2010 考研数学一试题及答案

一、选择题

（1）、极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$（ C）

A、1　B、e　C、e^{a-b}　D、e^{b-a}

【详解】

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x}=\lim_{x\to\infty}e^{x\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{x\left(\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{(a-b)x^2+abx}{(x-a)(x+b)}}$$

$$=e^{a-b}$$

（2）、设函数 $z=z(x,y)$，由方程 $F(\frac{y}{x},\frac{z}{x})=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial u}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

（ B）

A、x　B、z　C、$-x$　D $-z$

【详解】 等式两边求全微分得：$(F_1'u_x+F_2'v_x)dx+(F_1'u_y+F_2'v_y)dy+(F_1'u_z+F_2'v_z)dz=0$，

所以有，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_1'u_x+F_2'v_x}{F_1'u_z+F_2'v_z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_1'u_y+F_2'v_y}{F_1'u_z+F_2'v_z}$，

其中，$u_x=-\dfrac{y}{x^2}$，$u_y=\dfrac{1}{x}$，$u_z=0$，$v_x=-\dfrac{z}{x^2}$，$v_y=0$，$v_z=\dfrac{1}{x}$，代入即可。

（3）、设 m,n 是正整数，则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性(D)

(A)仅与 m 的取值有关　　(B)仅与 n 有关

(C)与 m,n 都有关　　(D)都无关

【详解】：显然 $x=0,x=1$ 是两个瑕点，有

$$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac12}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac12}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$$

对于 $\int_0^{\frac12}\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的瑕点 $x=0$，当 $x\to0^+$ 时 $\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=\ln^{\frac2m}(1-x)x^{-\frac1n}$ 等价于 $(-1)^{\frac2m}x^{\frac2m-\frac1n}$，

而 $\int_0^{\frac12}x^{\frac2m-\frac1n}dx$ 收敛（因 m,n 是正整数 $\Rightarrow\dfrac2m-\dfrac1n>-1$），故 $\int_0^{\frac12}\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛；对于 $\int_{\frac12}^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$

的瑕点 $x=1$，当 $x\in(1-\delta,1)(0<\delta<\dfrac12)$ 时 $\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}<2^{\frac1n}\ln^{\frac2m}(1-x)<2^{\frac1n}(1-x)^{\frac2m}$，而 $\int_{\frac12}^1(1-x)^{\frac2m}dx$

显然收敛，故 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛。所以选择 D.

（4）、$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ (D)

A、$\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　B、$\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

C、$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　D、$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

【详解】:

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+(\frac{j}{n})^2)}\frac{1}{n}=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$$

（5）设 A 为 $m\times n$ 型矩阵，B 为 $n\times m$ 型矩阵，E 为 m 阶单位矩阵，若 AB=E，则（ A）

A、秩 r(A)=m，秩 r(B)=m　　B、秩 r(A)=m，秩 r(B)=n

C、秩 r(A)=n，秩 r(B)=m　　D、秩 r(A)=n，秩 r(B)=n

【详解】

$$\begin{aligned}
&\because AB=E\\
&\therefore R(AB)=m\\
&\text{又}R(AB)=m\le\min(R(A),R(B)),\text{即}\mathrm{R(A)}\ge m,R(B)\ge m\\
&\text{而}\mathrm{R(A)\le m,R(B)\le m}\\
&\therefore \mathrm{R(A)=m,R(B)=m}
\end{aligned}$$

(6) 设 A 为 4 阶实对称矩阵，且 $A^2+A=0$，若 A 的秩为 3，则 A 相似于　　（D）

A. $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

【详解】设 A 的特征值为 r，因为 $A^2+A=0$ 为所以 $\lambda^2+\lambda=0$

即 $\lambda(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda=0\text{或}\lambda=-1$

又 $\because \mathrm{R(A)}=3$，A 必可相似对角化，且对角阵的秩也是 3.

