# 复变函数与积分变换

## ——第十三讲

# 平面场的复势

贵州大学计算机科学与技术学

潘平

电话：13078569531

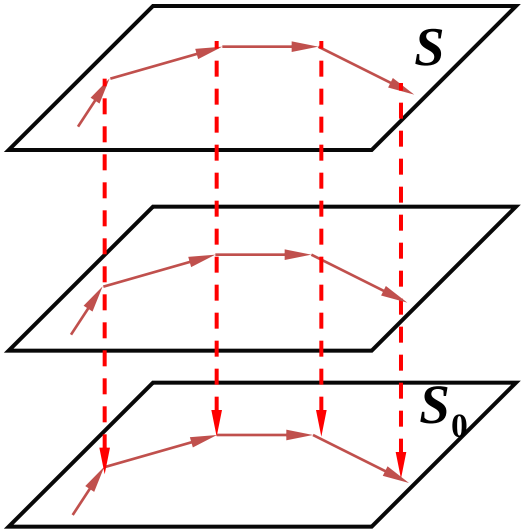
邮箱：panping_17@163.com

# 目 录

# 一、用复变函数表示平面向量场

**平面定常向量场:**

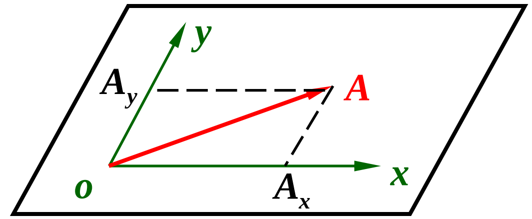
向量场中的向量都平行于某一个平面$S$, 而且在垂直于$S$的任何一条直线上的所有点处的向量都是相等的；场中的向量也都与时间无关.




显然，向量场在所有平行于$S$的平面内的分布情况是完全相同的，可以用$S_0$平面内的场表示.

在平面 $S_0$ 内取定一直角坐标系 $xoy$,

向量 $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$ 可表示为复数 $A = A_x + iA_y$.




由于场中的点可用复数 $z = x + iy$ 表示,

所以平面向量场 $\vec{A} = A_x(x,y)\vec{i} + A_y(x,y)\vec{j}$ 可表示为复变函数 $A = A(z) = A_x(x,y) + iA_y(x,y)$.

反之,已知一个复变函数 $w = u(x,y) + iv(x,y)$, 也可作出对应的平面向量场 $\vec{A} = u(x,y)\vec{i} + v(x,y)\vec{j}$.

例如：一个平面定常流速场(如河水的表面)

$$\vec{v} = v_x(x,y)\vec{i} + v_y(x,y)\vec{j}$$

可以用复变函数$v = v(z) = v_x(x,y) + iv_y(x,y)$表示,

平面电场强度向量为 $\vec{E} = E_x(x,y)\vec{i} + E_y(x,y)\vec{j}$

可以用复变函数 $E = E(z) = E_x(x,y) + iE_y(x,y)$

表示.

## 平面流速场的复势

**流函数:**

设向量场 $\vec{v}$ 是不可压缩的定常的理想流体的流速场:

$$\vec{v}=v_x(x,y)\vec{i}+v_y(x,y)\vec{j},$$

其中速度分量 $v_x(x,y)$ 与 $v_y(x,y)$ 都有连续偏导数.

如果它在单连域 $B$ 内是无源场(即管量场),

那末 $\operatorname{div}\vec{v}=\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+\dfrac{\partial v_y}{\partial y}=0,$ 即 $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}=-\dfrac{\partial v_y}{\partial y},$

于是 $-v_y\mathrm{d}x + v_x\mathrm{d}y$ 为某个二元函数 $\psi(x,y)$ 的全微分，$\mathrm{d}\psi(x,y) = -v_y\mathrm{d}x + v_x\mathrm{d}y.$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v_y, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = v_x.$$

因为 $\boxed{\text{等值线 } \psi(x,y) = c_1}$, $\longrightarrow$ **流线**

$\mathrm{d}\psi(x,y) = -v_y\mathrm{d}x + v_x\mathrm{d}y = 0$, 所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{v_y}{v_x}.$

