

江西理工大学期中考试卷

试卷编号:

20 — 20 学年第 二 学期	考试性质 (正考、补考或其它): [正考]
课程名称: <u>高等数学 (二)</u>	考试方式 (开卷、闭卷): [闭卷]
考试时间: _____ 年 _____ 月 _____ 日	试卷类别 (A、B): [A] 共 <u>三</u> 大题
<p style="text-align: center;">温 馨 提 示</p> <p>请考生自觉遵守考试纪律, 争做文明诚信的大学生。如有违犯考试纪律, 将严格按照《江西理工大学学生违纪处分暂行规定》处理。</p>	

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 参考答案 _____

题号	一	二	三	总 分
得分				

一、填空题 (请将正确答案填写在以下相应的横线上, 每空 4 分, 共 20 分)

1. $\frac{2dx+2dy}{5}$
2. $(x-3)^2+(x+1)^2+(x-1)^2=21$
3. $2x+4y-3z+5=0$
4. $2y+3x^2$
5. $1+2\sqrt{3}$

二、选择题 (请将正确答案编码填入下表中, 每小题 4 分, 共 20 分)

题号	1	2	3	4	5
答案	A	B	D	A	C

三、计算题（请写出求解过程，7 小题，共 60 分）

1. 求由上半球面 $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ 和锥面 $z = \sqrt{5(x^2 + y^2)}$ 所围成的立体在 xOy 面上的投影. (7 分)

解：两式联立 $\begin{cases} z = \sqrt{6 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{5(x^2 + y^2)} \end{cases}$ ，消去 z 得 $x^2 + y^2 = 1$ ， 3 分

故投影曲线方程为： $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ ， 5 分

所以投影区域为： $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$. 7 分

2. 计算 $\iint_D (|x - y| + 2) dx dy$ ，其中 D ：圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 中第一象限中的部分. (7 分)

解：原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 [r(\cos\theta - \sin\theta) + 2] r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 [r(\sin\theta - \cos\theta) + 2] r dr$ 4 分

$$= -\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi}{2}. \quad 7 \text{ 分}$$

3. 设函数 f 具有二阶连续的偏导数， $u = f(xy, x + 2y)$ ，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. (8 分)

解： $\frac{\partial u}{\partial x} = yf'_1 + f'_2$ ， 4 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f'_1 + y(xf''_{11} + 2f''_{12}) + (xf''_{21} + 2f''_{22})$$

$$= f'_1 + xyf''_{11} + (x + 2y)f''_{12} + 2f''_{22}. \quad 8 \text{ 分}$$

4. 试在直线 $\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-1}{-1}$ 上求与点 $M(3, 2, 6)$ 距离最小的点 P . (8 分)

解: 过 M 且垂直于已知直线的平面为:

$$(x-3)+2(y-2)-(z-6)=0 \quad (1) \quad 3 \text{ 分}$$

$$\text{所给直线的参数方程为 } \begin{cases} x=t \\ y=-7+2t \\ z=1-t \end{cases}, \text{ 代入式 (1) 求得 } t=\frac{8}{3}, \quad 6 \text{ 分}$$

$$\text{故求得已知直线与平面 (1) 的交点为 } \left(\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right), \quad 7 \text{ 分}$$

$$\text{即求得已知直线上与点 } M(3, 2, 6) \text{ 距离最小的点为 } P\left(\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right). \quad 8 \text{ 分}$$

5. 求曲线 $\begin{cases} x=t-\cos t \\ y=3+\sin 2t \\ z=1+\cos 3t \end{cases}$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, 3, 1\right)$ 处的切线方程和法平面方程. (10 分)

$$\text{解: 点 } \left(\frac{\pi}{2}, 3, 1\right) \text{ 所对应的参数值 } t=\frac{\pi}{2}, \quad 2 \text{ 分}$$

$$x'_t = 1 + \sin t, \quad y'_t = 2 \cos 2t, \quad z'_t = -3 \sin 3t, \quad x'_t \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 2, \quad y'_t \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -2, \quad z'_t \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 3,$$

$$\text{故曲线在点 } \left(\frac{\pi}{2}, 3, 1\right) \text{ 处的切向量为 } \vec{T} = \{2, -2, 3\}, \quad 6 \text{ 分}$$

$$\text{因此所求切线方程为 } \frac{x-\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3} \quad 8 \text{ 分}$$

$$\text{法平面方程为 } 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-2(y-3)+3(z-1)=0,$$

$$\text{即 } 2x-2y+3z-\pi+3=0. \quad 10 \text{ 分}$$

6. 设 $e^z = xyz$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. (10 分)

解: 令 $F = e^z - xyz$, $\frac{\partial F}{\partial x} = -yz$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -xz$, $\frac{\partial F}{\partial z} = xy(z-1)$, 3 分

$$\text{则 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{z}{x(z-1)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} / \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{z}{y(z-1)} \quad 6 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{x(z-1)} \right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{z_y(z-1) - z \cdot z_y}{(z-1)^2} \end{aligned} \quad 8 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{-z_y}{(z-1)^2} = -\frac{z}{xy(z-1)^3} \quad 10 \text{ 分}$$

7. 求微分方程 $y'' + 5y' + 4y = xe^{-x}$ 的通解. (10 分)

解: 原方程对应的齐次线性微分方程的特征方程为 $r^2 + 5r + 4 = 0$,

特征根为 $r_1 = -1$, $r_2 = -4$,

原方程对应的齐次线性微分方程的通解为 $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$. 5 分

由于 $\lambda = -1$ 为特征单实根,

故原方程有形如 $y^* = x(Ax + B)e^{-x}$ 的特解, 7 分

代入原方程得: $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{9}$,

所以原方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + x \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{9} \right) e^{-x}$. 10 分