第十五讲 几类常见曲面

一、柱面

二、锥面

三、旋转曲面

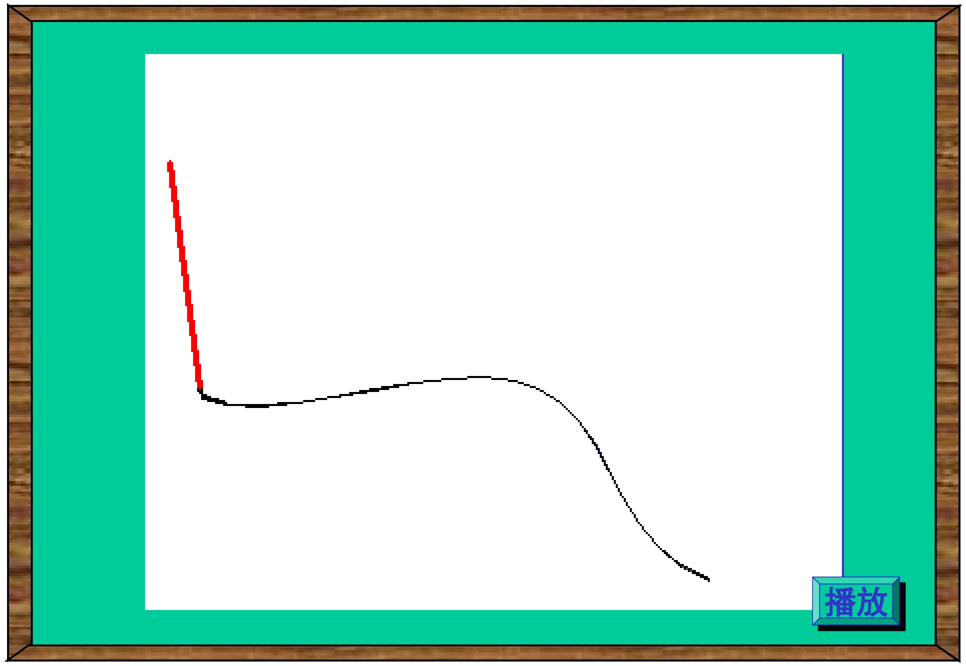
四、空间曲线的投影

一、柱面

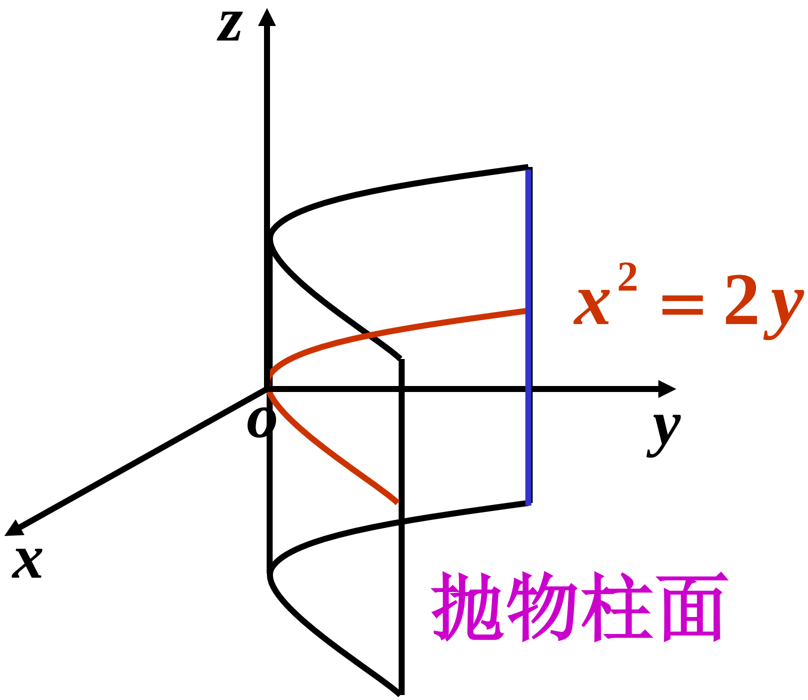
定义 平行于定直线并沿定曲线C移动的直线L所形成的曲面称为柱面.

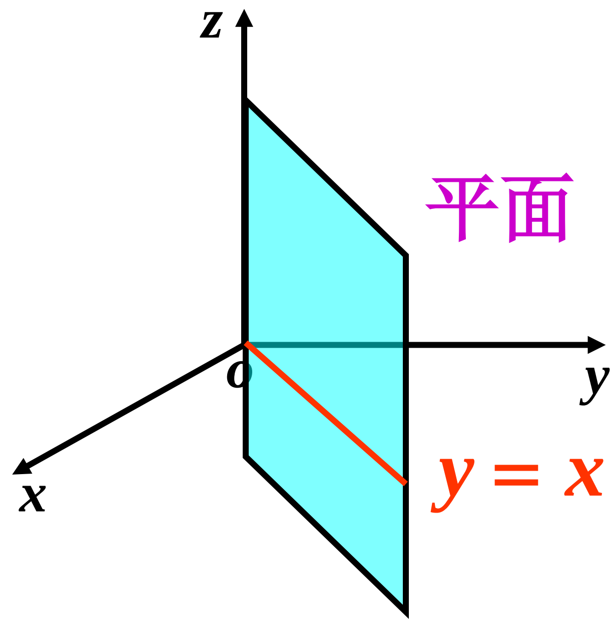
这条定曲线C叫柱面的**准线**，动直线L叫柱面的**母线**.

观察柱面的形成过程:



柱面举例 $x^2 = 2y$ $y = x$

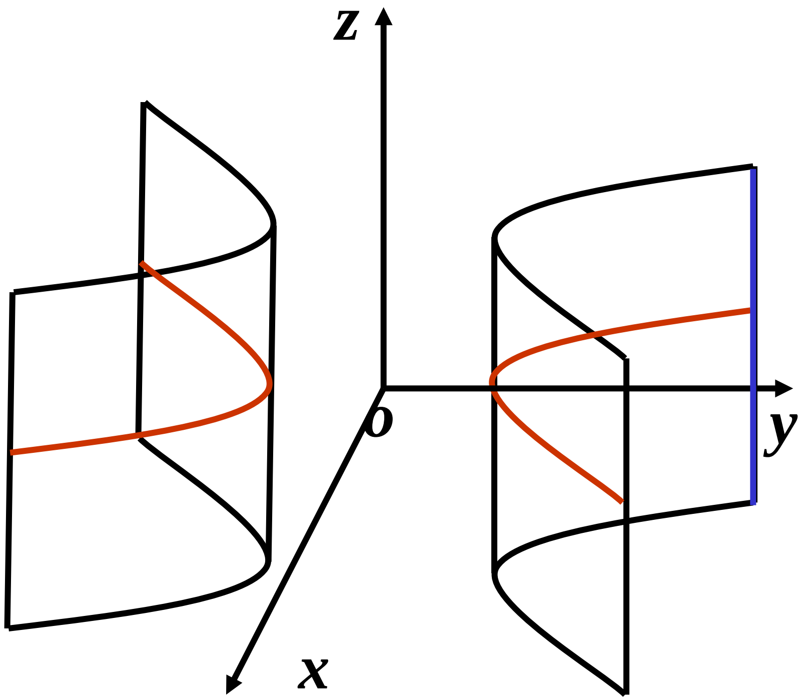




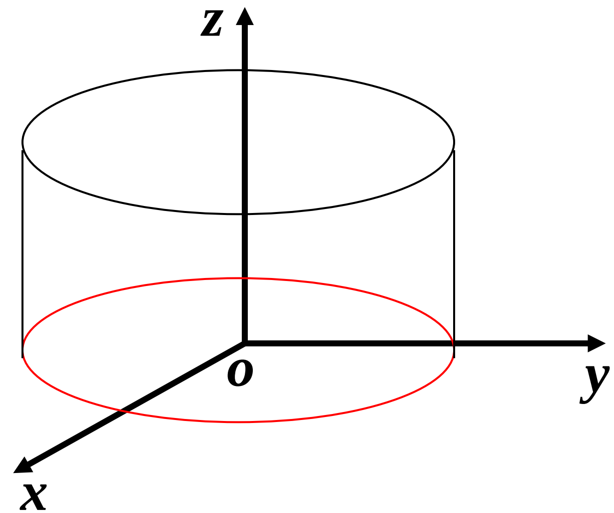
柱面的准线不是唯一的

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

双曲柱面



$$x^2+y^2=R^2$$



圆柱面

$$H(x,z)=0$$

从柱面方程看柱面的特征：　$G(y,z)=0$

只含x, y而缺z的方程$F(x,y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于z轴的柱面，其准线为xoy面上曲线$C: F(x,y)=0$.（其它类推）

实例

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$ 椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$ 双曲柱面

$$x^2=2pz,$$ 抛物柱面

现假设直线的方向向量为 $s=(a,b,c)$, 准线 γ 的方程为

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}.$$

则将方程组

$$\begin{cases} F_1(x+at,y+bt,z+ct)=0 \\ F_2(x+at,y+bt,z+ct)=0 \end{cases},$$

消去 t 后得到关于 x,y,z 的关系式 $F(x,y,z)=0$

即为所求的柱面方程.

例1 已知柱面的轴为

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-2},$$

点(1,-2,1)在圆柱面上,求这个圆柱面的方程.

解: 圆柱面的准线可取为

$$\begin{cases}(x-1)-2(y+2)-2(z-1)=0 \\ x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14\end{cases}.$$

母线方向向量可取为(1,-2,-2). 设$M(x,y,z)$是柱面上一点，又设过M的母线与准线交于点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,

则$x_1=x+t, y_1=y-2t, z_1=z-2t$.将 x_1,y_1,z_1代入

准线方程并消去 t 可得柱面方程为:

$$8x^2+5y^2+5z^2+4xy+4xz-8yz-18y+18z-99=0.$$

二、锥面

定义2.5.3 空间内过一定点且与一定曲线相交的直线

簇组成的曲面称为一个锥面. 定曲线称为**准线**, 定点称为锥面的**定点.**

我们可用求柱面方程类似的方法求锥面的方程.

例2 锥面的定点为原点O, 且准线为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}.$$

求此锥面的方程.

解: 设$M(x,y,z)$为此锥面上任一点，则母线OM与准线交于$M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则

$$x_1=tx, y_1=ty, z_1=tz, t\in R.$$

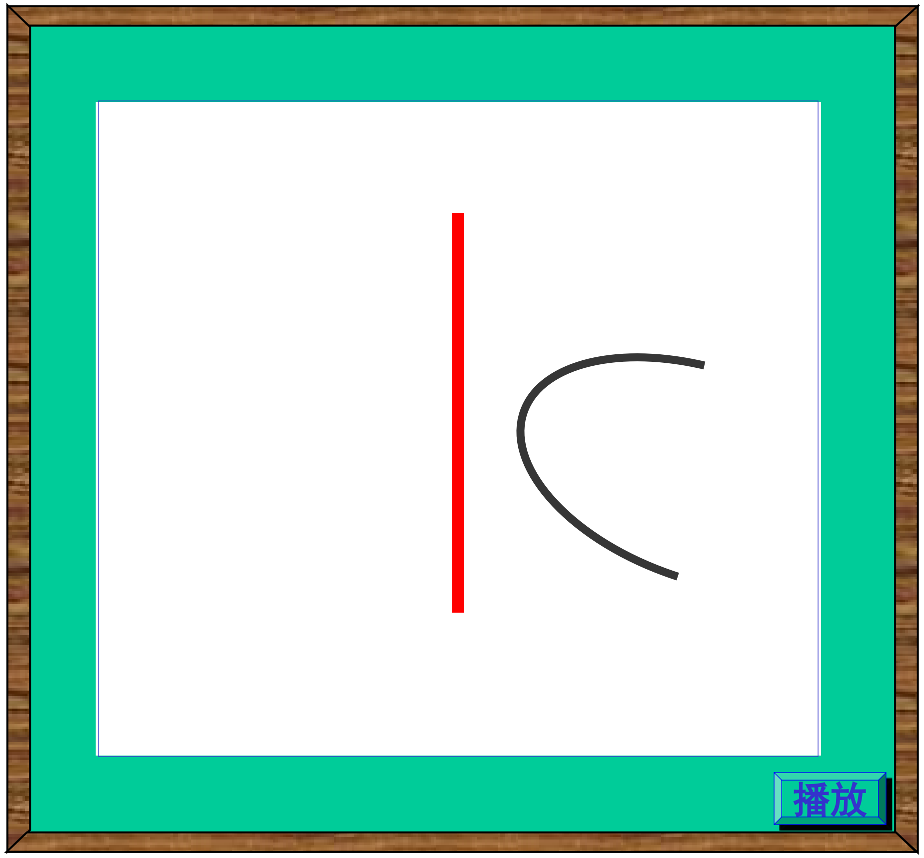
将 x_1,y_1,z_1代入准线方程并消去 t 可得所求准面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

三、旋转曲面

定义 一条平面曲线绕其所在平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

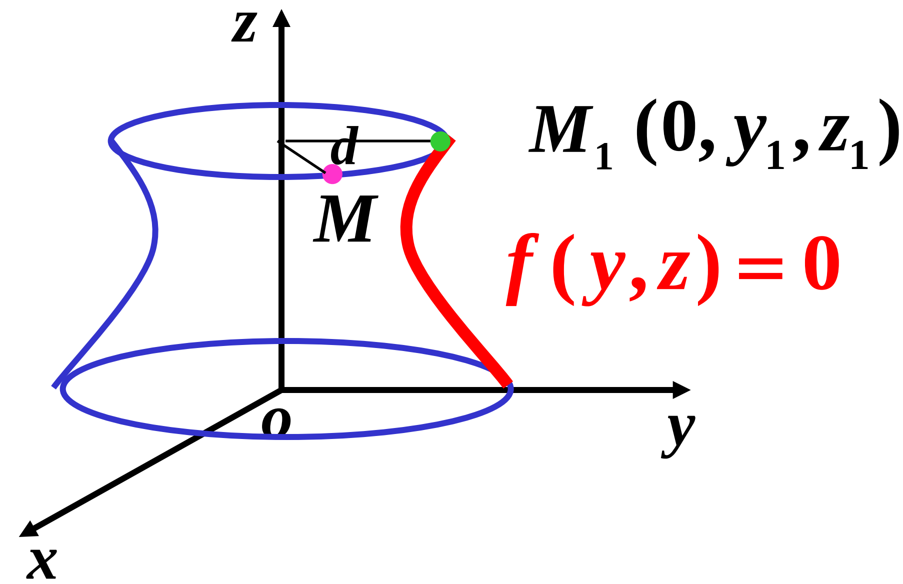
这条定直线叫旋转曲面的轴.



设在yoz面上有一条曲线 $f(y,z)=0$,

这条曲线绕z轴旋转一周，就得到一张旋转曲面Σ,

试求这曲面的方程.



在曲面上任取一点，不妨设为 $M(x,y,z)$点,

且设点M是曲线 $f(y,z)=0$上的点M_1 绕z轴旋转所得的一点，如图，又设M_1的坐标为$(0,y_1,z_1)$,

则 $f(y_1,z_1)=0$, 且有

(1) $z=z_1$;

(2) $d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$.

则有 (1) $z = z_1$;　　　　$f(y_1, z_1) = 0$,

(2) $d = \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1|$.

得方程 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z) = 0$,　　$f(y,z) = 0$

这就是*yoz*面上的已知曲线 $f(y,z) = 0$ 绕*z*轴旋转一周，得到的旋转曲面$\sum$的方程.

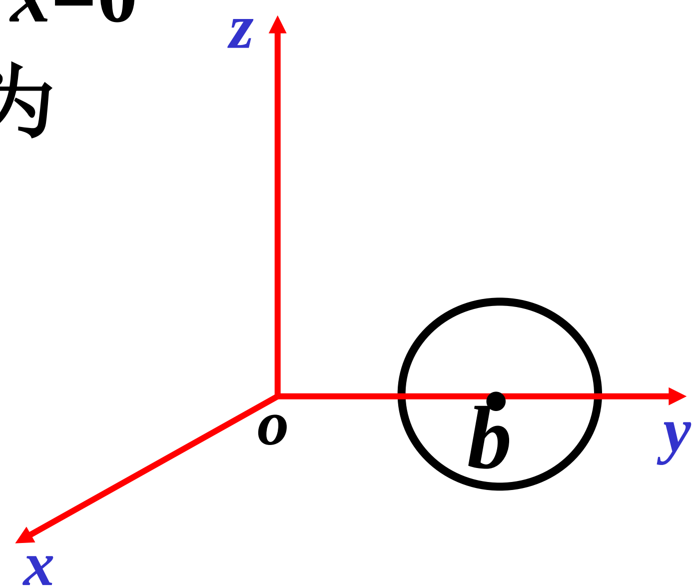
同理，*yoz*面上的已知曲线 $f(y,z) = 0$ 绕*y*轴旋转一周，得到的旋转曲面的方程为

$$f(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0.$$

例 3 由Oyz平面上的圆

$(y-b)^2+z^2=a^2 \quad (b>a>0), x=0$

绕z轴旋转所得旋转曲面方程为

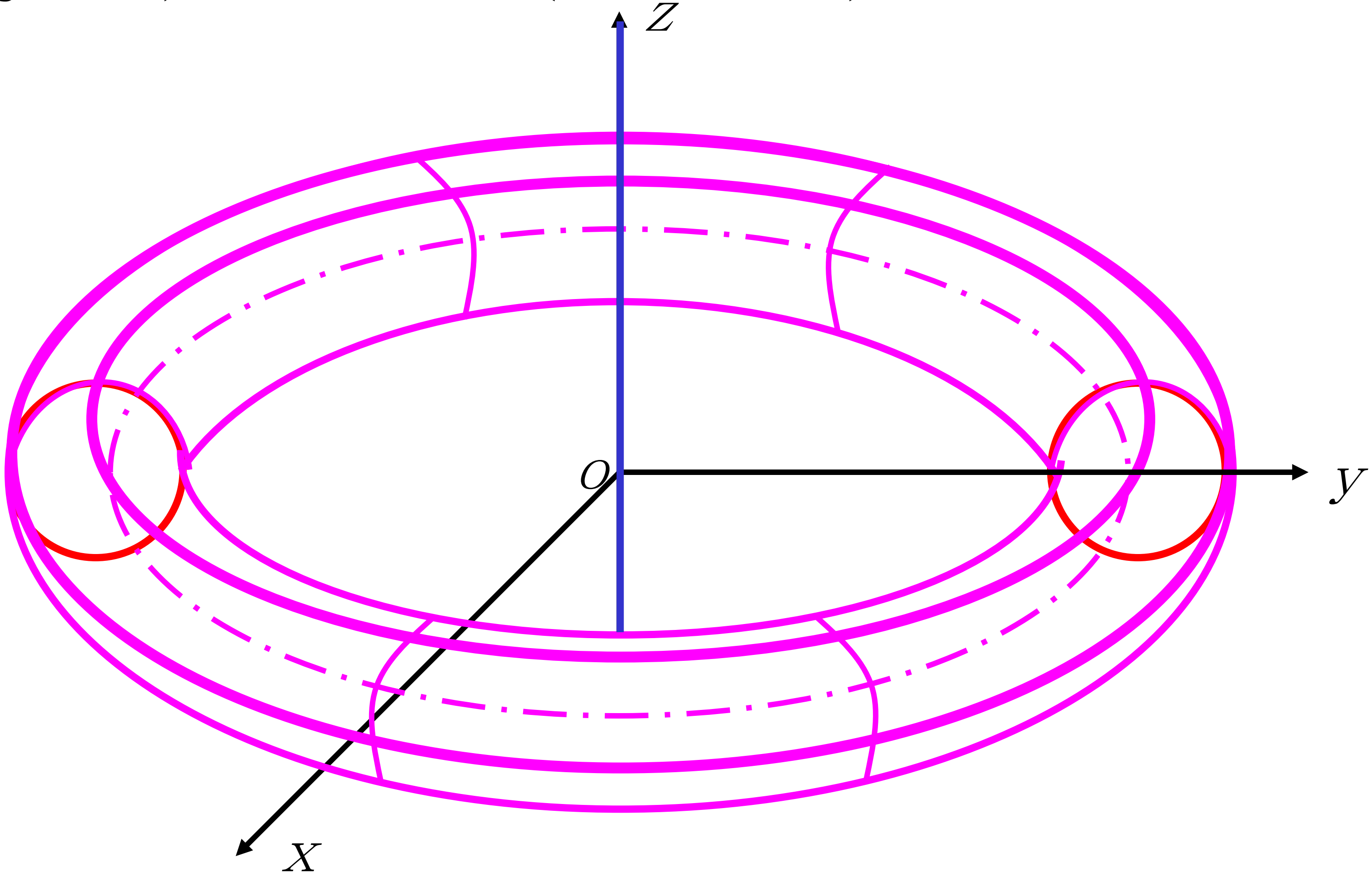


$$(\pm\sqrt{x^2+y^2}-b)^2+z^2=a^2$$

$$x^2+y^2+z^2+b^2-a^2$$
$$=\pm 2b\sqrt{x^2+y^2}$$

$$(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2$$
$$=4b^2(x^2+y^2)$$

$(y-b)^2+z^2=a^2 (b>a>0)$ 绕z轴 旋转所成曲面



返 回

例4 将下列各曲线绕对应的轴旋转一周，求生成的旋转曲面的方程.

