2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题:1□8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，且 $a \neq 0$，则当 n 充分大时有 ( )

(A) $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$　　(B) $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$　　(C) $a_n > a - \dfrac{1}{n}$　　(D) $a_n < a + \dfrac{1}{n}$

(2) 下列曲线有渐近线的是 ( )

(A) $y = x + \sin x$　　(B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin\dfrac{1}{x}$　　(D) $y = x^2 + \sin\dfrac{1}{x}$

(3) 设 $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, 当 $x \to 0$ 时, 若 $P(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列试题中错误的是 ( )

(A) $a = 0$　　(B) $b = 1$　　(C) $c = 0$　　(D) $d = \dfrac{1}{6}$

(4) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上 ( )

(A)当 $f'(x) \geq 0$ 时，$f(x) \geq g(x)$　　(B)当 $f'(x) \geq 0$ 时，$f(x) \leq g(x)$

(C)当 $f''(x) \geq 0$ 时，$f(x) \geq g(x)$　　(D)当 $f''(x) \geq 0$ 时，$f(x) \leq g(x)$

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ( )

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$　　(C) $a^2d^2 - b^2c^2$　　(D) $b^2c^2 - a^2d^2$

(6) 设 a_1, a_2, a_3 均为三维向量，则对任意常数 k, l，向量组 $a_1 + ka_3$，$a_2 + la_3$ 线性无关是向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关的 ( )

(A)必要非充分条件　　(B)充分非必要条件

(C)充分必要条件 (D)既非充分也非必要条件

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5$， $P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$ ( )

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4

(8) 设 X_1,X_2,X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $S=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从的分布为 ( )

(A) $F(1,1)$ (B) $F(2,1)$ (C) $t(1)$ (D) $t(2)$

二、填空题：9⎵14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设某商品的需求函数为 $Q=40-2p$（p 为商品的价格），则该商品的边际收益为________.

(10) 设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为_____.

(11) 设 $\int_0^a xe^{2x}dx=\dfrac{1}{4}$，则 $a=$__________.

(12) 二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 (\dfrac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx=$__________.

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围_________.

(14) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单样本，若 $E(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\theta^2$，则 $c=$_________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\right\}$, 计算 $\iint\limits_D \frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy$.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x.$$

若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$，证明：

(I) $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a, x\in[a,b]$；

(II) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$E$ 为三阶单位矩阵.

(I)求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

(II)求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$, 在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i),(i=1,2)$.

(I)求Y的分布函数$F_Y(y)$；

(II)求EY.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量X, Y的概率分布相同，X的概率分布为$P\{X=0\}=\frac{1}{3}, P\{X=1\}=\frac{2}{3}$，且$X$与$Y$的相关系数$\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.

(I)求(X,Y)的概率分布；

(II)求$P\{X+Y\le 1\}$.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案

一、选择题:1□8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，且$a\ne 0$，则当$n$充分大时有 ( )

(A)$|a_n|>\frac{|a|}{2}$ (B)$|a_n|<\frac{|a|}{2}$ (C)$a_n>a-\frac{1}{n}$ (D)$a_n<a+\frac{1}{n}$

【答案】(A)

【解析】根据极限的保号性推论：若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\ne 0$，则$\exists N>0$，当$\exists n>N$时，

$$|a_n|>\lambda|a|, 0<\lambda<1.$$

故选(A).

(2) 下列曲线有渐近线的是 ( )

(A) $y=x+\sin x$ (B) $y=x^2+\sin x$

(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$ (D) $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

【答案】(C)

【解析】关于 C 选项：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}=1+0=1$，又

$\lim\limits_{x\to\infty}[x+\sin\frac{1}{x}-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$，所以$y=x+\sin\frac{1}{x}$存在斜渐近线$y=x$.

故选(C).

(3) 设 $P\left(x\right)=a+bx+cx^2+dx^3$, 当 $x\to 0$ 时, 若 $P\left(x\right)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列试题中错误的是 ( )

(A) $a=0$ (B) $b=1$ (C) $c=0$ (D) $d=\dfrac{1}{6}$

【答案】(D)

【解析】$P\left(x\right)=a+bx+cx^2+dx^3$，由已知 $a=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{p(x)-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{b+2cx-\sec^2 x}{3x^2}+d$$

$$\lim_{x\to 0}(b+2cx-\sec^2 x)=0,\therefore b=1.$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{b+2cx-\sec^2 x}{3x^2}+d=\lim_{x\to 0}\frac{2c}{3x}-\frac{1}{3}+d=0,\therefore c=0,d=\frac{1}{3}.$$

故选(D).

(4) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上 ( )

(A)当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$ (B)当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

(C)当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$ (D)当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

【答案】(D)

【解析】令 $F(x)=g(x)-f(x)=f(0)(1-x)+f(1)x-f(x)$，则

$$F(0)=F(1)=0,$$

$$F'(x)=-f(0)+f(1)-f'(x),F''(x)=-f''(x).$$

若 $f''(x)\ge 0$，则 $F''(x)\le 0$，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上为凸的.

又 $F(0)=F(1)=0$，所以当 $x\in[0,1]$ 时，$F(x)\ge 0$，从而 $g(x)\ge f(x)$.

故选(D).

(5) 行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$ ( )

(A) $(ad-bc)^2$ (B) $-(ad-bc)^2$ (C) $a^2d^2-b^2c^2$ (D) $b^2c^2-a^2d^2$

【答案】(B)

【解析】由行列式的展开定理展开第一列

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}-c\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-ad(ad-bc)+bc(ad-bc)$$

$$=-(ad-bc)^2.$$

故选(B).

(6) 设 a_1,a_2,a_3 均为三维向量，则对任意常数 k,l，向量组 a_1+ka_3，a_2+la_3 线性无关是向量 a_1,a_2,a_3 线性无关的 ( )

(A)必要非充分条件 (B)充分非必要条件

(C)充分必要条件 (D)既非充分也非必要条件

【答案】(A)

【解析】$(\alpha_1+k\alpha_3 \quad \alpha_2+l\alpha_3)=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$.

$\Leftarrow$) 记 $A=(\alpha_1+k\alpha_3 \quad \alpha_2+l\alpha_3)$，$B=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $r(A)=r(BC)=r(C)=2$，故 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关.

$\Rightarrow$) 举反例. 令 $\alpha_3=0$，则 α_1,α_2 线性无关，但此时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 却线性相关.

综上所述，对任意常数 k,l，向量 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的必

要非充分条件.

故选(A).

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5$， $P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$ ( )

(A) 0.1　　(B) 0.2　　(C) 0.3　　(D) 0.4

【答案】(B)

【解析】 已知 $P(A-B)=0.3$，$\because$ A 与 B 独立， $P(B)=0.5$，

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$$

$$=P(A)-0.5P(A)=0.5P(A)=0.3,$$

则 $P(A)=0.6$，

则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=0.5-0.5\times0.6=0.5-0.3=0.2$.

故选(B).

(8) 设 X_1,X_2,X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $S=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从的分布为 ( )

(A) $F(1,1)$　　(B) $F(2,1)$　　(C) $t(1)$　　(D) $t(2)$

【答案】(C)

【解析】X_1,X_2,X_3 来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，则 X_1-X_2 与 $|X_3|$ 独立.

X_1-X_2 □ $N(0,2\sigma^2)$，则 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ □ $N(0,1)$.

$\dfrac{X_3}{\sigma}$ □ $N(0,1)$，则 $\dfrac{X_3^{\,2}}{\sigma^2}$ □ $\chi^2(1)$.

利用分布的典型模式得到

$$\frac{\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\dfrac{X_3^{\,2}}{\sigma^2}\Big/1}}$$ □ $t(1)$，

即 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\left|X_3\right|}$ □ $t(1)$.

故选(C).

二、填空题：9□14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设某商品的需求函数为 $Q=40-2p$（ p 为商品的价格），则该商品的边际收益为________.

【答案】 $20-Q$

【解析】 价格 $p=\dfrac{40-Q}{2}$，收益函数 $R=P\cdot Q=\dfrac{40-Q}{2}\cdot Q$，故边际收益为

$$\frac{dR}{dQ}=20-Q.$$

(10) 设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为_____.

【答案】 $\dfrac{3}{2}-\ln 2$

【解析】 $S=\int_1^2 (y-\dfrac{1}{y})dy=\dfrac{3}{2}-\ln 2$.

(11) 设 $\int_0^a xe^{2x}dx=\dfrac{1}{4}$，则 $a=$__________.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【解析】由于 $\int xe^{2x}dx=(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4})e^{2x}+C$

则 $\int_0^a xe^{2x}dx=(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4})e^{2x}\Big|_0^a=(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{4})e^{2a}+\dfrac{1}{4}$

又 $\int_0^a xe^{2x}dx=\dfrac{1}{4}$

所以 $(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{4})e^{2a}=0$

即 $a=\dfrac{1}{2}$

(12) 二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 (\dfrac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx=$__________.

【答案】 $\dfrac{1}{2}(e-1)$

【解析】$\int_0^1 dy\int_y^1(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx=\int_0^1 dy\int_y^1\frac{e^{x^2}}{x}dx-\int_0^1 dy\int_y^1 e^{y^2}dx$

$=\int_0^1 dx\int_0^x\frac{e^{x^2}}{x}dy-\int_0^1(1-y)e^{y^2}dy$

$=\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1(1-y)e^{y^2}dy$

$=\int_0^1 ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}e^{y^2}\big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$

(13) 设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围_________.

【答案】$\left[-2,2\right]$

【解析】配方法：$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1+ax_3\right)^2-\left(x_2-2x_3\right)^2+(4-a^2)x_3^2$

由于二次型负惯性指数为 1，所以 $4-a^2\geq 0$，故 $-2\leq a\leq 2$.

(14) 设总体 X 的概率密度为 $f\left(x;\theta\right)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单样本，若 $E(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\theta^2$，则 $c=$_________.

【答案】$\frac{2}{5n}$

【解析】$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x;\theta)dx=\int_\theta^{2\theta}x^2\cdot\frac{2x}{3\theta^2}dx$

$=\frac{2}{3\theta^2}\cdot\frac{1}{4}x^4\big|_\theta^{2\theta}=\frac{5\theta^2}{2}$,

$E[c\sum_{i=1}^{n}X_i^2]=ncE(X^2)=\frac{5n}{2}\theta^2\cdot c=\theta^2$,

$\therefore\ c=\frac{2}{5n}$.

三、解答题：15～23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\cdot\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x]$

$\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^t-1-t}{t^2}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{2t}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{t}{2t}=\dfrac{1}{2}$.

(16)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le4,x\ge0,y\ge0\right\}$, 计算 $\iint\limits_D\dfrac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy$.

【解析】D 关于 $y=x$ 对称，满足轮换对称性，则

$$\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint\limits_D\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$I=\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}+\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\sin\pi r\cdot rdr$$

$$=\frac{\pi}{4}(-\frac{1}{\pi})\int_1^2 rd\cos\pi r$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\cos\pi r\cdot r\big|_1^2-\int_1^2\cos\pi rdr\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\left[2+1-\frac{1}{\pi}\sin\pi r\big|_1^2\right]$$

$$=-\frac{3}{4}$$

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有连续导数，$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足

$$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x.$$

若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

【解析】$z=f(e^x\cos y),\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)\cdot e^x\cos y,$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(e^x\cos y)\cdot(-e^x\sin y),$$

$$\therefore \cos y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=f'(e^x\cos y)\cdot e^x\cos^2 y+f'(e^x\cos y)\cdot e^x\sin^2 y$$

$$=f'(e^x\cos y)\cdot e^x,$$

由已知，$f'(e^x\cos y)\cdot e^x=(4f+e^x\cos y)e^x,$

即 $f'-4f=e^x\cos y,$

令 $e^x\cos y=t$，则 $f'(t)-4f(t)=t$，这是一阶线性微分方程。

由公式得 $f(t)=e^{\int 4dt}\left[\int te^{\int -4dt}dt+C\right]=-\dfrac{1}{4}t-\dfrac{1}{16}+Ce^{4t}.$

由 $f(0)=0$ 得 $C=\dfrac{1}{16}.$

$$\therefore\ f(t)=-\frac{1}{4}t-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}e^{4t}.$$

$$\therefore\ f(u)=-\frac{1}{4}u-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}e^{4u}.$$

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

【解析】(I)令 $a_n=(n+1)(n+3)$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，所以 R=1

当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 不收敛.

故收敛域为（-1, 1）

（II）记 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+1})'=(\sigma(x))'$

$$\sigma(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{n}+3)x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{n}+2)x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$$

$$=(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2})'+\frac{x}{1-x}$$

$$=(\frac{x^2}{1-x})'+\frac{x}{1-x}$$

$$=\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2},\quad -1<x<1$$

$$S(x)=[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}]'=\frac{3-x}{(1-x)^3},-1<x<1$$

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x),\mathrm{g}(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le1$，证明：

(I) $0\le\int_a^x g(\mathrm{t})dt\le x-a,x\in[a,b]$；

(II) $\int_a^{a+\int_a^b g(\mathrm{t})dt}f(x)dx\le\int_a^b f(x)\mathrm{g}(x)dx$.

