高等数学学习辅导

刘奋 王玉凤 陆晓光　主编

中国石油大学数理系

前　言

高等数学是高等院校工科专业最重要的基础理论课之一，它不仅是学习后续课程以及在各个学科领域中进行理论研究和实践工作的必要基础，而且对学生能力的培养起着重要的作用。如何更好地指导学生学习这门课程，提高学习效率，解决疑难问题，加强自学辅导，加深对所学内容的理解和掌握，提高其综合运用知识解决实际问题的能力， 我们编写了这本参考书。

本书与教材《高等数学》（第五版，上、下册，高教出版社，同济大学编写）相配套，以国家教委颁发的高等学校工科《高等数学课程教学基本要求》为依据，总结了高等数学课程各章节的主要内容和基本要求；精选了各种类型的例题进行解题分析；配合教学内容，补充了较大信息量的练习题，并给出提示或解答。本书的许多内容，是长期执教高等数学的教师所积累的宝贵教学经验的总结，也是对教材内容的补充和扩展。这些内容，对于指导学生高等数学的学习，正确理解有关概念，澄清模糊认识，加强基本运算的训练，提高学习成绩，培养创新能力和素质，都是很重要的。

本书第一章由支丽霞编写，第二章由杨丽娜编写，第三章由穆铮编写，第四章、第五章由王玉凤编写，第六章、第十章由刘奋编写，第七章由李晓童编写，第八章、第九章由陆晓光编写，第十一章由陈安乐编写，第十二章由刘福江编写，在这里对他们的辛勤劳动表示诚挚的谢意。

还要感谢数理系的领导、同仁对我们工作的大力支持和帮助，尤其是陈安乐老师、孙为老师和梁景伟老师。

由于我们的水平有限，错误之处在所难免，请大家批评指正。

编　　者

2005 年 7 月

目　　录

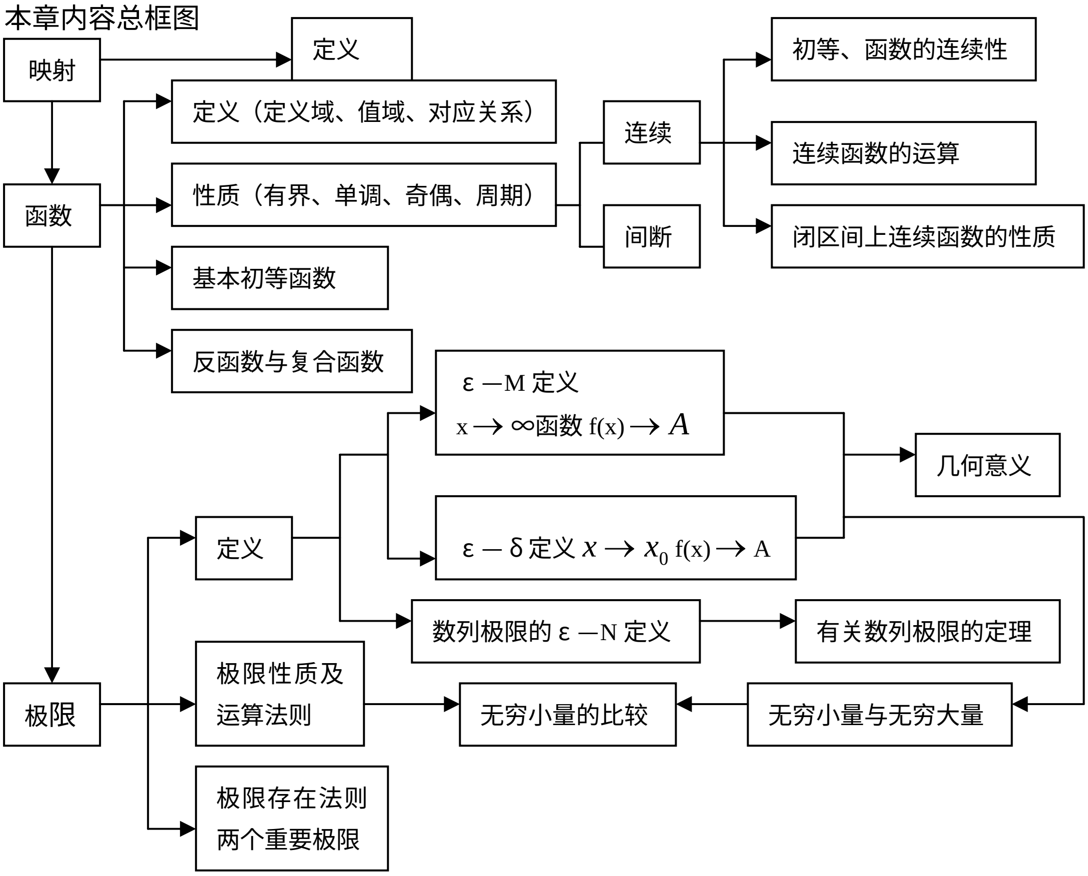
第一章　　函数与极限

一．　基本要求

1．理解函数的概念，掌握函数的表示方法
2．了解函数的奇偶性，单调性，周期性和有界性
3．理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念
4．掌握基本初等函数的性质及其图形
5．会建立简单应用问题中的函数关系式
6．理解极限的概念，理解函数左右极限的概念，以及极限存在与左右极限的之间的关系
7．掌握极限的性质及四则运算法则
8．掌握极限存在的两个准则，并会利用他们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法
9．理解无穷大以及无穷小的概念，回用等价无穷小求极限
10．理解函数连续性的概念，会判别函数间断点的类型
11．解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理，介值定理），并会应用这些性质

二．　主要内容

本章内容总框图



1. 函数

1. 函数的定义

函数的分类

$$
\text{函数}\begin{cases}\text{初等函数}\begin{cases}\text{代数函数}\begin{cases}\text{有理函数}\begin{cases}\text{有理整函数（多项式函数）}\\ \text{有理分函数（分式函数）}\end{cases}\\ \text{无理函数}\end{cases}\\ \text{超越函数}\end{cases}\\ \text{非初等函数（分段函数）}\end{cases}
$$

2. 函数的性质

(1) 函数的有界性

(2) 函数的单调性

(3) 函数的奇偶性

(4) 函数的周期性

3. 反函数

4. 复合函数

5. 基本初等函数

(1) 幂函数 $y = x^{\mu}$ （μ是常数)

(2) 指数函数 $y = a^{x}$　　$(a > 0, a \neq 1)$

(3) 对数函数 $y = \log_{a}^{x}$　　$(a > 0, a \neq 1)$

(4) 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$

(5) 反三角函数 $y = \arctan x, y = arc\cot x$

6. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的并可用一个 式子表示的函数

7. 双曲函数与反双曲函数

双曲正弦 $shx=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

双曲余弦 $chx=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

双曲正切 $thx=\dfrac{shx}{chx}=\dfrac{e^{x}-e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}$

2． 极限

1．极限的定义

“ ε — N ”定义

定义 1 $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$,使 $n>N$ 时，恒有$|x_n - a| < \varepsilon$，记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a$ （$n \to \infty$）

“ $\varepsilon-\delta$ ”定义

定义 2 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$,记为$\lim\limits_{x\to x_0}=A$或$f(x)\to A$

（当$x\to x_0$）

左极限　$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当$x_0-\delta<x<x_0$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，记为$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$或

$f(x_0^-)=A$，

右极限　$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当$x_0<x<x_0+\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，记为$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$或

$f(x_0^+)=A$

定理：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0^+)=f(x_0^-)=A$

2．无穷小与无穷大

无穷小：极限为零的变量称为无穷小，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$）

无穷大：绝对值无限增大的变量称为无穷大，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）

无穷小与无穷大的关系

在同一个极限过程中，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大

无穷小的运算性质

定理 1　在同一极限过程中，有限个无穷小的代数和仍为无穷小

定理 2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小

推论 1　在同一极限过程中，有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小

推论 2　常数与无穷小的乘积是无穷小

推论 3　有限个无穷小的乘积也是无穷小

3．极限的性质

定理　设$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$

（3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$，其中$B\neq 0$

推论 1　如果$\lim f(x)$存在，而c为常数，则$\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$

推论 2　如果$\lim f(x)$存在，而 n 是正整数，则$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$

4．求极限的常用办法

（1）用定义求之

（2）利用极限的四则运算法则
（3）利用无穷小的运算性质求之
（4）利用左右极限求分段函数极限
（5）利用极限存在的两个准则求极限
（6）利用两个重要极限求极限
（7）利用等价无穷小代换求极限
（7）利用初等函数的连续性求极限

5．判定极限存在的准则

准则 I 如果当 $x \in U^0(x_0,\gamma)$（或 $|x|>M$）时，有

（1）$g(x) \le f(x) \le h(x)$　　（2）$\lim\limits_{x\to x_0(x\to\infty)} g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0)(x\to\infty)} h(x)=A$

则 $\lim\limits_{x\to x_0(x\to x_0)} f(x)$ 存在，且等于 A　　（夹逼准则）

准则 II 单调有界数列必有极限

6．两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

7．无穷小的比较

定义：设 α，β 是同一极限过程中的两个无穷小，且 $\alpha \ne 0$

（1）如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$

（2）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C(C\ne 0)$，就说 β 与 α 是同阶的无穷小

特殊的如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等阶的无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$

（3）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=C(C\ne 0,K>0)$，就说 β 是 α 的 K 阶无穷小

8．等价无穷小的性质

定理（等价无穷小替换定理）：设 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$ 且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$

9．极限的性质
（1）唯一性
（2）有界性
（3）保号性
（4）函数极限与数列极限的关系（与数列极限和其子列的极限的关系类似）

10．连续

1.连续的定义

定义 1　若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$ 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续

定义 2　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_o)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续

定义 3　$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续

1）　单侧连续

若函数 $f(x)$ 在 $(a,x_0]$ 内有定义，且 $f(x_0^-)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0,b)$ 内有定义，且 $f(x_0^+)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续

2）　连续的充要条件

定理　$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续

3）　间断点的定义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足的三个条件：

（1）$f(x)$ 在 x_0 处有定义　（2）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在　（3）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

如果上述三个条件中只要一个不满足，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续（或间断），并称点 x_0 为 $f(x)$ 的不连续点（或间断点）

4）间断点的分类

$$
\text{间断点}\begin{cases}
\text{第一间断点} \\
\left(f\left(x_0^{\ +}\right), f\left(x_0^{\ -}\right)\text{存在}\right)\begin{cases}\text{可去间断点}\left(f\left(x_0^{\ +}\right)=f\left(x_0^{\ -}\right)\right)\\ \text{跳跃间断点}\left(f\left(x_0^{\ +}\right)\neq f\left(x_0^{\ -}\right)\right)\end{cases} \\
\text{第二间断点:无穷间断点,振荡间断点等} \\
\left(f\left(x_0^{\ +}\right), f\left(x_0^{\ -}\right)\text{至少有一个不存在}\right)
\end{cases}
$$

5）　闭区间的连续性

如果函数在开区间内（a,b）连续，并且在左端点 $x=a$ 处右连续，在右端点 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续

6）　连续函数的运算性质

定理 1　若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（$g(x_0)\neq 0$）在点 x_0 处也连续

定理 2　严格单调的连续函数必有严格单调的反函数

定理 3　若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，而函数 $f(x)$ 在点 a 连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))$

定理 4　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续

7）　初等函数的连续性

定理 1　基本初等函数在定义域内是连续的

定理 2　一切初等函数在其定义区间内都是连续的

8）闭区间上连续函数的性质

定理 1（最大值最小值定理）　在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值

定理 2（有界性定理）　在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界

定理 3（零点定理）设函数 $f(x)$ 在闭区间[a,b]上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$），那么在开区间（a,b）内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$, 使 $f(\xi)=0$

定理 4（介值定理）设函数 $f(x)$ 在闭区间[a,b]上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$，那么对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间（a,b）内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=c(a<\xi<b)$

推论　在区间上连续的函数必取得介于最大值 M 和最小值 m 之间的任何值

三．例题分析

1．函数的定义和性质

　类型一　函数相等的判断

例 1．判断下列函数是否相等，如不等，为什么？

（1）　$f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}, g(x)=\ln(1-x)-(1+x)$

（2）　$f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$

[解题提示]：当且仅当给定的两个函数，其定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则就是两个不同的函数

解：（1）由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为（-1，1）且对应法则也相同，故 $f(x)=g(x)$

（2）由于 $f(x)=x$，而 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，故两者的对应法则不同，所以 $f(x)\neq g(x)$

　类型二　求函数的定义域

例 2．设 $y=f(x)$ 的定义域是[0，1]，求

（1）　$y=f(\operatorname{sgn}x)$，其中 $\operatorname{sgn}x$ 为符号函数。即

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

（2） $y=f(x+a)+f(x-a)\quad (a>0)$ 的定义域

[解题提示]：求复合函数的定义域，要注意内层函数的值域必须包含在外层函数的定义域内

解：（1）易知当 $x\ge 0$ 时，$\operatorname{sgn} x$ 的值域包含在[0，1]，故 $y=f(\operatorname{sgn} x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$

（2）函数 $f(x+a)$ 的定义域由不等式 $0\le x+a\le 1$ 解得 $-a\le x\le 1-a$，函数 $f(x-a)$ 的定义域由不等式 $0\le x-a\le 1$ 解得 $a\le x\le a+1$

若 $0<a\le\frac{1}{2}$，则 $a<\frac{1}{2}\le 1-a$，函数 $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$ 的定义域为 $[a,1-a]$；

若 $a>\frac{1}{2}$，则 $1-a<\frac{1}{2}$，函数 $f(x+a)+f(x-a)\quad (a>0)$ 的定义域为为空集

类型三 求复合函数和反函数

例 3．设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & |x|\le 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & |x|>1 \end{cases}$，$g(x)=\ln x$，求复合函数的解析式

$f(g(x))$ 和 $g(f(x))$

[解题提示]：求复合函数一般采用代入法，即把一个函数的表达式代替另一个函数中的自变量

解：先研究 $g(x)=\ln x$ 的值域与定义域的关系

当 $x>e$ 时，$\ln x>1$；当 $0<x<e^{-1}$ 时，$\ln x<-1$；当 $e^{-1}<x<e$ 时 $-1<\ln x<1$ 故

$$f(g(x))=f(\ln x)=\begin{cases} \ln^2 x & |\ln x|<1 \\ \dfrac{1}{\ln^2 x} & |\ln x|>1 \end{cases}$$

即：$f(g(x))=\begin{cases} \ln^2 x & e^{-1}<x<e \\ \dfrac{1}{\ln^2 x} & x>e \text{或} 0<x<e^{-1} \end{cases}$

同理可得 $g(f(x))=\ln f(x)=\begin{cases} \ln x^2 & 0<|\ln x|\le 1 \\ -\ln x^2 & |\ln x|>1 \end{cases}$

例 4．求 $f(x)=\begin{cases} x & -2<x<1 \\ x^2 & 1\le x\le 2 \\ \dfrac{1}{\ln^2 x} & 2<x\le 4 \end{cases}$ 的反函数

[解题提示]：求反函数的一般步骤为（1）把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出；（2）把第一步所得表达式中的 x 与 y 对换，即得反函数

解：求分段函数的反函数，只要分别求出个区间段的反函数及定义域即可

由 $y=x$，$-2<x<1$ 可得 $x=y$，$-2<y<1$ 于是反函数为 $y=x$，$-2<x<1$，由 $y=x^2$，$1\le x\le 2$ 得 $x=\sqrt{y}$，$1\le y\le 4$，于是反函数为 $y=\sqrt{x},1\le x\le 4$，由 $y=2^x,2<x\le 4$ 可得 $x=\log_2^y$，$4<y\le 16$，于是反函数为 $y=\log_2^x,4<x\le 16$，故所求函数的反函数为

$$y=\begin{cases} x & -2<x<1 \\ \sqrt{x} & 1\le x\le 4 \\ \log_2^x & 4<x\le 16 \end{cases}$$

类型四 函数的性质

例 5．判断下列函数的奇偶性

（1） $y=\sqrt{x^2+3}$ （$x>0$）

（2） $y=F(x)(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2})$ 其中 $a>0$，$a\ne 1$，$F(x)$ 对于任何 x,y 恒有 $F(x+y)=F(x)+F(y)$

[解题提示]：

①判断给定函数的奇偶性，主要是根据奇偶性的定义，有时也用其运算性质

②函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数就不具有奇偶性

③奇偶函数的运算性质：

1^0 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数

2^0 偶数个奇（或偶）函数的积为偶函数

3^0 一奇函数与一偶函数的乘积为奇函数

④并非所有的函数都有奇偶性

解： 1） $f(x)$ 定义域为 $x>0$，不关于原点对称，故函数无奇偶性

2) 令 $g(x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$ 则 $g(x)+g(-x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}+\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=0$ $\therefore g(-x)=-g(x),g(x)$ 为奇函数，又令 $y=0$，则 $F(x+0)=F(x)+F(0)$，再令 $x=0$，则 $F(0)=2F(0)$ $\therefore F(0)=0$，又 $F(0)=F[x+(-x)]=F(x)+F(-x)=0\Rightarrow F(-x)=-F(x)$ 故 $F(x)$ 为奇函数，所以 $y=F(x)(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2})$ 为偶函数

例 6．当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)\ne 0$ 且 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$ 则在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)$ 是（ ）

（a）以 π 为周期的函数　　（b）以 2π 为周期的函数

（c）以 3π 为周期的函数　　（d）不是周期函数

[解题提示]：

①判断给定的函数 $f(x)$ 是否为周期函数，主要是根据周期的定义，有时也用其运算性质

②周期函数的运算性质：

1^0 若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$

2^0 $f(x)$，$g(x)$ 均是以 T 为周期的函数则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数

3^0 若 $f(x)$，$g(x)$ 分别是以 $T_1,T_2(T_1\neq T_2)$ 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1,T_2 的最小公倍数为周期的函数

解： 有题设条件 $f(x+\pi)\neq f(x)$，所以(a)不入选

$\because$ $f(x+2\pi)=f[(x+\pi)+\pi]=f(x+\pi)+\sin(x+\pi)=[f(x)+\sin x]-\sin x=f(x)$

$\therefore$ $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，故选(b)

例 7．指出下列函数是否有界？

（1） $y=\dfrac{1}{x^2},a\le x\le 1$，其中 $0<a<1$

（2） $y=x\cos x,x\in(-\infty,+\infty)$

[解题提示]：

①函数 $f(x)$ 有无界是相对于某个区间而言的

②分辨无界函数与无穷大量不是一回事

③同一区间上有界函数的和，差，积仍为该区间上的有界函数

解： （1）因为 $a\le x\le 1$，且 $0<a<1$，所以 $a^2\le x^2\le 1$ 故 $1\le\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{1}{a^2}$，因此当 $x\in[a,1]$ 时 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 有界

（2） $\forall m>0$，取 $x=(2[m]+1)\pi$ （其中 $[m]$ 表示 m 的整数部分），则 $\cos x=-1$ 此时 $|f(x)|=|2([m]+1)\pi\cdot\cos(2[m]+1)\pi|=2([m]+1)\pi>m$ 故当 $x\in(-\infty.+\infty)$ 时 $y=x\cos x$ 无界

2．极限的概念，性质与计算

类型五 利用数列极限的定义证明极限

例 8．用“ $\varepsilon-N$ ”的方法证明 $\lim\dfrac{n}{n^2-3}=0$

分析：$\forall\varepsilon>0$ 找 $N>0$，使当 $n>N$ 时，有 $|\frac{n}{n^2-3}-0|<\varepsilon$，即要使 $|\frac{n}{n^2-3}-0|=\frac{n}{n^2-3}<\varepsilon$，

由于 $n\to\infty$，故设 $n>3$，即有 $\frac{n}{n^2-3}<\frac{n}{n^2-n}=\frac{1}{n-1}<\varepsilon$ 证明：不妨设 $n>3,\forall\varepsilon>0$ 取

$N=\max\left\{[\frac{1}{\varepsilon}+1],3\right\}$ 且当 $n>N$ 时，就有 $|\frac{n}{n^2-3}-0|<\varepsilon$ 成立，根据“ $\varepsilon-N$ ”定义知

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2-3}=0$

例 9．用“ $\varepsilon-N$ ”的方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

证明： $\forall\varepsilon>0$，要找 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|\frac{n!}{n^n}|=\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{n}{n}<\varepsilon$ 事实上只需

$\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{n}{n}<\frac{1}{n}\cdot\frac{n^{n-1}}{n^{n-1}}=\frac{1}{n}<\varepsilon$ 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$，则当 $n>N$ 时，有 $|\frac{n!}{n^n}|<\varepsilon$ 即

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

总结：一般用数列极限的“ $\varepsilon-N$ ”定义证明 $\lim x_n=a$ 关键是找出正整数 N，找 N 的过程如下（即证明过程）：$\forall\varepsilon>0$，要使 $|x_n-a|<\varepsilon$，经过一系列的放大过程得 $|x_n-a|<\cdots<\varphi(n)<\varepsilon$ 解不等式 $\varphi(n)<\varepsilon$，可得 $n>\psi(\varepsilon)$，取 $N=[\psi(\varepsilon)]$ 则当 $n>N$ 时总有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，即

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

类型六 利用函数极限的定义证明极限

例 10．用极限的定义证明下列极限

1） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x+3}{3x}=\frac{2}{3}$　　　　2） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2x-1}=1$

证明： 1） $\forall\varepsilon>0$，要证 $\exists X>0$ 当 $|x|>X$ 时，有 $|\frac{2x+3}{3x}-\frac{2}{3}|=|\frac{2x+3-2x}{3x}|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon$ 只需

$|x|>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $X=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$ 则 $\forall\varepsilon>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|\frac{2x+3}{3x}-\frac{2}{3}|<\varepsilon$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x+3}{3x}=\frac{2}{3}$

2）$\forall\varepsilon>0$，要使$|\frac{1}{2x-1}-1|<\varepsilon$，即要使$|\frac{2(x-1)}{2x-1}|<\varepsilon$不妨设$0<x-1<\frac{1}{4}$（为什么？），则

$\frac{1}{2}<2x-1<\frac{3}{2}$ 故只需使 $|\frac{2(x-1)}{1/2}|<\varepsilon$，即 $|x-1|<\frac{\varepsilon}{4}$ 因此取 $\delta=\min\{\frac{1}{4},\frac{\varepsilon}{4}\}$，则当

$0<|x-1|<\delta$时$|\frac{1}{2x-1}-1|=|\frac{2(x-1)}{2x-1}|<4|x-1|<\varepsilon$恒成立，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2x-1}=1$

总结：利用函数极限的“$\varepsilon-\delta$”（或“$\varepsilon-x$”）定义证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$）

的一般步骤如下：对于任给的$\varepsilon>0$，由不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，经一系列适当放大可得

$|f(x)-A|<\cdots<c|x-x_0|<\varepsilon$（c 为常数）[或$|f(x)-A|<\cdots<c\varphi(|x|)$（c 为常数）]解不等

式$c|x-x_0|<\varepsilon$ [或$c\cdot\varphi(|x|)<\varepsilon$]，得$|x-x_o|<\frac{\varepsilon}{c}$ [或$|x|>\psi(\varepsilon)$]，取$\delta=\frac{\varepsilon}{c}$ [或取正数

$x=\psi(x)$]，则当$0<|x-x_0|<\delta$时（或当$|x|>x$时），总有$|f(x)-A|<\varepsilon$即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$[或

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

注意：（2）中，为了放大不等式，也可以限制$0<|x-x_0|<\delta_1$，以便进行不等式的放大，将

$|f(x)-A|$放大为$c|x-x_0|=\varphi(x)$，再由$\varphi(x)$得$|x-x_0|<\delta_2$，最后取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$即可。

但要注意这种限制必须按自变量x的变化过程来确定，不能随意限制。

类型七 证明极限不存在

例 11．证明函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，当$x\to 0$时，极限不存在

[解题提示]：只要能找到两个子列收敛于不同的极限即可

证明： 取 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，当 $x_n\to 0,x_n\neq 0$ 时，有 $f(x_n)=1$，又取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$，当

$x_n\to 0,x_n\neq 0$时，有$f(x_n)=0$故$f(x)$的极限不存在

例 12．证明$f(x)=x\sin x$，当$x\to+\infty$时，无极限也非无穷大

证明： 取$x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，当$x_n\to+\infty$时，有$\lim\limits_{x_n\to+\infty}f(x_n)=+\infty$，又取$x_n=2n\pi$，当$x_n\to+\infty$

时，有 $\lim\limits_{x_n \to +\infty} f(x_n) = 0$，故当 $x \to +\infty$ 时，$f(x)$ 无极限也非无穷大

类型八　求极限

例 13．求（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$，（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3})$

解：1）原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4-\frac{3}{x^2})^3(3-\frac{2}{x})^4}{(6+\frac{7}{x^2})^5}=\dfrac{4^3\cdot 3^4}{6^5}=\dfrac{2}{3}$

总结：一般的，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1 x + b_0}(a_m, b_n \neq 0)=\begin{cases}\infty & \text{当} m>n \text{时}\\ \dfrac{a_m}{b_m} & \text{当} m=n \text{时}\\ 0 & \text{当} m<n \text{时}\end{cases}$$

注意上式中的极限过程只对 $x\to\infty, x\to\pm\infty$ 成立，但当 x 趋于有限值时，此方法不再适用

2）$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\dfrac{1}{6}$

注意：上式中当 $x\to\infty$ 时，每一项均为无穷小，但无限项无穷小的和却不是无穷小

例 14．求下列函数极限

1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$，2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$（$p>0, q>0, p, q$ 为常数）

解：1）原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

2）原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x^2+p^2}-p)(\sqrt{x^2+q^2}+q)(\sqrt{x^2+p^2}+p)}{(\sqrt{x^2+q^2}-q)(\sqrt{x^2+q^2}+q)(\sqrt{x^2+p^2}+p)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(\sqrt{x^2+q^2}+q)}{x^2(\sqrt{x^2+p^2}+p)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+q^2}+q}{\sqrt{x^2+p^2}+p}=\dfrac{q}{p}$

总结：本题两例均是 $\dfrac{0}{0}$ 型的极限，1）的方法是对分子、分母进行合理的因式分解，消去产生奇异的因子，剩下部分代入数值计算即可。2）的特点是分子或分母有公因式，出现分母为零或分子为 ∞ 的情况，处理方法是将分子或分母或分子、分母同时有理化，消去产生奇异的部分，然后再求极限

本题解法有一定普遍性，应注意总结

例 15．求下列极限

1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$，2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 3x}{2x}$，3）$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}(m,n\in N)$

解： 1）原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot\dfrac{5x}{3x}=\dfrac{5}{3}$

2）令$\arctan 3x=u$，则$3x=\tan u$

原式=$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\dfrac{2}{3}\tan u}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{u\to}\dfrac{\cos u}{\dfrac{\sin u}{u}}=\dfrac{3}{2}\dfrac{\lim\limits_{u\to 0}\cos u}{\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}}=\dfrac{3}{2}$

3）　令$t=x-\pi$则原式=

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(mt+m\pi)}{\sin(nt+n\pi)}=(-1)^{m-n}\lim_{t\to 0}\frac{\sin mt}{\sin nt}=(-1)^{m-n}\lim_{t\to 0}\frac{\sin mt}{mt}\cdot\frac{nt}{\sin nt}\cdot\frac{m}{n}=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$$

总结：本例应用了重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，求解时要注意“抓实质、凑形式”，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$实质是$\dfrac{\sin 0}{0}$型的极限，在求极限的过程中，要设法凑出$\dfrac{\sin[u(x)]}{u(x)}$的形式，并且必须保证$u(x)\to 0$

例 16．求下列极限

1）$\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{5x}}$，2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}$，3）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\csc^2 x}$

解： 1）原式=$\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{-3x}\cdot(-3x)\cdot\frac{1}{5x}}=e^{-\frac{3}{5}}$

2）原式=$\lim\limits_{x\to 0}[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}]^{\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\cos^2 x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\cos^2 x}=e$

3）原式=$\lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin^2\dfrac{x}{2})^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot(-2\sin^2\frac{x}{2})\cdot\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}}=e^{-\frac{1}{2}}$

总结：本例应用了重要极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，求解时要注意$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$实质上是$1^{\infty}$型的不定式极限，在求极限的过程中要设法凑出$[1+u(x)]^{\frac{1}{u(x)}}$的形式，并保证$u(x)\to 0$

例 17．求下列函数的极限

1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10\sin x+8\cos x+5}{x}$，2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\ln(1+x)}$

3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$，4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

解： 1）因 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to 0$，为无穷小，而 $10\sin x+8\cos x+5$ 有界，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10\sin x+8\cos x+5}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}(10\sin x+8\cos x+5)=0$$

即有界变量与无穷小的乘积仍为无穷小

2）因 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x+x^2}-1\to 0$，且 $\sqrt{1+x+x^2}-1\sim\dfrac{1}{2}(x+x^2)$，$\ln(1+x)\to 0$ 且

$\ln(1+x)\sim x$ 故原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{x}=\dfrac{1}{2}$

3）原式 = $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(e^{\sin x-x}-1)}{\sin x-x}=\lim\limits_{x\to 0}e^x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x-x}-1}{\sin x-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{\sin x-x}=1$（利用了 $e^{\sin x-x}-1\sim\sin x-x$）

4）原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}$，因当 $x\to 0$ 时，$\tan x,1-\cos x,\sin x$ 均为无穷小，且知 $x\to 0$ 时

$\tan x\sim x,1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2},\sin x\sim x$，故原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

总结：利用无穷小的性质和运算求极限是一种重要的方法，合理运用无穷小的代换能很大程度简化求极限的运算，但需要注意的是在代数和的形式中不能使用无穷小代换，即 $\lim(\alpha\pm\beta)\neq\lim(\alpha`\pm\beta`)$

例 18．求下列函数的极限

（1）　设 $x_1=\sqrt{a},x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\cdots,x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}},(a>0)$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

（2）　设 $0<x_n<1,n=0,1,2\cdots,x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

[解题提示]：求这种类型的极限步骤为

①判断极限的存在性（单调性，有界性）方法可用数学归纳法或不等式的放缩法；

②先令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，然后通过解关于$l$的方程，求得$l$的值，从而得出$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解：（1）显然$x_2>x_1$，不妨设$x_k>x_{k-1}$，则$x_k+a>x_{k-1}+a\Rightarrow\sqrt{x_k+a}>\sqrt{x_{k-1}+a}\Rightarrow$

$x_{k+1}>x_k$，$\therefore\{x_n\}$为单调增加数列

又$\because x_1=\sqrt{a},x_n=\sqrt{a+x_{n-1}},x_n^2=a+x_{n-1}\Rightarrow x_n=\dfrac{a}{x_n}+\dfrac{x_{n-1}}{x_n}<\sqrt{a}+1\therefore\{x_n\}$有界

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{a+x_{n-1}}$　即$l=\sqrt{a+l}\therefore l=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$因此

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$　（$\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<0$舍去）

（2）由$0<x_n<1$可知，只要证明$\{x_n\}$的单调性即可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

由$x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$；有$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=-x_n+2>1(\because 0<x_n<1)$即$x_{n+1}>x_n$，可见$\{x_n\}$为单调增序列，

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$则$l=-l^2+2l\Rightarrow l=1,l=0$（舍去）因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

例 19．设$a_n=\sqrt[n]{1+x^n+(\dfrac{x^2}{2})^n},(x\geq 0)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

解：（1）若$0\leq x<1$，则$x^n\to 0$且$\dfrac{x^2}{2}<1,(\dfrac{x^2}{2})^n\to 0,(n\to+\infty)\Rightarrow$

$1<\sqrt[n]{1+x^n+(\dfrac{x^2}{2})^n}<\sqrt[n]{3}\to 1$　$(n\to+\infty)$即$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$

（2）若$x>\dfrac{x^2}{2}$且$x\geq 1$即$1\leq x<2$，则有$\sqrt[n]{x^n}\leq\sqrt[n]{1+x^n+(\dfrac{x^2}{2})^n}\leq\sqrt[n]{3x^n}$对于常数$x$，有

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3x^n}=x$，由夹逼准则有$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=x,x\in[1,2)$

（3）若$1<x\leq\dfrac{x^2}{2}$即$x\geq 2$有$\sqrt[n]{(\dfrac{x^2}{2})^n}\leq\sqrt[n]{1+x^n+(\dfrac{x^2}{2})^n}\leq\sqrt[n]{3(\dfrac{x^2}{2})^n}$

故$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(\dfrac{x^2}{2})^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3(\dfrac{x^2}{2})^n}=\dfrac{x^2}{2}$得$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{x^2}{2},x\geq 2$

综合（1），（2），（3）可得

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ x & 1\le x<2\\ \frac{x^2}{2} & 2\le x<+\infty\end{cases}$$

总结：在用夹逼准则求极限时，关键是要找到合适的不等式

例 20．求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$

[解题提示]：当函数在求极限点处连续时，可用代入法求极限

解：　因为 $\ln(2\cos 2x)$ 是初等函数，$x=\frac{\pi}{6}$ 为其定义区间内的点，故原式= $\ln[2\cos(2\cdot\frac{\pi}{6})]=0$

总结：除以上列举的求极限方法外，我们还将在以后各章中学到其他方法，如洛必塔法则、导数的定义、利用定积分的定义和性质，以及级数收敛的必要条件等方法，这些方法我们将在以后的章节中详细讨论

类型九 无穷小阶的比较

例 21．已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}$ 与 $g(x)$ 是等阶无穷小，则 $g(x)=$（　）

(a) $1-\cos x$　　(b) $\tan x-\sin x$　　(c) $\arcsin x$　　(d) $\sqrt{x}$

解：　$\because\ f(x)=\frac{2\sin x}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}\sim\sin x\sim x$（当 $x\to 0$）

(a) $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$　(b) $\tan x-\sin x=\frac{\sin(1-\cos x)}{\cos x}\sim\frac{1}{2}x^3$　(c) $\arcsin x\sim x$

$\therefore\ g(x)=\arcsin x$

故选（c）

总结：一般地，在比较无穷小的阶时，可先将复杂的式子进行化简，然后根据已知的等价无穷小量的关系进行估计

3．函数的连续性

类型十 间断点及其类型

例 22．设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-e^{nx}}{1+e^{nx}}$，讨论 $f(x)$ 的连续性

解：　因为 $n>0$，并注意到当 $x>0$ 时，$e^{nx}\to+\infty(n\to+\infty)$；当 $x<0$ 时，$e^{nx}\to 0(n\to\infty)$ 可求得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{nx}}{1+e^{nx}}=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -1 & x>0\end{cases}$$

所以，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内除 $x=0$ 外处处连续，$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一间断点

总结：对于用极限定义的函数，要先求出它的具体表达式，再来研究它的连续性

例 23．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+2)}{\sin(\pi x)}, & x<0, x\neq -n\left(n\text{为正整数}\right)\\ \dfrac{\sin x}{x^2-1}, & x\geq 0\end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 的连续性

解：显然 $x=0$ 是分段点，当 $x<0$ 时，$x=-n$ 没有定义，$x>0$ 时 $x=1$ 没有定义，下面分别讨论

（1）当 $x=0$ 时

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+2)}{\sin(\pi x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\pi x(x+2)}{\sin(\pi x)}\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2-1}=0\neq\lim_{x\to 0^-} f(x)\quad \therefore x=0 \text{ 是 } f(x) \text{ 的第一类间断点}$$

（2）当 $x=-n$ 时，且 $x\neq -2$ 时

$$\lim_{x\to -n} f(x)=\lim_{x\to -n}\frac{x(x+2)}{\sin(\pi x)}=\infty\quad \therefore x=-n(n\neq -2) \text{ 是 } f(x) \text{ 的第二类间断点}$$

（3）当 $x=-2$ 时，设 $x+2=t$，$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x(x+2)}{\sin(\pi x)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t-2)t}{\sin\pi(t-2)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\pi t}{\sin\pi(t-2)}\cdot\dfrac{t-2}{\pi}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\pi t}{\sin\pi t}\cdot\frac{t-2}{\pi}=\frac{-2}{\pi}\neq f(-2)\quad \therefore x=-2 \text{ 是可去间断点}$$

（4）当 $x=1$ 时

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x}{(x-1)(x+1)}=\infty$，因此 $x=1$ 是第二类间断点。因此除间断点 $x=0, x=1, x=-n$ 外 $f(x)$ 在其定义域上连续

总结：在讨论间断点的类型时，一般都采用左、右极限比较的方法，因此应熟练掌握此技巧

类型十二　连续函数的运算

例 24．设函数 $f(x)=f(\sqrt{x})$，又已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 点连续，求 $f(x)$ 的表达式（其中 $x>0$）

解：因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 点连续且 $f(x)=f(\sqrt{x})$

$$\therefore x>0 \text{ 时有 } f(x)=f(\sqrt{x})=f(x^{\frac{1}{4}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})=\lim_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)$$

故 $\forall x>0$，有 $f(x)=f(1)$，即 $f(x)$ 实际上为常数函数

类型十三　闭区间上连续函数的性质

例 25．设函数 $f(x)\in c[a,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$（有限），证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有界

证明：由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，可得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x>a$，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，取 $\varepsilon=1$ 则得 $|f(x)|<|A|+1(x>X)$，又 $f(x)\in c[a,+\infty)\Rightarrow f(x)\in[a,x+1]$，由闭区间上连续函数的性质，$\exists\xi\in[a,x+1]$，使得 $|f(\xi)|=\max\limits_{[a,x+1]}|f(x)|$ 取 $M=\max\{|f(\xi)|,|A|+1\}$ 则当 $x\in[a,+\infty)$ 时，$|f(x)|\leq M$，即 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界

例 26．证明：若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 (a,b) 内存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

证明： 由于 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$，故 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上连续，从而必有最大值 M 和最小值 m,使得 $m \le f(x_i) \le M\ (i = 1,2,\cdots,n)$

则 $nm \le f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \le nM$，$m \le \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \le M$

由闭区间上连续函数的介值定理知至少存在一点 $\xi \in [x_1, x_n] \subset (a,b)$，使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

例 27．证明 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有三个零点

证明： 显然 $f(x) \in c(-\infty,+\infty)$

$f(0) = -1 < 0,\ f(2) = 8 + 8 - 8 - 1 = 7 > 0 \Rightarrow f(0)\cdot f(2) < 0$

$f(-1) = -1 + 2 + 4 - 1 = 4 > 0 \Rightarrow f(0)\cdot f(-1) < 0$

由 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \exists x_1$ 使 $f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_1)\cdot f(-1) < 0$ 故在 $(-\infty,-1),(-1,0),(0,2)$ 之间各有 $f(x)$ 的一个零点，那 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有三个零点

例 28．若函数 $g(x) \in c[a,b]$，且 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = -\infty$，则函数 $g(x)$ 在 (a,b) 内取到最大值。

证明： 取 $x_0 \in (a,b)$，设 $M = g(x_0)$，因 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = -\infty$，故 $\exists \delta_1 > 0$，使 $\forall x \in (a, a+\delta_1)$；有 $g(x) < M$；又因 $\lim\limits_{x\to b^-} g(x) = -\infty$，故 $\exists \delta_2 > 0$，使 $\forall x \in (b-\delta_2, b)$，有 $g(x) < M$，令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 并设 $f = g|_{(a+\delta,b-\delta)}$（这里 $f = g|_{(a+\delta,b-\delta)}$ 表示 g 在闭区间 $[a+\delta, b-\delta]$ 上的限制），则 $f \in c[a+\delta, b-\delta]$，故 $\exists x_1 \in [a+\delta, b-\delta]$，

使 $f(x_1) = \max\{f(x) \mid x \in [a+\delta, b-\delta]\}$，又 $\forall x \in (a, a+\delta)$，

有 $f(x) < M = g(x_0) = f(x_0) \le f(x_1)$；$\forall x \in (b-\delta, b)$，

有 $f(x) < M = g(x_0) = f(x_0) \le f(x_1)$，故 $f(x_1) \ge g(x)(\forall x \in (a,b))$

即 $g(x_1) \ge g(x)(\forall x \in (a,b))$ 从而 $g(x)$ 在 $x = x_1$ 处达到最大值

例 29．若 $f(x) \in c[0,a](a > 0)$，且 $f(0) = f(a)$，则方程 $f(x) = f(x + \frac{a}{2})$ 在 $(0,a)$ 内至少有一实根。

证明： 令 $g(x) = f(x) - f(x + \frac{a}{2}) \in c[0,a]$ 则 $g(0) = f(0) - f(\frac{a}{2})$，

$g(\frac{a}{2}) = f(\frac{a}{2}) - f(a) = f(\frac{a}{2}) - f(0) = -\left[f(0) - f(\frac{a}{2})\right]$ 故 $g(0)\cdot g(\frac{a}{2}) \le 0$

若 $f(0) = f(\frac{a}{2})$，则 $x = 0$ 或 $x = \frac{a}{2}$ 满足要求

若 $f(0)\neq f(\frac{a}{2})$，则 $g(x)\cdot g(\frac{a}{2})<0$，由零点定理 $\exists x_0\in(0,\frac{a}{2})$，使 $g(x_0)=0$，即

$f(x_0)=f(x_0+\frac{a}{2}), x_0$ 是 $(0,a)$ 内 $f(x)=f(x+\frac{a}{2})$ 的根

总结：对于闭区间上连续函数的命题一般采用下面两种做法：

（1）　直接法，先利用最值定理，再利用介值定理

（2）　间接法，先作辅助函数 $F(x)$，再利用零点定理

辅助函数的作法：

首先，把结论中的 ξ （或 x_0 ）改写成 x ；

其次，移项，使等式右边为零，令左边式子为 $F(x)$，则 $F(x)$ 即为所求

类型十四 常数值的确定

例 30．已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，求 a,b 之值

解： 由于当 $x\to 2$ 时，分母的极限为零，且分式的极限存在，所以分子的极限必为零，即

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

由此得 $b=-2a-4$

于是 $x^2+ax+b=x^2+ax-2a-4=(x-2)(x+a+2)$

代入原式得 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+a+2)}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{a+4}{3}=2$

解方程组 $\begin{cases}a+4=6\\ b=-2a-4\end{cases}$　得 $\begin{cases}a=2\\ b=-8\end{cases}$

例 31．对某一常数 c, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^5+7x^4+2)^c-x\right]$ 存在且不为零，

试求常数 c 并求极限值。

解： 设该极限值为 $A\neq 0$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^5+7x^4+2)^c-x}{x}=0$

易知分子关于 x 的最高次数应该是零次，因此 $5c=1$ 即 $c=\dfrac{1}{5}$，于是

$A=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x^5+7x^4+2}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt[5]{1+\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^5}}-1)$

$\because$ 当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^5}\to 0$

$\therefore$ 由等价无穷小，有 $\sqrt[5]{1+\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^5}}-1\sim\dfrac{1}{5}(\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^5})$

故 $A=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{1}{5}(\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^5})=\dfrac{7}{5}$

例 32．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 试确定常数 a 使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

解： 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，只需 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2=f(0)$

又 $f(0)=a$，故 $a=2$，故当 $a=2$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 连续

例 33． 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数，求 a,b 的值

解： 当 $|x|<1$ 时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=ax^2+bx$

当 $|x|>1$ 时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{a}{x^{2n-3}}+\dfrac{b}{x^{2n-2}}}{x+\dfrac{1}{x^{2n-1}}}=\dfrac{1}{x}$

当 $x=1$ 时，$f(1)=\dfrac{1}{2}(1+a+b)$

当 $x=-1$ 时，$f(-1)=\dfrac{1}{2}(-1+a-b)$

即

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx, & |x|<1 \\ \dfrac{1}{x}, & |x|>1 \\ \dfrac{1}{2}(1+a+b), & x=1 \\ \dfrac{1}{2}(-1+a-b), & x=-1 \end{cases}$$ 分段点为 $x=\pm 1$

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，故 $f(1+0)=f(1-0)=f(1)$ 即 $1=a+b=\dfrac{1}{2}(1+a+b)$

又因为 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续，故 $f(-1+0)=f(-1-0)=f(-1)$ 即 $a-b=-1=\dfrac{1}{2}(-1+a-b)$

故 $a=0,b=1$

四 练习题

1．是非题（判断下列各题是否正确，正确在题后括号打“$\surd$”，错误打“$\times$”）

（1）若 $f(x)$ 的定义域是 $[0,a)(a>0)$，则 $f(x)+f(-x)$ 的定义域是 $[-a,a]$　　（　）

（2）设数列 $\{x_n\}$ 满足：$\forall\varepsilon>0,\exists$ 无穷多个 n，使 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$　（　）

（3）若 $f(x)>g(x),\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则有 $A>B$　（　）

（4）$\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}=0$，（　）

（5）若 $f(x)$ 在整个实数轴上连续，则 $f(x)$ 在整个实数轴上有界　（　）

2．填空题（将答案填在各题的横线上）

（1）若 $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ x^2 & x\ge 0\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ ________

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ________

（3）设函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln\left[f(1)\cdot f(2)\cdots f(n)\right]=$ ________

（4）已知当 $x\to0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________

（5）设 $a>0$，且 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2} & x\geq0\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x} & x\leq0\end{cases}$ 当 a 为 ______ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})\right]=$ ______________

（7）对于函数 $f(x)=\ln(\cos x)x^{-2}$，应补充定义 $f(0)=$_______ 时，才能使函数在点 $x=0$ 连续

3．选择题

（1）设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是（　）

（A）若 x_n 发散，则 y_n 必发散　　（B）若 x_n 无界，则 y_n 必有界

（C）若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小　　（D）若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小

（2）当 $x\to1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限（　）

（A）等于 2　（B）等于 0　（C）为 ∞　（D）不存在但不为 ∞

（3）极限 $\lim\left[\frac{3}{1^2\times2^2}+\frac{5}{2^2\times3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2\times(n-1)^2}\right]$ 的值是（　）

（A）0　（B）1　（C）2　（D）不存在

（4）设 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(3x-2)^\alpha}=\beta$，则 α,β 的数值为（　）

（A）$\alpha=1,\beta=\frac{1}{3}$　（B）$\alpha=5,\beta=\frac{1}{3}$　（C）$\alpha=5,\beta=\frac{1}{3^5}$　（D）均不对

（5）设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to0$ 时（　）

（A）$f(x)$ 是 x 的等价无穷小　　（B）$f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小

（C）$f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小　　（D）$f(x)$ 是比 x 较高阶无穷小

（6）设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x}=6$，则 a 的值为（　）

（A）-1　（B）1　（C）2　（D）3

（7）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是 $x\to x_0$ 时（　）

（A）$f(x)$ 是无穷小　　（B）$f(x)$ 有界

（C）$f(x)=f(x_0)+\alpha(x)$　（其中 $\alpha(x)\to0,x\to x_0$）

（D） $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限皆存在且相等

4．主观题

1．设 $3f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x$，求 $f(x)$

2．求下列极限

（1） $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)$　　（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$

（3） $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\sin\frac{2}{x}$　　（4） $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]$

（5） $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+4^n+6^n+\cdots+20^n}$　　（6） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$

3．设 $a>0$，$a_1>0$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n}),(n=1,2,\cdots)$ 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求之

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}} & x>0\\ ae^{2x} & x\le 0\end{cases}$ 问 a 为何值时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续？

5．试确定正整数 n，使得当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，

而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小

6．设 $y=\dfrac{x\arctan\frac{1}{x-1}}{\sin\frac{\pi}{2}x}$，求函数 y 的间断点并判断其类型

7．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，$c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为任意正数，

则在 (a,b) 内至少落在一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}$

答案与提示

1．（1） ×　（2） ×　（3） ×　（4） ×　（5） ×

2．（1） $\begin{cases}x & x<0\\ x^4 & x\ge 0\end{cases}$　（2） $\frac{1}{2}$　（3） $\frac{1}{2}\ln a$　（4） $\frac{3}{2}$　（5） $a>0$ 且 $a\ne 1$

（6） 2　（7） $-\frac{1}{2}$

3．（1） D　（2） D　（3） B　（4） C　（5） B　（6） A　（7） C

4．1． $f(x)=\frac{3}{8}x-\frac{1}{8x}$ （提示：令 $x=\frac{1}{u}$ 将 u 换为 x，与已知等式联立）

2．(1) 0　(2) $\frac{1}{2}$　(3) $\frac{6}{5}$　(4) 1（提示：考虑左、右极限）

(5) 20（提示：利用夹逼准则）　(6) $\frac{3}{2}$

3． $\sqrt{a}$ （提示：利用单调有界准则）　4．-2　　5． $n=2$

6． $x=0$ 为可去间断点， $x=1$ 为跳跃间断点， $x=2k(k=\pm1,\pm2\cdots)$ 为无穷间断点，其余点处处连续

7．利用闭区间上连续函数的最大最小值定理和介值定理

五．自测题

1．填空题（将答案填在各题的横线上）

(1) 已知 $f(x)=\sin x,\ f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$______的定义域为______

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=$______

(3) 若当 $x\to0$ 时， $e^{x^2}-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则 $a=$______ $b=$______

(4) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{a} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$______

(5) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1990}}{n^k-(n-1)^k}=A(\neq0,\neq\infty)$，则 $A=$______，$k=$______

2．选择题

(1) 下列命题中正确的是（　）

(A) 有界量和无穷小量的乘积仍为无穷小量

(B) 有界量和无穷大量的乘积仍为无穷量

(C) 两无穷大量的和仍为无穷大量

(D) 两无穷大量的差为零

(2) 设 $x\to0$ 时， $e^{\tan x}-e^x$ 是与 x^n 同阶的无穷小，则 n 为（　）

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

(3) 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，

则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ （　）

(A) 存在且一定等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

(4) 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足（　）

(A) $a<0,b<0$　(B) $a>0,b>0$　(C) $a\le0,b>0$　(D) $a\ge0,b<0$

(5) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义， $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq0$， $\varphi(x)$ 有间

断点，则（　）

（A）$\varphi[f(x)]$ 必有间断点　　（B）$[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

（C）$f[\varphi(x)]$ 必有间断点　　（D）$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

3．主观题

（1）已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x, \varphi(x)\ge 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{|\sin x|}$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$

（3）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sin x+e^x\right)^{\frac{2}{x}}$

（4）求 a,b，使当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}-(ax+b)$ 为无穷小

（5）设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1} & -\infty<x<-1\\ b & x=-1\\ a+\arccos x & -1<x\le 1\end{cases}$ 试确定 a,b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续

（6）求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在 $(0,2\pi)$ 内的间断点，并判断其类型

（7）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，证明：对自然数 $n\ge 2$ 必有 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$

答案与提示

1.（1）$\arcsin(1-x^2), -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$；

（2）$\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & |x|<1\\ \infty & |x|>1\text{或}x=1\\ 0 & x=-1\end{cases}$；　（3）$a=1, b=0$；　（4）$-2$；

（5）$A=\dfrac{1}{1991}$，$k=1991$

2．（1）A　（2）C　（3）D　（4）D　（5）D

3．（1）$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}, x\le 0$；　（2）0，$e^{-(a+b)}$；　（3）$e^6$；

（4）$a=-1, b=2$；（5）$a=-\pi, b=0$；（6）间断点为 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3}{4}\pi,\dfrac{5}{4}\pi,\dfrac{7}{4}\pi$

其中 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi$ 为第二类间断点，$x=\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$ 为第一类可去间断点

（7）提示：令 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$，考虑区间 $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$，利用连续函数的介值定理

第二章 导数与微分

二 主要内容

一 大纲要求

1. 理解导数和微分的概念,理解导数的几何意义,会求平面曲线的切线和法线方程,了解导数的物理意义,会用导数描述一些物理量,理解函数的可导性与连续性之间的关系;
2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法,掌握基本初等函数的导数公式,了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性,了解微分在近似计算中的应用;
3. 了解高阶导数的概念,会求简单的 n 阶导数;
4. 会求分段函数的一阶,二阶导数;
5. 会求隐函数和由参数方程所确定的函数的一阶,二阶导数,会求反函数的导数.

二 基本概念

表 2·1·1导数的概念

名称	定义
函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导	设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导
$f(x)$ 在 x_0 点的左导数	如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则此极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的左导数
$f(x)$ 在 x_0 点的右导数	如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则此极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的右导数
$f(x)$ 在 (a,b) 上可导	如果 $f(x)$ 在 (a,b) 上每一点都可导，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导
$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导	若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且 $f_+'(a)$ 及 $f_-'(b)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导
高阶导数	如果 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 x 处可导，则 $f'(x)$ 在 x 处的导数为 $f(x)$ 在 x 处的二阶导数，记为 $f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$ 而 $f^{(n)}(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$

表2·1·2 微分的概念

定义	几何意义
若 $f(x)$ 在 x 处的某一邻域内有定义当自变量在 x 处取得增量 Δx 时，Δy 可表示为 $\Delta y = A\Delta x + \alpha, A$ 是与 Δx 无关的量，α 是当 $\Delta x \to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小，则 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 x 处的微分，记为 dy 或 $df(x)$，$dy = A\Delta x$ 则称 $y = f(x)$ 在 x 处可微	$y = f(x)$ 在 x_0 处的微分 $dy = f'(x_0)dx$ 是曲线 $y = f(x)$ 在 $P_0(x_0, f(x_0))$ 处的切线的纵坐标增量

2．基本性质与公式

表2·2·1 基本性质

序号	名称	内容
1	$f'(x_0)$ 存在的充要条件	$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$
2	函数可导与连续的关系	可导必连续，连续不一定可导
3	可导与可微的关系	可导必可微反之亦然
4	一阶微分形式的不变性	若 $y = f(u), u = u(x)$ 皆可微，则复合函数可微，且 $dy = f'(u)du$

表2·2·2 求导法则

法则	公式或定理
四则运算	设 $f(x)$，$g(x)$ 在 x 可导，则 (1) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$ (2) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (3) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)] / [g^2(x)], g(x) \neq 0$
复合函数求导	设 $f'(u_0)$ 与 $g'(x_0)$ 存在，$u_0 = g(x_0)$，则 $F(x) = f[g(x)]$ 在 x_0 点可导，

	且 $F'(x_0)=f'[g(x_0)]\cdot g'(x_0)$
反函数求导	若 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq 0$，且其反函数 $y=f(x)$ 在 I_x 内也可导且 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$
隐函数求导	由 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$，称 y 是 x 的隐函数。求导时只要对 $F(x,y)=0$ 求导即可。要注意 y 是 x 的函数，最后整理出 $y'=g(x,y)$
对数求导	某些函数（幂指数或连乘式）求导，不需要显式直接求导，可先两边同时取对数，化成隐函数，再求导
参数方程求导	设 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 在 (α,β) 上连续可导且 $\varphi'(t)\neq 0$，则参数方式确定的函数 $y=\psi\left[\varphi^{-1}(x)\right]$ 可导 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

关于求导的基本公式参见教材

三 例题分析

例 1．已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=A$，其中 A 为常数，则 $f'(x_0)$ 是否存在，若存在求之。

解： $\because$ $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续 $\therefore \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ $\because \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}(x-x_0)=0$

$\therefore f(x_0)=0$，$\therefore f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=A$，$\therefore f'(x_0)$ 存在且等于 A

总结：求函数 $f(x)$ 在某点的导数值，既可用求导公式又可利用导数的定义求，如果不知 $f(x)$ 的具体表达式，则可考虑用定义求。有些条件隐含于题设条件中，需利用已知条件的内在联系去发掘。

例 2．设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，试证：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+\alpha h)-f(a-\beta h)}{h}=(\alpha+\beta)f'(a)$

证明： $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+\alpha h)-f(a-\beta h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(a+\alpha h)-f(a)]-[f(a-\beta h)-f(a)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\alpha[f(a+\alpha h)-f(a)]}{\alpha h}+\frac{\beta[f(a-\beta h)-f(a)]}{\beta h}\right\}$$

$$=\alpha f'(a)+\beta f'(a)=(\alpha+\beta)f'(a)$$

总结：这里不能用求 $f(x)$ 的导函数的方法来求 $f'(a)$，因为 $f(x)$ 只在 $x=a$ 处可导，所以只能用定义求，此题的结论可直接应用，但要注意 $a=0$ 时也适用。

例 3．设 $f(x)=a^{a^x}+x^{a^a}+a^{x^a}+x^x$ 求 $f'(x)$

解： $(a^{a^x})'=a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a=a^{a^x+x}(\ln a)^2$，$(x^{a^a})'=a^a x^{a^a-1}$

$(a^{x^a})'=a^{x^a}\ln a\cdot a\cdot x^{a-1}=a^{x^a+1}x^{a-1}\ln a$

令 $t=x^x$ 则 $\ln t=x\ln x$，两边对 x 求导得 $\frac{1}{t}\cdot t'=\ln x+1$，$t'=x^x(\ln x+1)$

$\therefore\ f'(x)=a^{a^x+x}(\ln a)^2+a^a x^{a^a-1}+a^{x^a+1}x^{a-1}\ln a+x^x(\ln x+1)$

例 4． $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x}$，求 $f^{(n)}(x)$

解： $f(x)=\dfrac{x^3-1+1}{1-x}=-(x^2+x+1)+\dfrac{1}{1-x}$

当 $n>3$ 时， $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

总结：求 $f(x)$ 的 n 阶导数时，如果 $f(x)$ 为分式，可考虑对分子或分母因式分解，将其拆为简单的分式，并应用数学归纳法求解。

例 5． $y=\sin^4 x+\cos^4 x$，求 $y^{(n)}$

解： $y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x=1-\dfrac{1-\cos 4x}{4}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4x$

$y^{(n)}=\dfrac{1}{4}\times 4^n\cos(4x+n\dfrac{\pi}{2})=4^{n-1}\cos(4x+\dfrac{n\pi}{2})$

总结：由 $\cos^n mx,\sin^n mx(m,n$ 为自然数）的差、和、积所构成的函数，进行求高阶导数时，一般利用三角函数中积化和差与倍角公式把函数的次幂逐次降低，最后变为 $\cos kx,\sin kx$ 之和（差）的形式，应用已有公式进行高阶求导。

例 6．求 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$， $n\geq 3$

解： 由莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v^{(n)}+C_n^1u^{(n-1)}v^{/}+\cdots+u^{(0)}v^{(n)}$$

$[\ln(1+x)]^{(k)}=\dfrac{(-1)^{(k-1)}(k-1)!}{(1+x)^k}$，（$k$ 为正整数）

$$f^{(n)}(x)=\frac{x^2(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+\frac{2nx(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+\frac{n(n-1)(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$$

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$$

总结：具有 n 阶可导的两个因子乘积的函数的 n 阶导数可用莱氏公式处理，但此办法不常用，一般应用直接法如例 4，或间接法如例 5，来求得函数的高阶导数。

例 7．设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} e^x=3t^2+2t+1 \\ t\sin y-y+\dfrac{\pi}{2}=0 \end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$。

解： 参数方程两端关于 t 分别求导，得：

$$\begin{cases} e^x\dfrac{dx}{dt}=6t+2 \\ t\cos y\dfrac{dy}{dt}+\sin y-\dfrac{dy}{dt}=0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2e^{-x}(3t+1) \\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\sin y}{1-t\cos y} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^x\sin y}{2(3t+1)(1-t\cos y)}$$

当 $t=0$ 时，$x=0, y=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{2}$

总结：此题既有参数方程的求导，又包含隐函数求导，而对隐函数求导方法有三种：

①方程两边对 x 求导，注意 y 是 x 的函数，例如 $\dfrac{1}{y}, y^2, \ln y, e^y$ 都是 x 的复合函数

②直接代公式，由 $F(x,y)=0$，知

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x^{/}(x,y)}{F_y^{/}(x,y)}$$

其中 $F_x^{/}(x,y)$ 及 $F_y^{/}(x,y)$ 表示 $F(x,y)$ 对 x 和 y 的偏导数

③利用微分形式不变性，在方程两边求微分，然后求出 $\dfrac{dy}{dx}$

例 8．求参数方程 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 x \end{cases}$ 的二阶微分

解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{-3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=-\sec^2 t\cdot\frac{1}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t},$$

$$d^2y=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}dx^2$$

总结：在对参数方程进行二次求导时，一定要先求 y 对 x 的一阶导数，再对一阶导数的结果继续求二阶导，并且在此过程中再次应用复合函数求导法则和反函数求导法则，把参数 t 看成 x 的函数。

例 9．设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 $f(x)$ 可微，则求 dy

解： $y'=f'(\ln x)(\ln x)'e^{f(x)}+f(\ln x)e^{f(x)}f'(x)=e^{f(x)}\left[\dfrac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)\right]$

$$\Rightarrow dy=e^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)\right]dx$$

例 10．讨论 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x>0\\ x^3 & x\le 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性与可导性，并求 $f'(x)$。

解： 连续性

1° $x\ne 0$ 时 $f(x)$ 为 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 的初等函数，所以 $f(x)$ 当 $x\ne 0$ 时，每一点都连续

2° $x=0$ 时 $f(x)=0$

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x^3=0=f(0)$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^2\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续

综上所述，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $f(x)$ 连续

可导性

1° $x>0$ 时 $f'(x)=(x^2\sin\frac{1}{x})'=x^2\cos\frac{1}{x}(-\dfrac{1}{x^2})+2x\sin\frac{1}{x}=-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x}$

2° $x<0$ 时 $f'(x)=(x^3)'=3x^2$

3° $x=0$ 时 $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^3-0}{x-0}=0$

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=0 \therefore f_-'(0)=f_+'(0)=f'(0)$

综上所述 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 每点可导，其导数为 $f'(x)=\begin{cases}-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x} & x>0\\ 0 & x=0\\ 3x^2 & x<0\end{cases}$

总结：注意讨论分段函数的可导性时，分界点的导数一定用定义求；当讨论分段函数的连续性时要注意讨论 $f(x)$ 在分界点的极限是否等于该函数在分界点的函数值。

例 11． 设 $f(x)=\begin{cases}e^{x^2} & x\le1\\ ax+b & x>1\end{cases}$ 问 a,b 取何值时 $f'(1)$ 存在

解： $\because f'(1)$存在 $\therefore f(x)$在$x=1$处连续

$\therefore \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}e^{x^2}=e=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(ax+b)=a+b$

$\therefore a+b=e$

又$f(x)$在$x=1$处可导

$f_-'(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{x^2}-e}{x-1}=e\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{x-1}$

$=e\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2e$

$f_+'(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{ax+b-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{ax+b-(a+b)}{x-1}=a$

$\therefore a=2e,b=-e$

$\therefore a=2e,b=-e$时，$f'(1)$存在

四．练习题

1．是非题 判断下列各题方法是否正确，若不正确请给出正确的解法

（1）设 $f(x)=\sqrt[3]{x}\sin x$ 求$f'(0)$

$f'(x)=\frac{1}{3x^{2/3}}\sin x+x^{\frac{1}{3}}\cos x$

$f'(x)\big|_{x=0}$无意义$\therefore f'(0)$不存在

（2） $\varphi(x)$在 $x=0$ 处连续，$f(x)=(x-a)\varphi(x)$ 求 $f^{/}(a)$

$\because f^{/}(x)=\varphi(x)+(x-a)\varphi^{/}(x)$

$\therefore f^{/}(a)=\varphi(a)$

（3） 若$f(u)$在u_0不可导，$u=g(x)$在x_0可导，且$u_0=g(x_0)$,

则 $f[g(x)]$ 在x_0 处不一定可导

（4） 设 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 由$y_x^{/}=\dfrac{\psi^{/}(t)}{\varphi^{/}(t)}$ $(\varphi^{/}(t)\neq 0)$可知 $y_x^{//}=\dfrac{\psi^{//}(t)}{\varphi^{//}(t)}$

2．填空题

（1） 设 $f(-x)=-f(x), f^{/}(x)=k,$则 $f^{/}(-x)=$ ______

（2） 设 f为可导函数，$y=\cos\{f[\sin f(x)]\},\dfrac{dy}{dx}=$ ______

（3） 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x},$则 $f^{(n)}(x)=$ ______

（4） 设曲线$y=x^2+ax+b$和$2y=-1+xy^3$$(1,-1)$处相切

其中a，b是常数，则$a=$ ____;$b=$ ____

（5） 设 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=\cos t \end{cases}$ 则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ ______

（6） $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\sin^2 x & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 则 $f^{/}(0)=$ ______

（7） $y=y(x)$ 由$e^{x+y}+\cos(xy)=0$确定，则$\dfrac{dy}{dx}=$ ______

3．选择题

（1） 设 $F(x)=\begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x\neq 0 \\ f(0) & x=0 \end{cases}$ 其中$f(x)$在$x=0$处可导，

$f^{/}(0)\neq 0, f(0)=0,$则$x=0$是$F(x)$的（　　）

A　连续点　　　　　　　B 第一类间断点

C　第二类间断点　　　　D 连续点或者间断点不确定

（2） 设$y=f(x)$在x_0处可导，当x由x_0增加到$x_0+\Delta x$时

记Δy为$f(x)$的增量，dy为$f(x)$的微分，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-dy}{\Delta x}=($　　$)$

A -1　　　B 0　　　C 1　　　D ∞

（3）设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ ax+b & x\le 0 \end{cases}$ 在$x=0$处可导，则a，b分别为（）

A　$a=1,b=0$　　　　B　$a=0,b$ 为任意常数

C　$a=0,b=0$　　　　D　$a=1,b$ 为任意常数

（4）$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$的不可导点的个数是：（）

A　3　　　B　2　　　C　1　　　D　0

（5）若$y=f(x)$在x_0处的导数$f'(x_0)=0$，则$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的法线(　　)

A 与 x 轴相平行　　　　B 与 x 轴垂直

C 与 y 轴相垂直　　　　D 与 x 轴既不垂直也不平行

（6）$f(x)$为奇函数，则$f'(x)$为（　　）

A 奇函数　　B 偶函数　　C 非奇非偶　　D 不确定

（7）$f(x)$为偶函数，则$f'(x)$为（　　）

A 奇函数　　B 偶函数　　C 非奇非偶　　D 不确定

4．主观题　求解下列各题

（1）设 $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\sqrt{1+t} \end{cases}$ 求$\frac{d^2y}{dt^2}$ 。

（2）$xy-2^x+2^y=0$ 求 $y'(0)$ 。

（3）$y=a+\ln(xy)+e^{2x}$ 求 dy 。

（4）求 $\left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)^{(n)}$ 。

（5）求对数螺线 $\rho=e^\theta$ 在$(\rho,\theta)=(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2})$处切线的直角坐标方程 。

（6）$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ e^x-1 & x>0 \end{cases}$ 求 $f'(x)$

（7）设$f'(0)=a,g'(0)=b$,且 $f(0)=g(0)$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-g(-x)}{x}$

练习题答案

1．（1）×　　（2）×　　（3）√　　（4）×

2．（1）k　　（2）$f'(x)\cos f(x)f'[\sin f(x)]\cdot[-\sin\{f[\sin f(x)]\}]$

（3）$\frac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$　　　（4）a= －1　　b=－1

（5）$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$　　（6）$f'(0)=1$

（7）$\frac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$

3.（1） B　（2）B　（3）C　（4）B
（5） B　（6）B　（7）A

4.（1）$-\frac{1}{4}\sqrt{1+t}$　（2）1　（3）$dy=(\frac{y}{y-1})(\frac{1}{x}+2e^{2x})dx$

（5）$x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$　（6）$f'(x)=\begin{cases}2x & x<0\\ e & x>0\\ f'_-(0)=0 & x=0\\ f'_+(0)=1 & \end{cases}$　（7）a＋b

五 自测题

1.填空题

（1）设 $y=e^{-f(x)}f(e^{-x})$，其中 $f(x)$ 有连续的导函数，则 dy=（ ）

（2）设 $f(x)$ 在 x=a 点可导，且 $f'(a)=2a$，则 $\lim\limits_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}=(\quad)$

（3）已知 $\frac{d}{dx}\left[f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{x}$，则 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=(\quad)$

（4）设 $f(x)=\sin x$,则$f'\left(f(x)\right)=(\quad)$

（5）曲线$\begin{cases}x=1+t^2\\ y=t^3\end{cases}$在$t=2$处的切线方程是（ ），法线方程是（ ）。

2.选择题

（1）$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$的不可导点的个数是（ ）。

A. 3　B. 2　C. 1　D. 0

（2）$\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$则$f(x)$在$x=0$处是（ ）。

A.极限不存在　B.极限存在但不连续
C.连续但不可导　D.可导

（3）设$F(x)=f(g(x)), f(2)=3, g(2)=5, g'(2)=4, f'(2)=-2$及$f'(5)=11$，

则$F'(2)$为（ ）。

A.44　B.11　C.－8　D.12

（4）如果$\frac{d}{dx}[f(2x)]=x^2$,则$f'(x)$为（ ）。

A. $\frac{x^2}{8}$　　B. $\frac{x^2}{4}$　　C. $2x$　　D. $\frac{x^2}{2}$

（5）设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充分条件是（　）。

A. $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　B. $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

C. $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　D. $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

3.主观题

（1）$y=\tan(e^{-2x}+1)+\arctan\frac{1}{x}$，求 y'.

（2）$2y=1+xe^{xy}$ 求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$

（3）$\begin{cases} x=a(t-\sin t)+e^2 \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

（4）设 $f(x)=\begin{cases} arctg\frac{1}{x}+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ ax+b & x\geq 0 \end{cases}$ 且对任意 $x,a,b.f'(x)$ 存在，求 a,b

（5）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有定义，且满足 $|f(x)|\leq x^2$，证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$

（6）讨论 $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性

（7）$y=x\ln x$　求 $f^{(n)}(1)$

自测题答案

1.（1）$-e^{-f(x)}\left[f'(x)f(e^{-x})+e^{-x}f'(e^{-x})\right]dx$

（2）$\frac{2a}{\cos a}$；　（3）-1；　（4）$\cos(\sin x)$

2.（1）B；　（2）C；　（3）A；　（4）A；　（5）B

3.（1）$y'=-2e^{-2x}\sec^2(e^{-2x}+1)-\frac{1}{1+x^2}$；　（2）$y'(0)=\frac{1}{2}$；　（3）$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$；

（4）a=－1，b=－∏/2；　（7）$(-1)^{n-2}\cdot(n-2)!$

第三章　微分中值定理与导数的应用

一、基本要求

1、理解并会应用罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒定理证明有关命题及构造相应的辅助函数；

2、掌握用洛必达法则求未定式极限的方法；

3、理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，以及能够判断方程的根、证明函数不等式；掌握函数最大值和最小值的求法（如确定目标函数和约束条件、判定所讨论区间）及其在几何、物理、经济等方面上的简单应用．

4、会用导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图形的拐点，会求曲线的铅直渐近线、斜渐近线及水平渐近线，能够利用导数来把握函数的性态，借此描绘函数的图形；

5、了解曲率和曲率半径的概念，会计算曲率和曲率半径．

二、主要内容

(一) 微分中值定理

费尔马(Fermat) 定理　若函数 $f(x)$ 满足条件 (1) 在 x_0 的某邻域内有定义，且在此邻域内恒有 $f(x)\le f(x_0)$ 或 $f(x)\ge f(x_0)$；(2)在 x_0 处可导，则有 $f'(x_0)=0$.

罗尔(Rolle) 定理　若函数 $f(x)$ 满足条件(1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续；(2)在开区间 (a,b) 内可导;(3) $f(a)=f(b)$,则在 (a,b) 至少存在一个 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

拉格朗日(Lagrange)中值定理　设函数 $f(x)$ 满足条件(1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续;(2)在开区间 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

柯西(Cauchy)中值定理　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件(1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续;(2)在开区间 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\ne 0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

(二) 洛必达(L'Hospital)法则

洛必达法则一（$\frac{0}{0}$型）

若在某极限过程中(下面以 $x\to a$ 为例)有 (1) $f(x)\to 0, g(x)\to 0$; (2) $f(x),g(x)$ 在 $x=a$ 的某去心邻域内可导，$g'(x)\ne 0$; (3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（**A** 为有限数或 ∞），则有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

洛必达法则二（$\frac{\infty}{\infty}$型）

若在某极限过程中（下面以 $x\to a$ 为例）有 (1) $f(x)\to\infty, g(x)\to\infty$; (2) $f(x),g(x)$ 在 $x=a$ 的某去

心邻域内可导，$g'(x)\neq 0$;（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（**A** 有限数或∞），则有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

其他类型的未定式的极限

对于 $0\cdot\infty,\infty-\infty,1^{\infty},\infty^{0},0^{0}$ 型的未定式可以利用洛必达法则求极限，但须先化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型后再应用洛必达法则，如利用 $\lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}=\exp(\lim\limits_{x\to a}v(x)\ln u(x))=\exp(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln u(x)}{\dfrac{1}{v(x)}})$；或取对数的方法即可.

(三)、泰勒（Taylor）公式

泰勒定理　设函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 在点 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数，则对该邻域内的任意点 $\boldsymbol{x}$（$x_0\neq x$），在 $\boldsymbol{x_0}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 之间至少存在一点 ξ，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),\ \text{其中}$$

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)}(x-x_0)^{n+1}$. 称该公式为泰勒公式，特别当 $x_0=0$ 时称为麦克劳林（**Maclaurin**）公式.

(四)、函数的单调性与曲线的凹凸性

函数单调性的判定定理

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

(1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，那末函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

(2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，那末函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

曲线的凹凸与拐点

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续,若对 I 上任意两点 x_1,x_2,恒有 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,那末称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凹的;

若对区间 I 上任意两点 x_1,x_2,恒有 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,那末称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凸的;

定理 1　如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶导数,若在 (a,b) 内

(1) $f''(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的;(2) $f''(x)<0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的;

注：曲线的凹凸性还可以利用曲线与其切线的相对位置来刻画；这几个定义及定理 1 是相互等价的.

定理 2　如果 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内存在二阶导数,则点 $(x_0,f(x_0))$ 是拐点的必要条件是 $f''(x_0)=0$.

(五)、函数的极值与最值

定理一、(必要条件) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数,且在 x_0 处取得极值,那末必定 $f'(x_0)=0$.

定理二、(第一充分条件)

(1) 如果 $x\in(x_0-\delta,x_0)$,有 $f'(x)>0$;而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$,有 $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

(2) 如果 $x\in(x_0-\delta,x_0)$,有 $f'(x)<0$;而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

(3) 如果当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 及 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, $f'(x)$ 符号相同, 则 $f(x)$ 在 x_0 处无极值.