场 $\vec{v}$ 在等值线 $\psi(x,y) = c_1$ 上每一点处的向量 $\vec{v}$ 都与等值线相切，

**函数 $\psi(x,y)$ 称为场 $\vec{v}$ 的流函数.**

**势函数:**

如果 $\vec{v}$ 又是 $B$ 内的无旋场(即势量场),

那么 $\mathrm{rot}\,\vec{v}=0$, 即 $\dfrac{\partial v_y}{\partial x}-\dfrac{\partial v_x}{\partial y}=0.$

于是 $v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y$ 为某个二元函数 $\varphi(x,y)$

的全微分, $\mathrm{d}\varphi(x,y)=v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y,$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=v_x,\quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=v_y.\qquad \mathrm{grad}\,\varphi=\vec{v}.$

**函数 $\varphi(x,y)$ 称为场 $\vec{v}$ 的势函数(或位函数).**

$\boxed{\text{等值线}\ \ \varphi(x,y)=c_2}$ ⟶ **等势线(或等位线)**

## 平面流速场的复势函数:

如果在单连域 $B$ 内,向量场 $\vec{v}$ 既是无源场又是无旋场,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-v_y,\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=v_x \text{ 与 } \frac{\partial\varphi}{\partial x}=v_x,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=v_y \text{ 同时成立,}$$

比较后得

$$\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}},$$

**柯西–黎曼方程**

在单连域内可以作一个解析函数

$$\boxed{w=f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)}.$$

**平面流速场的复势函数(复势)**

因为 $v = v_x + iv_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + i\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - i\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = \overline{f'(z)}$,

所以流速场$\vec{v}$可以用复变函数$v = \overline{f'(z)}$表示.

给定一个单连域内的无源无旋平面流速场, 就可以构造一个解析函数——它的复势与之对应; 反之, 如果在某一区域(不管是否单连)内给定一个解析函数, 就有以它为复势的平面流速场对应, 并可以写出该场的流函数和势函数, 得到流线与等势线方程, 画出流线和等势线的图形, 即得描绘该场的流动图象.

**例1** 设一平面流速场的复势为 $f(z)=az\ (a>0$ 为实常数$)$, 试求该场的速度、流函数和势函数.

**解** 因为 $f'(z)=a$,

所以场中任一点的速度 $v=\overline{f'(z)}=a>0$,

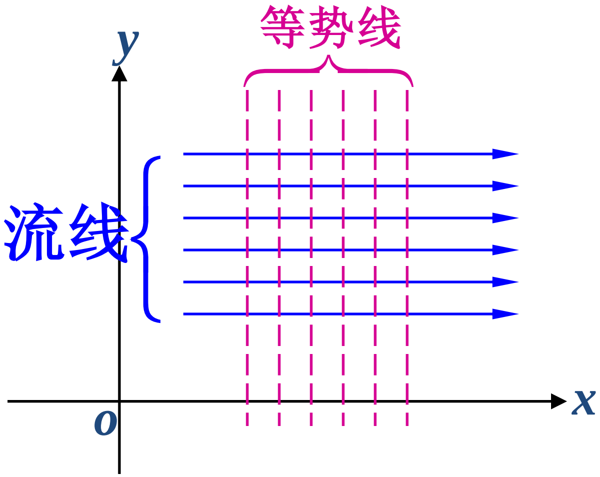
方向指向 $x$ 轴正向.

流函数 $\psi(x,y)=ay$,

流线是直线族 $y=c_1$;

势函数 $\varphi(x,y)=ax$,

等势线是直线族 $x=c_2$.



**例2** 在《场论》中将散度 $\operatorname{div}\vec{v} \neq 0$ 的点统称为源点(有时称使 $\operatorname{div}\vec{v} > 0$ 的点为源点, 而使 $\operatorname{div}\vec{v} < 0$ 的点为洞). 试求由单个源点所形成的定常流速场的复势, 并画出流动图象.

