贵州大学 计算机科学与技术学院 明德至善 博学笃行
College Of Computer Science & Technology,GuiZhou University

网络与信息安全

# 复变函数与积分变换
## ——第七讲

# 复变函数的柯西积分

贵州大学计算机科学与技术学

潘平

电话：13078569531

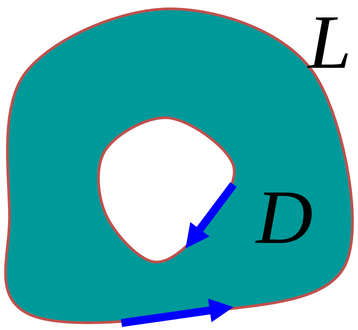
邮箱：panping_17@163.com

# 目 录

- 柯西积分定理
- 复合闭路定理
- 柯西积分公式
- 解析函数的高阶导数

# 知识回顾

（1）格林公式:




区域 *D* 分类 $\begin{cases}\text{单连通区域(无“洞”区域)}\\ \text{多连通区域(有“洞”区域)}\end{cases}$

域 *D* 边界*L* 的正向：右手法则。

**定理.** 设区域 *D* 是由分段光滑正向曲线 *L* 围成，函数

$$P(x,y),Q(x,y)$$

在 *D* 上具有连续一阶偏导数，则有

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

## （2）平面上曲线积分与路径无关的等价条件

**定理.** 设$D$是单连通域， 函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在$D$内具有一阶连续偏导数， 则以下四个条件等价:

(1) 沿$D$中任意光滑闭曲线$L$，有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0.$ $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

(2) 对$D$中任一分段光滑曲线$L$，曲线积分与路径无关，只与起止点有关.

(3) $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$在$D$内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分,

即 $$\mathrm{d}\,u(x,y)=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

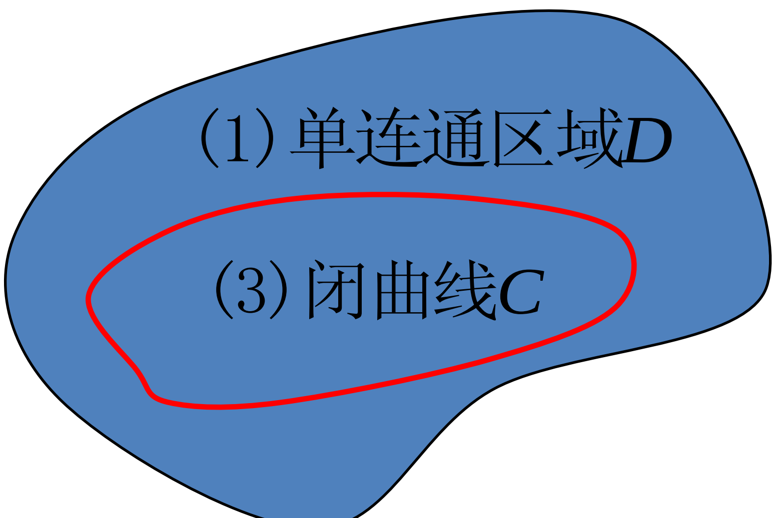
(4) 在$D$内每一点都有 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

# 柯西积分定理

**定理：（柯西—古萨基本积分定理）**

设函数$f(z)$在单连通区域$D$内 处处解析，

那么函数$f(z)$在$D$内沿任何一条封闭曲线$C$的积分为零，




即： $\boxed{\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0.}$

(2) $f(z)$在区域$D$内处处解析

$\boxed{\text{则} \oint_C f(z)dz = 0.}$

**证明:**

因为函数$f(z)$在区域$D$内解析，故$f'(z)$存在,

(下面在$f'(z)$连续的假设下证明)

（注：以后我们将知道只要函数$f(z)$解析，$f'(z)$必连续）

因为$u$与$v$的一阶偏导数存在且连续，

应用格林公式得:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx + u(x.y)dy$$

$$= -\iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

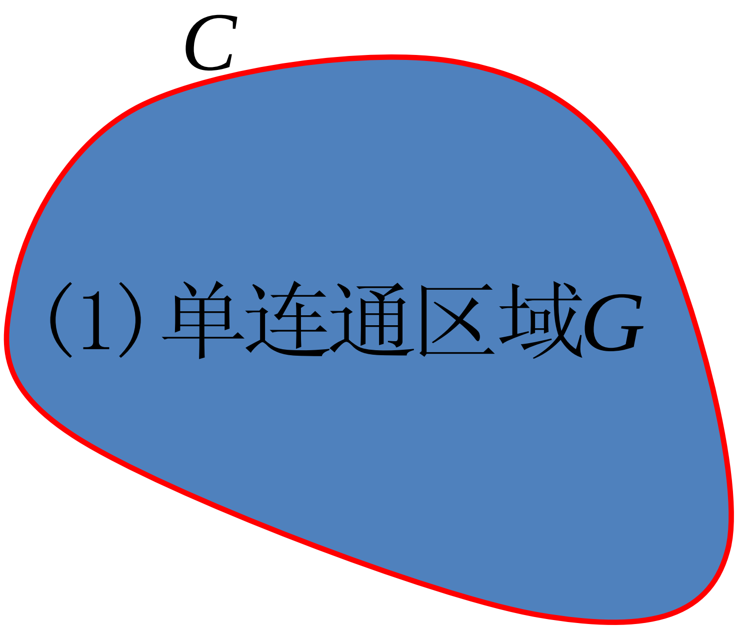
其中$G$为简单闭曲线$C$所围区域，由于函数 $f(z)$解析，$C-R$方程成立,

$$\Rightarrow \oint_C f(z)dz = 0.$$

## 说明1：

若曲线$C$是$G$的边界，如果函数$f(z)$在$G$内和$C$上解析，那么仍有：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$




(2) 闭曲线$C$

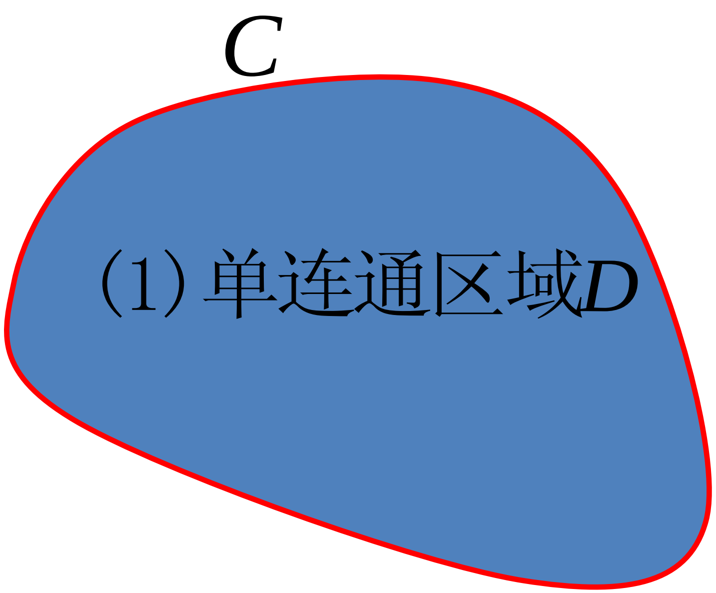
(3) $f(z)$在$G$内和$C$上解析

则$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$

**说明2：**

若函数$f(z)$在$G$内解析，在闭区域$\overline{G}=G+C$上连续，仍有：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$




(2) 闭曲线$C$

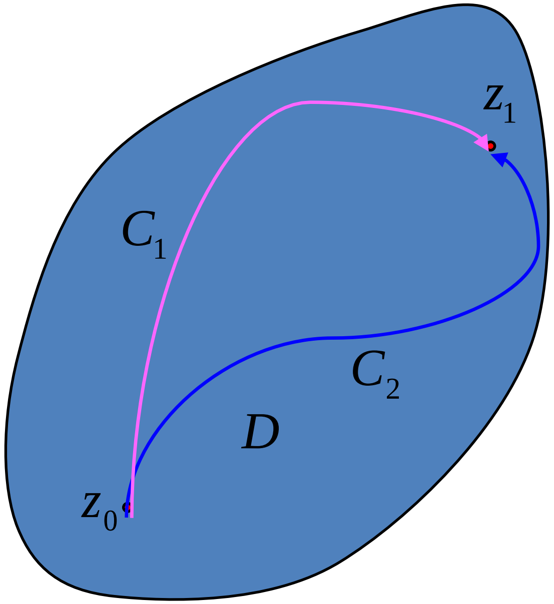
(3) $f(z)$在$G$内解析，在$\overline{G}=G+C$上连续

