江 西 理 工 大 学 期 中 考 试 卷

试卷编号：

20　　— 20　　学年第 一 学期	考试性质（正考、补考或其它）：[正考]
课程名称：____高等数学（一）______	考试方式(开卷、闭卷)：[闭卷]
考试时间:__________ 年_____月_____日	试卷类别(A、B)：[**A**] 共 五 大题

温 馨 提 示

请考生自觉遵守考试纪律，争做文明诚信的大学生。如有违犯考试纪律，将严格按照《江西理工大学学生违纪处分暂行规定》处理。

班级____________________ **学号** ____________ **姓名**_______________________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、选择题（请将正确答案编码填入下表中，每小题 3 分，共 15 分）

1. 当 $x \to 0$ 时， $f(x)=1-\cos[\ln(1+x^2)]$ 是 x 的 (D)阶无穷小.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=$ (A).

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

3. $f(x)$ 在 x_0 连续，则(D)必在 x_0 连续.

（A）$\dfrac{f(x)}{\sin x}$　　（B）$\tan x\cdot f(x)$　　（C）$\dfrac{1}{f(x)}$　　（D）$|f(x)|$

4. 设 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$，则根据微分形式的不变性，有 $df(x)=$ (B).

（A）$e^{\frac{1}{x}}dx$　　（B）$e^{\frac{1}{x}}d\dfrac{1}{x}$　　（C）$\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'d\dfrac{1}{x}$　　（D）$\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'\dfrac{1}{x}dx$

5. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导， 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　C　).

（A） $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在　（B）不连续　（C）不可微　（D）以上都不是

二、填空题（请将正确答案填写在以下相应的横线上，每空 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1 \\ 0, & |x|=1 \\ -1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，则 $f(g(x))=$ _sgn$x$__.

2. 已知 $f'(x_0)=-2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0)}=\underline{\dfrac{1}{4}}$.

3. 设曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=\sin x$ 在原点相切，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)=$ __2__.

4. $f(x)=x^x$，则 $f'(x)=\underline{x^x[\ln x+1]}$.

5. 函数 $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $(0,1)$ 内满足拉格朗日中值定理的 $\xi=\underline{\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{12}}$.

三、计算题（请写出求解过程，6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x+3}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{2}\cdot 2x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3$　　2 分

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3$　　4 分

$=e^{\frac{1}{2}}\cdot 1=e^{\frac{1}{2}}$　　6 分

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}$　　3 分

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x+(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(\ln x+1)+1}=\dfrac{1}{2}$　　6 分

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^4)}{1-\cos(1-\cos x)}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^4}{1-\cos\dfrac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^4}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2}$　　每个等式 2 分，共 4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^4}{\dfrac{x^4}{8}}=-8$　　6 分

4. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln t\\ y=t^3\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解　$\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}\right)=\dfrac{3t^2}{\dfrac{1}{t}}=3t^3$，　　3 分

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dx}(3t^3)=\left(\dfrac{d(3t^3)}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}\right)=\dfrac{9t^2}{\dfrac{1}{t}}=9t^3$.　　6 分

5．设由方程$e^{x+y}-xy=0$确定隐函数$y=y(x)$，求dy.

解　方程$e^{x+y}-xy=0$两端对变量x求导得

$$e^{x+y}(1+y')-(y+xy')=0 \qquad 2分$$

解得
$$y'=\frac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x} \qquad 4分$$

故
$$dy=y'dx=\frac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}dx \qquad 6分$$

6. 设$y=\sin^4 x-\cos^4 x$，求$y^{(n)}$.

解　$y=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)=-\cos 2x$　　3分

$$y^{(n)}=-(\cos 2x)^{(n)}=-2^n\cos(2x+\frac{n\pi}{2}) \qquad 6分$$

四、应用题

1. 落在平静水面上的石头，产生同心波纹，若最外一圈波的半径增大率总是$6m/s$问在$2s$末扰动水面面积的增大率为多少？.（8分）

解　设水面面积为A，同心波纹最外一圈波的半径为r，

则$r'=6m/s$，$r=6t$，$A=\pi r^2$.　　4分

因为$A'=2\pi r\cdot r'=2\pi\cdot 6t\cdot r'$，　　7分

所以$A'\big|_{t=2}=2\pi\cdot 6t\cdot r'\big|_{t=2}=144\pi(m^2/s)$.　　8分

2. 试描绘曲线 $y=\dfrac{1}{1+x}e^{-x}$ 的简图.　（10 分）

解　（1）该函数的定义域为 $D=\{x\mid x\in R,\ x\neq -1\}$.

(2) $y'=-\dfrac{x+2}{(1+x)^2}e^{-x}$，驻点为 $x=-2$，

$y''=-\dfrac{x^2+4x+5}{(1+x)^3}e^{-x}$，无拐点.

