高等数学(一)

第一章　函数与极限

习　题　课

主讲人：熊小峰

第一次习题课例题

例1、求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$

例2、n为正整数,求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+x^3+\cdots+x^n-n}{x-1}$

例3、求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

例4、求 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}$

例5、求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$

例6、当$|x|<1$时,

求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$.

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

例8、 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}$

例9、 求 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

例10. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a、b 的值.

例11. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$，证明必有一点 $\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi+\dfrac{1}{2})=f(\xi)$.

例12 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

例13 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{(1-e^{x})\sin(x^{2})}$

例14 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^{3}}$

例15 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{x}}{\sin x-x}$

例16 求函数 $y=\sqrt[3]{1-x^{3}}$ 的斜渐近线

第一章　习题课

一、重要概念

二、主要结论

三、基本方法

四、典型例题

一、重要概念

1、数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义

2、$x \to \infty$ 时，$f(x)$ 极限的 $\varepsilon - X$ 定义

3、$x \to x_0$ 时，$f(x)$ 极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义

4、$f(x)$ 在 x_0 的左右极限定义

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$$

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon.$

$\boxed{"\varepsilon - N" 定义}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

$\boxed{"\varepsilon - \delta" 定义}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

$\boxed{"\varepsilon - X" 定义}$

过　程	$x \to x_0$	$x \to x_0^+$	$x \to x_0^-$
$\forall \varepsilon > 0$		$\exists\ \delta$	
从此时刻以后	$0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$	$0 < x - x_0 < \delta$	$-\delta < x - x_0 < 0$
$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$			

5、无穷小的定义　$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = 0$　$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$

6、无穷大的定义　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$　$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$

7、$f(x)$在x_0连续的定义　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

8、无穷间断点，可去间断点，跳跃间断点的定义

二、主要结论

1、数列极限的唯一性（推广到函数）

2、收敛数列的有界性

3、收敛数列子列的收敛性

4、函数极限的保号性

5、有极限的函数与无穷小的关系

6、$f(x)$在x_0的极限与左右极限的关系

7、无穷小与无穷大的关系

8、初等函数在定义区间的连续性

9、闭区间上连续函数的性质

（最值、有界、介值、零点）

10、$f(x)$在x_0连续与在x_0极限存在的关系

三、重要方法

1. 求极限的方法

2. 判断 $f(x)$ 连续与间断的方法

3. 证明方程根的存在性的方法

求极限的方法

(1) 用$\varepsilon-\delta$定义（$\varepsilon-X$定义）验证的方法

(2) 四则运算法则　恒等变形

复合函数求极限方法

(3) 无穷小运算定理求极限

(4) 用极限存在准则 $\begin{cases} \text{夹逼准则} \\ \text{单调有界性准则} \end{cases}$

(5) 用重要极限

① $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1.$$

$\frac{0}{0}$型

② $$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

$$\lim_{\substack{\text{某过程}\\ \alpha\to 0}}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

$\alpha=\alpha(x)$

1^{∞}型

(6) 用等价无穷小代换

常用等价无穷小: 当$x \to 0$时,

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x)$$

$$x \sim e^x - 1, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad (1+x)^a - 1 \sim ax \ (a \neq 0)$$

(7) 用连续性 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

以后还有其他方法.

判断函数连续的方法:

初等函数在定义区间上都连续,

分段函数分界点的连续性一定要用定义判断, 即左右极限存在，相等且等于函数值.

确定间断点的类型一定要通过求间断点的极限判断.

证明方程根的存在性可用零点定理、介值定理

四、典型例题

例1、求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$

$$\text{解.}\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

例2、n为正整数,求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+x^3+\cdots+x^n-n}{x-1}$

$$\text{解.原式}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x-1)(x+1)+\cdots+(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}[1 + (x+1) + (x^2+x+1) + \cdots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)]$$

$$= 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

例3、求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

解.原式 $= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{3}{2}$$

例4、求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$

解.原式 $=\lim\limits_{x\to 0}[(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}]^{-2}=e^{-2}$

例5、求 $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$

解　令 $x-\pi=t$,当 $x\to\pi$ 时 $t\to 0$.

$$则\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}-\frac{\sin t}{t}=-1$$

例6 当$|x|<1$时，

求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$.

解 将分子、分母同乘以因子(1-x), 则

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

$$=\frac{1}{1-x}.\qquad (\because 当|x|<1时, \lim_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0.)$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

错解 当$x\to 0$时， $\tan x\sim x,\quad \sin x\sim x.$

原式 $\cancel{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{(2x)^3}=0.$

解 当$x\to 0$时， $\sin 2x\sim 2x,$

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3,$$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\dfrac{1}{16}.$

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A(>0)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$,则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=A^B$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a} e^{\ln f(x)^{g(x)}}=\lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}=e^{B\ln A}=e^{\ln A^B}=A^B$$

注意 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$不满足此条件

$$\lim_{x\to x_0}\alpha=\lim_{x\to x_0}\beta=0,\text{且}\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=A$$

$$\lim_{x\to x_0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(\alpha\to 0)}}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}=e^A$$

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b\ln a}$$

$$\sin x \sim x, \ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0)$$

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sin x}\ln(1+3x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\times 3x} = e^6$$

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{2\cdot 3x}{\sin x}} = e^6$$

例8、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}$

解.原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{mx}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\frac{mx}{2})^2}{x^2}=\dfrac{m^2}{2}$

例9、求 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

$$\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}\cdot\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{1}{\sin a}}$$

$$=\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\frac{1}{\sin a}}$$

$$\text{而}\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos a,$$

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\cos a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\cos a}}=e.$$

$$\therefore\ \lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=e^{\frac{\cos a}{\sin a}}=e^{\cot a}$$

例10. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$,求$a$、$b$的值.

