

动态规划的套路： 从入门到精通到弃坑

wisdompeak

[Youtube Recording](#)

Disclaimer

今天，我们只讲套路。

不按套路出牌的DP问题，请不要问我（问我也不会），

出门右转找崔日零一寒don苏。

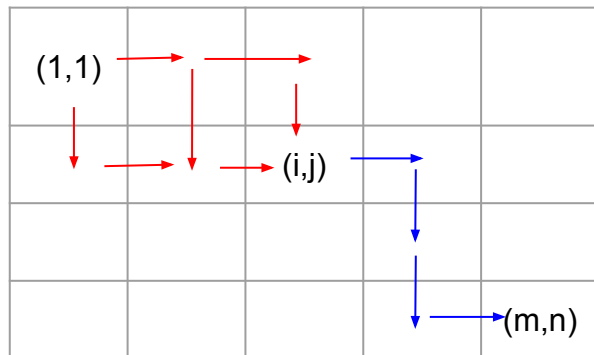
残酷群积分比我高的同学可以下课了。

动态规划的思考艺术

有一个 $m \times n$ 大小的矩阵迷宫，每次移动只能向右或者向下，问从左上角到右下角共有多少种不同的走法？

- 暴力枚举来计数为什么不优秀

- 从 $(1,1)$ 到 (m,n) 的不同路径中有大量的重复。比如 $(1,1) \rightarrow (i,j)$ 有 k 条不同路径，那么对于任何一条固定的 $(i,j) \rightarrow (m,n)$ 的路径，都需要走 k 遍来模拟。
- 但是我们并不关心具体的走法。我们只关心“状态”，也就是走法的数目。
- 同理，如果我们还知道 $(i,j) \rightarrow (m,n)$ 有 t 条不同路径，那么 $(1,1) \rightarrow (i,j) \rightarrow (m,n)$ 的不同路径总数就是 $k \times t$ ，而不需要真正了解怎么走的。

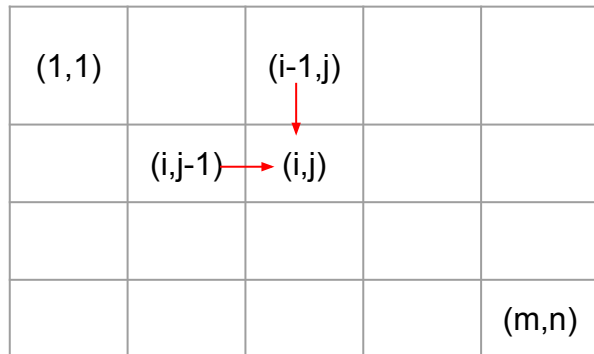


动态规划的思考艺术

有一个 $m \times n$ 大小的矩阵迷宫，每次移动只能向右或者向下，问从左上角到右下角共有多少种不同的走法？

- 动态规划的美

- 令 $f(i,j)$ 表示从 $(1,1) \rightarrow (i,j)$ 的不同路径数目。则
$$f(i,j) = f(i-1,j) + f(i,j-1)$$
- 我们发现想求出 $f(i,j)$ ，只需要知道几个参数更小的 $f(i',j')$ 。我们将求解 $f(i',j')$ 称作求解 $f(i,j)$ 的“子问题”。
- 我们舍弃了冗余信息(具体的走法)。我们只记录了对解决问题有帮助的信息 $f(i,j)$ 。



动态规划的思考艺术

动态规划的两大特点(适用前提)

- **无后效性:**

- 一旦 $f(i,j)$ 确定, 就不用关心“我们如何计算出 $f(i,j)$ ”。
- 想要确定 $f(i,j)$, 只需要知道 $f(i-1,j)$ 和 $f(i,j-1)$ 的值, 而至于它们是如何算出来的, 对当前或之后的任何子问题都没有影响。
- “过去不依赖将来, 将来不影响过去”——智巔语录

- **最优子结构:**

- $f(i,j)$ 的定义就已经蕴含了“最优”。
- 大问题的最优解可以由若干个小问题的最优解推出。(max, min, sum...)

(1,1)		(i-1,j)		
		↓		
	(i,j-1)	→	(i,j)	
				(m,n)

DP能适用的问题: 能将大问题拆成几个小问题, 且满足无后效性、最优子结构性质。

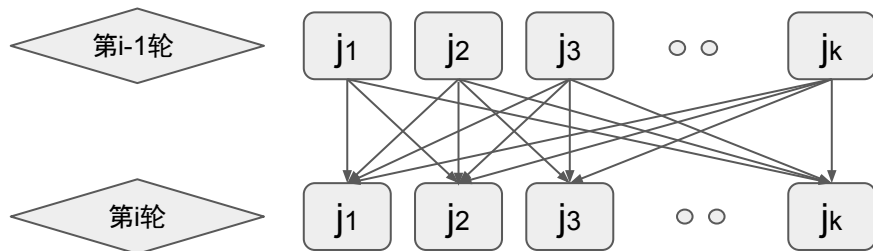
DP套路(I): 第I类基本型(“时间序列”型)

给出一个序列(数组/字符串), 其中每一个元素可以认为“一天”, 并且“今天”的状态只取决于“昨天”的状态。

- House Robber
- Best Time to Buy and Sell Stocks
- ...

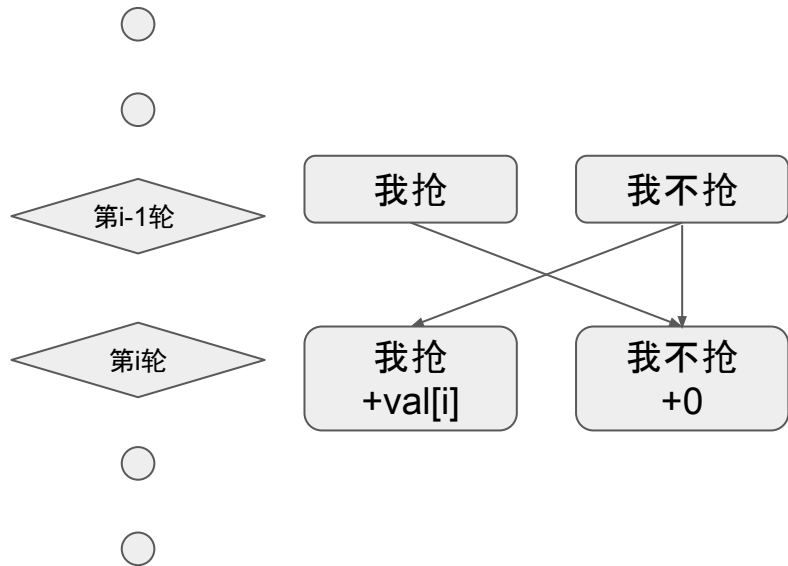
套路:

- 定义 $dp[i][j]$: 表示第 i -th轮的第 j 种状态 ($j=1,2,\dots,K$)
- 千方百计将 $dp[i][j]$ 与前一轮的状态 $dp[i-1][j]$ 产生关系($j=1,2,\dots,K$)
- 最终的结果是 $dp[last][j]$ 中的某种aggregation (sum, max, min ...)



LC 198. House Robber

给一排房子，相邻的房子不能都抢。问最多能抢的价值。



0:这轮我抢的最大收益
1:这轮我不抢的最大收益

```
for (int i=1; i<=N; i++)  
{  
    dp[i][0] = dp[i-1][1]+val[i];  
    dp[i][1] = max(dp[i-1][0], dp[i-1][1])  
}
```

Ans = max (dp[N][0], dp[N][1])

LC 213. House Robber II

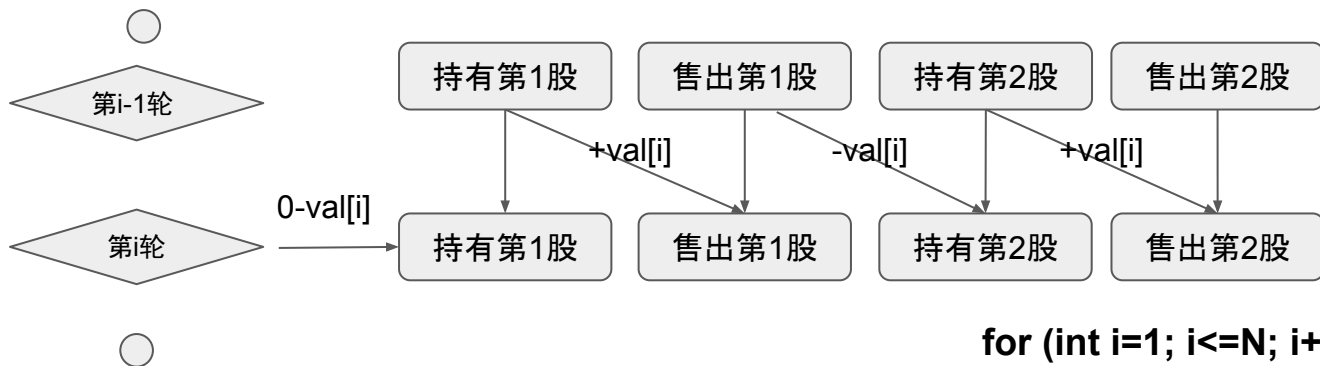
给一圈“首尾相连”的房子，相邻的房子不能都抢。问最多能抢的价值。

Trick: 首位和末位不能同时抢，这说明至少有一个不能抢。

1. 考虑首位的房子我不抢，那么对于house[1]~house[last]就是一个基本的House Robber问题。
2. 考虑末位的房子我不抢，那么对于house[0]~house[last-1]就是一个基本的House Robber问题。

