2017 年考研数学三真题

一、选择题　1—8 小题．每小题 4 分，共 32 分．

1．若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则

（A）$ab=\dfrac{1}{2}$（B）$ab=-\dfrac{1}{2}$（C）$ab=0$（D）$ab=2$

【详解】$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{ax}=\dfrac{1}{2a}$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=b=f(0)$，要使函数在 $x=0$ 处连续，必须满足 $\dfrac{1}{2a}=b\Rightarrow ab=\dfrac{1}{2}$．所以应该选（A）

2．二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是（　　）

（A）$(0,0)$　　（B）$(0,3)$　　（C）$(3,0)$　　（D）$(1,1)$

【详解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y(3-x-y)-xy=3y-2xy-y^2$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x-x^2-2xy$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2y,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=3-2x$$

解方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=3y-2xy-y^2=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=3x-x^2-2xy=0\end{cases}$，得四个驻点．对每个驻点验证 $AC-B^2$，发现只有在点 $(1,1)$ 处满足 $AC-B^2=3>0$，且 $A=C=-2<0$，所以 $(1,1)$ 为函数的极大值点，所以应该选（D）

3．设函数 $f(x)$ 是可导函数，且满足 $f(x)f'(x)>0$，则

（A）$f(1)>f(-1)$　（B）$f(1)<f(-1)$　（C）$|f(1)|>|f(-1)|$　（D）$|f(1)|<|f(-1)|$

【详解】设 $g(x)=(f(x))^2$，则 $g'(x)=2f(x)f'(x)>0$，也就是 $\left(f(x)\right)^2$ 是单调增加函数．也就得到 $\left(f(1)\right)^2>\left(f(-1)\right)^2\Rightarrow|f(1)|>|f(-1)|$，所以应该选（C）

4．　若级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln(1-\dfrac{1}{n})\right]$ 收敛，则 $k=$（　　　）

（A）1　　（B）2　　（C）-1　　（D）-2

【详解】iv $n\to\infty$ 时 $\sin\frac{1}{n}-k\ln(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}-k\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=(1+k)\frac{1}{n}+\frac{k}{2}\frac{1}{n^2}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

显然当且仅当 $(1+k)=0$，也就是 $k=-1$ 时，级数的一般项是关于 $\frac{1}{n}$ 的二阶无穷小，级数收敛，从而选择（C）.

5．设 α 为 n 单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则

（A）$E-\alpha\alpha^T$ 不可逆　　（B）$E+\alpha\alpha^T$ 不可逆

（C）$E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆　　（D）$E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

【详解】矩阵 $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 1 和 $n-1$ 个 0，从而 $E-\alpha\alpha^T, E+\alpha\alpha^T, E-2\alpha\alpha^T, E+2\alpha\alpha^T$ 的特征值分别为 $0,1,1,\cdots1$；$2,1,1,\cdots,1$；$-1,1,1,\cdots,1$；$3,1,1,\cdots,1$．显然只有 $E-\alpha\alpha^T$ 存在零特征值，所以不可逆，应该选（A）.

6．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则

（A）A,C 相似，B,C 相似　　（B）A,C 相似，B,C 不相似

（C）A,C 不相似，B,C 相似　　（D）A,C 不相似，B,C 不相似

【详解】矩阵 A,B 的特征值都是 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$．是否可对解化，只需要关心 $\lambda=2$ 的情况.

对于矩阵 A，$2E-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，秩等于 1，也就是矩阵 A 属于特征值 $\lambda=2$ 存在两个线性无关的特征向量，也就是可以对角化，也就是 $A\sim C$.

对于矩阵 B，$2E-B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，秩等于 2，也就是矩阵 A 属于特征值 $\lambda=2$ 只有一个线性无关的特征向量，也就是不可以对角化，当然 B,C 不相似故选择（B）.

7．设 A,B，C 是三个随机事件，且 A,C 相互独立，B,C 相互独立，则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是（　　）

（A）A,B 相互独立　　（B）A,B 互不相容

（C）AB,C　相互独立　　（D）AB,C 互不相容

【详解】

$$P((A\bigcup B)C)=P(AC+AB)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(ABC)$$

$$P(A\bigcup B)P(C)=(P(A)+P(B)-P(AB))P(C)=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(AB)P(C)$$

显然，$A\bigcup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是 $P(ABC)=P(AB)P(C)$，所以选择（C ）.

8．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\ge 2)$ 为来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，若 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ ，则下列结论中不正确的是（　　）

（A）$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布　　　　（B）$2\left(X_n-X_1\right)^2$ 服从 χ^2 分布

（C）$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布　　　　（D）$n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

解：（1）显然 $(X_i-\mu)\sim N(0,1)\Rightarrow(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(1),i=1,2,\cdots n$ 且相互独立，所以 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 $\chi^2(n)$ 分布，也就是（A）结论是正确的；

（2）$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=(n-1)S^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，所以（C）结论也是正确的；

（3）注意 $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n})\Rightarrow\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)\sim N(0,1)\Rightarrow n(\overline{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1)$，所以（D）结论也是正确的；

（4）对于选项（B）：$(X_n-X_1)\sim N(0,2)\Rightarrow\frac{X_n-X_1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)\Rightarrow\frac{1}{2}(X_n-X_1)^2\sim\chi^2(1)$，所以（B）结论是错误的，应该选择（B）

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

9．$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})dx=$________.

解：由对称性知 $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})dx=2\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}dx=\frac{\pi^3}{2}$.

10．差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为______________.

【详解】齐次差分方程 $y_{t+1}-2y_t=0$ 的通解为 $y=C2^x$；

设 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的特解为 $y_t=at2^t$，代入方程，得 $a=\frac{1}{2}$；

所以差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y=C2^t+\frac{1}{2}t2^t.$

11．设生产某产品的平均成本 $\overline{C}(Q)=1+e^{-Q}$，其中产量为 Q，则边际成本为_______.

【详解】答案为$1+(1-Q)e^{-Q}$.

平均成本$\overline{C}(Q)=1+e^{-Q}$，则总成本为$C(Q)=Q\overline{C}(Q)=Q+Qe^{-Q}$，从而边际成本为

$C'(Q)=1+(1-Q)e^{-Q}$.

12．设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续的偏导数，且已知 $df(x,y)=ye^{y}dx+x(1+y)e^{y}dy$ ， $f(0,0)=0$ ，则

$f(x,y)=$______

【详解】$df(x,y)=ye^{y}dx+x(1+y)e^{y}dy=d(xye^{y})$，所以 $f(x,y)=xye^{y}+C$，由 $f(0,0)=0$ ，得$C=0$，

所以 $f(x,y)=xye^{y}$.

13．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的三维列向量，则向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 的秩为______________.

【详解】对矩阵进行初等变换 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，知矩阵 A 的秩为 2，由于

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关，所以向量组$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$的秩为 2.

14．设随机变量 X 的概率分布为$P\{X=-2\}=\dfrac{1}{2}$， $P\{X=1\}=a$， $P\{X=3\}=b$，若 $EX=0$，则 $DX=$________.

【详解】显然由概率分布的性质，知$a+b+\dfrac{1}{2}=1$

$EX=-2\times\dfrac{1}{2}+1\times a+3\times b=a+3b-1=0$，解得$a=\dfrac{1}{4},b=\dfrac{1}{4}$

$EX^2=2+a+9b=\dfrac{9}{2}$， $DX=EX^2-E^2(X)=\dfrac{9}{2}$.

三、解答题

15．（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^{t}dt}{\sqrt{x^3}}$

【详解】令 $x-t=u$，则$t=x-u$,$dt=-du$， $\int_0^x\sqrt{x-t}e^{t}dt=\int_0^x\sqrt{u}e^{x-u}du$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^{t}dt}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x}\int_0^x\sqrt{u}e^{-u}du}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}e^{-u}du}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}e^{-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\frac{2}{3}$$

16．（本题满分 10 分）

计算积分 $\iint\limits_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dxdy$，其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

【详解】

$$\iint\limits_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dy$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{d(1+x^2+y^4)}{(1+x^2+y^4)^2}$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+2x^2}\right)dx=\frac{\pi}{8}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

17．（本题满分 10 分）

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

【详解】由定积分的定义

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx^2=\frac{1}{4}$$

18．（本题满分 10 分）

已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根，确定常数 k 的取值范围.

【详解】设 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x},x\in(0,1)$，则

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

令 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$，则 $g(0)=0,g(1)=2\ln^2 2-1$

$$g'(x)=\ln^2(1+x)-2\ln(1+x)-2x,g'(0)=0$$

$g''(x)=\frac{2(\ln(1+x)-x)}{1+x}<0,x\in(0,1)$，所以 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调减少，

由于 $g'(0)=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<g'0)=0$，也就是 $g(x)$ $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调减少，当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<g(0)=0$，进一步得到当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，也就是 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调减少.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}$，$f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$，也就是得到 $\frac{1}{\ln 2}-1<k<\frac{1}{2}$.

19.（本题满分 10 分）

设 $a_0=1,a_1=0,a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,3\cdots),$， $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数

（1）证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1.

（2）证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0(x\in(-1,1))$，并求出和函数的表达式.

【详解】（1）由条件 $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})\Rightarrow(n+1)a_{n+1}=na_n+a_{n-1}$

也就得到 $(n+1)(a_{n+1}-a_n)=-(a_n-a_{n-1})$，也就得到 $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=-\dfrac{1}{n+1},n=1,2,\cdots$

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1-a_0}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}\times\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}-a_{n-2}}\times\cdots\times\frac{a_2-a_1}{a_1-a_0}=(-1)^n\frac{1}{(n+1)!}$$

也就得到 $a_{n+1}-a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(n+1)!},n=1,2,\cdots$

$$a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}$$

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}}\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{e}=1$，所以收敛半径 $R\ge1$

（2）所以对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$， 由和函数的性质，可得 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，所以

$$\begin{aligned}(1-x)S'(x)&=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n\\&=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)a_{n+1}-na_n)x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=xS(x)\end{aligned}$$

也就是有 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0(x\in(-1,1))$.

