

第三章 多维随机变量及其分布

在实际问题中, 试验结果有时需要同时用两个或两个以上的随机变量来描述.

例如 用温度和风力来描述天气情况. 通过对含碳、含硫、含磷量的测定来研究钢的成分。 要研究这些随机变量之间的联系, 就需考虑若干个随机变量, 即多维随机变量及其取值规律——多维分布。

由于从二维推广到多维一般无实质性的困难, 我们重点讨论**二维随机变量**。

§ 3.1 二维随机变量

一、二维随机变量及其分布

1、定义 设 Ω 为随机试验的样本空间，

$$\forall \omega \in \Omega \xrightarrow{\text{一定法则}} \exists (X(\omega), Y(\omega)) \in R^2$$

则称二维向量 (X, Y) 为二维随机变量
或二维随机向量

讨论：

- ◆ 二维随机变量作为一个整体的概率特性
- ◆ 其中每一个随机变量的概率特性与整体的概率特性之间的关系

2、二维随机变量的联合分布函数

定义 设 (X, Y) 为二维随机变量, 对于任何一对实数 (x, y) , 事件

$$\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\} \quad (\text{记为 } \{X \leq x, Y \leq y\})$$

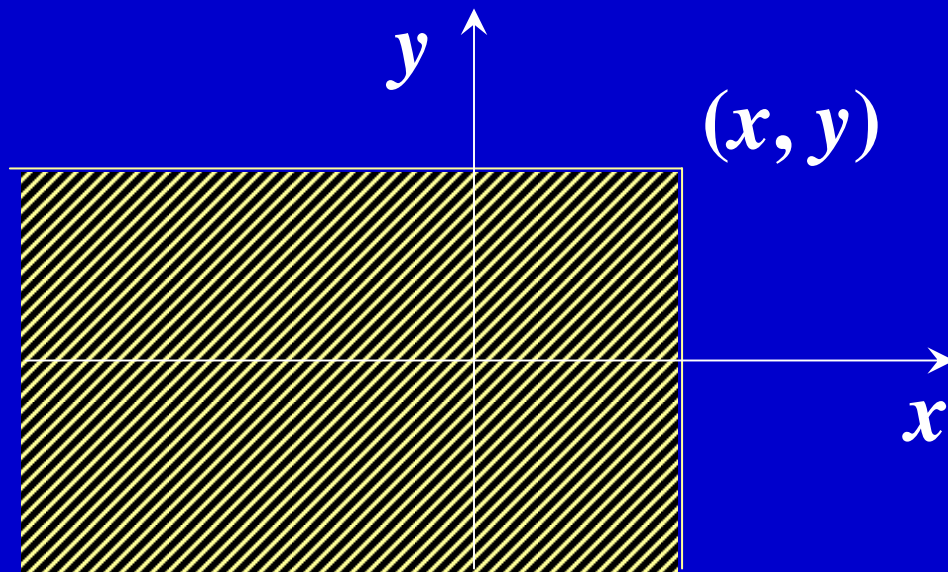
的概率 $P\{X \leq x, Y \leq y\}$ 定义的一个

二元实函数 $F(x, y)$, 称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 即

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

分布函数的几何意义

如果用平面上的点 (x, y) 表示二维随机变量 (X, Y) 的一组可能的取值，则 $F(x, y)$ 表示 (X, Y) 的取值落入下图所示的角形区域的概率



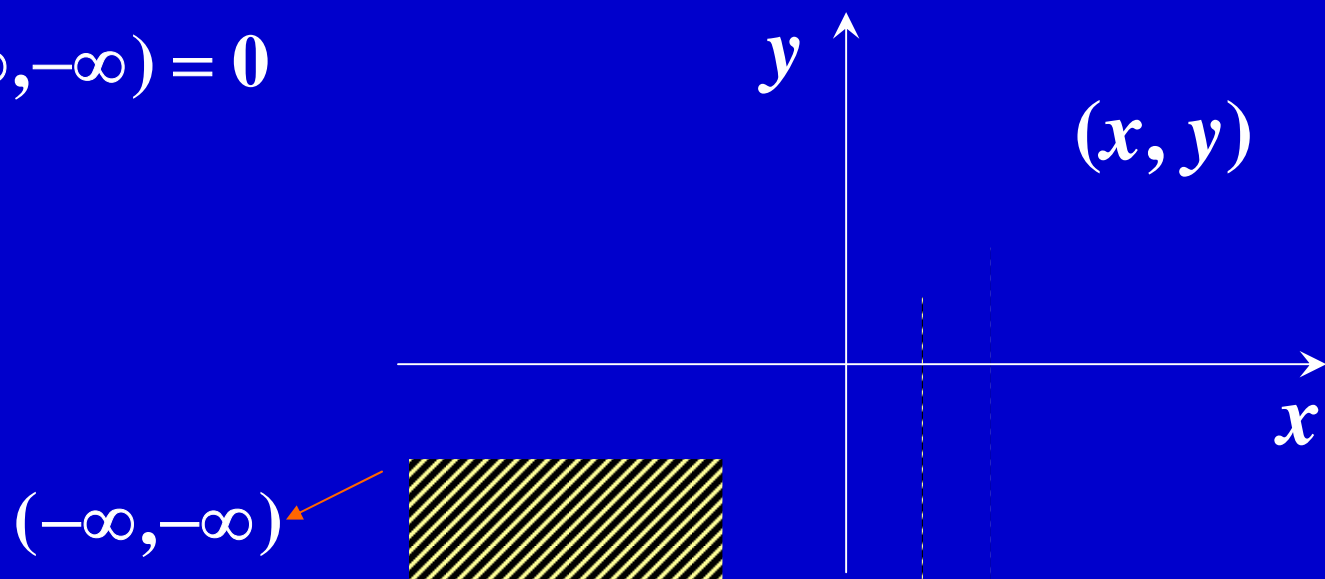
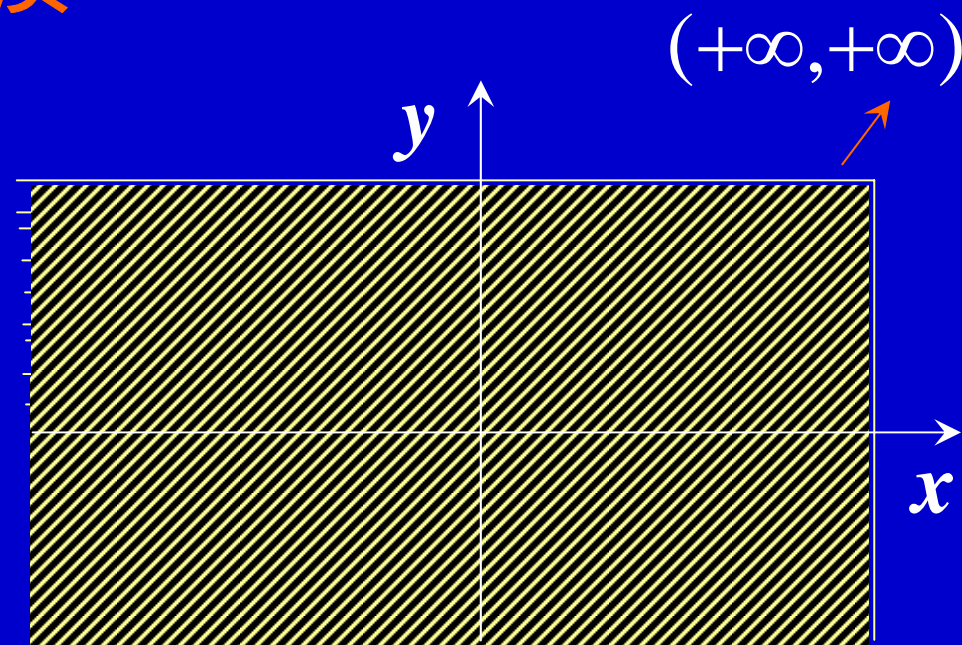
3、联合分布函数的性质

