第七章 紧致性

紧致性是点集拓扑学中最重要的两个拓扑性质，因教学课时有限，所以本章中只讲解7.1和7.2两节内容。学生在掌握这两节与有关紧致性的相关知识后，对于本章后面内容的学习将会感觉比较轻松。

教学重点：紧致空间；紧致性与分离性公理

教学难点： 紧致空间

7.1 紧致空间

定义 7.1.1 紧致空间: X 的每一开覆有有限子覆盖.

紧 $\Leftarrow$ Lindelof, 反之不然. 如由可数无限个点组成的离散空间.

例 7.1.1 **R** 不是紧致空间.

R 的开覆盖 $\mathcal{A}=\{(-n,n)\subset R\mid n\in Z_{-}\}$ 没有有限子覆盖.

定义 7.1.2 X 的子集 Y 称为紧致子集, 如果 Y 作为子空间是紧致空间.

定理 7.1.1 设 $Y\subset X$， 则 Y 紧致 $\Leftrightarrow$ 由中 X 开集构成 Y 的覆盖有有限子覆盖.

证明 "$\Rightarrow$" "设 $\mathcal{A}$ 是 Y 的这样一个覆盖, $\mathcal{A}|_Y$ 有有限子覆盖 $\{A_i\bigcap Y\mid i\le n\}$, 则 $\{A_i\mid i\le n\}$ 覆盖 Y.

"$\Leftarrow$" 设 $\mathcal{A}$ 是 Y 的开覆盖, $\forall A\in\mathcal{A}$，$\exists X$ 的开集 U_A 使 $A=U_A\cap Y, A^*=\{U_A\}_{A\in\mathcal{A}}$ 有有限子覆盖 $\{U_{A_i}\}_{i\le n}$, 则 $\{A_i\}_{i\le n}$ 是 Y 的有限子覆盖.

定义 7.1.3 有限交性质: 每一有限子族具有不空的交.

定理 7.1.2 X 紧致 $\Leftrightarrow$ 具有有限交性质的闭集族有非空的交.

证明 "$\Rightarrow$" 是的具有有限交性质的闭集族，如果 $\cap\mathcal{F}=\phi$, 则 $\cap\mathcal{F}'=X$, 那么 X 有覆盖 $\{F_1',F_2',...F_n'\}$，从而 $\cap_{i\le n}F_i=(\cup_{i\le n}F_i')'=\phi$, 矛盾.

"$\Leftarrow$" 设 $\mathcal{A}$ 是 X 的开覆盖， 因为 $\cup\mathcal{A}=X$， 于是 $\cap\mathcal{A}=\phi$, 所以某有限子集之交 $\cap\cap_{i\le n}A_i'=\phi$, 即 $\cup_{i\le n}A_i=X$，从而 $\mathcal{A}$ 有有限子覆盖.

定理 7.1.3 设$\mathcal{B}$ 是 X 的基. 如果 X 的由$\mathcal{B}$中元构成的每一覆盖有有限子覆盖, 则 X 是紧致空间.

证明 设$\mathcal{A}$是的开覆盖. 令$\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists A \in \mathcal{A}使 B \subset A\}$，则$\cup \mathcal{B}' = X$.

事实上, $\forall x \in X, \exists A \in \mathcal{A}使 x \in A, \exists B \in \mathcal{B}使 x \in B \subset A$, 那么 $B \in \mathcal{B}$. 于是$\mathcal{B}$的某些有限子集 $\{B_1,...,B_n\}$ 覆盖 $X, \forall i \le n, \exists A_i \in \mathcal{A}使 B_i \subset A_i$, 则 $\{A_1,...,A_n\}$ 是$\mathcal{A}$的有限子覆盖.

定理 7.1.4 设 $f: X \to Y$ 连续. 若 A 是 X 的紧致子集, 则 $f(A)$ 是 Y 的紧致子集.

证明 设 $\mathcal{C}$是由 Y 的开集组成的 $f(A)$ 的覆盖, 则$\{f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$是 X 的开集组成的 A 的覆盖, 它有有限子覆盖 $\{f^{-1}(C_i)\}_{i \le n}$， 于是 $\{C_i\}_{i \le n}$是 $f(A)$ 的有限子覆盖.

