第五章 可数性公理

本章主要介绍 4 种与可数性相关的拓扑性质, 它们与度量空间性质、下章要讨论的分离性公理都是密切相关的. 本章的要点是给出它们之间的基本关系.

教学重点:

第一与第二可数性公理; 教学难点: 分离性公理.

5.1 第一与第二可数性定理

第二章介绍的空间的基, 在生成拓扑空间, 描述局部连通性, 刻画连续性等方面都发挥了积 极的作用. 较少的基元对于进一步讨论空间的属性是重要的.

定义 5.1.1 若 X 有可数基, 称 X 满足第二可数(性)公理, 或是第二可数空间, 简称 A_2 空间.

定理 5.1.1 . $R \Rightarrow A_2$

证 令 $\mathcal{B}=\{(a,b)\mid a,b\in Q\}$, 定理 2.6.2, $\mathcal{B}$ 是 **R** 的可数基. 离散空间 X 具有可数基 X 是可数集.

下面讨论"局部基"性质. (定义 2.6.3)对 $x\in X$, 设 $\mathcal{U}_x$是 x 的邻域系, 若 $\mathcal{V}_x\subset\mathcal{U}_x$满足: $\forall U\in\mathcal{U}_x$, $\exists V\in\mathcal{V}_x$使$V\subset U$, 则称 $\mathcal{V}_x$是 x 的邻域基, 若更设 $\mathcal{V}_x$ 中每一元都是开的, 则称 $\mathcal{V}_x$是 x 的开邻域基或 局部基. 易验证, (1) 若 $\mathcal{V}_x$ 是 x 在 X 的邻域基, 则$\{V^o\mid V\in\mathcal{V}_x\}$是 x 在 X 的局部基; (2)(定理 2.6.7) 若 $\mathcal{B}$ 是空间 X 的基, $x\in X$, 则 $\mathcal{B}_x=\{B\in\mathcal{B}\mid x\in B\}$是 x 的局部基.

定义 5.1.2 若 X 的每一点有可数邻域基, 称 X 满足第一可数(性)公理, 或是第一可数空间, 简称 A_1 空间.

定理 5.1.2 度量空间$\Rightarrow A_1$.

证 $B_x=\{B(x,1/n)\mid n\in Z_-\}$ 是 x 的可数邻域基.

例 5.1.1 不可数多个点的可数补空间 X, 非 A_1

证 $x\in X$ 有可数局部基$\mathcal{V}$, $\forall y\in X-\{x\},\exists V_y\in\mathcal{V}$使$V_y\subset\{y\}'$, $\{y\}\subset V_y'$ 从而不可数集 $\{x\}'\subset\cup\{V_y'\}$ 可数集, 矛盾.

定理 5.1.3 $A_2\Rightarrow A_1$.

证　若 $\mathcal{B}$ 是 X 的可数基, 则 $\mathcal{B}_x=\{B\in\mathcal{B}\mid x\in B\}$ 是 $x\in X$ 的可数邻域基.

逆命题不成立, 不可数的离散空间是反例.

定理 **5.1.4**　设 $f:X\to Y$ 连续、满、开映射, 则 X 是 $A_2(A_1)\Rightarrow Y$ 是 $A_2(A_1)$.

证　设 $\mathcal{B}$ 是 X 的可数基, 则 $\mathcal{B}^*=\{f(B)\mid B\in\mathcal{B}\}$ 是 Y 的可数基. 事实上, 设 U 是 y 在 Y 中的邻 域, 取 $x\in f^{-1}(y)$, 则 $f^{-1}(U)$ 是 x 的邻域, $\exists B\in\mathcal{B}$ 使 $x\in B\subset f^{-1}(U), y\in f(B)\subset U$. 证明也适用于: 设 $\mathcal{V}$ 是 x 在 X 的局部基, 则 $\mathcal{V}^*=\{f(V)\mid V\in\mathcal{V}\}$ 是 $f(x)$ 在 Y 的局部基.

可遗传性质(如, 离散性, 平庸性), 开遗传性质(如, 局部连通性), 闭遗传性质.

定理 **5.1.5**　A_1, A_2 都是可遗传性质.

证　设 $Y\subset X$. 若 $\mathcal{B}$ 是 X 的可数基, 则 $\mathcal{B}|_Y$ 是 Y 的可数基. 若 $y\in Y$ 且 $\mathcal{V}$ 是 y 在 X 中的邻域基, 则 $\mathcal{V}|_Y$ 是 y 在 Y 中的可数邻域基 .

定理 **5.1.6**　A_1, A_2 都是有限可积性.

