Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

КУРСОВОЙ ПРОЕКТ
по курсу "Дискретная математика"
II семестр
на тему «Эйлеровы и гамильтоновы пути (циклы)»

Студент: Ахметшин Б.Р.
Группа: М8О-103Б-22, № 2
Руководитель: Яшина Н. П., доцент 805 кафедры

Москва, 2023

Contents

Теоретические сведения....................3
Описание алгоритма....................4
Программная реализация....................9
Практическое применение....................19
Источники и полезные ссылки:....................20

Москва, 2023

Теоретические сведения

Задан произвольный неориентированный псевдограф, требуется отыскать эйлеровы и гамильтоновы пути и циклы, если таковые имеются. (Далее речь будет идти только о неориентированных псевдографах)

Пусть *G* — произвольный псевдограф. Путь (цикл) в *G* называется эйлеровым, если по каждому ребру *G* он проходит ровно один раз, и гамильтоновым, если он проходит через каждую вершину *G* единожды.

Псевдограф, содержащий эйлеровый цикл называется эйлеровым, а содержащий эйлеровый путь — полуэйлеровым. Аналогично определяется гамильтоновый и полугамильтоновый псевдографы. Очевидно, что эйлеровым и/или гамильтоновым путем (циклом) могут обладать лишь связные псевдографы, что далее будет предполагаться в формулировках.

Теорема 1: Критерий существования эйлерового цикла.

Связный псевдограф *G* содержит эйлеровый цикл тогда и только тогда, когда степени всех вершин *G* четны.

Теорема 2: Критерий существования эйлерового пути.

Связный псевдограф *G* содержит эйлеровый путь тогда и только тогда, когда вершин с нечетной степенью либо два, либо ноль.

Критерии и эффективные алгоритмы гамильтонового пути и цикла сложны и не приведены в методических материалах, поэтому в своей работе я принял решение искать гамильтоновы пути и циклы только в псевдографах, удовлетворяющих условие следующей теоремы, потому как в таких графах их поиск выполняется за полиномиальное время.

Теорема 3: Условие Дирака.

Связный граф *G* обладает гамильтоновым циклом, если $n \geq 3$, $\delta \geq n/2$, где δ — наименьшая степень вершины *G*.

Очевидно, что Теорема 3 верна также и для псевдографов. Из Теоремы 3 следует, что связный псевдограф, удовлетворяющий её условию, также содержит гамильтоновый путь:

> Добавим к *G* вершину R и ребра, соединяющие R со всеми остальными вершинами *G*. Т.к. получившийся граф удовлетворяет условию Т3, в нем есть гамильтоновый цикл. Вычленив вершину R из цикла, получим гамильтоновый путь.

Описание алгоритма

Поиск эйлерового пути.

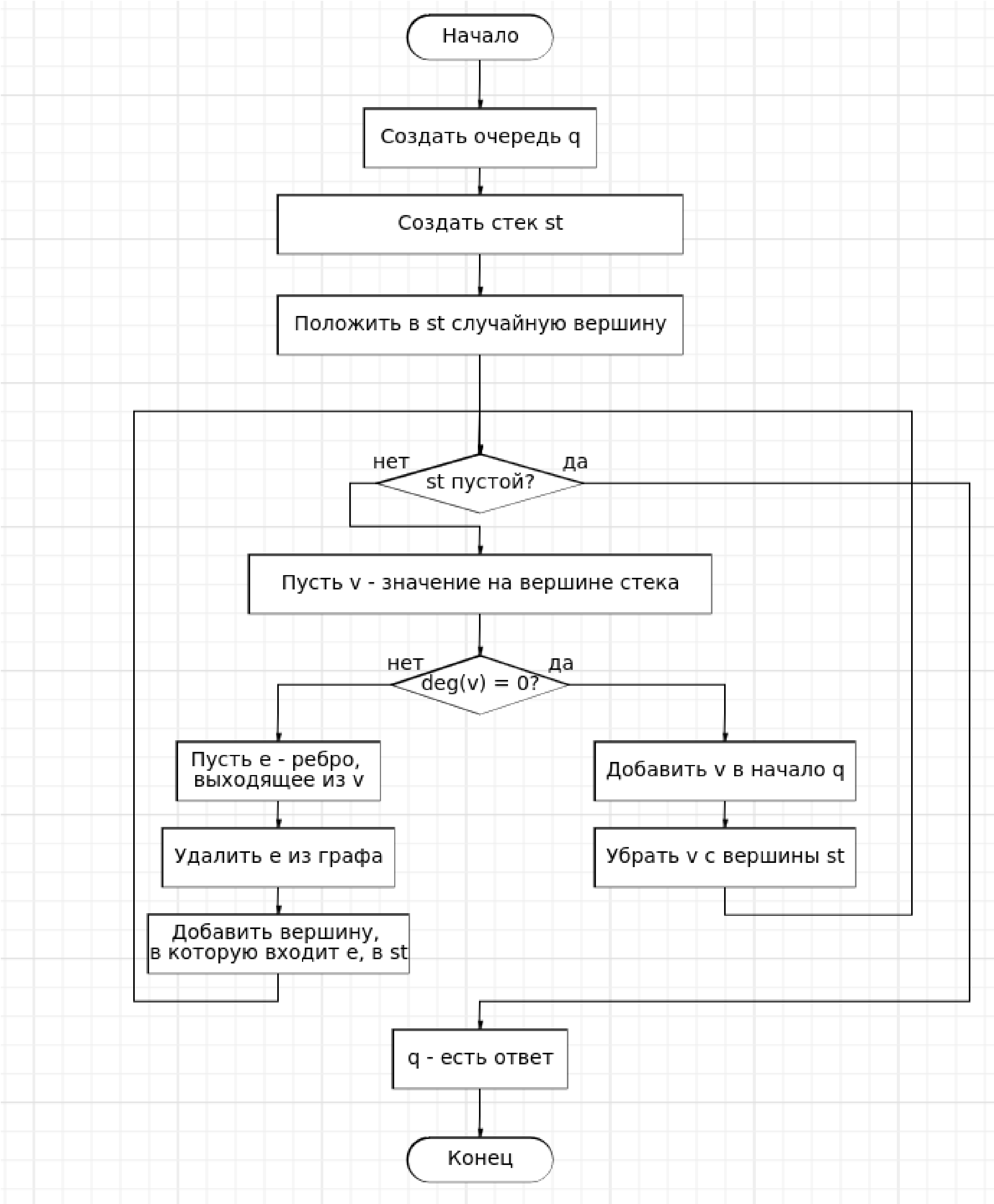
Если данный псевдограф *G* удовлетворяет условию T2, следующий алгоритм находит его:

Псевдокод:

```
St — стек;
в St кладём любую вершину (стартовая вершина);
пока St не пустой
      пусть V - значение на вершине St;
      если степень(V) = 0, то
            добавляем V к ответу;
            снимаем V с вершины St;
      иначе
            находим любое ребро, выходящее из V;
            удаляем его из графа;
            второй конец этого ребра кладём в St;
```

При условии, что каждое действие (на строчке псевдокода) выполняется за O(1), сложность алгоритма — O(m), где m — количество ребер псевдографа *G*.

Блок-схема:



Москва, 2023

Поиск эйлерового цикла.

Пусть псевдограф *G* удовлетворяет условию T1, тогда для нахождения эйлерового цикла достаточно вычленить из *G* произвольное ребро, тогда *G* будет удовлетворять условию T2, следовательно, в нем найдется эйлеровый путь. Если начать его поиск с одной из вершин изъятого ребра и после дополнить другой, получится эйлеровый цикл. Сложность O(m).

Поиск гамильтонового цикла.

Из доказательства T3 следует алгоритм нахождения гамильтонового цикла. Итак, «Поступим следующим образом: заведем очередь и положим в нее все вершины нашего графа (не важно в каком порядке). Пусть *n* — количество вершин псевдографа. Тогда $n(n - 1)$ раз будем делать следующую операцию:

- Пусть v_1 — это голова очереди, v_2 — следующая за ней вершина и так далее. Если между первой и второй вершиной в очереди есть ребро в графе *G*, то перемещаем первую вершину в конец очереди и переходим к следующей итерации.
- Если между первой и второй вершиной в очереди ребра нет, то найдем вершину v_i где $i > 2$, такую что, ребра $v_1v_i, v_2v_{i+1} \in E$ (так как у нас для графа выполнена теорема Дирака, то такая вершина обязательно найдется). После чего поменяем в очереди местами вершины v_2 и v_i, v_3 и v_{i-1}, v_{2+j} и v_{i-j}, и так далее, пока $2 + j < i - j$ (то есть *j* пробегает все значения от 0 до значения заданного неравенством). Теперь у нас появилось ребро между первой и второй вершинами в очереди (теперь вторая вершина, это та, которая была до разворота на *i*-й позиции), а также, гарантированно существует ребро между *i*-й и $(i+1)$-й вершинами очереди. После этого, так же как и в первом случае, оправляем первую вершину в конец очереди.

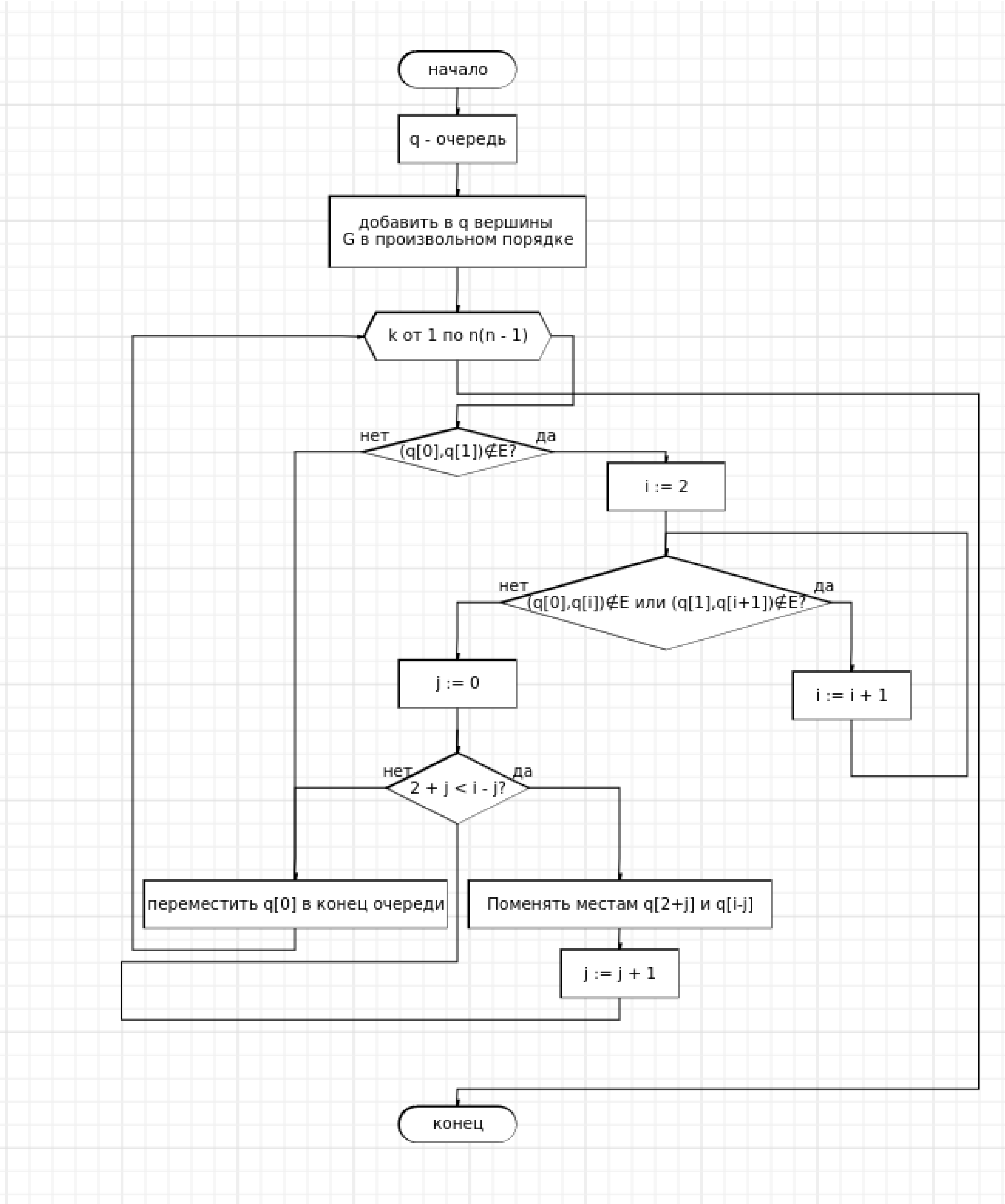
Таким образом после *n* итераций, мы получаем последовательность (вершины лежащие в очереди), где любые 2 соседние вершины соединены ребром, все вершины графа находятся в этой последовательности, и более того, каждая ровно один раз, а также существует ребро между последней и первой вершинами очереди, а это и значит, что мы решили поставленную задачу.» - описание алгоритма нахождения гамильтонова цикла в условиях теорем Дирака и Оре по источнику **[3]**. Сложность: O(n(n-1)).

