Курсовая работа по дискретной математике
Шестая задача

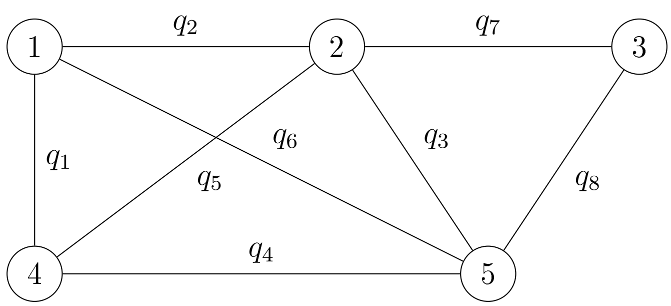
Ахметшин Б. Р. – М8О-103Б-22 – 2 вариант

Май, 2023

Задача

Пусть каждому ребру неориентированного графа соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно независимые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС E_1 и E_2 (полярность выбирается произвольно), а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома, и, предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить систему уравнений для токов.

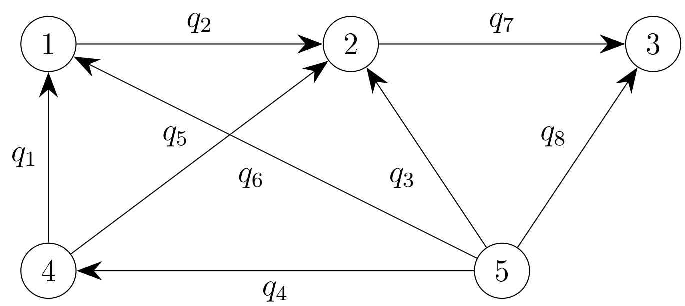
Дано



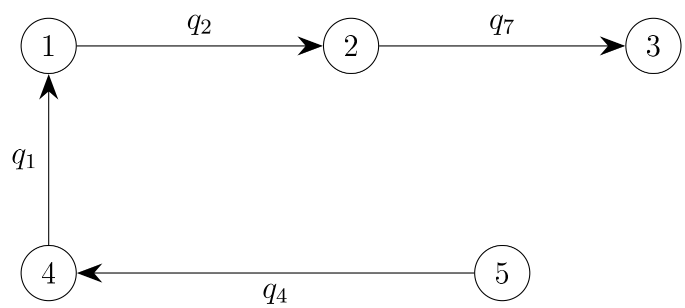
$$U = \begin{pmatrix} E_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ E_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{pmatrix}$$

Решение

1. Зададим ориентацию



2. Построим остовное дерево D



3. Добавляем по одному ребру из графа, получаем ровно один простой цикл. Записываем соответствующие вектор циклы.

$(D+q_5)$ μ_1: $v_4 - v_1 - v_2 - v_4 \to C(\mu_1) = (1,1,0,0,-1,0,0,0)$
$(D+q_6)$ μ_2: $v_5 - v_4 - v_1 - v_5 \to C(\mu_2) = (1,0,0,1,0,-1,0,0)$
$(D+q_3)$ μ_3: $v_5 - v_4 - v_1 - v_2 - v_5 \to C(\mu_3) = (1,1,-1,1,0,0,0,0)$
$(D+q_8)$ μ_4: $v_5 - v_4 - v_1 - v_2 - v_3 - v_5 \to C(\mu_4) = (1,1,0,1,0,0,1,-1)$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. По закону Кирхгофа для напряжений $C \times U = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ E_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 + U_2 - E_5 \\ E_1 + U_4 - U_6 \\ E_1 + U_2 - U_3 + U_4 \\ E_1 + U_2 + U_4 + U_7 - U_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1 + U_2 - E_5 = 0 \\ E_1 + U_4 - U_6 = 0 \\ E_1 + U_2 - U_3 + U_4 = 0 \\ E_1 + U_2 + U_4 + U_7 - U_8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_2 = E_5 - E_1 \\ U_4 = U_6 - E_1 \\ U_3 = E_5 + U_4 \\ U_7 = U_8 - U_6 + E_1 - E_5 \end{cases}$$

5. Находим матрицу инцидентности B

$$\text{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. По закону Кирхгофа для токов $B \times I = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 - I_2 + I_5 \\ I_2 + I_3 + I_5 - I_7 \\ I_7 + I_8 \\ -I_1 + I_4 - I_5 \\ I_3 + I_4 + I_6 + I_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 - I_2 + I_5 = 0 \\ I_2 + I_3 + I_5 - I_7 = 0 \\ I_7 + I_8 = 0 \\ -I_1 + I_4 - I_5 = 0 \end{cases},$$

с учетом того, что $rgB = 4$.

7. Вместе с законом Ома получается система:

$$\begin{cases} I_2 R_2 = E_5 - E_1 \\ I_4 R_4 = I_6 R_6 - E_1 \\ I_3 R_3 = E_5 + I_4 \\ I_7 R_7 = I_8 R_8 - I_6 R_6 + E_1 - E_5 \\ I_1 - I_2 + I_5 = 0 \\ I_2 + I_3 + I_5 - I_7 = 0 \\ I_7 + I_8 = 0 \\ -I_1 + I_4 - I_5 = 0 \end{cases}$$