解： 显然， $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b}{x}=0$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2+x}-a-\frac{b}{x})=0$, $a=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2+x}-\frac{b}{x})=1$,

$$b=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1-x^2-x}{x+1})=\lim_{x\to\infty}(\frac{1-x}{x+1})=-1$$

$y=ax+b=x-1$称为$y=\frac{x^2+1}{x+1}$的斜渐近线

例11 设$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，且$f(0)=f(1)$，

证明必有一点$\xi\in[0,1]$使得$f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$.

证明 令 $F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$，

则 $F(x)$在$[0,\frac{1}{2}]$上连续.

$\because F(0)=f(\frac{1}{2})-f(0)$，　$F(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2})$，

讨论：若$F(0)=0$，　则$\xi=0$，　$f(0+\frac{1}{2})=f(0)$；

若$F(\frac{1}{2})=0$，　则$\xi=\frac{1}{2}$，　$f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$；

若$F(0)\neq 0, F(\frac{1}{2})\neq 0$, 则

$$F(0)\cdot F(\frac{1}{2}) = -[f(\frac{1}{2})-f(0)]^2 < 0.$$

由零点定理知，$\exists\xi\in(0,\frac{1}{2})$, 使$F(\xi)=0$.

即 $f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$成立.

综上，必有一点$\xi\in[0,\frac{1}{2}]\subset[0,1]$,

使 $f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$ 成立.

例12 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

解 因为 $\sin x \sim x$, $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$

$$原极限 = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

例13 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{(1-e^x)\sin(x^2)}$

解 $$原极限 = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{(-x)\cdot x^2} = -\frac{1}{2}$$

例14 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3\cdot(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{4}$$

例15 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(e^{\sin x-x}-1)}{\sin x-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(\sin x-x)}{\sin x-x}$

$$=\lim_{x\to 0}e^x=1$$

定理：如果数列$\{x_n\}$收敛于a，则它的任何子列也收敛，且收敛于a.

定理　归结原则(海涅定理)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A(\text{或}\infty)\Leftrightarrow$$

对满足$x_n\neq x_0$且$x_n\to x_0$的任何数列$\{x_n\}$，必有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A(\text{或}\infty)$$

无穷大量的运算性质:

（1） 若在 x 的某趋限过程中 $f(x)$ 是无穷大,

则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小

（2） 若在 x 的某趋限过程中 $f(x)$ 是无穷小,

且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大

（3）在 x 的某趋限过程中，若 $f(x)$ 是无穷大，

$g(x)$ 是有界量，则 $f(x)+g(x)$ 是无穷大，

即, 有界量加无穷大是无穷大

（4）在 x 的某趋限过程中,若 $f(x)$ 是无穷大，

$g(x)$ 满足 $|g(x)| \geq M > 0$，则 $f(x)g(x)$ 是无穷大

说明:（1） 有界量乘无穷大未必是无穷大！

反例: $f(x) = x\sin x$， $x \to \infty$

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$

则称直线 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的垂直渐近线

(3) 无穷大量 $\pm$ 无穷大量 $\neq$ 无穷大量

反例: $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{1+x}$， $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

（4） $\dfrac{\text{无穷大量}}{\text{无穷大量}} \neq$ 无穷大量

反例： $f(x)=x\,,\,g(x)=x^2$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

作业：提高练习一

• END

补充

高阶无穷小的运算规律

$x \to 0$时

(1). $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^k)$

其中$k = \min\{m, n\}$

(2). $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

(3). $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

(4). $\varphi(x) \cdot o(x^n) = o(x^n)$

其中$\varphi(x)$为有界

如 $o(x^3) \pm o(x^5) = o(x^3)$

$$\frac{o(x^3) \pm o(x^5)}{x^3}$$

$$= \frac{o(x^3)}{x^3} \pm \frac{o(x^5)}{x^5} \cdot x^2 \to 0$$

$$o(x^3) \pm o(x^3) = o(x^3)$$

(2). $$\frac{o(x^m) \cdot o(x^n)}{x^{m+n}}$$

$$= \frac{o(x^m)}{x^m} \cdot \frac{o(x^n)}{x^n} \to 0$$

例16. 求函数 $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ 的斜渐近线

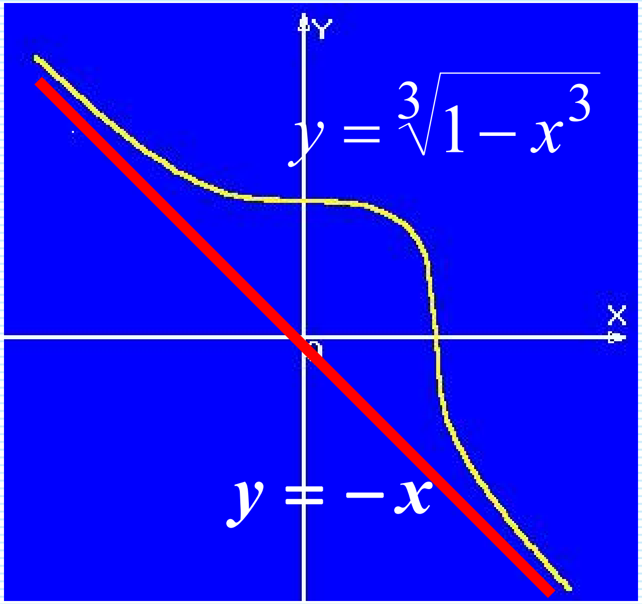
解: $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}=-1=a$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}\underbrace{-x\sqrt[3]{1-x^3}}_{+}+x^2}$$

$$=0$$



$\therefore\ y=-x$ 是 $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ 的斜渐近线