2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题及答案解析

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 无穷多个　　【答案】C

【解析】由于 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$, 则当 x 取任何整数时, $f(x)$ 均无意义.

故 $f(x)$ 的间断点有无穷多个, 但可去间断点为极限存在的点, 故应是 $x-x^3=0$ 的解

$x_{1,2,3}=0,\pm 1$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{1}{\pi},\\
&\lim_{x\to 1}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{2}{\pi},\\
&\lim_{x\to -1}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to -1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

故可去间断点为 3 个, 即 $0,\pm 1$.

(2) 当 $x\to 0$ 时, $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$　(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

【答案】A

【解析】
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-\dfrac{6b}{a}\cdot ax}=-\frac{a^3}{6b}=1,$$

$\therefore a^3=-6b$, 故排除 B,C.

另外, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在, 蕴含了 $1-a\cos ax\to0\ (x\to0)$, 故 $a=1$. 排除 D.

所以本题选 A.

(3) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$, 则点 $(0,0)$

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点　　(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点　　(D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点　　【答案】D

【解析】因 $dz=xdx+ydy$ 可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=x,\dfrac{\partial z}{\partial y}=y$.

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1,B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0,C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1,$$

又在 $(0,0)$ 处, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, $AC-B^2=1>0$,

故 $(0,0)$ 为函数 $z=f(x,y)$ 的一个极小值点.

(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续, 则 $\int_1^2dx\int_x^2f(x,y)dy+\int_1^2dy\int_y^{4-y}f(x,y)dx=$

(A) $\int_1^2dx\int_1^{4-x}f(x,y)dy$　　(B) $\int_1^2dx\int_x^{4-x}f(x,y)dy$

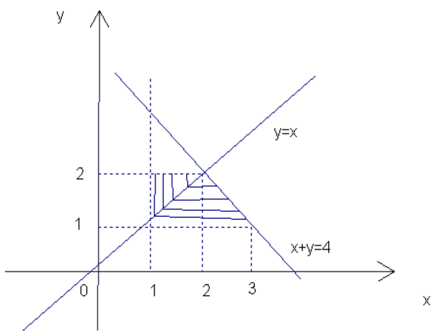
(C) $\int_1^2dy\int_1^{4-y}f(x,y)dx$　　(D) $\int_1^2dy\int_y^2f(x,y)dx$　　【答案】C

【解析】$\int_1^2dx\int_x^2f(x,y)dy+\int_1^2dy\int_x^2f(x,y)dx$ 的积分区域为两部分:

$$D_1=\{(x,y)|1\le x\le2,x\le y\le2\},\ D_2=\{(x,y)|1\le y\le2,y\le x\le4-y\},$$

将其写成一块 $D=\{(x,y)|1\le y\le2,1\le x\le4-y\}$,

故二重积分可以表示为 $\int_1^2dy\int_1^{4-y}f(x,y)dx$, 故答案为 C.



(5) 若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 上的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内

(A) 有极值点，无零点　　　　(B) 无极值点，有零点

(C) 有极值点，有零点　　　　(D) 无极值点，无零点　　　　【答案】B

【解析】由题意可知，$f(x)$ 是一个凸函数，即 $f''(x)<0$，且在点 $(1,1)$ 处的曲率

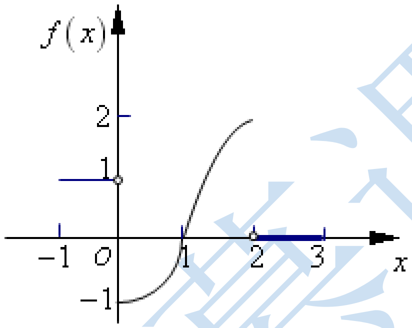
$\rho=\dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，而 $f'(1)=-1$，由此可得，$f''(1)=-2$.

在 $[1,2]$ 上，$f'(x)\le f'(1)=-1<0$，即 $f(x)$ 单调减少，没有极值点.

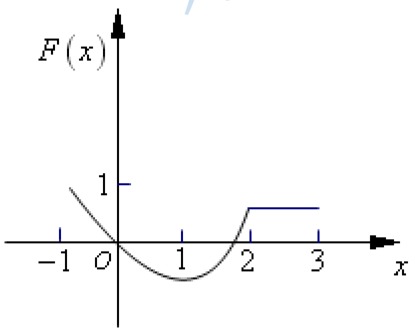
对于 $f(2)-f(1)=f'(\xi)<-1, \xi\in(1,2)$，(拉格朗日中值定理)

$\therefore$ $f(2)<0$ 而 $f(1)=1>0$，由零点定理知，在 $[1,2]$ 上，$f(x)$ 有零点. 故应选 B.

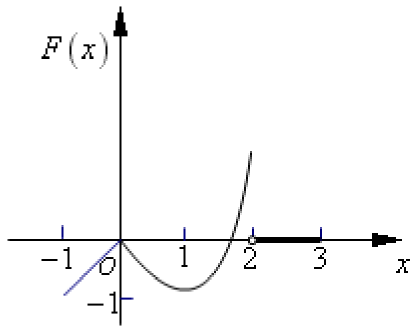
(6) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为：



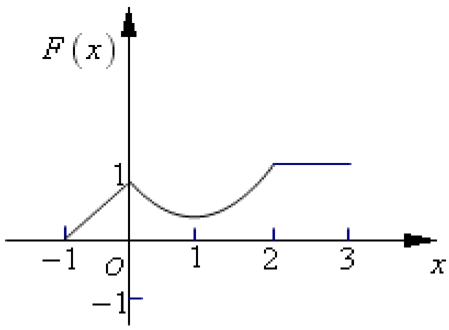
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为



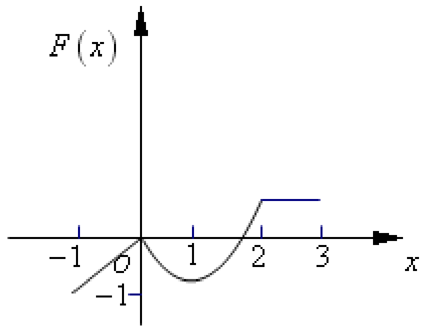
(A)



(B)



(C)



(D)

【答案】D

【解析】此题为定积分的应用知识考核，由 $y=f(x)$ 的图形可见，其图像与 x 轴及 y 轴、

$x=x_0$ 所围的图形的代数面积为所求函数 $F(x)$，从而可得出几个方面的特征：

① $x\in[0,1]$ 时，$F(x)\le 0$，且单调递减。

② $x\in[1,2]$ 时，$F(x)$ 单调递增。

③ $x\in[2,3]$ 时，$F(x)$ 为常函数。

④ $x\in[-1,0]$ 时，$F(x)\le 0$ 为线性函数，单调递增。

⑤由于 F(x)为连续函数

结合这些特点，可见正确选项为 D。

（7）设 $A,\ B$ 均为 2 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 $A,\ B$ 的伴随矩阵，若 $|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

$(A)\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$.　　$(B)\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.

$(C)\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$.　　$(D)\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

【答案】B

【解析】根据 $CC^*=|C|E$ 若 $C^*=|C|C^{-1},C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}C^*$

分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}|A||B|=2\times 3=6$ 即分块矩阵可逆

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = 6\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{|B|}B^* \\ \frac{1}{|A|}A^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 6\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$$

（8）设 A,P 均为 3 阶矩阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，若

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 Q^TAQ 为

$(A).\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　$(B).\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(C).\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　$(D).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

【答案】 A

【解析】$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)E_{12}(1)$，即：

$$Q = PE_{12}(1)$$

$$Q^TAQ = [PE_{12}(1)]^T A[PE_{12}(1)] = E_{12}^T(1)[P^TAP]E_{12}(1)$$

$$= E_{21}(1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}E_{12}(1)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）曲线$\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2}du \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$ 在（0，0）处的切线方程为________

【答案】$y=2x$

【解析】$\frac{dy}{dt}=2t\ln(2-t^2)-t^2\cdot\frac{2t}{2-t^2}\Big|_{t=1}=-2$

$\frac{dx}{dt}=e^{-(1-t)^2}\cdot(-1)\Big|_{t=1}=-1$

所以 $\frac{dy}{dx}=2$

所以 切线方程为 $y=2x$

（10）已知 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{k|x|}dx=1$,则 $\mathrm{k}=$______ 【答案】-2

【解析】$1=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{k|x|}dx=2\int_0^{+\infty}e^{kx}dx=2\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{k}e^{kx}\Big|_0^b$

因为极限存在所以 $k<0$

$1=0-\frac{2}{k}$

$k=-2$

（11）$\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nxdx=$______ 【答案】0

【解析】令 $I_n=\int e^{-x}\sin nxdx=-e^{-x}\sin nx+n\int e^{-x}\cos nxdx$

$=-e^{-x}\sin nx-ne^{-x}\cos nx-n^2I_n$

所以 $I_n=-\frac{n\cos nx+\sin nx}{n^2+1}e^{-x}+C$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1e^{-x}\sin nxdx=\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{n\cos nx+\sin nx}{n^2+1}e^{-x}\Big|_0^1)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{n\cos n+\sin n}{n^2+1}e^{-1}+\frac{n}{n^2+1})$

