

2011 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题及答案详解

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

(1) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时，函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则 ()

(A) $k=1, c=4$

(B) $k=1, c=-4$

(C) $k=3, c=4$

(D) $k=3, c=-4$

【答案】应选 (C)

【分析】由泰勒公式及无穷小阶的比较可得。

【详解一】 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \sin 3x = 3x - \frac{27x^3}{3!} + o(x^3)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{cx^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + \frac{9x^3}{2} + o(x^3)}{cx^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{cx^k} = 1$$

所以 $c=4, k=3$

【详解二】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{cx^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos x - 3\cos 3x}{ckx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{ck} \frac{-2\sin 2x \sin(-x)}{x^{k-1}}$
 $= \frac{12}{ck} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^{k-1}} = 1$

所以 $k-1=2, ck=12$ ，即 $k=3, c=4$

(2) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3}$ 等于 ()

(A) $-2f'(0)$

(B) $-f'(0)$

(C) $f'(0)$

(D) 0

【答案】应选 (B)

【分析】根据导数在某点的定义求解。

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - x^2 f(0)}{x^3} - \frac{2f(x^3) - 2f(0)}{x^3}$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - x^2 f(0)}{x^3} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x^3) - 2f(0)}{x^3}$$

$$= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0)$$

(3) 函数 $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为 ()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【答案】应选 (C)

【详解】令 $f'(x) = 0$, 解得驻点 $x = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

(4) 微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} (\lambda > 0)$ 的特解形式为 ()

(A) $a(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$ (B) $ax(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$
(C) $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$ (D) $x^2(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$

【答案】应选 (C)

【详解】特征值为 $\pm\lambda$, 非齐次项中 $\pm\lambda$ 分别与特征根相等, 则特解可设为

$$x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$$

(5) 设函数 $f(x), g(x)$ 均有二阶连续导数, 满足 $f(0) > 0, g(0) < 0$, 且

$f'(0) = g'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x)g(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件

是 ()

(A) $f''(0) < 0, g''(0) > 0$ (B) $f''(0) < 0, g''(0) < 0$
(C) $f''(0) > 0, g''(0) > 0$ (D) $f''(0) > 0, g''(0) < 0$

【答案】应选 (A)

【详解】根据 $\begin{cases} z_x = f'(x)g(y) = 0 \\ z_y = f(x)g'(y) = 0 \end{cases}$,

$$z_{xx} = f''(x)g(y), z_{yy} = f(x)g''(y), z_{xy} = f'(x)g'(y)$$

对于 $(0, 0)$, $z_{xx}(0, 0) = f''(0)g(0)$, $z_{yy}(0, 0) = f(0)g''(0)$, $z_{xy}(0, 0) = f'(0)g'(0)$

已知 $f(0) > 0, g(0) < 0$, $f'(0) = g'(0) = 0$

根据题意可判断 $f''(0) < 0, g''(0) > 0$

(6) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx, K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大小关系是

(A) $I < J < K$ (B) $I < K < J$ (C) $J < I < K$ (D) $K < J < I$

【答案】应选 (B)

【详解】在区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上, $\sin x < \cos x < \cot x, \ln x$ 是增函数, 所以

$\ln \sin x < \ln \cos x < \ln \cot x$, 由定积分比较大小的性质可知, 应选 (B)

(7) 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第二列加到第一列得到矩阵 B , 再交换 B 的第二行与第三行

得到单位矩阵, 记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ ()

(A) $P_1 P_2$; (B) $P_1^{-1} P_2$; (C) $P_2 P_1$; (D) $P_2 P_1^{-1}$.

【答案】应选(D).

【详解】由初等变换及初等矩阵的性质易知 $P_2 A P_1 = E$, 从而 $A = P_2^{-1} P_1^{-1} = P_2 P_1^{-1}$, 答案应选(D).

(8) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程 $AX = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^* X = 0$ 的基础解系可为 ()

(A) α_1, α_2 ; (B) α_1, α_3 ; (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

【答案】应选(D).

【详解】由 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程 $AX = 0$ 的一个基础解系, 知 $r(A) = 3$, 从而 $r(A^*) = 1, |A| = 0$, 于是 $A^* A = |A| E = 0$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为 $A^* X = 0$ 的解. 由 $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, 知 α_1, α_3 线性相关, 由 $r(A) = 3$, 知 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 又 $r(A^*) = 1$, 从而 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为 $A^* X = 0$ 的基础解系, 故应选(D).

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} =$ _____

【答案】 $\sqrt{2}$

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+2^x}{2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{2^x - 1}{2}} = \sqrt{2}$

(10) 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 $e^{-x} \sin x$

【详解】 $y = e^{-\int 1 dx} \left(C + \int e^{-x} \cos x e^{\int 1 dx} dx \right) = e^{-x} (C + \sin x)$ ，由于 $y(0) = 0$ ，所以 $y = e^{-x} \sin x$

(11) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 $\ln(\sqrt{2} + 1)$

【详解】 $s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$

(12) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, $\lambda > 0$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 $\frac{1}{\lambda}$

【详解】 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$

或者指数函数的数学期望。

(13) 设平面区域 D 由直线 $y = x$ 圆 $x^2 + y^2 = 2y$ 及 y 轴所组成，则二重积分 $\iint_D xy d\sigma =$

【答案】 $\frac{7}{12}$

【详解】 $\iint_D xy d\sigma = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^3 \sin\theta \cos\theta dr = \frac{7}{12}$

(14) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ ，则 f 的正惯性指数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 应填 2。

【详解 1】二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 易经过配方法化为 $y_1^2 + 4y_2^2$ ，从而正惯性指数为 2。

【详解 2】本题亦可通过求二次型矩阵的特征值进一步得到正惯性指数为 2。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上。解答应写出文字说

明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 已知函数 $F(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^{3a}}$, 设

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, 试求 a 的取值范围。

解: 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, 所以至少 $a > 0$

由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$,

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^{3a}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{3ax^{3a-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{3ax^{3a-1}} = 0$$

故 $2 > 3a - 1$, 所以 $a < 1$

由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^{3a}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{3ax^{3a-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x^2} \frac{1}{3a(3a-1)x^{3a-2}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{3-3a}}{1+x^2} \frac{1}{3a(3a-1)} = 0 \end{aligned}$$

即 $3 - 3a < 2$, 所以 $a > \frac{1}{3}$

综上 $\frac{1}{3} < a < 1$

(16) (本题满分 11 分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3} \end{cases}$ 确定, 求 $y = y(x)$ 的

极值和凹凸区间及拐点。

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^3}$$

当 $t = 1$ 时, $x = \frac{5}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$ 是极小值

当 $t = -1$ 时, $x = -1$, $y = 1$ 是极大值

当 $t = 0$ 时, $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ 是拐点

当 $t < 0$ 时, 是凸区间

当 $t > 0$ 时, 是凹区间

(17) (本题满分 10 分) 设函数 $z = f(xy, g(x))$, 函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$

可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$ 。

【详解】 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' y + f_2' g'(x)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1' + x y f_{11}'' + x f_{21}'' g'(x)$$

因为 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 所以 $g'(1)=0$

$$\text{所以 } \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = f_1'(1,1) + f_{11}''(1,1)$$

(18) (本题满分 10 分) 设函数 $y(x)$ 具有二阶导数, 且曲线 $l: y = y(x)$ 与直线 $y = x$ 相切

与原点, 记 α 为曲线 l 在点 (x, y) 外切线的倾角, 若 $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}$, 求 $y(x)$ 的表达式。

【详解】 由题意知 $y(0)=0, y'(0)=1$, 因为 α 为曲线 l 在点 (x, y) 外切线的倾角,

$$\text{所以 } \tan \alpha = \frac{dy}{dx}, \text{ 两边同时对 } x \text{ 求导数, 得 } \sec^2 \alpha \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

