第十二讲 空间平面

一、曲面的概念

二、空间平面方程

三、有轴平面束

一、曲面的概念

1. 曲面方程的定义:

如果曲面S与三元方程$F(x,y,z)=0$有下述关系:

（1） 曲面S上任一点的坐标都满足方程;

（2）不在曲面S上的点的坐标都不满足方程;

那么，方程$F(x,y,z)=0$就叫做曲面S的方程，而曲面S就叫做方程的图形.

如果 $F(x,y,z)$ 是关于x,y,z 的多项式函数，则称该曲面为代数曲面. 如果该代数曲面的次数为 d, 则称相应的曲面为 d 次 曲面.

例 1 已知$A(1,2,3)$，$B(2,-1,4)$，求线段AB的垂直平分面的方程.

解 设$M(x,y,z)$是所求平面上任一点，

根据题意有$|MA|=|MB|$,

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$

$$=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$

$$-2x+1-4y+4-6z+9=-4x+4+2y+1-8z+16$$

故所求方程为 $2x-6y+2z-7=0.$

例2 方程$z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$的图形是怎样的？

解 根据题意有 $z \geq -1$,

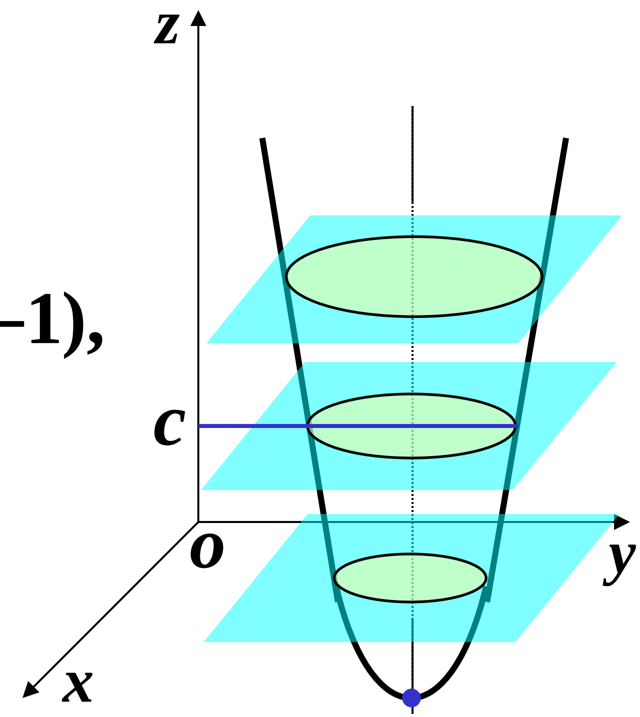
用平面$z=c$去截图形得圆：

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1+c \quad (c \geq -1),$$

当平面$z=c$上下移动时，

得到一系列圆

圆心在$(1,2,c)$，半径为$\sqrt{1+c}$，



半径随c的增大而增大．图形上不封顶，下封底．

以上几例表明研究空间曲面有两个基本问题:

(1) 已知曲面作为点的轨迹时，求曲面方程.

（讨论旋转曲面）

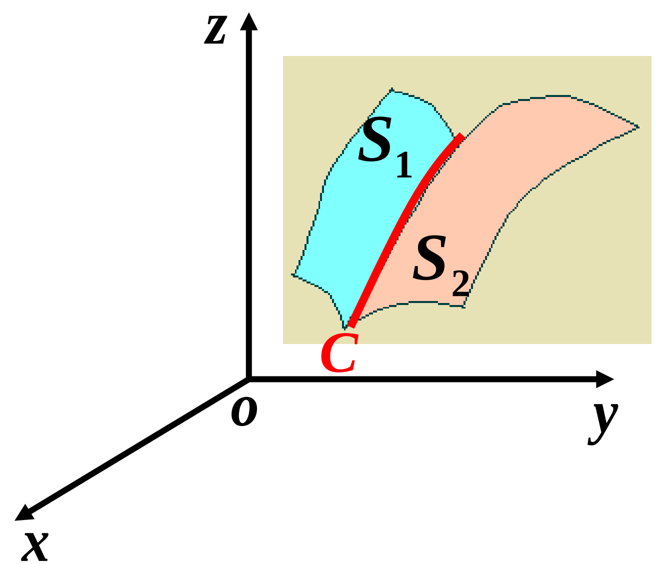
(2) 已知坐标间的关系式，研究曲面形状.

