§1.2　概率的定义与古典概型

一、　古典概型

概率的古典定义

设 随机试验E 具有下列特点：

1）　样本点个数有限——有限性

2）　每个样本点发生的可能性相等
——等可能性

则称 E 为 古典(等可能)概型

古典概型中概率的计算：

记 $n = \Omega$ 中所包含的样本点的 个数

$k =$ 组成 A的样本点的个数

则 $$P(A) = \frac{k}{n}$$

古典概率的性质

1、$0 \le P(A) \le 1$ ———— 非负性

2、$P(\Omega) = 1$ ———— 规范性

3、对于互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$ ———— 有限可加性

例1 袋中有a只白球，b只红球，从袋中按不放回与放回两种方式取m个球（$m \le a+b$），求其中恰有k个（$k \le a, k \le m$）白球的概率

解 （1）不放回情形

E: 球编号，任取一球，记下颜色，放在一边，重复m次

Ω: $n_\Omega = A_{(a+b)}^m = (a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-m+1)$

记事件A为m个球中有k个白球，则

$$n_A = C_m^k A_a^k A_b^{m-k}$$

$$= \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{a!}{(a-k)!} \cdot \frac{b!}{(b-m+k)!}$$

则 $P(A)=\dfrac{C_m^k A_a^k A_b^{m-k}}{A_{a+b}^m}$ $\quad k\le a, k\le m$

又解 E_1: 球编号, 一次取 m 个球,记下颜色

Ω_1: $\quad n_{\Omega_1}=C_{a+b}^m$

记事件 A 为m个球中有k个白球，则

$$n_A=C_a^k C_b^{m-k}$$

因此

$$\boxed{P(A)=\frac{C_a^k C_b^{m-k}}{C_{a+b}^m}\qquad k\le a, k\le m}$$

称超几何分布

不放回地逐次取 m 个球, 与一次任取 m 个球算得的结果相同.

（2）放回情形

E_2: 球编号, 任取一球, 记下颜色, 放回去, 重复 m 次

Ω_2: $n_{\Omega_2} = (a+b)^m$

记 B 为取出的 m 个球中有 k 个白球, 则

$$P(B) = \frac{C_m^k a^k b^{m-k}}{(a+b)^m} = C_m^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{m-k}$$ 记 $p = \dfrac{a}{a+b}$

$$\boxed{P(B) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \quad k = 1, 2, \cdots, \min(a, m)}$$

称二项分布

例2 （分房模型）设有 k 个不同的球, 每个球等可能地落入 N 个盒子中（$k \le N$）, 设每个盒子容球数无限, 求下列事件的概率:

（1）某指定的 k 个盒子中各有一球；

（2）某指定的一个盒子恰有 m 个球($m \le k$)

（3）某指定的一个盒子没有球；

（4）恰有 k 个盒子中各有一球；

（5）至少有两个球在同一盒子中；

（6）每个盒子至多有一个球.

解 $n = N^k$

设 (1) ~ (6)的各事件分别为 $A_1 \to A_6$

则 $m_{A_1} = k!$ $\longrightarrow$ $P(A_1) = \dfrac{m_{A_1}}{n} = \dfrac{k!}{N^k}$

$m_{A_2} = C_k^m (N-1)^{k-m}$ $\longrightarrow$ $P(A_2) = \dfrac{C_k^m (N-1)^{k-m}}{N^k}$

$m_{A_3} = (N-1)^k$ $\longrightarrow$ $P(A_3) = \dfrac{(N-1)^k}{N^k}$

$m_{A_4} = C_N^k k!$ $\longrightarrow$ $P(A_4) = \dfrac{C_N^k k!}{N^k}$

$m_{A_5} = N^k - C_N^k k!$ $\longrightarrow$ $P(A_5) = \dfrac{N^k - C_N^k k!}{N^k} = 1 - P(A_4)$

$m_{A_6} = C_N^k k!$ $\longrightarrow$ $P(A_6) = P(A_4)$

例3 “分房模型”的应用

生物系二年级有 n 个人，求至少有两人生日相同（设为事件A）的概率.

解 本问题中的人可被视为“球”，365天为365只“盒子”

$\overline{A}$ 为 n 个人的生日均不相同,这相当于每个盒子至多有一个球. 由例4（6）

$$P(\overline{A})=\frac{C_{365}^{n}\cdot n!}{365^{n}}\Rightarrow P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{365}^{n}\cdot n!}{365^{n}}.$$

若 $n=64$, $\Rightarrow P(A)\approx 0.997.$

例4 在0,1,2,3, $\cdots$,9中不重复地任取4个数，求它们能排成首位非零的四位偶数的概率.

解 设 A为“能排成首位非零的四位偶数”

$$n_{\Omega} = P_{10}^{4} = 5040.$$

四位偶数的末位为偶数, 故有C_5^1 种可能而前三位数有A_9^3 种取法,由于首位为零的四位数有 $C_4^1 A_8^2$ 种取法,所以有利于A发生的取法共有 $n_A = C_5^1 A_9^3 - C_4^1 A_8^2 = 2296$ 种.

$$\therefore P(A) = \frac{2296}{5040} = \frac{41}{90}$$

例5 在1,2,3, $\cdots$,9中重复地任取 $n\,(\geq 2)$个数,求 n 个数字的乘积能被10整除的概率.

解 $n_{\Omega} = 9^n$

设 A 表示事件 "n 次取到的数字的乘积能被10整除"

设 A_1 表示事件 "n 次取到的数字中有偶数"

A_2表示事件 "n 次取到的数字中有5"

$$\longrightarrow \quad A = A_1 A_2$$

$$\overline{A} = \overline{A_1 A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

$$P\left(\overline{A_1}\right)=\frac{5^n}{9^n} \qquad P\left(\overline{A_2}\right)=\frac{8^n}{9^n} \qquad P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)=\frac{4^n}{9^n}$$

$$P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\right)$$

$$=P\left(\overline{A_1}\right)+P\left(\overline{A_2}\right)-P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)$$

$$=\frac{5^n+8^n-4^n}{9^n}$$

$$P(A)=1-\frac{5^n+8^n-4^n}{9^n}.$$

计算古典概率注意事项

1° 明确所作的试验是等可能概型,有时需设计符合问题要求的随机试验, 使其成为等可能概型.

2° 同一题的样本空间的基本事件总数 n_Ω 随试验设计的不同而不同, 如 例3不放回试验的两种不同设计. 一般 n_Ω 越小越好.

3° 计算古典概率时须注意应用概率计算的有关公式, 将复杂问题简单化. 如例7.

二、几何概型 (等可能概型的推广)

例6 某人的表停了，他打开收音机听电台报时，已知电台是整点报时的，问他等待报时的时间短于十分钟的概率

10分钟

9点 10点

$$P(A)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$$

1、几何概型

向一个可度量的有限区域 Ω内投一点, 若该点落入 Ω 内任何子区域 A 中的可能性大小只与该区域A的度量成正比, 而与其位置和形状无关，则称这个随机试验为几何型随机试验，或**几何概型**。

2、几何概率的计算

$$P(A) = \frac{A\text{的度量}}{\Omega\text{的度量}}$$

例7 两船欲停靠同一个码头, 设两船到达码头的时间各不相干，而且到达码头的时间在一昼夜内是等可能的. 如果两船到达码头后需在码头停留的时间分别是1 小时与2 小 时, 试求在一昼夜内，任一船到达时，需 要等待空出码头的概率.

