第六讲 线性方程组解的结构

一、齐次方程组解的性质

二、基础解系及其求法

三、非齐次线性方程组解的性质

四、非齐次线性方程组的解法

HOME

ENTER

一、齐次线性方程组解的性质

1．解向量的概念

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

若记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则上述方程组（1）可写成向量方程

$$\boldsymbol{a}_1 x_1+\boldsymbol{a}_2 x_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n x_n=\mathbf{0}.$$

若 $x_1=\xi_{11}, x_2=\xi_{21}, \cdots, x_n=\xi_{n1}$ 为方程 $Ax=0$ 的

解，则

$$x = \xi_1 = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$$

称为方程组(1) 的**解向量**，它也就是向量方程(2)的解.

2．齐次线性方程组解的性质

（1）若 $x=\xi_1, x=\xi_2$ 为 $Ax=0$ 的解，则

$$x=\xi_1+\xi_2$$

也是 $Ax=0$ 的解.

证明 $\because A\xi_1=0, A\xi_2=0$

$$\therefore A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0$$

故 $x=\xi_1+\xi_2$ 也是$Ax=0$的解.

（2）若 $x=\xi_1$ 为 $Ax=0$的解，k 为实数，则 $x=k\xi_1$也是$Ax=0$的解.

证明　$A(k\xi_1)=kA(\xi_1)=k0=0.$　证毕.

由以上两个性质可知，方程组的全体解向量所组成的集合，对于加法和数乘运算是封闭的，因此构成一个向量空间，称此向量空间为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间.

二、齐次方程组的解法

定义5. 4. 4

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$称为齐次线性方程组 $Ax=0$的基础解系,如果

(1)$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是$Ax=0$的一组线性无关 的解;

(2)$Ax=0$的任一解都可由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性表出.

如果$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一组基础解系,那么, $Ax=0$ 的通解可表示为

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是任意常数.

线性方程组基础解系的求法

设齐次线性方程组的系数矩阵为A，并不妨设A的前 r 个列向量线性无关.于是 A可化为

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\boldsymbol{Ax=0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{b_{11}} & \cdots & \boldsymbol{b_{1,n-r}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} & \boldsymbol{b_{r1}} & \cdots & \boldsymbol{b_{r,n-r}} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix} = \mathbf{0}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \boldsymbol{x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n} \end{cases}
$$

现对$x_{r+1},\cdots,x_n$取下列 $n-r$ 组数：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

分别代入
$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

依次得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix}.$$

从而求得原方程组的 $n-r$ 个解：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

定理 5.4.5

在齐次线性方.程组有非零解的情况之下，它有基础解系，并且基础解系所含向量的个数等于n-r,这里r表示系数矩阵的秩(n-r也是自由未知量的个数).

证明　设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

的系数矩阵的秩为r，不妨设左上角的r 阶子式非零，

于是方程组（1）可以改写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r=-a_{1r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2r}x_r=-a_{2r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rr}x_r=-a_{rr+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (3)$$

当r=n时，方程组(3)只有零解(没有基础解系)

当r<n时，把自由未知量的任意一组值代入方程组(3)得到方程的一个解. 用n-r组数

$(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)$未知量$(x_1,x_2,\cdots,x_r)$,

就得到方程组的 n-r 个解:

$$\begin{cases} \eta_1 = (c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1r}, 1, 0, \cdots, 0) \\ \eta_2 = (c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2r}, 0, 1, \cdots, 0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_{n-r} = (c_{n-r1}, \cdots, c_{n-rr}, 0, 0, \cdots, 1) \end{cases}. \qquad （5）$$

因为单位向量组线性无关，故(5)是一个线性无关组.

设

$$\eta = (c_1, c_2, \cdots, c_r, c_{r+1}, \cdots, c_n) \qquad （6）$$

是方程组(1)的一个解，

所以，线性组合

$$c_{r+1}\eta_1 + c_{r+2}\eta_2 + \cdots + c_n\eta_{n-r} \qquad （7）$$

也是方程组(1)的一个解，

比较(6),(7)的后**n-r** 个分量得知，自由未知量有相同的值，从而这两个解完全相同，即

$$\eta = c_{r+1}\eta_1 + c_{r+2}\eta_2 + \cdots + c_n\eta_{n-r}$$

任意一个解 η都可以表为η_1，$\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$的线性组合。

由基础解系的定义知：

方程的任意基础解系均等价，故基础解系向量个数为**n-r**个。

下面给出另一个证明

设$x=\xi=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & \lambda_r & \lambda_{r+1} & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}^T$为上述方程组的一个解．再作 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 的线性组合，

$$\eta=\lambda_{r+1}\xi_1+\lambda_{r+2}\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_{n-r}$$

由于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是$Ax=0$ 的解,故η也是$Ax=0$的解.

