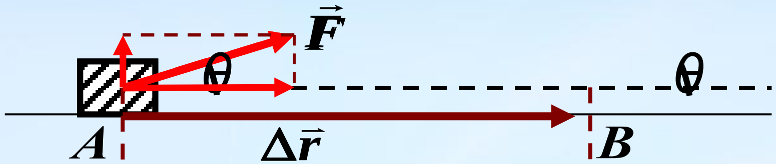
《大学物理》

第四章 能量守恒

功、保守力的功与动能定理

一、功

1 恒力的功



$$W = F\cos\theta\,|\Delta\vec{r}\,| = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$ （标量积）

说明

1）功是标量，没有方向，只有大小，但有正负

θ＜π/2，功W为正值，即力对物体做正功；

θ＝π/2，功W=0，力对物体不做功；

θ＞π/2，功W为负值，即物体克服该力做功。

2）**单位：**焦耳(J)　1J=1N.m

一、功

2 变力的功

思路： 先化整为零（微元分割）→化曲为直、化变为恒

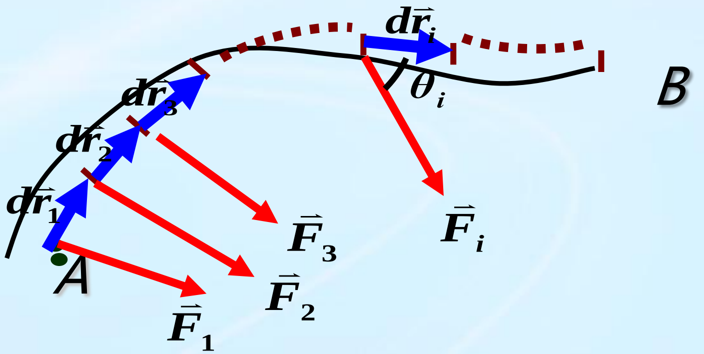
后求和（积分）

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$W_{AB} = \sum dW_i$$

$$= \int_A^B dW$$

$$= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



一、功

说 明

$$W_{AB}=\int_A^B dW=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

（1）功的意义：力作用的空间累积效应，标量。

各力的总功 = 各力作功的代数和！

$$W=\sum W_i=\sum\left(\int \vec{F}_i\cdot d\vec{r}\right)$$

但各力的合（总）功不一定等于各力的合力的功！

一、功

$$W_{AB}=\int_A^B dW=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

（2） 功的计算： 功是过程量。一般情况下，依赖于力随路径变化的细节及积分进行的方向。

- **直角坐标中：**

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$$

$$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$$

$$dW=F_x dx+F_y dy+F_z dz$$

$$\boxed{W_{AB}=\int_{x_A}^{x_B}F_x dx+\int_{y_A}^{y_B}F_y dy+\int_{z_A}^{z_B}F_z dz}$$

