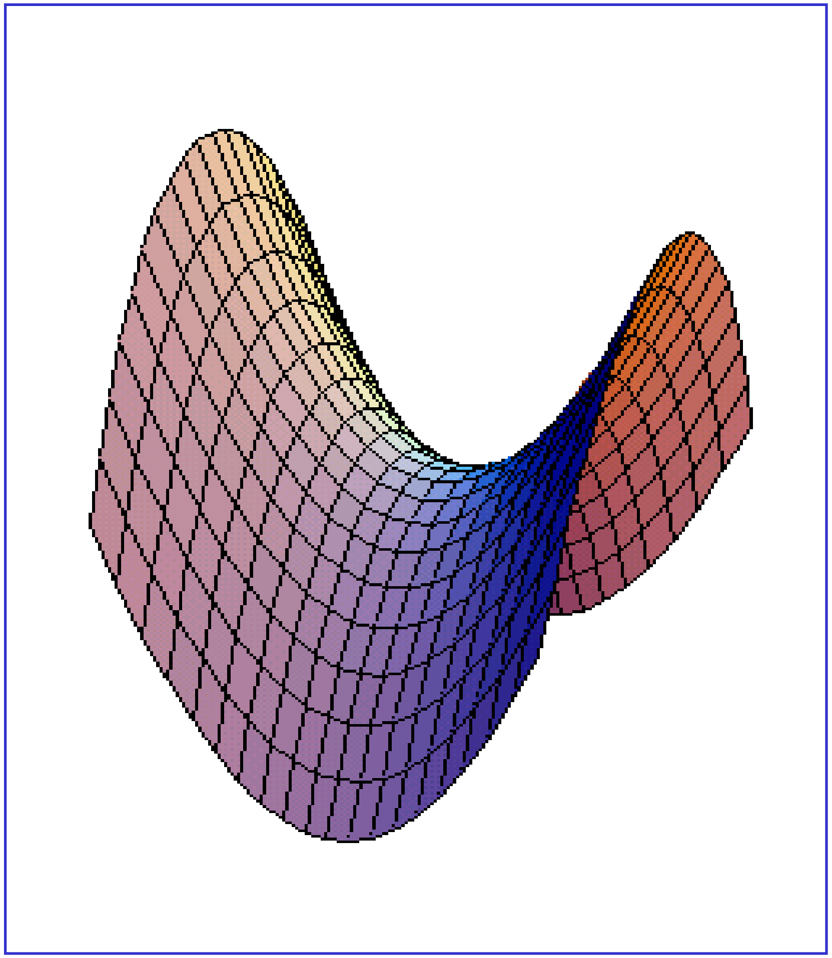


(5) 椭圆抛物面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-cz=0\ (abc\neq 0, c>0)$



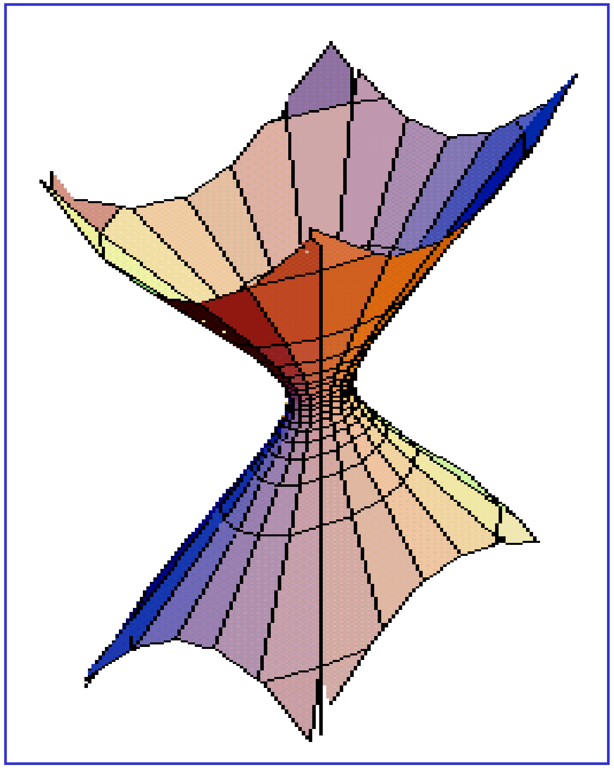
(6)双曲抛物面： $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-cz=0\ (abc\neq 0, c>0)$

