# §1.4 事件的独立性

## 一、事件的独立性

例1 已知袋中有5只红球, 3只白球. 从袋中有放回地取球两次，设第 $i$ 次取得白球为事件 $A_i$（$i$ =1, 2）. 求

$$P(A_1),\quad P(A_2),\quad P(A_2|A_1),\quad P(A_2|\overline{A}_1),$$

解 $P(A_1)=3/8=P(A_2)$, $\quad P(A_2|\overline{A}_1)=3/8,$

$P(A_2|A_1)=3/8,$

$$\Longrightarrow \quad P(A_2|A_1)=P(A_2)=P(A_2|\overline{A}_1)$$

事件 $A_1$ 发生与否对 $A_2$ 发生的概率没有影响可视为事件$A_1$与$A_2$相互独立

$$\Longrightarrow \quad P(A_1A_2)=(3/8)^2=P(A_1)P(A_2|A_1)$$

**定义** 设 $A, B$ 为两事件，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 $A$ 与事件 $B$ 相互独立

例2　从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记 $A$={抽到$K$}, $B$={抽到的牌是黑色的}

问事件$A$、$B$是否独立？

解：

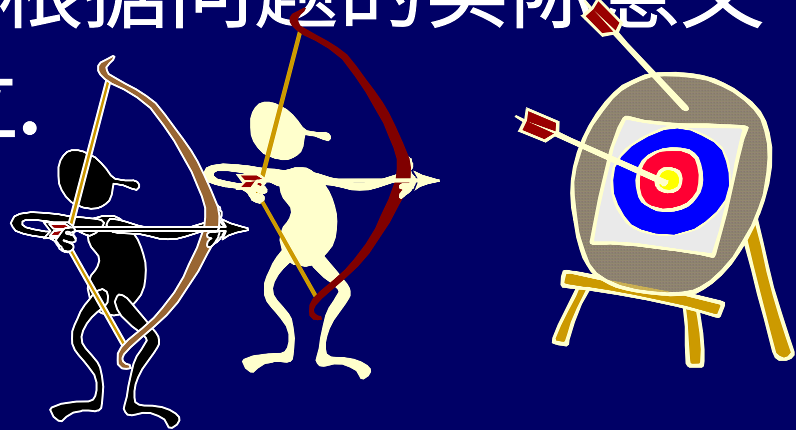
由于 $P(A)=4/52=1/13$,　$P(B)=26/52=1/2$

$$P(AB)=2/52=1/26$$

可见, $P(AB)=P(A)P(B)$

说明事件$A$、$B$独立.

在实际应用中,往往根据问题的实际意义去判断两事件是否独立.



例如

甲、乙两人向同一目标射击，记 $A$={甲命中}, $B$={乙命中}，$A$与$B$是否独立？

由于“ 甲命中 ” 并不影响 “ 乙命中 ” 的概率，故认为$A$、$B$独立 .

（即一事件发生与否并不影响另一事件发生的概率）

又如：一批产品共$n$件，从中抽取2件，设

$A_i$={第$i$件是合格品}　$i$=1,2

若抽取是有放回的，则$A_1$与$A_2$独立.

因为第二次抽取的结果不受第一次抽取的影响.

若抽取是无放回的，则$A_1$与$A_2$不独立.

因为第二次抽取的结果受到第一次抽取的影响.

## 两事件相互独立的性质

- 两事件 ***A*** 与 ***B*** 相互独立是相互对称的
- 若 $P(A)>0$, 则$P(B)=P(B|A)$

  若 $P(B)>0$, 则$P(A)=P(A|B)$

- 若 $P(A)>0,\ P(B)>0,$

  则"事件 ***A*** 与 事件 ***B*** 相互独立"和

  "事件 ***A*** 与 事件 ***B*** 互不相容"

  不能同时成立 (自行证明)

❑ 四对事件 $A,B;\quad A,\overline{B};\quad \overline{A},B;\quad \overline{A},\overline{B}$

任何一对相互独立,则其它三对也相互独立

试证其一 $A,\overline{B}$ 独立 $\Rightarrow A,B$ 独立

事实上

$$P(AB)=P(A-A\overline{B})=P(A)-P(A\overline{B})$$

$$=P(A)-P(A)P(\overline{B})$$

$$=\boldsymbol{P(A)[1-P(\overline{B})]=P(A)P(B)}$$

**定义** 三事件 $A$, $B$, $C$ 相互独立是指下面的关系式同时成立：

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases} \quad (1)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \quad (2)$$

