

# 2013 年全国硕士研究生入学统一考试

## 数学二试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 设  $\cos x - 1 = x \sin \alpha(x)$ ，其中  $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$ ，则当  $x \rightarrow 0$  时， $\alpha(x)$  是 ( )

- (A) 比  $x$  高阶的无穷小 (B) 比  $x$  低阶的无穷小  
(C) 与  $x$  同阶但不等价的无穷小 (D) 与  $x$  等价的无穷小

(2) 设函数  $y = f(x)$  由方程  $\cos(xy) + \ln y - x = 1$  确定，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] = ( )$

- (A) 2 (B) 1 (C) -1 (D) -2

(3) 设函数  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ ， $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ，则 ( )

- (A)  $x = \pi$  是函数  $F(x)$  的跳跃间断点 (B)  $x = \pi$  是函数  $F(x)$  的可去间断点  
(C)  $F(x)$  在  $x = \pi$  处连续但不可导 (D)  $F(x)$  在  $x = \pi$  处可导

(4) 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$ ，若反常积分  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  收敛，则 ( )

- (A)  $\alpha < -2$  (B)  $\alpha > 2$  (C)  $-2 < \alpha < 0$  (D)  $0 < \alpha < 2$

(5) 设  $z = \frac{y}{x} f(xy)$ ，其中函数  $f$  可微，则  $\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = ( )$

- (A)  $2yf'(xy)$  (B)  $-2yf'(xy)$  (C)  $\frac{2}{x} f(xy)$  (D)  $-\frac{2}{x} f(xy)$

(6) 设  $D_k$  是圆域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  在第  $k$  象限的部分，记  $I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy (k=1, 2, 3, 4)$ ，则 ( )

- (A)  $I_1 > 0$  (B)  $I_2 > 0$  (C)  $I_3 > 0$  (D)  $I_4 > 0$

(7) 设矩阵  $A, B, C$  均为  $n$  阶矩阵，若  $AB = C$ ，则  $B$  可逆，则

- (A) 矩阵  $C$  的行向量组与矩阵  $A$  的行向量组等价  
(B) 矩阵  $C$  的列向量组与矩阵  $A$  的列向量组等价  
(C) 矩阵  $C$  的行向量组与矩阵  $B$  的行向量组等价  
(D) 矩阵  $C$  的行向量组与矩阵  $B$  的列向量组等价

(8) 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  相似的充分必要条件为

(A)  $a=0, b=2$

(B)  $a=0, b$  为任意常数

(C)  $a=2, b=0$

(D)  $a=2, b$  为任意常数

二、填空题：9—14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(10) 设函数  $f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$ ，则  $y=f(x)$  的反函数  $x=f^{-1}(y)$  在  $y=0$  处的导数  $\frac{dx}{dy}|_{y=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(11) 设封闭曲线  $L$  的极坐标方程为  $r = \cos 3\theta$  ( $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ )，则  $L$  所围成的平面图形的面积为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 曲线  $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$  上对应于  $t=1$  的点处的法线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 已知  $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$ ， $y_2 = e^x - xe^{2x}$ ， $y_3 = -xe^{2x}$  是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程满足条件  $y|_{x=0} = 0$   $y'|_{x=0} = 1$  的解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设  $A = (a_{ij})$  是三阶非零矩阵， $|A|$  为  $A$  的行列式， $A_{ij}$  为  $a_{ij}$  的代数余子式，若  $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ ，则  $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

当  $x \rightarrow 0$  时， $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$  与  $ax^n$  为等价无穷小，求  $n$  与  $a$  的值。

(16) (本题满分 10 分)

设  $D$  是由曲线  $y = x^{\frac{1}{3}}$ , 直线  $x = a (a > 0)$  及  $x$  轴所围成的平面图形,  $V_x, V_y$  分别是  $D$  绕  $x$  轴,  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积, 若  $V_y = 10V_x$ , 求  $a$  的值。

(17) (本题满分 10 分)

设平面内区域  $D$  由直线  $x = 3y, y = 3x$  及  $x + y = 8$  围成. 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ 。

(18) (本题满分 10 分)