（1）zox 面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴

绕 x 轴旋转 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1,$

旋转双叶双曲面

绕 z 轴旋转 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

旋转单叶双曲面

旋转双曲面

（2）yoz 面上的椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 y 轴和 z 轴；

绕 y 轴旋转 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1,$

绕 z 轴旋转 $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

旋转椭球面

（3）yoz 面上的抛物线 $y^2=2pz$ 绕 z 轴；

$x^2+y^2=2pz.$ 旋转抛物面

说明下列旋转曲面是怎样形成的.

(1) $(z-a)^2 = x^2 + y^2$

直线$\begin{cases} z-a=x \\ y=0 \end{cases}$绕z轴旋转

(2) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z=0 \end{cases}$绕x轴旋转

(3) $x^2 + z^2 = 3y^2$

$\begin{cases} x^2 = 3y^2 \\ z=0 \end{cases}$绕y轴旋转

(4) $x^2 + y^2 = 3z$

$\begin{cases} x^2 = 3z \\ y=0 \end{cases}$绕z轴旋转

四、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线的一般方程为：$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$

设消去变量z后得：$\underline{H(x,y)=0.}$ 则该方程表示的曲面称为所给空间曲线关于xoy 面的**投影柱面.**

投影柱面的特征：

以此空间曲线为准线，垂直于所投影的坐标面.

空间曲线在 xoy 面上的投影曲线的方程为

$$\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$

类似地：可定义空间曲线在其它坐标面上的投影：

yoz 面上的投影曲线　　zox 面上的投影曲线

$$\begin{cases} R(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} T(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$$

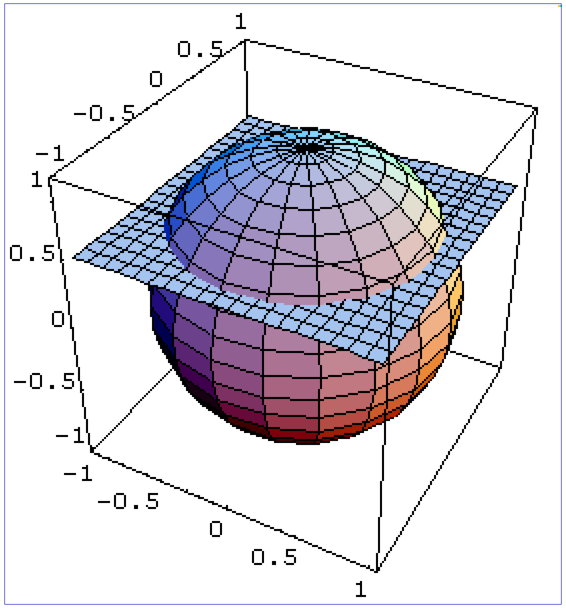
例4 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在xoy面上的投影.

解 消去变量z后得

$$x^2+y^2=\frac{3}{4},$$

在xoy面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4}, \\ z=0 \end{cases}$$



例5 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=\frac{1}{2} \end{cases}$ 在xoy面上的投影.

解 由于不能消去变量z，故投影柱面为

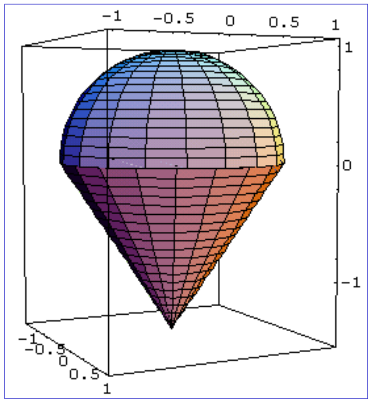
$$x^2+y^2=\frac{1}{2},$$

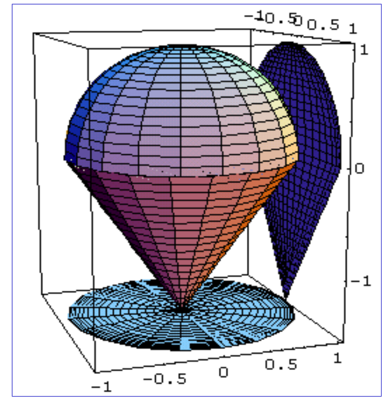
曲线在xoy面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2}. \\ z=0 \end{cases}$$

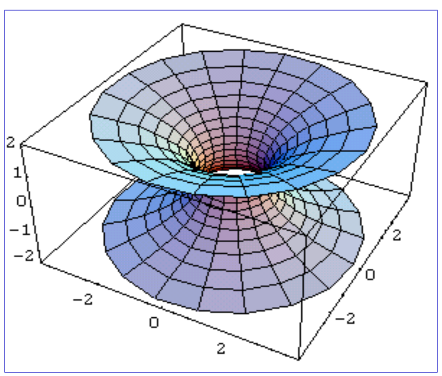
补充：空间立体或曲面在坐标面上的投影.

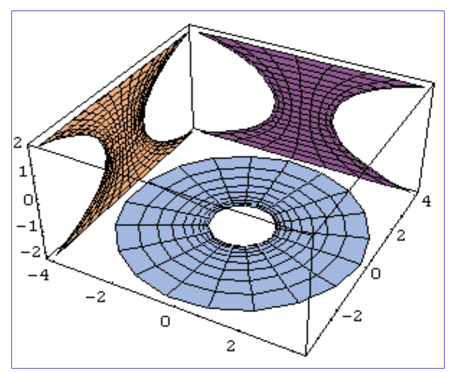
空间立体





曲面

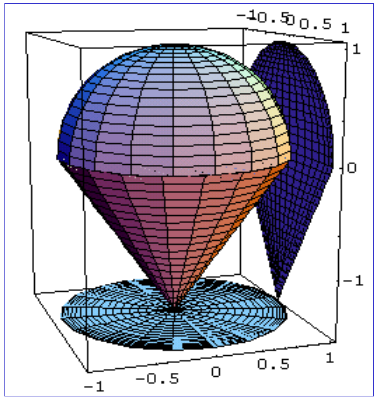




例6 设一个立体,由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$锥面所围成,求它在 xoy 面上的投影.

解 半球面和锥面的交线为 $C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}, \end{cases}$

消去 z 得投影柱面 $x^2+y^2=1,$



则交线 C 在 xoy 面上的投影为

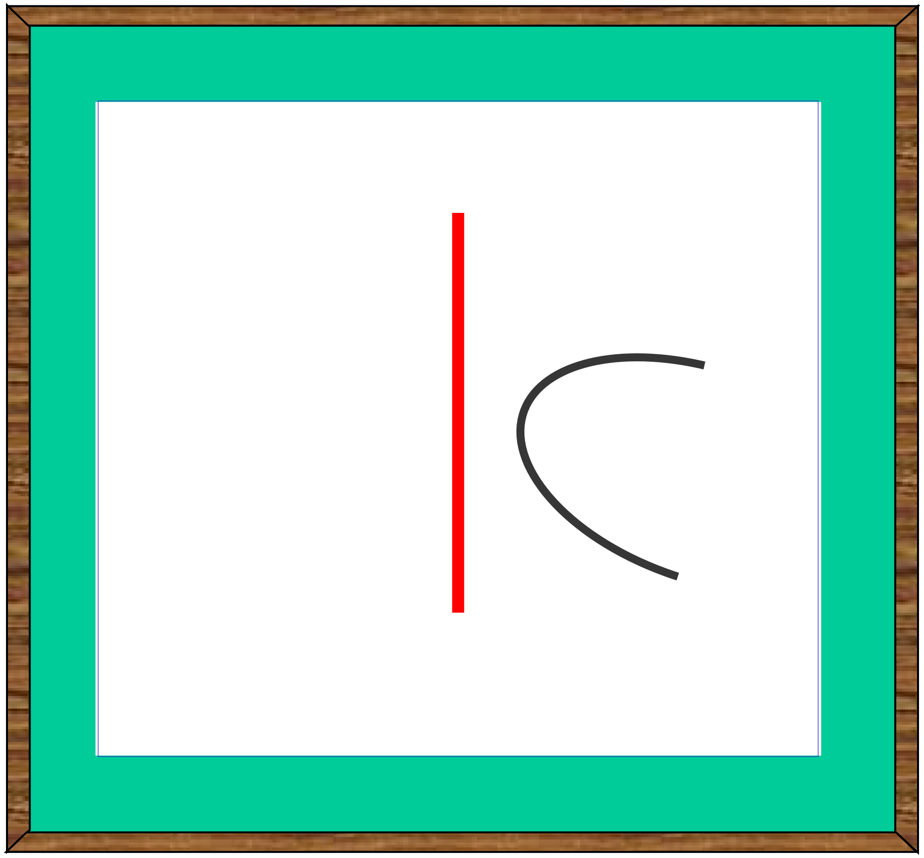
$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

$\therefore$ 所求立体在 xoy 面上的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2\le 1, \\ z=0. \end{cases}$

四、旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

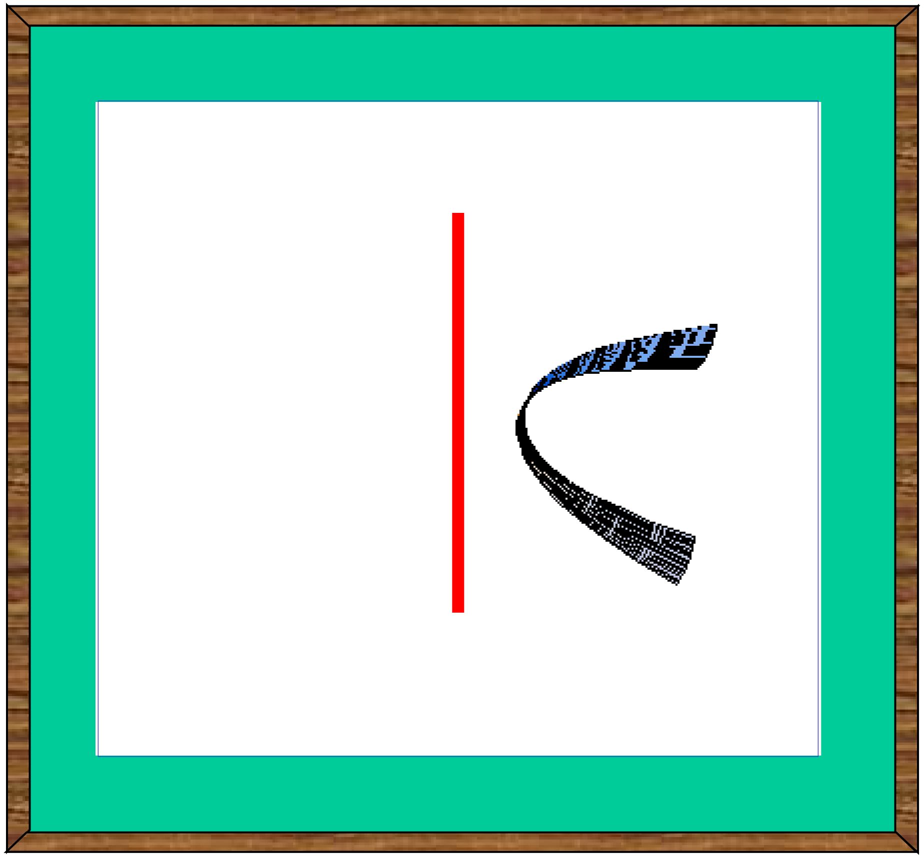
这条定直线叫旋转曲面的轴.



四、旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

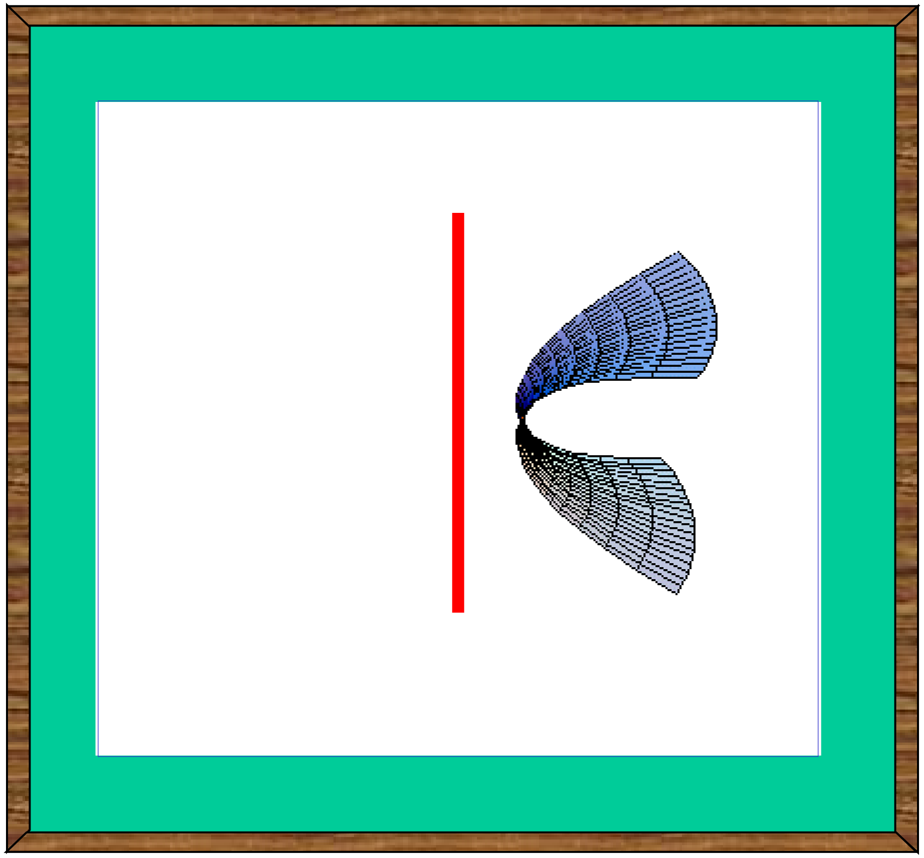
这条定直线叫旋转曲面的轴.



