第十章 电磁感应 *Electromagnetic Induction*
电 磁 场 *Electromagnetic Field*

10.3/4 动生电动势 *Motional Electromotive Force*
感生电动势 *Induced Electromotive Force*

电磁感应定律：

$$\boxed{\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}}$$

$$\boxed{d\Phi_m = \vec{B}\cdot d\vec{S} = B\cos\theta\, dS}$$

根据引起磁通量变化原因的不同，将感应电动势分为两类：

1、动生电动势：

磁场不随时间而改变，导体在磁场中运动，

或者导体回路面积变化、取向变化；

2、感生电动势：

导体回路或导体不动，磁场随时间而改变.

一、动生电动势

1、动生电动势：磁场不随时间而改变，导体在磁场中运动，或者导体回路面积变化、取向变化所产生的感应电动势。

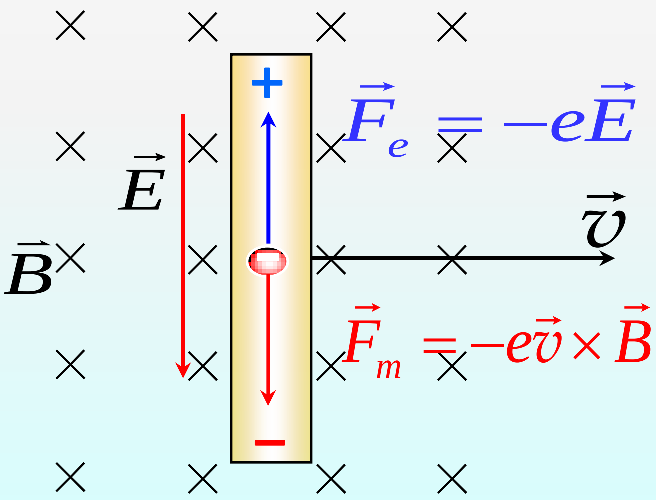
2、动生电动势的产生机制 (以金属导体为例)

1) 运动导体中的自由电子受到磁场的洛伦兹力作用

2) 运动导体的两端出现电荷后，使导体内形成强度为 $\vec{E}$ 的电场

3）平衡时：$\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0$

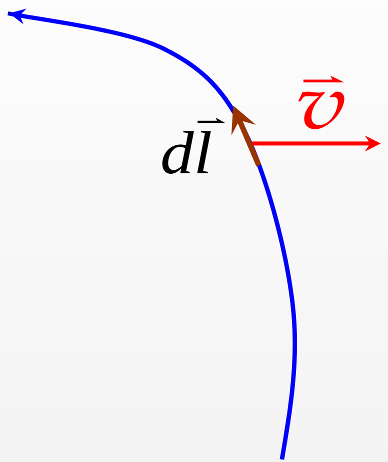
4）<u>形成动生电动势的实质:</u>
<u>洛伦兹力是</u>
<u>形成动生电动势的非静电力</u>。



3、动生电动势的计算

1）非静电场场强

$$\vec{F}_k = q\vec{v}\times\vec{B},\quad \vec{E}_k = \frac{\vec{F}_k}{q},\quad \boxed{\vec{E}_k = \vec{v}\times\vec{B}}$$



2）计算动生电动势的一般步骤

（1）规定一积分路线的方向 $\vec{l}$；

（2）任取一线元矢量 $d\vec{l}$，考察该处的 $\vec{v}$ 和 $\vec{B}$，

该处的非静电场场强为：$\vec{E}_k = \vec{v}\times\vec{B}$

计算该线元运动时产生的电动势：$d\varepsilon_i = \vec{E}_k\cdot d\vec{l} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

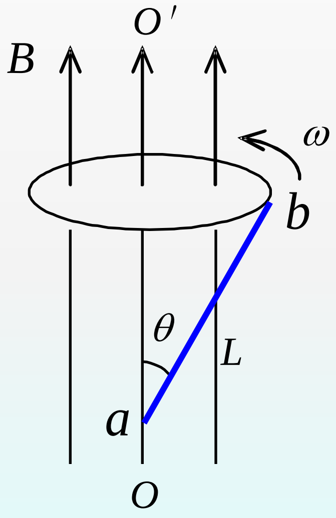
（3）计算该导线运动时产生的动生电动势

$$\boxed{\varepsilon_i = \int_l (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}}$$

$\varepsilon_i > 0$ 电动势方向与积分路线方向相同

$\varepsilon_i < 0$ 电动势方向与积分路线方向相反

例10-3: 一长度为L的金属杆***ab***在均匀磁场$\vec{B}$ 中绕平行于磁场方向的定轴OO'转动，已知杆的角速度为ω，杆相对于磁场的方位角为θ，求金属杆中的动生电动势。



