2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试题及参考答案

一、选择题（1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，把所选项前的字母填在答题纸指定的位置上）

（1）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$，则 $a=$（　　C　　）

（A）0　　（B）1　　（C）　2　　（D）3

【详解】方法一

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-ax)e^x}{x}=1\Rightarrow-\lim_{x\to 0}\left(1-(1-ax)e^x\right)'=1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(1-ax-a\right)e^x=-1\Rightarrow 1-a=-1\Rightarrow a=2$$

方法二

$$\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x=\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)\left(1+x+o(x)\right)=\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}+1+\frac{o(x)}{x}-a(1+x+o(x))\right)$$

$$=-\left(1+\frac{o(x)}{x}-a(1+x+o(x))\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1=-\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{o(x)}{x}-a(1+x+o(x))\right)=a-1,\quad\therefore a=2$$

（2）设函数 y_1，y_2 是一阶非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ，μ 使得 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则（　A　）

（A）$\lambda=\dfrac{1}{2}$，$\mu=\dfrac{1}{2}$　（B）$\lambda=-\dfrac{1}{2}$，$\mu=-\dfrac{1}{2}$　（C）$\lambda=\dfrac{2}{3}$，$\mu=\dfrac{1}{3}$　（D）$\lambda=\dfrac{2}{3}$，$\mu=\dfrac{2}{3}$

【详解】$\lambda y_1+\mu y_2$ 是 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解 $\Rightarrow\lambda+\mu=1$；

$\lambda y_1-\mu y_2$ 是 $y'+p(x)y=0$ 的解 $\Rightarrow\lambda-\mu=0$，

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda-\mu=0\end{cases}\Rightarrow\lambda=\mu=\frac{1}{2}$$

（3）设函数 $f(x)$、$g(x)$ 具有二阶导数，且 $g(x_0)=a$，$g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 处取得极大值的一个充分条件是（　B　）

（A）$f'(a)<0$　　（B）$f'(a)>0$　　（C）$f''(a)<0$　　（D）$f''(a)>0$

【详解】记 $h(x)=f(g(x))$，在 x_0 处取得极大值的一个充分条件：

$$\begin{cases}h'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)=0\\ h''(x_0)=f''(g(x_0))\cdot(g'(x_0))^2+f'(g(x_0))\cdot g''(x_0)\neq 0\end{cases}$$

因为 $g(x_0)=a$，又有 $g'(x_0)=0,g''(x)<0\Rightarrow\begin{cases}h'(x_0)=f'(a)\cdot g'(x_0)=0\\ h''(x_0)=f'(a)\cdot g''(x_0)<0\end{cases}$

必有 $f'(a)>0$.

（4）设 $f(x)=\ln^{10}x$，$g(x)=x$，$h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有（ C ）

（A）$g(x)<h(x)<f(x)$　　（B）$h(x)<g(x)<f(x)$

（C）$f(x)<g(x)<h(x)$　　（D）$g(x)<f(x)<h(x)$

【详解】当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\ln^{10}x<g(x)=x<h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$

$\exists M>0,\forall x>M,f(x)<g(x)<h(x)$

本题属于初等函数性质的运用

（5）设向量组 $I:\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ 可由向量组 $II:\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 线性表示，下列命题正确的是（ A ）

（A）若向量组 I 线性无关，则 $r\leq s$　　（B）若向量组 I 线性相关，则 $r>s$

（C）若向量组 II 线性无关，则 $r\leq s$　　（D）若向量组 II 线性相关，则 $r>s$

【详解】 本题考察的知识点是向量组的线性相关性的性质以及向量组的线性表示。直接运用定理就能得到结论。记向量组 $I=$ 向量组 A，向量组 $II=$ 向量组 B，则

（A）若向量组 A 线性无关，则 $r=rank\{A\}\leq rank\{B\}\leq s$；

（B）若向量组 A 线性相关，则 $r\geq rank\{A\}$，　$rank\{A\}\leq rank\{B\}\leq s$；

（C）若向量组 B 线性无关，则 $r\geq rank\{A\}$，　$rank\{A\}\leq rank\{B\}=s$；

（D）若向量组 B 线性相关，则 $r\geq rank\{A\}$，　$rank\{A\}\leq rank\{B\}\leq s$.

