第四单元　不定积分测试题详细解答

一、填空题

1、$\underline{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C}$　　$\int x\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$。

2、$\underline{-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C}$　　$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{5}{2}}dx=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C$。

3、$\underline{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+C}$　　$\int(x^2-3x+2)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+C$。

4、$\underline{\sin x-\cos x+C}$　　$\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx$

$=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C$。

5、$\underline{\frac{1}{2}\tan x+C}$　　$\int\frac{dx}{1+\cos 2x}=\int\frac{dx}{1+2\cos^2 x-1}=\frac{1}{2}\int\sec^2 xdx=\frac{1}{2}\tan x+C$。

6、$\underline{-2\cos\sqrt{t}+C}$　　$\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=2\int\sin\sqrt{t}d\sqrt{t}=-2\cos\sqrt{t}+C$。

7、$\underline{-x\cos x+\sin x+C}$　　$\int x\sin xdx=-\int xd\cos x=-x\cos x+\int\cos xdx$

$=-x\cos x+\sin x+C$。

8、$\underline{x\arctan x-\arctan x+C}$　　$\int\arctan xdx=x\arctan x-\int xd\arctan x$

$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx+C=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

9、$\underline{\ln(1+\sin^2 x)+C}$　　$\int\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

$=\int\frac{d\sin^2 x}{1+\sin^2 x}=\ln(1+\sin^2 x)+C$。

10、$\underline{xf'(x)-f(x)+C}$　　$\int xf''(x)dx=\int xdf'(x)=xf'(x)-\int f'(x)dx$

$=xf'(x)-\int df(x)=xf'(x)-f(x)+C$

11、$\underline{\sqrt{2}\arctan(\sqrt{\frac{x+1}{2}})+C}$　　令$\sqrt{x+1}=t$，则$x=t^2-1$

原式$=\int\frac{1}{(t^2+2)\cdot t}d(t^2-1)=\int\frac{2}{t^2+2}dt$

$=\sqrt{2}\int\frac{1}{(\frac{1}{2})^2+1}d(\frac{t}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}\arctan(\frac{t}{\sqrt{2}})+C=\sqrt{2}\arctan(\sqrt{\frac{x+1}{2}})+C$

12、$\underline{\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C}$　　$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$。

二、选择题

1、选（D）。由$d\int f(x)dx=f(x)dx$，$\int f'(x)dx=f(x)+C$，$\int df(x)=f(x)+C$知（A)、（B)、（C）选项是错的，故应选D。

2、选（B）。由微分的定义知$d[f(x)dx]=f(x)dx$。

3、选（C）。函数$f(x)$的任意两个原函数之间相差一个常数。

4、选（B） 两边对$\int f'(x^3)dx=x^3+C$微分得

$$f'(x^3)=3x^2, f'(t)=3t^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int 3x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$$

5、选（B） 原式$=\int xdF(x)=\int xd(x\ln x)=x^2\ln x-\int x\ln xdx$

$$=x^2-\frac{x^2}{2}\ln x+\int\frac{x}{2}dx=x^2(\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4})+C$$

6、选（C） $\int xf(1-x^2)dx=-\frac{1}{2}\int f(1-x^2)d(1-x^2)=-\frac{1}{2}(1-x^2)+C$

7、选（D） $\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^x+1-2}{e^x+1}dx=\int 1-\frac{2}{e^x+1}dx$

$$=x-2\int\frac{e^x}{(e^x+1)e^x}dx=x-2\int\frac{1}{e^x(e^x+1)}de^x$$

$$=x-2\int(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^x+1})de^x=x-2x+2\ln|e^x+1|+C$$

$$=-x+2\ln|e^x+1|+C$$

8、选（B）由题意知$f'(x)=\sin x$，$\therefore f(x)=-\cos x+C_1$，

$\therefore f(x)_2$的原函数为$\int f(x)dx=-\sin x+C_1x+C$，

取$C_1=0,C_2=1$，故选B。

9、选（C）由$F(x)=xf(x)+x^2$两边求导得

$F'(x)=f(x)+xf'(x)+2x$，又$F'(x)=f(x)$，所以$f'(x)=-2$，

所以$f(x)=\int-2dx=-2x+C$，又因为$f(0)=1$，所以$C=1,f(x)=-2x+1$。

10、选（D）$\int\frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx=\int[3-2\cdot(\frac{3}{2})^x]dx=3x-2\cdot\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\cdot(\frac{3}{2})^x+C$

$$=3x-2\cdot\frac{1}{\ln 3-\ln 2}\cdot(\frac{3}{2})^x+C。$$

11、选（B）$\int 3^xe^xdx=\int(3e)^xdx=\frac{1}{\ln 3e}(3e)^x=\frac{1}{1+\ln 3}3^xe^x$。

