多様体論. 第1回 発表ノート.

▨ 該当セクション：§2. n次元数空間.（+§3. ベクトル空間の触り）

▨ やる事：先ずは，$\mathbb{R}^n$ に Euclid キョリを導入する。その後 Euclid キョリから定まる $\mathbb{R}^n$ に於ける近傍を定義し，$\mathbb{R}^n$ に於ける開集合を近傍から定め，開集合とは対立に閉集合を定義する。そして、この2つの概念の関係を見て終える。

Def 2.1 $^\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ の Euclid キョリを次の様に定める。

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

$\mathbb{R}^n$ と d の対 $(\mathbb{R}^n, d)$ を Euclid 空間という。

> 註 一般に $X (\neq \emptyset)$ があった時，$d : X \times X \to \mathbb{R}$ が Prop 2 の3条件を満たすとき，d をキョリ関数といい，(X, d) をキョリ空間と呼ぶ。
>
> e.g. Manhattan, Chebyshev, Euclid → これらは同一の位相を定める。

Prop 2.2 $^\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ に対して、次が成立。

(1). $d(x, y) \geqq 0$. $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(2) $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$.

証. (1), (2) は明らか。(3) の式を $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$ として書き下すと，

$$\sqrt{\sum (a_i + b_i)^2} \leqq \sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}$$

であり、これを同値変型すれば

$$\sum a_i b_i \leqq \sqrt{\sum a_i^2 \sum b_i^2}$$

となるので、この式が示されると良い。しかし，Schwarz の不等式がこれを保証するので主張は示される。▨

> 註 $a_i \neq 0 \land b_i \neq 0$ を仮定して，2次方程式 $\sum (a_i x - b_i)^2$ の判別式 $\leqq 0$ を考えると示される。

Def 2.3 $^\forall a \in \mathbb{R}^n$, $^\forall \varepsilon > 0$ に対し

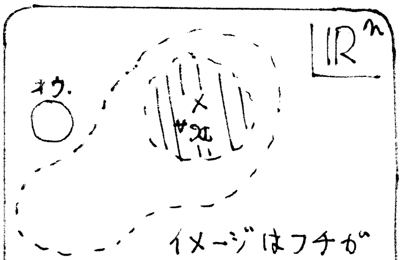
$$N_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < \varepsilon\}$$

を $\mathbb{R}^n$ に於ける a の ε 近傍と言う。

Def 2.4 $O \subseteqq \mathbb{R}^n$ に対し，

$$^\forall x \in O \ ^\exists \varepsilon > 0 \ [N_\varepsilon(x) \subseteqq O]$$

が成立する時，O を $\mathbb{R}^n$ の開集合と言う。



イメージはフチが無い集合だが注意が必要。（→ Rmk 2.10）

Prop 2.5. $\mathbb{R}^n$ の開集合に関し次が成立。

(1) $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合.

(2). $O_1, \cdots, O_k$: $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{k} O_i$: $\mathbb{R}^n$ の開集合.

(3). $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$: $\mathbb{R}^n$ の開集合からなる集合系 $\Longrightarrow \bigcup_{\Lambda} O_\lambda$: $\mathbb{R}^n$ の開集合.

1-2.

証 (1) $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し, $\varepsilon = 1$ とすれば $N_1(x)$ の定義から $N_1(x) \subseteq \mathbb{R}$。$\forall x \in \mathbb{R}\ [x \in \emptyset \to N_1(x) \subseteq \emptyset]$ は $x \in \emptyset$ の恒偽性から真となる。従って $\mathbb{R}^n, \emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合。

註 (2) が任意個で成立しない例として, $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ $(n \in \mathbb{N})$ がある。

(2) $x \in \bigcap_{i=1}^{k} O_i \iff \forall i \in \{1, \cdots, k\}\ [x \in O_i]$

$\iff \forall i \in \{1, \cdots, k\}\ \exists \varepsilon_i > 0\ [N_{\varepsilon_i}(x) \subseteq O_i]$

$\varepsilon := \min\{\varepsilon_i \mid i \in \{1, \cdots, k\}\}$ と定めれば,

$\forall i \in \{1, \cdots, k\}\ [N_\varepsilon(x) \subseteq O_i] \iff N_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} O_i$

が成立する。

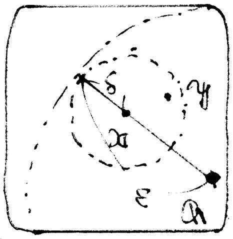
(3). $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \iff \exists \lambda_0 \in \Lambda\ [x \in O_{\lambda_0}]$

$\iff \exists \lambda_0 \in \Lambda\ \exists \varepsilon_{\lambda_0} > 0\ [N_{\varepsilon_{\lambda_0}}(x) \subseteq O_{\lambda_0}]$.

$O_{\lambda_0} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ より $N_{\varepsilon_{\lambda_0}}(x) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ ▨

E.g. 2.6 $\mathbb{R}^n$ に於いて $N_\varepsilon(a)$ は開集合.

