§ 7.2　区间估计

引例 已知 $X \sim N(\mu, 1)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是一组样本值

μ 的无偏、有效点估计为 $\overline{X}$

$\downarrow$　　　　　　　　$\downarrow$

常数　　　　　　　　随机变量

不同的样本值算得的 μ 的估计值不同，因此除了给出未知参数的点估计外，还希望根据所给的样本确定一个随机区间，使其包含参数真值的概率达到指定的要求.

如引例中，若要找一个区间,使其包含μ的真值的概率为**0.95**.（设 $n = 5$）

$$\overline{X} \sim N\left(\mu,\ \frac{1}{5}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}} \sim N(0,\ 1)$$

取 $\alpha = 0.05$

查表得 $z_{\alpha/2} = 1.96$

这说明 $P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}\right| \geq 1.96\right\} = 0.05$

即 $P\left\{\overline{X}-1.96\sqrt{1/5} \leq \mu \leq \overline{X}+1.96\sqrt{1/5}\right\}=0.95$

称随机区间 $\left(\overline{X}-1.96\sqrt{1/5},\ \overline{X}+1.96\sqrt{1/5}\right)$

为未知参数 μ 的置信度为0.95的置信区间.

置信区间的意义

反复抽取容量为**5** 的样本，都可得到一个区间,这个区间可能包含未知参数 μ 的真值,也可能不包含未知参数的真值,包含真值的区间占**95%.**

$$\left(\bar{X}-1.96\sqrt{1/5},\ \bar{X}+1.96\sqrt{1/5}\right) \text{——} \ \mu \text{ 的置信区间}$$

$$\bar{X}-1.96\sqrt{1/5} \quad \text{——} \quad \mu \text{ 的置信下限}$$

$$\bar{X}+1.96\sqrt{1/5} \quad \text{——} \quad \mu \text{ 的置信上限}$$

$$1-\alpha \quad \text{——} \quad \text{置信度}$$

若测得 一组样本值, 算得 $\bar{x} = 1.86$

则得一区间 $(1.86 - 0.877,\ 1.86 + 0.877)$

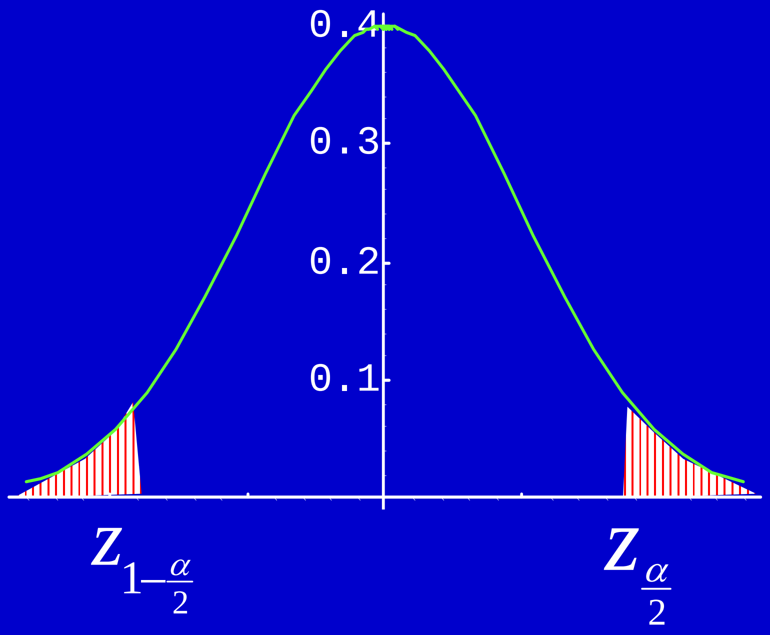
它可能包含 μ 的真值，也可能不包含μ 的真值

反复抽样得到的区间中有95%包含 μ 的真值.

为什么要取 $z_{\alpha/2}$?