注：1) 关系式(1) (2)不能互相推出

2) 仅满足(1)式时,称 $A$, $B$, $C$ 两两独立

$A$, $B$, $C$ 相互独立 $\longrightarrow$ $A$, $B$, $C$ 两两独立

例3 有一均匀的八面体, 各面涂有颜色如下

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | R | R | R | | | | |
| W | W | W | | W | | | |
| Y | | | | | Y | Y | Y |

将八面体向上抛掷一次, 观察向下一面出现的颜色。

设事件 $\begin{cases} R \text{ —— 红色} \\ W \text{ —— 白色} \\ Y \text{ —— 黄色} \end{cases}$

则 $$P(R)=P(W)=P(Y)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P(RW)=\frac{3}{8},\quad P(WY)=P(RY)=\frac{1}{8}$$

$$P(RWY)=\frac{1}{8}=P(R)P(W)P(Y)$$

但 $$P(RW)\neq P(R)P(W)$$

$$P(WY)\neq P(W)P(Y)$$

$$P(RY)\neq P(R)P(Y)$$

本例说明不能由关系式**(2)**推出关系式**(1)**

例4 随机投掷编号为 1 与 2 的两个骰子

事件 $A$ 表示1号骰子向上一面出现奇数

$B$ 表示2号骰子向上一面出现奇数

$C$ 表示两骰子出现的点数之和为奇数

则 $P(A)=P(B)=P(C)=1/2$

$$P(AB)=P(BC)=P(CA)=1/4$$

$$=P(A)P(B)=P(B)P(C)=P(C)P(A)$$

但 $P(ABC)=0\neq 1/8=P(A)P(B)P(C)$

本例说明 不能由 $A, B, C$ 两两独立

$\longrightarrow$ $A, B, C$ 相互独立

**定义** $n$ 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立是指下面的关系式同时成立

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),\ 1\le i<j\le n$$

$$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k),\ 1\le i<j<k\le n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

常由实际问题的意义判断事件的独立性

例5 已知事件 ***A*, *B*, *C*** 相互独立,证明事件 $\overline{A}$ 与 $B\cup C$ 也相互独立

证

$$P\left(\overline{A}(B\cup C)\right)=P(B\cup C)-P\left(A(B\cup C)\right)$$

$$=\left[P(B)+P(C)-P(BC)\right]$$

$$-\left[P(AB)+P(AC)-P(ABC)\right]$$

$$=P(\overline{A})\left[P(B)+P(C)-P(BC)\right]$$

$$=P(\overline{A})P(B\cup C)$$

- 若 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立,将这 $n$ 个事件任意分成 $k$ 组,同一个事件不能同时属于两个不同的组,则对每组的事件进行求和、积、差、对立等运算所得到的 $k$ 个事件也相互独立.

# 利用独立事件的性质计算其并事件的概率

若 $A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 相互独立，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P(A_i)\right)$$

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\
&= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P(A_i)\right)
\end{aligned}$$

例6 设每个人的血清中含肝炎病毒的概率为**0.4%**, 求来自不同地区的**100**个人的血清混合液中含有肝炎病毒的概率

解 设这**100** 个人的血清混合液中含有肝炎病毒为事件 $A$, 第 $i$ 个人的血清中含有肝炎病毒为事件 $A_i$ $\quad i=1,2,\ldots,100$

则 $A=\bigcup_{i=1}^{100} A_i$

$$P(A)=1-\prod_{i=1}^{100}\left[1-P(A_i)\right]=1-(1-0.004)^{100}\approx 0.33$$

若$\boldsymbol{B_n}$ 表示 $\boldsymbol{n}$ 个人的血清混合液中含有肝炎病毒，则

$$P(B_n) = 1 - (1-\varepsilon)^n, \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

