2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请把所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)无穷多个.

（2）当 $x \to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则

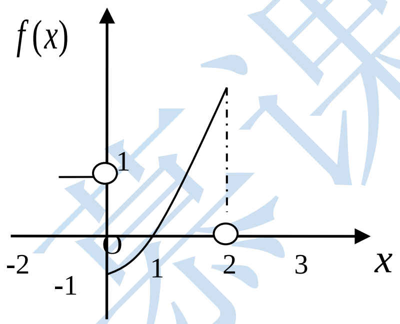
(A) $a=1$，$b=-\dfrac{1}{6}$.　　（B）$a=1$，$b=\dfrac{1}{6}$.

(C) $a=-1$，$b=-\dfrac{1}{6}$.　　（D）$a=-1$，$b=\dfrac{1}{6}$.

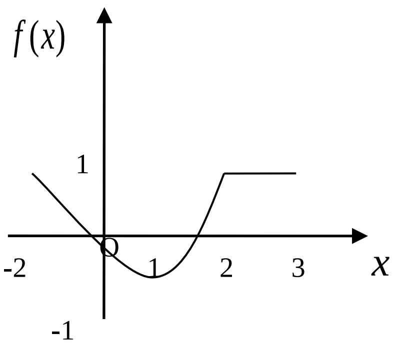
（3）使不等式 $\int_1^x \dfrac{\sin t}{t}dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是

(A) $(0,1)$.　　(B) $(1,\dfrac{\pi}{2})$.　　(C) $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$.　　(D) $(\pi,+\infty)$.

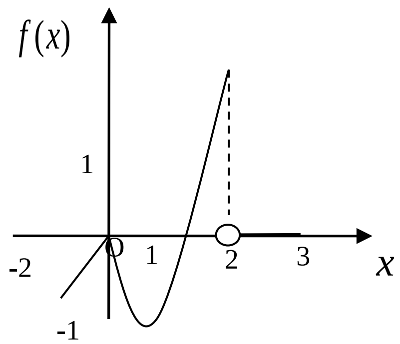
（4）设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



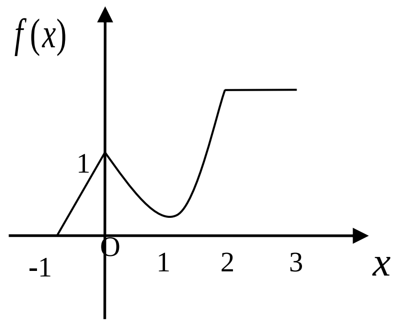
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为



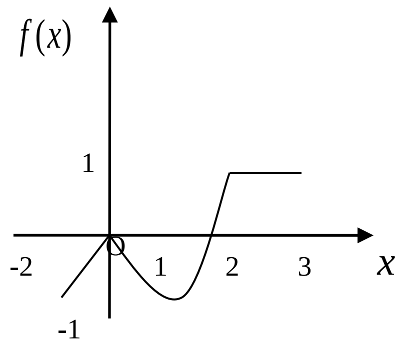
(A)



(B)



(C)



(D)

（5）设 A,B 均为 2 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵，若 $|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

（6）设 A,P 均为 3 阶矩阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，

若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 Q^TAQ 为

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

（7）设事件 A 与事件 B 互不相容，则

(A) $P(\overline{A}\overline{B})=0$.　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$.

(C) $P(A)=1-P(B)$.　　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$.

（8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，记 $F_z(Z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_z(Z)$

的间断点个数为

(A) 0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$______________.

（10）设 $z=(x+e^y)^x$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$_______.

（11）幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为________.

（12）设某产品的需求函数为 $Q=Q(P)$,其对应价格 P 的弹性 $\xi_p=0.2$，则当需求量为 10000 件时，价格增加 1 元会使产品收益增加_______元.

（13）设 $\alpha=(1,1,1)^T,\beta=(1,0,k)^T$，若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $k=$_______.

(14)设 X_1， $X_2,\cdots$，X_n 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，记统计量 $T=\overline{X}-S^2$，则 $ET=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 9 分）

求二元函数 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值.

（16）（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\int\ln(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}})dx\quad(x>0)$.

（17）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D(x-y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 2,y\ge x\}$.

（18）（本题满分 11 分）

（Ⅰ）证明拉格朗日中值定理，若函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 上可导，则 $\xi\in(a,\ b)$，得证 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

（Ⅱ）证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\ \sigma),(\sigma>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$，则 $f_+'(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

（19）（本题满分 10 分）

设曲线 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)>0$.已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0,x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍，求该曲线的方程.