证　仅证若 X_1, X_2 是 A_1 空间, 则 $X_1\times X_2$ 是 A_1 空间.. $x=(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$, 分别设 x_1, x_2 在 X_1, X_2 的可数局部基是 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, 令 $\mathcal{V}=\{V_1\times V_2\mid V_1\in\mathcal{V}_1, V_2\in\mathcal{V}_2\}$, 则 $\mathcal{V}$ 是 x 在 $X_1\times X_2$ 中的可数局部基. 事实 上, 设 U 是 x 在 $X_1\times X_2$ 中的邻域, 则分别 $\exists X_1, X_2$ 的开集 U_1, U_2 使 $x\in U_1\times U_2\subseteq U^o, \exists V_1\in\mathcal{V}_1, V_1\in\mathcal{V}_2$, 使 $V_1\subset U_1$ 且 $V_2\subset U_2$, 则 $V_1\times V_2\subseteq U_1\times U_2\subseteq U$.

推论 **5.1.7** $\mathbf{R}^n$ 的每一子空间是 A_2.

作为**2.7** 的继续, 下面讨论第一可数空间的序列性质. X 中的集列 $\{A_i\}_{i\in Z_+}$ 称为下降的, 如果 $A_1\supset A_2\supset\ldots$

定理 **5.1.8**　X 在 x 有可数邻域基 $\Leftrightarrow X$ 在 x 有下降的可数邻域基 $\{U_i\}_{i\in Z_+}$.

证　"$\Rightarrow$"设 $\{V_i\}_{i\in Z_+}$ 是 x 在 X 的可数邻域基, 令 $U_i=V_1\cap V_2\cap V_i$.

定理 **5.1.9**　设 X 是 A_1 空间, $A\subset X, A-\{x\}$ 中序列 $x_i\to x\Leftrightarrow x\in d(A)$..

证　定理 2.7.2 已证"$\Rightarrow$",

下证"$\Leftarrow$". 设 $\{U_i\}_{i\in Z_+}$ 是 x 在 X 中下降的可数邻域基. $\exists x_i\in U_i\cap(A-\{x\})$ 则 $x_i\to x$. 事

实上, $\forall x$ 的邻域$U,\exists n\in Z_-$使$U_n\subset U,\forall i>n,x_i\in U_i\subset U_n\subset U$.

定理 **5.1.10** 设X 是A_1空间. $f:X\to Y$连续$\Leftrightarrow\forall x_i\to x\in X,f(x_i)\to f(x)$.

证 定理 2.7.3 已证"$\Rightarrow$", 下证"$\Leftarrow$". 若 f 在某点$x\in X$不连续, 存在f(x)的邻域 V 使 $f^{-1}(V)$ 不是 x 的 邻域. 设$\{U_i\}_{i\in Z_+}$ 是 x 在 X中下降的可数邻域基, 那么每一$U_i\not\subset f^{-1}(V),\exists x_i\in U_i-f^{-1}(V)$,, 于是$x_i\to x$., 从 而$f(x_i)\to f(x)\in V,\exists n\in Z_-,\forall i>n$有$f(x_i)\in V_i,x_i\in f^{-1}(V)$, 矛盾.

5.2 可分空间

定义 **5.2.1** $D\subset X$ 称为X 的稠密子集, 若$c(D)=X$, 即若U 是 X 的非空开集, 则 $U\cap D\neq\phi$.

定义 **5.2.2** 若 X 有可数的稠密子集,X 称为可分空间.

定理 **5.2.2** $A_2\Rightarrow$可分.

证 设 B 是X的可数基, $\forall B\in$ B, 取定$x_B\in B$, 令$D=\{x_B\mid B\in$ B$\}$, 则D可数.

$\forall x\in X$及x的任一邻域$U,\exists B\in$B 使$x\in B\subset U$, 那么$x_B\in U\cap D$, 所以$U\cap D\neq\phi$, 即$x\in c(D).c(D)=X$.

由此, A_2的每一子空间是可分的 ; $\mathbf{R}^n$的每一子空间是可分的.

例**5.2.1**设(X,τ)是拓扑空间, $\infty\notin X$ 定义$X^*=X\cup\{\infty\},\tau^*=\{A\cup\{\infty\}\mid A\in\tau\}\cup\{\phi\}$. 易验证, (X^*,τ^*)是拓扑空间; B 是(X,τ)的基$\Leftrightarrow$ B* $=\{B\cup\{\infty\}\mid B\in$B是$(X^*,\tau^*)$的基.

(1) (X^*,τ^*)是可分空间, 因为$\{\infty\}$是X^*的稠密集;

(2) (X^*,τ^*)是$A_2\Leftrightarrow(X,\tau)$是$A_2$;

(3) (X,τ)是(X^*,τ^*)的(闭)子空间, 因为$\tau=\tau_*$.

现在, 取(X,τ)是不可数的离散空间, 则(X,τ)不是可分空间, (X^*,τ^*)是可分 , 非A_2空间, 所以 , (1)可分的不一定是A_2的; (2)可分性不是(闭)遗传性.