例10-3： 一长度为L的ab在均匀磁场 $\vec{B}$ 中绕平行于磁场方向的定轴OO'转动，已知杆的角速度为 ω，杆相对于磁场的方位角为θ，求金属杆中的动生电动势。

解： 选 $a \to b$方向为积分路线

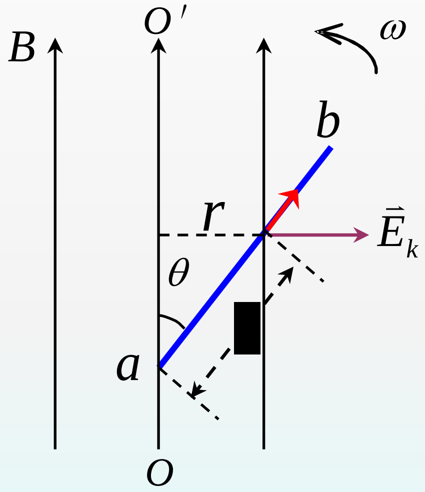
距a点为l 处取一线元矢量 $d\vec{l}$， $v = r\omega = l\omega\sin\theta$

该处的非静电场场强为： $\vec{E}_k = \vec{v} \times \vec{B}$

$$E_k = vB = l\omega B\sin\theta$$

该线元运动时产生的电动势：$d\varepsilon_i = \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$

$$d\varepsilon_i = E_k dl\cos(90^0 - \theta) = E_k dl\sin\theta = l\omega Bdl\sin^2\theta$$



该金属杆运动时产生的动生电动势：

$$\varepsilon_i = \int_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_0^L l\omega Bdl\sin^2\theta = \frac{1}{2}\omega BL^2\sin^2\theta$$

$\varepsilon_i > 0$

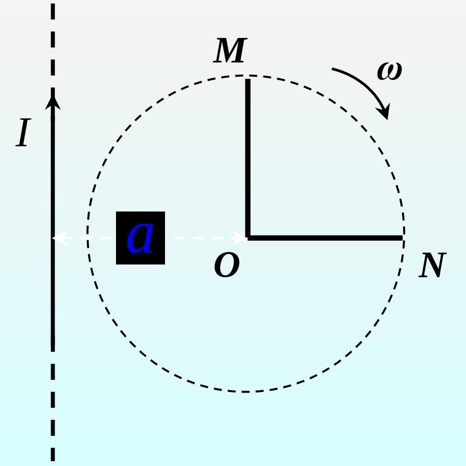
电动势方向：$a \to b$

b点电势高

例8-4: 一通有稳恒电流 I 的无限长直导线，导线旁共面放有一长度为L的金属棒，金属棒绕其一端O顺时针匀速转动，转动角速度为 ω，O点至导线的垂直距离为a，

求：1) 当金属棒转至与长直导线平行，如图中OM位置时，金属棒内感应电动势的大小和方向；

2) 当金属棒转至与长直导线垂直，如图中ON位置时，金属棒内感应电动势的大小和方向。



例10-4： 一通有稳恒电流 I 的无限长直导线，导线旁共面放有一长度为L的金属棒，金属棒绕其一端O顺时针匀速转动，转动角速度为 ω，O点至导线的垂直距离为a，

求：1) 当金属棒转至与长直导线平行，如图中OM位置时，金属棒内感应电动势的大小和方向；

解： 1) 选 $O \to M$ 方向为积分路线

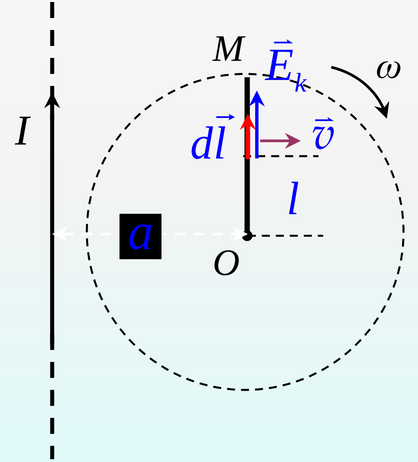
金属棒所在处的磁感应强度为：$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$，方向 $\otimes$

距O点为l 处取一线元矢量$d\vec{l}$，　　$v = l\omega$

该处的非静电场场强为：$\vec{E}_k = \vec{v} \times \vec{B},\ E_k = vB = l\omega \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

该线元运动时产生的电动势：$d\varepsilon_i = \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$

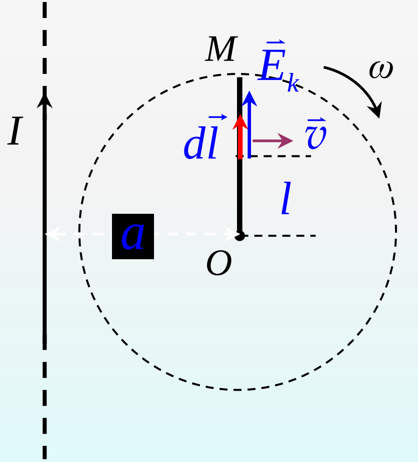
$$d\varepsilon_i = E_k dl = \frac{\mu_0 I\omega}{2\pi a} l dl$$