定理三、(第二充分条件)

设 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数,且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, 那末
(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；
(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

求极值的步骤:
(1) 求导数 $f'(x)$;
(2) 求驻点，即方程 $f'(x)=0$ 的根,并求不可导的点；
(3) 检查 $f'(x)$ 在这些点左右附近的符号变化，对于 $f''(x)$ 存在但不等于零的驻点，还可由 $f''(x)$ 正负判定这些点是否极值点,是极大、小值点；
(4) 求极值.

求最大值、最小值问题
求最值的步骤如下：
(1) 求驻点与不可导的点；
(2)求区间端点、驻点和不可导点处的函数值，比较这些值的大小，哪个值大那个就是最大值，哪个值小那个就是最小值；
注意区间是开区间或无穷区间，而区间内只有一个极值的情形.

函数图形的描绘
利用函数的性态描绘函数的图形，其主要步骤如下：
(1) 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域，讨论函数的连续性、奇偶性、周期性等性态；
(2) 求一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$，并求使得 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 的点与不存在的点；用这些点把函数的定义域划分成几个部分区间；列表讨论 $f'(x)$、$f''(x)$ 在这些区间内的符号，并由此判断 $f(x)$ 在哪个区间上是增是减，在哪个区间上是凹是凸，在哪点处凹凸性发生变化，又在哪点处取得极值等；
(3) 确定函数图形的铅直渐近线；斜渐近线以及水平渐近线；
(4) 综合以上性态，只要描出少量的关键点(譬如：曲线与坐标轴交点、极值点、拐点等)即可.

(七)、曲率（略）

三、例题分析

(一)、微分中值定理

【例 1】已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内 $\boldsymbol{f''(x)}$ 存在，又连结 $\boldsymbol{A(a,f(a)),B(b,f(b))}$ 两点的直线

交曲线 $y=f(x)$ 于点 $C(c,f(c))$，且 $a<c<b$，试证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$．

【分析】该类型题的结论是，存在 ξ，使得 $f^{(n)}(\xi)=0(n\ge 2)$．证法主要有三种：其一： 验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件，由罗尔定理即得；其二：验证 ξ 为 $f^{(n)}(x)$ 的最值点或极值点，由费马定理即得；最后：利用泰勒公式得到 f，f'，f'',...， $f^{(n)}$ 间的关系，进而求得所证.

【证明】 依题设，函数 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均满足拉格朗日中值定理的条件，于是有

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \qquad \xi_1\in(a,c)$$
$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c} \qquad \xi_1\in(c,b)$$

因为 A、B、C 三点在同一条直线上，所以

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

故 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，因而 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理的条件．于是，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$．得证.

【例 2】设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，其中 $a>0$，$f(a)=0$，证明在 (a,b) 内必有一点 ξ 使得 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$．

【分析】反推结论以构造辅助函数，即以 x 代替 ξ，整理得：$af(x)-(b-x)f'(x)=0$

又
$$\begin{aligned}&\left(af(x)-(b-x)f'(x)\right)(b-x)^{a-1}\\&=a(b-x)^{a-1}f(x)-(b-x)^a f'(x)\\&=-\left((b-x)^a f(x)\right)',\end{aligned}$$

故取函数 $F(x)=(b-x)^a f(x)$，利用罗尔定理即可得所证.

【证】令 $F(x)=(b-x)^a f(x)$，则 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，于是由罗尔定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$a(b-\xi)^{a-1}f(\xi)-(b-\xi)^a f'(\xi)=0$$

由于 $a\ne 0, b-\xi\ne 0$，故有： $af(\xi)-(b-\xi)f'(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$ 成立.

【例 3】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，求证：存在 $\xi\in(a,b)$,

使得 $\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$．

【分析】方法同【例 2】关键是构造辅助函数．

【证】令 $F(x)=e^{\frac{x^2}{2}}f(x)$，则 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，于是由 Rolle 定理，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$，即：

$$\xi e^{\frac{\xi^2}{2}}f(\xi)+e^{\frac{\xi^2}{2}}f'(\xi)=0$$

由于 $e^{\frac{\xi^2}{2}}\neq 0$，故有： $\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$ 成立．

【例 4】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$．

【分析】显然此例需运用两次中值定理．由结果反推得

$$\left(e^x f(x)\right)'\Big|_{x=\eta}\Leftarrow e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}\Rightarrow(e^x)'\Big|_{x=\xi}\xrightarrow{LagrangeTH}\frac{e^b-e^a}{b-a},$$

又 $\dfrac{e^b-e^a}{b-a}=\dfrac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}\Rightarrow\left(e^x f(x)\right)'\Big|_{x=\eta}$，故取辅助函数 $F(x)=e^x f(x)$ 与 $G(x)=e^x$ 即可．

【证明】令 $F(x)=e^x f(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lagrange 中值定理的条件，故 $\exists\eta\in(a,b)$,使得 $\dfrac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}=\left(e^x f(x)\right)'\Big|_{x=\eta}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$

即 $\dfrac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$　……　(1)

又对 $G(x)=e^x$ 在 $[a,b]$ 上应用 Lagrange 中值定理，知 $\exists\xi\in(a,b)$, 有 $\dfrac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\xi}$　……(2)

于是由(1)、(2)有 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$， 即 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$．

【例 5】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$，试证：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$．

【分析】反推结果，令 $F(x)=f(x)-x$，又 $F(0)=0, F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}, F(1)=-1$，可见：$F(\frac{1}{2})\cdot F(1)<1$，即 $F(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上满足零点存在定理的条件，$\therefore\exists\, x_0\in(\frac{1}{2},1)$, 使 $F(x_0)=0$．而此时 $F(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上满足 **Rolle** 定理的条件．

【证明】令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 连续，且 $F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}, F(1)=-1$，即 $F(\frac{1}{2})\cdot F(1)<0$，于是由零点存在

定理知$\exists x_0 \in (\frac{1}{2},1)$,使$F(x_0)=0$．又$F(0)=0$，及$F(x)$可导，即$F(x)$在区间$[0,x_0]$上满足 Rolle 定理条件,于是$\exists \xi \in (0,x_0) \subset (0,1)$,使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$,即 $f'(\xi)=1$．

【例 6】设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上可导,且$f(0)=0, f(1)=1$，试证明在区间$(0,1)$ 内存在两点x_1,x_2,使得 $\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2$成立.

【分析】由结论可以判定此例需要应用两次中值定理．因为区间端点处的函数值已知，所以给一特殊值并利用介值定理找到区间内另一点ξ．进而分别在$[0,\xi],[\xi,1]$上应用 Lagrange 中值定理,即$\exists\ x_1 \in (0,\xi) \subset [0,1],\ x_2 \in (\xi,1) \subset [0,1]$，有导数值$f'(x_1), f'(x_2)$被函数值$f(0), f(\xi), f(1)$表示出来，且$\xi$最后被抵消掉．注意此问题可按规律给出不同的函数值，进而得到不同的结论．

【证】由题意知$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，又$f(0)=0, f(1)=1$,于是由闭区间上连续函数的介值定理,存在$\xi\in(0,1)$使得　　$f(\xi)=\frac{1}{2}$

于是分别在区间$[0,\xi],[\xi,1]$上对$f(x)$应用 Lagrange 中值定理得：

$$f'(x_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=\frac{f(\xi)}{\xi} \qquad x_1\in(0,\xi)$$

$$f'(x_2)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-f(\xi)}{1-\xi} \qquad x_2\in(\xi,1)$$

于是，有：$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{\xi}{f(\xi)}+\frac{1-\xi}{1-f(\xi)}=\frac{\xi}{\frac{1}{2}}+\frac{1-\xi}{1-\frac{1}{2}}=2$．

【例 7】设$b>a>1$，试证明$be^a-ae^b<b-a$.

【分析】由结果反推，即不等式两端同乘以$a\cdot b$得：$\frac{e^a}{a}-\frac{e^b}{b}<\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$，即 $\frac{\frac{e^a}{a}-\frac{e^b}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}<1$，

左端提示取$f(x)=\frac{e^x}{x}$，$g(x)=\frac{1}{x}$，及 Cauchy 中值定理即可；另利用单调性证明该不等式是另一常用法.

【证明】令$f(x)=\frac{e^x}{x}$，$g(x)=\frac{1}{x}$，则在$[a,b]$上应用 Cauchy 中值定理，得

$$\frac{\frac{e^a}{a}-\frac{e^b}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{(\frac{e^x}{x})'}{(\frac{1}{x})'}\Big|_{x=\xi}=\frac{\frac{e^{\xi}(\xi-1)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=e^{\xi}(1-\xi)，\quad 1<a<\xi<b$$

又$\because\ \xi>1,\ \therefore 1-\xi<0,\ 1-\xi)\,e^{\xi}<1$，从而 $\dfrac{\dfrac{e^a}{a}-\dfrac{e^b}{b}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}<1$，进而得到$be^a-ae^b<b-a$.

【注】若改e^x为$\varphi(x)$，有一般结论$\dfrac{a\varphi(b)-b\varphi(a)}{a-b}=\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)$,或$\dfrac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ \varphi(a) & \varphi(b)\end{vmatrix}=\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)$.

【例 8】设$f(x)$在区间$[a,b]$上可导，若 $f'(a)f'(b)<0$, 证明在(a,b)内至少存在一点ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

【注】此问题实为导函数$f'(x)$的零点存在定理,需证$f(x)$的最大值在(a,b)内取得并应用费尔马定理即可.

【证明】不妨设 $f'(a)>0,\ f'(b)<0$.

由于$f(x)$在区间$[a,b]$上可导，故连续，因而$f(x)$在区间$[a,b]$上取得最大值.

又 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$,

$\therefore$在 a点的某右邻域内有 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0(x>a)$, 即 $f(x)>f(a)$

又 $f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$,

$\therefore$在 b点的某左邻域内有 $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0(x<b)$, 即 $f(x)>f(b)$

可见$f(x)$的最大值点$\xi\in(a,b)$，于是由费尔马定理知必有： $f'(\xi)=0$. 得证.

【例 9】已知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$, 试证：至少存在一点$\xi$使$f'(\xi)=0$.

【分析】此结论可以称为无穷区间上的广义罗尔定理．证明的关键是找一变换，其可以将该无穷区间上的问题转化为有限区间上，再借助于罗尔定理即可.

【证明】令$x=\tan t$, $F(t)=\begin{cases} f(\tan t) & t\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}) \\ A & t=\pm\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

则由 $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^-}F(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{t\to-\frac{\pi}{2}^+}F(t)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ ，知$F(t)$在$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$上连续，又$F(t)$在$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$内可导，且$F(-\dfrac{\pi}{2})=f(\dfrac{\pi}{2})$,于是由罗尔定理知，存在$\eta\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，使得$F'(\eta)=0$，即

$f'(\tan\eta)\sec^2\eta=0$，由于$\sec^2\eta\neq0$, 故$f'(\tan\eta)=0$，令$\xi=\tan\eta$, 则$f'(\xi)=0$ 成立．得证.

【例 10】设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且$f(a)=f(b)=0$, $f'_+(a)>0$, 试证明在(a,b)内至少存在一点ξ，使得 $f''(\xi)<0$.

【分析】首先要明确在a点的某右邻域内$f(x)$是单调增加的，且$f(x)>0$，但在$[a,b]$内$f(x)$不是始终单

调增加的；其次利用拉格朗日中值定理由 f 的符号推断 f' 的符号，再由 f' 的符号推断 f'' 的符号.

【证明】由于 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，故存在较小的 $\delta>0$，使当 $a<x<a+\delta<b$ 时，有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

由于 $f(a)=0,$ 故 $f(x)>0$．取 $c\in(a,a+\delta)$, 由拉格朗日中值定理，$\exists\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a}>0,$$
$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=-\frac{f(c)}{b-c}<0.$$

于是在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对 $f'(x)$ 应用拉格朗日中值定理知 $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$, 使得：

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1},$$

显然 $f''(\xi)<0$．得证.

【例 11】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$, 且 $f'(a)\cdot f'(b)>0$, 证明在 (a,b) 内存在点 ξ,η，使得：$f(\xi)=0$，$f''(\eta)=0$.

【分析】类似于【例 10】需要根据 $f'(x)$ 的符号判断并把握 $f(x)$ 的性态，即可推断在 a 点的某右邻域内与 b 点的某左邻域内，$f(x)$ 的符号发生变化，可见 $f(x)$ 有第三个零点，还可以判断 $f'(x)$ 至少存在二个零点，从而 $f''(x)$ 至少存在一个零点．另外，练习题 ㈣ 中第 7 题是此例的另一形式.

【证明】不妨设 $f'(a)>0,f'(b)>0$. 由于 $f(a)=f(b)=0,\therefore$ $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{x-a}>0$,

$f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{x-b}>0$, 故 $f(x)$ 在 a 点的某右邻域内与 b 点的某左邻域内分别满足

$$f(x)>0,\quad a<x<a+\delta<b \quad 与 \quad f(x)<0,\quad a<b-\delta<x<b \quad (其中\delta>0适当小).$$

现任取两点 x_1,x_2 $(a<x_1<a+\delta,\ \ b-\delta<x_2<b)$ 有：$f(x_1)>0,f(x_2)<0$．于是在区间 $[x_1,x_2]$ 上应用介值定理知，$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$, 进而在区间 $[a,\xi],[\xi,b]$ 上对 $f(x)$ 分别应用 Rolle 定理，得：$f'(\xi_1)=0,\quad f'(\xi_2)=0\quad (a<\xi_1<\xi<\xi_1<b)$

可见 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足 Rolle 定理的条件，于是 $\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 有 $f''(\eta)=0$.得证.

【例 12】设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续有界且单调增加，在 $(0,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f''(x)<0$，试证明：

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$

【注】此例的思路有助于在无穷区间上应用中值定理.

【证明】$\because f(x)$单调增加，$\therefore f'(x)\ge 0$，即$f'(x)$有下界；又$\because f''(x)<0$，$\therefore f'(x)$单调减少，于是由单调有界原理知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=A$存在且$A\ge 0$．以下需证只有$A=0$.

若不然，则$A>0$．于是对$\dfrac{A}{2}$而言，∃充分大的$X>0$,使当$x>X$时,有 $f'(x)>\dfrac{A}{2}$，从而当 $x>X$ 应用 Lagrange 中值定理知，$\exists\,\xi\in(X,x)$有

$$f(x)=\big(f(x)-f(X)\big)+f(X)=f'(\xi)(x-X)+f(X)>\frac{A}{2}(x-X)+f(X)$$

两端取极限，得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ge\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{A}{2}(x-X)+f(X)\right)=+\infty$，这与$f(x)$在$[0,+\infty]$上有界矛盾，

故$A=0$，亦即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(二)、洛必达法则

【例 13】求极限 ⑴$\lim\limits_{x\to\infty}[(x+1)e^{\frac{1}{x}}-x]$；⑵ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{x}}$；⑶$\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^2}$ (n为正整数).

【解】⑴ 这是$\infty-\infty$型 的极限问题．令$t=\dfrac{1}{x}$，则

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}[(\frac{1}{t}+1)e^{t}-\frac{1}{t}]=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)e^{t}-1}{t}\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{(2+t)e^{t}}{1}=2\text{；}$$

⑵ $\because \lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^{\frac{1}{x}})}{x}}$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^{\frac{1}{x}})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+\ln(1+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}}{x}=0\text{，}\therefore\ \text{原式}=1.$$

⑶ 这是1^∞型 的极限问题．由于 $\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}[(1+\dfrac{\tan x-x}{x})^{\frac{x}{\tan x-x}}]^{\frac{\tan x-x}{x^3}}$ 及

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x}=0\ \therefore\ \lim_{x\to0^+}[(1+\frac{\tan x-x}{x})^{\frac{x}{\tan x-x}}]=e\text{又}\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{1}{3}\text{，}$$

$\therefore\quad \lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}}$，　再取$x=\dfrac{1}{n}$及海因定理得：原式$=e^{\frac{1}{3}}$.

【例 14】设函数$f(x)$在点$x=0$处可导，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{e^{f(x)}-1}=1$, 则$f'(0)=$(　　　　).

【解】由于$e^{f(x)}-1\sim\cos x-1\quad(x\to0)$，$\therefore\ \lim\limits_{x\to0}[e^{f(x)}-1]=0$ 且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，

又$f(x)$在点$x=0$处连续，可见$f(0)=0$.

从而有：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{x}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{\cos x-1}\left(-\frac{x}{2}\right)=0$$，即填入 0．

【例 15】设 $f(x)$ 具有二阶导数,当 $x\neq \mathbf{0}$ 时, $f(x)\neq \mathbf{0}$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0, f''(0)=4$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$.

【解】∵ $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}\ \underline{\underline{1^{\infty}\text{型}}}\ \lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}$

又∵ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，知 $f(0)=0$，$f'(0)=0$， 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\ \underline{\underline{\tfrac{0}{0}\text{型}}}\ \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)=2$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^2$．

【注】极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}$ 不再满足 L'Hospital 法则的条件,切忌再利用 L'Hospital 法则！否则会陷入僵局．即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}\ \underline{\underline{\ ?\ }}\ \frac{1}{2}f''(0)$$．

【例 16】设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有界且可导，则下列命题成立的是(　　　　)．

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\mathbf{0}$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\mathbf{0}$　(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时 ,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\mathbf{0}$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\mathbf{0}$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\mathbf{0}$　(D) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$ 存在时 ,必有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\mathbf{0}$

【解】若取 $g(x)=x$，由 L'Hospital 法则得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}\ \underline{\underline{\tfrac{0}{0}\text{型}}}\ \lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$，故 C 选项不一定成立；同理 A 选项也不一定成立,取 $f(x)=\frac{1}{x}\cos x^2$ 验证；又取 $f(x)=x, f'(x)\equiv 1\neq 0$,可见 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)\neq 0$, D 选项需剔除；

最后，B 选项同于 D 选项，也是描述 $f'(x)$ 间的关系，但 $\forall x_0, x(0<x_0<x)$ 在区间 $[x_0,x]$ 上应用 Lagrange 中值定理,有：$|f'(\xi)|=\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\le 2M\frac{1}{x-x_0}(x_0<\xi<x,\ |f(x)|\le M, M>0, x\in(0,+\infty))$

再令 $x\to+\infty$，亦 $\xi\to+\infty$，取极限得：

$$\lim_{\xi\to+\infty}|f'(\xi)|\le\lim_{x\to+\infty}2M\frac{1}{x-x_0}\to 0,\quad \text{即}\ \lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$$，故应选（B)．

【例 17】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 n 是给定的自然数．

【解】令 $y=\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，则

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}\quad(\frac{0}{0}\text{型})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$$

故 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{n+1}{2}}$$

【注】这是运用 L'Hospital 法则确定未定式的值的典例，其类似例子很多，如 $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

【例 18】设 $f(x)$在$x=0$处 有二阶导数,且当 $x\to 0$时, $\ln(1+xf(x))\sim x^2(3^x-2^x)$, 试求 $f''(0)$.

【分析】此例为一综合练习题，涉及到等价无穷小、洛必达法则、常用极限公式及导数概念等.

【解】∵当 $x\to 0$时, $x^2(3^x-2^x)\to 0$, 又 $\ln(1+xf(x))\sim x^2(3^x-2^x)$,

∴当 $x\to 0$时，有 $\ln(1+xf(x))\to 0$，$xf(x)\to 0$, $\ln(1+xf(x))\sim xf(x)$.

又 $3^x-2^x=e^{x\ln 3}-e^{x\ln 2}=e^{x\ln 2}(e^{x(\ln 3-\ln 2)}-1)\sim x(\ln 3-\ln 2)=x\ln\dfrac{3}{2}\quad(x\to 0)$

于是，有：$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+xf(x))}{x^2(3^x-2^x)}\xrightarrow{\text{等价性}}\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{x^2\cdot x\ln\frac{3}{2}}=\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\xrightarrow{\frac{0}{0}}\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}f''(0),$$ 即 $\dfrac{1}{2\ln\frac{3}{2}}f''(0)=1$, 可见：$f''(0)=2\ln\dfrac{3}{2}$.

(三)、泰勒公式

【例 19】当 $x\to 0$时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 为几阶无穷小.

【注】对无穷小进行代数运算后，其仍为无穷小，但该无穷小的阶是多少需要较为深入的分析.

【解】由于 $3x-4\sin x+\sin x\cos x$

$$=3x-4\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$=3x-4(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6))+\frac{1}{2}(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^6))=\frac{1}{10}x^5+o(x^6)\quad(x\to 0)$$

故当 $x\to 0$时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 为 5 阶无穷小.

【例 20】已知函数 $f(x)$ 在 x=0 的某个邻域内有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=2$，求 $f(0)$、$f'(0)$.

【解】由于 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^2}=2$$

可知当$x\to 0$时，$\sin x+xf(x)$ 与 $2x^2$ 是等价无穷小．又

$$\sin x+xf(x)=(x+o(x^2))+x(f(0)+f'(0)x+o(x))$$
$$=(1+f(0))x+f'(0)x^2+o(x^2)\sim 2x^2(x\to 0)$$

可见　$1+f(0)=0,\ f'(0)=2$，　即：　$f(0)=-1,\ f'(0)=2$.

【注】切勿盲目利用洛必达法则，因为极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+f(x)+xf'(x)}{2x}$ 是否存在尚不清楚．

【例 21】 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!)$

【分析】利用 e^x 的 Maclurin 展开公式，表示 e；并注意到 $\sin(2\pi n+\alpha_n)=\sin\alpha_n$，$n$为正整数　.

【解】 $$\because e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\ (n\to\infty)$$

$$2\pi en!=2\pi\left[2n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\dots+1+\frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]\quad(n\to\infty)$$

$$\therefore \sin(2\pi en!)=\sin\left(2\pi\left[2n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\dots+1+\frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]\right)$$

$$=\sin\left[\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]\sim\frac{2\pi}{n+1}\quad(n\to\infty)$$

故 $$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi n}{n+1}=2\pi .$$

【例 22】设函数 $f(x)$ 具有三阶导数，且满足： $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=C,\ \lim\limits_{x\to\infty} f'''(x)=0$ (C 为实数)，

求证：$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0,\ \lim\limits_{x\to\infty} f''(x)=0$.

【分析】此题解法归结为一种常见思维模式，即若 $f(x)$ 二阶或二阶以上导数存在，先把 $f(x)$ 在指定点处 Taylor 展开，基此得到了 $f,\ f',\ f'',\ f''',\dots$ 间所满足的关系式，进而可以导出所要的结论．

【证明】由于 $$f(x+1)=f(x)+f'(x)(x+1-x)+\frac{f''(x)}{2!}(x+1-x)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(x+1-x)^3$$

$$=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{3!},\quad \xi_1\in(x,x+1)$$

$$f(x-1)=f(x)+f'(x)(x-1-x)+\frac{f''(x)}{2!}(x-1-x)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}(x-1-x)^3$$

$$= f(x)-f'(x)+\frac{f''(x)}{2}-\frac{f'''(\xi_2)}{3!},\quad \xi_2\in(x-1,x)$$

两式相减，得：$f(x+1)-f(x-1)=2f'(x)+\frac{1}{6}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))$

令 $x\to\infty$，即 $\xi_1\to\infty,\xi_2\to\infty$，取极限得：　$c-c=2\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)+\frac{1}{6}(0+0)$

故　$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$

再在 $f(x+1)$ 的泰勒公式中令 $x\to\infty$ 取极限得：　$c=c+0+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f''(x)}{2}+0$

故　$\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$．　得证．

【例 23】设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{x\in(0,1)}f(x)=-1$，证明 $\max\limits_{x\in[0,1]}f''(x)\ge 8$.

【分析】显然泰勒公式可以将 f，f'，f'' 联系起来，但如何充分利用已知条件是问题的关键.

【证明】由题意知 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 内取得最小值，即 $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$，

由 Fermat 定理知 x_0 是可导函数 $f(x)$ 的驻点，故 $f'(x_0)=0$.

于是，在 x_0 点处运用泰勒定理，有：

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{f''(\xi_1)}{2!}x_0^2,\quad \xi_1\in(0,x_0)$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x_0)^2,\quad \xi_2\in(x_0,1)$$

亦即　$0=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2!}x_0^2\quad\Rightarrow\quad f''(\xi_1)=\frac{2}{x_0^2}$

$$0=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x_0)^2\quad\Rightarrow\quad f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2}$$

$\therefore$ 当 $x_0<\frac{1}{2}$ 时，有 $f''(\xi_1)>\frac{2}{(\frac{1}{2})^2}=8$，而当 $x_0\ge\frac{1}{2}$ 时，有 $f''(\xi_2)\ge\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^2}=8$，

故　$\max\limits_{x\in[0,1]}f''(x)\ge 8$．　得证．

【注】泰勒公式的应用主要包括：函数的近似计算、判定无穷小的阶、求极限、证明一些等式与不等式等，需要注意利用泰勒公式解决的例子常具有明显特点，应该很好地把握.

(四)、函数的单调性与曲线的凹凸性

【例 24】设 $e<a<b<e^2$， 证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

【分析】此例可以在区间 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理证明，其中辅助函数 $\varphi(x)=\ln^2 x$; 也可利用函数的单调性加以证明，此时可以构造辅助函数 $\psi(x)=\ln^2 x-\frac{4}{e^2}x$.

【证明】方法一：令 $\varphi(x)=\ln^2 x, x\in[a,b]\subset[e,e^2]$，

于是在 $[a,b]$ 上对 $\varphi(x)$ 应用拉格朗日中值定理，得

$$\ln^2 b-\ln^2 a=(\ln^2 x)'\Big|_{x=\xi}(b-a)=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),\quad a<\xi<b \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

再令 $\varphi_1(x)=\frac{\ln x}{x}$, 则 $\varphi_1'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

$\therefore$ 当 $x>e$ 时, $\varphi_1'(x)<0\Rightarrow\varphi_1(x)\downarrow\ \Rightarrow\varphi_1(\xi)>\varphi_1(e^2)$ ，即

$$\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2}\quad \cdots\cdots \quad (2)$$

由(1)、(2)得： $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a),\quad a<\xi<b$.

方法二：设 $\psi(x)=\ln^2 x-\frac{4}{e^2}x$, 则 $\psi'(x)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{4}{e^2}$, $\psi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2}$,

可见，当 $x>e$ 时, $\psi''(x)<0$, $\psi'(x)\downarrow\Rightarrow$ 当 $e<x<e^2$ 时，有

$$\psi'(x)>\psi'(e^2)=\frac{2\ln e^2}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0,$$

表明当 $e<x<e^2$ 时，有 $\psi(x)\uparrow$.从而当 $e<a<b<e^2$ 时，有 $\psi(b)>\psi(a)$, 即

$\ln^2 b-\frac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\frac{4}{e^2}a$，从而 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$. 得证.

【注】概括不等式的求证方法，主要有如下各法：利用微分中值定理；利用函数的单调性；利用函数的极值；利用泰勒公式以及利用曲线的凹凸性等.此例选用了最适合本例的 2 种方法.

【例 25】设 $0<a<b$, 证明不等式： $\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

【分析】此例需要证明两个(左、右)不等式．方法一：对两个不等式均利用函数的单调性证明,分别构造

辅助函数(辅助函数不唯一)：左端：$F(x)=\ln x-\ln a-\dfrac{x-a}{\sqrt{ax}}(x>a>0)$

右端：$G(x)=(x^2+a^2)(\ln x-\ln a)-2a(x-a)\ (x>a>0)$；

方法二：左端不等式具有个性,构建辅助函数及 Lagrange 中值定理即可．另外，若重新表示不等式可以建立不同的辅助函数，得到更多的证明方法．此例还可以采用定积分等方法证明．

【证明】方法一：(右端) 令 $F(x)=\ln x-\ln a-\dfrac{x-a}{\sqrt{ax}}(x>a>0)$

$\because F'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{a}{2x\sqrt{x}})=\dfrac{2\sqrt{ax}-x-a}{2x\sqrt{ax}}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{2x\sqrt{ax}}<0$

$\therefore$ 当 $x>a$ 时，$F(x)\downarrow$，又 $F(a)=0$，从而 $\forall x>a$， 都有 $F(x)<F(a)=0$， 即

$$\ln x-\ln a-\frac{x-a}{\sqrt{ax}}<0\Rightarrow \ln x-\ln a<\frac{x-a}{\sqrt{ax}}$$

特别取 $x=b$，则有　$\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}$．

(左端) 令 $G(x)=(x^2+a^2)(\ln x-\ln a)-2a(x-a)\ (x>a>0)$

$\because G(x)=2x(\ln x-\ln a)+\dfrac{x^2+a^2}{x}-2a=2x(\ln x-\ln a)+\dfrac{(x-a)^2}{x}>0$

$\therefore$ 当 $x>a$ 时，$G(x)\uparrow$，又 $G(a)=0$，从而 $\forall x>a$， 都有 $G(x)>G(a)=0$， 即

$$(x^2+a^2)(\ln x-\ln a)-2a(x-a)>0\Rightarrow \frac{\ln x-\ln a}{x-a}>\frac{2a}{x^2+a^2}$$

特别取 $x=b$，则有　$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{2a}{b^2+a^2}$．

方法二：(仅证左端不等式)令 $f(x)=\ln x\quad(x>a>0)$，由 Lagrange 中值定理至少存在一点 $\xi\in(a,b)$有：

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\Big|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi}$$

由于 $0<a<\xi<b$，故 $\dfrac{1}{\xi}>\dfrac{1}{b}$ 及 $a^2+b^2>2ab\Rightarrow\dfrac{1}{b}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$

从而成立：$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}=\dfrac{1}{\xi}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$．得证．

【例 26】试证：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$．

【分析】类似于例 24、例 25，可以构建不同的辅助函数，譬如，令 $F(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\quad(x>0)$，

或令 $F(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}\quad (x>0)$，求其导数，并利用导数的符号判断函数的单调性，进而得到所证不等式；此处给出利用 Lagrange 中值定理及 Taylor 定理的证明方法，其他方法略.

【证明】方法一：对 $\ln t$ 在1和 x 之间应用 Lagrange 中值定理，得 $\frac{\ln x}{x-1}=\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=(\ln t)'\big|_{t=\xi}=\frac{1}{\xi}$，

其中 ξ 介于 x 与1之间, $x>0$.　$\because x>0\Rightarrow\ 0<\xi<1+x\Rightarrow\ \frac{1+x}{\xi}>1$,

于是当 $x>0$ 有：$(x^2-1)\ln x-(x-1)^2=(x^2-1)\cdot[\frac{x+1}{\xi}-1]\geq 0$. 得证.

方法二：令 $F(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\quad (x>0)$，$F(1)=0$；

又 $F'(x)=2x\ln x-x+2-\frac{1}{x}$，$F'(1)=0$；$F''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2}$，$F''(1)=2>0$

$$F'''(x)=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}=\frac{2(x^2-1)}{x^3}=\begin{cases}<0 & 0<x<1\\ >0 & 1<x<+\infty\end{cases}$$

于是将 $F(x)$ 在点 $x=1$ Taylor 展开，得

$F(x)=F(1)+F'(1)(x-1)+\frac{1}{2!}F''(1)(x-1)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi)(x-1)^3$　其中 ξ 介于 x 与1之间

$=(x-1)^2+\frac{1}{6}F'''(\xi)(x-1)^3\ \geq\frac{1}{6}F'''(\xi)(x-1)^3\geq 0$，$\therefore F(x)\geq 0,\forall x>0$，即不等式成立.

【例 27】设α>β>e，证明不等式：$\beta^{\alpha}>\alpha^{\beta}$.

【证明】方法一：欲 $\beta^{\alpha}>\alpha^{\beta}$　只需 $\alpha\ln\beta>\beta\ln\alpha$

故令　$F(x)=x\ln\beta-\beta\ln x\ ,x>\beta>e$，

则 $F'(x)=\ln\beta-\frac{\beta}{x}>1-\frac{\beta}{x}>0$，又 $F(\beta)=0$

所以，$F(x)$ 在 $x>\beta$ 上(严格单增)，且 $F(x)>F(\beta)=0$. 即当 $x>\beta$ 时，有 $F(x)>0$ 成立，

于是：$x\ln\beta>\beta\ln x$.

特别地，取 $x=a>\beta$ 有　$\alpha\ln\beta>\beta\ln\alpha$. 得证.

方法二：将不等式化为：$\frac{\ln\alpha}{\alpha}<\frac{\ln\beta}{\beta}$，令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x>\beta>e$

当$x>e$时，$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$，故 $g(x)$在 $x>e$上严格单减，

于是由 $\alpha>\beta>e$，有 $\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}<\dfrac{\ln\beta}{\beta}$ 两端乘以$\alpha\cdot\beta$．即可．

【例 28】试证明：当$0<x<y$，对$\forall a>0,b>0$，都有 $(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}>(a^y+b^y)^{\frac{1}{y}}$．

【证明】 1° 若$a=b$，由$0<x<y\Rightarrow 2^{\frac{1}{x}}>2^{\frac{1}{y}}\Rightarrow(2a^x)^{\frac{1}{x}}>(2a^y)^{\frac{1}{y}}$，即

$$(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}>(a^y+b^y)^{\frac{1}{y}}\text{成立；}$$

2° 若$a>b$，当$0<x<y$时，由于$(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}=a(1+(\frac{b}{a})^x)^{\frac{1}{x}}$，令 $f(x)=(1+(\frac{b}{a})^x)^{\frac{1}{x}}$，

$$\because\ f'(x)=(1+(\frac{b}{a})^x)^{\frac{1}{x}}\left((\frac{-1}{x^2})\cdot\ln(1+(\frac{b}{a})^x)+\frac{1}{x}(1+(\frac{b}{a})^x)^{-1}(\frac{b}{a})^x\ln(\frac{b}{a})\right)<0,\quad\therefore\ f(x)\downarrow$$

即 $(1+(\frac{b}{a})^x)^{\frac{1}{x}}>(1+(\frac{b}{a})^y)^{\frac{1}{y}}\Rightarrow a(1+(\frac{b}{a})^x)^{\frac{1}{x}}>a(1+(\frac{b}{a})^y)^{\frac{1}{y}}\Rightarrow(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}>(a^y+b^y)^{\frac{1}{y}}$成立；

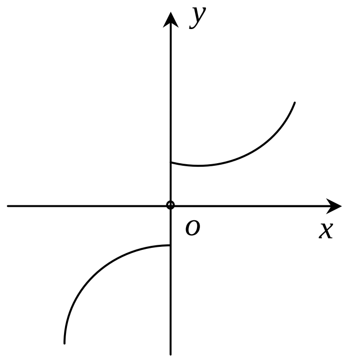
3° 若$a<b$，$\because\ (a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}=(1+(\frac{a}{b})^x)^{\frac{1}{x}}$，当$0<x<y$时，由$2^\circ$知$(1+(\frac{a}{b})^x)^{\frac{1}{x}}>(1+(\frac{a}{b})^y)^{\frac{1}{y}}\Rightarrow$ $b(1+(\frac{a}{b})^x)^{\frac{1}{x}}>b(1+(\frac{a}{b})^y)^{\frac{1}{y}}$，即 $(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}>(a^y+b^y)^{\frac{1}{y}}$ 成立．得证．

【例 29】⑴ 若$f(x)=-f(-x)$，在$(0,+\infty)$ $f'(x)>0,f''(x)>0$，则$f(x)$在$(-\infty,0)$内(　　)．

(A) $f'(0)<0,f''(x)<0$　　(B) $f'(0)<0,f''(x)>0$

(C) $f'(0)>0,f''(x)<0$　　(D) $f'(0)>0,f''(x)>0$

【解】 **方法一**：图像法(见图)，$\because\ f(x)=-f(-x)$，故$f(x)$为奇函数，在$(0,+\infty)$内 $f'(x)>0$ 知 $f(x)$严格增加，由$f''(x)>0$知$f(x)$是凹曲线(下凸的)．故由奇函数关于原点对称的特点知，在$(-\infty,0)$内$f(x)$严格增加、凸的(上凸)，故选 C．



方法二：$\because\ f(x)=-f(-x)$，两边对x求导得：

$$f'(x)=f'(-x),\quad f''(x)=-f''(-x)$$

当$x\in(-\infty,0)$时，有$-x\in(0,+\infty)$，此时

$0<f'(-x)=f'(x),\quad 0<f''(-x)=-f''(x)$，即

$f'(x)>0,\quad f''(x)<0\quad x\in(-\infty,0)$，在$(-\infty,0)$内$f(x)$严格增加、凸的(上凸)，故选C．

⑵ 若 $y = f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数，如果 $f'(x_0)=0, f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$，则下述成立的是(　　).

(A) $f(x_0)$ 为极值，但点 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线的拐点　(B) $f(x_0)$ 非极值，而点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点

(C) $f(x_0)$ 为极值，且点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点　(D) $f(x_0)$ 非极值，且点 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线的拐点

【解】由反证法,不妨 $f'''(x_0)>0$，$\because f'''(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续,故存在 x_0 的某一邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\,(\delta>0)$，

在此邻域内 $f'''(x)>0 \Rightarrow (f''(x))'>0 \Rightarrow f''(x)\uparrow, x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. 又 $\because f''(x_0)=0$,

故当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时，$f''(x)<0$; 而 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时，$f''(x)>0$，

可见 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点；另外由 $f(x)$ 在 x_0 点连续，及 $x\in(x_0-\delta, x_0)$, $(f'(x))'<0$

$\Rightarrow f'(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0]$ 上 $\downarrow \Rightarrow f'(x)>0$; 又由 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时, $(f'(x))'>0 \Rightarrow f'(x)$ 在 $[x_0, x_0+\delta)$

上 $\uparrow \Rightarrow f'(x)>0$，$\therefore$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上 $f(x)\uparrow$，而 $f'(x_0)=0$，可见该驻点非极值点. 应选择B.

【注】不能用极值的第二判定定理.

【例 30】证明方程 $x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x = 1\,(n\geq 2$ 为正整数$)$ 在区间 $(0,1)$ 内必有唯一根 x_n，并求数列 $\{x_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【分析】方程 $f(x)=0$ 的根实为函数 $f(x)$ 的零点，所以需要构造函数 $f(x)$，利用连续函数的介值定理及函数的单调性来证明根的存在及唯一.

【证明】令 $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x - 1$，则函数 $f_n(x)$ 连续，且

$f_n(0) = -1, f_n(1) = n-1 \geq 1$，故由介值定理知 $\exists x_n \in (0,1) \subset [0,+\infty)$，使 $f_n(x_n) = 0$.

又
$$f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 1 > 0, \quad x\in[0,+\infty)$$

$\therefore f_n(x)$ 是（严格）单调增加，故使 $f_n(x_n)=0$ 的根 x_n 唯一存在，即方程 $x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x = 1$ 在区间 $(0,1)$ 内有且有唯一一根 x_n.

　　其次，由于 $x_n \in (0,1)$, $\therefore \{x_n\}$ 有界，又 $f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, 即

$$f_n(x_n) - f_{n+1}(x_{n+1}) = (x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n) - (x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n+1}) = 0$$

移项、重组、分解，有： $(x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n) - (x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^n) = x_{n+1}^{n+1} > 0$

$$(x_n - x_{n+1})[1 + (x_n + x_{n+1}) + \cdots + (x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_{n+1} + \cdots + x_{n+1}^{n-1})] > 0$$

故 $x_n > x_{n+1}$, 即 $\{x_n\}$ 单调减少，有单调有界原理知，$\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

由于　$f(x_n) = 1 + x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n = \dfrac{x_n(1 - x_n^n)}{1 - x_n} = 0$，及 $0 < x_n < 1\ (n \ge 2)$, 令 $n \to \infty$ 得：

$\dfrac{A}{1 - A} = 1$，　解得 $A = \dfrac{1}{2}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

【例 31】 若 a 为一个正常数，证明方程 $ae^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ 恰有一个实根.

【证明】令 $f(x) = ae^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$，$\because \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,　$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,故 $f(x) = 0$ 有根实；以下往证根是唯一的.

当 $a \ge 1$ 时, $f'(x) = ae^x - 1 - x$, $f''(x) = ae^x - 1$，由 $f''(x) = 0$，得 $x = ln\dfrac{1}{a}$.

又 $f'''(x) = ae^x > 0$, 故 $f'(\ln\dfrac{1}{a}) = -\ln\dfrac{1}{a}$ 是 $f'(x)$ 的极小值也是最小值，又 $-\ln\dfrac{1}{a} = \ln a \ge 0$,

故 $f'(x) \ge 0$ (等号仅在个别点成立)．故 $f(x)$ 单调增加，因此 $f(x) = 0$ 的根是唯一的.

当 $0 < a < 1$，在 x 与 0 之间存在 ξ 使

$$f(x) = a(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{e^{\xi}x^3}{3!}) - 1 - x - \frac{x^2}{2} = (a-1) + (a-1)x + (a-1)\frac{x^2}{2} + \frac{ae^{\xi}}{3!}x^3$$

由于 $0 < a < 1$, $\therefore f(0) \ne 0$．现假设 $f(x)$ 至少存在两个根，设 x_1, x_2 （$x_1 < x_2$）是其中最小的两个.

由 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的表示式及 $f(0) \ne 0$ 可以得出，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 不可能有相同的实根，

故　$f'(x_1) \ne 0$, $f'(x_2) \ne 0$. .

又 $f(-\infty) = -\infty$ 及 $f(x_1) = 0$ 与 $f(x_2) = 0$，可见 $f(x)$ 由 $-\infty \xrightarrow{\text{经过}x1} +$, 又由 $+ \xrightarrow{\text{经过}x2} -$，

故必有 $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$．而事实上

$f'(x_2) = ae^{x_2} - 1 - x_2 = f(x_2) + \dfrac{x_2^2}{2} > 0$, 与上述推出 $f'(x_2) < 0$ 相矛盾．故 $f(x)$ 不可能有两个以上实根．得证.

【例 32】求 k 的取值范围，使得当 $x > 0$ 时方程　$kx^3 - x^2 + 1 = 0$　存在唯一的实根.

【解】记 $f(x) = kx^3 - x^2 + 1$．于是 $f'(x) = 3kx^2 - 2x$,　$f''(x) = 6kx - 2$.

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\ (k > 0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\ (k \le 0)$.　需对 k 值分两情形予以讨论：

1° 当 $k \le 0$ 时，由 $f(0) = 1$, $f(+\infty) = -\infty$，且 $f'(x) = 3kx^2 - 2x < 0\ (x > 0)$，可见 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上由

$+\xrightarrow{\text{单减}}-\infty$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且只有一解；

2° 当 $k>0$ 时，由 $f'(x_0)=3kx_0^2-2x_0=0$ 在 $(0,\infty)$ 上得到驻点 $x_0=\dfrac{2}{3k}$，且此时 $f''(x_0)=6kx_0=6k(\dfrac{2}{3k})-2=2>0$，$\therefore f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值．又在 $[0,x_0)$ 上 $f(x)$由 $1\downarrow f(x_0)$，而在 $(x_0,+\infty)$ 上 $f(x)$由 $f(x_0)\uparrow+\infty$．可见当 $f(x_0)=0$ 时，曲线 $f(x)$ 与 x 轴有唯一交点，即由　$k(\dfrac{2}{3k})^3-(\dfrac{2}{3k})^2+1=0$ 得：$k^2=\dfrac{4}{27}$，$k=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$．但若 $f(x_0)<0$，则有二交点；若 $f(x_0)>0$，则无交点，均不予以考虑．可见满足题意的 k 的取值范围为：$k\le 0$ 或 $k=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$．

【例 33】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f'(x)>f(x)$, $f(0)\cdot f(1)<0$，试证：方程 $f(x)=0$

在 $(0,1)$ 内有且仅有一实根．

【分析】利用连续函数的零点存在定理，来证明根的存在；再利用单调性证明根是唯一的．

【解】$\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又 $f(0)\cdot f(1)<0$，

于是由连续函数的零点存在定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$，即方程 $f(x)=0$

在 $(0,1)$ 内至少有一实根．以下往证根的唯一性．

令 $F(x)=e^{-x}f(x)$，显然 $F(x)$, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有相同的零点，又

$$F'(x)=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)>0$$

$\therefore F(x)$ 在 $[0,1]$ 上(严格)单调增加，可见 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内只有一个零点，即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内也是只有一个零点，换言之方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 仅有一个实根．

(五)、函数的极值与最值

【例 34】设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则下面成立的是(　　　　)．

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　　　(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

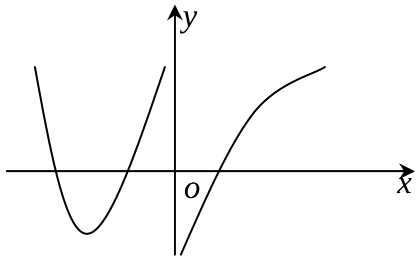
(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点　(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0,f(0))$ 也不是 $y=f(x)$ 的拐点

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$ 及 $f''(x)$ 的连续性可知：$f''(0)=0$，$\therefore (0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 可能的拐点而且 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 可能的极值点；又由极限的保号性知：

$\exists\delta>0$,使当$0<|x|<\delta$时,有 $f''(x)>\frac{1}{2}|x|>0$，即 $f''(x)$ 在 $x=0$ 附近不变号，故$(0,f(0))$非拐点；

再由 $f''(x)>0$ 知 $f'(x)$ 单调增加，表明 $f'(x)<0, x\in(-\delta,0)$,而且$f'(x)>0, x\in(0,\delta)$ ，故 $x=0$为函数 $f(x)$ 的极小值点．故正确选项是(B)．

【例 35】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数 $f'(x)$ 的图形如图所示，则 $f(x)$ 有(　　)．



(A) 一个极小值点和两个极大值点　　(B) 两个极小值点和一个极大值点

(C) 两个极小值点和两个极大值点　　(D) 三个极小值点和一个极大值点

【分析】 此例需根据 $f'(x)$ 的图形判定 $f'(x)$与$f(x)$ 性态的问题．因 $f(x)$ 可能的极值点是导数为零或导数不存在的点，共 4 个．而这些点是否为极值点需要进一步利用极值的第一判定定理判定．

【解】 根据 $f'(x)$ 的图形可知，一阶导数为零的点有 3 个，而 $x=0$ 是导数不存在的点．由于 $f'(x)$ 在 3 个零点的左右两侧符号不一致，必为 $f(x)$ 的极值点，且两个极小值点，一个极大值点；在 $x=0$ 左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，可见 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，故 $f(x)$ 共有两个极小值点和两个极大值点，应选择 (C)．

【例 36】 设 $a>1$，$f(t)=a^t-at$ 在$(-\infty,+\infty)$内的驻点为$t(a)$，问 a 为何值时，$t(a)$ 最小？并求出最小值．

【分析】 此问题需先求 $f(t)$ 的驻点 $t(a)$，再求函数 $t(a)$ 的最小值．

【解】 由 $f'(t)=a^t\ln a-a=0$，得唯一驻点 $t(a)=1-\dfrac{\ln\ln a}{\ln a}$．

考察函数 $t(a)=1-\dfrac{\ln\ln a}{\ln a}$ 在 $a>1$ 时的最小值．令 $t'(a)=-\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln\ln a}{(\ln a)^2}=-\dfrac{1-\ln\ln a}{a(\ln a)^2}=0,$

得唯一驻点　　$a=e^e$

当 $a>e^e$ 时，$t'(a)>0$；当 $a<e^e$ 时 $t'(a)<0$，因此 $t(e^e)=1-\dfrac{1}{e}$ 为极小值，亦即最小值．

【例 37】 证明不等式　$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geq\sqrt{1+x^2}$，　$(-\infty<x<+\infty)$．

【分析】 构造辅助函数

$$f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$$

证明 $f(x)$ 的驻点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的最小值点，从而对所有 x， $f(x)\geq f(0)=0$．

【证明】 令　$f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

令 $f'(x)=0$，知唯一驻点为 $x=0$．又由 $f''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$

可知 $x=0$ 为极小值点，即最小值点，且最小值为 $\boldsymbol{f(0)=0}$.

于是，对于一切 $x\in(-\infty,\infty)$，有 $f(x)\ge 0$，即　$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ge\sqrt{1+x^2}\ (-\infty<x<+\infty)$．

【例 38】　已知 $y^2=\mathbf{6}x$，试从其所有与法线重合的弦中找出一条最短弦.

解：抛物线的参数方程为 $x=\mathbf{6}t^2$，$y=\mathbf{6}t$，其中点 $A(\mathbf{6}t^2,\mathbf{6}t)$ 处的法线斜率为 $-\dfrac{dx}{dy}=-\mathbf{2}t$

设 $B(\mathbf{6}s^2,\mathbf{6}s)$ 是抛物线上另一点，则 A,B 两点连线的斜率为 $\dfrac{\mathbf{6}(s-t)}{\mathbf{6}(s^2-t^2)}=\dfrac{\mathbf{1}}{s+t}$

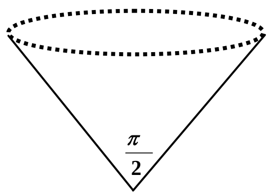
若此弦过法线，则有　$\dfrac{1}{\boldsymbol{s+t}}=-2\boldsymbol{t}$，即 $\boldsymbol{s=-t-\dfrac{1}{2t}}$.

设 $f(t)=AB^2=(\mathbf{6}t-\mathbf{6}s)^2+(\mathbf{6}t^2-\mathbf{6}s^2)^2=\dfrac{9(64t^6+48t^4+12t^2+1)}{4t^4}=\dfrac{9}{4}\dfrac{(1+4t^2)^3}{t^4}$

令 $f'(t)=\dfrac{\mathbf{9(1+4}t^2)^2(2t^2-\mathbf{1})}{t^5}=\mathbf{0}$　得　$t^2=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$，在 $t^2=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ 两侧，$f'(t)$ 由负变正，可见：

当 $t^2=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ 时，$f(t)$ 最小，即弦 AB 最短，且最短弦 $AB_{\min}=\mathbf{9\sqrt{3}}$．

【例 39】 顶角为 $\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}$ 的正圆锥形容器，内盛有 b 公升水（如图），从开始 $\boldsymbol{t}=0$ 时到 t 时灌入溶器中的水为 at^2 公升（a,b 均为大于 0 的常数）．问何时水面上升速率最快．



【解】 设经过 t 时后水深为 h，则　$b+at^2=\dfrac{1}{3}\pi hr^2$

当 $r=h$ 时，$\boldsymbol{h}=\sqrt[3]{\dfrac{3(\boldsymbol{b+at^2})}{\pi}}$ $(\boldsymbol{t}\ge 0)$，$v=h'=\dfrac{\mathbf{2}a}{\sqrt[3]{a\pi}}t(b+at^2)^{-\frac{2}{3}}$，

$v'=\dfrac{\mathbf{2}a}{\sqrt[3]{a\pi}}(b+at)^{-\frac{2}{3}}(b-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}at^2)$，　令 $\boldsymbol{v}'=0$ 得唯一驻点 $t=\sqrt[3]{\dfrac{\mathbf{3}b}{a}}$（负值舍去），

且当 $t<\sqrt[3]{\dfrac{\mathbf{3}b}{a}}$ 时，$v'>\mathbf{0}$，　当 $t>\sqrt[3]{\dfrac{\mathbf{3}b}{a}}$ 时，$v'<\mathbf{0}$，　所以，$t=\sqrt[3]{\dfrac{\mathbf{3}b}{a}}$ 是极大值点，即最大值点.

故当 $t=\sqrt[3]{\dfrac{\mathbf{3}b}{a}}$ 时，水面上升为最快.

【例 40】将一根长为 L 的铁丝截为两段，一段弯成正方形，另一段弯成圆，问如何来截，可使正方形与圆面积的总和最小？如何来截使二图形的面积总和最大？

【解】设正方形的周长为 x，圆周长为 $L-x$，则面积和为

$$S=\frac{x^2}{16}+\frac{(L-x)^2}{4\pi}\text{，且}S'_x=\frac{(\pi+4)x-4L}{8\pi}\text{；}$$

令 $S'_x=0$，得 $x=\dfrac{4L}{\pi+4}$，当 $x<\dfrac{4L}{\pi+4}$ 时，$S'_x<0$，当 $x>\dfrac{4L}{\pi+4}$ 时，$S'_x>0$，可见：当 $x=\dfrac{4L}{\pi+4}$ 时，S 取得最小值；另外，当 $x=0$ 时，$S=\dfrac{L^2}{4\pi}$；当 $x=L$ 时，$S=\dfrac{L^2}{16}$，及 $\dfrac{L^2}{4\pi}>\dfrac{L^2}{16}$，故当 $x=0$ 时，S 取得最大值.

(六)、函数图形的绘图

【例 41】已知笛卡儿叶形曲线的方程是：$\boldsymbol{x^3+y^3=3axy\quad(a>0)}$，求曲线的渐近线.

【解】令 $\boldsymbol{y=tx}$，其中 t 为参数，于是原方程可化为以 t 为参数的参数方程：

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}$$

当 $\boldsymbol{t\to-1}$时,有 $\boldsymbol{x\to\infty}$,且由 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}\frac{\frac{3at^2}{1+t^3}}{\frac{3at}{1+t^3}}=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}[y-(-1)x]=\lim_{t\to-1}\left[\frac{3at^2}{1+t^3}+\frac{3at}{1+t^3}\right]=-a$

可见曲线的渐近线有一条：$\boldsymbol{y=-x-a.}$

【例 42】证明 $\boldsymbol{y=\dfrac{x+1}{x^2+1}}$ 有位于同一直线上的三个拐点，并作出图形曲线.

【证】$\because\ \boldsymbol{y'=\dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2},\ y''=\dfrac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}}$，

令 $\boldsymbol{y''=0}$　得：$\boldsymbol{x_1=-2-\sqrt{3},x_1=-2+\sqrt{3},x_3=1}$　，

对应的函数值是：$\boldsymbol{y_1=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4},y_2=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4},y_3=1}$　.

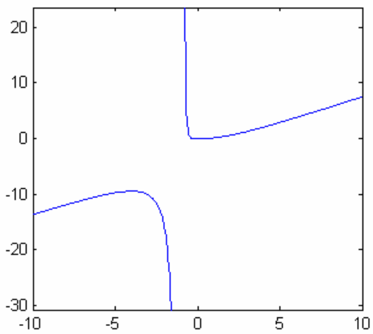
由于 $\boldsymbol{x^3+3x^2-3x-1}$ 在 $\boldsymbol{x_i(i=1,2,3)}$　左右附近符号发生变化，$\therefore$点$P_i(x_i,y_i)\ (i=1,2,3)$为y的拐点.

又由于 $\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\-2-\sqrt{3}&-2+\sqrt{3}&1\\\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}&\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}&1\end{vmatrix}=0^{(*)}$　$\therefore$三拐点$P_i(x_i,y_i)\ (i=1,2,3)$共线.

【例 43】绘出函数 $\boldsymbol{y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}}$　的图形曲线.

【解】　a．　除 $\boldsymbol{x=-1}$外处处连续，且图形曲线被分成两支；

b．　$y'=\dfrac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}$.　　令 $y'=0$，得 $x=0$, 或 $x=-4$.


例 43 图

$y''=\dfrac{12x^2}{(1+x)^5}$. 当 $x<-1$ 时, $y''<0$,图形呈凸状；当 $x>-1$ 时,

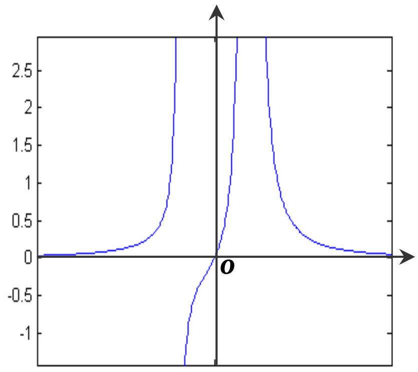
$y''>0$,图形呈凹状；又 $y''\big|_{x=-4}<0$, 故当 $x=-4$ 时有极大值 $y=-9\dfrac{13}{27}$;

由于 y' 经过 $x=0$ 从负变到正，故当 $x=0$ 时取得极小值 $y=0$.

c．　斜渐近线：$x=-1$.，事实上，$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1, b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)=-3$,

　垂直渐近线：　$x=-1$.

d．　根据上述特性，描绘出图形．参见题 43 图．


例 44 图

【例 44】　绘出函数 $y=\dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$　的图形．

【解】a．不连续点 $x=-1$ 及 $x=1$，且图形被分成三支；

b．$y'=\dfrac{2x^2+x+1}{(1+x)^2(1-x)^3}$, $y''=\dfrac{2(3x^3+3x^2+5x+1)}{(1+x)^3(1-x)^4}$

$y'=0$ 无实根，无极值点．当 $x<-1$ 时，$y'>0$, 曲线上升；

当 $-1<x<1$ 时，$y'>0$, 曲线上升；当 $x>1$ 时, $y'<0$, 线下降；令 $y''=0$ 得 $x\approx-0.22$,

经判别知它为拐点，此时 $y=0.20$；

c．渐近线：$y=0$, $x=-1$ 和 $x=1$；

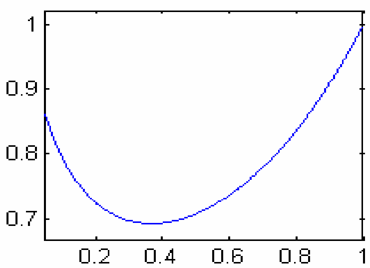
d．根据曲线经过原点，以及上述特征，描绘出大致的形态图形，参见例 44 图．

【例 45】　绘出函数：(1) $y=x^x$；(2)　$y=x^{\frac{1}{x}}$；(3)　$y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$　的图形．

【解】(1) a．一般只讨论 $x>0$．函数值始终为正的，故图形在 Ox 轴的上方．

b．$\because y'=x^x(1+\ln x)$.　令 $y'=0$ 得 $x=\dfrac{1}{e}\approx0.368$．经判别知此时有极小值 $y=(\dfrac{1}{e})^{\frac{1}{e}}\approx0.692$．

又 $\because y''=x^x[(1+\ln x)^2+\dfrac{1}{x}]>0$, $\therefore$ 图形是凹的．


例 45 图 1

c．当 $x\to+0$ 时，有 $y\to1$（利用洛必达法则求得），但无渐近线．

d．依据上述形态，作出图形，参见例 45 图 1．

⑵ a．一般只讨论 $x>0$．

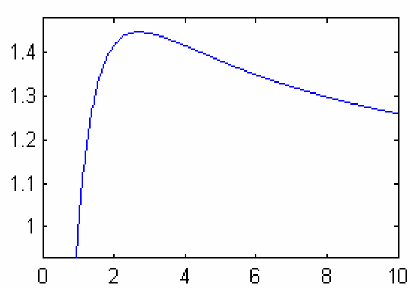
b．$y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$．令 $y'=0$ 得 $x=e$．

当 $x<e$ 时，$y'>0$，图形上升，当 $x>e$ 时，$y'<0$，图形下降，当 $x=e$ 时有极大值 $y=e^{\frac{1}{e}}\approx 1.445$；

又 $y''=x^{\frac{1}{x}-4}(1-2\ln x+\ln^2 x-3x+2x\ln x)$，令 $y''=0$ 得 $x\approx e^{1.48}\approx 4.39$，

当 $0<x<e^{1.48}$ 时，$y''<0$，图形是凸的，当 $x>e^{1.48}$ 时，$y''>0$，图形是凹的，

故 $x\approx e^{1.48}$ 是拐点，此时 $y\approx 1.402$；



例 45 图 2

c．曲线有水平渐近线：$y=1$．事实上，$a=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}-1}=0$，

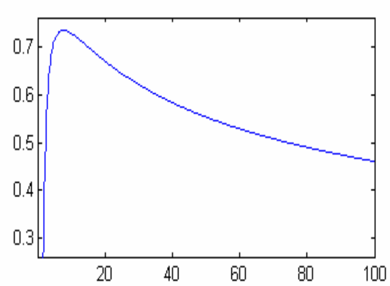
$b=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$．　另外，当 $x\to+0$ 时有 $y\to 0$．

d．描出三个点：$(0,0),(e,1.445),(4.39,1.402)$，并依据上述形态作出图形，参见例 45 图 2．

⑶ a．定义域：$(0,+\infty)$；

b．$y'=\dfrac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}$，令 $y'=0$ 得　$x=e^2\approx 7.39$，且此点

为极大值点，极大值为 $y\big|_{x=e^2}=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\Big|_{x=e^2}=\dfrac{2}{e}\approx 0.74$；



例 45 图 3

又 $y''=\dfrac{3\ln x-8}{4x^{\frac{5}{2}}}$，令 $y''=0$ 得 $x=e^{\frac{8}{3}}\approx 14.33$，且此点为拐点，此时 $y\Big|_{x=e^{\frac{8}{3}}}=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\Big|_{x=e^{\frac{8}{3}}}=\dfrac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}\approx 0.70$；

c．曲线有两条渐近线：$x=0$(垂直渐近线)，$y=0$(水平渐近线)；

d．描三点：与坐标轴的交点、极值点及拐点：$(1,0),\ (e^2,\frac{2}{e}),\ (e^{\frac{8}{3}},\frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}})$，绘图即可，参见例 45 图 3．

(七)、曲率

【例 46】求内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在任一点 $P(x,y)$ 处的曲率半径．

【解】由于 $y'=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}},\ y''=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$．于是，曲率半径为

$$R=\frac{[1+(\frac{y}{x})^{\frac{2}{3}}]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\right|}=\frac{\left|\frac{a}{x}\right|}{\left|\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\right|}=3|axy|^{\frac{1}{3}}.$$

【例 47】⑴ 写出以极坐标表示的曲线的曲率半径公式；⑵ 求阿基米德螺线 $r=a\varphi$ 的曲率半径.

【解】⑴ 设曲线的极坐标方程为 $r=r(\varphi)$，则由 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$

可求得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2r'r'-rr''}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^3},$$ 其中 $r'=\frac{dr}{d\varphi},r''=\frac{d^2r}{d\varphi^2}$.

于是，曲率半径为 $$R=\frac{[1+(\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2+2r'^2-rr''|}.$$

⑵ 由于 $r'=a,r''=0$， 于是，曲率半径为 $R=\frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2+r^2}$.

【例 48】 试求与曲线 $y=\sin x$ 在点 $(\frac{\pi}{2},1)$ 处相切且具有相同曲率和凹向的抛物线的方程.

【解】两曲线 $y=y_1(x)$ 及 $y=y_2(x)$ 在点 (x_0,y_0) 相切表明函数 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 在点 x_0 有相同的函数值、导函数值．又两条直线在 (x_0,y_0) 的曲率值K相同，由曲率计算公式 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

知有相同的 $|y''|$ 值，又凹向相同，故有相同二阶导数值 y''.

设所求抛物线为 $y=ax^2+bx+c$，其与 $y=\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处有相同的 y,y',y'' 值，即

$$\begin{cases}a(\frac{\pi}{2})^2+b\cdot\frac{\pi}{2}+C=\sin\frac{\pi}{2}\\2a\cdot\frac{\pi}{2}+b=\cos\frac{\pi}{2}\\2a=-\sin\frac{\pi}{2}\end{cases},$$ 解得 $a=-\frac{1}{2},b=\frac{\pi}{2},c=1-\frac{\pi^2}{8}$.

【例 49】在曲线 $y=\ln x$ 上求曲率最大的点.

【解】由于 $y'=\frac{1}{x},y''=-\frac{1}{x^2}$，所以，曲率半径为 $$R=\frac{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{|x|}.$$

按题设，我们只需考虑函数 $f(x)=\dfrac{(1+x^2)^3}{x^2}$ 当 x 取何值时达到最小值．

由于 $f'(x)=\dfrac{2(1+x^2)^2(2x^2-1)}{x^3}$，　故令　$f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

当 $0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f'(x)<0$；　当 $x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f'(x)>0$．

因此，当 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(x)$ 取极小值．又由于只有一个极小值，故也是最小值．

即当 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},y=-\dfrac{\ln 2}{2}$ 时,曲率半径为最小,也就是曲率最大．因此，所求的点为 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\ln 2}{2})$．

【例 50】求曳物线 $x=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ 的渐屈线．

【解】首先求 y',y''．于是在等式两端对 x 求导，得：

$$1=a(\frac{y}{a+\sqrt{a^2-y^2}}\frac{\frac{-2y^2y'}{2\sqrt{a^2-y^2}}-(a+\sqrt{a^2-y^2})y'}{y^2})-\frac{-2yy'}{2\sqrt{a^2-y^2}}\quad=-\frac{a^2y'}{y\sqrt{a^2-y^2}}+\frac{yy'}{\sqrt{a^2-y^2}}\quad=-\frac{y'\sqrt{a^2-y^2}}{y}$$

$$\therefore\quad y'=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}\quad\cdots\cdots(1)$$

又（1）式两端对 x 求导，整理可得：　$y''=-\dfrac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}\quad\cdots\cdots(2)$

于是将（1）、（2）代入曲率中心 (ξ,η) 坐标公式中，得

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x+\frac{\frac{a^2y}{(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}}=x+\sqrt{a^2-y^2},\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y+\frac{\frac{a^2}{a^2-y^2}}{\frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}}=\frac{a^2}{y}.$$

由于点 (x,y) 满足方程 $x+\sqrt{a^2-y^2}=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}$

$$\therefore\xi=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\Rightarrow\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}=e^{\frac{\xi}{a}}\cdots\cdots(3)$$

对（3）式作倒运算，并且有理化，得　$\dfrac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}=e^{-\frac{\xi}{a}}\cdots\cdots(4)$

最后(3)、(4)相减，得　$\dfrac{a}{y}=\dfrac{1}{2}(e^{\frac{\xi}{a}}+e^{-\frac{\xi}{a}})=ch\dfrac{\xi}{a}$　，即 $\eta=a\ ch\dfrac{\xi}{a}$　为渐屈线方程，这是一旋链线．

四、练习题

㈠、填空题

1、设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$ 确定,则曲线 $y=y(x)$ 凸(或向上凸)的 x 的取值范围是______.

2、函数 $f(x)=\dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}$ 的斜渐近线是__________.

3、若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$ 时,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$ __________.

4、设 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$(f 具有二阶连续导数)上一拐点，则曲线在该拐点处的曲率是__________.

5、设 $f(x)$ 为二次连续可微偶函数，且 $f''(x)\neq 0$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的__________.

6、由 Lagrange 中值定理，$\forall |x|\le 1, \exists\theta\in(0,1)$,使得 $\arcsin x=\arcsin x-0=x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\theta^2x^2}}$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=$ _______ .

7、设函数 $f(x)$ 二阶可导， $f'(x_0)=0$, $f''(x)<0$, 并设 $x>x_0$, $\Delta x=dx>0$,

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, $dy=f'(x)dx$, 则 $dy,\Delta y,0$ 三者的大小关系为__________.

8、曲线 $r=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 在点 $M(\dfrac{\pi}{2},a)$ 处的曲率为__________.

9、设函数 $f(x)$ 在(a,+∞)内可导,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+f'(x)\right]=l$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=$ ____ .

10、已知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内可 Taylor 展开,且 $f(\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{n^2}(n=1,2,\ldots)$,则 $f''(0)=$ __ .

㈡、选择题

1、设在[0,1]上 $f''(x)>0$, 则 $f'(0), f'(1), f(1)-f(0), f(0)-f(1)$ 的大小顺序是(　　).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

2、设 a>0 是常数, $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+a$, 则 $f(x)$ 有(　　　)个零点.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 与 a 有关的

3、设 $f(x)$ 具有满足关系 $f''(x)+f'^2(x)=x$, 且 $f'(0)=0$ ，则下述选项成立的是(　　　).

(A) f(0)为 $f(x)$ 的极大值　　(B) f(0)为 $f(x)$ 的极小值

(C) 点(0,f(0))为曲线 $y=f(x)$ 的拐点　　(D) f(0)既非极值，且(0,f(0))也非拐点

4、设函数 $f(x)$ 在（−∞,+∞）内有定义，$x_0\neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大点，则下列成立的是(　　　).

(A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点　　(B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小点

(C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小点　　(D) 对一切 x 都有 $f(x)\le f(x_0)$

5、在$(-\infty,+\infty)$内，方程$|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$使得下列选项成立的是(　　).

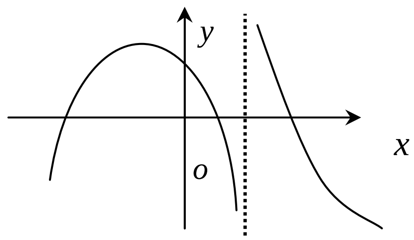
(A) 无实根　(B) 有且仅有一个实根　(C) 有且仅有二个实根　(D) 有无穷多个实根

6、设$f(x)$为凹函数，且二次可导，则$F(x)=e^{f(x)}$是(　　).

(A) 凸函数　(B) 凹函数　(C) 凸凹性发生变化　(D) 非凸也非凹

7、已知函数$y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$定义，其导函数的图形如下图所示，则下列选项成立的是(　　).

(A) 两个极小值点，两个极大值点
(B) 一个极小值点，两个极大值点
(C) 一个极大值点，两个极小值点
(D) 一个极小值点，三个极大值点



8、对于曲线$y=(x+6)e^{\frac{1}{x}}$下列正确的是(　　).

(A) 有铅直渐近线　(B) 有水平渐近线
(C) 有铅直与水平渐近线　(D) 只有斜渐近线

9、设函数$f(x)$在$x=1$的某邻域内连续，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[f(x+1)+1+3\sin^3 x]}{\sqrt{1-x^2}-1}=-4$, 则$x=1$是$f(x)$的(　　).

(A) 驻点且是极小值点　(B) 驻点且是极大值点　(C) 不可导点　(D) 可导点但非驻点

10、设函数$f(x)$在$x=0$的某邻域内有三阶连续导数，且当$x\to0$时$f(x)-f(-x)$是x的三阶无穷小，则下列正确的是(　　).

(A) $f'(0)\neq0$　(B) $f'''(0)=0$　(C) $f''(0)=0$　(D) $f'(0)=0$

㈢、求下列各极限

1、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

2、$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

3、$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}\cdot e^{-x}$.

4、设$\lim\limits_{x\to1}f(x)$存在，且有$f(x)=e^{-x}+3x^4-x^{\frac{2}{1-x}}\lim\limits_{x\to1}f(x)$，求$f(x)$.

5、设$f(x)$是 n+1 阶可导的函数，且$f^{(n+1)}(x)\neq0$，设

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\dots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$$，求$\lim\limits_{h\to0}\theta$.

㈣、证明题

1、设$f(x)$具有二阶导数，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $f(1)=0$，证在区间$(0,1)$内至少存在一点ξ, 使$f''(\xi)=0$.

2、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-1}{(x-\frac{1}{2})^2}=1$. 试证：

⑴存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$, 使得 $f(\eta)=\eta$. ⑵对任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0,\eta)$, 使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

⑶ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值大于 1.

3、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

4、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且满足条件：$|f(x)|\le a, |f''(x)|\le b$, 其中 a，b 都是非负常数，c 是（0,1）内任意一点，试证明 $|f'(c)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$.

5、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内具有连续导数，且 $f(x)\ne 0, f'(x)\ne 0, f''(x)\ne 0$. 证明存在惟一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得当 h→0 时，$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

6、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(1)=f(0)=f'(1)=f'(0)=0$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=f(\xi)$.

7、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)$, 且 $f'(a)\cdot f'(b)>0$, 证明在 (a,b) 内存在点 ξ，使得：$f''(\xi)=0$

8、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$|f''(x)|\le 4$, 试证：$\left|f(\frac{a+b}{2})\right|\le\dfrac{(b-a)^2}{2}$.

9、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，证明存在点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)\left[f'(a)+f'(b)\right]-\frac{1}{12}(b-a)^3 f^{(3)}(\xi).$$

10、设函数 $f(x)$ 在（a,+∞)内可导（其中常数 a>0）,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2f(x)+f'(x)\right]=1$, 求证：

① $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}f(x)=+\infty$；② $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

㈤、函数的单调性、极值及其应用

1、设函数 $f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x\left(f'(x)\right)^2=1-e^{-x}$, 且在 $x_0\ne 0$ 处取得极值，问 $f(x_0)$ 是极大值还是极小值，证明你的结论.

2、设函数 $f(x)$ 满足方程 $3f(x)+4x^2f(-\dfrac{1}{x})+\dfrac{7}{x}=0$，求 $f(x)$ 的极大值与极小值.

3、试求使不等式 $ae^x\ge 2-2x-x^2\ (x<0)$ 成立的常数 a 的最小值.

4、设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{1+|x-a|}\ (a>0)$，求 $f(x)$ 的最大值.

5、设 $x\in[0,1]$, $p>1$, 则 $2^{1-p}\le x^p+(1-x)^p\le 1$.

6、试证明　当 $n\in N, x\in(0,1)$　有 $x^n(1-x)<\dfrac{1}{e\,n}$.

7、方程 $\ln x=ax$ (其中 $a>0$) 有几个实根？

8、设有 n 次多项式方程：$1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n}=0$. 试证明：当 n 为奇数时方程恰有一实根；当 n 为偶数时方程无实根.

㈥、函数图形的绘图

1、$y=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$

2、$y=\dfrac{x}{\ln x}$

㈦、曲率及其应用

1、求曲线 $y=e^x$ 的曲率最大值.

2、飞机有时沿抛物线 $y=\dfrac{x^2}{4000}$ (m)作俯冲飞行，设飞行员体重 70kg,在原点处速度为 300m/s,求俯冲到原点时飞行员对座椅的压力.

3、设曲线 $y=f(x)$ 在原点与 x 轴相切，$f(x)$ 有连续的二阶导数，且 $x\ne 0$ 时 $f''(x)\ne 0$，证明该曲线在原点处的曲率半径为 $R=\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{x^2}{2f(x)}\right|$.

练习题参考答案

㈠、1、$(-\infty,1)$ 或 $(-\infty,1]$.【提示】由于 $f''(x)=\dfrac{4t}{3(t^2+1)^3}$, 当 $t=0\Rightarrow x=1$, 当 $t<0\Rightarrow -\infty<x<1$, $\therefore -\infty<x<1\Rightarrow f''(x)<0$ 即 $f(x)$ 凸. 2、$y=-3(x+1)$. 3、36. 4、0. 5、极值点. 6、$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 7、$\Delta y<dy<0$. 8、$\dfrac{3\sqrt{2}}{4a}$. 9、l （参见该章练习题㈣第 10 题）. 10、2.

