网络 与 信息安全

复变函数与积分变换

——第一讲

数系的扩充与复数的概念

贵州大学计算机科学与技术学

潘平

电话：13078569531

邮箱：panping_17@163.com

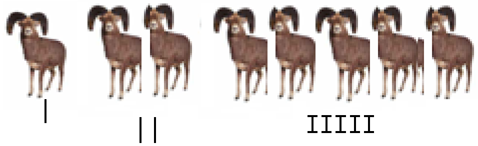
目录

- 从整数到复数
- 复数的基本概念

一、从整数到复数

探究问题

因计数的需要



数系的扩充

自然数

因不够减的需要，引入负数和零

整数

因测量、分配中的等分问题引入分数

有理数

因有些数无法用有理数度量的问题引入无理数

实数

$$x^2+1=0$$

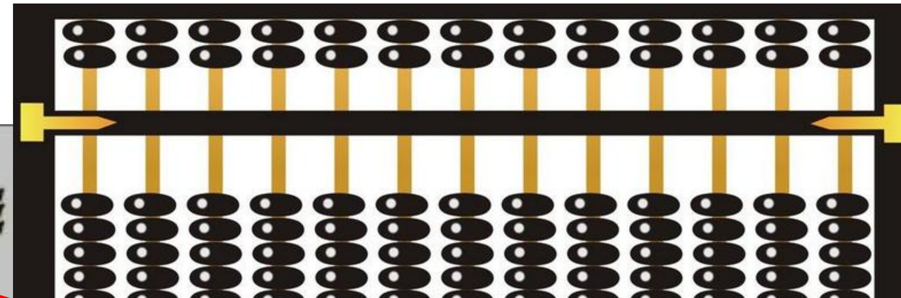
在实数范围内无解

?

复数

$$i=\sqrt{-1}$$

对数字的认识



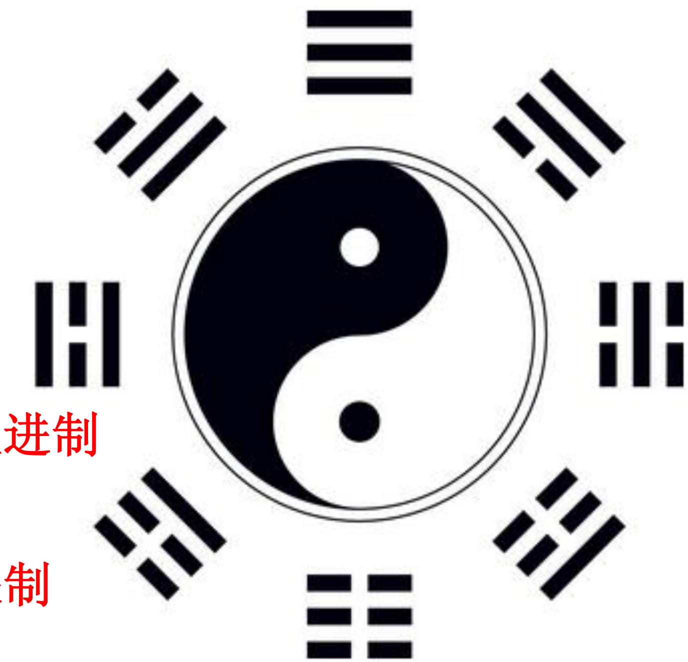
五进制

十二进制

英文字母构成二十五进制

星期构成七进制

每月的天构成三十进制



最早的二进制

有理数域总是可以用0和1表示；

而无理的主要代表是周期律 π 和指数 e

虚数是用 $i=\sqrt{-1}$ 表示

数学研究什么？

从形式上讲，数学研究的是数的变换

本质上就是研究 $0,1,\pi,e,i$ 之间的关系

数字之间的关系本质上就是各种“运算”——或称为“操作算子”、“算符”等

如：

$$\pm、\oplus、\times、\otimes、*、\frac{x}{y}、\sum、\frac{d}{dx}、\oiint、\prod$$

复变函数与积分变换及应用背景

莫里斯克莱恩 (1908-1992)（《古今数学思想》(Mathematical Thought from Ancient to Modern Times)的作者，美国数学史家）指出：从技术观点来看，十九世纪最独特的创造是单复变函数的理论. 这个新的数学分支统治了十九世纪，几乎象微积分的直接扩展统治了十八世纪那样. 这一丰饶的数学分支，一直被称为这个世纪的数学享受. 它也被欢呼为抽象科学中最和谐的理论之一

复变函数理论可以应用于计算某些复杂的实函数的积分，阿达马认为：

实域中两个真理之间的最短路程是通过复域来实现

积分变换在许多领域被广泛地应用，如电力工程、通信和控制领域以及信号分析、图象处理和其他许多数学、物理和工程技术领域

二、复数的基本概念

1、复数的基本概念

由于解代数方程的需要, 人们引进了复数.

