2014年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题:1～8小题，每小题4分，共32分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1、当$x\to 0^{+}$时，若$\ln^{\alpha}(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$均是比$x$高阶的无穷小，则$\alpha$的取值范围是（　）

（A）$(2,+\infty)$　　（B）$(1,2)$　　（C）$(\frac{1}{2},1)$　　（D）$(0,\frac{1}{2})$

【答案】B

【考点】等价无穷小、高阶无穷小

【详解】

当$x\to 0^{+}$时，$\ln^{\alpha}(1+2x)\sim(2x)^{\alpha}$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim\left(\frac{1}{2}x^{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

因为它们都是比x高阶的无穷小，故$\alpha>1,\frac{2}{\alpha}>1$，即$1<\alpha<2$

2、下列曲线中有渐近线的是（　）

（A）$y=x+\sin x$　　（B）$y=x^{2}+\sin x$

（C）$y=x+\sin\frac{1}{x}$　　（D）$y=x^{2}+\sin\frac{1}{x}$

【答案】C

【考点】函数的渐近线

【详解】

对于选项A，$\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)$不存在，因此没有水平渐近线，

同理可知，选项A没有铅直渐近线，

而$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\mathrm{sinx}}{x}$不存在，因此选项A中的函数没有斜渐近线；

对于选项B和D，我们同理可知，对应的函数没有渐近线；

对于C选项，$y=x+\sin\frac{1}{x}$. 由于$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=1$，又

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(y-1\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$. 所以$y=x+\sin\frac{1}{x}$存在斜渐近线$y=x$. 故选C.

（4）设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 内（　）

（A）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$

（B）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

（C）当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$

（D）当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

【答案】D

【考点】函数单调性的判别、函数图形的凹凸性

【详解】

【解法一】

令 $F(x)=g(x)-f(x)$

则 $F'(x)=-f(0)+f(1)-f'(x)$

由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(1)-f(0)=(1-0)f'(\xi)=f'(\xi)$

即 $F'(\xi)=0$

又因为 $F''(x)=-f''(x)$

若 $f''(x)\ge 0$，则 $F''(x)\le 0$，所以 $F'(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,\xi),F'(x)>0,F(x)$ 单调递增，

当 $x\in(\xi,1),F'(x)<0,F(x)$ 单调递减，

又 $F(0)=0.F(1)=0$，所以 $F(x)\ge 0$，即 $f(x)\le g(x)$，故选 D

【解法二】

令 $f(x)=x^2$，则函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，且 $f''(x)\ge 0$

所以 $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x=x$

当 $x\in[0,1]$ 时， $f(x)\le g(x)$，故选 D

4、曲线 $\begin{cases}x=t^2+7,\\ y=t^2+4t+1\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是（　）

（A） $\dfrac{\sqrt{10}}{50}$　　（B） $\dfrac{\sqrt{10}}{100}$　　（C） $10\sqrt{10}$　　（D） $5\sqrt{10}$

【答案】C
【考点】参数方程求导、曲率及曲率半径
【详解】

$$\because \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{2t+4}{2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{2\cdot 2t-2(2t+4)}{(2t)^2}}{2t}=\frac{-8}{(2t)^3}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=3,\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-1$$

$$\therefore k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1+3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore R=\frac{1}{k}=(1+3^2)^{\frac{3}{2}}=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$$

5、设函数 $f(x)=\arctan x$，若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=$（　）

（A） 1　　（B） $\dfrac{2}{3}$　　（C） $\dfrac{1}{2}$　　（D） $\dfrac{1}{3}$

【答案】D
【考点】函数求导、函数求极限
【详解】

$$\because \frac{f(x)}{x}=\frac{\arctan x}{x}=\frac{1}{1+\xi^2}.$$

$\therefore \xi^2 = \dfrac{x - \arctan x}{\arctan x}$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^2 \cdot \arctan x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x^2(1+x^2)} = \dfrac{1}{3}$.

6、设函数$u(x,y)$在有界闭区域D上连续，在D的内部具有 2 阶连续偏导数，且满足$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$及

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则（　）

（A）$u(x,y)$的最大值和最小值都在D的边界上取得

（B）$u(x,y)$的最大值和最小值都在D的内部取得

（C）$u(x,y)$的最大值在D的内部取得，$u(x,y)$的最小值在D的边界上取得

（D）$u(x,y)$的最小值在D的内部取得，$u(x,y)$的最大值在D的边界上取得

【答案】A

【考点】二元函数极值的充分条件

【详解】

因为$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，故$A=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$与$C=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$异号.又$B=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$，

则$AC-B^2<0$，所以函数$u(x,y)$在区域D内没有极值.

又连续函数在有界闭区域内有最大值和最小值，故最大值和最小值在D的边界点取到.

7、行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$（　）

（A）$(ad-bc)^2$　　　　（B）$-(ad-bc)^2$

（C）$a^2d^2-b^2c^2$　　　（D）$b^2c^2-a^2d^2$

【答案】B

【考点】分块矩阵的行列式运算、行列式的性质、行列式按行（列）展开定理

【详解】

【解法一】

$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3}-\begin{vmatrix}b&a&0&0\\0&0&a&b\\d&c&0&0\\0&0&c&d\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}b&a&0&0\\d&c&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}b&a\\d&c\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=(bc-ad)(ad-bc)=-(ad-bc)^2$$

故选 B

【解法二】

$$\begin{vmatrix}0&\mathrm{a}&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}$$

$$=a\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a&b&0\\c&d&0\\0&0&d\end{vmatrix}+c\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&b&0\\0&0&b\\c&d&0\end{vmatrix}$$

$$=-a\times d\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}-c\times b\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$$

$$=-ad\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+bc\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$$

$$=(bc-ad)\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$$

$$=-(ad-bc)^2$$

8、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的（　）

（A）必要非充分条件
（B）充分非必要条件
（C）充分必要条件
（D）既非充分也非必要条件

【答案】A

【考点】向量组的线性相关性

【详解】

已知α_1，α_2，α_3无关

设$\lambda_1(\alpha_1+k\alpha_3)+\lambda_2(\alpha_2+l\alpha_3)=0$

即$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+(k\lambda_1+l\lambda_2)\alpha_3=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=k\lambda_1+l\lambda_2=0$

从而$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$无关

反之，若$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$无关，不一定有α_1，α_2，α_3无关

例如，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

9、$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=$________.

【答案】$\frac{3}{8}\pi$

【考点】无穷限的反常积分

【详解】

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{(x+1)^2+4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{1+(\frac{1+x}{2})^2}d\frac{1+x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{1}=\frac{1}{2}[\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{2})]=\frac{3}{8}\pi$$

10、设$f(x)$是周期为4的可导奇函数，且$f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$，则$f(7)=$________

【答案】1

【考点】一阶微分方程、周期函数

【详解】

$\because f'(x)=2(x-1)x\in[0,2]$

$\therefore f(x)=x^2-2x+c$

又$f(x)$是奇函数

$\therefore f(0)=0\therefore c=0$

$\therefore f(x)=x^2-2x$

$x\in[0,2]$

$f(x)$的周期为4

$\therefore f(7)=f(3)=f(-1)=-f(1)=-(1-2)=1$

11、设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x^2+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 确定的函数，则 $dz|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$_________.

【答案】$-\dfrac{1}{2}(dx+dy)$

【考点】隐函数求偏导、全微分

【详解】

当$x=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{2}$时，代入方程解得$z=0$

方程两边对x,y分别求偏导得，

$$\begin{cases}e^{2yz}(2y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x})+2x+\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ e^{2yz}(2z+2y\dfrac{\partial z}{\partial y})+2y+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$$

解得:$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\dfrac{1}{2},\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\dfrac{1}{2}$

故 $dz|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\dfrac{1}{2}(dx+dy)$

12、曲线 L 的极坐标方程是 $r=\theta$，则 L 在点 $(r,\theta)=(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是_________.

