2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

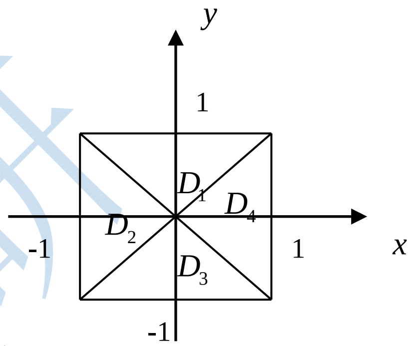
一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1. 当 $x \to 0$ 时，$f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 等价无穷小，则（　　）

(A) $a = 1, b = -\dfrac{1}{6}$.　　　(B) $a = 1, b = \dfrac{1}{6}$.

(C) $a = -1, b = -\dfrac{1}{6}$.　　　(D) $a = -1, b = \dfrac{1}{6}$.

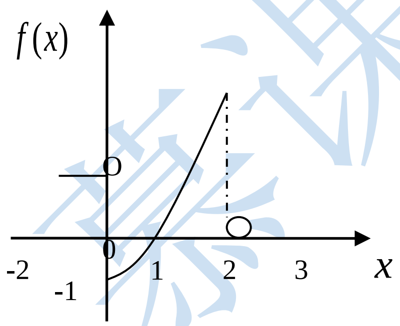
2. 如图，正方形 $\{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k\,(k = 1,2,3,4)$，$I_k = \iint\limits_{D_k} y \cos x\, dxdy$，



则 $\max\limits_{1 \le k \le 4} \{I_k\} =$（　　）

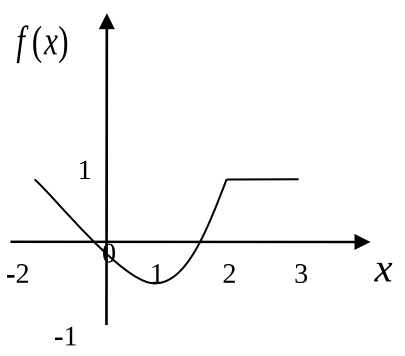
(A) I_1.　　(B) I_2.　　(C) I_3.　　(D) I_4.

3. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形为：

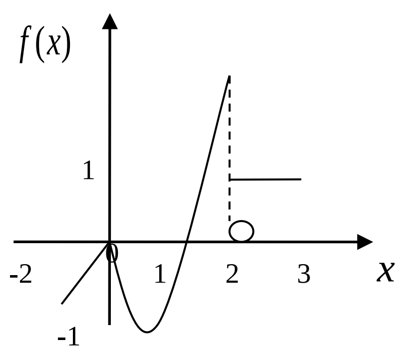


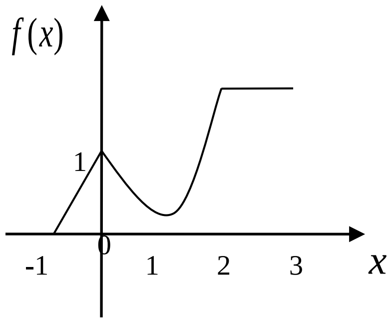
则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ 的图形为（　　）

(A).

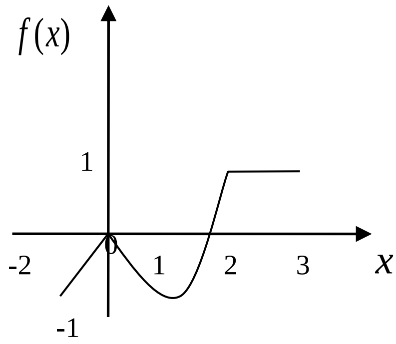


(B).





(C).



(D).

4. 设有两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则（　　）

(A)当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛.　　(B)当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散.

(C)当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛.　　(D)当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$发散.

5. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维向量空间$R^3$的一组基，则由基$\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$到基

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为（　　）

$(A)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.　　$(B)\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$.

