《工程电磁场》复习重点及历年真题
(第二版)

博学而审问　明辨而笃行

作者：死抠 (于江西理工)
时间：January 23, 2019
邮箱：489765924@qq.com

Version: 3.00

目　录

第 1 章 知识点总结

1.1 矢量分析与场论思想

重点为: 方向导数、梯度、散度、环量、旋度、散度定理、斯托克斯定理的计算

1. 方向导数

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

其中 $\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}, \cos\beta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}, \cos\gamma = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}$.

2. 梯度

$$\mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z$$

其中梯度的运算与微分运算类似, 这里不再赘述.

3. 散度

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

散度的运算公式

(1)$\mathrm{div}(C\vec{A}) = C\mathrm{div}\vec{A}$

(2)$\mathrm{div}(u\vec{A}) = u\mathrm{div}\vec{A} + \mathrm{grad}u \bullet \vec{A}$

(3)$\mathrm{div}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \mathrm{div}\vec{A} \pm \mathrm{div}\vec{B}$

散度定理

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{A}\mathrm{d}V$$

4. 旋度

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

旋度的运算公式

(1)$\mathrm{rot}(C\vec{A}) = C\mathrm{rot}\vec{A}$

(2)$\mathrm{rot}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \mathrm{rot}\vec{A} \pm \mathrm{rot}\vec{B}$

(3)$\mathrm{rot}(u\vec{A}) = u\mathrm{rot}\vec{A} + \mathrm{grad}u \times \vec{A}$

(4)$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=0$(重要的矢量恒等式)
(5)$\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\bullet\mathrm{rot}\vec{A}-\vec{A}\bullet\mathrm{rot}\vec{B}$
(6)$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A})=0$(重要的矢量恒等式)
斯托克斯定理

$$\oint_l\vec{A}\bullet\mathrm{d}\vec{l}=\iint_S\mathrm{rot}\vec{A}\bullet\mathrm{d}\vec{S}$$

5. 哈密尔顿 (纳布拉) 算子

$$\nabla=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

因此
梯度 $\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z=\nabla u$
散度 $\mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\nabla\bullet\vec{A}$
旋度 $\mathrm{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\nabla\times\vec{A}$
拉普拉斯算子

$$\nabla^2=\nabla\bullet\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

∇ 算子常用运算公式
(1) $\iiint_V\nabla\bullet\vec{A}\mathrm{d}V=\oiint_S\vec{A}\bullet\mathrm{d}\vec{S}$(散度定理)
(2) $\iint_S\nabla\times\vec{A}\bullet\mathrm{d}\vec{S}=\oint_l\vec{A}\bullet\mathrm{d}\vec{l}$(斯托克斯定理)

6. 常用坐标系中的有关公式
拉梅系数 h_u,h_v,h_w
若 $\mathrm{d}\vec{l}=h_u\mathrm{d}\vec{u}+h_v\mathrm{d}\vec{v}+h_w\mathrm{d}\vec{w}$
则有
$\nabla a=\frac{1}{h_u}\frac{\partial a}{\partial u}\vec{e}_u+\frac{1}{h_v}\frac{\partial a}{\partial v}\vec{e}_v+\frac{1}{h_w}\frac{\partial a}{\partial w}\vec{e}_w$
$\nabla\bullet\vec{A}=\frac{1}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(A_uh_vh_w)+\frac{\partial}{\partial v}(A_vh_uh_w)+\frac{\partial}{\partial w}(A_wh_uh_v)\right]$
$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{h_uh_vh_w}\begin{vmatrix}h_u\vec{e}_u & h_v\vec{e}_v & h_w\vec{e}_w\\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w}\\ h_uA_u & h_vA_v & h_wA_w\end{vmatrix}$
那么在柱面坐标系中有 $\mathrm{d}\vec{l}=\mathrm{d}\vec{r}+r\mathrm{d}\vec{\alpha}+\mathrm{d}\vec{z}$
即 $h_u=1,\ h_v=r,\ h_w=1$
那么在球面坐标系中有 $\mathrm{d}\vec{l}=\mathrm{d}\vec{r}+r\mathrm{d}\vec{\theta}+r\sin\theta\mathrm{d}\vec{\alpha}$

