

# 第十章

## 电磁感应

*Electromagnetic Induction*

## 电 磁 场

*Electromagnetic Field*

### 10.5

### 自感和互感

Self Induction and Mutual Induction

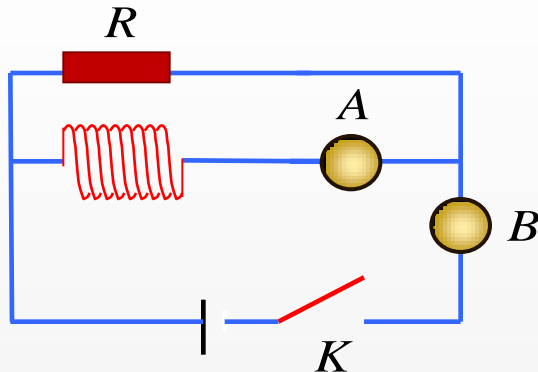
# 一、自感(应) 自感电动势

## 1、自感现象

$K$ 接通时：灯泡**B**立即亮，**A**逐渐亮；

$K$ 断开时：灯泡**B**立即灭，**A**逐渐灭。

由于回路中电流变化，引起穿过回路包围面积的全磁通的变化，从而在回路自身中产生**感应电动势**的现象叫**自感现象**，产生的**感应电动势**称为**自感电动势**。



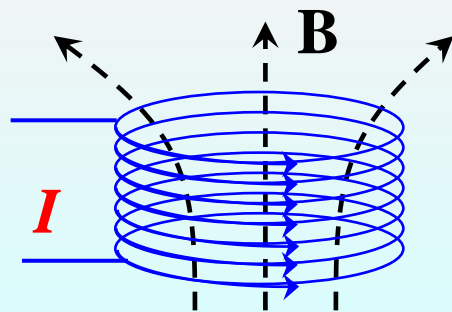
## 2、自感系数

$$I(t) \rightarrow B(t) \rightarrow \Psi(t)$$

$$B \propto I, \quad \Psi \propto B, \quad \Rightarrow \Psi \propto I$$

$$\Psi = LI$$

$L$ : 自感系数



# 一、自感(应) 自感电动势

## 2、自感系数

$$\Psi = LI$$

$$L = \frac{\Psi}{I}$$

$L$ : 自感系数

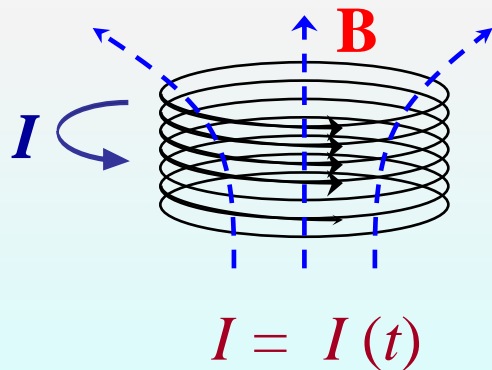
单位: 亨利(H)

无铁磁质时, 与回路大小、  
形状、周围磁介质有关;  
与回路是否通电流无关。

## 3、自感电动势

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt}$$

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$$



# 一、自感(应) 自感电动势

## 4、自感系数的物理意义

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

- 1)、负号表示自感电动势反抗回路中电流变化;
- 2)、 $L$  越大对同样的电流变化自感电动势就越大即回路中电流越难改变。

自感系数 $L$ 具有保持回路电流不变的性质 → 电磁惯性

自感系数 $L$ 是描述回路电磁惯性的的大小的物理量。

## 5、自感系数及自感电动势的计算

- 1) 假设回路中通有电流  $I$ ;
- 2) 计算  $B$  的分布;
- 3) 计算通过回路的  $\Psi$ ;
- 4) 利用  $L = \frac{\Psi}{I}$ ,  $\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$ , 计算  $L$ 、 $\varepsilon_L$ 。

