网络 与 信息安全

复变函数与积分变换

——第五讲

解析函数与调和函数

贵州大学计算机科学与技术学

潘平

电话：13078569531

邮箱：panping_17@163.com

目 录

- 解析函数的基本概念
- 解析函数的充要条件
- 调和函数
- 调和函数与解析函数的关系

解析函数的基本概念

在复变函数中，重要的不是只在个别点可导，而是所谓的解析函数。

定义： 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的邻域内处处可导, 那末称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内每一点解析, 则称 $f(z)$ 在区域 D 内解析.

或称 $f(z)$ 是区域 D 内的一个解析函数 (全纯函数或正则函数).

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 那末称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点.

由定义可知，函数在区域内解析与在区域内可导是等价的。但是, 函数在一点处解析和在一点处可导不等价。即, 函数在一点处可导, 不一定在该点处解析。函数在一点处解析比在该点处可导的要求要高得多。

需要注意的是：函数在一点处解析与在一点处可导是不等价的概念. 即函数在一点处可导，不一定在该点处解析.

例： 研究函数 $f(z)=z^2, g(z)=x+2yi$ 和 $h(z)=|z|^2$ 的解析性 .

解：

$f(z)=z^2$ 在复平面内是解析的 ；

$g(z)=x+2yi$ 处处不解析 ；

下面讨论 $h(z)=|z|^2$ 的解析性 ，

$$\frac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z} = \frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}$$

$$= \frac{(z_0+\Delta z)(\overline{z_0}+\overline{\Delta z}) - z_0\overline{z_0}}{\Delta z} \qquad = \overline{z_0}+\overline{\Delta z}+z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},$$

(1) $z_0 = 0,$ $\qquad \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}=0.$

(2) $z_0 \neq 0,$

令 $z_0+\Delta z$ 沿直线 $y-y_0=k(x-x_0)$ 趋于 z_0,

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{1-i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}{1+i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1-ik}{1+ik}$$

由于 k 的任意性，

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{1-ki}{1+ki}$$ 不趋于一个确定的值 .

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}$$ 不存在 .

因此 $h(z)=|z|^2$ 仅在 $z=0$ 处可导，而在其他点都不可导，根据定义，它在复平面内处处不解析.

例： 研究函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 的解析性.

解： 因为 $w=\dfrac{1}{z}$ 在复平面内除 $z=0$ 处处可导,

且 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=-\dfrac{1}{z^2}$,

所以 w 在复平面内除 $z=0$ 外处处解析,

$z=0$ 为它的奇点.

例： 研究函数 $f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$ 的可导性与解析性.

解： (1) $z=0$,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\,\mathrm{Re}(\Delta z)}{\Delta z}=0,$$

故 $f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$ 在 $z=0$ 处可导.

(2) $z\neq 0$,

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)\,\mathrm{Re}(z+\Delta z)-z\,\mathrm{Re}(z)}{\Delta z}$$

$$=\frac{z}{\Delta z}[\mathrm{Re}(z+\Delta z)-\mathrm{Re}(z)]+\mathrm{Re}(z+\Delta z)$$

令 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$,

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = z\frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + x + \Delta x,$$

因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = x,\quad \lim\limits_{\substack{\Delta y=0\\ \Delta x\to 0}} \dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = z + x,$

所以 $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ 不存在.

即当 $z \neq 0$ 时, $f(z)$ 不可导,

因此 $f(z)$ 仅在 $z=0$ 处可导, 而在其他点都不

可导, 根据定义, 它在复平面内处处不解析.

定理：

定理1：在区域 D 内解析的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商（除去分母为零的点）在 D 内解析.

定理2：设函数 $h=g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，函数 $w=f(h)$ 在 h 平面上的区域 G 内解析. 如果对 D 内的每一个点 z，函数 $g(z)$ 的对应值 h 都属于 G，那末复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 D 内解析.

根据定理可知:

(1) 所有多项式在复平面内是处处解析的.

(2) 任何一个有理分式函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在不含分母为零的点区域内是解析，使分母为零的点是它的奇点.