（讨论柱面、二次曲面）

2、空间曲线的方程

空间曲线C可看作空间两曲面的交线.

方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$



称为空间曲线的一般方程.

特点： 曲线上的点都满足方程，满足方程的点都在曲线上，不在曲线上的点不能同时满足两个方程.

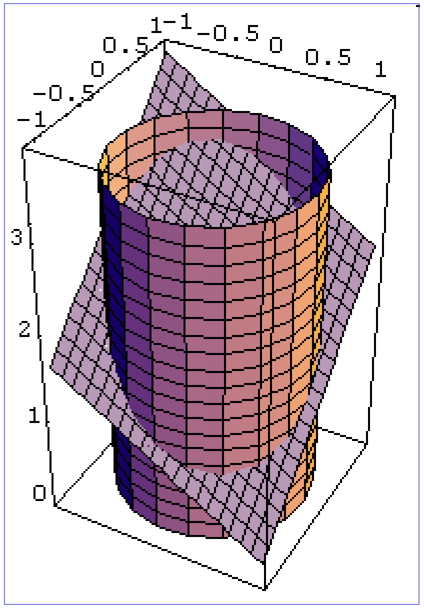
例3 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3y+3z=6 \end{cases}$ 表示怎样的曲 线？

解 $x^2+y^2=1$ 表示圆柱面，

$2x+3y+3z=6$ 表示平面，

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3y+3z=6 \end{cases}$$

交线如右图示:



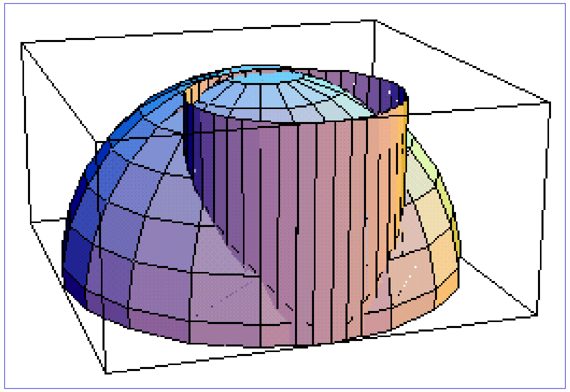
例2 方程组 $\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4} \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