1、规范性

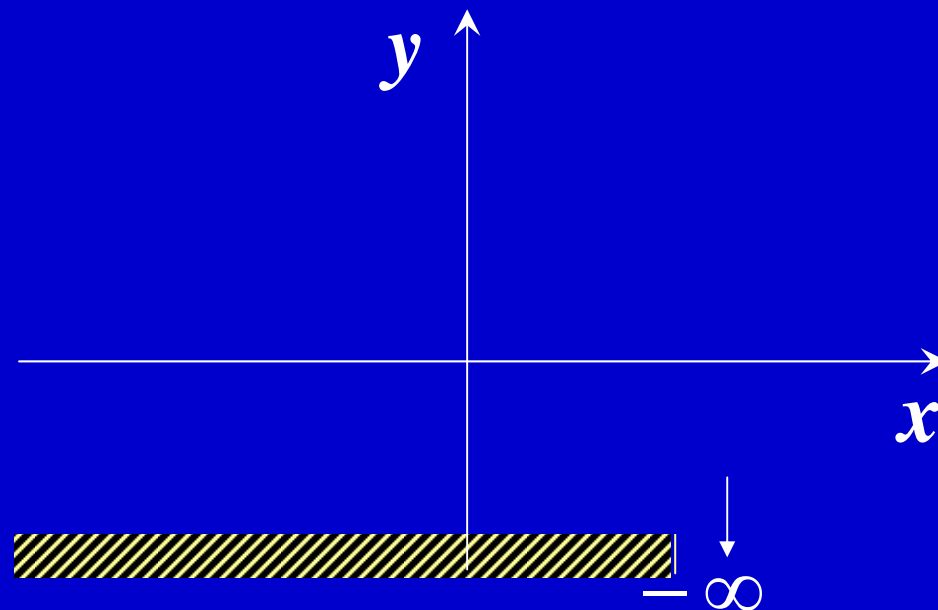
$$0 \leq F(x, y) \leq 1$$

$$F(+\infty, +\infty) = 1$$

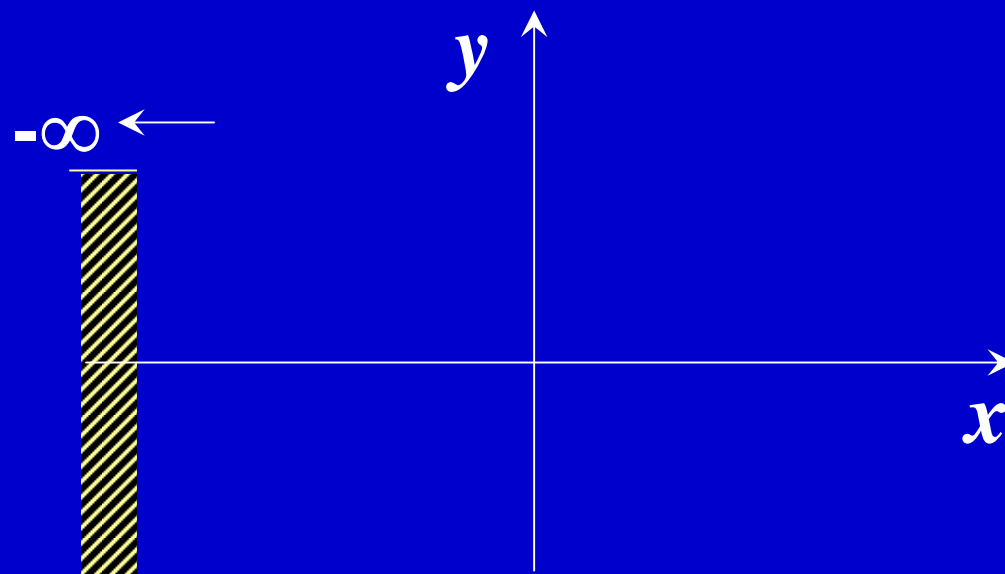
$$F(-\infty, -\infty) = 0$$



$$F(x, -\infty) = 0$$



$$F(-\infty, y) = 0$$



2、对每个变量单调不减

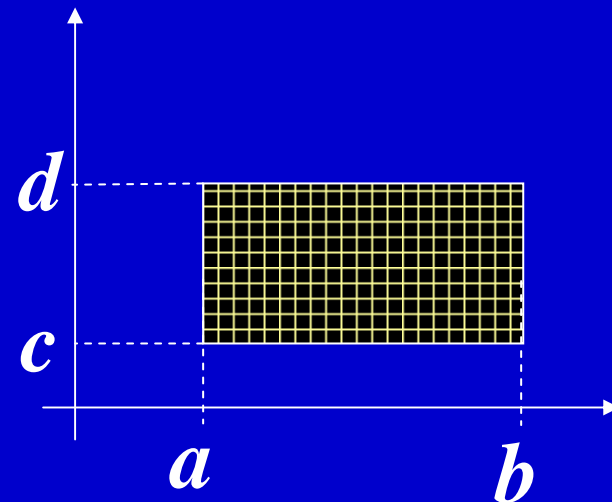
固定 x , 对任意的 $y_1 < y_2$, $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$

固定 y , 对任意的 $x_1 < x_2$, $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$

3、对每个变量右连续

$$F(x_0, y_0) = F(x_0 + 0, y_0)$$

$$F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0 + 0)$$



4、对于任意的 $a < b$, $c < d$

$$F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c) \geq 0$$

事实上 $F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$
 $= P\{a < X \leq b, c < Y \leq d\}$

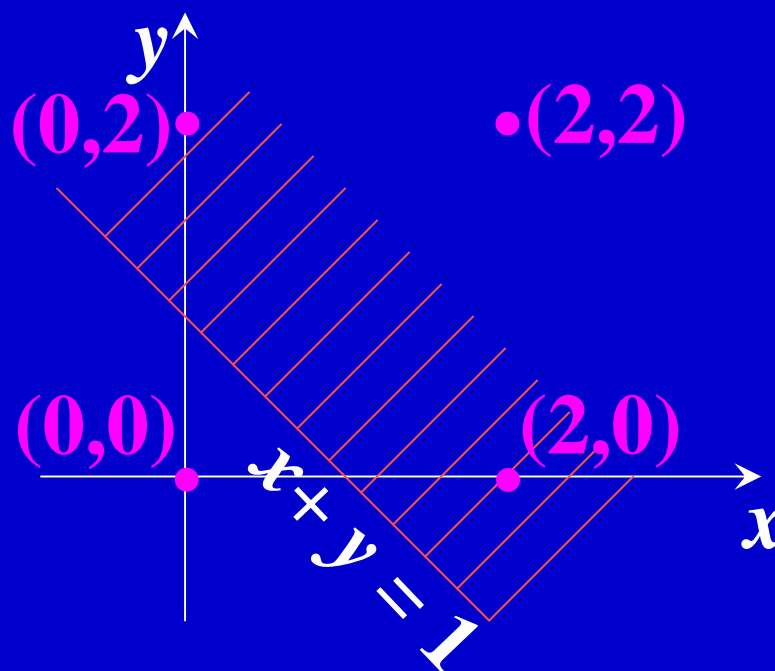
例1 设

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x + y < 1 \\ 1, & x + y \geq 1 \end{cases}$$

讨论 $F(x, y)$ 能否成为二维随机变量的分布函数？

解

$$\begin{aligned} & F(2, 2) - F(0, 2) \\ & - F(2, 0) + F(0, 0) \\ & = 1 - 1 - 1 + 0 \\ & = -1 \end{aligned}$$

