第二十八讲 行列式的计算

一、内容回顾

二、典型例题

一、内容回顾

二、三阶行列式 $\xrightarrow[\text{逆序数}]{\text{推广}}$ n 阶行列式

（对角线法则）

（较灵活）

定义　　性质　　展开　　其他方法

（利用代数余子式）

n 阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

其中 $p_1 p_2 \ldots p_n$ 为自然数 $1,2,\ldots,n$ 的一个排列；t 为这个排列的逆序数；$\sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 表示对 $1,2,\ldots,n$ 的所有排列取和.

n阶行列式的性质:

1)行列式与它的转置行列式相等**,**即$D = D^T$.

2)互换行列式的两行(列),行列式变号.

3)如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

4)行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数k,等于用数k乘此行列式.

5)行列式中某一行 (列) 的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

6)行列式中如果有两行 (列) 元素成比例,则此行列式为零.

7)若行列式的某一列(行) 的元素都是两数之和,则此行列式等于两个行列式之和.

8)把行列式的某一列(行) 的各元素乘以同一数,然后加到另一列(行) 对应的元素上去,行列式的值不变.

行列式按行（列）展开

1）余子式与代数余子式

在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}；记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij}叫做元素a_{ij}的代数余子式.

2）关于代数余子式的重要性质

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当 i = j; \\ 0, 当 i \neq j. \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当 i = j; \\ 0, 当 i \neq j. \end{cases}$$

其中 $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 当 i = j; \\ 0, 当 i \neq j. \end{cases}$$

3） 行列式按行（列）展开法则

定理　行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

二、典 型 例 题

1 用定义计算（证明）

例 用行列式定义计算

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解： 设 D_5 中第1,2,3,4,5行的元素分别为 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, a_{3p_3}, a_{4p_4}, a_{5p_5}$，那么，由 D_5 中第1,2,3,4,5行可能的非零元素分别得到

$$p_1 = 2,3; \qquad p_2 = 1,2,3,4,5;$$

$$p_3 = 1,2,3,4,5; \quad p_4 = 2,3; \quad p_5 = 2,3.$$

因为 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 在上述可能取的代码中，一个5元排列也不能组成，故 $D_5 = 0$.

评注 本例是从一般项入手，将行标按标准顺序排列，讨论列标的所有可能取到的值，并注意每一项的符号，这是用定义计算行列式的一般方法.

注意 如果一个n阶行列式中等于零的元素比 n^2-n 还多，则此行列式必等于零.

２　利用范德蒙行列式计算

利用范德蒙行列式计算行列式，应根据范德蒙行列式的特点，将所给行列式化为范德蒙行列式，然后根据范德蒙行列式计算出结果。

例　计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

解：D_n中各行元素分别是一个数的不同方幂,方幂次数自左至右按递升次序排列，但不是从0变到$n-1$,而是由1递升至n.若提取各行的公因子，则方幂次数便从0增至$n-1$，于是得到

$$D_n = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$$D_n = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \cdots & 1^{n-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

上面 范德蒙行列式，由

范德蒙行

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j).$$

D

$=$

$(n-2)\cdots(4-2)(3-2)$

$\cdots$

$$[n-(n-1)] = n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!$$

评注　本题所给行列式各行（列）都是某元素的不同方幂，而其方幂次数或其排列与范德蒙行列式不完全相同，需要利用行列式的性质（如提取公因子、调换各行（列）的次序等）将此行列式化成范德蒙行列式.

用化三角行列式计算

３　用化三角形行列式计算

例　计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解： 将第$2,3,\cdots,n+1$列都加到第一列，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & x & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

提取第一列的公因子，得

$$D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

将第1列的$(-a_1)$倍加到第2列，将第1列的$(-a_2)$倍加到第3列，$\cdots$，将第1列的$(-a_n)$倍加到最后一列，得

$$D_{n+1}=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

评注 本题利用行列式的性质，采用“化零”的方法，逐步将所给行列式化为三角形行列式．化零时一般尽量选含有 1 的行（列）及含零较多的行（列）；若没有 1，则可适当选取便于化零的数，或利用行列式性质将某行（列）中的某数化为1；若所给行列式中元素间具有某些特点，则应充分利用这些特点，应用行列式性质，以达到化为三角形行列式之目的．