LC 123.Best Time to Buy and Sell Stock III

给一系列每日股票的价格。每日只能买入或卖出或不操作。最多交易两次。问最大的收益。



0:这轮我已持有第1股的最大收益
1:这轮我已售出第1股的最大收益
2:这轮我已持有第2股的最大收益
3:这轮我已售出第2股的最大收益

```
for (int i=1; i<=N; i++)
```

```
{
```

```
    dp[i][0] = max(dp[i-1][0], -val[i]);
```

```
    dp[i][1] = max(dp[i-1][1], dp[i-1][0]+val[i])
```

```
    dp[i][2] = max(dp[i-1][2], dp[i-1][1]-val[i])
```

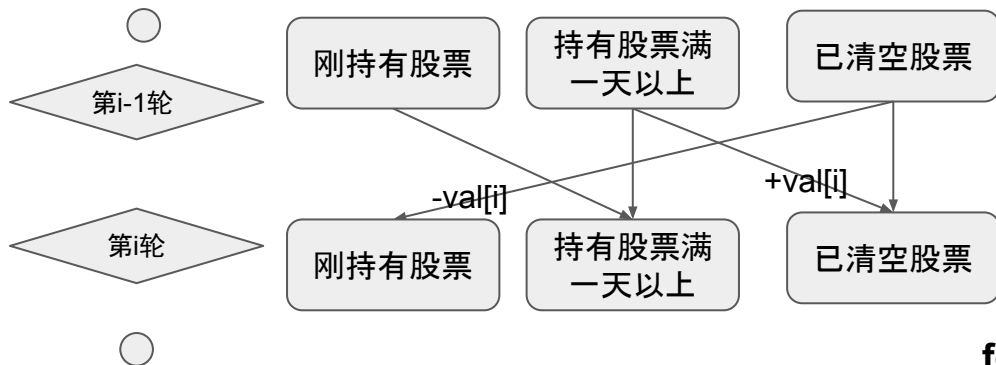
```
    dp[i][3] = max(dp[i-1][3], dp[i-1][2]+val[i])
```

```
}
```

Ans = max {dp[N][i]} (i=0,1,2,3)

LC 309.Best Time to Buy and Sell Stock with Cooldown

给一系列每日股票的价格。每日只能买入或卖出或不操作，买入后要隔一天才能卖出。无总交易次数限制。问最大的收益。



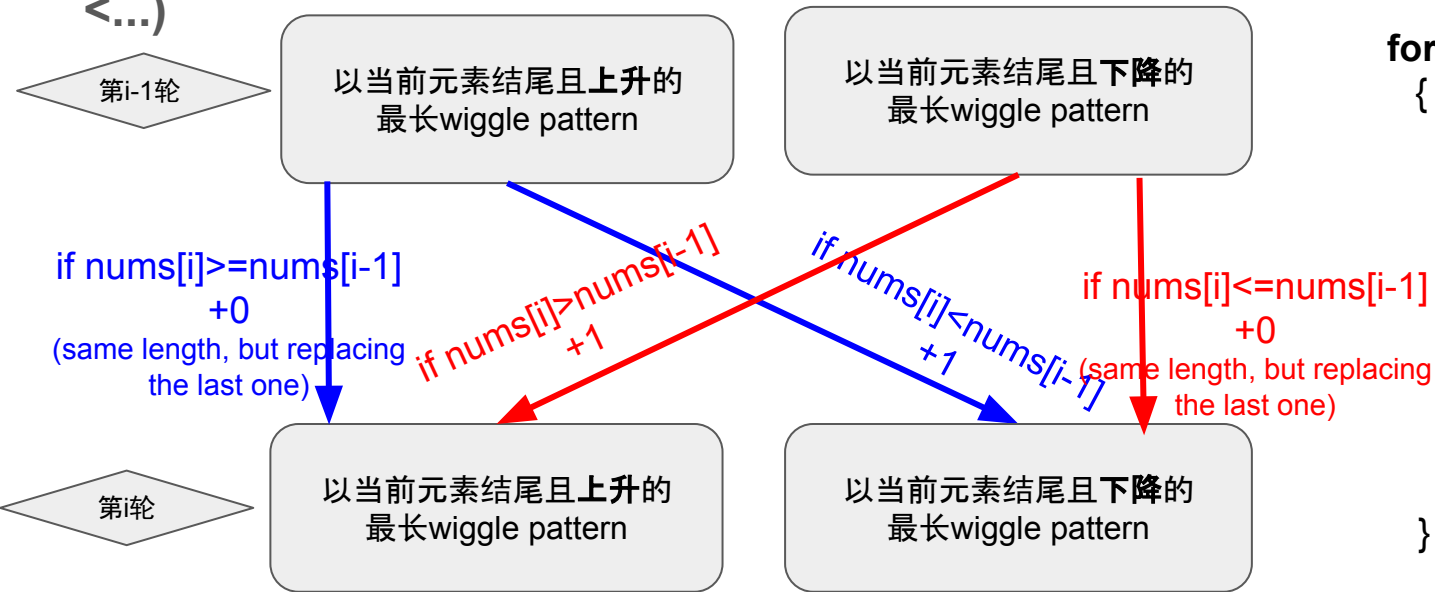
0:这轮我刚持有股票的最大收益
1:这轮我已持有股票一天以上的最大收益
2:这轮我已清空股票的最大收益

```
for (int i=1; i<=N; i++)  
{  
    dp[i][0] = max(dp[i-1][2]-val[i]);  
    dp[i][1] = max(dp[i-1][1], dp[i-1][0]);  
    dp[i][2] = max(dp[i-1][2], dp[i-1][1]+val[i]);  
}
```

Ans = max {dp[N][i]} (i=0,1,2,3)

LC 376.Wiggle Subsequence

给一个序列s, 求其中最长的wiggle pattern subsequence. (...> s[i] < s[j] > s[k] <...)



```
for (int i=1; i<=N; i++)  
{  
    if (nums[i] < nums[i-1])  
        dp[i][0] = dp[i-1][1] + 1;  
    else  
        dp[i][0] = dp[i-1][0];  
  
    if (nums[i] < nums[i-1])  
        dp[i][1] = dp[i-1][0] + 1;  
    else  
        dp[i][1] = dp[i-1][1];  
}
```

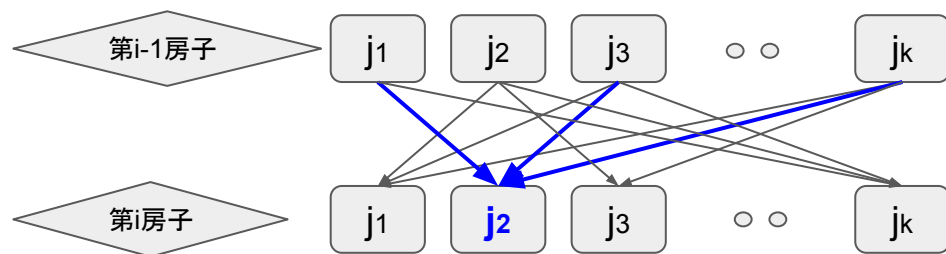
Ans = max {dp[N][i]} (i=0,1)

0:以当前元素结尾且上升

1:以当前元素结尾且下降

LC 256. Paint House

给出 $\text{cost}[i][j]$ 表示第 i 个房子喷涂第 j 种颜色的价格。相邻的房子不能涂同一种颜色。
求喷涂所有房子的最小价格。



$\text{dp}[i][j]$: 第 i 间房子喷涂第 j 种颜色的代价

```
for (int i=1; i<=N; i++)  
{  
     $\text{dp}[i][j] = \min \{ \text{dp}[i-1][j'] \} + \text{cost}[i][j];$   
    ( $j'=1,2,3\dots,K$  but  $j' \neq j$ )  
}
```