例如： 简单的代数方程

$$\mathbf{x^2+1=0} \qquad x^2+4=3x \qquad x(10-x)=40$$

在实数范围内无解. 为了建立代数方程的普遍理论，引入等式

$$\boldsymbol{i^2=-1.}$$

由该等式所定义的数称为**虚数单位** $\boldsymbol{i=\sqrt{-1}.}$

定义：负数开平方，在实数范围内无解的这种运算结果称为虚数。

注意： 在许多专业课程中可能也规定为 $j=\sqrt{-1}$

设实数 $a,b \in R$ 虚数单位为 $\boldsymbol{i = \sqrt{-1}.}$

定义： 由实数和单位虚数所构成的形如

$$z = a + bi$$

的数称为复数

且称复数 Z 中的数 a 、b 为复数 Z 的实部和虚部，记为

$$a = \operatorname{Re} z \qquad b = \operatorname{Im} z$$

全体复数所组成的集合叫复数集，记作 C

2、复数的基本性质

$$z = a + bi$$

性质1： 若 $a = 0$，$b \neq 0$，则 $z = bi$ 称为纯虚数；

若 $a \neq 0$，$b = 0$，则 $z = a$ 称为实数；

例如： 3+0*i*=3是实数, 4+5*i*, -3*i*都是虚数, 而-3*i*是纯虚数

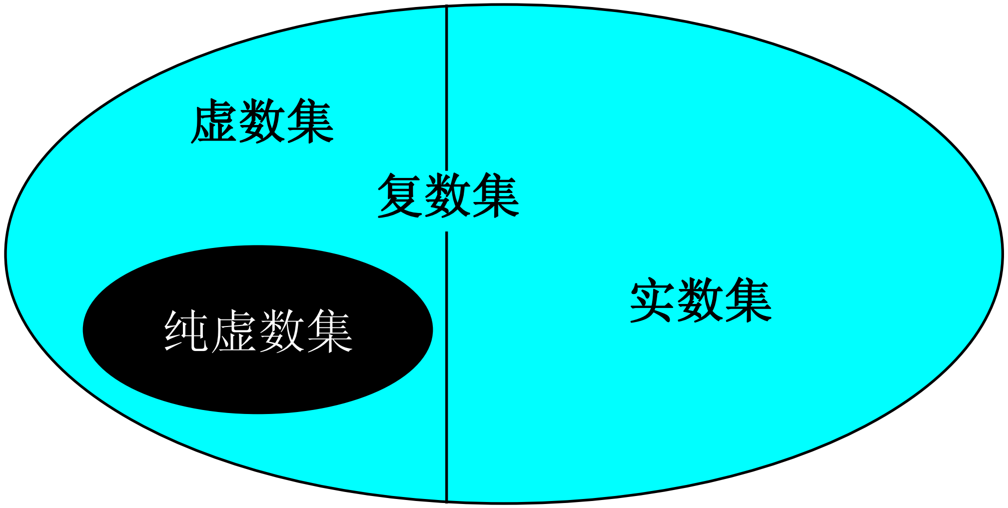
当$b = 0$时z为	实数	$z = a + bi = 9$
当$b \neq 0$时z为	虚数	$z = a + bi = 1 - 3i$
当$b \neq 0$且$a = 0$时z为	纯虚数	$z = a + bi = 5i$

可见

$$复数\ z=a+bi\begin{cases}实数\ b=0\\ 虚数\ b\neq 0\begin{cases}纯虚数\ a=0\quad b\neq 0\\ 非纯虚数\ a\neq 0\quad b\neq 0\end{cases}\end{cases}$$

由此构成复数集，虚数集，实数集，纯虚数集，它们之间的关系可表示为：

$$R \subsetneqq C$$



例1：

说明下列数中，那些是实数，哪些是虚数，哪些是纯虚数，并指出复数的实部与虚部

$2+\sqrt{7}$	0.618	$\frac{2}{7}i$	$i(1-\sqrt{3})$	$3-9\sqrt{2}i$
实数	实数	纯虚数	纯虚数	虚数

