网络 与 信息安全

复变函数与积分变换

——第三讲

复变函数

贵州大学计算机科学与技术学

潘平

电话：13078569531

邮箱：panping_17@163.com

目 录

一、复变函数的基本概念

定义：

设G是一个复数的集合 $z=x+yi$ ，如果有一个确定的法则存在，按照这一法则，对于集合G中的每一个复数 $w=u+vi$ ，就有一个或几个复数与之对应，那么称复变数 w 是复变数 z 的函数，记为：

$$w=f(z)$$

其中： z 称为自变量， w 称为因变量

如果 z 的一个值对应有 w 的一个值，那么我们称函数 $w=f(z)$ 是单值的；

如果 z 的一个值对应 w 有二个值或以上值，那么我们称函数 $w=f(z)$ 是多值的；

集合G为 $f(z)$ 的定义集合，对应于G中所有的 z 的一切 w 值所构成的集合G，称为函数值的集合。

由于给定了一个复数 $z=x+yi$，就相当于给定了两个实数x 和y ，而复数 $w=u+vi$ 亦同样地对应于对实数 u 和v ，所以复变函数 w 和自变量 z 之间的关系$w=f(z)$ 相当于两个关系式：

$$u=u(x,y) \qquad v=v(x,y)$$

它们确定了自变量 x 和 y 的两个二元函数。复变函数 $w=f(z)$ 可写成：

$$w=u(x,y)+v(x,y)i$$

例： 复变函数 $w=z^2=(x+yi)^2$ ，其定义域为整个复平面，其实部和虚部都是二元的，即有：

$$w=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$$

实函数： $u=u(x,y)=x^2-y^2$

虚函数： $v=v(x,y)=2xy$

反之，如果令

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\ y=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

则

$$w=\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2-\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2+2\frac{z+\bar{z}}{2}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i}i=z^2.$$

例： 函数 $F(z)=x+i$

其实部是二元函数： $u=u(x,y)=x$

虚部是： $v=v(x,y)=1$

即存在：

$$w=F(z)=u(x,y)+v(x,y)i=x+i$$

如果 z 表示为指数形式： $z=re^{i\theta}$

则可利用关系式 $x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$

可得函数 $w=f(z)$ 的表达形式，即：

$u=u(r,\theta)$ $v=v(r,\theta)$

即有：

$$w=u(r,\theta)+v(r,\theta)i$$

例： $z=re^{i\theta}$

则函数 $w=z^n$ 可表示为：

$$w=z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r^ne^{in\theta}$$

此时：

$$u=u(r,\theta)=r^n\cos n\theta$$

$$v=v(r,)=r^n\sin n\theta$$

二、复映射

通常将实函数用几何图形来表示，如二元和三元实函数的几何表示分别是平面曲线和空间曲面，从它们的图形我们可直观地观察出它们的几何特征。

对于复变函数 $w=u(r,\theta)+v(r,\theta)i$ ，由于它们的自变量 $z=x+yi$ 和因变量 $w=u(r,\theta)+v(r,\theta)i$ 都是复数，无法用一个平面或一个三维空间的点集来给出其几何图形。因此，从几何的角度出发，我们需要将复变函数 $w=f(z)$ 看作两个延长平面上的点集之间的对应关系。

如果用 Z 平面上的点集表示自变量 Z 的值，而用另一个平面—— W 平面——上的点表示函数 W 的值，那么函数 $w=f(z)$ 在几何上就可以看成是将 Z 平面上的一个点集 G （定义集合）变换到 W 平面上的一个点集 G^w （函数值集合）的映射（或变换）。这个映射通常简称为由函数 $w=f(z)$ 所构成的映射。

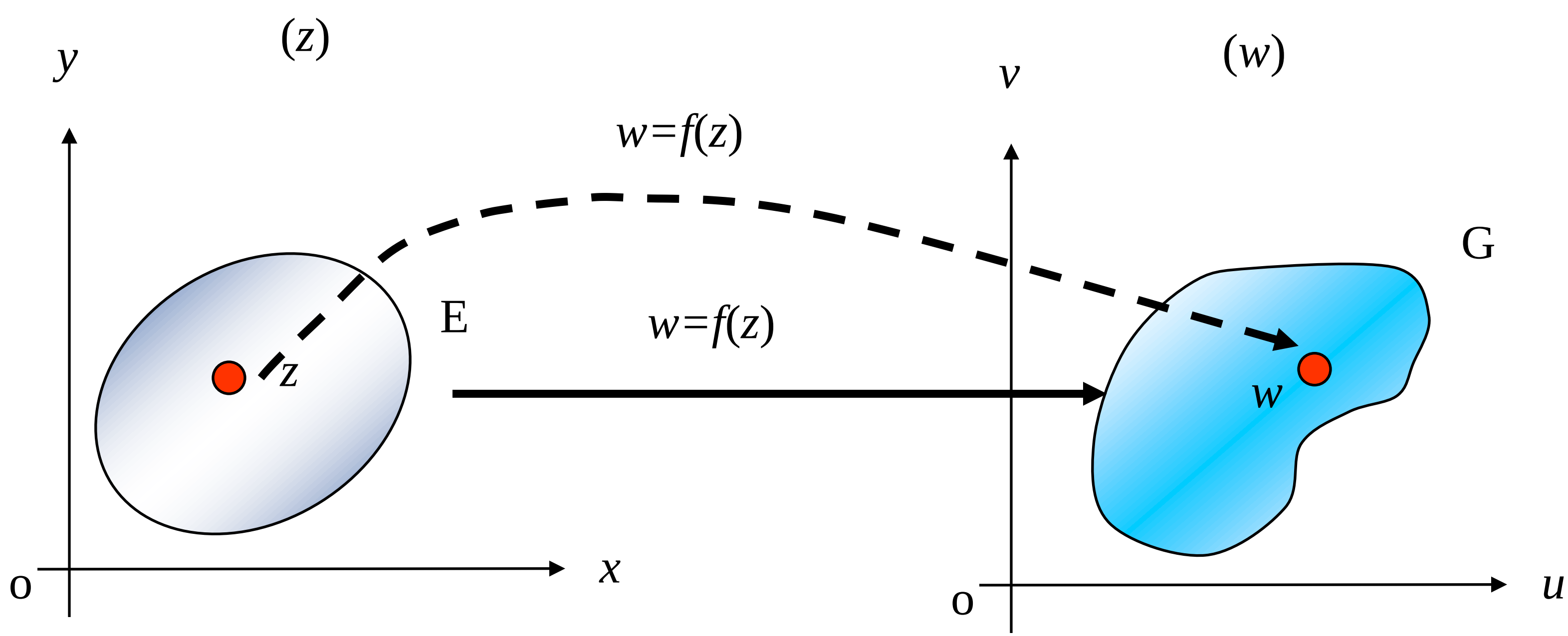
如果 G 中的点 Z 被 $w=f(z)$ 映射 G^w 中的点 w ，那么称 W 为 Z 的像，而称 Z 为 W 的原像

复变函数的几何意义

在几何上，$w=f(z)$可以看作：

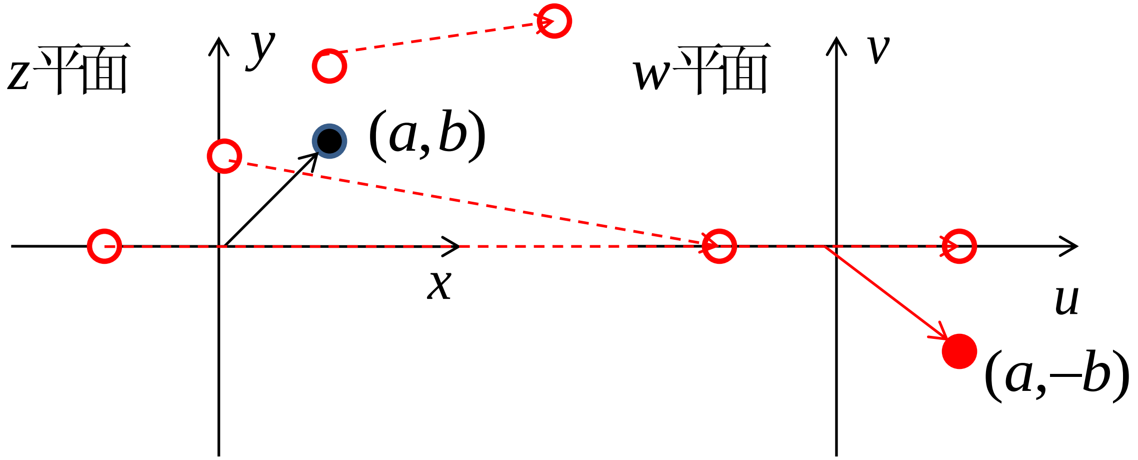
$z \in E$（z平面）$\xrightarrow{w=f(z)}$ $w \in G$（w平面）的映射.