$$n = 1, 2, \cdots$$

$$\lim_{n \to \infty} P(B_n) = 1$$

—— 不能忽视小概率事件，

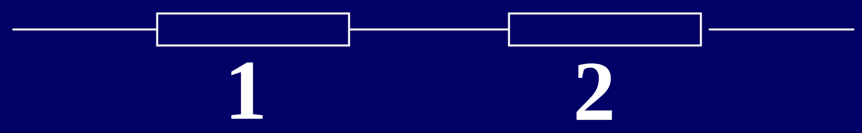
小概率事件迟早要发生

## 例7　系统的可靠性问题

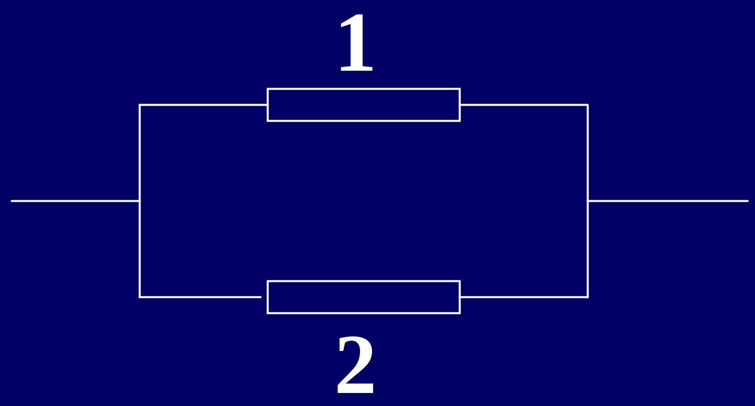
一个元件(或系统)能正常工作的概率称为元件(或系统)的可靠性

系统由元件组成,常见的元件连接方式：

串联

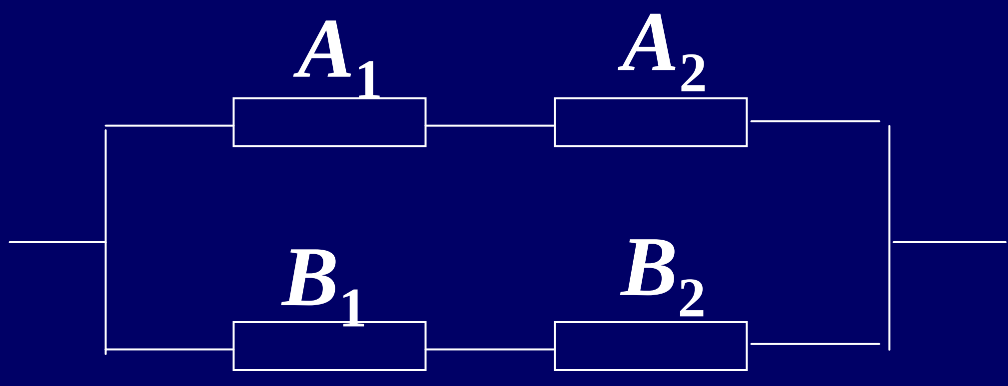



并联



设　两系统都是由 4 个元件组成,每个元件正常工作的概率为 $p$，每个元件是否正常工作相互独立.两系统的连接方式如下图所示，比较两系统的可靠性.

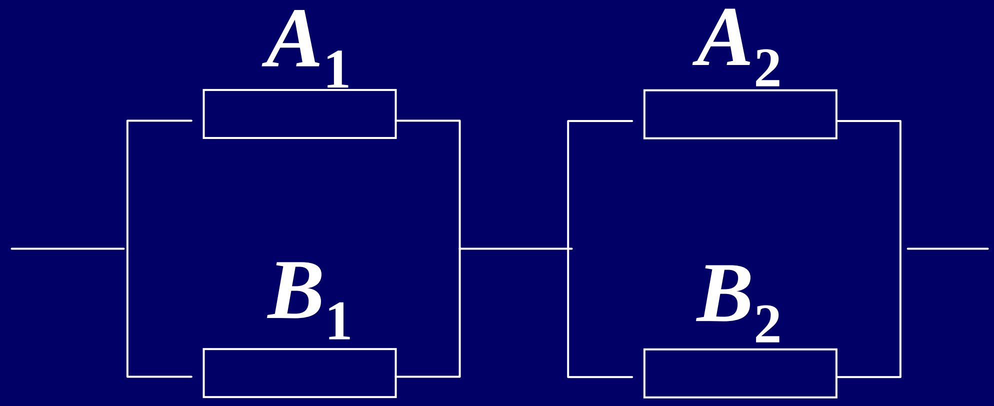
$S_1$:




$$P(S_1)=P(A_1A_2)+P(B_1B_2)-P(A_1A_2B_1B_2)$$

$$=2p^2-p^4=p^2(2-p^2)$$

**$S_2$:**




$$P(S_2) = \prod_{i=1}^{2} P(A_i \cup B_i) = \left(2p - p^2\right)^2$$

$$= p^2(2-p)^2 \geq p^2(2-p^2)$$

$$P(S_2) \geq P(S_1)$$

# 应用举例 —— 肠癌普查

设事件$A_i$表示第 i 次检查为阳性,事件$B$表示被查者患肠癌,已知肠镜检查效果如下：

$$P(A|B)=P(\overline{A}|\overline{B})=0.95,\quad 且P(B)=0.005$$

某患者首次检查反应为阳性,试判断该患者是否已患肠癌？若三次检查反应均为阳性呢？

利用**Bayes** 公式得

两次检查反应均为阳性,还不能断定患者已患肠癌.

$$P(B|A_1A_2A_3)=\frac{0.005\times0.95^3}{0.005\times0.95^3+0.995\times0.05^3}$$

$$\approx 0.9718$$

可见, 连续三次检查反应为阳性, 则几乎可以断定患者患肠癌了.

