2011 年全国硕士研究生入学统一考试数三试题及答案详解

一、选择题

1.已知当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则

A k=1,c=4　B k=a, c=-4　C k=3,c=4　D k=3,c=-4

2.已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$

A $-2f'(0)$　B $-f'(0)$　C $f'(0)$　D0

3.设 $\{U_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是

A 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(U_{2n-1}+U_{2n})$ 收敛

B 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(U_{2n-1}+U_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛

C 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(U_{2n-1}-U_{2n})$ 收敛

D 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(U_{2n-1}-U_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛

4.设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x dx, K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx$ 则 I、J、K 的大小关系是

A I<J<K　B I<K<J　C J<I<K　D K<J<I

5.设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B，再交换 B 的第二行与第一行得单位矩阵。记 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A=

A P_1P_2　B $P_1^{-1}P_2$　C P_2P_1　D $P_2^{-1}P_1$

6.设 A 为 4×3 矩阵，$\eta_1\,\eta_2\,\eta_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的 3 个线性无关的解，$k_1\,k_2$ 为任意常数，则 $Ax=\beta$ 的通解为

A $\frac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$　　B $\frac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_2(\eta_2-\eta_1)$

C $\frac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_3-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_1)$　　D $\frac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_3(\eta_3-\eta_1)+k_3(\eta_2-\eta_1)$

7.设 $F_1(x),F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x),f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是

A $f_1(x)f_2(x)$　B $2f_2(x)F_2(x)$　C $f_1(x)F_2(x)$　D $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

8.设总体 X 服从参数 $\lambda(\lambda>0)$ 泊松分布 $X_1,X_2\ldots X_n(n\geq 2)$ 为来自总体的简单随机样本，则对应的统计量 $T_1=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X_t,T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n-1}X_t+\frac{1}{n}X_n$

A $ET_1>ET_2,DT_1>DT_2$　　B $ET_1>ET_2,DT_1<DT_2$

C $ET_1<ET_2,DT_1>DT_2$　　D $ET_1<ET_2,DT_1<DT_2$

二、填空题

9.设 $f(x)=\lim_{x\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$ ___________

10.设函数 $z=(1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$，$dz\big|_{(1,0)}=$ __________

11.曲线 $\tan(x+y+\frac{\pi}{4})=e^y$ 在点（0，0）处的切线方程为_______________

12.曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 x=2 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为______________

13.设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的秩为 1，A 中行元素之和为 3，则 f 在正交变换下 $x=Qy$ 的标准为_____________

14.设二维随机变量（X，Y）服从 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$ __________

三、解答题

15.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$

16.已知函数$f(u,v)$具有连续的二阶偏导数，$f(1,1)=2$是$f(u,v)$的极值，

$z=f[(x+y),f(x,y)]$。求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}$

17.求$\int\dfrac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx$

18.证明$4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$恰有 2 实根。

19.$f(x)$在$[0,1]$有连续的导数，$f(0)=1$，且$\iint\limits_{D_t}f'(x+y)dxdy=\iint\limits_{D_t}f'(x+y)dxdy$，

$D_t=\{(x,y)|0\le y\le t,0\le x\le t\}(0<t\le 1)$，求$f(x)$的表达式。

20.$\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$不能由$\beta_1=(1,a,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，

$\beta_3=(1,3,5)^T$线性表出，①求a；②将β_1，β_2，β_3由α_1，α_2，α_3线性表出。

21.A 为三阶实矩阵，$R(A)=2$，且$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$

（1）求 A 的特征值与特征向量；（2）求 A。

22.

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$P(X^2=Y^2)=1$

求：（1）（X，Y）的分布；（2）Z=XY 的分布；（3）ρ_{XY}

23.（X，Y）在 G 上服从均匀分布，G 由 x-y=0，x+y=2 与 y=0 围成。

（1）求边缘密度$f_X(x)$；（2）求$f_{X|Y}(x|y)$。

2011年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题及答案详解

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1） 已知当$x \to 0$时，函数$f(x)=3\sin x-\sin 3x$与cx^k是等价无穷小，则（　　）

（A）$k=1,c=4$　　　　（B）$k=1,c=-4$

（C）$k=3,c=4$　　　　（D）$k=3,c=-4$

【答案】 应选（C）

【分析】 由泰勒公式及无穷小阶的比较可得。

【详解一】 $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3), \sin 3x = 3x-\dfrac{27x^3}{3!}+o(x^3)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}+\frac{9x^3}{2}+o(x^3)}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{cx^k}=1$$