$(C)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.　　$(D)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

6. 设A, B均为2阶矩阵，A^*,B^*分别为A, B的伴随矩阵，若$|A|=2,|B|=3$，则分块矩

阵$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$的伴随矩阵为（　　）

$(A)\begin{pmatrix}O&3B^*\\2A^*&O\end{pmatrix}$.　　$(B)\begin{pmatrix}O&2B^*\\3A^*&O\end{pmatrix}$.

$(C)\begin{pmatrix}O&3A^*\\2B^*&O\end{pmatrix}$.　　$(D)\begin{pmatrix}O&2A^*\\3B^*&O\end{pmatrix}$.

7. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX=$（　　）

$(A)\ 0$.　　$(B)\ 0.3$.　　$(C)\ 0.7$.　　$(D)\ 1$.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为（　　）

$(A)\ 0.$　　$(B)\ 1.$　　$(C)\ 2.$　　$(D)\ 3.$

二、填空题（9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.）

9. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$__________。

10. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解为 $y=$__________。

11. 已知曲线 $L: y=x^2\left(0\le x\le\sqrt{2}\right)$，则 $\int_L xds=$____________。

12. 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz=$____________。

13. 若 3 维列向量 α,β 满足 $\alpha^T\beta=2$，其中 α^T 为 α 的转置，则矩阵 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为____________。

14. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差。若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，则 $k=$____________。

三、解答题（15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

1. （本题满分 9 分）求二元函数 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值。

2. （本题满分 9 分）设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}\ (n=1,2,.....)$ 所围成区域的面积，记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$，求 S_1 与 S_2 的值。

3. （本题满分 11 分）椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成，圆锥面 S_2 是过点

$(4,0)$ 且与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成。

（Ⅰ）求 S_1 及 S_2 的方程

（Ⅱ）求 S_1 与 S_2 之间的立体体积。

4. （本题满分 11 分）

（Ⅰ）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

（Ⅱ）证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$。

5. （本题满分 10 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中 $\sum$ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧。

6. （本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$ $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求满足 $A\xi_2=\xi_1$ 的 ξ_2． $A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3.

（Ⅱ）对①中的任意向量 ξ_2,ξ_3 证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 无关。

7. （本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

（Ⅰ）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

（Ⅱ）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值。

8. （本题满分 11 分）

袋中有 1 个红色球，2 个黑色球与 3 个白球，现有回放地从袋中取两次，每次取一球，以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数。

（Ⅰ）求 $p\left\{X=1\middle|Z=0\right\}$；

（Ⅱ）求二维随机变量 (X,Y) 概率分布。

9. （本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2 xe^{-\lambda x}, x>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知，X_1，$X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本

（Ⅰ）求参数 λ 的矩估计量；

（Ⅱ）求参数 λ 的最大似然估计量

2009 年考研数学一真题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）当 $x \to 0$ 时，$f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 等价无穷小，则（　　）

$(A)\ a = 1, b = -\dfrac{1}{6}$.　　　　$(B)\ a = 1, b = \dfrac{1}{6}$.

$(C)\ a = -1, b = -\dfrac{1}{6}$.　　　　$(D)\ a = -1, b = \dfrac{1}{6}$.

【答案】 A

【解析】 $f(x) = x - \sin ax, g(x) = x^2 ln(1-bx)$ 为等价无穷小，则

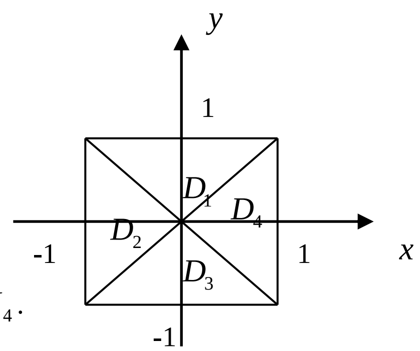
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)} = \lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)} \overset{洛}{=} \lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2} \overset{洛}{=} \lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-\frac{6b}{a}\cdot ax} = -\frac{a^3}{6b} = 1 \qquad \therefore a^3 = -6b \quad 故排除 B,C。$$

另外 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在，蕴含了 $1 - a\cos ax \to 0\ (x \to 0)$ 故 $a = 1.$　排除 D。

所以本题选 A。

（2）如图，正方形 $\{(x,y)\,\big|\,|x| \le 1, |y| \le 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k\ (k = 1,2,3,4)$，$I_k = \iint\limits_{D_k} y\cos x dxdy$，



则 $\max\limits_{1\le k\le4}\{I_k\} =$（　　）

$(A)\ I_1$.　　$(B)\ I_2$.　　$(C)\ I_3$.　　$(D)\ I_4$.