四、旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

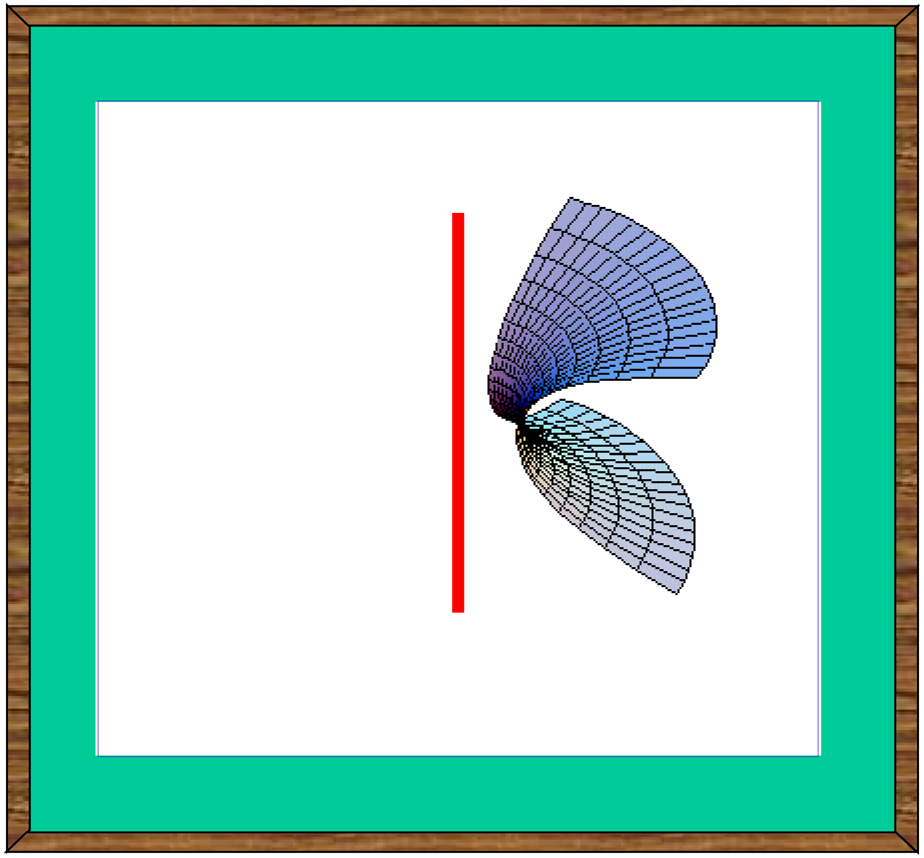
这条定直线叫**旋转曲面的轴.**



四、旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

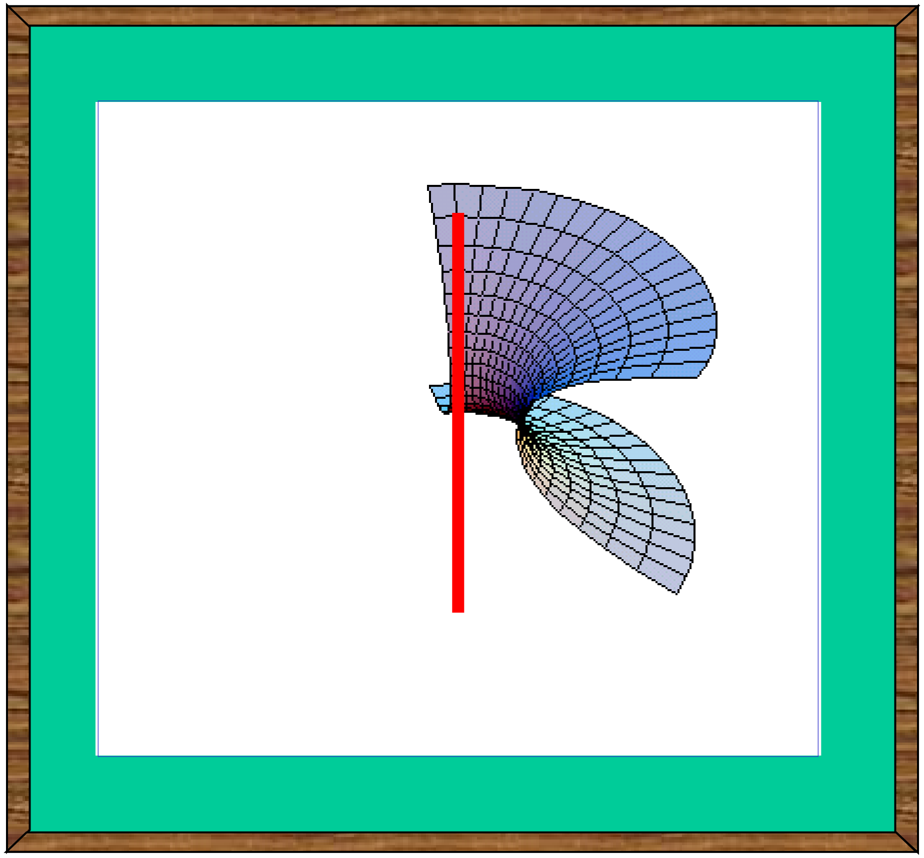
这条定直线叫**旋转曲面的轴.**



四、旋转曲面

定义 **以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.**

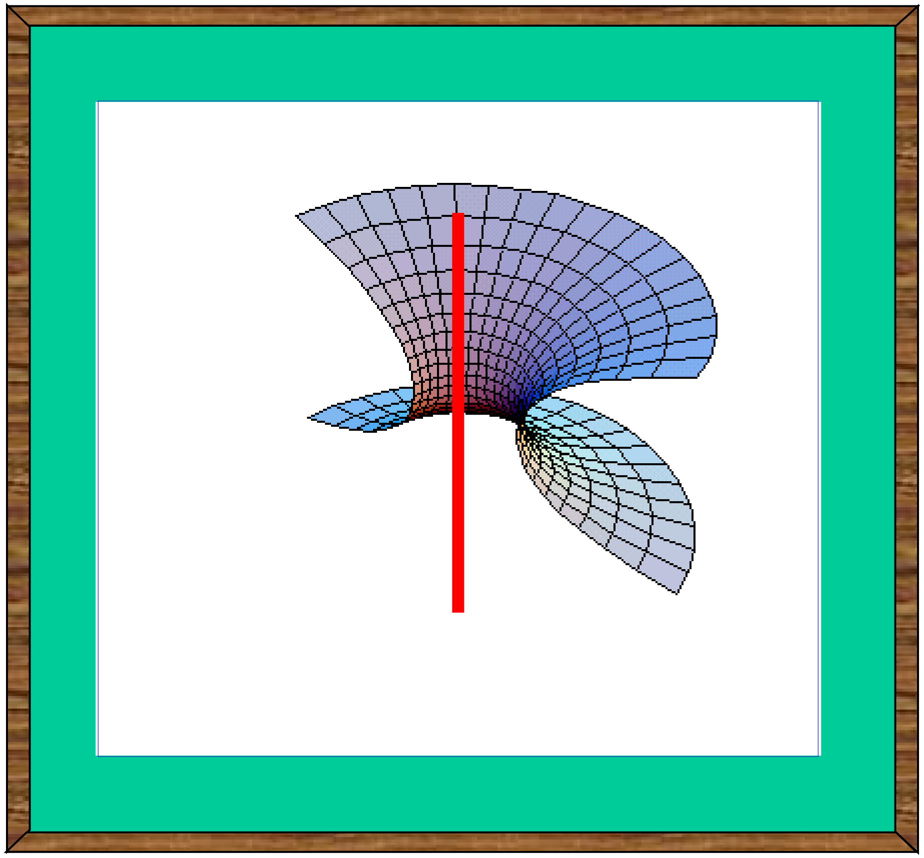
这条定直线叫**旋转曲面的轴.**



四、旋转曲面

定义　**以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.**

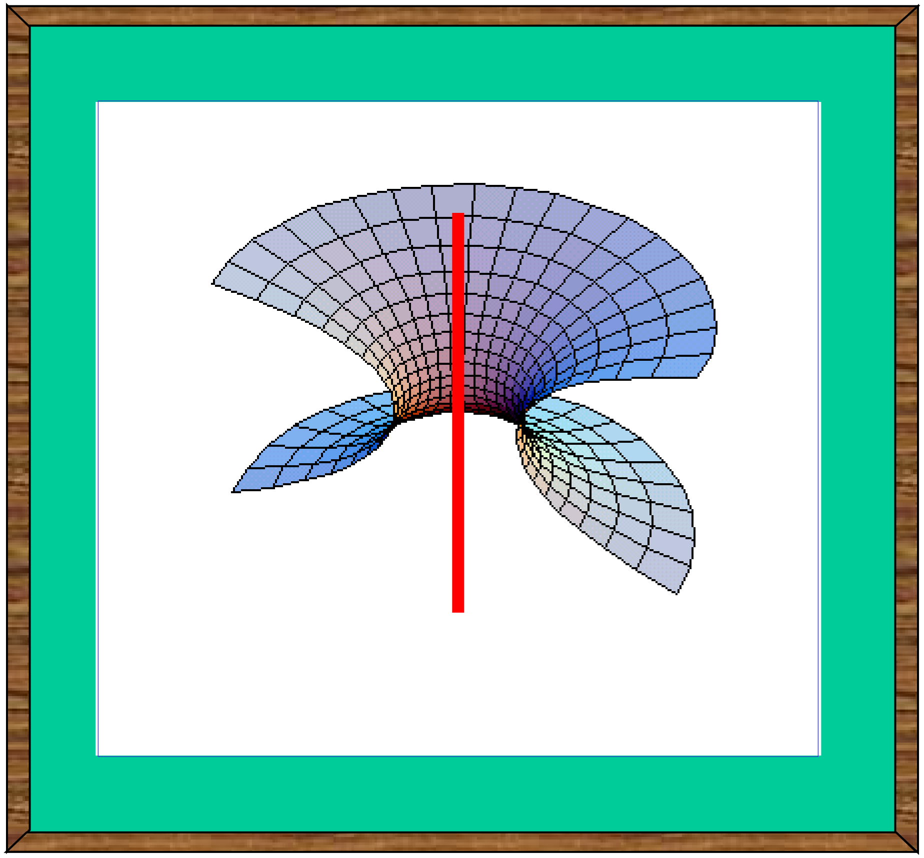
这条定直线叫**旋转曲面的轴.**



四、旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

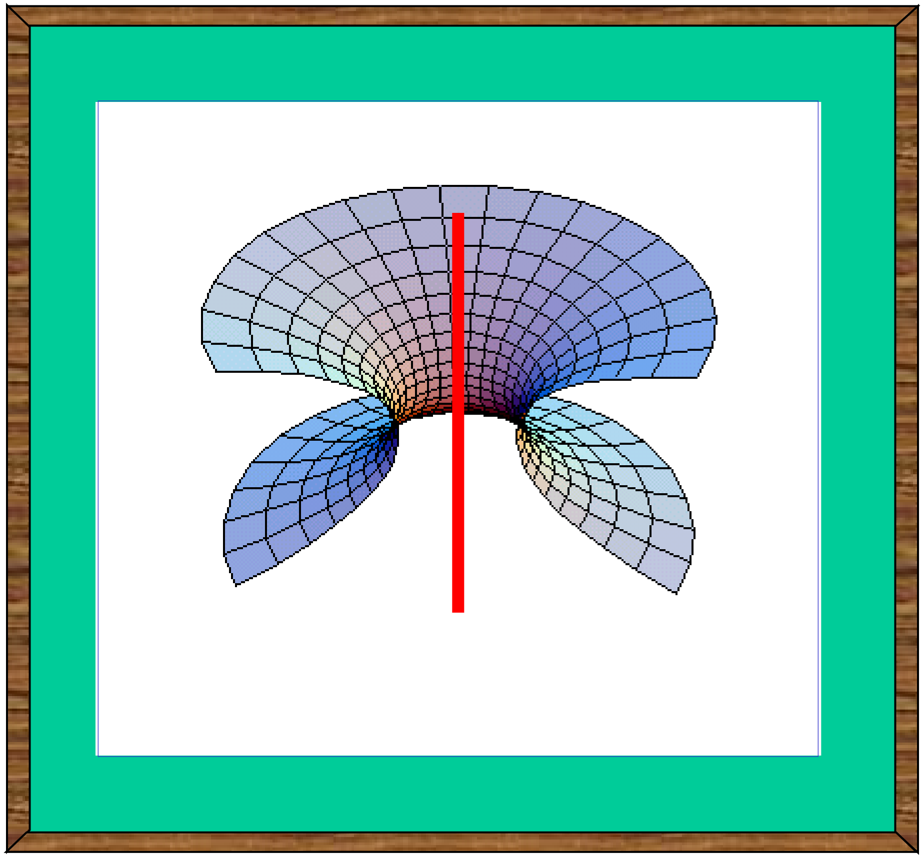
这条定直线叫**旋转曲面的轴**.



四、旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

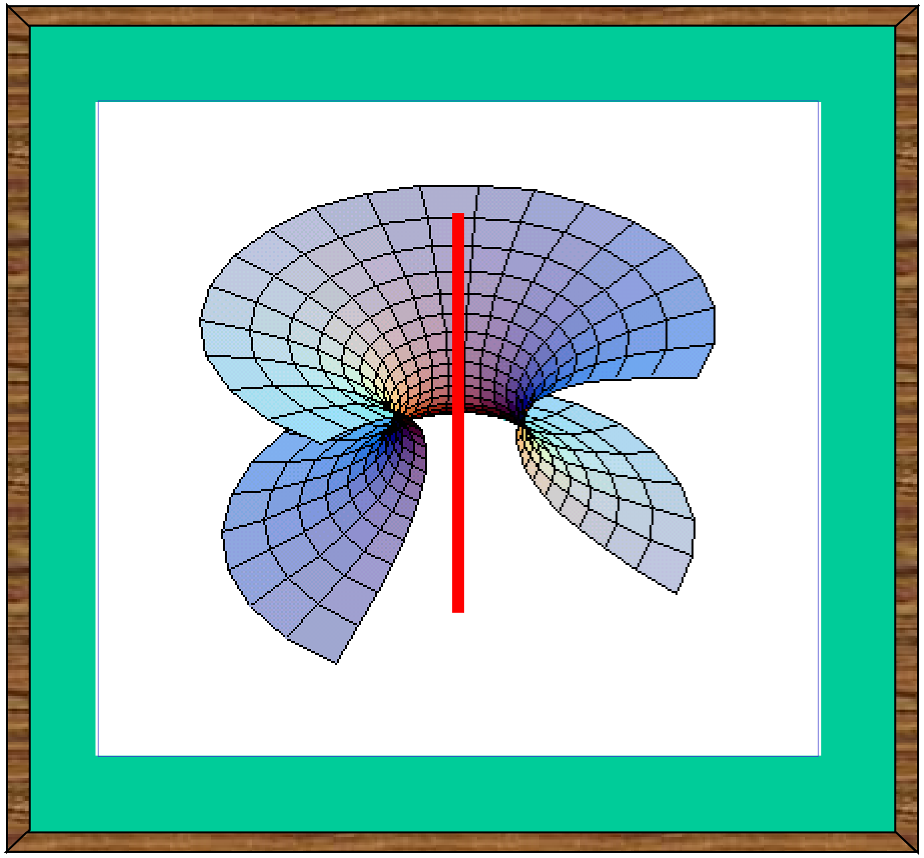
这条定直线叫旋转曲面的轴.



四、旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

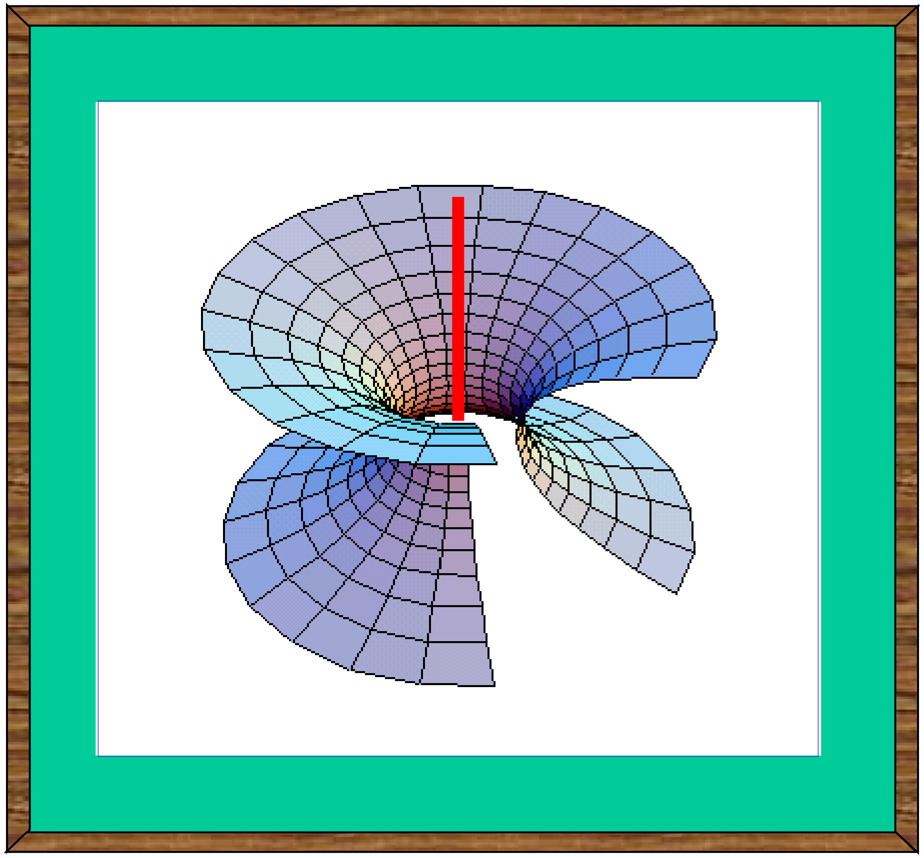
这条定直线叫旋转曲面的轴.



