第十三章　振动学基础

1．掌握描述简谐运动的特征量——振幅、周期、频率、相位，并能熟练地确定特征量，建立简谐运动方程；（重点）

2．掌握描述简谐运动的旋转矢量图示法；（重点、难点）

3．掌握简谐运动的能量特征。（重点）

4．掌握同方向同频率简谐运动的合成规律（重点）

5．了解同方向不同频率简谐运动合成规律。

6．了解阻尼振动、受迫振动、共振发生的条件及其特点；

第一讲

13.1 简谐振动的描述

一、简谐振动特征

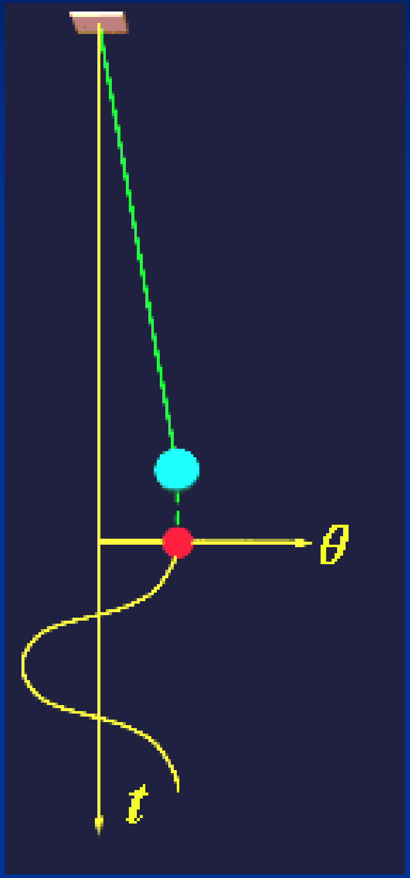
二、描述简谐振动的物理量

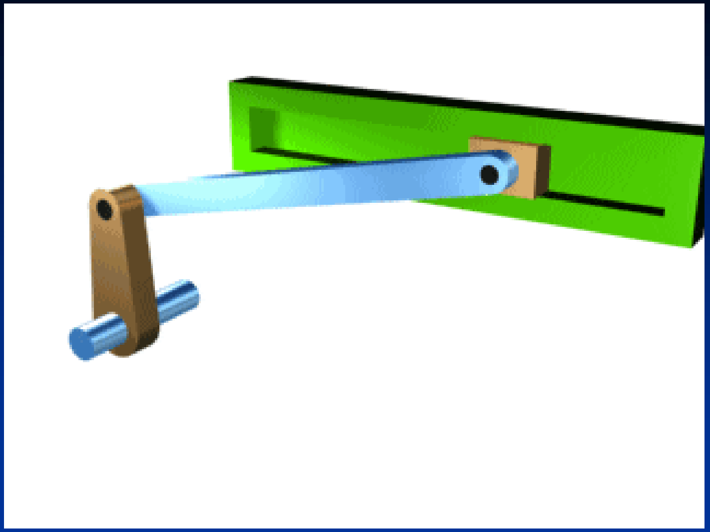
周期和频率

振幅

相位

机械振动现象



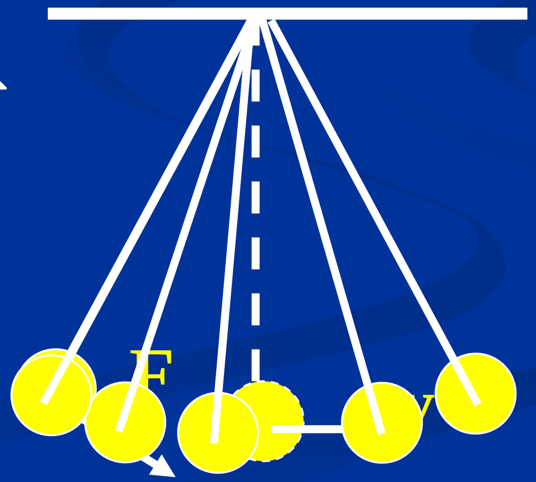


机械振动——物体在一定**位置附近**作**来回往复**的运动

动力学原因——

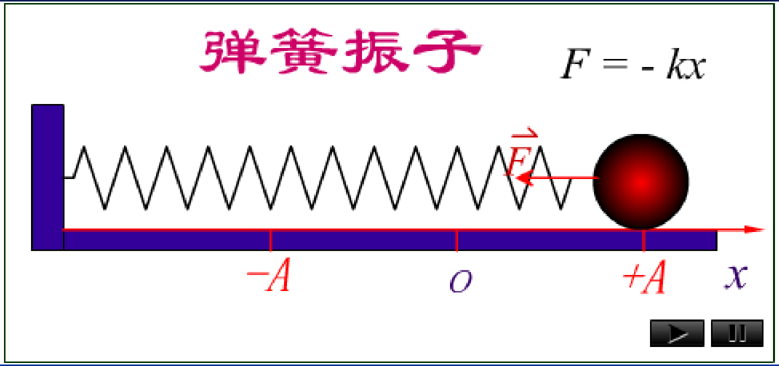
受有**回复力**和物体本身具有**惯性**

广义振动：任一物理量(如位移、电 流等)在某一数值附近作周期性变化。



一、简谐振动

1、弹簧振子

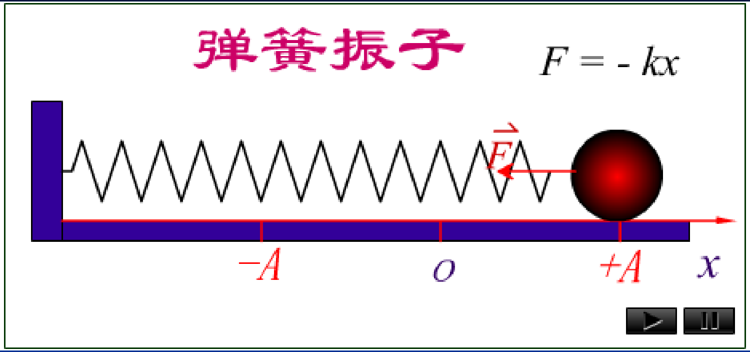


物体的惯性 ——集中于小球（忽略弹簧质量）
回复力—— 弹性力

2、弹簧振子的运动 ——简谐振动

往复空间范围在-A、A之间
来回时间固定

3、弹簧振子的动力学特征



平衡位置**O**—坐标原点，水平向右为x轴正方向

回复力— $f=-kx=ma$

$$a=-\frac{k}{m}x \quad 令\omega^2=\frac{k}{m}$$

简谐运动
微分方程

$$a=-\omega^2 x \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0} \quad \ddot{x}+\omega^2 x=0$$

