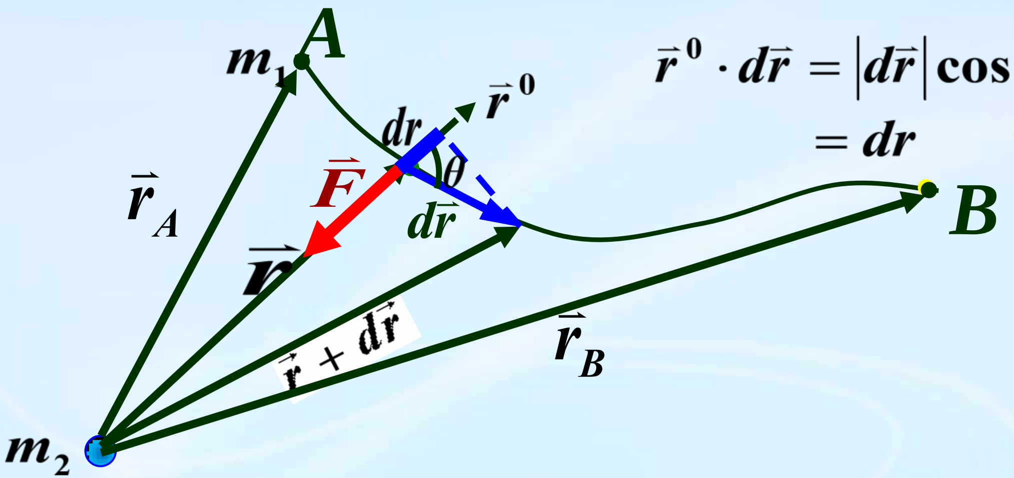
《大学物理》

第四章　能量守恒

功能原理与机械能守恒定律

一、保守内力 势能

1、引力的功



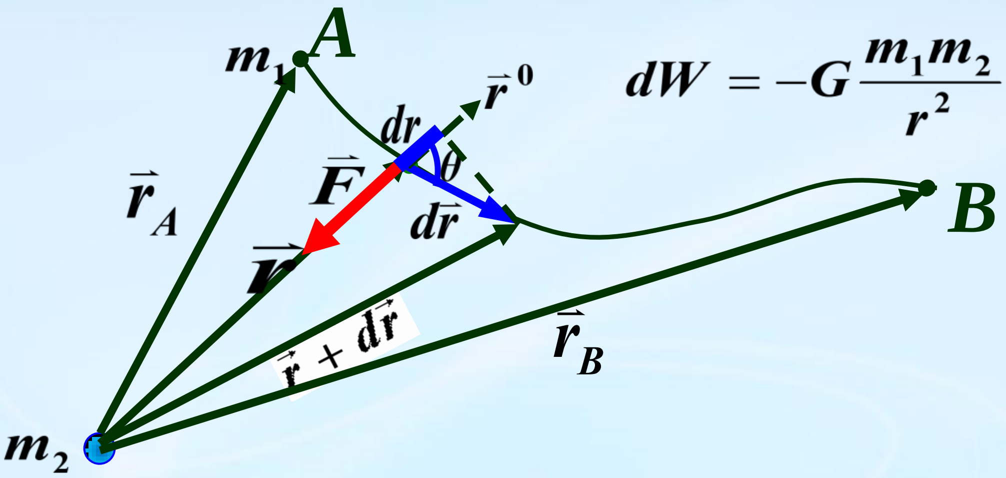
$$\vec{r}^{\,0}\cdot d\vec{r}=\left|d\vec{r}\right|\cos\theta$$
$$=dr$$

引力：$\vec{F}=-G\dfrac{m_1m_2}{r^2}\vec{r}^{\,0}$

$$dW=\vec{F}\,.d\vec{r}\ =-G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{r}^{\,0}\cdot d\vec{r}=-G\frac{m_1m_2}{r^2}dr$$