解析函数的充要条件

定理1:

设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 定义在区域 D 内, 则 $f(z)$ 在 D 内一点 $z=x+yi$ 可导的充要条件是: $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微, 并且在该点满足柯西—黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

证：　(1) 必要性.

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 定义在区域 D 内,

且 $f(z)$ 在 D 内一点 $z=x+yi$ 可导,

则对于充分小的 $|\Delta z|=|\Delta x+i\Delta y|>0,$

有 $f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z,$

其中 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0,$

令 $f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v,$

$f'(z)=a+ib,\qquad \rho(\Delta z)=\rho_1+i\rho_2\ ,$

所以 $\Delta u + i\Delta v =$

$$(a+ib)\cdot(\Delta x + i\Delta y) + (\rho_1 + i\rho_2)\cdot(\Delta x + i\Delta y)$$

$$= (a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y)$$

$$+ i(b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y)$$

于是 $\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y,$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y.$$

由复变函数极限存在的充要条件可知

当 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \rho(\Delta z) = 0,$ 有 $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \rho_1 = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \rho_2 = 0,$

由此可知 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微,

且满足方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

(2) 充分性. 由于

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z)-f(z) &= u(x+\Delta x,\, y+\Delta y)-u(x,y) \\ &\quad + i[v(x+\Delta x,\, y+\Delta y)-v(x,y)] \\ &= \Delta u + i\Delta v, \end{aligned}$$

又因为 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微,

于是 $$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y,$$

其中 $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_k = 0, \quad (k = 1,2,3,4)$$

因此 $$f(z+\Delta z) - f(z) =$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y.$$

由柯西一黎曼方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=i^2\frac{\partial v}{\partial x},$

$$f(z+\Delta z)-f(z)=$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\Delta y)+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\Delta y.$$

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}.$$

因为 $\left|\dfrac{\Delta x}{\Delta z}\right| \le 1,\quad \left|\dfrac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le 1,$

$$\lim_{\Delta z \to 0}\left[(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right] = 0,$$

所以 $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

即函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在点 $z = x + yi$ 可导.

[证毕]

根据定理一，可得函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在

点 $z=x+yi$ 处的导数公式：

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

函数在区域 D 内解析的充要条件

定理2: 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在其定义

域 D 内解析的充要条件是： $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在

D 内可微，并且满足柯西—黎曼方程

解析函数的判定方法:

(1) 如果能用求导公式与求导法则证实复变函数 $f(z)$ 的导数在区域 D 内处处存在,则可根据解析函数的定义断定 $f(z)$ 在 D 内是解析的.

(2) 如果复变函数 $f(z)=u+iv$ 中 u,v 在 D 内的各一阶偏导数都存在、连续(因而 $u,v(x,y)$ 可微)并满足 $\mathrm{C-R}$ 方程,那么根据解析函数的充要条件可以断定 $f(z)$ 在 D 内解析.

例: 判定下列函数在何处可导, 在何处解析:

$$(1)\ w=\bar{z};\qquad (2)\ f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y);$$

$$(3)\ w=z\,\mathrm{Re}(z).$$

解: $(1)\ w=\bar{z},\qquad u=x,\quad v=-y,$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

不满足柯西－黎曼方程,

故 $w=\bar{z}$ 在复平面内处处不可导, 处处不解析.

(2) $f(z)=\boxed{e^x(\cos y+i\sin y)}$ 指数函数

$$u=e^x\cos y,\quad v=e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,$$

四个偏导数均连续

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,$$

即 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

故 $f(z)$ 在复平面内处处可导，处处解析.

且 $f'(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=f(z).$

$$(3)\ w = z\,\mathrm{Re}(z) = x^2 + xyi, \qquad u = x^2, \quad v = xy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

四个偏导数均连续

仅当 $x = y = 0$ 时，满足柯西—黎曼方程，

故函数 $w = z\,\mathrm{Re}(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可导，

在复平面内处处不解析.

例：证明(1) $\bar{z}^2$; (2) $\sin\bar{z}$ 在复平面上不解析.