4、简谐振动的运动学特征

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$= -v_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= -a_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- 物体简谐振动时，其位移、速度、加速度都是周期性变化的

5、简谐振动的判别

（1）从受力角度——动力学特征 $f=-kx$

（2）从加速度角度——运动学特征

$$a=-\omega^2 x$$

（3）从位移角度——运动学特征

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

物体是否作简谐运动？

——证明物体运动遵循上述任一方程

例.一个轻质弹簧竖直悬挂,下端挂一质量为*m*的物体.今将物体向下拉一段距离后再放开,证明物体将作简谐振动.(类似例13.2)

解：先定平衡位置

$$kx_0 = mg \qquad x_0 = \frac{mg}{k}$$

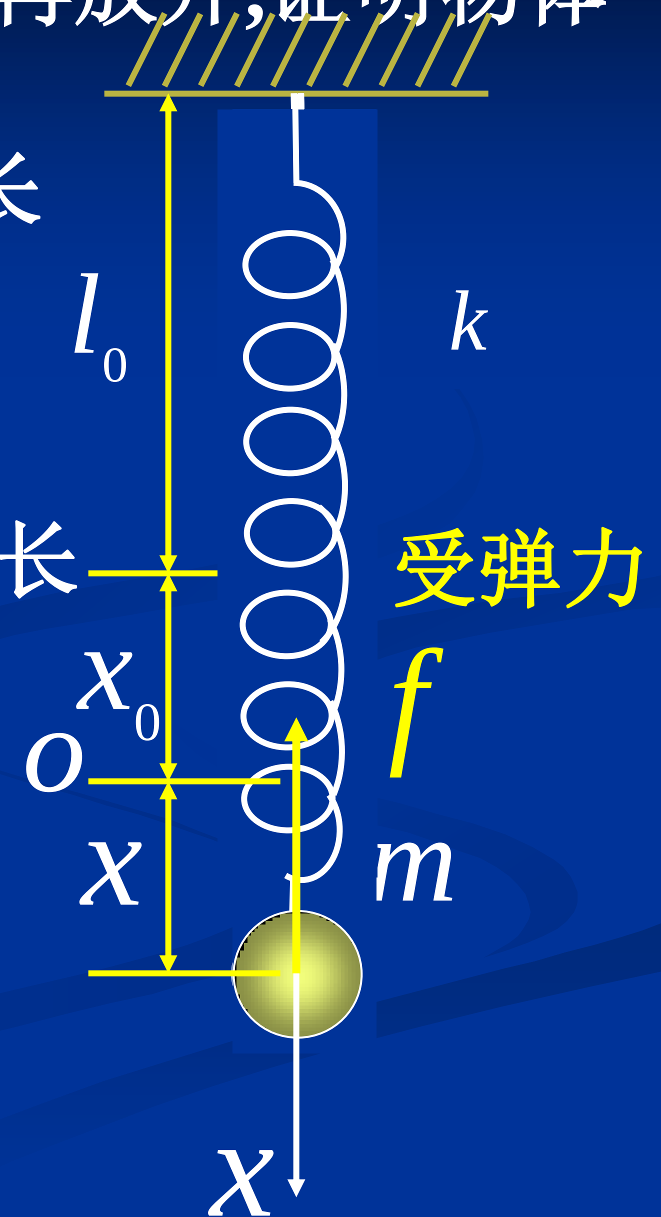
以平衡位置O为原点

$$F = mg - k(x_0 + x)$$

$$= -kx = ma$$

$$a = -\omega^2 x$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{x_0}$$

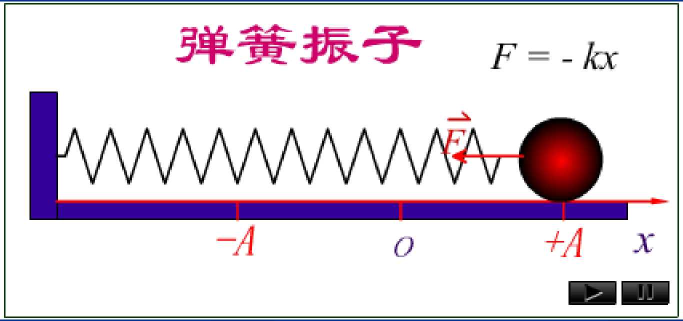


二、描述简谐振动的物理量

1、振幅A（Amplitude）

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

振动物体离开平衡位置的最大位移的绝对值。



- 振幅恒为正值，单位为米(m);
- 振幅的大小取决于初始条件
- 振幅的大小与振动系统的能量有关

2、周期与频率—反映振动的快慢

（1）周期*T* (period)

物体作一次完全振动所需的时间

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= A\cos[\omega(t + T) + \varphi]$$

$$\omega T = 2\pi \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

（2）频率ν(frequency)

单位时间内物体所作的完全振动的次数

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

（3）圆频率ω

——物体在2π秒时间内所作完全振动的次数，单位为弧度/秒(rad.s^{-1}或s^{-1})。

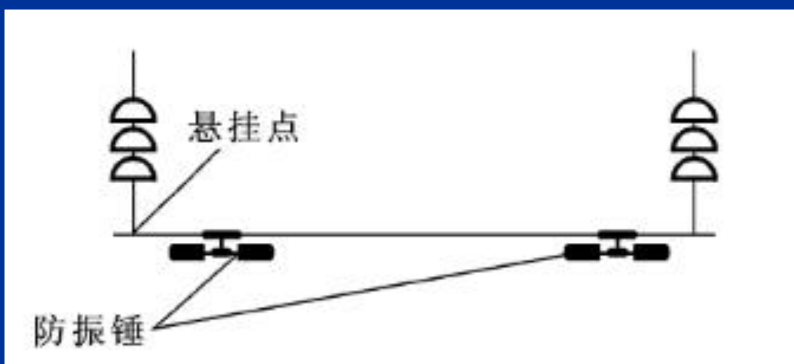
$$\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T}$$