$\text{Ans} = \min \{ \text{dp}[N][j] \} \quad (i=0,1,2,\dots,K)$

LC 1289. Minimum Falling Path Sum II 一毛一样

思考题

给 N 个房子，涂白色和涂黑色的花费分别是 a, b 。要求不能有连续三间房子涂同一种颜色。求喷涂所有房子的最小价格。

思考题

给N个房子，涂白色和涂黑色的花费分别是a,b。要求不能有连续三间房子涂同一种颜色。求喷涂所有房子的最小价格。

0: 结尾有连续1间为黑色 $\leq 2, 3 + \text{black}$

1: 结尾有连续2间为黑色 $\leq 0 + \text{black}$

2: 结尾有连续1间为白色 $\leq 0, 1 + \text{white}$

3: 结尾有连续2间为白色 $\leq 2 + \text{white}$

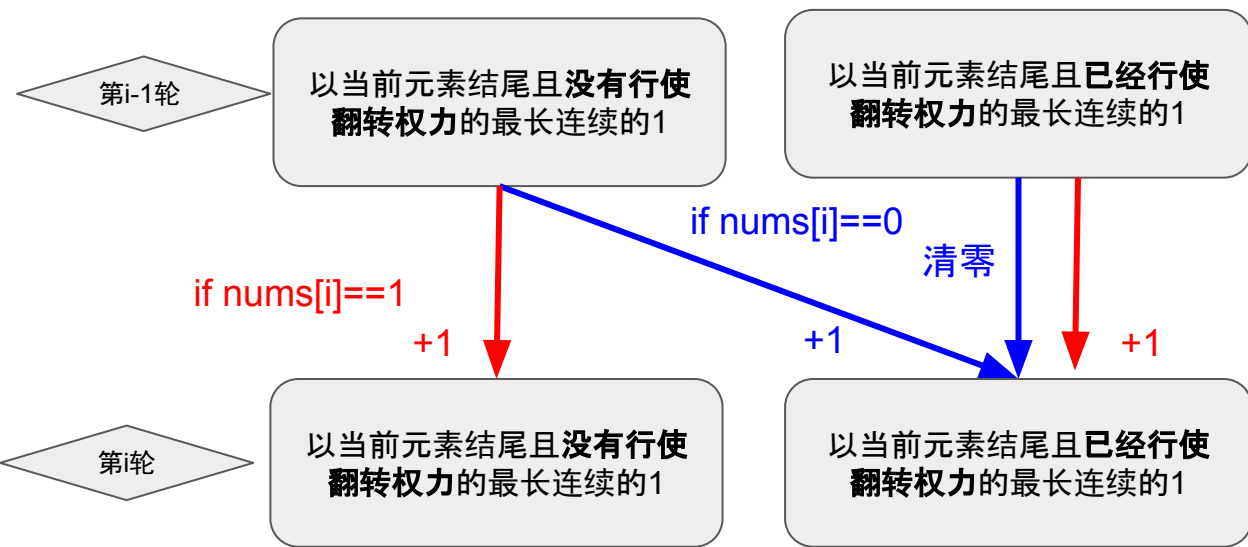
To Do or Not To Do

很多不是那么套路的DP题，DP状态可能比较难设计。不过还是有套路可循。

某些题目给你一次“**行使某种策略的权力**”。联想到买卖股票系列的题，我们常会设计的两个状态就是“**行使了权力**”和“**没有行使权力**”分别对应的价值。

LC 487. Max Consecutive Ones II

给你一个0/1数组。有最多一次从0翻转到1的权力。问最多可以多少连续的1？



0:以当前元素结尾且**没有行使**翻转权力的最长连续的1

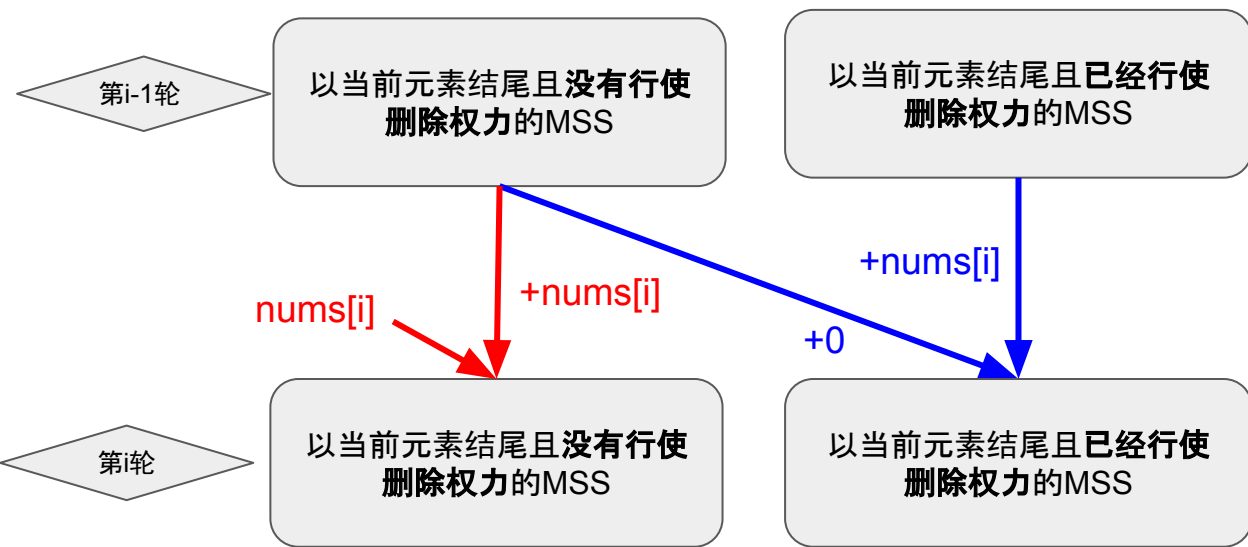
1:以当前元素结尾且**已经行使**翻转权力的最长连续的1

```
for (int i=1; i<=N; i++)  
{  
    if (nums[i]==0) {  
        dp[i][1] = dp[i-1][0]+1;  
        dp[i][0] = 0;  
    }  
    else {  
        dp[i][0] = dp[i-1][0]+1;  
        dp[i][1] = dp[i-1][1]+1;  
    }  
}
```

Ans = max {dp[i][j]}
(for all possible i and j=0,1)

LC 1186. Maximum Subarray Sum with One Deletion

给你一个数组。有最多一次删除一个数的权力。问sum最大的subarray？



0: 以当前元素结尾且没有行使删除权力的MSS

1: 以当前元素结尾且已经行使删除权力的MSS

```
for (int i=1; i<=N; i++)  
{  
    dp[i][0] = max(dp[i-1][0] +  
        nums[i], nums[i]);  
  
    dp[i][1] = max(dp[i-1][0],  
        dp[i-1][1] + nums[i]);  
}
```

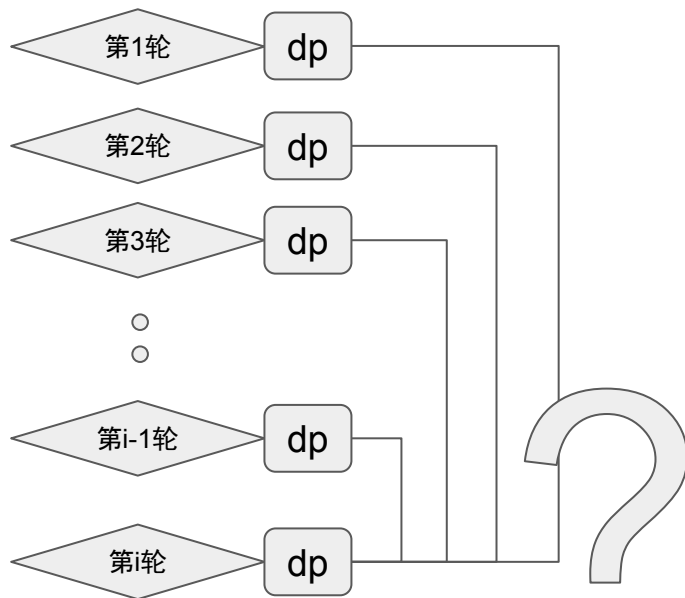
Ans = max {dp[i][j]}
(for all possible i and j=0,1)

DP套路(II): 第II类基本型(“时间序列”加强版)

给出一个序列(数组/字符串), 其中每一个元素可以认为“一天”: 但“今天”的状态 和之前的“某一天”有关, 需要挑选。

套路:

- 定义 $dp[i]$: 表示第 i -th轮的状态, 一般这个状态要求和元素 i 直接有关。
- 千方百计将 $dp[i]$ 与之前的状态 $dp[i']$ 产生关系 ($i=1, 2, \dots, i-1$) (比如sum, max, min)
 - $dp[i]$ 肯定不能与大于 i 的轮次有任何关系, 否则违反了DP的无后效性。
- 最终的结果是 $dp[i]$ 中的某一个



LC 300. Longest Increasing Subsequence

给一个数组s。求最长的递增子序列的长度。

状态定义:照抄问题 $dp[i] \Rightarrow s[1:i]$ 里以 $s[i]$ 结尾的、最长的递增子序列的长度。

状态的转移:寻找最优的前驱状态j, 将 $dp[i]$ 与 $dp[j]$ 产生联系。

```
for (int i=1; i<=N; i++)
{
    // i是该LIS的最大元素, 搜索该LIS的第二大元素j
    for (int j=1; j<i; j++)
    {
        if (nums[j]<nums[i])
            dp[i] = max (dp[i], dp[j] + 1);
    }
}
```

Ans = max {dp[i]}, for i=1,2,...,N

思考题

:673.Number-of-Longest-Increasing-Subsequence

if (dp[j]+1==dp[i]) count[i]+=count[j];

else if (dp[j]+1>dp[i]) dp[i]=dp[j]+1, count[i] = count[j];

LC 368. Largest Divisible Subset

给一个数组s。求最大的子集，使得里面的所有元素之间都可以互相整除。

状态定义：照抄问题 $dp[i] \Rightarrow s[1:i]$ 里以 $s[i]$ 结尾的、满足题意的最大子集的元素数目。

状态的转移：寻找最优的前驱状态j，将 $dp[i]$ 与 $dp[j]$ 产生联系。

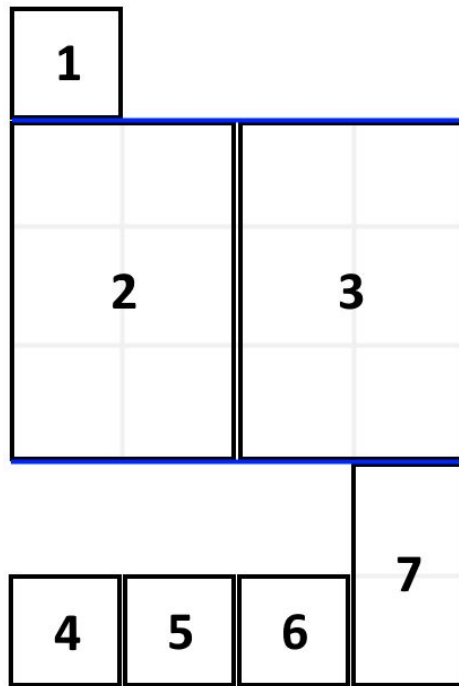
```
sort(nums);
for (int i=1; i<=N; i++)
{
    // i是该集合的最大元素，搜索该子集的第二大元素j
    for (int j=1; j<i; j++)
    {
        if (nums[i]%nums[j]==0)
            dp[i] = max (dp[i], dp[j] + 1);
    }
}
Ans = max {dp[i]}, for i=1,2,...,N
```

XXX j XXX i

LC 1105. Filling Bookcase Shelves

给你N本书(宽度高度各异)的序列要求按照所给顺序摆放。相邻的若干本可以放一层，但同一层的宽度不能超过W。

问这个书架最矮可以有多高？



LC 1105. Filling Bookcase Shelves

将数组S分成若干个subarray, 最小化“每个subarray的最大值之和”, 输出该值。

状态定义: 照抄问题 $dp[i] \Rightarrow$ 将数组S[1:i]分成若干个subarray, 最小化“每个subarray的最大值之和”, 保存该值。

状态的转移: 寻找最优的前驱状态j, 将 $dp[i]$ 与 $dp[j]$ 产生联系。

- 第i本书所在的这一层可能有多高? 取决于上一层的最后一本书在哪里。

```
for (int i=1; i<=N; i++)
{
    // i是本层的最后一本, 搜索上层的最后一本的位置
    for (int j=i-1; j>=1; j--)
    {
        if (totalWidth[j+1:i] <= W)
            dp[i] = min (dp[i], dp[j] + maxHeight[j+1:i] );
        else
            break;
    }
}
Ans = dp[N]
```

DP套路(III): 双序列型

给出两个序列s和t(数组/字符串), 让你对它们搞事情。

- Longest Common Subsequences
- Shortest Common Supersequence
- Edit distances
- ...

套路:

- 定义 $dp[i][j]$: 表示针对 $s[1:i]$ 和 $t[1:j]$ 的子问题的求解。
- 千方百计将 $dp[i][j]$ 往之前的状态去转移: $dp[i-1][j]$, $dp[i][j-1]$, $dp[i-1][j-1]$
- 最终的结果是 $dp[m][n]$

LC1143: Longest Common Subsequences

Q: 求字符串s和t的length of LCS

状态定义: 照抄问题 $dp[i][j] \Rightarrow s[1:i]$ 和 $t[1:j]$ 的length of LCS

状态的转移: 外面两层大循环遍历i和j; 核心从 $s[i]$ 与 $t[j]$ 的关系作为突破口, 拼命往 $dp[i-1][j-1]$, $dp[i][j-1]$, $dp[i-1][j]$ 转移。

```
for (int i=1; i<=m; i++)  
    for (int j=1; j<=n; j++)  
    {  
        if (s[i]==t[j])  
            dp[i][j] = dp[i-1][j-1]+1;  
        else  
            dp[i][j] = max(dp[i-1][j], dp[i][j-1]);  
    }
```

s: XXXXX i t: YYY j

LC1092: Shortest Common Supersequences

Q: 求字符串s和t的length of SCS

状态定义: 照抄问题 $dp[i][j] \Rightarrow s[1:i]$ 和 $t[1:j]$ 的length of SCS

状态的转移: 外面两层大循环遍历i和j; 核心从 $s[i]$ 与 $t[j]$ 的关系作为突破口, 拼命往 $dp[i-1][j-1]$, $dp[i][j-1]$, $dp[i-1][j]$ 转移。

```
for (int i=1; i<=m; i++)
    for (int j=1; j<=n; j++)
    {
        if (s[i]==t[j])
            dp[i][j] = dp[i-1][j-1]+1;
        else
            dp[i][j] = min(dp[i-1][j]+1, dp[i][j-1]+1);
    }
```

s: XXXXX i t: YYY j

LC72: Edit Distance

Q: 求字符串s和t的min Edit Distance

状态定义: 照抄问题 $dp[i][j] \Rightarrow s[1:i]$ 和 $t[1:j]$ 的Min Edit Distance

状态的转移: 外面两层大循环遍历i和j; 核心从 $s[i]$ 与 $t[j]$ 的关系作为突破口, 拼命往 $dp[i-1][j-1]$, $dp[i][j-1]$, $dp[i-1][j]$ 转移。

```
for (int i=1; i<=m; i++)
  for (int j=1; j<=n; j++)
  {
    if (s[i]==t[j])
      dp[i][j] = dp[i-1][j-1];
    else
      dp[i][j] = min(dp[i-1][j]+1, dp[i][j-1]+1, dp[i-1][j-1]+1);
  }
```

s: XXXXX i t: YYY j

LC97: Interleaving String

Q: 求字符串s和t能否交叠组成字符串w

状态定义: 照抄问题 $dp[i][j] \Rightarrow s[1:i]$ 和 $t[1:j]$ 能否交叠组成字符串 $w[1:i+j]$

状态的转移: 外面两层大循环遍历i和j; 核心从 $s[i]$, $t[j]$ 和 $w[i+j]$ 的关系作为突破口, 拼命往 $dp[i-1][j-1]$, $dp[i][j-1]$, $dp[i-1][j]$ 转移。

```
for (int i=1; i<=m; i++)
  for (int j=1; j<=n; j++)
  {
    if (s[i]==w[i+j] && dp[i-1][j]==true)
      dp[i][j] = true;
    else if (t[j]==w[i+j] && dp[i][j-1]==true)
      dp[i][j] = 1;
    else
      dp[i][j] = false;
  }
```

s: XXXXX i t: YYY j

LC115. Distinct Subsequences

Q: 求字符串s有多少不同的子序列等于字符串t

状态定义: 照抄问题 $dp[i][j] \Rightarrow s[1:i]$ 有多少不同的子序列等于 $t[1:j]$

状态的转移: 外面两层大循环遍历i和j; 核心从 $s[i]$ 与 $t[j]$ 的关系作为突破口, 拼命往 $dp[i-1][j-1]$, $dp[i][j-1]$, $dp[i-1][j]$ 转移。

```
for (int i=1; i<=m; i++)  
    for (int j=1; j<=n; j++)  
    {  
        if (s[i]==t[j])  
            dp[i][j] = dp[i-1][j-1] + dp[i-1][j];  
        else  
            dp[i][j] = dp[i-1][j];  
    }
```

s: XXXXX i t: YYY j

LC 727.Minimum Window Subsequence

Q: 求字符串s里最短的、并且包含t的substring的长度。(t是这个substring的子序列)