㈡、1、B. 2、B. **3**、C. **4**、B. **5**、C.【提示】令 $f(x)=|x|^{\frac14}+|x|^{\frac12}-\cos x$ 是一偶函数, 且 $f(0)\ne 0$ 故仅需找 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点. **6**、B. **7**、A. 8、A. **9**、B. 10、D.【提示】应用洛必达法则求极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x^3}$ 或由 $f'(0)\Leftarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x-(-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x^3}\times\dfrac{x^2}{2}=0$.

㈢、1、$-\dfrac{1}{6}$. 2、$e^{-\frac12}$.【提示】利用洛必达法则或等价无穷小及重要的极限公式. 3、$e^{-\frac12}$.【提示】利用洛必达法则或 Taylor 公式. 4、$f(x)=e^{-x}+3x^4-\dfrac{3e^2+e}{3e^2+1}\cdot x^{\frac{2}{1-x}}$. 5、$\dfrac{1}{n+1}$.【提示】将 $f(x+h)$ 在 x

点处展开为 n 阶 Taylor 公式，两式相减后得 $f^{(n)}(x)$、$f^{(n+1)}(x)$所满足的关系式，再对其中的 $f^{(n)}(x)$ 应用 Lagrange 中值定理,最后取 $h\to 0$ 的极限即可.

㈣、1、【提示】由题意得 $f(0)=0$,且 $f'(0)=0$，分别对 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 应用 Rolle 定理即可．2、【提示】⑴由的连续性与极限性质可得 $f(\frac{1}{2})=1$，及【例 5】;⑵令 $F(x)=e^{-\lambda x}(f(x)-x)$ 及 Rolle 定理；⑶由极限保号性质即可．3、【提示】在$[a,b]$上对 $f(x)$ 应用 Lagrange 中值定理,再对 $f(x)$与$g(x)=x^2$ 应用 Cauchy 中值定理，关联两式即可．4、【提示】泰勒公式可以将 f，f'，f'' 联系起来．5、【提示】将 $f(h), f(2h), f(3h)$ 在 x=0 处泰勒展开，并代入 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left(\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)\right)=0$ 中可得 3 实数所应满足的条件．6、【提示】构造辅助函数 $F(x)=(f'(x)-f(x))e^x$，及 Rolle 定理即可．7、【提示】参见的【例 11】．8【提示】在$\frac{a+b}{2}$点处将 $f(x)$ 一阶泰勒展开，取 $x=a, x=b$ 得二关系式，基此并注意$|f''(x)|\le 4$ 即可．9、【提示】构造辅助函数 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)\left[f'(a)+f'(x)\right]$ $G(x)=(x-a)^3$，并对 $F(x)$与$G(x)$, $F'(x)$与$G'(x)$ 应用 Cauchy 中值定理，即可导出所要的关系式．

10、【提示】⑴构造辅助函数 $F(x)=e^{2x}f(x)$,由此得 $\lim\limits_{x\to+\infty}F'(x)=+\infty$,再由 Lagrange 中值定理得 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ 即可；⑵由⑴可以推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}f(x)}{e^{2x}}\xrightarrow{\text{洛必达法则}}\frac{1}{2}$,及 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2f(x)+f'(x))-2\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 即可.

㈤、1、极小值.【提示】$x_0\neq 0$满足 $x_0 f''(x_0)=1-e^{-x_0}$，$f''(x_0)>0$ 及极值第二判定定理．2、极大、小值分别为 $f(-\frac{1}{\sqrt{2}})=-4\sqrt{2}$、$f(\frac{1}{\sqrt{2}})=4\sqrt{2}$．3、$a$ 的最小值为 $2e^2$．【提示】原不等式等价为 $e^{-x}(2-2x-x^2)\le a$，令 $f(x)=e^{-x}(2-2x-x^2)$ 并求 $f(x)$在$(-\infty,0)$ 上的最值．4、$f_{\max}=\frac{2+a}{1+a}$．【提示】分段 $(-\infty,0),[0,a),[a,+\infty)$ 考虑 $f(x)$及$f'(x)$，得到分段函数在各区间段上的最大值及定义域上的最大值．5、【提示】求 $f(x)=x^p+(1-x)^p$ 的最大值．6、【提示】求 $f(x)=x^n(1-x)$ 的最大值，以及 $e>(1+\frac{1}{n})^n$．7、当$0<a<\frac{1}{e}$时,$(0,\frac{1}{a})$与$(\frac{1}{a},+\infty)$ 各有一个；当$a=\frac{1}{e}$时,有一个实根为 $x=\frac{1}{a}=e$；当$a>\frac{1}{e}$时,无实根.

8、【提示】令 $f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n}$，当 n 为奇数时，$f(x)$ 严格单减，且 $f(\pm\infty)=\mp\infty$；当 n 为偶数时，$f(x)$ 有最小值 $f(1)>0$．

㈥、略

㈦、曲率及其应用

1、$\frac{2\sqrt{3}}{9}$.【提示】求其反函数 $y=\ln x$ 的曲率最大值，此时 $\frac{1}{k}=x^2(1+x^{-2})^{\frac{3}{2}}=(x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

$\geq\left(3\cdot\sqrt[3]{x^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=(3)^{\frac{3}{2}}\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 2、约为 3836N.【提示】在原点飞行员受两岸力作用：重力与座椅对其的反作用力，且两力之差是飞行员俯冲到原点时所需的向心力 f,其中 $f=\frac{mv}{R^2}$ (R为曲率半径) .3、【提示】利用 $f(x)$在点$x=0$ 处的一阶 Taylor 公式.

五、自测题（150 分钟，满分 100 分）

㈠、填空题

1、设 $y=f(x)$ 在 a 点处可微，且 $f(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n=$__________ .

2、设 $y=f(x)$ 在包含原点在内的某区间(a,b)内有二阶导数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, $f''(x)>0(a<x<b)$,

则对于 $f(x)\ (a<x<b)$ 必成立：________________ .

3、$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}=$ __________________.

4、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，$f(0)\neq 0$, $f'(0)\neq 0$,

当 $h\to 0$时, $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 关于 h 是高阶无穷小，则 $a=$ _____, $b=$ _____ .

5、设 $f(x)=x\ln(e+\frac{1}{x})$,则该曲线的渐近线是:____________________________ .

6、$1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\ldots\ldots,\sqrt[n]{n}$ 的最大值是:_________________ .

7、设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$,则 $f(x)$在$x=0$处的n阶导数 $f^{(n)}(0)=$ __________ .

8、设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导, $f(a)>0$, $f'(a)<0$, $f''(x)<0$. 则方程 $f(x)=0$在$[a,+\infty)$ 内有________个实根.

㈡、选择题

9、已知函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 则对于 x∈(0,1)，$f''(x)$满足(　　　).

(A) 有零点　　(B) 小于 0　　(C) 大于 0　　(D) 符号有变化

10、函数 $f(x)=2^x-x^2-1$ 在实轴上有多少个零点（　　　）.

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 无零点

11、设函数 $f(x)=3x^2+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数是(　　　).

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

12、设 f(x)在 [0，1]上具有 3 阶导数， $f'''(x)>0$,且$f''(0)=0$，则 $f(1)-f(0), f(0)-f(1)$，$f'(0)$，$f'(1)$ 的大小顺序是(　　).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

13、设 $y=f(x)$ 满足微分方程： $y''-y'^2+\sin x=0$， 且$f'(0)=0$, 则（　　）.

(A) $f(0)$为 $f(x)$ 的极大值　(B) $f(0)$非极值, $(0,f(0))$ 也非曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(C) $f(0)$为 $f(x)$ 的极小值　(D) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 拐点

14、设 $y=f(x)$ 连续可导， $f(0)=0$, 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处成立（　　）.

(A) 不可导　(B) 可导 且$f'(0)\neq0$　(C) $f(0)$为 $f(x)$ 的极值　(D) $f(0)$非极值

15、设 $y=f(x)$ 在[a,b]上具有二阶可导，对$\forall x\in[a,b]$都有：$f(x)\cdot f''(x)\geq0$,则在(a,b)内有(　　).

(A) $f(a)f'(a)\geq f(x)f'(x)$　(B) $f(b)f'(b)\geq f(x)f'(x)$

(C) $2f(a)f'(a)\geq f^2(x)$　(D) $f^2(b)\geq 2f(x)f'(x)$

16、设 $f(x)=|x(1-x)|$,则

(A) $x=0$是 $f(x)$ 的极值点，但$(0,0)$不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $x=0$不是 $f(x)$ 的极值点，但$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(C) $x=0$是 $f(x)$ 的极值点，且$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=0$不是 $f(x)$ 的极值点，且$(0,0)$不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

㈢、计算题

17、设当$x>0$时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个根，求 k 的取值范围.

18、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{e^{f(x)}-1}=1$, 试求 $f'(0)$.

19、设 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-\cos x}{x} & x\neq0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 具有二阶连续导函数，且$g(0)=g'(0)=1$．试求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

㈣、应用题

20、一个半球体形状的雪堆，其体积 V 融化的速率与半球面面积 S 成正比，比例系数 $k>0$．假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的 $\frac{7}{8}$，问雪堆全部融化需要多少小时？

㈤、证明题

21、设一质点在平面内运动，它的坐标为 $\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^4 + t \end{cases} (-\infty < t < +\infty)$，证明：

⑴ 质点运动曲线在 t=0 处有一拐点；⑵ 运动速度在 t=0 处有一极大值.

22、设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的一阶导数，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，试证明：

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)| \le (b-a)\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$$

自测题参考答案

1、$e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$；**2**、$f(x)>x$；3、-2 ；**4**、$a=2,b=-1$；**5**、$x=-\frac{1}{e}$ 与 $y=x+\frac{1}{e}$；**6**、$\sqrt[3]{3}$；**7**、$\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$；

8、1 个实根；**9**、A；10、B；11、C；12、B；13、D；14、C；15、B；16、C；17、或 $k\le 0$ 或 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$；

18、$f'(0)=0$；19、$f'(x)=\begin{cases} \frac{x[g'(x)+\sin x]-g(x)+\cos x}{x^2} & x\ne 0 \\ \frac{1}{2}g''(0)+\frac{1}{2} & x=0 \end{cases}$ 且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

20、$t=6(h)$【提示】设 t 时刻雪堆的半径为 $r=r(t)$，体积为 $v=\frac{2}{3}\pi r^3$，侧面积 $s=2\pi r^2$．由题意 $\frac{dv}{dt}=-ks$，得 $\frac{dr}{dt}=-k \Rightarrow r=r_0-kt, k=\frac{1}{6}r_0$，由 $r=r_0-\frac{1}{6}r_0 t \xlongequal{令} 0 \Rightarrow t=6$；

21、【提示】⑴利用极值的判定定理二；⑵ 设速度为 v，令 $f(t)=v^2=(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2$ 并求其最值.

22、【提示】利用连函的介值、最值定理，并在 $f(x)$ 的零点与 $|f(x)|$ 的最大值点上应用 Lagrange 中值定理.

第四章　　不定积分

一. 基本要求

1.理解不定积分的概念与性质
2.熟悉不定积分的基本公式
3.熟练掌握不定积分的换元积分法和分部积分法
4.掌握较简单的有理函数的积分

二. 主要内容

1. 概念

定义 1.原函数：若在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即对任一 $x\in$ I 都有 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$，那么函数 $F(x)$ 称为 $f(x)$（或 $f(x)dx$）在区间 I 上的原函数

定义 2.在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$（或 $f(x)dx$）在区间 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)dx$。其中记号 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式，x 称为积分变量。

定义 3.有理函数：$\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$，其中 m，n 非负整数；$a_0,a_1,\cdots,a_n,b_0,b_1,\cdots,b_m$ **为实数。且** $a_0\neq 0,b_0\neq 0.$ $p(x),q(x)$ 互质（没有公因式）。若 $n<m,$ 此有理函数为真分式，若 n≥m，此有理函数为假分式。

2.不定积分的性质

性质 1.设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的原函数存在，则 $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

性质 2.设函数 $f(x)$ 的原函数存在，k 为非零常数，则 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

3.定理及积分法

原函数存在定理：若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$，使对任一 $x\in I,$ 都有 $F'(x)=f(x)$，**即：连续函数一定有原函数。**

第一类换元法：设 $f(u)$ 具有原函数，$u=\varphi(x)$ 可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=[\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$$

第二类换元法：设 $x=\psi(t)$ 为单调可导的函数，并且 $\psi'(t)\neq 0$，又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式：$\int f(x)dx=[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt]_{t=\psi^{-1}(x)}$

分部积分法：设函数$u=u(x),v=v(x)$具有连续导数，若求$\int uv' dx$有困难，而求$\int u' v dx$较容易时，有$\int udv=uv-\int vdu$.

有理函数的原函数都是初等函数。

4．基本积分表

(1) $\int k\,dx=k\,x+C$　(k为常数)；(2) $\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{1+\alpha}x^{\alpha+1}+C,(\alpha\neq-1)$；

(3) $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$；　(4) $\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$；

(5) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$；　(6) $\int\cos x\,dx=\sin x+C$；

(7) $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$；　(8) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\sec^2 x=\tan x+C$；

(9) $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\csc^2 x=-\cot x+C$；　(10) $\int\sec x\tan xdx=\sec x+C$

(11) $\int\csc x\cot x=-\csc x+C$；　(12) $\int e^x dx=e^x+C$；

(13) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$；　(14) $\int shxdx=chx+C$；

(15) $\int chxdx=shx+C$；　(16) $\int\tan xdx=-\ln|\cos x|+C$；

(17) $\int\cot xdx=\ln|\sin x|+C$；　(18) $\int\sec xdx=\ln|\sec x+\tan x|+C$；

(19) $\int\csc xdx=\ln|\csc x-\cot x|+C$；　(20) $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$；

(21) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+C$；　(22) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$；

(23) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C$；

(24) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$；

三．例题分析

1．因为微分运算（以记号 d 表示）与求不定积分的运算（简称积分运算，以记号$\int$　表示）是互逆的，因此可用从导数公式得到相应的积分公式。

例 1． $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$,所以$\arctan x$为$\frac{1}{1+x^2}$的一个原函数。

则：$\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$

2．利用不定积分的性质以及基本积分公式。

例 2． 求$\int 2^x e^{-x}dx$

解： $\int 2^x e^{-x}dx=\int(\frac{2}{e})^x dx=\frac{(\frac{2}{e})^x}{\ln\frac{2}{e}}+C=\frac{2^x e^{-x}}{\ln 2-1}+C$

例 3． 求$\int x\sqrt{x}(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx$

解： 原式$=\int(x^{\frac{7}{2}}-x^{\frac{7}{6}})dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}+C$

注：检验积分结果是否正确，只要对结果求导，看它的导数是否等于被积函数，相等则正确，否则结果错误。

例 4．求$\int (1-\frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx$

解：原式＝$\int (1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x})dx = x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$

例 5．求$\int \cos^2\frac{x}{2}dx$

解： 利用三角变换：$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$

$\int \cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}+C$

例 6.求$\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

解：$\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int(\sec^2 x+\csc^2 x)dx$

$=\tan x-\cot x+C$

（充分利用了$1=\sin^2 x+\cos^2 x$）

例 7.求$\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$

解： （配方法）$\frac{x^4}{1+x^2}=\frac{(x^2+1)^2-2x^2-1}{1+x^2}=\frac{(x^2+1)^2-2(1+x^2)+1}{1+x^2}=1+x^2-2+\frac{1}{1+x^2}$

从而$\int\frac{x^4}{1+x^2}dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{x^2}{3}-x+\arctan x+C$

例 8.设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$,且$f[\varphi(x)]=\ln x$,求$\int\varphi(x)dx$.

解： 由 $f(x^2-1)=\ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$，故 $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$

又 $f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$,从而$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x,\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$

则$\int\varphi(x)dx=\int\frac{x+1}{x-1}dx=\int\left(\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}\right)dx=x+2\ln(x-1)+C$

总结：利用三角或代数恒等变形将被积函数拆成几个较易积分的函数的代数和，而后用不定积分线性性质计算不定积分的方法为分项积分法。分项积分法常与其它积分法配合使用，而且在计算有理函数的不定积分时尤为重要。

3.利用第一类换元法（又称凑微分法）求$\int G(x)dx$ 的关键是从$G(x)$中分出一部分与dx凑成$d\varphi(x)$，余下的为$\varphi(x)$的函数，即把被积表达式写成$G(x)dx=f(\varphi(x))d\varphi(x)$，从而将积分化为推广的基分表的形式，即写成$\int\varphi^\alpha(x)d\varphi(x),\int\sin\varphi(x)d\varphi(x),\cdots,\int\frac{1}{1+\varphi^2(x)}d\varphi(x)$等。应用此方法必须熟悉怎样将某些函数移进微分号内，是微分运算的相反过程。常用的几种凑微分法为：

（1） $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$

（2） $\int f(x^\alpha)x^{\alpha-1}dx=\frac{1}{\alpha}\int f(x^\alpha)d(x^\alpha)$

（3） $\int a^x f(a^x+b)dx=\frac{1}{\ln a}\int f(a^x+b)d(a^x+b)$

（4） $\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d(\ln x)$

（5） $\int f(\sin x)\cos xdx = \int f(\sin x)d(\sin x)$

（6） $\int f(\cos x)\sin xdx = -\int f(\cos x)d(\cos x)$

（7） $\int f(\tan x)\dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \int f(\tan x)d(\tan x)$

（8） $\int f(\cot x)\dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -\int f(\cot x)d(\cot x)$

（9） $\int f(\arctan x)\dfrac{1}{1+x^2}dx = \int f(\arctan x)d(\arctan x)$

（10） $\int f(\arcsin x)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int f(\arcsin x)d(\arcsin x)$

例 9.求下列积分

（1） $\int \dfrac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$　　　（2） $\int \dfrac{x^3}{4+x^2}dx$

（3） $\int \mathbf{\sin}^m \boldsymbol{x}\,\mathbf{\cos}^n \boldsymbol{xdx}\quad (\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{N})$　　　（4） $\int \dfrac{x^2-1}{x^4+1}dx$

（5） $\int \dfrac{1}{1-x^2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}dx$　　　（6） $\int \dfrac{\sin x}{\sin x-\cos x}dx$

（7） $\int \dfrac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$　　　（8） $\int \dfrac{x}{x^8-1}dx$

（9） $\int \dfrac{dx}{a\sin x+b\cos x}$　　　（10） $\int \dfrac{e^{\sin 2x}\sin^2 x}{e^{2x}}dx$

（11） $\int \sin x(\cos 2x)dx$

解：　（1）（拆项）

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = \int \frac{2x-2+5}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = -\int \frac{2-2x}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx + 5\int \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx =$$

$$-\int \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}d(1+2x-x^2) + 5\int \frac{d(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}} = -2\sqrt{1+2x-x^2} + 5\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

（2） $\int \dfrac{x^3}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \dfrac{x^2}{4+x^2}dx^2 = \frac{1}{2}\int \left(1-\dfrac{4}{4+x^2}\right)dx^2 = \frac{x^2}{2} - 2\ln(4+x^2) + C$

（3）对于 m,n 讨论其奇偶性。这里 $k.l \in N$

若：$m=2k, n=2l$,则 $\int \sin^m x\cos^n xdx = \int \sin^{2k} x\cos^{2l} xdx$

$=\int \sin^{2k} x(1-\sin^2 x)^l dx$

若 $m=2k+1, n=2l$,则 $\int \sin^m x\cos^n xdx = \int \sin^{2k+1} x\cos^{2l} xdx$

$=-\int \sin^{2k} x\cos^{2l} xd\cos x = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^{2l} xd\cos x$

若 $m=2k, n=2l+1$,则 $\int \sin^m x\cos^n xdx = \int \sin^{2k} x\cos^{2l+1} xdx$

$=\int \sin^{2k} x\cos^{2l} xd\sin x = \int \sin^{2k} x(1-\sin^2 x)^l d\sin x$

若 $m=2k+1, n=2l+1$,则 $\int \sin^m x\cos^n xdx = \int \sin^{2k+1} x\cos^{2l+1} xdx$

$=\int \sin^{2k+1} x\cos^{2l} xd\sin x = \int \sin^{2k+1} x(1-\sin^2 x)^l d\sin x$

（4）

$$\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\overset{令u=x+\frac{1}{x}}{=}\int\frac{du}{u^2-2}=$$

$$\tfrac{1}{2\sqrt2}\int\left(\frac{1}{u-\sqrt2}-\frac{1}{u+\sqrt2}\right)du=\tfrac{1}{2\sqrt2}\ln\left(\frac{u-\sqrt2}{u+\sqrt2}\right)+C=\tfrac{1}{2\sqrt2}\ln\left(\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt2}{x+\frac{1}{x}+\sqrt2}\right)+C$$

（5）$\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\tfrac12\int\ln\frac{1+x}{1-x}d\ln\frac{1+x}{1-x}=\tfrac14\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2$

（6）（引入新不定积分）令 $I_1=\int\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}dx.\quad I_2=\int\frac{\cos x}{\sin x-\cos x}dx$

则 $I_1-I_2=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x-\cos x}dx=x+C_1$

$I_1+I_2=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}dx=\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}=\ln(\sin x-\cos x)+C_2$

故 $I_1=\frac{x+\ln(\sin x-\cos x)}{2}+C$

方法二：(利用三角变换)

$\because\sin x-\cos x=\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

故 $\int\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}dx=\int\frac{\sin x}{\sqrt2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx=\frac{1}{\sqrt2}\int\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$

$=\frac{1}{\sqrt2}\int\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt2}{2}+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt2}{2}}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx=\frac12\int\left[1+\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\right]dx$

$=\frac12\left(x+\ln\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)+C=\frac12\left(x+\ln(\sin x-\cos x)\right)+C$

（7）

$$\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}=\int\frac{d\,\frac{x+\frac{1}{x}}{3}}{\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt3}\right)^2-1}=$$

$$\tfrac{1}{2\sqrt3}\int\left(\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt3}\right)-1}-\frac{1}{\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt3}+1}\right)dx=\tfrac{1}{2\sqrt3}\ln\frac{\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt3}-1}{\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt3}+1}+C=\tfrac{1}{2\sqrt3}\ln\frac{x^2-\sqrt3x+1}{x^2+\sqrt3x+1}+C$$

（8）$\int\frac{x}{x^8-1}dx=\frac12\int\left(\frac{1}{x^4-1}-\frac{1}{x^4+1}\right)xdx=\frac12\int\frac{x}{x^4-1}dx-\frac12\int\frac{x}{x^4+1}dx$

$=\frac14\int\frac{x}{x^2-1}dx-\frac14\int\frac{x}{x^2+1}dx-\frac12\int\frac{x}{x^4+1}dx=\frac18\int\frac{d\left(x^2-1\right)}{x^2-1}-\frac18\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$

$-\frac14\int\frac{dx^2}{\left(x^2\right)^2+1}=\frac18\ln\left(x^2-1\right)-\frac18\ln\left(x^2+1\right)-\frac14\arctan x^2+C$

$=\frac18\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac14\arctan x^2+C$

（9）分析：对于 $a\sin x+b\cos x$ 类似于三角公式中 $\sin(x+a)=\sin x\cos a+\cos x\sin a$ 形式，因此，令 $a=A\cos\alpha$

$b=A\sin\alpha$ 其中 $A=\sqrt{a^2+b^2}$ 则

$$\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\sin(x+a)}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{d(x+a)}{\sin(x+a)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\left(\tfrac{x+\alpha}{2}\right)\right|+C=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}\right|+C$$

（10）$\int\frac{e^{\sin 2x}\sin^2 x}{e^{2x}}dx=\int e^{\sin 2x-2x}\sin^2 xdx$ 而 $d(\sin 2x-2x)=(2\cos 2x-2)dx$

$=2(1-2\sin^2 x-1)dx=-4\sin^2 x$ 从而 $\int e^{\sin 2x-2x}\sin^2 xdx$

$=-\frac{1}{4}\int e^{\sin 2x-2x}d(\sin 2x-2x)=-\frac{1}{4}e^{\sin 2x-2x}+C$

故 $\int\frac{e^{\sin 2x}\sin^2 x}{e^{2x}}dx=-\frac{1}{4}e^{\sin 2x-2x}+C$

（11）应用公式 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ 作三角恒等变形有

原式 $=\int(2\cos^2 x-1)\sin xdx=-2\int\cos^2 xd\cos x-\int\sin xdx$

$=-\frac{2}{3}\cos^3 x+\cos x+C$

4.利用第二类换元法求不定积分 $\int f(x)dx$ 的步骤是：

适当选择变量替换 $x=\varphi(t)$ ；(注意符合定理条件，要求 t 有一定限制)

把反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 代入得 $\int f(x)dx=g\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C$。

关键步骤是选择变量替换，常见的变量替换有：

（1）幂函数替换 $x=(at+b)^{\alpha}$ 去根号

（2）三角函数替换去根号：

若积分包含根式 $\sqrt{a^2-x^2}$，常作替换 $x=a\sin t$ 或 $x=a\cos t$

若积分包含根式 $\sqrt{a^2+x^2}$，常作替换 $x=a\tan t$ 或 $x=a\cot t$

若积分包含根式 $\sqrt{x^2-a^2}$，常作替换 $x=a\sec t$ 或 $x=a\csc t$

（3）反函数替换去超越函数

（4）代置换，$x=\frac{1}{t}$，适用于“头轻脚重”

（5）也可对一个复杂的因子作一个新的变量，化繁为简，化难为易。

例 10.求下列不定积分

（1）$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$　　（2）$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

（3）$\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}\quad(a>0)$　　（4）$\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^4}}dx$

（5）$\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$　　（6）$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

（7）$\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$　　（8）$\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$

解：（1）（去根号）令 $\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}=t$，则 $x=(t^3-1)^4$.　$\sqrt{x}=(t^3-1)^2$.

$$\boldsymbol{dx=4(t^3-1)^3\cdot\quad 3t^2dt=12t^2(t^3-1)^3dt\text{从而}\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=}$$

$$\int\frac{t}{\left(t^3-1\right)^2}\cdot 12t^2\left(t^3-1\right)^3dt=\int 12\left(t^6-t^3\right)dt=12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C=$$

$$12\left(\frac{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^7}{7}-\frac{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^4}{4}\right)+C=\frac{3}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{4}{3}}\left[4\left(1+\sqrt[4]{x}\right)-7\right]+C$$

（2）（去掉超越性及根号）

令$\sqrt{1+e^{2x}}=t$.则$2x=\ln\left(t^2-1\right)$. $dx=\frac{t}{t^2-1}dt$ 从而

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}=\int\frac{\frac{t}{t^2-1}}{t}dt=\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}+\mathrm{C}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}+C=\ln\left(\sqrt{1+e^{2x}}-1\right)-x+C$$

（3）（去掉根号）

令 $x=a\sec t$又被积函数的定义域为$|x|>a$,即$x>a$或$x<-a$

当$x>a$时，令$x=a\sec t$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$,$\because dx=\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$ $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$$

原式=$\int\frac{1}{a^3\tan^3\theta}\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta=-\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sin\theta}+C=-\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+C$ （*）

$x<-a$时，作变量替换$x=-a\sec\theta$. $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$. $\sin\theta=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$ 重复上面的计算

有原式=$\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sin\theta}+C=-\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+C$

故：(*）式对 $x<-a$ 也成立。

（4）（去掉根号） 令$x^2=\tan t, t\in(0,\frac{\pi}{2})$,则

$$\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^4}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(1+\tan t)\sec^2 t}{\sec t\cdot\tan t}dt=\frac{1}{2}\int\frac{(1+\tan t)\sec t}{\tan t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\sec t dt+\int\csc t dt\right)=\frac{1}{2}\left[\ln(\sec t+\tan t)+\ln|\csc t-\cot t|\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)+\ln\left(\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^2}\right)\right]+C$$

（5）方法一：令 $x=2\sin t$. $dx=2\cos t dt$

原式=$\int\frac{2\cos t}{2\sin t\cdot 2\cos t}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sin t}=\frac{1}{2}\ln|\csc t-\cot t|+C$

而$\csc t=\frac{2}{x}$，以$\csc t=\frac{2}{x}$作辅助三角形

则有$\cot t=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$,则 $\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C$

方法二：令$\sqrt{4-x^2}=t, x=\sqrt{4-t^2}$. $dx=\frac{-t}{\sqrt{4-t^2}}dt$

则原式=$\int\frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\cdot\frac{-t}{t\sqrt{4-t^2}}dt=\int\frac{dt}{t^2-4}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|+C$$

方法三：（用倒替换） $x=\frac{1}{t}$,则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$.则

原式=$-\int\frac{dt}{t\sqrt{4-\left(\frac{1}{t}\right)^2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{(2t)^2-1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(2t)}{\sqrt{(2t)^2-1}}\overset{\text{可再用一次}}{\underset{\text{三角代换}}{=}}$

$-\frac{1}{2}\ln\left|2t+\sqrt{(2t^2-1)}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C$

（6）　　令$\sqrt{x}=t$.则$dx=2tdt$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\arcsin t+C=2\arcsin\sqrt{x}+C$$

（7）（头重脚轻）令$t=\frac{1}{x}$,则

$$\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx=\int\frac{1-\ln\frac{1}{t}}{\left(\frac{1}{t}-\ln\frac{1}{t}\right)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int\frac{1+\ln t}{(1+t\ln t)^2}dt=$$

$$-\int\frac{d(1+t\ln t)}{(1+t\ln t)^2}=\frac{1}{1+t\ln t}+C=\frac{x}{x-\ln x}+C$$

（8）令$e^x=t$,则$x=\ln t$,则

$$\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx=\int\frac{1+\ln t}{\ln t(1+t\ln t)}\cdot\frac{1}{t}dt=\int\frac{1+\ln t}{t\ln t(1+t\ln t)}dt$$

$$=\int\frac{1}{t\ln t(1+t\ln t)}dt\ln t\overset{\text{令}u=t\ln t}{=}\int\frac{1}{u(1+u)}du=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du=\ln|u|-\ln|1+u|+C$$

$$=\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C=x+\ln\left|\frac{x}{1+xe^x}\right|+C$$

从以上可以看出，变量替换最根本的出发点为化繁为简，化难为易，应根据被积函数的特点选取适当的积分变换，而不能仅局限于所给的常见变量替换，并且三角函数的和差公式及常见一些等式要充分利用。

5.分部积分法：$\int u(x)v'(x)dx=\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$当被积函数为如下函数类之一，均可采用分部积分法：

（1）对数函数，反三角函数或它们与多项式函数的乘积，采用部分积分法时应设法去掉对数或反三角函数。

即$\int p_n(x)\ln^m xdx$.　取$u(x)=\ln^m x$.　$p_n(x)dx=dv(x)$

$\int p_n(x)\arcsin xdx$.　$\int p_n(x)\arccos xdx$.　取$u(x)=\arcsin x$.　或

$u(x)=\arccos x$.　$p_n(x)dx=dv(x)$

（2）三角函数，指数函数与多项式函数的乘积采用分部积分法，此时应降低多项式的次数。

即对于$\int p_n(x)\sin\beta xdx$.　$\int p_n(x)\cos\beta xdx$取$p_n(x)=u(x)$.　$\sin\beta xdx=dv(x)$

或$\cos\beta xdx=dv(x)$

$\int p_n(x)e^{\lambda x}dx$.　取$u(x)=p_n(x)$.　$e^{\lambda x}dx=dv(x)$

（注：这里 $p_n(x)$为关于x的n次多项式）

（3）三角函数与指数函数的乘积（此时一定出现重复情况）此时$u(x)$，$dv(x)$可任意选取。出现重复情况有三种结果：

a.　通过移项即可得结果。

b.　得到递推公式。

c.　又回到原形式且积分前符号也一样，说明积分运算**有错**或不能用此方法。

分部积分常与换元法相结合。
若不只一次用分部积分，第一次选取幂函数为 u，第二次积分时仍要选取幂函数为 u，注意中间一定不要换函数。

例 11.用分部积分法求下列不定积分。

（1）$\int e^{ax}\cos bxdx$　　（2）$\int x\tan^2 xdx$

（3）$\int \frac{e^x}{x}(1+x\ln x)dx$　　（4）$\int \sin\ln xdx$

（5）$\int \frac{x^2}{\left(x^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx$　　（6）$\int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

（7）$\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{(x+1)^2}dx$

解：　（1）$I=\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{1}{b}\int e^{ax}d\sin bx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\int\frac{a}{b}e^{ax}\sin bxdx$

$$=\frac{e^{ax}}{b}\sin bx+\frac{a}{b^2}\int e^{ax}d\cos bx=\frac{e^{ax}}{b}\sin bx+\frac{ae^{ax}}{b^2}\cos bx$$

$$-\frac{a^2}{b^2}\int\cos bxe^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{b}\sin bx+\frac{ae^{ax}}{b^2}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}I$$

$$\therefore \frac{a^2+b^2}{b^2}I=e^{ax}\cdot\frac{1}{b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C_0$$

$$\therefore I=\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C$$

（同样可求得 $\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$ ）

（2）$\int x\tan^2 xdx=\int x(\sec^2 x-1)dx=\int(x\sec^2 x-x)dx=\int x\sec^2 xdx$
$-\frac{x^2}{2}=\int xd\tan x-\frac{x^2}{2}=x\tan x-\int\tan xdx-\frac{x^2}{2}=x\tan x+\ln|\cos x|$
$-\frac{x^2}{2}+C$

（3）$\int\frac{e^x}{x}(1+x\ln x)dx=\int\frac{e^x}{x}dx+\int e^x\ln xdx=\int e^xd\ln x+\int e^x\ln xdx$
$=e^x\ln x-\int\ln xde^x+\int e^x\ln xdx=e^x\ln x-\int e^x\ln xdx+\int e^x\ln xdx$
$=e^x\ln x+C$

（4）$\int\sin\ln xdx=x\sin\ln x-\int x\cdot\cos\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=x\sin\ln x-\int\cos\ln xdx$
$=x\sin\ln x-\left[x\cos\ln x-\int xd\cos\ln x\right]=x\sin\ln x-x\cos\ln x$
$-\int x\cdot\sin\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$
$=x(\sin\ln x-\cos\ln x)-\int\sin\ln xdx$
$\therefore\int\sin\ln xdx=\frac{1}{2}x(\sin\ln x-\cos\ln x)$

（5）$\int\frac{x^2}{\left(x^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{1}{2}\int x\cdot\frac{d\left(x^2-a^2\right)}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\int xd\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$$=-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

（6） $\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int e^x \frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}dx$

$= \int e^x \frac{1+\sin x-\cos x-\sin x\cos x}{\sin^2 x}dx$

$= \int \frac{e^x}{\sin^2 x}dx - \int e^x \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx + \int \frac{e^x}{\sin x}dx - \int e^x \cot x dx$

$= \int e^x d(-\cot x) - \int e^x d(\frac{-1}{\sin x}) + \int \frac{e^x}{\sin x}dx - \int e^x \cot x dx$

$= -e^x \cot x + \int \cot x d(e^x) + \frac{e^x}{\sin x} - \int \frac{de^x}{\sin x} + \int \frac{e^x dx}{\sin x} - \int e^x \cot x dx$

$= -e^x \cot x + \frac{e^x}{\sin x} + C$

（7） $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{(x+1)^2}dx = \int \frac{\sqrt{(x+1)^2+1}}{(x+1)^2}dx = -\int \sqrt{(x+1)^2}\, d(\frac{1}{x+1})$

$= \frac{-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + \int \frac{1}{x+1} d\sqrt{x^2+2x+2}$

$= \frac{-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + \int \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

$= -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} d(x+1)$

$= -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + \ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right) + C$

$= -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C$

6.有理函数，三角函数，无理函数的积分。

（1）有理函数： $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$. 　　$P_n(x), Q_n(x)$ 无公因式。若 n<m ，称 $R(x)$ 为真分式。

任何一个有理函数的积分皆可分成下列三种有理分式的积分之和。

$\int \frac{1}{(x-a)^n}dx$， $\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^n}dx$， $\int \frac{1}{x^2+px+q}dx, (4q-p^2 \geq 0)$

而 $\int \frac{1}{x^2+px+q}dx \xrightarrow{\text{令} a^2 = \frac{4q-p^2}{4}} \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+a^2}dx$

$= \frac{1}{a}\arctan\frac{1}{a}(x+\frac{p}{2}) + C$

$= \arctan\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}(x-\frac{p}{2}) + C$

若记 $J_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx,\ J_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$，由分部积分法导出递推公式

$$J_n=\frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}J_{n-1}\ ,n=2.3.4.5\ldots\ldots$$

可得 $I_n=\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx$

从而 $\int\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{b}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx+\frac{2c-bp}{2}\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx$

$$=\frac{b}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{2c-bp}{2}\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx$$

$$=\frac{b}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{2c-bp}{2}I_n$$

故有理函数的积分可算出。

2.三角有理函数的积分：$\int R(\sin x,\cos x)dx,R(\sin x,\cos x)$ 为关于 $sinx$，$cosx$ 的有理函数，总可转化为有理函数的积分。

①利用万能公式

$$u=\tan\frac{x}{2},\text{则}\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\ dx=\frac{2dx}{1+u^2}$$

$$\therefore\int R(\sin x,\cos x)=\int R(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2})\frac{2}{1+u^2}du$$

②若 $R(\sin x,\cos x)$只含有$\sin x,\cos x$的偶次幂时，在变换$u=\tan x$

$$\sin^2x=\frac{u^2}{1+u^2},\cos^2x=\frac{1}{1+u^2},dx=\frac{du}{1+u^2}$$

则：$\int R(\sin^2x,\cos^2x)=\int R(\frac{u^2}{1+u^2},\frac{1}{1+u^2})\frac{1}{1+u^2}du$

③若 $-R(\sin x,\cos x)=R(-\sin x,\cos x)$ 或 $-R(\sin x,\cos x)=R(\sin x,-\cos x)$ 分别令 $\sin x=u$ 或 $\cos x=u$

3.几种无理式的积分

①形如 $\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}})dx$ 的积分可以用变换 $u=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}$ 化为有理函数的积分。

②形如：$\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx,\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$，可用配方法把 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 化为 $\sqrt{a^2-u^2}$ 或者 $\sqrt{u^2\pm a^2}$，然后利用已知的公式：

$$\int\frac{1}{\sqrt{u^2\pm a^2}}du=\ln(u+\sqrt{u^2\pm a^2})+C,\int\frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}du=\arctan\frac{u}{a}+C$$

$$\int\sqrt{u^2\pm a^2}du=\frac{u}{2}\sqrt{u^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2\pm a^2}|+C$$

$$\int\sqrt{a^2-u^2}du=\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}+C$$

求出积分。

③形如：$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 的积分

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=u\pm\sqrt{a}x\ \ (a>0),\sqrt{ax^2+bx+c}=u\pm\sqrt{c}\ \ (c>0)$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=u(x-\lambda)\qquad b^2-4ac>0\ \ (\lambda\text{为}ax^2+bx+c\text{的实根})$$

上述三种变换称为 Euler（欧拉）替换。

4.化无理式为有理式的方法还有“ 倒代换 ”

例 12.求下列不定积分

(1) $\int\frac{dx}{x^6+1}$ (2) $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

(3) $\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ (4) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

(5) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$ (6) $\int\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx$

解： （1）方法 1：作代数恒等变形有：

原式$=\int\frac{x^2+1-x^2}{x^6+1}dx=\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{(x^3)^2+1}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)}{x^4-x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx-\frac{1}{3}\arctan x^3$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(1+\frac{1}{x^2})}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{(1-\frac{1}{x^2})}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}dx-\frac{1}{3}\arctan x^3$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-3}-\frac{1}{3}\arctan x^3$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{x^2-1}{x}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right|-\frac{1}{3}\arctan x^3+c$$

方法 2：

原式$=\frac{1}{2}\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^4-1}{x^6+1}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+(x^4-x^2+1)}{x^6+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^6+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^6+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{6}\arctan x^3+\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{6}\arctan x^3+\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-3}$$

$$=\frac{1}{6}\arctan x^3+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right|+C$$

（2） 原式$=\int\frac{1}{1+\cos x}dx+\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$$=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}=\int\sec^2\tfrac{x}{2}d(\tfrac{x}{2})-\ln(1+\cos x)$$

$$=\tan\frac{x}{2}-\ln(1+\cos x)+C$$

（3）　原式$=\int\frac{dx}{(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{dx}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}$

$$=\int\frac{2\csc^2 2x}{2\csc^2 2x-1}dx=-\int\frac{1}{2\csc^2 2x-1}d\cot 2x=-\frac{1}{2}\int\frac{d\cot 2x}{\cot^2 2x+\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\cot 2x)+C$$

（4）　设：$\frac{x-1}{x+1}=t,dt=\frac{2}{(x+1)^2}dx$

原式$=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(\frac{x-1}{x+1})(x+1)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^{4/3}}dt=\frac{3}{2t^{1/3}}+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\frac{x+1}{x-1})}+C$

（此时用$t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$,或者 $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$,比较麻烦）

（5）　$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$利用倒代换，设$x=\frac{1}{t}$,则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$

原式$=-\int\frac{tdt}{\sqrt{1+a^2t^2}}=-\frac{1}{2a^2}\int\frac{d(1+a^2t^2)}{\sqrt{1+a^2t^2}}=-\frac{1}{a^2}\sqrt{1+a^2t^2}+C$

$$=-\frac{1}{a^2x}\sqrt{a^2+x^2}+C$$

（6）　设：$\sqrt{x^2+x+1}=ux+1$,则$x=\frac{2u-1}{1-u^2},dx=\frac{2u^2-2u-2}{(1+u^2)^2}du$

原式$=\int\frac{2u}{u^2-1}du=\ln\left|\frac{x+2-2\sqrt{x^2+x+1}}{x^2}\right|+C$ （利用了欧拉替换）

四．练习题

1.填空

（1）.$\int\frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx=$ ________

（2）.$\int\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx=$ ________

（3）.已知曲线$y=f(x)$过点$(0,-\frac{1}{2})$，且其上任一点(x,y)处的切线斜率为$x\ln(1+x^2)$，则$f(x)=$ ________

（4）.设$f(x)$的原函数为$\frac{\sin x}{x}$，则$\int xf'(x)dx=$ ________

（5）.若 $f'(e^x)=1+x$,则$f(x)=$ ________

2.选择题

（1）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $d[f(x)dx]$ 等于（）

A．$f(x)$　B. $f(x)dx$　C. $f(x)$ +C　D. $f'(x)dx$

（2）下列函数中原函数为 $\ln kx$ $(k\neq 0)$ 的是（）

A．$\frac{1}{kx}$　B. $\frac{1}{x}$　C. $\frac{k}{x}$　D. $\frac{1}{k^2}$

（3）$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=(\quad)$

A．$2\arctan\sqrt{x}+C$　B. $\arctan x+C$

C. $\frac{1}{2}\arctan\sqrt{x}$ +C　D. $2\arctan\sqrt{x}+C$

（4）设 $f(x)=e^{-x}$,则$\int\frac{f(\ln x)}{x}dx=(\quad)$

A．$\frac{1}{x}+C$　B. $\ln x+C$　C. $-\frac{1}{x}+C$　D. $-\ln x+C$

（5）若$\int f'(x^3)dx=x^3+C$,则$f(x)=(\quad)$

A．$\frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$　B. $\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$　C. x^3+C　D. $x+C$

3.求下列不定积分

（1）$\int\sin x\sin 3x dx$　（2）$\int\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}dx$

（3）$\int\frac{e^{\arctan x}+x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$　（4）$\int\frac{e^{3x}+e^{x}}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$

（5）$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$　（6）$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

（7）$\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$　（8）$\int(\ln x)^n dx$

（9）$\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$　（10）$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$

（11）$\int\frac{1}{x^3+1}dx$　（12）$\int\frac{1}{3+5\tan x}dx$

（13）$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$　（14）$\int\frac{2+x^2}{x^3}\sin x dx$

五．自测题

（一）填空题

（1）$\int f'(2x)dx=$ _________

（2）$\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=$ _________

（3）$\int e^{e^x+x}dx=$ _________

（4）$\int\frac{1}{1+\sin^2 x}dx=$ _________

（5）$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}=$ ________

（二）选择题

（1）$\int \frac{1}{x^2+4}dx=$ ________

A．$\frac{1}{4}\arctan\frac{x}{4}$　　B. $\frac{1}{2x}\ln|x^2+4|+C$

C. $\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$　　D. $\arctan\frac{x}{2}+C$

（2）已知$\int f(x)dx=F(x)+C$,则$f(b-ax)dx=$ ______

A．$F(b-ax)+C$　　B. $\frac{1}{a}F(b-ax)+C$

C. $aF(b-ax)+C$　　D. $-\frac{1}{a}F(b-ax)+C$

（3）对于积分$\int xf[\cos^2(ax^2+c)]\sin 2(ax^2+c)dx$，下列凑微分正确的是________

A．$\int f[\cos^2(ax^2+c)]d[\cos^2(ax^2+c)]$

B. $\frac{1}{2a}\int f[\cos^2(ax^2+c)]d[\cos^2(ax^2+c)]$

C. $-\frac{1}{2a}\int f[\cos^2(ax^2+c)]d[\cos^2(ax^2+c)]$

D. $-\int f[\cos^2(ax^2+c)]d[\cos^2(ax^2+c)]$

（4）已知 $f'(-\ln x)=x$,其中 $1<x<+\infty$,及$f(0)=0$,则$f(x)=$ _____

A．$f(x)=-e^{-x}$　　B. $f(x)=-e^{-x}+1$，$1<x<+\infty$

C. $f(x)=-e^{-x}+1$，$-\infty<x<0$　　D. $f(x)=-e^{-x}$，$1<x<+\infty$

（5）设 $f(x)$ 的一个原函数为 $x\ln x$,则$\int xf(x)dx=$ _______

A．$x^2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln x)+C$　　B. $x^2(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln x)+C$

C. $x^2(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln x)+C$　　D. $x^2(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ln x)+C$

（三）求下列不定积分

（1）$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$　　（2）$\int \frac{1}{\sin^3 x\cos x}dx$

（3）$\int \frac{1+\cos x}{1+\sin^2 x}dx$　　（4）$\int \frac{1}{\sin 2x\cos x}dx$

（5）$\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$　　（6）$\int \frac{1}{x^8(1+x^2)}dx$

（7）$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$　　（8）$\int \frac{\sqrt{x(1+x)}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}dx$

四．设 $f'(\cos 2x+2)=\sin^2 x+\tan^2 x$,试求$f(x)$

答案：练习题

1．(1) 把原式改写为：原式＝$\int \frac{\sin x}{\cos\sqrt{\cos x}}dx = -\int \cos^{-\frac{3}{2}} x d\cos x = 2\cos^{-\frac{1}{2}} x + C$

(2) 令 $u=\sqrt{1-x}, x=1-u^2, 2-x=1+u^2, dx=-2udu$

则原式＝$-2\int \frac{du}{1+u^2} = -2\arctan u + C = -2\arctan\sqrt{1-x}+C$

(3) 由假设 $f'(x)=x\ln(1+x^2)$，由分部积分公式有

$$f(x)=\int x\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)d(1+x^2) = \frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)$$

$$-\frac{1}{2}\int (1+x^2)\frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C$$

由 $f(x)\Big|_{x=0} = -\frac{1}{2}$，得 $C=-\frac{1}{2}$，$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]$

(4) $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$$\int xf'(x)dx = \int xd(f(x)) = xf(x) - \int f(x)dx = xf(x) - \frac{\sin x}{x} + C$$

$$=\cos x - \frac{2\sin x}{x} + C$$

(5) $f(x)=x\ln x + C (x>0), f'(u)=1+\ln u, f(u)=\int (1+\ln u)du$

$=u\ln u + C$ 即 $f(x)=x\ln x + C\ \ (x>0)$

2．(1) B　　(2) B　　(3) A　　(4) C　　(5) B

$$\because \int f'(x^3)dx \overset{令x^3=t}{=\!=\!=} \int f'(t)\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt = t + C$$

$\therefore\ f'(t)\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}} = 1$ 故 $f'(t)=3t^{\frac{2}{3}}, f(t)=\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}+C$，即 $f(x)=\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$ 3.

3．(1) $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$

(2) $\ln|\sec x + \tan x| - \ln|\cos x| + C$

(3) $e^{\arctan x} + \frac{1}{2}(\ln(1+x^2))^2 + C$

(4) $\arctan(e^x - e^{-x}) + C$

提示：上下同除 e^{2x}，有

原式＝$\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}-1}dx = \int \frac{d(e^x-e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2+1} = \arctan(e^x+e^{-x})+C$

(5) $2\sqrt{x-1} - 2\ln(1+\sqrt{x-1})$　　令 $u=\sqrt{x-1}$

(6) $\ln(\sqrt{1+e^{2x}}-1) - x + C$　　令 $u=\sqrt{1+e^{2x}}$

(7) $-\frac{x}{(x\sin x+\cos x)\cos x} + \tan x + C$　　令 $u=\frac{x}{\cos x}$

(8) 递推 $I_n = \int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - \int x(\ln x)^{n-1}dx = x(\ln x)^n - nI_{n-1}$

(9) $-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right)+C$　　令$x=\frac{1}{t}$

(10) $-\frac{1}{3a^2x^3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$　　令$x=\frac{1}{t}$

(11) $\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{x}}+C$

(12) $\frac{3}{34}x+\frac{5}{34}\ln|3\cos x+5\sin x|+C$　　令$t=\tan x$

(13) $-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}x+\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}+C$　　令$t=1+\sqrt[4]{x}$

(14) $-\frac{\cos x}{x}+\frac{\sin x}{x^2}+C$

对$\int\frac{\sin x}{x}dx$利用两次分部积分可得：

$$\int\frac{\sin x}{x}dx=-\frac{\cos x}{x}+\frac{\sin x}{x^2}-2\int\frac{\sin x}{x^3}dx+2\int\frac{\sin x}{x^3}dx+C$$

$$=-\frac{\cos x}{x}+\frac{\sin x}{x^2}+C$$

自测题答案

(一) (1) $\frac{1}{2}f(2x)+C$　　(2) $\ln(1+e^x)+C$　　(3) $e^{e^x}+C$

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$

提示：原式$=\int\frac{dx}{2-\cos 2x}=\int\frac{\sec^2 xdx}{2\sec^2 x-1}=\int\frac{d(\tan x)}{1+2\tan^2 x}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$

(5) $\frac{2}{3}[(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-2)^{\frac{3}{2}}]+C$

提示：分母有理化：

原式$=\int\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}dx=\frac{2}{3}[(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-2)^{\frac{3}{2}}]+C$

(二)

(1) C　　(2) D　　(3) C　　(4) C　　(5) B

(三) 解：

(1) 充分利用$(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+2\sin x\cos x$

则原式$=\frac{1}{2}\int\frac{2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1+2\sin x\cos x-1}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin x+\cos x dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}d(x+\tfrac{\pi}{4})$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\frac{(x+\frac{\pi}{4})}{2}\right|+C$$

（2）充分利用$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

则原式$=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos x}dx=\int\frac{dx}{\sin x\cos x}+\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$

$$=\int\frac{d(2x)}{\sin 2x}+\int\frac{d\sin x}{\sin^2 x}=\ln|\tan x|-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2 x}+C$$

（3）$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+\arctan(\sin x)+C$

（4）$\frac{1}{2}\ln|\csc x-\cot x|+\frac{1}{2\cos x}+C$

（5）$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}})+C$

（6）$-\frac{1}{7x^7}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}+C$

（7）$\frac{e^x}{x+1}+C$

（8）$-\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

四．解：令$\cos x+2=t$, 则$f'(t)dt=df(t), f(t)=\int f'(t)dt$

$$=\int(\sin^2 x+\tan^2 x)d(\cos x+2)=\int(1-\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}-1)d\cos x$$

$$=\int(-\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})d\cos x=-\frac{\cos^3 x}{3}-\frac{1}{\cos x}+C$$

$$=-\frac{[\cos x+2-2]^2}{3}-\frac{1}{\cos x+2-2}+C$$

$$=-\frac{(t-2)^3}{3}-\frac{1}{t-2}+C$$

故：$f(x)=-\frac{(x-2)^3}{3}-\frac{1}{x-2}+C$

第五章　定积分

一.基本要求

1.了解定积分的定义，理解函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件

2.掌握定积分性质，理解积分中值定理。
3.掌握积分上限函数的求导方法及应用。
4.熟练掌握牛顿-莱布尼兹公式，定积分的换元法及分部积分法
5.了解广义积分的概念并回计算广义积分。

二.主要内容

1.定积分的定义

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 上任意插入若干个分点，$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ 各个小区间的长度依次为 $\Delta x_1=x_1-x_0$，$\Delta x_2=x_2-x_1$，$\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$ 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i 　$(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i)$ 作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $\boldsymbol{f(\xi_i)\Delta x_i}$

$(i=1、2、\cdots、n)$，并作出和 $S=\sum\limits_{i=1}^{\infty}f(\xi_i)\Delta x_i$ $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$

只要当 $\lambda\to0$ 时，和 S 总趋近于确定的极限 I，称极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分（简称积分），记为 $\int_a^b f(x)dx$。

即 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{\infty}f(\xi_i)\Delta x_i$ 又称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。其中 $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)dx$ 叫做被积表达式，x 叫做积分变量，a 叫做积分下限，b 叫做积分上限，$[a,b]$ 叫做积分区间，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为积分和。

“$\varepsilon-\delta$”定义：设有常数 I，如果对于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使对 $[a,b]$ 的任意分法，$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，只要 $\lambda<\delta$，总有 $\left|\sum\limits_{i=1}^{\infty}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$ 成立，则称 I 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$

注：1.定积分的值只与被积函数的积分区间有关，而与积分变量的记法无关。

2. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件

（1）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有界。

（2）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

（3）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

（4）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调且有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

3.定积分的几何意义

$y=f(x)$ 与 $x=a, x=b$ 围成的图形的面积的代数和。

4.定积分的性质

补充规定：（1） $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)dx=0$

（2） $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

下列性质中积分上下限的大小，如不特别指出，均不加限制，并假定以下定积分都存在。

性质 1. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$　（可推广到有限个函数）

性质 2. $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　（k 为常数）

性质 3.设 $a<c<b$，则 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$　（积分对区间可加性）

不论 a、b、c 相对位置如何，总有 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

性质 4.若 $f(x)\equiv 1$　$x\in[a,b]$ 则 $\int_a^b 1dx=\int_a^b dx=b-a$

性质 5.若在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\geq 0$ 则 $\int_a^b f(x)dx\geq 0$　$(a<b)$

推论 1. 若在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\leq g(x)$ 则 $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

推论 2. $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx$　$(a<b)$

性质 $5'$.设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

若在 $[a,b]$ 上，$f(x)\geq 0$，且 $\int_a^b f(x)dx=0$，则 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$

若在 $[a,b]$ 上，$f(x)\geq 0$，且 $f(x)\neq 0$，则 $\int_a^b f(x)dx>0$

若在 $[a,b]$ 上，$f(x)\leq g(x)$，且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$，则在 $[a,b]$ 上，

$f(x) \equiv g(x)$

性质 6. 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

性质 7.（定积分中值定理）如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使下式成立：$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

$a \le \xi \le b$。

而 $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 称为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值。

5.积分上限函数

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$，　$a \le x \le b$ 称为积分上限函数。

6.积分上限函数的性质

定理 1. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，积分上限函数的 $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$\phi'(x) = f(x)$,　$a \le x \le b$

推论：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可导，且 $R[\varphi_1(x)] \subset [a,b], R[\varphi_2(x)] \subset [a,b]$ 则 $\phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可导，且

$\phi'(x) = f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$.

定理 2. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数。

7.（牛顿-莱布尼兹公式）若函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$（微积分基本公式）

注：(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。(2) 函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数。

8.定积分的换元法

定理：假设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件：

(1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$　(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，且其值域 $R_\varphi \subset [a,b]$，则有 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$。（定积分换元公式）另一形式：

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt \quad (t=\varphi(x),\alpha=\varphi(a),\ \beta=\varphi(b))$$

注意：换元必须换限。

9.定积分的分部积分法

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx$$

简记：$\int_a^b uv'dx=[uv]_a^b-\int_a^b vu'dx$

10.反常积分

（1）无穷限的反常积分

①**定义 1**.设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $t>a$，若极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分。

记作 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$，这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

若上述极限不存在，函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分发散。类似，设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b\ ]$ 上连续，取 $t<b$，若极限 $\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,b\ ]$ 上的反常积分。

记作 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$，即 $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$。这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 收敛；否则，就称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 发散。

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，若反常积分 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$、$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛，则称上述反常积分之和为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分。记作：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^0 f(x)dx+\int_0^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 f(x)dx+\lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)dx$$

这时也称反常积分收敛，否则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

②计算　设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的一个原函数，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ 存在，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)-F(a)$；若 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ 不存在，反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=F(+\infty)$ 存在，$\int_a^{+\infty} f(x)dx=F(+\infty)-F(a)=[F(x)]_a^{+\infty}$

类似，若在 $(-\infty,b\ ]$ 上，$F'(x)=f(x)$，则当 $F(-\infty)$ 存在时，

$\int_{-\infty}^b f(x)dx=F(b)-F(-\infty)=[F(x)]_{-\infty}^b$，$F(-\infty)$ 不存在时，反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 发散。

若在$(-\infty,+\infty)$内，$F'(x)=f(x)$，则当$F(+\infty)$、$F(-\infty)$都存在时，

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty)-F(-\infty)=[F(x)]_{-\infty}^{+\infty}$，$F(+\infty)$、$F(-\infty)$有一个不存在时，反常积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$发散。

（2）无界函数的反常积分（瑕积分）

若函数$f(x)$在点a的任一邻域内都有界，那么点a称为函数$f(x)$的瑕点（也称无界间断点）。

定义 2.设函数$f(x)$在$(a,b]$上连续，点a为函数$f(x)$的瑕点，取$t>a$，如果极限$\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$存在，则称此极限为函数$f(x)$在$(a,b]$上的反常积分。仍记作$\int_a^b f(x)dx$

即$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$

这时也称反常积分$\int_a^b f(x)dx$收敛，若上述极限不存在，就称反常积分$\int_a^b f(x)dx$发散。类似，设函数$f(x)$在$[a,b)$上连续，点b为函数$f(x)$的瑕点，取$t<b$，

如果极限$\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$存在，则定义$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$。否则，就称反常积分$\int_a^b f(x)dx$发散。

设函数$f(x)$在$[a,b]$上除点c　$(a<c<b)$外连续，点c为函数$f(x)$的瑕点，若两个反常积分$\int_a^c f(x)dx$、$\int_c^b f(x)dx$都收敛，则定义

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx+\lim\limits_{t\to c^+}\int_t^b f(x)dx$ 否则，就称反常积分$\int_a^b f(x)dx$发散。

③计算：借助于牛顿-莱布尼兹公式

设$x=a$为函数$f(x)$的瑕点，在$(a,b]$上，$F'(x)=f(x)$，若极限$\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$存在，则称反常积分$\int_a^b f(x)dx=F(b)-\lim\limits_{x\to a^+}F(x)=F(b)-F(a^+)\overset{\text{记作}}{=}[F(x)]_a^b$，若$\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$不存在，则反常积分$\int_a^b f(x)dx$发散。

对于函数$f(x)$在$[a,b)$上连续，b为瑕点的反常积分，也有类似的计算公式。

重要结论：

1.设k为正整数，则 1）$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=0$

2） $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\pi$

2.设 k ，l 为正整数，且 $k\neq l$ ，则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lxdx=0$$

3.若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为奇函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

4.若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则

1） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$　　2） $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$

5. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & n\text{为正偶数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} & n\text{为大于1的正奇数}\end{cases}$

6. $\int_0^{\pi}\sin^n xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$

7.设 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数，a 为任意的实数，k 为任意的正整数，则 $\int_a^{a+kl}f(x)dx=k\int_0^{l}f(x)dx$

8.若 $f(t)$ 为连续函数且为奇函数，则 $\int_a^{x}f(t)dt$ 为偶函数。（$a\in k$）

若 $f(t)$ 为连续函数且为偶函数，则 $\int_0^{x}f(t)dt$ 为奇函数。

9.反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$　　$(a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leq 1$ 时发散。

10. 反常积分 $\int_a^{b}\frac{dx}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛，$q\geq 1$ 时发散。

三．例题分析

例 1.证明：　Dirichlet（狄利克雷函数）$D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上不可积。

分析：用定义去证明。

证明：对 $[0,1]$ 的任意划分 T ：$0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$ 取

$\xi_i\in[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n$，皆为有理数，则 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1$

若取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n$，皆为无理数，则 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=0$

由定积分的定义知 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积。

例 2.把 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\cdots+\sqrt{n^2}\right)$ 划为定积分形式。

分析：

$$\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\cdots+\sqrt{n^2}\right)=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\left(\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}}+\sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}}+\cdots+\sqrt{\frac{\boldsymbol{n}^2}{\boldsymbol{n}}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\cdot\sqrt{\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^2}\left(\sqrt{\boldsymbol{n}}+\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{n}}+\cdots+\sqrt{\boldsymbol{n}^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\cdot\sqrt{\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{n}}}$$

这是一个和式的极限形式。$\boldsymbol{f}(\xi_i)=\sqrt{\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{n}}}$　　$\Delta\boldsymbol{x}_i=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$，从而积分区间为 $[0,1]$，

$f(x)$ 为 $\sqrt{x}$。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^2}\left(\sqrt{\boldsymbol{n}}+\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{n}}+\cdots+\sqrt{\boldsymbol{n}^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\cdot\sqrt{\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{n}}}=\int_0^1\sqrt{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{dx}$

例 3.利用定积分的几何意义求下列定积分

（1）$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$　$(a>0)$　　（2）$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx$

解：（1）由定积分的几何意义可知：$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi a^2$

（2）由图形及定积分的几何意义知 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=0$

例 4.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx$

分析：$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx$ 为积分形式，上下限在变化趋于 ∞，怎样把上下限变化转化为函数的变化，从而求得极限，而积分中值定理恰好把函数在一个区间上的定积分和函数在此区间上的某点函数值联系起来。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}(n+p-n)=p\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}$，$\xi_n$ 在 $n+p$ 与 n 之间

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=p\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}=0$$

例 5.（1）求 $\frac{d}{dx}\int_0^x te^{t^2}dt$

（2）求 $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^0 te^{-t^2}dt$

（3）求 $\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x^2}te^{t^2}dt$

解：（1）$\because\ f(t)=te^{t^2}$ 为连续函数，$\dfrac{d}{dx}\int_0^x te^{t^2}dt=xe^{x^2}$

（2）$\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^0 te^{-t^2}dt=-\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2} te^{-t^2}dt$

设 $u=x^2$，则 $-\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2} te^{-t^2}dt=-\dfrac{d}{du}\int_0^u te^{t^2}dt\cdot\dfrac{du}{dx}=-ue^{-u^2}\cdot 2x=-2x^3e^{-x^4}$

（3）由定积分的性质，对任一常数 a，$\int_{-x}^{x^2} te^{t^2}dt=\int_{-x}^{a} te^{t^2}dt+\int_a^{x^2} te^{t^2}dt$

$$=-\int_a^{-x} te^{t^2}dt+\int_a^{x^2} te^{t^2}dt$$

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x^2} te^{t^2}dt=\frac{d}{dx}\left[-\int_a^{-x} te^{t^2}dt\right]+\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} te^{t^2}dt\ =-(-x)e^{(-x)^2}\cdot(-1)+x^2e^{\left(x^2\right)^2}\cdot 2x$$

$$=-xe^{x^2}+2x^3e^{x^4}$$

总结：形如 $\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(t)dt$（其中 f、ϕ、φ 满足相应条件）的函数，

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(t)dt=f[\phi(x)]\phi'(x)-f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

例 6.求 $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^3}(2x-t)f\left(a^2-t\right)dt$

分析：被积函数中含有 x，而积分号下为对 t 求积分，故

$$\int_0^{x^3}(2x-t)f\left(a^2-t\right)dt=2x\int_0^{x^3} f\left(a^2-t\right)dt-\int_0^{x^3} tf\left(a^2-t\right)dt$$

又被积函数 $f\left(a^2-t\right)$ 中自变量为 a^2-t，与积分变量不同，故要转化为同一变量。

解：$\int_0^{x^3}(2x-t)f\left(a^2-t\right)dt=2x\int_0^{x^3} f\left(a^2-t\right)dt-\int_0^{x^3} tf\left(a^2-t\right)dt$

令 $a^2-t=u$，则 $t=a^2-u$，$dt=-du$，且 $t=0$ 时，$u=a^2;t=x^3$ 时，$u=a^2-x^3$。

$$2x\int_0^{x^3} f\left(a^2-t\right)dt-\int_0^{x^3} tf\left(a^2-t\right)dt=-2x\int_{a^2}^{a^2-x^3} f(u)du+\int_{a^2}^{a^2-x^3}\left(a^2-u\right)f(u)du$$

$$=-2x\int_{a^2}^{a^2-x^3} f(u)du+a^2\int_{a^2}^{a^2-x^3} f(u)du-\int_{a^2}^{a^2-x^3} uf(u)du$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^3}(2x-t)f\left(a^2-t\right)dt=\frac{d}{dx}\left[2x\int_0^{x^3} f\left(a^2-t\right)dt-\int_0^{x^3} tf\left(a^2-t\right)dt\right]$$

$$=\frac{d}{dx}\left[-2x\int_{a^2}^{a^2-x^3} f(u)du+a^2\int_{a^2}^{a^2-x^3} f(u)du-\int_{a^2}^{a^2-x^3} uf(u)du\right]$$

$$=-2\int_{a^2}^{a^2-x^3} f(u)du-2xf\left(a^2-x^3\right)\cdot\left(-3x^2\right)+a^2f\left(a^2-x^3\right)\cdot\left(-3x^2\right)$$

$$-\left(a^2-x^3\right)f\left(a^2-x^3\right)\cdot\left(-3x^2\right)$$

$$=3x^2f\left(a^2-x^3\right)\left(2x-a^2+a^2-x^3\right)-2\int_{a^2}^{a^2-x^3} f(u)du$$

$$=\left(6x^3-3x^5\right)f\left(a^2-x^3\right)-2\int_{a^2}^{a^2-x^3}f\left(u\right)du$$

例 7. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x^n}dx$

解： $0\le\frac{x^2}{1+x^2}<x^n$ 当 $x\in[0,\frac{1}{2}]$时，则 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x^n}dx\ge 0$，且 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x^n}dx\le\int_0^{\frac{1}{2}}x^ndx$，又因为

$\int_0^{\frac{1}{2}}x^ndx=\left[\frac{x^n}{1+x^n}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x}dx=0$，由夹逼准则得：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x^n}dx=0$$

例 8． 设 $f(x)\begin{cases}x+1 & x\ge 0\\ e^{-x} & x<0\end{cases}$，求 $\int_{-1}^{2}f(x)dx$

解： 由定积分的性质：$\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx=$

$$\int_{-1}^{0}e^{-x}dx+\int_0^2(x+1)dx=\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^2=\frac{1}{e}-1+4=3+\frac{1}{e}$$

例 9. 设 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx$，求$f(x)$

分析： 关键是求 $\int_0^2 f(x)dx$，$\int_0^1 f(x)dx$，而这两个定积分为确定的数值。求定积分时可提到积分号外面。

解： 在 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx$ 两边同时求$[0,2]$上的定积分，

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 x^2dx-\int_0^2 x\left[\int_0^2 f(x)dx\right]dx+2\int_0^2\left[\int_0^1 f(x)dx\right]dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2-\int_0^2 f(x)dx\cdot\int_0^2 xdx+2\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^2 dx=\frac{8}{3}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\int_0^2 f(x)dx+2\left[x\right]_0^2\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\frac{8}{3}-2\int_0^2 f(x)dx+4\int_0^1 f(x)dx \quad \text{则} \int_0^2 f(x)dx=\frac{8}{9}+\frac{4}{3}\int_0^1 f(x)dx \qquad ①$$

再对 $f(x)$ 求$[0,1]$上定积分，

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1 x\left[\int_0^2 f(x)dx\right]dx+2\int_0^1\left[\int_0^1 f(x)dx\right]dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1-\int_0^2 f(x)dx\int_0^1 xdx+2\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 dx$$

$$=\frac{1}{3}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\int_0^2 f(x)dx+2\left[x\right]_0^1\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx$$

则 $\boldsymbol{\int_0^2 f(x)dx=\frac{2}{3}+2\int_0^1 f(x)dx}$

联立①②，得 $\int_0^{\text{丂}} f(x)dx\frac{1}{3},\int_0^2 f(x)dx=\frac{4}{3}$

所以 $f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

例 10.设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，$\forall a\cdot b>0$ $\int_a^{ab} f(x)dx$ 与 a 无关，$f(1)=1$ 求 $f(x)$

解：对 $\forall a>0$，$\int_a^{ab} f(x)dx$ 与 a 无关，则 $\dfrac{d\int_a^{ab} f(x)dx}{da}=0$，

$$f(ab)\cdot b-f(a)=0\therefore f(ab)=\frac{1}{b}f(a)$$

由 a,b 任意性，可令 $ab=1$,则$f(1)=1=af(a)\therefore f(a)=\frac{1}{a}$

由 $a>0$的任意性，故 $f(x)=\frac{1}{x}$

例 11.求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos 2x}dx$

解：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\left|\sin x\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin xdx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{2}\sin xdx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx-\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin xdx=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=2\sqrt{2}\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}$$

注：$\sqrt{1-\cos 2x}\neq\sin x$ 而 $\sqrt{1-\cos 2x}=\left|\sin x\right|=\begin{cases}\sin x & x\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ -\sin x & x\in[-\frac{\pi}{2},0]\end{cases}$

例 12.求 $\int_1^2\frac{1}{x(x^4+1)}dx$

解：令 $x=\frac{1}{t}$,则$dx=-\frac{1}{t^2}dt,x=1,t=1;x=2,t=\frac{1}{2}$，

$$\int_1^2\frac{1}{x(x^4+1)}dx=\int_1^2\frac{1}{\frac{1}{t}(\frac{1}{t^4}+1)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{t^3}{1+t^4}dt=\frac{1}{4}\left[\ln(1+t^4)\right]_{\frac{1}{2}}^1=$$

$$\frac{1}{4}\ln 2-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{17}{2^4}\right)=\frac{5}{4}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 17$$

例 13.求$\int_0^1 \frac{x}{e^x+e^{1-x}}dx$

解：令$t=1-x$，则$x=1-t$，　$dx=-dt$，当$x=0$时，$t=1$,当$x=1$时，$t=0$

$$\int_0^1 \frac{x}{e^x+e^{1-x}}dx=-\int_1^0 \frac{1-t}{e^t+e^{1-t}}dt=\int_0^1 \frac{1-t}{e^t+e^{1-t}}dt=\int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{1-t}}dt+\int_0^1 \frac{-t}{e^t+e^{1-t}}dt$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{x}{e^x+e^{1-x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{1-x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+e}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(e^t\right)}{\left(e^t\right)^2+e}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{e}}\left[\arctan\frac{e^t}{\sqrt{e}}\right]_0^1=\frac{1}{2\sqrt{e}}\left[\arctan\sqrt{e}-\arctan\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$$

例 14. $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x<0\\ e^{-x} & x\geq 0\end{cases}$ 求$\int_1^3 f(x-2)dx$

解：令$x-2=t$，　则$dx=dt$. $x=1$时，$t=-1$,当$x=3$时，$t=1$

$$\int_1^3 f(x-2)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0\left(1+x^2\right)dx+\int_0^1 e^{-x}dx=\left[x+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0+\left[-e^{-x}\right]_0^1=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}$$

例 15.设$f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$,求$\int_0^\pi f(x)dx$

解：$\int_0^\pi f(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^\pi-\int_0^\pi xf'(x)dx=\pi f(\pi)-\int_0^\pi x\frac{\sin x}{\pi-x}dx$

$$=\pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi-x}dx-\int_0^\pi x\frac{\sin x}{\pi-x}dx=\int_0^\pi(\pi-x)\frac{\sin x}{\pi-x}dx=\left[-\cos x\right]_0^\pi=2$$

例 16.求$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin wtdt$,其中$p,w$为常数，$w\neq 0$.