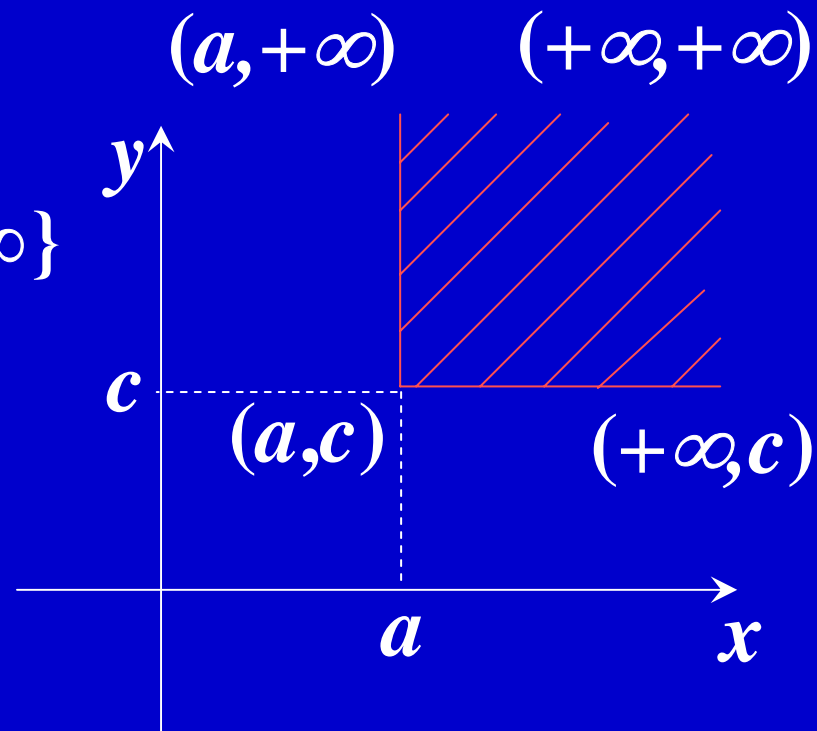


故 $F(x, y)$ 不能作为二维随机变量的分布函数

注意 对于二维随机变量

$$P\{X > a, Y > c\} \neq 1 - F(a, c)$$

$$\begin{aligned} & P\{X > a, Y > c\} \\ &= P\{a < X < +\infty, c < Y < +\infty\} \\ &= 1 - F(+\infty, c) \\ &\quad - F(a, +\infty) + F(a, c) \end{aligned}$$



二、二维离散型随机变量

1、**定义** 若二维随机变量 (X, Y) 的所有可能的取值为有限多个或可列无穷多个, 则称 (X, Y) 为**二维离散型随机变量**.

要描述二维离散型随机变量的概率特性及其与每个随机变量之间的关系常用其**联合分布律**和**边缘分布律**

2、联合分布律

设 (X, Y) 的所有可能的取值为

$$(x_i, y_j), \quad i, j = 1, 2, \dots$$

则称

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

为二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律或联合概率分布，也简称分布律或概率分布

显然， $p_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1$$

性质

例2 把一枚均匀硬币抛掷三次，设 X 为三次抛掷中正面出现的次数，而 Y 为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值，求 (X,Y) 的分布律。

解： (X, Y) 可取值 $(0,3), (1,1), (2,1), (3,3)$

$$P\{X=0, Y=3\}=(1/2)^3=1/8$$

列表如下

$$P\{X=1, Y=1\}=3(1/2)^3=3/8$$

$$P\{X=2, Y=1\}=3/8$$

$$P\{X=3, Y=3\}=1/8$$

