

2007 年研究生入学考试数学三试题

一、选择题：1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

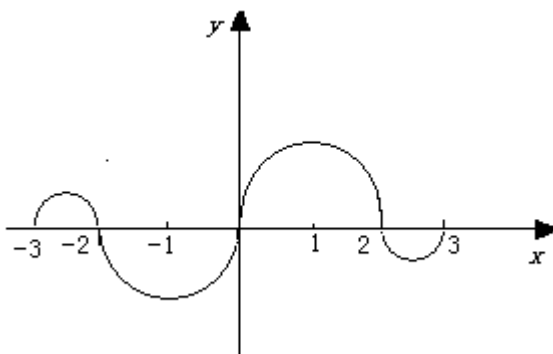
(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时，与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$ []

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是：

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$ (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.
 (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)=0$ (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)=0$.
 []

(3) 如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3, -2], [2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2, 0], [0, 2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周，设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ，则下列结论正确的是：



- (A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$ (B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$
 (C) $F(3) = \frac{3}{4}F(2)$ (D) $F(3) = -\frac{5}{4}F(-2)$ []

(4) 设函数 $f(x, y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y)dy$ 等于

- (A) $\int_0^1 dy \int_{\pi+\arcsin y}^{\pi} f(x, y)dx$ (B) $\int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x, y)dx$
 (C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y} f(x, y)dx$ (D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y} f(x, y)dx$

(5) 设某商品的需求函数为 $Q=160-2P$ ，其中 Q, P 分别表示需要量和价格，如果该商品需求弹性的绝对值

等于 1, 则商品的价格是

- (A) 10. (B) 20 (C) 30. (D) 40. []

(6) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的渐近线的条数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. []

(7) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

线性相关, 则

- (A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$
(C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$. (D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$. []

(8) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B

- (A) 合同且相似 (B) 合同, 但不相似. (C) 不合同, 但相似. (D) 既不合同也不相似 []

(9) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次击中目标的概率为

- (A) $3p(1-p)^2$. (B) $6p(1-p)^2$.
(C) $3p^2(1-p)^2$. (D) $6p^2(1-p)^2$ []

(10) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x), f_Y(y)$ 分别表示 X, Y 的概率密度, 则在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为

- (A) $f_X(x)$. (B) $f_Y(y)$. (C) $f_X(x)f_Y(y)$. (D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$. []

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中横线上.

(11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) =$ _____.

(12) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) =$ _____.

(13) 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

(14) 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y|_{x=1} = 1$ 的特解为 $y =$ _____.

(15) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为_____.

(16) 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为_____.

三、解答题: 17~24 小题, 共 86 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y \ln y - x + y = 0$ 确定, 试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

(18) (本题满分 11 分)

设二元函数 $f(x,y) = \begin{cases} x^2, & |x|+|y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1 < |x|+|y| \leq 2 \end{cases}$, 计算二重积分 $\iint_D f(x,y) d\sigma$, 其中

$$D = \{(x,y) \mid |x|+|y| \leq 2\}.$$

(19) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值,

$f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(20) (本题满分 10 分)

将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

(21) (本题满分 11 分)

设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 与方程 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1$ 有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

(22) (本题满分 11 分)

设三阶对称矩阵 A 的特征向量值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量,

记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B .

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2-x-y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(I) 求 $P\{X > 2Y\}$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

2007 答案

1....【分析】本题为等价无穷小的判定, 利用定义或等价无穷小代换即可.

【详解】当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $1 - e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x}$, $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$, $1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}x$,

故用排除法可得正确选项为 (B).

$$\text{事实上, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 1,$$

$$\text{或 } \ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln(1+x) - \ln(1-\sqrt{x}) = x + o(x) + \sqrt{x} + o(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}.$$

所以应选 (B)

【评注】本题为关于无穷小量比较的基本题型, 利用等价无穷小代换可简化计算.

2.....【分析】本题考查可导的极限定义及连续与可导的关系. 由于题设条件含有抽象函数, 本题最简便的方法是用赋值法求解, 即取符合题设条件的特殊函数 $f(x)$ 去进行判断, 然后选择正确选项.

【详解】取 $f(x) = |x|$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = 0$, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 不可导, 故选 (D).

事实上,

在(A),(B)两项中, 因为分母的极限为 0, 所以分子的极限也必须为 0, 则可推得 $f(0) = 0$.

在 (C) 中, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0, f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 所以(C)项正确,

故选(D)

【评注】对于题设条件含抽象函数或备选项为抽象函数形式结果以及数值型结果的选择题, 用赋值法求解往往能收到奇效.

3.....【分析】本题实质上是求分段函数的定积分.

【详解】利用定积分的几何意义, 可得

$$F(3) = \frac{1}{2}\pi 1^2 - \frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}\pi, \quad F(2) = \frac{1}{2}\pi 2^2 = \frac{1}{2}\pi,$$

$$F(-2) = \int_0^{-2} f(x)dx = -\int_{-2}^0 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\pi 1^2 = \frac{1}{2}\pi.$$

所以 $F(3) = \frac{3}{4}F(2) = \frac{3}{4}F(-2)$, 故选 (C).

【评注】本题属基本题型. 本题利用定积分的几何意义比较简便.

4.....【分析】本题更换二次积分的积分次序, 先根据二次积分确定积分区域, 然后写出新的二次积分.

【详解】由题设可知, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \sin x \leq y \leq 1$, 则 $0 \leq y \leq 1, \pi - \arcsin y \leq x \leq \pi$,

故应选 (B).

【评注】本题为基础题型. 画图更易看出.

5.....【分析】本题考查需求弹性的概念.

【详解】选 (D).

商品需求弹性的绝对值等于 $\left| \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} \right| = \left| \frac{-2P}{160 - 2P} \right| = 1 \Rightarrow P = 40$,

故选 (D).

【评注】需掌握微积分在经济中的应用中的边际, 弹性等概念.

6.....【分析】利用曲线的渐近线的求解公式求出水平渐近线, 垂直渐近线和斜渐近线, 然后判断.

【详解】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = 0$,

所以 $y = 0$ 是曲线的水平渐近线;

$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = \infty$, 所以 $x = 0$ 是曲线的垂直渐近线;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)}{x} = 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1$,

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] = 0$, 所以 $y = x$ 是曲线的斜渐近线.

故选 (D).

【评注】本题为基本题型, 应熟练掌握曲线的水平渐近线, 垂直渐近线和斜渐近线的求法. 注意当曲线存在水平渐近线时, 斜渐近线不存在. 本题要注意 e^x 当 $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ 时的极限不同.

7.....【分析】本题考查由线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 构造的另一向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的线性相关性. 一般令

$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$, 若 $|A| = 0$, 则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关; 若 $|A| \neq 0$, 则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关. 但

考虑到本题备选项的特征, 可通过简单的线性运算得到正确选项.

【详解】 由 $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$ 可知应选 (A).

或者因为

$$(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 而 } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

所以 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关, 故选 (A).

【评注】 本题也可用赋值法求解, 如取 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1)^T$, 以此求出 (A), (B), (C), (D) 中的向量并分别组成一个矩阵, 然后利用矩阵的秩或行列式是否为零可立即得到正确选项.

8..... **【分析】** 本题考查矩阵的合同关系与相似关系及其之间的联系, 只要求得 A 的特征值, 并考虑到实对称矩阵 A 必可经正交变换使之相似于对角阵, 便可得到答案.

【详解】 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3)^2$ 可得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$,

所以 A 的特征值为 3, 3, 0; 而 B 的特征值为 1, 1, 0.

所以 A 与 B 不相似, 但是 A 与 B 的秩均为 2, 且正惯性指数都为 2, 所以 A 与 B 合同, 故选 (B).

【评注】 若矩阵 A 与 B 相似, 则 A 与 B 具有相同的行列式, 相同的秩和相同的特征值.

所以通过计算 A 与 B 的特征值可立即排除 (A) (C).

9..... **【分析】** 本题计算贝努里概型, 即二项分布的概率. 关键要搞清所求事件中的成功次数.

【详解】 $p = \{\text{前三次仅有一次击中目标, 第 4 次击中目标}\}$

$$= C_3^1 p(1-p)^2 p = 3p^2(1-p)^2,$$

故选 (C).

【评注】 本题属基本题型.

