手写代码必备手册

戴方勤 (soulmachine@gmail.com)

最后更新 2013-4-21

版权声明

内容简介

这个手册包含了一些经典题目的范例代码，经过仔细编写，编码规范良好，适合在纸上默写。

一个人，成为一个好的作家之前，他需要背诵大量经典段落，写下很多练习的模仿作品。类似的，成为一个好的程序员之前，也需要些大量的练习代码，反复模仿经典的代码。

这本手册的定位，比 ACM 模板库的代码少，题型比 ACM 简单，对代码有一些讲解。ACM 代码库功能全，很多难度很高，且整本手册都是代码，没有讲解。本手册中的每一个题目，都至少在两本纸质书中出现过。

全书的代码，使用纯 C + STL 的风格。本书中的代码规范，跟在公司中的工程规范略有不同，为了使代码短（方便迅速实现）：

- 所有代码都是单一文件。这是因为一般 OJ 网站，提交代码的时候只有一个文本框，如果还是按照标准做法，比如分为头文件.h 和源代码.cpp，无法在网站上提交；
- 喜欢在全局定义一个最大整数，例如 MAX。一般的 OJ 题目，都会有数据规模的限制，所以定义一个常量 MAX 表示这个规模，可以不用动态分配内存，让代码实现更简单；
- 经常使用全局变量。比如用几个全局变量，定义某个递归函数需要的数据，减少递归函数的参数个数，就减少了递归时栈内存的消耗，可以说这几个全局变量是这个递归函数的“环境”。

本手册假定读者已经学过《数据结构》[①]，《算法》[②] 这两门课，熟练掌握 C++ 或 Java。

本手册是开源的，项目地址：https://github.com/soulmachine/acm-cheatsheet

[①]《数据结构》，严蔚敏等著，清华大学出版社，http://book.douban.com/subject/2024655/

[②]《Algorithms》，Robert Sedgewick, Addison-Wesley Professional, http://book.douban.com/subject/4854123/

更新记录

2013-04-17 v0.2

2013-04-14 v0.1

目录

第 1 章
编程技巧

把较大的数组放在 main 函数外，作为全局变量，这样可以防止栈溢出，因为栈的大小是有限制的。

如果能够预估栈，队列的上限，则不要用 `std::stack`，`std::queue`，使用数组来模拟，这样速度最快。

第 2 章
线性表

线性表 (Linear List) 包含以下几种：

- 顺序存储：数组
- 链式存储：单链表，双向链表，循环单链表，循环双向链表
- 二者结合：静态链表

第 3 章
栈和队列

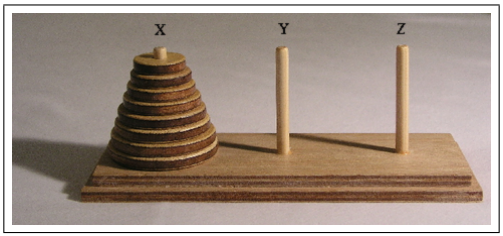
栈 (stack) 只能在表的一端插入和删除，先进后出（LIFO, Last In, First Out）。

队列 (queue) 只能在表的一端（队尾 rear）插入，另一端（队头 front）删除，先进先出（FIFO, First In, First Out）。

3.1 栈

3.1.1 Hanoi 塔问题

n 阶 Hanoi 塔问题假设有三个分别命名为 X、Y 和 Z 的塔座，在塔座 X 上插有 n 个直径大小各不相同、从小到大编号为 1，2，...，n 的圆盘，如下图所示。



现要求将 X 塔上的 n 个圆盘移动到 Z 上并仍按同样的顺序叠放，圆盘移动时必须遵循下列规则：

- 每次只能移动一个圆盘；
- 圆盘可以插在 X、Y 和 Z 中的任一塔座上；
- 任何时刻都不能将一个较大的圆盘压在较小的圆盘之上。

递归代码如下：

hanoi.c

```
/*
 * @brief 将塔座 x 上按直径有小到大且自上而下编号
 * 为 1 至 n 的 n 个圆盘按规则搬到塔座 z 上，y 可用做辅助塔座.
 * @param[in] n 圆盘个数
 * @param[in] x 源塔座
 * @param[in] y 辅助塔座
```

```
 * @param[in] z 目标塔座
 * @return 无
 * @note 无
 * @remarks 无
 */
static void hanoi(int n, char x, char y, char z)
{
    if(n == 1) {
        /* 移动操作 move(x,n,z) 可定义为 (c 是初始值为的全局
           变量, 对搬动计数):
           printf("%i. Move disk %i from %c to %c\n",
                                        ++c, n, x, z);
        */
        move(1, x, z); /* 将编号为 1 的圆盘从 x 移动到 z */
        return;
    } else {
        /* 将 x 上编号 1 至 n-1 的圆盘移到 y, z 作辅助塔 */
        hanoi(n-1, x, z, y);
        move(n,x,z);  /* 将编号为 n 的圆盘从 x 移到 z */
        /* 将 y 上编号至 n-1 的圆盘移到 z, x 作辅助塔 */
        hanoi(n-1, y, x, z);
    }
}
```

hanoi.c

3.1.2 数制转换

convert_base.cpp

```
/*
 * @brief 数制转换, 将一个整数转化为 d 进制, d<=16.
 * @param[in] n 整数 n
 * @param[in] d d 进制
 * @return 无
 */
static void convert_base(int n, const int d)
{
        std::stack<int> s;
        int e;

        while(n != 0) {
                e = n % d;
                s.push(e);
                n /= d;
        }
        while(!s.empty()) {
                e = s.top();
                s.pop();
                printf("%x", e);
        }
        return;
}
```

```
#define MAX 64 // 栈的最大长度
static int stack[MAX];
static int top = -1;
 /*
  * @brief 数制转换，将一个整数转化为 d 进制，d<=16，更优化的版本.
  *
  * 如果可以预估栈的最大空间，则用数组来模拟栈，这时常用的一个技巧。
  * 这里，栈的最大长度是多少？假设 CPU 是 64 位，最大的整数则是 2^64，由于
  * 数制最小为 2，在这个进制下，数的位数最长，这就是栈的最大长度，最长为 64。
  *
  * @param[in] n 整数 n
  * @param[in] d d 进制
  * @return 无
  */
static void convert_base2(int n, const int d)
{
        int e;

        while(n != 0) {
                e = n % d;
                stack[++top] = e; // push
                n /= d;
        }
        while(top >= 0) {
                e = stack[top--]; // pop
                printf("%x", e);
        }
        return;
}
```

convert_base.cpp

3.2 队列

3.2.1 打印杨辉三角

yanghui_triangle.cpp

```
#include <queue>
/**
 * @brief 打印杨辉三角系数.
 *
 * 分行打印二项式 (a+b)^n 展开式的系数。在输出上一行
 * 系数的同时，将其下一行的系数预先计算好，放入队列中。
 * 在各行系数之间插入一个 0。
 *
 * @param[in] n (a+b)^n
 * @return 无
 */
void yanghui_triangle(const int n)
{
    int i = 1;
    std::queue<int> q;
```

```
    /* 预先放入第一行的 1 */
    q.push(i);

    for(i = 0; i <= n; i++) {          /* 逐行处理 */
        int j;
        int s = 0;
        q.push(s);       /* 在各行间插入一个 0*/

        /* 处理第 i 行的 i+2 个系数（包括一个 0）*/
        for(j = 0; j < i+2; j++) {
            int t;
            int tmp;
            t = q.front();  /* 读取一个系数，放入 t*/
            q.pop();
            tmp = s + t;       /* 计算下一行系数，并进队列 */
            q.push(tmp);
            s = t;             /* 打印一个系数，第 i+2 个是 0*/
            if(j != i+1) {
                printf("%d ",s);
            }
        }
        printf("\n");
    }
}
```

