什么是生成函数？

Program Impossible | 2006-12-23 3:49| 22 Comments |

我们年级有许多漂亮的MM。一班有7个左右吧，二班大概有4个，三班最多，16个，四班最可怜，一个漂亮的MM都没有，五班据说有1个。如果用一个函数“f(班级)=漂亮MM的个数”，那么我们可以把上述信息表示成：$f(1)=7,f(2)=4,f(3)=16,f(4)=0,f(5)=1$,等等。

生成函数（也有叫做“母函数”的，但是我觉得母函数不太好听）是说，构造这么一个多项式函数$g(x)$，使得x的n次方系数为$f(n)$。于是，上面的f函数的生成函数$g(x)=7x+4x^2+16x^3+x^5+\dots$。这就是传说中的生成函数了。关键是，这个有什么用呢？一会儿要慢慢说。我敢打赌这绝对会是我写过的最长的一篇文章。

生成函数最绝妙的是，某些生成函数可以化简为一个很简单的函数。也就是说，不一定每个生成函数都是用一长串多项式来表示的。比如，这个函数$f(n)=1$ （n当然是属于自然数的），它的生成函数就应该是$g(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+\dots$（每一项都是一，即使n=0时也有$x^0$系数为1，所以有常数项）。再仔细一看，这就是一个有无穷多项的等比数列求和嘛。如果$-1<x<1$，那么$g(x)$就等于$1/(1-x)$了。在研究生成函数时，我们都假设级数收敛，因为生成函数的x没有实际意义，我们可以任意取值。于是，我们就说，$f(n)=1$的生成函数是$g(x)=1/(1-x)$。

我们举一个例子说明，一些具有实际意义的组合问题也可以用像这样简单的一个函数全部表示出来。

考虑这个问题：从二班选n个MM出来有多少种选法。学过简单的排列与组合的同学都知道，答案就是$C(4,n)$。也就是说。从n=0开始，问题的答案分别是1,4,6,4,1,0,0,0,...（从4个MM中选出4个以上的人来方案数当然为0喽）。那么它的生成函数$g(x)$就应该是$g(x)=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$。这不就是……二项式展开吗？于是，$g(x)=(1+x)^4$。

你或许应该知道，$(1+x)^k=C(k,0)x^0+C(k,1)x^1+\dots+C(k,k)x^k$；但你或许不知道，即使k为负数和小数的时候，也有类似的结论：$(1+x)^k=C(k,0)x^0+C(k,1)x^1+\dots+C(k,k)x^k+C(k,k+1)x^{(k+1)}+C(k,k+2)x^{(k+2)}+\dots$（一直加到无穷；式子看着很别扭，自己写到草稿纸上吧，毕竟这里输入数学式子很麻烦）。其中，广义的组合数$C(k,i)$就等于$k(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)/i!$，比如$C(4,6)=4*3*2*1*0*(-1)/6!=0$，再比如$C(-1.4,2)=(-1.4)*(-2.4)/2!=1.68$。后面这个就叫做牛顿二项式定理。当k为整数时，所有i>k时的$C(k,i)$中分子都要“越过”0这一项，因此后面$C(k,k+1)$,$C(k,k+2)$之类的都为0了，与我们的经典二项式定理结论相同；不同的是，牛顿二项式定理中的指数k可以是任意实数。

我们再举一个例子说明一些更复杂的生成函数。$n=x_1+x_2+x_3+\dots+x_k$有多少个非负整数解？这道题是学排列与组合的经典例题了。把每组解的每个数都加1，就变成$n+k=x_1+x_2+x_3+\dots+x_k$的正整数解的个数了。教材上或许会出现这么一个难听的名字叫“隔板法”：把n+k个东西排成一排，在n+k-1个空格中插入k-1个“隔板”。答案我们总是知道的，就是$C(n+k-1,k-1)$。它就等于$C(n+k-1,n)$。它关于n的生成函数是$g(x)=1/(1-x)^k$。这个生成函数是怎么来的呢？其实，它就是(1-x)的-k次方。把$(1-x)^{(-k)}$按照刚才的牛顿二项式展开，我们就得到了x^n的系数恰好是$C(n+k-1,n)$，因为$C(-k,n)*(-x)^n=[(-1)^n*C(n+k-1,n)]*[(-1)^n*x^n]=C(n+k-1,n)x^n$。这里看晕了不要紧，后文有另一种方法可以推导出一模一样的公式。事实上，我们有一个纯组合数学的更简单的解释方法。因为我们刚才的几何级数$1+x+x^2+x^3+x^4+\dots=1/(1-x)$，那么$(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots)^k$就等于$1/(1-x)^k$。仔细想想k个$(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots)$相乘是什么意思。$(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots)^k$的展开式中，n次项的系数就是我们的答案，因为它的这个系数是由原式完全展开后k个指数加起来恰好等于n的项合并起来得到的。

