网络 与 信息安全

复变函数与积分变换

——第十二讲

保 形 映 射

贵州大学计算机科学与技术学

潘平

电话：**13078569531**

邮箱：**panping_17@163.com**

目 录

这一章,我们从复平面间映射的角度来研究复变函数

保形映射,顾名思义是保持形状的映射.

人们利用保形映射成功地解决了流体力学与空气动力学、弹性力学、电磁学以及其他方面的许多重要问题，比如：

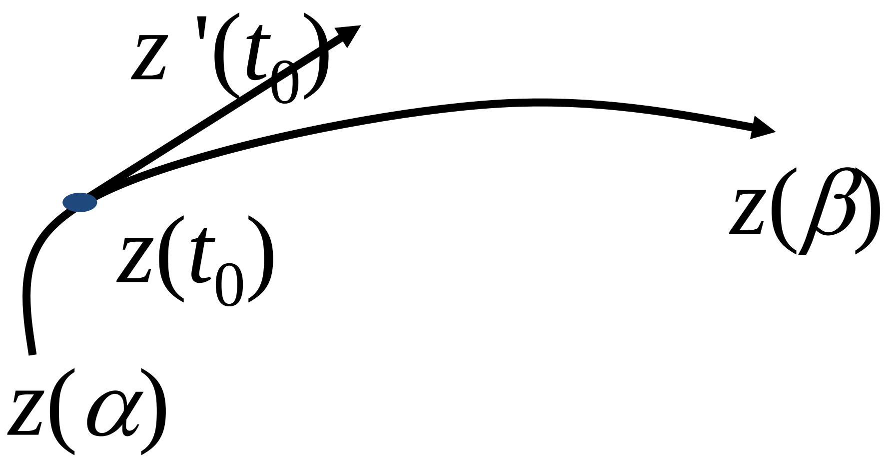
1.网格的保形变换，用以计算船体表面积

2.茹可夫斯基变换，设计机翼，减小空气阻力，增加浮力

曲线的概念

z 平面内的任一条有向曲线C可用 $z=z(t),\ \alpha\le t\le\beta$ 表示, 它的正向取为t增大时点z移动的方向, $z(t)$为一条连续函数.

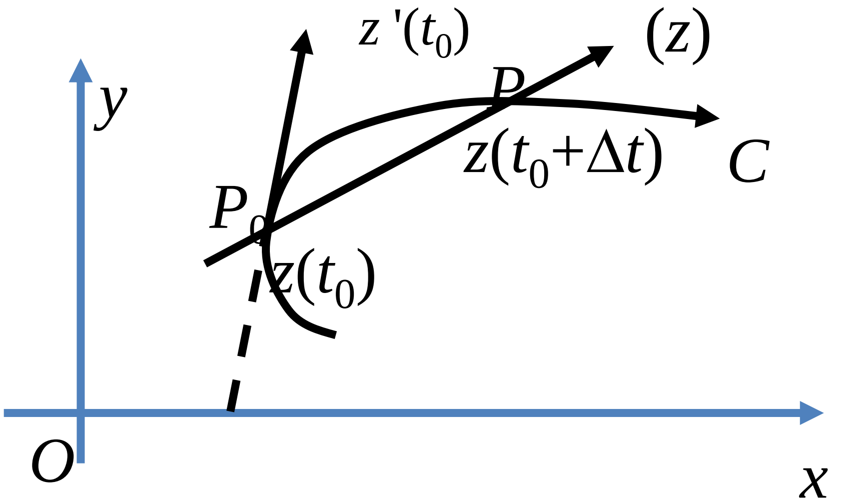
如果$z'(t_0)\neq 0, \alpha<t_0<\beta$, 则我们用$z'(t_0)$表示$C$在点$z_0=z(t_0)$处的$z'(t)$的切线(把起点放取在$z_0$. 与



事实上，如果通过C上两点P_0与P的割线P_0P的正向对应于t增大的方向，则这个方向与表示

$$\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}$$

的方向相同.



当点P沿C无限趋向于点P_0，割线P_0P的极限位置就是C上P_0处的切线. 因此，表示

$$z'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}$$

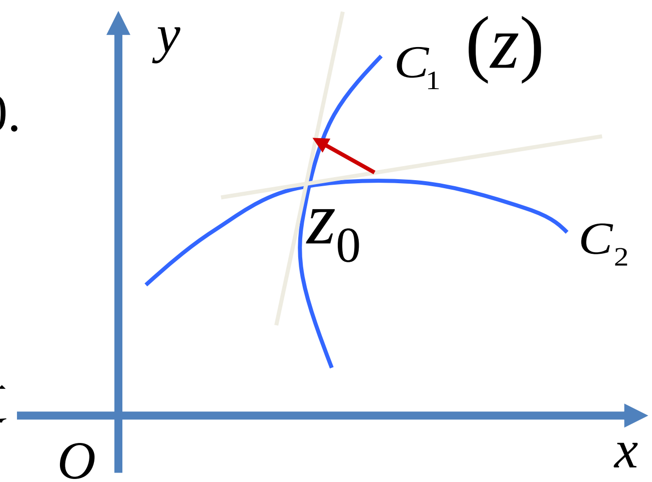
的向量与C相切于点$z_0=z(t_0)$，且方向与C的正向一致.

- 因此，我们有：

1) $\operatorname{Arg} z'(t_0)$就是$z_0$处$C$的切线正向与$x$轴正向间的夹角;

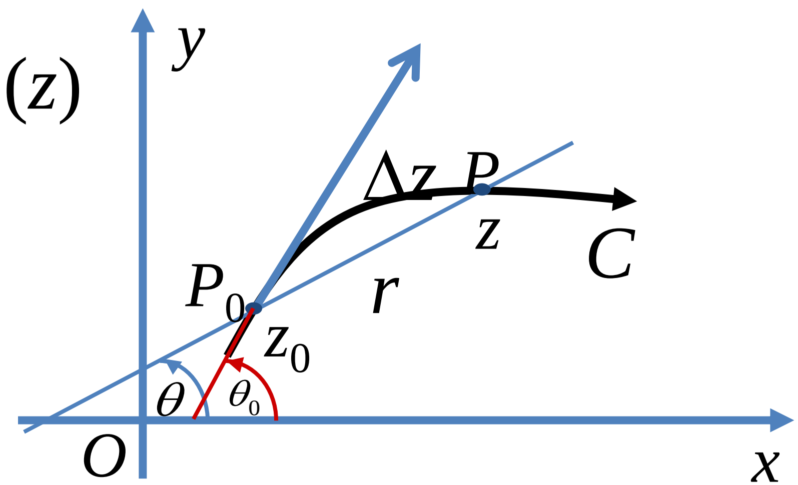
2）相交于一点的两条曲线C_1与C_2正向之间的夹角就是它们交点处切线正向间夹角

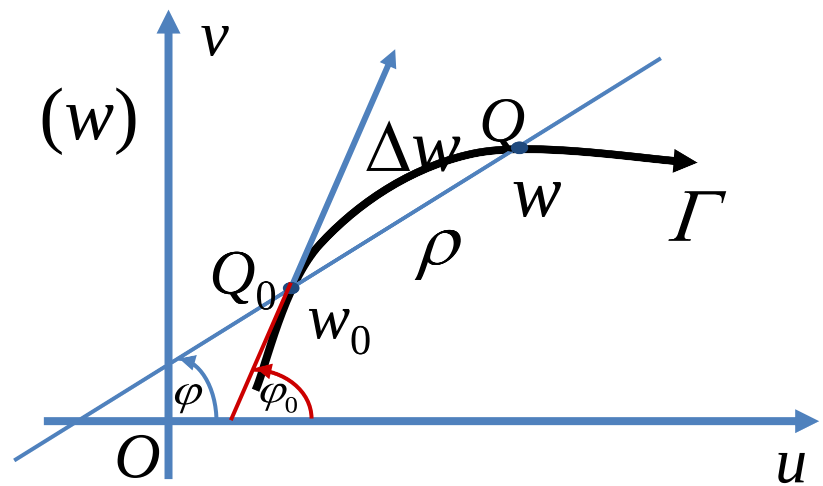
解析函数的导数的几何意义 设函数$w=f(z)$在区域D内解析, z_0为D内的一点, 且$f'(z_0)\neq 0$. 又设C为z平面内通过点z_0的一条有向光滑曲线: $z=z(t)$, $\alpha\leq t\leq\beta$,且$z_0=z(t_0)$, $z'(t_0)\neq 0$, $\alpha<t_0<\beta$. 映射$w=f(z)$将C映射成w平面内通过点z_0的对应点$w_0=f(z_0)$的一条有向光滑曲线Γ: $w=f[z(t)]$, $\alpha\leq t\leq\beta$.

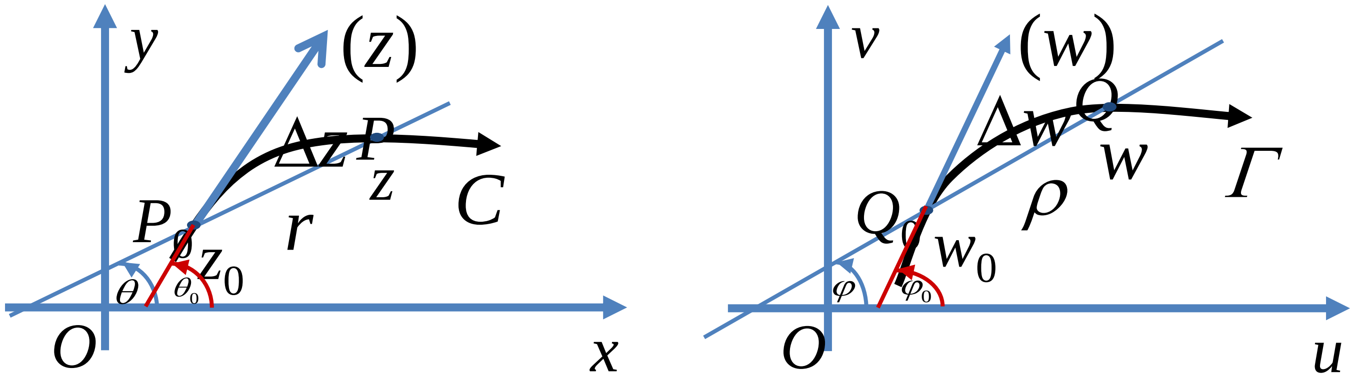


$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{w-w_0}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta w|\mathrm{e}^{i\varphi}}{|\Delta z|\mathrm{e}^{i\theta}}=\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|\mathrm{e}^{i(\varphi-\theta)}$$

$$|f'(z_0)|=\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|,\ Arg\,f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}(\varphi-\theta)=\varphi_0-\theta_0$$







根据复合函数求导法连锁规则, 有$w'(t_0)=f'(z_0)z'(t_0)\neq 0$.

因此, 在Γ上点w_0处也有切线存在, 且切线正向与u轴正向的夹角是

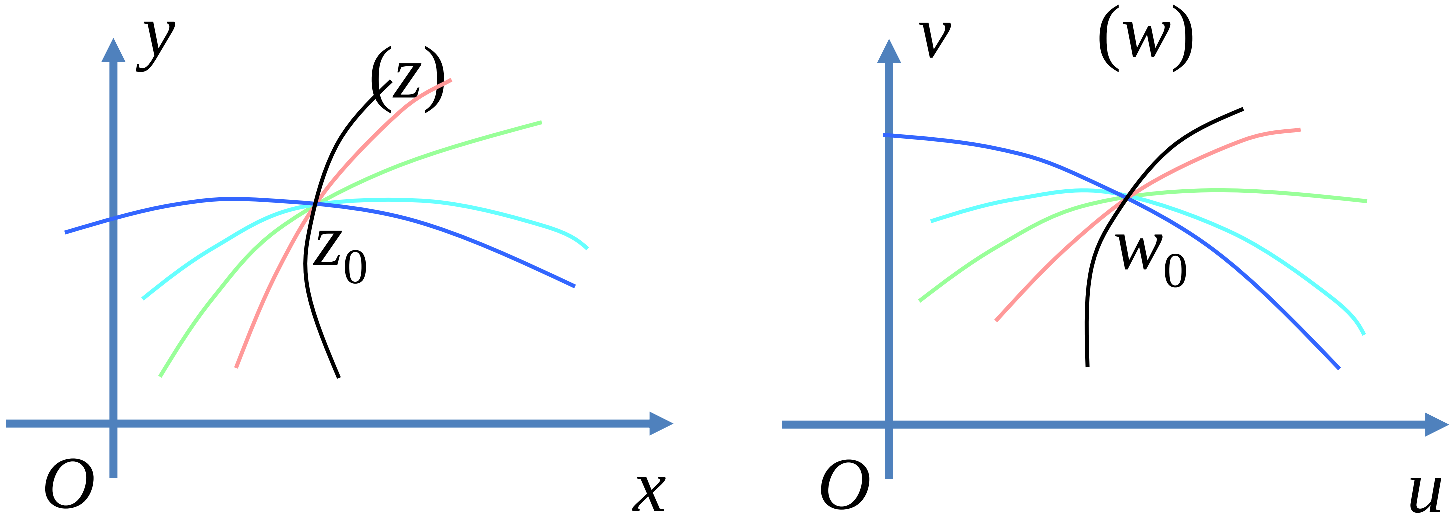
$$\mathrm{Arg}\, w'(t_0)=\mathrm{Arg}\, f'(z_0)+\mathrm{Arg}\, z'(t_0).$$

即$\mathrm{Arg}\, f'(z_0)=\mathrm{Arg}\, w'(t_0)-\mathrm{Arg}\, z'(t_0)=\varphi_0-\theta_0.$

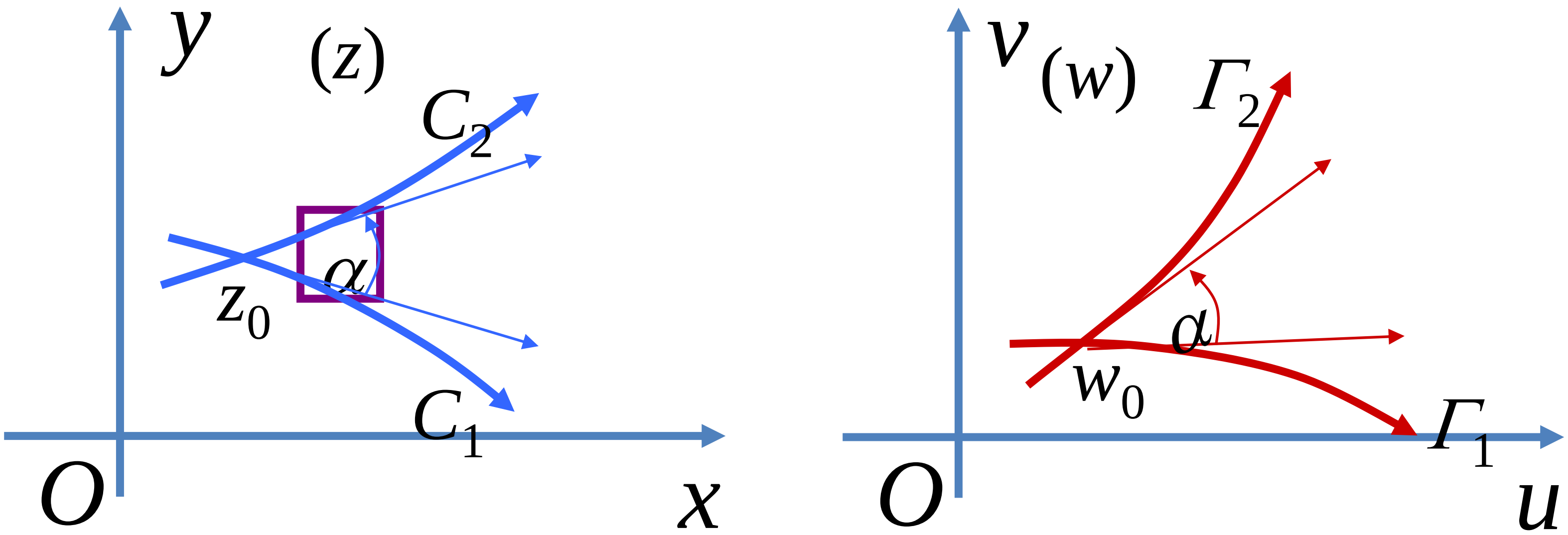
若原来的切线的正向与映射过后的切线的正向之间的夹角理解为曲线C经过$w=f(z)$映射后在z_0处的转动角, 则:

1)导数$f'(z_0)\neq 0$的辐角$\mathrm{Arg}\, f'(z_0)$是曲线C经过$w=f(z)$映射后在z_0处的转动角;

2)转动角的大小与方向跟曲线*C*的形状与方向无关. 所以这种映射具有转动角的不变性.



通过z_0点的可能的曲线有无限多条, 其中的每一条都具有这样的性质, 即映射到w平面的曲线在w_0点都转动了一个角度$\operatorname{Arg} f'(z_0)$.



相交于点z_0的任何两条曲线c_1与c_2之间的夹角,在其大小和方向上都等同于经$w=f(z)$映射后c_1与c_2对应的曲线Γ_1与Γ_2之间的夹角,所以这种映射具有保持两曲线间夹角与方向不变的性质.这种性质称为保角性.

$$\left(\varphi_1 - \theta_1 = \varphi_2 - \theta_2 \Rightarrow \theta_2 - \theta_1 = \varphi_2 - \varphi_1 = \alpha \right)$$

3) $|f'(z_0)| = \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{|w-w_0|}{|z-z_0|} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ 称为C在z0的伸缩率.

上式表明 $|f'(z)|$是两象点间距离和两原象点间距离比值的极限，从而可视为映射$w=f(z)$在点z_0处沿曲线C的伸缩率, 它与曲线 C 的形状及方向无关. 所以这种映射又具有**伸缩率不变性**.

上式可视为 $|f(z)-f(z_0)| \approx |f'(z_0)||z-z_0|$

$|f'(z_0)|>1$,表示从z_0出发的任一无穷小距离伸长;

$|f'(z_0)|<1$,表示从z_0出发的任一无穷小距离缩短;

$|f'(z_0)|=1$,表示从z_0出发的任一无穷小距离不变。

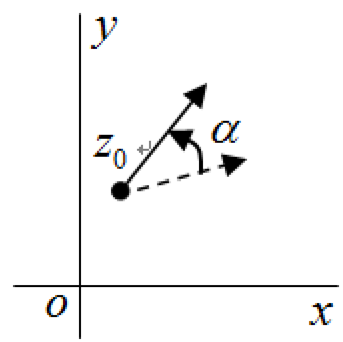
保形映射的概念

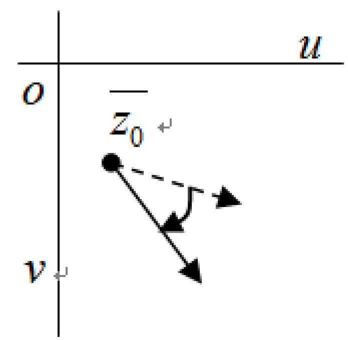
定义 设函数$w=f(z)$在z_0的邻域内是一对一的，在z_0具有保角性和伸缩率不变性，则称映射$w=f(z)$在z_0是保形的，或称$w=f(z)$在z_0是保形映射. 如果映射$w=f(z)$在D内的每一点都是保形的，就称$w=f(z)$是区域D内的保形映射.

