第八讲 线性空间的定义与简单性质

一、集合

二、映射

三、线性空间的定义

四、线性空间的简单性质

HOME

ENTER

一、集合

1、定义

把一些事物汇集到一起组成的一个整体就叫做集合；组成集合的这些事物称为集合的元素.

☆ 常用大写字母A、B、C等表示集合；

用小写字母a、b、c等表示集合的元素.

当a是集合A的元素时，就说a属于A，记作：$a \in A$；

当a不是集合A的元素时，就说a不属于A，记作：$a \notin A$

◇注：关于集合没有一个严谨的数学定义，只是有一个描述性的说明．集合论的创始人是19世纪中期德国数学家康托尔（G．Cantor），他把集合描述为：所谓集合是指我们直觉中或思维中确定的,彼此有明确区别的那些事物作为一个整体来考虑的结果;集合中的那些事物就称为集合的元素．即，集合中的元素具有：确定性、互异性、无序性.

☆集合的表示方法一般有两种：**描述法**、**列举法**

描述法： 给出这个集合的元素所具有的特征性质.

$$M=\{x \mid x\text{具有性质}P\}$$

列举法： 把构成集合的全部元素一一列举出来.

$$M=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

例1 $M=\{(x,y) \mid x^2+y^2=4, x,y\in R\}$

例2 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\cdots\}$， $2Z=\{0,\pm2,\pm4,\pm6,\cdots\cdots\}$

☆ 空集：不含任何元素的集合，记为φ.

注意： $\{\varphi\} \neq \varphi$

约定：空集是任意集合的子集合.

2、集合间的关系

☆ 如果B中的每一个元素都是A中的元素，则称B是A的**子集**，记作 $B \subseteq A$，（读作B**包含于**A）

$B \subseteq A$当且仅当 $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$

☆ 如果A、B两集合含有完全相同的元素，则称A与B**相等**，记作$A = B$.

$A = B$当且仅当$A \subseteq B$且 $B \subseteq A$

3、集合间的运算

交：$A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$ ；

并：$A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$

显然有，$A \cap B \subseteq A$; $A \subseteq A \cup B$

二、映射

1、定义

设M、M'是给定的两个非空集合，如果有 一个对应法则σ，通过这个法则σ对于M中的每一个元素a，都有M'中一个**唯一确定**的元素a'与它对应, 则称 σ为M到M'的一个**映射**，记作 $\sigma: M \to M'$或 $M \xrightarrow{\sigma} M'$

称 a' 为 a 在映射σ下的**象**，而 a 称为a' 在映射σ下的**原象**，记作$\sigma(a)=a'$ 或 $\sigma: a \mapsto a'$.

注:①设映射$\sigma: M \to M'$, 集合$\sigma(M)=\{\sigma(a) \mid a\in M\}$,

称之为M在映射σ下的**象**，通常记作 $\mathrm{Im}\sigma$.

显然，$\mathrm{Im}\sigma \subseteq M'$

②集合M 到M 自身的映射称为M 的一个**变换**.

例3 判断下列M 到M'对应法则是否为映射

1）M＝｛a，b，c｝、M'＝｛1，2，3，4｝

σ：$\sigma(a)=1$，$\sigma(b)=1$，$\sigma(c)=2$ （是）

δ：$\delta(a)=1, \delta(b)=2, \delta(c)=3, \delta(c)=4$ （不是）

τ：$\tau(b)=2$，$\tau(c)=4$ （不是）

2）$M = P^{n\times n}$，$M' = P$，（P为数域）

σ：$\sigma(A) = |A|$，　$\forall A \in P^{n\times n}$　（是）

3）$M = P$，$M' = P^{n\times n}$，（P为数域）

τ：$\tau(a) = aE$，　$\forall a \in P$（E为n级单位矩阵）　（是）

4）M、M'为任意两个非空集合，a_0是M'中的一个固定元素. σ：$\sigma(a) = a_0$，　$\forall a \in M$　（是）

例4 M是一个集合，定义I：

$$I(a)=a\ ,\qquad \forall a\in M$$

即 I 把 M 上的元素映到它自身，I 是一个映射，称为 M 上的**恒等映射**或**单位映射**.

