贵州大学 计算机科学与技术学院 明德至善 博学笃行

College Of Computer Science & Technology,GuiZhou University

网络 与 信息安全

复变函数与积分变换

——第六讲

复变函数的积分

贵州大学计算机科学与技术学

潘平

电话：13078569531

邮箱：panping_17@163.com

目 录

复积分的概念

定义

有向曲线： 设C为平面给定的一条光滑（或按段光滑）的曲线，如果选定C的两个可能方向的一个作为正方向（或正向），则我们就把C称为有向曲线．与曲线C反方向的曲线记为 C^{-1}

简单闭曲线正向：

当曲线上的点P顺此方向前进时，邻近P点的曲线内部始终位于P点的左方，这时曲线方向称为正方向。

（右手法则）

定义1： 设函数$w = f(z)$定义在D内，

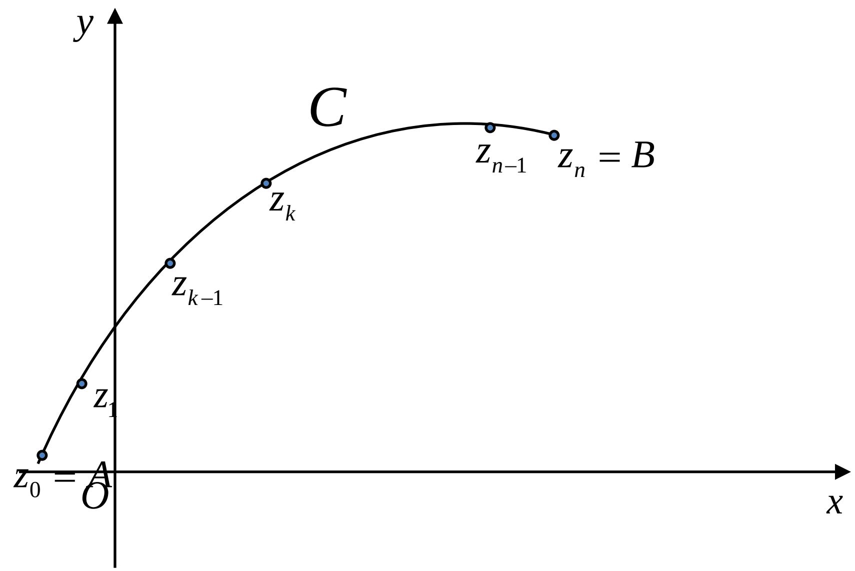
C为区域D内起点为A终点为B的一条有向光滑的简单曲线.

(1)分割：把曲线C任意分成n个小弧段，设分点为：

$$A = z_0, z_1, z_2, \cdots\cdots z_{k-1}, z_k, \cdots\cdots, z_n = B$$

其中$z_k = x_k + iy_k$

$(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$,



（2）取点：在每个弧段 $\overline{z_{k-1}z_k}$ 上 $(k=1,2,\cdots,n)$ 任取一点

$$\zeta_k=\xi_k+i\eta_k$$

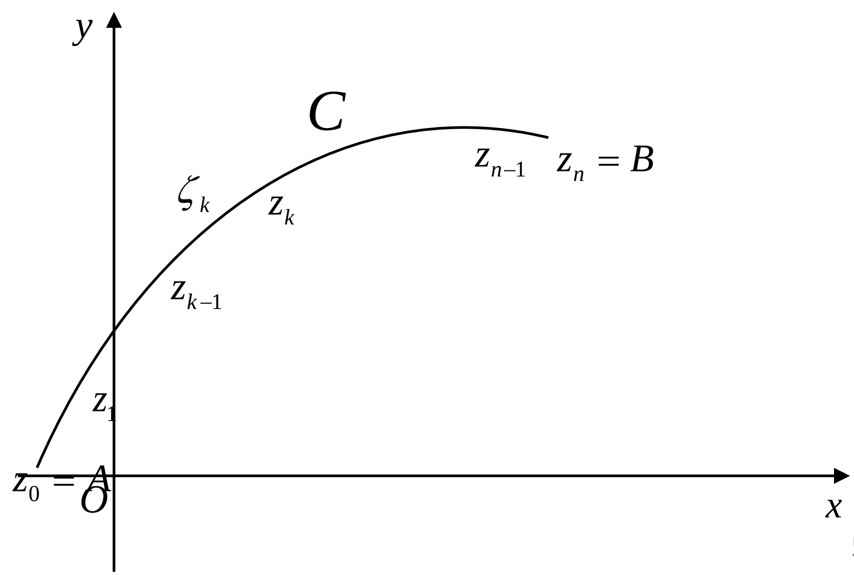
则： $$f(\zeta_k)\Delta z_k=f(\zeta_k)(z_{k-1}-z_k)$$