状态定义:照抄问题 $dp[i][j] \Rightarrow s[1:i]$ 里最短的、并且包含 $t[1:j]$ 的substring的长度(这个substring必须要求以 $s[i]$ 结尾)

状态的转移:外面两层大循环遍历i和j;核心从 $s[i]$ 与 $t[j]$ 的关系作为突破口,拼命往 $dp[i-1][j-1]$, $dp[i][j-1]$, $dp[i-1][j]$ 转移。

```
for (int i=1; i<=m; i++)
  for (int j=1; j<=n; j++)
  {
    if (s[i]==t[j])
      dp[i][j]=dp[i-1][j-1]+1;
    else
      dp[i][j]=dp[i-1][j]+1;
  }
```

s: XXXXX i t: YYY j

注意: $ans = \min dp[i][n] \ (i=1,2,\dots,m)$

LCS/SCS的变种:换汤不换药

- LC 583. Delete Operation for Two Strings

问:从字符串s和t中总共最少删除多少个字符能使得它们相等。

- LC 712. Minimum ASCII Delete Sum for Two Strings

问:从字符串s和t中总共最少删除多少ASCII码值的字符能使得它们相等。

- LC 1035. Uncrossed Lines

两个数组s和t之间相等的数字可以连线。连线不能交叉。问最多可以有几条连线。

LCS/SCS的变种: 换汤不换药

- LC 1216. Valid Palindrome III

问一个字符串s最少删除多少个字符能变成回文串。

- LC 1312. Minimum Insertion Steps to Make a String Palindrome

问一个字符串s最少需要添加多少个字符能变成回文串。

$T = S[::-1]$

S

如何重构出DP计算的最优方案？

Solution: 根据状态转移的正过程“回溯”逆推。

ZZZZZZZZZZZZ?
s: XXXXX i
t: YYY j

- LC1092: Shortest Common Supersequences

```
for (int i=1; i<=m; i++)  
    for (int j=1; j<=n; j++)  
    {  
        if (s[i]==t[j])  
            dp[i][j] = dp[i-1][j-1]+1;  
            // 说明了我们往SCS上添加了 s[i] / t[j]  
        else  
            dp[i][j] = max(dp[i-1][j]+1, dp[i][j-1]+1);  
            // 前者说明了我们往SCS上添加了 s[i]  
            // 后者说明了我们往SCS上添加了 t[j]  
    }
```

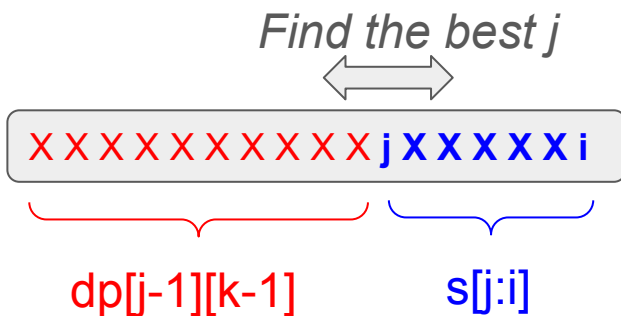
```
int i=M;  
int j=N;  
string result;  
while (i>0 && j>0)  
{  
    if (str1[i]==str2[j])  
    {  
        result.push_back(s[i]);  
        i--; j--;  
    }  
    else if (dp[i][j]==dp[i-1][j]+1)  
    {  
        result.push_back(s[i]);  
        i--;  
    }  
    else {  
        result.push_back(t[j]);  
        j--;  
    }  
}
```


DP套路(IV): 第I类区间型DP

给出一个序列, 明确要求分割成K个连续区间, 要你计算这些区间的某个最优性质。

套路:

- 状态定义: $dp[i][k]$ 表示针对 $s[1:i]$ 分成 k 个区间, 此时能够得到的最优解
- 搜寻**最后一个区间的起始位置** j , 将 $dp[i][k]$ 分割成 $dp[j-1][k-1]$ 和 $s[j:i]$ 两部分。
- 最终的结果是 $dp[N][K]$



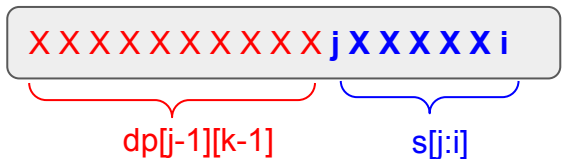
LC 1278. Palindrome Partitioning III

求最小的字符变动, 使得字符串S能够恰能分成K个子串, 且每串都是回文串。

状态定义: 照抄问题 $dp[i][k] \Rightarrow$ 最小的字符变动, 使得字符串 $S[1:i]$ 能够恰能分成 k 个子串, 且每串都是回文串。

状态的转移:

- 第一层循环遍历 i
- 第二层循环遍历 k
- 第三层循环寻找最优的位置 j 作为最后一个分区的起始位置。
- 将 $dp[i][k]$ 分割成 $dp[j-1][k-1]$ 和 $s[j:i]$ 求解。



```
for (int i=1; i<=n; i++)  
    for (int k=1; k<=min(i,K); k++)  
    {  
        for (int j=i; j>=k; j--)  
        {  
            dp[i][k] = min(dp[i][k],  
                           dp[j-1][k-1] + count[j:i]);  
        }  
    }
```

k 不能太大, 否则不够 i 个元素分

j 不能太小, 否则分不够 $k-1$ 组

Ans = $dp[N][K]$

注意边界条件:
 $dp[x][0]$, $dp[0][0]$

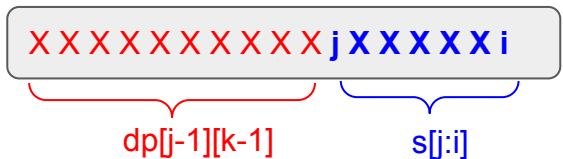
LC [813](#). Largest Sum of Averages

将数组S分成最多K个subarray，最大化“每个subarray平均数的sum”，输出该值。

状态定义：照抄问题 $dp[i][k] \Rightarrow$ 将数组 $S[1:i]$ 分成 k 个subarray，最大化“每个subarray平均数的和”，保存该值。

状态的转移：

- 第一层循环遍历 i
- 第二层循环遍历 k
- 第三层循环寻找最优的位置 j 作为最后一个分区的起始位置。
- 将 $dp[i][k]$ 分割成 $dp[j-1][k-1]$ 和 $s[j:i]$ 求解。



```
for (int i=1; i<=n; i++)
    for (int k=1; k<=min(i,K); k++)
    {
        for (int j=i; j>=k; j--)
        {
            dp[i][k] = max (dp[i][k],
                             dp[j-1][k-1] + avg[j:i]);
        }
    }
```

Ans = max { $dp[N][k]$ },
for $k=1,2,\dots,K$

注意边界条件：
 $dp[x][0]$, $dp[0][0]$

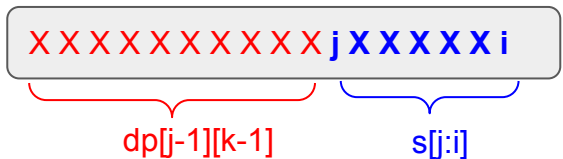
LC [410](#). Split Array Largest Sum

将数组S分成K个subarray, 最小化“其中最大的subarray sum”, 输出该值。

状态定义: 照抄问题 $dp[i][k] \Rightarrow$ 将数组 $S[1:i]$ 分成 k 个subarray, 最小化“其中最大的subarray sum”, 保存该值。

状态的转移:

- 第一层循环遍历 i
- 第二层循环遍历 k
- 第三层循环寻找最优的位置 j 作为最后一个分区的起始位置。
- 将 $dp[i][k]$ 分割成 $dp[j-1][k-1]$ 和 $s[j:i]$ 求解。



```
for (int i=1; i<=n; i++)
    for (int k=1; k<=min(i,K); k++)
    {
        for (int j=i; j>=k; j--)
        {
            dp[i][k] = min (dp[i][k],
                            max(dp[j-1][k-1], sum[j:i]));
        }
    }
```

