§ 4.3 协方差、相关系数和矩

问题 对于二维随机变量(X,Y):

$$\boxed{\text{已知联合分布}} \underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow} \boxed{\text{边缘分布}}$$

这说明对于二维随机变量，除了每个随机变量各自的概率特性以外，相互之间可能还有某种联系. 问题是用一个什么样的数去反映这种联系.

数 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

反映了随机变量X,Y之间的某种关系

一、协方差的定义与性质

1、定义 称 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

为X,Y的协方差. 记为

$$\boxed{Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}$$

1） 若(X,Y)为离散型$r.v.$，则

$$Cov(X,Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}[x_i-E(X)][y_j-E(Y)]p_{ij}$$

2） 若(X,Y)为连续型$r.v.$，则

$$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)][y-E(Y)]f(x,y)dxdy$$

2、协方差的性质

1） $Cov(X,Y) = Cov(Y,X) = E(XY) - E(X)E(Y)$

2） $Cov(aX,bY) = abCov(X,Y)$

3） $Cov(X+Y,Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

4） $Cov(X,X) = D(X)$

5） $|Cov(X,Y)|^2 \le D(X)D(Y)$

当$D(X)>0, D(Y)>0$ 时，当且仅当

$$P\{Y - E(Y) = t_0(X - E(X))\} = 1$$

时，等式成立 —Cauchy-Schwarz不等式

证 5 令

$$g(t) = E[(Y - E(Y)) - t(X - E(X))]^2$$

$$= D(Y) - 2tCov(X,Y) + t^2 D(X)$$

对任何实数 t，$g(t) \ge 0$ ⟶

$$4Cov^2(X,Y) - 4D(X)D(Y) \le 0$$

即

$$|Cov(X,Y)|^2 \le D(X)D(Y)$$

等号成立 $\longleftrightarrow$ $g(t)=0$ 有两个相等的实零点

$$t_0=\frac{Cov(X,Y)}{D(X)}=\left(\pm\sqrt{\frac{D(Y)}{D(X)}}\right)$$

$g(t_0)=0$ 即

$$E[(Y-E(Y))-t_0(X-E(X))]^2=0$$

又显然 $E[(Y-E(Y))-t_0(X-E(X))]=0$

$\longleftrightarrow$ $D[(Y-E(Y))-t_0(X-E(X))]=0$

$\longleftrightarrow$ $P\{(Y-E(Y))-t_0(X-E(X))=0\}=1$

$$P\{(Y-E(Y))-t_0(X-E(X))=0\}=1$$

即

$$P\{(Y-E(Y))=t_0(X-E(X))\}=1$$

即Y与X有线性关系的概率等于1，这种线性关系为

$$P\left\{\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}=\pm\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right\}=1$$

完全类似地可以证明

$$E^2(XY) \le E(X^2)E(Y^2)$$

当$E(X^2) > 0, E(Y^2) > 0$时，当且仅当

$$P\{Y = t_0 X\} = 1$$

时，等式成立

二、相关系数的定义与性质

1、定义　若$D(X) > 0, D(Y) > 0$,称

$$E\left(\frac{(X - E(X))(Y - E(Y))}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\right) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

为X,Y的 相关系数，记为

$$\boxed{\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}}$$

2、相关系数的性质

1） $|\rho_{XY}| \le 1$

2） $|\rho_{XY}| = 1$ $\Longleftrightarrow$ Cauchy-Schwarz不等式的等号成立

$\Longleftrightarrow$ 即Y与X有线性关系的概率等于1，这种线性关系为

$$P\left\{\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} = \pm\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right\} = 1$$

$\rho_{XY} = 1$ $\longrightarrow$ $Cov(X,Y) > 0$

$$P\left\{\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} = \frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right\} = 1$$

$\rho_{XY} = -1$ $\longrightarrow$ $Cov(X,Y) < 0$

$$P\left\{\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} = -\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right\} = 1$$

若X, Y是两个随机变量，用X的线性函数去逼近 Y所产生的平均平方误差为

$$E[Y-(aX+b)]^2$$

当取 $\hat{a}=\dfrac{Cov(X,Y)}{D(X)}$,

$$\hat{b}=E(Y)-\hat{a}E(X)$$

$$=E(Y)-\rho_{XY}\sqrt{\frac{D(Y)}{D(X)}}E(X)$$

平均平方误差最小.

3） $\rho_{XY}=0 \longleftrightarrow X, Y$线性不相关

$\longleftrightarrow Cov(X,Y)=0$

$\longleftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

$\longleftrightarrow D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

X, Y相互独立 $\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}$ X, Y线性不相关

若(X, Y)服从二维正态分布，

X, Y相互独立 $\longleftrightarrow$ X, Y线性不相关

例 设X服从(-1/2, 1/2)内的均匀分布,而 Y=cos X, 不难求得,

$$Cov(X,Y)=0,$$

(请课下自行验证)

因而ρ=0, 即X和Y线性不相关 .

但Y与X有严格的函数关系,

即X和Y不独立 .