yanghui_triangle.cpp

第 4 章
树

4.1 二叉树的遍历

binary_tree.cpp

```
#include <stack>
#include <queue>

 /*
  *@struct
  *@brief 二叉树结点
  */
typedef struct binary_tree_node_t {
    binary_tree_node_t *lchild;   /* 左孩子 */
    binary_tree_node_t *rchild;   /* 右孩子 */
    void* data; /* 结点的数据 */
}binary_tree_node_t;



/**
  * @brief 先序遍历, 递归.
  * @param[in] root 根结点
  * @param[in] visit 访问数据元素的函数指针
  * @return 无
  */
void pre_order_r(const binary_tree_node_t *root,
                 int (*visit)(void*))
{
    if(root != NULL) {
        (void)visit(root->data);
        pre_order_r(root->lchild, visit);
        pre_order_r(root->rchild, visit);
    }
}

/**
  * @brief 中序遍历, 递归.
  */
void in_order_r(const binary_tree_node_t *root,
                int (*visit)(void*))
{
```

```
    if(root != NULL) {
        pre_order_r(root->lchild, visit);
        (void)visit(root->data);
        pre_order_r(root->rchild, visit);
    }
}

/**
  * @brief 后序遍历, 递归.
  */
void post_order_r(const binary_tree_node_t *root,
                  int (*visit)(void*))
{
    if(root != NULL) {
        pre_order_r(root->lchild, visit);
        pre_order_r(root->rchild, visit);
        (void)visit(root->data);
    }
}

/**
 * @brief 先序遍历, 非递归.
 */
void pre_order(const binary_tree_node_t *root,
               int (*visit)(void*))
{
    const binary_tree_node_t *p;
    std::stack<const binary_tree_node_t *> s;

    p = root;

    if(p != NULL) {
        s.push(p);
    }

    while(!s.empty()) {
        p = s.top();
        s.pop();
        visit(p->data);
        if(p->rchild != NULL) {
            s.push(p->rchild);
        }
        if(p->lchild != NULL) {
            s.push(p->lchild);
        }
    }
}

/**
 * @brief 中序遍历, 非递归.
 */
void in_order(const binary_tree_node_t *root,
              int (*visit)(void*))
```

```
{
    const binary_tree_node_t *p;
    std::stack<const binary_tree_node_t *> s;

    p = root;

    while(!s.empty() || p!=NULL) {
        if(p != NULL) {
            s.push(p);
            p = p->lchild;
        } else {
            p = s.top();
            s.pop();
            visit(p->data);
            p = p->rchild;
        }
    }
}

/**
 * @brief 后序遍历, 非递归.
 */
void post_order(const binary_tree_node_t *root,
                int (*visit)(void*))
{
    /* p, 正在访问的结点, q, 刚刚访问过的结点 */
    const binary_tree_node_t *p, *q;
    std::stack<const binary_tree_node_t *> s;

    p = root;

    do {
        while(p != NULL) { /* 往左下走 */
            s.push(p);
            p = p->lchild;
        }
        q = NULL;
        while(!s.empty()) {
            p = s.top();
            s.pop();
            /* 右孩子不存在或已被访问, 访问之 */
            if(p->rchild == q) {
                visit(p->data);
                q = p; /* 保存刚访问过的结点 */
            } else {
                /* 当前结点不能访问, 需第二次进栈 */
                s.push(p);
                /* 先处理右子树 */
                p = p->rchild;
                break;
            }
        }
    }while(!s.empty());
```

```
}

/**
 * @brief 层次遍历，也即 BFS.
 *
 * 跟先序遍历一模一样，唯一的不同是栈换成了队列
 */
void level_order(const binary_tree_node_t *root,
                 int (*visit)(void*))
{
    const binary_tree_node_t *p;
    std::queue<const binary_tree_node_t *> q;

    p = root;

    if(p != NULL) {
        q.push(p);
    }

    while(!q.empty()) {
        p = q.front();
        q.pop();
        visit(p->data);
        if(p->lchild != NULL) { /* 先左后右或先右后左无所谓 */
            q.push(p->lchild);
        }
        if(p->rchild != NULL) {
            q.push(p->rchild);
        }
    }
}
```

binary_tree.cpp

4.2 重建二叉树

binary_tree.cpp

```
/**
 * @brief 给定前序遍历和中序遍历，输出后序遍历.
 *
 * @param[in] n 序列的长度
 * @param[in] pre 前序遍历的序列
 * @param[in] in 中序遍历的序列
 * @param[out] post 后续遍历的序列
 * @return 无
 */
void build(const int n, const char * pre, const char *in, char *post) {
        if(n <= 0) return;
        int p = strchr(in, pre[0]) - in;
        build(p, pre + 1, in, post);
        build(n - p - 1, pre + p + 1, in + p + 1, post + p);
        post[n - 1] = pre[0];
}
```

binary_tree.cpp

第 5 章

图

在 ACM 竞赛中，图一般使用邻接矩阵表示，代码框架如下；

graph.cpp
```
#define MAXN 100  // 顶点最大个数

static int n; // 顶点个数
static int G[MAXN][MAXN]; // 邻接矩阵
static int visited_edges[MAXN][MAXN]; // 边的访问历史记录
static int visited_vertices[MAXN]; // 顶点的访问历史记录
```
graph.cpp

5.1 深度优先搜索

图的深度优先搜索的代码框架如下：

graph.cpp
```
/**
 * @brief 图的深度优先搜索代码框架，搜索边.
 * @param[in] u 出发顶点
 * @param[in] n 顶点个数
 * @param[in] G 图的临街举着
 * @param[in] visited 边的访问历史记录
 * @return 无
 * @remark 在使用的时候，为了降低递归的内存占用量，可以把
 * n, G, visited 抽出来作为全局变量
 */
static void dfs(const int u,
                const int n, const int G[][MAXN], int visited[][MAXN]) {
    int v;
    for(v = 0;  v < n; v++) if(G[u][v] && !visited[u][v]) {
        visited[u][v] = visited[v][u] = 1; // 无向图用这句
        // visited_edges[u][v] = 1; // 有向图用这句
        dfs(v, n, G, visited);
        // 这里写逻辑代码
        // printf("%d %d\n", u, v);
    }
}

/**
 * @brief 图的深度优先搜索代码框架，搜索顶点.
```

```
 * @param[in] u 出发顶点
 * @param[in] n 顶点个数
 * @param[in] G 图的临街举着
 * @param[in] visited 顶点的访问历史记录
 * @return 无
 * @remark 在使用的时候，为了降低递归的内存占用量，可以把
 * n, G, visited 抽出来作为全局变量
 */
static void dfs(const int u,
                const int n, const int G[][MAXN], int visited[MAXN]) {
    int v;
    visited[u] = 1;
    for(v = 0;  v < n; v++) if(G[u][v] && !visited[v]) {
        dfs(v, n, G, visited);
        // 这里写逻辑代码
        // printf("%d %d\n", u, v);
    }
}
```

graph.cpp

5.1.1 黑白图像

输入一个 n*n 的黑白图像（1 表示黑丝，0 表示白色），任务是统计其中八连块的个数。如果两个黑格子有公共边或者公共定点，就说它们属于同一个八连块。如图 5-1所示的黑白图像中有 3 个八连块。

