2007 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1)当 $x \to 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

【考点分析】:等价无穷小的定义和常用的等价无穷小

【求解过程】:

■　方法一:利用等价无穷小

$$x \to 0^+ \text{时},\ 1-e^{\sqrt{x}} = -\left(e^{\sqrt{x}}-1\right) \sim -\sqrt{x},\ \sqrt{1+\sqrt{x}}-1 = \left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2 = \frac{1}{2}x,\ \ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln\left(1+\sqrt{x}\right) \sim \sqrt{x}$$

■　方法二:可用洛必达法则和等价无穷小的定义来求解

验证极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{A(B,C,D)}{\sqrt{x}}$ 是否等于 1,其中 $A(B,C,D)$ 表示 A,B,C,D 四个选项中的式子。

故选 B

【基础回顾】:

下面,我们就无穷小之比的极限存在或为无穷大时。来说明两个无穷小之间的比较。应当注意,下面的 α 及 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小,且 $\alpha \neq 0$,$\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 也是在这个变化过程中的极限。

定义:

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$ 就说 β 是比 α 高阶的无穷小,记作 $\beta = o(\alpha)$;

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$,就说 β 是比 α 低阶的无穷小。

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$,就说 β 与 α 是同阶无穷小;

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0, k>0$,就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小。

如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$，就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作$\alpha \sim \beta$。

显然，等价无穷小是同阶无穷小的特殊情形，即$c=1$的情形。

常用等价无穷小，当$x \to 0$时，$e^x-1 \sim \ln(1+x) \sim \sin x \sim \tan x \sim x$

$(1+x)^{\alpha}-1 \sim \alpha x$，　　　$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$

(2)曲线$y=\dfrac{1}{x}+\ln\left(1+e^x\right)$,渐近线的条数为

(A)0　　　　(B)1

(C)2　　　　(D)3

【考点分析】：曲线的渐近线（水平、垂直、斜渐近线）的条数

【求解过程】：

计算垂直渐近线：求函数在其不连续点$x=x_0$处的极限，若为∞则存在垂直渐近线

$x=x_0$

函数只有间断点$x=0$，$\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+\ln\left(1+e^x\right)\right)=\infty$，故存在垂直渐近线$x=0$

计算水平渐近线：求函数在$x \to +\infty, x \to -\infty$时的极限 a，若 a 存在，则有水平渐近线$y=a$

$\lim\limits_{x\to -\infty} y=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\ln\left(1+e^x\right)\right)=0$，故存在水平渐近线$y=0$

计算斜渐近线：求$\dfrac{y}{x}$在$x \to +\infty, x \to -\infty$时的极限$a$，若$a$存在，且$a \neq 0$，求出$y-ax$在相应处的极限 b，则有斜渐近线$y=ax+b$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}\right)=0+\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(y-x\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln\left(1+e^x\right)-x\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)\right)=0$$

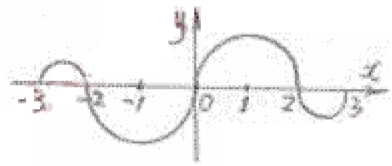
故存在斜渐近线$y=x$

选 D。

【相关补充】：

对于曲线$y=f\left(x\right)$，若沿$x \to +\infty$方向有水平（或斜）渐近线，则沿同一方向必定没有斜（或相应地，必定没有水平）渐近线，但沿另一方向$x \to -\infty$仍可能有渐近线。

(3)如图,连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2,0],[0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周,设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.则下列结论正确的是



(A) $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$ (B) $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

(C) $F(3)=\dfrac{3}{4}F(2)$ (D) $F(3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$

【考点分析】:定积分的奇偶性，奇偶函数变上限积分函数的奇偶性

【求解过程】:

■ **方法一**：定积分的几何意义

注意：大小半圆的面积分别为 $\dfrac{1}{2}\pi,\dfrac{1}{8}\pi$

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是 $f(t)$ 与线段 $AB\big(A(0,0),B(x,0)\big)$ 所围图形的有向面积的代数和。$F(3)=\dfrac{1}{2}\pi-\dfrac{1}{8}\pi=\dfrac{3}{8}\pi$，$F(2)=\dfrac{1}{2}\pi$，$F(-2)=-\int_{-2}^{0} f(t)dt=-\left(-\dfrac{1}{2}\pi\right)=\dfrac{1}{2}\pi$，选 C

■ **方法二**：定积分几何意义和奇偶性结合

$y=f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数，故 $F(-2)=F(2)=\dfrac{1}{2}\pi$，其他同解法一。故选 C

【基础回顾】:

若 $y=f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数；

若 $y=f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 为奇函数。

(4)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是

(A)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$ (B)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$

(C)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在 (D)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在

【考点分析】:由某极限的存在推出函数在指定点的可导性及在定点处的值，函数连续与可导的关系

【求解过程】:

■ **方法一**：直接论证法

对于 A，由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在及 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}x\right)=0$$，A 正确

对于 C，由 A 知 $f(0)=0$，所以 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，C 正确

对于 B，由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(-x)$ 在 $x=0$ 处连续。所以

$$f(0)+f(-0)=\lim_{x\to 0}\left[f(x)+f(-x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{x}\cdot x\right]=0$$，故 $f(0)=0$。

B 正确。综上，选 D

■ **方法二**：举例法

设 $f(x)=|x|$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-|-x|}{x}=0$（存在），但 $f'(0)$ 不存在，D 错误，选 D

【方法小结】：考场上用举例法很快速。

(5)设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)=1,2,\cdots,n,$ 则下列结论正确的是

(A)若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛

(B)若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散

(C)若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛

(D)若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散

【考点分析】：数列的敛散性、拉格朗日中值定理的应用

【求解过程】:

■ **方法一**：由拉格朗日中值定理证明

由拉格朗日中值定理，有

$$u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)(n+1-n)=f'(\xi_n),(n=1,2,\ldots)$$

$\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<\cdots$，由 $f''(x)>0$ 知 $f'(x)$ 严格单调增，故

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)<\cdots f'(\xi_n)<\cdots$$

由于 $f'(\xi_1)=u_2-u_1$，若 $u_2-u_1>0$ 则，

$$u_{n+1}=u_1+\sum_{k=1}^{n}\left(u_{k+1}-u_k\right)=u_1+\sum_{k=1}^{n}f'\left(\xi_k\right)>u_1+nf'\left(\xi_1\right)$$

而 $f'\left(\xi_1\right)$ 是一个确定的正数，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=+\infty$，故 $\left\{u_n\right\}$ 发散，选 D

■　**方法二**：级数的定义与性质

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_{n+1}-u_n\right)$ 的前 n 项部分和为

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(u_{k+1}-u_k\right)=u_{n+1}-u_1$。$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在的充要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_{n+1}-u_n\right)$ 收敛。而

$u_{k+1}-u_k=f'\left(\xi_k\right)>f'\left(\xi_1\right)>0,\left(k=2,3,\cdots\right)$

$f'\left(\xi_1\right)$ 是一个确定的正数，故 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(u_{k+1}-u_k\right)\neq0$，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_{n+1}-u_n\right)$ 发散，于是

数列 $\left\{u_n\right\}$ 发散。

■　**方法三**：特殊函数举例排除法

设 $f\left(x\right)=\left(x-2\right)^2$，则 $f''(x)=2>0$，$u_1=f\left(1\right)=1,u_2=f\left(2\right)=0,u_1>u_2$，但

$u_n=f\left(n\right)=\left(n-2\right)^2,\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$，从而 $\left\{u_n\right\}$ 发散，A 错误

设 $f\left(x\right)=e^{-x}$，则 $f''\left(x\right)=e^{-x}>0$，$u_1=f\left(1\right)=\dfrac{1}{e},u_2=f\left(2\right)=\dfrac{1}{e^2},u_1>u_2$，而

$u_n=f\left(n\right)=e^{-n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则 $\left\{u_n\right\}$ 收敛，B 错误

