第三章　微分中值定理与导数应用单元测验题

（带*号的第一次可不做）

一、填空题

1、$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x =$__________。

2、函数 $f(x)=2x-\cos x$ 在区间______________单调增。

3、函数 $f(x)=4+8x^3-3x^4$ 的极大值是____________。

4、曲线 $y=x^4-6x^2+3x$ 在区间__________是凸的。

5*、函数 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的 $2m+1$ 阶泰勒多项式是_________。

6、曲线 $y=xe^{-3x}$ 的拐点坐标是_________。

7、若 $f(x)$ 在含 x_0 的 (a,b)（其中 $a<b$）内恒有二阶负的导数，且_______，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的最大值。

8、$y=x^3+2x+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有__________个零点。

9、$\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=$_________。

10、$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})=$__________。

11、曲线 $y=e^{-x^2}$ 的上凸区间是___________。

12、函数 $y=e^x-x-1$ 的单调增区间是___________。

二、单项选择

1*、函数 $f(x)$ 有连续二阶导数且 $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=-2,$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=$（　　）

（A）不存在 ；　（B）0　；　（C）-1　；　（D）-2。

2、设 $f'(x)=(x-1)(2x+1), x\in(-\infty,+\infty),$ 则在 $(\frac{1}{2},1)$ 内曲线 $f(x)$（　　　）

（A）单调增凹的；　　　　（B）单调减凹的；

（C）单调增凸的；　　　　（D）单调减凸的。

3*、$f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$x_0\in(a,b), f'(x_0)=f''(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处（　　）

（A）取得极大值；　　　　（B）取得极小值；

（C）一定有拐点 $(x_0,f(x_0))$；　　（D）可能取得极值，也可能有拐点。

4、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则Ⅰ：在 (a,b) 内 $f'(x)\equiv 0$ 与Ⅱ：在 (a,b) 上

$f(x)\equiv f(a)$之间关系是（　　　）

（A）Ⅰ是Ⅱ的充分但非必要条件；　　（B）Ⅰ是Ⅱ的必要但非充分条件；
（C）Ⅰ是Ⅱ的充分必要条件；　　（D）Ⅰ不是Ⅱ的充分条件，也不是必要条件。

5*、设$f(x)$、$g(x)$在$\left[a,b\right]$连续可导，$f(x)g(x)\neq 0$，且$f'(x)g(x)<f(x)g'(x)$，则当$a<x<b$时，则有（　　　）

（A）$f(x)g(x)<f(a)g(a)$；　　（B）$f(x)g(x)<f(b)g(b)$；

（C）$\dfrac{f(x)}{g(x)}<\dfrac{f(a)}{g(a)}$；　　（D）$\dfrac{g(x)}{f(x)}>\dfrac{g(a)}{f(a)}$。

6、方程$x^3-3x+1=0$在区间$(-\infty,+\infty)$内（　　　）

（A）无实根；　　（B）有唯一实根；
（C）有两个实根；　　（D）有三个实根。

7*、已知$f(x)$在$x=0$的某个邻域内连续，且$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点$x=0$处$f(x)$（　　　）

（A）不可导；　　（B）可导，且$f'(0)\neq 0$；

（C）取得极大值；　　（D）取得极小值。

8、设$f(x)$有二阶连续导数，且$f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则（　　　）

（A）$f(0)$是$f(x)$的极大值；　　（B）$f(0)$是$f(x)$的极小值；

（C）$(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点；　　（D）$f(0)$不是$f(x)$的极值点。

9、设a,b为方程$f(x)=0$的二根，$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则$f'(x)$在(a,b)内（　　　）

（A）只有一实根；　（B）至少有一实根；　（C）没有实根；　（D）至少有 2 个实根。

10、在区间$[-1,1]$上满足罗尔定理条件的函数是（　　　）

（A）$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$；　　（B）$f(x)=|x|$；

（C）$f(x)=1-x^2$；　　（D）$f(x)=x^2-2x-1$。

11、函数$f(x)$在区间(a,b)内可导，则在(a,b)内$f'(x)>0$是函数$f(x)$在(a,b)内单调增加的（　　　）

（A）必要但非充分条件；　　（B）充分但非必要条件；

（C）充分必要条件；　　　　　　（C）无关条件。

12、设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在（　　）

（A）x_0 的某个邻域单调增加；　　　（B）x_0 的某个邻域单调减少；

（C）x_0 处取得极小值；　　　　　　（D）x_0 处取得极大值。

三、计算解答

1、计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$；　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^2\ln(1+x)}$；　　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\ln(1-x)\right]$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$；　　　(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan(ax)}{\ln\tan(bx)}$。

2、证明以下不等式

(1)、设 $b>a>e$，证明 $a^b>b^a$。

(2)、当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有不等式 $\tan x+2\sin x>3x$。

3、已知 $y=x^3\sin x$，利用泰勒公式求 $y^{(6)}(0)$。

4、试确定常数 a 与 n 的一组数，使得当 $x\to 0$ 时，ax^n 与 $\ln(1-x^3)+x^3$ 为等价无穷小。

5、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，试证存在 $\xi(a<\xi<b)$，使

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^3 & a^3 \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\xi^2\left[3f(\xi)+\xi f'(\xi)\right]。(注\begin{vmatrix} x & y \\ s & t\end{vmatrix}=xt-ys)$$

6、作半径为 $\boldsymbol{r}$ 的球的外切正圆锥，问此圆锥的高为何值时，其体积 $\boldsymbol{V}$ 最小，并求出该体积最小值。

7*、若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有三阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，设 $F(x)=x^3f(x)$，试证：在 $(0,1)$ 内至少存在一个 ξ，使 $F'''(\xi)=0$。