网络 与 信息安全

复变函数与积分变换

——第二讲

复数的几何表示方法

贵州大学计算机科学与技术学

潘平

电话：13078569531

邮箱：panping_17@163.com

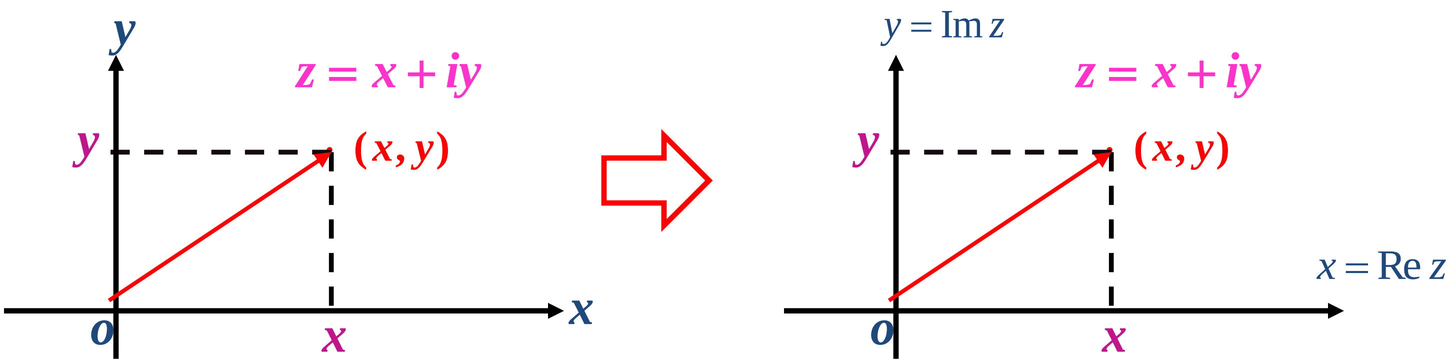
目 录

一、复平面

给定一复数$z=x+yi$，在坐标平面XOY上存在惟一的点$P(x,y)$与$z=x+yi$对应. 反之, 对XOY平面上的点$P(x,y)$, 存在惟一的复数$z=x+yi$与它对应. 根据复数的代数运算及向量的代数运算的定义知这种对应构成了同构映射. 因此可以用XOY平面上的点表示复数z.

这时把XOY平面平面称为复平面. 有时简称为z平面.，或称为

复平面



目的：

使复数与复平面上的点一一对应，因此，我们可以认为“点Z”与“数Z”具有相同的意义。

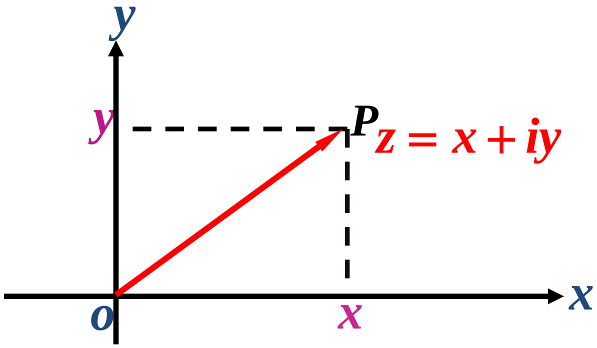
因此，可以将复平面上的点和复数z不加区别，即“点z”和“复数z”是同一个意思. 有时用C表示全体复数或复平面.

复数z也可以用以原点为起点而以点P为终点的向量表示(如图).

这个平面也称为复平面

因此复数加、减法满足向量加、减法中的平行四边形法则.

Z平面



在Z平面*复平面）中，用 $\overline{OP}$ 表示复数z时，这个向量在x轴和y轴上的投影分别为x和y.

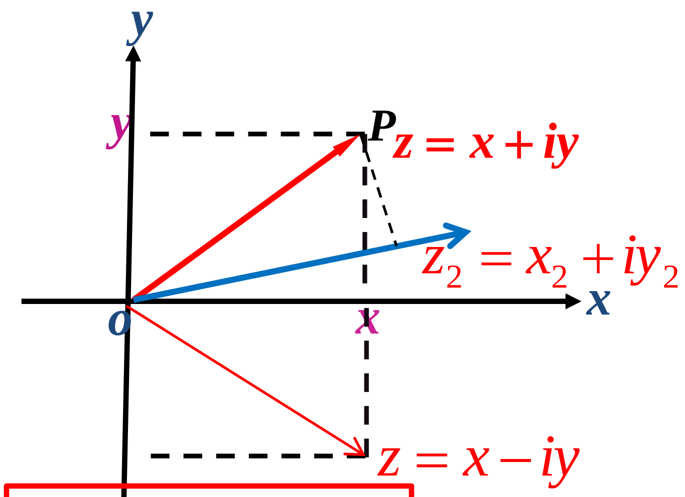
把向量 $\overline{OP}$ 的长度r 称为复数z的**模**或称为z的绝对值，并记为|Z|。

显然有

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2},$$

且 $|z|\le|x|+|y|,\quad |x|\le|z|,\quad |y|\le|z|.$

Z平面



三角不等式

$$|z|=|\bar{z}|\Rightarrow|z|=\sqrt{x^2+y^2},\ |\bar{z}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|z_1z_2|=|(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)|$$

$$z\bar{z}=(x^2+y^2)=|z|^2$$

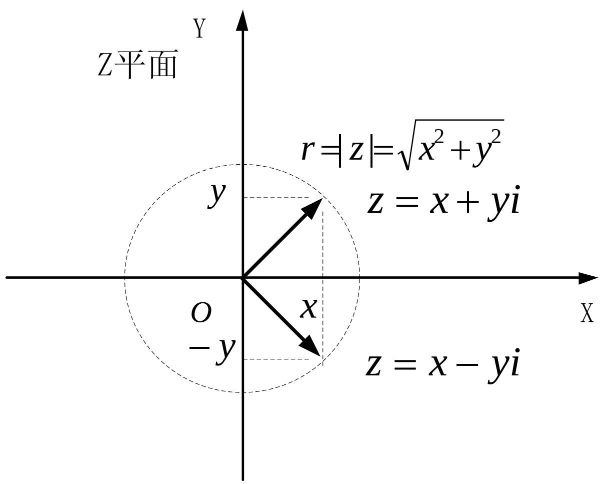
$$=\sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2}=|z_1||z_2|$$

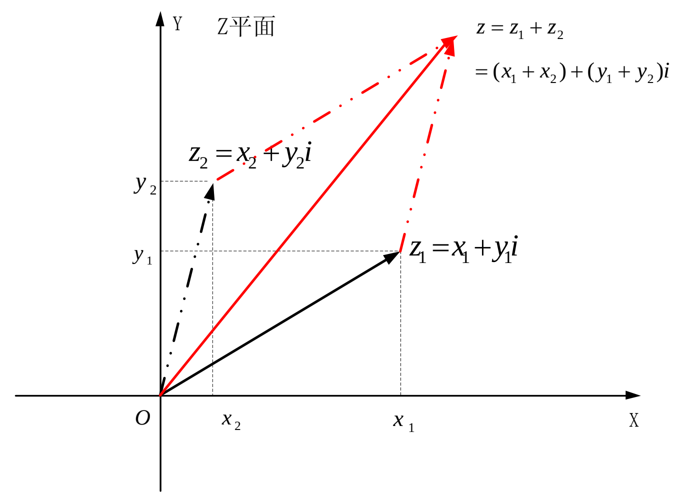
二、复平面的几何意义

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 表征了复平面上以 $|z|$ 半径的圆周上的点的集合

$|z|=|\bar{z}|$ 表征了共轭复数的模型是等价的；

$z\bar{z}=|z|^2$ 表征了两个复数的仍然是一个复数，而共轭的复数等价于复数模的平方





$$|z_1z_2| = |(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)| = \left|(x_1x_2-y_1y_2)+(x_2y_1+x_1y_2)i\right|$$

$$= \sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2x_2^2-2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^3+x_1^2y_2^2+2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+y_1^2y_2^2}$$

$$|z_1||z_2| = \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} = \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$

$$= \sqrt{x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+y_1^2y_2^2}$$

所以： $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

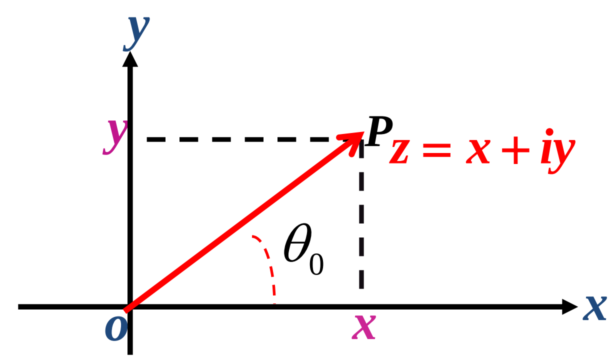
当 $z = x + yi \neq 0$ 时，以正实轴为始边，以表示 z 的矢量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为的**辐角**，记为：

$$Arg(z) = \theta$$

对每个$z \neq 0$ ，都有无穷多个辐角，因为用 θ_0 表示复数 z 的一个辐角时，

$$\boldsymbol{\theta = \theta_0 + 2k\pi \ \left(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots\right)}$$