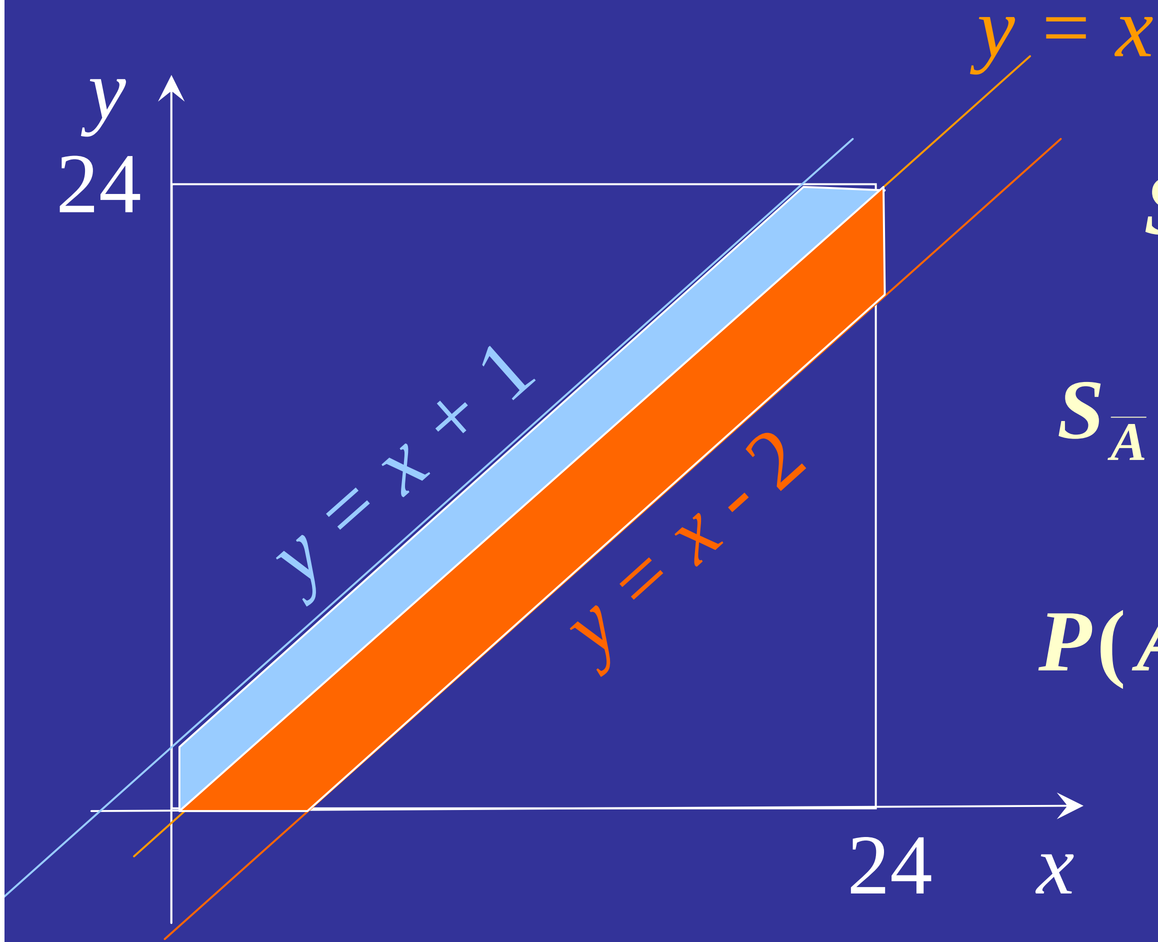
解 设船1 到达码头的时刻为 x ，$0 \le x < 24$

船2 到达码头的时刻为 y ，$0 \le y < 24$

设事件 A 表示任一船到达码头时需要等待空出码头

则 $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x < 24, 0 \le y < 24\}$

$$A = \{(x,y) \mid (x,y) \in \Omega, \; 0 \le y - x \le 1, 0 \le x - y \le 2\}$$



$$S_{\Omega} = 24^2$$

$$S_{\bar{A}} = \frac{1}{2}\left(23^2 + 22^2\right)$$

$$P(A) = 1 - \frac{S_{\bar{A}}}{S_{\Omega}} = 0.1207$$

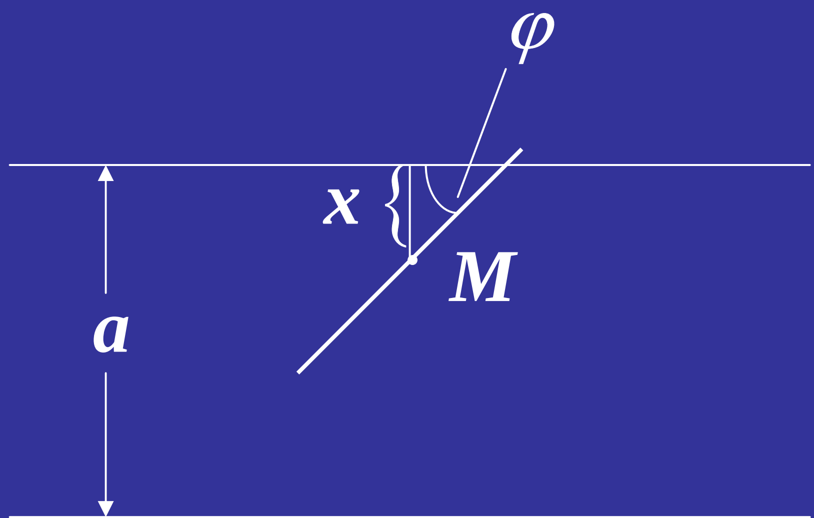
例8 （蒲丰的针问题）在平面上有等距离为 $a(a>0)$ 的一些平行线，向平面上随意投掷一长为 $l(0<l<a)$ 的针，试求针与平行线之一相交的概率？

解 设 x 是针的中点 M 到平行线的最短距离，φ 是针与平行线的夹角，（如图示）

显然，$0\le x\le \dfrac{a}{2}, 0\le\varphi\le\pi$

针与平行线相交的充要

条件为：$0\le x\le \dfrac{l}{2}\sin\varphi$



设A : { 针与平行线相交 } ,则：

$$\therefore\ \Omega=\{(x,\varphi)\,|\,0\le x\le\frac{a}{2},0\le\varphi\le\pi\}$$

