贝叶斯统计作业

朱强强

17064001

应用统计学1701

1. 设$X_1, \cdots, X_n$是来自指数分布$E(\theta)$的$i.i.d.$样本，θ的先验分布是$Gamma(r, \lambda)$。

（1）若从先验信息得知，先验均值为0.0002，先验标准差为0.0001，请确定其超参数之值；

$\mu = \dfrac{\alpha}{\beta} = 0.0002, \dfrac{\alpha}{\beta^2} = 0.0001^2$

解得$\alpha = 4, \beta = 20000$

（2）验证Gamma分布族$Gamma(r, \lambda)$是θ的共轭先验分布组。

已知$X \sim \theta e^{-\theta x}$,

$$\begin{aligned}\pi(\theta) &\propto \theta^{r-1} e^{-\lambda\theta} \cdot \theta e^{-\theta x} \\ &= \theta^r e^{-(\lambda+x)\theta}\end{aligned}$$

所以θ的后验分布是$Gamma(r+1, \lambda+x)$，所以$Gamma(r, \lambda)$是θ的共轭先验分布组。

2. 设随机变量X服从指数型分布，其密度函数为$f(x|\theta) = \exp(a(\theta)b(x) + c(\theta) + d(x))$，其中$a(\theta), c(\theta)$是$\theta$的函数，$b(x), d(x)$是$x$的函数，证明分布$h(\theta) = Ae^{k_1 a(\theta) + k_2 c(\theta)}$是参数$\theta$的共轭先验分布，其中A为常数，$k_1, k_2$是与$\theta$无关的常数。

$$\begin{aligned}\pi(\theta) &\propto e^{k_1 a(\theta) + k_2 c(\theta)} \cdot e^{a(\theta)b(x) + c(\theta) + d(x)} \\ &= e^{(k_1 + b(x))a(\theta) + (k_2+1)c(\theta)} \cdot e^{d(x)} \\ &\propto e^{(k_1 + b(x))a(\theta) + (k_2+1)c(\theta)}\end{aligned}$$

所以分布$h(\theta) = Ae^{k_1 a(\theta) + k_2 c(\theta)}$是参数$\theta$的共轭先验分布。

3. 设随机变量X的密度函数为

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda^{-1} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & 0 < x < \infty \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

证明参数λ的共轭先验分布为逆Gamma分布族。

假设λ的先验分布服从$IG(\alpha, \beta)$，当$0 < x < \infty$时

$$\begin{aligned}\pi(\lambda) &\propto \lambda^{-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot \lambda^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\lambda}} \\ &= \lambda^{-(\alpha+2)} e^{-\frac{x+\beta}{\lambda}}\end{aligned}$$

所以λ的后验分布服从$IG(\alpha+1, \beta+x)$，所以参数λ的共轭先验分布为逆Gamma分布族。

4. 设$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$是均匀分布$U(0, \theta)$中抽取的$i.i.d.$样本，又假设$\theta$中的先验分布是帕累托分布，其密度函数为

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+1}} & \theta > \theta_0 \\ 0 & \theta \le \theta_0 \end{cases}$$

其中$\theta_0, \alpha > 0$已知。证明帕累托分布是$U(0, \theta)$断点θ的共轭先验分布。

当$\theta > \theta_0$时

$$
\begin{aligned}
p(\theta) &\propto \frac{1}{\theta}\cdot\frac{\alpha\theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}\\
&= \frac{\alpha\theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+2}}\\
&\propto \frac{(\alpha+1)\theta_0^{\alpha+1}}{\theta^{\alpha+2}}
\end{aligned}
$$

当$\theta \le \theta_0$时，$p(\theta)=0$。

所以帕累托分布是$U(0,\theta)$断点θ的共轭先验分布。

5. 试求下列分布未知参数的Jeffery先验：

（1）泊松分布$P(\lambda)$

假设$y \sim P(\lambda)$

$L(\lambda|y)=\dfrac{\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}}{\prod_{i=1}^n y_i}e^{-n\lambda}, log(L(\lambda|y))=\sum_{i=1}^n y_i log(\lambda)-\sum_{i=1}^n log(y_i)-n\lambda$

