第二十四讲 排列及其逆序

一、引言

二、排列

三、排列的逆序数

一引言

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2.
\end{cases}$$
(1)

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,方程组的解为

$$x_{1} = \underbrace{\frac{b_{1}a_{22} - a_{12}b_{2}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}, \quad x_{2} = \underbrace{\frac{a_{11}b_{2} - b_{1}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}. \quad (2)$$

由方程组的四个系数确定.

定义 由四个数排成二行二列(横排称行、竖排称列)的数表

$$a_{11} a_{12} a_{21} a_{22}$$
 (3)

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表 (3) 所确定的二阶

行列式,并记作
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
 (4)

$$||D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式

考察三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$
(3)

运用消元法,可以推知当

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0,$$

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + b_2 a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} b_3 - a_{23} a_{32} b_1 - a_{12} b_2 a_{33}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} a_{33} + a_{31} a_{23} b_1 + b_3 a_{21} a_{13} - a_{13} a_{31} b_2 - a_{23} a_{11} b_3 - a_{21} b_1 a_{33}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 a_{22} a_{11} + a_{12} a_{31} b_2 + b_3 a_{21} a_{12} - a_{32} a_{11} b_2 - a_{22} a_{31} b_1 - a_{12} b_3 a_{21}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

定义 设有9个数排成3行3列的数表

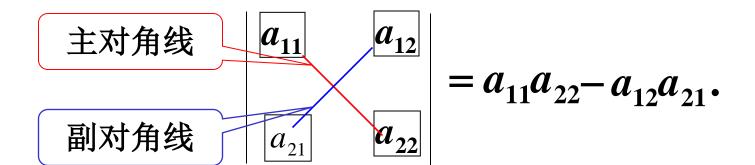
$$a_{11}$$
 a_{12} a_{13}
 a_{21} a_{22} a_{23} (6)
 a_{31} a_{32} a_{33}

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
(7)
$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

(7) 式称为数表(6) 所确定的三阶行列式.

二阶行列式的计算 —— 对角线法则



对于二元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则二元线性方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

例1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

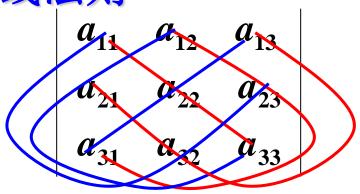
解:
$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3.$$

三阶行列式的计算

对角线法则



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

- 说明 1. 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.
 - 2 三阶行列式包括3!项,每一项都是位于不同行,不同列的三个元素的乘积,其中三项为正,三项为负.

例2 求解三阶行列式

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则有

$$D = 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-4) \times (-2) \times 4$$

$$-1 \times 1 \times 4 - 2 \times (-2) \times (-2) - (-4) \times 2 \times (-3)$$

$$= -4 - 6 + 32 - 4 - 8 - 24$$

$$= -14.$$

利用三阶行列式求解三元线性方程组

如果三元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$$

的系数行列式
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$$

$$D_1 = egin{array}{cccc} b_1 & a_{12} & a_{13} \ b_2 & a_{22} & a_{23} \ b_3 & a_{32} & a_{33} \ \end{array},$$

$$D_{2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{1} & a_{13} \\ a_{21} & b_{2} & a_{23} \\ a_{31} & b_{3} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_{3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{1} \\ a_{21} & a_{22} & b_{2} \\ a_{31} & a_{32} & b_{3} \end{vmatrix}.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则三元线性方程组的解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + -3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-1) + (-2) \times (-3) \times (-1)$$

$$+ 1 \times 2 \times 1 - 1 \times 1 \times (-1) - (-2) \times 2 \times (-1) - 1 \times (-3) \times 1$$

$$= -5 \neq 0,$$

同理可得

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5,$$

故方程组的解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1$$
, $x_2 = \frac{D_2}{D} = 2$, $x_3 = \frac{D_3}{D} = 1$.

在自然科学研究中,我们会遇到许多n元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
(*)

对于形如(*)的方程组,其解是否也与二阶、三阶方程组的解类似呢?

答案是肯定的.

本章将依次解决如下问题:

- (1) n 阶行列式如何定义?
- (2) n 阶行列式的性质和计算.
- (3) 方程组(*) 何时有解? 若有解,如何表示?

以上为二、三阶行列式的定义。下面我们将定义的思想推广到n阶行列式,给出n阶行列式的定义。

在给出n阶行列式的定义之前,还需用到逆序数的概念。

二、排列

定义4.1.1 排列的定义

由 1,2,…,n组成的一个有序数组称为一个n级排列.

例4 写出所有的3级排列.

答: 共有6个,分别为 123,132,213,231,312,321.

问题: 所有不同的 n 级排列共有多少个?

答: 共有 n! 个.

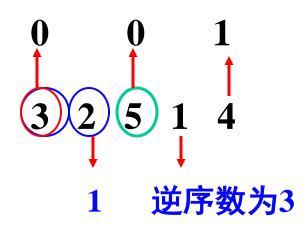
三、排列的逆序数

定义4.1.2 逆序数的定义

在一个排列中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,则称这对数为一个逆序;一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数.

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

例如 排列32514 中,



故此排列的逆序数为3+1+0+1+0=5.

排列的奇偶性

逆序数为偶数的排列称为偶排列; 逆序数为奇数的排列称为奇排列. 例5 计算下列排列的逆序数,并讨论它 们的奇偶性.

(1)
$$n(n-1)(n-2)\cdots 321$$

(2)
$$(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$$

当 n=4k,4k+1 时为偶排列;

当 n = 4k + 2,4k + 3 时为奇排列.

(2) 提示:

当 k 为奇数时,排列为奇排列。

定义 在排列中,将任意两个元素对调,其余元素 不动,这种作出新排列的手续叫做对换. 将相邻两个元素对调,叫做相邻对换.

例如

定理4.1.6 对换改变排列的奇偶性. 即经过一次对换, 奇排列变成偶排列; 偶排列变成 奇排列.

推论**4.1.7** n级排列中,奇偶排列各半,均为 $\frac{n!}{2}$ 个.

定理 任何一个排列与自然序排列都可经过一系列对 换互换,并且对换的个数和该排列的逆序数的 奇偶性相同.