当置信区间为 $\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1/5},\ \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1/5}\right)$ 时

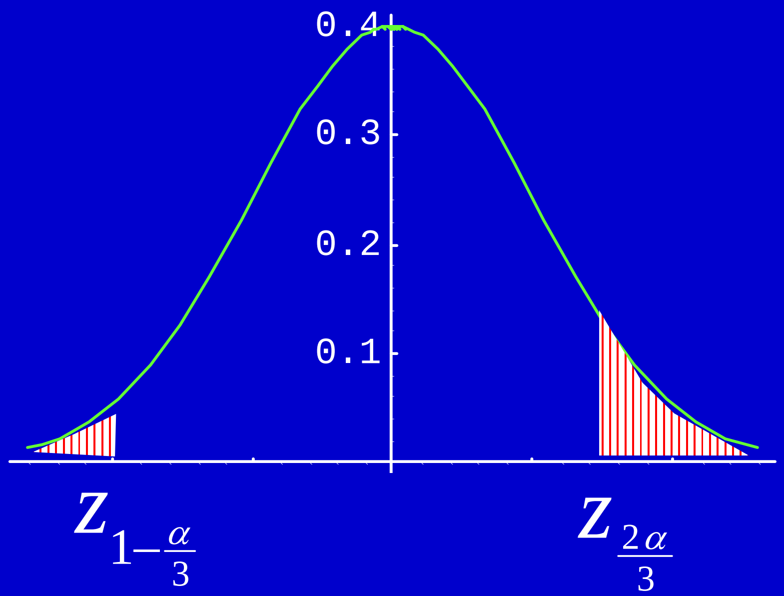
区间的长度为 $2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1/5}$ ——— 达到最短



取 $\alpha = 0.05$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96-(-1.96)$$

$$= 3.92$$



$$Z_{\frac{2\alpha}{3}} - Z_{1-\frac{\alpha}{3}} = 1.84-(-2.13)$$

$$= 3.97$$

一、置信区间的定义

设 θ 是一个待估计的参数, α 是一给定的数, $(0 < \alpha < 1)$. 若能找到两个统计量

$$\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n), \quad \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

使得 $P\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha \qquad \theta \in \Theta$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$为参数 θ 的置信度为$1 - \alpha$ 的置信区间, 分别称$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$为置信下限与置信上限, $1 - \alpha$ 称为置信度或置信水平.

几点说明

1、 置信区间的长度$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$ 反映了估计的精度

$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$ 越小, 估计的精度越高.

2、 α 反映了估计的可靠程度, α 越小, 越可靠.

α 越小, 1- α 越大, 估计的可靠程度越高,但

这时,$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$ 往往增大, 因而估计的精度降低.

3、 α 确定后, 置信区间 的选取方法不唯一 , 常

选最小的一个.

4、 在求参数的置信区间时, 一般先保证可靠性.

在保证可靠性的基础上，再提高精度.

通常，增大样本容量可以提高精度.

求置信区间的步骤

1、 寻找一个样本的函数

$$g(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta) \quad \text{— 称为枢轴量}$$

它含有待估参数，不含其它未知参数，它的分布已知，且分布不依赖于待估参数 (常由θ的点估计出发考虑).

例如 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{5}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{1/5}} = g(X_1, X_2, \cdots, X_n, \mu) \sim N(0,1)$$

2、 给定置信度 $1-\alpha$，定出两个常数 a, b,使得

$$P\{a < g(X_1, X_2, X_n, \theta) < b\} = 1-\alpha$$

(引例中$a=-1.96, b=1.96$)

3、 由 $a < g(X_1, X_2, X_n, \theta) < b$ 解出

$$\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \quad \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

得置信区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$

引例中,

$$(\underline{\theta}, \overline{\theta}) = (\overline{X} - 1.96\sqrt{1/5}, \quad \overline{X} + 1.96\sqrt{1/5})$$

二、置信区间常用公式

(一) 一个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的情形

(1) 方差 σ^2 已知, μ 的置信区间

$$\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

推导　由 $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 选取枢轴量

$$g(X_1, X_2, \cdots, X_n, \mu) = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

由 $P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=\alpha$ 确定 $z_{\frac{\alpha}{2}}$

解 $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\frac{\alpha}{2}}$

得 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\quad \overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

(2) 方差σ^2未知，μ的置信区间

$$\left(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

推导　　选取枢轴量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

由 $P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=\alpha$ 确定 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