定义域 (E)　　函数值集合 (G)



例： 函数 $w=\bar{z}$ 所构成的映射

是将 z 平面上的点 $z=a+bi$ ， 映射为 w 平面上的点 $w=\bar{z}=a-bi$



如果 $w=z^2$ 为简单起见，我们设：

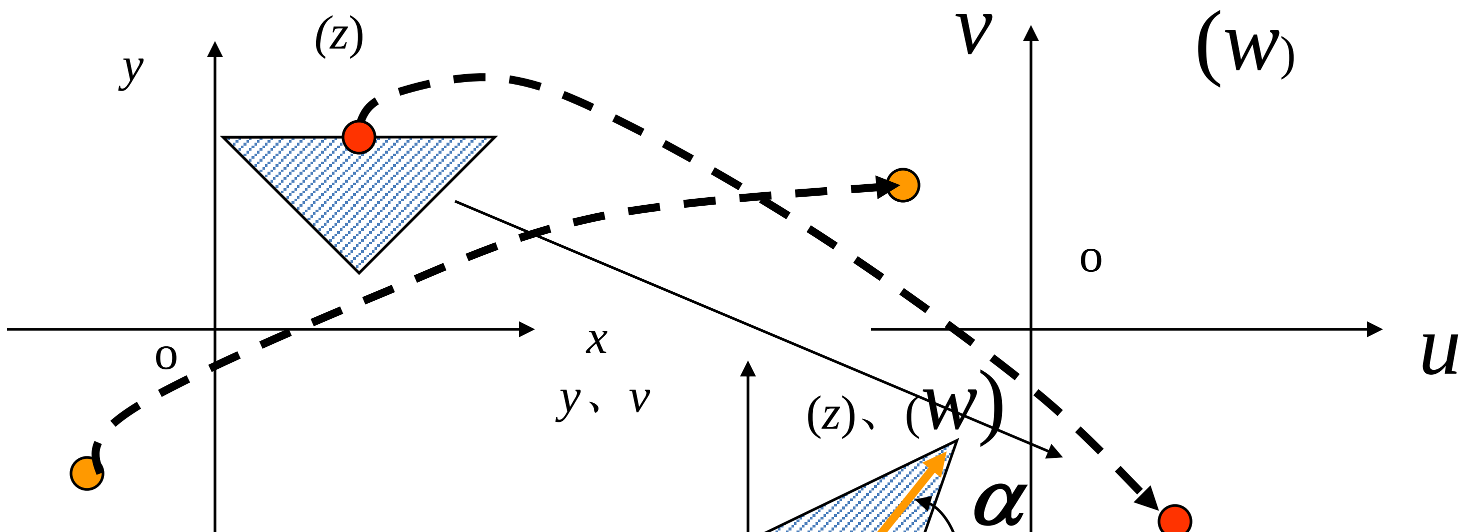
$z_1=i$　　$z_2=1+2i$　　$z_3=-1$

则

$w_1=-1$　　$w_2=-3+4i$　　$w_3=1$

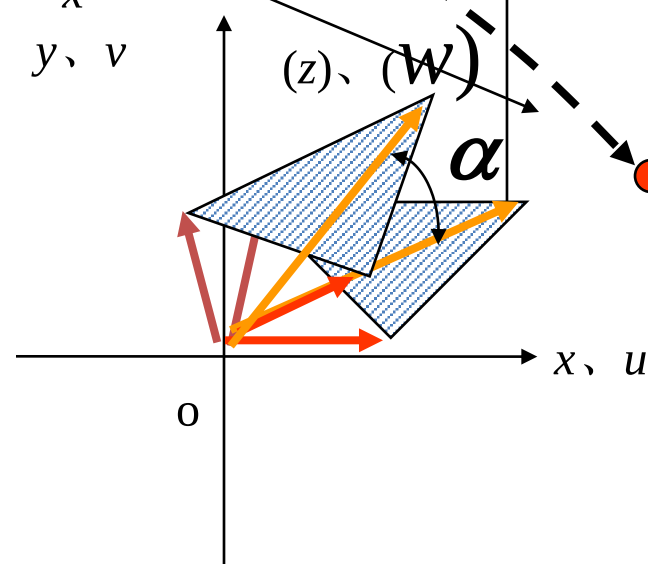
若 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ 则 $\bar{z} = re^{-i\theta}$

可见，$w = \bar{z}$ 是关于实轴对称的一个映射



若 $w = e^{i\alpha} z$ (α实常数)

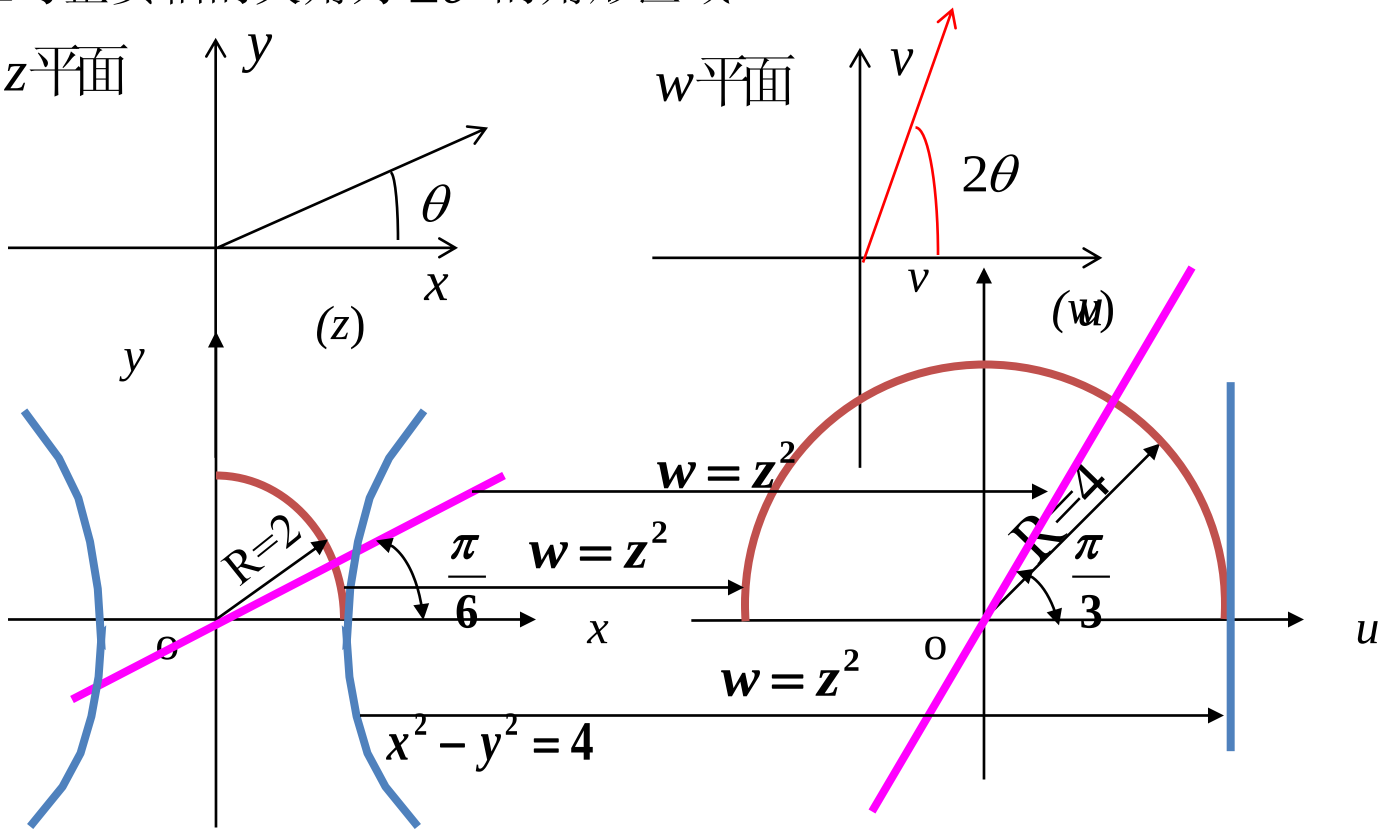
则
$$\begin{cases} u = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ v = x\sin\alpha + y\sin\alpha \end{cases}$$



根据前面所关于乘法的模与辐角的知识可知，通过映射 $w=z^2$

z 的辐角增大一倍。因此，z 平面上与正轴的交角为θ 的角形区域映射为

w 平面上与正实轴的夹角为 2θ 的角形区域

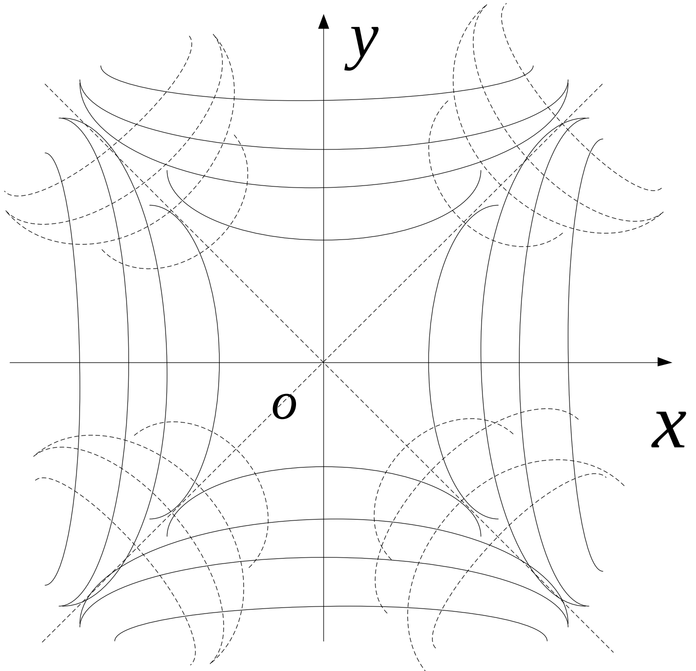


表明，在Z平面上的两族分别以直线 $y=\pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

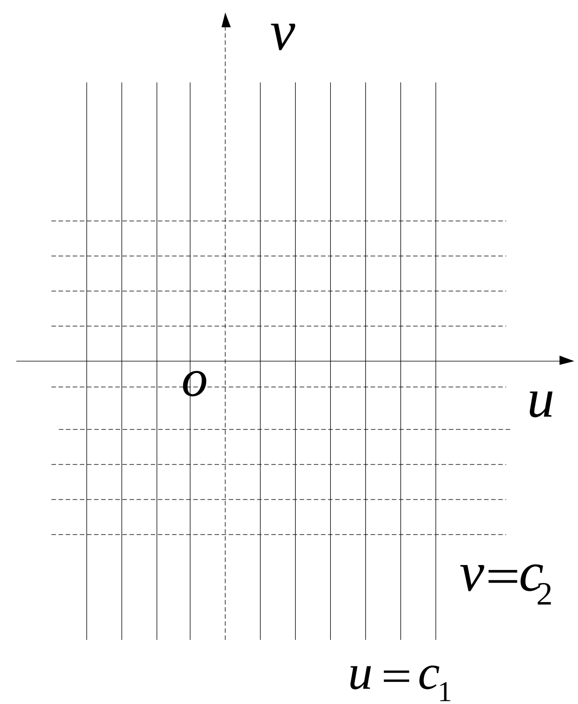
$$x^2-y^2=c_1 \qquad 2xy=c_2$$

分别映射为W平面上的两条平行直线 $u=c_1$ $\quad v=c_2$

Z平面



W平面



例： 解方程 $(1+z)^5=(1-z)^5$

解 显然方程的根 $z\neq 1$ 所以原方程可写成

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5=1 \qquad \text{令} \qquad w=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\Rightarrow w^5=1$$

因为：$1=\cos 0+i\sin 0$ 所以有 $\sqrt[5]{1}=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$ 其中：$k=0,1,2,3,4$

故方程的根为：$w=1 \quad w=e^{\frac{2\pi}{5}} \quad w=e^{\frac{4\pi}{5}} \quad w=e^{\frac{6\pi}{5}} \quad w=e^{\frac{8\pi}{5}}$

其中：$\theta=0 \quad \theta=\frac{2\pi}{5} \quad \theta=\frac{4\pi}{5} \quad \theta=\frac{6\pi}{5} \quad \theta=\frac{8\pi}{5}$

再由 $w=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ 可得

$$z=\frac{w-1}{w+1}=\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta-1}{\cos\theta+i\sin\theta+1}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)}=itg\frac{\theta}{2}$$

故原方程的根为：

$$z=itg\frac{\theta}{2}$$

例： 写出圆周方程：$x^2+2x+y^2=1$ 的复数形式

解： 令

$$x=\frac{1}{2}\left(z+\bar{z}\right) \qquad y=\frac{1}{2i}\left(z-\bar{z}\right)$$

并代入方程得：

$$\frac{1}{4}\left(z+\bar{z}\right)^2+\left(z+\bar{z}\right)-\frac{1}{4}\left(z-\bar{z}\right)^2=1$$

简化后得：

$$z\bar{z}+z+\bar{z}-1=0$$

三、初等函数

我们知道，在实数域上有：

幂函数： $y = x^a$ （其中a是常数）

指数函数： $y = a^x$

对数函数： $y = \log_a x$

三角函数： $y = \sin x$

反三角函数： $y = \arcsin x$

是最基本的五个初等函数，**复变函数也不例外**

指数函数

定义： 设复变数 $z = x + yi$ ，则复变数 z 的指数函数定义为：

$$e^{z} = e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right)$$

基本性质： 根据复指数函数的定义，不难发现它具有如下性质：

因为： $e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right) = |e^{z}|e^{i\varphi}$ 所以

（1） $|e^{z}| = e^{x}$ $\qquad Arg(e^{z}) = y + 2k\pi$

表明：

复指数函数 e^{z} 可分解为实指数模 $|e^{x}|$ 与相位 $e^{i\varphi}$ 的乘积，其模由复变数的实部决定，辐角（相位）由复变数的虚部决定。

（2）对于两个复变数 $z_1 = x_1 + y_1 i$ $z_2 = x_2 + y_2 i$

若 $z = z_1 + z_2$ 则：

$$e^z = e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1} e^{x_2} e^{iy_1} e^{iy_2}$$

$$= R[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)]$$

其中： $R = e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ $Arg(e^z) = y_1 + y_2 + 2k\pi$

（3）若 $y_1 + y_2 = 2k\pi$ 则 $e^z = e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$

（4）若 $x_1 + x_2 = 0$ 则 $e^z = e^{iy_1} e^{iy_2} = e^{i(y_1+y_2)}$

（5） $(e^z)^n = e^{nz}$ 其中： n 为正整数

（6） $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1} e^{-z_2} = e^{z_1-z_2}$ 若 $z_1 = z_2$

则 $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1} e^{-z_2} = e^{z_1-z_2} = e^0 = 1$

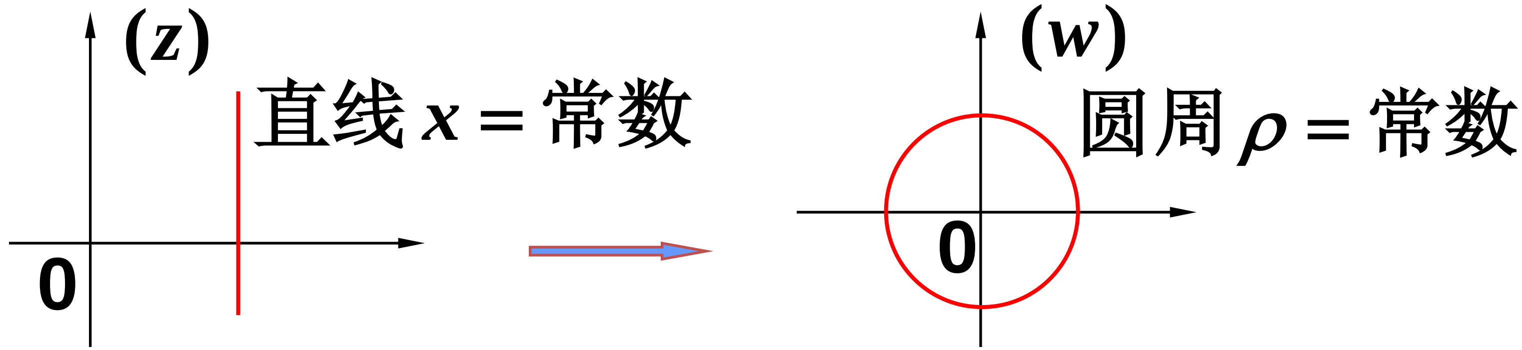
因为 $w' = (e^z)' = e^z \neq 0,$

所以由$w = e^z$所构成的映射是一个全平面上的共形映射.

