

# 贝叶斯统计习题一

周晓东

2019 年 9 月 19 日

1. 有一种前列腺癌标记 (Prostate cancer marker, PSA) 检测方法的特性如下: 如果成年男性犯了前列腺癌, 则检测结果呈现阳性的概率高达 90%, 同时, 如果成年男性未犯前列腺癌, 则检测结果呈现阳性的概率为 5%。现在某大学男生进行前列腺癌标记检测, 结果呈阳性。虽然他根据自己的了解知道, 大学男生犯前列腺癌的概率只有 0.001%, 但还是非常害怕, 很想知道他确实犯前列腺癌的概率, 遗憾的是他贝叶斯统计学没有学好, 所以请你帮助计算出概率。另外, 根据计算出的概率, 你对该男生有什么建议?

2. 为了提高某产品的质量, 公司经历考虑改进生产设备, 预计需要投资 900 万元。从投资小费看, 下属部分部门有两种意见: -  $\theta_1$ : 改进生产设备后, 高质量产品占 90%  
-  $\theta_2$ : 改进生产设备后, 高质量产品占 70%

但经理根据过去的经验认为,  $\theta_1$  的可信程度只有 40%,  $\theta_2$  的可信程度是 60%, 即  $\pi(\theta_1) = 0.4, \pi(\theta_2) = 0.6$ . 经理不仅仅用过去的经验来做决策, 因此通过小规模试验观察其结果再确定。这次试验结果如下:

A={试制 5 个产品, 全是高质量的产品}

经理对这次试验结果非常高兴, 希望用此试验结果来修改他原先对  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的看法, 即要去求后验概率  $\pi(\theta_1|A)$  与  $\pi(\theta_2|A)$ . 如今已有先验概率  $\pi(\theta_1)$  和  $\pi(\theta_2)$ . 还需要两个条件概率  $P(A|\theta_1)$  与  $P(A|\theta_2)$ , 由二项分布可知

$$P(A|\theta_1) = 0.9^5 = 0.59, P(A|\theta_2) = 0.7^5 = 0.168$$

计算后验概率  $\pi(\theta_1|A)$  与  $\pi(\theta_2|A)$ 。

经过试验 A 后, 更新的概率使得经理对增加投资以改进你质量的兴趣增大, 但是为了慎重起见, 还想再做一次小规模的试验, 观其结果再做决策。此次试验结果如下:

B={试制 10 个产品, 9 个是高质量的产品}

经理希望用此试验结果对  $\theta_1$  和  $\theta_2$  再做一次更新, 为此把上次试验的后验概率看作这次的先验概率, 根据结果 B 计算新的后验概率。你对经理的建议是?

3. 设  $\theta$  是一批产品的不合格率, 已知它不是 0.1 就是 0.2, 且其先验分布为

$$\pi(0.1) = 0.7, \pi(0.2) = 0.3$$

加入从这批产品中随机抽取 8 个进行检查, 发现有 2 个不合格, 求 $\theta$  的后验分布。

4. 设 $\theta$  是一批产品的不合格率, 从中随机抽取 8 个产品进行检查, 发现有 3 个不合格, 假如先验分布为

(1)  $\theta \sim U(0, 1)$ ,

(2)

$$\theta \sim \pi(\theta) = \begin{cases} 2(1 - \theta), & 0 < \theta < 1, \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

分别求 $\theta$  的后验分布。

5. 设 $X_1, \dots, X_n$  是来自密度函数 $p(x|\theta)$  的样本,  $\pi(\theta)$  为 $\theta$  的先验密度, 证明: 按下列序贯方法可以求得 $\theta$  的后验分布, 其中符号“ $\propto$ ”表示“正比于”, 即表示左右两边只相差一个与 $\theta$  无关的正值常数因子。

(1) 给定 $X_1 = x_1$  下, 求出 $\pi(\theta|x_1) \propto p(x_1|\theta)\pi(\theta)$ ;

(2) 把 $\pi(\theta|x_1)$  作为下一步的先验分布, 在给定 $X_2 = x_2$  下, 求得 $\pi(\theta|x_1, x_2) \propto p(x_2|\theta)\pi(\theta|x_1)$ ;

(3) 按照方法重复, 把 $\pi(\theta|x_1, \dots, x_{n-1})$  作为下一步的先验分布, 在给定 $X_n = x_n$  下, 求得 $\theta$  的后验分布为 $\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto p(x_n|\theta)\pi(\theta|x_1, \dots, x_{n-1})$ 。

6. 某人每天早晨在车站等候公共汽车的时间 (单位, min) 服从均匀分布 $U(0, \theta)$ , 假如 $\theta$  的先验分布为

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{192}{\theta^4}, & \theta \geq 4 \\ 0, & \theta < 4 \end{cases}$$

设此人在 3 个早晨等车时间分别为 5, 8, 8, 求 $\theta$  的后验分布。

7. 设随机变量 $X$  服从均匀分布 $U(\theta - 1/2, \theta + 1/2)$ , 其中 $\theta$  的先验分布为 $U(10, 20)$ ,

(1) 假如获得 $X$  的观察值是 12, 求 $\theta$  的后验分布。

(2) 假如连续获得 $X$  的 6 个观察值 12.0, 11.5, 11.7, 11.1, 11.4, 11.9, 求 $\theta$  的后验分布。

8. 考虑一个试验, 对给定的 $\theta$ , 试验结果 $X$  有如下密度函数:

$$p(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}, 0 < x < \theta < 1.$$

(1) 假如 $\theta$  的先验分布是 $U(0, 1)$ , 试求 $\theta$  的后验分布。(2) 假如 $\theta$  的先验分布是 $\pi(\theta) = 3\theta^2, 0 < \theta < 1$ , 试求 $\theta$  的后验分布。