第二章　空间解析几何

空间解析几何是大学数学与信息专业的重要基础课之一，它的特点是用代数方法研究几何问题。通过本课程的学习，使学生掌握向量代数，空间直线、平面、二次曲面的基本性质，培养、提高学生的分析和解决问题能力，空间想象能力，初步体会代数与几何在知识与理论上的有机结合，在思想和方法上的融会贯通。在后面学习重积分、曲线积分和曲面积分的时候会用到的。比如：重积分的积分区域界定等。

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究解决几何问题.

基本方法：坐标方法与向量方法。

基本的几何对象：点 ←→ 数组 ←→ 向量

将几何图形和函数（或方程）建立关系，这样确定两种数学对象——空间形式和数量关系之间的的密切联系。

第十讲 坐标系与三维向量

一、空间直角坐标系

二、柱面坐标与球面坐标

三、向量的概念

四、向量的性质与运算

一、空间直角坐标系

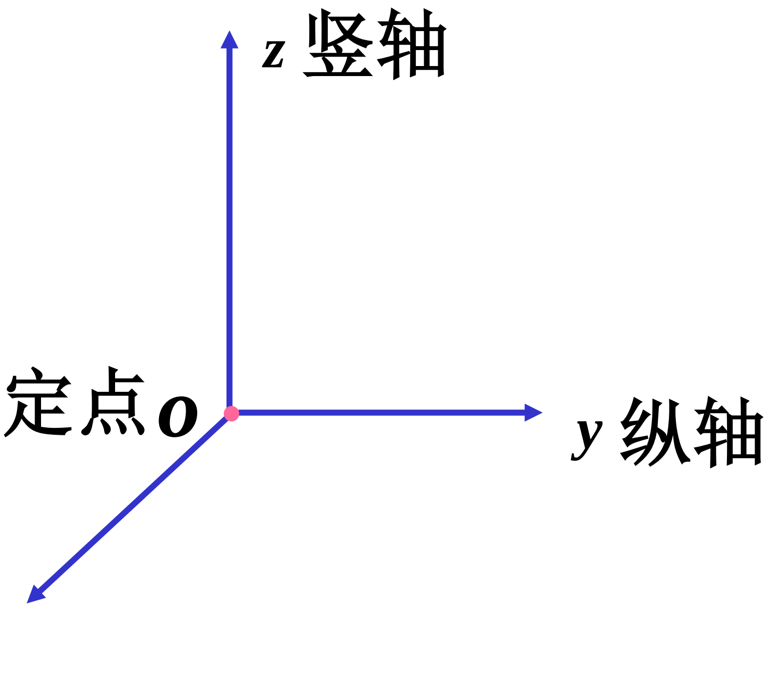
空间直角坐标系的建立

1.在空间中取定一点O

2.过O作三条两两垂直的直线

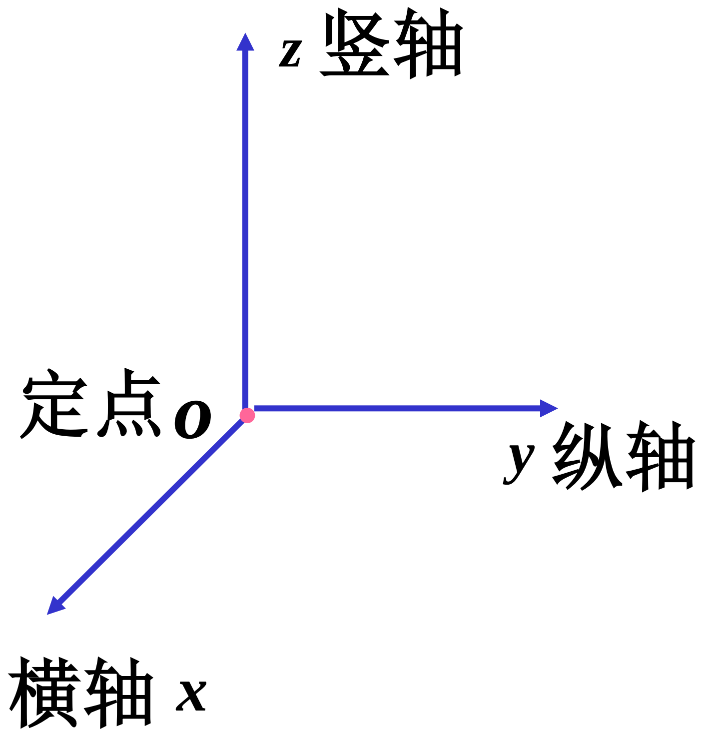
Ox，Oy，Oz

3.在各条直线上取定正向和长度单位，这样就确定了一个直角坐标系$Oxyz$.

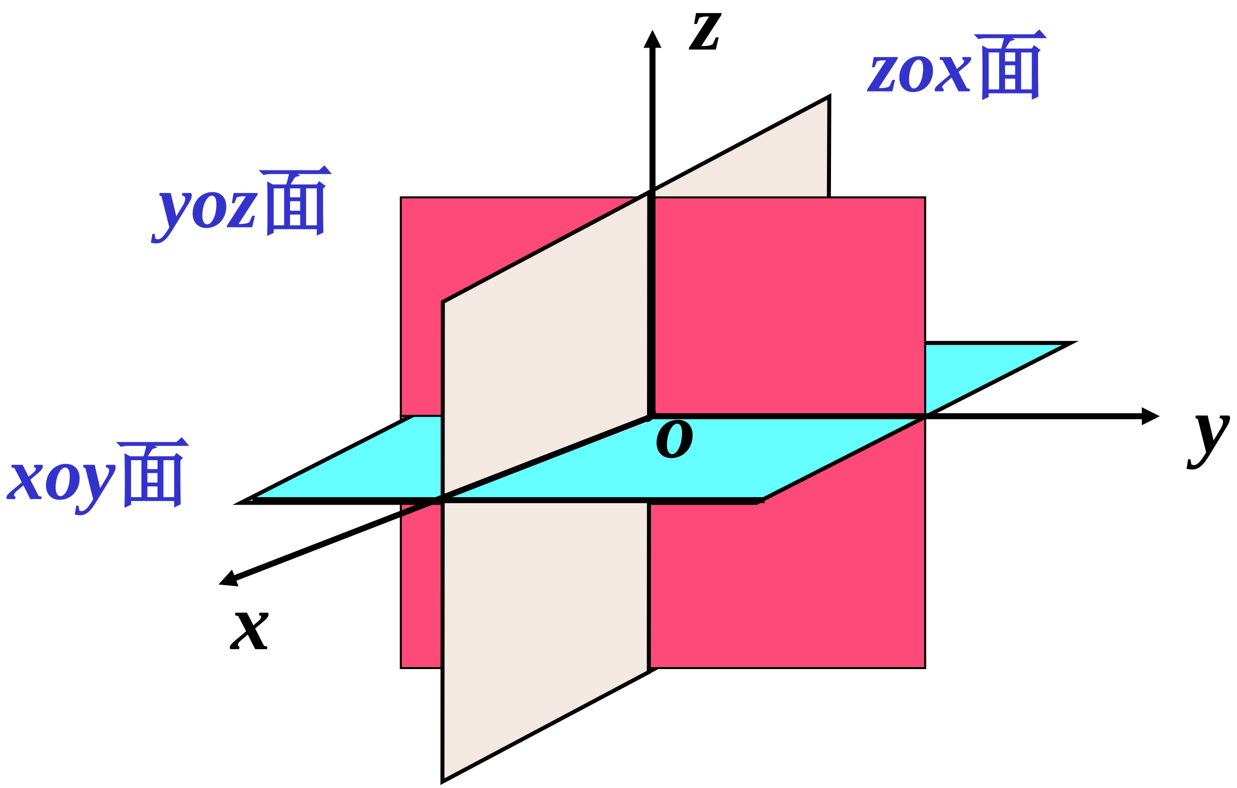


三个坐标轴的正方向符合右手系.

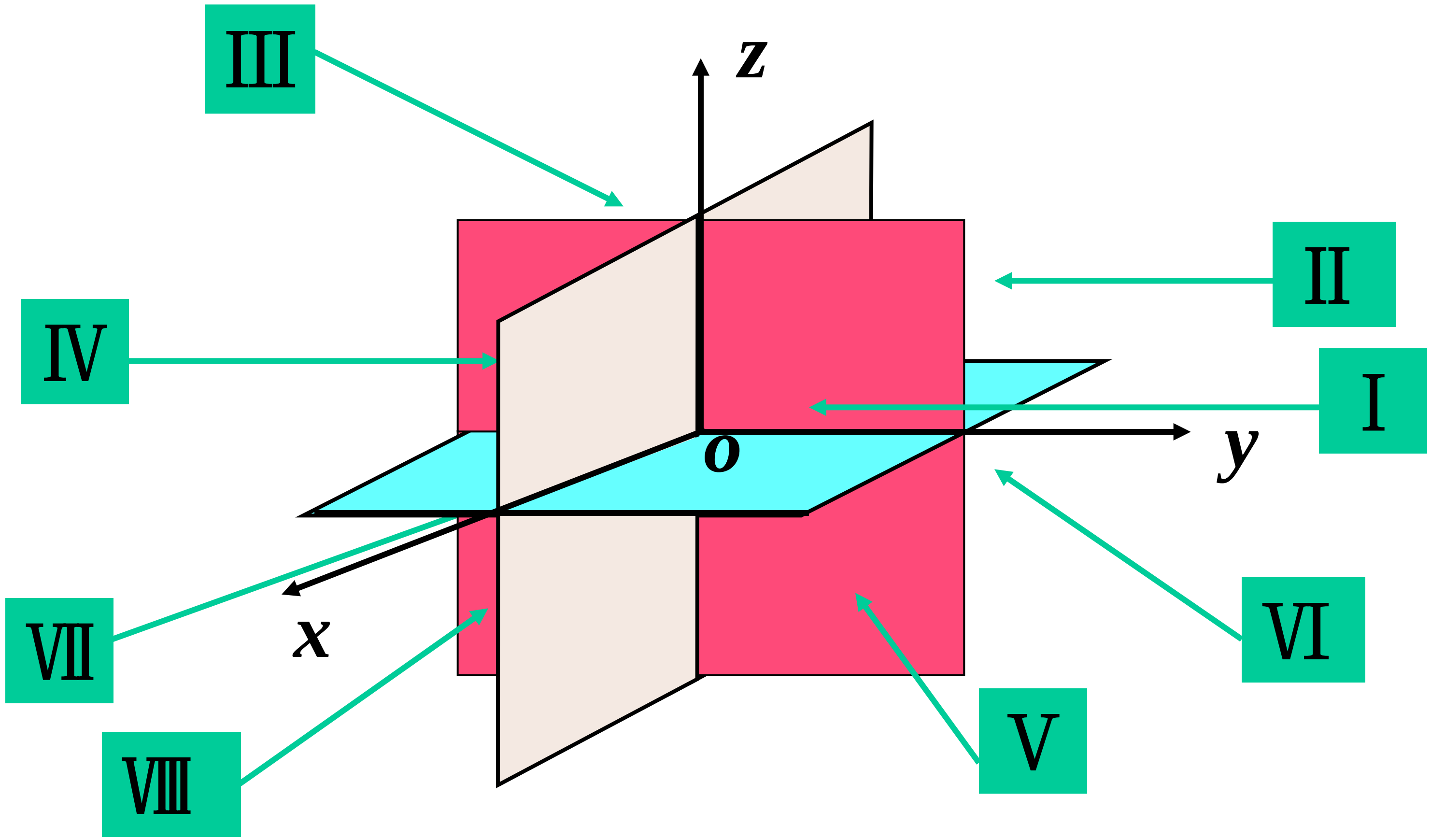
即把右手的拇指指向 x 轴，食指指向 y 轴方向时，中指就可以指向 z 轴的方向，这样的坐标系 $Oxyz$ 叫做右旋坐标系或右手坐标系。