Псевдокод:

```
q - очередь;
добавить в q вершины G в произвольном порядке;
Повторить n(n - 1) раз:
      если (q0, q1) ∉ E:
            i := 2;
            Пока (q0, qi) ∉ E или (q1, qi+1) ∉ E:
                  i = i + 1;
            Поменять местами все пары (q2+j,qi-j) вершин \
                                  в q такие, что 2 + j < i - j;
      Переместить первую вершину в q в конец очереди
```

Москва, 2023

Блок-схема:


начало
q - очередь
добавить в q вершины
G в произвольном порядке
k от 1 по n(n - 1)
нет
(q[0],q[1])∉E?
да
i := 2
нет
(q[0],q[i])∉E или (q[1],q[i+1])∉E?
да
j := 0
i := i + 1
нет
2 + j < i - j?
да
переместить q[0] в конец очереди
Поменять местам q[2+j] и q[i-j]
j := j + 1
конец

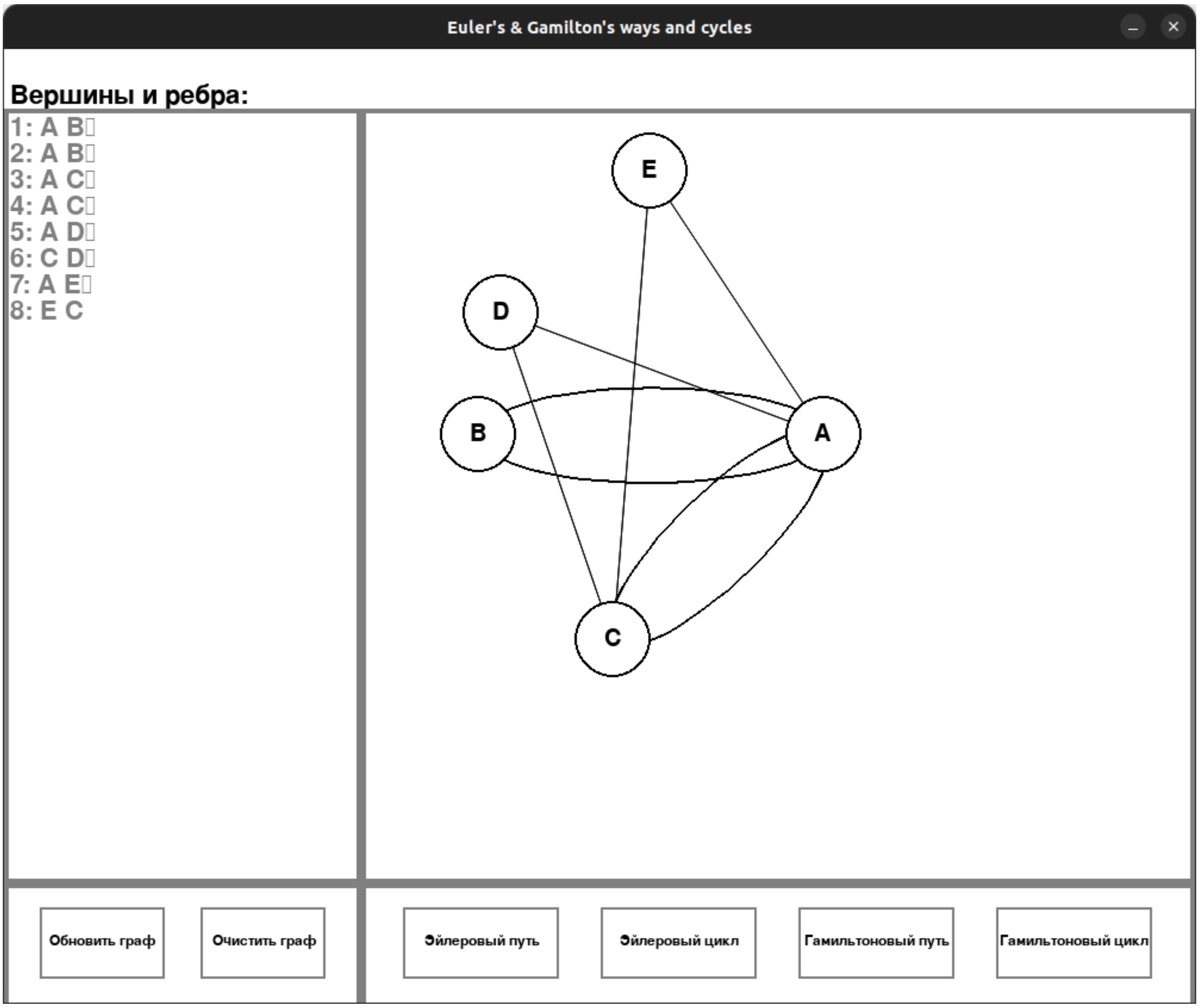
Поиск гамильтонового пути.