例1：一个质点沿如图所示的路径运行，求力

$$\vec{F}=(4-2y)\vec{i} \qquad (SI)$$

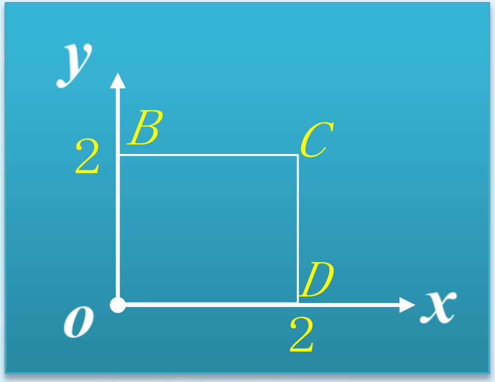
对该质点所做的功，（1）沿ODC；（2）沿OBC。

解： $F_x=(4-2y);\quad F_y=0$

（1） *OD*段：$y=0$，$dy=0$，
*DC*段：$x=2$，$F_y=0$

$$W_{ODC}=\int_{OD}F_x\,dx+\int_{DC}F_y\cdot dy$$

$$=\int_0^2(4-2\times 0)dx+0=8J$$



一、功

例1：一个质点沿如图所示的路径运行，求力

$$\vec{F} = (4-2y)\vec{i} \qquad (SI)$$

对该质点所做的功，（1）沿ODC；（2）沿OBC。

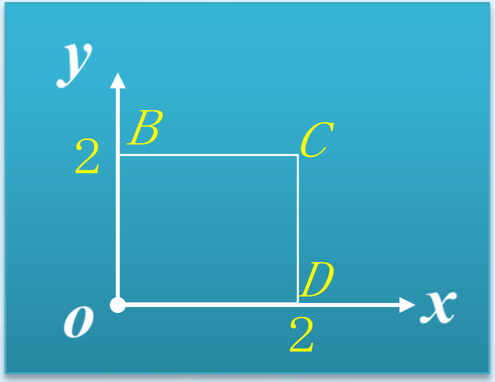
解： $F_x = (4-2y)$; $F_y = 0$

（2）*OB*段：*x* = 0，*dx* = 0，

***BC*段：*y* = 2，**

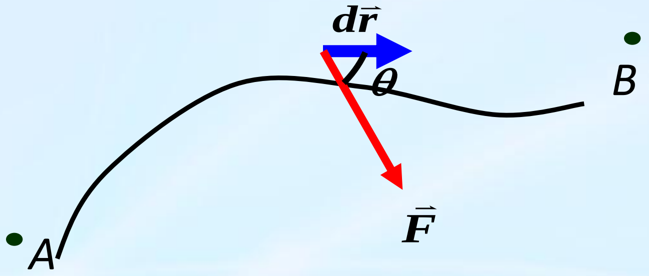
$$W_{OBC} = \int_{OB} F_y dy + \int_{BC} F_x \cdot dx$$

$$= 0 + \int_0^2 (4 - 2\times 2)dx = 0J$$



一、功

- **平面自然坐标中：**



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\cos\theta\left|d\vec{r}\right| = F_\tau ds$$

$$W_{AB} = \int_A^B F_\tau ds$$

一、功

- **小结——变力的功的计算思路：**

第一步： 分析质点受力情况，
确定力随位置变化的关系；

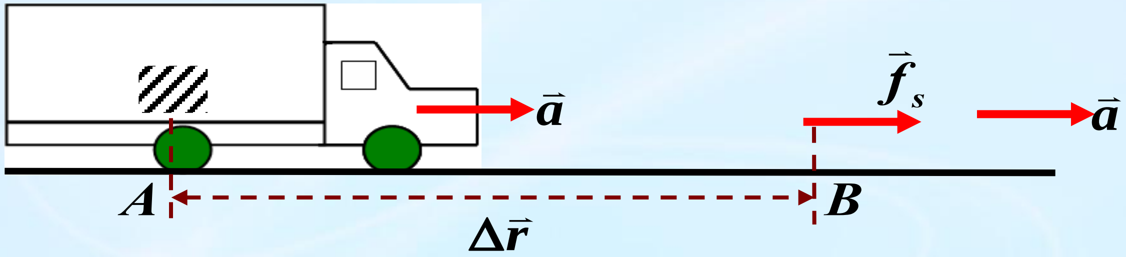
第二步： 写出元功的表达式，选定积分变量；

第三步： 定积分限进行积分，求出总功。

一、功

$$W_{AB}=\int_A^B dW=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

(3） 做功与参照系有关。



地面参照系： $W_{AB}=f_s\left|\Delta\vec{r}\right|$

车厢参照系： $W_{AB}=0\ (J)$

一、功

功率： 单位时间内完成的功。

——表征做功的快慢。

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$\because dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_\tau ds$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{dW}{dt} = F_\tau \cdot \frac{ds}{dt} = F_\tau \upsilon}$$

功率的单位：（瓦特） $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1}$

二、功率

问题： 做功和物体状态变化有什么关系?

$$\because dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_\tau ds$$

其中：

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{d\upsilon}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = m\frac{d\upsilon}{dt}ds = m\frac{ds}{dt}d\upsilon = m\upsilon d\upsilon}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{AB} = \int_{\upsilon_A}^{\upsilon_B} m\upsilon d\upsilon = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_A^2}$$