右手坐标系简称右手系.



空间直角坐标系共有三个坐标平面



空间直角坐标系共有八个卦限

卦限	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
横坐标	+	-	-	+	+	-	-	+
纵坐标	+	+	-	-	+	+	-	-
竖坐标	+	+	+	+	-	-	-	-

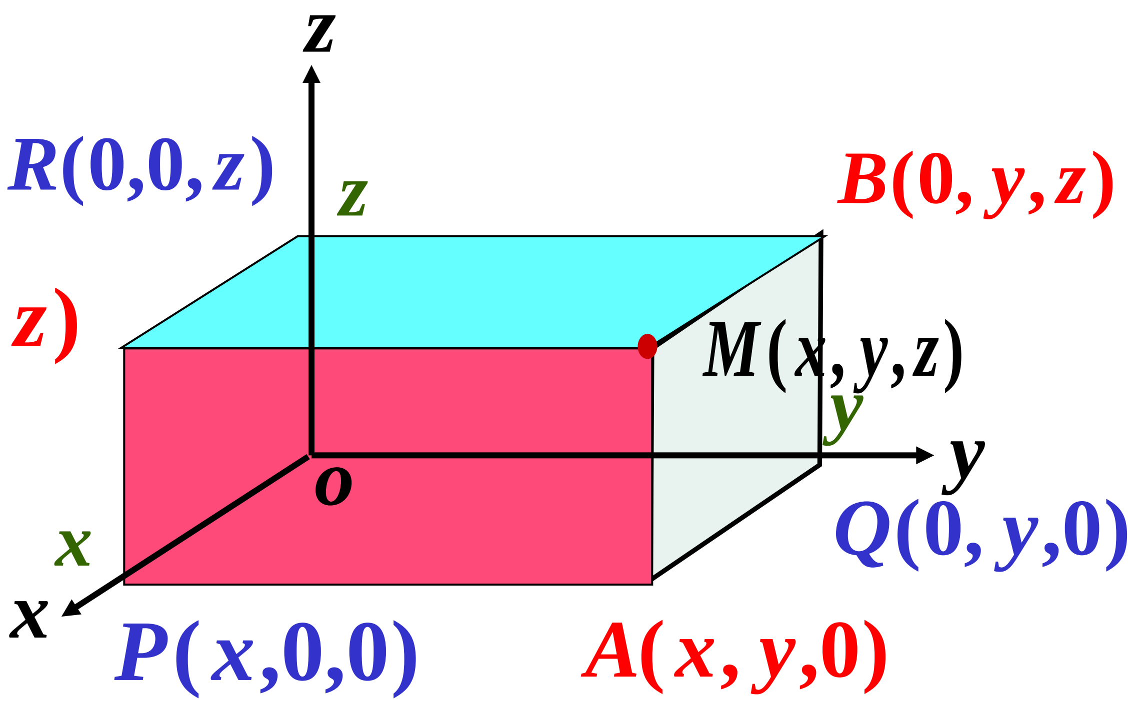
八个卦限内点的符号

空间的点 $\xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组(x,y,z)

特殊点的表示: 坐标轴上的点 $P, Q, R,$

坐标面上的点 $A, B, C,$

$O(0,0,0)$



思考题

在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$A(1,-2,3)$, Ⅳ;

$B(2,3,-4)$, Ⅴ;