则 $\int_C f(z)dz=0.$

# 定理：

设函数$f(z)$在单连通区域$D$内解析，$z_0$与$z_1$为$D$内任意两点，$C_1$与$C_2$为连接$z_0$与$z_1$的积分路线，$C_1$与$C_2$都含于$D$内，则

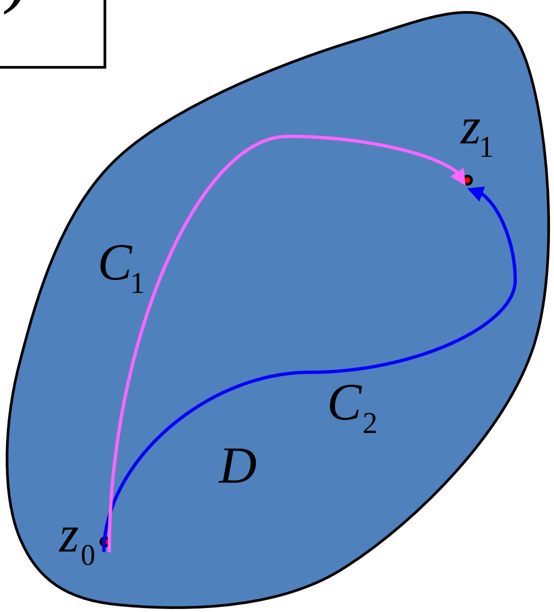
$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$




**该定理表明：**单连通区域内的解析函数的积分与路径无关.

**证明：**

$$\boxed{\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z}$$




证明：依柯西-古萨基本定理

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_1+C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$

**例：**

计算积分$\int_C \sin z dz$，其中

(1) $C$是圆周$|z-1|=1$的正向。

(2) $C$是圆周$|z-1|=1$的上半周，方向为从0到2.

**解：** (1) 因为函数$\sin z$是全平面的解析函数，

由柯西-古萨基本定理：

$$\int_C \sin z dz = 0$$

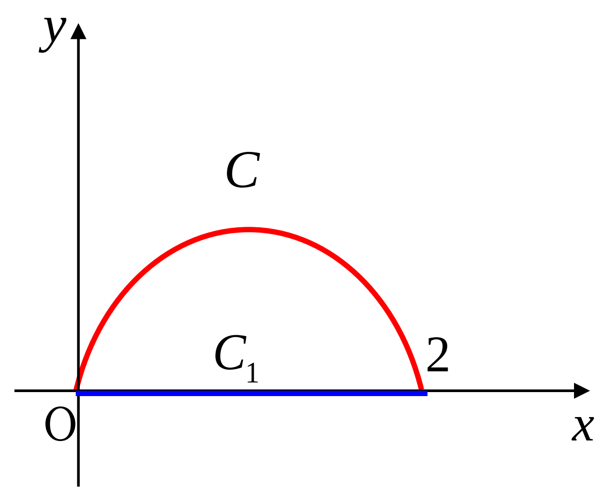
(2) 因为函数 $\sin z$ 是全平面的解析函数，

由柯西-古萨基本定理，它的积分与路径无关，

于是可以换一条路线 $C_1$，沿实轴从0到2积分得：

$$\int_C \sin z dz = \int_{C_1} \sin z dz$$

$$= \int_0^2 \sin x dx = 1 - \cos 2.$$



**例：**

计算积分$\int_C z\,dz$，$\int_C \operatorname{Re} z\,dz$，$\int_C \operatorname{Im} z\,dz$，其中$C$是圆周$|z|=1$的正向。

$$\int_C z\,dz = 0,\ \int_C \operatorname{Re} z\,dz = \pi i,\ \int_C \operatorname{Im} z\,dz = -\pi.$$

$$\int_C \operatorname{Re} z\,dz = \int_C x(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y)$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta(-\sin\theta + i\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi i$$

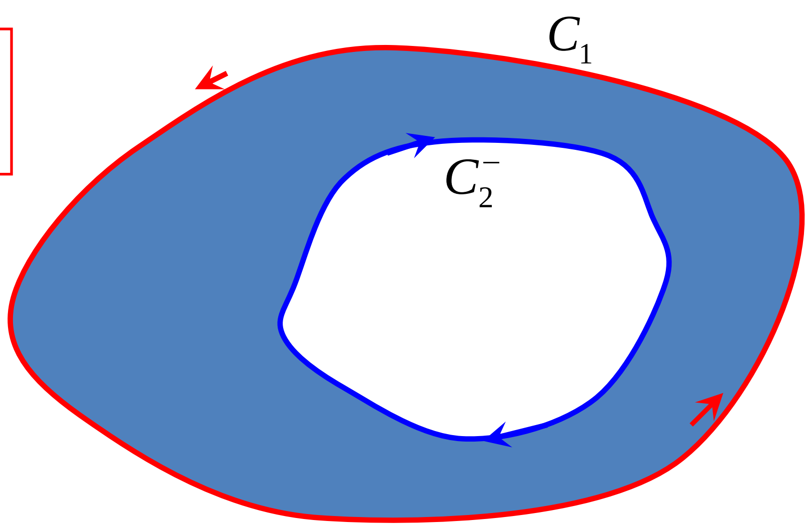
**说明**：若$f(z)$的积分等于零，并非一定有$\operatorname{Re} f(z)$或$\operatorname{Im} f(z)$的积分也为零。

# 复合闭路定理

## 定理（闭路变形定理）

设$C_1$与$C_2$是两条简单闭曲线，为逆时针方向，$C_2$在$C_1$内部，函数$f(z)$在$C_1$与$C_2$所围成的二连通区域$D$内解析，在$\overline{D}=D+C_1+C_2^-$上连续，则

$$\boxed{\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.}$$




一个解析函数沿闭曲线的积分不会因闭曲线在区域内作连续的变形而改变它的值，这事实称**闭路变形原理**.

**证明：**

$$\text{设} L_1 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA},$$

$$L_2 = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB},$$

由柯西－古萨基本定理得：

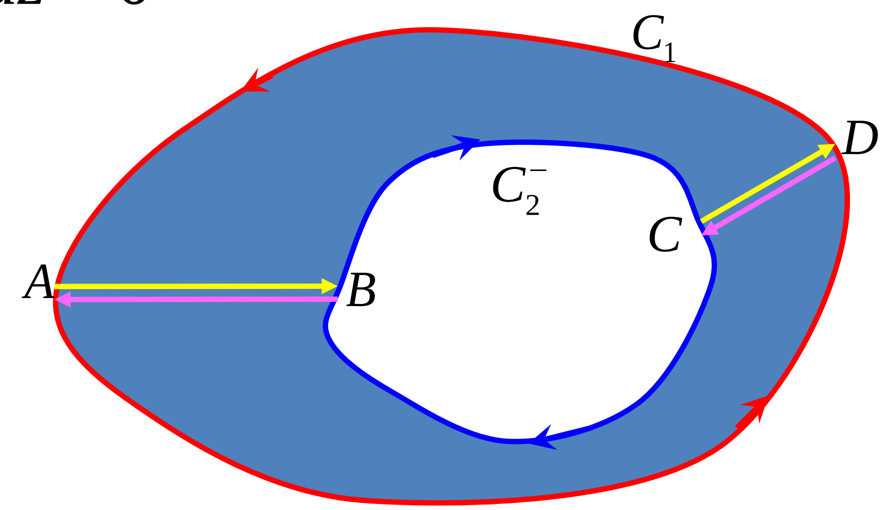
$$\oint_{L_1} f(z)dz = 0, \quad \oint_{L_2} f(z)dz = 0$$

