第一章小结

位置矢量的直角坐标表示：

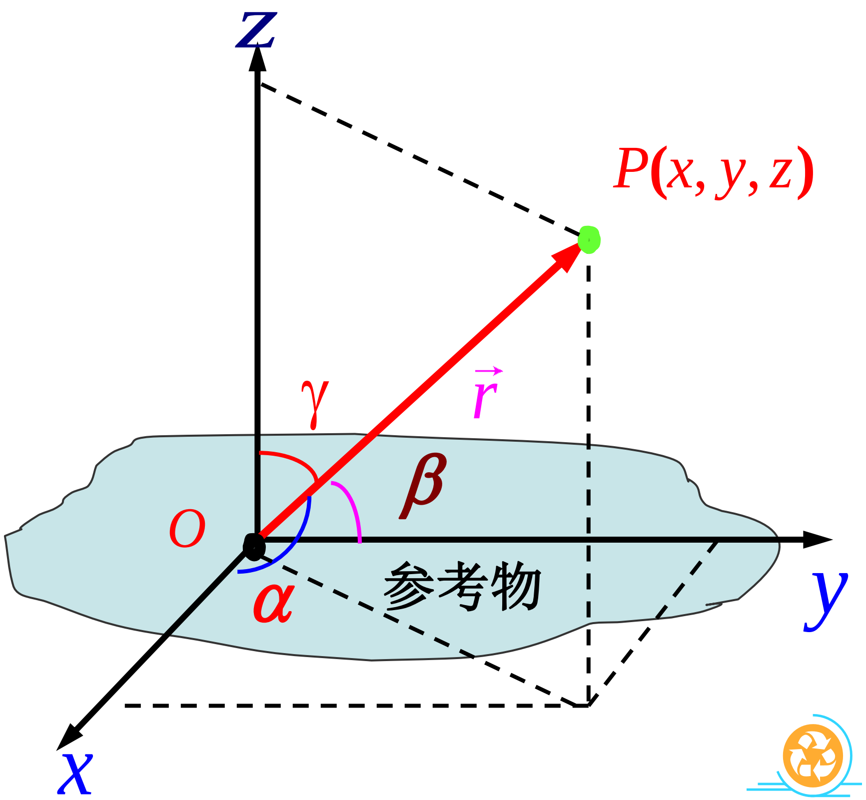
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

位矢的大小为：

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

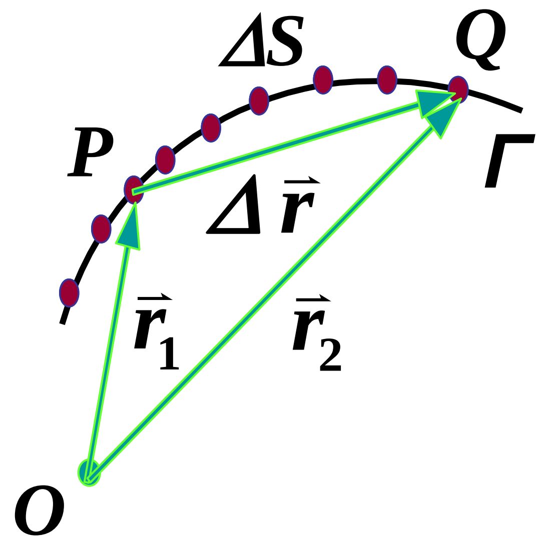
位矢的方向：

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|}$$



位移： $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

位移在直角坐标系下的表示

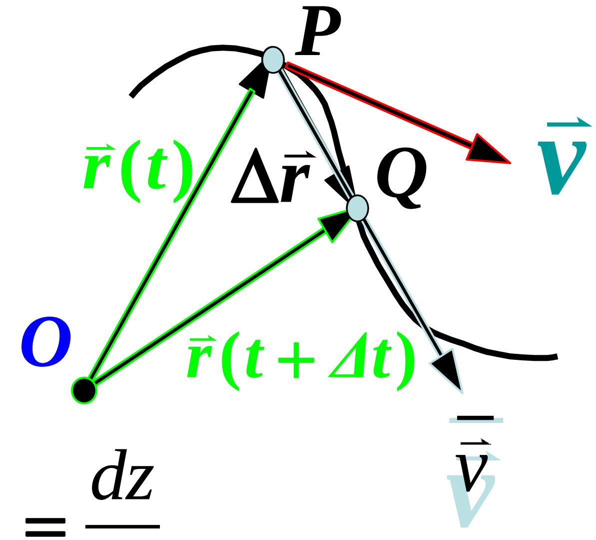


$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

分量形式为

$$\begin{cases} \Delta x = x_2 - x_1 \\ \Delta y = y_2 - y_1 \\ \Delta z = z_2 - z_1 \end{cases}$$

速度在直角坐标系下表示



瞬时速度 $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

速度分量 $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ $\quad v_y = \dfrac{dy}{dt}$ $\quad v_z = \dfrac{dz}{dt}$

速度大小(速率) $V = |\vec{v}| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}$

速度方向 $\cos\alpha = \dfrac{v_x}{V}$ $\quad \cos\beta = \dfrac{v_y}{V}$ $\quad \cos\gamma = \dfrac{v_z}{V}$

平均速度 $\bar{\vec{v}} = \bar{v}_x\vec{i} + \bar{v}_y\vec{j} + \bar{v}_z\vec{k}$

在直角坐标系中： $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$

其中分量为：
$$\begin{cases} a_x=\dfrac{dv_x}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y=\dfrac{dv_y}{dt}=\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z=\dfrac{dv_z}{dt}=\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

加速度的大小： $a=|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

加速度的方向： $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{a},\quad \cos\beta=\dfrac{a_y}{a},\quad \cos\gamma=\dfrac{a_z}{a}$

自然坐标系下速度描述： $\vec{v}=\dfrac{ds}{dt}\vec{e}_t=v\vec{e}_t$

一般平面曲线运动的加速度

$$\vec{a} = \vec{a}_{\mathrm{n}} + \vec{a}_{\mathrm{t}}$$

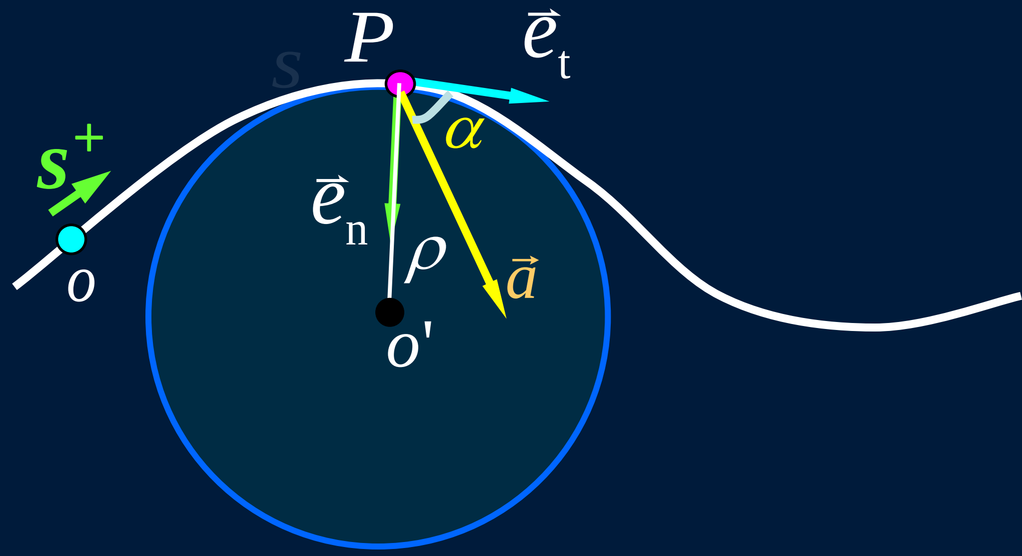
$$= a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}} + a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}} + \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_{\mathrm{t}} + \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$



大小 $a = \sqrt{a_{\mathrm{t}}^2 + a_{\mathrm{n}}^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{\rho}\right)^2}$$

