自动控制原理答案三十

一、解：$\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{G_1G_2}{1+(1+H_1)G_1G_2}$

$\dfrac{C(s)}{N(s)}=$（$-1+\dfrac{G_2G_3}{1+G_1G_2H_1}$）（$\dfrac{1}{1+\dfrac{G_1G_2}{1+G_1G_2H_1}}$）$=\dfrac{-1+G_2G_3-G_1G_2H_1}{1+G_1G_2H_1+G_1G_2}$

二、解：系统的闭环传递函数为

$$G_B(s)=\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G_c(s)}{s(0.1s+1)(0.2s+1)+G_c(s)}$$

系统的闭环特征方程为

$$D(s)=s(0.1s+1)(0.2s+1)+Kp$$
$$=2s^3+30s^2+100s+100Kp$$

列劳斯列阵

$$\begin{array}{lll}
s^3 & 2 & 100 \\
s^2 & 30 & 100Kp \\
s & \dfrac{30\times100-2\times100Kp}{30} & \\
s^0 & 100Kp &
\end{array}$$

若要使系统稳定，其充要条件是劳斯列表的第一列均为正数，得稳定条件为

$100K_p>0$

$$\frac{30*100-2*100K_p}{30}>0$$

求得 K_p 取值范围：$0<K_p<15$

三、解：（1）系统的特征方程为

$$(0.5s+1)(Ts+1)+10(1-s)=0$$

以不含 T 的项除以方程两边得：$1+\dfrac{Ts(0.5s+1)}{11-9.5s}=0$，该方程可进一步改写成：

$1-\dfrac{T^*s(s+2)}{s-\dfrac{11}{9.5}}=0$ 式中：$T^*=\dfrac{T}{2\times9.5}$

系统等效开环传递函数为：$G^*(s)H^*(s)=\dfrac{T^*s(s+2)}{s-\dfrac{11}{9.5}}$

山此可画出以 T^* 或（T）为变量的广义根轨迹，有方程

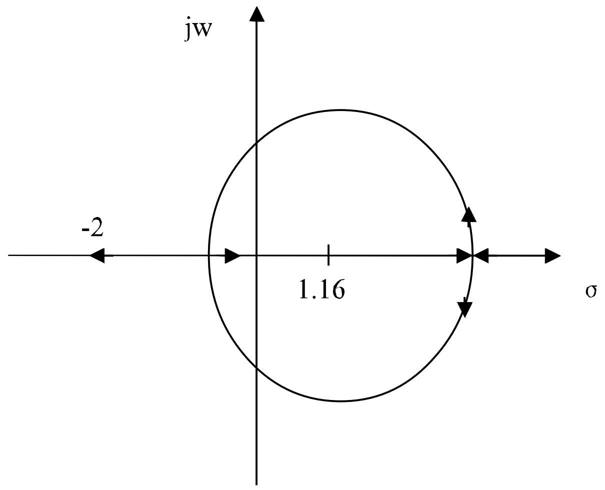
$1 - \dfrac{T^* s(s+2)}{s - \dfrac{11}{9.5}} = 0$ 可知，该广义根轨迹满足0°相角条件。实轴上的根轨迹为[-2,0][1.16,+∞),

令$s = \sigma + j\omega$代人相角条件，有：

即 $\arctan\dfrac{\omega}{\sigma} + \arctan\dfrac{\omega}{\sigma+2} = \arctan\dfrac{\omega}{\sigma - \dfrac{11}{9.5}} + 2k\pi$ ， 两 边 取 正 切 得 ，

$\dfrac{\dfrac{\omega}{\sigma} + \dfrac{\omega}{\sigma+2}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\sigma(\sigma+2)}} = \dfrac{\omega}{\sigma - 1.16}$ 整理并配方，得$(\sigma - 1.16)^2 + \omega^2 = (1.91)^2$，上式为一圆方程，

故复平面上的根轨迹是以极点$s = 1.16$为圆心，以$r = 1.91$为半径的圆周。
根轨迹如右图所示



⑵ 山劳斯莱斯判据可求出系统临界稳定时的两个根$s_{1,2} = \pm j1.5$相应的 T 值为 T=9.5，系统临界阻尼时的闭环极点可以山分离点方程求出，此题也可右图方程中，令 W=0,得到$(\sigma - 1.16)^2 = (1.91)^2$得$\sigma_1$=-0.75, σ_2 =3.07,这两个点就是根轨迹的分离点。