•简谐运动的基本特性——**周期性**

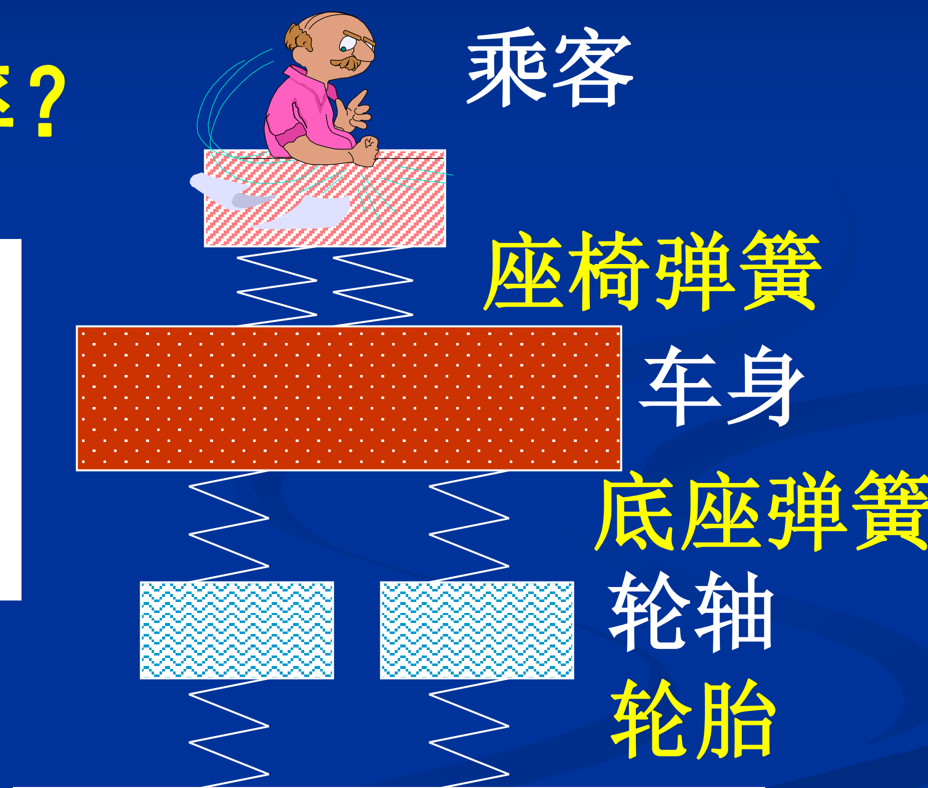
•周期、频率或圆频率均由振动系统本身的力学性质所决定，称为**固有周期、固有频率**

