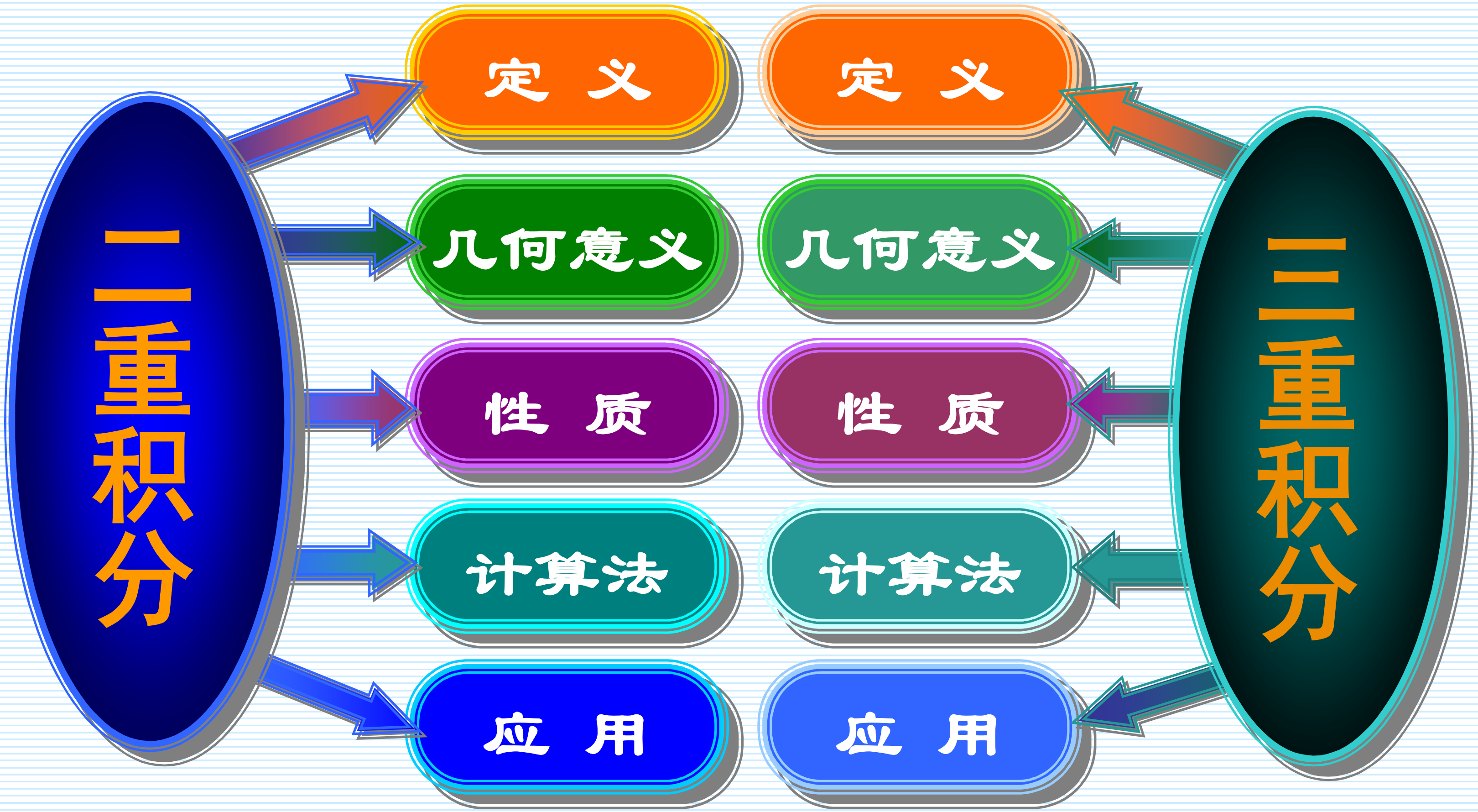
高等数学(二)

第十章 重积分

习 题 课

主讲人：熊小峰

一、主要内容



1、二重积分的定义

$f(x,y)$，平面区域D，分割$\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$，

$\forall(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，$f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D f(x,y)d\sigma$$

2、二重积分的几何意义

当被积函数大于零时，二重积分是柱体的体积.

当被积函数小于零时，二重积分是柱体的体积的负值.