故 μ 的置信区间为$\left(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$

(3) 当 μ 已知时，方差 σ^2 的 置信区间

取枢轴量 $Q=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$，由概率

$$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right\}=1-\alpha$$

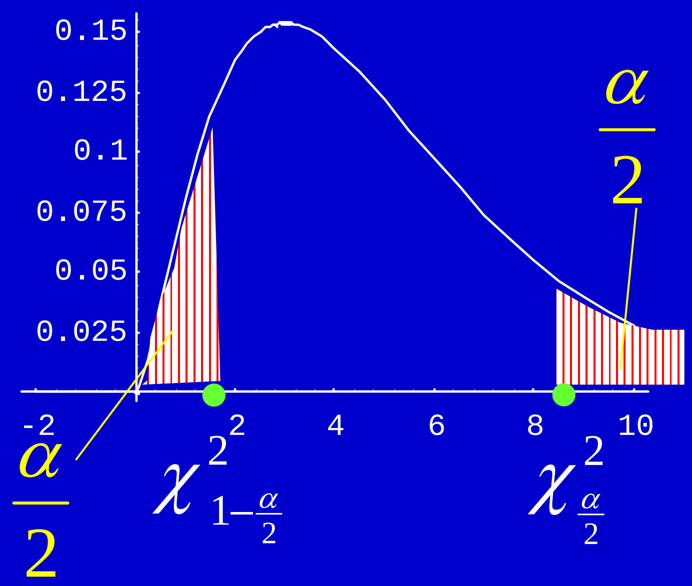
得 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

(4) 当 μ 未知时，方差 σ^2 的置信区间

选取 $K=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 则由

$$P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=1-\alpha$$



得 σ^2 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)\quad\cdots\cdots\quad(4)$$

例1 某工厂生产一批滚珠，其直径 X 服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，现从某天的产品中随机抽取6件，测得直径为

15.1，14.8，15.2，14.9，14.6，15.1

(1) 若$\sigma^2=0.06$，求 μ 的置信度为95%的置信区间；

(2) 若σ^2未知，求 μ 的置信度为95%的置信区间；

(3) 求方差σ^2的置信度为95%的置信区间.

解 (1) $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{0.06}{6})$ 即 $N(\mu, 0.01)$

$$\frac{\overline{X}-\mu}{0.1} \sim N(0,1) \qquad z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$$

由给定数据算得 $\bar{x} = \dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 14.95$

由公式 (1) 得 μ 的置信区间为

$$(14.95 - 1.96 \times 0.1, \quad 14.95 + 1.96 \times 0.1)$$

$$= (14.75, \quad 15.15)$$

(2) 取 $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{6}} \sim t(5)$ 查表得 $t_{0.025}(5) = 2.5706$

由给定数据算得 $\bar{x} = 1495$

$$s^2 = \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - 6\bar{x}^2\right) = 0.051. \quad s = 0.226$$

由公式 (2) 得 μ 的置信区间为

$$\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{6}}t_{0.025}(5),\quad \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{6}}t_{0.025}(5)\right)$$

$$=(14.71,\quad 15.187)$$

(3) 选取枢轴量 $K=\dfrac{5S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(5)$ $\quad s^2=0.051.$

查表得 $\chi^2_{0.025}(5)=12.833,\quad \chi^2_{0975}(5)=0.831$

由公式 (4) 得 μ 的置信区间为

$$\left(\frac{5s^2}{\chi^2_{0.025}(5)},\quad \frac{5s^2}{\chi^2_{0.975}(5)}\right)=(0.0199,\quad 0.3069)$$

(二) 两个正态总体的情形

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为取自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本,

$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$ 为取自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本,

$\overline{X}, S_1^2$; $\overline{Y}, S_2^2$ 分别表示两个样本的均值与方差

置信度为 $1-\alpha$

(1) σ_1^2, σ_2^2 **已知，** $\mu_1-\mu_2$ **的置信区间**

$\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n}),\ \ \bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m})$ $\bar{X}, \bar{Y}$ 相互独立，

$$\longrightarrow \quad \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}},\ \ (\bar{X}-\bar{Y})+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}} \right)$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots \qquad (5)$$

(2) σ_1^2, σ_2^2 未知(但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$) $\mu_1-\mu_2$的置信区间

$$\bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{m}\right)$$

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n+m-2)$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}} \sim t(n+m-2)$$

$$P\left\{\left|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}}\right|<t_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$