就是 z 的辐角的一般表达式



满足 $-\pi < \theta \leq \pi$ 的复数z 的**辐角**称为主辐角(或称辐角的主值)，记做 argz，则：

$$\mathbf{Arg}z = \mathbf{arg}\,z + 2k\pi \ \left(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots\right).$$

需要强调，把主辐角定义为满足 $0 \le \theta \le 2\pi$ 的辐角，

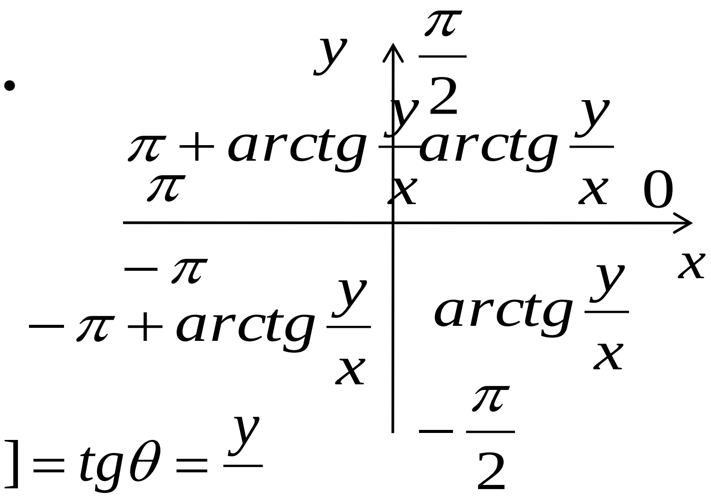
$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

仍然成立

当 $z = 0$ 时，$Argz$ 没有意义，即

零向量没有确定的方向角；

但当 $z = 0$ 时, $|z| = 0$ 显然：$tg[Arg(z)] = tg\theta = \frac{y}{x}$



$$\arg z = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & z\text{在第一、四象限} \\ \pi + \arctan\frac{y}{x}, & z\text{在第二象限} \\ -\pi + \arctan\frac{y}{x}, & z\text{在第三象限} \end{cases}$$

说明：当 z 在第二象限时，

$$\Rightarrow \tan(\theta - \pi) = -\tan(\pi - \theta) = \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \theta = \pi + \arctan\frac{y}{x}.$$

就是说，辐角的主值 $Arg(z)$ 可以由反正切 $arctg\dfrac{y}{x}$ 的主值确定，亦可根据下列关系确定：

$$Arg(z)=\begin{cases}\arccos\dfrac{x}{|z|} & y\geq 0\\ -\arccos\dfrac{x}{|z|} & y<0\end{cases}$$

$$Arg(z)=\begin{cases}arctg\dfrac{y}{x} & y\geq & z\text{在第一、四象限}\\ \dfrac{\pi}{2} & x=0,\ y>0 & z\text{在虚轴上方}\\ -\dfrac{\pi}{2} & x=0,\ y<0 & z\text{在虚轴下方}\\ arctg\dfrac{y}{x}+\pi & x<0,y\geq 0 & z\text{在第二象限}\\ arctg\dfrac{y}{x}-\pi & x<0,y<0 & z\text{在第三象限}\\ \pi & & z\text{在负实轴上}\end{cases}$$

其中：

$$-\frac{\pi}{2}<arctg\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$$

设在复平面内有四个复数 z_1, z_2, z_3, z_4

有：

$$\arg z_1 = \angle xoz_1 = \theta_1$$

$$\arg z_2 = \angle xoz_1 = \theta_2$$

$$\overrightarrow{z_1 z_2} \Rightarrow z_2 - z_1$$

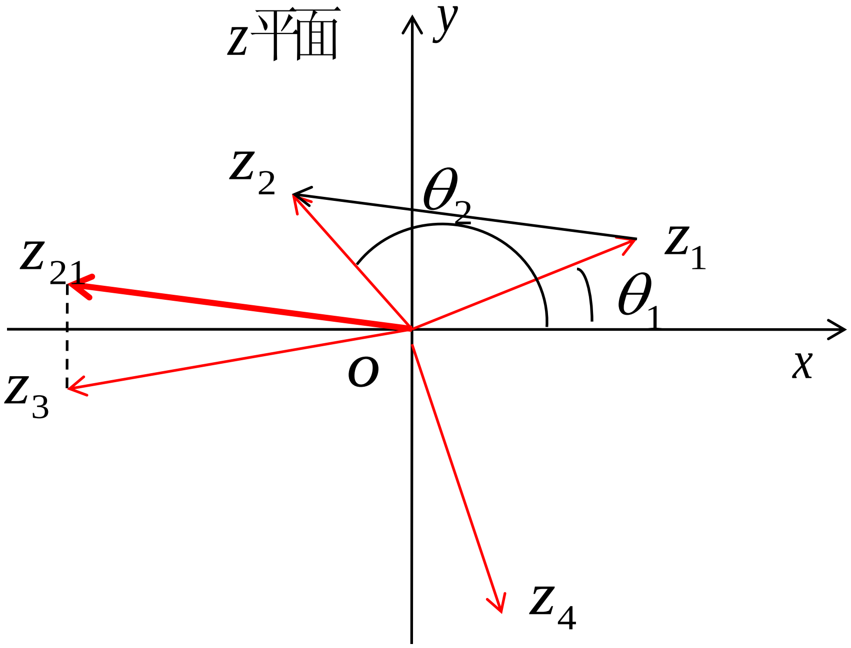
$$z_{21} = z_2 - z_1$$

$$\arg z_{21} = \angle xoz_{21} = \theta$$

$$\bar{z}_{21} = z_3$$

$$\arg z_2 = \angle xoz_3 = \theta_3$$

$$\arg z_4 = \angle xoz_4 = \theta_4$$



例： 求一步到位复数的模和辐角

（1） $z_1 = 2 - 2i$ （2） $z_2 = -3 + 4i$

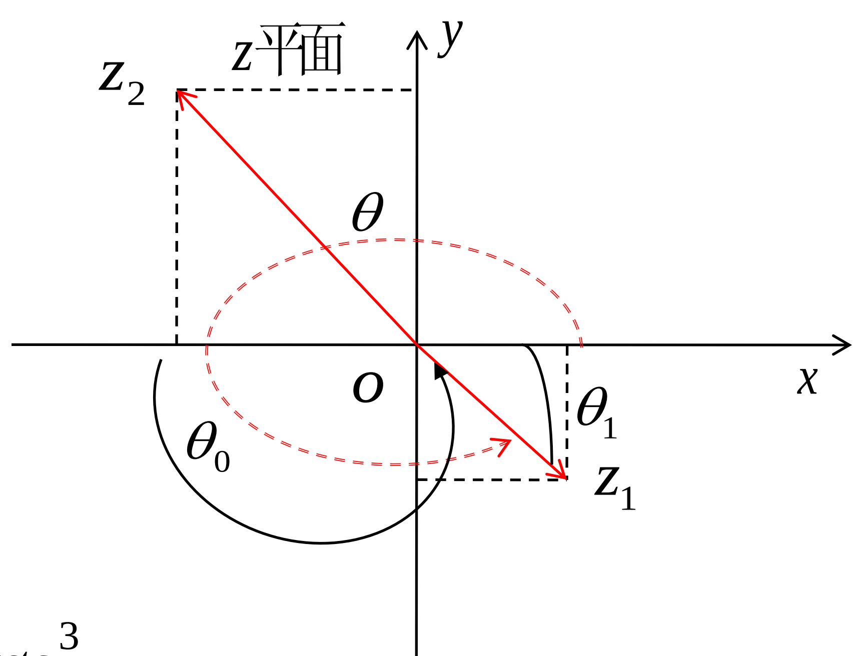
解： $|z_1| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$ $|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