$X \backslash Y$	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

3、二维离散型随机变量的联合分布函数

$$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij},$$

$$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

已知联合分布律可以求出其联合分布函数

反之，已知分布函数也可以求出其联合分布律

$$\begin{aligned} P\{X = x_i, Y = y_j\} = & F(x_i, y_j) - F(x_i, y_j - 0) \\ & - F(x_i - 0, y_j) + F(x_i - 0, y_j - 0) \end{aligned}$$

$$i, j, = 1, 2, \dots$$

例3 把三个球等可能地放入编号为1, 2, 3 的三个盒子中, 每盒容纳的球数无限. 记 X 为落入 1 号盒的球数, Y 为落入 2 号盒的球数, 求:

1) (X, Y) 的联合分布律;

2) $F(x, y)$

解 联合分布律的求法: 利用乘法公式

$$\begin{aligned} P\{X = x_i, Y = y_j\} &= P\{X = x_i\}P\{Y = y_j | X = x_i\} \\ &\quad \text{或} \\ &= P\{Y = y_j\}P\{X = x_i | Y = y_j\} \end{aligned}$$

常用列表的方法给出

1) 本例中 ,

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j|X = i\}$$

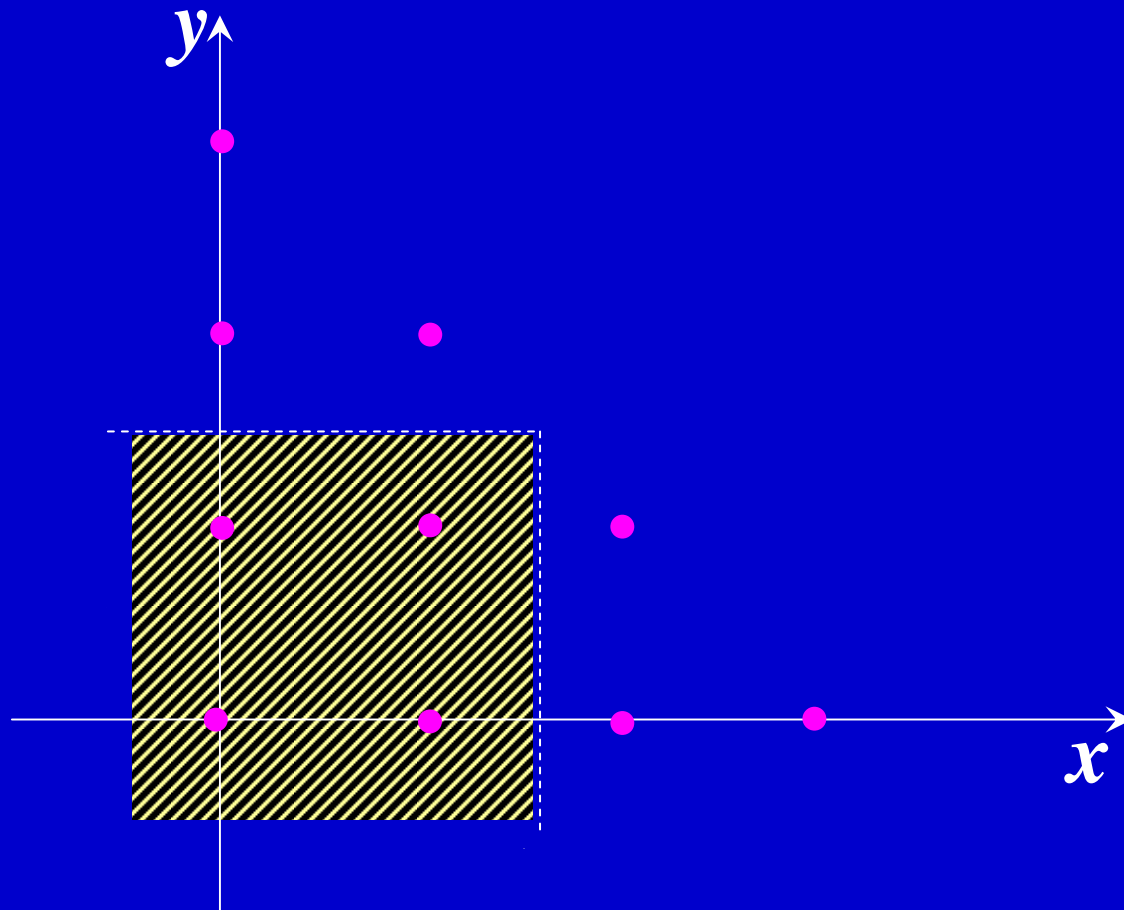
$$= C_3^i \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{3-i} \cdot C_{3-i}^j \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-i-j}$$

$$j = 0, \dots, 3-i; i = 0, 1, 2, 3;$$

其联合分布律如下表所示：

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0

3) 要求 $F(x,y)$, 先将 (X,Y) 的可能取值画在 xoy 平面上 , 对于不同位置的 (x,y) 求 $F(x,y)$:



$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0, \\ 1/27, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, \\ 4/27, & 0 \leq x < 1, 1 \leq y < 2, \\ 7/27, & 0 \leq x < 1, 2 \leq y < 3, \\ 8/27, & 0 \leq x < 1, y \geq 3, \\ 4/27, & 1 \leq x < 2, 0 \leq y < 1, \\ 13/27, & 1 \leq x < 2, 1 \leq y < 2, \\ 19/27, & 1 \leq x < 2, 2 \leq y < 3, \\ 20/27, & 1 \leq x < 2, y \geq 3, \end{cases}$$

7/27,	$2 \leq x < 3, 0 \leq y < 1,$
19/27,	$2 \leq x < 3, 1 \leq y < 2,$
25/27,	$2 \leq x < 3, 2 \leq y < 3,$
26/27,	$2 \leq x < 3, y \geq 3,$
8/27,	$x \geq 3, 0 \leq y < 1,$
20/27,	$x \geq 3, 1 \leq y < 2,$
26/27,	$x \geq 3, 2 \leq y < 3,$
1,	$x \geq 3, y \geq 3$

例4 把3个红球和3个白球等可能地放入编号为1, 2, 3的三个盒子中, 每盒容纳的球数无限, 记 X 为落入1号盒的白球数, Y 为落入1号盒的红球数. 求 (X, Y) 的联合分布律。

解
$$P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j | X = i\}$$

$$= C_3^i \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{3-i} \cdot C_3^j \left(\frac{1}{3}\right)^j \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-j}$$

$$i, j = 0, 1, 2, 3$$

见下表

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	$\frac{8}{27} \cdot \frac{8}{27}$	$\frac{8}{27} \cdot \frac{4}{9}$	$\frac{8}{27} \cdot \frac{2}{9}$	$\frac{8}{27} \cdot \frac{1}{9}$
1	$\frac{4}{9} \cdot \frac{8}{27}$	$\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{9}$	$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{27}$
2	$\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{27}$	$\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{9}$	$\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9}$	$\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{27}$
3	$\frac{1}{27} \cdot \frac{8}{27}$	$\frac{1}{27} \cdot \frac{4}{9}$	$\frac{1}{27} \cdot \frac{2}{9}$	$\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{27}$

三、二维连续型随机变量

1、定义 设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$,若存在非负可积函数 $f(x, y)$,使得对于任意实数 x, y 有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv$$

则称 (X, Y) 为二维连续型随机变量,
 $f(x, y)$ 为 (X, Y) 的联合概率密度
简称为概率密度或联合密度

2、联合概率密度函数的性质

1、非负性： $f(x, y) \geq 0$

2、规范性： $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

除了分布函数的一般性质外还有下述性质

3、对每个变元连续，在联合密度的连续点处

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

$$P\{x < X \leq x + \Delta x, y < Y \leq y + \Delta y\} \approx f(x, y) \Delta x \Delta y$$

$f(x, y)$ 反映了 (X, Y) 在 (x, y) 附近单位面积的区域
内取值的概率

$$4、 P\{ X = a, Y = b \} = 0$$

$$P\{ X = a, -\infty < Y < +\infty \} = 0$$

$$P\{ -\infty < X < +\infty, Y = a \} = 0$$

若 G 是平面上的区域，则

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy$$

例5 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy, & 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 k 为常数. 求

1) 常数 k ;

2) $P\{X + Y \geq 1\}, P\{X < 0.5\}$;

3) 联合分布函数 $F(x, y)$;