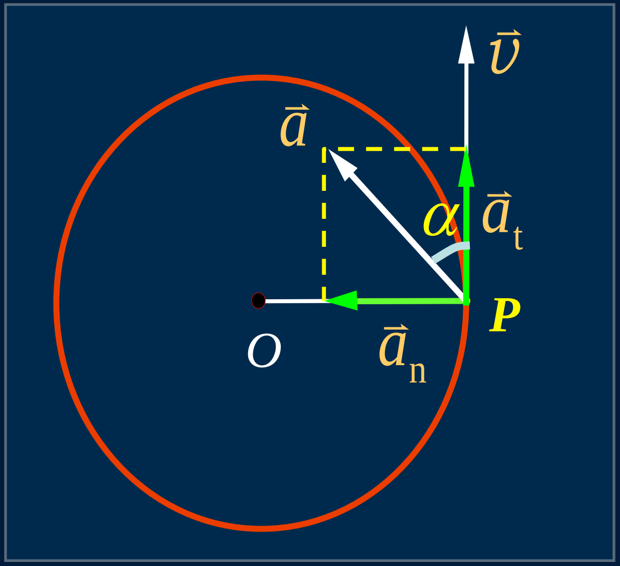
方向 $\alpha = \arctan\dfrac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{t}}}$

特殊曲线运动

匀速圆周运动中的加速度： $\vec{a} = a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{R}\vec{e}_{\mathrm{n}}$

变速圆周运动中的加速度： $\vec{a} = \vec{a}_{\mathrm{n}} + \vec{a}_{\mathrm{t}} = a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}} + a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}$

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$



大小： $a = \sqrt{a_{\mathrm{t}}^{\,2} + a_{\mathrm{n}}^{\,2}} = \sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{v^2}{R}\right)^2}$

方向： $\alpha = \arctan\dfrac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{t}}}$

α 为加速度与 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$ 之间的夹角

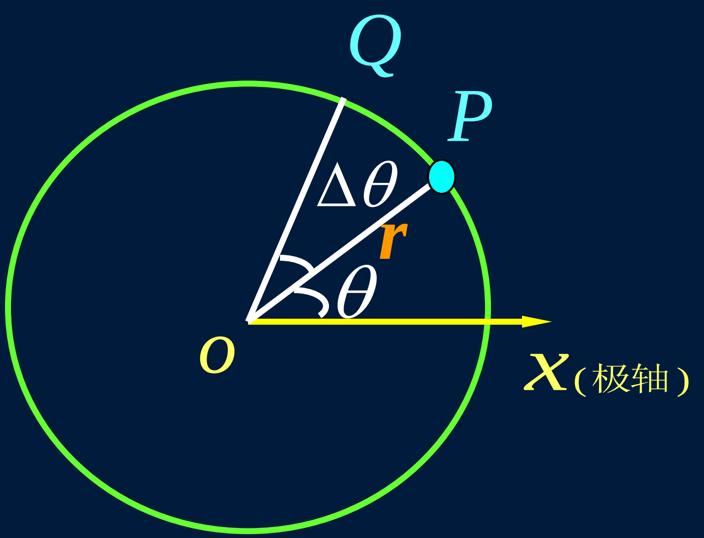
圆周运动的角量描述

运动方程： $\theta=\theta(t)$

角位移： $\Delta\theta=\theta\left(t+\Delta t\right)-\theta\left(t\right)$

角速度： $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

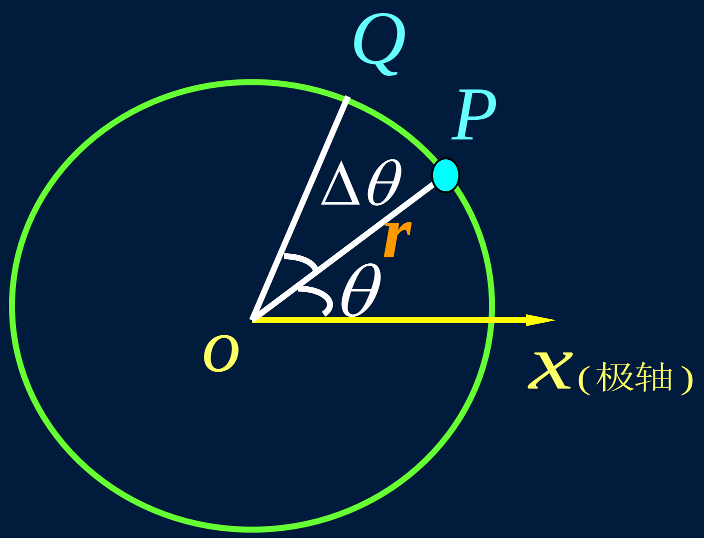
角加速度： $\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$



线量与角量关系：

$$s = r\Delta\theta, \qquad \upsilon = r\omega$$

$$a_t = r\beta, \qquad a_n = r\omega^2$$



相对运动：

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u} \qquad \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

$\vec{\upsilon}$ 绝对速度

$\vec{\upsilon}'$ 相对速度

$\vec{u}$ 牵连速度

$\vec{a}$ 绝对加速度

$\vec{a}'$ 相对加速度

$\vec{a}_0$ 牵连加速度

第二章小结

◆ 牛顿第二定律

当物体的质量不随时间变化时

$$\sum \vec{F}_i = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$$

直角坐标分量形式

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ \sum F_{iy} = m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \\ \sum F_{iz} = m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

自然坐标中

$$\sum F_n = ma_n = m\frac{v^2}{\rho} = m\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$\sum F_\tau = ma_\tau = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

第三章要点回顾

质点的动量定理(合力的冲量)

$$\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}(m\vec{v}) \quad \text{(动量定理微分形式)}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \mathrm{d}(m\vec{v}) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \quad \text{(动量定理积分形式)}$$

作用在质点上的合力在某一时间内的冲量等于质点在同一时间内动量的增量——质点动量定理。

动量定理的分量形式

$$\begin{cases} F_x\mathrm{d}t = \mathrm{d}(mv_x) \\ F_y\mathrm{d}t = \mathrm{d}(mv_y) \\ F_z\mathrm{d}t = \mathrm{d}(mv_z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x\mathrm{d}t = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y\mathrm{d}t = mv_{2y} - mv_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z\mathrm{d}t = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases}$$

冲量的分量只改变自己方向上的动量

质点系动量定理

在有限时间内： $$\int_{t_0}^{t}\sum \vec{F}_{外}\mathrm{d}t=\sum_i m_i\vec{v}_i-\sum_i m_i\vec{v}_{i0}$$

某段时间内，质点系动量的增量，等于作用在质点系上所有外力在同一时间内的冲量的矢量和 ——质点系动量定理

说明

(1) 只有外力可改变系统的总动量

(2) 内力可改变系统内单个质点的动量

动量守恒定律

当 $\sum \vec{F}_{外} = 0$ ⟹ $\mathrm{d}\left(\sum m_i \vec{v}_i\right) = 0$

质点系动量守恒定律 $\left(\sum m_i \vec{v}_i\right) =$ 常矢量

动量守恒的分量表述

$$F_x = 0 \Rightarrow \left(\sum m_i v_{ix}\right) = P_x = \text{常量}$$

$$F_y = 0 \Rightarrow \left(\sum m_i v_{iy}\right) = P_y = \text{常量}$$

$$F_z = 0 \Rightarrow \left(\sum m_i v_{iz}\right) = P_z = \text{常量}$$

说明：

(1) 动量守恒定律适用于惯性系.

(2) 动量守恒定律也适用于高速，微观领域.

