4.3 実多変数ベクトル値関数

本節はベクトル値関数の C^r 級について説明する．本節で U, V, W と書けば, それぞれ $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l$ の開集合を意味するものとする．

Dfn 4.9. $\mathbb{f} : U \to V$ が C^r 級であるとは，$\mathbb{f} = {}^t(f_1, \ldots, f_n)$ と書いたときに，すべての i に対し，f_i が多変数スカラー値関数として C^r 級であることを言う．

Dfn 4.10. $\mathbb{f} : U \to V$ が $\mathbb{a} \in U$ で**全微分可能**とは，$n \times m$ 行列 A が存在して，

$$\lim_{\mathbb{x} \to \mathbb{a}} \frac{\|\mathbb{f}(\mathbb{x}) - \mathbb{f}(\mathbb{a}) - A(\mathbb{x} - \mathbb{a})\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\mathbb{x} - \mathbb{a}\|_{\mathbb{R}^m}} = 0$$

が成立することである．

なぜ行列が出てくるのか意味が分からないかもしれない．これは，1 変数関数の微分でいうところの微分係数に当たるものである．もっと言うと，$\mathbb{f}(\mathbb{a}) + A(\mathbb{x} - \mathbb{a})$ は $\mathbb{f}(\mathbb{a})$ を通る高次元の平面である．ポイントで最もよく $\mathbb{f}$ を近似したいというモチベーションは 1 変数関数の微分と全く同じと言える．

Prp 4.11. $\mathbb{f} = {}^t(f_1, \ldots, f_n) : U \to V$ が $\mathbb{a} \in U$ で全微分可能であるとき

1. $\mathbb{f}$ は $\mathbb{a}$ で連続.
2. $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbb{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\mathbb{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbb{a}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\mathbb{a}) \end{pmatrix}$.

が成立する．

Proof. 証明は省略する． ■

Dfn 4.12. $\mathbb{f}$ が U の各点で全微分可能であるとき，$\mathbb{x}$ に関する 1 つの写像

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbb{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\mathbb{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbb{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\mathbb{x}) \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

が得られる．これを $D\mathbb{f}$ とかいて，$\mathbb{f}$ の **Jacobi 行列**[a]という．

[a] Jacobi 行列の表記は沢山ある．このノートでは $D\mathbb{f}$ で表記するが，$\mathbb{f}'$，$J_{\mathbb{f}}$，$\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\}_{i,j}$ 等がある．

Rmk 4.13. 全微分可能であることと偏微分可能であることは同値ではない事に注意すべし．(4.1) は $\mathbb{f}$ が偏微分可能であれば形式的に求めることが可能である．しかし $\mathbb{f}$ が全微分可能でないときは，通常 (4.1) を Jacobi 行列とは言わない．

Thm 4.14 (Chain rule)**.** $\mathbb{g}: U \to V$，$\mathbb{f}: V \to W$ に対して，$\mathbb{f}, \mathbb{g}$ がともに全微分可能であるとき，$\mathbb{f} \circ \mathbb{g}$ は全微分可能であり，次が成立する．

$$D(\mathbb{f} \circ \mathbb{g}(\mathbb{x})) = D(\mathbb{f}(\mathbb{y}))D\mathbb{g}(\mathbb{x}) \quad (\mathbb{y} = \mathbb{g}(\mathbb{x}))$$

Proof. 証明は微分積分学 III でやったので省略する． ■

E.g. 4.15. $\mathbb{g} = {}^t(g_1, g_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$，$\mathbb{f} = {}^t(f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ がともに全微分可能であるとき，$\mathbb{f} \circ \mathbb{g}$ の Jacobi 行列を求めると Thm4.14 より，

$$D(\mathbb{f} \circ \mathbb{g}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{dt} \\ \frac{dg_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dg_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dg_2}{dt} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{dg_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}\frac{dg_2}{dt} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1}\frac{dg_1}{dt} + \frac{\partial f_3}{\partial y_2}\frac{dg_2}{dt} \end{pmatrix}$$

となる．

Rmk 4.16. [5, (4.5)] では，

> $\mathbb{g}: U \to V$，$f: V \to \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{g} = {}^t(g_1, \ldots, g_n)$ と書いたとき，任意の i に対して g_i が偏微分可能で，f が C^1 ならば $f \circ \mathbb{g}$ も偏微分可能で，
>
> $$\frac{\partial f \circ \mathbb{g}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_n}\frac{\partial g_m}{\partial x_i}$$

と書かれていた．実際，この公式が成立するためにはこの条件で十分である[a]．しかし，これでは $f \circ \mathbb{g}$ は全微分可能とはなり得ないことに注意すべきである．

[a] もっと言うと f の C^1 も削れて全微分可能だけでいい．

Prp 4.17. $f: U \to \mathbb{R}$ が C^r であることと，各 i に対して，$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ が C^{r-1} であることは同値．

Proof. f が C^r であるとする．定義より，f には r 階までの偏導関数があって，かつそれらすべてが連続であるから $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ が C^{r-1} 級であることが従う．

逆を示す．各 i に対し，$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ が C^{r-1} であるとする．$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 自身が連続であることが示されれば，それ以降の $r-1$ 階までの偏微分は全て連続であることが仮定より従うため，主張は示される．$r = 1$ のとき，$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ は連続関数である．$r > 1$ のとき，$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ は C^1 でもあるので，全微分可能である．全微分可能ならば連続であるから，いかなる r に対しても $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ は連続であることがわかる．したがって，f は C^r． ■

Prp 4.18. $\mathbb{g}:U\to V$, $f:V\to\mathbb{R}$ がともに C^r 級ならば，$f\circ\mathbb{g}$ も C^r 級.

