第二十一讲 矩阵逆的求法

一、矩阵方阵的应用

二、矩阵逆的求法

三、矩阵方程的求解

一、初等方阵的应用

定理1　　设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等方阵；对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等方阵.

三种初等方阵都是可逆的，它们逆阵还是初等方阵。

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j)\ ;$$

$$E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}));$$

$$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k)).$$

定理2：$m \times n$ 矩阵 $A \simeq B$ 的充分必要条件是：存在 m 阶可逆方阵 P 及 n 阶可逆方阵 Q，使 $PAQ = B$.

$$B = \underbrace{P_1 P_2 \cdots P_l}_{P} A \underbrace{P_{l+1} P_{l+2} \cdots P_t}_{Q}$$

定理3　设A为可逆方阵，则存在有限个初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$，使 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$.

证　$\because A \sim E$，　故 E 经有限次初等变换可变 A，即存在有限个初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$，使

$$P_1 P_2 \cdots P_r E P_{r+1} \cdots P_l = A$$

即

$$A = P_1 P_2 \cdots P_l.$$

推论：可逆矩阵总可以经过一系列初等变换化为单位矩阵（即A行等价于单位矩阵）

例1 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$是否可逆.

解:

$$A \simeq \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

显然，A不行等价于单位矩阵，

所以A不可逆。

二. 矩阵逆的求法——初等变换法

当A可逆时，由 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$，有

$P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A = E$，及 $P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} = A^{-1}$，

$$\therefore \quad P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} (A \vdots E)$$

$$= \left(P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A \vdots P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E \right)$$

$$= \left(E \vdots A^{-1} \right)$$

即对 $n \times 2n$ 矩阵 $(A \vdots E)$ 施行初等行变换，当把 A 变成 E 时，原来的 E 就变成 A^{-1}.

即 $$(A \mid E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1})$$

例2 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解 $(A \vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}$$

$$\underset{r_3 - r_2}{\overset{r_1 + r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_2 - 5r_3}{\overset{r_1 - 2r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_3 \div (-1)}{\overset{r_2 \div (-2)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

三. 用初等矩阵求解矩阵方程

若 AX=B，则当 A可逆时，有 $X=A^{-1}B$

$$\because \quad A^{-1}(A \,\vdots\, B) = (E \,\vdots\, A^{-1}B)$$

即

$$(A \,\vdots\, B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \quad \boxed{A^{-1}B})$$

由此可知，利用初等行变换还可求$X=A^{-1}B$

例3 求矩阵 X, 使 $AX = B$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

解：若 A 可逆，则 $X = A^{-1}B$.

$$(A \vdots B) = \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_3-r_2}{\overset{r_1+r_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_2-5r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

$$\therefore \quad X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$