$\therefore \lambda=-1$是三重特征根

$\therefore A \sim \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$所以正确答案为（D）

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le x < 1 \\ 1-e^{-x} & x \ge 1 \end{cases}$，则 {x=1}=　　（C）

A. 0　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{1}{2}-e^{-1}$　D. $1-e^{-1}$

【详解】$P\{x=1\}=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-e^{-1}$.所以选 C

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上的均匀分布的概率密度，若 $f(x)=\begin{cases} af_1(x) & x \le 0 \\ bf_2(x) & x>0 \end{cases}(a>0,b>0)$ 为概率密度，则 a,b 应满足：（A ）

A、$2a+3b=4$　B、$3a+2b=4$　C、$a+b=1$　D、$a+b=2$

【详解】由概率密度的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，有

$$a\int_{-\infty}^{0} f_1(x)dx+b\int_{0}^{3} f_2(x)dx=1$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b=1$$
$$\Longrightarrow 2a+3b=4$$

所以选 A。

二、填空题

（9）、设 $x=e^{-t}, y=\int_0^t \ln(1+u^2)du$, 求 $\frac{d^2y}{d^2x}|_0=\underline{0}$

【详解】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$=\left(\frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}}\right)'\frac{1}{x'(t)}$$

$$=-\frac{\frac{2t}{1+t^2}e^{-t}+\ln(1+t^2)e^{-t}}{(e^{-t})^2}\times\frac{1}{-e^{-t}}$$

$$=e^{2t}\left(\frac{2t}{1+t^2}+\ln(1+t^2)\right)$$

故 $\frac{d^2y}{d^2x}|_0=0$

（10）、$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=\underline{-4\pi}$

【详解】$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=-4\pi$

令 $\sqrt{x}=t$, 原式为

$$2\int_0^{\pi}t^2\cos tdt=2\left(t^2\sin t|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2t\sin tdt\right)=-4\int_0^{\pi}t\sin tdt=4\left(t\cos t|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos tdt\right)=-4\pi$$

（11）、已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|, x\in[-1,1]$, 起点是 $(-1,0)$, 终点是 $(1,0)$, 则曲线积分

$\int_L xydx+x^2dy=\underline{0}$

【详解】令

$$L_1:\begin{cases}x=t\\ y=1+t\end{cases}-1\le t\le 0\qquad L_2:\begin{cases}x=t\\ y=1-t\end{cases}0\le t\le 1$$

$$\int_L xydx+x^2dy$$

$$=\int_{L_1}xydx+x^2dy+\int_{L_2}xydx+x^2dy$$

$$=\int_{-1}^{0}t(1+t)+t^2dt+\int_0^1 t(1-t)-t^2dt$$

$$=\left(\frac{2}{3}t^3+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}++\left(\frac{t^2}{2}-\frac{2}{3}t^3\right)\Big|_0^1$$

$$=0$$

（12）、设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1\}$, 则 Ω 的形心坐标 $z=\underline{\frac{2}{3}}$

【详解】

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz}{\iiint\limits_{\Omega} dxdydz}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 zdz}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

（13）设 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T,\alpha_2=(1,1,0,2)^T,\alpha_3=(2,1,1,\alpha)^T$，若由形成的向量空间维数是 2，则 $\alpha=\underline{6}$

【详解】由题意知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，而其中两个向量线性无关，所以 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，即

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&\alpha\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\\0&2&\alpha\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&0&0\\0&0&\alpha-6\end{pmatrix}$$

$\therefore \alpha-6=0\Rightarrow\alpha=6$

（14）设随机变量 X 概率分布为 $p\{X=k\}=\frac{C}{K!},k=0,1,2,\cdots$，则 $EX^2=\underline{2}$

【详解】由概率密度的性质 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=1$，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C}{k!}=1\Rightarrow C=e^{-1}$$

即 $P\{X=k\}=\frac{e^{-1}}{k!},k=0,1,2,\cdots$ 为参数为 1 的泊松分布，则有

$EX=1,DX=1$

$\Rightarrow EX^2=DX+(EX)^2=2$

三、解答题

（15）（本题满分 10 分）

求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解

【详解】齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$ 由此得 $\lambda_1=2,\lambda_2=1$. 对应齐次方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^x$

