# 复变函数与积分变换
## ——第十讲

# 孤立奇点

贵州大学计算机科学与技术学

潘平

电话：13078569531

邮箱：panping_17@163.com

# 目 录

奇点的基本概念

奇点的判别方法

# 奇点的基本概念

## 孤立奇点的定义

函数 $f(z)$ 不解析的点称为奇点，确切地：

**定义：**

若 $z_0$ 是函数 $f(z)$ 的奇点，但 $f(z)$ 在 $z_0$ 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，则称 $z_0$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点

**例如**函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ 在 $z=0$ 和 $z=1$ 不解析，但存在 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<1$ 及 $z=1$ 的去心邻域 $0<|z-1|<1$ 内解析。

因而，$z=0$ 和 $z=1$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点

**再如：** $f(z)=\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}$ 的奇点 $z=0$ 不是孤立奇点，因为

$z=0$ 及 $\dfrac{1}{z_k}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow z_k=\dfrac{2}{(2k+1)\pi}$ 都是它的奇点。

当 $k\to\infty$ 时无限接近于0，这样，在 $z=0$ 的不论多么小的邻域内总有函数的奇点存在。

## 孤立奇点的分类

以洛朗级数为工具，对孤立奇点进行分类：

若 $z_0$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则在 $z_0$ 的某个去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内，函数 $f(z)$ 可展开成洛朗级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

其中： $$c_n=\frac{1}{2i\pi}\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

其中：C为 $0<|z-z_0|<\delta$ 内绕 $z_0$ 的任一条正向简单闭曲线。

**定义：** 设函数 $f(z)$ 在 $z_0(\neq\infty)$ 孤立奇点处的去心邻域的洛朗级数为式

**（1）如果在洛朗级数中不含 $z-z_0$ 的负幂项，那么称 $z_0$ 为可去奇点。**

这时，$f(z)$ 在 $z_0$ 的去心邻域内的洛朗级实际上就是一个普通的幂级数：

$$c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

因此，这个幂级数的和函数 $F(z)$ 是在 $z_0$ 解析的函数，且当 $z\neq z_0$ 时。

$F(z)=f(z)$ 当 $z=z_0$ 时，$F(z)=c_0$ ，但是，由于

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0} F(z)=F(z_0)=c_0$$

所以无论 $f(z)$ 原来在 $z_0$ 是否有定义，如果令 $f(z_0)=c_0$ ，那么在圆域 $|z-z_0|<\delta$ 内有：

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

从而函数 $f(z)$在 $z_0$ 就解析。正是由于这个原因，称 $z_0$ 是可去奇点。

**定理：** 孤立奇点 $z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点的充分必要条件是：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=c_0$$

**例：** 对于函数（1） $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$

显然 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一个奇点，但因

$f(z)$ 在 $z=0$ 处的存在洛朗级数，即

$$\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{z}\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots$$

中不含负幂次项，如果定义 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 在 $z=0$ 的值为1（即 $c_0$ ），则 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 在 $z=0$ 解析，所以 $z=0$ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点

（2） $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 从表面看 $z=0$ 是$f(z)$的奇点，但是的洛朗级数为：

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$$

不含有负幂次项，且 $\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $z=0$ 的值为1，则$\dfrac{\sin z}{z}$在 $z=0$ 解析，因此，$z=0$ 是函数的可去奇点。

**（2）如果在洛朗级数中只有有限个 $z-z_0$ 的负幂次项，且其中关于$(z-z_0)^{-1}$ 的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$ ，即 $c_{-m}\neq 0$，那么称 $z_0$ 为函数 $f(z)$的 $m$ 级极点，其中一级极点也称为简单极点。**

如果 $z_0$ 为 $f(z)$的 $m$ 级极点，$f(z)$在 $z_0$ 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内洛朗级数为：

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

如果我们令

$$\varphi(z)=c_{-m}+\cdots+c_{-m+1}(z-z_0)^1+c_0(z-z_0)^m+\cdots$$

则 $\varphi(z)$ 在圆域 $|z-z_0|<\delta$ 内解析，且

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z)$$

反之，若存在 $z_0$ 点解析函数 $\varphi(z)$ ，且 $\varphi(z_0)\neq 0$ ，使上式成立，则 $z_0$ 是 $f(z)$ 的 $m$ 级极点。

