

## 2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试题解析

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

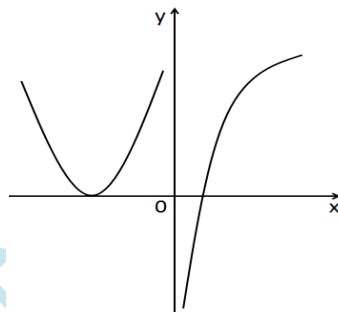
(1) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 其中二阶导数  $f''(x)$  的图形如图所示, 则曲线

$y = f(x)$  的拐点的个数为 ( )

- (A) 0            (B) 1            (C) 2            (D) 3

【答案】(C)

【解析】拐点出现在二阶导数等于 0, 或二阶导数不存在的点, 并且在这点的左右两侧二阶导函数异号. 因此, 由  $f''(x)$  的图形可得, 曲线  $y = f(x)$  存在两个拐点. 故选 (C).



(2) 设  $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$  是二阶常系数非齐次线性微分方程  $y'' + ay' + by = ce^x$  的一个特解, 则 ( )

- (A)  $a = -3, b = 2, c = -1$   
(B)  $a = 3, b = 2, c = -1$   
(C)  $a = -3, b = 2, c = 1$   
(D)  $a = 3, b = 2, c = 1$

【答案】(A)

【分析】此题考查二阶常系数非齐次线性微分方程的反问题——已知解来确定微分方程的系数, 此类题有两种解法, 一种是将特解代入原方程, 然后比较等式两边的系数可得待估系数值, 另一种是根据二阶线性微分方程解的性质和结构来求解, 也就是下面演示的解法.

【解析】由题意可知,  $\frac{1}{2}e^{2x}, -\frac{1}{3}e^x$  为二阶常系数齐次微分方程  $y'' + ay' + by = 0$  的解,

所以 2, 1 为特征方程  $r^2 + ar + b = 0$  的根, 从而  $a = -(1+2) = -3$ ,  $b = 1 \times 2 = 2$ , 从而原方程变为  $y'' - 3y' + 2y = ce^x$ , 再将特解  $y = xe^x$  代入得  $c = -1$ . 故选 (A)

(3) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 则  $x = \sqrt{3}$  与  $x = 3$  依次为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$  的 ( )

- (A) 收敛点, 收敛点  
(B) 收敛点, 发散点

(C) 发散点, 收敛点

(D) 发散点, 发散点

【答案】(B)

【分析】此题考查幂级数收敛半径、收敛区间, 幂级数的性质.

【解析】因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 即  $x=2$  为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$  的条件收敛点, 所以

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$  的收敛半径为 1, 收敛区间为  $(0, 2)$ . 而幂级数逐项求导不改变收敛区间, 故

$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$  的收敛区间还是  $(0, 2)$ . 因而  $x=\sqrt{3}$  与  $x=3$  依次为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$  的

收敛点, 发散点. 故选 (B).

(4) 设  $D$  是第一象限由曲线  $2xy=1$ ,  $4xy=1$  与直线  $y=x$ ,  $y=\sqrt{3}x$  围成的平面区域, 函数  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则  $\iint_D f(x, y) dx dy = ( )$

(A)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

(B)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

(C)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

(D)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

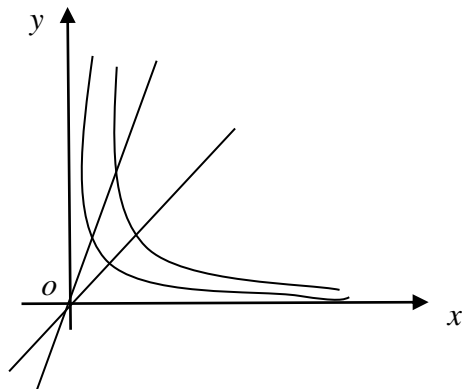
【答案】(B)

【分析】此题考查将二重积分化成极坐标系下的累次积分

【解析】先画出  $D$  的图形,

所以  $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr,$

故选 (B)



(5) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$ , 若集合  $\Omega = \{1, 2\}$ , 则线性方程组  $Ax = b$  有

无穷多解的充分必要条件为

( )

(A)  $a \notin \Omega, d \notin \Omega$

(B)  $a \notin \Omega, d \in \Omega$

(C)  $a \in \Omega, d \notin \Omega$

(D)  $a \in \Omega, d \in \Omega$

【答案】(D)

【解析】 $(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix},$

由  $r(A) = r(A, b) < 3$ , 故  $a=1$  或  $a=2$ , 同时  $d=1$  或  $d=2$ . 故选 (D)

(6) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换为  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$  下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ , 其中  $\mathbf{P} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , 若  $\mathbf{Q} = (\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$ , 则  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$  下的标准形为 ( )

(A)  $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

(B)  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(C)  $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

(D)  $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

【答案】(A)

【解析】由  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ , 故  $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{y} = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ .

且  $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

由已知可得:  $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \mathbf{C}$

故有  $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{C}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

所以  $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}) \mathbf{y} = 2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ . 选 (A)

(7) 若 A, B 为任意两个随机事件, 则

( )

(A)  $P(AB) \leq P(A)P(B)$

(B)  $P(AB) \geq P(A)P(B)$

(C)  $P(AB) \leq \frac{P(A)P(B)}{2}$

(D)  $P(AB) \geq \frac{P(A)P(B)}{2}$

【答案】(C)

【解析】由于  $AB \subset A, AB \subset B$ ，按概率的基本性质，我们有  $P(AB) \leq P(A)$  且

$P(AB) \leq P(B)$ ，从而  $P(AB) \leq \sqrt{P(A) \cdot P(B)} \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$ ，选(C)。

(8) 设随机变量  $X, Y$  不相关，且  $EX = 2, EY = 1, DX = 3$ ，则  $E[X(X + Y - 2)] =$   
( )

(A) -3

(B) 3

(C) -5

(D) 5

【答案】(D)

【解析】 $E[X(X + Y - 2)] = E(X^2 + XY - 2X) = E(X^2) + E(XY) - 2E(X)$

$$= D(X) + E^2(X) + E(X) \cdot E(Y) - 2E(X)$$

$$= 3 + 2^2 + 2 \times 1 - 2 \times 2 = 5, \text{ 选(D).}$$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【分析】此题考查  $\frac{0}{0}$  型未定式极限，可直接用洛必达法则，也可以用等价无穷小替换。

【解析】方法一： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{2x} = -\frac{1}{2}.$

方法二： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$

(10)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{\pi^2}{4}$

【分析】此题考查定积分的计算，需要用奇偶函数在对称区间上的性质化简。

【解析】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \frac{\pi^2}{4}.$

(11)若函数  $z = z(x, y)$  由方程  $e^z + xyz + x + \cos x = 2$  确定, 则  $dz|_{(0,1)} =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $-dx$

【分析】 此题考查隐函数求导.

【解析】 令  $F(x, y, z) = e^z + xyz + x + \cos x - 2$ , 则

$$F'_x(x, y, z) = yz + 1 - \sin x, F'_y = xz, F'_z(x, y, z) = e^z + xy$$

又当  $x = 0, y = 1$  时  $e^z = 1$ , 即  $z = 0$ .

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)} = -\frac{F'_x(0,1,0)}{F'_z(0,1,0)} = -1, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)} = -\frac{F'_y(0,1,0)}{F'_z(0,1,0)} = 0, \text{ 因而 } dz \Big|_{(0,1)} = -dx.$$

(12)设  $\Omega$  是由平面  $x + y + z = 1$  与三个坐标平面平面所围成的空间区域, 则

$$\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz = \text{_____}.$$

【答案】  $\frac{1}{4}$

【分析】 此题考查三重积分的计算, 可直接计算, 也可以利用轮换对称性化简后再计算.

【解析】 由轮换对称性, 得

$$\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz = 6 \iiint_{\Omega} z dx dy dz = 6 \int_0^1 z dz \iint_{D_z} dx dy,$$

其中  $D_z$  为平面  $z = z$  截空间区域  $\Omega$  所得的截面, 其面积为  $\frac{1}{2}(1-z)^2$ . 所以

$$\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz = 6 \iiint_{\Omega} z dx dy dz = 6 \int_0^1 z \cdot \frac{1}{2}(1-z)^2 dz = 3 \int_0^1 (z^3 - 2z^2 + z) dz = \frac{1}{4}.$$

$$(13) \quad n \text{ 阶行列式 } \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \text{_____}.$$