仅具有保角性和伸缩率不变性的映射称为**第一类保形映射**；

而具有伸缩率不变性和保持角度绝对值不变而旋转方向相反的映射称为**第二类保形映射**。

例如 $w=\overline{z}$ 是第二类保形映射。





几个初等函数所构成的保形映射

1. 幂函数 $w=z^n$($n\geq 2$为自然数)在z平面内处处可导, 它的导数是

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=nz^{n-1},\qquad \text{因而当}z\neq 0\text{时,}\qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\neq 0.$$

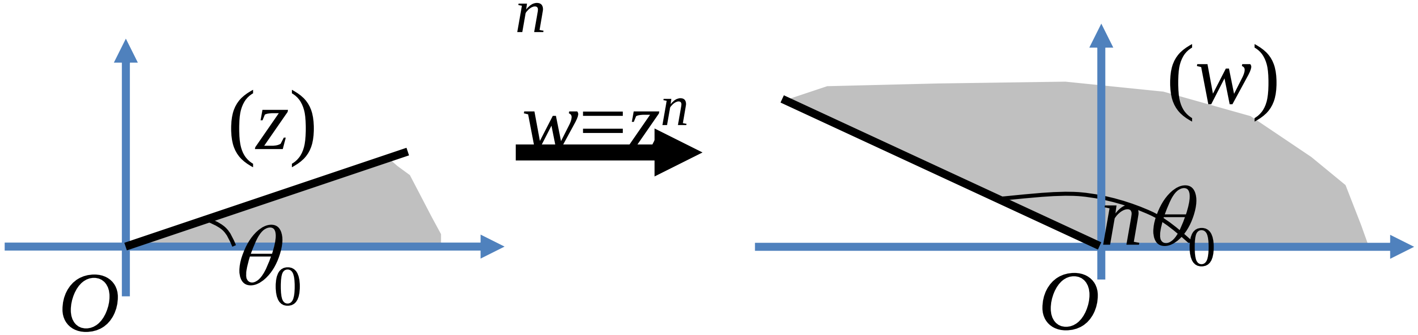
所以, 在z平面内除去原点外, 由$w=z^n$所构成的映射处处保形.

$$z=re^{i\theta},\ w=\rho e^{i\varphi}\xrightarrow{w=z^n}\begin{cases}\rho=r^n\ \text{圆周}\mapsto\text{圆周};\\ \varphi=n\theta\ \text{射线}\mapsto\text{射线}。\end{cases}$$

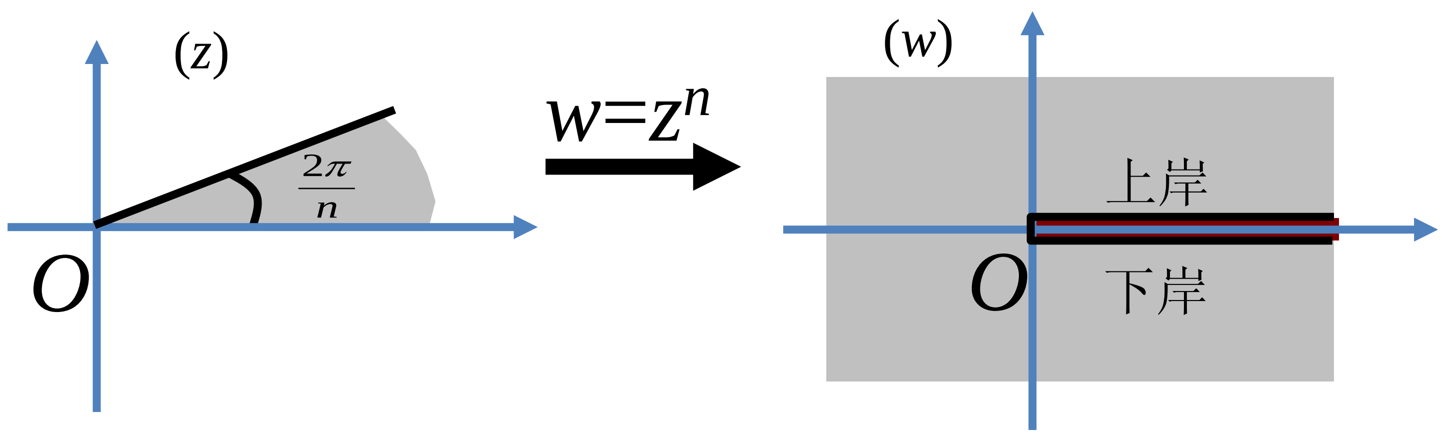
映射的特点是: **把以原点为顶点的角形域映射成以原点为顶点的角形域, 但张角变成了原来的n倍.**

角形域: $0<\theta<\theta_0 \mapsto$ 角形域: $0<\varphi<n\theta_0$

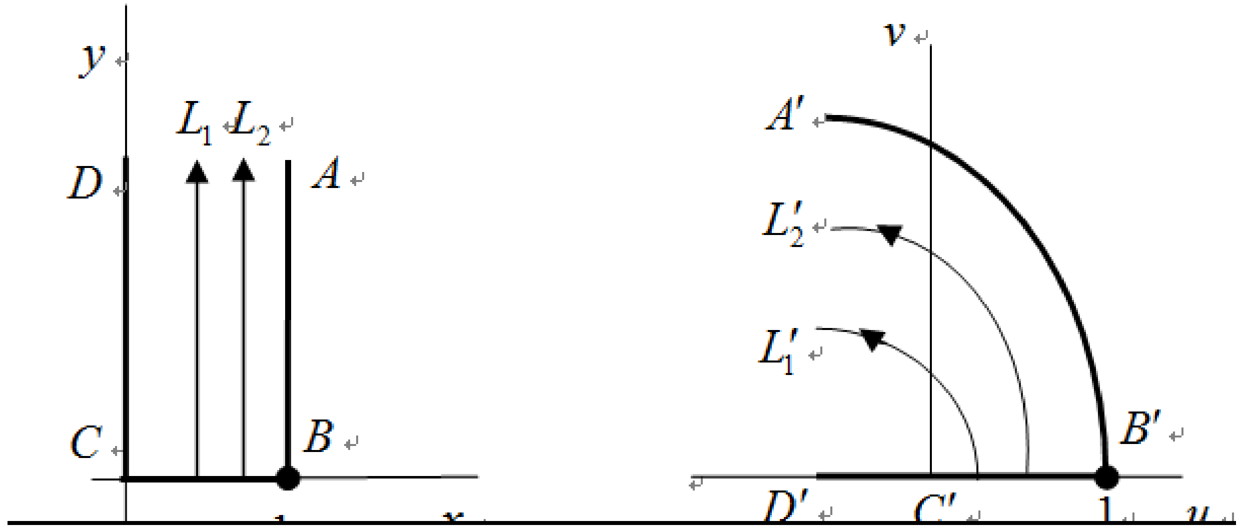
(由单值性可知 $\theta_0<\dfrac{2\pi}{n}$)



特别, $0<\theta<\dfrac{2\pi}{\mathrm{n}} \mapsto$ 沿实轴剪开的w平面: $0<\varphi<2\pi$.



例： 求$\omega=z^2$把角形域$0<\arg z<\pi/4$映射成何区域

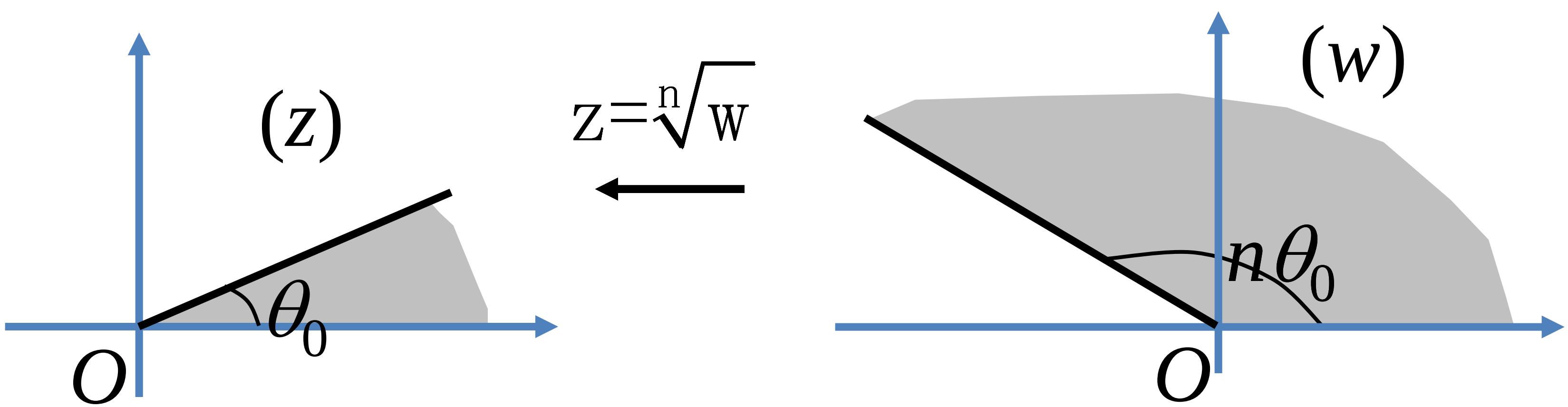


$f'(1+i)=2(1+i)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$在$z=i$处的伸缩率是$2\sqrt{2}$,

旋转角是$\dfrac{\pi}{4}$　　注意：$w=z^2$在$z=0$处就不是保角映射

根式函数z=$\sqrt[n]{w}$： $0<\varphi<n\theta_0 \mapsto 0<\theta<\theta_0 \ (\theta_0<\dfrac{2\pi}{n})$

于是w=z^{n}和z=$\sqrt[n]{w}$的映射特点是扩大与缩小角形域。

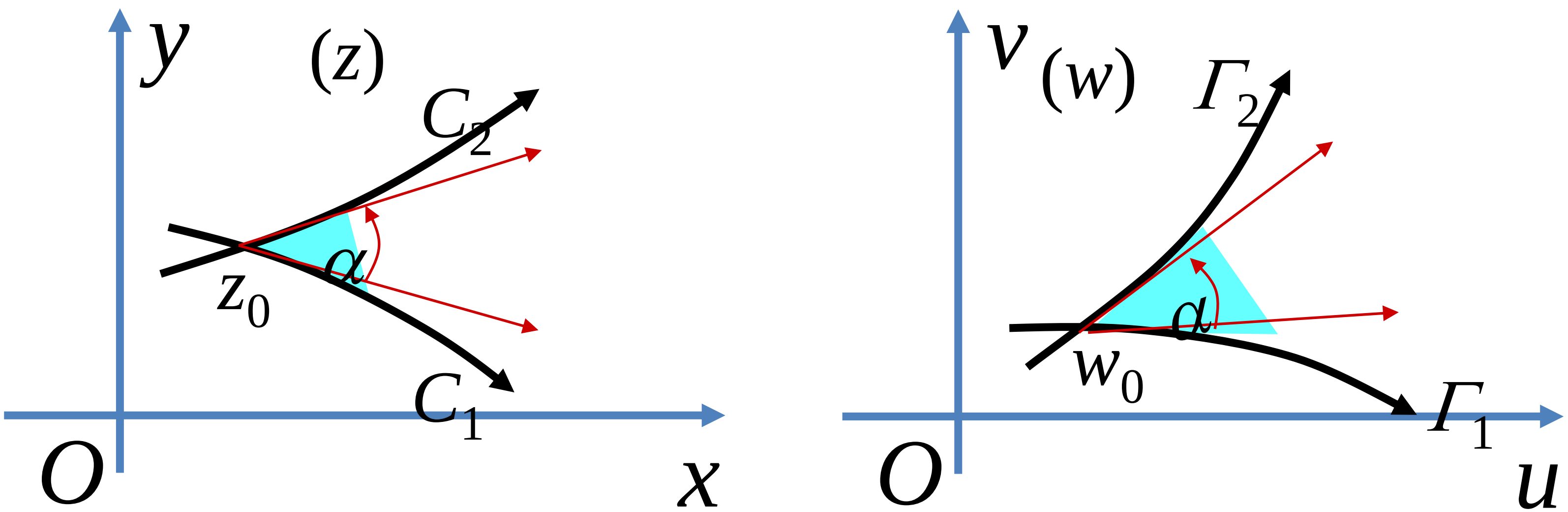


定理1： 设函数$w=f(z)$在区域D内解析，z_0为D内的一点，且$f'(z_0)\neq 0$，则映射$w=f(z)$在z_0具有两个性质：

1)**保角性**. 即通过z_0的两条曲线间的夹角跟经过映射后所得两曲线间的夹角在大小和方向上保持不变。

2)**伸缩率的不变性**. 即通过z_0的任何一条曲线的伸缩率均为$|f'(z_0)|$而与其形状和方向无关.

定理一的几何意义.



在D内作以z_0为其一个顶点的小三角形, 在映射下, 得到一个以w_0为其一个顶点的小曲边三角形, 这两个三角形对应边长之比近似为$|f'(z_0)|$, 有一个角相等, 则这两个三角形近似相似.

定理2 如果函数$w=f(z)$在z_0解析, 且$f'(z_0)\neq 0$, 则映射$w=f(z)$在z_0是保形的, 而且$\mathrm{Arg}\, f'(z_0)$表示这个映射在z_0的转动角, $|f'(z_0)|$表示伸缩率.

如果解析函数$w=f(z)$在D内是一一的,且处处有$f'(z)\neq 0$, 则映射$w=f(z)$是D内的保形映射.

保形映射是把区域双方单值的映射成区域，在每一点保角，在每一点具有伸缩率不变性。

例如函数 $w=e^z$ 在 $0<Imz<4\pi$ 不是保形的；

在 $0<\mathrm{Im}\,z<2\pi$ 是保形的。

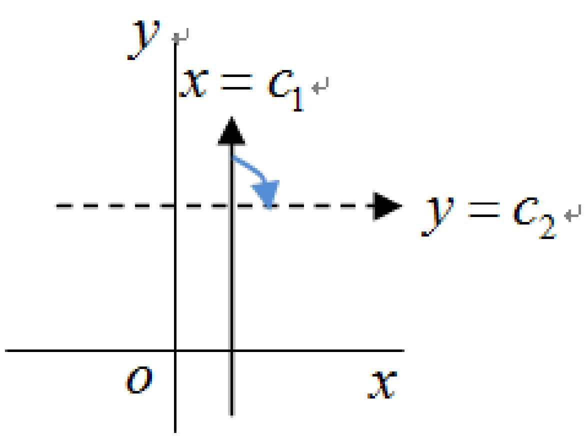
2. 指数函数 $w = e^z$由于在z平面内$w' = e^z \neq 0$。所以, 由 $w = e^z$所构成的映射是$0<y<2\pi$上的保形映射.

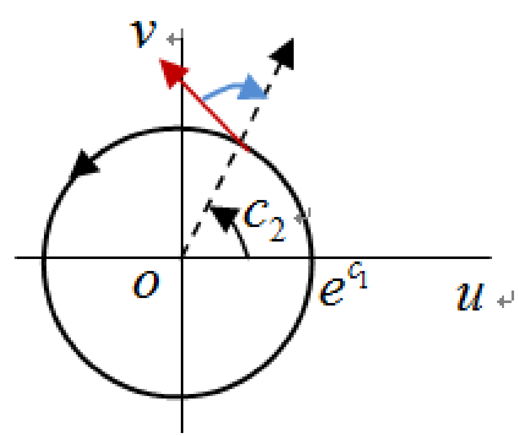
设$z = x+iy$, $w = \rho e^{i\varphi}$, 则$w = e^z = e^{x+iy} = \rho e^{i\varphi}$ 推出

$\rho = e^x$： z平面上垂直线x映射成w平面上圆周ρ;

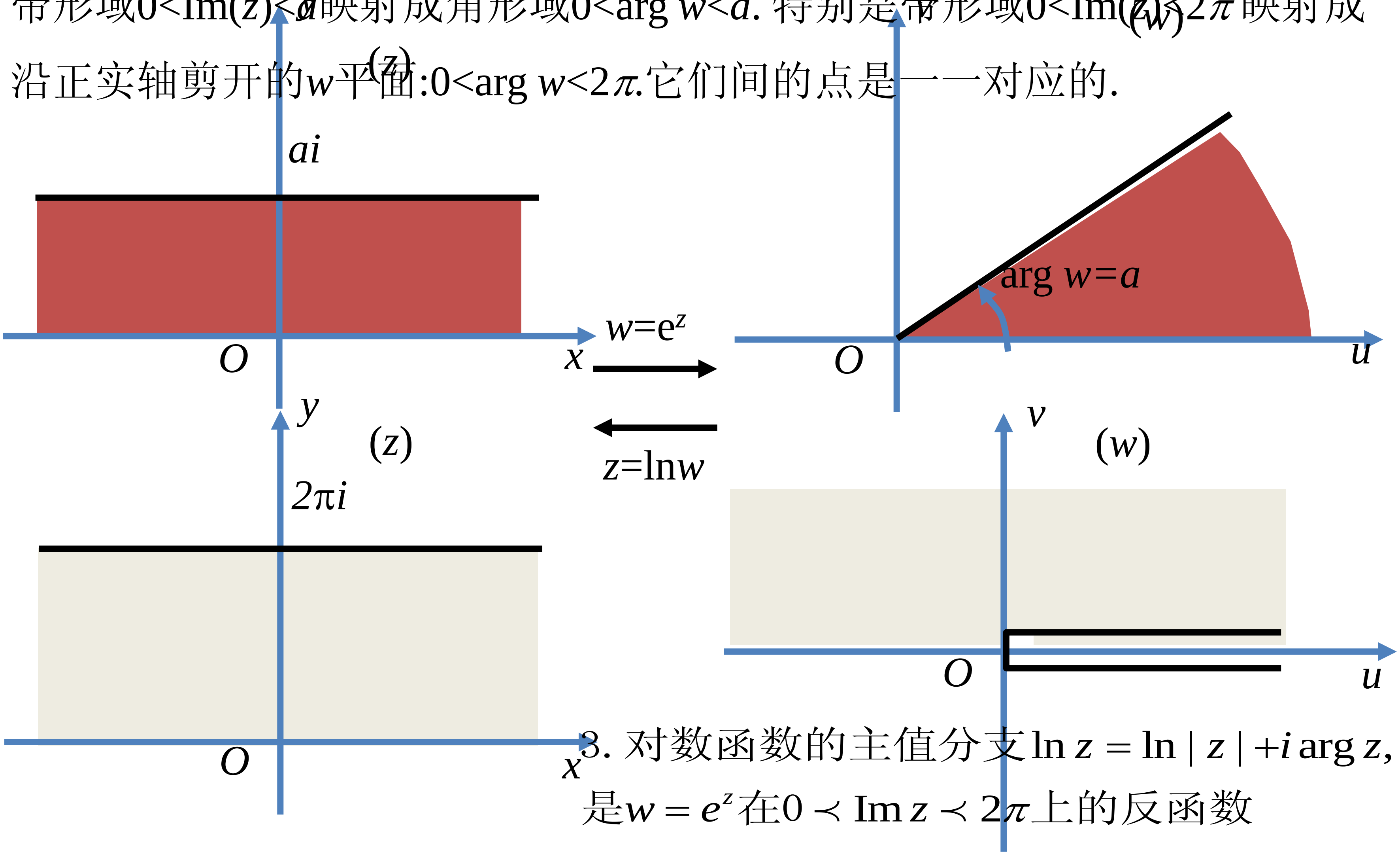
（x=0 单位圆周,x<0 单位圆内,x>0 单位圆外）

$\varphi = y$： z平面上水平直线y映射成w平面上射线φ。





带形域$0<\mathrm{Im}(z)<a$映射成角形域$0<\arg w<a$. 特别是带形域$0<\mathrm{Im}(z)<2\pi$映射成沿正实轴剪开的w平面:$0<\arg w<2\pi$.它们间的点是一一对应的.