$$\oint_{L_1} f(z)dz + \oint_{L_2} f(z)dz$$

$$= \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2^-} f(z)dz$$

$$= 0,$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$



## 推论：（复合闭路定理）

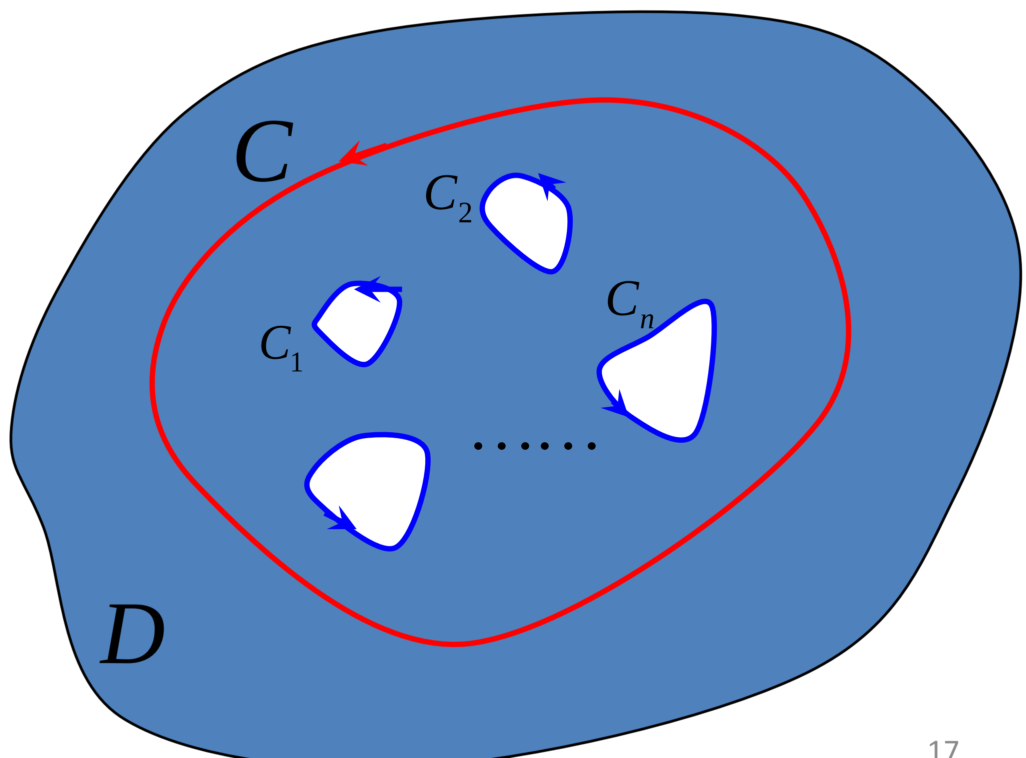
设$C$为多连通区域$D$的一条简单闭曲线，

$C_1, C_2, \cdots\cdots C_n$是在$C$内部的简单闭曲线，它们互不包含也互不相交，并且以$C, C_1, C_2, \cdots\cdots C_n$为边界的区域全包含于$D$，如果函数$f(z)$在

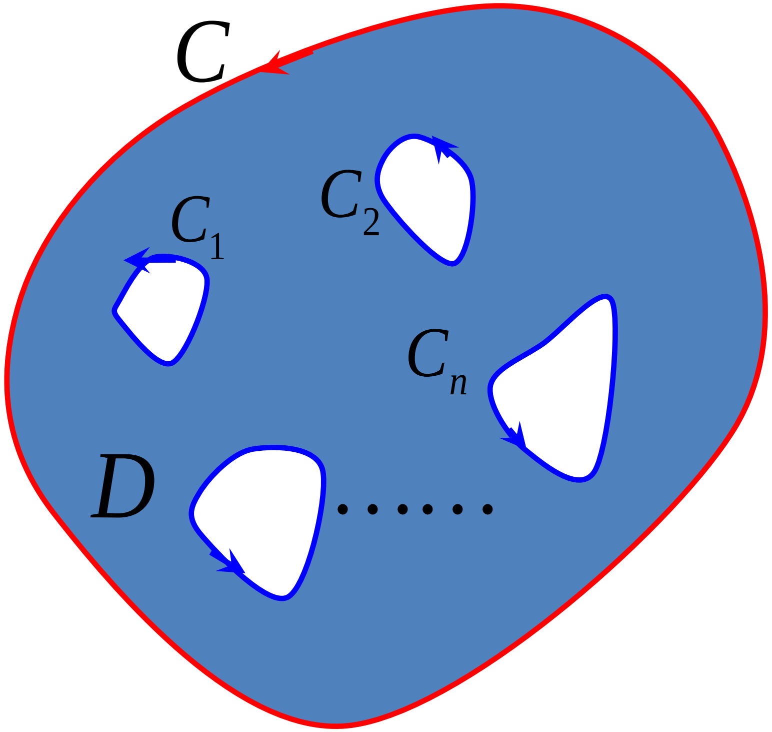
$D$内解析，则

$$\boxed{\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z,}$$

其中$C$及$C_k$均取正方向.



**证明：** $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$




这里$\Gamma$为$C$及$C_k$，

$(k=1,2,\cdots\cdots,n)$

所围成的复合闭路，

其方向 是$C$按逆时针进行，

$C_k^-$按顺时针进行.

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz,}$$

其中$C$及$C_k$均取正方向.

**例：** 对包含$z_0$的任何一条正向简单闭曲线$C$，

都有
$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}=2\pi i.$$

**解：我们分两步来说明**

(1) 计算 $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$

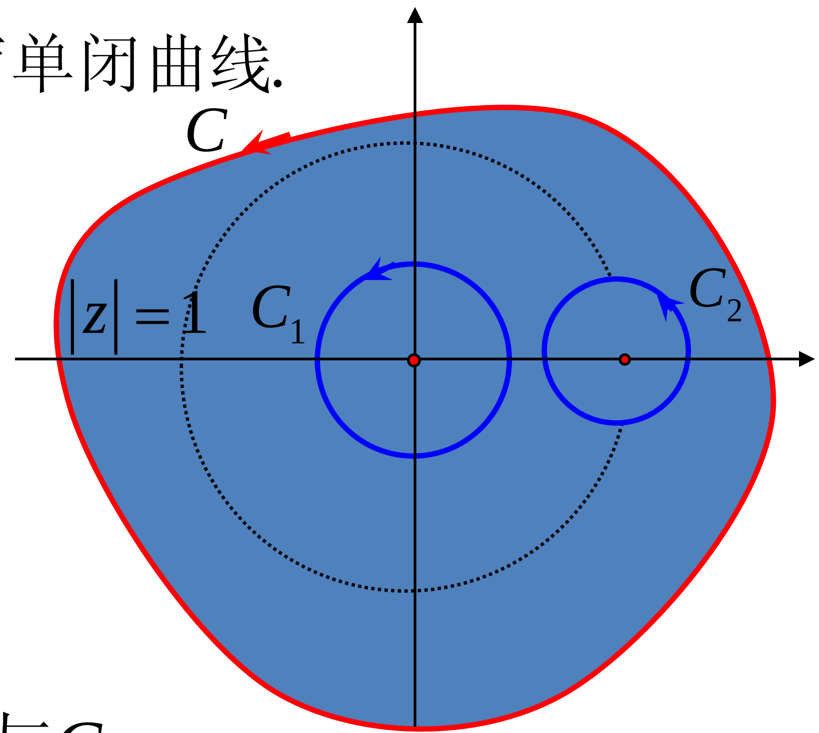
其中$C$为以$z_0$为中心，$r$为半径的正向圆周，$n$为整数.

$$\boxed{\text{结论：}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi i, & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases}}$$

(2) 根据闭路变形原理，对包含$z_0$的任何一条正向简单闭曲线$C$，都有

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}=2\pi i.$$

**例：** 计算积分$\oint_C \frac{(2z-1)}{z^2-z}\mathrm{d}z$的值，其中$C$为包含圆周$|z|=1$在内任何正向简单闭曲线.




**解：** 因为函数$f(z)=\frac{2z-1}{z^2-z}$在复平面内除$z=0, z=1$两个奇点外是处处解析的，所以在$C$内以$z=0, z=1$为圆心分别作两个互不包含也互不相交的正向圆周$C_1$与$C_2$,

根据复合闭路定理，得:

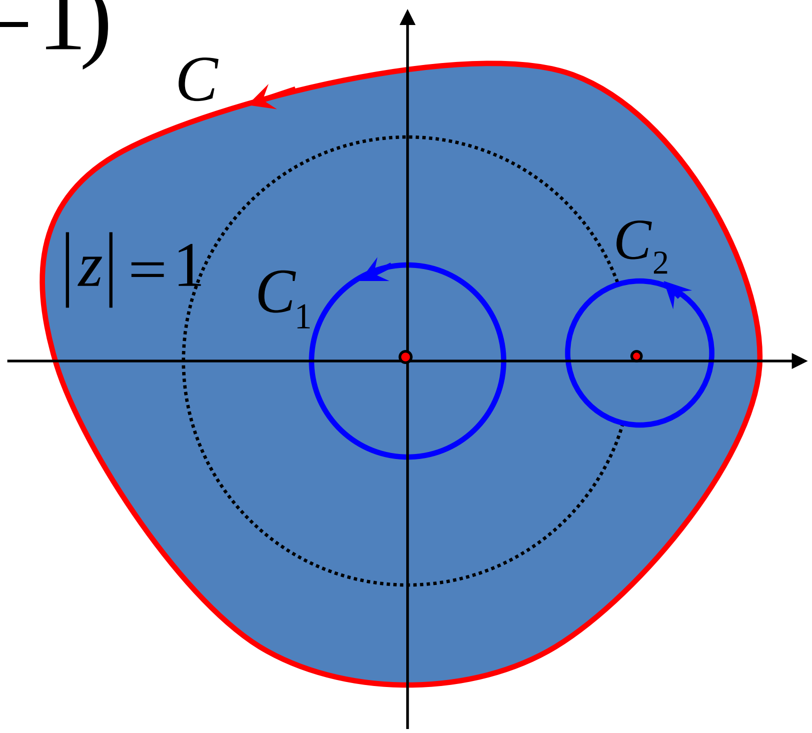
$$\oint_C \frac{(2z-1)dz}{z^2-z} = \oint_C \frac{(2z-1)dz}{z(z-1)}$$

$$= \oint_C \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right)dz$$

$$= \oint_{C_1} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right)dz$$

$$+ \oint_{C_2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right)dz$$

$$= 2\pi i + 0 + 0 + 2\pi i = 4\pi i$$



# 原函数

**由柯西积分定理可知：**

如果函数$f(z)$在单连通区域$D$内处处解析，

则积分$\int_C f(z)dz$与连接起点及终点的路线$C$无关.

即：解析函数在单连通区域内积分只与曲线的起点$z_0$及终点$z_1$有关，于是：

$$\boxed{\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z,}$$

积分上限

积分下限

表示与积分路径无关.

## 1．积分上限函数

若固定$z_0$，让上限$z_1 = z$变动，则积分

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$$

称为积分上限z的函数，记作：

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

**定理：**

设函数$f(z)$在单连通区域$D$内解析，则函数$F(z)$必为$D$内的一个解析函数，且

$$F'(z)=\left[\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]'=f(z)$$

定理的证明不作要求

**证明：** 设$z$为$D$内任意一点，因为函数$f(z)$在$D$内解析，

所以$f(z)$在$D$内连续，因此对$\forall \varepsilon > 0$,

总可以找到一个$\delta > 0$，使得对于满足$|\zeta - z| < \delta \subset D$

的一切$\zeta$，都有$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$.

以$z$为中心作一含于$|\zeta - z| < \delta$的小圆$k \subset D$,

取$|\Delta z|$充分小，使$z + \Delta z$在$k$内，于是

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

由于积分与路径无关，因此$\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$的积分路线可取先从$z_0$到$z$,

然后再从$z$沿直线段到$z + \Delta z$,

而从$z_0$到$z$的积分路线取得与积分$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$的积分路线相同，于是有

从而 $\dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\dfrac{1}{\Delta z}[\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-\Delta z f(z)]$

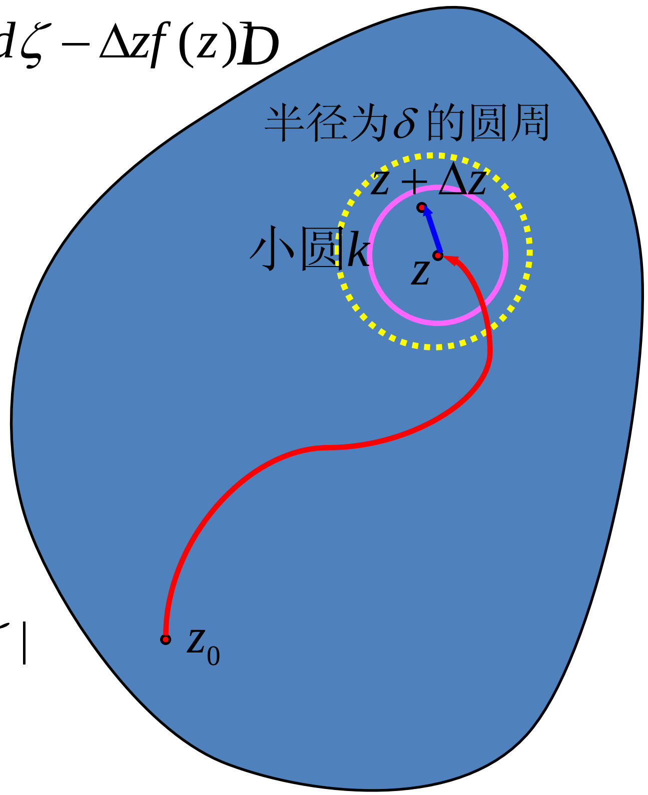
$$=\frac{1}{\Delta z}[\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta]$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta$$

根据积分估值性质：

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta\right|$$

$$\leq\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|ds\leq\frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z|=\varepsilon$$




也就是说，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=0$ 即：$F'(z)=f(z).$

# 原函数的概念

定义：如果函数$F(z)$在区域$D$内的导数等于$f(z)$，即：$F'(z)=f(z)$，

则称函数$F(z)$为$f(z)$在区域$D$内的原函数.

**结论：**

(1) 积分上限函数$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$是$f(z)$的一个原函数；

(2) 如果函数$f(z)$在区域$D$内有一个原$F(z)$，那么它就有无穷多个原函数$F(z)+C$,($C$为任意常数).

(3) 函数$f(z)$的任意两个原函数之差为一常数；

**定理：** 设函数$f(z)$在单连通区域$D$内解析，函数$G(z)$为$f(z)$的一个原函数，则

$$\boxed{\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1) - G(z_0)}$$

其中$z_0, z_1$为区域$D$内的两点.

**证明：** 因为$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$是函数$f(z)$的一个原函数，所以$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = G(z) + C,$

当$z = z_0$时，$\int_{z_0}^{z_0} f(z)dz = G(z_0) + C = 0,$

$$\Rightarrow C = -G(z_0), \qquad \text{于是} \int_{z_0}^{z} f(z)dz = G(z) - G(z_0),$$

$$\Rightarrow \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = G(z_1) - G(z_0).$$

注：定理6类似于微积分学中的基本定理：牛顿——莱布尼兹公式

$$\boxed{\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1) - G(z_0) = G(z)\Big|_{z_0}^{z_1}}$$

有了上面的定理，复变函数的积分就可用跟实变量函数微积分学中类似的方法计算，分部积分法，换元积分法均可用在复变函数积分中.

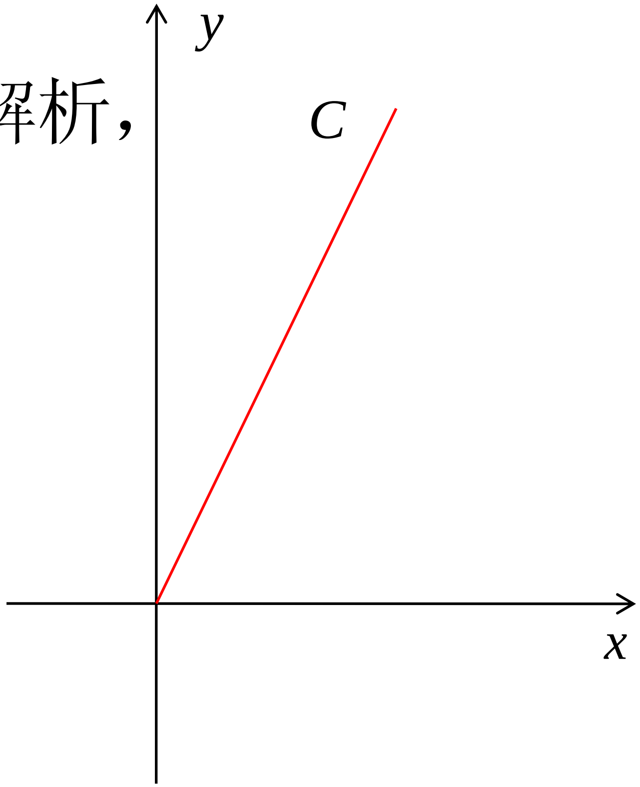
$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1) - G(z_0) = G(z)\Big|_{z_0}^{z_1}$$

有了定理 6，复变函数的积分就可用跟实变量函数微积分学中类似的方法计算，分部积分法，换元积分法均可用在复变函数积分中.

