圆周运动的角量描述

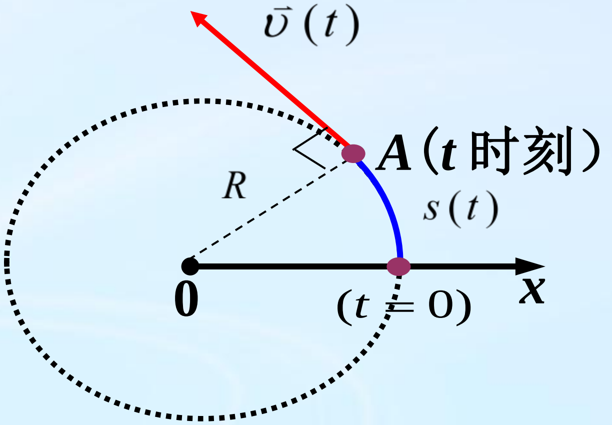
相对运动

一、圆周运动的角量描述

回顾：平面自然坐标系对圆周运动的描述

路程 $s = s(t)$

速度 $\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$



加速度 $\begin{cases} a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} \\ a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R} \end{cases}$

总加速度矢量 $\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n} = \dfrac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \dfrac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$

一、圆周运动的角量描述

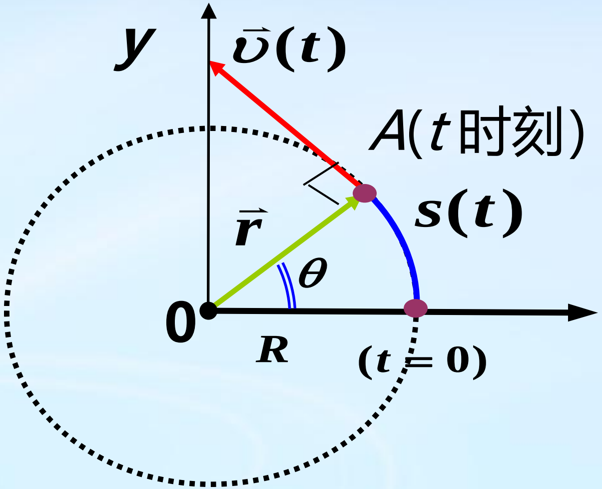
在直角坐标系：

•位矢方程 $\vec{r}(t) = R\vec{r}^{\,0}(t)$

设位矢与x轴正向的夹角为 $\theta(t)$

•位矢方程的分量表达式

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) \\ y(t) = R\sin\theta(t) \end{cases}$$

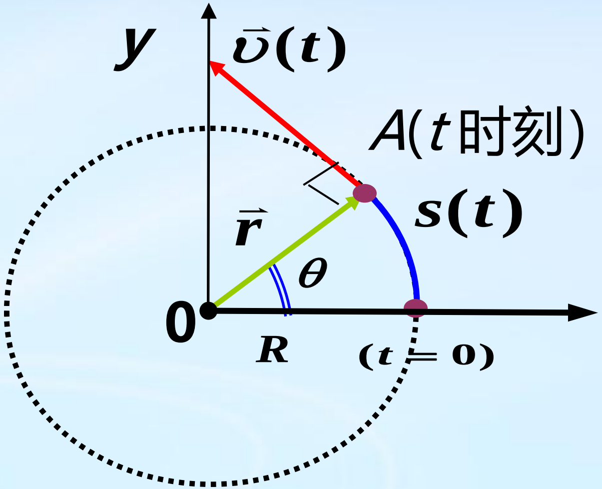


一、圆周运动的角量描述

•速度与加速度的分量表达式

$$\begin{cases} \upsilon_x = -(R\sin\theta)\dot{\theta} \\ \upsilon_y = (R\cos\theta)\dot{\theta} \end{cases}$$

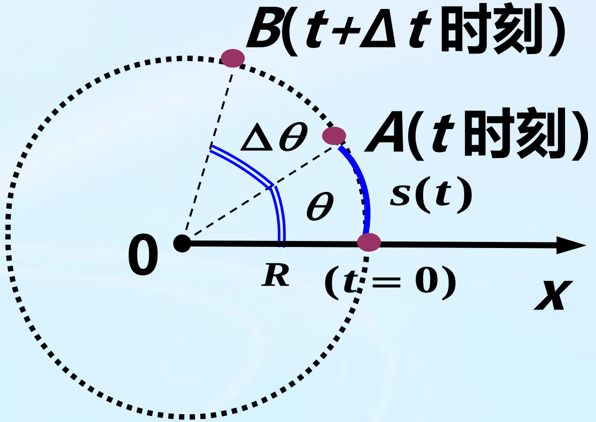
$$\begin{cases} a_x = -(R\cos\theta)\ddot{\theta} \\ a_y = -(R\sin\theta)\ddot{\theta} \end{cases}$$



一、圆周运动的角量描述

1、角位置 θ

$\theta = \theta(t)$ ——质点作圆周运动的运动方程



2、角位移 $\Delta\theta$

$$\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$$

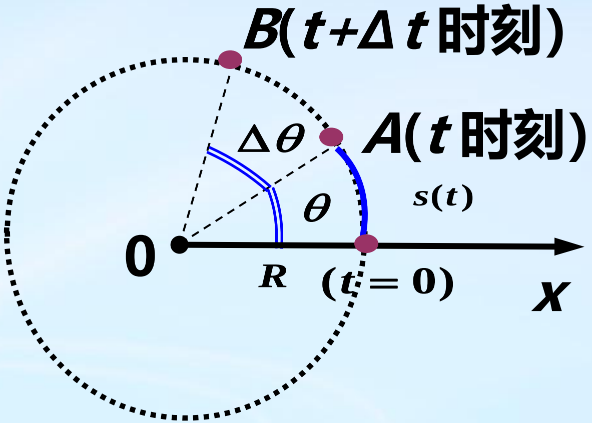
一、圆周运动的角量描述

说 明

(1) 角位移通常不是矢量，

但有正、负之分；

一般规定逆时针转向的角位移为正，反之，为负。



(2) 国际单位制中角坐标与角位移的单位：弧度 (rad)

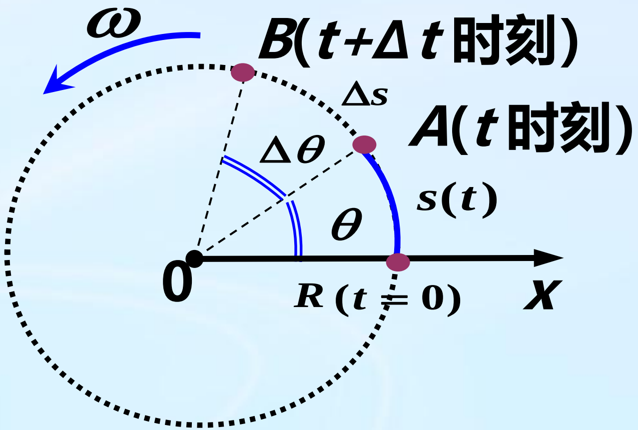
一、圆周运动的角量描述

3、角速度 $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$ (单位：rad/s)

3、角加速度 α

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

(单位：rad/s²)



讨 论

(1) 线量与角量之间的关系

$$\Delta s = R\Delta\theta \; ; \quad \upsilon = R\omega \; ; \quad a_\tau = R\alpha \; ; \quad a_n = R\omega^2$$

一、圆周运动的角量描述

(4) 质点作匀加速直线运动与匀角加速圆周运动的比照

$$\begin{cases} \upsilon = \upsilon_0 + at \\ x = x_0 + \upsilon_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 \\ \upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(x - x_0) \end{cases}$$