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

如何控制振动频率？



输电线上夹的防振锤



汽车的减振系统

- 简谐运动不同的表达式

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi)$$

$$= A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

人有悲欢离合
月有阴晴圆缺

天上人间，万事万物，共此轮回！

3、相位：表示振子的不同运动状态－位置和速度 $\longrightarrow \omega t+\varphi$

初相：φ

$$\omega t_1+\varphi=0$$

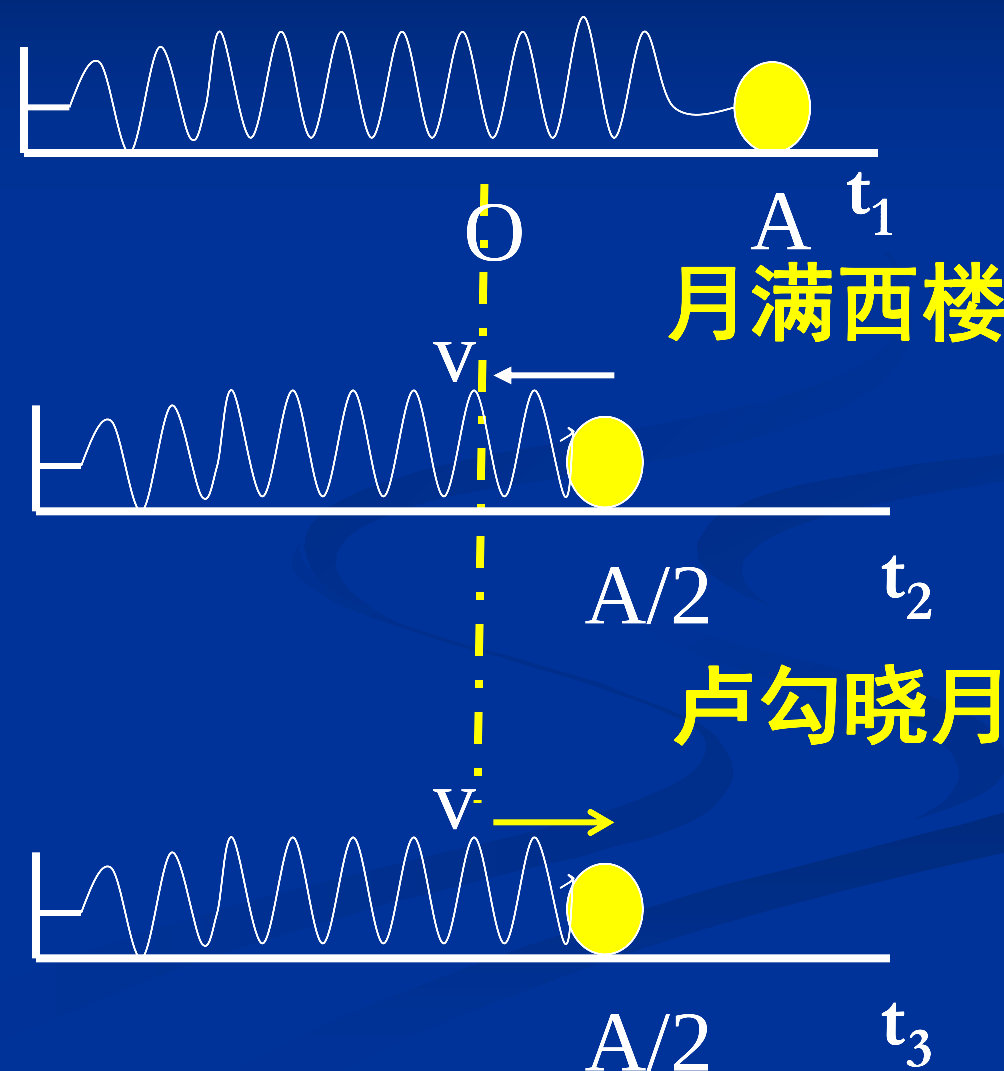
$\Rightarrow$ $x_1=A, v_1=0$

$$\omega t_2+\varphi=\frac{\pi}{3}$$

$\Rightarrow$ $x_2=A/2, v_2<0$

$$\omega t_3+\varphi=\frac{5\pi}{3}$$

$\Rightarrow$ $x_3=A/2, v_2>0$



$$\omega t_3 + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

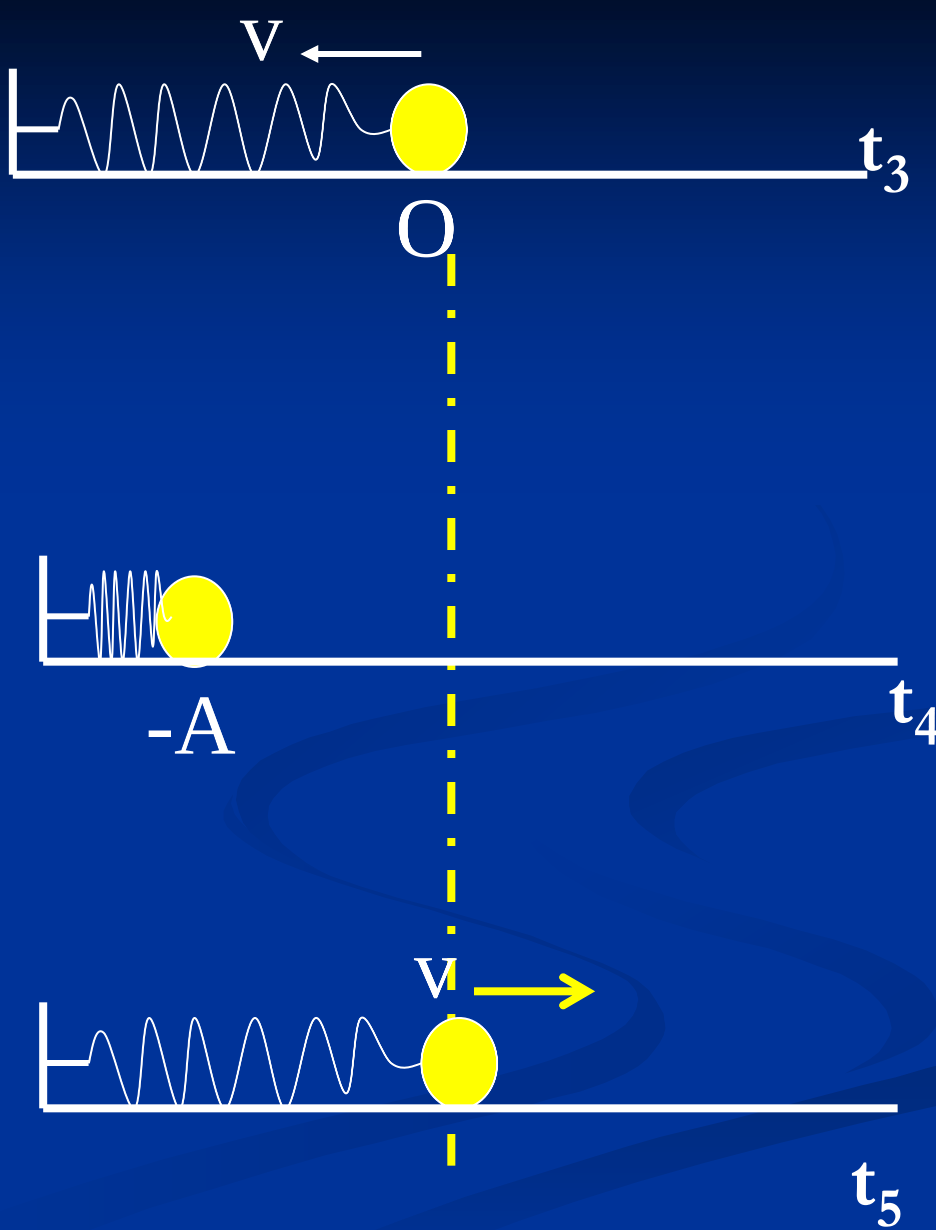
$x_3=0, v_3=-\omega A$

$$\omega t_4 + \varphi = \pi$$

$x_4=-A, v_4=0$

$$\omega t_5 + \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

$x_5=0, v_5=\omega A$



相位差

定义：两个振动在同一时刻的相位之差或同一振动在不同时刻的相位之差。

对于两个**同频率**简谐运动
在同时刻的相位差　　**=初相差**

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$$

说明

$\Delta\varphi > 0$　　振动2超前振动1

$\Delta\varphi < 0$　　振动2落后振动1

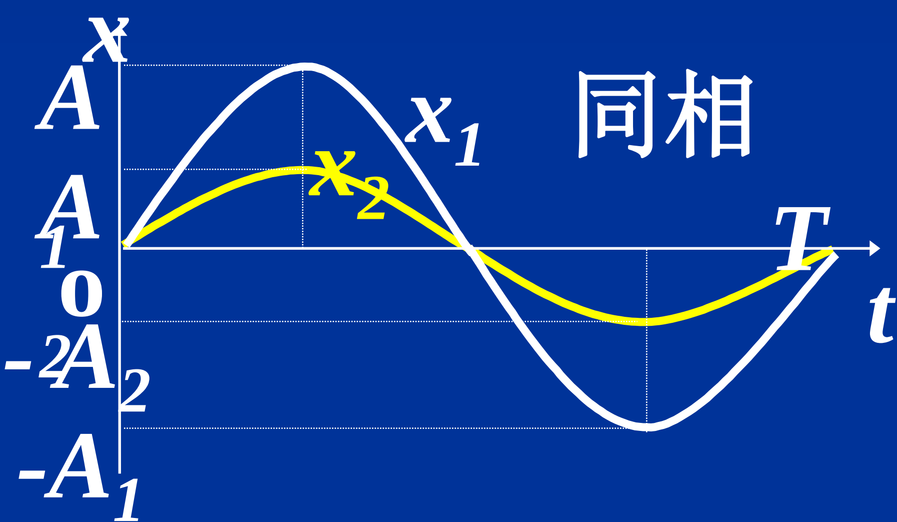
$\Delta\varphi = \pm 2k\pi$，　$k=0,1,2,\ldots$，　同相（步调相同）