10..... **【分析】** 本题求随机变量的条件概率密度, 利用 X 与 Y 的独立性和公式

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \text{ 可求解.}$$

【详解】 因为 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, 所以 X 与 Y 独立, 所以 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.

$$\text{故 } f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x), \text{ 应选 (A).}$$

【评注】若 (X, Y) 服从二维正态分布, 则 X 与 Y 不相关与 X 与 Y 独立是等价的.

11....【分析】本题求类未定式, 可利用“抓大头法”和无穷小乘以有界量仍为无穷小的结论.

【详解】因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{2^x} + \frac{x^2}{2^x} + \frac{1}{2^x}}{1 + \frac{x^3}{2^x}} = \frac{0}{1} = 0, |\sin x + \cos x| < 2,$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = 0.$$

【评注】无穷小的相关性质:

- (1) 有限个无穷小的代数和为无穷小;
- (2) 有限个无穷小的乘积为无穷小;
- (3) 无穷小与有界变量的乘积为无穷小.

12,.....【分析】本题求函数的高阶导数, 利用递推法或函数的麦克老林展开式.

【详解】 $y = \frac{1}{2x+3}, y' = -\frac{2}{(2x+3)^2}$, 则 $y^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2x+3)^{n+1}}$, 故 $y^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$.

【评注】本题为基础题型.

13,.....【分析】本题为二元复合函数求偏导, 直接利用公式即可.

【详解】利用求导公式可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} f'_1 + \frac{1}{y} f'_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} f'_1 - \frac{x}{y^2} f'_2,$$

$$\text{所以 } x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = -2 \left(f'_1 \frac{y}{x} - f'_2 \frac{x}{y} \right).$$

【评注】二元复合函数求偏导时, 最好设出中间变量, 注意计算的正确性.

14,....【分析】本题为齐次方程的求解, 可令 $u = \frac{y}{x}$.

【详解】令 $u = \frac{y}{x}$, 则原方程变为

$$u + x \frac{du}{dx} = u - \frac{1}{2} u^3 \Rightarrow \frac{du}{u^3} = -\frac{dx}{2x}.$$

两边积分得

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln C,$$

即 $x = \frac{1}{C} e^{\frac{1}{u^2}} \Rightarrow x = \frac{1}{C} e^{\frac{y^2}{x^2}}$, 将 $y|_{x=1} = 1$ 代入左式得 $C = e$,

故满足条件的方程的特解为 $ex = e^{\frac{x^2}{y^2}}$, 即 $y = \frac{x}{\sqrt{\ln x + 1}}$, $x > e^{-1}$.

【评注】本题为基础题型.

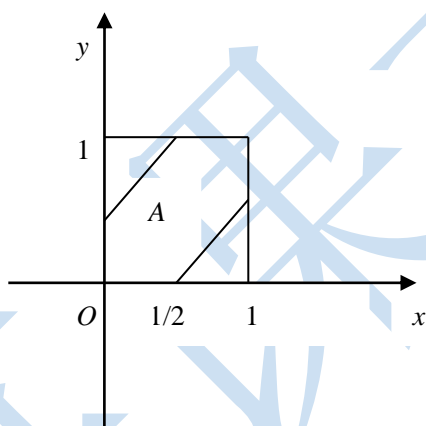
15.....【分析】先将 A^3 求出, 然后利用定义判断其秩.

【详解】 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 1.$

【评注】本题为基础题型.

16.....【分析】根据题意可得两个随机变量服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布, 利用几何概型计算较为简便.

【详解】利用几何概型计算. 图如下:



$$\text{所求概率} = \frac{S_A}{S_D} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} = \frac{3}{4}.$$

【评注】本题也可先写出两个随机变量的概率密度, 然后利用它们的独立性求得所求概率.

17.....【分析】由凹凸性判别方法和隐函数的求导可得.

【详解】方程 $y \ln y - x + y = 0$ 两边对 x 求导得

$$y' \ln y + y \frac{y'}{y} - 1 + y' = 0,$$

即 $y'(2+\ln y)=1$, 则 $y'(1)=\frac{1}{2}$.

上式两边再对 x 求导得

$$y''(2+\ln y)+\frac{(y')^2}{y}=0$$

则 $y''(1)=-\frac{1}{8}$, 所以曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近是凸的.

【评注】本题为基础题型.

18. 【分析】由于积分区域关于 x, y 轴均对称, 所以利用二重积分的对称性结论简化所求积分.