动能 $\boxed{E_K = \frac{1}{2}m\upsilon^2}$ ——运动着物体所具有的能量。

三、质点的动能定理

问题： 做功和物体状态变化有什么关系?

$$\because dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_\tau ds$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} P\mathrm{d}t = \int_{t_A}^{t_B} F_\tau \upsilon dt}$$

其中： $F_\tau = ma_\tau = m\dfrac{d\upsilon}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{W_{AB} = \int_{\upsilon_A}^{\upsilon_B} m\upsilon d\upsilon = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_A^2}$$

动能 $\boxed{E_K = \frac{1}{2}m\upsilon^2}$ ——运动着物体所具有的能量。

三、质点的动能定理

$$W_{AB} = E_{kB} - E_{kA} = \frac{1}{2} m \upsilon_B^2 - \frac{1}{2} m \upsilon_A^2$$

合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。

说 明

1、意义： 质点的动能的变化取决于合外力对质点所作的功。合外力作正功，质点的动能增加；反之，质点动能减少。

2、动能与功的区别：

（1）动能是质点因运动而具有的做功本领，而功是能量转换的一种量度！

（2）E_k是状态量，W是过程量。

3、由质点的动能定理：

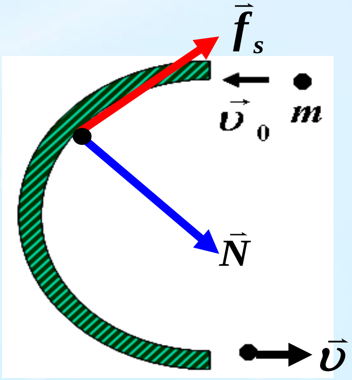
$$\boxed{W = \Delta E_k}$$

过程量 ⟺ **状态量的增量**

可简化某些力学问题（如：变力功的计算）

三、质点的动能定理

例2、如图所示，在光滑的水平桌面上平放一个半圆形屏障。质量为m的滑块以速度υ_0沿切线方向进入屏障内，滑块与屏障间的摩擦系数为μ，求当滑块从屏障的另一端滑出时，摩擦力所作的功。



方法：利用质点的动能定理求解。

先由牛顿运动定律求末速率！

注意求解过程中的运算技巧！

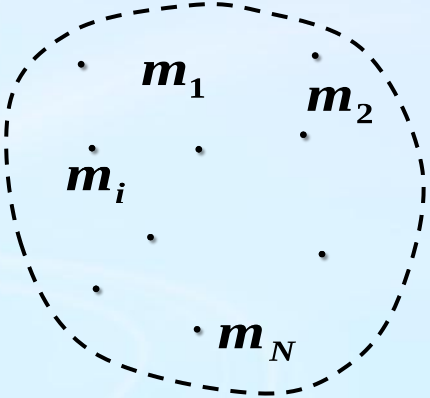
三、质点的动能定理

4、功与动能的数值均与参考系有关，但动能定理所揭示的关系适用于所有惯性系。

四、质点系的动能定理

设有一个由N个质点组成的质点系。

考察一有限过程： $t_1 \rightarrow t_2$



由质点动能定理，有

$$\boxed{W_i} = \boxed{E_{k2i}} - \boxed{E_{k1i}}$$

第i个质点所受到的所有力在此过程中的总功

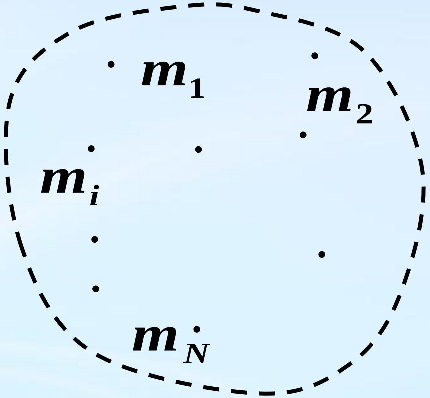
该质点在t_2时刻的动

该质点在t_1时刻的动

四、质点系的动能定理

设有一个由*N*个质点组成的质点系。

考察一有限过程： $t_1 \rightarrow t_2$



由质点动能定理，有

$$W_i = E_{k2i} - E_{k1i}$$

$$W_{i外} + W_{i内} = E_{k2i} - E_{k1i}$$

作用到第*i*个质点上的所有内力的功

作用到第*i*个质点上的所有外力的功

四、质点系的动能定理

对所有质点求和：

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} W_{i外}} + \boxed{\sum_{i=1}^{N} W_{i内}} = \boxed{\sum_{i=1}^{N} E_{k2i}} - \boxed{\sum_{i=1}^{N} E_{k1i}}$$

