网络 与 信息安全

复变函数与积分变换

——第十四讲

傅里叶变换

贵州大学计算机科学与技术学

潘平

电话：**13078569531**

邮箱：**panping_17@163.com**

目 录

预备知识

从T为周期的周期函数$f_T(t)$，如果在$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上满足狄利克雷条件，那么在$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上$f_T(t)$可以展成傅氏级数，在$f_T(t)$的连续点处，级数的三角形式为

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t) \qquad (1.1.1)$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)dt \qquad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega_0 t dt \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega_0 t dt \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

在$f_T(t)$的间断点t_0处，式(1. 1. 1)的左端代之为

$$\frac{1}{2}\left[f_T(t_0+0)+f_T(t_0-0)\right]$$

复指数形式

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}$$

狄利赫利条件： 在一个周期内只有有限个间断点；在一个周期内有有限个极值点；在一个周期内函数绝对可积。

其中 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$ 称为**频率**，频率ω_0对应的周期T与$f_T(t)$的周期相同，因而称为**基波频率**，$n\omega_0$称为$f_T(t)$的n次**谐波频率**。

c_n为周期函数$f_T(t)$的离散频谱，$|c_n|$为离散振幅谱，$\arg c_n$为离散相位谱。常记$F(n\omega_0)=c_n$

$$f_1(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$

直流分量

基波分量
n =1

谐波分量
n>1

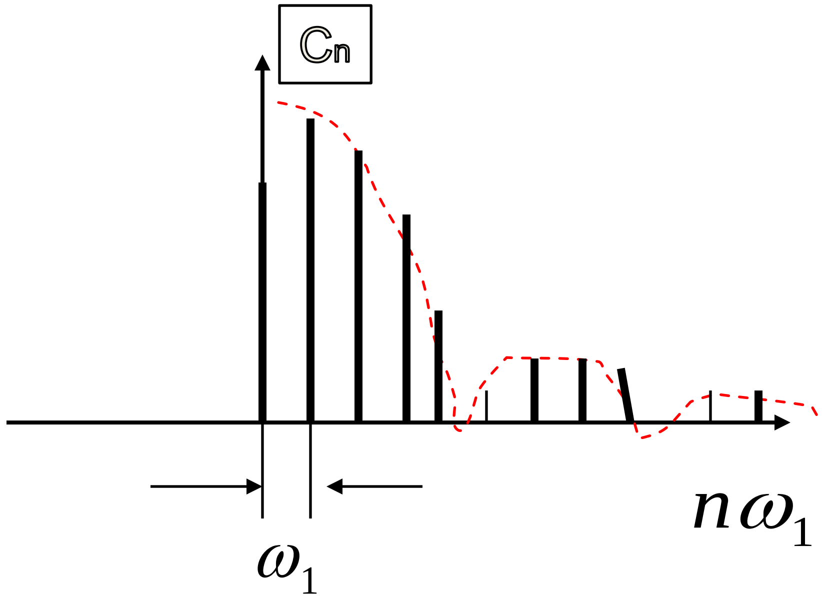
$$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$$