证 (1) $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi,$

$$u = x^2 - y^2,\ v = -2xy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x.$$

仅当 $x = 0$ 时,满足柯西—黎曼方程,

故函数 $w = \bar{z}^2$ 仅在直线 $x = 0$ 上可导,

在复平面内不解析.

$$(2)\ \sin\bar{z} = \sin x\cosh y - i\cos x\sinh y,$$

$$u = \sin x\cosh y, \qquad v = -\cos x\sinh y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x\cosh y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\cos x\cosh y,$$

仅当 $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$\sin\bar{z}$ 在复平面上不解析.

例： 设 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$, 问常数 a,b,c,d 取何值时, $f(z)$ 在复平面内处处解析?

解

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+ay,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=ax+2by,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2cx+dy,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=dx+2y,$$

欲使 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},$

$$2x+ay=dx+2y,\qquad -2cx-dy=ax+2by,$$

所求 $a=2,\ b=-1,\ c=-1,\ d=2.$

例： 证明函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $z=0$ 满足柯西一黎曼方程但在点 $z=0$ 不可导.

证 因为 $f(z)=\sqrt{|xy|}$，所以 $u=\sqrt{|xy|}$， $v=0$,

$$u_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=0=v_y(0,0),$$

$$u_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=0=-v_x(0,0),$$

柯西一黎曼方程在点 $z=0$ 成立.

但当 z 沿第一象限内的射线 $y = kx$ 趋于零时,

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy} \to \frac{\sqrt{k}}{1 + ik},$$ 随 k 变化,

故 $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0}$ 不存在,

函数 $f(z) = \sqrt{|xy|}$ 在点 $z = 0$ 不可导.

例： 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析, 并且 $v=u^2$, 求 $f(z)$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=2u\dfrac{\partial u}{\partial y}$, (1) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2u\dfrac{\partial u}{\partial x}$, (2)

将(2)代入(1)得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(4u^2+1)=0$, 由(2)得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$,

由 $(4u^2+1)\neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

所以 $u=c$ (常数),

于是 $f(z)=c+ic^2$ (常数).

例：设 $f(z)=u+iv$ 为一解析函数，且 $f'(z)\neq 0$，那末曲线族 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 必相互正交，其中 c_1，c_2 为常数.

证 因为 $f'(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}\neq 0$，

所以 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 不全为零，

如果在曲线的交点处 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 都不为零，

曲线族 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 中任一条曲线的斜率分别为 $k_1=-\dfrac{u_x}{u_y},\quad k_2=-\dfrac{v_x}{v_y},$

根据柯西－黎曼方程得

$$k_1\cdot k_2=\left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\cdot\left(-\frac{v_x}{v_y}\right)=\left(-\frac{v_y}{u_y}\right)\cdot\left(\frac{u_y}{v_y}\right)=-1,$$

故曲线族 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 相互正交.

如果 u_y 和 v_y 中有一个为零,则另一个必不为零,两族中的曲线在交点处的切线一条是水平的,另一条是铅直的,它们仍然相互正交.

例： 证明函数 $f(z)=\sqrt{|\operatorname{Im} z^2|}$ 的实、虚部在点 $z=0$ 满足柯西—黎曼方程，但在点 $z=0$ 不可微.

证 因为 $f(z)=\sqrt{|2xy|}$，所以 $u=\sqrt{|2xy|}$，$v=0$，

$$u_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=0=v_y(0,0),$$

$$u_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=0=-v_x(0,0),$$

柯西—黎曼方程在点 $z=0$ 成立.

但在点 $z=0$，$\dfrac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\dfrac{\sqrt{|2\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+i\Delta y}$

故函数 $f(z)$ 在点 $z=0$ 不可微.

调和函数

定义： 如果二元函数 $\varphi(x,y)$ 在区域D内有二阶连续偏导数，且满足拉普拉斯方程：

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

则称函数 $\varphi(x,y)$ 为区域D内的调和函数。

其中： $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为拉普拉斯算符

定理： 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域D内调和，则 $f(z)$ 的实部和虚部都是区域D内的调和函数。

证明： 因为 $f(z)$ 在区域D内解析，所以 $u(x,y)$ $v(x,y)$ 在D 内满足C-R方程

即 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

当 $f(z)$ 解析时，$u(x,y)$ $v(x,y)$ 有任意阶连续偏导数，即有：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x}^{2}$$

