جستجوی اول عمق/جستجوی اول سطح

مسئله‌ی ۱. در جست‌وجوی خوشبختی

گراف بدون جهت $\mathrm{G = (V, E)}$ که در آن n راس وجود دارد ($|V| = n$) را در نظر بگیرید.

- الگوریتمی از مرتبه $\mathrm{O(n)}$ ارائه دهید که وجود و عدم وجود دور در گراف G را بررسی کند.
- الگوریتمی از مرتبه $O(|V| + |E|)$ ارائه دهید که مولفه‌های همبندی گراف G را پیدا کنید.

حل.

الف) از DFS استفاده کنید و همچنین از این نکته استفاده کنید که یک گراف n راسی ساده بدون جهت برای بدون دور بودن نهایتا می‌تواند ۱-n یال داشته باشد.(چرا؟)
ب) از یک راس الگوریتم DFS را اجرا کنید. تمام راس‌هایی که دیده می‌شوند جز یک مولفه همبندی می‌باشند(گراف بدون جهت است). در انتها چک کنید که راس unvisited وجود دارد یا نه. این الگوریتم را تا زمانی که راس unvisited ناموجود شود تکرار کنید. ▷

مسئله‌ی ۲. همه با هم

گراف جهت‌دار $\mathrm{G = (V, E)}$ و دو راس s و d که $s, d \in V$ را در نظر بگیرید. تمام مسیرهای متفاوت موجود از s به d را در G پیدا کنید.

حل.

از الگوریتم DFS استفاده می‌کنیم و در آن اصلاحات لازم را اعمال می‌کنیم. از راس s جست‌وجو را شروع می‌کنیم. همچنین یک لیست از مسیر نگه می‌داریم و هر راس را گسترش می‌دهیم آنرا به لیست مسیر اضافه می‌کنیم. هنگام گسترش یک راس ، آنرا visited می‌کنیم و هنگام finish شدن آن راس، آنرا unvisited می‌کنیم و از لیست مسیر حذف می‌کنیم.(چرا؟). همچنین اگر آن راس ، راس d بود لیست مسیر نشان‌دهنده یک مسیر از s به d است. ▷

مسئله‌ی ۳. برش و چند داستان دیگر

راس برشی راسی از گراف است که حذف آن باعث افزایش تعداد مولفه‌های همبندی گراف می‌شود. حال گراف بدون جهت همبند $G = (V, E)$ که در آن $|V| \geqslant ۳$ را در نظر بگیرید.

- نشان دهید که در G حداقل ۲ راس غیربرشی وجود دارد.
- الگوریتمی از مرتبه $O(|V|(|V| + |E|))$ ارائه دهید که تمام راس‌های برشی موجود در G را پیدا کند.
- الگوریتمی از مرتبه $O(|V| + |E|)$ ارائه دهید که تمام راس‌های برشی موجود در G را پیدا کند.

حل.

الف) از این ایده استفاده کنید که هر گراف دارای یک درخت پوشا است و در یک درخت، برگ راس برشی نیست.
ب) هر بار یکی از راس‌های گراف را حذف می‌کنیم و سپس الگوریتم DFS را اجرا می‌کنیم و چک می‌کنیم که تعداد مولفه‌های همبندی در دو حالت یکسان هست یا نه.
ج)الگوریتم DFS را روی گراف اجرا می‌کنیم . هر راس در درخت حاصل از DFS یک راس برشی است اگر دارای یکی از شرایط زیر باشد:
۱ ـ آن راس ریشه DFS باشد و حداقل ۲ فرزند داشته باشد.(چرا؟)
۲ ـ آن راس(که آنرا u می‌نامیم)، راس ریشه نباشد و فرزند یا نوه‌ای داشته باشد که آن هیچ یالی به اجداد u نداشته باشد. (چرا؟)

$\triangleright$

مسئله‌ی ۴. ارتفاعِ اول «تیم»

نشان دهید اگر راسی را از یک گراف حذف کنیم، با ثابت نگه‌داشتن ریشه در درخت حاصل از جستجوی اول سطح ارتفاع هیچ راسی کاهش پیدا نمی‌کند.

حل.

