# 第十三讲 空间直线

一、空间直线的一般方程

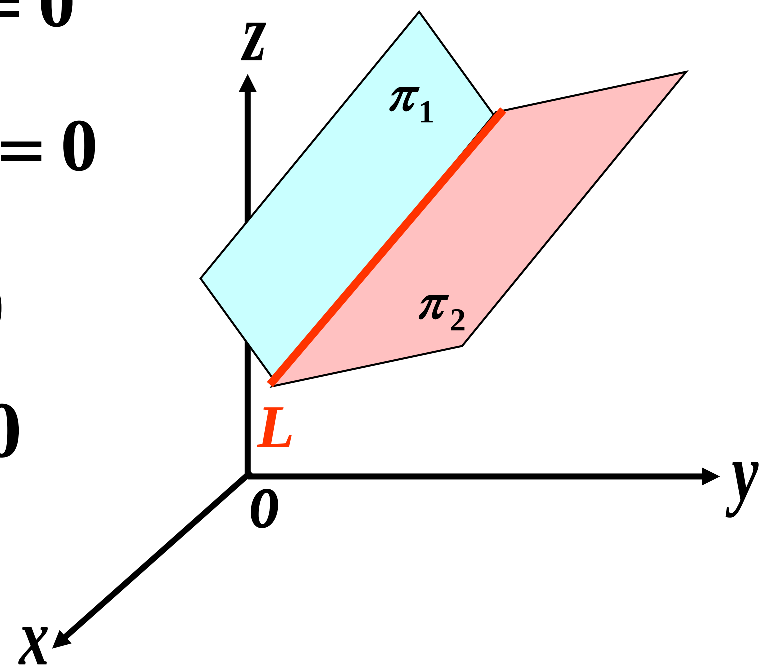
二、空间直线的对称式方程与参数方程

# 一、空间直线的一般方程

**定义**　空间直线可看成两平面的交线.

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

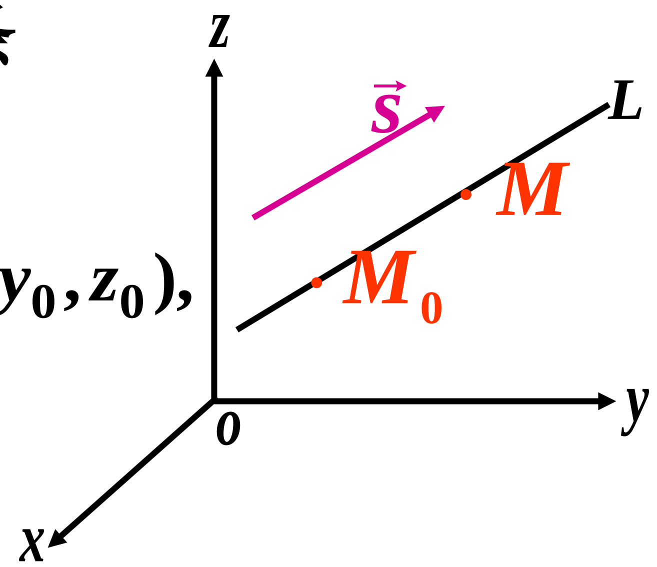



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

**空间直线的一般方程**

# 二、空间直线的对称式方程与参数方程

**方向向量的定义：** 如果一非零向量平行于一条已知直线，则这个向量称为这条直线的**方向向量**.




问题： 已知直线$L$过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，方向向量为 $\vec{s}=(m, n, p)$，求$L$的方程.

**解:** 设$M(x, y, z)$是$L$上任取的一点， $\because \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$,

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0),$$

$$\therefore \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$ 直线的对称式方程

直线的一组方向数

直线的三个方向数不可全为零

若令 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$

则可得 $$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases}$$ 直线的参数方程

直线$L$: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+1}{0}$

等价于直线$L$: $\begin{cases} y=1, \\ z=-1. \end{cases}$

直线$L$: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{0}$

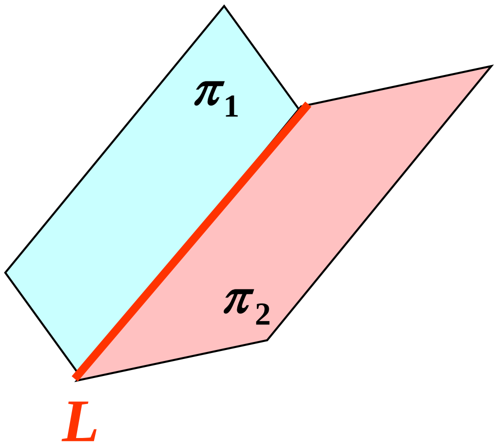
等价于直线$L$: $\begin{cases} x-y-1=0, \\ z=-1. \end{cases}$

**例1** 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}.$$

**解** 先在直线上任取一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

取 $x_0=1 \Rightarrow \begin{cases} y_0+z_0+2=0, \\ y_0-3z_0-6=0, \end{cases}$




解得 $y_0=0, \quad z_0=-2,$

得点的坐标为 $(1, 0, -2)$.

