习题测试（三）答案

一、 填空题

1．设, $X=\{a,b\}$，则 X 的离散拓扑为 $\underline{\mathcal{T}=\{X,\emptyset,\{a\},\{b\}\}}$。

2．$x\in d(A)$ 当且仅当对于 x 的每一邻域 U 有 $\underline{U\cap(A-\{x\})\neq\phi}$

3．$f:X\to Y$ 是拓扑空间 X 到 Y 的一个映射，若它是一个单射，并且是从 X 到它的

集 $f(X)$ 的一个同胚，则称映射 f 是一个____嵌入____。

4．设 X 是一个集合，则 X 的可数补拓扑为 $\underline{\mathcal{T}=\{U\subset X\mid U'\text{是一个可数子集}\}\cup\{\emptyset\}}$。

5．设集合 X 的子集族 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑基，则 $\mathcal{B}$ 必须要满足条件：

（1）$\underline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}}B=X}$ ；

（2）若 $B_1,B_2\in\mathcal{B}$，则对于任意 $x\in B_1\cap B_2$ 存在 $B\in\mathcal{B}$ 使得 $x\in B\subset B_1\cap B_2$ 。

6．设 A 是拓扑空间 X 的子集，则 A 的闭包是包含 A 的___最小___闭集，A 的内部是在 A 中的的___最大___开集（填最大或最小）。

7．设 $X=\{1,2,3,4\}$，$\mathcal{T}=\{\emptyset,X,\{1,2\},\{1,,2,4\},\{4\}\}$ 是 X 的拓扑， $A=\{1,4\}$，则 X 的子

空间 A 的拓扑为 $\underline{\mathcal{T}=\{\emptyset,\{1,4\},\{1\},\{4\}\}}$ 。

8．在实数空间 R 中，有理数集 Q 的导集 $d(Q)$=____R____。

9． $f:X\to Y$ 是拓扑空间 X 到 Y 的一个映射，如果它是一个满射，并且 Y 的拓扑是对于映

射 f 而言的商拓扑，则称 f 是一个商映射 。

10．称 X 是正则空间，若

$\underline{x\in X,A\subset X,A\text{为闭集，且}x\notin A,\text{存在}U\in N(x),V\in N(A),\text{使得}U\cap V=\emptyset}$。

11．完全正则的 T_1 空间成为____$T_{3.5}$____空间。

12．紧致性关于___闭___(填开或闭)遗传。

13．请补充下列几种紧致性的关系：

$\underline{\text{列紧}}+T_1\Rightarrow$ 可数紧，可数紧 $+A_2\Rightarrow\underline{\text{序列紧}}$

二、证明题

1．设 X 和 Y 是两个集合， $f:X\to Y$, 证明下列两条件等价：

(1) f 是一个单射；

(2)对于任意 A，$B \subset X$, $f(A \cap B) = f(A) \bigcap f(B)$.

证明：(1) $\Rightarrow$ (2) 显然有 $f(A \cap B) \subset f(A \bigcap B)$，设 $f(A \cap B) = f(A) \bigcap f(B)$，则

$\exists x_1 \in A, x_2 \in B,$ 使得 $y = f(x_1) = f(x_2)$，由条件 f 是单射知，$x_1 = x_2$，所以 $y \in f(A) \bigcap f(B)$

故 $f(A \cap B) = f(A) \bigcap f(B)$；（5 分）

(2) $\Rightarrow$ (1) 若 $f(x_1) = f(x_2)$，令 $A = \{x_1\}, B = \{x_2\}$,由条件(2),

$f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(x_1) \bigcap f(x_2) = f(x_1) = f(x_2)$,从而 $x_1 = x_2$，故 f 是一个单射。（10 分）

2．设 $X = \{a,b,c\}, \mathcal{T} = \{\varnothing, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$，验证（$X, \mathcal{T}$）是拓扑空间，但不满足 T_0 性.

证明：（1）$X, \varnothing \in \mathcal{T}$；（2） $\{b,c\} \cap \{a,b,c\} = \{b,c\} \in \mathcal{T}$；

（3） $\{b,c\} \cup \{a,b,c\} = \{a,b,c\} \in \mathcal{T}$，上 $\mathcal{T}$ 是一个拓扑。取 $b \neq c$，$\mathcal{T}$ 中只有两个非空开集

$\{b,c\}, \{a,b,c\}$, 对开集 $\{b,c\}$，有 $b, c \in \{b,c\}$

且开集 $\{a,b,c\}$，$b, c \in \{a,b,c\}$，故不存在邻域 $U \in N(b)$，$V \in N(c)$，使得

$c \notin U, b \notin V$，故 X 非 T_0 的.

3．实数集合 R 中的一个关系 R 定义为 $R = \{(x,y) \in R^2 \mid x - y \in R\}$，证明 R 是一个等价关系.

证明：（1）自反性：因 $x - x = 0 \in R$，所以 xRx；

（2）对称性：若 $x - y = p \in R,$ 则 $y - x = -p \in R,$ 即，若 xRy，则有 yRx；

（3）传递性：若 $x - y \in R, y - z \in R$，则 $x - z = (x - y) + (y - z) \in R$。

综上可知，R 是一个等价关系。

4．证明：正则性是遗传性质.

证明：设 X 是一个正则空间，Y 是 X 的一个子空间，下证 Y 是正则的。

设 $y \in Y, y \notin B$,其中 B 是 Y 中的闭集,则存在 X 中的闭集 $\widetilde{B}$,使得 $\widetilde{B} \cap Y = B$ 。因此 $y \notin \widetilde{B}$，

因 X 是正则的，则存在 y 和 $\widetilde{B}$ 的开邻域 $\widetilde{U},\widetilde{V}$，使得 $\widetilde{U}\cap\widetilde{V}=\varnothing$，令 $U=\widetilde{U}\cap Y, V=\widetilde{V}\cap Y$，

则 U，V 分别是 y 和 B 在子空间 Y 中的开邻域，

且有 $U\cap V=\varnothing$。故 Y 是正则空间。从而正则性是遗传性质。

5．证明：设 X 是 Hausdorff 空间，A,B 是 X 中任两个无交的紧子集，则存在 A 的开邻域 U，B 的开邻域 V，使得 $U\cap V=\emptyset$。

证明：任意取定 $y_0\in B$，$\forall x\in A$，则 $x\neq y_0$， 因 X 是 T_2 的，故 $\exists x$ 的开邻域 $G(x,y_0)$，y_0 的开邻域 $H(x,y_0)$，使得 $G(x,y_0)\cup H(x,y_0)=\varnothing$，从而 $A\subseteq\cup_{x\in A}G(x,y_0)$，

由 A 是紧的，所以 $\exists x_1,x_2,\ldots,x_m\in A$，使得 $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}G(x_i,y_0)$，

令 $G(y_0)=\bigcup_{i=1}^{m}G(x_i,y_0)$，$H(y_0)=\bigcap_{i=1}^{m}H(x_i,y_0)$ 则 $G(y_0)$ 是 A 的开邻域，$H(y_0)$ 是 y_0 的开邻域，

且 $G(y_0)\cup H(y_0)=\varnothing$，又因 B 是紧的且 $B\subseteq\cup_{y\in B}H(y)$，

则 $\exists y_1,y_2,\ldots,y_n\in B$，使得 $B\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}H(y_i)$，令 $U=\bigcap_{i=1}^{n}G(y_i), V=\bigcup_{i=1}^{n}H(y_i)$

则 U 是 A 的开邻域，V 是 B 的开邻域，且 $U\cap V=\varnothing$.。