

一、简答题（1 题 4 分，2 题 4 分，3 题 6 分，共 14 分）

1. 什么是算法？什么是程序？。
2. 算法的特点是什么？
3. 给出算法复杂度计量符号 O 和 Ω 的定义。

二、算法复杂度计算（10 分）

已知某算法耗时为 $T(n)$ ，且满足如下递归方程

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & n=1 \\ 2T(n/2) + O(n) & n>1 \end{cases}$$

试计算该算法的时间复杂度 $T(n)$ 。

三、对于分治法，试解答：（1、2 题各 5 分，3 题 8 分，共 18 分）

1. 分治法的基本思想什么？
2. 试给出分治法的一般算法设计模式，用伪代码描述或详述解题步骤。
3. 设 n 个不同的整数排好序后存于 $T[0..n-1]$ 中。若存在一个下标 i ， $0 \leq i < n$ ，使得 $T[i]=i$ ，设计一个有效算法找到这个下标。要求算法在最坏情况下的计算时间为 $O(\log n)$ 。

四、对于动态规划算法，试解答：（1 题 4 分，2 题 6 分，3 题 10 分，共 20 分）

1. 动态规划算法的两个基本要素，每个要素的含义是什么？
2. 写出动态规划算法解题的基本步骤。
3. 0-1 背包问题：给定 n 个物品和一个背包。物品 i 的重量为 w_i ，价值为 v_i ，背包容量为 c 。问如何选择装入背包中的物品，使得装入背包的物品的价值最大？在装入背包时，每种物品 i 只有两种选择，装入或者不装入，既不能装入多次，也不能只装入一部分。

其形式化描述为：问题的形式描述是：给定 $c>0$ ， $w_i>0$ ， $v_i>0$ ， $1 \leq i \leq n$ ，求 n 元 0-1 向量 (x_1, x_2, \dots, x_n) ，使得

$$\text{目标函数} \quad \max \sum_{i=1}^n v_i x_i$$

$$\text{约束条件} \quad \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c,$$

用动态规划方法可以求解 0-1 背包问题，请回答下列问题

- (1) 证明该问题具有最优子结构性；
- (2) 设 $m(i, j)$ 为背包容量为 j ，可选择物品为 $i, i+1, \dots, n$ 时 0-1 背包问题的最优解，给出计算 $m(i, j)$ 的递归式。

五、对于贪心算法，试解答：（1 题 3 分，2 题 10 分，共 13 分）

1. 贪心选择性质是什么？
2. 程序存储问题：设有 n 个程序 $\{1, 2, \dots, n\}$ 要存放在长度为 L 的磁带上。程序 i 存放在磁带上的长度是 L_i ， $1 \leq i \leq n$ 。编程任务：对于给定的 n 个程序存放在磁带上的长度，编写算法计算磁带上最多可以存储的程序数。

六、对于回溯和分支限界法，试解答：（1 题 5 分，2 题 2 分，3 题 6 分，4 题 12 分，共 25 分）

1. 试述回溯法的基本思想。
2. 写出回溯法的两种解空间树。
3. 常见的分支限界法有几种？它们的区别是什么？
4. 假设有 7 个物品，它们的重量和价值如下表所示。若这些物品均不能被分割，且背包容量 $M=150$ ，使用回溯方法求解此背包问题。请写出状态空间搜索树。

物品	A	B	C	D	E	F	G
重量	35	30	60	50	40	10	25
价值	10	40	30	50	35	40	30

一、简答题（1题4分，2题4分，3题6分，共14分）

1. 算法是指解决问题的一种方法或一个过程。……………【2分】
程序是算法用某种程序设计语言的具体实现……………【2分】
2. 算法的特点：
 - （1）确定性：算法的每一种运算必须有确切的定义，无二义性。……………【1分】
 - （2）有限性：算法中每条指令的执行次数、每条指令的执行时间都是有限的。…【1分】
 - （3）输入：有0个或者多个输入。……………【1分】
 - （4）输出：有1个或者多个输出。……………【1分】
3. 算法复杂度计量符号O和 Ω 的定义：
 - （1） $O(g(n)) = \{f(n) \mid \text{存在正常数 } c \text{ 和 } n_0 \text{ 使得对所有 } n \geq n_0 \text{ 有: } 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$ ，记为 $f(n) = O(g(n))$ ，或说 $f(n)$ 的阶不高于 $g(n)$ 的阶 当 $n \rightarrow \infty$ 时。……………【3分】
 - （2） $\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \text{存在正常数 } c \text{ 和 } n_0 \text{ 使得对所有 } n \geq n_0 \text{ 有: } 0 \leq cg(n) \leq f(n)\}$ ，记为 $f(n) = \Omega(g(n))$ ，或说 $f(n)$ 的阶不低于 $g(n)$ 的阶 当 $n \rightarrow \infty$ 时。……………【3分】

二、算法复杂度计算（10分）

原式等价于 $T(n) = 2T(n/2) + n$

递推得: $2T(n/2) = 2(2T(n/2^2) + n/2) = 2^2T(n/2^2) + n$

$$T(n) = 2^2T(n/2^2) + 2n$$

又有: $2^2T(n/2^2) = 2^3T(n/2^3) + n$

故 $T(n) = 2^3T(n/2^3) + 3n$ ……………【2分】

……………

$$T(n) = 2^kT(n/2^k) + kn \quad \text{……………【4分】}$$

令 $k = \log n$ ，即 $n/2^k = 1$ 得：

$$T(n) = nT(1) + n \log n = O(n \log n) \quad \text{……………【4分】}$$

三、对于分治法，试解答：（1、2题各5分，3题8分，共18分）

1. 分治法的基本思想：将一个规模为 n 的问题分解为 k 个规模较小的子问题，这些子问题互相独立且与原问题相同。递归地解这些子问题，然后将各子问题的解合并得到原问题的解。……………【5分】
2. 分治法的一般算法设计模式（伪代码描述）

divide-and-conquer(P)

{

if ($|P| \leq n_0$) **adhoc**(P);

divide P into smaller subinstances P_1, P_2, \dots, P_k ; ……………【2分】

for ($i=1, i \leq k, i++$)

