第十一讲 线性子空间

一、线性子空间

二、生成子空间

HOME

ENTER

一、线性子空间

1、线性子空间的定义

设V是数域P上的线性空间，集合 $W \subseteq V (W \neq \varnothing)$

若W对于V中的两种运算也构成数域P上的线性空间,

则称W为V的一个**线性子空间**，简称为**子空间**.

注： ① 线性子空间也是数域P上一线性空间，它也有基与维数的概念.

② 任一线性子空间的维数不能超过整个空间的维数.

2、线性子空间的判定

定理：设V为数域P上的线性空间，集合 $W \subseteq V$ $(W \neq \varnothing)$，若W对于V中两种运算封闭，即

$\forall \alpha, \beta \in W$，有 $\alpha + \beta \in W$;

$\forall \alpha \in W, \forall k \in P$，有 $k\alpha \in W$

则W是V的一个子空间.

证明：要证明W也为数域P上的线性空间，即证W中的向量满足线性空间定义中的八条规则.

由于$W\subseteq V$，规则1）、2）、5）、6）、7）、8）是显然成立的．下证3）、4）成立.

$\because W\neq\varnothing$，$\therefore \exists\alpha\in W$． 且对$\forall\alpha\in W$, 由数乘运算封闭，有$-\alpha=(-1)\alpha\in W$，即W中元素的负元素就是它在V中的负元素，4）成立.

由加法封闭，有 $\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})\in \boldsymbol{W}$, 即W中的零元就是V中的零元， 3）成立.

推论： V为数域P上的线性空间, $W\subseteq V\,(W\neq\varnothing)$, 则W是V的子空间$\Leftrightarrow \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in \boldsymbol{W},\forall a,b\in P, a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta}\in \boldsymbol{W}$.

例1 设V为数域P上的线性空间，只含零向量的子集合 $W=\{0\}$ 是V的一个线性子空间，称之为V的**零子空间**．线性空间V本身也是V的一个子空间.

这两个子空间有时称为**平凡子空间**，而其它的子空间称为**非平凡子空间**.

例2 $P[x]_n$是$P[x]$的的线性子空间.

例3 n元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

的全部解向量所成集合W对于通常的向量加法和数量乘法构成的线性空间是n维向量空间P^n的一个子空间，称W为方程组$(*)$的**解空间**.

注① $(*)$的解空间W的维数$=n-$秩(A)，$A=(a_{ij})_{s\times n}$ ；

② $(*)$的一个基础解系就是解空间W的一组基.

例4 设V为数域P上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$

令$W=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r \mid k_i\in P, i=1,2,\cdots,r\}$

则W关于V的运算作成V的一个子空间.

即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的一切线性组合所成集合.

二、一类重要的子空间
——生成子空间

定义：V为数域P上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$,

则子空间

$$W=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r\,|\,k_i\in P,i=1,2,\cdots,r\}$$

称为V的由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **生成的子空间**，

记作 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$.

称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 的一组 **生成元**.

例6 在P^n 中，

$$\varepsilon_i = (0,\cdots,0,\underset{i}{1},0\cdots,0),\quad i = 1,2,\cdots,n$$

为P^n的一组基，$\forall \alpha = (a_1,a_2,\cdots,a_n) \in P^n$

有 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$

故有 $P^n = L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$

即P^n 由它的一组基生成.

> 事实上，任一有限维线性空间都可由它的一组基生成.

类似地，还有

$$P[x]_n = L(1,x,x^2,\cdots,x^{n-1})$$
$$= \left\{ a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \,\middle|\, a_0,a_1,\cdots,a_{n-1} \in P \right\}$$

有关结论

1、设W为n维线性空间V的任一子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是W的一组基，则有 $W = L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$

2、（定理3）

1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$；$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 为线性空间V中的两组向量，则 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价.

2）生成子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 的维数

＝向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩.

证：1）若 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

则对 $\forall\alpha_i, i=1,2,\cdots,r$，有 $\alpha_i\in L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，

从而 α_i 可被 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出；

同理每一个 β_i 也可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出.

所以，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价.

反之，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价.

$\forall\alpha\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$，$\alpha$ 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，

从而可被 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出，即 $\alpha\in L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，

$\therefore\ L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\subseteq L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

同理可得，$L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\subseteq L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$

故，$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

2）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩＝t，不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ $(t\le r)$ 为它的一个极大无关组.

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 等价， 所以, $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t)$. 由 § 3定理1，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 就是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 的一组基，所以，$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 的维数＝t.

推论： 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是线性空间V中不全为零的一组向量，$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}(r\le s)$ 是它的一个极大无关组，则

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r})$$

4、（定理4）

扩基定理

设W为 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间，

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为W的一组基，则这组向量必定可扩充

为V的一组基．即在V中必定可找到 $n-m$ 个向量

$\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n$，使 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为V的一组基．

证明： 对 $n-m$ 作数学归纳法．

当 $n-m=0$ 时，即 $n=m$，

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 就是V的一组基．　定理成立．

假设当 $n-m=k$ 时结论成立．

下面我们考虑 $n-m=k+1$ 的情形.

既然 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 还不是V的一组基，它又是线性无关的，那么在V中必定有一个向量 α_{m+1} 不能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，把它添加进去，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 必定是线性无关的.

由定理3，子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m+1})$ 是 $m+1$ 维的.

因 $n-(m+1)=(n-m)-1=(k+1)-1=k$,

由归纳假设，$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m+1})$ 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 可以扩充为整个空间V的一组基．由归纳原理得证.

例7 求$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$的维数与一组基，并把它扩充为$P^4$的一组基，其中

$$\alpha_1=(1,-1,2,4),\quad \alpha_2=(0,3,1,2),\quad \alpha_3=(3,0,7,14),$$

$$\alpha_4=(1,-1,2,0),\quad \alpha_5=(2,1,5,6)$$

解： 对以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列向量的矩阵A作初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-4&-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

由B知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组.

故，维 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 就是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 的一组基.

又 Q $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0,$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$可逆.

令 $\gamma = (0,0,1,0)$

则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \gamma$ 线性无关，从而为$\mathbf{P}^4$的一组基.

例8 设 $V = R^n$,判断下面子集是否构成子空间

$$(1)W_1 = \left\{ (a_1, a_2, \cdots, a_n) \middle| \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \right\}$$

$$(2)W_2 = \left\{ (a_1, a_2, \cdots, a_n) \middle| a_i \geq 0 \right\}$$

$$(3)W_3 = \left\{ (a_1, 0, \cdots, 0, a_n) \middle| a_1, a_n \in R \right\}$$

作业

1.设$A\in P^{n\times n}$:

(1)证明：全体与A可交换的矩阵组成$P^{n\times n}$的一子空间，记作$C(A)$;

(2)当$A=E$时,求$C(A)$.

2.设$\alpha_1=(2,1,3,1),\alpha_2=(1,2,0,1),\alpha_3=(-1,1,-3,0),\alpha_4=(1,1,1,1)$,

求$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的维数和一组基.