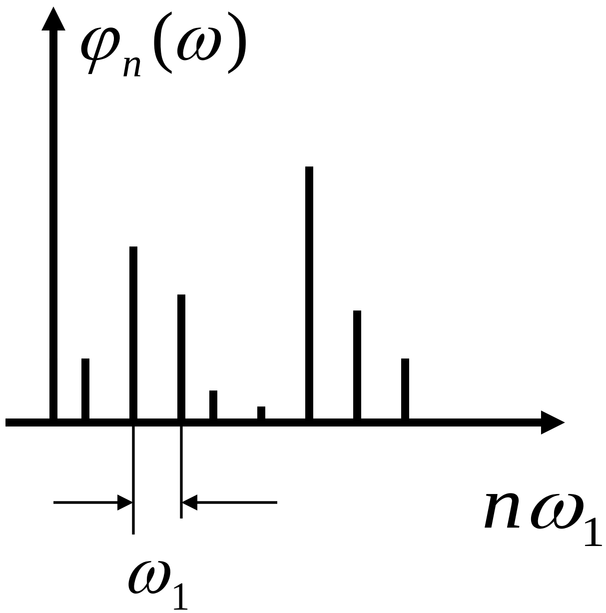
$$n\omega_1$$

周期函数的频谱

周期信号的谱线只出现在基波频率的整数倍的频率处。

直观看出：各分量的大小，各分量的频移。





周期函数的复指数级数

$$f_1(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$

由欧拉公式

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}}$$

其中

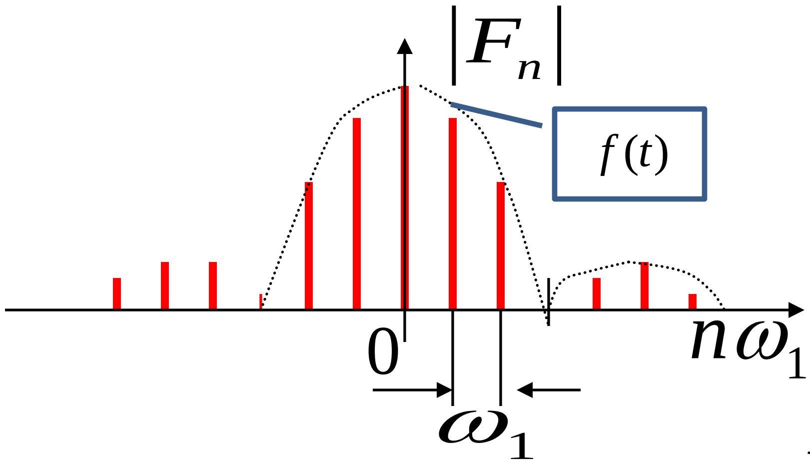
$$F(0)=a_0$$

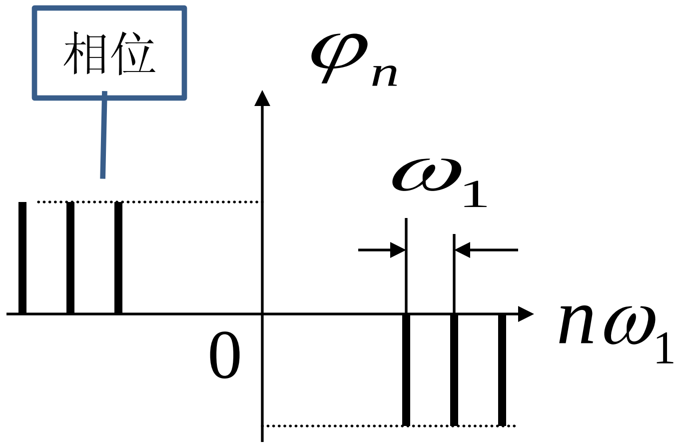
$$F(n\omega_1)=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

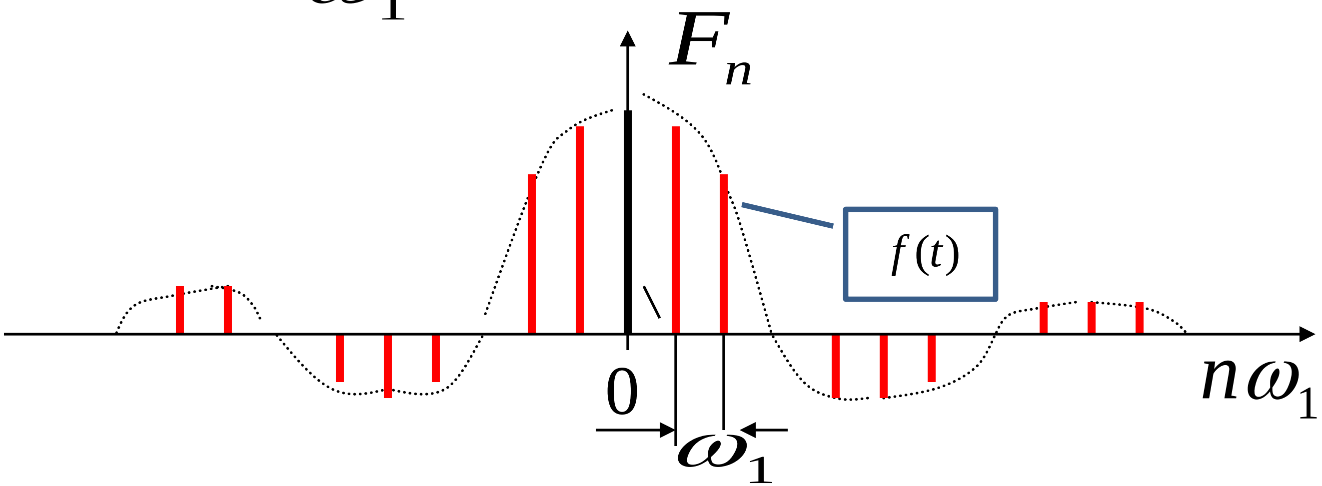
$$F(-n\omega_1)=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)$$