当 $z_0$ 是 $f(z)$ 的极点时，由 $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z)$ 式可知

$$\lim_{z\to z_0} f(z)\to\infty$$

例　对于有理分式函数 $f(z)=\dfrac{z-2}{(z^2+1)(z-1)^3}$

$z=0$ 是它的一个二级极点，因为：请同学们自己证明

$z=\pm i$ 是它的一级极点

**（3）如果在洛朗级数中含有无穷多个 $(z-z_0)$ 的负幂项，那么称 $z_0$ 为函数 $f(z)$ 的本性极点。**

如果 $z_0$ 为函数 $f(z)$ 的本性极点，则函数 $f(z)$ 具有如下性质：

在 $z_0$ 的去心邻域内，对于任意给定的复数 $M$，总可以找到一个趋于 $z_0$ 的数列 $\{z_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=M$，从而当 $z\to z_0$ 时，$f(z)$ 的极限不存在。

**例** 函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 以 $z=0$ 为它的本性奇点，因为在级数：

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{z^{-2}}{2!}+\cdots+\frac{z^{-n}}{n!}+\cdots$$

中含有无穷多个Z的负幂项。

在本性奇点的邻域内，函数 $f(z)$ 有性质：

**性质：** 如果 $z_0$ 为函数 $f(z)$ 的本性奇点，则对于任意给定的复数 $A$，总可以找到一个趋于 $z_0$ 的数列，当Z沿这个数列趋于 $z_0$ 时，$f(z)$ 的值趋向于 $A$

**综上所述：**

如果 $z_0$ 为函数 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限；

如果 $z_0$ 为函数 $f(z)$ 的极点，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\to\infty$ ；

如果 $z_0$ 为函数 $f(z)$ 的本性奇点，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在且且不趋于无穷；

**即：**

如果函数 $f(z)$ 在其孤立点 $z_0$ 的极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

A：存在，则 $z_0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点；

B：为无穷，则 $z_0$ 为 $f(z)$ 的极点；

C：不存在也不为无穷，则 $z_0$ 为 $f(z)$ 的本性极点。

# 奇点的判别方法

对于极点，我们可以通过函数的零点来判断；或者通过极限的不同情形来判别孤立奇点的类型要。

**用函数的零点判别极点的类型**

**定义：** 若函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 解析，且 $f(z_0)=0$，则称 $z_0$ 为 $f(z)$ 的零点；若函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 的邻域内的泰勒级数为：

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

其中： $c_n \neq 0$ $m$ 为正整数，则称 $z_0$ 为 $f(z)$的 $m$ 级零点

由此可得

**定理：** $z_0$ 为函数 $f(z)$ 的 $m$ 级零点的充要条件是 $f(z)$ 在 $z_0$ 解析，

且 $$f^{(n)}(z_0)=0(n=0,1,2,\cdots,m-1) \qquad f^{(m)}(z_0)\neq 0$$

**证明：** 如果 $z_0$ 为 $f(z)$ 的 $m$ 级零点，则 $z_0$ 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点

**证：** 由 $z_0$ 是 $f(z)$ 的 $m$ 级零点，依定义，存在一函数 $\varphi(z)$，在 $z_0$ 解析

且 $\varphi(z)\neq 0$ $\quad f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$ 求导有：

$$f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z)$$

$$=(z-z_0)^{m-1}[m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)]$$

$$=(z-z_0)^{m-1}\phi(z)$$

由于 $\phi(z)=m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)$

在 $z_0$ 处解析，且 $\phi(z_0)=m\varphi(z_0)\neq 0$

根据定义，$z_0$ 为 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点

**定理：** 若函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 $z_0$ 点解析，则：

（1）当 $z_0$ 分别为 $f(z)$和$g(z)$ 的 $m,n$ 级零点时， $z_0$ 为函数 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 级零点，若 $m<n$ ，则 $z_0$ 为 $f(z)/g(z)$ 的 $m-n$ 级极点。

（2）当 $z_0$ 为 $g(z)$ 的 $n$ 级零点时，但 $f(z_0)\neq 0$ 时， $z_0$ 为函数 $f(z)/g(z)$ 的 $n$ 级极点

