第七章习题及解答

7.1 求证在无界理想介质内沿任意方向 $\boldsymbol{e}_n$（$\boldsymbol{e}_n$ 为单位矢量）传播的平面波可写成 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$。

解 $\boldsymbol{E}_m$ 为常矢量。在直角坐标中

$$\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_x\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y\cos\beta+\boldsymbol{e}_z\cos\gamma$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{r}&=(\boldsymbol{e}_x\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y\cos\beta+\boldsymbol{e}_z\cos\gamma)\cdot(\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z)\\&=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\end{aligned}$$

则

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}=\boldsymbol{E}_m e^{j[\beta(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)-\omega t]}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{e}_x\nabla^2\boldsymbol{E}_x+\boldsymbol{e}_y\nabla^2\boldsymbol{E}_y+\boldsymbol{e}_z\nabla^2\boldsymbol{E}_z\\&=\boldsymbol{E}_m(j\beta)^2 e^{j[\beta(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)-\omega t]}=(j\beta)^2\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

而

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\boldsymbol{E}_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\beta(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)-\omega t]}\}=-\omega^2\boldsymbol{E}$$

故

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=(j\beta)^2\boldsymbol{E}+\mu\varepsilon\omega^2\boldsymbol{E}=(j\omega\sqrt{\mu\varepsilon})2\boldsymbol{E}+\mu\varepsilon\omega^2\boldsymbol{E}=0$$

可见，已知的 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_m e^{j(\beta e_n\cdot r-\omega t)}$ 满足波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$$

故 $\boldsymbol{E}$ 表示沿 $\boldsymbol{e}_n$ 方向传播的平面波。

7.2 试证明：任何椭圆极化波均可分解为两个旋向相反的圆极化波。

解 表征沿+z 方向传播的椭圆极化波的电场可表示为

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_x E_x+\boldsymbol{e}_y jE_y)e^{-j\beta z}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$$

式中取

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{1}{2}[\boldsymbol{e}_x(E_x+E_y)+\boldsymbol{e}_y j(E_x+E_y)]e^{-j\beta z}$$

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{1}{2}[\boldsymbol{e}_x(E_x-E_y)-\boldsymbol{e}_y j(E_x-E_y)]e^{-j\beta z}$$

显然，$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 分别表示沿+z 方向传播的左旋圆极化波和右旋圆极化波。

7.3 在自由空间中，已知电场 $\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_y 10^3\sin(\omega t-\beta z)\ \mathrm{V/m}$，试求磁场强度 $\boldsymbol{H}(z,t)$。

解 以余弦为基准，重新写出已知的电场表示式

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_y 10^3\cos(\omega t-\beta z-\frac{\pi}{2})\ \mathrm{V/m}$$

这是一个沿+z 方向传播的均匀平面波的电场，其初相角为 -90°。与之相伴的磁场为

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}(z,t)=\frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y 10^3\cos\left(\omega t-\beta z-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-\boldsymbol{e}_x\frac{10^3}{120\pi}\cos\left(\omega t-\beta z-\frac{\pi}{2}\right)=-\boldsymbol{e}_x 2\cdot 65\sin(\omega t-\beta z)\ \text{A/m}$$

7.4 均匀平面波的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的振幅为 $\frac{1}{3\pi}\text{A/m}$，以相位常数 30rad/m 在空气中沿 $-\boldsymbol{e}_z$ 方向传播。当 t=0 和 z=0 时，若 $\boldsymbol{H}$ 的取向为 $-\boldsymbol{e}_y$，试写出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的表示式，并求出波的频率和波长。

解 以余弦为基准，按题意先写出磁场表示式

$$\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_y\frac{1}{3\pi}\cos(\omega t+\beta z)\ \text{A/m}$$

与之相伴的电场为

$$\boldsymbol{E}=\eta_0[\boldsymbol{H}\times(-\boldsymbol{e}_z)]=120\pi[-\boldsymbol{e}_y\frac{1}{3\pi}\cos(\omega t+\beta z)\times(-\boldsymbol{e}_z)]$$
$$=\boldsymbol{e}_x 40\cos(\omega t+\beta z)\ \text{V/m}$$

由 $\beta=30\ \text{rad/m}$ 得波长 λ 和频率 f 分别为

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=0.21\text{m}$$
$$f=\frac{v_p}{\lambda}=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\times10^8}{0.21}\text{Hz}=1.43\times10^9\ \text{Hz}$$
$$\omega=2\pi f=2\pi\times1.43\times10^9\ \text{rad/s}=9\times10^9\ \text{rad/s}$$

则磁场和电场分别为

$$\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_y\frac{1}{3\pi}\cos(9\times10^9 t+30z)\ \text{A/m}$$
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x 40\cos(9\times10^9 t+30z)V/\text{m}$$

7.5 一个在空气中沿 $+e_y$ 方向传播的均匀平面波，其磁场强度的瞬时值表示式为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_z 4\times10^{-6}\cos(10^7\pi t-\beta y+\frac{\pi}{4})\ \text{A}/\text{m}$$

（1）求 β 和在 $t=3\text{ms}$ 时，$H_z=0$ 的位置；（2）写出 $\boldsymbol{E}$ 的瞬时表示式。

解（1）

$$\beta=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=10^7\pi\times\frac{1}{3\times10^8}\text{rad}/\text{m}=\frac{\pi}{30}\text{rad}/\text{m}=0.105\ \text{rad}/\text{m}$$

在 t=3ms 时，欲使 H_z=0，则要求

$$10^7\pi\times3\times10^{-3}-\frac{\pi}{30}y+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\pm n\pi, n=0,1,2,\cdots$$

若取 n=0，解得 y=899992.m。

考虑到波长 $\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=60m$，故

$$y=29999\times\frac{\lambda}{2}+0.75\times\frac{\lambda}{2}=29999\times\frac{\lambda}{2}+22.5$$

因此，t=3ms 时，H_z=0 的位置为

$$y = 22.5 \pm n\frac{\lambda}{2}\,\mathrm{m}$$

（2）电场的瞬时表示式为

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{e}_y)\eta_0$$

$$= \left[\boldsymbol{e}_z 4\times10^{-6}\cos(10^7\pi t - \beta y + \frac{\pi}{4})\times\boldsymbol{e}_y\right]\times120\pi$$

$$= -\boldsymbol{e}_x 1.508\times10^{-3}\cos(10^7\pi t - 0.105y + \frac{\pi}{4})\,\mathrm{V/m}$$

7.6 在自由空间中，某一电磁波的波长为 0.2m。当该电磁波进入某理想介质后，波长变为 0.09m。设 $\mu_r = 1$，试求理想介质的相对介电常数 ε_r 以及在该介质中的波速。

解 在自由空间，波的相速 $v_{p0} = c = 3\times10^8\,\mathrm{m/s}$，故波的频率为

$$f = \frac{v_{p0}}{\lambda_0} = \frac{3\times10^8}{0.2}\,\mathrm{Hz} = 1.5\times10^9\,\mathrm{Hz}$$

在理想介质中，波长 $\lambda = 0.09\,\mathrm{m}$，故波的相速为

$$v_p = f\lambda = 1.5\times10^9\times0.09 = 1.35\times10^8\,\mathrm{m/s}$$

而

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

故

$$\varepsilon_r = \left(\frac{c}{v_p}\right)^2 = \left(\frac{3\times10^8}{1.35\times10^8}\right)^2 = 4.94$$

7.7 海水的电导率 $\gamma = 4\,\mathrm{S/m}$，相对介电常数 $\varepsilon_r = 81$。求频率为 10kHz、100kHz、1MHz、10MHz、100MHz、1GHz 的电磁波在海水中的波长、衰减系数和波阻抗。

解 先判定海水在各频率下的属性

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} = \frac{\gamma}{2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0} = \frac{4}{2\pi f\times81\varepsilon_0} = \frac{8.8\times10^8}{f}$$

可见，当 $f \le 10^7\,\mathrm{Hz}$ 时，满足 $\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} >> 1$，海水可视为良导体。此时

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\pi f\mu_0\gamma}$$

$$\eta_c \approx (1+j)\sqrt{\frac{\pi f\mu_0}{\gamma}}$$

f=10kHz 时

$$\alpha = \sqrt{\pi\times10\times10^3\times4\pi\times10^{-7}\times4} = 0.126\pi = 0.396\,\mathrm{Np/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0.126\pi} = 15.87\,\mathrm{m}$$

$$\eta_c = (1+j)\sqrt{\frac{\pi\times10\times10^3\times4\pi\times10^{-7}}{4}}\Omega = 0.099(1+j)\Omega$$

f=100kHz 时

$$\alpha=\sqrt{\pi\times 100\times 10^{3}\times 4\pi\times 10^{-7}\times 4}=1.26\pi\ \text{Np/m}$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{1.26\pi}=5\ \text{m}$$

$$\eta_c=(1+j)\sqrt{\frac{\pi\times 100\times 10^{3}\times 4\pi\times 10^{-7}}{4}}=0.314(1+j)\Omega$$

f=1MHz 时

$$\alpha=\sqrt{\pi\times 10^{6}\times 4\pi\times 10^{-7}\times 4}=3.96\text{Np/m}$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{3.96\pi}=1.587\text{m}$$

$$\eta_c=(1+j)\sqrt{\frac{\pi\times 10^{6}\times 4\pi\times 10^{-7}}{4}}=0.99(1+j)\Omega$$

f=10MHz 时

$$\alpha=\sqrt{\pi\times 10\times 10^{6}\times 4\pi\times 10^{-7}\times 4}=12.6\text{Np/m}$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{12.6}=0.5\text{m}$$

$$\eta_c=(1+j)\sqrt{\frac{\pi\times 10\times 10^{6}\times 4\pi\times 10^{-7}}{4}}=3.14(1+j)\Omega$$