Ans = $dp[N][K]$

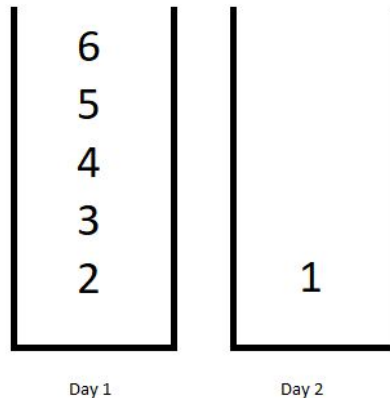
注意边界条件:
 $dp[x][0]$, $dp[0][0]$

LC 1335. Minimum Difficulty of a Job Schedule

有一系列task及其难度，必须顺次完成，且必须恰好分d天完成。

每天的难度定义为当天所有task难度的最大值。

求如何安排task，最小化“每天难度的总和”，输出该值。



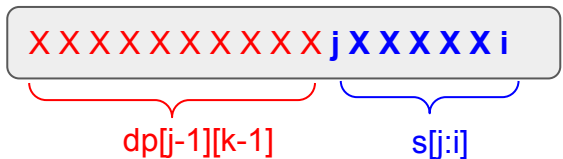
LC [1335](#). Minimum Difficulty of a Job Schedule

将数组S分成K个subarray, 最小化“每个subarray最大值的和”, 输出该值。

状态定义: 照抄问题 $dp[i][k] \Rightarrow$ 将数组 $S[1:i]$ 分成 k 个 subarray, 最小化“每个 subarray 最大值的和”, 保存该值。

状态的转移:

- 第一层循环遍历 i
- 第二层循环遍历 k
- 第三层循环寻找最优的位置 j 作为最后一个分区的起始位置。
- 将 $dp[i][k]$ 分割成 $dp[j-1][k-1]$ 和 $s[j:i]$ 求解。



```
for (int i=1; i<=n; i++)
    for (int k=1; k<=min(i,K); k++)
    {
        for (int j=i; j>=k; j--)
        {
            dp[i][k] = min (dp[i][k],
                            dp[j-1][k-1] + Max[j:i]);
        }
    }
```

Ans = $dp[N][K]$

注意边界条件:
 $dp[x][0]$, $dp[0][0]$

DP套路(V): 第II类区间型DP

只给出一个序列 S (数组/字符串), 求一个针对这个序列的最优解。

适用条件: 这个最优解对于序列的index而言, 没有“无后效性”。即无法设计 $dp[i]$ 使得 $dp[i]$ 仅依赖于 $dp[j]$ ($j < i$). 但是大区间的最优解, 可以依赖小区间的最优解。

套路:

- 定义 $dp[i][j]$: 表示针对 $s[i:j]$ 的子问题的求解。
- 千方百计将大区间的 $dp[i][j]$ 往小区间的 $dp[i'][j']$ 转移。
 - 第一层循环是区间大小; 第二层循环是起始点。
- 最终的结果是 $dp[1][N]$

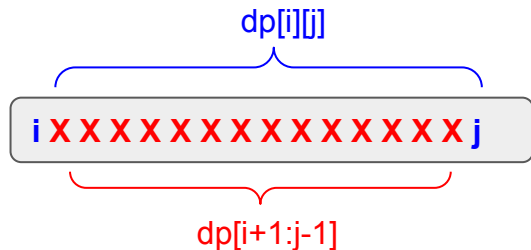
LC [516](#). Longest Palindromic Subsequence

给一个字符串S, 求是回文串的最长subsequence的长度。

状态定义: 照抄问题 $dp[i][j] \Rightarrow$ 字符串S[i:j]里是回文串的最长subsequence的长度。

状态的转移:

- 第一层循环是区间大小。
- 第二层循环是起始点。
- 千方百计将大区间的 $dp[i][j]$ 往小区间的 $dp[i'][j']$ 转移。



```
for (int len=1; len<=N; len++)  
    for (int i=1; i+len-1<=N; i++)  
    {  
        int j = i+len-1;  
        if (len==1)  
            dp[i][j] = 1;  
        else if (s[i]==s[j])  
            dp[i][j] = dp[i+1][j-1]+2;  
        else  
            dp[i][j] = max(dp[i][j-1], dp[i+1][j]);  
    }
```

Ans = dp[1][N]

注意边界条件:
 $dp[i][j] = 0 \ (i > j)$

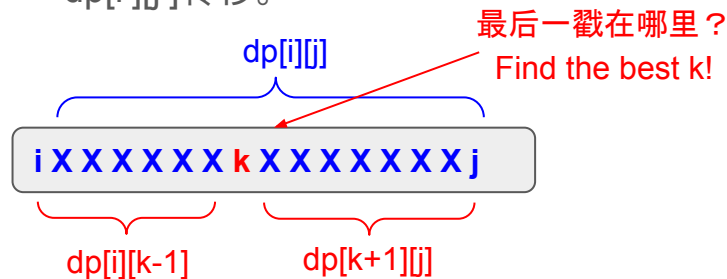
LC [312](#). Burst Balloons

给一排气球及其价值 S 。每戳爆一个气球的得分: 气球本身分值*(仍存留的)左边气球分值*(仍存留的)右边气球分值。如何戳爆所有气球, 最大化总得分。

状态定义: 照抄问题 $dp[i][j] \Rightarrow$ 戳爆 $S[i:j]$ 的所有气球, 最大化的总得分。

状态的转移:

- 第一层循环是区间大小。
- 第二层循环是起始点。
- 千方百计将大区间的 $dp[i][j]$ 往小区间的 $dp[i'][j']$ 转移。



```
for (int len=1; len<=N; len++)  
    for (int i=1; i+len-1<=N; i++)  
    {  
        int j = i+len-1;  
        for (int k=i; k<=j; k++)  
            dp[i][j] = max(dp[i][j],  
                           dp[i][k-1]+s[i-1]*s[k]*s[j+1]+dp[k+1][j]);  
    }
```

Ans = $dp[1][N]$

注意边界条件:
 $dp[i][j] = 0 \ (i > j)$

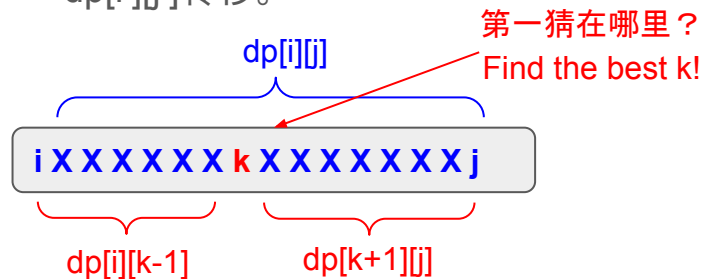
LC [375](#). Guess Number Higher or Lower II

从1~N的数字里猜数。如果你猜一个数x，需要付钱x块，并且会得到反馈信息x是大是小。问最少付多少钱能保证猜中。

状态定义：照抄问题 $dp[i][j] \Rightarrow$ 最少付多少钱能保证猜中 $i \sim j$ 里的数字。

状态的转移：

- 第一层循环是区间大小。
- 第二层循环是起始点。
- 千方百计将大区间的 $dp[i][j]$ 往小区间的 $dp[i'][j']$ 转移。



```
for (int len=1; len<=N; len++)  
    for (int i=1; i+len-1<=N; i++)  
    {  
        int j = i+len-1;  
        for (int k=i; k<=j; k++)  
            dp[i][j] = min(dp[i][j],  
                           k + max(dp[i][k-1], dp[k+1][j]));  
    }
```

Ans = $dp[1][N]$

注意边界条件：
 $dp[i][j] = 0 \ (i \geq j)$

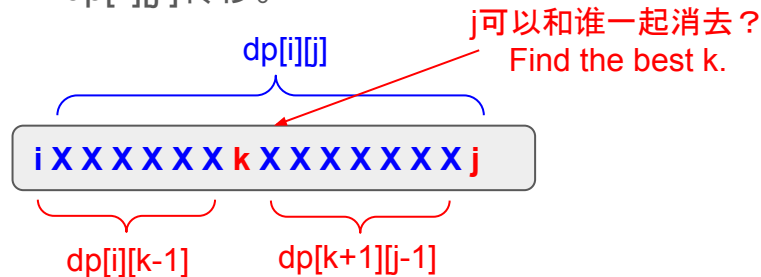
LC [1246](#). Palindrome Removal

给一个字符串s，每次删除其中的一个回文substring，问多少次删完？

状态定义：照抄问题 $dp[i][j] \Rightarrow$ 对于字符串 $s[i:j]$ ，每次删除其中的一个回文substring，问多少次删完。

状态的转移：

- 第一层循环是区间大小。
- 第二层循环是起始点。
- 千方百计将大区间的 $dp[i][j]$ 往小区间的 $dp[i'][j']$ 转移。



```
for (int len=1; len<=N; len++)  
    for (int i=1; i+len-1<=N; i++)  
    {  
        int j = i+len-1;  
        for (int k=i; k<=j; k++)  
        {  
            if (s[k] == s[j])  
                dp[i][j] = min(dp[i][j],  
                               dp[i][k-1] + max(1, dp[k+1][j-1]));  
        }  
    }
```

