《高等数学 (一)》2018-2019 期终考试卷 A15 参考答案

死抠

2019 年 4 月 20 日

一. 选择题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}, & x\neq 2\\ a, & x=2\end{cases}$ 为连续函数，则 $a=$__D__

A. 任意　　B. 0　　C. 2　　D. 1

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=$__C__

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 不存在

3. 函数 $f(x)$ 有连续二阶导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=-2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=$__C__

A. 不存在　　B. 0　　C. -1　　D. -2

4. $\displaystyle\int \sec x\tan x\ \mathrm{d}x=$__B__

A. $\tan x+C$　　B. $\sec x+C$

C. $\arctan x+C$　　D. $\operatorname{arccot}\ x+C$

5. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-2x}，则 $f(x)$ 等于__A__

A. $-2\mathrm{e}^{-2x}$　　B. $-4\mathrm{e}^{-2x}$　　C. e^{-2x}　　D. $4\mathrm{e}^{-2x}$

6. $\displaystyle\int \cos\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}\mathrm{e}^x=$__A__

A. $\sin\mathrm{e}^x+C$　　B. $-\sin\mathrm{e}^x+C$

C. $\arcsin\mathrm{e}^x+C$　　D. $-\arcsin\mathrm{e}^x+C$

7. 若 $\displaystyle\int_0^1 (x+k)\ \mathrm{d}x=2$，则 $k=$__D__

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. $\dfrac{3}{2}$

8. 下列反常积分中收敛的是__B__

A. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$　　B. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

C. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x}\ \mathrm{d}x$　　D. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\ \mathrm{d}x$

二. 填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=$__0__

2. $y=x^n$(n 是正整数) 的 n 阶导数是__$n!$__

3. 当 $a=$__2__ 时函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取极大值

4. $\displaystyle\int \sec x(\sec x-\tan x)\ \mathrm{d}x=$__$\tan x-\sec x+C$__

5. 经过点 $(1,2)$ 且其切线的斜率为 $2x$ 的曲线方程是__$y=x^2+1$__

6. 通过定积分的几何意义知 $\displaystyle\int_{-1}^1 (1+x)\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x=$__$\pi/2$__

7. 比较大小 $\displaystyle\int_1^3 x^2\ \mathrm{d}x$__$<$__$\displaystyle\int_1^3 x^3\ \mathrm{d}x$

8. 由 $y=x^2+1$，$y=0$，$x=1$，$x=0$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得立体的体积用定积分表示为 $\underline{\displaystyle\int_0^1 \pi y^2 \mathrm{d}x}$

三. 大题

1. 求 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x+3}=\mathrm{e}^{1/2}$

2. 计算 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t}{x^3}=1/3$

3. 设 $y=\sin\left(x^2\right)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\cos x^2,\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2\cos x^2-4x^2\sin x^2$$

4. 计算不定积分

$$\int \sin^3 x\ \mathrm{d}x=-\int 1-\cos^2 x\ \mathrm{d}\cos x=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

5. 计算不定积分

$$\int x\ln x\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \ln x\ \mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

6. 计算广义积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}\ \mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{(\ln x)^2}=-\left.\frac{1}{\ln x}\right|_2^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}$$

7. 计算

$$\int_1^5\frac{\sqrt{u-1}}{u}\ \mathrm{d}u=\int_0^2 2-\frac{2}{t^2+1}\ \mathrm{d}t=4-2\arctan t|_0^2=4-2\arctan 2$$

8. 已知

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\ \mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dfrac{n-5}{n-4}\cdots\dfrac{2}{3}, & n\text{为大于1的奇数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}\end{cases},$$

求星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 围成的平面图形的面积，其中 $a>0$

解: $S=4\displaystyle\int_0^1 y\ \mathrm{d}x=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\ \mathrm{d}t=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t-\sin^6 t\ \mathrm{d}t$

$=12a^2\left(\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{3}{8}\pi a^2$

9. 设 $f(x),g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，证明在 (a,b) 内至少存在一个 ξ，使得

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\ \mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\ \mathrm{d}x$$

$\left(\text{提示：辅助函数}F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\int_x^b g(t)\ \mathrm{d}t\right)$

证明. 设 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\int_x^b g(t)\ \mathrm{d}t$，且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，同时 $F(a)=F(b)=0$，因此满足罗尔定理条件

在 (a,b) 内存在一点 ξ 使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f(\xi)\int_\xi^b g(t)\ \mathrm{d}t-g(\xi)\int_a^\xi f(t)\ \mathrm{d}t=0$$

□