第二十八讲 克拉默法则

一、用行列式求矩阵的逆

二、克拉默法则

一、用行列式求矩阵的逆

定义4.1.1 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式A_{ij} 所构成的如下矩阵.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵.

性质 $AA^* = A^*A = |A|E.$

证明 设 $A = (a_{ij})$, 记 $AA^* = (b_{ij})$, 则

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = |A|\delta_{ij},$$

故 $\boldsymbol{AA^* = \left(|A|\delta_{ij}\right) = |A|\left(\delta_{ij}\right) = |A|E}$.

同理可得

$$\boldsymbol{AA^* = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj}\right) = \left(|A|\delta_{ij}\right) = |A|\left(\delta_{ij}\right) = |A|E}.$$

如果$d = |A| \neq 0$,有

$$A\left(\frac{1}{d}A^*\right) = \left(\frac{1}{d}A^*\right)A = E.$$

定理3 矩阵A可逆的充要条件是$|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*},$$

其中A^{*}为矩阵A的伴随矩阵.

证明 若 A 可逆，即有A^{-1}使$AA^{-1} = E$.

故$|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$，所以$|A| \neq 0$.

当$|A| \neq 0$时,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = |A|$$

$$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn} = |A|$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & & & O \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |A| \end{pmatrix},$$

$$AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A\frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|}A = E,$$

按逆矩阵的定义得

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

证毕

奇异矩阵与非奇异矩阵的定义

当$|A| = 0$时, A称为奇异矩阵,当$|A| \neq 0$时, A称为非奇异矩阵.

由此可得A是可逆阵的充要条件是A为非奇异矩阵.

推论 若$AB=E$（或$BA=E$），则$B=A^{-1}$.

证明 $|A|\cdot|B|=|E|=1$，故$|A|\neq 0$，

因而A^{-1}存在，于是

$$B=EB=\left(A^{-1}A\right)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}E=A^{-1}.$$

证毕

逆矩阵的运算性质

(1) 若A可逆，则A^{-1}亦可逆，且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) 若A可逆，数$\lambda \neq 0$，则λA可逆，且

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

(3) 若A, B为同阶方阵且均可逆，则AB亦可逆，且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

证明

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$

$$= AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

$$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $(A_1 A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

(4) 若 A 可逆,则 A^T 亦可逆,且 $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

证明 $\because A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = E^T = E,$

$\therefore \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$

另外,当 $|A| \neq 0$ 时,定义

$A^0 = E, \quad A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k, \ (k$ 为正整数$)$.

当$|A| \neq 0, \lambda, \mu$为整数时，有

$$A^{\lambda} A^{\mu} = A^{\lambda+\mu}, \qquad \left(A^{\lambda}\right)^{\mu} = A^{\lambda\mu}.$$

(5)若A可逆，则有$\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

证明 $\because AA^{-1} = E$

$$\therefore |A|\left|A^{-1}\right| = 1$$

因此$\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

利用伴随矩阵求逆矩阵

例1 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $\because\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}\neq 0,\ \therefore\ A^{-1}$存在.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,$$

同理可得 $A_{13}=2,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,$

$$A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2,$$

得 $$A^*=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

故

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

注：当矩阵的阶数较小时，用该方法求其逆是很方便的。但若矩阵的阶数较大时，求其逆矩阵的计算量太大。

二 克拉默(Cramer)法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

的系数行列式不等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么线性方程组（1）有解，并且解是唯一的，解可以表为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中D_j是把系数行列式 D 中第j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明

用D中第j列元素的代数余子式$A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$依次乘方程组$(1)$的$n$个方程,得

$$\begin{cases} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)A_{1j} = b_1 A_{1j} \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)A_{2j} = b_2 A_{2j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)A_{nj} = b_n A_{nj} \end{cases}.$$

再把 n 个方程依次相加，得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj}\right)x_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\right)x_j+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj}\right)x_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj},$$

由代数余子式的性质可知, 上式中x_j的系数等于D, 而其余$x_i(i\neq j)$的系数均为0; 又等式右端为D_j.

于是 $$Dx_j=D_j\ (j=1,2,\cdots,n). \qquad (2)$$

当$D\neq 0$时,方程组(2)有唯一的一个解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

由于方程组(2)与方程组(1)等价，故

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

也是方程组的(1)解.

注

(1) 方程组(1)的系数行列式$D\neq 0$，①有解且只有唯一解.

(2) 若方程组①无解或有两个不同的解，则①的系数行列式$D=0$.

例2　　用 Cramer 法则解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \overset{c_1 + 2c_2}{\underset{c_3 + 2c_2}{=\!=\!=\!=}} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -27, \qquad = 27,$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{27} = -4,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{27} = -1, \qquad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{27}{27} = 1.$$

齐次方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0
\end{cases}
\qquad (3)
$$

定理 如果齐次线性方程组(3)的系数行列式不为零，则齐次线性方程组(3)只有零解.

证明: 利用 **Cramer** 法则.

推论 如果齐次线性方程组（3）有非零解，则齐次线性方程组的系数行列式为零.

例3　问λ取何值时，齐次方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0,\\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0,\end{cases}$$

有非零解？

解

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3+\lambda & 4\\ 2 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^3+(\lambda-3)-4(1-\lambda)-2(1-\lambda)(-3+\lambda)$$

$$=(1-\lambda)^3+2(1-\lambda)^2+\lambda-3$$

齐次方程组有非零解，则 $D=0$

所以 $\lambda=0,\lambda=2$ 或 $\lambda=3$ 时齐次方程组有非零解.

注：Cramer 法则的重要作用是理论推导.