3、二重积分的性质

性质1 当 k 为常数时，

$$\iint_D kf(x,y)d\sigma = k\iint_D f(x,y)d\sigma.$$

性质2 $$\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]d\sigma$$

$$= \iint_D f(x,y)d\sigma \pm \iint_D g(x,y)d\sigma.$$

性质3　对区域具有可加性($D = D_1 + D_2$)

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

性质4　若σ为D的面积 $\sigma = \iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma.$

性质5　若在D上，$f(x,y) \le g(x,y)$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma.$$

特殊地　$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma.$

性质6 设M、m分别是$f(x,y)$在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ为 D 的面积，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$$

（二重积分估值不等式）

性质7 设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续，σ为D的面积，则在 D 上至少存在一点(ξ,η)使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma.$$

（二重积分中值定理）

4、二重积分的计算

（1）直角坐标系下

【X—型】 先对y积分,后对x积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

【Y—型】 先对x积分,后对y积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

（2）极坐标系下

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

5、二重积分的应用

(1) 体积

在曲面 $z = f(x,y)$ 与区域 D 之间直柱体的体积为

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

(2) 曲面面积

设S曲面的方程为：$z = f(x,y)$.

曲面S的面积为 $A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy;$

(3) 重心

设有一平面薄片，占有xoy面上的闭区域D，在点(x, y)处的面密度为$\rho(x, y)$，假定$\rho(x, y)$在D上连续，平面薄片的重心为

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D x\rho(x, y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x, y)d\sigma}, \qquad \bar{y} = \frac{\iint\limits_D y\rho(x, y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x, y)d\sigma}.$$

当薄片是均匀的，重心称为形心.

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint\limits_D x d\sigma, \quad \bar{y} = \frac{1}{A}\iint\limits_D y d\sigma. \text{ 其中 } A = \iint\limits_D d\sigma$$

(4) 转动惯量

设有一平面薄片，占有xoy面上的闭区域D，在点(x,y)处的面密度为$\rho(x,y)$，假定$\rho(x,y)$在D上连续，平面薄片对于x轴和y轴的转动惯量为

薄片对于x轴的转动惯量

$$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma,$$

薄片对于y轴的转动惯量

$$I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma.$$

(5) 引力

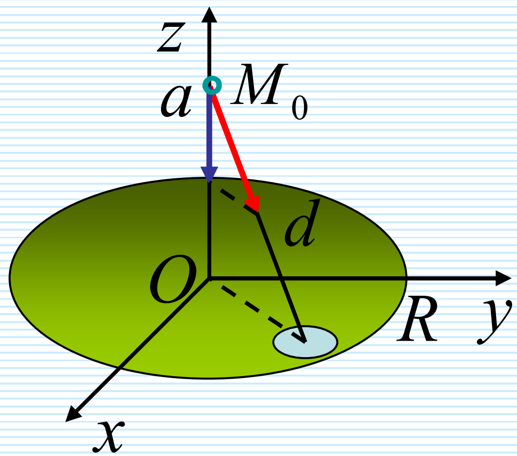
设有一平面薄片，占有xoy面上的闭区域D，在点(x,y)处的面密度为$\rho(x,y)$，假定$\rho(x,y)$在D上连续，计算该平面薄片对位于z轴上的点$M_0(0,0,a)$处的单位质点的引力．$(a>0)$

薄片对z轴上单位质点的引力 $F=\{F_x,F_y,F_z\}$,

$$F_x=G\iint_D\frac{\rho(x,y)x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma,$$

$$F_y=G\iint_D\frac{\rho(x,y)y}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma,$$

$$F_z=-aG\iint_D\frac{\rho(x,y)}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma.$$



G为引力常数

补充: 二重积分的换元法

定理:设$f(x,y)$在xOy平面上的闭区域D上连续,变换

$$T: x = x(u,v), y = y(u,v),$$

将uOv平面上的闭区域D'变为xOy平面上的D,且满足:

(1) $x(u,v), y(u,v)$在D'上具有一阶连续偏导数;