(3) 动量守恒时指质点系中总动量矢量和不变，并不是各质点动量不变

第四章小结

1. 功：力对空间的累积效应

恒力的功 $A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$

变力的功 $\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta = F\cos\theta \mathrm{d}s$

2. 保守力与非保守力

- 保守力:作功只与物体始末位置有关，而与物体运动路径无关的力。（重力、万有引力、弹性力、静电力都是保守力）
- 非保守力: 作功与物体运动路径有关的力。（摩擦力、磁力是非保守力）
- 保守力沿任意闭合路径一周所作的功为零，即 $\oint_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$

质点动能定理

$$A_{ab}=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2$$

合力对质点所作的功等于质点始、末两状态动能的增量。

质点系的动能定理

$$A_{外}+A_{内}=E_{kb}-E_{ka}$$

所有外力和内力对质点系作功的总和等于质点系动能的增量

保守力做功与势能关系

$$A=-\Delta E$$

保守力的功 A 等于质点在始末两位置势能增量的负值

功能原理

$$A_{外} + A_{非保内} = E_b - E_a$$

一个系统机械能的增量等于作用于该系统所有外力的功与非保守内力的功之和，这就是系统的功能原理

机械能守恒定律

当 $A = A_{外} + A_{非保内} = 0$

则 $E = E_k + E_p = 恒量$

如果系统中只有保守内力作功，而其它内力和外力都不作功，或作功的总和始终为零，则系统总机械能保持不变。

碰撞分类：

弹性碰撞：碰撞后形变消失，无机械能损失；

非弹性碰撞：碰撞后，形变不能恢复。一部分机械能变成热能；

完全非弹性碰撞：碰撞后粘在一起，不再分开，以相同的速度运动，机械能损失最大。

恢复系数

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

当 $e=0$ 时为完全非弹性碰撞　　$e=1$ 时　弹性碰撞.

$0 < e < 1$ 时　非弹性碰撞.

第五章小结

刚体转动的角速度矢量 $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$

角加速度矢量 $\vec{\beta} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{d\omega}{dt}\vec{k} = \beta \vec{k}$

速度与角速度的矢量关系式

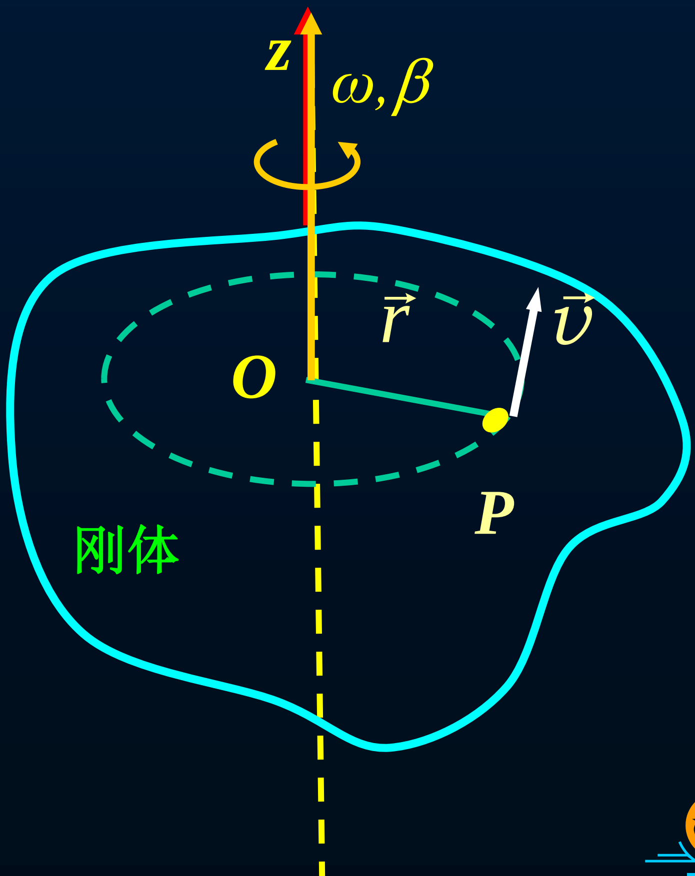
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

加速度与角加速度的矢量关系式

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{\omega} \times \vec{r})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{\beta} \times \vec{r} \qquad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$$



力矩

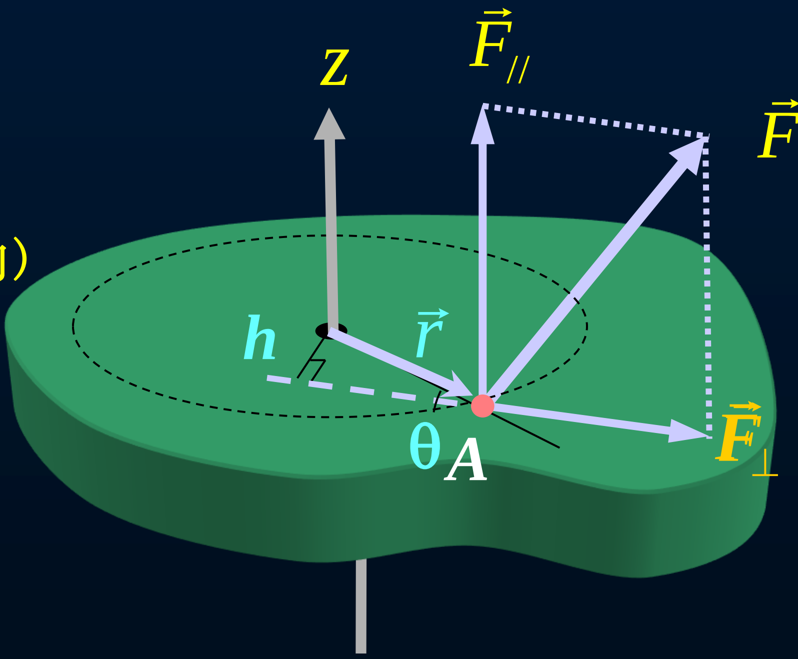
- 力矩 ⟶ 改变刚体的转动状态 ⟶ 刚体获得角加速度

力 F 对z 轴的力矩(力在垂直于轴的平面内)

$$\vec{M}_z = \vec{r} \times \vec{F}$$

力 F 对z 轴的力矩(力不在垂直于轴的平面内)

$$\vec{M}_z = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp}$$



- 在刚体的定轴转动中，力矩只有两个指向（$r \rightarrow F$右手螺旋）

刚体定轴转动定律

$$M_z = J_z \beta$$

转动惯量

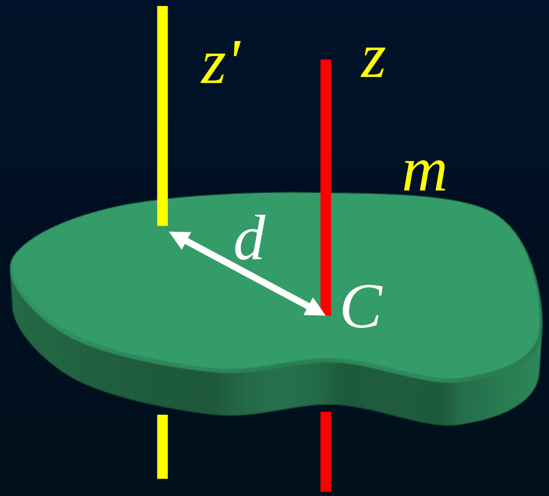
$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

对质量离散分布的质点系 $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$

对质量连续分布的刚体 $J = \int r^2 \mathrm{d}m$

平行轴定理

$$\boxed{J_{z'} = J_{zC} + md^2}$$



常见刚体的转动惯量

刚体（质量为m）	转轴位置	转动惯量
细棒（棒长为l）	通过中心与棒垂直	$J_C=\frac{1}{12}ml^2$
	通过端点与棒垂直	$J_D=\frac{1}{3}ml^2$
细圆环（半径为R）	通过中心与环面垂直	$J_C=mR^2$
	直径	$J_x=J_y=\frac{1}{2}mR^2$
薄圆盘（半径为R）	通过中心与盘面垂直	$J_C=\frac{1}{2}mR^2$
	直径	$J_x=J_y=\frac{1}{4}mR^2$
空心圆柱（内外半径为R_1和R_2）	对称轴	$J_C=\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$
球壳（半径为R）	中心轴	$J_C=\frac{2}{3}mR^2$
球体（半径为R）	中心轴	$J_C=\frac{2}{5}mR^2$

1. 刚体绕定轴转动的转动动能

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

2. 力矩的功

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \mathrm{d}\theta$$

3. 刚体定轴转动的动能定理

$$A = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

合外力矩对绕定轴转动的刚体所作的功等于刚体始、末两个状态转动动能的增量。

4. 刚体的重力势能

$$\boxed{E_p = mgh_C}$$

h_C表示质心到零势能面的高度

5 含有刚体的力学系统的机械能

定轴转动刚体的机械能: 转动动能、重力势能.

