高等代数与空间解析几何

李文学

数学教研室

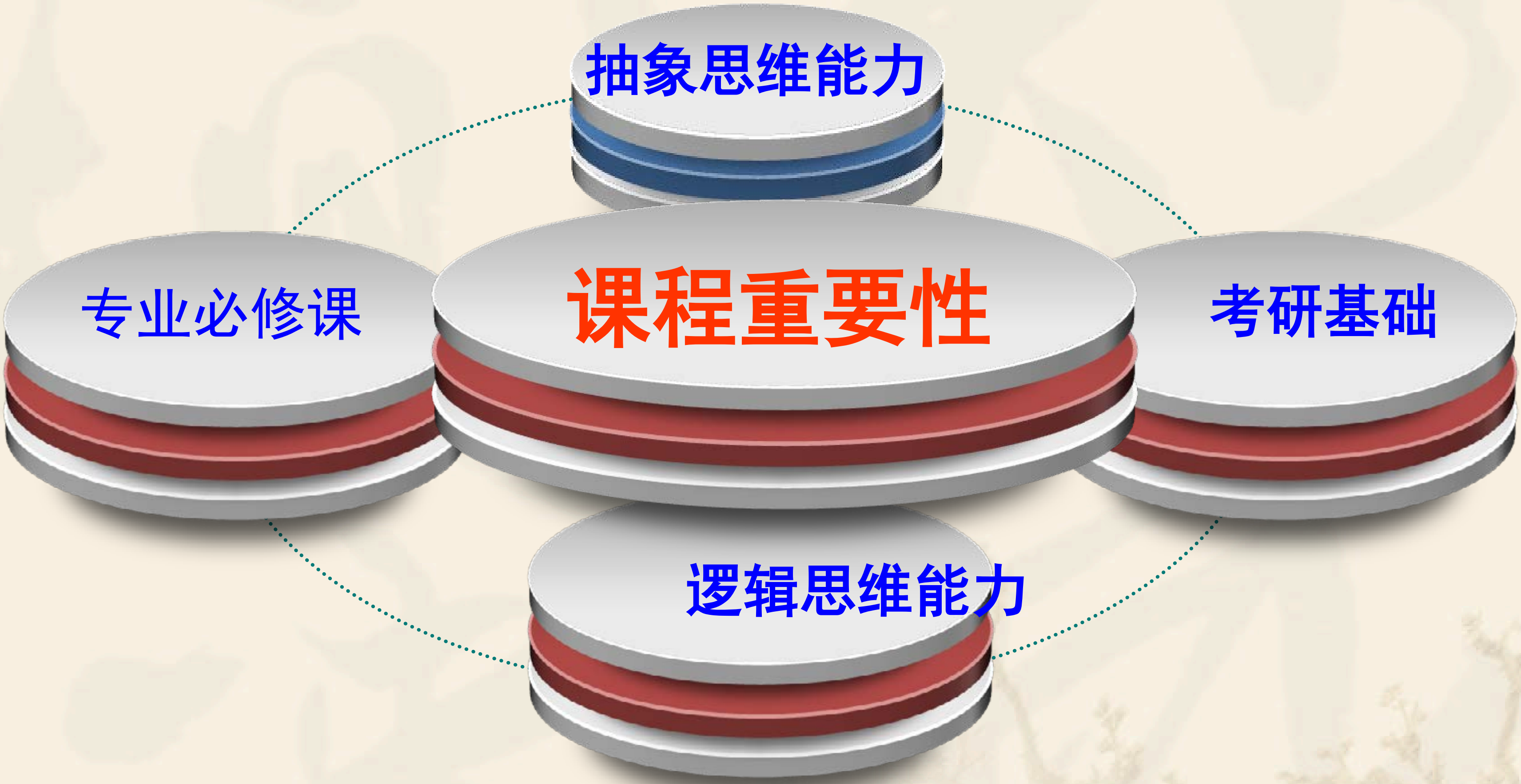
847568350

高等代数与空间解析几何

李文学

数学教研室

847568350


抽象思维能力
专业必修课
课程重要性
考研基础
逻辑思维能力

课程内容

- 上学期（64学时，4学分）
  - 多项式
  - 空间解析几何
  - 矩阵代数与行列式
- 下学期（80学时，5学分）
  - 矩阵的秩线性方程组
  - 线性空间与线性变换
  - 内积空间
  - 二次型

