高等数学(一)

第二章 导数与微分

第六讲 习题课

主讲人：熊小峰

第二章　导数与微分

习 题 课

一、主要内容

二、典型例题

一、主要内容

关系 $\dfrac{dy}{dx} = y' \Leftrightarrow dy = y'dx \Leftrightarrow \Delta y = dy + o(\Delta x)$

导数

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

基本公式

高阶导数

高阶微分

微分

$dy = y'\Delta x$

求导法则

1、导数的定义

$$y'\Big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

1.左导数:

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

2.右导数:

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

函数$f(x)$在点x_0处可导$\Leftrightarrow$左导数$f'_-(x_0)$和右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等.

2、基本导数公式（常数和基本初等函数的导数公式）

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x tgx \qquad (\csc x)' = -\csc x ctgx$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

3、求导法则

(1) 函数的和、差、积、商的求导法则

设$u=u(x), v=v(x)$可导，则

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$，（2）$(cu)'=cu'$(c是常数),

（3）$(uv)'=u'v+uv'$，（4）$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$.

(2) 反函数的求导法则

如果函数$x=\varphi(y)$的反函数为$y=f(x)$,则有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(x)}.$$

(3) 复合函数的求导法则

设$y=f(u)$,而$u=\varphi(x)$则复合函数$y=f[\varphi(x)]$的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad 或 \quad y'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

(4) 对数求导法

先在方程两边取对数,然后利用隐函数的求导方法求出导数.

适用范围:

多个函数相乘和幂指函 数$u(x)^{v(x)}$的情形.

(5) 隐函数求导法则

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

(6) 参变量函数的求导法则

若参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 确定 y 与 x 间的函数关系,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{[\frac{y'(t)}{x'(t)}]'}{x'(t)} \neq [\frac{y'(t)}{x'(t)}]'$$

4、高阶导数 (二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**)

二阶导数 $(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$,

记作 $f''(x), y'', \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \dfrac{d^3 y}{dx^3}$.

一般地,函数$f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为函数$f(x)$的n阶导数,记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n} \text{或} \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

5、微分的定义

定义 设函数$y = f(x)$在某区间内有定义，x_0及$x_0 + \Delta x$在这区间内，如果

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

成立(其中A是与Δx无关的常数)，则称函数$y = f(x)$在点x_0可微，并且称$A \cdot \Delta x$为函数$y = f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的微分，记作$dy\big|_{x=x_0}$或$df(x_0)$，即

$$dy\big|_{x=x_0} = A \cdot \Delta x.$$

微分dy叫做函数增量Δy的线性主部.**(微分的实质)**

6、导数与微分的关系

定理 函数$f(x)$在点x_0可微的充要条件是函数$f(x)$在点x_0处可导,且 $A = f'(x_0)$.

7、 微分的求法

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow \boxed{dy = f'(x)dx}$$

求法: 计算函数的导数,乘以自变量的微分.

基本初等函数的微分公式

8、 微分的基本法则

函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

微分形式的不变性

无论x是自变量还是中间变量,函数$y = f(x)$

的微分形式总是 $\boxed{dy = f'(x)dx}$

二、典型例题

例1 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$, 求 $f'(0)$.

解 $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-100)=100!$$

$$f'(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-100)+$$

$$x[(x-1)(x-2)\cdots(x-100)]'$$

$$f'(0)=100!$$

例2 设 $y=\frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$,

求 y'.

解 设 $u=\sqrt{1+x^2}$, 则 $y=\frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}$,

$$\because\ y'_u=\frac{1}{2(1+u^2)}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)=\frac{1}{1-u^4}=\frac{1}{-2x^2-x^4},$$

$$u'_x=(\sqrt{1+x^2})'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\therefore\ y'_x=-\frac{1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}}.$$

例3 设$y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$,求 $y^{(n)}$.

解 $$y=\frac{4x^2-1}{x^2-1}=\frac{4x^2-4+3}{x^2-1}=4+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\because \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}},\quad \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

$$\therefore y^{(n)}=\frac{3}{2}(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

例4 求下列由参数方程$\begin{cases} x = \ln\sqrt{1+t^2} \\ y = \arctan t \end{cases}$所确定的函数

的一阶导数$\dfrac{dy}{dx}$及二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

解:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\arctan t)'}{(\ln\sqrt{1+t^2})'} = \frac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{t}{1+t^2}} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\dfrac{1}{t})'}{(\ln\sqrt{1+t^2})'} = \frac{-\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{t^3}$$

例5 已知$\begin{cases} x = \arctan t \\ 2y - ty^2 + e^t = 5 \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}$

解 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$

对方程$2y - ty^2 + e^t = 5$两边关于t求导，得：

$$2\frac{dy}{dt} - y^2 - 2ty\frac{dy}{dt} + e^t = 0, \qquad \therefore \frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - e^t}{2(1-ty)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{y^2 - e^t}{2(1-ty)}}{\dfrac{1}{1+t^2}} = \frac{(y^2 - e^t)1 + t^2}{2(1-ty)}$$

例6 设 $\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = 5t^2 + 4t|t| \end{cases}$, 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

解 分析：当$t = 0$时, $|t|$导数不存在,

$\therefore$ 当$t = 0$时, $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}$不存在, 不能用公式求导.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5(\Delta t)^2 + 4\Delta t|\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t[5 + 4\operatorname{sgn}(\Delta t)]}{2 + \operatorname{sgn}(\Delta t)}$$

$$= 0.$$

故 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0} = 0.$

例7 设$f(x)=x|x(x-2)|$,求 $f'(x)$.

