

第十一单元 无穷级数单元测试题

一、填空题

1、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$ 的前三项是_____。

2、级数 $\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \cdots$ 的一般项是_____。

3、已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{6} - u_n)$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n =$ _____。

4、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 是_____的 (填收敛或发散)。

5、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $S_n = \frac{n+1}{n}$, 则 $u_n =$ _____ ($n > 1$)。

6、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ 收敛的_____条件。

7、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定_____; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 必定_____。

8、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ 的收敛域是_____。

9、若 $\frac{1}{3+x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$, $|x-1| < 4$, 则 $a_n =$ _____。

10、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ ($a > 0$) 当_____时收敛。

11、 $\int_0^x \cos(t^2) dt$ 的麦克劳林级数是_____。

12、周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$,

$f(x)$ 的傅立叶级数的和函数是 $S(x)$, 则 $S(\frac{\pi}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$; $S(\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$;

$S(\frac{3\pi}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、选择题

1、等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛的条件是 ()

(A) $q < 1$; (B) $-1 < q < 1$; (C) $q \leq 1$; (D) $q > 1$ 。

2、 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散的 ()

(A)必要条件; (B)充分条件; (C)充要条件; (D)既非充分又非必要。

3、当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ()

(A)必同时收敛; (B)必同时发散; (C)可能不同时收敛; (D)不可能同时收敛。

4、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-2}}$ 收敛, 则 p 的取值范围是 ()

(A) $p \geq 1$; (B) $p > 2$; (C) $p > 3$; (D) $p \geq 3$ 。

5、如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则下列级数中收敛的是 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + \frac{1}{1000})$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$; (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_{n+1000}}$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000}{u_n}$ 。

6、下列级数发散的是 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+1)}$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$; (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-1}$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$ 。

7、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 下列命题错误的是 ()

(A)如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; (B) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(C) 如果 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; (D) 如果 $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

8、在 $f(x)$ 的泰勒级数中, $(x-x_0)^2$ 项的系数是 ()

(A) $\frac{1}{2!}$; (B) $\frac{1}{2!} f^2(x_0)$; (C) $f''(x_0)$; (D) $\frac{f''(x_0)}{2!}$ 。

9、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{3^n} x^n$ 的收敛半径为 ()

(A) 3; (B) 6; (C) $\frac{3}{2}$; (D) $\frac{1}{3}$ 。

10、已知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$ ()

(A) 3; (B) 7; (C) 8; (D) 9。

11、设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \frac{1}{2})^n$ 在 $x = -\frac{1}{2}$ 处收敛, 则此级数在 $x = \frac{4}{3}$ 处 ()

(A) 条件收敛; (B) 绝对收敛; (C) 发散; (D) 收敛性不能确定。

12、求 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的正弦级数, 实际上就是求 () 中 $F(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的傅立叶级数

(A) $F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ -f(-x), & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$; (B) $F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ -f(x), & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$;

(C) $F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ f(-x), & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$; (D) $F(x) = \begin{cases} 2f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ 。

三、计算解答

1、判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n}{\sqrt{n}}}}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{an}{1+n})^n$ ($a > 0$)。

2、判别下列级数的敛散性, 若收敛, 指出是绝对收敛还是条件收敛:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(1+n)}$ 。

3、求下列幂级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n4^n}; (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}; (4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2} (x-2)^n。$$

4、求下列幂级数的和函数：

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n; (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}; (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}。$$

5、将下列函数展开成 x 的幂级数：

$$(1) f(x) = \arctan x; (2) f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}。$$

6、将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数。