$=0$

（12）设 $y=y(x)$ 是由方程 $\mathrm{xy}+e^y=x+1$ 确定的隐函数，则 $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2}\Big|_{\mathrm{x}=0}=$____ 【答案】$-3$

【解析】对方程 $\mathrm{xy}+e^y=x+1$ 两边关于 x 求导有 $y+xy'+y'e^y=1$，得 $y'=\frac{1-y}{x+e^y}$

对 $y+xy'+y'e^y=1$ 再次求导可得 $2y'+xy''+y''e^y+(y')^2e^y=0$，

得 $y''=-\frac{2y'+(y')^2e^y}{x+e^y}$ (*)

当 $x=0$ 时，$y=0$，$y'(0)=\dfrac{1-0}{e^0}=1$，代入(*)得

$$y''(0)=-\frac{2y'(0)+(y'(0))^2e^0}{(0+e^0)^3}=-(2+1)=-3$$

（13）函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为_______ 【答案】$e^{-\frac{2}{e}}$

【解析】因为 $y'=x^{2x}(2\ln x+2)$，令 $y'=0$ 得驻点为 $x=\dfrac{1}{e}$。

又 $y''=x^{2x}(2\ln x+2)^2+x^{2x}\cdot\dfrac{2}{x}$，得 $y''\left(\dfrac{1}{e}\right)=2e^{-\frac{2}{e}+1}>0$，

故 $x=\dfrac{1}{e}$ 为 $y=x^{2x}$ 的极小值点，此时 $y=e^{-\frac{2}{e}}$，

又当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 时，$y'(x)<0$；$x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right]$ 时，$y'(x)>0$，故 y 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上递减，在 $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ 上递增。

而 $y(1)=1$，$y_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}x^{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{2x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-2x)}=1$，

所以 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为 $y\left(\dfrac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$。

(14)设 α，β 为 3 维列向量，β^{T} 为 β 的转置，若矩阵 $\alpha\beta^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha=$ _________ 【答案】2

【解析】因为 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，根据相似矩阵有相同的特征值，得到 $\alpha\beta^T$ 的特征值是 $2,0,0$，而 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha$ 是一个常数，是矩阵 $\alpha\beta^T$ 的对角元素之和，则 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha=2+0+0=2$。

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 9 分）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{4}$$

（16）（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\int\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx\quad(x>0)$

【解析】方法一：令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$ 得 $x=\frac{1}{t^2-1},\ dx=\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$

$$原式=\int\ln(1+t)\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt=\int\ln(1+t)\frac{-1}{(t^2-1)^2}d(t^2-1)$$

$$=\int\ln(1+t)d(\frac{1}{t^2-1})$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t+1}dt$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\left[\frac{1}{4(t-1)}+\frac{-1}{4(t+1)}+\frac{-1}{2(t+1)^2}\right]dt$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1}-\frac{1}{2(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1)}+C$$

$$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{1}{2}\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})+C.$$

方法二： $\int\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})-\int x(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)'dx$

$$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})-\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-1\right)dx$$

$$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}dx$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}dx\ \xlongequal{u=\sqrt{1+x}}\ \int\frac{\sqrt{u^2-1}}{u}2udu=2\int\sqrt{u^2-1}du$$

$$\xlongequal{分部}\ u\sqrt{u^2-1}-\ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)+C=\sqrt{x\left(1+x\right)}-\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)+C$$

即 $\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx = x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x(1+x)}-\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)\right)+C$

$$= x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{1+x}\right)+C$$

（17）（本题满分 10 分）设 $z=f\left(x+y,x-y,xy\right)$，其中 f 具有 2 阶连续偏导数，求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+yf_3'$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+xf_3'$

$\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

$=(f_1'+f_2'+yf_3')dx+(f_1'-f_2'+xf_3')dy$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\cdot 1+f_{12}''\cdot(-1)+f_{13}''\cdot x+f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot(-1)+f_{23}''\cdot x+f_3'+y[f_{31}''\cdot 1+f_{32}''\cdot(-1)+f_{33}''\cdot x]$

$=f_3'+f_{11}''-f_{22}''+xyf_{33}''+(x+y)f_{13}''+(x-y)f_{23}''$

（18）（本题满分 10 分）设非负函数 $y=y\left(x\right)\left(x\geq 0\right)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$，当曲线 $y=y\left(x\right)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域 D 的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积。

【解析】微分方程 $xy''-y'+2=0$ 得其通解 $y=C_1+2x+C_2x^2$,其中C_1，C_2 为任意常数

令 $p=y'$，则 $y''=\frac{dp}{dx}$，微分方程 $xy''-y'+2=0$ 变形为 $\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=\frac{-2}{x}$

得到 $p=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\frac{-2}{x}e^{-\int\frac{1}{t}dt}dx+C_1\right]=x\left[\int\frac{-2}{x^2}dx+C_1\right]=2+C_1x$ 其中 C_1 为任意常数

即 $\frac{dy}{dx}=2+C_1x$ 得到 $y=2x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2$ 其中 C_2 为任意常数

又因为 $y=y(x)$ 通过原点时与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域的面积为 2，于是可得 $C_2=0$

$$2=\int_0^1 y(x)dx=\int_0^1(2x+\frac{1}{2}C_1x^2)dx=(x^2+\frac{C_1}{6}x^3)\Big|_0^1=1+\frac{C_1}{6}$$

从而 $C_2=6$

于是，所求非负函数 $y=2x+3x^2 \ (x\ge 0)$

又由 $y=2x+3x^2$ 可得，在第一象限曲线 $y=f(x)$ 表示为 $x=\frac{1}{3}(\sqrt{1+3y}-1)$

于是 D 围绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为 $V=5\pi-V_1$，其中

$$V_1=\int_0^5 \pi x^2 dy=\int_0^5 \pi\cdot\frac{1}{9}(\sqrt{1+3y}-1)^2 dy$$
$$=\frac{\pi}{9}\int_0^5 (2+3y-2\sqrt{1+3y})dy$$
$$=\frac{39}{18}\pi$$

$$V=5\pi-\frac{39}{18}\pi=\frac{51}{18}\pi=\frac{17}{6}\pi$$

（19）（本题满分 10 分）

求二重积分 $\iint\limits_D (x-y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\right\}$。

【解析】由 $(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$ 得 $r\le 2(\sin\theta+\cos\theta)$，

$$\therefore \iint\limits_D (x-y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}d\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}(r\cos\theta-r\sin\theta)rdr$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left[\frac{1}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot r^3\Big|_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}\right]d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^2 d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^3 d\theta$$
$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin\theta+\cos\theta)^3 d(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{8}{3}\times\frac{1}{4}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}=-\frac{8}{3}$$

（20）（本题满分 12 分）

设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\ \pi)$ 内过 $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}})$ 的光滑曲线，当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点，当 $0\le x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$。求 $y(x)$ 的表达式

【解析】由题意，当$-\pi<x<0$时，$y=-\dfrac{x}{y'}$，即$ydy=-xdx$，得$y^2=-x^2+c$，

又$y(-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}})=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$代入$y^2=-x^2+c$得$c=\pi^2$，从而有$x^2+y^2=\pi^2$

当$0\le x<\pi$时，$y''+y+x=0$得 $y''+y=0$ 的通解为$y^*=c_1\cos x+c_2\sin x$

令解为$y_1=Ax+b$，则有$0+Ax+b+x=0$，得$A=-1,b=0$，

故$y_1=-x$，得$y''+y+x=0$的通解为$y=c_1\cos x+c_2\sin x-x$

由于$y=y(x)$是$(-\pi,\pi)$内的光滑曲线，故y在$x=0$处连续

于是由$y(0-)=\pm\pi$ ，$y(0+)=c_1$ ，故$c_1=\pm\pi$时，$y=y(x)$在$x=0$处连续

又当 $-\pi<x<0$时，有$2x+2y\cdot y'=0$，得$y_-'(0)=-\dfrac{x}{y}=0$，

当$0\le x<\pi$时，有$y'=-c_1\sin x+c_2\cos x-1$，得$y_+'(0)=c_2-1$

由$y_-'(0)=y_+'(0)$得$c_2-1=0$，即 $c_2=1$

故 $y=y(x)$的表达式为$y=\begin{cases}-\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ -\pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$或

$y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$，又过点$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以$y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$。

（21）（本题满分 11 分）

（Ⅰ）证明拉格朗日中值定理：若函数$f\left(x\right)$在$\left[a,b\right]$上连续，在(a,b)可导，则存在

$\xi\in\left(a,b\right)$，使得$f\left(b\right)-f\left(a\right)=f'\left(\xi\right)\left(b-a\right)$