即 $h_u=1,\ h_v=r,\ h_w=r\sin\theta$

1.2 静电场的基本原理

重点为: 电场强度、电位移矢量、极化强度、极化电荷体密度、极化电荷面密度的计算, 电位与电场强度的关系，衔接条件

1. 电场强度
   $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\vec{e}_R$
   电荷线密度 $\tau=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$, 电荷面密度 $\sigma=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$, 电荷体密度 $\rho=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$
   线电荷产生的电场强度 $E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_l\dfrac{\tau\vec{e}_R}{R^2}\mathrm{d}l$
   面电荷产生的电场强度 $E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iint_S\dfrac{\sigma\vec{e}_R}{R^2}\mathrm{d}S$
   体电荷产生的电场强度 $E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iiint_V\dfrac{\rho\vec{e}_R}{R^2}\mathrm{d}V$
2. 电位
   $\varphi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iiint_V\dfrac{\rho}{R}\mathrm{d}V+C$ 面、线情况下的电位不再赘述
   电位与电场强度的关系 $E=-\nabla\varphi$
   静电场环路定理的微分形式 $\nabla\times\vec{E}=0$
   静电场环路定理的积分形式 $\displaystyle\oint_l E\bullet\mathrm{d}\vec{l}=0$
   高斯通量定理的微分形式 $\nabla\bullet\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
   高斯通量定理的积分形式 $\displaystyle\oiint_S\vec{E}\bullet\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_V\nabla\bullet\vec{E}\mathrm{d}V=\iiint_V\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}V=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$
3. 电位移矢量
   $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$(其中 $\vec{P}$ 为极化强度)
   极化电荷体密度 $\rho_P=-\nabla\bullet\vec{P}$, 极化电荷面密度 $\sigma_P=\vec{P}\bullet\vec{e}_{\mathrm{n}}$
   高斯通量定理的微分形式 $\nabla\bullet\vec{D}=\rho$
   高斯通量定理的积分形式 $\displaystyle\oiint_S\vec{D}\bullet\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_V\nabla\bullet\vec{D}\mathrm{d}V=q$
4. 静电场的辅助方程
   在各向同性的介质中 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$
5. 静电场的基本方程与分界面衔接条件

	微分形式	积分形式
静电场基本方程	$\nabla\times\vec{E}=0$	$\oint_l\vec{E}\bullet\mathrm{d}\vec{l}=0$
	$\nabla\bullet\vec{D}=\rho$	$\oiint_S\vec{D}\bullet\mathrm{d}\vec{S}=q$

   辅助方程为 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$
   电介质分界面条件
   $\vec{e}_{\mathrm{n}}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0\Leftrightarrow E_{2\mathrm{t}}=E_{1\mathrm{t}}$

$\vec{e}_{\mathrm{n}} \bullet (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \Leftrightarrow D_{2\mathrm{n}} - D_{1\mathrm{n}} = \sigma$

1.3 恒定电场的基本原理

重点为: 电流密度与电场强度的关系，电流密度的计算，衔接条件

1. 电流密度
   $J = \rho v = \rho \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho \mathrm{d}S_0 \mathrm{d}l}{\mathrm{d}t \mathrm{d}S_0} = \frac{\rho \mathrm{d}V}{\mathrm{d}t \mathrm{d}S_0} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t \mathrm{d}S_0} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_0}$
   电流密度与电场强度的关系
   $\vec{J} = \gamma \vec{E} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{1}{\gamma}\vec{J} = \rho_R \vec{J}$
2. 电动势
   $e = \int_a^b E_{\mathrm{e}} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$
3. 电流连续性
   电荷守恒原理的积分形式 $\oiint_S \vec{J} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}$
   电荷守恒原理的微分形式 $\nabla \bullet \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$
   对于恒定电场 (即 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$) 有
   恒定电场的电流连续性方程 $$\begin{aligned} &\nabla \bullet \vec{J} = 0 \\ &\oiint_S J \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0 \end{aligned}$$
4. 恒定电场的基本方程及辅助方程

	微分形式	积分形式
恒定电场的基本方程	$\nabla \bullet \vec{J} = 0$	$\oiint_S \vec{J} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0$
	$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\oint_l \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 0$

   辅助方程为 $\vec{J} = \gamma \vec{E}$
   在均匀媒质中, 电位的基本方程 $\gamma \nabla^2 \varphi = 0$
5. 导电媒质分界面衔接条件
   $\vec{e}_{\mathrm{n}} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \Leftrightarrow E_{2\mathrm{t}} = E_{1\mathrm{t}}$
   $\vec{e}_{\mathrm{n}} \bullet (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = 0 \Leftrightarrow J_{2\mathrm{n}} = J_{1\mathrm{n}}$
   将 $\vec{E} = -\nabla \varphi$, $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ 代入上述分界面条件, 得到电位应满足的分界面衔接条件
   $$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \gamma \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \end{cases}$$

1.4 恒定磁场的基本原理

重点为: 用安培环路定理 (2 种) 计算磁感应强度、磁场强度

1. 毕奥-沙伐定律
   $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_l \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_R}{R^2} \Leftrightarrow \mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_R}{R^2}$
2. 分布电流的磁感应强度
   点电流 $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{e}_R}{R^2}$
   线电流 $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_l \frac{I\mathrm{d}l\times\vec{e}_R}{R^2}$
   面电流 $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S \frac{\vec{K}\times\vec{e}_R}{R^2}\mathrm{d}S$
   体电流 $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}\times\vec{e}_R}{R^2}\mathrm{d}V$
3. 洛伦兹力
   $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$
4. 磁通连续性定理

	微分形式	积分形式
磁通连续性定理	$\nabla\bullet\vec{B}=0$	$\oiint_S \vec{B}\bullet\mathrm{d}\vec{S}=0$

5. 安培环路定理

	微分形式	积分形式
安培环路定理	$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$	$\oint_l \vec{B}\bullet\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$

6. 磁场强度
   $\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$(其中 $\vec{M}$ 为磁化强度)

	微分形式	积分形式
安培环路定理	$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$	$\oint_l \vec{H}\bullet\mathrm{d}\vec{l}=I$

7. 恒定磁场的基本方程与分界面衔接条件

	微分形式	积分形式
恒定磁场的基本方程	$\nabla\bullet\vec{B}=0$	$\oiint_S \vec{B}\bullet\mathrm{d}\vec{S}=0$
	$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$	$\oint_l \vec{H}\bullet\mathrm{d}\vec{l}=I$

   辅助方程为 $\vec{B}=\mu\vec{H}$
   媒质分界面的衔接条件
   $\vec{e}_\mathrm{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{K}$(其中 $\vec{K}$ 为分界面的自由面电流密度)
   $\vec{e}_\mathrm{n}\bullet(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \Leftrightarrow B_{2\mathrm{n}}=B_{1\mathrm{n}}$

1.5 时变电磁场的基本原理

重点为: 位移电流、全电流 ($\vec{J}_\mathrm{C}, \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 是重点) 的计算

1. 时变场中的运动回路

电磁感应定律

微分形式 积分形式

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B}) \quad \oint_l \vec{E}\bullet d\vec{l}=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{S}+\oint_l(\vec{v}\times\vec{B})\bullet d\vec{l}$$

2. 时变场的电流连续性

$$\nabla\bullet\left(\vec{J}_C+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=0$$

3. 全电流定律

微分形式 积分形式

全电流定律 $$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_\mathrm{C}+\vec{J}_v+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad \oint_l\vec{H}\bullet d\vec{l}=i_\mathrm{C}+i_\mathrm{D}+i_v$$

4. 电磁场的基本方程组

电磁场基本方程组

微分形式 积分形式

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_\mathrm{C}+\rho\vec{v}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad \oint_l\vec{H}\bullet d\vec{l}=\iint_S\vec{J}_\mathrm{C}\bullet d\vec{S}+\iint_S\rho\vec{v}\bullet d\vec{S}+\iint_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{S}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \oint_l\vec{E}\bullet d\vec{l}=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{S}$$

$$\nabla\bullet\vec{B}=0 \quad \oiint_S\vec{B}\bullet d\vec{S}=0$$

$$\nabla\bullet\vec{D}=\rho \quad \oiint_S\vec{D}\bullet d\vec{S}=q$$

在各向同性媒质中, 辅助方程为

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\ \vec{B}=\mu\vec{H},\ \vec{J}_\mathrm{C}=\gamma\vec{E}$$

媒质分界面衔接条件

$$\vec{e}_\mathrm{n}\bullet(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma \quad \vec{e}_\mathrm{n}\bullet(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$$
$$\vec{e}_\mathrm{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \quad \vec{e}_\mathrm{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{K}$$

第 2 章 重点习题

2.1 课后习题

1-6, 1-9, 1-14, 1-16, 1-21, 1-22, 1-24, 2-5, 2-6, 2-7, 2-10, 2-13, 2-15, 2-16, 3-1, 4-7, 4-8, 4-10, 5-4, 5-5, 5-7, 5-8, 5-13

2.2 书中例题

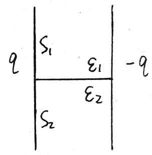
1. 设跨步电压安全限值为 U_0, 入地电流为 I, 试确定课本 78 页图 $3-4-6$ 所示的浅埋半球接地体附近地面的危险区.

