江西理工大学 大 学

2010 至 2011 学年第 一 学期试卷

课程＿＿数值分析＿＿ 年级、专业＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

学号＿＿＿ 线 姓名＿＿＿ 封 专业、班级＿＿＿ 密

一 填空(每空 3 分，共 30 分)

1. 用公式 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$ 进行近似计算，这时所产生的误差称为＿＿＿＿＿＿。

2.设 $f(0)=0, f(1)=10, f(2)=20,$ 则过这三个点的二次插值基函数

$l_1(x)=$＿＿＿＿＿＿，$l_2(x)=$＿＿＿＿＿＿＿，$f[0,1]=$＿＿＿。

3. 用来求数值积分的梯形公式的代数精度是＿＿＿＿＿＿。

4. 设 $f(x)$ 可微，求方程 $x^2=f(x)$ 根的 Newton 迭代格式为＿＿＿＿＿＿＿。

5. 设 $\partial=(0,-5,0,1)$，则 $\|\partial\|_1=$＿＿＿＿＿，$\|\partial\|_\infty=$＿＿＿＿＿，

$\|\partial\|_2=$＿＿＿＿；设 $A=\begin{pmatrix}2&1\\5&4\end{pmatrix}$，则 $Cond(A)_\infty=$＿＿＿＿＿＿。

试卷（A）第 1 页（共 3 页） 江西理工大学教务处

二 计算（60 分）

1．已知列表函数 $y=f(x)$

x	1	2	3	4
y	0	−5	−6	3

试求满足上述插值条件的 3 次 Newton 插值多项式 $N_3(x)$，并写出插值余项。（10 分）牛顿插值公式是：

$$N_n(x)=f(x_0)+f\left[x_0,x_1\right](x-x_0)+f\left[x_0,x_1,x_2\right](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f\left[x_0,\cdots,x_n\right](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

学号________ 姓名________ 专业、班级________

线 封 密

2. 数值积分公式形如（15）

$$\int_0^1 f(x)dx = A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0)$$

(1) 试确定求积公式中的参数 A_0, A_1, B_0，使其代数精度尽可能高.并求出其代数精度。

(2) 已知该求积公式余项 $R[f] = kf'''(\xi), \xi \in (0,1)$, 试求出余项中的参数 k。

3. 设初值问题 $\begin{cases} y' = 3x + 2y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad 0 < x < 1$.

写出用改进的 Euler 法解上述初值问题数值解的公式，若 $h = 0.2$，求解 y_1, y_2，保留两位小数。（10 分）

4. 用 Newton 迭代法求方程 $f(x) = x^3 + 2x - 5 = 0$ 的实根，$x_0 = 1.5$，要求 $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-4}$。（10 分）

专业、班级________ 姓 名________ 学 号________

密 封 线

5．已知方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + x_3 = 4 \end{cases}$$

(1) 写出用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法解此方程的公式。

(2) 求出用Jacobi 迭代法和Gauss-Seidel迭代法求解该方程组的迭代矩阵.并判断用 Gauss-Seidel 迭代法求解该方程组的收敛性。（15 分）

三．证明（10 分）

求 $\sqrt{a}(a>0)$ 的牛顿迭代法为 $x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})$，试证明对任意的迭代初值 $x_0>0$，该迭代法所产生的迭代序列 $\{x_n\}$ 是单调递减序列，同时证明该迭代法是收敛的。

2007-2008-2 数值分析 A 参考答案

一. 填空(每空 3 分，共 30 分)

1. 截断误差　　2. $-x(x-2)$ ，$\dfrac{x(x-1)}{2}$，　10　　3. 1

4. $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^2-f(x_k)}{2x_k-f'(x_k)}$　　5. 6，5，$\sqrt{26}$，9

二. 计算

1. 构造重节点的差商表：

n	x	y	一阶	二阶	三阶
0	1	0			
1	2	-5	-5		
2	3	-6	-1	2	
3	4	3	9	5	1

所以，要求的 Newton 插值为：

$$N_3(x)=-5(x-1)+2(x-1)(x-2)+(x-1)(x-2)(x-3)\qquad =x^3-4x^2+3$$

插值余项是：$R(x)=\dfrac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^2(x-2)$

或：$R(x)=f[x,1,2,3,4](x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

2.（1）解：$f(x)=1$时，左$=\int_0^1 f(x)dx=1$，右$=A_0+A_1$，左＝右得：$A_0+A_1=1$

$f(x)=x$时，左$=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$，右$=B_0+A_1$，左＝右得：$B_0+A_1=\frac{1}{2}$