В конце пункта Теоретических сведений было указание для данного алгоритма. Еще раз: добавляем к псевдографу *G*, удовлетворяющему ТЗ, вершину *R*, соединенную ребрами со всеми остальными вершинами, получаем *G'*. Запустив предыдущий алгоритм, получим гамильтоновый цикл с вершиной *R*. Вычленив эту вершину из цикла, получим либо два гамильтоновых пути на подграфах *G*, тогда, совместив их начало и конец (за счет цикличности найдется ребро их соединяющее), получим гамильтоновый путь на *G*, либо один на подграфе *G*, совпадающем с ним самим, т. е. искомый путь. Сложность O(n(n - 1)).

Программная реализация

Описание программы

Программа и себя представляет графическое приложение, разделенное на окна.



Левое верхнее окно — поле для ввода вершин и ребер графа, допустимо указывать вершины в отдельной строке, тогда, если этой вершине не были даны ребра, она останется изолированной. Программа поддерживает произвольные псевдографы с любым числом вершин, ребер, в том числе кратных и петлевых.

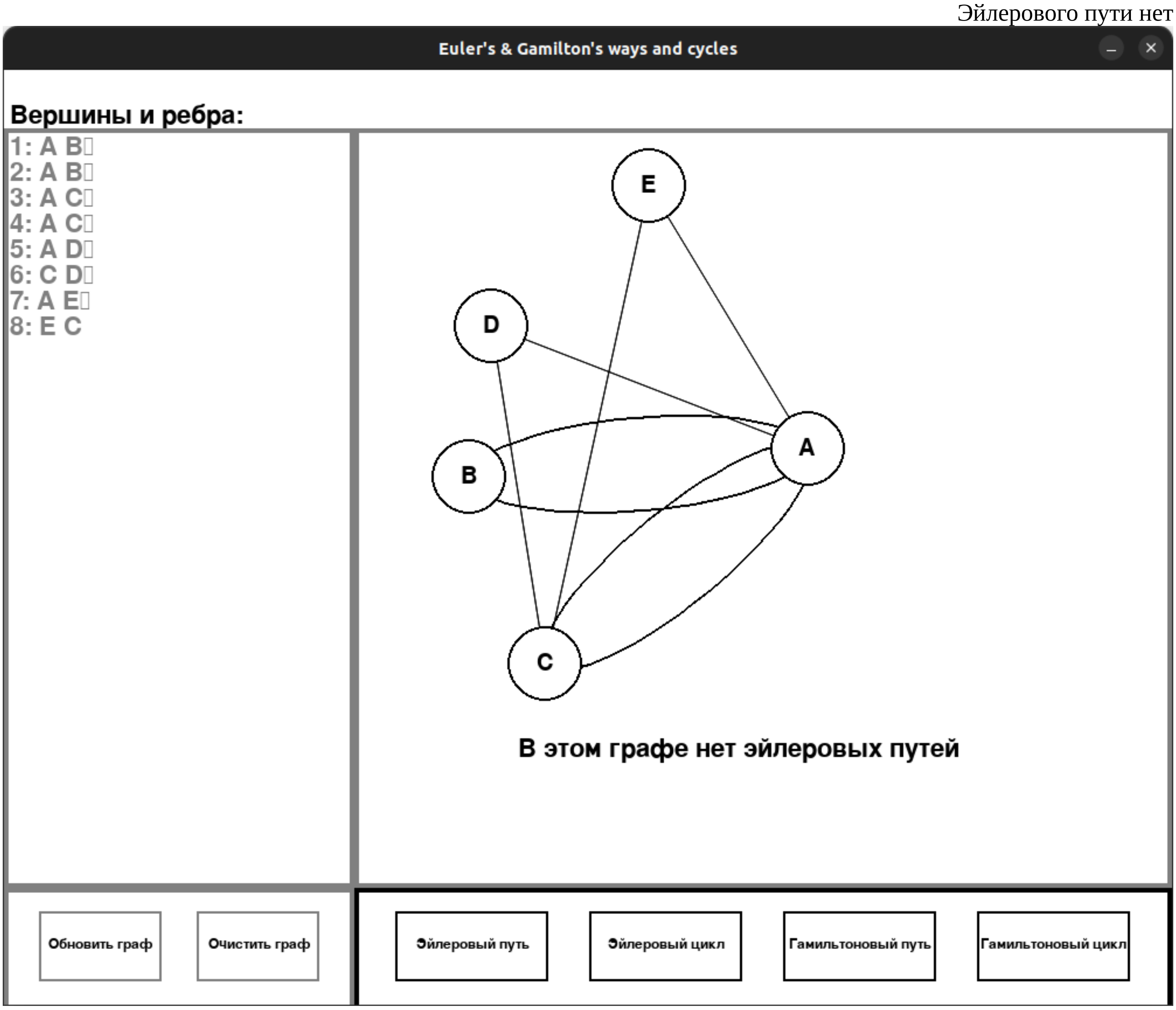
Слева снизу видно окно с кнопками «Update graph» и «Clear graph» - обновить граф и очистить граф соответственно. Первая кнопка обновляет граф согласно введенной информации в окне ввода, вторая очищает (удаляет) граф.