例10-4： 一通有稳恒电流 I 的无限长直导线，导线旁共面放有一长度为L的金属棒，金属棒绕其一端O顺时针匀速转动，转动角速度为 ω，O点至导线的垂直距离为a，

求：1) 当金属棒转至与长直导线平行，如图中OM位置时，金属棒内感应电动势的大小和方向；

解： 1) 则金属棒转至OM位置时，产生的动生电动势：



$$\varepsilon_i = \int_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_0^L \frac{\mu_o I\omega}{2\pi a} l dl = \frac{\mu_o I\omega}{4\pi a} L^2$$

$\varepsilon_i > 0$，　电动势方向：$O \rightarrow M$

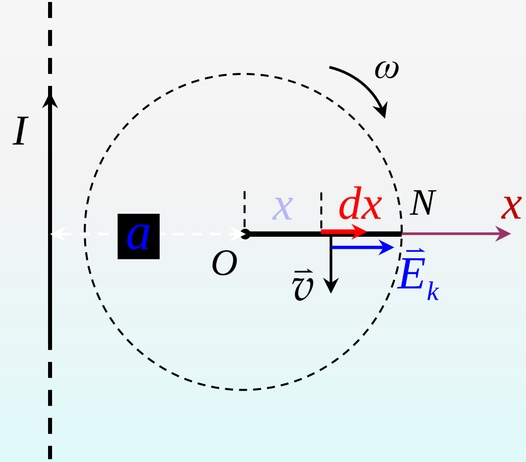
M点电势高

例10-4： 一通有稳恒电流 I 的无限长直导线，导线旁共面放有一长度为L的金属棒，金属棒绕其一端O顺时针匀速转动，转动角速度为 ω，O点至导线的垂直距离为a，

求：2) 当金属棒转至与长直导线垂直，如图中ON位置时，金属棒内感应电动势的大小和方向。

解： 2) 选 $O \to N$ 方向为坐标系Ox

x处的磁感应强度为：$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)}$，方向 $\otimes$



距O点为x 处取一线元矢量 dx， $v = x\omega$

该处的非静电场场强为：$\vec{E}_k = \vec{v} \times \vec{B}$， $E_k = vB = \dfrac{\mu_0 I\omega}{2\pi} \dfrac{x}{(x+a)}$

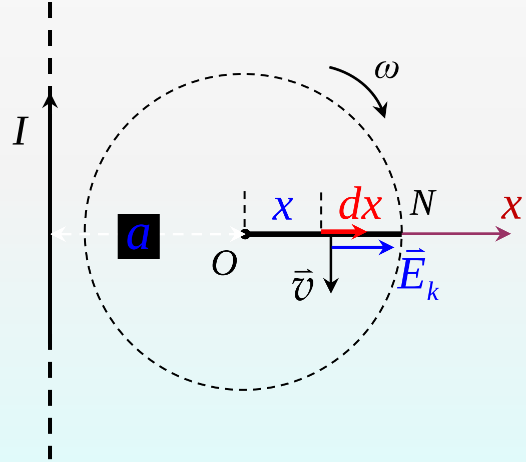
该线元运动时产生的电动势：$d\varepsilon_i = \vec{E}_k \cdot d\vec{x}$

$$d\varepsilon_i = E_k dx = \frac{\mu_0 I\omega}{2\pi} \frac{x}{(x+a)} dx$$

例10-4: 一通有稳恒电流 I 的无限长直导线，导线旁共面放有一长度为L的金属棒，金属棒绕其一端O顺时针匀速转动，转动角速度为 ω，O点至导线的垂直距离为a，

求：2) 当金属棒转至与长直导线垂直，如图中ON位置时，金属棒内感应电动势的大小和方向。

解：2) 则金属棒转至ON位置时，产生的动生电动势：



$$\varepsilon_i = \int_0^L \frac{\mu_0 I\omega}{2\pi}\frac{x}{(x+a)}dx$$

$$= \frac{\mu_0 I\omega}{2\pi}\left[L - a\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right]$$

$\varepsilon_i > 0,$　　电动势方向：$O \to N$

N点电势高

二、感生电动势和感生电场

1、感生电动势： 导体回路或导体不动，由于磁场变化而产生的感应电动势.