其中： $$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}=\Delta x_k+i\Delta y_k$$

（2）作和：

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_{k-1}-z_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

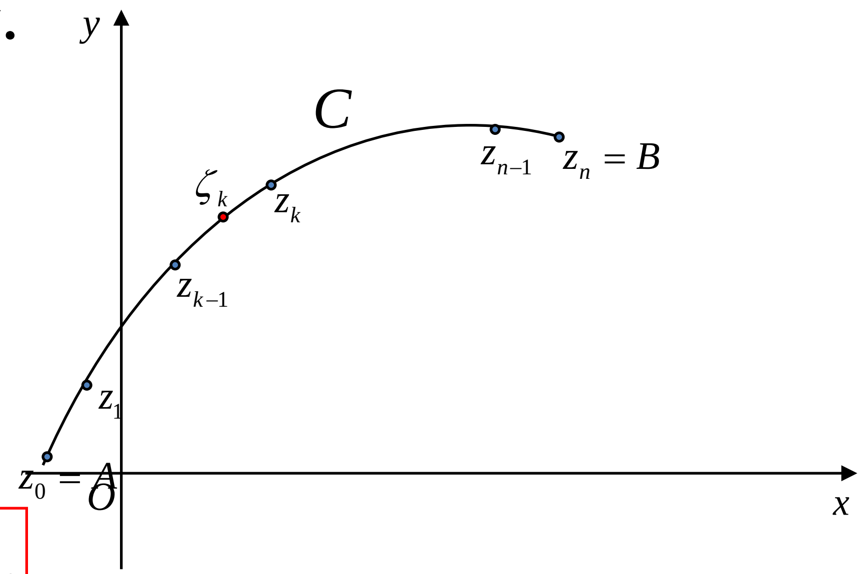


(4) 极限：设λ表示n个小弧段的最大长度，

当$\lambda \to 0$时， 无论C怎样分，ζ_k怎样取，如果和式

$\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$的极限唯一存在， 则称此极限值为函数

$f(z)$沿曲线C自A到B的复积分.



记作：

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k .$$

(类似于微积分中的曲线积分).

说明：

(1) 若C为闭曲线，则沿闭曲线积分为$\oint_C f(z)\mathrm{d}z$，

$\boxed{(C\text{的正方向是逆时针方向});}$

(2)积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 表示沿曲线C 自A到B的复积分，

积分$\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$表示沿曲线$C$自$B$到$A$的复积分.

复积分存在条件及其计算公式

定理1：

设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在光滑曲线C上

连续，则复积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$存在，且有积分公式：

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_C f(z)\mathrm{d}z\\&=\int_C u(x,y)\mathrm{d}x-v(x,y)\mathrm{d}y+i\int_C v(x,y)\mathrm{d}x+u(x.y)\mathrm{d}y\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_C f(z)\mathrm{d}z\\ &=\int_C u(x,y)\mathrm{d}x-v(x,y)\mathrm{d}y+i\int_C v(x,y)\mathrm{d}x+u(x.y)\mathrm{d}y\end{aligned}}$$

证明：

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k=\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k+i\Delta y_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k-v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]+$$

$$i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

由于函数$f(z)$在光滑曲线C上连续,

$\Rightarrow u(x,y), v(x,y)$在光滑曲线$C$上也连续,

$\Rightarrow$当$\lambda \to 0$时,上式右端极限存在，且有

$$\int_C f(z)dz$$

$$=\int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx + u(x.y)dy$$

说明：

(1)当函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在光滑曲线C上连续，则复积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$存在；

(2)$\int_C f(z)\mathrm{d}z$可以通过两个二元实变函数的曲线积分来计算.