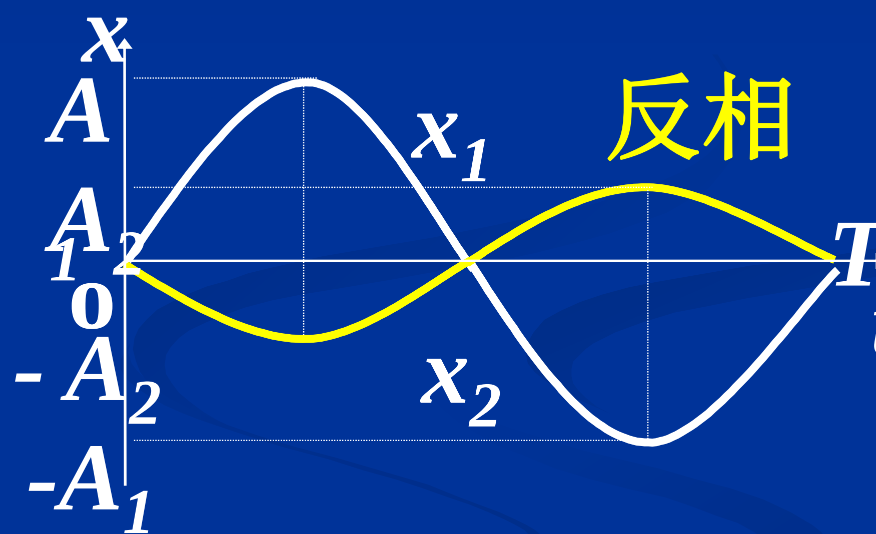
$\Delta\varphi = \pm (2k+1)\pi$，　$k=0,1,2,\ldots$，　反相（步调相反）

同相和反相

$\Delta\varphi = \pm 2k\pi$, (k =0,1,2,…)

两振动步调相同, 称同相





$\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$, (k =0,1,2,…)

两振动步调相反 , 称反相

- # 超前和落后

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0 \rightarrow x_2$比$x_1$**超前** (或$x_1$比$x_2$**落后**)

$\rightarrow x_2$比x_1较早达到正最大位移

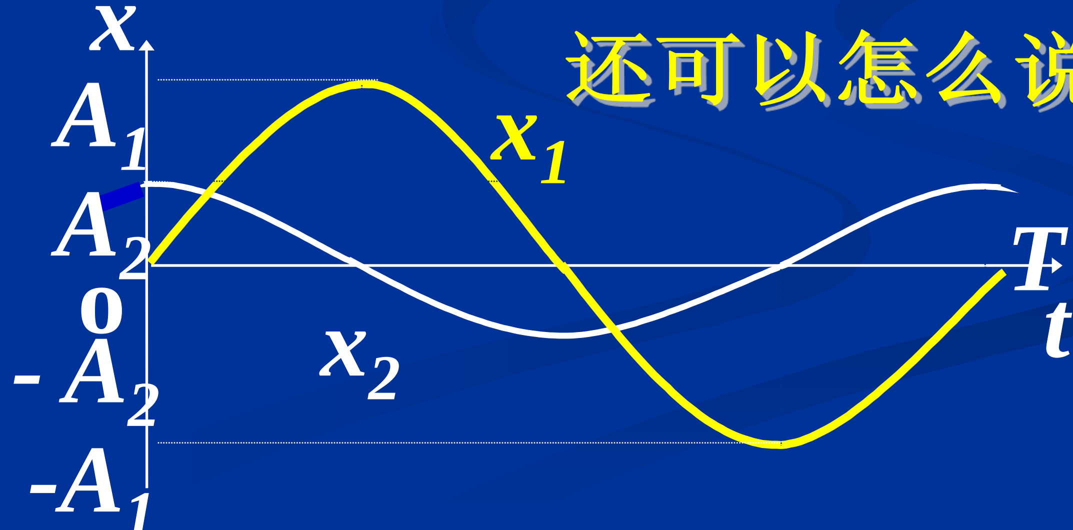
超前、落后一般以$<\pi$的相位角来判断

振动1较振动2落后四分之一周期

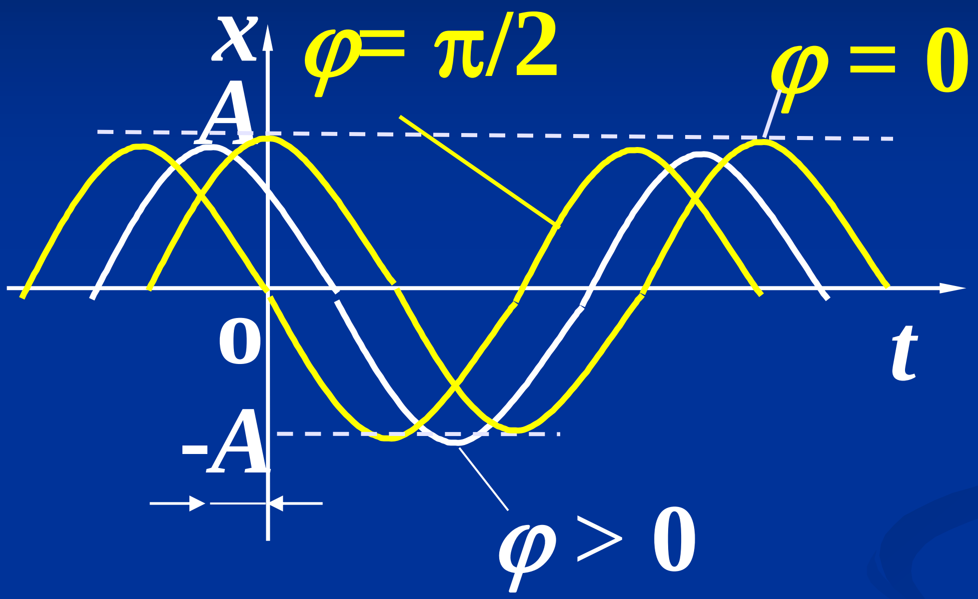
——振动1比振动2相位落后($\pi/2$)

——振动2比振动1相位超前($\pi/2$)

还可以怎么说？



4、振动–时间曲线



振动-时间曲线上任一点的斜率代表质点运动速度

$$\tan\theta = \frac{dx}{dt} = v$$

三、A和φ的确定

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

初始条件

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= A\cos\varphi \\ \frac{v_0}{\omega} &= -A\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad v_0 = -A\omega\sin\varphi$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

初始条件:x_0, v_0

如何求A?