例 设(ξ,η)服从单位圆$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$上的均匀分布,则由前面的讨论知, ξ与η不相互独立. 下面我们求其相关系数.

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{x}{\pi}dxdy=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xdx=0$$

同理由对称性 $E(\eta)=0$

$$E(\xi\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2\le 1} xydxdy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}xdx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} ydy=0$$

$$\therefore Cov(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)=0 \Longrightarrow \rho_{\xi\eta}=0$$

即ξ与η线性不相关

三、有关例题

例1 已知 X,Y 的联合分布律为

$X \backslash Y$	1	0
1	p	0
0	0	q

$0 < p < 1$

$p + q = 1$

求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$, ρ_{XY}

解

X	1	0
P	p	q

Y	1	0
P	p	q

XY	1	0
P	p	q

$$\left.\begin{aligned}&E(X)=p,\ E(Y)=p,\\&D(X)=pq,\ D(Y)=pq,\\&E(XY)=p,\ D(XY)=pq,\end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$Cov(X,Y)=pq,\ \rho_{XY}=1$$

例2 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho)$，求 ρ_{XY}

解 $Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$

令 $\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}=s$，$\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}=t$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}ste^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(s-\rho t)^2-\frac{1}{2}t^2}dsdt$$

令 $s-\rho t=u$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}t(\rho t+u)e^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{1}{2}t^2}dudt$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}}du\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

$$=\sigma_1\sigma_2\rho$$

$$\rho_{XY}=\rho$$

若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho)$，

则 X,Y 相互独立 $\longleftrightarrow$ X,Y 线性不相关

例3 设$\Theta \sim U(0,2\pi)$, $X=\cos\Theta$, $Y=\cos(\Theta+\alpha)$, α 是给定的常数，求 ρ_{XY}

解 $f_\Theta(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0<t<2\pi, \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$E(X)=\int_0^{2\pi}\cos t\cdot\frac{1}{2\pi}dt=0,$$

$$E(Y)=\int_0^{2\pi}\cos(t+\alpha)\cdot\frac{1}{2\pi}dt=0,$$

$$E(XY)=\int_0^{2\pi}\cos(t)\cos(t+\alpha)\cdot\frac{1}{2\pi}dt=\frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$\longrightarrow \boxed{Cov(X,Y)=\frac{1}{2}\cos\alpha}$$

$$E(X^2)=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\cdot\frac{1}{2\pi}dt=\frac{1}{2}, \qquad D(X)=\frac{1}{2},$$

$$E(Y^2)=\int_0^{2\pi}\cos^2(t+\alpha)\cdot\frac{1}{2\pi}dt=\frac{1}{2}, \qquad D(Y)=\frac{1}{2},$$

$$\longrightarrow \boxed{\rho_{XY}=\cos\alpha}$$

若 $\alpha=0,\ \rho_{XY}=1 \longrightarrow Y=X$

若 $\alpha=\pi,\ \rho_{XY}=-1 \longrightarrow Y=-X$

$\left.\begin{matrix} Y=X \\ Y=-X \end{matrix}\right\} \longrightarrow$

$|\rho_{XY}|=1 \longrightarrow$ X,Y 有线性关系

若 $\alpha=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\ \rho_{XY}=0$ X,Y 线性不相关，

但 X,Y 不独立，

X,Y 没有线性关系，但有函数关系

$$X^2+Y^2=1$$

例4 设 X,Y 相互独立，且都服从 $N(0,\sigma^2)$，

$U=aX+bY$，$V=aX-bY$，a,b 为常数，

且都不为零，求 ρ_{UV}

解 $Cov(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)$

$$=a^2E(X^2)-b^2E(Y^2)$$

$$-[aE(X)+bE(Y)][aE(X)-bE(Y)]$$

由 $\left.\begin{matrix} E(X)=E(Y)=0, \\ D(X)=D(Y)=\sigma^2 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \begin{matrix} E(X^2)=\sigma^2 \\ E(Y^2)=\sigma^2 \end{matrix}$

$\longrightarrow$ $Cov(U,V)=(a^2-b^2)\sigma^2$

而 $D(U)=a^2D(X)+b^2D(Y)=(a^2+b^2)\sigma^2$

$D(V)=a^2D(X)+b^2D(Y)=(a^2+b^2)\sigma^2$

故

$$\rho_{UV}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

继续讨论：a, b 取何值时， U, V 线性不相关？

此时， U, V 是否独立？

例5 设 $(X,Y)\sim N(1,4;\ 1,4;\ 0.5)$, $Z=X+Y$,
求 ρ_{XZ}

解 $E(X)=E(Y)=1, D(X)=D(Y)=4,$

$$\rho_{XY}=\frac{1}{2},\quad Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{DY)}=2$$

$$Cov(X,Z)=Cov(X,X)+Cov(X,Y)=6$$

$$D(Z)=D(X+Y)$$
$$=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=12$$

$$\rho_{XZ}=\frac{6}{2\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

四、矩的概念

1、k阶原点矩　$\mu_k = E(X^k)$

2、k阶中心矩　$\upsilon_k = E([X - E(X)]^k)$

其中 k 是正整数.