设奇函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(1) = 1$ . 证明:

(I) 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 1$ ; (II) 存在  $\eta \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ 。

(19) (本题满分 11 分)

求曲线  $x^3 - xy + y^3 = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$  上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

(20) (本题满分 11 分)

设函数  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ ,

(I) 求  $f(x)$  的最小值

(II) 设数列  $\{x_n\}$  满足  $\ln x_n + \frac{1}{x_n} < 1$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求此极限。

(21) (本题满分 11 分)

设曲线  $L$  的方程为  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \quad (1 \leq x \leq e)$ ,

(1) 求  $L$  的弧长;

(2) 设  $D$  是由曲线  $L$ , 直线  $x = 1, x = e$  及  $x$  轴所围平面图形, 求  $D$  的形心的横坐标。

(22) (本题满分 11 分)

设  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ , 当  $a, b$  为何值时, 存在矩阵  $C$  使得  $AC - CA = B$ , 并求所有矩阵  $C$ 。

(23) (本题满分 11 分)

设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$ , 记  $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 。

(I) 证明二次型  $f$  对应的矩阵为  $2\alpha^T\alpha + \beta^T\beta$ ;

(II) 若  $\alpha, \beta$  正交且均为单位向量, 证明二次型  $f$  在正交变化下的标准形为二次型  $2y_1^2 + y_2^2$ 。

# 2013 年全国硕士研究生入学统一考试

## 数学二试题答案

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 设  $\cos x - 1 = x \sin \alpha(x)$ ，其中  $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$ ，则当  $x \rightarrow 0$  时， $\alpha(x)$  是 ( )

- (A) 比  $x$  高阶的无穷小 (B) 比  $x$  低阶的无穷小  
(C) 与  $x$  同阶但不等价的无穷小 (D) 与  $x$  等价的无穷小

【答案】(C)

【解析】因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$ ，所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \alpha(x) = 0$ ，

因此当  $x \rightarrow 0$  时， $\alpha(x) \rightarrow 0$ ，所以  $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ ，所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x} = -\frac{1}{2}$ ，

所以  $\alpha(x)$  是与  $x$  同阶但不等价的无穷小。

(2) 设函数  $y = f(x)$  由方程  $\cos(xy) + \ln y - x = 1$  确定，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] = ( )$

- (A) 2 (B) 1 (C) -1 (D) -2

【答案】(A)

【解析】由于  $f(0) = 1$ ，所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left[ \frac{f\left(\frac{2}{n}\right) - f(0)}{\frac{2}{n}} \right] = 2f'(0)$ ，

对此隐函数两边求导得  $-(y + xy') \sin(xy) + \frac{y'}{y} - 1 = 0$ ，所以  $f'(0) = 1$ ，故  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] = 2$ 。

(3) 设函数  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ ， $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ，则 ( )

- (A)  $x = \pi$  是函数  $F(x)$  的跳跃间断点 (B)  $x = \pi$  是函数  $F(x)$  的可去间断点  
(C)  $F(x)$  在  $x = \pi$  处连续但不可导 (D)  $F(x)$  在  $x = \pi$  处可导

【答案】(C)

【解析】 $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x, & 0 \leq x < \pi \\ \int_0^\pi \sin t dt + \int_\pi^x 2 dt = 2(x - \pi + 1), & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ ，

由于  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (1 - \cos x) = 2$ ，所以  $F(x)$  在  $x = \pi$  处连续；

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-1 - \cos x}{x - \pi} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2(x - \pi)}{x - \pi} = 2,$$

所以  $F(x)$  在  $x = \pi$  处不可导。

$$(4) \text{ 设函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}, \text{ 若反常积分 } \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛, 则 ( )}$$

- (A)  $\alpha < -2$       (B)  $\alpha > 2$       (C)  $-2 < \alpha < 0$       (D)  $0 < \alpha < 2$