一、保守内力 势能

1、引力的功



$$dW = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr$$

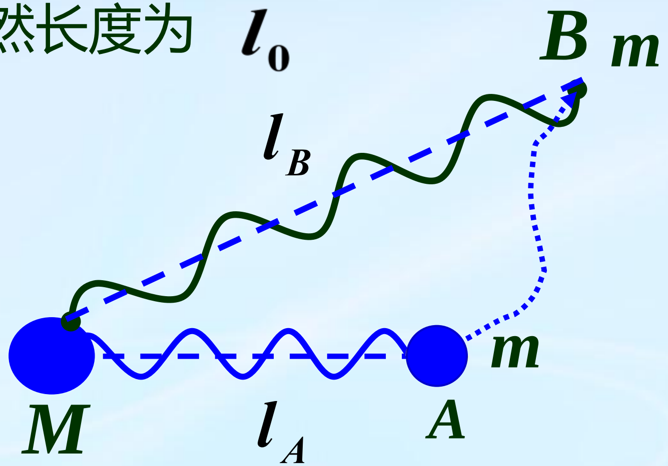
$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = G\frac{m_1 m_2}{r_B} - G\frac{m_1 m_2}{r_A}$$

引力做功只与始末相对位置有关!

一、保守内力 势能

2、弹性力的功

设弹簧的自然长度为 l_0



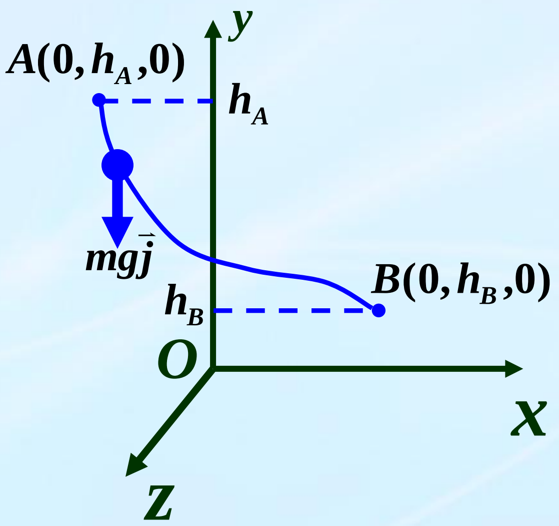
$$W_{AB} = \frac{1}{2}k(l_A - l_0)^2 - \frac{1}{2}k(l_B - l_0)^2 = \frac{1}{2}k(\Delta l_A)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l_B)^2$$

弹性力做功只与始末相对位置有关!

一、保守内力 势能

3、重力的功

重力：$\vec{F} = mg\vec{j}$ $\quad W_{AB} = mg(h_A - h_B)$



重力做功只与始末相对位置有关!

小 结

1、引力的功 $$W_{AB}=G\frac{m_1m_2}{r_B}-G\frac{m_1m_2}{r_A}$$

2、弹性力的功 $$W_{AB}=\frac{1}{2}k(\Delta l_A)^2-\frac{1}{2}k(\Delta l_B)^2$$

1、重力的功 $$W_{AB}=mg(h_A-h_B)$$

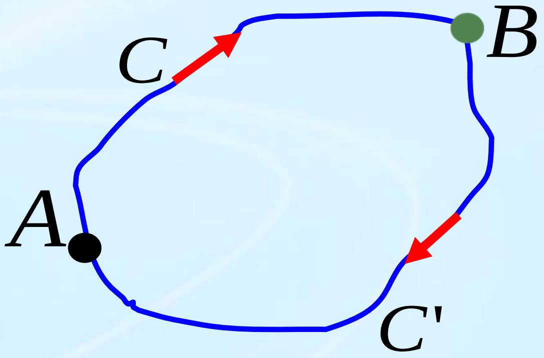
一、保守内力 势能

【保守力】做功只与始末位置有关，而与质点所经历路径无关的力。如：重力、引力、弹性力。

【保守力场】存在保守力的空间区域。如：重力场。

对保守力，必有：

$$\oint_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$



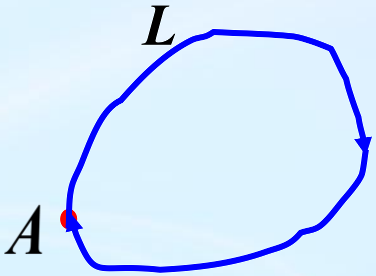
保守力沿任意闭合路径所做的功为零。

一、保守内力 势能

若 $\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \neq 0$ 则 $\vec{F}$ 为非保守力