**例10-7:** 一长为  $l$  的长直螺线管，横断面为  $S$ ，线圈总匝数为  $N$ ，管中磁介质的磁导率为  $\mu$ ，求自感系数。

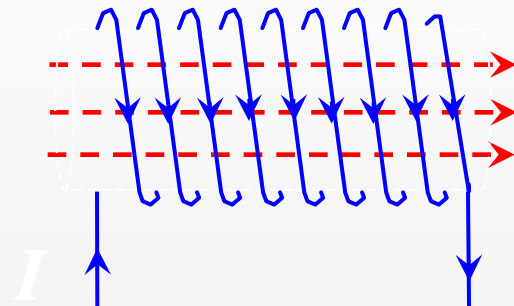
**解:** 假设回路中通有电流  $I$ ：  
管内的磁场看作是均匀的，  
其磁感应强度的大小为：

$$B = \mu n I = \mu \frac{N}{l} I$$

穿过螺线管的磁通为：

$$\Psi = NBS = \mu \frac{N^2}{l} SI$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu \frac{N^2}{l} S$$



$$n = \frac{N}{l}, \quad V = Sl$$

$$\Rightarrow L = \mu n^2 V$$

**例10-8:** 一回路由两根平行的长直导线组成，长直导线轴线间的距离为 $d$ ，直导线的截面半径为 $a$ ， $d \gg a$ ，求：这一对导线单位长度的自感系数。

**解:** 假设回路中通有电流  $I$ :

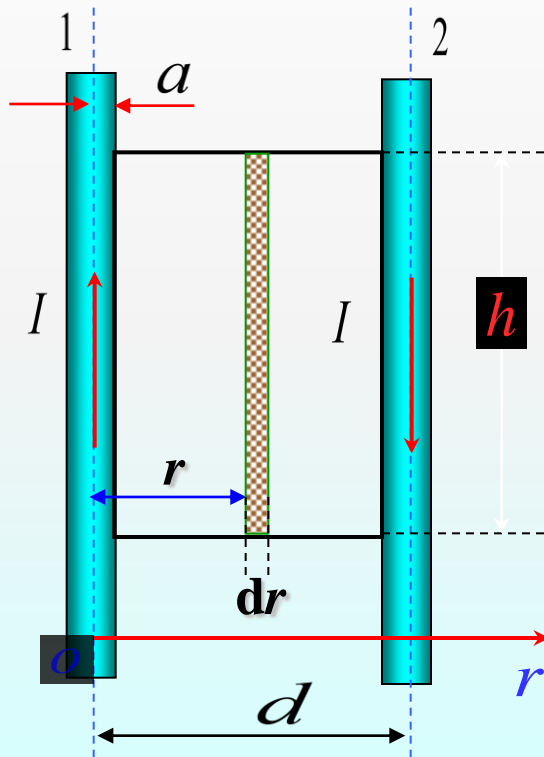
两直导线之间， $r$ 处的磁感应强度为： $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$ ，方向  $\otimes$

取长为  $h$  的一对导线，取： $dS = h dr$ ，方向  $\otimes$

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^{d-a} \left[ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)} \right] h dr \\ &= \frac{\mu_0 I h}{\pi} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)\end{aligned}$$

单位长度的自感系数为：

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 h}{\pi} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right) \quad \frac{L}{h} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$



**例10-9:** 一电缆由两个“无限长”的同轴圆筒形导体组成，  
其间充满磁导率为 $\mu$ 的磁介质，设内外半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ ，  
求：电缆单位长度上的自感系数。

**解：**假设回路中通有电流  $I$ ：

两圆筒之间， $r$ 处的磁感应强度为： $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$ ，方向  $\otimes$

