一、一维霍克斯过程

在一段观察时间内(从$t=0$到$T\geqslant t_n$)，某单一事件发生了n次，其时间序列$\mathbb{T}=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$($t_i$表示该事件第$i$次发生的时间)。

1. likehood

$$\mathbb{L}(\mathbb{T})=\prod_{t_i\in\mathbb{T}}\lambda\left(t_i\right)\cdot exp\left(-\int_0^T\lambda(\gamma)\,d\gamma\right)\quad(1)$$

其中强度函数$\lambda(t)$为，

$$\lambda(t)=\mu+\alpha\sum_{t_i<t}g\left(t-t_i\right)\quad(2)$$

μ表示基础强度，α为权重系数，$g\left(t-t_i\right)$为核函数，表示该事件过去的发生对现在的影响。

二、多维霍克斯过程

在一段观察时间内(从$t=0$到$T\geqslant t_n$)，有n次事件发生，其时间序列$\mathbb{T}=\{\left(t_i,d_i\right)\}_{i=1}^n$(每次事件对应一个时间$t_i$和一个事件类型$d_i$)。

1. likehood

$$\mathbb{L}(\mathbb{T})=\prod_{d=1}^{D}\left\{\prod_{\left(t_i,d_i\right)\in\mathbb{T}}\lambda_d\left(t_i\right)\cdot exp\left(-\int_0^T\lambda_d(\gamma)\,d\gamma\right)\right\}\quad(3)$$

其中D表示事件类型总数，$\lambda_d(t)$为，

$$\lambda_d(t)=\mu_d+\sum_{t_i<t}\alpha_{d,d_i}\,g\left(t-t_i\right)\quad(4)$$

μ_d表示第d类事件的基础强度，α_{d,d_i}表示类型为d_i的事件对类型为d的事件的影响系数，$g\left(t-t_i\right)$为核函数，表示过去的事件对现在的事件的影响。

2. log-likehood

$$\mathbb{l}(\mathbb{T})=\sum_{d=1}^{D}\left\{\sum_{\left(t_i,d_i\right)\in\mathbb{T}}\log\lambda_d\left(t_i\right)-\int_0^T\lambda_d(\gamma)\,d\gamma\right\}\quad(5)$$

其中D表示事件类型总数，$\lambda_d(t)$同（4）。

三、cHawk

1. 一维霍克斯过程

在一段观察时间内(从t_0到T)，对于病人i来说，疾病d(相当于特定的事件)发生了n_d^i次，其时间序列为$\mathbb{T}^i=\left\{\left(t_{d,j}^i,d,f_{d,j}^i\right)\right\}_{j=1}^{n_d^i}$，$t_{d,j}^i$表示病人$i$患疾病$d$的第$j$次访问的时间，$f_{d,j}^i$表示病人$i$患疾病$d$的第$j$次访问的身体特征(年龄和体重)。