定理 **5.2.4** 可分度量. $\Rightarrow A_2$

证　设 D 是度量空间 (X,ρ) 的可数稠密集. 令 $\mathcal{B}=\{B(x,1/n)\mid x\in D,n\in Z_+\}$, 则 $\mathcal{B}$ 是 X 的可数基. 事实上, $\forall y\in X$ 及 y 在 X 中的邻域 $U,\exists k\in Z_+$ 使 $B(y,1/k)\subset U$. 由于 $c(D)=X,\exists y^*\in B(y,1/2k)\cap D$，那么 $B(y^*,1/2k)\in\mathcal{B}$ 且 $y\in B(y^*,1/2k)\subset B(y,1/k)\subset U$.(设 $x\in B(y^*,1/2k),\rho(x,y)\le\rho(x,y^*)+\rho(y^*,y)<1/k$)

出此, 可分度量空间的每一子空间是可分的.

5.3 Lindelof 空间

定义 **5.3.1**　设 $\mathcal{A}$ 是 X 的子集族, $B\subset X$ 若 $B\subset\cup\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是 B 的覆盖, 并且当 $\mathcal{A}$ 是可数集(有限集, 开集, 闭集)族时, 称 $\mathcal{A}$ 是 B 的可数(有限, 开, 闭)覆盖. 若 $\mathcal{A}$ 的子集 $\mathcal{A}_1$ 覆盖 B, 则 $\mathcal{A}_1$ 称为 $\mathcal{A}$ 的子覆盖.

数学分析中的 Heine-Borel 定理: **R** 的闭区间的每一开覆盖有有限子覆盖.

定义 **5.3.2 X** 称为Lindelof空间, 若 X 的每一开覆盖有可数子覆盖.

含有不可数多个点的离散空间不是 Lindelof 空间.

定理 **5.3.1**(Lindelof 定理) $A_2\Rightarrow$ Lindelof.

证　设 X 有可数基 $\mathcal{B}$. 让 $\mathcal{A}$ 是 X 的任一开覆盖, 令 $\mathcal{B}_1=\{B\in\mathcal{B}\mid\exists A\in\mathcal{A}$ 使 $B\subset A\}=\{B_n\}_{n\in Z_+},\exists A_n\in\mathcal{A}$ 使 $B_n\subset A_n$. 则 $\{A_n\}_{n\in Z_+}$ 是 $\mathcal{A}$ 的可数子覆盖. 事实上, $\forall x\in X,\exists A\in\mathcal{A}$ 使 $x\in A, A\subset B\in\mathcal{B}$ 使 $x\in B\subset A$, 设 $B=B_n$, 那么 $x\in A_n$.

出此, A_2 空间的每一子空间是 Lindelof 空间.(推论 5.3.2)

例 **5.3.1**　含有不可数个点的可数补空间 X : Lindelof 空间.

例 5.1.1 已证明 X 不是 A_1 空间. 设 $\mathcal{A}$ 是 X 的开覆盖.取定 $\phi\ne A\in\mathcal{A}$, $\forall x\in A',\exists A_x\in\mathcal{A}$ 使 $\forall x\in A_x$,则 $A\cup\{A_x\mid x\in A'\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的可数子覆盖. 故 X 是 Lindelof 空间. 同理, X 的每一子空间也是Lindelof 空间.

定理 **5.3.3** Lindelof +度量 $\Rightarrow A_2$.

证　设 (X,ρ) 是 Lindelof 的度量空间. $\forall k\in Z_+, X$ 的开覆盖 $\mathcal{A}_k=\{B(x,1/k)\mid x\in X\}$ 有可数子覆盖 $\mathcal{B}_k=\{B(x_{ki},1/k)\mid i\in Z_+\}$. 下证 $D=\{x_{ki}\mid k,i\in Z_+\}$ 是 X 的可数稠密集. 对 X 的任一非空开集 $U,\exists x\in U,\exists k\in Z_+$ 使 $B(x,1/k)\subset U$. 由于 $\mathcal{B}_k$ 是 X 的覆盖, $\exists i\in Z_+$ 使

$x \in B(x_{ki}, 1/k)$, 那么 $x_{ki} \in B(x, 1/k) \subset U$， 于是 $D \cap U \neq \phi$. 故 X 是可分空间, 再由定理 5.2.4, X 是 A_2.

定理 **5.3.4** Lindelof 是可闭遗传性质.

证 设 Y 是 Lindelof 空间 X 的闭子空间. $\mathcal{A}$ 是 Y 的开覆盖, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\exists X$ 的开集 U_A 使 $U_A \cap Y = A$. 那么 X 的开覆盖 $\{U_A \mid A \in \mathcal{A}\} \cup \{Y'\}$ 有可数子覆盖 $\{U_{Ai} \mid i \in Z_-\} \cup \{Y'\}$ 于是 $\{A_i \mid i \in Z_-\}$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 Y 的可数子覆盖.