$$A=\{(x,\varphi)\,|\,0\le x\le\frac{a}{2},0\le\varphi\le\pi\text{且}0\le x\le\frac{l}{2}\sin\varphi\}$$

$$\therefore\quad P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi d\varphi}{\frac{1}{2}a\pi}=\frac{2l}{\pi a}$$

3、几何概率的性质

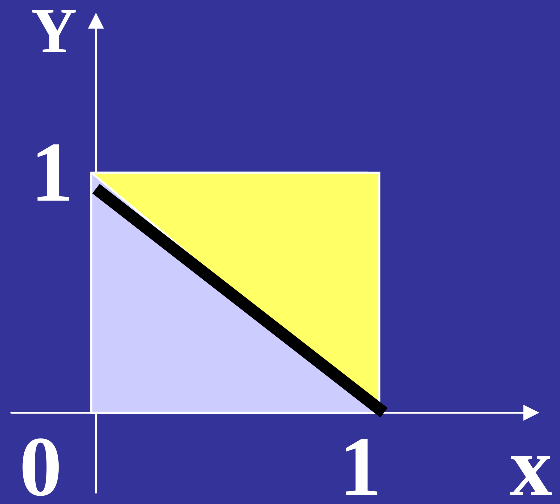
1、$0 \le P(A) \le 1$ ———— 非负性

2、$P(\Omega) = 1$ ———— 规范性

3、对于互不相容的事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$ ———— 可列可加性

用几何概型可以回答“概率为 1 的事件为什么不一定发生?”这一问题.



如图，设试验E 为“ 随机地向边长为1 的正方形内黄、蓝两个三角形投点” 事件A 为“点投在黄、蓝两个三角形内”，求 $P(A)$

$$P(A)=\frac{S_{\text{黄三角形}}+S_{\text{蓝三角形}}}{S_{\text{正方形}}}=\frac{1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}}{1\times 1}=1$$

由于点可能投在正方形的对角线上, 所以事件A未必一定发生.

三、 概率的公理化定义

概率的公理化理论由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(A.H.Колмогоров)1933年建立.