$y_i = \text{divide-and-conquer}(P_i)$;

return merge(y_1, \dots, y_k);

} 【3 分】

3. template<class Type>

int Search(Type a[],int n)

{

Int l=0; int r=n-1;

while (r >= l){

int m = (l+r)/2;

if (m == a[m]) return m;

if (m < a[m]) r = m-1; else l = m+1;

}

return -1;

} 【5 分】

四、对于动态规划算法，试解答：（1 题 4 分，2 题 6 分，3 题 10 分，共 20 分）

1. 动态规划算法的两个基本要素：最优子结构性质、子问题的重叠性质 【2 分】

问题的最优解包含着其子问题的最优解，这种性质称为最优子结构性质。..... 【2 分】

递归算法求解问题时，每次产生的子问题并不总是新问题，有些子问题被反复计算多次。

这种性质称为子问题的重叠性质。..... 【2 分】

2. 动态规划基本步骤：

（1） 找出最优解的性质，并刻画其结构特征。

（2） 递归地定义最优值。

（3） 以自底向上的方式计算最优值。

（4） 根据计算最优值时得到的信息，构造最优解。..... 【4 分】

3. (1) 设(y1, y2, ..., yn)是所给 0-1 背包问题的一个最优解，则(y2, ..., yn)是下面对应问题的最优解

$$\max \sum_{i=2}^n v_i x_i$$

$$\sum_{i=2}^n w_i x_i \leq c - w_1 x_1,$$

$$x_i \in \{0,1\}, 2 \leq i \leq n$$

否则，设(z2, ..., zn)是最优解，则(y1, z2, ..., zn)是原问题的更优解，而(y1, y2, ..., yn)不是最优解。矛盾，证毕。..... 【5 分】

$$(2) m(i, j) = \begin{cases} \max \{m(i+1, j), m(i+1, j-w_i) + v_i\} & j \geq w_i \\ m(i+1, j) & 0 \leq j \leq w_i \end{cases} \dots\dots\dots \text{【5 分】}$$

五、对于贪心算法，试解答：（1 题 3 分，2 题 10 分，共 13 分）

1. 贪心选择性质是指所求问题的整体最优解可以通过一系列局部最优的选择（即贪心选择）

来达到。.....【3分】

2. int store(int x[],int n, int l)

// x 为程序长度数组，n 为要存储的程序个数，l 为磁带长度；

{int i=0, sum=0;

sort(x[],n) //先对程序长度数组排序，结果存在 x 中【3分】

while(i<n){

sum=sum+x[i];

if(sum<=l) i++;【2分】

else

return i; //只存储前 i 个最短的【3分】

}//while

return n; //所有的程序都能存储【2分】

}

评分说明：算法不一定要完全相同，只要思路正确，可以酌情给分。

六、对于回溯和分支限界法，试解答：（1 题 5 分，2 题 2 分，3 题 6 分，4 题 12 分，共 25 分）

1. 回溯法的基本思想是：为了避免生成那些不可能产生最佳解的问题状态，要不断地利用限界函数来处死那些实际上不可能产生所需解的活结点，以减少问题的计算量。具有限界函数的深度优先生成法称为回溯法。【5分】

2. 回溯法的两种解空间树：子集树和排列树.....【2分】

3. 常见的两种分支限界法：队列式(FIFO)分支限界法--将活结点表组织成一个队列，按照先进先出（FIFO）原则选取下一个结点为扩展结点；优先队列式分支限界法--将活结点表组织成一个优先队列，按照规定的优先级选取优先级最高的结点成为当前扩展结点。.....【6分】

4. 解：按照单位效益从大到小依次排列这 7 个物品为：FBGDECA。将它们的序号分别记为 1~7。则可生产如下的状态空间搜索树。其中各个节点处的限界函数值通过如下方式求得：

a. $40 + 40 + 30 + 50 + 35 \times \frac{150-115}{40} = 190.625$ (1,1,1,1, $\frac{7}{8}$,0,0)

b. $40 + 40 + 30 + 50 + 30 \times \frac{150-115}{60} = 177.5$ (1,1,1,1,0, $\frac{7}{12}$,0)

c. $40 + 40 + 30 + 50 + 10 = 170$ (1,1,1,1,0,0,1)

d. $40 + 40 + 30 + 35 + 30 \times \frac{150-105}{60} = 167.5$ (1,1,1,0,1, $\frac{3}{4}$,0)

e. $40 + 40 + 50 + 35 + 30 \times \frac{150-130}{60} = 175$ (1,1,0,1,1, $\frac{1}{3}$,0)

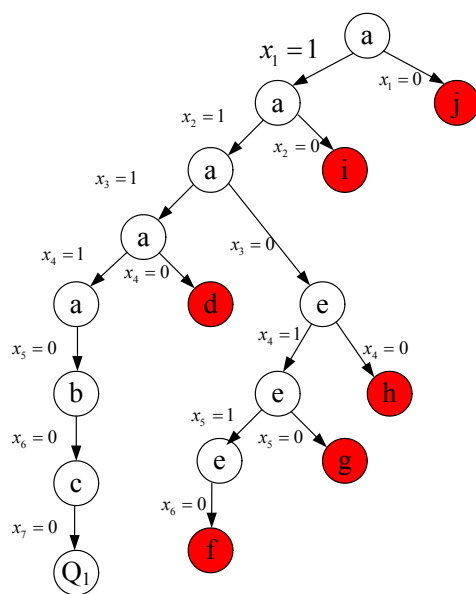
f. $40 + 40 + 50 + 35 + 10 \times \frac{150-130}{35} = 170.71$ (1,1,0,1,1,0, $\frac{4}{7}$)

g. $40 + 40 + 50 + 30 = 160$ (1,1,0,1,0,1,0)

h. $40 + 40 + 35 + 30 + 10 \times \frac{150 - 140}{35} = 146.85 \quad (1, 1, 0, 0, 1, 1, \frac{2}{7})$

i. $40 + 30 + 50 + 35 + 30 \times \frac{150 - 125}{60} = 167.5 \quad (1, 0, 1, 1, 1, \frac{5}{12}, 0)$

j. $40 + 30 + 50 + 35 + 30 \times \frac{150 - 145}{60} = 157.5 \quad (0, 1, 1, 1, 1, \frac{1}{12}, 0)$