例5 任意一个在实数集R上的函数 $y=f(x)$ 都是实数集R到自身的映射，即，函数可以看成是映射的一个特殊情形.

2、映射的乘积

设映射 $\sigma: M \to M'$，$\tau: M' \to M''$，**乘积** $\tau \circ \sigma$

定义为：$\tau \circ \sigma(a) = \tau(\sigma(a))$ $\quad \forall a \in M$

即相继施行σ和τ的结果，$\tau \circ \sigma$是 M 到 M'' 的一个映射.

注：①对于任意映射 $\sigma: M \to M'$，有

$$I_{M'} \circ \sigma = \sigma \circ I_M = \sigma$$

②设映射 $\sigma: M \to M'$，$\tau: M' \to M''$，$\psi: M'' \to M'''$，

有 $\quad (\psi \circ \tau) \circ \sigma = \psi \circ (\tau \circ \sigma)$

3、映射的性质：设映射 $\sigma: M \to M'$

1）若 $\mathrm{Im}\sigma = M'$，即对于任意 $y \in M'$，均存在 $x \in M$，使 $y = \sigma(x)$，则称**σ**是**M**到**M′**的一个**满射**（或称**σ**为**映上的**）；

2）若**M**中不同元素的象也不同，即

$\forall a_1, a_2 \in M$，若 $a_1 \neq a_2$，则 $\sigma(a_1) \neq \sigma(a_2)$

（或 $\forall a_1, a_2 \in M$，若 $\sigma(a_1) = \sigma(a_2)$，则 $a_1 = a_2$），

则称**σ**是**M**到**M′**的一个**单射**（或称**σ**为**1—1的**）；

3）若**σ**既是单射，又是满射，则称**σ**为**双射**，（或称**σ**为 **1—1对应**）

例6　判断下列映射的性质

1）$M=\{a, b, c\}$、$M'=\{1, 2, 3\}$

σ：$\sigma(a)=1$，$\sigma(b)=1$，$\sigma(c)=2$　　（既不单射，也不是满射）

τ：$\tau(a)=3$，$\tau(b)=2$，$\tau(c)=1$　　（双射）

2）$M=P^{n\times n}$，$M'=P$，（P为数域）

σ：$\sigma(A)=|A|$，　$\forall A\in P^{n\times n}$　　（是满射，但不是单射）

注：

① 对于有限集来说，两集合之间存在1—1对应的充要条件是它们所含元素的个数相同；

② 对于有限集A及其子集B，若$B \neq A$（即B为A的真子集），则A、B之间不可能存在1—1对应；但是对于无限集未必如此.

4、可逆映射

定义： 设映射 $\sigma: M \to M'$, 若有映射 $\tau: M' \to M$,

使得 $\tau \circ \sigma = I_M, \sigma \circ \tau = I_{M'}$

则称σ为**可逆映射**，τ为σ的**逆映射**，记作σ^{-1}.

σ的逆映射是由σ唯一确定的

注：

①若σ为可逆映射，则σ^{-1}也为可逆映射，且

$$(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma.$$

② $\sigma: M \to M'$ 为可逆映射，$a \in M$，若 $\sigma(a) = a'$,

则有 $\sigma^{-1}(a') = a.$

③ σ为可逆映射的充要条件是σ为1—1对应.