引入了负频率

周期复指数信号的频谱图







指数形式的傅里叶级数的系数 $F(n\omega_1)=F_n$

$$\boxed{F_n=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt}$$

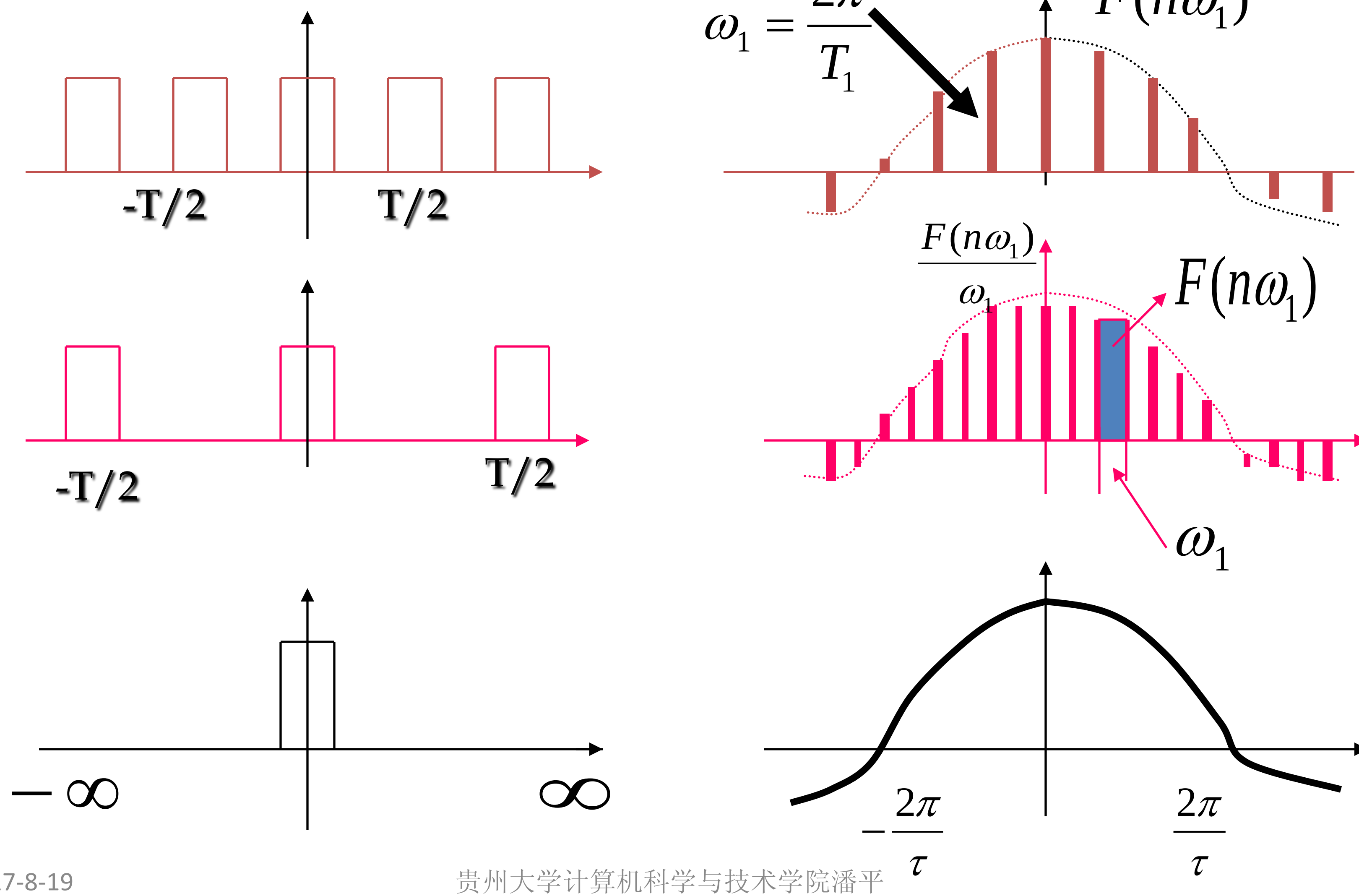
两种傅氏级数的系数间的关系

$$F_0=c_0=d_0=a_0$$

$$F_n=\left|F_n\right|e^{j\varphi_n}=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

$$F_{-n}=\left|F_{-n}\right|e^{-j\varphi_n}=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)$$

频谱演变的定性观察


-T/2
T/2
-T/2
T/2
$-\infty$
∞
$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$
$F(n\omega_1)$
$\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}$
$F(n\omega_1)$
ω_1
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$

傅立叶变换的概念

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$F(\omega)$ 叫做 $f(t)$ 的傅氏变换, 象函数, 可记做 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

$f(t)$ 叫做 $F(\omega)$ 的傅氏逆变换, 象原函数, $f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$

$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ 也叫做 $f(t)$ 的傅氏积分表达式

例： 求函数 $f(t)=\begin{cases}1 & |t|<c\\ 0 & |t|>c\end{cases}(c>0)$ 的傅氏变换

