提高练习三 参考答案

一、选择题

1．函数 $f(x)$有连续二阶导数且 $f(0)=0, f'(0)=1,$

$f''(0)=-2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=$（ *C* ）

（A）不存在　　（B）0　　（C）-1　　（D）-2

2．设 $f'(x)=(x-1)(2x+1)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则在 $(\frac{1}{2},1)$内曲线 $f(x)$（ *B* ）

（A）单调递增且是凹的　（B）单调递减且是凹的

（C）单调递增且是凸的　（D）单调递减且是凸的

3． $f(x)$在(a,b)内连续， $x_0 \in (a,b)$,

$f'(x_0) = f''(x_0) = 0$， 则 $f(x)$在 $x = 0$处（ D ）

（A）取得极大值　　　　（B）取得极小值

（C）一定有拐点$((x_0), f(x_0))$

（D）可能取得极值，也可能有拐点

4．抛物线$y = x^2 - 4x + 3$在顶点处的曲率半径为（ B ）

（A）顶点（2，-1）处曲率半径为 2

（B）顶点（2，-1）处曲率半径为$\frac{1}{2}$

（C）顶点（-1，2）处曲率半径为 1

（D）顶点（-1，2）处曲率半径为 2

二．求下列函数极限

1．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}} = e^{\frac{\ln ab}{2}} = \sqrt{ab}$$

2．$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\ln(1-x)\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln(1-x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{-1}{1-x}}{2x} = -\frac{1}{2}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{\sin x}}{x^{2}\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x-\sin x}-1)e^{\sin x}}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^{2}}=\frac{1}{6}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}\sin 2x-x(2+x)}{x^{3}}$. (提示：用泰勒公式)

解：$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{8}x^{2}+o(x^{2})$, $\sin 2x=2x-\dfrac{(2x)^{3}}{3!}+o(x^{3})$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{[1+\frac{x}{2}-\frac{x^{2}}{8}+o(x^{2})][2x-\frac{(2x)^{3}}{3!}+o(x^{3})]-x(2+x)}{x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{19}{12}x^{3}+o(x^{3})}{x^{3}}=-\frac{19}{12}$$

三、证明下列不等式

1．设$b > a > e$，证明$a^b > b^a$.

证明：要证$a^b > b^a$,即证$a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}}$

令$f(x) = x^{\frac{1}{x}} (x \geq e)$ 则$f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$

当$x > e$时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$在$[e, +\infty)$上严格单减.

$b > a > e$时,$a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}}$,$\therefore a^b > b^a$

2. 当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时，有不等式$\tan x + 2\sin x > 3x$.

证明：令$f(x) = \tan x + 2\sin x - 3x, 0 \le x < \frac{\pi}{2}$

$$f'(x) = \sec^2 x + 2\cos x - 3 = \tan^2 x + 2\cos x - 2$$

$\therefore\ f'(0) = 0,$

$$f''(x) = 2\tan x \sec^2 x - 2\sin x = 2\sin x\left(\frac{1}{\cos^3 x} - 1\right)$$

当$\frac{\pi}{2} > x > 0$时, $f''(x) > 0$ $\quad\therefore\ f'(x)$在$[0, \frac{\pi}{2})$上单调增加.

$\therefore\ f'(x) > f'(0) = 0$ $\quad\therefore\ f(x)$在$[0, \frac{\pi}{2})$上单调增少.

$\therefore\ f(x) > f(0) = 0$ $\quad\therefore \tan x + 2\sin x > 3x$

四、已知 $y=x^3\sin x$，利用泰勒公式求 $y^{(6)}(0)$.

解： $\because \sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$ $\therefore y=x^4-\frac{1}{3!}x^6+o(x^6)$

由泰勒公式, $\frac{y^{(6)}(0)}{6!}=-\frac{1}{3!}$ $\therefore y^{(6)}=-6\times 5\times 4=-120$

五、证明：方程 $e^x+x-2=0$ 有唯一正根.

证明：令 $f(x)=e^x+x-2$, $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导,

$f(0)=-1<0, f(2)=e^2>0$

由零点定理, $\exists\xi\in(0,2)$, 使 $f(\xi)=0$.

$\because f'(x)=e^x+1>0$, $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单增

$\therefore f(x)=e^x+x-2=0$ 有唯一正根.

六、设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续$(a>0)$，在开区间 (a,b)内可导，证明：至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

证明 令$g(x)=x^2$, $g'(x)=2x$,

$\therefore f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上满足柯西中值定理条 件,

$$\therefore \exists\xi\in(a,b),\text{使}\ \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

$$\therefore \exists\xi\in(a,b),\text{使}\ 2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$$

七、简要描绘函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 的图形.

解： (1)定义域为$(-\infty, +\infty)$;

(2)奇函数, 图形关于原点对称, 故可选讨论$x\geq 0$时函数的图形.

(3) $$y'=\frac{-(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}$$

$$y''=\frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$$

当$x\geq 0$时, 令$y'=0$, 得$x=1$; 令$y''=0$, 得$x=0$, $x=\sqrt{3}$

(4)列表

x	0	(0, 1)	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	+	+	0	−	−	−
y''	0	−	−	−	0	+
$y=f(x)$	拐点	↗	极大值	↘	拐点	↘

(5)有水平渐近线$y=0$　　**(6)**作图: