模拟考试（一）答案

一　选择题.（每题 3 分，15 分）

（1）复数 $\left|\dfrac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)}\right| =$ (　A　　).

(A)　1　　　(B)　2　　　(C)　$\dfrac{1}{2}$　　　(D)　4

（2）设 $f(z)=(x^2-y^2-x)+i(2xy-y^2)$，那么(　　A　).

(A)　仅在直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 上可导　　　(B)　仅在直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 上解析

(C)　仅在 $(0,0)$ 点解析　　　(D)　仅在 $(0,0)$ 点可导

（3）$\int_1^{1+i} ze^z dz =$ (　C　).

(A)　ie^{1-i}　　　(B)　ie^i　　　(C)　ie^{1+i}　　　(D)　i

（4）若 $e^{z_1+2\pi i}=e^{z_2}$，则(　　B　).

(A)　$z_1=z_2$　　　(B)　$z_1=z_2-2ik\pi$

(C)　$z_1=z_2+ik\pi$　　　(D)　$z_1=z_2+2k\pi$

（5）$z=1$ 是函数 $\sin\dfrac{1}{z-1}$ 的(　A　).

(A)　本性奇点　　　(B)　可去奇点

(C)　一级极点　　　(D)　非孤立奇点

二　填空题.（每题 3 分，15 分）

1．设 $f(z)=z^5+2z$，则 $f'(z)=\underline{5z^4+2}$

2．函数 $f(z)=\sin z$ 在 $z=0$ 处泰勒展开式中 z^3 项的系数为 $\underline{-\dfrac{1}{3!}}$

3．$\ln(-3i)=\underline{\ln 3-\dfrac{\pi}{2}i}$

4．$\oint_{|z|=3}\dfrac{z-1}{(z-4)^2}dz=\underline{0}$

5．函数 $f(t)=\cos t$ 的拉普拉斯变换为$\underline{\dfrac{s}{s^2+1}}$.

三　计算题.（70 分）

1．计算积分$\oint_C \dfrac{z-2}{z^2-z}dz$ 的值，其中 C 为正向圆周$|z-1|=\dfrac{1}{2}$.（7 分）

解：$\oint_C \dfrac{z-2}{z^2-z}dz=\oint_C \dfrac{\frac{z-2}{z}}{z-1}dz$

$$=2\pi i\,[\frac{z-2}{z}]_{z=1}$$

$$=-2\pi i$$

2．计算积分$\oint_C \dfrac{\sin z}{(z-2)^3}dz$ 的值，其中 C 为正向圆周$|z|=5$.（7 分）

解：由高阶导数公式

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-2)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}(\sin z)''|_{z=2}$$

$$=-\frac{2\pi i}{2}\sin 2$$

3．求函数$\dfrac{2z}{z^2+1}$在有限奇点处的留数. （7 分）

解：因为$z^2+1=(z+i)(z-i)$，所以$z=i,z=-i$为$\dfrac{2z}{z^2+1}$的一级极点

$$\operatorname{Re}s[f(z),i]=\lim_{z\to i}(z-i)\times\frac{2z}{z^2+1}=1$$

$$\operatorname{Re}s[f(z),-i]=\lim_{z\to -i}(z+i)\times\frac{2z}{z^2+1}=1$$

4．求函数$z^2\cos\dfrac{1}{z}$在有限奇点处的留数. （7 分）

解：因为$z=0$为$z^2\cos\dfrac{1}{z}$的奇点

$$z^2\cos\frac{1}{z}=z^2(1-\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^4}-\cdots)$$

$$\operatorname{Re}s[f(z),0]=0$$

5．试将$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在$1<|z-2|<+\infty$内展开成洛朗级数.（10 分）

解：在$1<|z-2|<+\infty$内

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+2}}$$

6．设$u(x,y)=x^3-3xy^2$.且$f(0)=i$.，求共扼调和函数$f(z)$.（10分）

解：由$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2$，得$v=\int(3x^2-3y^2)dy=3x^2y-y^3+\Phi(x)$,

故$\frac{\partial x}{\partial x}=6xy+\Phi'(x)=-\frac{\partial y}{\partial y}=-6xy$,　即$\Phi'(x)=0\Rightarrow\Phi(x)=c$　(c 为常数)

再由　$f(0)=i$可得 c=1，故　$f(z)=z^3+i$.

7.若函数$f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$是复平面上的解析函数，求实数$a,b,c,d$的值.（12分）

解：$u_x=2x+ay,u_y=ax+2by,v_x=2cx+dy,v_y=dx+2y$

$\because$解析函数　　　　　$\therefore u_x=v_y,u_y=-v_x$

$\therefore 2x+ay=dx+2y,\qquad 2cx+dy=-ax-2by.$

$\therefore a=2\quad b=\text{-}1,\quad c=-1,\qquad d=2$

8. 利用拉普拉斯变换解常微分方程初值问题：

$y''(t)-2y'(t)+y(t)=e^t$，$y(0)=0=y'(0)=0$.（10分）

解：设　$L[y(t)]=Y(s)$，则

$$s^2Y(s)-2sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s-1}\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s-1)^3}.$$

又　$L[e^t]=\frac{1}{s-1}$,由卷积定理得　$L^{-1}[\frac{1}{(s-1)^2}]=e^t*e^t=te^t$.

故　$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[\frac{1}{s-1}\frac{1}{(s-1)^2}]=e^t*te^t=\frac{t^2}{2}e^t$.