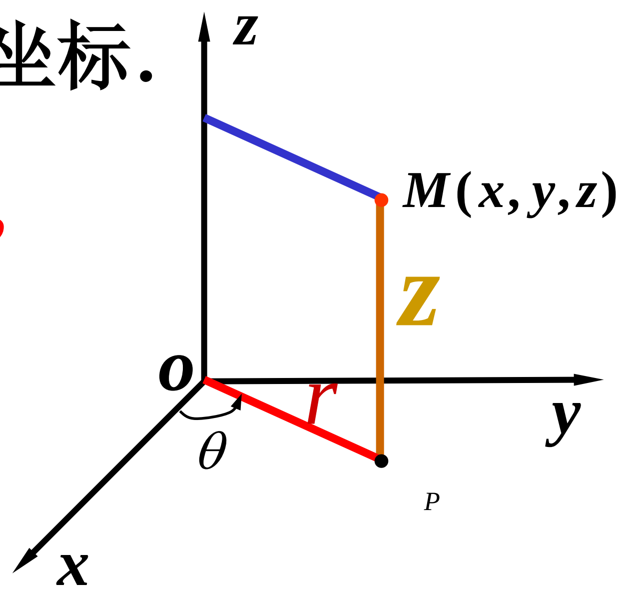
$C(2,-3,-4)$, Ⅷ;

$D(-2,-3,1)$, Ⅲ.

二、 柱面坐标系与球面坐标系

1、柱面坐标系

设 $M(x,y,z)$ 为空间内一点，并设点 M 在 xoy 面上的投影 P 的极坐标为 r,θ，则这样的三个数 r,θ,z 就叫点 M 的柱面坐标.



规定：

$$0 \le r < +\infty,$$

$$0 \le \theta < 2\pi,$$

$$-\infty < z < +\infty.$$

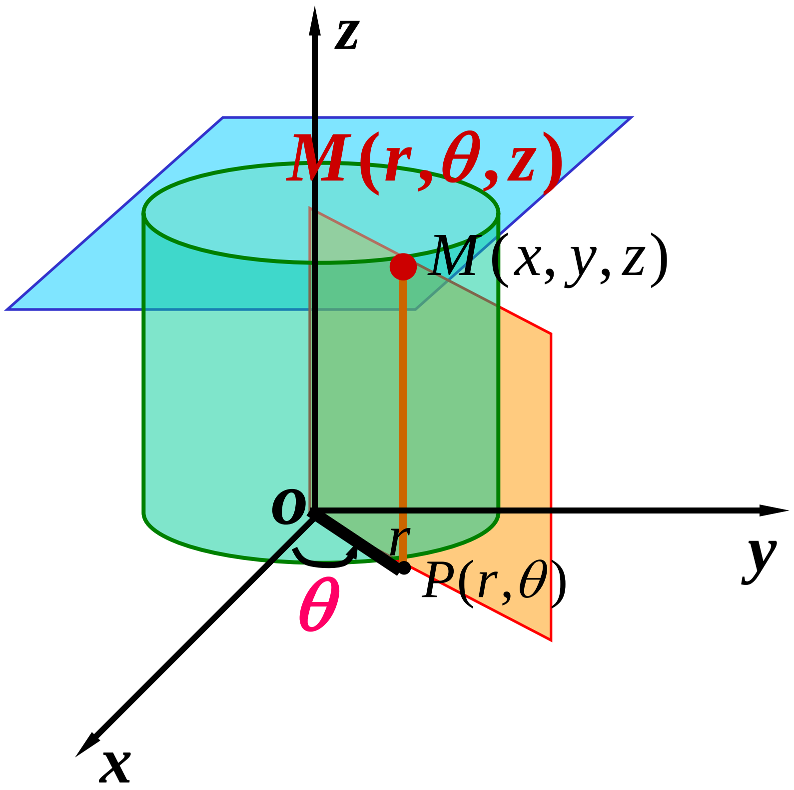
$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

如图，三坐标面分别为

r 为常数 $\longrightarrow$ 圆柱面；

θ 为常数 $\longrightarrow$ 半平面；

z 为常数 $\longrightarrow$ 平面.



柱面坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

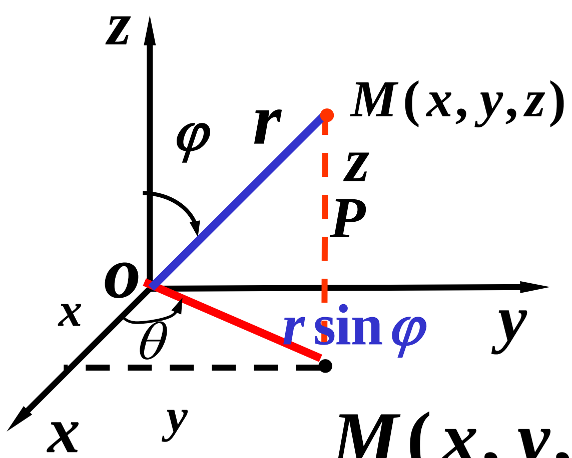
$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