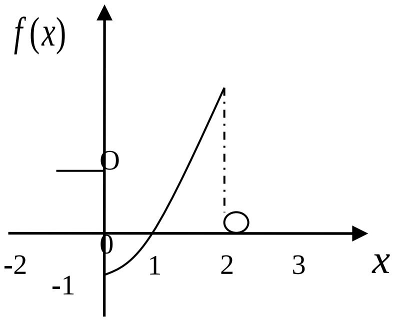
【解析】本题利用二重积分区域的对称性及被积函数的奇偶性。

D_2, D_4 两区域关于 x 轴对称，而 $f(x,-y) = -y\cos x = -f(x,y)$，即被积函数是关于 y 的奇函数，所以 $I_2 = I_4 = 0$；

D_1, D_3 两区域关于 y 轴对称，而 $f(-x,y) = y\cos(-x) = y\cos x = f(x,y)$，即被积函数是关于 x 的偶函数，所以 $I_1 = 2\iint\limits_{\{(x,y)|y\ge x, 0\le x\le1\}} y\cos x dxdy > 0$；

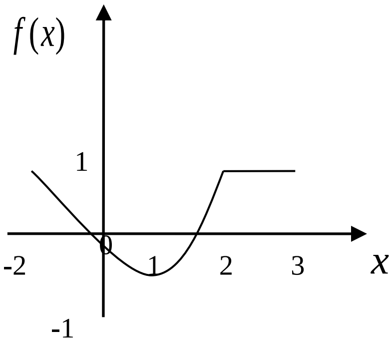
$I_3 = 2\iint\limits_{\{(x,y)|y\le -x, 0\le x\le1\}} y\cos x dxdy < 0$.所以正确答案为 A.

（3）设函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-1,3\right]$ 上的图形为：

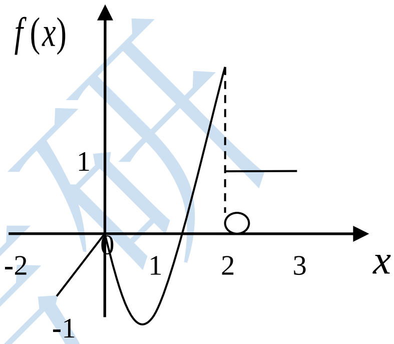


则函数 $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$ 的图形为（　　）

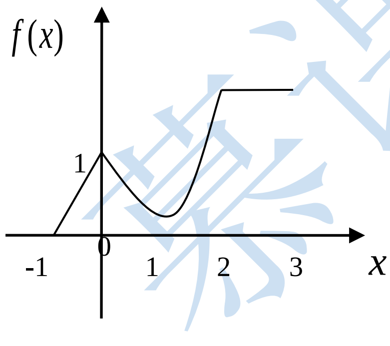
(A).



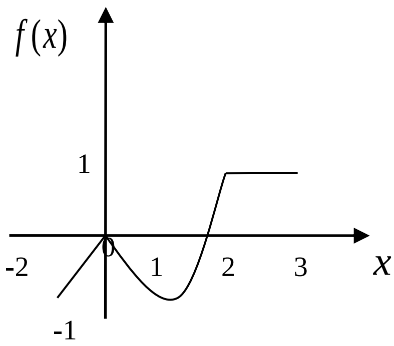
(B).



(C).



(D).



【答案】D

【解析】此题为定积分的应用知识考核，由 $y=f(x)$ 的图形可见，其图像与 x 轴及 y 轴、$x=x_0$ 所围的图形的代数面积为所求函数 $F(x)$，从而可得出几个方面的特征：

① $x\in\left[0,1\right]$ 时，$F(x)\leq 0$，且单调递减。

② $x\in\left[1,2\right]$ 时，$F(x)$ 单调递增。

③ $x\in\left[2,3\right]$ 时，$F(x)$ 为常函数。

④ $x\in[-1,0]$时，$F(x)\le 0$为线性函数，单调递增。

⑤由于 F(x)为连续函数

结合这些特点，可见正确选项为D。

（4）设有两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则（　　）

(A)当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛.　　(B)当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散.