4　用降阶法计算

例　计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

解： 将 D_4 的第2、3、4行都加到第1行，并从第1行中提取公因子 $a+b+c+d$，得

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\b&a&d&c\\c&d&a&b\\d&c&b&a\end{vmatrix},$$

再将第2、3、4列都减去第1列，得

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\b&a-b&d-b&c-b\\c&d-c&a-c&b-c\\d&c-d&b-d&a-d\end{vmatrix},$$

按第1行展开，得

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}.$$

把上面右端行列式第2行加到第1行，再从第1行中提取公因子$a-b-c+d$，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix},$$

再将第2列减去第1列，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ d-c & a-d & b-c\\ c-d & b-c & a-d\end{vmatrix},$$

按第1行展开，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix}a-d & b-c\\ b-c & a-d\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\bullet[(a-d)^2-(b-c)^2]$$

$$=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet(a+b-c-d)(a-b+c-d)$$

评注　本题是利用行列式的性质将所给行列式的某行（列）化成只含有一个非零元素，然后按此行（列）展开，每展开一次，行列式的阶数可降低 1阶，如此继续进行，直到行列式能直接计算出来为止（一般展开成二阶行列式）．这种方法对阶数不高的数字行列式比较适用.

5 升阶法

例 计算n阶行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1+m & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+m & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+m \end{vmatrix}.$$

解： 添加一行一列得

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+m & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+m & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+m \end{vmatrix}.$$

再将第一行乘以(−1)分别加到第二行至最后一行得

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & m & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & m & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & m \end{vmatrix}.$$

当$m=0$时知$\Delta=0.$

当$m\neq 0$时，将第i列的$\frac{1}{m}$倍加至第一列得

$$\Delta=\left(1+\frac{1}{m}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\right)m^n.$$

评注：升阶法适用于某一行（列）有一个相同字母的行列式.

6 用拆成行列式之和（积）计算

例 证明

$$\begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \sin(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\gamma) \\ \sin(\beta+\alpha) & \sin 2\beta & \sin(\beta+\gamma) \\ \sin(\gamma+\alpha) & \sin(\gamma+\beta) & \sin 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

证：

$$左边 = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

7　用递推法计算

例　计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}.$$

解： 依第n列把D_n拆成两个行列式之和

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & a \\ a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & 0 \\ a & a+x_2 & \cdots & a & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & 0 \\ a & a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}.$$

右端的第一个行列式，将第n列的(-1)倍分别加到第$1,2,\cdots,n-1$列，右端的第二个行列式按第n列展开，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+x_n D_{n-1},$$

从而$D_n=x_1x_2\cdots x_{n-1}a+x_n D_{n-1}$.

由此递推，得

$$D_{n-1} = x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a + x_{n-1} D_{n-2}, \text{于是}$$

$$\begin{aligned} D_n = {} & x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a x_n \\ & + x_n x_{n-1} D_{n-2}. \end{aligned}$$

如此继续下去，可得

$$\begin{aligned} D_n = {} & x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a x_n + \cdots \\ & + x_1 x_2 a x_4 \cdots x_n + x_n x_{n-1} \cdots x_3 D_2 \end{aligned}$$

$$= x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a x_n$$

$$+ \cdots + x_1 x_2 a x_4 \cdots x_n$$

$$+ x_n x_{n-1} \cdots x_3 (a x_1 + a x_2 + x_1 x_2)$$

$$= x_1 x_2 \cdots x_n + a(x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + \cdots$$

$$+ x_1 x_3 \cdots x_n + x_2 x_3 \cdots x_n).$$

当$x_1 x_2 \cdots x_n \neq 0$时，还可改写成

$$D_n = x_1 x_2 \cdots x_n [1 + a(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n})].$$

例 计算n阶三对角行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix}.$$

提示：$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}$，再划为

$$(\Delta_n - k\Delta_{n-1}) = l(\Delta_{n-1} - k\Delta_{n-2}),$$

其中$\begin{cases} k + l = a \\ kl = bc \end{cases}$.