Ans = $dp[1][N]$

注意边界条件：
 $dp[i][j] = 0$ ($i \geq j$)

结合第I类和第II类区间型DP算法的Boss题： LC [1000](#). Minimum Cost to Merge Stones

给一个数组代表N堆石头的重量。每步操作将K堆相邻的石头合并，代价是这K堆的重量和。问最少的代价将所有的石头堆合并到一起。

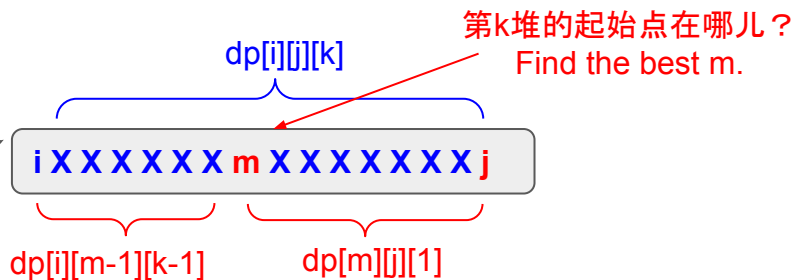
我们考虑将任意区间[i:j]归并到一起的最优解，取决于如何先最小代价地将[i:j]归并成K堆（即先分成K个subarray），然后再加sum[i:j]即可。于是提示我们需要结合两类区间型DP的套路：

$dp[i][j][k]$ 表示将区间[i:j]归并成k堆的最小代价。

结合第I类和第II类区间型DP算法的Boss题： LC [1000](#). Minimum Cost to Merge Stones

$dp[i][j][k]$ 表示将区间 $[i:j]$ 归并成 k 堆的最小代价。

```
for (int len = 1; len <= N; len++)  
    for (int i = 1; i + len - 1 <= N; i++)  
    {  
        int j = i + len - 1;  
        for (int k = 2; k <= K; k++)  
        {  
            for (int m = i; m <= j; m++)  
                 $dp[i][j][k] = \min(dp[i][m-1][k-1] + dp[m][j][1])$  ;  
        }  
         $dp[i][j][1] = dp[i][j][K] + \text{sum}[i:j]$ ;  
    }  
return  $dp[1][N][1]$ ;
```



→ 特别注意：当 $k=1$ 时， $dp[i][j][1]$ 只能由 $dp[i][j][K]$ 转化而来。

DP套路(VI): 背包入门

题型抽象: 给出N件物品, **每个物品可用可不用**(或者有若干个不同的用法)。要求以某个有上限C的代价来实现最大收益。(有时候反过来, 要求以某个有下限的收益来实现最小代价。)

套路:

- 定义 $dp[i][c]$: 表示考虑只从前i件物品的子集里选择、代价为c的最大收益。
 - $c = 1, 2, \dots, C$
- 千方百计将 $dp[i][c]$ 往 $dp[i-1][c']$ 转移: 即考虑如何使用物品i, 对代价/收益的影响
 - 第一层循环是物品编号i;
 - 第二层循环是遍历“代价”的所有可能值。
- 最终的结果是 $\max \{dp[N][c]\}$, for $c=1, 2, \dots, C$

DP套路(VI): 背包入门

题型抽象: 给出N件物品, **每个物品可用可不用**(或者有若干个不同的用法)。要求以某个有上限C的代价来实现最大收益。(有时候反过来, 要求以某个有下限的收益来实现最小代价。)

背包问题的解法特点:

- 利用了物品次序的“无后效性”: 我在前4件物品中做选择的最大收益, 与第5件物品是啥没有关系。
 - “过去不依赖将来, 将来不影响过去”
- 将原本题意的解空间(代表各种物品是否使用的高维向量), 替换成了代价的解空间(是一个有上限C的标量)。压缩了复杂度。
 - $[0, 2, 0, 3, 1, 0, 0, 4] \Rightarrow \{10\}$

标准01背包

给一系列物品(价值为 v , 重量为 w), 每个物品只能用一次。背包总容量上限是 C 。问最大能装多少价值的东西。

状态定义: $dp[i][c] \Rightarrow$ 考虑仅在前 i 件物品的子集选择, 且**代价(所选物品的总重量)恰好是 c** 时能得到的最大收益。

状态转移: 当前的代价是 c , 那么前一轮的代价是多少? c 或者 $c - w_i$

```
for (int i=1; i<=N; i++)  
    for (int c=1; c<=C; c++)  
    {  
        dp[i][c] = max(dp[i-1][c],  
                        dp[i-1][c-wi] + vi );  
    }
```

有点像DP的基本款:
考虑一件物品就是“一轮”;
只不过每轮的状态以代价为单位, 有 C 种。

Ans = max {dp[N][c] } for $c=1,2,...,C$

注意边界条件:
 $dp[0][0] = 0$
 $dp[0][c] = \text{NA}$

LC 494. Target Sum

给你一个数组nums，可以在每个元素前添加正负号。问使得最后整体结果是S的方法有多少个？

状态定义: $dp[i][s]$ => 考虑仅在前i个元素的子集中添加符号，所得估值恰好是s时有多少种不同的方法。

状态转移: 当前的估值是s，那么前一轮的估值是多少？ $s - \text{nums}[i]$ 或者 $s + \text{nums}[i]$ 。

```
for (int i=1; i<=N; i++)  
    for (int s=-MAX_SUM; s<=MAX_SUM; s++)  
    {  
         $dp[i][s] = dp[i-1][s-\text{nums}[i]] +$   
             $dp[i-1][s+\text{nums}[i]];$   
    }
```

Ans = $dp[N][S]$

注意边界条件：

$dp[0][0] = 1$

$dp[0][c] = \text{NA}$

需要查验 $s - \text{nums}[i]$ and $s + \text{nums}[i]$ 是否越界

LC 1049. Last Stone Weight II

给你一个数组nums，每次你可以选择相邻的两个数对消，只留下它们之差的绝对值放在原地，一直操作到只剩一个数。问这个数最小是多少？

分析：任何一种完整的消除操作方案其实对应着在所有数字前面加+/-符号。

比如 $[1,4] \Rightarrow -1+4 = 3$, $[1,2,3] \Rightarrow -1-2+3 = 0$

反之虽然并不成立，但对于本题（求剩下的最小的正数）没有影响。（不做深入讨论）

本题可以转化为494. target sum的进阶版：给你一个数组nums，可以在每个元素前添加正负号。问使得最后整体结果最小的正数是多少？

LC 1049. Last Stone Weight II

给你一个数组nums，可以在每个元素前添加正负号。问使得最后整体结果最小的正数是多少？

状态定义: $dp[i][s]$ => 考虑仅在前i个元素的子集中添加符号，所得估值恰好是s，是否可行。

状态转移: 当前的估值是s，那么前一轮的估值是多少？ $s - \text{nums}[i]$ 或者 $s + \text{nums}[i]$ 。

```
for (int i=1; i<=N; i++)  
    for (int s=-MAX_SUM; s<=MAX_SUM; s++)  
    {  
        dp[i][s] = dp[i-1][s-nums[i]] || dp[i-1][s+nums[i]];  
    }
```

Ans = the first positive s, s.t. $dp[N][s] == \text{true}$

注意边界条件：
 $dp[0][0] = \text{true}$
 $dp[0][s] = \text{false}$

LC 474. Ones and Zeroes

有一系列的binary strings。问你最多能挑选几个字符串并且所需要的0和1的总数不超过m和n。

状态定义: $dp[i][c1][c2]$ => 考虑仅在前i种字符串的子集中选择, 且所选的0和1数目恰好是(c1,c2)时的最优解。

状态转移: 当前的代价是(c1,c2), 那么前一轮的代价是多少?
(c1,c2) 或者 (c1-ai,c2-bi)

```
for (int i=1; i<=N; i++)  
    for (int c1=1; c1<=m; c1++)  
        for (int c2=1; c2<=n; c2++)  
        {  
            dp[i][c1][c2] = max(dp[i-1][c1][c2],  
                                dp[i-1][c1-ai][c2-bi] + 1 );  
        }
```

Ans = max {dp[N][c1][c2] } for c1<=m, c2<=n

注意边界条件:

$dp[0][0][0] = 0$

$dp[0][c1][c2] = \text{NA}$

LC 879. Profitable Schemes

有一系列的任务。每个任务需要消耗人力和产生价值。问你挑选这些任务，有多少种组合方法能够满足总人力小于等于G但总价值大于等于P。

状态定义: $dp[i][g][p]$ => 考虑仅在前i种task的子集中选择，且所选的人力为g、总价值为p时的解（即方案组合数）。

状态转移: 当前的代价是(g,p)，那么前一轮的代价是多少？(g,p) 或者 (g-gi,p-pi)

```
for (int i=1; i<=N; i++)  
    for (int g=1; g<=MaxG; g++)  
        for (int p=1; p<=MaxP; p++)  
        {  
             $dp[i][g][p] = dp[i-1][g][p] + dp[i-1][g-gi][p-pi];$   
        }
```

Ans = sum { $dp[N][g][p]$ } for $g \leq G, p \geq P$

LC 879. Profitable Schemes

有一系列的任务。每个任务需要消耗人力和产生价值。问你挑选这些任务，有多少种组合方法能够满足总人力小于等于G但总价值大于等于P。

状态定义: $dp[i][g][p]$ => 考虑仅在前i种task的子集中选择，且所选的人力为g、总价值为p时的解（即方案组合数）。

状态转移: 前一轮的代价是(g,p), 那么这一轮的代价是多少？(g,p) 或者 (g+gi,p+pi)

```
for (int i=1; i<=N; i++)  
    for (int g=1; g<=G; g++)  
        for (int p=1; p<=P; p++)  
        {  
            dp[i][g][p] += dp[i-1][g][p];  
            dp[i][min(g+gi,G+1)][min(p+pi,P)] += dp[i-1][g][p];  
        }
```

Ans = sum {dp[N][g][P] } for g<=G

LC 956. Tallest Billboard

给你一系列棍子的长度。让你选择部分棍子拼接成两根，要求这两根拼接的棍子高度相等。问最长能拼多少？

状态定义: $dp[i][l][r] \Rightarrow$ 考虑仅在前 i 种 sticks 的子集中选择，并且拼出左边长度为 l 、右边长度为 r ，是否可行（布尔型）。

状态转移: 当前的状态是 (l, r) ，那么前一轮的代价是多少？ (l, r) 或者 $(l - hi, r)$ 或者 $(l, r - hi)$

```
for (int i=1; i<=N; i++)
  for (int l=1; l<=MaxL; l++)
    for (int r=r; r<=MaxR; r++)
    {
      if (dp[i-1][l][r] | dp[i-1][l-hi][r] | dp[i-1][l][r-hi])
        dp[i][l][r] = 1;
    }
```

Ans = max{l or r} for $dp[N][l][r]==1$ and $l==r$

LC 956. Tallest Billboard

给你一系列棍子的长度。让你选择部分棍子拼接成两根，要求这两根拼接的棍子高度相等。问最长能拼多少？

状态定义: $dp[i][d] \Rightarrow$ 考虑仅在前 i 种 sticks 的子集中选择，并且拼出左边长度与右边长度之差为 d 时，对应的左边长度的最大值。

状态转移: 当前的状态是 d ，那么前一轮的状态是多少？ d 或者 $d-h_i$ 或者 $d+h_i$

```
for (int i=1; i<=N; i++)  
    for (int d=-MaxD; d<=MaxD; d++)  
    {  
        dp[i][d] = max(dp[i-1][d], dp[i-1][d+hi],  
            dp[i-1][d-hi]+hi)  
    }
```

Ans = $dp[N][0]$

状态压缩

对于比较复杂的“状态”，DP经常会用到“状态压缩”的技巧。

比如：有些情况下如果想设计“状态”代表一个01向量（不超过32位），我们可以用一个整形的bit位来表示。

$[1,0,1,1,0,0,1] \Rightarrow \text{b}1011001 \Rightarrow 89$

LC 691. Stickers to Spell Word

给你一系列单词words。让你选择部分单词，可以利用里面的字母(无限次)，尝试拼出一个新单词target。问最少需要选择多少单词？

状态定义: $dp[i][set]$ => 考虑仅在前i种字符串的子集中选择，能够构成的字母集合是set，对应的最优解(即最少需要选择单词数)。

状态转移: 前一轮的字母集合是set，那么这一轮的字母集合是多少？set 与 words[i] 的并集！

```
for (int i=1; i<=N; i++)  
    for (int set=0; set<=(1<<26)-1; set++)  
    {  
        dp[i][set] = min(dp[i][set], dp[i-1][set]);  
        int new_set = unionset (set, words[i]);  
        dp[i][new_set] = min(dp[i][new_set], dp[i-1][set]+1);  
    }
```

Ans = min{dp[N][set]}
for set = 0,1,...,(1<<26)-1 and set cover target_set

LC 1125. Smallest Sufficient Team

给你N个人，每个人会一些技能(技能编号0到M)。现在有个任务需要的技能集合是target, 问最少需要召唤几个人？

状态定义: $dp[i][set] \Rightarrow$ 考虑仅在前i个人的子集中选择，能够构成的技能集合是set, 对应的最优解(即最少需要选择多少人)。

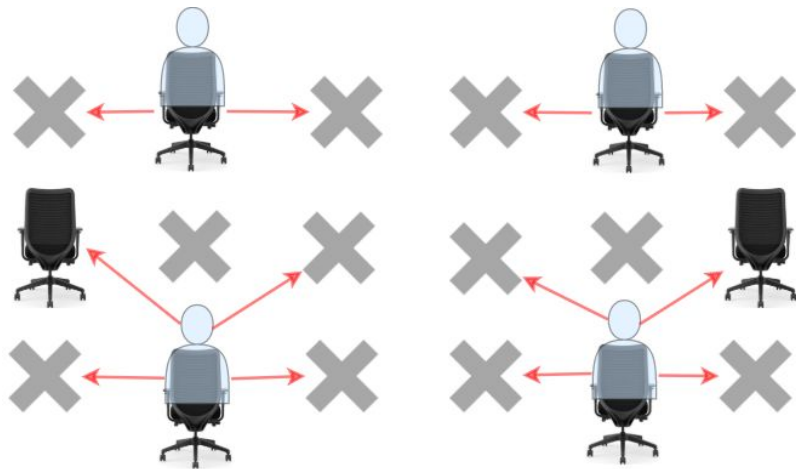
状态转移: 前一轮的技能集合是set, 那么这一轮的技能集合是多少？set 与 $skills[i]$ 的并集！

```
for (int i=1; i<=N; i++)  
    for (int set=0; set<=(1<<m)-1; set++)  
    {  
        dp[i][set] = min(dp[i][set], dp[i-1][set]);  
        int new_set = unionset (set, skills[i]);  
        dp[i][new_set] = min(dp[i][new_set], dp[i-1][set]+1);  
    }
```

Ans = min{dp[N][set]}
for set = 0,1,...,(1<<m)-1 and set cover target_set

LC 1349. Maximum Students Taking Exam

给你 $N \times M$ 的矩阵安排考生座位。要求每个人的左前、右前、左、右不能有人。问最多可以安排多少考生。



第 i 行考生如何安排, 仅受第 $i-1$ 行考生安排的制约, 而与更早的状态无关。
所以这是一个“时间序列型”的基本DP。

LC 1349. Maximum Students Taking Exam

给你 $N \times M$ 的矩阵安排考生座位。要求每个人的左前、右前、左、右不能有人。问最多可以安排多少考生。

状态定义: $dp[i][pattern] \Rightarrow$ 仅考虑前 i 行。当第 i 行考生的座位安排为 $pattern$ 时的最优解(即做多可以总共安排多少人)

状态转移: 这一行的座位安排是 $pattern$, 那么前一年的座位安排模式可以是什么呢? 从0到 $(1 \ll M) - 1$ 遍历检查一下。

```
for (int i=1; i<=N; i++)  
    for (int pattern=0; pattern<=(1<<m)-1; pattern++)  
    {  
        if (!selfOK(pattern)) continue;  
        for (int prev_pat=0; prev_pat<=(1<<m)-1; prev_pat++)  
        {  
            if (conflict(prev_pat, pattern)) continue;  
            dp[i][pattern] = max (dp[i][pattern],  
                                  dp[i-1][prev_pat] + num(pattern);  
        }  
    }
```

Ans = max{dp[N][pattern]}
for pattern = 0,1,...,(1<<m)-1 and selfOK(pattern)

Homework

第I类基本型: 903.Valid Permutations for DI Sequence

第II类基本型: 983.Minimum Cost For Tickets

第II类区间型: 546.Remove Boxes

背包型: 518.Coin Change 2

状态压缩: 943.Find the Shortest Superstring

弃坑型: 887.Super Egg Drop, 920.Number of Music Playlists

The End

讲不动了。谢谢观看。

本次讲座的视频录像链接: <https://youtu.be/FLbqgyJ-70I>