Наибольшее окно — окно отображения графа. В этой области будут отображаться вершины и ребра графа. Вершины графа подвижны и стремятся к стабильному состоянию, их начальное положение задается случайно, а далее силы притяжения и отталкивания придают им конечные положения, некоторые вершины так и остаются гармонически качаться из стороны в сторону.

Последнее — нижнее правое окно — окно визуализации обхода соотвествующих путей и цепей. Если для заданного графа существует эйлеровый путь или цикл, он будет выведен текстом в нижней части окна с графом, иначе будет выведено сообщение о том, что таковых пути или цепи не существует. Если заданный граф удовлетворяет Условию Дирака, то программа отображает последовательность вершин, соответствующую пути или циклу.

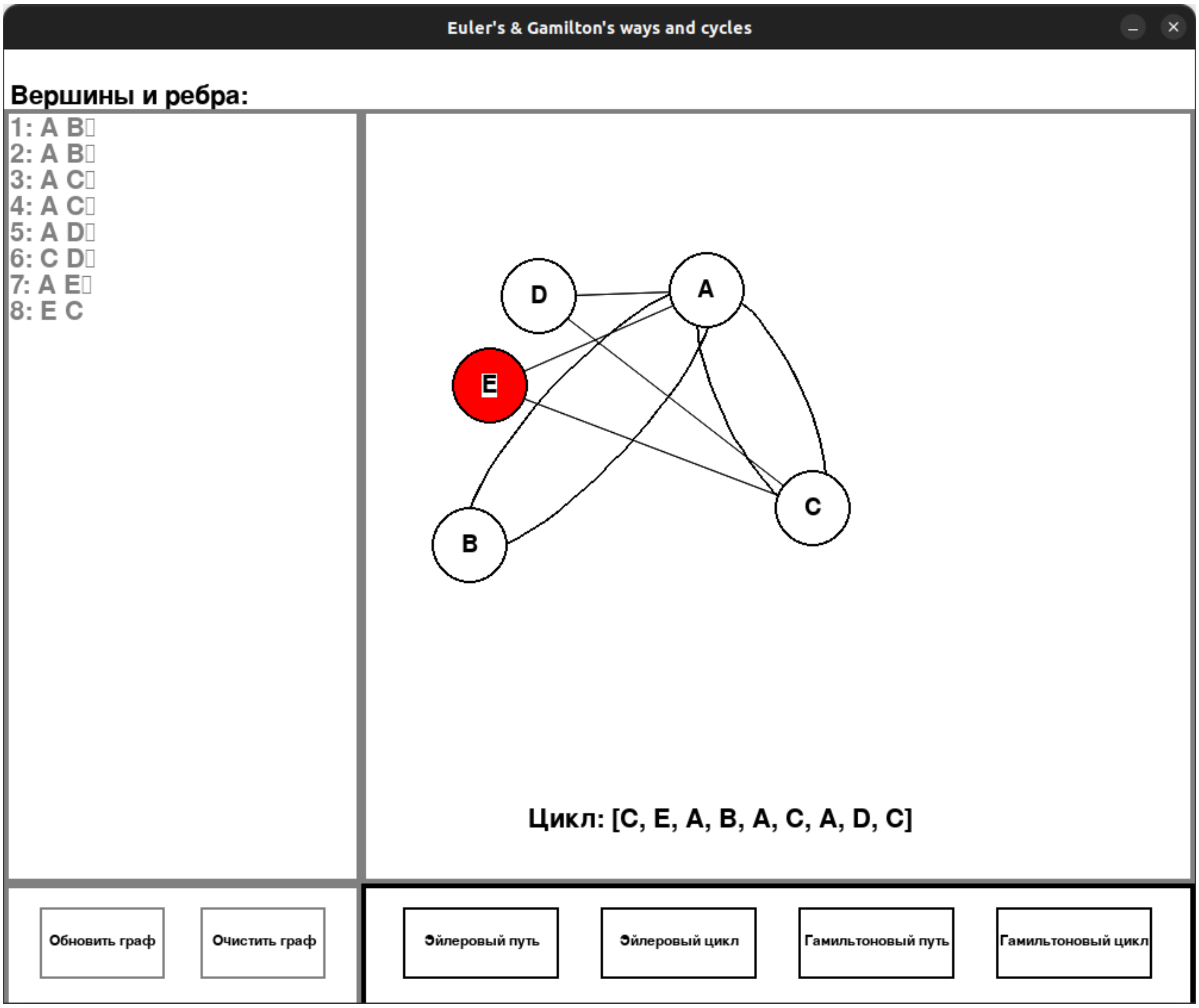
Дополнительно обход иллюстрирует покраска вершин в красный цвет в порядке пути (цикла).