解：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-c}^{+c} e^{-j\omega t}dt=2\int_{0}^{+c} e^{-j\omega t}dt$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2\sin\omega c}{\omega} & \omega\neq 0\\ 2c & \omega=0\end{cases}$$

例2： 求函数 $f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-\beta t} & t\geq 0\end{cases}$ $(\beta>0)$ 的傅氏变换

这是一个**指数衰减函数**，工程技术中经常遇到

解：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-(\beta+j\omega)t}dt$$

$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-\beta t}e^{-j\omega t}dt=-\frac{1}{\beta+j\omega}e^{-(\beta+j\omega t)}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\beta+j\omega}=\frac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2}$$

δ—函数及其傅立叶变换

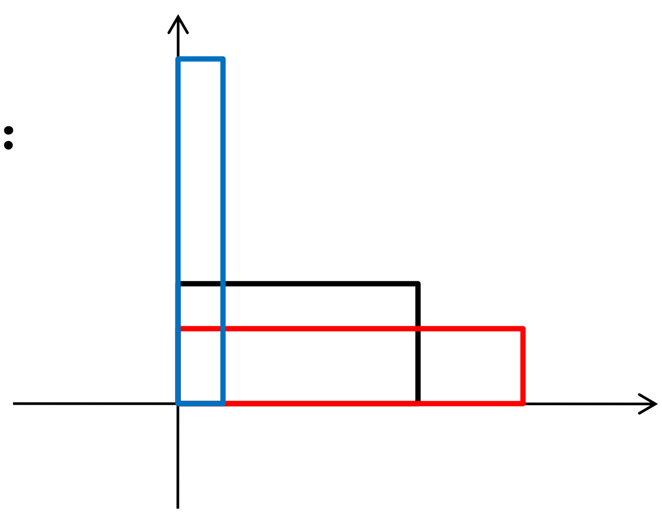
在物理和工程技术中, 除了用到指数衰减函数外, 还常常会碰到单位脉冲函数. 因为在许多物理现象中, 除了有连续分布的物理量外, 还会有集中在一点的量（点源）, 或者具有脉冲性质的量. 例如瞬间作用的冲击力, 电脉冲等. 在电学中, 我们要研究线性电路受具有脉冲性质的电势作用后所产生的电流; 在力学中, 要研究机械系统受冲击力作用后的运动情况等. 研究这类问题就会产生我们要介绍的脉冲函数. 有了这种函数, 对于许多集中在一点或一瞬间的量, 例如点电荷、点热源、集中于一点的质量以及脉冲技术中的非常狭窄的脉冲等, 就能够像处理连续分布的量那样, 用统一的方式来加以解决.