当f=100MHz 以上时，$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}>>1$ 不再满足，海水属一般有损耗媒质。此时，

$$\alpha=2\pi f\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}{2}\left[\sqrt{1+(\frac{\gamma}{2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0})^2}-1\right]}$$

$$\beta=2\pi f\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}{2}\left[\sqrt{1+(\frac{\gamma}{2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0})^2}+1\right]}$$

$$\eta_0=\frac{\sqrt{\mu_0/(\varepsilon_r\varepsilon_0)}}{\sqrt{1-j\gamma/(2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0)}}$$

f=100MHz 时

$$\alpha=37.57\text{Np/m}$$

$$\beta=42.1\text{rad/m}$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=0.149\text{m}$$

$$\eta_c=\frac{42}{\sqrt{1-j8.9}}\Omega=14.05e^{j41.8^\circ}\Omega$$

f=1GHz 时

$$\alpha = 69.12\mathrm{Np/m}$$
$$\beta = 203.58\mathrm{rad/m}$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 0.03\mathrm{m}$$
$$\eta_0 = \frac{42}{\sqrt{1 - j0.89}}\Omega = 36.5e^{j20.8^\circ}\Omega$$

7.8 求证：电磁波在导电媒质内传播时场量的衰减约为 55dB/λ。

证明 在一定频率范围内将该导电媒质视为良导体，此时

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\pi f \mu \gamma}$$

故场量的衰减因子为

$$e^{-\alpha z} = e^{-\beta z} = e^{-\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\lambda} = e^{-2\pi} \approx 0.002$$

即场量的振幅经过 $z = \lambda$ 的距离后衰减到起始值的 0.002。用分贝表示。

$$20\lg\left[\frac{E_m(z)}{E_m(0)}\right] = 20\lg e^{-\alpha\lambda} = 20\lg e^{-2\pi} = (-2\pi) \times 20\lg e \approx -55\mathrm{dB}$$

7.9 在自由空间中，一列平面波的相位常数 $\beta_0 = 0.524\,\mathrm{rad/m}$，当该平面波进入到理想电介质后，其相位常数变为 $\beta = 1.81\mathrm{rad/m}$。设 $\mu_r = 1$，求理想电介质的 ε_r 和波在电介质中的传播速度。

解 自由空间的相位常数

$\beta_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，故

$$\omega = \frac{\beta_0}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 0.524 \times 3 \times 10^8 = 1.572 \times 10^8\,\mathrm{rad/s}$$

在理想电介质中，相位常数 $\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0} = 1.81\mathrm{rad/s}$，故

$$\varepsilon_r = \frac{1.81^2}{\omega^2\mu_0\varepsilon_0} = 11.93$$

电介质中的波速则为

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\times10^8}{\sqrt{11.93}}\mathrm{m/s} = 0.87\times10^8\,\mathrm{m/s}$$

7.10 在自由空间中，某均匀平面波的波长为 12cm；当该平面波进入到某无损耗媒质时，波长变为 8cm，且已知此时的 $|\boldsymbol{E}| = 50\,\mathrm{V/m}$，$|\boldsymbol{H}| = 0.1\,\mathrm{A/m}$。求该均匀平面波的频率以及无损耗媒质的 μ_r、ε_r。

解 自由空间中，波的相速 $v_p = c = 3\times10^8\,\mathrm{m/s}$，故波的频率为

$$f = \frac{v_{p0}}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3\times10^8}{12\times10^{-2}} = 2.5\times10^9\,\mathrm{Hz}$$

在无损耗媒质中，波的相速为

$$v_p = f\lambda = 2.5\times10^9\times8\times10^{-2} = 2\times10^8\,\mathrm{m/s}$$

故

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}} = 2\times10^8 \tag{1}$$

无损耗媒质中的波阻抗为

$$\eta = \frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{H}|} = \sqrt{\frac{\mu_r\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}} = \frac{50}{0.1} = 500\Omega \tag{2}$$

联解式（1）和式（2），得

$$\mu_r = 1.99, \quad \varepsilon_r = 1.13$$

7.11 一个频率为 f=3GHz，$\boldsymbol{e}_y$ 方向极化的均匀平面波在 $\varepsilon_r = 2.5$，损耗正切 $\tan\delta = \dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon} = 10^{-2}$ 的非磁性媒质中沿 $(+\boldsymbol{e}_x)$ 方向传播。求：（1）波的振幅衰减一半时，传播的距离；（2）媒质的本征阻抗，波的波长和相速；（3）设在 x=0 处的 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_y 50\sin(6\pi\times10^9 t + \dfrac{\pi}{3})\,\mathrm{V/m}$，写出 $\boldsymbol{H}(x,t)$的表示式。

解 （1）

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} = \frac{\gamma}{2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0} = \frac{\gamma}{2\pi\times3\times10^9\times2.5\times\dfrac{1}{36\pi}\times10^{-9}} = \frac{18\gamma}{3\times2.5} = 10^{-2}$$

故

$$\gamma = \frac{3\times2.5\times10^{-2}}{18} = 0.417\times10^{-2}\,\mathrm{S/m}$$

而

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} = 10^{-2} >> 1$$

该媒质在 f=3GHz 时可视为弱导电媒质，故衰减常数为

$$\alpha \approx \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{0.417\times10^{-2}}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{2.5\varepsilon_0}} = 0.497\,\mathrm{Np/m}$$

由 $e^{-\alpha x} = \dfrac{1}{2}$ 得

$$x = \frac{1}{\alpha}\ln2 = \frac{1}{0.497}\ln2 = 1.395\,\mathrm{m}$$

（2）对于弱导电媒质，本征阻抗为

$$\eta_c \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 + j\frac{\gamma}{2\omega\varepsilon}\right) = \sqrt{\frac{\mu_0}{2.5\varepsilon_0}}\left(1 + j\frac{10^{-2}}{2}\right) = 238.44(1 + j0.005)$$

$$= 238.44e^{j0.286^\circ} = 238.44e^{j0.0016\pi}\Omega$$

而相位常数

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi f\sqrt{2.5\mu_0\varepsilon_0}$$

$$= 2\pi\times3\times10^9\times\frac{\sqrt{2.5}}{3\times10^8} = 31.6\pi\,\mathrm{rad/m}$$

故波长和相速分别为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{31.6\pi} = 0.063\mathrm{m}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi\times3\times10^9}{31.6\pi} = 1.89\times10^8\,\mathrm{m/s}$$

（3）在 x=0 处，

$$\boldsymbol{E}(0,t)=\boldsymbol{e}_y 50\sin(6\pi\times10^9 t+\frac{\pi}{3})\,\mathrm{V/m}$$

故

$$\boldsymbol{E}(x,t)=\boldsymbol{e}_y 50e^{-0.497x}\sin(6\pi\times10^9 t-31.6\pi x+\frac{\pi}{3})\,\mathrm{V/m}$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(x)&=\frac{1}{|\eta_c|}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{E}(x)e^{-j\varphi}\\&=\frac{1}{238.44}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y 50e^{-0.497x}e^{-j31.6\pi x}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j0.0016\pi}\\&=\boldsymbol{e}_z 0.21e^{-0.497x}e^{-j31.6\pi x}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j0.0016\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{A/m}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(x,t)&=\mathrm{Re}[\boldsymbol{H}(x)e^{j\omega t}]\\&=\boldsymbol{e}_z 0.21e^{-0.497x}\sin(6\pi\times10^9 t-31.6\pi x+\frac{\pi}{3}-0.0016\pi)\,\mathrm{A/m}\end{aligned}$$

7.12 有一线极化的均匀平面波在海水($\varepsilon_r=80,\mu_r=1,\gamma=4S/m$)中沿$+y$方向传播，其磁场强度在$y$=0处为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_x 0.1\sin(10^{10}\pi t-\pi/3)\,\mathrm{A/m}$$

(1)求衰减常数、相位常数、本征阻抗、相速、波长及透入深度;(2)求出$\boldsymbol{H}$的振幅为0.01A/m时的位置;(3)写出$\boldsymbol{E}(y,t)$和$\boldsymbol{H}(y,t)$的表示式。

解 (1)

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}=\frac{4}{10^{10}\pi\times80\varepsilon_0}=\frac{4\times36\pi}{10^{10}\pi\times80\times10^{-9}}=0.18$$

