《高等数学》第八单元测试卷参考解答

一、填空题（每小题3分，共30分）

1．<u>13</u>　由向量加法的平行四边形法则及勾股定理易知 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{12^2+5^2}=13.$

2．<u>$\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2},\gamma=\pi,$</u> 或 <u>$\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{4},\gamma=\dfrac{\pi}{2}.$</u>

由已知 $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}\gamma,$ 而 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$

$\therefore \dfrac{\cos\gamma+1}{2}+\dfrac{\cos\gamma+1}{2}+\cos^2\gamma=1 \therefore \cos\gamma(\cos\gamma+1)=0$

$\therefore \cos\gamma=-1$ 或 $\cos\gamma=0.$

$\therefore \gamma=\pi$ 或 $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2},\gamma=\pi,$ 或 $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{4},\gamma=\dfrac{\pi}{2}.$

3．<u>$2\vec{a}\times\vec{c}$</u>　原式$=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{c}\times\vec{a}=2\vec{a}\times\vec{c}$

4．<u>$k=\pm1$</u>　$\vec{n}_1=(k,1,1),\vec{n}_2=(k,1,-2),\because \vec{n}_1\perp\vec{n}_2 .\therefore k^2+1-2=0 \therefore k=\pm1$.

5．<u>$y-z=0$</u>　设所求方程为 $ax+by+cz+d=0$，则 $\begin{cases} a-b-c=0 \\ a+b+c+d=0 \\ 2a+2b+2c+d=0 \end{cases}$

$\therefore b=-c.a=d=0 \qquad \therefore y-z=0.$

6．<u>$2x+2y-z+9=0$</u>　$(-2,-2,1)$ 到原点的向经为 $(-2,-2,1)$，取 $\vec{n}=(-2,-2,1)$ 则所求平面方程为 $(-2)(x+2)+(-2)(y+2)+z-1=0$ 既 $2x+2y-z+9=0.$

7．<u>$4x+3y-6z+12=0$</u>　设所求平面截距式方程为 $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{2}=1,$

将 $(6,-10,1)$ 代入　得　$\dfrac{6}{-3}+\dfrac{-10}{b}+\dfrac{1}{2}=1$

解得　$b=-4$

所以所求平面为　$\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{-4}+\dfrac{z}{2}=1$　，即　$4x+3y-6z+12=0$.

8．<u>$\dfrac{3}{4}$</u>　取 $\vec{s}_1=(2k,k+1,5),\vec{s}_2=(3,1,k-2),$ 则由 $\vec{s}_1\perp\vec{s}_2$ 得

$2k\cdot3+k+1+5(k-2)=0 \therefore k=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}.$

9．<u>4</u>　这是向量运算问题，先用叉乘对加法的分配律得

原式$=\left[(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{b})+(b\times\vec{b})\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$，

其中 $\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$．再用点乘对加法的分配律得

原式$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot a+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot c+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$.

由于 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0,$ 只要其中有两个向量相同，又(a,b,c)中相邻两向量互换则变号，

于是原式$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2\times 2=4$.

10. $\underline{x-3y-z+4=0}$　所求平面的法向量$\vec{n}$平行于所给直线的方向向量$(-1,3,1)$，取$\vec{n}=(-1,3,1)$，则所求平面方程为$-(x-1)+3(y-2))+(z+1)=0$，即　$x-3y-z+4=0$.

二、选择题（每小题3分，共30分）

1．选(D)令$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=z=t,$ 则$\begin{cases}x=t-1\\y=t+1\\z=t\end{cases}$ 代入$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$得$\begin{cases}\dfrac{t-1-1}{1}=\dfrac{t+1+1}{2}\\\dfrac{t-1-1}{1}=\dfrac{t-1}{\lambda}\end{cases}$ 解得

$\lambda=\dfrac{5}{4}$.

2．选(B)由母线平行于x轴，$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$消去$x$得$3y^2-z^2=16.$

3．选(A)由旋转曲面的定义可知，$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{z^2}{3}=0$是由$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{z^2}{3}=0$或$\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{z^2}{3}=0$ 绕oz轴旋转而得.

4．选(C).

5．选(A)由向量加法的三角形法则知$\vec{D}=\vec{0}$，故$|\vec{D}|=0$.

6．选(C)这实质是求两个向量的夹角问题．L_1与L_2的方向向量分别为

$\iota_1=(1,-2,1)$ 与 $\iota_2=\begin{vmatrix}\iota & j & k\\1 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-1,-1,2),$ L_1 与 L_2 的夹角 φ 的余弦位

$\cos\varphi=|\cos(\iota_1,\iota_2)|=\dfrac{|\iota_1\cdot\iota_2|}{|\iota_1||\iota_2|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{3}.$

7．选(C)这是讨论直线L的方向向量与平面π的法向量的相互关系问题．直线L的方向向量

$\iota=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & 3 & 2\\2 & -1 & -10\end{vmatrix}=-28i+14j-7k=-7(4i-2j+k),$ 平面 π 的法向量

$n=4i-2j+k,\iota//n,L\perp\pi$.