**例：** 求积分$\int_C z\mathrm{d}z$的值. 其中C为从原点到点$3+4i$的直线段。

**解：** 函数$f(z)=z$在全复平面内解析，

$$\int_C z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}z^2\Big|_0^{3+4i}=\frac{1}{2}(3+4i)^2$$



**例：**

$$\text{求积分}\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta}\mathrm{d}\theta\text{的值.}$$

**解：** 函数$f(z)=e^{-i(n-1)\theta}$在全复平面内解析，

$$\Rightarrow \frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\begin{cases} 2\pi i\,, & n=1, \\ \dfrac{-1}{(n-1)r^{n-1}} e^{-i(n-1)\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0, & n\neq 1. \end{cases}$$

**例：**

求积分$\int_a^b z^n \mathrm{d}z$的值. $n=0,1,2,\cdots$； $a,b$均为有限复数。

**解：** 函数$f(z)=z^n$在全平面内解析，

$$\Rightarrow \int_a^b z^n \mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{(n+1)} z^{n+1}\Big|_a^b=\frac{1}{(n+1)}(b^{n+1}-a^{n+1})$$

**例：** 试沿区域$\operatorname{Im}(z)\geq 0,\operatorname{Re}(z)\geq 0$内的圆弧$|z|=1$，计算积分$\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz$的值.

**解：** 因为函数$f(z)=\frac{\ln(z+1)}{z+1}$在所设区域内解析，

$$\Rightarrow \int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz=\int_1^i \ln(z+1)d\ln(z+1)=\frac{1}{2}\ln^2(z+1)\Big|_1^i$$

$$=\frac{1}{2}[\ln^2(1+i)-\ln^2 2] \quad =\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}i)^2-\ln^2 2]$$

$$=-\frac{\pi}{32}-\frac{3}{8}\ln^2 2+i\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

**例：**

计算：$\int_C \ln(1+z)\mathrm{d}z$，其中C是从$-i$到$i$的直线段.

**解：** 函数$f(z)=\ln(1+z)$是在平面除去负实轴上一段$x\le -1$的区域$D$内单值解析，而区域$D$是单连通的，故：

$$\Rightarrow \int_C \ln(1+z)\mathrm{d}z = z\ln(1+z)\big|_{-i}^{i} - \int_{-i}^{i}\frac{z}{1+z}\mathrm{d}z$$

$$=(-2+\ln 2+\frac{\pi}{2})i\,.$$

注：$\int_C \ln(1+z)\mathrm{d}z$ 的计算.

$$\int_C \ln(1+z)\mathrm{d}z = \int_C \ln(1+z)\mathrm{d}(z+1)$$

$$= (z+1)\ln(1+z)\Big|_{-i}^{i} - \int_{-i}^{i} \frac{z+1}{z+1}\mathrm{d}z$$

$$= (1+i)\ln(1+i) - (1-i)\ln(1-i) - 2i$$

$$= (-2 + \ln 2 + \frac{\pi}{2})i\,.$$

**例：** 求积分$\int_1^{1+i} ze^z \mathrm{d}z$的值.

**解：** 函数$f(z)=ze^z$在全复平面内解析，

$$\Rightarrow \int_1^{1+i} ze^z dz = ze^z \Big|_1^{1+i} - \int_1^{1+i} e^z dz$$

$$=(1+i)e^{1+i} - e - e^z \Big|_1^{1+i}$$

$$=(1+i)e^{1+i} - e^{1+i} = ie^{1+i}$$

$$=eie^{i} = ei(\cos 1 + i\sin 1)$$

$$=e(-\sin 1 + i\cos 1).$$

# 柯西积分公式

设$D$为一单连通区域，$z_0$为$D$中一点. $C$为 $D$内围绕 $z_0$ 的一条封闭曲线。

（1） 如果 $f(z)$在$D$内解析，则$\oint_C f(z)dz = 0.$

(2) $\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$

问题：$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = ?$

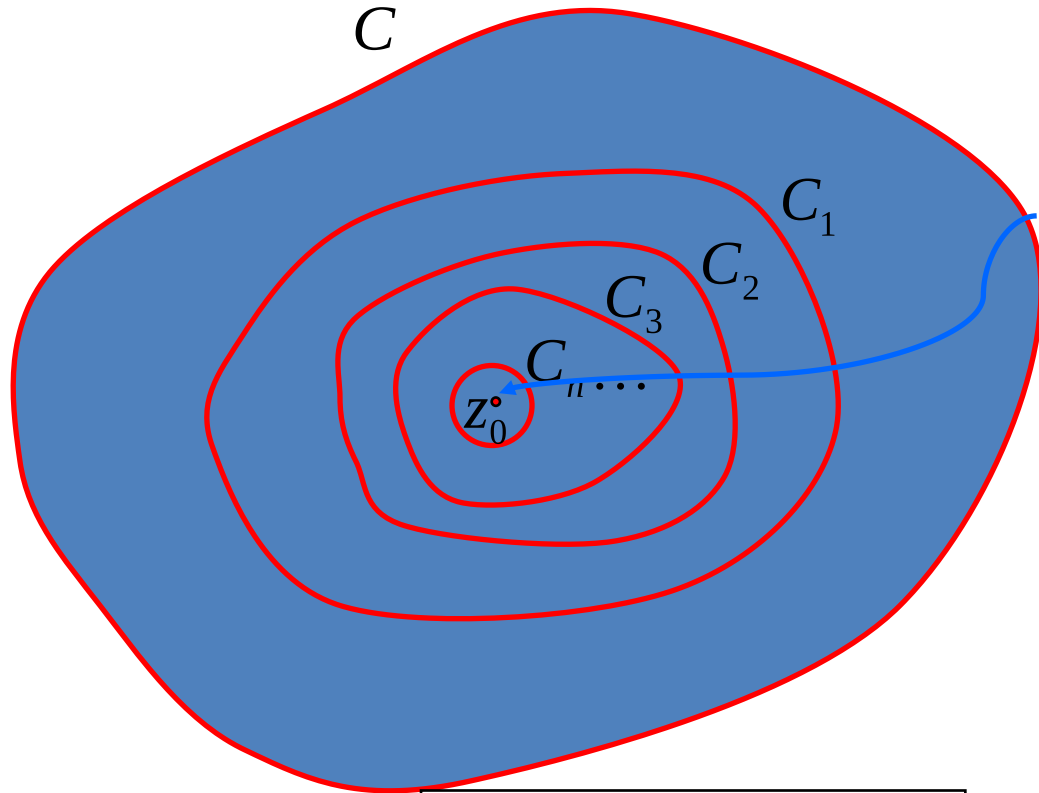
由闭路变形定理：

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$= \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$= \cdots$$

$$= \oint_{C_n} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$




由于函数$f(z)$的连续性， $f(z) \to f(z_0)$,

$\boxed{\dfrac{f(z)}{z-z_0}\text{在}z_0\text{处不解析}}$

猜想： $\boxed{\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \dfrac{f(z_0)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0).}$

## 定理：（柯西积分公式）

设函数$f(z)$在简单闭曲线$C$所围成的区域$D$内解析，在$\overline{D}=D\cup C$上连续，$z_0$为$D$内任意一点，则

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz}$$

定理的证明不作要求

**定理8：（柯西积分公式）**

设函数$f(z)$在简单闭曲线$C$所围成的区域$D$内解析，在$\overline{D}=D\cup C$上连续，$z_0$为$D$内任意一点，则

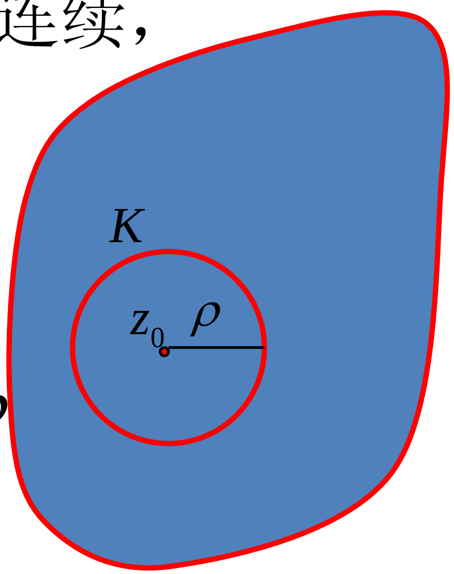
$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

**证明：** 由于函数$f(z)$在$z_0$解析，当然在$z_0$点连续，

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)>0,$ 当$|z-z_0|<\delta$时，都有

$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$

作以$z_0$为中心，$\rho$为半径的圆周$k$: $|z-z_0|=\rho$
使其全部在$C$的内部，且$\rho<\delta$，则



$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_k \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_k \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz + \oint_k \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

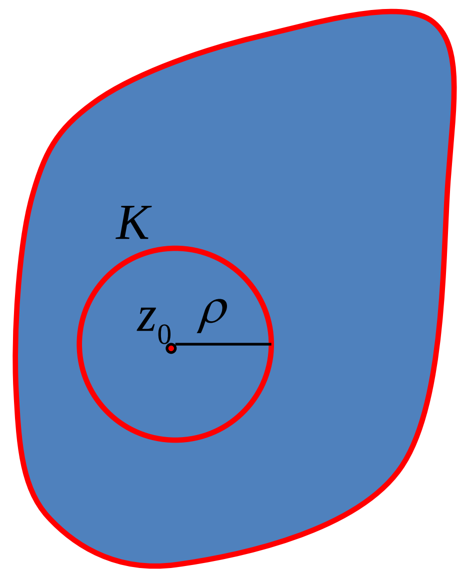
$$= 2\pi i f(z_0) + \oint_k \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

$$\text{而}\left|\oint_k \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \oint_k \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}ds < \frac{\varepsilon}{\rho}\oint_C ds = 2\pi\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\oint_k \frac{f(z)}{z-z_0}dz - 2\pi i f(z_0)\right| < 2\pi\varepsilon,$$

于是

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0).$$



## 几点说明：

(1)公式 $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$ 把一个函数在 $C$ 内部任一点的值用它在边界上的积分值表示，这是解析函数的又一特征.

