8 二次型与欧几里德空间

8.1 *用正交变换化二次型*$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$*为标准型, 并给出所用的正交线性变换.*

8.2 *设*$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$*在正交变换*$x=Qy$*下的标准型为*$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$*, 求*$a$*的值及一个正交矩阵*$Q$*。*

8.3 *用正交变换化二次型*

$$f(x_1,\cdots,x_4)=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_3^2+x_1x_2+x_3x_4)$$

为标准型, 并给出所用的正交线性变换.

8.4 *求一个正交变换将二次型*

$$f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$$

化成标准形.

8.5 *设*A*是一个*n*阶正定矩阵，则*$|A+E|>1$*正定。*

8.6 *设*n*阶实对称矩阵*A*正定，证明*A^**也是正定矩阵，其中*A^**表示*A*的伴随矩阵。*

8.7 *设*n*阶方阵*A*满足条件*$A^TA=E$*, 其中*A^T*是*A*的转置矩阵，*E*为单位矩阵. 证明*A*的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于1.*

8.8 设$f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$是一实二次型, 若存在n维实向量

$$X_1,X_2,\ s.t.\ X_1^TAX_1>0, X_2^TAX_2<0,$$

证明: 存在n维实向量a, $s.t.$, $a^TAa=0$.

8.9 (1) 证明: 如果$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j\ \ (a_{ij}=a_{ji})$是正定二次型, 那么

$$f(y_1,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定二次型;

(2) 如果$A=f(y_1,\cdots,y_n)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & \end{pmatrix}$是正定矩阵, 那么

$$|A|\leq a_{nn}P_{n-1},$$

其中P_{n-1}是A的$n-1$阶顺序主子式;

(3) $|A|\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

8.10 设A,B都是$n\times n$实对称矩阵, 且A正定,

(1)证明: 存在实可逆矩阵T，使得$T'(A+B)T$为对角矩阵;

(2) 假设B也正定, 证明: $|A+B|\geq|A|+|B|$.

(3) 假设B也正定, 且$AB=BA$, 证明AB也是正定矩阵.

8.11 化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2$$

为标准型并写出线性变换.

8.12 *设二次型*

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

(1) 求二次型f的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型的规范性为$y_1^2+y_2^2$, 求a的值和各特征值的一个特征向量.

8.13 *若$n\times n$矩阵A可逆,*

(1) 证明$A'A$正定.

(2) 证明: 存在正交矩阵P,Q, 使得

$$P'AQ=\mathit{diag}(a_1,\cdots,a_n),\ \textit{where } a_i>0, i=1,,\cdots,n.$$

8.14 *已知σ是n维欧几里德空间V的对称变换, 证明:*

$$V=\ker\sigma\oplus\sigma V.$$

8.15 *求线性方程组*$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-x_4=0\\3x_1+2x_2+0x_3-2x_4=0\\3x_1+x_2+9x_3-4x_4=0\end{cases}$ *的解空间W及其正交补空间$W^\perp$.*

8.16 *设σ是有限维线性空间V的可逆线性变换, 设W是V中$\sigma-$不变子空间, 证明: W是V中$\sigma^{-1}-$不变子空间.*