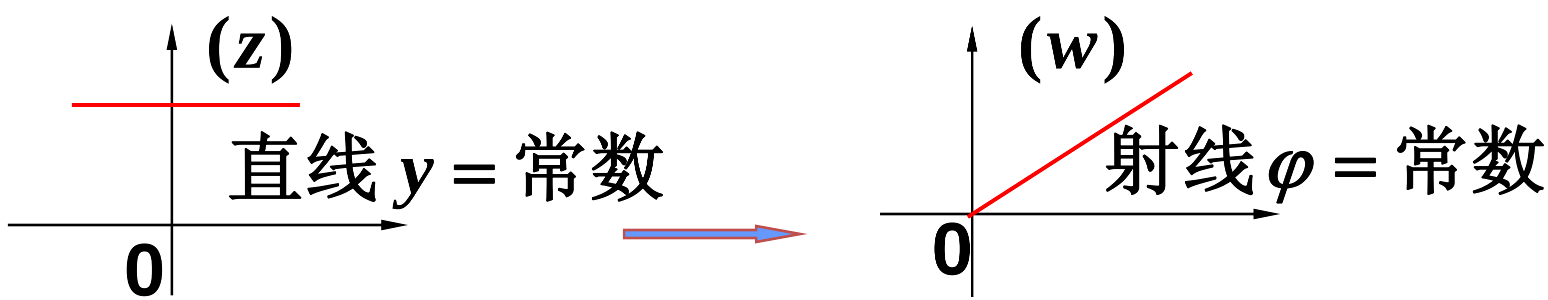
设 $z = x + iy, w = \rho e^{i\varphi}$, 那末 $\rho = e^x, \varphi = y$,

$$z\text{平面} \underset{z = \ln w}{\overset{w = e^z}{\rightleftarrows}} w\text{平面}$$

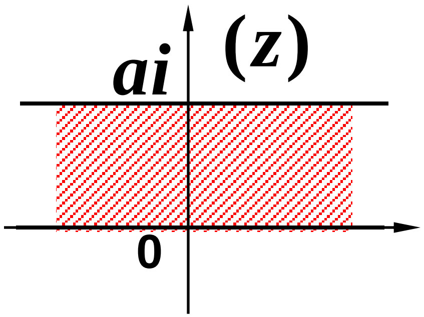
1)

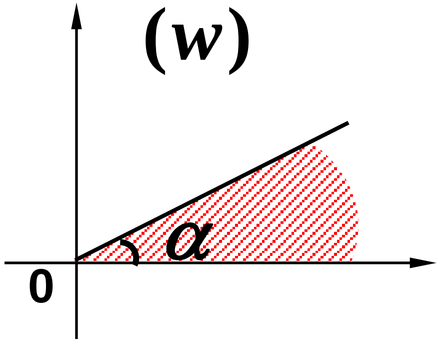


2)

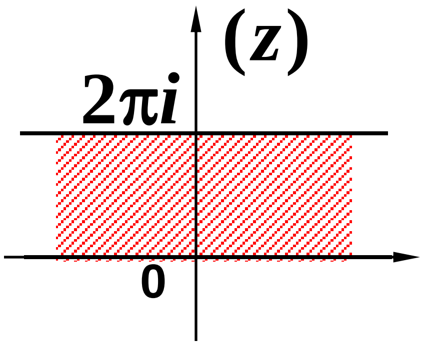


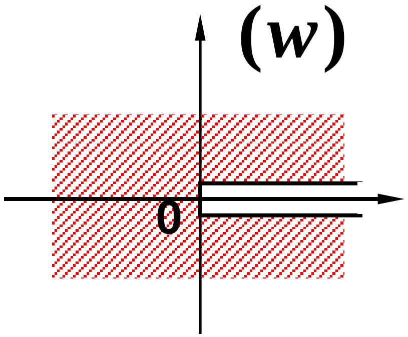
3) 带形域 $0 < \mathrm{Im}(z) < a$ $(0 < a \leq 2\pi)$ → 角形域 $0 < \arg w < a$





特殊地:





映射特点: 把水平的带形域$0<\mathrm{Im}(z)<a$映射成角形域$0<\arg w<a$.

如果要把带形域映射成角形域，常利用指数函数.

例 求把带形域$0<\mathrm{Im}(z)<\pi$映射成单位圆$|w|<1$的一个映射.

解

$$0<\mathrm{Im}(z)<\pi \xrightarrow{w=\frac{e^z-i}{e^z+i}} |w|<1$$

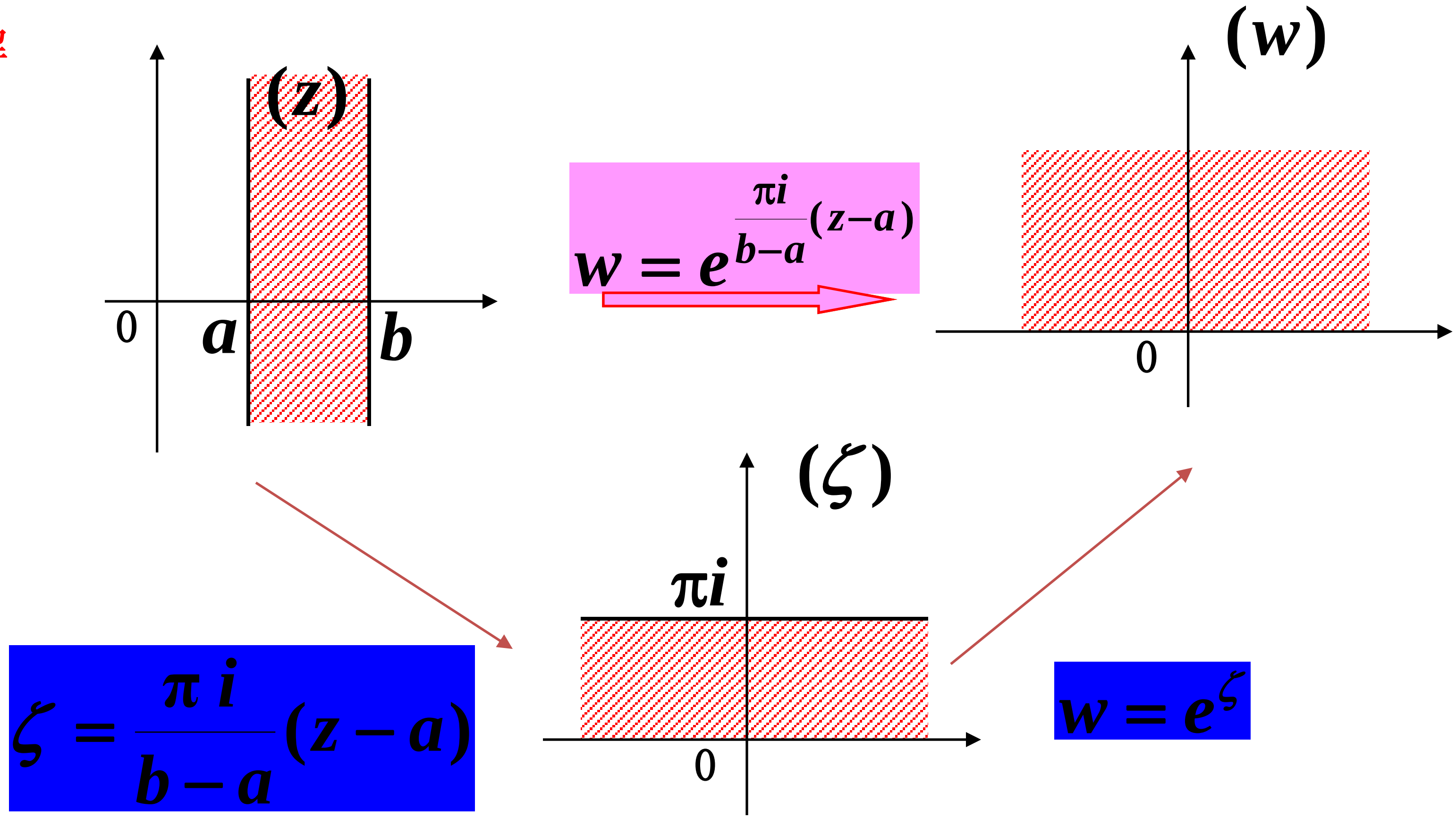
$$\zeta=e^z$$

上半平面$\mathrm{Im}(\zeta)>0$

$$w=\frac{\zeta-i}{\zeta+i}$$

例 求把带形域 $a < \mathrm{Re}(z) < b$ 映射成上半平面 $\mathrm{Im}(w) > 0$ 的一个映射.