所以$c=4,k=3$

【详解二】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{ck}\dfrac{-2\sin 2x\sin(-x)}{x^{k-1}}$

$$=\frac{12}{ck}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{k-1}}=1$$

所以$k-1=2,ck=12$，即$k=3,c=4$

（2） 已知$f(x)$在$x=0$处可导，且$f(0)=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}$等于（　　）

（A）$-2f'(0)$　　（B）$-f'(0)$　　（C）$f'(0)$　　（D）0

【答案】 应选（B）

【分析】 根据导数在某点的定义求解。

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-x^2f(0)}{x^3}-\dfrac{2f(x^3)-2f(0)}{x^3}$

因为$f(x)$在$x=0$处可导，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-x^2f(0)}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{2f(x^3)-2f(0)}{x^3}$$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$$

（3）设$\{u_n\}$是数列，则下列命题正确的是（ ）

（A）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛

（B）若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

（C）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛

（D）若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

【答案】应选（A）

【详解】$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则对它的任意项加括号后所成的级数仍收敛，逆命题不一定正确，所以选（A）。

（4）设$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot xdx, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx$，则$I,J,K$的大小关系是

（A）$I<J<K$ （B）$I<K<J$ （C）$J<I<K$ （D）$K<J<I$

【答案】应选（B）

【详解】在区间$[0,\frac{\pi}{4}]$上，$\sin x<\cos x<\cot x, \ln x$是增函数，所以

$\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$, 由定积分比较大小的性质可知，应选（B）

（5）设A为三阶矩阵，将A的第二列加到第一列得到矩阵B，再交换B的第二行与第三行得到单位矩阵，记$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则A=（ ）

(A) P_1P_2; (B) $P_1^{-1}P_2$; (C) P_2P_1; (D) $P_2P_1^{-1}$.

【答案】应选(D).

【详解】由初等变换及初等矩阵的性质易知$P_2AP_1=E$，从而$A=P_2^{-1}P_1^{-1}=P_2P_1^{-1}$，答案应

选(D).

(6) 设A为4×3矩阵，η_1，η_2，η_3是非齐次线性方程组$AX=\beta$的三个线性无关的解，k_1,k_2为任意实数，则$AX=\beta$的通解为（ ）

(A) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$;　　(B) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_2(\eta_2-\eta_1)$;

(C) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_3-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_1)$;　　(D) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_3-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_1)$.

【答案】应选(C).

【详解】由η_1，η_2，η_3是非齐次线性方程组$AX=\beta$的三个线性无关的解，知$\eta_3-\eta_1$，$\eta_2-\eta_1$为$AX=0$的基础解系. 非齐次线性方程组解的线性组合若系数和为1是非齐次线性方程组解，从而$\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}$为$AX=\beta$的解. 由非齐次线性方程组解的结构，知$\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_3-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_1)$为$AX=\beta$的通解，故应选(C).

(7) 设$F_1(x),F_2(x)$为两个分布函数，其相应的概率密度$f_1(x),f_2(x)$是连续函数，则必为概率密度的是（ ）

(A) $f_1(x)f_2(x)$ (B) $2f_2(x)F_1(x)$ (C) $f_1(x)F_2(x)$ (D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

【答案】应选(D).

【解析】由概率密度的性质知，概率密度必须满足$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，故由题知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\right]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}dF_1(x)F_2(x)=F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1$$

故选择D.

(8) 设总体X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geq 2)$为来自正态总体的简单随机样本，则对应的统计量$T_1=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,T_2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\dfrac{1}{n}X_n$满足（ ）

(A) $ET_1>ET_2,DT_1>DT_2$　　(B) $ET_1>ET_2,DT_1<DT_2$

(C) $ET_1<ET_2,DT_1>DT_2$　　(D) $ET_1<ET_2,DT_1<DT_2$

【答案】应选(D).

【解析】由题知$EX_i=\lambda,DX_i=\lambda(i=1,2,\cdots,n)$，故有

【答案】$\frac{4}{3}\pi$

【详解】$V=\int_1^2 \pi y^2 dx=\frac{4}{3}\pi$

（13）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^T AX$ 的秩为 1，A 的行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为________.

【答案】应填$3y_1^2$.

【详解】由 A 的行元素之和为 3，得$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，从而 3 为其特征值. 因为$r(A)=1$，所以 f 在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为$3y_1^2$.