（6）设 A 是 4 实对称矩阵，且 $A^2+A=0$，若 $R(A)=3$，则 A 相似于（ D ）

（A）$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

【详解】本题考察的知识点是矩阵的相似的性质，实对称矩阵可对角化的性质，矩阵的特征值，矩阵的秩等。由实对称矩阵知 A 和对角矩阵相似，且对角元为 A 的特征值，由条件 A 满足 $A^2+A=0$，可推得特征值必满足 $\lambda^2+\lambda=0$，可知 A 的特征值必为 0 或 -1，再由相似矩阵有相同的秩知 A 的特征值必为 3 个 -1 和 1 个 0，故选 D

（7）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0\ ,\ x<0\\ \dfrac{1}{2}\ ,\ 0\le x<\dfrac{1}{2}\\ 1-\mathrm{e}^{-x}\ ,\ x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$，则 $P\{X=1\}=$（ C ）

（A）0　（B）$\dfrac{1}{2}$　（C）$\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$　（D）$1-\mathrm{e}^{-1}$

【详解】$P(X=1)=F(1)-F(1-)=(1-\mathrm{e}^{-1})-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$，答案为 C

评注：本题实际上是考查分布函数的性质，即对任意随机变量 X，均有 $P(X=x)=F(x)-F(x-)$，这样的问题在辅导教程中出现过多次，属于基本概念的考查。

（8）设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度函数，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度函数，若 $f(x)=\begin{cases}af_1(x)\ ,\ x\le 0\\ bf_2(x)\ ,\ x>0\end{cases}$（$a>0$，$b>0$），则 a，b 满足（ A ）

（A）$2a+3b=4$　（B）$3a+2b=4$　（C）$a+b=1$　（D）$a+b=2$

【详解】由概率密度的性质知

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=a\int_{-\infty}^{0}f_1(x)\mathrm{d}x+b\int_0^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=a\Phi(0)+b\int_0^3\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b\text{，即 }2a+3b=4\text{。}$$

答案为 A

评注：本题实际上是考查密度函数的性质与正态分布和均匀分布的基本性质，这里还需要知道的是标准正态分布取负值的概率为 $\dfrac{1}{2}$，以及均匀分布的的计算问题，这些基本概念及运算是在辅导中反复强调的。

二、填空题（9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上）

（9）设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\mathrm{d}t$ 所确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ $\underline{\ -1\ }$

【解析与点评】

$$\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\mathrm{d}t\Rightarrow\begin{cases}\int_0^{y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^0 x\sin t^2\mathrm{d}t\Rightarrow\int_0^y\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0\Rightarrow y(0)=0\\ (1+y')\mathrm{e}^{-(x+y)^2}=\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t+x\sin x^2\end{cases}$$

$\Rightarrow 1+y'(0)=0 \Rightarrow y'(0)=-1$

（10）设位于曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$（$e\le x<+\infty$）下方，$x$ 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为 $\underline{\dfrac{\pi^2}{4}}$

【解析与点评】$V=\int_e^{+\infty}\pi y^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_e^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}=\pi\int_e^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}\ln x}{(1+\ln^2 x)}=\pi\arctan(\ln x)\Big|_e^{+\infty}$

$=\pi(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\pi^2}{4}$

（11）设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，$R(1)=1$，则 $R(p)=$ $\underline{pe^{\frac{p^2}{3}-\frac{1}{3}}}$.

【解析与点评】收益弹性：$\dfrac{p\mathrm{d}R(p)}{R(p)\mathrm{d}p}=1+p^3 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}R}{R}=\dfrac{1+p^3}{p}\mathrm{d}p \Rightarrow \int_1^R\dfrac{\mathrm{d}R}{R}=\int_1^R\dfrac{1+p^3}{p}\mathrm{d}p$

$\Rightarrow \ln R\Big|_1^R=\left(\ln p+\dfrac{p^2}{3}\right)\Big|_1^p \Rightarrow \ln R=\ln p+\dfrac{p^2}{3}-\dfrac{1}{3} \Rightarrow R=pe^{\frac{p^2}{3}-\frac{1}{3}}$

（12）若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=\underline{\quad 3 \quad}$

【解析与点评】曲线 $y=y(x)$ 有拐点 $(-1,0) \Rightarrow \begin{cases} y''(-1)=(6x+2b)_{x=-1}=0 \\ y'''(-1)=6\ne 0 \end{cases} \Rightarrow b=3$

（13）设 A，B 为3阶矩阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$ 则 $|A+B^{-1}|=\underline{\quad 3 \quad}$

【解析与点评】本题考查的知识点有矩阵的运算及矩阵的行列式的性质。因为 $A^{-1}+B=A^{-1}(A+B^{-1})B$，再利用矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的乘积，得到结果。

（14）设 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$（$\sigma>0$）的简单随机样本，统计差 $T=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $ET=\underline{\sigma^2+\mu^2}$

【解析与点评】$ET=E(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[DX_i+E(X_i)^2\right]=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\sigma^2+\mu^2\right]=\sigma^2+\mu^2$

评注：本题实际上是考查随机变量数字特征的基本性质的题目，只要知道简单随机样本的定义就不难给出直接的结论，本题属于最基本的题型。

三、解答题（15～23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定的位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$。

【解析与点评】方法一

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}$，只需考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}}{\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{\ln x}{x}\to 0$，由运算法则及无穷小量替换得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=-1$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=\mathrm{e}^{-1}$。

方法二

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$， $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}+o(\dfrac{\ln x}{x})\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}^{\frac{1}{\ln x}}\left(1+\frac{o(\frac{\ln x}{x})}{\frac{\ln x}{x}}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{{\frac{\ln x}{x}}^{\frac{1}{\ln x}}}\cdot\mathrm{e}^{\left(1+\frac{o(\frac{\ln x}{x})}{\frac{\ln x}{x}}\right)^{\frac{1}{\ln x}}}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln\ln x-\ln x}{\ln x}}\cdot 1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln\ln x}{\ln x}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{-\ln x}{\ln x}}=\mathrm{e}^{-1}$$

（16）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成。

【解析与点评】区域 D 关于 x 轴对称，所以

$$原式=\iint_D(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(x^3+3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}(x^3+3xy^2)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1+2y^2-3y^4)\mathrm{d}y+3\int_0^1(y^2-y^4)\mathrm{d}y=\frac{14}{15}。$$

（17）（本题满分 11 分）

求函数 $M=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值。

【解析与点评】$F(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-10)$

令 $\begin{cases} F_x' = y + 2\lambda x = 0 \\ F_y' = x + 2z + 2\lambda y = 0 \\ F_z' = 2y + 2\lambda z = 0 \\ F_\lambda' = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0 \end{cases}$ 得可能的最值点为：$A(1,\sqrt{5},2), B(-1,\sqrt{5},-2)$，$C(1,-\sqrt{5},2), D(-1,-\sqrt{5},-2)$，$E(2\sqrt{2},0,-\sqrt{2}), F(-2\sqrt{2},0,\sqrt{2})$

因为在 A,D 两处 $u=5\sqrt{5}$，在 B,C 两处 $u=-5\sqrt{5}$，在 E,F 两处 $u=0$，所以 $u_{\max}=5\sqrt{5}$，$u_{\min}=-5\sqrt{5}$。

（18）（本题满分 10 分）

（I）比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$（$n=1,2,3,\ldots$）；

（II）记 $u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t$（$n=1,2,3,\ldots$），求 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$。

【解析与点评】

（Ⅰ）令 $f(t)=\ln(1+t)-t$

当 $0\le t\le 1$ 时，$f'(t)=\dfrac{1}{1+t}-1\le 0$，故当 $0\le t\le 1$ 时 $f(t)\le f(0)=0$

当 $0\le t\le 1$ 时 $0\le \ln(1+t)\le t\le 1$，从而 $\left[\ln(1+t)\right]^n \le t^n (n=1,2,\cdots)$ 又由 $|\ln t|\ge 0$

得 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t \le \int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t (n=1,2,\cdots)$

（Ⅱ）方法一，由（Ⅰ）知，$0\le u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t \le \int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t$，因为

$$\int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t = -\int_0^1 t^n (\ln t) \mathrm{d}t = -(\ln t)\frac{1}{n+1} t^{n+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n+1} t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t = 0$

由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t = 0$

方法二　$0 < \int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t = -\int_0^1 t^n (\ln t) \mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+1}\int_0^1 t^n \mathrm{d}t \le \dfrac{1}{n+1}$

由夹逼准则的 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t = 0$

方法三　由（Ⅰ）知，$0 \le \left[\ln(1+t)\right]^n \le t^n$

又因为 $\lim\limits_{t\to 0} t|\ln t| = 0$，所以 $\exists M, 0 \le t|\ln t| < M, \forall t \in [0,1]$

所以 $0 \le u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t \le M\int_0^1 t^{n-1} \mathrm{d}t = \dfrac{M}{n}, n=2,3\cdots$

$0 \le u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t \le \dfrac{M}{n}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M}{n}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

评点：本题主要考点：初等函数性质，积分的保号性与比较性质，分部积分法与极限运算。注意本题中积分为第二类广义积分

（19）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 内连续，在 $(0,3)$ 内存在二阶导数，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)dx = f(2)+f(3)$。

（I）证明：存在 $\eta\in(0,2)$，使得 $f(\eta)=f(0)$；

（II）证明：存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$。

【解析与点评】（I）设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt(0\le x\le 2)$，则 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2)-F(0)$

根据拉格朗日中值定理，存在 $\eta\in(0,2)$，使 $F(2)-F(0)=2F'(\eta)=2f(\eta)$

即 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2f(\eta)$。由题设知 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(0)$，故 $f(\eta)=f(0)$

（II）$\dfrac{f(2)+f(3)}{2}$ 介于 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上的最大最小值之间，根据连续函数的介值定理，存在 $f(\zeta)=\dfrac{f(2)+f(3)}{2}$。由题设知 $\dfrac{f(2)+f(3)}{2}=f(0)$，故 $f(\zeta)=f(0)$。由于 $f(0)=f(\eta)=f(\zeta)$，且 $0<\eta<\zeta\le 3$，根据罗尔定理，存在 $\xi_1\in(0,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,\zeta)$，使 $f'(\xi_1)=0, f'(\xi_2)=0$，从而存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解。

（I）求 $\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{a}$；　　　（II）求 $Ax=b$ 的通解。

【解析与点评】（I）设 η_1,η_2 为 $Ax=b$ 的 2 个不同的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的一个非零解，故 $|A|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$。于是 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$

当 $\lambda=1$ 时，因为 $r(A)\ne r(A\vdots b)$，所以 $Ax=b$ 无解，舍去

当 $\lambda=-1$ 时，对 $Ax=b$ 的增广矩阵施以初等行变化

$$(A\vdots b)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & \vdots & a\\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 1\\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & \vdots & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a+2\end{pmatrix}=B$$

因为 $Ax=b$ 有解，所以 $a=-2$

（II）当 $\lambda=-1$，$a=-2$ 时

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & \vdots & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$，所以 $Ax=b$ 的通解为 $x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数。

【点评与分析】本题考查的知识点是线性方程组的理论及求解的能力。由题设非齐次线性方程组有两个解，就有无穷多解，其导出组就有非零解，导出组的系数矩阵列不满秩，其行列式等于零。从而求出参数 λ 的值。利用方程组有解的条件，判断 λ 的取值。再利用方程组有解的条件，通过消元法求得 a 的值。最后通过对增广矩阵作初等行变换，求得方程组的通解。

（21）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵，若 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求 a，Q。

【解析与点评】由题设，$(1,2,1)^T$ 为 A 的一个特征向量，于是

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$，解得 $a=-1,\lambda_1=2$。由于 A 的特征多项式

$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4)$，所以 A 的特征值为 2，5，-4

属于特征值 5 的一个单位特征向量为 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$；

属于特征值 -4 的一个单位特征向量为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T$

令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则有 $Q^{T}AQ\begin{pmatrix}2 & & \\ & 5 & \\ & & -4\end{pmatrix}$，故 Q 为所求矩阵

考点：本题考查的知识点是实对称矩阵和对角矩阵相似的理论和计算。由题设得到 Q 的第一列是矩阵的一个特征向量，由此可以求得参数 a 及它的特征值，再求 A 的全体特征值和特征向量，因为特征值都是单根，不需正交化，进过单位化，就得到正交矩阵 Q。

（22）（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\,,\quad -\infty<x<+\infty\,,\quad -\infty<y<+\infty\,。$$

求 A 及 $f_{Y|X}(y|x)$。

【解析与点评】先考虑 X 的边缘密度，由公式知，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}y=\sqrt{\pi}A\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}}\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{\pi}A\mathrm{e}^{-x^2}=\pi A\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}}\,,\quad -\infty<x<+\infty$$

这里 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}}$ 及 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}}$ 恰好为正态分布 $N(x,\frac{1}{2})$ 以及 $N(0,\frac{1}{2})$ 的密度函数，故 $A=\frac{1}{\pi}$。

又由于当 $-\infty<x<+\infty$ 时，有 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}$，$-\infty<y<+\infty$

评注：本题实际上是考查二元正态分布的边缘分布与条件分布为题。在本题中，要时刻牢记一元正态分布的概率密度的定义以及基本性质，这样可避免进行复杂的数学运算，而直接应用相关的理论，这种技巧和方法，在推导二元正态分布的条件分布时，进行估详细的介绍介绍。属于基本题型

（23）（本题满分 11 分）

箱内有 6 个球，其中红、白、黑球的个数分别为 1、2、3 个，现从箱中随机取出 2 个球，设 X 为取出的红球个数，Y 为取出的白球个数。

（I）求随机变量(X,Y)的概率分布；　　　（II）求$Cov(X,Y)$。

【解析与点评】

（I）由于 X 的可能取值为0，1，Y 的可能取值为0，1，2。 所以，(X,Y)可能的取值有 6 个，其相应的概率为

$$P(X=0,Y=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5},\quad P(X=0,Y=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{2}{5},\quad P(X=0,Y=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$$

$$P(X=1,Y=0)=\frac{C_3^1}{C_6^2}=\frac{1}{5},\quad P(X=1,Y=1)=\frac{C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{15},\quad P(X=1,Y=2)=0$$

所以(X,Y)的联合分布为

（II）$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY$,而

$$E(XY)=1\times1\times\frac{2}{15}=\frac{2}{15},\quad EX=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3},\quad EY=1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}，所以$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{2}{15}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{4}{45}$$

评注：本题实际上是考查二维二维离散型随机变量的概率计算和数字特征的计算的基本题型。其中概率分布的计算用到了不放回摸球模型的古典概率的计算方法。而对二维离散型随机变量，只要知道它们的联合分布，所有的相关的数字特征的计算是显而易见的。

新大纲百日冲刺提分方案-最后 3 个月，针对新大纲考点，精准提分

数学一/三百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details
数学二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details
英语一百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details
英语二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details
政治百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details
法硕百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details
中医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details
心理学百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details
西医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details