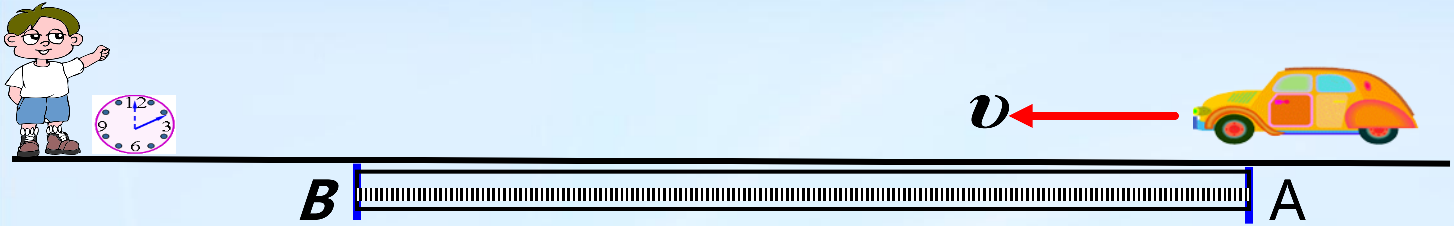
$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

用角量描述平面圆周运动可转化为一维运动形式，从而简化问题！

思考

同一运动在不同的参照系的描述可能是不同的，经典力学是如何给出他们之间的联系的呢？

1、绝对时空观



	地面参考系		车厢参考系
时间间隔	Δt	$=$	$\Delta t'$
空间间隔	$\overline{AB}$	$=$	$\overline{AB}' = v\Delta t'$

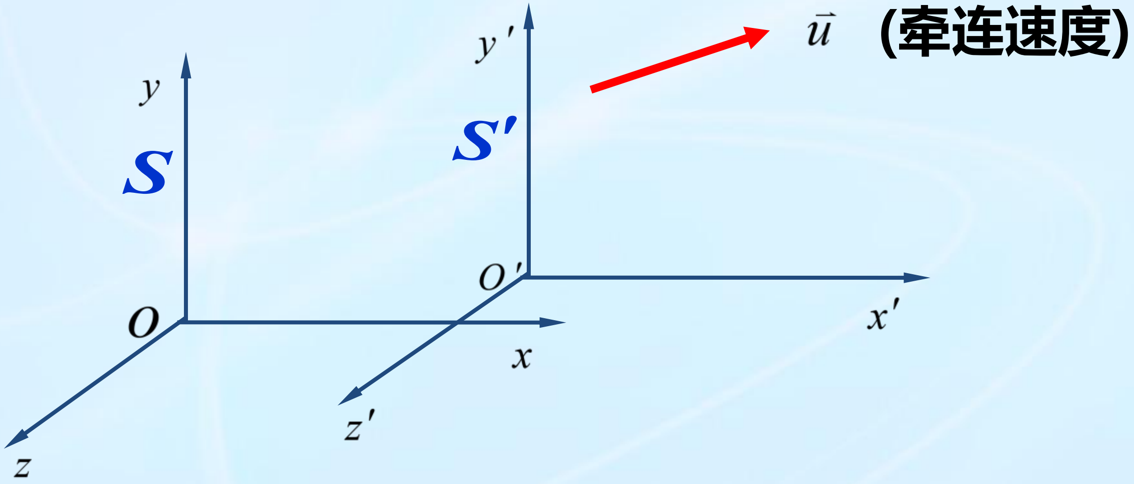
时间间隔、空间间隔与质量的测量与观测者所在的参考系无关，是绝对的。 ——绝对时空观