由于 $\mathrm{Im}(z_1) = -2 < 0$

因此 $Arg(z_1) = -\arccos\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\pi}{4}$

$$\theta_1 = 2\pi - \theta = \pi - \theta_0$$

$$Arg(z_1) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$



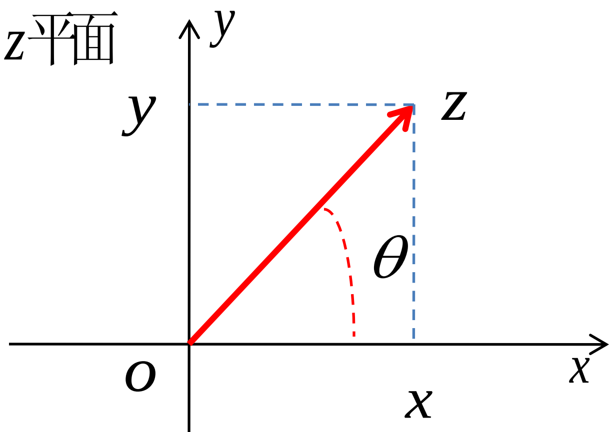
由于 $\mathrm{Im}(z_2) = 4 > 0$

从而 $Arg(z_2) = \arccos\dfrac{-3}{5} = \pi - arctg\dfrac{3}{5}$

于是 $Arg(z_2) = \arccos\dfrac{-3}{5} + 2k\pi = (2k+1)\pi - arctg\dfrac{3}{5}$

三、复数的三角表示

利用直角坐标与极坐标的关系，即：



$$x = r\cos\theta = |z|\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta = |z|\sin\theta$$

因此有

$$z = r\cos\theta + ri\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

称为**复数的三角表示式**

利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 则有

$$z = r\cos\theta + ri\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

称为**复数的指数表示式**

例： 将下列复数化为三角表示式与指数表示式

$$z=-\sqrt{12}-2i \qquad z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5} \qquad z=1+\sin 1+i\cos 1$$

解： （1）显然 $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$ 由于 z 在第三象限，于是有

$$\theta=arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\pi=arctg\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\frac{5}{6}\pi$$

因此有

模 主辐角

复数表示 $z=-\sqrt{12}-2i=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$ 三角形式

指数形式 $=4e^{-i\frac{5}{6}\pi}$

（2）显然 $r=|z|=1$ 又因为 $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) \qquad \cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)$$

于是有

$$z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}$$

复数表示　三角形式　主辐角

复数表示 $=e^{i\frac{3\pi}{10}}$

$$z=1+\sin1+i\cos1$$

（3）先将 z 改写成代数形式求出 $|z|$ 和 $Argz$

由于

$$|z|^2=(1+\sin1)^2+\cos^2 1=1=2\sin1+\sin^2 1+\cos^2 1=2(1+\sin1)$$

$$=2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]=4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

$$z=1+\sin 1+i\cos 1$$

从而有
$$|z|=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)>0$$

又由于
$$\frac{\cos 1}{1+\sin 1}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)}=tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

得
$$Arg(z)=arctg\frac{\cos 1}{1+\sin 1}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

又因为 $1+\sin 1>0 \quad \cos 1>0$ 在第一象限，于是

$$z=1+\sin 1+i\cos 1$$

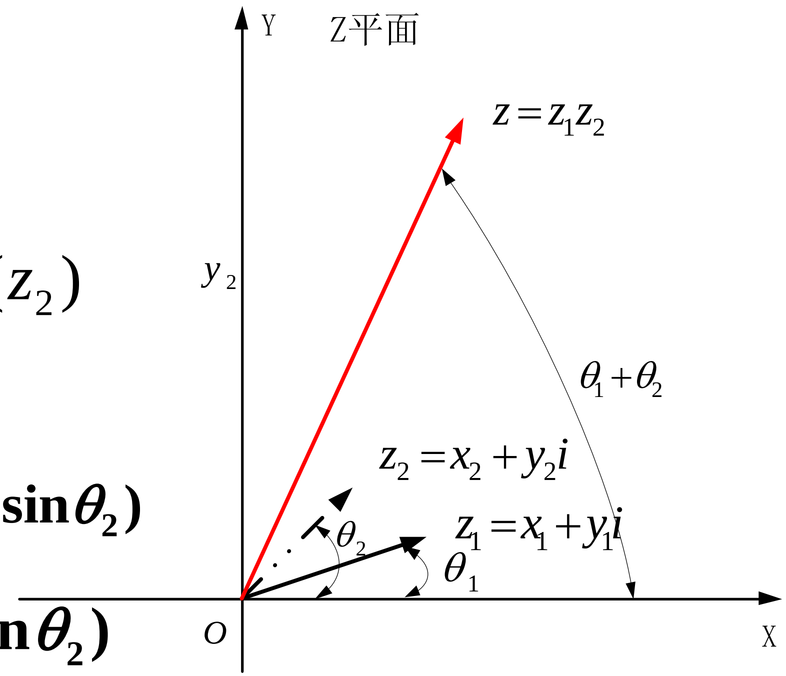
$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)}$$

定理： 两个非零复数乘积的模等于它们模的乘积，乘积的辐角等于它们辐解的和。即

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$$

$$Arg(z_1z_2)=Arg(z_1)+Arg(z_2)$$



根据乘法定义和运算法则及两角和公式

$$\boldsymbol{z_1\cdot z_2=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$\boldsymbol{=r_1\cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)}$$

$$\boldsymbol{+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)],}$$

$$\boldsymbol{z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].}$$

应该注意的是 $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$ 中的加法是集合的加法运算：即将两个集合中所有的元素相加构成的集合。

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 \mid \theta_1 \in \mathrm{Arg}z_1, \theta_2 \in \mathrm{Arg}z_2\}.$$

两个复数相乘的几何意义

设两个复数对应的向量分别为

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$

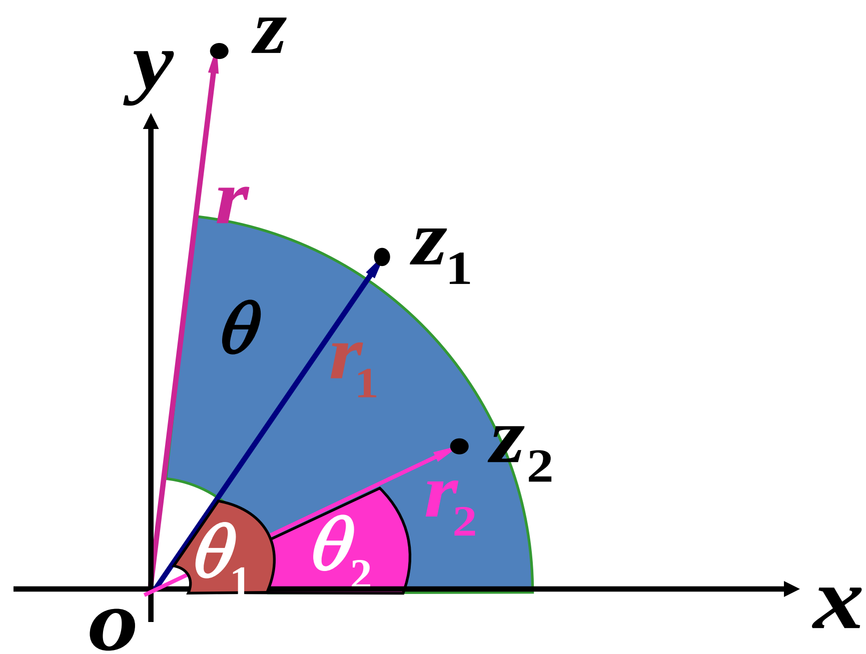
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

先将 z_1 按逆时针方向

旋转角度 θ_2，再将模

变到原来的 r_2 倍，于是

所得的向量 z 就表示乘积 $z_1 \cdot z_2$.



如果写成指数形式，即如果

$$z_k = r_k e^{i\theta_k} \ (k = 1, 2, \cdots, n), \qquad z = re^{i\theta},$$

那么

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)}, \qquad z^n = r^n e^{in\theta}.$$

特别地，当$|z|=r=1$时，

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)],$$

变为

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

称为**De Movie公式**（棣摩弗公式）.

如果定义负整数幂为 $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, 那么

De Movie公式仍然成立. 设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

当 $z_2 \neq 0$ (即 $r_2 \neq 0$) 时,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1\bar{z}_2 = \frac{1}{r_2^2} z_1\bar{z}_2 = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

如果将z_1和z_2写成指数形式

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$$

则

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

于是

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2.$$

定理： 两个非零复数商的模等于它们模的商，商的辐角等于被除数与除数的辐角差。

对给定的复数 z ，方程 $w^n = z$ 的解 w 称为 z 的n次方根，记做 $\sqrt[n]{z}$ 或 $z^{\frac{1}{n}}$.如果

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

于是

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

当 $r \neq 0$ 时

$$\rho^n = r, \quad \cos n\varphi = \cos\theta, \quad \sin n\varphi = \sin\theta.$$

满足以上三式的充分必要条件是

$$\rho = r^{\frac{1}{n}}, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

其中 $r^{\frac{1}{n}}$ 表示算术根. 于是

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

当取k=0,1,2,···,n-1时，对一个取定的θ，可得n个相异根如下

$$w_0 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$w_{n-1} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

由三角函数的周期性

$$w_{k+n} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(k+n)\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2(k+n)\pi}{n}\right)$$

$$= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) = w_k.$$

可见, 除$w_0,w_1,\cdots,w_{n-1}$外, 均是重复出现的, 故

这n个复数就是所要求的n个根.