$$(x_0)^2 = (A\cos\varphi)^2$$

$$+$$

$$v_0 = -A\omega\sin\varphi \quad \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 = (-A\sin\varphi)^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

$$x_0 = A\cos\varphi$$

$$v_0 = -A\omega\sin\varphi$$

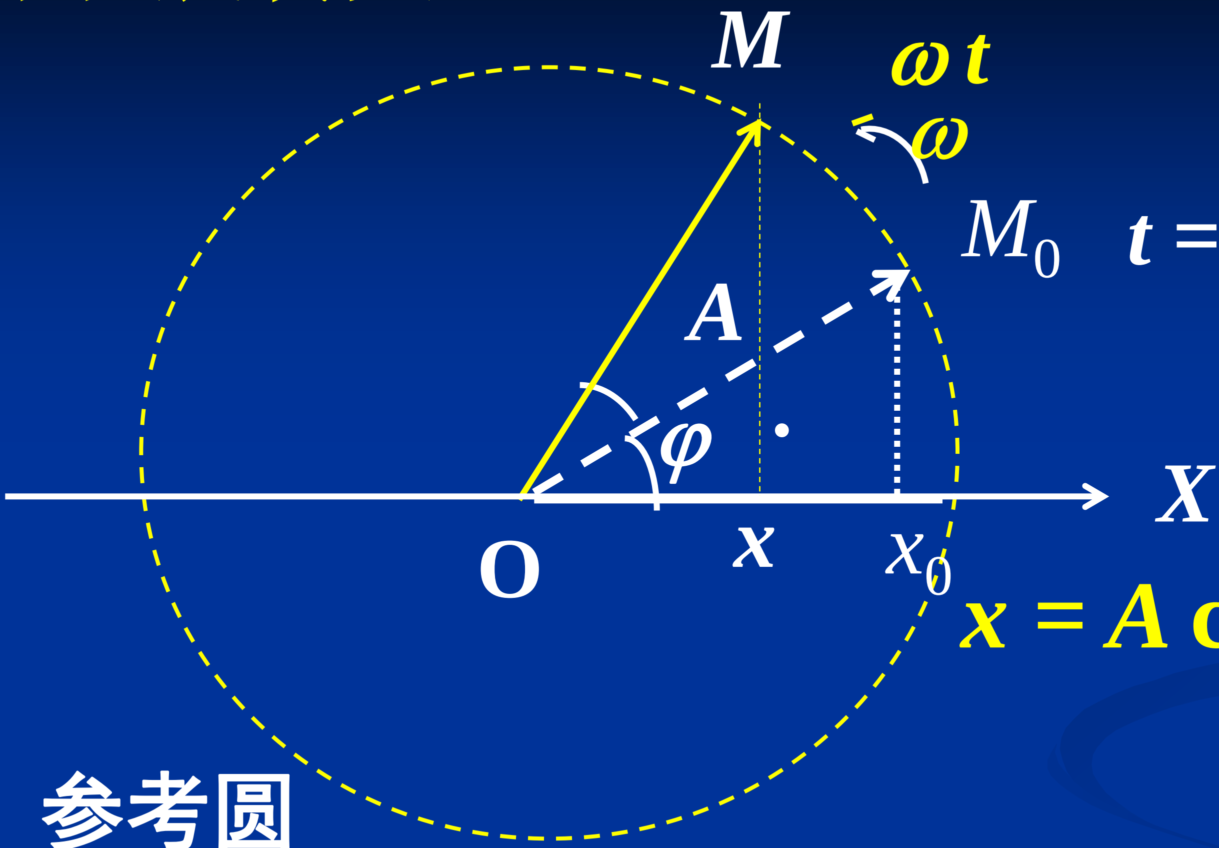
$$\tan\varphi = \frac{-v_0}{\omega x_0} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \begin{cases} \dfrac{+}{+}, \text{第一象限} \\ \dfrac{+}{-}, \text{第二象限} \\ \dfrac{-}{-}, \text{第三象限} \\ \dfrac{-}{+}, \text{第四象限} \end{cases}$$

说明：

一般φ 取值在[-π,π]

