

江西理工大学

《高等数学》第一单元测试卷

一 填空题(每小题3分, 共24分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4+3x)^2}{x(1-x^2)} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 是 x 的 $\underline{\hspace{1cm}}$ 阶无穷小。(填具体阶数)

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \arctan x = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{6x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-2}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二. 选择题(每小题3分, 共27分)

1. $\alpha(x) = \frac{1-x}{1+x}, \beta(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时有 ().

- (A) α 是比 β 高阶的无穷小 (B) α 是比 β 低阶的无穷小
(C) α 与 β 是同阶无穷小 (D) $\alpha \sim \beta$

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}, & x \neq 0 (x \geq -1) \\ k, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x =$

0 处连续, 则 $k = ()$

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) 0

3. $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x \cos \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ().

- (A) 连续点 (B) 可去间断点
(C) 跳跃间断点 (D) 振荡间断点

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|} = ()$.

- (A) 1 (B) -1
(C) 0 (D) 不存在

5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = ()$.

- (A) 1 (B) -1 (C) e (D) e^{-1}

6. $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的 ().

- (A) 充要条件 (B) 充分条件
(C) 必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = ()$.

- (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

8. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有 ()

- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立 (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立
(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在 (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

9. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限 ().

- (A) 等于 2 (B) 等于 0
(C) 为 ∞ () 不存在但不为 ∞

三、计算下列极限(每小题5分, 共20分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{2x^3}$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{8\cos^2 x - 2\cos x - 1}{2\cos^2 x + \cos x - 1}$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x \tan x}$$

五、(10分)讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$ 的连续性, 若有间断点, 指出其类型。

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{2-x})}{\arctan \sqrt[3]{4-x^2}}$$

六、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $a < f(x) < b$, 证明在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使

$$f(\xi) = \xi$$

四、(9分)试确定 a, b 的值, 使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = \frac{1}{2}$$