解



对数函数

定义： 对数函数是指数函数的反函数，即若：

$$z = e^{w}$$

则称 w 是 z 的对数函数，记为：

$$w = Lnz$$

基本性质： 根据定义及其指数函数的性质，设

$$w = u + iv \qquad z = re^{i\theta}$$

则可得

$$e^{w} = e^{u+iv} = e^{u}e^{iv} = re^{i\theta}$$

必有 $e^{u} = r$ $\qquad w = u + iv = \ln r + i\theta$

即 $Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) = \ln|z| + iArgz$

$$Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) = \ln|z| + iArgz$$

可见，这是一个多值函数，每给定一个 z 值存在多个 $\ln z$ 的值与之对应。

若令 $k = 0$

则转变为一个单值函数。我们称这个单值函数为多值函数 $\ln z$ 的主值，记为：

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z \qquad Lnz = \ln z + i\arg z$$

由此可得：

（1）当 $z = x > 0$ $\quad Lnz = \ln x + 2ik\pi$

（2）当 $z = x < 0$ $\quad Lnz = \ln|x| + (2k+1)\pi i$

（3）$e^{Lnz} = z$ $\quad Lne^{z} = z + 2k\pi i$

（4）$Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$ $\quad Ln(\dfrac{z_1}{z_2}) = Lnz_1 - Lnz_2$

例： （1）计算 $\ln(-3-4i)$

（2）已知 $e^{z}=-1$，求z

解： （1）因为 $z=-3-4i$

$$\therefore |z|=5 \qquad \arg z=\frac{4}{3}-\pi$$

所以 $\ln(-3-4i)=\ln 5+i(\arg tg\frac{4}{3}-\pi)$

（2） $\because e^{z}=-1$

$$\therefore z=Ln(-1)$$

$$z=Ln(-1)=\ln|-1|+(2k+1)\pi i=(2k+1)\pi i$$

幂函数

定义： 设 α 为复数， z 为除0以外的复变数，称

$$z^{\alpha}=e^{\alpha Lnz}$$

为一般幂函数

基本性质：

不难发现，它是实数域上的幂函数 $x^{a}=e^{a\ln x}$ （$x>0,a\in R$） 在复数域的推广。因此有

（1）若 α 是任意整数，则 z^{α} 是单值函数

当 α 是正整数时，

$$0^{\alpha}=0$$

（2）若 α 是有理数 $\frac{q}{p}$ 因为

$$x^a = e^{a\ln x} = e^{\frac{q}{p}\ln z} e^{\frac{q}{p}2k\pi i}$$

此时 z^α 能取到 p 个不同的值，即当 $k = 0,1,2,\cdots,p-1$ 时所对应的间 z^α 值

（3）若 α 是无理数或复数时，由于

$$z^\alpha = e^{\alpha\ln z} e^{2k\pi i\alpha}$$

z^α 有无限多个值

该函数在z平面内处处可导，导数

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = nz^{n-1}}$$

(1) 当$z \neq 0$时：

$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \neq 0$，则在$z$平面内除原点外，

由$w = z^n$所构成的映射是处处共形的.

(2) 当 $z=0$ 时：

令 $z=re^{i\theta}, w=\rho e^{i\varphi}$，有 $\rho=r^n, \varphi=n\theta.$

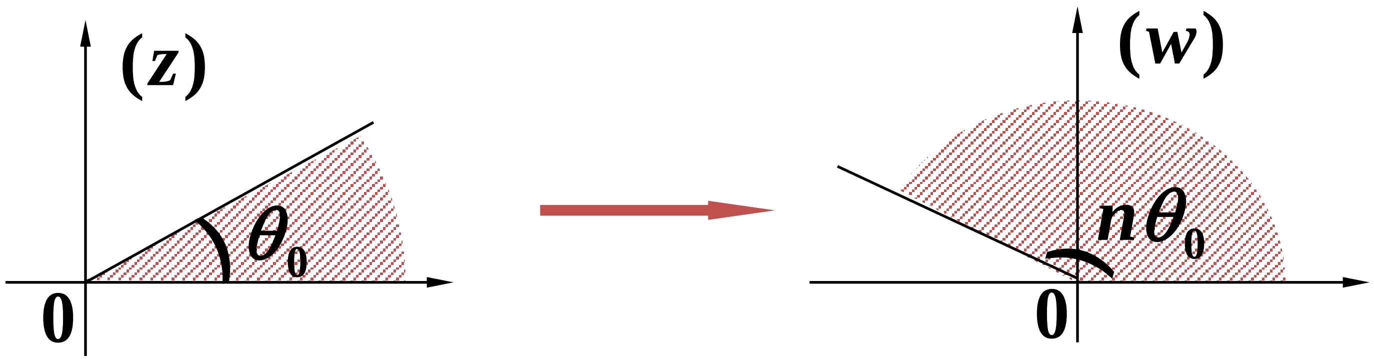
则: 1) 圆周 $|z|=r \longrightarrow$ 圆周 $|w|=r^n$

(特殊地: 单位圆周映射为单位圆周)

2) 射线 $\theta=\theta_0 \longrightarrow$ 射线 $\varphi=n\theta_0$

(正实轴 $\theta=0$ 映射成正实轴 $\varphi=0$)

3) 角形域 $0 < \theta < \theta_0 \left(< \dfrac{2\pi}{n} \right)$ → 角形域 $0 < \theta < n\theta_0$

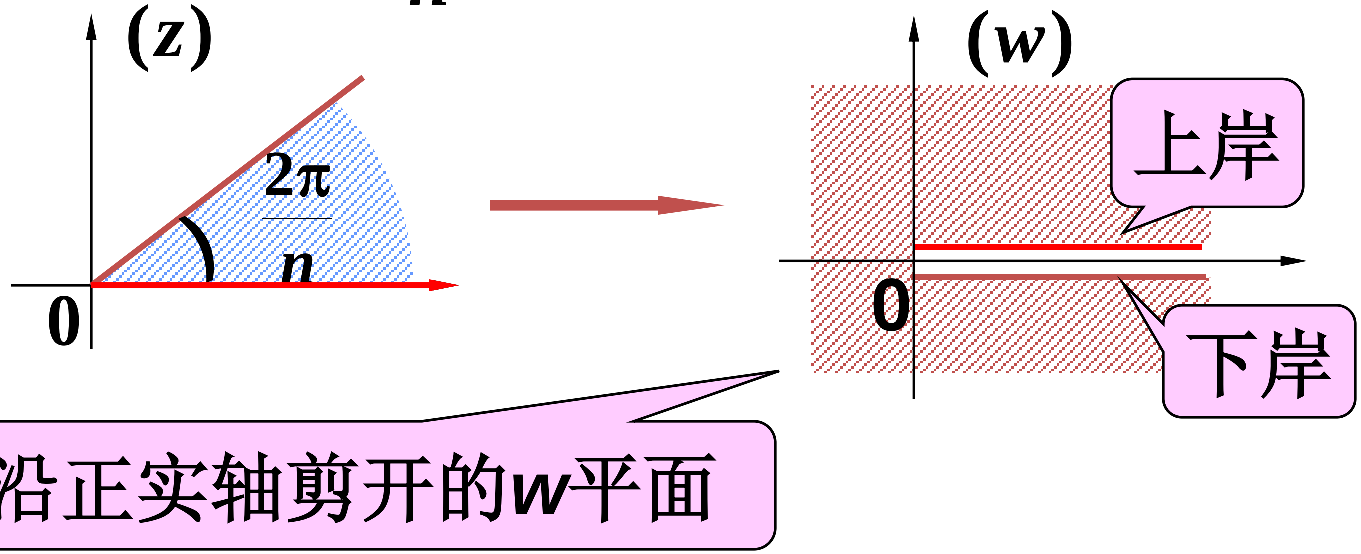


即在 $z = 0$ 处角形域的张角经过映射变为原来的n倍.

因此,当 $n \geq 2$时,映射 $w = z^n$在 $z = 0$处没有保角性.

