§6. 多様体の定義　発表ノート.

Dfn 6.1. 位相空間 X の開集合 U から $\mathbb{R}^m$ の開集合 U' への同相写像 φ が存在するとき、組 (U, φ) を X の <u>m次元チャート</u> という。

Dfn 6.2. 位相空間 M が次の2つを満たす時、M を <u>m次元位相多様体</u> という。

- M は Hausdorff
- $^\forall p \in M$ に対し、p を含む m次元チャートが存在.

Hausdorff でない空間は直観と異なる性質を持つ事が多い。それらを排除する為に Hausdorff を仮定する.

E.g. 6.3 $\mathbb{R}^m$ は自明な m次元位相多様体.

実際 $\mathbb{R}^m$ は Hausdorff で、$(\mathbb{R}^m, id_{\mathbb{R}^m})$ という1枚のチャートで被覆される。■

$\{(B(0,\varepsilon), id_{B(0,\varepsilon)})\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ を考えるとこれは明らかに $\mathbb{R}^m$ のアトラスとなる。

$\{(B(0,n), id_{B(0,n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$ を考えるとこれは可算個の元を持つアトラスとなる。

→ $\mathbb{R}^m$ にはいくつものアトラスが入って、その濃度は、$\mathfrak{c}$, $\aleph_0$, 有限に出来る.

Dfn 6.4 m次元位相多様体 M のチャート (U, φ), (V, ψ) に対し、$U \cap V \neq \phi$ であるとき、同相写像

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

を $\varphi(U \cap V)$ から $\psi(U \cap V)$ への<u>座標変換</u>という.

Dfn 6.5 r は自然数か $+\infty$ とする。位相空間 M が次の3つを満たすとき、<u>m次元 C^r 級多様体</u> という。

- M は Hausdorff
- M は m次元チャートにより被覆される. 即ち、$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ $\quad (\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A})$
- $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ である2つのチャート $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) に対し、$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は C^r 級.

M が m次元局所 Euclid的である事と同値.

E.g. 6.6 $\mathbb{R}^m$ は自明な m次元 C^∞ 級多様体.

実際 $\mathbb{R}^m$ は1枚のチャート $(\mathbb{R}^m, id_{\mathbb{R}^m})$ によりカバーされるので、$id_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ が C^∞ であるかどうか考えなくてはならないが、これは明らかに C^∞ である。■

Recall. (多変数の C^∞).
$^\forall k \in \mathbb{N}$ において、f の1階から k階までの偏導関数があって、f を含むそれら全てが連続.

E.g. 6.7 m次元球面 $\mathbb{S}^m$ は m次元 C^∞ 級多様体.

実際 (I). $\mathbb{R}^{m+1}$ は Hausdorff なので、その部分空間 $\mathbb{S}^m$ も Hausdorff.

(II). $\mathbb{S}^m$ は $2(m+1)$ の m次元チャート $\{(U_i^+, \varphi_i^+)\}_i \cup \{(U_i^-, \varphi_i^-)\}_i$

によって被覆される。但し, U_i^+, U_i^-, φ_i^+, φ_i^- はそれぞれ

$$U_i^+ = \{(x_1, \cdots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_i > 0\}$$
$$U_i^- = \{(x_1, \cdots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_i < 0\}$$
$$\varphi_i^+ : U_i^+ \to \mathring{H}^m ; (x_1, \cdots, x_{m+1}) \mapsto (x_1, \cdots, \hat{x_i}, \cdots, x_{m+1})$$
$$\varphi_i^- : U_i^- \to \mathring{H}^m ; (x_1, \cdots, x_{m+1}) \mapsto (x_1, \cdots, \hat{x_i}, \cdots, x_{m+1})$$

である。

<u>(U_i^+, φ_i^+) が m 次元チャートであること.</u>

φ_i^+ が全単射である事を示す為, $(\varphi_i^+)^{-1}$ を次の様に定める。

$$\begin{array}{cccc} (\varphi_i^+)^{-1} : & \mathring{H}^m & \longrightarrow & U_i^+ \\ & \Psi & & \Psi \\ & (y_1, \cdots, y_m) & \longmapsto & (y_1, \cdots, \underset{\hat{i}}{\sqrt{1-(y_1^2+\cdots+y_m^2)}}, \cdots, y_m) \end{array}$$

これは $y_1^2 + \cdots + \left\{\sqrt{1-(y_1^2+\cdots+y_m^2)}\right\}^2 + \cdots + y_m^2 = 1$

を満たしていて, $(\varphi_i^+)^{-1}(y_1, \cdots, y_m)$ の i 成分は正なので

写像である。これより, $(\varphi_i^+)^{-1} \circ \varphi_i^+ = id_{U_i^+}$, $\varphi_i^+ \circ (\varphi_i^+)^{-1} = id_{\mathring{H}^m}$