如：摩擦力沿任意闭合路径的功

$$W_{AL_1A} = -f_s S_{L_1} < 0$$



—对摩擦力：机械能耗散为热能的途径和量度。

一般地，若 $\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} < 0$ 则 $\vec{F}$ 为耗散力

一、保守内力 势能

4、势能

保守力的功只决定于质点始、末相对位置

功是能量转换的度量

保守力场中的质点具有只取决于其位置的能量

- 重力场中：与重力相关的势能——重力势能。
- 引力场中：与引力相关的势能——引力势能。
- 弹性系统中：与弹性力相关的势能——弹性势能。

一、保守内力 势能

保守力做正功 → 质点在保守力场中的势能降低

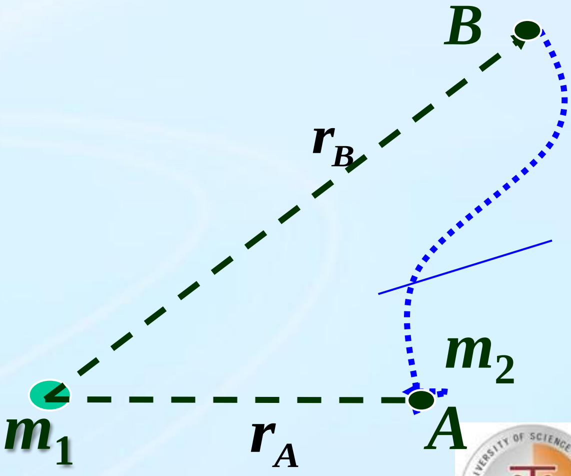
定义 质点在保守力场中从A运动到B的过程中，保守力对其所做的功等于相应势能增量的负值。

$$\int_A^B \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r} = -[E_P(B) - E_P(A)]$$

$$\Rightarrow E_P(A) = E_P(B) + \int_A^B \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r}$$

取B点为参考势能零点： $E_P(B) = 0$

$$E_{pA} = \int_A^{势能零点} \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r}$$



一、保守内力 势能

【势能定义式】 $$E_{pA}=\int_{A}^{势能零点}\vec{F}_{保}\cdot d\vec{r}$$

说明

(1) 势能是质点与保守力场所构成的系统共有的。

(2) 某点势能的大小与势能零点的选取有关，

但两确定点间的势能差与势能零点选取无关。

$$E_{pA}-E_{pB}=\int_{A}^{B}\vec{F}_{保}\cdot d\vec{r}$$

(只取决于A、B的相对位置)