特殊地:

角形域 $0<\theta<\dfrac{2\pi}{n}$ $\longrightarrow$ 角形域 $0<\theta<2\pi$



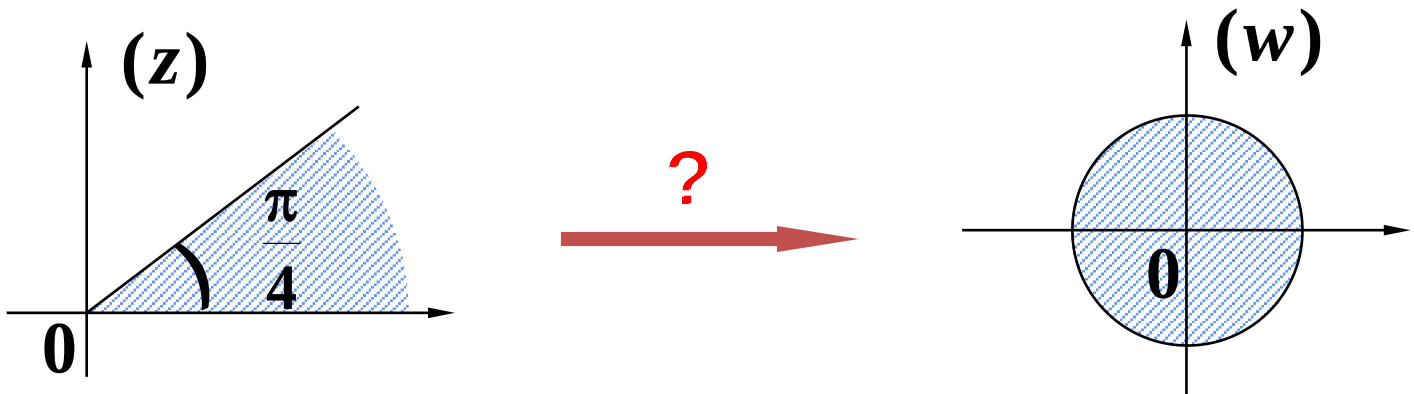
$\theta=0$映射成正实轴的上岸$\varphi=0$

$\theta=\dfrac{2\pi}{n}$映射成正实轴的下岸$\varphi=2\pi$

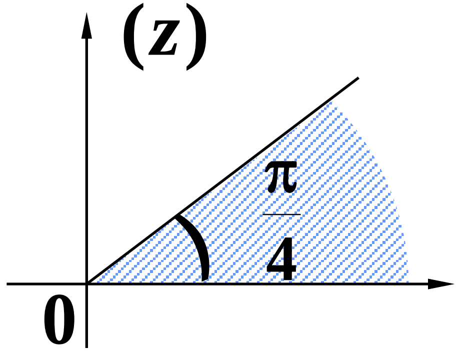
映射特点: 把以原点为顶点的角形域映射成以原点为顶点的角形域, 但张角变成为原来的 n 倍.

如果要把角形域映射成角形域，常利用幂级数.

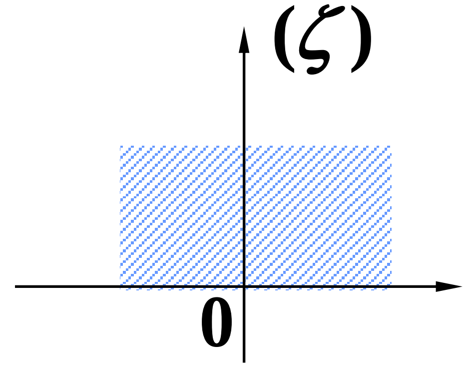
例 求把角形域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$ 映射成单位圆 $|w| < 1$ 的一个映射.



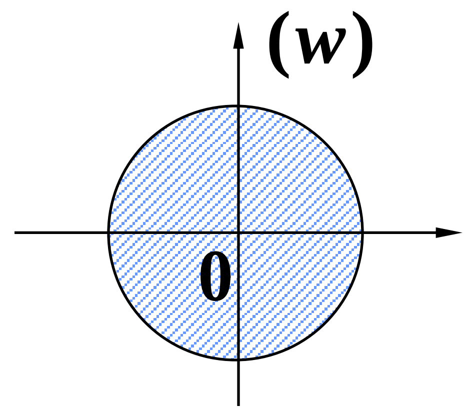
解



$$\zeta = z^4$$



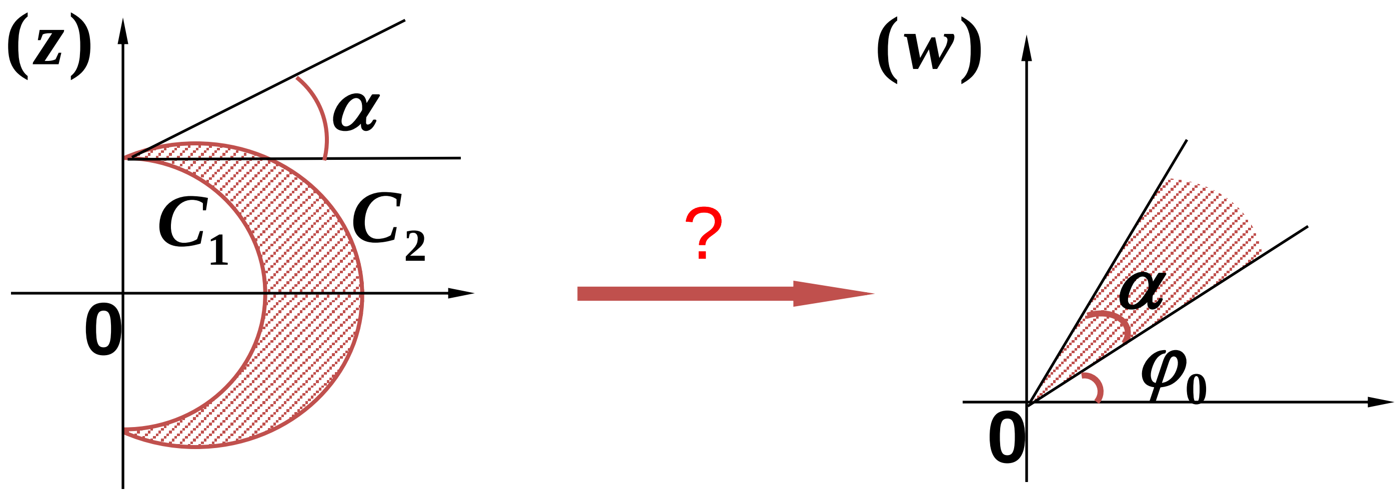
$$w = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$$



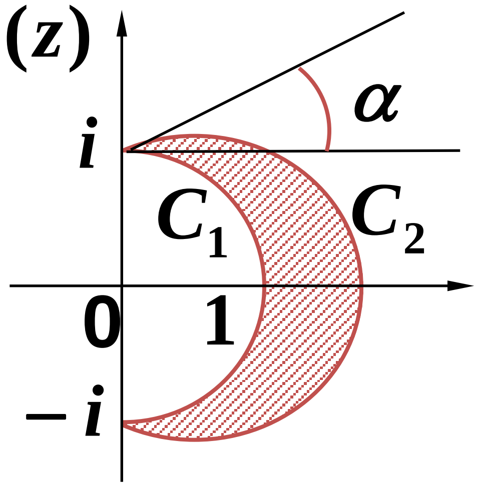
因此所求映射为:

$$w = \frac{z^4 - i}{z^4 + i}$$

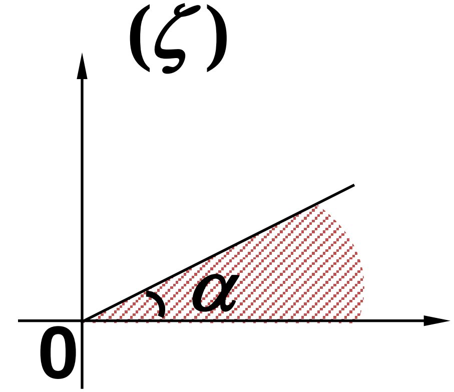
例 求把下图中由圆弧C_1与C_2所围成的交角为α的月牙域映射成角形域$\varphi_0 < \arg z < \varphi_0 + \alpha$的一个映射.