$$E = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgh_C$$

当 $A_{外} + A_{非保内} = 0$ 时，$\boxed{E = E_k + E_p = 恒量}$

6. 质点的角动量（动量矩）

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

7. 质点的角动量定理

$$\boxed{\vec{M}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}}$$

角动量对时间的变化率等于质点所受的合力矩

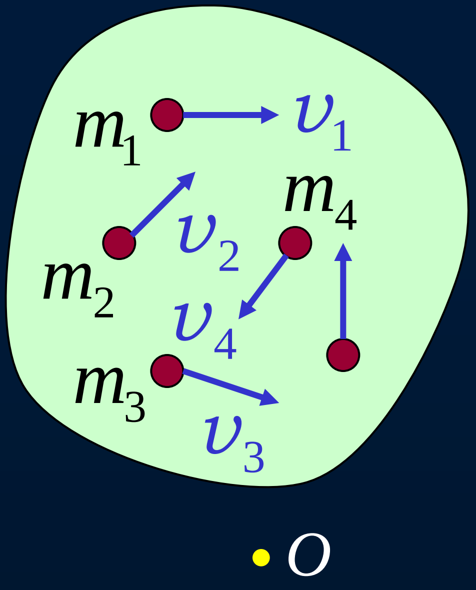
8. 角动量守恒定律

若 $\vec{M} = 0 \Rightarrow L_2 - L_1 = 0$ ，则 $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} =$ 常矢量

如果对于某一固定点*O*，质点所受的合力矩为零，则此质点对该固定点的角动量保持不变。

5.4.3 刚体绕定轴转动的角动量定理

◆ 质点系的角动量定理和角动量守恒定律



1. 质点系的角动量

质点系对参考点 O 的角动量

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{O\,i} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{\upsilon}_i\right)$$

(所有质点的角动量之和)

2. 质点系的角动量定理

$$\vec{M}_i \mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}_i \Rightarrow \sum_i \vec{M}_i \mathrm{d}t = \sum_i \mathrm{d}\vec{L}_i \Rightarrow \vec{M}_{外} \mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}$$ 微分形式

$$M_z \mathrm{d}t = \mathrm{d}L_z$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{外}\,\mathrm{d}t = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2} \mathrm{d}\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \Delta\vec{L}$$ 积分形式

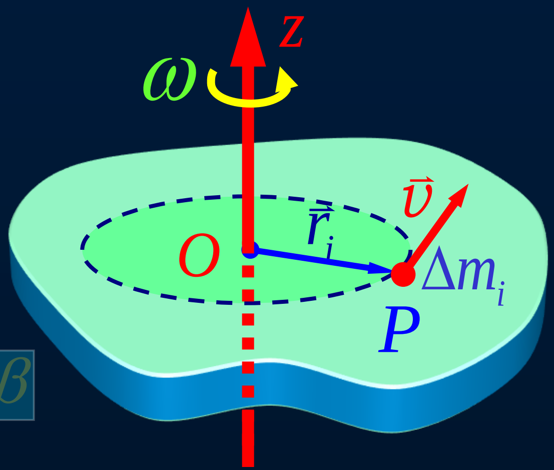
质点系所受合外力矩的冲量矩等于质点系角动量的增量

说明　质点系的内力矩不能改变质点系的角动量

◆刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

1. 刚体定轴转动的角动量

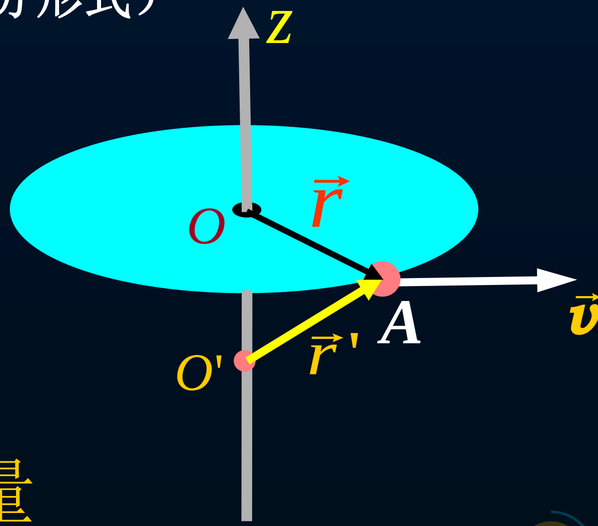
$L_z = J\omega$ (所有质元对Z轴的角动量之和)



2. 刚体定轴转动的角动量定理

$M_z \mathrm{d}t = \mathrm{d}L_z = \mathrm{d}(J\omega)$ $\begin{pmatrix}\text{角动量定理}\\\text{微分形式}\end{pmatrix}$ $M = J\beta$

$\int_{t_1}^{t_2} M_z \mathrm{d}t = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathrm{d}(J\omega) = J\omega_2 - J\omega_1$（角动量定理积分形式）



定轴转动刚体所受合外力矩的冲量矩等于其角动量的增量

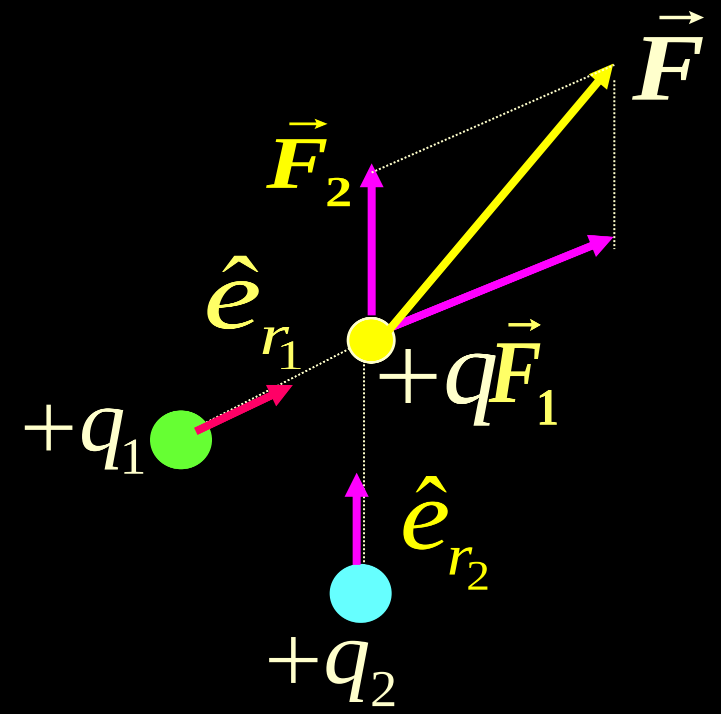
3. 刚体定轴转动的角动量守恒定律

$M_z = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}L_z = 0 \qquad J\omega =$ 常量

第七章小结

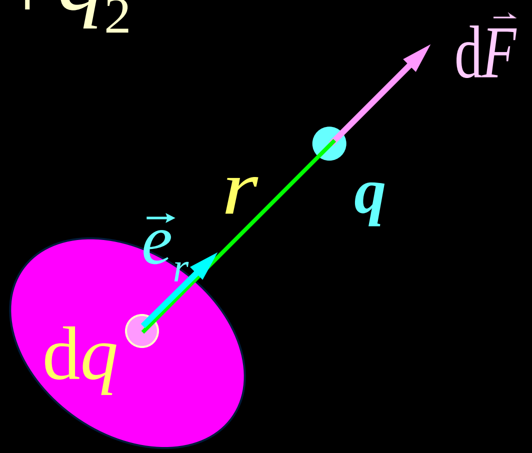
库仑定律：
$$\vec{F}=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r$$

离散状态
$$\vec{F}_i=\frac{qq_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{e}_{r_i}$$



$$\vec{F}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

连续分布
$$d\vec{F}=\frac{qdq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r,\ \vec{F}=\int d\vec{F}$$

