第二十讲 初等变换与初等矩阵

一、矩阵的初等变换

二、初等矩阵的定义

三、初等矩阵的应用

一　矩阵的初等变换

定义1　下面三种变换称为矩阵的初等行变换：

(1) 对调两行（对调 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$）；

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行的所有元素；

（第 i 行乘 k, 记作 $r_i \times k$）

(3) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去（第 j 行的 k 倍加到第 i 行上记作 $r_i + kr_j$）.

同理可定义矩阵的初等列变换 (所用记号是把 “r”换成 “c”).

定义2　矩阵的初等列变换与初等行变换统称为初等变换.

如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，就称矩阵 A 与 B 等价，记作 $A \simeq B$.

矩阵之间等价关系的性质：

⑴ 反身性 $\mathbf{A \simeq A}$;

⑵ 对称性 若 $\mathbf{A \simeq B}$,则 $\mathbf{B \simeq A}$;

⑶ 传递性 若 $\mathbf{A \simeq B, B \simeq C}$,则 $\mathbf{A \simeq C}$.

行阶梯形矩阵

称形如
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵为行阶梯形矩阵.

行阶梯形矩阵的特点是: (1)每一行从第一个元素起，至该行的第一个非零元素所在的左下方全为零； (2)元素全为零的行都在矩阵的下方。

任意一个矩阵经过一系列初等行变换总能化成行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

不是行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

是行阶梯形矩阵

例1 求与矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

行等价的阶梯形矩阵.

解: 对A作初等行变换，变成行 阶梯形矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2 - r_4}{\overset{r_1 \leftrightarrow r_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 - r_4 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{-4} & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4-4r_2}{\overset{r_3-3r_2}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义3. 行最简形矩阵

经过初等行变换，行阶梯形矩阵还可以进一步化为行最简形矩阵，其特点是：

（1）非零行的第一个非零元为1，

（2）非零行的第一个非零元所在列的其它元素都为0.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例2 将下面矩阵化为行最简形

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

解

$$B \underset{r_3 \div 2}{\overset{r_2 \leftrightarrow r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \underset{r_4 - 3r_1}{\overset{\substack{r_2 - r_3 \\ r_3 - 2r_1}}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 3r_2]{\substack{r_2 \div 2 \\ r_3 + 5r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - 2r_3]{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵

进而，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1-r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\overset{r_2-r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵

二、初等方阵的概念

矩阵的初等变换是矩阵的一种基本运算，应用广泛.

定义 由单位矩阵E经过一次初等变换得到的方阵称为初等方阵.

三种初等变换对应着三种初等方阵.

$$\begin{cases} \text{1. 对调两行或两列；} \\ \text{2. 以数 } k \neq 0 \text{ 乘某行或某列；} \\ \text{3. 以数 } k \text{ 乘某行（列）加到另一行（列）上去.} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.对调两行或两列

对调 E 中第 i, j 两行，即 $(r_i \leftrightarrow r_j)$，得初等方

$$
E(i,j)=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\
\leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\
\\ \\ \\
\leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\
\\ \\ \\
\end{array}
$$

2、以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列

以数$k \neq 0$乘单位矩阵的第i行$(r_i \times k)$，得初等方阵$E(i(k))$.

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow 第\,i\,行 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

3、以数$k \neq 0$乘某行(列)加到另一行(列)上去

以 k 乘 E 的第 j 行加到第 i 行上 $(r_i + kr_j)$

[或以 k 乘 E 的第 i 列加到第 j 列上 $(c_j + kc_i)$],

$$E(i,j(k)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + ka_{21} \end{pmatrix}$$

三、初等方阵的应用

定理1 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等方阵；对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等方阵.

三种初等方阵都是可逆的，它们逆阵还是初等方阵。

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j)\ ;$$

$$E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}));$$

$$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k)).$$

定理2：$m \times n$ 矩阵 $A \simeq B$ 的充分必要条件是：存在 m 阶可逆方阵 P 及 n 阶可逆方阵 Q，使 $PAQ = B$.

$$B = \underbrace{P_1 P_2 \cdots P_l}_{\mathbf{P}} A \underbrace{P_{l+1} P_{l+2} \cdots P_t}_{\mathbf{Q}}$$

定理3 设A为**可逆方阵**，则存在**有限**个初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$，使$A = P_1 P_2 \cdots P_l$.

证 $\because A \simeq E$， 故 E 经有限次初等变换可变 A，即存在有限个初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$，使

$$P_1 P_2 \cdots P_r E P_{r+1} \cdots P_l = A$$

即

$$A = P_1 P_2 \cdots P_l.$$

推论：可逆矩阵总可以经过一系列初等变换化为单位矩阵