$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}\right)$$

$\cdots\ \cdots\ \cdots\qquad (6)$

(3) σ_1^2, σ_2^2 未知, 但 $n, m > 50$, $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间

$$\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m} \approx \frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n} + \dfrac{S_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

$\bar{X}, \bar{Y}$ 相互独立, 因此 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X} - \bar{Y}) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}} \right) \cdots\cdots (7)$$

(5) 方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间 (μ_1, μ_2 未知)

取枢轴量 $F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\dfrac{S_1^2 \big/ S_2^2}{\sigma_1^2 \big/ \sigma_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

因此, 方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)}\right)$$

$\cdots\ \cdots\ \cdots$ **(8)**

(6) 方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间 (μ_1，μ_2 已知)

取枢轴量

$$F=\frac{\dfrac{1}{n}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{1}{m}\dfrac{\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}=\frac{\dfrac{m}{n}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\mu_2)^2}}{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}\sim F(n,m)$$

因此, 方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为

$$\left(\frac{\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\mu_2)^2}}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n,m)}, \frac{\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\mu_2)^2}}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n,m)} \right)$$

…… …… …… **(9)**

例2 某厂利用两条自动化流水线罐装番茄酱. 现分别从两条流水线上抽取了容量分别为13与17的两个相互独立的样本

$$X_1, X_2, \cdots, X_{13} \text{ 与 } Y_1, Y_2, \cdots, Y_{17}$$

已知 $\bar{x} = 10.6g, \quad \bar{y} = 9.5g,$

$$s_1^2 = 2.4g^2, \quad s_2^2 = 4.7g^2$$

假设两条流水线上罐装的番茄酱的重量都服从正态分布, 其均值分别为 μ_1与 μ_2

(1) 若它们的方差相同, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$,求均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为0.95 的置信区间;

(2) 若不知它们的方差是否相同, 求它们的方差比的置信度为 0.95 的置信区间

解 **(1)** 取枢轴量

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}} \sim t(n+m-2)$$

查表得 $t_{0.025}(28)=2.0484$

由公式**(6)** $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}\right)$$

$=(-0.3545,\quad 2.5545)$

(2) 枢轴量为 $F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\dfrac{S_1^2\big/S_2^2}{\sigma_1^2\big/\sigma_2^2}\sim F(12,16)$

查表得 $F_{0.025}(12,16)=2.89$

$$F_{0.975}(12,16)=\frac{1}{F_{0.025}(16,12)}\approx\frac{1}{3.16}$$

由公式(8)得方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{0.025}(n-1,m-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{0.975}(n-1,m-1)}\right)$$

$$=(0.1767,\ 1.6136)$$

(三) 单侧置信区间

定义 对于给定的 $\alpha\,(0<\alpha<1)$, θ 是待估参数

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的样本,

若能确定一个统计量

$$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \quad (\text{或}\ \overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n))$$

使得 $P\{\underline{\theta}<\theta\}=1-\alpha$ (或 $P\{\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$)

则称 $(\underline{\theta},+\infty)$ (或 $(-\infty,\overline{\theta})$)

为置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间.

$\underline{\theta}$ —— 单侧置信下限 $\overline{\theta}$ —— 单侧置信上限

例3 已知灯泡寿命X服从正态分布，从中随机地抽取 5 只作寿命试验，测得寿命为

1050，1100，1120，1250，1280 (小时)

求灯泡寿命均值的置信度为**0.95**的单侧置信下限与灯泡寿命方差的置信度为**0.95**的单侧置信上限.

解 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2未知

$$n=5,\ \bar{x}=1160,\ s^2=\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}\right)=9950$$

(1) 选取枢轴量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S\big/\sqrt{n}} \sim t(4)$

$$t_{\alpha} = t_{0.05} = 2.1318$$

$$\underline{\mu} = \overline{\mathbf{x}} - \mathbf{t}_{0.05} \times \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{5}} = \mathbf{1064.9}$$

(2) 选取枢轴量 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(4)$

$$\chi^2_{0.95}(4) = 0.711$$

$$\overline{\sigma^2} = \frac{4s^2}{\chi^2_{0.95}(4)} = 55977$$