由题知 $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}$, 并且 $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ 所以得微分方程

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=1 \end{cases} \quad \text{此方程是不显含 } x \text{ 的微分方程}$$

令 $y' = p$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 代入方程得 $\frac{dp}{1+p^2} = dy$, 解得 $y' = \tan(y + C_1)$

由 $y'(0)=1$ 解得 $C_1 = \frac{\pi}{4}$,

微分方程 $y' = \tan(y + \frac{\pi}{4})$ 是可分离变量方程, 解得 $\sin(y + \frac{\pi}{4}) = C e^x$

由 $y(0)=0$ 解得 $C=1$ 。

$$\text{所以 } y(x) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^x\right) - \frac{\pi}{4}$$

(19) (本题满分 10 分) ①证明对任意正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ 成立

②设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛

证明: ①先证明 $0 \leq x \leq 1$, 有 $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$, 可以利用导数得到函数单调性, 结论是明显的, 令 $x = \frac{1}{n}$, 就得到证明结论。

②先证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n}) < 0$

再证明数列 $\{a_n\}$ 有下界,

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln(1 + \frac{1}{1}) + \ln(1 + \frac{1}{2}) + \dots + \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln n = \ln(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{n+1}{n}) = \ln \frac{n+1}{n} > 0$$

所以数列 $\{a_n\}$ 收敛

(20) (本题满分 11 分) 一容器内侧是由图中曲线绕 y 旋转一周而成的曲面, 该曲线是由 $x^2 + y^2 = 2y (y \geq \frac{1}{2})$ 与 $x^2 + y^2 = 1 (y \leq \frac{1}{2})$ 连接而成的。

(I) 容器的容积;

(II) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做多少功? (长度单位: m , 重力加速度为 gm/s^2 , 水的密度为 $10kg/m^3$ 。

【详解】(I) 容积 $V = V_1 + V_2 = 2V_1 = 2\pi \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1-y^2) dy = \frac{9}{4}\pi$

$$(II) W = F \cdot S = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} mg dy = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{9}{4} \pi 10^3 g dy = \frac{27}{4} \pi 10^3 g$$

(21) (本题满分 11 分) 已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0$,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = a, \quad \text{其中 } D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

计算二重积分 $\iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy$

【详解】根据二重积分的计算 $\iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy = \int_0^1 x \left(\int_0^1 y f''_{xy}(x, y) dy \right) dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 y f''_{xy}(x, y) dy &= \int_0^1 y df'_x(x, y) = (y f'_x(x, y))_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 f'_x(x, y) dy \\ &= f'_x(x, 1) - \int_0^1 f'_x(x, y) dy = - \int_0^1 f'_x(x, y) dy \end{aligned}$$

则 原式 $= \int_0^1 x \left(- \int_0^1 f'_x(x, y) dy \right) dx = - \int_0^1 \left(\int_0^1 x f'_x(x, y) dx \right) dy$

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^1 \left(\int_0^1 x f'_x(x, y) dx \right) dy = -\int_0^1 \left(\int_0^1 x df(x, y) \right) dy = -\int_0^1 \left((xf(x, y))_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy \\
&= -\int_0^1 \left(f(1, y) - \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = \iint_D f(x, y) dx dy = a
\end{aligned}$$

(22) (本小题满分 11 分) 设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$, 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$, $\beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表出.

(1) 求 a 的值.

(2) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

【详解】(1) 易知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 由其不能被 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 得到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关, 从而 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) < 3$.

由

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$$

得 $a = 5$.

(2) 由

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

得

$$(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(23) (本小题满分 11 分) A 为三阶实对称矩阵, $r(A) = 2$ 且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值与特征向量.

(2) 求矩阵 A .

【详解】(1)易知特征值-1 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ，特征值 1 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.由

$r(A) = 2$ 知 A 的另一个特征值为 0.因为实对称矩阵不同特征值得特征向量正交，从而特征

值 0 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2)

由

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

得

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$