§ 4.2 方差

引例 甲、乙两射手各打了10发子弹，每发子弹 击中的环数分别为：

甲	10, 6, 7, 10, 8, 9, 9, 10, 5, 10
乙	8, 7, 9, 10, 9, 8, 7, 9, 8, 9

有六个不同数据

仅有四个不同数据

问哪一个射手的技术较好？

解 首先比较平均环数

$$\overline{\text{甲}} = 8.4, \quad \overline{\text{乙}} = 8.4$$

再比较稳定程度

甲： $4\times(10-8.4)^2+2\times(9-8.4)^2+(8-8.4)^2$

$+(7-8.4)^2+(6-8.4)^2+(5-8.4)^2$

$=30.4$

乙： $(10-8.4)^2+4\times(9-8.4)^2$

$+3\times(8-8.4)^2+2\times(7-8.4)^2$

$=6.44$

乙比甲技术稳定

进一步比较平均偏离平均值的程度

甲 $$\frac{1}{10}\{4\times(10-8.4)^2+2\times(9-8.4)^2+(8-8.4)^2$$

$$+(7-8.4)^2+(6-8.4)^2+(5-8.4)^2\}$$

$$=3.04\triangleq\sum_{k=1}^{6}\left(x_k-E(X)\right)^2 p_k$$

乙 $$\frac{1}{10}\{(10-8.4)^2+4\times(9-8.4)^2$$

$$+3\times(8-8.4)^2+2\times(7-8.4)^2\}$$

$$=0.644\triangleq\sum_{k=1}^{4}\left(x_k-E(X)\right)^2 p_k$$

一、方差的概念

定义　若$E\,((X-E(X))^2)$ 存在，则称其为随机变量 X 的方差，记为$D\,(X\,)$

$$D\,(X\,)=E\,((X-E(X))^2)$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为X 的均方差.

$(X-E(X))^2$ —— 随机变量X 的取值偏离平均值的情况，是X的函数，也是随机变量

$E(X-E(X))^2$ —— 随机变量X的取值偏离平均值的平均偏离程度—— 数

1、若 X 为离散型 r.v.，分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1,2,\cdots$$

$$\boxed{D(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(x_k - E(X)\right)^2 p_k}$$

2、若 X 为连续型r.v. ，概率密度为$f(x)$

$$\boxed{D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)dx}$$

计算方差的一个简化公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

证：$D(X)=E[X-E(X)]^2$

展开

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

$$=E(X^2)-2[E(X)]^2+[E(X)]^2$$

利用期望性质

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

二、方差的性质

1、 $D(C)=0$

2、 $D(aX)=a^2D(X)$

$$D(aX+b)=a^2D(X)$$

3、 $$\boxed{\begin{aligned}D(X\pm Y)&=D(X)+D(Y)\\&\pm 2E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)\end{aligned}}$$

特别地，若X,Y相互独立，则

$$\boxed{D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)}$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$a_1, a_2, \cdots, a_n, b$ 为常数

则 $$D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D(X_i)$$

若 X, Y 独立 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

$\Longleftrightarrow$ $E(XY) = E(X)E(Y)$

4、对任意常数 C，$D(X) \le E(X - C)^2$，

当且仅当 $C = E(X)$ 时等号成立

5、$D(X) = 0 \Longleftrightarrow P\{X = E(X)\} = 1$

称为 X 依概率 1 等于常数 $E(X)$

性质 1 的证明：

$$D(C)=E\left(C-E(C)\right)^2=0$$

性质 2 的证明：

$$D(aX+b)=E\left((aX+b)-E(aX+b)\right)^2$$

$$=E\left(a(X-E(X))+(b-E(b))\right)^2$$

$$=E\left(a^2(X-E(X))^2\right)$$

$$=a^2D(X)$$

性质 3 的证明：

$$D(X \pm Y) = E\big((X \pm Y) - E(X \pm Y)\big)^2$$

$$= E(X - E(X))^2 + E(Y - E(Y))^2$$

$$\pm 2E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$$

$$= D(X) + D(Y)$$

$$\pm 2E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$$

注意到 $E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

当 X, Y 相互独立时，

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

性质 4 的证明：

$$E(X-C)^2 = E((X-E(X))-(C-E(X)))^2$$

$$= E(X-E(X))^2 + (C-E(X))^2$$

$$= D(X) + (C-E(X))^2$$

当$C = E(X)$时，显然等号成立；

当$C \neq E(X)$时, $(C-E(X))^2 > 0$

$$E(X-C)^2 > D(X)$$

三、方差的计算

例1 设$X \sim P(\lambda)$, 求$D(X)$.

解 $$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda$$

$$\left.\begin{aligned} &E(X^2)=E(X(X-1))+E(X)\\ &E(X(X-1))=\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\\ &\qquad=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}=\lambda^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E(X^2)=\lambda^2+\lambda$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\lambda$$

例2 设$X \sim B(n, p)$，求$D(X)$.

解一 仿照上例求$D(X)$.

解二 引入随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}\, i\, \text{次试验事件}\, A\, \text{发生} \\ 0, & \text{第}\, i\, \text{次试验事件}\, \bar{A}\, \text{发生} \end{cases}$$

$$D(X_i) = p(1-p) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

故 $$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p)$$

例3 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $D(X)$

解 $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$

$$\overset{令\frac{x-\mu}{\sigma}=t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \sigma^2$$

常见随机变量的方差

分布	分布律	方差
参数为p 的 0-1分布	$P\{X=1\}=p$ $P\{X=0\}=1-p$	$p(1\text{-}p)$
$B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	$np(1\text{-}p)$
$P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots$	λ

分布	概率密度	方差
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
$E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	σ^2

例4 已知 X, Y 相互独立，且都服从 $N(0,0.5)$，求 $E(|X-Y|)$.