$$P(B|A_1)=\frac{P(B)P(A_1|B)}{P(B)P(A_1|B)+P(\overline{B})P(A_1|\overline{B})}$$

$$=\frac{0.005\times 0.95}{0.005\times 0.95+0.995\times 0.05}\approx 0.087$$

$$P(B|A_1A_2)=\frac{P(B)P(A_1A_2|B)}{P(B)P(A_1A_2|B)+P(\overline{B})P(A_1A_2|\overline{B})}$$

$$=\frac{P(B)P(A_1|B)P(A_2|B)}{P(B)P(A_1|B)P(A_2|B)+P(\overline{B})P(A_1|\overline{B})P(A_2|\overline{B})}$$

$$=\frac{0.005\times 0.95^2}{0.005\times 0.95^2+0.995\times 0.05^2}\approx 0.6446$$

## 二、Bernoulli （贝努里）试验概型

***n*** **重Bernoulli 试验概型：**

- 试验可重复 ***n*** 次
- 每次试验只有两个可能的结果：$A, \overline{A}$
  且 $P(A)=p,\quad 0<p<1$
- 每次试验的结果与其他次试验无关——称为这 ***n*** 次试验是相互独立的

***n*重Bernoulli**试验中事件 ***A*** 出现 ***k*** 次的概率 记为 $P_n(k)$

定理：在 $n$重贝努里试验中，事件 $A$恰好发生 $k$次的概率为：$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \quad ,k=0,1,\cdots,n$

证：设$A_i$ {在第 $i$次试验中，事件 $A$发生},

$B_k$ {在 $n$次试验中，事件$A$发生 $k$次}，则

$$P(A_i)=p \ , \ P(\overline{A_i})=1-p$$

$$\begin{aligned}B_k &= A_1A_2\cdots A_k\overline{A_{k+1}}\ \overline{A_{k+2}}\cdots\overline{A_n} \\ &\bigcup A_1A_2\cdots\overline{A_k}\ A_{k+1}\ \overline{A_{k+2}}\cdots\overline{A_n} \\ &\bigcup\cdots\bigcup\overline{A_1}\ \overline{A_2}\cdots\overline{A_{n-k}}A_{n-k+1}\cdots A_n\end{aligned}$$

$\therefore$ 由概率的独立性和概率 的有限可加性得：

$$P_n(k)=P(B_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

例8 袋中有3个白球,2个红球,有放回地取球4 次,每次一只,求其中恰有2个白球的概率.

解 古典概型

设 $B$ 表示4个球中恰有2个白球

$n_\Omega = 5^4 \qquad n_B = C_4^2 3^2 2^2$

$$P(B) = \frac{C_4^2 3^2 2^2}{5^4} = C_4^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

解二 每取一个球看作是做了一次试验

记取得白球为事件 $A$ $P(A)=\frac{3}{5}$

有放回地取4个球看作做了 4 重Bernoulli 试验, 记第 $i$ 次取得白球为事件 $A_i$

感兴趣的问题为:4次试验中$A$ 发生2次的概率

$$A_1 A_2 \overline{A_3}\,\overline{A_4} \qquad A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4} \qquad A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} A_4$$

$$\overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 A_4 \qquad \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} A_4 \qquad \overline{A_1} A_2 A_3 \overline{A_4}$$

$$\Longrightarrow \quad P(B)=C_4^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2$$

一般地，若 $P(A)=p,\ \ 0<p<1$

则 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\qquad k=0,1,2,\cdots,n$

例9 八门炮同时独立地向一目标各射击一发炮弹,若有不少于2发炮弹命中目标时,目标就被击毁.如果每门炮命中目标的概率为0.6，求目标被击毁的概率.

解 设一门炮击中目标为事件$A$, $P(A)=0.6$

设目标被击毁为事件$B$，则

$$P(B)=\sum_{k=2}^{8}C_8^k 0.6^k 0.4^{8-k}=1-\sum_{k=0}^{1}C_8^k 0.6^k 0.4^{8-k}$$

$$=0.9914$$

## 补充作业题

某型号火炮的命中率为**0.8**，现有一架敌机即将入侵，如果欲以 **99.9 %** 的概率击中它，则需配备此型号火炮多少门？

解　设需配备 $n$ 门此型号火炮

设事件 $A_i$ 表示第 **i** 门火炮击中敌机

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \left[1 - P(A_i)\right]^n = 1 - 0.2^n > 0.999$$

$$n > \frac{\ln 0.001}{\ln 0.2} \approx 4.29$$

故需配备 *5* 门此型号火炮.