设 $f\left(x\right)=e^x$，则 $f''\left(x\right)=e^x>0$，且 $u_1=f\left(1\right)=e,u_2=f\left(2\right)=e^2,u_1<u_2$，而

$u_n=f\left(n\right)=e^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^n=+\infty$，则 $\left\{u_n\right\}$ 发散，C 错误。

故选 D

■　**方法四**：利用函数单调性

由 $f''\left(x\right)>0\left(x>0\right)\Rightarrow f'\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 单调上升，$f\left(x\right)$ 有如下三种情形：

① $\exists x_0\in\left(0,+\infty\right),f'\left(x\right)=0\Rightarrow f'\left(x\right)\begin{cases}<0,0<x<x_0\\=0,x=x_0\\>0,x>x_0\end{cases}$

$\Rightarrow f\left(x\right)$ 在 $\left(x_0,+\infty\right]$ 单调上升，又由凹函数的性质 $x>x_1>x_0$ 时

$$f\left(x\right)>f\left(x_1\right)+f'\left(x_1\right)(x-x_1)\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$$

② $\forall x\in(0,+\infty), f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$在$(0,+\infty)$单调上升，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

③ $\forall x\in(0,+\infty), f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$在$(0,+\infty)$单调下降，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\exists$或

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow$A、B 错误

由①②$\Rightarrow$C 错误，选 D

【方法小结】：四种方法比较而言，第一种方法较为清晰易想。

(6)设曲线$L: f(x,y)=1$($f(x,y)$具有一阶连续偏导数),过第 2 象限内的点M和第Ⅳ象限内的点N,Γ为L上从点M到N的一段弧,则下列小于零的是

(A) $\int_\Gamma (x,y)dx$　　　　(B) $\int_\Gamma f(x,y)dy$

(C) $\int_\Gamma f(x,y)ds$　　　　(D) $\int_\Gamma f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$

【考点分析】：曲线积分

【求解过程】：

记$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，由条件知：$x_1<0<x_2, y_1>0>y_2$，并注意在积分弧段上$f(x,y)=1$。于是

A．$\int_\Gamma f(x,y)dx=\int_\Gamma dx=\int_{x_1}^{x_2}dx=x_2-x_1>0$

B．$\int_\Gamma f(x,y)dy=\int_\Gamma dy=\int_{y_1}^{y_2}dx=y_2-y_1<0$

C．$\int_\Gamma f(x,y)ds=\int_\Gamma ds=l$, l为弧Γ的长，$l>0$

D．$\int_\Gamma f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy=\int_\Gamma df(x,y)=f(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$

$$=f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)=1-1=0$$

D．由$f(x,y)=1$得$f'_x(x,y)=0, f'_y(x,y)=0$，故$\int_\Gamma f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy=0$

综上，选 B

(7)设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,则下列向量组线性相关的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$　　　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

【考点分析】：向量组线性相关性的判定

【求解过程】:

■ **方法一**：利用向量组线性相关的定义

A 中$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$，由向量组线性相关的定义知 A 中的向量组线性相关，选 A

■ **方法二**：利用矩阵变换求解

$$[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\mathbf{C}_2$$

$$[\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\mathbf{C}_3$$

$$[\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\mathbf{C}_4$$

其中

$$|C_2|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0,|C_3|=\begin{vmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{vmatrix}=-7\neq 0,|C_4|=\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=9\neq 0$$

故，C_2,C_3,C_4均是可逆阵，右乘$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$时，不改变矩阵的秩，故有

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{r}(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{r}(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$$

故，向量组 B、C、D 都是线性无关的，由排除法，选 A

（或显然$[\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\mathbf{C}_1$，

$|C_1|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=0$，则$C_1$不可逆，$\mathbf{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\leq\mathbf{r}(\mathbf{C}_1)\leq 2$，从而向量组 A 线性相关。选 A）

【方法小结】：方法一快速有效。

(8)设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$

(A)合同,且相似　　(B)合同,但不相似

(C)不合同,但相似　　(D)既不合同,也不相似

【考点分析】：相似矩阵、合同矩阵的概念和判定，及两者的关系

【求解过程】：

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-3&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2=0$$