3. 对数函数的主值分支$\ln z=\ln|z|+i\arg z$,
是$w=e^z$在$0<\operatorname{Im} z<2\pi$上的反函数

几个初等函数的映射

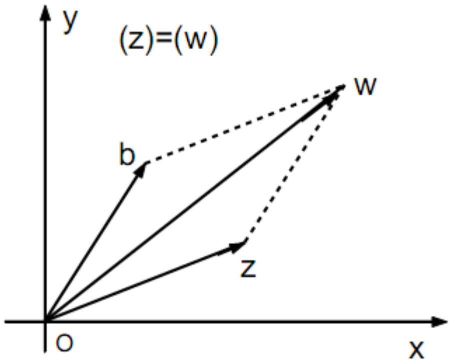
6.1.1.线性变换 : $w = az + b$.(伸缩,旋转和平移的复合)

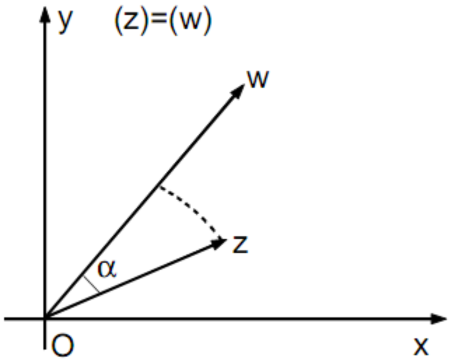
根据复数的指数表达式, 记$a = |a|e^{i\alpha}, b = b_1 + ib_2$

$Z = (|a|r)e^{i(\alpha+\theta)}, w = Z + b = Z + b_1 + ib_2$

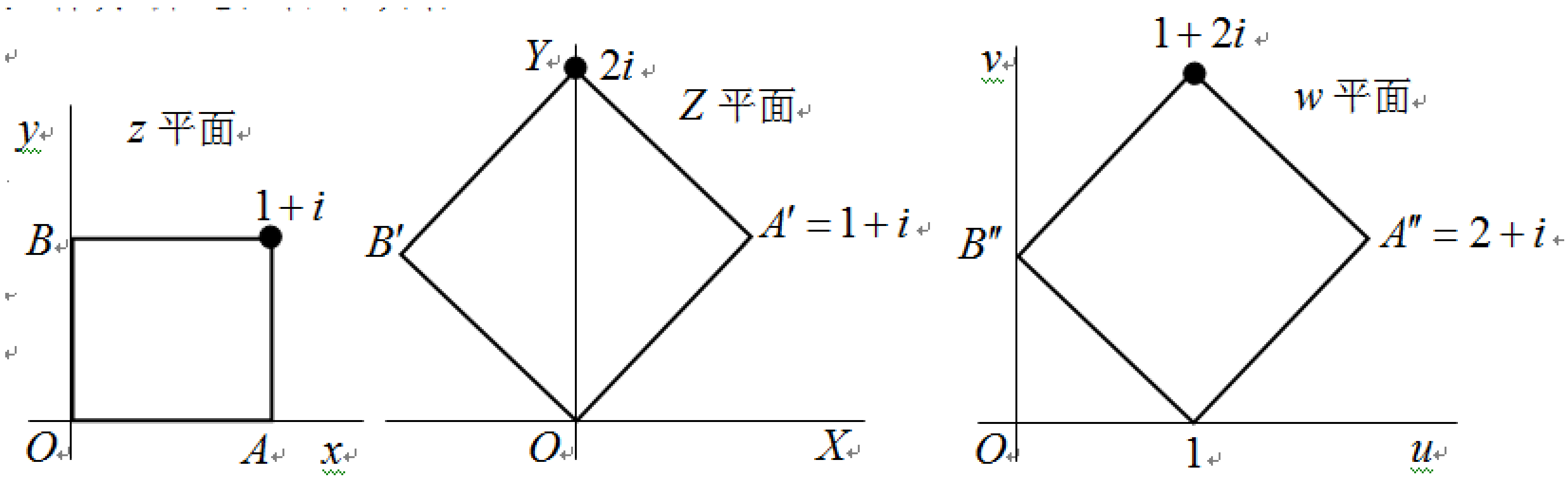
1) $w = z + b$. 平移映射.

2) $w = az(a \neq 0)$. 旋转与伸长 (或缩短) 映射.





例6. 1:求z平面的单位正方形经映射$w=(1+i)z+1$的像.



线性变换,保持形状不变,将圆(方)映成圆(方)

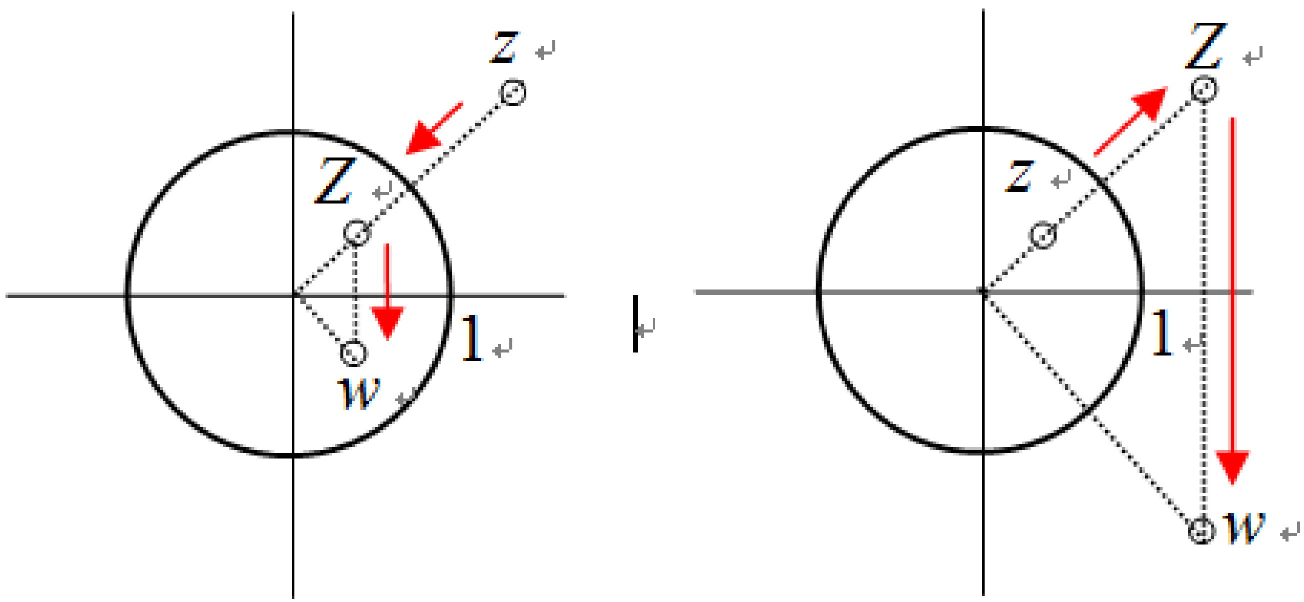
如果把直线看成是半径无穷大的圆周, 那么映射

$$w = az + b \quad (a \neq 0)$$

在扩充复平面上把圆周映射成圆周. (保圆性)

6.1.2.复反演映射$w=\dfrac{1}{z},(z\neq 0)$

是$Z=\dfrac{z}{|z|^2}$和$w=\overline{Z}$的复合映射



如果补充反演映射的定义

$$w=T(z)=\frac{1}{z}\ \ (z\neq 0),T(0)=\infty,T(\infty)=0$$

则反演映射推广到扩充复平面 C_∞

定理6.1 复反演映射具有将圆周映射成圆周的特性（保圆性）和保角性.

证明：记$z=x+iy,w=u+iv$,根据等式$w=\dfrac{1}{z}$得

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},v=\frac{-y}{x^2+y^2},x=\frac{u}{u^2+v^2},y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

方程 $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$ 满足$b^2+c^2>4ad$时

$a=0$表示直线,表示$a\neq0$圆周

代入x,y 变为方程 $d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$。

当$a\neq0,d\neq0$：圆周映射为圆周;

当$a\neq0,d=0$：圆周映射成直线;

当$a=0,d\neq0$：直线映射成圆周;

当$a=0,d=0$：直线映射成直线.

这就是说, 映射$w=1/z$把圆周映射成圆周. 或者说, 映射$w=1/z$具有保圆性.

讨论保形性: $w=\dfrac{1}{z}$,这时$w'=\left(\dfrac{1}{z}\right)'=\dfrac{-1}{z^2}$

当$z\neq 0, z\neq\infty$时是解析函数,因此是保形映射.

而当$z=0$时$w=\infty$, $z=\infty$时$w=0$,对这两点作保形映射的补充规定,任何穿过$z=0$点的两条曲线在0点的夹角,就是$w=1/z$在无穷远处的两条曲线的夹角.

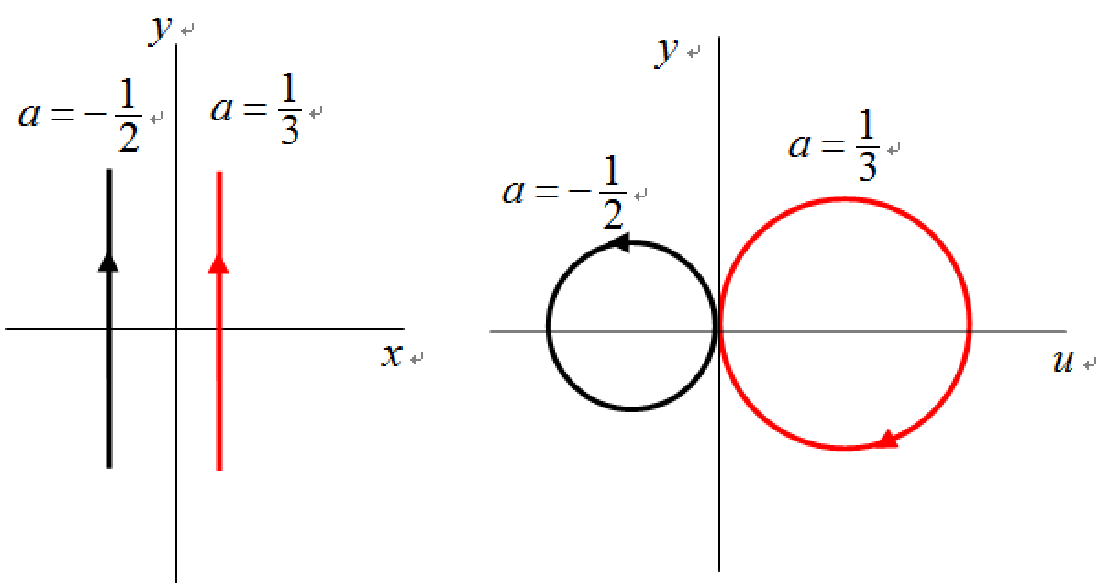
则$1/z$在整个扩充复平面是保形的.

例6. 2 求直线$x=a,(a\neq 0)$，在映射$w=\dfrac{1}{z}$下的像

解：$z=a+iy,w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{a}{a^2+y^2}+i\dfrac{-y}{a^2+y^2}$

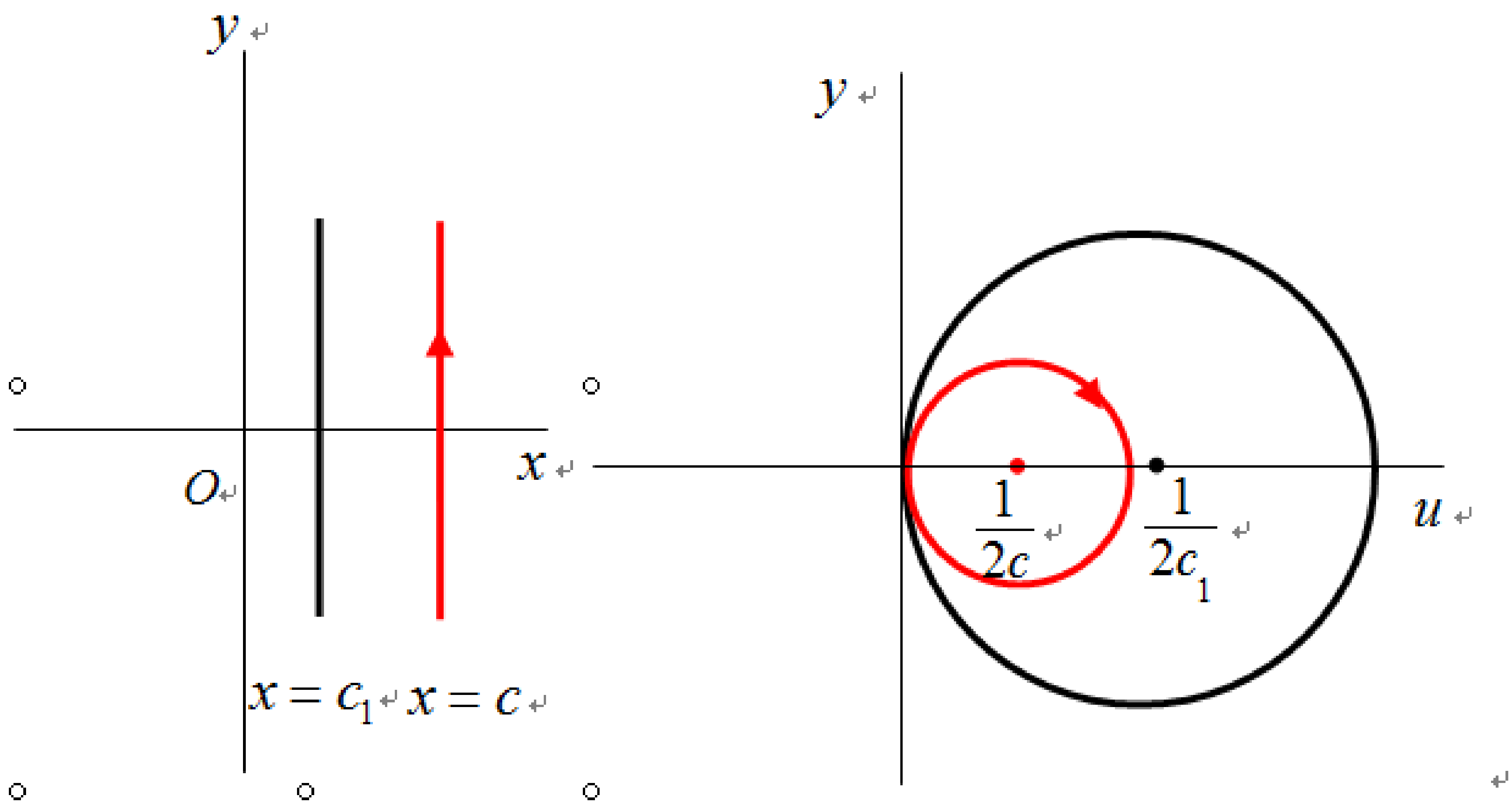
$$(u-\frac{1}{2a})^2+v^2=(\frac{1}{2a})^2$$

如果a分别等于$1/3$和$-1/2$，则变换如图 6. 3 所示



$a=-\frac{1}{2}$　$a=\frac{1}{3}$

例6.3 右半平面$x \geq c_1, (c_1 \succ 0)$,在映射$w=\dfrac{1}{z}$下变为何区域



分式线性映射

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\left(\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}\rightarrow ad-bc\neq 0\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,z}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

$$\text{求逆映射}:cwz+dw-az-b=0$$

$$z=\frac{-dw+b}{cw-a},(-a)(-d)-bc\neq 0$$

两个分式线性映射的复合,仍是分式线性映射. 例如

$$w=\frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}(\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0),$$

$$\zeta=\frac{\alpha'z+\beta'}{\gamma'z+\delta'}(\alpha'\delta'-\beta'\gamma'\neq 0),$$

则

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

式中$(ad-bc)=(\alpha\delta-\beta\gamma)(\alpha'\delta'-\beta'\gamma')\neq 0$

分式线性映射分解为一些简单映射的复合,

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\left(\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}\rightarrow ad-bc\neq 0\right)$$

当$c=0$时, $w=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$是线性变换$(ad\neq 0)$

当$c\neq 0$时, $w=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c}\cdot\dfrac{1}{cz+d}\quad(ad-bc\neq 0)$

$$Z=cz+d, W=\frac{1}{Z}, w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}W\quad(ad-bc\neq 0)$$

由此可见, 一个一般形式的分式线性映射是由下列三种特殊映射复合而成:

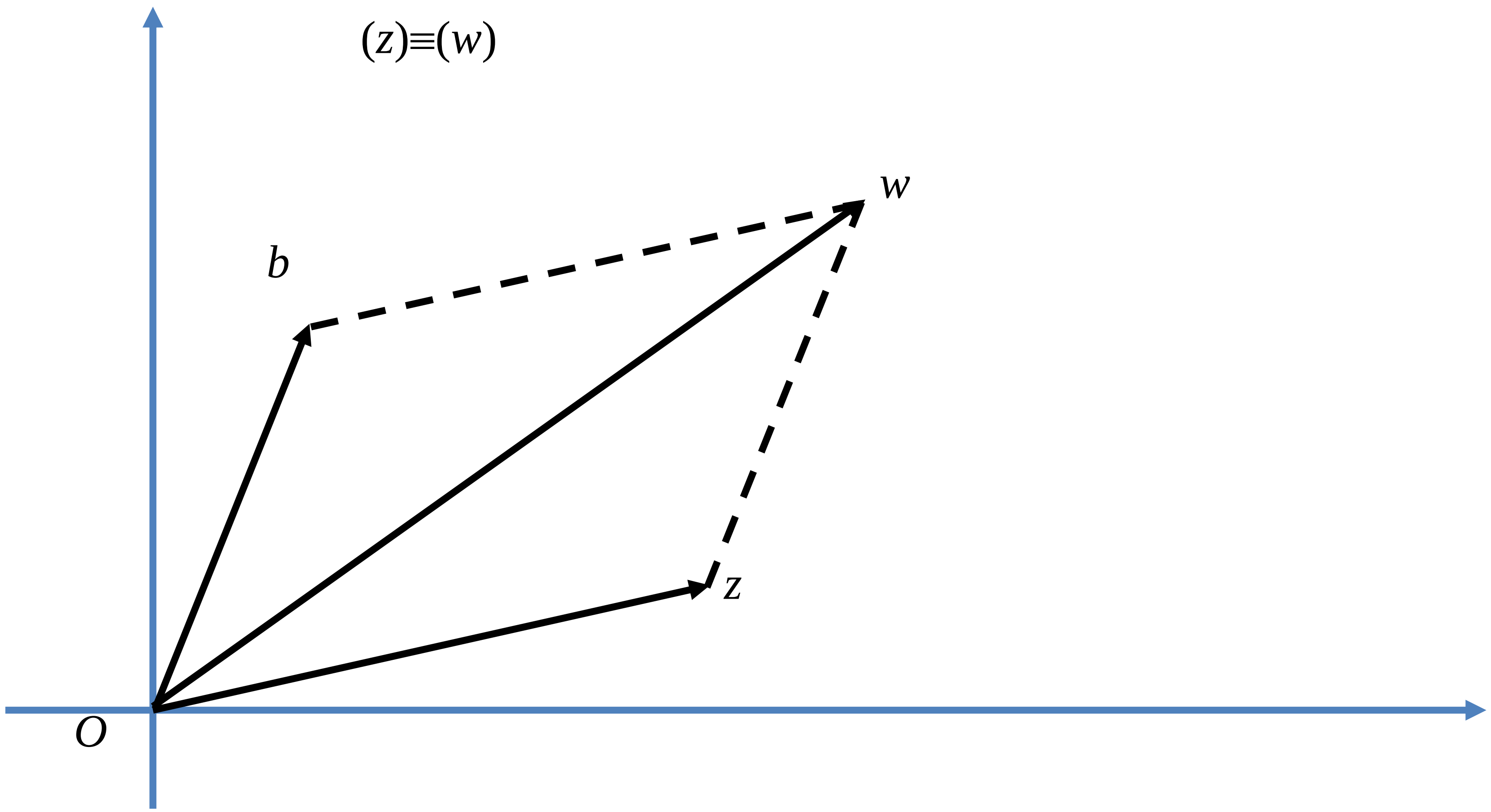
$$\text{i)} \qquad w = z + b;$$

$$\text{ii)} \qquad w = az;$$

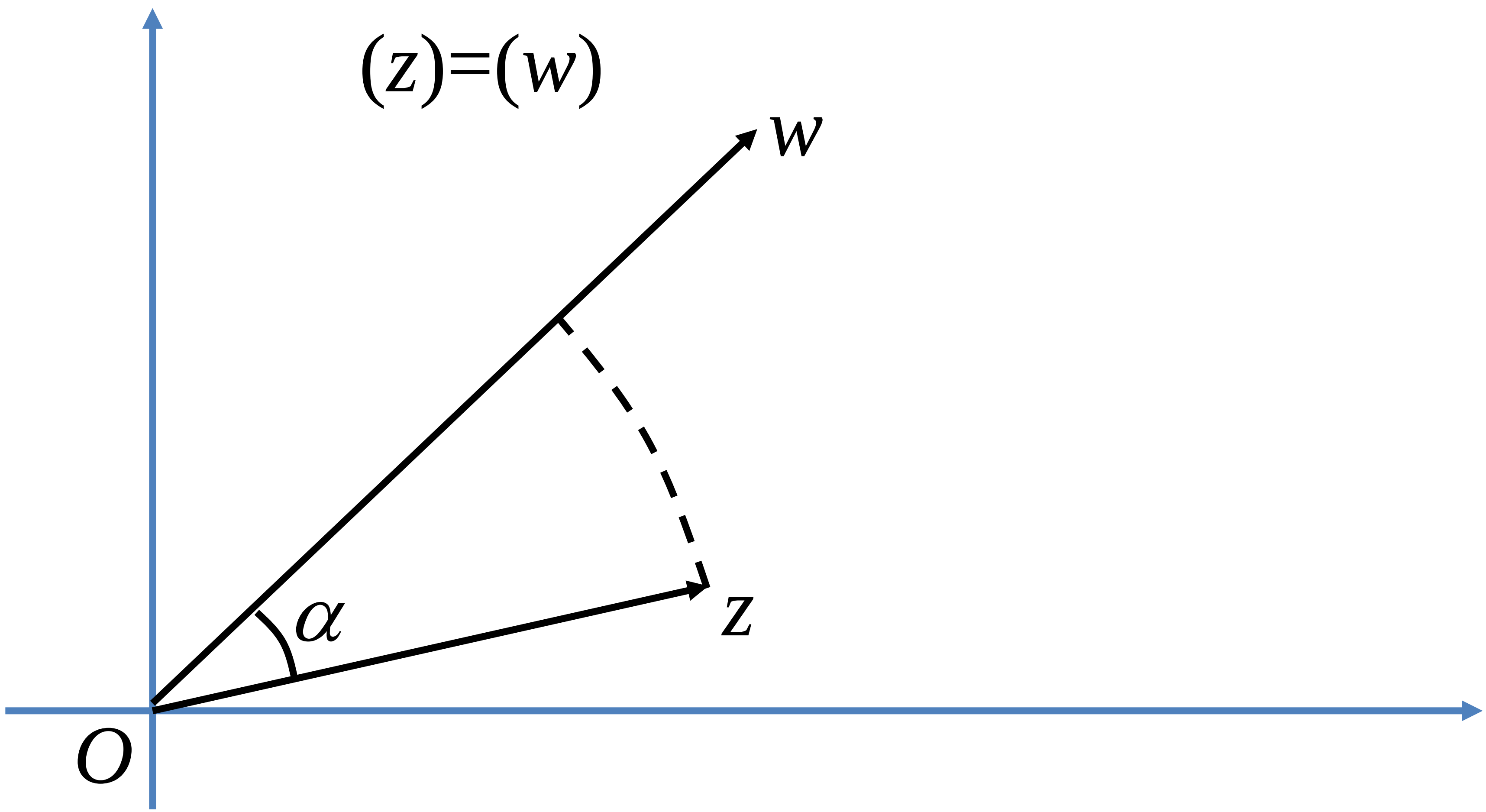
$$\text{iii)} \qquad w = \frac{1}{z}$$

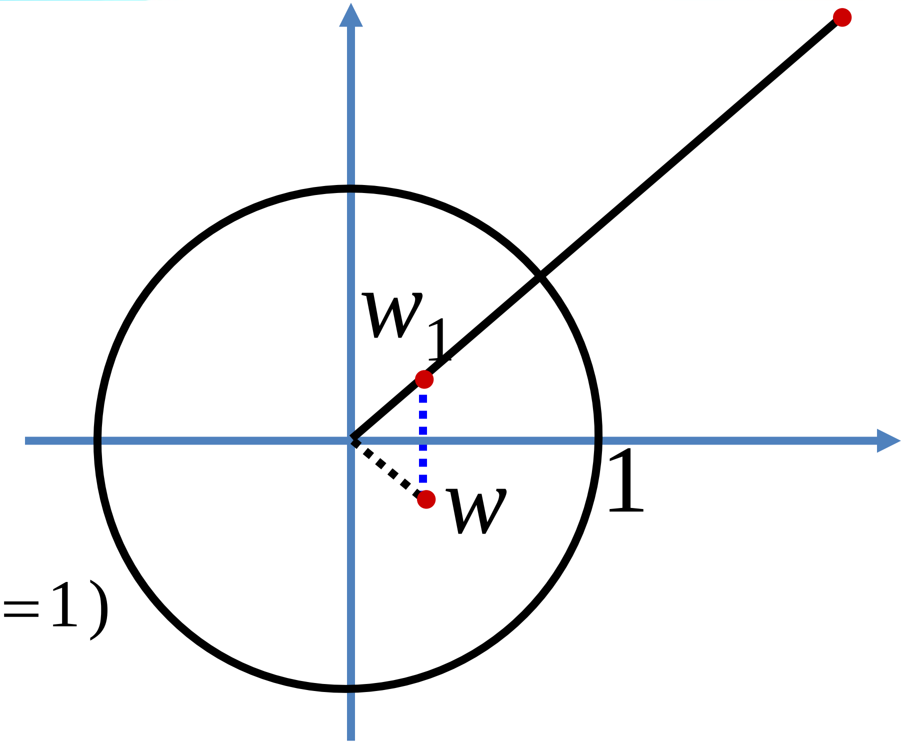
- 下面讨论三种映射, 为了方便画图, 暂且将w平面看成是与z平面重合的.

i)$w=z+b$. 这是一个平移映射. 因为复数相加可以化为向量相加, z沿向量b的方向平移一段距离$|b|$后, 就得到w.



ii) $w=az$, $a\neq 0$. 这是一个旋转与伸长(或缩短)的映射. 设 $a=\lambda e^{i\alpha}$ 将 z 先转一个角度α, 再将$|z|$伸长(或缩短) λ倍后, 就得到 w.





$$\text{iii)}\ w=\frac{1}{z}\ \Rightarrow\quad w_1=\frac{1}{\overline{z}},\ w=\overline{w}_1$$

$$\left(z=re^{i\theta},\ w_1=\frac{1}{r}e^{i\theta},\ |z|\cdot|w_1|=r\cdot\frac{1}{r}=1\right)$$

要从z作出$w=\frac{1}{z}$,应先作出点z关于圆周$|z|=1$对称的点w_1,然后再作出点w_1关于实轴对称的点.即得w.

而i)与ii)是平移，旋转和伸缩变换显然是保形的，所构成的复合映射 $w=az+b$在整个扩充复平面上是保形的,复反演映射iii)在整个扩充复平面上也是保形的,而分式线性映射是上述三种映射复合而构成的,因此有

定理1： 分式线性映射在扩充复平面上是一一对应的, 且具有保角性.

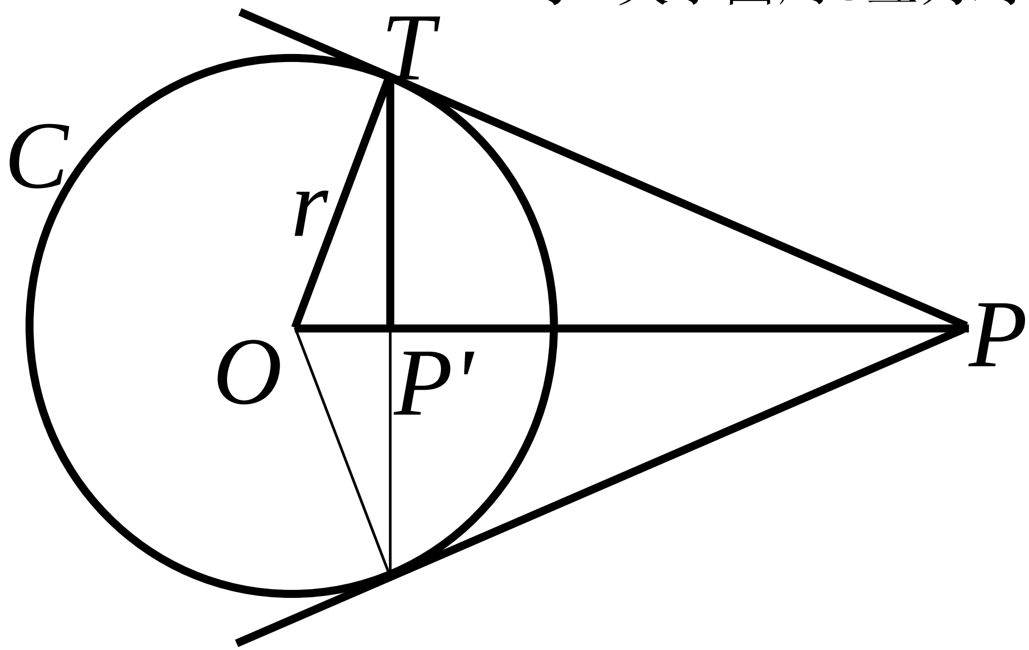
定理2： 分式线性映射将扩充 z平面上的圆周映射成扩充w平面上的圆周, 即具有保圆性.

根据保圆性, 在分式线性映射下, 如果给定的圆周或直线上没有点映射成无穷远点, 则它就映射成半径为有限的圆周; 如果有一个点映射成无穷远点, 它就映射成直线.

3. 保对称性

圆周的对称点

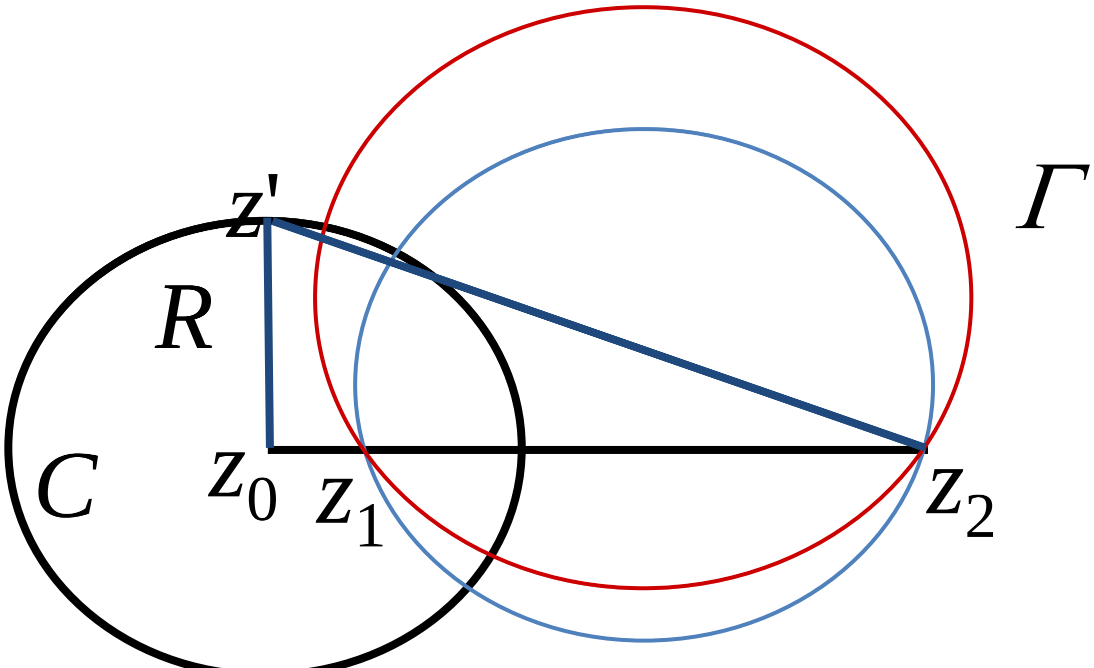
P与P'关于圆周C互为对称点



- $OP \bullet OP' = r^2$,
- 因为$\Delta OP'T$相似于ΔOPT. 因此,
- $OP':OT = OT:OP$, 即$OP \bullet OP' = OT^2 = r^2$.

3. 保对称性

> z_1,z_2是关于圆周C的一对对称点的充要条件是经过z_1,z_2的任何圆周Γ都与C正交.



定理3： 设点z_1,z_2是关于圆周C的一对对称点, 则 在分式线性映射下, 它们的象点w_1与w_2也是关于C的象曲线Γ的一对对称点.

[证] 设经过w_1与w_2的任一圆周Γ'是经过z_1与z_2的圆周Γ由分式线性映射过来的. 由于Γ与C正交, 而分式线性映射具有保角性, 所以Γ'与C'(C的象)也必正交, 因此, w_1与w_2是一对关于C'的对称点.

唯一决定分式线性映射的条件

分式线性映射

$$\frac{az+b}{cz+d}$$

中含有四个常数a,b,c,d. 但是, 如果用这四个数中的一个去除分子和分母, 就可将分式中的四个常数化为三个常数. 所以, 上式中实际上只有三个独立的常数. 因此, 只需给定三个条件, 就能决定一个分式线性映射.

定理6.3 在z平面上任意给定三个相异的点z_1,z_2,z_3, 在w平面上也任意给定三个相异的点w_1,w_2,w_3, 则存在唯一的分式线性映射, 将$z_k(k=1,2,3)$依次映射成$w_k(k=1,2,3)$.

[证] 设$w=\dfrac{az+b}{cz+d}(ad-bc\neq 0)$,将 $z_k\ (k=1,2,3)$

依次映射成 $w_k\ (k=1,2,3)$,即

$$w_k=\frac{az_k+b}{cz_k+d}.\ (k=1,2,3)$$

因而有$w-w_k=\dfrac{(z-z_k)(ad-bc)}{(cz+d)(cz_k+d)},(k=1,2)$

及$w_3-w_k=\dfrac{(z_3-z_k)(ad-bc)}{(cz_3+d)(cz_k+d)}.\ (k=1,2)$

由此得：

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}. \quad (6.3.1)$$

- 这就是所求的分式线性映射. 如果有另外一个分式线性映射, 也把z平面上三个相异点z_1,z_2,z_3依次映射成w平面上的三个相异点w_1,w_2,w_3, 则重复上面的步骤, 消去常数后, 最后得到的仍然是(6.3.1)式. 所以(6.3.1)式是由三对相异的对应点唯一确定的分式线性映射.

