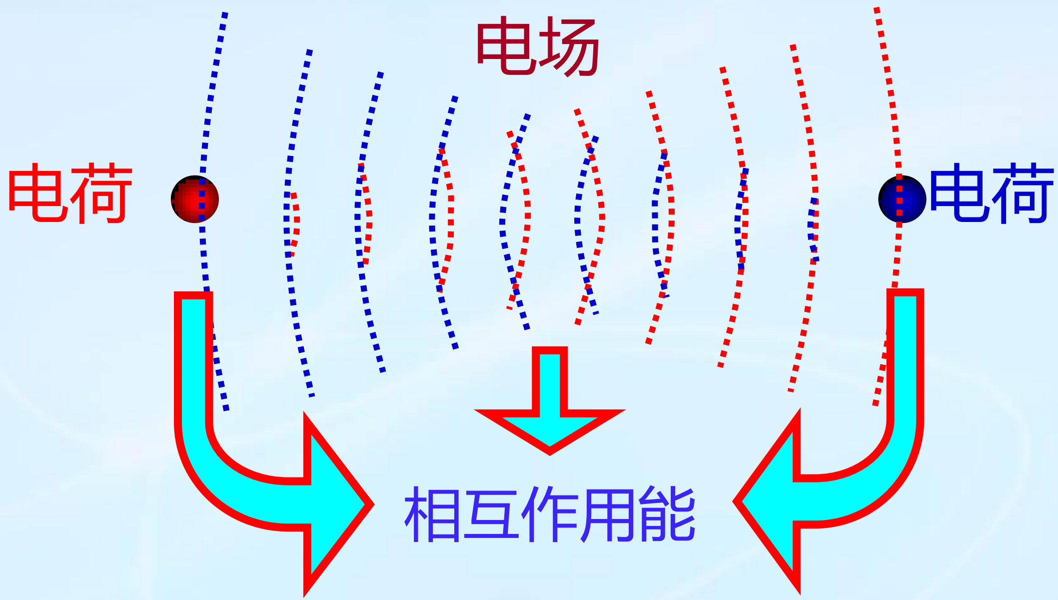
《大学物理》

第八章　静电场中的导体和电介质

静电场的能量

引入：静电场的能量从何而来

电场中蕴藏有能量



电磁场携带有能量（实验已证实）

引入：静电场的能量从何而来

【电荷体系】由电荷及其载体所构成的体系。

怎样描述一个电荷系统的电学状态?

——电荷分布

电荷无限远离态 —— 各电荷间的相互作用为零

外力必须克服静电场力做功!

某电荷分布态A —— 各电荷间的相互作用不为零

在状态A的形成过程中，外力的功转化为什么形式的能?

——静电能

一、电荷系统的自能与相互作用能

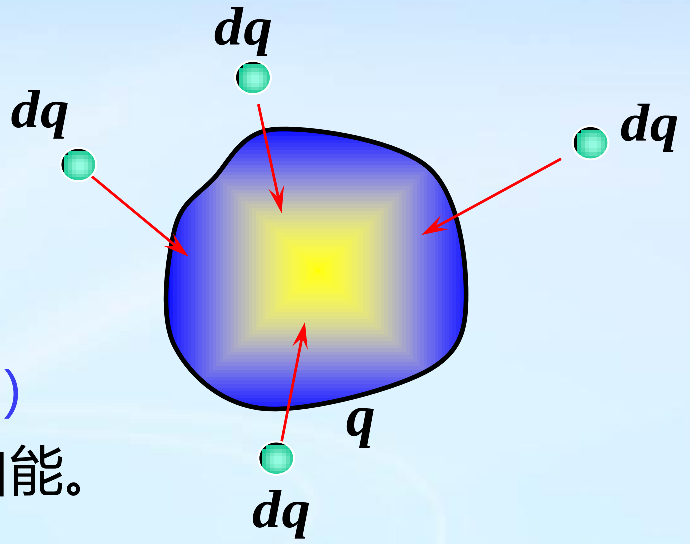
1、带电体的自能

讨论

点电荷的自能为多大?