所以，A 的特征值为 3,3,0，B 的特征值为 1,1,0，A 与 B 特征值不等，故不相似，但 A，B 对应的二次型的正惯性指数均为 2，负惯性指数均为 0，故 A 与 B 合同，选 B

另外，也可用如下方法求 A 的特征值

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}+3\mathbf{E}，记\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}，则$$

$\mathbf{A}=\mathbf{C}+3\mathbf{E}$，因 $\mathbf{r}(\mathbf{C})=\mathbf{1}$，故 C 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，由矩阵特征值的和等于矩阵对角线元素之和得 C 有特征值 $\lambda_3=-3$。故 A 的特征值为 $\lambda_i+3(i=1,2,3)$，即 3,3,0

【基础回顾】：

① 实对称矩阵相似的充要条件是具有相同的特征值

② 实对称矩阵合同的充要条件是有相同的正特征值个数和负特征值个数或者对应的二次型有相同的正惯性指数和负惯性指数

③ 由①，②可知，实对称矩阵相似必合同，反之，不一定成立

(9)某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$,则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$　　(B) $6p(1-p)^2$

(C) $3p^2(1-p)^2$　　(D) $6p^2(1-p^2)$

【考点分析】：伯努利概型的计算

【求解过程】：

第 4 次射击恰好第 2 次命中目标即前三次击中目标一次，第 4 次射击击中目标

由伯努利概型,前三次射击击中一次的概率为 $C_3^1p(1-p)^2$,第 4 次击中目标的概率为 p，根据独立性有，第 4 次射击为第二次命中目标的概率为 $C_3^1p(1-p)^2\cdot p=3p^2(1-p)^2$，选 C

(10)设随即变量(X,Y)服从二维正态分布,且 X 与 Y 不相关, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度,则在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为

(A) $f_X(x)$　　(B) $f_Y(y)$

(C) $f_X(x)f_Y(y)$　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

【考点分析】：二维正态分布的概率密度、相关性、条件概率密度

【基础回顾】：二维正态分布(X,Y)中， X,Y 不相关$\Leftrightarrow X,Y$ 独立。

【求解过程】：

二维正态分布(X,Y)中， X,Y 不相关$\Leftrightarrow X,Y$ 独立，故 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

由条件概率密度的定义，在 $Y=y$ 的条件下，如果 $f_Y(y)\neq 0$，则

$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)}=f_X(x)$，现显然 $f_Y(y)\neq 0$，故

$f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)$，选 A

二、填空题(11－16 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上)

(11) $\int_1^2 \dfrac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=$________.

【考点分析】：定积分的计算方法

【求解过程】：

■　方法一：直接用分部积分法

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_1^2 \frac{1}{x}de^{\frac{1}{x}}=-\left(\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2-\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}\right)=-\left(\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2-e^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$$

■　方法二：先用换元法化简定积分，再用分部积分法求解

令 $\dfrac{1}{x}=t$，则

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=\int_1^{\frac{1}{2}} t^3e^t\cdot\left(-\frac{1}{t^2}dt\right)=\int_{\frac{1}{2}}^1 te^tdt=\int_{\frac{1}{2}}^1 tde^t=te^t\Big|_{\frac{1}{2}}^1-\int_{\frac{1}{2}}^1 e^tdt=te^t\Big|_{\frac{1}{2}}^1-e^t\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$$

(12)设 $f(u,v)$ 为二元可微函数, $z=f\left(x^{y},y^{x}\right)$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ =______.

【考点分析】：求复合函数的偏导数

【求解过程】：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\left(x^{y},y^{x}\right)\left(yx^{y-1}\right)+f_2'\left(x^{y},y^{x}\right)\left(y^{x}\ln y\right)$$，填 $yx^{y-1}f_1'+y^{x}\ln y f_2'$

(13)二阶常系数非齐次线性方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 y =____________.

【考点分析】：二阶常系数线性非齐次微分方程通解

【求解过程】：

对应齐次微分方程： $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的特征方程为 $\lambda^{2}-4\lambda+3=0$，特征根 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$，故对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}$。因为 2 不是特征根，故方程的特解可设为： $y^{*}=Ae^{2x}$，代入方程可求得 A=-2，故 $y^{*}=-2e^{2x}$。原方程的通解为

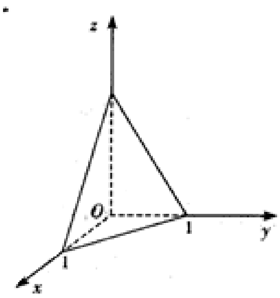
$y=Y+y^{*}=C_1e^{x}+C_2e^{3x}-2e^{2x}$，填 $C_1e^{x}+C_2e^{3x}-2e^{2x}$ （C_1,C_2 为任意常数）。

(14)设曲面 $\sum:|x|+|y|+|z|=1$,则 $\iint\limits_{\Sigma}\left(x+|y|\right)ds$ =_____________.

【考点分析】：第一类曲面积分的计算及利用奇偶性和轮换对称性

【求解过程】：

曲面 Σ 有八块平面构成，它在第一卦限中的图像如图所示，



在其它卦限中的图像与其对称。

曲面 Σ 关于 yz 面对称，x 为关于 x 的奇函数，所以 $\iint\limits_{\Sigma}xdS=0$。

$\iint\limits_{\Sigma}|y|dS$ 可用下列三种方法求解：

■ 方法一：利用 Σ 关于 x,y,z 轮换对称

$$\iint\limits_{\Sigma}|y|dS=\iint\limits_{\Sigma}|z|dS=\iint\limits_{\Sigma}|x|dS,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}|y|dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}\left(|x|+|y|+|z|\right)dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}dS=\frac{1}{3}\cdot S_{\Sigma}$$ （S_{Σ} 表示曲面 Σ 的面积）

而Σ为 8 块同样的等边三角形，每块等边三角形边长为$\sqrt{2}$，所以

$S_{\Sigma}=8\times\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$，所以$\iint\limits_{\Sigma}|y|dS=\frac{4}{3}\sqrt{3}$

■　方法二：.化为二重积分

$\iint\limits_{\Sigma}|y|dS=8\iint\limits_{D}y\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=8\int_0^1dx\int_0^{1-x}\sqrt{3}ydy=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，其中 D 为

$D:\left\{(x,y,z)\in D\mid z=0,x+y\le1,x\ge0,y\ge0\right\}$

■　利用形心公式

$\iint\limits_{\Sigma}|y|dS=8\iint\limits_{\Sigma_1}ydS=8\overline{y}\cdot S_{\Sigma_1}=8\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$

Σ_1为Σ在第一卦限内的部分

综上，应填$\frac{4}{3}\sqrt{3}$

【方法小结】:

方法一最为快速，方法二三为此类问题的通法。

(15)设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$,则 $\mathbf{A}^3$ 的秩为________.

【考点分析】：矩阵幂的运算，矩阵的秩

【求解过程】：直接计算A^3，再求$r\left(A^3\right)$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以，$r\left(A^3\right)=1$

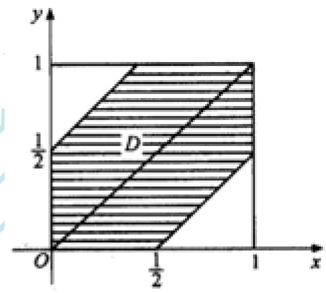
(16) 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数,则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为________.