ارتفاع هر راس در درخت حاصل از جستجوی اول سطح کم‌ترین مسیر آن راس از ریشه است. نشان دهید با حذف یک راس کم‌ترین فاصله رئوس از ریشه کاهش پیدا نمی‌کند. $\triangleright$

مسئله‌ی ۵. گراف خوش رنگ

گراف $G = (V, E)$ دور زوج ندارد. نشان دهید رئوس این گراف را می‌توان با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ دو راس مجاوری هم‌رنگ نباشند.

حل.

نشان دهید اگر درخت BFS را در این گراف (با ریشه‌ی دلخواه) درنظر بگیریم، هر راس حداکثر به یک راس از رئوس طبقه‌ی بالایش و حداکثر به یک راس از رئوس هم‌طبقه‌اش یال دارد. حال از ریشه شروع می‌کنیم. به هر راس رنگی که تا به حال به همسایه‌هایش نسبت داده نشده است، نسبت می‌دهیم. قبل از نسبت دادن رنگ به هر راس حداکثر دو همسایه‌اش رنگ‌آمیزی شده‌اند. (چرا؟) ▷

مسئله‌ی ۶. صعود؛ دنباله به دنباله

دنباله‌ای از اعداد ۱ تا n در اختیار داریم. در هر گام می‌توانیم زیردنباله‌ای متوالی از آن را انتخاب کنیم و ترتیب عناصر آن را برعکس کنیم. مثلا در دنباله‌ی ۱،۳،۵،۴،۲ می‌توانیم زیردنباله‌ی متوالی شامل اعداد دوم تا پنجم را انتخاب کرده و ترتیب آن‌ها را برعکس کنیم و به دنباله ۱،۲،۴،۵،۳ برسیم. الگوریتمی ارائه دهید که کم‌ترین گام‌های لازم برای تبدیل یک دنباله‌ی دلخواه به دنباله‌ی تمام صعودی را پیدا کند.

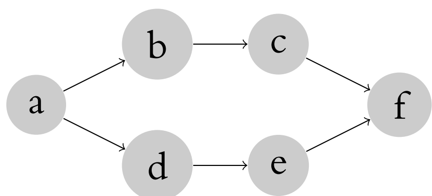
حل.

برای هر جایگشت از اعداد ۱ تا n یک راس در نظر می‌گیریم. بین رئوس متناظر با هر دو جایگشت یک یال قرار می‌دهیم اگر بتوان در یک گام از یکی به دیگری رسید. اگر از یک جایگشت بتوان به با یک گام به جایگشت دیگری رسید، برعکس آن نیز ممکن است. (چرا؟) بدین ترتیب یک گراف با $n!$ راس داریم که درجه‌ی هر راس $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است. (چرا؟) حال از جایگشت تمام صعودی BFS می‌زنیم. ارتفاع طبقه‌ای که راس متناظر جایگشت اولیه در آن قرار می‌گیرد پاسخ مساله است. ▷

مرتب‌سازی توپولوژیکی/مولفه‌های قویا همبند

مسئله‌ی ۷. مرحله مقدماتی

گراف جهت‌دار بدون دور زیر را در نظر بگیرید. چه تعداد ترتیب توپولوژیکی برای آن موجود است؟ آنها را بنویسید.



حل.

$\triangleright$ $[a, b, c, d, e, f], [a, b, d, c, e, f], [a, b, d, e, c, f], [a, d, b, c, e, f], [a, d, b, e, c, f], [a, d, e, b, c, f]$

مسئله‌ی ۸. تو خیلی دوری!

گراف جهت‌دار وزن‌دار بدون دور G به شما داده شده است. الگوریتمی از مرتبه O(m+n) ارائه دهید که بلندترین مسیر موجود در گراف(با توجه به وزن‌ها) را پیدا کند.

حل.

از ترتیب توپولوژیک DAG استفاده کنید و همچنین یک لیست A برای راس‌ها به عنوان طول بیشترین مسیر موجود فعلی تا آن راس را ذخیره کنید. برای هر یال (u, v) لیست A را بدین صورت به روز رسانی کنید:

$$A[v] = max\{A[v], A[u] + W(u, v)\}$$

که منظور از W وزن آن یال است.

$\triangleright$

مسئله‌ی ۹. مادر فداکار

در گراف جهت‌دار G = (V, E) راس v راس مادر است اگر از راس v به تمام رئوس دیگر موجود در G مسیری وجود داشته باشد. الگوریتمی از مرتبه زمانی O(m+n) ارائه دهید که وجود و عدم وجود راس مادر در G را بررسی کند.

حل.