証. $\forall x \in N_\varepsilon(a)$ に対して, $d(a, x) < \varepsilon$ より $\delta = \varepsilon - d(a, x)$ と定め $N_\delta(x)$ を作る。$\forall y \in N_\delta(x)$ に対して,



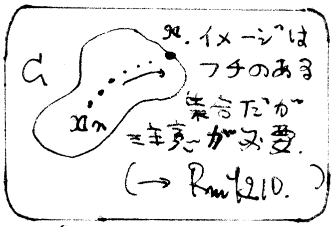
$$
\begin{aligned}
d(a, y) &\leq d(a, x) + d(x, y) \\
&< d(a, x) + \delta \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

から, $N_\delta(x) \subseteq N_\varepsilon(a)$。従って, $N_\varepsilon(a)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合 ▨

Def 2.7 $\forall C \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し,

$\{x_n\} \subseteq C \wedge x_n \to x \implies x \in C$

を満たす時 C を $\mathbb{R}^n$ に於ける閉集合と言う。



Thm 2.8 開集合の補集合は閉集合で閉集合の補集合は開集合。

証 O: open $\implies O^c$: closed O^c の点からなる収束列 $\{x_n\}$ について その極限 x が O に含まれるとする。O は開集合なので, $\exists \varepsilon_0 > 0\ [N_{\varepsilon_0}(x) \subseteq O]$ が成立。一方, $x_n \to x$ より, N_{ε_0} があって $n \geq N_{\varepsilon_0} \implies d(x_n, x) < \varepsilon_0$ が成立し, $x_n \in O$ となる。これは $O \cap O^c = \emptyset$ に矛盾。

C: closed $\implies C^c$: open C^c が開集合でないとする。則ち

$\exists x_0 \in C^c\ \forall \varepsilon > 0\ [N_\varepsilon(x_0) \cap C \neq \emptyset]$

が成立するとする。$\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ とすると, $N_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap C$ を満たす C の元が存在し, それを x_n とすると, $x_0 \in C^c$ へ収束する C の元からなる $\{x_n\}$ を得る。これは C が閉集合である事に矛盾。▨

Cor 2.9 $\mathbb{R}^n$の閉集合に関して次が成立。

(1). $\mathbb{R}^n, \emptyset$ は$\mathbb{R}^n$の閉集合.

(2). 任意個の$\mathbb{R}^n$の閉集合の共通部分は$\mathbb{R}^n$の閉集合.

(3) 有限個 〃 和集合 〃

(証) Prop 5. Thm 8, ド・モルガンの定理から成立。 ■

Rmk 2.10 フチの有無で開集合と閉集合を判断してはダメ。直感的なイメージとしては正しいが、$[0,1)$ は $\mathbb{R}$ で開でも閉でもないが、$[0,1]$ では開である。

(注) 相対位相を入れるので本当はもう少し後の話。

《オマケ：線型代数》.

Def 3.1. V に和・スカラ倍という2つの演算が入っていて、次の8つの性質を満たすとき、$(V, \mathbb{R})$ を実ベクトル空間と言う。

(I).(1) $\forall x, y \in V\ [x+y = y+x]$

(2). $\forall x, y, z \in V\ [(x+y)+z = x+(y+z)]$

(3) $\exists! \mathbf{0} \in V, \forall x \in V\ [x + \mathbf{0} = x]$

(4) $\forall x \in V\ \exists! -x \in V\ [x + (-x) = \mathbf{0}]$

(II) (5). $\forall x \in V\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ [(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)]$

(6). $\forall x \in V\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ [(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x]$

(7) $\forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}\ [\lambda(x+y) = \lambda x + \mu y]$.

(8). $\exists 1 \in \mathbb{R}\ \forall x \in V\ [1x = x]$.

(注) (3),(4)は本によって、一意性を定義に入れない事も多い。カンタンなので示すと、$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$, $a' = a' + a + a'' = a''$ より示される。

Prop 3.2 $\forall x \in V$ に対して、$0x = \mathbf{0}$, $-x = (-1)x$.

(証)
- $0x = (0+0)x = 0x + 0x$. $\mathbf{0}$ の一意性から $0x = \mathbf{0}$。
- $\mathbf{0} = 0x = (1-1)x = x + (-1)x$. $-x$ の一意性から $-x = (-1)x$.

E.g. 3.3. $\mathbb{R}^n$は和とスカラ倍を

$$x + y := (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$
$$\lambda x := (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

と定めると実ベクトル空間となる。

(例) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $M_{nm}(\mathbb{R})$, n次以下の実係数多項式全体, 数列全体, $\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への連続写像全体

部分空間, 共通空間, 和空間, 生成空間, 商空間, 双対空間

Def 3.4. 実ベクトル空間Vの元 $v_1, \cdots, v_n$ が1次独立であるとは

$$\forall c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}\ [c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0]$$

を満たす事を言い、1次独立でない時、1次従属という。