$f(x)=x^2$时，左$=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}$，右$=A_1$，左＝右得：$A_1=\frac{1}{3}$

联立上述三个方程，解得：

$$A_0=\frac{2}{3},B_0=\frac{1}{6},A_1=\frac{1}{3}$$

$f(x)=x^3$时，左$=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}$，右$=A_1=\frac{1}{3}$，左$\neq$右

所以，该求积公式的代数精度是 2

（2）解：过点 0，1 构造$f(x)$的 Hermite 插值$H_2(x)$，因为该求积公式代数精度为 2，所以有：

$$\int_0^1 H_2(x)dx=A_0H_2(0)+A_1H_2(0)+B_0H_2(0)=A_0f(0)+A_1f(1)+B_0f'(0)$$

其求积余项为：

$$\begin{aligned}R(f)&=\int_0^1 f(x)dx-[A_0f(0)+A_1f(1)+B_0f'(0)]\\&=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 H_2(x)dx=\int_0^1\frac{f'''(\eta)}{3!}x^2(x-1)dx\\&=\frac{f'''(\zeta)}{3!}\int_0^1 x^2(x-1)dx\\&=-\frac{f'''(\zeta)}{72}\end{aligned}$$

所以，$k=-\frac{1}{72}$

3.解：改进的 Euler 公式是：

$$\begin{cases} \overline{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \overline{y}_{n+1})] \end{cases}$$

具体到本题中，求解的公式是：

$$\begin{cases} \overline{y}_{n+1} = y_n + 0.2(3x_n + 2y_n) = 1.4y_n + 0.6x_n \\ y_{n+1} = y_n + 0.1[3x_n + 2y_n + 3x_{n+1} + 2\overline{y}_{n+1}] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

代入求解得：$\overline{y}_1 = 1.4$，$y_1 = 1.54$

$$\overline{y}_2 = 2.276, y_2 = 2.4832$$

4．解：设 $f(x) = x^3 + 2x - 5$，则 $f'(x) = 3x^2 + 2$,

牛顿迭代公式为：$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$$= x_k - \frac{x_k^3 + 2x_k - 5}{3x_k^2 + 2}$$

$$= \frac{2x_k^3 + 5}{3x_k^2 + 2}$$

将 $x_0 = 1.5$ 代入上式，得

$x_1 = 1.34286$， $x_2 = 1.37012$， $x_3 = 1.32920$，$x_4 = 1.32827$，$x_5 = 1.32826$

$|x_5 - x_4| = 0.00001 < 10^{-4}$

所以，方程的近似根

$$x_5 = 1.32826$$

5．解，Jacobi 迭代公式是：

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3}x_2^k - \dfrac{1}{3}x_3^k \\ x_2^{k+1} = \dfrac{3}{2} - x_1^k \\ x_3^{k+1} = 4 - x_1^{k+1} \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代公式是：

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3}x_2^k - \dfrac{1}{3}x_3^k \\ x_2^{k+1} = \dfrac{3}{2} - x_1^{k+1} \\ x_3^{k+1} = 4 - x_1^{k+1} \end{cases}$$

(2) 设其系数矩阵是 A，将 A 分解为： $A = D - L - U$，其中

$$D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}，\quad L=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},U=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Jacobi 迭代矩阵是：

$$B_J=D^{-1}(L+U)=\begin{pmatrix}1/3&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&-1\\-2&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&-2/3&-1/3\\-1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

Gauss-Seidel 迭代矩阵是：

$$B_J=(D-L)^{-1}U=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&-2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&0&0\\-2&3&0\\-2&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&-2&-1\\0&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}$$

二.　　证明

证明：$x_0 > 0$ 且 $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}) \quad \Rightarrow x_k > 0$

所以有：$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}) \geq \frac{1}{2} \bullet 2\sqrt{x_k \bullet \frac{a}{x_k}} = \sqrt{a}$

即：数列 x_k 有下界；

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}) \leq \frac{1}{2}(x_k + \frac{{x_k}^2}{x_k}) = x_k$$

所以，迭代序列 x_k 是单调递减的，

由单调递减且有下界的数列极限存在可知序列 x_k 极限存在。

所以，迭代法 $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k})$ 是收敛的。