符号运算

第8讲

符号运算概述

所谓符号运算是指在运算时，无须事先对变量赋值，而将所得到结果以标准的符号形式来表示。

- **符号运算的特点：**

1）符号运算定义在符号变量的基础上，符号运算表达式前必须定义符号变量，否则出错。

2）符号运算是精确计算

3）与数值计算的计算速度相比较，符号运算的运算速度较慢。

4）符号计算的运算符和基本数学函数与数值计算中的运算符和基本数学函数几乎完全相同。

符号运算概述

主要内容:

- 1. 符号对象的创建
- 2. 符号表达式替换
- 3. 符号表达式运算
- 4. 符号微积分
- 5. 符号方程(组)求解

8.1 符号对象的创建

符号变量要先定义，后引用。

符号对象包括：

- 符号常量(无变量的符号表达式)
- 符号变量
- 符号表达式

其中符号表达式一般用已经定义的符号变量生成。

- MATLAB提供两个函数创建符号对象：

sym函数：一次创建一个符号对象

syms函数：一次创建多个符号对象

8.1.1 sym函数创建符号对象

1、用sym函数创建**符号变量**的调用格式为：

- **sym('变量','参数')**
- 参数用来设置限定符号变量的数学特性：
- **positive**：表示为“正、实”符号变量，
- **real**：表示为“实”符号变量，
- **unreal**：表示为“非实”符号变量。如果不限定则参数可省略。

2、用sym函数创建**符号常量**的调用格式为：

- sym(常量) 或者sym(‘常量’)
- 如：sym(1/3)

8.1.2 syms函数创建符号对象

syms函数一次可以定义多个符号变量。

- syms函数的一般调用格式为：

  syms 变量1 变量2 ... 变量n 参数

■用这种格式定义符号变量时不要在变量名上加字符串分界符('')，变量间用空格而不要用逗号分隔。

■ 参数的选择包括：positive\real\unreal

- 或syms('变量1','变量2', ... , '变量n', '参数')

如 syms a b real等同于syms('a','b','real')

8.1.3 创建符号表达式

例：创建符号复数变量a+bi

方法1:

```
x=sym('a', 'real');
%创建实数符号变量x
y=sym('b', 'real');
%创建实数符号变量y
z=sym('c', 'unreal');
%创建非实数符号变量z
z=x+y*i
```

8.1.3 创建符号表达式

方法2：

```
syms a b 'real';
%创建实数符号变量a和b,等价语句为syms('a','b' , 'real')
syms z 'unreal';
%创建非实数符号变量c，等价语句为syms('c', 'unreal')
z=a+b*i
```

两种方法的执行结果相同：

```
z=
a+i*b
```

8.2 符号表达式替换

Matlab提供了两个符号表达式的替换函数subexpr和subs，可以通过符号替换使表达式的输出形式简化，以得到一个简单的表达式。

- 将表达式中重复出现的字符串用变量代替的函数为subexpr，其调用格式为：

  [Y,Sigma]=subexpr(S,Sigma)

  [Y,Sigma]=subexpr(S, 'Sigma')

- 指定用变量Sigma（字符或字符串）的值代替符号表达式S中重复出现的字符串，Y返回替换后的结果，被替换的字符串的内容由变量Sigma返回 。

例：符号表达式替换(subexpr)

例：求解并化简 3 次方程 $x^3+ax+1=0$ 的符号解。

```
t=solve('x^3+a*x+1=0')
t =
((a^3/27 + 1/4)^(1/2) - 1/2)^(1/3) - a/(3*((a^3/27 + 1/4)^(1/2) - 1/2)^(1/3))
 a/(6*((a^3/27 + 1/4)^(1/2) - 1/2)^(1/3)) - ((a^3/27 + 1/4)^(1/2) - 1/2)^(1/3)/2 - (3^(1/2)*(a/(3*((a^3/27 + 1/4)^(1/2) - 1/2)^(1/3)) + ((a^3/27 + 1/4)^(1/2) - 1/2)^(1/3))*i)/2
 a/(6*((a^3/27 + 1/4)^(1/2) - 1/2)^(1/3)) - ((a^3/27 + 1/4)^(1/2) - 1/2)^(1/3)/2 + (3^(1/2)*(a/(3*((a^3/27 + 1/4)^(1/2) - 1/2)^(1/3)) + ((a^3/27 + 1/4)^(1/2) - 1/2)^(1/3))*i)/2
```

