题目：讨论求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ldots + 2^{n-1}x_n = 2^n - 1 \\ x_1 + 3x_2 + \ldots + 3^{n-1}x_2 = \dfrac{1}{2}(3^n - 1) \\ \ldots \\ x_1 + (n+1)x_2 + \ldots + (n+1)x_n = \dfrac{1}{n}((n+1)^n - 1) \end{cases}$$

一、基本结果展示

首先，进行了一下手算推到，想要通过计算直接利用量化的列主元素高斯消去法来进行求解。这部分计算内容放到后面，下面先阐述使用 Matlab 进行计算的结果。

（step.1）首先分别编写 matlab 左除、列主元素高斯消去法、LU 分解法三种方法的函数；

（step.2）从 n=2 到 n=16 进行测试；

（step.3）每次测试利用这些解与标准解的二范数进行评估，来展现机器求解与真实值之间的差别程度；

（step.4）绘制图像，进行分析。

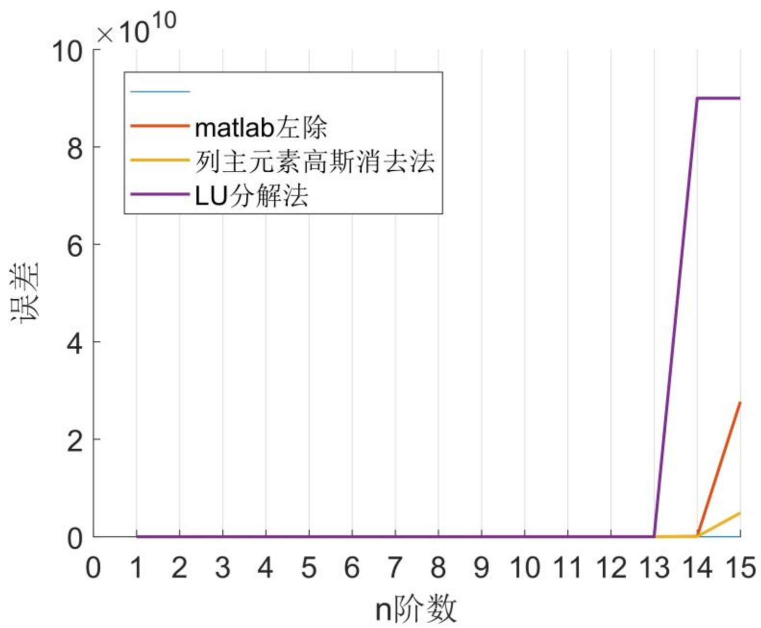


图 1.方程阶数与方程解误差之间的关系图

由上图，不难发现：

（1）列主元素高斯消去法在三种方法中效果最好，其次是 matlab 左除的方法，最差的是 LU 分解法

（2）列主元素高斯消去法在 n=15 时误差增大至不可接受，matlab 左除在 n=14 时误差增大至不可接受，LU 分解法在 n=11 时分解失败，因此只能测试至 n=10。

（3）在后期测试中，发现列主元素高斯消去法的误差增长速度明显低于 matlab 左除方法，也可以说明 matlab 中的方法并非最优的方法。

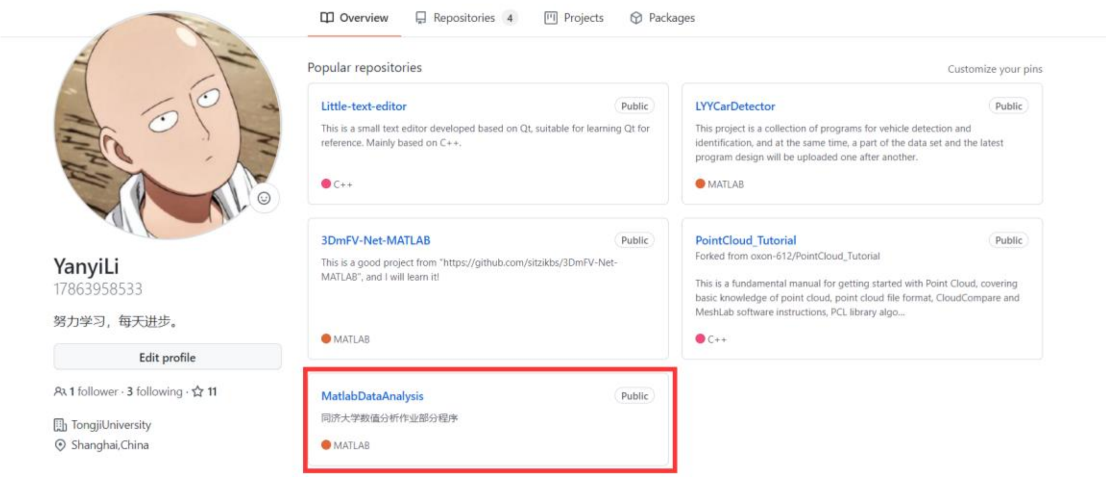
（4）经过相似测试，可以参见报告第四部分，可以得出：最终确定 n=11 时 LU 分解崩溃，最终确定 n 大于 12 时这个方程组列主元素高斯消去法和左除法崩溃，但是列主元素高斯消去法误差比左除法要小。

二、相关程序

Matlab 程序请见我的 github：

https://github.com/17863958533/MatlabDataAnalysis.git

欢迎给我点星星。



三、部分推导

解：(1) 写出增广矩阵：

$$
\begin{array}{c}
1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ n
\end{array}
\begin{bmatrix}
2^0 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} & \frac{1}{1}(2^n-1) \\
3^0 & 3^1 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} & \frac{1}{2}(3^n-1) \\
4^0 & 4^1 & 4^2 & \cdots & 4^{n-1} & \frac{1}{3}(4^n-1) \\
\cdots & & & & & \\
(n+1)^0 & (n+1)^1 & (n+1)^2 & \cdots & (n+1)^{n-1} & \frac{1}{n}[(n+1)^n-1]
\end{bmatrix} \cdots (A)
$$

考察增广矩阵(A)，考虑使用量化的列主元素高斯消去法。

由于 $\frac{2^0}{2^{n-1}} > \frac{3^0}{3^{n-1}} > \cdots > \frac{(n+1)^0}{(n+1)^{n-1}}$，因此选 r_{11} 作为主元，有

$$
A \sim \begin{bmatrix}
2^0 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} & \frac{1}{1}(2^n-1) \\
0 & 3^1-2^1 & 3^2-2^2 & \cdots & 3^{n-1}-2^{n-1} & \frac{1}{2}(3^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1) \\
0 & 4^1-2^1 & 4^2-2^2 & \cdots & 4^{n-1}-2^{n-1} & \frac{1}{3}(4^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1) \\
\cdots & & & & & \\
0 & (n+1)^1-2^1 & (n+1)^2-2^2 & \cdots & (n+1)^{n-1}-2^{n-1} & \frac{1}{n}[(n+1)^n-1]-\frac{1}{1}(2^n-1)
\end{bmatrix}
$$

同理，继续使用量化的列主元素高斯消去法：

$$
\sim \begin{bmatrix}
2^0 & 2^1 & 2^2 & \cdots\ 2^{n-1}, & \frac{1}{1}(2^n-1) \\
0 & 3^1-2^1 & 3^2-2^2 & \cdots\ 3^{n-1}-2^{n-1}, & \frac{1}{2}(3^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1) \\
0 & 0 & (4^2-2^2)-(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1})(4^1-2^1) & \cdots\ (4^{n-1}-2^{n-1})-(\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{3^1-2^1})(4^1-2^1), & \left\{\frac{1}{3}(4^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1)\right\}-\left[\frac{1}{2}(3^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1)\right]\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1} \\
\cdots & & & & \\
0 & 0 & [(n+1)^2-2^2]-(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1})\times[(n+1)^1-2^1], & \cdots\ [(n+1)^{n-1}-2^{n-1}]-(\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{3^1-2^1})\times[(n+1)^1-2^1], & \left\{\frac{1}{n}[(n+1)^n-1]-\frac{1}{1}(2^n-1)\right\}-\left\{\left[\frac{1}{2}(3^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1)\right]\times\frac{(n+1)^1-2^1}{3^1-2^1}\right\}
\end{bmatrix}
$$