解 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 交线如下图：

上半球面,

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

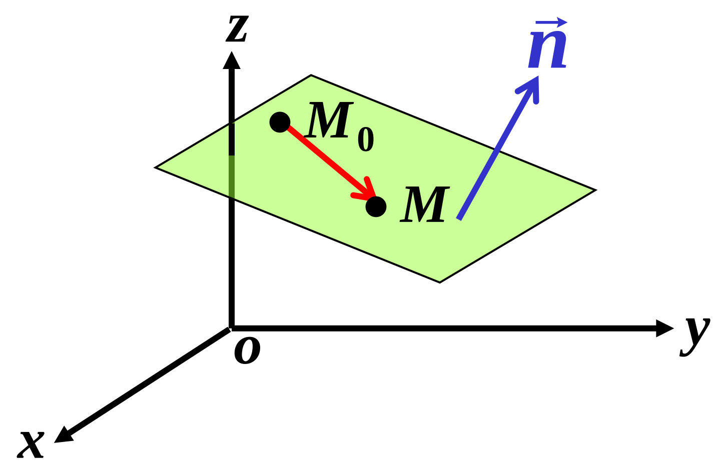
圆柱面,



二、空间平面方程

1. 平面的点法式方程

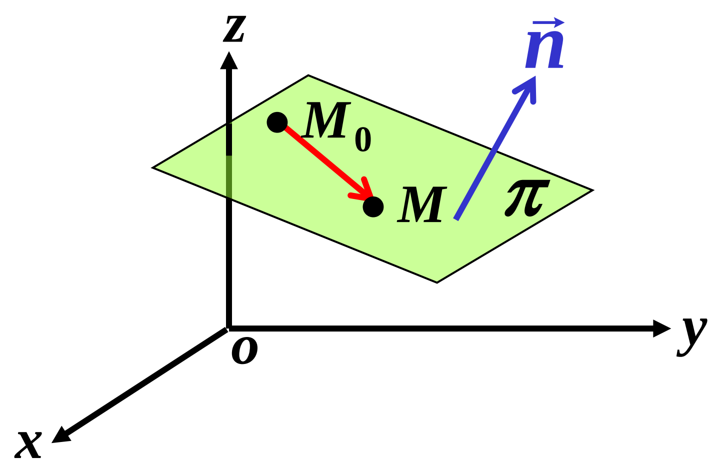
如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的法线向量.



问题：已知平面π上一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$及一法向量，$\vec{n}=(A, B, C)$，求此平面方程.

解：在所给平面上任取一点设为$M(x, y, z)$，则必有 $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0.$

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0.$$



其中法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$,

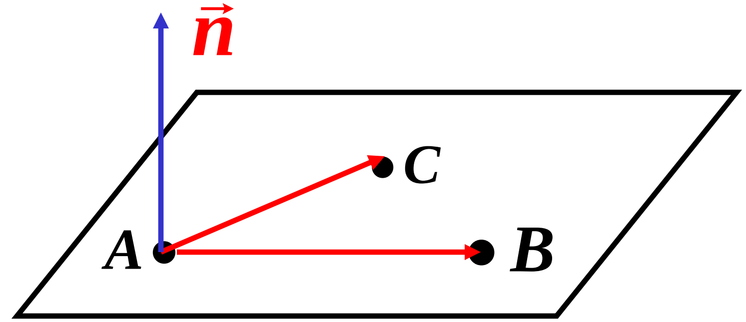
已知点为 (x_0, y_0, z_0).

$$\because \quad \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

$$\therefore \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

平面的点法式方程

例5 求过三点$A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$、$C(0,2,3)$的平面方程.



解 $\overrightarrow{AB}=(-3,4,-6)$,

$\overrightarrow{AC}=(-2,3,-1)$,

取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=(14,9,-1)$,

所求平面方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$,

整理得 $14x+9y-z-15=0$.

2. 平面的一般方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz\underbrace{\boxed{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}}_{D}=0,$$

$Ax+By+Cz+D=0$ 称为平面的一般方程.