なので, φ_i^+ は全単射。又, $(y_1, \cdots, y_m) \in \mathring{H}^m$ より

$y_1^2 + \cdots + y_m^2 < 1$ なので $(\varphi_i^+)^{-1}$ は連続で, φ_i^+ が連続

である事は明らかなので, φ_i^+ は同相写像である。

従って, (U_i^+, φ_i^+) は m 次元チャート。

<u>S^m が $\{U_i^+\}_i \cup \{U_i^-\}_i$ でカバーされること.</u>

${}^\forall x = (x_1, \cdots, x_{m+1}) \in S^m$ に対し, その定義より, ある x_i は 0 でない為, $x \in U_i^+ \vee x \in U_i^-$ が成立する。従って, $M \subseteq \bigcup_i U_i^+ \cup \bigcup_i U_i^-$. 逆は明らかなのでカバーされる。

(III). 任意の座標変換が C^∞ である事を示すが,

全てのチェックは大変なので, (U_m^+, φ_m^+), $(U_{m+1}^+, \varphi_{m+1}^+)$ の座標変換をチェックする。

$$U_m^+ \cap U_{m+1}^+ = \{(x_1, \cdots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_m > 0, x_{m+1} > 0\}$$

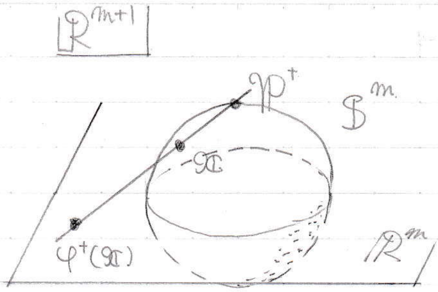
なので,

$$\begin{aligned} &(\varphi_{m+1}^+ \circ (\varphi_m^+)^{-1})(y_1, \cdots, y_m) \\ &= \varphi_{m+1}(y_1, \cdots, \sqrt{1-(y_1^2+\cdots+y_m^2)}, y_m) \\ &= (y_1, \cdots, \sqrt{1-(y_1^2+\cdots+y_m^2)}) \end{aligned}$$

となる。第 m 成分に関して, $(y_1, \cdots, y_m) \in \mathring{H}^m$ より

これは C^∞. m 成分以外が C^∞ である事は言うまでもない為, $\varphi_{m+1}^+ \circ (\varphi_m^+)^{-1}$ は C^∞ である。

以上 (I)〜(III) より S^m は m 次元 C^∞ 多様体。 ■



Rmk 6.8 S^m が m 次元 C^∞ 級多様体である事を別の m 次元 C^∞ アトラスを構成する事で示すことが出来る。

$p^+=(0,\cdots,0,1)$ として、$S^m\setminus\{p^+\}$ の点 x を p^+ を通り $\mathbb{R}^m$ と交わる($m+1$ 成分が 0)点に対応させる写像 $\varphi^+ : S^m\setminus\{p^+\}\to\mathbb{R}^m$ は、

$$\varphi^+(x_1,\cdots,x_{m+1}) = \underbrace{\left(\frac{x_1}{1-x_{m+1}},\cdots,\frac{x_m}{1-x_{m+1}}\right)}_{m\text{コ}}$$

逆に、$(\varphi^+)^{-1}:\mathbb{R}^m\to S^m\setminus\{p^+\}$ を

$$(\varphi^+)^{-1}(y_1,\cdots,y_m) = \overbrace{\left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2},\cdots,\frac{2y_m}{1+\|y\|^2},\frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}\right)}^{m+1\text{コ}}$$

と定めれば、$\varphi^+\circ(\varphi^+)^{-1}=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$, $(\varphi^+)^{-1}\circ\varphi^+=\mathrm{id}_{S^m\setminus\{p^+\}}$
が成立する為、φ^+ は全単射。又、φ^+ は $x_{m+1}\neq 0$ より連続で、$(\varphi^+)^{-1}$ も連続なので、φ^+ は同相写像。同様に、
$p^-=(0,\cdots,0,-1)$ として、$\varphi^- : S^m\setminus\{p^-\}\to\mathbb{R}^m$ を

$$\varphi^-(x_1,\cdots,x_{m+1}) = \left(\frac{x_1}{1+x_{m+1}},\cdots,\frac{x_m}{1+x_{m+1}}\right),$$

$(\varphi^-)^{-1}:\mathbb{R}^m\to S^m\setminus\{p^-\}$ を

$$(\varphi^-)^{-1}(y_1,\cdots,y_m) = \left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2},\cdots,\frac{2y_m}{1+\|y\|^2},\frac{1-\|y\|^2}{1+\|y\|^2}\right)$$