【详解】因为被积函数关于 x, y 均为偶函数, 且积分区域关于 x, y 轴均对称, 所以

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, \text{ 其中 } D_1 \text{ 为 } D \text{ 在第一象限内的部分.}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma &= \iint_{x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} x^2 d\sigma + \iint_{1 \leq x+y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{2-x} x^2 dy + \left(\int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dy \right) \\ &= \frac{1}{12} + \sqrt{2} \ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \iint_D f(x, y) d\sigma = \frac{1}{3} + 4\sqrt{2} \ln(1+\sqrt{2}).$$

【评注】被积函数包含 $\sqrt{x^2+y^2}$ 时, 可考虑用极坐标, 解答如下:

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{1 \leq x+y \leq 2 \\ x > 0, y > 0}} f(x, y) d\sigma &= \iint_{\substack{1 \leq x+y \leq 2 \\ x > 0, y > 0}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\sin \theta + \cos \theta}{1}}^2 \frac{2}{\sin \theta + \cos \theta} dr \\ &= \sqrt{2} \ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

19. 【分析】由所证结论 $f''(\xi)=g''(\xi)$ 可联想到构造辅助函数 $F(x)=f(x)-g(x)$, 然后根据题设条件利用罗尔定理证明.

【详解】令 $F(x)=f(x)-g(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且 $F(a)=F(b)=0$.

(1) 若 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内同一点 c 取得最大值, 则 $f(c)=g(c) \Rightarrow F(c)=0$,

于是由罗尔定理可得, 存在 $\xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$, 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0.$$

再利用罗尔定理, 可得 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, 使得 $F''(\xi) = 0$, 即 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(2) 若 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内不同点 c_1, c_2 取得最大值, 则 $f(c_1) = g(c_2) = M$, 于是

$$F(c_1) = f(c_1) - g(c_1) > 0, F(c_2) = f(c_2) - g(c_2) < 0,$$

于是由零值定理可得, 存在 $c_3 \in (c_1, c_2)$, 使得 $F(c_3) = 0$

于是由罗尔定理可得, 存在 $\xi_1 \in (a, c_3), \xi_2 \in (c_3, b)$, 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0.$$

再利用罗尔定理, 可得, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, 使得 $F''(\xi) = 0$, 即 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

【评注】对命题为 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 的证明, 一般利用以下两种方法:

方法一: 验证 ξ 为 $f^{(n-1)}(x)$ 的最值或极值点, 利用极值存在的必要条件或费尔马定理可得证;

方法二: 验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在包含 $x = \xi$ 于其内的区间上满足罗尔定理条件.

20.... **【分析】** 本题考查函数的幂级数展开, 利用间接法.

【详解】 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4} = \frac{1}{(x-4)(x+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \right)$, 而

$$\frac{1}{x-4} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{3} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}, -2 < x < 4,$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-1}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^{n+1}}, -1 < x < 3,$$

$$\text{所以 } f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right] (x-1)^n,$$

收敛区间为 $-1 < x < 3$.

【评注】请记住常见函数的幂级数展开.

21..... **【分析】** 将方程组和方程合并, 然后利用非齐次线性方程有解的判定条件求得 a .

【详解】 将方程组和方程合并, 后可得线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1 \end{cases}$$

其系数矩阵

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

显然, 当 $a \neq 1, a \neq 2$ 时无公共解.

当 $a=1$ 时, 可求得公共解为 $\xi = k(1, 0, -1)^T, k$ 为任意常数;

当 $a=2$ 时, 可求得公共解为 $\xi = (0, 1, -1)^T$.

【评注】 本题为基础题型, 考查非齐次线性方程组解的判定和结构.

22..... **【分析】** 本题考查实对称矩阵特征值和特征向量的概念和性质.

【详解】 (I) $B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 = \lambda_1^5\alpha_1 - 4\lambda_1^3\alpha_1 + \alpha_1 = (\lambda_1^5 - 4\lambda_1^3 + 1)\alpha_1 = -2\alpha_1$,

则 α_1 是矩阵 B 的属于 -2 的特征向量.