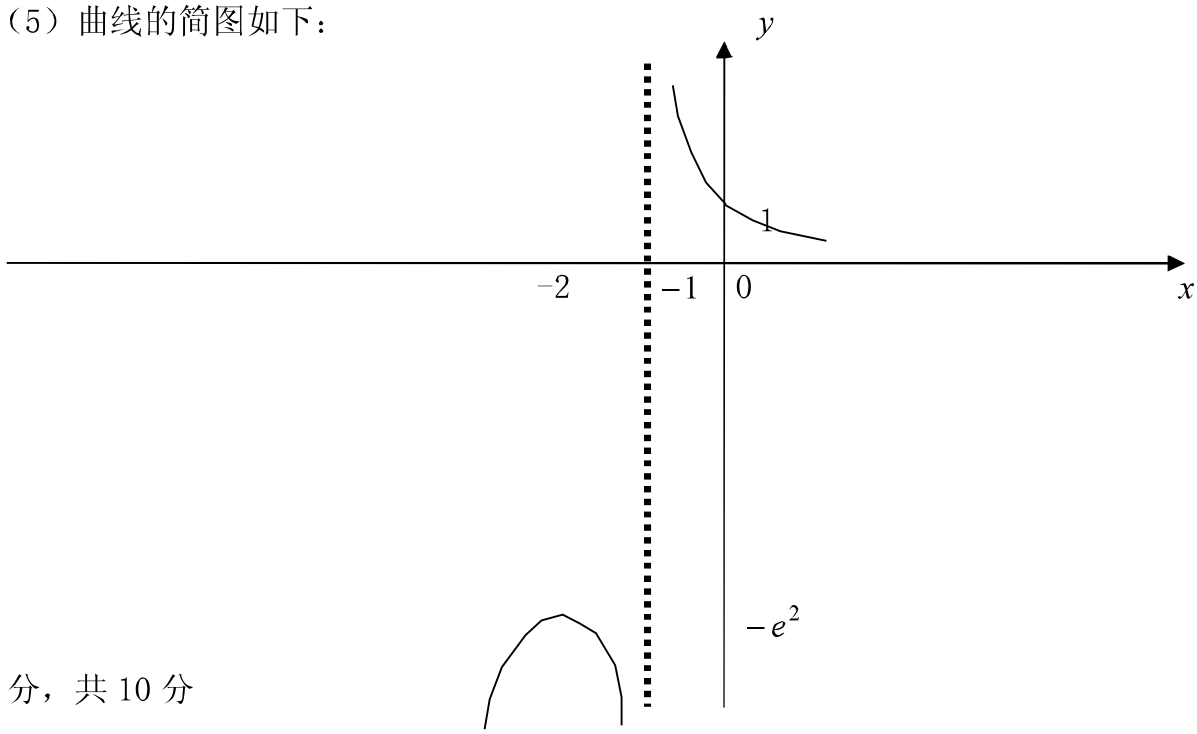
(3) 列表讨论函数 $y=\dfrac{1}{1+x}e^{-x}$ 的单调性与对应曲线的凹凸性

x	$(-\infty,\ -2)$	-2	$(-2,\ -1)$	$(-1,\ +\infty)$
y'	+	0	−	−
y''	−	−	−	+
y		极大值 $f(-2)=-e^2$		

（4）因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x}e^{-x}=0$，所以 $y=0$ 为一条水平渐近线，

因为 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{1+x}e^{-x}=\infty$，所以 $x=-1$ 为一条垂直渐近线.

（5）曲线的简图如下：



每步 2 分，共 10 分

五、证明题

1．设$x>0$，常数$a>e$，证明：$(a+x)^a<a^{a+x}$．(8 分)

证明　把不等式$(a+x)^a<a^{a+x}$变形为$a\ln(a+x)<(a+x)\ln a$．

令$F(x)=a\ln(a+x)-(a+x)\ln a$，$x>0$，常数$a>e$，　　1 分

则$F(0)=0$，且$F'(x)=\dfrac{a}{x+a}-\ln a$，$F''(x)=-\dfrac{a}{(x+a)^2}<0$，

故$F'(x)$是单调减函数．　　5 分

又$F'0)=1-\ln a<0$，所以当$x>0$时，$F'(x)<0$，因此当$x>0$时，

$F(x)$为单调减函数．　　7 分

又$F(0)=0$，所以当$x>0$时，$F(x)<0$，即$(a+x)^a<a^{a+x}$．　　8 分

2．设$f(x)$在$[0,\ 1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)$，$f'(1)=1$，求证：存在$\xi\in(0,\ 1)$使$f''(\xi)=2$．(8 分)

证明　令$F(x)=f(x)-x^2$，　　2 分

则$F(0)=f(0)$，$F(1)=f(1)-1$，且$F(x)$满足拉格朗日中值定理的条件，

由拉格朗日中值定理，$\exists C\in(0,\ 1)$使$F'(C)=\dfrac{F(1)-F(0)}{1-0}=-1$．　　5 分

又$F'(x)=f'(x)-2x$，$F'(1)=f'(1)-2=-1$，

且$F'(x)$在$[C,\ 1]$上满足罗尔定理的条件，根据罗尔定理，$\exists\xi\in(C,\ 1)$，

使$F''(\xi)=0$，即$f''(x)-2=0$，也即存在$\xi\in(0,\ 1)$使$f''(\xi)=2$．　　8 分