

## 2016 考研数学（一）真题完整版

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 若反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$  收敛，则 ( )

(A)  $a < 1$  且  $b > 1$  (B)  $a > 1$  且  $b > 1$  (C)  $a < 1$  且  $a+b > 1$  (D)  $a > 1$  且  $a+b > 1$

(2) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ ，则  $f(x)$  的一个原函数是 ( )

(A)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1 \end{cases}$  (B)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1 \end{cases}$   
(C)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$  (D)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

(3) 若  $y = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$ ,  $y = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$  是微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  的两个解，则  $q(x) =$  ( )

(A)  $3x(1+x^2)$  (B)  $-3x(1+x^2)$  (C)  $\frac{x}{1+x^2}$  (D)  $-\frac{x}{1+x^2}$

(4) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$ ，则 ( )

(A)  $x=0$  是  $f(x)$  的第一类间断点 (B)  $x=0$  是  $f(x)$  的第二类间断点

(C)  $f(x)$  在  $x=0$  处连续但不可导 (D)  $f(x)$  在  $x=0$  处可导

(5) 设  $A, B$  是可逆矩阵，且  $A$  与  $B$  相似，则下列结论错误的是 ( )

(A)  $A^T$  与  $B^T$  相似 (B)  $A^{-1}$  与  $B^{-1}$  相似

(C)  $A+A^T$  与  $B+B^T$  相似 (D)  $A+A^{-1}$  与  $B+B^{-1}$  相似

(6) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ ，则  $f(x_1, x_2, x_3) = 2$  在空间直角坐标下表示的二次曲面为 ( )

(A) 单叶双曲面 (B) 双叶双曲面 (C) 椭球面 (D) 柱面

(7) 设随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ( $\sigma > 0$ ), 记  $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$ , 则 ( )

- (A)  $p$  随着  $\mu$  的增加而增加 (B)  $p$  随着  $\sigma$  的增加而增加  
(C)  $p$  随着  $\mu$  的增加而减少 (D)  $p$  随着  $\sigma$  的增加而减少

(8) 随机试验  $E$  有三种两两不相容的结果  $A_1, A_2, A_3$ , 且三种结果发生的概率均为  $\frac{1}{3}$ , 将

试验  $E$  独立重复做 2 次,  $X$  表示 2 次试验中结果  $A_1$  发生的次数,  $Y$  表示 2 次试验中结果  $A_2$  发生的次数, 则  $X$  与  $Y$  的相关系数为 ( )

二、填空题: 9—14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1+t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

(10) 向量场  $A(x, y, z) = (x + y + z)i + xyj + zk$  的旋度  $\text{rot} A = \underline{\hspace{2cm}}$

(11) 设函数  $f(u, v)$  可微,  $z = z(x, y)$  由方程  $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$  确定, 则  $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

(12) 设函数  $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2}$ , 且  $f'''(0) = 1$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$

(13) 行列式  $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 样本均值  $\bar{x} = 9.5$ , 参数  $\mu$  的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则  $\mu$  的置信度为 0.95 的双侧置信区间为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 已知平面区域  $D = \left\{ (r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ ,

计算二重积分  $\iint_D x dx dy$ .

(16) (本题满分 10 分) 设函数  $y(x)$  满足方程  $y'' + 2y' + ky = 0$ , 其中  $0 < k < 1$ .

(I) 证明: 反常积分  $\int_0^{+\infty} y(x) dx$  收敛;

(II) 若  $y(0)=1, y'(0)=1$ , 求  $\int_0^{+\infty} y(x)dx$  的值.

(17) (本题满分 10 分) 设函数  $f(x, y)$  满足  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$ , 且  $f(0, y) = y+1, L_t$

是从点  $(0,0)$  到点  $(1,t)$  的光滑曲线, 计算曲线积分  $I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$ , 并

求  $I(t)$  的最小值

(18) 设有界区域  $\Omega$  由平面  $2x+y+2z=2$  与三个坐标平面围成,  $\Sigma$  为  $\Omega$  整个表面的外侧,

计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} (x^2+1)dydz - 2ydzdx + 3zdx dy$

(19) (本题满分 10 分) 已知函数  $f(x)$  可导, 且  $f(0)=1, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$ , 设数列  $\{x_n\}$

满足  $x_{n+1} = f(x_n) (n=1, 2, \dots)$ , 证明:

(I) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$  绝对收敛;

(II)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 且  $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$ .

(20) (本题满分 11 分) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$

当  $a$  为何值时, 方程  $AX=B$  无解、有唯一解、有无穷多解?

(21) (本题满分 11 分) 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(I) 求  $A^{99}$

(II) 设 3 阶矩阵  $B = (\alpha, \alpha_2, \alpha_3)$  满足  $B^2 = BA$ , 记  $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  分别表

示为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合。

(22) (本题满分 11 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  在区域  $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$

上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq Y \\ 0, & X > Y \end{cases}$$

(I) 写出  $(X, Y)$  的概率密度;

(II) 问  $U$  与  $X$  是否相互独立? 并说明理由;

(III) 求  $Z = U + X$  的分布函数  $F(z)$ .

(23) 设总体  $X$  的概率密度为  $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 其中  $\theta \in (0, +\infty)$  为未知参数,

$X_1, X_2, X_3$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 令  $T = \max(X_1, X_2, X_3)$ .

(1) 求  $T$  的概率密度

(2) 确定  $a$ , 使得  $aT$  为  $\theta$  的无偏估计

## 慕课考研

### 2019 考研大纲直播峰会

高教社考试中心联合慕课考研第 1 时间权威首发

大纲官方解析总会场: 1 场直播 3 个小时第一时间快速了解考点变化

学科深度解析分会场: 根据新大纲, 预测最新考点, 传授百日复习攻略

直播地址: [http://www.icourse163.org/topics/2018dagang\\_kysp/](http://www.icourse163.org/topics/2018dagang_kysp/)



### 新大纲百日冲刺提分方案-最后 3 个月, 针对新大纲考点, 精准提分

数学一/三百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details>

数学二百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details>

英语一百日冲刺

---

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details>

英语二百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details>

政治百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details>

法硕百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details>

中医百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details>

心理学百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details>

西医百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details>

关注公众号  
“网易慕课考研”  
查看考研资讯/干货/福利