四、旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

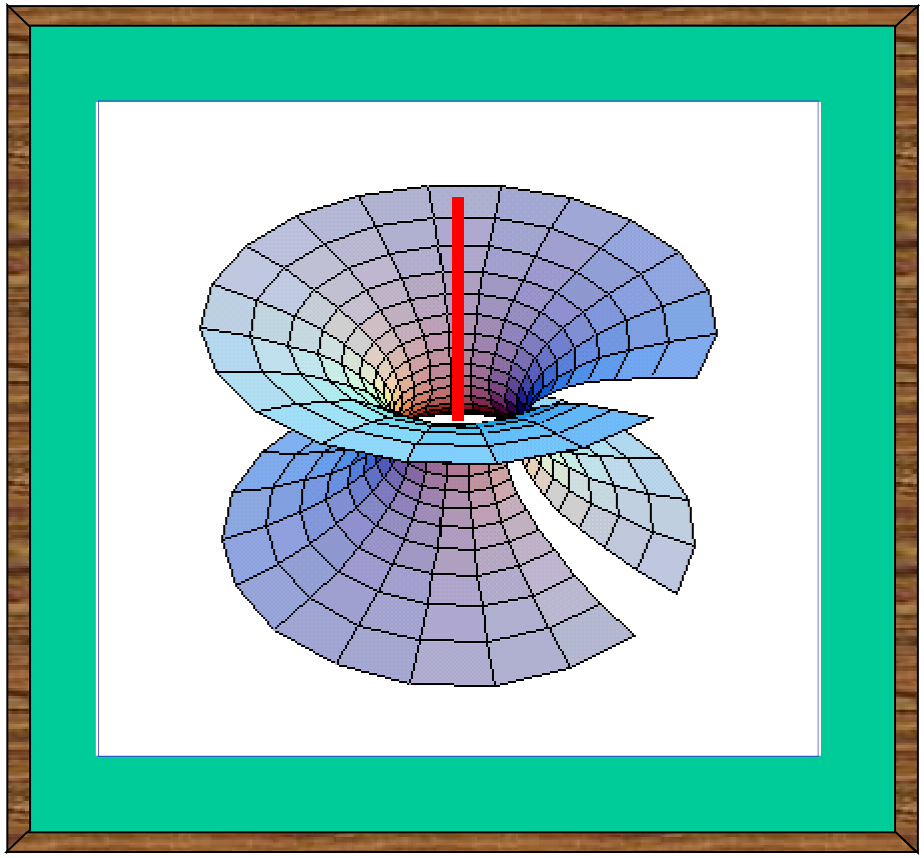
这条定直线叫**旋转曲面的轴.**



四、旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

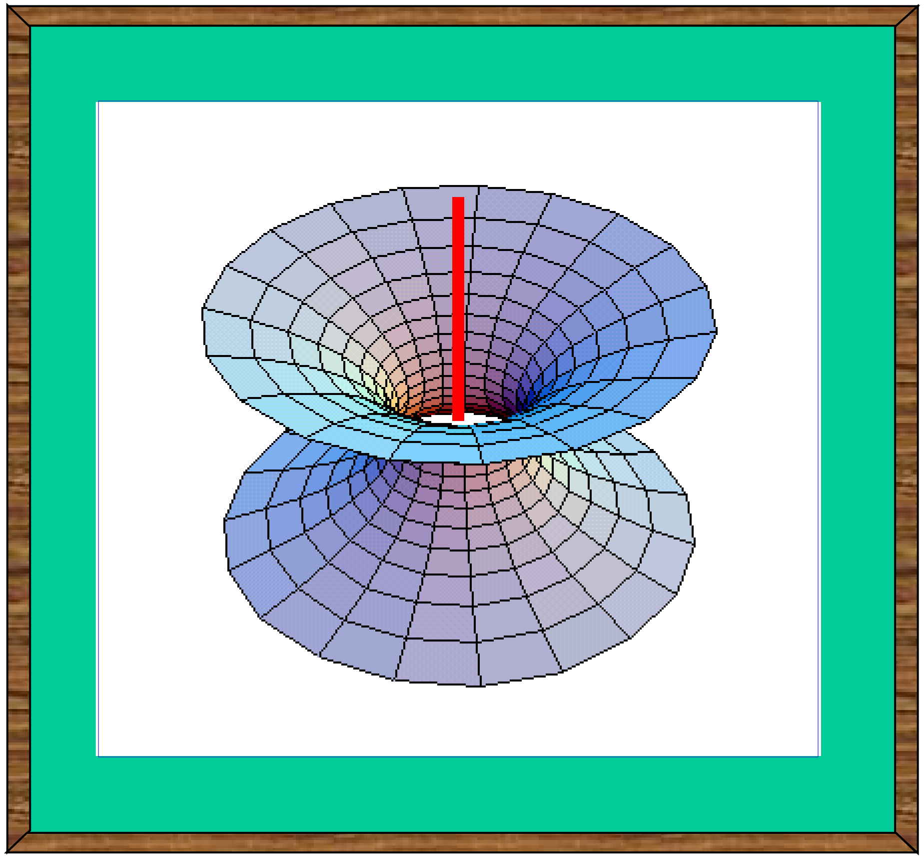
这条定直线叫**旋转曲面的轴.**



四、旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

这条定直线叫**旋转曲面的轴.**

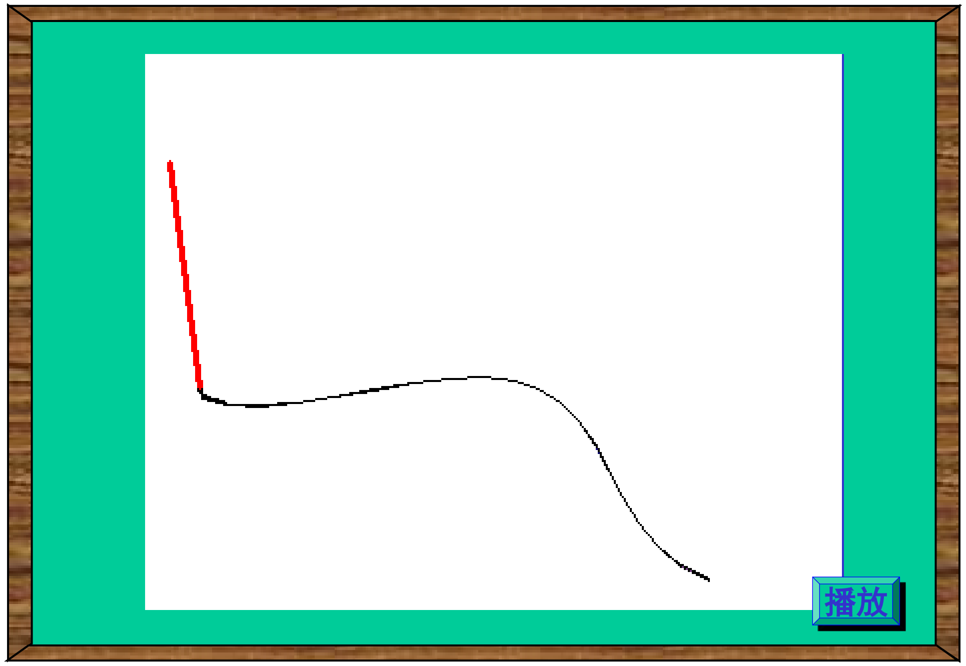


三、旋转曲面

定义　平行于定直线并沿定曲线C移动的直线L所形成的曲面称为柱面.

这条定曲线C叫柱面的**准线**，动直线L 叫柱面的**母线**.

观察柱面的形成过程:

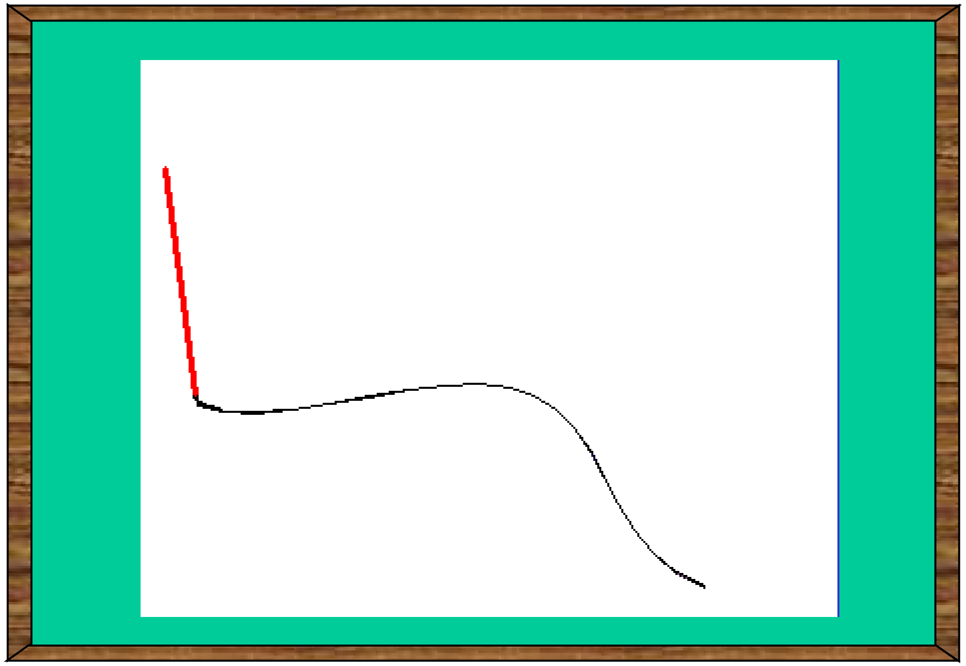


一、柱面

定义 **平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.**

这条定曲线 C 叫柱面的**准线**，动直线 L 叫柱面的**母线**.