【答案】$y=-\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{\pi}{2}$

【考点】参数方程求导、极坐标与直角坐标的转化、切线方程

【详解】

把极坐标方程化为直角坐标方程

令$\begin{cases} x = r\cos\theta = \theta\cos\theta \\ y = r\sin\theta = \theta\sin\theta \end{cases}$

则$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1+\frac{\pi}{2}\cdot 0}{0-\frac{\pi}{2}\cdot 1} = -\frac{2}{\pi}$$

当$\theta = \dfrac{\pi}{2}$时，$\begin{cases} x = \theta\cos\theta = 0 \\ y = \theta\sin\theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

则切线方程为:$(y-\dfrac{\pi}{2}) = -\dfrac{2}{\pi}(x-0)$

化简为:$y = -\dfrac{2}{\pi}x + \dfrac{\pi}{2}$

13、一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间$[0,1]$上，若其线密度$\rho(x) = -x^2 + 2x + 1$，则该细棒的质心坐标$\bar{x} =$_________.

【答案】$\dfrac{11}{20}$

【考点】质心坐标

【详解】

质心横坐标公式：$\bar{x} = \dfrac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx}$

所以：$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x(-x^2+2x+1)dx}{\int_0^1 (-x^2+2x+1)dx} = \frac{\left.(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2)\right|_0^1}{\left.(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x)\right|_0^1} = \frac{11}{20}$$

14、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围是_________.

【答案】$[-2,2]$

【考点】二次型的规范形、矩阵的特征值、配方法化二次型为标准形

【详解】

【解法一】

二次型对应的系数矩阵为：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix} \neq O$，记特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$

则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=tr(A)=1-1+0=0$，即特征值必有正有负，共 3 种情况；

因二次型的负惯性指数为$1 \Leftrightarrow$特征值 1 负 2 正或 1 负 1 正 1 零；

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4+a^2 \le 0$$，即 $a \in [-2,2]$

【解法二】

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3 \\ &= x_1^2 + 2ax_1x_3 + a^2x_3^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 - a^2x_3^2 \\ &= (x_1+ax_3)^2 - (x_2-2x_3)^2 + (4-a^2)x_3^2 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + (4-a^2)y_3^2 \end{aligned}$$

若负惯性指数为1，则$4-a^2 \ge 0$，$a \in [-2,2]$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2 \ln(1+\frac{1}{x})}$

【考点】函数求极限、变限积分函数求导、等价无穷小、洛必达法则

【详解】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x}{1}=\lim_{x\to+\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x})$$

$$\underline{\underline{令\frac{1}{x}=t}}\quad\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{2t}=\frac{1}{2}$$

16、（本题满分 10 分）

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

【考点】微分方程、函数的极值

【详解】

$\because x^2+y^2y'=1-y'$

$\therefore y'=\dfrac{1-x^2}{y^2+1}$

$\therefore (y^2+1)dy=(1-x^2)dx,$

积分得$\int(y^2+1)dy=\int(1-x^2)dx$

$\therefore \dfrac{1}{3}y^3+y=x-\dfrac{1}{3}x^3+c$

又　$y(2)=0\ \therefore c=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{1}{3}y^3+y=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}$

令$y'=\dfrac{1-x^2}{y^2+1}=0,$得$x=\pm1$

$x\in(-\infty,-1)$时$,y'<0,$函数单调递减

$x\in(-1,1)$时$,y'>0,$函数单调递增

$x\in(1,+\infty)$时$,y'<0,$函数单调递减

所以函数在$x=-1$时取得极小值，在$x=1$时取得极大值

由函数方程解得：$y(-1)=0,y(1)=1$

故：$y(x)$的极大值是$1,$极小值是0

17、（本题满分 10 分）

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\right\}$，计算 $\iint\limits_D \dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$.

【考点】二重积分的计算、轮换对称性

【详解】

积分区域 D 关于 $y=x$ 对称，利用轮对称行，

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint\limits_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}+\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\sin(\pi r)r\,\mathrm{d}r=-\frac{1}{4}\int_1^2 rd\cos(\pi r)$$

$$=-\frac{1}{4}r\cos(\pi r)\Big|_1^2+\frac{1}{4}\int_1^2\cos(\pi r)\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$$

18、（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$.

