9.3/4 磁场的高斯定理和安培环路定理

9.3/4磁场的高斯定理和安培环路定理

一、磁力线（磁场线、磁感线）

1. 磁场线的大小与方向

方向：切线方向表示该点处的磁场方向　　大小：$B=\dfrac{dN_m}{dS_\perp}$

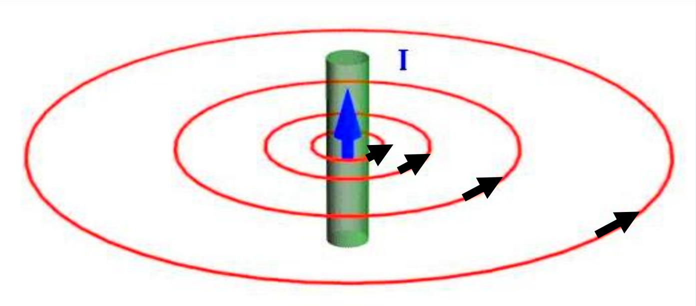
2. 磁场线的性质

(1) 任意两条磁场线不相交

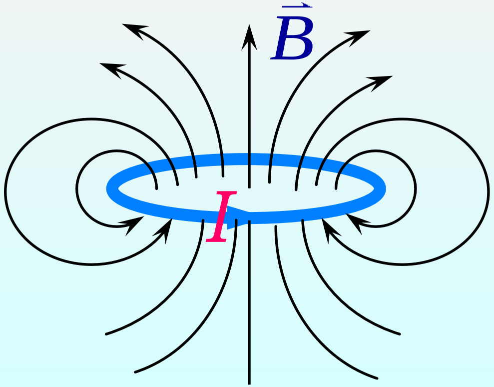
(2) 任意磁场线都是闭合曲线

(3) 磁场线与形成磁场的电流互相套连，成右螺关系

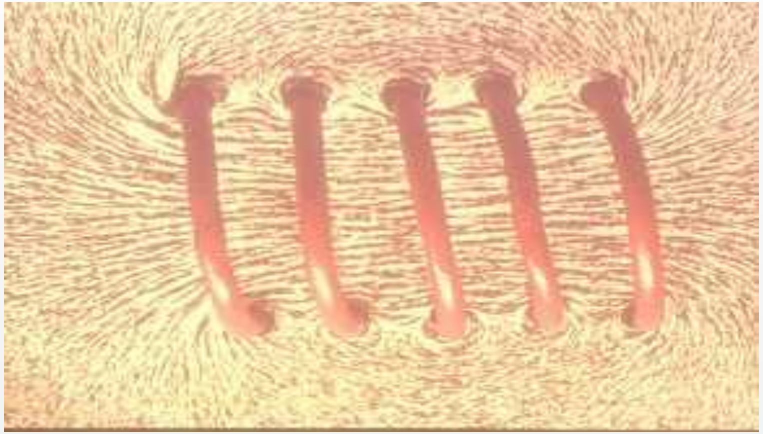
长直线电流的磁力线

