

高等数学（一）模拟试卷

一、填空题（ $3 \times 8 = 24$ 分）

1. 当 $a =$ _____ 时, $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ a + x, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续.
2. $f'(0) = 3$, 且 $f(0) = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} =$ _____.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{4x^3} =$ _____.
4. 曲线 $y = x^2$ 与 $y = 3x$ 所围图形的面积为 _____.
5. 曲线 $y = \frac{3x^2 + 7}{x^2 + 2}$ 的一条水平渐近线为 _____.
6. $\int \sqrt{t} \sqrt{t} dt =$ _____.
7. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\cos x}{x}$, 则 $\int f(x) dx =$ _____.
8. 曲线 $y = f(x)$ (其中 $f'(x)$ 为连续函数) 在区间 $[a, b]$ 的长度为 _____.

二、选择题（ $3 \times 8 = 24$ 分）

1. $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ 是关于 x^2 的().
(A) 同阶而不同价的无穷小 (B) 低阶无穷小
(C) 等价无穷小 (D) 高阶无穷小
2. 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处().
(A) 不连续也不可导 (B) 连续不可导
(C) 可导不连续 (D) 连续且可导
3. 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则 x_0 必定为函数 $f(x)$ 的().
(A) 驻点 (B) 极大值点 (C) 极小值点 (D) 以上都不对
4. $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, C 为任意常数, 则 $f(x)$ 的不定积分可表示为().
(A) $F(x) + \cos C$ (B) $F(x) + \ln C$ ($C > 0$)
(C) $F(x) + e^C$ (D) $F(x) + \sqrt{C^2 + 2}$
5. 在 $f(x)$ 连续的条件下, 下列各式中正确的是().

$$(A) \frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = f(x) \quad (B) \frac{d}{dx} \int_b^a f(x) dx = f(x)$$

$$(C) \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (D) \frac{d}{dx} \int_x^a f(t) dx = f(x)$$

6. 设 $f'(\cos^2 x) = \sin^2 x - 1$, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x) =$ ()

$$(A) \frac{1}{2\cos^2 x} \quad (B) \frac{1}{2}x^2 \quad (C) -\frac{1}{2}\cos^4 x \quad (D) -\frac{1}{2}x^2$$

7. 设 $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\lim_{x \rightarrow a} F(x) =$ ()

$$(A) f(a) \quad (B) 1 \quad (C) 0 \quad (D) \text{不存在}$$

8. 用极坐标计算曲线 $\rho = 2\sin\theta$ 所围图形面积时, 积分区间是 ()

$$(A) [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}] \quad (B) [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad (C) [0, \pi] \quad (D) [0, 2\pi]$$

三、综合题

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^{2x}$. (6 分)

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3}\right)$. (6 分)

3. 求由 $xy = e^{x+y}$ 所确定函数 $y = f(x)$ 的微分 dy . (6 分)

4. $\int \frac{\sin 2x}{3 + \sin^2 x} dx$. (5 分)

5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} dx$. (5 分)

6. $\int_0^3 x|x-1| dx$. (6 分)

7. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$. (6 分)

8. (6 分) 求曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 所围成图形绕 x 轴旋转一周所形成旋转体的体积. (6 分)

9. (6 分) 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有二阶导数, 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 其中 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, 证明: 在 (x_1, x_3) 内至少有一点 ξ , 使得 $f''(\xi) = 0$