因所求直线与两平面的法向量都垂直,

故取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (4,-1,-3)$,

故所求对称式方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$,

参数方程为 $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=-2-3t \end{cases}$.

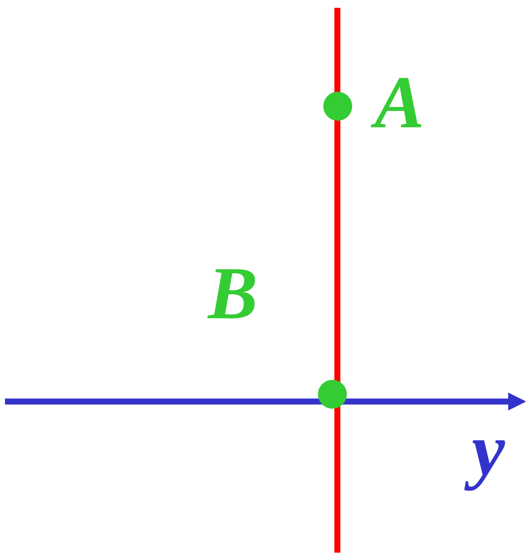
$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

$M_0(1,0,-2)$

**例2** 一直线过点$A(2,-3,4)$，且和$y$轴垂直相交，求其方程.

**解** 因为直线和$y$轴垂直相交,

所以交点为 $B(0,-3,0)$,




取 $\vec{s}=\overrightarrow{BA}=(2,0,4)$,

故所求直线方程为 $$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{4}.$$

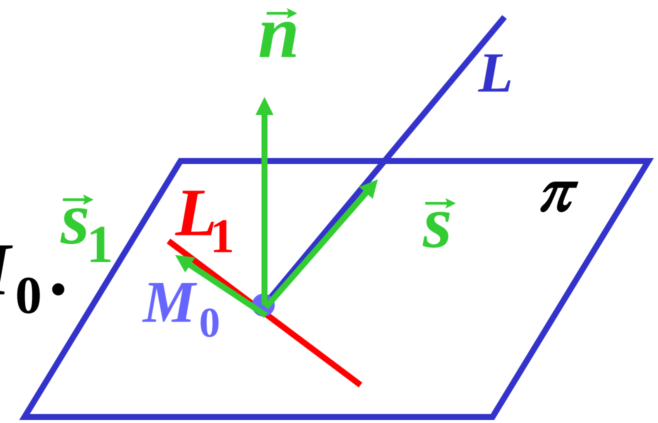
例 求过点$(-3,2,5)$,且与两平面$\pi_1$:$2x-y-5z=1$和$\pi_2$: $x-4z=3$的交线平行的直线方程.

例 求过点$(4,-1,3)$,且平行于直线 $\dfrac{x-3}{2}=y=\dfrac{z-1}{5}$ 的直线方程.

例 求过点$(-1,0,4)$,且垂直于平面$\pi$: $3x-4y+z=10$的直线方程.

例 求点$M_0(1,-2,4)$在平面$\pi$: $2x-3y+z=4$上的投影.

**例3** 求在平面$\pi$: $x+y+z=1$上且与直线$L$ $\begin{cases} y=1, \\ z=-1 \end{cases}$ 垂直相交的直线$L_1$.




**解** 先求直线L与平面$\pi$的交点 $M_0$.

$$\text{联立}\begin{cases} x+y+z=1, \\ y=1, \\ z=-1 \end{cases} \quad \text{得 } M_0(1,\ 1,\ -1).$$

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$L: \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{0}$$

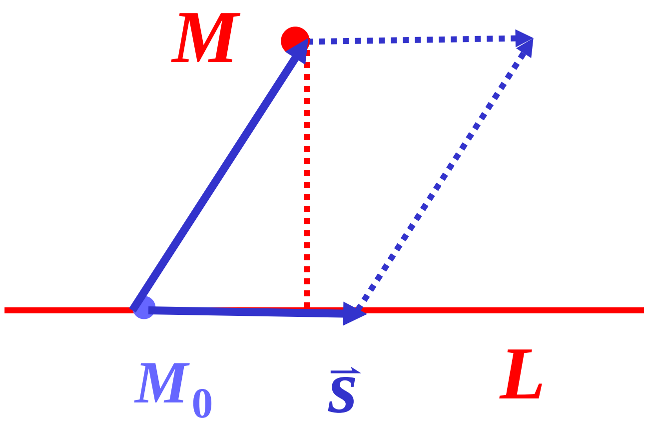
再求$L_1$的方向向量.

$$\text{取}\vec{s}_1=\vec{n}\times\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(0,\ 1,-1),$$

$$\text{求得}L_1: \frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}.$$

**例4** 求一点$M(2,1,3)$到直线$L$: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$的距离.

**解** 在直线上$L$任取一点 $M_0(-1,1,0)$,




则$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|}$

$$=\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{14}}=\frac{6\sqrt{21}}{7}.$$