例：符号表达式替换(subexpr)

```
[r,s]=subexpr(t,'s')

r =

 s^(1/3) - a/(3*s^(1/3))
 a/(6*s^(1/3)) - s^(1/3)/2 - (3^(1/2)*(a/(3*s^(1/3)) + s^(1/3))*i)/2
 a/(6*s^(1/3)) - s^(1/3)/2 + (3^(1/2)*(a/(3*s^(1/3)) + s^(1/3))*i)/2

 s =

 (a^3/27 + 1/4)^(1/2) - 1/2
```

8.2 符号表达式替换(续)

函数 subs 用指定符号替换符号表达式中的某一特定符号。

基本调用格式:

- **subs(f):** 用当前工作空间中存在的变量值，替换 f中所有出现的相同的变量，并进行简化计算。
- **subs(f,x,a)：** 用 a 替换 f 中的 x ; a 是可以是 数/数值变量/表达式 或 符号变量/表达式。

■ 若x与a为相同大小的向量或矩阵，则用a中相应的元素替换x中的元素;

■ 若f，x为标量，而a是向量或矩阵，则f与x将扩展为与a相同形状的向量或矩阵。

例：符号表达式替换(sub)

例：表达式 $f(x) = 2x + y$

```
syms x y a b
f=2*x+y;
x=3,y=4;
subs(f)                      →  ans=10
subs(f,x,'a')                →  ans=2*a+y
subs(f,[x,y],[3,4])
subs(f,{x,y},{3,4})          →  ans=10
subs(f,x,[1:3])              →  ans=[2+y,4+y,6+y]
subs(f,{x,y},{[1:3],[5:7]})  →  ans=[7  10  13]
subs(f,{x,y},{a+b,a-b})      →  ans=3*a+b
subs(f,{x,y},{x+y,x-y})      →  ans=3*x + y
```

8.3 符号表达运算

- 符号表达式运算包括：

因式分解、展开、合并、化简

- 基本命令：

factor(s)：对符号表达式s因式分解。

expand(s)：展开符号表达式s。

collect(s)：对符号表达式s合并同类项。

collect(s,v)：对符号表达式s按变量v合并同类项。

8.3.1 符号表达式化简

Matlab提供的对符号表达式化简的函数有：

simplify函数和simple函数。

- **simplify(s)**

  根据函数规则对s进行化简。

例如：

```
syms x
simplify(sin(x)^2+cos(x)^2)
ans =
 1
```

8.3.1 符号表达式化简(续)

- simple(s)

调用Matlab 的其他函数对表达式进行综合化简，以寻求s的最简形式，并显示化简过程。调用格式为：

- [r,how]=simple(s)

返回s的最简化形式，r为返回的简化形式，how为化简过程中使用的主要方法，包括simplify, radsimp, combine, collect, factor, convert, expand等。

f	R	HOW
2*cos(x)^2-sin(x)^2	3*cos(x)^2-1	simplify
(x+1)*x*(x-1)	x^3-x	combine(trig)
x^3+3*x^2+3*x+1	(x+1)^3	factor
cos(3*acos(x))	4*x^3-3*x	expand

8.3.2 因式分解

facotr函数的一般调用格式为：

- facotr(s)

例：将表达式(x^9-1)进行 因式分解。

```
syms x
factor(x^9-1)
ans =
(x-1)*(x^2+x+1)*(x^6+x^3+1)
```

8.3.3 符号表达式展开

expand函数的一般调用格式为：

- expand(s)

例：展开表达式f=(x+1)^5

```
syms x
f=(x+1)^5;
expand(f)
ans=
x^5+5*x^4+10*x^3+10*x^2+5*x+1
```

8.3.4 合并同类项

collect函数的一般调用格式为：

- collect(s)
- collect(s,v)

其中v为指定变量进行同类项合并。

例：以x和t为自变量对表达式f=x(x(x-6)+12)*t合并同类项。

```
syms x t;
f=x*(x*(x-6)+12)*t;
collect(f)
ans =
    t*x^3 + (-6*t)*x^2 + (12*t)*x
collect(f,t)
ans =
    x*(x*(x-6)+12)*t
```

