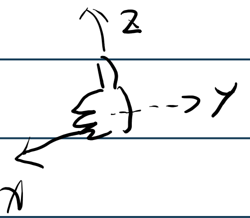
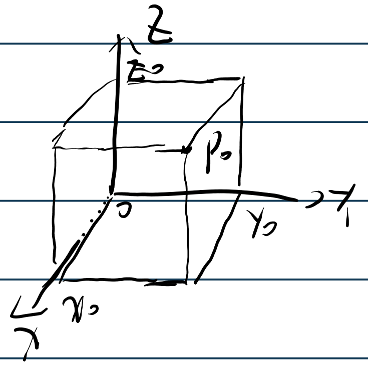
空间解析几何与向量



大拇指为z轴

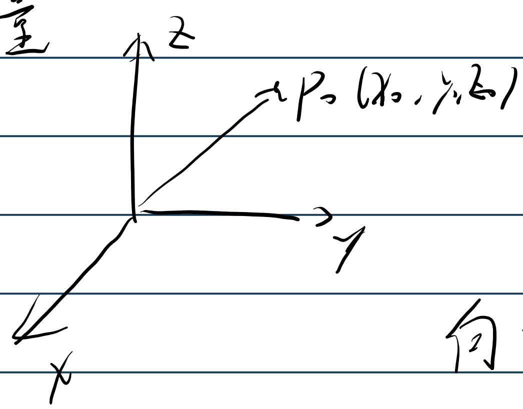
四个手指为x，手心为y



$|OP_0| = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$

$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

向量



$\overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$

向量：终点－起点.

向量长度（模长）

就是求线段长度

例 $\vec{a} = (3, -4, 0)$ 这样的写法表示

a向量从O点开始

$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+0} = 5$

$P_1(2, -1, 0)$ $P_2(3, 2, 1)$ 求 $\overrightarrow{P_1P_2}$

$|P_1P_2| = \sqrt{(3-2)^2+(2+1)^2+1^2} = \sqrt{11}$

单位向量

模长为1的向量，比如$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

$\vec{i} = (1,0,0)$ 是x轴正向的单位向量

$\vec{j} = (0,1,0)$ y

$\vec{k}$ $(0,0,1)$ z

向量的运算

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

若 $\vec{a} = \vec{b}$ 相等

$x_1 = x_2$ $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$

例 $3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

$= (3,0,0) - (0,-2,0) + (0,0,1) \cdots$

数量积

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad 0\le\theta\le 180^\circ \\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \end{aligned}}$$

可以用来求夹角 $\cos\theta$

向量积（叉积）

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$ 三正一三负

例 $\vec{a}=(2,-1,3)$ $\vec{b}=(1,3,-2)$

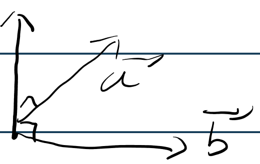
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}-(\vec{k}+9\vec{i}-4\vec{j})$$

$=(-7,7,7)$

$\vec{a}\times\vec{b}$ 的几何意义

$\vec{a}\times\vec{b}$ 算出的是一个向量，算出来的就是与 $\vec{a},\vec{b}$ 垂直的向量

$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$



向量的位置关系.

$\vec{a}\perp\vec{b}$ 的判定

$\vec{a}\perp\vec{b}=\theta=90^\circ$ $\cos 90^\circ=0$

垂直相乘 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$ 来判断向量垂直.

例 $\vec{a}=(1,-2,k)$ $\vec{b}=(3,-6,2)$

$\vec{a}\perp\vec{b}$ 则 ...

$3+12+2k=0$ $k=-\frac{15}{2}$

$\vec{a} // \vec{b}$ 的判定 $\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=0$

~~或~~ $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$

平面方程

平面法向量为 (x_1,y_1,z_1)

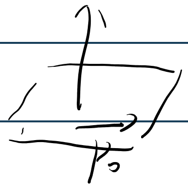
平面内向量 P 为 (x_2,y_2,z_2)

则 $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

例 面 α 过 $P_0(1,2,3)$ 法向量为 $(2,-1,1)$

$(x-1,y-2,z-3)$

$2(x-1)-(y-2)+z-3=0$



面 α: $2x-y+z-3=0$

法 $(2,-1,1)$

由一个面的公式 可直接得出该面的法向量

法向量和该面的 x, y, z 前的系数是一样的

例 $2x-y+3=0$

法向量 $\vec{s}=(2,-1,0)$

$x-3z+1=0$

$\vec{s}=(1,0,-3)$

直线方程

点向式：直线 l 过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$

点向式：直线 l 过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$

l 的方向向量 (m, n, p)

求直线方程

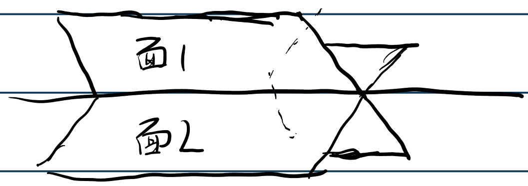
$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{点法式}\\ \text{点向式}\end{array}\right.$ ⇒求直线方程

例 l 过 $P(1,2,3)$ 且方向向量 $\vec{t} = (-1,2,3)$ l 的方程

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

一般式 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$



l $\vec{t}$

一般式就是两面相交得到的直线

例 直线一般式 $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \to \text{面} \\ x - 2z + 4 = 0 \to \text{面} \end{cases}$ 化简为点向式

求其法向量 $\vec{S_1} = (2,1,0)$ $\vec{S_2} = (1,0,-2)$

$$\vec{t} = \vec{S_1} \times \vec{S_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2,4,-1)$$

叉乘算出

与这两向量垂直的向量

取两直线任意一点

交点 $(0,1,2)$ 用点向式

这个线与叉乘得出的向量平行

交点$(0,1,2)$ 有点问 $\Rightarrow$ 这两个向量垂直

这个线与叉乘得出的向量平行 的向量

$$\frac{x-0}{-2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{-1}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\vec{s}_1\perp\vec{t}\\ \vec{s}_2\perp\vec{t}\end{array}\right\}\ \vec{s}_1\times\vec{s}_2=\vec{t}}$$

直线 $4x=-2y+2$

面与面的位置关系.

用法向量来判定

面1 // 面2 $\Rightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$

面1 // 面2 $\Rightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$

直线与直线

$l_1:\vec{t}_1 \quad l_2:\vec{t}_2$

$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \vec{t}_1 \parallel \vec{t}_1$

$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \vec{t}_1 \perp \vec{t}_2$

线与平面位置关系.

线与面垂直 $\Rightarrow \vec{t} \parallel \vec{s}$

$l \parallel$ 面 $\Rightarrow \vec{t} \perp \vec{s}$

例 求过$P(3,2,-1)$且与直线$\begin{cases}2x+3y=0\\ y-4z=8\end{cases}$ (直线)

垂直的平面方程

思路：先叉乘得到交叉线的方向向量，直线与平面垂直 用点法式

$$\vec{s}=\vec{t}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}=(-12,8,2)$$

$$s = t = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-12, 8, 2)$$ 用点法式

$$-12(x-3) + 8(y-2) + 2(z+1) = 0$$