**（2）柯西公式提供了计算积分的一个新方法：**

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i\, f(z_0).}$$

**（3）柯西公式可表成如下形式（研究函数的工具）：**

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi.}$$

**例：** 计算下列积分

$$(1)\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}dz,\quad (2)\oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2z}{z-3}\right)dz.$$

$$(3)\ \oint_{|z|=2}\frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz.$$

**解：** $$(1)\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}dz=\sin z\,|_{z=0}=0.$$


$$(2)\oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2z}{z-3}\right)dz.$$

**解：**

$$\oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2z}{z-3}\right)dz$$

$$=\oint_{|z|=4}\frac{1}{z+1}dz+\oint_{|z|=4}\frac{2z}{z-3}dz$$

$$=2\pi i+2\pi i\cdot 2z\,\big|_{z=3}$$

$$=2\pi i+12\pi i=14\pi i.$$

$$(3)\oint_{|z|=2}\frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz.$$

**解：**

$$\oint_{|z|=2}\frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz=\oint_{|z|=2}\frac{\dfrac{z}{9-z^2}}{z-(-i)}dz$$

$$=2\pi i\frac{z}{9-z^2}\bigg|_{z=-i}=\frac{\pi}{5}.$$

**例**：计算下列积分 $\oint_C \frac{dz}{z(z^2+1)}$,

其中$C$: $|z-i| = \frac{3}{2}$的正向.

**解**：因为函数$\frac{1}{z(z^2+1)}$在$C$内有两个奇点$z=0$,

及$z=i$,

所以分别以$z=0$及$z=i$为圆心，以$\frac{1}{4}$为半径

作圆周$C_1$及$C_2$,

由复合闭路定理，得:

$$\oint_C \frac{dz}{z(z^2+1)} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z(z^2+1)} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z(z^2+1)}$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\dfrac{1}{(z^2+1)}}{z} dz + \oint_{C_2} \frac{\dfrac{1}{z(z+i)}}{(z-i)} dz$$

$$= 2\pi i \left. \frac{1}{(z^2+1)} \right|_{z=0} + 2\pi i \left. \frac{1}{z(z+i)} \right|_{z=i}$$

$$= 2\pi i + 2\pi i(-\frac{1}{2}) = \pi i.$$

**推论1*：（平均值公式）**

设函数$f(z)$在$|z-z_0|<R$内解析，在$|z-z_0|=R$上连续，则

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\theta})d\theta.}$$

$\boxed{\text{这表明解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.}}$

**推论2*：** 设函数$f(z)$在简单闭曲线$C_1, C_2$所围成的二连通域$D$解析，并在$C_1, C_2$上连续，$C_2$在$C_1$的内部，$z_0$为$D$内一点，则

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.}$$

由平均值公式还可以推出解析函数的一个重要性质，即解析函数的最大模原理.

**定理9：**（最大模原理）设函数$f(z)$在区域$D$内解析，又函数$f(z)$不是常数，则在$D$内$|f(z)|$没有最大值.

这个定理表明一个解析函数的模，在区域内部的任何一点都达不到最大值，除非这个函数恒等于常数．这是**解析函数一个非常重要的原理**.

**推论1：** 区域$D$内解析的函数，若其模在$D$的内点达到最大值，则此函数必恒为常数.

**推论2：** 若函数$f(z)$在有界区域$D$内解析，在$\overline{D}$上连续，则$|f(z)|$必在$D$的边界上达到最大值.

**说明：** 最大模原理不仅是复变函数论一个很重要的原理，而且在实际上也是很有用的原理，它在流体力学上反映了平面稳定流动在无源无旋的区域内流体的最大值不能在区域内达到，而只能在边界上达到，除非它是等速流体.

- **例：** 设$f(z)$在全平面为解析函数，又对任意$r>0$，令$M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$，求证$M(r)$是$r$的单调上升.

**证明：** 因为对于任意的$r>0$，函数$f(z)$在$|z|\le r$上解析，

所以由最大值原理及其推论2知，函数$f(z)$在$|z|\le r$上的最大值必在$|z|=r$上取得，

即：$M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|=\max\limits_{|z|\le r}|f(z)|$，

因此，当$r_1<r_2$时，有：

$$M(r_1)=\max_{|z|\le r_1}|f(z)|\le\max_{|z|\le r_2}|f(z)|=M(r_2)$$

即$M(r)$是$r$的单调上升函数.

# 课堂练习

1　求积分$\int_C z^2 dz$的值. 其中C为从原点到点$2+3i$的直线段。

2　计算积分$\int_C \sin z dz$，其中$C$是圆周$|z-1|=1$的上半周，方向为从0到2.

3　$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z^2-9)(z-i)} dz.$

# 课堂练习解答

$$1 \quad \int_C z^2 \mathrm{d}z = \int_0^{2+3i} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{2+3i} = \frac{1}{3}(2+3i)^3$$

$$2 \quad \int_C \sin z \mathrm{d}z = \int_0^{2} \sin z dz = -\cos z \Big|_0^{2} = 1 - \cos 2$$

$$(3)\ \oint_{|z|=2} \frac{z}{(z^2-9)(z-i)} dz = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{z}{z^2-9}}{z-i} dz.$$

$$= 2\pi i \frac{z}{z^2-9} \Big|_{z=i} = \frac{\pi}{5}.$$

# 解析函数高阶导数公式

一个解析函数不仅有一阶导数，而且有各高阶导数，它的值也可以用函数在边界上的值通过积分来表示．这一点跟实变函数完全不同，一个实变函数在某一区间上可导，它的导数在这个区间上是否连续也不一定，更不要说有高阶导数存在了．下面我们讨论解析函数的各阶导数的解析问题．

柯西公式：

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta}$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi i f(z_0)$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi i, & n=1,\\ 0, & n\neq 1.\end{cases}$$

推广：

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z=?$$

我们将柯西公式：$f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$

的形式在积分号下对z求导得：

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta,$$

**再继续又可得：** $f''(z)=\dfrac{2!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}d\zeta,$

依次类推，$n$阶导数 $f^{(n)}(z)$的可能形式是：

依次类推，$n$阶导数 $f^{(n)}(z)$的可能形式是：

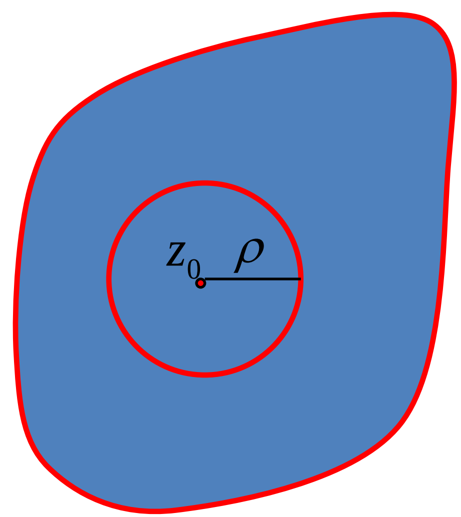
$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta.$$

**这是求导与积分两种运算允许交换的条件下推出的，这样作是否可行呢？我们有以下定理.**

**定理**：

设函数$f(z)$在简单闭曲线$C$所围成的区域$D$内解析，而且在$\overline{D}=D\cup C$上连续，则函数$f(z)$的各阶导数均在$D$内解析，对$D$内任一点$z$有：

$$\boxed{f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \qquad (n=1,2,\cdots).}$$



