模拟考试（二）答案

一　选择题.（每题 3 分，15 分）

（1）复数$\left|i^8-4i^{21}+i\right|=$(　A　　).

(A)　$\sqrt{10}$　　(B)　2　　(C)　$\sqrt{5}$　　(D)　4

（2）设$f(z)=x^2+iy^3$，那么(　　B　).

(A)　处处解析　　(B)　处处不解析

(C)　仅在$(0,0)$点解析　　(D)　仅在$(0,0)$点可导

（3）$\int_{-\pi i}^{3\pi i}e^{2z}dz=$(　　C　　).

(A)　e　　(B)　ie^i　　(C)　0　　(D)　e^i

（4）若$e^{z_1}=e^{z_2}$，则(　　B　　).

(A)　$z_1=z_2$　　(B)　$z_1=z_2+2k\pi i$

(C)　$z_1=z_2+ik\pi$　　(D)　$z_1=z_2+2k\pi$

（5）$z=0$是函数$\dfrac{\sin z}{z^6}$的(　D　　).

(A)　本性奇点　　(B)　可去奇点

(C)　六级极点　　(D)　五级极点

二　填空题.（每题 3 分，15 分）

1．$\sqrt{4}=\underline{2,-2}$

2．函数$f(z)=\cos z$在$z=0$处泰勒展开式中z^3项的系数为$\underline{0}$

3．$i^{1-i}=\underline{e^{(2k+\frac{1}{2})\pi}i}$

4．$\oint_{|z|=3}\dfrac{z}{(z+6)^3}dz=\underline{0}$

5．函数$f(t)=e^{2t}$的拉普拉斯变换为$\underline{\dfrac{1}{s-2}}$.

三　计算题.（70 分）

1．计算积分$\oint_C\dfrac{z+1}{z^2-z}dz$的值，其中 C 为正向圆周$|z-1|=\dfrac{1}{4}$.（7 分）

解：$\oint_C \frac{z+1}{z^2-z}dz = \oint_C \frac{\frac{z+1}{z}}{z-1}dz$

$$= 2\pi i\,[\frac{z+1}{z}]_{z=1}$$

$$= 4\pi i$$

2．计算积分$\oint_C \frac{\cos 2z}{(z-2)^3}dz$的值，其中 C 为正向圆周$|z|=3$．（7 分）

解：由高阶导数公式

$$\oint_C \frac{\cos 2z}{(z-2)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}(\cos 2z)''\big|_{z=2}$$

$$= -4\pi i\cos 4$$

3．求函数$\frac{z}{z^2-1}$在有限奇点处的留数.（7 分）

解：$z=1, z=-1$为$\frac{z}{z^2-1}$的一级极点 ………（3 分）

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),1] = \lim_{z\to 1}(z-1)\times\frac{z}{z^2-1} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),-1] = \lim_{z\to -1}(z+1)\times\frac{z}{z^2-1} = -\frac{1}{2}$$

4．求函数$z\cos\frac{1}{z}$在有限奇点处的留数.（7 分）

解：$z=0$为$z^3\sin\frac{1}{z}$的奇点

$$z\cos\frac{1}{z} = z(1-\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^4}-\cdots)$$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),0] = -\frac{1}{2}$$

5．试将$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-4)}$在$1<|z-4|<+\infty$内展开成洛朗级数.（10 分）

解：在$1<|z-4|<+\infty$内

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)^2}\frac{1}{1+\frac{3}{z-4}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{(z-4)^{n+2}}$$

6．已知调和函数$u=(y^2-3x^2)y$，求解析函数$f(z)=u+iv$.（10 分）

解:$v_y=u_x=-6xy,\therefore v=\int -6xydy=-3xy^2+\varphi(x)$

而$v_x=\varphi'(x)=-u_y=-3y^2+3x^2,\therefore \varphi(x)=x^3+c$

$\therefore v=-3xy^2+x^3+c$

$\therefore f(z)=u+iv=(y^2-3x^2)y+i\left(-3xy^2+x^3+c\right)(c\in R)$

$=i\left(z^3+c\right)$

7．设$f(z)=x^3-y^3+2x^2y^2i$，问$f(z)$在何处可导？何处解析？并在可导处求出导数值.（12 分）

解：$u(x,y)=x^3-y^3$，$v(x,y)=2x^2y^2$

$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-3y^2$，$\frac{\partial v}{\partial x}=4xy^2$，$\frac{\partial v}{\partial y}=4x^2y$

均连续，要满足$C-R$条件，必须要

$3x^2=4x^2y$，$4xy^2=3y^2$成立

即仅当$x=y=0$和$x=y=\frac{3}{4}$时才成立，这二点可导，

但函数$f(z)$处处不解析；

$f'(0)=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,0)}+i\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=0,$

$f'(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i)=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(\frac{3}{4},\frac{3}{4})}+i\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(\frac{3}{4},\frac{3}{4})}=\frac{27}{16}(1+i)$

8. 利用拉氏变换求解微分方程$y''+4y'+3y=e^{-t}$满足初始条件$y(0)=y'(0)=1$的解.（10 分）

解：解:令$L[y(t)]=Y(s)$,两边取拉氏变换

$$\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]+4\left[Y(s)s-y(0)\right]+3Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$\therefore Y(s)=\frac{s^2+6s+6}{(s+1)(s+1)(s+3)}$$

$\therefore$ Y(s) 有二级极点$s_1=-1$,一级极点$s_2=3$且$s\to\infty$时$Y(s)\to 0$

$$\therefore \mathrm{f(z)} = \sum_{i=1}^{2} \operatorname{Re} s\left[\mathrm{Y(s)e^{st}}, s_i\right]$$

$$= \lim_{\mathrm{s}\to -1}\left[\frac{(s^2+6s+6)e^{st}}{(s+3)}\right]' + \lim_{\mathrm{s}\to -3}\frac{(s^2+6s+6)e^{st}}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{7}{4}e^{-t} + t\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-3t}$$