

## 第二章 拓扑空间与连续映射

本章是点集拓扑学基础中之基础,从度量空间及其连续映射导入一般拓扑学中最基本的两个概念:拓扑空间、连续映射,分析了拓扑空间中的开集、邻域、聚点、闭集、闭包、内部、边界、基与子基的性质,各几种不同的角度生成拓扑空间,及刻画拓扑空间上的连续性.

### 2.1 度量空间与连续映射

**定义 2.1.1** 设  $X$  是一集合,  $\rho: X \times X \rightarrow R$ . 如果  $\rho$  满足正定性、对称性和三角不等式, 则称  $\rho$  是  $X$  的一个度量.  $(X, \rho)$  称为度量空间,  $\rho(x, y)$  表示两点  $x, y$  之间的距离.

**例 2.1.1** 实数空间  $R$ ,  $\rho(x, y) = |x - y|$ ,  $R$  的通常度量.

**例 2.1.2**  $n$  维欧氏空间  $R^n = R \times R \times \dots \times R$ .

对于  $x \in R^n$ , 记  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  定义  $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$  为  $R^n$  的通常度量,  $n$  维欧氏空间.  $R^2$  称为欧氏平面或平面.

**例 2.1.3** Hilbert 空间  $H$ .

$$H = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mid \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\},$$

定义  $\rho: H \times H \rightarrow R$

$(x, y) \rightarrow \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$ , 易证  $\rho$  为度量 则度量空间  $(H, \rho)$  称为 Hilbert 空间.

**例 2.1.4** 离散度量空间.

度量空间  $(X, \rho)$  称为离散的, 若  $x \in X, \exists \delta_x > 0$ , 使得不存在  $X$  中的点  $y \neq x$ , 满足  $\rho(x, y) < \delta_x$  如对集合  $X$ , 按如下方式定义  $\rho: X \times X \rightarrow R$  是  $X$  上的离散度量:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

**定义 2.1.2** 设  $(X, \rho)$  是度量空间  $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$  称为以  $x$  为心,  $\varepsilon$  为半径的球形邻域或  $\varepsilon$  邻域, 或球形邻域. 对通常度量  $R$ ,  $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ .

**定理 2.1.1** 度量空间  $(X, \rho)$  的球形邻域具有性质:

(1)  $\forall x \in X, \varepsilon > 0, x \in B(x, \varepsilon)$

(2)  $\forall x \in X, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ , 则  $\exists \varepsilon_3 > 0$ , 满足  $x \in B(x, \varepsilon_3) \subset B(x, \varepsilon_1) \cap B(x, \varepsilon_2)$ ;

(3)若 $y \in B(x, \varepsilon), \exists \delta > 0$  使 $B(y, \delta) \subset B(x, \varepsilon)$  ;

证明 (2) $0 < \varepsilon_3 < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ;

(3) $\delta = \varepsilon - \rho(x, y)$ , 则 $B(y, \delta) \subset B(x, \varepsilon)$

定义 2.1.3  $X$  的子集 $A$ 称为 $(X, \rho)$ 的开集, 若 $a \in A, \exists \varepsilon > 0$ , 使 $B(x, \varepsilon) \subset A$ . 每一球形邻域是开集.

例 2.1.5  $\mathbb{R}$ 中的开区间是开集.

$x \in (a, b)$  让 $\varepsilon = \min\{x - a, b - x\}$  则  $B(x, \varepsilon) \subseteq (a, b)$  同样可证, 无限开区也是开集. 闭区间 $[a, b]$  不是开集.

定理 2.1.2 度量空间的开集具有以下性质:

(1) $X, \emptyset$  是开集; (2)两开集的交是开集; (3)任意开集族之并是开集.

证明 (1)由定理 2.1.1(1); (2), (3)由定理 2.1.1(2).

定义 2.1.4 设 $X$ 是度量空间,  $x \in X, U \subseteq X, U$  称为 $x$  的邻域, 若有开集 $V$ , 使 $x \in V \subseteq U$ .