2、感生电场

产生感生电动势的非静电力？

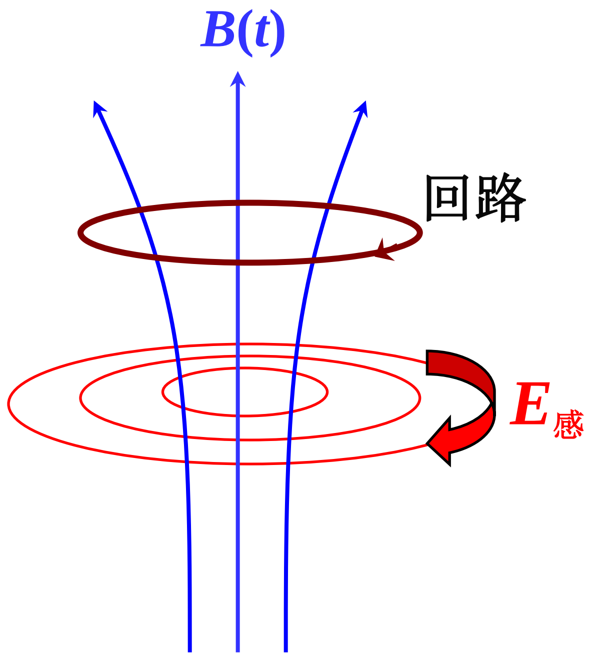
问题：是不是洛伦兹力？

1861年，麦克斯韦假设：

变化磁场在其周围激发一种电场，

——感生电场（涡旋电场）

感生电流的产生就是这一电场作用于导体中的自由电荷的结果。



二、感生电动势和感生电场

2、感生电场

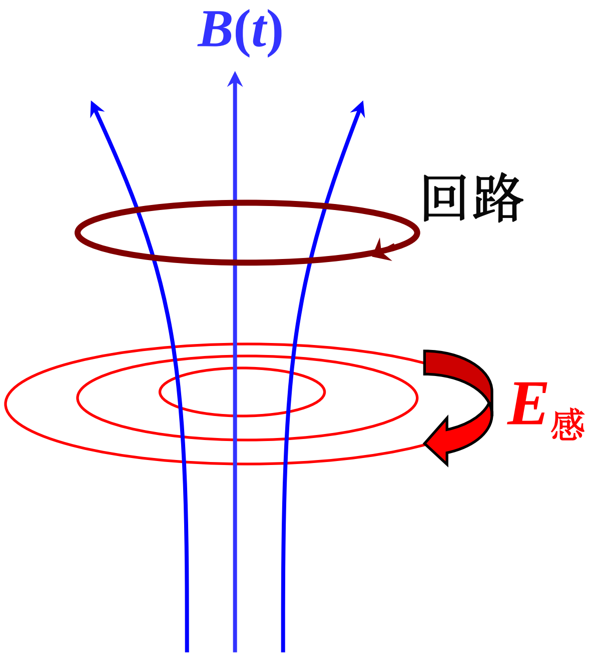
根据电动势的定义：$\varepsilon_i = \oint_l \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l}$

法拉第电磁感应定律： $\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi_m}{dt}$

$$\oint_l \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

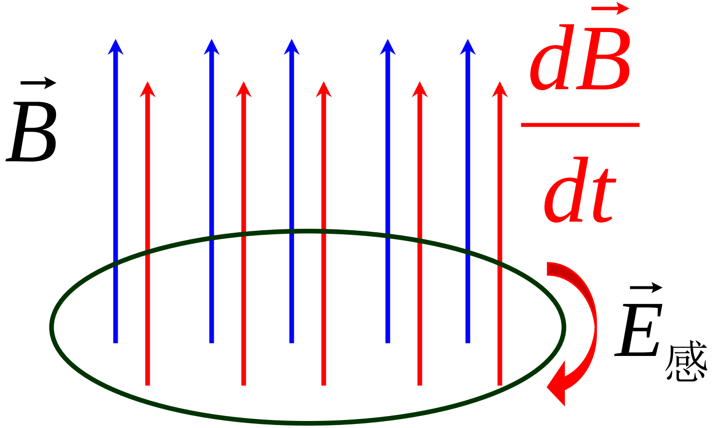
$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}$$

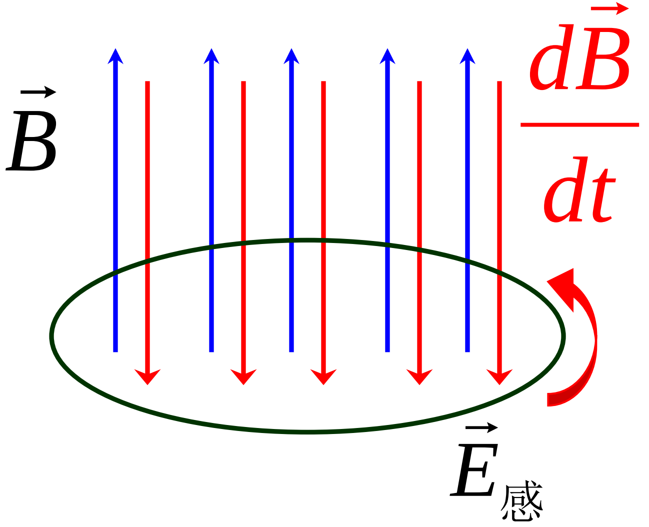
$$\varepsilon_i = \boxed{\oint_l \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}}$$



$$\boxed{\oint_l \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}}$$

$\vec{E}_{感}$ 与 $\dfrac{d\vec{B}}{dt}$ 的关系： $\vec{E}_{感}$ 与 $\dfrac{d\vec{B}}{dt}$ 成左手螺旋关系





