Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Cálculo de Programas

Trabalho Prático (2023/24)

Lic. em Engenharia Informática

Grupo G06

a93323 Benjamim Meleiro Rodrigues
a95454 Lara Beatriz Pinto Ferreira
a95319 Matilde Maria Ferreira de Sousa Fernandes

janeiro 2024

Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em Haskell (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

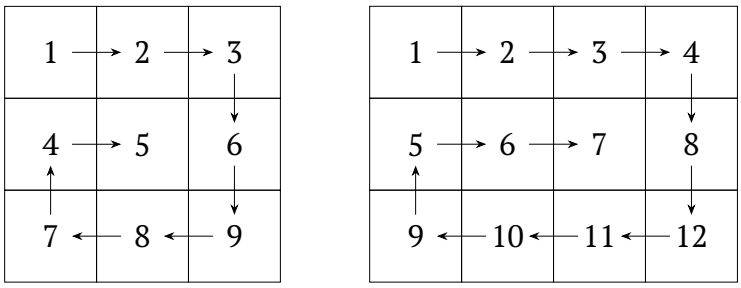
Antes de abodarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo A onde encontrarão as instruções relativas ao sofware a instalar, etc.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

Problema 1

Este problema, retirado de um *site* de exercícios de preparação para entrevistas de emprego, tem uma formulação simples:

> *Dada uma matriz de uma qualquer dimensão, listar todos os seus elementos rodados em espiral.*
>
> *Por exemplo, dadas as seguintes matrizes:*



> *dever-se-á obter, respetivamente,* $[1,2,3,6,9,8,7,4,5]$ *e* $[1,2,3,4,8,12,11,10,9,5,6,7]$.
>
> □

Valorizar-se-ão as soluções *pointfree* que empreguem os combinadores estudados na disciplina, e.g. $f \cdot g$, $\langle f,g\rangle$, $f \times g$, $[f,g]$, $f+g$, bem como catamorfismos e anamorfismos.

Recomenda-se a escrita de *pouco* código e de soluções simples e fáceis de entender. Recomenda-se que o código venha acompanhado de uma descrição de como funciona e foi concebido, apoiado em diagramas explicativos. Para instruções sobre como produzir esses diagramas e exprimir raciocínios de cálculo, ver o anexo D.

Problema 2

Este problema, que de novo foi retirado de um *site* de exercícios de preparação para entrevistas de emprego, tem uma formulação muito simples:

Inverter as vogais de um string.

Esta formulação deverá ser generalizada a:

Inverter os elementos de uma dada lista que satisfazem um dado predicado.

Valorizam-se as soluções tal como no problema anterior e fazem-se as mesmas recomendações.

Problema 3

Sistemas como chatGPT etc baseiam-se em algoritmos de aprendizagem automática que usam determinadas funções matemáticas, designadas *activation functions* (AF), para modelar aspectos não lineares do mundo real. Uma dessas AFs é a tangente hiperbólica, definida como o quociente do seno e coseno hiperbólicos,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{1}$$

podendo estes ser definidos pelas seguintes séries de Taylor:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \sinh x \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} &= \cosh x \end{aligned} \tag{2}$$

Interessa que estas funções sejam implementadas de forma muito eficiente, desdobrando-as em operações aritméticas elementares. Isso pode ser conseguido através da chamada programação dinâmica que, em Cálculo de Programas, é feita de forma *correct-by-construction* derivando-se ciclos-**for** via lei de recursividade mútua generalizada a tantas funções quanto necessário — ver o anexo E.

O objectivo desta questão é codificar como um ciclo-for (em Haskell) a função

$$snh\ x\ i = \sum_{k=0}^{i} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{3}$$

que implementa $sinh\ x$, uma das funções de $tanh\ x$ (1), através da soma das i primeiras parcelas da sua série (2).

Deverá ser seguida a regra prática do anexo E e documentada a solução proposta com todos os cálculos que se fizerem.

Problema 4

Uma empresa de transportes urbanos pretende fornecer um serviço de previsão de atrasos dos seus autocarros que esteja sempre actual, com base em *feedback* dos seus paassageiros. Para isso, desenvolveu uma *app* que instala num telemóvel um botão que indica coordenadas GPS a um serviço central, de forma anónima, sugerindo que os passageiros o usem preferencialmente sempre que o autocarro onde vão chega a uma paragem.

Com base nesses dados, outra funcionalidade da *app* informa os utentes do serviço sobre a probabilidade do atraso que possa haver entre duas paragens (partida e chegada) de uma qualquer linha.

Pretende-se implementar esta segunda funcionalidade assumindo disponíveis os dados da primeira. No que se segue, ir-se-á trabalhar sobre um modelo intencionalmente *muito simplificado* deste sistema, em que se usará o mónade das distribuições probabilísticas (ver o anexo F). Ter-se-á, então:

- paragens de autocarro

  $$\textbf{data}\ Stop = S0 \mid S1 \mid S2 \mid S3 \mid S4 \mid S5\ \textbf{deriving}\ (Show, Eq, Ord, Enum)$$

  que formam a linha $[S0\,..\,S5]$ assumindo a ordem determinada pela instância de $Stop$ na classe $Enum$;

- segmentos da linha, isto é, percursos entre duas paragens consecutivas:

  $$\textbf{type}\ Segment = (Stop, Stop)$$

- os dados obtidos a partir da *app* dos passageiros que, após algum processamento, ficam disponíveis sob a forma de pares *(segmento, atraso observado)*:

  $$dados :: [(Segment, Delay)]$$

  (Ver no apêndice G, página 13, uma pequena amostra destes dados.)

A partir destes dados, há que:

- gerar a base de dados probabilística

  $$db :: [(Segment, \text{Dist}\ Delay)]$$

  que regista, estatisticamente, a probabilidade dos atrasos ($Delay$) que podem afectar cada segmento da linha. Recomenda-se aqui a definição de uma função genérica

  $$mkdist :: Eq\ a \Rightarrow [a] \to \text{Dist}\ a$$

  que faça o sumário estatístico de uma qualquer lista finita, gerando a distribuição de ocorrência dos seus elementos.

- com base em db, definir a função probabilística

  $$delay :: Segment \to \text{Dist}\ Delay$$

  que dará, para cada segmento, a respectiva distribuição de atrasos.

Finalmente, o objectivo principal é definir a função probabilística:

$$pdelay :: Stop \to Stop \to \text{Dist}\ Delay$$

$pdelay\ a\ b$ deverá informar qualquer utente que queira ir da paragem a até à paragem b de uma dada linha sobre a probabilidade de atraso acumulado no total do percurso $[a\,..\,b]$.

Valorizar-se-ão as soluções que usem funcionalidades monádicas genéricas estudadas na disciplina e que sejam elegantes, isto é, poupem código desnecessário.

Anexos

A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

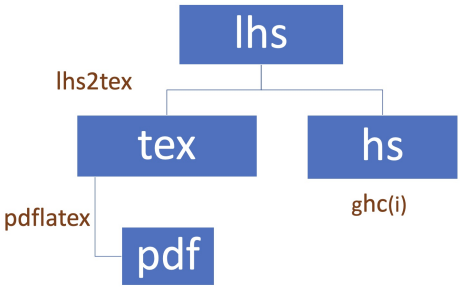
Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [**?**], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2324t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp2324t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2324t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código Haskell que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do GHCi, serão necessários os executáveis pdflatex e lhs2TeX. Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do Docker tal como a seguir se descreve.

B Docker

Recomenda-se o uso do container cuja imagem é gerada pelo Docker a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2324t.zip`. Este container deverá ser usado na execução do GHCi e dos comandos relativos ao LaTeX. (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

[1] O sufixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

Após instalar o Docker e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2324t .
$ docker run -v ${PWD}:/cp2324t -it cp2324t
```

NB: O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o GHCi e os comandos relativos ao LaTeX. Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2324t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2324t` no container sejam partilhadas.

Pretende-se então que visualize/edite os ficheiros na sua máquina local e que os compile no container, executando:

```
$ lhs2TeX cp2324t.lhs > cp2324t.tex
$ pdflatex cp2324t
```

lhs2TeX é o pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que faz parte já do container. Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2324t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2324t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2324t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo GHCi para ser executado.

C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo H com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTeX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp2324t.aux
$ makeindex cp2324t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no container.)

No anexo G disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da programação literária para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo D que se segue.

D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte (lhs) do que está a ler[1] onde se obtém o efeito seguinte:[2]

$$
\begin{aligned}
& id = \langle f, g\rangle \\
\equiv & \quad \{\ \text{universal property}\ \} \\
& \begin{cases} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{cases} \\
\equiv & \quad \{\ \text{identity}\ \} \\
& \begin{cases} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{cases} \\
\Box &
\end{aligned}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\ \text{in}\ } & 1 + \mathbb{N}_0 \\
{\scriptstyle (\!|g|\!)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id + (\!|g|\!)} \\
B & \xleftarrow[\ g\ ]{} & 1 + B
\end{array}
$$

E Regra prática para a recursividade mútua em $\mathbb{N}_0$

Nesta disciplina estudou-se como fazer programação dinâmica por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.[3]

Para o caso de funções sobre os números naturais ($\mathbb{N}_0$, com functor F $X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado Cálculo de Programas. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema:

$$
\begin{aligned}
& fib\ 0 = 1 \\
& fib\ (n+1) = f\ n \\
& f\ 0 = 1 \\
& f\ (n+1) = fib\ n + f\ n
\end{aligned}
$$

Obter-se-á de imediato

$$
\begin{aligned}
& fib' = \pi_1 \cdot \text{for}\ loop\ init\ \textbf{where} \\
& \quad loop\ (fib, f) = (f, fib + f) \\
& \quad init = (1, 1)
\end{aligned}
$$

usando as regras seguintes:

[1] Procure e.g. por "sec:diagramas".

[2] Exemplos tirados de [**?**].

[3] Lei (3.95) em [**?**], página 110.

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.[1]
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável n.
- Em *init* coleccionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em $\mathbb{N}_0$. Seguindo o método estudado nas aulas[2], de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$\begin{aligned} &f\ 0 = c \\ &f\ (n+1) = f\ n + k\ n \\ &k\ 0 = a + b \\ &k\ (n+1) = k\ n + 2\ a \end{aligned}$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$\begin{aligned} &f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \text{for}\ loop\ init\ \textbf{where} \\ &\quad loop\ (f,k) = (f + k, k + 2 * a) \\ &\quad init = (c, a + b) \end{aligned}$$

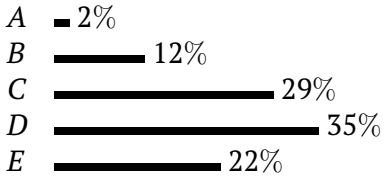
F O mónade das distribuições probabilísticas

Mónades são functores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca Probability oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\textbf{newtype}\ \text{Dist}\ a = D\ \{unD :: [(a, ProbRep)]\} \tag{4}$$

em que *ProbRep* é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par (a, p) numa distribuição $d :: \text{Dist}\ a$ indica que a probabilidade de a é p, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,



será representada pela distribuição

$$\begin{aligned} &d1 :: \text{Dist}\ Char \\ &d1 = D\ [('\texttt{A}', 0.02), ('\texttt{B}', 0.12), ('\texttt{C}', 0.29), ('\texttt{D}', 0.35), ('\texttt{E}', 0.22)] \end{aligned}$$

que o GHCi mostrará assim:

[1] Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

[2] Secção 3.17 de [?] e tópico Recursividade mútua nos vídeos de apoio às aulas teóricas.

```
'D'  35.0%
'C'  29.0%
'E'  22.0%
'B'  12.0%
'A'   2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

$$d2 = uniform\ (words\ \texttt{"Uma frase de cinco palavras"})$$

isto é

```
   "Uma"  20.0%
 "cinco"  20.0%
    "de"  20.0%
 "frase"  20.0%
"palavras"  20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

$$d3 = normal\ [10\,..\,20]$$

etc.[1] Dist forma um **mónade** cuja unidade é $return\ a = D\ [(a,1)]$ e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g)\ a = [(y, q*p)\mid (x,p) \leftarrow g\ a, (y,q) \leftarrow f\ x]$$

em que $g : A \to$ Dist B e $f : B \to$ Dist C são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica.

G Código fornecido

Problema 1

$$m1 = [[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]$$
$$m2 = [[1,2,3,4],[5,6,7,8],[9,10,11,12]]$$
$$m3 = words\ \texttt{"Cristina Monteiro Carvalho Sequeira"}$$
$$test1 = matrot\ m1 \equiv [1,2,3,6,9,8,7,4,5]$$
$$test2 = matrot\ m2 \equiv [1,2,3,4,8,12,11,10,9,5,6,7]$$
$$test3 = matrot\ m3 \equiv \texttt{"CristinaooarieuqeSCMonteirhlavra"}$$

Problema 2

$$test4 = reverseVowels\ \texttt{""} \equiv \texttt{""}$$
$$test5 = reverseVowels\ \texttt{"ácidos"} \equiv \texttt{"ocidás"}$$
$$test6 = reverseByPredicate\ even\ [1\,..\,20] \equiv [1,20,3,18,5,16,7,14,9,12,11,10,13,8,15,6,17,4,19,2]$$

[1] Para mais detalhes ver o código fonte de Probability, que é uma adaptação da biblioteca PFP ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser saber mais recomenda-se a leitura do artigo [**?**].

Problema 3

Nenhum código é fornecido neste problema.

Problema 4

Os atrasos, medidos em minutos, são inteiros:

$$\textbf{type}\ Delay = \mathbb{Z}$$

Amostra de dados apurados por passageiros:

$$\begin{aligned} dados = [&((S0,S1),0),((S0,S1),2),((S0,S1),0),((S0,S1),3),((S0,S1),3),\\ &((S1,S2),0),((S1,S2),2),((S1,S2),1),((S1,S2),1),((S1,S2),4),\\ &((S2,S3),2),((S2,S3),2),((S2,S3),4),((S2,S3),0),((S2,S3),5),\\ &((S3,S4),2),((S3,S4),3),((S3,S4),5),((S3,S4),2),((S3,S4),0),\\ &((S4,S5),0),((S4,S5),5),((S4,S5),0),((S4,S5),7),((S4,S5),-1)] \end{aligned}$$

"Funcionalização" de listas:

$$\begin{aligned} &mkf :: Eq\ a \Rightarrow [(a,b)] \to a \to Maybe\ b\\ &mkf = flip\ Prelude.lookup \end{aligned}$$

Ausência de qualquer atraso:

$$\begin{aligned} &instantaneous :: \text{Dist}\ Delay\\ &instantaneous = D\ [(0,1)] \end{aligned}$$

H Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto ao anexo, bem como diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Importante: Não pode ser alterado o texto deste ficheiro fora deste anexo.

Problema 1

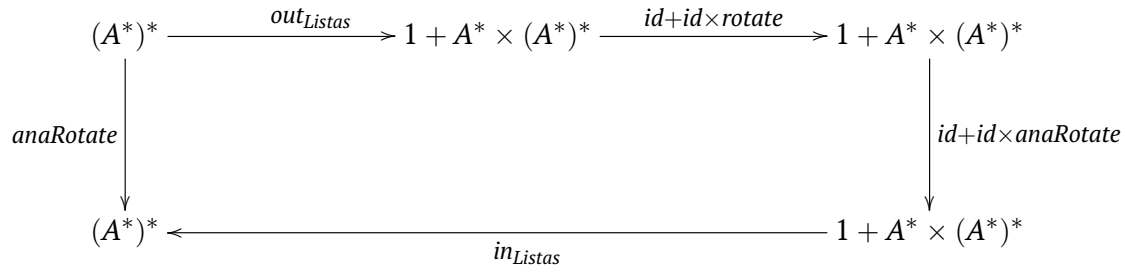
Para resolver este problema, chegamos á conclusão que tínhamos que guardar a primeira linha da matrix e depois rodá-la 90 graus no sentido anti-horário e repetir o processo até que a mesma ficasse vazia.

Primeiramente, definimos a função rotate, que é a base para a construção da espiral. Esta função realiza duas operações principais: a transposição da matriz (transpose), que troca as suas linhas por colunas, seguida pela inversão de cada nova linha (reverse). O resultado é uma rotação de noventa graus no sentido anti-horário.

$$\begin{aligned} &rotate :: Eq\ a \Rightarrow [[a]] \to [[a]]\\ &rotate = reverse \cdot transpose \end{aligned}$$

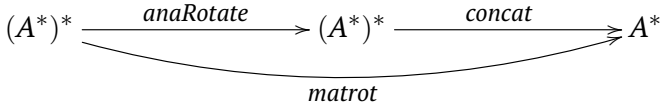
O núcleo da nossa estratégia é a função anaRotate, um anamorfismo que emprega a rotate em cada passo recursivo. Utilizando o combinador (id + id x rotate), que aplica a função rotate ao resto da

matriz após separar a primeira linha. A cada iteração, anaRotate acumula a primeira linha da matriz transformada, construindo assim uma lista de listas, onde cada sublista representa uma camada da espiral. O diagrama de anamorfismo abaixo visualiza este processo.



$$anaRotate :: Eq\ a \Rightarrow [[a]] \rightarrow [[a]]$$
$$anaRotate = [\!((id + id \times rotate) \cdot outList)\!]$$

Para alcançar a representação final da matriz em espiral, utilizámos a função concat, que concatena todas as sublistas numa única lista. O diagrama a seguir ilustra a aplicação de concat à estrutura produzida por anaRotate, resultando na lista final que pertendemos obter com a função matrot.



A função matrot é definida como a composição de concat e anaRotate. Esta única linha encapsula todo o processo de transformação da matriz original numa lista com os elementos rodados em espiral, como demonstrado pela equivalência a seguir.

$$matrot :: Eq\ a \Rightarrow [[a]] \rightarrow [a]$$
$$matrot = concat\ (anaRotate)$$

Problema 2

Inicialmente o Problema 2 pede para inverter as vogais de uma string. Como tal, decidimos implementar a função pre que consiste em colocar todas as vogais no fim da string, mantendo a ordem original dos outros caracteres.

Para tal, utilizamos a função conc que concatena duas strings e a função split que separa uma string em duas, conforme o predicado que lhe é passado. Neste caso, o predicado é a função isVowel que verifica se um caracter é uma vogal.

A função pre é definida como a composicao de conc e split, juntamente com filter isVowel.

$$isVowel = oneOf\ \texttt{"AEIOUaeiouÀÁÂÃÈÉÊÌÍÒÓÔÕÙÚàáâãèéêìíòóôõùúĨĩŨũ"}$$

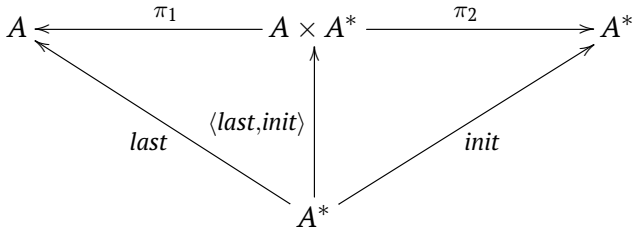
$$pre :: String \rightarrow String$$
$$pre = \text{conc} \cdot \langle id, filter\ isVowel \rangle$$

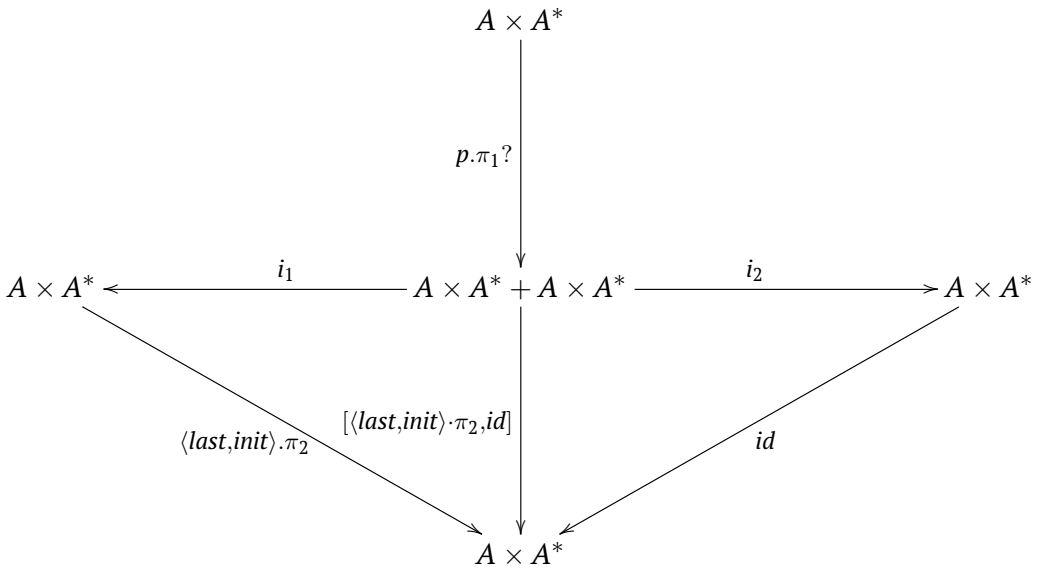
Posteriormente, implementamos a função anaReverse, tendo em conta que a lista de entrada para esta função já é o resultado da função pre, ou seja, as vogais estão no fim da string.

A anaReverse percorre essa lista e inverte elementos específicos, baseando-se num predicado p.

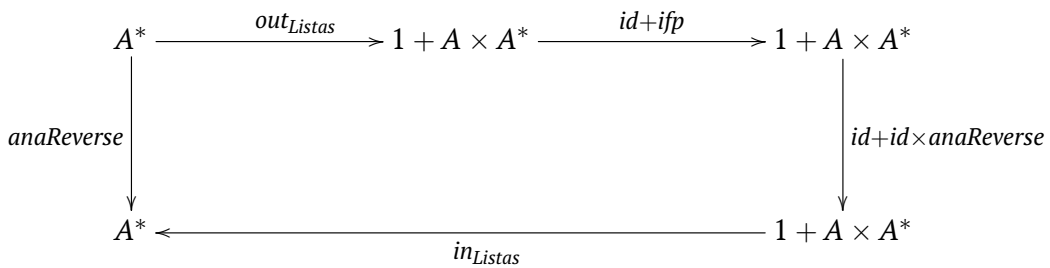
Dentro do anamorfismo, a função ifp é usada com mecanismo de decisão que aplica o predicado p a cada elemento da lista, quando o elemento é uma vogal a função ifp aplica um split, substituíndo o elemento em questão pelo último elemento da lista e removendo o mesmo. Isso resulta na inversão da posição das vogais dentro da lista.

Se o elemento não satisfizer o predicado, é mantido na sua posição original e a função procede para o próximo elemento da lista.





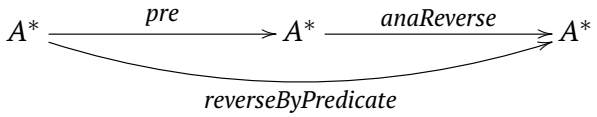
$$
\begin{aligned}
& ifp = [\langle last, init\rangle \cdot \pi_2, id] \cdot (p \cdot \pi_1)\ ? \\
\equiv \quad & \{\ \text{Def condicional de McCarthy}\ \} \\
& ifp = p \cdot \pi_1 \rightarrow \langle last, init\rangle \cdot \pi_2, id
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
&anaReverse :: Eq\ a \Rightarrow [a] \to [a] \\
&anaReverse\ p = [\!(\ (id + ifp) \cdot outList\ )\!] \\
&\quad \textbf{where} \\
&\qquad ifp = p \cdot \pi_1 \to \langle last, init \rangle \cdot \pi_2, id
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&reverseVowels :: String \to String \\
&reverseVowels = reverseByPredicate\ isVowel
\end{aligned}
$$

Na segunda parte do Problema 2 é pedido para generalizar a função inicial, de forma a inverter os elementos de uma dada lista que satisfazem um dado predicado.



$$
\begin{aligned}
&reverseByPredicate :: (a \to Bool) \to [a] \to [a] \\
&reverseByPredicate\ p = anaReverse\ p \cdot pre
\end{aligned}
$$

Problema 3

Começamos por analisar a diferença entre duas iterações consecutivas do somatório:

$$
iteracaok = \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \tag{5}
$$

$$
iteracao(k+1) = \frac{x^{(2(k+1)+1)}}{(2(k+1)+1)!} \qquad = \frac{x^{(2k+3)}}{(2k+3)!} = \frac{x^{(2k+1)} \times x^2}{(2k+3)(2k+2)(2k+1)!} \tag{6}
$$

Como podemos ver, a diferença entre duas iterações consecutivas corresponde a multiplicação do elemento anterior com o valor $\frac{x^2}{(2k+3)(2k+2)}$, o que nos permite calcular o próximo elemento a partir do anterior de maneira eficiente.

Nesta função guardamos num acumulador o somatório até à iteração atual, o valor da iteração anterior e o número da iteração.

No caso de paragem temos a função start que retorna um acumulador com os valores iniciais para a iteração 0, ou seja, ((x,x),0).

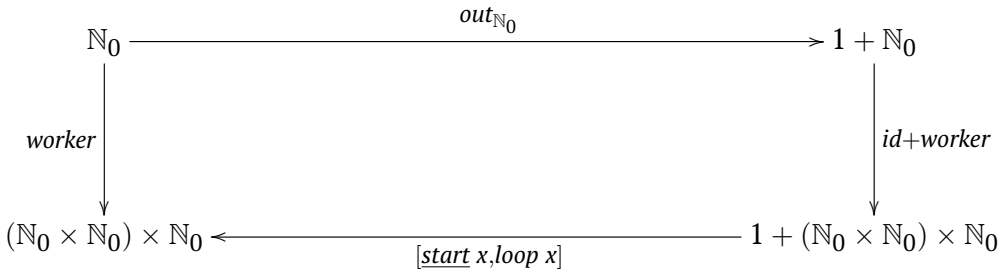
$$
\begin{aligned}
&start :: Num\ b1 \Rightarrow b2 \to ((b2, b2), b1) \\
&start\ x = ((x, x), 0)
\end{aligned}
$$

Nos restantes casos, a função loop recebe o acumulador e retorna um novo acumulador com os valores atualizados.

$$
\begin{aligned}
&den :: Num\ a \Rightarrow a \to a \\
&den\ i = (2 * i + 2) * (2 * i + 3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&num :: Num\ a \Rightarrow a \to a \\
&num\ x = x \uparrow 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&loop :: Fractional\ b \Rightarrow b \to ((b,b),b) \to ((b,b),b) \\
&loop\ x\ ((s,p),i) = ((s + conta, conta), i + 1) \\
&\quad \textbf{where}\ conta = p * (num\ x\ /\ den\ i)
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
&\quad worker = \text{for}\ loop\ x\ start\ x \\
&\equiv \qquad \{\ \text{Def ciclo-for}\ \} \\
&\quad worker = (\!|\ [\underline{start}\ x, loop\ x]\ |\!)
\end{aligned}
$$

Para devolver o valor do somatório, a função wrapper recebe o acumulador e retorna o valor do somatório, ou seja, o primeiro elemento do acumulador.

$$
\begin{aligned}
&snh :: (Integral\ a, Fractional\ b) \Rightarrow b \to a \to b \\
&snh\ x = wrapper \cdot worker \\
&\quad \textbf{where} \\
&\qquad worker = \text{for}\ loop\ x\ start\ x \\
&\qquad wrapper = \pi_1 \cdot \pi_1
\end{aligned}
$$

Problema 4

$$
\textbf{data}\ Stop = S0 \mid S1 \mid S2 \mid S3 \mid S4 \mid S5\ \textbf{deriving}\ (Show, Eq, Ord, Enum)
$$

$$
\textbf{type}\ Delay = \mathbb{Z}
$$

$$
\textbf{type}\ Segment = (Stop, Stop)
$$

$$
\begin{aligned}
&dados = [((S0,S1),0),((S0,S1),2),((S0,S1),0),((S0,S1),3),((S0,S1),3), \\
&\quad ((S1,S2),0),((S1,S2),2),((S1,S2),1),((S1,S2),1),((S1,S2),4),
\end{aligned}
$$

$((S2,S3),2),((S2,S3),2),((S2,S3),4),((S2,S3),0),((S2,S3),5),$
$((S3,S4),2),((S3,S4),3),((S3,S4),5),((S3,S4),2),((S3,S4),0),$
$((S4,S5),0),((S4,S5),5),((S4,S5),0),((S4,S5),7),((S4,S5),-1)]$