因为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

于是有：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=0$$

即是说：$v(x,y)$ 是区域D内的调和函数

同理，$u(x,y)$ 是区域D内的调和函数

例 $f(x,y)=x^2-2xy^2$ 根据定义：$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

因此函数不是调和函数

例： $f(z) = xy^2 + ix^2 y$

因为
$$\begin{cases} u = xy^2 \\ v = x^2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xy \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2xy, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = x^2 \end{cases}$$

四个偏导数处处连续，考虑柯西——黎曼方程　　可见，仅在

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2 \neq \dfrac{\partial v}{\partial y} = x^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xy \neq -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$x = y = 0$$

处可导，在整个复平面不解析，而：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} 2 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \neq 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \neq 0 \end{cases}$$

所以函数不是调和函数

共轭调和函数

定义： 设函数 $\varphi(x,y)$ 及 $\phi(x,y)$ 均为区域D内的调和函数，且满足柯西——黎曼方程，即：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

则称 $\phi(x,y)$ 是 $\varphi(x,y)$ 的共轭调和函数

显然，解析函数的虚部是实部的共轭调和函数。反之，由具有共轭性质的两个调和函数构造一个复变函数是不是解析函数？

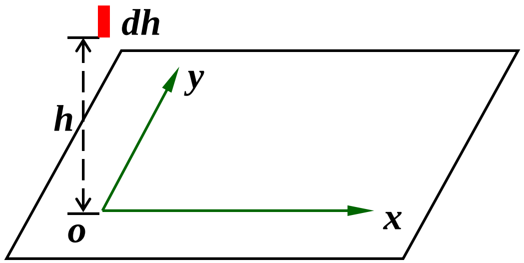
定理： 复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域D内解析的充分必要条件是：

在区域D内，$f(z)$ 的虚部 $v(x,y)$ 是实部 $u(x,y)$ 的共轭调和函数

例： 求一条具有电荷线密度为 e 的均匀带电的无限长直导线 L 所产生的静电场的复势.

解 设导线 L 在原点 $z=0$ 处垂直于 z 平面,

在 L 上距原点为 h 处取微元段 $\mathrm{d}h$, 则其带电量为 $e\mathrm{d}h$.

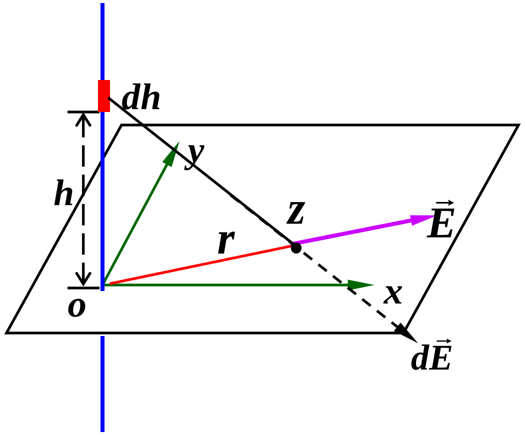


因为导线为无限长, 因此垂直于 xoy 平面的任何直线上各点处的电场强度是相等的.

又因为导线上关于 z 平面对称的两带电微元段所产生的电场强度的垂直分量相互抵消, 只剩下与 xoy 平面平行的分量.

故所产生的静电场为平面场.

先求平面上任一点 z 的电场强度 $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j}$.



由库仑定律,

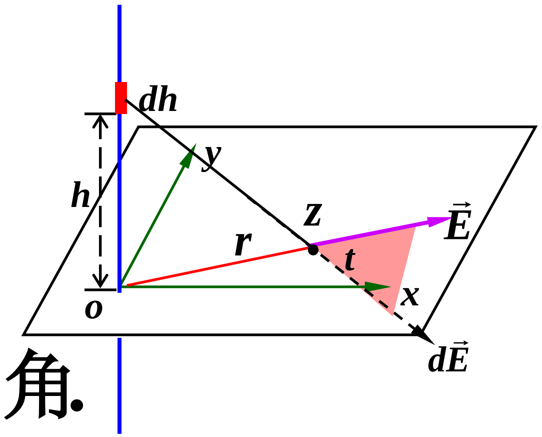
微元段 $\mathrm{d}h$ 在 z 处产生的场强大小为

$$\left|\mathrm{d}\vec{E}\right| = \frac{e\mathrm{d}h}{r^2 + h^2},$$

其中 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

因为所求的电场强度$\vec{E}$在z平面内,

所以其大小为所有场强微元$\mathrm{d}\vec{E}$在z平面上投影之和,



$$\left|\vec{E}\right| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e\cos t}{r^2 + h^2}\mathrm{d}h,$$