【答案】(D)

$$\text{【解析】 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$$

$$\text{因为 } \int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^e f(x) dx + \int_e^{+\infty} f(x) dx,$$

$$\text{当 } 1 < x < e \text{ 时, } \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1^+} \int_{\varepsilon}^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1^+} \left[ \frac{1}{2-\alpha} \frac{1}{(\varepsilon-1)^{\alpha-2}} \right] - \frac{1}{2-\alpha} \frac{1}{(e-1)^{\alpha-2}},$$

$$\text{要使 } \lim_{\varepsilon \rightarrow 1^+} \left[ \frac{1}{2-\alpha} \frac{1}{(\varepsilon-1)^{\alpha-2}} \right] \text{ 存在, 需满足 } \alpha - 2 < 0;$$

$$\text{当 } x \geq e \text{ 时, } \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x} dx = \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^{\alpha+1} x} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{\ln^{\alpha} \lambda} \right) + \frac{1}{\alpha},$$

$$\text{要使 } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{\ln^{\alpha} \lambda} \right) \text{ 存在, 需满足 } \alpha > 0; \text{ 所以 } 0 < \alpha < 2.$$

$$(5) \text{ 设 } z = \frac{y}{x} f(xy), \text{ 其中函数 } f \text{ 可微, 则 } \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = ( )$$

- (A)  $2yf'(xy)$       (B)  $-2yf'(xy)$       (C)  $\frac{2}{x} f(xy)$       (D)  $-\frac{2}{x} f(xy)$

【答案】(A)

$$\text{【解析】 已知 } z = \frac{y}{x} f(xy), \text{ 所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} f(xy) + \frac{y^2}{x} f'(xy),$$

$$\text{所以 } \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \left[ -\frac{1}{x} f(xy) + yf'(xy) \right] + \left( \frac{1}{x} f(xy) + yf'(xy) \right) = 2yf'(xy).$$

$$(6) \text{ 设 } D_k \text{ 是圆域 } D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ 在第 } k \text{ 象限的部分, 记 } I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy (k=1, 2, 3, 4), \text{ 则}$$

( )

- (A)  $I_1 > 0$       (B)  $I_2 > 0$       (C)  $I_3 > 0$       (D)  $I_4 > 0$

【答案】(B)

【解析】令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ，则有

$$I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy = \int_0^1 r dr \int_{\alpha}^{\beta} (r \sin \theta - r \cos \theta) d\theta = -\frac{1}{3} (\cos \theta + \sin \theta) \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

故当  $k=2$  时,  $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \pi$ , 此时有  $I_2 = \frac{2}{3} > 0$ . 故正确答案选 B。

(7) 设矩阵 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若  $AB = C$ , 且 C 可逆, 则 ( )

- (A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价  
(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价  
(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价  
(D) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

【答案】(B)

【解析】由  $C = AB$  可知 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表示, 又 B 可逆, 故有  $A = CB^{-1}$ , 从而 A 的列向量组也可以由 C 的列向量组线性表示, 故根据向量组等价的定义可知正确选项为 (B)。

(8) 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  相似的充分必要条件为

- (A)  $a=0, b=2$   
(B)  $a=0, b$  为任意常数  
(C)  $a=2, b=0$   
(D)  $a=2, b$  为任意常数

【答案】(B)

【解析】由于  $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$  为实对称矩阵, 故一定可以相似对角化, 从而  $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  相似的

充分必要条件为  $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$  的特征值为  $2, b, 0$ 。

又  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & -1 \\ -a & \lambda-b & -a \\ -1 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda[(\lambda-b)(\lambda-2)-2a^2]$ , 从而  $a=0, b$  为任意常数。

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】  $e^{\frac{1}{2}}$

【解析】 原式 =  $e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+\frac{\ln(1+x)}{x})}{x}}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\frac{\ln(1+x)}{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-(1-\frac{1}{2}x+o(x))}{x} = \frac{1}{2}$$

因此答案为  $e^{\frac{1}{2}}$ .

(10) 设函数  $f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$ , 则  $y=f(x)$  的反函数  $x=f^{-1}(y)$  在  $y=0$  处的导数

$\frac{dx}{dy}|_{y=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】  $\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$

【解析】  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-e^x}, \therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}, \frac{dx}{dy}|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}|_{x=-1} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$

(11) 设封闭曲线  $L$  的极坐标方程为  $r = \cos 3\theta (-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6})$ , 则  $L$  所围成的平面图形的面积为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】  $\frac{\pi}{12}$

【解析】 所围图形的面积是  $S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 6\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{12}$

(12) 曲线  $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$  上对应于  $t=1$  的点处的法线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】  $y + x - \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} = 0$

【解析】  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{1+t^2}} = t, \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = 1,$

当  $t=1$  时,  $x = \frac{\pi}{4}, y = \ln \sqrt{2}$ , 故法线方程为  $y + x - \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} = 0$ .

(13) 已知  $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}, y_2 = e^x - xe^{2x}, y_3 = -xe^{2x}$  是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解,

该方程满足条件  $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$  的解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $y = e^{3x} - e^x - xe^{2x}$

【解析】 由题意知:  $e^{3x}, e^x$  是对应齐次方程的解,  $-xe^{2x}$  是非齐次方程的解,

故非齐次的通解为  $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - xe^{2x}$ , 将初始条件代入, 得到  $C_1 = 1, C_2 = -1$ ,

故满足条件的解为  $y = e^{3x} - e^x - xe^{2x}$ .

(14) 设  $A = (a_{ij})$  是三阶非零矩阵,  $|A|$  为  $A$  的行列式,  $A_{ij}$  为  $a_{ij}$  的代数余子式, 若  $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ , 则  $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】  $-1$

【解析】

由  $a_{ij} + A_{ij} = 0$  可知,  $A^T = -A^*$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \\ &= -\sum_{j=1}^3 a_{ij}^2 = -\sum_{i=1}^3 a_{ij}^2 < 0 \end{aligned}$$

从而有  $|A| = |A^T| = |-A^*| = -|A|^2$ , 故  $|A| = -1$ .

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$  与  $ax^n$  为等价无穷小, 求  $n$  与  $a$  的值.

【解析】 因为当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$  与  $ax^n$  为等价无穷小

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} = 1$



又因为:

$$1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$$

$$= 1 - \cos x + \cos x - \cos x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \cos 2x - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$$

$$= 1 - \cos x + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{ax^n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{ax^n} + \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{ax^n} + \frac{\cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{ax^n} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{ax^n} + \frac{\frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2)}{ax^n} + \frac{\frac{1}{2}(3x)^2 + o(x^2)}{ax^n} \right)$$

$$\text{所以 } n=2 \text{ 且 } \frac{1}{2a} + \frac{4}{2a} + \frac{9}{2a} = 1 \Rightarrow a=7$$

(16) (本题满分 10 分)

设  $D$  是由曲线  $y = x^{\frac{1}{3}}$ , 直线  $x = a (a > 0)$  及  $x$  轴所围成的平面图形,  $V_x, V_y$  分别是  $D$  绕  $x$  轴,  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积, 若  $V_y = 10V_x$ , 求  $a$  的值。

【解析】由题意可得:

$$V_x = \pi \int_0^a (x^{\frac{1}{3}})^2 dx = \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}}$$

$$V_y = 2\pi \int_0^a x \cdot x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}}$$

$$\text{因为: } V_y = 10V_x \text{ 所以 } \frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}} = 10 \cdot \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}} \Rightarrow a = 7\sqrt{7}$$

(17) (本题满分 10 分)

设平面内区域  $D$  由直线  $x = 3y, y = 3x$  及  $x + y = 8$  围成. 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ 。

$$\text{【解析】 } \iint_D x^2 dx dy = \iint_{D_1} x^2 dx dy + \iint_{D_2} x^2 dx dy$$

$$= \int_0^2 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{3x} dy + \int_2^6 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{8-x} dy$$

$$= \frac{416}{3}$$

(18) (本题满分 10 分)

设奇函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(1) = 1$ . 证明:

(I) 存在  $\xi \in (0,1)$ , 使得  $f'(\xi)=1$ ; (II) 存在  $\eta \in (0,1)$ , 使得  $f''(\eta)+f'(\eta)=1$ 。

