解: (1) 写出增广矩阵:

$$
\begin{array}{c}
1\\ 2\\ 3\\ \\ n
\end{array}
\begin{bmatrix}
2^0 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} & \frac{1}{1}(2^n-1)\\
3^0 & 3^1 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} & \frac{1}{2}(3^n-1)\\
4^0 & 4^1 & 4^2 & \cdots & 4^{n-1} & \frac{1}{3}(4^n-1)\\
\cdots & & & & & \\
(n+1)^0 & (n+1)^1 & (n+1)^2 & \cdots & (n+1)^{n-1} & \frac{1}{n}[(n+1)^n-1]
\end{bmatrix} \cdots (A)
$$

考察增广矩阵(A). 考虑使用量化的列主元素高斯消去法.

由于 $\frac{2^0}{2^{n-1}} > \frac{3^0}{3^{n-1}} > \cdots > \frac{(n+1)^0}{(n+1)^{n-1}}$. 因此选 r_{11} 作为主元. 有:

$$
A \sim \begin{bmatrix}
2^0 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} & \frac{1}{1}(2^n-1)\\
0 & 3^1-2^1 & 3^2-2^2 & \cdots & 3^{n-1}-2^{n-1} & \frac{1}{2}(3^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1)\\
0 & 4^1-2^1 & 4^2-2^2 & \cdots & 4^{n-1}-2^{n-1} & \frac{1}{3}(4^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1)\\
\cdots & & & & & \\
0 & (n+1)^1-2^1 & (n+1)^2-2^2 & \cdots & (n+1)^{n-1}-2^{n-1} & \frac{1}{n}[(n+1)^n-1]-\frac{1}{1}(2^n-1)
\end{bmatrix}
$$

同理, 继续使用量化的列主元素高斯消去法:

$$
\sim \begin{bmatrix}
2^0 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1}, & \frac{1}{1}(2^n-1)\\
0 & 3^1-2^1 & 3^2-2^2 & \cdots & 3^{n-1}-2^{n-1}, & \frac{1}{2}(3^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1)\\
0 & 0 & (4^2-2^2)-(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1})(4^1-2^1) & \cdots & (4^{n-1}-2^{n-1})-(\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{3^1-2^1})(4^1-2^1), & \{\frac{1}{3}(4^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1)\}-[\frac{1}{2}(3^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1)]\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}\\
\cdots & & & & & \\
0 & 0 & [(n+1)^2-2^2]-(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1})\times[(n+1)^1-2^1], & \cdots & [(n+1)^{n-1}-2^{n-1}]-(\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{3^1-2^1})\times[(n+1)^1-2^1], & \{\frac{1}{n}[(n+1)^n-1]-\frac{1}{1}(2^n-1)\}-\{[\frac{1}{2}(3^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1)]\times\frac{(n+1)^1-2^1}{3^1-2^1}\}
\end{bmatrix}
$$

④ 第四次消元使用的乘法算子：

$$\alpha_4^{(4)} = \frac{\left[(6^3-2^3)-\left(\frac{6^3-2^3}{3^1-2^1}\right)\times(6^1-2^1)-\frac{(6^1-2^1)-(3^2-2^2)\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}}{(4^2-2^2)-(3^2-2^2)\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}}\right]}{\left[(5^3-2^3)-\left(\frac{3^3-2^3}{3^1-2^1}\right)\times(5^1-2^1)-\frac{(5^2-2^2)-(3^2-2^2)\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}}{(4^2-2^2)-(3^2-2^2)\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}}\right]\times(-1)}$$

…

$$\alpha_n^{(4)} = \frac{\left[((n+1)^{n-1}-2^{n-1})-\frac{(n+1)^{n-1}-2^{n-1}}{3^1-2^1}\times[(n+1)^{n-1}-2^{n-1}]-\frac{(n+1)^1-2^1-(3^2-2^2)\times\frac{4^2-2^2}{3^1-2^1}}{4^2-2^2-(3^2-2^2)\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}}\right]}{\left[(5^3-2^3)-\left(\frac{3^3-2^3}{3^1-2^1}\right)\times(5^1-2^1)-\frac{(5^2-2^2)-(3^2-2^2)\times\left(\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}\right)}{(4^2-2^2)-(3^2-2^2)\times\left(\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}\right)}\right]\times(-1)}$$

显然，问题被导向了极其复杂的情况。我们本来想要直接写成 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \\ 0 & & & \\ 0 & & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 这种形式的。

因此，需要求出第n次消元的乘法算子 $\alpha_n^{(n)}$ 和相对应的 b_n。通过上面的前4次推导归纳，发现还是存在一定的规律的，即 $\alpha_{nn}^{(n)} = \frac{a_{n,n-1}}{a_{n-1,n-1}\text{的系数}\times(-1)}$。这一类公式十分复杂，这里暂不写出。

同样，对于 b_n 也如此推导，计算量也不小。下面直接阐述一下matlab的计算结果。

整理一下，有：

$$\left[\begin{array}{cccccc}
2^0 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1}, & \frac{1}{1}(2^n-1) \\
0 & 3^1-2^1 & 3^2-2^2 & \cdots & 3^{n-1}-2^{n-1}, & \frac{1}{2}(3^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1) \\
0 & 0 & (4^2-2^2)-(3^2-2^2)\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1} & \cdots & (4^{n-1}-2^{n-1})-(3^{n-1}-2^{n-1})\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}, & \left[\frac{1}{2}(4^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1)\right]-\left[\frac{1}{2}(3^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1)\right]\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1} \\
\cdots & & & & & \\
0 & 0 & [(n+1)^2-2^2]-[(n+1)^1-2^1]\times\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1} & \cdots & [(n+1)^{n-1}-2^{n-1}]-\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{3^1-2^1}\times[(n+1)^1-2^1], & \left\{\frac{1}{n}[(n+1)^n-1]-\frac{1}{1}(2^n-1)\right\}-\left\{\frac{1}{2}(3^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1)\right\}\times\frac{(n+1)^1-2^1}{3^1-2^1}
\end{array}\right]$$

观察发现，第一次消元使用的乘法算子 ①：$\alpha_1^{(1)}=-\frac{3^0}{2^0}$　$\alpha_2^{(1)}=-\frac{4^0}{2^0}$，…　$\alpha_n^{(1)}=-\frac{(n+1)^0}{2^0}$

（注：其中 (1) 表示第几次，α_1 表示第1行）

第二次消元使用的乘法算子：②：$\alpha_2^{(2)}=-\frac{4^1-3^1}{3^1-2^1}$，$\alpha_3^{(2)}=-\frac{5^1-3^2}{3^1-2^1}$，…　$\alpha_n^{(2)}=-\frac{(n+1)^1-2^1}{3^1-\cancel{2^2}}$

第三次消元使用的乘法算子 ③：$\alpha_3^{(3)}=\frac{(5^2-2^2)-\left(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1}\right)\times(5^1-2^1)}{\left[(4^2-2^2)-\left(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1}\right)(4^1-2^1)\right]\times(-1)}$，$\alpha_4^{(3)}=\frac{(6^2-2^2)-\left(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1}\right)\times(6^1-2^1)}{\left[(4^2-2^2)-\left(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1}\right)(4^1-2^1)\right]\times(-1)}$ …

$$\alpha_n^{(3)}=\frac{[(n+1)^2-2^2]-\left(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1}\right)\times[(n+1)^1-2^1]}{\left[(4^2-2^2)-\left(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1}\right)(4^1-2^1)\right]\times(-1)}$$