高等数学(二)

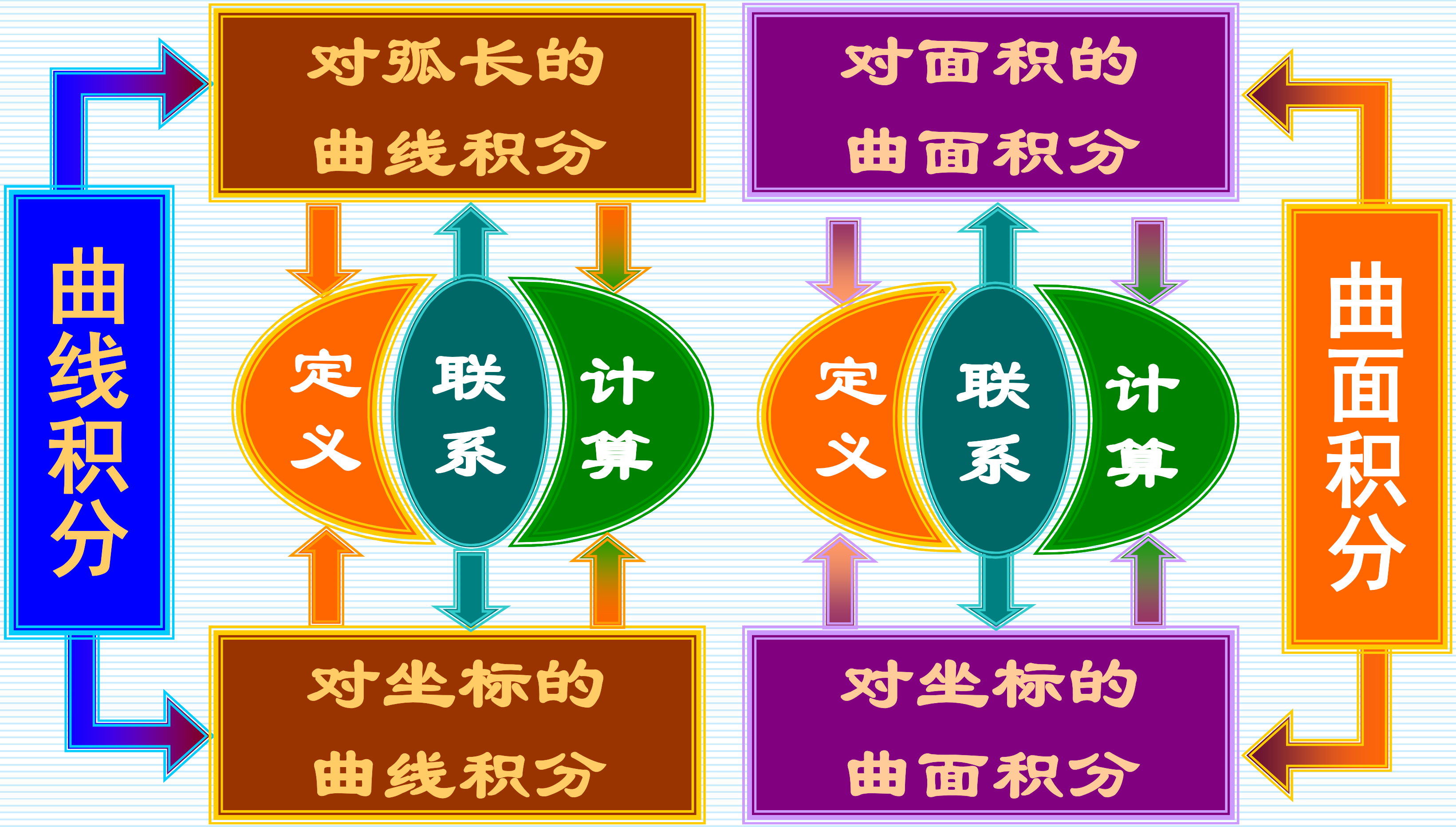
第十一章　曲线积分与曲面积分

第七讲　习　题　课

一、主要内容

- （一）曲线积分与曲面积分
- （二）各种积分之间的联系
- （三）场论初步

（一）曲线积分与曲面积分


曲线积分
对弧长的曲线积分
对坐标的曲线积分
定义
联系
计算
定义
联系
计算
对面积的曲面积分
对坐标的曲面积分
曲面积分

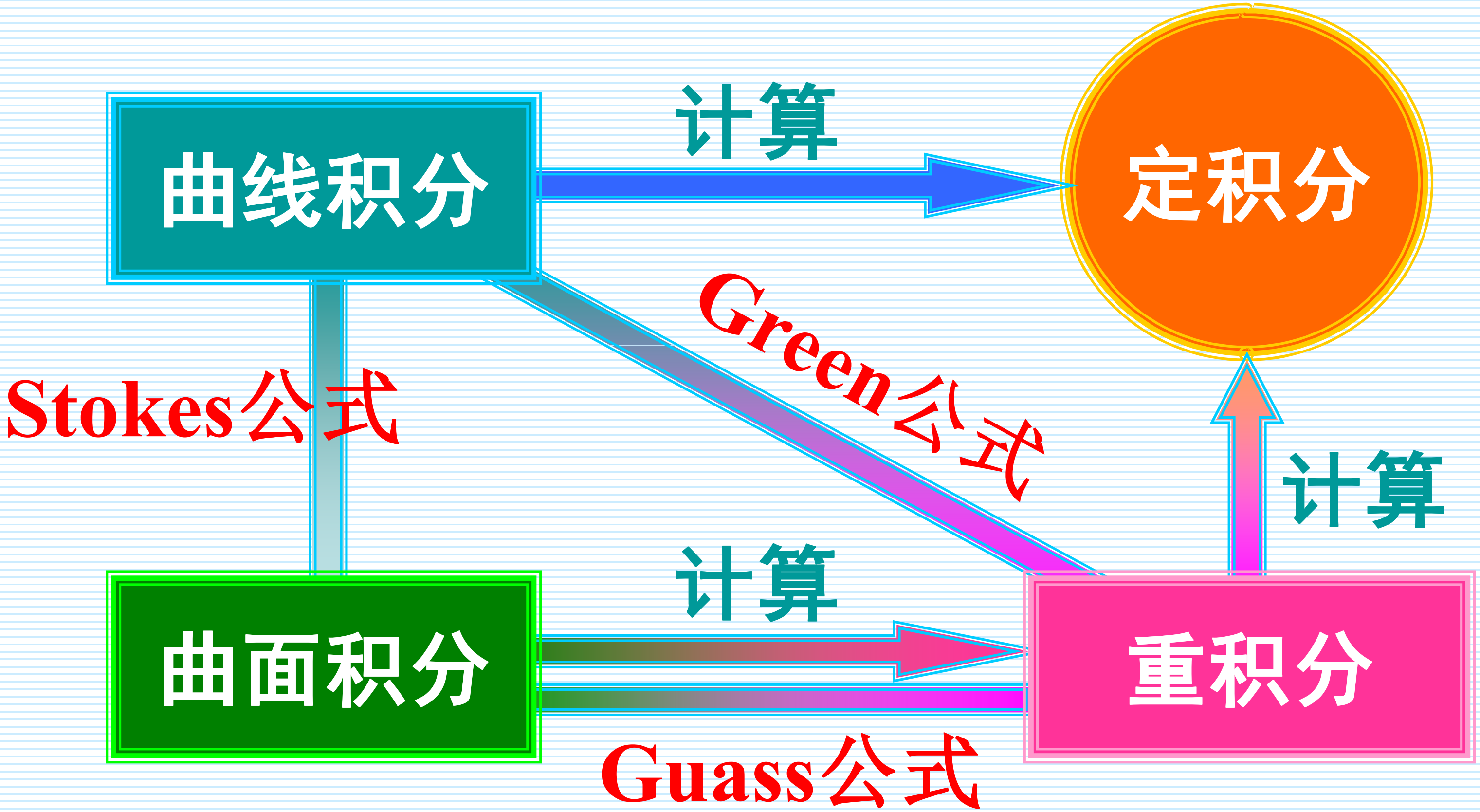
	曲线积分	
	对弧长的曲线积分	对坐标的曲线积分
定义	$\int_L f(x,y)ds=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$	$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ $=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$
联系	$\int_L Pdx+Qdy=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$	
计算	$\int_L f(x,y)ds$ $=\int_\alpha^\beta f[\varphi,\psi]\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}dt$ 三代一定 $(\alpha<\beta)$	$\int_L Pdx+Qdy$ $=\int_\alpha^\beta [P(\varphi,\psi)\varphi'+Q(\varphi,\psi)\psi']dt$ 二代一定 (与方向有关)