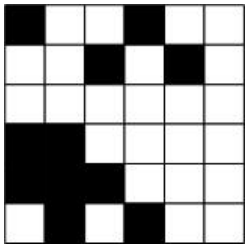


图 5-1 拥有 3 个八连块的黑白图

blackwhite_image.c

```
#include <stdio.h>
#include <string.h>

#define MAXN 16

static int n;
// 黑白图，1 表示黑色，0 表示白色，加一圈 0，用于判断出界
static int G[MAXN + 1][MAXN + 1];
// 记录格子 (x,y) 是否已经被访问过
static int visitied[MAXN][MAXN];

void dfs(const int x, const int y) {
```

```
    // 曾经访问过这个格子, 或者当前格子是白色
    if(G[x][y] == 0 || visitied[x][y] == 1)  return;

    visitied[x][y] = 1; // 标记 (x,y) 已访问过
    // 递归访问周围的 8 个格子
    dfs(x - 1, y - 1); // 左上角
    dfs(x - 1, y); // 正上方
    dfs(x - 1, y + 1); // 右上角
    dfs(x, y - 1); // 左边
    dfs(x, y + 1); // 右边
    dfs(x + 1, y - 1); // 左下角
    dfs(x + 1, y); // 正下方
    dfs(x + 1, y + 1); // 右下角
}

/*
Sample Input
6
100100
001010
000000
110000
111000
010100
Sample Output
3
*/
int main(int argc, char* argv[]) {
    int i, j;
    char s[MAXN]; // 矩阵的一行
    int count = 0; // 八连块的个数

    scanf("%d", &n);
    memset(G, 0, sizeof(G));
    memset(visitied, 0, sizeof(visitied));

    for(i = 0; i < n; ++i) {
        scanf("%s", s);
        for(j = 0; j < n; ++j) {
            G[i + 1][j + 1] = s[j] - '0'; // 把图像往中间挪一点, 空出一圈白格子
        }
    }


    for(i = 1; i <= n; ++i) {
        for(j = 1; j <= n; ++j) {
            if(visitied[i][j] == 0 && G[i][j] == 1) {
                count++;
                dfs(i, j);
            }
        }
    }
    printf("%d\n", count);
```

```
    return 0;
}
```

blackwhite_image.c

类似的题目

与本题相同的题目：

- 《算法竞赛入门经典》[①] 第 107 页 6.4.1 节
- TODO

与本题相似的题目：

- TODO

5.1.2 欧拉回路

如果能从图的某一顶点出发，每条边恰好经过一次，这样的路线称为**欧拉道路** (Eulerian Path)。如果每条边恰好经过一次，且能回到起点，这样的路线称为**欧拉回路** (Eulerian Circuit)。

对于无向图 G，当且仅当 G 是连通的，且最多有两个奇点，则存在欧拉道路。如果有两个奇点，则必须从其中一个奇点出发，到另一个奇点终止。

如果没有奇点，则一定存在一条欧拉回路。

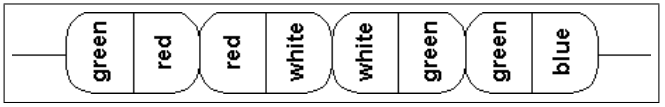
对于有向图 G，当且仅当 G 是连通的，且每个点的入度等于出度，则存在欧拉回路。

如果有两个顶点的入度与出度不相等，且一个顶点的入度比出度小 1，另一个顶点的入度比出度大 1，此时，存在一条欧拉道路，以前一个顶点为起点，以后一个顶点为终点

The Necklace

本题是 UVA 10054 - The Necklace。

My little sister had a beautiful necklace made of colorful beads. Two successive beads in the necklace shared a common color at their meeting point. The figure below shows a segment of the necklace:



But, alas! One day, the necklace was torn and the beads were all scattered over the floor. My sister did her best to recollect all the beads from the floor, but she is not sure whether she was able to collect all of them. Now, she has come to me for help. She wants to know whether it

[①] 刘汝佳, 算法竞赛入门经典，清华大学出版社，2009

is possible to make a necklace using all the beads she has in the same way her original necklace was made and if so in which order the bids must be put.

Please help me write a program to solve the problem.

Input

The input contains T test cases. The first line of the input contains the integer T.

The first line of each test case contains an integer $N(5 \leq N \leq 1000)$ giving the number of beads my sister was able to collect. Each of the next N lines contains two integers describing the colors of a bead. Colors are represented by integers ranging from 1 to 50.

Output

For each test case in the input first output the test case number as shown in the sample output. Then if you apprehend that some beads may be lost just print the sentence "some beads may be lost" on a line by itself. Otherwise, print N lines with a single bead description on each line. Each bead description consists of two integers giving the colors of its two ends. For $1 \leq i \leq N_1$, the second integer on line i must be the same as the first integer on line i + 1. Additionally, the second integer on line N must be equal to the first integer on line 1. Since there are many solutions, any one of them is acceptable.

Print a blank line between two successive test cases.

Sample Input

```
2
5
1 2
2 3
3 4
4 5
5 6
5
2 1
2 2
3 4
3 1
2 4
```

Sample Output

```
Case #1
```

some beads may be lost

Case #2

2 1

1 3

3 4

4 2

2 2

分析

这题就是欧拉回路 + 打印路径。

代码

eulerian_circuit.c

```
#include <stdio.h>
#include<string.h>

#define MAXN 51  // 顶点最大个数

static int G[MAXN][MAXN];
static int visited_vertices[MAXN];
static int visited_edges[MAXN][MAXN];
static int count[MAXN]; // 顶点的度

static void dfs(const int u) {
    int v;
    visited_vertices[u] = 1;
    for(v = 0;  v < MAXN; v++) if(G[u][v] && !visited_vertices[v]) {
        dfs(v);
    }
}

/*
 * @brief 欧拉回路，允许自环和重复边
 * @param[in] u 起点
 * @return 无
 */
static void euler(const int u){
    int v;
    for(v = 0; v < MAXN; ++v) if(G[u][v]){
        --G[u][v]; --G[v][u]; // 这个技巧，即有 visited 的功能，又允许重复边
        euler(v);
        // 逆向打印，或者存到栈里再打印
        printf("%d %d\n", u, v);
```

```
    }
}

int main() {
    int T, N, a, b;
    int i;
    int cases=1;
    scanf("%d",&T);
    while(T--) {
        int flag = 1; // 结点的度是否为偶数
        int flag2 = 1; // 图是否是连通的

        memset(G, 0, sizeof(G));
        memset(count, 0, sizeof(count));

        scanf("%d",&N);
        for(i = 0; i < N; ++i){
            scanf("%d %d", &a, &b);
            ++G[a][b];
            ++G[b][a];
            ++count[a];
            ++count[b];
        }

        printf("Case #%d\n", cases++);

        // 欧拉回路形成的条件之一，判断结点的度是否为偶数
        for(i=0; i<MAXN; ++i) {
            if(count[i] & 1){
                flag = 0;
                break;
            }
        }
        // 检查图是否连通
        if(flag) {
            memset(visited_vertices, 0, sizeof(visited_vertices));
            memset(visited_edges, 0, sizeof(visited_edges));

            for(i=0; i< MAXN; ++i)
                if(count[i]) {
                    dfs(i);
                    break;
                }
            for(i=0; i< MAXN; ++i){
                if(count[i] && !visited_vertices[i]) {
                    flag2 = 0;
                    break;
                }
            }
        }
        if (flag && flag2) {
            for(i = 0; i < MAXN; ++i) if(count[i]){
                euler(i);
```

```
                break;
            }
        } else {
            printf("some beads may be lost\n");
        }

        if(T > 0) printf("\n");
    }
    return 0;
}
```

eulerian_circuit.c

类似的题目

与本题相同的题目：

- 《算法竞赛入门经典》[①] 第 111 页 6.4.4 节
- TODO

与本题相似的题目：

- UVa 10129 - Play on Words, http://t.cn/zTlnBDX

5.2 广度优先搜索

我们通常说的 BFS，默认指的是单向 BFS，此外还有双向 BFS。

5.2.1 走迷宫

一个迷宫由 n 行 m 列的单元格组成，每个单元格要么是空地（用 0 表示），要么是障碍物（用 1 表示）。你的任务是找到一条从入口到出口的最短移动序列，其中 UDLR 分别表示上下左右四个方向。任何时候都不能再障碍物格子中，也不能走到迷宫之外。入口和出口保证是空地。$n, m \leq 100$。

