2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x \to 0$ 时,用“$o(x)$”表示比 x 高阶的无穷小,则下列式子中错误的是 ( )

(A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$ (B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$

(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$ (D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

【答案】(D)

【解析】如 $x^2 = o(x), x^3 = o(x^2)$, 但 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x^3}{x^2} = 1$, 即 $x^2 + x^3 \neq o(x^2)$.

(2) 函数 $f(x) = \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【答案】(C)

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln|x|} - 1}{x\ln|x|} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln|x|}{x\ln|x|} = 1$,

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x+1} = \infty$.

故 $x = 1$ 为可去间断点。

(3) 设 D_k 是圆域 $D = \left\{(x,y)\,\middle|\, x^2 + y^2 \le 1\right\}$ 位于第 k 象限的部分,记 $I_k = \iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy$

($k = 1,2,3,4$),则 ( )

(A) $I_1 > 0$ (B) $I_2 > 0$ (C) $I_3 > 0$ (D) $I_4 > 0$

【答案】(B)

【解析】方法一:

$$I_k = \iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy = \int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r\sin\theta - r\cos\theta) r dr = \frac{1}{3}\int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}} (\sin\theta - \cos\theta) d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}}(\sin\theta-\cos\theta)d\theta=-\frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\Big|_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}}$$，代入得 $I_2=\frac{2}{3}>0.$

方法二：

$\because$ 第二象限中 $y>0$，$x<0$，始终 $y>x$　即　$y-x>0$　　$\therefore I_2>0\ \therefore$ 选（B）.

(4)　设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是（　）

(A) 若 $a_n>a_{n+1}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n>a_{n+1}$.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则存在常数 $p>1$, 使 $\lim_{x\to\infty}n^p a_n$ 存在.

(D) 若存在常数 $p>1$, 使 $\lim_{x\to\infty}n^p a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

【答案】(D)

【解析】因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛 ($p>1$), $\lim_{n\to\infty}n^p a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ 存在，由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

(5)　设 A，B，C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，且 B 可逆. 则（　）

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.

(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

【答案】(B)

【解析】将 A,C 按列分块，$A=(\alpha_1,...,\alpha_n),C=(\gamma_1,...,\gamma_n)$

由于 $AB=C$, 故

$$(\alpha_1,...,\alpha_n)\begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ . & ... & . \\ b_{n1} & ... & b_{nn} \end{pmatrix}=(\gamma_1,...,\gamma_n)$$

即 $\gamma_1=b_{11}\alpha_1+...+b_{n1}\alpha_n,...,\gamma_n=b_{1n}\alpha_1+...+b_{nn}\alpha_n$

即C的列向量组可由A的列向量线性表示

由于B可逆，故$A=CB^{-1}$，A的列向量组可由C的列向量组线性表示，选B

(6) 矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充要条件为（　　）

(A) $a=0,b=2$　　　　(B) $a=0,b$为任意常数

(C) $a=2,b=0$　　　　(D) $a=2,b$为任意常数

【答案】(B)

【解析】令$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$，$B$=$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

因为A为实对称矩阵，B为对角阵，则A与B相似的充要条件是A的特征值分别为$2,b,0$

A的特征方程$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\a&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-a&-1\\0&\lambda-b&-a\\-\lambda&-a&\lambda-1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\lambda&-a&-1\\0&\lambda-b&-a\\0&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\left[(\lambda-2)(\lambda-b)-2a^2\right],$$

因为$\lambda=2$是A的特征值，所以$|2E-A|=0$

所以$-2a^2=0$，即$a=0$.

当$a=0$时，$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-2)(\lambda-b)$，

A的特征值分别为$2,b,0$所以b为任意常数即可． 故选(B).

(7) 设X_1,X_2,X_3是随机变量，且$X_1\sim N(0,1)$, $X_2\sim N(0,2^2)$, $X_3\sim N(5,3^2)$，

$p_i=P\{-2\le X_i\le 2\}(i=1,2,3)$,则　　（　　）

(A) $p_1>p_2>p_3$　(B) $p_2>p_1>p_3$　(C) $p_3>p_1>p_2$　(D) $p_1>p_3>p_2$

【答案】(A)