（14）设二维随机变量(X,Y)服从$N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,0)$，则$E(XY^2)=$________.

【答案】$\mu(\mu^2+\sigma^2)$

【详解】由题知 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$，即 X 与 Y 不相关. 在二维正态分布条件下，X 与 Y 不相关与 X 与 Y 独立等价，所以 X 与 Y 独立，则有

$$EX=EY=\mu,DX=DY=\sigma^2$$
$$EY^2=DY+\left(EY\right)^2=\mu^2+\sigma^2$$
$$E(XY^2)=EXEY^2=\mu(\mu^2+\sigma^2)$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$

【详解一】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x\sqrt{1+2\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(-\sin x-\frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}})=-\frac{1}{2}$$

【详解二】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2\sin x-(x+1)^2}{x^2\left(\sqrt{1+2\sin x}-x-1\right)}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-x^2-2x}{x^2}=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=-\frac{1}{2}$$

（16）（本题满分 10 分）已知函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f((x+y),f(x,y))$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{x=1,y=1}$

【详解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z_u+z_v v_x$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z_{uu}+z_{uv}v_y+(z_{vu}+z_{vv}v_y)v_x+z_v v_{xy}$

由于 $f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值 $f_u(1,1)=f_v(1,1)=0$，

所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{x=1,y=1}=f_{uu}(2,2)+f_v(2,2)f_{uv}(1,1)$

（17）（本题满分 10 分）求 $\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx$

【详解】令 $t=\sqrt{x}$，则有

$$\begin{aligned}\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx&=\int\frac{\arcsin t+\ln t^2}{t}2tdt=2\int\left(\arcsin t+\ln t^2\right)dt\\&=2t\left(\arcsin t+\ln t^2\right)-2\int t\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{2t}{t^2}\right)dt\\&=2t\left(\arcsin t+\ln t^2\right)-2\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt-4t\\&=2t\left(\arcsin t+\ln t^2\right)-4t+\int\frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}\\&=2t\left(\arcsin t+\ln t^2\right)-4t+2\sqrt{1-t^2}+C\\&=2\sqrt{x}\left(\arcsin\sqrt{x}+\ln x\right)-4\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C\end{aligned}$$

（18）（本题满分 10 分）证明 $4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有两个实根.

【证明】设 $f(x)=4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$，则 $f'(x)=\dfrac{3-x^2}{1+x^2}$

令 $f'(x)=\dfrac{3-x^2}{1+x^2}=0$，得 $x=\pm\sqrt{3}$

显然当$x\in(-\infty,-\sqrt{3})$或$x\in(\sqrt{3},+\infty)$时，$f'(x)<0$，即$f(x)$在$(-\infty,-\sqrt{3})$或$(\sqrt{3},+\infty)$上单调递减；当$x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$时，$f'(x)>0$，即$f(x)$在$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$上单调递增.

又$f(-\sqrt{3})=0, f(\sqrt{3})=2(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3})>0, \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，故在$x=-\sqrt{3}$处有一个实根，在区间$(\sqrt{3},+\infty)$内有且仅有一个实根，在$(-\infty,-\sqrt{3})$和$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$内都没有实根.

综上所述，方程恰有两个实根.

（19）（本题满分 10 分）$f(x)$在$[0,1]$内有连续的导数，$f(0)=1$，且

$$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)dxdy=\iint\limits_{D_t} f(t)dxdy,$$

其中$D_t=\{(x,y)|0\le x\le t,0\le y\le t,x+y\le t\}(0<t\le 1)$，求$f(x)$的表达式.

【详解】由题知

$$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)dxdy=\int_0^t dx\int_0^{t-x}f'(x+y)dy=\int_0^t[f(t)-f(x)]dx=tf(t)-\int_0^t f(x)dx$$

$$\iint\limits_{D_t} f(t)dxdy=\frac{1}{2}t^2 f(t)$$

所以有　$tf(t)-\int_0^t f(x)dx=\frac{1}{2}t^2 f(t)$，得$f(t)=\frac{C}{(2-t)^2}$（$C$为任意常数）

将$f(0)=1$代入，得$C=4$，所以$f(t)=\frac{4}{(2-t)^2}$

(20)（本小题满分 11 分）设向量组$\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$，不能由向量组$\beta_1=(1,a,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(1,3,5)^T$线性表出.

(1)求a的值.