若 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

【考点】多元函数求偏导、二阶常系数非齐次线性微分方程

【详解】

令 $u=e^x\cos y$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\cdot e^x \cos y, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)\cdot e^{2x}\cos^2 y + f'(u)\cdot e^x \cos y$

$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\cdot e^x(-\sin y), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)\cdot e^{2x}\sin^2 y - f'(u)\cdot e^x \cos y$

$\because \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$

$\therefore f''(u)\cdot e^{2x}\cos^2 y + f''(u)\cdot e^{2x}\sin^2 y = [4f(u)+u]e^{2x}$

即： $f''(u) - 4f(u) = u$

对应的齐次微分方程的特征方程为： $r^2 - 4 = 0$

解得： $r_1 = 2, r_2 = -2$

故齐次微分方程的通解为： $\overline{f(u)} = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u}$

设 $f^*(u) = au + b$，则 $f^{*'}(u) = a, f^{*''}(u) = 0$，

代入微分方程解得： $a = -\frac{1}{4}, b = 0$，即 $f^*(u) = -\frac{1}{4}u$

故 $f(u) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}u$

所以 $f'(u) = 2C_1 e^{2u} - 2C_2 e^{-2u} - \frac{1}{4}, f''(u) = 4C_1 e^{2u} + 4C_2 e^{-2u}$

因为 $f(0) = 0$， $f'(0) = 0$，代入解得： $C_1 = \frac{1}{16}, C_2 = -\frac{1}{16}$

所以 $f(u) = \frac{1}{16}e^{2x} - \frac{1}{16}e^{-2x} - \frac{1}{4}u$

19、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$， $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加， $0 \le g(x) \le 1$.

证明：（Ⅰ）（I） $0 \le \int_a^x g(t)dt \le x - a$， $x \in [a,b]$；

（II） $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx$

【考点】定积分中值定理、不等式的证明

【详解】

（I）【解法一】

因为函数 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $0\le g(x)\le 1$.

所以 $\int_a^x 0dt \le \int_a^x g(t)dt \le \int_a^x 1dt$

即 $0\le \int_a^x g(t)dt \le x-a$

【解法二】

由定积分中值定理知：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^x g(t)dt=(x-a)g(\xi)$，

又因为 $x\in[a,b]$ 时 $0\le g(x)\le 1$，

所以 $0\le (x-a)g(\xi)\le (x-a)$

即 $0\le \int_a^x g(t)dt \le x-a$

【解法三】

$h_1(x)=\int_a^x g(t)dt$

$h_1(a)=0$

$h_1'(x)=g(x)\ge 0$

$\therefore h_1(x)$单调增加

$\therefore$ 当$x\in[a,b]$时，$h_1(x)\ge 0$

$h_2(x)=\int_a^x g(t)dt-x+a$

$h_2'(x)=g(x)-1$

$\because 0\le g(x)\le 1 \therefore h_2'(x)\le 0$

$\therefore h_2(x)$单调减少，又$h_2(a)=0$

$\therefore$ 当$x\in[a,b]$时，$h_2(x)\le 0$

（II）令 $F(x)=\int_a^x f(u)g(u)du-\int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(u)du$

$$\therefore F'(x)=f(x)g(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]\cdot g(x)=\left[f(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]\right]g(x)$$

由（I）知$a+\int_a^x g(t)dt\le a+x-a=x$,又$f(x)$单调增加

$\therefore f(x)\ge f[a+\int_a^x g(t)dt]$

$\therefore F'(x)\ge 0$

$\therefore F(x)$单调增加

又$F(a)=0\therefore F(b)\ge 0$

即$\int_a^b f(x)g(x)dx\ge\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx$

20、（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$， $x\in[0,1]$. 定义数列

$f_1(x)=f(x)$， $f_2(x)=f(f_1(x))$，$\cdots$， $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，$\cdots$

记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1$ 及 x 轴所围平面图形的面积，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$.

【考点】定积分求面积、函数求极限

【详解】

$$\because f(x)=\frac{x}{1+x}, f_1(x)=f(x)$$

$$\therefore f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x}$$

$$\therefore f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}}=\frac{x}{1+3x}$$

由归纳法知：$f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx},x\in[0,1]$

$$\because f_n'(x)=\frac{1+nx-nx}{(1+nx)^2}=\frac{1}{(1+nx)^2}>0$$

$\therefore f_n(x)$单调递增

$\because f_n(0)=0,\therefore f_n(x)\ge 0$， $x\in[0,1]$

$$\therefore S_n=\int_0^1\frac{x}{1+nx}dx=\frac{1}{n}\int_0^1(1-\frac{1}{1+nx})dx=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\ln(1+n)$$

$$\lim_{n\to\infty}nS_n=\lim_{n\to\infty}n[\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\ln(1+n)]=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}$$

$$=1-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x}=1$$

21、（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$. 求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积.