第 3 章 历年真题

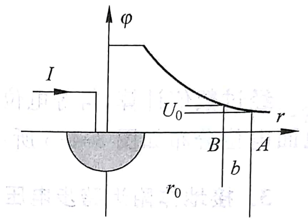
3.1 2018-2019(C)

试卷编号: 1819010634C

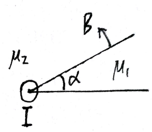
1. (10 分) 求函数 $\varphi = xyz$ 在点 $(5,2,1)$ 处沿着点 $(5,1,2)$ 到 $(9,4,19)$ 方向的方向导数。
2. (10 分) 已知标量场 $u = \mathrm{e}^x \sin y$，求 ∇u。
3. (10 分) 已知 $\vec{A} = xy^2z\vec{r}$ $(\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$，求 $\mathrm{div}\vec{A}$ 在 $M(3,3,2)$ 处的值。
4. (10 分) 已知 $\vec{A} = xz^3\vec{e}_x - 2x^2yz\vec{e}_y + 2yz^4\vec{e}_z$，求 $\vec{A}$ 在 $M(1,-1,-1)$ 点的旋度。
5. (10 分) 一个半径为 a 的无限长圆柱，圆柱表面均匀分布面电荷密度 ρ_S，求圆柱面内、外的电场强度。
6. (10 分) 给定平行板电容器的尺寸、电介质的介电常数，如图所示，给定极板总电荷量下，求电容器中的电场强度。



7. (15 分) 如图所示，试确定浅埋半球接地体的危险半径 r_0，设跨步电压安全限值为 U_0，入地电流为 I，土壤的电导率为 γ，跨步距离为 b。



8. (10 分) 如图所示，已知无穷长电流和两种媒质的磁导率，求两种媒质中的磁感应强度。



9. (15 分) 一个球形电容器的内、外半径分别为 a 和 b，内、外导体间材料的介电常数为 ε、电导率为 γ，在内、外导体间加低频电压 $u = U_m \cos \omega t$。求内外导体间的全电流。

第 4 章 历年真题参考答案

4.1 2018-2019(C)

试卷编号: 1819010634C

1. (10 分) 求函数 $\varphi = xyz$ 在点 $(5,2,1)$ 处沿着点 $(5,1,2)$ 到 $(9,4,19)$ 方向的方向导数。

   解: $\nabla\varphi\big|_{(5,2,1)} = (yz\vec{e}_x + xz\vec{e}_y + xy\vec{e}_z)\big|_{(5,2,1)} = 2\vec{e}_x + 5\vec{e}_y + 10\vec{e}_z$

   沿着点 $(5,1,2)$ 到 $(9,4,19)$ 方向的单位矢量为

$$\vec{a} = \frac{4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 17\vec{e}_z}{\sqrt{4^2+3^2+17^2}} = \frac{4}{\sqrt{314}}\vec{e}_x + \frac{3}{\sqrt{314}}\vec{e}_y + \frac{17}{\sqrt{314}}\vec{e}_z$$

   则函数 $\varphi = xyz$ 在点 $(5,2,1)$ 处沿着点 $(5,1,2)$ 到 $(9,4,19)$ 方向的方向导数为

$$\nabla\varphi\big|_{(5,2,1)} \bullet \vec{a} = \frac{193}{\sqrt{314}}$$

2. (10 分) 已知标量场 $u = \mathrm{e}^x \sin y$，求 ∇u。

   解:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y = \mathrm{e}^x \sin y\vec{e}_x + \mathrm{e}^x \cos y\vec{e}_y$$

3. (10 分) 已知 $\vec{A} = xy^2z\vec{r}$ $(\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$，求 $\mathrm{div}\vec{A}$ 在 $M(3,3,2)$ 处的值。

   解: $\vec{A} = x^2y^2z\vec{e}_x + xy^3z\vec{e}_y + xy^2z^2\vec{e}_z$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{A}\Big|_M &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Bigg|_M \\ &= \left(2xy^2z + 3xy^2z + 2xy^z\right)\Big|_M \\ &= 324\end{aligned}$$

4. (10 分) 已知 $\vec{A} = xz^3\vec{e}_x - 2x^2yz\vec{e}_y + 2yz^4\vec{e}_z$，求 $\vec{A}$ 在 $M(1,-1,-1)$ 点的旋度。

   解:

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A}\Big|_M &= \left|\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4\end{vmatrix}\right|_M = \left(2z^4 + 2x^2y\right)\vec{e}_x + 3xz^2\vec{e}_y - 4xyz\vec{e}_z\Big|_M \\ &= 3\vec{e}_y - 4\vec{e}_z\end{aligned}$$

