提高练习二 参考答案

一、填空题：

1. $-\frac{1}{2}f'(0)$ 2. $f''(1+\sin x)\cos^2 x - f'(1+\sin x)\sin x$

3. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 4. $2x^2\sin(2x^4)$ 5. $(1+2t)e^{2t}$

二、选择题：

1.A 2.D 3.A

三、计算：

1．$y = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$，求$dy$

解： $dy = -\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}e^{\sin^2\frac{1}{x}}dx$

2．$\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$，求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$

解： $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = 3t^3$，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{9t^2}{1/t} = 9t^3$，

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1} = 9$$

3．$x+\arctan y=y$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解： $1+\dfrac{1}{1+y^2}y'=y'$, $y'=\dfrac{1+y^2}{y^2}=\dfrac{1}{y^2}+1$,

$$y''=-\frac{2}{y^3}y'=-\frac{2}{y^3}\left(\frac{1}{y^2}+1\right)=-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$$

4．$y=(2x-1)^n$，求$y^{(50)}$。

解： $n<50$时，$y^{(50)}=0$,

$n\geq 50$时，$y^{(50)}=2^{50}n(n-1)\cdots(n-49)(2x-1)^{n-50}$

或 $=\dfrac{2^{50}n!}{(n-48)!}(2x-1)^{n-50}$

5. $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$，求$y'$。

解: $y'=\left(e^{x[\ln x-\ln(1+x)]}\right)'=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$

6. $f(x)=2x^2+x|x|$，求$f'(x)$。

解: $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ 3x^2, & x\ge 0\end{cases}$, $\quad f'(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ 6x, & x\ge 0\end{cases}$,

7. $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，$\varphi(x)$在$x=a$处有连续的一阶导数，求$f'(a)$、$f''(a)$。

解: $f'(x)=\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x),\ f'(a)=\varphi(a)$

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)-\varphi(a)}{x-a},$$

$$f''(a)=\varphi'(a)+\lim_{x\to a}\varphi'(x)=2\varphi'(a)$$

8．设$f(x)$在$x=1$处有连续的一阶导数，且$f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{d}{dx}f(\cos\sqrt{x-1})$。

解：$\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{d}{dx}f(\cos\sqrt{x-1})=\lim\limits_{x\to 1+0}f'(\cos\sqrt{x-1})\cdot\dfrac{-\sin\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$

$$=2\cdot(-\frac{1}{2})=-1$$

四、若函数$f(x)$在$x=0$处可导，又$f(0)=0$

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan(x^2)}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan(x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$$=f'(0)\cdot\frac{1}{2}=\frac{f'(0)}{2}$$

五、试确定常数a、b之值，使函数

$$f(x)=\begin{cases} b(1+\sin x)+a+2, & x\ge 0 \\ e^{ax}-1, & x<0 \end{cases}$$ 处处可导。

解： $f(x)$在$x=0$可导,则$f(x)$在$x=0$连续

由$f(x)$在$x=0$连续, $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$,

$$\therefore 0=b+a+2, \qquad \therefore b=-a-2,$$

由$f(x)$在$x=0$可导, $f'_-(0)=f'_+(0)$,

$$f'_-(0)=\lim_{x\to -0}\frac{e^{ax}-1-0}{x-0}=a,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to +0}\frac{b(1+\sin x)+a+2-0}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{b\sin x}{x}=b,$$

$$\therefore a=b, \quad \therefore a=b=-1$$

六、证明曲线$x^2-y^2=a$与$xy=b$（a,b为常数）在交点处切线相互垂直。

解： 设两曲线交点为$M(x_0,y_0)$

由$xy=b, y=\frac{b}{x}, y'=-\frac{b}{x^2}$,

$\therefore xy=b$在M处切线的斜率为$k_1=-\frac{b}{x_0^2}$,

由$x^2-y^2=a, y'=\frac{x}{y}$

$\therefore x^2-y^2=a$在M处切线的斜率为$k_2=\frac{x_0}{y_0}$,

$$k_1\cdot k_2=-\frac{b}{x_0^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}=-\frac{b}{x_0y_0}=-1$$

$x^2-y^2=a$与$xy=b$在交点处切线相互垂直。