三、线性空间的定义

在第三章§2中，我们讨论了数域P上的n维向量空间P^n，定义了两个向量的加法和数量乘法：

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

$$k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n),\quad k\in P$$

而且这两种运算满足一些重要的规律, 如

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \qquad 1\alpha=\alpha$$

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \qquad k(l\alpha)=(kl)\alpha$$

$$\alpha+0=\alpha \qquad (k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$$

$$\alpha+(-\alpha)=0 \qquad k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$$

$$\forall\alpha,\beta,\gamma\in P^n,\ \forall k,l\in P$$

数域**P**上的一元多项式环**P**[x]中，定义了两个多项式的加法和数与多项式的乘法，而且这两种运算同样满足上述这些重要的规律，即

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$$

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$$

$$f(x)+0=f(x)$$

$$f(x)+(-f(x))=0 \qquad \forall f(x),g(x),h(x)\in P[x],$$

$$1f(x)=f(x) \qquad \forall k,l\in P$$

$$k(l)f(x)=(kl)f(x)$$

$$(k+l)f(x)=kf(x)+lf(x)$$

$$k(f(x)+g(x))=kf(x)+kg(x)$$

设V是一个非空集合，P是一个数域，在集合V中定义了一种代数运算，叫做**加法**：即对 $\forall \alpha,\beta \in V$，在V中都存在唯一的一个元素 γ 与它们对应，称 γ 为 α 与 β 的**和**，记为 $\boldsymbol{\gamma = \alpha + \beta}$；在$P$与$V$的元素之间还定义了一种运算，叫做**数量乘法**：即 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}, \forall \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{P}$，在V中都存在唯一的一个元素**δ**与它们对应，称**δ**为 k 与 α 的**数量乘积**，记为 $\delta = k\alpha$. 如果加法和数量乘法还满足下述规则，则称V为数域P上的**线性空间**：

加法满足下列四条规则： $\forall \alpha,\beta,\gamma \in V$

① $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

② $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

③ 在V中有一个元素0，对$\forall \alpha \in V$，有 $\alpha+0=\alpha$

（具有这个性质的元素0称为V的**零元素**）

④ 对 $\forall \alpha \in V$，都有V中的一个元素β，使得

$\alpha+\beta=0$；（β称为α的**负元素**）

数量乘法满足下列两条规则：

⑤ $1\alpha=\alpha$ ⑥ $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

数量乘法与加法满足下列两条规则：

⑦ $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$ ⑧ $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

注:

1． 凡满足以上八条规则的加法及数量乘法也称为**线性运算**.

2．线性空间的元素也称为**向量**，线性空间也称**向量空间**. 但这里的向量不一定是有序数组.

3．线性空间的判定:

若集合对于定义的加法和数乘运算不封闭，或者运算封闭但不满足八条规则中的任一条，则此集合就不能构成线性空间.

例1 引例1, 2中的 P^n, $P[x]$ 均为数域 P上的线性空间.

例2 数域 P上的次数小于 n 的多项式的全体，再添上零多项式作成的集合，按多项式的加法和数量乘法构成数域 P上的一个线性空间，常用 $P[x]_n$表示.

$$P[x]_n = \{ f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in P \}$$

例3 数域 P上$m \times n$矩阵的全体作成的集合, 按矩阵的加法和数量乘法，构成数域 P上的一个线性空间，用$P^{m\times n}$表示.

四、线性空间的简单性质

1、零元素是唯一的.

证明：假设线性空间V有两个零元素0_1、0_2，则有

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2.$$

2、$\forall \alpha \in V$，的**负元素是唯一的**，记为$-\alpha$.

证明：假设α有两个负元素 β、γ ，则有

$$\alpha + \beta = 0, \qquad \alpha + \gamma = 0$$

$$\beta = \beta + 0 = \beta + (\alpha + \gamma) = (\beta + \alpha) + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma = 0 + \gamma = \gamma$$

◇利用负元素，我们定义**减法**：$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

3、$0\alpha = 0$, $k0 = 0$, $(-1)\alpha = -\alpha$,

$k(\alpha - \beta) = k\alpha - k\beta$

4、如果 $k\alpha = 0$，那么$k=0$或 $\alpha = 0$.

证明：假若 $k \neq 0$, 则

$$\alpha = (k^{-1}k)\alpha = k^{-1}(k\alpha) = k^{-1}0 = 0.$$