δ函数的定义

- （1）看作矩形脉冲的极限
- （2）δ函数的数学定义

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t) \quad \delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, t<0;\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, 0\le t\le\varepsilon\\ 0, t>\varepsilon\end{cases}$$

从几何意义上看：



- （3）物理学家狄拉克给出的定义

满足下列两个条件的函数称为δ函数：

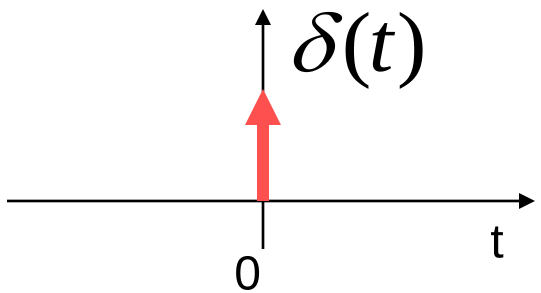
（1） $\delta(t)=0 \quad (t\neq 0)$

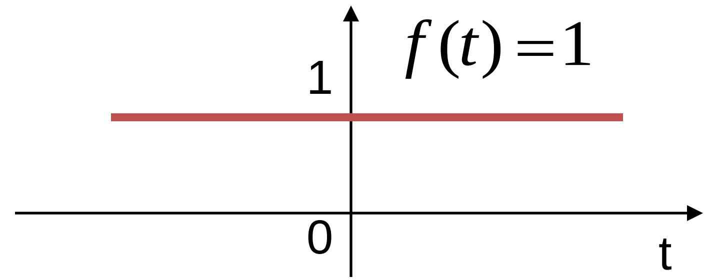
（2） $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$

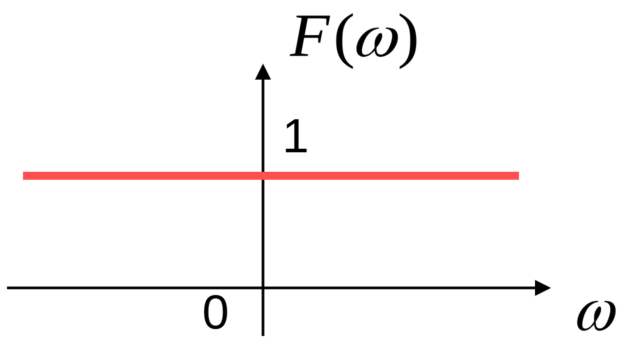
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$$

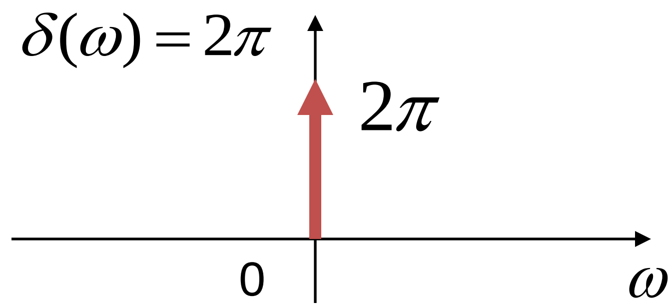
$$FT^{-1}[\delta(\omega)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}$$









冲激偶的傅立叶变换

$$FT[\delta(t)]=1$$

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}d\omega$$

$$\frac{d}{dt}[\delta(t)\ ]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$FT\left[\frac{d}{dt}\delta(t)\right]=j\omega$$

$$FT\left[\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)\right]=(j\omega)^n$$

$$FT(t^n)=2\pi(j)^n\frac{d^n}{dt^n}[\delta(t)]$$

δ函数在积分变换中的作用

δ函数的傅氏变换是广义傅氏变换，许多重要的函数，如常函数、符号函数、单位阶跃函数、正弦函数、余弦函数等是不满足傅氏积分定理中的绝对可积条件的，这些函数的广义傅氏变换都可以利用δ函数而得到。

