第二单元　导数与微分测试题详细解答

一、填空题

1、$\underline{-1}$　　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}\cdot(-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2}f'(3)=-1$

2、$\underline{f'(0)}$　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

3、$\underline{\pi\ln\pi+\pi}$　　$y'=\pi^x\ln\pi+\pi x^{\pi-1}$　$\therefore y'|_{x=1}=\pi\ln\pi+\pi$

4、$\underline{f'(1+\sin x)\cdot\cos x}$，$\underline{f''(1+\sin x)\cdot\cos^2 x-f'(1+\sin x)\cdot\sin x}$

$y'=f'(1+\sin x)\cdot\cos x$，$y''=f''(1+\sin x)\cdot\cos^2 x-f'(1+\sin x)\cdot\sin x$

5、$\underline{(\ln(e-1),e-1)}$　　弦的斜率$k=\dfrac{e-1}{1-0}=e-1$

$\therefore y'=(e^x)=e^x=e-1\ \Rightarrow x=\ln(e-1)$，当$x=\ln(e-1)$时，$y=e-1$。

6、$\underline{-\dfrac{dx}{\arctan(1-x)\cdot[1+(1-x)^2]}}$

$$dy=\frac{1}{\arctan(1-x)}d[\arctan(1-x)]=\frac{1}{\arctan(1-x)}\cdot\frac{1}{1+(1-x)^2}d(1-x)$$

$$=-\frac{dx}{\arctan(1-x)\cdot[1+(1-x)^2]}$$

7、$\underline{4x^3\sin 2x^4}$，$\underline{2x^2\sin 2x^4}$　　$\dfrac{dy}{dx}=2\sin x^4\cdot\cos x^4\cdot 4x^3=4x^3\sin 2x^4$

$$\frac{dy}{dx^2}=\frac{dy}{2xdx}=2x^2\sin 2x^4$$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$是二阶导数符号，$\dfrac{dy}{dx^2}$不是二阶导数，是二个微分的商

8、$\underline{e^{2t}+2te^{2t}}$　　$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\dfrac{1}{x})^{2tx}=te^{2t}$　$\therefore f'(t)=e^{2t}+2te^{2t}$

9、$\underline{(1,2)}$　　$\because y'=2x$，由$2x_0=2\ \Rightarrow x_0=1$，$y_0=1^2+1=2$

$\therefore y=x^2+1$在点$(1,2)$处的切线斜率为 2

10、$\underline{\ \ 2\ \ }$　　$\because y'=e^x+xe^x$，$y''=e^x+e^x+xe^x$

$\therefore y''(0)=e^0+e^0=2$

11、$\underline{-\dfrac{e^{x+y}-y\sin(xy)}{e^{x+y}-x\sin(xy)}}$　　方程两边对x求导得　$e^{x+y}(1+y')-\sin(xy)(y+xy')=0$

解得 $y'=-\dfrac{e^{x+y}-y\sin(xy)}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$。

12、$\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$ 由参数式求导公式得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{-\sin t}{2t}$，

再对 x 求导，由复合函数求导法得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(y_x')=\frac{(y_x')_t'}{x_t'}=-\frac{1}{2}\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\cdot\frac{1}{2t}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}。$$

二、选择题

1、 选（D） 由 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ y=x^2 \end{cases}\Rightarrow$ 交点为 $(1,1)$ ，$k_1=(\dfrac{1}{x})'|_{x=1}=-1$， $k_2(x^2)'|_{x=1}=2$

$$\therefore \tan\varphi=|\tan(\varphi_2-\varphi_1)|=|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}|=3$$

3、 选（C） $f'(x)=e^{\tan^k x}\cdot k\tan^{k-1}x\cdot\sec^2 x$

由 $f'(\dfrac{\pi}{4})=e$ 得 $e\cdot k\cdot 2=e\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$

4、 选（A） 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-1-x)-f(-1)}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(-1-x)-f(-1)}{-x}\cdot(-\frac{1}{2})=f'(-1)\cdot(-\frac{1}{2})=-2\Rightarrow f'(-1)=4$$

$\therefore$ 切线方程为：$y-2=4(x+1)$ 即 $y=4x+6$

5、 选（D） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^2(x+\Delta x)-f^2(x)}{\Delta x}=[f^2(x)]'=2f(x)\cdot f'(x)$

6、 选（B） $f''(x)=\{[f(x)]^2\}'=2f(x)\cdot f'(x)=2f^3(x)$

$$f'''(x)=[2f^3(x)]'=2\times 3f^2(x)\cdot f'(x)=2\times 3f^4(x)$$

设 $f^{(n)}(x)=n!f^{n+1}(x)$，则 $f^{(n+1)}(x)=(n+1)!f^n(x)\cdot f'(x)=(n+1)!f^{n+2}(x)$

$\therefore f^{(n)}(x)=n!f^{n+1}(x)$

7、 选（C） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}2\cdot\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=2f'(x_0)$

又 $\because f'(x)=(x^2)'=2x$，$\therefore 2f'(x_0)=4x_0$

8、 选（C） $\because f(x)$ 在 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 点的左导数 $f_-'(x_0)$ 和右导数 $f_+'(x_0)$ 都存在且相等。

9、 选（D）

$\because f'(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-99)+x(x-2)\cdots(x-99)+x(x-1)(x-3)\cdots(x-99)$

$+\cdots+x(x-1)(x-2)\cdots(x-98)$

$\therefore \boldsymbol{f'(0)=(0-1)(0-2)\cdots(0-99)=(-1)^{99}\cdot 99!=-99!}$

另解：由定义，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$

$=(-1)^{99}\cdot 99!=-99!$

10、 选（B） $\because [f(-x^2)]'=f'(-x^2)\cdot(-x^2)'=-2f'(-x^2)$

$\therefore dy=-2xf'(-x^2)dx$

11、选(C) 由导数定义知

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$，

再由极限的保号性知 $\exists\delta>0,$ 当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$，

