## Формулы пересчета симплекс-таблицы при переходе к смежному базису

А. О. Махорин\*

Май 2008 г.

Симплекс-таблица (или преобразованная задача) — это ЛП-задача, записанная в преобразованном виде, где целевая функция и базисные переменные явно выражены через небазисные переменные.

В пакете GLPK используется следующее представление симплекстаблицы:

$$z = d^T x_N + c_0,$$
  

$$x_B = \Xi x_N,$$
(1)

где z — целевая функция,  $x_B$  — вектор базисных переменных,  $x_N$  — вектор небазисных переменных, d — вектор относительных оценок небазисных переменных,  $c_0$  — постоянный член целевой функции,  $\Xi$  — матрица коэффициентов влияния небазисных переменных на базисные переменные (часто эту матрицу также называют симплекс-таблицей).

Симплекс-таблица (1), соответствующая некоторому базису, полностью определяется исходной ЛП-задачей и разбиением переменных на базисные и небазисные. Однако в некоторых случаях возникает необходимость иметь явные формулы пересчета элементов симплекс-таблицы при переходе к смежному базису.

Для вывода этих формул запишем симплекс-таблицу в развернутом виде (постоянный член целевой функции опущен):

$$z = d_{1}(x_{N})_{1} + \dots + d_{q}(x_{N})_{q} + \dots + d_{n}(x_{N})_{n}$$

$$(x_{B})_{1} = \xi_{11}(x_{N})_{1} + \dots + \xi_{1q}(x_{N})_{q} + \dots + \xi_{1n}(x_{N})_{n}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(x_{B})_{p} = \xi_{p1}(x_{N})_{1} + \dots + \xi_{pq}(x_{N})_{q} + \dots + \xi_{pn}(x_{N})_{n}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(x_{B})_{m} = \xi_{m1}(x_{N})_{1} + \dots + \xi_{mq}(x_{N})_{q} + \dots + \xi_{mn}(x_{N})_{n}$$

$$(2)$$

Допустим, что в смежном базисе базисная переменная  $(x_B)_p$  становится небазисной, а небазисная переменная  $(x_N)_q$  — базисной.

<sup>\*</sup>Кафедра прикладной информатики, Московский авиационный институт, Москва, Россия. E-mail: <mao@mai2.rcnet.ru>, <mao@gnu.org>.

Чтобы выразить новую базисную переменную  $(x_N)_q$  через новый набор небазисных переменных, включающий  $(x_B)_p$ , преобразуем p-ю (ведущую) строку симплекс-таблицы (2):

$$(x_B)_p = \xi_{pq}(x_N)_q + \sum_{j \neq q} \xi_{pj}(x_N)_j,$$

откуда

$$(x_N)_q = \frac{1}{\xi_{pq}} (x_B)_p - \sum_{j \neq q} \frac{\xi_{pj}}{\xi_{pq}} (x_N)_j.$$
 (3)

Исключим теперь  $(x_N)_q$  из остальных строк симплекс-таблицы (2), для чего подставим  $(x_N)_q$  из (3) в каждую i-ю строку  $(i \neq p)$ :

$$(x_{B})_{i} = \xi_{iq}(x_{N})_{q} + \sum_{j \neq q} \xi_{ij}(x_{N})_{j} =$$

$$= \xi_{iq} \left[ \frac{1}{\xi_{pq}} (x_{B})_{p} - \sum_{j \neq q} \frac{\xi_{pj}}{\xi_{pq}} (x_{N})_{j} \right] + \sum_{j \neq q} \xi_{ij}(x_{N})_{j} =$$

$$= \frac{\xi_{iq}}{\xi_{pq}} (x_{B})_{p} - \sum_{j \neq q} \frac{\xi_{iq} \xi_{pj}}{\xi_{pq}} (x_{N})_{j} + \sum_{j \neq q} \xi_{ij}(x_{N})_{j} =$$

$$= \frac{\xi_{iq}}{\xi_{pq}} (x_{B})_{p} + \sum_{j \neq q} \left( \xi_{ij} - \frac{\xi_{iq} \xi_{pj}}{\xi_{pq}} \right) (x_{N})_{j},$$

$$(4)$$

а также в строку целевой функции:

$$z = d_{q}(x_{N})_{q} + \sum_{j \neq q} d_{j}(x_{N})_{j} =$$

$$= d_{q} \left[ \frac{1}{\xi_{pq}} (x_{B})_{p} - \sum_{j \neq q} \frac{\xi_{pj}}{\xi_{pq}} (x_{N})_{j} \right] + \sum_{j \neq q} d_{j}(x_{N})_{j} =$$

$$= \frac{d_{q}}{\xi_{pq}} (x_{B})_{p} - \sum_{j \neq q} \frac{d_{q}\xi_{pj}}{\xi_{pq}} (x_{N})_{j} + \sum_{j \neq q} d_{j}(x_{N})_{j} =$$

$$= \frac{d_{q}}{\xi_{pq}} (x_{B})_{p} + \sum_{j \neq q} \left( d_{j} - \frac{d_{q}\xi_{pj}}{\xi_{pq}} \right) (x_{N})_{j}.$$
(5)

Рассмотренное преобразование симплекс-таблицы по существу представляет собой отдельный шаг метода Гаусса — Жордана, обычно применяемого для решения систем линейных алгебраических уравнений и основанного на приведении матрицы коэффициентов системы к единичной матрице.

Используя соотношения (3), (4) и (5), а также полагая, что в новой симплекс-таблице для смежного базиса p-я строка соответствует новой

базисной переменной  $(x_N)_q$ , а q-й столбец — новой небазисной переменной  $(x_B)_p$ , можно получить необходимые формулы пересчета для вычисления элементов новой симплекс-таблицы по известным элементам текущей симплекс-таблицы:

1) для ведущей строки:

$$\overline{\xi}_{pq} = \frac{1}{\xi_{pq}},\tag{6}$$

$$\overline{\xi}_{pj} = -\frac{\xi_{pj}}{\xi_{pq}} = -\overline{\xi}_{pq}\xi_{pj}, \quad j \neq q.$$
 (7)

2) для остальных строк  $(i \neq p)$ :

$$\overline{\xi}_{iq} = \frac{\xi_{iq}}{\xi_{pq}} = \overline{\xi}_{pq}\xi_{iq},\tag{8}$$

$$\overline{\xi}_{ij} = \xi_{ij} - \frac{\xi_{iq}\xi_{pj}}{\xi_{pq}} = \xi_{ij} - \overline{\xi}_{iq}\xi_{pj} = \xi_{ij} + \xi_{iq}\overline{\xi}_{pj}, \quad j \neq q.$$
 (9)

3) для строки целевой функции:

$$\overline{d}_q = \frac{d_q}{\xi_{pq}} = \overline{\xi}_{pq} d_q, \tag{10}$$

$$\overline{d}_j = d_j - \frac{d_q \xi_{pj}}{\xi_{pq}} = d_j - \overline{d}_q \xi_{pj} = d_j + d_q \overline{\xi}_p j, \quad j \neq q.$$
(11)

Заметим, что строка целевой функции пересчитывается по тем же формулам, что и строки, которые не являются ведущими, поскольку целевую функцию можно рассматривать как базисную переменную, которая никогда не выходит из базиса.