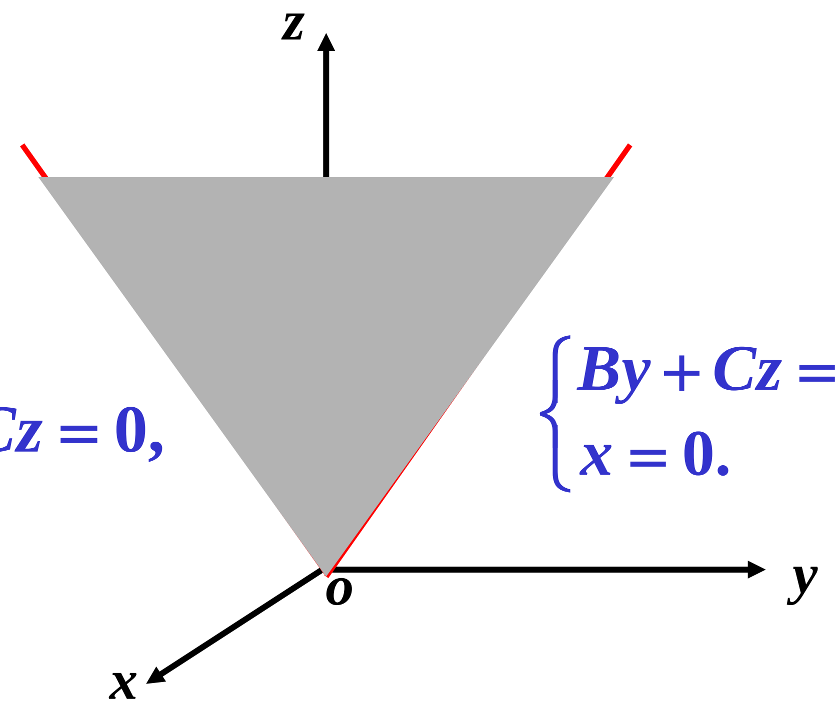
法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$.

平面一般方程的几种特殊情况

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(1) $D = 0$, $\quad Ax + By + Cz = 0,$

此平面通过坐标原点. 其图形如下:



$$\begin{cases} Ax + Cz = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} By + Cz = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

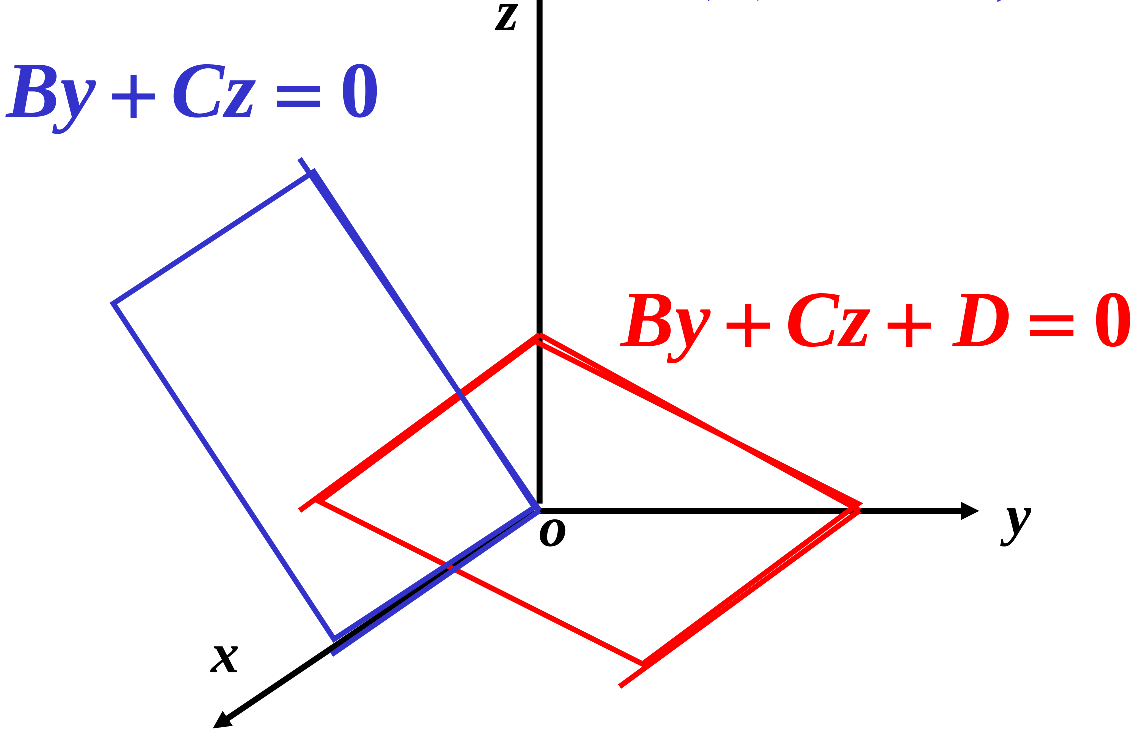
平面一般方程的几种特殊情况

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(2)\ A = 0,\ \begin{cases} D \neq 0, & By + Cz + D = 0 \\ D = 0, & By + Cz = 0 \end{cases}$$

