第十九讲 特征多项式的有关性质

一、特征多项式的有关性质

二、哈密尔顿-凯莱定理

三、降阶定理

HOME

ENTER

一、特征多项式的有关性质

1. 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in P^{n\times n}$，则A的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{n}-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n}|A|$$

由多项式根与系数的关系还可得

① A的全体特征值的和$=\underline{a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}}$

称之为**A的迹**，记作trA.

② A的全体特征值的积$=|A|$.

2. (定理6) 相似矩阵具有相同的特征多项式.

证:设 $A \sim B$, 则存在可逆矩阵X，使得

$$B = X^{-1}AX$$

于是，

$$\begin{aligned}
|\lambda E - B| &= |\lambda E - X^{-1}AX| \\
&= |\lambda X^{-1}EX - X^{-1}AX| \\
&= |X^{-1}(\lambda E - A)X| \\
&= |X^{-1}||\lambda E - A||X| \\
&= |\lambda E - A|
\end{aligned}$$

注：

① 由定理6线性变换 σ 的特征值与基的选择无关.

因此,矩阵A的特征多项式也说成是线性变换 σ 的特征多项式;

② **有相同特征多项式的矩阵未必相似.**

如 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

它们的特征多项式都是 $(\lambda-1)^2$, 但A、B不相似.

③**相似矩阵具有相同的特征值、行列式、迹和秩.**

二. 哈密尔顿—凯莱（Hamilton—Caylay）定理

1. 设 $A \in P^{n\times n}$， $f(\lambda)=\left|\lambda E - A\right|$ 为A的特征多项式，则

$$f(A)=A^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})A^{n-1}+\cdots+(-1)^n\left|A\right|E=0.$$

零矩阵

2. 设σ 为有限维线性空间V的线性变换，$f(\lambda)$是 σ 的特征多项式，则 $f(\sigma)=0.$

零变换

例3. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 求 $2A^8-3A^5+A^4+A^2-4E$.

解： A的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^3-2\lambda+1$

用 $f(\lambda)$去除 $2\lambda^8-3\lambda^5+\lambda^4+\lambda^2-4\lambda=g(\lambda)$, 得

$$g(\lambda)=f(\lambda)(2\lambda^5+4\lambda^3-5\lambda^2+9\lambda-14)$$

$$+(24\lambda^2-37\lambda+10)$$

Q $f(A) = 0,$

$$\therefore \quad 2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4E = 24A^2 - 37A + 10E$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 48 & -26 \\ 0 & 95 & -61 \\ 0 & -61 & 34 \end{pmatrix}$$

练习1： 已知 $A \in P^{n\times n}$，λ为A的一个特征值，则

（1） $kA \ (k \in P)$ 必有一个特征值为 $\underline{\quad k\lambda \quad}$；

（2） $A^m \ (m \in Z^+)$ 必有一个特征值为 $\underline{\quad \lambda^m \quad}$；

（3）A可逆时，A^{-1}必有一个特征值为 $\underline{\quad \lambda^{-1} \quad}$；

（4）A可逆时，A^* 必有一个特征值为 $\underline{\quad \dfrac{|A|}{\lambda} \quad}$.

（5） $f(x) \in P[x]$，则 $f(A)$必有一个特征值为 $\underline{\quad f(\lambda) \quad}$.

练习2： 已知3阶方阵A的特征值为：1、－1、2，

则矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2$ 的特征值为：$\underline{\quad\quad\mathbf{-1,-3,0}\quad}$，

行列式 $|\boldsymbol{B}|=$ $\underline{\quad\mathbf{0}\quad}$.

三. 降阶定理

命题7.3.7 设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵且$m>n$，则

$$\left|\lambda E_m - AB\right| = \lambda^{m-n}\left|\lambda E_n - BA\right|.$$

证明 由定理5.3.12知，存在m阶可逆矩阵P与n阶可逆矩阵Q使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n},$$

其中r为的秩. 令

$$Q^{-1}BP^{-1}=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}_{n\times m},$$

其中B_1为r阶方阵. 因此

$$PABP^{-1} = PAQQ^{-1}BP^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix}.$$

$$Q^{-1}BAQ = Q^{-1}BP^{-1}PAQ$$

$$= \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ B_2 & O \end{pmatrix}.$$

$$\left|\lambda E_m - AB\right| = \begin{vmatrix} \lambda E_r - B_1 & -B_2 \\ O & \lambda E_{m-r} \end{vmatrix} = \lambda^{m-r}\left|\lambda E_r - B_1\right|,$$

$$\left|\lambda E_n - BA\right| = \begin{vmatrix} \lambda E_r - B_1 & O \\ -B_3 & \lambda E_{n-r} \end{vmatrix} = \lambda^{n-r}\left|\lambda E_r - B_1\right|.$$

比较上面两式便可得$\left|\lambda E_m - AB\right| = \lambda^{m-n}\left|\lambda E_n - BA\right|.$

例7.3.8 求n阶对称矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

的n个特征值与A的行列式$|A|$.

解 令$\alpha=(1,1,\text{K}\ 1)$，则$E+A=\alpha^T\alpha$,由降阶定理

$$|\lambda E-A|=|(\lambda+1)E-(E+A)|=|(\lambda+1)E-\alpha^T\alpha|$$

$$=(\lambda+1)^{n-1}[(\lambda+1)-\alpha\alpha^T]=(\lambda+1)^{n-1}[\lambda-(n-1)],$$

特征值: $-1(n-1$重$)$, n-1.

$$|A| = (-1)^{n-1}(n-1).$$

思考题:

已知$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$,求下列n阶实对称矩阵A的所有特征值.

$$A = \begin{bmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2+1 \end{bmatrix}$$