复积分的性质

因为复积分的实部和虚部都是曲线积分，因此，曲线积分的一些基本性质对复积分也成立.

$$(1)\int_C f(z)\mathrm{d}z=-\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z;$$

$$(2)\int_C kf(z)\mathrm{d}z=k\int_C f(z)\mathrm{d}z,(k\text{为常数});$$

$$(3)\int_C [f(z)\pm g(z)]\mathrm{d}z=\int_C f(z)\mathrm{d}z\pm\int_C g(z)\mathrm{d}z;$$

$$(4)\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z,\ (\text{其中}C_1+C_2=C);$$

$$(5)^*\quad \left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_C |f(z)|\mathrm{d}s.$$

证明性质（5）：

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta s_k|,$$

其中Δs_k是小弧段$\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$的长，$|\Delta z_k| = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} \le \Delta s_k$

注意：$|dz| = |dx + idy| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$，因此

$$\lim_{\lambda\to 0}\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta s_k|$$

$$\Rightarrow \left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds$$

特别地，若曲线C的长度为L，函数$f(z)$在C上有界，即：$|f(z)| \le M$

$$\boxed{\Rightarrow \left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds \le ML}$$

（估值不等式）

回顾:对坐标的曲线积分的计算法

设 $P(x,y), Q(x,y)$ 在有向光滑弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t:\alpha\to\beta$, 则有:

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\,\varphi'(t)+Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}\,t$$

注：积分下限的参数值对应曲线的起点，积分上限的参数值对应曲线的终点（下限不一定要小于上限）。

复积分的基本计算方法

注：在已知曲线C的方程的条件下适合用以下方法计算复积分。

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_C u(x,y)\mathrm{d}x-v(x,y)\mathrm{d}y+i\int_C v(x,y)\mathrm{d}x+u(x.y)\mathrm{d}y$$

$1:\ f(z)=u+iv,\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y,$ 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z\overset{\Delta}{=}\int_C(u+iv)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y).$$

$$\boxed{\int_C f(z)\mathrm{d}z \overset{\Delta}{=} \int_C (u+iv)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y).}$$

2:光滑曲线C参数方程:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t:\alpha\to\beta,$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta \{u[x(t),y(t)]+iv[x(t),y(t)]\}\cdot\{x'(t)+iy'(t)\}\mathrm{d}t$$

3:复数形式的曲线C参数方程:

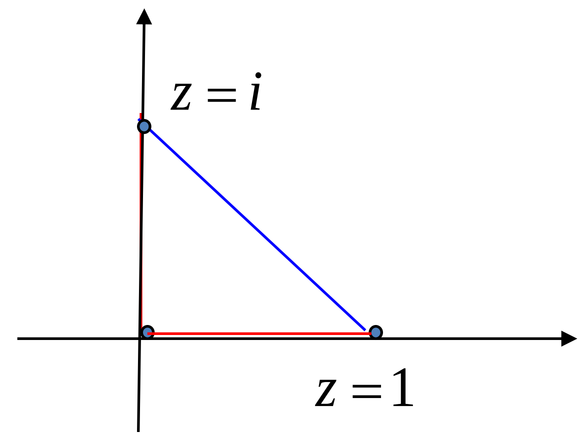
$$z = z(t) = x(t)+iy(t),\quad t:\alpha\to\beta,$$

$$\boxed{\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.}$$

例： 计算$\int_C \bar{z}\mathrm{d}z$的值，其中$C$为

(1) 沿从$z_1=1$到点$z_2=i$的直线段C_1.

(2)沿从点1到点0的直线段C_2，与从点0到点i的直线段C_3所接成的折线段.



解：法一（曲线的实方程）

(1) $C_1: x+y=1, y=1-x.\quad \mathrm{d}y=-\mathrm{d}x$

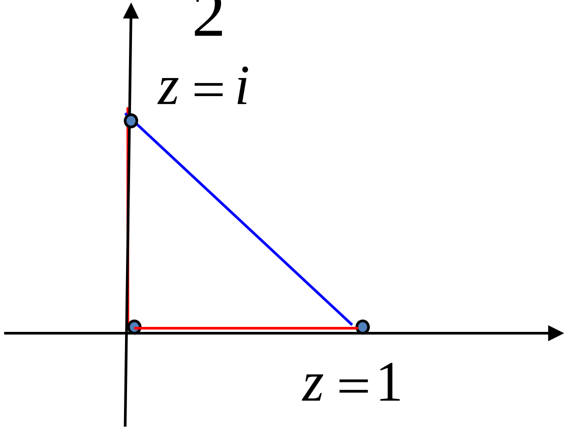
$$z=1\leftrightarrow x=1, z=i\leftrightarrow x=0.$$

$$\int_C \bar{z}\mathrm{d}z=\int_C (x-yi)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)=\int_1^0 (x-(1-x)i)(\mathrm{d}x-i\mathrm{d}x)$$

$$=\int_1^0 (x-(1-x)i)(\mathrm{d}x - i\mathrm{d}x) \quad = \int_1^0 ((1+i)x - i)(1-i)\mathrm{d}x$$

$$=(1+i)(1-i)\int_1^0 x\mathrm{d}x - i(1-i)\int_1^0 \mathrm{d}x \quad = 2\cdot(-\frac{1}{2}) + i + 1 \quad = i$$