**解** 不妨设流速场 $\vec{v}$ 内只有一个位于坐标原点的源点, 而其他各点无源无旋, 在无穷远处保持静止状态.

由对称性, $z \neq 0$ 处的流速 $\vec{v} = g(r)\overline{r^0}$,

其中$r = |z|$是$z$到原点的距离,

$\overline{r^0}$是指向点$z$的向径上的单位向量, $\overline{r^0} = \dfrac{z}{|z|}$,

$g(r)$是一待定函数.

因为流体不可压缩,

流体在任一以原点为中心的圆环域$r_1 < |z| < r_2$

内不可能积蓄,

所以流过圆周$|z| = r_1$与$|z| = r_2$的流量相等,

流过圆周的流量为

$$N=\oint_{|z|=r}\vec{v}\cdot\overrightarrow{r^{0}}\,\mathrm{d}s=\oint_{|z|=r}g(r)\overrightarrow{r^{0}}\cdot\overrightarrow{r^{0}}\,\mathrm{d}s=2\pi|z|\,g(|z|).$$

**$N$ 称为源点的强度.** 是与 $r$ 无关的常数.

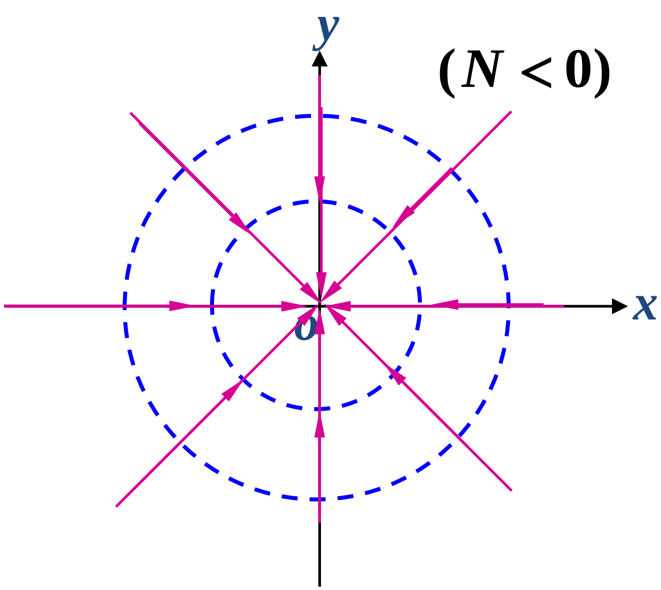
故 $g(|z|)=\dfrac{N}{2\pi|z|}.$ 流速 $v=\dfrac{N}{2\pi|z|}\cdot\dfrac{z}{|z|}=\dfrac{N}{2\pi}\cdot\dfrac{1}{\bar{z}}.$

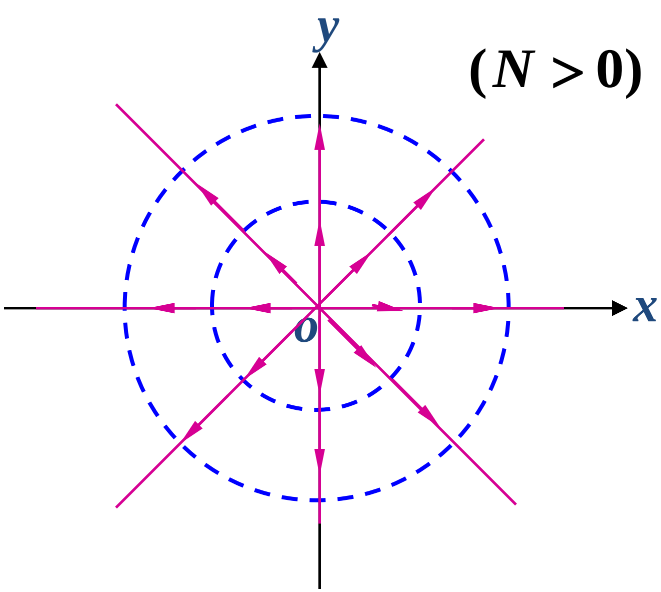
复势函数 $f(z)$ 的导数为 $f'(z)=\overline{v(z)}=\dfrac{N}{2\pi}\cdot\dfrac{1}{z}.$