观察柱面的形成过程:

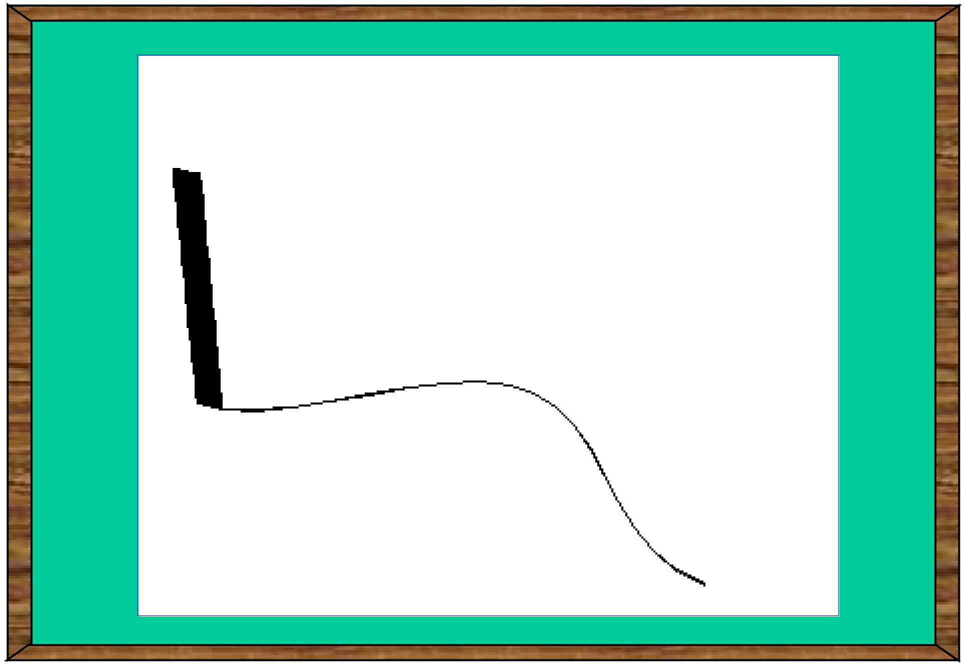


三、柱面

定义 平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.

这条定曲线 C 叫柱面的**准线**，动直线 L 叫柱面的**母线**.

观察柱面的形成过程:

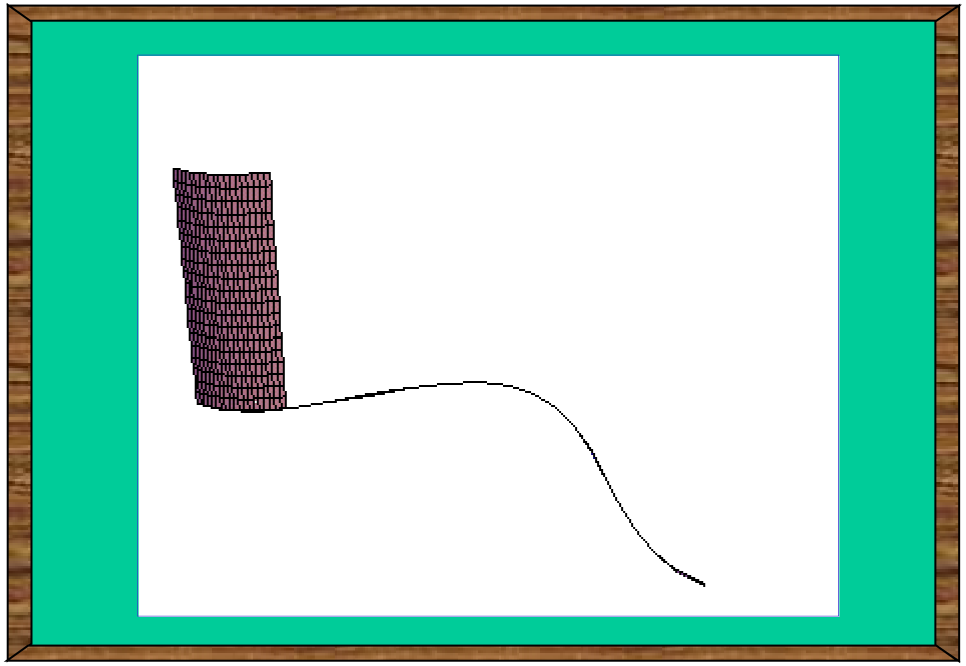


三、柱面

定义 **平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.**

这条定曲线 C 叫柱面的**准线**，动直线 L 叫柱面的**母线**.

观察柱面的形成过程:

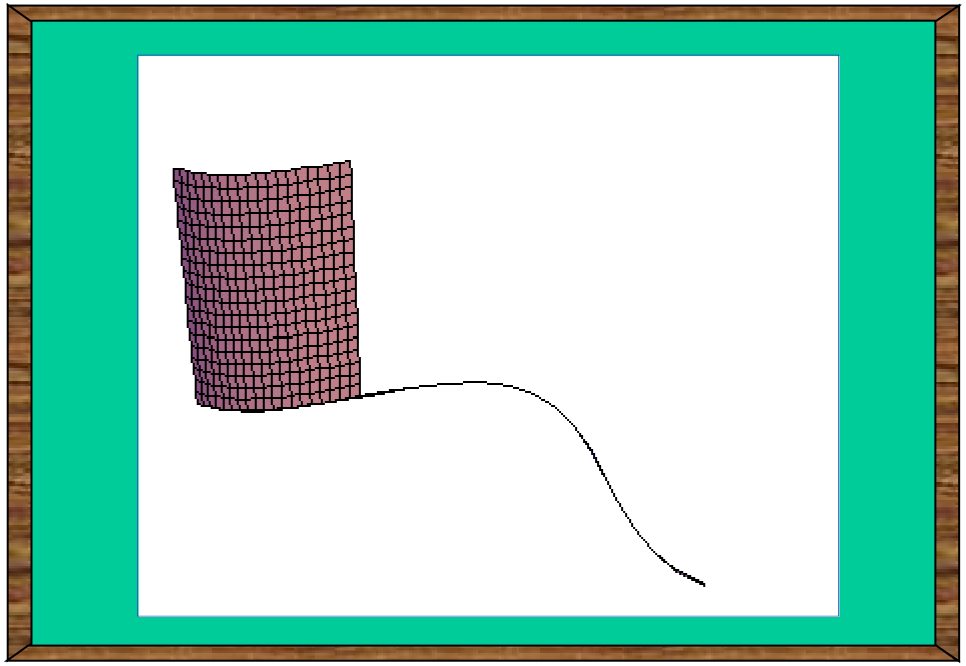


三、柱面

定义 **平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.**

这条定曲线 C 叫柱面的准线，动直线 L 叫柱面的母线.

观察柱面的形成过程:

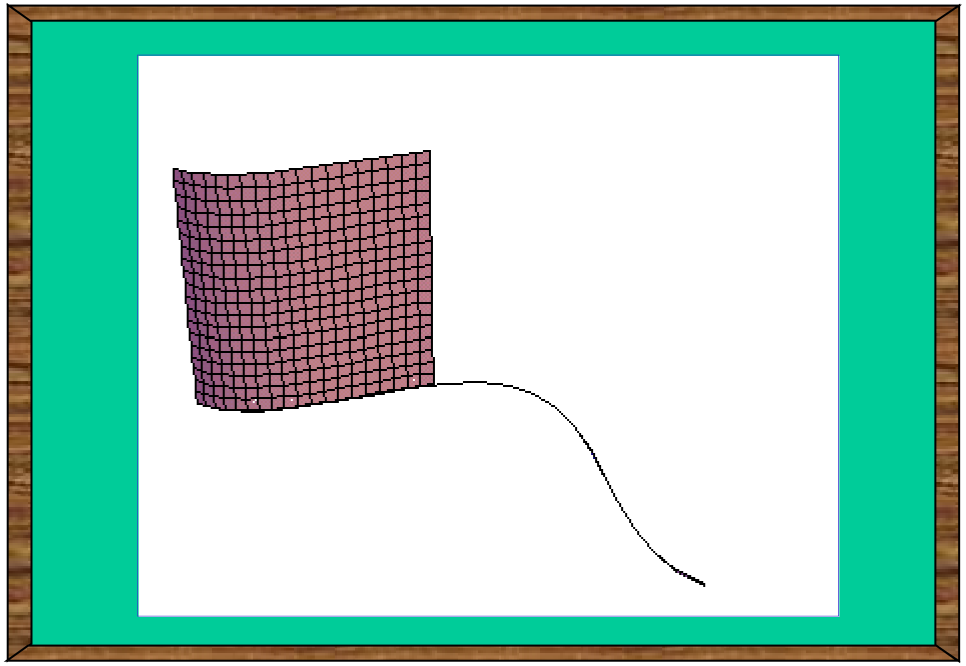


三、柱面

定义 **平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.**

这条定曲线 C 叫柱面的**准线**，动直线 L 叫柱面的**母线**.

观察柱面的形成过程:

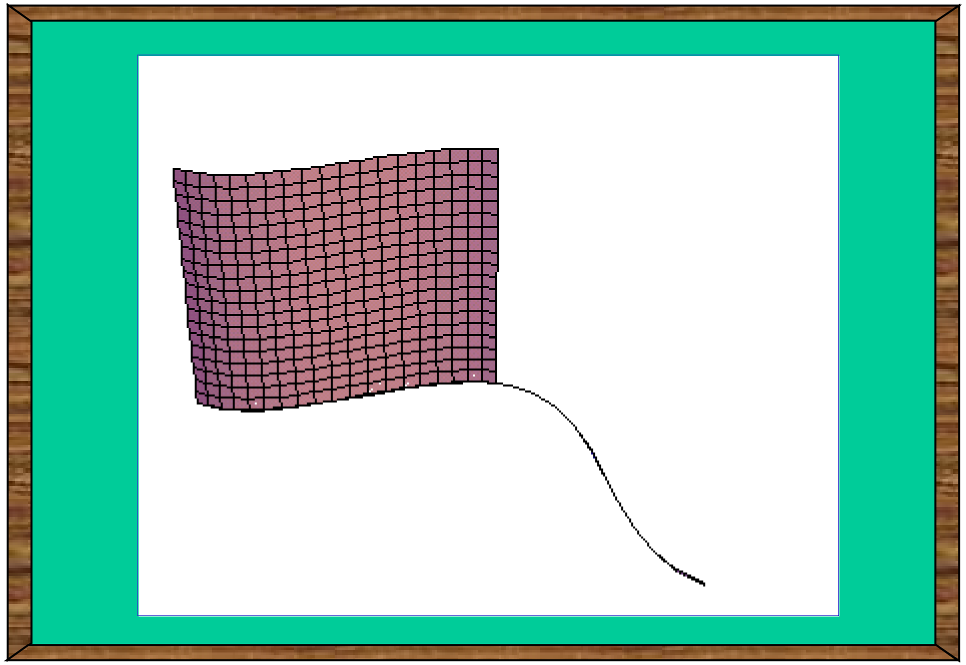


三、柱面

定义 **平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.**

这条定曲线 C 叫柱面的准线，动直线 L 叫柱面的母线.