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}. \quad (6.3.2)$$

若$f(z_i)=w_i\ (i=1,2)$，则$\dfrac{w-w_1}{w-w_2}=k\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ (k−待定复常数)

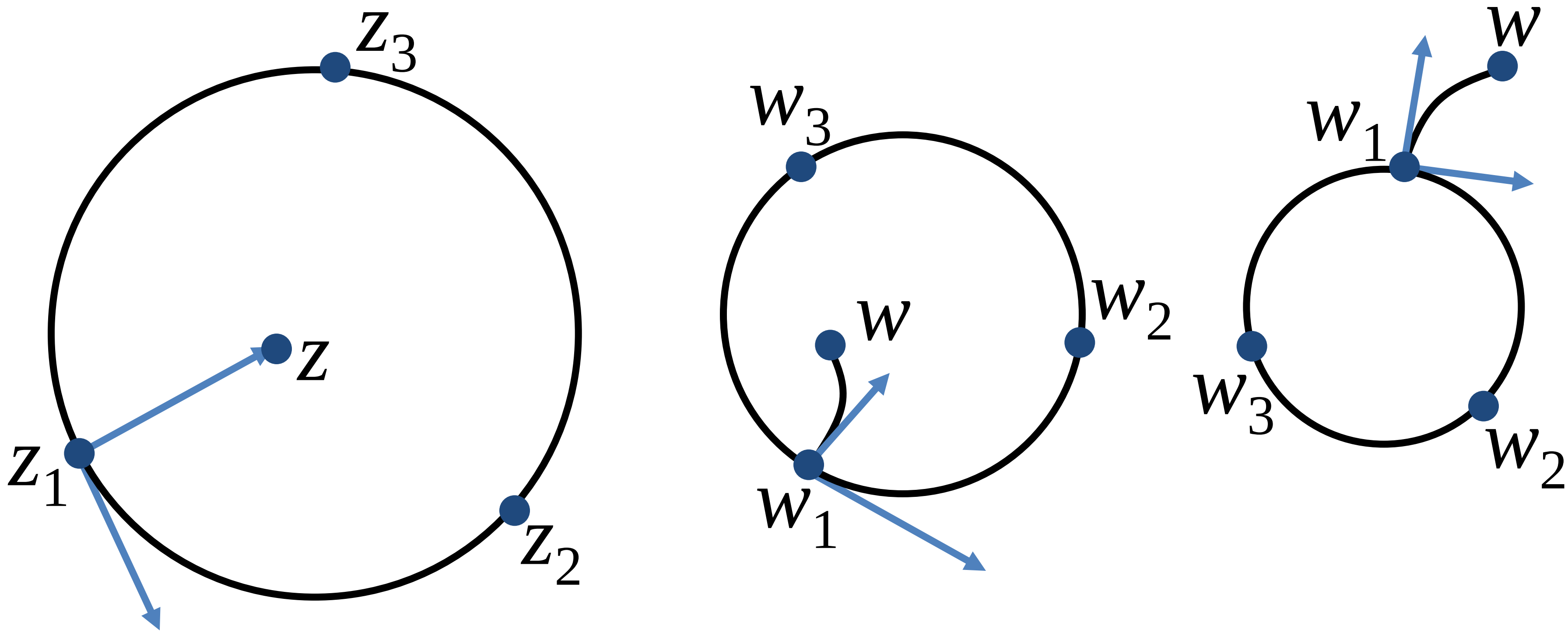
进一步，若$f(z_1)=0$，$f(z_2)=\infty$，则 $w=k\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$.

推论： 在分式线性变换下，交比(6.3.2)不变

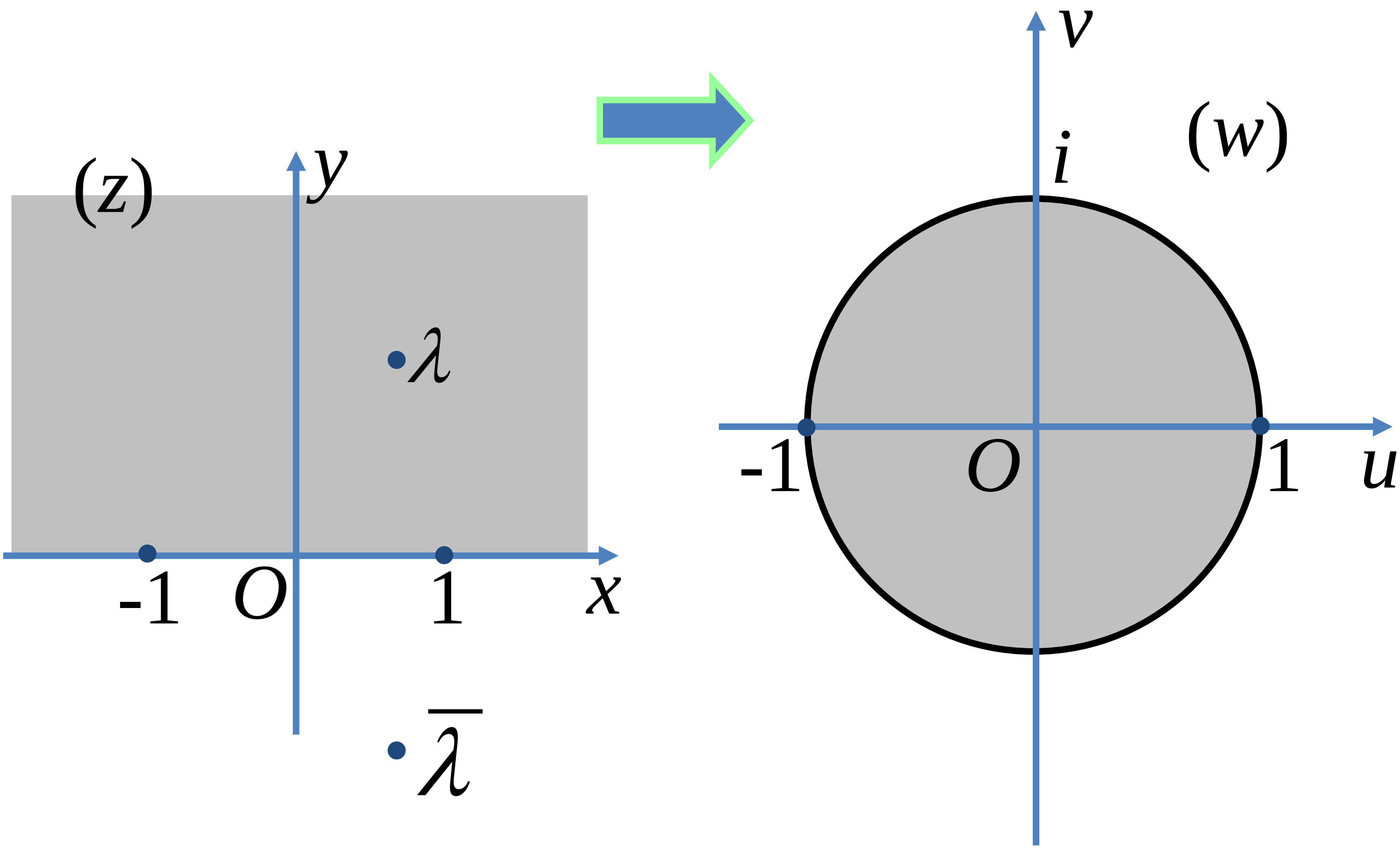
现在研究, 在给定两个圆周C与C', 在圆周上分别取定三个点, 必能找到一个分式线性映射将C映射成C'. 但是这个映射会将C内部映射成什么呢?.

如果在C内任取一点z_0, 而点z_0的象在C'的内部, 则C的内部就映射成C'的内部; 如果z_0的象在C'的外部, 则C的内部就映射成C'的外部.

或者在C上取定三点z_1,z_2,z_3, 它们在C'的象分别为w_1,w_2,w_3. 如果C依$z_1\to z_2\to z_3$的绕向与C'依$w_1\to w_2\to w_3$的绕向相同, 则C的内部就映射成C'的内部, 否则映射成C'的外部。


z_3
z
z_1
z_2
w_3
w
w_2
w_1
w
w_1
w_3
w_2

例2 求将上半平面Im(z)>0映射成单位圆|w|<1的分式线性映射.



[解法一] 在x轴上任意取定三点:$z_1=-1$, $z_2=0$, $z_3=1$使它们对应于$|w|=1$上三点:$w_1=1$, $w_2=i$, $w_3=-1$, 则因$z_1\to z_2\to z_3$跟$w_1\to w_2\to w_3$的绕向相同, 由(6.3.1)6.3.1)式得所求的分式线性映射为

$$\frac{w-1}{w-i}\cdot\frac{-1-i}{-1-1}=\frac{z+1}{z-0}\cdot\frac{1-0}{1+1}.$$

化简后即得

$$w=\frac{z-i}{iz-1}=-i\frac{z-i}{z+i} \qquad (6.3.2)$$

注意: 如果选取其他三对不同点,势必也能得出满足要求的, 但不同于(6.3.3)的分式线性映射. 此可见, 把上半平面映射成单位圆的分式线性映射不是唯一的, 而是有无穷多.

[解法二] 将上半平面看成半径为无穷大的圆域, 实轴就是圆域的边界圆周. 因为分式线性映射具有保圆性, 因此它必能将上半平面$\mathrm{Im}(z)>0$映射成单位圆$|w|<1$. 由于上半平面总有一点$z=\lambda$要映成单位圆周$|w|=1$的圆心$w=0$,

实轴要映射成单位圆,而$z=\lambda$与$z=\bar{\lambda}$是关于实轴的一对对称点,$w=0$与$w=\infty$是与之对应的关于圆周$|w|=1$的一对对称点.所以根据分式线性映射具有保对称点不变的性质知,$z=\bar{\lambda}$必映成$w=\infty$.

从而所求的分式线性映射具有下列形式:

$$w=k\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right).$$ 其中k为常数.

因为$|w|=|k|\left|\dfrac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right|$,而实轴上的点z对应着$|w|=1$

上的点,这时$\left|\dfrac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right|=1$,所以$|k|=1$,即$k=\mathrm{e}^{i\theta}$,这里

θ是任意实数.因此所求的分式线性映射的一般

形式为

$$\boxed{w=\mathrm{e}^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right),(\mathrm{Im}(\lambda)>0)\quad(6.3.3)}$$

反之,形如上式的分式线性映射必将上半平面Im(z)>0映射成单位圆|w|<1. 因为当z取实数时

$$|w|=\left|\mathrm{e}^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right)\right|=|\mathrm{e}^{i\theta}|\left|\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right|=1,$$

- 即把实轴映射成$|w|=1$. 又因为上半平面中的$z=\lambda$映射成$w=0$, 所以(6.3.3)必将$\mathrm{Im}(z)>0$映射成$|w|<1$.

当（6.3.3）中取$\lambda=i$，$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$时即得解法一的结果：

$$w=-i\frac{z-i}{z+i}.$$

当（6.3.3）中取$\lambda=i$，$\theta=0$时即得：

$$\boxed{w=\frac{z-i}{z+i}.}$$

例4 求将上半平面Im(z)>0映射成单位圆|w|<1且满足$w(2i)=0$, arg $w'(2i)=0$ 的分式线性映射.

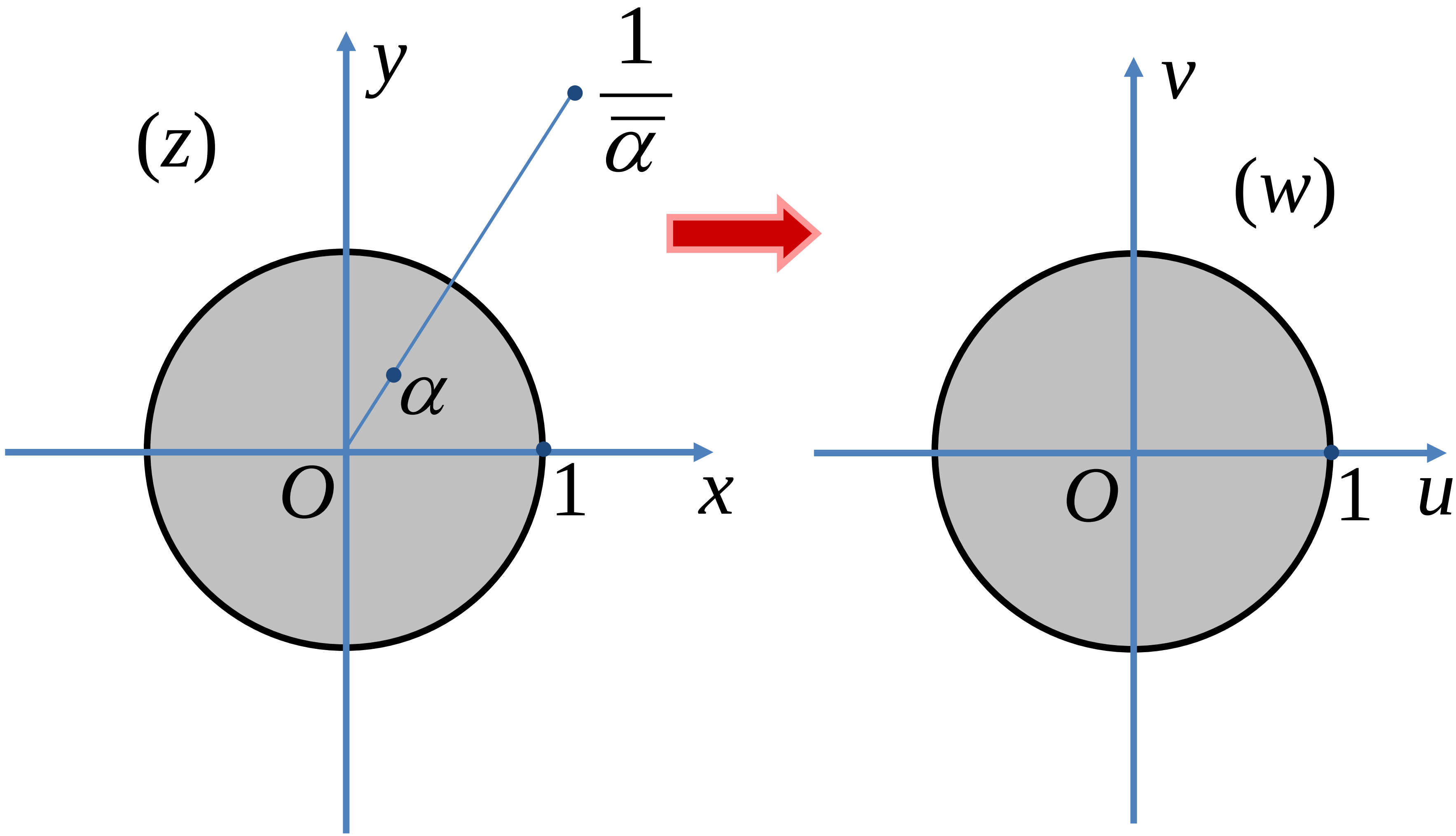
解： 由条件$w(2i)=0$知, 所求的映射要将上半平面中的点$z=2i$映射成单位圆周的圆心$w=0$. 所以由(6.3.3)得

$$w=e^{i\theta}\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right).\qquad \text{故有}\quad w'(z)=e^{i\theta}\frac{4i}{(z+2i)^2},$$

$$w'(2i)=e^{i\theta}\left(-\frac{i}{4}\right).\quad \arg w'(2i)=\theta-\frac{\pi}{2}=0,\ \theta=\frac{\pi}{2}.$$

从而得所求的映射为 $$w=i\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right).$$

例5 求将单位圆$|z|<1$映射成单位圆$|w|<1$的分式线性映射.



[解] 设z平面上单位圆$|z|<1$内部的一点α映射成w平面上的单位圆$|w|<1$的中心$w=0$. 这时与点α对称于单位圆周$|z|=1$的点$\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$应该被映射成$w$平面上的无穷远点(即与$w=0$对称的点).因此,当$z=\alpha$时,$w=0$,而当$z=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$时,$w=\infty$.满足这些条件的分式线性映射具有如下的形式

$$w=k\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}}=k\overline{\alpha}\left(\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}\right)=k'\left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right),\qquad \text{其中} k'=-k\overline{\alpha}$$

由于z平面上单位圆周上的点要映成w平面上单位圆周上的点, 所以当$|z|=1, |w|=1$. 将圆周$|z|=1$上的点$z=1$代入上式, 得

$$\boxed{w = \mathrm{e}^{i\varphi}\left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right). \quad (|\alpha|<1) \qquad (6.3.5)}$$

$$|k'|\left|\frac{1-\alpha}{1-\bar{\alpha}}\right| = |w| = 1$$

又因 $|1-\alpha| = |1-\bar{\alpha}|,$

- 所以 $|k'|=1$, 即$k'=\mathrm{e}^{i\varphi}$. 这里φ是任意实数.

因此, 将单位圆$|z|<1$映射成单位圆$|w|<1$的分式线性映射的一般表示式是

- 反之, 形如上式的映射必将单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$. 这是因为圆周 $|z|=1$ 上的点 $z=e^{i\theta}$ (θ为实数)映射成圆周 $|w|=1$ 上的点:

$$|w| = \left| e^{i\varphi}\left(\frac{e^{i\theta}-\alpha}{1-\bar{\alpha}e^{i\theta}}\right)\right| = \left|\frac{e^{i\theta}-\alpha}{e^{-i\theta}-\bar{\alpha}}\right| = 1.$$

同时单位圆 $|z|<1$ 内有一点 $z=\alpha$ 映射成 $w=0$. 所以(6.3.5)必将单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$.

例6 求将单位圆映射成单位圆且满足条件 $w(1/2)=0$, $w'(1/2)>0$的分式线性映射.

[解] 由条件$w(1/2)=0$知, 所求的映射要将$z=1/2$

映射成$|w|<1$的中心. 所以由((6.3.5) 得

$$w=e^{i\varphi}\left(\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}\right),\quad w'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{i\varphi}\left.\frac{\left(1-\frac{1}{2}z\right)+\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)^{2}}\right|_{z=\frac{1}{2}}=e^{i\varphi}\frac{4}{3}$$

故 $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\varphi$,由于 $w'\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$ 为正实数,从而 $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$,

即 $\varphi=0$. 所以所求映射为 $w=\dfrac{z-\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}z}=\dfrac{2z-1}{2-z}$.