```
mkf :: Eq a => [(a,b)] -> a -> Maybe b
mkf = flip Prelude.lookup
```

```
instantaneous :: Dist Delay
instantaneous = D [(0,1)]
```

Para auxiliar a geração da base de dados probabilística, criamos 3 funções auxiliares.

- A função lka recebe um segmento e uma lista de dados e devolve uma lista com os atrasos associados a esse segmento

```
lka :: Eq a => a -> [(a,b)] -> [b]
lka k = map π2 . filter ((≡ k) . π1)
```

- A função mkdist faz o sumário estatístico de uma qualquer lista finita, gerando a distribuição de ocorrência dos seus elementos. Começamos por aplicar a função map, de forma a obter uma lista de tuplos com o elemento e a sua percentagem de ocorrências. De seguida aplicamos a função nub, que remove os elementos repetidos da lista, e por fim aplicamos a D que transforma a lista de tuplos numa distribuição.

```
mkdist :: Eq a => [a] -> Dist a
mkdist l = D $ nub $ map ((id × divide) . dup) l
  where
    divide x = fromIntegral (n x l) / fromIntegral t
    t = length l
n x = length . filter (≡ x)
```

- A função mksd começa por aplicar a função lka aos dados, de forma a obter uma lista com os atrasos de um determinado segmento, de seguida aplica a mkdist a essa lista, obtendo assim a distribuição de ocorrência dos atrasos desse segmento.

```
mksd :: Segment -> (Segment, Dist Delay)
mksd = ⟨id, mkdist . flip lka dados⟩
```

Por fim para gerar a base de dados probabilística, começamos por extrair os segmentos dos dados e eliminar os repetidos, de forma a obter uma lista de segmentos.

De seguida aplicamos a função mksd a todos os segmentos, devolvendo assim uma lista de tuplos com o segmento e a sua respetiva distribuição.

```
db :: [(Segment, Dist Delay)]
db = map mksd $ nub $ map π1 dados
```

Esta função começa por procurar o segmento na base de dados probabilística, e caso o encontre, devolve a sua distribuição de atrasos.

```
delay :: Segment -> Dist Delay
delay = fj . mkf db
```

$$fj :: Maybe\ a \to a$$
$$fj\ (Just\ a) = a$$

A pdelay é uma função probabilística que deverá informar qualquer utente que queira ir da paragem a até à paragem b de uma dada linha sobre a probabilidade de atraso acumulado no total do percurso [a..b].

Esta função recebe duas paragens e devolve a distribuição de atrasos acumulados entre as mesmas. De modo a realizarmos o pretendido, começamos por calcular a lista de segmentos de todas as paragens entre as duas paragens dadas.

Para tal, utilizámos a função enumFromTo que devolve uma lista com todas as paragens entre a e b, de seguida aplicamos um split id tail e juntamos para obter a lista de segmentos entre essas duas paragens.

Posteriormente, aplicamos a função somatorio que recebe a lista de segmentos e devolve a distribuição de atrasos acumulados entre os mesmos.

Esta função aplica a cada segmento a função delay e soma essa distribuição com a distribuição de atrasos do resto do percurso que foi calculada recursivamente pelo catamorfismo.

$$\begin{array}{ccc} Segment^* & \xrightarrow{out_{Listas}} & 1 + Segment \times Segment^* \\ \downarrow{\scriptstyle somatorio} & & \downarrow{\scriptstyle id+id\times somatorio} \\ DistDelay & \xleftarrow[[\underline{instantaneous},(joinWith\ \widehat{(+)}\cdot delay)]]{} & 1 + Segment \times DistDelay \end{array}$$

$$somatorio :: [Segment] \to \text{Dist}\ Delay$$
$$somatorio = (\!|\ [\underline{instantaneous}, (joinWith\ \widehat{(+)} \cdot delay)]\ |\!)$$

$$pdelay :: Stop \to Stop \to \text{Dist}\ Delay$$
$$pdelay\ a\ b = somatorio\ \$\ \widehat{zip}\ \$\ \langle id, tail\rangle\ \$\ enumFromTo\ a\ b$$