2011 年考研数学试题（数学一）

一、选择题

1、 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是（　　）

（A）（1，0）　（B）（2，0）　（C）（3，0）　（D）（4，0）

【答案】C **【考点分析】**本题考查拐点的判断。直接利用判断拐点的必要条件和第二充分条件即可。

【解析】由 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 可知 $1,2,3,4$ 分别是

$y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4=0$ 的一、二、三、四重根，故由导数与原函数之间的关系可知 $y'(1)\neq 0$， $y'(2)=y'(3)=y'(4)=0$

$y''(2)\neq 0$， $y''(3)=y''(4)=0$， $y'''(3)\neq 0, y'''(4)=0$，故（3，0）是一拐点。

2、 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少， $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$， $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\,(n=1,2\cdots\cdots)$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为（　　）（A） (-1，1]　（B） [-1，1)　（C） [0，2)　（D） (0，2]

【答案】C **【考点分析】**本题考查幂级数的收敛域。主要涉及到收敛半径的计算和常数项级数收敛性的一些结论，综合性较强。

【解析】$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\,(n=1,2\cdots\cdots)$ 无界，说明幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛半径 $R\leq 1$；

$\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$ 收敛，可知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛半径 $R\geq 1$。

因此，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛半径 $R=1$，收敛区间为 $(0,2)$。又由于 $x=0$ 时幂级数收敛， $x=2$ 时幂级数发散。可知收敛域为 $[0,2)$。

3、 设 函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x)>0$， $f(0)'=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$

在点(0, 0)处取得极小值的一个充分条件是（　）

（A）　$f(0)>1, \ f''(0)>0$　　（B）　$f(0)>1, \ f''(0)<0$

（C）　$f(0)<1, \ f''(0)>0$　　（D）　$f(0)<1, \ f''(0)<0$

【答案】 C **【考点分析】** 本题考查二元函数取极值的条件，直接套用二元函数取极值的充分条件即可。

【解析】 由 $z=f(x)\ln f(y)$ 知 $z_x'=f'(x)\ln f(y), \ z_y'=\dfrac{f(x)}{f(y)}f'(y)$，$z_{xy}''=\dfrac{f'(x)}{f(y)}f'(y)$

$z_{xx}''=f''(x)\ln f(y)$，$z_{yy}''=f(x)\dfrac{f''(y)f(y)-(f'(y))^2}{f^2(y)}$

所以 $z_{xy}''\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=\dfrac{f'(0)}{f(0)}f'(0)=0$，$z_{xx}''\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=f''(0)\ln f(0)$，

$z_{yy}''\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=f(0)\dfrac{f''(0)f(0)-(f'(0))^2}{f^2(0)}=f''(0)$

要使得函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点(0, 0)处取得极小值，仅需

$f''(0)\ln f(0)>0$，$f''(0)\ln f(0)\cdot f''(0)>0$

所以有 $f(0)>1, \ f''(0)>0$

4、设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x dx, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx$，则 I,J,K 的大小关系是（　）

（A）$I<J<K$　（B）$I<K<J$　（C）$J<I<K$　（D）$K<J<I$

【答案】 B

【考点分析】 本题考查定积分的性质，直接将比较定积分的大小转化为比较对应的被积函数的大小即可。

【解析】 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$ 时，$0<\sin x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<\cot x$，因此 $\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x dx$，故选（B）

5. 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B，再交换 B 的第二行与第一行得单

位矩阵. 记 $P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$, 则 $A=$（　）

（A）P_1P_2　　（B）$P_1^{-1}P_2$　　（C）P_2P_1　　（D）$P_2^{-1}P_1$

【答案】 D **【考点分析】** 本题考查初等矩阵与初等变换的关系。直接应用相关定理的结论即可。

【解析】 由初等矩阵与初等变换的关系知 $AP_1=B$，$P_2B=E$，所以 $A=BP_1^{-1}=P_2^{-1}P_1^{-1}=P_2P_1^{-1}$，故选（D）

6、设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 基础解系可为（　）

(A)　α_1, α_3　　(B)　α_1, α_2　　(C)　$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$　　(D)　$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

【答案】 D **【考点分析】** 本题考查齐次线性方程组的基础解系，需要综合应用秩，伴随矩阵等方面的知识，有一定的灵活性。

【解析】 由 $Ax=0$ 的基础解系只有一个知 $r(A)=3$，所以 $r(A^*)=1$，又由 $A^*A=|A|E=0$ 知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 都是 $A^*x=0$ 的解，且 $A^*x=0$ 的极大线生无关组就是其基础解系，又

$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_3=0$，所以 α_1,α_3 线性相关，故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 或 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为极大无关组，故应选（D）

7、设 $F_1(x),F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x), f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是（　）

（A）$f_1(x)f_2(x)$　　（B）$2f_2(x)F_1(x)$

（C）$f_1(x)F_2(x)$　　（D）$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

【答案】 D **【考点分析】** 本题考查连续型随机变量概率密度的性质。

【解析】 检验概率密度的性质：$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\ge 0$；

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)dx = F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1$。可知 $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ 为概率密度，故选（D）。

8、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 EX 与 EY 存在，记 $U=\max\{x,y\}, V=\min\{x,y\}$，则 $E(UV)=$（　）

(A)　$EUEV$　　(B)　$EXEY$　　(C)　$EUEY$　　(D)　$EXEV$

【答案】 B **【考点分析】**本题考查随机变量数字特征的运算性质。计算时需要先对随机变量 UV 进行处理，有一定的灵活性。

【解析】由于 $UV=\max\{X,Y\}\min\{X,Y\}=XY$

可知 $E(UV)=E(\max\{X,Y\}\min\{X,Y\})=E(XY)=E(X)E(Y)$

故应选（B）

二、填空题

9、曲线 $y=\int_0^x \tan t dt\left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$________________

【答案】 $1-\frac{\pi}{4}$　**【考点分析】**本题考查曲线弧长的计算，直接代公式即可。

【解析】 $s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(y'\right)^2 dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x-1dx=\tan x-x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$

10、微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$____________

【答案】 $y=\sin xe^{-x}$

【考点分析】本题考查一阶线性微分方程的求解。先按一阶线性微分方程的求解步骤求出其通解，再根据定解条件，确定通解中的任意常数。

【解析】原方程的通解为

$$y=e^{-\int 1dx}[\int e^{-x}\cos x\cdot e^{\int 1dx}dx+C]=e^{-x}[\int \cos xdx+C]=e^{-x}[\sin x+C]$$

由 $y(0)=0$，得 $C=0$，故所求解为 $y=\sin xe^{-x}$

11、设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$，则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$____________

【答案】 4

【考点分析】本题考查偏导数的计算。

【解析】$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{y\sin xy}{1+x^2y^2}$，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=\dfrac{y^2\cos xy\left(1+x^2y^2\right)-2xy^3\sin xy}{\left(1+x^2y^2\right)^2}$。故 $\left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=4$。

12、设 L 是柱面方程 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xzdx+xdy+\dfrac{y^2}{2}dz=$____________

【答案】π

【考点分析】本题考查第二类曲线积分的计算。首先将曲线写成参数方程的形式，再代入相应的计算公式计算即可。

【解析】曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=\cos t+\sin t\end{cases}$，其中 t 从 0 到 2π。因此

$$
\begin{aligned}
&\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz\\
&=\int_0^{2\pi}\cos t(\cos t+\sin t)(-\sin t)+\cos t\cos t+\frac{\sin^2 t}{2}(\cos t-\sin t)dt\\
&=\int_0^{2\pi}-\sin t\cos^2 t-\frac{\sin^2 t\cos t}{2}+\cos^2 t-\frac{\sin^3 t}{2}dt\\
&=\pi
\end{aligned}
$$

13、若二次曲面的方程为 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$，经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$___

【答案】-1

【考点分析】本题考查二次型在正交变换下的标准型的相关知识。题目中的条件相当于告诉了二次型的特征值，通过特征值的相关性质可以解出 a。

【解析】本题等价于将二次型 $f(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz$ 经正交变换后化为了 $f=y_1^2+4z_1^2$。由正交变换的特点可知，该二次型的特征值为 $1,4,0$。

该二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，可知 $|A|=-a^2-2a-1=0$，因此 $a=-1$。

14、设二维随机变量(X,Y)服从$N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则$E(XY^2)=$____________

【答案】$\mu^3+\mu\sigma^2$

【考点分析】：本题考查二维正态分布的性质。

【解析】：由于$\rho=0$，由二维正态分布的性质可知随机变量X,Y独立。因此

$E(XY^2)=EX\cdot EY^2$。

由于(X,Y)服从$N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，可知$EX=\mu,EY^2=DY+\left(EY\right)^2=\mu^2+\sigma^2$，则

$E(XY^2)=\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right)=\mu^3+\mu\sigma^2$。

三、解答题

15、（本题满分 10 分）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$

【答案】$e^{-\frac{1}{2}}$

【考点分析】：本题考查极限的计算，属于1^∞形式的极限。计算时先按1^∞未定式的计算方法将极限式变形，再综合利用等价无穷小替换、洛必达法则等方法进行计算。

【解析】：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x}\frac{1}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

16、（本题满分 9 分）设$z=f(xy,yg(x))$，其中函数f具有二阶连续偏导数，函数$g(x)$可导，且在$x=1$处取得极值$g(1)=1$，求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=1}$

【答案】$f_{1,1}^{'}(1,1)+f_{1,2}^{'}(1,1)$

【考点分析】：本题综合考查偏导数的计算和二元函数取极值的条件，主要考查考生的计算能力，计算量较大。

【解析】：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1^{'}(xy,yg(x))y+f_2^{'}(xy,yg(x))yg^{'}(x)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{1,1}^{'}(xy,yg(x))xy+f_{1,2}^{'}(xy,yg(x))yg(x)+f_1^{'}(xy,yg(x))x$$
$$+f_{2,1}^{'}(xy,yg(x))xyg^{'}(x)+f_{2,2}^{'}(xy,yg(x))yg(x)g^{'}(x)+f_2^{'}(xy,yg(x))g^{'}(x)$$

由于 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，可知 $g^{'}(1)=0$。

故

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=1}=f_{1,1}^{'}(1,g(1))+f_{1,2}^{'}(1,g(1))g(1)+f_1^{'}(1,g(1))$$
$$+f_{2,1}^{'}(1,g(1))g^{'}(1)+f_{2,2}^{'}(1,g(1))g(1)g^{'}(1)+f_2^{'}(1,g(1))g^{'}(1)$$
$$=f_{1,1}^{'}(1,1)+f_{1,2}^{'}(1,1)$$

17、（本题满分 10 分）求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数

【答案】 $k\le 1$ 时，方程 $k\arctan x-x=0$ 只有一个实根

$k>1$ 时，方程 $k\arctan x-x=0$ 有两个实根

【考点分析】：本题考查方程组根的讨论，主要用到函数单调性以及闭区间上连续函数的性质。解题时，首先通过求导数得到函数的单调区间，再在每个单调区间上检验是否满足零点存在定理的条件。

【解析】：令 $f(x)=k\arctan x-x$，则 $f(0)=0$，$f'(x)=\frac{k}{1+x^2}-1=\frac{k-1-x^2}{1+x^2}$，

（1） 当 $k<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，故此时 $f(x)$ 的图像与 x 轴与只有一个交点，也即方程 $k\arctan x-x=0$ 只有一个实根

（2） $k=1$ 时，在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上都有 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 是严格的单调递减，又 $f(0)=0$，故 $f(x)$ 的图像在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 与 x 轴均无交点

（3） $k>1$ 时，$-\sqrt{k-1}<x<\sqrt{k-1}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1})$ 上单调增加，又 $f(0)=0$ 知，$f(x)$ 在 $(-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1})$ 上只有一个实根，又 $f(x)$ $(-\infty,-\sqrt{k-1})$ 或 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 都有 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{k-1})$ 或 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 都单调减，又 $f(-\sqrt{k-1})<0,\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，$f(\sqrt{k-1})>0,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{k-1})$ 与 x 轴无交点，在 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 上与 x 轴有一个交点

综上所述：$k\le 1$时，方程$k\arctan x - x = 0$只有一个实根

$k>1$时，方程$k\arctan x - x = 0$有两个实根

18、（本题满分 10 分）证明：（1）对任意正整数n，都有$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

（2）设$a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n (n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{a_n\}$收敛

【考点分析】：本题考查不等式的证明和数列收敛性的证明，难度较大。（1）要证明该不等式，可以将其转化为函数不等式，再利用单调性进行证明；（2）证明收敛性时要用到单调有界收敛定理，注意应用（1）的结论。

【解析】：（1）令$\frac{1}{n}=x$，则原不等式可化为$\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x, x>0$。

先证明$\ln(1+x)<x, x>0$：

令$f(x)=x-\ln(1+x)$。由于$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0, x>0$，可知$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增。又由于$f(0)=0$，因此当$x>0$时，$f(x)>f(0)=0$。也即$\ln(1+x)<x, x>0$。

再证明$\frac{x}{x+1}<\ln(1+x), x>0$：

令$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{x+1}$。由于$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}>0, x>0$，可知$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增。由于$g(0)=0$，因此当$x>0$时，$g(x)>g(0)=0$。也即$\frac{x}{x+1}<\ln(1+x), x>0$。

因此，我们证明了$\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x, x>0$。再令由于，即可得到所需证明的不等式。

（2）$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})$，由不等式$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})$可知：数列$\{a_n\}$单调递减。

又由不等式$\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$可知：

$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\ldots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0$。

因此数列$\{a_n\}$是有界的。故由单调有界收敛定理可知：数列$\{a_n\}$收敛。

19、（本题满分 11 分）已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f(1,y)=0, f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D xyf_{xy}''(x,y)dxdy$$

【答案】: a

【考点分析】: 本题考查二重积分的计算。计算中主要利用分部积分法将需要计算的积分式化为已知的积分式，出题形式较为新颖，有一定的难度。

【解析】: 将二重积分 $\iint\limits_D xyf_{xy}''(x,y)dxdy$ 转化为累次积分可得

$$\iint\limits_D xyf_{xy}''(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^1 xyf_{xy}''(x,y)dx$$

首先考虑 $\int_0^1 xyf_{xy}''(x,y)dx$，注意这是是把变量 y 看做常数的，故有

$$\int_0^1 xyf_{xy}''(x,y)dx=y\int_0^1 xdf_y'(x,y)=xyf_y'(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 yf_y'(x,y)dx=yf_y'(1,y)-\int_0^1 yf_y'(x,y)dx$$

由 $f(1,y)=f(x,1)=0$ 易知 $f_y'(1,y)=f_x'(x,1)=0$。

故 $\int_0^1 xyf_{xy}''(x,y)dx=-\int_0^1 yf_y'(x,y)dx$。

$$\iint\limits_D xyf_{xy}''(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^1 xyf_{xy}''(x,y)dx=-\int_0^1 dy\int_0^1 yf_y'(x,y)dx$$

对该积分交换积分次序可得：$-\int_0^1 dy\int_0^1 yf_y'(x,y)dx=-\int_0^1 dx\int_0^1 yf_y'(x,y)dy$

再考虑积分 $\int_0^1 yf_y'(x,y)dy$，注意这里是把变量 x 看做常数的，故有

$$\int_0^1 yf_y'(x,y)dy=\int_0^1 ydf(x,y)=yf(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)dy=-\int_0^1 f(x,y)dy$$

因此

$$\iint\limits_D xyf_{xy}''(x,y)dxdy=-\int_0^1 dx\int_0^1 yf_y'(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$$

20、（本题满分 11 分）$\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由 $\beta_1=(1,a,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(1,3,5)^T$ 线性表出。①求 a；②将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

线性表出。

【答案】：①$a=5$；②$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3)=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

【考点分析】：本题考查向量的线性表出，需要用到秩以及线性方程组的相关概念，解题时注意把线性表出与线性方程组的解结合起来。

【解析】：① 由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$表示

可知$|\beta_1\beta_2\beta_3|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix}=a-5=0$，解得$a=5$

②本题等价于求三阶矩阵C使得$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C$

可知$C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

计算可得$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

因此$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3)=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

21、（本题满分 11 分）A为三阶实矩阵，$R(A)=2$，且$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

（1）求A的特征值与特征向量（2）求A

【答案】：（1）A的特征值分别为 1，-1，0，对应的特征向量分别为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

（2）$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

【考点分析】：实对称矩阵的特征值与特征向量，解题时注意应用实对称矩阵的特殊性质。

【解析】：（1） $A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

可知：1，-1 均为 A 的特征值，$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 与 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 分别为它们的特征向量

$r(A)=2$，可知 0 也是 A 的特征值

而 0 的特征向量与 ξ_1，ξ_2 正交

设 $\xi_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 为 0 的特征向量

有 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\-x_1+x_3=0\end{cases}$ 得 $\xi_3=k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

A 的特征值分别为 1，-1，0

对应的特征向量分别为 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

（2） $A=P\Lambda P^{-1}$

其中 $\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$

故 $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\1&1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

22. （本题满分 11 分）

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$P\left(X^2=Y^2\right)=1$

求：（1）$\left(X,Y\right)$的分布；

（2）$Z=XY$的分布；

（3）ρ_{XY}.

【答案】:（1）

Y \ X	0	1
-1	0	1/3
0	1/3	0
1	0	1/3

（2）

Z	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

（3）$\rho_{XY}=0$

【考点分析】: 本题考查二维离散型分布的分布律及相关数字特征的计算。其中，最主要的是第一问联合分布的计算。

【解析】:（1）由于$P\left(X^2=Y^2\right)=1$，因此$P\left(X^2\neq Y^2\right)=0$。

故$P\left(X=0,Y=1\right)=0$，因此

$$P\left(X=1,Y=1\right)=P\left(X=1,Y=1\right)+P\left(X=0,Y=1\right)=P\left(Y=1\right)=1/3$$

再由 $P(X=1,Y=0)=0$ 可知

$$P(X=0,Y=0)=P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=0)=P(Y=0)=1/3$$

同样，由 $P(X=0,Y=-1)=0$ 可知

$$P(X=0,Y=-1)=P(X=1,Y=-1)+P(X=0,Y=-1)=P(Y=-1)=1/3$$

这样，我们就可以写出 (X,Y) 的联合分布如下：

X \ Y	-1	0	1
0	0	$1/3$	0
1	$1/3$	0	$1/3$

（2）$Z=XY$ 可能的取值有 -1，0，1

其中 $P(Z=-1)=P(X=1,Y=-1)=1/3$，$P(Z=1)=P(X=1,Y=1)=1/3$，

则有 $P(Z=0)=1/3$。

因此，$Z=XY$ 的分布律为

Z	-1	0	1
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

（3）$EX=2/3$，$EY=0$，$EXY=0,\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=0$

故 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0$

23、（本题满分 11 分）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ_0 已知，$\sigma^2>0$ 未知，$\overline{x}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差，

（1）求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$

（2）计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$

【答案】：（1）$\hat{\sigma}^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(X_i-\mu_0)^2}{n}$ （2）$E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2,D(\hat{\sigma}^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n}$

【考点分析】：本题考查参数估计和随机变量数字特征的计算，有一定的难度。在求 σ^2 的最大似然估计时，最重要的是要将 σ^2 看作一个整体。在求 $\hat{\sigma}^2$ 的数学期望和方差时，则需要

综合应用数字特征的各种运算性质和公式，难度较大。

【解析】:

（1）似然函数

$$L\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right)=\frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}\sigma^n}\exp\left(\sum_{i=1}^{n}-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

则 $\ln L=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-n\ln\sigma-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2}$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{\left(\sigma^2\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2}$$

令 $\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=0$ 可得 σ^2 的最大似然估计值 $\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{n}$，最大似然估计量

$$\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu_0)^2}{n}$$

（2）由随机变量数字特征的计算公式可得

$$E(\hat{\sigma}^2)=E\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu_0)^2}{n}\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu_0)^2=E(X_1-\mu_0)^2=DX_1=\sigma^2$$

$$D(\hat{\sigma}^2)=D\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu_0)^2}{n}\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i-\mu_0)^2=\frac{1}{n}D(X_1-\mu_0)^2$$

由于 $X_1-\mu_0\sim N\left(0,\sigma^2\right)$，由正态分布的性质可知 $\frac{X_1-\mu_0}{\sigma}\sim N\left(0,1\right)$。因此 $\left(\frac{X_1-\mu_0}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2\left(1\right)$，由 χ^2 的性质可知 $D\left(\frac{X_1-\mu_0}{\sigma}\right)^2=2$，因此 $D(X_1-\mu_0)^2=2\sigma^4$，故

$$D(\hat{\sigma}^2)=\frac{2\sigma^4}{n}。$$

慕课考研

2019 考研大纲直播峰会

高教社考试中心联合慕课考研第 1 时间权威首发
大纲官方解析总会场：1 场直播 3 个小时第一时间快速了解考点变化
学科深度解析分会场：根据新大纲，预测最新考点，传授百日复习攻略
直播地址：http://www.icourse163.org/topics/2018dagang_kysp/

新大纲百日冲刺提分方案-最后 3 个月，针对新大纲考点，精准提分

数学一/三百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details
数学二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details
英语一百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details
英语二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details
政治百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details
法硕百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details
中医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details
心理学百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details

西医百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details