第二十二讲 不变子空间与根空间分解

一、不变子空间的定义

二、线性变换在不变子空间上的限制

三、不变子空间与线性变化的矩阵化简

四、线性空间的根空间分解

一、不变子空间的定义

1、定义

设 σ 是数域P上线性空间V的线性变换，W是V的子空间，若 $\forall \xi \in W$，有 $\sigma(\xi) \in W$ $\left(\text{即}\sigma(W) \subseteq W\right)$ 则称W是 σ 的不变子空间，简称为 σ 一子空间.

注：

V的平凡子空间（V及零子空间）对于V的任意一个变换 σ 来说，都是 σ 一子空间.

2、不变子空间的简单性质

1）两个σ一子空间的交与和仍是σ一子空间.

2）设 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$， 则W是$\sigma$一子空间

$$\Leftrightarrow \sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_s) \in W$$

证："$\Rightarrow$" 显然成立.

"$\Leftarrow$" 任取$\xi \in W$，设 $\xi = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$，

则 $\sigma(\xi) = k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + \cdots + k_s\sigma(\alpha_s)$.

由于 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_s) \in W$， $\therefore$ $\sigma(\xi) \in W$.

故W为σ的不变子空间.

3、一些重要不变子空间

1）线性变换σ的值域 $\sigma(V)$与核$\sigma^{-1}(0)$都是σ的不变子空间.

证：$\because$ $\sigma(V)=\{\sigma(\alpha)|\alpha\in V\}\subseteq V,$

$\therefore \forall \xi\in\sigma(V)$, 有$\sigma(\xi)\in\sigma(V).$

故 $\sigma(V)$为σ的不变子空间.

又任取$\xi\in\sigma^{-1}(0)$, 有 $\sigma(\xi)=0\in\sigma^{-1}(0).$

$\therefore$ $\sigma^{-1}(0)$也为σ的不变子空间.

2）若 $\sigma\tau=\tau\sigma$，则 $\tau(V)$ 与 $\tau^{-1}(0)$ 都是 σ—子空间.

证：$\because \quad \tau(V)=\left\{\tau(\alpha)\middle|\alpha\in V\right\}$

$\therefore$ 对 $\forall\xi\in\tau(V)$, 存在 $\alpha\in V$，使 $\xi=\tau(\alpha)$,

于是有，

$$\sigma(\xi)=\sigma\big(\tau(\alpha)\big)=\sigma\tau(\alpha)=\tau\sigma(\alpha)=\tau\big(\sigma(\alpha)\big)\in\tau(V)$$

$\therefore \tau(V)$ 为 σ 的不变子空间.

其次，由 $\tau^{-1}(0)=\left\{\alpha\middle|\alpha\in V,\tau(\alpha)=0\right\}$,

$\therefore$ 对 $\forall\xi\in\tau^{-1}(0)$, 有 $\tau(\xi)=0$.

于是 $\tau\big(\sigma(\xi)\big)=\tau\sigma(\xi)=\sigma\tau(\xi)=\sigma\big(\tau(\xi)\big)=\sigma(0)=0.$

$\therefore \sigma(\xi)\in\tau^{-1}(0).$

故 $\tau^{-1}(0)$ 为σ 的不变子空间.

注:

$\because \quad \sigma f(\sigma)=f(\sigma)\sigma$

$\therefore \quad \sigma$ 的多项式 $f(\sigma)$ 的值域与核都是σ的不变子空间.

这里 $f(x)$为 $P[x]$中任一多项式.

3）任何子空间都是数乘变换K的不变子空间.

$\left(\because \forall \xi \in W, \ \mathrm{K}\xi = k\xi \in W\right)$

4）线性变换σ的特征子空间 V_{λ_0} 是σ的不变子空间.

$\left(\because \forall \xi \in V_{\lambda o},\ \text{有}\ \sigma(\xi) = \lambda_o \xi \in V_{\lambda o}\right)$

5）由σ的特征向量生成的子空间是σ的不变子空间.

证：设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是σ的分别属于特征值

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 的特征向量. 任取 $\xi \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$,

设 $\xi = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$, 　　则

$$\sigma(\xi) = k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 + \cdots + k_s\lambda_s\alpha_s \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$$

$\therefore$ $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 为σ的不变子空间.

注：

特别地，由 σ 的一个特征向量生成的子空间是一个一维 σ—子空间. 反过来，一个一维 σ—子空间必可看成是 σ 的一个特征向量生成的子空间.

事实上，若 $W = L(\xi) = \{k\xi \mid k \in P, \xi \neq 0\}$.

则 ξ 为 $L(\xi)$ 的一组基.　因为W为 σ—子空间，

$\therefore$ $\sigma(\xi) \in W$，即必存在 $\lambda \in P$，使 $\sigma(\xi) = \lambda\xi$.

$\therefore$ ξ 是 σ 的特征向量.

二、σ 在不变子空间W引起的线性变换

定义：

设 σ 是线性空间V的线性变换，W是V的一个 σ 的不变子空间． 把 σ 看作W上的一个线性变换，称作 **σ 在不变子空间W上引起的线性变换**，或称作 σ 在不变子空间W上的限制．记作 $\sigma|_W$．

注：

① 当$\xi \in W$时，$\sigma\big|_W(\xi)=\sigma(\xi)$.

当$\xi \notin W$时，$\sigma\big|_W(\xi)$ 无意义.

② $\sigma\big|_W(W) \subseteq W$.

③ 任一线性变换σ在它核上引起的线性变换是零变换，即 $\sigma\Big|_{\sigma^{-1}(0)}=0$ ；

σ在特征子空间V_{λ_0}上引起的线性变换是数乘变换，即有 $\sigma\Big|_{V_{\lambda_0}}=\lambda_o E$.

三、不变子空间与线性变换的矩阵化简

1、 设 σ 是 n 维线性空间V的线性变换，W是V 的 σ—子空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$为W的一组基，把它扩允为V的一组基：$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\cdots\varepsilon_n$.

若 $\sigma|_W$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$ 下的矩阵为 $A_1\in P^{k\times k}$，则 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵具有下列形状：

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}.$$

反之，若 $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$,

$A_1\in P^{k\times k}$．则由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$生成的子空间必为$\sigma$的不变子空间.

事实上，因为W是V的不变子空间.

$\therefore\ \sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_k)\in W$.

即，$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_k)$ 均可被 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$ 线性表出.

设
$$\begin{cases} \sigma(\varepsilon_1)=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{k1}\varepsilon_k \\ \sigma(\varepsilon_2)=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{k2}\varepsilon_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma(\varepsilon_k)=a_{1k}\varepsilon_1+a_{2k}\varepsilon_2+\cdots+a_{kk}\varepsilon_k \end{cases}$$

从而，$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}.$$

2、 设 σ 是 n 维线性空间V的线性变换，W_i 都是 σ 的不变子空间，而 $\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\cdots,\varepsilon_{in_i}$ 是 W_i 的一组基，且 $\sigma|_{W_i}$ 在这组基下的矩阵为 A_i，$A_i\in P^{n_i\times n_i}, i=1,2,\cdots,s.$

若 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$，则

$$\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1n_1},\varepsilon_{21},\cdots,\varepsilon_{2n_2},\cdots,\varepsilon_{s1},\cdots,\varepsilon_{sn_s}$$

为V的一组基，且在这组基下 σ 的矩阵为准对角阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

反之，若 σ在基 $\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1n_1},\varepsilon_{21},\cdots,\varepsilon_{2n_2},\cdots,\varepsilon_{s1},\cdots,\varepsilon_{sn_s}$

下的矩阵为准对角矩阵(1)，则由 $\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\cdots,\varepsilon_{in_i}$ 生成

的子空间 W_i为σ的不变子空间，且V具有直和分解：

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$$

由此即得：

V的线性变换 σ在某组基下的矩阵为准对角形

$\Leftrightarrow$ V可分解为一些 σ的不变子空间的直和.

四、线性空间的根空间分解

定理12：设 σ 为线性空间V的线性变换，$f(\lambda)$ 是是 σ 的特征多项式. 若 $f(\lambda)$ 具有分解式：

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$

再设 $V_i=\left\{\xi \,\middle|\, (\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\xi)=0, \xi\in V\right\}$

则 V_i 都是 σ 的不变 子空间；且V具有直和分解：

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s \quad .$$

证：令 $f_i(\lambda)=\dfrac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{r_i}}$

$$=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_{i-1})^{r_{i-1}}(\lambda-\lambda_{i+1})^{r_{i+1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

$$W_i=f_i(\sigma)V,$$

则 W_i 是 $f_i(\sigma)$ 的值域，$\therefore$ W_i 是 σ 的不变子空间.

又 $\because$ $(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}W_i=(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}f_i(\sigma)V$

$$=\left((\sigma-\lambda_i E)^{r_i}f_i(\sigma)\right)V=f(\sigma)V$$

$\therefore$ $(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}W_i=0.$ （2）

下证 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$． 分三步：

1°. 证明 $V=W_1+W_2+\cdots+W_s$．

2°. 证明 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和．

$\because (f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots f_s(\lambda))=1$

3°. 证明 $V_i=W_i$，$i=1,2,\cdots,s$．

$\therefore$ 存在多项式 $u_1(\lambda),u_2(\lambda),\cdots,u_s(\lambda)$, 使

$$u_1(\lambda)f(\lambda)_1+u_2(\lambda)f_2(\lambda)+\cdots+u_s(\lambda)f_s(\lambda)=1$$

于是 $u_1(\sigma)f_1(\sigma)+u_2(\sigma)f_2(\sigma)+\cdots+u_s(\sigma)f_s(\sigma)=E$

$\therefore$ 对 $\forall\alpha\in V$，有

$$\alpha = E(\alpha)$$

$$= \left(u_1(\sigma) f_1(\sigma) + u_2(\sigma) f_2(\sigma) + \cdots + u_s(\sigma) f_s(\sigma)\right)(\alpha)$$

$$= u_1(\sigma) f_1(\sigma)(\alpha) + u_2(\sigma) f_2(\sigma)(\alpha) + \cdots + u_s(\sigma) f_s(\sigma)(\alpha)$$

$$= f_1(\sigma)\left(u_1(\sigma)(\alpha)\right) + f_2(\sigma)\left(u_2(\sigma)(\alpha)\right) + \cdots\cdots$$

$$+ f_s(\sigma)\left(u_s(\sigma)(\alpha)\right)$$

这里 $f_i(\sigma)\left(u_i(\sigma)(\alpha)\right) \in f_i(\sigma)V = W_i$， $i = 1, 2, \cdots, s.$

$$\therefore\ V = W_1 + W_2 + \cdots + W_s.$$

2°. 证明 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和.

