第十一讲 向量的数量积、向量积、混合积

一、向量的数量积

二、向量的向量积

三、向量的混合积

一、两向量的数量积(也称为点积或内积)

实例 一物体在常力$\vec{F}$作用下沿直线从点M_1移动到点M_2，以$\vec{s}$表示位移，则力$\vec{F}$所作的功为

$$W = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta \qquad (\text{其中}\theta\text{为}\vec{F}\text{与}\vec{s}\text{的夹角})$$

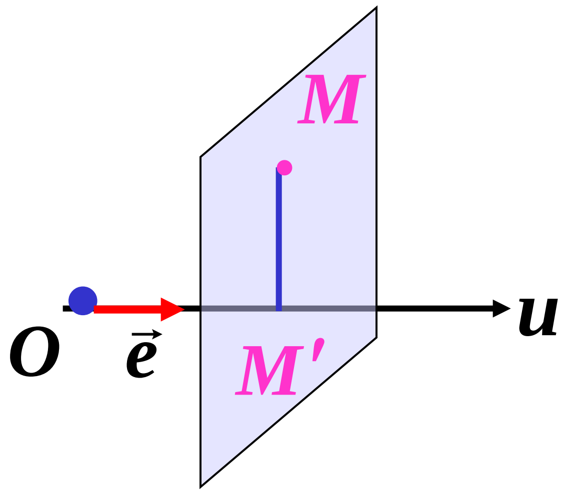
启示: 两向量作这样的运算，结果是一个数量.

定义 向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**为$\vec{a}\cdot\vec{b}$，且

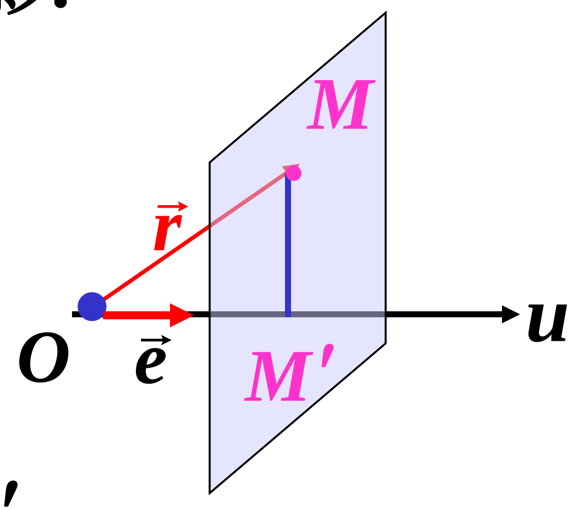
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta, \quad (\text{其中}\theta\text{为}\vec{a}\text{与}\vec{b}\text{的夹角}).$$

向量在轴上的投影

空间一点在轴上的投影



过点M作轴u的垂直平面，交点M'即为点M在轴u上的投影.



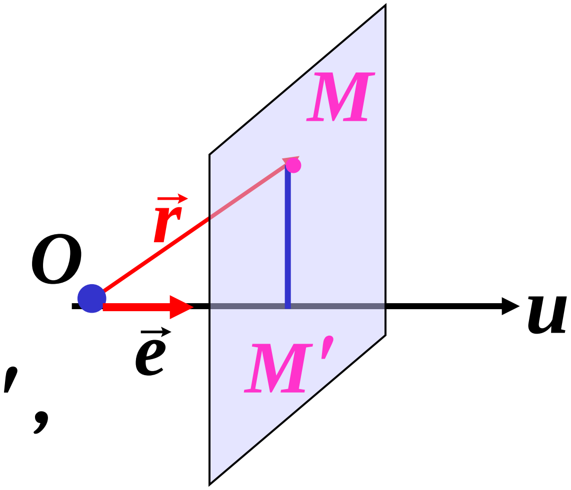
向量在轴上的分向量

任给向量$\vec{r}$，作$\overrightarrow{OM}=\vec{r}$，

得到点M在轴u上的投影M'，

则向量$\overrightarrow{OM'}$称为向量 $\vec{r}$ 在轴u上的分向量.

