



جستجوی اول عمق/جستجوی اول سطح

مسئله‌ی ۱. در جست‌وجوی خوشبختی

- گراف بدون جهت $G = (V, E)$ که در آن n راس وجود دارد ($|V| = n$) را در نظر بگیرید.
- الگوریتمی از مرتبه $O(n)$ ارائه دهید که وجود و عدم وجود دور در گراف G را بررسی کند.
 - الگوریتمی از مرتبه $O(|V| + |E|)$ ارائه دهید که مولفه‌های همبندی گراف G را پیدا کنید.

مسئله‌ی ۲. همه با هم

- گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ و دو راس s و d که $s, d \in V$ را در نظر بگیرید. تمام مسیرهای متفاوت موجود از s به d را در G پیدا کنید.

مسئله‌ی ۳. برش و چند داستان دیگر

- راس برشی راسی از گراف است که حذف آن باعث افزایش تعداد مولفه‌های همبندی گراف می‌شود. حال گراف بدون جهت همبند $G = (V, E)$ که در آن $|V| \geq 3$ را در نظر بگیرید.
- نشان دهید که در G حداقل ۲ راس غیربرشی وجود دارد.
 - الگوریتمی از مرتبه $O(|V|(|V| + |E|))$ ارائه دهید که تمام راس‌های برشی موجود در G را پیدا کند.
 - الگوریتمی از مرتبه $O(|V| + |E|)$ ارائه دهید که تمام راس‌های برشی موجود در G را پیدا کند.

مسئله‌ی ۴. ارتفاع اول «سطح»

- نشان دهید اگر راسی را از یک گراف حذف کنیم، با ثابت نگه‌داشتن ریشه در درخت حاصل از جستجوی اول سطح ارتفاع هیچ راسی کاهش پیدا نمی‌کند.

مسئله ۵. گراف خوش رنگ

گراف $G = (V, E)$ دور زوج ندارد. نشان دهید رئوس این گراف را می‌توان با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ دو راس مجاور هم‌رنگ نباشند.

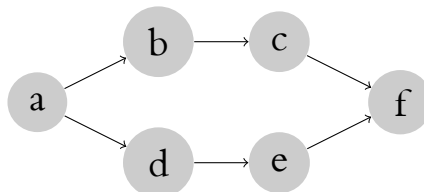
مسئله ۶. صعود؛ دنباله به دنباله

دنباله‌ای از اعداد ۱ تا n در اختیار داریم. در هر گام می‌توانیم زیردنباله‌ای متوالی از آن را انتخاب کنیم و ترتیب عناصر آن را برعکس کنیم. مثلاً در دنباله‌ی ۱، ۳، ۵، ۴، ۲ می‌توانیم زیردنباله‌ی متوالی شامل اعداد دوم تا پنجم را انتخاب کرده و ترتیب آن‌ها را برعکس کنیم و به دنباله ۱، ۲، ۴، ۵، ۳ برسیم. الگوریتمی ارائه دهید که کم‌ترین گام‌های لازم برای تبدیل یک دنباله‌ی دلخواه به دنباله‌ی تمام صعودی را پیدا کند.

مرتب‌سازی توپولوژیکی/مولفه‌های قویا همبند

مسئله ۷. مرحله مقدماتی

گراف جهت‌دار بدون دور زیر را در نظر بگیرید. چه تعداد ترتیب توپولوژیکی برای آن موجود است؟ آنها را بنویسید.



مسئله ۸. تو خیلی دوری!

گراف جهت‌دار وزن‌دار بدون دور G به شما داده شده است. الگوریتمی از مرتبه $O(m+n)$ ارائه دهید که بلندترین مسیر موجود در گراف (با توجه به وزن‌ها) را پیدا کند.

مسئله ۹. مادر فداکار

در گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ راس v مادر است اگر از راس v به تمام رئوس دیگر موجود در G مسیری وجود داشته باشد. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(m+n)$ ارائه دهید که وجود و عدم وجود راس مادر در G را بررسی کند.

مسئله‌ی ۱۰. شاخ مجازی!

اکبر یک جوک بسیار بامزه به ذهنش رسیده است و می‌خواهد آنرا در کل شبکه اجتماعی توییتر پخش کند تا به اصطلاح ترند شود! این شبکه بدین گونه است که هر عضو شبکه، تعدادی از اعضای دیگر این شبکه را دنبال می‌کند و هر مطلبی که هر کدام از آنها منتشر کند را باز نشر می‌کند. حال اکبر می‌خواهد به تعدادی از اعضای این شبکه یک واحد پول بدهد تا جوک او را در صفحه خود بگذارند تا در نهایت جوک او را همه اعضای شبکه بخوانند. حال الگوریتمی به اکبر ارائه دهید که با کمترین صرف پول، به هدف خود برسد. به شما آیدی اعضای شبکه و آیدی افرادی که هر عضو دنبال می‌کند داده شده است.

دایکسترا/بلمن فورد

مسئله‌ی ۱۱. درست و حسابی

ثابت کنید الگوریتم دایکسترا در گراف‌هایی که یال با وزن منفی ندارند به درستی کوتاه‌ترین مسیر از یک راس مشخص به دیگر رئوس را پیدا می‌کند. (اثبات درستی الگوریتم دایکسترا)

مسئله‌ی ۱۲. کمینه دور

گراف وزن‌دار $G = (V, E)$ با وزن یال‌های مثبت را در نظر بگیرید. $(|E| > |V|)$ الگوریتمی از مرتبه $O(|E|^2 \log |V|)$ ارائه دهید که دور با مینیمم مجموع وزن یال‌ها را بیابد.

مسئله‌ی ۱۳. دور شاید اما تسلسل هرگز

ثابت کنید الگوریتم بلمن-فورد پس از تعداد متناهی گام به پایان می‌رسد.

مسئله‌ی ۱۴. «تیم» باید قوی باشه

گراف وزن‌دار $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید که حداکثر قدر مطلق وزن یال‌ها W است. $(|E| > |V|)$ الگوریتمی از $O(|V||E|\log(W))$ ارائه دهید که دور با مینیمم میانگین وزن یال‌ها را بیابد.

(موفق باشید :)