§1.3 条件概率及有关公式

一、条件概率的定义与性质

引例　袋中有7只白球, 3只红球, 白球中有4只木球, 3只塑料球; 红球中有2只木球, 1只塑料球.

现从袋中任取1球, 假设每个球被取到的可能性相同. 若已知取到的球是白球, 问它是木球的概率是多少？ ⟶ 古典概型

设 A 表示任取一球，取得白球；

B 表示任取一球，取得木球.

所求的概率称为在事件A 发生的条件下事件B 发生的**条件概率**。记为 $P(B|A)$

解 列表

	白球	红球	小计
木球	4	2	6
塑球	3	1	4
小计	7	3	10

$$P(B|A)=\frac{4}{7}\quad \begin{matrix}\longrightarrow k_{B|A}=4=k_{AB} \\ \longrightarrow n_{\Omega|A}=7=k_{A}\end{matrix}\quad =\frac{P(AB)}{P(A)}$$

从而有

$$P(B|A)=\frac{4}{7}=\frac{k_{AB}}{k_A}=\frac{k_{AB}/n_\Omega}{k_A/n_\Omega}=\frac{4/10}{7/10}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

定义1 设A、B为两事件, $P(A)>0$, 则称在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率，为事件 B关于事件 A的条件概率。

记为 $P(B|A)$

定义2 设A、B为两事件, $P(A)>0$, 则称 $P(AB)/P(A)$ 为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率，记为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

条件概率也是概率，故具有概率的性质：

1） 非负性 $P(B|A)\geq 0$

2） 规范性 $P(\Omega|A)=1$

3） 可列可加性 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i \middle| A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$

- $P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A)$
- $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$
- $P(B_1-B_2|A)=P(B_1|A)-P(B_1B_2|A)$

例1 某厂生产的灯泡能用1000小时的概率为0.8，能用1500小时的概率为0.4，求已用1000小时的灯泡能用到1500小时的概率

解 令 A 灯泡能用到1000小时

B 灯泡能用到1500小时

所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\underset{\underset{B\subset A}{\uparrow}}{=}\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=\frac{1}{2}$$

例2 从混有5张假钞的20张百元钞票中任意抽出2张, 将其中1张放到验钞机上检验发现是假钞. 求2 张都是假钞的概率.

解 令 A 表示"抽到2 张都是假钞".
B表示"2 张中至少有1张假钞"

$$A \subset B$$

则所求概率是 $P(A|B)$（而不是$P(A)$ ！）.

$$P(AB) = P(A) = C_5^2 / C_{20}^2 \quad P(B) = (C_5^2 + C_5^1 C_{15}^1) / C_{20}^2$$

所以 $P(A|B) = P(AB) / P(B)$

$$= C_5^2 / (C_{20}^2 + C_5^1 C_{15}^1) = 10/85 = 0.118$$

二、乘法公式

利用条件概率求积事件的概率即乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \quad (P(A)>0)$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \quad (P(B)>0)$$

推广

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$(P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0)$$

例3 盒中装有5个产品, 其中3个一等品，2个二等品, 从中不放回地取产品, 每次1个，求

（1）取两次，两次都取得一等品的概率;

（2）取两次，第二次取得一等品的概率;

（3）取三次，第三次才取得一等品的概率;

（4）取两次，已知第二次取得一等品，求第一次取得的是二等品的概率.

解 令 A_i 为第 i 次取到一等品

(1) $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10}$

（2） $P(A_2)=P(\overline{A_1}A_2\cup A_1A_2)=P(\overline{A_1}A_2)+P(A_1A_2)$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}$$

（2）直接解更简单 $P(A_2)=3/5$

提问：第三次才取得一等品的概率, 是

$P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})$ 还是 $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3)$?

(3) $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\middle|\overline{A_1}\right)P\left(A_3\middle|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{10}$$

(4) $$P\left(\overline{A_1} \,\middle|\, A_2\right)=\frac{P(\overline{A_1}A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_2)-P(A_1A_2)}{P(A_2)}$$

$$=1-\frac{3/10}{3/5}=0.5$$

例4 某人外出旅游两天, 需知道两天的天气情况, 据预报, 第一天下雨的概率为 **0.6**, 第二天下雨的概率为**0.3**, 两天都下雨的概率为**0.1**. 求 第一天下雨时, 第二天不下雨的概率

解 设A_1与A_2 分别表示第一与第二天下雨

$$P(\overline{A_2} \mid A_1) = \frac{P(A_1\overline{A_2})}{P(A_1)} = \frac{P(A_1) - P(A_1A_2)}{P(A_1)}$$

$$= \frac{0.6 - 0.1}{0.6} = \frac{5}{6} \quad > P(\overline{A_2}) = 0.7$$

一般地 **条件概率与无条件概率之间的大小无确定关系**

上例中

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} = \frac{0.1}{0.6} = \frac{1}{6} < P(A_2)$$

若 $B \subset A$

$$\longrightarrow \quad P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} \geq P(B)$$

例5 为了防止意外,矿井内同时装有A 与B两两种报警设备, 已知设备 A 单独使用时有效的概率为0.92, 设备 B 单独使用时有效的概率为0.93, 在设备 A 失效的条件下, 设备B 有效的概率为 0.85, 求发生意外时至少有一个报警设备有效的概率.