例2： 判断下列命题是否正确：

（1）若a、b为实数，则$z=a+bi$为虚数　　正确

（2）若b为实数，则$z=bi$必为纯虚数　　正确

（3）若a为实数，则$z=a$ 一定不是虚数　　不正确

前提是：

$a \neq 0$

$b \neq 0$

例3： 当m为何实数时，复数 $z=m^2+m-2+(m^2-1)i$

是（1）实数 （2）虚数 （3）纯虚数

解： 复数 $z=m^2+m-2+(m^2-1)i$

$m^2+m-2=\operatorname{Re} z \qquad m^2-1=\operatorname{Im} z$

（1）实数 ⇨ $z=m^2+m-2,\ m^2-1=\operatorname{Im} z=0$ ⇨ $m=\pm 1$

但 $m=1, \operatorname{Re} z=0 \Rightarrow z=0$ 所以只有当 $m=-1 \Rightarrow z=-2$

（2）虚数 ⇨ $\operatorname{Re} z\neq 0, \operatorname{Im} z\neq 0$ 所以当 $m\neq -2,\pm 1$

（3）纯虚数 ⇨ $\operatorname{Re} z=0, \operatorname{Im} z\neq 0$ ⇨ $m=-2 \Rightarrow z=3i$

当 $m=1 \Rightarrow z=0$

性质2： 若 $z = a + bi$ 中，$a = 0$，$b = 0$ ，则称为零复数，即

$$z = 0$$

由于复数是由一对向量构成，即 (a,b) ，具有一定的方向性，因此零复数是无任何意义的，后面的课程会逐渐理解。

性质3： 对于两个复数 $z_1 = a_1 + b_1 i$ 和 $z_2 = a_2 + b_2 i$ ，当且仅当

$a_1 = \operatorname{Re} z_1 = a_2 = \operatorname{Re} z_2$ 与 $b_1 = \operatorname{Im} z_1 = b_2 = \operatorname{Im} z_2$ 时

$z_1 = z_2$ 称两个复数等价（或相等）

两个虚数不能比较大小，只能由定义判断它们相 等或不相等

例： 已知 $(2x-1)+i=y-(3-y)i$ ，其中 $x,y\in R$ 求x与y?

复数相等的问题 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 求方程组的解的问题

一种重要的数学思想：**转化思想**

实部相等	$2x-1=y$
虚部相等	$1=-(3-y)$

解得 $\begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=4 \end{cases}$

变式：已知实数 x 与纯虚数 y 满足 $2x-1+2i=y$

求：x 与 y

$$\begin{cases} 2x-1=0 \\ 2=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=2 \end{cases}$$

性质4： 称复数 $a+bi$ 和 $a-bi$ 互为共轭复数，复数 Z 的共轭复数记为 $\bar{Z}$

例： $1+7i \Leftrightarrow 1-7i \qquad i \Leftrightarrow -i$

性质5： 虚数单位的性质：若 n 为正整数，则：

$$i=\sqrt{-1}, i^2=-1,\quad i^3=-i, i^4=1$$

$$i^{4n}=1 \qquad i^{4n+1}=i \qquad i^{4n+2}=-1 \qquad i^{4n+3}=-i$$

例： $i^{12}=i^{4\times 3}=1 \qquad i^{21}=i^{4\times 5+1}=i$

$$i^{10}=i^{4\times 2+2}=-1 \qquad i^{11}=i^{4\times 2+3}=-i$$

$i^0=?\quad ?\quad ?$ 在后面的计算中，我们会逐渐认识。

3、复数的代数运算

设 $z_1 = x_1 + y_1 i$ ， $z_2 = x_2 + y_2 i$ 是两个复数

定义： 两个复数的加、减法运算为：

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_1 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2) i$$

此时：

$$\operatorname{Re} z = (x_1 \pm x_2) \qquad \operatorname{Im} z = (y_1 \pm y_2)$$

两个复数的乘法为：

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_2 y_1 + x_1 y_2) i$$

显然： 若 z_1 与 z_2 是一对共轭复数，即

$$z_1 = x_1 + y_1 i \qquad z_2 = \overline{z_1} = x_1 - y_1 i$$

则：

网络与信息安全

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_1 - y_1 i) = (x_1^2 + y_1^2) + (x_1 y_1 - x_1 y_1)i = x_1^2 + y_1^2$$