可见，在角频率$\omega=10^{10}\pi$时，海水为一般有损耗媒质，故

$$\begin{aligned}\alpha&=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon})^2}-1\right]}\\&=10^{10}\pi\sqrt{\frac{80\mu_0\varepsilon_0}{2}[\sqrt{1+0.18^2}-1]}=83.9\ \mathrm{Np/m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta&=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon})^2}+1\right]}\\&=10^{10}\pi\sqrt{\frac{80\mu_0\varepsilon_0}{2}[\sqrt{1+0.18^2}+1]}\approx300\pi\ \mathrm{rad/m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_c&=\frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1-j\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}}}=\frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{80\varepsilon_0}}}{\sqrt{1-j0.18}}\\&=\frac{42.15}{1.008e^{-j0.028\pi}}=41.82e^{j0.028\pi}\ \Omega\end{aligned}$$

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{10^{10}\pi}{300\pi}=0.333\times10^{8}\text{m/s}$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{300\pi}=6.67\times10^{-3}\text{m}$$

$$\delta_c=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{83.9}=11.92\times10^{-3}\text{m}$$

（2）由 $0.01=0.1e^{-\alpha y}$ 即 $e^{-\alpha y}=0.1$ 得

$$y=\frac{1}{\alpha}\ln 10=\frac{1}{83.9}\times2.303\text{m}=27.4\times10^{-3}\text{m}$$

（3）
$$\boldsymbol{H}(y,t)=\boldsymbol{e}_x0.1e^{-83.9y}\sin(10^{10}\pi t-300\pi y-\frac{\pi}{3})\text{A/m}$$

其复数形式为

$$\boldsymbol{H}(y)=\boldsymbol{e}_x0.1e^{-83.9y}e^{-j300\pi y}e^{-j\frac{\pi}{3}}\text{A/m}$$

故电场的复数表示式为

$$\boldsymbol{E}(y)=\eta_c\boldsymbol{H}(y)\times\boldsymbol{e}_y=41.82e^{j0.028\pi}\times0.1e^{-83.9y}\times e^{-j(300\pi y+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y$$

$$=\boldsymbol{e}_z4.182e^{-83.9y}e^{-j(300\pi y+\frac{\pi}{3}-0.028\pi+\frac{\pi}{2})}\ \text{V/m}$$

则

$$\boldsymbol{E}(y,t)=\text{Re}[\boldsymbol{E}(y)e^{j\omega t}]$$

$$=\boldsymbol{e}_z4.182e^{-83.9y}\sin(10^{10}\pi t-300\pi y-\frac{\pi}{3}+0.028\pi)\text{V/m}$$

7.13 在自由空间（$z<0$）内沿$+z$方向传播的均匀平面波，垂直入射到 $z=0$ 处的导体平面上。导体的电导率 $\gamma=61.7\,\text{MS/m}$，$\mu_r=1$。自由空间 $\boldsymbol{E}$ 波的频率 $f=1.5$MHz，振幅为1V/m；在分界面($z=0$)处，$\boldsymbol{E}$ 由下式给出

$$\boldsymbol{E}(0,t)=\boldsymbol{e}_y\sin2\pi ft$$

对于 $z>0$ 的区域，求 $\boldsymbol{H}_2(z,t)$。

解
$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}=\frac{61.7\times10^{6}}{2\pi\times1.5\times10^{6}\varepsilon_0}=704.4\times10^{9}$$

可见，在 $f=1.5$MHz 的频率该导体可视为良导体。故

$$\alpha\approx\sqrt{\pi f\mu\gamma}=\sqrt{\pi(1.5\times10^{6})\times4\pi\times10^{-7}\times61.7\times10^{6}}=1.91\times10^{4}\text{Np/m}$$

$$\beta\approx\sqrt{\pi f\mu\gamma}=1.91\times10^{4}\text{rad/m}$$

$$\eta_c\approx\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}e^{j45^\circ}=\sqrt{\frac{2\pi\times1.5\times10^{6}\times4\pi\times10^{-7}}{61.7\times10^{6}}}e^{j45^\circ}$$

$$=4.38\times10^{-4}e^{j45^\circ}\Omega=(3.1+j3.1)\times10^{-4}\Omega$$

分界面上的透射系数为

$$\tau=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}=\frac{2\eta_c}{\eta_c+\eta_0}=\frac{2\times4.38\times10^{-4}e^{j45^\circ}}{(3.1+j3.1)10^{-4}+377}=2.32\times10^{-6}e^{j45^\circ}$$

入射波电场的复数表示式可写为

$$\boldsymbol{E}_1(z)=\boldsymbol{e}_ye^{-j\beta_0z}e^{-j\frac{\pi}{2}}\text{V/m}$$

则 $z>0$ 区域的透射波电场的复数形式为

$$\boldsymbol{E}_2(z)=\boldsymbol{e}_y\tau e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$=\boldsymbol{e}_y 2.32\times10^{-6}e^{j45^\circ}e^{-1.91\times10^4 z}e^{-j1.91\times10^4 z}e^{-j\frac{\pi}{2}}\mathrm{V/m}$$

与之相伴的磁场为

$$\boldsymbol{H}_2(z)=\frac{1}{\eta_c}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_2(z)$$

$$=\frac{1}{4.38\times10^{-4}e^{j45^\circ}}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y 2.32\times10^{-6}e^{-1.91\times10^4 z}e^{-j(1.91\times10^4 z-45^\circ+\frac{\pi}{2})}$$

$$=-\boldsymbol{e}_x 0.51\times10^{-2}e^{-1.91\times10^4 z}e^{-j(1.91\times10^4 z+\frac{\pi}{2})}\mathrm{A/m}$$

则

$$\boldsymbol{H}_2(z,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{H}_2(z)e^{j\omega t}]$$

$$=-\boldsymbol{e}_x 0.51\times10^{-2}e^{-1.91\times10^4 z}\sin(2\pi\times1.5\times10^6 t-1.91\times10^4 z)\mathrm{A/m}$$

7.14 一圆极化波垂直入射到一介质板上，入射波电场为

$$\boldsymbol{E}=E_m(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y j)e^{-j\beta z}$$

求反射波与透射波的电场，它们的极化情况又如何？

解 设媒质 1 为空气，其本征阻抗为η_0；介质板的本征阻抗为η_2。故分界面上的反射系数和透射系数分别为

$$\rho=\frac{\eta_2-\eta_0}{\eta_2+\eta_0}$$

$$\tau=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_0}$$

式中

$$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}},\ \eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

都是实数，故ρ,τ也是实数。

反射波的电场为

$$\boldsymbol{E}^-=\rho E_m(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y j)e^{j\beta z}$$

可见，反射波的电场的两个分量的振幅仍相等，相位关系与入射波相比没有变化，故反射波仍然是圆极化波。但波的传播方向变为-z 方向，故反射波也变为右旋圆极化波。而入射波是沿+z 方向传播的左旋圆极化波。

透射波的电场为

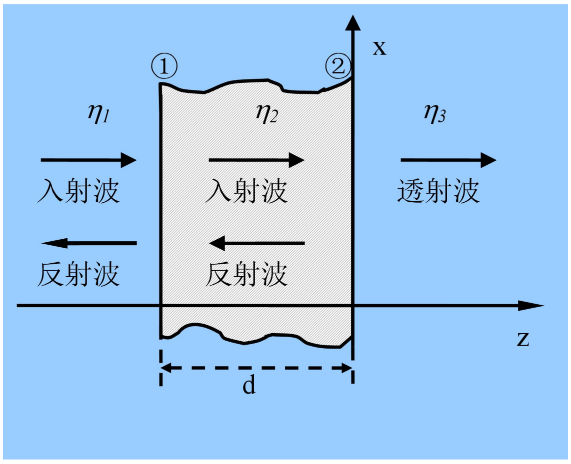
$$\boldsymbol{E}_2=\tau E_m(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y j)e^{-j\beta_2 z}$$

式中，$\beta_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}$ 是媒质 2 中的相位常数。可见，透射波是沿+z 方向传播的左旋圆极化波。

7.15 均匀平面波的电场振幅$E_m^+=100e^{j0^\circ}\ \mathrm{V/m}$，从空气中垂直入射到无损耗的介质平面上（介质的$\mu_2=\mu_0,\varepsilon_2=4\varepsilon_0,\gamma_2=0$），求反射波和透射波的电场振幅。

解
$$\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi\Omega$$
$$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}}=60\pi\Omega$$
反射系数为
$$\rho=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=\frac{60\pi-120\pi}{60\pi+120\pi}=-\frac{1}{3}$$
透射系数为
$$\tau=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}=\frac{2\times 60\pi}{60\pi+120\pi}=\frac{2}{3}$$
故反射波的电场振幅为
$$E_m^-=|\rho|E_m^+=\frac{100}{3}=33.3\text{V/m}$$
透射波的电场振幅为
$$E_{m2}=\tau E_m^+=\frac{2\times 100}{3}=66.6\text{V/m}$$

7.16 最简单的天线罩是单层介质板。若已知介质板的介电常数 $\varepsilon=2.8\varepsilon_0$，问介质板的厚度应为多少方可使频率为 3GHz 的电磁波垂直入射到介质板面时没有反射。当频率分别为 3.1GHz 及 2.9GHz 时，反射增大多少？



