网络 与 信息安全

复变函数与积分变换
——第十一讲

留数和留数定理

贵州大学计算机科学与技术学
潘平
电话：13078569531
邮箱：panping_17@163.com

目 录

- 留数的定义与计算
- 留数定理

留数的定义与计算

如果 z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则 $f(z)$ 在 z_0 的某个去心邻域 $0<|z-z_0|<R$ 内解析。由解析函数积分的闭路变形原理，对于该邻域内任意一条围绕点的正向简单闭曲线C，$f(z)$ 沿C的积分取定值。即：

$$f(z_0)=\frac{1}{2i\pi}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

定义：

设 $z_0(z_0\neq 0)$为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，C为 $0<|z-z_0|<R$ 内围绕 z_0 的任一条正向简单半曲线，称积分

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_C f(z)dz$$

为函数 $f(z)$ 在 z_0 处的留数，记为

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),z_0]$$

设函数 $f(z)$在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<R$ 的洛朗级数为：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

其中： $$c_n=\frac{1}{2i\pi}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

由洛朗级数的系数公式有：

$$c_{-1}=\frac{1}{2i\pi}\oint_C f(z)dz$$

从而有 $$\operatorname{Re}s[f(z),z_0]=c_{-1}$$

即：

$f(z)$ 在 z_0 的留数就是 $f(z)$在 z_0 以为中心的圆环内的洛朗级数中 $(z-z_0)^{-1}$ 的系数

留数的计算

一般情况下，用定义来计算留数是很困难的，对于 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，极点或本然奇点的情况，其留数都可以用 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}$ 计算，故称该式为计算留数的一般公式。

例如： 由公式可直接推出： $\operatorname{Res}[f(z), z_0]=c_{-1}=\dfrac{1}{2i\pi}\oint_C f(z)dz$

若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，则它在 z_0 点的留数为0；

当 z_0 为 $f(z)=g(z-z_0)$ 的孤立奇点时，如果为 $g(\xi)$ 偶函数，则 $f(z)$ 在点 z_0 的去心邻域内的洛朗级数只含 $\xi=z-z_0$ 的偶次幂，其奇次幂系数均为零。

于是令 $\xi=z-z_0$ 得：

$$\operatorname{Re}s[f(z),z_0]=\operatorname{Re}s[g(\xi),0]=0$$

由此可算出：

对于函数：$\dfrac{\sin(z^2+1)}{z^2\cos z}$ $\dfrac{e^{z^2}}{\sin^2 z}$ $\sin(\cos\dfrac{1}{z})$ 等，

在奇点 $z=0$ 处的留数都为零

将这些函数的变量Z变换为 $z-z_0$ ，z_0 为这些新函数的孤立奇点，它们在点 z_0 的留数也都为零。

为求函数在其孤立奇点的留数，我们只要求出它在点 z_0 的去心邻域的洛朗函数，从而得到 $(z-z_0)^{-1}$ 的系数 c_{-1} ，即函数在点的留数。但对于有些类型的奇点，这样做是繁锁的，并且也没必要。

对于 z_0 为极点的许多情形，用下面的规则更为简便

规则1： 若 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，则：

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

规则2： 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点，则对于任意整数 $n\geq m$ 有：

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$$

规则3： 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，其中， $P(z)$ 和 $Q(z)$ 在点 z_0 都解析，若 $P(z_0)\neq 0$ $Q(z_0)=0$ 且 $Q'(z_0)\neq 0$， z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，且有：

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

说明：

将函数的零阶导数看作它本身，则规则1可看作规则2

当 $n=m=1$ 时有特殊情形，且规则2可取 $m=1$

在使用规则2时，一般取 $n=m$ ，这是因为 n 取得越大，求导次数越多，计算越复杂

例： 求下列函数在指定点的留数

（1） $f_1(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$ 在 $z=0$ 及 $z=1$

（2） $f_2(z)=\dfrac{\cos z}{\sin z}$ 在 $z=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

解：（1） $z=0$ 是 $f_1(z)$ 的简单极点，由规则1，得：

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

$$=\lim_{z\to z_0}\left[z\frac{e^z}{z(z-1)^2}\right]=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{e^z}{(z-1)^2}\right]=1$$