在 Q_1 处获得该问题的最优解为 $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$ ，背包效益为 170。即在背包中装入物品 F、B、G、D、A 时达到最大效益，为 170，重量为 150。……………【12 分】

一、简答题（1 题 4 分，2 题 5 分，3 题 6 分，共 15 分）

1. 什么是算法？什么是程序？
2. 算法的特点是什么？
3. 给出算法复杂度计量符号 O 和 Ω 的定义。

二、对于分治法，试解答：（1、2 题各 10 分，共 20 分）

1. 给出利用分治策略的二分搜索技术的算法。
2. 对数组 $A=\{13, 27, 31, 1, 26, 23, 4\}$ ，用无递归的合并排序法将其排成递增序。（给出解题过程）。

三、对于动态规划算法，试解答：（1、2 题各 6 分，3 题 10 分，共 22 分）

1. 动态规划算法的两个基本要素，每个要素的含义是什么？
2. 写出动态规划算法解题的基本步骤。
3. 写出流水作业调度问题的 Johnson 不等式。用语言描述流水作业调度问题的 Johnson 算法。

四、对于贪心算法，试解答：（1 题 3 分，2 题 6 分，3 题 11 分共 20 分）

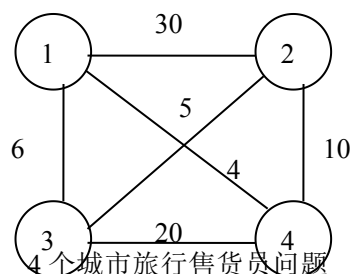
1. 贪心选择性质是什么？
2. 背包问题与 0-1 背包问题的不同点是什么？用贪心算法解背包问题的贪心策略是什么？
3. 写出用贪心算法解背包问题的基本步骤和具体算法。

五、对于回溯和分支限界法，试解答：（1 题 2 分，2 题 10 分，共 12 分）

1. 写出回溯法的两种解空间树。
2. 写出用回溯法搜索两种解空间树的算法框架。

六、对于分支限界法，试解答：（1 题 5 分，2 题 6 分，共 11 分）

1. 常见的分支限界法有几种？它们的区别是什么？
2. 给出图示 4 个城市旅行售货员问题分支限界法求解，要求使用优先队列式解法，给出搜索过程和所有最优解。



一、简答题（1 题 4 分，2 题 5 分，3 题 6 分，共 15 分）

1. 算法是指解决问题的一种方法或一个过程。……………【2 分】
程序是算法用某种程序设计语言的具体实现……………【2 分】
2. 算法的特点：
 - （1）确定性：算法的每一种运算必须有确切的定义，无二义性。……………【1 分】
 - （2）可行性：算法所描述的每一步必须是基本的、有意义的；而是算法执行的结果要能达到预期的目的。……………【1 分】
 - （3）有穷性：一个算法必须在执行有穷步之后终止，即必须在有限的时间内完成。【1 分】
 - （4）输入：有 0 个或者多个输入。……………【1 分】
 - （5）输出：有 1 个或者多个输出。……………【1 分】
3. 算法复杂度计量符号 O 和 Ω 的定义：
 - （1） $O(g(n)) = \{f(n) \mid \text{存在正常数 } c \text{ 和 } n_0 \text{ 使得对所有 } n \geq n_0 \text{ 有: } 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$ ，记为 $f(n) = O(g(n))$ ，或说 $f(n)$ 的阶不高于 $g(n)$ 的阶 当 $n \rightarrow \infty$ 时。……………【3 分】
 - （2） $\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \text{存在正常数 } c \text{ 和 } n_0 \text{ 使得对所有 } n \geq n_0 \text{ 有: } 0 \leq cg(n) \leq f(n)\}$ ，记为 $f(n) = \Omega(g(n))$ ，或说 $f(n)$ 的阶不低于 $g(n)$ 的阶 当 $n \rightarrow \infty$ 时。……………【3 分】

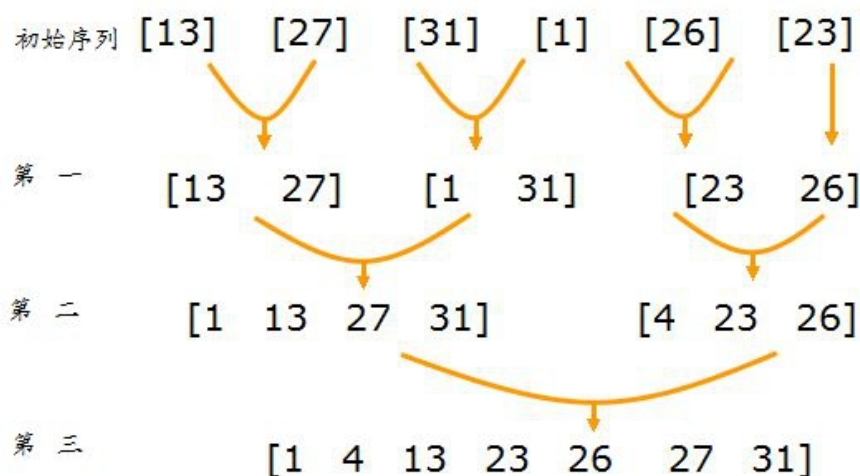
二、对于分治法，试解答：（1、2 题各 10 分，共 20 分）

1. 二分搜索算法：

设给定已按升序排好序的 n 个元素 $a[0:n-1]$ ，现要在这 n 个元素中找出一特定元素 x 。

```
template<class Type>
int BinarySearch(Type a[], const Type& x, int l, int r)
{
    while (r >= l){
        int m = (l+r)/2;
        if (x == a[m]) return m;
        if (x < a[m]) r = m-1; else l = m+1;
    }
    return -1;
} (10 分)
```

2. (10 分)



三、对于动态规划算法，试解答：（1、2题各6分，3题10分，共22分）

1. 动态规划算法的两个基本要素：最优子结构性、子问题的重叠性质…………【2分】

问题的最优解包含着其子问题的最优解，这种性质称为最优子结构性。……【2分】

递归算法求解问题时，每次产生的子问题并不总是新问题，有些子问题被反复计算多次。这种性质称为子问题的重叠性质。…………【2分】

2. 动态规划基本步骤：

（1）找出最优解的性质，并刻画其结构特征。

（2）递归地定义最优值。…………【3分】

（3）以自底向上的方式计算最优值。

（4）根据计算最优值时得到的信息，构造最优解。…………【3分】

3. 如果作业 i 和 j 满足 $\min\{b_i, a_j\} \geq \min\{b_j, a_i\}$ ，则称作业 i 和 j 满足 Johnson 不等式。【4分】

流水作业调度问题的 Johnson 算法：

(1) 令 $N_1 = \{i \mid a_i < b_i\}$, $N_2 = \{i \mid a_i \geq b_i\}$; ……………【2分】

(2) 将 N_1 中作业依 a_i 的非减序排序；将 N_2 中作业依 b_i 的非增序排…………【2分】

(3) N_1 中作业接 N_2 中作业构成满足 Johnson 法则的最优调度。…………【2分】

四、对于贪心算法，试解答：（1题3分，2题6分，3题11分共20分）

1. 贪心选择性质是指所求问题的整体最优解可以通过一系列局部最优的选择（即贪心选择）来达到。…………【3分】

2. 背包问题与 0-1 背包问题类似，所不同的是在选择物品 i 装入背包时，可以选择物品 i 的一部分，而不一定要全部装入背包， $1 \leq i \leq n$ 。…………【3分】

用贪心算法解背包问题的贪心策略：将物品单位重量的价值排序，将尽可能多的单位重量价值高的物品装入背包。…………【3分】

3. 贪心算法解背包问题的基本步骤：…………【5分】

(1) 计算每种物品单位重量的价值 v_i/w_i

(2) 依贪心选择策略，将尽可能多的单位重量价值最高的物品装入背包。

(3) 若将这种物品全部装入背包后，背包内的物品总重量未超过 C ，则选择单位重量价值次高的物品并尽可能多地装入背包。

(4) 依此策略一直地进行下去，直到背包装满为止。

具体算法：…………【6分】

```
void Knapsack(int n, float M, float v[], float w[], float x[])
{
    Sort(n, v, w);
    int i;
    for (i=1; i<=n; i++) x[i]=0;
    float c=M;
    for (i=1; i<=n; i++) {
        if (w[i]>c) break;
        x[i]=1;
        c-=w[i];
    }
    if (i<=n) x[i]=c/w[i];
}
```

五、对于回溯和分支限界法，试解答：（1 题 2 分，2 题 10 分，共 12 分）

1. 回溯法的两种解空间树：子集树和排列树……………【2 分】

2. //子集树算法框架(5 分)

```
void backtrack (int t)
{
    if (t>n) output(x);
    else
        for (int i=0;i<=1;i++) {
            x[t]=i;
            if (legal(t)) backtrack(t+1);
        }
```

```
} //legal:constraint &&bound
```

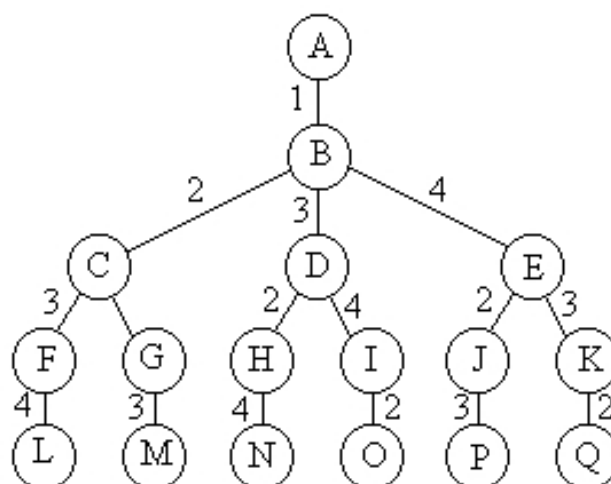
//排列树算法框架(5 分)

```
void backtrack (int t)
{
    if (t>n) output(x);
    else
        for (int i=t;i<=n;i++) {
            swap(x[t], x[i]);
            if (legal(t)) backtrack(t+1);
            swap(x[t], x[i]);
        }
}
```

六、对于分支限界法，试解答：（1 题 5 分，2 题 6 分，共 11 分）

1. 常见的两种分支限界法：队列式(FIFO)分支限界法--将活结点表组织成一个队列，按照先进先出（FIFO）原则选取下一个结点为扩展结点；优先队列式分支限界法--将活结点表组织成一个优先队列，按照规定的优先级选取优先级最高的结点成为当前扩展结点。…【5 分】

2.



优先队列搜索过程，用极小堆实现。

优先级为结点的当前费用。开始从结点 B 和空堆开始。C, D, E 插入堆中，E 为堆顶。E 为下一个扩展结点，J, K 插入堆中，堆顶为 D。扩展 D，H, I 插入堆，H 为堆顶。扩展 H 后得到一个解 (1, 3, 2, 4, 1)，费用为 25。下一步扩展 J，得到另一个解 (1, 4, 2, 3, 1) 费用也为 25 (2 分)。继续直到队列为空，没有更好的解 (6 分)

一、简答题（1 题 4 分，2 题 4 分，3 题 6 分，共 14 分）

1. 算法的特点是什么？
2. 给出算法渐进复杂性的定义。
3. 给出算法复杂度计量符号 O 和 Ω 的定义。

二、算法复杂度计算（10 分）

已知某算法耗时为 $T(n)$ ，且满足如下递归方程

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 0 \\ 4T(n-1) + O(1) & n > 0 \end{cases}$$

试计算该算法的时间复杂度 $T(n)$ 。

三、对于分治法，试解答：（1 题 5 分，2 题 8 分，共 13 分）

1. 试给出分治法的一般算法设计模式，用伪代码描述或详述解题步骤。
2. 设 n 个不同的整数排好序后存于 $T[0..n-1]$ 中。若存在一个下标 i ， $0 \leq i < n$ ，使得 $T[i]=i$ ，设计一个有效算法找到这个下标。要求算法在最坏情况下的计算时间为 $O(\log n)$ 。

