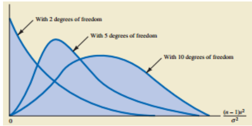
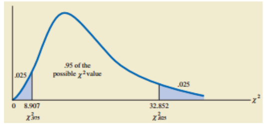
总体方差的统计推断

https://woaielf.github.io/
—— made by ZY

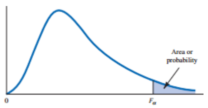
一个总体

- χ^2 分布
- σ^2 点估计：$s^2 = \dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
- $(n-1)s^2/\sigma^2$ 的「抽样分布」
  - 背景
    - 从「正态总体」 任意抽取 容量为 n 的「简单随机样本」
    - 则 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ 的「抽样分布」 服从
      - χ^2 分布
      - 自由度 n - 1
  - 

- 区间估计
  - $\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}}$
    - 自由度 $n-1$
    - 置信系数 $1-\alpha$
  - 推导来源
    - 以 95% 置信区间为例
      - $\chi^2_{.975} \le \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{.025}$
      - $\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{.025}} \le \sigma^2 \le \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{.975}}$
    - 图示 

      - $\chi^2_{.025}$ 有2.5% 的分布值落在该值右侧
      - $\chi^2_{.975}$ 有97.5% 的分布值落在该值右侧
      - 相减即为 95%
- 假设检验
  - 检验统计量
    - $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$
      - p-value：Reject H_0 if p-value $\le \alpha$
      - 临界值法
    - σ_0^2 总体方差假设值
  - 总结
    - 单侧检验
      - 下侧：$H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2$，$H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$；Reject H_0 if $\chi^2 \le \chi^2_{(1-\alpha)}$
      - 上侧：$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$，$H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$；Reject H_0 if $\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha}$
        - 最常用
          - 用于要求较小方差的情况
          - 一旦拒绝原假设
            - 方差过大
            - 需要采取措施
    - 双侧检验：$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$，$H_a: \sigma^2 \ne \sigma_0^2$；Reject H_0 if $\chi^2 \le \chi^2_{(1-\alpha/2)}$ or if $\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}$

两个总体

- F 分布
- s_1^2/s_2^2 的「抽样分布」
  - 背景
    - 来自
      - $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ **两个「方差相等」的「正态总体」**
      - ⭐ 至少「近似正态」 很敏感 对「正态总体」的假定
    - 两个「独立简单随机样本」 容量为 n1 和 n2 的 分别抽取
    - 则 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$ 的「抽样分布」 服从 F 分布 自由度
      - $n_2 - 1$ 分母
      - $n_1 - 1$ 分子
  - 

    - F 值
      - 永远为正值
      - F 分布的形状 不对称 依赖于 分子和分母的自由度
- 假设检验
  - 检验统计量 $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$
    - 「样本方差」较大的总体 记为「总体1」
    - 使「检验统计量的值」 出现在「F 分布」上侧
    - 拒绝域 总是在「右侧」
  - 总结
    - 上侧检验：$H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$，$H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$；Reject H_0 if $F \ge F_\alpha$
    - 双侧检验：$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$，$H_a: \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$；Reject H_0 if $F \ge F_{\alpha/2}$