题 7.16 图

解 天线罩示意图如题 7.16 图所示。介质板的本征阻抗为 η_2，其左、右两侧媒质的本征阻抗分别为 η_1 和 η_3。设均匀平面波从左侧垂直入射到介质板，此问题就成了均匀平面波对多层媒质的垂直入射问题。

设媒质 1 中的入射波电场只有 x 分量，则在题 7.16 图所示坐标下，入射波电场可表示为
$$\boldsymbol{H}_1^+=\frac{1}{\eta_1}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_1^+=\boldsymbol{e}_y\frac{E_{m1}^+}{\eta_1}e^{-j\beta_1(z+d)}$$
而媒质 1 中的反射波电场为
$$\boldsymbol{E}_1^-=\boldsymbol{e}_xE_{m1}^-e^{j\beta_1(z+d)}$$
与之相伴的磁场为

$$\boldsymbol{H}_1^- = \frac{1}{\eta_1}(-\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{E}_1^-) = -\boldsymbol{e}_y \frac{E_{m1}^-}{\eta_1} e^{j\beta_1(z+d)}$$

故媒质 1 中的总电场和总磁场分别为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 &= \boldsymbol{E}_1^+ + \boldsymbol{E}_1^- = \boldsymbol{e}_x E_{m1}^+ e^{-j\beta_1(z+d)} + \boldsymbol{e}_x E_{m1}^- e^{j\beta_1(z+d)} \\ \boldsymbol{H}_1 &= \boldsymbol{H}_1^+ + \boldsymbol{H}_1^- = \boldsymbol{e}_y \frac{E_{m1}^+}{\eta_1} e^{-j\beta_1(z+d)} - \boldsymbol{e}_y \frac{E_{m1}^-}{\eta_1} e^{j\beta_1(z+d)} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

同样，可写出媒质 2 中的总电场和总磁场

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_2 &= \boldsymbol{E}_2^+ + \boldsymbol{E}_2^- = \boldsymbol{e}_x \boldsymbol{E}_{m2}^+ e^{-j\beta_2 z} + \boldsymbol{e}_x E_{m1}^- e^{j\beta_2} \\ \boldsymbol{H}_2 &= \boldsymbol{H}_2^+ + \boldsymbol{H}_2^- = \boldsymbol{e}_y \frac{E_{m2}^+}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z} - \boldsymbol{e}_y \frac{E_{m2}^-}{\eta_2} e^{j\beta_2 z} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

媒质 3 中只有透射波

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_3 &= \boldsymbol{e}_x E_{m3}^+ e^{-j\beta_3 z} \\ \boldsymbol{H}_3 &= \boldsymbol{e}_y \frac{E_{m3}^+}{\eta_3} e^{-j\beta_3 z} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

在式（1)、(2)、(3）中，通常已知入射波电场振幅 E_{m1}^+，而 E_{m2}^- 、 E_{m2}^+ 、 E_{m2}^- 和 E_{m3}^+ 为待求量。利用两个分界面①和②上的四个边界条件方程即可确定它们。

在分界面②处，即 z=0 处，应有 $E_{2x} = E_{3x}, H_{2y} = H_{3y}$ 。由式（2）和（3）得

$$\left.\begin{aligned} & E_{m2}^+ + E_{m2}^- = E_{m3}^+ \\ & \frac{1}{\eta_2}(E_{m2}^+ - E_{m2}^-) = \frac{1}{\eta_3} E_{m3}^+ \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

由式（4）可得出分界面②上的反射系数

$$\rho_2 = \frac{E_{m2}^-}{E_{m2}^+} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \tag{5}$$

在分界面①处，即 z=-d 处，应有 $E_{1x} = E_{2x}$， $H_{1y} = H_{2y}$ 。由式（1）和（2）得

$$\left.\begin{aligned} & E_{m1}^+ + E_{m1}^- = E_{m2}^+ e^{j\beta_2 d} + E_{m2}^- e^{-j\beta_2 d} = E_{m2}^+ (e^{j\beta_2 d} + \rho_2 e^{-j\beta_2 d}) \\ & \frac{1}{\eta_1}(E_{m1}^+ - E_{m1}^-) = \frac{1}{\eta_2}(E_{m2}^+ e^{j\beta_2 d} - E_{m2}^- e^{-j\beta_2 d}) = \frac{E_{m2}^+}{\eta_2}(e^{j\beta_2 d} - \rho_2 e^{-j\beta_2 d}) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

将分界面①上的总电场与总磁场之比定义为等效波阻抗（或称总场波阻抗），由式（1）得

$$\eta_{ef} = \frac{E_{m1}^+ + E_{m1}^-}{\dfrac{1}{\eta_1}(E_{m1}^+ - E_{m1}^-)} = \eta_1 \frac{E_{m1}^+ + E_{m1}^-}{E_{m1}^+ - E_{m1}^-} \tag{7}$$

将式（6）代入式（7）得

$$\eta_{ef} = \eta_2 \frac{e^{j\beta_2 d} + \rho_2 e^{-j\beta_2 d}}{e^{j\beta_2 d} - \rho_2 e^{-j\beta_2 d}} \tag{8}$$

将式（5）代入式（8），并应用欧拉公式，得

$$\eta_{ef} = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \tan\beta_2 d}{\eta_2 + j\eta_3 \tan\beta_2 d} \tag{9}$$

再由式（7）得分界面①上的反射系数

$$\rho_1=\frac{E_{m1}^-}{E_{m1}^+}=\frac{\eta_{ef}-\eta_1}{\eta_{ef}+\eta_1} \tag{10}$$

显然，若分界面①上的等效波阻抗η_{ef}等于媒质 1 的本征阻抗η_1，则$\rho_1=0$，即分界面①上无反射。

通常天线罩的内、外都是空气，即$\eta_1=\eta_3=\eta_0$，由式（9）得

$$\eta_0=\eta_2\frac{\eta_0+j\eta_2\tan\beta_2 d}{\eta_2+j\eta_0\tan\beta_2 d}$$

欲使上式成立，必须$\beta_2 d=n\pi, n=1,2,3\cdots$。故

$$d=\frac{n\pi}{\beta_2}=n\frac{\lambda_2}{2}$$

频率f_0=3GHz 时

$$\lambda_0=\frac{3\times10^8}{3\times10^9}=0.1\,\text{m}$$

则

$$d=\frac{\lambda_0}{2\sqrt{2.8}}=\frac{0.1}{2\times1.67}\,\text{m}\approx30\,\text{mm}$$

当频率偏移到f_1=3.1GHz 时，

$$\beta_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}=2\pi\times3.1\times10^9\sqrt{2.8\mu_0\varepsilon_0}=108.6\,\text{rad/m}$$

故

$$\tan\beta_2 d=\tan(108.6\times30\times10^{-3})=0.117$$

而

$$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{2.8\varepsilon_0}}=225.3\Omega$$

故此时的等效波阻抗为

$$\eta_{ef}=225.3\frac{377+j225.3\times0.117}{225.3+j377\times0.117}=370.87e^{-j7.08^\circ}=368-j45.7\Omega$$

反射系数为

$$\rho_1=\frac{\eta_{ef}-\eta_1}{\eta_{ef}+\eta_1}=\frac{368-j45.7-377}{368-j45.7+377}=0.06e^{j(180^\circ+82.37^\circ)}$$

即频率偏移到 3.1GHz 时，反射将增大 6%。

同样的方法可计算出频率下偏到$f_2=2.9\,\text{GHz}$时，反射将增加约 5%。

[讨论]

（1）上述分析方法可推广到 n 层媒质的情况，通常是把坐标原点 O 选在最右侧的分界面上较为方便。

（2）应用前面导出的等效波阻抗公式（9），可以得出一种很有用的特殊情况（注意：此时$\eta_1\neq\eta_3$）。

取$d=\dfrac{\lambda_2}{4}$，则有

$$\tan\beta_2 d=\tan(\frac{2\pi}{\lambda_2}\times\frac{\lambda_2}{4})=\infty$$

由式（9）得

$$\eta_{ef}=\frac{\eta_2^2}{\eta_3}$$

若取 $\eta_2=\sqrt{\eta_1\eta_3}$，则

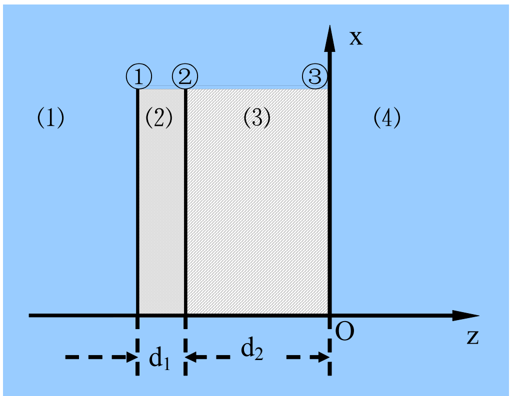
$$\eta_{ef}=\eta_1$$

此时，分界面①上的反射系数为

$$\rho_1=\frac{\eta_{ef}-\eta_1}{\eta_{ef}+\eta_1}=0$$

即电磁波从媒质 1 入射到分界面①时，不产生反射。可见，厚度 $d=\lambda_2/4$ 的介质板，当其本征阻抗 $\eta_2=\sqrt{\eta_1\eta_3}$ 时，有消除反射的作用。