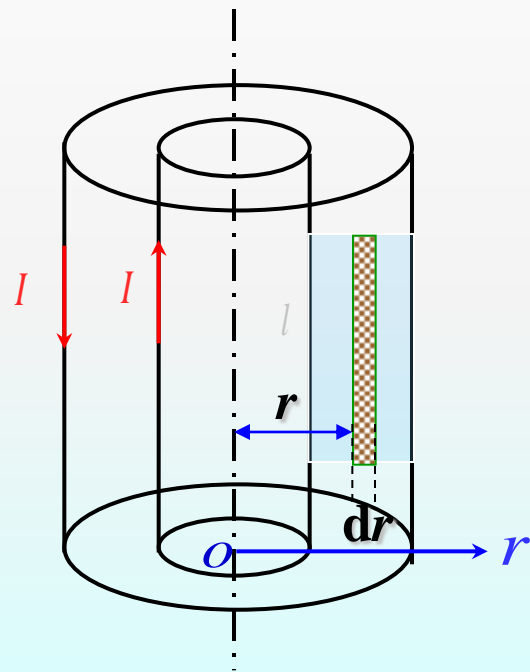
取： $dS = l dr$ ，方向  $\otimes$

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

单位长度的自感系数为：

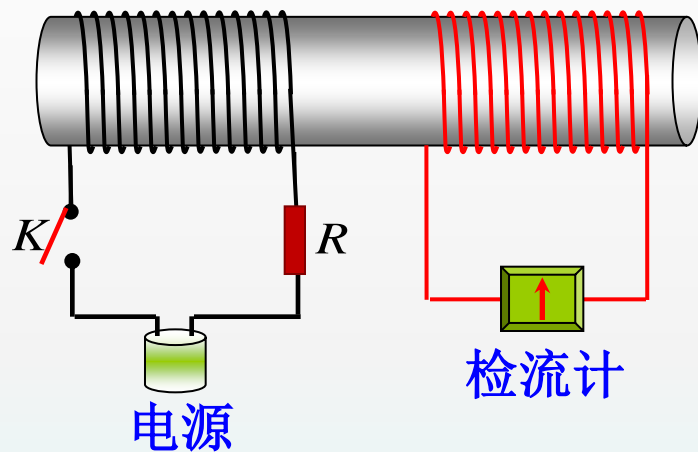
$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



## 二、互感(应) 互感电动势

### 1、互感现象



一个载流回路中的电流变化时，在邻近另一回路中产生感应电动势的现象，称为互感现象，产生的感应电动势称为互感电动势。



## 二、互感(应) 互感电动势

### 2、互感系数

周围不存在铁磁质

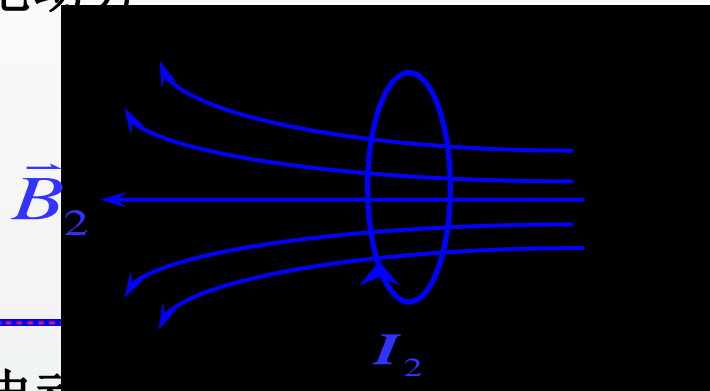
回路1电流  $I_1$  变化时, 引起回路2产生感应电动势

$$I_1(t) \rightarrow B_1(t) \rightarrow \Psi_{21}(t) \rightarrow \varepsilon_{21},$$

$$\Psi_{21} \propto B_1 \propto I_1$$

$$\Psi_{21} = M_{21} I_1,$$

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$



回路2电流  $I_2$  变化时, 引起回路1产生感应电动势

$$I_2(t) \rightarrow B_2(t) \rightarrow \Psi_{12}(t) \rightarrow \varepsilon_{12}$$