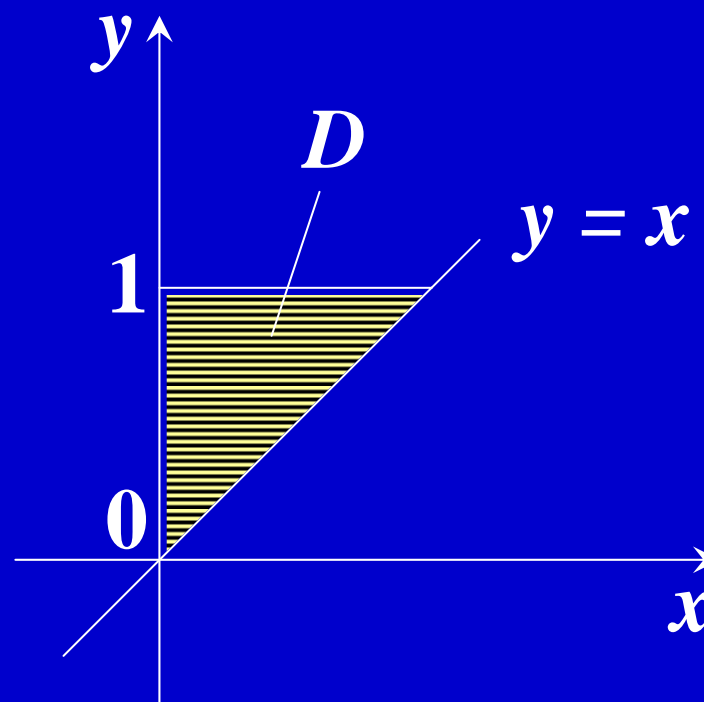
解 令 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

$$\longrightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = 1$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dy \int_0^y kxy dx \\ &= k \int_0^1 y \frac{y^2}{2} dy = \frac{k}{8} \end{aligned}$$

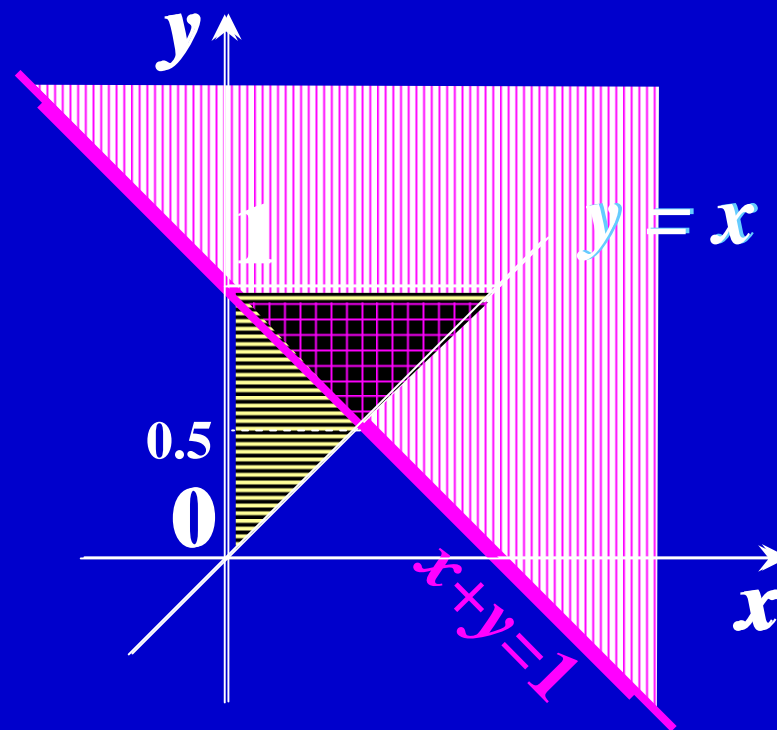
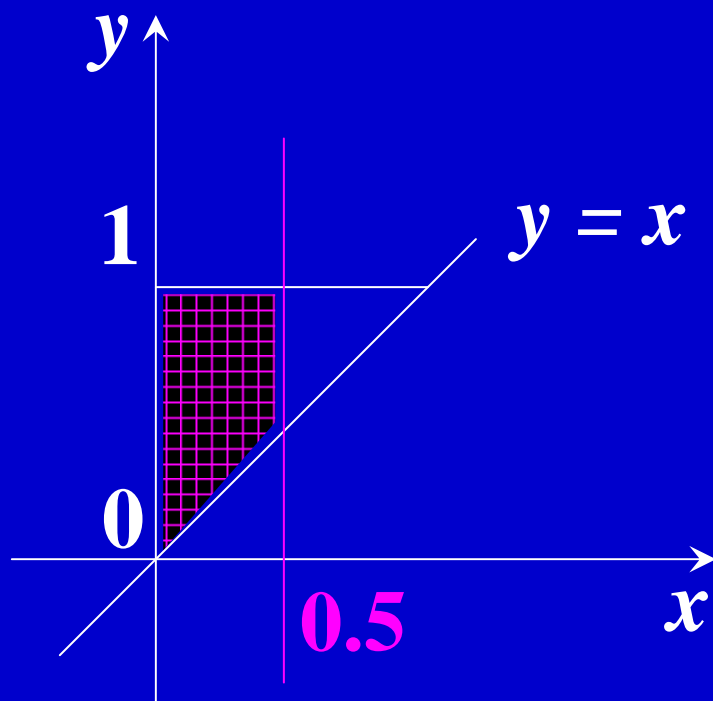
$$\longrightarrow k = 8$$