此平面平行于x 轴；其图形如下：

平面通过x 轴；

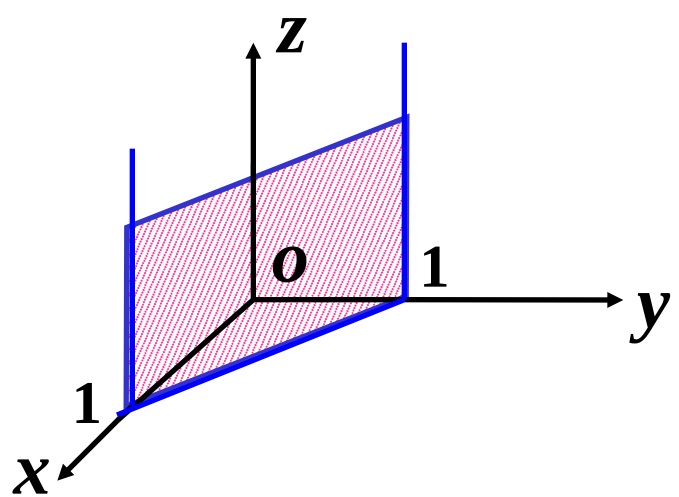


平面一般方程的几种特殊情况

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

类似地可讨论 $B = 0,\ C = 0$ 情形.

例如：$x + y - 1 = 0$, 图形如下：



平面一般方程的几种特殊情况

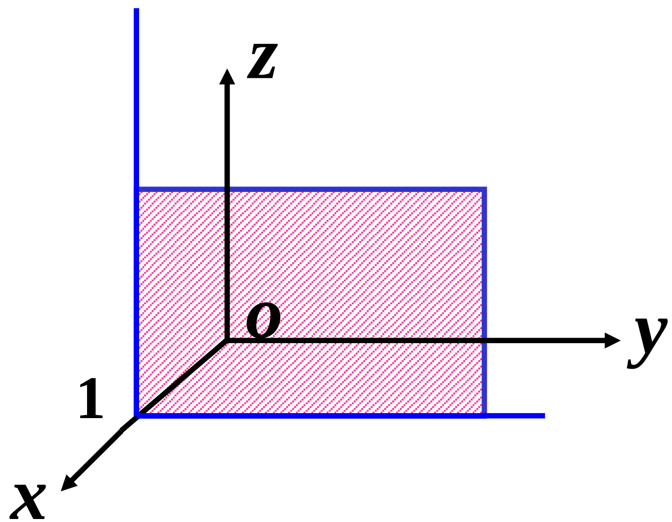
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(3) $\begin{cases} A = B = 0, \\ D \neq 0, \end{cases}$ $Cz + D = 0$ 此平面平行于 xoy 坐标面;

类似地有 $\begin{cases} A = C = 0 \\ D \neq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} B = C = 0 \\ D \neq 0 \end{cases}$ 的情形.

例如：$x - 1 = 0$,

其图形如右：



平面的一般方程为$Ax+By+Cz+D=0$,其法线向量为$n=(A, B, C)$.

讨论:

1.填写下表:

平面方程	法线向量	法线向量垂直于	平面平行于
$By+Cz+D=0$	$(0, B, C)$	x轴	x轴
$Ax+Cz+D=0$	$(A, 0, C)$	y轴	y轴
$Ax+By+D=0$	$(A, B, 0)$	z轴	z轴
$Cz+D=0$	$(0, 0, C)$	x轴和y轴	xOy平面
$Ax+D=0$	$(A, 0, 0)$	y轴和z轴	yOz平面
$By+D=0$	$(0, B, 0)$	x轴和z轴	zOx平面

例6 设平面过原点及点(6,-3,2)且与平面$4x$-y+$2z$=8垂直，求此平面方程.