	与路径无关的四个等价命题
条件	在单连通开区域 D 上 $P(x,y),Q(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数, 则以下四个命题成立.
等价命题	(1) 在 D 内 $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关 (2) $\oint_C Pdx+Qdy=0$,闭曲线 $C\subset D$ (3) 在 D 内存在 $U(x,y)$ 使 $du=Pdx+Qdy$ (4) 在 D 内, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

曲面积分

	对面积的曲面积分	对坐标的曲面积分
定义	$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$	$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$
联系	$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$	
计算	$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$ $=\iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$ 一投,二代,三换(与侧无关)	$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$ $=\pm\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$ 一投,二代,三定号 (与侧有关)

（二）各种积分之间的联系



★ 积分概念的联系

$$\int_{\Sigma} f(M)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M)\Delta\sigma_i,\ f(M)\text{点函数}$$

定积分 当$\Sigma \to R_1$上区间$[a,b]$时，

$$\int_{\Sigma} f(M)d\sigma = \int_a^b f(x)dx.$$

二重积分 当$\Sigma \to R_2$上区域D时，

$$\int_{\Sigma} f(M)d\sigma = \iint_D f(x,y)d\sigma.$$

曲线积分 当$\Sigma \Rightarrow R_2$上平面曲线 L时,

$$\int_\Sigma f(M)d\sigma = \int_L f(x,y)ds.$$

三重积分 当$\Sigma \Rightarrow R_3$上区域Ω时,

$$\int_\Sigma f(M)d\sigma = \iiint_\Omega f(x,y,z)dv$$

曲线积分 当$\Sigma \Rightarrow R_3$上空间曲线Γ时,

$$\int_\Sigma f(M)d\sigma = \int_\Gamma f(x,y,z)ds.$$

曲面积分 当$\Sigma \Rightarrow R_3$上曲面S时,

$$\int_\Sigma f(M)d\sigma = \iint_S f(x,y,z)dS.$$

★ 理论上的联系

1.定积分与不定积分的联系

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (F'(x) = f(x))$$

牛顿--莱布尼茨公式

2.二重积分与曲线积分的联系

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy \quad (\text{沿}L\text{的正向})$$