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求满足 $A\xi_2=\xi_1$，$A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2，ξ_3.

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的任意向量 ξ_2,ξ_3，证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

（21）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

（Ⅰ）求二次型 f 的矩阵的所有特征值.

（Ⅱ）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_1^2$，求 a 的值.

（22）（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-x} & 0<y<x\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（Ⅰ）求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；

（Ⅱ）求条件概率 $P=\left[X\le 1|Y\le 1\right]$.

（23）（本题满分 11 分）

袋中有一个红球，两个黑球，三个白球，现在放回的从袋中取两次，每次取一个，求以 X、Y、Z 分别表示两次取球所取得的红、黑与白球的个数.

（Ⅰ）求 $P\left[X=1|Z=0\right]$；

（Ⅱ）求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请把所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)无穷多个.

【答案】C.

【解析】

$$f(x)=\frac{x-x^3}{\sin\pi x}$$

则当 x 取任何整数时，$f(x)$ 均无意义

故 $f(x)$ 的间断点有无穷多个，但可去间断点为极限存在的点，故应是 $x-x^3=0$ 的解

$$x_{1,2,3}=0,\pm1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to0}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{1}{\pi}$$
$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}$$
$$\lim_{x\to-1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to-1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}$$

故可去间断点为 3 个，即 $0,\pm1$

（2）当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则

(A) $a=1$，$b=-\dfrac{1}{6}$.　　（B）$a=1$，$b=\dfrac{1}{6}$.

(C) $a=-1$，$b=-\dfrac{1}{6}$.　　（D）$a=-1$，$b=\dfrac{1}{6}$.

【答案】A.

【解析】$f(x)=x-\sin ax, g(x)=x^2 ln(1-bx)$ 为等价无穷小，则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-\frac{6b}{a}\cdot ax}=-\frac{a^3}{6b}=1 \qquad \therefore a^3=-6b$$ 故排除(B)、(C).

另外 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在，蕴含了 $1-a\cos ax\to0\ (x\to0)$ 故 $a=1$.　排除(D).

所以本题选(A).

（3）使不等式$\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt > \ln x$成立的$x$的范围是

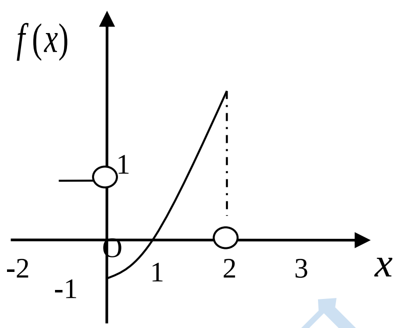
(A) $(0,1)$.　　　(B) $(1,\frac{\pi}{2})$.　　　(C) $(\frac{\pi}{2},\pi)$.　　　(D) $(\pi,+\infty)$.

【答案】A.

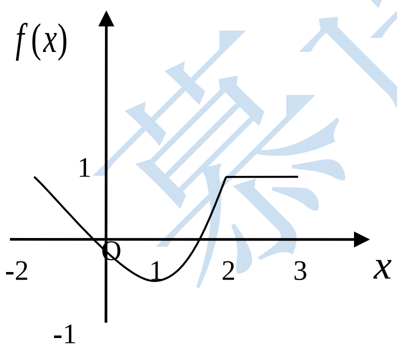
【解析】原问题可转化为求

$f(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt-\ln x=\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt-\int_1^x \frac{1}{t}dt=\int_1^x \frac{\sin t-1}{t}dt=\int_x^1 \frac{1-\sin t}{t}dt>0$成立时$x$的取值范围，由$\frac{1-\sin t}{t}>0$，$t\in(0,1)$时，知当$x\in(0,1)$时，$f(x)>0$.故应选(A).

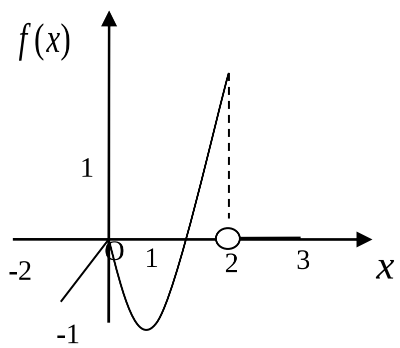
（4）设函数$y=f(x)$在区间$[-1,3]$上的图形为



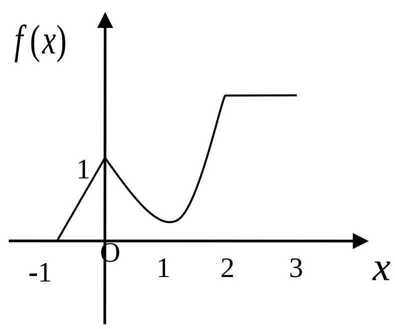
则函数$F(x)=\int_0^x f(t)dt$的图形为



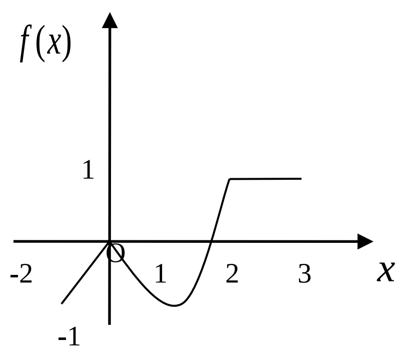
(A)



(B)



(C)



(D)

【答案】D.

【解析】此题为定积分的应用知识考核，由 $y=f(x)$ 的图形可见，其图像与 x 轴及 y 轴、$x=x_0$ 所围的图形的代数面积为所求函数 $F(x)$，从而可得出几个方面的特征：

① $x\in[0,1]$ 时，$F(x)\le 0$，且单调递减.

② $x\in[1,2]$ 时，$F(x)$ 单调递增.

③ $x\in[2,3]$ 时，$F(x)$ 为常函数.

④ $x\in[-1,0]$ 时，$F(x)\le 0$ 为线性函数，单调递增.

⑤由于 F(x)为连续函数

结合这些特点，可见正确选项为(D).

（5）设 A,B 均为 2 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵，若 $|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

【答案】B.

【解析】根据 $CC^*=|C|E$，若 $C^*=|C|C^{-1},C^{-1}=\frac{1}{|C|}C^*$

分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}|A||B|=2\times 3=6$，即分块矩阵可逆

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} O & \frac{1}{|B|}B^* \\ \frac{1}{|A|}A^* & O \end{pmatrix}$$

$$=6\begin{pmatrix} O & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$$

故答案为(B).

（6）设 A,P 均为 3 阶矩阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 Q^TAQ 为

(A) $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　　　(B) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

【答案】A.

【解析】$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)E_{12}(1)$，即：

$$Q=PE_{12}(1)$$
$$Q^TAQ=[PE_{12}(1)]^TA[PE_{12}(1)]=E_{12}^T(1)[P^TAP]E_{12}(1)$$
$$=E_{21}(1)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}E_{12}(1)$$
$$=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

（7）设事件 A 与事件 B 互不相容，则

(A) $P(\overline{A}\overline{B})=0$.　　　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$.

(C) $P(A)=1-P(B)$.　　　　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$.

【答案】D.

【解析】因为 A,B 互不相容，所以 $P(AB)=0$

(A) $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$，因为 $P(A\cup B)$ 不一定等于 1，所以(A)不正确.

(B)当 $P(A),P(B)$ 不为 0 时，(B)不成立，故排除.

(C)只有当 A,B 互为对立事件的时候才成立，故排除.

(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1$，故(D)正确.

（8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$， Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，记 $F_z(Z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_z(Z)$ 的间断点个数为（　　）

(A) 0.　　(B)1.　　(C)2 .　　(D)3.

【答案】 B.

【解析】$F_Z(z)=P(XY\le z)=P(XY\le z|Y=0)P(Y=0)+P(XY\le z|Y=1)P(Y=1)$

$$=\frac{1}{2}[P(XY\le z|Y=0)+P(XY\le z|Y=1)]$$
$$=\frac{1}{2}[P(X\cdot 0\le z|Y=0)+P(X\le z|Y=1)]$$

$\because X,Y$ 独立

$\therefore F_Z(z)=\frac{1}{2}[P(x\cdot 0\le z)+P(x\le z)]$

（1）若 $z<0$，则 $F_Z(z)=\frac{1}{2}\Phi(z)$

（2）当 $z\ge 0$，则 $F_Z(z)=\frac{1}{2}(1+\Phi(z))$

$\therefore z=0$ 为间断点，故选(B).

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$____________.