7.17 题 7.17 图所示隐身飞机的原理示意图。在表示机身的理想导体表面覆盖一层厚度 $d_3=\lambda_3/4$ 的理想介质膜，又在介质膜上涂一层厚度为 d_2 的良导体材料。试确定消除电磁波从良导体表面上反射的条件。



题 7.17 图

解 题 7.17 图中，区域（1）为空气，其波阻抗为

$$\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

区域（2）为良导体，其波阻抗为

$$\eta_2=\sqrt{\frac{\omega\mu^2}{\gamma^2}}e^{j45^\circ}$$

区域（3）为理想介质，其波阻抗为

$$\eta_3=\sqrt{\frac{\mu_3}{\varepsilon_2}}$$

区域（4）为理想导体 $(\gamma_4=\infty)$，其波阻抗为

$$\eta_4=\sqrt{\frac{\omega\mu_4}{\gamma_4}}e^{j45^\circ}=0$$

利用题 7.16 导出的公式（9），分界面②上的等效波阻抗为

$$\eta_{ef}=\eta_3\frac{\eta_4+j\eta_3\tan\beta_3d_3}{\eta_3+j\eta_4\tan\beta_3d_3}=\eta_3\frac{\eta_4+j\eta_3+\tan(\frac{2\pi}{\lambda_3}\cdot\frac{\lambda_3}{4})}{\eta_3+j\eta_4\tan(\frac{2\pi}{\lambda_3}\cdot\frac{\lambda_3}{4})}=\frac{\eta_3^2}{\eta_4}=\infty$$

应用相同的方法可导出分界面③上的等效波阻抗计算公式可得

$$\eta_{ef}=\eta_2\frac{\eta_{ef}+\eta_2\tanh\Gamma_2d_2}{\eta_2+\eta_{ef}\tanh\Gamma_2d_2} \qquad (1)$$

式中的 Γ_2 是良导体中波的传播常数，$\tanh\Gamma_2d_2$ 为双曲正切函数。将 $\eta_{ef}=\infty$ 代入式（1），得

$$\eta_{ef}=\frac{\eta_2}{\tanh\Gamma_2d_2} \qquad (2)$$

由于良导体涂层很薄，满足 $\Gamma_2 d_2 << 1$，故可取 $\tanh\Gamma_2 d_2 \approx \Gamma_2 d_2$，则式（2）变为

$$\eta_{ef} \approx \frac{\eta_2}{\Gamma_2 d_2} \tag{3}$$

分界面③上的反射系数为

$$\rho_3 = \frac{\eta_{ef} - \eta_1}{\eta_{ef} + \eta_1}$$

可见，欲使区域（1）中无反射，必须使

$$\eta_{ef} = \eta_1 = \eta_0$$

故由式（3）得

$$\frac{\eta_2}{\Gamma_2 d_2} = \eta_0 \tag{4}$$

将良导体中的传播常数 $\Gamma_2 = \sqrt{\omega\mu_2\gamma_2}e^{j45^\circ}$ 和波阻抗 $\eta_2 = \sqrt{\dfrac{\omega\mu_2}{\gamma}}e^{j45^\circ}$ 代入式（4），得

$$d_2 = \frac{1}{\gamma_2\eta_0} = \frac{1}{\gamma_2 \times 377} = \frac{2.65\times10^{-3}}{\gamma_2}$$

这样，只要取理想介质层的厚度 $d_3 = \lambda_3/4$，而良导体涂层的厚度 $d_2 = 2.65\times10^{-3}/\gamma_2$，就可消除分界面③上的反射波。即雷达发射的电磁波从空气中投射到分界面③时，不会产生回波，从而实现飞机隐身的目的。此结果可作如下的物理解释：由于电磁波在理想导体表面（即分界面①上产生全反射，则在离该表面 $\lambda_3/4$ 处（即分界面②出现电场的波腹点。而该处放置了厚度为 d_2 的良导体涂层，从而使电磁波大大损耗，故反射波就趋于零了。

7.18 均匀平面波从自由空间垂直入射到某介质平面时，在自由空间形成驻波。设驻波比为 2.7，且介质平面上有驻波最小点；求介质的介电常数。

解 自由空间的总电场为

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_1^+ + \boldsymbol{E}_1^- = \boldsymbol{e}_x \boldsymbol{E}_{m1}^+ e^{-j\beta_1 z} + \boldsymbol{e}_x \boldsymbol{E}_{m1}^- e^{j\beta_1} = \boldsymbol{e}_x \boldsymbol{E}_{m1}^+ (e^{-j\beta_1 z} + \rho e^{j\beta_1 z})$$

式中

$$\rho = \frac{\boldsymbol{E}_{m1}^-}{\boldsymbol{E}_{m1}^+}$$

是分界面上的反射系数。

驻波比的定义为

$$S = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{E_{m1}^+ + E_{m1}^-}{E_{m1}^+ - E_{m1}^-} = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|}$$

得

$$\frac{1+|\rho|}{1-|\rho|} = 2.7$$

据此求得

$$|\rho| = \frac{1.7}{3.7} = 0.459$$

因介质平面上是驻波最小点，故应取

$$\rho = -0.459$$

反射系数

$$\rho=\frac{\eta_2-\eta_0}{\eta_2+\eta_0}=-0.459$$

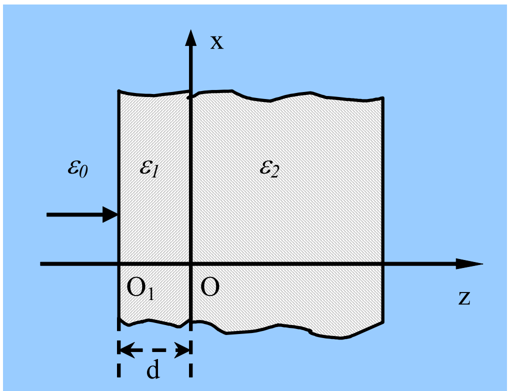
得

$$\eta_2=0.371\times377=139.79\Omega$$

则

$$\varepsilon_2=\frac{\mu_0}{139.79^2}=64.3\times10^{-12}=7.26\varepsilon_0$$

7.19 如题 7.19 图所示，$z>0$ 区域的媒质介电常数为ε_2，在此媒质前置有厚度为 d、介电常数为ε_1的介质板。对于一个从左面垂直入射过来的 TEM 波，试证明当 $\varepsilon_{r1}=\sqrt{\varepsilon_{r2}}$ 且 $d=\frac{1}{4}\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$ 时，没有反射（λ为自由空间的波长）。



题 7.19 图

解 媒质 1 中的波阻抗为

$$\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}\eta_0 \tag{1}$$

媒质 2 中的波阻抗为

$$\eta_{21}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}\eta_0 \tag{2}$$

当$\varepsilon_{r1}=\sqrt{\varepsilon_{r2}}$ 时，由式（1）和（2）得

$$\eta_1^2=\frac{\eta_0^2}{\varepsilon_{r1}}=\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}\cdot\eta_0=\eta_2\eta_0 \tag{3}$$

而分界面 O_1 处（即 $z=-d$ 处）的等效波阻抗为

$$\eta_{ef}=\eta_1\frac{\eta_2+j\eta_1\tan\beta_1 d}{\eta_1+j\eta_2\tan\beta_1 d}$$

当 $d=\frac{1}{4}\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$、即 $d=\frac{\lambda_1}{4}$ 时

$$\eta_{ef}=\frac{\eta_1^2}{\eta_2} \tag{4}$$

分界面 O_1 处的反射系数为

$$\rho = \frac{\eta_{ef} - \eta_0}{\eta_{ef} + \eta_0} \qquad (5)$$

将式（3）和（4）代入式（5），则得

$$\rho = 0$$

即 $\varepsilon_{r1} = \sqrt{\varepsilon_{r2}}$且$d = \frac{1}{4}\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$ 时，分界面 O_1 上无反射。$d = \frac{\lambda_1}{4}$ 的介质层称为匹配层。

7.20 垂直放置在球坐标原点的某电流元所产生的远区场为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_\theta \frac{100}{r}\sin\theta\cos(\omega t - \beta r)\,\mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_\phi \frac{0.265}{r}\sin\theta\cos(\omega t - \beta r)\,\mathrm{A/m}$$

试求穿过 r=1 000m 的半球壳的平均功率。

解 将电场、磁场写成复数形式

$$\boldsymbol{E}(r) = \boldsymbol{e}_\theta \frac{100}{r}\sin\theta e^{-j\beta r}$$

$$\boldsymbol{H}(r) = \boldsymbol{e}_\phi \frac{0.265}{r}\sin\theta e^{-j\beta r}$$