格林公式

3.三重积分与曲面积分的联系

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

高斯公式

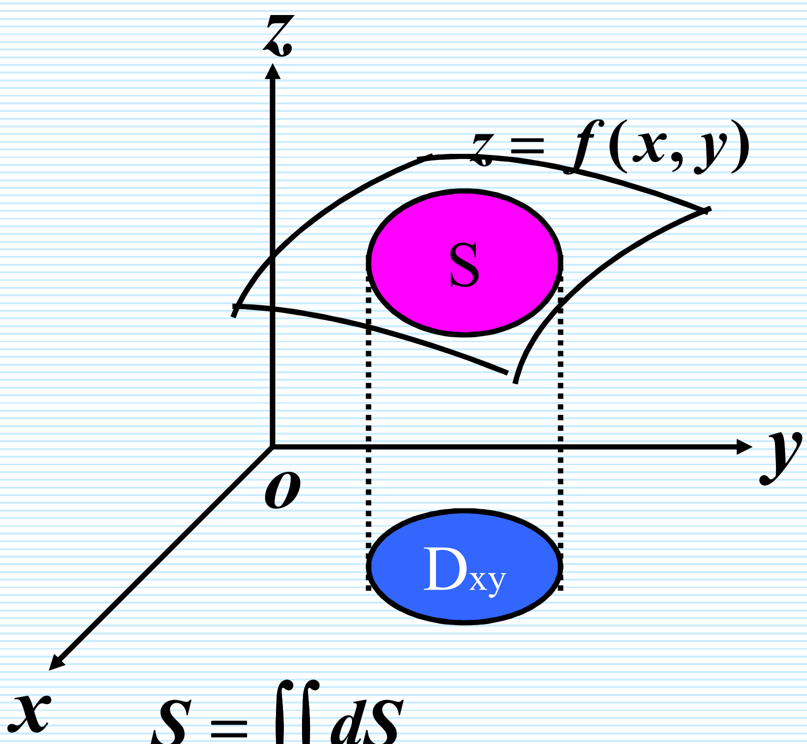
4.曲面积分与曲线积分的联系

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$$

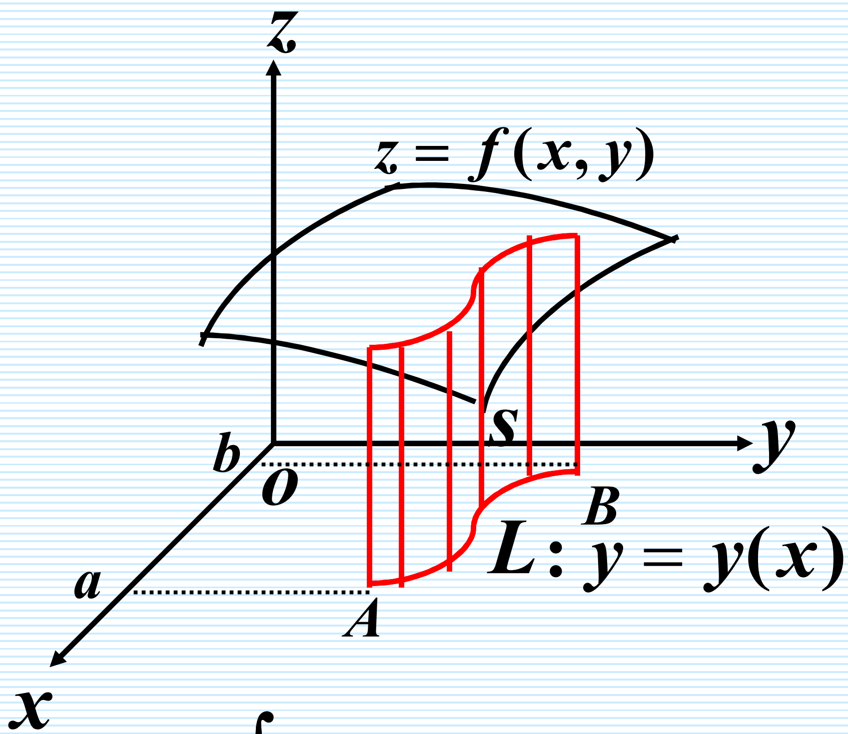
斯托克斯公式

曲面面积的计算法



$$S = \iint_{\Sigma} dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$$



$$S = \int_{L(A,B)} f(x, y) ds$$

$$= \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

二、典型例题

例 1 计算$I=\int_L (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$,

其中L为由点$O(0,0)$到点$A(1,1)$的曲线$y=\sin\frac{\pi}{2}x$.

思路:

$$I=\int_L Pdx+Qdy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

非闭 $\Rightarrow$ $I=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$

闭合 $\Rightarrow$ $I=\int_L Pdx+Qdy=0$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

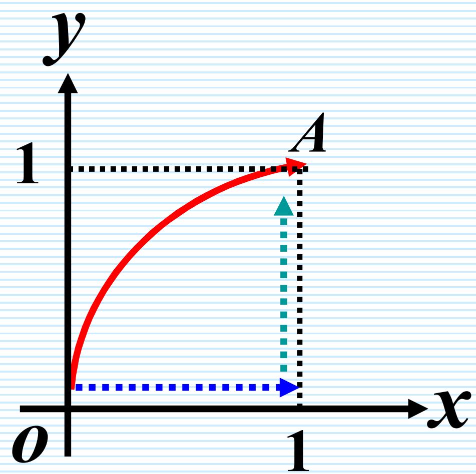
闭合 $\Rightarrow$ $I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

非闭 $\Rightarrow$ 补充曲线或用公式

解 由 $I=\int_L (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$

知 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy)=2x$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^4)=2x$



即 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$， 原积分与路径无关,

故原式 $=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(1+y^4)dy=\dfrac{23}{15}$.

例 2 计算

$$I=\int_L (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy,$$

其中L为由点$(a,0)$到点$(0,0)$的上半圆周

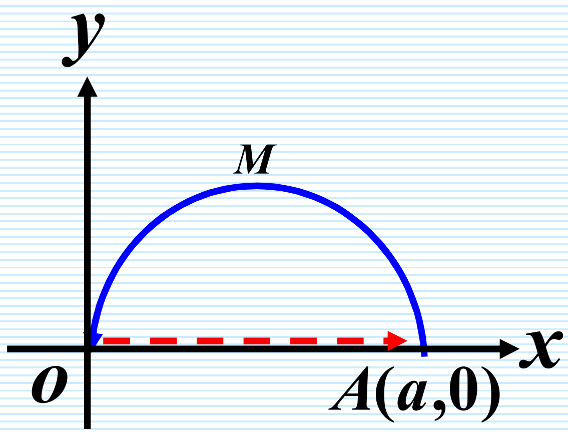
$x^2+y^2=ax, y \geq 0.$

解 $\because \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y - my)=e^x \cos y - m$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y - m)=e^x \cos y$$