$I(\lambda|y)=\dfrac{n}{\lambda}$

$p(\lambda)\propto \lambda^{-\frac{1}{2}}$

（2）指数分布$exp(1/\lambda)$

假设$y \sim exp(1/\lambda)$

$L(\lambda|y)=\dfrac{1}{\lambda^n}e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n y_i}, log(L(\lambda|y))=-nlog\lambda-\dfrac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n y_i$

$I(\lambda|y)=\dfrac{n}{\lambda^2}$

$p(\lambda)\propto\dfrac{1}{\lambda}$

所以λ的Jeffery先验分布服从$U(0,\lambda)$。

（3）Gamma分布$\Gamma(\alpha,\lambda)(\lambda$已知)

$L(\alpha|y)=\dfrac{\alpha^{n\lambda}}{n\Gamma\alpha}\prod_{i=1}^n y_i^{\alpha-1}e^{-\lambda\sum_{i=1}^n y_i}, log(L(\alpha|y))=n\lambda\cdot log\alpha-log(n\Gamma\alpha)+n(\alpha-1)\sum_{i=1}^n log(y_i)-\lambda\sum_{i=1}^n y_i$

$I(\alpha|y)=\dfrac{n\lambda}{\alpha^2}$

$p(\alpha)\propto\dfrac{1}{\alpha}$

所以α的Jeffery先验分布服从$U(0,\alpha)$。

6. 设$X_i \sim f(x_i|\theta_i)$，θ_i的Jeffery先验为$\pi_i(\theta_i), i=1,\cdots,k$。若$X_i$相互独立，证明：$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k)$的Jeffery先验为$\pi(\theta)=\prod_{i=1}^k \pi_i(\theta_i)$。

$$\pi_i(\theta_i)\propto\sqrt{I(\theta_i|x)}=\sqrt{E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta_i|x)}{\partial\theta^2}\right)}$$

$L(\theta|x)=\prod_{i=1}^n L(\theta_i|x)$

$$\pi(\theta)\propto\sqrt{I(\theta|x)}=\sqrt{E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|x)}{\partial\theta^2}\right)}=\prod_{i=1}^n\sqrt{E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta_i|x)}{\partial\theta^2}\right)}=\prod_{i=1}^n\sqrt{I(\theta_i|x)}\propto\prod_{i=1}^n\pi_i(\theta_i)$$

所以$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k)$的Jeffery先验为$\pi(\theta)=\prod_{i=1}^k\pi_i(\theta_i)$。

7. 设X服从二项分布$B(n,\theta)$

（1）若采用$\pi(\theta)=[\theta(1-\theta)]^{-1},0<\theta<1$为广义先验密度，求在$0<x<n$中，给定$x$的条件下，$\theta$的后验密度；

$$p(\theta)\propto p(x|\theta)\cdot\pi(\theta)=[\theta(1-\theta)]^{-1}\cdot C_n^x\theta^x(1-\theta)^{n-x}\propto\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x-1}$$

所以θ的后验密度服从$Beta(x,n-x)$。

（2）若$\pi(\theta)=1,\theta\in(0,1)$，求在给定$x$的条件下，$\theta$的后验密度；

$$p(\theta)\propto p(x|\theta)\cdot\pi(\theta)=1\cdot C_n^x\theta^x(1-\theta)^{n-x}\propto\theta^x(1-\theta)^{n-x}$$

所以θ的后验密度服从$Beta(x+1,n-x+1)$。

（3）分别求两种先验下参数的后验期望均值，以及估计的后验均方误差；

$$E(\theta_1)=\frac{x}{n},MSE(\theta_1)=E(\theta_1-\theta)^2=E(\frac{x}{n}-\theta)^2=\frac{2\theta-\theta^2}{n}-\theta^2$$

$$E(\theta_2)=\frac{x+1}{n+2},MSE(\theta_2)=E(\frac{x+1}{n+2}-\theta)^2=\frac{4n\theta-n\theta^2+1}{(n+2)^2}+\frac{2n\theta^2+2\theta}{n+2}+\theta^2$$

