2022年10月3日 20:00

对于对数函数的进一步理解

历史背景

对于天文的运算

早期天文学家，物理学家等面对连乘，连除等运算都非常头疼

比如：

$$2^{12}$$

这种连乘我们需要更快的算出来

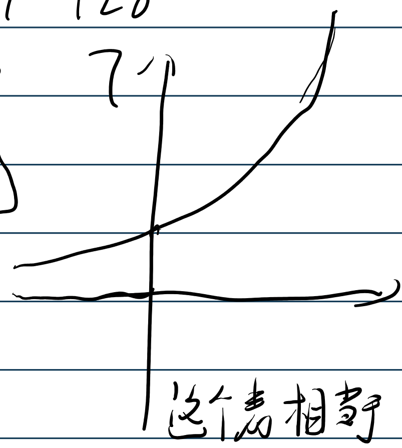
同样

2^{12} 连除 4 对于古时候的数学家应该怎样快速算出来？

斯蒂菲尔表

他观察到连乘的运算是可以快速得出来的

对于2	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128
	-1	0	1	2	3	4	5	6	7



从上面观察，你会发现：

下层数相加 对应 上层数相乘

$2+3=5$　　$4\times 8=32$

$2^2\times 2^3=2^5$

这个像相当于一个幂函数

我们发现通过指数的加减

就能更快实现连乘了
这就引出了幂函数

幂函数

幂函数的结构

$y=a^x \longrightarrow$ 指数

幂 底数

结果是幂，因此叫做幂函数.

根号$\sqrt{\ }$的产生

因为我们生活中常常要求 $y=x^{\frac{1}{2}}$
即对一个数开二次方
因此我们用$\sqrt{\ }$来简化

$4^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{4}=2$

所以根号不是一个独立的概念
只是对幂函数的描述

幂函数这个幂代表什么?

一个数多次相乘后的结果
即累乘后的结果
比如算年化收益
假设年化百分之二的基金
持有五年收益率为多少

$$f(x)=(1+0.02)^5$$

我们可以算出总收益率，
可当我们要计算多少年资产才能翻倍
呢?

——这就引出主角对数

对数

对数的存在意义

对幂函数的逆运算

由预期总收益率 $\xrightarrow{\text{算}}$ 频次、次数

即多少年后其总收益率能达到预期

e 的存在意义

复利模型中 假设一年中复利次数无限次

假设年利率为 100%

一次时 $(1+100\%)=2$

二次 $(1+\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4}>2$

3 $(1+\frac{1}{3})^3=\frac{64}{27}>\frac{9}{4}>2$

当一年中复利次数无限时

就有模型

$$Q=(1+\frac{m}{n})^n$$

Q 为总收益率

m 为年利率

因为 $(1+\frac{1}{n})^n$ 随着 n 增大 Q 一路增大

并趋近于 $2.370 = e$

则连续复利模型下

设 $m=0.5$

$Q=(1+\frac{1}{2n})^n$ 设 $a=2n$

$n=\frac{a}{2}$

$Q = (1+\frac{1}{a})^{\frac{a}{2}}$

$Q^2 = (1+\frac{1}{a})^a \approx e$

$Q = e^{\frac{1}{2}}$ 所以可以得出在利率为1时

最大总收益率为2.73倍

在利息为0.5时为$\sqrt{2.73}$倍

$(1+\frac{1}{n})^n$ 复利模型

e之所以是自然数，就是因为自然界

一切时时刻刻定值变化的总收益极限

差不多都是e组成

$(1+\frac{1}{n})^n$ 的极限为e

理解 $\ln x$ 和 e^x

$(1+\frac{x}{n})^n \Rightarrow e$

$y=e^x$ 表示在100%增长率下 极限增长下

经过x个单位时间后的总收益

$y=\ln x$ 表示要达到目标预期总收益x

求经过多少个时间单位(y)才能达成

这也是在按1的成长速度在极限情况下

七二法则

由上面可知 $y=\ln 2$ 表示翻倍需要多久y

$\ln 2 \approx 0.693$ 用72代替69好除.

↓

100%年复利需0.7年翻一倍

那9%年复利需 $\frac{0.72}{0.09} = 8$年

8年翻一倍