解微分方程 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0$，得 $S(x)=\dfrac{Ce^{-x}}{1-x}$，由于 $S(0)=a_0=1$，得 $C=1$

所以 $S(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

20．（本题满分 11 分）

设三阶矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ 有三个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$.

（1）证明：$r(A)=2$；

（2）若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

【详解】(1) 证明：因为矩阵有三个不同的特征值，所以 A 是非零矩阵，也就是 $r(A)\geq 1$.

假若 $r(A)=1$ 时，则 $r=0$ 是矩阵的二重特征值，与条件不符合，所以有 $r(A)\geq 2$，又因为 $\alpha_3-\alpha_1+2\alpha_2=0$，也就是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$r(A)<3$，也就只有 $r(A)=2$.

（2）因为 $r(A)=2$，所以 $Ax=0$ 的基础解系中只有一个线性无关的解向量．由于 $\alpha_3-\alpha_1+2\alpha_2=0$，所以基础解系为 $x=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$；

又由 $\beta=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3$，得非齐次方程组 $Ax=\beta$ 的特解可取为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；

方程组 $Ax=\beta$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

21．（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

【详解】二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$

因为二次型的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$．也就说明矩阵 A 有零特征值，所以 $|A|=0$，故 $a=2$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&4\\1&\lambda+1&1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)$$

令 $|\lambda E-A|=0$ 得矩阵的特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

通过分别解方程组$(\lambda_i E-A)x=0$得矩阵的属于特征值$\lambda_1=-3$的特征向量$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，属于特征值特征值$\lambda_2=6$的特征向量$\xi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\lambda_3=0$的特征向量$\xi_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，

所以$Q=\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$为所求正交矩阵.

22．（本题满分 11 分）

设随机变量X,Y相互独立，且X的概率分布为$P\left\{X=0\right\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，$Y$的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}2y,0<y<1\\0,其他\end{cases}.$$

（1）求概率$P(Y\le EY)$；

（2）求$Z=X+Y$的概率密度.

【详解】（1）$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1 2y^2dy=\frac{2}{3}.$

所以$P\left\{Y\le EY\right\}=P\left\{Y\le\frac{2}{3}\right\}=\int_0^{\frac{2}{3}}2ydy=\frac{4}{9}.$

（2）$Z=X+Y$的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\left\{Z\le z\right\}=P\left\{X+Y\le z\right\}=P\left\{X+Y\le z,X=0\right\}+P\left\{X+Y\le z,X=2\right\}\\&=P\left\{X=0,Y\le z\right\}+P\left\{X=2,Y\le z-2\right\}\\&=\frac{1}{2}P\{Y\le z\}+\frac{1}{2}P\left\{Y\le z-2\right\}\\&=\frac{1}{2}\left[F_Y(z)+F_Y(z-2)\right]\end{aligned}$$

故$Z=X+Y$的概率密度为

$$\begin{aligned}f_Z(z)=F_Z{}'(z)&=\frac{1}{2}\left[f(z)+f(z-2)\right]\\&=\begin{cases}z, & 0\le z\le 1\\z-2, & 2\le z<3\\0, & 其他\end{cases}\end{aligned}$$

23．（本题满分 11 分）

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做了n次测量，该物体的质量μ是已知的，设

n 次测量结果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu|, (i = 1, 2, \cdots, n)$，利用 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 估计参数 σ .

（1）求 Z_i 的概率密度；

（2）利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

（3）求参数 σ 最大似然估计量.

【详解】（1）先求 Z_i 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z_i \le z\} = P\{|X_i - \mu| \le z\} = P\left\{\frac{|X_i - \mu|}{\sigma} \le \frac{z}{\sigma}\right\}$$

当 $z < 0$ 时，显然 $F_Z(z) = 0$；

当 $z \ge 0$ 时，$F_Z(z) = P\{Z_i \le z\} = P\{|X_i - \mu| \le z\} = P\left\{\frac{|X_i - \mu|}{\sigma} \le \frac{z}{\sigma}\right\} = 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - 1$；

所以 Z_i 的概率密度为 $f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, z \ge 0 \\ 0, \quad z < 0 \end{cases}$.

（2）数学期望 $EZ_i = \int_0^{+\infty} z f(z) dz = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$，

令 $EZ = \overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$，解得 σ 的矩估计量 $\overline{\sigma} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\overline{Z} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$.

（3）设 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 的观测值为 $z_1, z_2, \cdots, z_n$. 当 $z_i > 0, i = 1, 2, \cdots n$ 时

似然函数为 $L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f(z_i, \sigma) = \frac{2^n}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$，

取对数得：$\ln L(\sigma) = n\ln 2 - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2$

令 $\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = 0$，得参数 σ 最大似然估计量为 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$.