2、球面坐标系

r 为原点 O 与点 M 间的距离

ϕ 为向量 OM 与 z 轴正向的夹角

θ 为从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向转到有向线段 OP 的角



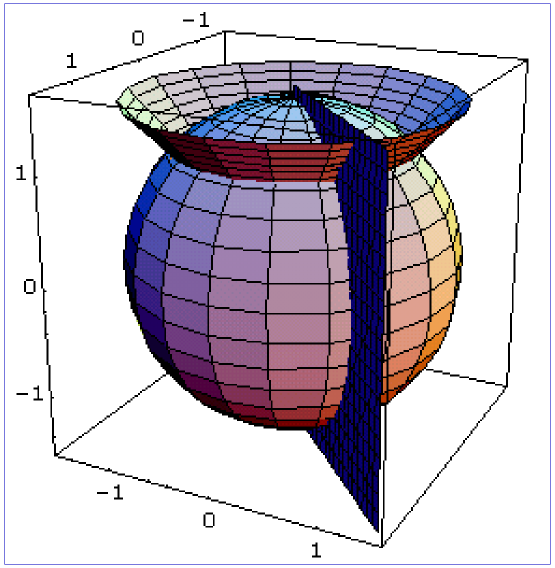
规定：
$$0 \le r < +\infty,$$
$$0 \le \varphi \le \pi,$$
$$0 \le \theta \le 2\pi.$$

$$M(x,y,z) \Leftrightarrow M(r,\varphi,\theta)$$

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$



如图，三组坐标面分别为

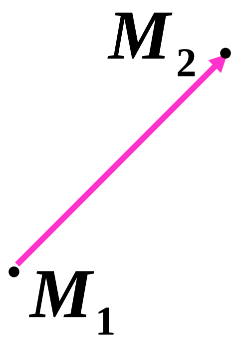
r 为常数 ⟶ 球心在原点、半径为r的球面；

φ 为常数 ⟶ 顶点在原点、半顶角为φ的圆锥面；

θ 为常数 ⟶ 在xoy面的投影为射线$\theta=\theta$的半平面.

三、向量

1、向量的概念



向量(矢量):既有大小又有方向的量.

向量表示:$\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$.

以M_1为起点，M_2为终点的有向线段.

向量的模:向量的大小. 用$|\vec{a}|$ 或 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$表示.

单位向量:模长为1的向量.

零向量:模长为0的向量，记作 $\vec{0}$.

零向量的方向可看作任意方向.

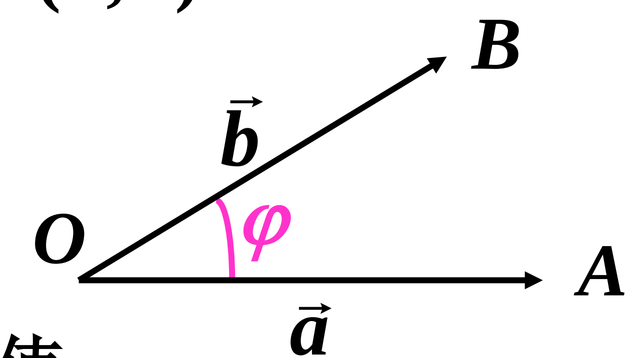
自由向量：不考虑起点位置的向量.

相等向量：大小相等且方向相同的向量.

两向量的夹角：设$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, 任取空间一点O,

作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 规定不超过 π 的 $\angle AOB$ 为 $\vec{a}$

与 $\vec{b}$ 的夹角. 记作$\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$.



特殊地，当两个向量中有一个零向量时，规定它们的夹角可在0与π 之间任意取值.

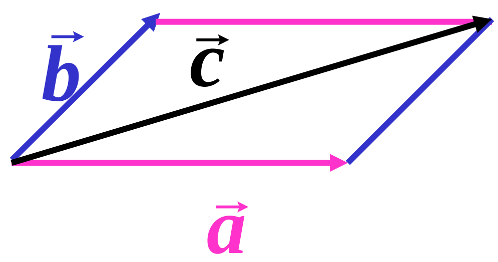
两向量平行　两向量垂直　**两向量共线**

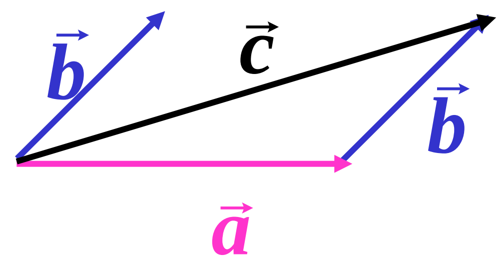
***k*个向量共面**

2、向量的线性运算

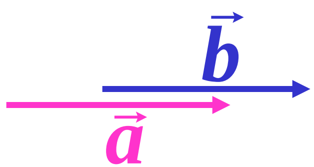
1. 向量的加法：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

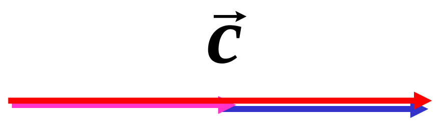
（平行四边形法则当$\vec{a}\nparallel\vec{b}$） （三角形法则）



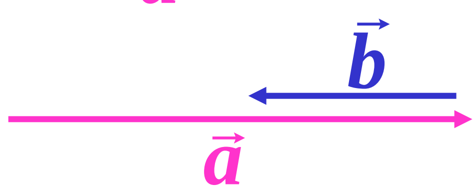


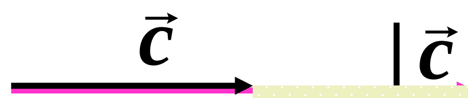
特殊地：若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$ 分为同向和反向（三角形法则）





$$|\vec{c}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$$





$$|\vec{c}|=\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big|$$

向量的加法符合下列运算规律：

（1）交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

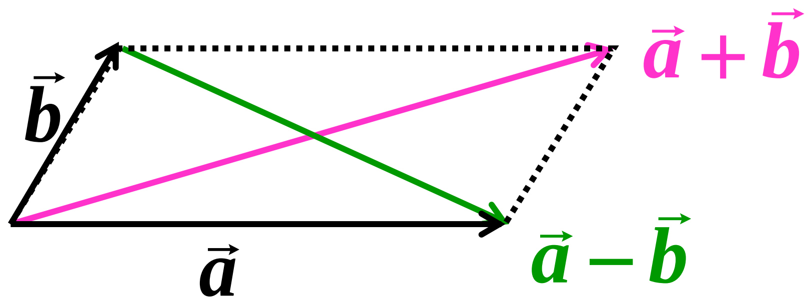
（2）结合律：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

