江 西 理 工 大 学 考 试 卷 A

试卷编号：

2009—2010 学年第 2 学期	考试性质（正考、补考或其它）：[正考]
课程名称： 高等数学（二）	考试方式(开卷、闭卷)：[闭卷]
考试时间：2010 年 7 月 日	试卷类别(A、B、C)：[**A**] 共 三 大题

温 馨 提 示

请考生自觉遵守考试纪律，争做文明诚信的大学生。如有违犯考试纪律，将严格按照《江西理工大学学生违纪处分暂行规定》处理。

班级________________学号 ________________姓名______参考答案________

题号	一	二	三	总　　分
得分				

一、选择题（请将正确答案编码填入下表中，每小题 3 分，共 24 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	A	A	D	C	C	B

二、填空题（请将正确答案填写在以下相应的横线上，每空 3 分，共 24 分）

1．$y = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3e^{2x}$　　2．$\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{3}$　　3. $dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x \cdot dy$

4．$(-3, 3)$　　5．$\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{-x} f(x,y)dy$　　6．0

7．4π　　8. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\ln 3)^n}{n!} x^n$， $x \in R$

三、计算题（6 小题，共 52 分）

1．设 $u = f(x, xy)$, f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.（7 分）

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + y f_2'$， 3 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f_1' + y f_2')$$ 5 分

$$= \frac{\partial f_1'}{\partial y} + \frac{\partial (y f_2')}{\partial y} = x f_{12}'' + f_2' + yx f_{22}''.$$ 7 分

2．求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面及法线方程.（7 分）

解 令 $F(x,y,z) = e^z - z + xy - 3$，

则 $F_x' = y$， $F_y' = x$， $F_z' = e^z - 1$，

曲面在点 (x,y,z) 的切平面的法向量为 $\vec{n} = (y, x, e^z - 1)$， 3 分

点 $(2,1,0)$ 的切平面的法向量为 $\vec{n} = (1,\ 2,\ 0)$，

故所求的切平面方程为 $(x-2) + 2(y-1) = 0$，

整理得 $x + 2y - 4 = 0$； 5 分

所求法线方程为 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-0}{0}$. 7 分

3．设 Ω 是曲面 Σ_1： $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 Σ_2： $z = 2 - x^2 - y^2$ 所围成的立体，求 Ω 的体积 V 与表面积 S.（10 分）

解 $V = \iiint\limits_{\Omega} dV$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^{2-r^2} dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 r(2 - r^2 - r) dr = \frac{5}{6}\pi;$$ 5 分

$S=S_1+S_2=\iint\limits_{\Sigma_1}dS+\iint\limits_{\Sigma_2}dS$，其中 D_{xy} 为 $x^2+y^2\le 1$，

$$\iint\limits_{\Sigma_1}dS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}\,d\sigma=\sqrt{2}\pi\text{，}\qquad 7\text{ 分}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}dS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\,rdr=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)\text{，}\qquad 9\text{ 分}$$

因此，$S=S_1+S_2=\sqrt{2}\pi+\dfrac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$.　　10 分

4. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(z+xy^2)dydz+(yz^2-xz)dzdx+(x^2z+x^3)dxdy$ 其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=4\ (z\le 0)$，取下侧. (10 分)

解　补充曲面 Σ_1： $z=0(x^2+y^2\le 4)$，并取上侧，则由高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(z+xy^2)dydz+(yz^2-xz)dzdx+(x^2z+x^3)dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2+x^2)dV$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^2 r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=\frac{64\pi}{5}\text{，}\qquad 5\text{ 分}$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1}(z+xy^2)dydz+(yz^2-xz)dzdx+(x^2z+x^3)dxdy$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}x^3dxdy=0.\qquad 8\text{ 分}$$

所以　原式 $=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(z+xy^2)dydz+(yz^2-xz)dzdx+(x^2z+x^3)dxdy$

$$-\iint\limits_{\Sigma_1}(z+xy^2)dydz+(yz^2-xz)dzdx+(x^2z+x^3)dxdy$$

$$=\frac{64\pi}{5}.\qquad 10\text{ 分}$$

5．计算 $\int_L (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1-2y\sin x + 3x^2y^2)dy$，其中 L 为抛物线 $2x = \pi y^2$ 从点 $O(0,\ 0)$ 到点 $A\ (\ \dfrac{\pi}{2},\ 1\ )$ 的一段弧．(10 分)

解　补充有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 、$\overrightarrow{BO}$，其中点 $B(\dfrac{\pi}{2},\ 0)$，则由格林公式

$$\oint_{L+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}} (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1-2y\sin x + 3x^2y^2)dy = \iint_{D_{xy}} 0dxdy = 0, \qquad 5\text{ 分}$$

由于 $\oint_{\overrightarrow{AB}} (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1-2y\sin x + 3x^2y^2)dy$

$$= \int_1^0 (1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2)dy = -\frac{1}{4}\pi^2, \qquad 7\text{ 分}$$

$$\oint_{\overrightarrow{BO}} (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1-2y\sin x + 3x^2y^2)dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 0dx = 0, \qquad 9\text{ 分}$$

所以原式$= \oint_{L+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}} (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1-2y\sin x + 3x^2y^2)dy$

$$- \oint_{\overrightarrow{AB}} (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1-2y\sin x + 3x^2y^2)dy$$

$$- \oint_{\overrightarrow{BO}} (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1-2y\sin x + 3x^2y^2)dy$$

$$= \frac{1}{4}\pi^2. \qquad 10\text{ 分}$$

6．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛域与和函数.（8 分）.

解　因为 $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{n}\right| = 1$，所以 $R = 1$，

且当 $x = \pm 1$ 时，所给的幂级数发散，故所求的收敛域为 $(-1,\ 1)$．　　4 分

和函数 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(x-1)^2}$．　　8 分