2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线条数 (　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【答案】(C)

【解析】 $y=\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

因为 $\lim\limits_{x\to 1} y=\infty$,故 $x=1$ 为垂直渐近线;

又由 $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$,故 $y=1$ 为水平渐近线,无斜渐近线,故渐近线的条数为 2.

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$ (　)

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　(B) $(-1)^n(n-1)!$　　(C) $(-1)^{n-1}n!$　　(D) $(-1)^n n!$

【答案】(A)

【解析】 $y'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-y(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=-1\times(-2)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$.

(3) 设 $a_n>0\ (n=1,2,3\cdots)$, $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$,则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 (　)

(A) 充分必要条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件　　(D) 非充分也非必要

【答案】(B)

【解析】因为 $a_n>0$,所以 $\{S_n\}$ 单调不减.

若 $\{S_n\}$ 有界,则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0$,即数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分条件.

反之,若 $\{a_n\}$ 收敛,则 $\{S_n\}$ 不一定有界.

例如,取 $a_n=1$,则 a_n 收敛,且 $S_n=n$ 无上界.故选(B).

(4) 设 $I_k=\int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x,(k=1,2,3)$,则有

( )

(A) $I_1<I_2<I_3$ (B) $I_3<I_2<I_1$ (C) $I_2<I_3<I_1$ (D) $I_2<I_1<I_3$

【答案】(D)

【解析】由 $I_1=\int_0^{\pi} e^{x^2}\sin xdx$, $I_2=\int_0^{2\pi} e^{x^2}\sin xdx$, $I_3=\int_0^{3\pi} e^{x^2}\sin xdx$,

先比较 I_1,I_2,易知 $I_2-I_1=\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin xdx<0$, $I_1>I_2$;

比较 I_3,I_2,易知 $I_3-I_2=\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin xdx>0$, $I_3>I_2$;

关键再比较 I_3,I_1,则 $I_3-I_1=\int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin xdx$ 令 $x-2\pi=y$

则 $$I_3-I_1=\int_{-\pi}^{\pi} e^{(2\pi+y)^2}\sin ydy=\int_0^{\pi} e^{(2\pi+y)^2}\sin ydy+\int_{-\pi}^{0} e^{(2\pi+y)^2}\sin ydy$$

$$=\int_0^{\pi} e^{(2\pi+y)^2}\sin ydy-\int_0^{\pi} e^{(2\pi-y)^2}\sin ydy>0$$

故 $I_3>I_1$,综上 $I_3>I_1>I_2$.

(5) 设函数 $f(x,y)$ 为可微函数,且对任意的 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,则使不等式 $f(x_1,y_1)>f(x_2,y_2)$成立的一个充分条件是 ( )

(A) $x_1>x_2,y_1<y_2$ (B) $x_1>x_2,y_1>y_2$ (C) $x_1<x_2,y_1<y_2$ (D) $x_1<x_2,y_1>y_2$

【答案】(A)

【解析】因为 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$,若 $f(x_1,y_1)>f(x_2,y_1)$,则 $x_1>x_2$

又 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,若 $f(x_2,y_1)>f(x_2,y_2)$,则 $y_1<y_2$

所以,当 $f(x_1,y_1)>f(x_2,y_1)>f(x_2,y_2)$时,有 $x_1>x_2$, $y_1<y_2$.

故是(A).

(6) 设区域D由曲线 $y=\sin x,x=\pm\dfrac{\pi}{2},y=1$围成,则 $\iint\limits_D (x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ( )

(A) π (B) 2 (C) -2 (D) $-\pi$

【答案】(D)

【解析】

$$\iint\limits_D (x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}(x^5y-1)\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}x^5y^2-y)\Big|_{\sin x}^{1}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}x^5\cos^2 x-1+\sin x)\mathrm{d}x.$$

由于 $\frac{1}{2}x^5\cos^2 x,\sin x$ 均为奇函数，所以 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}x^5\cos^2 x\mathrm{d}x=0,\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=0.$

带入上式，得原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-1)\mathrm{d}x=-\pi$.故选(D).

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为 ( )

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

【答案】(D)

【解析】$|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\times\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$,故 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 必定线性相关从而应选(D).

(8) 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ ，$Q=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 则 $Q^{-1}AQ=$ ( )

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【答案】(B)

【解析】$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1},$$

从而$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$,故应选 B.

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设$y=y(x)$是由方程$x^2-y+1=e^y$所确定的隐函数，则$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}=$________.

【答案】1

【解析】将$x=0$代入$x^2-y+1=e^y$,可知$y=0$.

对$x^2-y+1=e^y$求一阶导,得$2x-y'=y'\cdot e^y$,代入$x=0,y=0$,得$y'(0)=0$.

对$x^2-y+1=e^y$求二阶导,得$2-y''=y'^2\cdot e^y+e^y\cdot y''$,代入$y(0)=0,y'(0)=0$,得$y''(0)=1$,

即$\frac{d^2y}{d^2x}|_{x=0}=1$.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$________________.

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】

$$\lim_{n\to\infty}n(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2}{1+n^2}+\frac{n^2}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2})\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2})\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

(11) 设$z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$,其中函数$f(u)$可微，则$x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$__________.

【答案】0

【解析】$z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{1}{x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\frac{-1}{y^2}$,所以$x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=f'-f'=0$.

(12) 微分方程 $y\mathrm{d}x+\left(x-3y^2\right)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$__________.

【答案】$\sqrt{x}$

【解析】由题意,知 $y\mathrm{d}x=(3y^2-x)\mathrm{d}y$,所以 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{x}{y}+3y$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{x}{y}=3y$.

一阶线性微分方程,两边同时乘以 $e^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}=y$,则有 $y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+x=3y^2$,所以通解为 $xy=y^3+C$.

代入 $x=1,y=1$,可以得到 $C=0$.所以 $x=y^2$.由 $y|_{x=1}=1$,得 $y=\sqrt{x}$.

(13) 曲线 $y=x^2+x\left(x<0\right)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是__________.

【答案】$(-1,0)$

【解析】曲率公式为 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

将 $y'=2x+1,y''=2$ 代入公式,有 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{[1+(2x+1)^2]^{3/2}}$,解得 $x=-1,x=0$.

又因为 $x<0$,所以 $x=-1$.所以 $y=0$.

故坐标是 $(-1,0)$.

(14) 设 A 为3阶矩阵,$|A|=3$, A^* 为 A 伴随矩阵,若交换 A 的第1行与第2行得矩阵 B,则 $\left|BA^*\right|=$________.

【答案】-27

【解析】设 $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则 $|P|=-1$,由于 B 是由 A 的第 1 行和第 2 行交换所得知 $B=PA$,

所以 $|BA^*|=|PAA^*|=|P||A|E|=-|3E|=-27$.

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}$,记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)$, (I)求 a 的值;

(II)若 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小，求常数 k 的值.

【解析】(I) $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x^2}=1+\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=1+0=1$$

$$\text{(II)}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-a}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2+x-\sin x}{x\sin x}-1}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x^k x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x^{k+2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(1+x)}{x^{k+2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^{k+2}}$$

因为当 $x\to 0$ 当时, $f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小, 所以 $k+2=3$, 即 $k=1$.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

【解析】令 $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+x\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-y)=(-xy)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0$$

得 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$

又 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)\cdot(1-x^2)+e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-2x)=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-y)\cdot(-xy)+e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)=(xy^2-x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-y)\cdot(1-x^2)=(x^2y-y)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\therefore A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}=-2e^{-\frac{1}{2}}$$

$$B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=0$$

$$C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,0)}=-e^{-\frac{1}{2}}$$

$AC-B^2=2e^{-1}>0$ 又 $A<0$

$\therefore (1,0)$ 为极大值点，$f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$ 为极大值.

或 $A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(-1,0)}=2e^{-\frac{1}{2}}$

$B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(-1,0)}=0$

$C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(-1,0)}=e^{-\frac{1}{2}}$

$AC-B^2=2e^{-1}>0$ 又 $A>0$

$\therefore (-1,0)$ 为极小值点，$f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$ 为极小值.

(17)(本题满分 12 分)

过 $(0,1)$ 点作曲线 $L: y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成，求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

【解析】设切点 A 为 (x_0,y_0)，切线方程的斜率为 k 则 $y_0-1=kx_0, k=\frac{1}{x_0}, y_0=\ln x_0$，

解得 $x_0=e^2, y_0=2, k=\frac{1}{e^2}$.

所以切线方程为：$y=\frac{1}{e^2}x+1$.切点 $A(e^2,2)$，L 与 x 轴交点 $B(1,0)$.

$l_{AB}: y=\frac{2}{e^2-2}(x-1)$

区域 D 的面积为：$\int_1^{e^2}\ln x dx-\int_1^{e^2}\frac{2}{e^2-1}(x-1)dx$

$$=x\ln x\Big|_1^{e^2}-x\Big|_1^{e^2}-\frac{2}{e^2-1}\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_1^{e^2}$$

$$=e^2+1-\left(e^2-1\right)$$

$$=2.$$

则 D 绕 x 轴旋转一周所得的体积为：

$$v=v_1-v_2=\int_1^{e^2}\pi(\ln x)^2dx-\int_1^{e^2}\pi\left(\frac{2}{e^2-1}(x-1)\right)^2dx$$

$$=(2e^2-2)\pi-\frac{4(e^2-1)}{3}\pi=\frac{2}{3}(e^2-1)\pi.$$

(18) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$ 与极轴围成.

【解析】 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，则 $\theta\in[0,\pi]$

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta\rho d\rho$$

$$=\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho^3 d\rho$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta(1+\cos\theta)^4 d\theta$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos\theta(1+\cos\theta)^4 d\cos\theta$$

$$\overset{令t=\cos\theta}{=}\ -\frac{1}{4}\int_1^{-1}t(1+t)^4 dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}t(1+t)^4 dt$$

$$=\frac{8}{5}-\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{6}(1+t)^6\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{8}{5}-\frac{8}{15}=\frac{16}{15}.$$

(19) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，

(I) 求 $f(x)$ 的表达式；

(II) 求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点.

【解析】 (I) $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 所对应的特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$，其根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$，则 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

又因为函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+f(x)=2e^x$，且 $f'(x)=C_1e^x-2C_2e^{-2x}$，$f''(x)=C_1e^x+4C_2e^{-2x}$，所以 $C_1e^x+4C_2e^{-2x}+C_1e^x+C_2e^{-2x}=2e^x$. 从而可得 $C_1=1,C_2=0$，即 $f(x)=e^x$.

(II) 曲线方程为 $y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

求曲线方程一阶导数，得 $y'=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t+1$，求曲线方程二阶导数，得 $y''=2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t+(2x)^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t+2x$.

因为当 $x>0$ 时，$y''(0)>0$；当 $x<0$ 时，$y''(0)<0$；$y''(0)=0$，所以曲线拐点为 $(0,f(0))=(0,0)$.

(20) (本题满分 10 分)

证明$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2}$，$(-1<x<1)$.

【解析】令$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2},-1<x<1.$

因为$f(-x)=f(x)$,所以只讨论当$x\ge 0$的情况即可.

$$又\ f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,\qquad 0\le x<1.$$

$$f''(x)=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}+\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}-\cos x-1$$

$$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}-\cos x-1$$

$$=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1\qquad 0\le x<1$$

$$f'''(x)=\frac{-4\times 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}+\sin x$$

$$=\frac{16x(1-x^2)}{(1-x^2)^4}+\sin x$$

当$x\in[0,1)$时$f'''(x)\ge 0$,从而$f''(x)$单调递增,则$f''(x)\ge f''(0)=2>0,x\in[0,1)$,所以$f'(x)$单调递增，即$f'(x)\ge f'(0)=0,x\in[0,1)$，所以当$x\in[0,1)$时，$f(x)$单调递增，即$f(x)\ge f(0)=0,x\in[0,1)$．又因为$f(x)$为偶函数，所以当$-1<x<1$时，$f(x)\ge 0$,即$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2}$，$(-1<x<1)$.