【答案】  $2^{n+1} - 2$

【解析】 按第一行展开得

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} + (-1)^{n+1}2(-1)^{n-1} = 2D_{n-1} + 2$$

$$= 2(2D_{n-2} + 2) + 2 = 2^2 D_{n-2} + 2^2 + 2 = 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2 = 2^{n+1} - 2$$

(14) 设二维随机变量  $(x, y)$  服从正态分布  $N(1, 0; 1, 1, 0)$ , 则

$$P\{XY - Y < 0\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】  $\frac{1}{2}$

【解析】由题设知,  $X \sim N(1, 1), Y \sim N(0, 1)$ , 而且  $X, Y$  相互独立, 从而

$$P\{XY - Y < 0\} = P\{(X - 1)Y < 0\} = P\{X - 1 > 0, Y < 0\} + P\{X - 1 < 0, Y > 0\}$$

$$= P\{X > 1\}P\{Y < 0\} + P\{X < 1\}P\{Y > 0\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分) 设函数  $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$ ,  $g(x) = kx^3$ , 若  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x \rightarrow 0$  是等价无穷小, 求  $a, b, k$  的值.

【答案】  $a = -1, b = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{3}.$

【解析】法一: 原式  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \ln(1+x) + bx \sin x}{kx^3} = 1$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) + bx \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)}{kx^3} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+a)x + \left( b - \frac{a}{2} \right)x^2 + \frac{a}{3}x^3 - \frac{b}{6}x^4 + o(x^3)}{kx^3} = 1$$

$$\text{即 } 1+a=0, b-\frac{a}{2}=0, \frac{a}{3k}=1$$

$$\therefore a = -1, b = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{3}$$

$$\text{法二: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \ln(1+x) + bx \sin x}{kx^3} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{a}{1+x} + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2} = 1$$

因为分子的极限为 0, 则  $a = -1$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + 2b \cos x - bx \sin x}{6kx} = 1, \text{ 分子的极限为 } 0, b = -\frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{(1+x)^3} - 2b \sin x - b \sin x - bx \cos x}{6k} = 1, k = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore a = -1, b = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{3}$$

(16)(本题满分 10 分) 设函数  $f(x)$  在定义域  $I$  上的导数大于零, 若对任意的  $x_0 \in I$ , 由线  $y=f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处的切线与直线  $x=x_0$  及  $x$  轴所围成区域的面积恒为 4, 且  $f(0)=2$ , 求  $f(x)$  的表达式.

【答案】  $f(x) = \frac{8}{4-x}$ .

【解析】 设  $f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处的切线方程为:  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ ,

令  $y=0$ , 得到  $x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0$ ,

故由题意,  $\frac{1}{2} f(x_0) \cdot (x_0 - x) = 4$ , 即  $\frac{1}{2} f(x_0) \cdot \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4$ , 可以转化为一阶微分方程,

即  $y' = \frac{y^2}{8}$ , 可分离变量得到通解为:  $\frac{1}{y} = -\frac{1}{8}x + C$ ,

已知  $y(0)=2$ , 得到  $C = \frac{1}{2}$ , 因此  $\frac{1}{y} = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$ ;

即  $f(x) = \frac{8}{-x+4}$ .

(17)(本题满分 10 分)

已知函数  $f(x, y) = x + y + xy$ ，曲线  $C: x^2 + y^2 + xy = 3$ ，求  $f(x, y)$  在曲线  $C$  上的最大方向导数.

【答案】3

【解析】因为  $f(x, y)$  沿着梯度的方向的方向导数最大，且最大值为梯度的模.

$$f'_x(x, y) = 1 + y, f'_y(x, y) = 1 + x,$$

$$\text{故 } \text{grad} f(x, y) = \{1 + y, 1 + x\}, \text{ 模为 } \sqrt{(1 + y)^2 + (1 + x)^2},$$

此题目转化为对函数  $g(x, y) = \sqrt{(1 + y)^2 + (1 + x)^2}$  在约束条件  $C: x^2 + y^2 + xy = 3$  下的最大值. 即为条件极值问题.