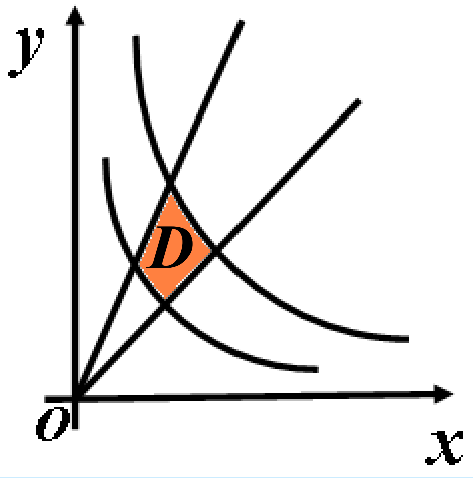
(2)在D'上雅可比行列式

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0;$$

(3)变换$T: D' \to D$是一一对应的,则有

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f[x(u,v), y(u,v)]\,|J(u,v)|\,dudv$$

例：$\iint\limits_D x^2y^2dxdy$,其中$D$是由两条双曲线$xy=1$和$xy=2$,直线$y=x$和$y=4x$所围成的在第一象限 内的区域.



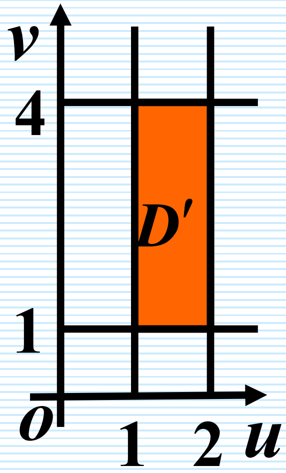
解：令$u=xy, v=\dfrac{y}{x}$ $\quad T: D \to D'$,

D'：由$u=1, u=2, v=1, v=4$围成.

$$x=\sqrt{\frac{u}{v}}, y=\sqrt{uv}$$

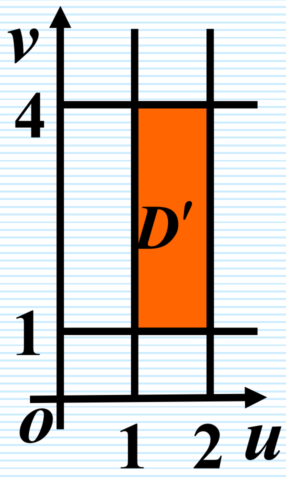
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2v}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{vmatrix}=\frac{1}{2v}$$



$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}}\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v}$$



D'：由$u=1, u=2, v=1, v=4$围成.

$$\iint\limits_{D} x^2y^2\,dxdy=\iint\limits_{D'} u^2\,|J|\,dudv=\int_1^2 du\int_1^4 \frac{u^2}{2v}dv=\frac{7}{3}\ln 2$$

6、三重积分的定义

$f(x,y,z)$, 空间立体Ω, 分割Δv_1, $\Delta v_2,\cdots,\Delta v_n$,

$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta v_i$, $\quad f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta v_i$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i.$$

7、三重积分的几何意义

当$f(x,y,z)=1$时,

$\iiint_\Omega dv=V$ 表示空间区域的体积.

8、三重积分的性质

类似于二重积分的性质.

9、三重积分的计算

(1) 直角坐标

投影法(先一后二)，　　截面法(先二后一)，

(2) 柱面坐标 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$ $\quad dv = \rho d\rho d\theta dz,$

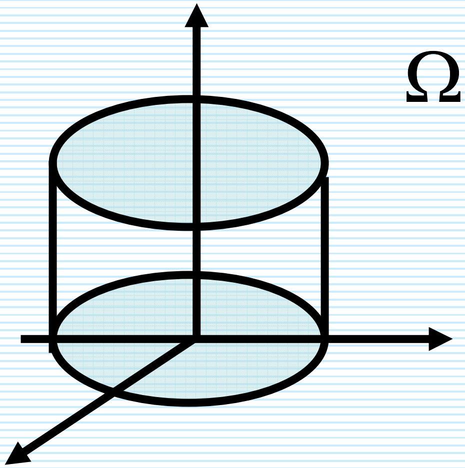
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho d\rho d\theta dz.$$

(3) 球面坐标

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases} \qquad dv = r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta,$$

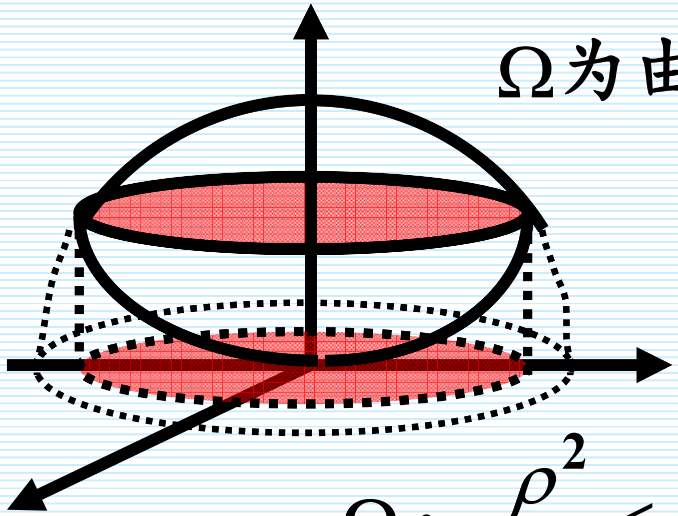
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\, r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta.$$



Ω由$z=0, z=a(a>0), x^2+y^2=R^2$围成.

$$\Omega:\begin{cases}0\le z\le a\\ 0\le\rho\le R\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}\quad(用柱面坐标)$$



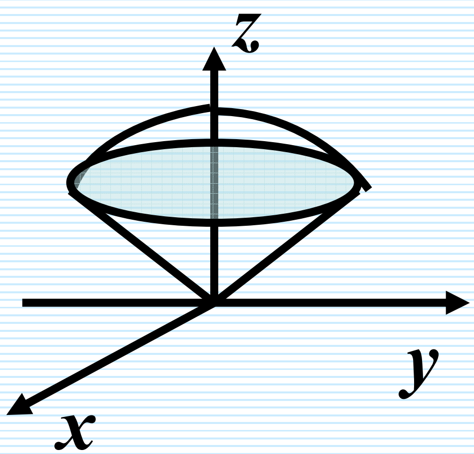
Ω为由$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$与$3z=x^2+y^2$所围.

$$交线\begin{cases}z=1\\ x^2+y^2=3\end{cases}$$

$$\Omega:\ \frac{\rho^2}{3}\le z\le\sqrt{4-\rho^2}, 0\le\rho\le\sqrt{3}, 0\le\theta\le 2\pi.$$

(用柱面坐标或截面法)

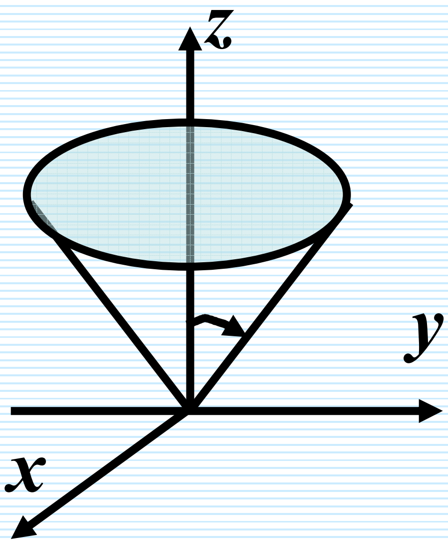
Ω 由 $x^2+y^2+z^2 \le 2a^2$ 与 $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$ 所围 成



球面坐标 $\Omega: \quad 0 \le r \le \sqrt{2}a, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$

柱面坐标 $\Omega: \rho \le z \le \sqrt{2a^2-\rho^2}, 0 \le \rho \le a, 0 \le \theta \le 2\pi,$

Ω是锥面$x^2+y^2=z^2$与平面$z=a\ (a>0)$所围



球面坐标　$\Omega:\ 0\le r\le \dfrac{a}{\cos\varphi},\ \ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4},\ \ 0\le\theta\le 2\pi,$

柱面坐标　$\Omega: \rho\le z\le a,\ 0\le\rho\le a, 0\le\theta\le 2\pi,$

用对称性计算重积分

总习题十

2. 选择以下各题中给出的四个结论中一个正确的结论:

(1)设有空间闭区域$\Omega_1=\{(x, y, z)|x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0\}$,

$\Omega_2=\{(x, y, z)|x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$, 则有 $\underline{\quad C \quad}$.

$$(A)\iiint\limits_{\Omega_1} x dv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x dv; \quad (B)\iiint\limits_{\Omega_1} y dv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y dv;$$

$$(C)\iiint\limits_{\Omega_1} z dv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z dv; \quad (D)\iiint\limits_{\Omega_1} xyz dv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz dv.$$

3．(4) $\iint\limits_D (y^2+3x-6y+9)d\sigma$,

其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$.

解 因为积分区域 D 关于 x 轴、y 轴对称,

$$\iint\limits_D 3x d\sigma=\iint\limits_D 6y d\sigma=0,\qquad \iint\limits_D 9d\sigma=9\iint\limits_D d\sigma=9\pi R^2$$

$$\iint\limits_D y^2 d\sigma=\iint\limits_D x^2 d\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R \rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{\pi}{4}R^4$$

$$\iint\limits_D (y^2+3x-6y+9)d\sigma=9\pi R^2+\frac{\pi}{4}R^4$$

9(3) $\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)dv$, 其中Ω是由 xOy 面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

解　曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面的方程为 $y^2+z^2=2x$. 由曲面 $y^2+z^2=2x$ 和平面 $x=5$ 所围成的闭区域Ω在 yOz 面上的投影区域为　$D_{yz}: y^2+z^2\le(\sqrt{10})^2$

在柱面坐标下此区域又可表示为

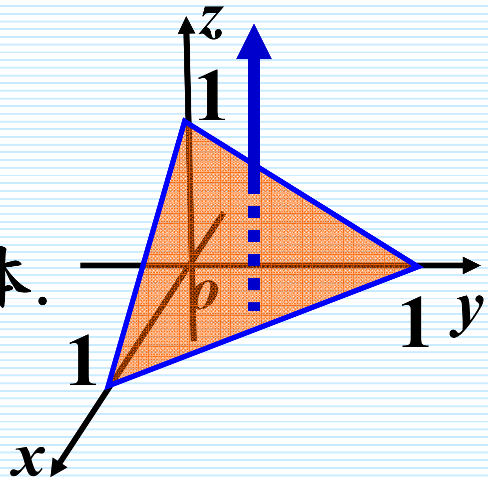
$$D_{yz}: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le\sqrt{10}, \frac{1}{2}\rho^2\le x\le 5$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{10}}d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{5}\rho^2\cdot\rho dx$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{10}}\rho^3(5-\frac{1}{2}\rho^2)d\rho=\frac{250}{3}\pi$$

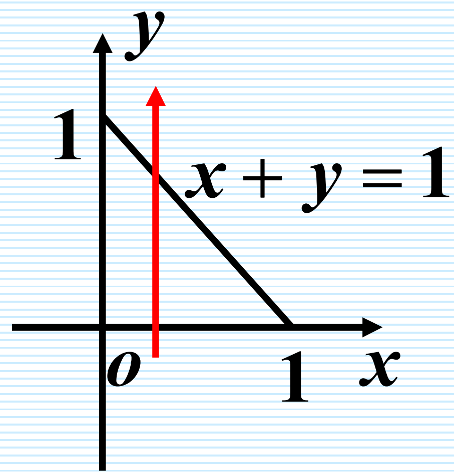
习题10–3

5. 计算$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 为平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的四面体.



解 积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)|\ 0\le z\le 1-x-y,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le x\le 1\},$$



$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8})$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} [\frac{1}{-2(1+x+y+z)^2}]_0^{1-x-y} dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} [\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8}] dy$$

$$= \int_0^1 [\frac{1}{-2(1+x+y)} - \frac{1}{8} y]_0^{1-x} dx = \int_0^1 [\frac{1}{2(1+x)} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8} x] dx$$

$$= [\frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{3}{8} x + \frac{1}{16} x^2]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{5}{8})$$

习题10—3，9. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$

及平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

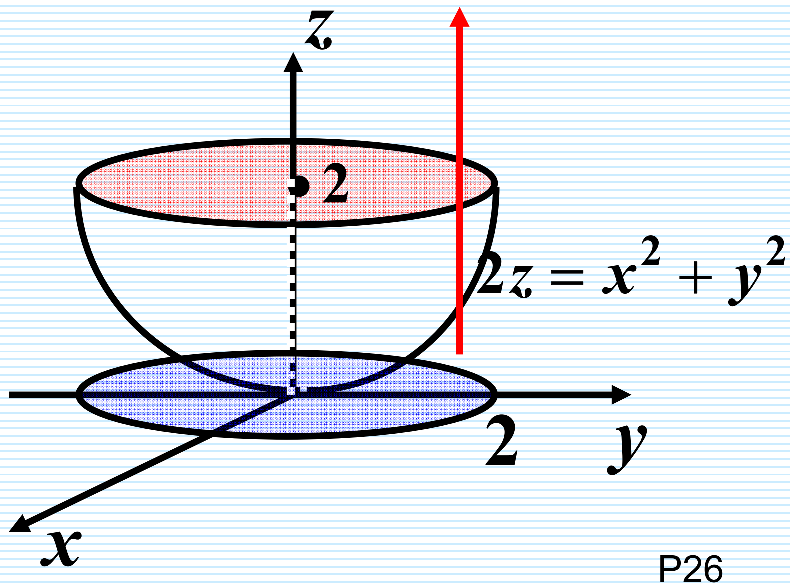
解 Ω: $0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\rho\le2,\ \dfrac{\rho^2}{2}\le z\le 2,$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{2}dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(2\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5)d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{8}{3}d\theta=\frac{16}{3}\pi$$



(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$

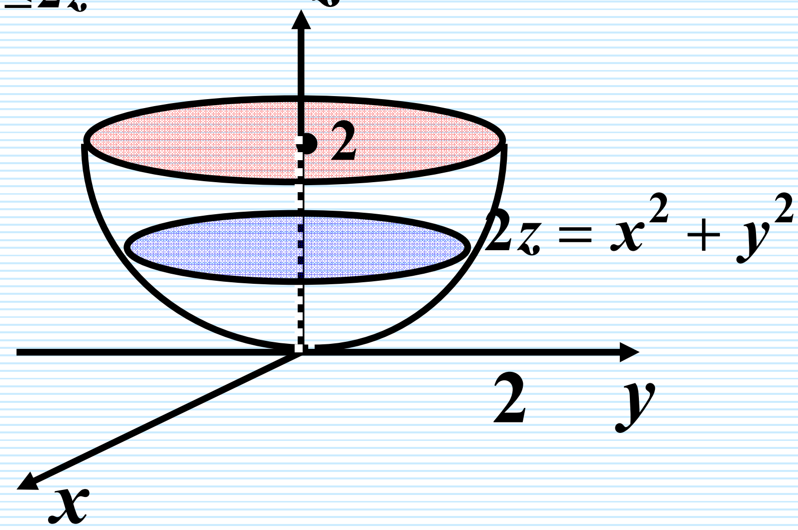
及平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

解 $\Omega: x^2+y^2 \le 2z, 0 \le z \le 2$, 用截面法

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv = \int_0^2 dz \iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}(x^2+y^2)dxdy$$

$$= \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^3 d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^2 z^2 dz = \frac{16}{3}\pi$$



二、典型例题

例1 计算 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma$. 其中 D 由 $y = x, y = \frac{1}{x}, x = 2$ 围成.

例2 计算 $\iint\limits_D \left| y - x^2 \right| d\sigma$. 其中 $D: -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

例3 更换积分次序 $I = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy$. $(a > 0)$

例4 计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$. 其中 D 是由心脏线 $\rho = a(1 + \cos\theta)$ 和圆 $\rho = a$ 所围的面积（取圆外部）.

例5 计算 $I=\iint\limits_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy$. 其中 D 由 $x+y=1$, $x=0$ 及 $y=0$ 所围成.

例6 证明

$$\int_a^b dx\int_a^x (x-y)^{n-2} f(y)dy=\frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1} f(y)dy.$$

例7 计算 $\iiint\limits_\Omega (x+z)dv$, 其中 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的.

例8 计算 $\iiint\limits_\Omega e^{|z|}dv$, $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$.

例9 证明

$$\int_0^x\left[\int_0^v\left(\int_0^u f(t)dt\right)du\right]dv=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt.$$

例 10 求曲面 $x^2+y^2+z^2\le 2a^2$ 与 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体体积.

例 11 计算 $I=\iiint_\Omega (x^2+y^2)dxdydz$，其中 Ω 是锥面 $x^2+y^2=z^2$，与平面 $z=a\quad(a>0)$ 所围的立体.

例 12. 设 $f(u)$ 具有连续导数,求

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dv\qquad \Omega:\ x^2+y^2+z^2\le t^2$$