(21)(本题满分 10 分)

(I)证明方程$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ $(n>1$的整数)，在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根；

(II)记(I)中的实根为x_n，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求此极限.

【解析】 (I) 令$F_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots x-1$, $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots x$ 显然$F_n(x)$在$[\frac{1}{2},1]$上连续,由于$F_n(1)=n-1>0;F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{2^n}-1<\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1=0$

所以由闭区间上连续函数的零点定理得,

在开区间$(\frac{1}{2},1)$内方程$f_n(x)=1$至少有一实根,又由于$F_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0$ $(\frac{1}{2}<x<1)$

所以$F_n(x)$在$[\frac{1}{2},1]$上单调增加,从而方程$f_n(x)=1$在$(\frac{1}{2},1)$内至多有一个实根. 所以方程

$x^n+x^{n-1}+\cdots x=1$在$(\frac{1}{2},1)$内只有一个实根.

(II) 由于$F_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>1$ $x\in(\frac{1}{2},1)$

$$\frac{f_n(x_n)-f_n(\frac{1}{2})}{x_n-\frac{1}{2}}=f_n'(\xi_n)\quad \frac{1}{2}<\xi_n<x_n$$

所以$\left|\frac{f_n(x_n)-f_n(\frac{1}{2})}{x_n-\frac{1}{2}}\right|=\left|f_n'(\xi_n)\right|>1$.从而

$$\left|x_n-\frac{1}{2}\right|\le\left|f_n(x_n)-f_n(\frac{1}{2})\right|=\left|1-(1-\frac{1}{2^n})\right|=\frac{1}{2^n}$$

由夹逼定理,得

$$\lim_{n\to\infty}\left|x_n-\frac{1}{2}\right|=0$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{1}{2}$.

(22)(本题满分 11 分)

设$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

(I) 计算行列式$|A|$;

(II) 当实数a为何值时,方程组$Ax=\beta$有无穷多解,并求其通解.

【解析】(Ⅰ)$|A|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1-a^4=\left(1-a^2\right)\left(1+a^2\right)$

(Ⅱ)由$|A|=0$知$a=1$或$a=-1$.

当$a=1$时

$$(A \mid \beta)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{array}\right)$$

因为$r(A)\neq r(A \mid \beta)$,所以$Ax=\beta$无解,从而$a=1$舍去.

当$a=-1$时

$$(A \mid \beta)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以$Ax=\beta$的通解为$x=k(0,0,1,1)^T+(0,-1,0,0)^T$, k为任意常数.

(23)(本题满分 11 分)

已知$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$的秩为 2,

(I) 求实数a的值;

(II) 求利用正交变换$x=Qy$化f为标准形.

【解析】(Ⅰ)由二次型的秩为 2 知$r(A^TA)=2$,故$r(A)=r(A^TA)=2$,

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

当$a=-1$时,$r(A)=2$.

(Ⅱ)令$B=A^TA=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\-(\lambda-2)&\lambda-2&-2\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$$

。

慕课考研

2019 考研大纲直播峰会

高教社考试中心联合慕课考研第 1 时间权威首发
大纲官方解析总会场：1 场直播 3 个小时第一时间快速了解考点变化
学科深度解析分会场：根据新大纲，预测最新考点，传授百日复习攻略
直播地址：http://www.icourse163.org/topics/2018dagang_kysp/

新大纲百日冲刺提分方案-最后 3 个月，针对新大纲考点，精准提分

数学一/三百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details
数学二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details
英语一百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details
英语二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details
政治百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details
法硕百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details
中医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details

心理学百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details
西医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details