定理 2.1.3  $U$  是 $X$  中点 $x$  的邻域, 存在 $\varepsilon > 0$ , 使  $B(x, \varepsilon) \subset U$ .

定义 2.1.5 设 $X, Y$ 是两度量空间.  $f: X \rightarrow Y, x_0 \in X$ , 称 $f$ 在 $x_0$ 连续, 若 $f(x_0)$ 的球形邻域 $B(f(x_0), \varepsilon), (\varepsilon > 0)$ , 存在 $x_0$  的球形邻域  $B(x_0, \delta)$ , 使 $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$ .

称 $f$ 在 $X$ 连续, 若 $f$ 在 $X$ 的每一点连续.

定理 2.1.4 设 $X, Y$ 是两度量空间.  $f: X \rightarrow Y, x_0 \in X$ , 那么

(1) $f$ 在 $x_0$ 连续 若 $U$  是 $f(x_0)$ 的邻域, 则 $f^{-1}(U)$ 是 $x_0$ 的邻域;

(2)  $f$ 在 $X$ 连续 若 $U$  是 $Y$ 的开集, 则 $f^{-1}(U)$ 是 $X$  的开集.

证明 (1)利用定义 2.1.5, 2.1.4.

(2) $f^{-1}(U)$ 是每一点的邻域.“ ”证每一点连续, 利用(1).

由此可见, 度量空间的连续只与邻域或开集有关. 它导入建立比度量空间更一般的拓扑空间的概念及其连续性.

## 2.2 拓扑空间与连续映射

定义 2.2.1 设 $\mathcal{T}$ 是集合 $X$ 的子集族, 若 $\mathcal{T}$ 满足:

(1)  $X, \phi \in \mathcal{T}$ ; (2)  $\forall A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$ ; (3)  $\forall \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}, \cup \mathcal{T}_1 \in \mathcal{T}$ .

称  $\mathcal{T}$  是  $X$  的一个拓扑 ( $X, \mathcal{T}$ ) 是拓扑空间,  $\mathcal{T}$  的元称为  $X$  的开集.

空间  $X$  的拓扑是  $X$  的全体开集的族.

**定义 2.2.2**  $(X, \rho)$  度量空间,  $\mathcal{T}_\rho$  由  $X$  的所有开集构成的族.  $(X, \mathcal{T}_\rho)$  称为由度量  $\rho$  诱导出的拓扑空间.  $\mathcal{T}_\rho$  简称为度量拓扑.

度量空间一定是拓扑空间.

**例 2.2.1** 平庸拓扑  $\mathcal{T} = \{X, \phi\}$  平庸空间.

**例 2.2.2** 离散拓扑  $\mathcal{T} = P(X)$ . 离散空间.  $X$  的每一子集是开集. 由离散度量空间导出的拓扑是离散拓扑.

**例 2.2.4** 有限补拓扑  $\mathcal{T} = \{U \subset X \mid U^c \text{ 是 } X \text{ 的有限子集}\} \cup \{\phi\}$ .

验证  $\mathcal{T}$  是  $X$  上的拓扑. (1) 显然. (2)  $A, B \subset X$ , 讨论  $A \cap B$  时分两种情形, 一是  $A, B$  中有一是  $\phi$ , 二是  $A, B$  都不是  $\phi$ ; (3)  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}$ , 不妨设  $\exists \phi \neq A_0 \in \mathcal{T}_1$  利用 De Morgan 律. 有限补空间.

**例 2.2.5** 可数补拓扑  $\mathcal{T} = \{U \subset X \mid U^c \text{ 是 } X \text{ 的可数子集}\} \cup \{\phi\}$

**定义 2.2.3** 可度量化空间.

离散空间是可度量化空间. 多于一点的平庸空间不是可度量化空间. 度量化问题是点集拓扑学研究的中心问题之一. 本书将在 6.6 中给出该问题的一个经典的解.