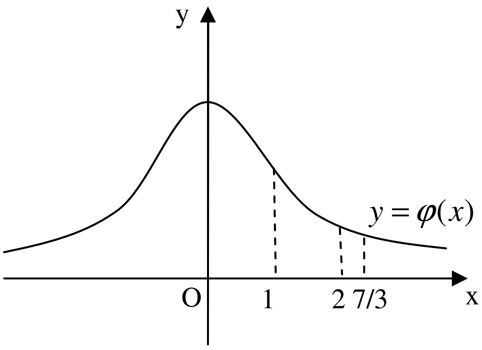
【解析】

$$p_1=P\{-2\le X_1\le 2\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1,$$

$$p_2=P\{-2\le X_2\le 2\}=P\left\{\frac{-2-0}{2}\le\frac{X_2-0}{2}\le\frac{2-0}{2}\right\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1,$$

$$p_3=P\{-2\le X_3\le 2\}=P\left\{\frac{-2-5}{3}\le\frac{X_3-5}{3}\le\frac{2-5}{3}\right\}=\Phi(-1)-\Phi\left(-\frac{7}{3}\right)=\Phi\left(\frac{7}{3}\right)-\Phi(1),$$

由下图可知， $p_1>p_2>p_3$.



(8) 设随机变量 X 和 Y 相互独立，则 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

X	-1	0	1
Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\left\{X+Y=2\right\}=$ （　　）

(A) $\frac{1}{12}$　　(B) $\frac{1}{8}$　　(C) $\frac{1}{6}$　　(D) $\frac{1}{2}$

【答案】(C)

【解析】 $P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0)+P(X=3,Y=-1)$

$$=P(X=1)\cdot P(Y=1)+P(X=2)\cdot P(Y=0)+P(X=3)\cdot P(Y=-1)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

二、填空题：9□ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{n}{n+2})=$ ________.

【答案】−2.

【解析】曲线 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线斜率是

$$y'\big|_{x=1}=(2x-1)\big|_{x=1}=1$$

因为曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，所以 $f(1)=0,\ f'(1)=1$，则

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{n}{n+2})=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{-2n}{n+2}\cdot\frac{f(1-\frac{2}{n+2})}{-\frac{2}{n+2}}\right]$$

$$=-2\lim_{n\to\infty}\frac{f(1-\frac{2}{n+2})-f(1)}{-\frac{2}{n+2}}$$

$$=-2f'(1)=-2$$

(10) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ________.

【答案】$2-\ln 2$.

【解析】把点 $(1,2)$ 代入 $(z+y)^x=xy$，得

$$(z(1,2)+2)^1=2$$

则 $z(1,2)=0$

在方程 $(z+y)^x=xy$ 两边同时对 x 求偏导数，有

$$(z+y)^x\left[\ln(z+y)+x\cdot\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{2}\right]=2$$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=2-\ln 2$

(11) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ ________.

【答案】$\ln 2$

【解析】$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\frac{\ln x}{(1+x)}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x)}=\ln\frac{x}{(1+x)}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2$

(12) 微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 $y=$ ______.

【答案】$e^{\frac{1}{2}x}(c_1+c_2x)$.

【解析】二阶齐次微分方程的特征方程为 $\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=0$，解得 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$，所以齐次方程的通解为 $y=e^{\frac{1}{2}x}(c_1+c_2x)$.

(13) 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$，则 $|A|=$ ______.

【答案】-1.

【解析】方法一：取矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，满足题设条件，$|A|=-1$.

方法二：$A^*=-A^T$，则 $|A^*|=|-A^T|$，整理得到 $|A|^{3-1}=(-1)^3|A|$，即 $|A|=-1$ 或者 $|A|=0$.

$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=-\left(a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2\right)\le 0$

又因为 $A\neq O$，所以至少有一个 $a_{ij}\neq 0$，所以

$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=-\left(a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2\right)<0$

从而 $|A|=-1$.

(14) 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，则 $E(Xe^{2X})=$ ______.

【答案】$2e^2$

【解析】标准正态分布的概率密度 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$E(Xe^{2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{2x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{2x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2}dx$$

$$=e^2\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}dx=2e^2$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证

明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值.

【解析】方法一：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\cos 6x+\cos 4x+\cos 2x+1}{4}}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-\cos 6x-\cos 4x-\cos 2x}{4ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x+4\sin 4x+2\sin 2x}{4a\cdot n\cdot x^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{36\cos 6x+16\cos 4x+4\cos 2x}{4a\cdot n(n-1)x^{n-2}}$$

$\therefore n-2=0$，即 $n=2$ 时，上式极限存在.

当 $n=2$ 时，由题意 $\dfrac{36+16+4}{4a\cdot 2\cdot 1}=1\Rightarrow a=7\quad \therefore n=2,a=7$.