四、对于动态规划算法，试解答：（1 题 4 分，2 题 6 分，3 题 10 分，4 题 5 分，共 25 分）

1. 写出动态规划算法解题的基本步骤。
2. 最长公共子序列问题的最优子结构性质是什么。
3. 使用动态规划方法，求解如下矩阵连乘问题：已知有 4 个矩阵 $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{r_k \times r_{k+1}}$ ($k=1,2,3,4$)，其中 $r_1=5$ ， $r_2=10$ ， $r_3=3$ ， $r_4=12$ ， $r_5=5$ ，求矩阵连乘积 $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ 的最佳求积顺序。（要求：写出 $m(i,j)$ 、 $s(i,j)$ 矩阵并给出计算过程）。
4. 0-1 背包问题：给定 n 个物品和一个背包。物品 i 的重量为 w_i ，价值为 v_i ，背包容量为 c 。问如何选择装入背包中的物品，使得装入背包的物品的价值最大？在装入背包时，每种物品 i 只有两种选择，装入或者不装入，既不能装入多次，也不能只装入一部分。

其形式化描述为：问题的形式描述是：给定 $c > 0$ ， $w_i > 0$ ， $v_i > 0$ ， $1 \leq i \leq n$ ，求 n 元 0-1 向量 (x_1, x_2, \dots, x_n) ，使得

$$\text{目标函数} \quad \max \sum_{i=1}^n v_i x_i$$

$$\text{约束条件} \quad \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c,$$

$$x_i \in \{0,1\}, 1 \leq i \leq n$$

用动态规划方法可以求解 0-1 背包问题，证明该问题具有最优子结构性质。

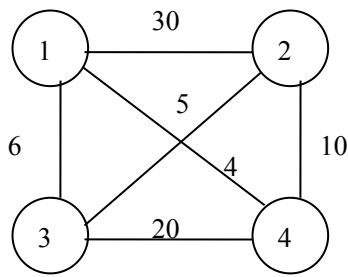
五、对于贪心算法，试解答：（1 题 6 分，2 题 10 分，共 16 分）

1. 写出贪心算法的两个重要性质及其定义。
2. 程序存储问题：设有 n 个程序 $\{1,2,\dots,n\}$ 要存放在长度为 L 的磁带上。程序 i 存放在磁带上的长度是 L_i ，

$1 \leq i \leq n$ 。编程任务：对于给定的 n 个程序存放在磁带上的长度，编写算法计算磁带上最多可以存储的程序数。

六、对于回溯和分支限界法，试解答：（1 题 6 分，2 题 6 分，3 题 10 分，共 22 分）

- 1. 写出用回溯法搜索子集树和排列树的算法框架。
- 2. 常见的分支限界法有几种？它们的区别是什么？
- 3. 给出图示 4 个城市旅行售货员问题分支限界法求解，要求使用优先队列式解法，画出解空间树，写出搜索过程和所有最优解。假设第 1 个城市为出发城市，优先级为结点的当前费用。



4 个城市旅行售货员问题

一、简答题（1 题 4 分，2 题 4 分，3 题 6 分，共 14 分）

1. 算法的特点：

- (1) 确定性：算法的每一种运算必须有确切的定义，无二义性。……………【1 分】
- (2) 有限性：算法中每条指令的执行次数、每条指令的执行时间都是有限的。…【1 分】
- (3) 输入：有 0 个或者多个输入。……………【1 分】
- (4) 输出：有 1 个或者多个输出。……………【1 分】

2. 算法的渐近复杂性：对于 $T(n)$ ，如果存在 $t(n)$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $(T(n)-t(n))/T(n) \rightarrow 0$ ，称 $t(n)$ 是 $T(n)$ 的渐近性态，或为算法的渐近复杂性。在数学上， $t(n)$ 是 $T(n)$ 的渐近表达式，是 $T(n)$ 略去低阶项留下的主项。……………【4 分】

3. 算法复杂度计量符号 O 和 Ω 的定义：

- (1) $O(g(n)) = \{f(n) \mid \text{存在正常数 } c \text{ 和 } n_0 \text{ 使得对所有 } n \geq n_0 \text{ 有: } 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$ ，记为 $f(n) = O(g(n))$ ，或说 $f(n)$ 的阶不高于 $g(n)$ 的阶 当 $n \rightarrow \infty$ 时。……………【3 分】
- (2) $\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \text{存在正常数 } c \text{ 和 } n_0 \text{ 使得对所有 } n \geq n_0 \text{ 有: } 0 \leq cg(n) \leq f(n)\}$ ，记为 $f(n) = \Omega(g(n))$ ，或说 $f(n)$ 的阶不低于 $g(n)$ 的阶 当 $n \rightarrow \infty$ 时。……………【3 分】

二、算法复杂度计算（10 分）

原式等价于 $T(k)=4T(k-1)+1$

递推得: $4T(k-1)=4(4T(k-2)+1)=4^2T(k-2)+4$

$$T(k)=4^2T(k-2)+4+1$$

又有: $4^2T(k-2)=4^3T(k-3)+4^2$

故 $T(k)=4^3T(k-3)+4^2+4+1$ ……………【5 分】

……………

$$T(k)=4^kT(0)+4^{k-1}+\cdots+4+1=O(4^k) \quad \text{……………【5 分】}$$

三、对于分治法，试解答：（1 题 5 分，2 题 8 分，共 13 分）

1. 分治法的一般算法设计模式（伪代码描述）

divide-and-conquer(P)

```
{
    if (|P| <= n0) adhoc(P);
    divide P into smaller subinstances  $P_1, P_2, \dots, P_k$ ; ……………【2 分】
    for ( $i=1, i \leq k, i++$ )
         $y_i = \text{divide-and-conquer}(P_i)$ ;
    return merge( $y_1, \dots, y_k$ );
} ……………【3 分】
```