定理 7.1.5 紧致性关于闭子空间遗传性.

证明 设 Y 是紧致空间 X 的闭集. 设$\mathcal{A}$是由 X 中开集组成的 Y 的覆盖, 则$\mathcal{A} \bigcup \{Y'\}$ 是 X 的开 覆盖, 它有有限子覆盖 $\{A_i\}_{i \le n} \cup \{Y'\}$, 从而 $\{A_i\}_{i \le n}$ 是 Y 的覆盖.

紧致性是否是可开遗传性?

定理 7.1.7 紧致性是有限可积性.

证明 设 $X_1 \times X_2$ 是紧致的， 要证 $X_1 \times X_2$ 是紧致的. $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U, V$ 分别是 X_1, X_2 的开集$\}$是 $X_1 \times X_2$ 的基. 设$\mathcal{A}$是由$\mathcal{B}$ 中元构成的 $X_1 \times X_2$ 的覆盖. $\forall x \in X_1, \{x\} \times X_2$ 同胚于 X_2，所以$\mathcal{A}$ 有有限子集$\mathcal{A}_x = \{U_{xi} \times V_{xi}\}_{i \le n(x)}$ 覆盖 $\{x\} \times X_2$，不 妨设 $x \in U_{xi}$. 令 $M_x = \cap_{i \le n(x)} U_{xi}$， 则 X_1 的开集 M_x 含点 x 且 $\cup \mathcal{A}_x \supset M_x \times X_2$. 这时 X_1 的开覆盖 $\{M_x \mid x \in X_1\}$ 有有限子覆 盖 $\{M_{xi}\}_{j \le m}$. 令$\mathcal{A}^* = \cup_{j \le m} \mathcal{A}_{xj}$，则$\mathcal{A}^*$是$\mathcal{A}$ 的有限子覆盖.

7.2 紧致性与分离性公理

定理 7.2.1(定理 7.2.5) X 是T_2空间. 若 A, B 是 X 不交的紧致子集, 则 X 中不交的开集分别含 A, B .

证明 固定 $x \in A, \forall y \in B, \exists$ 不交开集 U_y, V_y 分别含 $x, y. B$ 的覆盖 $\{V_y \mid y \in B\}$ 有有限子覆盖

$\{V_{yi}\}_{i\le n}$, 令$U_x^* = \cap_{i\le n} U_{yi}, V_x^* = \cap_{i\le n} V_{yi}$, 则U_x^*, V_x^*是X的分别含x, B的不交开集. A 的覆盖$\{U_x^* \mid x\in A\}$有有 限子覆盖$\{U_{xj}^*\}_{j\le m}$, 令$U = \bigcup_{i\le m} U_{xi}^*, U = \cap_{i\le m} V_{xi}^*$则$U, V$是$X$ 中分别含A, B的不交开集.

推论 7.2.2 T_2空间的紧致集是闭集.

证明 设A是T_2空间X的紧致集. 若$x\notin A, \exists X$中不交的开集U, V分别含x, A于是$U\cap A=\phi$, 所 以$x\in A^-$, 故$A=A^-$是闭集.

推论 7.2.3 紧致T_2空间中, 闭集$\Leftrightarrow$紧致集.

推论 7.2.6 紧致. $+T_2\Rightarrow T_4$

定理 7.2.7 设X是正则空间. 若X的紧致集A含于开集U中, 则存在开集V使 $A\subset V\subset V^-\subset U$.

证明 . $\forall x\in A$、存在开集V_x使$x\in V\subset V^-\subset U$.$A$的覆盖$\{V_x \mid x\in A\}$有有限子覆盖$\{V_i\}_{i\le n}$令$V=\cup_{i\le n} V_i$,则$V$是$X$的开集且$A\subset V\subset V^-\subset U$.

由此, 紧致的正则空间是正规空间, 从而紧致+正则$\Rightarrow$正规 +正则$\Rightarrow$完全正则. 下图是紧致空间中分离性的关系.

定理 7.2.8 设$f: X\to Y$连续. 若X紧致, Y是T_2, 则f是闭的.

证明 若A闭于X, 则A是紧致的, 于是$f(A)$是Y的紧致子集, 从而$f(A)$闭于Y.

若上述f 还是双射, 则f是同胚. (推论 7.2.9)