解：$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin wtdt=-\frac{1}{w}\int_0^{+\infty} e^{-pt}d\cos wt=-\frac{1}{w}\left[e^{-pt}\cos wt\right]_0^{+\infty}$

$$+\frac{1}{w}\int_0^{+\infty}\cos wt(-p)e^{-pt}dt=\frac{1}{w}-\frac{p}{w}\cdot\frac{1}{w}\int_0^{+\infty} e^{-pt}d\sin wt$$

$$=\frac{1}{w}-\frac{p}{w^2}\left[e^{-pt}\sin wt\right]_0^{+\infty}+\frac{p}{w^2}\int_0^{+\infty}\sin wt\cdot(-p)e^{-pt}dt$$

$$=\frac{1}{w}-\frac{p^2}{w^2}\int_0^{+\infty}\sin wt\cdot e^{-pt}dt$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin wtdt=\frac{\frac{1}{w}}{1+\frac{p^2}{w^2}}=\frac{w}{w^2+p^2}$$

例 17.求$\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$

解：$\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty, x=1$ 为瑕点。$\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}=\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}+\int_1^2\frac{dx}{(1-x)^2}$

$$\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}=\left[\frac{1}{1-x}\right]_0^1=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-x}-1=+\infty$$

$\therefore\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}$ 发散，从而 $\therefore\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$ 发散。

四．练习题。

1.是非题

①设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

② $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积。

③设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\int_a^b f(x)dx=0$，则 $\int_a^b[f(x)]^2dx=0$

④ $\frac{\arctan x}{x}$ 在 $x=0$ 无定义，所以定积分 $I=\int_0^1\frac{\arctan x}{x}dx$ 不存在。

⑤设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则存在 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

⑥设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，又 $F(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in[a,b]$,

则 $F'(x)=f(x),\quad x\in[a,b]$

⑦ $\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1=-2$

2.填空题

① $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n\frac{e^{\frac{k}{n}}}{n+ne^{\frac{2k}{n}}}=$________

②已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=2$，且设 $F(x)=\int_{\sin x}^{x^2}f(t)dt$，

则 $F'(0)=$_______

③ $\left(\int_a^b e^x\cos xdx\right)'x=$ ___________

④函数 $y=\int_0^x(1+t)\arctan tdt$ 的极小值_________

⑤ $\int_{-a}^a x[f(x)+f(-x)]dx=$_________

⑥由曲线 $y=x+\frac{1}{x},x=2$及$y=2$所围图形的面积$S=$________

⑦设 $f(x)$连续，则$\frac{d}{dx}\int_0^x tf\left(x^2-t^2\right)dt=$________

⑧若已知 $f(x)$满足方程 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\cdot\int_0^1 f^2(x)dx$，则 $f(x)=$________

3.选择题

①定积分的定义$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 说明：(　)

A. $[a,b]$必须等分，ξ_i是$[x_{i-1},x_i]$的端点。

B. $[a,b]$可任意划分，ξ_i必须是$[x_{i-1},x_i]$的端点。

C. $[a,b]$可任意划分，$\lambda=\max\{\Delta x_i\}\to 0,\xi_i$在$[x_{i-1},x_i]$上任意选取。

D. $[a,b]$必须等分，$\lambda=\max\{\Delta x_i\}\to 0,\xi_i$在$[x_{i-1},x_i]$上任意选取。

②积分中值定理，$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$其中

A. ξ是$[a,b]$中任一点；　B. ξ是$[a,b]$中必定存在的某一点；

C. ξ是$[a,b]$中唯一的某一点；　D. ξ是$[a,b]$内中点

③设 $f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)dx>\int_a^b g(x)dx,$

则$f(x)>g(x)$成立的情况是：

A. 当$-\infty<x<+\infty$时均成立。

B. $a\le x\le b$时成立。

C. 在$[a,b]$之间至少有某些点成立。

D. 在$[a,b]$内不可能成立。

④ $f(x)$在$[a,b]$上连续是$\int_a^b f(x)dx$存在的

A.必要条件　B.充要条件　C.充分条件　D.即不充分又不必要

⑤设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin tdt,$则$F(x)$

A.为正常数　B. 为负常数　C.恒为零　D.不为常数

⑥ $F(x)=\int_0^x e^{-t}\cos tdt$，则 $F(x)$在$[0,\pi]$上有

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$为极大值，$F(0)$为最小值。

B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$为极大值，但无最小值。

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$为极小值，无极大值。

D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$为最小值，$F(0)$为最大值。

⑦若 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且设

$$\begin{cases} M=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{h}\int_a^x\left[f(t+h)-f(t)\right]dt & a<x<b \\ N=f(x)-f(a) & a<x<b \end{cases}$$

则必有：(　)

A.M>N　B.M<N　C.M=N　D.M=(N+1) ^{2}

⑧$I=\int_0^a x^3 f\left(x^2\right)dx,\quad (a>0)$则（　）

A. $I=\int_0^{a^2} xf(x)dx$　　B. $I=\int_0^a xf(x)dx$

C. $I=\dfrac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$　　D. $I=\dfrac{1}{2}\int_0^a xf(x)dx$

⑨若 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ x & 1\le x\le 2 \end{cases}$则$\phi(x)=\int_0^x f(t)dt$在开区间$(0,2)$上

A.有第一类间断点　B.有第二类间断点

C.两种间断点都有　D.是连续的

⑩若 $f(x)=\begin{cases} \int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$

且已知 $f(x)$在 $x=0$ 点处连续，则必有（　）

A. $a=1$　B. $a=2$　C. $a=0$　D. $a=-1$

⑾ $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)dx=0$，则

A. 在$[a,b]$的某个小区间上，$f(x)=0$。

B. $[a,b]$上一切点x均使 $f(x)=0$。

C. 在$[a,b]$内至少有一点x，使 $f(x)=0$。

D. $[a,b]$内不一定有x，使 $f(x)=0$。

⑿若 $f(x)$具有连续导数，且 $f(0)=0$，设

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$ 则$\phi'(0)$之值为：

A. $f'(0)$　　B. $\frac{1}{3}f'(0)$　　C. 1　　D. $\frac{1}{3}$

⒀设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$a<c$，则（　）

A. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 必收敛，但 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，$\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 不一定发散。

B. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，$\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 必发散。但 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 不一定收敛。

C. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$，$\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 同时收敛，同时发散。

D. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 不一定收敛。

4.简答题

1.设 $f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上连续，且不变号，证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使下列成立：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导且 $\frac{1}{3}\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = f(0)$ 证明：在 $(0,1)$ 内存在一点 C，使 $f'(C)=0$

3.求 $\int_{-3}^{2}\min(2,x^2)dx$

4.试确定常数 a,b 使 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{ax-\sin x}\int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{b+3u}}du = 2$

5.设 $f(u)$在$u=0$ 的某领域内连续，且 $\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=A$,，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 f(xt)dt\right)$

6..求 $\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

7.求 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}$

答案：

1.1.√　2. √　3. ×　4. ×　5. ×　6. ×　7. ×

2. 1. $\arctan e-\frac{\pi}{4}$(注意原式$=\int_0^1\frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx$)

2.-2　3.0　4.0　5.0　6.$\frac{3}{2}+\ln 2$

7.$xf\left(x^2\right)$ 提示:$\int_0^x tf\left(x^2-t^2\right)dt=-\frac{1}{2}\int_0^x f\left(x^2-t^2\right)d\left(x^2-t^2\right)$

$$\overset{x^2-t^2=u}{=}-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)du$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\int_0^x tf\left(x^2-t^2\right)dt=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(u)du=xf\left(x^2\right)$$

8. $f(x)=3x-3\sqrt{1-x^2}$或$f(x)=3x-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}$

3.

1.C　2.B　3.C　4.C　5.A　6.A　7.C　8.C

9.D　10.C　11.C　12.B　13.C

4.

1.第二中值定理,与中值定理证法类似　3.$10-\frac{8}{3}\sqrt{2}$　4.$a=1,b=1$

5.令$u=xt$,则$\int_0^1 f(xt)dt=\int_0^x f(u)\cdot\frac{1}{x}du=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 f(xt)dt\right)=\frac{A}{2}$　6.$4-\pi$　7.$\frac{\pi}{8}$

五.自测题

(一)填空题

1.当$x\geq 0$时，$f(x)$为连续函数,且满足$\int_0^{x^2(1+x)} f(x)dx=x,$

则$f(2)=$ __________

2.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-x-1}{3x} & x<0\\ \int_0^x \sin t^2dt\cdot x^{-3} & x>0\end{cases}$ 则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ______

3.$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+t^4}}{x^3}dt=$ _________

4.$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^{x+1}+e^{3-x}}=$ _________

5.$\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}=$ ___________

(二)选择题

1．设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，,$\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$,则

A．$\varphi(x)$是 $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数

B． $f(x)$是$\varphi(x)$的一个原函数

C. $\varphi(x)$是 $f(x)$在$[a,b]$上的唯一原函数

D． $f(x)$是$\varphi(x)$在$[a,b]$上的唯一原函数

2.设 $f(x)=\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(t-x)dx$,则必有(　　)

A． $f(x)=-\sin x$　　　　B． $f(x)=-1+\cos x$

C. $f(x)=\sin x$　　　　D． $f(x)=1-\sin x$

3． $\varphi(x)$在闭区间$[a,b]$上连续， $f(x)=(x-b)\cdot\int_a^x \varphi(t)dt$,则必有

$\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=$ ________

A.1　　B.-1　　C.0　　D． $\varphi(\xi)$

4.设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$,则有(　　)

A.N<P<M　　B.M<P<N　　C.N<M<P　　D.P<M<N

5.设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt, g(x)=x^3+x^4$,则当$x\to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的

的(　　).

A.等价无穷小　　　　B.同价但非等价的无穷小

C.高阶无穷小　　　　D.低价无穷小

(三)

1.已知 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$;求$\int_0^1 xf'(2x)dx$

2. $f(x)=\int_1^x \dfrac{\ln t}{1+t}dt$　　$x>0$,求 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

3．设 $f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(x)$>0， $g(x)$非负，

求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx$.

4.设 $f(x)$在$[0,1]$上可导.且满足 $f(1)=\int_0^1 xf(x)dx$, 证明:必存在一点

$\xi\in(0,1)$.使$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$

5.设 $y=y(x)$,由方程 $\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=1$ 确定,求 $\frac{dy}{dx}$.

6.设 $f(x)=\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt$,求 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内取极值的点.

7.试证方程 $\int_0^x \sqrt{1+t^4}dt+\int_{\cos x}^0 e^{-t^2}dt=0$ 有且只有一个实根.

8.设 $a>0.f(x),g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, $g(x)$ 为偶函数,且 $f(x)$ 满足

$f(x)+f(-x)=A\quad(A$为常数$)$

(1)证明: $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx$

(2)利用(1)的结论计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x dx$

答案(一)1. $\frac{1}{5}$　2. $\frac{1}{3}$　3. $\frac{1}{3}$　4. $\frac{\pi}{4e^2}$　5. π

(二)1.A　2.A　3.C　4.D　5.B

(三)1.2　2. $\frac{1}{2}\ln^2 x$　3. $\int_a^b g(x)dx$　5. $\pm 2e^{-y^2}\sin x^2$　6. $x=\frac{1}{2}$ 处取极大值

第六章　定积分

一.基本要求

1.掌握“ 元素法 ”求解实际问题的思路及步骤,并会用来解决实际问题.

2.能正确的用定积分来表达,一些几何量与物理量,如面积,体积,弧长,功,水压力等.

二.主要内容

1.定积分在几何上的应用

(1)平面图形的面积

在直角坐标系中的计算法:

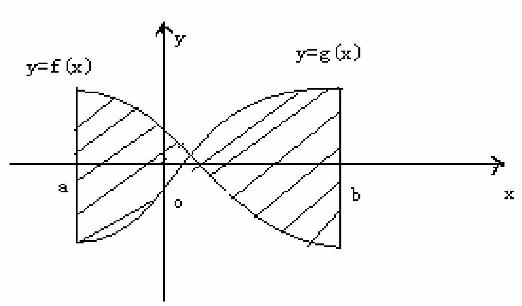


图 6-1

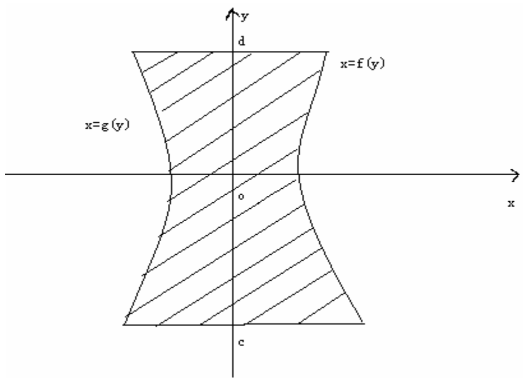


图 6-2

i 由连续曲线 $y = f(x)$($f(x) \geq 0$), x 轴及 $x = a, x = b, (a < b)$ 所围成曲边梯形的面积.

$$A = \int_a^b f(x)dx \quad .$$

ii 由连续曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 及 $x = a, x = b, (a < b)$ 所围图形(图 6-1)的面积

$$A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx .$$

iii 由连续曲线 $x = f(y)$, $x = g(y)$ $y = c, y = d, (c < d)$ 所围图形(图 6-2)的图形

$$A = \int_c^d \left| f(y) - g(y) \right| dy .$$

当以[a,b]为底的曲边梯形的曲边由参数方程 $\begin{cases} \boldsymbol{x = \varphi(t)} \\ \boldsymbol{y = \psi(t)} \end{cases}$ 给出时,曲边梯形的面积为

$$A = \int_a^b |y| dx = \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \varphi'(t) dt ,$$

其中 a=$\varphi(\alpha)$,b=$\varphi(\beta)$, $\varphi'(t)$ 及 $\psi(t)$ 在以 α ， β 为区间端点的区间上连续。

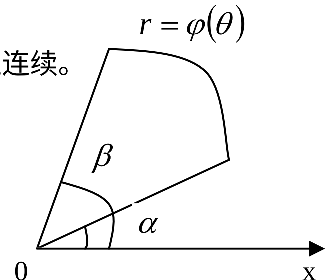


图 6-3

在极坐标系中的计算法：

i 由连续曲线 r=$\varphi(\theta)$ 及两条射线 $\theta = \alpha$， $\theta = \beta$（α〈β)

所围曲边扇形（图 6-3）的面积为

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi^2(\theta) d\theta 。$$

ii 由连续曲线 r=$\varphi_1(\theta)$, $r = \varphi_2(\theta)$ 及两条射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta (\alpha < \beta)$ 所围图形（图 6-4）的面积为：$A = \dfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[\varphi_2^2(\theta) - \varphi_1^2(\theta) \right] d\theta$。

（2）体积

ⅰ旋转体的体积。

由连续曲线 $y=f(x)$（ $f(x)\ \ \geq 0$）， x 轴及连续直线 $x=a,x=b,(a<b)$ 所围成的曲边梯形分别绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积为：

$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ ，$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx$。

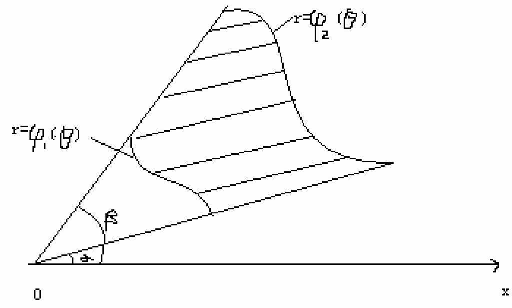


图 6-4

ⅱ平行截面面积为已知的立体的体积

设立体（图 6-5）在垂直于 x 轴的两个平面 $x=a,x=b,(a<b)$ 之间，它被垂直于 x 轴的平面所截得的截面面积 A（x）是 x 的连续函数，则该立体的体积为 $V=\int_a^b A(x)dx$。

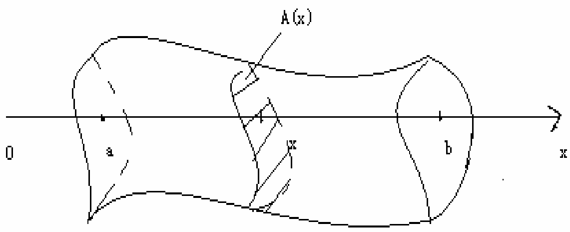


图 6-5

（3）平面曲线的弧长

ⅰ直角坐标情形

设曲线弧由直角坐标方程 $y=f(x)$（$a\leq x\leq b$）,给出，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数，则此曲线弧的长度为 $s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$

ⅱ参数方程的情形

设曲线弧由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$（$\alpha\leq t\leq\beta$）给出，其中 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上具有连续导数，则此曲线弧的长度为 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$。

ⅲ极坐标情形

设曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)(\alpha\leq\theta\leq\beta)$ 给出，其中 $r(\theta)$ 在$[\alpha,\beta]$上具有连续导数，则此曲线弧的长度为 $\boldsymbol{s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta}$。

2.定积分在物理上的应用

（1）变力做功

设物体受连续变力 $F(x)$（方向与物体运动方向一致）的作用作直线运动，从 a 点移动到 b 点，力 $F(x)$ 所作的功为 $W=\int_a^b F(x)dx$。

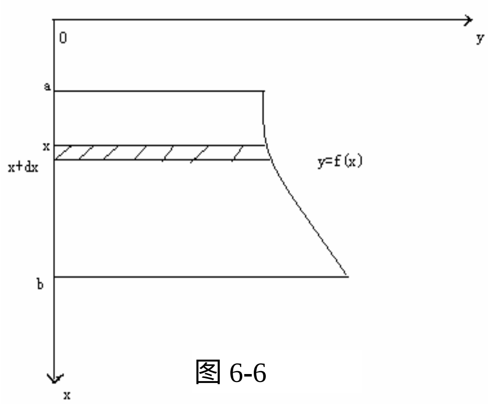


图 6-6

（2）水压力

设平板形状为一曲边梯形，铅直地放置在水中，其位置及坐标系选取如图 6-6，y=f(x)为连续曲线，则平板一侧所受的水压力为 $P=\rho g\int_a^b xf(x)dx$，其中 ρ 为水的密度。

（3）引力

三.例题分析

例1.求曲线 $y=2x, xy=2, y=\frac{x^2}{4}$ 所围成的平面图形的面积$(x\geq 1)$.

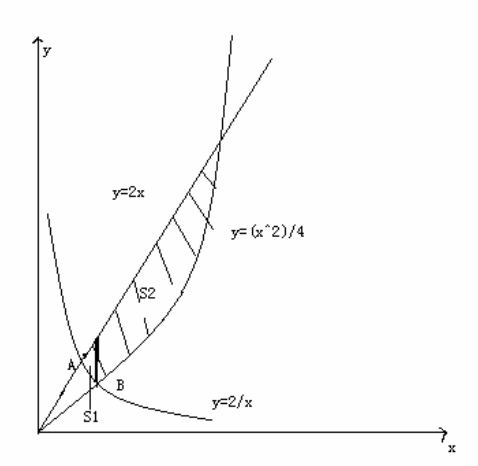


图 6-7

解： 平面图形如图 6-7 所示求曲线的交点$\begin{cases} y=2x \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow A(1,2)$

$\begin{cases} xy=2 \\ y=\frac{x^2}{4} \end{cases} \Rightarrow B(2,1)$　　　　$\begin{cases} y=2x \\ y=\frac{x^2}{4} \end{cases} \Rightarrow C(8,16)$

$S_1=\int_1^2\left(2x-\frac{2}{x}\right)dx=3-2\ln 2$　　$S_2=\int_2^8\left(2x-\frac{x^2}{4}\right)dx=18$，则

所求图形的面积为 $S=S_1+S_2=21-2\ln 2$

例 2 抛物线 $y^2=2x$ 将圆 $x^2+y^2=8$ 分成两部分 A_1，A_2（图 6-8），试求这两部分的面积。

解： 求曲线在第一象限内的交点$\begin{cases} y^2=2x \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \Rightarrow (2,2)$

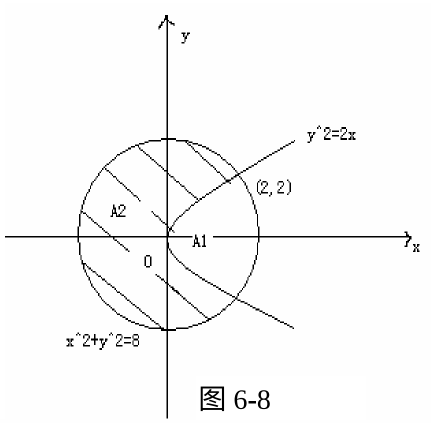


图 6-8

由对称性，$A_1=2\int_0^2\left(\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2}\right)dy$

$$=2\left[\frac{1}{2}y\sqrt{8-y^2}+\frac{8}{2}\arcsin\frac{y}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{6}y^3\right]_0^2=2\pi+\frac{4}{3},$$

$$A_2=8\pi-A_1=6\pi-\frac{4}{3}.$$

例 3 求两椭圆 $x^2+\frac{1}{3}y^2=1$ 和 $\frac{1}{3}x^2+y^2=1$ 公共部分的面积。（图 6-9）

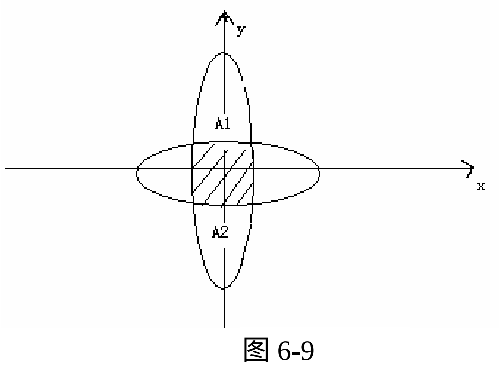


图 6-9

解： 方法一（直角坐标）

由方程组$\begin{cases} x^2+\frac{1}{3}y^2=1 \\ \frac{1}{3}x^2+y^2=1 \end{cases}$，求得两椭圆在第一象限的

交点$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$。

由于 $A_1=A_2=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}\right)dx$

$$=2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cos^2 tdt-2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 tdt$$

$$=2\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 tdt$$

$$=2\sqrt{3}\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

又椭圆 $x^2+\frac{1}{3}y^2=1$ 的面积为 $\sqrt{3}\pi$，故公共部分的面积为

$$A=\sqrt{3}\pi-2A_1=\sqrt{3}\pi-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\pi=\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$$

方法二（极坐标）

因为 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，故 $x^2+\frac{1}{3}y^2=1$ 化为

$$r^2\cos^2\theta+\frac{1}{3}r^2\sin^2\theta=1,\text{即}r^2=\frac{3}{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

由对称性可知公共部分为

$$A=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2(\theta)d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3}{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3+\tan^2\theta}d\tan\theta$$

$$=\frac{12}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

例 4 在抛物线 $y=-x^2+1$ 上找一点 $\boldsymbol{P(x_1,y_1)}$，其中 $x_1\ge 0$，过点 P 作抛物线的切线，使此切线与两坐标轴所围图形面积最小

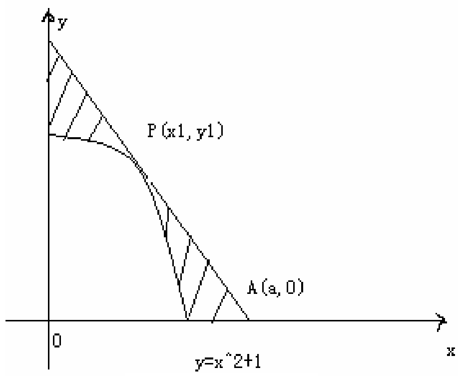


图 6-10

解： 抛物线上点 $P(x_1,y_1)$ 处的切线方程为

$$y-y_1=-2x_1(x-x_1)$$

即 $y=-2x_1x+x_1^{\,2}+1$，设此切线交 x 轴于点 $A(a,0)$，交 y 轴于点 $B(0,b)$(图 6-10)，

则 $a=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right), b=x_1{}^2+1$，所围图形的面积 $A=\frac{1}{2}ab-\int_0^1\left(-x^2+1\right)dx$

$=\frac{1}{4}\left(x_1{}^3+2x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\frac{2}{3}$，

令 $\boldsymbol{\frac{dA}{dx_1}=\frac{1}{4}\left(3x^2+2-\frac{1}{x_1{}^2}\right)=0}$，得 $\boldsymbol{x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}}$，由于 $\left.\frac{d^2A}{dx_1{}^2}\right|_{x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}}=\left.\frac{1}{4}\left(6x_1+\frac{2}{x_1^3}\right)\right|_{x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}}>0$

所以，A 在 $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 取得最小值，故 $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{3}\right)$ 为所求的点 。

例 5 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且在（a,b）内有 $f'(x)>0$，证明在（a,b）内存在唯一的点 ξ，使如图 6-11 所示阴影部分面积 $S_1=3S_2$。

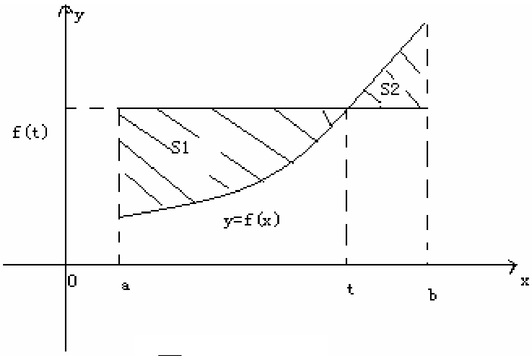


图 6-11

证明 存在性 在$[a,b]$上任取一点 t,

令 $F(t)=\int_a^t\left[f(t)-f(x)\right]dx-3\int_t^b\left[f(x)-f(t)\right]dx$

则 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续，且

$F(a)=-3\int_a^b\left[f(x)-f(a)\right]dx<0(\because f'(x)>0)$,

$F(b)=\int_a^b\left[f(b)-f(x)\right]dx>0$,

由零点介值定理知，在(a,b)内至少存在一点 ξ，使 F（ξ）=0，即存在 $\xi\in(a,b)$，使 $S_1=3S_2$。

唯一性 由于 $F'(t)=f'(t)\left[(t-a)+3(b-t)\right]$>0,知 $F(t)$ 单调，从而 ξ 唯一。

例 6 试求由抛物线 $y^2=4ax(a>0)$与过焦点的弦围成图形面积的最小值

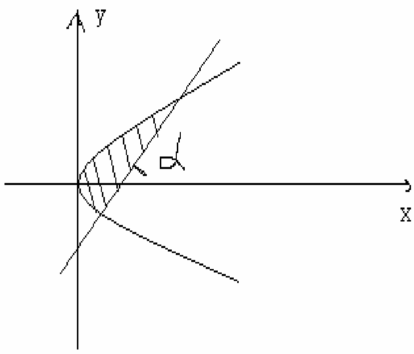


图 6-12

解： 取抛物线的焦点为极点，在极坐标下抛物线的方程为

$r=\frac{2a}{1-\cos\theta}$

设过焦点的弦与 x 轴正向的夹角为 α，如图 6-12 所示，则弦与抛物线所围图形的面积，用极坐标表示为

$$A(\alpha)=\frac{1}{2}\int_\alpha^{\pi+\alpha}\left(\frac{2a}{1-\cos\theta}\right)^2d\theta$$

$$A'(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot 4a^2\left[\frac{1}{(1-\cos(\pi+\alpha))^2}-\frac{1}{(1-\cos\alpha)^2}\right]$$

$$=2a^2\left[\frac{1}{(1+\cos\alpha)^2}-\frac{1}{(1-\cos\alpha)^2}\right]=\frac{-8a^2\cos\alpha}{\sin^4\alpha}$$

令 $A'(\alpha)=0$,得$\alpha=\frac{\pi}{2}(0<\alpha<\pi)$，唯一的驻点。

当$\alpha<\frac{\pi}{2}$时，$A'(\alpha)<0;\alpha>\frac{\pi}{2}$时，$A'(\alpha)>0$，所以$\alpha=\frac{\pi}{2}$为极小值点，也是最小值点。

当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，面积的最小值用直角坐标计算表示为 $A=2\int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{x}dx=\frac{8a^2}{3}$

例 7 求圆域$(x-b)^2+y^2\le R^2(b>R)$绕 y 轴旋转所成的立体的体积。

解法 1

取 y 为积分变量，如图 6-13，

右半圆周为 $x_2=b+\sqrt{R^2-y^2}$，左半圆周

$x_1=b-\sqrt{R^2-y^2}$

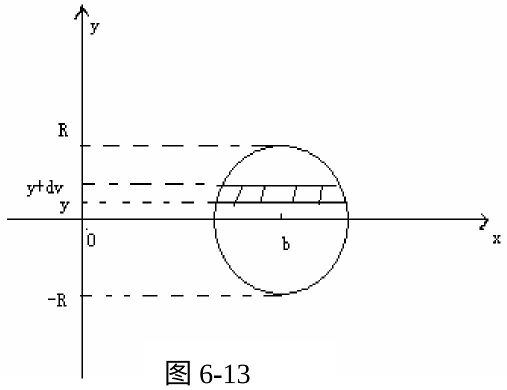


图 6-13

$$dV=(\pi x_2^2-\pi x_1^2)dy$$

$$=\pi\left[\left(b+\sqrt{R^2-y^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{R^2-y^2}\right)^2\right]dy$$

$$=4\pi b\sqrt{R^2-y^2}dy$$

由对称性

$$V=2\int_o^R dV=8\pi b\int_o^R\sqrt{R^2-y^2}dy=8\pi b\cdot\frac{1}{4}\pi R^2=2\pi^2Rb$$

解法 2

取 x 为积分变量，如图 6-14，

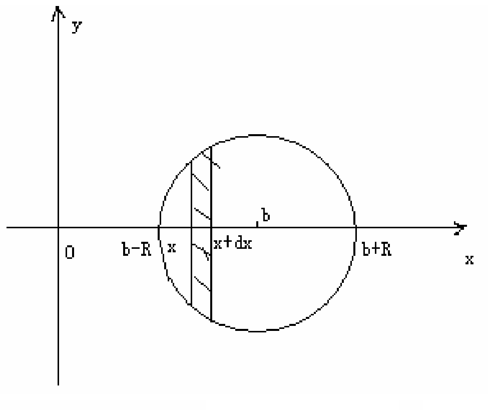


图 6-14

$$dV=2\pi x\cdot 2ydx$$

$$=4\pi x\sqrt{R^2-(x-b)^2}dx$$

于是$V=4\pi\int_{b-R}^{b+R}x\sqrt{R^2-(x-b)^2dx}$

$$=4\pi\int_{-R}^{R}(b+t)\sqrt{R^2-t^2}dt=8\pi b\int_o^R\sqrt{R^2-t^2}dt=2\pi^2R^2b$$

例 8 求心形线$r=4(1+\cos\theta)$和直线θ=0，$\theta=\frac{\pi}{2}$围成的图形绕极轴旋转所成的旋转体体积。

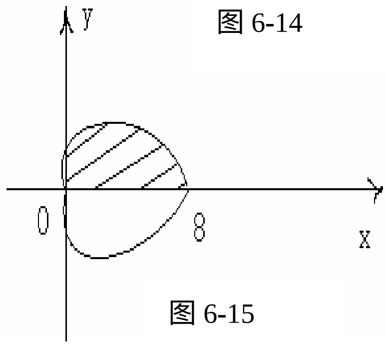


图 6-15

解： 由直角坐标和极坐标的关系$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$

及 $r=4(1+\cos\theta)$，可得心形线的参数方程

$$\begin{cases} x=4(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=4(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$\theta=0$时,$x=8,\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$x$=0,如图 6-15，

旋转体体积用直角坐标表示为

$$V=\pi\int_0^8 y^2dx$$

$$=-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 16(1+\cos^2\theta)\sin^2\theta\cdot 4(\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta)d\theta$$

$$=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2\sin^3\theta(1+2\cos\theta)d\theta=160\pi$$

例 9 过点 P（1，0）作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形（图 6-16)，求此图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积。

解： 设所做切线与抛物线相切于点

$\left(x_0,\sqrt{x_0-2}\right)$，因 $y'\big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}\bigg|_{x=x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}$

故此 方程为 $y-\sqrt{x_0-2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0)$，又因切线过点

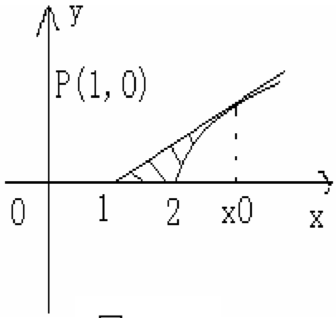


图 6-16

P（1，0）故

$-\sqrt{x_0-2}=\dfrac{1-x_0}{2\sqrt{x_0-2}}$，解得 $x_0=3,y_0=1$ 因而所求旋转体体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot2-\pi\int_2^3\left(\sqrt{x-2}\right)^2dx=\frac{\pi}{6}$$

例 10.求曲线 $y=\int_0^{\frac{x}{n}}n\sqrt{\sin\theta}\,d\theta$，$(0\le x\le n\pi)$的弧长.

解: $y'=n\sqrt{\sin\dfrac{x}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}=\sqrt{\sin\dfrac{x}{n}}$ 故弧长为

$$S=\int_o^{n\pi}\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin\frac{x}{n}}dx\overset{令\frac{x}{n}=t}{=}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin t}\cdot ndt$$

$$=n\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\right)dt=4\pi$$

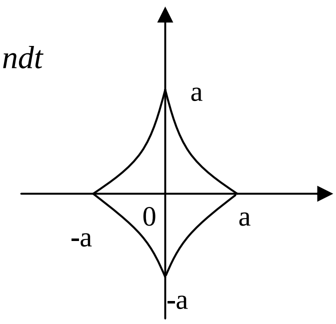


图 6-17

例 11.设星形线的方程为 $\begin{cases} x=a\cos^3t \\ y=\sin^3t \end{cases}\qquad(a>0)$

试求:(1)它所围的面积.

(2)它的弧长.

(3)它绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

解: 星形线的图形如图 6-17,

(1) 面积 $A=4\int_0^a ydx$

$$=-4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin tdt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\left(\sin^4 t-\sin^6 t\right)dt=\frac{3}{8}\pi a^2$$

(2) 弧长 $S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2}dt\quad=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\cos t\sin tdt=6a$

(3) 体积 $V=2\int_0^a\pi y^2dx=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}a^2\sin^6 t\cdot\left(-3\cos^2 t\sin t\right)dt$

$$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\left(1-\sin^2 t\right)dt=\frac{32}{105}\pi a^3$$

例 12.已知等腰三角形底边边长 4m,高 2m,垂直沉入水中,使顶点在上,底边平行于水面,求水淹没板一半时,板一侧所受的水的压力(设水的密度为 ρ).

解: 首先建立坐标系,而坐标系的选取不同,往往带来计算难易程度的差异.以下就是四种不同的坐标系的选取.分别计算.

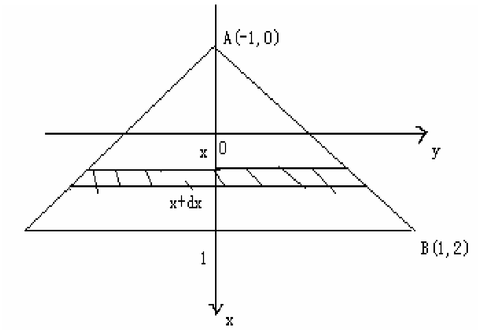


图 6-18

(1) 如图 6-18,建立坐标系,由两点

$A(-1,0),B(1,2)$建立AB的方程为$y=x+1$,取积分变量,积分区间为$[0,1]$,在$[0,1]$上任取一小区间

$[x,\ x+dx]$,其对应的窄条上所受的水压力为

$dp=\rho gx\cdot 2ydx=2\rho gx(x+1)dx$,于是,板一侧所受的水压力为

$p=2\rho g\int_0^1 x(x+1)dx=\dfrac{5}{3}\rho g$.

(其中 g 为重力加速度).

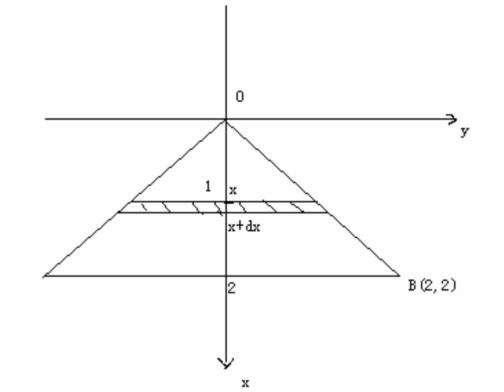


图 6-19

(2) 如图 6-19 建立坐标系,由两点 $O(0,0),B(2,2)$建立OB

的方程为 $y=x$,取 x 为积分变量,积分区间为$[1,2]$,在 $[1,2]$上任取一小区间$[x,\ x+dx]$,其对应的窄条上所受的水压力为

$dp=\rho g(x-1)2ydx=2\rho gx(x-1)dx$,

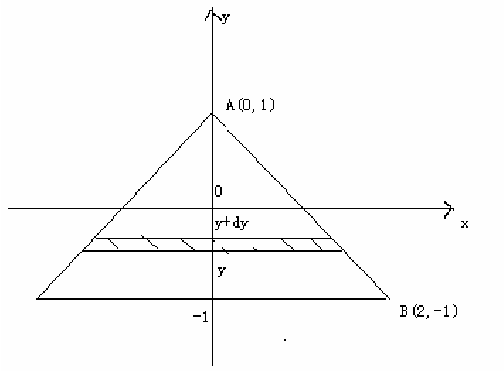


图 6-20

于是, 板一侧所受的水压力为

$$p=2\rho g\int_1^2 x(x-1)dx=\frac{5}{3}\rho g\,.$$

(3)　如图 6-20 建立坐标系,由 $A(0,1),B(2,-1)$建立AB的方程为 $y=1-x$,取 y 为积分变量,积分区间为

$[-1,0]$,在$[-1,0]$上任取一小区间$[y，y+dy]$,其对应的窄条上所受的水压力为

$$dp=\rho g(-y)2xdy=2\rho gy(y-1)dy.$$

于是，板一侧所受的水压力为

$$p=2\rho g\int_{-1}^0 y(y-1)dy=\frac{5}{3}\rho g..$$

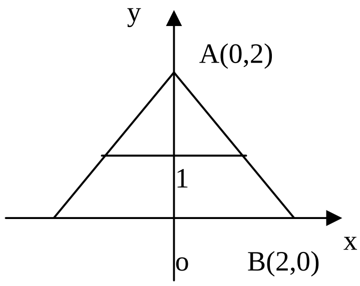


图 6-21

(4)　如图 6-21 建立坐标系,请读者求出求解过程.

例 13. 为清除井底的污泥,用缆绳将抓斗放入井底,抓起污泥后提出井口(见图 6-22).已知井深 30m,抓斗自重 400N,缆绳每米重 50N,抓斗抓起的污泥重 2000N,提升速度为 3m/s,在提升过程中,污泥以 20N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉,现将抓起污泥的抓斗提升至井口,问克服重力需要做多少焦耳功?

(说明: $(1)1N\times 1m=1J;m,N,s,J$ 分别表示米,牛顿,秒,焦耳.(2)抓斗高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)

解:　建立坐标系,如图 6-23.设将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功$W=W_1+W_2+W_3$　　　其中W_1是克服抓斗自重所做的功;

W_2是克服缆绳重力所做的功;　W_3为提出污泥所做的功.

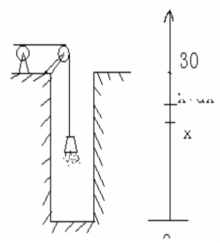


图 6-22

由题意知:$W_1=400\times 30=12000(J)$,

克服缆绳重力所做的功的问题,设想将缆绳一段一段地提升到井口,

将$[x，x+dx]$一小段提升到井口所做的功为 $dW_2=(30-x)50dx$,

克服缆绳重力所做的功为$W_2=\int_0^{30}50(30-x)dx=-25(30-x)^2\Big|_0^{30}=22500(J)$，在时间间隔$[t，t+dt]$内提升污泥所做的功为$dW_3=(2000-20t)3dt$，将污泥从井底提升至井口共需时间$\dfrac{30}{3}=10(s)$，所以，提出污泥所作的功为$W_3=\int_0^{10}3(2000-20t)dt=57000(J)$

综上，将抓起污泥的抓斗提升至井口所做的功为

$$W=12000+22500+57000=91500(J)。$$

四．练习题

1．下列说法对吗？为什么？

（1） $y=\sin x$与x轴在$[-\pi,\pi]$上所围图形的面积$A=\int_{-\pi}^{\pi}\sin xdx;$

$y=x^2$与$y=x^3$所围图形的面积$A=\int_0^1\left(x^3-x^2\right)dx.$

（2）椭圆$\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$所围成图形的面积为 $A=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}b\sin\cdot d\left(a\cos t\right).$

（3）星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\y=b\sin^3 t\end{cases}$在第一象限的弧长为

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)^2+\left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}dt.$$

（4）由 $y=x^2$, x轴, $x=2$ 所围平面图形绕 y 轴旋转一周所的旋转体的体积为

$$V=\int_0^4\pi\left(2-\sqrt{y}\right)^2dy.$$

（5）上题的平面图形绕直线 $x=2$ 旋转一周所的旋转体的体积是

$$V=\int_0^4\pi\left(2-x\right)^2dy=\int_0^4\pi\left(2-\sqrt{y}\right)^2dy.$$

2．填空题。

（1）由曲线 $y=x+\dfrac{1}{x}, x=2$及$y=2$ 所围图形的面积 $A=$________。

（2）由曲线 $y=\ln x$与直线$y=\left(e+1\right)-x$及$y=0$ 所围图形的面积 $A=$________。

（3）曲线 $y=-x^3+x^2+2x$与x轴 所围图形的面积 $A=$________。

（4）曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x\left(0\le x\le\pi\right)$与$x$轴 所围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为______。

（5）矩形闸门宽 a 米，高 h 米，且闸门上沿与水面齐，若水的密度为 ρ，则闸门一侧所受的水的压力的积分表达式为 $p=$_______。

3．选择题。

（1）双纽线$\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$所围成的区域面积可用定积分表达式为（　）

（A） $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$　　　（B） $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$

（C） $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}d\theta$　　　（D） $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 2\theta\right)^2d\theta$

（2）曲线 $y=x\left(x-1\right)\left(x-2\right)$与$x$轴 所围成的图形的面积为（　）

（A） $\int_0^1 x\left(x-1\right)\left(x-2\right)dx$

（B）$\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx+\int_1^2[-x(x-1)(x-2)]dx$

（C）$\int_0^2 x(x-1)(x-2)dx$

（D）$\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx+\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx$

（3）设在区间$[a,b]$上 $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0,$ 令 $s_1=\int_a^b f(x)dx,$

$s_2=f(b)(b-a), s_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a),$ 则（　　）

（A）$s_1<s_2<s_3$　　（B）$s_2<s_1<s_3$

（C）$s_3<s_1<s_2$　　（D）$s_2<s_3<s_1$

（4）　设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)<f(x)<m$（m为常数），则曲线

$y=g(x), y=f(x), x=a, x=b$ 所围图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体的体积()

（A）$\int_a^b \pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx$

（B）$\int_a^b \pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]dx$

（C）$\int_a^b \pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx$

（D）$\int_a^b \pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]dx$

4．一抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过 $(0,0),(1,2)$ 两点，且 $a<0$，确定 a,b,c 的值，使抛物线与 x 轴所围图形面积最小。

5．由曲线 $y=3x^2$, 直线 $x=2$ 及 x 轴所围图形记作 D，

（1）求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积；

（2）求 D 绕直线 $x=3$ 旋转所得旋转体的体积；

（3）求以 D 为底且每个与 x 轴垂直的截面为等边三角形的立体的体积。

6．曲线 $r^2=4\cos 2\theta$ 与 x 轴在第一象限内所围图形记作 D,试在曲线 $r^2=4\cos 2\theta$ 上求一点 M，使直线 OM 把 D 分成面积相等的部分。

7．试证曲线 $y=\sin x\quad(0\le x\le 2\pi)$ 的弧长等于椭圆 $x^2+2y^2=2$ 的周长。

8．曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转得一旋转体，若把它在 $x=0$ 与 $x=\xi$ 之间部分的体积记为 $V(\xi)$，试问 a 为何值时，$V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$。

9．设某潜水艇的观察窗的形状为长、短半轴依次为a、b的半椭圆，短轴为其上沿，上沿与水面平行，且位于水下c处，试求观察窗所受水的压力。

10．两细棒的线密度均为常数ρ，其长度分别为a和b，两棒放在一直线上，两棒距离为c求它们之间的引力。

11．设半径为 1 的球正好有一半浸入水中，球的密度为 1，求将球从水中取出需做多少功？

五．自测题

1．计算抛物线$y=x^2-1$与直线$y=x+1$所围图形的面积。

2．求曲线$y=\sin x$和$y=\cos x$及直线$x=0$，$x=\pi$在$0\le x\le\pi$中围成的平面图形的面积。

3．设$f_1(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2-e^{nx}}$，试求由曲线$y=f_1(x)$，直线$y=\frac{1}{2}x$及$x=1$所围成的图形的面积。

4．在第一象限内求曲线$y=-x^2+1$上的一点，使该点处的切线与所给曲线及量坐标轴所围成的图形的面积最小，并求此最小面积。

5．求两曲线$r=1-\cos\theta, r=\cos\theta$所围成平面图形的公共部分。

6．计算曲线$\begin{cases} x=\int_1^t \dfrac{\cos u}{u}du \\ y=\int_1^t \dfrac{\sin u}{u}du \end{cases}$在$1\le t\le\dfrac{\pi}{2}$的一段弧长。

7．在曲线$y=x^2(x\ge 0)$上某点 A 处作一切线，使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为$\frac{1}{12}$，试求（1）切点 A 的坐标；（2）过切点 A 的切线方程；（3）由上述图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积。

8．设底半径为R，高为H且顶点在下方的圆锥形容器内盛满水，把容器内的水全部抽出，需要多少功？

第六章 练习题答案

1．（5）正确，其余均错误。

2．（1）$\boldsymbol{A=\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}-2\right)dx=\ln 2-\frac{1}{2}}$

（2）$A=\int_0^1\left[(e+1)-y-e^y\right]dy=\frac{3}{2}$

（3）$A=\int_{-1}^0\left(x^3-x^2-2x\right)dx+\int_0^2\left(-x^3+x^2+2x\right)=\frac{37}{12}$

（4）$\frac{4}{3}\pi$

（5）$p=\rho g\int_0^h axdx$

3．(1) A　(2) B　(3) B　(4) B

4. $a=-4, b=6, c=0$

5. (1) 24π；　(2) 24π；　(3) $\dfrac{72\sqrt{3}}{5}$；

6．$M\left(\sqrt{2\sqrt{3}},\dfrac{\pi}{12}\right)$；　8. $a=1$；

9. $2\rho gab\left(\frac{\pi}{4}c+\frac{1}{3}a\right)$；　10. $G\rho^2\ln\dfrac{(a+c)(b+c)}{c(a+b+c)}$；

11. $\dfrac{13}{12}\pi$；

第六章　自测题答案

1．$4\dfrac{1}{2}$；　2. $2\sqrt{2}$；　3. $\dfrac{1}{2}\ln 2$　$\left(\text{提示：}f_1(x)=\begin{cases}0, & x\ge 0\\ \dfrac{x}{1+x^2}, & x<0\end{cases}\right)$；

4. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{3}\right)$；$\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$；　5. $\dfrac{7}{12}\pi-\sqrt{3}$；

6. $\ln\dfrac{\pi}{2}$；　7.(1)A$(1,1)$；　(2) $y=2x-1$；　(3) $\dfrac{\pi}{30}$；

8. $\dfrac{\rho g\pi}{12}R^2H^2$.$\rho$为水的密度，$g$为重力加速度。

第七章　向量代数与空间解析几何

一．基本要求：

1、理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示。

2、掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积)，了解两个向量垂直、平行的条件。

3．掌握单位向量、方向余弦、向量的坐标表达式以及用坐标表达式进行向量运算的方法。

4、掌握平面方程和直线方程及其求法，会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题。

5、理解曲面方程的概念，了解常用二次曲面的方程及其图形，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程。

6、了解空间曲线的参数方程和一般方程。

7、了解空间曲线在坐标平面上投影，并会求其方程。

二．主要内容

本章知识网络图：

- 向量代数与空间解析几何
  - 向量
    - 数量积
    - 向量积
    - 混合积
  - 平面与直线
    - 平面－－－法向量
    - 直线－－方向向量
    - 距离
    - 夹角
  - 空间曲线与曲面
    - 曲线与曲面的表示
    - 二次曲面的分类

（一）向量代数

1．主要概念

向量，向量的模，单位向量，零向量，相等的向量，自由向量（与起点无关的向量），负向量，向径，平行向量，方向角，方向余弦，空间直角坐标系，八个卦限，

2．向量的运算： *加法，减法，数乘向量，

*向量的数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

*向量积：大小：$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$, 方向符合右手法则

*混合积：$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$=（$\vec{a}\times\vec{b}$）$\cdot\vec{c}$

3．向量的坐标：已知 A（x_1,x_2,x_3），B（y_1,y_2,y_3）则 $\overrightarrow{AB}=(y_1-x_1,y_2-x_2,y_3-x_3)$

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$

则 $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

$$prj_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$

4．重要结论：

1）$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow(1)$存在不同时为零的$\lambda$，$\mu$，使$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow(2):\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

$$\Leftrightarrow(3):\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$$

2）$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow(1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$\Leftrightarrow(2)a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

3）$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow(1)$存在不全为零的$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得：$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow(2)[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$$

4）$|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|=$以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积

5）$|\vec{a}\times\vec{b}|=$以$\vec{a},\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积

（二）空间的平面与直线

1 平面方程

（1）　点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

其中法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$，且平面过点（x_0,y_0,z_0）

（2）　一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$

（3）　截距式方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

（4）　点到平面的距离为：

空间一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

2．直线方程：

（1）　点向式方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}$

其中直线过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，直线的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,l)$

（2）　一般方程：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D=0\end{cases}$

（3）　参数方程：$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+lt\end{cases}$　且直线过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，直线的方向向量为

$\vec{s}=(m,n,l)$

（4）　点到直线的距离：点 P 到过点 P_0 且以 $\vec{s}$ 为方向向量的直线的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{PP_0}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

3．直线，平面间的关系

（1）　平面与平面的夹角

＊ 设平面 π_1,π_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1,\vec{n}_2$，　$\vec{n}_1$与$\vec{n}_2$ 所夹的不超过 $\frac{\pi}{2}$ 的角 称为 π_1 与 π_2 的夹角，$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$**\pi_1//\pi_2\Leftrightarrow\vec{n}_1//\vec{n}_2$，$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$

（2）　直线与直线的夹角

*设直线L_1,L_2 的方向向量分别为 $\vec{s}_1,\vec{s}_2$ ， $\vec{s}_1$ 与 $\vec{s}_2$ 所夹不超过$\frac{\pi}{2}$ 的角θ 称为L_1与L_2的夹角，$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

** $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 // \vec{s}_2$，$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$

（3） 直线与平面的夹角

- 直线L与它在平面π上的投影直线的夹角$\varphi(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$称为直线$L$与平面$\pi$的夹角。设 的方向向量为 ， 的法向量为 ，则$\sin\varphi=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$。
- $L // \pi \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n}$，$L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{s} // \vec{n}$

（4） 平面束方程

- 设平面π_i：$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, i=1,2$

过L：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D=0\end{cases}$的平面束方程为：

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$（不含$\pi_2$）

或$A_2x+B_2y+C_2z+D_2+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0$（不含$\pi_1$）

（三）空间的曲面与曲线

1 空间曲面的方程

(1) 一般方程 $F(x,y,z)=0$

(2) 参数方程 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$

2． 空间曲线的方程

（1） 一般方程 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

（2） 参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$

3． 常见的曲面与曲线

（1） 柱面：母线平行于z轴，准线是xoy坐标平面上的曲线$\begin{cases}F(x,y)=0\\z=0\end{cases}$的柱面方程为$F(x,y)=0$。

- 方程中缺哪个变量，方程就代表母线平行于那个轴的柱面。

（2）　旋转面：母线为$C:\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$, 绕 z 轴旋转所的的曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

（3）　二次曲面

＊ 球面方程：球心在（x_0,y_0,z_0）半径为 R 的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

＊ 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

＊ 双曲面：单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

＊ 抛物面 椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\pm z$

双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm z$

＊ 螺旋线 $\begin{cases} x=r\cos\omega t \\ y=r\sin\omega t \\ z=vt \end{cases}$

4．空间曲线在坐标面上的投影曲线

曲线C：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$消去 $z \Rightarrow$ 关于 xoy 平面的投影柱面 $F(x,y)=0$，C

在 xoy 平面上的投影曲线为$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$。

三 例题分析

例 1 已知 $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=2,|\vec{c}|=5$ 且满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$（　　）

答：应填-19

分析：因为 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，所以 $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$，即：

$\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=0$，

也就是 $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=0$

$3^2+2^2+5^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=0$

$2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=-38$

即 $(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=-19$

例 2 设 $\vec{a}=(1,2,3),\vec{b}=(1,1,0)$，若非负实数 β 使得 $\vec{a}+\beta\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\beta\vec{b}$ 垂直，则 β 的值为（　　）

答：应填 $\sqrt{7}$

分析：$\vec{a}+\beta\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\beta\vec{b}$ 垂直，得（$\vec{a}+\beta\vec{b}$）•（$\vec{a}-\beta\vec{b}$）=0，所以 $|\vec{a}|^2-\beta^2|\vec{b}|^2=0$

从而 $\beta^2=7$，又 β 为非负实数 所以 $\beta=\sqrt{7}$。

例 3 过点 P（1，0，1）且与两条直线 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+1}{0}$ 和 $L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{1}$ 都相交的直线的方向向量可取（　　）

$(A):(-1,1,2)$　$(B):(-1,1,-2)$　$(C):(1,1,-2)$　$(D):(1,1,2)$

答案：D

分析：设过点 $P(1,0,1)$ 的直线 L 分别与直线 L_1 和 L_2 相交于点 A,B。由 L_1 和 L_2 的方程知，

他们的参数方程分别为 $\begin{cases}x=t\\ y=t-1\\ z=-1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=t+1\\ y=2\\ z=t+3\end{cases}$，于是存在常数 λ 使点 A 的坐标为

$(\lambda,\lambda-1,-1)$，存在常数 μ 使 B 点的坐标为（$1+\mu,2,3+\mu$），又因 $\overrightarrow{PA}//\overrightarrow{PB}$，所以

$$\frac{\lambda-1}{\mu}=\frac{\lambda-1}{2}=\frac{-2}{2+\mu}，\text{由此求得 }\mu=2,\lambda=0$$

所以 $A(0,-1,-1),B(3,2,5)$，从而直线 L 的方向向量可取任一平行于 $\overrightarrow{AB}=(3,3,6)$ 的非零向量。所以 D 符合要求。

例 4 曲面 $x^2+4y^2+z^2=4$ 与平面 $x+z=a$ 的交线在 yoz 平面上的投影方程为

$(A):\begin{cases}(a-z)^2+4y^2+z^2=4\\ x=0\end{cases}$　　$(B)\begin{cases}x^2+4y^2+(a-x)^2=4\\ z=0\end{cases}$

$(C):\begin{cases} x^2+4y^2+(a-x)^2=4 \\ x=0 \end{cases}$　　　　$(D):(a-z)^2+4y^2+z^2=4$

例 5 求过平面 $x+5y+z=0$ 与 $x-z+4=0$ 的交线，且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 相交成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程

解：因为过交线的平面束方程为（不包含平面 $x-z+4=0$）：

$$(x+5y+z)+\lambda(x-z+4)=0$$

其法向量为 $\vec{n}_1=(1+\lambda,5,1-\lambda)$，平面 $x-4y-8z+12=0$ 的法向量为 $\vec{n}_2=(1,-4,-8)$

所以：$\cos(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\lambda-20-8(1-\lambda)}{\sqrt{(1+\lambda)^2+25+(1-\lambda)^2}\cdot\sqrt{1+16+64}}=\frac{9\lambda-27}{\sqrt{2\lambda^2+27}\cdot 9}$$

解之：$\lambda=-\dfrac{3}{4}$，所求平面为 $(x+5y+z)-\dfrac{3}{4}(x-z+4)=0$，即 $x+20y+7z-12=0$。又因 $x-z+4=0$ 与 $x-4y-8z+12=0$ 的交角亦为 $\dfrac{\pi}{4}$，从而所求平面方程为：$x-z+4=0$ 和 $x+20y+7z-12=0$。

例 6 求由平面 $x+2y-2z+6=0$ 和平面 $4x-y+8z-8=0$ 构成的二面角的平分面方程。

分析：两个平面构成的二面角有两个，所以本题的解有两个。解法也有两种：1 利用平分面上任一点到已知两平面的距离相等；二是利用平面束方程。

解法一：设 $M(x,y,z)$ 为所求平面上的任一点，根据题意 M 到两已知平面的距离相等，从而有：$\dfrac{|x+2y-2z+6|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{|4x-y+8z-8|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+8^2}}$

即：$3|x+2y-2z+6|=|4x-y+8z-8|$

因此：$3(x+2y-2z+6)=\pm(4x-y+8z-8)$，所求平面方程为：$x-7y+14z-26=0$ 或 $7x+5y+2z+10=0$。

解法二　设所求平面方程 $x+2y-2z+6+\lambda(4x-y+8z-8)=0$，其法向量为 $\vec{n}=(1+4\lambda,2-\lambda,-2+8\lambda)$

记$\vec{n}_1=(1,2,-2)$，$\vec{n}_2=(4,-1,8)$由题意，$\vec{n}$与$\vec{n}_1$所夹的锐角与$\vec{n}$与$\vec{n}_2$所夹的锐角相等，

所以 $\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|}=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}||\vec{n}_2|}$，解得：$\lambda=\pm\dfrac{1}{3}$，所求平面方程为：

$$x-7y+14z-26=0 \text{和} 7x+5y+2z+10=0$$

例 7 求直线$L_1:\begin{cases}x+2y+5=0\\2y-z-4=0\end{cases}$与$L_2:\begin{cases}y=0\\x+2z+4=0\end{cases}$的公垂线方程。

分析：公垂线是下述两平面的交线，一个平面过L_1与公垂线，另一个平面过L_2与公垂线。公垂线的方向向量是L_1 与L_2的方向向量的向量积。

解： L_1的方向向量为$\vec{s}_1=(1,2,0)\times(0,2,-1)=(-2,1,2)$

L_2的方向向量为$\vec{s}_2=(0,1,0)\times(1,0,2)=(2,0,-1)$

所以公垂线的方向向量为$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=(-1,2,-2)$

设过 L_1 且与 $\vec{s}$ 平行的平面为 $\pi_1:x+2y+5+\lambda(2y-z-4)=0$，其法向量为$\vec{n}_1=(1,2+2\lambda,-\lambda)$由$\vec{s}\perp\vec{n}_1$得$\lambda=-\dfrac{1}{2}$，所以 π_1的方程为$2x+2y+z+14=0$

设过 L_2 且与 $\vec{s}$ 平行的平面为 $\pi_2:y+\lambda(x+2z+4)=0$，类似得 π_2 的方程为$2x+5y+4z+8=0$，从而所求公垂线的方程为$\begin{cases}2x+2y+z+14=0\\2x+5y+4z+8=0\end{cases}$。

四 练习题

1. 已知向量$\vec{a}=(1,-1,0),\vec{b}=(2,0,1)$ 求（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$，（2）$prj_{\vec{a}}\vec{b}$ （3）$\vec{a}\times\vec{b}$，（4）$\vec{a},\vec{b}$的夹角余弦。
2. 指出下列二次曲面的名称，并画草图

（1）$16x^2-9y^2-9z^2=-25$

（2） $16x^2-9y^2-9z^2=25$

（3）$x^2-y^2=4x$

（4） $x^2+y^2=4x$

（5）$2(x-1)^2+(y-2)^2-(z-3)^2=0$

3 求直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面方程

4 设一个立体，由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成，求它在 xoy 坐标平面上的投影。

5.设一平面垂直一平面 z=0,并通过从点（1,-1,1）到直线 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线，求此平面的方程。

6 求过 $(0,2,4)$ 且与平面 $\pi_1: x+2z-1=0, \pi_2: y-3z=2$ 平行的直线方程。，

7．求证：若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，则 $\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}$ 也不共面。

答案：1：略。2：单叶旋转双曲面，单叶旋转双曲面，双曲抛物面，椭圆抛物面，锥面。

3：$x^2+y^2=\frac{13}{36}z^2$（注：一般空间曲线 $l:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所形成的旋转面的方程为：$\begin{cases} x^2+y^2=x^2(t)+y^2(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 消去 t 就可得旋转曲面的一般方程。）

4：$\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ z=0 \end{cases}$

5：$x+2y+1=0$，6：$\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$

7：证明（反证）：假设 $\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}$ 共面，则存在三个不全为零的常数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使 $\lambda_1(\vec{a}\times\vec{b})+\lambda_2(\vec{b}\times\vec{c})+\lambda_3(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{0}$，将 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 与上式分别做内积，得：

$\lambda_1[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$ ， $\lambda_2[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$ ， $\lambda_3[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$

所以 $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$ 这与 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面矛盾。

五 自测题

（一）填空题

1． 已知 $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=26,|\vec{a}\times\vec{b}|=26,$ 则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　）

2 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均为单位向量，且满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0},$ 则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$（　　）

3 点（1，2，-1）在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影为（　）

4 xoz 坐标平面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为（　）

5 直线 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 和平面 $x+y+z=3$ 的关系是（　　）

（二）选择题

1． $\vec{a}$ 的方向角分别为 α,β,γ，且 $\cos\beta=0$ 则（　　）

$(A):\vec{a}\,//\,xoy$平面,$(B):\vec{a}\,//\,yoz$面　$(C):\vec{a}\,//\,xoz$平面,$(D):\vec{a}\perp xoz$面

2． 若 $\vec{a},\vec{b}$ 共线的单位向量，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　）

$(A):1$　$(B):-1$　$(C):0$　$(D):\cos(\vec{a},\vec{b})$

3． 下列方程所表示的曲面是双叶旋转双曲面的是（　）

$(A):x^2+y^2+z^2=8$　　$(B):2(x^2+y^2)=5z$　　$(C):x^2-\frac{y^2}{3}+z^2=2$

$(D):\frac{x^2+y^2}{4}-\frac{z^2}{8}=-1$

4．两直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与直线 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$ 的夹角为（　　）

$(A):\frac{\pi}{2}$　　$(B):\frac{\pi}{3}$　　$(C):\frac{\pi}{4}$　　$(D):\frac{\pi}{6}$

5．设矩阵 $\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & {}_3\end{bmatrix}$ 是满秩的，则直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线

$\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$（　　）

$(A):$相交于一点　$(B):$重合　$(C):$平行但不重合　$(D):$异面

（三）计算题

1 求通过直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ 且垂直与平面 $3x+2y-z-5=0$ 的平面方程

2．求直线 $L:\begin{cases}x=3-t\\y=-1+2t\\z=5+8t\end{cases}$，在三个坐标面及平面 $\pi:x-y+3z+8=0$ 上的投影方程

3．求过（-1，0，4）且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$ ，又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{3}$ 相交的直线方程

4．判断下列两直线 $L_1:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2},L_2:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$，是否在同一平面。在同一平面上求交点；不在同一平面求两直线间距离。

5．一平面通过点（1，2，3），它在正 x 轴，y 轴上的截距相等，问当平面的截距为何值时，它与三个坐标面所围成的空间体的体积最小？并写出此平面的方程。

（四）证明题

设 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 为三个不同共线的平面向量，证明它们首尾相接恰好构成一个三角形的充要条件是

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}.$$

答案：（一）1。± 30，2 ：$-\frac{3}{2}$， 3：$(-\frac{1}{6},-\frac{1}{3},\frac{1}{6})$ ，4：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$ 5：直线在平面内

（二）1：（C） 2：（D） 3：（D） 4：（B） 5：（A）

（三）1：$x-9y-15z+11=0$，2：

$l_{xoy}:\begin{cases}2x+y-5=0\\ z=0\end{cases},l_{yoz}:\begin{cases}4y-z+9=0\\ x=0\end{cases},$

$l_{xoz}:\begin{cases}8x+z-29=0\\ y=0\end{cases},l:\begin{cases}14x+11y-z-26=0\\ x-y+3z+8=0\end{cases}$ ，3：$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$ 4：$d=\frac{\sqrt{3}}{3}$

5：$.a=b=\frac{9}{2},c=9$ 时，体积最小

（四）1．分析：只要证明：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$。

证明：必要性，因为 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，分别与 $\vec{c},\vec{b}$ 做外积，得：$\vec{c}\times\vec{a}=-\vec{c}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}$

和 $\vec{b}\times\vec{c}=-\vec{b}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}$，所以：$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$。

充分性：因为 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$。

所以由 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}$ 得：$(\vec{a}+\vec{c})\times\vec{b}=\vec{0}$，故：$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}=\vec{0}$，所以 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 平行。同理，$\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 平行，$\vec{c}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 平行。又因为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为三个不共线的平面向量，所以 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$。

第八章　多元函数微分法及其应用

一、基本要求

1、理解二元函数及 n 元函数的极限与连续性的概念，会判断一个多元函数在一点是否连续.

2、理解偏导数与全微分的概念，能够判定一个多元函数是否偏导数存在、是否可微、偏导数是否连续及相互间的关系；同时要掌握全微分存在的充要条件及全微分在近似计算中的应用.

3、理解二元、三元函数的方向导数和梯度的概念、掌握其计算方法，并能灵活应用.

4、掌握多元复合函数、隐函数（特别是抽象形式的函数）的一阶、二阶偏导数的各种求法.

5、理解空间曲线的切线与法平面、曲面的切平面与法线的概念，会求相应的方程.

6、理解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件及二元函数极值存在的充分条件，并会求解二元函数的极值，会利用拉格朗日乘数法求解条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值问题，及其在几何、物理与经济学中的一些简单应用问题.

二、主要内容

（一）二元函数的极限与连续性的概念

定义 1　设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D, $P_0(x_0,y_0)$ 是其聚点，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于适合不等式 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的一切点，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0$， $y\to y_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad (\text{或 } f(x,y)\to A \quad (\rho\to 0)\ \text{这里}\ \rho=|PP_0|).$$

定义 2　设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为点集 D, P_0 是其聚点，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于适合不等式 $0<|PP_0|<\delta$ 的一切点 $P\in D$，都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 n 元函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$.

定义 3　设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为点集 D, P_0 是其聚点且 $P_0\in D$，如果 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$，则称 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 处连续；设 P_0 是函数 $f(P)$ 的定义域的聚点，如果 $f(P)$ 在点 P_0 处不连续，则称 P_0 是函数 $f(P)$ 的间断点.

闭区域上连续函数的性质

（1）最大值和最小值定理

在有界闭区域 D 上的多元连续函数，在 D 上至少取得它的最大值和最小值各一次.

（2）介值定理

在有界闭区域 D 上的多元连续函数，如果在 D 上取得两个不同的函数值，则它在 D 上取得介于这两值之间的任何值至少一次.

（3）一切多元初等函数，即由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的可用一个式子所表示的多元函数，在其定义区域内是连续的.

（二）偏导数和高阶偏导数

1．偏导数的定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定为 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量　$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$，

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，

记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$z_x\big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f_x(x_0,y_0)$．

同理可定义函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数为：$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$

记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$z_y\big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f_y(x_0,y_0)$．

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内任一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x、y 的函数，它就称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导数，　记作 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$z_x$ 或 $f_x(x,y)$．

同理可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导数，记作 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$z_y$ 或 $f_y(x,y)$．

偏导数的概念可以推广到三元及以上函数，譬如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 可定义三个(一阶)偏导数为：

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x},$$

$$f_y(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y},$$

$$f_z(x,y,z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}.$$

2．高阶偏导数　若函数 $z=f(x,y)$ 的(一阶)偏导数存在关于 x ,y 的偏导数，则称为函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，记为：$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$，　$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y).$$

二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数．在上述二阶偏导数中包含有纯偏导数与混合偏导数．

3．混合偏导数相等的充分条件　如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那末在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等．利用这一性质，若二元函数 $z=f(x,y)$ 有各阶连续

的偏导数，则求其 n 阶偏导数归结为 $\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}\ (i=n,n-1,\ldots,0)$．

4．复合函数的求导法则

如果函数 $u=\phi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 都在点 t 可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\phi(t),\psi(t)]$ 在点 t 可导，且有下列计算公式：

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}\cdots\cdots(1)$$

上定理的结论可推广到中间变量多于两个的情形：如 $z=z(u,v,w),u=u(t),v=v(t),w=w(t)$，则有

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}\cdots\cdots(2)$$

以上公式中的导数称为全导数.上情形可推广到中间变量是多元函数的情形：如 $z=f[\phi(x,y),\psi(x,y)]$，$u=\phi(x,y)$ 及 $v=\psi(x,y)$ 都在点 (x,y) 具有对 x 和 y 的偏导数，且函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\phi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 的两个偏导数存在，且有下列计算公式：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\cdots\cdots(3)$$

5. 隐函数的求导法则

隐函数存在定理 1　设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，若 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}\cdots\cdots(1)$．

隐函数存在定理 2　设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，若 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}\cdots\cdots(2).$$

隐函数存在定理 3　设 $F(x,y,u,v)$、$G(x,y,u,v)$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内有对各个变量的连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式（即雅可比式）

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}_{P(x_0,y_0,u_0,v_0)}\neq 0$$，则方程组 $F(x,y,u,v)=0$、$G(x,y,u,v)=0$

在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$，

$v=v(x,y)$，它们满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\cdots\cdots(3).$$

(三)全微分的概念

1．全微分的定义

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某邻域内有定义，并设 $P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 为这邻域内的任意一点，则称这两点的函数值之差 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 为函数在点 P 对应于自变量增量 $\Delta x,\Delta y$ 的全增量，记为 Δz，即 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可以表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 而仅与 x,y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分，记为 dz，即 $dz=A\Delta x+B\Delta y$.

若函数在某区域 D 内任一点处可微，则称函数在 D 内可微.

2．函数可微的条件

定理１（可微的必要条件）　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，则函数在该点连续.

定理２（可微的必要条件）　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，则该函数在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 必存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

定理３（可微的充分条件）若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续，则函数在点 (x,y) 可微.

３．全微分在近似计算中的应用

若二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 存在且连续当 $|\Delta x|,|\Delta y|$ 较小时,

有近似公式： $\Delta z \approx dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$，

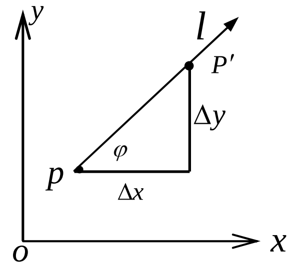
即 $$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

4．全微分形式不变性

设函数 $z=f(u,v)$，无论 u,v 是自变量，还是中间变量，函数 z 的全微分都是：$dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv$，多元函数（一阶）全微分所具有的这个性质叫做（一阶）全微分形式不变性.

(四) 方向导数与梯度的概念

1. 方向导数的定义



设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某一邻域 $U(P)$ 内有定义，

自点 P 引射线 l．设 x 轴正向到射线 l 的转角为 φ，

并设 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为 l 上的另一点且 $P'\in U(p)$．

定义　函数的增量 $f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$ 与 P、P' 两点间距离　之比($|PP'|=\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$)，当 P' 沿着 l 趋于 P 时,如果此极限存在，则称这极限为函数在点 P 沿方向 l 的方向导数，记为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}.$$

2. 方向导数存在的充分条件

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 是可微分的，那末函数在该点沿任意方向 l 的方向导数都存在，且有

$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$，其中 φ 为 x 轴到方向 l 的转角，$\vec{e}=\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j}$ 是方向 $\vec{l}$ 上单位向量.

推广可得三元函数方向导数及存在的充分条件　　对于函数 $u=f(x,y,z)$，它在点 $P(x,y,z)$ 沿着方向 l 的方向导数为：$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho}$ ($\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$).

若函数在点 $P(x,y,z)$ 可微，则函数在该点沿任意方向 l 的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma \qquad (\text{设 } \alpha,\beta,\gamma \text{ 为方向 } l \text{ 的方向角})$$

3. 梯度的概念

定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P(x,y)\in D$，都可确定一个向量 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$，称该向量为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的梯度，记为 $grad f(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$.

注１：函数在某点的梯度是这样一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致,而它的模为方向导数的最大值．即梯度的模为$\|gradf(x,y)\|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_{\max}$

注 2：当$\frac{\partial f}{\partial x}\neq 0$时，$x$轴到梯度的转角的正切是：$\tan\theta=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$．

梯度的概念可以推广到三元函数：三元函数$u=f(x,y,z)$在空间区域G内具有一阶连续偏导数，则对于每一点$P(x,y,z)\in G$，都可定义一个向量(梯度):$gradf(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$．

类似于二元函数，此梯度是一向量，其方向与取得最大方向导数的方向一致，其模为方向导数的最大值．

(五) 微分学的几何应用

1．空间曲线的切线方程与法平面方程

设空间曲线的方程为Γ：　$x=\phi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)$, $P(x_0,y_0)\in\Gamma$．则Γ在$P(x_0,y_0)$点处的

切线方程为：　　$\frac{x-x_0}{\phi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$；

法平面方程为：　$\phi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$．

2．空间曲面的切平面方程与法线方程

设空间曲面的方程为π：　$F(x,y,z)=0$，$P(x_0,y_0,z_0)\in\pi$．则π在$P(x_0,y_0,z_0)$点处的

切平面方程为：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$；

法线方程为：　$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$．

(六)、多元函数的极值及其求法

1. 求解极值应用题时，先要建立目标函数．有时，为简化计算，可用较简单的函数代替原目标函数，但必须保证两函数有相同极值点．例如$\frac{\sqrt{xyz}}{6abc}$可用xyz代替；$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$可用$x^2+y^2+z^2$代替（注意两者间最大小值的对应关系）；$|ax+by+c|$可用$(ax+by+c)^2$替代，但求最值时，须由原函数求解．

2. 若从实际问题可断定函数的最值存在，又函数的可能极值点惟一，则函数必在该点取得最大(小)值．

三、例题分析

(一)、多元函数的极限与连续

【例 1】设$z=x+y+f(x-y)$,若当$y=0$时,$z=x^2$,求函数f及z．

【解】因当$y=0$时$z=x^2$,所以$x^2=x+f(x)$,　可见　$f(x)=x^2-x$,

而且　$z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2$.