B随时间增加 **B**随时间减小

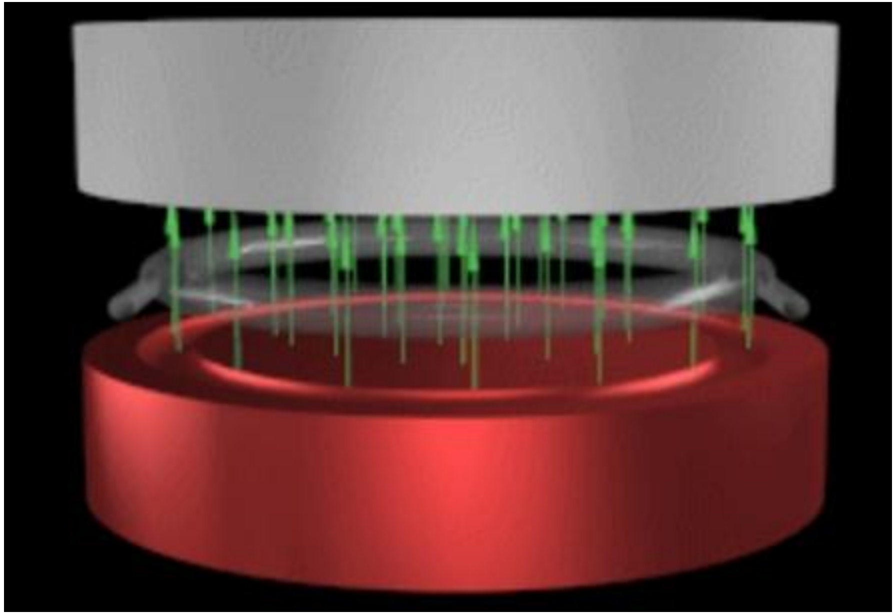
3、感生电场与静电场的比较

静电场	感生电场
共同点：对电荷有力的作用	对电荷有力的作用
不同点：由静止电荷产生	由变化的磁场产生
$\oint_l \vec{E}_{静} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_l \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} \neq 0$
（保守场）	（非保守场）
力线起始于正电荷或无穷远，止于负电荷或无穷远。（有源场）	力线为无头无尾的闭合曲线。（涡旋场）