8.4.1 符号微分

diff函数用于对符号表达式求导数，基本调用格式为：

- **diff(s)**：没有指定变量和导数阶数，则系统按findsym函数指示的默认变量对符号表达式s求一阶导数。
- **diff(s,'v')**：以v为自变量，对符号表达式s求一阶导数。
- **diff(s,n)**：按findsym函数指示的默认变量对符号表达式s求n阶导数，n为正整数。
- **diff(s, 'v',n)**：以v为自变量，对符号表达式s求n阶导数。

$$\frac{d\sin x^2}{dx}$$

```
x = sym('x');
diff(sin(x^2))
ans =
2*x*cos(x^2)
```

例：一元函数求导

```
syms a b t x y z;
f=sqrt(1+exp(x));
diff(f)   %未指定求导变量和阶数，按缺省规则处理
ans =
exp(x)/(2*(exp(x) + 1)^(1/2))
f=x*cos(x);
diff(f,x,2)     %求f对x的二阶导数
ans =
-2*sin(x)-x*cos(x)
diff(f,x,3)     %求f对x的三阶导数
ans =
-3*cos(x)+x*sin(x)
```

例：参数方程求导

```
syms a b t
x=a*cos(t);y=b*sin(t);
%按参数方程求导公式求y对x的导数
diff(y)/diff(x)
%求y对x的二阶导数
```

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\dfrac{dy}{dx}}{dx}=\frac{d\dfrac{dy}{dx}}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$$

```
(diff(x)*diff(y,2)-diff(x,2)*diff(y))/(diff(x))^3
```

例：多元函数求偏导

```
syms x y
f=x*exp(y)/y^2;
diff(f,x)      %z求f对x的偏导数
ans =
exp(y)/y^2
diff(f,y)      %z求f对y的偏导数
ans =
x*exp(y)/y^2-2*x*exp(y)/y^3
```

例：求雅克比矩阵、海塞矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

(1) 求雅克比矩阵

```
syms x1 x2
y1=x1^2+x2^2;
y2=2*x1*x2
jab=[diff(y1,x1), diff(y1,x2);
        diff(y2,x1), diff(y2,x1)]
```

(2) 求海塞矩阵

```
syms x1 x2
y=x1*x2+x2^2;
hss=[diff(y,x1,2), diff(diff(y,x1),x2);
        diff(diff(y,x2),x1), diff(y,x2,2)]
```

例：隐函数求导

```
syms x y z a
f=x^2+y^2+z^2-a^2;
%按隐函数求导公式求z对x的偏导数
dzdx=-diff(f,x)/diff(f,z)
dzdx =
-x/z
%按隐函数求导公式求z对y的偏导数
dzdy=-diff(f,y)/diff(f,z)
dzdy =
-y/z
```

8.4.2 符号积分

符号积分由 **int函数**来实现，基本调用格式为：

- **int(s)**：没有指定积分变量和积分阶数时,系统按**findsym**函数指示的默认变量对被积函数或符号表达式s求不定积分
- **int(s,v)**：以v为自变量，对被积函数或符号表达式s求不定积分。

8.4.2 符号积分(续)

- int(s,v,a,b)：求定积分运算。

■ a,b分别表示定积分的下限和上限。a和b可以是两个具体的数，也可以是一个符号表达式，还可以是无穷(inf)。

■ 当函数f关于变量x在闭区间[a,b]上可积时，函数返回一个定积分结果。

■ 当a,b中有一个是inf时，函数返回一个广义积分。

■ 当a,b中有一个符号表达式时，函数返回一个符号函数。

例：求不定积分

```
x=sym('x');
f=(3-x^2)^3;
int(f)                    %求不定积分
ans =
-x^7/7 + (9*x^5)/5 - 9*x^3 + 27*x
f=sqrt(x^3+x^4);
int(f)                    %求不定积分
Warning: Explicit integral could not be found.
ans =
int((x^4 + x^3)^(1/2), x)
```

例：求定积分

```
x=sym('x');t=sym('t');
int(abs(1-x),1,2)        %求定积分
ans =
1/2
f=1/(1+x^2);
int(f,-inf,inf)          %求定积分
ans =
pi
int(4*t*x,x,2,sin(t))    %求定积分
ans =
-2*t*(cos(t)^2 + 3)
f=x^3/(x-1)^100;
I=int(f,2,3)             %用符号积分的方法求定积分
I =
97893129180187301565519001875382615/1192978373971185320372138406360121344
double(I)                %将上述符号结果转换为数值
ans =
   0.0821
```