分析

既然求的是“最短”，很自然的思路是用 BFS。举个例子，在如下图所示的迷宫中，假设入口是左上角 $(0, 0)$，我们就从入口开始用 BFS 遍历迷宫，就可以算出从入口到所有点的最短路径（如图 5-2(a) 所示），以及这些路径上每个节点的前驱（如图 5-2(b) 所示）。

[①] 刘汝佳, 算法竞赛入门经典，清华大学出版社，2009

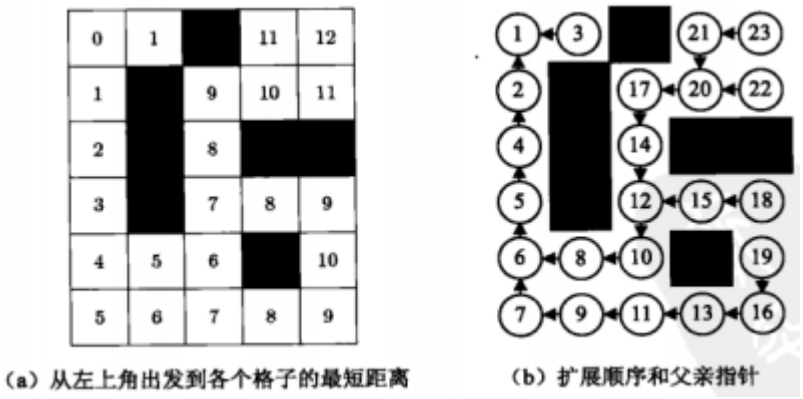


图 5-2 用 BFS 求迷宫中最短路径

代码

maze.c

```
#include <stdio.h>
#include <string.h>

#define MAXN 100

// 迷宫的行数, 列数
static int n, m;
// 迷宫, 0 表示空地, 1 表示障碍物
static int G[MAXN][MAXN];
// 标记格子是否已访问过
static int visited[MAXN][MAXN];
// 每个格子的前驱
static int father[MAXN][MAXN];
// 前趋到该格子的前进方向
static int last_direction[MAXN][MAXN];

// 四个方向
static const char name[4] = {'U','R','D','L'};
static const int dx[4] = {-1, 0, 1, 0}; // 行
static const int dy[4] = {0, 1, 0, -1}; // 列

// 队列
static int q[MAXN * MAXN];

/*
 * @brief 广搜
 *
 * @param[in] x 入口的 x 坐标
 * @param[in] y 入口的 y 坐标
 * @return 无
 */
static void bfs(int x, int y) {
```

```
    int front = 0, rear = 0;
    int u = x * m + y;
    int d; // 方向

    father[x][y] = u; // 打印路径时的终止条件
    visited[x][y] = 1;// 千万别忘记了标记此处的访问记录
    q[rear++] = u;
    while (front < rear) {
        u = q[front++];
        x = u / m;        y = u % m;
        for(d = 0; d < 4; d++) { // 代表四个方向
            const int nx = x + dx[d];
            const int ny = y + dy[d];

            if (nx >= 0 && nx < n && ny >= 0 && ny < m &&  // //(nx, ny) 没有出界
                !G[nx][ny] && !visited[nx][ny]) { // 不是障碍且没被访问过
                const int v = nx * m + ny;
                q[rear++] = v;
                father[nx][ny] = u; // 记录 (nx, ny) 的前趋
                visited[nx][ny] = 1; // 访问记录
                last_direction[nx][ny] = d; // 记录从 (x, y) 到 (nx, ny) 的方向
            }
        }
    }
}

/*
 * @brief 递归实现路径输出
 *
 * 如果格子 (x, y) 有父亲 (fx, fy), 需要先打印出从入口到 (fx, fy) 的最短路径, 然后再
 * 打印从 (fx, fy) 到 (x,y) 的移动方向。
 *
 * @param[in] x 目标点的 x 坐标
 * @param[in] y 目标点的 y 坐标
 * @return 无
 */
static void print_path_r(const int x, const int y) {
    const int fx = father[x][y] / m;
    const int fy = father[x][y] % m;
    if (fx != x || fy != y) {
        print_path_r(fx, fy);
        putchar(name[last_direction[x][y]]);
    }
}

static int direction[MAXN * MAXN];
/*
 * @brief 显式栈实现路径输出
 *
 * @param[in] x 目标点的 x 坐标
 * @param[in] y 目标点的 y 坐标
 * @return 无
 */
```

```
static void print_path(int x, int y) {
    int c = 0;
    while(1) {
        const int fx = father[x][y] / m;
        const int fy = father[x][y] % m;
        if (fx == x && fy == y) break;
        direction[c++] = last_direction[x][y];
        x = fx;
        y = fy;
    }
    while (c--) {
        putchar(name[direction[c]]);
    }
}

/*
Sample Input
6 5
00100
01000
01011
01000
00010
00000
Sample Output
(0,0)-->(0,4), DDDDRRUUURUR
*/
int main(void) {
    int i, j;
    char s[MAXN];

    scanf("%d%d", &n, &m);

    for(i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%s", s);
        for(j = 0; j < m; j++) {
            G[i][j] = s[j] - '0';
        }
    }

    printf(" 从入口到出口迷宫路径: \n");
    bfs(0, 0);        // (0, 0) 是入口
    print_path(0, 4); // (0, 4) 是出口
    printf("\n");
    return 0;
}
```

maze.c

类似的题目

与本题相同的题目:

- 《算法竞赛入门经典》[1]第 108 页 6.4.2 节
- POJ 3984 - 迷宫问题, http://poj.org/problem?id=3984

与本题相似的题目：

- POJ 2049 - Finding Nemo, http://poj.org/problem?id=2049

5.2.2 八数码问题

编号为 1~8 的 8 个正方形滑块摆成 3 行 3 列，有一个格子空着，如图 5-3所示。

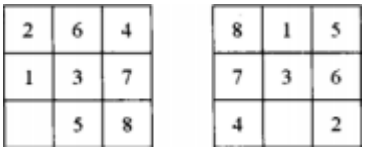


图 5-3 用 BFS 求迷宫中最短路径

每次可以把与空格相邻的滑块（有公共边才算相邻）移到空格中，而它原来的位置就成了新的空格。目标局面固定如下（用 x 表示空格）：

1 2 3

4 5 6

7 8 x

给定初始局面，计算出最短的移动路径。

输入

用一行表示一个局面，例如下面的这个局面：

1 2 3

x 4 6

7 5 8

可以表示为 1 2 3 x 4 6 7 5 8。

输出

如果有解答，输出一个由四个字母'r','l','u','d' 组成的移动路径。如果没有，输出"unsolvable"。

样例输入

2 3 4 1 5 x 7 6 8

样例输出

ullddrurdllurdruldr

[1]刘汝佳, 算法竞赛入门经典，清华大学出版社，2009

分析

计算“最短”，很自然的想到 BFS。

如何表示一个状态？本题是一个 3*3 的棋盘，状态有 9! 个，可以用一个 32 位整数表示，但 15! 已经超过 32 位整数的范围，21! 超过了 64 位整数的范围，因此 4*4 的棋盘可以用一个 64 位整数表示。超过 4*4 的棋盘，则无法用整数来表示了，可以用一个数组来表示。