解: 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0,$

由平面过原点知 $D=0,$

由平面过点$(6,-3,2)$知 $\boxed{6A-3B+2C=0,}$

又$\because \vec{n}\perp(4,\ -1,\ 2),$ $\quad\therefore \boxed{4A-B+2C=0}$

$$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$$

故所求平面方程为 $2x+2y-3z=0.$

例7 一平面过原点，且与平面 π_1: $2x-y+5z=0$ 和 π_2: $x+3y-z-7=0$ 都垂直，求此平面的方程

解法一 因为平面过原点， 所以设它的方程为:

$$Ax+By+Cz=0.$$

又平面与两已知平面都垂直，所以有

$$\vec{n}\cdot\vec{n}_1=0,\ \text{即}\quad 2A-B+5C=0,$$

$$\vec{n}\cdot\vec{n}_2=0,\ \text{即}\quad A+3B-C=0,$$

由此解得 $A=-2C,\ B=C,$

$\therefore$ 所求平面方程为：$2x-y-z=0.$

例7 一平面过原点，且与平面 π_1: $2x - y + 5z = 0$ 和 π_2: $x + 3y - z - 7 = 0$ 都垂直，求此平面的方程.

解法二 因为所求平面 π 同时垂直于平面 π_1 和 π_2，所以有 $\vec{n} \perp \vec{n}_1, \vec{n} \perp \vec{n}_2$，即 $\vec{n} // \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

而
$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-14,\ 7,\ 7),$$

取 $\vec{n} = (2, -1, -1)$，由点法式方程可得

$$2(x - 0) - (y - 0) - (z - 0) = 0,$$

即所求平面方程为 $\quad 2x - y - z = 0.$

例 8 求平行于 y 轴且过点 $P_1(1,-5,1)$, $P_2(3,2,-2)$ 的平面 Π 的方程。

解 取平面的法向量为

$$\vec{n}=\vec{e}_2\times\overrightarrow{P_1P_2}=(0,1,0)\times(2,7,-3)\quad=(-3,0,-2)$$

故所求平面方程为

$$-3(x-1)+0[y-(-5)]+(-2)(z-1)=0,$$

化简得 $\quad 3x+2z-5=0.$

例　求通过x轴且垂直于平面$5x+y-2z+3=0$的平面方程.

例　求通过z轴和点$M(4,-3,-1)$的平面方程.

例　求通过点$(3,0,-5)$，且平行于平面$2x-8y+z-2=0$的平面方程.

3. 平面的截距式方程

例9 设平面与x,y,z轴分别交于$P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$(其中a,b,c均不为零)，求此平面方程.

解: 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0$,

将三点坐标代入得 $\begin{cases} aA+D=0, \\ bB+D=0, \\ cC+D=0, \end{cases}$

$$\Rightarrow A=-\frac{D}{a},\quad B=-\frac{D}{b},\quad C=-\frac{D}{c}.$$

将$A=-\dfrac{D}{a}$, $B=-\dfrac{D}{b}$, $C=-\dfrac{D}{c}$,

代入所设方程 $Ax+By+Cz+D=0$,

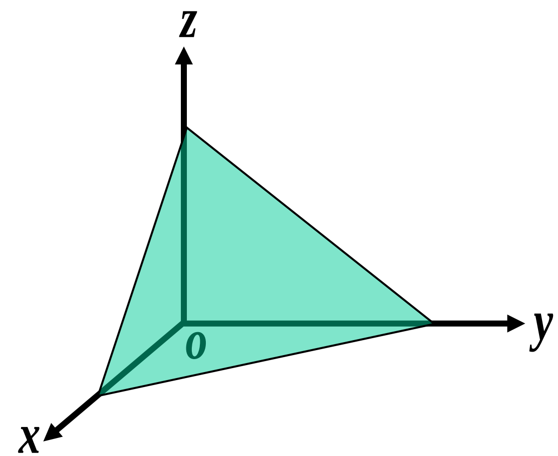
得 $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ **平面的截距式方程**

x轴上截距 y轴上截距 z轴上截距

例10 求平行于平面 $6x+y+6z+5=0$ 而与三个坐标面所围成的四面体的体积为一个单位长度的平面方程.