Эйлерового пути нет



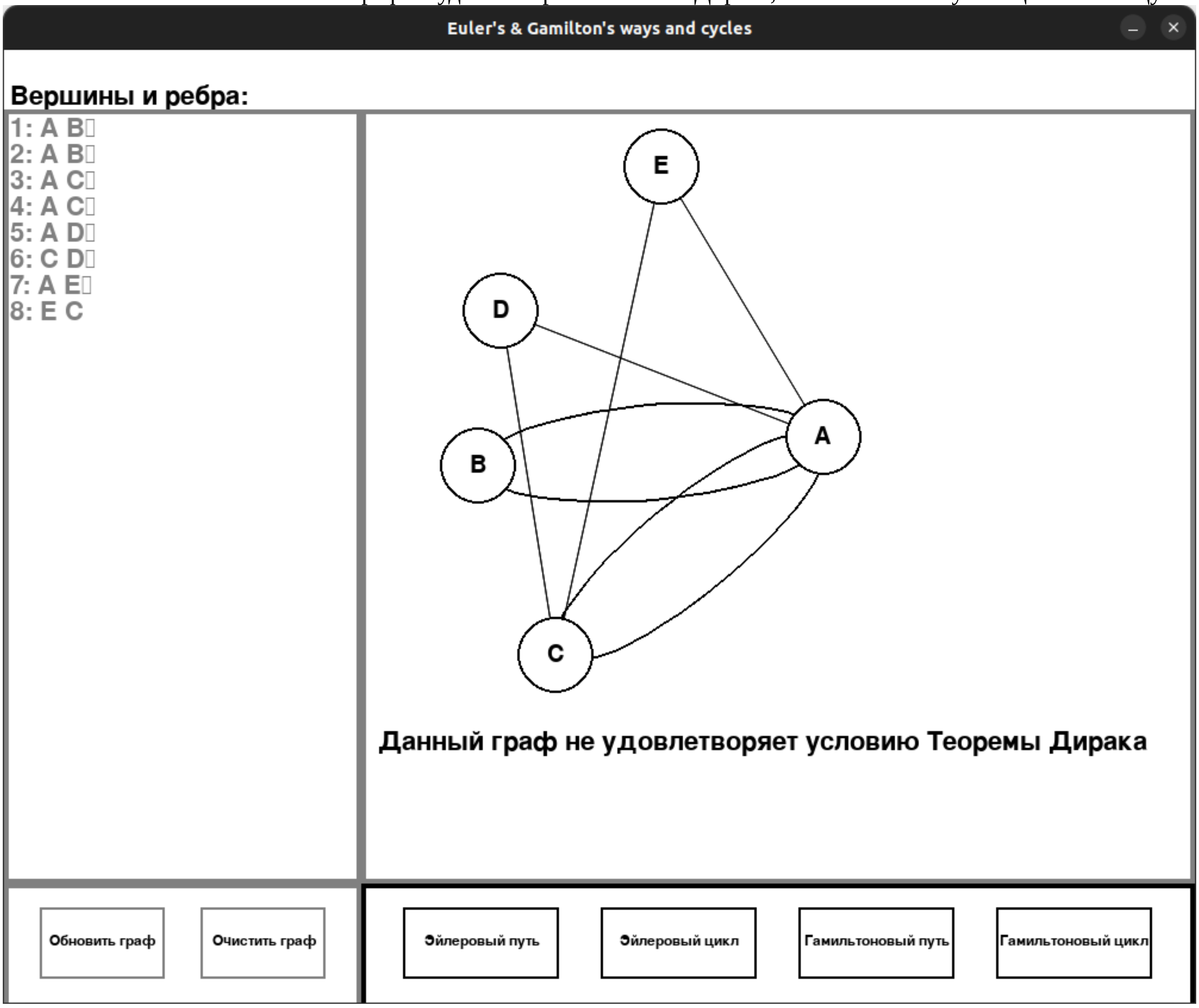
Москва, 2023

Обход эйлерового цикла



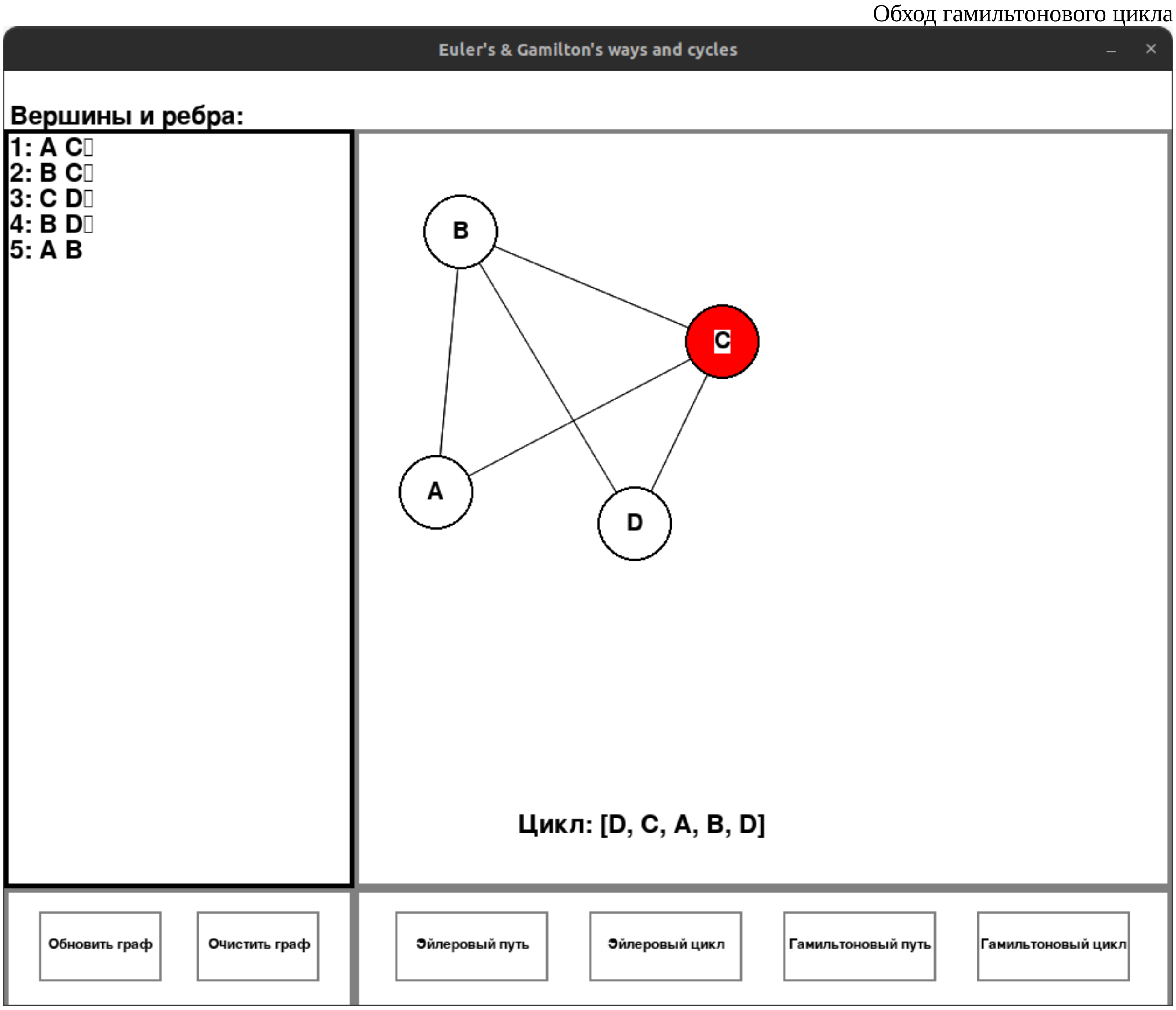
Москва, 2023

Граф не удовлетворяет Условию Дирака, гамильтоновы пути и циклы не ищутся



Москва, 2023

Обход гамильтонового цикла



Рассмотрим подробнее последний пример. В графе *G 4* вершины, наименьшая степень вершины *G — 2*, следовательно, по Теореме Дирака найдется гамильтоновый путь. Используем описанный выше алгоритм его нахождения:

$Пусть\ q := \{C,A,D,B\}$
$Т.к.\ (C,A) \in E \Rightarrow q := \{A,D,B,C\}$
$(A,D) \notin E \Rightarrow$
$\qquad i := 2$
$\qquad (A,B), (D, C) \in E \Rightarrow i = 2$
$\qquad j := 0$
$\qquad 2 + 0 < 3 - 0 \Rightarrow q := \{A,B,D,C\}, j := 1$
$\qquad 2 + 1 > 3 - 1 \Rightarrow q = \{A,B,D,C\}$
$q := \{B,D,C,A\}$
…

$\{B,D,C,A,B\}$ — гамильтоновый цикл, а это значит, что алгоритм далее будет просто циклически сдвигать последовательность. В конце алгоритм дополнит путь q до цикла, выбрав последней вершиной D

Описание структур данных

Программа написана на языке Python. Выбор языка программирования обусловлен широкой пользовательской библиотекой и высокой скоростью разработки.

Логически граф представляется как упорядоченная пара двух множеств $G = <V, E>$, где V — множество вершин графа, E — множество ребер графа. Множества реализуются встроенным классом set. Физически граф представляет класс Graph, полями которого являются:

self.V — множество вершин;
self.E — множество ребер;
self.ortype — тип графа (ориентированный/неориентированный)
self.wtype — тип графа (взвешенный/невзвешенный);
self.delta — наименьшая степень вершин графа;
self.is_coherent — является-ли граф связным;
self.n — количество вершин;