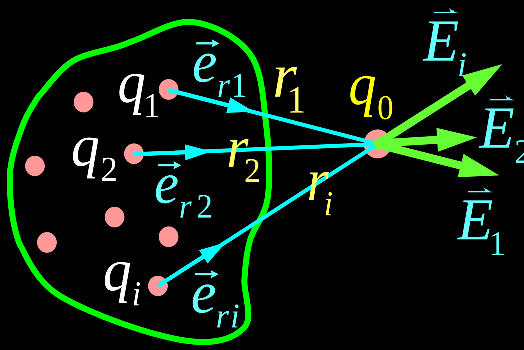


电场强度

点电荷的电场强度

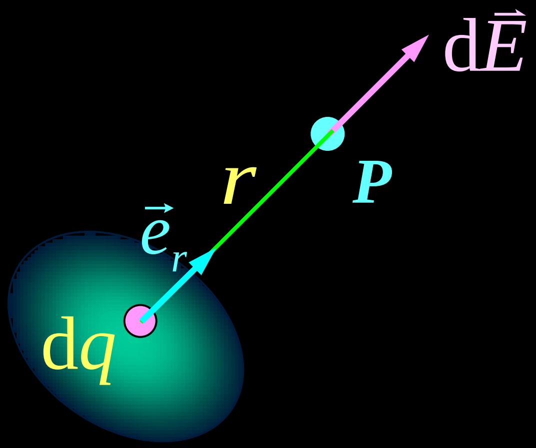
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\vec{e}_r \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$

电场强度叠加原理



点电荷系 $\vec{E} = \dfrac{\sum_i \vec{F}_i}{q_0} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_i}{r_i^2}\vec{e}_{ri}$

连续分布电荷的电场强度 $\mathrm{d}\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{e}_r$



$$\boxed{\vec{E} = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r}$$

$$\mathrm{d}q = \begin{cases} \lambda\mathrm{d}l & \text{（线分布）} \\ \sigma\mathrm{d}S & \text{（面分布）} \\ \rho\mathrm{d}V & \text{（体分布）} \end{cases}$$

电场中任一场点处的总电场强度等于各个点电荷单独存在时在该点产生的电场强度的矢量和{电场强度叠加原理}。

电场强度通量

电通量(Φ_e): 在电场中穿过任意曲面 S 的电场线条数 .

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$\mathrm{d}\vec{S}$ 方向的规定：

- 非闭合曲面 —— 凸为正，凹为负
- 闭合曲面 —— 向外为正，向内为负

静电场高斯定理

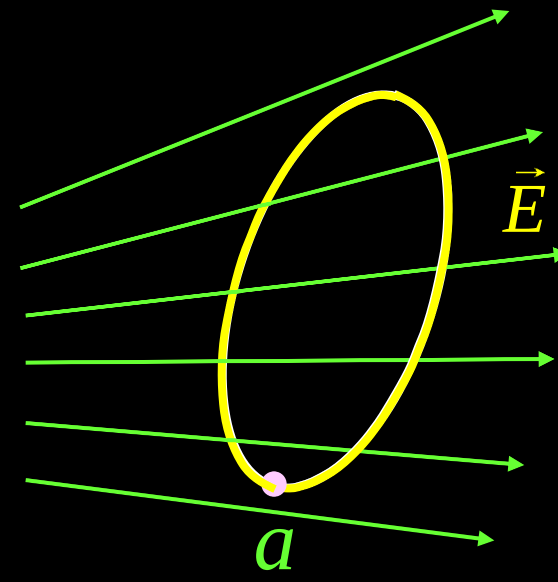
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$$

真空中的任何静电场中，穿过任一闭合曲面的电通量，等于该曲面所包围的电荷电量的代数和乘以$1/\varepsilon_0$

意义： 反映静电场的性质 —— 有源场

静电场的环路定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i \qquad \oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = ?$$



在静电场中沿闭合路径移动q_0，电场力作功

$$A_{aa} = \oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$ —— 静电场的环路定理

在静电场中，电场强度的环流为零，静电场是无旋场$\left(\nabla \times \vec{E} = 0\right)$

- 讨论

(1) 环路定理要求电场线不能闭合。

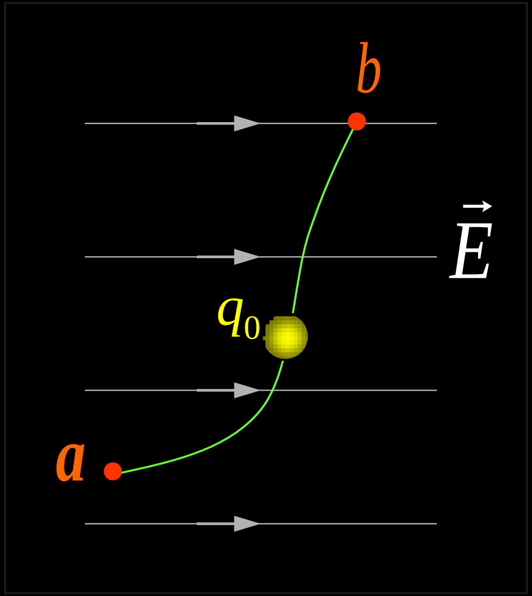
(2) 静电场是有源、无旋场(可引入电势能)。

电势能

静电场 → 保守场 → 引入静电势能

- 电势能的差（保守力做功等于势能增量的负值）

$$W_a - W_b = A_{ab} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



> q_0 在电场中a、b 两点电势能之差等于 q_0 自 a 点移至 b 点过程中电场力所作的功。

- 电势能

取势能零点 $W_b = W_{“0”} = 0$

q_0 在电场中某点 a 的电势能：

$$W_a = \int_a^{"0"} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$W_a = \int_a^{"0"} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

➢ 讨论

(1) 电势能应属于 q_0 和产生电场的源电荷系统共有。

(2) 电荷在某点电势能的值与零点选取有关，而任意两点的电势能的差值与零点选取无关。

$$W_a - W_b = \int_a^{"0"} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_b^{"0"} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^{b} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

(3) 选势能零点的原则：

- 当(源)电荷分布在有限范围内时，一般势能零点选在无穷远处。
- 无限大带电体，一般势能零点选在有限远处一点。
- 实际应用中取大地、仪器外壳等为势能零点。

电势 电势差

$$W_a = \int_a^{"0"} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\vec{E} = \vec{F} / q_0$$

- 电势定义

$$V_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{"0"} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电场力将单位正电荷自$a \rightarrow$“电势零点”过程中所作的功。

- （a、b两点间的）电势差

$$U_{ab} = \frac{W_a}{q_0} - \frac{W_b}{q_0} = \frac{A_{ab}}{q_0} = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电场力对单位正电荷自$a \rightarrow b$过程中所作的功。

点电荷系电场中的电势

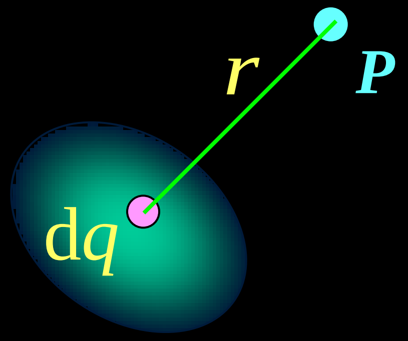
$$V_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

在点电荷系产生的电场中，任一点的电势等于每一个点电荷单独存在时在该点产生的电势的代数和 —— 电势叠加原理。

$$V_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

电荷连续分布带电体电场中的电势

对连续分布的带电体 $$V_a = \int_Q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



◆ 计算电势的方法

(1) 已知电荷分布 $$V_a = \int_Q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(2) 已知场强分布 $$V_a = \int_a^{"0"} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

第八章小结

1. 导体的静电平衡条件

$E_{内}=0$ $\vec{E}_{表面}\perp$导体表面

电势：导体静电平衡时是一个等势体。

2. 静电平衡时导体上的电荷分布

导体带电只能在表面！

$$\sigma \propto \frac{1}{R}$$

- 如果, 有空腔, 且空腔中无电荷, 则电荷只能分布在外表面！
- 如果, 有空腔, 且空腔中有电荷, 则在内外表面都分布有电荷！
- 处于静电平衡的孤立导体，其表面电荷的面密度的大小与该处导体表面的曲率有关。