——无穷大!　　(无意义！)

通常只考虑实际带电体的自能。



自能：

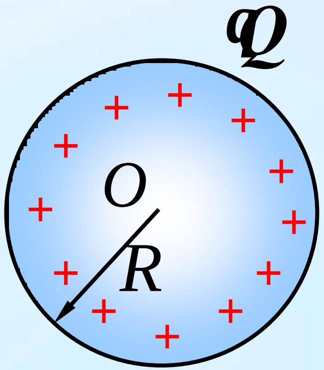
把带电体的所有电荷从无限分散状态形成现有电荷体过程中，外力克服静电场所作的功

一、电荷系统的自能与相互作用能

例1：求半径为R、电量为Q的均匀带电球面的静电能。

解：球面上电量为任意q时，将元电荷dq从无穷远移到该球面上，外力需克服静电场力作功：

$$dW = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}dq$$



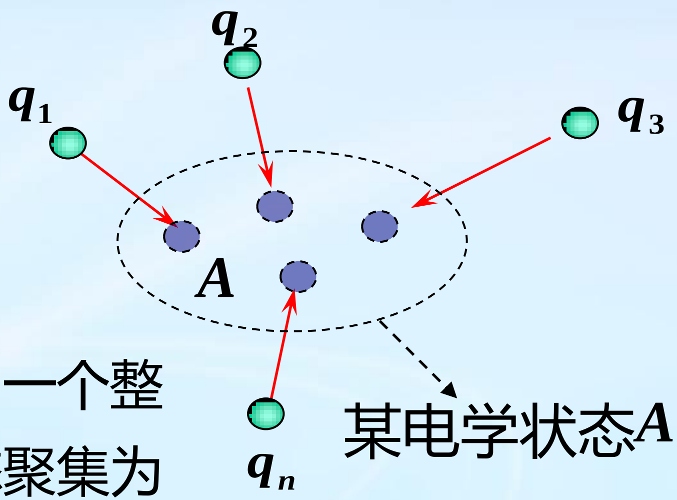
外力的总功：

$$W = -\int_0^Q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}dq = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

∴该均匀带电球面的静电能：$W_e = -W_{外} = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{Q^2}{2C}$

一、电荷系统的自能与相互作用能

2、带电体系的相互作用能

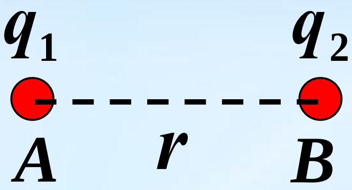


电学状态A相互作用能

将所有带电体（各自视为一个整体）从无限远的分离状态聚集为某电学状态A的过程中，外力克服静电场所作的功。

一、电荷系统的自能与相互作用能

例2：两个点电荷的相互作用能



第一步 把q_1从无限远移至A处 ——外力不作功

$$W_1 = 0$$

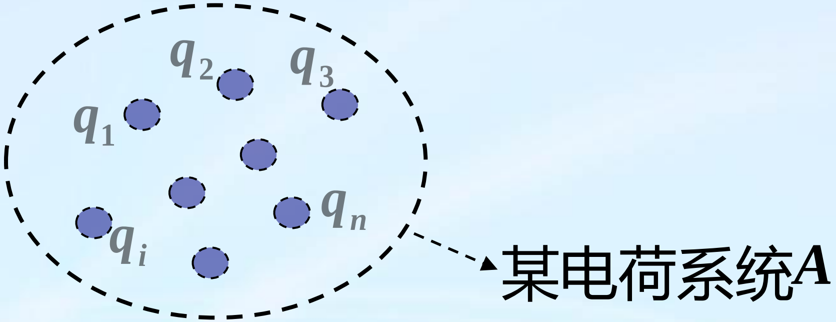
第二步 把q_2从无限远移至B处，外力克服q_1的场作功

$$W_2 = -\int_{\infty}^{r} q_2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = q_2 \int_{r}^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\therefore W_{12} = W_1 + W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