$z=1$ 是 $f_1(z)$ 的二级极点，由规则2，得：

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$$

$$=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{e^z}{z(z-1)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z}\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{e^z(z-1)}{z^2}=0$$

（2） $z=k\pi$ 是 $f_2(z)$ 的一级极点，根据规则3，有：

$$\operatorname{Re}s[f(z),k\pi]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

$$=\frac{\cos z}{(\sin z)'}\Big|_{z=k\pi}=\frac{\cos z}{\cos z}\Big|_{z=k\pi}=1$$

例： 求函数 $f(z)=\sin\left(\frac{2}{z}\right)$ ，在点 $z=0$ 的留数

解： $z=0$ 是函数的本性奇点，在圆环 $0<|z|<\infty$ 的洛朗级数为：

$$f(z)=\sin\left(\frac{2}{z}\right)=\frac{2}{z}-\frac{8}{3!\,z^3}+\frac{2^5}{5!\,z^5}-\cdots$$

可见 $c_{-1}=2$ 因此 $\operatorname{Re}s[f(z),0]=2$

留数定理

如果我们能通过一个或几个定理，就能解决留数的积分计算问题，就能更快更有效的获得问题的解。留数定理就是求解复积分最为便捷和方法。

定理（留数定理）：

若函数 $f(z)$在正向简单闭曲线C上解析，在C的内部除有限个孤立奇点外解析，则：

$$\oint_C f(z)dz = 2i\pi\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k]$$

定理：

若函数 $f(z)$ 在环域 $R<|z|<\infty$ 内解析，（在圆内 $|z|<R$ 可能有无穷多个奇点），则：

$$\oint_C f(z)dz = 2i\pi \operatorname{Re}s[f(\frac{1}{\eta})\frac{1}{\eta^2},0]$$

例： 计算下列积分

（1） $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$ （2） $\oint_{|z|=2}\frac{e^{\sin z}}{z^2(z^2-1)}dz$

（3） $\oint_{|z|=2}\frac{z^5}{1+z^6}dz$ （4） $\oint_{|z|=2}\frac{1}{z\sin(1+z^2)}dz$

解：（1） $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$ 的一级极点；

$z=1$ 是 $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$ 的二级极点；

因此： $\operatorname{Re}s[f(z),0]=1 \qquad \operatorname{Re}s[f(z),1]=0$

因为 $z=0 \quad z=1$ 均在 $|z|=2$ 的圆周内，由留数定理得：

$$\oint_C f(z)dz = 2i\pi\sum_{k=1}^{2}\operatorname{Re}s[f(z),z_k] = 2i\pi[1+0] = 2i\pi$$

（2） $f(z)=\dfrac{e^{\sin z}}{z^2(z^2-1)}$ 在 $|z|=2$ 的内部有一个二级极点 $z=0$

二个一级极点 $z=\pm i$ ，由留数定理得：

$$\operatorname{Re}s[f(z),0]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{e^{\sin z}}{z^2(z^2-1)}\right]=1$$

$$\operatorname{Re}s[f(z),i]=\lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{e^{\sin z}}{z^2(z^2+1)}\right]=-\frac{e^{\sin z}}{2i}$$

$$\operatorname{Re}s[f(z),-i]=\lim_{z\to i}\left[(z+i)\frac{e^{\sin z}}{z^2(z^2+1)}\right]=\frac{e^{\sin z}}{2i}$$

因此 $$\oint_{|z|=2}\frac{e^{\sin z}}{z^2(z^2-1)}dz=2i\pi\left[1-\frac{e^{\sin z}}{2i}+\frac{e^{\sin z}}{2i}\right]=2i\pi[1-\sin(\sinh 1)]$$

（3）被积函数的六个奇点都在的 $|z|=2$ 内部，若利用定理1，显然很麻烦，先作变换 $z=\dfrac{1}{\eta}$ 则有

$$\oint_{|z|=2}\frac{z^5}{1+z^6}dz=2i\pi\operatorname{Re}s\left[\frac{\left(\frac{1}{\eta}\right)^5}{1+\left(\frac{1}{\eta}\right)^6}\frac{1}{\eta^2},0\right]=2i\pi\operatorname{Re}s\left[\frac{1}{\eta(\eta^2+1)},0\right]=2i\pi$$

