第五讲 分配问题及其应用

5.1 分配问题
5.2 两个组合例子
5.3 两个有趣的例子
5.4 其他例子

5.1 分配问题

所谓分配问题，粗略地说，就是把一些球放入一些盒子中放法问题。在本节中，我们将前两节所讨论的各类计数问题的结果应用到分配问题上，得到不同类型的分配问题的分配方案数。

把n个球放入r个盒子,共有多多少种不同的方案？我们假定球在盒子内是无序的，但我们需要考虑以下三个方面的因素:

(1) n个球是有区别的,还是无区别的;

(2) r个盒子是相同的,还是完全不同的;

(3) 是否允许有空盒.

这样总共就有8种不同的分配问题.

我们有下面的结果:

	n球	r盒	空盒?	方案数
1	不同	不同	允许	r^n
2	不同	不同	不允许	$r!\ S(n, r)$
3	不同	相同	允许	$S(n, 1)+\cdots+S(n, r)$
4	不同	相同	不允许	$S(n, r)$
5	相同	不同	允许	$C(n+r-1, n)$
6	相同	不同	不允许	$C(n-1, r-1)$
7	相同	相同	允许	$B(n, 1)+\cdots+B(n, r)$
8	相同	相同	不允许	$B(n, r)$

注：将n个不同的物体放入r个不同盒子使得每个盒子都不空。若第一个盒子放n_1个，第二个盒子放n_2个，…，第r个盒子放n_r个，则方法数为多项式系数$n!/(n_1!\ldots n_r!)$。因此 r！ $S(n,r)=\sum n!/(n_1!\ldots n_r!)$。（这里求和为$n_1+\ldots+n_r=n$且$n_i>0$)

5.2 两个组合例子

例1：$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n$展开式的项数等于$C(n+m-1,n)$.

例2：1，2，…，n的不允许重复和连续的r组合数。

5.3 两个有趣的例子

例1：某袋子中有a+b个球，其中a个白球，b个黑球，今有a+b个人以此从袋子中取出一球。设每人取球并观察颜色后仍将球放回袋子中，求第k个人取到白球的概率是多少？答案为a/(a+b)。

思考若取球后不放回袋子呢？答案也是a/(a+b)。这就告诉我们抓龟不论是先抓，还是后抓机会都是均等的。

例2：假设每人的生日在一年365天中的任一天是等可能的，即都等于1/365。那么随机选取n个人，他们的生日各不相同的概率为$365*364*\ldots*(365-n+1)/365^n$.所以n个人中有两个生日相同的概率为

$$1- 365*364*\ldots*(365-n+1)/365^n。$$

n	20	23	30	40	50	64	100
p	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.9999997

5.4 其它例子

例1：打桥牌时，52张牌分发给4个人，每人13张，问每人有一张A的概率有多少？

答案：约10.55％

分析：52张牌分发给4个人，每人13张的方法数为 $52!/(13!)^4$。而每人发一张A的方法数为 $4!*48!/(12!)^4$.

例2：把4个相同的桔子和6个不同的苹果放到5个不同的盒子中，问每个盒子里有2个水果的概率有多大？

答案：约7.4%.

分析：把4个相同桔子放入5个不同盒子的放法数为C(8,4), 把6个不同苹果放入5个不同盒子的放法数为5^6.因此总的分配方法数为C(8,4)*5^6.

每个盒子有2个水果，有如下三种情况：

1、（AA)(AA)(AA)(OO)(OO)

C(5,2)*6!/2!/2!/2!

2、（AA)(AA)(OA)(OA)(OO)

C(5,1)*C(4,2)*6!/2!/2!

3、（AA)(OA)(OA)(OA)(OA)

C(5,4)*6!/2!

例3：将n个不同的球放入编号为1,2,…,k的k个盒子中，试求：

（1）第一个盒子是空盒的概率；

（2）设k≥n,求n个球落入n个不同盒子的概率；

（3）第一盒或第二盒两盒中至少一个是空盒的概率。

解：将n个不同的球放入k个不同盒子的总方案数为k^n。

（1）第一个盒子是空盒的方案数为$(k-1)^n$。

（2） n个球落入n个不同盒子的方案数为C(k,n)n!。

（3）该方案数为第一个盒子是空盒的方案数加上第二个盒子是空盒的方案数，再减去两个盒子都是空盒的方案数。

例4：随机地将15名插班生分配到三个班级，每班各5名。设15名插班生中有3为女生。试求：

（1）每一个班级分到一名女生的概率；

（2）三名女生分到同一班的概率。

解：将15名插班生分配到三个班级，每班各5名的方案数为C(15,5)C(10,5)C(5,5)=15!/(5!5!5!)。

（1）3!*12!/(4!4!4!)

（2）3*12!/(5!5!2!)