第二十四讲 排列及其逆序

一、引言

二、排列

三、排列的逆序数

一 引言

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \qquad (1)$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \qquad (2)$$

由方程组的四个系数确定.

定义 由四个数排成二行二列（横排称行、竖排称列）的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \qquad (3)$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表（3）所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

即 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$

三阶行列式

考察三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (3)$$

运用消元法，可以推知当

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0,$$

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + b_2 a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} b_3 - a_{23} a_{32} b_1 - a_{12} b_2 a_{33}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} a_{33} + a_{31} a_{23} b_1 + b_3 a_{21} a_{13} - a_{13} a_{31} b_2 - a_{23} a_{11} b_3 - a_{21} b_1 a_{33}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 a_{22} a_{11} + a_{12} a_{31} b_2 + b_3 a_{21} a_{12} - a_{32} a_{11} b_2 - a_{22} a_{31} b_1 - a_{12} b_3 a_{21}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

定义 设有9个数排成3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad (6)$$

记

列标

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \qquad (7)$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

行标

（7）式称为数表（6）所确定的**三阶行列式**.

二阶行列式的计算 —— 对角线法则

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

系数行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \boxed{b_1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \boxed{b_2.} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \boxed{b_1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \boxed{b_2.} \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则二元线性方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

例1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解: $$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-4) = 7 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3.$$

三阶行列式的计算

对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

说明 1. 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

2 三阶行列式包括3!项, 每一项都是位于不同行，不同列的三个元素的乘积, 其中三项为正, 三项为负.

例2 求解三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则有

$$D=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4$$

$$-1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3)$$

$$=-4-6+32-4-8-24$$

$$=-14.$$

利用三阶行列式求解三元线性方程组

如果三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$

的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 + \boxed{a_{13}}x_3 = \boxed{b_1}, \\ a_{21}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 + \boxed{a_{23}}x_3 = \boxed{b_2}, \\ a_{31}x_1 + \boxed{a_{32}}x_2 + \boxed{a_{33}}x_3 = \boxed{b_3}; \end{cases}$$

若记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

则三元线性方程组的解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + -3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)$$

$$+1\times2\times1-1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1$$

$$=-5\neq0,$$

同理可得

$$D_1=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-5,$$

故方程组的解为:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\qquad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

在自然科学研究中，我们会遇到许多 **n** 元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

对于形如（*）的方程组，其解是否也与二阶、三阶方程组的解类似呢？

答案是肯定的.

本章将依次解决如下问题：

（1） n 阶行列式如何定义？

（2） n 阶行列式的性质和计算.

（3）方程组（*）何时有解？若有解，如何表示?

以上为二、三阶行列式的定义。下面我们将定义的思想推广到n阶行列式，给出n阶行列式的定义。

在给出 n阶行列式的定义之前，还需用到逆序数的概念。

二、排列

定义4.1.1 排列的定义

由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

例4 写出所有的 3 级排列.

答： 共有6个，分别为 **123,132,213,231,312,321.**

问题: 所有不同的 n 级排列共有多少个?

答: 共有 $n!$ 个.

三、排列的逆序数

定义4.1.2 逆序数的定义

在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，则称这对数为一个逆序；一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数.

排列$j_1 j_2 \cdots j_n$的逆序数记为$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

例如　　排列32514 中，

0　　0　　1

3　2　5　1　4

1　　逆序数为3

故此排列的逆序数为3+1+0+1+0=5.

排列的奇偶性

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例5 计算下列排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性.

(1) $n(n-1)(n-2)\cdots 321$

(2) $(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$

解 （1） $t=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$

$$=\frac{n(n-1)}{2},$$

当 $n=4k,4k+1$ 时为偶排列；

当 $n=4k+2,4k+3$ 时为奇排列.

(2) 提示：

$$\begin{array}{cccccccc} (2k) & 1 & (2k-1) & 2 & (2k-2) & 3\,(2k-3)\cdots & (k+1) & k \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & \cdots & & k \end{array}$$

$$t = 0+1+1+2+2+\cdots+(k-1)+(k-1)+k$$

$$= \frac{[2(1+k-1)(k-1)]}{2} + k = k^2,$$

当 k 为偶数时，排列为偶排列，

当 k 为奇数时，排列为奇排列.

定义 在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换.

将相邻两个元素对调，叫做**相邻对换**.

例如

$$a_1 \cdots a_l\ \underline{a\ b}\ b_1 \cdots b_m \qquad a_1 \cdots a_l\, a\, b_1 \cdots b_m\, b\, c_1 \cdots c_n$$

$$a_1 \cdots a_l\ \underline{b\ a}\ b_1 \cdots b_m \qquad a_1 \cdots a_l\, b\, b_1 \cdots b_m\, a\, c_1 \cdots c_n$$

定理4.1.6 对换改变排列的奇偶性. 即经过一次对换，奇排列变成偶排列；偶排列变成奇排列.

推论4.1.7 n级排列中，奇偶排列各半，均为$\frac{n!}{2}$个.

定理 任何一个排列与自然序排列都可经过一系列对换互换，并且对换的个数和该排列的逆序数的奇偶性相同.