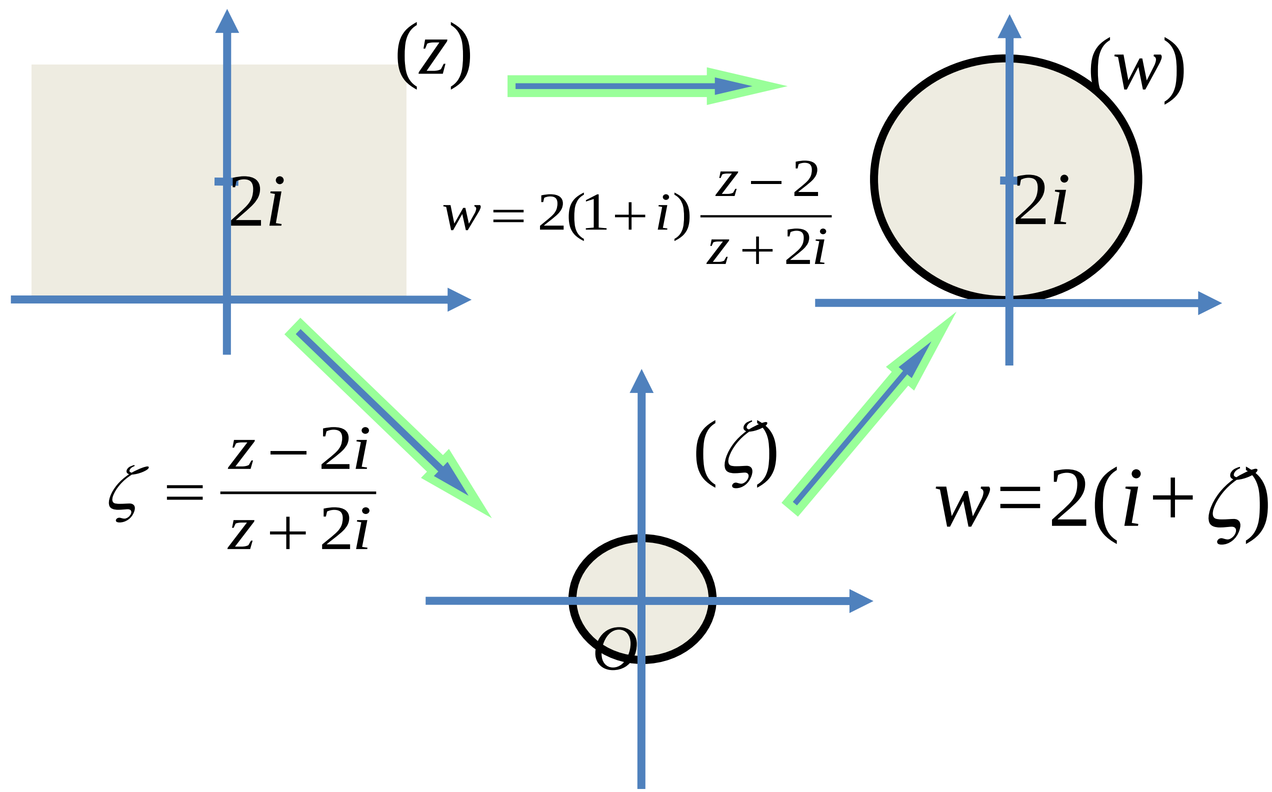
例7 求将Im(z)>0映射成$|w-2i|<2$且满足条件$w(2i)=2i$, $\arg w'(2i)=-\pi/2$的分式线性映射.

[解] 容易看出, 映射$\zeta=(w-2i)/2$将$|w-2i|<2$映射成$|\zeta|<1$. 但将Im(z)>0映射成$|\zeta|<1$且满足$\zeta(2i)=0$的映射易知为

$$\zeta=e^{i\theta}\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)\Rightarrow\frac{w-2i}{2}=e^{i\theta}\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)\Rightarrow w'(2i)=2e^{i\theta}\frac{1}{4i},$$

$\arg w'(2i)=\arg(2e^{i\theta})-\arg(4i)=\theta-\dfrac{\pi}{2}$. 由 $\arg w'(2i)=-\dfrac{\pi}{2}$, 得 $\theta=0$.

于是所求映射为 $\dfrac{w-2i}{2}=\dfrac{z-2i}{z+2i}$ 或 $w=2(1+i)\dfrac{z-2}{z+2i}$.



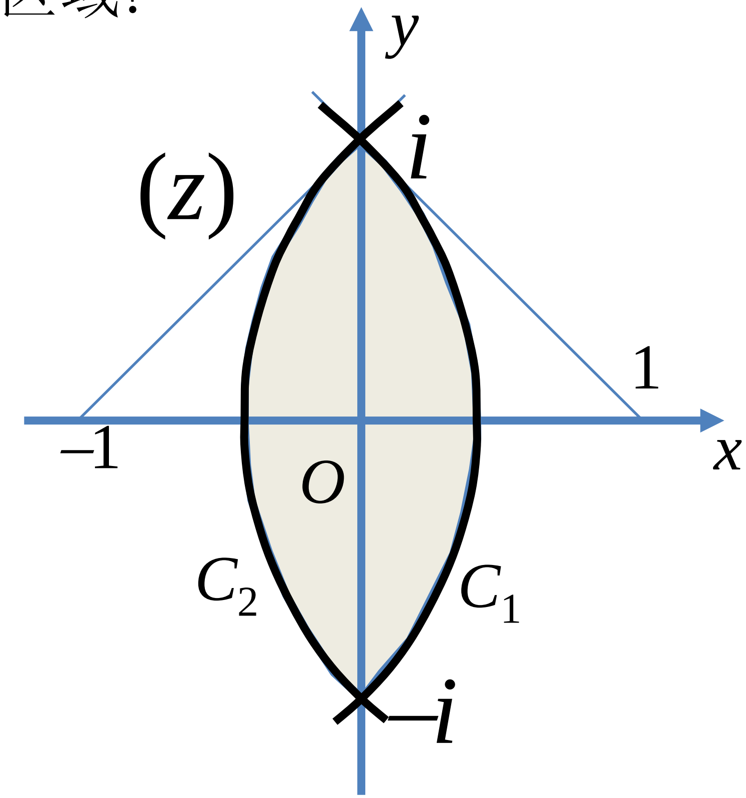
现讨论在z平面内两个圆包围的区域的映射情况. 根据前面的讨论可知:

(I)当二圆周上没有点映射成无穷远点时, 这二圆周 的弧所围成的区域映射成二圆弧所围成的区域;

(II)当二圆周上有一个点映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映射成一圆弧与一直线所围成的区域;

(III)当二圆周交点中的一个映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映射成角形区域.

例 1 中心在 $z=1$ 与 $z=-1$，半径为$\sqrt{2}$的二圆弧所围区域，在映射$w=\dfrac{z-i}{z+i}$下映射成什么区域?



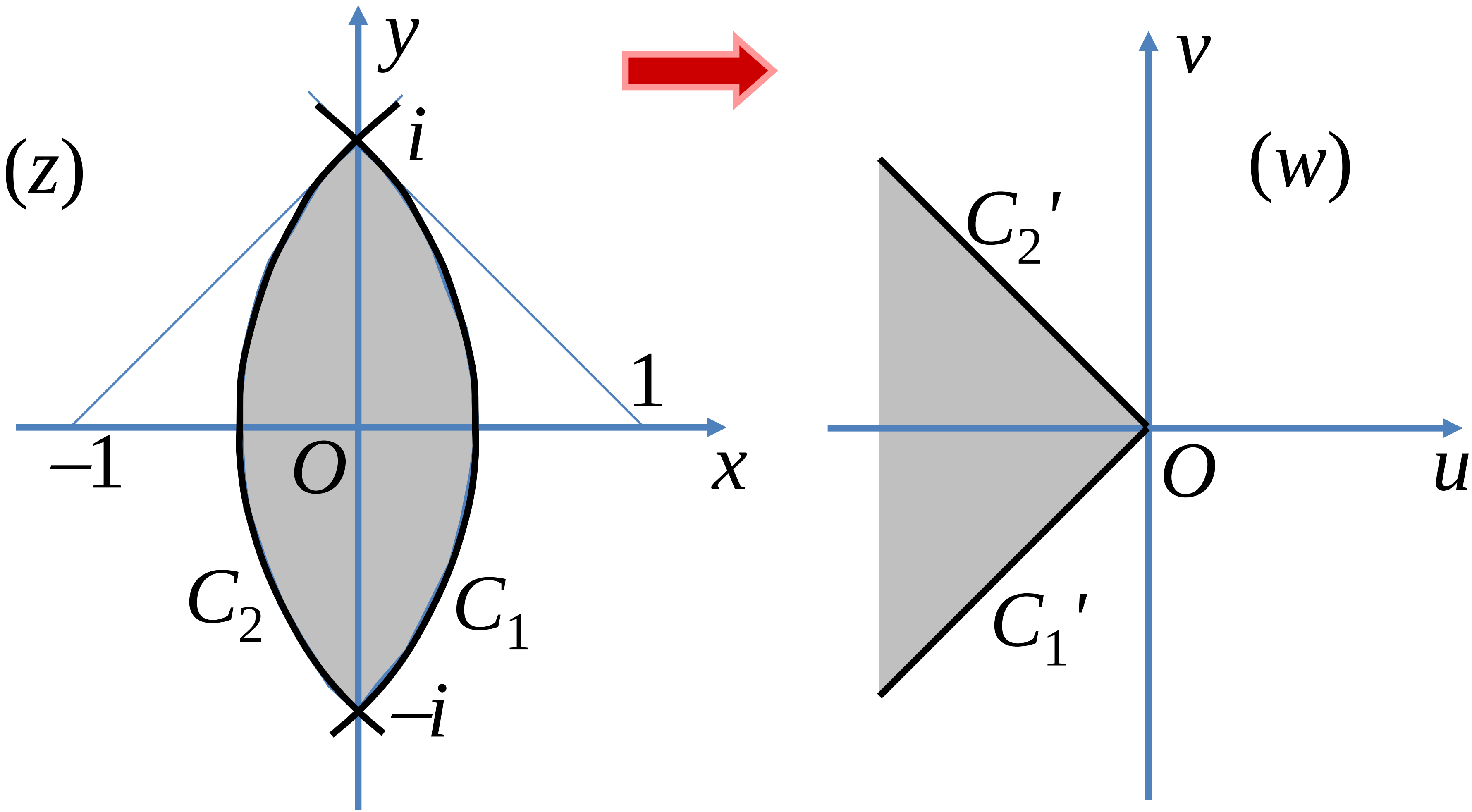
[解] 所设的两个圆弧的交点为$-i$与i, 且相互正交. 交点$-i$映射成无穷远点, i映射成原点. 因此所给的区域经映射后映射成以原点为顶点的角形区域, 张角等于$\pi/2$.

取C_1与正实轴的交点$z=\sqrt{2}-1$,对应点是

$$w=\frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}-1+i}=\frac{(1-\sqrt{2})+i(1-\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}}.$$

此点在第三象限的分角线C_1'上. 由保角性知C_2映射为第二象限的分角线C_2.

映射的角形区如图所示

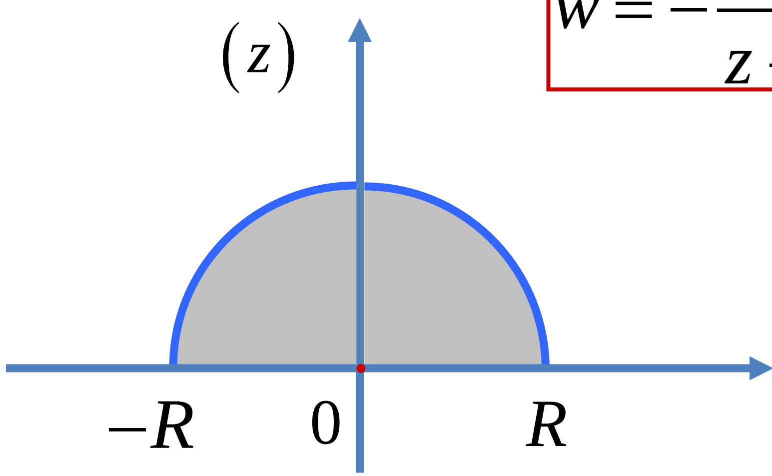


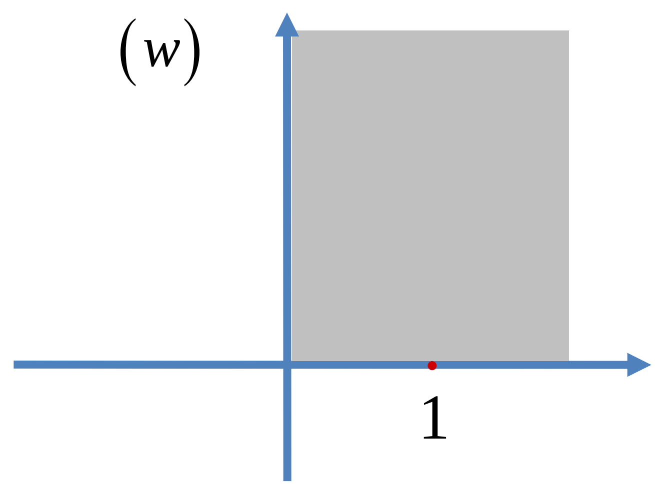
例3 求映$\begin{cases} 0<|z|<R \\ 0<\arg z<\pi \end{cases}$为$\begin{cases} Imz>0 \\ \operatorname{Re} z>0 \end{cases}$的分式线性映射。

[解] 令 $z=-R \mapsto w=0;\ z=R \mapsto w=\infty \Rightarrow w=k\dfrac{z+R}{z-R}.$

再取 $z=0 \mapsto w=1 \Rightarrow w=k(-1)=1 \quad \Rightarrow k=-1 \Rightarrow$

$$\boxed{w=-\frac{z+R}{z-R}.}$$





几个初等函数所构成的映射

1. 幂函数 $w=z^n$($n\geq 2$为自然数)在z平面内处处可导, 它的导数是

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=nz^{n-1},\qquad \text{因而当}z\neq 0\text{时},\quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\neq 0.$$

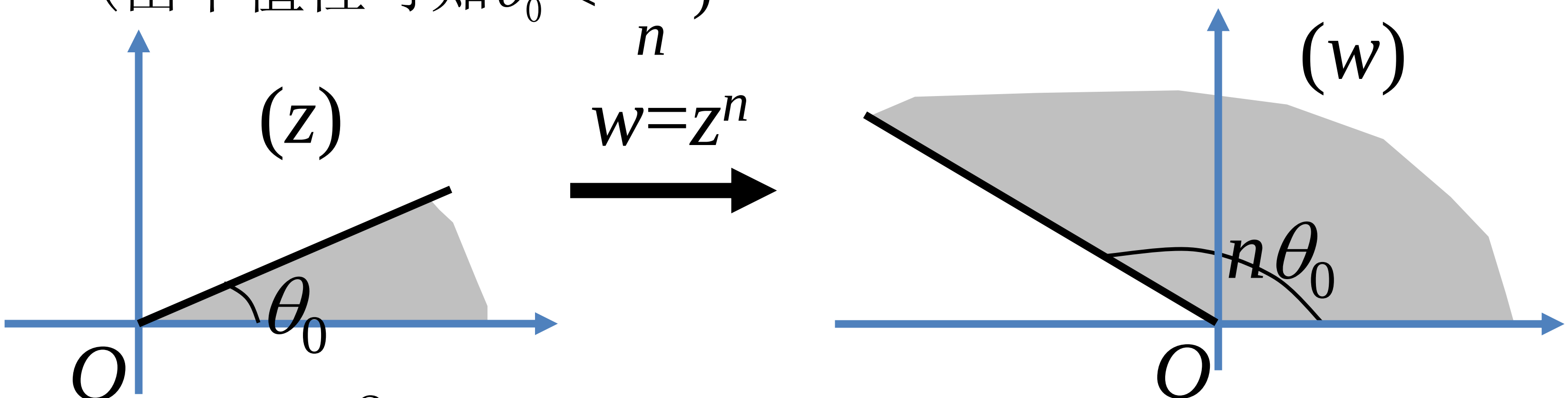
所以, 在z平面内除去原点外, 由$w=z^n$所构成的映射处处保形.

$$z=re^{i\theta}\ ,\ w=\rho e^{i\varphi}\xrightarrow{w=z^n}\begin{cases}\rho=r^n\ \text{圆周}\mapsto\text{圆周};\\ \varphi=n\theta\ \text{射线}\mapsto\text{射线}。\end{cases}$$

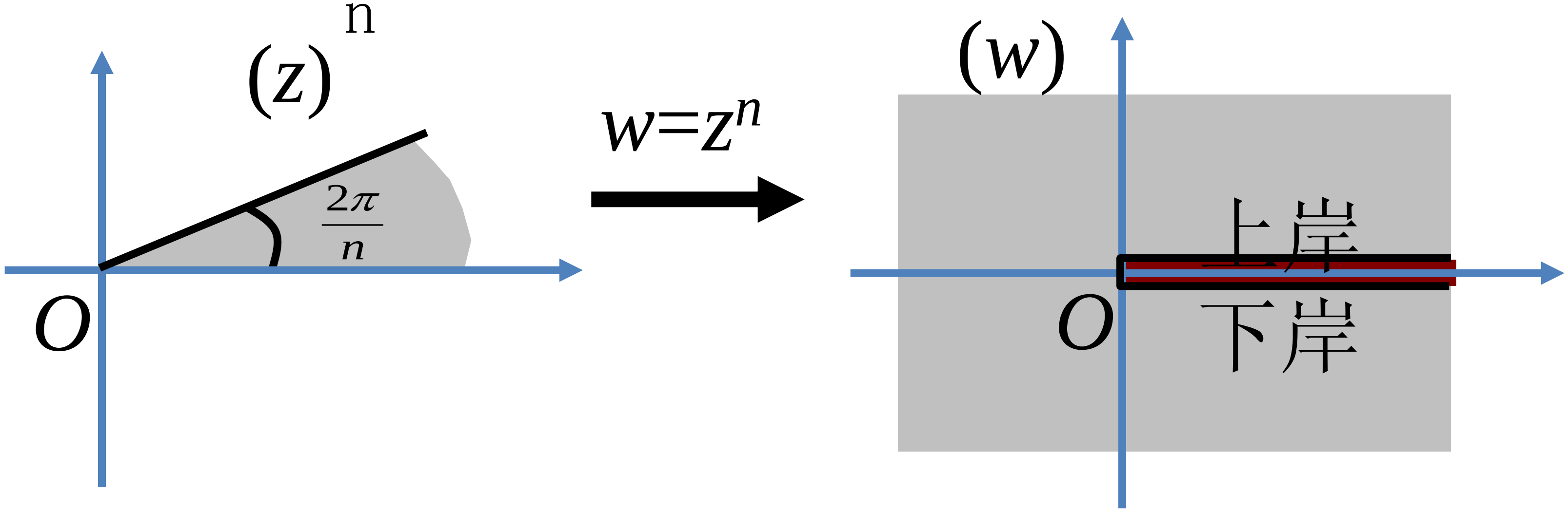
映射的特点是: **把以原点为顶点的角形域映射成以原点为顶点的角形域, 但张角变成了原来的*n*倍.**

角形域: $0<\theta<\theta_0 \mapsto$ 角形域: $0<\varphi<n\theta_0$

(由单值性可知 $\theta_0<\frac{2\pi}{n}$)



特别, $0<\theta<\frac{2\pi}{n} \mapsto$ 沿实轴剪开的w平面: $0<\varphi<2\pi$.