复势函数为 $f(z)=\dfrac{N}{2\pi}\mathrm{Ln}z+c,\ (c=c_1+ic_2$ 复常数$)$

于是势函数为 $\varphi(x,y)=\dfrac{N}{2\pi}\ln|z|+c_1$,

流函数为 $\psi(x,y)=\dfrac{N}{2\pi}\mathrm{Arg}z+c_2$.(流动图象如下)




蓝色为等势线, 红色为流线.

**例3** 平面流速场中 $\mathrm{rot}\vec{v} \neq 0$ 的点称为涡点. 设平面上仅在原点有单个涡点, 无穷远处保持静止状态, 试求该流速场的复势, 并画出流动图象.

**解** 与例2类似, 设场内某点 $z$ 的流速 $\vec{v} = h(r)\overline{\tau^0}$,

$\overline{\tau^0}$ 是点 $z$ 处与 $\overline{r^0}$ 垂直的单位向量, $\overline{\tau^0} = \dfrac{iz}{|z|}$,

$h(r)$ 是仅与 $r = |z|$ 有关的待定函数.

沿圆周的环流量为 $\Gamma = \displaystyle\int_{|z|=r} \vec{v} \cdot \overline{\tau^0} \mathrm{d}s$

$$=\oint_{|z|=r} h(|z|)\tau\cdot\tau\, ds = 2\pi|z|h(|z|).$$

$\Gamma$是与$r$无关的常量. **$-i\Gamma$ 称为涡点的强度.**

$$h(|z|)=\frac{\Gamma}{2\pi|z|}.\qquad \text{流速 } v=\frac{i\Gamma}{2\pi}\cdot\frac{1}{\bar{z}},$$

复势函数为 $f(z)=\dfrac{\Gamma}{2\pi i}\mathrm{Ln}z+c,\ (c=c_1+ic_2)$

于是势函数为 $\varphi(x,y)=\dfrac{\Gamma}{2\pi}\mathrm{Arg}z+c_1,$

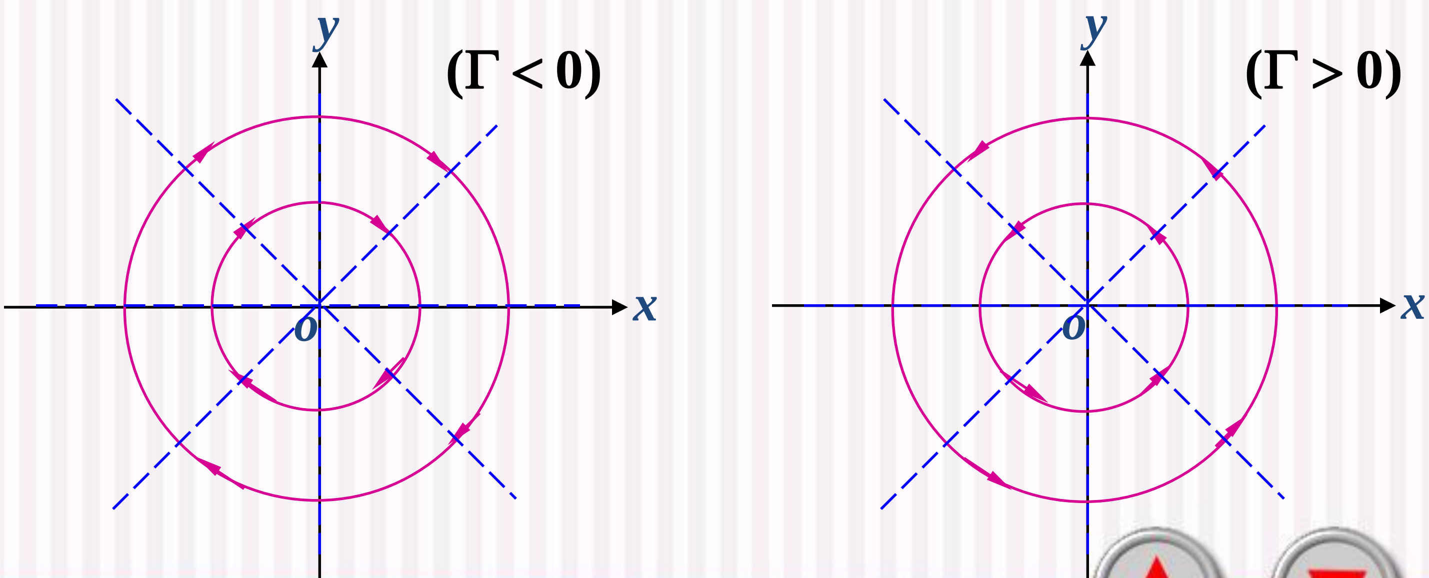
流函数为 $\psi(x,y)=-\dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln|z|+c_2.$