当$z=0$时, $w=0$就是它的n次方根.

在上面的推导过程中, 可取θ为一个定值, 通

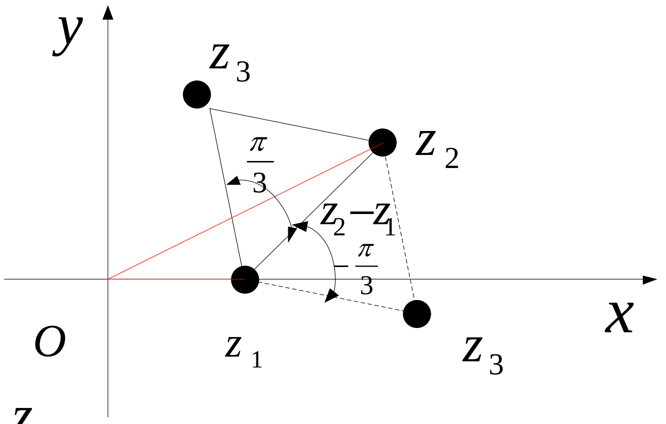
常取主辐角. 若用指数表示式, 则当$z=re^{i\theta}$时,

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,n-1).$$

例： 已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1 \quad z_2=2+i$

求它的另一个顶点

解： 首先作图，如图所示



将表示 z_2-z_1 的矢量绕 z_1 旋转 $\frac{\pi}{3}$

或 $-\frac{\pi}{3}$

得到另一矢量，它的终点即是另一个顶点 z_3

由于复数 $e^{\frac{\pi}{3}i}$ 的模为1，转角为 $\frac{\pi}{3}$ ，根据复数的乘法，有：

$$z_2-z_1=e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2-z_1)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

所以： $z_3=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{3}i$

例： 将 $\left(\sqrt{3}+i\right)^7$ 写成直角坐标形式。

解： 首先将方程改写为指数形式，即

$$\left(\sqrt{3}+i\right) \Rightarrow |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2, Arg(z) = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{6}$$

所以

$$z = \underbrace{\left(\sqrt{3}+i\right)^7}_{\text{幂形式}} = \left(\underbrace{2e^{i\frac{\pi}{6}}}_{\text{指数形式}}\right)^7 = 2^7 e^{i\frac{7\pi}{6}} = \left(2^6 e^{i\pi}\right)\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = \underbrace{-64\left(\sqrt{3}+i\right)}_{\text{直角形式}}$$

例： 求 $\sqrt[4]{-4}$ 的四个根

解： 由三角表示式有 $-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)\Rightarrow r=4, Arg(z)=\pi$

利用求 n 次根公式，得

$$w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{re^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$$

取 $k=0,1,2,3$ ，得到四个根为

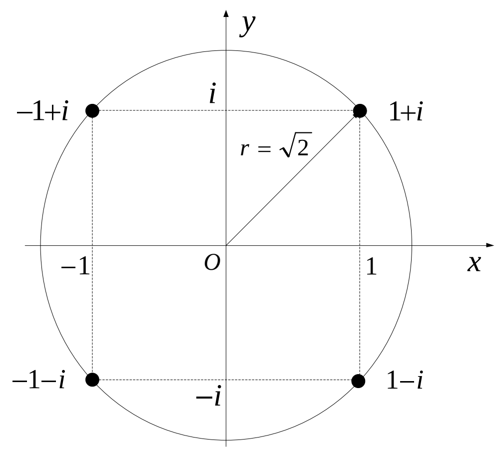
$$w_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=1+i$$

$$w_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}=-1+i$$

$$w_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=-1-i$$

$$w_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}=1-i$$

在复平面上，这四点正好是以 $r=|z|=\sqrt{2}$ 半径的圆内切正四边形的四个顶点



例： 确定1的 n 次根

解： 因为

$$1=\cos(0+2k\pi)+i\sin(0+2k\pi)=e^{i(0+2k\pi)}$$

因此有 $$1^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{1}{n}(0+2k\pi)+i\sin\frac{1}{n}(0+2k\pi)=e^{i\frac{0+2k\pi}{n}}$$

显然，当 $n=2$ 时，有两个根：

$$w_0=1 \qquad w_1=-1$$

它表征了以1为半径的圆在实轴上的两个点

当 $n\geq 3$ 时，

所有的根位于以半径为1的圆内切正 n 边形的顶点上，其中一个顶点对应的主值 $z=1(k=0)$

令：

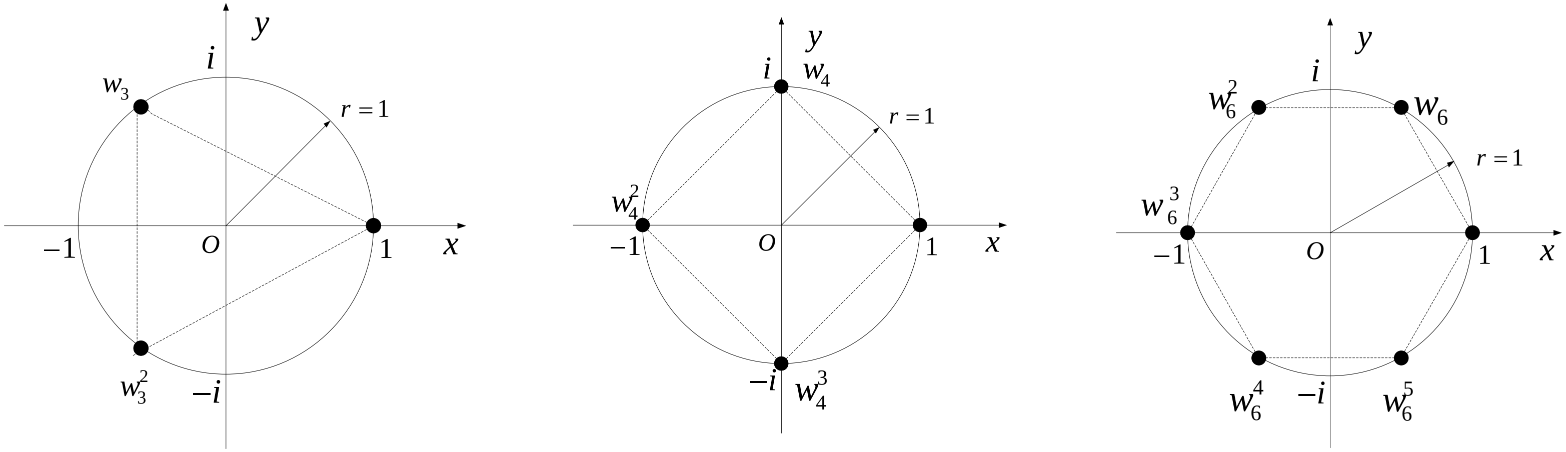
$$w_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$ 则有

$$w_n^k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad (k = 0,1,2,\cdots n-1)$$

因此，不同的次 n 根恰好是

$$1, w_n, w_n^2, \cdots, w_n^{n-1}$$

如图所示了， $n=3$ ， $n=4$ 和 $n=6$ 的情形



四、复平面上的曲线方程

平面上的曲线方程有直角坐标方程和参数方程两大类，相应地，复平面上的曲线方程也可写成这两种形式

1、直角坐标方程的复数形式

平面曲线方程的一般形式为： $F(x,y)=0$

由

$$z = x + yi \qquad \bar{z} = x - yi$$

可得

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

因此，复平面上的曲线方程的一般形式可写成：

$$F(x,y)=F\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=0$$

如：直线方程： $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}=1$ 或可写成 $\operatorname{Re}z=1$

直线方程： $x-y=0$ 可写成 $(z+\bar{z})i-(z-\bar{z})=0$ 或 $\operatorname{Re}z=\operatorname{Im}z$

圆方程： $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

可写成： $|z-z_0|=R$

它表明以点 $z_0=x_0+y_0i$ 为圆心，$|z-z_0|=R$ 为动点到的距离，由此可见，用复数 $z=x+yi$ 表示曲线上的动点，可以直接写出其轨迹方程。

如动点到定点 z_1 和 z_2 的距离之和为常数 $2a$ 的轨迹为椭圆

$$|z_1 - z_2| < 2a$$

其方程为： $$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$$

到定点 z_1 和 z_2 的距离的动点轨迹为连接这两点线段的垂直平分线，

其方程为：

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

在直角坐标系中，圆周的一般方程

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 (B^2 + C^2 > 4AD, A \neq 0)$$