4、应用

1）电子感应加速器 Induction electron accelerator

电子感应加速器是利用涡旋电场加速电子以获得高能粒子的一种装置。

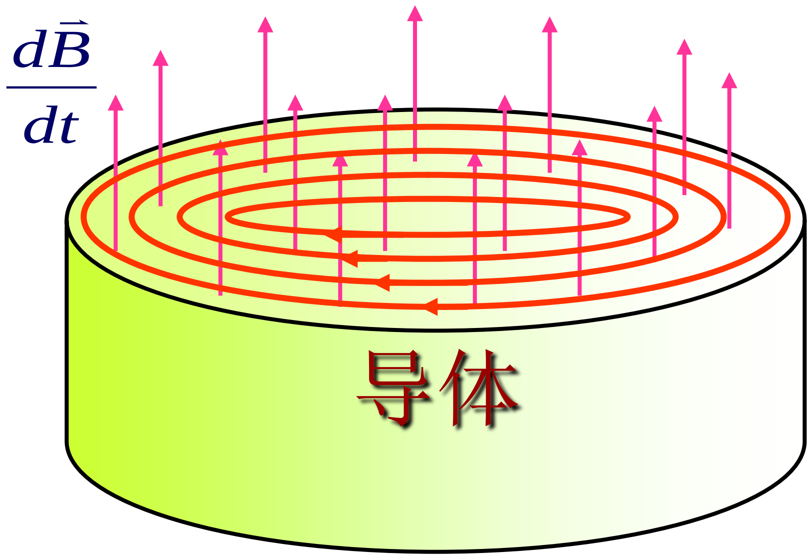


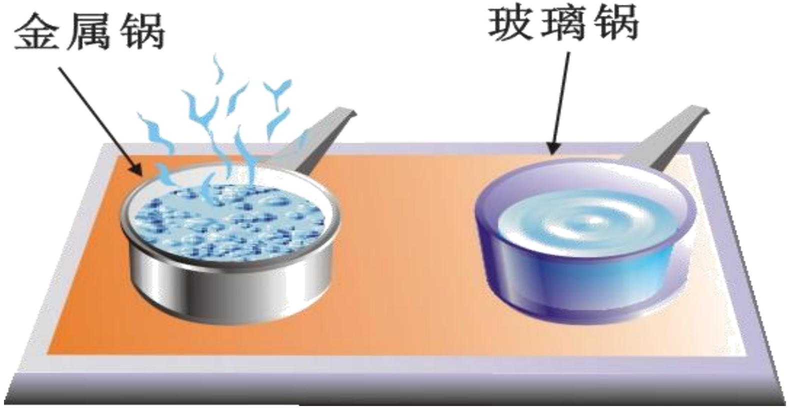
原理：在电磁铁的两极之间安置一个环形真空室，当用交变电流励磁电磁铁时，在环形室内除了有磁场外，还会感生出很强的、同心环状的涡旋电场。用电子枪将电子注入环形室，电子在洛伦兹力的作用下，沿圆形轨道运动，在涡旋电场的作用下被加速。

4、应用

2）涡电流

当大块导体放在变化的磁场中，在导体内部会产生感应电流，由于这种电流在导体内自成闭合回路，称为涡电流。





电磁炉

5、感生电场的计算

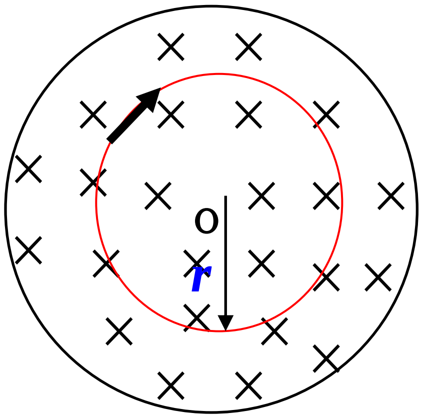
步骤：

1）过考察点作一回路，规定其绕行方向.

2）用右手螺旋法则定出回路所围面的正法线方向

3）计算磁通量及随时间的变化

4）计算环路积分，利用： $\oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}$



计算出： $\vec{E}_{感}$

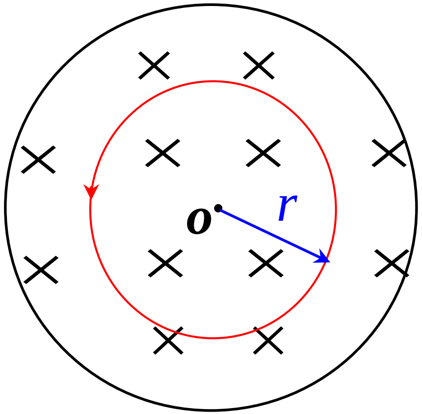
$E_{感} > 0$ 感生电场的方向与回路的绕行方向一致

$E_{感} < 0$ 感生电场的方向与回路的绕行方向相反

例10-5: 一半径为 R 的长直螺线管中的电流随时间变化，若管内磁感应强度随时间增大，即 $\dfrac{dB}{dt}=\text{恒量}>0$，求螺线管内外的感生电场分布。

解: 磁场具有轴对称，分布均匀，而且磁场均匀变化，

∴螺线管内外的感生电场线都是以螺线管轴线为圆心的同心圆线，且在同一圆环上各点的 $\vec{E}_{感}$ 大小相等，



选择一回路L，同心圆，逆时针绕行，

$$\oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}=-\int_S \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S},\qquad E_{感}\cdot 2\pi r=\int_S \frac{dB}{dt}dS$$

1）管内：$r<R$

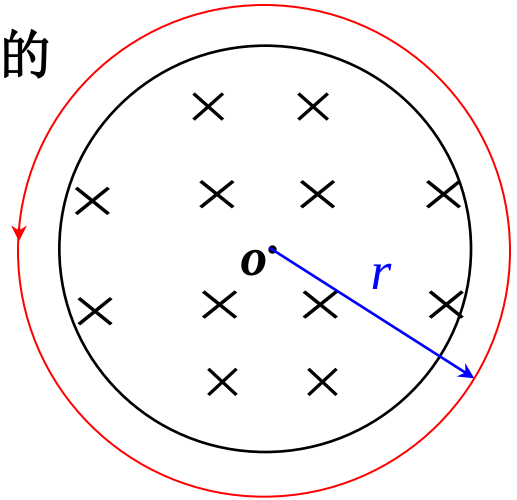
$$E_{感}\cdot 2\pi r=\frac{dB}{dt}\pi r^2,\qquad E_{感}=\frac{r}{2}\frac{dB}{dt},\qquad r<R,$$

方向为逆时针方向

例10-5: 一半径为 R 的长直螺线管中的电流随时间变化，若管内磁感应强度随时间增大，即 $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=恒量>0$，求螺线管内外的感生电场分布。

解: 磁场具有轴对称，分布均匀，而且磁场均匀变化，

∴螺线管内外的感生电场线都是以螺线管轴线为圆心的同心圆线，且在同一圆环上各点的 $\vec{E}_{感}$ 大小相等，



选择一回路L，同心圆，逆时针绕行，

$$\oint_L \vec{E}_{感}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}, \qquad E_{感}\cdot 2\pi r=\int_S \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}S$$

2）管外：$r>R$

$$E_{感}\cdot 2\pi r=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi R^2, \qquad E_{感}=\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}, \quad r>R,$$

方向为逆时针方向

6、感生电动势的计算

1） 定义求解：

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

若导体不闭合，则：

$$\varepsilon_i = \int_L \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

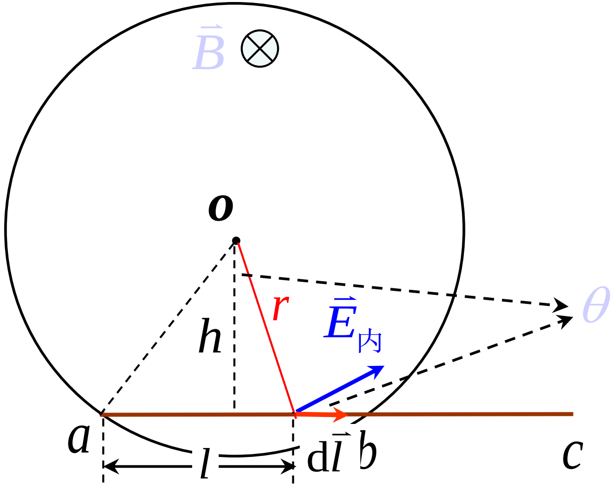
该方法只能用于$E_{感}$为已知或可求解的情况。

2）利用法拉第电磁感应定律求解：

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

若导体不闭合，需作辅助线。

例10-6： 在上题中，长直螺线管一截面内放置长为2*R*的金属棒，如图所示，*ab*=*bc*=*R*，求棒中的感生电动势。



选 $a\to c$ 方向为积分路线

$$\varepsilon_{ac}=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{bc}=\int_a^b \vec{E}_{内}\cdot d\vec{l}+\int_b^c \vec{E}_{外}\cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon_{ab}=\int_a^b \vec{E}_{内}\cdot d\vec{l}=\int_0^R \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}dl\cos\theta$$

$$r^2=h^2+(l-\frac{R}{2})^2,\quad h=\frac{\sqrt{3}}{2}R,\quad \cos\theta=\frac{h}{r}$$

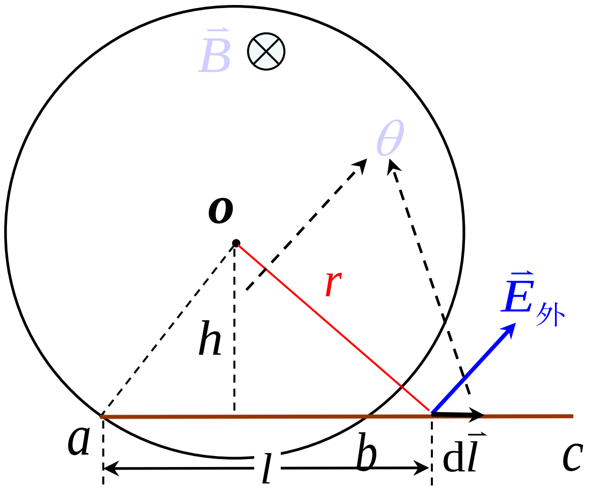
$$\varepsilon_{ab}=\int_0^R \frac{h}{2}\frac{dB}{dt}dl=\frac{h}{2}\frac{dB}{dt}\int_0^R dl=\frac{h}{2}R\frac{dB}{dt}$$

$$\varepsilon_{ab}=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\frac{dB}{dt},$$

解： **1) 方法一：定义法**

感生电场：
$$\begin{cases} E_{感}=\dfrac{r}{2}\dfrac{dB}{dt}, & r<R, \\ E_{感}=\dfrac{R^2}{2r}\dfrac{dB}{dt}, & r>R, \end{cases}$$

例10-6: 在上题中，长直螺线管一截面内放置长为2*R*的金属棒，如图所示，*ab*=*bc*=*R*，求棒中的感生电动势。



解: 1) 方法一：定义法

感生电场: $\begin{cases} E_{感}=\dfrac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}, & r<R, \\ E_{感}=\dfrac{R^2}{2r}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}, & r>R, \end{cases}$

选 $a\to c$ 方向为积分路线

$$\varepsilon_{ac}=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{bc}=\int_a^b \vec{E}_{内}\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_b^c \vec{E}_{外}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