解 设事件 A, B 分别表示设备A, B 有效

已知 $P(A)=0.92$ $P(B)=0.93$

$$P(B|\overline{A})=0.85$$

求 $P(A\cup B)$

解　由 $P(B|\overline{A})=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$ 即

$$0.85=\frac{0.93-P(AB)}{0.08} \longrightarrow P(AB)=0.862$$

故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=0.92+0.93-0.862=0.988$$

解法二

$$P\left(\overline{A\cup B}\right)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}|\overline{A})$$

$$=P(\overline{A})\cdot[1-P(B|\overline{A})]$$

$$=0.08\cdot[1-0.85]=0.012$$

$$P(A\cup B)=0.988$$

三、全概率公式与Bayes 公式

1、全概率公式

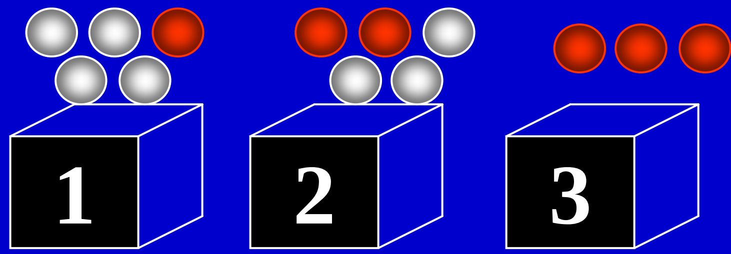
设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是两两互不相容的事件，且 $P(A_i)>0$， $i=1,2,\ldots,n$； 另有一事件B, 它满足 $B\subset\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ ，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

注：上面定理的条件有时改为：$A_1,A_2,\ldots,A_n$ 是B的一个划分：1）两两互不相容

2） $B=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$

例6 有三个箱子，分别编号为1,2,3，1号箱装有1个红球4个白球，2号箱装有2红3白球，3号箱装有3红球. 某人从三箱中任取一箱，从中任意摸出一球，求取得红球的概率.



解：记 A_i={球取自i号箱}, i=1,2,3;

B ={取得红球}，则

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3} \qquad P(B\mid A_1)=\frac{1}{5}$$

$$P(B\mid A_2)=\frac{2}{5} \qquad P(B\mid A_3)=1$$

则由全概率公式：$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)$

$$=\cdots=\frac{8}{15}$$

例7某电子设备制造厂所用的晶体管是由三家元件制造厂提供的.根据以往的记录有以下的数据.

元件制造厂	次品率	提供晶体管的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的,且无区别的标志. 在仓库中随机地取一只晶体管,求它是次品的概率.

解 设 A={取到的是一只次品}

B_i={所取产品是由第i加工厂提供} $i=1,2,3$

显然，B_1,B_2,B_3是样本空间的一个划分

则由全概率公式：

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$$
$$=0.02\times0.15+0.01\times0.80+0.03\times0.05=0.0125$$

2、贝叶斯公式

设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是两两互不相容的事件，且$P(A_i)>0$，$i=1,2,\ldots,n$；另有一事件B，它满足$B\subset\bigcup_{k=1}^{n}A_k$，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$$

例8 对以往数据分析的结果表明,当机器调整得良好时,产品的合格率为90%,而当机器发生某一故障时,其合格率为30%.每天早上机器开动时,机器调整得良好的概率为75%.试求已知某日早上第一件产品是合格品时,机器调整得良好的概率是多少?