观察柱面的形成过程:

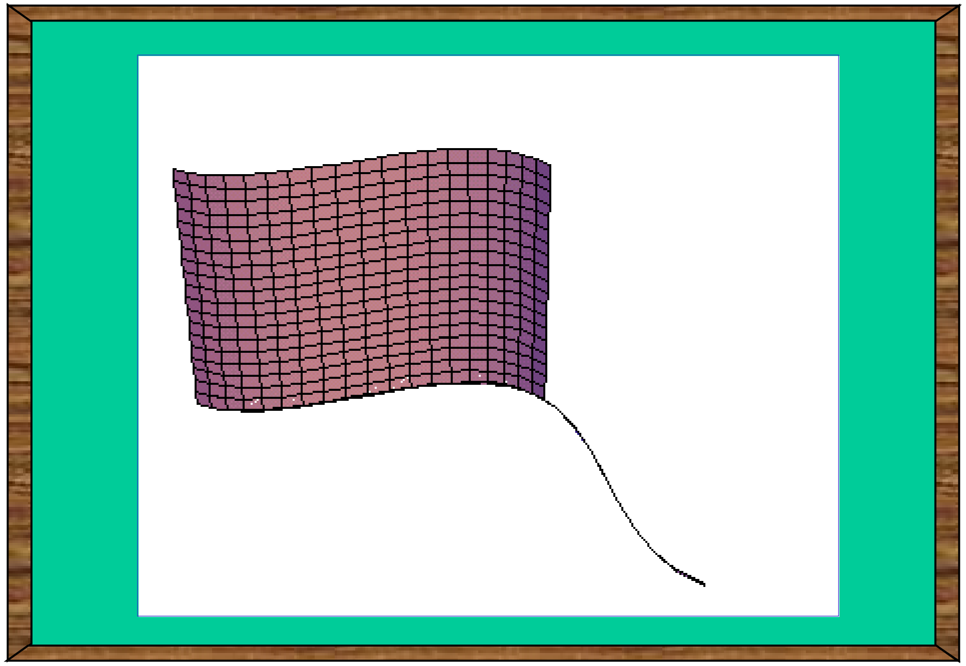


三、柱面

定义 **平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.**

这条定曲线 C 叫柱面的准线，动直线 L 叫柱面的母线.

观察柱面的形成过程:

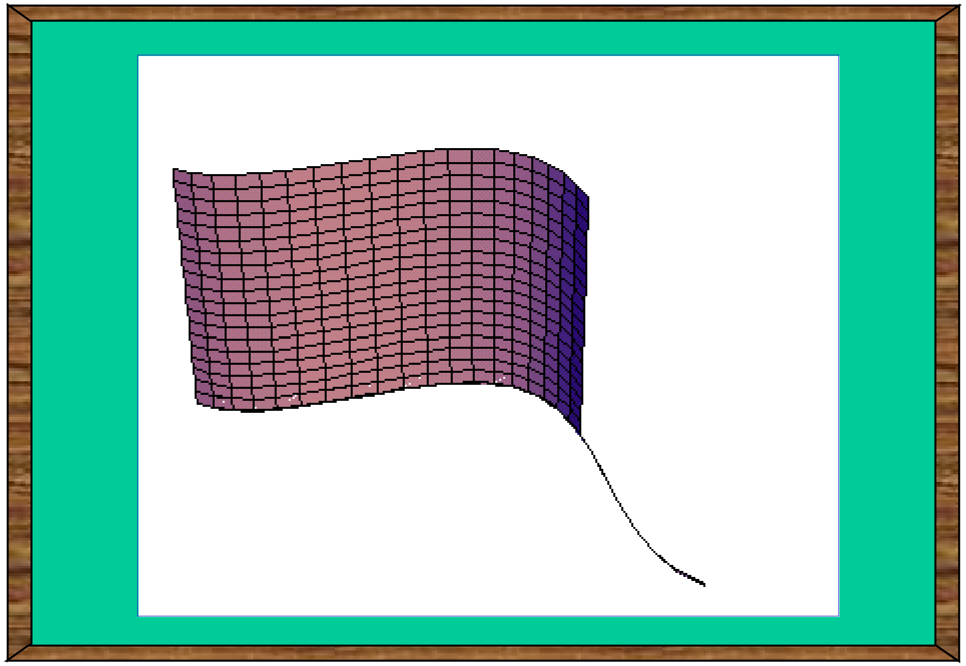


三、柱面

定义 平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.

这条定曲线 C 叫柱面的准线, 动直线 L 叫柱面的母线.

观察柱面的形成过程:

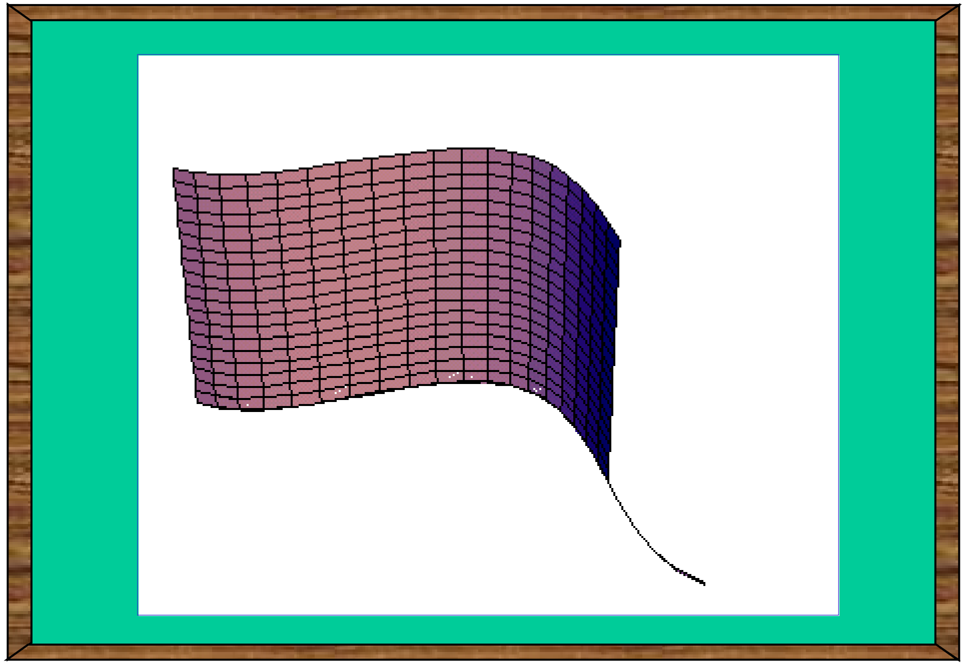


三、柱面

定义 **平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.**

这条定曲线 C 叫柱面的准线，动直线 L 叫柱面的母线.

观察柱面的形成过程:

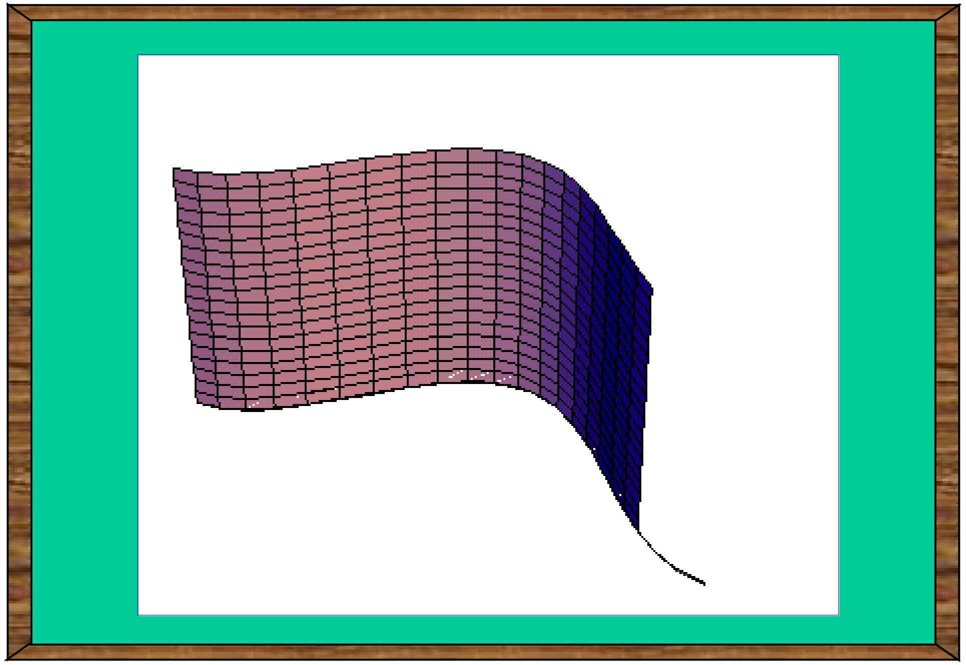


三、柱面

定义 **平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.**

这条定曲线 C 叫柱面的**准线**，动直线 L 叫柱面的**母线**.

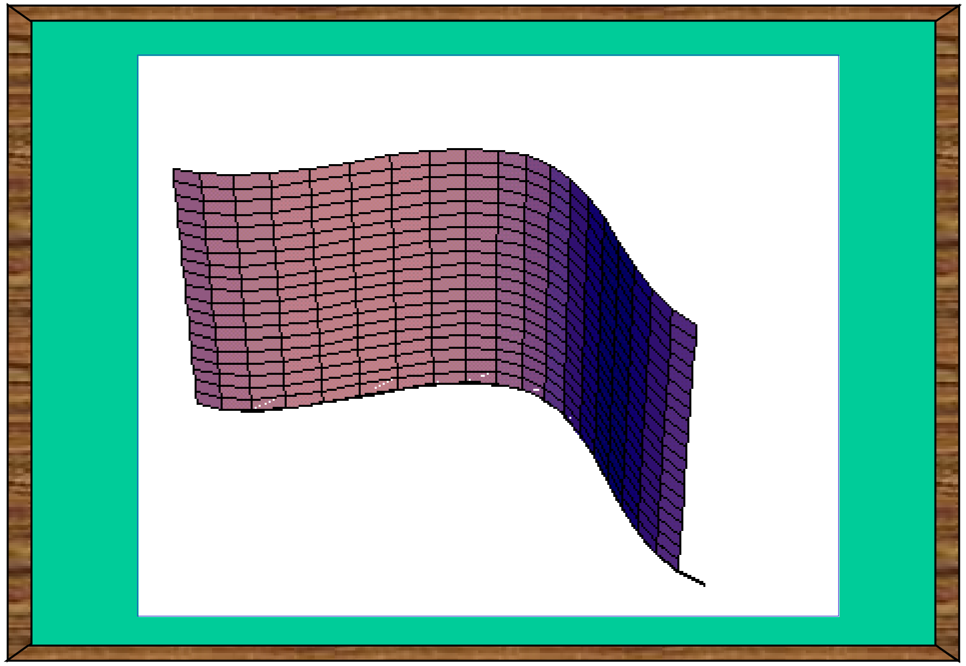
观察柱面的形成过程:



三、柱面

定义 **平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.**

这条定曲线 C 叫柱面的**准线**，动直线 L 叫柱面的**母线**.



观察柱面的形成过程:

三、柱面

定义 平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.

这条定曲线 C 叫柱面的**准线**，动直线 L 叫柱面的**母线**.

观察柱面的形成过程: