**Universidade do Minho**
Escola de Engenharia

# Cálculo de Programas
Trabalho Prático (2023/24)

Lic. em Engenharia Informática

**Grupo G06**

| | |
|---|---|
| a93323 | Benjamim Meleiro Rodrigues |
| a95454 | Lara Beatriz Pinto Ferreira |
| a95319 | Matilde Maria Ferreira de Sousa Fernandes |

janeiro 2024

# Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em Haskell (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abodarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo A onde encontrarão as instruções relativas ao sofware a instalar, etc.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

# Problema 1

Este problema, retirado de um *site* de exercícios de preparação para entrevistas de emprego, tem uma formulação simples:

> *Dada uma matriz de uma qualquer dimensão, listar todos os seus elementos rodados em espiral.*
>
> *Por exemplo, dadas as seguintes matrizes:*
>
> $$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[d] \\ 4 \arrow[r] & 5 & 6 \arrow[d] \\ 7 \arrow[u] & 8 \arrow[l] & 9 \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[d] \\ 5 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 7 & 8 \arrow[d] \\ 9 \arrow[u] & 10 \arrow[l] & 11 \arrow[l] & 12 \arrow[l] \end{tikzcd}$$
>
> *dever-se-á obter, respetivamente,* $[1, 2, 3, 6, 9, 8, 7, 4, 5]$ *e* $[1, 2, 3, 4, 8, 12, 11, 10, 9, 5, 6, 7]$.
>
> $\square$

Valorizar-se-ão as soluções *pointfree* que empreguem os combinadores estudados na disciplina, e.g. $f \cdot g$, $\langle f, g \rangle$, $f \times g$, $[f, g]$, $f + g$, bem como catamorfismos e anamorfismos.

Recomenda-se a escrita de *pouco* código e de soluções simples e fáceis de entender. Recomenda-se que o código venha acompanhado de uma descrição de como funciona e foi concebido, apoiado em diagramas explicativos. Para instruções sobre como produzir esses diagramas e exprimir raciocínios de cálculo, ver o anexo D.

# Problema 2

Este problema, que de novo foi retirado de um *site* de exercícios de preparação para entrevistas de emprego, tem uma formulação muito simples:

*Inverter as vogais de um* string.

Esta formulação deverá ser generalizada a:

*Inverter os elementos de uma dada lista que satisfazem um dado predicado.*

Valorizam-se as soluções tal como no problema anterior e fazem-se as mesmas recomendações.

# Problema 3

Sistemas como chatGPT etc baseiam-se em algoritmos de aprendizagem automática que usam determinadas funções matemáticas, designadas *activation functions* (AF), para modelar aspectos não lineares do mundo real. Uma dessas AFs é a tangente hiperbólica, definida como o quociente do seno e coseno hiperbólicos,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{1}$$

podendo estes ser definidos pelas seguintes séries de Taylor:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh x \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x$$

Interessa que estas funções sejam implementadas de forma muito eficiente, desdobrando-as em operações aritméticas elementares. Isso pode ser conseguido através da chamada programação dinâmica que, em Cálculo de Programas, é feita de forma *correct-by-construction* derivando-se ciclos-**for** via lei de recursividade mútua generalizada a tantas funções quanto necessário — ver o anexo E.

O objectivo desta questão é codificar como um ciclo-for (em Haskell) a função

$$snh\ x\ i = \sum_{k=0}^{i} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{3}$$

que implementa $sinh\ x$, uma das funções de $tanh\ x$ (1), através da soma das $i$ primeiras parcelas da sua série (2).

Deverá ser seguida a regra prática do anexo E e documentada a solução proposta com todos os cálculos que se fizerem.

# Problema 4

Uma empresa de transportes urbanos pretende fornecer um serviço de previsão de atrasos dos seus autocarros que esteja sempre actual, com base em *feedback* dos seus paassageiros. Para isso, desenvolveu uma *app* que instala num telemóvel um botão que indica coordenadas GPS a um serviço central, de forma anónima, sugerindo que os passageiros o usem preferencialmente sempre que o autocarro onde vão chega a uma paragem.

Com base nesses dados, outra funcionalidade da *app* informa os utentes do serviço sobre a probabilidade do atraso que possa haver entre duas paragens (partida e chegada) de uma qualquer linha.

Pretende-se implementar esta segunda funcionalidade assumindo disponíveis os dados da primeira. No que se segue, ir-se-á trabalhar sobre um modelo intencionalmente *muito simplificado* deste sistema, em que se usará o mónade das distribuições probabilísticas (ver o anexo F). Ter-se-á, então:

- paragens de autocarro

  $$\mathbf{data}\ Stop = S0 \mid S1 \mid S2 \mid S3 \mid S4 \mid S5\ \mathbf{deriving}\ (Show, Eq, Ord, Enum)$$

  que formam a linha $[S0\,..\,S5]$ assumindo a ordem determinada pela instância de $Stop$ na classe $Enum$;

- segmentos da linha, isto é, percursos entre duas paragens consecutivas:

  $$\mathbf{type}\ Segment = (Stop, Stop)$$

- os dados obtidos a partir da *app* dos passageiros que, após algum processamento, ficam disponíveis sob a forma de pares *(segmento, atraso observado)*:

  $$dados :: [(Segment, Delay)]$$

  (Ver no apêndice G, página 13, uma pequena amostra destes dados.)

A partir destes dados, há que:

- gerar a base de dados probabilística

  $$db :: [(Segment, \mathsf{Dist}\ Delay)]$$

  que regista, estatisticamente, a probabilidade dos atrasos ($Delay$) que podem afectar cada segmento da linha. Recomenda-se aqui a definição de uma função genérica

  $$mkdist :: Eq\ a \Rightarrow [a] \to \mathsf{Dist}\ a$$

  que faça o sumário estatístico de uma qualquer lista finita, gerando a distribuição de ocorrência dos seus elementos.

- com base em $db$, definir a função probabilística

  $$delay :: Segment \to \mathsf{Dist}\ Delay$$

  que dará, para cada segmento, a respectiva distribuição de atrasos.

Finalmente, o objectivo principal é definir a função probabilística:

$$pdelay :: Stop \to Stop \to \mathsf{Dist}\ Delay$$

$pdelay\ a\ b$ deverá informar qualquer utente que queira ir da paragem $a$ até à paragem $b$ de uma dada linha sobre a probabilidade de atraso acumulado no total do percurso $[a\,..\,b]$.

Valorizar-se-ão as soluções que usem funcionalidades monádicas genéricas estudadas na disciplina e que sejam elegantes, isto é, poupem código desnecessário.

# Anexos

## A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

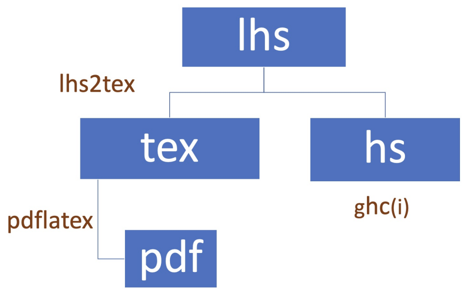
Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [**?**], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2324t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp2324t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2324t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código Haskell que ele inclui:




Vê-se assim que, para além do GHCi, serão necessários os executáveis pdflatex e lhs2TeX. Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do Docker tal como a seguir se descreve.

## B Docker

Recomenda-se o uso do container cuja imagem é gerada pelo Docker a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2324t.zip`. Este container deverá ser usado na execução do GHCi e dos comandos relativos ao LaTeX. (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

[1] O sufixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

Após instalar o Docker e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2324t .
$ docker run -v ${PWD}:/cp2324t -it cp2324t
```

**NB**: O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o GHCi e os comandos relativos ao LaTeX. Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2324t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2324t` no container sejam partilhadas.

Pretende-se então que visualize/edite os ficheiros na sua máquina local e que os compile no container, executando:

```
$ lhs2TeX cp2324t.lhs > cp2324t.tex
$ pdflatex cp2324t
```

lhs2TeX é o pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que faz parte já do container. Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2324t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2324t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2324t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo GHCi para ser executado.

# C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo H com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTeX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp2324t.aux
$ makeindex cp2324t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no container.)

No anexo G disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da programação literária para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo D que se segue.

## D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte (lhs) do que está a ler[1] onde se obtém o efeito seguinte:[2]

$$
\begin{array}{ll}
& id = \langle f, g \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \text{ universal property } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \text{ identity } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \arrow[d, "(|g|)"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + (|g|)"] \\
B & 1 + B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
$$

## E Regra prática para a recursividade mútua em $\mathbb{N}_0$

Nesta disciplina estudou-se como fazer programação dinâmica por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.[3]

Para o caso de funções sobre os números naturais ($\mathbb{N}_0$, com functor $\mathsf{F}\ X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado Cálculo de Programas. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema:

$$
\begin{array}{l}
fib\ 0 = 1 \\
fib\ (n+1) = f\ n \\
f\ 0 = 1 \\
f\ (n+1) = fib\ n + f\ n
\end{array}
$$

Obter-se-á de imediato

$$
\begin{array}{l}
fib' = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where} \\
\quad loop\ (fib, f) = (f, fib + f) \\
\quad init = (1, 1)
\end{array}
$$

usando as regras seguintes:

[1] Procure e.g. por `"sec:diagramas"`.

[2] Exemplos tirados de [?].

[3] Lei (3.95) em [?], página 110.

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.[1]
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável $n$.
- Em *init* coleccionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em $\mathbb{N}_0$. Seguindo o método estudado nas aulas[2], de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$
\begin{array}{l}
f\ 0 = c \\
f\ (n+1) = f\ n + k\ n \\
k\ 0 = a + b \\
k\ (n+1) = k\ n + 2\ a
\end{array}
$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$
\begin{array}{l}
f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where} \\
\quad loop\ (f, k) = (f + k, k + 2 * a) \\
\quad init = (c, a + b)
\end{array}
$$

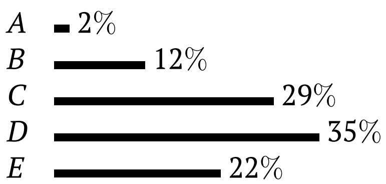
# F O mónade das distribuições probabilísticas

Mónades são functores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca Probability oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\mathbf{newtype}\ \mathsf{Dist}\ a = D\ \{unD :: [(a, ProbRep)]\} \tag{4}$$

em que *ProbRep* é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par $(a, p)$ numa distribuição $d :: \mathsf{Dist}\ a$ indica que a probabilidade de $a$ é $p$, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de $d$ somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de $A$ a $E$,




será representada pela distribuição

$$
\begin{array}{l}
d1 :: \mathsf{Dist}\ Char \\
d1 = D\ [(\texttt{'A'}, 0.02), (\texttt{'B'}, 0.12), (\texttt{'C'}, 0.29), (\texttt{'D'}, 0.35), (\texttt{'E'}, 0.22)]
\end{array}
$$

que o GHCi mostrará assim:

[1] Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

[2] Secção 3.17 de [?] e tópico Recursividade mútua nos vídeos de apoio às aulas teóricas.

```
'D'   35.0%
'C'   29.0%
'E'   22.0%
'B'   12.0%
'A'    2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

$$d2 = uniform\ (words\ \texttt{"Uma frase de cinco palavras"})$$

isto é

```
     "Uma"   20.0%
   "cinco"   20.0%
      "de"   20.0%
   "frase"   20.0%
"palavras"   20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

$$d3 = normal\ [10\ ..\ 20]$$

etc.[1] Dist forma um **mónade** cuja unidade é $return\ a = D\ [(a, 1)]$ e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g)\ a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g\ a, (y, q) \leftarrow f\ x]$$

em que $g : A \rightarrow \text{Dist}\ B$ e $f : B \rightarrow \text{Dist}\ C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica.

# G Código fornecido

## Problema 1

$$m1 = [[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]$$
$$m2 = [[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12]]$$
$$m3 = words\ \texttt{"Cristina Monteiro Carvalho Sequeira"}$$
$$test1 = matrot\ m1 \equiv [1, 2, 3, 6, 9, 8, 7, 4, 5]$$
$$test2 = matrot\ m2 \equiv [1, 2, 3, 4, 8, 12, 11, 10, 9, 5, 6, 7]$$
$$test3 = matrot\ m3 \equiv \texttt{"CristinaooarieuqeSCMonteirhlavra"}$$

## Problema 2

$$test4 = reverseVowels\ \texttt{""} \equiv \texttt{""}$$
$$test5 = reverseVowels\ \texttt{"ácidos"} \equiv \texttt{"ocidás"}$$
$$test6 = reverseByPredicate\ even\ [1\ ..\ 20] \equiv [1, 20, 3, 18, 5, 16, 7, 14, 9, 12, 11, 10, 13, 8, 15, 6, 17, 4, 19, 2]$$

[1] Para mais detalhes ver o código fonte de Probability, que é uma adaptação da biblioteca PFP ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser saber mais recomenda-se a leitura do artigo [?].

## Problema 3

Nenhum código é fornecido neste problema.

## Problema 4

Os atrasos, medidos em minutos, são inteiros:

$$\textbf{type}\ \mathit{Delay} = \mathbb{Z}$$

Amostra de dados apurados por passageiros:

$$\begin{array}{l}
\mathit{dados} = [((\mathit{S0},\mathit{S1}),0),((\mathit{S0},\mathit{S1}),2),((\mathit{S0},\mathit{S1}),0),((\mathit{S0},\mathit{S1}),3),((\mathit{S0},\mathit{S1}),3),\\
\quad ((\mathit{S1},\mathit{S2}),0),((\mathit{S1},\mathit{S2}),2),((\mathit{S1},\mathit{S2}),1),((\mathit{S1},\mathit{S2}),1),((\mathit{S1},\mathit{S2}),4),\\
\quad ((\mathit{S2},\mathit{S3}),2),((\mathit{S2},\mathit{S3}),2),((\mathit{S2},\mathit{S3}),4),((\mathit{S2},\mathit{S3}),0),((\mathit{S2},\mathit{S3}),5),\\
\quad ((\mathit{S3},\mathit{S4}),2),((\mathit{S3},\mathit{S4}),3),((\mathit{S3},\mathit{S4}),5),((\mathit{S3},\mathit{S4}),2),((\mathit{S3},\mathit{S4}),0),\\
\quad ((\mathit{S4},\mathit{S5}),0),((\mathit{S4},\mathit{S5}),5),((\mathit{S4},\mathit{S5}),0),((\mathit{S4},\mathit{S5}),7),((\mathit{S4},\mathit{S5}),-1)]
\end{array}$$

*"Funcionalização" de listas*:

$$\begin{array}{l}
\mathit{mkf} :: \mathit{Eq}\ a \Rightarrow [(a,b)] \rightarrow a \rightarrow \mathit{Maybe}\ b\\
\mathit{mkf} = \mathit{flip}\ \mathit{Prelude.lookup}
\end{array}$$

Ausência de qualquer atraso:

$$\begin{array}{l}
\mathit{instantaneous} :: \text{Dist}\ \mathit{Delay}\\
\mathit{instantaneous} = D\ [(0,1)]
\end{array}$$

# H Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto ao anexo, bem como diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

**Importante**: Não pode ser alterado o texto deste ficheiro fora deste anexo.

## Problema 1

Para resolver este problema, chegamos á conclusão que tínhamos que guardar a primeira linha da matrix e depois rodá-la 90 graus no sentido anti-horário e repetir o processo até que a mesma ficasse vazia.

Primeiramente, definimos a função rotate, que é a base para a construção da espiral. Esta função realiza duas operações principais: a transposição da matriz (transpose), que troca as suas linhas por colunas, seguida pela inversão de cada nova linha (reverse). O resultado é uma rotação de noventa graus no sentido anti-horário.

$$\begin{array}{l}
\mathit{rotate} :: \mathit{Eq}\ a \Rightarrow [[a]] \rightarrow [[a]]\\
\mathit{rotate} = \mathit{reverse} \cdot \mathit{transpose}
\end{array}$$

O núcleo da nossa estratégia é a função anaRotate, um anamorfismo que emprega a rotate em cada passo recursivo. Utilizando o combinador (id + id x rotate), que aplica a função rotate ao resto da matriz após separar a primeira linha. A cada iteração, anaRotate acumula a primeira linha da matriz transformada, construindo assim uma lista de listas, onde cada sublista representa uma camada da espiral. O diagrama de anamorfismo abaixo visualiza este processo.

$$
\begin{tikzcd}
((A)^*)^* \arrow[r, "out_{Listas}"] \arrow[d, "anaRotate"'] & 1 + A^* \times ((A)^*)^* \arrow[r, "id+id\times rotate"] & 1 + A^* \times ((A)^*)^* \arrow[d, "id+id\times anaRotate"] \\
(A^*)^* & & 1 + A^* \times ((A)^*)^* \arrow[ll, "in_{Listas}"]
\end{tikzcd}
$$

$anaRotate :: Eq\ a \Rightarrow [[a]] \rightarrow [[a]]$
$anaRotate = [\!( (id + id \times rotate) \cdot outList )\!]$

Para alcançar a representação final da matriz em espiral, utilizámos a função concat, que concatena todas as sublistas numa única lista. O diagrama a seguir ilustra a aplicação de concat à estrutura produzida por anaRotate, resultando na lista final que pertendemos obter com a função matrot.

$$
\begin{tikzcd}
((A)^*)^* \arrow[r, "anaRotate"] \arrow[rr, bend right, "matrot"'] & ((A)^*)^* \arrow[r, "concat"] & (A)^*
\end{tikzcd}
$$

A função matrot é definida como a composição de concat e anaRotate. Esta única linha de Haskell encapsula todo o processo de transformação da matriz original para a lista espiralada, como demonstrado pela equivalência a seguir.

$matrot :: Eq\ a \Rightarrow [[a]] \rightarrow [a]$
$matrot = concat\ (anaRotate)$

## Problema 2

Inicialmente o Problema 2 pede para inverter as vogais de uma string. Como tal, decidimos implementar a função pre que consiste em colocar todas as vogais no fim da string, mantendo a ordem original dos outros caracteres.

Para tal, utilizamos a função conc que concatena duas strings e a função split que separa uma string em duas, conforme o predicado que lhe é passado. Neste caso, o predicado é a função isVowel que verifica se um caracter é uma vogal.

A função pre é definida como a composicao de conc e split, juntamente com filter isVowel.

$isVowel = oneOf$ "AEIOUaeiouÀÁÂÃÈÉÊÌÍÒÓÔÕÙÚàáâãèéêìíòóôõùúĨĩŨũ"

$pre :: String \rightarrow String$
$pre = \mathrm{conc} \cdot \langle id, filter\ isVowel \rangle$

Posteriormente, implementamos a função anaReverse, tendo em conta que a lista de entrada para esta função já é o resultado da função pre, ou seja, as vogais estão no fim da string.

A anaReverse percorre essa lista e inverte elementos específicos, baseando-se num predicado p.

Dentro do anamorfismo, a função ifp é usada com mecanismo de decisão que aplica o predicado p a cada elemento da lista, quando o elemento é uma vogal a função ifp aplica um split, substituíndo o elemento em questão pelo último elemento da lista e removendo o mesmo. Isso resulta na inversão da posição das vogais dentro da lista.

Se o elemento não satisfizer o predicado, é mantido na sua posição original, e a função procede para o próximo elemento da lista.

$$
\begin{tikzcd}
A & A \times A^* \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & A^* \\
& A^* \arrow[ul, "last"] \arrow[u, "\langle last{,}init \rangle"] \arrow[ur, "init"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& A \times A^* \arrow[d, "p.\pi_1?"'] & \\
A \times A^* \arrow[dr, "\langle last{,}init \rangle.\pi_2"'] & A \times A^* + A \times A^* \arrow[l, "i_1"'] \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "{[\langle last{,}init \rangle \cdot \pi_2{,}id]}"'] & A \times A^* \arrow[dl, "id"] \\
& A \times A^* &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
& ifp = [\langle last, init \rangle \cdot \pi_2, id] \cdot (p \cdot \pi_1)\,? \\
\equiv \quad & \{ \text{ Def condicional de McCarthy } \} \\
& ifp = p \cdot \pi_1 \rightarrow \langle last, init \rangle \cdot \pi_2, id
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(A)^* \arrow[r, "out_{Listas}"] \arrow[d, "anaReverse"'] & 1 + A \times (A)^* \arrow[r, "id+ifp"] & 1 + A \times (A)^* \arrow[d, "id+id\times anaReverse"] \\
(A)^* & & 1 + A \times (A)^* \arrow[ll, "in_{Listas}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathit{anaReverse} :: \mathit{Eq}\ a \Rightarrow [a] \rightarrow [a] \\
&\mathit{anaReverse}\ p = [\!(\ (\mathit{id} + \mathit{ifp}) \cdot \mathit{outList}\ )\!] \\
&\quad \textbf{where} \\
&\qquad \mathit{ifp} = p \cdot \pi_1 \rightarrow \langle \mathit{last}, \mathit{init} \rangle \cdot \pi_2, \mathit{id}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathit{reverseVowels} :: \mathit{String} \rightarrow \mathit{String} \\
&\mathit{reverseVowels} = \mathit{reverseByPredicate}\ \mathit{isVowel}
\end{aligned}
$$

Na segunda parte do Problema 2 é pedido para generalizar a função inicial, de forma a inverter os elementos de uma dada lista que satisfazem um dado predicado. Como tal,

$$
\begin{tikzcd}
(A)^* \arrow[r, "\mathit{pre}"] \arrow[rr, bend right, "\mathit{reverseByPredicate}"'] & (A)^* \arrow[r, "\mathit{anaReverse}"] & (A)^*
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathit{reverseByPredicate} :: (a \rightarrow \mathit{Bool}) \rightarrow [a] \rightarrow [a] \\
&\mathit{reverseByPredicate}\ p = \mathit{anaReverse}\ p \cdot \mathit{pre}
\end{aligned}
$$

## Problema 3

Começamos por analisar a diferença entre duas iterações consecutivas do somatório:

$$
\mathit{iteraok} = \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \tag{5}
$$

$$
\mathit{iterao}(k+1) = \frac{x^{(2(k+1)+1)}}{(2(k+1)+1)!} \qquad = \frac{x^{(2k+3)}}{(2k+3)!} \ = \frac{x^{(2k+1)} \times x^2}{(2k+3)(2k+2)(2k+1)!} \tag{6}
$$

Como podemos ver, a diferença entre duas iterações consecutivas corresponde a multiplicação do elemento anterior com o valor $\frac{x^2}{(2k+3)(2k+2)}$, o que nos permite calcular o próximo elemento a partir do anterior de maneira eficiente.

Nesta função guardamos num acumulador o somatório até à iteração atual, o valor da iteração anterior e o número da iteração.

No caso de paragem temos a função start que retorna um acumulador com os valores iniciais para a iteração 0, ou seja, ((x,x),0).

$$
\begin{aligned}
&\mathit{start} :: \mathit{Num}\ \mathit{b1} \Rightarrow \mathit{b2} \rightarrow ((\mathit{b2}, \mathit{b2}), \mathit{b1}) \\
&\mathit{start}\ x = ((x, x), 0)
\end{aligned}
$$

Nos restantes casos, a função loop recebe o acumulador e retorna um novo acumulador com os valores atualizados.

$$
\begin{aligned}
&\mathit{den2} :: \mathit{Num}\ a \Rightarrow a \to a\\
&\mathit{den2}\ i = (2 * i + 2) * (2 * i + 3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathit{num2} :: \mathit{Num}\ a \Rightarrow a \to a\\
&\mathit{num2}\ x = x \uparrow 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathit{loop} :: \mathit{Fractional}\ b \Rightarrow b \to ((b, b), b) \to ((b, b), b)\\
&\mathit{loop}\ x\ ((s, p), i) = ((s + \mathit{conta}, \mathit{conta}), i + 1)\\
&\quad \mathbf{where}\ \mathit{conta} = p * (\mathit{num2}\ x \ / \ \mathit{den2}\ i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \arrow[r, "out_{\mathbb{N}_0}"] \arrow[d, "worker"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[d, "id+worker"] \\
(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \times \mathbb{N}_0 & 1 + (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \times \mathbb{N}_0 \arrow[l, "{[\underline{start}, loop]}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathit{worker} = \mathsf{for}\ \mathit{loop}\ x\ \mathit{start}\ x\\
\equiv &\qquad \{\ \text{Def ciclo-for}\ \}\\
&\mathit{worker} = (\!|\ [\underline{\mathit{start}}, \mathit{loop}]\ |\!)
\end{aligned}
$$

Para devolver o valor do somatório, a função wrapper recebe o acumulador e retorna o valor do somatório, ou seja, o primeiro elemento do acumulador.

$$
\begin{aligned}
&\mathit{snh} :: (\mathit{Integral}\ a, \mathit{Fractional}\ b) \Rightarrow b \to a \to b\\
&\mathit{snh}\ x = \mathit{wrapper} \cdot \mathit{worker}\\
&\quad \mathbf{where}\\
&\qquad \mathit{worker} = \mathsf{for}\ \mathit{loop}\ x\ \mathit{start}\ x\\
&\qquad \mathit{wrapper} = \pi_1 \cdot \pi_1
\end{aligned}
$$

## Problema 4

$$\mathbf{data}\ \mathit{Stop} = \mathit{S0} \mid \mathit{S1} \mid \mathit{S2} \mid \mathit{S3} \mid \mathit{S4} \mid \mathit{S5}\ \mathbf{deriving}\ (\mathit{Show}, \mathit{Eq}, \mathit{Ord}, \mathit{Enum})$$

$$\mathbf{type}\ \mathit{Delay} = \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{type}\ \mathit{Segment} = (\mathit{Stop}, \mathit{Stop})$$

$$
\begin{aligned}
&\mathit{dados} = [((\mathit{S0}, \mathit{S1}), 0), ((\mathit{S0}, \mathit{S1}), 2), ((\mathit{S0}, \mathit{S1}), 0), ((\mathit{S0}, \mathit{S1}), 3), ((\mathit{S0}, \mathit{S1}), 3),\\
&\quad ((\mathit{S1}, \mathit{S2}), 0), ((\mathit{S1}, \mathit{S2}), 2), ((\mathit{S1}, \mathit{S2}), 1), ((\mathit{S1}, \mathit{S2}), 1), ((\mathit{S1}, \mathit{S2}), 4),
\end{aligned}
$$

$((S2, S3), 2), ((S2, S3), 2), ((S2, S3), 4), ((S2, S3), 0), ((S2, S3), 5),$