设Ω是随机试验E的样本空间，若能找到一个法则，使得对于E的每一事件A赋于一个实数，记为$P(A)$，称之为事件A的概率，这种赋值满足下面的三个条件：

- 非负性：$\forall A \subset \Omega,\ P(A) \geq 0$
- 规范性：$P(\Omega) = 1$
- 可列可加性：$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

其中 $A_1, A_2, \cdots$ 为两两互斥事件，

概率的性质

1、 $P(\varnothing)=0$

2、 有限可加性：设$A_1, A_2, \cdots A_n$ 两两互斥

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

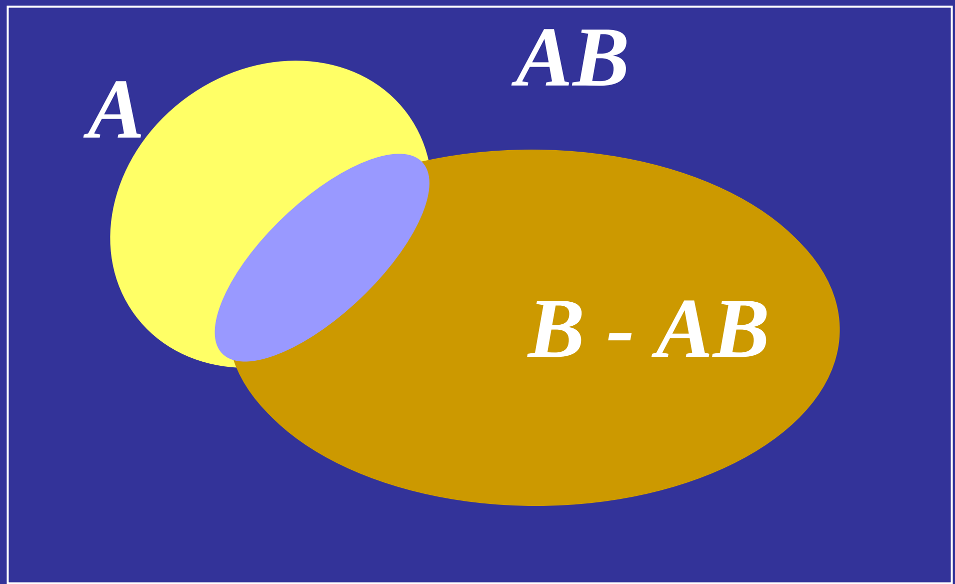
3、 $P(\overline{A})=1-P(A) \quad \Rightarrow P(A)\leq 1$

4、 若$A\subset B \Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$

$$\Rightarrow P(A)\leq P(B)$$

5、 对任意两个事件A, B, 有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$



$$B=AB+(B-A)$$

$$P(B)=P(AB)+P(B-AB)$$

6、 加法公式：对任意两个事件***A*****,** ***B*****,** 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$$

推广：

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

一般：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j) +$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n}^{n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

右端共有 $2^n - 1$ 项.

例9 小王参加“智力大冲浪”游戏，他能答出第一类问题的概率为0.7，答出第二类问题的概率为0.2，两类问题都能答出的概率为0.1. 求小王

(1) 答出第一类而答不出第二类问题的概率

(2) 两类问题中至少有一类能答出的概率

(3) 两类问题都答不出的概率

解 设事件A_i 表示“能答出第 i 类问题” i = 1,2

(1) $P(A_1\overline{A_2}) = P(A_1) - P(A_1A_2) = 0.7 - 0.1 = 0.6$

(2) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = 0.8$

(3) $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 0.2$

例9 中小王他能答出第一类问题的概率为0.7，答出第二类问题的概率为0.2，两类问题都能答出的概率为0.1. 为什么不是 0.7×0.2 ？

若是的话, 则应有 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$

而现在题中并未给出这一条件.

在§1.4中将告诉我们上述等式成立的条件是 ：事件 A_1, A_2 相互独立.

例10 设A , B满足 $P(A)=0.6$, $P(B)=0.7$, 在何条件下， $P(AB)$ 取得最大(小)值？最大(小)值是多少？

解
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$\ge P(A)+P(B)-1=0.3$$ —— 最小值

最小值在 $P(A\cup B)=1$ 时取得

$$P(AB)\le P(A)=0.6$$ —— 最大值

最大值在 $P(A\cup B)=P(B)$ 时取得