第四讲 多项式的互素

一、两个多项式的互素

二、多个多项式的互素

三、思考题

一、两个多项式的互素

1．定义： $f(x), g(x) \in P[x]$，若 $(f(x), g(x)) = 1$，

则称 $f(x), g(x)$ 为**互素的**.

说明： 由定义，

$f(x), g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow (f(x), g(x)) = 1$

$\Leftrightarrow f(x), g(x)$ 除去零次多项式外无其它公因式.

2. 互素的判定与性质

定理1 $f(x),g(x)\in P[x]$，$f(x),g(x)$ 互素

$\Leftrightarrow \exists u(x),v(x)\in P[x]$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

证： "$\Rightarrow$" 显然.

"$\Leftarrow$" 设$\varphi(x)$为 $f(x),g(x)$ 的任一公因式，则

$\varphi(x)\mid f(x)$，$\varphi(x)\mid g(x)$，从而 $\varphi(x)\mid 1$，又 $1\mid\varphi(x)$，

$\therefore\quad \varphi(x)=c,\quad c\neq 0.$ 故 $(f(x),g(x))=1.$

定理2 若 $\big(f(x),g(x)\big)=1$，且 $f(x)\mid g(x)h(x)$,

则 $f(x)\mid h(x)$.

证： $\because\ \big(f(x),g(x)\big)=1,$

$\therefore\ \exists u(x),v(x)\in P[x]$, 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

于是有 $\quad u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=h(x)$

又 $f(x)\mid g(x)h(x),\quad f(x)\mid f(x)h(x)$

$\therefore\ f(x)\mid h(x).$

推论 若 $f_1(x)\mid g(x)$, $f_2(x)\mid g(x)$，且

$(f_1(x), f_2(x))=1$ ，则 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.

证: $f_1(x)\mid g(x) \Rightarrow \exists h_1(x)$，使 $g(x)=f_1(x)h_1(x)$,

又 $f_2(x)\mid g(x)$, $\therefore$ $f_2(x)\mid f_1(x)h_1(x)$.

而 $(f_1(x), f_2(x))=1$, 由定理4有 $f_2(x)\mid h_1(x)$

于是 $\exists h_2(x)$，使 $h_1(x)=f_2(x)h_2(x)$,

从而 $g(x)=f_1(x)f_2(x)h_2(x)$

$\therefore$ $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$

四、多个多项式的最大公因式

定义 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x) \in P[x] \quad (s \geq 2)$

若 $d(x) \in P[x]$ 满足:

i) $d(x) \mid f_i(x), \quad i = 1, 2, \cdots, s$

ii) $\forall \varphi(x) \in P[x]$, 若 $\varphi(x) \mid f_i(x), \quad i = 1, 2, \cdots, s$

则 $\varphi(x) \mid d(x)$.

则称 $d(x)$ 为 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ 的**最大公因式**.

注:

① $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ 的最大公因式一定存在.

$\left(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)\right)$表示首1最大公因式.

② $\exists u_1, u_2 \cdots u_s \in P[x]$, 使

$$\left(f_1, f_2, \cdots f_s\right) = u_1 f_1 + \cdots + u_s f_s \, .$$

③ $\left(f_1, f_2, \cdots, f_s\right) = \left(\left(f_1, f_2, \cdots f_{s-1}\right), f_s\right)$

$= \left(\left(f_1, \cdots, f_k\right), \left(f_{k+1}, \cdots, f_s\right)\right), \; 1 \le k \le s-1$

④ $f_1, f_2, \cdots, f_s$ 互素 $\Leftrightarrow \exists u_1, u_2, \cdots, u_s \in P[x]$, 使

$$u_1 f_1 + \cdots + u_s f_s = 1.$$

思考题

1. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是数域 P 上两个一元多项式，k 为给定的正整数. 求证：$f(x)|g(x)$ 当且仅当 $f^k(x)|g^k(x)$.

2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不全为零，n 为正整数. 证明：

$$(f,g)^n=(f^n,g^n).$$

3. 设 $f(x), g(x)\in P[x], a,b,c,d\in P$ 且 $ad-bc\neq 0$ 证明：$(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x))=(f(x),g(x)).$