δ函数的性质

（1）对任意的连续函数 $f(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$$

（2）$\delta(t)$ 函数为偶函数,即 $\delta(-t)=\delta(t)$

（3）$\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=u(t)$ 其中,

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$ 称为单位阶跃函数. $$\frac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$$

δ-函数的傅氏变换为:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1$$

于是$\delta(t)$与常数1构成了一傅氏变换对.

$$\boxed{\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega} \quad \boxed{\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)}$$

例1 证明：1和$2\pi\delta(\omega)$构成傅氏变换对.

证法1：$$\mathcal{F}[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot e^{-j\omega t} dt \;\underline{\underline{s=-t}}\; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega s} ds = 2\pi\delta(\omega).$$

证法2：若$F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$, 由傅氏逆变换可得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega = e^{j\omega t}\Big|_{\omega=0} = 1$$

例2 证明$e^{j\omega_0 t}$和$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$构成一个傅氏变换对。

证：$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega=e^{j\omega t}\Big|_{\omega=\omega_0}=e^{j\omega_0 t}.$$

即$e^{j\omega_0 t}$和$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$构成了一个傅氏变换对。

由上面两个函数的变换可得：

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(\omega)\\&\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=2\pi\delta(\omega-\omega_0)\end{aligned}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sgn}t\,e^{-j\omega t}dt=\begin{cases}\dfrac{2}{j\omega} & \omega\neq 0\\ 0 & \omega=0\end{cases}$$

常用函数的傅立叶变换对

$\delta(t)$ 与常数1构成了一个傅氏变换对 $\delta(t) \leftrightarrow 1$

1和$2\pi\delta(\omega)$构成傅氏变换对

$$\mathbf{1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$$

$\delta(t-t_0)$与 $e^{-j\omega t_0}$ 也构成了一个傅氏变换对

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

$\mathbf{2\pi\delta(\omega-\omega_0)}$ 和$\mathbf{e^{-j\omega_0 t}}$ 也构成傅里叶变换

$$\mathbf{e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)}$$

例 求单位阶跃函数的傅氏变换

解 注意到 $u(t)=\dfrac{1}{2}[1+\operatorname{sgn} t]$

$$F(\omega)=\mathscr{F}[u(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[1+\operatorname{sgn} t]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\{\mathscr{F}[1]+\mathscr{F}[\operatorname{sgn} t]\}$$

$$=\frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega)+\frac{2}{\mathrm{j}\omega}]$$

$$=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

可以证明：

$$\mathcal{F}[\sin\omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

例 求正弦函数$f(t)=\sin\omega_0 t$的傅氏变换。

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\sin\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+\omega_0 t})\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\delta(\omega+\omega_0)]=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)].$$

Fourier变换与逆变换的性质

这一讲介绍傅氏变换的几个重要性质, 为了叙述方便起见, 假定在这些性质中, 凡是需要求傅氏变换的函数都满足傅氏变换中的条件, 在证明这些性质时, 不再重述这些条件.

1.线性性质:

$$\mathcal{F}[af(t)+bg(t)]=a\mathcal{F}[f(t)]+b\mathcal{F}[g(t)]$$

$$\mathcal{F}^{-1}[AF(\omega)+BG(\omega)]=A\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]+B\mathcal{F}^{-1}[G(\omega)]$$

2. 位移性质:

若$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，$t_0,\omega_0$为实常数，则

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathcal{F}[f(t-t_0)]=e^{-j\omega t_0}F(\omega),\\&\mathcal{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=e^{j\omega_0 t}f(t)\\&\quad\left(\text{或}\,\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)\right)\end{aligned}}$$

证明:

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0)e^{-j\omega t}dt$$

$$\underline{\underline{s=t-t_0}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-j\omega(s+t_0)}ds$$

$$=e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-j\omega s}ds=e^{-j\omega t_0}F(\omega)$$

1 求 $\mathscr{F}\left[u(t-t_0)\right]$

解 因为 $\mathscr{F}\left[u(t)\right]=F(\omega)=\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

所以 $\mathscr{F}\left[u(t-t_0)\right]$

$$=e^{-j\omega t_0}F(\omega)=e^{-j\omega t_0}\left(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right)$$

$$=e^{-j\omega t_0}\frac{1}{j\omega}+e^{-j\omega t_0}\pi\delta(\omega)$$

$$=e^{-j\omega t_0}\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

2 已知 $\mathscr{F}^{-1}\left[2\pi\delta(\omega)\right]=1$ 求 $\mathscr{F}^{-1}\left[\delta(\omega-1)\right]$

解:

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\delta(\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}=f(t)\quad \omega_0=1$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\delta(\omega-1)\right]=f(t)e^{j\omega_0 t}=\frac{1}{2\pi}e^{jt}$$

显然

$$\mathscr{F}\left[e^{jt}\right]=2\pi\delta(\omega-1)$$

3. 相似性：

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{若}\ \mathcal{F}[f(t)]=F(\omega),\quad a\neq 0,\text{则}\\&\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)\ ;\ \mathcal{F}^{-1}[F(at)]=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{t}{a}\right)\end{aligned}}$$

证明：

$$\mathcal{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)e^{-j\omega t}dt\overset{s=at}{=}\begin{cases}\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-j\omega\frac{s}{a}}ds, & a>0\\ \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty}f(s)e^{-j\omega\frac{s}{a}}ds, & a<0\end{cases}$$

$$=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-j\frac{\omega}{a}s}ds=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

例1 计算 $\mathcal{F}[u(5t-2)]$

（先用相似性，再用位移性）

令$g(t)=u(t-2)$,则$g(5t)=u(5t-2)\Rightarrow$

$$\mathcal{F}[u(5t-2)]=\mathcal{F}[g(5t)]=\frac{1}{5}\mathcal{F}[g(t)]\Big|_{\frac{\omega}{5}}=\frac{1}{5}\mathcal{F}[u(t-2)]\Big|_{\frac{\omega}{5}}$$

$$=\left(\frac{1}{5}e^{-j2\omega}\mathcal{F}[u(t)]\right)\Bigg|_{\frac{\omega}{5}}=\left(\frac{1}{5}e^{-j2\omega}\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\right)\Bigg|_{\frac{\omega}{5}}$$

$$=\frac{1}{5}e^{-j2\frac{\omega}{5}}\left[\frac{5}{j\omega}+\pi\delta\left(\frac{\omega}{5}\right)\right].$$

4. 微分性：

原像函数的微分性：

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$，且 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(t) = 0$，则

$$\boxed{\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega)}$$

一般地，若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f^{(k)}(t) = 0\,(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$，则

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right] = (j\omega)^n F(\omega)$$

像函数的微分性：

$$F'(\omega) = -j\mathcal{F}[tf(t)] \quad \left(\text{或}\ \mathcal{F}[tf(t)] = jF'(\omega)\right)$$

$$F^{(n)}(\omega) = (-j)^n \mathcal{F}[t^n f(t)] \quad \left(\text{或}\ \mathcal{F}[t^n f(t)] = j^n F^{(n)}(\omega)\right)$$

5. 积分性：

设$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，若$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} f(s)ds=F(0)=0$,则

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(s)ds\right]=\frac{1}{j\omega}F(\omega).$$

6. 帕塞瓦尔(Parserval)等式

设$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2 d\omega \quad .$$

实际上, 只要记住下面五个傅里叶变换, 则所有的傅里叶变换都无须用公式直接计算而可由傅里叶变换的性质导出.

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$u(t)e^{-\beta t} \leftrightarrow \frac{1}{\beta + \mathrm{j}\omega}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\mathrm{e}^{-\beta t^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$$

例2 利用傅氏变换的性质求$\delta(t-t_0)$, $e^{j\omega_0 t}$,以及$tu(t)$的傅氏变换.