由于： $$x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$$

所以在复平面上有： $$Az\bar{z} + B\frac{z + \bar{z}}{2} + C\frac{z - \bar{z}}{2i} + D = 0$$

$$Az\bar{z}+B\frac{z+\bar{z}}{2}+C\frac{z-\bar{z}}{2i}+D=0$$

如果令： $\beta=\dfrac{B+Ci}{2}$

则可简化为：

$$\Gamma: Az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+D=0$$

这就是复平面上圆周 Γ 的一般方程，其中：A，D为实数，β 为复数，且

$$|\beta|^2>AD, A\neq 0$$

如果 $A=0$ ，则 Γ 为直线。因此复平面上的直线方程的一般形式为：

$$\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+D=0$$

例： 将直线方程 $3x+y=2$ 化为复数表示式

解： 将

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2} \qquad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

代入方程 $3x+y=2$ 中。

$$(1+3i)z+(-1+3i)\bar{z}=4i$$

即有：

$$(-3+i)z+(-3-i)\bar{z}+4=0$$

2、参数方程的复数形式

设 $z = x + yi$ 若 t 是参数，则： $z(t) = x(t) + y(t)i$

则由两个复数相等的定义得到曲线 C 的参数方程，即

$$x = x(t), y = y(t) \Rightarrow z = z(t)$$

例： 将通过两点 $z_1 = x_1 + y_1 i$ 与 $z_2 = x_2 + y_2 i$ 的直线用复数形式的方程表示

解： 通过点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的直线可以用参数 t 表示为

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}, -\infty < t < \infty$$

因此，其复数形式为：

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), (0 \le t \le 1)$$

取 $t=\frac{1}{2}$ ，得线段 $\overline{z_1z_2}$ 的中点为：$z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$

对于圆周参数方程 $x=x_0+R\cos t, y=y_0+R\sin t(0\le t\le 2\pi)$

令 $z=z_0+R(\cos t+i\sin t)$ 或 $z=z_0+\mathrm{Re}^{it}$

例： 求下列方程所表示的曲线

$|z+i|=2$ $\quad\mathrm{Im}(i+\bar{z})=4$ $\quad z=(1+i)t+z_0(t>0)$

解： （1）设 $z=x+yi$ 则方程变为：

$|x+(y+1)i|=2$ 即： $\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$

从几何意义上看，它表示了以 $-i$ 为圆心，半径为2的圆

（2）设 $z=x+yi$ ，则 $i+\overline{z}=x+(1-y)i$

则有： $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4\Rightarrow(1-y)=4\Rightarrow y=-3$

从几何意义上看，它是一条平行于X轴的直线

（3）设 $z=x+yi$, $z_0=x_0+y_0 i$ 代入 $z=(1+i)t+z_0$ 可得：

$$x+yi=(1+i)t+x_0+y_0 i \quad \text{即} \quad \begin{cases} x=x_0+t \\ y=y_0+t \end{cases}$$

因此，当 $-\infty<t<\infty$ 时，方程 $z=(1+i)t+z_0$ 表示过点 z_0 ，其方向平行于复矢量 $1+i$ 的直线；当 $t>0$ 时，表示上述直线中的半直线。由于点 z_0 满足

$$Arg(z-z_0)=Arg[(1+i)t]=\frac{\pi}{4}$$

因此，方程表示从点 z_0 出发，倾角为 $\frac{\pi}{4}$ 的射线

3、简单曲线与光滑曲线

设曲线C为 $z=z(t)=x(t)+y(t)i(\alpha<t<\beta)$，如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，即 $z(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则称曲线C为连续型曲线；如果当 $\alpha\le t_1<t_2<\beta$ 时，存在 $z(t_1)\ne z(t_2)$，则该连续曲线在图形上无重点，则称简单曲线或约当曲线；如果方程还满足：$z(\alpha)=z(\beta)$，则称它为简单闭曲线或简单闭路。

如：一般圆周或多边形的边界都是简单闭曲线

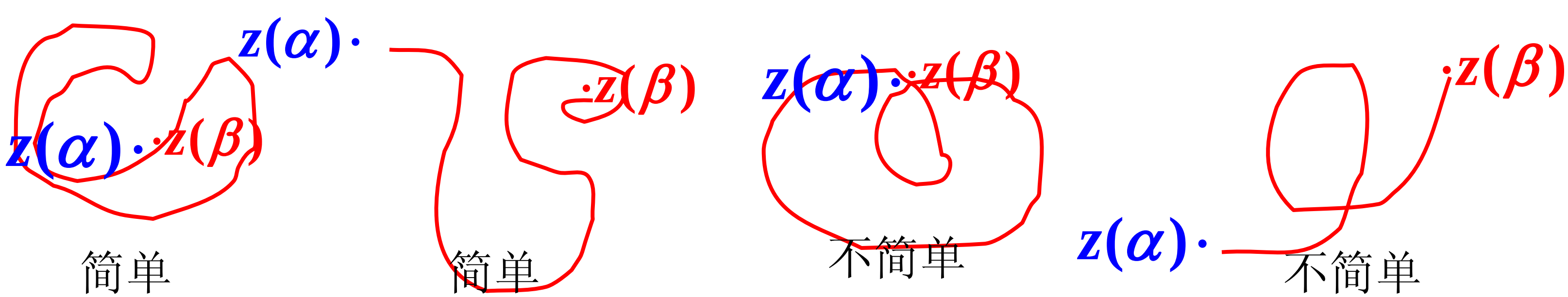
所谓曲线C是光滑的，在图形上是指它各点处具有连续变动的切线，即切矢量 $z'(t)=x'(t)+y'(t)i$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续。但是，当 $z'(t)=x'(t)+y'(t)i=0$ 时，其切矢量的方向不确定，无切线，所以其定义为：

定义：

若曲线C为 $z = z(t)(\alpha \le t \le \beta)$，其中：$z'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $z'(t) \ne 0$ ，则称曲线C为光滑曲线，由有限条光滑曲线连接成的曲线称为逐段光滑曲线

显然，直线、圆周等都是光滑曲线，而折线和多边形的边界都是逐段光滑的

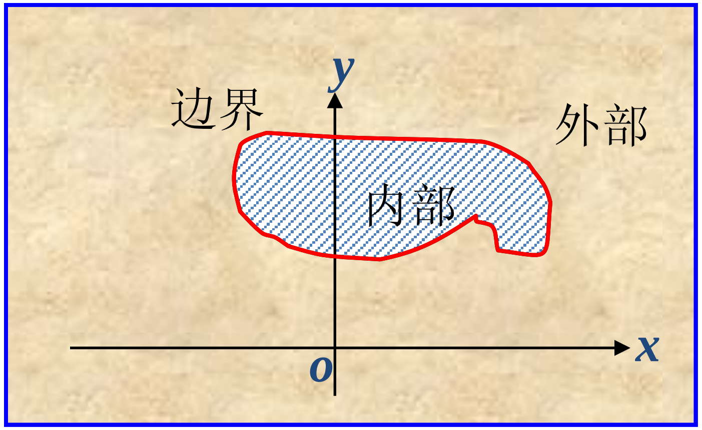
例： 下列曲线是否为简单闭曲线?



简单 闭　　简单 不闭　　不简单 闭　　不简单 不闭

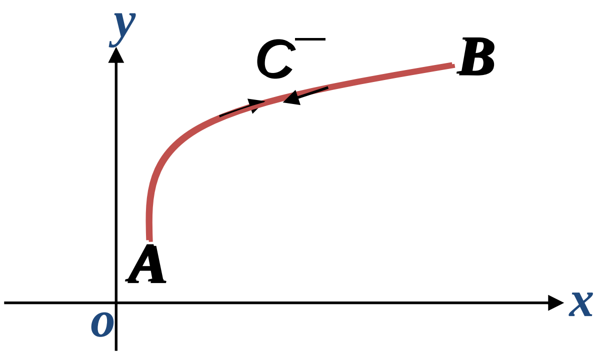
连续的简单闭曲线称为Jordan曲线.

任何Jordan曲线C将平面分为两个区域, 即内部区域(有界)与外部区域(无界), C是它们的公共边界.



关于曲线方向的说明:

设C 为平面上给定的一条连续曲线, 如果选定 C 的两个可能方向中的一个作为正向， 则称C为**有向曲线**.



如果从A 到 B 作为曲线C 的正向, 那么从 B 到 A 为曲线 C 的负向, 就是C^-.

除特殊声明外, 正向总是指从起点到终点的方向.

五、复平面上的点集与区域

1、复平面上的点集

平面上以 z_0 为中心，$\delta(\delta>0)$ 为半径的圆：$|z-z_0|<\delta$

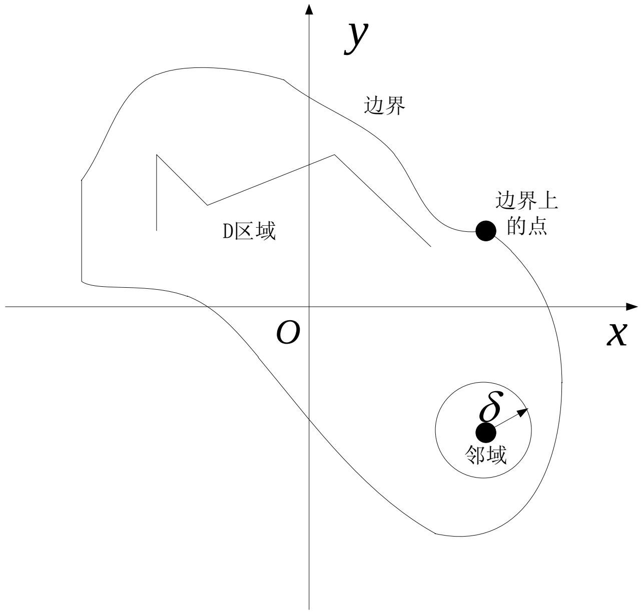
内部的点 z_0 的集合称为点的一个 δ 邻域，记为 $N_\delta(z_0)$

如图所示。而称满足不等式 $0<|z-z_0|<\delta$

的点集为 z_0 的一个**去心邻域**

满足不等式|*z*|>*R* (*R*>0)的一切点(包括无穷远点)的集合称为无穷远点的邻域

用*R*<|*z*|<+∞表示无穷远点的**去心邻域.**



设E是复平面上的点集, z_0是一个定点, 若存在z_0的一个邻域, 使得该邻域内的一切点均属于E, 则称z_0是E的**内点**. 即存在$\rho>0$, 满足

$$B(z_0,\rho)=\{z \mid |z-z_0|<\rho\}\subset E.$$

设E是复平面上的点集, z_0是一个定点, 若存在z_0的一个邻域, 使得在此邻域内的一切点均不属于E, 则称z_0是E的**外点**. 即存在$\rho>0$, 满足

$$B(z_1,\rho)\cap E=\{z \mid |z-z_0|<\rho\}\cap E=\varnothing.$$

设E是复平面上的点集, z_0是一个定点, 若z_0的任何邻域内都含有属于E的点和不属于E的点, 则称z_0是E的**边界点** .

即对任意的$\rho>0$, 存在 $z_1, z_2 \in B(z_0,\rho)$, 满足

$$z_1 \in E,\ z_2 \notin E.$$

E的边界点的全体所组成的集合称为E的边界, 记做∂E.

显然, E的内点属于E, 而外点不属于E, 但边界点既可能属于E, 也可能不属于E.

设G是复平面上的点集, 如果G 内每一点都是它的内点, 则称G 为开集.

例： 设z_0是定点, $r>0$是常数, 则z_0为中心,以r为半径的圆的内部点, 即满足不等式 $|z-z_0|<r$的一切点z所组成的点集 (z_0的r邻域) 是**开集**.

当 $0\le r<R$ (r 和 R 均是常数) 时, 满足不等式$r<|z-z_0|<R$的一切z所组成的点集也是**开集.**

但满足不等式 $r<|z-z_0|\le R$的一切点所组成的点集**不是开集**. 因为在圆周$|z-z_0|=R$上的点属于集合$r<|z-z_0|\le R$, 但这些点**不是它的内点,** 而是**边界点**.

在圆周$|z-z_0|=r$和圆周$|z-z_0|=R$上的点都是点集 $r<|z-z_0|<R$和 $r<|z-z_0|\le R$ 的**边界点**.

两个圆周上的点都不属于点集$r<|z-z_0|<R$, 内圆周$|z-z_0|=r$不属于点集$r<|z-z_0|\le R$, 外圆周$|z-z_0|=R$属于点集$r<|z-z_0|\le R$.

2、区域

设D是复平面上的点集，如果满足以下两个条件：

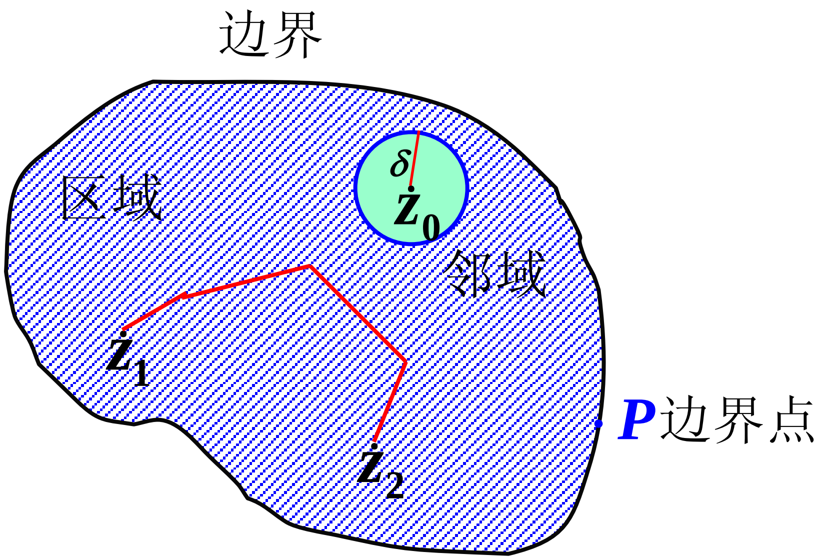
(1) D是开集；

(2) D内的任何两点z_1和z_2都可以用一条完全在D内的折线，把z_1和z_2连接起来(具有这个性质的点集叫做连通的)

则称D是复平面上的区域

简单地说，**连通开集称为区域**

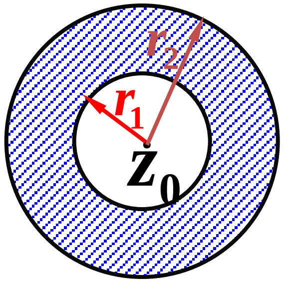
基本概念的图示



由区域*D*和它的边界∂*D*所组成的点集，称为闭区域, 记做 $\bar{D}$.

如果一个平面点集完全包含在原点的某一个邻域内，那么称它是有界的，不是有界集的点集叫做无界集.

例如：满足不等式 $|z-z_0|\le r$ 和 $r\le|z-z_0|\le R$ 的一切点所组成的点集都是有界的闭区域， 满足不等式 $|z|\ge R$ 的一切点所组成的点集是无界的闭区域.



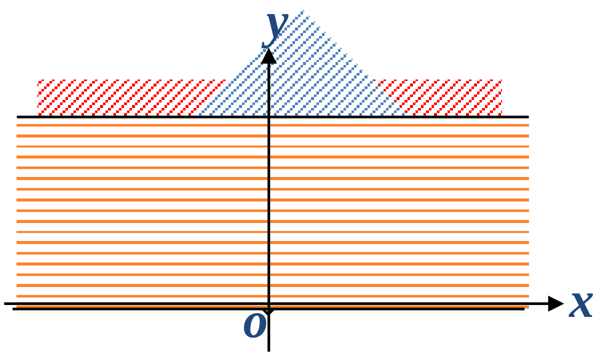
例： 判断下列区域是否有界?

(1) 圆环域： $r_1<|z-z_0|<r_2$; 有界

(2) 上半平面： $\mathrm{Im}\,z>0$; 无界

(3) 角形域： $\varphi_1<\arg z<\varphi_2$; 无界

(4) 带形域： $a<\mathrm{Im}\,z<b$. 无界



例： 描述下列不等式所确定的区域

$$|z-i|+|z+i|\le 2\sqrt{2} \qquad 0<Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)<\frac{\pi}{6}$$

