2010 考研数学二真题及答案

一选择题

1.函数$f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$的无穷间断点的个数为

A0　B1　C2　D3

2.设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解， $\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则

A $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$　　B $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$

C $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$　　D $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$

3.曲线$y=x^2$与曲线$y=a\ln x(a\neq 0)$相切，则$a=$

A4e　B3e　C2e　De

4.设 m,n 为正整数,则反常积分 $\int_0^1 \dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性

A 仅与 m 取值有关　　B 仅与 n 取值有关

C 与 m,n 取值都有关　D 与 m,n 取值都无关

5.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F_2'\neq 0$, 则

$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

A x　　B z　　C $-x$　　D $-z$

6.(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

A $\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　B $\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

C $\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　D $\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

7.设向量组 $I:\alpha_1,\alpha_2,\ldots,$ α_r可由向量组II：β_1，$\beta_2,\ldots,$ β_s线性表示，下列命题正确

的是：

A 若向量组 I 线性无关，则 $r \le s$　　B 若向量组 I 线性相关，则 r>s

C 若向量组 II 线性无关，则 $r \le s$　　D 若向量组 II 线性相关，则 r>s

8.设 $\mathbf{A}$ 为 4 阶对称矩阵，且 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}=0$，若 $\mathbf{A}$ 的秩为 3，则 $\mathbf{A}$ 相似于

A $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$ C $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

二填空题

9.3 阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解 y=__________

10.曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为_______________

11.函数 $y=\ln(1-2x)$在$x=0$处的n阶导数$y^{(n)}(0)=$__________

12.当$0\le\theta\le\pi$时，对数螺线$r=e^{\theta}$的弧长为__________

13.已知一个长方形的长 l 以 2cm/s 的速率增加，宽 w 以 3cm/s 的速率增加，则当 l=12cm,w=5cm 时，它的对角线增加的速率为__________

14.设 A，B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2$，则$|A+B^{-1}|=$__________

三解答题

15.求函数$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$的单调区间与极值。

16.(1)比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt(n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由.

(2)记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}u_n$.

17.设函数 y=f(x) 由参数方程

$\begin{cases} x=2t+t^2, \\ y=\psi(t), \end{cases}(t>-1)$所确定，其中$\psi(t)$具有2阶导数，且$\psi(1)=\frac{5}{2}$，

$\psi'(1)=6$，已知$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$，求函数$\psi(t)$。

18.一个高为 l 的柱体形贮油罐，底面是长轴为 2a,短轴为 2b 的椭圆。

现将贮油罐平放，当油罐中油面高度为$\frac{3}{2}b$时，计算油的质量。

（长度单位为 m，质量单位为 kg，油的密度为$\rho kg/m^3$）

19.

设函数$u=f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且满足等式$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

确定a,b的值，使等式在变换$\xi=x+ay,\eta=x+by$下简化$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$

20. 计算二重积分$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$,其中$D=\{(r,\theta)\big|0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}.$

21.设函数 f(x)在闭区间[0,1]上连续，在开区间(0,1)内可导，且

f(0)=0,f(1)=$\frac{1}{3}$,证明：存在$\xi\in(0,\frac{1}{2}),\eta\in(\frac{1}{2},1)$,使得$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2.$

22.

设$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$.已知线性方程组$Ax=b$存在2个不同的解。

(1) 求λ、a.

(2)求方程组$Ax=b$的通解。

23.设$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，正交矩阵 Q 使得$Q^TAQ$为对角矩阵，若 Q 的第一列为$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求 a、Q.

答案:

BACD　　BDAD

9. $C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$　　　10.y=2x　　　11. $-2^n\cdot(n-1)!$

12. $\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$　　　13.3cm/s　　　14.　3

三解答题

15.

解：$f(x)$的定义域$(-\infty,+\infty)$,由于$f(x)=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$,

$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$,所以驻点为$x=0,\pm1$.

列表讨论如下：

x	$(-\infty,1)$	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	(1,+∞)
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘	极小	↗

因此，$f(x)$的单调增加区间为（-1,0）及（1,+∞），单调递减区间为（-∞,-1）及（0,1）；极小值为$f(\pm1)=0$,极大值为$f(0)=\int_0^1 te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$.

16.

解:(1)当$0\le t\le1$,$\because \ln(1+t)\le t$,$\therefore |\ln t|[\ln(1+t)]^n\le t^n|\ln t|$,

因此,$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\le\int_0^1 t^n|\ln t|dt$.

(2)由(1)知$0\le u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\le\int_0^1 t^n|\ln t|dt$.

$\because \int_0^1 t^n|\ln t|dt=-\int_0^1 t^n\ln t dt=\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{(n+1)^2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\int_0^1 t^n|\ln t|dt=0$,从而$\lim_{n\to\infty}u_n=0$

17

$$\because \frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{2+2t},\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{(2+2t)\psi''(t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^2}}{(2+2t)}=\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}$$

由题设 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$，故 $\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}=\frac{3}{4(1+t)}$，

从而，$\psi''(t)-\frac{1}{1+t}\psi'(t)=3(1+t).$

设 $u=\psi'(t)$，有 $u'-\frac{1}{1+t}u=3(1+t)$，

$$u=e^{\int\frac{1}{1+t}dt}\left[\int 3(1+t)e^{-\int\frac{1}{1+t}dt}dt+C_1\right]$$

$$=(1+t)(3t+C_1).$$

由 $u\big|_{t=1}=\psi'(t)=6$，知 $C_1=0$，于是 $\psi'(t)=3t(1+t)$. $\psi(t)=3\int(t+t^2)dt=\frac{3}{2}t^2+t^3+C_2.$