**定理10：** 设函数$f(z)$在简单闭曲线$C$所围成的区域$D$内解析，而且在$\overline{D}=D\cup C$上连续，则函数$f(z)$的各阶导数均在$D$内解析，对$D$内任一点$z$，有

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,(n=1,2,\cdots).$$

**证明(不证)：** 设$z$为$D$内的任意一点，先证明$n=1$的情况，即

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta.$$

根据导数定义：$f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$，

由柯西积分公式得：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad f(z+\Delta z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z-\Delta z}d\zeta$$

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i\Delta z}\oint_C f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{1}{\zeta-z}\right]d\zeta$$

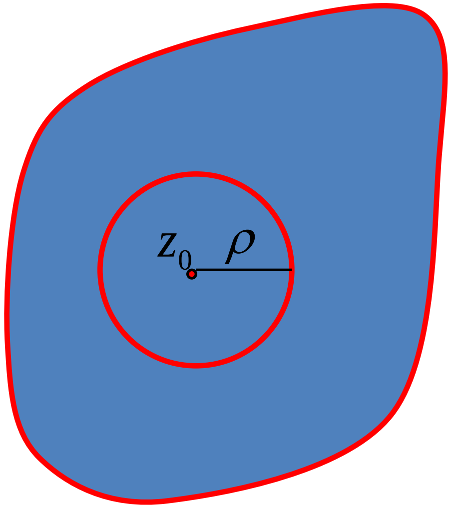
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)(\zeta-z-\Delta z+\Delta z)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\Delta z f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}d\zeta$$

设后一个积分为I，那么

$$|\mathrm{I}|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_C \frac{\Delta z f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}d\zeta\right|\le\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|\Delta z||f(\zeta)|}{|(\zeta-z)^2||(\zeta-z-\Delta z)|}ds$$




因为$f(z)$在$C$上解析，所以$C$上连续，故在$C$上有界,

因此一定存在一个$M>0$，使$|f(z)|\le M$.

设$d$为从$z$到曲线$C$各点的最短距离，并且取$|\Delta z|$适当小，使满足$|\Delta z|<\frac{1}{2}d$,

那么有$|\zeta-z|\ge d$, $\quad\frac{1}{|\zeta-z|}\le\frac{1}{d}$,

于是$|\zeta-z-\Delta z|\ge|\zeta-z|-|\Delta z|>\frac{d}{2}$, $\quad\frac{1}{|\zeta-z-\Delta z|}<\frac{2}{d}$

所以$|\mathrm{I}|<|\Delta z|\frac{ML}{\pi d^3}$,($L$为$C$之长)

当$\Delta z \to 0$时，$\mathrm{I} \to 0$，从而有

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

这证明了解析函数的导数仍是解析函数.

要完成定理的证明，只需应用数学归纳法，设$n = k$时公式成立，

证明$n = k + 1$时也成立，即证明下式：

$$\frac{f^{(k)}(z+\Delta z) - f^{(k)}(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left[\frac{(k+1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)^{k+2}} d\zeta + \frac{(k+1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta\right]$$

当$\Delta z \to 0$时，有$f^{k+1}(z_0) = \dfrac{(k+1)!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta.$

**说明：**（1）此公式可理解为把柯西公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

两边对z求$n$阶导，右边在积分号内求导，即

$$\boxed{f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta}$$

（2）高阶导数公式提供了计算一类函数的积分方法

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(z_0).}$$

**例：** 求下列积分的值.

$$(1)\ \oint_{|z-i|=1}\frac{\cos z}{(z-i)^3}\,\mathrm{d}z\,,\qquad (2)\ \oint_{|z|=4}\frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z-1)^2}\,\mathrm{d}z.$$

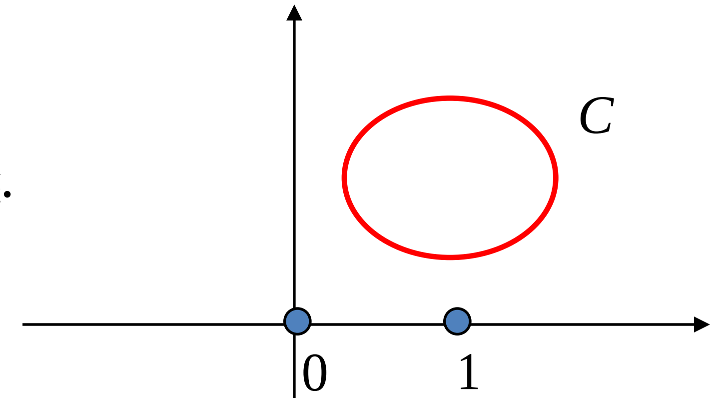
**解：**

$$(1)\ \oint_{|z-i|=1}\frac{\cos z}{(z-i)^3}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{(3-1)!}(\cos z)''\Big|_{z=i}\qquad=-\pi i\cos i$$

$$(2)\ \oint_{|z|=4}\frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z-1)^2}\,\mathrm{d}z=\oint_{|z|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^2}}{z^2}\,\mathrm{d}z+\oint_{|z-1|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{\mathrm{e}^z}{z^2}}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\left(\frac{e^z}{(z-1)^2}\right)'\Bigg|_{z=0}+2\pi i\left(\frac{e^z}{z^2}\right)'\Bigg|_{z=1}\qquad=2\pi(3-\mathrm{e})i$$

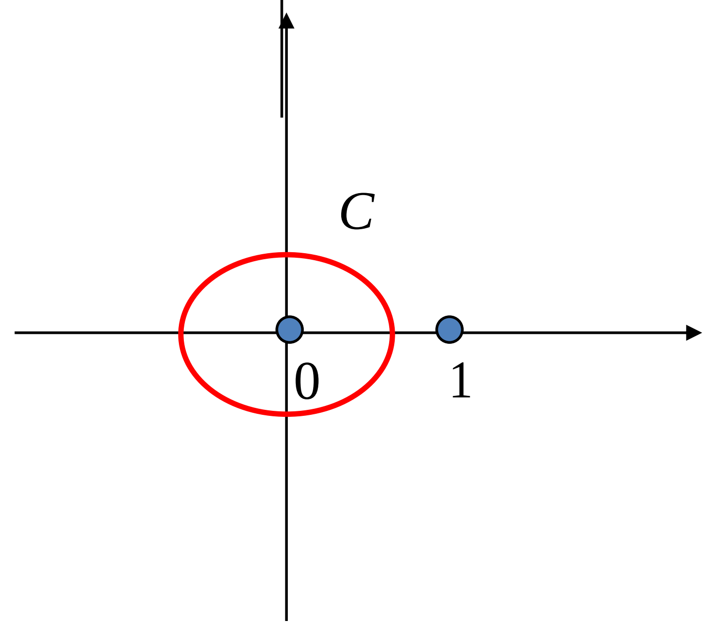
**例：** 计算积分 $\oint_C \dfrac{e^z}{z(1-z)^3}dz$，其中 $C$ 是不经过0与1的简单光滑闭曲线.




**解：**(1) 0，1都不在 $C$ 内：

根据柯西－古萨基本定理得：

$$\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = 0$$




(2) 仅0在 $C$ 内：根据柯西积分公式得：

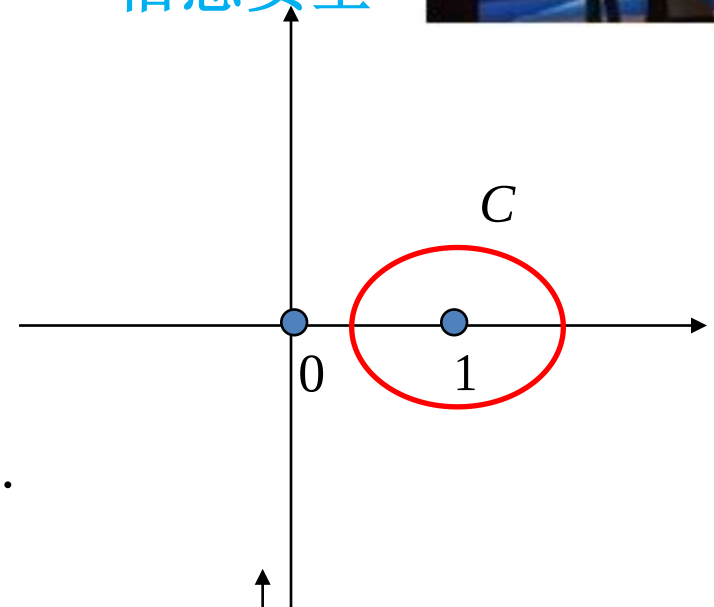
$$\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = \oint_C \frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z}dz$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^z}{(1-z)^3}\right]_{z=0} = 2\pi i.$$