即 $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ （如下图）

$$I=\int_{L+\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}=\oint_{AMOA}-\int_{\overline{OA}}$$



$$\oint_{AMOA}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

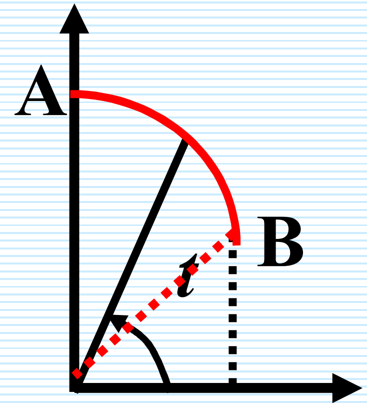
$$=m\iint_D dxdy=\frac{m}{8}\pi a^2,$$

$$\int_{\overline{OA}}=\int_0^a 0\cdot dx+(e^x-m)\cdot 0=0,$$

$$\therefore\quad I=\oint_{AMOA}-\int_{\overline{OA}}=\frac{m}{8}\pi a^2-0=\frac{m}{8}\pi a^2.$$

例3 计算 $\int_L xyds$, L为$x^2+y^2=a^2(a>0)AB$弧

$A(0,a), B(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a)$



解 $L: \begin{cases} y=\sqrt{a^2-x^2} \\ x=x \end{cases} \quad 0\le x\le \frac{a}{2}$

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$\int_L xyds=\int_0^{\frac{a}{2}} x\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int_0^{\frac{a}{2}} axdx=\frac{1}{8}a^3.$$

解2 取t做参变量 $L: \begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases} \quad \frac{\pi}{3}\le t\le\frac{\pi}{2} \quad ds=adt$

$$\int_L xyds=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos t\sin t\cdot adt=\frac{1}{8}a^3.$$

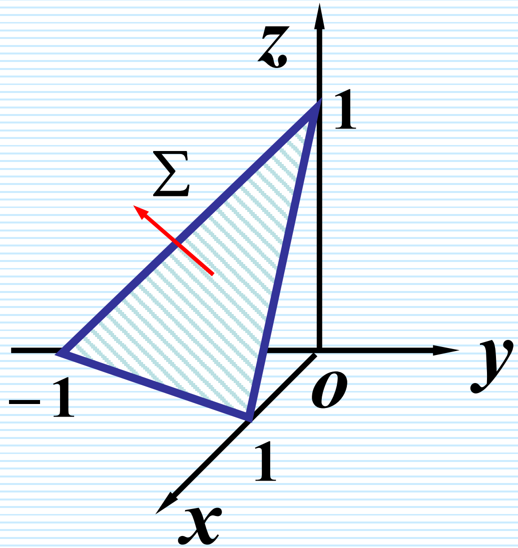
例4 计算

$$I=\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx$$

$+[f(x,y,z)+z]dxdy$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，

Σ 为平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧．

解 利用两类曲面积分之间的关系



$\because \Sigma$ 的法向量为 $\vec{n}=\{1,-1,1\}$，

$$\therefore \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

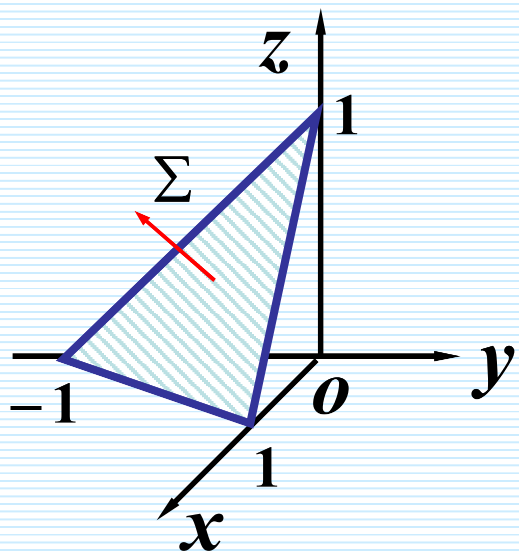
$$\therefore \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$I = \iint_{\Sigma} \{\frac{1}{\sqrt{3}}[f(x,y,z)+x]$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}[2f(x,y,z)+y]+\frac{1}{\sqrt{3}}[f(x,y,z)+z]\}dS$$