(C)当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛.　　(D)当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$发散.

【解析】

方法一：

举反例 A 取$a_n=b_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

B 取$a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$

D 取$a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$

故答案为（C）

方法二：

因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则由定义可知$\exists N_1$,使得$n>N_1$时，有$|a_n|<1$

又因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛，可得$\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=0$,则由定义可知$\exists N_2$,使得$n>N_2$时，有$|b_n|<1$

从而，当$n>N_1+N_2$时，有$a_n^2b_n^2<|b_n|$，则由正项级数的比较判别法可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛。

（5）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 3 维向量空间$R^3$的一组基，则由基$\alpha_1,\dfrac{1}{2}\alpha_2,\dfrac{1}{3}\alpha_3$到基

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为（　　）

$(A)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.　　$(B)\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$.

$(C)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.　　　　$(D)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

【解析】因为$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$，则$A$称为基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$的过渡矩阵。

则由基$\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$到$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵$M$满足

$$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=\left(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right)M$$

$$=\left(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

所以此题选(A)。

（6）设$A,\ B$均为 2 阶矩阵，A^*,B^*分别为$A,\ B$的伴随矩阵，若$|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$的伴随矩阵为（　　）

$(A)\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$.　　$(B)\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.

$(C)\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$.　　$(D)\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

【解析】根据$CC^*=|C|E$，若$C^*=|C|C^{-1},C^{-1}=\frac{1}{|C|}C^*$

分块矩阵$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$的行列式$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}|A||B|=2\times3=6$，即分块矩阵可逆

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{|B|}B^* \\ \frac{1}{|A|}A^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$=6\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$$

故答案为（B）

（7）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX=$（　　）

$(A)\ 0$.　　$(B)\ 0.3$.　　$(C)\ 0.7$.　　$(D)\ 1$.

【答案】(C)

【解析】因为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，

所以 $F'(x)=0.3\Phi'(x)+\frac{0.7}{2}\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)$，

所以 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xF'(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[0.3\Phi'(x)+0.35\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]dx$

$=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'(x)dx+0.35\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)dx$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'(x)dx=0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)dx \ \underline{\underline{\frac{x-1}{2}=u}}\ 2\int_{-\infty}^{+\infty}(2u+1)\Phi'(u)du=2$

所以 $EX=0+0.35\times 2=0.7$。

（8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为（　　）

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

【答案】 B

【解析】

$F_Z(z)=P(XY\le z)=P(XY\le z|Y=0)P(Y=0)+P(XY\le z|Y=1)P(Y=1)$

$=\frac{1}{2}[P(XY\le z|Y=0)+P(XY\le z|Y=1)]$

$=\frac{1}{2}[P(X\cdot 0\le z|Y=0)+P(X\le z|Y=1)]$

$\because X,Y$ 独立

$\therefore F_Z(z)=\frac{1}{2}[P(X\cdot 0\le z)+P(X\le z)]$

（1）若 $z<0$，则 $F_Z(z)=\frac{1}{2}\Phi(z)$

（2）当 $z\ge 0$，则 $F_Z(z)=\frac{1}{2}(1+\Phi(z))$

$\therefore z=0$ 为间断点，故选（B）

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________。

【答案】$xf_{12}''+f_2'+xyf_{22}''$

【解析】$xf_{12}''+f_2'+xyf_{22}''$

$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'\cdot y$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf_{12}''+f_2'+yx\cdot f_{22}''=xf_{12}''+f_2'+xyf_{22}''$