其中t为$\mathrm{d}\vec{E}$与xoy平面的交角.

因为$h = r\tan t$, 所以 $\mathrm{d}h = \dfrac{r\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$,

$$\frac{1}{r^2 + h^2} = \frac{\cos^2 t}{r^2}, \qquad \left|\vec{E}\right| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e\cos t}{r}\mathrm{d}t = \frac{2e}{r}.$$

考虑到向量$\vec{E}$的方向，$\vec{E}=\dfrac{2e}{r}\vec{r}^{0}$.

用复数表示为$E=\dfrac{2e}{\bar{z}}$.　　$f'(z)=\overline{iE}=-\dfrac{2ei}{z}$.

复势为 $f(z)=2ei\mathrm{Ln}\dfrac{1}{z}+c,(c=c_1+ic_2)$

于是力函数为 $u(x,y)=2e\mathrm{Arg}z+c_1$,

势函数为 $v(x,y)=2e\ln\dfrac{1}{|z|}+c_2$.

如果导线竖立在$z=z_0$，复势为 $f(z)=2ei\mathrm{Ln}\dfrac{1}{z-z_0}+c$.

调和函数与解析函数的关系

由于共轭调和函数的特殊关系，因此，如果我们知道了其中的一个函数，则根据柯西——黎曼方程求出另外一个函数。显然这是一种求偏积分问题，我们可以通过以下例子给出相应具体的方法

例： 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 是调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$ ，使之满足：

$$f(0)=i$$

解： 因为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2 & \dfrac{\partial u}{\partial y}=-6xy \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

显然 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 的二阶导数是连续的

故 $u(x,y)$ 是调和函数

根据共轭调和的定义，有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-6xy=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

由第一个等式有 $v=\int(3x^2-3y^2)dy=3x^2y-y^3+\varphi(x)$

由第二等式有 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=6xy+\varphi'(x)$

比较两式必然有 $\varphi'(x)=0\Rightarrow\varphi(x)=c$

从而得到一个解析函数 $f(z)=\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3+c\right)$

因为： $f(0)=i$

故 $c=1$ 所以 $f(z)=\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3+1\right)=z^3+i$

例： 已知调和函数 $v(x,y)=e^x\left(y\cos y+x\sin y\right)+x+y$ ，求解析函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

使之满足： $f(0)=0$

解： 因为 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^x\left(y\cos y+x\sin y+\sin y\right)+1$ $\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x\left(\cos y-y\sin y+x\cos y\right)+1$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x\left(\cos y-y\sin y+x\cos y\right)+1$

得 $u=\int\left[e^x\left(\cos y-y\sin y+x\cos y\right)+1\right]dx$

$=e^x\left(x\cos y-y\sin y\right)+x+g(y)$

由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 得

$$e^x\left(y\cos y+x\sin y+\sin y\right)+1=e^x\left(x\sin y+y\cos y+\sin y\right)-g'(y)$$

所以 $g(y)=-y+c$ 因此 $u=e^x\left(x\cos y-y\sin y\right)+x-y+c$

从而得到

$$f(z)=[e^x(x\cos y-y\sin y)+x-y+c)]+i\left[e^x(y\cos y+x\sin y)x+y\right]$$

$$=xe^xe^{iy}+iye^xe^{iy}+x(x+i)+iy(1+i)+c$$

小结：

对于函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处

$f'_x(x_0, y_0)$，$f'_y(x_0, y_0)$

$f(x,y)$在(x_0, y_0)可微

$f(x,y)$在(x_0, y_0)连续

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

$f(x,y)$在(x_0, y_0)调和

谢谢！