第七讲 复系数与实系数多项式

一、多项式函数与根

二、多项式函数的有关性质

三、复系数多项式的因式分解

四、实系数多项式的因式分解

一、多项式函数与根

1. 多项式函数

设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，数 $\alpha\in p$,

将 $f(x)$的表示式里的 x 用α 代替，得到P中的数

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n,$$

称为当 $x=\alpha$ 时 $f(x)$的**值**，记作 $f(\alpha)$.

这样，对P中的每一个数 α，由多项式 $f(x)$确定P中唯一的一个数 $f(\alpha)$与之对应，于是称 $f(x)$为P上的一个**多项式函数**.

易知，若

$$h_1(x)=f(x)+g(x),\quad h_2(x)=f(x)g(x),$$

则，

$$h_1(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha),\quad h_2(\alpha)=f(\alpha)g(\alpha).$$

2. 多项式函数的根(或零点)

若多项式函数 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 处的值为0，即

$$f(\alpha)=0,$$

则称 α 为 $f(x)$ 的一个根或零点.

二、多项式函数的有关性质

1. 定理1.4.1

（余数定理）： 用一次多项式 $x-\alpha$ 去除多项式 $f(x)$，所得余式是一个常数，这个常数等于函数值 $f(\alpha)$.

推论： α 是 $f(x)$ 的根 $\Leftrightarrow (x-\alpha) \mid f(x)$.

例1 求 $f(x)=x^4+x^2+4x-9$在 $x=-3$处的函数值.

法一： 把 $x=-3$代入 $f(x)$，求 $f(-3)$.

法二： 用 $x+3$去除 $f(x)$, 所得余数就是 $f(-3)$.

答案： $f(-3)=69$.

2. 多项式函数的k重根

定义 若 $x-\alpha$是$f(x)$的 k重因式，则称α为 $f(x)$的 k重根.

当$k=1$时，称α为 $f(x)$的单根.

当 $k>1$时，称α为 $f(x)$的重根.

注：

① α 是 $f(x)$ 的重根 $\Leftrightarrow$ $x-\alpha$ 是 $f(x)$ 的重因式.

② $f(x)$ 有重根 $\Rightarrow$ $f(x)$ 必有重因式.

反之不然，即 $f(x)$ 有重因式未必 $f(x)$有重根.

例如， $f(x)=(x^2+1)^2\in R[x]$,

x^2+1 为 $f(x)$ 的重因式，但在R上 $f(x)$没有根.

3. 定理1.4.3（根的个数定理）

任一 $P[x]$ 中的 n 次多项式 $(n \geq 0)$，在 P 中的根不可能多于 n 个，重根按重数计算.

4. 定理1.4.4

$f(x), g(x) \in P[x]$，且 $\partial\big(f(x)\big), \partial\big(g(x)\big) \leq n$，

若有 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n+1} \in P$，使

$$f(\alpha_i) = g(\alpha_i), i = 1, 2, \cdots, n+1$$

则 $f(x) = g(x)$.

证： 设 $f(x)\in P[x], \partial\left(f(x)\right)\geq 0$ **定理8**

若 $\partial\left(f(x)\right)=0$，即 $f(x)=c\neq 0$，

此时对 $\forall\alpha\in P$，有 $f(\alpha)=c\neq 0$. 即 $f(x)$有0个根.

$\partial\left(f(x)\right)>n$ 时，由因式分解及唯一性定理，

$f(x)$ 可分解成不可约多项式的乘积，

由推论， $f(x)$ 的根的个数等于 $f(x)$分解式中

一次因式的个数，重根按重数计算，且此数 $\leq n$.

定理9

证： 令 $h(x)=f(x)-g(x)$, 则有

$$h(\alpha_i)=0,\quad i=1,2,\cdots,n+1,$$

即 $h(x)$ 有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{n+1}$， $n+1$ 个根，

由定理 8 ， 若 $h(x)\neq 0$ 的话，则 $\partial\left(h(x)\right)>n.$

矛盾.

所以，$h(x)=0,$ 即 $f(x)=g(x).$

例2 求 t 值，使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根.

解:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & f'(x) & f(x) & \\
\frac{3}{2}x-\frac{15}{4} & 3x^2-6x+t & x^3-3x^2+tx-1 & \frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \\
 & 3x^2+\frac{3}{2}x & x^3-2x^2+\frac{1}{3}tx & \\
\hline
 & -\frac{15}{2}x+t & -x^2+\frac{2}{3}tx-1 & \\
 & -\frac{15}{2}x-\frac{15}{4} & -x^2+2x-\frac{1}{3}t & \\
\hline
 & t+\frac{15}{4} & (\frac{2}{3}t-2)x-(1-\frac{1}{3}t)=r_1(x) & \\
 & & t\neq 3,\ \frac{3}{t-3}r_1(x)=2x+1 &
\end{array}$$

i) 若 $r_1(x)=0$, 即 $t=3$, 则

$$\big(f(x),f'(x)\big)=\tfrac{1}{3}f'(x)=(x-1)^2,$$

此时，$f(x)$有重根， $x=1$ 为 $f(x)$的三重根.

ii) 若 $r_1(x)\neq 0$, $t+\frac{15}{4}=0$, 即 $t=-\frac{15}{4}$, 则

$$\big(f(x),f'(x)\big)=x+\tfrac{1}{2}$$

此时，$f(x)$有重根，$x=-\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$的二重根.

例3 举例说明下面命题是不对的.

$$"\alpha\text{是}f'(x)\text{的}n\text{重根}\Rightarrow\alpha\text{是}f(x)\text{的}n+1\text{重根}"$$

解：令 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+x-5$，则

$$f'(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2,$$

$x=-1$是 $f'(x)$ 的2重根，

但 $$f(-1)=-\frac{1}{3}+1-1-5\neq 0,$$

$\therefore -1$ 不是 $f(x)$的根，从而不是 $f(x)$ 的3重根.