self.m — количество ребер;
self.scale — масштаб визуализируемого графа;
self.size — визуальный размер вершин;
self.edges — границы для генерации положений вершин,

а методами:

def __init__(self, input, type, wtype, ortype, scale, size, edges) — конструктор класса
def clear(self) — очистить граф;
def copy(self) — копировать граф;
def find_edge(self, v, u, name, weighted, w) — найти ребро в графе, удовлетворяющее параметрам;
def find_vertex(self, v) — найти вершину, удовлетворяющую параметрам;
def generate_positions(self) — функция генерации позиций для вершин;
def copy_vertex(self) — скопировать вершины графа в отдельное множество;
def remove_edges(self, E) — вернуть новый граф без указанных ребер;
def remove_nodes(self, V) — вернуть новый граф без указанных вершин;
def remove_edges_update(self, E) — удалить указанные ребра из графа;
def remove_nodes_update(self, V) — удалить указанные вершины из графа;
def coherent(self) — проверить, является-ли граф связным;
def update_positions(self, dt) — обновить позиции вершин, учитывая их нынешние положения, скорости и ускорения за указанный промежуток времени;
def eq_classes(self) — вернуть разбиение множества ребер на классы эквивалентности по отношению e.vpe.v — e.v инцидентно e.u, где e — ребро, исходящее из e.v и входящее в e.u; (т.е. вернуть множество множеств ответствующих кратных ребер);
def eulers_way(self) — вернуть эйлеровый путь;
def eulers_cycle(self) — вернуть эйлеровый цикл;
def least_degree(self) — найти наименьшую степень вершин графа;
def is_gamiltons_graph(self) — проверка связности и Условия Дирака;
def gamils_cycle(self) — вернуть гамильтоновый цикл;
def gamils_way(self) — вернуть гамильтоновый путь;

и перегруженные операторы.