（Ⅱ）证明：若函数$f\left(x\right)$在$x=0$处连续，在$\left(0,\delta\right)\left(\delta>0\right)$内可导，且$\lim\limits_{x\to0^+}f'\left(x\right)=A$，

则$f_+'\left(0\right)$存在，且$f_+'\left(0\right)=A$。

【解析】（Ⅰ）作辅助函数$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，易验证$\varphi(x)$满足：

$\varphi(a)=\varphi(b)$；$\varphi(x)$在闭区间$\left[a,b\right]$上连续，在开区间$\left(a,b\right)$内可导，且

$\varphi'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

根据罗尔定理，可得在(a,b)内至少有一点ξ，使$\varphi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,\therefore f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

（Ⅱ）任取$x_0\in(0,\delta)$，则函数$f(x)$满足；

在闭区间$[0,x_0]$上连续，开区间$(0,x_0)$内可导，从而有拉格朗日中值定理可得：存在

$\xi_{x_0}\in(0,x_0)\subset(0,\delta)$，使得$f'(\xi_{x_0})=\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}\cdots\cdots(*)$

又由于$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，对上式（*式）两边取$x_0\to0^+$时的极限可得：

$$f_+'(0)=\lim_{x_0\to0^+}\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\lim_{x_0\to0^+}f'(\xi_{x_0})=\lim_{\xi_{x_0}\to0^+}f'(\xi_{x_0})=A$$

故$f_+'(0)$存在，且$f_+'(0)=A$。

（22）（本题满分 11 分）设$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求满足$A\xi_2=\xi_1,A^2\xi_3=\xi_1$的所有向量$\xi_2,\xi_3$

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的任一向量ξ_2,ξ_3，证明：ξ_1,ξ_2,ξ_3线性无关。

【解析】（Ⅰ）解方程$A\xi_2=\xi_1$

$$(A,\xi_1)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(A)=2$故有一个自由变量，令$x_3=2$，由$Ax=0$解得，$x_2=-1,x_1=1$

求特解，令$x_1=x_2=0$，得$x_3=1$

故$\xi_2=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，其中$k_1$为任意常数

解方程$A^2\xi_3=\xi_1$

$$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$$

$$\left(A^2,\xi_1\right)=\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&\frac{-1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故有两个自由变量，令 $x_2=-1,x_3=0$，由 $A^2x=0$ 得 $x_1=1$

令 $x_2=0,x_3=1$，由 $A^2x=0$ 得 $x_1=0$

求特解 $\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ 故 $\xi_3=k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ ，其中 k_2,k_3 为任意常数

（II）证明：由于

$$\begin{vmatrix}-1&k_1&k_2-\frac{1}{2}\\1&-k_1&-k_2\\-2&2k_1+1&k_3\end{vmatrix}=k_1k_3+2k_1k_2+(2k_1+1)(k_2-\frac{1}{2})-2k_1(k_2-\frac{1}{2})-k_2(2k_1+1)-k_1k_3$$

$$=-\frac{1}{2}\neq 0$$

故 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

（23）（本题满分 11 分）设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+ax_2^2+\left(a-1\right)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

（I）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

（II）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值。

【解析】（I） $A=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a)\begin{vmatrix}\lambda-a & 1\\ 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \lambda-a\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a)[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-1]-[0+(\lambda-a)]$$

$$=(\lambda-a)[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-2]$$

$$=(\lambda-a)[\lambda^2-2a\lambda+\lambda+a^2-a-2]$$

$$=(\lambda-a)\{[a\lambda+\frac{1}{2}(1-2a)]^2-\frac{9}{4}\}$$

$$=(\lambda-a)(\lambda-a+2)(\lambda-a-1)$$

$$\therefore \lambda_1=a,\lambda_2=a-2,\lambda_3=a+1$$

（II） 若规范形为 $y_1^2+y_2^2$，说明有两个特征值为正，一个为 0。则

1) 若 $\lambda_1=a=0$，则 $\lambda_2=-2<0$ ，$\lambda_3=1$ ，不符题意

2) 若 $\lambda_2=0$ ，即 $a=2$，则 $\lambda_1=2>0$，$\lambda_3=3>0$，符合

3) 若 $\lambda_3=0$ ，即 $a=-1$，则 $\lambda_1=-1<0$ ，$\lambda_2=-3<0$，不符题意

综上所述，故 $a=2$

新大纲百日冲刺提分方案-最后 3 个月，针对新大纲考点，精准提分

数学一/三百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details
数学二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details
英语一百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details
英语二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details
政治百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details
法硕百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details
中医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details
心理学百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details
西医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details