江 西 理 工 大 学 考 试 卷 B

试卷编号：

2009—2010 学年第 2 学期	考试性质（正考、补考或其它）：[正考]
课程名称： 高等数学（二）	考试方式(开卷、闭卷)：[闭卷]
考试时间：2010 年 7 月 日	试卷类别(A、B、C)：[**B**] 共 三 大题

温 馨 提 示

请考生自觉遵守考试纪律，争做文明诚信的大学生。如有违犯考试纪律，将严格按照《江西理工大学学生违纪处分暂行规定》处理。

班级____________________学号 __________________姓名_____ 参考答案 _______

题号	一	二	三	总 分
得分				

一、选择题（请将正确答案编码填入下表中，每小题 3 分，共 24 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	B	D	B	C	A

二、填空题（请将正确答案填写在以下相应的横线上，每空 3 分，共 24 分）

1．$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{3x}$　2．$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$　3．$dz = y^x \ln y \cdot dx + xy^{x-1} dy$

4．$(3, -3)$　5．$\int_{-2}^{0} dx \int_{0}^{-x} f(x, y) dy$　6．0

7．16π　8．$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n$， $x \in R$

三、计算题（6 小题，共 52 分）

1．设 $u = f(y, xy)$, f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.（7 分）

解 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = f_1' + x f_2'$， 3 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(f_1' + x f_2')$$ 5 分

$$= \frac{\partial f_1'}{\partial x} + \frac{\partial (x f_2')}{\partial x} = y f_{12}'' + f_2' + xy f_{22}''.$$ 7 分

2．求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(1,3,0)$ 处的切平面及法线方程.（7 分）

解 令 $F(x,y,z) = e^z - z + xy - 3$，

则 $F_x' = y$， $F_y' = x$， $F_z' = e^z - 1$，

曲面在点 (x,y,z) 的切平面的法向量为 $\vec{n} = (y, x, e^z - 1)$， 3 分

点 $(1,3,0)$ 的切平面的法向量为 $\vec{n} = (3,\ 1,\ 0)$，

故所求的切平面方程为 $3(x-1) + (y-3) = 0$，

整理得 $3x + y - 6 = 0$； 5 分

所求法线方程为 $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-0}{0}$. 7 分

3．设 Ω 是曲面 Σ_1： $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 Σ_2： $z = 6 - x^2 - y^2$ 所围成的立体，求 Ω 的体积 V 与表面积 S.（10 分）

解 $V = \iiint\limits_{\Omega} dV$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \int_r^{6-r^2} dz$$

$$= 2\pi \int_0^2 r(6 - r^2 - r) dr = \frac{32}{3}\pi;$$ 5 分

$S = S_1 + S_2 = \iint\limits_{\Sigma_1} dS + \iint\limits_{\Sigma_2} dS$，其中 D_{xy} 为 $x^2 + y^2 \le 4$，

$$\iint\limits_{\Sigma_1} dS = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{2}\, d\sigma = 4\sqrt{2}\pi, \qquad 7 \text{分}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2} dS = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, d\sigma$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2}\, r dr = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1), \qquad 9 \text{分}$$

因此，$S = S_1 + S_2 = 4\sqrt{2}\pi + \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)$. 10 分

4. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} (z + xy^2) dydz + (yz^2 - xz) dzdx + (x^2 z + x^3) dxdy$ 其中 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1\ (z \le 0)$，取下侧. (10 分)

解　补充曲面 Σ_1：$z = 0 (x^2 + y^2 \le 1)$，并取上侧，则由高斯公式

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma + \Sigma_1} (z + xy^2) dydz + (yz^2 - xz) dzdx + (x^2 z + x^3) dxdy$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2 + x^2) dV$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin\varphi\, dr$$

$$= \frac{2\pi}{5}, \qquad 5 \text{分}$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} (z + xy^2) dydz + (yz^2 - xz) dzdx + (x^2 z + x^3) dxdy$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} x^3 dxdy = 0. \qquad 8 \text{分}$$

所以　原式$= \oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma + \Sigma_1} (z + xy^2) dydz + (yz^2 - xz) dzdx + (x^2 z + x^3) dxdy$

$$- \iint\limits_{\Sigma_1} (z + xy^2) dydz + (yz^2 - xz) dzdx + (x^2 z + x^3) dxdy$$

$$= \frac{2\pi}{5}. \qquad 10 \text{分}$$

5．计算 $\int\limits_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$，其中 L 为抛物线 $2x=\pi y^2$ 从点 $O(0,\ 0)$ 到点 $A\ (\ \dfrac{\pi}{2},\ 1\ )$ 的一段弧．(10 分)

解　补充有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 、$\overrightarrow{BO}$，其中点 $B(\dfrac{\pi}{2},\ 0)$，则由格林公式

$$\oint\limits_{L+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}}(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy=\iint\limits_{D_{xy}}0dxdy=0,\qquad 5\text{ 分}$$

由于 $\oint\limits_{\overrightarrow{AB}}(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$

$$=\int_1^0(1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2)dy=-\frac{1}{4}\pi^2,\qquad 7\text{ 分}$$

$$\oint\limits_{\overrightarrow{BO}}(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 0dx=0,\qquad 9\text{ 分}$$

所以原式= $\oint\limits_{L+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}}(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$

$$-\oint\limits_{\overrightarrow{AB}}(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$$

$$-\oint\limits_{\overrightarrow{BO}}(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$$

$$=\frac{1}{4}\pi^2.\qquad 10\text{ 分}$$

6．求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的收敛域与和函数.（8 分）.

解　因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{n}\right|=1$，所以 $R=\dfrac{1}{\rho}=1$,

且当 $x=\pm1$ 时，所给的幂级数发散，故所求的收敛域为 $(-1,\ 1)$．　4 分

和函数 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(x-1)^2}$.　8 分