**定义 2.2.4**  $X, Y$  是两拓扑空间.  $f: X \rightarrow Y$  称  $f$  连续, 若  $Y$  中每一开集  $U$  的原象  $f^{-1}(U)$  是  $X$  中的开集.

**定理 2.2.1** 恒同映射连续. 连续函数的复合是连续的.

**定义 2.2.5**  $f: X \rightarrow Y$  称为同胚或同胚映射, 若  $f$  是一一映射且  $f$  及  $f^{-1}$  均连续.

**定义 2.2.6** 称两空间  $X$  与  $Y$  同胚, 或  $X$  同胚于  $Y$ , 若存在从  $X$  到  $Y$  的同胚.

**定理 2.2.2(2.2.3)** 恒同映射同胚 ( $X$  与  $X$  同胚);  $f$  同胚  $\Rightarrow f^{-1}$  同胚 (若  $X$  与  $Y$  同胚, 与  $X$  同胚); 同胚的复合是同胚 (若  $X$  与  $Y$  同胚, 且  $Y$  与  $Z$  同胚, 则  $X$  与  $Z$  同胚).

空间的同胚关系是等价关系.

拓扑学的中心任务: 研究拓扑不变性质.

抽象化过程: 欧氏空间  $\rightarrow$  度量空间  $\rightarrow$  拓扑空间; 点距离  $\rightarrow$  度量  $\rightarrow$  开集.

## 2.3 邻域与邻域系

**定义 2.3.1** 设  $(X, \tau)$  是拓扑空间.  $x \in X, U \subset X$  称为  $x$  的邻域, 如果存在  $V \in \tau$  使  $x \in V \subseteq U$ ; 若  $U$  是开的,  $U$  称为  $x$  的开邻域.

**定理 2.3.1** 设  $U \subset X, U$  是  $X$  的开集  $\Leftrightarrow U$  是它的每一点的邻域.

**证明** 由定义得“ $\Rightarrow$ ”; 利用开集之并为开得“ $\Leftarrow$ ”.

$x$  在  $X$  的所有邻域构成的族称为  $x$  的邻域系, 记为  $\mathcal{U}_x$ .

**定理 2.3.2**  $\mathcal{U}_x$  的性质:

- (1)  $X \in \mathcal{U}_x; U \in \mathcal{U}_x, x \in U$ ;
- (2)  $U, V \in \mathcal{U}_x, U \cap V \in \mathcal{U}_x$ ;
- (3)  $U \in \mathcal{U}_x$  且  $U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$ ;
- (4)  $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}_x$  使  $V \subset U$  且  $\forall y \in V, V \in \mathcal{U}_y$ .

**证明** 由定义 2.3.1 得(1); 由开集之交是开集得 (2); 由定义 2.3.1 得(3); 取  $V$  为满足  $x \in V \subset U$  的开集.

由邻域系出发可建立拓扑空间的理论, 显得自然, 但不流行. 利用邻域与开集的关系 (定理 2.3.1) 导出开集, 从  $\mathcal{U}_x$  ( $\forall x \in X$ ) 具有定理 2.3.2 的性质的(1)-(4)出发, 定义

$\tau = \{U \subset X \mid \forall x \in U, U \in \mathcal{U}_x\}$ , 则  $(X, \tau)$  是拓扑空间, 且这空间中每一点  $x$  的邻域系恰是  $\mathcal{U}_x$ . 详见定理 2.3.3.

**定义 2.3.2** (点连续) 映射  $f: X \rightarrow Y$  称为在点  $x \in X$  连续, 如果  $U$  是  $f(x)$  在  $Y$  中的邻域, 则  $f^{-1}(U)$  是  $x$  在  $X$  中的邻域.

定理 2.1.4 保证了在度量空间中点的连续性与由度量导出的拓扑空间中的点的连续性的一致. 另一方面, 关于点的连续性, 易验证(定理 2.3.4), 恒等映射在每一点连续, 两点连续的函数之复合仍是点连续的. 定义 2.2.4 与定义 2.3.2 所定义的“整体”连续与每一点“点”连续是一致的.