四、解：$G(jw)H(jw) = \dfrac{K}{jw(1 + T_1 jw)(1 + T_2 jw)}$，令虚部为 0，得$W_2 = \dfrac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$闭环系统稳定时，必须满足$P(W) = \dfrac{-\mathrm{k}(T_1 + T_2)}{1 + W_2^2(T_1^2 + T_2^2) + W_2^4 T_1^2 T_2^2} = -\dfrac{K T_1 T_2}{T_1 + T_2} > -1$

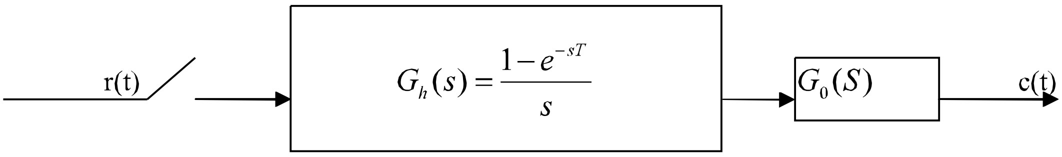
即$K < \dfrac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$

所以当$K<\dfrac{T_1T_2}{T_1+T_2}$时，$G(jw)H(jw)$曲线不包括（-1，j0）点，闭环系统稳定；

当$K>\dfrac{T_1T_2}{T_1+T_2}$时，正好通过（-1，j0）点，系统临界稳定；

当$K>\dfrac{T_1T_2}{T_1+T_2}$时，包括（-1，j0）点，闭环系统不稳定。

五、解



$$\frac{G_0(S)}{S}=\frac{a}{s^2(s+a)}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right)$$

$$Z\left[\frac{G_0(S)}{S}\right]=\frac{TZ}{(Z-1)^2}-\frac{1}{a}\left(\frac{Z}{Z-1}-\frac{Z}{Z-e^{-aT}}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{a}Z\left[\left(e^{-aT}+aT-1\right)Z+\left(1-aTe^{-aT}-e^{-aT}\right)\right]}{\left(Z-1\right)^2\left(Z-e^{-aT}\right)}$$

$$\therefore G\left(Z\right)=\left(1-\frac{1}{Z}\right)Z\left[\frac{G_0(S)}{S}\right]=\frac{\frac{1}{a}Z\left[\left(e^{-aT}+aT-1\right)Z+\left(1-aTe^{-aT}-e^{-aT}\right)\right]}{\left(Z-1\right)^2\left(Z-e^{-aT}\right)}$$

六、解(1)　　$G\left(s\right)=C\left(sI-A\right)^{-1}b=\dfrac{1}{\left(s+1\right)\left(s+4\right)}$

$$\left|\lambda I-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 4 & \lambda+5\end{vmatrix}=\lambda^2+5\lambda+4=\left(\lambda+1\right)\left(\lambda+4\right)$$

特征值为-1，-4，故系统稳定

（2）$rank\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -5\end{bmatrix}=2$　　故系统可控

$rank\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2$　　故系统能观

（3）$\Phi(t)=L^{-1}\left[(SI-A)^{-1}\right]=L^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{\frac{4}{3}}{S+1}+\dfrac{-\frac{1}{3}}{S+4} & \dfrac{\frac{1}{3}}{S+1}+\dfrac{-\frac{1}{3}}{S+4} \\ \dfrac{-\frac{4}{3}}{S+1}+\dfrac{\frac{4}{3}}{S+4} & \dfrac{-\frac{1}{3}}{S+1}+\dfrac{\frac{4}{3}}{S+4} \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t} \\ -\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{-4t} & -\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$X(t)=\Phi(t)X(0)+\int_0^t \Phi(\tau)Bd\tau$$

$$=\int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-\tau}-\frac{1}{3}e^{-4\tau} \\ -\frac{1}{3}e^{-\tau}+\frac{4}{3}e^{-4\tau} \end{bmatrix} d\tau=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{12}e^{-4t}+\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

（4）又（1）知，A 的特征值为-1，-4，对应的特征向量可取为$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$，

令$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$，有$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$