12、选（B）$\int\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}dx=-\int(-\frac{1}{x^2})\sec^2\frac{1}{x}dx=-\int\sec^2\frac{1}{x}d\frac{1}{x}=-\tan\frac{1}{x}+C$。

三、计算解答

1、计算下列各题

(1)解：$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(a^2-x^2) = -\sqrt{a^2-x^2}+C$；

(2) 解：$\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4x+13)}{x^2+4x+13} - \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+3^2}$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+13) - \frac{1}{3}\arctan\frac{x+2}{3}+C$；

(3) 解：$\int \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \arccos x d(\sqrt{1-x^2})$

$= -\sqrt{1-x^2}\arccos x + \int \sqrt{1-x^2}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$

$= -\sqrt{1-x^2}\arccos x - x + C$；

(4) 解：$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$ 　令 $\sqrt{e^x-1}=t$，则 $x=\ln(t^2+1)$

得 $\int \frac{\ln(t^2+1)\cdot(t^2+1)}{t}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt$

$= 2\int \ln(t^2+1)dt = 2t\ln(t^2+1) - 2\int \frac{2t^2}{t^2+1}dt$

$= 2t\ln(t^2+1) - 4(t-\arctan t)+C$

$= 2\sqrt{e^x-1}\cdot x - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$；

(5) 解：$\int x\sin^2 xdx = \int x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int xdx - \frac{1}{2}\int x\cos 2xdx$

$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\int xd\sin 2x = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$；

(6) 解：$\int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx = -\int \ln(1+e^x)d(e^{-x}) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int \frac{e^{-x}}{1+e^x}\cdot e^x dx$

$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$

$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C$。

2、解：$f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x = 1 - 2\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$

$\therefore f'(x) = 1-2x+\frac{x}{1-x} = -2x - \frac{1}{x-1}$ 　$0<x<\sin^2 1$

$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int(-2x-\frac{1}{x-1})dx = -x^2 - \ln|x-1| + C$

$= -x^2 - \ln(1-x) + C$

3、解：对 $f(x)F(x)=\sin^2 2x$ 两边积分：

$$\int f(x)F(x)dx=\int \sin^2 2xdx \Rightarrow \int F(x)dF(x)=\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx$$

$$\frac{1}{2}F^2(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+C$$

由 $F(0)=1$ 知 $C=1$ 又 $F(x)\geq 0$ 得 $F(x)=\sqrt{x-\frac{1}{4}\sin 4x+1}$

$$\therefore f(x)=F'(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{4}\sin 4x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-\cos 4x)$$

4、解：由 $\int \frac{dx}{(1+2\cos x)^2}=\frac{A\sin x}{1+2\cos x}+B\int \frac{dx}{1+2\cos x}$ 整理得

$$\int \frac{1-B-2B\cos x}{(1+2\cos x)^2}dx=\frac{A\sin x}{1+2\cos x}+C$$

由不定积分的定义：有 $(\frac{A\sin x}{1+2\cos x})'=\frac{1-B-2B\cos x}{(1+2\cos x)^2}$

即 $\frac{A\cos x(1+2\cos x)+2A\sin^2 x}{(1+2\cos x)^2}=\frac{A\cos x+2A}{(1+2\cos x)^2}=\frac{1-B-2B\cos x}{(1+2\cos x)^2}$

对此导数：$\begin{cases} A=-2B \\ 2A=1-B \end{cases} \Rightarrow A=\frac{2}{3}$，$B=-\frac{1}{3}$（也可直接两边求导求解）

5、解：设 $f'(x)=ax^2+bx+c \quad (a<0)$

由 $f'(0)=0$，$\Rightarrow c=0$. 由 $f'(2)=0 \Rightarrow 4a+2b=0 \Rightarrow b=-2a$

$\therefore f'(x)=ax^2-2ax$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow$ 驻点 $x_1=0$，$x_2=2$

又 $f''(x)=2ax-2a$

$\because f''(0)=-2a>0$，$\therefore x=0$ 为极小值点，$\therefore f(0)=2$

$\because f''(2)=2a<0$，$\therefore x=2$ 为极大值点，$\therefore f(2)=6$

而 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax^2-2ax)dx=\frac{a}{3}x^3-ax^2+c$

由 $\begin{cases} \frac{a}{3}\cdot 8-4a+c=b \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ c=2 \end{cases}$

$\therefore f(x)=-x^3+3x^2+2$