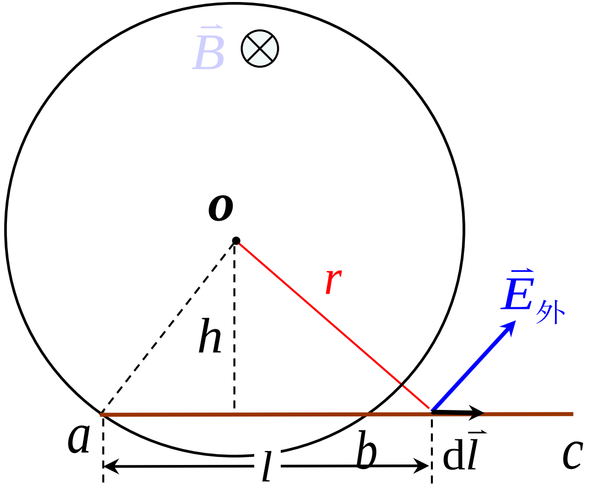
$$\varepsilon_{bc}=\int_b^c \vec{E}_{外}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_R^{2R}\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}l\cos\theta$$

$$r^2=h^2+(l-\frac{R}{2})^2,\quad h=\frac{\sqrt{3}}{2}R,\quad \cos\theta=\frac{h}{r}$$

$$\varepsilon_{bc}=\int_R^{2R}\frac{R^2h}{2}\frac{1}{h^2+(l-\frac{R}{2})^2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}l$$

$$\varepsilon_{ab}=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},\qquad \varepsilon_{bc}=\frac{\pi R^2}{12}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

例8-6： 在上题中，长直螺线管一截面内放置长为2*R*的金属棒，如图所示，*ab*=*bc*=*R*，求棒中的感生电动势。



解： 1) 方法一：定义法

感生电场：$\begin{cases} E_{感} = \dfrac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}, & r < R, \\ E_{感} = \dfrac{R^2}{2r}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}, & r > R, \end{cases}$

选 $a \rightarrow c$ 方向为积分路线

$$\varepsilon_{ac} = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc} = \int_a^b \vec{E}_{内} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_b^c \vec{E}_{外} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

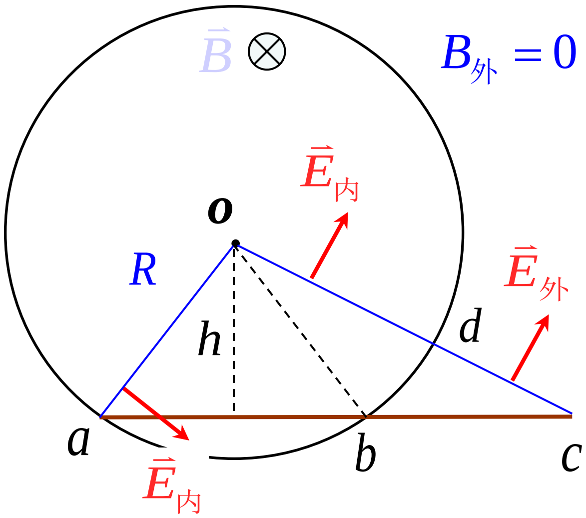
$$\varepsilon_{ac} = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + \frac{\pi R^2}{12} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon_{ac} = \frac{3\sqrt{3} + \pi}{12} R^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$\varepsilon_{ac} > 0$, 电动势方向：$a \rightarrow c$

*c*点电势高

例10-6： 在上题中，长直螺线管一截面内放置长为2*R*的金属棒，如图所示，*ab*=*bc*=*R*，求棒中的感生电动势。



$\because \vec{E}_{感} \perp$ 半径

$$\varepsilon_{oa}=\int_o^a \vec{E}_{内}\cdot d\vec{l}=0,\quad \varepsilon_{co}=\int_c^o \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}=0$$

$$\varepsilon_{oaco}=\varepsilon_{oa}+\varepsilon_{ac}+\varepsilon_{co}=\varepsilon_{ac}$$

$$\Phi_m=\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=-B(S_{\Delta oab}+S_{扇})=-B(\frac{3\sqrt{3}+\pi}{12}R^2)$$

$$S_{\Delta oab}=\frac{1}{2}hR=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2,\quad S_{扇}=\frac{1}{2}R\cdot R\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}R^2$$

解： **2) 方法二：**

法拉第电磁感应定律求解

连接*oa*、*oc*，形成闭合回路，

设回路绕行方向为逆时针方向

$$\varepsilon_{oaco}=\varepsilon_{ac}=-\frac{d\Phi_m}{dt}=\frac{3\sqrt{3}+\pi}{12}R^2\frac{dB}{dt}$$

$\varepsilon_{ac}>0$， 电动势方向：$a\to c$

*c*点电势高