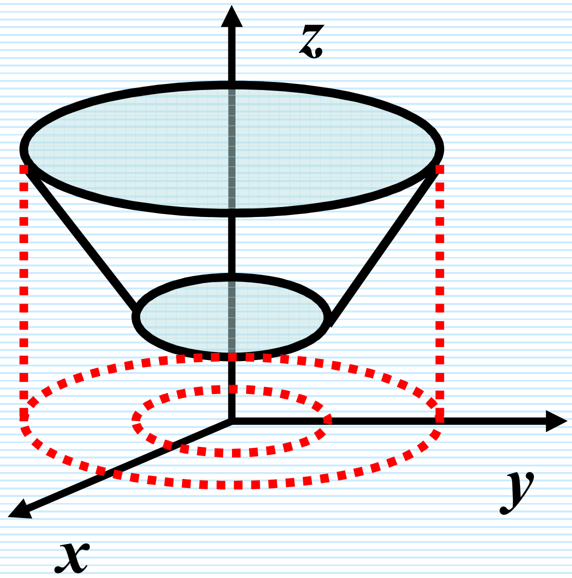
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}} 1\cdot\sqrt{3}dxdy = \frac{1}{2}.$$



Σ为平面 $x-y+z=1$在第四卦限部分的上侧.

例5 计算 $I = \iint\limits_{\Sigma} ydydz - xdzdx + z^2dxdy$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被平面 $z = 1, z = 2$ 所截部分的外侧.



解 添 $\Sigma_1 : z = 1(x^2 + y^2 \le 1)$ 取下侧,

$\Sigma_2 : z = 2(x^2 + y^2 \le 4)$ 取上侧,

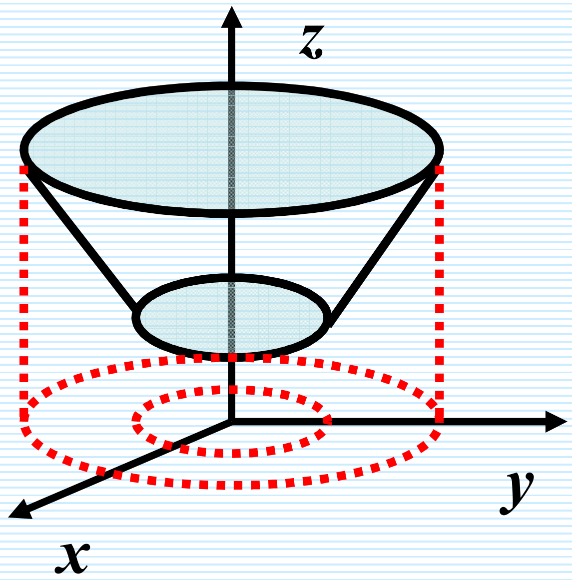
$\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ 围成 Ω, 由高斯公式

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} ydydz - xdzdx + z^2dxdy$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} 2zdxdydz = \int_1^2 dz \iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} 2zdxdy = \int_1^2 2z\pi z^2 dz = \frac{15\pi}{2}$$

$$\iint_{\Sigma_1} ydydz - xdzdx + z^2dxdy$$

$$= -\iint_{D_1} 1^2 dxdy \quad = -\pi$$



$$\iint_{\Sigma_2} ydydz - xdzdx + z^2dxdy$$

$$= \iint_{D_2} 2^2 dxdy \quad = 16\pi$$

$$I = \iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} - \iint_{\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_2} = \frac{15\pi}{2} - (-\pi + 16\pi) = -\frac{15\pi}{2}$$

例6 计算

$$\oiint_{\Sigma} x^3 dydz + [\frac{1}{z} f(\frac{y}{z}) + y^3]dzdx + [\frac{1}{y} f(\frac{y}{z}) + z^3]dxdy$$

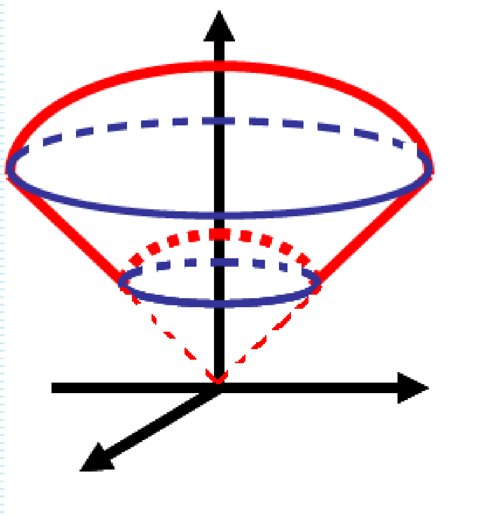
其中$f(u)$有连续偏导数,

Σ为$z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 4$

所围立体 (夹在两球面之间 ,锥面内部分)表面外侧 .

