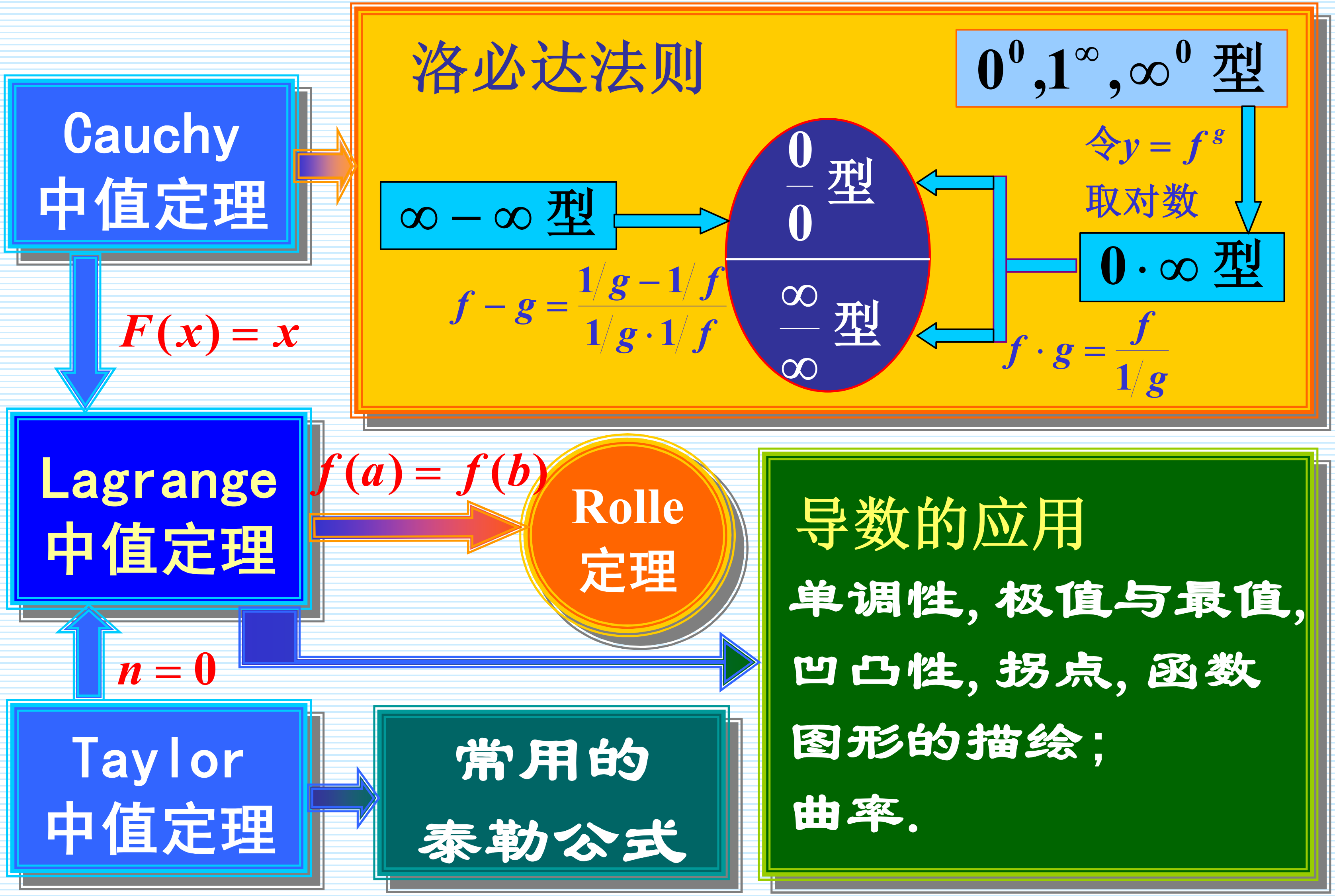
高等数学(一)

第三章 微分中值定理与导数的应用

习 题 课

主讲人：熊小峰

一、主要内容



Cauchy中值定理
$F(x)=x$
Lagrange中值定理
$f(a)=f(b)$
Rolle定理
$n=0$
Taylor中值定理
常用的泰勒公式
洛必达法则
$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型
令$y=f^g$
取对数
$0\cdot\infty$ 型
$\infty-\infty$ 型
$\frac{0}{0}$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$f-g=\frac{1/g-1/f}{1/g\cdot 1/f}$
$f\cdot g=\frac{f}{1/g}$
导数的应用
单调性，极值与最值，
凹凸性，拐点，函数
图形的描绘；
曲率.

