2012年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题:1□8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐进线的条为　　　　　　(　)

(A)　0　　(B)　1　　(C)　2　　(D)　3

【答案】(C)

【解析】$y=\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

故 $\lim\limits_{x\to 1^+} y=\infty$，$x=1$ 为垂直渐近线;

又由 $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$，故 $y=1$ 为水平渐近线，无斜渐近线，故渐近线的条数为 2.

(2)设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$　　　　(　)

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$　(B) $(-1)^n(n-1)!$　(C) $(-1)^{n-1}n!$　(D) $(-1)^n n!$

【答案】(A)

【解析】$y'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-y(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=-1\times(-2)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

(3)设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(r^2)r\mathrm{d}r=$　　　　(　)

(A) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$　(B) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$　(D) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$

【答案】(B)

【解析】由 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，可知积分区域在第一象限,

由 $2\cos\theta\le r\le 2$，可知 $x^2+y^2\le 4, 2x\le x^2+y^2, (2r\cos\theta\le r^2)$

故 $I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$，故选(B).

(4)已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^a}$ 绝对收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-a}}$ 条件收敛，则 ( )

(A) $0<a\le\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}<a\le 1$ (C) $1<a\le\frac{3}{2}$ (D) $\frac{3}{2}<a<2$

【答案】(D)

【解析】由 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^a}$ 绝对收敛

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a-\frac{1}{2}}}$ 收敛，则有 $a-\frac{1}{2}>1$，即 $a>\frac{3}{2}$，

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-a}}$ 条件收敛，则有 $0<2-a\le 1$，即 $1\le a<2$.

综上：$\frac{3}{2}<a<2$，故选(D).

(5)设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\0\\c_1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\c_2\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\c_3\end{bmatrix}$，$\alpha_4=\begin{bmatrix}-1\\1\\c_4\end{bmatrix}$，其中 $c_1\ c_2\ c_3\ c_4$ 为任意常数，则下列向量组线性相关的为 ( )

(A) $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ (B) $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4$ (C) $\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_4$ (D) $\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$

【答案】C

【解析】

$$|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\times\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0,$$

故 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 必定线性相关，从而应选 C.

(6) 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，若 $P=(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_3)$

$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ=$ ( )

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【答案】B

【解析】

$$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1},$$

从而$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$，故应选 B.

(7)设随机变量 X 与 P 相互独立，且都服从区间（0.1）上的均匀分布，则 $P\left\{x^2+y^2\le 1\right\}=$（　）

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\pi}{8}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

【答案】 D

【解析】 X与Y的概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}，\quad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

又X与Y相互独立，所以X与Y的联合密度函数为

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le x,y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，从而

$$P\{X^2+Y^2\le 1\}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\le 1}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=S_D=\frac{\pi}{4}.$$

(8)设 x_1,x_2,x_3x_4 为来自总体 $N(1,6^2)$（$6\succ0$）的简单随机样本，则位计量 $\frac{x-x_2}{|x_3+x_4-2|}$ 的分布为（ ）

(A) N（0, 1） (B) t(1) (C) $x^2(1)$ (D) $f(1,1)$

【答案】 B

【解析】 因为 $X_i\sim N(1,\sigma^2)$，所以 $X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，

$X_3+X_4\sim N(2,2\sigma^2)$，$\frac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，$\frac{(X_3+X_4-2)^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(1)$.

因为 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\frac{(X_3+X_4-2)^2}{2\sigma^2}$ 也相互独立，

从而 $\dfrac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\frac{(X_3+X_4-2)^2}{2\sigma^2}}=\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}\sim t(1)$.

二、填空题：9 14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$

【答案】 $e^{-\sqrt{2}}$

【解析】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\frac{\ln\tan x}{\cos x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\frac{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}{\cos x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{1}{\cos x}}=e^{-\sqrt{x}}$.

(10) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x} & ,x\geq1\\ 2x-1 & ,x<1\end{cases}$，$y=f(f(x))$，则 $\frac{dy}{dx}|_{x=e}=$________.