定めれば φ^- も同相写像となる。
これより、S^m は $(S^m\setminus\{p^+\},\varphi^+)$, $(S^m\setminus\{p^-\},\varphi^-)$
という2枚の m 次元チャートで被覆される。2枚のチャートの共通部分を求めて、$S^m\setminus\{p^+,p^-\}$ なので座標変換

$$\varphi^-\circ(\varphi^+)^{-1} : \mathbb{R}^m\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$$

を考えると $^\forall(y_1,\cdots,y_m)\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$ に対し、

$$\left(\varphi^-\circ(\varphi^+)^{-1}\right)(y_1,\cdots,y_m) = \varphi^{-1}\left(\frac{2y_1}{\|y\|^2+1},\cdots,\frac{2y_m}{\|y\|^2+1},\frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}\right)$$
$$=\left(\frac{y_1}{\|y\|^2},\cdots,\frac{y_m}{\|y\|^2}\right)$$

となり、$y\neq 0$ より明らかに C^∞ である。従って、
S^m は E.g 6.7 とは別の m 次元 C^∞ アトラスを持つ事が分かる。
($\varphi^+,(\varphi^+)^{-1},\varphi^-,(\varphi^-)^{-1}$ の構成法は p, x の直線をパラメータ表示したり、$\varphi(x)=y$ / $\|x\|=1$ の方程式を解くと良い).

E.g 6 [積多様体] M を m 次元 C^r 多様体、N を n 次元 C^r 多様体とする。この時、積空間 $M \times N$ は $m+n$ 次元 C^r 多様体となり、これを M と N の積多様体という。

実際 (I) M, N は Hausdorff なのでその積空間 $M \times N$ も Hausdorff (Prob 5.7)。

$^\forall(p,q), (r,s) \in M \times N$,
- $p \neq r$ の時, M のハウスドルフ性より $U, V \in \mathcal{O}_M$ で $p \in U, q \in V, U \cap V = \emptyset$. $U \times N$, $V \times N$ を考えると, $U \times N \cap V \times N = \emptyset$ となる為, $M \times N$ は Hausdorff.
- $q \neq s$ も同様. ▨

(II). $M \times N$ の $m+n$ 次元 C^r アトラスを M, N のアトラス $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ を用いて,

$$\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{(\alpha,\beta) \in A \times B}$$

と定めれば良い。

$(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$ が $M \times N$ の $m+n$ 次元チャートとなる事

$\varphi_\alpha \times \psi_\beta$ の定義は

$$\begin{array}{cccc} \varphi_\alpha \times \psi_\beta : & U_\alpha \times V_\beta & \longrightarrow & \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_\beta(V_\beta) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (p, q) & \longmapsto & (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \end{array}$$

であった。元々, $\varphi_\alpha, \psi_\beta$ は同相写像なので $\varphi_\alpha \times \psi_\beta$, $\varphi_\alpha^{-1} \times \psi_\beta^{-1}$ は連続 (Prob 5.2)。又, $\varphi_\alpha^{-1} \times \psi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha \times \psi_\beta = id$, $\varphi_\alpha \times \psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \times \psi_\beta^{-1} = id$ より同相。

又, $U_\alpha \in \mathcal{O}_m$, $V_\beta \in \mathcal{O}_n$ である事より $U_\alpha \times V_\beta \in \mathcal{O}_{m+n}$ (Prob 5.4)。従って, $(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$ は $M \times N$ の $m+n$ 次元チャートである。

$M \times N$ をおおう事.

$^\forall(p,q) \in M \times N$ に対して, p, q それぞれを含む M の U_α, N の V_β が存在し, それらの直積 $U_\alpha \times V_\beta$ に (p,q) は含まれるので $M \subseteq \bigcup_{(\alpha,\beta)} U_\alpha \times V_\beta$ が成立する。逆は明らか.

(III) $^\forall(\alpha,\beta), (\gamma,\delta) \in A \times B$ に対し, $U_\alpha \times V_\beta \cap U_\gamma \times V_\delta \neq \emptyset$ であるとする。このとき, $X = (U_\alpha \times V_\beta) \cap (U_\gamma \times V_\delta)$ として,

$$(\varphi_\gamma \times \varphi_\delta) \circ (\varphi_\alpha \times \varphi_\beta)^{-1} : (\varphi_\alpha \times \varphi_\beta)(X) \longrightarrow (\varphi_\gamma \times \varphi_\delta)(X)$$

が C^r である事を示す. $^\forall(p, q) \in (\varphi_\alpha \times \varphi_\beta)(X)$ に対して,