因 $\delta(t)\leftrightarrow 1$, 由位移性质得 $\delta(t-t_0)\leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$

由 $1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$, 得 $e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

由 $u(t)\leftrightarrow \dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

$$tu(t)\leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]=-\frac{j}{j\omega^2}+j\pi\delta'(\omega)$$

$$tu(t)\leftrightarrow -\frac{1}{\omega^2}+j\pi\delta'(\omega)$$

例3 若 $f(t)=\cos\omega_0 t\cdot u(t)$, 求其傅氏变换。

$$u(t)\leftrightarrow\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$f(t)=u(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2}\leftrightarrow$$

$$F(\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\mathrm{j}(\omega+\omega_0)}+\pi\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$=\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

6 卷积与卷积定理

1. $(-\infty,+\infty)$ 上的卷积定义

若给定两个函数 $f_1(t),\ f_2(t)$,则积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

称为函数 $f_1(t),\ f_2(t)$ 的卷积,记为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

例1 求下列函数的卷积：

$$f_1(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-\alpha t} & t\ge 0\end{cases},\ f_2(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \mathrm{e}^{-\beta t} & t\ge 0\end{cases};\ \alpha,\beta>0,\alpha\ne\beta.$$

由卷积的定义有：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{t}+\int_{t}^{+\infty}$$

$$=0+\int_0^t e^{-\alpha\tau}\cdot \mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}\mathrm{d}\tau+0=\mathrm{e}^{-\beta t}\int_0^t \mathrm{e}^{(\beta-\alpha)\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\mathrm{e}^{-\beta t}\frac{1}{\beta-\alpha}\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)\tau}\Bigg|=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\mathrm{e}^{-\alpha t}-\mathrm{e}^{-\beta t}\right)$$

2.卷积的简单性质：

- 交换律：$f*g=g*f$
- 加法分配律：$f*(g+h)=f*g+f*h$
- 结合律：$f*(g*h)=(f*g)*h$
- 数乘：$A(f*g)=(Af)*g=f*(Ag)$ (A为常数)
- 求导：$\frac{d}{dt}(f*g(t))=f'(t)*g(t)+f(t)*g'(t)$
- $f*\delta(t)=\delta*f(t)=f(t)$

计算卷积

例2 对函数 $f_1(t)=\left[u(t+1)-u(t-1)\right]t$ ，$f_2(t)=1$

解 $$f_1(t)=\left[u(t+1)-u(t-1)\right]t=\begin{cases} t & |t|<1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

所以 $$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-1}^{1}\tau f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-1}^{1}\tau d\tau=0$$

3．傅氏变换的卷积定理

(1)若 $F_1(\omega)=\mathscr{F}\left[f_1(t)\right]$ $F_2(\omega)=\mathscr{F}\left[f_2(t)\right]$ 则

$$\mathscr{F}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=F_1(\omega)F_2(\omega)$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[F_1(\omega)F_2(\omega)\right]=f_1(t)*f_2(t)$$

(2)频谱卷积定理

若 $F_1(\omega)=\mathscr{F}\left[f_1(t)\right]$ $F_2(\omega)=\mathscr{F}\left[f_2(t)\right]$ 则

$$\mathscr{F}\left[f_1(t)f_2(t)\right]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$$

例3 求 $f(t)=e^{j\omega_0 t}tu(t)$ 的傅氏变换。

$$\mathcal{F}[f(t)]=\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}tu(t)]=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}]*\mathcal{F}[tu(t)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[2\pi\delta(\omega-\omega_0)*\left(-\frac{1}{\omega^2}+j\pi\delta'(\omega)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)\cdot\left(-\frac{1}{(t-\omega)^2}+j\pi\delta'(t-\omega)\right)d\omega$$

$$=\left(-\frac{1}{(t-\omega)^2}+j\pi\delta'(t-\omega)\right)\Bigg|_{\omega=\omega_0}=-\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2}+j\pi\delta'(\omega-\omega_0).$$

谢谢！