一、电荷系统的自能与相互作用能

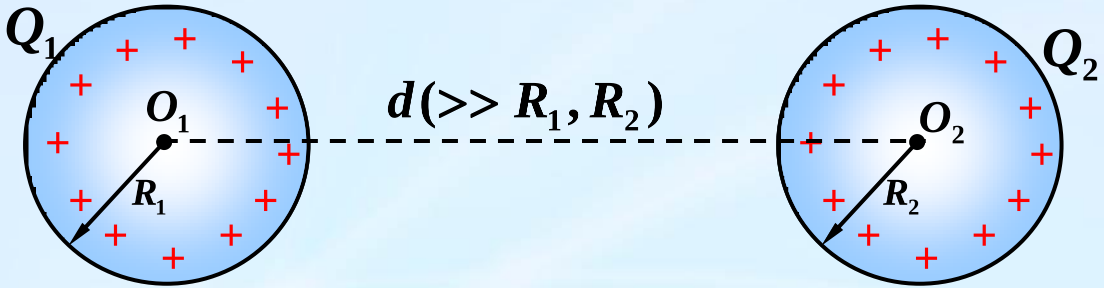
3、带电体系的总静电能



电荷系统的总能 $\begin{cases} \text{每个带电体的自能} \\ \text{所有带电体的相互作用能} \end{cases}$

一、电荷系统的自能与相互作用能

例3：求两个半径分别为 R_1、R_2 电量为 Q_1、Q_2，相距为 $d(d >> R_1, R_2)$ 的两个均匀带电球面的静电能。



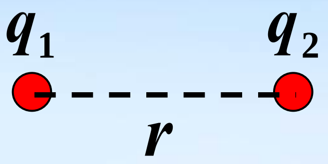
自能： $W_1 = \dfrac{Q_1}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$ $\qquad$ $W_2 = \dfrac{Q_2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}$；

相互作用能： $W_{12} = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$ （两个带电球面均视为点电荷）

该电荷系统的总静电能： $W_e = W_1 + W_2 + W_{12}$

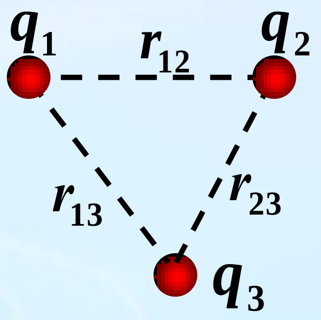
二、点电荷系的相互作用能

特例1：两个点电荷的相互作用能



$$W_{12}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}=U_2q_2=U_1q_1=\frac{1}{2}(q_1U_1+q_2U_2)$$

特例2：三个点电荷的相互作用能



$$W_e=W_{12}+W_{13}+W_{23}$$

$$=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}+\frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}+\frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$$

$$=\frac{1}{2}[q_1(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}})+q_2(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}})+q_3(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}})]$$

$$\Rightarrow W_e=\frac{1}{2}(q_1U_1+q_2U_2+q_3U_3)$$

二、点电荷系的相互作用能

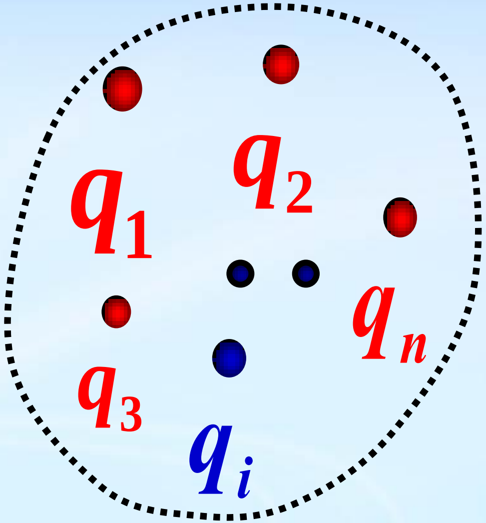
n 个点电荷的情形

$$W_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n,j\neq i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i U_i$$

U_i：除 q_i 外的所有电荷在 q_i 处的产生电势

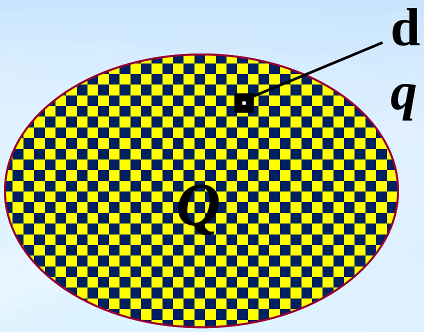


$$\boxed{W=\frac{1}{2}\int_{(Q)}dqU}$$

三、连续分布电荷系统的静电能

方法：微元分割＋积分法

思路(一)：考察带电体的自能

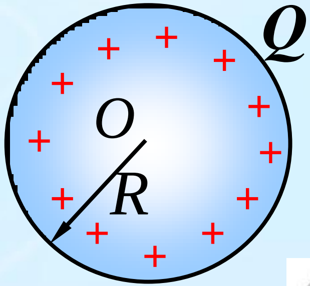


先考虑带电体电量为任意q时，将元电荷$\mathbf{d}q$从无穷远移到带电体上，外力需克服静电场力作的功$\mathbf{dw}$;