解 由所求平面与已知平面平行可设平面为

$$6x+y+6z=D,$$



$$\because V=1, \quad \therefore \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left|\frac{D^3}{36}\right|=1,$$

因此 $D=\pm 6,$

故所求平面方程为 $6x+y+6z=6,$

或为 $6x+y+6z=-6.$

三、平面束

设直线L由方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

所确定，其中系数A_1, B_1, C_1与A_2, B_2, C_2不成比例.

建立三元一次方程

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1$$
$$+ \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (3)$$

其中λ为任意常数.

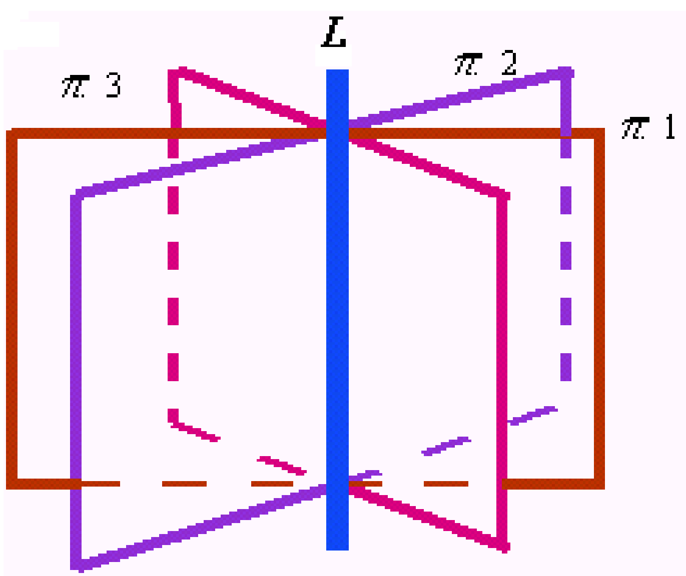
$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

整理（3）式可得

$$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)z+(D_1+\lambda D_2)=0$$

因系数 $A_1+\lambda A_2, B_1+\lambda B_2, C_1+\lambda C_2$ 不全为零，

从而(3)式表示一张平面.

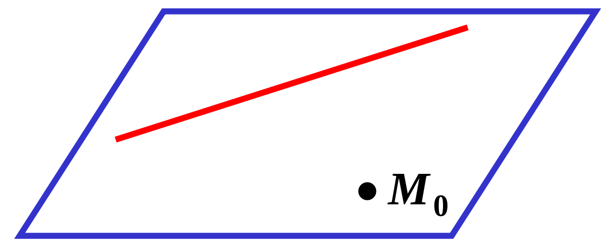


通过定直线的所有平面的全体称为平面束.

(3)式称为过直线L的平面束方程(第二张平面除外）.

例11 平面过直线L $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 和点 $M_0(1,1,-1)$，试求其方程.

解 设过直线L的平面方程为



$$(x+y-z)+\lambda(x-y+z-1)=0,$$

由于所求平面过 $M_0(1,\ 1,\ -1)$,

$$\therefore (1+1+1)+\lambda(1-1-1-1)=0,$$

解得 $\lambda=\dfrac{3}{2}$, 故所求平面为

$$(x+y-z)+\frac{3}{2}(x-y+z-1)=0,$$

即为 $5x-y+z-3=0.$