现在我们引用《组合数学》上暴经典的一个例题。很多书上都会有这类题。

我们要从苹果、香蕉、橘子和梨中拿一些水果出来，要求苹果只能拿偶数个，香蕉的个数要是5的倍数，橘子最多拿4个，梨要么不拿，要么只能拿一个。问按这样的要求拿n个水果的方案数。

结合刚才的k个$(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots)$相乘，我们也可以算出这个问题的生成函数。

```
g(x)=(1+x^2+x^4+...)(1+x^5+x^10+..)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)
    =[1/(1-x^2)]*[1/(1-x^5)]*[(1-x^5)/(1-x)]*(1+x)  （前两个分别是公比为2和5的几何级数，
                                                      第三个嘛，(1+x+x^2+x^3+x^4)*(1-x)不就是1-x^5了
吗）
    =1/(1-x)^2    （约分，把一大半都约掉了）
    =(1-x)^(-2)=C(1,0)+C(2,1)x+C(3,2)x^2+C(4,3)x^3...    （参见刚才对1/(1-x)^k的展开）
    =1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+....
```

于是，拿n个水果有n+1种方法。我们利用生成函数，完全使用代数手段得到了答案！

如果你对$1/(1-x)^k$的展开还不熟悉，我们这里再介绍一个更加简单和精妙的手段来解释$1/(1-x)^2=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\dots$。

$1/(1-x)=1+x+x^2+x^3+x^4+\dots$是前面说过的。我们对这个式子等号两边同时求导数。于是，$1/(1-x)^2=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\dots$。一步就得到了我们所需要的东西！不断地再求导数，我们同样可以得到刚才用复杂的牛顿二项式定理得到的那个结论（自己试试吧）。生成函数还有很多其它的处理手段，比如等式两边同时乘以、除以常数（相当于等式右边每一项乘以、除以常数），等式两边同时乘以、除以一个x（相当于等式右边的系数“移一位”），以及求微积分等。神奇的生成函数啊。

我们用两种方法得到了这样一个公式：$1/(1-x)^n=1+C(n,1)x^1+C(n+1,2)x^2+C(n+2,3)x^3+\dots+C(n+k-1,k)x^k+\dots$。这个公式非常有用，是把一个生成函数还原为数列的武器。而且还是核武器。

接下来我们要演示如何使用生成函数求出Fibonacci数列的通项公式。

Fibonacci数列是这样一个递推数列：$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$。现在我们需要求出它的生成函数$g(x)$。$g(x)$应该是一个这样的函数：

$g(x)=x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+8x^6+13x^7+\dots$

等式两边同时乘以x，我们得到：

$x*g(x)=x^2+x^3+2x^4+3x^5+5x^6+8x^7+\dots$

就像我们前面说过的一样，这相当于等式右边的所有系数向右移动了一位。

现在我们把前面的式子和后面的式子相加，我们得到：

$g(x)+x*g(x)=x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+\dots$

把这最后一个式子和第一个式子好好对比一下。如果第一个式子的系数往左边移动一位，然后把多余的“1”去掉，就变成了最后一个

式子了。由于递推函数的性质，我们神奇地得到了：g(x)+x*g(x)=g(x)/x-1。也就是说，g(x)*x^2+g(x)*x-g(x)=-x。把左边的g(x)提出来，我们有：g(x)(x^2+x-1)=-x。于是，我们得到了g(x)=x/(1-x-x^2)。