**定理 2.3.5** 设  $f: X \rightarrow Y$  则  $f$  连续  $\Leftrightarrow f$  在每一点  $x \in X$  连续.

**证明** “ $\Rightarrow$ ”若  $U$  是  $f(x)$  的邻域,  $\exists$  开集  $V$  使  $f(x) \in V \subset U, x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$

“ $\Leftarrow$ ”若  $U$  是  $Y$  的开集,  $x \in f^{-1}(U), U$  是  $f(x)$  的邻域,  $f^{-1}(U)$  是  $x$  的邻域, 所以  $f^{-1}(U)$  在  $X$  中开.

## 2.4 导集、闭集、闭包

**定义 2.4.1** 设  $A \subset X$ ,  $x$  称为  $A$  的聚点(凝聚点, 极限点), 如果  $x$  的每一邻域  $U$  中有  $A$  中异于  $x$  的点, 即  $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$ .  $A$  的全体聚点之集称为  $A$  的导集, 记为  $d(A)$ .  $x$  称为  $A$  的孤立点, 若  $x$  不是  $A$  的聚点, 即存在  $x$  的邻域  $U$  使  $U \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ , 即  $U \cap A \subset \{x\}$ .

**例 2.4.1**  $X$  是离散空间. 若  $A \subset X$ , 则  $d(A) = \emptyset$

事实上,  $\forall x \in X$ , 取  $U = \{x\}$ , 则  $U \cap A \subseteq \{x\}$ , 所以  $x \notin d(A)$ .

**例 2.4.2**  $X$  是平庸空间,  $A \subset X$  若  $A = \emptyset$ , 则  $d(A) = \emptyset$ ; 若  $|A|=1$ , 则  $d(A) = X - A$ ; 若  $|A| > 1$ , 则  $d(A) = X$ .

对于  $\forall x \in X$ , , 若  $U$  是  $x$  的邻域, 则  $U = X$ , 于是  $U \cap (A - \{x\}) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset \Leftrightarrow A - \{x\} \neq \emptyset \Leftrightarrow A \not\subset \{x\}$  由此, 易计算  $d(A)$ .

**定理 2.4.1**  $A, B \subset X$ , 则

$$(1) d(\emptyset) = \emptyset;$$

$$(2) A \subset B \Rightarrow d(A) \subset d(B);$$

$$(3) d(A \cup B) = d(A) \cup d(B);$$

$$(4) d(d(A)) \subseteq A \cup d(A)$$

**证明** 由定义 2.4.1 得(1)和(2).

关于(3). 由(2)得  $d(A) \cup d(B) \subset d(A \cup B)$ . 设  $x \notin d(A) \cup d(B)$ , 分别存在  $x$  的邻域  $U, V$  使得  $U \cap A \subset \{x\}, V \cap B \subset \{x\}$ , 令  $D = U \cap V$ , 则  $D \cap (A \cup B) \subset \{x\}$ .

关于(4). 设  $x \notin A \cup d(A)$ , 存在  $x$  的邻域  $U$ , 使得  $U \cap A \subset \{x\}$ , 取  $x$  的开邻域  $V \subset U$ , 则  $V \cap A = \emptyset, \forall y \in V, V \cap (A - \{y\}) = \emptyset, y \notin d(A), V \cap d(A) = \emptyset, x \notin d(d(A))$ .

**定义 2.4.2**  $A \subset X$  称为  $X$  的闭集, 如果  $d(A) \subset A$ .

**定理 2.4.2**  $A$  闭  $\Leftrightarrow A'$  开.

**证明** “ $\Rightarrow$ ”  $\forall x \in A'$ , 由于  $d(A) \subset A$ , 存在  $x$  的邻域  $U$  使  $U \cap A = \emptyset$ , 于是  $U \subset A'$ ;

“ $\Leftarrow$ ”  $\forall x \in A', A' \cap A = \emptyset, x \notin d(A)$ , 所以  $d(A) \subset A$ .

例 2.4.3  $\mathbb{R}$  的闭区间是闭集.

$[a, b]^{\circ} = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$  开集.  $(a, b)$  不是闭集, 因为  $a$  是聚点.

定理 2.4.3 记  $\mathcal{F}$  是空间  $X$  的全部闭集族, 则

(1)  $X, \emptyset \in \mathcal{F}$ ;

(2)  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ ;

(3)  $\mathcal{F}$  对任意交封闭.