$$(2) \quad P\{X + Y \geq 1\}$$

$$= \int_{0.5}^1 dy \int_{1-y}^y 8xy dx$$

$$= \frac{5}{6}$$



$$P\{X < 0.5\}$$

$$= \int_0^{0.5} dx \int_x^1 8xy dy$$

$$= \frac{7}{16}$$

$$(3) F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv$$

当 $x < 0$ 或 $y < 0$ 时 ,

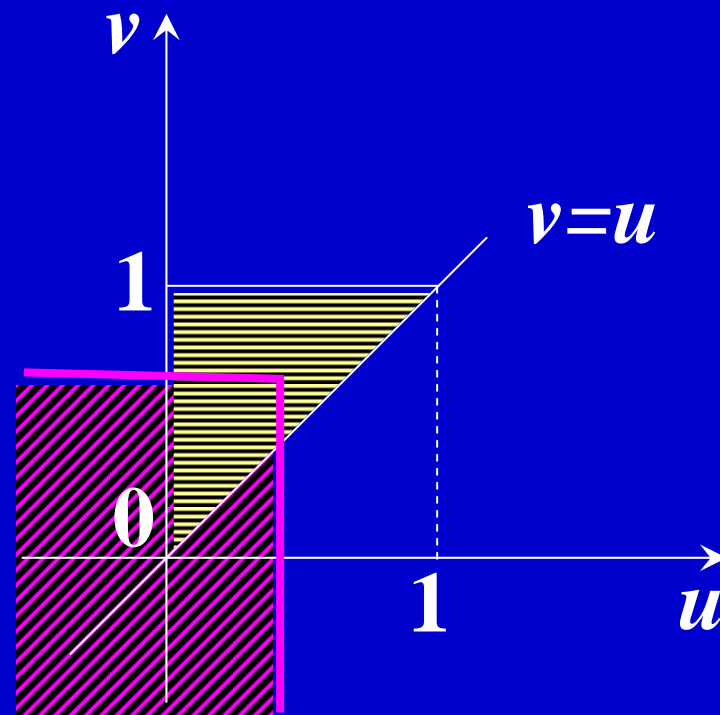
$$F(x, y) = 0$$

当 $0 \leq x < 1$

$0 \leq y < x$ 时 ,

$$F(x, y)$$

$$= \int_0^y dv \int_0^v 8uv du = y^4$$

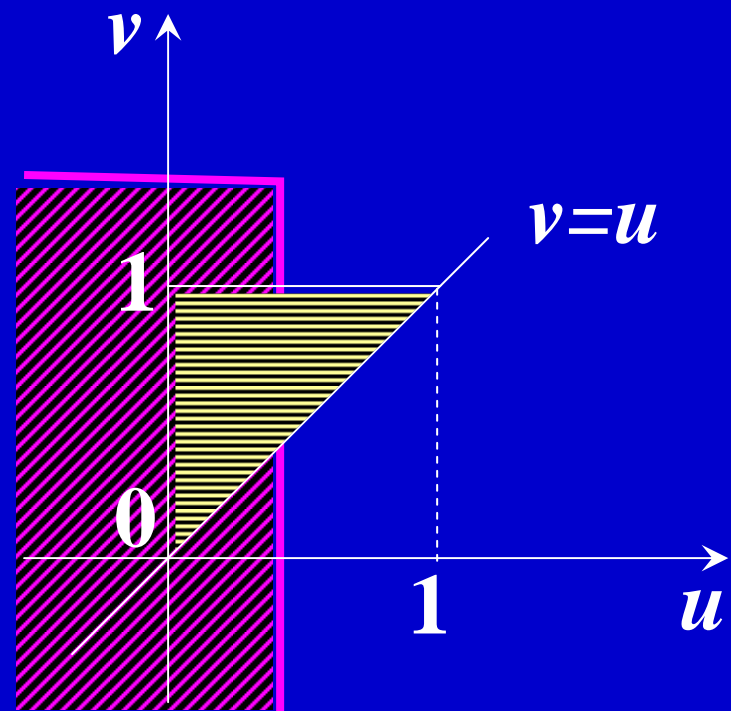


当 $0 \leq x < 1, x \leq y < 1$ 时 ,

$$F(x, y) = \int_0^x du \int_u^y 8uv dv = 2x^2 y^2 - x^4$$

当 $0 \leq x < 1, y \geq 1$ 时 ,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^x du \int_u^1 8uv dv \\ &= 2x^2 - x^4 \end{aligned}$$



当 $x \geq 1$

$0 \leq y < x$ 时 ,

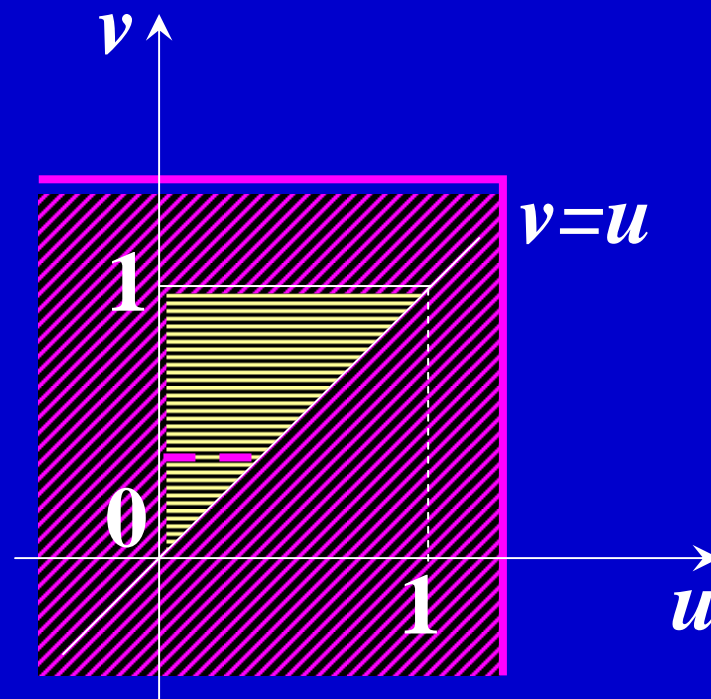
$$F(x, y)$$

$$= \int_0^y dv \int_0^v 8uv du = y^4$$

当 $x \geq 1$

$y \geq x$ 时 ,

$$F(x, y) = 1$$



$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0 \\ y^4, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < x, \\ 2x^2y^2 - y^4, & 0 \leq x < 1, x \leq y < 1, \\ 2x^2 - x^4, & 0 \leq x < 1, y \geq 1, \\ y^4, & x \geq 1, 0 \leq y < x, \\ 1, & x \geq 1, y \geq x, \end{cases}$$

