

模拟考试（一）

一 选择题. (每题 3 分, 15 分)

(1) 复数 $\left| \frac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)} \right| = (\quad)$.

- (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 4

(2) 设 $f(z) = (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y^2)$, 那么().

- (A) 仅在直线 $y = \frac{1}{2}$ 上可导 (B) 仅在直线 $y = \frac{1}{2}$ 上解析
(C) 仅在 $(0,0)$ 点解析 (D) 仅在 $(0,0)$ 点可导

(3) $\int_1^{1+i} ze^z dz = (\quad)$.

- (A) ie^{1-i} (B) ie^i (C) ie^{1+i} (D) i

(4) 若 $e^{z_1+2\pi i} = e^{z_2}$, 则().

- (A) $z_1 = z_2$ (B) $z_1 = z_2 - 2ik\pi$
(C) $z_1 = z_2 + ik\pi$ (D) $z_1 = z_2 + 2k\pi$

(5) $z=1$ 是函数 $\sin \frac{1}{z-1}$ 的().

- (A) 本性奇点 (B) 可去奇点
(C) 一级极点 (D) 非孤立奇点

二 填空题. (每题 3 分, 15 分)

1. 设 $f(z) = z^5 + 2z$, 则 $f'(z) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 函数 $f(z) = \sin z$ 在 $z=0$ 处泰勒展开式中 z^3 项的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$

3. $\ln(-3i) = \underline{\hspace{2cm}}$

4. $\oint_{|z|=3} \frac{z-1}{(z-4)^2} dz = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 函数 $f(t) = \cos t$ 的拉普拉斯变换为 $\underline{\hspace{2cm}}$

三 计算题. (70 分)

1. 计算积分 $\oint_C \frac{z-2}{z^2-z} dz$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z-1| = \frac{1}{2}$. (7 分)

2. 计算积分 $\oint_C \frac{\sin z}{(z-2)^3} dz$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z|=5$. (7 分)

3. 求函数 $\frac{2z}{z^2+1}$ 在有限奇点处的留数. (7 分)

4. 求函数 $z^2 \cos \frac{1}{z}$ 在有限奇点处的留数. (7 分)

5. 试将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $1 < |z-2| < +\infty$ 内展开成洛朗级数. (10 分)

6. 设 $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$. 且 $f(0) = i$, 求共扼调和函数 $f(z)$. (10 分)

7. 若函数 $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 是复平面上的解析函数, 求实数 a, b, c, d 的值.
(12 分)

8. 利用拉普拉斯变换解常微分方程初值问题:

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t, \quad y(0) = 0 = y'(0) = 0. \quad (10 \text{ 分})$$