8．选(A)既求过原点，与两个不同的向量（一个是从原点到点$M_o(6,-3,2)$的向量$\vec{OM}_0=\{6,-3,2\}$，另一是平面$4x-y+2z=8$的法向量$\vec{n}_0=\{4,-1,2\}$平行的平面，即$\begin{vmatrix}x & y & z\\6 & -3 & 2\\4 & -1 & 2\end{vmatrix}=0$，既

$2x+2y-3z=0$ 为所求．

9． 选 (C) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=4\sqrt{2}$ ， 所 以 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ， 所 以 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ， 则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=4\times2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$ ．

10．选(B)由向量加法的平行四边形法则及两向量垂直及矩形的对角线相等得，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$．

三、解答题（每小题 8 分，共 40 分）

1．试求点 $A(1,2,-4)$ 的关于关于直线 $x=\dfrac{y}{2}=z$ 的对称点．

解：过点 A $(1,,2,-4)$ 且垂直于直线 $x=\dfrac{y}{2}=z$ 的平面方程为

$$(x-1)+2(y-2)+(z+4)=0$$

即 $x+2y+z-1=0$

将直线的参数方程 $\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=t\end{cases}$ 代入平面方程， 解得 $t=\dfrac{1}{6}$

$\therefore$ 直线与平面交点坐标为 $(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6})$ $\therefore$ 对称坐标为 $(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{3},\dfrac{13}{3})$．

2．求过点 $(-1,0,4)$，平行于平面 $3x-4y+z=10$，且与直线 $x+1=y-3=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程．

解：设所求直线方程为 $\begin{cases}x=-1+lt\\y=mt\\z=4+nt\end{cases}$， $\vec{s}=\{l,m,n\}$,

平面的矢量 $\vec{n}=\{3,-4,1\}$，由直线与平面平行，所以 $\vec{n}\perp\vec{s}\Leftrightarrow 3l-4m+n=0,$（*）

因为两直线相交，故有 $lt=-3+mt=\dfrac{4+nt}{2}$

$\Rightarrow\begin{cases}(m-l)t=3\\(2t-n)=4\end{cases}\Rightarrow 4m+3n-10l=0,$ （**）

解方程（*)，（**）得 $l=\dfrac{4}{7}n, m=\dfrac{19}{28}n,$

令 $n=28$，得 $l=16, m=19$

故所求直线为 $\begin{cases}x=-1+16t\\y=19t\\z=4+28t\end{cases}$ ．

另解：过点 $(-1,0,4)$，平行于平面 $3x-4y+z=10$ 的平面方程为 $3x-4y+z-1=0$

直线$x+1=y-3=\dfrac{z}{2}$的参数方程为$\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+t \\ z=2t \end{cases}$，代入上述平面方程得$t=16$，

从而所求直线与已知直线的交点为$(15,19,32)$，从而所求直线的方向向量为$(16,19,28)$，

所以所求直线方程为：$\dfrac{x+1}{16}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z-4}{28}$.

3．求过直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$且垂直于平面$3x+2y-z-5=0$的平面方程.

解： 直线的方向矢量$\vec{s}=\{2,-3,2\}$，已知平面的法矢量为$\vec{n}=\{3,2,-1\}$，设所求平面的法矢量$\vec{n}^*$,，

由题意$\vec{n}^*\perp\vec{n}$且$\vec{n}^*\perp\vec{s}$，故可令

$$\vec{n}^*=\vec{s}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+8\vec{j}+13\vec{k},$$

于是所求平面方程为$-(x-1)+8(y+2)+13(z-2)=0.$

即　$x-8y-13z+9=0$.

4．求平行于平面$6x+y+6z+5=0$，而与三坐标面所构成的四面体体积为 1 的平面.

解： 设所求平面为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

由题设有$\begin{cases} \dfrac{1}{6}|abc|=1(*) \\ \dfrac{1}{a}\Big/6=\dfrac{1}{b}\Big/1=\dfrac{1}{c}\Big/6=t,(**) \end{cases}$

由方程（**）$a=\dfrac{1}{6t},b=\dfrac{1}{t},c=\dfrac{1}{6t},$代入（*），得$t^3=\dfrac{1}{6^3}\Rightarrow t=\pm\dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow a=1,b=6,c=1$或$a=-1,b=-6,c=-1.$

即所求平面方程为：$\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{1}=\pm1.$

5．求通过两平面$\pi_1:2x+y-z-2=0$和$\pi_2:3x-2y-2z+1=0$的交线，且与平面$\pi_3:3x+2y+3z-6=0$垂直的平面方程.

解：设所求平面为

$$(2x+y-z-2)+\lambda(3x-2y-2z+1)=0 \qquad (*)$$

即　$(2+3\lambda)x+(1-2\lambda)y+(-1-2\lambda)z+(-2+\lambda)=0,$

由于该平面⊥平面π_3，所以它们的法矢量一定互相垂直，于是

$3(2+3\lambda)+2(1-2\lambda)+3(-1-2\lambda)=0\Rightarrow\lambda=5,$

代入（*）既得所求平面为$17x-9y-11z+3=0$.