第二十五讲 标准正交基与矩阵的QR分解

一、正交向量组

二、标准正交基

三、正交矩阵

四、矩阵的QR分解

HOME

ENTER

一、正交向量组

定义：

设V为欧氏空间，非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \in V$，

如果它们两两正交，则称之为**正交向量组**.

注：

① 若 $\alpha \neq \mathbf{0}$，则 α 是正交向量组.

② **正交向量组必是线性无关向量组.**

证： 设非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \in V$ 两两正交.

令 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0, \quad k_i \in R,$

则 $$(\alpha_i, \sum_{j=1}^{m} k_j\alpha_j) = \sum_{j=1}^{m} k_j(\alpha_i,\alpha_j) = k_i(\alpha_i,\alpha_i) = 0$$

由 $\alpha_i \neq 0$ 知 $(\alpha_i,\alpha_i) > 0,$

$\therefore \quad k_i = 0, \quad i = 1,2,\cdots,m$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

③ **欧氏空间中线性无关向量组未必是正交向量组.**

例如： R^3 中 $\alpha_1=(1,1,0)$, $\alpha_2=(1,0,1)$ 线性无关.

但 α_1,α_2 不是正交向量组.

Q $(\alpha_1,\alpha_2)=1\neq 0.$

④ n维欧氏空间中正交向量组所含向量个数 $\leq n.$

二、标准正交基

1. 几何空间 R^3 中的情况

在直角坐标系下

$$\vec{i}=(1,0,0),\quad \vec{j}=(0,1,0),\quad \vec{k}=(0,0,1)$$

是由单位向量构成的正交向量组，即

$$(\vec{i},\vec{j})=(\vec{j},\vec{k})=(\vec{k},\vec{i})=0,$$

$$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$$

$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 是 R^3 的一组基.

设 $\alpha = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\beta = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \in R^3$

① 从 $(\alpha,\vec{i}) = x_1$, $(\alpha,\vec{j}) = y_1$, $(\alpha,\vec{k}) = z_1$

得 $\alpha = (\alpha,\vec{i})\vec{i} + (\alpha,\vec{j})\vec{j} + (\alpha,\vec{k})\vec{k}$

② $(\alpha,\beta) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

③ $|\alpha| = \sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}}$

④ $<\alpha,\beta> = \arccos\dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}}\sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}}}$

即在基 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 下，R^3中的与内积有关的度量性质有简单的表达形式.

2. 标准正交基的定义

n 维欧氏空间中，由 n个向量构成的正交向量组称为**正交基**；

由单位向量构成的正交基称为**标准正交基**.

注：

① 由正交基的每个向量单位化，可得到一组标准正交基.

② n维欧氏空间V中的一组基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为标准正交基

$$\Leftrightarrow (\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}, \qquad i,j=1,2,\cdots,n \qquad (1)$$

③ n维欧氏空间V中的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$为标准正交基

当且仅当其度量矩阵 $A=\big((\varepsilon_i,\varepsilon_j)\big)=E_n.$

④ n维欧氏空间V中标准正交基的作用:

设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$为V的一组标准正交基，则

(i) 设 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n \in V$

由(1)， $(\alpha, \varepsilon_i) = x_i$.

有 $\alpha = (\alpha, \varepsilon_1)\varepsilon_1 + (\alpha, \varepsilon_2)\varepsilon_2 + \cdots + (\alpha, \varepsilon_n)\varepsilon_n$ **(2)**

(ii) $(\alpha, \beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ **(3)**

这里 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$

$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n.$

(iii) $|\alpha| = \sqrt{x_1^{\,2} + \cdots + x_n^{\,2}}$

3. 标准正交基的构造

—施密特(Schmidt)正交化过程

1）

(定理1) n 维欧氏空间中任一个正交向量组都能扩充成一组正交基.

证：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 欧氏空间V中的正交向量组，

对 $n-m$ 作数学归纳法.

当 $n-m=0$ 时， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 就是一组正交基了.

假设 $n-m=k$ 时结论成立，即此时可找到向量

$$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$$

使 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$

成为一组正交基.

现在来看 $n-m=k+1\,(\geq 1)$ 的情形.

因为 $m<n$,

所以必有向量 β 不能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，

作向量 $\alpha_{m+1}=\beta-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-k_m\alpha_m(\neq 0)$

$k_i\in R$ 待定.

从正交向量组的性质知

$$(\alpha_i, \alpha_{m+1}) = (\beta, \alpha_i) - k_i(\alpha_i, \alpha_i), \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

于是取 $k_i = \dfrac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \qquad i = 1, 2, \cdots, m,$

可得 $(\alpha_i, \alpha_{m+1}) = 0$, $\qquad i = 1, 2, \cdots, m.$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 为正交向量组.

由归纳法假设知，对这 $m+1$ 个向量构成的正交组可扩充得正交基. 于是定理得证.

2）

(定理2) 对于n维欧氏空间中任一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 都可找到一组标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，使

$$L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_i)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i),\quad i=1,2,\cdots,n$$

证:（基本方法—逐个构成出满足要求的 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$.）

首先，可取 $\eta_1=\dfrac{1}{|\varepsilon_1|}\varepsilon_1.$

一般地，假定已求出 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 是单位正交的，且

$$L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_i)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i),\quad i=1,2,\cdots,m \qquad (4)$$

当 $m<n$ 时，因为有 $\varepsilon_{m+1}\notin L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)$,

由(4)知 ε_{m+1}不能被 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$线性表出.

按定理1证明中的方法，作向量

$$\xi_{m+1}=\varepsilon_{m+1}-k_1\eta_1-k_2\eta_2-k_m\eta_m,\qquad k_i=\frac{(\varepsilon_{m+1},\eta_i)}{(\eta_i,\eta_i)}$$

即 $$\xi_{m+1}=\varepsilon_{m+1}-\sum_{i=1}^{m}(\varepsilon_{m+1},\eta_i)\eta_i \qquad (5)$$

则 $\xi_{m+1} \neq 0$ 且 $(\xi_{m+1}, \eta_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$

再设 $\eta_{m+1} = \dfrac{1}{|\xi_{m+1}|}\xi_{m+1}.$

可知 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m, \eta_{m+1}$ 是单位正交向量组.

从(4)和(5)知 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m, \eta_{m+1}$ 与 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}$

是等价向量组， 因此，有

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m+1}) = L(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{m+1})$$

由归纳原理，定理2得证.

注：

① 由 $L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_i)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i),\quad i=1,2,\cdots,n$

知，若 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)T,$

则过渡矩阵 $T=(t_{ij})$ 是上三角形（即 $t_{ij}=0,\ i>j$ ）

且 $t_{ii}>0,\quad i=1,2,\cdots,n$

② Schmidt正交化过程:

1° 先把线性无关的向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$

化成正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$.

$$\beta_1=\alpha_1,\qquad \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_j=\alpha_j-\sum_{i=1}^{j-1}\frac{(\alpha_j,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i,\quad j=2,3,\cdots,m;$$

2° 再单位化得标准正交向量组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$.

$$\eta_i=\frac{1}{|\beta_i|}\beta_i,\quad i=1,2,\cdots,m$$

例1. 把 $\alpha_1=(1,1,0,0),\quad \alpha_2=(1,0,1,0),$

$$\alpha_3=(-1,0,0,1)\quad \alpha_4=(1,-1,-1,1)$$

变成单位正交的向量组.

正交化

解：令 $\beta_1=\alpha_1=(1,1,0,0)$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0)$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)$$

$$\beta_4=\alpha_4-\frac{(\alpha_4,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_4,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_4,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\beta_3$$

$$=(1,-1,-1,1)$$

再单位化

$$\eta_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)$$

$$\eta_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0)$$

$$\eta_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=(-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{3}{\sqrt{12}})$$

$$\eta_4=\frac{1}{|\beta_4|}\beta_4=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 即为所求.

4. 标准正交基间的基变换

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$是 n 维欧氏空间V中的两组标准正交基，它们之间过渡矩阵是 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，

即 $$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

或 $$\eta_i=a_{1i}\varepsilon_1+a_{2i}\varepsilon_2+\cdots+a_{ni}\varepsilon_n\,,\quad i=1,2,\cdots,n$$

由于 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是标准正交基，所以

$$(\eta_i,\eta_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases},\qquad i,j=1,2,\cdots,n \qquad （6）$$

由公式（6），有

$$(\eta_i,\eta_j)=a_{1i}b_{1j}+a_{2i}b_{2j}+\cdots+a_{ni}b_{nj}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases},\qquad（7）$$

把A按列分块为 $A=\left(A_1,A_2,\cdots,A_n\right)$

由（7）有

$$A'A=\begin{pmatrix}A_1'\\A_2'\\\vdots\\A_n'\end{pmatrix}\left(A_1,A_2,\cdots,A_n\right)=E_n\qquad（8）$$

三、正交矩阵

1. 定义

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，若A满足 $A'A=E$

则称A为**正交矩阵**.

2. 简单性质

1）A为正交矩阵 $\Rightarrow |A|=\pm 1.$

2）由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵.

3）设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是标准正交基，A为正交矩阵，若

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 也是标准正交基.

4） $A\in R^{n\times n}$ 为正交矩阵

$\Longleftrightarrow$ A的列向量组是欧氏空间 R^n 的标准正交基.

5） $A\in R^{n\times n}$ 为正交矩阵 $\Longleftrightarrow$ $A^{-1}=A'$.

6） $A\in R^{n\times n}$ 为正交矩阵

$\Longleftrightarrow$ A的行向量组是欧氏空间 R^n 的标准正交基.

四、矩阵的QR分解

定理9.2.7 设A是域F上的n阶可逆矩阵，则必存在矩阵Q和可逆上三角矩阵R使得$A=QR$，称为A的QR分解.

其中矩阵Q满足$\overline{Q}^TQ=E$,称Q为酉矩阵.

证明: 考虑内积空间$V=F^n$,它的内积为标准内积.因为A是可逆矩阵,所以A的列向量组$\beta_1,\cdots,\beta_n$构成了V的一组基，用公式9.2.2可得V的一个正交基$\alpha_1,\cdots\alpha_n$,用推论9.2.5可得V的一个标准正交基$\xi_1,\cdots,\xi_n$,且$A=(\beta_1,\cdots\beta_n)=(\xi_1,\cdots\xi_n)diag(\|\alpha_1\|,\cdots\|\alpha_n\|)P$, 令

$$R=diag(\|\alpha_1\|,\cdots\|\alpha_n\|)P(\text{它是上三角}),$$

令$Q=(\xi_1,\cdots\xi_n)$, 则Q是酉阵. 所以$A=QR$.

例9.2.8 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

求酉阵Q和上三角矩阵R使得$A=QR$.

解 A的列向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，将它们正交单位化得

$$\eta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)^T,\qquad \eta_3=(-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{3}{\sqrt{12}})^T,$$

$$\eta_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0)^T,\quad \eta_4=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T,$$

所以

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\times$$

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

由此得

$$
\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{12}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

所以$A=QR.$

推论9.2.9 设A是列满秩的$m\times n$矩阵$(m>n)$，则必存在列向量组正交单位化的$m\times n$矩阵Q和可逆上三角矩阵R使得$A=QR$,其中$\overline{Q}^TQ=E.$