【例 2】若对于 $\forall t \in R^+$，函数 $z=f(x,y)$ 恒满足关系式 $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$，则称 $f(x,y)$ 为 k 次齐次函数．试证：k 次齐次函数 $z=f(x,y)$ 能化成 $z=x^kF(\frac{y}{x})$ 的形式．

【证明】因 $z=f(x,y)$ 是 k 次齐次函数，故 $\forall t \in R^+$ 有 $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$；令 $t=\frac{1}{x}$，则有

$$f(1,\frac{y}{x})=\frac{1}{x^k}f(x,y)，\qquad 即 \qquad f(x,y)=x^k f(1,\frac{y}{x})，$$

又因为 $f(1,\frac{y}{x})$ 仅与 $\frac{y}{x}$ 有关，即为 $\frac{y}{x}$ 的函数，记作 $F(\frac{y}{x})$，从而有

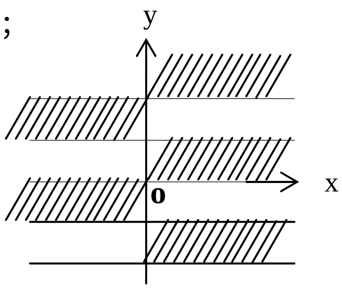
$$f(x,y)=x^kF(\frac{y}{x})．$$

【注】对于 k 次齐次函数而言，实质可转化为关于 $\frac{y}{x}$ 的一元函数，从而一元函数的一些运算与性质也适合这样的多元函数．

【例 3】求下列各函数的定义域：$z=\sqrt{x\sin y}$，　$z=\ln[x\ln(y-x)]$，　$z=\dfrac{1}{\sin x\cdot\sin y}$．

【解】⑴ 由于 $x\sin y\ge 0$，所以 $x\ge 0$ 且 $\sin y\ge 0$，或 $x\le 0$ 且 $\sin y\le 0$；

即 $x\ge 0$ 且 $2n\pi\le y\le(2n+1)\pi$，及 $x\le 0$ 且 $(2n+1)\pi\le y\le 2(n+1)\pi$．即题 3 图中的阴影区域．



题 3 图

⑵ 因 $x\cdot\ln(y-x)>0$ 且 $y-x>0$，所以

$x>0$ 且 $y-x>1$，或 $x<0$ 且 $0<y-x<1$；

从而定义域为 $D_1\cup D_2$，其中 D_1：$x>0$ 且 $y>x+1$，或 D_2：$x<0$ 且 $x<y<x+1$．

⑶ 由 $\sin x\sin y\ne 0$，可知函数的定义域为 $\{(x,y)\,|\,x\ne n\pi\wedge y\ne m\pi\}$（$n$、$m$ 为整数）．

【例 4】求下列极限

⑴ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\sin(x+xy^2)}{y}$；　⑵ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；　⑶ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$；

⑷ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$；　⑸ $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$；　⑹ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{\arcsin(xy)}$

【解】⑴ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\sin(x+xy^2)}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\sin x(1+y^2)}{x(1+y^2)}\cdot\dfrac{x(1+y^2)}{y}=1\cdot0=0.$

⑵ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{xy+1}+1)=1+1=2.$

⑶ $\because \left|(x+y)\ln(x^2+y^2)\right| \le (|x|+|y|)\left|\ln(x^2+y^2)\right| \le \left|2\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)\right| = 4\left|\ln(\sqrt{x^2+y^2})^{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$，

而极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \ln(\sqrt{x^2+y^2})^{\sqrt{x^2+y^2}} \underline{\underline{t=\sqrt{x^2+y^2}}} \lim\limits_{t\to 0^+} \ln t^t \; \underline{\underline{\text{洛必达法则}}} \; 0$，

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\ln(x^2+y^2) = 0$.

⑷ $\because \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}{(x+y)(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{(x+y)(\sqrt{xy+1}+1)}$， 而极限

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \dfrac{1}{2} \ne 0$，又当 (x, y) 分别沿曲线 $y=x$ 和 $y=-x+x^2$ 趋于（0,0）时，极限

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y}$ 分别是 0 和 $-\mathbf{1}$，说明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y}$ 不存在，可见极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$ 不存在.

⑸ $\because \boldsymbol{x^2+y^2 \ge 2|xy|, \left|x^2-xy+y^2\right| \ge 2|xy|-|xy| = |xy|}$，

$\therefore 0 \le \left|\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \le \left|\dfrac{x+y}{xy}\right| \le \left|\dfrac{1}{x}\right| + \left|\dfrac{1}{y}\right| \to 0$，当 $\boldsymbol{x\to\infty, y\to\infty}$ 时. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0.$

⑹ $\because \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin(xy)\ln(x^2+y^2) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\arcsin(xy)}{x^2+y^2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\boldsymbol{xy}}{\boldsymbol{x^2+y^2}} \boldsymbol{(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}$$

又$\because$ $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{1}{2}$, $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) \; \underline{\underline{t=x^2+y^2}} \; \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0$

$\therefore \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{\arcsin(xy)} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin(xy)\ln(x^2+y^2)} = e^0 = 1$.

【注１】计算多元函数极限的常用方法有：⑴利用不等式及夹逼定理；⑵进行变量替换化为己知极限或化为一元函数处理（包括利用对数恒等式）；⑶利用极坐标；⑷利用极限的运算法则或利用初等函数的连续性；⑸若预先知道极限也可利用（ε，δ）定义证明.

【注２】利用特殊路径证明函数极限不存在时，可以证明沿着一簇直线或曲线时，函数的极限与直线斜率或与曲线的开口方向有关；可以证明沿着某两条特殊路径，函数极限不相等；也可证明沿着某一特殊路径函数极限不存在等多种方法处理. 如极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在，也可利用极坐标得到该结果.

【例５】讨论 $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}, & xy \ne 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$，在(0,0)点处是否存在重极限与累次极限，并求间断点.

【解】由于 $\left|x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}\right| \le |x| + |y| \to 0$（$(\boldsymbol{x,y}) \to (0,0)$），所以 $f(x,y)$ 在(0,0)处的二重极限存在且为０；

但是，当 $x\to 0$ 时，$\because \sin\frac{1}{x}$ 无极限，$\therefore\ f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$ 无极限，可见 $f(x,y)$ 在(0,0)处先对 x 后对 y 的累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$ 不存在；同理，先对 y 后对 x 的累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 也不存在.

显然，满足 $xy\neq 0$ 的点 (x,y) 均是 $f(x,y)$ 连续点，又 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，(0,0)也是 $f(x,y)$ 连续点，于是 $f(x,y)$ 的间断点为 $\left\{(x,y)\middle| x,y\in R\quad x\cdot y=0\wedge x^2+y^2\neq 0\right\}$.

【注】这是多元分段函数．当 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$ 时，由一元函数的连续性可知，多元函数 $f(x,y)$ 是处处连续的．关键讨论当 $x=0$ 或 $y=0$，特别在(0,0)处 $f(x,y)$ 是否连续.

【例６】设 $f(x,y)$ 是在有界闭区域Ｄ：$|x|\le 1,|y|\le 1$ 上的有界 k 次齐次函数(k≥1)，试判断极限

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)+(x-1)e^y]$ 是否存在？若存在求其值.

【解】因 $f(x,y)$ 为 k 次齐次函数，故对 $\forall t\in R$ 有　$f(tx,ty)=t^k f(x,y)$

故 $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=r^k f(\cos\theta,\sin\theta)$，又因 $f(x,y)$ 有界，故 $\exists M>0$，使得 $|f(x,y)|\le M(\forall(x,y)\in D)$，

于是有　$|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)|=\rho^k|f(\cos\theta,\sin\theta)|\le M\rho^k\to 0$, 当 $\rho\to 0$ 时. 可见极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)+(x-1)e^y]=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)+\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x-1)e^y=0+(0-1)e^0=-1.$$

（二）偏导数

【例７】设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，求其一阶、二阶偏导数.

【注】一般可利用求导法则求解偏导数．但对于分段函数，在分段点处的偏导数应该由定义来求.

【解】当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，由偏导数的四则法则，有：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)'_x$$
$$=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

同理　$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时，由偏导数的定义，有：

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\ \sin\frac{1}{\Delta x^2}=0,\ \text{同理}\quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=0$$

故　$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

【例８】设$z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$其中f是可微函数，那么$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________ .

【注】此题涉及多元函数偏导数的四则运算法则及一元复合函数的链式法则.

【解】

令　$u=x^2-y^2$, 则 $\because f\to u<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}$

于是　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{f^2}f'_x=-\dfrac{y}{f^2}2x\dfrac{\partial f}{\partial u}$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{f^2}(f-yf'_y)=\dfrac{1}{f^2}(f+2y^2\dfrac{\partial f}{\partial u})$

从而，有：$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2y}{f^2}\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{1}{f\ y}+\dfrac{2y}{f^2}\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{1}{yf}$.

【例９】设$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，试验证 u 满足微分方程: $\dfrac{\partial^2\ln u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\ln u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\ln u}{\partial z^2}=\dfrac{1}{u^2}$.

【解】由$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,有　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{u}$，　$\dfrac{\partial\ln u}{\partial x}=\dfrac{1}{u}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{u^2}$，及

$\dfrac{\partial^2\ln u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{x}{u^2})=\dfrac{u^2-2xu\dfrac{\partial u}{\partial x}}{u^4}=\dfrac{u^2-2x^2}{u^4}$，同理，可得　$\dfrac{\partial^2\ln u}{\partial y^2}=\dfrac{u^2-2y^2}{u^4}$，　$\dfrac{\partial^2\ln u}{\partial z^2}=\dfrac{u^2-2z^2}{u^4}$

从而，有$\dfrac{\partial^2\ln u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\ln u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\ln u}{\partial z^2}=\dfrac{3u^2-2(x^2+y^2+z^2)}{u^4}=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{1}{u^2}$.

【注】若$u=\sqrt{x^2+y^2}$为二元函数，则 u 满足微分方程$\dfrac{\partial^2\ln u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\ln u}{\partial y^2}=0$.

【例 10】设 $u=u(x,y)$具有连续的二阶偏导数，且满足方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$及$u(x,2x)=x$，$u'_x(x,2x)=x^2$，试

求二阶偏导数$u''_{xx}(x,2x),u''_{xy}(x,2x),u''_{yy}(x,2x)$.

【解】由题意,对$u(x,2x)=x$两端关于 x 求偏导，得$u'_x(x,2x)+2u'_y(x,2x)=1$，又$u'_x(x,2x)=x^2$，

所以，有$u'_y(x,2x)=\dfrac{1}{2}(1-u'_x(x,2x))=\dfrac{1}{2}(1-x^2)$　....... (1)

将(1)式两端关于 x 求偏导,有　$u''_{yx}+2u''_{yy}=-x$　......　(2)

再对$u'_x(x,2x)=x^2$两端关于 x 求偏导，得　$u''_{xx}+2u''_{xy}=2x$　......　(3)

由(2)-2 (3)，并注意$u''_{xx}(x,2x)=u''_{yy}(x,2x)$,　$u''_{xy}(x,2x)=u''_{yx}(x,2)$,　得

$u''_{xy}=\dfrac{5}{3}x$,再代入 (3), 得 $u''_{xx}=u''_{yy}=-\dfrac{4}{3}x$.

【例 11】设 $R=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha}$,($0<\alpha<\beta<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$），试证明 α,β,γ 的变化对 R 影响大小依次是：$\dfrac{\partial R}{\partial\alpha}>\dfrac{\partial R}{\partial\beta}>\dfrac{\partial R}{\partial\gamma}$.

【证】由于 $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin\beta}+\dfrac{1}{\sin\gamma}$,故在关系式两端对 α 求偏导数,得 $-\dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial R}{\partial\alpha}=-\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$,

即 $\dfrac{\partial R}{\partial\alpha}=R^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$,同理有: $\dfrac{\partial R}{\partial\beta}=R^2\dfrac{\cos\beta}{\sin^2\beta}$, $\dfrac{\partial R}{\partial\gamma}=R^2\dfrac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}$

又由于 $0<\alpha<\beta<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $0<\sin^2\alpha<\sin^2\beta<\sin^2\gamma$ 且 $\cos\alpha>\cos\beta>\cos\gamma>0$,

于是有 $\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}>\dfrac{\cos\beta}{\sin^2\beta}>\dfrac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}$,即 $\dfrac{\partial R}{\partial\alpha}>\dfrac{\partial R}{\partial\beta}>\dfrac{\partial R}{\partial\gamma}$ 成立.

【注】问题就是视 R 为 α,β,γ 的函数，求关于 α,β,γ 的偏导数．这三个偏导数也可以利用全微分的形式不变性得到，即在 $\dfrac{1}{R}$ 的表达式中两端求全微分,可得 $dR=R^2(\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}d\alpha+\dfrac{\cos\beta}{\sin^2\beta}d\beta+\dfrac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}d\gamma)$ 即知.

【例 12】设函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，试证明 $f''_{xy}(0,0)$ 与 $f''_{yx}(0,0)$ 存在但不相等.

【证】由二元函数偏导数的定义与求偏导数的法则，可得

$f_x'(x,y)=\begin{cases}y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，由此，有 $f_x'(0,y)=\begin{cases}-y & y\neq0\\ 0 & y=0\end{cases}$.

从而，有 $f''_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f_x'(0,y)-f_x'(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{-y-0}{y}=-1$

同理，可得 $f_y'(x,y)=\begin{cases}x\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，及 $fy'(x,0)=\begin{cases}x & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

于是，有 $f''_{yx}(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f_y'(x,0)-f_y'(0,0)}{x}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{x-0}{x}=1$，故 $f''_{xy}(0,0)$ 与 $f''_{yx}(0,0)$ 存在但不等.

【注】这是混合偏导数存在但不相等的情形，一般来说，混合偏导数与求导次序有关，只有当混合偏导数存在且连续时，混合偏导数与”次序”无关．

（三）、全微分及其应用

【例 13】设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在点(0,0)的邻域内连续，问

1. $\varphi(x,y)$ 在什么条件下，偏导数 $f_x'(0,0)$， $f_y'(0,0)$ 存在；

2. $\varphi(x,y)$ 在什么条件下， $f(x,y)$ 在点(0,0)处可微.

【注】要证 $f(x,y)$ 在点(0,0)可微，只要证明

$$\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y+o(\rho)=df(0,0)+o(\rho)\qquad(当\rho\to0时)$$

也可证明 $\dfrac{\Delta f-df}{\rho}\to 0$　(当 $\rho\to 0$ 时)，其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

【解】 1.由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{|\Delta x|\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}=\varphi(0,0)$，

及 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{|\Delta x|\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}=-\varphi(0,0)$；

若 $f'_x(0,0)$ 存在，必须 $\varphi(0,0)=-\varphi(0,0)$，即有 $\varphi(0,0)=0$，

同理，若 $f'_y(0,0)$ 存在，则必须 $\varphi(0,0)=-\varphi(0,0)=0$.

2.按定义，若 $f(x,y)$ 在点(0,0)可微，必须

$$\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y+o(\rho)\qquad (当\ \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0\ 时)$$

即 $\dfrac{\Delta f-df}{\rho}\to 0$　(当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时)，由1.知： $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，

令 $\Delta x=\rho\cos\theta$， $\Delta y=\rho\sin\theta$，于是有

$$\frac{\Delta f-df}{\rho}=\frac{(f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0))-(f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y)}{\rho}=\frac{|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y)}{\rho}$$

$$=\frac{|\rho\cos\theta-\rho\sin\theta|\varphi(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}{\rho}=|\cos\theta-\sin\theta|\varphi(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta),(0\le\theta\le 2\pi)$$

显然，若要 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta f-dy}{\rho}=0$，必须且只须　$\lim\limits_{\rho\to 0}\varphi(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\varphi(0,0)=0$，

可见， $f(x,y)$ 在点(0,0)处可微的条件也是　$\varphi(x,y)=0$.

【例 14】 证明 $(3x^2y-2y^2)dx+(x^3-4xy+6y^2)dy$ 为某一函数 $f(x,y)$ 的全微分，并试求该函数 $f(x,y)$。

【注】 若某一函数 $f(x,y)$ 为 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 的全微分是指 $f(x,y)$ 可微，且有：$\dfrac{\partial f}{\partial x}=P,\dfrac{\partial f}{\partial y}=Q,$

此时，$df(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$。

【解】法一：假设 $(3x^2y-2y^2)dx+(x^3-4xy+6y^2)dy=df(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$

则　$\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2y-2y^2\ \dots\dots\quad(1)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^3-4xy+6y^2\quad\dots\dots\quad(2)$

由(1)保持 y 不变并对积分，得：

$f=x^3y-2xy^2+\varphi(y)\quad\dots\dots(3)$　(其中 $\varphi(y)$ 相对于 y 而言是积分常数　)

再将(3)代入(2)式，得：$x^3-4xy+\varphi'(y)=x^3-4xy+6y^2$　即 $\varphi'(y)=6y^2,\varphi(y)=2y^3+c$

将 $\varphi(y)=2y^3+c$ 代入（3）得： $f(x,y)=x^3y-2xy^2+2y^3+c$　其中 c 为积分常数 .

法二：拆分各微分，并由全微分的运算法则重新组建，得

$$
\begin{aligned}
&(3x^2y-2y^2)dx+(x^3-4xy+6y^2)dy=(3x^2ydx+x^3dy)-(2y^2dx+4xydy)+6y^2dy\\
&=d(x^3y)-d(2xy^2)+d(2y^3)\\
&=d(x^3y-2xy^2+2y^3+c)
\end{aligned}
$$

故所求函数为 $f(x,y)=x^3y-2xy^2+2y^3+c$.

【例 15】 设函数 $f(x,y)=\varphi(|xy|)$,其中$\varphi(0)=0$，在 u=0 的附近满足$|\varphi(u)|\le u^2$,试证 $f(x,y)$ 在(0,0)可微.

【证】 由 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(|x\cdot0|)-\varphi(0)}{x}=0$，同理 $f_y'(0,0)=0$，从而有

$$\left|\frac{\Delta f-df}{\rho}\right|=\frac{|[f(x,y)-f(0,0)]-[f_x'(0,0)\cdot x+f_y'(0,0)\cdot y]|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\le\frac{|\varphi(|xy|)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{|xy|^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\le(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\to0\qquad(\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to0)$$

故 $f(x,y)$ 在(0,0)可微.

【例 16】 设 $f(x)$, $g(y)$ 为连续可微函数，且 $w=yf(xy)dx+xg(xy)dy$ ：

⑴ 若存在 u，使得 d $du=w$，试求 $f-g$ ；

⑵ 若存在φ(x),有 $\phi'(x)=f(x)$，试求 u 使得 $du=w$.

【解】 ⑴　由题意,∃u 使得 $du=w=yf(xy)dx+xg(xy)dy$,

则有　$\dfrac{\partial(yf(xy))}{\partial y}=\dfrac{\partial(xg(xy))}{\partial x}$，即　$f(xy)+xyf'(xy)=g(xy)+xyg'(xy)$

令 t=xy，又　$f(t)+tf'(t)=g(t)+tg'(t)\Rightarrow f(t)-g(t)+t(f'(t)-g'(t))=0\Rightarrow[t(f-g)]'=0$

$\therefore t(f-g)=C\Rightarrow f(t)-g(t)=\dfrac{C}{t}$,其中 C 为任意常数.

⑵　当 $\phi'(x)=f(x)$ 时，由⑴知：$g(t)=f(t)-\dfrac{C}{t}$,将其代入 w 中，得

$w=y\phi'(xy)dx+(x\phi'(xy)-\dfrac{C}{y})dy=d\phi(xy)-Cd(\ln|y|)=d\big(\phi(xy)-C\ln|y|\big)$，可见

$u=\phi(xy)-C\ln|y|+\bar{C}$　使得 $du=w$，即为所求 (其中 C, $\bar{C}$ 为任意常数).

【注】 若存在函数 $u(x,y)$,使得 $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$,则必有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y),\qquad 且\ \frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y},\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

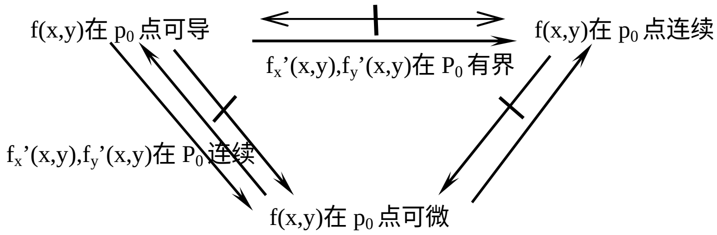
若 $\boldsymbol{P(x,y),Q(x,y)}$ 具有一阶连续偏导数，即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 连续，则由 schwarz 定理知：$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

参见教材第十章第３节有关 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 为某函数 $u(x,y)$ 的全微分的充要条件.

【例 17】设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $f(x,y)$在(0,0)点处__________.

A、不可微　　B、偏导数存在且连续　　C、偏导数不存在　　D、可微

【注】1. 对多元函数而言，连续性不再是可导性的必要条件，可导性与可微性不再等价．在连续、可导及可微诸多条件中，偏导数存在且连续是最强的条件．



2. 此例是可微、但偏导数存在不连续的典例．类似可例举出 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 等.

【解】由偏导数的定义与求导法则，可得

$$\boldsymbol{f'_x(x,y)}=\begin{cases}2\boldsymbol{x}\,\mathbf{sin}\dfrac{}{\boldsymbol{x^2+y^2}}-\dfrac{2\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^2+y^2}}\mathbf{cos}\dfrac{1}{\boldsymbol{x^2+y^2}} & \boldsymbol{(x,y)\neq(0,0)}\\ 0 & \boldsymbol{(x,y)=(0,0)}\end{cases}$$

$\because$ 当 $\boldsymbol{x\to0,y\to0}$时,$\boldsymbol{2x\,\mathbf{sin}\dfrac{}{x^2+y^2}\to0}$, 但 $\boldsymbol{\dfrac{2x}{x^2+y^2}\mathbf{cos}\dfrac{1}{x^2+y^2}}$ 是无界的, ,

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\boldsymbol{f'_x(x,y)}$ 不存在，故 $\boldsymbol{f'_x(x,y)}$ 在(0,0)点不连续；

同理，$f'_y(x,y)=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,且 $f'_y(x,y)$ 在(0,0)点也不连续.

另一方面，$\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta f-df}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}-(0\,\Delta x+0\,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{\rho\to0}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$

故 $f(x,y)$ 在(０,０)可微，可见应选择Ｄ.

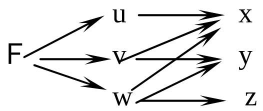
(四)、多元复合函数的求导法则

【例 18】设 f 具有连续的二阶偏导数，$\boldsymbol{F=f(x,xy,xyz)}$，试求函数的二阶偏导数.

【注】这是一典型的抽象形式的复合函数偏导数问题，通常可采用复合函数关系图、链式法则、多元复合函数的一阶微分的形式不变性等方法求偏导数．此例借助复合函数关系图给出一阶与二阶偏导数，另外由

关系图可知函数 F 关于变量的偏导数是简单还是复杂．

【解】引入中间变量$u=x,\quad v=xy,\quad w=xyz$，则由复合函数的关系图



可得 $$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}+yz\frac{\partial f}{\partial w}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial v}+xz\frac{\partial f}{\partial w}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}=xy\frac{\partial f}{\partial w},$$

由题意知$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u},\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}=\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial u},\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}=\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v}$，并注意$\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial v},\frac{\partial f}{\partial w}$的函数关系与 F 相同．

从而二阶偏导数分别为

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+y(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}\frac{\partial w}{\partial x})+yz(\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial x})$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+yz\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+yz\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w})+yz(\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial u}+y\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v}+yz\frac{\partial^2 f}{\partial w^2})$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+y^2z^2\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+2yz\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}+2y^2z\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}$$

同理可得 $$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=x(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}\frac{\partial w}{\partial y})+xz(\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial y})$$

$$=x(x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+xz\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w})+xz(x\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v}+xz\frac{\partial^2 f}{\partial w^2})=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+2x^2z\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}++x^2z^2\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=xy\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial z}=x^2y^2\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}+y(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}\frac{\partial w}{\partial y})+z\frac{\partial f}{\partial w}+yz(\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial y})$$

$$=x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+xz\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}+\frac{\partial f}{\partial v}+y(x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+xz\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w})+z\frac{\partial f}{\partial w}+yz(x\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v}+xz\frac{\partial^2 f}{\partial w^2})$$

$$=xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+xyz^2\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}+x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+xz\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}+2xyz\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}+\frac{\partial f}{\partial v}+z\frac{\partial f}{\partial w}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}+y\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}+y\frac{\partial f}{\partial w}+yz\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$= xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w} + xy^2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w} + xy^2 z\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + y\frac{\partial f}{\partial w}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy\frac{\partial f}{\partial w}) = x\frac{\partial f}{\partial w} + xy(\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial y}) = x^2 y\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v} + x^2 yz\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + x\frac{\partial f}{\partial w}.$$

【注】通常简记 $\frac{\partial f}{\partial u} = f_1' = f_1$， $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = f_{22}'' = f_{22}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = f_{12}'' = f_{12}$.

【例 19】设函数 $z = f(xy,\frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x})$,其中 f,g 分别具有连续的二阶偏导数与导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】令　$u = xy, v = \frac{x}{y}, w = \frac{y}{x}$ ，由偏导数的四则运算与链式法则，可得：

$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'\frac{\partial u}{\partial x} + f_2'\frac{\partial v}{\partial x} + g'\frac{\partial w}{\partial x} = y\ f_1' + \frac{1}{y}f_2' - \frac{y}{x^2}g'$ ，并注意 $f_{12}'' = f_{21}''$,于是，有：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \ f_1' + y(f_1')_y' - \frac{1}{y^2}f_2' + \frac{1}{y}(f_2')_y' - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^2}(g')_y'$$

$$= \ f_1' + y(f_{11}''\frac{\partial u}{\partial y} + f_{12}''\frac{\partial v}{\partial y}) - \frac{1}{y^2}f_2' + \frac{1}{y}(f_{21}''\frac{\partial u}{\partial y} + f_{22}''\frac{\partial v}{\partial y}) - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g''\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$= f_1' + xy\ f_{11}'' + yf_{12}''(-\frac{x}{y^2}) - \frac{1}{y^2}f_2' + \frac{x}{y}f_{21}'' - \frac{y}{x^3}f_{22}'' - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g''$$

$$= xy\ f_{11}'' - \frac{x}{y^3}f_{22}'' + f_1' - \frac{1}{y^2}f_2' - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g''.$$

【例 20】设 f 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$，又 $g(x,y) = f[xy,\frac{1}{2}(x^2 - y^2)]$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【分析】又是一复合函数求偏导的典型．令 $u = xy, v = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ ，则 $g = f(u,v)$ ，直接利用复合函数求偏导数的链式法则．注意一阶偏导数 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial v}$ 也是 u,v 的函数，及混偏相等 $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$.

【解】　$u = xy, v = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ ，则　$\frac{\partial g}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial u} + x\frac{\partial f}{\partial v}$ ， $\frac{\partial g}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial u} - y\frac{\partial f}{\partial v}$ ，

并且,有　$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(y\frac{\partial f}{\partial u} + x\frac{\partial f}{\partial v}) = y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}$ ，

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x\frac{\partial f}{\partial u} - y\frac{\partial f}{\partial v}) = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial f}{\partial v},$$

从而　$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = x^2 + y^2$.

【例 21】设 $f(x,y)=\int_{xy}^{x+y}\cos t^2 dt$，试求 $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2},\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$.

【注】二元函数是一个变限积分所给出的，关键利用：$\frac{d}{dx}(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt)=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$ 及多元函数求导数法则.

【解】$\because \frac{\partial f}{\partial x}=\cos(x+y)^2-y\cos xy$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2(x+y)\sin(x+y)^2-\cos(xy)+xy\sin(xy)$$

$$\therefore \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=-2\sin(x+y)^2-4(x+y)^2\cos(x+y)^2+2x\sin(xy)+x^2y\cos(xy)$$

且由 x,y 的轮换对称性，得：

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}=-2\sin(x+y)^2-4(x+y)^2\cos(x+y)^2+2y\sin(xy)+y^2x\cos(xy).$$

【例 22】设 $f(x,y)$可微，$f(0,0)=0,\ f'_x\ (0,0)=m,\ f'_y\ (0,0)=n,\varphi(t)=f(t,f(t,t))$，求$\varphi'(0)$.

【注】象函数关系层层相套的多元复合函数，对其求导能够充分考查该基本功是否过硬.

【解】因 $\varphi'(t)=f_1'(t,f(t,t))+f_2'(t,f(t,t))(f_1'(t,t)+f_2'(t,t))$,

当 t=0 时，$f_1'(0,0)=f_x'(0,0)=m,\quad f_2'(0,0)=f_y'(0,0)=n$

所以，$\varphi'(0)=f_1'(t,f(t,t))+f_2'(t,f(t,t))(f_1'(t,t)+f_2'(t,t))\big|_{t=0}=m+n(m+n)$.

【例 23】设$z=\phi[x+\psi(x-y),y]$，其中ϕ具有二阶连续偏导数，ψ二阶可导，试求 z''_{xx},z''_{yy}.

【解】$\because\quad z'_x=\phi'_1\cdot[x+\psi(x-y)]'_x=\phi'_1\cdot[1+\psi'\cdot(x-y)']=\phi'_1\cdot(1+\psi')$

$$z'_y=\phi'_1\cdot[x+\psi(x-y)]'_y+\phi'_2=\phi'_1\cdot\psi'\cdot(x-y)'_y+\phi'_2=-\phi'_1\cdot\psi'+\phi'_2$$

$$\therefore\quad z''_{xx}=(\phi'_1)'_x(1+\psi')+\phi'_1(1+\psi')'_x=\phi''_{11}(1+\psi')^2+\phi'_1\psi''$$

$$z''_{yy}=-(\phi'_1)'_y\psi'-\phi'_1(\psi')'_y+(\phi'_2)'_y=-[\phi''_{11}\psi'(-1)-\phi''_{12}]\cdot\psi'-\phi'_1\cdot\psi''(-1)+\phi''_{21}\psi'(-1)+\phi''_{22}$$

$$=\phi''_{11}(\psi')^2-\phi''_{12}\psi'+\phi'_1\psi''-\phi''_{21}\psi'+\phi''_{22}$$

$$=\phi''_{11}(\psi')^2-2\phi''_{12}\psi'+\phi'_1\psi''+\phi''_{22}$$

【例 24】设 $u=f(x,y,z)$，其中 f 是可微函数，试证明：

⑴ 若 $\dfrac{f'_x}{x}=\dfrac{f'_y}{y}=\dfrac{f'_z}{z}$，则 u 仅是 r 的函数，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ；

⑵ 若 $xu'_x+yu'_y+zu'_z=0$，则在球坐标下 u 仅是 θ,φ 的函数．

【注】如何说明 u 仅是 r 的函数呢?首先通过球坐标变换将 $u=f(x,y,z)\Rightarrow F(r,\theta,\varphi)$,并得到 $\dfrac{\partial u}{\partial\theta}=\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=0$ 即可．

【证】⑴由球坐标 $\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$ $(0\le r<+\infty,0\le\theta\le2\pi,0\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$，则函数

$$u=f(x,y,z)=f(r\cos\theta\sin\varphi,r\cos\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)$$

令 $\dfrac{f'_x}{x}=\dfrac{f'_y}{y}=\dfrac{f'_z}{z}=t$，则 $f'_x=tx,\quad f'_y=ty,\quad f'_z=tz$，于是

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=f'_x\,r(-\sin\theta)\sin\varphi+f'_y\,r\cos\theta\sin\varphi=tx\,r(-\sin\theta)\sin\varphi+ty\quad r\cos\theta\sin\varphi=tx(-y)+ty\,x=0,$$

同理 $\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=f'_x\,r\cos\theta\cos\varphi+f'_y\,r\sin\theta\cos\varphi+f'_z\,r(-\sin\varphi)$

$$=tx\,r\cos\theta\cos\varphi+ty\,r\sin\theta\cos\varphi+tz\,r(-\sin\varphi)$$

$$=t\,r^2\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi+t\,r^2\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi-t\,r^2\cos\varphi\sin\varphi$$

$=t\,r^2\cos\varphi\sin\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-t\,r^2\cos\varphi\sin\varphi=0$．故 u 仅是 r 的函数．

⑵由 $u=f(x,y,z)=f(r\cos\theta\sin\varphi,r\cos\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)$，及 $xu'_x+yu'_y+zu'_z=0$，有

$\dfrac{\partial u}{\partial r}=f'_x\cos\theta\sin\varphi+f'_y\sin\theta\sin\varphi+f'_z\cos\varphi=\dfrac{1}{r}(f'_x\,x+f'_y\,y+f'_z\,z)=0$，∴u 与 r 无关，即仅是 θ,φ 的函数．

【例 25】若任给 $t\in R^+$ 有 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$，则称 f 为 k 次齐次函数．设 f 连续可微，试证：

1. f 是 k 次齐次函数的充要条件是

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=kf\ ;$$

2. 若 f 是 k 次齐次函数，则由 $f(x,y,z)=0$ 确定的函数 $z=z(x,y)$ 是 1 次齐次函数．

【证】1.必要性　　设 f 是 k 次齐次函数，在 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$ 两端对 t 求导，得

$$xf'_1(tx,ty,tz)+yf'_2(tx,ty,tz)+zf'_3(tx,ty,tz)=k\,t^{k-1}f(x,y,z),$$

令 t=1 代入上式即得　$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=k\,f(x,y,z)$．

充分性　　设 $xf'_x+yf'_y+zf'_z=kf$ ，则任给 $t\in R^+$，分别用 tx,ty,tz 替代 x,y,z 得

$$txf'_{tx}(tx,ty,tz)+tyf'_{ty}(tx,ty,tz)+tzf'_{tz}(tx,ty,tz)=k\,f(tx,ty,tz),$$

记　$\varphi(t)=f(tx,ty,tz)$,则上式为　$t\varphi'(t)=k\varphi(t)$,　且 $\varphi(1)=f(x,y,z)$

两边积分得　$\varphi(t)=c\,t^k$,　令 $t=1$ 得 $c=\varphi(1)=f(x,y,z)$，即

$$\varphi(t)=t^k f(x,y,z)\Rightarrow f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z),$$

即 f 为 k 次齐次函数.

2. 因 f 是 k 次齐次函数，由1.得

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=k\,f,$$

由于 $f(x,y,z)=0$，且 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_z}$，一并代入上式得

$$-xf'_z\frac{\partial z}{\partial x}-yf'_z\frac{\partial z}{\partial y}+zf'_z=0,$$

于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

此式表明 $z=z(x,y)$ 为 1 次齐次函数.

【例 26】已知 $z=xf(\frac{y}{x})+2yf(\frac{x}{y})$，其中 f 具有二阶导数，若 $\frac{\partial z}{\partial x\partial y}\big|_{x=1}=-y^2$，求 $f(y)$.

【注】此例是一综合题，除涉及多元复合函数的导数外，还涉及简单微分方程和解题技巧.

【解】由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x})+2f'(\frac{x}{y})$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})-\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{2}{y^2}f(\frac{x}{y})=-\frac{y}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{2}{y^2}f(\frac{x}{y})\quad\cdots\cdots\quad(1)$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x\partial y}\big|_{x=1}=-y^2$ 代入(1)式，整理得　$y^3f''(y)+2f''(\frac{1}{y})=y^4$　…… (2)

用 $\frac{1}{y}$ 替代(２)式中 y，得　$f''(\frac{1}{y})+2y^3f''(y)=y^{-1}$　……　(3)

由(2) -2×(3)，得　$-3y^3f''(y)=y^4-2y^{-1}\Rightarrow f''(y)=\frac{2}{3y^4}-\frac{y}{3}$

$$\Rightarrow f(y)=\int(\frac{2}{9}y^{-3}-\frac{1}{6}y^2+c_1)dy=\frac{1}{9}y^{-2}-\frac{1}{18}y^3+c_1y+c_2$$

$\Rightarrow f'(y)=\int(\frac{2}{3y^4}-\frac{y}{3})dy=\frac{2}{9}y^{-3}-\frac{1}{6}y^2+c_1$　即为所求　(其中 c_1, c_2 为任意常数).

(五)、隐函数的求导法则

【例 27】设函数 $z=z(x,y)$由方程 $x^2+y^2+z^2=yf(\frac{z}{y})$ 所确定，其中 f 可微，试证

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

【注】该例实为求隐函数的偏导数的问题，常由解法有 3 种.

【解】法 1　将方程 $x^2+y^2+z^2=yf(\frac{z}{y})$ 两边分别对 x 及 y 求偏导，得：

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\frac{z}{y})\frac{\partial z}{\partial x}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{f'(\frac{z}{y})-2z}$$

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=f(\frac{z}{y})+yf'(\frac{z}{y})(-\frac{z}{y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y})\Rightarrow\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y+\frac{z}{y}f'(\frac{z}{y})-f(\frac{z}{y})}{f'(\frac{z}{y})-2z}$$，则

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x^2-y^2-z^2)2x}{f'(\frac{z}{y})-2z}+\frac{2xy[2y+\frac{z}{y}f'(\frac{z}{y})-f(\frac{z}{y})]}{f'(\frac{z}{y})-2z}$$

$$=\frac{2x^3-2xy^2-2xz^2+4xy^2+2xzf'(\frac{z}{y})-2xyf(\frac{z}{y})}{f'(\frac{z}{y})-2z}$$（注意 $yf(\frac{z}{y})=x^2+y^2+z^2$）

$$=\frac{2x^3-2xy^2-2xz^2+4xy^2+2xzf'(\frac{z}{y})-2x^3-2xy^2-2xz^2}{f'(\frac{z}{y})-2z}=\frac{2xzf'(\frac{z}{y})-4xz^2}{f'(\frac{z}{y})-2z}=2xz.$$

法 2　令 $G=x^2+y^2+z^2-yf(\frac{z}{y})$，　则由隐函数求导公式，得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G'_x}{G'_z}=\frac{2x}{-2z+f'(\frac{z}{y})}\qquad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G'_y}{G'_z}=\frac{2y-f(\frac{z}{y})+\frac{z}{y}f'(\frac{z}{y})}{-2z+f'(\frac{z}{y})}$$

从而，$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}$

$$=\frac{(x^2-y^2-z^2)2x}{f'(\frac{z}{y})-2z}+\frac{2xy[2y-f(\frac{z}{y})+\frac{z}{y}f'(\frac{z}{y})]}{f'(\frac{z}{y})-2z}$$，以下同法 1.

法 3　在方程 $x^2+y^2+z^2=yf(\frac{z}{y})$两端求微分，得：

$$2xdx+2ydy+2zdz=f(\frac{z}{y})dy+yf'(\frac{z}{y})\frac{ydz-zdy}{y^2}$$，即

$$(2z-f'(\frac{z}{y}))dz=-2xdx+(-2y+f(\frac{z}{y})-\frac{z}{y}f'(\frac{z}{y}))dy$$

$$(2z-f'(\frac{z}{y}))dz=-2xdx+(-2y+f(\frac{z}{y})-\frac{z}{y}f'(\frac{z}{y}))dy$$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2x}{2z-f'(\frac{z}{y})}$ ，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2y+f(\frac{z}{y})-\frac{z}{y}f'(\frac{z}{y})}{2z-f'(\frac{z}{y})}$ ，　从而

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2-y^2-z^2)\frac{-2x}{2z-f'(\frac{z}{y})}+2xy\frac{-2y+f(\frac{z}{y})-\frac{z}{y}f'(\frac{z}{y})}{2z-f'(\frac{z}{y})}$$ （以下同法１）.

【例 28】 设 F 具有一阶连续偏导数，$z=z(x,y)$ 由 $F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$ 确定，若 $xy\neq 0, xF_1'+yF_2'\neq 0$，

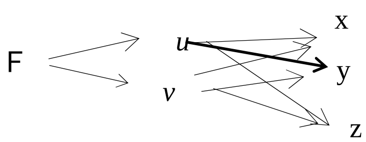
试求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z$ ，并说明此式与 F 无关.

【解】 记 $f(x,y,z)=F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$，应用隐函数导数公式，及复合函数的求导法则，得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x'}{f_z'}=\frac{F_1'+F_2'\cdot(-\frac{z}{x^2})}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}=\frac{y(zF_2'-x^2F_1')}{x(xF_1'+yF_2')},$$

依 x、y 具有轮换对称性，又得：$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_y'}{f_z'}=\frac{F_1'\cdot(-\frac{z}{y^2})+F_2'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}=\frac{x(zF_1'-y^2F_2')}{y(xF_1'+yF_2')}$,

于是，有：　$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z=\frac{y(zF_2'-x^2F_1')}{xF_1'+yF_2'}+\frac{x(zF_1'-y^2F_2')}{xF_1'+yF_2'}-z=\frac{(z-xy)(xF_1'+yF_2')}{xF_1'+yF_2'}-z=-xy$ 此式右端等于 $-xy$ ，确与 F 无关.



【注】 此例解法２，视 $u=x+\frac{z}{y}, v=y+\frac{z}{x}$, 且 $z=z(x,y)$, 则函数关系如图所示，利用复合函数的求导法则，直接在隐方程 $F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$ 两端分别对 x,y 求偏导数即可　.

【例 29】 设 $F(xz,yz)=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$,其中 F 具有二阶连续偏导数,且 $xF_1'+yF_2'=1$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【解】 在方程两端对 x 求偏导数，得：$F_1'(z+x\frac{\partial z}{\partial x})+F_2'y\frac{\partial z}{\partial x}=0$，即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-zF_1'}{xF_1'+yF_2'}=-zF_1',$$

再在上式两端对 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-F_1'\frac{\partial z}{\partial x}-z\left[F_{11}''(z+x\frac{\partial z}{\partial x})+F_{12}''y\frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

$$=-F_1'(-zF_1')-z\left[F_{11}''(z-xzF_1')-yzF_{12}''F_1'\right]$$

$$=zF_1'^2-z^2F_{11}''+xz^2F_1'F_{11}''+yz^2F_1'F_{12}''.$$

【例 30】证明曲线 F(x,y)=0 在点 P(x,y)处的曲率半径 R=$\dfrac{(F_2^2+F_1^2)^3}{\left|F_{11}F_2^2-2F_1F_2F_{12}+F_1^2F_{22}\right|}$，其中 F 具有二阶连续偏导数，且 $F_{11}F_2^2-2F_1F_2F_{12}+F_1^2F_{22}\neq 0$.

【证】在方程 F(x,y)=0 两端关于 x 求导，得 $F_1+F_2\dfrac{dy}{dx}=0\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_1}{F_2}$

于是，$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(F_{11}+F_{12}\frac{dy}{dx})F_2-F_1(F_{21}+F_{22}\frac{dy}{dx})}{F_2{}^2}$$

$$=-\frac{F_{11}F_2-F_1F_{21}+(F_2F_{12}-F_1F_{22})\frac{dy}{dx}}{F_2{}^2}$$

$$=-\frac{F_{11}F_2{}^2-2F_1F_2F_{12}+F_1{}^2F_{22}}{F_2{}^3},$$

故曲率半径 $$R=\frac{1}{k}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{(1+\frac{F_1^2}{F_2^2})^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{F_{11}F_2^2-2F_1F_2F_{12}+F_1^2F_{22}}{F_2^3}\right|}=\frac{(F_2^2+F_1^2)^3}{\left|F_{11}F_2^2-2F_1F_2F_{12}+F_1^2F_{22}\right|}.$$

【例 31】设函数 z=z(x,y)，由隐函数 $\dfrac{x}{z}=\varphi(\dfrac{y}{z})$ 所确定，其中 φ 是二阶可微函数，证明 z(x,y)满足关系式：

$$z''_{xx}z''_{yy}-(z''_{xy})^2=0.$$

【解】将隐函数对 x 求偏导数，有：

$$\frac{z-xz'_x}{z^2}=\phi'\frac{-yz'_x}{z^2}\quad\Rightarrow\quad z'_x=\frac{z}{x-y\varphi'}\cdots\cdots(1)$$

对 y 求偏导数，有：

$$\frac{-xz'_y}{z^2}=\varphi'\frac{z-zy'_x}{z^2}\quad\Rightarrow\quad z'_y=\frac{-z\varphi'}{x-y\varphi'}\cdots\cdots(2),$$

将(1)对 x 求导，有：$z''_{xx}=\dfrac{z'_x(x-y\varphi')-z(1-y\varphi''\dfrac{-yz'_x}{z^2})}{(x-y\varphi')^2}=\dfrac{-y^2\varphi''}{(x-y\varphi')^3}$，

将(2)对 y 求导，有：$z''_{yy}=\dfrac{(-z'_y\varphi'-z\varphi''\dfrac{z-yz'_y}{z^2})(x-y\varphi')+z\varphi'(-\varphi'-y\varphi''\dfrac{z-yz'_y}{z^2})}{(x-y\varphi')^2}=\dfrac{-x^2\varphi''}{(x-y\varphi')^3}$，

再将(1)对 y 求导，有：$z''_{xy}=\dfrac{z'_y(x-y\varphi')-z(-\varphi'-y\varphi''\dfrac{z-yz'_y}{z^2})}{(x-y\varphi')^2}=\dfrac{y\varphi''+\dfrac{y^2\varphi'\varphi''}{x-y\varphi'}}{(x-y\varphi')^2}=\dfrac{xy\varphi''}{(x-y\varphi')^3}$，

可见：$z''_{xx}z''_{yy}=\dfrac{-y^2\varphi''}{(x-y\varphi')^3}\dfrac{-x^2\varphi''}{(x-y\varphi')^3}=\left[\dfrac{xy\varphi''}{(x-y\varphi')^3}\right]^2=z_{xy}''$

即：$z''_{xx}z''_{yy}-(z''_{xy})^2=0$．得证．

【例 32】设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，求 du．

【注】此例是由一个抽象函数与一个隐函数所给出的函数的全微分问题．涉及多元复合函数的求导法则与隐函数的求导法，通常有两种解法，即利用隐函数的导数公式与直接求微分，后法较为简洁．

【解】法１　设 $F(x,y,z)=e^x-ye^y-ze^z$，则

$$F_x{}'=(x+1)e^x,\quad F_y{}'=-(y+1)e^y,\quad F_z{}'=-(z+1)e^z$$

于是　$$z_x{}'=-\frac{F_x{}'}{F_z{}'}=\frac{x+1}{z+1}e^{x-z},\quad z_y{}'=-\frac{F_y{}'}{F_z{}'}=-\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}$$

又 $u=f(x,y,z)$，有

$$u_x{}'=f_x{}'+f_z{}'z_x{}'=f_x{}'+f_z{}'\frac{x+1}{z+1}e^{x-z},$$

$$u_y{}'=f_y{}'+f_z{}'z_y{}'=f_y{}'-f_z{}'\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}$$

从而，有 $du=u_x{}'dx+u_y{}'dy=(f_x{}'+f_z{}'\dfrac{x+1}{z+1}e^{x-z})dx+(f_y{}'-f_z{}'\dfrac{y+1}{z+1}e^{y-z})dy$．

法２　在隐方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 两端取微分，得

$$e^xdx+xe^xdx-e^ydy-ye^ydy=e^zdz+ze^zdz,$$

故　$$dz=\frac{(1+x)e^xdx-(1+y)e^ydy}{(1+z)e^z}=\frac{1+x}{1+z}e^{x-z}dx-\frac{1+y}{1+z}e^{y-z}dy,$$

又 $u=f(x,y,z)$，有 $du=f_x{}'dx+f_y{}'dy+f_z{}'dz$，

从而，有

$$du=f_x{}'dx+f_y{}'dy+f_z{}'(\frac{1+x}{1+z}e^{x-z}dx-\frac{1+y}{1+z}e^{y-z}dy)$$

$=(f_x{}' + f_z{}' \dfrac{1+x}{1+z}e^{x-z})dx + (f_y{}' - f_z{}' \dfrac{1+y}{1+z}e^{y-z})dy$.

【例 33】设 y 由方程 $G(x,y,z)=0$ 确定的 x，z 的函数，又设 $z=F(x,y,z)$，其中 F、G 均具有一阶连续偏导数，试求函数 z 关于变量 x 的全导数 $\dfrac{dz}{dx}$.

【注】这是由两个抽象形式的隐函数所给出的函数的全导数问题.

【解】 设 $y=y(x,z)$，视 $z=F(x,y(x,z),z)$，令 $H=F(x,y(x,z),z)-z$，则由隐函数全导数公式，可得

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{H_x{}'}{H_z{}'}=-\frac{F_1{}'+F_2{}'y_x'}{F_2{}'y_z'+F_3{}'-1} \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

又由 $G(x,y(x,z),z)=0$ 及隐函数导数公式，有 $y_x'=-\dfrac{G_x{}'}{G_y{}'}$　$y_z'=-\dfrac{G_z{}'}{G_y{}'}$ …… (2) .

将(2)代入(1)，得：$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{-F_1'G_y'+F_2'G_x'}{-F_2'G_z'+F_3'G_y'-G_y'}=\dfrac{F_1'G_y'-F_2'G_x'}{F_2'G_z'-F_3'G_y'+G_y'}$.

【例 34】证明在变换 $u=\dfrac{x}{y}, v=x, w=xz-y$ 下，方程 $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{x}$ 可变换为 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$.

【证】视 $w=w(u,v)$，则 $z=\dfrac{y}{x}+\dfrac{w}{x}, u=\dfrac{x}{y}, v=x$ 均是 x,y 的函数.

故可对各变量关于 y 求导数，由复合函数的求导法则可得：$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial w}{\partial u}$，

及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2}{y^3}\dfrac{\partial w}{\partial u}-\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial w}{\partial u})=\dfrac{2}{y^3}\dfrac{\partial w}{\partial u}-\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2}{y^3}\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{x}{y^4}\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}$，

从而原方程　$y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{2}{x}=0 \Rightarrow$

$$\frac{2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{2}{x}-\frac{2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{2}{x}=\frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$$. 证毕.

【例 35】已知 $z=uv, x=u+\dfrac{1}{v}, y=v+\dfrac{1}{u}$，试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【解】在方程组 $\begin{cases} z=uv \\ x=u+\dfrac{1}{v} \\ y=v+\dfrac{1}{u} \end{cases}$ 两端关于 x 求导，得 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial x} & \cdots\cdots \quad (1) \\ 1=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial v}{\partial x} & \cdots\cdots \quad (2) \\ 0=-\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x} & \cdots\cdots \quad (3) \end{cases}$

因(2)、(3)的系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{v^2} \\ \frac{-1}{u^2} & 1 \end{vmatrix} = 1-\frac{1}{u^2v^2}=\frac{u^2v^2-1}{u^2v^2}\neq 0$，故从中解出$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$有：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{v^2} \\ \frac{-1}{u^2} & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1}{1-\frac{1}{u^2v^2}}=\frac{u^2v^2}{u^2v^2-1},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1}{u^2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{v^2} \\ \frac{-1}{u^2} & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\frac{1}{u^2}}{1-\frac{1}{u^2v^2}}=\frac{v^2}{u^2v^2-1}$$

代入(1)得：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{u^2v^3+uv^2}{u^2v^2-1}$　　……　(4)

又在(4)式两端关于 x 求导，得：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2u\frac{\partial u}{\partial x}v^3+u^2 3v^2\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}v^2+2uv\frac{\partial v}{\partial x})(u^2v^2-1)-(u^2v^3+uv^2)(2u\frac{\partial u}{\partial x}v^2+2u^2v\frac{\partial v}{\partial x})}{(u^2v^2-1)^2}$$

$$=\frac{(2uv^3+v^2)u^2v^2+(3u^2v^2+2uv)v^2}{(u^2v^2-1)^2}-\frac{2u^3v^5(uv+1)^2}{(u^2v^2-1)^3}=\frac{2uv^3(uv+1)^2(u^2v^2-1)-2u^3v^5(uv+1)^2}{(u^2v^2-1)^3}$$

$$=\frac{(uv+1)^2(2u^3v^5-2uv^3-2u^3v^5)}{(u^2v^2-1)^3}=-\frac{2uv^3(uv+1)^2}{(u^2v^2-1)^3}.$$

（六）、多元函数微分学的几何应用

【例 36】过直线$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\ x+y-z=0\end{cases}$，作曲面$3x^2+y^2-z^2=27$之切平面，求此切平面方程．

【解】直线的方向数为

$$m=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0,\quad n=\begin{vmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=8,\quad p=\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=8;$$

设$F(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2-27$，有

$$\frac{\partial F}{\partial x}=6x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-2z;$$

设切平面的切点为 A(x_0，y_0，z_0)，于是切平面为

$$6x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0)=0 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

此切平面的方向矢量垂直于矢量(0，8，8)，则有

$$16y_0-16z_0=0 \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

在已知直线上选取一点 B($\frac{27}{8},-\frac{19}{8},1$)，则矢量$\overrightarrow{AB}$与切平面的方向矢量垂直，于是

$$6x_0(x_0-\frac{27}{8})+2y_0(y_0+\frac{19}{8})-2z_0(z_0-1)=0 \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

将(2)，(3)同方程$3{x_0}^2+{y_0}^2-{z_0}^2=27$联立，求解得

$$\begin{cases}x_0=3\\ y_0=1,\\ z_0=1\end{cases}\qquad \begin{cases}x_0=-3\\ y_0=-17\\ z_0=-17\end{cases};$$

代入(1)式得切平面方程　$18x+2y-2z=54$，及　$-18x-34y+34z=54$.

【例 37】曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是 $2x+4y-z=5$.

【分析】显然所求平面的法向量为 $\vec{n}=\{2,4,-1\}$，故关键确定切点坐标，而切点坐标可根据曲面 $z=x^2+y^2$ 切平面的法矢量与 $\vec{n}=\{2,4,-1\}$ 平行确定.

【解】 令 $F(x,y,z)=z-x^2-y^2$，则

$F'_x=-2x$，$F'_y=-2y$，　$F'_z=1$，

设切点坐标为 (x_0,y_0,z_0)，则切平面的法向量为 $\{-2x_0,-2y_0,1\}$，其与已知平面 $2x+4y-z=0$ 平行，

因此有　$$\frac{-2x_0}{2}=\frac{-2y_0}{4}=\frac{1}{-1},$$

解得　$x_0=1,y_0=2$，相应地有 $z_0=x_0^2+y_0^2=5$

故所求的切平面方程为

$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$，即 $2x+4y-z=5$.

【例 38】求曲面 $\mathbf{z}=\mathbf{y}+\boldsymbol{x}\mathbf{e}^{\frac{x}{z}}$ 在（1,1,1） 处的切平面方程与法线方程.

【解】法一：设曲面的隐式方程为：$\mathrm{F(x,y,z)}=\mathrm{y}+x\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{z}}}-\mathrm{z}=0$，

则隐函数 F(x,y,z)在（1,1,1）处关于 x、y、z 的偏导数分别为：

$\mathbf{F}'_{\mathbf{X}}(\mathbf{1,1,1})=\mathbf{e}^{\frac{x}{z}}+\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{z}}\mathbf{e}^{\frac{x}{z}}\Big|_{(1,1,1)}=\mathbf{2}\boldsymbol{e}$　　$\mathbf{F}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{1,1,1})=\mathbf{1}$　　$\mathbf{f}'_{\mathbf{z}}(\mathbf{1,1,1})=-\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{z}^2}\mathbf{e}^{\frac{x}{z}}-\mathbf{1}\Big|_{(1,1,1)}=-\mathbf{1}-\boldsymbol{e}$

∴法向量 $\boldsymbol{n}=\{\mathbf{2}\boldsymbol{e},\mathbf{1},-\mathbf{1}-\boldsymbol{e}\}$，于是曲面在（1,1,1）处的切平面方程为：

$$\mathbf{2}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})+(\boldsymbol{y}-\mathbf{1})-(\mathbf{1}+\boldsymbol{e})(\boldsymbol{z}-\mathbf{1})=\mathbf{0},\quad \text{亦即}:\mathbf{2}\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-(\mathbf{1}+\boldsymbol{e})\boldsymbol{z}-\boldsymbol{e}=\mathbf{0}$$

法线方程为：$\frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{y}-\mathbf{1}=\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{z}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{e}}$　.

【注】该曲面可视为由方程：$\mathrm{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=\mathrm{z}-x\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{z}}}$ 给出，且法向量 $\boldsymbol{n}=\{\mathbf{f}'_{\mathbf{X}},-\mathbf{1},\mathbf{f}'_{\mathbf{z}}\}\Big|_{(1,1,1)}=\{-\mathbf{2}\boldsymbol{e},-\mathbf{1},\mathbf{1}+\boldsymbol{e}\}$，故由切平面的点法式方程得同结论.

【例 39】证明曲面 $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^3f(\frac{y}{x})$ 任意点处的切平面在 oz 轴上的截距与切点到坐标原点的距离之比为常数，并求出此常数.

【注】直接求出此曲面在任意点处的切平面方程即可.

【证】设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面上任一点，引入中间变量 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$u=\dfrac{y}{x}$，

令 $F(x,y,z)=z+r-x^3f(u)$

则 $F_x{}'=\dfrac{x}{r}-3x^2f(u)-xy\,f'(u)$，$F_x{}'=\dfrac{y}{r}-x^2f(u)$，$F_z{}'=1+\dfrac{z}{r}$，且

$$\begin{aligned}
&x_0F_x{}'\big|_{(x_0,y_0,z_0)}+y_0F_x{}'\big|_{(x_0,y_0,z_0)}+z_0F_x{}'\big|_{(x_0,y_0,z_0)}\\
&=\frac{x_0^2}{r_0}-3x_0{}^3f(u_0)+x_0^2y_0f'(u_0)+\frac{y_0^2}{r_0}-x_0^2y_0f'(u_0)+z_0+\frac{z_0^2}{r_0}\\
&=\frac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{r_0}-3x_0{}^3f(u_0)+z_0=r_0-3x_0{}^3f(u_0)+z_0
\end{aligned}$$

于是曲面在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$F_x{}'\big|_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+F_x{}'\big|_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+F_x{}'\big|_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)=0\text{，即有}$$

$$xF_x{}'\big|_{(x_0,y_0,z_0)}+yF_x{}'\big|_{(x_0,y_0,z_0)}+zF_x{}'\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=x_0F_x{}'\big|_{(x_0,y_0,z_0)}+y_0F_x{}'\big|_{(x_0,y_0,z_0)}+z_0F_x{}'\big|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

$$=r_0+z_0-3x_0{}^3f(u_0)=r_0+z_0-3(r_0+z_0)=-2(r_0+z_0)$$

故该切平面在 oz 轴上的截距为 $c=\dfrac{-2(r_0+z_0)}{F_Z{}'\big|_{(x_0,y_0,z_0)}}=\dfrac{-2(r_0+z_0)}{1+\dfrac{z_0}{r_0}}=-2r_0$，即 $\dfrac{c}{r_0}=-2$

所以曲面在 P_0 处的切平面在 z 轴的截距与 P_0 到原点的距离之比为 -2.

（七）、方向导数与梯度

【例 40】 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$,试求 $f(x,y)$ 在(0,0)沿任意方向的方向导数.

【解】 任取方向 $l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则

若 $\sin\alpha\neq 0$，$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{f(0+\rho l)-f(0)}{\rho}$

$$=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^2\cos^2\alpha\sin\alpha}{\rho^4\cos^4\alpha+\rho^2\sin^2\alpha}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{\rho^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\text{，}$$

若 $\sin\alpha=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=0$.

【注】 本例是利用定义求方向导数的，除此法外常用的方法还有利用偏导数与方向导数的关系、利用梯度与方向导数的关系等.

【例 41】 求 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 沿着 $\dfrac{1}{2}x^2+yz$ 的梯度方向的方向导数.

【解】设 $f(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2+yz$，则 $\overrightarrow{gradf}=\{x,\quad z,\quad y\}$，且 $\vec{e}_{\overline{gradf}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\{x,\quad z,\quad y\}$

又 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial \vec{e}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial z}\right\}\cdot\{x,\quad z,\quad y\}=\frac{x^2+2yz}{x^2+y^2+z^2}$$

【例 42】设函数 $\boldsymbol{u=\cos^2(xy)+\frac{y}{z^2}}$，直线 L 是直线 $l\ \begin{cases}\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}z-1=0\\ y-2z+4=0\end{cases}$ 在平面π　$x+y-z=5$ 上的投影，试求函数 u 在点 P(0,0,1)沿直线 L 的方向导数.

【解】过已知直线 l 的平面束方程为 $2x-3z-6+\lambda(y-2z+4)=0$，即

$$2x+\lambda y+(-3\lambda-3)z+4\lambda-6=0\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

当(1)与平面π垂直时，有 $\{2,\quad \lambda,\quad -2\lambda-3\}\cdot\{1,\quad 1,\quad -1\}=0$，即 $\lambda=-\frac{5}{3}$ 代入(1)，得

$$6x-5y+z-38=0$$

于是所求直线 L 的方程为 $\begin{cases}6x-5y+z-38=0\\ x+y-z-5=0\end{cases}$；

又直线 L 的方向向量为

$$\vec{s}=\left\{\begin{vmatrix}-5 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1 & 6\\ -1 & 1\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}6 & -5\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right\}=\{4,\quad 7,\quad 11\}，故$$

$$\vec{s}_0=\frac{1}{\sqrt{4^2+7^2+1^2}}\{4,\quad 7,\quad 11\}=\frac{1}{\sqrt{186}}\{4,\quad 7,\quad 11\}$$

且 $\frac{\partial u}{\partial x}=2\cos(xy)(-\sin(xy))y$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2\cos(xy)(-\sin(xy))x+\frac{1}{z^2}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2y}{z^3}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,0,1)}=0，\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,0,1)}=1，\quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(0,0,1)}=0$$

故方向导数为 $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(0,0,1)}=\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}\Big|_{(0,0,1)}=\{0,\quad 1,\quad 0\}\cdot\{4,\quad 7,\quad 11\}\frac{1}{\sqrt{186}}=\frac{7}{\sqrt{186}}$.

【例 43】设函数 $\boldsymbol{f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},a>b>0}$. 试给出在上半平面 $\{(x,y)\in R^2\,|\,Y\ge 0\}$ 上函数值增加最快的方向.

【注】函数 f 在任意点处的方向导数的绝对值不会超过它在该点的梯度的模 $\left\|\overrightarrow{grad}\,f\right\|$，且方向导数的最大值 $\left\|\overrightarrow{grad}\,f\right\|$ 在梯度方向达到．这就是说，沿着梯度方向函数值增加最快．同样方向导数的最小值 $-\left\|\overrightarrow{grad}\,f\right\|$

在梯度的反方向达到，即沿着梯度的反方向函数值减小得最快.

【解】在梯度不为零处，梯度方向就是函数值增加最快的方向，即对于$(x,y)\neq(0,0)$,沿着

$$\overrightarrow{grad}\,f(x,y)=\frac{2x}{a^2}\vec{i}+\frac{2y}{b^2}\vec{j}$$

的方向函数值增加得最快．但在$(0,0)$点，由于

$$f(x,y)-f(0,0)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{b^2}(x^2+y^2)-(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2})x^2\text{，}$$

故在$(0,0)$点邻域内，当 x=0 时，$f(x,y)-f(0,0)=\frac{y^2}{b^2}$最大，即函数值增加最快，因此，在$(0,0)$点，沿 y 轴方向函数值增加最快.

【例 44】设一礼堂的顶部是一半椭球面，其方程是 $z=4\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}$.试求当下雨时过房顶上点 P(1,3,$\sqrt{11}$)处的雨水流下的路线方程.

【注】这是梯度的应用题，打在曲面上的雨滴应沿着曲面下降最快的方向下流，即为梯度的反方向$-\overrightarrow{grad}\,f(x,y)$，因而雨水从椭球面上流下的路线在 0xy 面的投影上任意点处的切线与$\overrightarrow{gradz}$平行.

【解】设雨水从椭球面上流下的路线在 0xy 面的投影方程为C：$\begin{cases}f(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$，由题意知 C 上任一点处的切向量$\{dx,dy\}\parallel\overrightarrow{grad}f$，即

$$\{dx,dy\}\parallel\left\{\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial y}\right\}=\{-\frac{x}{4\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{x^2}{36}}},\ -\frac{y}{9\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{x^2}{36}}}\}\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=\frac{4y}{9x},\ x\neq0\quad\cdots\cdots\quad(1)$$

这就是投影曲线所满足的微分方程，解(1)得：$y=c\,x^{\frac{4}{9}}$．于是以C：$\begin{cases}y=c\,x^{\frac{4}{9}}\\ z=0\end{cases}$为准线，母线平行与 z 轴的柱面方程为 $y=c\,x^{\frac{4}{9}}$　　……　　(2)

将 x=1,y=3 代入(2)式,得 c=3,故过房顶P(1,3,$\sqrt{11}$)处的雨水流下时所沿的路线方程为$\begin{cases}z=4\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}\\ y=3x^{\frac{4}{9}}\end{cases}$.

(八)、多元函数的极值及其应用

【例 45】求函数 $f(x,y)=(1+e^x)\cos y-xe^x$ 的极值.

【解】　先求函数 $f(x,y)$的驻点，由

$$\begin{cases}f'_x=e^x\cos y-e^x(x+1)=e^x(\cos y-x-1)=0\\ f'_y=-(1+e^x)\sin y=0\end{cases},$$

解得驻点为 $(x_n, y_n)=((-1)^n-1, n\pi)$，$n\in Z$．又

$$A=f''_{xx}=e^x(\cos y-x-2)\text{，}\qquad B=f''_{xy}=-e^x\sin y,\qquad C=f''_{yy}=-(1+e^x)\cos y\text{，}$$

它们在驻点的值为

$$A(x_n, y_n)=-e^{(-1)^n-1}\text{，}\ B(x_n, y_n)=0\text{，}\ C(x_n, y_n)=(-1)^{n+1}(1+e^{(-1)^n-1})\text{，}$$

于是　$\Delta=(B^2-AC)\big|(x_n, y_n)=(-1)^{n+1}(1+e^{(-1)^n-1})e^{(-1)^n-1}$.

当 n=2 k 时，Δ＜0，A＜0，所以　$f(x_{2k}, y_{2k})=f(0,2k\pi)=2$ 为极大值.

而当 n=2k+1 时，Δ＞0，所以 $f(x_{2k+1}, y_{2k+1})$ 非极值.

【例 46】已知函数 $f(x,y)$ 在(0,0)的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则

A．点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点　B．点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极小值点

C．点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极大值点　D.由所给条件无法判断点(0,0)是否为 $f(x,y)$ 的极值点

【注】函数 $f(x,y)$ 非具体表出，由题设，易知 $f(0,0)=0$，因此判断点(0,0)是否极值点，关键看在点(0,0)的充分小的邻域内 $f(x,y)$ 是保号还是变号.

【解】　由题设，及 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$ 知：在(0,0)点某邻域成立

$$f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2+0(\rho),\qquad (\rho\to0\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2})\text{且 } f(0,0)=0$$

于是，在(0,0)点的充分小的邻域内取两点 (x_0, x_0) 与 $(\frac{x_0}{2},-\frac{x_0}{2})$ (其中 $x_0>0$)，则有

$$f(x_0, x_0)=x_0^2+4x_0^4+0(\rho)>0$$

$$f(\frac{x_0}{2},-\frac{x_0}{2})=-\frac{x_0^2}{4}+\frac{x_0^4}{4}+0(\rho)<0$$ 故点(0,0)不是 f(x,y)的极值点，应选 (A).

【例 47】在抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 所截成的椭圆上，求到原点最长和最短的距离.

【解】　设 (x,y,z) 是椭圆上的点，问题就化为求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $x^2+y^2-z=0$ 及 $x+y+z-1=0$ 下的条件极值问题.

作拉格朗日函数 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2+y^2-z)+\lambda_2(x+y+z-1)$

由极值的必要条件得：
$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+2\lambda_1 x+\lambda_2\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+2\lambda_1 y+\lambda_2\ldots\ldots\ldots(1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z-\lambda_1+\lambda_2\\ x^2+y^2-z=0\ldots\ldots\ldots(2)\\ x+y+z-1=0\ldots\ldots\ldots(3)\end{cases}$$

$x=y=-\dfrac{\lambda_2}{2(1+\lambda_1)}$，　$z=\dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{2}$　(2)、(3) 得 $x=y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，　$z=2\mp\sqrt{3}$

代入 f(x,y,z)中，求得函数值 $f=9\mp5\sqrt{3}$.又由于问题确实存在最大值和最小值，显然$9+5\sqrt{3}$为最大值，

而$9-5\sqrt{3}$为最小值.

【例 48】从已知ΔABC 的内部的一点 P 向三边作三条垂线，求使此三条垂线长的乘积为最大的点 P 的位置.

【注】如何将几何问题转换为条件极值问题，此例值得借鉴.

【解】　设ΔABC 三边长分别为 a,b,c,P 到三边的距离分别为 x,y,z，ΔABC 的面积为 S,则有

$$ax+by+cz=2S$$

可见，问题归结为 $f(x,y,z)=xyz$的最大值　．　作拉格朗日函数$F(x,y,z)=xyz+\lambda(ax+by+cz-2S)$

则在极值点处，有
$$\begin{cases}F_x'=yz+\lambda a=0 & \ldots\ldots & (1)\\ F_x'=xz+\lambda b=0 & \ldots\ldots & (2)\\ F_x'=xy+\lambda c=0 & \ldots\ldots & (3)\\ ax+by+cz=2s & \ldots\ldots & (4)\end{cases};$$

由(1)---(3),可得　$ax=by=cz$，并代入（4），得：$x=\dfrac{2s}{3a},y=\dfrac{2s}{3b},z=\dfrac{2s}{3c}$，

又由问题实际意义可知 f 确有最大值，故 P 到长为 a,b,c 的边的距离分别为$\dfrac{2s}{3a},\dfrac{2s}{3b},\dfrac{2s}{3c}$（S 为ΔABC 的面积）时，三条垂线长的乘积为最大.

【例 48】在球面 $x^2+y^2+z^2=6R^2(x>0,y>0,z>0)$ 上求一点，使函数 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 达到最大，且求出其最大值；并基此证明：当$a>0,b>0,c>0$时，

$$ab^2c^3\le108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

【注】这是一条件极值的问题，注意最大值点的判定.

【解】作拉格朗日函数 $L=\ln x+2\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-6R^2)$，由

$$\begin{cases} L_x = \dfrac{1}{x} + 2\lambda x = 0 \\ L_y = \dfrac{2}{y} + 2\lambda y = 0 \\ L_z = \dfrac{3}{z} + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6R^2 \end{cases} \Rightarrow 6 + 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0,\quad 6 - 2\times 6\lambda R^2 = 0\text{,即}\lambda = \frac{-1}{2R^2}$$

代回方程组中，得$x = R, y = \sqrt{2}R, z = \sqrt{3}R$，

$\because (R,\sqrt{2}R,\sqrt{3}R)$是唯一可能极值点，又当$(x,y,z)$趋于球面与坐标面的交线时，$f(x,y,z)\to -\infty$.

$\therefore f(x,y,z)$在$(R,\sqrt{2}R,\sqrt{3}R)$取得最大值,即　$f_{\max} = \ln(6\sqrt{3}R^6)$

于是有 $\ln(xy^2z^3) \le \ln(6\sqrt{3}R^6) \Rightarrow xy^2z^3 \le 6\sqrt{3}R^6 = 6\sqrt{3}(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{6})^3$

两端平方,得　$x^2(y^2)^2(z^2)^3 \le 36\times 3(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{6})^6$

令$x^2 = a, y^2 = b, z^2 = c$,有　$a^2b^2c^3 \le 108(\dfrac{a+b+c}{6})^6$．得证.

【例 49】　在球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点,使函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿$\vec{l}=\{1,-1,0\}$方向的方向导数最大．

【解】 设$M(x,y,z)$为球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上所要找的点,记$\vec{e}=\dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{-1}{\sqrt{2}},0\right\}$,则方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right\} = \sqrt{2}(x-y),$$

作拉格朗日函数　$F(x,y,z,\lambda) = \sqrt{2}(x-y) + \lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$,

由 $\begin{cases} F'_x = \sqrt{2} + 4x\lambda = 0 \\ F'_y = \sqrt{2} + 4y\lambda = 0 \\ F'_z = \sqrt{2} + 4z\lambda = 0 \\ 2x^2+2y^2+z^2-1=0 \end{cases}$ 得可能的极值点为 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{-1}{2},0)$与 $(\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2},0)$,

由于$\dfrac{\partial f}{\partial l}$的最值存在，且$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},0)} = \sqrt{2}$,而$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},0)} = -\sqrt{2}$，故$(\dfrac{1}{2},\dfrac{-1}{2},0)$为所要求的点．

四、练习题

(一)、填空题

1. 若函数 $z = 2x^2+2y^2+3xy+ax+by+c$ 在点 $(-2,3)$ 处取得极小值－3，则常数 a,b,c 之积 $abc =$______.

2.设$z(x,y)=\arctan\dfrac{x^3+y^3}{x-y}$，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=$____________.

3.设函数$u=(xyz)^2+f(e^{xyz})$,其中 $\boldsymbol{f}$ 可微,则$du=$ ____________ .

4.设$x^2+y^2+z^2=xf(\dfrac{z}{y})$，$f$连续可导，则$\boldsymbol{dz}=$ ____________ .

5.设$\boldsymbol{z=z(x,y)}$,若方程$F(xy,z-2x)=0$满足方程$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x$,则函数$F$应满足__________ .

6. 设有曲面$z=x+f(y-z)$,其中 f 可导,则该曲面在任一点处的切平面必与向量$\{1,1,1\}$的位置关系是__________.

7. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2+y^2+z^2=xyf(z^2)$ 确定，f 连续可导，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的最简形式是________________.

8. 设f，g 均为二阶可导函数,$z=f(\dfrac{x}{y})+g(xy)$，若 z 关于 x,y 的二阶偏导数中不含 f 与 g，试给出 z 关于 x, y 的
二阶微分方程：____________ .

9. 设 $f(y,z)$ 与 $g(y)$ 都是可微函数，则曲线 $x=\varphi(y,z),z=\psi(y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线方程是__________.

10. 求函数$u=2x^2-y^2-2z$在点$M(1,\ 2,-1)$处最大的方向导数$\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_M=$ __________ .

(二)、选择题

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$,则函数$f(x,y)$在$(0,0)$处 成立（　　）.

A．可微　　　B．偏导数不存在　　　C．连续　　　D．无极限

2. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $f(x,y)$在$(0,0)$点处（　　）.

A．不可微　　B．偏导数存在且连续　　C．偏导数不存在　　D．可微

3.设函数　$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{2xy} & xy\neq 0\\ x & xy=0\end{cases}$,则 $f_x'(0,1)=$（　　）.

A． 0　　　B． $\dfrac{1}{2}$　　　C． 1　　　D．不存在

4. 若函数$F(x,y,z)=0$可分解出$x=f(y,z)$，$y=g(z,x)$，$z=h(x,y)$,则下列各式不成立的是（　　）.

A． $F_x'\,dx+F_y'\,dy+F_z'\,dz=0$　　B． $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial z}$　　C． $\dfrac{\partial z}{\partial x}\times\dfrac{\partial x}{\partial y}\times\dfrac{\partial y}{\partial z}=-1$　　D． $(\dfrac{\partial z}{\partial x}\times\dfrac{\partial x}{\partial y}\times\dfrac{\partial y}{\partial z})^2=1$

5. 设曲面 $z=z(x,y)$ 是由 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定，则在点(1,0,-1)处下列叙述正确的是（　　）.