二、相对运动

2、速度变换与加速度变换

设S′系相对于S系以速度 $\vec{u}$ 作直线运动。

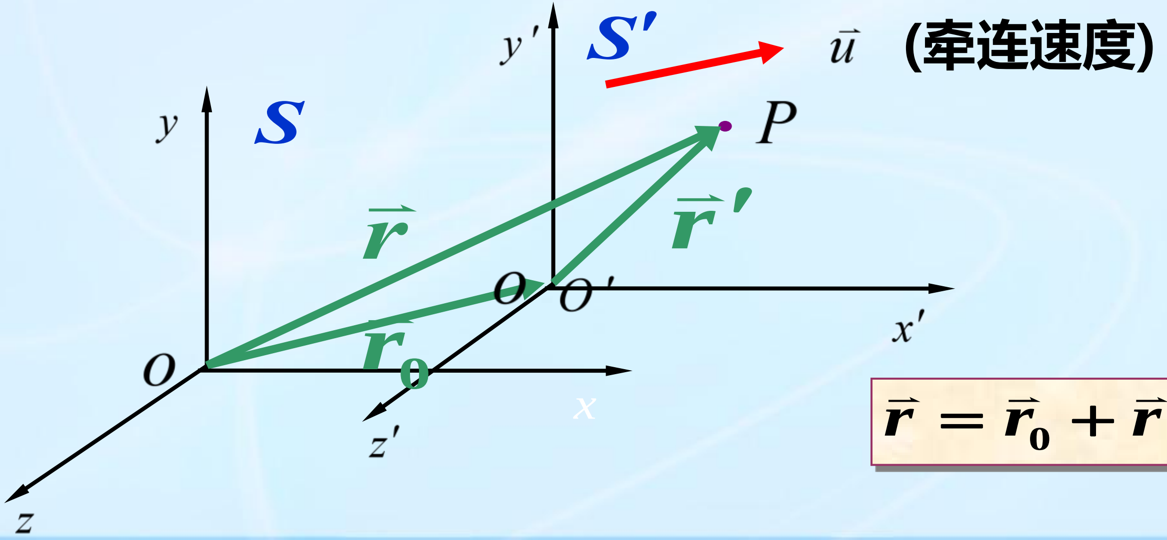
并以两坐标原点重合瞬间作为共同的计时起点。



二、相对运动

t时刻

- **运动质点P在S系中的位置矢量为：** $\vec{r}$
- **质点P在S′系中的位置矢量为：** $\vec{r}\,'$
- **S′的坐标原点O′在S系中的位矢为：** $\vec{r}_0$



$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'}$$

二、相对运动

由：$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'$

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}} = \boxed{\frac{d\vec{r}_0}{dt}} + \boxed{\frac{d\vec{r}\,'}{dt}}$$

质点相对于S系的运动速度

S′系相对于S系的运动速度

质点相对于S′系的运动速度

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}\,'$$

运动质点在两个作相对运动的参考系中的速度变换式。

二、相对运动

由： $\vec{v}=\vec{u}+\vec{v}'$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}}=\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt}}+\boxed{\frac{d\vec{v}'}{dt}}$$

质点相对于S系的加速度

S′系相对于S系的加速度

质点相对于S′系的加速度

$$\vec{a}=\vec{a}_0+\vec{a}'$$

运动质点在两个作相对运动的参考系中的加速度变换式。

讨 论

(1) 相对速度公式

由速度变换式：$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}\,'$

$$\vec{v}_{PS} = \vec{v}_{S'S} + \vec{v}_{PS'}$$

$$\vec{v}_{PS} = \vec{v}_{PS'} + \vec{v}_{S'S}$$

推广：$\vec{v}_{ab} = \vec{v}_{ac} + \vec{v}_{cb}$

—— 相对速度公式

还可推广：$\vec{v}_{ab} = \vec{v}_{ac} + \vec{v}_{cd} + \vec{v}_{da}$; · · ·

(2) 特殊相关系中速度变换与加速度关系

特殊相关系：相对作匀速直线运动的两个参考系

由： $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,'$

其中： $\vec{a}_0 = 0$

$\longrightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}\,'$

在相对作匀速直线运动的不同参考系中，测得同一个运动质点的加速度相同。

说 明

1、以上结论是在绝对时空观下得出的；

绝对时空观只在 $u << c$ 时才近似成立。

2、经典速度变换关系≠运动的合成与分解；

运动的合成是在一个参考系中，**总能成立**；

经典速度变换则应用于不同参考系之间。

随堂练习

例1： 一质点作半径为R的圆周运动，已知

$$\theta = 2 + 4t^3 \ \mathrm{rad}$$

求：(1) 质点在任意时刻的速度与加速度；

(2) 当θ多大时，质点的加速度与速度成45°角？

随堂练习

例2 一带篷子的卡车，篷高为h=2 m，当它静止时，雨滴可落入车内达 d=1 m，而当它以15 km/h 的速率运动时，雨滴恰好不能落入车中。求：雨滴的速度矢量。