(2)将β_1，β_2，β_3由α_1，α_2，α_3线性表出.

【详解】(1)易知α_1，α_2，α_3线性无关,由其不能被β_1，β_2，β_3线性表出,得到β_1，β_2，β_3线性相关，从而$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)<3$.

由

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\a&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&4\\0&2\text{-}a&3\text{-}a\end{pmatrix}$$

得$a=1$.

(2)

由

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1\\0&1&3&1&2&3\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1\\0&1&3&1&2&3\\0&1&4&0&2&4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1\\0&1&3&1&2&3\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&0\\0&1&0&4&2&0\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

得

$$\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\4&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

(21)（本小题满分 11 分）A 为三阶实对称矩阵，$r(A)=2$ 且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值与特征向量.

(2) 求矩阵 A.

【详解】(1) 易知特征值-1 对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，特征值 1 对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. 由 $r(A)=2$ 知 A 的另一个特征值为 0. 因为实对称矩阵不同特征值得特征向量正交，从而特征值 0 对应的特征向量为$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

(2) 由

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

得

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P(X^2=Y^2)=1$.

（Ⅰ）求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

（Ⅱ）求 $Z=XY$ 的概率分布；

（Ⅲ）求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

【解析】（Ⅰ）由于 $P(X^2=Y^2)=1$，即

$$P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=-1)+P(X=1,Y=1)=1$$

则有

$$P(X=1,Y=0)=P(X=0,Y=-1)=P(X=0,Y=1)=0$$

$$P(X=0,Y=0)=P(Y=0)-P(X=1,Y=0)=\frac{1}{3}$$

$$P(X=1,Y=-1)=P(Y=-1)-P(X=0,Y=-1)=\frac{1}{3}$$

$$P(X=1,Y=1)=P(Y=1)-P(X=0,Y=1)=\frac{1}{3}$$

所以 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

（Ⅱ）易知随机变量 Z 的可能取值为 $-1,0,1$，则有

$$P(Z=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$$

$$P(Z=-1)=P(X=1,Y=-1)=\frac{1}{3}$$

$$P(Z=0)=1-P(Z=1)-P(Z=-1)=\frac{1}{3}$$

故$Z=XY$的概率分布为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

（Ⅲ）由（Ⅰ）和（Ⅱ）知

$$E(XY)=EZ=(-1)\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0$$

$$EX=\frac{2}{3}$$

$$EY=(-1)\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0$$

故有 $Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=0$，所以$\rho_{XY}=0$

（23）（本题满分 11 分）二维随机变量(X,Y)在G上服从均匀分布，G由$x-y=0,\ x+y=2$与$y=0$围成.

（Ⅰ）求边缘密度$f_X(x)$；

（Ⅱ）求$f_{X|Y}(x|y)$.

【解析】由题知二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1,(x,y)\in G\\0,(x,y)\notin G\end{cases}$$

（Ⅰ）由边缘密度的定义知

当$0<x\le 1$时，有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x dy=x$$

当$1<x<2$时，有

$$f_X(x)=\int_0^{2-x}dy=2-x$$

所以

$$f_X(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1\\ 2-x, & 1<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（II）同（I）可得

当$0<y<1$时，有

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{y}^{2-y}dx=2(1-y)$$

则有

$$f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所以

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-y)}, & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases}$$

慕课考研

2019 考研大纲直播峰会

高教社考试中心联合慕课考研第 1 时间权威首发

大纲官方解析总会场：1 场直播 3 个小时第一时间快速了解考点变化

学科深度解析分会场：根据新大纲，预测最新考点，传授百日复习攻略

直播地址：http://www.icourse163.org/topics/2018dagang_kysp/

新大纲百日冲刺提分方案-最后 3 个月，针对新大纲考点，精准提分

数学一/三百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1002640003#j-program-details

数学二百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25001.htm?programId=1003098003#j-program-details

英语一百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098005#j-program-details

英语二百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25003.htm?programId=1003098006#j-program-details

政治百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/24001.htm?programId=1003061001#j-program-details

法硕百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/31001.htm?programId=1003098002#j-program-details

中医百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/29001.htm?programId=1003098004#j-program-details

心理学百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/26001.htm?programId=1002715001#j-program-details

西医百日冲刺

http://kaoyan.icourse163.org/web/kaoyan2019/activities/25002.htm?programId=1002640002#j-program-details

关注公众号
“网易慕课考研”
查看考研资讯/干货/福利

慕课考研