1.1. log-likehood

$$
\begin{aligned}
l_d^i &= \sum_{j=1}^{n_d^i}\log\lambda_d^i\left(t_{d,j}^i\right) - \int_0^T\lambda_d^i(t)\,dt \quad (6)\\
&= \sum_{j=1}^{n_d^i}\log\lambda_d^i\left(t_{d,j}^i\right) - \int_0^T\left(\boldsymbol{\mu}_d \boldsymbol{f}_j^i + \sum_{t_j^i<t}\alpha_{d,d_j^i}g\left(t-t_j^i\right)\right)dt \quad (7)\\
&= \sum_{j=1}^{n_d^i}\log\lambda_d^i\left(t_{d,j}^i\right) - \int_0^T\left(\boldsymbol{\mu}_d \boldsymbol{f}_j^i\right)dt - \int_0^T\sum_{t_k^i<t}\alpha_{d,d_k^i}g\left(t-t_k^i\right)dt \quad (8)\\
&= \sum_{j=1}^{n_d^i}\log\lambda_d^i\left(t_{d,j}^i\right) - \boldsymbol{\mu}_d\sum_{j=1}^{n^i}\int_{t_{j-1}^i}^{t_j^i}\boldsymbol{f}_j^i\,dt - \sum_{j=1}^{n^i}\int_{t_{j-1}^i}^{t_j^i}\sum_{t_k^i<t}\alpha_{d,d_k^i}g\left(t-t_k^i\right)dt \quad (9)\\
&= \sum_{j=1}^{n_d^i}\log\lambda_d^i\left(t_{d,j}^i\right) - \boldsymbol{\mu}_d\sum_{j=1}^{n^i}\boldsymbol{f}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}\left(\mathbf{t}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}-\mathbf{t}_{\mathrm{j}-1}^{\mathrm{i}}\right) - \sum_{j=1}^{n^i}\int_{t_{j-1}^i}^{t_j^i}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{j}-1}\alpha_{d,d_k^i}g\left(t-t_k^i\right)dt \quad (10)\\
&= \sum_{j=1}^{n_d^i}\log\lambda_d^i\left(t_{d,j}^i\right) - \boldsymbol{\mu}_d\sum_{j=1}^{n^i}\boldsymbol{f}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}\left(\mathbf{t}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}-\mathbf{t}_{\mathrm{j}-1}^{\mathrm{i}}\right) - \sum_{j=1}^{n^i}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{j}-1}\alpha_{d,d_k^i}\int_{t_{j-1}^i}^{t_j^i}g\left(t-t_k^i\right)dt \quad (11)\\
&= \sum_{j=1}^{n_d^i}\log\lambda_d^i\left(t_{d,j}^i\right) - \boldsymbol{\mu}_d\sum_{j=1}^{n^i}\boldsymbol{f}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}\left(\mathbf{t}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}-\mathbf{t}_{\mathrm{j}-1}^{\mathrm{i}}\right) - \sum_{j=1}^{n^i}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{j}-1}\alpha_{d,d_k^i}G\left(t_j^i-t_k^i\right)-G\left(t_{j-1}^i-t_k^i\right) \quad (12)\\
&= \sum_{j=1}^{n_d^i}\log\lambda_d^i\left(t_{d,j}^i\right) - \boldsymbol{\mu}_d\sum_{j=1}^{n^i}\boldsymbol{f}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}\left(\mathbf{t}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}-\mathbf{t}_{\mathrm{j}-1}^{\mathrm{i}}\right) - \sum_{k=0}^{n^i-1}\sum_{j=k+1}^{n^i}\alpha_{d,d_k^i}G\left(t_j^i-t_k^i\right)-G\left(t_{j-1}^i-t_k^i\right) \quad (13)\\
&= \sum_{j=1}^{n_d^i}\log\lambda_d^i\left(t_{d,j}^i\right) - \boldsymbol{\mu}_d\sum_{j=1}^{n^i}\boldsymbol{f}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}\left(\mathbf{t}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}-\mathbf{t}_{\mathrm{j}-1}^{\mathrm{i}}\right) - \sum_{k=0}^{n^i-1}\alpha_{d,d_k^i}\left(G\left(T-t_k^i\right)-G(0)\right) \quad (14)\\
&= \sum_{j=1}^{n_d^i}\log\lambda_d^i\left(t_{d,j}^i\right) - \boldsymbol{\mu}_d\sum_{j=1}^{n^i}\boldsymbol{f}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}\left(\mathbf{t}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}-\mathbf{t}_{\mathrm{j}-1}^{\mathrm{i}}\right) - \sum_{k=1}^{n^i-1}\alpha_{d,d_k^i}\left(G\left(T-t_k^i\right)-G(0)\right) \quad (15)
\end{aligned}
$$

其中，$\lambda_d^i(t)$ 为：

$$\lambda_d^i(t) = \boldsymbol{\mu}_d\boldsymbol{f}_j^i + \sum_{t_j^i<t}\alpha_{d,d_j^i}g\left(t-t_j^i\right) \quad （16）$$