对比例1和例2的结果,

除了常数 $N$ 换成 $\Gamma$ 外, 两者仅差因子 $\dfrac{1}{i}$,

因此,只须将例2图中流线与等势线位置互换, 即可得涡点所形成的场的流动图象.

蓝色为流线, 红色为等势线.



# 静电场的复势

设平面静电场 $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j}$.

当场内没有带电物体时, 静电场无源无旋.

那末根据 $E$ 是无源场 $\operatorname{div} \vec{v} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} = 0$,

于是 $-E_y\mathrm{d}x + E_x\mathrm{d}y$ 为某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分,

$$\mathrm{d}u(x,y) = -E_y\mathrm{d}x + E_x\mathrm{d}y.$$

与讨论流速场一样,

静电场 $\vec{E}$ 在等值线 $u(x,y)=c_1$ 上每一点处的向量 $\vec{E}$ 都与等值线相切,

就是说,等值线就是向量线,即场中电力线.

**$u(x,y)$ 称为场 $\vec{E}$ 的力函数.**

根据 $E$ 是无旋场 $\quad \mathrm{rot_n}\vec{v}=\dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=0,$

于是 $-E_x\mathrm{d}x-E_y\mathrm{d}y$ 为某个二元函数 $v(x,y)$ 的全微分, $\quad \mathrm{d}v(x,y)=-E_x\mathrm{d}x-E_y\mathrm{d}y.$

$$\operatorname{grad} \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} = -E_x\vec{i} - E_y\vec{j} = -\vec{E}.$$

所以 $v(x, y)$ 是场 $\vec{E}$ 的势函数(电势或电位).

等值线 $v(x, y) = c_2$ 就是等势线或等位线.

如果 $\vec{E}$ 是单连域 $B$ 内的无源无旋场, 则 $u$ 和 $v$ 满足柯西–黎曼方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

在$B$内可决定一个解析函数 $\boxed{w = f(z) = u + iv,}$

**静电场的复势 (复电位)**

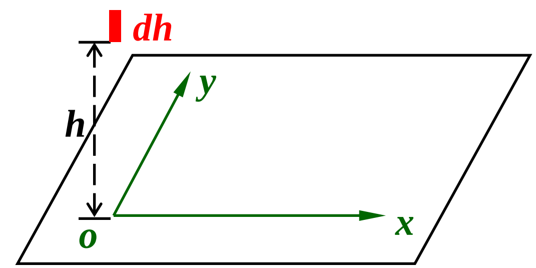
**场 $\vec{E}$ 可以用复势表示为** $E = -\dfrac{\partial v}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial x} = -i\,\overline{f'(z)}.$

静电场的复势和流速场的复势相差因子$-i$.

利用静电场的复势, 可以研究场的等势线和电力线的分布情况, 描绘出场的图象.