解 $X \sim N(0,0.5), Y \sim N(0,0.5)$

$$E(X-Y)=0, D(X-Y)=1$$

故 $X-Y \sim N(0,1)$

$$E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

例5 设

$$X \sim U\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), Y = g(X) = \begin{cases} \ln X, & X > 0, \\ 0, & X \le 0 \end{cases}$$

求 $E(Y), D(Y)$.

解 $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} g(x) \cdot 1 dx = \int_{0}^{+\frac{1}{2}} \ln x \cdot 1 dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x) f_X(x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \ln^2 x \cdot 1 dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2\frac{1}{2} + 1 - \ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 2 + 1 + \ln 2$$

$$D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln^2 2 + 1 + \ln 2\right) - \left(-\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\ln^2 2 + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}$$

例6 在 [0, 1] 中随机地取两个数 X , Y , 求 $D(\min\{X, Y\})$

解

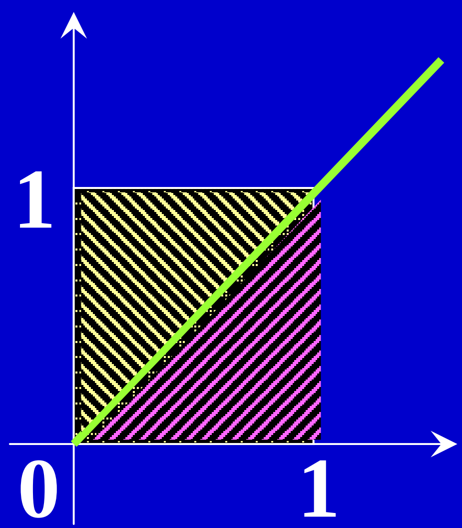
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(\min\{X,Y\})$$

$$=\iint\limits_{\substack{0<x<1\\0<y<1}} \min\{x,y\}dxdy$$

$$=\int_0^1\left(\int_x^1 xdy\right)dx+\int_0^1\left(\int_y^1 ydx\right)dy$$

$$=\frac{1}{3}$$



$$E(\min{}^2\{X,Y\})$$

$$=\int_0^1\left(\int_x^1 x^2\,dy\right)dx+\int_0^1\left(\int_y^1 y^2\,dx\right)dy$$

$$=\frac{1}{6}$$

$$D(\min\{X,Y\})$$

$$=E\left(\min{}^2\{X,Y\}\right)-E^2(\min\{X,Y\})$$

$$=\frac{1}{18}$$

例7 将编号分别为 $1\sim n$ 的 n 个球随机地放入编号分别为 $1\sim n$ 的 n 只盒子中，每盒一球. 若球的号码与盒子的号码一致，则称为一个配对. 求配对个数 X 的期望与方差.

解
$$X_i=\begin{cases}1, & i\text{ 号球放入 } i\text{ 号盒}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$

但 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 不相互独立，

X_i	**1**	**0**
P	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{1}{n}$

$i=1,2,\cdots,n$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

$$E(X^2)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}X_iX_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}E(X_iX_j)$$

X_i^2	**1**	**0**
P	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{1}{n}$

$$E(X_i^2)=\frac{1}{n} \qquad i=1,2,\cdots,n$$

X_iX_j	**1**	**0**
P	$\frac{1}{n(n-1)}$	$1-\frac{1}{n(n-1)}$

$$E(X_iX_j)=\frac{1}{n(n-1)} \qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}E(X_iX_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}+2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}\frac{1}{n(n-1)}$$

$$=n\cdot\frac{1}{n}+2\cdot C_n^2\cdot\frac{1}{n(n-1)}$$

$$=2$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=1$$

标准化随机变量

设随机变量 X 的期望 $E(X)$、方差 $D(X)$ 都存在，且 $D(X) \neq 0$，则称

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

为 X 的标准化随机变量. 显然，

$$E(X^*) = 0, \quad D(X^*) = 1$$

仅知随机变量的期望与方差并不能确定其分布,

例如：

X	-1	0	1
P	0.1	0.8	0.1

$$E(X)=0, D(X)=0.2$$

与

Y	-2	0	2
P	0.025	0.95	0.025

$$E(Y)=0, D(Y)=0.2$$

它们有相同的期望、方差
但是分布却不同

但若已知分布的类型，及期望和方差，常能确定分布.

例8 已知 X 服从正态分布, $E(X) = 1.7$, $D(X) = 3$, $Y = 1 - 2X$, 求 Y 的概率密度函数.

解

$$E(Y) = 1 - 2 \times 1.7 = -2.4,$$

$$D(Y) = 4 \times 3 = 12$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{(y+2.4)^2}{24}},$$

$$-\infty < y < +\infty$$

例9 已知 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2+Bx, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 A,B 是常数，且 $E(X)=0.5$.

(1) 求 A,B.

(2) 设 $Y=X^2$, 求 $E(Y),D(Y)$

解 **(1)**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 (Ax^2 + Bx)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x(Ax^2 + Bx)dx = \frac{1}{2}$$

$$\frac{A}{3} + \frac{B}{2} = 1$$

$$\frac{A}{4} + \frac{B}{3} = \frac{1}{2}$$

$$A = -6,$$

$$B = 6$$

(2) $E(Y) = E(X^2)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^2(-6x^2 + 6x) dx = \frac{3}{10}$$

$E(Y^2) = E(X^4)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^4(-6x^2 + 6x) dx = \frac{1}{7}$$

$$D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{37}{700}$$