Курсовая работа по дискретной математике
Первая задача

Ахметшин Б.Р. – М8О-103Б-22 – 2 вариант

Март, 2023

Дано

Матрица смежности орграфа

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найти

1. матрицу односторонней связности
2. матрицу сильной связности
3. компоненты сильной связности
4. матрицу контуров

Решение

1.

1. Найдем матрицу односторонней связности при помощи первого алгортима Уоршалла:

$$T = E \vee A \vee ... \vee A^{n-1}$$

   (a) $E \vee A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E \vee A \vee A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T = E \vee A \vee A^2 \vee A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Найдем матрицу односторонней связности при помощи итеративного алгортима Уоршалла:

(a) $T^{(0)} = E \vee A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $T^{(1)} = ||t_{ij}^{(1)}||, t_{ij}^{(1)} = t_{ij}^{(0)} \vee (t_{i1}^{(0)} \& t_{1j}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $T^{(2)} = ||t_{ij}^{(2)}||, t_{ij}^{(2)} = t_{ij}^{(1)} \vee (t_{i2}^{(1)} \& t_{2j}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $T^{(3)} = ||t_{ij}^{(3)}||, t_{ij}^{(3)} = t_{ij}^{(2)} \vee (t_{i3}^{(2)} \& t_{3j}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $T^{(4)} = ||t_{ij}^{(4)}||, t_{ij}^{(4)} = t_{ij}^{(3)} \vee (t_{i4}^{(3)} \& t_{4j}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.

$\overline{S} = T\&T^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\overline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.

Вершины в первой строке $\overline{S}$ соотвествуют первой компоненте сильной связности, следовательно первая компонента сильной связности – $\{v_1, v_3\}$ $\Rightarrow$ $\overline{S_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, вторая компонента – $\{v_2, v_4\}$

Ответ: $\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}$

4.

Матрица контуров вычисляется как: $\overline{S}\&A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$