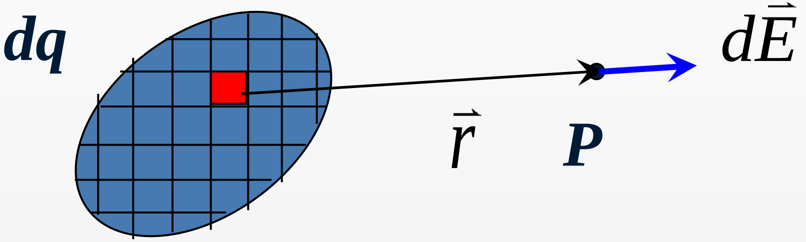
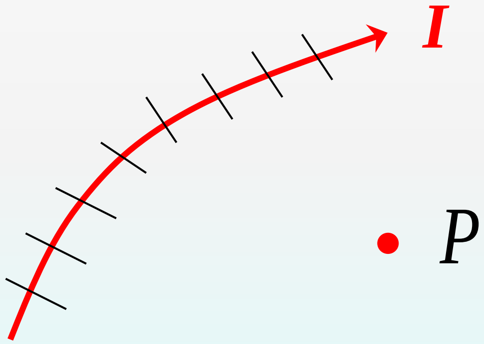
9.2 毕奥-萨伐尔定律

9.2 毕奥-萨伐尔定律

电场：



磁场？



$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

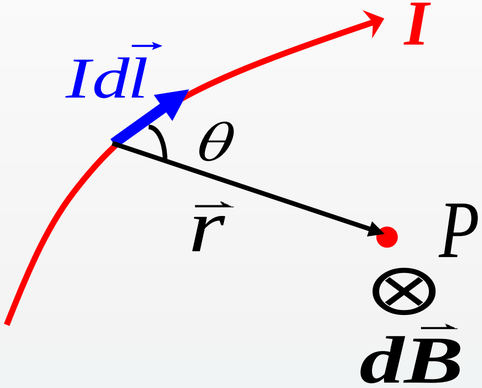
$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_V \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

一、毕-萨定律(Biot-Savart law)（实验规律 1820）

讨论：电流元在空间产生的磁场

电流元在P点产生的磁感应强度

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$



$\vec{r}$ 电流元指向场点的矢径

μ_0 真空磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N/A^2$

对一段载流导线

$$\boxed{B = \int_L d\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}}$$

二、毕-萨定律的应用

例1. 载流直导线的磁场

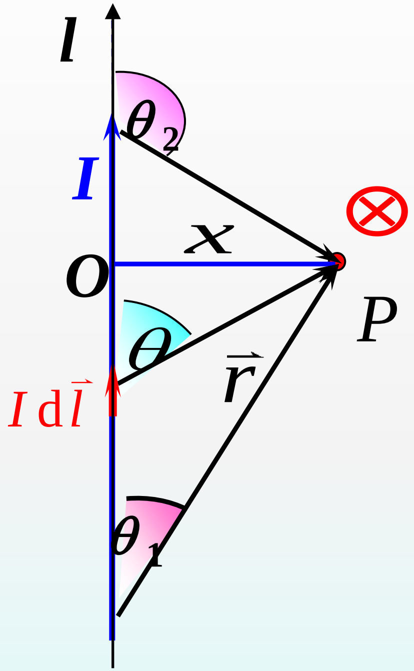
电流元 $Id\vec{l}$ $\quad d\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$

$d\vec{B}$ 的方向：⊗ $\quad$ 大小：$dB=\dfrac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2}\sin\theta$

统一变量 $\quad x=r\sin\theta \qquad l=-x\cot\theta$

$$dl=\frac{xd\theta}{\sin^2\theta} \qquad dB=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\sin\theta d\theta$$

$$B=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\sin\theta d\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$



讨论

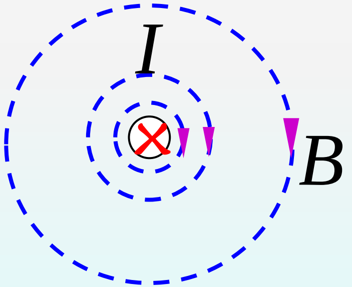
$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