设非齐次方程的特解为 $y=(Ax+B)xe^x$ 代入原方程得 $A=-1,B=-2$ 从而所求解为

$y=C_1e^{2x}+C_2e^x+(-x^2-2x)e^x$

（16）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值

【详解】由 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t}dt=0$，可得，$x=0$，$\pm1$

判断在区间，$(-1,0)$，$(1,+\infty)$，$f'(x)\geq 0$，函数单增

在区间，$(-\infty,-1)$，$(0,1)$，$f'(x)\leq 0$，函数单减。

极小值：$f(1)=f(-1)=0$ 极大值为 $f(0)=1-\dfrac{2}{e}$

单增区间 $(-1,0),(1,\infty)$

单减区间 $(-\infty,-1),(0,1)$

（17）（本题满分 10 分）

（Ⅰ）比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1|\ln t|t^n dt, n=1,2,\cdots$ 的大小，说明理由

（Ⅱ）设 $M_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n$

【详解】

令 $f(t)=\ln(1+t)-t$

当 $0\leq t\leq 1$ 时，$f'(t)=\dfrac{1}{1+t}-1\leq 0$

故当 $0\leq t\leq 1$ 时 $f(t)\leq f(0)=0$

当 $0\leq t\leq 1$ 时 $0\leq \ln(1+t)\leq t\leq 1$

从而 $(\ln(1+t))^n\leq t^n(n=1,2,\cdots)$ 又由 $|\ln t|\geq 0$

得 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,dt\leq\int_0^1 t^n|\ln t|dt(n=1,2,\cdots)$

$\int_0^1|\ln t|t^n dt=-\int_0^1(\ln t)t^n dt$

$=-(\ln t)\dfrac{1}{n+1}t^{n+1}\Big|_0^1+\int_0^1\dfrac{1}{n+1}t^n dt$

$=\dfrac{1}{(n+1)^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1|\ln t|t^n dt=0 \qquad M_n\geq 0$

由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,dt=0$

（18）（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

【详解】

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+2}(2n-1)}{x^{2n}(2n+1)}\right|=x^2$，所以当 $x^2<1$ 即 $-1<x<1$ 时，原幂级数绝对收

敛；当 $x=\pm1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，显然收敛，故原幂级数的收敛域为 $[-1,1]$。

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$

设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=f(x),x\in(-1,1)$

则 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}=\frac{1}{1+x^2}$

因为 $f(0)=0$，所以 $f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(0)=\arctan x$

从而 $s(x)=x\arctan x,x\in[-1,1]$

收敛域 $x\in[-1,1]$，和函数 $s(x)=x\arctan x$

（19）（本题满分 10 分）

设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分

【详解】（1）切平面法向量 $F_x=2x,F_y=2y-z,F_z=2z-y$，因与 xOy 面垂直，

$$所以\ 2x\times0+(2y-z)\times0+(2z-y)\times1=0\Rightarrow z=\frac{y}{2}$$

$$所以轨迹为\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\ y=2z\end{cases}$$

$$（2）\ dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}}{2z-y}dxdy$$

$$原式=\iint\limits_{D_{xy}}x+\sqrt{3}dxdy,D_{xy}=\{(x,y)\big|x^2+\frac{3}{4}y^2\le1\}$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}xdxdy+\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{3}dxdy=0+\sqrt{3}\cdot\pi\cdot1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi$$

（20）（本题满分 11 分）

设

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$$

已知线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解，

（Ⅰ）求 λ， a；

（Ⅱ）求方程组 $Ax=b$ 通解。

【详解】（Ⅰ）由题意知， $Ax=b$ 的增广矩阵为

$$\overline{A}=(A\vdots b)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & \vdots & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \vdots & 1\\ 1 & 1 & \lambda & \vdots & 1\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\leftrightarrow}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \vdots & 1\\ \lambda & 1 & 1 & \vdots & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-\lambda r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \vdots & a-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & \vdots & a+1-\lambda\end{pmatrix}$$