（4）分别求两种先验下参数的后验众数(广义最大似然估计)，以及估计的后验均方误差。

$$Mode(\theta_1)=\frac{x-1}{n-2},MSE(\theta_1)=E(\frac{x-1}{n-2}-\theta)^2=\frac{1-n\theta^2}{(n-2)^2}-\frac{2n\theta^2-2\theta}{n-2}+\theta^2$$

$$Mode(\theta_2)=\frac{x}{n},MSE(\theta_2)=E(\frac{x}{n}-\theta)^2=\frac{2\theta-\theta^2}{n}-\theta^2$$

8. 设随机变量X服从几何分布：$P(X=x|\theta)=\theta(1-\theta)^{x-1},x=1,2,\cdots$

（1）若θ的先验分布为$(0,1)$是上的均匀分布$U(0,1)$，求θ的后验分布；

$$\pi(\theta)\propto\theta(1-\theta)^{x-1}\cdot 1$$

所以θ的后验分布服从$Beta(2,x)$。

（2）若θ的先验分布为贝塔分布$Beta(\alpha,\beta)$，求θ的后验分布。

$$\pi(\theta)\propto\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\cdot\theta(1-\theta)^{x-1}=\theta^{\alpha}(1-\theta)^{x+\beta-2}$$

所以θ的后验分布服从$Beta(\alpha+1,x+\beta-1)$。

（3）求参数的后验期望均值，以及估计的后验均方误差。

$$E(\theta_1)=\frac{2}{x+2},MSE(\theta_1)=E(\frac{2}{x+2}-\theta)^2=\frac{4\theta^2}{4\theta^2+3\theta+2}+\frac{4\theta^2}{2\theta+1}+\theta^2$$

$$E(\theta_2)=\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+x},MSE(\theta_2)=E(\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+x}-\theta)^2=\frac{(\alpha+1)^2\theta^2}{(\alpha+\beta)^2\theta^2+2(\alpha+\beta)\theta+2-\theta}-\frac{2(\alpha+1)\theta^2}{(\alpha+\beta)\theta+1}+\theta^2$$

9. 设随机变量$X\sim Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2\theta})$，$\theta$的先验分布为逆伽马分布$\Gamma^{-1}(\alpha,\frac{\beta}{2})$，其中$\alpha$和$\beta$已知。

（1）证明：θ的后验分布为逆伽马分布$\Gamma^{-1}(\frac{n}{2}+\alpha,\frac{x}{2}+\frac{\beta}{2})$；

$$p(\theta|x)\propto(\frac{1}{2\theta})^{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2\theta}x}\cdot\frac{1}{\theta^{\alpha+1}}e^{-\frac{\beta}{2\theta}}\propto\frac{1}{\theta^{\frac{n}{2}+\alpha+1}}e^{-(\frac{x}{2}+\frac{\beta}{2})\frac{1}{\theta}}$$

所以θ的后验分布为逆伽马分布$\Gamma^{-1}(\frac{n}{2}+\alpha,\frac{x}{2}+\frac{\beta}{2})$。

（2）求参数的后验期望均值，以及估计的后验期望均值；

$$E(\theta)=\frac{(x+\beta)/2}{n/2+\alpha-1}=\frac{x+\beta}{n+2\alpha-2}, MSE(\theta)=\frac{\frac{n-4}{(n-2)^2(n-4)\theta^2}+\frac{1\beta}{(n-2)\theta}+\beta^2}{(n+2\alpha-2)^2}-\frac{2+2(n-2)\beta\theta}{(n-2)(n+2\alpha-2)}+\theta^2$$