5. (10 分) 一个半径为 a 的无限长圆柱，圆柱表面均匀分布面电荷密度 ρ_S，求圆柱面内、外的电场强度。

解: 在无限长圆柱轴线上作一以轴线为中心，半径为 r，高为 h 的高斯圆柱面

设 $\vec{E}_r$ 为沿半径方向的电场强度

当 $r < a$ 时，根据高斯通量定理，显然有 $\vec{E}_r = 0$

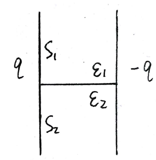
当 $r \geqslant a$ 时，根据对称性，上下面的电场强度为 0，根据高斯通量定理

$$\oiint_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = 2\pi\vec{E}_r rh = \frac{2\pi ah\rho_S}{\varepsilon_0}$$

即

$$\vec{E}_r = \frac{a\rho_S}{r\varepsilon_0}$$

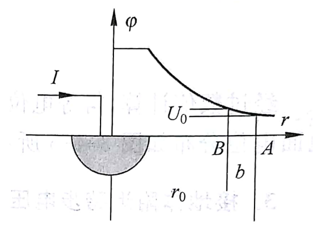
6. (10 分) 给定平行板电容器的尺寸、电介质的介电常数，如图所示，给定极板总电荷量下，求电容器中的电场强度。



解: 联立两式 $\begin{cases} C = \dfrac{Q}{U} \\ C = \dfrac{\varepsilon S}{4\pi kd} \end{cases}$ 得 $q = Q_1 + Q_2 = \dfrac{U(\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2)}{4\pi kd}$

即 $U = \dfrac{4\pi kdq}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}$，即 $E = \dfrac{U}{d} = \dfrac{4\pi kq}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}$

7. (15 分) 如图所示，试确定浅埋半球接地体的危险半径 r_0，设跨步电压安全限值为 U_0，入地电流为 I，土壤的电导率为 γ，跨步距离为 b。



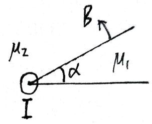
解: 电流密度 $J = \dfrac{I}{2\pi r^2}$，则 $E = J/\gamma = \dfrac{I}{2\pi\gamma r^2}$

电位 $\varphi(r) = \displaystyle\int_r^{+\infty} E\ \mathrm{d}r = \dfrac{I}{2\pi\gamma r}$

跨步电压 $\varphi(r-b) - \varphi(r) = \dfrac{bI}{2\pi\gamma(r-b)r} \approx \dfrac{bI}{2\pi\gamma r^2} \overset{令}{=\!=} U_0$

解得 $r_0 = \sqrt{\dfrac{bI}{2\pi\gamma U_0}}$

8. (10 分) 如图所示，已知无穷长电流和两种媒质的磁导率，求两种媒质中的磁感应强度。



解: 根据安培环路定理、媒质分界面的衔接条件

$$\oint_l \vec{H} \bullet \mathrm{d}l = \oint_{l_1} \frac{\vec{B}}{\mu_1}\,\mathrm{d}l + \oint_{l_2} \frac{\vec{B}}{\mu_2}\,\mathrm{d}l = B\left(\frac{\alpha r}{\mu_1} + \frac{(2\pi - \alpha)r}{\mu_2}\right) = I$$

其中 l 为以电流为中心，半径为 r 的圆，l_1, l_2 分别为 l 在媒质 μ_1、μ_2 中的部分

解得 $B = \dfrac{I\mu_1\mu_2}{(\alpha\mu_2 + (2\pi - \alpha)\mu_1)r}$

9. (15 分) 一个球形电容器的内、外半径分别为 a 和 b，内、外导体间材料的介电常数为 ε、电导率为 γ，在内、外导体间加低频电压 $u = U_m \cos\omega t$。求内外导体间的全电流。

解: 根据高斯通量定理

$$\oiint_S \vec{D} \bullet \mathrm{d}S = 4\pi r^2 D = Q$$

其中 S 为球心在球形电容器球心，半径为 $r(a < r < b)$ 的球面

解得 $E = \dfrac{D}{\varepsilon} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$，联立 $\displaystyle\int_a^b E\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = u = U_m \cos\omega t$

解得 $Q = \dfrac{4\pi\varepsilon ab U_m \cos\omega t}{b - a}$

则 $J = \gamma E = \dfrac{ab\gamma U_m \cos\omega t}{(b-a)r^2}$，$\dfrac{\partial D}{\partial t} = -\dfrac{\varepsilon\omega ab U_m \sin\omega t}{(b-a)r^2}$

全电流密度 $= \dfrac{abU_m}{(b-a)r^2}\left(\gamma\cos\omega t - \varepsilon\omega\sin\omega t\right)$

全电流 $= \dfrac{4\pi abU_m}{b-a}(\gamma\cos\omega t - \varepsilon\omega\sin\omega t)$