考核方法

- 平时成绩 30%
  - 出勤
  - 作业
  - 平时表现
- 期末成绩 70%
  - 填空
  - 计算
  - 证明

如何学好高等代数与解析几何

1. 尽快适应大学课程学习的特点与环境
2. 理解概念用概念思考问题
3. 勤学善思多练
4. 掌握基本的计算方法
5. 了解课程的相关背景与应用，增加学习兴趣

数学与金融

柯林斯

花旗银行70%的业务依赖于数学，没有数学我们不可能生存

数学家

纳什，恩格尔，格兰杰等数学家均获诺贝尔经济学奖

王铎

现代金融离不开数学，不掌握金融数学，就可能在国际金融竞争中蒙受损失

人才状况

能对金融风险做定量分析的既懂数学又懂金融的人才非常稀缺

数学与信息科学

专业历史

原名“计算数学”，1998年教育部将其更名为信息与计算科学专业

程序设计

软件编程的数学思维决定了一个人的编程水平（数学思维）（数学方法）（数学知识）

专业要求

有良好的数学基础，能熟练的使用计算机，具备设计开发计算机软件的能力

就业情况

攻读计算数学专业硕士学位，可以从事高校教学和科研工作，更多的从事IT行业

Youth is such a wonderful thing; it is a pity that it is wasted on young people.

劝君莫惜金缕衣，
劝君惜取少年时。
有花堪折直须折，
莫待无花空折枝。

第一章　一元多项式

第一讲　数域与一元多项式的定义

一、数域的定义与性质

二、一元多项式的定义

三、多项式环

一、数域

Def. 设P是由一些复数组成的集合，其中包括0与1，如果P中任意两个数的和、差、积、商（除数不为0）仍是P中的数，则称P为一个数域.

例： 复数集C、实数集R、有理数集Q都是数域.

注： 自然数集N，整数集Z都不是数域.

Remark:

1. 若数集P中任意两个数作某一运算的结果仍在P中，则说数集P对这个运算是封闭的.

2. 数域的等价定义：如果一个包含0，1在内的数集P对于加法，减法，乘法与除法（除数不为0）是封闭的，则称集P为一个数域.

例1. 证明：数集 $Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$ 是一个数域.

证：$\because\quad 0=0+0\sqrt{2},\quad 1=1+0\sqrt{2},\quad \therefore\quad 0,1\in Q(\sqrt{2})$

又对 $\forall x,y\in Q(\sqrt{2})$，设 $x=a+b\sqrt{2},\ y=c+d\sqrt{2},$ $a,b,c,d\in Q$，则有

$$x\pm y=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2}),$$

$$x\cdot y=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2})$$

设 $a+b\sqrt{2}\neq 0$，于是 $a-b\sqrt{2}$ 也不为0.

（否则，若 $a-b\sqrt{2}=0$，则 $a=b\sqrt{2}$，

于是有 $\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}\in Q$，

或 $a=0,b=0\Rightarrow a+b\sqrt{2}=0.$ 矛盾）

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}$$

$$=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in Q.$$

$\therefore$ $Q(\sqrt{2})$为数域.

类似可证 $Q(i)=\left\{a+bi \,\middle|\, a,b\in Q, i=\sqrt{-1}\right\}$ 是数域.

例2. 设P是至少含两个数的数集，证明：若P中任意两个数的差与商（除数≠0）仍属于P，则P为一一个数域.

证：由题设任取 $a,b\in P$，有

$$0=a-a\in P,\quad 1=\frac{b}{b}\in P\,(b\neq 0),\quad a-b\in P,$$

$$\frac{a}{b}\in P\ (b\neq 0),\quad a+b=a-(0-b)\in P,$$

$b\neq 0$ 时，$ab=\frac{1}{\frac{1}{b}}\in P$， $b=0$ 时，$ab=0\in P$.

所以，P是一个数域.

2、数域的性质

定理： 任意数域P都包括有理数域Q.

即，**有理数域为最小数域.**

证明： 设P为任意一个数域．由定义可知，

有 $\mathbf{0} \in \boldsymbol{P}$，　$\mathbf{1} \in \boldsymbol{P}$.

$\forall \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^{+}$，$\boldsymbol{m} = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1} \in \boldsymbol{P}$

进而有

$$\forall m,n\in Z^{+},\ \frac{m}{n}\in P,$$

$$-\frac{m}{n}=0-\frac{m}{n}\in P.$$

而任意一个有理数可表成两个整数的商，

$$\therefore\quad Q\subseteq P.$$

Remark

数环：设P为非空数集，若

$$\forall a,b \in P,\ a \pm b \in P,\ a \cdot b \in P$$

则称P为一个数环.