در گراف G مولفه‌های قویا همبند (SCC) را پیدا کنید. گراف G' را به این گونه بسازید که به جای هر مولفه قویا همبند یک راس گذاشته و یال‌های میان این راس‌ها را ، همان یالهای میان SCC ها در G قرار دهید. نشان دهید که G' یک DAG است. حال روی این DAG ترتیب توپولوژیک را پیدا کنید و نشان دهید که اگر راس مادری در گراف موجود باشد، آنگاه راس منبع (راس منبع در DAG راسی است که درجه یالهای ورودی به آن صفر است) نیز یک راس مادر است. و در نهایت راس منبع را در DAG پیدا کنید.

$\triangleright$

مسئله‌ی ۱۰. شاخ مجازی!

اکبر یک جوک بسیار بامزه به ذهنش رسیده است و می‌خواهد آنرا در کل شبکه اجتماعی توییتر پخش کند تا به اصطلاح ترند شود! این شبکه بدین گونه است که هر عضو شبکه، تعدادی از اعضای دیگر این شبکه را دنبال می‌کند و هر مطلبی که هر کدام از آنها منتشر کند را بازنشر می‌کند.حال اکبر می‌خواهد به تعدادی از اعضای این شبکه یک واحد پول بدهد تا جوک او را در

صفحه خود بگذارند تا در نهایت جوک او را همه اعضای شبکه بخوانند. حال الگوریتمی به اکبر ارائه دهید که با کمترین صرف پول، به هدف خود برسد. به شما آیدی اعضای شبکه و آیدی افرادی که هر عضو دنبال می‌کند داده شده است.

حل.

گراف جهت‌دار G شبکه را بدین گونه رسم کنید که اگر عضو a عضو b را دنبال می‌کند یک یال از b به a داشته باشیم.(چرا؟) سپس در این گراف SCC ها را پیدا کنید و حال گراف G' را از روی آن همان طور که در سوال قبلی توضیح داده شد بسازید. فهمیدیم که G' یک DAG است. جواب مسئله تعداد راس‌های منبع(در سوال قبلی تعریف شد) در DAG است.(چرا؟)

▷

دایکسترا/بلمن فورد

مسئله‌ی ۱۱. درست و حسابی

ثابت کنید الگوریتم دایکسترا در گراف‌هایی که یال با وزن منفی ندارند به درستی کوتاه‌ترین مسیر از یک راس مشخص به دیگر رئوس را پیدا می‌کند. (اثبات درستی الگوریتم دایکسترا)

حل.

مجموعه رئوسی که دایکسترا مینیمم فاصله از ریشه تا آن‌ها را به درستی محاسبه می‌کند S درنظر بگیرید. از استقرا روی |S| استفاده کنید. ▷

مسئله‌ی ۱۲. کمینه دور

گراف وزن‌دار $G = (V, E)$ با وزن یال‌های مثبت را درنظر بگیرید. $(|E| > |V|)$ الگوریتمی از مرتبه $O(|E|^2 \log |V|)$ ارائه دهید که دور با مینیمم مجموع وزن یال‌ها را بیابد.

حل.

برای هر یال ابتدا آن را حذف کنید. سپس از یک سر آن دایکسترا بزنید و وجود دور و اندازه دور را چک کنید. سپس یال را اضافه کنید. ▷

مسئله‌ی ۱۳. دور شاید اما تسلسل هرگز

ثابت کنید الگوریتم بلمن‌ـ فورد پس از تعداد متناهی گام به پایان می‌رسد.

حل.

نشان دهید آپدیت کردن فاصله‌ها حداکثر |V| مرحله به طول می‌انجامد. ▷

مسئله‌ی ۱۴. «تیم» باید قوی باشه

گراف وزن‌دار $G = (V, E)$ را درنظر بگیرید که حداکثر قدر مطلق وزن یال‌ها W است. $(|E| < |V|)$ الگوریتمی از $O(|V||E|log(W))$ ارائه دهید که دور با مینیمم میانگین وزن یال‌ها را بیابد.

حل.

روی جواب باینری سرچ بزنید. سپس برای چک کردن وجود دور با میانگین وزن کم‌تر مساوی x، از وزن هر یال x تا کم کنید سپس با بلمن‌ـ فورد و استفاده از ایده سوال دوازده چک کنید در گراف دور منفی وجود دارد یا خیر. $\triangleright$

موفق باشید :)