一、选择题（请将正确答案编码填入下表中，每小题 3 分，共 27 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
答案									

1. 下列平面中通过坐标原点的平面是（ A ）.

（A） $3(x-1)-y+(z+3)=0$ （B） $x+y+z=1$

（C） $x=1$ （D） $x+2z+3y+4=0$

2. 直线 L: $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 与平面 $\pi: 4x-2y-2z=3$ 的关系是（ C ）.

（A） L 在 π 上 （B） 相交但不垂直 （C） 平行 （D） 垂直相交

3. 设 $f(x,y)=xy+(2y-1)\arccos\frac{x}{y}$，则 $f_x(1,2)=$（ D ）.

（A） $2+2\sqrt{3}$ （B） $2+\sqrt{3}$ （C） $2-2\sqrt{3}$ （D） $2-\sqrt{3}$

4. 设 $z=y^x$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$(A).

（A） $y^{x-1}(1+x\ln y)$ （B） $y^x \ln^2 x$ （C） $xy^{x-1}\ln x$ （D） $y^{x-1}(x+\ln y)$

5. $z=3x^2y-xy^3+8$ 在 $A(1,2)$ 处沿 A 到 $B(3,0)$ 方向的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial l}=$(B).

（A） $-\frac{13\sqrt{2}}{2}$ （B） $\frac{13\sqrt{2}}{2}$ （C） $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ （D） $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$

6. 微分方程 $(y'')^3+3y'''+y^4=x$ 的阶数是（ C ）.

（A） 1 （B） 2 （C） 3 （D） 4

7. 微分方程 $y'=y$ 的通解是（ D ）.

（A） $y=ce^{-\frac{x}{2}}$ （B） $y=ce^{-x}$ （C） $cy=e^{x^2}$ （D） $y=ce^x$

8. 方程 $y'+3xy=6x^2$ 是（ A ）.

（A）一阶线性非齐次微分方程 （B）二阶微分方程

（C）可分离变量的微分方程 （D）齐次微分方程

9. 设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 均为非零向量，且 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$，则(B).

（A） $\vec{a}=\lambda\vec{b}(\lambda\neq 0)$ （B） $\vec{a}\perp\vec{b}$ （C） $\vec{a}//\vec{b}$ （D） $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$

二、填空题（请将正确答案填写在以下相应的横线上，每空 3 分，共 27 分）

1.______ 2.______ 3.______

4.______ 5.______ 6.______

7.______ 8.______ 9.______

1. 设 $z=\cos(x-y)$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $\sin(x-y)$

2. 设 $f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$，则 $f_x(1,1)=$ $-\frac{1}{2}$

3. 设 $z=2x^2y+\sin(xy)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$ $4y-y^2\sin(xy)$

4. 微分方程 $y''\sin x-y'=\ln x$ 的通解中所含相互独立的任意常数的个数为 2

5. 方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}$ 的通解是 $y=$ $Ce^{\frac{y}{x}}$ 或 $x(\ln|y|+C)$

课本P306例1

6. 微分方程 $y''-5y'+4y=0$ 的通解为 $y=$ $C_1e^x+C_2e^{4x}$

7. 设 $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$, 且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|=$ 24

8. 直线 $\begin{cases}3x-2y+z+1=0\\2x+y-z-2=0\end{cases}$ 的方向向量是 $(1,5,7)$

9. 曲线 $\begin{cases}y^2+z^2-2x=0\\z=2\end{cases}$ 在 xoy 面上的投影曲线方程是 $\begin{cases}y^2-2x+4=0\\z=0\end{cases}$

三、综合题（请写出求解或证明过程，5 小题，共 46 分）

1. 求方程 $\frac{dy}{dx}=y+\cos x$ 的通解. (6 分)

一阶线性非齐次微分方程

解: $y'-y=\cos x$

通解为: $y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

$$=e^{\int dx}\left[\int \cos x\, e^{-\int dx}dx+C\right]$$

$$=e^x\left[\int \cos x\, e^{-x}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+C e^x$$

求 $\int e^{-x}\cos x\,dx$.

解：原式 $= \int e^{-x}\,d\sin x$

$$= e^{-x}\sin x - \int \sin x\,d\,e^{-x}$$

$$= e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x\,dx$$

$$= e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\,d\cos x$$

$$= e^{-x}\sin x - [e^{-x}\cos x + \int e^{-x}\cos x\,dx]$$

故　原式 $= \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C$

说明：也可设 $u = e^{-x}, v'$ 为三角函数，但两次所设类型必须一致.

2．求方程 $s'' - 4s = t + 1$ 的通解.(10 分)

二阶线性非齐次微分方程

解：特征方程：$r^2 - 4 = 0$

$$\Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = -2$$

齐次方程的通解为：$S = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$

非齐次方程的特解为：$s^* = at + b$

代入原方程得：$a = b = -\frac{1}{4}$

所以原方程的通解为：$s = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}$

3．设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\cos x + 3y - z = e^z$ 所确定，求 dz.（10 分）

解：令 $F(x,y,z) = \cos x + 3y - z - e^z$

$$F_x = -\sin x,\ F_y = 3,\ F_z = -1 - e^z$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\sin x}{1+e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{3}{1+e^z}$$

所以 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{\sin x}{1+e^z}dx + \frac{3}{1+e^z}dy$

4．求曲面 $e^z - z + x^2y = 3$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处的切平面及法线方程.（10 分）

解：令 $F(x,y,z) = e^z - z + x^2y - 3$

法向量 $\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)\big|_{(1,2,0)} = (2xy, x^2, e^z - 1)\big|_{(1,2,0)}$

$$= (4, 1, 0)$$

切平面方程　$4(x-1) + (y-2) = 0$

$$\Rightarrow 4x + y - 6 = 0$$

法线方程　$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{0}$

5．某工厂生产两种产品甲和乙，出售单价分别为 10 元与 9 元，生产 x 单位的产品甲与生产 y 单位的产品乙的总费用是 $300 + 3x + 2y + 0.01(3x^2 + xy + 3y^2)$ 元，求取得最大利润时，两种产品的产量各为多少单位？(10 分)

解：销售利润为

$$f(x,y) = 10x + 9y - (300 + 3x + 2y + 0.03x^2 + 0.01xy + 0.03y^2)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = -0.03x^2 - 0.01xy - 0.03y^2 + 7x + 7y - 300$$

令 $\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -0.06x - 0.01y + 7 = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -0.06y - 0.01x + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + y = 700 \\ 6y + x = 700 \end{cases}$

$\Rightarrow x = 100, y = 100.$

由题意知，生产甲、乙两种产品各100单位时利润最大.