或[0,2π]之间；

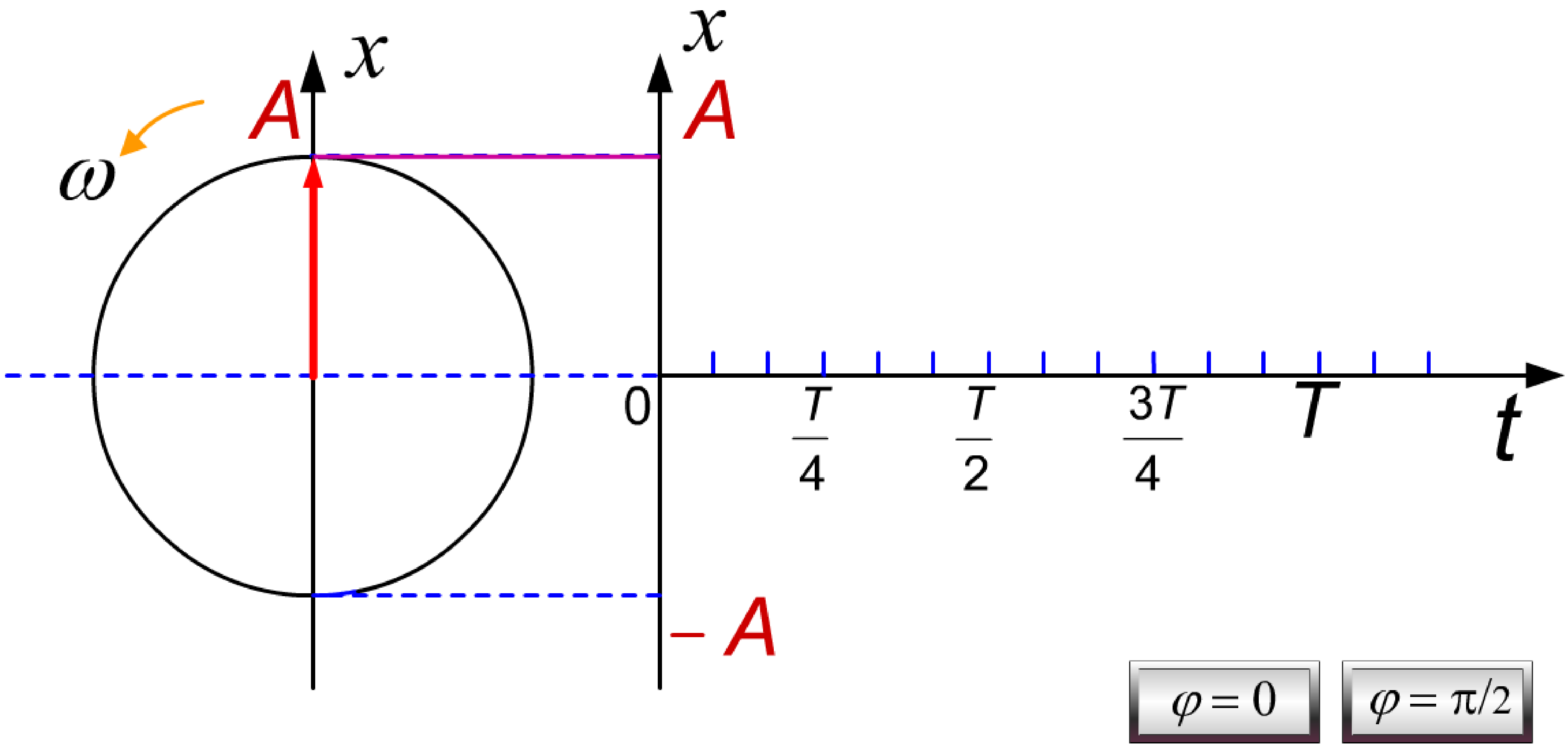
四 旋转矢量

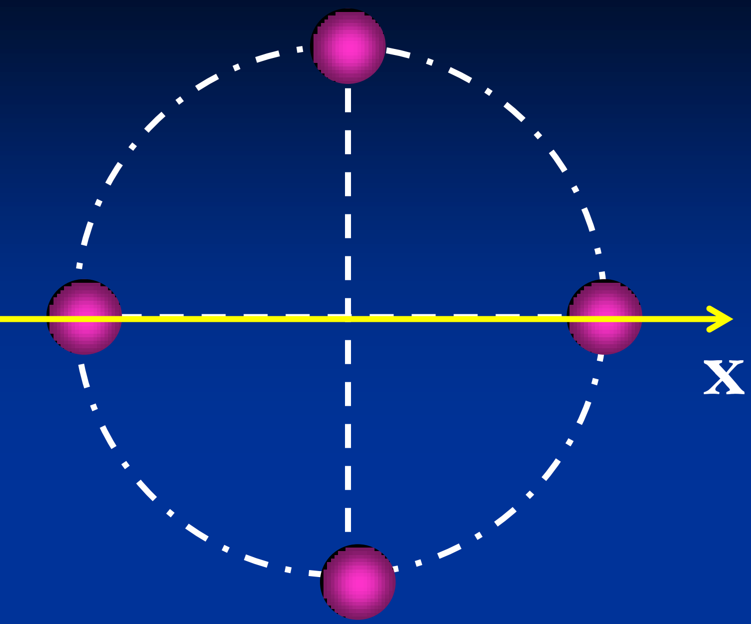


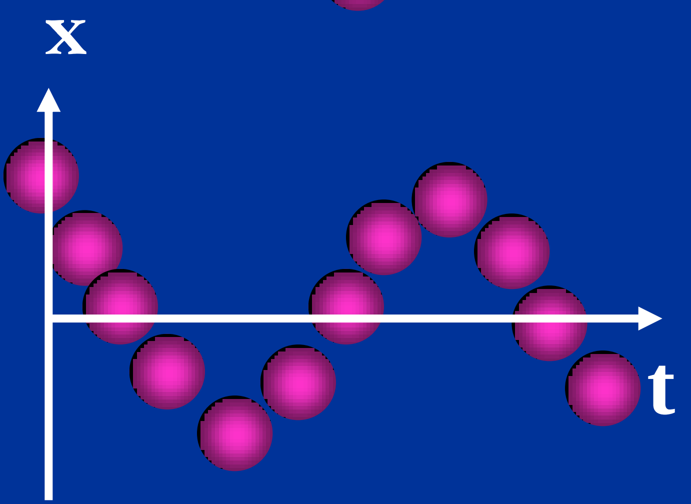
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

旋转矢量长度A ⟷ 振幅
旋转角速度ω ⟷ 圆频率
初矢量与x轴夹角φ ⟷ 初相位
t时与x轴夹角ωt+φ ⟷ 相位

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$







$\omega t+\varphi=0$或$2k\pi$时

正极大处, $v=0$，下一刻v为负

$\omega t+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$或$2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$时

越过原点以v_{max}向x轴负向运动

$\omega t+\varphi=\pi$或$2k\pi+\pi$时

负极大处, $v=0$，下一刻v为正

$\omega t+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$或$2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$时

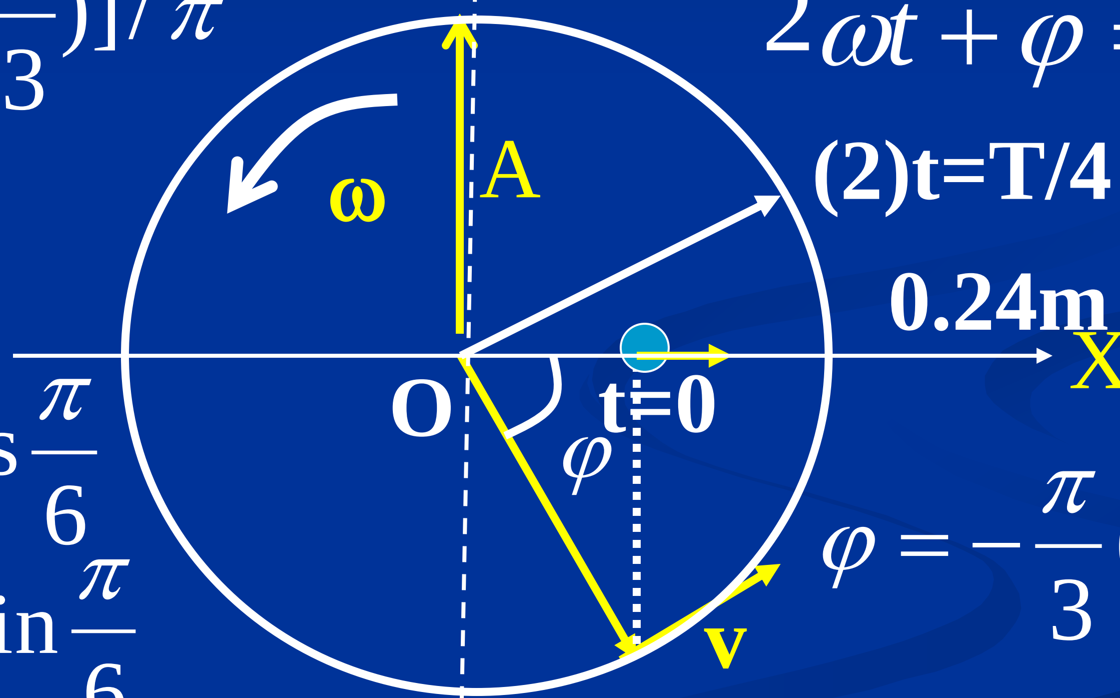
越过原点以v_{max}向x轴正向运动

例13.4：A=0.24m，频率ν=0.5Hz,t=0,x_0=0.12m且向x轴正向运动，求：(1)此简谐振动表达式；(2)$t=T/4$时x,v,a(3) 第一次通过到平衡位置所需的时间。

$$(3)\ \omega t' + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$t' = [\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{3})]/\pi = \frac{5}{6}s$$