现在的任务是要把x/(1-x-x^2)还原成通项公式。这不是我们刚才的1/(1-x)^n的形式，我们要把它变成这种形式。我们发现，1-x-x^2=[1-(1-√5)x/2]*[1-(1+√5)x/2] （(1-√5)/2和(1+√5)/2是怎么算出来的？显然它们应该是x^2-x-1=0的两个根）。那么x/(1-x-x^2)一定能表示成?/[1-(1-√5)x/2]+?/[1-(1+√5)x/2]的形式（再次抱歉，输入数学公式很麻烦，将就看吧）。这是一定可以的，因为适当的?的取值可以让两个分式通分以后分子加起来恰好为一个x。?取值应该是多少呢？假设前面一个?是c1，后面那个是c2，那么通分以后分子为c1*[1-(1+√5)x/2]+c2*[1-(1-√5)x/2]，它恰好等于x。我们得到这样两个式子：常数项c1+c2=0，以及一次项-c1*(1+√5)/2-c2*(1-√5)/2=1。这两个式子足够我们解出c1和c2的准确值。你就不用解了，我用的Mathematica 5.0。解出来c1=-1/√5，c2=1/√5。你不信的话你去解吧。现在，我们把x/(1-x-x^2)变成了-(1/√5)/[1-(1-√5)x/2] + (1/√5)/[1-(1+√5)x/2]。我们已经知道了1/[1-(1-√5)x/2]的背后是以(1-√5)/2为公比的等比数列，1/[1-(1+√5)x/2]所表示的数列公比为(1+√5)/2。那么，各乘以一个常数，再相加，我们就得到了Fibonacci数列的通项公式：f(n)=-(1/√5)*[(1-√5)/2]^n + (1/√5)*[(1+√5)/2]^n。或许你会问，这么复杂的式子啊，还有根号，Fibonacci数列不都是整数吗？神奇的是，这个充满根号的式子对于任何一个自然数n得到的都是整数。熟悉用特征方程解线性递推方程的同学应该知道，以上过程实质上和找特征根求解没有区别。事实上，用上面所说的方法，我们可以求出任何一个线性齐次递推方程的通项公式。什么叫做线性齐次递推呢？就是这样的递推方程：f(n)等于多少个f(n-1)加上多少个f(n-2)加上多少个f(n-3)等等。Fibonacci数列的递推关系就是线性齐次递推关系。

我们最后看一个例子。我们介绍硬币兑换问题：我有1分、2分和5分面值的硬币。请问凑出n分钱有多少种方法。想一下刚才的水果，我们不难得到这个问题的生成函数：g(x)=(1+x+x^2+x^3+...)(1+x^2+x^4+...)(1+x^5+x^10+..)=1/[(1-x)(1-x^2)(1-x^5)]。现在，我们需要把它变成通项公式。我们的步骤同刚才的步骤完全相同。我们把(1-x)(1-x^2)(1-x^5)展开，得到1-x-x^2+x^3-x^5+x^6+x^7-x^8。我们求出-1+x+x^2-x^3+x^5-x^6-x^7+x^8=0的解，得到了以下8个解：-1,1,1,1,-(-1)^(1/5),(-1)^(2/5),-(-1)^(3/5),(-1)^(4/5)。这个不是我解出来的，我还是用的Mathematica 5.0。不是我不想解，而是我根本不会解这个8次方程。这也是为什么信息学会涉及这些东西的原因：次数稍微一高，只好交给计算机解决了。于是，(1-x)(1-x^2)(1-x^5)=(1+x)(1-x)^3(1+(-1)^(1/5) x)()()() （省略不写了）。注意那个(1-x)^3。由于等根的出现，我们不得不把(1-x)^3所包含的(1-x)和(1-x)^2因子写进一会儿的分母里，不然会导致解不出合适的c来。你可以看到很多虚数。不过没关系，这些虚数同样参与运算，就像刚才的根式一样不会影响到最后结果的有理性。然后，我们像刚才一样求出常数满足1/(1-x)(1-x^2)(1-x^5)=c1/()+c2/(1-x)+c3/(1-x)^2+c4/(1-x)^3...+c8/()。这个解太复杂了，我用Mathematica解了几分钟，打印出了起码几十KB的式子。虽然复杂，但我确实是得到了通项公式。你有兴趣的话可以尝试用Mathematica解决一下1/[(1-x)(1-x^3)] （只有1分和3分的硬币）。解c的值时可以用SolveAlways[]函数。你可以亲眼见到，一个四五行的充满虚数的式子最后总是得到正确的整数答案。

生成函数还有很多东西，推导Catalan数列啊，指数生成函数啊，之类的。我有空再说吧，已经5000多个字了。

huyichen一直在问那道题。很显然，那道题目和上面的兑换硬币有些联系。事实上，很多与它类似的题目都和生成函数有关。但那个题却没有什么可以利用生成函数的地方（或许我没想到吧）。或许每个max的值有什么方法用生成函数解出来，但整个题目是不大可能用生成函数解决的。

近来有个帖子问一道“DP天牛”题目的。那个题目也是这样，很多与它类似的题目都和DP有关，但那道题却不大可能动规。我总觉得它可以归约到装箱问题（考虑体积关系，最少要几个箱子才能把物品放完），而后者貌似属于NPC。或许我错了吧，现在没事就在研究理论的东西，很久没有想过OI题了，这方面的能力已经开始退化了。

Matrix67原创
做人要厚道，转贴请注明出处

Posted in Program Impossible
Tags: 生成函数, 组合数学, 函数, 导数, 微积分, 数列, 二项式
Trackback: http://www.matrix67.com/blog/archives/120/trackback