(2)沿从点1到点0的直线段C_2,



与从点0到点i的直线段C_3所接成的折线段.

$$C_2: y=0, \mathrm{d}y=0.$$

$$z=1 \leftrightarrow x=1, z=0 \leftrightarrow x=0.$$

$$C_3: x=0, \mathrm{d}x=0.$$

$$z=0 \leftrightarrow y=0, z=i \leftrightarrow y=1.$$

$$\int_C \bar{z}\mathrm{d}z = \int_{C_1}(x - yi)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) + \int_{C_2}(x - yi)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$$

$$= \int_1^0 x\mathrm{d}x + \int_0^1 y\mathrm{d}y \quad = 0$$

解：法二（ 曲线的复方程）（**p56**）

注：由此题可以看出，尽管起点、终点都一样，由于沿不同的曲线积分，积分值是不同的，积分与路径有关。

例： 计算$\int_C \bar{z}dz$的值，其中C为

(1)沿从原点到点$z_0=1+i$的直线段C_1：$z=(1+i)t, 0\le t\le 1$

(2)沿从原点到点$z_1=1$的直线段C_2：$z=t, 0\le t\le 1$

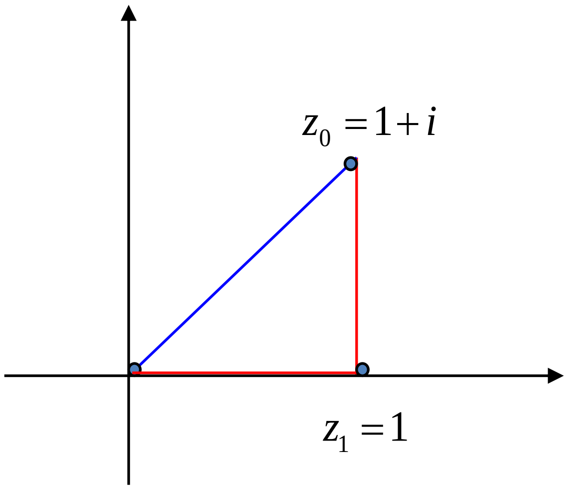
与从z_1到z_0的直线段C_3：$z=1+it,\quad 0\le t\le 1$所接成的直线.

解：

$$(1)\int_C \bar{z}dz$$

$$=\int_0^1 (t-it)(1+i)dt$$

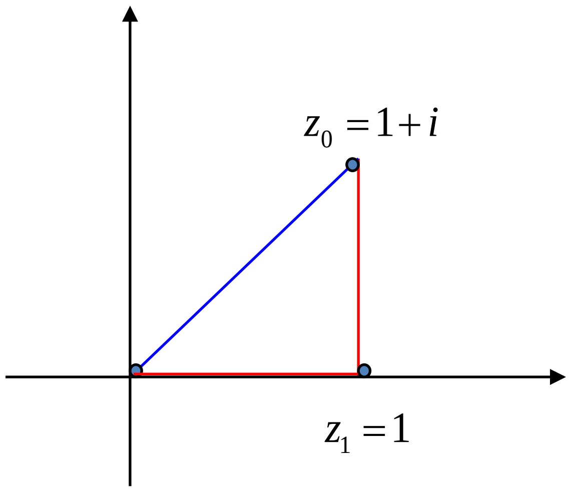
$$=\int_0^1 2tdt=1;$$



$$(2)\int_C \overline{z}dz = \int_{C_2} \overline{z}dz + \int_{C_3} \overline{z}dz$$

解： $$= \int_0^1 tdt + \int_0^1 (1-it)idt$$

$$= \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + i) = 1 + i$$



注意：由此题可以看出，尽管起点、终点都一样，但沿不同的曲线积分，积分值是不同的，积分与路径有关.