A． $dz=dx+\sqrt{2}dy$　　B． $dz=-dx-\sqrt{2}dy$　　C． $dz=dx-\sqrt{2}dy$　　D． $dz=-dx+\sqrt{2}dy$

6. 已知方程 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$，若引入新变量 $u=x^2+y^2, v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$， $w=\ln z-(x+y)$ 且 $w=w(u,v)$，则原方程将变形为（　　　）.

A．$\dfrac{\partial w}{\partial v}=0$　　B．$\dfrac{\partial w}{\partial v}=u$　　C．$\dfrac{\partial w}{\partial u}=0$　　D．$\dfrac{\partial w}{\partial u}=v$

7. 设函数 $z=2x^2-3y^2$，则

A．函数 z 在点 $(0,0)$ 处取得极大值　　B．函数 z 在点 $(0,0)$ 处取得极小值

C．点 $(0,0)$ 非函数 z 的极值点　　D．点 $(0,0)$ 是函数 z 的最大值点或最小值点，但不是极值点

(三)、求解下列各题

1. 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $\dfrac{x}{t}=\ln\dfrac{t}{y}$ 所确定的 x,y 的函数，求全导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

2. 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，求全导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

3. 设 f 连续可导，$z(x,y)=\int_0^y e^y f(x-t)dt$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4. 设 $z(x,y)=x^2y+\int_{xy}^{x+y} f(t)dt$，其中 f 可微，试求 dz, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. (1) 设函数 $z=f(t), t=\varphi(xy, x^2+y^2)$,其中 f 具有二阶连续导数, φ 具有二阶连续偏导数，试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

(2) 设函数 $z=f(x,y,t), t=\varphi(x,xy)$,其中 f,φ 均具有二阶连续偏导数，试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

6. 设 $F(x,y,z-x,y^2-\omega)=0$,其中F 具有二阶连续偏导数，且 $F_4'\neq 0$, 求 $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$.

7. 求曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$上的点P,使在点P处的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

8. 求曲面 $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$, 在 $P_0(2,2,1)$处的切平面与法线方程　.

(四)、多元微分学的各种应用问题

1. 当$|x|$, $|y|$很小时，导出 $arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$ 的近似计算公式　.

2. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} x+y+\dfrac{2x^3y}{x^4+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$，证明 $f(x,y)$在$(0,0)$点沿任意方向的方向导数存在且为 $\cos\alpha+\sin\alpha$，但在$(0,0)$点不可微.

3. 求等值线 $z=\ln(x^2+y^2)$在点$P_0(x_0,y_0)$沿与过这点的等值线垂 直之方向的导数　.

4. 函数 $u=xy^2+yz^3$ 在点 $(1,1,-1)$ 处沿哪个方向的方向导数值最大，并求此最大方向导数的值.

5. 求函数 $u=e^{-2y}\ln(x+z)$ 在点 $(e,1,0)$ 沿曲面 $z=x^2-e^{3y-1}$ 法线方向的方向导数.

6. 求由 $y=x\varphi(\dfrac{z}{x})+\psi(yz)$ 所确定曲面 $z=z(x,y)$，在点 $(1,-1,1)$ 处的切平面与法线方程.

7. 设一表面光滑的橄榄球，它的表面形状是长半轴为 6，短半轴为 3 的椭圆绕其长轴旋转所得的旋转椭球面. 在无风的细雨天，将该球放置室外草坪上，使长轴在水平位置，试求雨水从椭球面上流下的路径方程.

(五)、证明题

1. （1）$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x+y}=0$　　（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}=1$

2. 证明二元函数：$f=\sqrt{|xy|}$ 在点(0,0)处连续,可导, 但不可微．

3. 试证：可微函数 $z=f(x,y)$是 $ax+by(ab\neq0)$的函数的充要条件为 $b\dfrac{\partial z}{\partial x}=a\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

4. 设$u(x,y)=xv+y\varphi(v)+\psi(v)$,其中$\varphi,\psi$可导,$v=v(x,y)$有连续的一阶偏导数,

若$x+y\varphi'(v)+\psi'(v)=0$, 试证明 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}-(\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y})^2=0$．

5. 求证 $f(x,y)=yx^y(1-x)<e^{-1}$,　$0<x<1, 0<y<+\infty$

6. 证明函数 $f(x,y)=Ax^2+2Bxy+cy^2$ 在约束条件 $g(x,y)=1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ 下有最大值与最小值，且它们是方程 $\lambda^2-(Aa^2+Cb^2)\lambda+(AC-B^2)a^2b^2=0$ 的根.

(六)、极值问题

1. 设 $z=\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+9}+\sqrt{x^2+y^2-6x+2y+11}$，求 z 的最小值.

2. 作半径为 r 的球的外切正圆锥．问此圆锥的高 h 为何值时，其体积 V 最小，并求出该最小值.

3. 在球面 $x^2+y^2+z^2=5r^2$ ($x>0, y>0, z>0$)上求一点使函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$

达到极大，且算出其极大值．利用上述结果证明：$a>0, b>0, c>0$ 时, $abc^3\le 27\left(\dfrac{a+b+c}{5}\right)^5$．

4. 设$\Omega: x^2+y^2+z^2\le1$, 试求 $f(x,y,z)=\sqrt[3]{x+2y-2z+5}$在$\Omega$上的最大值与最小值　．

5. 设$\boldsymbol{z=z(x,y)}$是由$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$确定的函数，求$\boldsymbol{z=z(x,y)}$的极值点与极值.

练习题参考答案

(一)、填空题

1. 30　2. 1（注意简洁！）　3. $du=(2xyz+f'e^{xyz})d(xyz)=(2xyz+f'e^{xyz})(yzdx+xzdy+xydz)$

4. $dz=\dfrac{y(2x-f)}{xf'-2yz}dx+\dfrac{2y^3+xzf'}{y(xf'-2yz)}dy$　5. F连续可微，且 $F_1'\neq0$　6. 平行　7. $\dfrac{z}{1-xyf'(z^2)}$

8. $x^2\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=y\dfrac{\partial z}{\partial y}-x\dfrac{\partial z}{\partial x}$　9. $\dfrac{x-x_0}{\varphi_y'(y_0,z_0)+\varphi_z'(y_0,z_0)\psi'(y_0)}=y-y_0=\dfrac{z-z_0}{\psi'(y_0)}$　10. $\dfrac{\partial z}{\partial l}=6$

(二)、选择题

1.D　2.D　3.B　4.B　5.C　6.A　7. C

(三)、求解下列各题

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x+t)yf_x'+tyf_t'}{(x+t)y-t^2f_t'}$．2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{F_t'F_x'-f_t'F_x'}{F_t'+f_tF_y'}$．3. $\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=e^y(f(x)-f(x-y)+f'(x-y))$

4.提示：设$F(x)$为$f(x)$的一个原函数，则$\int_{xy}^{x+y}f(t)dt=F(x+y)-F(x-y)$．

$dz=[2xy+f(x+y)]dx+[x^2+f(x+y)-xf(xy)]dy, \dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=2x+f'(x+y)-f(xy)-xyf'(xy).$

5. (1) $\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}=f''(t)(y\varphi_1'+2x\varphi_2')^2+f'(t)(y^2\varphi_{11}''+4xy\varphi_{12}''+4x^2\varphi_{22}''+2\varphi_2')$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}= f_{12}'' + x\varphi_2' f_{13}'' + (f_{32}'' + x\varphi_2' f_{33}'')(\varphi_1' + y\varphi_2') + f_3'(x\varphi_{12}'' + x\varphi_{22}'' + \varphi_2')$

6. $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=2+\dfrac{F_{22}''(F_4')^2-2F_{24}''F_2'F_4'+F_{44}''(F_2')^2}{(F_4')^3}$ 7. $P(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27})$ 8. $x+y-4z=0,\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$.

(四)、多元微分学的各种应用问题

1.　$x+y$　　3. $\pm\dfrac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$　　4. $\vec{n}=\{1,\ 1,\ 3\}$, $(\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}})_{\max}=\sqrt{11}$　　5. $\pm\dfrac{-2e^{-2}-6+e^{-3}}{|\bar{n}|}$，

$|\bar{n}|=\sqrt{9e^4+4e^2+1}$　　6. $(\varphi(1)-\varphi'(1))(x-1)+(\psi'(-1)-1)(y+1)+(\varphi'(1)-\psi'(-1))(z-1)=0$，

$\dfrac{x-1}{\varphi(1)-\varphi'(1)}=\dfrac{y+1}{\psi'(-1)-1}=\dfrac{z-1}{\varphi'(1)-\psi'(-1)}$　　7. $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1\\ x=cy^4\end{cases}$.

(五)、证明题

5.提示:求 $f(x,y)$在区域　$0<x<1,\ 0<y<+\infty$的最值点及其所满足的条件 .

(六)、极值问题

1.　$z_{\min}=\sqrt{22}$　　2. 提示:需写出此圆锥体积关于高 h 的函数表达式 $v(h)$,求出 $v(h)$ 的驻点 h_0 ,

V=　$v_{\max}=v(4r)=\dfrac{8\pi r^2}{3}$　.　3. 参 考 【例 **48**】　4. $f_{\max}=2,\ f_{\min}=\sqrt[3]{2}$　.　5. $z_{\min}=z(9,3)=3,\ z_{\max}=z(-9,-3)=-3$.

五、自测题（150 分钟，满分 100 分）

(一)、填空题（本题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分 ）

1.设函数 $z=z(x,y)$ 由 $\boldsymbol{f(x,x+y,x+y+z)}=0$ 确定，f 具有连续偏导数，则 dz＝____________.

2. 已知$\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$,且$x>y>z>0$,当3个自变量$x,y,z$分别增加一个单位时， 变量______的变化对函数 u 的影响最大.

3. 设 $z=y+xF(u)$,而 $u=\dfrac{y}{x}$, $F(u)$为可微函数　,那么 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________

4.设$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $div(\overrightarrow{gradu})\big|_{(2,-1,2)}=$________.

5. 若 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$，且当 $x=0$时，$z=\sin y$；当 $y=0$时，$z=\sin x$，则 $z=$______________.

6 设 $f(x,y)=x^n y^m$ ($m,n>0$) 定义在线段$AB: x+y=a, x\ge 0, y\ge 0, a>0$上,则 $f(x,y)$ 在 AB 上的最大值是__________.

(二)、选择题（本题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分 ）

1. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续是它在该点偏导数存在的（　　　）.

A．必要而非充分条件　　　　B．充分而非必要条件

C．充分必要条件　　　　D．既非充分又非必要条件

2.设曲面 $z=z(x,y)$ 是由 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定，则在点(1,0,-1)处下列叙述正确的是：（　　）.

A、$dz=dx-\sqrt{2}dy$　　B、法向量为 $\vec{n}=\vec{i}+\sqrt{2}\,\vec{j}-\vec{k}$

C、$dz=-dx-\sqrt{2}dy$　　D、法向量为 $\vec{n}=\vec{i}+\sqrt{2}\,\vec{j}+\vec{k}$

3.以下叙述中正确的是（　　　）.

A、函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $O(0,0)$ 处沿 $l=\vec{i}$ 方向的方向导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)}=1$，故 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$.

B、函数 $z=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x} & xy\neq 0 \\ 0 & xy=0 \end{cases}$ 的所有间断点是：$\{(x,y)\ |xy=0\}$.

C、已知函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$，则点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极小值点.

D、设函数 $f(x,y)$ 在(0,0)点附近有定义，且 $f'_x(0,0)=0$，则曲线 $\begin{cases} z=f(x,0) \\ y=0 \end{cases}$ 在点(0,0, $f(0,0)$))的切向量平行于 x 轴.

4.直线 L：$\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面π上，而平面π与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点(1,-2,5)，则(　　　).

A．$a=5,b=2$　B．$a=-5,b=2$　C．$a=-5,b=-2$　D．$a=5,b=-2$

5.设方程 $\varphi(x-az,y-bz)=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$，φ 可微，且 $a\varphi'_1+b\varphi'_2\neq 0$（a,b 为常数），则 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=$（　　　）.

A．$x+y$　　B．0　　C. z　　D．1

6.设 $\varphi(y,z)$ 与 $\psi(y)$ 都是可微函数,则曲线 $x=\varphi(y,z),z=\psi(y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线方程是(　　).

A. $x-x_0=\varphi'_1(x_0,y_0)+\varphi'_2(x_0,y_0)\psi'(y_0)(y-y_0)+\psi'(y_0)(z-z_0)$　B. $\frac{x-x_0}{-1}=\frac{y-y_0}{\varphi'_1(x_0,y_0)+\varphi'_2(x_0,y_0)\psi'(y_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(y_0)}$

C. $x-x_0+\varphi'_1(x_0,y_0)+\varphi'_2(x_0,y_0)\psi'(y_0)(y-y_0)+\psi'(y_0)(z-z_0)=0$　D. $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'_1(x_0,y_0)+\varphi'_2(x_0,y_0)\psi'(y_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(y_0)}$

(三)、计算题（本题共５小题，每小题６分，满分 30 分 ）

1.设 $f(x,y)$ 可微, $f(1,1)=1$, $f'_x(1,1)=m$, $f'_y(1,1)=n$, $\varphi(t)=f(t,f(t,f(t,t)))$, 求 $\frac{d}{dt}\varphi^3(t)\big|_{t=1}$.

2.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$ 确定,且 F 具有连续的二阶偏导数，试求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3.设函数 $u=f(x,y,z)$, $\varphi(x^2,e^y,z)=0$, $y=\sin x$ 其中 f,φ 均具有一阶连续(偏)导数,且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$,求全导数 $\frac{du}{dx}$.

4. 若函数 $u=f(xyz)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$，且 $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=x^2y^2z^2f'''(xyz)$，求函数 u.

5. 求函数 $u=2x^2-y^2-2z$ 在点 $M(1,2,-1)$ 处沿其等值面法线方向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_M$，并考虑该方向导数是不是函数在 M 点处的最大方向导数.

(四)、证明题（本题共２小题，每小题８分，满分 16 分 ）

1.设 $f(x,y)$ 满足：$f(x,y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$，证明 $f(x,y)=\varphi(x)\cdot\psi(y)$.

2.设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，证明 $f(x,y)$ 在(0,0)点连续；在(0,0)点沿任意方向的方向导数存在，但在(0,0)点不可微.

(五)、极值问题（本题满分 8 分 ）

求内接于定圆的三角形中面积之最大者.

(六)、微分学的几何应用问题（本题满分 10 分 ）

设曲面 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c})=0$ (a,b,c为常数)确定,且 F 具有连续的二阶偏导数，试证明①曲面的切平面通过一个定点；②函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})^2=0$.

答案(自测题)

(一)、自测题

1. $-\dfrac{f_1'+f_2'+f_3'}{f_3'}dx-\dfrac{f_2'+f_3'}{f'}dy$　2. z　3. $y+xF(u)=z$　4. $\dfrac{2}{3}$　5. $\sin x+\sin y$　6. $\dfrac{n^n m^m a^{m+n}}{(n+m)^{m+n}}$

(二)、选择题

1. D　2. B　3. D　4. C　5. A　6. D

(三)、计算题

1. 3(m+n(m+n(m+n)))　2. $\dfrac{F_{11}''F_2'^2-2F_{11}''F_2'^2F_2'}{(F_1'-F_2')^3}$　3. $\dfrac{du}{dx}=f_1'+\cos x\, f_2'-\dfrac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+\cos x e^{\sin x}\varphi_2')f_3'$

4. $u=\dfrac{3}{2}(xyz)^{\frac{2}{3}}$　5. $\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}\Big|_M=-6$,其中$\vec{n}=\left\{-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right\}$

(五)、极值问题　$s_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

第九章　　重积分

一、基本要求

1、掌握重积分（二重积分、三重积分等）的定义和性质．

2、熟练掌握二重积分在直角坐标和极坐标下的计算方法，了解其在一般变量替换下的计算方法．

3、掌握三重积分在直角坐标、柱坐标和球面坐标下的计算．

4、掌握重积分（二重积分、三重积分等）在几何上和物理上的应用．

二、主要内容

㈠、二重积分的概念和性质

1、二重积分的概念

⑴定义

简述为 $$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中λ为各小区域 $\Delta\sigma_i$ 直径的最大值，$\Delta\sigma_i$ 表示小区域 $\Delta\sigma_i$ 的面积．

⑵几何意义

当 $f(x,y)\ge 0$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 是以区域 D 为底，以曲面 S：$\boldsymbol{z=f(x,y)}$ 为高的曲顶柱体的体积．

当 $\boldsymbol{f(x,y)}<0$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 是以区域 D 为底，曲面 S：$\boldsymbol{z=f(x,y)}$ 为高的曲顶柱体体积的相反数．

当 $f(x,y)=1$ 时，$\iint\limits_D 1\cdot d\sigma=\sigma$ 是高为单位１的曲顶柱体的体积，数值上等于区域 D 的面积 σ ．

⑶可积性

若 $f(x,y)$ 在区域 D 内分片连续，则 $f(x,y)$ 可积，即 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 存在．

2、二重积分的性质

⑴线性性

$$\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma；$$

$$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\pm\iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

⑵区域可加性

若区域 $D=D_1\cup D_2$，且 $D_1\cap D_2\subset\partial D_1\cap\partial D_2$，即 D_1 与 D_2 的公共部分只是在边界上，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

⑶积分不等式

若在区域 D 内有 $f(x,y)\le g(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le\iint\limits_D g(x,y)d\sigma；$$

特别地， $$\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right|\le\iint\limits_D |f(x,y)|\,d\sigma；$$

$$m\sigma\le\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le M\sigma,$$

其中 m、M分别为 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最小值和最大值，σ 为区域 D 的面积．

⑷积分中值定理

若 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma,$$

其中（ξ,η）为区域 D 中的某一点．意为曲顶柱体的体积总能找到一个平顶柱体，使其体积与之相等．

㈡、二重积分的计算

1、在直角坐标系下

积分区域 D 为 x 一型区域：$y_1(x)\le y\le y_2(x)$，　$a\le x\le b$ 时，积分次序：先 y 后 x，即

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\ ;$$

积分区域 D 为 y 一型区域：$x_1(y)\le x\le x_2(y)$，　$c\le y\le d$ 时，积分次序：先 x 后 y，即

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\ .$$

2、在极坐标系下

当极点在积分区域 D 外，此时积分区域 D：$r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)$，$\alpha\le\theta\le\beta$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr\ .$$

当极点在积分区域 D 内，此时积分区域 D：$0\le r\le r(\theta)$，$0\le\theta\le 2\pi$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr\ .$$

当极点在积分区域 D 的边界上，此时积分区域 D：$0\le r\le r(\theta)$，$\alpha\le\theta\le\beta$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr\ .$$

上述三式均是先对 r 后对 θ 的积分，与直角坐标系下的积分相仿，也可先 θ 后 r 积分，此处略．

3、一般变量替换

变换 T：$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，则对$(u,v)\in D'$，当 $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne 0$ 时，有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f[x(u,v),y(u,v)]\left|J(u,v)\right|dudv\ .$$

㈢、三重积分

1、三重积分的概念

⑴三重积分的定义

简述为
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i\ ,$$

其中 λ 为各小区域 Δv_i 直径的最大值，Δv_i 表示小区域 Δv_i 的体积（i=1,2,…n)．

⑵其他知识

三重积分的可积性问题类似于二重积分；

三重积分的性质相同于二重积分．

2、三重积分的计算

⑴在直角坐标系下

此时计算有两类六种表达形式：

先一后二：

当积分区域Ω：$z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$．

当积分区域Ω：$y_1(z,x)\le y\le y_2(z,x)$，$(x,z)\in D_{zx}$时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint\limits_{Dzx} dzdx\int_{y_1(z,x)}^{y_2(z,x)} f(x,y,z)dy$．

当积分区域Ω：$x_1(y,z)\le x\le x_2(y,z)$，$(y,z)\in D_{yz}$时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint\limits_{D_{yz}} dydz\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx$．

先二后一：

当积分区域Ω：$(x,y)\in D_z$，$c_1\le z\le c_2$时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{c_1}^{c_2} dz\iint\limits_{Dz} f(x,y,z)dxdy$．

当积分区域Ω：$(x,z)\in D_y$，$b_1\le y\le b_2$时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{b_1}^{b_2} dy\iint\limits_{Dy} f(x,y,z)dzdx$．

当积分区域Ω：$(y,z)\in D_x$，$a_1\le x\le a_2$时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{a_1}^{a_2} dx\iint\limits_{Dx} f(x,y,z)dydz$．

注：计算时，这六个公式又需根据平面区域 D 的特点，再分为两个累次积分，特别“先二后一”3 情形，当 $f(x,y,z)$ 与区域 D 无关时，其中的二重积分实为区域 D 的面积，可详见下列例题.

⑵在柱面坐标系下

已知柱坐标与直角坐标的关系为：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$，体积元素 $dv=rdrd\theta dz$；一般情况下，若积分区域可表示为Ω：$z_1(r,\theta)\le z\le z_2(r,\theta), r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta), \theta_1\le\theta\le\theta_2$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint\limits_{D} rdrd\theta\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz=\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} rdr\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz\ .$$

柱面坐标一般适用于在被积函数或积分区域中含有 x^2+y^2 的表达形式.

⑶在球面坐标系下

已知球面坐标与直角坐标的关系为：$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$，体积元素 $dv=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$；一般情况下，若积分区域可表示为Ω：$r_1(\theta,\varphi)\le r\le r_2(\theta,\varphi)$，$\varphi_1(\theta)\le\varphi\le\varphi_2(\theta)$，$\alpha\le\theta\le\beta$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{dv}=\iint\limits_{\boldsymbol{D}}\sin\varphi\boldsymbol{d}\varphi\boldsymbol{d}\theta\int_{\boldsymbol{r}_1(\varphi,\theta)}^{\boldsymbol{r}_2(\varphi,\theta)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}\sin\varphi\cos\theta,\boldsymbol{r}\sin\varphi\sin\theta,\boldsymbol{r}\cos\varphi)\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{dr}$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\sin\varphi d\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2dr\ .$$

球面坐标一般适用于在被积函数或积分区域中含有 $x^2+y^2+z^2$ 的表达形式.

⑷重积分的应用

1、在几何上的应用

⑴平面图形的面积：$\sigma=\iint\limits_D d\sigma=\iint\limits_D dxdy$．

⑵曲顶柱体的体积：$V=\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$．

⑶几何体Ω的体积：$V=\iiint\limits_\Omega dv=\iiint\limits_\Omega dxdydz=\iiint\limits_\Omega rdrd\theta dz=\iiint\limits_\Omega r^2\sin\varphi\, drd\varphi d\theta$．

⑷空间曲面的面积：$S=\iint\limits_D \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy$．

2、在物理上的应用

⑴质量：薄片物质：$m=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$．　　　（其中 m 为质量，$\mu(x,y)$ 为密度函数，以下类同）

一般物体：$m=\iiint\limits_\Omega \mu(x,y,z)dxdydz$．

⑵重心：薄片物质：$\bar{x}=\frac{1}{m}\iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy$，$\bar{y}=\frac{1}{m}\iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy$．

一般物体：$\bar{x}=\frac{1}{m}\iiint\limits_\Omega x\mu(x,y,z)dxdydz$，$\bar{y}=\frac{1}{m}\iiint\limits_\Omega y\mu(x,y,z)dxdydz$，$\bar{z}=\frac{1}{m}\iiint\limits_\Omega z\mu(x,y,z)dxdydz$．

⑶转动惯量：薄片物质：$I_x=\iint\limits_D y^2\mu(x,y)dxdy$，$I_y=\iint\limits_D x^2\mu(x,y)dxdy$，$I_o=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mu(x,y)dxdy$．

一般物体：$I_x=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz$，$I_y=\iiint\limits_\Omega (z^2+x^2)\mu(x,y,z)dxdydz$，

$I_z=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\mu(x,y,z)dxdydz$，$I_o=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz$．

⑷空间物体对位于 (x_0,y_0,z_0) 的质点的引力：

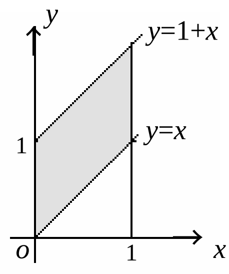
$$F_x=km\iiint\limits_\Omega \frac{(x-x_0)\mu}{r^3}dxdydz，F_y=km\iiint\limits_\Omega \frac{(y-y_0)\mu}{r^3}dxdydz，F_z=km\iiint\limits_\Omega \frac{(z-z_0)\mu}{r^3}dxdydz；$$

其中 k 为引力系数，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$．

三、例题分析

㈠、二重积分的概念和性质

【例 1】设 a>0，$f(x)=g(x)=\begin{cases} a, 若0\le x\le 1 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$，而 D 表示全平面，则 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)dxdy=?$



例 1 图

【分析】本题积分区域为全平面，但只有当 $0\le x\le 1, 0\le y-x\le 1$ 时，被积函数才不为零，因此实际上只需在满足此不等式的区域内积分即可

【详解】 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)dxdy=\iint\limits_{0\le x\le 1,0\le y-x\le 1} a^2\ dxdy$

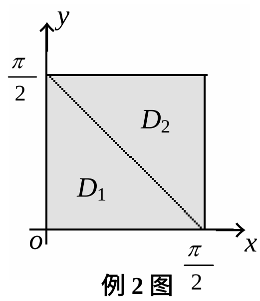
$$=a^2\int_0^1 dx\int_x^{x+1}dy=a^2\int_0^1[(x+1)-x]dx=a^2.$$

【评注】若被积函数只在某区域内不为零，则二重积分的计算只需在积分区域与被积函数不为零的区域的公共部分上积分即可.

【例２】计算二重积分 $I=\iint\limits_D\sqrt{1-\sin^2(x+y)}dxdy$，其中 D：$0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2}$.

【分析】此题常出现错误的结论：

$$I=\iint\limits_D\sqrt{1-\sin^2(x+y)}dxdy=\iint\limits_D\cos(x+y)dxdy=0.$$



例 2 图

事实上 $\sqrt{1-\sin^2(x+y)}=|\cos(x+y)|=\begin{cases}\cos(x+y), & (x,y)\in D_1 \\ -\cos(x+y), & (x,y)\in D_2\end{cases}$，

其中 D_1：$0<x+y\le\frac{\pi}{2}$，D_2：$\frac{\pi}{2}<x+y\le\pi$.

【详解】所给积分域 $D=D_1\cup D_2$，则

$$I=\iint\limits_D|\cos(x+y)|dxdy=\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)dxdy+\iint\limits_{D_2}-\cos(x+y)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy+\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}-\cos(x+y)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-1)dx=\pi-2.$$

【评注】“脱掉”被积函数中的根号，往往伴随被积函数的绝对值，这一点常被忽视；接下来就是如何“脱掉”绝对值符号，此时应考虑将积分区域 D 分为几个子区域，使被积函数在每个子区域内保持单一符号；最后分别解之.

【例３】改变下列累次积分的积分次序

(1) $\int_0^1 dy\int_{1-y}^{1+y^2}f(x,y)dx$　　　　(2) $\int_0^1 dx\int_{1+\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)+\int_1^{\sqrt{3}}dx\int_1^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$

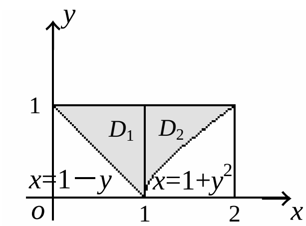
【提示】更换积分次序的解题步骤是：⑴由所给累次积分的上下限写出表示积分域 D 的不等式组；⑵依据不等式组画出积分域的草图；⑶结合草图写出表示积分域的另一个不等式组；⑷写出新的累次积分.

【详解】

⑴从外层积分限可知 $0\le y\le 1$，从内层积分限可知 $1-y\le x\le 1+y^2$，即积分区域由抛物线 $x=1+y^2$ 和直线 $x=1-y$、$y=0$、$y=1$ 围成，如图所示.

此时积分区域也可表示为 $D=D_1\cup D_2$：

D_1：$1-x\le y\le 1, 0\le x\le 1$、 D_2：$\sqrt{x-1}\le y\le 1, 1\le x\le 2$ ；



变换积分次序，有

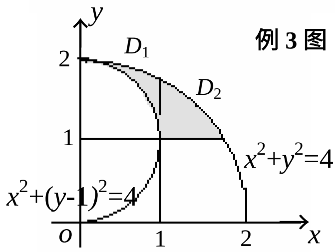
$$\int_0^1 dy\int_{1-y}^{1+y^2} f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_{\sqrt{x-1}}^1 f(x,y)dy .$$

⑵由第一个累次积分的积分限可知其积分域为

D_1：$1+\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}, 0\le x\le 1$ ；

由第二个累次积分的积分限可知其积分域为

D_2：$1\le y\le\sqrt{4-x^2}, 1\le x\le\sqrt{3}$.



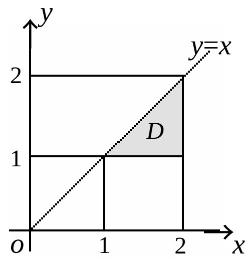
例 3 图

通过作图可知， $D_1\cup D_2=D$：$\sqrt{2y-y^2}\le x\le\sqrt{4-y^2}, 1\le y\le 2$，变换积分次序，有

$$\int_0^1 \boldsymbol{dx}\int_{1+\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \boldsymbol{f(x,y)}+\int_1^{\sqrt{3}}\boldsymbol{dx}\int_1^{\sqrt{4-x^2}} \boldsymbol{f(x,y)dy}=\int_1^2 \boldsymbol{dy}\int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \boldsymbol{f(x,y)dx} .$$

【评注】积分次序交换的同时，累次积分的个数可能由少变多，也可能由多变少，或不变，没有固定规律，这与积分区域的构成有关.

【例４】*已知 f(x)为连续函数，求证 $\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy=\int_a^b f(x)(b-x)dx$.



【提示】等式左端是一个二重积分的累次积分，右端是一个定积分（的平方）；若累次积分能积出一次，则可化为定积分．通过变换积分次序，累次积分可积出一次.

【详解】由所给累次积分可得积分域 D：$a\le y\le x$，$a\le x\le b$；其等价形式为：$y\le x\le b$，$a\le y\le b$；则通过变换积分次序，所给等式

左端$=\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy=\int_a^b dy\int_y^b f(y)dx=\int_a^b f(y)(b-y)dy=\int_a^b f(x)(b-x)dx=$右端.

【评注】上式右端用到了“ 积分与积分变量的记号无关 ”这一特性．这是一个联系累次积分与定积分的问题，“ 变换积分次序 ”是解决这类问题的常用方法之一.

【例５】计算：$\int_0^1 \frac{\boldsymbol{x^b-x^a}}{\ln \boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx}, (\boldsymbol{a}>0, \boldsymbol{b}>0)$.

【分析】这是一个定积分，但用定积分方法不易求解！实际上有等式 $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y dy$，这样定积分就转化为二重积分的一个累次积分；然后利用变换积分次序的方法再寻求解.

【详解】 $\because \int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1(\int_a^b x^y dy)dx=\int_a^b[\int_0^1 x^y dx]dy=\int_a^b[\frac{x^{y+1}}{y+1}]_0^1 dy=\int_a^b\frac{1}{y+1}dy$

$\therefore$原式$=\ln(y+1)\Big|_a^b=\ln(b+1)-\ln(a+1)$.

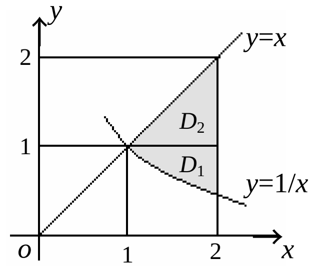
【评注】从步骤上看，这是例３的反问题，即如何从所给定积分的被积函数本身确定出一个积分，它与外层的定积分构成一个累次积分，然后用重积分的相关方法求解.

㈡二重积分的计算

【例６】计算二重积分 $I=\iint\limits_D\frac{x^2}{y^2}dxdy$，其中 D 由 $x=2$，$y=x$ 及双曲线 $xy=1$ 所为成.

【分析】此类型题无特点，直接将积分域化成 x－型或 y－型区域，然后以二次积分进行求解．

【详解】将积分域化成 x－型区域 D：$\frac{1}{x}\le y\le x, 1\le x\le 2$，则



$$I=\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=\int_1^2\left[-\frac{x^2}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}dx=\int_1^2(x^3-x)dx=\frac{9}{4}.$$

若将积分域化成 y－型区域 $D=D_1\cup D_2$，其中 D_1：$\frac{1}{y}\le x\le 2, \frac{1}{2}\le y\le 1$，$D_2$：$y\le x\le 2, 1\le y\le 2$；则

$$I=\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\iint_{D_1}\frac{x^2}{y^2}dxdy+\iint_{D_2}\frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}\frac{x^2}{y^2}dx+\int_1^2 dy\int_y^2\frac{x^2}{y^2}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{1}{3y^5}\right)dy+\int_1^2\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{y}{3}\right)dy=\frac{7}{12}+\frac{5}{6}=\frac{9}{4}.$$

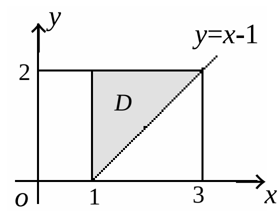
【评注】两个方法的区别在于积分域的型式选取上，这一点实质上就是积分次序不同而已，或哪个变量先积，哪个后积的问题．虽然都能出结果，但过程的繁简显而易见．

【例７】计算二重积分 $I=\iint_D \sin y^2 dxdy$，其中 D 由 $x=1$，$y=x-1$ 及 $y=2$ 所为成的区域．

【分析】仍直接将积分域化成 x－型或 y－型区域，然后以二次积分进行求解．

【详解】将积分域化成 x－型区域 D：$x-1\le y\le 2, 1\le x\le 3$，则

$$I=\iint_D \sin y^2 dxdy=\int_1^3 dx\int_{x-1}^{2}\sin y^2 dy\ ;$$



例 7 图

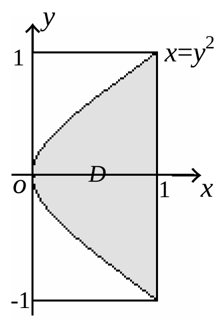
但积分 $\int \sin y^2 dy$ 积不出来（即原函数不能用初等函数表示），此法不通！

若将积分域化成 y－型区域 D：$1\le x\le 1+y, 0\le y\le 2$，则

$$I=\iint_D \sin y^2 dxdy=\int_0^2 dy\int_1^{1+y}\sin y^2 dx=\int_0^2 y\sin y^2 dy=\frac{1}{2}(1-\cos 4).$$

【评注】此二例可以看到，积分次序的选取十分重要，它不仅关系到计算量的问题（上例），也可能产生积不出来的尴尬．因此在选取积分域的型式时，要考虑被积函数和积分区域的特点，使得转换后的累次积分易求，计算量少．

【例８】计算二重积分 $I=\iint_D x\left[1+\sin y\cdot f\left(x^2+y^2\right)\right]dxdy$，其中，



例 8 图

D 是由 $x=y^2, x=1$ 围成的平面有界闭区域，f 是 D 上的连续函数．

【分析】事实上，$I=\iint_D xdxdy+\iint_D x\sin y\cdot f\left(x^2+y^2\right)dxdy$，虽然第二个积分中被积函数中含有 f（x^2+y^2），如果 I 的积分结果是一具体数值，则第二个积分必为零，即被积函数的奇偶性与积分区域的对称性要起作用．

【详解】由积分的线性，所给积分可化为

$$I=\iint_D xdxdy+\iint_D x\sin y\cdot f(x^2+y^2)dxdy\ ;$$

取积分域为 y－型区域，即 D：$y^2\le x\le 1$，　$-1\le y\le 1$；则

$$I=\int_{-1}^{1}dy\int_{y^2}^{1}xdx+\int_{-1}^{1}\sin ydy\int_{y^2}^{1}xf(x^2+y^2)dx=2\int_{0}^{1}dy\int_{y^2}^{1}xdx+0=\int_{0}^{1}(1-y^4)dy=\frac{4}{5}.$$

【评注】两个积分均用到了奇偶对称简化计算的方法．关于对称性可归纳如下：设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，记二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，那么

1.当 D 关于 y 轴对称时，

⑴若在 D 上，$f(-x,y)=-f(x,y)$，则 $I=0$；

⑵若在 D 上，$f(-x,y)=f(x,y)$，则 $I=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)d\sigma$，其中 D_1 是 D 中 $x\ge 0$ 的部分．

2.当 D 关于 x 轴对称时，

⑴若在 D 上，$f(x,-y)=-f(x,y)$，则 $I=0$；

⑵若在 D 上，$f(x,-y)=f(x,y)$，则 $I=2\iint\limits_{D_2}f(x,y)d\sigma$，其中 D_2 是 D 中 $y\ge 0$ 的部分．

3.当 D 关于原点对称时，

⑴若在 D 上，$f(-x,-y)=-f(x,y)$，则 $I=0$；

⑵若在 D 上，$f(-x,-y)=f(x,y)$，则 $I=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)d\sigma=2\iint\limits_{D_2}f(x,y)d\sigma$，$D_1$、$D_2$ 意义同上．

以上三种情况中⑴、⑵也分别统称为奇对称、偶对称．

4.当 D 关于直线 $y=x$ 对称时，

⑴ $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(y,x)d\sigma$；

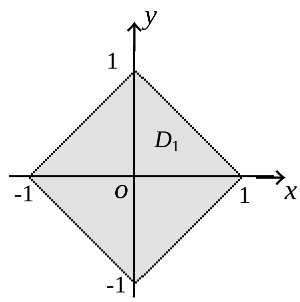
⑵若在 D 上，$f(x,y)=-f(y,x)$，则 $I=0$；

⑶若在 D 上，$f(x,y)=f(y,x)$，则 $I=2\iint\limits_{D_3}f(x,y)d\sigma$，$D_3$ 是 D 中 $y\ge x$ 的部分．

【例 9】计算二重积分 $I=\iint\limits_D(|x|+y)dxdy$，其中 D：$|x|+|y|\le 1$．

【分析】如图所示，积分域 D 关于 x 轴、y 轴及原点对称，而 $f_1(x,y)=|x|, f_2(x,y)=y$ 分别具有性质

$f_1(-x,-y)=f_1(-x,y)=f_1(x,-y)=f_1(x,y)$ 和 $f_2(x,-y)=-f_2(x,y)$．



例 9 图

【详解】$I=\iint\limits_D(|x|+y)dxdy=\iint\limits_D|x|dxdy+\iint\limits_D ydxdy=4\iint\limits_{D_1}xdxdy+0$

$$=4\int_0^1dx\int_0^{1-x}xdy=4\int_0^1(x-x^2)dx=\frac{2}{3}.$$

【评注】积分 $\iint\limits_D|x|dxdy$ 具有三个(偶)对称性，用两个即可；一般地，若 D 关于 x 轴、y 轴及原点对称，则 $\iint\limits_D f(y,x)d\sigma=4\iint\limits_{D_1}f(y,x)d\sigma$，其中 D_1 是 D 中第一象限部分．

而积分 $\iint\limits_D ydxdy$ 具有一个（奇）对称．

【例 10】计算二重积分 $I=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)dxdy$，其中积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le\pi\}$．

【分析】从被积函数与积分区域可以看出，应该利用极坐标进行计算．

【详解】作极坐标变换：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，有

$$I=e^{\pi}\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy=e^{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}re^{-r^2}\sin r^2dr\ ;$$

令$t=r^2$，则$I=\pi e^{\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}\sin tdt$．记$A=\int_0^{\pi}e^{-t}\sin tdt$，则$I=\pi e^{\pi}A$，且

$$A=-\int_0^{\pi}e^{-t}\sin tde^{-t}=-[e^{-t}\sin t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{-t}\cos tdt]$$

$$=-\int_0^{\pi}\cos tde^{-t}=-[e^{-t}\cos t\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^{-t}\sin tdt]=e^{-\pi}+1-A\ ;$$

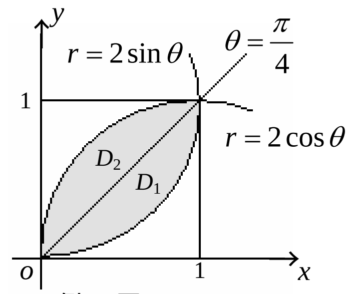
因此$A=\dfrac{1}{2}(1+e^{-\pi})$，所以$I=\dfrac{\pi e^{\pi}}{2}(1+e^{-\pi})=\dfrac{\pi}{2}(1+e^{\pi})$．

【评注】利用级坐标进行二重积分计算，其主要任务是简化被积函数或积分区域；其次，对有些问题若用直角坐标进行计算不仅是非常困难的，甚至是不可能的．本题还就换元积分与分步积分等多个基础知识点进行了应用．

【例 11】计算 $I=\iint_D xdxdy$，其中 D 是$(x-1)^2+y^2\le 1$与$x^2+(y-1)^2\le 1$的公共部分．

【分析】以下分别用直角坐标和极坐标来求解．

【详解】由已知，积分区域如图．



例 11 图

方法一：在直角坐标系下，D：$1-\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-(y-1)^2},0\le y\le 1$；

则
$$I=\iint_D xdxdy=\int_0^1\boldsymbol{dy}\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}}\boldsymbol{xdx}=\int_0^1(-1+\boldsymbol{y}+\sqrt{1-\boldsymbol{y}^2})\boldsymbol{dy}$$

$$=\left[-y+\frac{y^2}{2}+y\sqrt{1-y^2}+\arcsin y\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

方法二：在极坐标系下，$D=D_1\cup D_2$，D_1：$0\le r\le 2\sin\theta,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$；$D_2$：$0\le r\le 2\cos\theta,\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$；

则
$$I=\iint_D xdxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r\cos\theta\cdot rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cos\theta\cdot rdr$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta+\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta)d\theta=\frac{1}{6}+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

【评注】方法一中因被积函数只是 x，所以选 D 为 y－型区域，否则过程繁杂．方法二中区域 D 必须用直线 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 分割成两个区域，然后应用积分区域可加性进行求解．

【例 12】计算 $I=\int_0^a\int_0^a\dfrac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^3}}$，其中 a＞0是常数．

【分析】被积函数具有 $f(x,y)=f(x^2+y^2)$ 的形式，且 $f(x,y)=f(y,x)$；而积分区域关于直线 $y=x$ 对称．

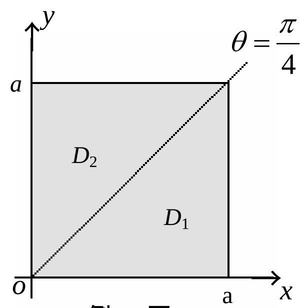
【详解】由对称性，只考虑矩形积分区域内 $y\ge x$ 的部分，此部分可表示为

$$D_1:\ 0\le r\le\frac{a}{\sin\theta},\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\ ;$$

从而　$$I=\int_0^a\int_0^a\frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^3}}=2\iint_{D_1}\frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^3}}$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{a}{\sin\theta}}\frac{rdr}{\sqrt{(r^2+a^2)^3}}=\frac{2}{a}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}})d\theta$$

$$=\frac{2}{a}(\theta-\arccos\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}})\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6a}.$$



例 12 图

【评注】此种类型题，一般首选极坐标方法求解；此题若不用对称性，则还需计算区域 D_2：$0\le r\le\frac{a}{\cos\theta}$，$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$；上的积分，显然计算量增加一倍.

㈢三重积分

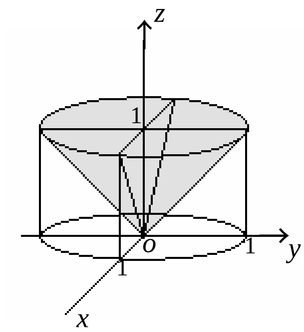
【例 13】对累次积分 $I=\int_{-1}^1dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1f(x,y,z)dz$ 按下列要求更换积分次序：

⑴先对 y，再对 z，最后对 x 积分；　⑵先对 x，再对 y，最后对 z 积分.

【分析】将三重积分的累次积分交换积分次序，仍沿用二重积分那里的方法.

【详解】由所给积分的上下限，可得所给积分的积分区域为

$$\Omega：\sqrt{x^2+y^2}\le z\le1,-\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2},-1\le x\le1；$$



例 13 图

这是一个由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 围成的区域，如图.

⑴此时积分区域Ω可写为

$$\Omega_1=\{(x,y,z)|-\sqrt{z^2-x^2}\le y\le\sqrt{z^2-x^2},(z,x)\in D_{zx}\},$$

$$D_{zx}=\{(z,x)|\,|x|\le z\le1,-1\le x\le1\}；$$

则　$$I=\iint_{D_{zx}}dzdx\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f(x,y,z)dy=\int_{-1}^0dx\int_{-x}^1dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f(x,y,z)dy+\int_0^1dx\int_x^1dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f(x,y,z)dy.$$

⑵此时积分区域Ω可写为

$$\Omega_2=\{(x,y,z)|-\sqrt{z^2-y^2}\le x\le\sqrt{z^2-y^2},(y,z)\in D_{yz}\}，D_{yz}=\{(y,z)|-z\le y\le z,0\le z\le1\}；$$

则　$$I=\iint_{D_{yz}}dzdx\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx=\int_0^1dz\int_{-z}^zdy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx.$$

【评注】此类型题作为将三重积分转化为三次积分的基本训练，其目的是充分理解积分区域的含义及其描述.

【例 14】计算三重积分 $\iiint_\Omega xydxdydz$，其中Ω是由 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体.

【分析】这是一个直接在直角坐标系下求解的三重积分，可用以下两种方法求解.

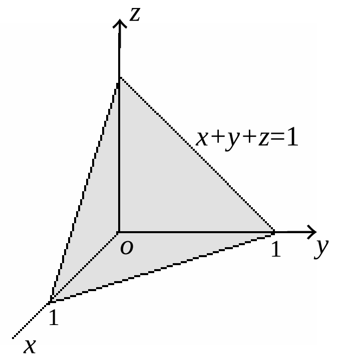
【详解】根据已知，作出积分区域Ω图形.

方法一：“先一后二”，将积分区域Ω表示为（D_{xy}—z 型）：

Ω：$0\le z\le1-x-y$；D_{xy}：$0\le y\le1-x$，$0\le x\le1$；

则 $$\iiint_{\Omega} xydxdydz=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_0^{1-x-y}xydz=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xydz$$

$$=\int_0^1dx\int_0^{1-x}xy(1-x-y)dy=\frac{1}{6}\int_0^1(x-3x^2+3x^3-x^4)dx=\frac{1}{120}.$$



例 14 图

方法二："先二后一"，将积分区域Ω表示为（z—D_z型）：

Ω： D_z：$0\le x\le 1-y-z$，$0\le y\le 1-z$；$0\le z\le 1$；

则 $$\iiint_{\Omega} xydxdydz=\int_0^1dz\iint_{D_z}xydxdy=\int_0^1dz\int_0^{1-z}dy\int_0^{1-y-z}xydx$$

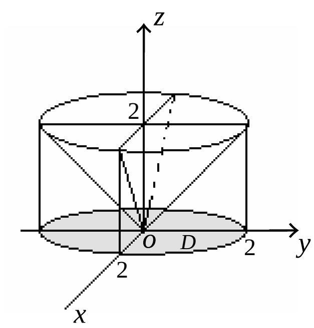
$$=\frac{1}{2}\int_0^1dz\int_0^{1-z}y(1-y-z)^2dy=\frac{1}{24}\int_0^1(1-z^2)dz=\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{5}==\frac{1}{120}.$$

【评注】"先一后二"也称"切条法"，"先二后一"也称"切片法"；各种称呼都有其解释背景，但均需正确理解，关键是选定方法后，应准确地写出各积分的上下限.

【例 15】计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(3x+5y+6z)dv$，其中Ω为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=2$ 所围成的立体.

【分析】此例用以下四种方法求解，从中进行比较.

【详解】根据已知，作出积分区域Ω图形.



例 15 图

方法一：用柱坐标，即作变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$；此时积分区域为

Ω：$r\le z\le 2$，$0\le r\le 2$，$0\le\theta\le 2\pi$；

$$\therefore\iiint_{\Omega}(3x+5y+6z)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2rdr\int_r^2(3r\cos\theta+5r\sin\theta+6z)dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2rdr\int_r^2 6zdz=2\pi\int_0^2 3r(4-r^2)dr=24\pi.$$

方法二：用直角坐标系下的"先二后一"，此时积分区域为

Ω＝$\{(x,y,z)|(x,y)\in D_z,\ 0\le z\le 2\}$；$D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\le z^2\}=\{(r,\theta)|0\le r\le z,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$；

$$\therefore\iiint_{\Omega}(3x+5y+6z)dv=\int_0^2dz\iint_{D_z}(3x+5y+6z)dxdy$$ （将 D_z 上的积分转换成极坐标）

$$=\int_0^2dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z(3r\cos\theta+5r\sin\theta+6z)rdr=\int_r^2dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 6zrdr=24\pi.$$

方法三：用直角坐标系下的"先一后二"，此时积分区域为

Ω＝$\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2,\ (x,y)\in D_{xy}\}$；

$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}=\{(r,\theta)|0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$；

$$\therefore\iiint_{\Omega}(3x+5y+6z)dv=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2(3x+5y+6z)dz$$ （将 D_{xy} 上的积分转换成极坐标）

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2rdr\int_r^2(3r\cos\theta+5r\sin\theta+6z)dz=24\pi.$$

方法四：用球坐标，即作变换 $x=r\sin\varphi\cos\theta$，$y=r\sin\varphi\sin\theta$，$z=r\cos\varphi$；此时积分区域为

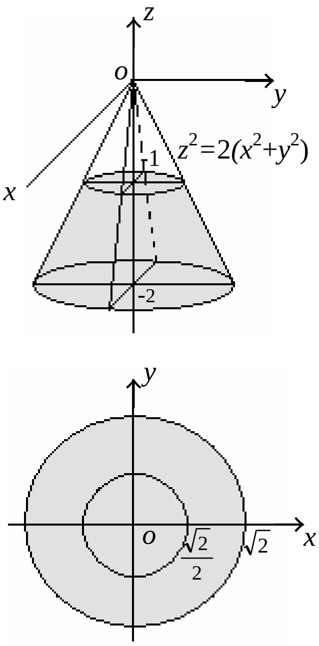
Ω：$0\le r\le\dfrac{2}{\cos\varphi}$，$0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$，$0\le\theta\le 2\pi$；

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega}(3x+5y+6z)dv = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}}(3r\sin\varphi\cos\theta+5r\sin\varphi\sin\theta+6r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\, dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}}6r^3\cos\varphi\sin\varphi\, dr = 24\pi\ .$$

【评注】前三个方法实质上是一回事，只不过是将 x、y 变换为 r、 θ的时间不一样．另外，四个方法均用到了 $\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta=\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta=0$ 这一关系，这是 “ 奇对称 ” 的反映．

【例 16】把三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv$ 分别化为柱面坐标、球面坐标系下的三次积分，其中Ω是由曲面 $z^2=2(x^2+y^2)$ 、$z=-1$ 与 $z=-2$ 所围成的空间区域．



例 16 图

【分析】积分区域Ω是一圆台，其上侧曲面由两部分组成，即中部是平面 $z=-1$、周围是锥面 $z^2=2(x^2+y^2)$ ，所以在柱坐标系下，须将Ω用 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 进行分割．而在球坐标系下则无需分割．

【详解】方法一：由已知，作出积分域的图形．在柱坐标系下，$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$，其中　Ω_1：$-2\le z\le -1$，$0\le r\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，$0\le\theta\le 2\pi$；

Ω_2：$-2\le z\le\sqrt{2}r$，$\frac{\sqrt{2}}{2}\le r\le\sqrt{2}$，$0\le\theta\le 2\pi$；

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv=(\iiint\limits_{\Omega_1}+\iiint\limits_{\Omega_2})f(x,y,z)dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}rdr\int_{-2}^{-1}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}rdr\int_{-2}^{\sqrt{2}r}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz\ ;$$

方法二：在柱坐标系下，又$\Omega=\Omega_1-\Omega_2$，其中

$\Omega_1: -2\le z\le -\sqrt{2}\,r,\ 0\le r\le\sqrt{2},\ 0\le\theta\le 2\pi$ ；$\Omega_2: -1\le z\le -\sqrt{2}\,r,\ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi$ ；

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv=(\iiint\limits_{\Omega_1}-\iiint\limits_{\Omega_2})f(x,y,z)dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{-2}^{-\sqrt{2}\,r}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1}rdr\int_{-1}^{-\sqrt{2}\,r}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$$

方法三：在球坐标系下，积分区域可表示为

$$\Omega：\frac{-1}{\cos\varphi}\le r\le\frac{-2}{\cos\varphi},\ \pi-arctg\frac{\sqrt{2}}{2}\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi\ ;$$

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\pi-arctg\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\pi}d\varphi\int_{\frac{-1}{\cos\varphi}}^{\frac{-2}{\cos\varphi}}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\, dr\ .$$

【评注】在球面坐标系下，因Ω位于 xOy 坐标面下方，所以φ是在$\pi-arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$ 与π之间，而不是在 0 与 $arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$ 之间．

【例 17】计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^n}}dxdydz$ ，其中 n 为正整数，积分域Ω由 $1\le x^2+y^2+z^2\le 4$ 确定．

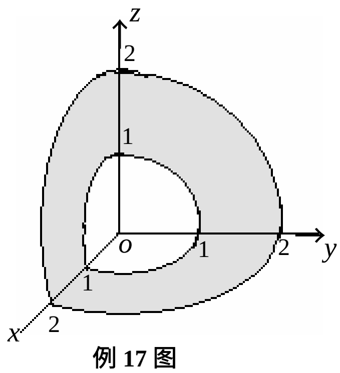
【分析】因积分区域Ω是由两个球面构成（而此时因坐标原点（0,0,0）不在Ω中，可避开被积函数不存在的问题），所以取球坐标进行计算．但在计算过程中，时刻注意 n 的取值问题．

【详解】积分区域Ω如图．在球坐标系下，积分区域可表为

Ω：$1\le r\le 2$，$0\le \varphi\le\pi$，$0\le\theta\le 2\pi$；

$$\therefore I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^n}}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_1^2\frac{1}{r^n}\cdot r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_1^2 r^{2-n}\,dr=\frac{4\pi}{3-n}(2^{3-n}-1)\text{；}$$



例 17 图

显然，上述结果中，$n\neq 3$；但依题意，n 有取 3 的可能！所以当 $n=3$ 时，仍需计算 I；即 $n=3$ 时，有

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_1^2\frac{1}{r^3}\cdot r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_1^2\frac{1}{r}\,dr=4\pi\int_1^2 r^{-1}dr=4\pi\cdot\ln 2\,.$$

故
$$I=\begin{cases}\dfrac{4\pi}{3-n}(2^{3-n}-1), & n\neq 3\\ 4\pi\cdot\ln 2, & n=3\end{cases}\text{，（}n\text{ 为正整数）．}$$

【评注】虽然本例避开了被积函数不存在的问题，但有些题是避免不了的，解决的办法就是反常(广义)重积分的计算方法．此例中的 n 正象俗话说的是一个“ 陷阱 ”，解题时，各种情况若考虑的不周全，往往落入其中，需时刻警惕．

【例 18】设函数 $f(x)$连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma}\text{，}\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-1}^{t}f(x^2)dx}\text{，}$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\le t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le t^2\}$；

(1)讨论 $F(t)$在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性；

(2)证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$．

【分析】(1)先分别在球面坐标下计算分子的三重积分和在极坐标下计算分母的重积分，再根据导函数 $F'(t)$ 的符号确定单调性；(2)将待证的不等式作适当的恒等变形后，构造辅助函数，再用单调性进行证明即可．

【详解】(1)因为

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r^2)rdr}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2dr}{\int_0^t f(r^2)rdr}\text{，}\qquad F'(t)=2\frac{tf(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)dr}{[\int_0^t f(r^2)rdr]^2}\text{，}$$

所以在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(t)>0$，故 $F(t)$在 $(0,+\infty)$ 内单调增加．

(2) 因为 $G(t)=\dfrac{\pi\int_0^t f(r^2)rdr}{\int_0^t f(r^2)dr}$，要证明 $t>0$ 时 $F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$，只需证明 $t>0$ 时，$F(t)-\dfrac{2}{\pi}G(t)>0$，

即 $$\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-[\int_0^t f(r^2)rdr]^2>0$$

令 $g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-[\int_0^t f(r^2)rdr]^2$，

则 $g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2dr>0$，故 $g(t)$在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

因为 $g(t)$在 $t=0$ 处连续，所以当 $t>0$ 时，有 $g(t)>g(0)$；

又 $g(0)=0$，故当 $t>0$ 时，$g(t)>0$，因此，当 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$．证毕.

【评注】本题将定积分、二重积分和三重积分等多个知识点结合起来了，但难点是证明(2)中的不等式；事实上，这里也可用柯西积分不等式

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx,$$

证明，在上式中取 $f(x)$为 $\sqrt{f(r^2)r}$，$g(x)$为 $\sqrt{f(r^2)}$ 即可.

【例 19】已知 f(x)为连续函数，求证：$2\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy=\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2$，(a>0)

【详解】由所给累次积分可得积分域 D：$x\le y\le a$，$0\le x\le a$；其等价形式为：$0\le x\le y$，$0\le y\le a$；则通过变换积分次序，所给等式化为

$$2\int_0^a f(y)dy\int_0^y f(x)dx=\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2;$$

将二式相加，有 $$\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy+\int_0^a f(y)dy\int_0^y f(x)dx=\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2.$$

往证该等式成立．对于左端第二个累次积分，根据“积分与积分变量的记号无关”这一特性，并将其变量位置互换，有

$$左端=\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy+\int_0^a f(x)dx\int_0^x f(y)dy=\int_0^a f(x)dx\left[\int_x^a f(y)dy+\int_0^x f(y)dy\right]$$

$$=\int_0^a f(x)dx\left[\int_0^a f(x)dx\right]=\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2=右端.$$

【例 20】求解下列各积分

(1) $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

【解】 设 $D_1=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le x\}$，$D_2=\{(x,y)|0\le x\le 1,x\le y\le 1\}$，则

$$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy=\iint\limits_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy+\iint\limits_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$$

$$=\iint_{D_1} e^{x^2}\,dxdy+\iint_{D_2} e^{y^2}\,dxdy=\int_0^1 e^{x^2}dx\cdot\int_0^x dy+\int_0^1 e^{y^2}dy\cdot\int_0^y dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx+\int_0^1 ye^{y^2}dx=e-1$$

(2) $\iiint\limits_\Omega (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})dv$,其中$\Omega$为区域$x^2+y^2+z^2\le 1$.

【解】由区域Ω的特点丆显然 $\iiint\limits_\Omega x^2dv=\iiint\limits_\Omega y^2dv=\iiint\limits_\Omega z^2dv=\frac{1}{3}\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)dv$

$$\therefore\ \iiint\limits_\Omega (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})dv=\frac{1}{3}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)dv$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^\pi d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\cdot dr$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{5}\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi=\frac{4\pi}{15}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\ .$$

(3) $I=\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$,其中$D: x^2+y^2-2ay\le 0(a>0)$.

【解】　由积分区域的对称性,及被积函数关于x是奇函数，有

$$I=\iint\limits_D y\,dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\cdot\int_0^{2a\sin\theta}r^2\sin\theta\cdot dr=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{2a\sin\theta}d\theta$$

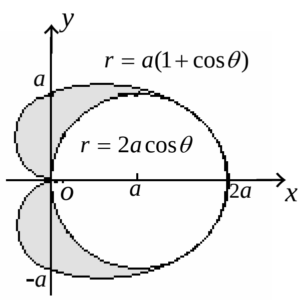
$$=\frac{16a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta=a^3\,\frac{16}{3}\,I_4=a^3\,\frac{16}{3}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\pi a^3\ .$$

㈣重积分的应用

【例 21】用二重积分求在极坐标系下 $r\le a(1+\cos\theta)$与 $r\ge 2a\cos\theta$ 所确定的平面图形的面积.

【分析】曲线 $r=a(1+\cos\theta)$称为心形线，$r=2a\cos\theta$ 是一个圆，二者围成一个类似环形区域．此时极点在边界上，所以选取变化范围要慎重，积分上下限要准确.

【详解】记σ_1为区域 $r\le a(1+\cos\theta)$的面积，σ_2为区域 $r\ge 2a\cos\theta$ 的面积，则所求平面图形的面积 $\sigma=\sigma_1-\sigma_2$，即



例 21 图

$$\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}rdr-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}rdr$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta-2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}(\theta+2\sin\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta)\Big|_0^{2\pi}-a^2(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2}{2}\cdot 3\pi-a^2\pi=\frac{\pi a^2}{2}\ .$$

另解：由所给平面图形的对称性，x 轴上方的面积为$\frac{\sigma}{2}$，此时积分区域被 y 轴分成左右两部分，则所

求面积　　$\sigma = 2[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a\cos\theta}^{a(1+\cos\theta)} rdr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} rdr]$

$$= a^2[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos\theta - 3\cos^3\theta)d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta]$$

$$= a^2[\theta + 2\sin\theta - \frac{3}{2}\theta - \frac{3}{4}\sin 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}] = \frac{1}{2}\pi a^2 .$$

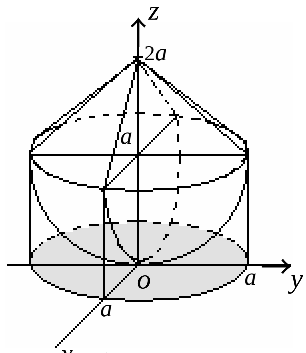
【评注】方法一的思路比较直观；方法二若按积分 $\int_0^{2\pi} d\theta \int_{2a\cos\theta}^{a(1+\cos\theta)} rdr$ 计算 σ，则得出错误的结果 $-\frac{1}{2}\pi a^2$．此处需注意的是 y 轴左右两个区域内，极径 r 的变化范围不是一致的．

【例 22】设Ω为曲面 $x^2+y^2=az$ 与 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ （a＞0）所围成的空间封闭区域，求：

⑴区域Ω的体积 V；

⑵区域Ω的表面积 S．

【分析】曲面 $x^2+y^2=az$ 为一锥面，$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ （a＞0）为一半球面，二者的交线正好为Ω在 xOy 面上的投影区域的边界．



例 22 图

【详解】空间区域Ω如图，曲线交线：

$$\begin{cases} x^2+y^2=ax, \\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2}, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=a, \end{cases}$$

Ω在 xOy 面上的投影 D：$x^2+y^2\le a^2$，$z=0$，因此

$$V=\iint_D [2a-\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{a}(x^2+y^2)]d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (2a - r - \frac{1}{a}r^2)rdr$$

$$= 2\pi(ar^2 - \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4a}r^4)\Big|_0^a = \frac{5}{6}\pi a^3 ;$$

$S=S_1+S_2$，其中 S_1 为下半球面表面积，S_2 为上半锥面表面积，即

$$S_1=\iint_D \sqrt{1+(\frac{2x}{a})^2+(\frac{2y}{a})^2}\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1+\frac{4}{a^2}r^2}\,rdr = \frac{1}{6}\pi a^2(5\sqrt{5}-1),$$

$$S_2=\iint_D \sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}\,d\sigma = \sqrt{2}\iint_D d\sigma = \sqrt{2}\pi a^2 ;$$

$$\therefore S=S_1+S_2=\pi a^2[\sqrt{2}+\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)].$$

【评注】本题虽然有二者的交线正好为Ω在 xOy 面上的投影区域的边界，但一般情况不一定这样，请引起注意．S_1 与 S_2 也可由旋转体侧面积公式求得．

【例 23】设球体 $x^2+y^2+z^2\le 2az$ 内各点的体密度与原点到该点的距离成反比，求此球体的质量和重心．

【分析】设球体中任一点的坐标为（x,y,z），则它到原点的距离为 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；依题意，其体密度为 $f(x,y,z)=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 k 为比例常数．既然是球体，计算用球坐标．

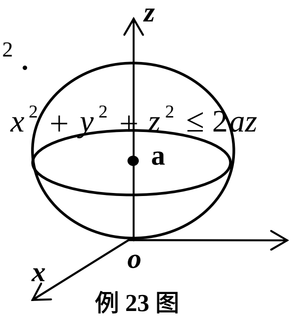
【详解】此时积分区域Ω就是球体本身，即

$$\Omega：x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2 \qquad 或\Omega：0\le r\le 2a\cos\varphi，0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}，0\le\theta\le 2\pi；$$

因此所求质量为

$$M=\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint_\Omega \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\frac{k}{r}r^2\sin\varphi\, dr=4k\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi=\frac{4}{3}k\pi a^2.$$



例 23 图

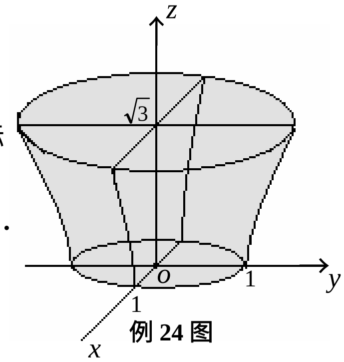
再由质心（重心）计算公式，有

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega \frac{xk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dv=0；$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega \frac{yk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dv=0；（由奇偶对称性）$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega \frac{zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dv=\frac{k}{M}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\cos\varphi\sin\varphi\, dr=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos^4\varphi)\sin\varphi\, d\varphi=\frac{4}{5}a，$$

即所求质心坐标为 $(0,0,\frac{4}{5}a)$．



例 24 图

【评注】由于Ω关于 z 轴对称，所以质心必位于 z 轴上，因此只计算 z 坐标即可．否则，若不按奇偶对称性计算 x、y 坐标，则根据循环对称性，当计算出 x=0 时，必有 y=0．另此类问题常常需要自己建立坐标系，也是解决问题的关键．

【例 24】设立体Ω由曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 及平面 z=0，$z=\sqrt{3}$ 围成，密度 ρ=1，求它对 z 轴的转动惯量．

【分析】曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 是以 z 为轴的旋转单叶双曲面，由已知Ω是一个类似于圆台的几何体．

【详解】Ω上垂直于 z 轴的截面为

$$D(z)=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1+z^2\}，0\le z\le\sqrt{3}；$$

因此Ω对 z 轴的转动惯量为

$$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho\, dxdydz=\int_0^{\sqrt{3}}dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{1+z^2}}r^3dr=\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{3}}(1+z^2)^2dz=\frac{12}{5}\sqrt{3}\pi.$$

【评注】因 $D(z)$在 xOy 面上的投影是一个圆，所以用柱面坐标计算．

【例 25】密度均匀（μ=1）的圆板，其半径为 R，在过板的中心且垂直于板的直线上，离板的中心距离为 a 处，有一单位质量点 A，求圆板对质点的引力．

【分析】建立坐标系，使圆板正好位于区域 $D：x^2+y^2\le R^2$ 中，此时质点位于 z 轴 a 处（a>0）．由对称性，引力只在 z 轴方向上存在．

【详解】由对称性及分布均匀性，f_x 与 f_y 均为零，而

$$f_z = -ak\iint_D \frac{\mu\, d\sigma}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^3}} = -ak\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{1}{(\sqrt{r^2+a^2})^3} rdr$$

$$= -ak\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}(-2)(r^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = -2\pi ak\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}\right).$$

因此所求引力为 $\vec{F}=(0,0,-2\pi\, a\, k(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}))$.

【评注】因 $\frac{1}{a} > \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}$，所以是负的，这表示引力的方向与 z 轴正向相反，即向着圆板．此题也可用定积分求解．

【例 26】设有一半径为 R 的球形物体，其内任意一点 P 处的体密度 $\rho=\frac{1}{|PP_0|}$,

其中 P_0 到球心的距离 r_0 大于 R, 求该物体的质量 .

【解】建立坐标系，使得球心与圆点重合，设点 P_0 位于 z 轴正项，$P(x,y,z)$ 是球内一点,则有

$$\rho=\frac{1}{|PP_0|}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-r_0)^2}},$$

$$m=\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-r_0)^2}} dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \int_0^{\pi} \frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{r^2-2r_0 r\cos\varphi+r_0^2}} d\varphi$$

$$= 2\pi\int_0^R \frac{r}{r_0}\sqrt{r^2-2r_0 r\cos\varphi+r_0^2}\,\Big|_0^{\pi} dr = \frac{2\pi}{r_0}\frac{r}{r_0}\int_0^R r(\sqrt{r^2+2r_0 r+r_0^2}-\sqrt{r^2-2r_0 r+r_0^2})\, dr$$

$$= \frac{2\pi}{r_0}\int_0^R r\left[(r+r_0)-|r-r_0|\right] dr = \frac{2\pi}{r_0}\int_0^R 2r^2\, dr = \frac{4\pi R^3}{3r_0}.$$

【例 27】设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球表面上一个定点,球体上任一点的密度与该点到 P_0 的距离的平方成正比 ($k>0$ 为比例系数), 求球体的重心位置 .

【解】建立适当的坐标系，设 P_0 为坐标系的原点 O, 且球体的直径在 z 轴上 .

由对称性，知 $\bar{x}=\bar{y}=0$，由于

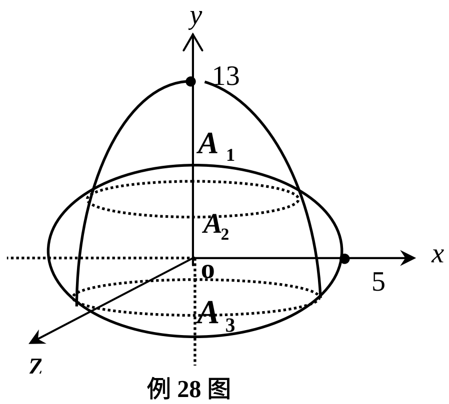
$$m=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\, dV = \iiint_\Omega k(x^2+y^2+z^2)\, dV = k\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R r^4 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\, d\varphi = \frac{2k\pi R^5}{5}$$

$$\bar{z}=\frac{1}{m}\iiint_\Omega z\,\rho(x,y,z)\, dV = \frac{1}{m}\iiint_\Omega z\, k\,(x^2+y^2+z^2)\, dV = \frac{k}{m}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R r^5 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \frac{k\pi R^6}{6m} = \frac{5R}{12}.$$

$\therefore$　重心为 $(0,0,\frac{2k\pi R^5}{5})$

【例 28】曲面$z=13-x^2-y^2$将球面$x^2+y^2+z^2=25$分成三部分,求这三部分曲面面积之比.

【解】 联立二曲面方程 $\Rightarrow z=4,-3.$



例 28 图

$$A_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le 9}\frac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}}dxdy\quad=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3\frac{5r}{\sqrt{25-r^2}}dr=10\pi$$

$$A_3=\iint\limits_{x^2+y^2\le 16}\frac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\frac{5r}{\sqrt{25-r^2}}dr=20\pi$$

又$A_2=25\pi-A_1-A_3=70\pi$，故三曲面之面积比为：

$$A_1:A_2:A_3=1:7:2.$$

【例 29】设物体由一圆锥以及与 这一圆锥共底的半球拼 成,而锥的高等于其底半径R,

求此物体对对称轴的转动惯量(设体密度$\mu=1$)．

【解】 选取坐标系,使得原点o在球心,半球面与锥面的方程分别为

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\quad 与\quad z=\sqrt{x^2+y^2}-R,$$

且对称轴为z轴, 于是半球对z轴的转动惯量(采用球面坐标)为：

$$I_1=\iiint\limits_{\Omega_1}(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R\rho^2\sin^2\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho=2\pi\cdot I_3\cdot\frac{R^5}{5}=\frac{4\pi R^5}{15}\ ;$$

又锥体对z轴的转动惯量 (采用柱面坐标)为：

$$I_2=\iiint\limits_{\Omega_2}(x^2+y^2)dxdydz\ =\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho^2\rho\,d\rho\int_{\rho-R}^0dz=2\pi\int_0^R\rho^3(R-\rho)\,d\rho=\frac{\pi R^5}{10}\ ;$$

$\therefore$ 转动惯量为 $I_Z=I_1+I_2=\dfrac{4\pi R^5}{15}+\dfrac{\pi R^5}{10}=\dfrac{11\pi R^5}{30}$.

四、练习题

1、是非题（对者划√，否则划×）

⑴已知函数 $f(x,y)$在[a,b]上连续，则 $f(x,y)$在[a,b]上可积；反之亦然……..……..……(　　)

⑵二重积分就是二次积分，既重积分也称累次积分，这种说法对吗？……………..(　　)

⑶当二次积分的上下限均为常数时，该二次积分可看作是两个定积分的乘积……..(　　)

⑷当积分区域为 x-型区域时，是先对 y 进行积分，后对 x 进行积分………………..(　　)

⑸从几何上看，二重积分就是曲顶柱体的体积……………………………………...…..(　　)

2、填空题

⑴当 $f(x,y)\ge 0$ 时，二重积分的中值定理的几何解释是：______________________________.

⑵二重积分的符号$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$中的$d\sigma$称为面积元素，它依赖于______________________.

⑶二重积分的几何意义是曲顶柱体的体积，而平面图形的面积也可由二重积分来计算，这是因为____.

⑷极坐标经常在______________和______________的情况下用来计算二重积分；这些积分的求解往往在直角坐标系下______________或______________.

⑸根据自己的理解，叙述柱坐标与极坐标、球坐标与极坐标的关系：__________________.