（10）若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的解为 $y=$__________。

【答案】$y=-xe^x+x+2$

【解析】由 $y=(c_1+c_2x)e^x$，得 $\lambda_1=\lambda_2=1$，故 $a=-2,b=1$

微分方程为 $y''-2y'+y=x$

设特解 $y^*=Ax+B$ 代入，$y'=A,A=1$

$$-2A+Ax+B=x$$
$$-2+B=0,B=2$$

$\therefore$ 特解 $y^*=x+2$

$\therefore$ $y=(c_1+c_2x)e^x+x+2$

把 $y(0)=2$ ， $y'(0)=0$ 代入，得 $c_1=0,c_2=-1$

$\therefore$ 所求 $y=-xe^x+x+2$

（11）已知曲线 $L:y=x^2\left(0\le x\le\sqrt{2}\right)$，则 $\int_L xds=$____________。

【答案】$\dfrac{13}{6}$

【解析】由题意可知，$x=x,y=x^2,0\le x\le\sqrt{2}$，则

$$ds=\sqrt{\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2}dx=\sqrt{1+4x^2}dx,$$

所以 $\int_L xds=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+4x^2}dx=\dfrac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4x^2}d\left(1+4x^2\right)$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+4x^2\right)^3}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{6}$$

（12）设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le1\right\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=$____________。

【答案】$\dfrac{4}{15}\pi$

【解析】

方法一：$\iiint z^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\sin\varphi\rho^2\cos^2\varphi d\rho$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\cos^2\varphi d\left(-\cos\varphi\right)\int_0^1\rho^4d\rho$$

$$=2\pi\cdot-\frac{\cos^3\varphi}{3}\int_0^{\pi}\cdot\frac{1}{5}d\varphi=\frac{4}{15}\pi$$

方法二：由轮换对称性可知 $\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}x^2dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}y^2dxdydz$

所以，$\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz = \frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r^4\sin\varphi dr$

$\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4 dr = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi = \frac{4\pi}{15}$

（13）若 3 维列向量 α,β 满足 $\alpha^T\beta=2$，其中 α^T 为 α 的转置，则矩阵 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为______________。

【答案】2

【解析】$\because \alpha^T\beta=2$

$\therefore \beta\alpha^T\beta = \beta\left(\alpha^T\beta\right) = 2\cdot\beta$，　　　$\therefore \beta\alpha^T$ 的非零特征值为 2.

(14)设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差。若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，则 $k=$______________。

【答案】-1

【解析】$\because \bar{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计

$$\therefore E(\bar{X}+kX^2)=np^2$$

$$\therefore np+knp(1-p)=np^2$$
$$\therefore 1+k(1-p)=p$$
$$\therefore k(1-p)=p-1$$
$$\therefore k=-1$$

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 9 分）求二元函数 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值。

【解析】

$f_x'(x,y)=2x(2+y^2)=0$

$f_y'(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0$

故 $x=0, y=\frac{1}{e}$

$f_{xx}''=2(2+y^2),\ f_{yy}''=2x^2+\frac{1}{y},\ f_{xy}''=4xy$

则

$f''_{xx}\big|_{(0,\frac{1}{e})}=2(2+\frac{1}{e^2})$

$f''_{xy}\big|_{(0,\frac{1}{e})}=0$

$f''_{yy}\big|_{(0,\frac{1}{e})}=e$

$\because f''_{xx}>0$ 而 $(f''_{xy})^2-f''_{xx}f''_{yy}<0$

$\therefore$ 二元函数存在极小值 $f(0,\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$

（16）（本题满分 9 分）设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}\left(n=1,2,.....\right)$ 所围成区域的面积，记

$S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$，求 S_1 与 S_2 的值。

【解析】由题意，$y=x^n$ 与 $\mathrm{y=x^{n+1}}$ 在点 $x=0$ 和 $x=1$ 处相交，

所以 $\mathrm{a}_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})dx=(\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2})\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，

从而 $\mathrm{S}_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}a_n=\lim\limits_{N\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2})=\lim\limits_{N\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{N+2})=\frac{1}{2}$

$S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1})=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\mathrm{N}}-\frac{1}{2\mathrm{N}+1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

由 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+(-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n}+\cdots$　　取 $x=1$ 得

$\ln(2)=1-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots)=1-S_2\Rightarrow S_2=1-\ln 2$