解 先去掉绝对值

$$f(x)=\begin{cases}x^2(x-2), x\le 0\\ -x^2(x-2), 0<x<2,\\ x^2(x-2), x\ge 2\end{cases}$$

当$x=0$时, $f'_-(0)=f'_+(0)=0$, $f'(0)=0$;

当$x>2$或$x<0$时, $f'(x)=3x^2-4x$;

当$0<x<2$时, $f'(x)=-3x^2+4x$;

$$f(x)=\begin{cases} x^2(x-2), x\le 0 \\ -x^2(x-2), 0<x<2, \\ x^2(x-2), x\ge 2 \end{cases}$$

$g=|x|$ 在$x=0$处不可导

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2(x-2)}{x-2}=-4.$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2(x-2)}{x-2}=4.$$

$$f'_-(2)\ne f'_+(2),\quad \therefore f(x)\text{在}x=2\text{处不可导}.$$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-4x, & x>2\text{或}x<0 \\ 0, & x=0, \\ -3x^2+4x, & 0<x<2, \end{cases}$$

例8 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

解

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\frac{\dfrac{y'x-y}{x^2}}{1+(\dfrac{y}{x})^2}$$

$$x+y\cdot y'=y'\cdot x-y,\qquad \therefore\frac{dy}{dx}=y'=\frac{x+y}{x-y}$$

例9 设$y = x(\sin x)^{\cos x}$,求 y'.

解 $$\ln y = \ln x + \cos x \ln \sin x$$

$$\frac{y'}{y} = (\ln x + \cos x \ln \sin x)'$$

$$= \frac{1}{x} - \sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$y' = x(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{1}{x} - \sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$$

$$y' = (e^{\ln x + \cos x \ln \sin x})'$$

例10 设 $y = x^{a^a} + a^{x^a} + x^{x^x}\ (a > 0)$, 求$y'$

分析：$x^{a^a} = x^{(a^a)} \neq (x^a)^a = x^{a^2}$

解 $(x^{a^a})' = a^a x^{a^a - 1}$

$(a^{x^a})' = a^{x^a}(\ln a)\cdot(x^a)' = a^{x^a}(\ln a)\cdot a x^{a-1}$

令$u = x^{x^x}$, $\ln u = x^x \ln x$,

$\ln(\ln u) = \ln x^x + \ln(\ln x) = x\ln x + \ln(\ln x)$

$$\frac{1}{\ln u}\cdot\frac{u'}{u} = \ln x + 1 + \frac{1}{x\ln x}$$

$$u' = x^{x^x}\cdot x^x \ln x\cdot(\ln x + 1 + \frac{1}{x\ln x})$$

$$y' = a^a x^{a^a - 1} + a^{x^a + 1} x^{a-1}\ln a + x^{x^x}\cdot x^x\ln x\cdot(\ln x + 1 + \frac{1}{x\ln x})$$

例 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $f'(x)$，

讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续.

解 当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

在 $x=0$ 处，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$

$$=0$$

故 $$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases},$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$ 不存在,

所以, $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

例7 求过点 $(2,0)$ 与曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 相切的直线方程 .

解　设所求切线与曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 切于点 $M\left(x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$,

$$\because \quad y'=-\frac{1}{x^2}$$

所求切线斜率为 $K=y'\big|_{x=x_0}=-\dfrac{1}{x_0^2}$,

过点 $(2,0)$ 与 $M\left(x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$ 也可写出切线斜率：

$$K=\frac{\dfrac{1}{x_0}-0}{x_0-2}=\frac{1}{x_0(x_0-2)}$$

由 $$-\frac{1}{x_0^2}=\frac{1}{x_0(x_0-2)},$$

解出 $x_0=1,$ 切点为 $(1,1).$

所求切线方程为 $y-1=-(x-1),$

即 $x+y-2=0.$

例： 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，且对任意的 x 及 $y\in(0,+\infty)$，恒有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，又 $f'(1)$ 存在，证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

分析：由于 $f'(1)$ 存在，故在 $(0,+\infty)$ 内任意取一点 $x\neq 1$，只需要证明 $f(x)$ 在此 x 处可导.