解. $P = x^3, Q = \frac{1}{z} f(\frac{y}{z}) + y^3,$

$$R = \frac{1}{y} f(\frac{y}{z}) + z^3$$



$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{z} f'(\frac{y}{z}) \frac{1}{z} + 3y^2,$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{y}f'(\frac{y}{z})(-\frac{y}{z^2})+3z^2=-\frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z})+3z^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{z}f'(\frac{y}{z})\frac{1}{z}+3y^2=\frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z})+3y^2$$

$$\therefore\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3(x^2+y^2+z^2)$$

$$\text{原积分}=\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_1^2 r^2r^2\sin\varphi dr$$

$$=6\pi[-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{5}(32-1)=\frac{186\pi}{5}(1-\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

例 7 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (8y+1)x\,dydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yz\,dxdy,$$

其中Σ是由曲线$\begin{cases} z = \sqrt{y-1} \\ x = 0 \end{cases}$ $(1 \le y \le 3)$绕y轴旋转一周

所成的曲面, 它的法向量与y轴正向的夹角恒大于$\dfrac{\pi}{2}$.

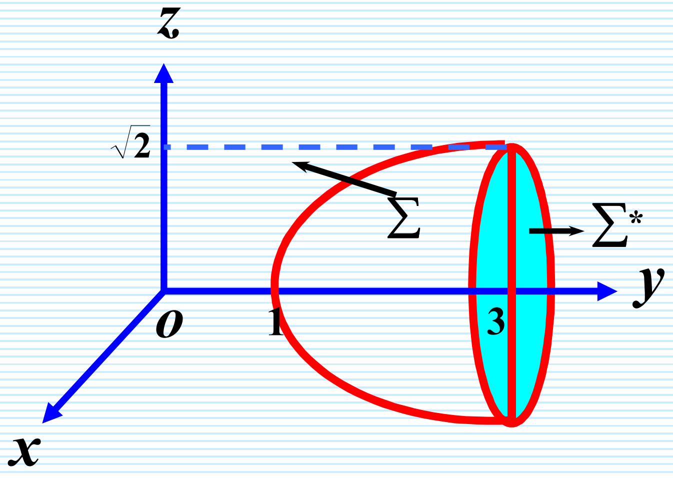
解 $\begin{cases} z = \sqrt{y-1} \\ x = 0 \end{cases}$绕$y$轴旋转面方程为

$$y - 1 = z^2 + x^2$$

(如下图)

欲求 $I = \iint\limits_{\Sigma} (8y+1)x\,dydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yz\,dxdy$

且有 $I = \iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*} - \iint\limits_{\Sigma^*}$



$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*} = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (8y + 1 - 4y - 4y)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} dv$$

$$= \iint_{D_{xz}} dxdz \int_{1+z^2+x^2}^{3} dy \quad = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_{1+\rho^2}^{3} dy$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho - \rho^3) d\rho = 2\pi,$$

$$\iint_{\Sigma^*} = 2\iint_{\Sigma^*} (1 - 3^2) dzdx = -32\pi,$$

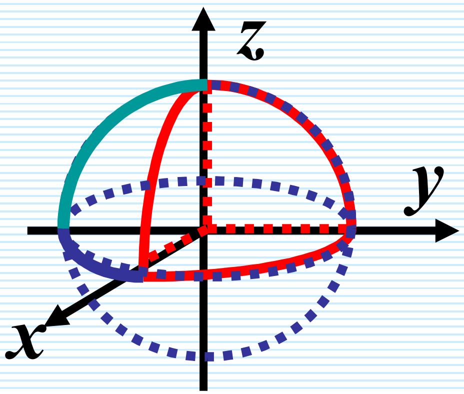
$$故 I = 2\pi - (-32\pi) \quad = 34\pi.$$

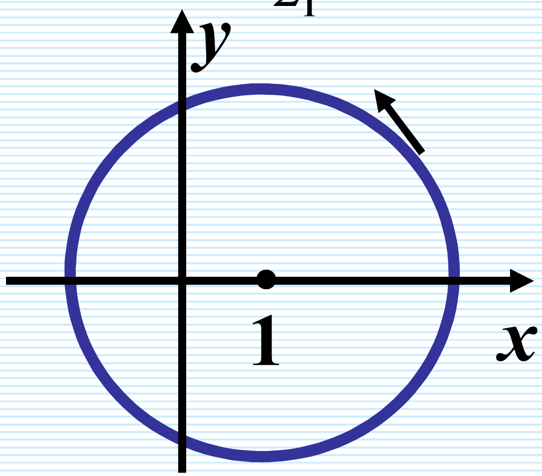
补充题

1.$\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$,$\Sigma_1$为$\Sigma$在第一卦限部分,