向量在轴上的投影



任给向量 $\vec{r}$，作 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$，

得到点 M 在轴 u 上的投影 M'，

则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\vec{r}$ 在轴 u 上的分向量.

设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\vec{e}$，则数 λ 称为向量 $\vec{r}$ 在轴 u 上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\vec{r}$ 或 $(\vec{r})_u$.

向量在三条坐标轴上的投影与其在相应轴上的三个坐标相同.

若 $\vec{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$，则

$$\mathrm{Prj}_x\vec{a}=(\vec{a})_x=a_x,\quad \mathrm{Prj}_y\vec{a}=a_y,\quad (\vec{a})_z=a_z.$$

故向量的投影具有与坐标相同的性质

性质1 $\mathrm{Prj}_u\vec{a} = (\vec{a})_u = a_u = |\vec{a}|\cos\varphi.$

其中 φ 是向量 $\vec{a}$ 与轴u的夹角.

注 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi,$ 其中 $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}).$

性质2 $\mathrm{Prj}_u(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{Prj}_u\vec{a} + \mathrm{Prj}_u\vec{b}.$

$$(\vec{a}+\vec{b})_u = (\vec{a})_u + (\vec{b})_u.$$

（可推广到有限多个的情形）

性质3 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\vec{a}) = \lambda\mathrm{Prj}_u\vec{a}.$ $(\lambda\vec{a})_u = \lambda(\vec{a})_u.$

关于数量积的说明： $(\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$, $\vec{i}\cdot\vec{i}=1.$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0.$

(3) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, (当$\vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0$时).

(4) $\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$, $(\because\ \mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\theta)$.

数量积符合下列运算规律：$(\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)$

（1）交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a};$

（2）结合律：若λ、μ 为数，则

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}),$$

$$(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b});$$

（3）分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$

注：1. 消去律不成立.

即：若 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ 且 $\vec{c}\neq\vec{0}$，一般推不出 $\vec{a}=\vec{b}.$

2. 向量的数量积不具有如下结合律.

即：一般情况下，$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\neq\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$ ，

因此，写法 $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ 是无意义的.

数量积的坐标表达式

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$， $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$

$$=a_x\vec{i}\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})+a_y\vec{j}\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$+a_z\vec{k}\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

$$\because \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}\sqrt{b_x^{\ 2} + b_y^{\ 2} + b_z^{\ 2}}}.$$

两向量夹角余弦的坐标表示式

由此可知两向量垂直的充要条件为

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

$$\vec{b} \,/\!/\, \vec{a} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$$

例 1　已知$\vec{a}=(1,\ 1,\ -4)$，$\vec{b}=(1,\ -2,\ 2)$，求（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$；（2）$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角；（3）$\vec{a}$在 $\vec{b}$ 上的投影.

解　(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot 2=-9.$

(2) $$\cos\theta=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \therefore \theta=\frac{3\pi}{4}.$$

(3) $$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=-3.$$

例 2 证明向量$\vec{c}$与向量$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$垂直.

证明 $[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\cdot\vec{c}$

$$=[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}\cdot\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\cdot\vec{c}]$$

$$=(\vec{c}\cdot\vec{b})[\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}]$$

$$=0,$$

$$\therefore[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\perp\vec{c}.$$

例3 已知$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$,求向量$\vec{m}=2\vec{a}+\vec{b}$与向量 $\vec{n}=\vec{a}-4\vec{b}$的夹角.

解 $\because \cos(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$,

$$\vec{m}\cdot\vec{n}=(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-4\vec{b})$$

$$=2|\vec{a}|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-4|\vec{b}|^2 \quad =8-7\vec{a}\cdot\vec{b}-4 \;=-3,$$

$$|\vec{m}|=\sqrt{\vec{m}\cdot\vec{m}}=\sqrt{21}, \quad |\vec{n}|=\sqrt{\vec{n}\cdot\vec{n}} \;=4,$$

$$\therefore \cos(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=\frac{-3}{4\sqrt{21}}, \qquad (\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=\pi-\arccos\frac{3}{4\sqrt{21}}.$$

例4 在$x0y$平面上求一单位向量与已知向量$\vec{\alpha}=(-4,\ 3,\ 7)$垂直.