1) 场点在直电流延长线上　　$B=0$

2) 无限长载流直导线：当 $L\rightarrow\infty$ （$x<<L$） $\theta_1\rightarrow 0$　$\theta_2\rightarrow\pi$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}}$$

方向：右螺旋关系

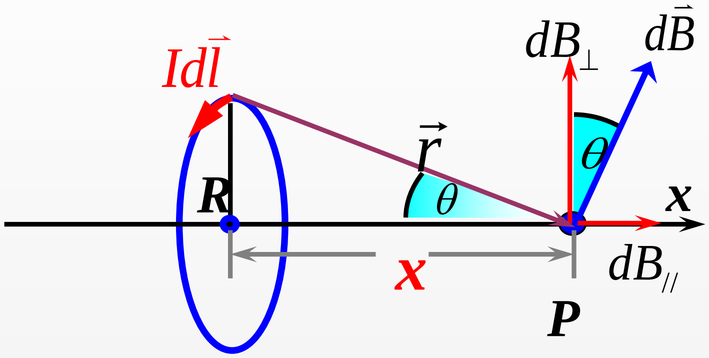


3) 半无限长载流导线　　$\theta_1\rightarrow\pi/2$　$\theta_2\rightarrow\pi$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}$$

例2. 圆电流轴线上的磁场

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$



$d\vec{B}$ 的大小： $dB=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Idl}{r^2}$

方向：如图所示

$$dB_\perp=dB\cos\theta \qquad dB_{//}=dB\sin\theta$$

$$\sin\theta=\frac{R}{r}=\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

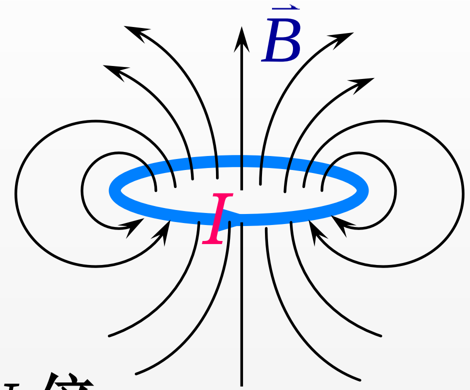
由对称性可知 $\vec{B}_\perp=\oint d\vec{B}_\perp=0$

$$B=B_{//}=\oint dB_{//}=\frac{\mu_0 I\sin\theta}{4\pi r^2}\boxed{\oint_L dl}\rightarrow\boxed{2\pi R}$$

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0 IR^2\vec{i}}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}}$$

讨论

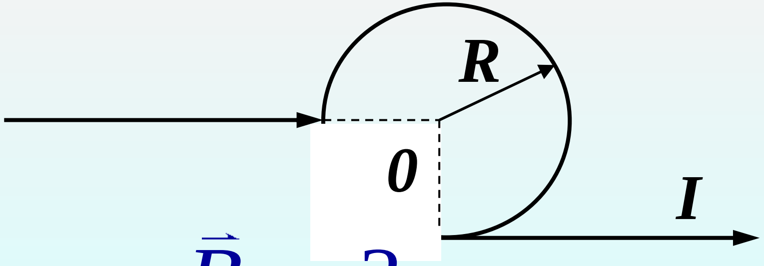
1) 电流和磁场的方向



2) $x=0 \quad B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

3) 若线圈为N 匝，则磁感应强度为单匝的N 倍

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{N}\frac{\mu_0 \boldsymbol{I}\boldsymbol{R}^2}{2(\boldsymbol{R}^2+\boldsymbol{x}^2)^{3/2}}$$