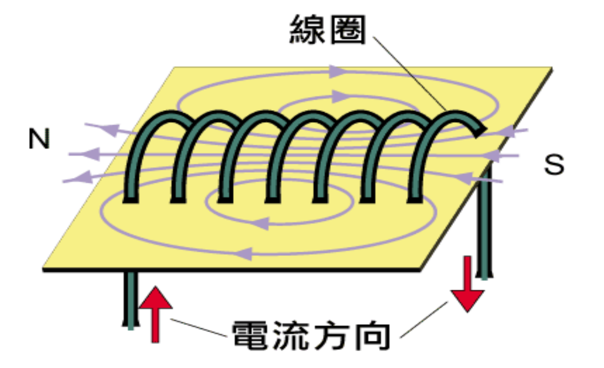


圆电流的磁力线

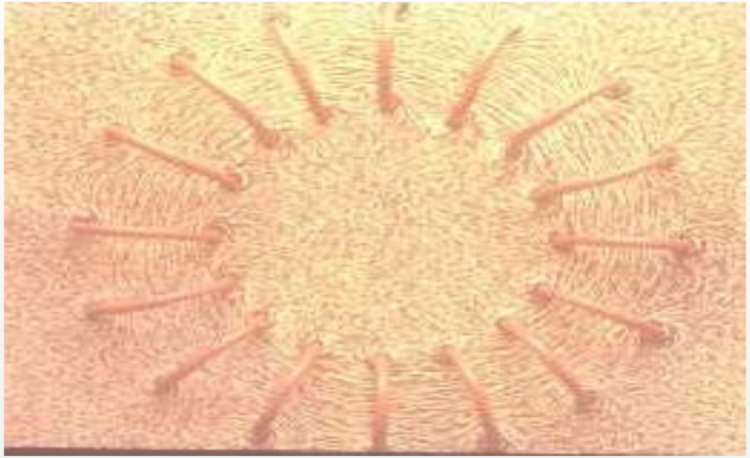


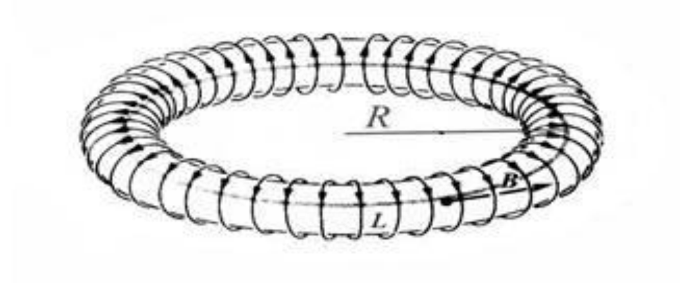
直螺线管电流的磁力线





载流螺绕环的磁力线



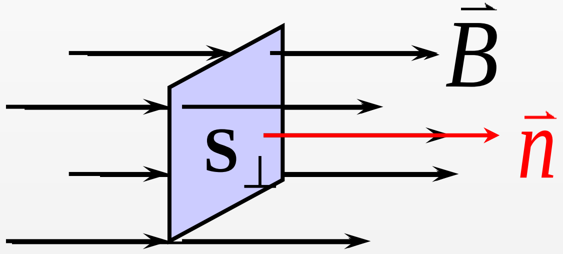


二、磁通量、磁场高斯定理

穿过某一空间曲面的磁感线条数称为磁通量Φ_m

1. 均匀磁场，平面

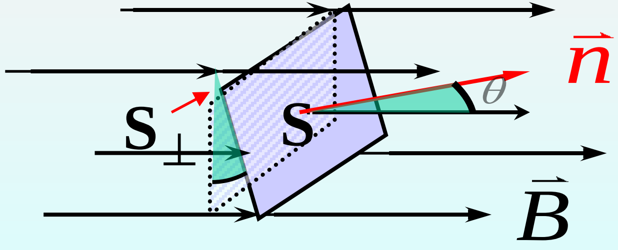
(1) $\vec{B}//\vec{n}$　　$\Phi_m = BS_\perp$



(2) $\vec{B}\wedge\vec{n} = \theta$

$$\Phi_m = BS_\perp = BS\cos\theta$$

$\vec{S} = S\vec{n}$　（面矢量）

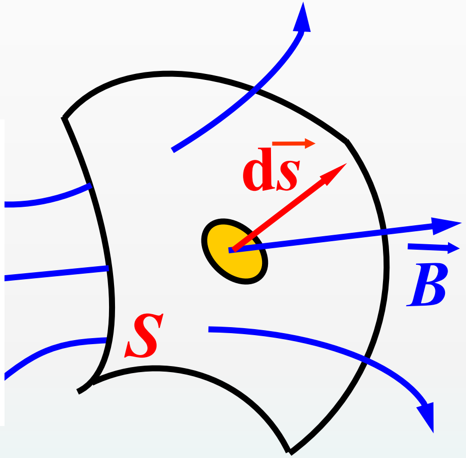


$$\Rightarrow \quad \Phi_m = \vec{B}\cdot\vec{S}$$

2. 一般情形（非均匀磁场，任意曲面）

任取一面积元矢量分析 $d\vec{s} = ds\vec{n}$

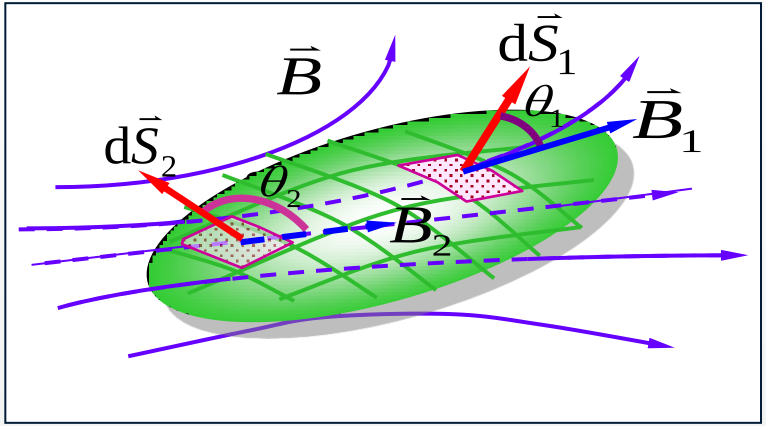
面积元可看成一平面，其所在处的磁场可认为是匀强的



$$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

总的磁通量为 $\Phi_m = \int d\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

3. 通过闭合曲面的磁通量



约定：闭合曲面中，面积元法线由内向外为正方向。

当磁力线穿出时 $0 \le \theta_1 < \dfrac{\pi}{2}$

$$\mathrm{d}\Phi_1 = \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 > 0$$

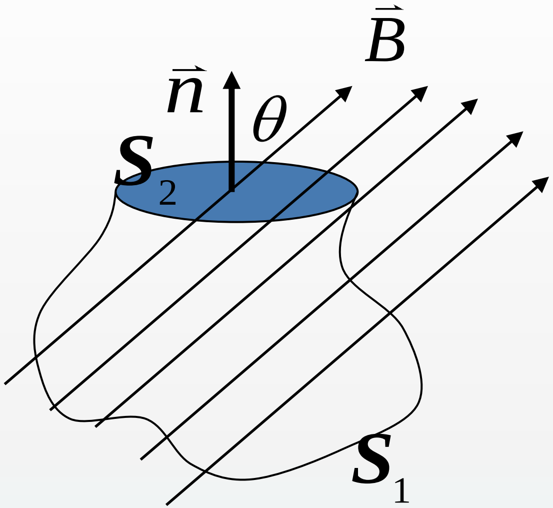
当磁力线穿入时 $\dfrac{\pi}{2} < \theta_2 \le \pi$

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 < 0$$

$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$ ——磁场高斯定理

意义：说明磁场是无源场

例1、如图所示，求均匀磁场中下曲面的磁通量



解法一：直接求解

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$ 很难计算

解法二：利用高斯定理 $\oint_s \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$

将顶端圆面补全，构成一个闭合曲面。

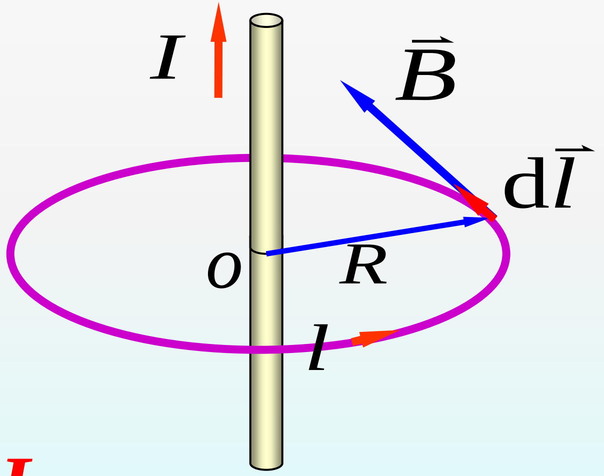
$$\oint_s \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\therefore \int_{S_1} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \boxed{= -BS_2 \cos\theta}$$

三、安培环路定理

$$\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \qquad \oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = ?$$

1. 以无限长载流直导线为例



➢环路包围直导线

1) 简单情形——同心圆

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_l B\mathrm{d}l = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\mathrm{d}l = \mu_0 I$$

2) 复杂点情形——任意形状的环路

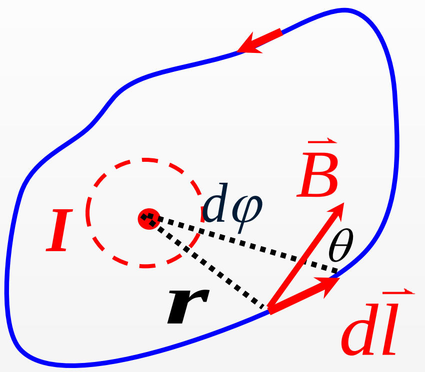
在 $\boldsymbol{r}$ 处 $\quad B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

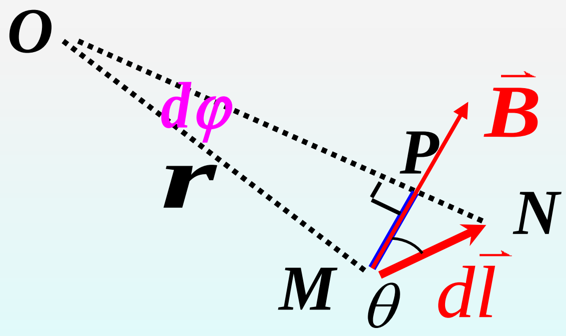
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\oint Bdl\cos\theta=\oint Brd\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{2\pi}d\varphi=\mu_0 I$$

思考：若I 反向或环路反向？

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l}=-\mu_0 I$$

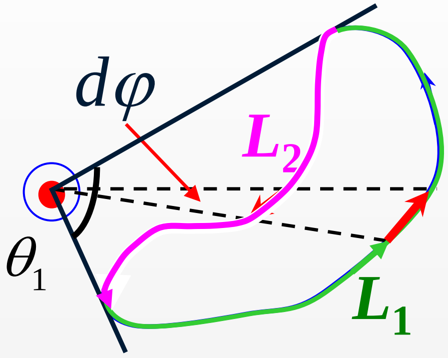




➢环路不包围直导线

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{L_1}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{L_2}\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_0^{\theta_1}\frac{\mu_0 I}{2\pi}d\varphi + \int_{\theta_1}^{0}\frac{\mu_0 I}{2\pi}d\varphi = 0$$



2. 一般情况（任意条、任意形状导线、任意闭合环路）

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L \sum_i \vec{B}_i\cdot d\vec{l} = \sum_i \oint_L \vec{B}_i\cdot d\vec{l} = \sum_i \mu_0 I_{内i}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_{内i}}$$

——安培环路定理

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_{内i}$$

——安培环路定理

在恒定电流的磁场中，磁感应强度$\vec{B}$沿任何闭合路径L的线积分（B的环流）等于路径L所包围的电流强度的代数和的μ_0倍。

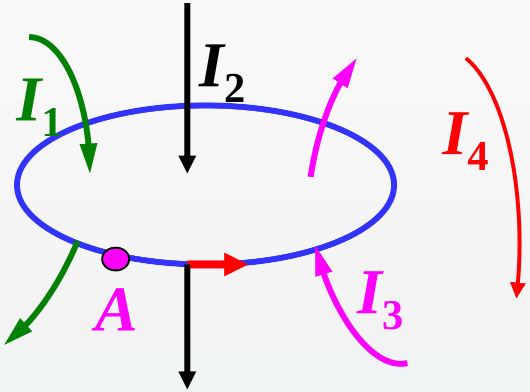
说明

1) 安培环路定理说明磁场是非保守场(有旋场)