例4　若 $(x-1)^2 \mid Ax^4+Bx^2+1$，求 A,B.

解：$\because \ (x-1)^2 \mid Ax^4+Bx^2+1$

$\therefore$ 1为 $f(x)=Ax^4+Bx^2+1$ 的重根，

从而，1为 $f'(x)$的根.

于是有，$\begin{cases} f(1)=A+B+1=0 \\ f'(1)=4A+2B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-2 \end{cases}$

三、复系数多项式的因式分解

1. 定理1. 4. 5 代数基本定理

$\forall f(x)\in C[x]$，若 $\partial(f(x))\geq 1$，则 $f(x)$ 在复数域 C 上必有一根.

推论1

$\forall f(x)\in C[x]$，若 $\partial(f(x))\geq 1$，则存在 $x-a\in C[x]$，

使 $(x-a)\mid f(x)$.

即，$f(x)$ 在复数域上必有一个一次因式.

推论2

复数域上的不可约多项式只有一次多项式，即

$\forall f(x)\in C[x]$, $\partial(f(x))>1$, 则 $f(x)$可约.

2. 定理1.4.6 复系数多项式的因式分解定理

$\forall f(x)\in C[x]$, 若$\partial(f(x))\geq 1$, 则 $f(x)$在复数域

C上可唯一分解成一次因式的乘积.

推论1

$\forall f(x) \in C[x]$, 若 $\partial(f(x)) \geq 1$, 则 $f(x)$ 在 C 上具有标准分解式

$$f(x) = a(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_s)^{r_s}$$

其中$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是不同的复数，$r_1, r_2, \cdots, r_s \in Z^+$

推论2

$\forall f(x) \in C[x]$，若 $\partial(f(x)) = n$，则 $f(x)$ 有n个复根（重根按重数计算）.

四、实系数多项式的因式分解

命题： 若 α 是实系数多项式 $f(x)$ 的复根，则 α 的共轭复数 $\overline{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的复根.

证： 设 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$， $a_i \in R$

若 α 为根，则

$$f(\alpha)=a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

两边取共轭有 $f(\overline{\alpha})=a_n\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+a_0=0$

$\therefore$ $\overline{\alpha}$ 也是为 $f(x)$ 复根.

定理1.4.7　实系数多项式的因式分解定理

$\forall f(x)\in R[x]$，若 $\partial(f(x))\geq 1$，则 $f(x)$可唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

证： 对 $f(x)$ 的次数作数学归纳.

① $\partial(f(x))=1$时，结论显然成立.

② 假设对次数<n的多项式结论成立.

设$\partial(f(x))=n$，由代数基本定理，$f(x)$有一复根α.

若α为实数，则 $f(x)=(x-\alpha)f_1(x)$，其中$\partial(f_1)=n-1$.

若 α 不为实数，则 $\overline{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的复根，于是

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})f_2(x)=(x^2-(\alpha-\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha})f_2(x)$$

设 $\alpha=a+bi$，则 $\overline{\alpha}=a-bi,$

$\alpha+\overline{\alpha}=2a\in R$ ， $\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2\in R$

即在R上 $x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$ 是 一个二次不可约多项式.

从而 $\partial(f_2)=n-2.$

由归纳假设 $f_1(x)$、$f_2(x)$可分解成一次因式与二次

不可约多项式的乘积. 由归纳原理，定理得证.

推论1

$\forall f(x)\in R[x]$, $f(x)$ 在R上具有标准分解式

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdots(x-c_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}$$

$$\cdots\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_s,p_1,\cdots,p_r,q_1,\cdots,q_r\in R,$

$$k_1,\cdots,k_s,l_1,\cdots,l_s\in Z^+,$$

且 $p^2-4q<0,\ \ i=1,2\cdots r$ ，即 x^2+p_ix+qi 为

R上的不可约多项式.

推论2

实数域上不可约多项式只有一次多项式和某些二次不可约多项式，所有次数≥3的多项式皆可约.

例1　求 x^n-1 在 C 上与在 R 上的标准分解式.

解： 1)　在复数范围内 x^n-1 有n个复根，

$$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \cdots,\ \varepsilon^{n-1}$$

这里 $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \quad \varepsilon^n = 1$

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

$$\therefore \quad x^n - 1 = (x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})$$

2) 在实数域范围内

$$\because \quad \overline{\varepsilon^k} = \varepsilon^{n-k}, \quad \varepsilon^k + \overline{\varepsilon^k} = 2\cos\frac{2k\pi}{n}, \quad \varepsilon^k \overline{\varepsilon^k} = 1$$

$k = 1, 2, \cdots, n$

$\therefore$ 当n为奇数时

$$x^n-1=(x-1)[x^2-(\varepsilon+\varepsilon^{n-1})x+\varepsilon\varepsilon^{n-1}]\cdots\cdots$$

$$[x^2-(\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}+\varepsilon^{\frac{n+1}{2}})x+\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}]$$

$$=(x-1)(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1)\cdots[x^2-2x\cos\frac{n-1}{n}\pi+1]$$

当n为偶数时

$$x^n-1=(x-1)(x+1)[x^2-(\varepsilon+\varepsilon^{n+1})x+\varepsilon\varepsilon^{n+1}]\cdots\cdots$$

$$[x^2-(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}+\varepsilon^{\frac{n+2}{2}})x+\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}]$$

$$=(x-1)(x+1)(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1)\cdots[x^2-2x\cos\frac{n-2}{n}\pi+1]$$