任意多个向量加法的法则

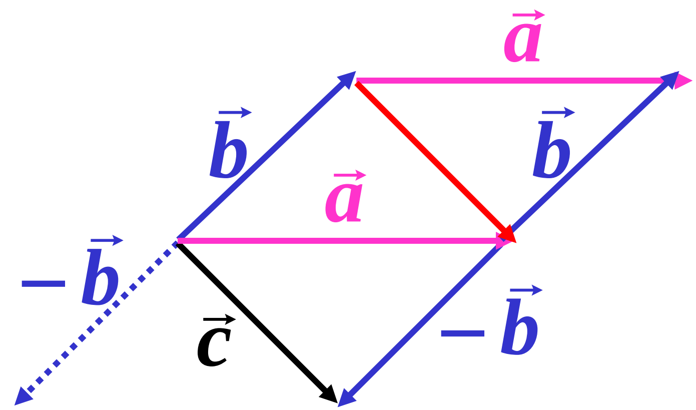
以前一向量的终点作为后一向量的起点，相继作向量，……，最后，以第一个向量的起点作为起点，最后一个向量的终点为终点作一个向量，这一向量即为所求的和.

$\vec{a}$的负向量：与 $\vec{a}$ 大小相等、方向相反的向量. 记作 $-\vec{a}$.

2. 减法：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$



平行四边形法则



$$\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$$
$$=\vec{a}-\vec{b}$$

三角形法则

（3） $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$

$$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}| \qquad |\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

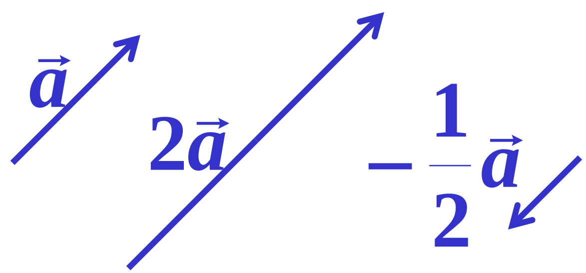
3. 向量与数的乘法

设λ是一个数，向量$\vec{a}$与λ的乘积$\lambda\vec{a}$规定为一个向量:

(1) $\lambda > 0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向，且$|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$;

(2) $\lambda = 0$时，$\lambda\vec{a} = \vec{0}$;

(3) $\lambda < 0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向，且$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.



特别地，$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$，$(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

数与向量的乘积符合下列运算规律：

（1）结合律：$\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

（2）分配律：$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

向量的加减法及数乘向量统称为向量的线性运算.

向量的单位化

设 $\vec{e}_{\vec{a}}$ 表示与非零向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量，按照向量与数的乘积的规定，

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}_{\vec{a}} \Longrightarrow \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{e}_{\vec{a}}$$

两个向量的平行关系

定理1 设向量 $\vec{a} \neq \vec{0}$，那末向量 $\vec{b}$ 平行于 $\vec{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

证明 充分性显然；

必要性 设 $\vec{b} \parallel \vec{a}$， 取 $|\lambda| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

当 $\vec{b} = \vec{0}$时，λ 取0值，有 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ 成立；

当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向时 λ 取正值，

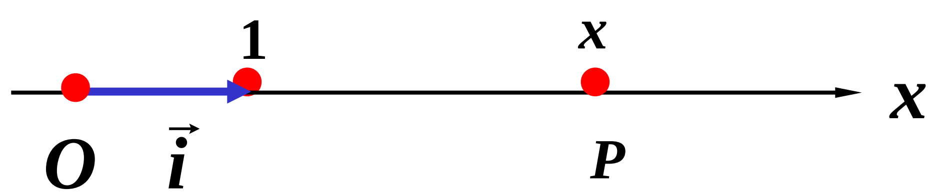
$$\because |\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = |\vec{b}|, \quad \therefore \vec{b} = \lambda\vec{a};$$

同理，当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向时 λ 取负值，也有 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ 成立.

唯一性证明略.

我们知道，给定一个点、一个方向及单位长度就能够确定一条数轴，因此，给定一个点及一个单位向量就能够确定一条数轴.

设点O及单位向量$\vec{i}$确定了数轴Ox.



对于轴上任一点P，对应一个向量$\overrightarrow{OP}$，因为$\overrightarrow{OP} /\!/ \vec{i}$，由定理1，必有唯一的实数$x$，使

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i},$$

因此，　点$P \longleftrightarrow \overrightarrow{OP} = x\vec{i} \longleftrightarrow$ 实数x

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i},$$

$$\text{点}P \longleftrightarrow \overrightarrow{OP} = x\vec{i} \longleftrightarrow \text{实数}x$$

实数x称为轴上有向线段OP的值，并定义实数x为轴上点P的坐标.