【考点】偏积分、隐函数、旋转体的体积

【详解】

由函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$ 可知：$f(x,y)=y^2+2y+\varphi(x)$

又 $f(y,y)=y^2+2y+\varphi(y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$

所以 $\varphi(y)=1-(2-y)\ln y$

所以 $f(x,y)=y^2+2y+\varphi(x)=y^2+2y+1-(2-x)\ln x=(y+1)^2-(2-x)\ln x$

令 $z=y+1$，则 $f(x,y)=0$ 对应的曲线方程为：$z^2=(2-x)\ln x$，定义域为$[1,2]$

则曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转，即 $z^2=(2-x)\ln x$ 绕 $z=0$ 旋转，所成的旋转体体积

$$V_x=\int_1^2\pi z^2dx=\pi\int_1^2(2-x)\ln x dx$$

$$=\pi\int_1^2\ln x d(2x-\frac{1}{2}x^2)$$

$$=\pi\left[(2x-\frac{1}{2}x^2)\ln x-(2x-\frac{1}{4}x^2)\right]_1^2$$

$$=(2\ln 2-\frac{5}{4})\pi$$

22、（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$, E 为3阶单位矩阵.

（I）求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

（II）求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B .

【考点】解线性方程组

【详解】

$$(A\vdots E)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -3 & \vdots & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 5 & \vdots & 4 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 0 & -2 & \vdots & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3 & \vdots & -1 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 & 6 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & \vdots & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & -1 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

（I） 方程组 $Ax=0$ 的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_4\\ x_2=2x_4\\ x_3=3x_4\\ x_4=x_4\end{cases}$ ，即基础解系为 $\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$

（II） $Ax=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ 的同解方程组为： $\begin{cases}x_1=-x_4+2\\ x_2=2x_4-1\\ x_3=3x_4-1\\ x_4=x_4+0\end{cases}$ ，即通解为 $k_1\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ -1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

$Ax=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ 的同解方程组为： $\begin{cases}x_1=-x_4+6\\ x_2=2x_4-3\\ x_3=3x_4-4\\ x_4=x_4+0\end{cases}$ ，即通解为 $k_2\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\ -3\\ -4\\ 0\end{pmatrix}$

$Ax=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 的同解方程组为：$\begin{cases}x_1=-x_4-1\\x_2=2x_4+1\\x_3=3x_4+1\\x_4=x_4+0\end{cases}$，即通解为 $k_3\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，

$\therefore B=\begin{pmatrix}-k_1+2 & -k_2+6 & -k_3-1\\2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1\\3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1\\k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}$，$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数

23、（本题满分 11 分）

证明：n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 1 & \cdots & 1\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\0 & \cdots & 0 & 2\\\vdots & & \vdots & \vdots\\0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.

【考点】矩阵的特征值、相似对角化

【详解】

设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 1 & \cdots & 1\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\0 & 0 & \cdots & 0 & 2\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & \cdots & 0 & n\end{bmatrix}$

因为 $r(A)=1,r(B)=1$

所以 A 的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=tr(A)=n$

B 的特征值为：$\lambda_1'=\lambda_2'=\cdots=\lambda_{n-1}'=0,\lambda_n'=tr(B)=n$

关于 A 的特征值 0，因为 $r(0E-A)=r(-A)=r(A)=1$，

故有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，即 A 必可相似对角化于 $\begin{pmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & n\end{pmatrix}$

同理，关于 B 的特征值 0，因为 $r(0E-B)=r(-B)=r(B)=1$，

故有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，即 B 必可相似对角化于 $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & n \end{pmatrix}$

由相似矩阵的传递性可知，A 与 B 相似.

英语一百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details

英语二百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details

政治百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details

法硕百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details

中医百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details

心理学百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details

西医百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details