注意：对圆心处N 可以是分数

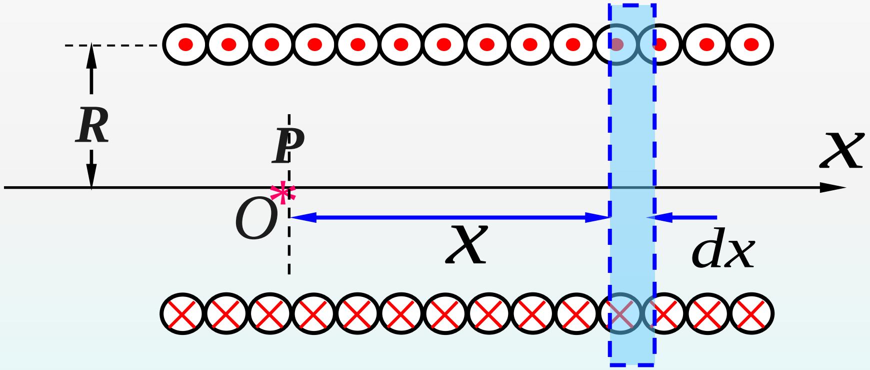
$\vec{B}_0=?$

例3. 载流直螺线管内部的磁场.

如图所示，有一长为l，半径为R的载流密绕直螺线管，螺线管的总匝数为N，通有电流I. 设把螺线管放在真空中，求管内轴线上一点处的磁感强度

解：建立坐标系如图

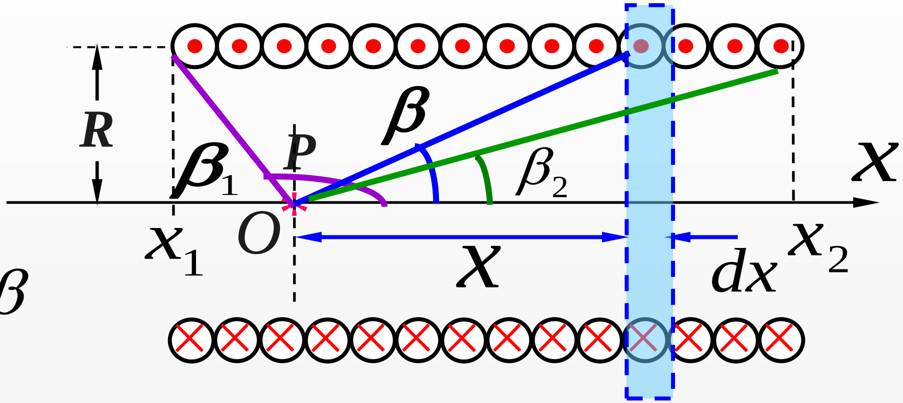
$$dI = Indx \qquad n = \frac{N}{l}$$



由圆电流公式

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \qquad dB = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2\ Indx}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$B=\int \mathrm{d}B=\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{R^2\mathrm{d}x}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$



$$x=R\cot\beta \qquad \mathrm{d}x=-R\csc^2\beta\mathrm{d}\beta$$

$$R^2+x^2=R^2\csc^2\beta$$

$$B=-\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{R^3\csc^2\beta\mathrm{d}\beta}{R^3\csc^3\beta\mathrm{d}\beta}=-\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\,\mathrm{d}\,\beta$$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\beta_2-\cos\beta_1\right)}$$