【考点分析】：几何型概率。

【求解过程】：

不妨假定随机地取出两个数分别为 X 和 Y，它们相互独立。X 与 Y 两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 对应于下图正方形 $0<X<1,0<Y<1$ 中 $|X-Y|<\frac{1}{2}$ 的区域 D。

根据几何概率 $P\left(|X-Y|<\frac{1}{2}\right)=\frac{S_D}{S}=\frac{1-2\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1}=\frac{3}{4}$（$S_D$ 表示区域 D 的面积，S 表示单位正方形的面积）



【基础回顾】：

几何概型问题中事件 A 的概率

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{L}(\mathrm{A})/\mathrm{L}(\Omega),0<\mathrm{L}(\Omega)<+\infty$$

其中，$L(\Omega):n$ 维空间 Ω 的 n 维体积，$L(A):n$ 维区域 $A(\subset\Omega)$ 的 n 维体积。

所谓 n 维体积，在 $n=1$ 时的一维体积维长度，二维时维面积，三维时则是通常说的体积。几何概型问题中的主要计算工具是用几何方法计算长度、面积等，也会用到微积分计算。

三、解答题(15－23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17)

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,y\ge 0\}$ 上的最大值和最小值

【考点】函数最值得求法

【思路】所给的是一个区域，要分别求在区域内部及边界上的最值再比较得函数在区域上的最大值最小值。注意这里边界上的最值形式比较简单，可以不用拉格朗日乘数法

【题解】先求函数 $f(x,y)$ 在区域内的最值，令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2xy^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y - 2x^2 y = 0 \end{cases}$$

解得 $x = \pm\sqrt{2}, y = 1$，所以 $f(x,y)$ 在 D 内又两个驻点，对应的函数值均为 2。

再求边界上的最值，D 的边界有两部分，一部分是上半圆弧，另一部分是 x 轴。在圆弧上有 $x^2 + y^2 = 4, y^2 = 4 - x^2$，代入 $f(x,y)$：

$$f(x,y) = x^2 + 2(4 - x^2) - x^2(4 - x^2) = 8 - 5x^2 + x^4$$

记作 $g(x)$，则 $g'(x) = 4x^3 - 10x = 2(2x^2 - 5)x$，令 $g'(x) = 0$ 则 $x = 0$ 或 $x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$。

在直线上，$f(x,y) = x^2, (-2 \le x \le 2)$ 最小值为 0，最大值为 4。

又 $g(0) = 8, g\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right) = \dfrac{7}{4}$，所以 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 8，最小值为 0。

(18)

计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xzdydz + 2zydzdx + 3xydxdy$，其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}(0 \le z \le 1)$ 的上侧。

【考点】第二型曲面积分，高斯公式

【思路】很典型的题目，所给的曲面不封闭，加辅助面 $z = 0$ 取下侧得到区域 Ω，再应用高斯公式简化计算。

【题解】加辅助面 $\Sigma' : z = 0\left(x^2 + \dfrac{1}{4}y^2 \le 1\right)$，取下侧，$\Sigma$ 与 Σ' 围成的区域记作 Ω。用高斯公式，有

$$\begin{aligned} I' &= \iiint_{\Omega} (z + 2z + 0)dV = 3\iiint_{\Omega} zdV \\ &= 3\int_0^1 dz \iint_{D(z)} zdxdy = 3\int_0^1 z \cdot 2(1 - z)\pi dz = 6\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \pi \end{aligned}$$

其中 $D(z) : x^2 + \dfrac{1}{4}y^2 \le 1 - z$，其面积为 $2(1 - z)\pi$，又

$$\iint_{\Sigma'} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy=\iint_{\Sigma'} 3xydxdy$$

由对称性，有 $\iint_{\Sigma'} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy=0$，所以 $I=\pi$。

(19) 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：存在 $\zeta\in(a,b)$，使得 $f''(\zeta)=g''(\zeta)$。

【考点】罗尔中值定理

【思路】要求一点使得二阶导数相等，最直接的想法是找到三个函数值相等的点再两次应用罗尔定理，再由题意，问题转化为再找一个函数值相同的点即可。

【题解】由条件，$f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内存在相等的最大值，设 $f_{MAX}=f(c_1),g_{MAX}=g(c_2)$，则有 $f(c_1)=g(c_2)$