（17）（本题满分 11 分）椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成，圆锥面 S_2 是过点 $\left(4,0\right)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成。

（Ⅰ）求 S_1 及 S_2 的方程

（Ⅱ）求 S_1 与 S_2 之间的立体体积。

【解析】(I) S_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2+z^2}{3}=1$，

过点 $(4,0)$ 与 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的切线为 $y=\pm\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)$，

所以 S_2 的方程为 $y^2+z^2=\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)^2$。

(II) 记 $y_1=\dfrac{1}{2}x-2$，由 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，记 $y_2=\sqrt{3\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)}$，

则 $V=\int_0^4 \pi y_1^2dx-\int_0^2 \pi y_2^2dx=\pi\int_0^4\left(\dfrac{1}{4}x^2-2x+4\right)dx-\pi\int_0^2\left(3-\dfrac{3}{4}x^2\right)dx$

$=\pi\left[\dfrac{1}{12}x^3-x^2+4x\right]_0^4-\pi\left[3x-\dfrac{1}{4}x^3\right]_0^2=\dfrac{4}{3}\pi$

(18)(本题满分 11 分)

(Ⅰ) 证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

(Ⅱ) 证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$。

【解析】(Ⅰ) 作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，易验证 $\varphi(x)$ 满足：$\varphi(a)=\varphi(b)$；$\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $\varphi'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

根据罗尔定理，可得在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $\varphi'(\xi)=0$，即

$f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,\therefore f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

(Ⅱ) 任取 $x_0\in(0,\delta)$，则函数 $f(x)$ 满足；

在闭区间 $[0,x_0]$ 上连续，开区间 $(0,x_0)$ 内可导，从而有拉格朗日中值定理可得：存在 $\xi_{x_0}\in(0,x_0)\subset(0,\delta)$，使得 $f'\left(\xi_{x_0}\right)=\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}\cdots\cdots(*)$

又由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{'}(x)=A$，对上式（*式）两边取 $x_0 \to 0^+$ 时的极限可得：

$$f_+^{'}(0)=\lim_{x_0\to 0^+}\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\lim_{x_0\to 0^+} f^{'}(\xi_{x_0})=\lim_{\xi_{x_0}\to 0^+} f^{'}(\xi_{x_0})=A$$

故 $f_+^{'}(0)$ 存在，且 $f_+^{'}(0)=A$。

（19）（本题满分 10 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中 $\sum$ 是曲面

$2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧。

【解析】$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydxdz+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中 $2x^2+2y^2+z^2=4$

$$\because \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},①$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},②$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},③$$

$$\therefore ①+②+③=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=0$$

由于被积函数及其偏导数在点（0，0，0）处不连续，作封闭曲面（外侧）

$\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=R^2 .0<R<\dfrac{1}{16}$ 有

$$\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydxdz+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydxdz+zdxdy}{R^3}=\frac{1}{R^3}\iiint\limits_{\Omega}3dV=\frac{3}{R^3}\cdot\frac{4\pi R^3}{3}=4\pi$$

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}$ $\quad \xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$

①求满足 $A\xi_2=\xi_1$ 的 ξ_2．$A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3.

②对①中的任意向量 ξ_2,ξ_3 证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 无关。

【解析】（Ⅰ）解方程 $A\xi_2=\xi_1$

$$\left(A,\xi_1\right)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(A)=2$ 故有一个自由变量，令 $x_3=2$，由 $Ax=0$ 解得，$x_2=-1,x_1=1$

求特解，令 $x_1=x_2=0$，得 $x_3=1$

故 $\xi_2=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ，其中 k_1 为任意常数

解方程 $A^2\xi_3=\xi_1$

$$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$$

$$\left(A^2,\xi_1\right)=\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&\frac{-1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故有两个自由变量，令 $x_2=-1$，由 $A^2x=0$ 得 $x_1=1,x_3=0$

求特解 $\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ 故 $\xi_3=k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ ，其中 k_2 为任意常数