【解析】(I) 由积分中值定理 $\int_a^x g(t)dt=g(\xi)(x-a),\xi\in[a,x]$

$\because 0\le g(x)\le1$，$\therefore 0\le g(\xi)(x-a)\le(x-a)$

$\therefore 0\le\int_a^x g(t)dt\le(x-a)$

(II)直接由$0\le g(x)\le 1$，得到

$$0\le \int_a^x g(t)dt\le \int_a^x 1dt=(x-a)$$

（II）令$F(u)=\int_a^u f(x)g(x)dx-\int_a^{a+\int_a^u g(t)dt} f(x)dx$

$$F'(u)=f(u)g(u)-f\left(a+\int_a^u g(t)dt\right)\cdot g(u)$$

$$=g(u)\left[f(u)-f\left(a+\int_a^u g(t)dt\right)\right]$$

由（I）知$0\le \int_a^u g(t)dt\le (u-a)$ $\qquad \therefore a\le a+\int_a^u g(t)dt\le u$

又由于$f(x)$单增，所以$f(u)-f\left(a+\int_a^u g(t)dt\right)\ge 0$

$\therefore F'(u)\ge 0,\therefore F(u)$单调不减，$\therefore F(u)\ge F(a)=0$

取$u=b$，得$F(b)\ge 0$，即（II）成立.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$E$为三阶单位矩阵.

(I)求方程组$Ax=0$的一个基础解系；

(II)求满足$AB=E$的所有矩阵B.

【解析】

$$(A|E)=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&4&-3&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{pmatrix},$$

(I) $Ax=0$的基础解系为$\xi=(-1,2,3,1)^T$

(II) $e_1=(1,0,0)^T,e_2=(0,1,0)^T,e_3=(0,0,1)^T$

$Ax=e_1$的通解为$x=k_1\xi+(2,-1,-1,0)^T=(2-k_1,-1+2k_1,-1+3k_1,k_1)^T$

$Ax=e_2$的通解为$x=k_2\xi+(6,-3,-4,0)^T=(6-k_2,-3+2k_2,-4+3k_2,k_2)^T$

$Ax=e_3$ 的通解为 $x=k_3\xi+\left(-1,1,1,0\right)^T=\left(-1-k_3,1+2k_3,1+3k_3,k_3\right)^T$

$$\therefore B=\begin{pmatrix} 2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3 \\ -1+2k_1 & -3+2k_2 & 1+2k_3 \\ -1+3k_1 & -4+3k_2 & 1+3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \quad （k_1,k_2,k_3 \text{为任意常数}）$$

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

【解析】已知 $A=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，

则 A 的特征值为 n，0（$n-1$ 重）.

A 属于 $\lambda=n$ 的特征向量为 $(1,1,\cdots,1)^T$；$r(A)=1$，故 $Ax=0$ 基础解系有 $n-1$ 个线性无关的解向量，即 A 属于 $\lambda=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量；故 A 相似于对角阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

B 的特征值为 n，0（$n-1$ 重），同理 B 属于 $\lambda=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 故 B 相似于对角阵 Λ.

由相似关系的传递性，A 相似于 B.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\left\{X=1\right\}=P\left\{X=2\right\}=\dfrac{1}{2}$, 在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U\left(0,i\right),(i=1,2)$.

(I)求 Y 的分布函数 $F_Y\left(y\right)$；

(II)求 EY.

【解析】(I)设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则

$$F_Y(y)=P\left\{Y\le y\right\}=P\left\{X=1\right\}P\left\{Y\le y\mid X=1\right\}+P\left\{X=2\right\}P\left\{Y\le y\mid X=2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{Y\le y\mid X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\le y\mid X=2\}$$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $0\le y<1$ 时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}(y+\frac{y}{2})=\frac{3y}{4}$；

当 $1\le y<2$ 时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}(1+\frac{y}{2})$；

当 $y\ge 2$ 时，$F_Y(y)=1$.

所以 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3y}{4}, & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}(1+\frac{y}{2}), & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

(II) Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}, & 0<y<1,\\ \frac{1}{4}, & 1\le y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 y\frac{3}{4}dy+\int_1^2 y\frac{1}{4}dy$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{4}$$

(23)（本题满分 11 分）

设随机变量 X，Y 的概率分布相同，X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\frac{1}{3},P\{X=1\}=\frac{2}{3}$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.

(I)求 (X,Y) 的概率分布；

(II)求 $P\{X+Y\le 1\}$.

【解析】（I） $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

$$E(XY)=P\{X=1,Y=1\},E(X)=\frac{2}{3},E(Y)=\frac{2}{3},$$

$$D(X)=D(Y)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9},$$

代入 ρ_{XY} 得 $P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{5}{9}$.

(X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

(II) $P\{X+Y\le 1\}=1-P\{X+Y>1\}=1-\dfrac{5}{9}=\dfrac{4}{9}$.

新大纲百日冲刺提分方案-最后 3 个月，针对新大纲考点，精准提分

数学一/三百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details
数学二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details
英语一百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details
英语二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details
政治百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details
法硕百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details
中医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details
心理学百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details
西医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details