证明 利用 De Morgan 定律及拓扑的定义.  $\mathcal{F} = \{U^{\circ} \mid U \in \tau\}$  直接验证可得(1)、(2)、(3)

Cantor 集(例 2.4.4)是集合论、点集拓扑或实变函数论中是具有特别意义的例子, 它说明  $\mathbb{R}$  中的闭集可以是很复杂的, 在此不介绍.

定义 2.4.3  $A \cup d(A)$  称为  $A$  的闭包, 记为  $\bar{A}, A^{-}$ .

定理 2.4.5 对  $A, B \subset X$ , 有

(1)  $\emptyset^{-} = \emptyset$ ;

(2)  $A \subset A^{-}$ ;

(3)  $(A \cup B)^{-} = A^{-} \cup B^{-}$ ;

(4)  $(A^{-})^{-} = A^{-}$ .

证明 (3)  $(A \cup B)^{-} = A \cup B \cup d(A \cup B) = A \cup d(A) \cup B \cup d(B) = A^{-} \cup B^{-}$ .

(4)  $(A^{-})^{-} = (A \cup d(A))^{-} = A^{-} \cup d(A)^{-} = A \cup d(A) \cup d(d(A)) = A^{-}$ .

上述 4 条确定了闭包运算, 称为 Kuratowski 闭包公理, 由此可建立拓扑空间的概念. 事实上, 记此运算为  $c(A)$ , 定义  $\tau = \{U \subset X \mid c(U^{\circ}) = U^{\circ}\}$ , 则  $(X, \tau)$  是拓扑空间, 且这空间中每一  $c(A) = A^{-}$ , 详见定理 2.4.8.

关于闭包的几个相关结果:

(1)  $x \in A^{-} \Leftrightarrow$  对  $x$  的任一邻域有  $U \cap A \neq \emptyset$ . (定义 2.4.3 后)

(2)  $d(A) = (A - \{x\})^{-}$ ;

(3)  $A$  闭  $\Leftrightarrow d(A) \subset A \Leftrightarrow A = \bar{A}$ . (定理 2.4.4)

(4)  $A^{-}$  是闭集. (定理 2.4.6)

(5)  $A^{-}$  是包含  $A$  的所有闭集之交, 是包含  $A$  的最小闭集. (定理 2.4.7: 设  $\mathcal{F}$  是包含  $A$  的所有闭集之交, 则  $A \subset F \subset A^{-}, A^{-} \subset F$ , 所以  $F = A^{-}$ .)

定义2.4.5  $(X, \rho)$  是度量空间. 对非空的  $A \subset X, x \in X$  定义  $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) | y \in A\}$ . 定

理 2.4.9 对度量空间  $(X, \rho)$  的非空子集  $A$

$$(1) x \in A^- \Leftrightarrow \rho(x, A) = 0; \quad (2) x \in d(A) \Leftrightarrow \rho(x, A - \{x\}) = 0.$$

证明:  $\rho(x, A) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, \rho(x, y) < \varepsilon \Leftrightarrow B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$$\forall U \in U_x, U \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in A^-$$

定理 2.4.10 设  $f: X \rightarrow Y$ , 则下述等价

(1)  $f$  连续;

(2) 若  $B$  闭于  $Y$ , 则  $f^{-1}(B)$  闭于  $X$ ;

(3)  $\forall A \subset X, f(A^-) \subset f(A)^-$

证明: (1)  $\Rightarrow$  (2)  $B$  是  $Y$  的闭集,  $B'$  是  $Y$  的开集,  $f^{-1}(B') = f^{-1}(B)^'$  是  $X$  的开集,  $f^{-1}(B)$  是  $X$  的闭集.

$$(2) \Rightarrow (3) f(A) \subset f(A)^-, A \subset f^{-1}(f(A)^-), A^- \subset f^{-1}(f(A)^-), f(A^-) \subset f(A)^-$$

(3)  $\Rightarrow$  (1) 设  $U$  是  $Y$  的开集,  $U'$  是  $Y$  的闭集且

$$f(f^{-1}(U')^-) \subset f(f^{-1}(U'))^- \subset U'^-, f^{-1}(U')^- \subset f^{-1}(U'), f^{-1}(U') = f^{-1}(U)' \text{ 是闭, } f^{-1}(U)$$

是开

## 2.5 内部、边界

定义 2.5.1 若  $A$  是  $x$  的邻域, 则称  $x$  是  $A$  的内点.  $A$  的所有内点的集合称为  $A$  的内部, 记为  $A^0$ .

