第九单元　多元函数微分法及其应用测试题详细解答

一、填空题

1、二元函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$ 的定义域是 $\underline{\{(x,y)\mid x+y>0,x-y>0\}}$

分析：要使这个二元函数有意义，只需 $x+y>0,x-y>0$。

2、二元函数 $z=\sqrt{x+\sqrt{y}}$ 的定义域是 $\underline{\{(x,y)\mid y\geq 0,x^2\geq y\}}$

分析：要使这个二元函数有意义，只需 $y\geq 0,x+\sqrt{y}\geq 0$，所以 $y\geq 0,x^2\geq y$。

3、二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}=$ $\underline{\quad 2\quad}$

分析：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=1\times\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}y=2$

4、二元函数的极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1+xy}{x^2+y^2}=\underline{1\quad}$

分析：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1+xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1+0}{0+1}=1$

5、已知 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，则 $f(tx,ty)=\underline{\dfrac{xy}{x^2+y^2}}$

分析：$f(tx,ty)=\dfrac{(tx)(ty)}{(tx)^2+(ty)^2}=\dfrac{t^2xy}{t^2x^2+t^2y^2}=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

6、已知 $f(x,y)=x^y+y^z+z^x$，则 $f(xy,x+y,x-y)=\underline{(xy)^{x+y}+(x+y)^{x-y}+(x-y)^{xy}}$

7、已知 $f(x,y)=x^y$，则 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\underline{yx^{y-1}}$

分析：对 x 求导，把 y 看成常数。$\dfrac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}$

8、已知 $f(x,y)=x^y$，则 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$

分析：把 x 看成常数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$

9、已知 $z=f(x,y)=\dfrac{y}{x}$，则 $dz=\underline{-\dfrac{y}{x^2}dx+\dfrac{1}{x}dy}$

分析：$dz=z_xdx+z_ydy=-\dfrac{y}{x^2}dx+\dfrac{1}{x}dy$

10、已知 $z=f(x,y)=\sin(xy)$，则 $dz\big|_{(\pi,1)}=\underline{-dx-\pi dy}$

分析：$$dz\big|_{(\pi,1)}=z_x\big|_{(\pi,1)}dx+z_y\big|_{(\pi,1)}dy=y\cos(xy)\big|_{(\pi,1)}dx+x\cos(xy)\big|_{(\pi,1)}dy$$
$$=-dx-\pi dy$$

11、已知 $z=f(x,y)=x^2+y^2$，则 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处当 $\Delta x=0.1,\Delta y=0.2$ 时，
$dz=\underline{0.6}$

分析：$dz=z_x\big|_{(1,1)}\Delta x+z_y\big|_{(1,1)}\Delta y=2\times 0.1+2\times 0.2=0.6$

12、设$u=xy+\dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$=$\underline{1-\dfrac{1}{x^2}}$

分析：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y-\dfrac{y}{x^2}$ $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1-\dfrac{1}{x^2}$

13、设$u=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$=$\underline{-\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}}$

分析：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}$ $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}$

14、设$z=u^2+v^2$，而$u=x+y$，$v=x-y$。则$\dfrac{\partial z}{\partial x}$=$\underline{4x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$=$\underline{4y}$

分析：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=2u\times 1+2v\times 1=2(x+y)+2(x-y)=4x$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=2u\times 1+2v\times(-1)=2(x+y)+2(x-y)(-1)=4y$

15、设$z=uv$，而$u=x+y$，$v=x-y$。则$\dfrac{\partial z}{\partial x}$=$\underline{2x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$=$\underline{2y}$

分析：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=v\times 1+u\times 1=(x-y)+(x+y)=2x$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=v\times 1+u\times(-1)=(x-y)-(x+y)=-2y$

16、设$\sin x+\sin y=xy$，则$\dfrac{dy}{dx}$=$\underline{\dfrac{\cos x-y}{x-\cos y}}$

分析：两边对x求导得：

$\cos x+y'\cos y=y+xy'$

整理得：

$y'=\dfrac{\cos x-y}{x-\cos y}$

17、设$\arctan(x+y)-y=\dfrac{1}{x+y}$，则$\dfrac{dx}{dy}$=$\underline{\dfrac{\left((x+y)^2+1\right)(x+1)^2}{2(x+y)^2+1}-1}$