一、保守内力 势能

重力势能

$$E_{pA}=W_{AB}$$

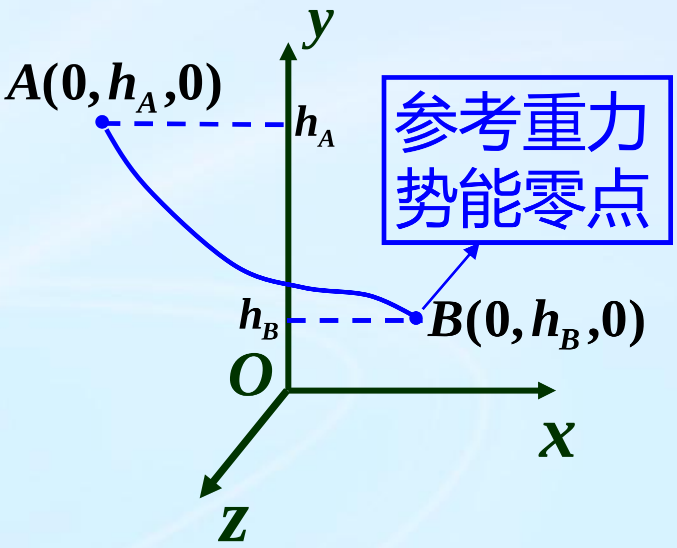
$$=mg(h_A-h_B)$$

一般地：

$$\boxed{E_p(h)=mg(h-h_0)}$$

h_0：势能零点处高度

若 $h_0=0$，则有 $E_p(h)=mgh$



一、保守内力　势能

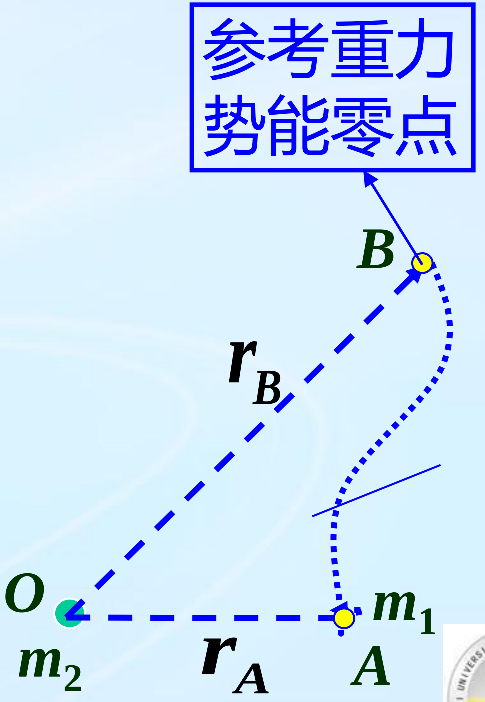
引力势能

$$E_{pA}=W_{AB}=-Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

一般地：$\boxed{E_p(r)=-Gm_1m_2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}$

r_0：势能零点到坐标原点的距离

若 $r_0\to\infty$，则有 $E_p(r)=-Gm_1m_2\frac{1}{r}$



一、保守内力 势能

弹性势能

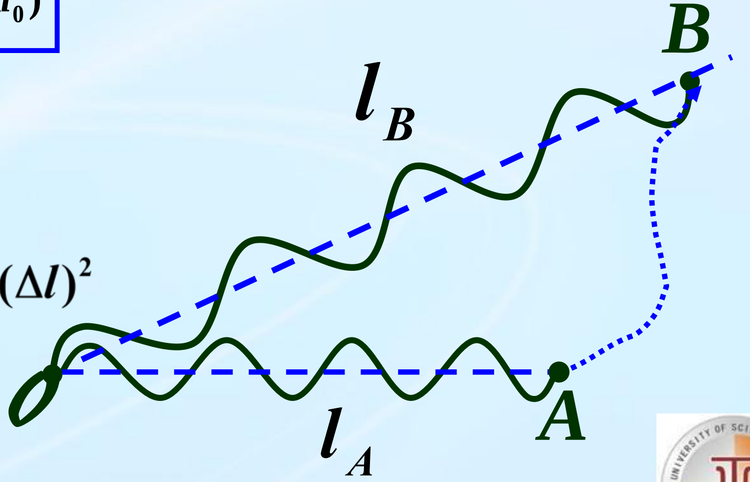
$$E_{pA}=W_{AB}=\frac{1}{2}k(\Delta l_A)^2-\frac{1}{2}k(\Delta l_B)^2$$

参考弹性势能零点

一般地： $\boxed{E_p(\Delta l)=\frac{1}{2}k(\Delta l)^2-\frac{1}{2}k(\Delta l_0)^2}$

Δl_0 :势能零点处的伸长量

若 $\Delta l_0=0$，则有 $E_p(\Delta l)=\frac{1}{2}k(\Delta l)^2$



一、保守内力 势能

5、由势能函数求保守力

由及
$$\begin{cases} dW = -dE_p = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x}dx - \dfrac{\partial E_p}{\partial y}dy - \dfrac{\partial E_p}{\partial z}dz \\ dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{cases}$$

$$\Longrightarrow F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x};\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y};\ F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