根式函数$z=\sqrt[n]{w}$：$0<\varphi<n\theta_0 \mapsto 0<\theta<\theta_0$ $(\theta_0<\dfrac{2\pi}{n})$

于是$w=z^n$和$z=\sqrt[n]{w}$的映射特点是扩大与缩小角形域。

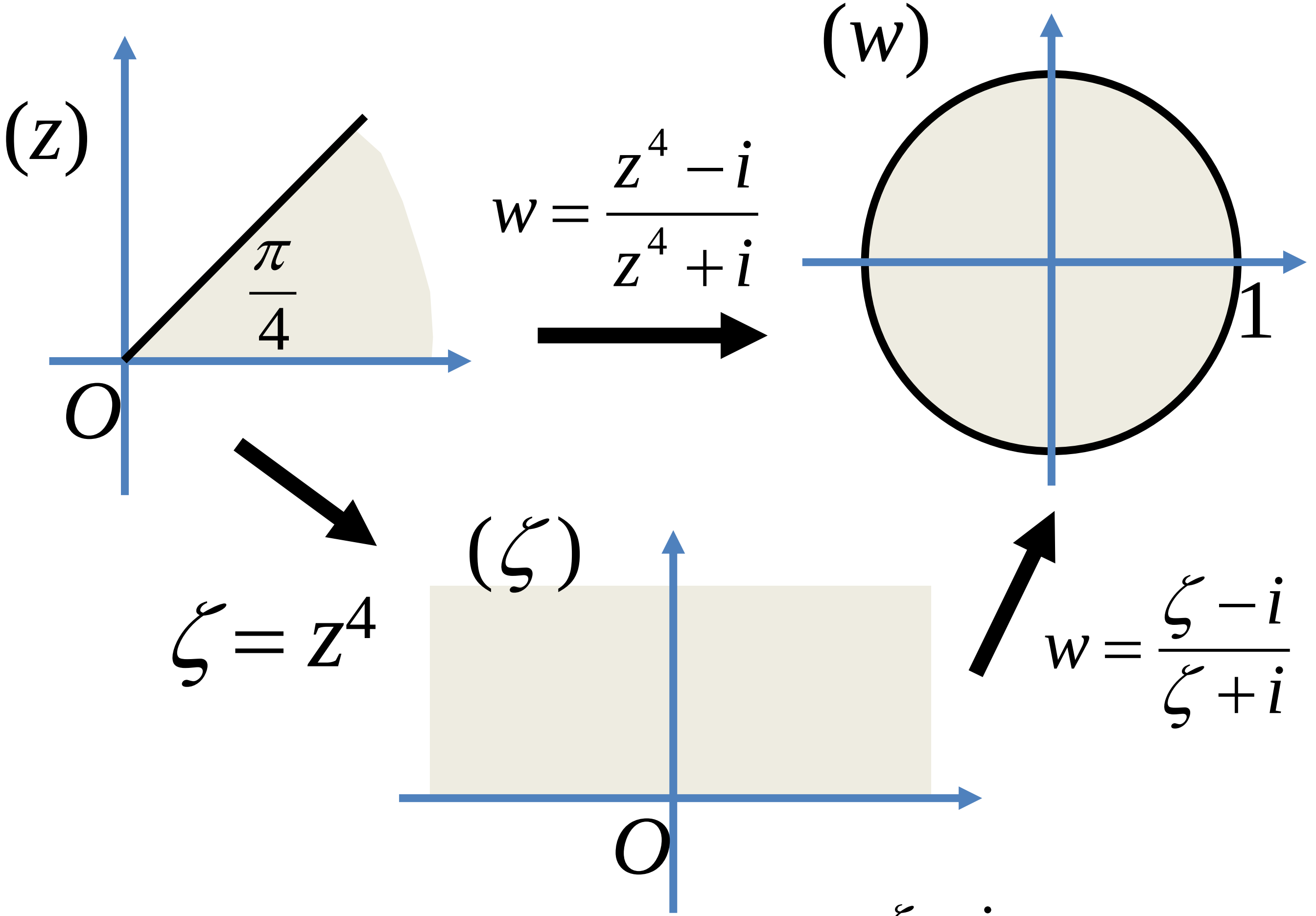
例1 求把角形域$0<\arg z<\pi/4$映射成单位圆$|w|<1$的一个映射.

[解] $\zeta=z^4$将所给角形域$0<\arg z<\pi/4$映射成上半平面

$\mathrm{Im}(\zeta)>0$. 又从上节的例2知, 映射

$$w=\frac{\zeta-i}{\zeta+i}$$将上半平面映射成单位圆$|w|<1$.因此

所求映射为 $w=\dfrac{z^4-i}{z^4+i}$.



$$0<\arg z<\frac{\pi}{4} \xrightarrow{\xi=z^4} Im\xi>0 \xrightarrow{w=\frac{\xi-i}{\xi+i}} |w|<1.$$

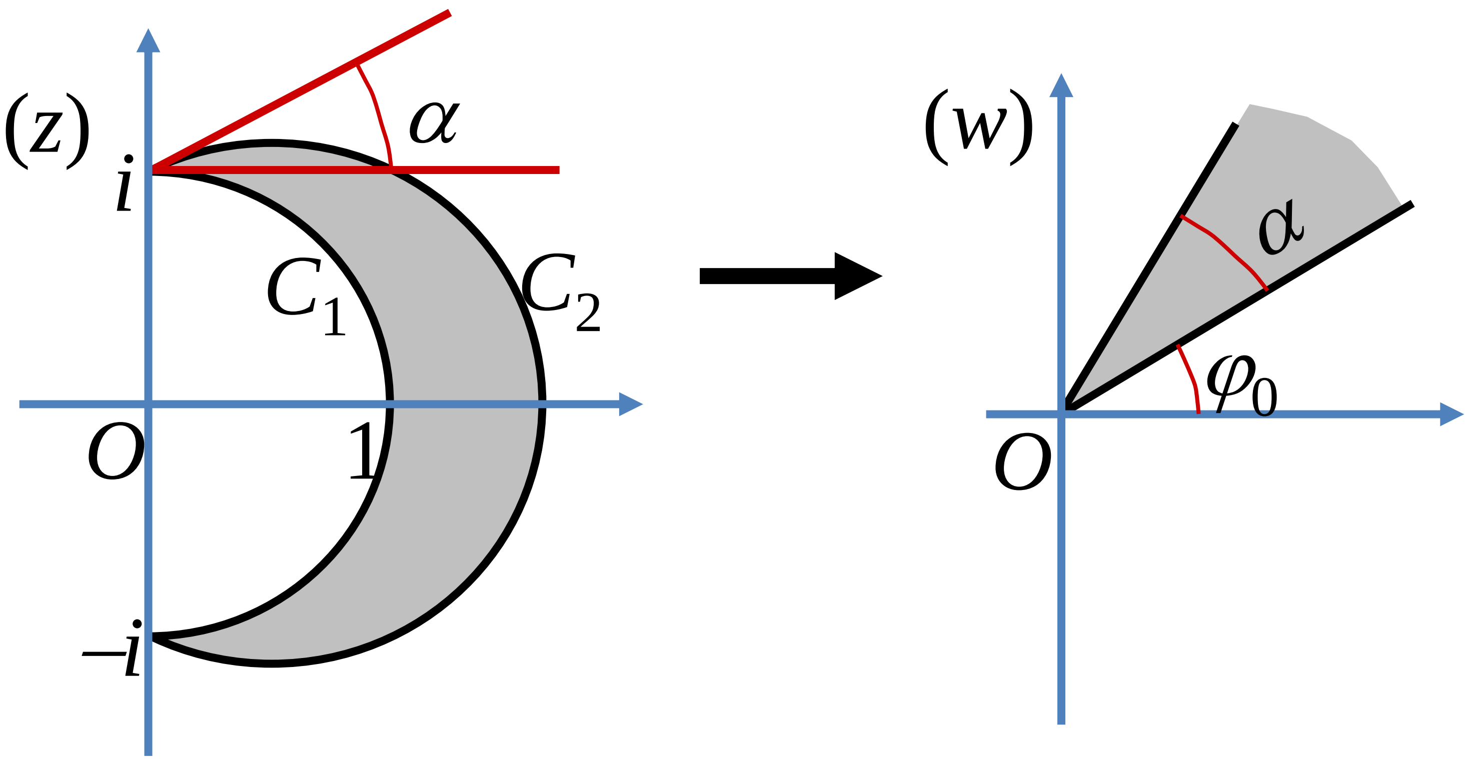
例2 求 $\begin{cases} 0<|z|<1 \\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ 映为单位园 $|w|<1$ 的一个映射.

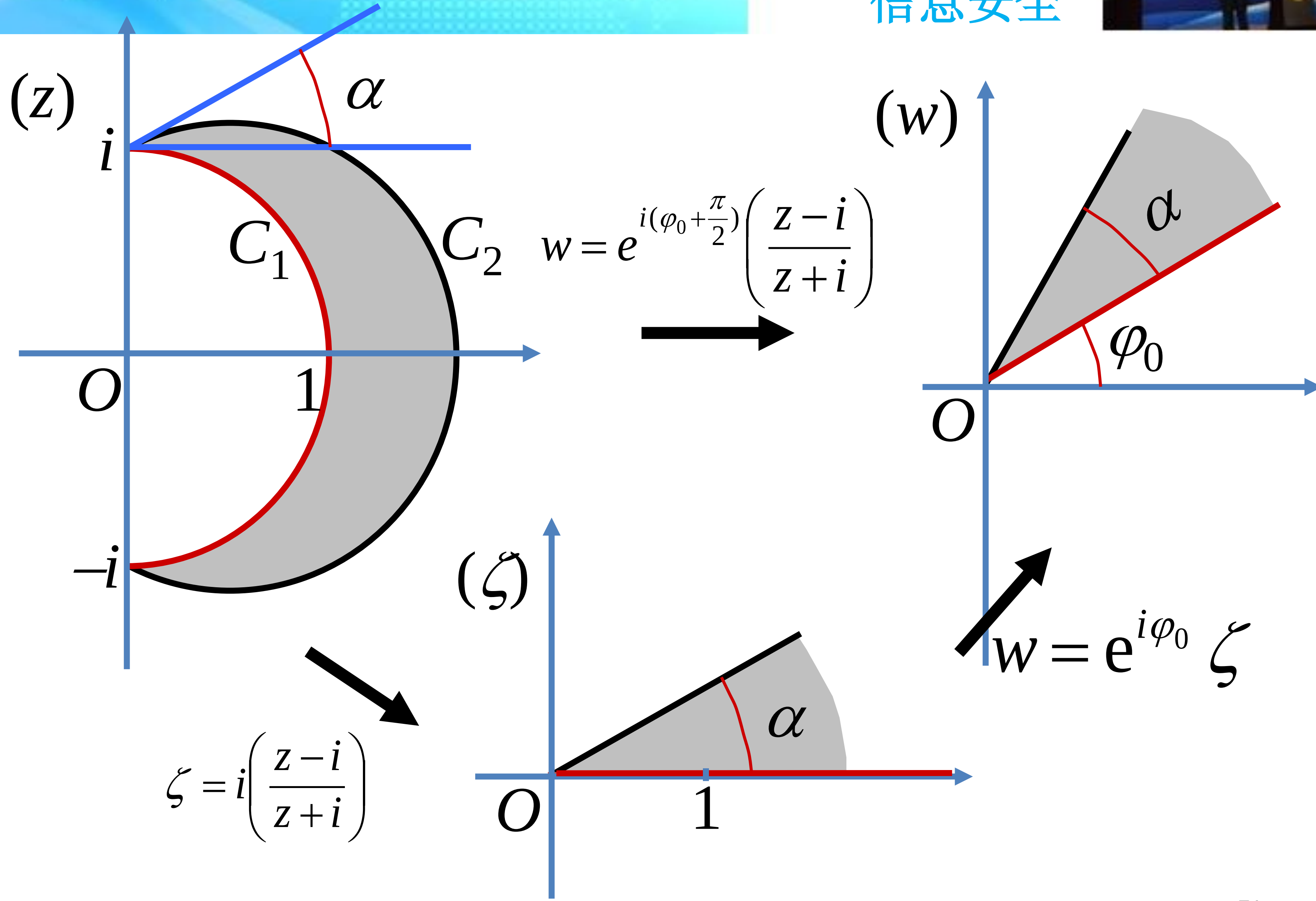
$$\text{解:}\begin{cases} 0<|z|<1 \\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\xi=z^2} \begin{cases} 0<|\xi|<1 \\ 0<\arg \xi<\pi \end{cases}$$

$$\xrightarrow{t=-\frac{\xi+1}{\xi-1}} \begin{cases} \operatorname{Im} t>0 \\ \operatorname{Re} t>0 \end{cases} \xrightarrow{s=t^2} \operatorname{Im} s>0$$

$$\xrightarrow{w=\frac{s-i}{s+i}} |w|<1 \quad \Rightarrow w=\frac{\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^2-i}{\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^2+i}.$$

例3 求把下图中由圆弧C_2与C_3所围成的交角为α的月牙域映射成角形域$\varphi_0<\arg w<\varphi_0+\alpha$的一个映射.




(z)
i
α
C_1
C_2
O
1
$-i$
$w = e^{i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$
(w)
α
φ_0
O
(ζ)
α
O
1
$\zeta = i\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$
$w = e^{i\varphi_0}\zeta$

[解] 令C_1,C_2的交点$z=i$与$z=-i$分别映射成ζ平面中的$\zeta=0$与$\zeta=\infty$, 将所给月牙域映射成ζ平面中的角形域的映射是具有以下形式的分式线性函数:

$$\zeta = k\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$ 其中k为待定的复常数.

令 $z=1 \mapsto \zeta=1 \Rightarrow \zeta = k\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -ik = 1 \Rightarrow k = i$。

这样,$\zeta = i\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$就把$C_1$映射成$\zeta$平面上的正实轴.

根据保角性,所给的月牙域映射成角形域$0<\arg\zeta<\alpha$.

由此得所求的映射为$w = ie^{i\varphi_0}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = e^{i(\varphi_0+\frac{\pi}{2})}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$.

2. 指数函数 $w = e^z$ 由于在 z 平面内 $w' = e^z \neq 0$。所以，由 $w = e^z$ 所构成的映射是 $0<y<2\pi$ 上的保形映射.

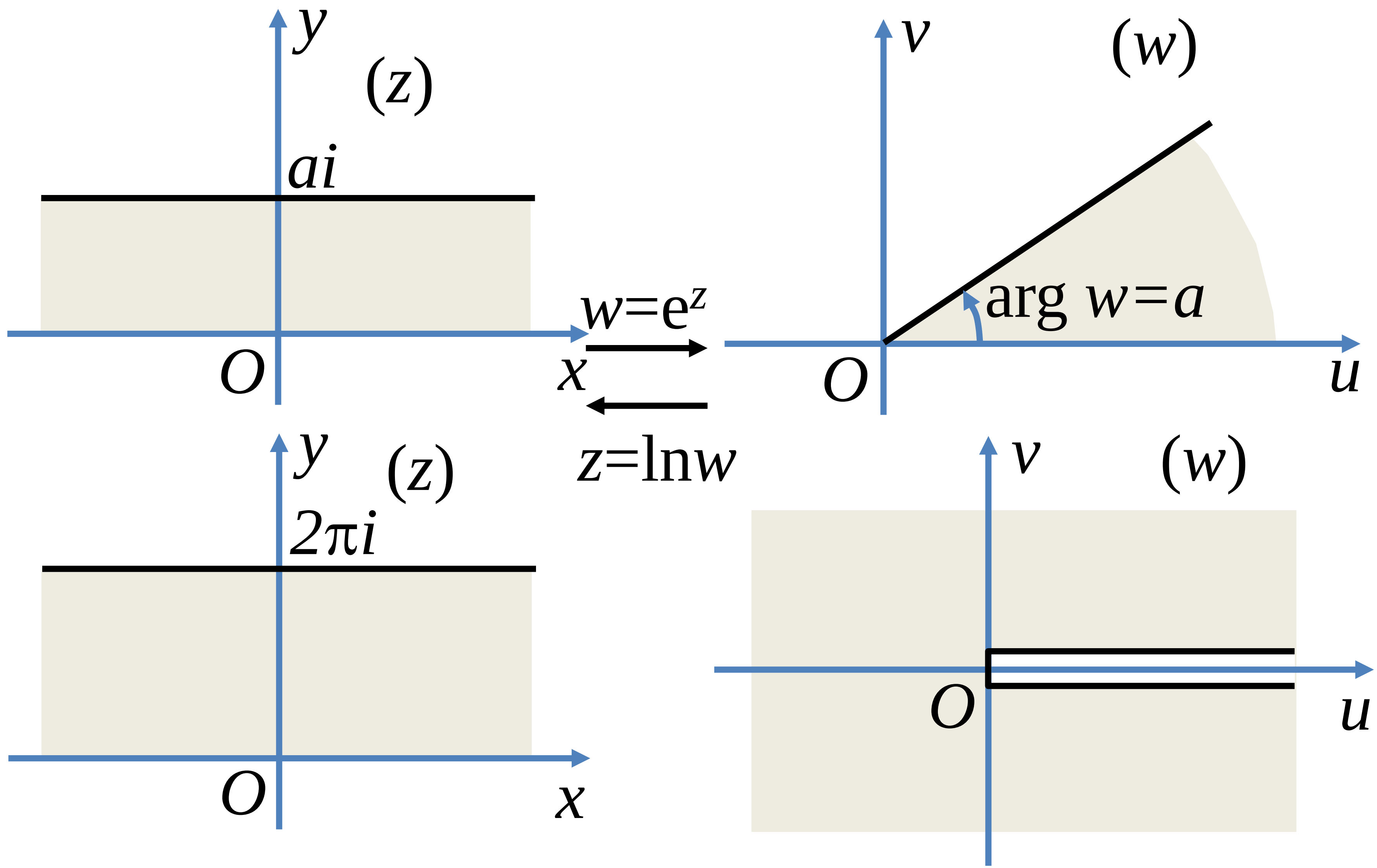
设 $z = x+iy$, $w = \rho e^{i\varphi}$, 则 $w = e^z = e^{x+iy} = \rho e^{i\varphi}$ 推出