（3）参数的后验众数(广义最大似然估计)，以及估计的后验均方误差。

$$Mode(\theta)=\frac{\frac{x+\beta}{2}}{\frac{n}{2}+\alpha+1}=\frac{x+\beta}{n+2\alpha+2}, MSE(\theta)=\frac{\frac{n-4}{(n-2)^2(n-4)\theta^2}+\frac{1\beta}{(n-2)\theta}+\beta^2}{(n+2\alpha+2)^2}-\frac{2+2(n-2)\beta\theta}{(n-2)(n+2\alpha+2)}+\theta^2$$

10. 设X服从威布尔分布$W(r,\theta)$，其密度函数为

$$f(x,\alpha,\lambda)=\frac{\alpha}{\theta}x^{r-1}\exp\left\{-\frac{x^r}{\theta}\right\}I_{(0,\infty)}(x)$$

其中α和r已知。如果参数θ的先验密度为$\Gamma^{-1}(\alpha,\beta)$，

（1）求θ的后验密度，求参数的后验期望均值，以及估计的后验均方误差；

$$p(\theta|x,\alpha,r)\propto\frac{1}{\theta^{\alpha+1}}e^{-\frac{\beta}{\theta}}\cdot\frac{\alpha}{\theta}e^{-\frac{x^r}{\theta}}\propto\frac{1}{\theta^{\alpha+2}}e^{-\frac{\beta+x^r}{\theta}}$$

所以θ的后验密度服从$IG(\alpha+1,\beta+x^r)$。

$E(\theta)=\dfrac{\beta+x^r}{\alpha}, MSE(\theta)=E(\dfrac{\beta+x^r}{\alpha}-\theta)^2$

（2）求参数的后验众数，以及估计的后验均方误差。

$Mode(\theta)=\dfrac{\beta+x^r}{\alpha+2}, MSE(\theta_2)=E(\dfrac{\beta+x^r}{\alpha+2}-\theta)^2$

11. 对正态分布$N(\theta,1)$做三次观测，获得样本的具体观测值为2,4,3。

（1）若θ的先验分布为正态分布$N(3,1)$，求θ的可信水平为0.95的可信区间；

$$\begin{aligned}p(\theta|x)&\propto\exp\left\{-\frac{(\theta-3)^2}{2}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{(2-\theta)^2}{2}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{(4-\theta)^2}{2}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{(3-\theta)^2}{2}\right\}\\&\propto\exp\left\{-\frac{4(\theta-3)^2+2}{2}\right\}\end{aligned}$$

所以θ的后验分布服从$N(3,\dfrac{1}{4})$，θ的置信水平为95%的置信水平为[2.020018, 3.979982]。

（2）若θ的取值只有两种可能，$\theta=3,\theta=5$。设θ取3和5。设θ取3和5的先验概率分别为π_0和π_1，且$\pi_0+\pi_1=1$，求检验问题$H_0:\theta=3\quad v.s.\quad H_1:\theta=5$

$$p(\theta=3|x)=\frac{\pi_0\cdot\prod_{i=1}^{3}\exp\{-\frac{(x_i-3)^2}{2}\}}{\pi_0\cdot\prod_{i=1}^{3}\exp\{-\frac{(x_i-3)^2}{2}\}+\pi_1\cdot\prod_{i=1}^{3}\exp\{-\frac{(x_i-5)^2}{2}\}}$$

$$p(\theta=5|x)=\frac{\pi_1\cdot\prod_{i=1}^{3}\exp\{-\frac{(x_i-5)^2}{2}\}}{\pi_0\cdot\prod_{i=1}^{3}\exp\{-\frac{(x_i-3)^2}{2}\}+\pi_1\cdot\prod_{i=1}^{3}\exp\{-\frac{(x_i-5)^2}{2}\}}$$

$$\frac{p(\theta=3|x=2,4,5)}{p(\theta=5|x=2,4,5)}=\frac{\pi_0 e^{-1}}{\pi_1 e^{-7}}=\frac{\pi_0}{\pi_1}e^6$$

若$\dfrac{\pi_0}{\pi_1}e^6>1$，则接受原假设，否则拒绝原假设。