3、选择题

⑴二重积分定义式 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 中的λ，代表的是

(A)小区间的长度　(B)小区域的面积　(C)小区域的半径　(D)以上结果都不对

⑵已知 $F(x,y)=f(x)f(y)$，且 $f(t)$在$[a,b]$上连续，$a<b$，则二次积分 $\int_a^b dx\int_a^b F(x,y)dy=$

(A) $2\int_a^b f(x)dx$　(B) $2\int_a^b f(y)dy$　(C) $2\int_a^b f(t)dt$　(D) $\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2$

⑶已知 D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=4\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$ 成立的条件是

(A)区域 D 关于原点对称，且 $f(-x,-y)=f(x,y)$，$(x,y)\in D$；

(B)区域 D 关于 x 轴、y 轴对称，且 $f(-x,-y)=f(x,y)$，$(x,y)\in D$；

(C)区域 D 关于原点对称，且 $f(x,-y)=f(x,y)$，$f(-x,y)=f(x,y)$，$(x,y)\in D$；

(D)区域 D 关于 x 轴、y 轴对称，且 $f(x,-y)=f(x,y)$，$f(-x,y)=f(x,y)$，$(x,y)\in D$；

⑷设区域 D：$x^2+y^2\le 1$，f 是 D 上的连续函数，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$

(A) $2\pi\int_0^1 f(r^2)dr$　(B) $2\pi\int_0^1 rf(r)dr$　(C) $4\pi\int_0^1 rf(r)dr$　(D) $4\pi\int_0^1 f(r)dr$

⑸设 D 是 xOy 平面上以(1,1)，(-1,1)，(-1,-1)为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)dxdy=$

(A)$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,dxdy$　(B)$2\iint\limits_{D_1}xy\,dxdy$　(C)$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$　(D) 0

4、估计下列积分的值

⑴估计积分 $I=\iint\limits_{|x|+|y|\le 10}\dfrac{dxdx}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$ 的值；

⑵给出二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,d\sigma$ 的符号；

⑶给出二重积分 $\iint\limits_D\arcsin(x+y)dxdy$ 的符号，其中 D：$0\le x\le 1$，$-1\le y\le 1-x$；

5、比较下列各组二重积分的大小

⑴ $\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma$ 与 $\iint\limits_D(x+y)^3d\sigma$，其中 D：$(x-2)^2+(y-1)^2\le 1$；

⑵ $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)d\sigma$ 与 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,d\sigma$；

⑶ $I_1=\iint\limits_D[\ln(x+y)]^3d\sigma$、$I_2=\iint\limits_D(x+y)^3d\sigma$ 与 $I_3=\iint\limits_D[\sin(x+y)]^3d\sigma$，其中 D：$x=0$，$y=0$，$x+y=1$，$x+y=\frac{1}{4}$．

6、变量替换

⑴将 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{1-x}^{x}f(x,y)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}dx\int_0^x f(x,y)dy$ 化为极坐标系下的累次积分；

(2)将 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr$ 化为直角坐标系下的累次积分；

(3)将 $2\pi\int_1^2 f(r)rdr$ 化为直角坐标形式的累次积分；

7、更换积分次序

(1) $\int_{-2}^{0} dy \int_0^{y+2} f(x,y)dx + \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$ ；

(2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$ ；

(3) $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy$

(4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} rdr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{r}{2}} F(r,\theta)d\theta$

8、计算下列二重积分和二次积分

(1) $\iint\limits_D \sin y\cos(x^2+y^2)dxdy$，$D$：$x^2+y^2\le 1$；

(2) $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$，$D$：$x^2+y^2\le 1$ 且 $x+y\ge 1$；

(3) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$，$D$：$x^2+y^2\le a^2$（0＜$a\le 1$）；

(4) $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy$，$D$：$|x|\le 1$（0$\le y\le 2$）；

(5) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2=Rx$ 所围成.

(6) $\iint\limits_D yd\sigma$，其中 D 是由曲线 r=2(1+cos θ)的上半部分与极轴所围成的区域.

(7) $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}dy$.

9、综合计算下列各题

(1)求 $\iint\limits_D x\left[1+xf(x^2+y^2)\right]dxdy$，其中 D 是由 $y=x^3$，$y=1$，$x=-1$ 所围成区域，$f(u)$为连续函数；

(2)求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$，其中 $f(x)$在[0,1]上连续且 $\int_0^1 f(x)dx=A$.

(3)求 $\lim\limits_{a\to 0}\frac{1}{\pi a^2}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 $f(x,y)$是有界闭区域 D：$x^2+y^2\le a^2$ 上的连续函数.

10、证明下列各题

(1)证明不等式 $1\le\iint\limits_D(\sin y^2+\cos x^2)\,dxdy\le\sqrt{2}$，其中 D 为区域：0$\le x\le 1$，0$\le y\le 1$；

(2)设 $p(x)$为$[a,b]$上的非负连续函数，$f(x)$、$g(x)$为$[a,b]$上的单调连续函数，并且单调性相同．证明

$\left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)dx\right) \le \left(\int_a^b p(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx\right)$.

⑶已知 $f(x)$在$[0,a]$上连续，证明 $2\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy = \left[\int_0^a f(x)dx\right]^2$.

⑷证明 $\iint\limits_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}dxdy = \frac{1}{2}\pi R^2(a+b)$，其中 D 为圆域 $x^2+y^2\le R^2$，$\varphi(x)$ 为正值连续函数.

⑸若 $f(x)$在$[a,b]$上连续且恒大于零，试证：$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge (b-a)^2$.

11、三重积分

⑴将三重积分 $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$ 化成累次积分，其中 V 是：

①由曲面 z=xy，x+y=1，z=0 所围成的区域；

②由曲面 x=$\sqrt{y-z^2}$，x=$\frac{1}{2}\sqrt{y}$，以及 y=1 所围成的区域；

⑵将三重积分 $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$ 化成球坐标下的三次积分，其中 V：$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le$，$0\le y\le 1$；0≤x≤y $\le\sqrt{3}x$，$f(x,y,z)$连续.

⑶将三重积分 $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz$ 化成柱坐标下的三次积分.

⑷计算下列三重积分的值

① $\iiint\limits_V y\cos(x+z)dv$，其中 V 是由 $y=\sqrt{x}$，$z=0$，$y=0$ 及 $x+z=\frac{\pi}{2}$ 所围成的区域.

② $\iiint\limits_V \frac{xz}{(1+y)^2}dxdydz$，其中 V 由 $x=0$，$z=0$，$z=1-y^2$ 和 $y=x^2$ 所围成的区域.

③ $\iiint\limits_V (x^2+my^2+nz^2)dxdydz$，其中 V：$x^2+y^2+z^2\le a^2$，m、n 为常数.

④ $\iiint\limits_V \frac{z\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2}dxdydz$，其中 V：$x^2+y^2+z^2\le 1$.

⑤ $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$，其中 V：$x^2+y^2+z^2\le x$.

⑸计算 I=$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dz\int_0^{1-x-z}(1-y)e^{-(1-y-z)^2}dy$.

⑹设 $f(x)$在区间$[0,+\infty)$ 上连续，且 $F(t)=\iiint\limits_{V_t}\left[z^2+f(x^2+y^2)\right]dxdydz$，其中 V_t：$0\le t\le h$，$x^2+y^2\le t^2$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^2}$.

⑺设 $f(x)$在$[-1,1]$上连续，证明 $\iiint\limits_V f(x)\,dxdydz = \pi\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)dx$，其中 V：$x^2+y^2+z^2\le 1$.

12、重积分的应用

⑴计算下列给定曲面的面积

①求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下部分的曲面面积 A.

②三个圆柱面 $x^2+y^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$，$z^2+x^2=a^2$ 所围立体的表面面积.

⑵曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 将球体 $x^2+y^2+z^2\le 4az$ 分成两部分，求这两部分的体积比.

⑶求位于两圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 和 $x^2+(y-1)^2=1$ 之间的均匀薄片的质心.

⑷求一均匀球体对球体外一单位质点的引力.

⑸证明：由 $x=a$，$x=b$，$y=f(x)$以及 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的立体对 x 轴的转动惯量（密度为 μ =1）为 $I_x=\frac{\pi}{2}\int_a^b f^4(x)dx$， 其中 $f(x)$为连续的正值函数.

练习题答案

1、是非题

⑴× ⑵× ⑶× ⑷√ ⑸×

2、填空题

⑴至少存在一个以 D 为底的平顶柱体，其体积与曲顶柱体的体积相等

⑵区域 D 的分割.

⑶体积值与面积值相等；D 的面积就是被积函数等于 1 、积分区域为 D 的二重积分.

⑷常在积分区域 D 是圆或圆的一部分和被积函数具有 $f(x^2+y^2)$ 的形式；不易求解或解不出时.

⑸略

3、选择题

⑴D ⑵D ⑶A ⑷B ⑸A

4、估计下列积分的值

⑴$1.96<I<2$. ⑵负的. ⑶正的.

5、比较下列各组二重积分的大小

⑴$\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma<\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$. ⑵$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)d\sigma\ge\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}d\sigma$. ⑶$I_1<I_3<I_2$.

6、变量替换

⑴$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{+\infty}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$. ⑵$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^0 f(x,y)dx$.

⑶$\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 f(r)rdr=\int_{-2}^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(\sqrt{x^2+y^2})dy-\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(\sqrt{x^2+y^2})dy$.

7、更换积分次序

⑴$\int_0^2 dx\int_{x-2}^{1-x^2}f(x,y)dy$. ⑵$\int_0^{\pi}dx\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x}f(x,y)dy$.

⑶$\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)dx+\int_a^{2a}dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)dx$. ⑷$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\theta}^{\pi}F(r,\theta)dr$

8、计算下列二重积分和二次积分

⑴0； ⑵$2-\frac{\pi}{2}$； ⑶$\pi(\arcsin a^2+\sqrt{1-a^4}-1)$； ⑷$\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}$；

⑸$\frac{R^2}{9}(3\pi-4)$；　　⑹$\frac{32}{3}$；　　⑺须改变积分次序，$1-\sin1$；

9、综合计算下列各题

⑴$\frac{2}{5}$；　　⑵交换积分次序或用原函数的方法，$\frac{A^2}{2}$；　　⑶$f(0,0)$

10、证明下列各题

⑴【提示】D 关于 $y=x$ 对称，并注意当 $(x,y)\in D$ 时，有 $\frac{1}{\sqrt{2}}\le\sin(x^2+\frac{\pi}{4})\le1$.

⑵【提示】令 $I=(\int_a^b p(x)dx)(\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx)-(\int_a^b p(x)f(x)dx)(\int_a^b p(x)g(x)dx)$，往证

$2I=\iint\limits_D p(x)p(y)[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]dxdy$；然后由已知即可得证.（$D$ 为一矩形区域）

⑶【提示】将二次积分转化为二重积分，并将其积分区域用 $y=x$ 分割，然后由对称性即得.

⑷【提示】由对称性，往证 $\iint\limits_D\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)+\varphi(y)}dxdy=\frac{1}{2}\pi R^2$.

⑸【提示】将两个定积分乘积看作是矩形域上的重积分；并由 $\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\ge2\sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}\cdot\frac{f(y)}{f(x)}}=2$ 可得所证.

11、三重积分

⑴ ①$I=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{xy}f(x,y,z)dz$，$I=\int_0^1dy\int_0^{1-y}dx\int_0^{xy}f(x,y,z)dz$；

$I=\int_0^1dx\int_0^{(1-x)x}dz\int_{\frac{z}{x}}^{1-x}f(x,y,z)dy$，$I=\int_0^1dy\int_0^{(1-y)y}dz\int_{\frac{z}{y}}^{1-y}f(x,y,z)dx$；

$I=\int_0^{\frac14}dz\int_{\frac12-\sqrt{\frac14-z}}^{\frac12+\sqrt{\frac14-z}}dx\int_{\frac{z}{x}}^{1-x}f(x,y,z)dy$，$I=\int_0^{\frac14}dz\int_{\frac12-\sqrt{\frac14-z}}^{\frac12+\sqrt{\frac14-z}}dy\int_{\frac{z}{y}}^{1-y}f(x,y,z)dx$；

②$I=\int_0^1dy\int_{\frac12\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dx\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}}f(x,y,z)dz$，

$I=\int_{-1}^1dz\int_{z^2}^1dy\int_{\frac12\sqrt{y}}^{\sqrt{y-z^2}}f(x,y,z)dx$，

$I=\int_0^{\frac12}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dz\int_{x^2+y^2}^{2x^2}f(x,y,z)dy+\int_{\frac12}^1dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dz\int_{x^2+y^2}^1f(x,y,z)dy$（其他三个积分读者自行补出）

⑵$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr$.

⑶$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r rdr\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1+\sqrt{1-r^2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$.

⑷计算下列三重积分的值

①$\frac{\pi}{16}-\frac12$　　②$\frac{1}{48}$　　③$\frac{4\pi}{15}(1+m+n)a^5$　　④0　　⑤$\frac{\pi}{10}$

⑸I= $\frac{1}{4e}$

⑹ $\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^2}=\frac{\pi}{3}h^3+\pi hf(0)$.

⑺略

12、重积分的应用

⑴　①$A=\sqrt{2}\pi$　　②$A=24(2-\sqrt{2})a^2$

⑵$V_1=\frac{37}{6}\pi a^3$，$V_2=\frac{27}{6}\pi a^3$，V_1∶V_2=37∶27

⑶$\bar{x}=0,\bar{y}=\frac{7}{3}$，假设密度 μ =1

⑷$\vec{F}_x=\overrightarrow{F_y}=0,\overrightarrow{F_z}=-\frac{4\pi a^3}{3R^2}k\mu$

⑸略

五、自测题（2 小时）

1、填空题

⑴如果$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$可化为两个定积分的乘积，则 D∶______________，$f(x,y)$=__________.

⑵如果$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$，则积分区域 D 被看作是____型区域.

⑶已知$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=1$，且 D 的面积 σ =2，则 $f(x,y)$=____________.

⑷在直角坐标系下计算三重积分，就计算公式而言，共有____类____种；每类各写出一个公式：____.

⑸二重积分的积分区域 D 有一般区域和 x-型、y-型区域之分；在直角坐标系下，一般区域常用将其分割为部分个 x-型或 y-型区域.

2、选择题

⑴下列不等式正确的是

(A) $\iint\limits_{|x|\le 1,|y|\le 1}(x-1)d\sigma\ge 0$　　(B) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-x^2-y^2)d\sigma\ge 0$

(C) $\iint\limits_{|x|\le 1,|y|\le 1}(y-1)d\sigma\ge 0$　　(D) $\iint\limits_{|x|\le 1,|y|\le 1}(x+1)d\sigma\ge 0$

⑵如果$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$，则说明

(A)极点在 D 内　　(B)极点在 D 外

(C)极点在 D 的边界上　　(D)与极点在哪无关

⑶三重积分$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\sin\theta f(\varphi,r)dr$

(A) $=2\pi\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\sin\theta\, f(\varphi,r)dr$　　(B)＞０　　(C)=0　　(D)以上结果都不对

⑷设空间区域Ω：$x^2+y^2+z^2\le 1$，z≥0，Ω_1是Ω在第一卦限的部分，则

(A) $\iiint\limits_{\Omega}xdv=4\iiint\limits_{\Omega_1}xdv$　　(B) $\iiint\limits_{\Omega}ydv=4\iiint\limits_{\Omega_1}ydv$

(C) $\iiint\limits_{\Omega}zdv=4\iiint\limits_{\Omega_1}zdv$　　(D) $\iiint\limits_{\Omega}xyzdv=4\iiint\limits_{\Omega_1}xyzdv$

⑸已知空间区域Ω由$x^2+y^2=z^2$和$z=a(a>0)$围成，则三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$在柱坐标系下累次积分的形式为

(A) $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_r^a r^2dz$　　(B) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_0^a r^2dz$

(C) $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_0^a r^2dz$　　(D) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_r^a r^2dz$

3、估计积分$\iint\limits_D(x+y)d\sigma$的值，其中$D$：$(x-2)^2+(y-1)^2\le 2$；

４、比较二重积分$\iint\limits_D(x^2-y^2)d\sigma$与$\iint\limits_D\sqrt{x^2-y^2}d\sigma$的大小，其中$D$：$(x-2)^2+y^2\le 1$；

５、将$\int_0^{2R}dy\int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}}f(x^2+y^2)dx$（$R>0$）化为极坐标形式的累次积分；

６、更换积分次序

⑴$I=\int_0^4dx\int_{2-\sqrt{4x-x^2}}^{2-\frac{1}{2}\sqrt{4x-x^2}}f(x,y)dy$；⑵将$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$改变积分次序；

７、计算下列二重积分和二次积分

⑴$\iint\limits_D(|x|+|y|)d\sigma$，$D$：$|x|+|y|\le 1$；

⑵$\iint\limits_D\arctan\frac{y}{x}dxdy$，$D$：$x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$，和$y=x$，$y=0$所围的第一象限的区域．

⑶$\int_0^1x^2dx\int_x^1e^{-y^2}dy$．　⑷ 求$\int_0^adx\int_0^x\frac{f'(x)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy$，其中$f'(x)$在［$0,a$］上连续；

８、证明$\frac{\pi}{2}\int_0^n e^{-x^2}xdx\le[\int_0^n e^{-x^2}dx]^2\le\frac{\pi}{2}\int_0^{2n}e^{-x^2}xdx$；

９、计算下列三重积分

⑴$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中Ω由旋转抛物面$x^2+y^2=2z$与平面z=1，z=2所围成的空间闭区域．

⑵$\iiint\limits_{\Omega}ze^{(x+y)^2}dv$，其中Ω为1≤x+y≤2，x≥0，y≥0，0≤z≤3所确定的区域．

10、一均匀物体（密度为常数）占有的闭区域Ω由曲面$z=x^2+y^2$和平面z=0，$|x|=a$，$|y|=a$所围成，

⑴求物体的重心；⑵求物体关于z轴的转动惯量．

自测题答案

1、填空题

⑴ D：四边是平行于坐标轴的矩形，$f(x,y)=f(x)+g(y)$．⑵D 被看作是 x-型区域．

⑶ $f(x,y)=\underline{1/2}$．⑷共有 2 类 6 种；参看前面介绍．⑸平行于坐标轴的直线．

2、选择题

⑴D　⑵C　⑶C　⑷C　⑸D

3、$2\pi \le \iint\limits_D (x+y)d\sigma \le 10\pi$．

4、$\iint\limits_D (x^2-y^2)d\sigma \ge \iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}\,d\sigma$．

5、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\sin\theta} f(r^2)rdr$．

6、⑴$I=\int_0^1 dy \int_{2-\sqrt{4y-y^2}}^{2+\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{2-\sqrt{4y-y^2}}^{2-2\sqrt{1-(y-2)^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{2+2\sqrt{1-(y-2)^2}}^{2+\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx$．

⑵$\int_0^{\sqrt{2}a} rdr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2a}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta + \int_{\sqrt{2}a}^{2a} rdr \int_{-\arccos\frac{r}{2a}}^{\arccos\frac{r}{2a}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta$．

7、⑴$\frac{4}{3}$；　⑵$\frac{3\pi}{64}$；　⑶须改变积分次序，$1-\frac{1}{e}-\frac{1}{6e}$；　⑷$\pi[f(a)-f(0)]$；

8、【提示】依据积分区域可加性，考察积分$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$分别在区域 D_1：$x^2+y^2\le n^2$，$x\ge 0$，$y\ge 0$；D_2：$0\le x\le n$，$0\le y\le n$；D_3：$x^2+y^2\le 2n^2$，$x\ge 0$，$y\ge 0$ 上的积分．

9、⑴采用柱坐标，$\frac{14\pi}{3}$　⑵先对 z 积分，然后作极坐标变换，$\frac{9e}{4}(e^3-1)$．

10、可利用对称性⑴$\frac{7a^2}{15}$　⑵$\frac{112}{45}a^6(\rho=1)$．

第十章　曲线积分与曲面积分

一、基本要求

1. 理解两类曲线积分的概念、性质，了解它们之间的异同、联系以及有何实际意义。
2. 掌握两类曲线积分的计算方法，并能根据不同情况选用简便的计算方法。
3. 掌握格林定理的条件、结论。平面对坐标的曲线积分与路径无关的充要条件；能运用格林公式计算对坐标的曲线积分；会求全微分的原函数。
4. 理解两类曲面积分的概念、性质，了解它们之间的异同、联系以及有何实际意义。
5. 掌握两类曲面积分的计算方法，并能根据具体情况选用简便的计算方法。
6. 掌握高斯定理的条件、结论，能运用高斯公式计算对坐标的曲面积分。
7. 了解斯托克斯公式及散度与旋度的概念。
8. 能用曲线积分、曲面积分表达一些几何量和物理量。

二、主要内容

1. 基本概念

（1）　对弧长的曲线积分

定义：$\int_L f(x,y)ds=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i,\eta_i\right)\Delta S_i$

物理意义：线密度为 $\mu = f\left(x,y\right)$的弧长 L 的质量 M，即 M=$\int_L f\left(x,y\right)ds$

(2)对坐标的曲线积分

定义：$\int_L P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy$

$$=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\left[P\left(\xi_{i,}\eta_i\right)\Delta x_i+Q\left(\xi_{i,}\eta_i\right)\Delta y_i\right]$$

物理意义：变力 $\vec{F}=P\left(x,y\right)\vec{i}+Q\left(x,y\right)\vec{j}$ 沿路径 L 所作功 W,

W=$\int_L P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy$

(3)对面积的曲面积分

定义：$\iint\limits_{\Sigma} f\left(x,y,z\right)ds=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_{i,}\eta_{i,}\zeta_i\right)\Delta S_i$

物理意义：面密度为 $\mu = f\left(x,y,z\right)$的曲面$\sum$的质量 M，即 M=$\iint\limits_{\Sigma} f\left(x,y,z\right)dS$

（4）对坐标的曲面积分

定义：$\iint\limits_{\Sigma} P\left(x,y,z\right)dydz+Q\left(x,y,z\right)dzdx+R\left(x,y,z\right)dxdy$

$$=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\left[P\left(\xi_{i,}\eta_{i,}\zeta_i\right)\left(\Delta S_i\right)_{yz}+Q\left(\xi_{i,}\eta_{i,}\zeta_i\right)\left(\Delta S_i\right)_{zx}+R\left(\xi_{i,}\eta_{i,}\zeta_i\right)\left(\Delta S_i\right)_{xy}\right]$$

物理意义：流体密度为 μ=1，流速场 $\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$，

单位时间内流过曲面Σ正侧的流量。

2. 基本定理

（1）**格林（*Green*）定理**：设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 以及它们的一阶偏导数在闭区域 D 上连续，则

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

其中 L 是 D 的边界曲线，取正向。D 的面积 A:$A=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

(2)平面曲线积分与路径无关的条件：设 D 是平面单连通区域，$P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 内一阶偏导数连续，则如下四个命题等价

（ i ）曲面积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在 D 内与路径无关，仅与 L 的起点、终点有关；

（ ii ）对 D 内任一闭曲线 L，$\oint_L Pdx+Qdy=0$ ；

（iii）存在 D 上二元可微函数 $\mu=(x,y)$ 使 $\mathrm{d}\mu=Pdx+Qdy$

（iv)在 D 内处处成立 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

(3)**高斯(Gauss)定理**：设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上一阶偏导数连续，

则 $\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\oiint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$,

其中Σ是 Ω 的边界曲面外侧。

Ω的体积：$V=\frac{1}{3}\oiint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy$

(4)**斯托克斯（*Stokes*）定理**:设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在含曲面Σ的空间区域Ω内一阶偏导数连续，则

$$\oint_\tau \boldsymbol{Pdx+Qdy+Rdz}=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\boldsymbol{dydz} & \boldsymbol{dzdx} & \boldsymbol{dxdy}\\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} & \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} & \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}}\\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{R}\end{vmatrix}$$

其中τ为曲面Σ的边界曲线，且曲线τ的方向与曲面Σ的正侧符合右手法则。

3. 计算公式

（1）　对弧长的曲线积分的计算：

（i）设曲线 L 由参数方程 $x=x(t),y=y(t),a\le t\le\beta$ 给出，则

$$\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f\left[x(t),y(t)\right]\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$$

（i i）设曲线 L 由直角坐标方程 $y=y(x),a\le x\le b$ 给出，把 x 作为参数，则

$$\int_L f(x,y)\,ds=\int_a^b f\left(x,y(x)\right)\sqrt{1+y'(x)^2}$$

（iii）设曲线 L 由极坐标方程 $r=r(\theta),a\le\theta\le\beta$ 给出，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f\left[r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta\right]\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\,d\theta$$

（iv）设空间曲线 Γ 由参数方程 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)a\le t\le\beta$ 给出，则

$$\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f\left[x(t),y(t),z(t)\right]\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

注意：对弧长的曲线积分化为定积分时，积分下限均小于上限。

(2)　对坐标的曲线积分的计算

（i）化为参数的定积分计算

设曲线 L 参数方程为： $x=x(t),y=y(t),$ 且 α 对应 L 的起点， β 对应 L 的终点，则

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_\alpha^\beta\left[P\left(x(t),y(t)\right)x'(t)+Q\left(x(t),y(t)\right)y'(t)\right]dt$$

注意：对坐标的曲线积分化为定积分时，下限不一定小于上限

特别地，当 L 以直角坐标方程 $y=y(x)$ 给出时，把 x 作为参数

当 L 以直角坐标方程 $z=z(y)$ 给出时，把 y 作为参数

（ii）利用格林公式计算

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

注意：公式成立的条件

（iii）当 L 不是封闭曲线时，可以补充曲线 L_1，使 $L+L_1$ 成封闭曲线，再用格林公式

$$\int_L Pdx+Qdy=\oint_{L+L_1}Pdx+Qdy-\int_{L_1}Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-\int_{L_1}Pdx+Qdy$$

注：右边的二重积分及曲线积分要容易计算

（iv）利用积分与路径无关的条件计算

若 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$（积分与路径无关）

则 $\displaystyle\int_{L_{AB}}Pdx+Qdy=\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x_1,y_1)}Pdx+Qdy=\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y_1}Q(x_{1,}y)dy$

（v）利用斯托克斯公式计算

$$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

（3）　对面积的曲面积分的计算

设曲面Σ的方程为$z=z(x,y),(x,y)\in Dxy, Dxy$为$\sum$在$xoy$面上的投影，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)ds=\iint_{D} f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

注：根据曲面Σ的具体情况，可选取将Σ往yoz面或zox面上投影，化为对y、z或z、x的二重积分，以便于计算。

（4）　对坐标的曲面积分的计算

（i）化为二重积分计算

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma} Pdydz+\iint_{\Sigma} Qdzdx+\iint_{\Sigma} Rdxdy$$

$$=\pm\iint_{D_{yz}} P\left[x(y,z),y,z\right]dydz\pm\iint_{D_{zx}} Q\left[x,y(x,z),z\right]dzdx\pm\iint_{D_{xy}} R\left[x,y,z(x,y)\right]dxdy$$

当曲面Σ的法向量分别与x,y,z轴的正向夹角为锐角时，上式右边三项前分别取“+”号，否则取“-”号。

（ii）利用高斯公式计算

(a) $$\oiint_{\Sigma外侧} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

(b) 如果Σ不是封闭曲面，补充曲面Σ_1，使$\Sigma+\Sigma_1$构成曲面，再用高斯公式。

$$\iint_{\Sigma}=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=\pm\iiint_{\Omega}-\iint_{\Sigma_1}$$

（iii）合一投影法

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

$$=\pm\iint_{D_{xy}}[P(x,y,z(x,y))(-z_x')+Q(x,y,z(x,y))(-z_y')+R(x,y,z(x,y))]dxdy$$

若Σ为上侧，上式右边取“+”号，否则取“-”号。

同样，可将Σ往yoz（或zox）面上投影，有类似的计算公式。

（5）　散度

设有向量场$\vec{A}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，则散度$div\ \vec{A}$为

$$div\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

（6）　旋度

设有向量场 $\vec{A}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，则旋度 $rot\vec{A}$ 为

$$rot\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

4. 各种积分之间的联系

（i）两类曲线积分之间的关系

$$\int_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\int_{\Gamma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲线 Γ 的切向量的方向余弦。

（ii）两类曲面积分之间的关系

$$\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 Σ 的法向量的方向余弦。

（iii）二重积分与对坐标的曲线积分之间的关系

格林公式 $\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{L_{正}}Pdx+Qdy$

（iv）三重积分与对坐标的曲面积分之间的关系

高斯公式 $\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dN=\oiint_{\Sigma_{外}}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

（v）对坐标的曲线积分与曲面积分之间的关系

斯托克斯公式 $\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

三、例题分析

例 1　计算 $\oint_{L}xyds$，其中 L 为如图 10.1 中闭路 $OABO$，AB 是圆周 $x^2+y^2=a^2$ 上的一段弧，端点为 $A(0,a)$，$B(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a)$。

解：　L 由三段光滑组成，故

$$\oint_{L}xyds=\int_{\widehat{OA}}xyds+\int_{\widehat{AB}}xyds+\int_{\widehat{BO}}xyds$$

在 $\widehat{OA}$ 上，$x=0,0\le y\le a,ds=dy$

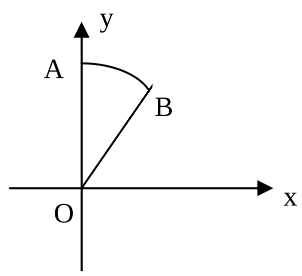


图 10.1

则 $\int_{\overset{\frown}{OA}} xyds = \int_o^a 0 \cdot ydy = 0$

在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，选用圆的参数方程：$x = a\cos t, y = a\sin t$ ，点 A 对应 $t=\frac{\pi}{2}$，点 B 对应 $t=\frac{\pi}{3}$，但化定积分时必须下限小于上限，$ds = adt$

则 $\int_{\overset{\frown}{AB}} xyds = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\sin t \cdot adt = \frac{1}{8}a^3$，

在 $\overset{\frown}{BO}$ 上，y=$\sqrt{3}x, 0 \le x \le \frac{a}{2}, ds = \sqrt{1+y'^2}dx = 2dx$.

则 $\int_{\overset{\frown}{BO}} xyds = \int_0^{\frac{a}{2}} x \cdot \sqrt{3}x \cdot 2dx = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3$

所以 $\oint_L xyds = 0 + \frac{1}{8}a^3 + \frac{\sqrt{3}}{12}a^3 = \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)a^3$。

例 2 计算 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds$, 其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = 4x$。

解： 曲线 L 如图 10.2 所示

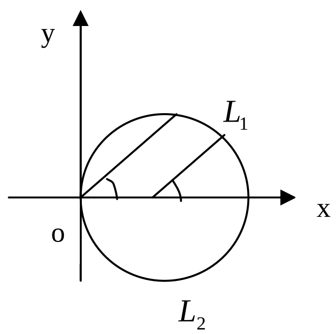


图 10.2

方法一：利用直角坐标

L_1 的方程为 $y = \sqrt{4x - x^2}, 0 \le x \le 4$，

$ds = \sqrt{1+y'^2} = \frac{2}{\sqrt{4x-x^2}}dx$，

由于积分曲线 L 关于 x 轴对称，被积函数 $\sqrt{x^2+y^2}$ 是 y 的偶函数，于是，由对称性，得

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds = 2\int_{L_1} \sqrt{x^2+y^2}ds = 4\int_0^4 \frac{\sqrt{4x}}{\sqrt{4x-x^2}}dx = 32$$

方法二：利用参数方程

L：$\begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ 其中 $0 \le t \le 2\pi$, $ds = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}dt = 2dt$，

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds = \oint_L \sqrt{4x}ds = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2+2\cos t} \cdot 2dt$$

$$= 8\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt = 8\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt - 8\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{t}{2}dt = 32$$

注意：在以上计算中绝对值符号不能漏掉。

方法三：利用极坐标方程

L：$r=4\cos\theta$，$-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，$ds=\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}d\theta=4d\theta$，

$$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4^2\cos\theta^2}\cdot4d\theta=16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=32.$$

从以上三种解法可见，当被积函数是（x^2+y^2）的函数，积分曲线 L 是圆周或圆周的一部分时，利用极坐标或参数方程计算简便。另外，要注意到此题利用参数方程时，t 的取值范围为 $0\le t\le2\pi$，而利用极坐标方程时，θ 的取值范围为 $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，这是易出错的地方。

例 3 计算下列对弧长的曲线积分：

(1) $\oint_L\left(2xy+3x^2+4y^2\right)ds$，$L$ 为椭圆周 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a；

(2) $\oint_\Gamma\left(y+z^2\right)ds$，Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线。

解： (1) $\oint_L\left(2xy+3x^2+4y^2\right)ds=\oint_L 2xyds+\oint_L\left(3x^2+4y^2\right)ds$

∵ L 关于 x 轴对称，被积函数 $2xy$ 是 y 奇函数，则 $\oint_L 2xy=0$

又∵椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，即 $3x^2+4y^2=12$

于是 $\oint_L\left(3x^2+4y^2\right)ds=\oint_L 12ds=12\oint_L ds=12a$

注：曲线积分可以将曲线 L 的表达式直接代入积分式，这一点与重积分完全不同，请同学们注意。

(2) 由于 Γ 关于 x,y,z 具有轮换对称性，则

$$\oint_\Gamma x^2ds=\oint_\Gamma y^2ds=\oint_\Gamma z^2ds=\frac{1}{3}\oint_\Gamma\left(x^2+y^2+z^2\right)ds$$

$$\oint_\Gamma xds=\oint_\Gamma yds=\oint_\Gamma zds=\frac{1}{3}\oint_\Gamma(x+y+z)ds$$

于是 $\oint_\Gamma\left(y+z^2\right)=\oint_\Gamma yds+\oint_\Gamma z^2ds$

$$=\frac{1}{3}\oint_L(x+y+z)ds+\frac{1}{3}\oint_L\left(x^2+y^2+z^2\right)ds=0+\frac{1}{3}\oint_\Gamma R^2ds=\frac{2}{3}\pi R^3$$

在对弧长的曲线积分的计算中，正确，灵活地运用对称性，可简化计算，但应同考虑到积分曲线 L 的对称性与被积函数的奇偶性，对称性为：

设 $f(x,y)$ 是定义在一条光滑（或分段光滑）的曲线 L 上的连续函数，L 关于 y（或 x）轴对称，则 $\int_L f(x,y)=\begin{cases}0 & f(x,y)\text{是}x(\text{或}y)\text{的奇函数}\\ 2\int_{L_1}f(x,y)ds, & f(x,y)\text{是}x(\text{或}y)\text{的偶函数}\end{cases}$

其中 L_1 是 L 落在 y （或 x ）一侧的部分

例 4 计算 I= $\int_L ydy - xdx$ ，其中 L 是由 $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{-a}{\sqrt{2}}\right)$ 沿 $x^2 + y^2 = a^2 \left(x \geq 0\right)$ 到 $B\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 的曲线。

解： L 如图 10.3 所示

方法一：用直角坐标，取 x 为积分变量，L 需分成两段。

L_1 ：y=- $\sqrt{a^2 - x^2}$, $L_2 : y = \sqrt{a^2 - x^2}$,

有 $I = \int_{L_1} + \int_{L_2}$

$$= \int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a} \left[\left(-\sqrt{a^2 - x^2}\right) \left(\frac{+x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) - x \right] dx$$

$$+ \int_{a}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left[\sqrt{a^2 - x^2} \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) - x \right] dx$$

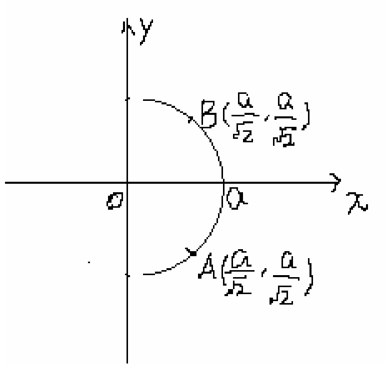


图 10.3

$$= \int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a} \left(-2x\right) dx + \int_{a}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(-2x\right) dx = 0$$

方法二：用直角坐标，取 y 为积分变量。L 的方程为 $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ ，有

$$I = \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left[y - \sqrt{a^2 - y^2} \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \right) \right] dy = \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} 2ydy = 0 \text{。}$$

方法三：用参数方程，L 的参数方程为 $x = a\cos t, y = a\sin t$ 有

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[a\sin t \cdot a\cos t - a\cos t \cdot \left(-a\sin t\right) \right] dt$$

$$= 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin t \cos t dt = 0$$

方法四：利用曲线积分与路径无关的条件。

由于 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

在 xoy 坐标面（单连通域）上成立，故该曲线积分与路径无关，我们可取由 $A(0,-a)$ 到 $B(0,a)$ 的直线段作为积分路径，$\overline{AB}$ 的方程为 x =0，取 y 为积分变量，则

$$I=\int_{\overline{AB}}ydy-xdx=\int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}}ydy=0$$

由此例可见，在计算对坐标的曲线积分时，选择恰当的积分方法，可使计算简便。

如果利用对称性计算此题，由于 L 关于 x 轴对称，$P=y$ 关于 y 是奇函数，$Q=x$ 关于 y 是偶函数，设 L_2 是 L 在第一象限部分，则

$$I=\int_L ydy-xdx=\int_L ydy-\int_L xdx=0+2\int_{L_2}xdx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\cos t\cdot a(-\sin t)dt=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos td\cos t=-\frac{a^2}{2}$$

从以上错误结果可知，重积分及对弧长的曲线积分中的对称性，不能用于对坐标的曲线积分。

例 5 计算

I= $\int_L\left(e^x\sin y+y+1\right)dx+\left(e^x\cos y-x\right)dy, L$

是以 *A*（1，0），*B*（7，0）为直径的下半圆周，方向由 *A* 到 *B*。

解：L 如图 10.4 所示，

因为被积函数比较复杂，若将曲线积分直接化为定积分计算比较困难，此时考虑用以下方法。

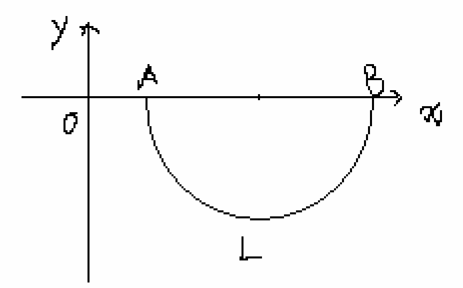


图 10.4

设 $P(x,y)=e^x\sin y+y+1,$

$$Q(x,y)=e^x\cos y-x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y+1,\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y-1$$

由于 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2$，表示式简单，因此考虑格林公式，补充直线段 $\overline{BA}$，使 $L+\overline{BA}$ 为正向闭曲线，可用格林公式，则 $I=\oint_{L+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}$

而 $\oint_{L+\overline{BA}}=\iint\limits_D(-2)dxdy=-2\iint\limits_D dxdy=-2\cdot\frac{9}{2}\pi=-9\pi$，

由于 $\overline{BA}$ 的方程为 y =0,则 dy =0,于是 $\int_{\overline{BA}}=\int_7^1 dx=-6$，

故 $I=\oint_{L+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}=-9\pi+6$

例 6 计算 $I=\int_L\left(2xy+\sin x\right)dx+\left(x^2-ye^y\right)dy$，其中 L 是由点 O（0，0）沿曲线

$y=x^2-2x$ 到点 A（4，8）的一段弧。

解： L 如图 10.5 所示

$P(x,y)=2xy+\sin x,$

设 $Q(x,y)=x^2-ye^y,$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

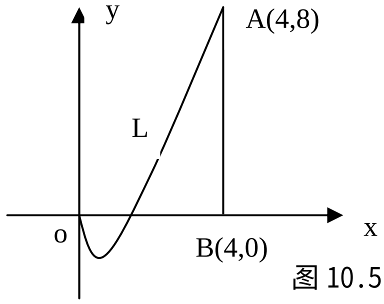


图 10.5

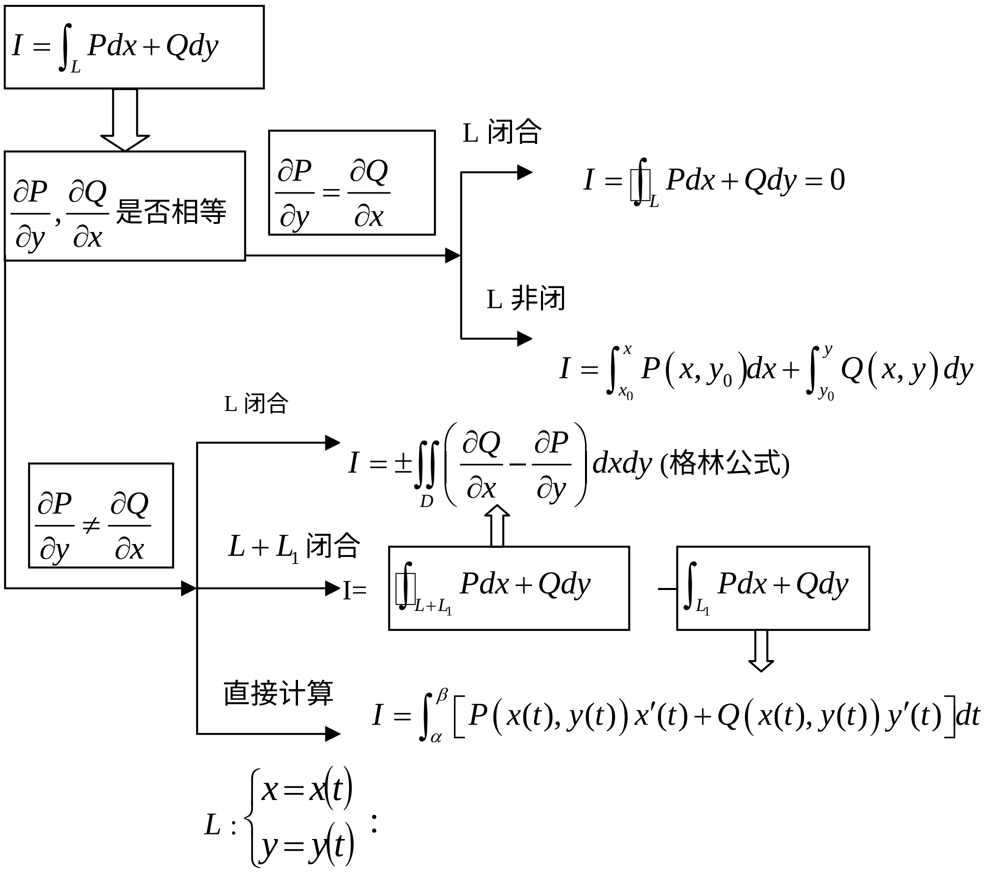
即在单连通域 xoy 平面内有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故此曲线积分与路径无关，

我么取由 O（0，0）到 B（4，0）再到 A（4，8）这一线段作为积分路径，则 $I=\int_{\overline{OB}}+\int_{\overline{BA}}$

$=\int_0^4\sin x\,dx+\int_0^8\left(4^2-ye^y\right)dy=128-7e^8-\cos 4$。

一般地，对坐标的曲线积分的计算程序如下（流程图）：

（可参照常微分书）



例 7 计算曲线积分

（1）$\oint_L\frac{2xydx+x^2dy}{|x|+|y|}$，其中 L 为闭合回路 $ABCDA$，A、B、C、D 分别为 A（1，0）B（0，1），C（-1，0），D（0，-1）；

（2）$\oint_L \frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$，其中 L 为椭圆 $4x^2+y^2-8x=0$ 的正向。

解：（1）L 的方程可表示为 $|x|+|y|=1$，由于被积函数定义在 L 上，则

$$\oint_L \frac{2xydx+x^2dy}{|x|+|y|}=\oint_L 2xydx+x^2dy,$$

此时 $P=2xy$，$Q=x^2$，$\frac{\partial P}{\partial y}=2x=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在单连通域 xoy 面内成立，故沿任一闭路的曲线积分为零，即

$$\oint_L \frac{2xydx+x^2dy}{|x|+|y|}=\oint_L 2xydx+x^2dy=0。$$

（2）由于 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\right)=\frac{(x-1)^2+y^2}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^2}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-(x-1)}{(x-1)^2+y^2}\right)=\frac{(x-1)^2-y^2}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^2}$$

在 xoy 面上，除（1，0）点外，有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 且连续。

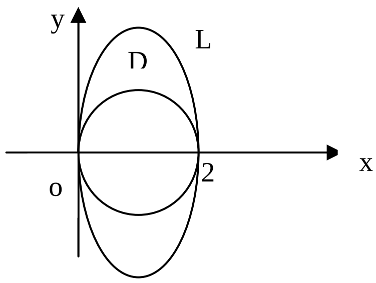


图 10.6

而 L 为 $4x^2+y^2-8x=0$，即

$$\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{y^2}{2^2}=1,$$

L 包围点（1，0）于是作辅助曲线 L_1：

$(x-1)^2+y^2=1$，逆时针方向，从而

$$\oint_L \frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}=\left(\oint_{L+L_1}-\oint_{L_1}\right)\frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-\oint_{L_1}=-\oint_{L_1} ydx-(x-1)dy \quad =\iint_{D_1}(-2)dxdy=-2\pi$$

在此题中我们利用以下等式：

$$\oint_{L_1}\frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}=\oint_{L_1} ydx-(x-1)dy\ \left(\because L:(x-1)^2+y^2=1\right)$$

而对左边积分我们又利用了格林公式，但对左边积分不能直接利用格林公式，同学们思考以下，为什么？

例 8 选择 a,b 使 $\dfrac{\left(y^2+2xy+ax^2\right)dx-\left(x^2+2xy+by^2\right)dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ 为某一函数 $u=u(x,y)$的全微分，并求 $u(x,y)$.

解： $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{2y+2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\dfrac{4y\left(y^2+2xy+ax^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3},\dfrac{\partial P}{\partial x}=-\dfrac{2y+2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\dfrac{4x\left(y^2+2xy+bx^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$

由全微分条件，应有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

整理得，$(a+1)x^2y+(b+1)xy^2=0$，

取 a=－1,b=－1,满足上式，从而

$\dfrac{x^2+2xy-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx-\dfrac{x^2+2xy-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy$ 为某一函数 $u=u(x,y)$的全微分。

取折线（1，1）$\to$（x,1）$\to$(x, y)为积分路径（图 10.7），则

$$u=\int_1^x\frac{1+2x-x^2}{\left(1+x^2\right)}dx-\int_1^y\frac{x^2+2xy-y^2}{\left(x^2+y^2\right)}dy$$

$$=\int_1^x\frac{d\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}+2\int_1^x\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}-\int_1^x\frac{dx}{1+x^2}+\int_1^y\frac{dy}{x^2+y^2}$$

$$-2x\int_1^y\frac{(x+y)dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

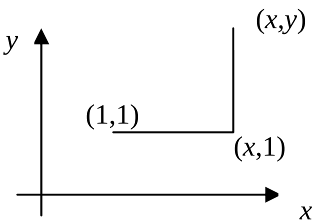


图 10.7

$$=-\frac{1}{1+x^2}\Big|_1^x+\frac{x}{1+x^2}\Big|_1^x+\int_1^x\frac{dx}{1+x^2}-\int_1^x\frac{dx}{1+x^2}$$

$$+\int_1^y\frac{dy}{1+x^2}-2x^2\int_1^y\frac{dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}-2x\int_1^y\frac{ydy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$=\frac{x-1}{x^2+1}-\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{x-y}{x^2+y^2}$$

故 $u(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}+\ C$

此题求 $u(x,y)$时，$\left(x_0,y_0\right)$我们取为（1，1），而不能取（0，0），同学们思考一下，为什

么？

例 9 计算 $I=\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$

其中Γ：$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, & (a>0,h>0) \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1 \end{cases}$，从 x 轴正向看去 τ 为逆时针。

解： 方法一：利用参数方程

τ 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=s\sin t \qquad t:0\to 2\pi \\ z=h(1-\cos t) \end{cases}$

$$I=\int_0^{2\pi}\{[a\sin t-h(1-\cos t)](-a\sin t)+\left[h(1-\cos t)-a\cos t\right]\cdot a\cos t$$

$$+a(\cos t-\sin t)h\sin t\}dt=-2\pi a(a+h)$$

方法二：利用斯托克斯公式

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix}=-2\iint_{\Sigma}dydz+dzdx+dxdy=-2\iint_{\Sigma}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)ds$$

取 Σ 为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$，上侧，则 $\vec{n}=(h,o,a)$，$\cos\alpha=\dfrac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$，$\cos\beta=0$，

$\cos\gamma=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$

于是 $I=-2\iint_{\Sigma}\dfrac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}}ds=-\dfrac{2(a+h)}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_{\Sigma}ds$

$$=-\frac{2(a+h)}{\sqrt{a^2+h^2}}\cdot\pi a\sqrt{a^2+h^2}=-2\pi a(a+h)。$$

例 10. 设平面力场的大小与作用点到原点的距离成正比，方向为作用点向径方向按逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 角，试求质点沿曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 从点 A（a,o）逆时针方向移到点 B（o,a）时，场力所作的功。

解： 这是力场 $\vec{F}$ 沿曲线 L 所作功的解，只要知道 $\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$，那么功

$$W=\int_L Pdx+Qdy。$$

在此题中，主要需找到场力 $\vec{F}$ 的坐标表达式。设作用点 M (x,y)，由题设：

$\left|\vec{F}\right|=k\sqrt{x^2+y^2}$，（$k$>0,为比例常数），点 $M(x,y)$ 处的向径为 $O\vec{M}=$

$x\vec{i}+y\vec{j}$，与向径同向的单位向量为：$\overrightarrow{OM_0}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$

$\stackrel{\Delta}{=}\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$

其中变量 θ 为 x 轴正向到向径的转角，力的方向即向径方向按逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 角的方向，其单位向量为

$$\vec{F}_0=\cos(\theta+\frac{\pi}{2})\vec{i}+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}$$

$=\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$，于是 $\vec{F}=\left|\vec{F}\right|\vec{F}_0=-ky\vec{i}+kx\vec{j}$

所以 $W=\int_L -kydx+kxdy$

$$=k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-a\sin^3\theta\cdot 3a\cos^2\theta(-\sin\theta)+a\cos^3\theta\cdot 3a\sin^2\theta\cos\theta\right]d\theta$$

$$=3a^2k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta=3a^2k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\left(1-\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$=3a^2k\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{16}\pi a^2k$$。

例 11 计算下列对面积的曲面积分。

（1）$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(2x+\dfrac{4}{3}y+z\right)ds$，其中 Σ 是平面 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ 在第一卦限部分；

（2）$I=\iint\limits_{\Sigma}yds$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$；

（3）$I=\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)ds$，其中 Σ 为 x =0, y =0 和 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围立体在第一，五卦限部分的表面。

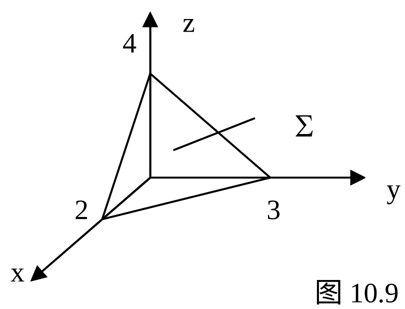


图 10.9

解：（1）$I=4\iint\limits_{\Sigma}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}\right)ds=4\iint\limits_{\Sigma}ds$

由于 Σ 的方程为 $z=4-2x-\dfrac{4}{3}y$

则 $ds=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$

$$=\sqrt{1+(-2)^2+(-\frac{4}{3})^2}dxdy=\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$$

于是 $I=4\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy=\frac{4}{3}\sqrt{61}\iint\limits_{D}dxdy$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{61}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=4\sqrt{61}。$$

（2）由于被积函数 $f(x,y,z)=y$ 是 y 的奇函数，积分曲面 Σ ：$x^2+y^2+z^2=R^2$ 关于 zox 面对称，故由对称性知 I=0。

（3）设 Σ_1 ：$x=0, y^2+z^2\le R^2\left(y\ge 0\right)$；$\Sigma_2 : y=0, x^2+z^2\le R^2\,(x\ge 0)$

$\Sigma_3 : x^2+y^2+z^2=R^2\left(x\ge 0, y\ge 0\right)$，则 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$，如图 10.10 所示。

由曲面积分性质，有

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3}$$

由于 Σ_1 的方程为 x=0,则 $dS=\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,ydz=dydz$

于是 $\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS=\iint\limits_{D_1}\left(0+y^2+z^2\right)dydz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R r^3dr=\frac{1}{4}\pi R^4$。

同理 $\iint\limits_{\Sigma_2}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS=\frac{1}{4}\pi R^4$

由于 Σ_3 的方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，于是

$$\iint\limits_{\Sigma_3}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS=\iint\limits_{\Sigma_3}R^2dS=R^2\iint\limits_{\Sigma_3}dS=R^2\cdot\frac{1}{4}\cdot 4\pi R^2=\pi R^4$$

例 12 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\left(xy+yz+zx\right)dS$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\le 2x$ 内的部分。

解： Σ 如图 10.11 所示，被积函数 $xy+yz$ 是 y 的奇函数，则 $\iint\limits_{\Sigma}\left(xy+yz\right)dS=0$

而 Σ 在 xoy 平面上的投影区域为 D：$x^2+y^2\le 2x$，$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\sqrt{2}dxdy$，

于是 $\iint\limits_{\Sigma}zxdS=\iint\limits_{D}x\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\cos\theta dr$

$$=4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta=8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta=8\sqrt{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{64}{15}\sqrt{2}$$

所以 $\iint\limits_{\Sigma}\left(xy+yz+zx\right)dS=\frac{64}{15}\sqrt{2}$

例 13 设面密度为常数ρ的均匀半球面Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2, z\ge 0$，求（1）Σ的质量和重心坐标；(2) Σ对 z 轴的转动惯量。

解： 因为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$dS=\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}dxdy=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$，D：$x^2+y^2\le a^2$

（1）质量$M=\iint\limits_{\Sigma}\rho dS=\rho\iint\limits_{\Sigma}dS=\rho\cdot 2\pi a^2=2\pi a^2\rho$，由于均匀曲面$\Sigma$关于$zox$面对称，有$\bar{x}=\bar{y}=0$，$\bar{z}=\dfrac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma}z\rho dS=\dfrac{\rho}{M}\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$

$=\dfrac{a\rho}{M}\iint\limits_{D}dxdy=\dfrac{a\rho}{2\pi a^2\rho}\cdot\pi a^2=\dfrac{a}{2}$，故$\Sigma$的重心坐标为（0，0，$\dfrac{a}{2}$）。

（2）方法一：$I_z=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2\right)\rho dS$

$=a\rho\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\dfrac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}dr$

令$r=a\sin t$，上式$=2\pi a^4\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 tdt=\dfrac{4}{3}\pi a^4\rho=\dfrac{2}{3}Ma^2$

方法二：由于上半球面对 z 轴的转动惯量是整个球面Σ_1：$x^2+y^2+z^2=a^2$对 z 轴的转动惯量的一半，而Σ_1对 z 轴为转动惯量为$\rho\oiint\limits_{\Sigma_1}\left(x^2+y^2\right)dS$，由轮换对称性，

$\oiint\limits_{\Sigma_1}x^2dS=\oiint\limits_{\Sigma_1}y^2dS=\oiint\limits_{\Sigma_1}z^2dS=\dfrac{2}{3}\oiint\limits_{\Sigma_1}a^2dS=\dfrac{2}{3}a^2\cdot 4\pi a^2=\dfrac{8}{3}\pi a^4$，

从而$\dfrac{1}{2}\rho\oiint\limits_{\Sigma_1}\left(x^2+y^2\right)dS=\dfrac{4}{3}\pi a^4=\dfrac{2}{3}Ma^2$。

例 14 设Σ是柱体Ω：$x^2+y^2\le a^2, 0\le z\le 1$的表面，计算下列曲面积分：（1）对面积的曲面积分$I=\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS$；

（2）对坐标的曲面积分

$I=\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdy+\left(x^2+y^2+z^2\right)dydz$，$\Sigma$取外侧。

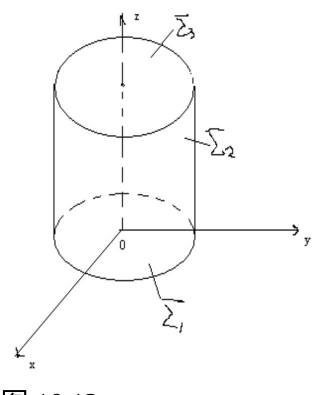


图 10.12

解： 如图 10.12 所示，Σ由三片光滑曲面组成：$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$

Σ_1 ： $z=0, x^2+y^2\le a^2$ ，　$\Sigma_2 : x^2+y^2=a^2, 0\le z\le 1$ ，

$\Sigma_3 : z=1, x^2+y^2\le a^2$ ，

（1） $I=\left(\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)dS \overset{\Delta}{=} I_1+I_2+I_3$ 将 Σ_1 往 xoy 面投影，有

$$I_1=\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS=\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2+0^2\right)dxdy \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot rdr=2\pi\cdot\frac{1}{4}a^4=\frac{\pi}{2}a^4,$$

注：(*) 处二重积分 $\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)dxdy\ne\iint\limits_{D_{xy}}a^2dxdy$ ，

而 $\oint_L\left(x^2+y^2\right)dS=\oint_L a^2dS$ ，其中 L ： $x^2+y^2=a^2$ ，这是容易混淆的地方，要引起注意！

将 $\Sigma_3 : z=1$ 往 xoy 面投影，有

$$I_3=\iint\limits_{\Sigma_3}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS=\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2+1^2\right)\sqrt{1+0^2+0^2}dxdy$$

$$\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\frac{\pi}{2}a^4+\pi a^2 ,$$

计算 I_2 时，应将 Σ_2 往 yoz 面或 zox 投影，而不能往 xoy 面投影，因为 Σ_2 不能分成其投影域 $D_{xy} : x^2+y^2=a^2$ （是一条曲线）上的单值函数的图形，我们选取将 Σ_2 往 yoz 面投影，此时曲面 Σ_2 可分为两个单值函数的图形，这两个单值函数为 $x=\pm\sqrt{a^2-y^2}$ ，

$D_{yz:}-a\le y\le a$，$0\le z\le 1$，

设 $\Sigma_{21} : x=\sqrt{a^2-y^2}$ ，$\Sigma_{22} : x=-\sqrt{a^2-y^2}$ ，

$$dS=\sqrt{1+{x_y}^2+{x_z}^2}dydz=\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}dxdy ,$$

又因为 Σ_2 关于 yoz 面对称，被积函数 $\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 是 x 的偶函数，有

$$I_2=\iint\limits_{\Sigma_2}\left(a^2+z^2\right)dS=\iint\limits_{\Sigma_2}a^2dS+2\iint\limits_{\Sigma_{21}}z^2dS$$

$$=2\pi a^3+2\int_0^1 z^2dz\int_{-a}^a\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}dy=2\pi a^3+\frac{4}{3}a\int_0^a\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$=2\pi a^3+\frac{4}{3}a\arcsin\frac{y}{a}\Big|_o^a=2\pi a^3+\frac{2}{3}\pi a$$

方法二：取面积元素 dS 为介于 z 及 $z+dz$ 之间的窄带条的面积，即

$dS=2\pi a dz$，于是 $I_2=\iint\limits_{\Sigma_2}\left(a^2+z^2\right)dS=\int_0^1\left(a^2+z^2\right)\cdot 2\pi a dz=2\pi a^3+\frac{2}{3}\pi a$，

从而 $I=I_1+I_2+I_3=\pi a^4+2\pi a^3+\pi a^2+\frac{2}{3}\pi a$。

（2）方法一：直接计算

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdy+\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)dydz\overset{\Delta}{=}I_1+I_2$$

$$I_1=\left(\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdy$$

由于 Σ_1,Σ_3 在 xoy 面投影为 $D_{xy}:x^2+y^2\le a^2,\Sigma_2$ 在 xoy 面投影面积为零，则 $\iint\limits_{\Sigma_2}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdy=0,$ 于是

$$I_1=-\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2+1^2\right)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\pi a^2,$$

又由于 Σ_1,Σ_3 在 yoz 投影面积为零，则

$\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x^2+y^2+z^2\right)dydz=0,\iint\limits_{\Sigma_3}\left(x^2+y^2+z^2\right)dydz=0$，$\Sigma_2$ 在 yoz 面投影为

$D_{yz}:-a\le y\le a,0\le z\le 1$，此时 Σ_2 可分为两个单值函数 $x=\pm\sqrt{a^2-y^2}$ 的图形。

设 $\Sigma_{21}=\sqrt{a^2-y^2}$，取前侧。$\Sigma_{22}=-\sqrt{a^2-y^2}$ 取后侧，

于是 $I_2=\left(\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)dydz=\left(\iint\limits_{\Sigma_{21}}+\iint\limits_{\Sigma_{22}}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)dydz$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}\left(a^2+z^2\right)dydz-\iint\limits_{D_{yz}}\left(a^2+z^2\right)dydz=0$$

从而 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdy+\left(x^2+y^2+z^2\right)dydz=I_1+I_2=\pi a^2$

方法二：利用高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdy+\left(x^2+y^2+z^2\right)dydz=\iiint\limits_{\Omega}(2z+2x)dV=\iiint\limits_{\Omega}2zdV+0$$

$$=2\int_0^1 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi a^2=\pi a^2$$

四、练习题

1.下列说法正确吗？为什么？

（1）$L:x^2+y^2=R^2$，则 $\oint_L \frac{ds}{x^2+y^2}=\oint_L \frac{ds}{R^2}=\frac{1}{R^2}\oint_L ds=\frac{1}{R^2}2\pi R=\frac{2\pi}{R}$。

(2) 设$L:|x|+|y|=1$取正向，则$\oint_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\oint_L dx+dy=0$

（3）设 OnA 是由点 O（0，0）到点 A（a,o）的上半圆周 $x^2+y^2=ax$，求 $\int_{\overset{\frown}{OnA}}\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-m\right)dy$。

解：由格林公式$\int_{\overset{\frown}{OnA}}+\int_{\overline{AO}}=\iint\limits_D mdxdy=\frac{1}{8}\pi ma^2$，而$\int_{\overline{AO}}=0,\therefore\int_{\overset{\frown}{OnA}}=\frac{1}{8}\pi ma^2$。

（4）设 O（0，0），A（1，1），则曲线积分$\int_{\overline{AO}}xdS=\int_1^0 x\sqrt{2}dx=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

（5）对弧长的曲线积分化为定积分时，因下限总小于上限，所以积分值恒大于零。

（6）计算曲线积分$I=\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$，其中 L 为自点$A$（0，-1）至$B$ 1，0）的直线段。

解： 因为$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x-y)^4}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故曲线积分与路径无关，所以可取积分路径为沿着由$A$（0，-1）经$O$（0，0）至$B$（1，0）的折线。于是$I=\int_{\overline{AO}}\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}+\int_{\overline{OB}}\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$

$$=\int_{-1}^0\frac{0dy}{(0-y)^2}-\int_0^1\frac{0dx}{(x-0)^2}=0$$

（7）设Σ是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧，则有 $\iint\limits_{\Sigma} x^2zdxdy+y^2xdydz+z^2ydzdx$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dV=a^2\iiint\limits_{\Omega}dV=\frac{4}{3}\pi a^5。$$

（8）计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} zdxdy$，$\Sigma:x^2+y^2+z^2=a^2$取外侧。

解：由于Σ关于xoy面对称，被积函数$f(x,y,z)=z$是z的奇函数，由对称性知。

$I=\iint\limits_{\Sigma} zdxdy=0$。

2.填空题

（1）设 L 为 $x=x_{0,}0\le y\le\dfrac{3}{2}$,则 $\int_L 4dS=$________。

（2）设 L 为直线 $y=y_0$ 上从点 A（0，y_0）到点 B（3，y_0）的有向直线段，则

$\int_L 2dy=$________。

（3）设 L 为圆周 $x^2+y^2=R^2$ 正向，则积分 $\oint_L (xy-2y)dx+(x^2-x)dy=$________。

（4）设 L 为曲线 $y=e^{-x}$ 从（0，1）至（-1，e）的弧段，则积分

$\int_L (y^2-y)dx+(2xy-x)dy=$________。

（5）记均匀半球面 Σ ：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的质心为（0，0，$\bar{z}$），则 $\bar{z}=$________。

3.单项选择题

（1）设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 取外侧，Σ_1 为其上半球面，则下列式子正确的是（　）

（A）$\iint\limits_{\Sigma} zdS=2\iint\limits_{\Sigma_1} zdS$ ；　　（B）$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy=2\iint\limits_{\Sigma_1} zdxdy$ ；

（C）$\iint\limits_{\Sigma} z^2dxdy=2\iint\limits_{\Sigma_1} z^2dxdy$ ；　　（D）$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy=0$

（2）若 Σ 为 $z=2-(x^2+y^2)$ 在 xoy 面上方部分的曲面，则 $\iint\limits_{\Sigma} dS=$（　）

（A）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r\sqrt{1+4r^2}dr$ ；　　（B）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\sqrt{1+4r^2}rdr$ ；

（C）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}dr$ ；　　（D）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}rdr$ 。

（3）设 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1,0\le z\le 1$ 外侧，$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dxdy=$（　）

（A）0，　（B）$\pi+1$，　（C）1，　（D）π

（4）设 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1,0\le z\le 1$ 外侧，$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dydz=$（　）

（A）0，　（B）$\pi+1$，　（C）1，　（D）π

（5）设 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1,0\le z\le 1$，$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=$（　）

（A）0，　（B）$\pi+1$，　（C）1，　（D）π

4.设 L 是取正方向的圆周 $x^2+y^2=9$，求 $\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$ 。

5.设位于点（0，1）的质点 A 对质点 $M(x,y)$ 的引力大小为 $\dfrac{k}{r^2}$（k>0 为常数，r 为 A 与 M 间的距离），质点 M 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 自点 B（2，0）运动到 O（0，0），求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所作的功。

6.计算曲线积分$\oint_L \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$其中 L 是任一不经过原点的简单闭曲线的正向。

7.计算$\int_L (e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$其中$L$是从点$O$（0，0）沿着过三点$O$（0，0），$C$（0，1），$A$（1，2）的圆周到点$A$（1，2）的曲线。

8.设圆柱螺线$x=\cos t, y=\sin t, z=t$，($0\le t\le\frac{\pi}{2}$）的密度分布与x，y无关而与z成正比，比例系数为k，求这一段螺线的质量。

9.选取a,b使$(x^2+axy-y^2)dx+(x^2+bxy-y^2)dy$是某一函数的全微分，并求出一个这样的函数。

10.用三种方法求$\int_L ydx+xdy, L: x^2+y^2=2x(y\ge 0)$的上半弧，起点为原点。

11.求每点处的密度等于这点到原点的距离的平方的球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的质量。

12.求密度为ρ的均匀圆柱面$\Sigma: x^2+y^2=4(0\le z\le 4)$对$z$轴的转动惯量。

13.计算$\iint_\Sigma |xyz|ds$, Σ是曲面$z=x^2+y^2$在z =0 与z =1 之间的部分。

14.计算下列对坐标的曲面积分，其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧：(1) $\iint_\Sigma dxdy$，(2) $\iint_\Sigma zdxdy$，(3) $\iint_\Sigma z^2dxdy$。

15.求$\iint_\Sigma zdxdy$，Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$，

（1）积分沿上半球面的上侧；下半球面的上侧。

（2）积分沿上半球面的下侧；下半球面的上侧。

16.计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$$

其中Σ是由曲线$\begin{cases} z=\sqrt{y-1} & (1\le y\le 3) \\ x=0 & \end{cases}$,绕$y$轴旋转一周所成的旋转曲面，它的法向量与$y$轴正向的夹角恒大于$\frac{\pi}{2}$。

17.求$\iint_\Sigma x^2y^2zdxdy, \Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le R)$的下侧。

18.设有速度场$\vec{v}=(x^3+a)\vec{i}+(y^3+a)\vec{j}+(z^3+a)\vec{k}$（常数 $a\ne 0$），求$\vec{v}$通过上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$（R>0）上侧的流量。

19.计算$\iint_\Sigma x^2dydz-2xydzdx+z^2dxdy$，其中$\Sigma$为 z=1-$\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的下侧。

五.自测题

1.填空题

(1) 设 L 为周长为 a 的椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，则 $\oint_L\left(2xy+3x^2+4y^2\right)ds=$___。

(2) 设曲面 Σ ：$x^2+y^2+z^2=a^2$（a>0 为常数），则曲面积 $\oiint_\Sigma\left(x^2+y^2+z^2\right)ds=$________。

(3) 设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，取正向，则 $\oint_L xy^2dy-x^2ydx=$_____。

(4)设 Σ 是介于 z =0 和 z =h 之间的柱面 $x^2+y^2=R^2$ 外侧，则流速场 $\vec{v}=\left(x^2,y^3,z\right)$ 单位时间通过 Σ 的流量 Q=______。

(5) 设 Γ 是 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ x+y+z=0\end{cases}$，是线密度为 1 的物质曲线，求其关于 z 轴的转动惯量 I=______。

2.选择题

(1) 设 L 为下半圆周 $x^2+y^2=R^2$ （$y\le 0$），将曲线积分 $I=\int_L\left(x+2y\right)ds$ 化为定积分的正确结果是（　）

(A) $\int_0^{-\pi}R^2\left(\cos t+2\sin t\right)dt$　(B) $\int_\pi^0 R^2\left(\cos t+2\sin t\right)dt$

(C) $\int_{-\pi}^0 R^2\left(\sin t+2\cos t\right)dt$　(D) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} R^2\left(\sin t+2\cos t\right)dt$

(2) 设 Σ ：$x^2+y^2+z^2=R^2$，z≥0，$\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=R^2$，$x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$,则下列式子正确的是（　）

(A) $\iint_\Sigma xdS=4\iint_{\Sigma_1}xdS$　(B) $\iint_\Sigma ydS=4\iint_{\Sigma_1}ydS$

(C) $\iint_\Sigma zdS=4\iint_{\Sigma_1}zdS$　(D) $\iint_\Sigma xyzdS=4\iint_{\Sigma_1}xyzdS$

(3) 设 L 是曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=x$ 所围成区域的整个边界曲线，$f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_L f\left(x,y\right)dS=$（　）

(A) $\int_0^1 f\left(x,x^3\right)dx+\int_0^1 f\left(x,x\right)dx$

(B) $\int_0^1 f\left(x,x^3\right)dx+\int_0^1 f\left(x,x\right)\sqrt{2}dx$

(C) $\int_0^1 f\left(x,x^3\right)\sqrt{1+9x^4}dx+\int_0^1 f\left(x,x\right)\sqrt{2}dx$

(D) $\int_{-1}^1 f\left(x,x^3\right)\sqrt{1+9x^4}dx+\int_{-1}^1 f\left(x,x\right)\sqrt{2}dx$

（4）设 Σ 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{z-x^2-y^2}$ 所围立体表面的外侧，积分 $\oiint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=$（　）

（A）4π　　（B）$\dfrac{\pi}{2}$　　（C）π　　（D）2π

（5）设积分 $\int_L x\varphi(y)dx+x^2ydy$ 与路径无关，其中 $\varphi(0)=0,\varphi$（y）有一阶连续导数，则 $\int_{(0,1)}^{(1,2)} x\varphi(y)dx+x^2ydy=$（　）

（A）2　　（B）1　　（C）1/2　　（D）3

3.计算 $\int_L \dfrac{1}{x-y}ds$，其中 L 是连接 A（0，-2）和 B（4，0）的直线段。

4.计算 $\int_L \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$，其中 L 为 $y=1-|x|$ 从 A（1，0）经 B（0，1）到 B（-1，0）的折线段。

5.计算 $\int_L -ydx+xdy$ 其中 L 是沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 从点 A（2，0）到点 O（0，0）的有向线段。

6.计算 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+y^2dzdx+zdxdy,\Sigma$ 为平面 $x+y+z=1$ 被坐标平面所截得的三角形的上侧。

7.已知曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{xdydz+zdxdy,\Sigma}$ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的立体表面的外侧。试就此曲面积分验证高斯公式的正确性。

8.求每点处的密度等于这点到 zox 面的距离平方的圆柱面 $x^2+y^2=4$ 在 $0\le z\le 1$ 那部分的质量。

9.计算 $\iint\limits_{\Sigma}(y+x)dydz+(z-y)dzdx+z^2dxdy$ 其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 z=0,z=h(h>0)那一部分曲面的上侧。

第十章 练习题答案

1.（1）（2）正确，其余全错

2.（1）6，（2）0，（3）πR^2，（4）$e-e^2$，（5）$\dfrac{1}{2}$R

3.（1）B，（2）D，（3）A，（4）D，（5）D

4.-18π;　　5.$k(1-\dfrac{1}{\sqrt{5}})$;　　6.0，$\boldsymbol{2\pi}$;7.e^2-7/2;　　8.$\dfrac{\sqrt{2}}{8}\pi^2k$;

9.a=2,b=-2,$u(x,y)$=$\dfrac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\dfrac{y^3}{3}$;　10.0;　　11.4$\pi a^4$;　12.64$\pi\ \rho$;

13. $\frac{1}{420}\left(125\sqrt{5}-1\right)$;　　14.0, $\frac{4}{3}\pi a^3$,0;　　15.0,- $\frac{4}{3}\pi a^3$;　　16.34 π ;

17. $-\frac{1}{28}\pi R^7$;　　18. $\frac{6}{5}\pi R^5 + a\pi R^2$;　　19. $-\frac{\pi}{6}$

第十章自测题答案

1.（1）12a, (2) 4 $\pi\ a^4$, (3) $\frac{1}{2}\pi a^4$, (4) $\frac{3}{4}\pi R^4$, (5) $\frac{4}{3}\pi R^3$

2.(1)D, (2)C, (3)D, (4)C, (5)A　　3. $\sqrt{5}\ln 2$;　　4.-2 ;　　5. π

6.5/12 ;　　8.8 π ;　　9. $\frac{\pi}{2}h^4$

第十一章 无穷级数

一. 无穷级数的基本概念

1. 无穷级数的定义

给定一个数列 $\{u_n\}$，称表达式 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$ 为无穷级数，简称级数，

其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项。

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 称为级数的部分和（n＝1，2，3……）

2. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S。

即：$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，S＝$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，否则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

3. 收敛级数的基本性质。

4. 级数收敛的必要条件：$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$。

5. Cauchy 审敛原理

例 1．$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}$，求该级数和。

解：

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

该级数的和为 1。

例 2．求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\frac{1}{2n^2}$ 的和

解：

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$\arctan x - \arctan y = \arctan\frac{x-y}{1+xy}$，令 $x = \frac{1}{2n-1}, y = \frac{1}{2n+1}$

$$\frac{x-y}{1+xy} = \frac{1/(2n-1) - 1/(2n+1)}{1 + 1/(4n^2-1)} = \frac{1}{2n^2}$$

即：$\arctan\dfrac{1}{2n^2}=\arctan\dfrac{1}{2n-1}-\arctan\dfrac{1}{2n+1}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\arctan\frac{1}{2n-1}-\arctan\frac{1}{2n+1})=1-\arctan\frac{1}{2n+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$ ，即级数的和为 $\dfrac{\pi}{4}$

例 3．求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}q^n\cos nx\qquad(|q|<1)$ 的和

解：显然该级数收敛，设其和为 S

$$2\cos x\cdot S=\sum_{k=1}^{\infty}q^k[\cos(k+1)x+\cos(k-1)x]$$

$$=\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty}q^{k+1}\cos(k+1)x+q\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}\cos(k-1)x$$
$$=\frac{1}{q}(S-q\cos x)+q(1+S)$$

$$S=\frac{q-\cos x}{2\cos x-\frac{1}{q}-q}=\frac{\cos x-q}{q+\frac{1}{q}-2\cos x}$$

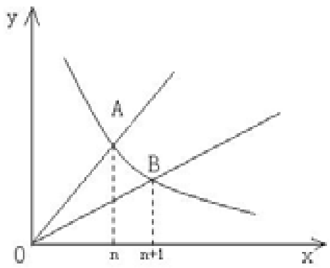
例 4．设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx,(n=1,2\ldots\ldots)$ 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值

解：$\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\dfrac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xd\tan x=\frac{1}{n(n+1)}$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}\to 1$， 即：级数的和为 1。



例 5．曲线 $y=\dfrac{1}{x^4}$ 与直线 $y=\dfrac{x}{n^5}$ 及直线 $y=\dfrac{x}{(n+1)^5}$ 围成平面图形的面积为 u_n

（1）求 $u_n \quad (n=1,2,3\ldots\ldots)$，（2）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和。

解： $u_n = \frac{1}{2} n \cdot \frac{1}{n^k} + \int_n^{n+1} \frac{1}{x^4} dx - \frac{1}{2}(n+1) \cdot \frac{1}{(n+1)^4}$

$= \frac{5}{6}\left[\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}\right] \quad (n=1,2,3\ldots\ldots)$

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n = \frac{5}{6}[1 - \frac{1}{(n+1)^3}] \quad \to \frac{5}{6}$

例 6．求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$ 的和

解： $u_n = \frac{3n-(n+1)}{3^n} = \frac{n}{3^{n-1}} - \frac{n+1}{3^n}$

$$S_n = (1-\frac{2}{3}) + (\frac{2}{3} - \frac{3}{3^2}) + (\frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3}) + \ldots\ldots + (\frac{n}{3^{n-1}} - \frac{n+1}{3^n})$$
$$= 1 - \frac{n+1}{3^n} \to 1 \quad (n \to \infty \text{时})$$

原级数的和为 1。

二. 常数项级数的审敛法

1.正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件：部分和数列 $\{S_n\}$ 有界

2. <1>比较审敛法：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n, u_n \le v_n, (n=1,2,3\ldots\ldots)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；若 $u_n \ge v_n, (n=1,2,3\ldots\ldots)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散。

<2>比较审敛法为极限形式：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，

如果：$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (0 \le l < +\infty)$，则两个级数有相同的敛散性；

如果：$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

如果：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也发散。

3.比值审敛法：正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

则当$\rho<1$时极限收敛，当$\rho>1$时级数发散，当$\rho=1$时待定。

4.极值审敛法：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$

则当$\rho<1$时极限收敛，当$\rho>1$时级数发散，当$\rho=1$时待定。

5.极限审敛法：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数

（1）如果$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=l>0$(或趋于$+\infty$时）则级数发散。

（2）当$p>1$,而$\lim\limits_{n\to\infty}n^p u_n=l \quad (0\le l<+\infty)$则级数收敛。

6.交错级数判别法：若交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足条件

（1）$u_n\ge u_{n+1},(n=1,2,3......)$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

则极限收敛，且其和$s\le u_1$,其余项r_n的绝对值$|r_n|\le u_{n+1}$.