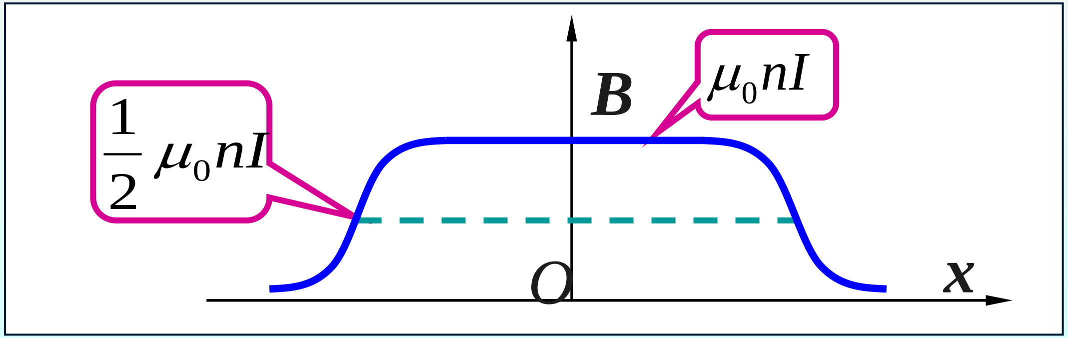
讨论

1) 无限长的螺线管 $\beta_1 = \pi, \beta_2 = 0$

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

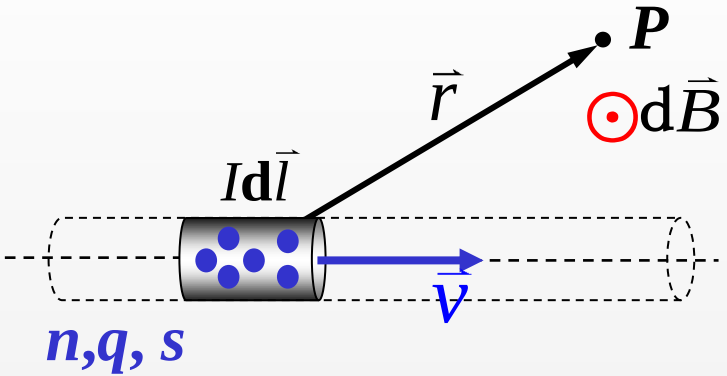
2) 半无限长螺线管 $\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \beta_2 = 0$

$$\boxed{B = \mu_0 n I / 2}$$



三、运动电荷的磁场

电流元在*P*点产生的场



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$I = qnvs \qquad Id\vec{l} = nsdlq\vec{v}$$

$nsdl = dN$ 表示电流元中载流子的个数

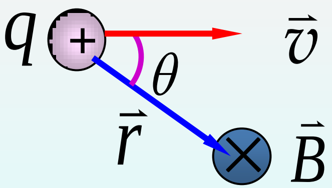
每个运动电荷产生的磁场为 $\boxed{\vec{B} = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}N} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}}$

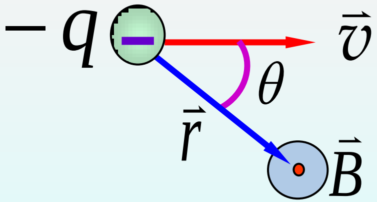
说明

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}}$$

(1)上式只适用于 $v << C$ 的情况

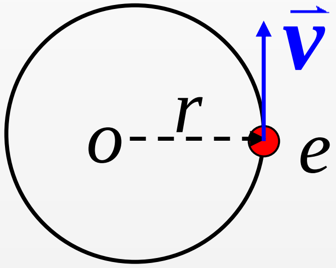
(2)方向问题，注意 q 的正负





例4：电子绕核做半径为 r 的圆周运动，速率为v，求：

(1)轨道中心处的磁感应强度 (2) 该闭合电流的磁矩



(1) 解法一、运动电荷产生的场

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3} \qquad \therefore B_o = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{evr}{r^3} = \frac{\mu_0 ev}{4\pi r^2} \qquad \otimes$$

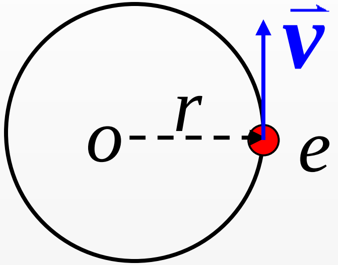
解法二、电子作圆周运动 $\Longrightarrow$ 载流圆线圈

等效电流 $I = \dfrac{e}{T} = \dfrac{ev}{2\pi r}$

圆心处场强 $B_o = \dfrac{\mu_0 I}{2r} = \dfrac{\mu_0 ev}{4\pi r^2}$

方向也为：$\otimes$

(2) 求该闭合电流的磁矩



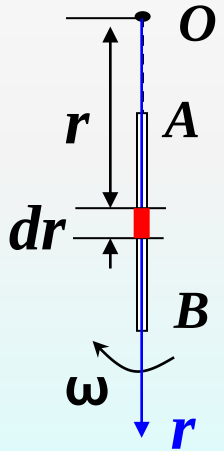
由解法二可得等效圆电流

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$$

所以其对应磁矩大小为 $m = IS = \frac{ev}{2\pi r} \bullet \pi r^2 = \frac{evr}{2}$

磁矩方向为垂直屏幕向里 $\otimes$

例5：有一长为a，电荷线密度为λ的带电线段AB，可绕距A端为b的O点旋转，如图所示。设旋转角速度为ω，转动过程中A端距O轴的距离保持不变，求带电线段在O点产生的磁感应强度和磁矩。