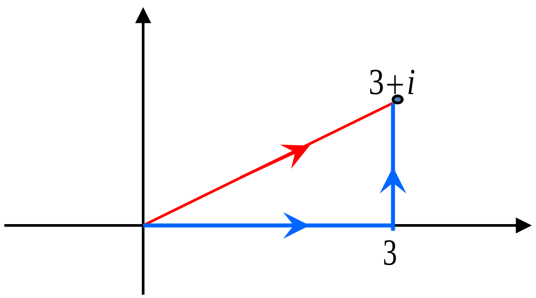
例： 沿下列路线计算积分$\int_C z^2 \mathrm{d}z$，其中

(1)自原点至$3+i$的直线段；

(2)自原点沿实轴至3，再由铅直向上直线至$3+i$.

解： (1)连接原点至$3+i$的直线的参数方程为：

$$\boxed{z=(3+i)t, 0\le t\le 1}$$

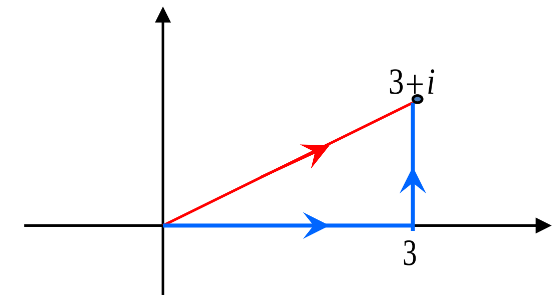


$$\int_C z^2 \mathrm{d}z=\int_0^1[(3+i)t]^2(3+i)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1(3+i)^3t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(3+i)^3t^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}(3+i)^3.$$

解： (2) 曲线方程为：$C_1: y=0, \mathrm{d}y=0, 0\le x\le 3,$

$C_2: x=3, \mathrm{d}x=0, 0\le y\le 1$



$$\int_C z^2\mathrm{d}z=\int_{C_1} z^2\mathrm{d}z+\int_{C_2} z^2\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^3 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1(3+iy)^2\mathrm{d}(iy)$$

$$=\frac{1}{3}[x^3]_0^3+\frac{1}{3}[(3+iy)^3]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 3^3+\frac{1}{3}\cdot(3+i)^3-\frac{1}{3}\cdot 3^3=\frac{1}{3}\cdot(3+i)^3$$

注意：此题说明，沿不同的路径积分的结果是相同的，即**积分与路径无关**，

例： 计算 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$

其中C为以z_0为中心，r为半径的正向圆周，n为整数.

解： 圆周$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$的参数方程为：

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}, 0 \le \theta \le 2\pi$$

复数形式的参数方程为：

$$z = (x_0 + r\cos\theta) + i(y_0 + r\sin\theta), 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$z = (x_0 + iy_0) + r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= z_0 + re^{i\theta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{r^n e^{in\theta}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i}{r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}}\mathrm{d}\theta = \frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta}\mathrm{d}\theta$$

当$n=1$时， $$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} = i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi i;$$

当$n\neq 1$时， $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} =$

$$= \frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}(\cos(n-1)\theta - i\sin(n-1)\theta)\mathrm{d}\theta = 0.$$

综上所述：

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

其中C为以z_0为中心，r为半径的正向圆周，n为整数.

注：这个积分结果以后常用，它的特点是：**积分结果与圆周的中心和半径无关.**

例： 设曲线C为从原点到点$3+4i$的直线段，试求积分$\int_C \frac{1}{z-i}dz$绝对值的一个上界.

解：

C的参数方程为：$z=(3+4i)t, 0\le t\le 1$

由估计不等式：$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}dz\right| \le \int_C \left|\frac{1}{z-i}\right| ds$$

在C上 $$\left|\frac{1}{z-i}\right| = \frac{1}{|(3+4i)t-i|}$$

$$=\frac{1}{|3t+(4t-1)i|}=\frac{1}{\sqrt{9t^2+(4t-1)^2}}$$

在C上

$$\left|\frac{1}{z-i}\right|=\frac{1}{|(3+4i)t-i|}=\frac{1}{|3t+(4t-1)i|}=\frac{1}{\sqrt{9t^2+(4t-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{25(t-\frac{4}{25})^2+\frac{9}{25}}}\le\frac{5}{3}$$

从而有：

$$\left|\int_C\frac{1}{z-i}dz\right|\le\frac{5}{3}\int_C ds=\frac{5}{3}\times 5=\frac{25}{3}.$$

例： 试证：$\lim\limits_{r\to 0}\int_{|z|=r}\dfrac{z^3}{1+z^2}dz=0.$

证明： 这里讨论$r\to 0$, 故不妨设$r<1$,

因为在$|z|=r$上，$$\left|\frac{z^3}{1+z^2}\right|=\frac{|z|^3}{|1+z^2|}\le\frac{|z|^3}{1-|z|^2}=\frac{r^3}{1-r^2},$$

有估计不等式：$$\left|\int_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}dz\right|\le\frac{r^3}{1-r^2}2\pi r=\frac{2\pi r^4}{1-r^2}$$

上式右端当$r\to 0$时的极限为0，故左端极限也为0,

即：

$$\lim_{r\to 0}\int_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}dz=0.$$

复积分的计算方法可总结为：

方法一 化为第二类曲线积分

(推导?)