【答案】 $\frac{1}{e}$

【解析】$y=f\left[f(x)\right]=\begin{cases}\ln\sqrt{f(x)}, & f(x)\ge 1\\ 2f(x)-1, & f(x)<1\end{cases}=\begin{cases}\ln\sqrt{\ln\sqrt{x}}, & x\ge e^2\\ 2\ln\sqrt{x}-1, & 1\le x<e^2\\ 2(2x-1)-1, & x<1\end{cases}$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\ln x\right), & x\ge e^2\\ \ln x-1, & 1\le x<e^2\\ 4x-3, & x>1\end{cases},$$

所以 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}=\left.(\ln x-1)\right|_{x=e}=\left.\frac{1}{x}\right|_{x=e}=\frac{1}{e}$.

(11) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$ 则 $\mathrm{d}z\,|_{(0,1)}=$ ________.

【答案】$2dx-dy$

【解析】由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left(f(x,y)-2x+y-2\right)=0$，

由 $f(x,y)$ 连续，则 $f(0,1)-0+1-2=0, f(0,1)=1$，

则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-f(0,1)-2x+(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，观察可知 $f(x,y)$ 在 $(0,1)$ 处可微，且

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=2, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=-1$, 故 $dz=2dx-dy$.

(12) 由曲线 $y=\frac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为

【答案】$4\ln 2$.

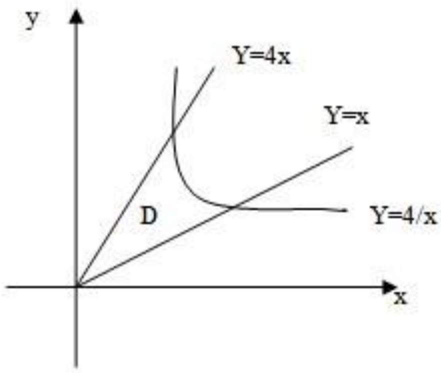
【解析】曲线 $y=\frac{4}{x}$ 与 $y=x$ 交点为 $(2,2)$， $y=\frac{4}{x}$ 与 $y=4x$ 交点为 $(1,4)$

故平面图形所示：

$$S=\iint_D 1d\sigma=\int_0^1 dx\int_x^{4x}dy+\int_1^2 dx\int_x^{\frac{4}{x}}dy=\int_0^1 3xdx+\int_1^2\left(\frac{4}{x}-x\right)dx$$

$=\frac{3}{2}+\left(4\ln x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}+(4\ln 2-2)+\frac{1}{2}$

$=2+(4\ln 2-2)=4\ln 2$.



(13)设A为 3 阶矩阵，$|A|=3$，A^*为A的伴随矩阵。若交换A的第 1 行与第 2 行得矩阵B,则$|BA^*|=$

【答案】 -27

【解析】

设$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$|P|=-1$，由于$B$是由$A$的第1行和第2行交换所得，知$B=PA$，

所以$|BA^*|=|PAA^*|=|P||A|E|=-|3E|=-27$.

(14)设A、B、C是随机事件，A与C互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{3}$,则$P(AB|\bar{C})=$

【答案】$\frac{3}{4}$.

【解析】由于A与C互不相容，所以$AC=\phi$，则$ABC=\phi$，从而$P(ABC)=0$；

$$P\left(AB\middle|\bar{C}\right)=\frac{P\left(AB\bar{C}\right)}{P\left(\bar{C}\right)}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{P\left(\bar{C}\right)}=\frac{\frac{1}{2}-0}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分　　分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$（10分）

【解析】

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}\left(1-e^{2-2\cos x-x^2}\right)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-e^{2-2\cos x-x^2}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{-\left(2-2\cos x-x^2\right)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+2\cos x-2}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{2x^3}$$
$$=\frac{1}{12}$$

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint e^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x},y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

【解析】曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的交点为 $(1,1)$，所以积分区域为 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,\sqrt{x}<y<\frac{1}{\sqrt{x}}\}$.