怎么判断一个状态已经访问过？用哈希表或者集合。哈希表的话，由于 C++ STL 还没有 `std::hashset`，需要自己实现哈希表，然后由于本题的特殊性，存在一种完美哈希 (perfect hashing) 方案。集合可以直接使用 `std::set`。总结起来，有以下三个方法：

- 把排列变成整数，这是一种完美哈希，即不存在冲突
- 用普通的哈希表，这种方法通用一些，速度也略慢。手工实现哈希表，把哈希值相同的组成一个单链表，
- 用 `std::set` 实现判重，代码最短，速度也最慢（本题用这个方法会 TLE）。建议把该方法作为“跳板”，先写一个 STL 版的程序，确保主算法正确，然后把 `std::set` 替换成自己写的哈希表。

此题更优的解法还有双向 BFS（见 §5.3），A* 算法（见 §5.8）。

代码

eight_digits_bfs.c

```
#include<stdio.h>
#include<string.h>

#define DIGITS 9 // 棋盘中数字的个数，也是变进制数需要的位数
#define     MATRIX_EDGE 3       // 棋盘边长

// 3x3 的棋盘，状态最多有 9! 种
#define     MAX         362880

typedef int State[DIGITS]; // 单个状态

static State q[MAX]; // 队列，也是哈希表
static int front, rear;
static int dist[MAX - 1]; // 由初始状态到本状态的最短步数
static int father[MAX - 1]; // 父状态，初始状态无父状态
static char move[MAX - 1]; // 父状态到本状态的移动方向

// 目标状态
static const int goal[] = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0};
static const int space_number = 0; // 空格对应着数字 0

// 上下左右四个方向
```

```
static const int dx[] = {-1, 1, 0, 0};
static const int dy[] = {0, 0, -1, 1};
static const char dc[] = { 'u', 'd', 'l', 'r' };

/**
 * @brief 初始化哈希表.
 * @return 无
 */
static void init_lookup_table(); // 版本 1

/**
 * @brief 插入到 visited 表中.
 * @param[in] index 状态在队列中的位置
 * @return 成功返回 1, 失败返回 0
 */
static int try_to_insert(const int index);

static void init_lookup_table_hash(); // 版本 2
static int try_to_insert_hash(const int index);

static void init_lookup_table_stl(); // 版本 3
static int try_to_insert_stl(const int index);

/**
 * @brief 单向 BFS.
 * @return 返回目标状态在队列 q 中的下标 , 失败则返回 0
 */
static int bfs() {
    // 三个版本随意切换
    init_lookup_table(); // 初始化一个节点查找表
    // init_lookup_table_hash();
    // init_lookup_table_stl(); // 这个版本会 Time Limit Exceeded

    father[0] = 0; // 初始状态无父状态
    dist[0] = 0;
    move[0] = -1;

    while (front < rear) {
        int x, y, z, d;
        const State* const s = &(q[front]);
        if (memcmp(goal, (*s),sizeof((*s))) == 0) {
            return front;  // 找到目标状态, 成功返回
        }
        for (z = 0; z < 9; z++)  if ((*s)[z] == space_number) {
            break;  // 找 0 的位置
        }

        x=z / MATRIX_EDGE, y=z % MATRIX_EDGE; // 获取行列编号
        for (d=0; d < 4; d++) {  // 向四个方向扩展
            const int newx = x + dx[d];
            const int newy = y + dy[d];
            const int newz = newx * MATRIX_EDGE + newy;
```

```
            if (newx >= 0 && newx < MATRIX_EDGE && newy >= 0 &&
                newy < MATRIX_EDGE) { // 没有越界
                State * const t = &(q[rear]);
                memcpy(t, s, sizeof((*s)));
                (*t)[newz] = (*s)[z];
                (*t)[z] = (*s)[newz];

                // 三个版本随意切换
                if (try_to_insert(rear)) { // 利用查找表判重
                // if (try_to_insert_hash(rear)) {
                // if (try_to_insert_stl(rear)) {
                    father[rear] = front;
                    move[rear] = dc[d];
                    dist[rear] = dist[front] + 1;
                    rear++;
                }
            }
        }

        front++;
    }

    return 0;//失败
}


/**
 * @brief 输入.
 * @return 无
 */
static void input() {
    int ch, i;
    for (i = 0; i < DIGITS; ++i) {
        do {
            ch = getchar();
        } while ((ch != EOF) && ((ch < '1') || (ch > '8')) && (ch != 'x'));
        if (ch == EOF) return;
        if (ch == 'x') q[0][i] = 0; // x 映射成数字 0
        else           q[0][i] = ch - '0';
    }
    return;
}

static int top = -1;
static char stack[MAX];
/**
 * @brief 打印从初始状态到目标状态的移动序列.
 * @param[in] index 目标状态在队列 q 中的下标
 * @return 无
 */
static void output(const int index) {
    int i;
    for (i = index; i > 0; i = father[i]) {
```

```
        stack[++top] = move[i];
    }
    for (i = top; i >= 0; --i) {
        printf("%c", stack[i]);
    }
    printf("\n");
}

int main() {
    int ans;

    front = 0; rear = 1;
    input();

    ans = bfs();
    if ( ans > 0) {
        output(ans);
    } else {
        printf("no solution\n");
    }
    return 0;
}

/********************** 方案 1 把排列变成整数 **************************/
// 9 位变进制数（空格）能表示 0 到 (9!-1) 内的所有自然数，恰好有 9! 个，
// 与状态一一对应，因此可以把状态一一映射到一个 9 位变进制数

// 9 位变进制数，每个位数的单位，0!~8!
static const int fac[] = {40320, 5040, 720, 120, 24, 6, 2, 1, 1};

// 采用本方案，由于是完美哈希，没有冲突，
// 可以用 MAX 代替 MAX_HASH_SIZE，减少内存占用量
static int visited[MAX]; // 历史记录表

/** 初始化哈希表. */
static void init_lookup_table() {
    memset(visited, 0, sizeof(visited));
}

/**
 * @brief 计算状态的 hash 值，这里用康托展开，是完美哈希.
 *
 * @param[in] s 状态
 * @return 序数，作为 hash 值
 */
static int hash(const State s) {
    int i, j;
    int key = 0; // 将 q[index] 映射到整数 key
    for (i = 0; i < 9; i++) {
        int cnt = 0;
        for (j = i + 1; j < 9; j++) if (s[i] > s[j]) cnt++;
        key += fac[i] * cnt;
    }
```

```
    return key;
}

/**
 * @brief 插入到 visited 表中.
 * @param[in] index 状态在队列中的位置
 * @return 成功返回 1, 失败返回 0
 */
static int try_to_insert(const int index) {
    const int key = hash(q[index]); // 将 q[index] 映射到整数 code

    if (visited[key]) return 0;
    else visited[key] = 1;

    return 1;
}

/************************** 方案 2 哈希表 **********************************/
#define MAX_HASH_SIZE  1000000  // 状态的哈希表容量, 比 9! 大即可

int head[MAX_HASH_SIZE];
int next[MAX];

static void init_lookup_table_hash() {
    memset(head, 0, sizeof(head));
    memset(next, 0, sizeof(next));
}
static int hash2(const State *s) {
    int i;
    int v = 0;
    for(i = 0; i < 9; i++) v = v * 10 + (*s)[i];
    return v % MAX_HASH_SIZE;
}

static int try_to_insert_hash(const int index) {
    const int h = hash2(&(q[index]));
    int u = head[h]; // 从表头开始查找单链表
    while(u) {
        // 找到了, 插入失败
        if(memcmp(q[u], q[index], sizeof(State)) == 0) return 0;
        u = next[u]; // 顺着链表继续找
    }
    next[index] = head[h]; // 插入到链表中
    head[h] = index; // head[h] 和 next[index] 组成了一个节点
    return 1;
}

/*************************** 方案 3 STL***********************************/
#include <set>
struct cmp {
    bool operator() (int a, int b) const {
        return memcmp(&q[a], &q[b], sizeof(State)) < 0;
    }
```

```
};
std::set<int, cmp> visited_set;

void init_lookup_table_stl() { visited_set.clear(); }

int try_to_insert_stl(const int index) {
    if (visited_set.count(index)) return 0;
    visited_set.insert(index);
    return 1;
}
```