（Ⅱ）证明：

由于 $\begin{vmatrix}-1&k_1&k_2+\frac{1}{2}\\1&-k_1&-k_2\\-2&2k_1+1&0\end{vmatrix}=2k_1k_2+(2k_1+1)(k_2+\frac{1}{2})-2k_1(k_2+\frac{1}{2})-k_2(2k_1+1)$

$=\frac{1}{2}\neq0$ 故 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

（21）（本题满分 11 分）设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+ax_2^2+\left(a-1\right)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

（Ⅰ）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

（Ⅱ）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值。

【解析】（Ⅰ） $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}=(\lambda-a)\begin{vmatrix} \lambda-a & 1 \\ 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & \lambda-a \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a)[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-1]-[0+(\lambda-a)]$$

$$=(\lambda-a)[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-2]$$

$$=(\lambda-a)[\lambda^2-2a\lambda+\lambda+a^2-a-2]$$

$$=(\lambda-a)\{[a\lambda+\frac{1}{2}(1-2a)]^2-\frac{9}{4}\}$$

$$=(\lambda-a)(\lambda-a+2)(\lambda-a-1)$$

$$\therefore \lambda_1=a,\lambda_2=a-2,\lambda_3=a+1$$

（Ⅱ） 若规范形为 $y_1^2+y_2^2$，说明有两个特征值为正，一个为 0。则

1) 若 $\lambda_1=a=0$，则 $\lambda_2=-2<0$ ，$\lambda_3=1$ ，不符题意

2) 若 $\lambda_2=0$ ，即 $a=2$，则 $\lambda_1=2>0$，$\lambda_3=3>0$，符合

3) 若 $\lambda_3=0$ ，即 $a=-1$，则 $\lambda_1=-1<0$ ，$\lambda_2=-3<0$，不符题意

综上所述，故 $a=2$

（22）（本题满分 11 分）

袋中有 1 个红色球，2 个黑色球与 3 个白球，现有回放地从袋中取两次，每次取一球，以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数。

（Ⅰ）求 $p\left\{X=1\middle|Z=0\right\}$；

（Ⅱ）求二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 概率分布。

【解析】（Ⅰ）在没有取白球的情况下取了一次红球，利用压缩样本空间则相当于只有 1 个红球，2 个黑球放回摸两次，其中摸了一个红球

$$\therefore P(X=1|Z=0)=\frac{C_2^1\times 2}{C_3^1\cdot C_3^1}=\frac{4}{9}$$

（Ⅱ）X，Y 取值范围为 0，1，2，故

$$P\left(X=0,Y=0\right)=\frac{C_3^1\cdot C_3^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{4},P\left(X=1,Y=0\right)=\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{6}$$

$$P\left(X=2,Y=0\right)=\frac{1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{36},P\left(X=0,Y=1\right)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_3^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{3}$$

$$P\left(X=1,Y=1\right)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{9},P\left(X=2,Y=1\right)=0$$

$$P\left(X=0,Y=2\right)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{9}$$

$$P\left(X=1,Y=2\right)=0,P\left(X=2,Y=2\right)=0$$

X \ Y	0	1	2
0	1/4	1/6	1/36
1	1/3	1/9	0
2	1/9	0	0

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2xe^{-\lambda x},x>0\\0,其他\end{cases}$，其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知，X_1，X_2，$\cdots$ X_n 是来自总体 X 的简单随机样本

（Ⅰ）求参数 λ 的矩估计量；

（Ⅱ）求参数 λ 的最大似然估计量

【解析】

（1）由 $\mathrm{EX}-\overline{X}$

而 $EX=\int_0^{+\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}dx=\dfrac{2}{\lambda}=\overline{X}\Rightarrow\hat{\lambda}=\dfrac{2}{\overline{X}}$ 为总体的矩估计量

（2）构造似然函数

$$\mathrm{L}\left(x_1,\ldots\ldots,x_n;\lambda\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i;\lambda\right)=\lambda^{2n}\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

取对数 $\ln L=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$

令 $\frac{d\ln L}{d\lambda}=0\Rightarrow\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0\Rightarrow\lambda=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}$

故其最大似然估计量为 $\lambda''=\frac{2}{\overline{X}}$

法硕百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details

中医百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details

心理学百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details

西医百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details