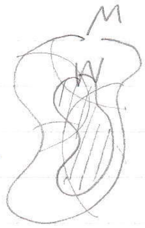
$$\begin{aligned} &(\varphi_\gamma \times \varphi_\delta) \circ (\varphi_\alpha \times \varphi_\beta)^{-1}(p, q) \\ = &(\varphi_\gamma \times \varphi_\delta)(\varphi_\alpha^{-1}(p), \varphi_\beta^{-1}(q)) \\ = &(\varphi_\gamma \circ \varphi_\alpha^{-1}(p), \varphi_\delta \circ \varphi_\beta^{-1}(q)) \end{aligned}$$

であり、$\varphi_\gamma\circ\varphi_\alpha^{-1}$, $\psi_\delta\circ\psi_\beta^{-1}$ は仮定より C^r であるから $(\varphi_\gamma\times\psi_\delta)\circ(\varphi_\alpha\times\psi_\beta)^{-1}$ は C^r である。

以上3点より $M\times N$ は $m+n$ 次元 C^r 多様体。■

E.g. 6.10. E.g.6.7, E.g.6.8より S^1 は1次元 C^∞ 多様体であり、その n コの積多様体を n次元トーラスという。n次元トーラスは n次元 C^∞ 多様体。

E.g. 6.11. m次元 C^r 級多様体の任意の開集合 W は m次元 C^r 級多様体.



チャートと W との共通部分に局所座標を制限する。

多様体に同値でないアトラスが入る事はある。

Dfn 6.12. m次元 C^r 級多様体 M の2つの m次元 C^r アトラス $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ に対し、$\mathcal{S}\cup\mathcal{T}$ もまた M の m次元 C^r アトラスとなる時、$\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ は同値という → S^m においてE.g. 6.7とRmk 6.8で構成したアトラスは同値になる。

これは M 上に定まる m次元 C^r アトラス全体の同値関係となる。

実際 $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ に対して、$\mathcal{S}\sim\mathcal{S}$, $\mathcal{S}\sim\mathcal{T}\Rightarrow\mathcal{T}\sim\mathcal{S}$ は明らかである。推移律を示す。$\mathcal{S}\sim\mathcal{U}$, $\mathcal{U}\sim\mathcal{T}$ とする。また $\mathcal{S}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, $\mathcal{U}=\{(W_\gamma,\xi_\gamma)\}_{\gamma\in C}$, $\mathcal{T}=\{(V_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ とかく。

$^\forall\alpha,\beta$ に対し、$U_\alpha\cap V_\beta\neq\emptyset$ とする。定義より $D\subseteq C$ があって、

$$U_\alpha\cap V_\beta=\bigcup_{\gamma\in D}U_\alpha\cap V_\beta\cap W_\gamma$$

となる。

$$\varphi_\alpha(U_\alpha\cap V_\beta)=\bigcup_{\gamma\in D}\varphi_\alpha(U_\alpha\cap V_\beta\cap W_\gamma)$$

なので、$^\forall\gamma\in D$ に対し、

$$\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap V_\beta\cap W_\gamma)}\quad\cdots(*)$$

が C^r である事が示されると良い。$X=U_\alpha\cap V_\beta\cap W_\gamma$ とかくと $\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(X)}=\psi_\beta\circ\xi_\gamma^{-1}|_{\xi_\gamma(X)}\circ\xi_\gamma\circ\varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(X)}$ となり $\mathcal{S}\sim\mathcal{U}$, $\mathcal{U}\sim\mathcal{T}$ より (*) は C^r となる。従って、$\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ は C^r である。■

Dfn 6.13. $\mathcal{S}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を M の C^r アトラスとする。$\mathcal{S}$ と同値な M の C^r アトラス全ての和 $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ のことを $\mathcal{S}$ から定まる M の C^r 極大アトラス（C^r 微分構造）という。

Prop 6.14. m次元 C^r 多様体 M のアトラス $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ が同値である事と、$\mathcal{M}(\mathcal{S})=\mathcal{M}(\mathcal{T})$ は同値。

証) $\mathcal{S}\sim\mathcal{T}$ とする。このとき $[\mathcal{S}]=[\mathcal{T}]$ より

$$\mathcal{M}(\mathcal{S})=\bigcup[\mathcal{S}]=\bigcup[\mathcal{T}]=\mathcal{M}(\mathcal{T}).$$

逆を示す。$\mathcal{S}\subseteq\mathcal{M}(\mathcal{S})$, $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{M}(\mathcal{T})$ が一般に成立し、仮定より $\mathcal{M}(\mathcal{S})=\mathcal{M}(\mathcal{T})$ なので、$\mathcal{S}\sim\mathcal{T}$. ■

⇝ 極大アトラスを考える事で、自分の使っていたアトラスに入っていない小さなチャートを用いれる。