eight_digits_bfs.c

类似的题目

与本题相同的题目：

- 《算法竞赛入门经典》[①] 第 131 页 7.5.3 节
- POJ 1077 - Eight, http://poj.org/problem?id=1077

与本题相似的题目：

- POJ 2893 - M × N Puzzle, http://poj.org/problem?id=2893

5.3 双向 BFS

5.3.1 八数码问题

题目见 §5.2.2。

代码

eight_digits_bibfs.c

eight_digits_bibfs.c

[①] 刘汝佳, 算法竞赛入门经典，清华大学出版社，2009

5.4 最小生成树

5.4.1 Prim 算法

5.4.2 Kruskal 算法

5.5 最短路径

5.5.1 单源最短路径 (Dijkstra 算法)

5.5.2 每点最短路径 (Floyd 算法)

5.6 拓扑排序

5.7 关键路径

5.8 A* 算法

5.8.1 八数码问题

题目见 §5.2.2。

代码

eight_digits_astar.c

```
/**
 简单解释几个要点，便于理解代码.
 1. 怎么判断是否有解？只要计算出的逆序个数总和为奇数，该数据必然无解
 2. 如何判断某一状态是否到过？本题存在一种完美哈希方案，即用康托展开。
    详见 http://128kj.iteye.com/blog/1699795
    2.1. 将一个状态视为数字 0-8 的一个排列，将此排列转化为序数，作为此状
 态的 HASH 值。0 表示空格. 转化算法此处不再赘述。

    2.2. 排列转化为序数，用序数作为 hash 值
    例，1 2 3 这三个数字的全排列，按字典序，依次为
 123 -- 0
 132 -- 1
 213 -- 2
 231 -- 3
 312 -- 4
 321 -- 5
 其中，左侧为排列，右侧为其序数。

 3. 使用数据结构 堆 加速挑选最优值。
```

```
 4. 函数 g 的计算，此状态在搜索树中已经走过的路径的节点数.

 5. 估价函数 h ，采用曼哈顿距离，见代码 calcH 函数。曼哈顿距离的定义是，
 假设有两个点 (x1,y1),(x2,y2)，则曼哈顿距离 L1=|x1-x2| + |y1-y2|
 */

#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <stdlib.h>

// 3x3 的棋盘，状态最多有 9! 种
// 8 位变进制数（空格）能表示 0 到 (9!-1) 内的所有自然数，恰好有 9! 个，
// 与状态一一对应，因此可以把状态一一映射到一个 8 位变进制数
#define     MAX         362880

#define DIGITS 9 // 棋盘中数字的个数，也是变进制数需要的位数
#define     MATRIX_EDGE 3       // 棋盘边长

#define     MOD         10      // 按十取模

typedef struct {
    int state; // 状态
    int parent;     // 父状态
    int flag;   // -1 表示已经展开过了 closed，0 表示死节点，1 表示还未展开，open
    int g, h, f; // 三个评估函数
    char choice;  // 左右上下四个方向移动，见全局常量 DI DJ DC
} state_t;

static state_t states[MAX];  // 全局的一条状态变化路径

static int  startIndex, goalIndex; // 开始状态，目标状态对应的 hash 值

// 目标状态
static const int goal = 123456780;
// 每个数字在棋盘中的位置，例如 0，在 (1,1)=4 这个位置上
static const int goal_pos[DIGITS] = {8,0,1,2,3,4,5,6,7};
static const int space_number = 0; // 空格对应着数字 0

// 上下左右四个方向
static const int DI[] = {-1, 1, 0, 0};
static const int DJ[] = {0, 0, -1, 1};
static const char DC[] = { 'u', 'd', 'l', 'r' };

// 9 位变进制数，每个位数的单位，0!~8!
static const int fac[] = {40320, 5040, 720, 120, 24, 6, 2, 1, 1};

/**
 * @brief 计算状态的 hash 值，这里用康托展开，是完美哈希.
 *
 * @param[in] s 当前状态
 * @return 序数，作为 hash 值
 */
```

```
static int hash(int s) {
    int i, j;
    int d[DIGITS];
    int key = 0;

    for(i = DIGITS - 1; i >=0; i--) {
        d[i] = s % MOD;
        s /= MOD;
    }

    for (i = 0; i < DIGITS; i++) {
        int c = 0; // 逆序数
        for (j = i + 1; j < DIGITS; j++) {
            if(d[j] < d[i]) {
                c++;
            }
        }
        key += c * fac[i];
    }

    return key;
}

// 堆
static int heap[MAX + 4], heapIndex[MAX + 4], heapN;

static void heapUp(int j) {
    int i = j / 2;
    const int x = heap[j];
    while (i > 0) {
        if (states[heap[i]].f <= states[x].f) break;
        heapIndex[heap[j] = heap[i]] = j;
        j = i;
        i = j / 2;
    }
    heapIndex[heap[j] = x] = j;
}

static void heapDown(int i) {
    int j = i + i;
    const int x = heap[i];
    while (j <= heapN) {
        if ((j < heapN) && (states[heap[j]].f >
            states[heap[j + 1]].f)) ++j;
        if (states[x].f <= states[heap[j]].f) break;
        heapIndex[heap[i] = heap[j]] = i;
        i = j;
        j = i + i;
    }
    heapIndex[heap[i] = x] = i;
}

static int heapPop() {
```

```
    const int x = heap[1];
    heapIndex[heap[1] = heap[heapN--]] = 1;
    if (heapN > 1) {
        heapDown(1);
    }
    return x;
}

static void heapAdd(const int x) {
    ++heapN;
    heapIndex[heap[heapN] = x] = heapN;
    heapUp(heapN);
}

/**
 * 估价函数 h。
 * @param s 状态
 * @return 预估代价
 */
static int calcH(int s) {
    int i;
    int h = 0;

    for (i = DIGITS - 1; i >= 0; --i) {
        const int p = s % 10;
        s /= 10;
        // 曼哈顿距离
        h += abs(i / MATRIX_EDGE - goal_pos[p] / MATRIX_EDGE) +
            abs(i % MATRIX_EDGE - goal_pos[p] % MATRIX_EDGE);
    }
    return h;
}

/**
 * @brief 输入.
 * @return  成功返回数字, 失败返回 0
 * @remark 《算法竞赛入门经典》第 131 页 7.5.3 节, 是用 0 表示空格,
 * POJ 1077 是用'x' 表示空格, 前者简化了一点, POJ 1077 还需要把'x' 映射成 0
 */
static int input() {
    int ch, i;
    int start = 0;
    for (i = 0; i < DIGITS; ++i) {
        do {
            ch = getchar();
        } while ((ch != EOF) && ((ch < '1') || (ch > '8')) && (ch != 'x'));
        if (ch == EOF) return 0;
        if (ch == 'x') start = start * MOD + space_number; // x 映射成数字 0
        else           start = start * MOD + ch - '0';
    }
    return start;
}
```

```
/**
 * 计算一个排列的逆序数，0 除外.
 */
static int inversion_count(int permutation) {
    int i, j;
    int d[DIGITS];
    int c = 0; // 逆序数

    for(i = DIGITS - 1; i >=0; i--) {
        d[i] = permutation % MOD;
        permutation /= MOD;
    }

    for (i = 1; i < DIGITS; i++)  if (d[i] != space_number) {
        for (j = 0; j < i; j++) {
            if(d[j] != space_number) {
                if (d[j] > d[i]) {
                    c++;
                }
            }
        }
    }
    return c;
}

/**
 * 判断是否无解.
 *
 * 求出除 0 之外所有数字的逆序数之和，也就是每个数字后面比它小的数字的个数的和，
 * 称为这个状态的逆序。若两个状态的逆序奇偶性相同，则可相互到达，否则不可相互到达。
 * 由于原始状态的逆序数为 0（偶数），因此逆序数为偶数的目标状态有解。
 *
 * @param s 目标状态
 * @return 1 表示无解，0 表示有解
 */
static int not_solvable(const int s) {
    return inversion_count(s) % 2;
}


static char choice[4];
static int nextIndex[4];
// 向四个方向扩展
static void next(int s) {
    int i, j, k;
    static int p[MATRIX_EDGE][MATRIX_EDGE]; // 一个状态对应的矩阵
    int i0, j0;  // 空格位置

    for (i = MATRIX_EDGE - 1; i >= 0; i--) {
        for (j = MATRIX_EDGE - 1; j >= 0; j--) {
            p[i][j] = s % MOD;
            s /= MOD;
            if (p[i][j] == space_number) {
```

```
                i0 = i;
                j0 = j;
            }
        }
    }
    // 向四个方向探索
    for (k = 0; k < 4; ++k) {
        const int sx = i0 + DI[k]; // 空格的新位置 (sx, sy)
        const int sy = j0 + DJ[k];
        if ((sx >= 0) && (sx < 3) && (sy >= 0) && (sy < 3)) {
            int key;
            p[i0][j0] = p[sx][sy];
            p[sx][sy] = space_number;
            // 移动空格后, 计算新的状态
            s = 0;
            for (i = 0; i < MATRIX_EDGE; i++)
                for (j = 0; j < MATRIX_EDGE; j++)
                    s = s * MOD + p[i][j];
            p[sx][sy] = p[i0][j0]; // 将矩阵还原, (i0, j0) 可以不管

            key = nextIndex[k] = hash(s);
            choice[k] = DC[k];
            if (states[key].state == 0) { // 该状态还没有出现过
                states[key].state = s;
                states[key].h = calcH(s);
            }
        } else {// 越界了
            nextIndex[k] = -1;
        }
    }
}

/**
 * @brief A* 搜索
 * @param[in] start 初始状态
 * @return 如果无解, 返回 0, 如果有解返回 1
 */
static int astar(const int start) {
    int i, j, k, ng, nf;
    if (not_solvable(start)) return 0;

    startIndex = hash(start);
    goalIndex  = hash(goal);
    if (start == goal) return 1;

    memset(states, 0, sizeof(states));
    states[startIndex].state = start;
    states[startIndex].flag    = 1;
    states[startIndex].g       = 0;
    states[startIndex].h       = states[startIndex].f = calcH(start);
    heapN = 0;
    heapAdd(startIndex);
    while (heapN > 0) {
```

```
        i = heapPop();
        if (i == goalIndex) return 1; // 找到目标，返回

        states[i].flag = -1;
        ng = states[i].g + 1;
        next(states[i].state);
        for (k = 0; k < 4; ++k) {
            j = nextIndex[k];
            if (j < 0) continue;
            nf = ng + states[j].h;
            if ((states[j].flag == 0) || ((states[j].flag == 1) &&
                (nf < states[j].f))) {
                states[j].parent = i;
                states[j].choice = choice[k];
                states[j].g    = ng;
                states[j].f    = nf;
                if (states[j].flag > 0) {
                    heapUp(heapIndex[j]);
                    heapDown(heapIndex[j]);
                } else {
                    heapAdd(j);
                    states[j].flag = 1;
                }
            }
        }
    }
    return 0;
}

static int top = -1;
static char stack[MAX];
/**
 * @brief 打印移动序列.
 * @return 无
 */
static void output() {
    int i;
    for (i = goalIndex; i != startIndex; i = states[i].parent) {
        stack[++top] = states[i].choice;
    }
    for (i = top; i >= 0; --i) {
        printf("%c", stack[i]);
    }
    printf("\n");
}

int main_astar() {
    const int start = input();
    if (start > 0) {
        if (astar(start)) {
            output();
        } else {
            printf("no solution\n");
```

```
            }
        }
        return 0;
    }
```