二、典型例题

例1 验证罗尔定理对 $y=\ln\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 上的正确性.

解 $\because D: 2k\pi < x < 2k\pi+\pi, \quad (k=0,\pm1,\cdots)$

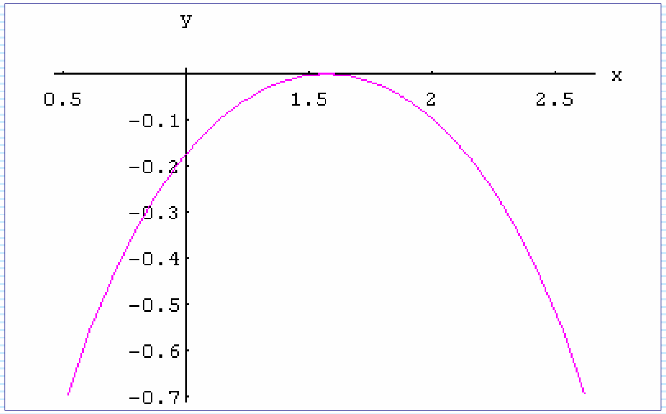
且在 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 上连续.

又 $y'=\cot x$ 在 $(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$ 内处处存在

并且 $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{5\pi}{6})=-\ln 2$

$\therefore$ 函数 $y = \ln\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上满足罗尔定理的条件.

由 $y' = \cot x = 0,$



在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 内显然有解 $x = \frac{\pi}{2}.$

取 $\xi = \frac{\pi}{2},$ 则 $f'(\xi) = 0.$

这就验证了命题的正确性.

例2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

解　$\because$ 分子关于 x 的次数为 2.

$$\therefore \sqrt[5]{1+5x}=(1+5x)^{\frac{1}{5}}$$

$$=1+\frac{1}{5}(5x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\cdot(5x)^2+o(x^2)$$

$$=1+x-2x^2+o(x^2)$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{[1+x-2x^2+o(x^2)]-(1+x)}=-\frac{1}{2}.$$

例3 证明当 $x>0$ 时，$\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x}$

证 要证 $(1+x)\ln(1+x)>\arctan x$,

即证 $(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$.

设 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$,

$$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}>0(x>0)$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

因此, 当 $x>0$ 时, $f(x)>f(0)=0$,

即 $(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$

例 4　证明当$0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$时，$\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$;

证明　令$f(x)=\frac{\tan x}{x},\ x\in(0,\frac{\pi}{2}).$　　$\frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1}$

$$f'(x)=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2},\ 令g(x)=x\sec^2 x-\tan x,$$

$$g'(x)=\sec^2 x+2x\sec x\sec x\tan x-\sec^2 x$$

$$=2x\sec^2 x\tan x>0,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

当$x\in[0,\frac{\pi}{2})$时，$g(x)$单调增加，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$g(x)>g(0)=0$

当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调增加，

$$0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2},\quad \frac{\tan x_1}{x_1}<\frac{\tan x_2}{x_2}$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}$

(其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n>0$).

令$y=[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}=[g(x)/n]^{nx}$

$$\because \lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{n[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot(a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n)\cdot(\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'}$$

$$= \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n = \ln(a_1 a_2 \cdots a_n)$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \ln(a_1 a_2 \cdots a_n)$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} [(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx} = \lim_{x\to\infty} y = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

例6 设$f''(x_0)$存在, 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$$

证明: $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{[f'(x_0+h)-f'(x_0)]+[f'(x_0)-f'(x_0-h)]}{h}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)] = f''(x_0)$$

例 7 试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值？它是极大值还是极小值？并求此极值.

解： $f'(x)=a\cos x+\cos 3x$, $f''(x)=-a\sin x-3\sin 3x$.

要使函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值，必有 $f'(\frac{\pi}{3})=0$,

即 $a\cdot\frac{1}{2}-1=0$, $a=2$. 当 $a=2$ 时， $f''(\frac{\pi}{3})=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}<0$.

因此，当 $a=2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值，

而且取得极大值，极大值为 $f(\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}$.

总习题三

1. 填空:设常数 $k>0$, 函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为__________.

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$$

令 $f'(x)=0$, 得唯一驻点 $x=e$， $f(e)=k>0$.

当 $x>e, f'(x)<0, f(x)$ 单调减少，

当 $0<x<e, f'(x)>0, f(x)$ 单调增加，

又因为 $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=-\infty$， $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$，

所以曲线经过 x 轴两次，即零点的个数为 2.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设在[0, 1]上 $f''(x)>0$, 则 $f'(0)$, $f'(1)$, $f(1)-f(0)$或 $f(0)-f(1)$几个数的大小顺序为(**B**).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$; (B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$;

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$; (D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

因为 $f''(x)>0$, 所以 $f'(x)$在[0, 1]上单调增加,

从而 $f'(1)>f'(x)>f'(0)$.

由拉格朗日中值定理, 有 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$, $\xi\in(0, 1)$,

$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

6. 设$a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，证明多项式

$f(x)=a_0+a_1x+\cdot\cdot\cdot+a_nx^n$ 在(0,1)内至少有一个零点.

证明 设$F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$,

则 $F(x)$在[0, 1]上连续，在(0, 1)内可导,

且 $F(0)=F(1)=0$.

由罗尔定理，在(0, 1)内至少有一个点ξ,

使 $F(\xi)=0$.　而 $F'(x)=f(x)$,

所以 $f(x)$在(0, 1)内至少有一个零点.

9. 设 $f(x)$、$g(x)$都是可导函数，且$|f'(x)|<g'(x)$，证明：当 $x>a$ 时，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

证明 由条件$|f'(x)|<g'(x)$得知，$\left|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|<1$，且有 $g'(x)>0$，$g(x)$是单调增加的，当 $x>a$ 时，$g(x)>g(a)$.

因为 $f(x)$、$g(x)$可导，所以 $f(x)$、$g(x)$ 在$[a,x]$上连续，在(a,x)内可导，根据柯西中值定理，$\exists\xi\in(a,x)$，使

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad \therefore \frac{|f(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)}=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|<1$$

$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

14. 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项.

解 令 $f(x)=\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$, 则 $\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x$,

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\ln x=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$$

$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$, 令 $f'(x)=0$, 得唯一驻点 $x=e$.

因为当 $0<x<e$ 时, $f'(x)>0$; 当 $x>e$ 时, $f'(x)<0$,

所以唯一驻点

$x=e$ 为最大值点. 因此所求最大项为$\max\{\sqrt{2},\sqrt[3]{3}\}=\sqrt[3]{3}$.

选择题：

1、一元函数微分学的三个中值定理的结论都有一个共同点，即（ D）

（A） 它们都给出了ξ点的求法 .

（B） 它们都肯定了ξ点一定存在，且给出了求ξ的方法.

（C） 它们都先肯定了 ξ点一定存在，而且如果满足定理条件，就都可以用定理给出的公式计算ξ的值 .

（D） 它们只肯定了ξ的存在，却没有说出ξ的值是什么，也没有给出求ξ的方法 .

2、 若 $f(x)$在(a,b)可导且$f(a)=f(b)$, 则（D）

（A） 至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$；

（B） 一定不存在点$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$；

（C） 恰存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$；

（D） 对任意的$\xi\in(a,b)$，不一定能使$f'(\xi)=0$.

3、若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $x\in(a,b)$时，$f'(x)>0$，又$f(a)<0$, 则（D）.

（A） $f(x)$在$[a,b]$上单调增加，且$f(b)>0$；

（B） $f(x)$在$[a,b]$上单调增加，且$f(b)<0$；

（C） $f(x)$在$[a,b]$上单调减少，且$f(b)<0$；

（D） $f(x)$在$[a,b]$上单调增加，但$f(b)$的正负号无法确定.

4、$f'(x_0)=0$是可导函数$f(x)$在x_0点处有极值的（ B ）.

（A）充分条件；

（B）必要条件

（C）充要条件；

（D）既非必要又非充 分 条件.

5、若在(a,b)内，函数$f(x)$的一阶导数$f'(x)>0$，二阶导数$f''(x)<0$，则函数$f(x)$在此区间内(D).

（A） 单调减少，曲线是凹的；

（B） 单调减少，曲线是凸的；

（C） 单调增加，曲线是凹的；

（D） 单调增加，曲线是凸的.

7、设$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$，且在点 a 的某

邻域中（点 a 可除外），$f(x)$及$F(x)$都存在，

且$F(x)\neq 0$, 则$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$存在是$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$

存在的（ B ）.

（A）充分条件；　　（B）必要条件；

（C）充分必要条件；（D）既非充分也非必要条件 .

8.设$f(x)$有二阶连续导数,且$f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|}=1$,则(B)

A. $f(0)$是$f(x)$的极大值点；

B. $f(0)$是$f(x)$的极小值点；

C. $(0, f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点；

D. $f(0)$不是$f(x)$的极值点，$(0, f(0))$也不是曲线

$y=f(x)$的拐点.

8. 设$f(x)$有二阶连续导数，且$f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则（B）.

A. $f(0)$是$f(x)$的极大值；

B. $f(0)$是$f(x)$的极小值；

C. $(0,f(0))$是曲线$f(x)$的拐点；

D. $f(0)$不是$f(x)$的极值，$(0,f(0))$也不是曲线$f(x)$的拐点.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|}=1>0,\quad \frac{f''(x)}{|x|}>0 \qquad \forall x\in U^{o}(0,\delta),\ f''(x)>0,$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,\quad f(x)-f(0)=\frac{f''(\xi)}{2!}x^2>0$$

$\forall x\in U^{o}(0)$，$f(x)>f(0)$，即$f(0)$是$f(x)$的极小值.

补充题

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，且 $f(1)=0$，求证存在 $\xi\in(0,1)$，使 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$

n=1即为总习题三7题

思路：

由结论出发

$$nf(x)+xf'(x)=0 \Rightarrow nx^{n-1}f(x)+x^n f'(x)=0$$

$$\Rightarrow (x^n)'f(x)+x^n f'(x)=0 \quad \Rightarrow [x^n f(x)]'=0$$

设辅助函数 $\varphi(x)=x^n f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件，

2. 设 $f''(x)<0$, $f(0)=0$ 证明对任意 $x_1>0, x_2>0$ 有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

证: 不妨设 $0<x_1<x_2$

$$\because \quad f(x_1+x_2)-f(x_2)-f(x_1)$$

$$=\left[f(x_1+x_2)-f(x_2)\right]-\left[f(x_1)-f(0)\right]$$

$$=f'(\xi_2)x_1-f'(\xi_1)x_1 \quad (x_2<\xi_2<x_1+x_2,\ 0<\xi_1<x_1)$$

$$=x_1 f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)<0 \qquad (\xi_1<\xi<\xi_2)$$

$$\therefore \quad f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$, $f(3)=1$, 试证必存在 $\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$. (2003考研)

证：因 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以在 $[0,2]$ 上连续，且在 $[0,2]$ 上有最大值 M 与最小值 m，故

$$m\le f(0),\ f(1),\ f(2)\le M \Longrightarrow m\le\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$$

由介值定理，至少存在一点 $c\in[0,2]$, 使

$$f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

$\because f(c)=f(3)=1$, 且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续，在 $(c,3)$ 内可导，

由罗尔定理知，必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

5.设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,$f(0)=f(1)=0$,

$f(\frac{1}{2})=1$，证明:至少存在$\xi\in(0,1)$, 使$f'(\xi)=1$

令$F(x)=f(x)-x$，则在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,

$F(0)=0, F(1)=-1, F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

由零点定理，$\exists c\in(\frac{1}{2},1)$,使$F(c)=0$

显然$F(x)$在$[0,c]$上满足罗尔定理条件，

$\xi\in(0,c)\subset(0,1)$, 使$f'(\xi)=1$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=f(1)$,

且 $|f''(x)|\le 2$, 证明 $|f'(x)|\le 1$.

证: $\forall x\in[0,1]$, 由泰勒公式得

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2 \quad (0<\eta<1)$$

$$f(0)=f(x)-f'(x)\,x+\frac{1}{2}f''(\xi)\,x^2 \quad (0<\xi<1)$$

两式相减得 $0=f'(x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$

$$\therefore \quad |f'(x)|=\left|\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\right|$$

$$\le\frac{1}{2}|f''(\eta)|(1-x)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi)|x^2$$

$$\le(1-x)^2+x^2=1-2x(1-x)\le 1, \quad x\in[0,1]$$