贝叶斯统计习题二

周晓东

2019 年 11 月 14 日

1. 设$X_1, \cdots, X_n$ 是来自指数分布$E(\theta)$ 的$i.i.d.$ 样本，θ 的先验分布是$Gamma(r, \lambda)$.
(1) 若从先验信息得知，先验均值为 0.0002，先验标准差为 0.0001, 请确定其超参数之值；
(2) 验证 Gamma 分布族$Gamma(r, \lambda)$ 是θ 的共轭先验分布族.

2. 设随机变量X 服从指数型分布，其密度函数为$f(x|\theta) = \exp(a(\theta)b(x) + c(\theta) + d(x))$, 其中$a(\theta), c(\theta)$ 是θ 的函数，$b(x), d(x)$ 是x 的函数，证明分布$h(\theta) = Ae^{k_1 a(\theta) + k_2 c(\theta)}$ 是参数θ 的共轭先验分布，其中A 为常数，k_1, k_2 是与θ 无关的常数。

3. 设随机变量X 的密度函数为

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda^{-1} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & 0 < x < \infty \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

证明参数λ 的共轭先验分布族为逆 Gamma 分布族。

4. 设$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是从均匀分布$U(0, \theta)$ 中抽取的$i.i.d.$ 样本，又假设θ 中的先验分布是帕累托分布，其密度函数为

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{\alpha \theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+1}} & \theta > \theta_0 \\ 0 & \theta \leq \theta_0 \end{cases}$$

其中$\theta_0 > 0, \alpha > 0$ 已知。证明帕累托分布是$U(0, \theta)$ 端点θ 的共轭先验分布。

5. 试求下列分布未知参数的 Jeffery 先验：
(1) 泊松分布$P(\lambda)$
(2) 指数分布$E(1/\lambda)$
(3)Gamma 分布$\Gamma(\alpha, \lambda)$(α 已知)

6. 设$X_i \sim f(x_i|\theta_i)$, θ_i 的 Jefferys 先验为$\pi_i(\theta_i), i = 1, \cdots, k$. 若诸$X_i$ 相互独立。证明：$\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_k)$ 的 Jefferys 先验为$\pi(\theta) = \prod_{i=1}^k \pi_i(\theta_i)$.

7. 设X 服从二项分布$B(n, \theta)$.
(1) 若采用$\pi(\theta) = [\theta(1-\theta)]^{-1}, 0 < \theta < 1$ 为广义先验密度，求在$0 < x < n$ 中，给定x 的条件下，θ 的后验密度；(2) 若$\pi(\theta) = 1 \theta \in (0, 1)$, 求给定$x$ 的条件下，θ 的后验密度；(3) 分

别求两种先验下参数的后验期望均值，以及估计的后验均方误差。(4) 分别求两种先验下参数的后验众数（广义最大似然估计），以及估计的后验均方误差。

8. 设随机变量X 服从几何分布：$P(X=x|\theta)=\theta(1-\theta)^{x-1}, x=1,2,\cdots$. 1) 若$\theta$ 的先验分布为$(0,1)$ 上的均匀分布$U(0,1)$，求θ 的后验分布；2) 若θ 的先验分布为贝塔分布$Be(\alpha,\beta)$, 求θ 的后验分布。3) 求参数的后验期望均值，以及估计的后验均方误差。

9. 设随机变量$X\sim Gamma(n/2,1/(2\theta))$,$\theta$ 的先验分布为逆伽玛分布$\Gamma^{-1}(\alpha,\beta/2)$, 其中$\alpha$ 和β 已知。1) 证明：θ 的后验分布为逆伽玛分布$\Gamma^{-1}(n/2+\alpha,x/2+\beta/2)$;
2) 求参数的后验期望均值，以及估计的后验均方误差; 3) 参数的后验众数（广义最大似然估计），以及估计的后验均方误差。

10. 设X 服从韦布尔分布$W(r,\theta)$, 其密度函数为

$$f(x,\alpha,\lambda)=\frac{\alpha}{\theta}x^{r-1}\exp\left\{-\frac{x^r}{\theta}\right\}I_{(0,\infty)}(x),$$

其中α 和r 已知。如果参数θ 的先验密度为$\Gamma^{-1}(\alpha,\beta)$,
1) 求θ 的后验密度。求参数的后验期望均值，以及估计的后验均方误差; 2) 求参数的后验期望均值，以及估计的后验均方误差.

11. 对正态总体$N(\theta,1)$ 做三次观测，获得样本的具体观测值为 2，4，3.
1) 若θ 的先验分布为正态分布$N(3,1)$, 求θ 的可信水平为 0.95 的可信区间。2) 若θ 的取值只有两种可能，$\theta=3,\theta=5$. 设θ 取 3 和 5 的先验概率分别为π_0 和π_1，且$\pi_0+\pi_1=1$，求检验问题 $H_0:\theta=3$ VS $H_1:\theta=5$.

$X\sim Ga(\alpha,\beta), p(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, x>0, E(X)=\frac{\alpha}{\beta}, Var(X)=\frac{\alpha}{\beta^2}.$