第三十三讲 正定二次型与正定矩阵

一、正定二次型

二、正定矩阵

三、n元二次型的分类

四、内容小结

HOME

ENTER

一、正定二次型

1、定义：实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 若对任意一组不全为零的实数 $c_1,c_2,\ldots,c_n$ 都有

$$f(c_1,c_2,\ldots,c_n)>0.$$

则称f为正定二次型.

如，二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 是正定的；

但二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2$ 不是正定的.

2、正定性的判定

1）实二次型 $X'AX$ 正定

$\Leftrightarrow \forall X \in R^n$,若X $\neq 0$, 则$X'AX > 0$

2）设实二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

f 正定 $\Leftrightarrow d_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$

证：充分性显然. 下证必要性，若 f 正定，取

$$X_0 = (0, \ldots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0)', i = 1, 2, \cdots, n$$

则 $f(X_0) = d_i x_i^2 > 0, \quad \therefore \quad d_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$

3）非退化线性替换不改变二次型的正定性.

证明：设正定二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=X'AX$

经过非退化线性替换 X＝CY 化成

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=Y'(C'AC)Y=g(y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

任取一组不全为零的数 $k_1,k_2,\ldots,k_n$，令

$$\mathrm{Y}_0=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix},\quad X_0=C\mathrm{Y}_0=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$$

则，

$$f(c_1,c_2,\ldots,c_n)=X_0'AX_0=Y_0'(C'AC)Y_0=g(k_1,k_2,\ldots,k_n)$$

又由于C可逆，$Y_0 \neq 0$，所以 $X_0 \neq 0$,

即 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 不全为0.

$\therefore\ g(k_1, k_2, \ldots, k_n) = f(c_1, c_2, \ldots, c_n) > 0$

$\therefore\ g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$正定.

反之，实二次型 $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$可经过非退化线性替换 $Y = C^{-1}X$ 变到实二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

同理，若 g 正定，则 f 正定.

所以，非退化线性替换不改变二次型的正定性.

4）（定理5）n元实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$正定

$\Leftrightarrow$ 秩 f ＝n＝ p（ f 的正惯性指数）．

证：设 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$经非退化线性替换 $X=CY$ 变成标准形

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2.$$

由2)，f 正定 $\Leftrightarrow d_i>0, i=1,2,\cdots,n,$

即，f 的正惯性指数p＝n＝秩 f ．

5）正定二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的标准形为

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2,\ \ i > 0,\ \ i = 1, 2, \cdots, n$$

规范形为 $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$

二、正定矩阵

1、定义：设A为实对称矩阵，若二次型 $X'AX$ 是正定的，则称A为**正定矩阵**.

2、正定矩阵的判定

1）实对称矩阵A正定 $\Leftrightarrow$ A与单位矩阵E合同.

正定二次型的规范形为 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2=Z'EZ$

A与E合同，即存在可逆矩阵C，使 $A=C'EC=C'C$.

2）实对称矩阵A正定

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵C，使 $A=C'C$.

可见，正定矩阵是可逆矩阵.

3）实对称矩阵A正定 $\Leftrightarrow$ A与任一正对角矩阵合同.

3）实对称矩阵A正定 $\Leftrightarrow$ A与任一正对角矩阵合同.

若 $D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$, $d_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$

为任一正对角矩阵，则

$$D=\begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$$

即，D与E合同.

例1、设 A 为 n 阶正定矩阵，证明

（1）A^{-1}是正定矩阵；

（2）$kA(k>0)$是正定矩阵；

（3）A^{*}是正定矩阵；

（4）A^{m} 是正定矩阵（m为任意整数）；

（5）若 B 亦是正定矩阵，则 A＋B 也是正定矩阵；

证：（1）由于 A 正定，则存在可逆矩阵 P，使

$P'AP=E$，于是有，

$$(P'AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}(P^{-1})'=((P^{-1})')'A^{-1}(P^{-1})'=E$$

令 $Q=(P^{-1})'$， 则Q可逆，且 $Q'A^{-1}Q=E$,

即，A^{-1}与单位矩阵E合同. 故，A^{-1}正定.

（2）由于A 正定，对 $\forall X\in R^n, X\neq 0$, 都有 $X'AX>0$,

因此有 $X'(kA)X=kX'AX>0$. 故，kA正定.

（3）A正定，则存在可逆矩阵C，使 $A = C'C$ ，于是

$$|A| = |C'C| = |C|^2 > 0$$

又$A^* = |A| A^{-1}$, 由（1）（2）即得 A^* 正定.

（4）由于 A 正定，知 A^m为n阶可逆对称矩阵 ，

当m＝2k 时， $A^m = A^{2k} = A^k A^k = (A^k)' E A^k$,

即, A^m 与单位矩阵E合同，所以 A^m正定.