(3) 仅1在$C$ 内： 根据高阶导数公式得：

$$\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = \oint_C \frac{\frac{e^z}{z}}{(1-z)^3}dz$$

$$\boxed{= -\oint_C \frac{\frac{e^z}{z}}{(z-1)^3}dz} = -\frac{2\pi}{2!}\left[\frac{e^z}{z}\right]''_{z=1} = -e\pi i.$$

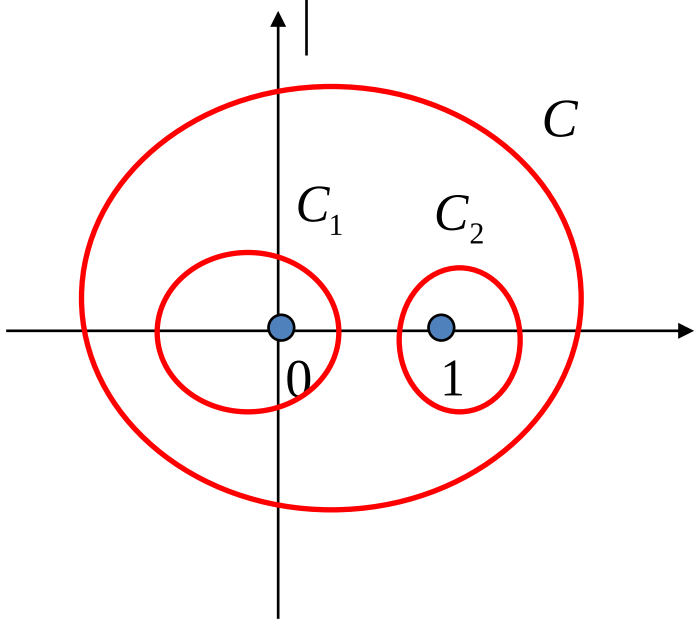



（4） 0，1都在$C$ 内： 根据复合闭路定理得：

$$\mathrm{I} = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$$

$$= \oint_C \frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z}dz + \oint_C \frac{\frac{e^z}{z}}{(1-z)^3}dz$$

$$= 2\pi i - e\pi i = (2-e)\pi i.$$



**例：** 求下列积分的值，其中$C$为正向圆周：$|z| = r > 1$.

$$(1)\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz, \qquad (2)\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz.$$

**解：** (1) 函数 $\dfrac{\cos \pi z}{(z-1)^5}$ 在$C$内除$z=1$外处处解析，

而$\cos \pi z$在$C$内处处解析，因此有：

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{(5-1)!} (\cos \pi z)^{(4)} \Big|_{z=1}$$

$$= \frac{2\pi i}{4!} \pi^4 \cos \pi z \Big|_{z=1} \qquad = -\frac{\pi^5}{12} i.$$

**解：**

(2) 函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在$C$内的 $z=\pm i$ 处不解析，

在$C$内作以$i$为中心的正向圆周$C_1$，以$-i$为中心的正向圆周$C_2$，$C_1, C_2$ **互不包含也互不相交**

函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在由$C_1$，$C_2$和$C$所围成的区域内是解析的，根据复合闭路定理：

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz=\oint_{C_1}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz+\oint_{C_2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz$$

$$=\oint_{C_1}\frac{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}dz+\oint_{C_2}\frac{\dfrac{e^z}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}dz$$

$$=\frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'_{z=i}+\frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z-i)^2}\right]'_{z=-i}$$

$$=2\pi i\left[\frac{e^z(z+i)^2-2e^z(z+i)}{(z+i)^4}\right]_{z=i}$$

$$+2\pi i\left[\frac{e^z(z-i)^2-2e^z(z-i)}{(z-i)^4}\right]_{z=-i}$$

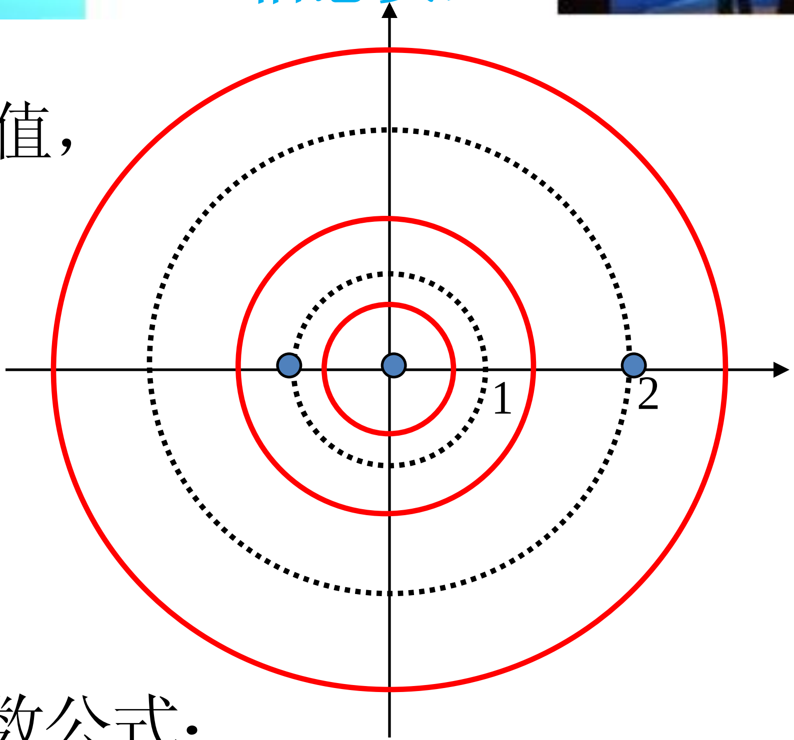
$$=2\pi i\left(\frac{e^{i}(-4-4i)}{16}\right)+2\pi i\left(\frac{e^{-i}(-4+4i)}{16}\right)$$

$$=\frac{(1-i)e^{i}}{2}\pi+\frac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi$$

$$=\pi\left[i\frac{e^{i}-e^{-i}}{2i}-i\frac{e^{i}+e^{-i}}{2}\right]$$

$$=\pi[i\sin 1-i\cos 1]=\sqrt{2}\pi i\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 1\right]$$

$$=\pi i\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$




**例：** 计算积分$\mathrm{I}=\oint_C \dfrac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}$的值，

其中$C$为$|z|=r, r\neq 1,2.$

**解：** (1)当$0<r<1$时，

设 $f(z)=\dfrac{dz}{(z+1)(z-2)}$，

则$f(z)$在$C$内解析，根据高阶导数公式：

$$\mathrm{I}=\oint_C \frac{f(z)}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{(3-1)!}f''(0)=\pi i f''(0),$$

而$f''(z)=\dfrac{6z^2-6z+6}{(z^2-z-2)^3}$，　$f''(0)=-\dfrac{3}{4}$，　于是，$\mathrm{I}=-\dfrac{3}{4}\pi i.$

**解：**

(2) 当$1 < r < 2$时，

在$C$内以0为中心作$C_1$，以$-1$为中心作圆周$C_2$，$C_1$，$C_2$

**互不包含也互不相交** 根据复合闭路定理有：

$$I = \oint_{C_1} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\frac{1}{(z+1)(z-2)}}{z^3} dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{1}{z^3(z-2)}}{(z+1)} dz$$

$$= -\frac{3}{4}\pi i + 2\pi i\left[\frac{1}{z^3(z-2)}\right]_{z=-1} = -\frac{3}{4}\pi i + \frac{2}{3}\pi i$$

$$= -\frac{1}{12}\pi i.$$

(3)当$r>2$时，

在$C$内以0为中心作圆周$C_1$，以$-1$为中心作圆周$C_2$，

以2为中心作圆周$C_3$，则

$$\mathrm{I}=\oint_{C_1}\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}+\oint_{C_2}\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}+\oint_{C_3}\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}$$

$$=\oint_{C_1}\frac{\frac{1}{(z+1)(z-2)}}{z^3}dz+\oint_{C_2}\frac{\frac{1}{z^3(z-2)}}{(z+1)}dz+\oint_{C_3}\frac{\frac{1}{z^3(z+1)}}{(z-2)}dz$$

$$=-\frac{1}{12}\pi i+\oint_{C_3}\frac{\frac{1}{z^3(z+1)}}{(z-2)}dz\ =-\frac{1}{12}\pi i+2\pi i\left[\frac{1}{z^3(z+1)}\right]_{z=2}$$

$$=-\frac{1}{12}\pi i+\frac{1}{12}\pi i=0.$$

# 谢谢！