方法二：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x]\sin x}{ax^n\cdot\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\dfrac{1}{4}\sin 4x\cdot\cos 3x}{ax^n\cdot\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\dfrac{1}{8}(\sin 7x+\sin x)}{ax^{n+1}}=\frac{7}{8}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 7x}{a(n+1)x^n}=\frac{7}{8}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+1-\cos 7x}{a(n+1)x^n}$$

当 $n=2$ 时，

$$I=\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3a}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+1-\cos 7x}{x^2}=\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3a}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{x^2}\right)$$

$$=\frac{7}{24a}\left(\frac{-1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{(7x)^2}{x^2}\right)=\frac{7}{a}=1$$

得到 $a=7$

方法三：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^n}\underline{\underline{洛}}\lim_{x\to 0}\frac{-(\cos x\cos 2x\cos 3x)'}{nax^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(e^{\ln\cos x\cos 2x\cos 3x}\right)'}{nax^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(e^{\ln\cos x\cos 2x\cos 3x}\right)'}{nax^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x\cos 2x\cos 3x(\ln\cos x\cos 2x\cos 3x)'}{nax^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\left(\ln\cos x+\ln\cos 2x+\ln\cos 3x\right)'}{nax^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}+2\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+3\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right)}{nax^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\tan x+2\tan 2x+3\tan 3x\right)}{nax^{n-1}}\underline{\underline{洛}}\lim_{x\to0}\frac{\left(\sec^2 x+4\sec^2 2x+9\sec^2 3x\right)}{n\left(n-1\right)ax^{n-2}}$$

$$=\frac{14}{n\left(n-1\right)a}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{n-2}}=\frac{14}{n\left(n-1\right)a}\lim_{x\to0}x^{2-n}=1$$

故n=2,a=7 .

(16)(本题满分 10 分)

设D是由曲线$y=x^{\frac{1}{3}}$，直线$x=a(a>0)$及x轴所围成的平面图形，V_x,V_y分别是D绕x轴，y轴旋转一周所得旋转体的体积，若$V_y=10V_x$，求a的值.

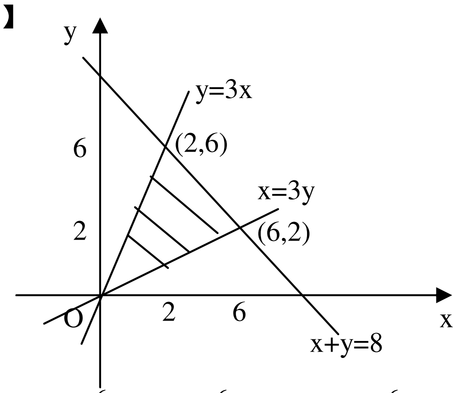
【解析】$V_x=\int_0^a\pi(x^{\frac{1}{3}})^2dx=\pi\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big|_0^a=\pi\frac{3}{5}a^{\frac{5}{3}}$，$V_y=\int_0^a 2\pi x(x^{\frac{1}{3}})dx=\frac{3}{7}2\pi x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^a=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}$.

因V_y=10V_x, 故$\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}$=10$\pi\frac{3}{5}a^{\frac{5}{3}}$, 所以$a$=7$\sqrt{7}$

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域D由直线$x=3y, y=3x,$及$x+y=8$围成，计算$\iint_D x^2dxdy$

【解析】



$$\begin{cases}x=3y\\x+y=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases},\quad\begin{cases}y=3x\\x+y=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}$$

故

$$\iint_D x^2dxdy=\int_0^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{3x}x^2dy+\int_2^6dx\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}x^2dy$$

$$=\frac{2}{3}x^4\Big|_0^2+\left(\frac{8}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4\right)\Big|_2^6=\frac{32}{3}+128=\frac{416}{3}.$$

(18)(本题满分 10 分)

设生产某产品的固定成本为 60000 元，可变成本为 20 元/件，价格函数为$P=60-\dfrac{Q}{1000}$，（P是单价，单位：元，Q是销量，单位：件），已知产销平衡，求：

(I)该商品的边际利润；

(II)当$P=50$时的边际利润，并解释其经济意义；

(III)使得利润最大的定价P.