从而 当 $x\in(-\delta,0)(x\in(0,\delta))$ 时，$f(x)-f(0)<0(>0)$，因此 C 成立，应选 C。

12、选(C) 由函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，知函数在 $x=0$ 处连续

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)=b$，所以 $b=0$。

又 $f_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0,f_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{ax}{x}=a$，
所以 $a=0$。应选 C。

三、计算解答

1、计算下列各题

（1）$dy=e^{\sin^2\frac{1}{x}}d(\sin^2\dfrac{1}{x})=e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot 2\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}\cdot(-\dfrac{1}{x^2})dx=-\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}e^{\sin^2\frac{1}{x}}dx$

（2）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2}{\frac{1}{t}}=3t^3$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{9t^2}{\frac{1}{t}}=9t^3$，$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2}|_{t=1}=9$

（3）两边对 x 求导：$1+\dfrac{1}{1+y^2}\cdot y'=y'\Rightarrow y'=y^{-2}+1$

$y''=-2y^{-3}\cdot y'=-2y^{-3}\cdot(y^{-2}+1)=-\dfrac{2}{y^3}(\dfrac{1}{y^2}+1)$

（4）$\because y=\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$\therefore y' = \cos 2x = \sin(2x + \frac{\pi}{2}) \quad y'' = 2\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = 2\sin(2x + 2\cdot\frac{\pi}{2})$

设 $y^{(n)} = 2^{n-1}\sin(2x + n\cdot\frac{\pi}{2})$

则 $y^{(n+1)} = 2^n \cos(2x + n\cdot\frac{\pi}{2}) = 2^n \sin(2x + (n+1)\frac{\pi}{2})$

$\therefore y^{(50)} = 2^{49}\sin(2x + 50\cdot\frac{\pi}{2}) = -2^{49}\sin 2x$

（5）两边取对数：$\ln y = x[\ln x - \ln(1+x)]$

两边求导：$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln x - \ln(1+x) + 1 - \frac{x}{1+x}$

$\therefore y' = (\frac{x}{1+x})^x[\ln x - \ln(1+x) + 1 - \frac{x}{1+x}]$

（6）利用定义：

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+2005) = 2005!$$

（7）$\because f'(x) = \varphi(x) + (x-a)\varphi'(x) \quad \therefore f'(a) = \varphi(a)$

又 $f''(a) = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)-\varphi(a)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a}[\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} + \varphi'(x)] = \varphi'(a) + \varphi'(a) = 2\varphi'(a)$

［注：因 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处是否二阶可导不知，故只能用定义求。］

（8）$\lim_{x\to 1^+}\frac{d}{dx}f(\cos\sqrt{x-1}) = \lim_{x\to 1^+}[f'(\cos\sqrt{x-1})\cdot(-\sin\sqrt{x-1})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}]$

$= \lim_{x\to 1^+}f'(\cos\sqrt{x-1})\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{-\sin\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}} = f'(1)\cdot(-\frac{1}{2}) = -1$

2、易知当 $x \neq 0$ 时，$f(x)$ 均可导，要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

则 $f'_+(0) = f'_-(0)$，且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。即 $\lim_{x\to 0^-}f(x) = \lim_{x\to 0^+}f(x) = f(0)$

而 $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-}f(x) = b+a+2 \\ \lim_{x\to 0^+}f(x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow a+b+2 = 0$

又 $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(1+\sin x)+a+2-b-a-2}{x} = b$

$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1-b-a-2}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{x} = a$

由 $\begin{cases} a = b \\ a+b+2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1\end{cases}$

3、证明：设交点坐标为(x_0,y_0)，则$x_0^2-y_0^2=a \quad x_0y_0=b$

对$x^2-y^2=a$两边求导：$2x-2y\cdot y'=0\Rightarrow y'=\dfrac{x}{y}$

$\therefore$曲线$x^2-y^2=a$在(x_0,y_0)处切线斜率$k_1=y'|_{x=x_0}=\dfrac{x_0}{y_0}$

又由$x\ y\ =b\Rightarrow y=\dfrac{b}{x}\Rightarrow y'=-\dfrac{b}{x^2}$

$\therefore$曲线$xy=b$在(x_0,y_0)处切线斜率$k_2=y'|_{x=x_0}=-\dfrac{b}{x_0^2}$

又$\because$ $k_1k_2=\dfrac{x_0}{y_0}\cdot(-\dfrac{b}{x_0^2})=-\dfrac{b}{x_0y_0}=-1$

$\therefore$两切线相互垂直。

4、设t分钟后气球上升了x米，则 $\tan\alpha=\dfrac{x}{500}$

两边对t求导：$\sec^2\alpha\cdot\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{1}{500}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{140}{500}=\dfrac{7}{25}$

$\therefore\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{7}{25}\cdot\cos^2\alpha$

$\because$当$x=500$m时， $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore$当$x=500$m时， $\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{7}{25}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{50}$（弧度/分）

5、证明：$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)\cdot f(h)-f(x+0)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)\cdot f(h)-f(x)\cdot f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}f(x)\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

$=f(x)\cdot f'(0)=f(x)$

6、解：由于$y'=3x^2+6x$，于是所求切线斜率为

$k_1=3x^2+6x|_{x=-1}=-3$，

从而所求切线方程为$y+3=-3(x+1)$ ， 即 $3x+y+6=0$

又法线斜率为 $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{1}{3}$

所以所求法线方程为$y+3=\dfrac{1}{3}(x+1)$ ，即 $3y-x+8=0$