（马鞍面）



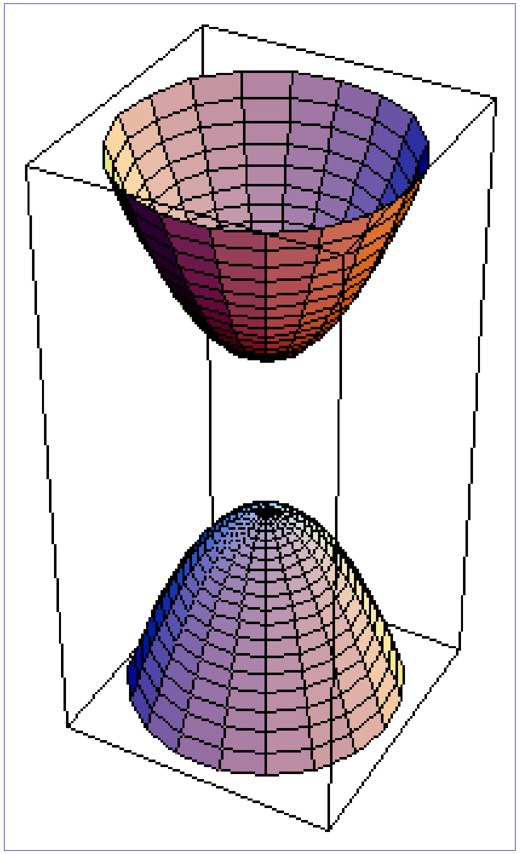
（7）单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

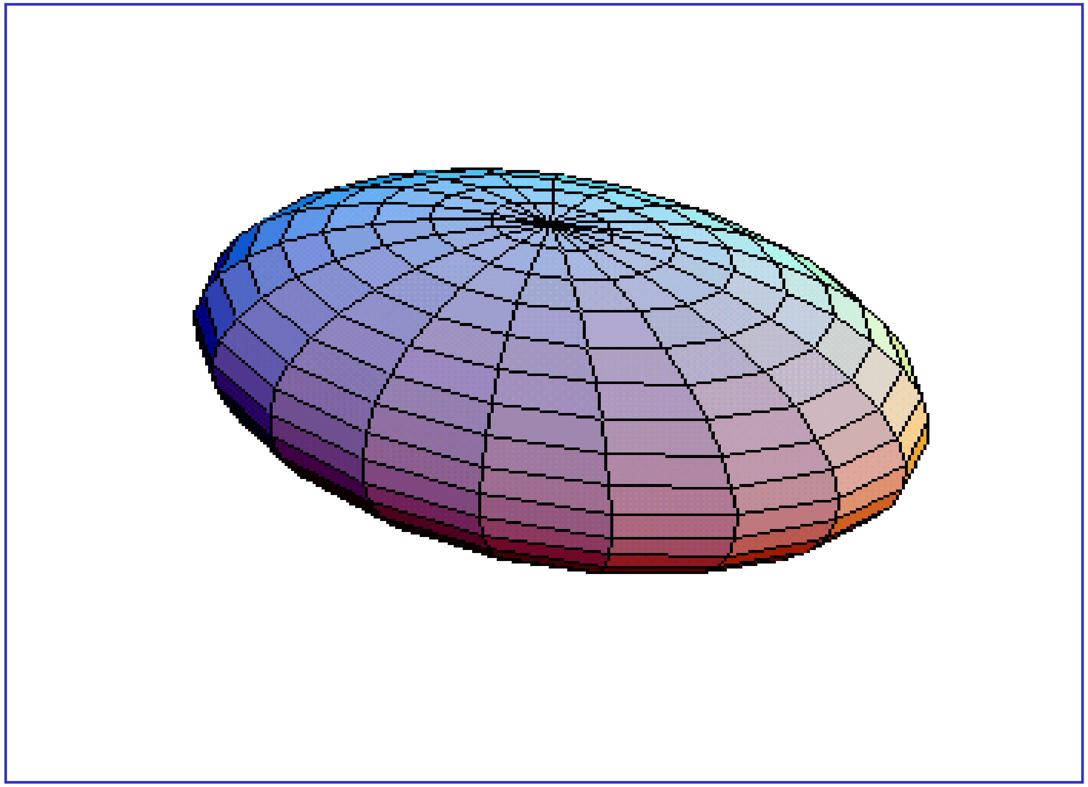


(8) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



（9）椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

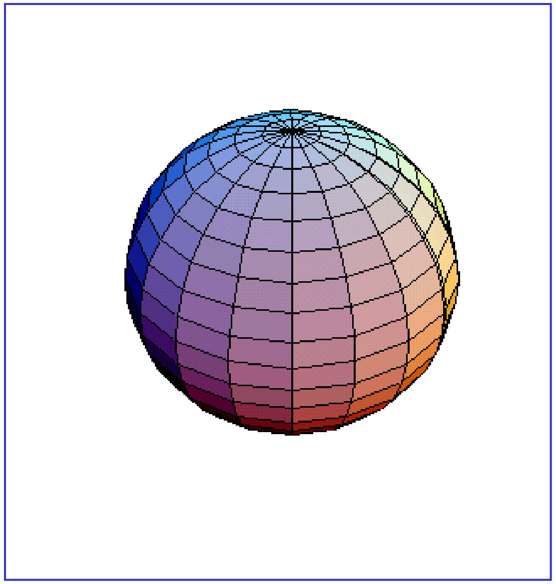


当 $a=b=c$ 时为球面.