(1) 等效电流法　　建立坐标系如图

在 r 处取 dr 的线元，其所带电量为：　$dq = \lambda dr$

等效圆电流：　$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\lambda dr}{2\pi / \omega} = \frac{\lambda \omega dr}{2\pi}$$

其在O点产生的磁感应强度大小为：
$$dB=\frac{\mu_0 dI}{2r}=\frac{\mu_0\lambda\omega dr}{4\pi r}$$

整个带电线段在O点产生的磁感应强度大小为：

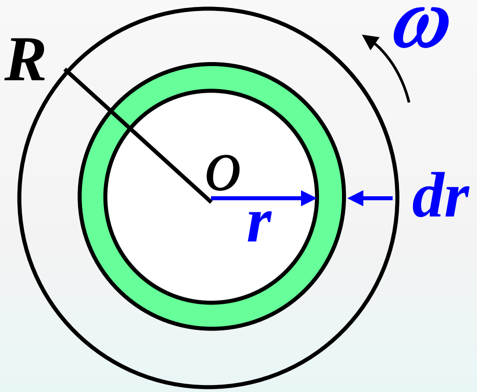
$$B=\int dB=\int_b^{a+b}\frac{\mu_0\lambda\omega dr}{4\pi r}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{a+b}{b}$$ 方向：$\otimes$

(2) 旋转线元产生的磁矩大小 $$dm=sdI=\frac{\lambda\omega r^2 dr}{2}$$

整个线段长生的磁矩大小为

$$m=\int dm=\int_b^{a+b}\frac{\lambda\omega r^2 dr}{2}=\frac{1}{6}\lambda\omega\left[(a+b)^3-b^3\right]$$ 方向：$\otimes$

例6：设半径为 R 的均匀带电圆盘，电荷面密度为σ，以角速率ω绕通过圆心垂直于盘面的轴转，求：(1)圆盘中心处的磁感应强度 (2) 对应磁矩



(1) 解法一、 等效园电流法

在 r 处取 dr 的细圆环，

其所带电量为： $dq = \sigma ds = \sigma 2\pi r dr$

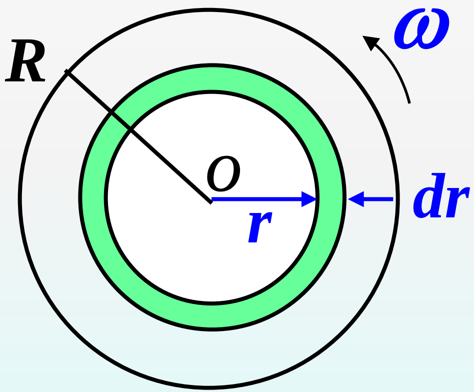
等效圆电流： $dI = \dfrac{dq}{T} = \dfrac{\sigma 2\pi r dr}{2\pi / \omega} = \omega \sigma r dr$

细圆环在圆心处产生的磁场为 $dB = \dfrac{\mu_0 dI}{2r} = \dfrac{\mu_0 \omega \sigma dr}{2}$

整个圆盘在圆心处产生的磁场的大小为

$$B=\int dB=\int_0^R \frac{\mu_0\omega\sigma dr}{2}=\frac{\mu_0\omega\sigma R}{2}$$ 方向：垂直屏幕向外

(2) 求磁矩



细圆环等效为圆电流，对应的磁矩大小为

$$dm=sdI=\pi r^2\cdot\omega\sigma rdr=\pi\omega\sigma r^3dr$$

整个圆盘转动后对应的磁矩大小为

$$m=\int dm=\int_0^R \pi\omega\sigma r^3dr=\frac{1}{4}\pi\omega\sigma R^4$$ 方向：垂直屏幕向外