

# 《高等数学 (一)》2018-2019 期终考试卷 A15

死抠

2019 年 4 月 20 日

## 一. 选择题

1. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$  为连续函数, 则  $a =$ \_\_\_\_  
A. 任意                      B. 0                      C. 2                      D. 1
2. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f'(0) =$ \_\_\_\_  
A. 1                      B. -1                      C. 0                      D. 不存在
3. 函数  $f(x)$  有连续二阶导数, 且  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = -2$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} =$ \_\_\_\_  
A. 不存在                      B. 0                      C. -1                      D. -2
4.  $\int \sec x \tan x \, dx =$ \_\_\_\_  
A.  $\tan x + C$                       B.  $\sec x + C$   
C.  $\arctan x + C$                       D.  $\operatorname{arccot} x + C$
5. 设  $f(x)$  的一个原函数是  $e^{-2x}$ , 则  $f(x)$  等于\_\_\_\_  
A.  $-2e^{-2x}$                       B.  $-4e^{-2x}$                       C.  $e^{-2x}$                       D.  $4e^{-2x}$
6.  $\int \cos e^x \, de^x =$ \_\_\_\_  
A.  $\sin e^x + C$                       B.  $-\sin e^x + C$   
C.  $\arcsin e^x + C$                       D.  $-\arcsin e^x + C$
7. 若  $\int_0^1 (x+k) \, dx = 2$ , 则  $k =$ \_\_\_\_  
A. 0                      B. 1                      C. -1                      D.  $\frac{3}{2}$
8. 下列反常积分中收敛的是\_\_\_\_  
A.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$                       B.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx$   
C.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x} \, dx$                       D.  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} \, dx$

## 二. 填空题

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} =$ \_\_\_\_\_
2.  $y = x^n$  ( $n$  是正整数) 的  $n$  阶导数是\_\_\_\_\_
3. 当  $a =$ \_\_\_\_\_ 时函数  $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$  在  $x = \frac{\pi}{3}$  处取极大值
4.  $\int \sec x (\sec x - \tan x) \, dx =$ \_\_\_\_\_
5. 经过点  $(1, 2)$  且其切线的斜率为  $2x$  的曲线方程是\_\_\_\_\_
6. 通过定积分的几何意义知  $\int_{-1}^1 (1+x) \sqrt{1-x^2} \, dx =$ \_\_\_\_\_
7. 比较大小  $\int_1^3 x^2 \, dx$  \_\_\_\_\_  $\int_1^3 x^3 \, dx$

8. 由  $y = x^2 + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 0$  所围平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得立体的体积用定积分表示为\_\_\_\_\_

三. 大题

1. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x+3}$

2. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{-t^2} dt}{x^3}$

3. 设  $y = \sin(x^2)$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$

4. 计算不定积分  $\int \sin^3 x dx$

5. 计算不定积分  $\int x \ln x dx$

6. 计算广义积分  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

7. 计算  $\int_1^5 \frac{\sqrt{u-1}}{u} du$

8. 已知

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于1的奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \end{cases},$$

求星形线  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$  围成的平面图形的面积, 其中  $a > 0$

9. 设  $f(x), g(x)$  均在  $[a, b]$  上连续, 证明在  $(a, b)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使得

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) dx$$

(提示: 辅助函数  $F(x) = \int_a^x f(t) dt \int_x^b g(t) dt$ )