3. 处于静电平衡的导体表面电场分布

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

孤立导体的电容

$$\boxed{C=\frac{Q}{V}}$$

4. 电容器的电容

定义： $C=\dfrac{q}{\Delta V}$

- 电容器电容的计算 $q \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow (V_1-V_2) \Rightarrow C=\dfrac{q}{\Delta V}$

(1) 平行板电容器 $C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

(2) 球形电容器 $C=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2-R_1}$

(3) 柱形电容器 $C=\dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln R_b/R_a}$

5. 电容器的串、并联

(1) 衡量一个实际的电容器的性能主要指标 $\begin{cases} \text{C的大小} \\ \text{耐压能力} \end{cases}$

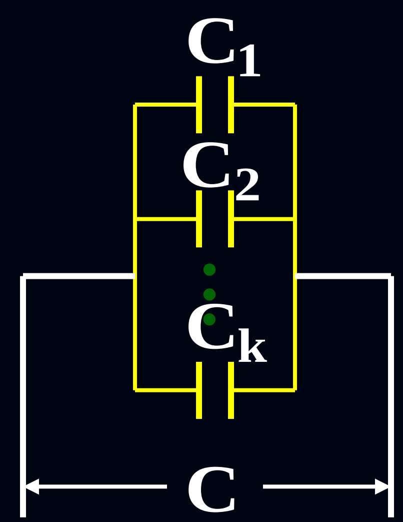
常用电容：100μF25V、470pF60V

(2) 在电路中，一个电容器的电容量或耐压能力不够时，

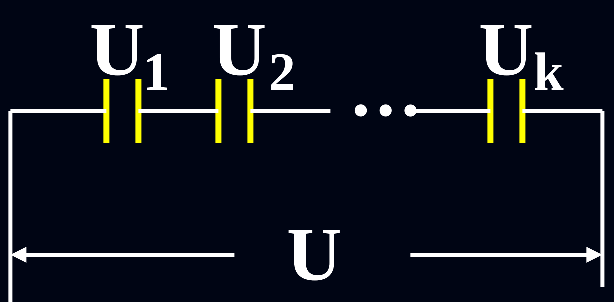
可采用多个电容连接.

如增大电容，可将多个电容并联：

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_k$$



若增强耐压，可将多个电容串联：



耐压强度： $U = U_1 + U_2 + \cdots + U_K$

电容减小： $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \cdots + \dfrac{1}{C_k}$

静电场中的电介质 $V=\dfrac{V_0}{\varepsilon_r}$ $E=\dfrac{E_0}{\varepsilon_r}$

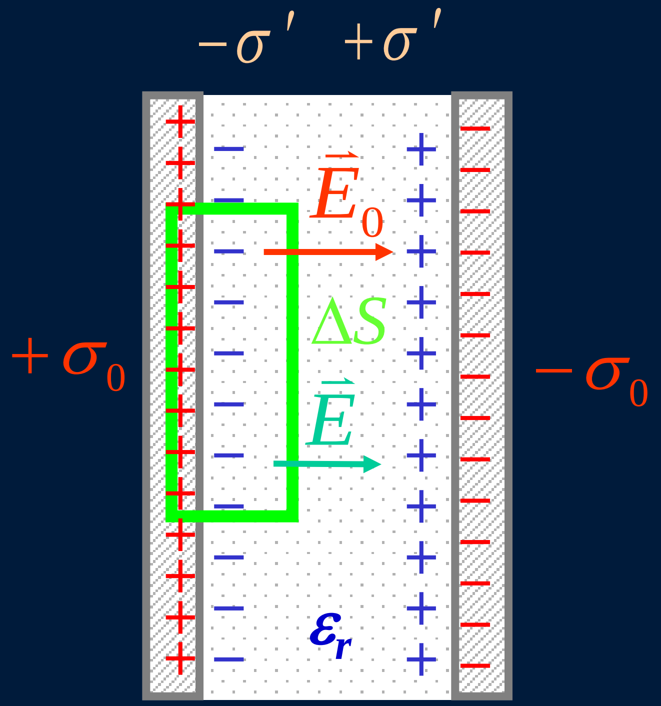
各向同性的均匀电介质中 $\boxed{\sigma'=(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r})\sigma_0}$

有电介质时的高斯定理

◆各向同性的均匀电介质时：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0-\sigma')\Delta S$$

$$\sigma'=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\sigma_0$$



$$\oint_S \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sigma_0 \Delta S = q_0$$

定义：电位移矢量 $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_{0i}}$$ ——电介质中的高斯定理

通过高斯面的电位移通量等于高斯面所包围的自由电荷的代数和，与极化电荷及高斯面外电荷无关。

$$\begin{cases} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_{0i} \\ \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum_i q_{0i} + q'\right) \end{cases}$$

1. 电容器中的储能

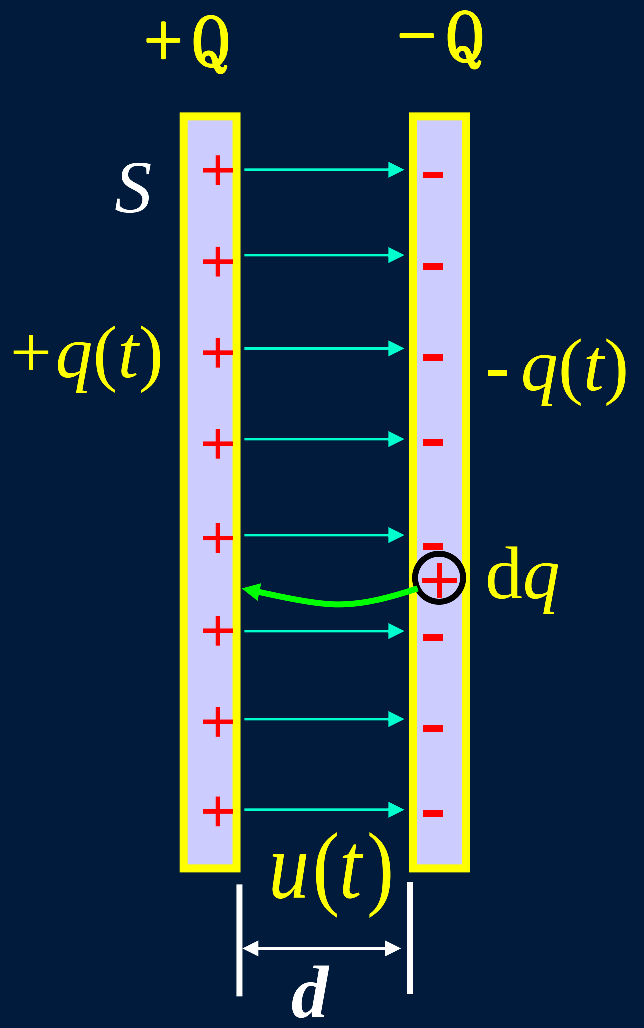
外力反抗电场力作功

$$\mathrm{d}A = u(t)\mathrm{d}q = \frac{q(t)}{C}\mathrm{d}q$$

$$A = \int_0^Q \frac{q(t)}{C}\mathrm{d}q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

电容器储存的电场能量

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU}$$

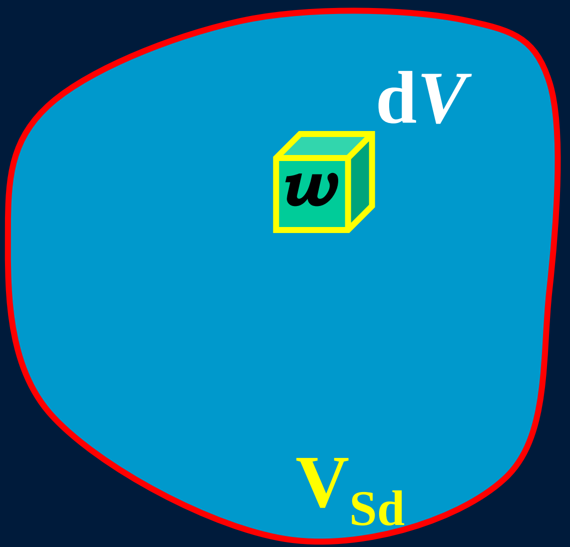


2. 电场能量

$$W=\frac{Q^2}{2C}=\boxed{\frac{1}{2}CU^2}=\frac{1}{2}QU$$

$$W=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}(Ed)^2$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \mathrm{V}_{Sd}$$