同理可得

$$B\alpha_2 = (\lambda_2^5 - 4\lambda_2^3 + 1)\alpha_2 = \alpha_2, \quad B\alpha_3 = (\lambda_3^5 - 4\lambda_3^3 + 1)\alpha_3 = \alpha_3.$$

所以 B 的全部特征值为 $2, 1, 1$

设 B 的属于 1 的特征向量为 $\alpha_2 = (x_1, x_2, x_3)^T$, 显然 B 为对称矩阵, 所以根据不同特征值所对应的特征向量正交, 可得

$$\alpha_1^T \alpha_2 = 0.$$

即 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, 解方程组可得 B 的属于 1 的特征向量

$$\alpha_2 = k_1(1, 0, -1)^T + k_2(0, 1, 0)^T, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 为不全为零的任意常数.}$$

由前可知 B 的属于 -2 的特征向量为 $k_3(1, -1, 1)^T$, 其中 k_3 不为零.

$$(II) \text{ 令 } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 由 (I) 可得 } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

【评注】本题主要考查求抽象矩阵的特征值和特征向量，此类问题一般用定义求解，要想方设法将题设条件转化为 $Ax = \lambda x$ 的形式. 请记住以下结论：

(1) 设 λ 是方阵 A 的特征值，则 $kA, aA + bE, A^2, f(A), A^{-1}, A^*$ 分别有特征值

$$k\lambda, a\lambda + b, \lambda^2, f(\lambda), \frac{1}{\lambda}, \frac{|A|}{\lambda} (A \text{ 可逆}), \text{ 且对应的特征向量是相同的.}$$

(2) 对实对称矩阵来讲，不同特征值所对应的特征向量一定是正交的

23..... 【分析】(I) 可化为二重积分计算；

(II) 利用卷积公式可得.

$$\text{【详解】(I) } P\{X > 2Y\} = \iint_{x>2y} (2-x-y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{x}{2}} (2-x-y) dy = \frac{7}{24}.$$

(II) 利用卷积公式可得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^z (2-x) dx, & 0 < z < 1 \\ \int_{z-1}^1 (2-x) dx, & 1 < z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 2z - z^2 & 0 < z < 1 \\ (2-z)^2 & 1 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

【评注】(II) 也可先求出分布函数，然后求导得概率密度.

(24) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(X_1, X_2, \dots, X_n) 为来自总体 X 的简单随机样本， \bar{X} 是样本均值.

(I) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(II) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由.

【分析】利用 $EX = \bar{X}$ 求 (I); 判断 $E(4\bar{X}^2) \stackrel{?}{=} \theta^2$.

【详解】(I) $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\theta} \frac{x}{2\theta} dx + \int_{\theta}^1 \frac{x}{2(1-\theta)} dx = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4},$

$$\text{令 } \bar{X} = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow \hat{\theta} = 2\bar{X} - \frac{1}{2}.$$

$$(II) E(4\bar{X}^2) = 4E(\bar{X}^2) = 4\left[DX + (EX)^2\right] = 4\left[\frac{1}{n}DX + (EX)^2\right],$$

$$\text{而 } EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\theta} \frac{x^2}{2\theta} dx + \int_{\theta}^1 \frac{x^2}{2(1-\theta)} dx = \frac{\theta^2}{3} + \frac{\theta}{3} + \frac{1}{6},$$

$$\text{所以 } DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{\theta^2}{12} - \frac{\theta}{12} + \frac{5}{48},$$

所以

$$E(4\bar{X}^2) = 4\left[\frac{1}{n}DX + (EX)^2\right] = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)\theta^2 + \left(1 - \frac{1}{3n}\right)\theta + \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{12n}\right) \neq \theta^2,$$

故 $4\bar{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

【评注】要熟练掌握总体未知参数点估计的矩估计法, 最大似然估计法和区间估计法.

慕课考研

2019 考研大纲直播峰会

高教社考试中心联合慕课考研第 1 时间权威首发

大纲官方解析总会场: 1 场直播 3 个小时第一时间快速了解考点变化

学科深度解析分会场: 根据新大纲, 预测最新考点, 传授百日复习攻略

直播地址: http://www.icourse163.org/topics/2018dagang_kysp/



新大纲百日冲刺提分方案-最后3个月，针对新大纲考点，精准提分

数学一/三百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details>

数学二百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details>

英语一百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details>

英语二百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details>

政治百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details>

法硕百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details>

中医百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details>

心理学百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details>

西医百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details>

关注公众号
“网易慕课考研”
查看考研资讯/干货/福利



慕课为家