eight_digits_astar.c

第 6 章
查找

6.1 折半查找

binary_search.c

```
/** 数组元素的类型 */
typedef int elem_t;
/**
  * @brief 有序顺序表的折半查找算法.
  *
  * @param[in] a 存放数据元素的数组, 已排好序
  * @param[in] n 数组的元素个数
  * @param[in] x 要查找的元素
  * @return 查找成功则返回元素所在下标, 否则返回-1
  */
int binary_search(const elem_t a[], const int n, const elem_t x)
{
    int left = 0, right = n -1, mid;
    while(left <= right) {
        mid = left + (right - left) / 2;
        if(x > a[mid]) {
            left = mid + 1;
        } else if(x < a[mid]) {
            right = mid - 1;
        } else {
            return mid;
        }
    }
    return -1;
}
```

binary_search.c

第 7 章
排序

7.1 快速排序

详细解释请参考本项目的 wiki，https://github.com/soulmachine/acm-cheatsheet/wiki/快速排序。

quick_sort.c

```
/** 数组元素的类型 */
typedef int elem_t;
 /*
  * @brief 一趟划分.
  * @param[inout] a 待排序元素序列
  * @param[in] start 开始位置
  * @param[in] end 结束位置, 最后一个元素后一个位置
  * @return 基准元素的新位置
  */
static int partition(elem_t a[], const int start, const int end)
{
    int i = start;
    int j = end - 1;
    const elem_t pivot = a[i];

    while(i < j) {
        while(i < j && a[j] >= pivot) j--;
        a[i] = a[j];
        while(i < j && a[i] <= pivot) i++;
        a[j] = a[i];
    }
    a[i] = pivot;
    return i;
}

/**
  * @brief 快速排序.
  * @param[inout] a 待排序元素序列
  * @param[in] start 开始位置
  * @param[in] end 结束位置, 最后一个元素后一个位置
  * @return 无
  */
void quick_sort(elem_t a[], const int start, const int end)
{
    if(start < end - 1) { /* 至少两个元素 */
```

```
        const int pivot_pos = partition(a, start, end);
        quick_sort(a, start, pivot_pos);
        quick_sort(a, pivot_pos + 1, end);
    }
}
```

quick_sort.c

第 8 章
暴力枚举法

8.1 算法思想

生成 –测试法。

8.2 简单枚举

8.2.1 分数拆分

输入正整数 k，找到所有的正整数 $x \geq y$，使得 $\frac{1}{k} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$。