Вершины графа представляются классом Vertex, полями которого являются:

self.name — имя вершины;

self.R — визуальный радиус вершины;
self.r, self.v, self.a — координата, скорость и ускорение вершины, выражается классом Point;
self.color — визуальный цвет вершины;
self.index — индекс вершины (по порядку создания);
self.degree — степень вершины
Vertex.count — статическое поле, показывает, сколько всего вершины было создано,

и методы:

def __init__(self, name, R, degree, r, v, a, color) — конструктор класса;
def copy(self) — копия вершины;
def move(self, dt, edges, size) — передвинуть вершину в заданных границах (учитывая, что её размер - size), согласно её координатам, скорости и ускорению на время dt;
def pos(self) — координаты вершины;
и перегруженные операторы.

Ребра графа представляются классом Edge, полями которого являются:

self.name — имя ребра;
self.v, self.u — инцидентные вершины;
self.weighted — взвешенно-ли ребро;
self.w — вес ребра;
self.color — цвет ребра;
self.index — индекс ребра;
Edge.count — статическое поле, показывает, сколько ребер было создано,

и методы:

self.__init__(self, v, u, name, weighted, w, color) — конструктор класса;
self.copy() - копировать ребро, притом поля self.v, self.u указывают на те же вершины, а не на копии;
self.reverse() - вернуть копию развернутого ребра.

Класс Point.
поля:

self.x, self.y — координаты точки,

и методы:

def __init__(self, x, y) — конструктор класса;
def copy(self) — вернуть копию точки;
sef scalar(self, other) — скалярное произведение радиус-векторов на точках в стандартном базисе;
def len(self) — длина радиус-вектора на точке;
def pos(self) — вернуть пару (int(self.x), int(self.y)) — визуальные координаты;
и перегруженные операторы.

Реализация алгоритмов

Следующие реализации дословно повторяют описанные выше алгоритмы, уточненные на выбранные структуры данных.

Поиск эйлерового пути

```
def eulers_way(self, vs=None):
	if self.is_coherent == None and self.m > 0:
		self.is_coherent = self.coherent()
	if self.is_coherent and len([v for v in self.V if v.degree % 2 == 1]) != 2:
		return []
	else:
		eulers_way = []
		_G = self.copy()
		st = list()
		if vs is None:
			for v in _G.V:
				if v.degree % 2 == 1:
					st.append(v)
					break
		else:
			st.append(_G.find_vertex(vs))
		while len(st) > 0:
		v = st[-1]
		if v.degree == 0:
			eulers_way.append(v)
			st.pop(-1)
		else:
			for _e in _G.E:
				if v == _e.v:
					e = _e
					break
			st.append(e.u)
			_G.remove_edges_update(set([e]))
	return eulers_way
```

Поиск эйлерового цикла:

```
def eulers_cycle(self):
    if self.is_coherent == None and self.m > 0:
            self.is_coherent = self.coherent()
     if self.is_coherent and len([v for v in self.V if v.degree % 2 == 1]) > 0:
            return []
    else:
            bridge = next(iter(self.E))
            v = bridge.v
            _G = self.remove_edges(set([bridge]))
            eulers_cycle = _G.eulers_way(bridge.u)
            eulers_cycle.append(v)
    return eulers_cycle
```

Поиск гамильтонового цикла:

```
def gamils_cycle(self):
    if not self.is_gamiltons_graph():
        return []
    q = list(self.V)
    for k in range(0, self.n * (self.n - 1)):
        if self.find_edge(q[0], q[1]) is None:
            i = 2
            while self.find_edge(q[0], q[i]) is None or \
                  self.find_edge(q[1], q[i + 1]) is None:
                    i += 1
            j = 0
            while 1 + j < i - j:
                q[1 + j], q[i - j] = q[i - j], q[1 + j]
                j += 1
        q += [q[0]]
        q = q[1:]
    return [q[-1]] + q
```

Поиск гамильтонового пути:

```
def gamils_way(self):
    if not self.is_gamiltons_graph():
        return []
    _G = self.copy()
    v = Vertex('R')
    for u in _G.V:
        _G.E.update([Edge(v, u), Edge(u, v)])
    v.degree = _G.n
    _G.V.add(v)
    q = _G.gamils_cycle()[1:]
    i = 0
    while q[i] != v:
        i += 1
```

```
q = q[i+1:] + q[:i]
return q
```

Практическое применение

Помимо образовательных целей, эта программа может найти свое применение при построении туристических и проверочных маршрутов. Поиск эйлеровых путей и циклов может быть полезен, если целью экскурсии или туристического маршрута являются набережные или уникальные улицы какого-нибудь города, а поиск гамильтоновых путей и циклов, например, поможет тем же туристам построить маршрут, проходящий через каждый из интересующий их городов единожды.

Так же эти алгоритмы позволяют пользователю произвести перебор мест при поиске чего-либо. Допустим, менеджер офиса при переходе между кабинетами и этажами утерял свой пропуск. Вместо того, чтобы дожидаться помощи персонала, он может найти его самостоятельно, сделав эффективный перебор мест, в которых он был в последнее время.

Источники и полезные ссылки:

- Мой githab с исходным кодом приложения,
- Алгоритм нахождения эйлерова пути и цикла (maximal),
- Алгоритм нахождения гамильтонова пути и цепи (итмо),
- Статья Википедии про гамильтонов граф (wiki),
- Алгоритм посторения эйлерова пути и цикла (итмо),
- Вдохновитель идеи.

Москва, 2023