平均坡印廷矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{av} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(r)\times\boldsymbol{H}^*(r)] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_\theta\frac{100}{r}\sin\theta e^{-j\beta r}\times\boldsymbol{e}_\phi\frac{0.265}{r}\sin\theta e^{j\beta r}] \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_r\frac{100\times0.265}{r^2}\sin^2\theta\,\mathrm{W/m^2} = \boldsymbol{e}_r 13.25\frac{\sin^2\theta}{r^2}\mathrm{W/m^2}\end{aligned}$$

故穿过 r=1000m 的半球壳的平均功率为

$$\boldsymbol{P}_{av} = \frac{1}{2}\oint_S \boldsymbol{S}_{av}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

式中 d$\boldsymbol{S}$ 为球坐标的面积元矢量，对积分有贡献是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_r\mathrm{d}\boldsymbol{S}_r = \boldsymbol{e}_r r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

故

$$\begin{aligned}P_{av} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{e}_r 13.25\frac{\sin^2\theta}{r^2}\cdot\boldsymbol{e}_r r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 13.25\pi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 13.25\pi(-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta)\Big|_0^{\pi} = 13.25\pi\times\frac{4}{3} = 55.5\,\mathrm{W}\end{aligned}$$

7.21 在自由空间中，$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x 150\sin(\omega t - \beta z)\,\mathrm{V/m}$。试求 $z=0$ 平面内的边长为 30mm 和 15mm 长方形面积的总功率。

解 将已知的电场写成复数形式

$$\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{e}_x 150 e^{-j(\beta z + 90^\circ)}$$

得与 $\boldsymbol{E}(z)$ 相伴的磁场

$$\boldsymbol{H}(z) = \frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{e}_y\frac{150}{377}e^{-j(\beta z + 90^\circ)}$$

故平均坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{H}^*(z)]$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_x150e^{-j(\beta z+90^\circ)}\times\boldsymbol{e}_y\frac{150}{377}e^{j(\beta z+90^\circ)}]=\boldsymbol{e}_z29.84\ \mathrm{W/m^2}$$

则穿过 z=0 平面上 $S=30\times15\,\mathrm{mm}^2$ 的长方形面积的总功率为

$$P_{av}=\boldsymbol{S}_{av}\cdot\boldsymbol{e}_zS=29.84\times30\times10^{-3}\times15\times10^{-3}\ \mathrm{W}=13.43\times10^{-3}\ \mathrm{W}$$

7.22 均匀平面波的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x100\sin(\omega t-\beta z)+\boldsymbol{e}_y200\cos(\omega t-\beta z)\ \mathrm{V/m}$$

（1）运用麦克斯韦方程求出 $\boldsymbol{H}$；（2）若该波在 z=0 处迁到一理想导体平面，求出 z<0 区域内的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$；（3）求理想导体上的电流密度。

解 （1）将已知的电场写成复数形式

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_x100e^{-j(\beta z+90^\circ)}+\boldsymbol{e}_y200e^{-j\beta z}$$

由 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-j\omega\mu_0\boldsymbol{H}$ 得

$$\boldsymbol{H}(z)=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}(z)=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & 0\end{bmatrix}$$
$$=-\frac{1}{j\omega\mu_0}(-\boldsymbol{e}_x\frac{\partial E_y}{\partial z}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial E_x}{\partial z})$$
$$=-\frac{1}{j\omega\mu_0}[-\boldsymbol{e}_x200(-j\beta)e^{-j\beta z}+\boldsymbol{e}_y100(-j\beta)e^{-j(\beta z+90^\circ)}]$$
$$=\frac{\beta}{\omega\mu_0}[-\boldsymbol{e}_x200e^{-j\beta z}+\boldsymbol{e}_y100e^{-j(\beta z+90^\circ)}]$$
$$=\frac{1}{\eta_0}[-\boldsymbol{e}_x200e^{-j\beta z}+\boldsymbol{e}_y100e^{-j(\beta z+90^\circ)}]\ \mathrm{A/m}$$

写成瞬时值表示式

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{H}(z)e^{j\omega t}]$$
$$=\frac{1}{\eta_0}[-\boldsymbol{e}_x200\cos(\omega t-\beta z)+\boldsymbol{e}_y100\cos(\omega t-\beta z-90^\circ)]$$
$$=\frac{1}{\eta_0}[-\boldsymbol{e}_x200\cos(\omega t-\beta z)+\boldsymbol{e}_y100\sin(\omega t-\beta z)]\ \mathrm{A/m}$$

（2）均匀平面波垂直入射到理想导体平面上会产生全反射，反射波的电场为

$$E_x^-=-100e^{j(\beta z-90^\circ)}$$
$$E_y^-=-200e^{j\beta z}$$

即 $z<0$ 区域内的反射波电场为

$$\boldsymbol{E}^-=\boldsymbol{e}_xE_x^-+\boldsymbol{e}_yE_y^-=-\boldsymbol{e}_x100e^{j(\beta z-90^\circ)}-\boldsymbol{e}_y200e^{j\beta z}$$

与之相伴的反射波磁场为

$$\boldsymbol{H}^-=\frac{1}{\eta_0}(-\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}^-)=\frac{1}{\eta_0}(-\boldsymbol{e}_x200e^{j\beta z}+\boldsymbol{e}_y100e^{j(\beta z-90^\circ)})$$

至此，即可求出 $z<0$ 区域内的总电场 $\boldsymbol{E}$ 和总磁场 $\boldsymbol{H}$。

$$E_x = E_x^+ + E_x^- = 100e^{-j(\beta z+90^\circ)} - 100e^{j(\beta z-90^\circ)}$$

$$= 100e^{-j90^\circ}(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) = -j200\sin\beta z e^{-j90^0}$$

$$E_y = E_y^+ + E_y^- = 200e^{-j\beta z} - 200e^{j\beta z} = -j400\sin\beta z$$

故

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x E_x + \boldsymbol{e}_y E_y = -\boldsymbol{e}_x j200\sin\beta z e^{-j90^\circ} - \boldsymbol{e}_y j400\sin\beta z$$

同样

$$H_x = H_x^+ + H_x^- = -\frac{1}{\eta_0}200e^{-j\beta z} - \frac{1}{\eta_0}200e^{j\beta z} = -\frac{1}{\eta_0}400\cos\beta z$$

$$H_y = H_y^+ + H_y^- = [100e^{-j(\beta z+90^\circ)} + 100e^{j(\beta z-90^\circ)}]\frac{1}{\eta_0}$$

$$= \frac{1}{\eta_0}200e^{-j90^\circ}\cos\beta z$$

故

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_x H_x + \boldsymbol{e}_y H_y = \frac{1}{\eta_0}(-\boldsymbol{e}_x 400\cos\beta z + \boldsymbol{e}_y 200e^{-j90^\circ}\cos\beta z)$$

（3）理想导体平面上的电流密度为

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}\big|_{z=0} = -\boldsymbol{e}_z\times(-\boldsymbol{e}_x 400\cos\beta z + \boldsymbol{e}_y 200e^{-j90^\circ}\cos\beta z)\frac{1}{\eta_0}\bigg|_{z=0}$$

$$= \boldsymbol{e}_x 0.53e^{-j90^\circ} + \boldsymbol{e}_y 1.06\,\text{A/m}$$

7.23 在自由空间中，一均匀平面波垂直投射到半无限大无损耗介质平面上。已知在平面前的自由空间中，合成波的驻波比为 3，无损耗介质内透射波的波长是自由空间波长的 $\frac{1}{6}$。试求介质的相对磁导率 μ_r 和相对介电常数 ε_r。

解 在自由空间，入射波与反射波合成为驻波，驻波比为

$$S = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{E_{m1}^+ + E_{m1}^-}{E_{m1}^+ - E_{m1}^-} = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|} = 3$$

由此求出反射系数

$$|\rho| = \frac{1}{2}$$

设在介质平面上得到驻波最小点，故取 $\rho = -\frac{1}{2}$。而反射系数为

$$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

式中的 $\eta_1 = \eta_0 = 120\pi\Omega$，则得

$$-\frac{1}{2} = \frac{\eta_2 - \eta_0}{\eta_2 + \eta_0}$$

求得

$$\eta_2 = \frac{1}{3}\eta_0 \quad 即 \quad \sqrt{\frac{\mu_r\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}} = \frac{1}{3}\eta_0$$

得

$$\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}=\frac{1}{9} \tag{1}$$

又

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}=\frac{\lambda_0}{6}$$

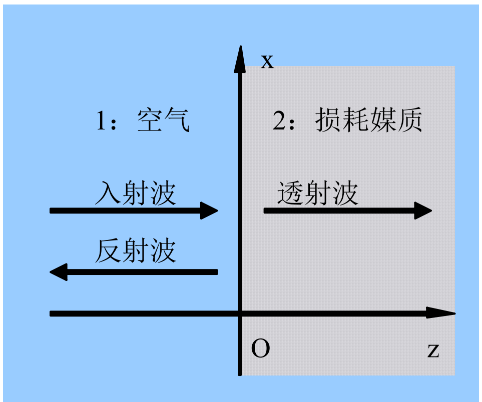
得

$$\mu_r\varepsilon_r=36 \tag{2}$$

联解式（1）和（2）得

$$\mu_r=2,\quad \varepsilon_r=18$$

7.24 均匀平面波的电场强度为 $\boldsymbol{E}^{+}=\boldsymbol{e}_x 10e^{-j6z}$，该波从空气垂直入射到有损耗媒质 $(\varepsilon_r=2.5,\text{损耗角正切}\tan\delta=\dfrac{\gamma_2}{\omega\varepsilon_2}=0.5)$ 的分界面上（z=0），如题 7.24 图所示。（1）求反射波和透射波的电场和磁场的瞬时表示式；（2）求空气中及有损耗媒质中的时间平均坡印廷矢量。



