2014 硕士研究生入学考试

数学一

一、选择题 1—8 小题．每小题 4 分，共 32 分．

1．下列曲线有渐近线的是（　）

（A）$y=x+\sin x$　（B）$y=x^2+\sin x$　（C）$y=x+\sin\frac{1}{x}$　（D）$y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

2．设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在 $[0,1]$ 上（　）

（A）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　（B）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

（C）当 $f''(x)\le 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　（D）当 $f''(x)\le 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

3．设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dy=$（　）

（A）$\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

（B）$\int_0^1 dx\int_0^{1-x1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$

（C）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

（D）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

4．若函数 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx=\min\limits_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx\right\}$，则 $a_1\cos x+b_1\sin x=$（　）

（A）$2\sin x$　（B）$2\cos x$　（C）$2\pi\sin x$　（D）$2\pi\cos x$

5．行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0\\ a & 0 & 0 & b\\ 0 & c & d & 0\\ c & 0 & 0 & d\end{vmatrix}$ 等于（　）

（A）$(ad-bc)^2$　（B）$-(ad-bc)^2$　（C）$a^2d^2-b^2c^2$　（D）$-a^2d^2+b^2c^2$

6．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维向量，则对任意的常数 k,l，向量 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的（　）

（A）必要而非充分条件　（B）充分而非必要条件　（C）充分必要条件　（D）非充分非必要条件

7．设事件 A，B 想到独立，$P(B)=0.5,P(A-B)=0.3$ 则 $P(B-A)=$（　）

（A）0.1　（B）0.2　（C）0.3　（D）0.4

8．设连续型随机变量X_1,X_2相互独立，且方差均存在，X_1,X_2的概率密度分别为$f_1(x),f_2(x)$，随机变量Y_1的概率密度为$f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}(f_1(y)+f_2(y))$，随机变量$Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则（　）

（A）$EY_1>EY_2,DY_1>DY_2$　　（B）$EY_1=EY_2,DY_1=DY_2$

（C）$EY_1=EY_2,DY_1<DY_2$　　（D）$EY_1=EY_2,DY_1>DY_2$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分．把答案填在题中横线上）

9．曲面$z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$在点$(1,0,1)$处的切平面方程为________.

10．设$f(x)$为周期为 4 的可导奇函数，且$f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$，则$f(7)=$________________.

11．微分方程$xy'+y(\ln x-\ln y)=0$满足$y(1)=e^3$的解为_____________.

12．设L是柱面$x^2+y^2=1$和平面$y+z=0$的交线，从z轴正方向往负方向看是逆时针方向，则曲线积分$\oint_L zdx+ydz=$_______________.

13．设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数是 1，则$a$的取值范围是______________.

14．设总体 X 的概率密度为$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, \theta<x<2\theta\\ 0,\quad 其它\end{cases}$，其中$\theta$是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体的简单样本，若$C\sum_{i=1}^{n}X_i^2$是$\theta^2$的无偏估计，则常数$C=$____________.

三、解答题

15．（本题满分 10 分）

求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$.

16．（本题满分 10 分）

设函数$y=f(x)$由方程$y^3+xy^2+x^2y+6=0$确定，求$f(x)$的极值.

17．（本题满分 10 分）

设函数$f(u)$具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$．若$f(0)=0,f'(0)=0$，求$f(u)$的表达式.

18．（本题满分 10 分）

设曲面$\boldsymbol{\Sigma: z = x^2 + y^2 (z \le 1)}$的上侧，计算曲面积分：$\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1)dxdy$

（1） 证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$；

（2） 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛.

19．（本题满分 10 分）

设数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}$，$\cos a_n - a_n = \cos b_n$且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛.

20．（本题满分 11 分）

设$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，E 为三阶单位矩阵.

（3） 求方程组$AX = 0$的一个基础解系；

（4） 求满足$AB = E$的所有矩阵.

21．（本题满分 11 分）

证明n阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$相似.

22．（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的分布为$P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{2}$，在给定$X = i$的条件下，随机变量$Y$服从均匀分布$U(0,i), i = 1,2$.

（5） 求Y的分布函数；

（6） 求期望$E(Y)$.

23．（本题满分 11 分）

设总体 X 的分布函数为$F(x,\theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$，其中$\theta$为未知的大于零的参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体的简单随机样本，

（1）求$E(X), E(X^2)$；（2）求θ的极大似然估计量.