$$\omega t + \varphi = \frac{\pi}{6}$$



$$\varphi = -\frac{\pi}{3}(或\frac{5\pi}{3})$$

$$(2)\ x = 0.24\cos\frac{\pi}{6}$$

$$v = -0.24\pi\sin\frac{\pi}{6}$$

$$a = -0.24\pi^2\cos\frac{\pi}{6}$$

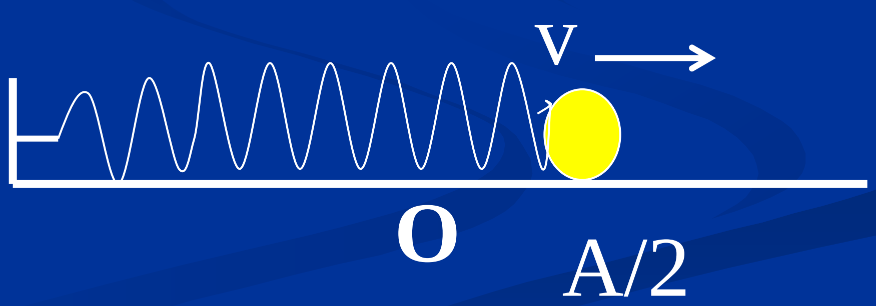
$$(1)\ x = 0.24\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})[m]$$

(例13.4)一物体沿x轴作谐振动，振幅为0.24m, 频率ν=0.5Hz, t=0时刻物体位移x_0=0.12m且向x轴正向运动，求：(1)此简谐振动表达式；(2)$t=T/4$时物体的位置、速度和加速度(3)从初始时间开始第一次通过到平衡位置所需的时间。

解：（1）A=0.24m, $\boxed{\omega = 2\pi\nu = \pi[rad/s]}$

$$\begin{cases} x_0 = 0.12 = 0.5A = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}(\text{或}\frac{5\pi}{3})$$



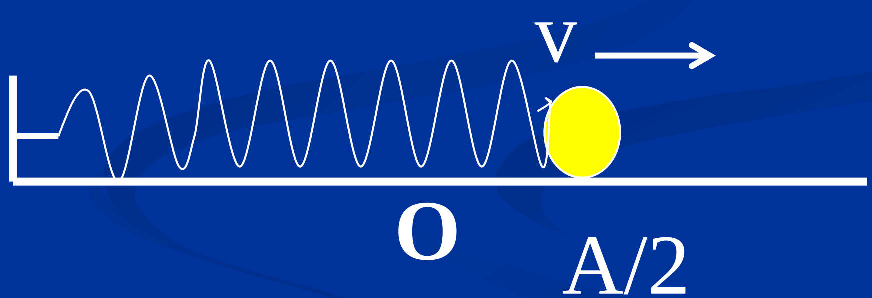
$$x = 0.24\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})[m]$$

(例13.4)一物体沿x轴作谐振动，振幅为0.24m，频率ν=0.5Hz,t=0时刻物体位移x_0=0.12m且向x轴正向运动，求：(1)此简谐振动表达式；(2)$t=T/4$时物体的位置、速度和加速度(3)从初始时间开始第一次通过到平衡位置所需的时间。

(2) $t=T/4$[s]

$$x = 0.24\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})[m]$$

=0.208m



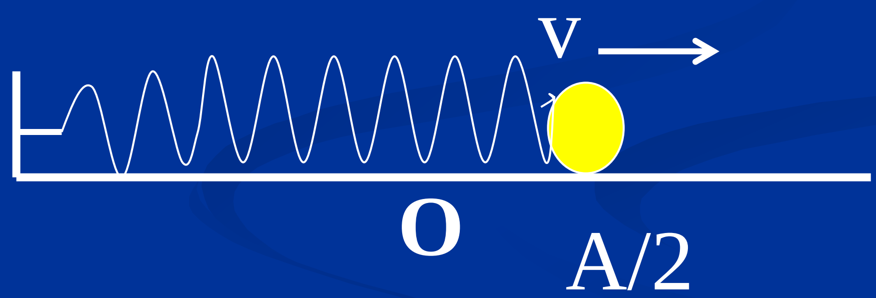
$$v = dx/dt = -0.24\pi\sin(\pi t - \frac{\pi}{3})$$ =-0.376m/s

$$a = -0.24\pi^2\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$$=-2.06m/s^2

(例13.4)一物体沿x轴作谐振动，振幅为0.24m，频率 ν=0.5Hz，t=0时刻物体位移 x_0=0.12m且向x轴正向运动，求：(1)此简谐振动表达式；(2)$t=T/4$时物体的位置、速度和加速度(3)从初始时间开始第一次通过到平衡位置所需的时间。

（3）初始时刻状态——初相

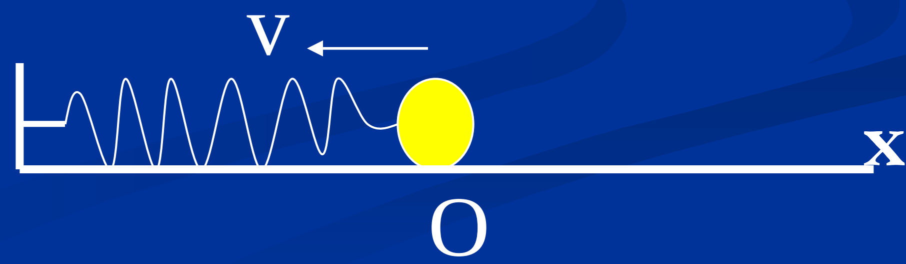
$$\varphi=-\frac{\pi}{3}(或\frac{5\pi}{3})$$



t时第一次经过平衡位置——$x=0,v<0$：

$$\omega t+\varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$t=(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})/\pi=\frac{5}{6}s$$



例：两质点沿X轴作同方向、同振幅A的谐振动，其周期均为5s，t=0时，质点1在 $\frac{\sqrt{2}}{2}A$ 处且向X轴负方向运动；质点2在-A处，求两振动的初相差及两质点第一次经过平衡位置的时刻。

解：

$$\left.\begin{aligned} x_{10} &= \frac{\sqrt{2}}{2}A = A\cos\varphi_1 \\ v_{10} &= -\omega A\sin\varphi_1 < 0 \end{aligned}\right\} \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \qquad x_{20} = -A \Rightarrow \varphi_2 = \pi$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3}{4}\pi$$

平衡位置$x = 0$

$$\omega t_1 + \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow t_1 = \frac{\pi/4}{2\pi/5} = \frac{5}{8}[s]$$

$$\omega t_2 + \varphi_2 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{5}{4}[s]$$