$$\Psi_{12} \propto B_2 \propto I_2, \quad \Psi_{12} = M_{12} I_2$$

$$\varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

理论和实验均证明:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

互感系数

## 二、互感(应) 互感电动势

### 2、互感系数

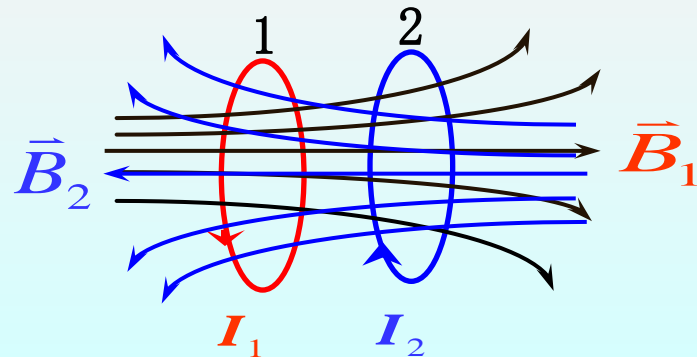
$$M_{12} = M_{21} = M$$

- 1) 互感系数反映了线圈本身的电磁性质 → 电磁惯性  
 $M$  仅与两回路本身形状、大小、两者相对位置及周围介质有关，若回路周围不存在铁磁质， $M$  与电流  $I$  无关。
- 2) 当电流变化一定时，互感电动势就取决于互感系数， $M$  越大，互感电动势也越大。 $M$  是表征两个回路相互感应强弱的物理量。

### 3、互感电动势

$$\varepsilon_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\varepsilon_{12} = -M \frac{dI_2}{dt},$$



## 二、互感(应) 互感电动势

### 4、互感的应用

互感器：通过互感线圈能够使能量或信号由一个线圈方便地传递到另一个线圈。电工、无线电技术中使用的各种变压器都是互感器件。

常见的有电力变压器、中周变压器、输入输出变压器、电压互感器和电流互感器。

### 5、互感系数和互感电动势的计算

- 1) 假设一个回路中通有电流 $I_1$ ；
- 2) 计算该回路产生的磁场 $B_1$ 的分布；
- 3) 计算 $B_1$ 通过另一回路的 $\Psi_{21}$ ；

- 4) 利用  $M = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$ ,  $\varepsilon_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}$ ,  $\varepsilon_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$  , 计算  $M$ ,  $\varepsilon_{21}$ ,  $\varepsilon_{12}$  。

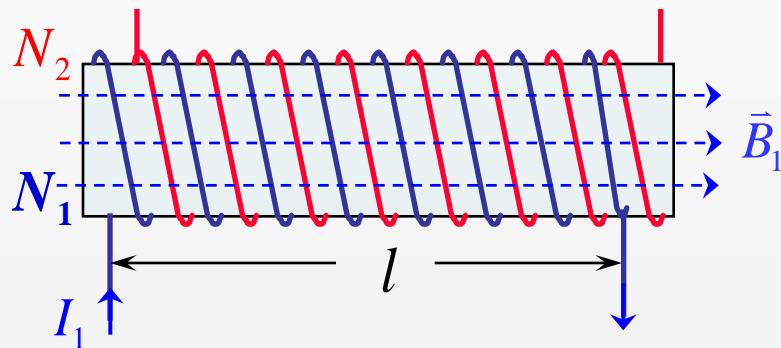
**例10-10:** 设有两个长度均为 $l$ 、横截面积均为 $S$ ，匝线分别为 $N_1$ 和 $N_2$ 的同轴长直密绕螺线管，管内充满磁导率为 $\mu$ 的磁介质，求：它们的互感系数。