评注： 本题是利用行列式的性质把所给的n阶行列式D_n用同样形式的$n-1$阶行列式表示出来，建立了D_n与$n-1$阶行列式D_{n-1}之间的递推关系.有时，还可以把给定的n阶行列式D_n用同样形式的比$n-1$阶更低阶的行列式表示，建立比$n-1$阶行列式更低阶行列式之间的递推关系.

8　用数学归纳法

例9　证明

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \cos n\alpha.$$

证 对阶数n用数学归纳法

因为 $D_1 = \cos\alpha,$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & \cos 2\alpha \end{vmatrix} = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha,$$

所以,当$n = 1, n = 2$时,结论成立.

假设对阶数小于n的行列式结论成立,下证对于阶数等于n的行列式也成立.现将 D_n 按最后一行展开,得

$$D_n = 2\cos\alpha\, D_{n-1} - D_{n-2}.$$

由归纳假设， $D_{n-1}=\cos(n-1)\alpha,$

$$D_{n-2}=\cos(n-2)\alpha,$$

$$\begin{aligned} D_n &= 2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha-\cos(n-2)\alpha \\ &= [\cos n\alpha+\cos(n-2)\alpha]-\cos(n-2)\alpha \\ &= \cos n\alpha; \end{aligned}$$

所以对一切自然数n结论成立.

评注： 为了将 D_n 展开成能用其同型的 D_{n-1}, D_{n-2} 表示,本例必须按第 n 行(或第 n 列)展开,不能按第1行(或第1列)展开,否则所得的低阶行列式不是与 D_n 同型的行列式.

一般来讲,当行列式已告诉其结果,而要我们证明是与自然数有关的结论时,可考虑用数学归纳法来证明.如果未告诉结果,也可先猜想其结果,然后用数学归纳法证明其猜想结果成立.

小 结

计算行列式的方法比较灵活，同一行列式可以有多种计算方法；有的行列式计算需要几种方法综合应用．在计算时，首先要仔细考察行列式在构造上的特点，利用行列式的性质对它进行变换后，再考察它是否能用常用的几种方法．

9　利用克拉默法则

例10　证明平面上三条不同的直线

$$ax+by+c=0, bx+cy+a=0, cx+ay+b=0$$

相交于一点的充分必要条件是$a+b+c=0$.

证： 必要性　设所给三条直线交于一点$M(x_0, y_0)$,

则$x=x_0, y=y_0, z=1$可视为齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax+by+cz=0, \\ bx+cy+az=0, \\ cx+ay+bz=0 \end{cases}$$

的非零解.从而有系数行列式.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (-\frac{1}{2})(a+b+c)\bullet[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] = 0.$$

因为三条直线互不相同,所以a,b,c也不全相同,故

$$a+b+c=0.$$

充分性　如果$a+b+c=0$,将方程组

$$\begin{cases} ax+by=-c, \\ bx+cy=-a, \\ cx+ay=-b \end{cases} \qquad (1)$$

的第一、二两个方程加到第三个方程，得

$$\begin{cases} ax+by=-c, \\ bx+cy=-a, \\ \quad 0=0. \end{cases} \qquad (2)$$

下证此方程组（2）有唯一解.

如果$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=ac-b^2=0$，则$ac=b^2\geq 0$。由

$b=-(a+c)$得$ac=[-(a+c)]^2=a^2+2ac+c^2$，于是

$ac=-(a^2+c^2)\leq 0$，从而有$ac=0$.

不妨设$a=0$,由$b^2=ac$得$b=0$.再由$a+b+c=0$得$c=0$，与题设矛盾.故

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0.$$

由克莱姆法则知，方程组(2)有唯一解.从而知方程组(1)有唯一解，即三条不同直线交于一点.

思考题

设n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

求第一行各元素的代数余子式之和

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}.$$

思考题解答

解　第一行各元素的代数余子式之和可以表示成

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$