（4） $f(z)=\dfrac{1}{z\sin(1+z^2)}$ 在环域 $2<|z|<\infty$ 内解析

但在 $|z|<2$ 内有无穷个奇点，利用定理2，得：

$$\oint_{|z|=2}\frac{1}{z\sin(1+z^2)}dz=2i\pi\operatorname{Re}s\left[\frac{1}{\frac{1}{\eta}\sin(1+\eta^2)}\frac{1}{\eta^2},0\right]=\frac{2i\pi}{\sin 1}$$

在复变函数中，对于一些未定型的极限可以使用复变函数的洛必达法则进行

洛必达法则

设 z_0 为函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的零点或极点，且在 z_0 的某个去心邻域内，$f(z)$ 和 $g(z)$ 都不为零，则当 $z \to z_0$ 时，函数 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的极限一定或为无穷，则有：

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

例： 计算积分 $\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{z\sin z}dz$

解： $z=0$ 是二级极点，$z=k\pi$ 为一级极点，这些奇点中只有

$z=0$ 在 $|z|=2$ 内，因此有：

$$\operatorname{Re}s[f(z),0]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{1}{z\sin x}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\sin z}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z}\right)$$

设 $f(z)=\sin z - z\cos z$ ，则 $f'(z)=\cos z-\cos z+z\sin z$

$g(z)=\sin^2 z$ 则 $g'(z)=2\sin z\cos z$

因此有： $\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{2\cos z}=0$

函数在无穷远点的留数

设函数 $f(z)$在 $z=\infty$ 的去心邻域 $R<|z|<\infty$ 内解析，C为该邻域内包含圆周 $|z|=R$ 的一条简单闭曲线，则闭曲线C环绕 $z=\infty$ 的正向就是C环绕 $z=0$ 的负向，因此我们可以定义函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的留数。

定义：

设 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$的孤立奇点，$f(z)$ 在 $z=\infty$ 的去心邻域 $R<|z|<\infty$ 内解析，则 $f(z)$ 在 $z=\infty$的留数定义为：

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2i\pi}\oint_{C} f(z)dz$$

其中：C为包含圆周 $|z|=R$ 的任一条正向简单闭曲线

设函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的去心邻域 $R<|z|<\infty$ 内的洛朗级数为：

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k$$

由洛朗级数的系数公式：

$$c_{-1}=\frac{1}{2i\pi}\oint_{C} f(z)dz$$

有：

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2i\pi}\oint_{C} f(z)dz=-c_{-1}$$

即：

$f(z)$在 $z=\infty$的留数等于它在 ∞ 点去心邻域 $R<|z|<\infty$ 内洛朗级数中 z^{-1} 的系数相反数

定理：

设函数 $f(z)$ 在整个复平面存在有限个孤立奇点，则在 $z=\infty$ 也是 $f(z)$ 的孤立奇点，且：

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,s\left[f(z),z_k\right]+\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=0$$

例： 计算积分 $$\oint_{|z|=2}\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}dz$$

解：

$$f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$$ 有五个一级极点，即：

$$z_k=e^{\frac{2k}{5}i\pi}\quad(k=0,1,2,3,4)$$

在 $|z|=2$ 的内部，直接利用留数定理

$$\oint_C f(z)dz = 2i\pi\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\,s[f(z), z_k]$$

计算五个极点的留数是比较麻烦的。

在 $|z|=2$ 的外部的奇点为一级极点 $z=3$ 和 $z=\infty$，且：

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),3] = \lim_{z\to 3}\left[(z-3)\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}\right] = \frac{1}{243}$$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty] = \mathrm{Re}\,s\left[f(\frac{1}{\eta})\frac{1}{\eta^2},0\right] = 0$$

根据定理可得：$\sum_{k=0}^{4}\mathrm{Re}\,s\left[f(z), z_k\right] + \mathrm{Re}\,s[f(z),3] + \mathrm{Re}\,s[f(z),\infty] = 0$

从而有：

$$\oint_{|z|=2}\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}dz = 2i\pi\sum_{k=0}^{4}\mathrm{Re}\,s\left[f(z), z_k\right]$$

$$= 2i\pi\left\{-\mathrm{Re}\,s[f(z),3] - \mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]\right\} = -\frac{\pi}{121}i$$

谢谢！