例如，整数集Z 就作成一个数环.

思考

1．若 P_1, P_2 为数域，证明：$P_1 \cap P_2$ 也为数域.

2．证明：集合 $S = \left\{ \frac{m}{2^n} \middle| m, n \in Z \right\}$ 是一个数环.

S是数域吗？

二、一元多项式的概念

1．定义: 设 x是一个变量（或不定元），n 是一个非负整数，形式表达式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

其中 $a_0, a_1, \cdots a_n \in P$，称为数域P上的**一元多项式**.

常用 $f(x), g(x), h(x)$ 等表示.

注： 多项式 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0$ 中，

① $a_i x^i$ 称为i次项，a_i 称为i次项系数.

② 若 $a_n \neq 0$, 则称 $a_n x^n$ 为 $f(x)$的首项，a_n为首项系数，n 称为多项式 $f(x)$ 的次数，记作$\partial(f(x))=n$.

③ 若 $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ ，即 $f(x)=0$, 则称之为零多项式．零多项式的次数定义为$-\infty$.

区别：
$$\begin{cases} \text{零多项式} \quad f(x)=0 \\ \text{零次多项式} \quad f(x)=a, a\neq 0, \partial(f(x))=0. \end{cases}$$

2．多项式的相等

若多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的同次项系数全相等，则称 $f(x)$与 $g(x)$ 相等，记作 $f(x)=g(x)$.

即，$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0,$$

$$g(x)=b_m x^m+b_{n-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x+b_0,$$

$f(x)=g(x) \quad \Leftrightarrow m=n,\ a_i=b_i,\quad i=0,1,2,\cdots,n.$

3．多项式的运算：加法（减法）、乘法

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

$$g(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j,$$

加法： 若$n \geq m$，在 $g(x)$中令

$$b_n = b_{n-1} = \cdots = b_{m+1} = 0$$

则 $$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i .$$

减法： $$f(x)-g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i - b_i)x^i$$

乘法：

$$f(x)g(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+$$

$$\cdots+(a_1b_0+a_ob_1)x+a_0b_0$$

$$=\sum_{s=1}^{n+m}\sum_{i+j=s}(a_ib_j)x^s$$

注： $f(x)g(x)$ 中s 次项的系数为

$$a_sb_o+a_{s-1}b_1+\cdots+a_1b_{s-1}+a_0b_s=\sum_{i+j=s}a_ib_j\,.$$

4．多项式运算性质

1) $f(x)g(x)$ 为数域 P上任意两个多项式，则

$f(x)\pm g(x),\ f(x)g(x)$ 仍为数域 P上的多项式.

2) $\forall f(x),g(x)\in P[x]$

① $f(x)\pm g(x)\neq 0, \partial(f\pm g)\leq \max(\partial(f),\partial(g))$

② 若 $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$，则 $f(x)g(x)\neq 0$，且

$$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$$

$f(x)g(x)$ 的首项系数

$= f(x)$ 的首项系数 $\times$ $g(x)$ 的首项系数.

3) 运算律

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$$

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$$

$$f(x)g(x)=g(x)f(x)$$

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$$

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$$

$$f(x)g(x)=f(x)h(x),\ f(x)\neq 0 \Rightarrow g(x)=h(x)$$

例1 设 $f(x), g(x), h(x) \in R(x)$

(1) 证明: 若 $f^2(x) = xg^2(x) + xh^2(x)$, 则

$$f(x) = g(x) = h(x) = 0$$

(2) 在复数域上(1)是否成立?

(1) 证： 若 $f(x) \neq 0$, 则

$$x(g^2(x)+h^2(x)) = f^2(x) \neq 0,$$

从而 $g^2(x)+h^2(x) \neq 0$. 于是

$\partial(xg^2(x)+xh^2(x)) = \partial(x(g^2(x)+h^2(x)))$为奇数.

但$\partial(f^2(x))$为偶数. $\therefore x(g^2(x)+h^2(x)) \neq f^2(x)$,

这与已知矛盾. 故 $f(x)=0$,

从而 $g^2(x)+h^2(x)=0$.

又 $f(x),g(x)$ 均为实系数多项式，

从而必有 $g(x)=h(x)=0.$

$$\therefore\ f(x)=g(x)=h(x)=0.$$

(2) 在 C上不成立．如取

$$f(x)=0,\ g(x)=ix,\ h(x)=x$$

三、多项式环

定义：所有数域 P中的一元多项式的全体称为数域

P上的**一元多项式环**，记作 $P[x]$.

P称为 $P[x]$ 的**系数域**.