2. template<class Type>

int Search(Type a[],int n)

```
{
    Int l=0; int r=n-1;
```

```

while (r >= l){
    int m = (l+r)/2;
    if (m == a[m]) return m;
    if (m < a[m]) r = m-1; else l = m+1;
}
return -1;
} ..... 【8 分】

```

四、对于动态规划算法，试解答：（1 题 4 分，2 题 6 分，3 题 10 分，4 题 5 分，共 25 分）

1 动态规划基本步骤：

- (1) 找出最优解的性质，并刻画其结构特征。
- (2) 递归地定义最优值。
- (3) 以自底向上的方式计算最优值。
- (4) 根据计算最优值时得到的信息，构造最优解。..... 【4 分】

2. 最长公共子序列问题的最优子结构性质：

设序列 $X=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 和 $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 的最长公共子序列为 $Z=\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ ，则

- (1) 若 $x_m=y_n$ ，则 $z_k=x_m=y_n$ ，且 z_{k-1} 是 x_{m-1} 和 y_{n-1} 的最长公共子序列。
- (2) 若 $x_m \neq y_n$ 且 $z_k \neq x_m$ ，则 Z 是 x_{m-1} 和 Y 的最长公共子序列。
- (3) 若 $x_m \neq y_n$ 且 $z_k \neq y_n$ ，则 Z 是 X 和 y_{n-1} 的最长公共子序列。..... 【6 分】

3. 求解矩阵为：

	1	2	3	4
1	0	150	330	405
2		0	360	330
3			0	180
4				0

..... 【4 分】

	1	2	3	4
1	0	1	2	2
2		0	2	2
3			0	3
4				0

..... 【4 分】

因此，最佳乘积序列为 $(A_1 A_2) (A_3 A_4)$ ，共执行乘法 405 次。..... 【2 分】

4. 设 (y_1, y_2, \dots, y_n) 是所给 0-1 背包问题的一个最优解，则 (y_2, \dots, y_n) 是下面对应问题的最优解

$$\max \sum_{i=2}^n v_i x_i$$

$$\sum_{i=2}^n w_i x_i \leq c - w_1 x_1,$$

$$x_i \in \{0,1\}, 2 \leq i \leq n$$

否则，设 (z_2, \dots, z_n) 是最优解，则 (y_1, z_2, \dots, z_n) 是原问题的更优解，而 (y_1, y_2, \dots, y_n) 不是最优解。矛盾，证毕。……………【5分】

五、对于贪心算法，试解答：（1题6分，2题10分，共16分）

1. 贪心算法的两个重要性质及其定义。

最优子结构性质和贪心选择性质

问题的最优解包含着其子问题的最优解，这种性质称为最优子结构性质。

贪心选择性质是指所求问题的整体最优解可以通过一系列局部最优的选择（即贪心选择）来达到。……………【6分】

2. int store(int x[],int n, int l)

// x 为程序长度数组，n 为要存储的程序个数，l 为磁带长度；

{int i=0, sum=0;

sort(x[],n) //先对程序长度数组排序，结果存在 x 中 ……………【3分】

while(i<n){

sum=sum+x[i];

if(sum<=l) i++; ……………【2分】

else

return i; //只存储前 i 个最短的 ……………【3分】

}//while

return n; //所有的程序都能存储 ……………【2分】

}

评分说明：算法不一定要完全相同，只要思路正确，可以酌情给分。

六、对于回溯和分支限界法，试解答：（1题6分，2题6分，3题10分，共22分）

1. //子集树算法框架(3分)

void backtrack (int t)

{

if (t>n) output(x);

else

for (int i=0;i<=1;i++) {

x[t]=i;

if (legal(t)) backtrack(t+1);

}

}//legal:constraint &&bound

//排列树算法框架(3分)

void backtrack (int t)

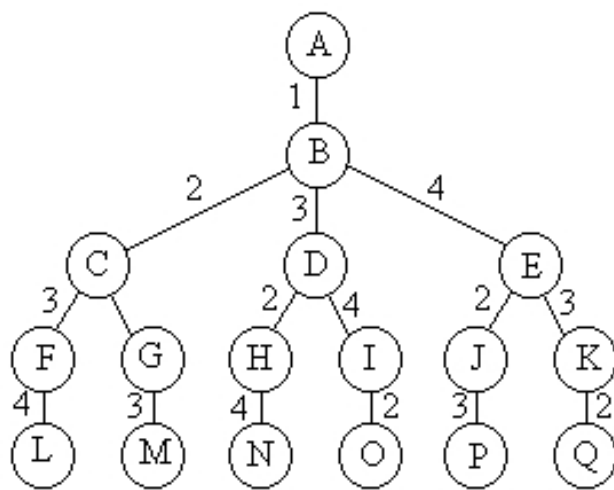

```

{
    if (t>n) output(x);
    else
        for (int i=t;i<=n;i++) {
            swap(x[t], x[i]);
            if (legal(t)) backtrack(t+1);
            swap(x[t], x[i]);
        }
}

```

2. 常见的两种分支限界法：队列式(FIFO)分支限界法--将活结点表组织成一个队列，按照先进先出（FIFO）原则选取下一个结点为扩展结点；优先队列式分支限界法--将活结点表组织成一个优先队列，按照规定的优先级选取优先级最高的结点成为当前扩展结点。……【6分】

3.