由上可知: 轴上点P的坐标为x的充要条件是

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$$

3、利用坐标作向量的线性运算

若已知向量

$$\vec{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z),\quad \vec{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z),$$

则 $\vec{a}=\ a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad \vec{b}=\ b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$

$$\vec{a}+\vec{b}=\ (a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k},$$

$$\therefore \vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,\ a_y\pm b_y,\ a_z\pm b_z);$$

$$\lambda\vec{a}=\ (\lambda a_x)\vec{i}+(\lambda a_y)\vec{j}+(\lambda a_z)\vec{k},$$

$$\therefore \lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z).$$

定理1指出，当向量 $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时，向量 $\vec{b} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 存在数λ，使 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$，

即$(b_x, b_y, b_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$，

即
$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda.$$

注：1. 当 $a_y \neq 0,\ a_z \neq 0$ 时，$\dfrac{b_x}{0} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z}$

应理解为 $b_x = 0,\ \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z}$.

2. 当 $a_z \neq 0$ 时，$\dfrac{b_x}{0} = \dfrac{b_y}{0} = \dfrac{b_z}{a_z}$ 应理解为

$b_x = 0,\ b_y = 0.$

4、向量的模、方向角

（1） 向量的模与空间两点间的距离公式

设向量 $\vec{r}=(x,y,z)$, 作 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, 如图，则

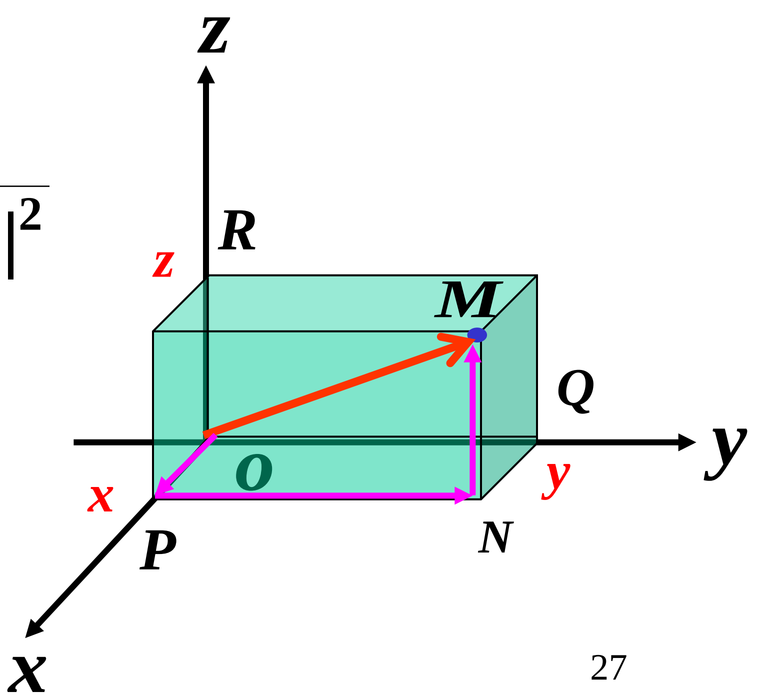
$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

$$\therefore |\vec{r}|=|OM|$$

$$=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}$$

$$=\sqrt{|x|^2+|y|^2+|z|^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$



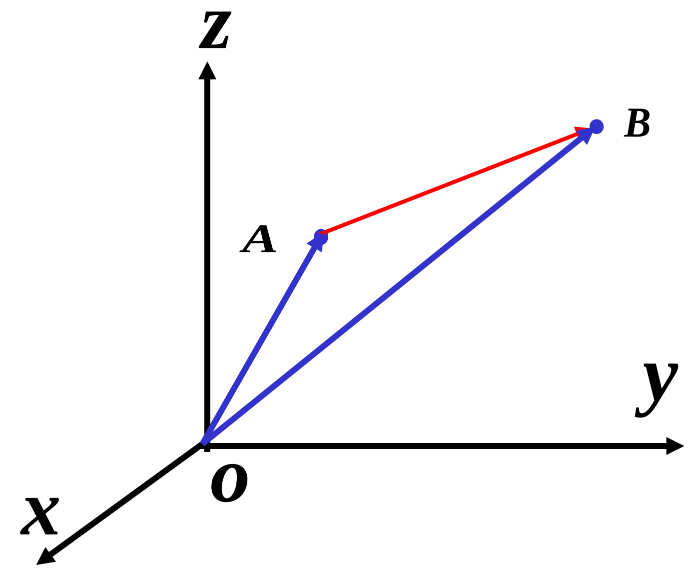
设有两点分别为 $A(x_1, y_1, z_1)$,$B(x_2, y_2, z_2)$,

则点A与点B之间的距离$|AB|$就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模.