解 设所求向量为 $(x,\ y,\ 0)$,

则 $$\begin{cases} -4x+3y=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

解得 $x=\frac{3}{5}, y=\frac{4}{5}$; 或 $x=-\frac{3}{5}, y=-\frac{4}{5}$,

故所求向量为$\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 0\right)$, 或为 $\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5},\ 0\right)$.

二、向量的向量积

定义 向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**向量积记**为 $\vec{a}\times\vec{b}$，其中

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$, (其中$\theta$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角);

向量 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向既垂直于$\vec{a}$，又垂直于$\vec{b}$，指向符合右手法则（由$\vec{a}$转向$\vec{b}$的转角不超过π）.

关于向量积的说明:

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$;

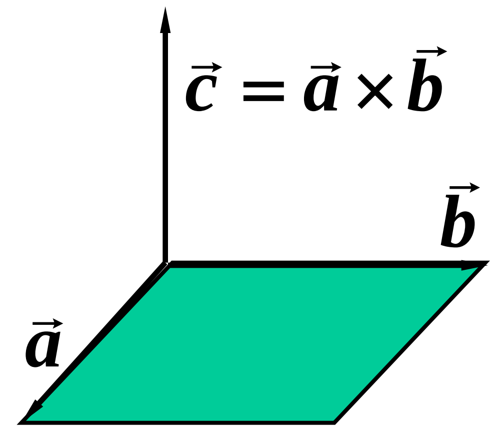
(2) $\vec{a}/\!/\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$;

(3) $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k};$

$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$

$\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$表示什么?

(4) $|\vec{a}\times\vec{b}|$表示以$\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积.



向量积符合下列运算规律:

（1）**交换律:** $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$

（2）**分配律:** $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$

（3）**若 λ 为数:** $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$

注: 结合律不成立. 如 $(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{j}\neq\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{j}).$

向量积的坐标表达式

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$,

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$=a_x\vec{i}\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})+a_y\vec{j}\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$+a_z\vec{k}\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$=0+a_xb_y\vec{k}+a_xb_z(-\vec{j})+a_yb_x(-\vec{k})+a_yb_z\vec{i}$$

$$+a_zb_x\vec{j}+a_zb_y(-\vec{i})$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}.$$

三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}[a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}]-a_{12}[a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}]+$$
$$+a_{13}[a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}],$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}.$$

故向量积可用三阶行列式表示

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}.$$

由上式也可推出 $\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}.$

b_x、b_y、b_z不能同时为零，但最多允许两个为零.

例如，$\dfrac{a_x}{0}=\dfrac{a_y}{0}=\dfrac{a_z}{b_z}$， 应理解为$a_x=0,\ a_y=0.$

求与$\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$、$x$ 轴都垂直的单位向量.

例5 求与$\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$都垂直的单位向量.

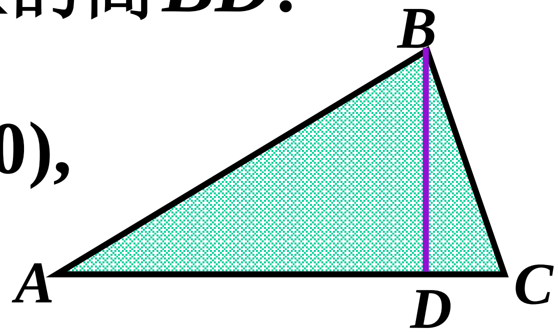
解

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=0\vec{i}+10\vec{j}+5\vec{k},$$

$$\because |\vec{c}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},\qquad \therefore \vec{e}_{\vec{c}}=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}.$$

故与$\vec{a},\vec{b}$都垂直的单位向量是：$\pm\vec{e}_{\vec{c}}$.

例 6 在顶点为 $A(1,-1,2)$、$B(5,-6,2)$ 和 $C(1,3,-1)$ 的三角形中，求 AC 边上的高 BD.



解 $\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$, $\overrightarrow{AB}=(4,-5,0)$,

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 4 & -3\\ 4 & -5 & 0\end{vmatrix}=(-15,-12,-16),$$

故三角形 ABC 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{25}{2},$$

$$\because |\overrightarrow{AC}|=5,\quad S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot|\overrightarrow{BD}|,\quad \therefore |\overrightarrow{BD}|=5.$$

例7 设向量$\vec{m}$、$\vec{n}$、$\vec{p}$两两垂直，符合右手法则，且$|\vec{m}|=4$，$|\vec{n}|=2$，$|\vec{p}|=3$，计算$(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}$.

解 $|\vec{m}\times\vec{n}|=|\vec{m}||\vec{n}|\sin(\vec{m},\widehat{\ }\vec{n})$

$=4\times 2\times 1=8,$

依题意知$\vec{m}\times\vec{n}$与$\vec{p}$同向,

$\therefore \theta=(\vec{m}\times\vec{n},\widehat{\ }\vec{p})=0,$

$(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}=|\vec{m}\times\vec{n}|\cdot|\vec{p}|\cos\theta=8\cdot 3=24.$

三、向量的混合积

设 a_1, a_2, a_3 为三个向量，定义

$$[a_1, a_2, a_3] = (a_1 \times a_2) . a_3$$

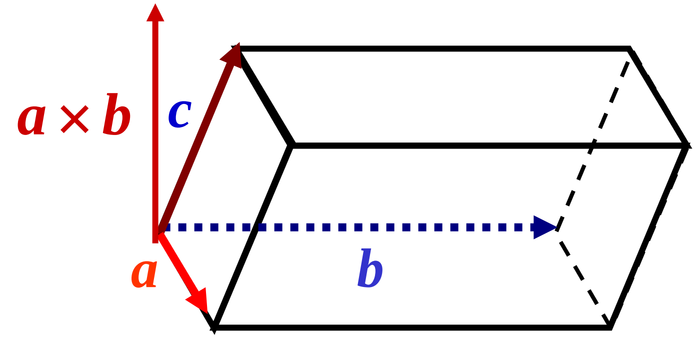
为向量a_1, a_2, a_3 的混合积

设$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$

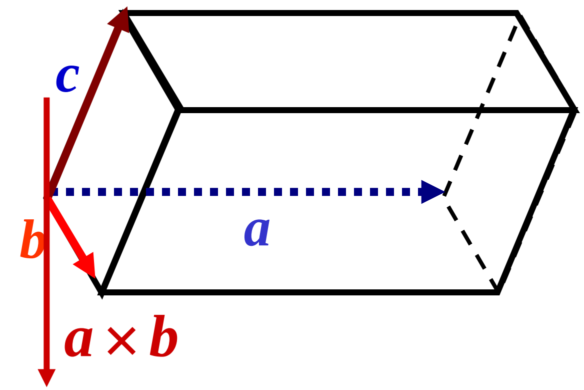
则 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

关于混合积的说明：

（1）向量混合积的几何意义：



向量的混合积$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$是一个数，其几何意义是：它的绝对值表示以向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$为棱的平行六面体的体积.



（2）三向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面 $\Longleftrightarrow [a,b,c]=0$

(3) $[a_1,a_2,a_3]=[a_2,a_3,a_1]=[a_3,a_1,a_2]$.

$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2),\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$,则

则向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$

$$\Leftrightarrow(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

例 3 已知空间内不在一平面上的四点 $A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$、$C(x_3, y_3, z_3)$、$D(x_4, y_4, z_4)$，求四面体的体积.

解 由立体几何知，四面体的体积等于以向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 为棱的平行六面体的体积的六分之一.

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$$

$$\because\ \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1)$$

$$\overrightarrow{AD} = (x_4 - x_1,\ y_4 - y_1,\ z_4 - z_1)$$

$$\therefore V = \frac{1}{6}\left\| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right\|$$

思考题　已知向量$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$，

证明$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

思考题2解答

$$
\begin{aligned}
|\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \sin^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \\
&= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 [1 - \cos^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}})] \\
&= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cos^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \\
&= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.
\end{aligned}
$$

一、选择题　　　　练习

1．$\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　**A**　）$(\vec{b}\neq\vec{0})$

(A) $|\vec{b}|\cdot \mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\,\vec{a}$　　(B) $\vec{a}\cdot \mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\,\vec{b}$

(C) $|\vec{a}|\cdot \mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\,\vec{b}$　　(D) $|\vec{a}|\cdot \mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\,\vec{a}$

2．设$\vec{a}=(2,4,-1)$, $\vec{b}=(0,-2,2)$，则同时与$\vec{a}$、$\vec{b}$垂直的单位向量$\vec{n}=$（　**B**　）．

(A) $\dfrac{1}{|\vec{a}+\vec{b}|}(6\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k})$　(B) $\dfrac{\pm 1}{|\vec{a}\times\vec{b}|}(6\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k})$

(C) $6\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$　　(D) $-6\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$

3. $\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$的充要条件是（ **B** ）.

(A) $\vec{a}\perp\vec{b}$ (B) $\vec{a}\parallel\vec{b}$ (C) $\vec{a}=\vec{0}$或$\vec{b}=\vec{0}$ (D) $\vec{a}=\vec{0}$且$\vec{b}=\vec{0}$

二、设$\vec{a}=(2,-1,-2)$, $\vec{b}=(1,1,z)$, 问z为何值时？$(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$最小，并求出此最小值.

解: 当 $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$ 最小时, $\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$ 最大。

$$\because\ \cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1-2z}{3\cdot\sqrt{2+z^2}}$$

令$\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1-2z}{3\cdot\sqrt{2+z^2}}\right)=0$ 得 $z=-4$

驻点唯一，且在区域内部取得，所以$z=-4$即为所求

此时, $\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 从而, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=\dfrac{\pi}{4}$

三、已知 $\vec{a}=(3,\ 5,\ -2)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 4)$

1. 求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 与 $\vec{a}\times\vec{b}$；

2. 问 λ, μ 满足什么关系时，$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 与 z 轴垂直.

解: 1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2+5\times1+(-2)\times4=3$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 5 & -2\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=22\vec{i}-16\vec{j}-7\vec{k}$$

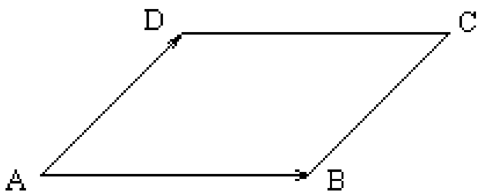
2. $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\{3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu\}$, $\vec{k}=\{0,0,1\}$

要使 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 与 z 轴垂直，则需

$(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\cdot\vec{k}=0\Rightarrow-2\lambda+4\mu=0$, 即 $\lambda=2\mu$

四、已知$\overrightarrow{AB}=\vec{a}-3\vec{b}, \overrightarrow{AD}=\vec{a}+2\vec{b}$，其中$|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=3$，

$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\dfrac{\pi}{6}$，求平行四边形ABCD的面积.



解：
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(\vec{a}-3\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$$
$$=\vec{a}\times\vec{a}-3\vec{b}\times\vec{a}+2\vec{a}\times\vec{b}-6\vec{b}\times\vec{b}$$
$$=5\vec{a}\times\vec{b}$$
$$\therefore S_{\square ABCD}=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=5|\vec{a}\times\vec{b}|$$
$$=5|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{75}{2}$$