解



$$\zeta = k\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$

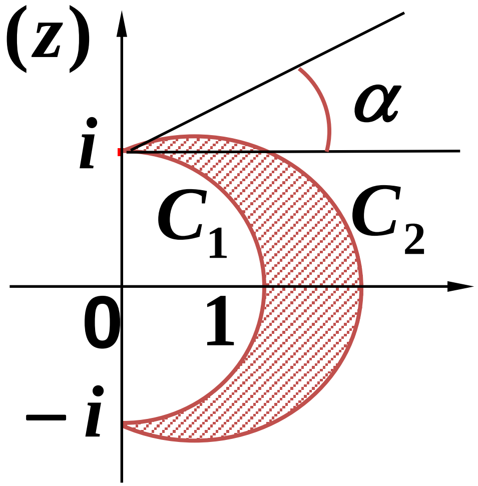


C_1与C_2的交点为$i,-i$

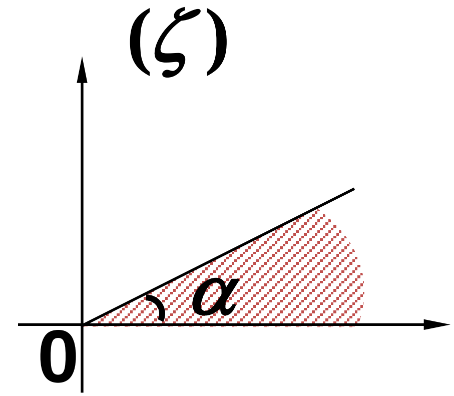
$$z=i \to \zeta = 0,\quad z=-i \to \zeta=\infty,$$

实现此步的映射是分式线性函数:

$$\zeta = k\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$ 其中k为待定的复常数.



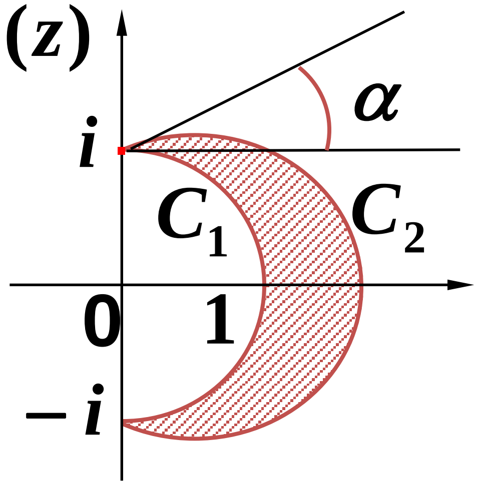
$$\zeta = i\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$



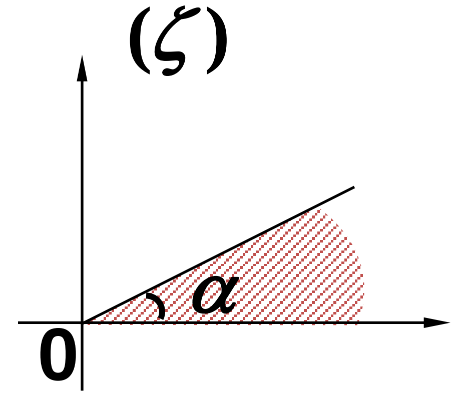
此映射将 $z = 1 \to \zeta = k\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right) = -ik.$

取 $k = i$，使 $\zeta = 1$，则 $C_1 \to \zeta$ 平面上的正实轴.

根据保角性, 月牙域被映射成角形域: $0 < \arg\zeta < \alpha.$



$$\zeta = i\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$



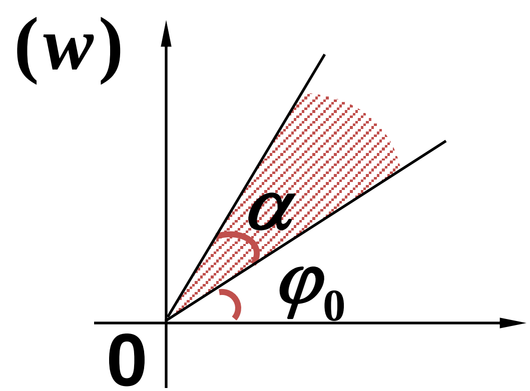
逆时针旋转 φ_0

$$w = e^{i\varphi_0}\zeta$$

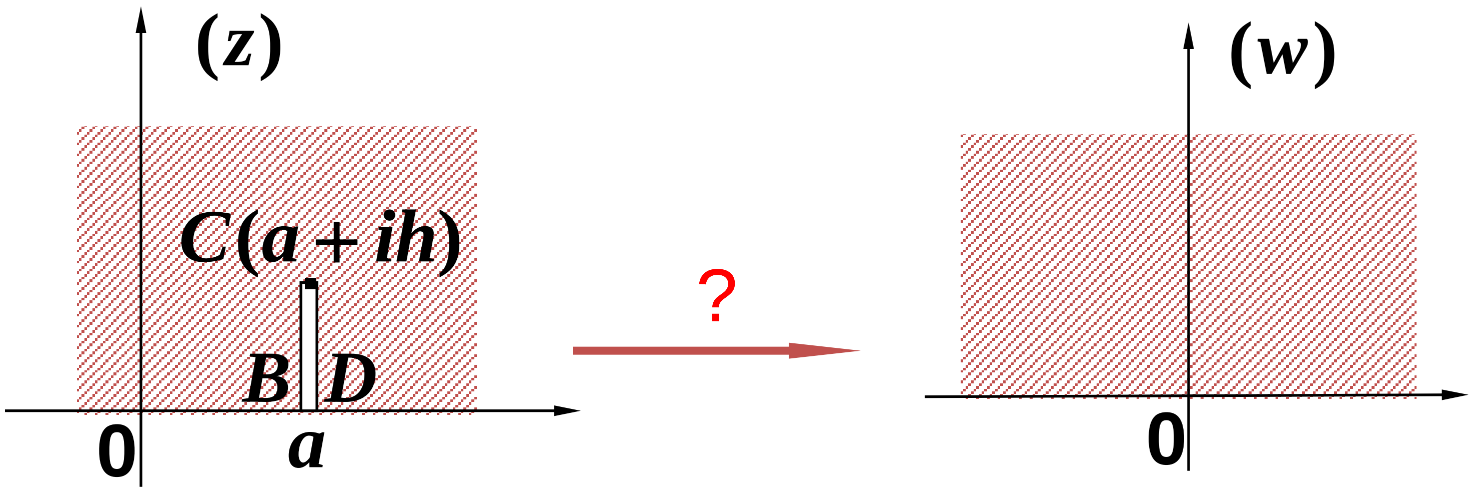
因此所求映射为:

$$w = ie^{i\varphi_0}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$

$$= e^{i(\varphi_0+\frac{\pi}{2})}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$