下证$\xi=\eta$.

$$\eta = \lambda_{r+1}\xi_1 + \lambda_{r+2}\xi_2 + \cdots + \lambda_n \xi_{n-r}$$

$$= \lambda_{r+1}\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{r+2}\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

由于ξ与η都是方程$Ax=0$的解,而$Ax=0$又等价于

方程组 $\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$

所以ξ与η都是此方程组的解，

$$由\ \xi = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \lambda_1 = c_1, \cdots, \lambda_r = c_r.$$

故$\xi = \eta$.　即$\xi = \lambda_{r+1}\xi_1 + \lambda_{r+2}\xi_2 + \cdots + \lambda_n\xi_{n-r}$.

所以$\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$是齐次线性方程组的一个基础解系.

说明

1．基础解系不是唯一的.

2．方程组的**基础解系**又称为解空间的基.

3．若$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是$Ax = 0$的基础解系，则其**通解**为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}.$$

其中$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$是任意常数.

例1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系与通解.

解 对系数矩阵A作初等行变换，变为行最简矩阵，有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

便得
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{7}x_3 + \dfrac{3}{7}x_4, \\ x_2 = \dfrac{5}{7}x_3 + \dfrac{4}{7}x_4. \end{cases}$$

令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，对应有$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}$，

即得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

并由此得到通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

例2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

解 对系数矩阵施行初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = r = 2, n = 5, n - r = 3,$即方程组有无穷多解，

其基础解系中有三个线性无关的解向量.

令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$代入$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - 4x_4 + 3x_5 \\ \quad\quad x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5 \end{cases}$

依次得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

所以原方程组的一个基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故原方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$.

其中k_1, k_2, k_3为任意常数 .

三、非齐次线性方程组解的性质

非齐次线性方程组解的性质

(1)设$x=\eta_1$及$x=\eta_2$都是$Ax=b$的解,则$x=\eta_1-\eta_2$为对应的齐次方程 $Ax=0$的解（$P_{142}(1)$）.

证明 $\because A\eta_1=b,\quad A\eta_2=b$

$$\therefore A(\eta_1-\eta_2)=b-b=0.$$

即$x=\eta_1-\eta_2$满足方程$Ax=0.$

(2) 设$x=\eta$是方程 $Ax=b$的解, $x=\xi$是方程 $Ax=0$的解,则$x=\xi+\eta$仍是方程 $Ax=b$的解.

证明 $A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b,$

所以$x=\xi+\eta$ 是方程 $Ax=b$的解.

证毕.

非齐次线性方程组的通解

定理8

非齐次线性方程组Ax=b的通解为

$$\gamma = \gamma_0 + \eta$$

$$= k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta.$$

其中 $k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 为对应齐次线性方程组的通解，η^* 为非齐次线性方程组的任意一个特解.

证明 $\gamma = \gamma_0 + (\gamma - \gamma_0)$

由于$\gamma - \gamma_0$是齐次线性方程组的解，令

$$\gamma - \gamma_0 = \eta$$

就得到定理结论

推论 非齐线性方程组有唯一解的充分必要条件是它对应的齐方程只有零解.

证明 充分性 如果非齐线性方程组有两个不同的解，那么，它们的差就是它对应的齐方程的一个非零. 故如果齐方程只有零解，那么方程组有唯一解.

必要性

如果齐线性方程组有非零解，那么这个解与它对应的非齐线性方程组的一个解的和就是非齐线性方程组的另一个解，是说是非齐线性方程组的解不唯一.　故非齐线性方程组有唯一解，那么，它对应的非齐线性方程组只有零解。

与方程组 *AX=b* 有解等价的命题

线性方程组 $Ax=b$有解

$\Leftrightarrow$

向量b能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示;

$\Leftrightarrow$

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$等价;

$\Leftrightarrow$

矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$与矩阵$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)$的秩相等.