例：求二重不定积分

求表达式 $\iint xe^{-xy}dxdy$ 的不定积分

```
syms x y
F=int(int(x*exp(-x*y),x),y)

F =
  1/y*exp(x*y)
```

8.5.1 代数方程(组)

在Matlab中，求解用符号表达式表示的**代数方程**可由函数**solve**实现，其调用格式为：

- solve(s)：求解符号表达式s的代数方程，求解变量为默认变量。
- solve(s,v)：求解符号表达式s的代数方程，求解变量为v
- solve(s1,s2,…,sn,v1,v2,…,vn)：求解符号表达式s1,s2,…,sn组成的代数方程组，求解变量分别为v1,v2,…,vn。

例：一元二次方程

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

求f = ax^2+bx+c 的解。

```
f='a*x^2+b*x+c';
solve(f)
ans =
-(b + (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
-(b - (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
```

例：非线性代数方程

```
x=solve('1/(x+2)+4*x/(x^2-4)=1+2/(x-2)','x')
x =
1
f=sym('x-(x^3-4*x-7)^(1/3)=1');
x=solve(f)
x =
3
x=solve('2*sin(3*x-pi/4)=1')
x =
  (5*pi)/36
  (13*pi)/36
x=solve('x+x*exp(x)-10','x')    %仅标出方程的左端
x =
1.6335061701558463841931651789789
```

例：线性方程组

解方程组 x+y+z=1

x-y+z=2

2x-y-z=1

```
g1='x+y+z=1';
g2='x-y+z=2';
g3='2*x-y-z=1';
f=solve(g1,g2,g3)
f=solve('x+y+z=1','x-y+z=2','2*x-y-z=1')
% 结果相同
[x,y,z]=solve('x+y+z=1','x-y+z=2','2*x-y-z=1')
```

```
f =
    x: [1x1 sym]
    y: [1x1 sym]
    z: [1x1 sym]

x=
2/3
y=
-1/2
z =
5/6
```

对于线性代数方程组，Matlab提供了一个求解的函数linsolve。

例：非线性方程组

求方程组的解。

```
[x y]=solve('1/x^3+1/y^3=28','1/x+1/y=4','x,y')
x =
  1
 1/3
 y =
 1/3
  1
```

例：同解方程求解的不同结果

```
[x y]=solve('x+y-98','x^(1/3)+y^(1/3)-2','x,y')
Warning: Explicit solution could not be found.
> In solve at 140
x =
[ empty sym ]
y =
    []
[u,v]=solve('u^3+v^3-98','u+v-2','u,v')
u =
 -3
  5
 v =
  5
 -3
```

8.5.2 常微分方程(组)

Matlab的符号运算工具箱中提供了功能强大的求解常微分方程（组）的**dsolve函数**。

调用格式为：

- dsolve('eqn1','condition','var')

该函数求解微分方程eqn1在初值条件condition下的特解。参数var描述方程中的自变量符号，省略时按缺省原则处理。若没有给出初值条件condition，则求方程的通解。

8.5.2 常微分方程(组)(续)

- dsolve('eqn1','eqn2',…,'eqnN','condition1',…,'conditionN','var1',…,'varN')

函数求解微分方程组eqn1、…、eqnN在初值条件conditoion1、…、conditionN下的解，若不给出初值条件，则求方程组的通解，var1、…、varN给出求解变量。

例：一阶常微分方程的通解

```
y=dsolve('Dy-(x^2+y^2)/x^2/2','x')  %方程右端为0时可不写
y =
x
 -x*(1/(C1 + log(x)/2) - 1)
y=dsolve('Dy*x^2+2*x*y-exp(x)','x')
y =
-(C1 - exp(x))/x^2
y=dsolve('Dy-x/y/sqrt(1-x^2)','x')
y =
  2^(1/2)*(C1 - (1 - x^2)^(1/2))^(1/2)
 -2^(1/2)*(C1 - (1 - x^2)^(1/2))^(1/2)
```