为了计算简单，可以转化为对  $d(x, y) = (1 + y)^2 + (1 + x)^2$  在约束条件  $C: x^2 + y^2 + xy = 3$  下的最大值.

$$\text{构造函数: } F(x, y, \lambda) = (1 + y)^2 + (1 + x)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3)$$

$$\begin{cases} F'_x = 2(1 + x) + \lambda(2x + y) = 0 \\ F'_y = 2(1 + y) + \lambda(2y + x) = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0 \end{cases}, \text{ 得到 } M_1(1, 1), M_2(-1, -1), M_3(2, -1), M_4(-1, 2).$$

$$d(M_1) = 8, d(M_2) = 0, d(M_3) = 9, d(M_4) = 9$$

所以最大值为  $\sqrt{9} = 3$ .

(18)(本题满分 10 分)

(I) 设函数  $u(x), v(x)$  可导，利用导数定义证明  $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

(II) 设函数  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  可导， $f(x) = u_1(x)u_2(x) \cdots u_n(x)$ ，写出  $f(x)$  的求导公式.

$$\begin{aligned} \text{【解析】(I) } [u(x)v(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} u(x+h) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x) \\ &= u(x)v'(x) + u'(x)v(x) \end{aligned}$$

(II) 由题意得

$$f'(x) = [u_1(x)u_2(x) \cdots u_n(x)]'$$



$$= u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$$

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为  $\begin{cases} z = \sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z = x, \end{cases}$  起点为  $A(0, \sqrt{2}, 0)$ , 终点为  $B(0, -\sqrt{2}, 0)$ ,

计算曲线积分  $I = \int_L (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + (x^2 + y^2)dz$ .

【答案】  $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

【解析】由题意假设参数方程  $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta, \quad \theta: \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ z = \cos \theta \end{cases}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} [-(\sqrt{2} \sin \theta + \cos \theta) \sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + (1 + \sin^2 \theta) \sin \theta] d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} -\sqrt{2} \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + (1 + \sin^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

(20)(本题满 11 分)

设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  内  $\mathbb{R}^3$  的一个基,  $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$ ,  $\beta_2 = 2\alpha_2$ ,  $\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$ .

(I) 证明向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  为  $\mathbb{R}^3$  的一个基;

(II) 当 k 为何值时, 存在非 0 向量  $\xi$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的坐标相同, 并求所有的  $\xi$ .

【答案】

【解析】(I)证明:

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2\alpha_1 + 2k\alpha_3, 2\alpha_2, \alpha_1 + (k+1)\alpha_3)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2k & k+1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

故  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  为  $\mathbb{R}^3$  的一个基.

(II) 由题意知,  $\xi = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3, \xi \neq 0$

即  $k_1(\beta_1 - \alpha_1) + k_2(\beta_2 - \alpha_2) + k_3(\beta_3 - \alpha_3) = 0, \quad k_i \neq 0, i=1, 2, 3$

$k_1(2\alpha_1 + 2k\alpha_3 - \alpha_1) + k_2(2\alpha_2 - \alpha_2) + k_3(\alpha_1 + (k+1)\alpha_3 - \alpha_3) = 0$

$k_1(\alpha_1 + 2k\alpha_3) + k_2(\alpha_2) + k_3(\alpha_1 + k\alpha_3) = 0$  有非零解

即  $|\alpha_1 + 2k\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 + k\alpha_3| = 0$

$$\text{即 } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix} = 0, \text{ 得 } k=0$$

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_1 = 0$$

$$\therefore k_2 = 0, k_1 + k_3 = 0$$

$$\xi = k_1\alpha_1 - k_1\alpha_3, k_1 \neq 0$$

(21) (本题满分 11 分)

$$\text{设矩阵 } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix} \text{ 相似于矩阵 } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) 求  $a, b$  的值;

(II) 求可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为对角矩阵..

【解析】(I)  $A \sim B \Rightarrow \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \Rightarrow 3 + a = 1 + b + 1$

$$|A| = |B| \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a - b = -1 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$(II) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = E + C$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad -2 \quad 3)$$

$C$  的特征值  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4$

$\lambda = 0$  时  $(0E - C)x = 0$  的基础解系为  $\xi_1 = (2, 1, 0)^T$ ;  $\xi_2 = (-3, 0, 1)^T$

$\lambda = 5$  时  $(4E - C)x = 0$  的基础解系为  $\xi_3 = (-1, -1, 1)^T$

A 的特征值  $\lambda_A = 1 + \lambda_C : 1, 1, 5$

$$\text{令 } P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

(22) (本题满分 11 分) 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

对  $X$  进行独立重复的观测, 直到 2 个大于 3 的观测值出现的停止. 记  $Y$  为观测次数.