整理一下，有：

$$
\left[\begin{array}{llllll}
2^0 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1}, & \frac{1}{1}(2^n-1) \\
0 & 3^1-2^1 & 3^2-2^2 & \cdots & 3^{n-1}-2^{n-1}, & \frac{1}{2}(3^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1) \\
0 & 0 & (4^2-2^2)-(3^2-2^2)\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1} & \cdots & (4^{n-1}-2^{n-1})-(3^{n-1}-2^{n-1})\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}, & \left[\frac{1}{2}(4^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1)\right]-\left[\frac{1}{2}(3^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1)\right]\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1} \\
\cdots & & & & & \\
0 & 0 & [(n+1)^2-2^2]-[(n+1)^1-2^1]\times\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1} & \cdots & [(n+1)^{n-1}-2^{n-1}]-\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{3^1-2^1}\times[(n+1)^1-2^1], & \left\{\frac{1}{n}[(n+1)^n-1]-\frac{1}{1}(2^n-1)\right\}-\left\{\frac{1}{2}(3^n-1)-\frac{1}{1}(2^n-1)\right\}\times\frac{(n+1)^1-2^1}{3^1-2^1}
\end{array}\right]
$$

观察发现，第一次消元使用的乘法算子 ①：$\alpha_1^{(1)}=-\frac{3^0}{2^0}$　$\alpha_2^{(1)}=-\frac{4^0}{2^0}$，…　$\alpha_n^{(1)}=-\frac{(n+1)^0}{2^0}$

（注：其中 (1) 表示第几次，α_1 表示第1行）

第二次消元使用的乘法算子：②：$\alpha_2^{(2)}=-\frac{4^1-3^1}{3^1-2^1}$，$\alpha_3^{(2)}=-\frac{5^1-3^1}{3^1-2^1}$，…　$\alpha_n^{(2)}=-\frac{(n+1)^1-2^1}{3^1-2^1}$

第三次消元使用的乘法算子 ③：$\alpha_3^{(3)}=\frac{(5^2-2^2)-\left(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1}\right)\times(5^1-2^1)}{\left[(4^2-2^2)-\left(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1}\right)(4^1-2^1)\right]\times(-1)}$，$\alpha_4^{(3)}=\frac{(6^2-2^2)-\left(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1}\right)\times(6^1-2^1)}{\left[(4^2-2^2)-\left(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1}\right)(4^1-2^1)\right]\times(-1)}$ …

$$\alpha_n^{(3)}=\frac{[(n+1)^2-2^2]-\left(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1}\right)\times[(n+1)^1-2^1]}{\left[(4^2-2^2)-\left(\frac{3^2-2^2}{3^1-2^1}\right)(4^1-2^1)\right]\times(-1)}$$

④ 第四次消元使用的乘法算子：

$$\alpha_4^{(4)}=\frac{\left[(6^3-2^3)-\left(\frac{6^3-2^3}{3^1-2^1}\right)\times(6^1-2^1)-\frac{(6^1-2^1)-(3^2-2^2)\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}}{(4^2-2^2)-(3^2-2^2)\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}}\right]}{\left[(5^3-2^3)-\left(\frac{3^3-2^3}{3^1-2^1}\right)\times(5^1-2^1)-\frac{(5^2-2^2)-(3^2-2^2)\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}}{(4^2-2^2)-(3^2-2^2)\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}}\right]\times(-1)}$$

…

$$\alpha_n^{(4)}=\frac{\left[((n+1)^{n-1}-2^{n-1})-\frac{(n+1)^{n-1}-2^{n-1}}{3^1-2^1}\times[(n+1)^{n-1}-2^{n-1}]-\frac{(n+1)^1-2^1-(3^2-2^2)\times\frac{4^2-2^2}{3^1-2^1}}{4^2-2^2-(3^2-2^2)\times\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}}\right]}{\left[(5^3-2^3)-\left(\frac{3^3-2^3}{3^1-2^1}\right)\times(5^1-2^1)-\frac{(5^2-2^2)-(3^2-2^2)\times\left(\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}\right)}{(4^2-2^2)-(3^2-2^2)\times\left(\frac{4^1-2^1}{3^1-2^1}\right)}\right]\times(-1)}$$

显然，问题被导向了极其复杂的情况。我们本来想要直接写成
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \\ 0 & & & \\ 0 & & \ddots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$
这种形式的。

因此，需要求出第n次消元的乘法算子 $\alpha_n^{(n)}$ 和相对应的 b_n。通过上面的前4次推导归纳，发现还是存在一定的规律的，即 $\alpha_{n}^{(n)}=\frac{a_{n,n-1}}{a_{n-1,n-1}\text{的倒数}\times(-1)}$。这一类公式十分复杂，这里暂不写出。