定理2.5.1 对  $A \subset X, A^0 = A'^{-'}, A^- = A'^{0'}$

证明:  $x \in A^0$ , 由于  $A \cap A' = \emptyset$ , 于是  $x \notin A'^-$ , 从而  $x \in A'^{-'}$ .

反之  $x \in A'^{-'}, x \notin A'^-, \exists x$  的邻域  $V \cap A' = \emptyset, V \subseteq A, x \in A^0$ , 因此,  $A^0 = A'^{-'}$ . 从而

$$A'^0 = A''^{-'} = A'^-, A'^{0'} = A^-.$$

定理 2.5.3 对  $A, B \subset X$ , 有

$$(1) X = X^0; \quad (2) A^0 \subset A;$$

$$(3) A^0 \cap B^0 = (A \cap B)^0 \quad (4) A^0 = A^{00}.$$

证明: (1), (2) 是显然的.

$$(A \cap B)^0 = (A' \cup B')^{-'} = A'^{-'} \cap B'^{-'} = A^0 \cap B^0$$

$$\text{而 } A^{00} = A'^{-''} = A'^{-'} = A^0$$

关于内部的几个结果:

$$(1) A \text{ 是 } x \text{ 的邻域} \Leftrightarrow x \in A_0; \quad (2) A^0 \text{ 是开集};$$

(3)  $A$  是开集; (4)  $A^0$  是  $A$  所包含的所有开集之并, 是含于  $A$  内的最大开集.

证明: (2)  $A^0 = A'^{-'}$  是开集;

$$(3) A \text{ 开} \Leftrightarrow A' \text{ 闭} \Leftrightarrow A' = A'^{-'} \Leftrightarrow A = A'^{-'} = A^0;$$

$$(4) \text{ 设 } O \text{ 是含于 } A \text{ 内的所有开集之并, } A^0 \subset O \subset A, A^0 \supset O \text{ 所以 } A^0 = O.$$

**定义 2.5.2**  $x$  称为  $A$  的边界点, 若  $x$  的任一邻域, 既含有  $A$  中的点又有  $A'$  中的点.  $A$  的边界点之集称为边界, 记为  $\partial A$ .

$$\text{定理 2.5.6 对 } A \subset X, \text{ 有 (1) } \partial A = A^- \cap A'^{-} = \partial(A'); (2) A^- = A^0 \cup \partial A; (3) A^0 = A^- - \partial A$$

$$\text{证明: } (2) A^0 \cup \partial A = A^0 \cup (A^- \cap A'^{-}) = (A^0 \cup A^-) \cap (A^0 \cup A'^{-}) = A^-;$$

$$(3) A^- - \partial A = A^- - (A^- \cap A'^{-}) = A^- - A'^{-} = A^- \cap A'^{-} = A^0$$

## 2.6 基与子基

度量空间  $\rightarrow$  球形邻域  $\rightarrow$  开集  $\rightarrow$  拓扑, 在度量空间中球形邻域的作用就是拓扑空间中基的作用.

**定义 2.6.1** 设  $\mathcal{T}$  是空间  $X$  的拓扑,  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ , 如果  $\mathcal{T}$  中每一元是  $\mathcal{B}$  中某子集族之并, 称  $\mathcal{B}$  是  $X$  的基.