题 7.24 图

解（1）根据已知条件求得如下参数。

在空气中（媒质 1）

$$\beta_1=6\,\text{rad/m}$$

$$\omega=\beta_1 c=6\times3\times10^8=1.8\times10^9\ \text{rad/s}$$

$$\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=377\Omega$$

在有损耗媒质中

$$\tan\delta=\frac{\gamma_2}{\omega\varepsilon_2}=0.5$$

$$\alpha_2=\omega\sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{2}\left[\sqrt{1+(\frac{\gamma_2}{\omega\varepsilon_2})^{22}}-1\right]}$$

$$=1.8\times10^9\sqrt{\frac{2.5\mu_0\varepsilon_0}{2}[\sqrt{1+0.5^2}-1]}=2.31\,\text{Np/m}$$

$$\beta_2=\omega\sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{2}\left[\sqrt{1+(\frac{\gamma_2}{\omega\varepsilon_2})^{2}}+1\right]}$$

$$=1.8\times10^9\sqrt{\frac{2.5\mu_0\varepsilon_0}{2}[\sqrt{1+0.5^2}+1]}=9.77\text{rad/m}$$

$$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\Bigg/\sqrt{1-j\frac{\gamma_2}{\omega\varepsilon_2}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{2.5\varepsilon_0}}\Bigg/\sqrt{1-j0.5}$$

$$=255e^{j13.3^\circ}=218.96+j51.76\Omega$$

分界面上的反射系数为

$$\rho=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=\frac{218.96+j51.76-377}{218.96+j51.76+377}=0.278e^{j156.9^\circ}$$

透射系数为

$$\tau=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}=\frac{2\times225e^{j113.3^\circ}}{218.96+j51.76+377}=0.752e^{j8.34^\circ}$$

故反射波的电场和磁场的复数表示式为

$$\boldsymbol{E}^-=\boldsymbol{e}_x\rho\times10e^{-j6z}=\boldsymbol{e}_x2.78e^{j156.9^\circ}e^{j6z}$$

$$\boldsymbol{H}^-=\frac{1}{\eta_0}(-\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}^-)=\frac{1}{377}(-\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x2.78e^{j156.9^\circ}e^{j6z})$$

$$=-\boldsymbol{e}_y7.37\times10^{-3}e^{j156.9^\circ}e^{j6z}$$

则其瞬时表示式为

$$\boldsymbol{E}^-(z,t)=\text{Re}[\boldsymbol{E}^-e^{j\omega t}]$$

$$=\boldsymbol{e}_x2.78\cos(1.8\times10^9t+6z+156.9^\circ)\,\text{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}^-(z,t)=\text{Re}[\boldsymbol{H}^-e^{j\omega t}]$$

$$=-\boldsymbol{e}_y7.37\times10^{-3}\cos(1.8\times10^9t+6z+156.9^\circ)\,\text{A/m}$$

而媒质 2 中的透射波电场和磁场为

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_x\tau\times10e^{-\alpha_2z}e^{-j\beta_2z}=\boldsymbol{e}_x7.52e^{-2.31z}e^{-j9.77z}e^{j8.34^\circ}$$

$$\boldsymbol{H}_2=\frac{1}{\eta_2}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_2=\frac{1}{225e^{j13.3^\circ}}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x7.52e^{-2.31z}e^{-j9.77z}e^{j8.34^\circ}$$

$$=\boldsymbol{e}_y0.035e^{-2.31z}e^{-j9.77z}e^{j8.34^\circ}e^{-j13.3^\circ}$$

故其瞬时表示式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2(z,t) &= \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_2 e^{j\omega t}] \\ &= \boldsymbol{e}_x 7.52 e^{-2.31z}\cos(1.8\times10^9 t - 9.77z + 8.34^\circ)\,\mathrm{V/m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_2(z,t) &= \mathrm{Re}[\boldsymbol{H}_2 e^{j\omega t}] \\ &= \boldsymbol{e}_y 0.035 e^{-2.31z}\cos(1.8\times10^9 t - 9.77z - 4.96^\circ)\,\mathrm{A/m}\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{av1} &= \boldsymbol{S}_{av}^+ + \boldsymbol{S}_{av}^- = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}^+ \times \boldsymbol{H}^{+*}] + \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}^- \times \boldsymbol{H}^{-*}] \\ &= \boldsymbol{e}_z \frac{1}{2}\times\frac{10^2}{377} - \boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}\times\frac{2.78^2}{377} = \boldsymbol{e}_z 0.122\,\mathrm{W/m^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{av2} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_2^*] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_x 7.52 e^{-2.31z} e^{-j9.77z} e^{j8.34^\circ} \times \boldsymbol{e}_y 0.035 e^{-2.31z} e^{j9.77z} e^{j4.96^\circ}] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_z 0.263 e^{-4.62z} e^{j13.3^\circ}] = \boldsymbol{e}_z 0.122 e^{-4.62z}\ \mathrm{W/m^2}\end{aligned}$$

7.25 一右旋圆极化波垂直入射到位于 $z=0$ 的理想导体板上，其电场强度的复数表示式为

$$\boldsymbol{E}_i = E_0(\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y j)e^{-j\beta z}$$

（1）确定反射波的极化方式；（2）求导体板上的感应电流；（3）以余弦为基准，写出总电场强度的瞬时值表示式。

解 （1）设反射波的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_r = (\boldsymbol{e}_x E_{rx} + \boldsymbol{e}_y E_{ry})e^{j\beta z}$$

据理想导体的边界条件，在 $z=0$ 时应有

$$(\boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{E}_r)\big|_{z=0} = 0$$

故得

$$E_{rx} = -E_0,\quad E_{ry} = jE_0$$

则

$$\boldsymbol{E}_r = E_0(-\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_y j)e^{j\beta z}$$

可见，反射波是一个沿 $-z$ 方向传播的左旋圆极化波。

（2）入射波的磁场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_i &= \frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_i = \frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_z\times E_0(\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y j)e^{-j\beta z} \\ &= \frac{E_0}{\eta_0}(\boldsymbol{e}_x j + \boldsymbol{e}_y)e^{-j\beta z}\end{aligned}$$

反射波的磁场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_r &= \frac{1}{\eta_0}(-\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_r) = \frac{1}{\eta_0}(-\boldsymbol{e}_z)\times\boldsymbol{E}_0(-\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y j)e^{j\beta z} \\ &= \frac{E_0}{\eta_0}(\boldsymbol{e}_x j + \boldsymbol{e}_y)e^{j\beta z}\end{aligned}$$

故合成波的磁场为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_i + \boldsymbol{H}_r = \frac{E_0}{\eta_0}(\boldsymbol{e}_x j + \boldsymbol{e}_y)e^{-j\beta z} + \frac{E_0}{\eta_0}(\boldsymbol{e}_x j + \boldsymbol{e}_y)e^{j\beta z}$$

则导体板上的感应电流为

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}\big|_{z=0} = -\boldsymbol{e}_z\times(\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{H}_r)\big|_{z=0} = \frac{2E_0}{\eta_0}(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y j)$$

（3）合成电场的复数表示式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{E}_r = E_0(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y j)e^{-j\beta z}+E_0(-\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y j)e^{j\beta z}\\ &= \boldsymbol{e}_x E_0(e^{-j\beta z}-e^{j\beta z})+\boldsymbol{e}_y jE_0(e^{j\beta z}-e^{-j\beta z})\\ &= 2E_0\sin\beta z(-\boldsymbol{e}_x j-\boldsymbol{e}_y)\end{aligned}$$

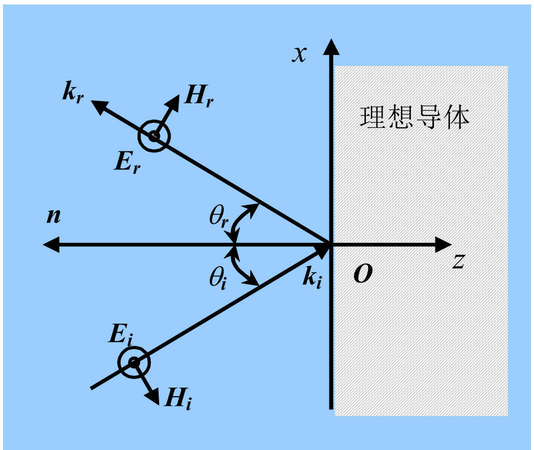
故其瞬时表示式为

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}e^{j\omega t}] = 2E\sin\beta z(\boldsymbol{e}_x\sin\omega t-\boldsymbol{e}_y\cos\omega t)$$