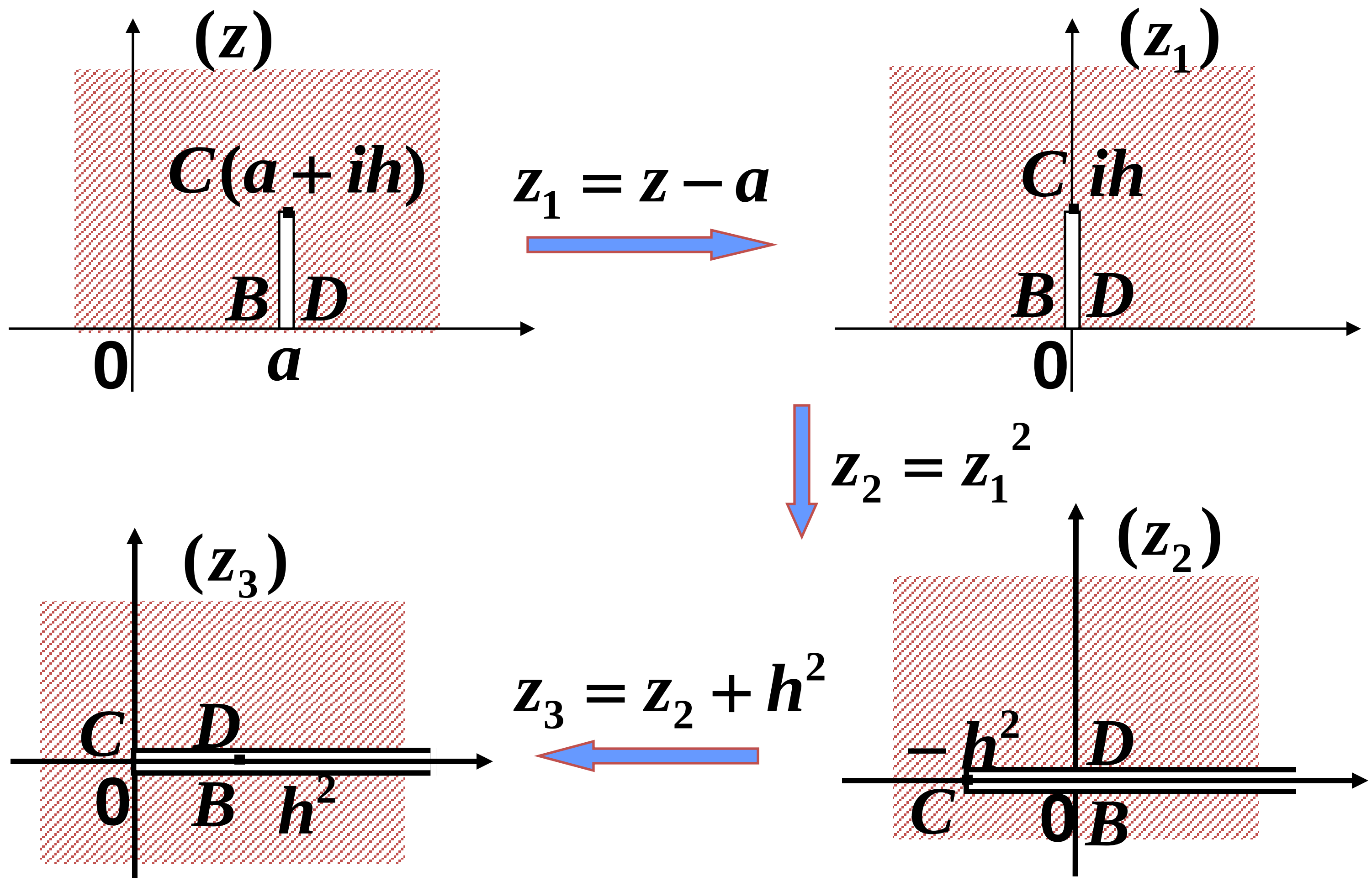


例 求把具有割痕 $\mathrm{Re}(z)=a,\ 0\le \mathrm{Im}(z)\le h$ 的上半平面映射成上半平面的一个映射.

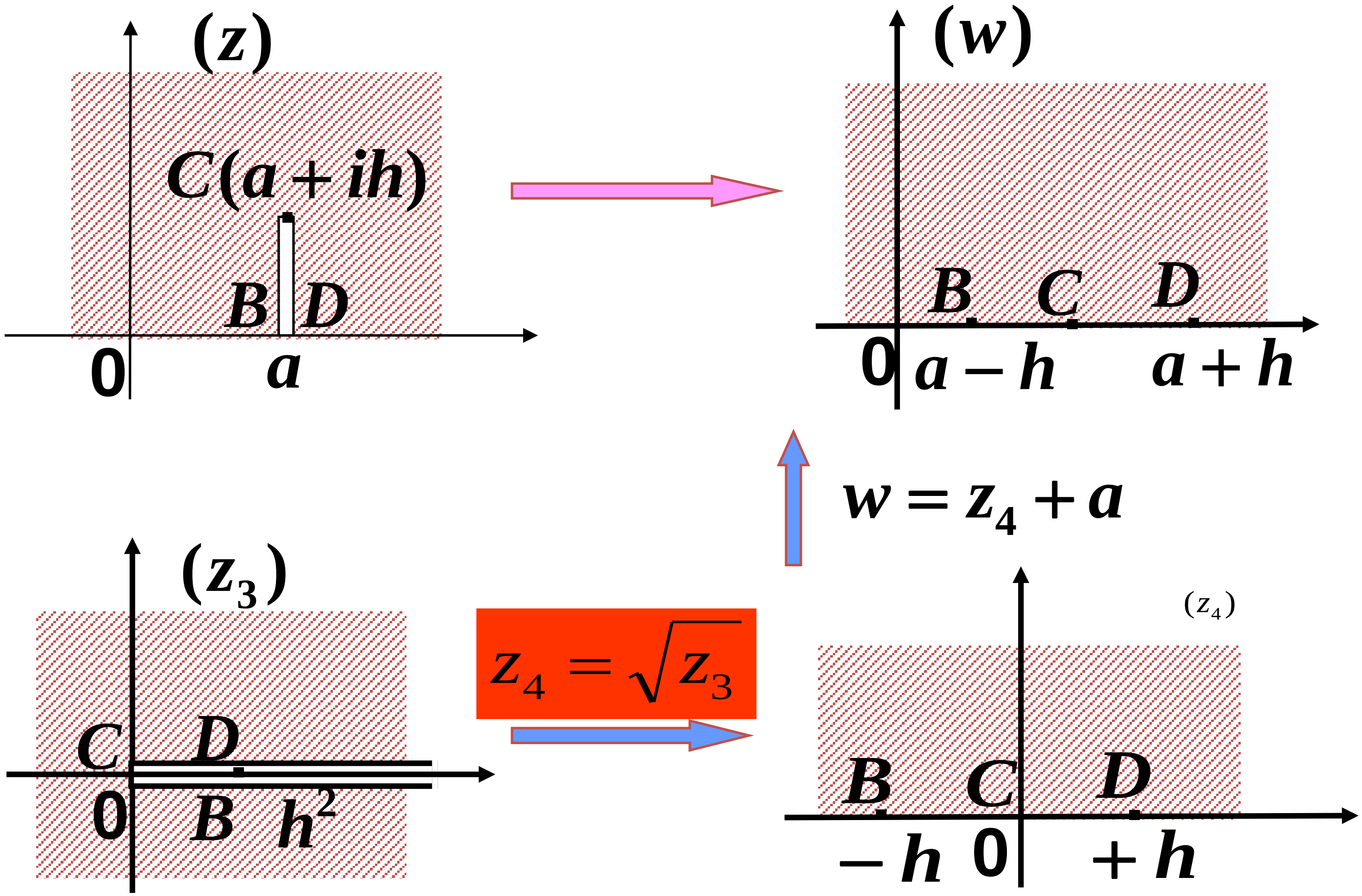


分析: 关键点是将垂直于x轴的割痕的两侧跟x轴之间的夹角展平. 可利用映射 $w=z^2$

解 如图所示:



解 如图所示: $w=\sqrt{(z-a)^2+h^2}+a$



三角函数

因为 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$

所以 $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

定义： 设z为任一复变数，则称

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \cos x=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

为复数域中的正弦函数与余弦函数

基本性质：

（1） $\sin(-z)=-\sin z$ $\cos(-z)=\cos z$

（2） $$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

（3） $$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \sin z_2 + \cos z_1 \cos z_2$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

（4） $$\sin(z + 2\pi) = \sin z$$

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z$$

$$\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z$$

反三角函数

反正弦函数： $y=\arcsin x \quad x\in[-1,1] \quad y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

反余弦函数： $y=\arccos x \quad x\in[-1,1] \quad y\in[0,\pi]$

反正切函数： $y=arctgx \quad x\in(-\infty,\infty) \quad y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

反余切函数： $y=arcctgx \quad x\in(-\infty,\infty) \quad y\in[0,\pi]$

推广到复数域，有：

定义： 称复变数z的反三角函数是 $z=\sin w \quad z=tgw \quad z=\cos w \quad z=ctgw$ 的反函数，分别记为

$$w=\arcsin z \qquad w=\arccos z \qquad w=arctgz \qquad w=arcctgz$$

基本性质：

因为

$$z=\sin w=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$$

$$\Rightarrow \sin^2 w=-\frac{1}{4}\left(e^{2iw}-2+e^{-2iw}\right)$$

$$\Rightarrow 2-4\sin^2 w=e^{2iw}+e^{-2iw}$$

$$\Rightarrow 1-2\sin^2 w=\cos 2w$$

所以

$$e^{2iw}-2zie^{iw}-1=0$$

$$\Rightarrow e^{iw}=iz+\sqrt{1-z^2}$$

即

$$w = -iLn\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

其中： $\sqrt{1-z^2}$ ——双值函数 所以是多值函数，即

$$w = \arcsin z = -iLn\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

相应地有：

$$w = \arccos z = -iLn\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$w = arctgz = -\frac{i}{2} Ln \frac{1+iz}{1-iz}$$

例 求 $e^{1-i\frac{\pi}{2}}$ 的值。

解： 根据指数函数的定义，有：

$$e^{1-i\frac{\pi}{2}}=e\left[\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-ie$$

例 利用指数函数表示 $\left(\dfrac{-2+i}{1+2i}\right)^{\frac{1}{3}}$

解：

$$\left(\frac{-2+i}{1+2i}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{\sqrt{5}e^{i\left(\pi-arctg\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{5}e^{iarcth2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left[e^{i\left(\pi-arctg\frac{1}{2}-arctg\,2\right)}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right)^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{i}{3}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

所以存在三个值，分别为

$$e^{\frac{i\pi}{6}}\qquad e^{\frac{i5\pi}{6}}\qquad e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\qquad-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\qquad-i$$

谢谢！