优先队列搜索过程，用极小堆实现。

优先级为结点的当前费用。开始从结点 B 和空堆开始。C, D, E 插入堆中，E 为堆顶。E 为下一个扩展结点，J, K 插入堆中，堆顶为 D。扩展 D，H, I 插入堆，H 为堆顶。扩展 H 后得到一个解 (1, 3, 2, 4, 1)，费用为 25。下一步扩展 J，得到另一个解 (1, 4, 2, 3, 1) 费用也为 25。继续直到队列为空，没有更好的解。……【10分】

一、简答题（1 题 6 分，2 题 3 分，3 题 6 分，共 15 分）

- 1. 写出算法的三种时间复杂性并写出他们的数学表示。
- 2. 写出算法渐进复杂性的定义。
- 3. 写出算法复杂度计量符号 θ 和小 o 的定义。

二、对于分治法，试解答：（1 题 10 分，2 题 9 分，共 19 分）

- 1. 写出利用分治策略的二分搜索技术的算法。
- 2. 对数组 $A=\{13, 27, 31, 1, 26, 23, 4\}$ ，用无递归的合并排序法将其排成递增序。（给出解题过程）。

三、对于动态规划算法，试解答：（1、2 题各 6 分，3 题 8 分，共 20 分）

- 1. 备忘录方法与动态规划算法的相同点和不同点分别是什么？
- 2. 最长公共子序列问题的最优子结构性质是什么。
- 3. 写出流水作业调度问题的 Johnson 不等式。用语言描述流水作业调度问题的 Johnson 算法。

四、对于贪心算法，试解答：（1 题 6 分，2 题 6 分，3 题 10 分共 22 分）

- 1. 写出贪心算法的两个重要性质及其定义。
- 2. 写出用 Prim 算法求解最小生成树问题的基本思想和算法描述。
- 3. 假定某数据文件仅由 8 个字母 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8$ 组成，各字母在文件中出现的次数分别为 5, 25, 3, 6, 10, 11, 36, 4。试为这 8 个字母设计不等长 Huffman 编码, 画出相应的 Huffman 树，并给出该文件的总长度（10 分）。

五、对于回溯和分支限界法，试解答：（1 题 6 分，2 题 6 分，3 题 12 分，共 24 分）

- 1. 写出用递归和非递归实现回溯法的算法框架
- 2. 分支限界法分为哪两种？写出每一种分支限界法的特点。
- 3. 假设有 7 个物品，它们的重量和价值如下表所示。若这些物品均不能被分割，且背包容量 $M=150$ ，使用回溯方法求解此背包问题。请写出状态空间搜索树。

物品	A	B	C	D	E	F	G
重量	35	30	60	50	40	10	25
价值	10	40	30	50	35	40	30

一、简答题（1 题 6 分，2 题 3 分，3 题 6 分，共 15 分）

1. 写出算法的三种时间复杂度并写出数学表示。

(1) 最坏情况下的时间复杂性

$$T_{\max}(n) = \max \{ T(i) \mid \text{size}(i)=n \}$$

可操作性最好，最有实际价值，本书重点。

(2) 最好情况下的时间复杂性

$$T_{\min}(n) = \min \{ T(i) \mid \text{size}(i)=n \}$$

(3) 平均情况下的时间复杂性

$$T_{\text{avg}}(n) = \sum_{\text{size}(I)=n} p(I)T(I)$$

其中 i 是问题的规模为 n 的实例， $p(i)$ 是实例 I 出现的概率。

2. 给出算法的渐进复杂性的定义。

算法的渐近复杂性：对于 $T(n)$ ，如果存在 $t(n)$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $(T(n)-t(n))/T(n) \rightarrow 0$ ，称 $t(n)$ 是 $T(n)$ 的渐近性态，或为算法的渐近复杂性。

3. 给出算法复杂度计量符号 θ 和小 o 的定义。

$$\theta(g(n)) = \{f(n) \mid \text{存在正常数 } c_1, c_2 \text{ 和 } n_0 \text{ 使得对所有 } n \geq n_0 \text{ 有: } c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

$$o(g(n)) = \{f(n) \mid \text{对于任何正常数 } c > 0, \text{ 存在正数和 } n_0 > 0 \text{ 使得对所有 } n \geq n_0 \text{ 有: } 0 \leq f(n) < c g(n)\}$$

二、对于分治法，试解答：（1 题 10 分，2 题 9 分，共 19 分）

1. 二分搜索算法：

设给定已按升序排好序的 n 个元素 $a[0:n-1]$ ，现要在这 n 个元素中找出一特定元素 x 。

```
template<class Type>
```

```
int BinarySearch(Type a[], const Type& x, int l, int r)
```

```
{
    while (r >= l){
        int m = (l+r)/2;
        if (x == a[m]) return m;
        if (x < a[m]) r = m-1; else l = m+1;
    }
    return -1;
}
```

} （10 分）

三、对于动态规划算法，试解答：（1、2 题各 6 分，3 题 8 分，共 20 分）

1. 备忘录方法与动态规划算法的相同点和不同点分别是什么？

相同点：是动态规划算法的变形，用表格保存已经计算的子问题的解备查。

不同点：递归方式不同—备忘录方法自顶向下递归；而动态规划自底向上的递归。

2. 最长公共子序列问题的最优子结构性是什么：

设序列 $X=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 和 $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 的最长公共子序列为 $Z=\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ ，则

(1)若 $xm=yn$, 则 $zk=xm=yn$, 且 $zk-1$ 是 $xm-1$ 和 $yn-1$ 的最长公共子序列。 (反证法, 两个结论)

(2)若 $xm \neq yn$ 且 $zk \neq xm$, 则 Z 是 $xm-1$ 和 Y 的最长公共子序列。

(3)若 $xm \neq yn$ 且 $zk \neq yn$, 则 Z 是 X 和 $yn-1$ 的最长公共子序列。

3. 如果作业 i 和 j 满足 $\min\{b_i, a_j\} \geq \min\{b_j, a_i\}$, 则称作业 i 和 j 满足 Johnson 不等式。

流水作业调度问题的 Johnson 算法:

(1)令 $N_1 = \{i | a_i < b_i\}$, $N_2 = \{i | a_i \geq b_i\}$;

(2)将 N_1 中作业依 a_i 的非减序排序; 将 N_2 中作业依 b_i 的非增序排

(3) N_1 中作业接 N_2 中作业构成满足 Johnson 法则的最优调度。

四、对于贪心算法, 试解答: (1 题6分, 2 题 6 分, 3 题 10 分共 22 分)