样例输入

2

12

样例输出

2

1/2=1/6+1/3

1/2=1/4+1/4

8 1/12=1/156+1/13

1/12=1/84+1/14

1/12=1/60+1/15

1/12=1/48+1/16

1/12=1/36+1/18

1/12=1/30+1/20

1/12=1/28+1/21

1/12=1/24+1/24

分析

既然说找出所有的 x, y，枚举对象自然就是他们了。可问题在于：枚举范围如何？从 $\frac{1}{12} = \frac{1}{156} + \frac{1}{13}$，可以看出，$x$ 可以比 y 大很多。难道要无休止地枚举下去？当然不是。由于 $x \geq y$，有 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$，因此 $\frac{1}{k} - \frac{1}{y} \leq \frac{1}{y}$，即 $y \leq 2k$。这样，只需要在 $2k$ 范围之类枚举 y，然后根据 y 算出 x 即可。

8.3 枚举排列

8.3.1 生成 1 n 的排列

8.3.2 生成可重复集合的排列

8.3.3 下一个排列

8.4 子集生成

8.4.1 增量构造法

8.4.2 位向量法

8.4.3 二进制法

第 9 章
回溯法

9.1 算法思想

当把问题分成若干步骤并递归求解时，如果当前步骤没有合法选择，则函数将返回上一级递归调用，这种现象称为回溯 (backtrack)。正是因为这个原因，枚举递归算法常被称为回溯法。

回溯法 = 深搜 + 剪枝。树的深搜或图的深搜都可以。深搜一般用递归来写，这样比较简洁。

回溯法比暴力枚举法快的原因，在于：暴力枚举法，是每生成一个完整的解答后，再来判断这个解答是否合法，而回溯法则在生成每一步中都进行判断，而不是等一个答案生成完毕后再来判断，这样，在每一步进行剪枝，减少了大量的废答案。

9.2 八皇后问题

在 8×8 的棋盘上，放置 8 个皇后，使得她们互不攻击，每个皇后的攻击范围是同行、同列和同对角线，要求找出所有解。如图 9-1所示。

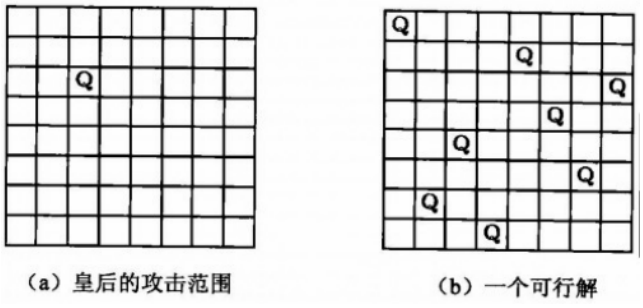


图 9-1　八皇后问题

分析

最简单的暴力枚举方法是，从 64 个格子中选一个子集，使得子集含有 8 个格子，且任意两个格子都不在同一行、同一列或同一个对角线上。这正是子集枚举问题，然而 64 个格子的子集有 2^64 个，太大了，这并不是一个很好的模型。

第二个思路是，从 64 个格子中选 8 个格子，这是组合生成问题。根据组合数学，有 $C_{64}^{8} \approx 4.426 \times 10^9$ 种方案，比第一种方案优秀，但仍然不够好。

经过思考不难发现，由于每一行只能放一个皇后，那么第一行有 8 种选择，第二行有 7 中选择，$\cdots$，第 8 行有 1 中选择，总共有 $8! = 40320$ 个方案。如果用 C[x] 表示第 x 行皇后的列编号，则问题变成了一个全排列生成问题，枚举量不会超过 8!。

代码

eight_queen.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define QUEENS 8 // 皇后的个数，也是棋盘的长和宽

static int total = 0;         // 可行解的总数
static int C[QUEENS] = {0};         // C[i] 表示第 i 行皇后所在的列编号

/**
 * @brief 输出所有可行的棋局，按行打印.
 * @return 无
 */
void output1() {
    int i, j;
    printf("No. %d\n", total);
    for (i = 0; i < QUEENS; ++i) {
        for (j = 0; j < QUEENS; ++j) {
            if (j != C[i]) {
                printf("0 ");
            } else {
                printf("1 ");
            }
        }
        printf("\n");
    }
}

/**
 * @brief 输出所有可行的棋局，按列打印.
 *
 * http://poj.grids.cn/practice/2698/ , 这题需要按列打印
 *
 * @return 无
 */
```

```
void output() {
    int i, j;
    printf("No. %d\n", total);
    for (i = 0; i < QUEENS; ++i) {
        for (j = 0; j < QUEENS; ++j) {
            if (i != C[j]) {
                printf("0 ");
            } else {
                printf("1 ");
            }
        }
        printf("\n");
    }
}

/**
 * @brief 检查当前位置 (current, column) 能否放置皇后.
 *
 * @param[in] current 当前行
 * @return 能则返回 1, 不能则返回 0
 */
static int check(const int current, const int column) {
    int ok = 1;
    int j;
    for(j = 0; j < current; ++j) {
        // 两个点的坐标为 (current, column), (j, C[j])
        // 检查是否在同一列, 或对角线上
        if(column == C[j] || current - j == column - C[j] ||
            current - j == C[j] - column) {
            ok = 0;
            break;
        }
    }
    return ok;
}

/**
 * @brief 八皇后, 回溯法
 *
 * @param[in] current 搜索当前行, 该再哪一列上放一个皇后
 * @return 无
 */
static void search(const int current) {
    if(current == QUEENS) {  // 递归边界, 只要走到了这里, 意味着找到了一个可行解
        ++total;
        output();
    } else {
        int i;
        for(i = 0; i < QUEENS; ++i) {  // 一列一列的试
            const int ok = check(current, i);
            if(ok) {  // 如果合法, 继续递归
                C[current] = i;
                search(current + 1);
```

```
            }
        }
    }
}

// 表示已经放置的皇后
// 占据了哪些列
static int columns[QUEENS] = {0};
// 占据了哪些主对角线
static int principal_diagonals[2 * QUEENS] = {0};
// 占据了哪些副对角线
static int counter_diagonals[2 * QUEENS] = {0};

/**
 * @brief 检查当前位置 (current, column) 能否放置皇后.
 *
 * @param[in] current 当前行
 * @return 能则返回 1, 不能则返回 0
 */
static int check2(const int current, const int column) {
    return columns[column] == 0 && principal_diagonals[current + column] == 0
        && counter_diagonals[current - column + QUEENS] == 0;
}

/**
 * @brief 八皇后, 回溯法, 更优化的版本, 用空间换时间
 *
 * @param[in] current 搜索当前行, 该再哪一列上放一个皇后
 * @return 无
 */
static void search2(const int current) {
    if(current == QUEENS) {  // 递归边界, 只要走到了这里, 意味着找到了一个可行解
        ++total;
        output();
    } else {
        int i;
        for(i = 0; i < QUEENS; ++i) {  // 一列一列的试
            const int ok = check2(current, i);
            if(ok) {  // 如果合法, 继续递归
                C[current] = i;
                columns[i] = principal_diagonals[current + i] =
                    counter_diagonals[current- i + QUEENS] = 1;
                search2(current + 1);
                // 恢复环境
                columns[i] = principal_diagonals[current + i] =
                    counter_diagonals[current- i + QUEENS] = 0;
            }
        }
    }
}

int main(int argc, char* args[]) {
    total = 0;
```

```
    // search(0);
    search2(0);
    return 0;
}
```

eight_queen.c

类似的题目

与本题相同的题目：

- 《算法竞赛入门经典》[1] 第 123 页 7.4.1 节
- 百练 2698 - 八皇后问题, http://poj.grids.cn/practice/2698/

与本题相似的题目：

- POJ 1321 - 棋盘问题, http://poj.org/problem?id=1321

[1] 刘汝佳, 算法竞赛入门经典，清华大学出版社，2009