

2016 年考研数学二真题与解析

一、选择题 1—8 小题. 每小题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 若 $\ln^\alpha(1+2x)$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小, 则 α 的可能取值范围是 ()

- (A) $(2, +\infty)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(\frac{1}{2}, 1)$ (D) $(0, \frac{1}{2})$

【详解】 $\ln^\alpha(1+2x) \sim 2^\alpha x^\alpha$, 是 α 阶无穷小, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \frac{1}{2^\alpha} x^{\frac{2}{\alpha}}$ 是 $\frac{2}{\alpha}$ 阶无穷小, 由题意可知 $\begin{cases} \alpha > 1 \\ \frac{2}{\alpha} > 1 \end{cases}$

所以 α 的可能取值范围是 $(1, 2)$, 应该选 (B).

2. 下列曲线有渐近线的是

- (A) $y = x + \sin x$ (B) $y = x^2 + \sin x$ (C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$ (D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

【详解】对于 $y = x + \sin \frac{1}{x}$, 可知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$, 所以有斜渐近线 $y = x$

应该选 (C)

3. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在 $[0, 1]$ 上 ()

- (A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ (B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$
(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ (D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

【分析】此题考查的曲线的凹凸性的定义及判断方法.

【详解 1】如果对曲线在区间 $[a, b]$ 上凹凸的定义比较熟悉的话, 可以直接做出判断. 显然

$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$ 就是联接 $(0, f(0)), (1, f(1))$ 两点的直线方程. 故当 $f''(x) \geq 0$ 时, 曲线是凹的, 也就是 $f(x) \leq g(x)$, 应该选 (D)

【详解 2】如果对曲线在区间 $[a, b]$ 上凹凸的定义不熟悉的话, 可令

$F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$, 则 $F(0) = F(1) = 0$, 且 $F''(x) = f''(x)$, 故当

$f''(x) \geq 0$ 时, 曲线是凹的, 从而 $F(x) \leq F(0) = F(1) = 0$, 即 $F(x) = f(x) - g(x) \leq 0$, 也就是

$f(x) \leq g(x)$, 应该选 (D)

4. 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7, \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是 ()

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$ (C) $10\sqrt{10}$ (D) $5\sqrt{10}$

【详解】曲线在点 $(x, f(x))$ 处的曲率公式 $K = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$, 曲率半径 $R = \frac{1}{K}$.

本题中 $\frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 2t + 4$, 所以 $\frac{dy}{dx} = \frac{2t+4}{2t} = 1 + \frac{2}{t}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{2}{t^2}}{\frac{2}{2t}} = -\frac{1}{t^3}$,

对应于 $t = 1$ 的点处 $y' = 3, y'' = -1$, 所以 $K = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{1}{10\sqrt{10}}$, 曲率半径 $R = \frac{1}{K} = 10\sqrt{10}$.

应该选 (C)

5. 设函数 $f(x) = \arctan x$, 若 $f(x) = xf'(\xi)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} =$ ()

(A) 1 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

【详解】注意 (1) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, (2) $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

由于 $f(x) = xf'(\xi)$, 所以可知 $f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\arctan x}{x}$, $\xi^2 = \frac{x - \arctan x}{(\arctan x)^2}$,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x(\arctan x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{1}{3}x^3) + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$.

6. 设 $u(x, y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则 ().

(A) $u(x, y)$ 的最大值点和最小值点必定都在区域 D 的边界上;

(B) $u(x, y)$ 的最大值点和最小值点必定都在区域 D 的内部;

(C) $u(x, y)$ 的最大值点在区域 D 的内部, 最小值点在区域 D 的边界上;

(D) $u(x, y)$ 的最小值点在区域 D 的内部, 最大值点在区域 D 的边界上.

【详解】 $u(x, y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续, 所以 $u(x, y)$ 在 D 内必然有最大值和最小值. 并且如果在

内部存在驻点 (x_0, y_0) , 也就是 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 在这个点处 $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, 由

条件, 显然 $AC - B^2 < 0$, 显然 $u(x, y)$ 不是极值点, 当然也不是最值点, 所以 $u(x, y)$ 的最大值点和最小值点必定都在区域 D 的边界上.

所以应该选 (A).

7. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ 等于

(A) $(ad - bc)^2$ (B) $-(ad - bc)^2$ (C) $a^2d^2 - b^2c^2$ (D) $-a^2d^2 + b^2c^2$

【详解】

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} = -ad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(ad - bc)^2$$

应该选 (B).

8. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维向量, 则对任意的常数 k, l , 向量 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

- (A) 必要而非充分条件 (B) 充分而非必要条件
(C) 充分必要条件 (D) 非充分非必要条件

【详解】若向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则

$$(\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)K, \text{ 对任意的常数 } k, l, \text{ 矩阵 } K \text{ 的秩都等}$$

于 2, 所以向量 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 一定线性无关.

而当 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 时, 对任意的常数 k, l , 向量 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关, 但

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关; 故选择 (A).