当 $m=2k+1$ 时，$A^m=A^{2k+1}=A^kAA^k=(A^k)'AA^k$，

即，A^m与正定矩阵A合同，而 A与单位矩阵E合同，

所以 A^m 与E合同，即 A^m 正定.

（5）由于A、B正定，对 $\forall X\in R^n, X\neq 0$, 都有

$$X'AX>0,\qquad X'BX>0$$

因此有 $X'(A+B)X=X'AX+X'BX>0.$

故，A＋B 正定.

3、正定矩阵的必要条件

1）实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定

$$\Rightarrow a_{ii}>0, i=1,2,\cdots,n.$$

证：若A正定，则二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$

正定. 取 $X_i=(0,\ldots,0,\underset{\text{第}i\text{分量}}{1},0,\ldots,0)'$

则 $f(X_i)=X_i'AX_i=a_{ii}>0,\ i=1,2,\cdots,n.$

注意

反之不然. 即， $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为对称矩阵，且

$a_{ii}>0$, $i=1,2,\cdots,n$, 但A未必正定. 如

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f(x_1,x_2)=X'AX=(x_1-x_2)^2,$$

当 $x_1=x_2=1$ 时，有 $f(x_1,x_2)=0.$

所以A不是正定的.

2） 实对称矩阵A正定 $\Rightarrow \det A = |A| > 0$

证：若A正定，则存在可逆矩阵C ，使 $A = C'C,$

从而 $|A| = |C'C| = |C|^2 > 0.$

注意

反之不然. 即实对称矩阵A，且 $|A| > 0,$ A未必正定.

如 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ |A| = 1 > 0$

但$X'AX = -x_1^2 - x_2^2$不是正定二次型.

4、顺序主子式、主子式

设矩阵 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$

1) $A(1,2,\cdots,k)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}\in R^{k\times k}$

称为A为第k阶**顺序主子矩阵**;

2) $P_k=\det A(1,2,\cdots,k)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$

称为A的第k阶**顺序主子式**.

3） k 级行列式

$$|Q_k| = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}$$

即行指标与列指标相同的k阶子式

称为A的一个k 阶主子式.

5、（定理6）

实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j = X'AX$ 正定

$\Leftrightarrow$ A的顺序主子式 P_k 全大于零.

证:必要性. 设 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 正定，对每一个k

$k(1\le k\le n)$，令

$$f_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}x_ix_j$$

$$=(x_1,x_2,\ldots,x_k)A(1,2,\cdots,k)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}$$

对任意一不全为零的数 $c_1, c_2, \ldots, c_k$，有

$$f_k(c_1, c_2, \ldots, c_k) = f(c_1, c_2, \ldots, c_k, 0, \ldots, 0) > 0$$

$\therefore\ f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是正定的，从而 $A(1,2,\mathrm{L}\ \ ,k)$正定.

$$\therefore\quad P_k = \det A \quad (1,2,\cdots,k) > 0,\ \ \mathrm{k} = 1,2,\cdots,n$$

充分性： 对n作数学归纳法.

n＝1时，$a_{11} = |a_{11}| > 0. \therefore\ f(x_i) = a_{11}x_1{}^2$正定. 结论成立.

假设对于n－1元二次型结论成立，下证n元的情形.

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

令 $A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$, $\alpha=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix}$,

则 $A=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}$

又A的顺序主子式全大于零，所以$\mathbf{A_1}$的顺序主子式也全大于零.

由归纳假设，$\mathbf{A_1}$正定，即存在可逆矩阵G，使

$$G'A_1G=E_{n-1}.$$

令 $C_1=\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则 $C_1'AC_1=\begin{pmatrix} G' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{n-1} & G'\alpha \\ \alpha'G & a_{nn} \end{pmatrix}$

再令 $C_2=\begin{pmatrix} E_{n-1} & -G'\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$C_2'(C_1'AC_1)C_2=\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\alpha'G & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & G'\alpha \\ \alpha'G & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & -G'\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn}-\alpha'GG'\alpha \end{pmatrix}$$

再令 $C=C_1C_2$，$a=a_{nn}-\alpha' GG'\alpha$

则有 $C'AC=\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

两边取行列式，得 $|C|^2|A|=a$

又 $|A|>0$，$\therefore a>0$

即 $\begin{pmatrix} E_{n-1} & \\ & a \end{pmatrix}$为正对角矩阵.

由判定充要条件3). 知A正定，所以$X'AX$正定.

例2、判定下面二次型是否正定.

$$1)\ f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

解：$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

其顺序主子式

$$P_1=\left|5\right|>0,\quad P_2=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1>0,\quad P_3=\left|A\right|>0.$$

$\therefore\ f$ 正定.

2) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} + \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$ （习题7）

解： $f(x_1, x_2, \mathrm{K}\ , x_n)$的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

A的第k阶顺序主子式P_k

$$P_k = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}_k = \frac{k+1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}_k$$

$$= \frac{k+1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_k = \frac{k+1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{k+1}{2^k} > 0$$

$k = 1, 2, \cdots, n.$ $\quad \therefore f$ 正定

例3、证明：若实对称矩阵A正定，则A的任意一个

k 阶主子式

$$|Q_k| = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} > 0$$

（习题9）

证：作二次型

$$g(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}) = \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{k} a_{i_s i_t} x_{i_s} x_{i_t}$$

$$= (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) Q_k \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_k} \end{pmatrix}$$

对任意一不全为零的数 $c_{i_1}, c_{i_2}, \mathrm{K}\ , c_{i_k}$ ，有

$$X_0 = (c_1, c_2, \cdots, c_n)' \neq 0,$$

其中，$c_j = \begin{cases} c_{i_s}, & � \quad j = i_s,\ \ s = 1,2,\cdots,k \\ 0, & � \quad j \neq i_s,\ \ s = 1,2,\cdots,k \end{cases}$

由于 A 正定，有 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X'AX$ 正定，即有

$X_0'AX_0 > 0,$ 从而，

$$g(c_{i_1}, c_{i_2}, \cdots, c_{i_k}) = f(0,\cdots,0,c_{i_1},0,\cdots,c_{i_2},0,\cdots,c_{i_k},0,\cdots,0)$$

$$= X_0'AX_0 > 0$$

即，$g(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k})$是正定二次型，因此其矩阵的行列式大于零，即 $|Q_k| > 0.$

三、n元实二次型的分类

1. 定义

设n元二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=X'AX, A'=A\in R^{n\times n}$,

若对任意一组不全为零的实数$c_1,c_2,\ldots,c_n$, 都有

① $f(c_1,c_2,\ldots,c_n)<0$, 则 f 称为**负定二次型**.

② $f(c_1,c_2,\ldots,c_n)\geq 0$, 则 f 称为**半正定二次型**.

③ $f(c_1,c_2,\ldots,c_n)\leq 0$, 则 f 称为**半负定二次型**.

④ f 既不是半正定，也不是半负定，则 f 称为

不定二次型.

注：相应于此，n 级实对称矩阵可分类为：

①正定矩阵　②负定矩阵　③半正定矩阵

④半负定矩阵　⑤不定矩阵

2、判定

1）实二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 正定

$\Leftrightarrow -f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 负定；

实对称矩阵A正定 $\Leftrightarrow$ －A负定.

2）实二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 半正定

$\Leftrightarrow -f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 半负定；

实对称矩阵A半正定 $\Leftrightarrow$ －A半负定.

3）（定理7）设n元实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=X'AX$,

$A'=A\in R^{n\times n}$. 则下列条件等价：

① $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$半正定；

② A半正定；

③ 秩f =秩(A)= p（正惯性指数）；（见习题14）

④ A合同于非负对角阵，即存在可逆阵C，使

$$C'AC=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix},\quad d_i\ge 0, i=1,2,\cdots,n$$

⑤ 存在 $C\in R^{n\times n}$，使 $A=C'C$；

由此可得，

A半正定$\Rightarrow |A|\ge 0$

⑥ A的所有**主子式**皆大于或等于零.（补充题9）

四、小结

基本概念

1、正定（负定、半正定、半负定、不定）二 次型；正定（负定、半正定、半负定、不定）矩阵；

2、顺序主子式、主子式

基本结论

1、非退化线性替换保持实二次型的正定（负定、半正定、半负定、不定）性不变.

2、实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$正定（半正定）

$\Leftrightarrow -f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$负定（半负定）.

3、实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=X'AX$ 正定

$\Leftrightarrow$ **A 与单位矩阵 E 合同，即存在可逆矩阵C，使**

$$\mathbf{A=C'C}$$

$\Leftrightarrow$ **A 的各级顺序主子式全大于零**

$\Leftrightarrow$ ***f*** **的正惯性指数** ***p*** **等于** ***n***

4、实对称矩阵 **A** 正定$\Rightarrow |A|>0$

实对称矩阵 **A** 半正定 $\Rightarrow |A|\geq 0$

5、实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = X'AX$ 半正定

$\Leftrightarrow$ 秩 f = 秩(A) = p（正惯性指数）

$\Leftrightarrow$ A 与非负对角阵合同，即存在可逆矩阵C，使

$$C'AC = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, d_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,n$$

$\Leftrightarrow$ 存在 $C \in R^{n\times n}$, 使 $A = C'C$

$\Leftrightarrow$ A 的所有主子式全大于或等于零.