$((S3, S4), 2), ((S3, S4), 3), ((S3, S4), 5), ((S3, S4), 2), ((S3, S4), 0),$
$((S4, S5), 0), ((S4, S5), 5), ((S4, S5), 0), ((S4, S5), 7), ((S4, S5), -1)]$

$mkf :: Eq\ a \Rightarrow [(a, b)] \rightarrow a \rightarrow Maybe\ b$
$mkf = flip\ Prelude.lookup$

$instantaneous :: \text{Dist}\ Delay$
$instantaneous = D\ [(0, 1)]$

Para auxiliar a geração da base de dados probabilística, criamos 3 funções auxiliares.

- A função lka recebe um segmento e uma lista de dados e devolve uma lista com os atrasos associados a esse segmento

  $lka :: Eq\ a \Rightarrow a \rightarrow [(a, b)] \rightarrow [b]$
  $lka\ k = \text{map}\ \ \pi_2 \cdot filter\ ((\equiv k) \cdot \pi_1)$

- A função mkdist faz o sumário estatístico de uma qualquer lista finita, gerando a distribuição de ocorrência dos seus elementos. Começamos por aplicar a função map, de forma a obter uma lista de tuplos com o elemento e a sua percentagem de ocorrências. De seguida aplicamos a função nub, que remove os elementos repetidos da lista, e por fim aplicamos a D que transforma a lista de tuplos numa distribuição.

  $mkdist :: Eq\ a \Rightarrow [a] \rightarrow \text{Dist}\ a$
  $mkdist\ l = D\ \$\ nub\ \$\ \text{map}\ \ ((id \times divide) \cdot dup)\ l$
  **where**
  $divide\ x = fromIntegral\ (n\ x\ l)\ /\ fromIntegral\ t$
  $t = length\ l$
  $n\ x = length \cdot filter\ (\equiv x)$

- A função mksd começa por aplicar a função lka aos dados, de forma a obter uma lista com os atrasos de um determinado segmento, de seguida aplica a mkdist a essa lista, obtendo assim a distribuição de ocorrência dos atrasos desse segmento.

  $mksd :: Segment \rightarrow (Segment, \text{Dist}\ Delay)$
  $mksd = \langle id, mkdist \cdot flip\ lka\ dados \rangle$

Por fim para gerar a base de dados probabilística, começamos por extrair os segmentos dos dados e eliminar os repetidos, de forma a obter uma lista de segmentos.

De seguida aplicamos a função mksd a todos os segmentos, devolvendo assim uma lista de tuplos com o segmento e a sua respetiva distribuição.

$db :: [(Segment, \text{Dist}\ Delay)]$
$db = \text{map}\ \ mksd\ \$\ nub\ \$\ \text{map}\ \ \pi_1\ dados$

Esta função começa por procurar o segmento na base de dados probabilística, e caso o encontre, devolve a sua distribuição de atrasos.

$delay :: Segment \rightarrow \text{Dist}\ Delay$
$delay = fj \cdot mkf\ \ db$

$fj :: Maybe\ a \rightarrow a$
$fj\ (Just\ a) = a$

função probabilística deverá informar qualquer utente que queira ir da paragem a até à paragem b de uma dada linha sobre a probabilidade de atraso acumulado no total do percurso [a ..b].

$$\begin{tikzcd}
Segment^* \arrow[rr, "out_{Listas}"] \arrow[d, "somatorio"'] & & 1 + Segment \times Segment^* \arrow[d, "id+id\times somatorio"] \\
DistDelay & & 1 + Segment \times DistDelay \arrow[ll, "{[\underline{instantaneous}, (joinWith\ \widehat{(+)} \cdot delay)]}"]
\end{tikzcd}$$

$somatorio :: [Segment] \rightarrow \mathsf{Dist}\ Delay$
$somatorio = \llparenthesis\, [\underline{instantaneous}, (joinWith\ \widehat{(+)} \cdot delay)]\, \rrparenthesis$

$pdelay :: Stop \rightarrow Stop \rightarrow \mathsf{Dist}\ Delay$
$pdelay\ a\ b = somatorio\ \$\ \widehat{zip}\ \$\ \langle id, tail \rangle\ \$\ enumFromTo\ a\ b$