其它二次曲面:

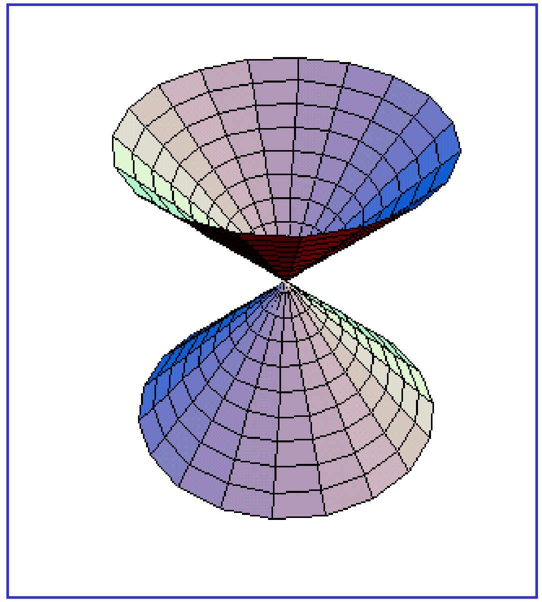
当 $a = b = c$ 时为球面.

其它二次曲面:



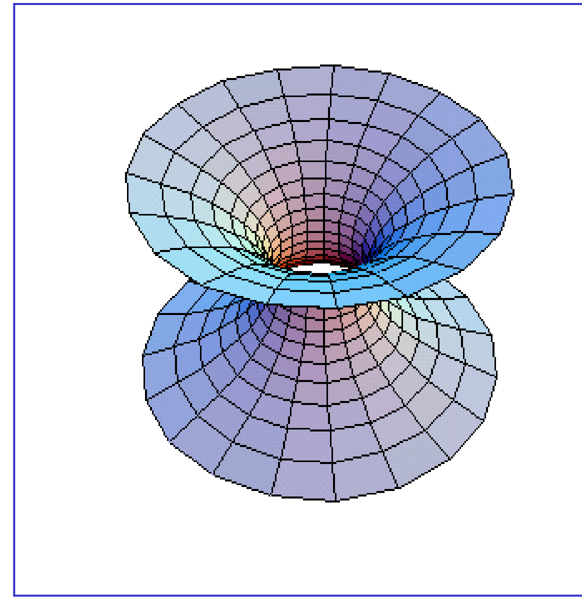
（10）球面

$$x^2+y^2+z^2=1$$



（11）圆锥面

$$x^2+y^2=z^2$$



（12）旋转双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

二、直纹面

定义： 空间中由一条直线(称为母线)经过某种运动规律而生成的空间曲面叫**直纹面.**

平面是直纹曲面；

柱面和锥面都是直纹曲面；

椭球面不是直纹曲面；

双叶双曲面不是直纹曲面；

椭圆抛物面不是直纹曲面.

设单参数直线族 L_λ 的方程为

$$L_\lambda: \begin{cases} A_1(\lambda)x + B_1(\lambda)y + C_1(\lambda)z + D_1(\lambda) = 0 \\ A_2(\lambda)x + B_2(\lambda)y + C_2(\lambda)z + D_2(\lambda) = 0 \end{cases}$$

或为: $L_\lambda: \dfrac{x - x_0(\lambda)}{l(\lambda)} = \dfrac{y - y_0(\lambda)}{m(\lambda)} = \dfrac{z - z_0(\lambda)}{n(\lambda)}.$

消参数，得直纹面方程：$F(x, y, z) = 0$

例 1 求直线族L_λ：$\frac{x-\lambda^2}{1}=\frac{y-\lambda}{2}=\frac{z-\lambda}{3}$ 所构成的曲面。

解: 由直线族方程$\begin{cases}\frac{x-\lambda^2}{1}=\frac{y-\lambda}{2}\\ \frac{y-\lambda}{2}=\frac{z-\lambda}{3}\end{cases}$

消去参数λ得曲面方程为：$x+y-z=(3y-2z)^2$