（3）若 $f(z)=1$ ，则若 $z_0$ 为 $g(z)$ 的 $n$ 级零点时，则 $z_0$ 为函数 $1/g(z)$ 的 $n$ 级极点

**例：** 下列函数有些什么奇点？如果是极点，指出它的级

（1） $f(z)=tgz$ （2） $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-1)^2(z+1)^3}$ （3） $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$

**解:**

（1） $f(z)=tgz=\dfrac{\sin z}{\cos z}$ 的奇点是分母的零点，即：

$$z_k=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

由于 $(\cos z)'=-\sin z$ 而 $\sin z$ 在 $z_k$ 解析，且 $\sin z_k\neq 0$

因此，根据定理可知， $z_k$ 均为 $f(z)=tgz$ 的简单极点

（2）对于 $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-1)^2(z+1)^3}$ 显然， $z=1$ $z=-1$

是奇点，由于 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2}\dfrac{\sin z}{(z+1)^3}$ 函数 $\dfrac{\sin z}{(z+1)^3}$ 在 $z=1$ 解析

且 $\dfrac{\sin z}{(z+1)^3}\neq 0$ 因此，$z=1$ 是 $f(z)$ 的二级极点

同理，$z=-1$ 是 $f(z)$ 的三级极点

（3）对于 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$ $z=0$ 是奇点，由于

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}+\cdots=\frac{1}{z^2}\varphi(z)$$

其中： $\varphi(z)$ 在 $z=0$ 点解析，且 $\varphi(z)\neq 0$

所以， $z=0$ 是函数的二级极点

## 函数在无穷远点的性态

前面我们所讨论的奇点都是在有限复平面上进行，为了考虑函数在无穷远点的性态，下面我们地扩充复平面上进行讨论

若函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z\to\infty$ 的去心邻域 $R<|z|<\infty$ 内解析，则称 $z\to\infty$ 为 $f(z)$的孤立奇点。

因此，其洛朗级数为：

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k z^k$$

作如下变换，令

$$\xi=\frac{1}{z}$$

则：

$$\varphi(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\xi^{-k}$$

在 $0<|z|<\frac{1}{R}$ 内解析， $\xi=0$ 为 $\varphi(\xi)$ 的孤立奇点。这样我们可以通过 $\xi=0$的类型来定义孤立奇点 $z\to\infty$ 的类型

**定义：**

设 $\xi=0$ 是函数 $\varphi(\xi)=f(\frac{1}{\xi})$ 的孤立奇点，若 $\xi=0$ 为 $\varphi(\xi)$ 的可去奇点，则称 $z\to\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点；若 $\xi=0$ 为 $\varphi(\xi)$ 的 $m$ 级极点，则称 $z\to\infty$ 为 $f(z)$ 的 $m$ 级极点；若 $\xi=0$ 为 $\varphi(\xi)$ 的本性奇点，则称 $z\to\infty$ 为 $f(z)$ 的本性奇点。

**例：** 函数 $f(z)=\dfrac{z}{z-2}$ 在 $z\to\infty$ 的去心邻域为： $2<|z|<\infty$

的洛朗级数为

$$f(z)=\frac{z}{z-2}=1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\left(\frac{2}{z}\right)^3+\cdots$$

中不含Z的正幂项，所以

$z\to\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点。

若 $f(\infty)=1$ ，则 $f(z)$ 在 $z\to\infty$ 解析

**例：** 判断 $z \to \infty$ 是函数 $f(z)=\dfrac{z^6+1}{z(z+1)^2}$ 的什么类型的奇点？如果是极点，指出它的级。

**解：** 令 $\xi=\dfrac{1}{z}$ 则

$$\varphi(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\frac{1+\xi^6}{\xi^3(1+\xi)^2}=\frac{1}{\xi^3}\frac{1+\xi^6}{(1+\xi)^2}=\frac{1}{\xi^3}g(\xi)$$

由于 $g(\xi)$ 在 $\xi=0$ 解析，且 $g(\xi)\neq 0$

所以 $\xi=0$ 是 $\varphi(\xi)$ 的二级极点，因此，$z \to \infty$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

# 谢谢！