电场分布不均匀

电场能量密度 $w=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$

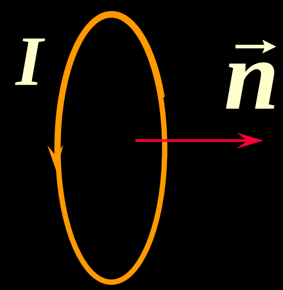
$$W=\int_V w\,\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2\mathrm{d}V$$

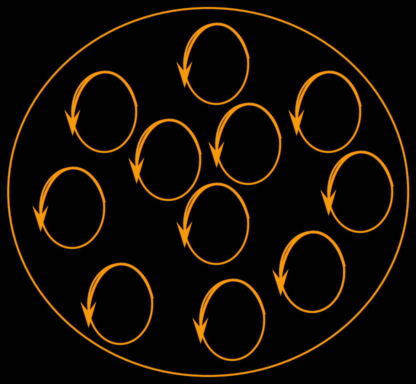
真空中电场能量 $W=\int_V\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\mathrm{d}V$

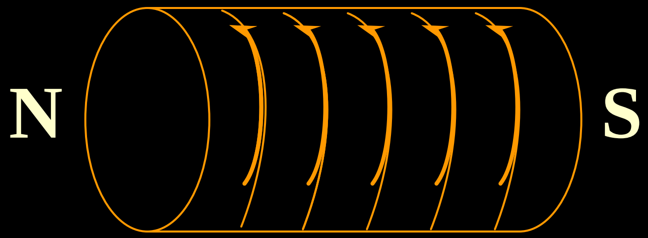
第九章小结

磁性物质产生磁现象的解释：

安培分子电流假说







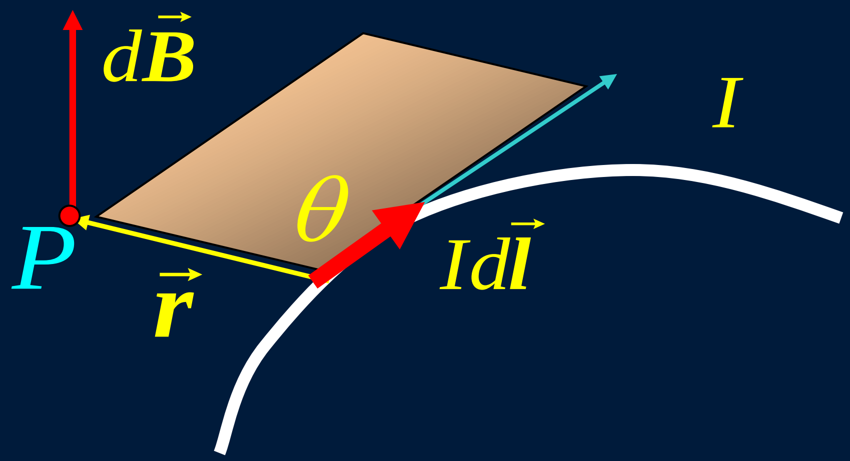
毕奥—萨伐尔定律

磁场叠加原理

基本思路： $I \rightarrow Id\vec{l} \rightarrow d\vec{B} \rightarrow \vec{B} = \int d\vec{B}$

?

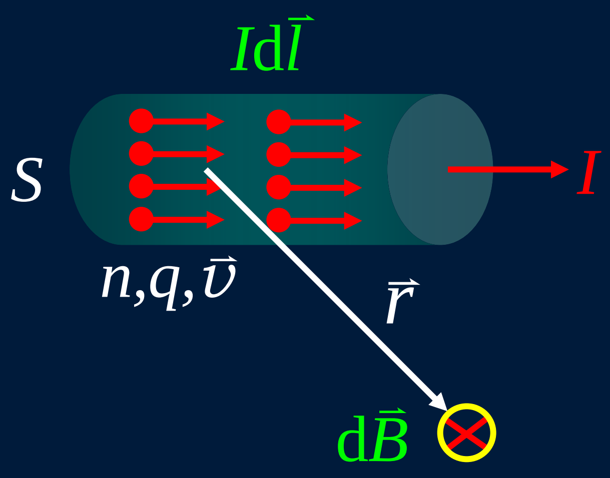
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$



✦ $Id\vec{l}$ 在 P 点产生的 $d\vec{B}$ 方向：右手螺旋定则

运动电荷的磁场

【构造电流元】



$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

电荷数密度

电流强度 $I=nqvS$

$$I\mathrm{d}l=nqvS\mathrm{d}l=qv\mathrm{d}N$$

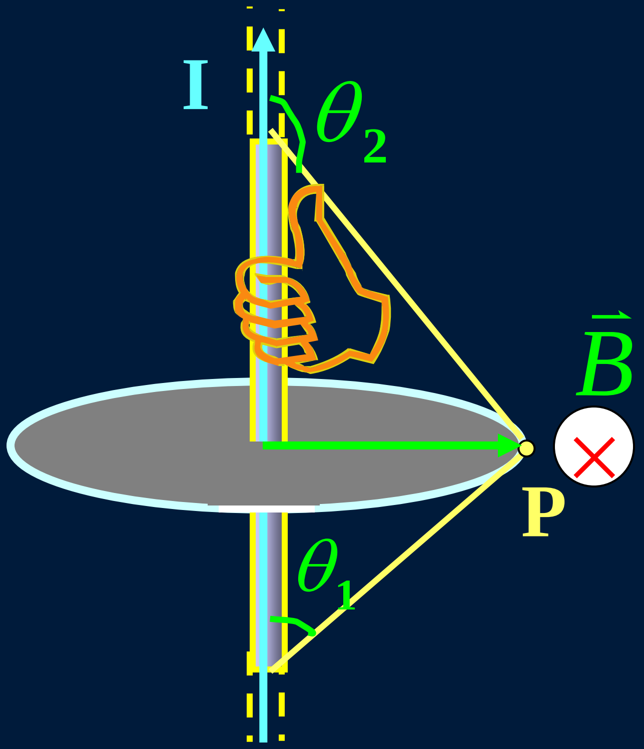
一个电荷产生的磁场

$$\vec{B}=\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}N}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