所以 $\iint\limits_D xye^x dxdy=\int_0^1 xe^x dx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} ydx=\int_0^1 xe^x\frac{1}{2}(\frac{1}{x}-x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(e^x-x^2e^x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^x dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2e^x dx$$
$$=\frac{1}{2}e^x\Big|_0^1-\frac{1}{2}x^2e^x\Big|_0^1+\int_0^1 xe^x dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(e\ -1\right)-\frac{1}{2}e+xe^x\Big|_0^1-e^x\Big|_0^1$$
$$=-\frac{1}{2}+e^1-e^1+1$$
$$=\frac{1}{2}.$$

(17)(本题满分 分)

某企业为生产甲、乙两种型号的产品，投入的固定成本为 10000（万元），设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x（件）和 y（件），且定两种产品的边际成本分别为 $20+\frac{x}{2}$（万元/件）与 $6+y$（万元/件）。

（1）求生产甲乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$（万元）

(2)当总产量为 50 件时，甲乙两种的产量各为多少时可使总成本最小？求最小 成本

(3)求总产量为 50 件时且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义。

【解析】设甲产品的成本为，乙产品的成本为

(I) $c(x,y)=c(x)+c(y)+c_0$

$$=\int_0^x\left(20+\frac{t}{2}\right)dt+\int_0^y(6+t)dt+10000$$

$$=\frac{1}{4}x^2+20x+\frac{1}{2}y^2+6y+10000$$

(II) 当 $x+y=50$ 时，求总成本最小为条件极值问题

设 $F(x,y,z)=\frac{1}{4}x^2+20x+\frac{1}{2}y^2+6y+10000+\lambda(x+y-50)$

令 $\begin{cases}F_x=\frac{1}{2}x+20+\lambda=0\\ F_y=y+6+\lambda=0\\ F_\lambda=x+y-50=0\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=24\\ y=26\\ \lambda=-32\end{cases}$

由于实际问题一定存在最值，所以唯一极小值点 $(24,26)$ 为问题的最小值点。故当甲产品 24 件乙产品 26 件时，可使总成本最小，最小成本为 $C(24,26)=11118$（万元）.

(III) 由 (II) 知，总产量 50 件且总成本最小时，甲产品为 24 件，此时甲产品的边际成本为

$$c(x)|_{x=24}=20+12=32(\text{万元/件})$$

经济意义：当甲产品产量 24 为时，每增加一件甲产品，则甲产品的成本增加 32 万元

(18) (本题满分 10 分)

证明 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2},(-1<x<1)$

【解析】令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2},-1<x<1.$

因为 $f(-x)=f(x)$,所以只讨论当 $x\geq 0$ 的时候即可.

又 $f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2}-\sin x-x$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,\qquad 0\leq x<1.$$

$$f''(x)=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}+\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}-\cos x-1$$

$$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}-\cos x-1$$

$$=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1 \qquad 0\le x<1$$

$$f'''(x)=\frac{-4\times 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}+\sin x$$

$$=\frac{16x(1-x^2)}{(1-x^2)^4}+\sin x$$

当 $x\in[0,1)$ 时 $f'''(x)\ge 0$，从而 $f''(x)$ 单调递增，则 $f''(x)\ge f''(0)=2>0, x\in[0,1)$，所以 $f'(x)$ 单调递增，即 $f'(x)\ge f'(0)=0, x\in[0,1)$，所以当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)$ 单调递增，即 $f(x)\ge f(0)=0, x\in[0,1)$．所以当 $-1<x<1$ 时，$f(x)\ge 0$，即 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2}$，$(-1<x<1)$．

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$

（1）求 $f(x)$ 的表达式　　　(2)求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点

(20)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

（1）计算行列式 $|A|$；

（2）当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

【解析】

（Ⅰ）$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1-a^4=\left(1-a^2\right)\left(1+a^2\right)$

（Ⅱ）由 $|A|=0$ 知 $a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -2\\ -(\lambda-2) & \lambda-2 & -2\\ 0 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & \lambda-2 & -2\\ 0 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

所以 B 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=6$，$\lambda_3=0$.

解 $(2E-B)x=0$ 的基础解系为 $\alpha_1=(1,-1,0)^T$；

$(6E-A)x=0$ 的基础解析为 $\alpha_2=(1,1,2)^T$；

$(0E-A)x=0$ 的基础解析为 $\alpha_3=(1,1,-1)^T$.

单位化得 $\beta_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)^T$，$\beta_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=\frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,2)^T$，$\beta_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,-1)^T$.

得正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$，对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 6 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，则 $Q^TAQ=\Lambda$

因此，作正交变换 $x=Qy$，则二次型 f 的标准形为

$$f(x)=x^T\left(A^TA\right)x=y^T\Lambda y=2y_1^2+6y_2^2 .$$

（22）（本题满分 11 分）

设二维离散型随机变量 X、Y 的概率分布为

	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -2\\ -(\lambda-2) & \lambda-2 & -2\\ 0 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & \lambda-2 & -2\\ 0 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

所以 B 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=6$，$\lambda_3=0$.

解 $(2E-B)x=0$ 的基础解系为 $\alpha_1=(1,-1,0)^T$；

$(6E-A)x=0$ 的基础解析为 $\alpha_2=(1,1,2)^T$；

$(0E-A)x=0$ 的基础解析为 $\alpha_3=(1,1,-1)^T$.

单位化得 $\beta_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)^T$，$\beta_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=\frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,2)^T$，$\beta_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,-1)^T$.

得正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$，对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 6 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，则 $Q^TAQ=\Lambda$

因此，作正交变换 $x=Qy$，则二次型 f 的标准形为

$$f(x)=x^T\left(A^TA\right)x=y^T\Lambda y=2y_1^2+6y_2^2 .$$

（22）（本题满分 11 分）

设二维离散型随机变量 X、Y 的概率分布为

	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0

2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

（Ⅰ）求 $P\{X=2Y\}$；

（Ⅱ）求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

【解析】

（Ⅰ） $P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

（II） X 的概率分布为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

故 $E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$，

XY 的概率分布为

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

故 $E(XY)=0\cdot\frac{7}{12}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot 0+4\cdot\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$

Y 的概率分布为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

故 $E(Y)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=1$，

从而， $E(Y^2)=0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$， $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$，

故 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,Y)$

$=E(XY)-E(X)E(Y)-D(Y)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$.

（23）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且服从参数为 1 的指数分布．记 $U=\max\{X,Y\}$，

$V=\min\{X,Y\}$

（Ⅰ）求 V 的概率密度 $f_V(v)$；

（Ⅱ）求 $E(U+V)$.

【答案】（I）$f_V(v)=F_V'(v)=\begin{cases} ve^{-2v}, v>0 \\ 0, \quad v\le 0 \end{cases}$；（II）$E(U+V)=2$.

【解析】（I）设 V 的分布函数是 $F_V(v)$，则

$$F_V(v)=P\{V\le v\}=P\{\min(X,Y)\le v\}$$

$$=1-P\{\min(X,Y)>v\}=1-P\{X>v,Y>v\}=1-P\{X>v\}P\{Y>v\}$$

当 $v<0$ 时，$F_V(v)=0$；

当 $v\ge 0$ 时，$F_V(v)=1-\int_v^{+\infty}e^{-x}dx\int_v^{+\infty}e^{-y}dy=1-e^{-2v}$.

V 的概率密度

$$f_V(v)=F_V'(v)=\begin{cases} ve^{-2v}, v>0, \\ 0, \quad v\le 0. \end{cases}$$

（II）$U=\max(X,Y)=\frac{1}{2}[(X+Y)+|X-Y|]$,

$V=\min(X,Y)=\frac{1}{2}[(X+Y)-|X-Y|]$

则 $U+V=X+Y$

$E(U+V)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=1+1=2$.

新大纲百日冲刺提分方案-最后 3 个月，针对新大纲考点，精准提分

数学一/三百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details

数学二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details

英语一百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details

英语二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details

政治百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details

法硕百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details

中医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details

心理学百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details

西医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details