$\because Ax=b$ 有 2 个不同的解

$\therefore R(\overline{A})=R(A)<3$

$\therefore 1-\lambda^2=0\Rightarrow\lambda=1或\lambda=-1,\ a+1-\lambda=0\Rightarrow a=\lambda-1$

但$\lambda=1时R(A)=1<R(\overline{A})=2,方程组Ax=b无解$

$\therefore\lambda=-1$

$\therefore a=\lambda-1$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}\quad 等价方程组为\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\ -2x_2=1\end{cases}$$

$\because R(A)=R(\overline{A})=2$ $\therefore$ 对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系含 1 个解向量，即 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$Ax=b$ 的一个特解为 $\beta=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ $\therefore Ax=b$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$（其中 k 为任意常数）。

（21）（本题满分 11 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 Q 的第 3 列为 $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}^T$

（Ⅰ）求矩阵A；（Ⅱ）证明$A+E$为正定矩阵，其中E为3阶单位矩阵。

【详解】（Ⅰ）由题意知$Q^TAQ=\Lambda$，其中$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，则$A=Q\Lambda Q^T$，设$Q$的其他任一列向量为

$(x_1,\ x_2,\ x_3)^T$ $\because Q$为正交矩阵

$$\therefore (x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=0\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0$$

即$x_1+x_3=0$，其基础解系含2个线性无关的解向量，即为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

把α_1单位化得$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

$$\therefore Q=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore Q^T=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=Q\Lambda Q^T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

（Ⅱ）证明：$\because (A+E)^T=A^T+E=A+E$ $\therefore A+E$为实对称矩阵

又$\because A$的特征值为1，1，0 $\therefore A+E$的特征值为2，2，1，都大于0 $\therefore A+E$为正定矩阵。

（22）（本题满分11分）

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=Ae^{-2x+2xy-y},-\infty<x<+\infty$，求常数A及条件概率密度

$f_{Y|X}(y|x)$

【详解】由概率密度的性质$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-2x^2+2xy-y^2}dxdy = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2}dy = 1$$

又知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2}dy = \sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi} = \pi$$

所以 $A=\frac{1}{\pi}$，即 $f(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}$

X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2}dy=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2},-\infty<x<+\infty$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta\in(0,1)$ 未知，以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本(样本容量为 n)中等于 i 的个数 $(i=1,2,3)$。

试求常数 a_1,a_2,a_3，使 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量，并求 T 的方差。

【详解】由题知 N_1,N_2,N_3 分别服从二项分布 $B(n,1-\theta),B(n,\theta-\theta^2),B(n,\theta^2)$，则有

$$EN_1=n(1-\theta),EN_2=n(\theta-\theta^2),EN_3=n\theta^2$$

$$ET=E(\sum_{i=1}^{3}a_iN_i)=\sum_{i=1}^{3}a_iEN_i=a_1n(1-\theta)+a_2n(\theta-\theta^2)+a_3n\theta^2=\theta$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1n=0\\a_2n-a_1n=1\\a_3n-a_2n=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=0\\a_2=\frac{1}{n}\\a_3=\frac{1}{n}\end{cases}$$

即 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i=\frac{N_2+N_3}{n}=\frac{n-N_1}{n}=1-\frac{N_1}{n}$

$$DT=D(1-\frac{N_1}{n})=\frac{1}{n^2}DN_1=\frac{1}{n^2}\times n(1-\theta)\theta=\frac{(1-\theta)\theta}{n}$$

（答案仅供参考，最终以教育部标准答案为准）

慕课考研

2019 考研大纲直播峰会

高教社考试中心联合慕课考研第 1 时间权威首发
大纲官方解析总会场：1 场直播 3 个小时第一时间快速了解考点变化
学科深度解析分会场：根据新大纲，预测最新考点，传授百日复习攻略
直播地址： http://www.icourse163.org/topics/2018dagang_kysp/

新大纲百日冲刺提分方案-最后 3 个月，针对新大纲考点，精准提分

数学一/三百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details
数学二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details
英语一百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details
英语二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details
政治百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details
法硕百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details
中医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details
心理学百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details
西医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details