【答案】$\frac{3}{2}e$.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e(1-e^{\cos x-1})}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e(1-\cos x)}{\frac{1}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e\cdot\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\frac{3}{2}e$.

（10）设 $z=(x+e^y)^x$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$________.

【答案】$2\ln 2+1$.

【解析】由 $z=\left(x+e^y\right)^x$，故 $z\left(x,0\right)=\left(x+1\right)^x$

$$\frac{dz}{dx}=\left[\left(x+1\right)^x\right]'=\left[e^{x\ln(1+x)}\right]'=e^{x\ln(1+x)}\left[\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right]$$

代入 $x=1$ 得，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=e^{\ln 2}\left(\ln 2+\dfrac{1}{2}\right)=2\ln 2+1$.

（11）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为________.

【答案】$\dfrac{1}{e}$.

【解析】由题意知，$a_n=\dfrac{e^n-(-1)^n}{n^2}>0$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{e^{n+1}-(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{e^n-(-1)^n}=\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{e^{n+1}\left[1-\left(-\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right]}{e^n\left[1-\left(-\frac{1}{e}\right)^n\right]}\to e(n\to\infty)$$

所以，该幂级数的收敛半径为 $\dfrac{1}{e}$

（12）设某产品的需求函数为 $Q=Q(P)$，其对应价格 P 的弹性 $\xi_p=0.2$，则当需求量为 10000 件时，价格增加 1 元会使产品收益增加_______元.

【答案】8000.

【解析】所求即为 $(QP)'=Q'P+Q$

因为 $\xi_p=\dfrac{Q'P}{Q}=-0.2$，所以 $Q'P=-0.2Q$

所以 $(QP)'=-0.2Q+Q=0.8Q$

将 $Q=10000$ 代入有 $(QP)'=8000$.

（13）设 $\alpha=(1,1,1)^T,\beta=(1,0,k)^T$，若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $k=$_______.

【答案】2.

【解析】$\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，根据相似矩阵有相同的特征值，得到 $\alpha\beta^T$ 的特征值为

3，0，0.而$\alpha^T\beta$为矩阵$\alpha\beta^T$的对角元素之和，$\therefore 1+k=3+0+0$，$\therefore k=2$.

(14)设X_1，$X_2,\cdots$，X_n为来自二项分布总体$B(n,p)$的简单随机样本，$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差，记统计量$T=\overline{X}-S^2$，则$ET=$________.

【答案】np^2

【解析】由$ET=E(\overline{X}-S^2)=E\overline{X}-ES^2=np-np(1-p)=np^2$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 9 分）

求二元函数$f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$的极值.

【解析】$f_x'(x,y)=2x(2+y^2)=0$，$f_y'(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0$，故$x=0, y=\dfrac{1}{e}$.

$f''_{xx}=2(2+y^2),\ f''_{yy}=2x^2+\dfrac{1}{y},\ f''_{xy}=4xy$.

则$f''_{xx}\big|_{(0,\frac{1}{e})}=2(2+\dfrac{1}{e^2})$，$f''_{xy}\big|_{(0,\frac{1}{e})}=0$，$f''_{yy}\big|_{(0,\frac{1}{e})}=e$.

$\because f''_{xx}>0$而$(f''_{xy})^2-f''_{xx}f''_{yy}<0$

$\therefore$二元函数存在极小值$f(0,\dfrac{1}{e})=-\dfrac{1}{e}$.

（16）（本题满分 10 分）

计算不定积分$\int\ln(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}})dx\quad(x>0)$.

【解析】令$\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t$得$x=\dfrac{1}{t^2-1}, dx=\dfrac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$

$$\int\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx=\int\ln(1+t)d\frac{1}{t^2-1}$$
$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\frac{1}{t+1}dt$$

而

$$\int \frac{1}{t^2-1}\frac{1}{t+1}dt=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2})dt$$

$$\frac{1}{4}\ln(t-1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)+2\frac{1}{t+1}+C$$

所以

$$\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}+C.$$

（17）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_{D}(x-y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\}$.

【解析】由 $(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$ 得 $r\le 2(\sin\theta+\cos\theta)$，

$$\therefore \iint\limits_{D}(x-y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}d\theta\int_{0}^{2(\sin\theta+\cos\theta)}(r\cos\theta-r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left[\frac{1}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot r^3\Big|_{0}^{2(\sin\theta+\cos\theta)}\right]d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^3d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin\theta+\cos\theta)^3d(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{8}{3}\times\frac{1}{4}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}=-\frac{8}{3}.$$

（18）（本题满分 11 分）

（Ⅰ）证明拉格朗日中值定理，若函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 上可导，则 $\xi\in(a,\ b)$，得证 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

（Ⅱ）证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\ \sigma),(\sigma>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f_+'(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

【解析】（Ⅰ）作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，易验证 $\varphi(x)$ 满足：$\varphi(a)=\varphi(b)$；$\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $\varphi'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

根据罗尔定理，可得在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,\therefore f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

（Ⅱ）任取 $x_0\in(0,\delta)$，则函数 $f(x)$ 满足：在闭区间 $[0,x_0]$ 上连续，开区间 $(0,x_0)$ 内可导，从而有拉格朗日中值定理可得：存在 $\xi_{x_0}\in(0,x_0)\subset(0,\delta)$，使得

$$f'\left(\xi_{x_0}\right)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}\cdots\cdots(*)$$

又由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，对上式（*式）两边取 $x_0\to0^+$ 时的极限可得：

$$f_+'(0)=\lim_{x_0\to0^+}\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\lim_{x_0\to0^+}f'(\xi_{x_0})=\lim_{\xi_{x_0}\to0^+}f'(\xi_{x_0})=A$$

故 $f_+'(0)$ 存在，且 $f_+'(0)=A$.

（19）（本题满分 10 分）

设曲线 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)>0$.已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0,x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍，求该曲线的方程.

【解析】旋转体的体积为 $V=\int_1^t\pi f_{(x)}{}^2dx=\pi\int_1^t f_{(x)}{}^2dx$

曲边梯形的面积为：$s=\int_1^t f_{(x)}dx$，则由题可知

$$V=\pi ts \Rightarrow \pi\int_1^t f_{(x)}{}^2 dx=\pi t\int_1^t f_{(x)}dx \Rightarrow \int_1^t f_{(x)}{}^2 dx = t\int_1^t f_{(x)}dx$$

两边对 t 求导可得 $f_{(t)}{}^2=\int_1^t f_{(x)}dx+tf_{(t)} \Rightarrow f_{(t)}{}^2-tf_{(t)}=\int_1^t f_{(x)}dx$ □

继续求导可得 $2f(t)f'(t)-f(t)-tf'(t)=f(t)$，化简可得

$(2f(t)-t)f'(t)=2f(t) \Rightarrow \dfrac{dt}{dy}+\dfrac{1}{2y}t=1$，解之得 $t=c\cdot y^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{2}{3}y$

在□式中令 $t=1$，则 $f^2(1)-f(1)=0, \because f(t)>0, \therefore f(1)=1$，代入 $t=cy^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{2}{3}y$ 得

$c=\dfrac{1}{3}, \therefore t=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{\sqrt{y}}+2y)$.

所以该曲线方程为：$2y+\dfrac{1}{\sqrt{y}}-3x=0$.

（20）（本题满分 11 分）

设 A=$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}, \xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求满足 $A\xi_2=\xi_1$，$A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2，ξ_3.

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的任意向量 ξ_2,ξ_3，证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

【解析】（Ⅰ）解方程 $A\xi_2=\xi_1$

$$(A,\xi_1)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$r(A)=2$ 故有一个自由变量，令 $x_3=2$，由 $Ax=0$ 解得，$x_2=-1, x_1=1$

求特解，令 $x_1=x_2=0$，得 $x_3=1$

故 $\xi_2=k_1\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，其中 k_1 为任意常数

解方程 $A^2\xi_3=\xi_1$

$$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$$

$$\left(A^2,\xi_1\right)=\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&\frac{-1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故有两个自由变量，令 $x_2=-1,x_3=0$，由 $A^2x=0$ 得 $x_1=1$

令 $x_2=0,x_3=-1$，由 $A^2x=0$ 得 $x_1=0$

求得特解 $\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$

故 $\xi_3=k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，其中 k_2,k_3 为任意常数

（II）证明：由于

$$\begin{vmatrix}-1&k_1&k_2+\frac{1}{2}\\1&-k_1&-k_2\\-2&2k_1+1&0\end{vmatrix}=2k_1k_2+(2k_1+1)(k_2+\frac{1}{2})-2k_1(k_2+\frac{1}{2})-k_2(2k_1+1)=\frac{1}{2}\neq0$$

故 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

（21）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^{\ 2}+ax_2^{\ 2}+(a-1)x_3^{\ 2}+2x_1x_3-2x_2x_3$.

