一、选择题(每小题3分，共24分)

1. 微分方程$y'=p(x)y$的通解是(C)

(A) $y=\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$　　(B) $y=C\mathrm{e}^{\int -p(x)\mathrm{d}x}$

(C) $y=C\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$　　(D) $y=Cp(x)$

2. 已知曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\x+y+z=a\end{cases}$在$yoz$坐标面上的投影曲线为$\begin{cases}y^2+yz+z^2=1\\x=0\end{cases}$，则$a=$

(B)

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2

3. 设$z=\mathrm{e}^y\tan x$，则$\mathrm{d}z=$(D)

(A) $\mathrm{e}^y\tan x\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y\sec^2 x\,\mathrm{d}y$　　(B) $\dfrac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y\tan x\,\mathrm{d}y$

(C) $\mathrm{e}^x\tan y\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\sec^2 y\,\mathrm{d}y$　　(D) $\mathrm{e}^y\sec^2 x\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y\tan x\,\mathrm{d}y$

4. 设积分区域D: $x^2+y^2\leqslant 4$，则二重积分$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(A)

(A) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^2\mathrm{d}\rho$　(B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\rho^4\mathrm{d}\rho$　(C) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\mathrm{d}\rho$　(D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho\,\mathrm{d}\rho$

5. 设Ω由圆锥面$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=0$围成的闭区域，则$\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}v=$(D)

(A) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho}z\,\mathrm{d}z$　　(B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho}z\,\mathrm{d}z$

(C) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho}z\,\mathrm{d}z$　　(D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho}z\,\mathrm{d}z$

6. 设L为圆周$\begin{cases}x=a\cos t,\\y=a\sin t,\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，则$\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=$(C)

(A) a^3　(B) πa^3　(C) $2\pi a^3$　(D) $3\pi a^3$

7. L为平面闭区域：$-1\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$的正向边界，则

$\int_L\left(\dfrac{1}{2}y+3x\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x-\left(\dfrac{1}{2}x-y\sin y\right)\mathrm{d}y=$(A)

(A) -2　(B) 2　(C) -1　(D) 1

8. 设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$ $(0<R<+\infty)$，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$的收敛半径为

(B)

(A) $\dfrac{R}{2}$　(B) $2R$　(C) R　(D) $\dfrac{2}{R}$

二、填空题(每空3分，共24分)

1. 以e^x，xe^x为解的阶数最低的常系数线性齐次微分方程是$\underline{\ y''-2y'+y=0\ }$.

2. 过点$A(1,-2,1)$且以$\vec{n}=(1,2,3)$为法向量的平面方程是$\underline{\ x+2y+3z=0\ }$.

3. 设$z=\sin(x^2+y)$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\underline{\ -2x\sin(x^2+y)\ }$.

4. 设D是圆环形闭区域$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，那么$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\underline{\ \dfrac{14}{3}\pi\ }$.

5. 设Ω为球体：$x^2+y^2+z^2\leqslant 4$，则$\iiint_\Omega x^2\sin(yz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\underline{\ 0\ }$.

6. L为抛物线$x=y^2$上从点$(1,-1)$到$(1,1)$的一段弧，则$\int_L xy\,\mathrm{d}y=\underline{\ 0\ }$.

7. $\oiint_\Sigma(xy+z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(xz+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+(x+yz)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\underline{\ -6\ }$，其中$\Sigma$是由六张平面$x=1$、$x=2$、$y=1$、$y=2$、$z=1$、$z=3$围成的六面体的表面，取内侧.

8. 级数$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}+\ldots$是$\underline{\ 发散\ }$(填收敛或发散).

三、综合题(请写出求解过程，8小题，共52分)

1. 求过点$(2,0,-3)$，且与直线$\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$垂直的平面方程. (6分)

设直线的方向向量为$\vec{n}(x,y,z)$

$$\begin{vmatrix}x&y&z\\1&-2&4\\3&5&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&4\\5&-2\end{vmatrix}x-\begin{vmatrix}1&4\\3&-2\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}1&-2\\3&5\end{vmatrix}z=-16x+14y+11z$$

不妨设$\vec{n}=(-16,14,11)$

那么平面的方程为$-16(x-2)+14y+11(z+3)=0$

即$-16x+14y+11z=-65$

2. 设$z=x^y\,(x>0)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. (6分)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=yx^{y-1}\ln x+x^{y-1}$$

3. 计算$\iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$. (6分)

$$\iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{9}$$

4. 计算$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$为旋转抛物面$z=x^2+y^2$与平面$z=4$所围成的区域. (6分)

设D为$z=z$平面被旋转抛物面切割的部分

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^4 \mathrm{d}z\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}z^2$$

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}v=\frac{\pi}{2}\int_0^4 z^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}\frac{z^3}{3}\bigg|_0^4=\frac{32}{3}\pi$$

5. L是圆环区域D: $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$的正向边界曲线，计算曲线积分

$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\left[xy^2+y\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y$. (8分)

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\left[xy^2+y\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D y^2\mathrm{d}\sigma=\iint_D \rho^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2\mathrm{d}\theta=\frac{15}{4}\pi$$

6. 计算$\iint_\Sigma \frac{2}{z}\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$在平面$z=\frac{1}{2}$上方的部分. (8分)

Σ的方程为

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

Σ在xOy面上的投影区域D为圆形闭区域$\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant\frac{3}{4}\right\}$. 又

$$\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\iint_\Sigma \frac{2}{z}\mathrm{d}S=\iint_D \frac{2}{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

利用极坐标，得:

$$\iint_D \frac{2}{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D \frac{2}{1-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\mathrm{d}(1-\rho^2)}{1-\rho^2}=-2\pi\ln|1-\rho^2|\bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=4\pi\ln 2$$

7. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$的敛散性. (6分)

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n\cdot 2^n}}=\frac{3}{2}>1$，级数发散

8. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$在收敛域$(-1,1)$的和函数$s(x)$. (6分)

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}\qquad x\in(-1,1)$$

江理竞赛小分队：552839044(觉得自己实力不够的就别进来找刺激)

前几道入群题

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}\right]+\frac{\mathrm{e}}{2}\right]=$ 　　2. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\tan x-\sin\sin x}{x^3}=$

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$ 　　4. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k!}{n!}$

江理17大物线代C交流群：469094854

欢迎进来一起学习

江理高数研讨群：273027128(新群，讨论的问题大概在考试到考研之间)

江理数学编辑爱好者：734148635

不会LaTeX，AxMath等编辑工具请勿进群

江理18学习群：806650494(非常丰富的学习资料)