第五章 定积分单元测试题

一、填空题（每小题 2 分，共 24 分）

1、$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2 x)dx=$__________。

2、$\int_1^4\sqrt{1+x}dx=$__________。

3、$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 xdx=$__________。

4、$\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$__________。

5、$\int_0^2(1-x)^2dx=$__________。

6、设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，则$\frac{d}{dx}\int_{3x}^{\sin x^2}f(t)dt=$______________。

7、设$f(x)$在$[0,4]$上连续，且$\int_1^{x^2-2}f(t)dt=x-\sqrt{3}$，则$f(2)=$______。

8、$\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=$____________。

9、$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=$____________。

10、$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{2\sin x\cdot(x^4+3x^2+1)}{1+x^2}+\cos x\right]dx=$____________。

11、$\int f'(x)dx=$__________，$\int_a^b f'(2x)dx=$____________。

12、$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx=$__________。

二、单项选择（每小题 2 分，共 24 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=$（　　）

（A） 0 ；　（B） e ；　（C） ln2 ；　（D） 1 。

2、若$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\sin(t-x)dt$，则$f(x)$等于（　　）。

（A） $-\sin x$ ；　（B） $-1+\cos x$ ；　（C） $\sin x$；　（D） 0 。

3、定积分$\int_{-2}^{2}(|x|+x)e^{|x|}dx$的值是（　　）。

（A） 0 ；　（B） 2 ；　（C） $2e^2+2$；　（D） $\frac{6}{e^2}$ 。

4、设 $f''(u)$ 连续，已知 $n\int_0^1 xf''(2x)dx = \int_0^2 tf''(t)dt$，则 n=（　　）

（A） 1/4 ；　　（B） 1 ；　　（C） 2 ；　　（D） 4 。

5、若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln 2$，则 $f(x)$ 等于（　　）。

（A） $e^x \ln 2$；　　（B） $e^{2x}\ln 2$；　　（C） $e^x+\ln 2$；　　（D） $e^{2x}+\ln 2$。

6、设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x}{1+x^4}\cos^2 xdx$， $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos^2 x)dx$，

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^4\sin^5 x-\cos^2 x)dx$ 则有（　　）

（A） $N<P<M$；　（B） $M<p<N$；（C） $N<M<P$；（D） $P<M<N$。

7、设 $f(x)=x^2-\int_0^{x^2}\cos(t^2)dt, g(x)=\sin^{10}x$ 则当 $x\to 0$ 时， $f(x)$ 是 $g(x)$ 的

（A）等价无穷小；（B）同阶但非等价无穷小；（C）高阶无穷小；（D）低阶无穷小。

8、设 $f(x)$ 是连续函数，且 $F(x)=\int_{x^2}^{e^{-x}} f(t)dt$，则 $F'(x)$ 等于（　　）

（A） $-e^{-x}f(e^{-x})-2xf(x^2)$；　（B） $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x^2)$；

（C） $e^{-x}f(e^{-x})-2xf(x^2)$；　（D） $e^{-x}f(e^{-x})+f(x^2)$。

9、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x>0)$，则方程 $\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt=0$ 在开区间 (a,b) 内的根有（　）

（A）0 个；　（B）1 个；　（C）2 个；　（D）无穷多个。

10、设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$（　　）

（A） $xf(x^2)$；　（B） $-xf(x^2)$；　（C） $2xf(x^2)$；　（D） $-2xf(x^2)$。

11、设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$，则 $f(x)=$（　　）

（A） $x-1$；　（B） $x+1$；　（C） $-x+1$；　（D） $-x-1$。

12、$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2dt}{x}=$（　　）

（A） 1 ；　（B） 0 ；　（C） -1；　（D） ∞。

三、计算解答

1、计算下列各题（每小题 4 分，共 24 分）

(1) $\int_0^2 x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$；　(2) $\int_{-1}^4 x\sqrt{|x|}\,dx$；

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x+\cos^2 x\right)^2 dx$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin^2 t dt}{x^3}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+t)dt}{x^2}$。

2、（6 分） 已知 $f(x)$ 在 $x=12$ 的邻域内可导，且 $\lim\limits_{x\to 12} f(x)=0, \lim\limits_{x\to 12} f'(x)=997$，求

$$\lim_{x\to 12}\frac{\int_{12}^x\left[\int_t^{12} tf(u)du\right]dt}{(12-x)^3}。$$

3、（2 分）设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$ 其中 $x>0$，求 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$。

4、（6 分）证明方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^\pi \sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根。

5、（6 分）已知 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $f(0)=0$，证明 $\left|\int_0^a f(x)dx\right|\le\frac{Ma^2}{2}$，其中

$M=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f'(x)\right|$。

6、（6 分）已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，定义 $g(x)=\int_0^x f(t)dt, h(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt, x\in[0,1]$，

证明 $h(x)=\int_0^x g(u)du$，并求 $h''(x)$。