分析：两边对y求导得：

$\dfrac{1}{(x+y)^2+1}\cdot(x'+1)=\dfrac{-1}{(x+y)^2}\cdot(x'+1)+1$

整理得：

$x'=\dfrac{\left((x+y)^2+1\right)(x+1)^2}{2(x+y)^2+1}-1$ **或**$x'=\dfrac{(x+y)^4-(x+1)^2-1}{2(x+y)^2+1}$

18、设$x^2+y^2+z^2-4z=0$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$=$\underline{\dfrac{(z-2)^2-x^2}{(z-2)^3}}$

分析：两边对x求导得：

$2x+2z\cdot z'-4z'=0$ $\qquad z'_x=\dfrac{x}{z-2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{x}{z-2}\right)'_x=\frac{z-2-x\cdot z'}{(z-2)^2}=\frac{(z-2)^2-x^2}{(z-2)^3}$$

19、设曲线Γ：$x=\cos t,\ y=\sin t,\ \ z=2t$，曲线在$t=\pi$处的切线为$\underline{\frac{x+1}{0}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z-2\pi}{2}}$，曲线在$t=\pi$处的法平面为$2z-4\pi-y=0$。

分析：当$t=\pi$时，$x_0=-1,y_0=0,z_0=2\pi$

而$x'\big|_{t=\pi}=-\sin t\big|_{t=\pi}=0,\quad y'\big|_{t=\pi}=\cos t\big|_{t=\pi}=-1,\quad z'\big|_{t=\pi}=2$

所以当$t=\pi$时，

切线方程为$\frac{x+1}{0}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z-2\pi}{2}$

法平面方程为：$2z-4\pi-y=0$

20、设曲面$z=xy$，则曲线在$(1,2,2)$处的切平面$\underline{2x+y-z-2=0}$,曲线在$(1,2,2)$处的法线$\underline{\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{-1}}$

分析：设$F(x,y,z)=xy-z$，则曲面任意一点的法向量为$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(y,x,-1)$

所以$\vec{n}\big|_{(1,2,2)}=(2,1,-1)$。

切平面为$\begin{aligned}&2(x-1)+(y-2)-(z-2)=0\\&2x+y-z-2=0\end{aligned}$

法线为：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{-1}$

21、函数$z=3x^2+4y^2$在点$(0,0)$处有极__小___值

分析：因为：$z=3x^2+4y^2\geq 0$，而在（0，0）点，$z=0$。

22、函数$z=-\sqrt{x^2+y^2}$在点$(0,0)$处有极__大___值

分析：因为：$z=-\sqrt{x^2+y^2}\ \leq 0$，而在（0，0）点，$z=0$。

23、$f(x,y)$在点(x,y)可微分是$f(x,y)$在该点连续的__充分___条件，$f(x,y)$在点(x,y)连续是$f(x,y)$在该点可微分的__必要___条件。

24、$z=f(x,y)$在点(x,y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$存在是$f(x,y)$在该点可微分的_必要条件。

$z=f(x,y)$在点(x,y)可微分是函数在该点的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$存在的__充分__条件。

25、$z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$存在且连续是$f(x,y)$在该点可微分的__充分___条件。

26、函数$z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域$D$内连续是这两个二阶混合偏导数在区域$D$内相等的__充分__条件。

二、选择题

1、 选（B）

解答：A、$\frac{y}{x}$，当$x=0$，y为任意值时都为间断点。B、只有$x^2+y^2=0$时为间断点。

C、$x+y=0$为间断点。D、有无穷多个间断点。

2、选（D）

解答：有界函数与无穷小的乘积为无穷小。

3、选（A）

解答：偏导数连续则存在全微分，所以偏导数只是全微分的必要条件。

4、选（A）

解答：$\left.\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right|_{(2,1)}=\left.\left(y^{x}\ln y+xy^{x-1}\right)\right|_{(2,1)}=1^{2}\ln 1+2=2$

5、选（A）

解答：$\frac{\partial f}{\partial x}>0$，把 f 看成是 x 的函数，所以 f 关于 x 为增函数。

6、选（C），　本题选项有些问题，A 也对

7、选（B）

解答：$ydx+xdy=d(xy)$；　$xdx+ydx=\frac{1}{2}d\left(x^{2}+y^{2}\right)$；　$xdx-ydx=\frac{1}{2}d\left(x^{2}-y^{2}\right)$.

8、选（A）

解答：$d(ax+by+c)=adx+bdy=a\Delta x+b\Delta y$

$\Delta f=a(x+\Delta x)+b(y+\Delta y)+c-(ax+by+c)=a\Delta x+b\Delta y$

$\Delta f=df$

9、选（A）

解答：$u=\varphi(x+y)$是关于$(x+y)$这个整体的一元函数，不可用偏导。

10、选（C）

解答：两边对 x 偏导，$z_{x}'=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$，　$\therefore z_{x}'=\frac{f_{x}'}{1-f_{z}'}$

11、选（A）

解答：设 $z-F(x,y,z)=G(x,y,z)$，分别对 x,y,z 求导，得：

$\left\{G_{x},G_{y},G_{z}\right\}=\left\{-F_{x},-F_{y},1-F_{z}\right\}$或$\left\{F_{x},F_{y},F_{z}-1\right\}$

12、选（A）

解答：$(0,0)$是极值点，是最小值点，是极小值点。但 $f_{x}'(0,0),f_{y}'(0,0)$无意义，所以不是驻点。

13、选（C）

解答：$f(x,y)$不一定可微。法向量为$(3,-1,-1)$。

三、计算解答

1、求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy\left(\sqrt{xy+1}+1\right)}{xy}=2$

2、求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos\left(x^{2}+y^{2}\right)}{\sin\left(x^{2}+y^{2}\right)}$

解：原题$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2\sin^{2}\left(\frac{x^{2}+y^{2}}{2}\right)}{x^{2}+y^{2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2\left(\frac{x^{2}+y^{2}}{2}\right)^{2}}{x^{2}+y^{2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^{2}+y^{2}}{2}=0$

3、求一阶偏导 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}2x=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}2y=\frac{y}{x^2+y^2}$$

4、求一阶偏导 $z=\tan\frac{x}{y}+\ln 2$

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sec\frac{x}{y}\right)^2\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y}\left(\sec\frac{x}{y}\right)^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sec\frac{x}{y}\right)^2\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{y^2}\left(\sec\frac{x}{y}\right)^2$$

5、求全部二阶偏导 $z=\sin^2(ax+by)$

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\sin(ax+by)\cdot\cos(ax+by)\cdot a=a\sin[2(ax+by)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2\sin(ax+by)\cdot\cos(ax+by)\cdot b=b\sin[2(ax+by)]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a\cos[2(ax+by)]\cdot 2a=2a^2\cos[2(ax+by)]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=b\cos[2(ax+by)]\cdot 2b=2b^2\cos[2(ax+by)]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2ab\cos[2(ax+by)]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2ab\cos[2(ax+by)]$$

6、$f(x,y)=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$，求 $f_x'(0,0)$

解：

$$f_x'(0,0)=\left[\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1-xy+(x+y)y}{(1-xy)^2}\right]_{(0,0)}=\left[\frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{1+y^2}{(1-xy)^2}\right]_{(0,0)}$$

$$=\left[\frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\right]_{(0,0)}=1$$

或 $\boldsymbol{f_x{}'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1}$

7.计算全微分 $z=\sec(xy)+\sqrt{x}$.

解：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sec(xy)\tan(xy)\cdot y+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\sec(xy)\tan(xy)\cdot x$$
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left[\sec(xy)\tan(xy)\cdot y+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right]dx+[\sec(xy)\tan(xy)\cdot x]dy$$

8、计算函数 $z=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$ 在点 $(1,1)$ 处的微分 dz

解：
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2}\left(1+x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right]_{(1,1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{1}{3}$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2}\left(1+x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y\right]_{(1,1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{1}{3}$$
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}dy=\frac{1}{3}dx+\frac{1}{3}dy$$

9、求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=0.2$ 时，$\Delta z,dz$

解：$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\quad =f(2+0.1,1+0.2)-f(2,1)\quad =\dfrac{4}{7}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{14}$
$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,1)}=-\frac{y}{x^2}\Big|_{(2,1)}=-\frac{1}{4}\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2,1)}=\frac{1}{x}\Big|_{(2,1)}=\frac{1}{2}$$
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,1)}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2,1)}dy=-\frac{1}{4}\times 0.1+\frac{1}{2}\times 0.2=\frac{3}{40}$$