解 设 A={产品是合格品}, B={机器调整得良好}

已知 $P(A|B)=0.9, P(A|\overline{B})=0.3, P(B)=0.75, P(\overline{B})=0.25$

显然, $B,\overline{B}$ 构成了必然事件的一个划分,由贝叶斯公式,所求的概率为

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

$$=\frac{0.9\times0.75}{0.9\times0.75+0.3\times0.25}=0.9$$

例9 每100件产品为一批, 已知每批产品中次品数不超过4件, 每批产品中有 i 件次品的概率为

i	0	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

从每批产品中不放回地取10件进行检验,若发现有不合格产品,则认为这批产品不合格,否则就认为这批产品合格. 求

(1) 一批产品通过检验的概率

(2) 通过检验的产品中恰有 i 件次品的概率

解 设一批产品中有 i 件次品为事件B_i,
$i = 0,1,\ldots,4$ A 为一批产品通过检验

则 $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$,

$$B_i B_j = \Phi,\ i \neq j, i, j = 0,1,2,3,4$$

已知$P(B_i)$如表中所示，且

$$P(A|B_i) = \frac{C_{100-i}^{10}}{C_{100}^{10}},\ i = 0,1,2,3,4$$

由全概率公式与Bayes 公式可计算$P(A)$与

$P(B_i|A),\ i = 0,1,2,3,4$

结果如下表所示

i	0	1	2	3	4
$P(B_i)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1
$P(A \mid B_i)$	1.0	0.9	0.809	0.727	0.652
$P(B_i \mid A)$	0.123	0.221	0.397	0.179	0.080

$$P(A)=\sum_{i=0}^{4} P(B_i)P(A \mid B_i) = 0.814$$

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)}, \quad i=0,1,2,3,4$$

- 称 $P(B_i)$ 为先验概率，它是由以往的经验得到的，它是事件 A 的原因

称 $P(B_i|A)\quad i=0,1,2,3,4$ 为后验概率，它是得到了信息 — A 发生, 再对导致 A 发生的原因发生的可能性大小重新加以修正

- 本例中， i 较小时, $P(B_i|A)\geq P(B_i)$

  i 较大时, $P(B_i|A)\leq P(B_i)$

例 10 某一地区患有癌症的人占0.005，患者对一种试验反应是阳性的概率为0.95，正常人对这种试验反应是阳性的概率为0.04，现抽查了一个人，试验反应是阳性，问此人是癌症患者的概率有多大?

求解如下： 设 C={抽查的人患有癌症}，

A={试验结果是阳性}，

则$\overline{C}$ 表示“抽查的人不患癌症”.

已知 $P(C)=0.005, P(\overline{C})=0.995,$

$P(A|C)=0.95, \quad P(A|\overline{C})=0.04$

求$P(C|A)$.

由贝叶斯公式，可得

$$P(C|A)=\frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\overline{C})P(A|\overline{C})}$$

代入数据计算得:

$P(C \mid A)= 0.1066$

例11 由于随机干扰, 在无线电通讯中发出信号“ • ”, 收到信号“• ”,“不清”,“ — ” 的概率分别为0.7, 0.2, 0.1; 发出信号“ — ”,收到信号“• ”,“不清”,“— ”的概率分别为0.0, 0.1, 0.9. 已知在发出的信号中, “ • ”和“ — ”出现的概率分别为0.6 和 0.4 , 试分析, 当收到信号“不清”时, 原发信号为“ • ”还是“ — ”的概率哪个大？

解 设原发信号为“ • ” 为事件 B_1

原发信号为“ — ”为事件 B_2

收到信号“不清” 为事件 A

已知：$A \subset B_1 + B_2$, $B_1 B_2 = \varnothing$

$$P(B_1) = 0.6,\ \ P(B_2) = 0.4$$

$$P(A|B_1) = 0.2,\ \ P(A|B_2) = 0.1$$

$$\longrightarrow P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

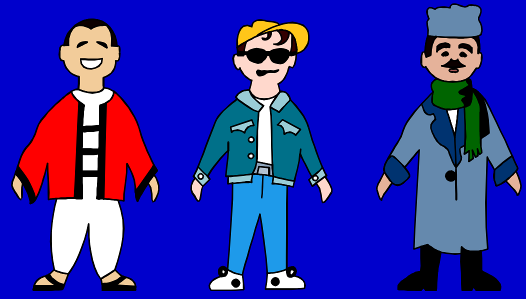
$$= 0.16$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{3}{4},$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

可见, 当收到信号“不清”时, 原发信号为“ • ”的可能性大

例如，某地发生了一个案件，怀疑对象有甲、乙、丙三人.



丙　乙　甲

在不了解案情细节(事件B)之前，侦破人员根据过去的前科，对他们作案的可能性有一个估计，设为

$P(A_1)$ $P(A_2)$ $P(A_3)$

偏小

但在知道案情细节后，这个估计就有了变化.

知道B发生后

$P(A_1 \mid B)$ $P(A_2 \mid B)$ $P(A_3 \mid B)$

最大

比如原来认为作案可能性较小的某甲，现在变成了重点嫌疑犯.