【解析】(1) 令  $F(x)=f(x)-x, F(0)=f(0)=0, F(1)=f(1)-1=0$ ,

则  $\exists \xi \in (0,1)$  使得  $F'(\xi)=0$ , 即  $f'(\xi)=1$

(2) 令  $G(x)=e^x(f'(x)-1)$ , 则  $G(\xi)=0$ ,

又由于  $f(x)$  为奇函数, 故  $f'(x)$  为偶函数, 可知  $G(-\xi)=0$ ,

则  $\exists \eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1,1)$  使  $G'(\eta)=0$ ,

即  $e^\eta[f'(\eta)-1]+e^\eta f''(\eta)=0$ , 即  $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

(19) (本题满分 11 分)

求曲线  $x^3-xy+y^3=1(x \geq 0, y \geq 0)$  上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

【解析】本题本质上是在条件  $x^3-xy+y^3=1(x \geq 0, y \geq 0)$  下求函数  $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$  的最值。

故只需求出  $\sqrt{x^2+y^2}$  在条件  $x^3-xy+y^3=1$  下的条件极值点, 再将其与曲线端点处  $((0,1),(1,0))$  的函数值比较, 即可得出最大值与最小值。

由于函数  $\sqrt{x^2+y^2}$  与  $x^2+y^2$  的增减性一致, 故可以转化为求  $x^2+y^2$  的条件极值点:

构造拉格朗日函数  $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^3-xy+y^3-1)$ , 求其驻点得

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 3\lambda x^2 - \lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 3\lambda y^2 - \lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^3 - xy + y^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

为了求解该方程组, 将前两个方程变形为  $\begin{cases} 2x = \lambda y - 3\lambda x^2 \\ 2y = \lambda x - 3\lambda y^2 \end{cases}$

进一步有  $\begin{cases} 2xy = \lambda y^2 - 3\lambda x^2 y \\ 2xy = \lambda x^2 - 3\lambda xy^2 \end{cases}$ , 故  $\lambda x^2 - 3\lambda xy^2 = \lambda y^2 - 3\lambda x^2 y$

即  $\lambda(x-y)(x+y+3xy)=0$ 。则有  $\lambda=0$  或  $x-y=0$  或  $x+y+3xy=0$ 。

当  $\lambda=0$  时, 有  $x=y=0$ , 不可能满足方程  $x^3-xy+y^3-1=0$ ;

当  $x+y+3xy=0$ ，由于  $x \geq 0, y \geq 0$ ，也只能有  $x=y=0$ ，不可能满足第三个方程；

故必有  $x-y=0$ ，将其代入  $x^3-xy+y^3-1=0$  得  $2x^3-x^2-1=0$ ，解得  $x=1, y=1$ 。

可知  $(1,1)$  点是唯一的条件极值点。

由于  $f(1,1)=\sqrt{2}$ ， $f(0,1)=f(1,0)=\sqrt{2}$ ，故曲线  $x^3-xy+y^3=1(x \geq 0, y \geq 0)$  上的点到坐标原点的最长距离为  $\sqrt{2}$  与最短距离为 1。

(20) (本题满分 11 分)

设函数  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ ，

(I) 求  $f(x)$  的最小值

(II) 设数列  $\{x_n\}$  满足  $\ln x_n + \frac{1}{x_n} < 1$ ，证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在，并求此极限。

【解析】(I)  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ ，则当  $x \in (0,1)$  时， $f'(x) < 0$ ；当  $x \in (1,+\infty)$  时， $f'(x) > 0$ 。

可知  $f(x)$  在  $(0,1]$  上单调递减，在  $[1,+\infty)$  上单调递增。故  $f(x)$  的最小值为  $f(1)=1$ 。

(2)、由于  $\ln x_n + \frac{1}{x_n} \geq 1$ ，则  $\frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{x_n}$ ，即  $x_{n+1} > x_n$ ，故  $x_n$  单调递增。

又由于  $\ln x_n < \ln x_n + \frac{1}{x_n+1} < 1$ ，则  $x_n < e$ ，故  $x_n$  有上界，则由单调有界收敛定理可知， $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在。

令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln x_n + \frac{1}{x_n} \right) = \ln a + \frac{1}{a}$ ，由于  $\ln x_n + \frac{1}{x_n+1} < 1$ ，则