10、$z=u^v$，而 $u=x^2+y^2$， $v=xy$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=v\cdot u^{v-1}\cdot 2x+u^v\cdot\ln u\cdot y$$
$$=2x^2y\left(x^2+y^2\right)^{xy-1}+y\left(x^2+y^2\right)^{xy}\ln\left(x^2+y^2\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=v\cdot u^{v-1}\cdot 2y+u^v\cdot\ln u\cdot x$$
$$=2x^2y\left(x^2+y^2\right)^{xy-1}+x\left(x^2+y^2\right)^{xy}\ln\left(x^2+y^2\right)$$

11、$u=f\left(x,x^2,e^{-x}\right)$，求 $\dfrac{du}{dx}$

解：$\dfrac{du}{dx}=f_1'+2xf_2'-e^{-x}f_3'$

12、$x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$，在 $x=1,y=-2,z=1$ 处的 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：两边对 x 求导：$2x+6z\cdot z_x'+y-z_x'=0$，整理得：$z_x'=\dfrac{2x+y}{1-6z}$，$z_x'\big|_{(1,-2,1)}=\dfrac{2x+y}{1-6z}=0$

两边对 y 求导：$4y+6z\cdot z'_y+x-z'_y=0$，整理得：$\boldsymbol{z'_y=\dfrac{4y+x}{1-6z},\ z'_y\,|_{(1,-2,1)}=\dfrac{7}{5}}$

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{(1-6z)-(2x+y)(-6z'_y)}{(1-6z)^2}=-\frac{1}{5}}$$

13、求由方程组确定的隐函数的偏导$\begin{cases}x=u+v\\ y=u^2+v^2\end{cases}$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$

解：分别对 x 求导

$$\begin{cases}1=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ 0=2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\qquad 则\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v}{v-u}$$

分别对 y 求导

$$\begin{cases}0=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ 1=2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases}\qquad 则\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2(u-v)}$$

14、求曲线$\Gamma:\begin{cases}x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$在点$M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$处的切线和法平面。

解：分别对 x 求导

$$\begin{cases}1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0\\ 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{M_0}=\left.\frac{x-z}{z-y}\right|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1$$

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{M_0}=\left.\frac{x-y}{y-z}\right|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)}=\frac{\sqrt{2}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=-2$$

切线方程：$\dfrac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\dfrac{y+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\dfrac{z-0}{-2}$

法平面方程：$\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(y+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+(-2)(z-0)=0$

$x+y-2z=0$

15、求曲线$x=t,y=t^2,z=t^3$上的点，使该点的切线平行于平面：$x+2y+z=4$

解：$\begin{cases}x'=1\\ y'=2t_0\\ z'=3{t_0}^2\end{cases}$ 设在 t_0 点处切线平行于平面，则曲线在该点的切向量为：$\boldsymbol{\vec{s}=(1,2t_0,3t_0^2)}$

平面 $x+2y+z=4$ 的法向量为 $(1,2,1)$，则两向量的数量积应为 0。

即：$1\times1+2t_0\times2+3t_0{}^2\times1=0$，$3t_0{}^2+4t_0+1=0$.

解得：$t_0=-1$ 或 $t_0=-\dfrac{1}{3}$

则该点为：$\mathbf{(1-,1,-1)}$ **或** $\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}},-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{27}}\right)$

16. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点$(-1, -2, 3)$处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

解： $x\mathrm{O}y$ 面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0, 0, 1)$.

令 $F(x, y, z)=3x^2+y^2+z^2-16$, 则点$(-1, -2, 3)$处的切平面法向量为

$\boldsymbol{n}_2=(F_x, F_y, F_z)|_{(-1, -2, 3)}=(6x, 2y, 2z)|_{(-1, -2, 3)}=(-6, -4, 6)$.

点$(-1, -2, 3)$处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1|\cdot|\mathbf{n}_2|}=\frac{6}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{6^2+4^2+6^2}}=\frac{3}{\sqrt{22}}.$$