**例4** 求一条具有电荷线密度为 $e$ 的均匀带电的无限长直导线 $L$ 所产生的静电场的复势.

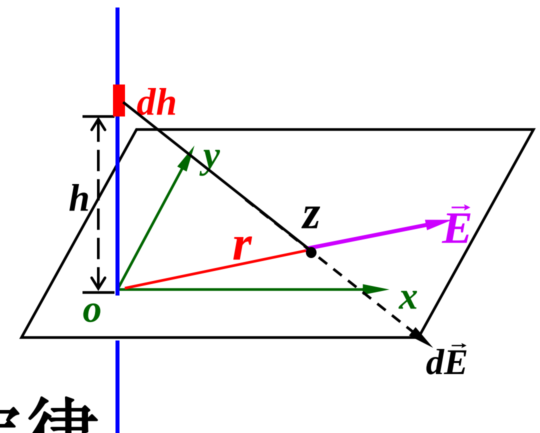
**解** 设导线 $L$ 在原点 $z=0$ 处垂直于 $z$ 平面,




在 $L$ 上距原点为 $h$ 处取微元段 $dh$, 则其带电量为 $edh$.

因为导线为无限长, 因此垂直于 $xoy$ 平面的任何直线上各点处的电场强度是相等的.

又因为导线上关于 $z$ 平面对称的两带电微元段所产生的电场强度的垂直分量相互抵消, 只剩下与 $xoy$ 平面平行的分量.




故所产生的静电场为平面场.

先求平面上任一点$z$的电场强度 $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j}$. 由库仑定律,

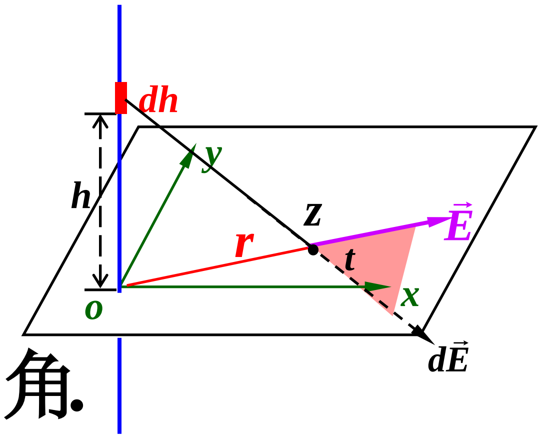
微元段 dh 在 $z$ 处产生的场强大小为

$$\left|\mathrm{d}\vec{E}\right| = \frac{e\mathrm{d}h}{r^2 + h^2}, \quad 其中\, r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

因为所求的电场强度$\vec{E}$在$z$平面内，

所以其大小为所有场强微元$\mathrm{d}\vec{E}$在$z$平面上投影之和，

$$\left|\vec{E}\right| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e\cos t}{r^2+h^2}\mathrm{d}h,$$




其中$t$为$\mathrm{d}\vec{E}$与$xoy$平面的交角.

因为$h = r\tan t$，所以 $\mathrm{d}h = \dfrac{r\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$,

$$\frac{1}{r^2+h^2} = \frac{\cos^2 t}{r^2}, \qquad \left|\vec{E}\right| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e\cos t}{r}\mathrm{d}t = \frac{2e}{r}.$$

考虑到向量$\vec{E}$的方向，$\vec{E}=\dfrac{2e}{r}\vec{r}^{0}.$

用复数表示为$E=\dfrac{2e}{\bar{z}}.$ $f'(z)=\overline{iE}=-\dfrac{2ei}{z}.$

复势为 $f(z)=2ei\mathrm{Ln}\dfrac{1}{z}+c,(c=c_1+ic_2)$

于是力函数为 $u(x,y)=2e\mathrm{Arg}z+c_1,$

势函数为 $v(x,y)=2e\ln\dfrac{1}{|z|}+c_2.$

如果导线竖立在$z=z_0$，复势为 $f(z)=2ei\mathrm{Ln}\dfrac{1}{z-z_0}+c.$

# 四、小结与思考

了解复变函数可表示平面向量场, 对于某单连通域内给定的平面无源无旋场, 可以作出一解析函数(称为该场的复势), 统一研究该场的分布和变化情况.

# 谢谢！