例：一阶常微分方程的特解

在Matlab中，用大写字母D表示导数。

例如，Dy表示y'，D2y表示y''，Dy(0)=5表示y' (0)=5。

D3y+D2y+Dy-x+5=0表示微分方程y'''+y''+y'-x+5=0。

```
y=dsolve('Dy=2*x*y^2','y(0)=1','x')

y =

-1/(x^2 - 1)

y=dsolve('Dy-x^2/(1+y^2)','y(2)=1','x')

y =

(((x^3/2 - 2)^2 + 1)^(1/2) + x^3/2 - 2)^(1/3) - 1/(((x^3/2 -
2)^2 + 1)^(1/2) + x^3/2 - 2)^(1/3)
```

例： 常微分方程组的通解

```
[x,y]=dsolve('Dx=4*x-2*y','Dy=2*x-y','t')
x =
C1/2 + 2*C2*exp(3*t)
y =
C1 + C2*exp(3*t)
[x,y]=dsolve('D2x-y','D2y+x','t')
x =
((-1)^(1/4)*C1)/exp((-1)^(1/4)*t) - (-1)^(1/4)*C2*exp((-1)^(1/4)*t) + (-
      1)^(1/4)*C3*(1/exp((-1)^(1/4)*t*i))*i - (-1)^(1/4)*C4*(1/exp((-
      1)^(1/4)*t*i))*exp(2*(-1)^(1/4)*t*i)*i
y =
((-1)^(3/4)*C1)/exp((-1)^(1/4)*t) - (-1)^(3/4)*C2*exp((-1)^(1/4)*t) - (-
      1)^(3/4)*C3*(1/exp((-1)^(1/4)*t*i))*i + (-1)^(3/4)*C4*(1/exp((-
      1)^(1/4)*t*i))*exp(2*(-1)^(1/4)*t*i)*i
```

例：常微分方程组的特解

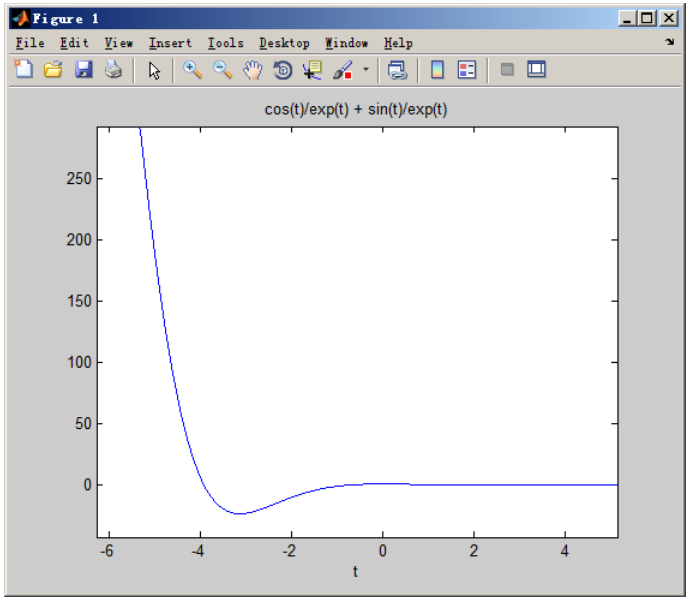
```
[x,y]=dsolve('Dx=y','Dy=-x','x(0)=0','y(0)=1')
x =
sin(t)
y =
cos(t)
dsolve('D2y=-a^2*y','y(0)=1','Dy(pi/a)=0')
ans =
(1/exp(a*t*i))/2 + exp(a*t*i)/2
cos(a*t)
```

例：常微分方程的初值问题

```
y=dsolve('D2y+2*Dy+2*y=0','y(0)=1','Dy(0)=0')
y =
    cos(t)/exp(t) + sin(t)/exp(t)
ezplot(y)        %方程解y(t)的时间曲线图
```

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0$$

$$y(0)=1,\frac{dy}{dx}(0)=0$$



例：常微分方程的边值问题

求解两点边值问题：

（1）求解

```
y=dsolve('x*D2y-3*Dy=x^2','y(1)=0,y(5)=0','x')
y =
(31*x^4)/468 - x^3/3 + 125/468
```

（2）绘图

```
ezplot(y,[-1,6])
hold on
plot([1,5],[0,0],'.r','MarkerSize',20)
text(1,1,'y(1)=0')
text(4,1,'y(5)=0')
title(['x*D2y-3*Dy=x^2',', y(1)=0,y(5)=0'])
hold off
```