由 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1)$

$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,



得到 $|AB| = |\overrightarrow{AB}|$

$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$

空间两点间距离公式

(2) 非零向量的方向角与方向余弦

非零向量$\vec{r}$与三条坐标轴Ox、Oy、Oz的正向的夹角 α、β、γ 称为方向角.

$$0 \le \alpha \le \pi,\quad 0 \le \beta \le \pi,\quad 0 \le \gamma \le \pi.$$

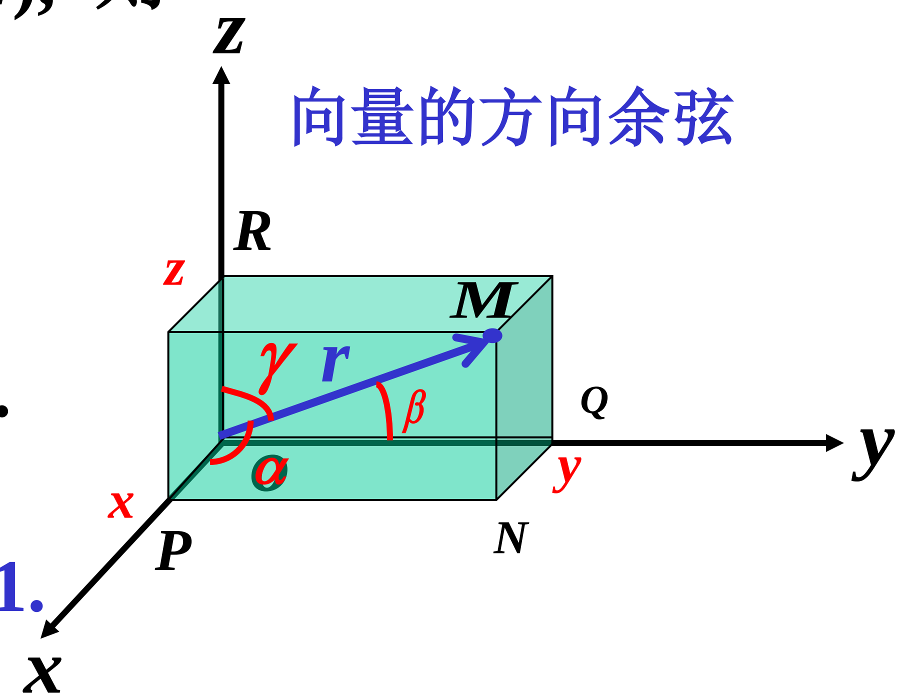
设 $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = (x, y, z)$, 则

$$\cos\alpha = \frac{x}{|OM|} = \frac{x}{|r|},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|r|},\quad \cos\gamma = \frac{z}{|r|}.$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma) = \vec{e}_r\ .$$



例 1 设有向量$\overrightarrow{P_1P_2}$，已知$|\overrightarrow{P_1P_2}|=2$，它与 x轴和 y轴的夹角分别为$\frac{\pi}{3}$和$\frac{\pi}{4}$，如果P_1的坐标为$(1,0,3)$，求P_2的坐标.

解 设向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角为α、β、γ，

则$\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\because \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,\quad \therefore \cos\gamma=\pm\frac{1}{2},$$

$$\therefore \overrightarrow{P_1P_2}=|\overrightarrow{P_1P_2}|\cdot\vec{e}_{\overrightarrow{P_1P_2}}=(1,\ \sqrt{2},\ \pm1).$$

设P_2的坐标为(x,y,z)，则

$\overrightarrow{P_1P_2}=(x-1,\ y,\ z-3)$，所以$P_2$的坐标为

$(2,\ \sqrt{2},\ 4)$，或$(2,\ \sqrt{2},\ 2)$.

思考题

一、选择题

1．点$(2, -3, 1)$在空间直角坐标系中的位置是（　B　）．

(A)　zox平面上　　(B)　第 IV 卦限内

(C)　第Ⅶ卦限　　(D)　y轴上

2．点$(2, -3, 1)$关于坐标原点对称的点是（　A　）．

(A)　$(-2, 3, -1)$　　(B)　$(-2, -3, -1)$

(C)　$(2, -3, -1)$　　(D)　$(2, 3, 1)$

3．在梯形 $OABC$ 中，$\overrightarrow{CB} // OA$，且$|\overrightarrow{CB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|$，设 M、N 分别为$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{OA}$的中点，若$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{MN}=$（ B ）．

(A) $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

(B) $\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}$

(C) $\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}$

(D) $\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$

4．设$\overrightarrow{AB}$与 u 轴的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影是（ C ）．

(A) $\overrightarrow{AB}\cos\frac{\pi}{3}$

(B) $\overrightarrow{AB}\sin\frac{\pi}{3}$

(C) $|\overrightarrow{AB}|\cos\frac{\pi}{3}$

(D) $|\overrightarrow{AB}|\sin\frac{\pi}{3}$

5. 设向量$\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k},\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k},\vec{c}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$，则向量$\vec{d}=4\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$在$y$轴上的投影及在$x$轴上的分向量为（ A ）.

(A) 7 和$13\vec{i}$　　(B) $7\vec{j}$和 $13\vec{i}$

(C) $7\vec{j}$和 13　　(D) 7 和 13

二、计算题

1. 求点 $M(2, 3, 6)$到原点以及到各坐标轴的距离.

解：M到原点的距离为：$d=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$

M到x轴的距离为：$d_1=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

M到y轴的距离为：$d_2=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

M到z轴的距离为：$d_3=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

作业

1．已知 $M_1(4,\sqrt{2},1)$、$M_2(3,0,2)$，求与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同向的单位向量及其方向余弦、方向角.

2．已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的终点坐标为 $(-1,2,1)$ $|\overrightarrow{AB}|=2$，且 $\overrightarrow{AB}\,//\,\vec{a}$，$\vec{a}=(1,2,2)$，求 $\overrightarrow{AB}$ 的起点坐标.