《高等数学》试题解答

一、填空题：（3×5=15 分）

1．设 $z=x^y$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $\underline{x^y\ln x}$.

2. 积分 $\iint\limits_D xydxdy=$ $\underline{\quad 16 \qquad\qquad}$，其中 D 为 $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4$.

3. L 为 $y=x^2$ 点(0, 0)到(1, 1)的一段弧，则 $\int\limits_L \sqrt{y}ds=\frac{1}{12}\underline{\left[5\sqrt{5}-1\right]}$.

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 当 p 满足 $\underline{0<p\le 1}$ 时条件收敛.

5. 方程 $ye^x dx-(1+e^x)dy=0$ 的通解为 $\underline{y=C(1+e^x)}$.

二、选择题：（3×5=15 分）

1．方程 $(3x^2+y\cos x)dx+(\sin x-4y^3)dy=0$ 是 （ C ）.

(A) 可分离变量微分方程　　(B) 一阶线性方程

(C) 全微分方程　　(D) （A）、（B）、（C）均不对

2． $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，则 $\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}$ 在 $(x_0,\ y_0)$（ D ）.

（A）连续　（B）不连续　（C）不一定存在　（D）一定存在

3．级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$ 是（ A ）.

（A）发散　　（B）收敛

（C）条件收敛　　（D）绝对收敛

4．曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围立体的体积为（ B ）.

（A）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$；　　（B）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^1 dz$；

（C）$\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{x^2+y^2}dz$；　　（D）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^1 dz$。

5．方程 $y''-3y'+2y=3x-e^x$ 的特解形式为（ B ）.

（A）$(ax+b)e^x$　　（B）$ax+b+cxe^x$

（C）$ax+b+ce^x$　　（D）$(ax+b)xe^x$

三、$z=f(y^2-x^2)$，其中 $f(u)$ 有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.（8 分）

解：$z_x=f'(y^2-x^2)\cdot(-2x)$

$$z_{xx}=f'(y^2-x^2)\cdot(-2)-2xf''(y^2-x^2)\cdot(-2x)$$

$$=-2f'(y^2-x^2)+4x^2f''(y^2-x^2)$$

四、计算 $\int_L (e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$，$L$ 为由点 $A(1,0)$ 到 $B(0,1)$，再到 $\boldsymbol{C(-1,0)}$ 的有向折线.（8 分）

解：作 $\overrightarrow{CA}: y=0,\ -1\le x\le 1$,………………1 分

$$\oint_{ABCA} = \iint_D \left[e^x\cos y-(e^x\cos y-2)\right]dxdy = 2\iint_D dxdy = 2,$$

$$\int_{CA} = 0$$

$\therefore I=2$

五、计算 $\oiint_{\Sigma} xy^2dydz+yz^2dzdx+zx^2dxdy$，其中 Σ 为球体 $x^2+y^2+z^2\le 4$ 及锥体 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的公共部分的外表面.（8 分）

解：$I=\iiint_\Omega \left(y^2+z^2+x^2\right)dxdydz$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^2 r^4dr$$

$$=\frac{64\pi}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

六、求级数 $\sum_{n=2}^{\infty}2nx^n$ 的收敛域及和函数.（8 分）

解：收敛域为：$(-1,\ 1)$

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}2nx^n=2x\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n-1}=2x\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)'=2x\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)'$$

$$=2x\left[\frac{1}{(1-x)^2}-1\right]$$

七、计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$被平面$z=3$截下的带锥顶的部分.（8 分）

解：$I=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{3x^2}{x^2+y^2}+\frac{3y^2}{x^2+y^2}}dxdy$

$=2\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$

$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}r^3dr$

$=9\pi$

八、求函数$z=x^2+y^2$在适合条件$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$下的极小值.（7 分）

解：作$f(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1\right)$

$$\begin{cases} f_x=2x+\frac{\lambda}{2}=0 \\ f_y=2xy+\frac{\lambda}{3}=0 \\ f_\lambda=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1=0 \end{cases}$$

$\lambda=-\frac{72}{13}$，$\therefore x=\frac{18}{13},y=\frac{12}{13}$

$\min z=\frac{36}{13}$

九、求方程$y''-3y'+2y=3e^x$的通解.（8 分）

解：特征方程：$r^2-3r+2=0$

特征根:$r_1=1,r_2=2$

对应齐次方程的通解为：$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

$\lambda=1$是单根，可设非齐次方程的特解为$y^*=Axe^x$

代入原方程得:$A=-3,\therefore y^*=-3xe^x$

原方程的通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-3xe^x$

十、把 $f(x)=x,\ (0<x<\pi)$ 展开为余弦级数.（7 分）

解：$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi} & n\text{为奇数}\\ 0 & n\text{为偶数}\end{cases}$$

$$x=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x,\qquad 0<x<\pi$$

十一、已知曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left[e^x(x+1)^n+\dfrac{n}{x+1}f(x)\right]ydx+f(x)dy$ 与路径无关，

其中 $f(x)$ 可微，$f(0)=0$，试确定 $f(x)$，并计算曲线积分的值.（8 分）

解：依题意有：$e^x(x+1)^n+\dfrac{n}{x+1}f(x)=f'(x)$

讨论 $\dfrac{n}{x+1}f(x)=f'(x)$

$f(x)=C(1+x)^n$

令 $C=C(x)$，利用常数变易法得：$C(x)=e^x+C$

$\therefore f(x)=C(1+x)^n+e^x(1+x)^n$

由 $f(0)=0\Rightarrow C=-1$

$\therefore f(x)=(1+x)^n(e^x-1)$

$I=\int_0^y f(x)dy=yf(x)$