即：$\boxed{\vec{F}_{保} = -\nabla E_p}$ 保守力沿势能下降最快的方向

质点在保守力场中某点所受的保守力等于该点势能梯度矢量的负值。

二、质点系的功能原理

由质点系动能定理：

$$W_{外}+\boxed{W_{内}}=\Delta E_k$$

$$\boxed{W_{内}=W_{保内}+W_{非保内}}$$

$$W_{外}+\boxed{W_{保内}}+W_{非保内}=\Delta E_k$$

$$\boxed{W_{保内}=-\Delta E_p}$$

$$\boxed{W_{外}+W_{非保内}=\Delta(E_k+E_p)=\Delta E}$$

二、质点系的功能原理

$$W_{外} + W_{非保内} = \Delta(E_k + E_p) = \Delta E$$

意义：质点系机械能的增量等于所有的外力和所有非 保守内力做功的代数和。

说明

（1）与动能定理无本质区别，但功能原理用相应势能增量的负值代替保守内力的功。

（2）引入重力势能，原则上应计及地球动能的变化。

（3）功与机械能的数值均与参考系有关，但功能原理所揭示的关系适用于所有惯性系。

三、机械能守恒定律

由质点系功能原理：

$$\boxed{W_{外}+W_{非保内}=\Delta(E_k+E_p)=\Delta E}$$

考虑系统所经历的任意瞬态过程，有

$$\frac{dW_{外}}{dt}+\frac{dW_{非保内}}{dt}=\frac{dE}{dt}$$

若 $\dfrac{dW_{外}}{dt}=0$; $\dfrac{dW_{非保内}}{dt}=0 \longrightarrow \dfrac{dE}{dt}=0$

$\longrightarrow E=E_k+E_p=C$ （常量）

三、机械能守恒定律

若系统的所有外力与非保守内力均不做功，

亦即：当系统中只有保守内力做功

则其机械能 $E = E_k + E_p = C$ （常量）

（1）机械能守恒条件：

系统在某一过程中始终只有保守内力做功！

而不能只考虑始末两状态的 $W_{外} + W_{非保} = 0$

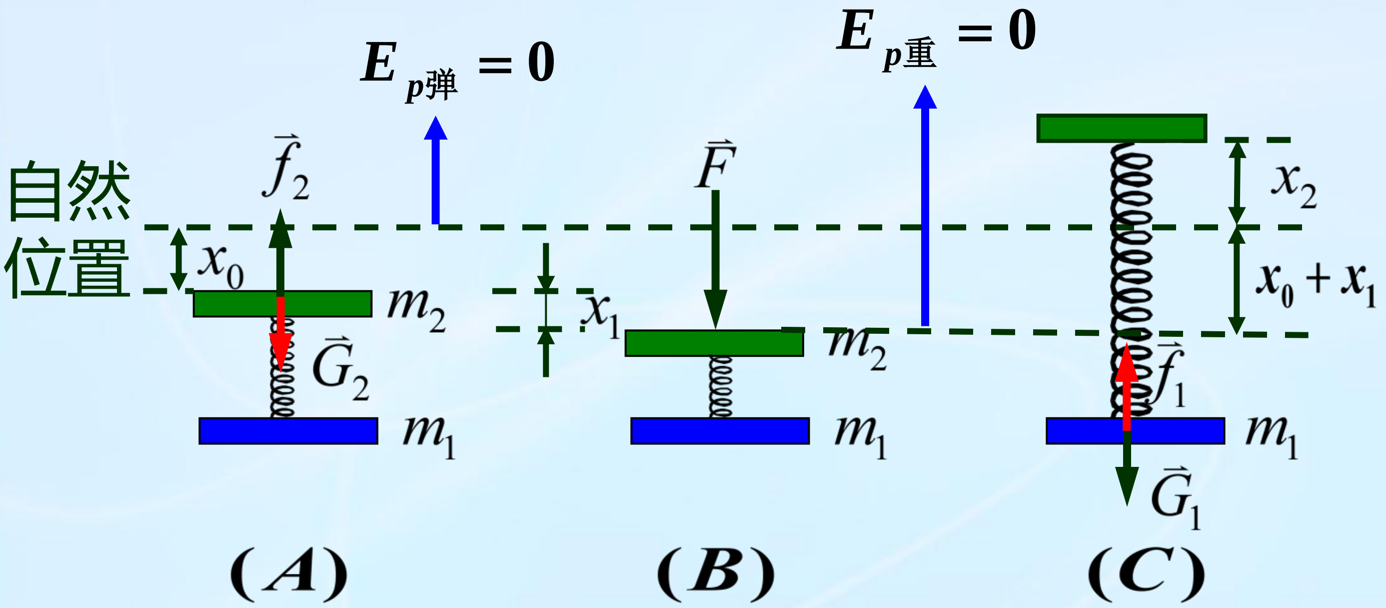
（2）适用于惯性系，且与惯性系的选择有关；

（3）机械能守恒定律是普遍的能量守恒定律在力学问题中的体现。

三、机械能守恒定律

例：用弹簧连接两个木板m_1、m_2，弹簧压缩x_0

求：至少给m_2上加多大的压力，使m_1恰能离开桌面？



提示： 整个过程只有保守力作功，机械能守恒