

《高等数学》第七单元测试卷

班级_____学号_____姓名_____

一、填空题(每空3分,共30分)

1. 方程 $xy''' + 2x^2y'^2 + x^3y = x^4 + 1$ 是_____阶微分方程.2. 设曲线上任意一点 (x, y) 的切线垂直于此点与原点的连线, 则该曲线所满足的微分方程为_____.3. 连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2$, 则 $f(x) =$ _____.4. 微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的通解 $y =$ _____.5. 以 $r_1 = r_2 = 2$ 为特征根的二阶常系数线性齐次微分方程是_____.

6. 判断对错:(填“正确”或“错误”)

(1) 设 $y = C_1 e^{x+C_2}$ 为某二阶微分方程的解, 其中 C_1, C_2 为任意常数, 则此解是该方程的通解.(2) 若函数 y_1, y_2 是一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 两个不相同的特解, 则 $y = C(y_1 - y_2) + y_2$ 就是该方程的通解. _____7. 已知 $y = 1, y = x, y = x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为_____.8. 微分方程 $y'' = \frac{2xy'}{1+x^2}$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 3$ 的特解 $y =$ _____.9. 微分方程 $y''' = y''$ 的通解为_____.

二、选择题(每小题3分,共30分)

1. 下列方程中()是二阶微分方程.

(A) $(y'')^3 + x^2y' + xy + x^3 = 0$

(B) $(y')^2 + 3x^2y = x^3$

(C) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

(D) $y' - y^2 = \sin x$

2. 微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2y = 0$ 的通解是(), 其中 C, C_1, C_2 均为常数.

(A) $y = \cos \omega x$

(B) $y = C \sin \omega x$

(C) $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$

(D) $y = C \cos \omega x + C \sin \omega x$

3. 一曲线在其上任意一点 (x, y) 处的切线斜率等于 $-\frac{2x}{y}$, 这曲线是().

(A) 直线

(B) 抛物线

(C) 圆

(D) 椭圆

4. 曲线 $y = y(x)$ 经过点 $(0, -1)$, 且满足微分方程 $y' + 2y = 4x$, 则当 $x = 1$ 时, $y =$ ().

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4

5. 已知微分方程 $y' + P(x)y = x \sin x$ 有一特解 $y = -x \cos x$, 则此方程通解为().

(A) $y = Cx \cos x$

(B) $y = C - x \cos x$

(C) $y = Cx - x \cos x$

(D) $y = -x \cos Cx$

6. 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的解, 若 $f(x_0) > 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点().

(A) 取得极大值

(B) 取得极小值

(C) 某邻域内单调增

(D) 某邻域内单调减

7. 若 y_1 和 y_2 是二阶齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的两个特解, C_1, C_2 为任意常数, 则 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ ().

(A) 是该方程的通解

(B) 是该方程的特解

(C) 是该方程的解

(D) 不一定是该方程的解

8. 曲线 $y = y(x)$ 经过原点, 且在原点处切线与直线 $2x + y + 6 = 0$ 平行, 而 $y = y(x)$ 满足方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$, 则曲线方程是().

(A) $y = -e^x \cos 2x + 1$

(B) $y = -e^x \sin 2x$

(C) $y = e^x \cos 2x - 1$

(D) $y = e^x \sin 2x$

9. 微分方程 $y'' - 2y' = x$ 的特解 y^* 的形式为().

(A) ax

(B) $ax + b$

(C) ax^2

(D) $ax^2 + bx$

10. 微分方程 $y'' + 4y = \cos 2x$ 的特解 y^* 的形式为().

(A) $a \cos 2x$

(B) $ax \cos 2x$

(C) $x(a \cos 2x + b \sin 2x)$

(D) $a \cos 2x + b \sin 2x$

三、求解下列微分方程(每小题5分,共20分)

1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0;$

2. $x \frac{dy}{dx} = y(\ln y - \ln x);$

3. $xy' + y = xe^x;$

4. $y'' + 2y' + y = x \sin x.$

四、(6分) 设 $f(x) = x + \int_0^x f(u) \mathrm{d}u$, $f(x)$ 为可微函数, 求 $f(x)$.

六、(8分) 一质量为 m 的质点作直线运动, 从速度等于零时刻起, 有一个和时间成正比 (比例系数为 k_1) 的力作用在它上面, 此外质点又受到阻力, 阻力和速度成正比 (比例系数为 k_2), 试求此质点的速度和时间的关系.

五、(6分) 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ 都是方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的特解, 且 $\frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3}$ 不恒等于常数, 证明 $y = (1 + C_1)y_1 + (C_2 - C_1)y_2 - C_3y_3$ 为方程的通解 (其中 C_1 , C_2 为任意常数).