7.26 如题 7.26 图所示，有一正弦均匀平面波由空气斜入射到 z=0 的理想导体平面上，其电场强度的复数表示式为

$$\boldsymbol{E}_i(x,z) = \boldsymbol{e}_y 10e^{-j(6x+8z)}\ \mathrm{V/m}$$

（1）求波的频率和波长；（2）以余弦函数为基准，写出入射波电场和磁场的瞬时表示式；（3）确定入射角；（4）求反射波电场和磁场的复数表示式；（5）求合成波电场和磁场的复数表示式。



题 7.26 图

解 （1）由已知条件知入射波的波矢量为

$$\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{e}_x 6+\boldsymbol{e}_z 8 = \boldsymbol{e}_x k_{ix}+\boldsymbol{e}_z k_{iz}$$

$$k_i = \sqrt{6^2+8^2} = 10$$

故波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k_i} = 0.628\,\mathrm{m}$$

频率为

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^8}{0.628} = 4.78\times10^8\ \mathrm{Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 3\times10^9\ \mathrm{rad/s}$$

（2）入射波传播方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_{ni} = \frac{\boldsymbol{k}_i}{k_i} = \frac{\boldsymbol{e}_x 6+\boldsymbol{e}_z 8}{10} = \boldsymbol{e}_x 0.6+\boldsymbol{e}_z 0.8$$

入射波的磁场复数表示式为

$$\boldsymbol{H}_i(x,z)=\frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_{ni}\times\boldsymbol{E}_i\left(x,z\right)=\frac{1}{\eta_0}(-\boldsymbol{e}_x8+\boldsymbol{e}_z6)\times\boldsymbol{e}_y10e^{-j(6x+8z)}$$
$$=\frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x8+\boldsymbol{e}_z6)e^{-j(6x+8z)}$$

则得其瞬时表示式

$$\boldsymbol{H}_i(x,z,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{H}_i(x,z)e^{j\omega t}]$$
$$=\mathrm{Re}[\frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x8+\boldsymbol{e}_z6)e^{-j(6x+8z)}e^{j3\times10^9t}]$$
$$=\frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x8+\boldsymbol{e}_z6)\cos(3\times10^9t-6x-8z)\ \mathrm{A/m}$$

而电场的瞬时表示式为

$$\boldsymbol{E}_i(x,z,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_i(x,z)e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_y10e^{-j(6x+8z)}e^{j\omega t}]$$
$$=\boldsymbol{e}_y10\cos(3\times10^9t-6x-8z)\ \mathrm{V/m}$$

（3）由 $k_{iz}=k_i\cos\theta_i$，得

$$\cos\theta_i=\frac{k_{iz}}{k_i}=\frac{8}{10}$$ 故 $$\theta_i=36.9^\circ$$

（4）据斯耐尔反射定律知 $\theta_r=\theta_i=36.9^\circ$，反射波的波矢量为

$$\boldsymbol{k}_r=\boldsymbol{e}_x6-\boldsymbol{e}_z8$$
$$\boldsymbol{e}_{nr}=\frac{\boldsymbol{k}_r}{k_r}=\frac{\boldsymbol{e}_x6-\boldsymbol{e}_z8}{10}=\boldsymbol{e}_x0.6-\boldsymbol{e}_z0.8$$

而垂直极化波对理想导体平面斜入射时，反射系数 $\rho_\perp=-1$ 。故反射波的电场为

$$\boldsymbol{E}_r(x,z)=-\boldsymbol{e}_y10e^{-j(6x-8z)}\ \mathrm{V/m}$$

与之相伴的磁场为

$$\boldsymbol{H}_r(x,z)=\frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_{nr}\times\boldsymbol{E}_r(x,z)$$
$$=\frac{1}{120\pi}(\boldsymbol{e}_x0.6-\boldsymbol{e}_z0.8)\times(-\boldsymbol{e}_y10e^{-j(6x-8z)})$$
$$=\frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x8-\boldsymbol{e}_z6)e^{-j(6x-8z)}\ \mathrm{A/m}$$

（5）合成波的电场为

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\boldsymbol{E}_i(x,z)+\boldsymbol{E}_r(x,z)=\boldsymbol{e}_y10e^{-j(6x+8z)}-\boldsymbol{e}_y10e^{-j(6x-8z)}$$
$$=\boldsymbol{e}_y10e^{-j6x}(e^{-j8z}-e^{j8z})=-\boldsymbol{e}_yj20e^{-j6x}\sin8z\ \mathrm{V/m}$$

合成波的磁场为

$$\boldsymbol{H}(x,z)=\boldsymbol{H}_i(x,z)+\boldsymbol{H}_r(x,z)$$
$$=\frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x8+\boldsymbol{e}_z6)e^{-j(6x+8z)}+\frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x8-\boldsymbol{e}_z6)e^{-j(6x-8z)}$$
$$=\frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x16\cos8z-\boldsymbol{e}_yj12\sin8z)e^{-j6x}\ \mathrm{A/m}$$

7.27 一个线极化平面波从自由空间入射到 $\varepsilon_r=4,\mu_r=1$ 的电介质分界面上，如果入射波的电场矢量与入射面的夹角为45°。试求：（1）入射角为何值时，反射波只有垂直极化

波；（2）此时反射波的平均功率流是入射波的百分之几？

解　（1）由已知条件知入射波中包括垂直极化分量和平行极化分量，且两分量的大小相等 $E_{i0}\big/\sqrt{2}$。当入射角 θ_i 等于布儒斯特角 θ_B 时，平行极化波将无反射，反射波中就只有垂直极化分量。

$$\theta_i=\theta_B=\arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)=\arctan\left(\sqrt{\frac{4\varepsilon_0}{\varepsilon_0}}\right)$$

$$=\arctan 2=63.43^\circ$$

（2）$\theta_i=63.43^\circ$ 时，垂直极化分量的反射系数为

$$\rho_\perp=\frac{\cos\theta_i-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}}$$

$$=\frac{\cos 63.43^\circ-\sqrt{\dfrac{4\varepsilon_0}{\varepsilon_0}-\sin^2 63.43^\circ}}{\cos 63.43^\circ+\sqrt{\dfrac{4\varepsilon_0}{\varepsilon_0}-\sin^2 63.43^\circ}}=-0.6$$

故反射波的平均功率流为

$$S_{rav}=\frac{1}{2\eta_1}E_{r0}^2=\frac{1}{2\eta_1}\left(\rho_\perp\frac{E_{i0}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{E_{i0}^2}{2\eta_1}\times 0.18$$

而入射波的平均功率流为

$$S_{iav}=\frac{1}{2\eta_1}E_{i0}^2$$

可见，

$$\frac{S_{rav}}{S_{iav}}=18\%$$

7.28　垂直极化波从水下的波源以入射角 $\theta_i=20^\circ$ 投射到水与空气的分界面上。水的 $\varepsilon_r=81,\mu_r=1$，试求：（1）临界角 θ_c；（2）反射系数 $\rho_\perp$；（3）透射系数 $\tau_\perp$；（4）波在空气中传播一个波长距离时的衰减量。

解　（1）临界角为

$$\theta_c=\arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)=\arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{81\varepsilon_0}}\right)=6.38^\circ$$

（2）反射系数为

$$\rho_\perp=\frac{\cos 20^\circ-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{81\varepsilon_0}-\sin^2 20^\circ}}{\cos 20^\circ+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{81\varepsilon_0}-\sin^2 20^\circ}}$$

$$=\frac{0.94-\sqrt{0.012-0.117}}{0.94+\sqrt{0.012-0.117}}=\frac{0.94-j0.32}{0.94+j0.32}=e^{-j38.04^\circ}$$

（3）透射系数为

$$\tau_{\perp}=\frac{2\cos 20^{\circ}}{\cos 20^{\circ}+\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{81\varepsilon_0}-\sin^2 20^{\circ}}}$$

$$=\frac{2\times 0.94}{0.94+\sqrt{0.012-0.117}}=1.89e^{-j19.02^{\circ}}$$

（4）由于$\theta_i > \theta_c$，故此时将产生全反射。由斯耐尔折射定律得

$$\sin\theta_t=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_i=\sqrt{81}\sin 20^{\circ}=3.08$$

此时

$$\cos\theta_t=\sqrt{1-\sin^2\theta_t}=\sqrt{1-3.08^2}=-j2.91$$

式中取“$-j2.91$”，是考虑到避免$z\to\infty$时，场的振幅出现无穷大的情况。这是因为空气中的透射波电场的空间变化因子为

$$e^{-jk_2\boldsymbol{e}_{nt}\cdot\boldsymbol{r}}=e^{-jk_2(x\sin\theta_t+z\cos\theta_t)}=e^{-j3.08k_2x}e^{-jk_2(-j2.19)z}$$

$$=e^{-j3.08k_2x}e^{-k_2(2.91z)}$$

由上式即得透射波传播一个波长时的衰减量为

$$20\lg e^{-k_2(2.91\lambda_2)}=20\lg e^{-\frac{2\pi}{\lambda_2}(2.91\lambda_2)}=-158.8\,\text{dB}$$