四、非齐次线性方程组的解法

（1）应用Cramer法则

特点：只适用于系数行列式不等于零的情形，计算量大，容易出错，但有重要的理论价值，可用来证明很多命题.

（2）利用初等变换

特点：适用于方程组有唯一解、无解以及有无穷多解的各种情形，全部运算在一个矩阵（数表）中进行，计算简单，易于编程实现，是有效的计算方法.

例4 求解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2. \end{cases}$

解 对增广矩阵B施行初等行变换：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见$R(A)=R(B)=2$,故方程组有解,并有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2, \\ x_3 = \qquad 2x_4 + 1/2. \end{cases}$$

取 $x_2 = x_4 = 0$,则 $x_1 = x_3 = \frac{1}{2}$,即得方程组的一个解

$$\eta^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

在对应的齐次线性方程 组$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = \qquad 2x_4 \end{cases}$中,取

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{及} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{及} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

即得对应的齐次线性方 程组的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是所求通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

例5 求下述方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

解

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 8 & 3 & 4 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由$R(A) = R(B)$,知方程组有解.又$R(A) = 2, n - r = 3$,

所以方程组有无穷多解. 且原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 + 7 \\ 2x_2 = x_3 + 2x_4 + 6x_5 - 23 \end{cases}$$

求基础解系:

令 $$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

代入 $$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 + 7 \\ 2x_2 = x_3 + 2x_4 + 6x_5 - 23 \end{cases}$$

依次得 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

故得基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

求特解

令 $x_3=x_4=x_5=0$,得$x_1=-\dfrac{9}{2}, x_2=\dfrac{23}{2}.$

所以方程组的通解为

$$x = k_1\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9/2 \\ 23/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

另一种解法

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 8 & 3 & 4 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$
\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & -2 & -9/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 3 & 23/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

则原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + 2x_5 - \frac{9}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - x_4 - 3x_5 + \frac{23}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3/2 + 2x_5 - 9/2 \\ x_2 = -x_3/2 - x_4 - 3x_5 + 23/2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$x = k_1\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9/2 \\ 23/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

小结

1．齐次线性方程组基础解系的求法

（1）对系数矩阵A进行初等变换，将其化为最简形

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

（2）得出 $R(A)=r$，同时也可知方程组的一个基础解系含有$n-r$个线性无关的解向量.

由于 $Ax=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \end{cases}$

令 $$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{得}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix},$$

$$\text{故}\quad \xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

为齐次线性方程组的一个基础解系.

2． 线性方程组解的情况

$$Ax = 0\text{有解} \Leftrightarrow R(A) \le n$$

$$\left(\text{此时基础解系中含有}\, n - R(A)\,\text{个解向量}\right)$$

$$R(A) = R(B) = n \Leftrightarrow Ax = b\text{有唯一解.}$$

$$R(A) = R(B) < n \Leftrightarrow Ax = b\text{有无穷多解.}$$

$$R(A) \ne R(B) \quad\quad \Leftrightarrow Ax = b\text{无解.}$$

思考题

设A是$m\times 3$矩阵,且$R(A)=1$.如果非齐次线性方程组$Ax=b$的三个解向量η_1,η_2,η_3满足

$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\ \eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

求$Ax=b$的通解.

思考题解答

解 $\because A$是$m\times 3$矩阵，$R(A)=1$,

$\therefore Ax=0$的基础解系中含有$3-1=2$个线性无关的解向量.

令$\eta_1+\eta_2=a, \eta_2+\eta_3=b, \eta_3+\eta_1=c$，则

$$\eta_1=\frac{1}{2}(a+c-b)=\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix},\quad \eta_2=\frac{1}{2}(a+b-c)=\begin{pmatrix}0\\1/2\\5/2\end{pmatrix},$$

$$\eta_3=\frac{1}{2}(b+c-a)=\begin{pmatrix}0\\-3/2\\-3/2\end{pmatrix},$$

$$\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\qquad \eta_1-\eta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

为$Ax=0$的基础解系中的解向量.

故$Ax=b$的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix},$$

其中k_1,k_2为任意实数.