解： 分析：首先看能否由不等式直接找出Z所构成的点集，如果不能，则可用代数方法，即令

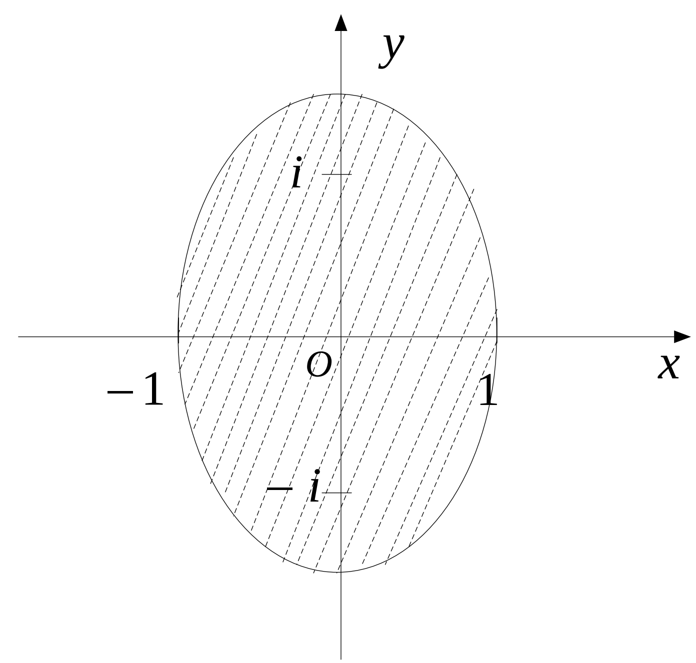
$$z = x + yi$$

将不等式转化为 x, y 的关系后再确定

（1）从几何上不难看出，该不等式表示到点 i 及 $-i$ 距离之和不超过 $2\sqrt{2}$ 的点Z所构成的点集，

也就是椭圆 $x^2+\frac{1}{2}y^2=1$

及其内部，是有界区域，如图所示



另解：因为

$$|z-i|+|z+i|\le 2\sqrt{2} \Rightarrow |x+(y-1)i|+|x+(y+1)i|\le 2\sqrt{2}$$

$$|x+(y-1)i|=r_1 \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=r_1 \Rightarrow x^2+(y-1)^2=r_1^2$$

$$|x+(y+1)i|=r_2 \Rightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2}=r_2 \Rightarrow x^2+(y+1)^2=r_2^3$$

$$r_1r_2=\sqrt{x^4+x^2(y+1)^2+x^2(y-1)^2+(y-1)^2(y+1)^2}$$

$$=\sqrt{x^4+x^2y^2+2x^2y+x^2+x^2y^2-2x^2y+x^2+y^4-2y^2+1}$$

$$=\sqrt{x^4+2x^2y^2+2x^2+y^4-2y^2+1}$$

令： $r_1+r_2=2\sqrt{2} \Rightarrow r_1^2+r_2^2+2r_1r_2=8$

简化后有： $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$

（2）令 $z = x + yi$ ，则 $\dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{x^2+y^2-1+2yi}{(x+1)^2+y^2}$

因为：

$$0 < Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) < \frac{\pi}{6}$$

所以有： $x^2+y^2-1>0$ $2y>0$ $0<\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}<tg\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

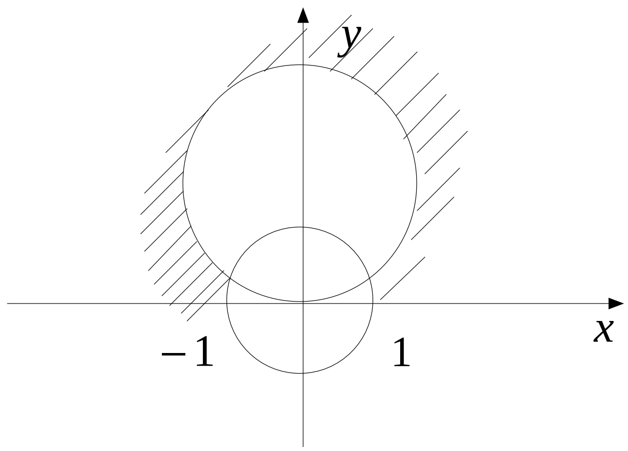
即： $x^2+y^2>1$ $y>0$ $x^2+(y-\sqrt{3})^2>4$

故所求区域是上半平面圆周

$$x^2+(y-\sqrt{3})^2=4$$

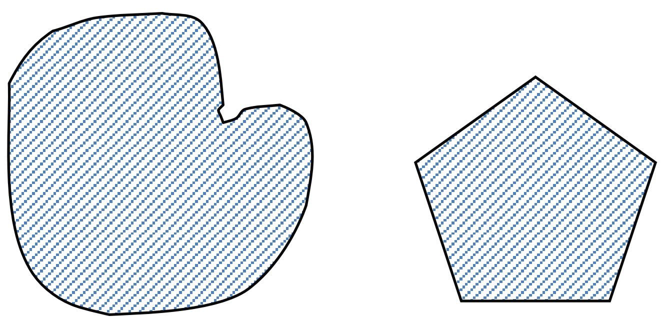
的外部，是无界单连通区域，

如图所示

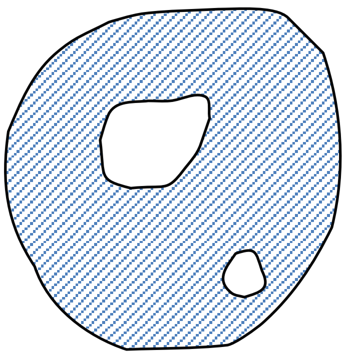


3、单连通区域与多连通区域

设*D*是复平面上的一个区域，如果位于*D*内的任何Jordan曲线的内部区域也都包含于*D*, 则称*D*为单连通区域. 若区域*D*不是单连通区域, 则称它为多连通区域.



单连通域



多连通域

例： 指出下列不等式所确定的点集, 是否有界? 是否区域? 如果是区域, 单连通的还是多连通的?

$$(1)\ \mathrm{Re}(z^2)<1; \qquad (2)\ |\arg z|<\frac{\pi}{3}; \qquad (3)\ \left|\frac{1}{z}\right|<3;$$

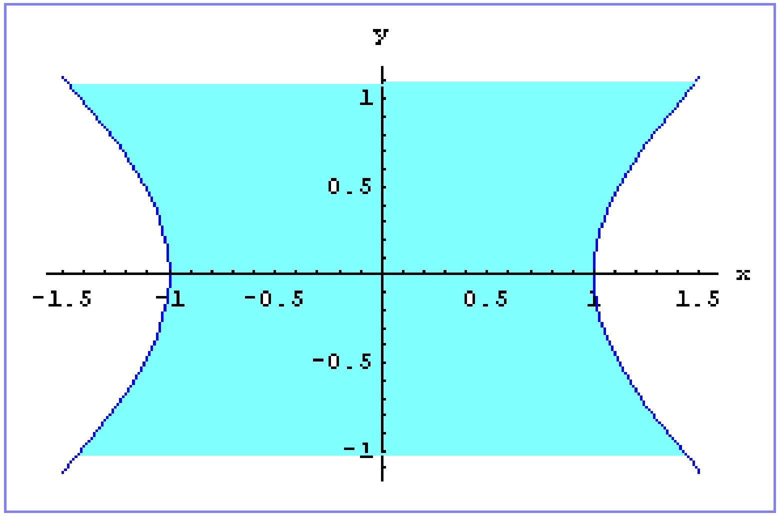
$$(4)\ |z-1|+|z+1|<4; \qquad (5)\ |z-1|\cdot|z+1|<1.$$

解： (1) 当 $z=x+iy$ 时,

$$\mathrm{Re}(z^2)=x^2-y^2,$$

$$\mathrm{Re}(z^2)<1 \Leftrightarrow x^2-y^2<1,$$

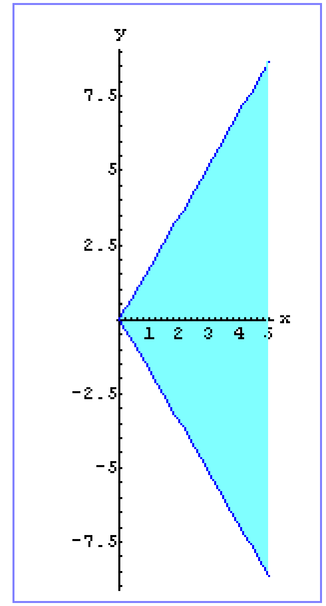
无界的单连通区域(如图).



(2) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{3}$.

$$|\arg z| < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3},$$

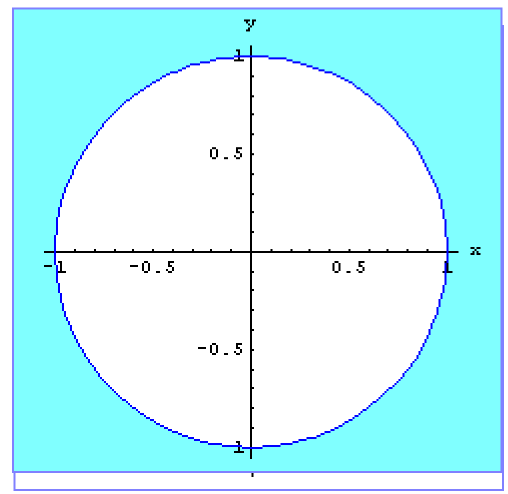
是角形域, 无界的单连通域(如图).