【解析】由$P=60-\dfrac{Q}{1000}$可知$Q=1000(60-P)$

由$C(P)=60000+20Q=1260000-20000P$

$R(P)=PQ=-1000P^2+60000P$

$L(P)=R(P)-C(P)=-1000P^2+80000P-1260000$

（I）边际利润为$L'(P)=-2000P+80000$

(II)令$P=50$，$L'(50)=-20000$，经济意义：当产品价格为$P=50$时，价格每增长 1 元时收益减少20000.

（III）令$L'(P)=-2000P+80000=0, P=40$唯一，又$L''(P)=-2000<0$，故$P=40$时利润最大.

(19)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=0$且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. 证明

(I)存在$a>0$，使得$f(a)=1$；

(II)对(I)中的a，存在$\xi\in(0,a)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

【解析】

(I) 设$F(x)=f(x)-1 \quad x\ge 0$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2 \quad \therefore \exists X>0$，当$x>X$时 $f(x)>1$

令$x_0>X$ 则 $f(x_0)>1 \therefore F(x_0)>0$

又$F(0)=-1<0$

$\therefore$由零点定理，$\exists a\in(0,x_0)\subset(0,+\infty)$

使$F(a)=0 \quad \therefore f(a)=1$

(II) 令$G(x)=f(x)-\dfrac{1}{a}x \quad . \quad x\ge 0$

$G(a)=f(a)-1=0$，$G(0)=0$

$G(x)$在 $[0,a]$ 连续，在$(0,a)$可导

由罗尔定理$\exists\xi\in(0,a)$

使$G'(\xi)=0$

$\therefore f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$

(20)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所求矩阵 C.

【解析】设 $C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，由于 $AC-CA=B$，故

$$\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix},$$

即 $\begin{pmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\ x_1 & x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\ x_3+x_4 & ax_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}\qquad (\mathrm{I})$$

由于矩阵 C 存在，故方程组(I)有解. 对(I)的增广矩阵进行初等行变换：

$$\left(\begin{array}{cccc:c}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & a+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right)$$

方程组有解，故 $a+1=0$，$b=0$，即 $a=-1,b=0$，此时存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$.

当 $a=-1,b=0$ 时，增广矩阵变为 $\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

x_3,x_4 为自由变量，令 $x_3=1,x_4=0$，代为相应齐次方程组，得 $x_2=-1,x_1=1$.

令 $x_3=0,x_4=1$，代为相应齐次方程组，得 $x_2=0,x_1=1$.

故 $\xi_1=(1,-1,1,0)^T$，$\xi_2=(1,0,0,1)^T$，令 $x_3=0,x_4=0$，得特解，$\eta=(1,0,0,0)^T$，方程组的通

解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta=(k_1+k_2+1,-k_1,k_1,k_2)^T$，所以 $C=\begin{pmatrix} k_1+k_2+1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$.

(21)（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记 $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

(II)若 α,β 正交且均为单位变量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

【解析】（I）$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$

$$=2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$+\ (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\left(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$=x^TAx$，其中 $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，$x=(x_1,x_2,x_3)^T$.

由于 $A^T=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)^T=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T=A$, 所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$.

(II) 由于 $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，$\alpha$ 与 β 正交，故 $\alpha^T\beta=0$，α，β 为单位向量，故 $\|\alpha\|=\sqrt{\alpha^T\alpha}=1$，故 $\alpha^T\alpha=1$，同样 $\beta^T\beta=1$.

$A\alpha=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=2\alpha\alpha^T\alpha+\beta\beta^T\alpha=2\alpha$, 由于 $\alpha\neq 0$, 故 A 有特征值 $\lambda_1=2$.

$A\beta=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=\beta$, 由于 $\beta\neq 0$, 故 A 有特征值 $\lambda_2=1$.

$r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leq r(2\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=1+1=2<3$.

所以 $|A|=0$, 故 $\lambda_3=0$.

因此, f 在正交变换下的标准形为 $2{y_1}^2+{y_2}^2$.

(22)(本题满分 11 分)

设 (X,Y) 是二维随机变量, X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, 0<x<1,\\ 0, \quad 其他,\end{cases}$ 在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下, Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, 0<y<x,\\ 0, 其他.\end{cases}$

(I)求 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$;

(II)求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;

(III)求 $P\{X>2Y\}$.

【解析】

(I) $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}3x^2\cdot\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(II) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$,

当$0<y<1$时，$f_Y(y)=\int_y^1 \frac{9y^2}{x}dx = 9y^2 \cdot \ln x\Big|_y^1 = -9y^2 \ln y$，

Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases} -9y^2 \ln y, & 0<y<1 \\ 0, & \end{cases}$