即证，若 $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s=0$ (3)

其中 $\beta_i \in V_i$ （也即，$(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\beta_i)=0$ ），

则 $\beta_i=0,\ i=1,2,\cdots,s$

Q $(\lambda-\lambda_j)^{r_j} \mid f_i(\lambda),\ i\neq j$

∴ 存在 $h(\lambda)$，使 $f_i(\lambda)=h(\lambda)(\lambda-\lambda_j)^{r_j}$.

于是 $f_i(\sigma)=h(\sigma)(\sigma-\lambda_j E)^{r_j}$.

$$\therefore \quad f_i(\sigma)(\beta_j) = h(\sigma)(\sigma - \lambda_j E)^{r_j}(\beta_j)$$

$$= h(\sigma)\Big((\sigma - \lambda_j E)^{r_j}(\beta_j)\Big) = h(\sigma)(0) = 0, \quad j \neq i.$$

用 $f_i(\sigma)$ 作用（3）的两端，得

$$f_i(\sigma)(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_s)$$

$$= f_i(\sigma)(\beta_1) + f_i(\sigma)(\beta_2) + \cdots + f_i(\sigma)(\beta_s)$$

$$= f_i(\sigma)(\beta_i) = 0$$

又 $\left(f_i(\lambda), (\lambda - \lambda_i)^{r_i} \right) = 1.$

$\therefore$ 有多项式 $u(\lambda),v(\lambda)$，使

$$u(\lambda)f_i(\lambda)+v(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{r_i}=1$$

从而 $$u(\sigma)f_i(\sigma)+v(\sigma)(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}=E$$

$$\therefore\quad \beta_i=E(\beta_i)=\left(u(\sigma)f_i(\sigma)+v(\sigma)(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}\right)(\beta_i)$$

$$=u(\sigma)\left(f_i(\sigma)(\beta_i)\right)+v(\sigma)\left((\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\beta_i)\right)$$

$$=u(\sigma)(0)+v(\sigma)(0)=0,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

所以 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和.

3°. 证明: $W_i = V_i = \left\{\xi \middle| (\sigma - \lambda_i E)^{r_i}(\xi) = 0,\ \xi \in V\right\}$

首先由(2)，有 $W_i \subseteq \left((\sigma - \lambda_i E)^{r_i}\right)^{-1}(0)$

$\boxed{(\sigma - \lambda_i E)^{r_i} W_i = 0.}$

即 $W_i \subseteq V_i$.

其次，任取 $\alpha \in V_i$，设

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s,\ \alpha_i \in W_i.$$

即 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + (\alpha_i - \alpha) + \cdots + \alpha_s = 0$

令 $\beta_j = \alpha_j,\ (j \neq i);\ \beta_i = \alpha_i - \alpha.$

由（2），有 $\quad (\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\alpha_i)=0,\ \ i=1,2,\cdots,s.$

又 $(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\beta_i)=(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\alpha_i-\alpha)$

$$=(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\alpha_i)-(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\alpha)=0$$

从而有 $\ (\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\beta_i)=0,\ \ i=1,2,\cdots,s.$

即 $\beta_i\in V_i,\quad \therefore\ \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s\in V_1+V_2+\cdots+V_s,$

又 $\ \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s=0,$

由 2°，$V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和，它的零向量分解式

唯一． $\quad \therefore\ \beta_i=0,\ \ i=1,2,\cdots,s.$

于是 $\alpha = \alpha_i \in W_i$.　　即有　　$V_i \subseteq W_i$.

故　$W_i = V_i = \left\{ \xi \,\middle|\, (\sigma - \lambda_i E)^{r_i}(\xi) = 0,\ \xi \in V \right\}$.

综合 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$，即有

V_i 是 σ 的不变子空间，且

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s.$$

练习：

设3维线性空间V的线性变换 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的

矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}.$

证明：$W=L(-\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1+\alpha_3)$ 是 σ 的不变子空间.

证：令 $\beta_1=-\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=-\alpha_1+\alpha_3$

由 $\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$

$$(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

有

$$\sigma(\beta_1,\beta_2)=\sigma\left((\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\big((\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A\big)\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\big(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\big)\left[\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\big(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\big)\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

即 $$\sigma(\beta_1)=\alpha_1-\alpha_2=-\beta_1$$

$$\sigma(\beta_2)=\alpha_1-\alpha_3=-\beta_2$$

$\therefore\ \sigma(\beta_1),\sigma(\beta_2)\in W.$

故W为σ的不变子空间.