7.绝对收敛与条件收敛

例 1.判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$的收敛性。

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}}{\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\cdot\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{e}<1$原极限收敛。

例 2.判别级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$的敛散性。

解： $(\ln n)^{\ln n}=e^{\ln\left[(\ln n)^{\ln n}\right]}=e^{\ln n\cdot\ln\ln n}=n^{\ln\ln n}$，当 n 充分大时，$\ln\ln n>2$,所以$(\ln n)^{\ln n}>n^2$

即$\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}<\dfrac{1}{n^2}$　　而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以原级数收敛。

例 3.判别级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$的收敛性。

解：$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n < n\ln n$

所以$\frac{1}{\ln n!} > \frac{1}{n\ln n}$，而级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散，所以原级数发散。

（注：$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} \ge \int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = +\infty$）

例 4.设$0 \le a_n < \frac{1}{n}$，则下列级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$

中肯定收敛的是哪个级数？

解：由于$a_n^2 < \frac{1}{n^2}$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$绝对收敛。

例 5.判别下列级数的收敛性。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$　　$(0 < x < 3\pi)$　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$　　（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$　　$(x$为任意实数$)$

解：（1）$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{x}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = x,\quad (0 < x < 3\pi)$ 由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛，由比较审敛法知原级数收敛。

（2）
$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\ln n + n\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\ln n + n\left[-\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right]\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\ln^2 n}{n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\right\} = 1$$

而调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由比较审敛法知原级数发散。

（3）$\lim_{n\to\infty} n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}} \Big/ \frac{n\pi}{2^{n+1}} = 1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{2^{n+1}}$收敛，所以原级数收敛。

（4）$1-\cos\frac{x}{n}=2\sin^2\frac{x}{2n}\le 2\frac{x^2}{4n^2}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{2n^2}$收敛，所以原级数收敛。

例 6．已知$a_n>0,b_n>0,$且$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{b_{n+1}}{b_n}$,且级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛,证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛。

证明：由$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{b_{n+1}}{b_n}$可得$0<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}<\frac{a_n}{b_n}$所以数列$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$单调下降且下方有界，必有极限。

即：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda$，其中λ为非负实数。由于$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛,由比较审敛法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛。

例 7．判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$的敛散性。$(a\ne 0)$

解：$u_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=(-1)^n\sin[\pi(\sqrt{n^2+a^2}-n)]=(-1)^n\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$

当$\frac{a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}<\frac{1}{2}$时，即 n 大于某正整数

有$0<\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}<1$，由莱布尼茨判别法知该交错级数收敛。

例 8．设数列$na_n(n=1,2......)$收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

证明：由于数列$na_n(n=1,2......)$收敛，设$S_n=na_n$作为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$部分和数列。

$S_1=a_1$，即：$u_1=a_1$。

$S_2=2a_2$，$u_2=S_2-S_1=2a_2-a_1$

$S_3=3a_3$，$u_3=S_3-S_2=3a_3-2a_2$

……　　　　　　　……

$S_n=na_n$，$u_n=S_n-S_{n-1}=na_n-(n-1)a_{n-1}$

数列$\{S_n\}$收敛，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}[na_n-(n-1)a_{n-1}]$收敛，由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$收敛，

两级数逐项相减后的级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}$也收敛，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

例 9．设 $f(x)$在$x=0$ 的某一领域内具有二阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛。

证明： 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 可得 $f(x)=o(x),x\to 0$时且 $f(0)=0$，

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 由于 $f(x)$在$x=0$ 的某一领域内具有二阶连续导数，所以$\exists M>0$，使在该领域内$\left|f''(x)\right|\le M$ 成立。

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2!}f''(\xi)x^2=\dfrac{1}{2!}f''(\xi)x^2$，$\xi$ 介于 0 与 x 之间

$\left|f(x)\right|=\dfrac{1}{2}\left|f''(\xi)\right|x^2\le\dfrac{M}{2}x^2$，$\left|f(\dfrac{1}{n})\right|\le\dfrac{M}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f(\dfrac{1}{n})\right|$收敛，结论成立。

例 10．设$0<p_1<p_2<......<p_n<......$，如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{p_n}$收敛，那么下述级数也收敛：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_1+p_2+......+p_{2n}}$$

证明： 令$u_n\overset{\Delta}{=}\dfrac{n}{p_1+p_2+......+p_{2n}}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}(p_1+......+p_n)+\frac{1}{n}(p_{n+1}+......+p_{2n})}$

$$<\frac{1}{\frac{1}{n}(p_1+......+p_n)+p_{n+1}}<\frac{1}{p_{n+1}}$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{p_{n+1}}$收敛，所以所求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{p_1+p_2+......+p_{2n}}$也收敛

例 11．求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{m}{2^n}$之和，其中 m 为某自然数。

解： $\cot 2m=\dfrac{1-\tan^2 m}{2\tan m}=\dfrac{1}{2}\left(\cot m-\tan m\right)$

即：$2\cot 2m-\cot m=-\tan m$　　　　　　　(1)

将式（1）中的 m 分别用$\dfrac{m}{2},\dfrac{m}{4}......\dfrac{m}{2^n},......$代替，可得：

$$2\cot m-\cot\frac{m}{2}=-\tan\frac{m}{2}$$

$$2\cot\frac{m}{2}-\cot\frac{m}{4}=-\tan\frac{m}{4}$$

$$\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots$$

$$2\cot\frac{m}{2^{n-1}}-\cot\frac{m}{2^n}=-\tan\frac{m}{2^n}$$

用$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\ldots\ldots,\frac{1}{2^n}$依次乘上面的等式，然后两边分别相加，得：

$$\cot m-\frac{1}{2^n}\cot\frac{m}{2^n}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{m}{2^k}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2^n}\cot\frac{m}{2^n}-\cot m\right]=\frac{1}{m}-\cot m$$

三．幂级数

1.设在区间 I 上定义一个函数列$u_n(x), n=1,2,....$ ，表达式$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$称为定义在 I 上的函数项级数。

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛，则点$x_0$为级数的收敛点，收敛点的全体为其收敛域，类似可得发散点，发散域；在收敛域内，级数的和函数为$S(x)$

2.形如$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的函数项级数称为幂级数，有其收敛域半径 R，收敛区间为（－R，R），收敛域是$(-R,R),[-R,R),(-R,R],[-R,R]$这四个区间之一。

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{(如果极限存在)}$$

3.**Abel 定理**：如果级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0(x_0\neq 0)$时收敛则满足$|x|<|x_0|$的一切 x，级数绝对收敛；如果级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0(x_0\neq 0)$时发散，则满足$|x|>|x_0|$的一切 x，级数均发散。

4.幂级数的性质：

（1）幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数在其收敛区间内连续。

（2）幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在其收敛区间内可以逐项微分和逐项积分。

5.函数展开成幂级数

函数 $f(x)$ 在点 x_0 为某一领域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该领域内能展开成 Taylor 级数的充要条件是：

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

常用函数幂级数展开式：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots\ldots, (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\ldots, (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ldots, (-\infty < x < \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots\ldots, (-1 < x \le 1)$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2 + \ldots\ldots + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n + \ldots\ldots, (-1 < x < 1)$$

例 1．求下列幂级数的收敛域

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} x^n$　（2）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^n x^{2n-1}$　（3）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$

解：　（1）$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{3^n}{\sqrt{n}}} = 3$

收敛半径 $R = \frac{1}{3}$，收敛域为：$[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

（2）$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} 2x^2 < 1$

即：$|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$时，级数绝对收敛，收敛域为 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

（3）令 $t = x+1$

原级数＝$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} t^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{3^n + (-2)^n} \right| = 3$$

收敛半径 $R = \frac{1}{3}$，收敛域为：$[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

而$-\frac{1}{3}\le x+1<\frac{1}{3}$，即原级数的收敛域为：$[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$

例 2．求函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$的收敛区间

解： 令$t=\frac{1-x}{1+x}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}t^n$的收敛域为：$[-1,1)$

$-1\le\frac{1-x}{1+x}<1$即：$x>0$,原级数收敛区间为：$(0,+\infty)$

例 3.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+......+\frac{1}{n}}x^n$的收敛区间

解： 由于：$0<\frac{1}{n}<1+\frac{1}{2}+......+\frac{1}{n}<n$所以$\frac{1}{n}|x|^n\le\frac{1}{1+\frac{1}{2}+......+\frac{1}{n}}|x|^n\le n|x|^n$

而幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n,\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$的收敛半径都为 1，所以原级数的收敛半径也等于 1，收敛区间为

$[-1,1)$

例 4.求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$的和函数

解: 收敛半径$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}=1$,收敛域为$(-1,1)$记级数的和函数为：$f(x), f(0)=1$

当$|x|<1$时

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2t^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=x\left[x+x^2+......+x^{n+1}+......\right]'$$

$$=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=x\cdot\frac{(1-x)+x}{(1-x)^2}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

上式两边对 x 求导得：

$$f(x)=\frac{(1-x)^2+2(1-x)\cdot x}{(1-x)^4}=\frac{1+x}{(1-x)^3},\qquad |x|<1$$

例 5.求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$在其收敛域$|x|<1$中的和函数

解： 当$|x|<1$时$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)x^n=\frac{x}{1-x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$

当$x\neq 0$时$S(x)=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^n dt$

$$=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t}{1-t}dt=\frac{x}{1-x}+\frac{1}{x}[x+\ln(1-x)]=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x)$$

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x), & 0<|x|<1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

例 6.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{(2n-1)!}x^{2n-1}$的收敛区间及和函数

解： $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=0$，所以收敛半径为$R=+\infty$，收敛域为：$(-\infty,+\infty)$，记和函数为$S(x)$

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x\frac{2n}{(2n-1)!}t^{2n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)!}$$

$$=x(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-......)=x\cdot\sin x$$

上式两边对 x 求导$S(x)=\sin x+x\cos x$

例 7.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$的收敛域及和函数

解： $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=+\infty$ 收敛域为：$(-\infty,+\infty)$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)-n}{n!}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n$$

$$=x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k+x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k=(x^2+x)e^x$$

例 8.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+(-3)^n}{n}x^n$的收敛域及和函数

解：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{5^n+(-3)^n}{5^{n+1}+(-3)^{n+1}}\right|=\dfrac{1}{5}$，收敛域为：$[-\frac{1}{5},\frac{1}{5})$

和函数：

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3x)^n}{n}=-\ln(1-5x)-\ln(1+3x)=-\ln(1-5x)(1+3x)$$

例 9.求幂级数 $\sum\limits_{n=}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数

解：显然收敛域为 $(-\infty,+\infty)$ 由于：$e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\ldots\ldots+\dfrac{1}{(2n)!}x^{2n}+\ldots\ldots$

$e^{-x}=1-x+\dfrac{1}{2!}x^2-\ldots\ldots+\dfrac{1}{2n!}x^{2n}+\ldots\ldots$,所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

例 10.求函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 的幂级数展开式

解：由于：$f(0)=\dfrac{\pi}{4}, f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 所以 $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\qquad x\in[-1,1)$$

例 11.求函数 $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x-1}{x}\right)$ 的幂级数展开式，指出其收敛范围，并求出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n-1}{(2n)!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{2n}$ 的和

解：$\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4-\dfrac{1}{6!}x^6+\ldots\ldots$

$$\frac{\cos x-1}{x}=-\frac{1}{2!}x+\frac{1}{4!}x^3-\frac{1}{6!}x^5+\ldots\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n-1}$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(2n)!}x^{2(x-1)},|x|<\infty$$

$$x^2 f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(2n)!}x^{2n}$$

而 $x^2 f(x)=x^2\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x-1}{x}\right)=x^2\dfrac{-\sin x\cdot x-(\cos x-1)}{x^2}=1-\cos x-x\sin x$

$x=\dfrac{\pi}{2}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n-1}{(2n)!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{2n}=1-\cos\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}=1-\dfrac{\pi}{2}$

例 12.将 $f(x)=\cos x$展成$(x-\dfrac{\pi}{4})$的幂级数

解： $\cos x=\cos\left[\dfrac{\pi}{4}+(x-\dfrac{\pi}{4})\right]=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos(x-\dfrac{\pi}{4})-\sin(x-\dfrac{\pi}{4})\right]$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+(-1)^n}{2}}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^{n+1}}{(n+1)!}\right]$$

四．Fourier 级数

1.**Dirichlet 收敛定理**

设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数，如果其满足：在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，并且至多只有有限个极值点，则 $f(x)$ 可展成 Fourier 级数如下

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

其中 $a_n=\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi}{l}xdx,\quad (n=1、2、\cdots)$

$b_n=\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx,\quad (n=1、2、\cdots)$

当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$；

当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$。

2.当 $f(x)$ 是偶函数时，则

$$b_n=0,\quad (n=1、2、\cdots)\qquad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,\quad (n=1、2、\cdots)$$

级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi}{l}x\right)$称为余弦函数。

当 $f(x)$ 是奇函数时，

$$a_n=0,\quad (n=1、2、\cdots)\qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,\quad (n=1、2、\cdots)$$

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)$称为正弦函数。

3.周期延拓，奇延拓，偶延拓

例 1.将$\cos x$在$0<x<\pi$内展开为以2π为周期的正弦级数。

解： 将函数$\cos x$在$-\pi<x<0$上作奇延拓，

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x<\pi \\ -\cos x, & -\pi<x<0\end{cases}$$

则　$a_n=0,\quad (n=1、2、\cdots)\qquad b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin x dx=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx dx=\frac{2n}{\pi}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1},\quad (n=2、3、\cdots)$$

当$0<x<\pi$时，$\cos x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}n\sin nx=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx$

例 2.将函数$f(x)=\pi^2-x^2,\quad (-\pi\le x\le\pi)$展开成 Fourier 级数。

解： 将函数$f(x)=\pi^2-x^2$,在$[-\pi,\pi]$处作周期延拓

$$F(x)=\begin{cases}\pi^2-x^2, & -\pi\le x\le\pi \\ \pi^2-(x-2k\pi)^2, & -\pi+2k\pi\le x\le\pi+2k\pi\end{cases}$$

由于$f(x)$是偶函数

$$b_n=0,\quad (n=1、2、\cdots)\qquad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)dx=\tfrac{4}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx dx=\frac{4(-1)^n}{n^2},\quad (n=1、2、\cdots)$$

所以在$[-\pi,\pi]$上，$f(x)=\pi^2-x^2=\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

例 3.将函数$f(x)=x+2$在$(2,6)$上展开为正弦级数。

解： 令$F(x)=\begin{cases}x+2, & 0\le x\le 6 \\ x-2, & -6\le x<0\end{cases}$

$F(x)$是周期为 12 的奇函数，在$[2,6]$上，$F(x)=f(x)$

$F(x)$在$[0,6]$上的正弦级数为$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{6}x$

其中　$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^6(x+2)\sin\frac{n\pi}{6}xdx=\frac{4}{n\pi}\left[1-(-1)^n\cdot 4\right],\quad (n=1、2、\cdots)$

则 $f(x)=x+2=\frac{4}{n\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-1)^n\cdot 4\right]\sin\frac{n\pi}{6}x,\quad (2<x<6)$

例 4. 将 $f(x)=2+|x|$，$(-1\le x\le 1)$展开为以 2 为周期的 Fourier 级数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和。

解： $f(x)$是周期为 2 的连续函数，并且是偶函数，则其 Fourier 级数是余弦函数

$$b_n=0,\quad (n=1、2、\cdots)\quad a_0=2\int_0^1(2+x)dx=5$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi xdx=\begin{cases}0 & n=2m\\ -\frac{4}{\pi^2(2m+1)^2} & n=m+1\end{cases}$$

$$f(x)=2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)\pi x\qquad |x|<1$$

当 $x=0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}$

习题十一

1. 求正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$的和。

2. 判别下列级数的敛散性。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$　　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2}{5}\right)^n$　　　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{5}{4}}}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)},\qquad (a>0,b>0)$

3.讨论下列级数的敛散性，如果收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$　　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

4.设偶函数 $f(x)$ 为二阶导数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(0)=1, f''(0)=2$

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}-1\right)\right]$ 绝对收敛。

5.数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{3n}\right)\left(\frac{3+x}{3-2x}\right)^n$ 的收敛域。

6.求级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{2k}}{(2k-1)!}$ 的和。

7.求幂函数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot n!}x^n$ 的收敛域及和函数。

8.将函数 $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$ 展开成 x 的幂级数。

9. $f(x)=1-x$，$(0\le x\le 1)$ 将 $f(x)$ 展开成正弦级数。

10.将函数 $f(x)=\frac{1}{2}\cos x+|x|$，$(-\pi\le x\le\pi)$ 展开成余弦级数。

习题答案

1.　和为 1/5

2.　（1）发散　　（2）收敛　　（3）收敛　　（4）收敛

　（5） $a<b$ 时，级数收敛；$a\ge b$ 时，级数发散。

3.（1）条件收敛　　（2）发散　　（3）条件收敛

4.提示：$f(x)$ 是可导的偶函数，所以 $f'(0)=0$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\zeta)}{2!}x^2$$

所以 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{2}\left|f''(\zeta)\right|\frac{1}{n^2}\le\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$

则原函数绝对收敛。

5．收敛域为 $\{x|x<0,\text{或}x\ge 6\}$

6.　其和为 $\frac{3}{2}\left(e^3-e^{-3}\right)$

7.　收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，和函数为　$e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)$

8. $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{3^{2n}},\qquad |x|<3$

9. $\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\pi x}{n}=\begin{cases}0, & x=0\\ f(x), & 0<x\le 1\end{cases}$

10. $f(x)=\dfrac{\pi}{2}+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi}\right)\cos x-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}\qquad |x|\le\pi$

第十二章 微分方程

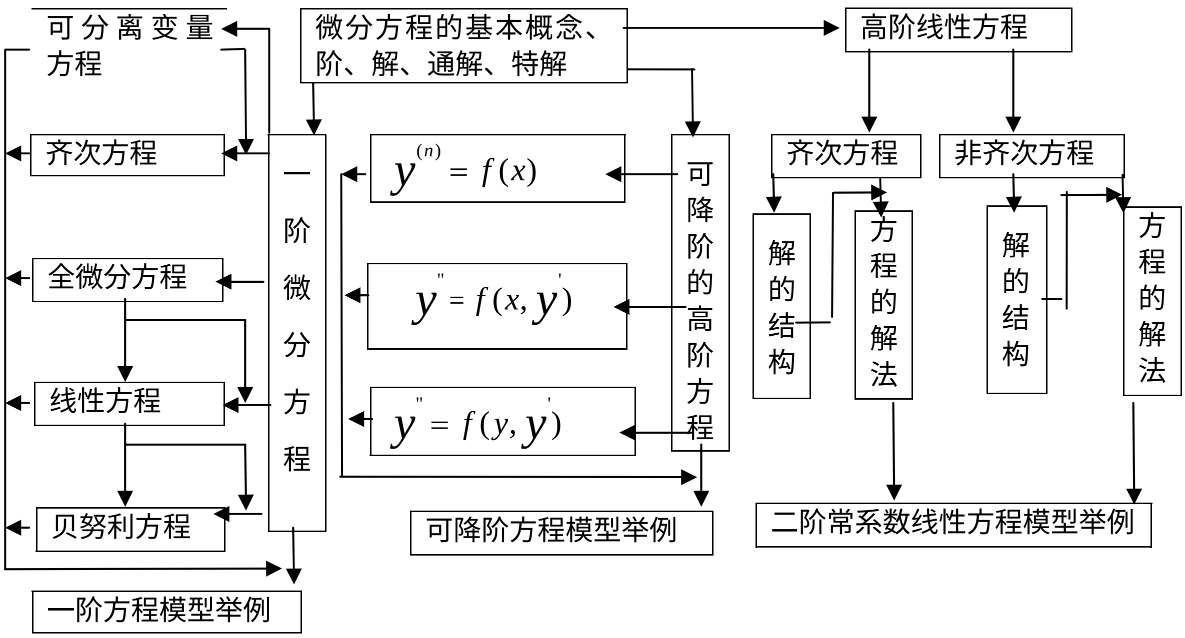
一、基本要求

1、 了解微分方程及其解、阶、通解、初始条件和特解等概念；
2、 对于一阶微分方程,要能够根据类型确定解法；
3、 会识别可分离变量的方程 、齐次方程 、一阶线性方程,伯努利方程和全微分方程；
4、 熟练掌握可分离变量的方程及一阶线性方程的解法；
5、 会解齐次方程的伯努利方程,从中领会用变量代换求解方程的思想;会解较简单的全微分方程；
6、 会用降阶法解下列方程：$y^{(n)}=f(x), y''=f(x,y'),\ y''=f(y,y')$. ；
7、 理解线性微分方程的解的性质及解的结构定理；
8、 熟练掌握二阶线性常系数齐次线性微分方程的解法(特征根法);知道高阶线性常系数齐次方程的解法；
9、 会求自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数，以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程的特解和通解；
10、 了解微分方程的幂级数解法；
11、 会用微分方程解决一些简单的应用问题；

二、主要内容

常微分方程的概念，微分方程的解、阶、通解、初始条件和特解，变量可分离的方程，齐次方程，一阶线性方程，可降阶的高阶微分方程，线性微分方程解的性质及解的结构定理，二阶常系数齐次线性微分方程，简单的二阶常系数非齐次线性微分方程，微分方程的简单应用。

1、内容框图



2、微分方程的基本概念

名　称	定　义	说　明
微分方程	凡表示未知函数、未知函数导数与自变量之间的关系的方程，叫做微分方程；未知函数是一元函数的，叫做常微分方程，未知函数是多元函数的，叫做偏微分方程	若方程中不含导数,则解方程变成求隐函数
微分方程的阶	微分方程中的出现的未知函数的最高阶导数的阶数	
n阶微分方程	$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$	$x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 可以不出现

微分方程的解	设函数 $y=\psi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数,如果在区间 I 上, $F[x,\psi(x),\psi'(x)\cdots,\psi^{(n)}(x)]\equiv 0$ 则称 $y=\psi(x)$ 是微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})_x=0$ 在区间 I 上的解	
微分方程的通解	n 阶微分方程的含有 n 个独立的任意常数的解	通解不一定包含所有的特解
微分方程的特解	微分方程的不包含任意常数的解	
所有解	通解及不能包含在通解中的特解	
初始条件	为求特解而设定的条件	
初值问题的解	满足微分方程和初值的特解	
积分曲线	解的图形	

3、常见一阶微分方程

名　称	表 达 式	通解或解法
可分离变量的方程	$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)\psi(y)$	$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int\varphi(x)dx$ 及一些可能的特解
齐次方程	$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$	令 $u=\frac{y}{x}$. 将 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ 代入 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$，得 $x\frac{du}{dx}=f(u)-u$. 再按可分离变量的方程求解，最后依变量还原 $u=\frac{y}{x}$.
一阶线性方程	$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$	（1）齐次线性方程（$Q(x)=0$）通解为：$y=Ce^{-\int P(x)dx}$
		（2）非齐次线性方程 ($Q(x)\neq 0$) 通解为：$y=e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)$
伯努利方程 (Bernoulli)	$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$ $(n\neq 0,1)$	令 $Z=y^{1-n}$ 原方程变为：$\frac{dZ}{dx}+(1-n)P(x)Z=(1-n)Q(x)$, 按一阶线性方程求解，最后把未知函数还原 $Z=y^{1-n}$
全微分方程	$p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$ 若它的左端恰好是某一个函数 $u=U(x,y)$ 的全微分 $du(x,y)$ $=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$	当条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 不满足时 $u(x,y)\equiv\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=c$ 其中 (x_0,y_0) 是适当选定的一点
		当条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 不满足时，若有一个适当的函数 $\mu=\mu(x,y)$ 使 $\mu Pdx+\mu Qdy=0$ 成为全微分方程，则函数 $\mu(x,y)$ 称为原方程的积分因子
其它可解的一阶	(1) $\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$	若 $b=0$，变为可分离变量的微分方程；若 $b\neq 0$，令 $u=ax+by+c$ 则原方程化为可分离变量方程 $u'=bf(u)+a$

微分	(2) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})}$	当$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a_1b_1}\\\boldsymbol{a_2b_2}\end{vmatrix}\neq 0$时，可作变换$u=x-x_0,v=y-y_0$，其中$x_0,y_0$满足$a_ix+b_iy+c_i=0,i=1,2$
		当$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a_1b_1}\\\boldsymbol{a_2b_2}\end{vmatrix}=0$时，即$\boldsymbol{a_1b_2-a_2b_1=0}$也即$\boldsymbol{a_2x+b_2y=\lambda(a_1x+b_1y)}$，可作变换$\boldsymbol{z=a_1x+b_1y}$将其化为可分离变量方程。

4、可降阶的高阶微分方程

类　型	解法及通解
$y^{(n)}=f(x)$	经过$\boldsymbol{n}$次积分可得原方程的含有$\boldsymbol{n}$个任意常数的通解
$y''=f(x,y')$	令$y'=p$，则$y''=\frac{dp}{dx}=p'$，原方程降为一阶微分方程$p'=f(x,p)$。设其通解为$p=\psi(x,C_1)$，则又有：$p=\frac{dy}{dx}$,得$\frac{dy}{dx}=\psi(x,C_1)$对它进行积分，便得原方程的通解为：$y=\int\psi(x,C_1)dx+C_2$
$y''=f(y,y')$	令$y'=p$，则$\boldsymbol{y''=p\frac{dp}{dy}}$，原方程降为一阶微分方程$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$，设它的通解为：$y'=p=\psi(y,C_1)$，分离变量并积分，便得原方程的通解：$\int\frac{dy}{\psi(y,C_1)}=x+C_2$

5、二阶线性微分方程解的解构

名　称	$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)\cdots(1)$ $y''+P(x)y'+Q(x)y=0\cdots(2)$ （1）式称为二阶非齐次线性微分方程，$\boldsymbol{f(x)}$称为自由量，(2)式称为(1)式所对应的齐次线性微分方程
解的解构定理	若　y_1和y_2是（2）的两个解，则$y=C_1y_1+C_2y_2$也是（2）式的解，（c_1,c_2为任意常数）
	若y_1和y_2是（2）的两个线性无关的特解，则$y=C_1y_1+C_2y_2$是（2）式的通解
	若$\boldsymbol{Y}$是(2)的通解，y^*是（1）式的特解：则$y=Y+y^*$是（1）式的通解
	若$y_1=y_1(x),y_2=y_2(x)$分别是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$ 与 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$ 的特解，则 $y=y_1+y_2$是$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$的特解

6 二阶常系数齐次线性方程的通解

特征方程$r^2+pr+q=0$的两个根r_1,r_2	微分方程$y''+py'+q=0$的通解
两个不相等的实根r_1,r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根$r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭变根$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

7、$\boldsymbol{n}$阶常系数齐次线性微分方程

方　　程	$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$其中$p_1,p_2,\cdots p_n$都是常数

特征方程	$r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$

8、$\boldsymbol{n}$ 阶常系数齐次线性方程的特征方程的特征根对应于微分方程通解的项

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
(1) 单实根 $\boldsymbol{r}$	给出一项：Ce^{rx}
(2) 一对单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出两项：$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
(3) $\boldsymbol{k}$ 重实根 $\boldsymbol{r}$	给出 $\boldsymbol{k}$ 项：$e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
(4) 一对 $\boldsymbol{k}$ 重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出 $2\boldsymbol{k}$ 项：$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

9、二阶常系数非齐次线性方程通解中特殊 y^* 的求法

类　　型	特解 y^* 的求法
$f(x)=p_n(x)e^{\alpha x}$，其中 $p_n(x)$ 为 n 次多项式	若 α 不是特征根，应设 $y^*=Q_n(x)e^{\alpha x}$；若 α 是特征根，应设 $y^*=xQ_n(x)e^{\alpha x}$；若 α 是特征重根，应设 $y^*=x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$，其中 $Q_n(x)$ 是特定的 n 次多项式
$f(x)=e^{\alpha x}[p_i(x)\cos\beta x+p_m(x)\sin\beta x]$ 其中 $p_i(x),p_m(x)$ 分别为 i 次，m 次多项式	若 $\alpha\pm i\beta$ 不是特征根，应设 $y^*=e^{\alpha x}[Q_n(x)\cos\beta(x)+R_n(x)\sin\beta x]$； 若 $\alpha\pm i\beta$ 是特征根，应设 $y^*=xe^{\alpha x}[Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x]$，其中 $Q_n(x)$ 与 $R_n(x)$ 是系数待定的 n 次多项式 n=max{i,m}

10、欧拉方程

欧拉方程	解法
$ax^2\dfrac{d^{2y}}{dx^2}+bx\dfrac{dy}{dx}+cy=f(x)$	作变换 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$，则得二阶常系数线性微分方程 $a\dfrac{d^2y}{dt^2}+(b-a)\dfrac{dy}{dt}=f(e^t)$

11、二阶齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的幂级数解法

定理	如果方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 中的系数 $\boldsymbol{P(x)}$ 与 $\boldsymbol{Q(x)}$ 可在 $-\boldsymbol{R}<\boldsymbol{x}<\boldsymbol{R}$ 内展开为 $\boldsymbol{x}$ 的幂级数，则 $-\boldsymbol{R}<\boldsymbol{x}<\boldsymbol{R}$ 在内方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 必有形 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 为的解

二、例题解析

例 1：验证由 $e^{2y}=xy$ 决定的函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x(2y-1)y''=2y'(1-y-xy')$.

证明：按题意，$2y=\ln x+\ln y$.

两边求导 $2y'=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}y'$ 或者 $2xyy'=y+xy'$

两边再求导数 $2(yy'+xy'^2+xyy'')=y'+y'+xy''$.

移项得到 $2xyy''-xy''=2y'-2yy'-2xy'^2$ 正是 $x(2y-1)y''=2y'(1-y-xy')$

即 $e^{2y}=xy$ 是满足给出微分方程的解。

例 2 求微分方程 $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=2xy}$ （1）
的通解。
解 方程（1）是可分离变量的，分离变量后得
$\frac{dy}{y}=2xdx,$ 两端积分
$\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx,$
得 $\ln|y|=x^2+C_1,$
从而 $y=\pm e^{x^2+c_1}=\pm e^{c_1}e^{x^2}.$
因 $\pm e^{c_1}$ 仍是任意常数，把它记作 C，便得方程（1）的通解 $y=Ce^{x^2}$
例 3 求方程 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=1-x+y^2-xy^2\\ y|_{x=0}=1\end{cases}$ 的特解。
解：该方程看似复杂，其实右端项因式分解后仍是可分离变量的微分方程
原方程改写为 $\frac{dy}{dx}=(1-x)(1+y^2)$ 或 $\frac{dy}{1+y^2}=(1-x)dx$
两边积分 $\arctan y=x-\frac{1}{2}x^2+c.$
由 $y|_{x=0}=1$ 得到 $c=\frac{\pi}{4}$，故原方程的特解为 $\arctan y=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{\pi}{4}$ 或 $y=\tan(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{\pi}{4}).$
例 4
设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且不恒为零，又 $f'(0)$ 存在并对任意 x,y，恒有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，求 $f(x).$
解：首先从导数定义出发，证明 $f(x)$ 处处可微，并求出 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 满足的关系，最后定出 $f(x).$
由于 $f(x)$ 不恒为零，设 $f(x_0)\neq 0$，因而
$f(x_0)=f(x_0+0)=f(x_0)f(0)$ 得到 $f(0)=1.$
又由 $f'(0)$ 存在，对任意 x 有

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\left[f(\Delta x)-1\right]}{\Delta x}=f(x)\cdot f'}(0).$$

由此可见 $\boldsymbol{f(x)}$ 处处可微且满足
$f'(x)=f(x)f'(0)$ 即 $\frac{df}{f}=f'(0)dx$
解得 $f(x)=ce^{f'(0)x}$
又由 $f(0)=1$ 所以 $f(x)=e^{f'(0)x}.$
例 5 求下列方程 $y'+\sin\frac{x+y}{2}=\sin\frac{x-y}{2}$ 的通解。
解：将上题变形为
$y'+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}+\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}$ 即

$\frac{dy}{dx}=-2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}.$

$\frac{dy}{\sin y/2}=-2\cos\frac{x}{2}dx$

积分得到通解：$\ln|\tan\frac{y}{4}|=c-4\sin\frac{x}{2}(y\neq 2n\pi).$

直接验证 $y=2n\pi(n=0,\pm1,\pm2\cdots)$ 也是方程的解。

例 6 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续 $f(1)=\frac{5}{2}$，且对所有 x， $t\in(0,+\infty)$ 满足条件

$\int_1^{xt}f(u)du=t\int_1^x f(u)du+x\int_1^t f(u)du,$ 求 $f(x).$

解：由题意可知，等式的每一项都是 x 的可导函数，于是等式两边对 x 求导，得

$tf(xt)=tf(x)+\int_1^t f(u)du.(1)$

在（1）式中令 $x=1$，由 $f(1)=\frac{5}{2}$，得

$tf(t)=\frac{5}{2}t+\int_1^t f(u)du$ （2）

则 $f(t)$ 是 $(0,+\infty)$ 内的可导函数。(2) 式两边对 t 求导，得

$f(t)+tf'(t)=\frac{5}{2}+f(t)$

即 $f'(t)=\frac{5}{2t}.$

上式两边求积分，得 $f(t)=\frac{5}{2}\ln t+c$

由 $f(1)=\frac{5}{2}$，得 $c=\frac{5}{2}.$

于是 $f(x)=\frac{5}{2}(\ln x+1).$

例 7 求微分方程 $(y')^2+xy'+x^2y-x^2y^2=0$ 的全部解。

解：由于

$(y')^2+xy'+x^2y-x^2y^2$

$=\left[(y')^2-x^2y^2\right]+x(y'+xy)$

$=(y'-xy)(y'+xy)+x(y'+xy)$

$=(y'+xy)(y'-xy+x)$

故原方程变成 $y'+xy=0(1)$

或者 $y'-xy+x=0(2)$

（1）式即 $\frac{dy}{y}=-xdx$ 解得 $y=c_1e^{-\frac{x^2}{2}}$

（2）式即 $\frac{dy}{y-1}=xdx$ 解得 $y=c_2e^{\frac{x^2}{2}}+1.$

故全部解可写成

$(y-c_1e^{\frac{x^2}{2}})(y-c_2e^{\frac{x^2}{2}}-1)=0, c_1c_2$ 任意常数。

例 8 解方程

$$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx.}$$

解 原方程可写成

$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}-1}$,因此是齐次方程。令 $\frac{y}{x}=u,$，则

$y=ux,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$, 于是原方程变为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1},$$

即

$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}$.分离变量，得

$(1-\frac{1}{u})du=\frac{dx}{x}$.两端积分，得

$u-\ln|u|+C=\ln|x|$, 或写为

$\ln|xu|=u+C.$

以 $\frac{y}{x}$ 代上式中的 u，便得所给方程的通解为

$$\ln|y|=\frac{y}{x}+C.$$

例 9 求方程 $y'=\frac{y^3}{2(xy^2-x^2)}$ 的通解。

解：方程两边同乘以 $2y$，并令 $u=y^2, u'=2y\bullet y'$.

即得 $u'=\frac{u^2}{xu-x^2}=\frac{(u/x)^2}{\frac{u}{x}-1}$.

令 $u=vx, u'=v+xv'$.，原方程化为 $v+xv'=\frac{v^2}{v-1}$

化简得 $\frac{v-1}{v}dv=\frac{dx}{x}$

积分后　$v-\ln v=\ln x+\ln c$

$$v=\ln(vxc)$$

$$\frac{u}{x}=\ln cu$$

变量还原得方程通解为 $cy^2=e^{y^2/x}$

［注意］本题也可改为 $x(y)$ 的形式，得到

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2(xy^2-x^2)}{y^3}=\frac{2x}{y}-\frac{2x^3}{y^3}$$

即$\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=-2x^2\bullet\frac{1}{y^3}$为伯努利方程

令$u=x^{-1},\frac{du}{dy}=-\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dy}$

方程转化为$\frac{du}{dy}+\frac{2}{y}u=\frac{2}{y^3}$

$$u=e^{-\int\frac{2}{y}dy}\left[c+\int\frac{2}{y^3}e^{\int\frac{2}{y}dy}dy\right]$$

$$=y^{-2}\left[c+\ln y^2\right]=cy^{-2}+y^{-2}\ln y^2.$$

变量还原得到$\frac{1}{x}=cy^{-2}\ln y$

或者$\frac{y^2}{x}=\ln c_1y^2,c=\ln c_1.$

即$c_1y^2=e^{y^2/x}$.

例 10 求方程

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

的通解。

解　这是一个非齐次线性方程。先求对应的齐次方程的通解

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=0,$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1},$$ 。

$$\ln y=2\ln(x+1)+\ln C,$$

$$y=C(x+1)^2.$$

用常数变易法，把 C 换成 u，即令

$$y=u(x+1)^2,(1)$$

那么$\frac{dy}{dx}=u'(x+1)^2+2u(x+1),$

代入所给非齐次方程，得

$$u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

两端积分，得$u=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$再把上式代入（1）式，即得所求方程的通解为

$$y=(x+1)^2[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C].$$

例 11 求方程

$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$的通解。

解　以y^2除方程的两端，得

$y^{-2}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y^{-1}=a\ln x,$

即 $-\dfrac{d(y^{-1})}{dx}+\dfrac{1}{x}y^{-1}=a\ln x,$

令 $z=y^{-1}$，则上述方程成为

$\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{1}{x}z=-a\ln x.$

这是一个线性方程，它的通解为

$z=x[C-\dfrac{a}{2}(\ln x)^2].$

以 y^{-1} 代 z，得所求方程的通解为

$yx[C-\dfrac{a}{2}(\ln x)^2]=1.$

例 12 解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y.}$

解 若把所给方程变形为

$\dfrac{dx}{dy}=x+y,$

即为一阶线性方程，则按一阶线性方程的解法可求得通解。

也可用变量代换来解所给方程：

令 $x+y=u,$ 则 $y=u-x,\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1.$ 代入原方程，得

$\dfrac{du}{dx}-1=\dfrac{1}{u},\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u+1}{u}.$

分离变量得

$\dfrac{u}{u+1}du=dx,$

两端积分得 $u-\ln|u+1|=x+C.$

以 $u=x+y$ 代入上式，即得

$y-\ln|x+y+1|=C,$

或 $x=C_1e^y-y-1,(C_1=\pm e^{-c}).$

例 13 已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{3x}f(\dfrac{t}{3})dt+e^{2x}$ 求 $f(x).$

解：方程两端同时对 x 求导，得到 $f'(x)=3f(x)+2e^{2x}$

由题设知道 $f(0)=0+e^0=1.$

故令 $f(x)=y$ 即得 $\begin{cases}y'-3y=2e^{2x}\\ y|_{x=0}=1\end{cases}$

$y=e^{3\int dx}\left[c+\int 2e^{2x}\bullet e^{-\int 3dx}dx\right]$

$=e^{3x}\left[c+\int 2e^{-x}dx\right]$

$=ce^{3x}-2e^{2x}.$

由 $y|_{x=0}=1.$ 得到 $c=3$

于是 $f(x)=3e^{3x}-2e^{2x}$.

例 14 设 $y=e^{x}$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的特解，求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2}=0$ 的特解。

解：把 $y=e^{x}$ 代入原方程，得 $xe^{x}+p(x)\bullet e^{x}=x$

解出 $p(x)=xe^{-x}-x$

代入原方程得 $xy'+(xe^{-x}-x)y=x$

两边除以 x 得到一阶线性方程 $y'+(e^{-x}-1)y=1$

相应齐次方程为 $\dfrac{dy}{y}=(1-e^{-x})dx$

$$\ln y-\ln c=e^{-x}+x$$

即 $y=ce^{x+e^{-x}}$ 而 $y=e^{x}$ 是它的特解，故原方程通解为

$y=e^{x}+ce^{x+e^{-x}}$

由 $y|_{x=\ln 2}=0$,得 $2+2e^{\frac{1}{2}}\bullet c=0$　　$c=-e^{-\frac{1}{2}}$

故所求特解为 $y=e^{x}-e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}$.

例 15 已知可微函数 $f(t)$ 满足 $\int_1^x \dfrac{f(t)}{t^3 f(t)+t}dt=f(x)-1$ 试求 f(x).

解：首先从题设可求得 f(1)=1

方程两边求导得 $\dfrac{f(x)}{x^3 f(x)+x}=f'(x)$

记 $y=f(x)$，得 $y'=\dfrac{y}{x^3 y+x}$ 考虑 x=x(y)，

方程可化为伯努利方程 $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=x^3$ 且 $y|_{x=1}=1$

令 $u=x^{-2}$　　$du=-2x^{-3}dx$

$$\frac{du}{dy}+\frac{2}{y}u=-2$$

$$u=e^{-\int\frac{2}{y}dy}\left[c+\int -2\bullet e^{\int\frac{2}{y}dy}dy\right]$$

$$=\frac{1}{y^2}\left[c-\frac{2}{3}y^3\right]$$

$$=\frac{c}{y^2}-\frac{2}{3}y$$

变量还原得 $\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{c}{y^2}-\dfrac{2}{3}y$ 或者 $\dfrac{f^2(x)}{x^2}+\dfrac{2}{3}f^3(x)=c.$

例 16 求微分方程 $\cos^2 x\dfrac{dy}{dx}+y=\tan x$ 的通解。

解：令 $u=\tan x$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\bullet\dfrac{du}{dx}=\dfrac{dy}{du}\bullet\sec^2 x.$

原方程化为 $\dfrac{dy}{du}+y=u.$故 $y=e^{-\int 1du}\left[c+\int ue^{\int 1du}du\right]$

$$=c\bullet e^{-u}+u-1$$

变量还原得到 $y=ce^{-\tan x}+\tan x-1.$

［注意］本题也可化为 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{\cos^2 x}y=\dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$ 是一阶线性方程，直接代公式求，但没有上法简捷。

例 17 设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 P(x,y)(x>0)到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 经过点 $(\dfrac{1}{2},0)$.

（1）　试求曲线 L 的方程；

（2）　求 L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小。

解(1)设曲线 L 过点 P(x,y)的切线方程为 $Y-y^2=y'(X-x)$ 令 X=0,则得该切线在 y 轴上的截距为 $y-xy'$.

由题设知 $\sqrt{x^2+y}=y-xy'$,

令 $u=\dfrac{y}{x}$,则此方程可化为 $\dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\dfrac{dx}{x}$,

解之得 $y+\sqrt{x^2+y^2}=C.$

由 L 经过点 $(\dfrac{1}{2},0)$,知 $C=\dfrac{1}{2}$.,于是 L 方程为 $y+\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}$, 即 $y=\dfrac{1}{4}-x^2.$

(2) 设第一象限内曲线 $y=\dfrac{1}{4}-x^2$ 在点 P(x,y) 处的切线方程为 $Y-(\dfrac{1}{4}-x^2)=-2x(X-x).$ 即

$$Y=-2X+x^2+\frac{1}{4}(0<x\le\frac{1}{2})$$

它与 x 轴及 y 轴交点分别为 $(\dfrac{x^2+\frac{1}{4}}{2x},0)$ 与 $(0,x^2+\dfrac{1}{4})$.所求面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}\bullet\frac{(x^2+\frac{1}{4})^2}{2x}-\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}-x^2)dx.$$

对 x 求导得 $S'(x)=\dfrac{1}{4}\bullet\dfrac{4x^2(x^2+\frac{1}{4})-(x^2+\frac{1}{4})^2}{}$

$$=\frac{1}{4x^2}(x^2+\frac{1}{4})(3x^2-\frac{1}{4}).$$

令 $S'(x)=0$,解得 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

当 $0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 时, $S'(x)<0$; $x>\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 时, $S'(x)>0$, 因而 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 是 S(x)在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 内的唯一极小值点,即最小值点.于是所求切线为 $Y=-2\bullet\dfrac{\sqrt{3}}{6}X+\dfrac{3}{36}+\dfrac{1}{4}$

即 $Y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}X+\dfrac{1}{3}.$

例 18 求解 $(5x^4+3xy^2-y^3)dx+(3x^2y-3xy^2+y^2)dy=0.$

解　这里

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以这是全微分方程。可取 $x_0=0, y_0=0,$，于是有

$$u(x,y)=\int_0^x(5x^4+3xy^2-y^3)dx+\int_0^y y^2dy$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3.$$

所以，方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$$

例 19 求微分方程 $y'=\dfrac{y^2}{y^2+2xy-x}$ 的通解.

解:将原方程变形 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{y^2+2xy-x}{y^2}$ 即 $\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{1-2y}{y^2}x=1$

其中 $P(y)=\dfrac{1-2y}{y^2}.Q(y)=1$

故 $x=e^{-\int\frac{1-2y}{y^2}dy}\left[c+\int 1e^{\int\frac{1-2y}{y^2}dy}dy\right]$

由于 $\int\dfrac{2y-1}{y^2}dy=2\ln y+\dfrac{1}{y}$. 故 $x=y^2e^{\frac{1}{y}}\left[c+\int\dfrac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}dy\right]$

$$=y^2e^{\frac{1}{y}}\left[c+e^{-\frac{1}{y}}\right]$$

$$=cy^2e^{\frac{1}{y}}+y^2$$

由于变形仅在 $y\neq 0$ 下进行,y=0 经检验也是原方程的根.

例 20 求微分方程 $e^{\frac{x}{y}}(y-x)dy+y(1+e^{x/y})dx=0$ 的通解.

解:令 $u=\dfrac{x}{y}$,原方程可化为 $ye^u(1-u)dy+y(1+e^u)(ydu+udy)=0$

两边除以 y,重新组合得到 $(e^u+u)dy+y(1+e^u)ydu=0.$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[(1+e^u)y\right]=1+e^u,\frac{\partial Q}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}(e^u+u)=e^u+1$$

是全微分方程,上式可写成 $d\left[(e^u+u)y\right]=0$

积分得 $(e^u+u)y=c$

变量还原 $(e^{\frac{x}{y}}+\dfrac{x}{y})y=c$

故通解为 $ye^{\frac{x}{y}}+x=cy$

[注意]由本例令 $u=\dfrac{x}{y}$ 的做法告知我们,对于齐次方程用这个变换也可以,关键在于使化简后的方程简单易解.

例 21 质量为 m 的质点受力 F 的作用沿 Ox 轴作直线运动。设力 F 仅是时间 t 的函数：F=F(t).在开始时刻 t=0 时 F(0)=F_0，随着时间 t 的增大，此力 F 均匀地减小，直到 t=T 时，F(T)=0.如果开始时质点位于原点，且初速度为零，求这质点的运动规律。

解 设 x=x(t)表示在 t 时刻时质点的位置，根据牛顿第二定律，质点运动的微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(t).\ (1)$$

由题设,力 F(t)随 t 增大而均匀地减小,且 t=0 时,F(0)=F_0,所以 F(t)=F_0-kt;又当 t=T 时,F(T)=0,从而

F(t)=F_0(1-$\dfrac{t}{T}$).

于是方程（1）可以写成

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F_0}{m}(1-\frac{t}{T}).\ (2)$$

其初始条件为

$$x|_{t=0}=0,\frac{dx}{dt}|_{t=0}=0.$$

把（2）是两端积分，得

$$\frac{dx}{dt}=\frac{F_0}{m}\int(1-\frac{t}{T})dt,$$

即 $$\frac{dx}{dt}=\frac{F_0}{m}(t-\frac{t^2}{2T})+C_1.(3)$$

将条件 $\dfrac{dx}{dt}|_{t=0}=0$ 代入（3）式，得

$$C_1=0,$$

于是（3）式成为

$$\frac{dx}{dt}=\frac{F_0}{m}(t-\frac{t^2}{2T}).\ (4)$$

把（4）式两端积分，得

$$x=\frac{F_o}{m}(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6T})+C_2,$$

将条件 $x|_{t=0}=0$ 代入上式，得

$$C_2=0.$$

于是所求质点的运动规律为

$$x=\frac{F_0}{m}(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6T})0\le t\le T.$$

例 22 求微分方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=3$ 的特解。

解 所给方程是 $y''=f(x,y')$ 型的。设 $y'=p$，代入方程并分离变量后，有

$$\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x}dx.$$

两端积分，得

$$\ln|p|=\ln(1+x^2)+C,$$

即 $p=y'=C_1(1+x^2)(C_1=\pm e^c).$

由条件 $y'|_{x=0}=3$，得

$$C_1=3,$$

所以 $y'=3(1+x^2)$

两端再积分，得 $y=x^3+3x+C_2.$

又由条件 $y|_{x=0}=1$，得 $C_2=1$

于是所求的特解为

$$y=x^3+3x+1.$$

例 23 求微分方程 $yy''-y'^2=0(1)$ 的通解。

解 方程（1）不明显地含自变量 x，设

$$y'=p, \text{则 } y''=p\frac{dp}{dy},$$

代入方程（1），得

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=0.$$

在 $y\ne 0$、$p\ne 0$ 时，约去 p 并分离变量，得

$$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}.$$

两端积分，得

$$\ln|p|=\ln|y|+C,$$

即 $p=C_1y$, 或 $y'=C_1y(C_1=\pm e^{c})$.

再分离变量并两端积分，便得方程（1）的通解为

$$\ln|y|=C_1x+C_2',$$

或 $y=C_2e^{c_1x}(C_2=\pm e^{c_2'})$.

例 24 求微分方程 $\begin{cases} y'''=\dfrac{3x^2}{1+x^3}y'' \\ y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1, y''|_{x=0}=4 \end{cases}$ 的特解.

解:令 $y''=p, y'''=p'$,原方程化为

$$p'=\frac{3x^2}{1+x^3}p$$

即 $\dfrac{dp}{p}=\dfrac{3x^2}{1+x^3}dx.$

$$\ln p=\ln(1+x^3)+\ln c_1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=c_1(1+x^3)$$

由 $y''|_{x=0}=4$ 得 $c_1=4$　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=4(1+x^3)$

积分 $\dfrac{dy}{dx}=4x+x^4+c_2$

由 $y'|_{x=0}=1$ 代入得 $c_2=1$　　$\dfrac{dy}{dx}=4x+x^4+1$

积分 $y=2x^2+\dfrac{1}{5}x^5+x+c_3$

由 $y'|_{x=0}=0$ 得 $c_3=0$

故方程特解为 $y=2x^2+\dfrac{1}{5}x^5+x.$

例 25 求微分方程 $y''-\dfrac{y'}{x}+\dfrac{y}{x^2}=0$ 的通解。

解：令 $y=ux$ 则 $y^{'}=u+xu^{'}$　　$y^{''}=2u^{'}+xu^{''}$ 代入原方程得：

$$2u^{'}+xu^{''}-\frac{u}{x}-u^{'}+\frac{u}{x}=0$$

化简得 $xu^{''}=-u^{'}$

解得 $u^{'}=\frac{c_1}{x}$

$$u=c_1\ln x+c_2$$

故通解为 $y=(c_1\ln x+c_2)x.$

例 26 设函数 $y(x)(x\geq 0)$ 二阶可导，且 $y^{'}(x)>0, y(0)=1$。过曲线 y=y(x) 上任意一点 P(x,y) 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所为成的三角形的面积记为 S_1，区间 [0,x] 上以 y=y(x) 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 y=y(x) 的方程。

解：曲线 y=y(x) 上点 P(x,y) 处的切线方程为 $Y-y=y^{'}(x)(X-x)$

它与 x 轴的交点为 $(x-\frac{x}{y^{'}},0)$ 从而

$$S_1=\frac{y}{2}|x-(x-\frac{y}{y^{'}})|=\frac{1}{2}\frac{y^2}{y^{'}}.$$

又 $S_2=\int_0^x y(t)dt.$

由条件 $2S_1-S_2=1$ 知 $\frac{y^2}{y^{'}}-\int_0^x y(t)dt=1.(*)$

两边对 x 求导并化简得

$$yy^{''}=y^{'2},$$

令 $p=y^{'}$，则上述方程可化为

$$y\frac{dp}{p}=p,$$

从而 $\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}.$

解之得 $p=C_1y$, 即 $\frac{dy}{dx}=C_1y$,

于是 $y=e^{C_1x+C_2}$.

注意到 y(0)=1，并由(*)式得 $y'(0)=1$，由此可得 $C_1=1, C_2=0,$，故所求曲线的方程是

$y=e^x$.

例 27 求方程 $\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+s=0$ 满足初始条件 $s|_{t=0}=4s'$、$s'|_{t=0}=-2$ 的特解。

解 所给方程的特征方程为

$r^2+2r+1=0,$

其根 $r_1=r_2=-1$ 是两个相等的实根，因此所求微分方程的通解为

$s=(C_1+C_2t)e^{-t}$.

将条件 $s|_{t=0}=4$ 代入通解，得 $C_1=4$，从而

$s=(4+C_2t)e^{-t}$.

将上式对 t 求导，得

$s'=(C_2-4-C_2t)e^{-t}$.

再把条件 $s'|_{t=0}=-2$ 代入上式，得 $C_2=2$. 于是所求特解为

$s=(4+2t)e^{-t}$.

例 28 求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解。

解 所给方程的特征方程为

$r^2-2r+5=0,$

其根 $r_{1,2}=1\pm 2i$ 为一对共轭复根。因此所求通解为

$y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

例 29 求方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解。

解 这里的特征方程为

$r^4-2r^3+5r^2=0$，

即 $r^2(r^2-2r+5)=0$.

它的根是 $r_1 = r_2 = 0$ 和 $r_{3,4} = 1 \pm 2i$.

因此所给微分方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 + e^x(C_3\cos 2x + C_4\sin 2x).$$

例 30 求方程 $\frac{d^4w}{dx^4} + \beta^4 w = 0$ 的通解，其中 $\beta > 0$.

解 这里的特征方程为

$$r^4 + \beta^4 = 0.$$

由于

$$r^4 + \beta^4 = r^4 + 2r^2\beta^2 + \beta^4 - 2r^2\beta^2 = (r^2 + \beta^2)^2 - 2r^2\beta^2$$

$$= (r^2 - \sqrt{2}\beta r + \beta^2)(r^2 + \sqrt{2}\beta r + \beta^2),$$

所以特征方程可以写为

$$(r^2 - \sqrt{2}\beta r + \beta^2)(r^2 + \sqrt{2}\beta r + \beta^2) = 0.$$

它的根为 $r_{1,2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i), r_{3,4} = -\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i),$，因此所给方程的通解为

$$w = e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}(C_1\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_2\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x) + e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}(C_3\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_4\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x).$$

例 31 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解

解：所给方程是二阶常系数非齐次线性微分方程，且 f(x) 呈 $P_m(x)e^{\lambda x}$ 型

（其中 $P_m(x) = x, \lambda = 2$）

与所给方程对应的齐次方程为 $y'' - 5y' + 6y = 0$

它的特征方程 $r^2 - 5r + 6 = 0$

有两个实根 $r_1 = 2, r_2 = 3$。于是与所给方程对应的齐次方程的通解为 $Y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

由于 $\lambda = 2$ 是特征方程的单根，所以应设 y^* 为

$$y^* = x(b_0x + b_1)e^{2x}.$$

把它代入所给方程，得 $-2b_0x + 2b_0 - b_1 = x.$

解得 $b_0 = -\frac{1}{2}, b_1 = -1.$。因此求得一个特解为 $y^* = x(-\frac{1}{2}x - 1)e^{2x}.$

从而所求的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-(x^2+2x)e^{2x}.$

例 32 求微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解。

解 所给方程是二阶常系数非齐次线性方程，且 f(x)属于 $e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\beta x]$ 型（其中

$\lambda=0,w=2,P_l(x)=x,P_n(x)=0$）

与所给方程对应的齐次方程为 $y''+y=0$

它的特征方程为 $r^2+1=0$

由于这里 $\lambda+iw=2i$ 不是特征方程的根，所以应设特解为 $y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x.$

把它代入所给方程，得 $(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x.$

比较两端同类项的系数，得

$$\begin{cases}-3a=1,\\-3b+4c=0,\\-3c=0,\\-3d-4a=0,\end{cases}$$

由此解得 $a=-\dfrac{1}{3},b=0,c=0,d=\dfrac{4}{9}.$

于是求得另一个特解为 $y''=-\dfrac{1}{3}x\cos 2x+\dfrac{4}{9}\sin 2x.$

例 33 求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解（a>0 常数）

解：(解法一）特征方程为 $1r^2+a^2=0$

$r_{1,2}=\pm i.$ 齐次方程通解为

$y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$

（1）　当 $a\neq 1$ 时自由项 f(x)=sinx　$\lambda=i$ 不是特征方程的根

设　$y^*=A\sin x+B\cos x, y^{*'}=A\cos x-B\sin x, y^{*''}=-A\sin x-B\cos x$ 代入原方程得

$A(a^2-1)\sin x+B(a^2-1)\cos x=\sin x.$

比较等式两边对应项系数 $A=\dfrac{1}{a^2-1},B=0.$

所以 $y^*=\dfrac{1}{a^2-1}\sin x$

（2）　当 a=1 时，自由项 f(x)=sinx　 $\lambda=i$ 是单重特征根

故设 $y^*=x(A\sin x+B\cos x)$.

记 $u=x, v=A\sin x+B\cos x$ 则

$y^{*'}=u'v+uv'=(Ax+B)\cos x+(A-Bx)\sin x$

$y^{*''}=u''v+2u'v'+uv''=(2A-Bx)\cos x+(-Ax-B)\sin x$

代入原方程得 2Acosx-2Bsinx=sinx

比较等式两边对应项系数得 A=0　 $B=-\dfrac{1}{2}$.

所以当 $a\neq 1$ 时通解为 $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax+\dfrac{1}{a^2-1}\sin x$

　　a=1 时通解为 $y=(c_1-\dfrac{1}{2}x)\cos x+c_2\sin x$

（解法二）用复数形式解题

将方程改为 $y''+a^2y=e^{ix}$ (1)（取虚部）

特征方程的根 $r_{1,2}=\pm ai$

(1)当 $a\neq 1$ 时 $f(x)=e^{ix}, \lambda=i$ 不是特征根

令 $y^*=Ae^{ix}, y^{*'}=iAe^{ix}, y^{*''}=-Ae^{ix}$

代入方程 $-Ae^{ix}+a^2Ae^{ix}=e^{ix}$

$$A=\frac{1}{a^2-1}$$

方程(1)的特解为 $y=\dfrac{1}{a^2-1}e^{ix}=\dfrac{1}{a^2-1}(\cos x+i\sin x)$

取虚部　原方程特解为 $y^*=\dfrac{1}{a^2-1}\sin x$.

(2)当 a=1 时 $\lambda=i$ 是单重复根

令 $y^*=Axe^{ix}, y^{*'}=A(1+ix)e^{ix}, y^{*''}=A(2i-x)e^{ix}$

代入(1)得到 $A=\dfrac{1}{2i}=-\dfrac{1}{2}i$

故方程(1)的特解为 $y=-\dfrac{1}{2}ixe^{ix}=\dfrac{1}{2}x(\sin x-i\cos x)$

原方程的特解为 $y^*=\dfrac{-1}{2}x\cos x$.

其余部分同解法一

例 34 已知方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$，试确定常数 α,β,γ，并求该

方程的通解。

解：(解法一) 这是常系数微分方程，从解的结构知道原方程的特征根为 $r_1 = 1$ 和 $r_2 = 2$ 所以特征方程为 $(r-1)(r-2)=0,$ 即 $r^2 - 3r + 2 = 0$

故 $\alpha = -3, \beta = 2$，而 $y = xe^x$ 是非齐次方程的特解

为确定 γ，只需将 $y_1 = xe^x$ 代入方程得到 $(x+2)e^x - 3(x+1)e^x + 2xe^x = \gamma e^x$

解得 r=-1

从而原方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + xe^x$

(解法二) 将特解代入原方程得 $(4+2\alpha+\beta)e^{2x} + (3+2\alpha+\beta)e^x + (1+\alpha+\beta)xe^x = \gamma e^x$

比较两端相同的系数有

$$\begin{cases} 4+2\alpha+\beta = 0 \\ 3+2\alpha+\beta = r \\ 1+\alpha+\beta = 0 \end{cases}$$

解方程得 $\beta = -3, \beta = 2, \gamma = -1.$

即原方程为 $y'' - 3y' + 2y = -e^x$

对应齐次方程的特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0.$

$r_1 = 1, r_2 = 2,$ 齐次方程的通解为 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

故原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^x + c_2 e^{2x} + [e^{2x} + (1+x)e^x] \\ &= c_3 e^x + c_4 e^{2x} + xe^x. \end{aligned}$$

例 35 设函数 f(x),g(x) 满足 $f'(x) = g(x), g'(x) = 2e^x - f(x),$ 且 f(0)=0,g(0)=2，求 $\int_0^{\pi} \left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right] dx.$

解：(解法一) 由 $f'(x) = g(x)$ 得 $f''(x) = g'(x) = 2e^x - f(x),$

于是有 $\begin{cases} f''(x) + f(x) = 2e^x, \\ f(0) = 0, \\ f'(0) = 2, \end{cases}$

解之得 $f(x) = \sin x - \cos x + e^x.$ 又

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx=\int_0^{\pi}\frac{g(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx=\int_0^{\pi}d\,\frac{f(x)}{1+x}$$

$$=\frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^{\pi}=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-f(0)=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}.$$

（解法二）同解法一，得 $f(x)=\sin x-\cos x+e^x$.又

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx+\int_0^{\pi}f(x)d\,\frac{1}{1+x}$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx+f(x)\bullet\frac{1}{1+x}\Big|_o^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{1+x}dx$$

$$=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-f(0)+\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx-\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx$$

$$=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}.$$

例 36 求方程 $y''-4y'+5y=e^{2x}\csc x$ 的通解。

解：设 $y^*=e^{2x}\bullet u(x), y^*=e^{2x}(2u(x)+u'(x)), y^{*''}=e^{2x}(4u(x)+4u'(x)+u''(x))$，代入后得到

u(x)满足 $u''+u=\csc x.$

其特征方程 $r^2+1=0$。齐次方程的通解为 $c_1\sin x+c_2\cos x$

设特解为 $u^*=c_1(x)\sin x+c_2(x)\cos x.c_1(x),c_2(x)$ 满足

$$\begin{cases}c_1'(x)\sin x+c_2'(x)\cos x=0\\ c_1(x)(\cos x)+c_2'(x)(-\sin x)=\csc x\end{cases}$$

解得 $c_1'(x)=\cot x, c_2'(x)=-1$

于是 $c_1(x)=\ln\sin x+c_1, c_2(x)=-x+c_2$

所以原方程的通解为 $y=e^{2x}[(c_1+\ln\sin x)\sin x+(c_2-x)\cos x]$.

四、练习题

1.求解下列微分方程：

(1) $y'-e^{x-y}+e^{x}=0$　　(2) $y'+x=\sqrt{x^{2}+y}$

2.求解下列微分方程：

(1) $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$　(2) $y'=\frac{y^{2}-2xy-x^{2}}{y^{2}+2xy-x^{2}}$ ，$y(1)=-1$

3.求解下列微分方程：

(1) $\sqrt{1+x^{2}}y'\sin 2y=2x\sin^{2}y+e^{2\sqrt{1+x^{2}}}$

(2) $\left(x-2xy-y^{2}\right)dy+y^{2}dx=0$

(3) $xy'\ln\sin y+\cos y\left(1-x\cos y\right)=0$

4.求解下列微分方程：

(1)$e^{y}dx+\left(xe^{y}-2y\right)dy=0$

(2)$(x+\frac{1}{\sqrt{y^{2}-x^{2}}})dx+(1-\frac{1}{y\sqrt{y^{2}-x^{2}}})=0$

5.求解下列微分方程：

(1) $\left(x^{2}+y^{2}+2x\right)dx+2ydy=0$

(2) $\left(y\cos x-x\sin x\right)dx+\left(y\sin x+x\cos x\right)dx=0$

6.设函数$\psi(x)$在实轴上连续，$\psi'(0)$存在，且具有性质$\psi(x+y)=\psi(x)\psi(y)$，试求出$\psi(x)$.

7.证明：$y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)dx}(y_0+\int_{x_0}^{x}Q(s)e^{\int_{x_0}^{s}p(t)dt}ds)$ 是一阶线性方程

$y'+p(x)y=Q(x)$满足初始条件$y(x_0)=y_0$的特解.

8.求解下方程：

(1) $ydx+\left(y-x\right)dy=0$ ，$y(0)=1$

(2) $x\left(y'+1\right)+\sin(x+y)=0$ ，$y(\frac{\pi}{2})=0$

9.求解下列方程：

(1)$\left(1+x^{2}\right)y''+(y')^{2}+1=0$

(2)$xy''+x(y')^{2}-y'=0, y(2)=2, y'(2)=1$

(3)$y'y'''=3(y'')^{2}$

10、求解下列微分方程：

(1) $y^{(5)}+y^{(4)}+2y'''+2y''+y'+y=0$

(2) $y^{(4)}-5y''+10y'-6y=0, y(0)=1, y'(0)=1, y''(0)=6, y'''(0)=-14$

11、求解下列微分方程：

(1) $y''+y=x+3\sin 2x+2\cos x$

(2)$y''+y\ =2xe^{x}+4\sin x, y(0)=y'(0)=0$

12、求解下列微分方程：

(1) $x(1+x^{2})^{2}y''+2(1+x^{2})^{2}y'-xy=x$

(2) $x^{2}y''+xy'+y=2\sin(\ln x)$

(3) $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^{2}$

13、求解下列方程组：

（1） $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=y, x(0)=1, x'(0)=-1 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=x, y(0)=1, y'(0)=3 \end{cases}$ （2） $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}+x=-t \\ \dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}+3x-y=e^{2t} \end{cases}$

五自测题

自测题(一)

1．求微分方程 $(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$ 的通解.

2．求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ 的通解.

3．求微分方程($y-x^3$) $dx-2xdy=0$ 的通解.

4．求微分方程 $xy\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 满足的初始条件 $y\big|_{x=e}=2e$ 的特解.

5．设单位质点在水平面上做直线运动,初速度 $v\big|_{t=0}=v_0$ 已知阻力与速度成正比(比例常数为 1/3)问 t 为多少时,此质点速度为 $\dfrac{v_0}{3}$;并求此时刻该质点所经过的路程?

6．某湖泊的水量为 V ,每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\dfrac{V}{6}$,流入湖泊内不含 A 的水量为 $\dfrac{V}{6}$,流出湖泊的水量为 $\dfrac{V}{3}$,已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$,超过国家规定指标.为了治理污染,从 2000 年初起,限定排入湖中含 A 污水的浓度不超过 $\dfrac{m_0}{V}$.问至少需经过多少年,湖泊中污染物 A 的含量至 m_0 以内?(注:设湖水中的浓度是均匀的)

7．该 $y_{0(x)}$ 是微分方程 $y'==a(x)y^2+b(x)y+r(x)$的一个特解，通过变量代换 $u(x)=\dfrac{1}{y-y_0(x)}$,求原方程的通解

8．求方程$\left[\mathrm{y}-\mathrm{x}\left(x^2+y^2\right)\right]dx-xdy=0$的通解

9．求方程$xdx-y^2dx+2xydy=0$的通解

10．一个半球体状的雪堆，其体积融化的速率与半球面面积S成正比，比例常数K＞0。假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，一直半径为r_0的雪堆的开始融化的3小时内，融化了其体积的$\dfrac{7}{8}$，问雪堆全部融化需要多少小时？

自测题(二)

1．设对任意 $x>0$,由线 $y=f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$,求 f(x) 的一般表达式。

2．设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，且当 $x\ge 0$ 时 $f(x)F(x)=\dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$ 已知 $F(0)=1, F(x)>0$ ，试求 $f(x)$.

3．求$\begin{cases} y'' = 2y^3 \\ y|_{x=0} = 1. y'|_{x=0} = 1 \end{cases}$.的特解。

4．求方程$x^2y'' + xy' - y'' + 2 = 0$的通解(|x|<1).

5．求$y \bullet y'' - y'^2 = y^2 \ln y$的通解

6．求$xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$的通解

7．求$xy'' - y'\ln y' + y'\ln x = 0$的通解

自测题(三)

1．选择题

具有特解$y_1 = e^{-x}, y_2 = 2xe^{-x}, y_3 = 3e^x$的三阶常微分方程是（）。

$(A)y''' - y'' + y' + y = 0 (B)y''' + y'' - y' - y = 0$

$(C)y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 (D)y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

2．填空题

（1）　微分方程$y'' + 2y' + 5y = 0$的通解是

（2）　微分方程$y'' + y = -2x$的通解是

（3）　求微分方程$y'' + y = x + \cos x$的通解

（4）　求微分方程$y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$的通解

（5）　求微分方程$y'' - 3y' + 2y = xe^x$的通解。

（6）　设 f(x) 具有二阶连续导数，$f(0) = 0, f'(0) = 1$且$[xy(x+y) - f(x)y]dx + [f'(x) + x^2y]dy = 0$为一全微分方程，求$f(x)$及此全微分方程的通解。

（7）　已知$y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x + e^{-x}, y_3 = xe^x + e^{2x} + e^{-x}$是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求此微分方程。

（8）　求满足$f(x) = \sin x + \int_0^x f(t)(x-t)dt$的连续函数$f(x)$.

（9）　设二阶连续可微函数$f(x)$满足$f(1) = 1, f'(1) = 2,$，且使曲线积分$\int_{\widehat{AB}} y[xf'(x) + f(x)]dx - x^2 f'(x)dy$与路径无关，求函数$f(x)$.

（10）　设$y = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$（$C_1, C_2$为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为

3、求$x-y$平面上一曲线，使其过每点的切线同该点的向径及oy轴一起构成一个等腰三角形。

4、一质量为m的物体，在粘性液体中由静止自由下落，假如液体阻力与运动速度成正比，试求物体运动的规律。

5、用均质材料设计一个高为h，顶面直径为$2a$的旋转体形状的支柱，如果支柱顶部所受的压力为P，并且要求每一个水平截面上的压强（包括自重所产生的压强在内）都相等，那么它应该是怎样的旋转体？

6、有一盛满了水的圆锥形漏斗，高$10cm$，顶角$\alpha = 60^o$，漏斗尖出有面积为$0 \cdot 5m^2$的小孔，求水流出时漏斗内水深的变化规律，并求出水流所需的时间（提示；水从深处为 h 的孔流出的速度$v = 0 \cdot 6\sqrt{2gh}\, {cm}/{s}$）