若 $c_1=c_2$，令其为 c，则有 $f(c)=g(c)$。

若 $c_1\neq c_2$，不妨设 $c_1<c_2$，则有 $f(c_1)=M>g(c_1),f(c_2)<M=g(c_2)$。

令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(c_1)=f(c_1)-g(c_1)>0,F(c_2)=f(c_2)-g(c_2)<0$，又 $F(x)$ 在 (a,b) 内连续，所以由零点存在定理，有 $c\in(c_1,c_2)$ 使得 $F(c)=0$，也即 $f(c)=g(c)$。

因为 $f(a)=g(a),f(c)=g(c)$，$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由罗尔定理，有 $\zeta_1\in(a,c)$ 使得 $f'(\zeta_1)=g'(\zeta_1)$，同理有 $\zeta_2\in(c,b)$ 使得 $f'(\zeta_2)=g'(\zeta_2)$。

再由罗尔定理，有 $\zeta\in(\zeta_1,\zeta_2)$，使得 $f''(\zeta)=g''(\zeta)$，即证。

(20)设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0,y(0)=0,y'(0)=1$$

（1） 证明 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots$

（2） 求 $y(x)$ 得表达式

【考点】幂级数，微分方程

【思路】幂级数收敛因此可以逐项求导，再代入所给的微分方程即可证明，第二问只需用第一问的结论即可化简。

【题解】（1）因为 $y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，所以可以逐项求任意次导，有

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

所以

$$\begin{aligned} y''-2xy'-4y &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n \\ &= 2a_2-4a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}-2(n+2)a_n\right]x^n=0 \end{aligned}$$

又 $y(0)=a_0=0$，所以 $a_2=0$，$(n+1)(n+2)a_{n+2}-2(n+2)a_n=0$，$n=1,2,3,\cdots$,所以

$$a_0=a_2=0,a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n$$

即证

（2） 因为 $a_0=a_2=0,a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n$，所以 $a_{2n}=0$，也即

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$$

所以

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2}$$

(21)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$$

与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 得值及所有的公共解。

【考点】线性方程组的解

【思路】将方程组与方程联立求解即得公共解

【题解】将方程组与方程联立

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}$$

则此方程组的解就是原方程组的公共解，对其增广矩阵做初等航变换，有

$$\hat{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&3&a^2-1&0\\0&1&0&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&(a-1)(a-2)&0\\0&0&1-a&a-1\end{pmatrix}$$

所以若$\hat{\mathbf{A}}$有解，则$(a-1)(a-2)=0$，即$a=1$或$a=2$。

当$a=1$时，方程组的通解为$k(1,0,-1)^T$，即为方程组与方程的公共解。

当$a=2$时，方程组的解维$(0,1,-1)^T$，即为方程组与方程的公共解。

(22)

设三阶实对称矩阵A的特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，$\alpha_1=(1,-1,1)^T$是$A$的属于特征值$\lambda_1$的一个特征向量，记$B=A^5-4A^3+E$，其中$E$为三阶单位矩阵。

（1） 验证α_1是矩阵B的特征向量，并求B的全部特征值与特征向量。

（2） 求矩阵B

【考点】特征值与特征向量的性质

【思路】最直观的想法就是应用性质$A\alpha=\lambda\alpha,\lambda$是矩阵$A$的特征值，$\alpha$是对应的特征向量。还要注意的是对于实对称矩阵，其对应不同特征值的特征向量相互正交。

【题解】（1）由题意，$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1=\alpha_1,A^n\alpha_1=\lambda^n\alpha_1=\alpha_1$，又

$$B\alpha_1=\left(A^5-4A^3+E\right)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=(1-4+1)\alpha_1=-2\alpha_1$$

所以α_1是B属于特征值-2的特征向量。

由令A的属于λ_2,λ_3的特征值分别为α_2,α_3（因为A是三阶实对称矩阵所以对应三个不同特征值的特征向量都只有一个）。

又$B\alpha_2=\left(2^5-4\cdot2^3+1\right)\alpha_2=a_2,B\alpha_3=\left((-2)^5-4\cdot(-2)^3+1\right)\alpha_3=\alpha_3$所以$\alpha_2,\alpha_3$是对应$B$的特征值 1 的特征向量。