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

9. $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】 $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} \Big|_{-\infty}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{3\pi}{8}.$

10. 设 $f(x)$ 为周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x) = 2(x-1), x \in [0, 2]$ ，则 $f(7) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】 当 $x \in [0, 2]$ 时， $f(x) = \int 2(x-1)dx = x^2 - 2x + C$ ，由 $f(0) = 0$ 可知 $C = 0$ ，即 $f(x) = x^2 - 2x$ ； $f(x)$ 为周期为 4 奇函数，故 $f(7) = f(-1) = f(1) = 1.$

11. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $e^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$ 确定的函数，则 $dz \Big|_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】 设 $F(x, y, z) = e^{2yz} + x + y^2 + z - \frac{7}{4}$ ， $F_x = 1, F_y = 2ze^{2yz} + 2y, F_z = 2ye^{2yz} + 1$ ，当 $x = y = \frac{1}{2}$ 时， $z = 0$ ， $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{1}{2}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{1}{2}$ ，所以 $dz \Big|_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy.$

12. 曲线 L 的极坐标方程为 $r = \theta$ ，则 L 在点 $(r, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】 先把曲线方程化为参数方程 $\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta = \theta\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta = \theta\sin\theta \end{cases}$ ，于是在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处， $x = 0, y = \frac{\pi}{2}$ ，

$\frac{dy}{dx} \Big|_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta} \Big|_{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$ ，则 L 在点 $(r, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程为 $y - \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{\pi}(x - 0)$ ，即

$y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}.$

13. 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0, 1]$ 上，若其线密度 $\rho(x) = -x^2 + 2x + 1$ ，则该细棒的质心坐标 $\bar{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】 质心坐标 $\bar{x} = \frac{\int_0^1 x\rho(x)dx}{\int_0^1 \rho(x)dx} = \frac{\int_0^1 (-x^3 + 2x^2 + x)dx}{\int_0^1 (-x^2 + 2x + 1)dx} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}} = \frac{11}{20}.$

14. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围

是_____.

【详解】由配方法可知

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3 \\&= (x_1 + ax_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + (4 - a^2)x_3^2\end{aligned}$$

由于负惯性指数为 1, 故必须要求 $4 - a^2 \geq 0$, 所以 a 的取值范围是 $[-2, 2]$.

三、解答题

15. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t) dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$.

【分析】. 先用等价无穷小代换简化分母, 然后利用洛必达法则求未定型极限.

【详解】

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t) dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x) \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - x \right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

16. (本题满分 10 分)

已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$, 且 $y(2) = 0$, 求 $y(x)$ 的极大值和极小值.

【详解】

解: 把方程化为标准形式得到 $(1 + y^2) \frac{dy}{dx} = 1 - x^2$, 这是一个可分离变量的一阶微分方程, 两边分别积分

可得方程通解为: $\frac{1}{3} y^3 + y = x - \frac{1}{3} x^3 + C$, 由 $y(2) = 0$ 得 $C = \frac{2}{3}$,

$$\text{即 } \frac{1}{3} y^3 + y = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{3}.$$

$$\text{令 } \frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{1 + y^2} = 0, \text{ 得 } x = \pm 1, \text{ 且可知 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-2x(1 + y^2)^2 - 2y(1 - x^2)^2}{(1 + y^2)^3};$$

当 $x = 1$ 时, 可解得 $y = 1$, $y'' = -1 < 0$, 函数取得极大值 $y = 1$;

当 $x = -1$ 时, 可解得 $y = 0$, $y'' = 2 > 0$, 函数取得极小值 $y = 0$.

17. (本题满分 10 分)

设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$. 计算 $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$

【详解】由对称性可得

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy &= \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy = \frac{1}{2} \iint_D \frac{(x + y) \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \frac{\sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{1} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r \sin \pi r dr = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

18. (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$. 若

$f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

【详解】

设 $u = e^x \cos y$, 则 $z = f(u) = f(e^x \cos y)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^{x \cos y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)e^{2x} \cos^2 y + f'(u)e^x \cos y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -f'(u)e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x} \sin^2 y - f'(u)e^x \cos y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x} = f''(e^x \cos y)e^{2x}$$

由条件 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$,

可知

$$f''(u) = 4f(u) + u$$

这是一个二阶常用系数线性非齐次方程.

对应齐次方程的通解为:

$$f(u) = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} \text{ 其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数.}$$

对应非齐次方程特解可求得为 $y^* = -\frac{1}{4}u$.

故非齐次方程通解为 $f(u) = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} - \frac{1}{4}u$.

将初始条件 $f(0)=0, f'(0)=0$ 代入, 可得 $C_1 = \frac{1}{16}, C_2 = -\frac{1}{16}$.

所以 $f(u)$ 的表达式为 $f(u) = \frac{1}{16}e^{2u} - \frac{1}{16}e^{-2u} - \frac{1}{4}u$.

19. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$, 证明:

$$(1) \quad 0 \leq \int_a^x g(t)dt \leq x-a, \quad x \in [a, b];$$

$$(2) \quad \int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

【详解】

$$(1) \text{ 证明: 因为 } 0 \leq g(x) \leq 1, \text{ 所以 } \int_a^x 0dx \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^x 1dt \quad x \in [a, b].$$

$$\text{即 } 0 \leq \int_a^x g(t)dt \leq x-a, \quad x \in [a, b].$$

$$(2) \text{ 令 } F(x) = \int_a^x f(u)g(u)du - \int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(u)du,$$

$$\text{则可知 } F(a) = 0, \text{ 且 } F'(x) = f(x)g(x) - g(x)f\left(a + \int_a^x g(t)dt\right),$$

因为 $0 \leq \int_a^x g(t)dt \leq x-a$, 且 $f(x)$ 单调增加,

所以 $f\left(a + \int_a^x g(t)dt\right) \leq f(a+x-a) = f(x)$. 从而

$$F'(x) = f(x)g(x) - g(x)f\left(a + \int_a^x g(t)dt\right) \geq f(x)g(x) - g(x)f(x) = 0, \quad x \in [a, b]$$

也是 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 单调增加, 则 $F(b) \geq F(a) = 0$, 即得到

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

20. (本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}, x \in [0, 1]$, 定义函数列

$$f_1(x) = f(x), \quad f_2(x) = f(f_1(x)), \quad \dots, \quad f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \dots$$

设 S_n 是曲线 $y = f_n(x)$, 直线 $x=1, y=0$ 所围图形的面积. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$.

【详解】

$$f_1(x) = \frac{x}{1+x}, \quad f_2(x) = \frac{f_1(x)}{1+f_1(x)} = \frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x}, \quad f_3(x) = \frac{x}{1+3x}, \dots,$$

利用数学归纳法可得 $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$.

$$S_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{1+nx} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+nx}\right) dx = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\ln(1+n)}{n}\right),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\ln(1+n)}{n}\right) = 1.$$

21. (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 且 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$, 求曲线 $f(x, y) = 0$ 所成的

图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成的旋转体的体积.

【详解】

由于函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 所以 $f(x, y) = y^2 + 2y + C(x)$, 其中 $C(x)$ 为待定的连续函数.

又因为 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$, 从而可知 $C(y) = 1 - (2-y)\ln y$,

得到 $f(x, y) = y^2 + 2y + C(x) = y^2 + 2y + 1 - (2-x)\ln x$.

令 $f(x, y) = 0$, 可得 $(y+1)^2 = (2-x)\ln x$. 且当 $y = -1$ 时, $x_1 = 1, x_2 = 2$.

曲线 $f(x, y) = 0$ 所成的图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成的旋转体的体积为

$$V = \pi \int_1^2 (y+1)^2 dx = \pi \int_1^2 (2-x)\ln x dx = \left(2\ln 2 - \frac{5}{4}\right)\pi$$

22. (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, E 为三阶单位矩阵.

(1) 求方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵.

【详解】(1) 对系数矩阵 A 进行初等行变换如下:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

得到方程组 $AX = 0$ 同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = 3x_4 \end{cases}$$

得到 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) 显然 \mathbf{B} 矩阵是一个 4×3 矩阵, 设 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}$

对矩阵 (\mathbf{AE}) 进行进行初等行变换如下:

$$\begin{aligned} (\mathbf{AE}) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由方程组可得矩阵 \mathbf{B} 对应的三列分别为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ 的所有矩阵为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2-c_1 & 6-c_2 & -1-c_3 \\ -1+2c_1 & -3+2c_2 & 1+2c_3 \\ -1+3c_1 & -4+3c_2 & 1+3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

23. (本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

【详解】证明：设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$.

分别求两个矩阵的特征值和特征向量如下：

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1},$$

所以 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1 = n, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots \lambda_n = 0$;

而且 A 是实对称矩阵，所以一定可以对角化。且 $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 0 & & \\ & & \cdots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$;

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$$

所以 B 的 n 个特征值也为 $\lambda_1 = n, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots \lambda_n = 0$;

对于 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$ ，由于矩阵 $(0E - B) = -B$ 的秩显然为 1，所以矩阵 B 对应 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量应该有 $n-1$ 个线性无关，进一步矩阵 B 存在 n 个线性无关的特征向量，即矩阵 B 一定可以对

角化，且 $B \sim \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 0 & & \\ & & \cdots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

从而可知 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似。

慕课考研

2019 考研大纲直播峰会

高教社考试中心联合慕课考研第 1 时间权威首发

大纲官方解析总会场：1 场直播 3 个小时第一时间快速了解考点变化

学科深度解析分会场：根据新大纲，预测最新考点，传授百日复习攻略

直播地址：http://www.icourse163.org/topics/2018dagang_kysp/



新大纲百日冲刺提分方案-最后 3 个月，针对新大纲考点，精准提分

数学一/三百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details>

数学二百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details>

英语一百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details>

英语二百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details>

政治百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details>

法硕百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details>

中医百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details>

心理学百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details>

西医百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details>

关注公众号
“网易慕课考研”
查看考研资讯/干货/福利



慕课考研