$\rho = e^x$：z平面上垂直线x映射成w平面上圆周ρ；

（$x=0$–单位圆周, $x<0$ –单位圆内, $x>0$ –单位圆外）

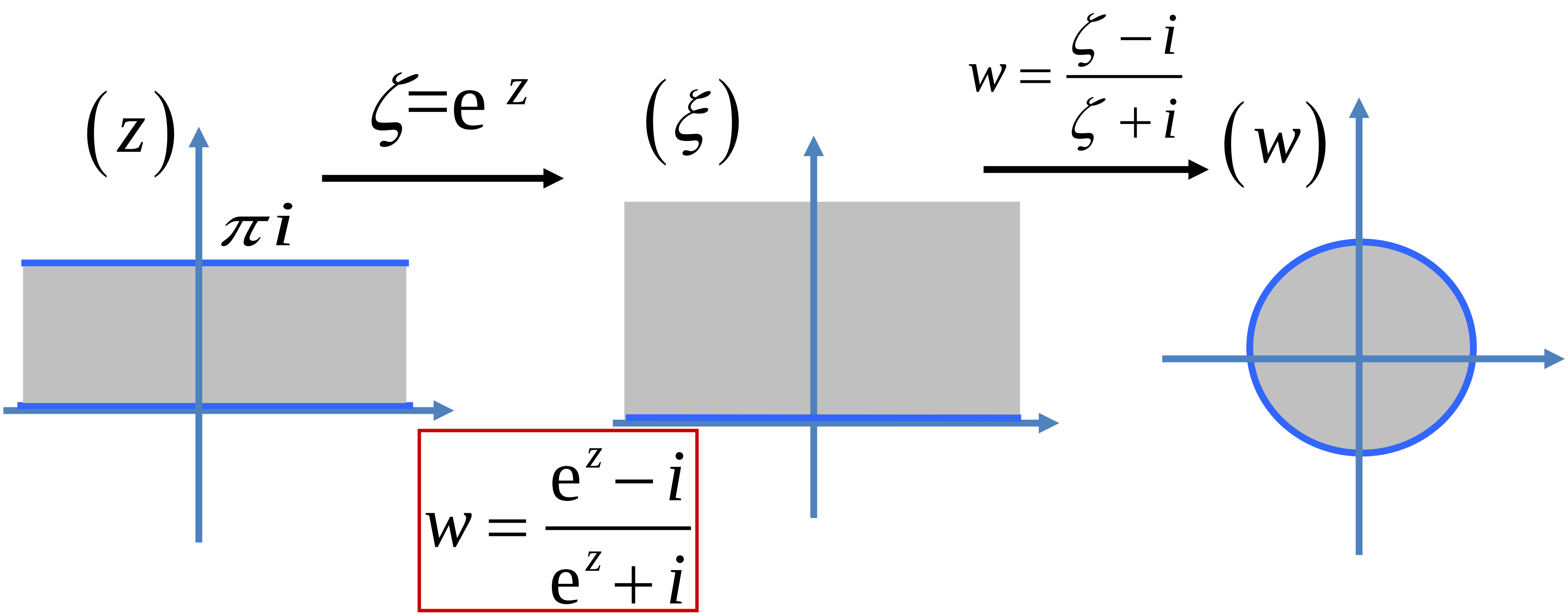
$\varphi = y$：z平面上水平直线y映射成w平面上射线φ。

带形域 $0<\mathrm{Im}(z)<a$ 映射成角形域 $0<\arg w<a$. 特别是带形域 $0<\mathrm{Im}(z)<2\pi$ 映射成沿正实轴剪开的w平面: $0<\arg w<2\pi$. 它们间的点是一一对应的.


y
(z)
ai
O
x
v
(w)
arg w=a
O
u
w=e^z
z=lnw
y
(z)
2πi
O
x
v
(w)
O
u

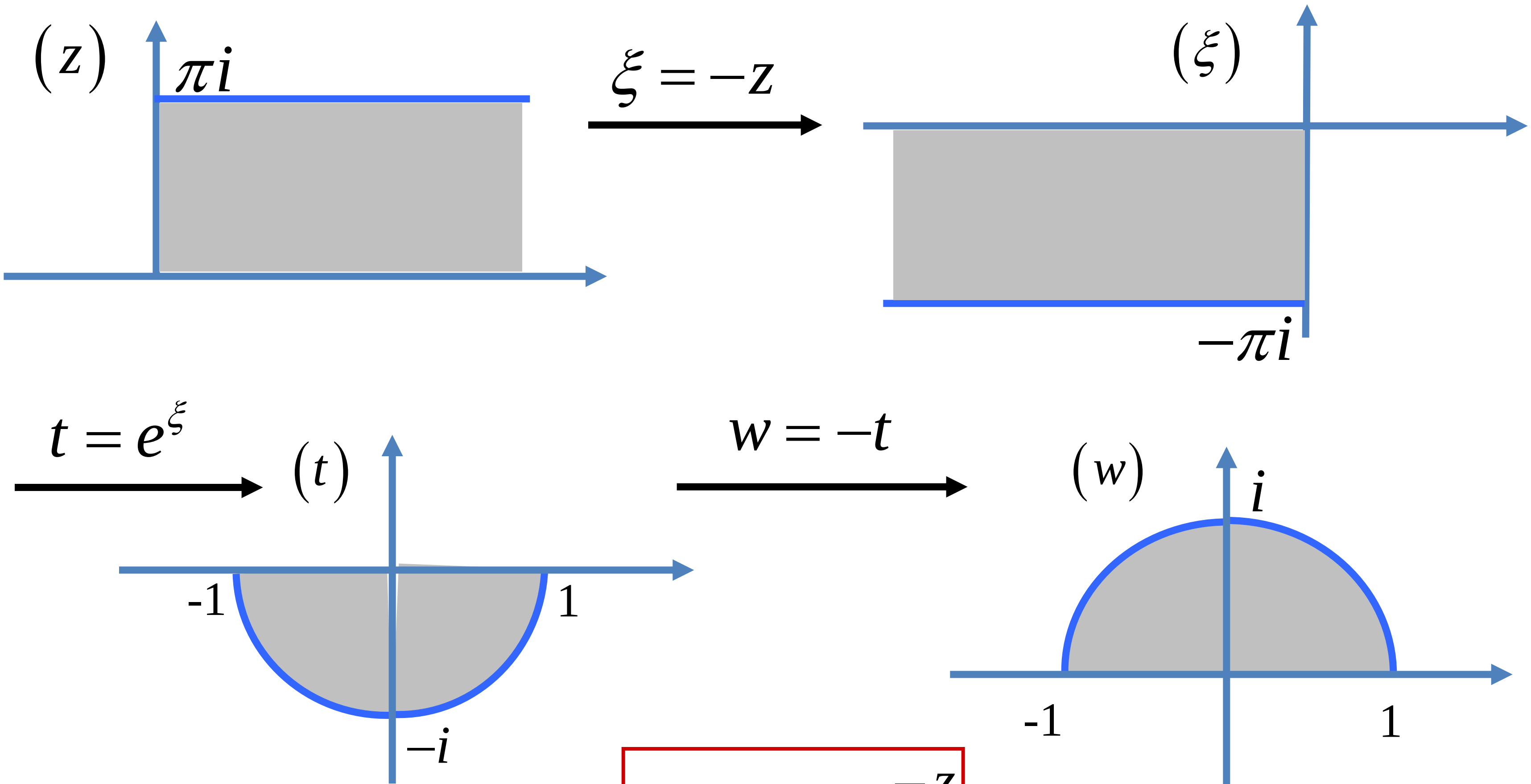
由指数函数$w = e^z$所构成的映射的特点是: 把水平的带形域$0<\mathrm{Im}(z)<a\ (a\le\pi)$映射成角形域$0<\arg w<a$.

例4 求把带形域$0<\mathrm{Im}(z)<\pi$映射成单位圆$|w|<1$的一个映射.



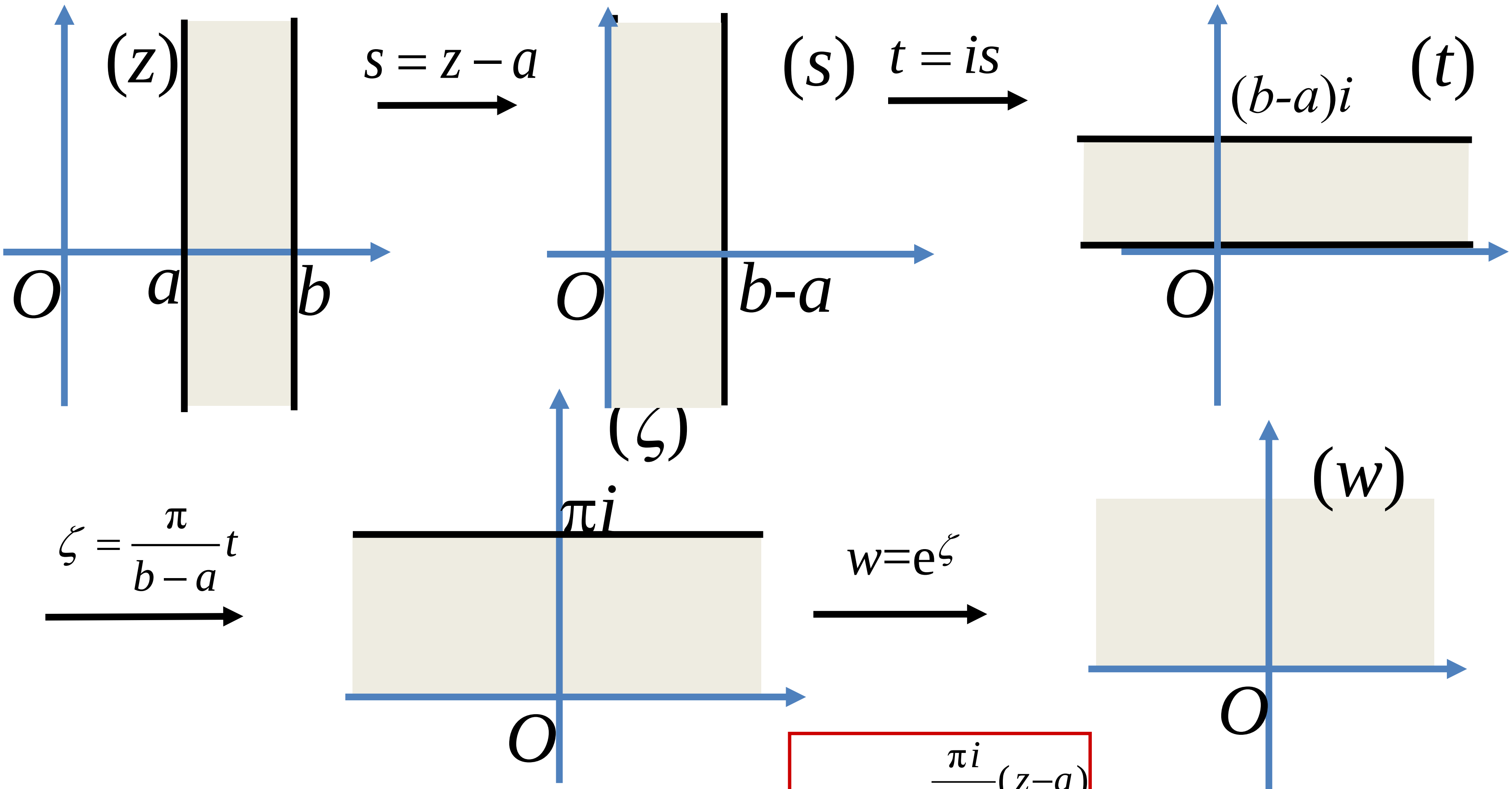
$$\boxed{w=\frac{e^z-i}{e^z+i}}$$

例4 求映射把如图所示的半带状域映成上半单位圆。



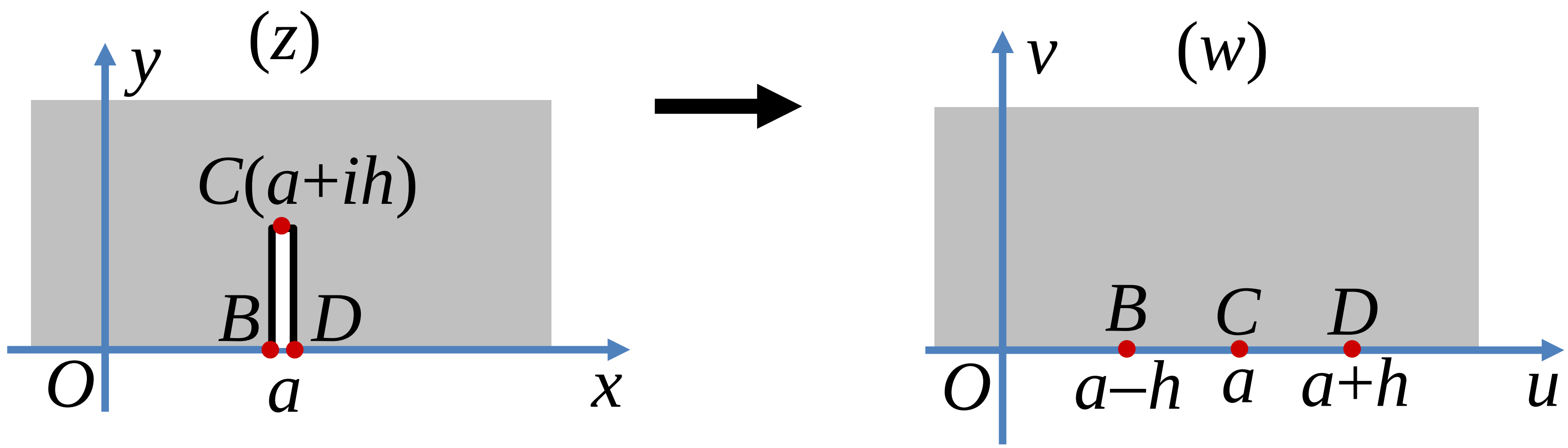
$$\boxed{w = -e^{-z}}$$

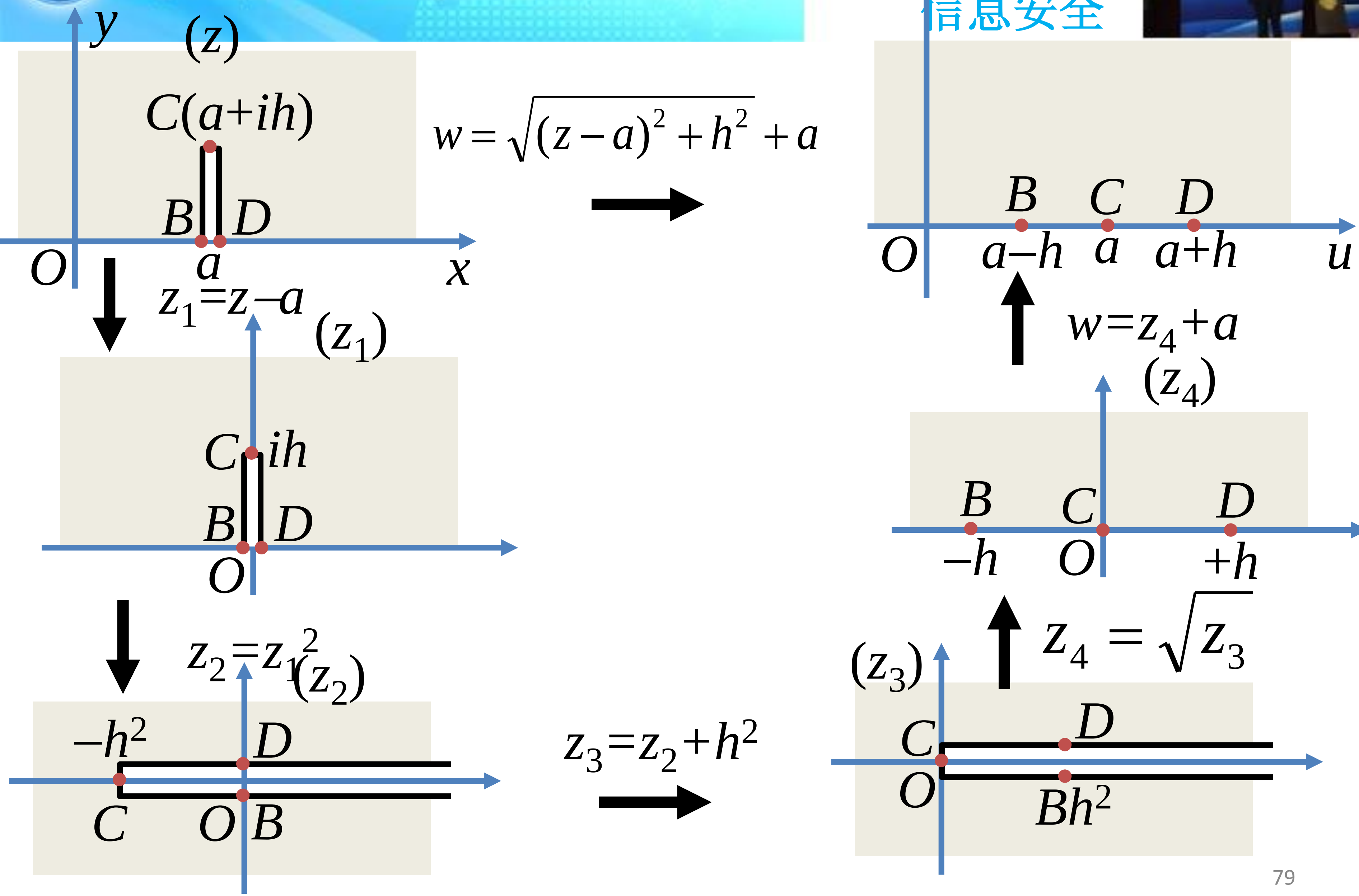
例5 求把带形域$a<\mathrm{Re}(z)<b$映射成上半平面$\mathrm{Im}(w)>0$的一个 映射.



$$\boxed{w = e^{\frac{\pi i}{b-a}(z-a)}}$$

例6 求把具有割痕Re(z)=a, 0≤Im(z)≤h的上半平面映射成上半平面的一个映射.




y
(z)
$C(a+ih)$
B
D
O
a
x
$w=\sqrt{(z-a)^2+h^2}+a$
(w)
B
C
D
O
$a-h$
a
$a+h$
u
$z_1=z-a$
(z_1)
C
ih
B
D
O
$w=z_4+a$
(z_4)
B
C
D
$-h$
O
$+h$
$z_2=z_1^2$
(z_2)
$-h^2$
D
C
O
B
$z_3=z_2+h^2$
$z_4=\sqrt{z_3}$
(z_3)
C
D
O
B
h^2

[解] 不难看出, 解决本题的关键显然是要设法将垂直于x轴的割痕的两侧和x轴之间的夹角展平. 由于映射$w=z^2$能将顶点在原点处的角度增大到两倍, 所以利用这个映射可以达到将割痕展平的目的.

首先, 把上半z平面向左平移一个距离a:$z_1=z-a$.

第二, 由映射$z_2=z_1^2$, 得到具有割痕$-h^2\le \mathrm{Re}(z_2)<+\infty$, $\mathrm{Im}(z_2)=0$的z_2平面.

第三, 把z_2平面向右作一距离为h^2的平移: $z_3=z_2+h^2$, 便得到去掉了正实轴的z_3平面.

第四,通过映射$z_4=\sqrt{z_3}$,便得到上半z_4平面.

最后,把z_4平面向右作一距离为a的平移:

$w = z_4 + a$,便得到w平面中的上半平面.

把所有的映射复合起来就得到所求出映射:

$$w = \sqrt{(z-a)^2 + h^2} + a$$

谢谢！