§4. 連続写像と C^r 級写像.

※ 本節では U, V はそれぞれ $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ の開集合とする。

Def 4.1. $f: U \to V$ が $a \in U$ で連続であるとは、
$\forall \{x_n\} \subseteq U$ に対して、
$$x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)$$
が成立する事である。U の各点で f が連続となる時、f は U で連続という。

Prop 4.2. $f: U \to V$ が連続であることと、関数 $f_1, \cdots, f_n : U \to \mathbb{R}^n$ が連続であることは同値。

証. U の任意の点列 $\{x_n\}_n$ に対し、$x_n \to a$ とする。
仮定より $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}$,
$$n \geqq N \Longrightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$
が成立。$d(f(x), f(a)) = \sqrt{\sum d(f_i(x), f_i(a))^2}$ なので $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$ に対して、$d(f_i(x), f_i(a)) < \varepsilon$ となる。$f_1, \cdots, f_n$ が連続である事が従う。
逆を示す. U の任意の点列 $\{x_n\}$ に対して、$x \to a$ であるとする。この時、仮定より $\forall i$ に対し $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_i \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}$
$$n \geqq N_i \Rightarrow d(f_i(x), f_i(a)) < \varepsilon$$
が成立する。$N := \max\{N_i \mid i = 1, \cdots, n\}$ とおくと、$n \geqq N$ の時、
$$d(f(x), f(a)) = \sqrt{\sum d(f_i(x), f_i(a))^2} \leqq \sqrt{n}\, \varepsilon$$
となるので、f が連続である事が従う。∎

Prop 4.3. $f; U \to V$, $g: V \to W$ が連続とする。
このとき、$g \circ f : U \to W$ は連続。

証 U 内の任意の点列 $\{x_n\}_n$ に対し、$x_n \to a$ とする。この時、f の連続性より $f(x_n) \to f(a)$. g の連続性より、$g(f(x_n)) \to g(f(a))$ となり主張は示される。∎

4-2.

Thm 4.4. $f: U \to V$ が $a \in U$ で連続である事と、

$$(*) \quad \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ [\, f(N_\delta(a)) \subseteq N_\varepsilon(f(a)) \,]$$

は同値。

証. $(*)$ の主張は、

$$(*)' \quad \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ \forall x\in U\ [\, d(x,a)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(a))<\varepsilon \,]$$

と同値である事に注意しておく。

Def 4.1 $\Longrightarrow$ $(*)$: 背理法を用いる。

$$\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x\in U \quad [\, x\in N_\delta(a) \wedge f(x)\notin N_\varepsilon(f(a)) \,]$$

を仮定する。$\delta=\frac{1}{n}$ ($n\in\mathbb{N}$) として、仮定より、

$$x\in N_{\frac{1}{n}}(a) \wedge f(x)\notin N_\varepsilon(f(a))$$

を満たす $x\in U$ が存在するので、そのうちの1つを x_n とおくと、ある列 $\{x_n\}$ があって、

$$d(x_n,a)<\frac{1}{n} \wedge d(f(x),f(a)) \geqq \varepsilon>0$$

となる。これは $x_n\to a$ だが $f(x)\not\to f(a)$ なので f の連続性に反して矛盾。

$(*)$ $\Longrightarrow$ Def 4.1: U 内の任意の点列 $\{x_n\}$ に対して、$x_n\to a$ を仮定する。定義より

$$(\bigstar) \quad \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N} \quad [\, n\geqq N \Longrightarrow d(x_n,a)<\varepsilon \,]$$

が成立。$\forall\varepsilon>0$ に対して、$(*)'$ より $\delta>0$ があって、$(\bigstar)$ に於いて $\varepsilon=\delta$ ととれば、

$$n\geqq N \Longrightarrow d(x_n,a)<\delta \Longrightarrow d(f(x_n),f(a))<\varepsilon$$

となるので $f(x_n)\to f(a)$ が示される。$\blacksquare$

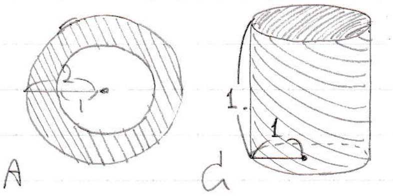
Def 4.5. $f: X\to Y$ が次の2つを満たす時、fを同相写像という。

(1) f: 全単射

(2) f, f^{-1} は共に連続。

又、2つの集合 X, Y が与えられた時、X から Y への同相写像が存在するとき X と Y は同相といい $X\approx Y$ と書く。

E.g. 4.6. アニュラス $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$ と円筒 $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ 0\leq z\leq 1\}$ は同相.

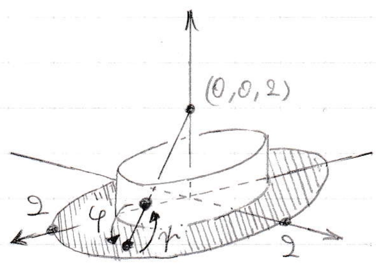


(証) $\varphi : C\to A$, $\psi : A\to C$ をそれぞれ

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{2x_1}{2-x_3},\ \frac{2x_2}{2-x_3}\right)$$

$$\psi(y_1,y_2)=\left(\frac{y_1}{\|y\|},\ \frac{y_2}{\|y\|},\ \frac{2(\|y\|-1)}{\|y\|}\right)$$

と定めると、$\psi\circ\varphi=id_C$, $\varphi\circ\psi=id_A$ となり φ は全単射. 又、φ, ψ の像の成分関数は全て連続なので、φ, ψ は連続. 従って φ は同相写像となるので $A\approx C$. ■



φとψの構成法.

$p=(0,0,2)\in\mathbb{R}^3$ とする。

- φ について.

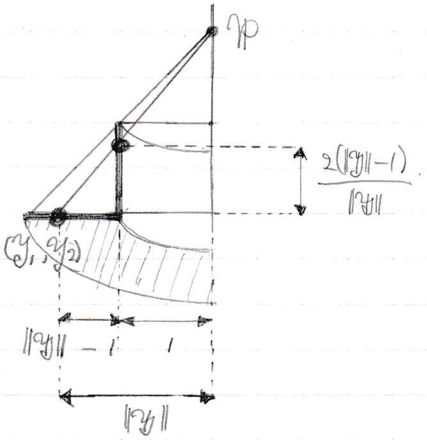
$\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in C$ に対して、p と x を通り A と交わる点を考える。パラメータ $t\in\mathbb{R}$ を用いると直線は

$$t(x-p)+p = (tx_1,\ tx_2,\ t(x_3-2)+2) \quad (*)$$

となる。$t(x_3-2)+2=0$ を t について解くと、$t=\frac{2}{2-x_3}$ となるので、これを(*)に代入して第3成分を取った物を考えると、

$$\left(\frac{2x_1}{2-x_3},\ \frac{2x_2}{2-x_3}\right)$$

を得る。$x\in C$ より この点は A の点となる。この対応を φ とする.



- ψ について.

$\forall y=(y_1,y_2)\in A$ に対して、右図の様に幾何的に考えて、

$$\left(\frac{y_1}{\|y\|},\ \frac{y_2}{\|y\|},\ \frac{2(\|y\|-1)}{\|y\|}\right)$$

に対応させれば、これは C の点である。この対応を ψ とする.