2) $\vec{B}$是由谁产生的？

但对环流积分有贡献的只有包围在内的电流

3) “代数和” 指电流有正负，当I 的流向与环路绕向成右螺旋时$I > 0$；当成左螺旋时$I < 0$ 。



例2：1) $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0(-I_1 - I_2 + I_3)$

2) A点的磁感应强度由谁产生？

A点的磁感应强度由所有电流 I_1，I_2，I_3，I_4 共同产生

四、安培环路定理的应用

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum_{i=1}^{n} I_i$$

目的：求磁感应强度 $\vec{B}$

条件：I 分布具有较高对称性

- 无限长均匀载流圆柱面(体)
- 无限长均匀密绕直螺线管
- 无限大均匀载流平面

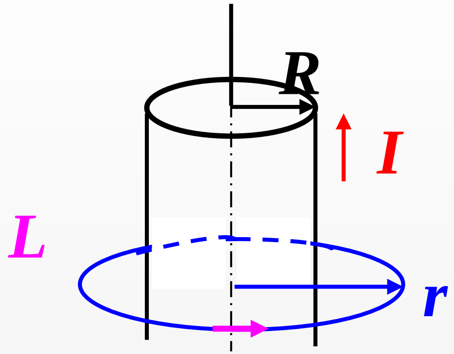
关键：环路的选取

环路的选取原则：

要使环路上的磁感应强度大小相等或者等于零；

方向垂直于环路或者平行于环路

例3. 无限长均匀载流圆柱面产生的场



解： 作安培环路L如图，绕向为逆时针

由对称性分析可得

1）L上各点场强的方向与L同向相切

2）L上各点场强的大小相等

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\mathrm{d}l = B2\pi r$$

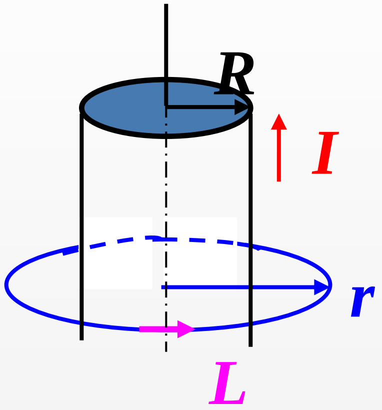
由安培环路定理

$r > R \qquad B\cdot 2\pi r = \mu_0 I \qquad B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$r < R \qquad B\cdot 2\pi r = 0 \qquad B = 0$

$\vec{B}$ 的方向与 I 成右手螺旋

例4. 无限长均匀载流圆柱体产生的场



解： 作安培环路L如图，绕向为逆时针

由对称性分析可得

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\mathrm{d}l = B2\pi r$$

由安培环路定理

$r > R \qquad B\cdot 2\pi r = \mu_0 I \qquad B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$r < R \qquad B\cdot 2\pi r = \mu_0 \dfrac{I}{\pi R^2}\cdot \pi r^2 \qquad B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$

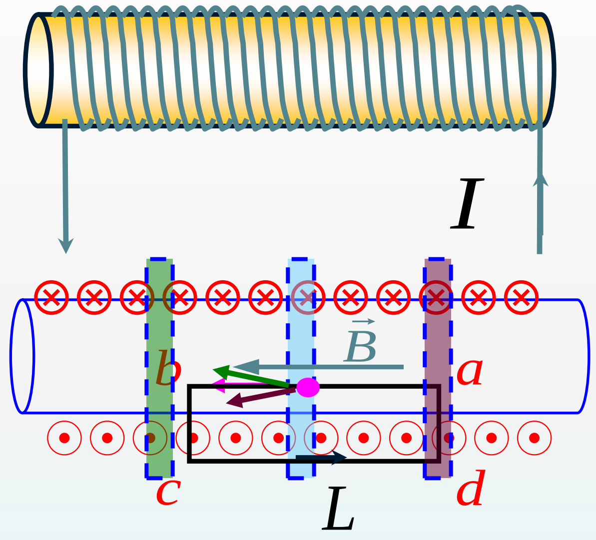
特例：$R\to 0$，成为无限长直导线

例5. 无限长均匀密绕直螺线管内部的场（n，I）

解： 作安培环路L如图，绕向为逆时针

由对称性分析

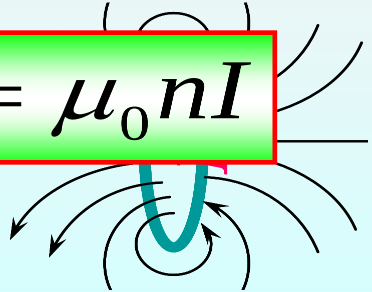
管内各点的磁感应强度方向与轴平行，



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l} + \cancel{\int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{l}} + \cancel{\int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{l}} + \cancel{\int_d^a \vec{B}\cdot d\vec{l}} = B\overline{ab}$$

由安培环路定理 $B\overline{ab} = \mu_0 n \overline{ab} I$

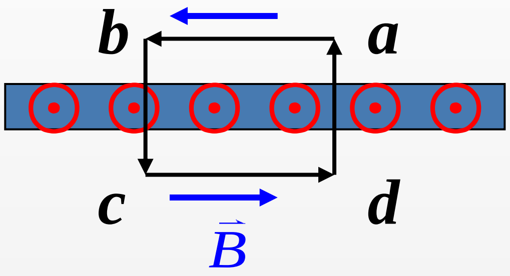
$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$



思考： 若密绕长直螺线管的截面是任意形状？

例6. 无限大均匀载流(线密度为i)平面的磁场

解： 作安培环路L如图，绕向为逆时针



由对称性分析

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l} + \cancel{\int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{l}}$$

$$+\int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{l} + \cancel{\int_d^a \vec{B}\cdot d\vec{l}} = 2B\overline{ab}$$

由安培环路定理 $2B\overline{ab} = \mu_0 i\,\overline{ab}$

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{\mu_0 i}}{2}}$$

思考：其他方法求解？