又A是三阶实对称矩阵，所以它的三个特征向量两两正交，也即$\alpha_1\alpha_2=0,\alpha_1\alpha_3=0$，解得

$\alpha_2=(1,1,0)^T$，$\alpha_3=(-1,0,1)^T$。

综上，B属于特征值$\mu=-2$的特征向量$k_1(1,-1,1)^T$，k是不为 0 的常数；

B 属于特征值的特征向量是$k_2(1,1,0)^T+k_3(-1,0,1)^T$，$k_2,k_3$是不全为零的常数。

(2)令$C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则$BC=(-2\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，所以

$$B=\left(-2\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\cdot C^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

(23)

设二维随机变量$\left(X,Y\right)$的概率密度为

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}2-x-y & 0<x<1,0<y<1;\\0 & 其他\end{cases}$$

(1) 求$P\left(X>2Y\right)$

(2) 求$Z=X+Y$得概率密度

【考点】多维随机变量的分布，随机变量的函数分布

【思路】画出图形按区域求积分即可

【题解】（1）由题意

$$P\left(X>2Y\right)=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{2}x}\left(2-x-y\right)dy=\int_0^1 x-\frac{5}{8}x^2dx=\frac{7}{24}$$

（3） 先求出Z的分布函数，再求概率密度，由题意，当$z<0$时，$F_Z\left(z\right)=0$，当$Z\geq 2$时，$F_Z\left(z\right)=1$，又

当$0\leq z<1$时

$$F_z\left(z\right)=P\left(X+Y\leq z\right)=\int_0^z dy\int_0^{z-y}\left(2-x-y\right)dx=z^2-\frac{1}{3}z^3$$

当$1\leq z<2$时

$$F_z\left(z\right)=P\left(X+Y\leq z\right)=1-P\left(X+Y>z\right)=1-\int_{z-1}^1 dy\int_{z-y}^1\left(2-x-y\right)dx=1-\frac{1}{3}\left(2-z\right)^3$$

所以Z的概率密度为

$$f\left(z\right)=\begin{cases}2z-z^2 & 0<z<1;\\\left(2-z\right)^2 & 1\leq z<2;\\0 & z\geq 2\end{cases}$$

(24)

设总体X的概率为

$$f\left(x,\theta\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta} & 0<x<\theta\\\dfrac{1}{2(1-\theta)} & \theta\leq x<1\\0 & 其他\end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 x 的简单随机样本，$\hat{X}$ 是样本均值。

（1） 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$

（2） 判断 $4\hat{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，并说明理由

【考点】随机变量的数字特征，矩估计

【思路】第一问只需求 EX，第二问求 $E\hat{X}^2$ 得期望即可

【题解】（1）

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\theta} \frac{x}{2\theta}dx + \int_{\theta}^{1} \frac{x}{2(1-\theta)}dx = \frac{2\theta+1}{4}$$

所以 $\theta = 2\mu - \frac{1}{2}, \hat{\theta} = 2\hat{X} - \frac{1}{2}$

（2）

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\theta} \frac{x^2}{2\theta}dx + \int_{\theta}^{1} \frac{x^2}{2(1-\theta)}dx = \frac{\theta^2}{6} + \frac{1-\theta^2}{6(1-\theta)} = \frac{2\theta^2+\theta+1}{6}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{4\theta^2 - 4\theta + 5}{48}$$

又 $D\hat{X} = \frac{DX}{n}, E\hat{X} = EX$，所以

$$E\hat{X}^2 = D\hat{X} + \left(E\hat{X}\right)^2 = \frac{4\theta^2 - 4\theta + 5}{48n} + \frac{4\theta^2 + 4\theta + 1}{16} \neq \frac{\theta^2}{4}$$

所以 $E\left(4\hat{X}^2\right) \neq \theta^2$，所以 $4\hat{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量。

新大纲百日冲刺提分方案-最后 3 个月，针对新大纲考点，精准提分

数学一/三百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details
数学二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details
英语一百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details
英语二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details
政治百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details
法硕百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details
中医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details
心理学百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details
西医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details