Proof. $r=0$ の時は自明．$r\geqq 1$ として帰納法を用いる．$r-1$ 以下の主張はすべて真と仮定しよう．f は C^r なので，$\frac{\partial f}{\partial y_i}$ は C^{r-1} となる．また，$\mathbb{g}$ は C^r 級なので C^{r-1} でもある．従って帰納法の仮定より，$\frac{\partial f}{\partial y_i}\circ\mathbb{g}$ は C^{r-1}．Thm4.14 を適用すると

$$\frac{\partial f\circ\mathbb{g}}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial y_n}\frac{\partial g_m}{\partial x_i}$$

となり，右辺は C^{r-1} 級の積の和なので左辺は C^{r-1}．前定理より $f\circ\mathbb{g}$ は C^r． ■

Cor 4.19. $\mathbb{g}:U\to V$, $\mathbb{f}:V\to W$ がともに C^r ならば，$\mathbb{f}\circ\mathbb{g}$ も C^r 級.

Proof. $\mathbb{f}\circ\mathbb{g}=(f_1\circ\mathbb{g},\dots,f_l\circ\mathbb{g})$ と書けることから従う． ■

Dfn 4.20. $\mathbb{f}:U\to V$ が全単射で，$\mathbb{f},\mathbb{f}^{-1}$ がともに C^r であるとき，$\mathbb{f}$ を C^r **微分同相写像**という．また，$U,V\underset{open}{\subseteqq}\mathbb{R}^m$ の間に C^r 微分同相写像が存在するとき，U,V は C^r **微分同相**という．

Rmk 4.21. 微分同相の定義を見て異なる次元の間に微分同相が存在しないのかと疑問に思うかもしれない．この疑問は 2 つの方向から否定的に解決される．

1. rank を用いた説明：
   $\mathbb{f}:\mathbb{R}^m\supseteqq U\to V\subseteqq\mathbb{R}^n$ が C^r 微分同相であるとき，$\mathbb{f},\mathbb{f}^{-1}$ は全微分可能である．$\mathbb{f}$ の全単射性から $\mathbb{f}\circ\mathbb{f}^{-1}=\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$，$\mathbb{f}^{-1}\circ\mathbb{f}=\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}$ であり，chain rule を適用すれば，

   $$D(\mathbb{f}\circ\mathbb{f}^{-1})=D(\mathbb{f})D(\mathbb{f}^{-1})=I_n,\quad D(\mathbb{f}^{-1}\circ\mathbb{f})=D(\mathbb{f}^{-1})D(\mathbb{f})=I_m$$

   が成立する．1 つ目の式から

   $$n=\mathrm{rank}(D\mathbb{f}D(\mathbb{f}^{-1}))\leqq\mathrm{rank}D\mathbb{f}\leqq\min\{n,m\}$$

   が成立し，この不等式が成立するには $n\leqq m$ でなければならない．同様に $n\geqq m$ となるので $n=m$ が従う．
2. Invariance of domain による説明：
   まず，C^r 級写像 $\mathbb{f}$ は C^1 でもあるから全微分可能である．全微分可能ならば連続なので，仮に次元の異なる開集合で C^r 微分同相写像が存在するならば同相写像となる．ただ，Invariance of domain の主張，

   U,V をそれぞれ任意の $\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n$ の開集合とする．このとき $m\neq n$ ならば $U\not\approx V$.

   に矛盾するので，次元の異なる Euclid 空間の開集合の間には微分同相写像は存在しないことがわかる．
   Invariance of domain の証明は主張の素朴さとは打って変わってメチャクチャ難しい．

私もまだ追えていないが，どうやら代数的位相幾何をフルに用いて証明されるようだ．なお，Invariance of domain は多様体論の次元の一意性を保証する点で極めて重要である．この事実を用いると，多様体を構成する際のアトラスに次元の異なるチャートが入らないことが分かる．

E.g. 4.22. $\mathbb{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ は C^∞ 級微分同相.

実際，$\mathbb{f}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ を考えれば $\mathbb{f} \circ \mathbb{f}^{-1} = \mathbb{f}^{-1} \circ \mathbb{f} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}$ となるので $\mathbb{f}$ は全単射．また $\mathbb{f}, \mathbb{f}^{-1}$ は共に C^∞ 級である．$\mathbb{R}^2$ は開集合であるから $\mathbb{f}$ は C^∞ 微分同相.