再计算电量由0累积到Q的过程，外力的总功：

$$dW = \int_0^Q dW$$

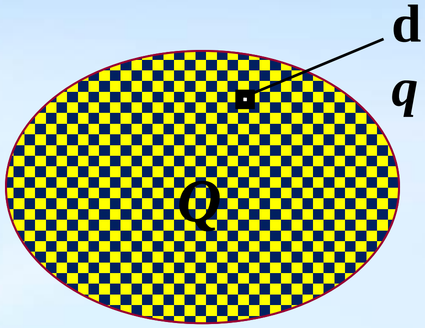
如：前面例1 (均匀带电球面的静电能)



$$W = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

三、连续分布电荷系统的静电能

思路(二)：考察带电体上所电荷元间的相互作用能

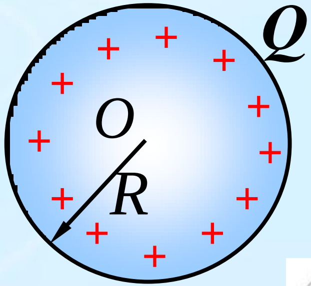


带电体上任到一个电荷元dq，设其余所有电荷激发的静电场在dq所在位置的电势为U，则dq与其余电荷之间的相互作用能为：Udq

再对整个带电体积分，求总相互作用能：

$$W = \frac{1}{2}\int_{\Omega} U dq$$

再看前面例1 （均匀带电球面的静电能）



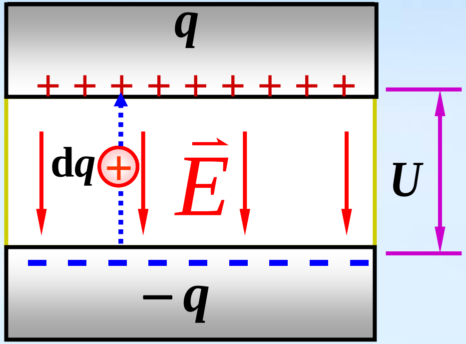
$$W = \frac{1}{2}\int_{0}^{Q} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \mathrm{d}q = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

四、电容器的静电储能

以平行板电容器为例

思路1:考察板间电场建立的过程

考察一个中间过程：极板各带$\pm q$时，将电荷元$\mathrm{d}q$从负极板迁移到正极板，外力需做功：



$$\mathrm{d}W = U\mathrm{d}q = \frac{q}{C}\mathrm{d}q$$

$$\Rightarrow W = \int_0^Q \mathrm{d}W = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}$$

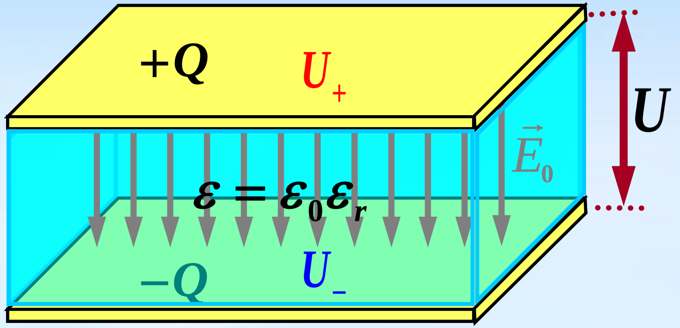
$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2}$$

四、电容器的静电储能

思路2:

考察两极板的相互作用能

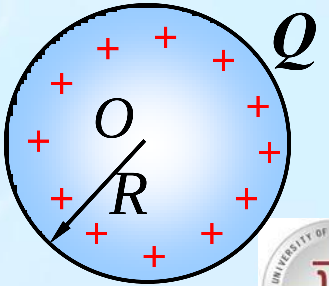


在静电平衡情况下，每个极板都是等势体

$$W=\frac{1}{2}QU_{+}+\frac{1}{2}(-Q)U_{-}=\frac{1}{2}Q(U_{+}-U_{-})=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}CU^{2}=\frac{Q^{2}}{2C}$$

上述结论对所有电容器适用吗?

还来前面例1（均匀带电球面的静电能）



孤立导体球的电容

$$C=4\pi\varepsilon_0 R$$

$$W=\frac{Q^{2}}{8\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q^{2}}{2C}$$

四、电容器的静电储能

电容器的静电储能

推广： $$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

讨论

电场能量大小决定于电荷的多少吗？

静电场： 电荷是电能的荷负者

场物质（静电场）分布 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 电荷分布

变化的电磁场： 电场是电能的荷负者

场物质可以脱离电荷而独立存在。

五、静电场的能量密度

【电场能量密度】单位体积中的电场能量。

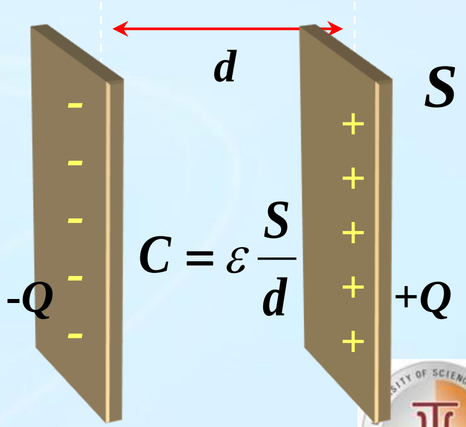
1、平均能量密度： $\overline{w_e} = \dfrac{\Delta W}{\Delta V}$

2、能量密度： $w_e = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta W}{\Delta V} = \dfrac{dW}{dV}$

特例：平行板电容器内的电场能量密度

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2\boxed{Sd} = V$$

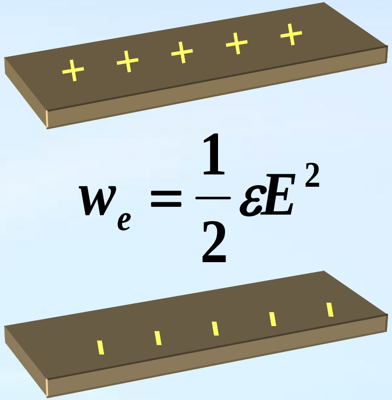
$$\Rightarrow w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$



五、静电场的能量密度

对于均匀、线性、各向同性电介质： $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}}$$



$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

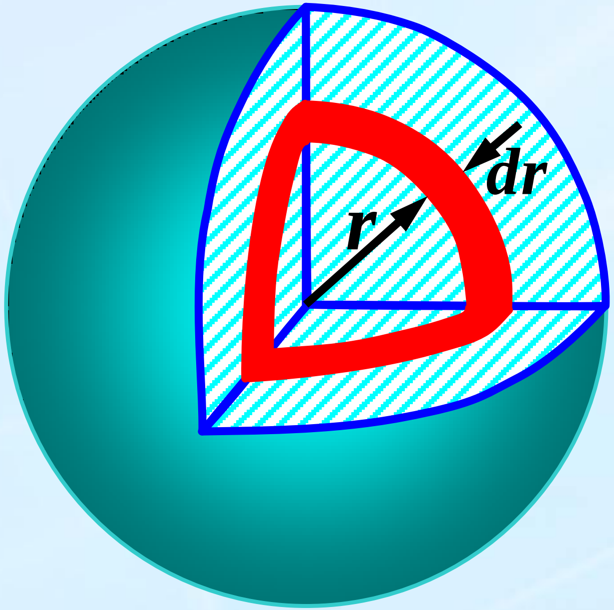
可推广应用于普遍情况

电场的能量：

$$\boxed{W = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}dV}$$

静电能存在于电场不为零的空间

[例3] 一均匀带电球体，半径为R，总电量为Q，设球内和球外的介电常数为 ε_0，求这一带电体的静电能。



$$\vec{E}_{内} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$\vec{E}_{外} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

随堂小结

一、点电荷系的的相互作用能 $W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iU_i$

二、连续带电体的静电能 $W=\frac{1}{2}\int_q U\mathrm{d}q$

三、电容器的储能 $W=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}CU^2=\frac{Q^2}{2C}$

四、电场的能量 $W=\int_V w_e dV=\int_V \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}dV$