证：由 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 得 $f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)$,

$\therefore f(1)=0$, 当 $x\neq 0$ 时，令 $y=1+\dfrac{\Delta x}{x}$,

$$f(x+\Delta x)=f[x(1+\frac{\Delta x}{x})]=f(x)+f(1+\frac{\Delta x}{x})$$

$$f(x+\Delta x)=f[x(1+\frac{\Delta x}{x})]=f(x)+f(1+\frac{\Delta x}{x})$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}$$

令$\Delta x\to 0$,则$\frac{\Delta x}{x}\to 0$

$$f'(x)=\frac{1}{x}f'(1),$$

$f(x)$在$(0,+\infty)$内可导.

例： 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，且

$$|f(x)|\le|\sin x|,$$

证明：$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1.$

证 显然 $f(0)=0.$

$$f'(x)=a_1\cos x+2a_2\cos 2x+\cdots+na_n\cos nx,$$

$$f'(0)=a_1+2a_2+\cdots+na_n.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},$$

$$|f'(0)|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1$$

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1$$

例：设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有（　）．　（1995. Ⅲ）

A. $f(0)=0$;　　B. $f'(0)=0$;

C. $f(0)+f'(0)=0$;　　D. $f(0)-f'(0)=0$.

$$F'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}[\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{\sin x}{x}\cdot f(x)]=f'(0)-f(0)$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}[\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{\sin x}{x}\cdot f(x)]=f'(0)+f(0)$$

设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为（　　）.（2001.Ⅰ）

A．$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cosh)$存在；B．$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在；

C．$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sinh)$存在；D．$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在.

由于 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cosh)}{h^2}$ 存在 $\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cosh)}{1-\cosh}\times\dfrac{1-\cosh}{h^2}$ 存在（由于 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-\cosh}{h^2}$ 非零）

$\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cosh)}{1-\cosh}$ 存在 $\overset{1-\cosh=x}{\underset{x\geq 0}{\Leftrightarrow}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，

所以（A）不正确；

设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为（　）.

A. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在； B. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在；

C. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在； D. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

由于 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$ 存在 $\Leftrightarrow$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)}{1-e^h}\times\frac{1-e^h}{h}\text{ 存在（由于 }\lim_{h\to 0}\frac{1-e^h}{h}\text{ 非零）}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)}{1-e^h}\text{ 存在 }\underset{h>0\Rightarrow x<0;h<0\Rightarrow x>0}{\overset{1-e^h=x}{\Longleftrightarrow}}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\text{ 存在,}$$

所以（B）正确;

设 $f(0)=0$,则 $f(x)$在点 $x=0$可导的充要条件为（　）.

A．$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cosh)$存在；B．$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在；

C．$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$存在；D．$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在.

由于 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}$ 存在 $\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}\times\dfrac{h-\sin h}{h^2}$ 存在（由于 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h-\sin h}{h^2}$ 等于零）

推不出 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}$ 存在 $\underset{h>\Rightarrow x>0,h<0\Rightarrow x<0}{\overset{h-\sin h=x}{\Longleftrightarrow}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，

所以（ C ）不正确；

设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为（　　）.（2001.Ⅰ）

A. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cosh)$存在；B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在；

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$存在；D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在.

对于（D），令 $f(x)=\begin{cases}1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$,

则 $f'(0)$ 不存在，但 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ =0 存在，

所以不正确。

测 验 题

一、 选择题：

1、函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 定义为（ **D** ）

（A） $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

（B） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

（C） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

（D） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$；

2、若函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)=0$，则曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的法线（ B ）

（A）与x轴相平行；（B）与x轴垂直；

（C）与y轴相垂直；（D）与x轴即不平行也不垂直：

3、若函数$f(x)$在点x_0不连续，则$f(x)$在x_0（ D ）

（A）必无定义；　　（B）必定可导；

（C）不一定可导；　　（D）必不可导.

4、如果 $f(x)=$（ D ），那么 $f'(x)=0$.

(A) $\arcsin 2x+\arccos x$;

(B) $\sec^2 x+\tan^2 x$;

(C) $\sin^2 x+\cos^2(1-x)$;

(D) $\arctan x+\operatorname{arccot} x$.

5、如果 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, x\le 0 \\ b(1-x^2), x>0 \end{cases}$ 处处可导，那末(D)

（A） $a=b=1$;　　（B） $a=-2, b=-1$;

（C） $a=1, b=0$;　　（D） $a=0, b=1$.

7、若函数$f(x)$为可微函数，则dy（ **B** ）

（A）与Δx无关；

（B）为Δx的线性函数；

（C）当$\Delta x \to 0$时为Δx的高阶无穷小；

（D）与Δx为等价无穷小.

8、设函数$y = f(x)$在点x_0处可导，当自变量x由x_0增加到$x_0 + \Delta x$时，记Δy为$f(x)$的增量，dy为$f(x)$的微分，$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x}$等于（ **B** ）

（A）-1；　　（B）0；

（C）1；　　（D）∞.