提高练习十一 无穷级数参考解答

一、选择题

1. 判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$的收敛性，下列说法正确的是（ *D* ）.

（A）$\because \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}=0$，$\therefore$此级数收敛 （B）$\because 1+\frac{1}{n}>0$，$\therefore$此级数收敛

（C）$\because \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}>\frac{1}{n}$，$\therefore$级数发散 （D）以上说法均不对

2. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，下列命题中错误的是(*C* ）.

（A） 如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

（B）如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho>1$， 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散

（C） 如果$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛（D）如果$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散

3．下列级数中条件收敛的是（ A ）．

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ （B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^2}$

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$ （D）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n(n+1)}$

二、填空题

1．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 p 满足条件 $p>1$ 时收敛.

2．若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且其部分和数列为 $\{s_n\}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是 $\{s_n\}$有界.

3. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$的收敛域为$\underline{\quad [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \quad}$.

4. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n-1}}{n\cdot 8^n}$的收敛半径为$\underline{\quad R=2 \quad}$.

三、判断下列级数的敛散性

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^n}{(1+n)^n}$

解: $\because \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(1+n)^n} = \frac{3}{e} > 0$

$\therefore$ 由级数收敛的必要条件 原级数发散 。

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

解: $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{9}<1$ $\therefore$由根值审敛法原级数收 敛

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!2^n}$

解: $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$ $\therefore$由比值审敛法原级数收 敛

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}dx}$

解: $\because 0<\frac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}dx}<\frac{1}{\int_0^n xdx}=\frac{2}{n^2}$, 而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$收敛 $\therefore$ 原级数收敛

四、判断下列级数的敛散性，如果收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\frac{n}{n+1}$$

解： $\because \ln\frac{n}{n+1}<0\ \therefore u_n=-\ln\frac{n}{n+1}=\ln\frac{n+1}{n}$

$$u_n=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac{1}{n})>u_{n+1},\quad 且\ \lim_{n\to\infty}u_n=0$$

由莱布尼茨定理知该级 数收敛

又对 $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}\ln\frac{n}{n+1}|$, $u_n=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}\ln\frac{n}{n+1}|$ 发散， $\therefore$ 原级数条件收敛

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos\frac{n\lambda}{3}}{(n+1)^3}$$

解: $$\because \left|\frac{n\cos\frac{n\lambda}{3}}{(n+1)^3}\right| \le \frac{n}{(n+1)^3} \le \frac{1}{(n+1)^2},$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ 收敛,

$\therefore$ 原级数绝对收敛

五、将下列函数展成在指定点的幂级数，并求出其收敛域.

1. $f(x)=\ln x$ （在 $x=1$ 处）

解：$f(x)=\ln x=\ln[1+(x-1)]$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \quad 0<x\le 2$$

2. $f(x)=\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ （在 $x=0$ 处）

解：$\int_0^x f(x)dx=-\dfrac{1}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}$

$$f(x)=x(1+x^2)^{-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n-1} \quad |x|<1$$

六、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^{2n}(|x|<1)$ 在收敛域内的和函数，

并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n\cdot 2^n}$ 的和.

解: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$$

设 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n}$; $S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$

则 $$2S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}=x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x 2nx^{2n-1}dx\right]'$$

$$则 2S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}=x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x 2nx^{2n-1}dx\right]'$$

$$=x\left[\frac{x^2}{1-x^2}\right]'=\frac{2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}.\qquad S_1(x)=\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$\frac{1}{2}S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}x^{2n}=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}x^{2n}\right)'dx=-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

$$\therefore S_2(x)=-\ln(1-x^2)$$

$$\therefore S(x)=\frac{x^2}{(1-x^2)^2}-\ln(1-x^2)\qquad S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2+\ln 2$$

七、已知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $u_n > 0$，

$v_n = u_{2n-1}(n=1,\ 2,\cdots)$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛.

证：用部分和数列有界易证

八、设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的奇函数，且

$f(\pi - x) = f(x)$，证明: $f(x)$ 的傅里叶级数满足

$a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_{2n} = 0,\ n = 1,\ 2,\cdots$.

证：代入公式易证