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u+iv)(\mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y)$$

$$= \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y.$$

- 进一步可化为定积分或者二重积分。

方法二 直接化为定积分

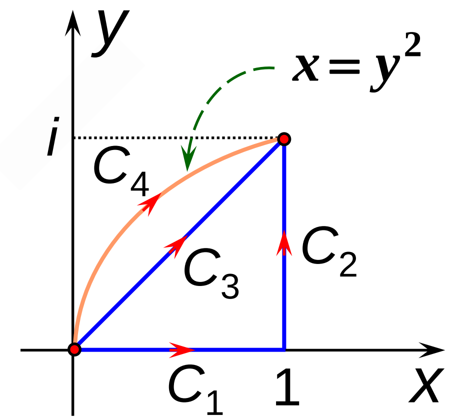
设曲线 $C: z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$，$t: a \to b$，

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t,$$

其中，$z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$.

例 计算 $I=\int_C z\,\mathrm{d}z$，其中 C 为(如图)：

(1) $C=C_1+C_2$；(2) $C=C_3$；(3) $C=C_4$.



解 (1) 曲线 C_1 的方程为 $z=x$，$x:0\to1$，

曲线 C_2 的方程为 $z=1+iy$，$y:0\to1$，

$$I=\int_{C_1} z\,\mathrm{d}z+\int_{C_2} z\,\mathrm{d}z,$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1(1+iy)\,\mathrm{d}(1+iy)$$

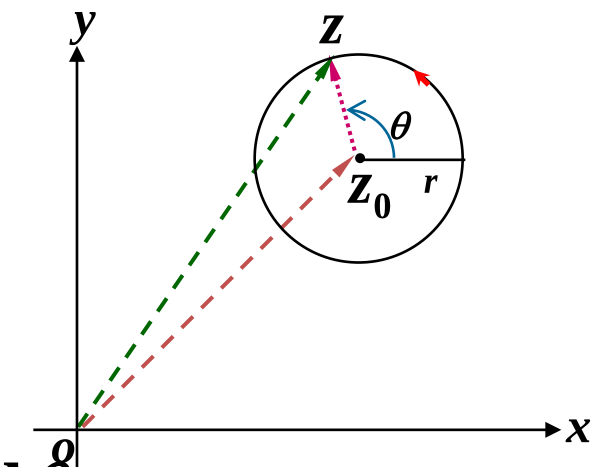
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 i(1+iy)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\left(iy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1 =i.$$

例 计算积分 $\displaystyle\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$ (n是整数),

其中C是圆周: $|z-z_0| = r\ (r>0)$ 的正向.

解 积分路径的参数方程为



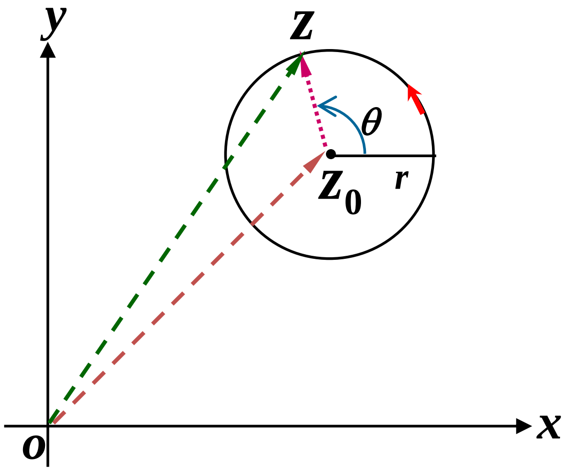
$$z = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi),$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta,$$

当 $n=0$ 时,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi i;$$



当 $n\neq 0$ 时,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - i\sin n\theta)\mathrm{d}\theta = 0.$$

所以 $$\boxed{\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n=0, \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}}$$

谢谢！