所有单点集的族是离散空间的基.

$$\text{定理 2.6.2 设 } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}, \mathcal{B} \text{ 为 } X \text{ 的基} \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ 及 } x \text{ 的邻域 } U_x, \exists V_x \text{ 使 } x \in V_x \subset U_x.$$

证明 “ $\Rightarrow$ ” 存在开集  $W_x$  使得  $x \in W_x \subset U_x, \exists \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$  使得  $W_x = \bigcup \mathcal{B}_1, \exists V_x \in \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$  使  $x \in V_x \subset U_x$ ;

“ $\Leftarrow$ ” 设  $U \in \mathcal{T}, \forall x \in U, \exists V_x \in \mathcal{B}$  使  $x \in V_x \subset U_x$ , 从而  $\{V_x | x \in U\} \subset \mathcal{T}$  且



$$U = \bigcup_{x \in U} V_x$$

在度量空间中, 所有球形邻域的族是度量拓扑的基;

所有开区间的族是  $\mathbb{R}$  的基.

**定理 2.6.3** 拓扑空间  $X$  的基  $\mathcal{B}$  满足:

(i)  $\bigcup \mathcal{B} = X$ ; (ii)  $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2, .$

反之, 若集合  $X$  的子集族  $\mathcal{B}$  满足(1)、(2), 定义  $\mathcal{T} = \{\cup \mathcal{B}_1 \mid \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}\}$ , 则  $\mathcal{T}$  是  $X$  的以  $\mathcal{B}$  作为基的唯一拓扑.

**证明** 验证  $\mathcal{T}$  是  $X$  的拓扑. (1)  $\phi = \cup \phi$ . (2) 先设  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2$ ,  $\exists w_x \in \mathcal{B}$  使  $x \in W_x \subset B_1 \cap B_2$ , 于是  $B_1 \cap B_2 = \{W_x \mid x \in B_1 \cap B_2\} \in \tau$ . 如果  $A_1, A_2 \in \tau$ , 设  $A_1 = \cup \mathcal{B}_1$ ,  $A_2 = \cup \mathcal{B}_2$ , 则  $A_1 \cap A_2 = \cup \{B_1 \cap B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\} \in \tau$ . (3) 设  $\tau_1 \subset \tau, \forall A \in \tau_1, \exists \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B}$ , 使得  $A = \cup \mathcal{B}_A$ , 那么  $\cup \tau_1 = \cup (\cup \{ \mathcal{B}_A \mid A \in \tau_1 \})$ .

较强于(ii)且易于验证的条件是 (ii)  $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ .

**例 2.6.1** 实数下限拓扑空间.

令  $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ , 则  $\mathcal{B}$  为  $\mathbb{R}$  上一拓扑的基. 这空间称为实数下限拓扑空间, 记为  $\mathbb{R}_l$ . 开区间是  $\mathbb{R}_l$  中的开集, 因为  $(a, b) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_+} [a + \frac{1}{i}, b)$ .

**定义 2.6.2** 设  $(X, \tau)$  是拓扑空间,  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ . 若  $\mathcal{S}$  的元之所有有限交构成的族是  $\mathcal{T}$  的基, 则称  $\mathcal{S}$  是  $\mathcal{T}$  的子基.

$\mathcal{S}$  的元之有限交构成的族  $\{S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n \mid S_i \in \mathcal{S}, i \leq n \in \mathbb{Z}_+\}$ . 显然, 空间  $X$  的基是子基.

**例 2.6.2**  $\mathcal{S} = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$  是  $\mathbb{R}$  的子基.

对照定理 2.6.3, 集合  $X$  的子集族  $\mathcal{S}$  要作为子基生成  $X$  上的拓扑的充要条件是  $\cup \mathcal{S} = X$ .

(定理 2.6.4)

映射的连续性可用基、子基来刻画或验证.

**定理 2.6.5** 设  $X, Y$  是两拓扑空间,  $f: X \rightarrow Y$ , 下述等价:

(1)  $f$  连续;

(2)  $Y$  基  $\mathcal{B}$ , 使得  $\mathcal{B}$  中每一元的原像在  $X$  中开;

(3)  $Y$  有子基  $\mathcal{S}$ , 使得  $\mathcal{S}$  中每一元的原像在  $X$  中开.