(3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 3$.　　$\left|\dfrac{1}{z}\right| < 3 \Leftrightarrow |z| > \dfrac{1}{3}$,

是以原点为中心, 半径为 $\dfrac{1}{3}$ 的圆

周外部，无界多连通区域(如图).



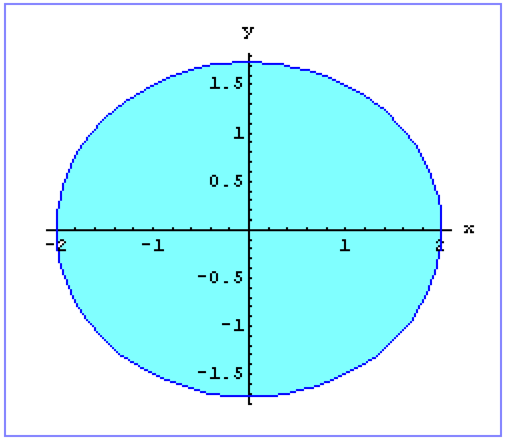
(4) $|z-1|+|z+1|<4.$

因为 $|z-1|+|z+1|=4$

表示到1, –1两点的距离之

和为定值 4 的点的轨迹,

所以这是椭圆曲线.



$$|z-1|+|z+1|<4$$

表示该椭圆的内部, 这是有界的单连通区域(如图).

(5) $|z-1|\cdot|z+1|<1.$

令 $z=r\cos\theta+ir\sin\theta.$ $\quad |z-1|\cdot|z+1|<1 \Leftrightarrow$

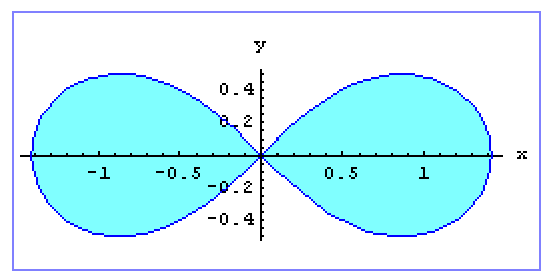
$$[(r\cos\theta-1)^2+r^2\sin^2\theta]\cdot[(r\cos\theta+1)^2+r^2\sin^2\theta]<1,$$

$$(r^2+2r\cos\theta+1)(r^2-2r\cos\theta+1)<1,$$

$$(r^2+1)^2-4(r\cos\theta)^2<1 \quad \Rightarrow \quad r^2<2\cos 2\theta.$$

$r^2=2\cos 2\theta$ 是双叶玫瑰线(也称双纽线).

$|z-1|\cdot|z+1|<1$ 表示双纽线的

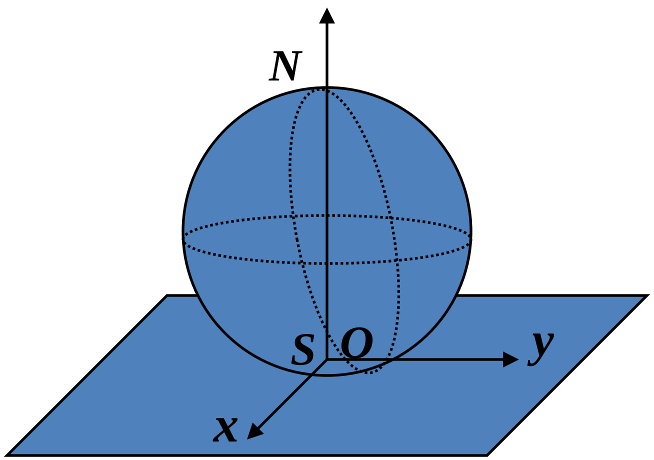


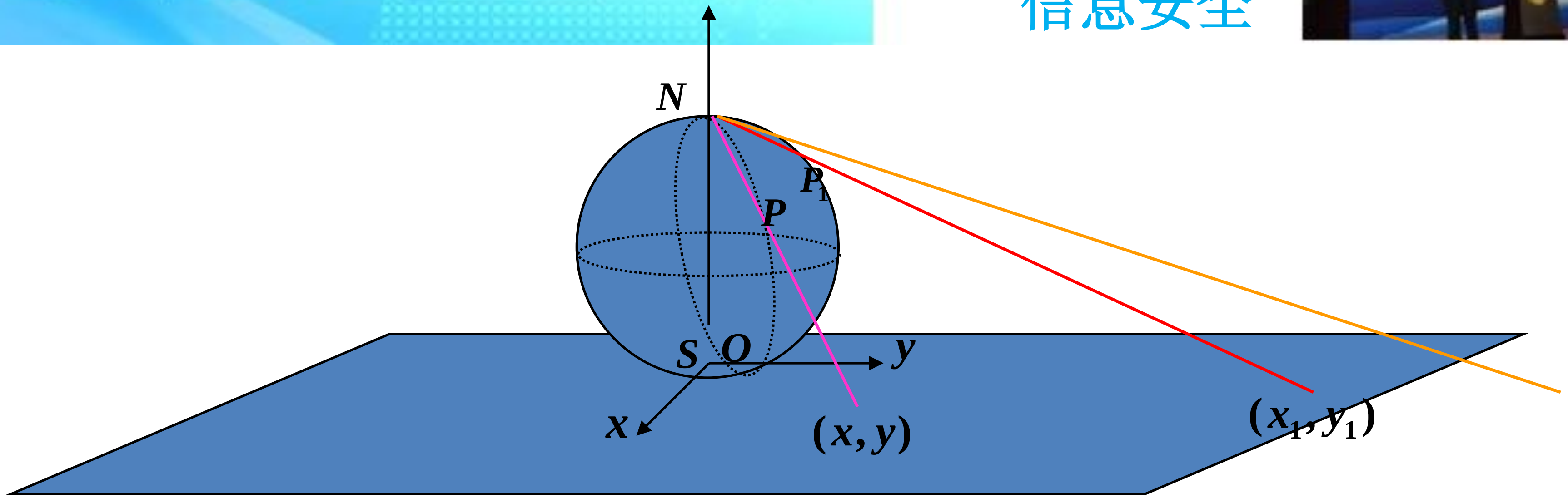
内部. 这是有界集，但不是区域.

六、无穷大与复球面

复数可以用平面上的点表示，这是复数的几何表示法的一种，另外还可以用球面上的点表示复数.

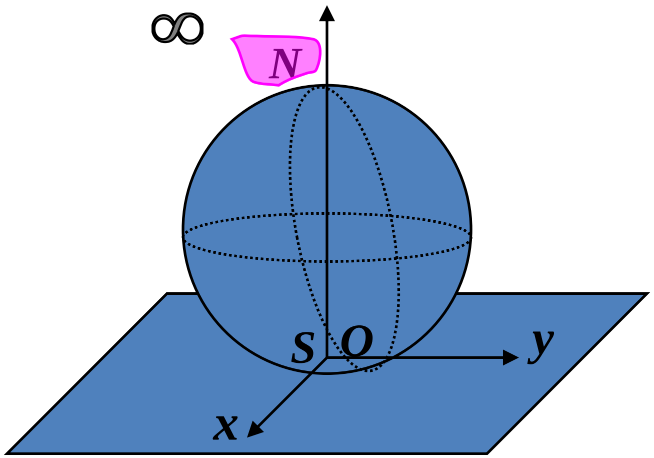
设Σ是与复平面*C*切于原点*O*的球面. 过原点*O*做垂直于平面 *C*的直线, 与Σ的另一交点为*N*. 原点*O*称为Σ的南极(*S*极), 点*N*称为Σ的北极(如图).





球面上的点，除去北极 N 外，与复平面内的点之间存在着一一对应的关系. 我们用球面上的点来表示复数.

球面上的北极N不能对应复平面上的定点, 当球面上的点离北极 N 越近, 它所表示的复数的模越大.



规定: 复数中有一个唯一的 “无穷大” 与复平面上的无穷远点相对应, 记作 ∞.

球面上的北极N就是复数无穷大的几何表示.

不包括无穷远点的复平面称为有限复平面, 或简称复平面. 包括无穷远点的复平面称为扩充复平面.

球面上的点与扩充复平面的点构成了一一对应, 这样的球面称为复球面.

对于复数的无穷远点而言，它的实部、虚部，辐角等概念均无意义，**规定**它的模为正无穷大.

关于∞的四则运算规定如下：

(1) 加法 $$\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty \quad (\alpha\neq\infty);$$

(2) 减法 $$\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty \quad (\alpha\neq\infty);$$

(3) 乘法 $$\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty \quad (\alpha\neq 0);$$

(4) 除法 $$\frac{\alpha}{\infty}=0,\quad \frac{\infty}{\alpha}=\infty\,(\alpha\neq\infty),\quad \frac{\alpha}{0}=\infty(\alpha\neq 0).$$

谢谢！