1. 写出贪心算法的两个重要性质及其定义。

最优子结构性质和贪心选择性质

问题的最优解包含着其子问题的最优解, 这种性质称为最优子结构性质。

贪心选择性质是指所求问题的整体最优解可以通过一系列局部最优的选择(即贪心选择)来达到。

2. 写出用 Prim 算法求解最小生成树问题的基本思想和算法描述。

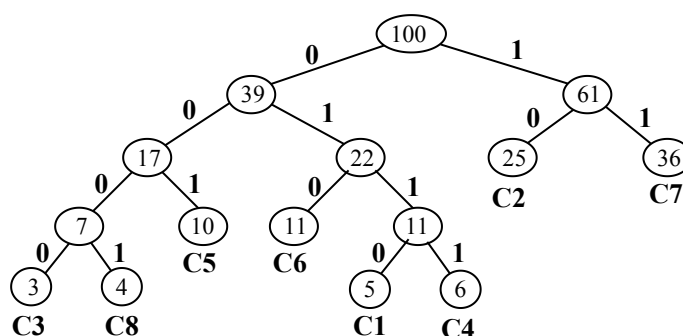
基本思想: 在保证连通的前提下依次选出权重较小的 $n - 1$ 条边。 $G=(V, E)$ 为无向连通带权图, 令 $V=\{1, 2, \dots, n\}$ 。设置一个集合 S , 初始化 $S = \{1\}$, $T = \Phi$ 。

贪心策略: 如果 $V - S$ 中的顶点 j 与 S 中的某个点 i 连接, 且 (i, j) 是 E 中的权重最小的边, 则选择 j (将 j 加入 S), 并将 (i, j) 加入 T 中。重复执行贪心策略, 直至 $V - S$ 为空。

Void (int n, Type * * c)

```
{
    T=Ø;
    S={1};
    While (S!=V) {
        (i, j)=i∈S 且 j∈V-S 的最小权边;
        T=T ∪ {(i, j)};
        S=S ∪ {j};
    }
}
```

3. 已知字母集 $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\}$, 频率 $\{5, 25, 3, 6, 10, 11, 36, 4\}$, 则 Huffman 树为



Huffman 编码为

c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8
0110	10	0000	0111	001	010	11	0001

总码数为 $4 * 5 + 2 * 25 + 4 * 3 + 4 * 6 + 3 * 10 + 3 * 11 + 2 * 36 + 4 * 4 = 257$ (10 分)

五、对于回溯和分支限界法，试解答：(1 题 6 分，2 题 6 分，3 题 12 分，共 24 分)

1. 递归回溯

```
void backtrack (int t)
{
    if (t>n) output(x);
    else
        for (int i=f(n,t);i<=g(n,t);i++) {
            x[t]=h(i);
            if (constraint(t)&&bound(t)) backtrack(t+1);
        }
```

非递归实现回溯

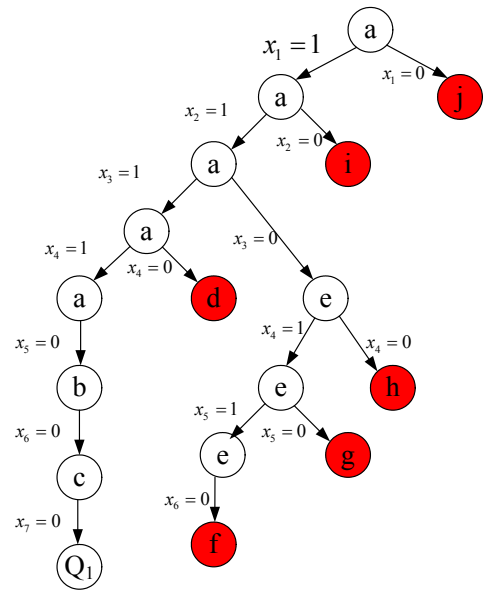
```
void iterativeBacktrack ( )
{
    int t=1;
    while (t>0) {
        if (f(n,t)<=g(n,t))
            for (int i=f(n,t);i<=g(n,t);i++) {
                x[t]=h(i);
                if (constraint(t)&&bound(t)) {
                    if (solution(t)) output(x);
                    else t++;}
            }
        else t--;
    }
```

2. 常见的两种分支限界法：队列式(FIFO)分支限界法--将活结点表组织成一个队列，按照先进先出(FIFO)原则选取下一个结点为扩展结点；优先队列式分支限界法--将活结点表组织成一个优先队列，按照规定的优先级选取优先级最高的结点成为当前扩展结点。

3. 解：按照单位效益从大到小依次排列这 7 个物品为：FBGDECA。将它们的序号分别记为 1~7。则可生产如下的状态空间搜索树。其中各个节点处的限界函数值通过如下方式求得：

$$a. \quad 40 + 40 + 30 + 50 + 35 \times \frac{150 - 115}{40} = 190.625 \quad (1, 1, 1, 1, \frac{7}{8}, 0, 0)$$

- b. $40 + 40 + 30 + 50 + 30 \times \frac{150 - 115}{60} = 177.5$ $(1, 1, 1, 1, 0, \frac{7}{12}, 0)$
- c. $40 + 40 + 30 + 50 + 10 = 170$ $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$
- d. $40 + 40 + 30 + 35 + 30 \times \frac{150 - 105}{60} = 167.5$ $(1, 1, 1, 0, 1, \frac{3}{4}, 0)$
- e. $40 + 40 + 50 + 35 + 30 \times \frac{150 - 130}{60} = 175$ $(1, 1, 0, 1, 1, \frac{1}{3}, 0)$
- f. $40 + 40 + 50 + 35 + 10 \times \frac{150 - 130}{35} = 170.71$ $(1, 1, 0, 1, 1, 0, \frac{4}{7})$
- g. $40 + 40 + 50 + 30 = 160$ $(1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$
- h. $40 + 40 + 35 + 30 + 10 \times \frac{150 - 140}{35} = 146.85$ $(1, 1, 0, 0, 1, 1, \frac{2}{7})$
- i. $40 + 30 + 50 + 35 + 30 \times \frac{150 - 125}{60} = 167.5$ $(1, 0, 1, 1, 1, \frac{5}{12}, 0)$
- j. $40 + 30 + 50 + 35 + 30 \times \frac{150 - 145}{60} = 157.5$ $(0, 1, 1, 1, 1, \frac{1}{12}, 0)$



在 Q_1 处获得该问题的最优解为 $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$ ，背包效益为 170。即在背包中装入物品 F、B、G、D、A 时达到最大效益，为 170，重量为 150。