3、常见的二维连续型随机变量的分布

1、区域 G 上的均匀分布，记作 $U(G)$

设区域 G 是平面上的有界区域，
其面积为 $A(>0)$

若二维随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则称 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布

□ 若 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布, 则

$\forall G_1 \subseteq G$, 设 G_1 的面积为 A_1 ,

$$P\{(X, Y) \in G_1\} = \frac{A_1}{A}$$

□ 边平行于坐标轴的矩形域上的均匀分布的边缘分布仍为均匀分布

设 $(X, Y) \sim G$ 上的均匀分布, 其中

$$G = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$$

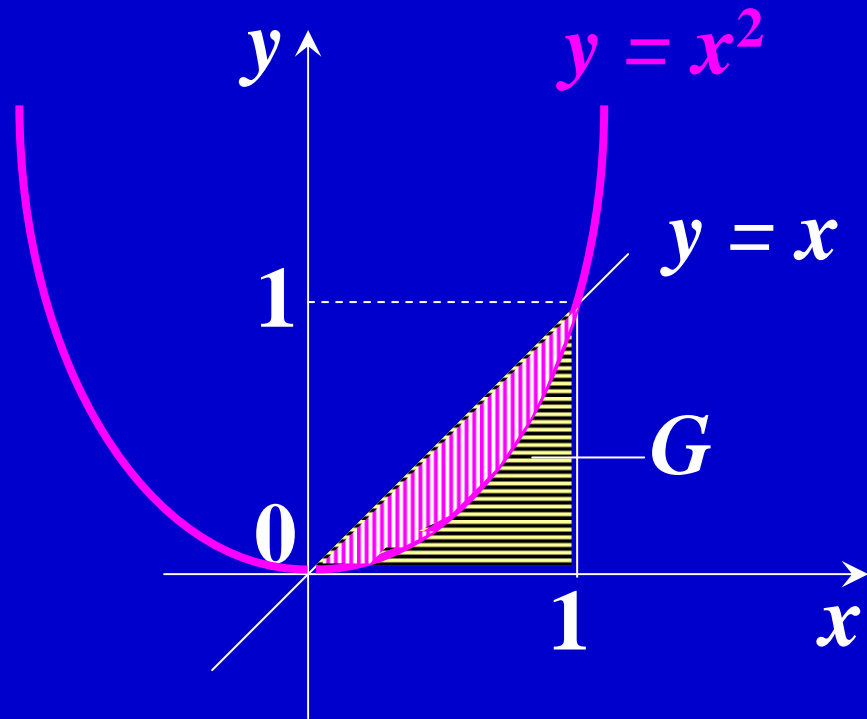
1) 求 $f(x, y)$;

2) 求 $P\{Y > X^2\}$;

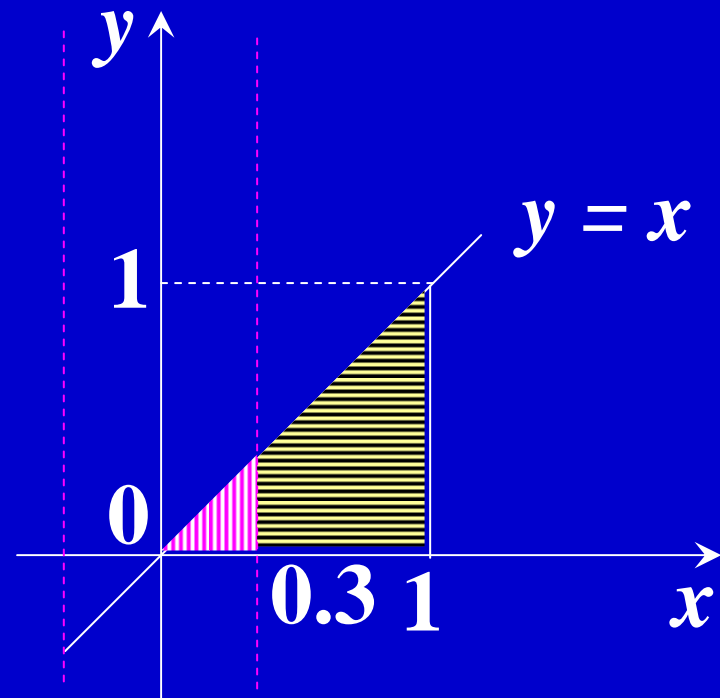
3) 求 (X, Y) 在平面上的落点到 y 轴距离小于
0.3的概率

$$(1) \quad f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} &P\{Y > X^2\} \\ &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x 2dy \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (3) \quad & P\{|X| < 0.3\} \\
 &= P\{-0.3 < X < 0.3\} \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (0.3)^2 = 0.09
 \end{aligned}$$



2、二维正态分布

若二维随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

则称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2, \rho$ 的正态分布, 记作 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$

其中 $\sigma_1, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$

```
Clear[f,x,y]
f[x_,y_]:=Exp[-(x^2+y^2)/2]/(2Pi)
Plot3D[f[x,y],{x,-3,3},{y,-3,3},ViewPoint-
>{-2.869, 1.790, 0.110},
  AspectRatio->0.6,PlotPoints->30];
```