$\ln a + \frac{1}{a} \leq 1$ ，故  $a=1$ 。

(21) (本题满分 11 分)

设曲线  $L$  的方程为  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$  ( $1 \leq x \leq e$ )，

(1) 求  $L$  的弧长；

(2) 设  $D$  是由曲线  $L$ ，直线  $x=1, x=e$  及  $x$  轴所围平面图形，求  $D$  的形心的横坐标。

【解析】(1) 由弧长的计算公式得  $L$  的弧长为

$$\int_1^e \sqrt{1 + \left[ \left( \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \right)' \right]^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \right)^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^e \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{2}} dx \\
&= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2} dx \\
&= \frac{e^2 + 1}{4}
\end{aligned}$$

(2) 由形心的计算公式可得,  $D$  的形心的横坐标为

$$\frac{\int_1^e x \left( \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \ln x \right) dx}{\int_1^e \left( \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \ln x \right) dx} = \frac{3(e^4 - 2e^2 - 3)}{4(e^3 - 7)}$$

(22) (本题满分 11 分)

设  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ , 当  $a, b$  为何值时, 存在矩阵  $C$  使得  $AC - CA = B$ , 并求所有矩阵  $C$ 。

【解析】由题意可知矩阵  $C$  为 2 阶矩阵, 故可设  $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ , 则由  $AC - CA = B$  可得线性方程组:

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1-a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

由于方程组 (1) 有解, 故有  $1+a=0, b-1-a=0$ , 即  $a=-1, b=0$ , 从而有

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 故有 } \begin{cases} x_1 = k_1 + k_2 + 1 \\ x_2 = -k_1 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 任意.}$$

从而有  $C = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$

(23) (本题满分 11 分)

设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$ , 记  $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 。

(I) 证明二次型  $f$  对应的矩阵为  $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ ;

(II) 若  $\alpha, \beta$  正交且均为单位向量, 证明二次型  $f$  在正交变化下的标准形为二次型  $2y_1^2 + y_2^2$ 。

【解析】(1)

$$f = (2a_1^2 + b_1^2)x_1^2 + (2a_2^2 + b_2^2)x_2^2 + (2a_3^2 + b_3^2)x_3^2 + (4a_1a_2 + 2b_1b_2)x_1x_2 \\ + (4a_1a_3 + 2b_1b_3)x_1x_3 + (4a_2a_3 + 2b_2b_3)x_2x_3$$

则  $f$  的矩阵为  $\begin{pmatrix} 2a_1^2 + b_1^2 & 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_1a_3 + b_1b_3 \\ 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_2^2 + b_2^2 & 2a_2a_3 + b_2b_3 \\ 2a_1a_3 + b_1b_3 & 2a_2a_3 + b_2b_3 & 2a_3^2 + b_3^2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{pmatrix}$   
 $= 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$

(2) 令  $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ , 则  $A\alpha = 2\alpha\alpha^T\alpha + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha$ ,  $A\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta\beta^T\beta = \beta$ , 则 1, 2 均为  $A$  的特征值, 又由于  $r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2$ , 故 0 为  $A$  的特征值, 则三阶矩阵  $A$  的特征值为 2, 1, 0, 故  $f$  在正交变换下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2$

## 慕课考研

### 2019 考研大纲直播峰会

高教社考试中心联合慕课考研第 1 时间权威首发

大纲官方解析总会场: 1 场直播 3 个小时第一时间快速了解考点变化

学科深度解析分会场: 根据新大纲, 预测最新考点, 传授百日复习攻略

直播地址: [http://www.icourse163.org/topics/2018dagang\\_kysp/](http://www.icourse163.org/topics/2018dagang_kysp/)



## 新大纲百日冲刺提分方案-最后3个月，针对新大纲考点，精准提分

数学一/三百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details>

数学二百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details>

英语一百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details>

英语二百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details>

政治百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details>

法硕百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details>

中医百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details>

心理学百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details>

西医百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details>

关注公众号  
“网易慕课考研”  
查看考研资讯/干货/福利



慕课考研