两个复数的除法为：若 $z_2 \neq 0$ ，则

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2}$$

$$= \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$$

运算性质：

（1）交换律： $z_1+z_2=z_2+z_1$ $\quad z_1z_2=z_2z_1$

（2）结合律： $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ $\quad z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$

（3）分配律： $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

（4）共轭复数的基本性质：

$$\boxed{\overline{\overline{z}}=\overline{\overline{(a+bi)}}=\overline{(a-bi)}=(a+bi)=z}$$

$$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i}=(a_1\pm a_2)-(b_1\pm b_2)i$$

$$=(a_1-b_1i)\pm(a_2-b_2i)=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$$

$$\boxed{\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \Rightarrow$$

$$\overline{z_1 z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$$

而

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (-x_1 y_2 - x_2 y_1)i$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1)i = \overline{z_1 z_2}$$

所以

$$\boxed{\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}}$$

同理

$$\boxed{\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}}$$

$$\boxed{z\bar{z} = (\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2}$$

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = (\mathrm{Re}\,z)^2 + \left(\mathrm{Im}\,z^2\right)$$

$$\boxed{\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) = 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = 2\,\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2)}$$

因为：

$$z_1\overline{z_2} = (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) = (x_1x_2 + y_1y_2) + (-x_1y_2 + x_2y_1)i$$

$$\overline{z_1}z_2 = (x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1)i$$

所以： $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = \mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(z_1\overline{z_1} + \overline{z_1}z_2)$

$$\boxed{z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z} \qquad \boxed{z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}\,z}$$

4、例题

设 $z_1 = 3-4i,\ z_2 = -1+i$，求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 与 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-4i}{-1+i} = \frac{(3-4i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}$$

$$= \frac{(-3-4)+(4-3)i}{2} = -\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i.$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i.$$

实数 m 取何值时，复数

$$z=\frac{m^2+m-2}{m+3}+(m^2+5m+6)i$$

是：（1）实数；（2）虚数；（3）纯虚数。

解： 复数 Z 的实部和虚部分别为：

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{m^2+m-2}{m+3} \qquad \mathrm{Im}(z)=m^2+5m+6$$

因为，复数 Z 是实数的充要条件是：

$$\begin{cases} m^2+5m+6=0 \\ m+3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2\text{代}m=-3 \\ m\neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m=-2$$

因为，$m=-3$使得复数 z 的实部不存在。

（1）所以只有当 $m=-2$ ，复数 z 为实数

（2）复数 z 为虚数的充要条件是：

$$\begin{cases} m+3\neq 0 \\ m^2+5m+6\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -3 \\ m\neq -3\text{且}m\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq = 3\text{且}m\neq -2$$

所以当 $m\neq -3$ 且 $m\neq -2$ 时，复数 z 为虚数。

（3）复数 z 为纯虚数的充要条件是：

$$\begin{cases} \dfrac{m^2+m-2}{m+3}=0 \\ m^2+5m+6\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2\text{或}m=1\text{且}m\neq -3 \\ m\neq -2\text{且}m\neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$$

所以当 $m=1$ 时，复数 z 为纯虚数。

计算：

$$\frac{-2\sqrt{3}+i}{1+2\sqrt{3}i}+\left(2+i^{15}\right)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{22}$$

$$1+2i+3i^{2}+\cdots+1000i^{999}$$

解：

$$\frac{-2\sqrt{3}+i}{1+2\sqrt{3}i}+\left(2+i^{15}\right)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{22}$$

$$=\frac{i(1+2\sqrt{3}i)}{1+2\sqrt{3}i}+\left(2-i\right)=\left(\frac{2i}{2}\right)^{11}$$

$$=i+2-i-(-i)$$

$$=2+i$$

计算时要注意提取公因式，要注意利用i的幂的周期性

$$1+2i+3i^2+\cdots+1000i^{999}$$

解法一： 利用虚单位的性质

原式= $(1+2i-3-4i)+(5+6i-7-8i)+\cdots+(997+998i-999-1000i)$

$$=250(-2-2i)=-500-500i$$

解法二： 设 $S=1+2i+3i^2+\cdots+1000i^{999}$

则 $is=i+2i^2+3i^3+\cdots+1000i^{1000}$

$$\therefore (1-i)s=1+i+i^2+i^3+\cdots-1000i^{1000}$$

$$=\frac{1-i^{1000}}{1-i}-1000=-1000$$

$$\therefore s=\frac{-1000}{1-i}=-500-500i$$

谢谢！