第十九讲 矩阵的逆与分块矩阵

一、可逆矩阵的定义

二、可逆矩阵的性质

三、分块矩阵

一、可逆矩阵的定义

在数的运算中，当数$a \neq 0$时， 有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

其中 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 为a 的倒数,（或称 a 的逆）；

在矩阵的运算中,单位阵E相当于数的乘法运算中的1， 那么，对于矩阵A ,如果存在一个矩阵A^{-1},

使得 $AA^{-1} = A^{-1}A = E,$

则矩阵A^{-1}称为A 的可逆矩阵或逆阵.

定义1 对于n阶矩阵A，如果有一个n阶矩阵B使得

$$AB = BA = E,$$

则称矩阵A是**可逆**的，并把矩阵B称为A的**逆矩阵**.

A的逆矩阵记作A^{-1}.

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$

$\because AB = BA = E,\quad \therefore B$是$A$的一个逆矩阵.

$$\cancel{A = \frac{E}{B}}$$

说明 若 A 是可逆矩阵，则 A 的逆矩阵是唯一的.

若设 B 和 C 是 A 的可逆矩阵，则有

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E,$$

可得 $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$

所以 A 的逆矩阵是唯一的,即

$$B = C = A^{-1}.$$

例 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，求$A$的逆阵.

解 利用待定系数法

设 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是A的逆矩阵,

则

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 1, \\ 2b + d = 0, \\ \quad -a = 0, \\ \quad -b = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = -1, \\ c = 1, \\ d = 2. \end{cases}$$

又因为

$$\begin{array}{cc} AB & BA \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

二、可逆矩阵的运算性质

(1) 若$AB=E$（或$BA=E$），则$B=A^{-1}$.

(2) 若A可逆，则A^{-1}亦可逆，且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(3) 若A可逆，数$\lambda \neq 0$，则λA可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(4) 若A,B为同阶方阵且均可逆，则AB亦可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

证明: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$

$$= AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

$$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $(A_1 A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

(5) 若A可逆,则 A^T 也可逆,且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

证明: $\because A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E,$

$$\therefore (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

思考题

例1 证明：如果 $A^k = 0$，那么

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

证明 $\because (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})$

$$= (E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) - (A + A^2 + \cdots + A^{k-1} + A^k)$$

$= E$，所以命题成立．

例2 设A、B为n阶可逆阵，则$(A^{-1}B^{-1})^T =$（ **D** ）

(A) $(A^{-1})^T(B^{-1})^T$　　(B) $(A^T)^{-1}(B^T)^{-1}$

(C) $(B^T A^T)^{-1}$　　(D) $(A^T B^T)^{-1}$

解

$$(A^{-1}B^{-1})^T = (B^{-1})^T(A^{-1})^T$$

$$= (B^T)^{-1}(A^T)^{-1}$$

$$= (A^T B^T)^{-1}$$

例3：已知A,B为n阶矩阵，$AB=A+B$

证明：$A-E,B-E$都可逆，求$(A-E)^{-1},(B-E)^{-1}$

证明：由 $AB=A+B$ 可得 $(A-E)(B-E)=E.$

所以 $A-E$ 和 $B-E$ 都可逆,且

$$(A-E)^{-1}=B-E,(B-E)^{-1}=A-E.$$

三、分块矩阵

对于行数和列数较高的矩阵A，为了简化运算，经常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算. 具体做法是：将矩阵A用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为A的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

例

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

即

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

即 $$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix},\ 其中\ A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

$$其中\ A_1=\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ 1 \end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

分块矩阵的运算规则

(1) 设矩阵A与B的行数相同,列数相同,采用相同的分块法,有

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}与B_{ij}的行数相同,列数相同,那末

$$A+B=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ为数, 则

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

例 $\lambda=2,\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$

$$2A=\begin{pmatrix} 1\times 2 & 2\times 2 & 3\times 2 \\ 3\times 2 & 2\times 2 & 1\times 2 \\ 4\times 2 & 5\times 2 & 6\times 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

(3) 设A为$m\times l$矩阵, B为$l\times n$矩阵, 分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中$A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$的列数分别等于$B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$的行数,那末

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中$C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\quad (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r).$

(4) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

(5) 设A为n阶矩阵,若A的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块,其余子块都为零矩阵,且非零子块都是方阵. 即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

(6)设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$,

若 A_i 均可逆，则A也可逆，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$(7)\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

例1 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix},$$

求 AB.

解 把A,B分块成

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix},$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}.$$

又 $$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix},$$

于是 $AB=\begin{pmatrix}B_{11} & E\\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22}\end{pmatrix}$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 0 & 1\\ \hline -2 & 4 & 3 & 3\\ -1 & 1 & 3 & 1\end{array}\right).$$

例2 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解

$$A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix},\qquad A_1=(5),\ A_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\end{pmatrix};$$

$$A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},\quad A_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\end{pmatrix};\quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix};$$

$$\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}.$$