（Ⅰ）求二次型 f 的矩阵的所有特征值.

（Ⅱ）若二次型 f 的规范形为 $y_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}$，求 a 的值.

【解析】（Ⅰ） $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}=(\lambda-a)\begin{vmatrix} \lambda-a & 1 \\ 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & \lambda-a \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a)[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-1]-[0+(\lambda-a)]$$

$$=(\lambda-a)[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-2]$$

$$=(\lambda-a)[\lambda^2-2a\lambda+\lambda+a^2-a-2]$$

$$=(\lambda-a)\{[a\lambda+\frac{1}{2}(1-2a)]^2-\frac{9}{4}\}$$

$$=(\lambda-a)(\lambda-a+2)(\lambda-a-1)$$

$$\therefore \lambda_1=a,\lambda_2=a-2,\lambda_3=a+1.$$

（Ⅱ） 若规范形为 $y_1^2+y_2^2$，说明有两个特征值为正，一个为 0.则

1) 若 $\lambda_1=a=0$，则 $\lambda_2=-2<0$ ，$\lambda_3=1$ ，不符题意

2) 若 $\lambda_2=0$ ，即 $a=2$，则 $\lambda_1=2>0$，$\lambda_3=3>0$，符合

3) 若 $\lambda_3=0$ ，即 $a=-1$，则 $\lambda_1=-1<0$ ，$\lambda_2=-3<0$，不符题意

综上所述，故 $a=2$

（22）（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-x} & 0<y<x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

（Ⅰ）求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$

（Ⅱ）求条件概率 $P=\left[X\le 1 \middle| Y\le 1\right]$

【解析】

（Ⅰ）由 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-x} & 0<y<x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 得其边缘密度函数

$$f_x(x)=\int_0^x e^{-x}dy=xe^{-x} \quad x>0$$

故 $f_{y|x}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_x(x)}=\dfrac{1}{x} \quad 0<y<x$

即 $f_{y|x}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & 0<y<x \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（Ⅱ） $P[X\le1|Y\le1]=\dfrac{P[X\le1,Y\le1]}{P[Y\le1]}$

而 $P[X\le1,Y\le1]=\iint\limits_{\substack{x\le1\\y\le1}}f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x e^{-x}dy=\int_0^1 xe^{-x}dx=1-2e^{-1}$

$f_Y(y)=\int_y^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_y^{+\infty}=e^{-y}\quad ,y>0$

$\therefore\ P[Y\le1]=\int_0^1e^{-y}dy=-e^{-y}\Big|_0^1=-e^{-1}+1=1-e^{-1}$

$\therefore\ P[X\le1|Y\le1]=\dfrac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}}=\dfrac{e-2}{e-1}$.

（23）（本题满分 11 分）

袋中有一个红球，两个黑球，三个白球，现在放回的从袋中取两次，每次取一个，求以 X 、Y 、Z 分别表示两次取球所取得的红、黑与白球的个数.

①求 $P\left[X=1\middle|Z=0\right]$.

②求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

【解析】（Ⅰ）在没有取白球的情况下取了一次红球，利用压缩样本空间则相当于只有 1 个红球，2 个黑球放回摸两次，其中摸了一个红球

$\therefore P(X=1|Z=0)=\dfrac{C_2^1\times2}{C_3^1\cdot C_3^1}=\dfrac{4}{9}$.

（Ⅱ）X，Y 取值范围为 0，1，2，故

$P\left(X=0,Y=0\right)=\dfrac{C_3^1\cdot C_3^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\dfrac{1}{4},P\left(X=1,Y=0\right)=\dfrac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\dfrac{1}{6}$

$P\left(X=2,Y=0\right)=\dfrac{1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\dfrac{1}{36},P\left(X=0,Y=1\right)=\dfrac{C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_3^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\dfrac{1}{3}$

$P\left(X=1,Y=1\right)=\dfrac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\dfrac{1}{9},P\left(X=2,Y=1\right)=0$

$P\left(X=0,Y=2\right)=\dfrac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\dfrac{1}{9}$

$P\left(X=1,Y=2\right)=0,P\left(X=2,Y=2\right)=0$

Y \ X	0	1	2
0	1/4	1/6	1/36
1	1/3	1/9	0
2	1/9	0	0

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details
法硕百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details
中医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details
心理学百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details
西医百日冲刺
http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details