无限长载流直导线的磁场

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$

方向：右螺旋法则

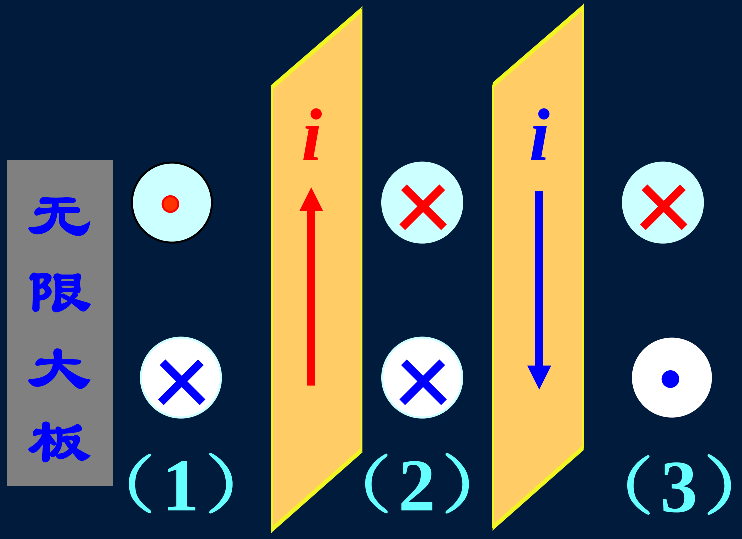


半无限长载流直导线的磁场

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}}$$

无限大载流平板的磁场

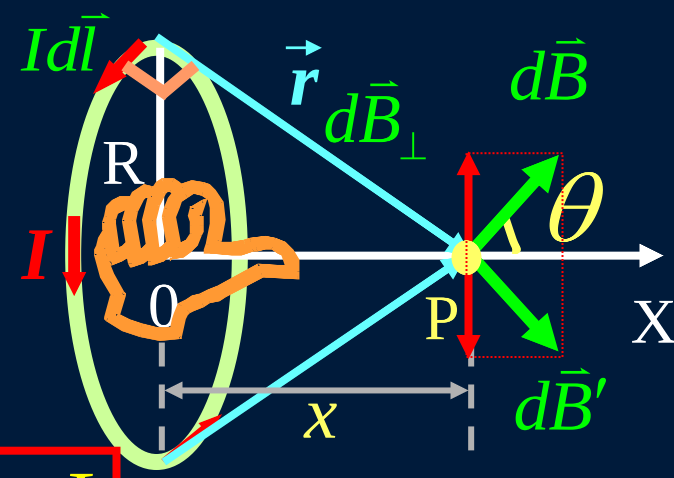
$$\boxed{B=\frac{1}{2}\mu_0 i}$$



$B_1=B_3=\mathbf{0}$ $\quad B_2=\mu_0 i$

载流圆线圈轴线上的磁场

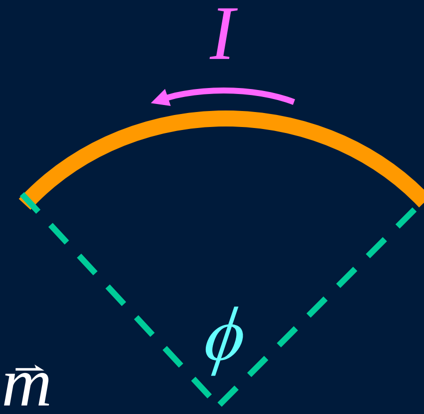
$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}}$$



方向满足右手定则

载流圆线圈中心处的磁场

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2R}}$$



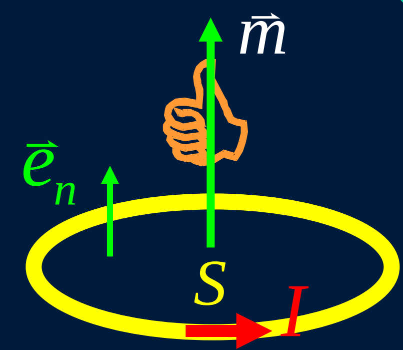
载流圆弧中心处的磁场

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{\theta}{2\pi}}$$

磁偶极子

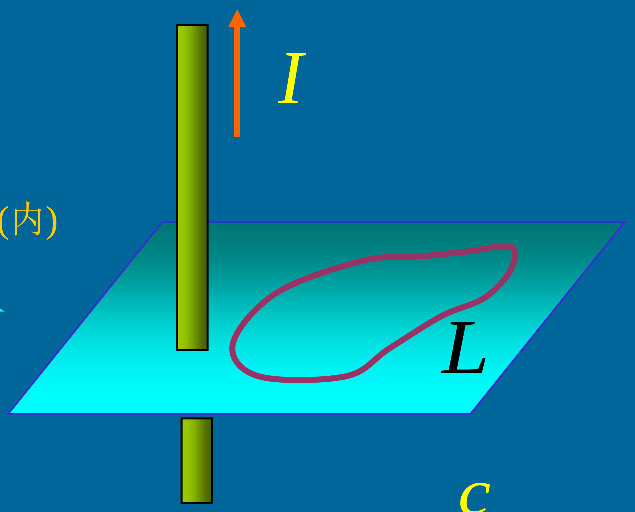
$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{m}}{x^3}}$$

$\vec{m}=IS\vec{e}_{\mathrm{n}}$ 磁矩



- **磁场的高斯定理** $\phi_m = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

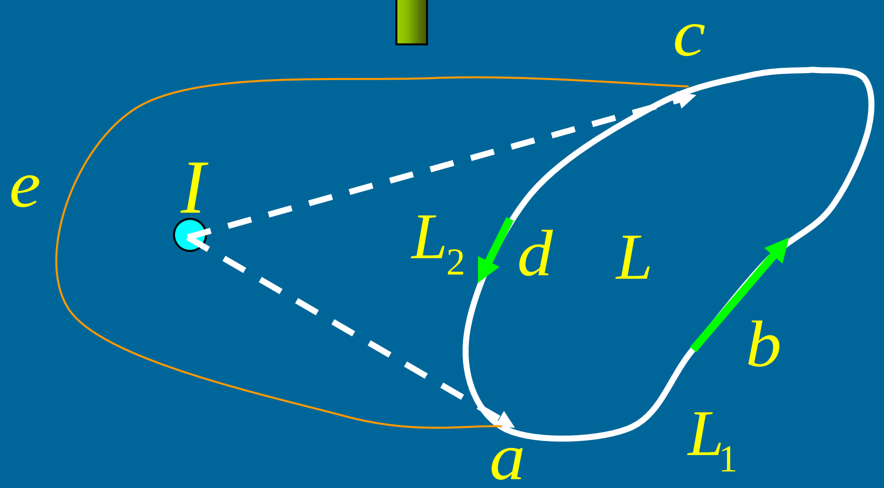
- **磁场的安培环路定理** $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{i(内)}$



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{abc} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{cda} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{cea} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{aec} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \oint_{L1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_{L2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \mu_0 I - \mu_0 I = 0$$



磁场对载流导线的作用

安培力 $\boxed{\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}}$ $\begin{cases} \text{大小：} \mathrm{d}F = I\mathrm{d}lB\sin\theta \\ \text{方向：由右手螺旋法则确定} \end{cases}$

任意形状载流导线在外磁场中受到的安培力

$$\boxed{\vec{F} = \int \mathrm{d}\vec{F} = \int I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}}$$

讨论

(1) 安培定理是矢量表述式 $\mathrm{d}\vec{F} \Rightarrow \mathrm{d}F_x, \mathrm{d}F_y, \mathrm{d}F_z$

(2) 若磁场为匀强场 $\Rightarrow$ $\vec{F} = \left(\int I\mathrm{d}\vec{l}\right) \times \vec{B}$

在匀强磁场中的闭合电流受力 $\Rightarrow$ $\vec{F} = \left(\oint I\mathrm{d}\vec{l}\right) \times \vec{B} = 0$

磁场力的功 $\boxed{A = \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} I\mathrm{d}\Phi_m = I(\Phi_{m2} - \Phi_{m1}) = I\Delta\Phi_m}$

洛伦兹力公式

$$\boxed{\vec{f}_m = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

讨论

(1) 洛伦兹力始终与电荷运动方向垂直，故 $\vec{f}$ 对电荷不作功

(2) 在一般情况下，空间中电场和磁场同时存在

$$\boxed{\vec{F} = \vec{f}_{\mathrm{e}} + \vec{f}_{\mathrm{m}} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t}$$

第十章小结

1. 法拉第电磁感应定律 $\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$

2. 楞次定律

3. 动生电动势

非静电力 $\vec{F}_{\mathrm{m}} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$ 非静电性场 $\vec{E}_K = \vec{v} \times \vec{B}$

动生电动势 $\varepsilon = \int_b^a \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

4. 感生电动势

非静电性场 —— 有旋电场 $\vec{E}_V$。

有旋电场与变化磁场之间的关系 $\oint_L \vec{E}_V \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

感生电动势 $\varepsilon = \int_a^b \vec{E}_V \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

5. 自感与互感

(1)自感 $\Psi = LI$ L 自感系数; $\varepsilon_L = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ 自感电动势

(2)互感 $\Psi_{21} = MI_1$ $\Psi_{12} = MI_2$ $\boxed{M = \dfrac{\Psi_{21}}{I_1} = \dfrac{\Psi_{12}}{I_2}}$

互感电动势 $\varepsilon_{21} = -M\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \Longleftrightarrow \varepsilon_{12} = -M\dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$

6. 磁场能量

自感磁能 $W_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}LI^2$

磁场能量密度 $\omega_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}BH = \dfrac{B^2}{2\mu}$

在有限区域内 $W_\mathrm{m} = \int_V w_\mathrm{m}\mathrm{d}V = \int_V \dfrac{1}{2}BH\mathrm{d}V$

7. 麦克斯韦电磁场理论简介

(1) 位移电流 $I_D = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

(2)麦克斯韦方程组的积分形式

$$\begin{cases} \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \sum\limits_{S内} q_{0i} \\ \oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \\ \oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S} \end{cases}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

Good luck