则有:$(A)\iint\limits_{\Sigma} xdS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$ $(B)\iint\limits_{\Sigma} ydS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$

$(C)\iint\limits_{\Sigma} zdS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$ $(D)\iint\limits_{\Sigma} xyzdS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdS$





2. 计算 $I=\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$

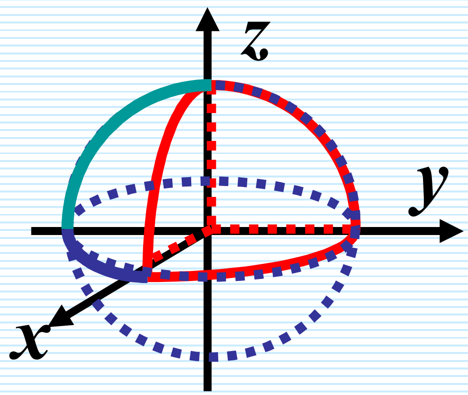
L为$(x-1)^2+y^2=R^2(R>1)$ 的逆时针方向

1. 选C

Σ关于yoz面及zox面对称,被积函数

$f(x,y,z)=z$关于x和y 都是偶函数

$$\therefore \iint_{\Sigma} z dS = 4\iint_{\Sigma_1} z dS,$$



又因为

$$\Sigma_1 : x^2+y^2+z^2=a^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$$

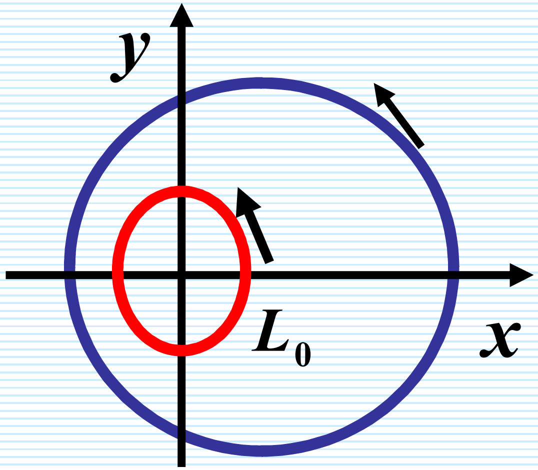
关于x,y,z具有轮换对称性,

$$\iint_{\Sigma_1} z dS = \iint_{\Sigma_1} x dS \quad \therefore \iint_{\Sigma} z dS = \iint_{\Sigma_1} 4z dS = 4\iint_{\Sigma_1} x dS$$

2. $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$

L为$(x-1)^2 + y^2 = R^2 (R > 1)$

的逆时针方向



$$P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}$$

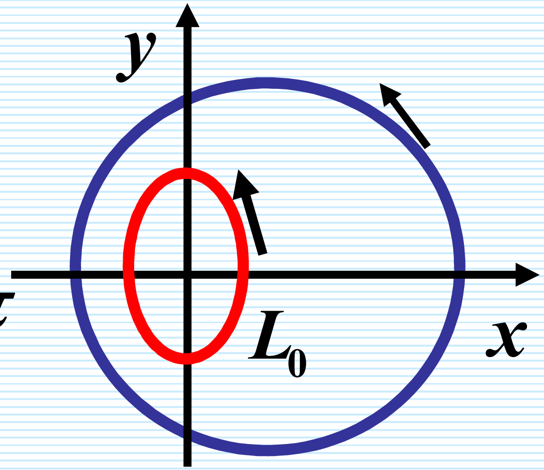
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(4x^2 + y^2) - 8x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

作$L_0 : \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{1} = \delta^2$逆时针方向,

$$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_{L+L_0^-}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}-\oint_{L_0^-}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

$$=0+\oint_{L_0}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

$$L_0\begin{cases} x=\dfrac{\delta}{2}\cos t \\ y=\delta\sin t \end{cases} \quad t=0\to 2\pi$$



$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}dt=\pi.$$

$$L_0:\frac{x^2}{\frac{1}{4}\delta^2}+\frac{y^2}{\delta^2}=1$$

$$\frac{1}{\delta^2}\oint_{L_0}xdy-ydx=\frac{1}{\delta^2}\iint_{D_{L0}}[1-(-1)]dxdy=\pi.$$