证明 (3)  $\Rightarrow$  (2) 设  $\mathcal{B}$  是  $S$  的元之所有有限交构成的族, 则  $\mathcal{B}$  满足 (2).

(2)  $\Rightarrow$  (1) 设  $U$  在  $Y$  中开, 则  $U = \cup \mathcal{B}_i$ , 于是  $f^{-1}(U) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}_i\}$  在  $X$  中开.

类似地, 可定义点的邻域基与邻域子基的概念, 同时用它们来验证映射的连续性等. 在第五章中定义第一可数性时再介绍这些概念.

## 2.7 拓扑空间中的序列

可以与 $\mathbb{R}$ 中一样地定义序列、常值序列、子序列,见定义 2.7.1, 2.7.3..

**定义 2.7.2**  $X$  中序列  $x_i \rightarrow x$  极限, 收敛序列.

平庸空间中任意序列收敛于空间中的任意一点. 数学分析中的一些收敛性质还是保留的, 如常值序列收敛, 收敛序列的子序列也收敛. (定理 2.7.1)

**定理 2.7.2**  $A - \{x\}$  中序列  $x_i \rightarrow x \Rightarrow x \in d(A)$

**证明**  $\forall x$  的邻域  $U, U(A - \{x\}) \equiv \phi$ , 所以,  $x \in d(A)$

**定理 2.7.3**  $f$  在  $x_0$  连续且  $x_i \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_i) \rightarrow f(x_0)$

**证明** 设  $U$  是  $f(x_0)$  的邻域, 则  $f^{-1}(U)$  是  $x_0$  的邻域,  $\exists n \in \mathbb{Z}_+$ , 当  $i > n$  时有  $x_i \in f^{-1}(U)$ , 从而  $f(x_i) \in U$ .

上述两定理的逆命题均不成立.

**例 2.7.1** 设  $X$  是不可数集赋予可数补拓扑, 则

(1) 在  $X$  中  $x_i \rightarrow x \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}_+$ , 当  $i > n$  时有  $x_i = x$ ;

(2) 若  $A$  是  $X$  的不可数子集, 则  $d(A) = X$ .

**证明** (1) 的必要性, 令  $D = \{x_i \mid x_i \neq x, i \in \mathbb{Z}_+\}$ , 则  $D'$  是  $x$  的邻域,  $\exists n \in \mathbb{Z}_+, \forall i > n$  时有  $x_i \in D'$ , 即  $x_i = x$

(2)  $\forall x$  的邻域  $U, A - \{x\} \not\subset U'$  (可数集), 所以  $U \cap (A - \{x\}) \neq \phi, x \in d(A)$ .

定理 2.7.2 的逆命题不真, 如例 2.7.1, 取定  $x_0 \in X$ , 让  $A = X - \{x_0\}$ , 则  $x_0 \in d(A)$ , 但  $A$  中没有序列收敛于  $x_0$ .

定理 2.7.3 的逆命题不真, 取  $X$  是实数集赋予可数补拓扑, 让  $i: X \rightarrow \mathbb{R}$  是恒等映射, 若在  $X$  中  $x_i \rightarrow x$ , 则在  $\mathbb{R}$  中  $f(x_i) \rightarrow f(x)$ , 但  $i$  在  $x$  不连续, 因为  $x$  在  $\mathbb{R}$  的开邻域  $(x-1, x+1)$  的原像  $i^{-1}((x-1, x+1)) = (x-1, x+1)$  在  $X$  中不是开的.

**定理 2.7.4** 设  $\{x_i\}$  是度量空间  $(X, \tau)$  中的序列, 则  $x_i \rightarrow x \Leftrightarrow \rho(x_i, x) \rightarrow 0$ .

**证明**  $x_i \rightarrow x \Leftrightarrow \forall x$  的邻域  $U, \exists n \in \mathbb{Z}_+$ , 当  $i > n$  时有  $x_i \in U \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}_+$  当  $i > n$  时有  $x_i \in B(x, \varepsilon) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}_+$  当  $i > n$  时有  $\rho(x_i, x) < \varepsilon$ .