由 $\psi(1)=\frac{5}{2}$，知 $C_2=0$，于是 $\psi(t)=\frac{3}{2}t^2+t^3\ (t>-1).$

18 解：

如下图建立坐标系，则油罐底面椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

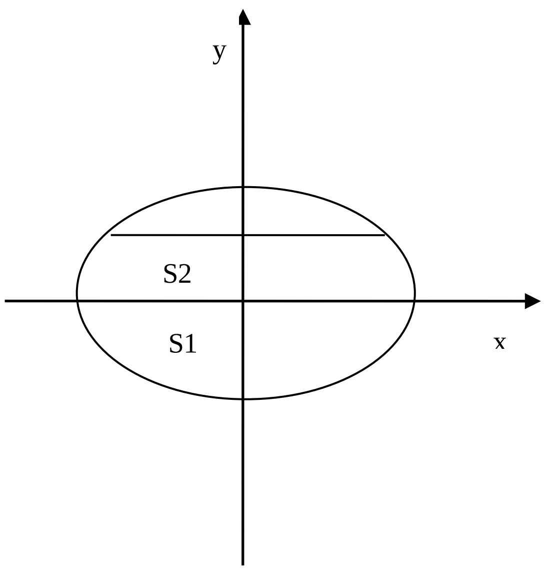
图中阴影部分为油面与椭圆所围成的图形。

记 S_1 为下半椭圆面积，则 $S_1=\frac{1}{2}\pi ab$. 记 S_2 是位于 x 轴上方阴影部分的面积，则

$S_2=2\int_0^{\frac{b}{2}}a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}dy$，设 $y=b\sin t$，则 $dy=b\cos t dt$，

$$S_2=2ab\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)dt=ab\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right),$$

于是油的质量为 $(S_1+S_2)lp=\left(\frac{1}{2}\pi ab+\frac{\pi}{6}ab+\frac{\sqrt{3}}{4}ab\right)lp=\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)ablp.$



19 解：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

将以上各式代入原等式，得

$$(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+[10ab+12(a+b)+8]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

由题意，令$\begin{cases}5a^2+12a+4=0\\5b^2+12b+4=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-2\\b=-\frac{2}{5}\end{cases},\begin{cases}a=-\frac{2}{5}\\b=-2\end{cases},\begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases},\begin{cases}a=-\frac{2}{5}\\b=-\frac{2}{5}\end{cases}$

由$10ab+12(a+b)+8\neq 0$，舍去$\begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases},\begin{cases}a=-\frac{2}{5}\\b=-\frac{2}{5}\end{cases}$，

故，$a=-2,b=-\frac{2}{5}$或$a=-\frac{2}{5},b=-2.$

20.

由题设知，$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}drd\theta=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}dxdy$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1dx\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}d(1-x^2+y^2)=\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx.$$

设$x=\sin t$，则$I=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{(4)}tdt=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}.$

21.

证：设函数$F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，由题意知$F(0)=0,F(1)=0.$

在$[0,\frac{1}{2}]$和$[\frac{1}{2},1]$上分别应用拉格朗日中值定理，有

$$F(\frac{1}{2})-F(0)=F'(\xi)(\frac{1}{2}-0)=\frac{1}{2}[f'(\xi)-\xi^2].\xi\in(0,\frac{1}{2}),$$

$$F(1)-F(\frac{1}{2})=F'(\eta)(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}[f'(\eta)-\eta^2],\eta\in(\frac{1}{2},1).$$

二式相加，得：$F(1)-F(0)=\frac{1}{2}[f'(\xi)-\xi^2]+\frac{1}{2}[f'(\eta)-\eta^2]=0$

即$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2.$

22.

(1)设η_1,η_2为$Ax=b$的2个不同的解，则$\eta_1-\eta_2$是$Ax=0$的一个非零解，故

$|A|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$,于是$\lambda=1$或$\lambda=-1$。

当$\lambda=1$时，因为$r(A)\neq r(A,b)$,所以$Ax=b$,舍去。

当$\lambda=-1$时，对$Ax=b$的增广矩阵施以初等行变换

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&a+2\end{array}\right)=B$$

$\because Ax=b$有解,$\therefore a=-2.$

(2)当$\lambda=-1,a=-2$时，

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right),\text{所以}Ax=b\text{的通解为}x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\text{其中}k\text{为任意常数。}$$

23.

解：由题设，$(1,2,1)^{\mathrm{T}}$为A的一个特征向量，于是

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\text{解得}a=-1,\lambda_1=2.$$

由于A的特征多项式$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4)$,

所以A的特征值为$2,5,-4$.

属于特征值5的一个单位特征向量为$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$;

属于特征值-4的一个单位特征向量为$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T$

$$\text{令}Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\text{则有}Q^TAQ=\begin{pmatrix}2&&\\&5&\\&&-4\end{pmatrix},\text{故}Q\text{为所求矩阵。}$$

慕课考研

2019 考研大纲直播峰会

高教社考试中心联合慕课考研第 1 时间权威首发
大纲官方解析总会场：1 场直播 3 个小时第一时间快速了解考点变化
学科深度解析分会场：根据新大纲，预测最新考点，传授百日复习攻略
直播地址：http://www.icourse163.org/topics/2018dagang_kysp/

新大纲百日冲刺提分方案-最后 3 个月，针对新大纲考点，精准提分

数学一/三百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details
数学二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details
英语一百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details
英语二百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details
政治百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details
法硕百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details
中医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details
心理学百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details

西医百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details