质点系在某过程中所受到的所有外力的总功	质点系中的所有内力在同过程中所做的总功	所有质点在同过程中的末动能之和	所有质点在同过程中的初动能之和

$$W_{外} + W_{内} = E_{k2} - E_{k1}$$

四、质点系的动能定理

$$W_{外}+W_{内}=E_{k2}-E_{k1}$$

质点系总动能的增量等于质点系所受的所有外力与内力做功之和。——质点系的动能定理

说 明

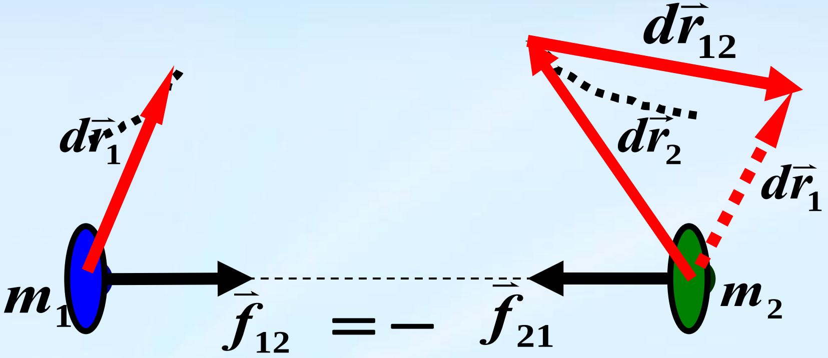
(1) 尽管系统内力成对出现，但内力功可以不是零；

内力能改变系统的总动能

内力不改变系统的总动量

四、质点系的动能定理

讨论：一对内力的功



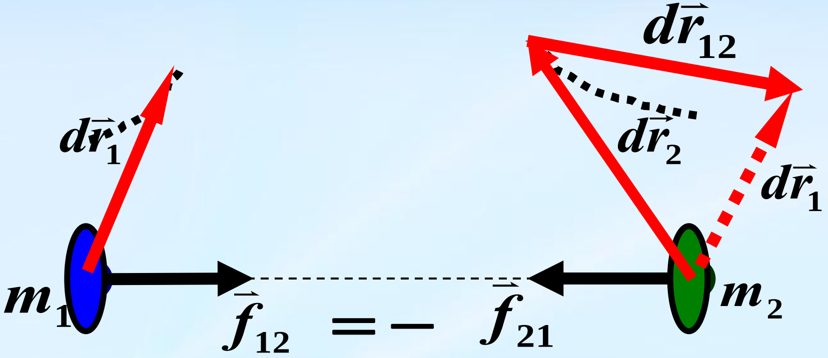
$$dW_1 = \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_1 \qquad dW_2 = \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_2$$

$$dW = \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_2$$

$$= \vec{f}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} = \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_{21}$$

四、质点系的动能定理

讨论：一对内力的功



$$dW_{12} = \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} = \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_{21}$$

——与参考系无关！

- 若将参考系固定在一个质点上，则一对内力做功之和 等于单一力所做的功。

四、质点系的动能定理

$$W_{外} + W_{内} = E_{k2} - E_{k1}$$

质点系总动能的增量等于质点系所受的所有外力与内力做功之和。——质点系的动能定理

(2) 在质点系问题中

力的合功 ⟸ $\sum\int_A^B \vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i \neq \int_A^B\left(\sum\vec{F}_i\right)\cdot d\vec{r}$ ⟹ 合力的功

(3) 质点系动能定理也只对惯性系成立。