（3）是否存在常数 a，使得对任意的 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\ge\varepsilon\right\}=0$．

2013 年考研数学一解析

1．【详解】对于 $y=x+\sin\frac{1}{x}$，可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$，所以有斜渐近线 $y=x$

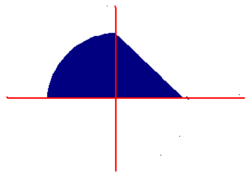
应该选（C）

2.【详解 1】如果对曲线在区间 $[a,b]$ 上凹凸的定义比较熟悉的话，可以直接做出判断．如果对区间上任意两点 x_1,x_2 及常数 $0\le\lambda\le1$，恒有 $f\left((1-\lambda)x_1+\lambda x_2\right)\ge(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$，则曲线是凸的．显然此题中 $x_1=0,x_2=1,\lambda=x$，则 $(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)=f(0)(1-x)+f(1)x=g(x)$，$f\left((1-\lambda)x_1+\lambda x_2\right)=f(x)$，故当 $f''(x)\le0$ 时，曲线是凸的，即 $f\left((1-\lambda)x_1+\lambda x_2\right)\ge(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$，也就是 $f(x)\ge g(x)$，应该选（C）

【详解 2】如果对曲线在区间 $[a,b]$ 上凹凸的定义不熟悉的话，可令

$F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x$，则 $F(0)=F(1)=0$，且 $F''(x)=f''(x)$，故当 $f''(x)\le0$ 时，曲线是凸的，从而 $F(x)\ge F(0)=F(1)=0$，即 $F(x)=f(x)-g(x)\ge0$，也就是 $f(x)\ge g(x)$，应该选（C）

3.【详解】积分区域如图所示。如果换成直角坐标则应该是：



$\int_{-1}^{0}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int_0^1dx\int_0^{1-x}f(x,y)dy$，（A），（B）两个选择项都不正确；

如果换成极坐标则为：

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$．应选（D）

4.【详解】注意 $\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^3$，$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2xdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2xdx=\frac{\pi}{2}$，$\int_{-\pi}^{\pi}x\cos xdx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin xdx=0$，$\int_{-\pi}^{\pi}x\sin xdx=2\pi$，所以 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx=\frac{2}{3}\pi^3+\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)-4\pi b$

所以就相当于求函数 a^2+b^2-4b 的极小值点，显然可知当 $a=0,b=2$ 时取得最小值，所以应该选（A）．

5.【详解】

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$= -ad\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= -ad(ad-bc) + bc(ad-bc) = -(ad-bc)^2$$

应该选（B）.

6.【详解】若向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则（$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$）$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)K$，

对任意的常数k,l，矩阵K的秩都等于 2，所以向量$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$一定线性无关．而当

$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$时，对任意的常数$k,l$，向量$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$线性无关，但$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；故选择（A）.

7.【详解】$P(A-B)=0.3=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)-0.5P(A)=0.5P(A)$.

所以$P(A)=0.6$，$P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.5-0.5P(A)=0.2$．故选择（B）.

8.【详解】$EY_1=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}y(f_1(y)+f_2(y))dy=\frac{1}{2}(EX_1+EX_2)=E(Y_2)$，

$$EY_1^2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2(f_1(y)+f_2(y))dy=\frac{1}{2}EX_1^2+\frac{1}{2}EX_2^2,$$

$$DY_1=E(Y_1^2)-E^2(Y_1)=\frac{1}{2}EX_1^2+\frac{1}{2}EX_2^2-\frac{1}{4}E^2(X_1)-\frac{1}{4}E^2(X_2)-\frac{1}{2}E(X_1)E(X_2)$$
$$=\frac{1}{4}D(X_1)+\frac{1}{4}D(X_2)+\frac{1}{4}E(X_1-X_2)^2\ge\frac{1}{4}D(X_1)+\frac{1}{4}D(X_2)=DY_2$$

故应该选择（D）.

9.【详解】曲面$z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$在点$(1,0,1)$处的法向量为$(z_x,z_y,-1)|_{(1,0,1)}=(2,-1,-1)$，

所以切平面方程为$2(x-1)+(-1)(y-0)+(-1)(z-1)=0$，即$2x-y-z-1=0$.

10.【详解】当$x\in[0,2]$时，$f(x)=\int 2(x-1)dx=x^2-2x+C$，由$f(0)=0$可知$C=0$，即$f(x)=x^2-2x$；

$f(x)$为周期为 4 奇函数，故$f(7)=f(-1)=f(1)=1$.

11.【详解】方程的标准形式为$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$，这是一个齐次型方程，设$u=\frac{y}{x}$，得到通解为$y=xe^{Cx+1}$，

将初始条件$y(1)=e^3$代入可得特解为$y=xe^{2x+1}$.

12．【详解】由斯托克斯公式 $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ 可知

$\oint_L zdx+ydz=\iint_\Sigma dydz+dzdx=\iint_\Sigma dxdy=\iint_{D_{xy}} dxdy=\pi$．其中 $\Sigma:\begin{cases} y+z=0 \\ x^2+y^2\le 1 \end{cases}$ 取上侧，$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$．

13．【详解】由配方法可知 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$

$$=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$$

由于负惯性指数为 1，故必须要求 $4-a^2\ge 0$，所以 a 的取值范围是 $[-2,2]$．

14．【详解】$E(X^2)=\int_\theta^{2\theta} x^2\frac{2x}{3\theta^2}dx=\frac{5}{2}\theta^2$，所以 $E\left(C\sum_{i=1}^n X_i^2\right)=Cn\frac{5}{2}\theta^2$，由于 $C\sum_{i=1}^n X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，故 $Cn\frac{5}{2}=1$，$C=\frac{2}{5n}$．

15．【分析】．先用等价无穷小代换简化分母，然后利用洛必达法则求未定型极限．

【详解】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x}=\lim_{x\to\infty}(x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x^2(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2}))-x\right)=\frac{1}{2}$$

16．【详解】

解：在方程两边同时对 x 求导一次，得到 $(3y^2+2xy+x^2)y'+(y^2+2xy)=0$，（1）

即 $\frac{dy}{dx}=\frac{-y^2-2xy}{3y^2+2xy+x^2}$，令 $\frac{dy}{dx}=0$ 及 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$，得到函数唯一驻点 $x=1,y=-2$．

在（1）式两边同时对 x 求导一次，得到 $(6yy'+4y+2xy'+4x)y'+(3y^2+2xy+x^2)y''+2y=0$

把 $x=1,y=-2,y'(1)=0$ 代入，得到 $y''(1)=\frac{4}{9}>0$，所以函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $y=-2$．

17．【详解】

设 $u=e^x\cos y$，则 $z=f(u)=f(e^x\cos y)$，

$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^{x\cos y}$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y+f'(u)e^x\cos y$；$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)e^x\sin y$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\cos y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}=f''(e^x\cos y)e^{2x}$，由条件 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$，可知 $f''(u)=4f(u)+u$

这是一个二阶常用系数线性非齐次方程．对应齐次方程的通解为：$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}$ 其中 C_1,C_2 为任意常数． 对应非齐次方程特解可求得为 $y^*=-\frac{1}{4}u$．故非齐次方程通解为 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{1}{4}u$．将初始条件 $f(0)=0,f'(0)=0$ 代入，可得 $C_1=\frac{1}{16},C_2=-\frac{1}{16}$．所以 $f(u)$ 的表达式为 $f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u$．

18．【详解】

设$\Sigma_1:\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$取下侧，记由$\Sigma,\Sigma_1$所围立体为$\Omega$，则高斯公式可得

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy &= -\iiint_\Omega (3(x-1)^2+3(y-1)^2+1)dxdydz \\ &= -\iiint_\Omega (3x^2+3y^2+7-6x-6y)dxdydz \\ &= -\iiint_\Omega (3x^2+3y^2+7)dxdydz \\ &= -\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1(3r^2+7)dz=-4\pi\end{aligned}$$

在$\Sigma_1:\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$取下侧上，$\iint_{\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy=\iint_{\Sigma_1}(1-1)dxdy=0$，

所以$\iint_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy=-4\pi$

19.【详解】

（1）证明：由$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，及$0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2}$可得$0<a_n=\cos a_n-\cos b_n<\frac{\pi}{2}$，

所以$0<a_n<b_n<\frac{\pi}{2}$，由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛，由收敛的必要条件可得$\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

（2）证明：由于$0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2}$，所以$\sin\frac{a_n+b_n}{2}\le\frac{a_n+b_n}{2},\sin\frac{b_n-a_n}{2}\le\frac{b_n-a_n}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{b_n}&=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}=\frac{2\sin\frac{a_n+b_n}{2}\sin\frac{b_n-a_n}{2}}{b_n} \\ &\le\frac{2\frac{a_n+b_n}{2}\frac{b_n-a_n}{2}}{b_n}=\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}<\frac{b_n^2}{2b_n}=\frac{b_n}{2}\end{aligned}$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，由正项级数的比较审敛法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛.

20.【详解】（1）对系数矩阵 A 进行初等行变换如下：

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix},$$

得到方程组$AX=0$同解方程组$\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=2x_4\\x_3=3x_4\end{cases}$，得到$AX=0$的一个基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$.

显然 B 矩阵是一个4×3矩阵，设$B=\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\\x_4&y_4&z_4\end{pmatrix}$

对矩阵(AE)进行进行初等行变换如下：

$$(AE)=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&4&-3&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{pmatrix}$$

由方程组可得矩阵 B 对应的三列分别为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$，

即满足 $AB=E$ 的所有矩阵为 $B=\begin{pmatrix}2-c_1&6-c_2&-1-c_3\\-1+2c_1&-3+2c_2&1+2c_3\\-1+3c_1&-4+3c_2&1+3c_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

21.【详解】证明：设 $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$.

分别求两个矩阵的特征值和特征向量如下：

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&\cdots&-1\\-1&\lambda-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$， 所以 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=\lambda_3=\cdots\lambda_n=0$；

而且 A 是实对称矩阵，所以一定可以对角化．且 $A\sim\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&0&&\\&&\cdots&\\&&&0\end{pmatrix}$； $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda&0&\cdots&-1\\0&\lambda&\cdots&-2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda-n\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$

所以 B 的 n 个特征值也为 $\lambda_1=n,\lambda_2=\lambda_3=\cdots\lambda_n=0$；对于 $n-1$ 重特征值 $\lambda=0$，由于矩阵 $(0E-B)=-B$ 的秩显然为 1，所以矩阵 B 对应 $n-1$ 重特征值 $\lambda=0$ 的特征向量应该有 $n-1$ 个线性无关，进一步矩阵 B 存在 n 个线性无关的特征向量，即矩阵 B 一定可以对角化，且 $B\sim\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&0&&\\&&\cdots&\\&&&0\end{pmatrix}$，从而可知 n 阶矩阵

$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$相似.

22.【详解】(1) 分布函数
$$\begin{aligned}F(y)&=P(Y\le y)=P(Y\le y,X=1)+P(Y\le y,X=2)\\&=P(Y\le y/X=1)P(X=1)+P(Y\le y/X=2)P(X=2)\\&=\frac{1}{2}\big(P(Y\le y/X=1)+P(Y\le y/X=2)\big)\end{aligned}$$

当 $y<0$ 时， $F(y)=0$；

当 $0\le y<1$ 时， $F(y)=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\frac{y}{2}=\frac{3}{4}y$；

当$1\le y<2$时，$F(y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{y}{2}=\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}$；

当$y\ge 2$时，$F(y)=1$.

所以分布函数为 $$F(y)=\begin{cases}0 & ,y<0\\ \frac{3}{4}y & ,0\le y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{y}{4} & ,1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

（2）概率密度函数为 $f(y)=F'(y)=\begin{cases}\frac{3}{4},0<y<1\\ \frac{1}{4},1<y<2\\ 0,其它\end{cases}$，　$E(Y)=\int_0^1\frac{3}{4}ydy+\int_1^2\frac{y}{4}dy=\frac{3}{4}$.

23.【详解】(1) 先求出总体 X 的概率密度函数 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}},x\ge 0,\\ 0,\quad x<0\end{cases}$

$$EX=\int_0^{+\infty}\frac{2x^2}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=-\int_0^{+\infty}xde^{-\frac{x^2}{\theta}}=-xe^{-\frac{x^2}{\theta}}|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\sqrt{\pi\theta};$$

$$EX^2=\int_0^{+\infty}\frac{2x^3}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx^2=\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}te^{-\frac{t}{\theta}}dt=\theta;$$

（2）极大似然函数为:

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i,\theta)=\begin{cases}\frac{2^n}{\theta^n}\prod_{i=1}^n x_ie^{-\frac{\sum_{i=1}^n x^2{}_i}{\theta}},x_i\ge 0\\ 0,\quad 其它\end{cases}$$

当所有的观测值都大于零时，$LnL(\theta)=n\ln 2+\sum_{i=1}^n\ln x_i-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x^2{}_i$，令$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，

得 θ 的极大似然估计量为$\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$；

（3）因为$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布，显然对应的$X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$也独立同分布，又有（1）个可知$EX_i^2=\theta$，

由辛钦大数定律，可得$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2-EX_i\right|\ge\varepsilon\right\}=0$，由前两问可知，$\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$，$EX_i^2=\theta$，所以存在

常数$a=\theta$，使得对任意的$\varepsilon>0$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\ge\varepsilon\right\}=0$.

慕课考研

2019 考研大纲直播峰会

高教社考试中心联合慕课考研第 1 时间权威首发

大纲官方解析总会场：1 场直播 3 个小时第一时间快速了解考点变化

学科深度解析分会场：根据新大纲，预测最新考点，传授百日复习攻略

直播地址：http://www.icourse163.org/topics/2018dagang_kysp/

新大纲百日冲刺提分方案-最后 3 个月，针对新大纲考点，精准提分

数学一/三百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details

数学二百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details

英语一百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details

英语二百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details

政治百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details

法硕百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details

中医百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details

心理学百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details

西医百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details