**解:** 设在螺线管1上通有电流为 $I_1$ ，则 $I_1$ 在管内产生的磁感应强度为：

$$B_1 = \mu \frac{N_1}{l} I_1$$

通过螺线管2的全磁通为：

$$\Psi_{21} = N_2 B_1 S = \mu \frac{N_1 N_2 I_1 S}{l}$$



根据互感系数的定义可得：

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_2 S}{l}$$

**例10-10:** 设有两个长度均为 $l$ 、横截面积均为 $S$ ，匝线分别为 $N_1$ 和 $N_2$ 的同轴长直密绕螺线管，管内充满磁导率为 $\mu$ 的磁介质，求：它们的互感系数。

解： 讨论：

螺线管1的自感系数： $L_1 = \mu \frac{N_1^2}{l} S$

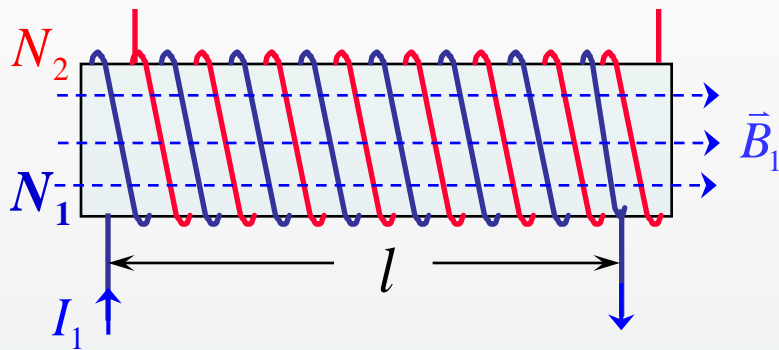
螺线管2的自感系数： $L_2 = \mu \frac{N_2^2}{l} S$

$$M^2 = L_1 L_2 \Rightarrow M = \sqrt{L_1 L_2}$$

以上是无漏磁情况下推导的，  
即彼此磁场完全穿过。

当有漏磁时： $M = k \sqrt{L_1 L_2}$

$k$ 叫做**耦合系数**， $0 \leq k \leq 1$ ，其值由介质情况和两线圈的相对位置决定。



根据互感系数的定义可得：

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_2 S}{l}$$

**例10-11:** 在磁导率为 $\mu$ 的均匀无限大的磁介质中，一无限长直导线与长宽分别为 $b$ 和 $l$ 的单匝矩形线圈共面，直导线与矩形线圈的一侧平行，且相距为 $d$ ，求二者之间的互感系数。

**解:** 设长直导线通电流 $I_1$ ，建立坐标系 $Ox$ 如图，

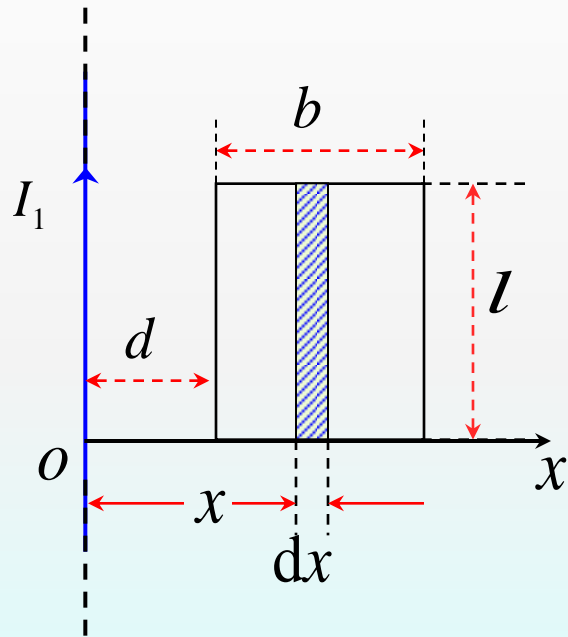
$x$ 处的磁感应强度为： $B_1 = \frac{\mu I_1}{2\pi x}$ ， 方向  $\otimes$

如图取： $dS = ldx$ ， 方向  $\otimes$

通过矩形线圈磁通量为：

$$\Psi_{21} = \int_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \int_d^{d+b} \frac{\mu I_1}{2\pi x} l dx = \frac{\mu I_1 l}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b}{d}\right)$$

根据互感系数的定义可得： $M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b}{d}\right)$



## 小结:

### 1、自感电动势:

回路电流变化  $\longrightarrow$  穿过自身磁通量变化  
 $\longrightarrow$  在回路中产生的感应电动势

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

$L$  —— 自感系数

### 2、互感电动势:

回路 1 的电流变化  $\longrightarrow$  引起回路 2 的磁通量变化  
 $\longrightarrow$  回路 2 中产生感应电动势

$$\varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

$$\varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$M_{12} = M_{21} = M$  —— 互感系数