同样，对于 b_n 也如此推导，计算量也不小。下面直接阐述一下 matlab 的计算结果。

四、测试过程中的解变化情况（n=2~17）

说明：y 的第一列是左除求出的解，第二列是列主元素高斯消去法求得的解，第三列是 LU 分解求得的解：

----

n=10

y =

1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	0.9999	1.0000
1.0000	1.0001	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000

err =

1.0e-04 *

0.0449	0.8239	0.0449

----

n=11

LU 分解失败

y =

1.0017	0.9996
0.9967	1.0008
1.0029	0.9992
0.9986	1.0004
1.0004	0.9999
0.9999	1.0000

```
    1.0000    1.0000
    1.0000    1.0000
    1.0000    1.0000
    1.0000    1.0000
    1.0000    1.0000
err =
    0.0033    0.0008
----------------------------------------
n=12
LU 分解失败
左除方法报警：RCOND =    5.352005e-18
y =
    0.9503    1.0380
    1.1156    0.9245
    0.8836    1.0648
    1.0670    0.9681
    0.9755    1.0100
    1.0060    0.9979
    0.9990    1.0003
    1.0001    1.0000
    1.0000    1.0000
    1.0000    1.0000
    1.0000    1.0000
    1.0000    1.0000
err =
    0.1164    0.0755
----------------------------------------
n=13
LU 分解失败
```

左除方法报警：RCOND =   7.638818e-20

y =

```
  -39.1272   -63.5886
   87.0874   139.4108
  -79.9871 -129.0559
   45.3360    72.1145
  -14.7786   -24.2814
    4.8559     7.1726
    0.3350    -0.0639
    1.0817     1.1307
    0.9929     0.9886
    1.0004     1.0007
    1.0000     1.0000
    1.0000     1.0000
    1.0000     1.0000
```

err =

```
   86.0874   138.4108
```

----

n=14

LU 分解失败

左除方法报警：RCOND =   9.763482e-22

y =

```
   1.0e+03 *
   -0.2695    -0.9418
    0.5918     2.0238
   -0.5691    -1.9117
    0.3240     1.0612
   -0.1192    -0.3849
    0.0321     0.0987
   -0.0048    -0.0168
```

```
    0.0018    0.0034
    0.0009    0.0008
    0.0010    0.0010
    0.0010    0.0010
    0.0010    0.0010
    0.0010    0.0010
    0.0010    0.0010
err =
   1.0e+03 *
    0.5908    2.0228
----------------------------------------
n=15
LU 分解失败
左除方法报警：RCOND =    1.209491e-23
y =
   1.0e+05 *
    3.5404    0.3430
   -7.9400   -0.8033
    7.9063    0.8392
   -4.6516   -0.5199
    1.8128    0.2140
   -0.4965   -0.0620
    0.0989    0.0131
   -0.0146   -0.0020
    0.0016    0.0002
   -0.0001   -0.0000
    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000
```

```
   0.0000    0.0000
err =
  1.0e+05 *
   7.9400    0.8392
----------------------------------------
n=16
LU 分解失败
左除方法报警：RCOND =    1.356237e-25
y =
  1.0e+07 *
   3.8819   -1.8559
  -8.9902    4.3294
   9.3001   -4.5188
  -5.7218    2.8103
   2.3490   -1.1686
  -0.6835    0.3451
   0.1460   -0.0750
  -0.0234    0.0122
   0.0028   -0.0015
  -0.0003    0.0001
   0.0000   -0.0000
  -0.0000    0.0000
   0.0000    0.0000
   0.0000    0.0000
   0.0000    0.0000
   0.0000    0.0000
err =
  1.0e+07 *
   9.3001    4.5188
----------------------------------------
```

n=17

LU 分解失败

左除方法报警：RCOND =   1.484755e-27

y =

1.0e+10 *

1.0678	-0.1905
-2.5655	0.4553
2.7712	-0.4889
-1.7927	0.3143
0.7797	-0.1358
-0.2424	0.0419
0.0558	-0.0096
-0.0097	0.0017
0.0013	-0.0002
-0.0001	0.0000
0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000
0.0000	0.0000
0.0000	0.0000

err =

1.0e+10 *

2.7712	0.4889