$\boldsymbol{\mu}_d$和$\boldsymbol{f}_j^i$为向量，分别表示疾病d的权重系数和病人i第j次访问的身体特征(年龄和体重)，α_{d,d_j^i}表示病人i第j次访问所患的疾病d_j^i对疾病d的影响，$g\left(t-t_j^i\right)$为核函数，表示过去的事件对现在的事件的影响。

(6):一维霍克斯过程的log-likehood，n_d^i表示病人i患疾病d的总次数，$t_{d,j}^i$表示病人i患疾病d的第j次访问的时间，将$t_{d,j}^i$带入(16)可进行计算；
(6)-(7)-(8):在积分中带入(16)并展开；
(8)-(9)-(10): n^i表示病人i对于所有疾病来说的总访问次数，$T=t_{n^i}^i$表示病人i对于所有疾病来说的最后一次访问的时间，$t_0^i=0$，将积分变成相邻两次访问的积分的和，相邻两次访问中$\boldsymbol{\mu}_d$和$\boldsymbol{f}_j^i$保持不变,参考论文[1]的4.2部分；
(10)-(11)-(12):积分后移，利用$g(t)=\lambda e^{-\lambda t}$的原函数$G(t)=1-\lambda e^{-\lambda t}$求出积分；
(12)-(13):相当于交换两个for循环，可以手动验证；
(13)-(14):内层求和；
(14)-(15):因为d_0^i不存在，所以k从1开始。

2. 多维霍克斯过程

对于所有的病人i和所有的疾病d。

2.1. log-likehood

$$\mathbb{l}=\sum_{i=1}^{C}\sum_{d=1}^{D} l_d^i \quad (17)$$

C表示病人总数，D表示疾病总数。公式(17)与论文[2]、[3]、[4]中的log-likehood公式等同。

3. 优化问题

$$min\left\{-\mathbb{l}+\lambda_1\|\boldsymbol{A}\|_1+\frac{\lambda_2}{2}\sum_{d=1}^{D}\left\|\boldsymbol{\mu}_d\right\|_2^2\right\}$$
$$subject\ to\ \boldsymbol{A}\geq 0,\ \{\boldsymbol{\mu}_d\}_{d=1}^{D}\geq 0 \quad (18)$$

其中$\boldsymbol{A}$为α_{d,d_j^i}组成的$D\times D$矩阵，$\boldsymbol{\mu}_d$为向量。

3.1. 梯度下降

$$\frac{\partial(18)}{\partial\alpha_{ij}}=-\sum_{i=1}^{C}\sum_{d=1}^{D}\left\{\sum_{j=1}^{n_d^i}\frac{\sum_{t_k^i<t_{d,j}^i} g\left(t_{d,j}^i-t_k^i\right)}{\lambda_d^i\left(t_{d,j}^i\right)}-\sum_{k=1}^{n^i-1}G\left(T-t_k^i\right)\right\}+\lambda_1 sign\left(\alpha_{ij}\right) \quad (19)$$

$$\frac{\partial(18)}{\partial\boldsymbol{\mu}_d}=-\sum_{i=1}^{C}\sum_{d=1}^{D}\left\{\sum_{j=1}^{n_d^i}\frac{\boldsymbol{f}_j^i}{\lambda_d^i\left(t_{d,j}^i\right)}-\sum_{j=1}^{n^i}\boldsymbol{f}_j^i\left(\mathrm{t}_\mathrm{j}^\mathrm{i}-\mathrm{t}_\mathrm{j-1}^\mathrm{i}\right)\right\}+\lambda_2\boldsymbol{\mu}_d \quad (20)$$

参考代码为：cHawk
修改自：disease-network

3.2. ADMM
参考文章[3]和代码ADM4

3.3 与Hawkes相关的包
Python:

pyhawkes

tick

PoPPy

Matlab:

Hawkes-Process-Toolkit

C++:

MultiVariatePointProcess

四、参考论文

[1] Hawkes Processes
[2] Mining Medical Records with a KLIPI Multi-Dimensional Hawkes Model
[3] Learning Social Infectivity in Sparse Low-rank Networks Using Multi-dimensional Hawkes Processes
[4] Constructing Disease Network and Temporal Progression Model via Context-Sensitive Hawkes Process