(I) 求  $Y$  的概率分布;

(II) 求  $EY$

【解析】(I) 记  $p$  为观测值大于 3 的概率, 则  $p = P(X > 3) = \int_3^{+\infty} 2^{-x} \ln 2 dx = \frac{1}{8}$ ,

从而  $P\{Y = n\} = C_{n-1}^1 p(1-p)^{n-2} p = (n-1) \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}$ ,  $n = 2, 3, \dots$

为  $Y$  的概率分布;

(II) 法一: 分解法:

将随机变量  $Y$  分解成  $Y = M + N$  两个过程, 其中  $M$  表示从 1 到  $n$  ( $n < k$ ) 次试验观测值大于 3 首次发生,  $N$  表示从  $n+1$  次到第  $k$  试验观测值大于 3 首次发生.

则  $M \sim Ge(n, p)$ ,  $N \sim Ge(k-n, p)$  (注:  $Ge$  表示几何分布)

所以  $E(Y) = E(M + N) = E(M) + E(N) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p} = \frac{2}{\frac{1}{8}} = 16$ .

法二: 直接计算

$$E(Y) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot P\{Y = n\} = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \left[\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{8}\right)^n\right]$$

记  $S_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) x^{n-2}$   $-1 < x < 1$ , 则

$$S_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1)x^{n-2} = (\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot x^{n-1})' = (\sum_{n=2}^{\infty} x^n)' = \frac{2}{(1-x)^3},$$

$$S_2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1)x^{n-1} = x \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1)x^{n-2} = xS_1(x) = \frac{2x}{(1-x)^3},$$

$$S_3(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1)x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1)x^{n-2} = x^2 S_1(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

$$\text{所以 } S(x) = S_1(x) - 2S_2(x) + S_3(x) = \frac{2-4x+2x^2}{(1-x)^3} = \frac{2}{1-x},$$

$$\text{从而 } E(Y) = S\left(\frac{7}{8}\right) = 16.$$

(23) (本题满分 11 分) 设总体  $X$  的概率密度为:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中  $\theta$  为未知参数,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为来自该总体的简单随机样本.

(I) 求  $\theta$  的矩估计量.

(II) 求  $\theta$  的最大似然估计量.

$$\text{【解析】 (I) } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \theta)dx = \int_{\theta}^1 x \cdot \frac{1}{1-\theta} dx = \frac{1+\theta}{2},$$

令  $E(X) = \bar{X}$ , 即  $\frac{1+\theta}{2} = \bar{X}$ , 解得  $\theta = 2\bar{X} - 1$ ,  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  为  $\theta$  的矩估计量;

$$\text{(II) 似然函数 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^n, & \theta \leq x_i \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当  $\theta \leq x_i \leq 1$  时,  $L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-\theta} = \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^n$ , 则  $\ln L(\theta) = -n \ln(1-\theta)$ .

从而  $\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{n}{1-\theta}$ , 关于  $\theta$  单调增加,

所以  $\theta = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  为  $\theta$  的最大似然估计量.

# 慕课考研

## 2019 考研大纲直播峰会

高教社考试中心联合慕课考研第 1 时间权威首发

大纲官方解析总会场：1 场直播 3 个小时第一时间快速了解考点变化

学科深度解析分会场：根据新大纲，预测最新考点，传授百日复习攻略

直播地址：[http://www.icourse163.org/topics/2018dagang\\_kysp/](http://www.icourse163.org/topics/2018dagang_kysp/)



## 新大纲百日冲刺提分方案-最后 3 个月，针对新大纲考点，精准提分

数学一/三百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details>

数学二百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details>

英语一百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details>

英语二百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details>

政治百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details>

法硕百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details>

中医百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details>

---

[program-details](#)

心理学百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j->

[program-details](#)

西医百日冲刺

<http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j->

[program-details](#)

关注公众号  
“网易慕课考研”  
查看考研资讯/干货/福利

