



مسئله‌ی ۱. ارزش برعکس

در گراف جهت‌دار G هر راس i ارزش V_i دارد.

- الف) اگر G بدون دور نیز باشد، الگوریتمی از مرتبه $O(m+n)$ ارائه دهید که به ازای هر راس i پرارزش‌ترین راسی که راس i به آن مسیر دارد را بیاید.
- حال مسئله را بدون فرض بی‌دور بودن G حل کنید. یعنی در گراف جهت‌دار G با استفاده از قسمت الف، الگوریتمی از مرتبه $O(m+n)$ ارائه دهید که به ازای هر راس i پرارزش‌ترین راسی که راس i به آن مسیر دارد را بیاید.

حل.

برای راس دلخواه u ، پرارزش‌ترین راسی که u به آن مسیر دارد را با $C[u]$ نشان می‌دهیم.
الف) راس دلخواه u را در نظر بگیرید که این راس به راس‌های a_1 و a_2 و و a_k یال دارد. برای محاسبه $C[u]$ در واقع می‌بایست

$$C[u] = \max \{V_u, C[a_1], \dots, C[a_k]\}$$

را حساب کنیم که چالش اصلی آن محاسبه $C[a_k]$ قبل از $C[u]$ می‌باشد. DAG بودن گراف کمک بزرگی برای محاسبه به ما می‌کند. ترتیب توپولوژیک گراف را رسم می‌کنیم. همچنان این مشکل وجود دارد که برای محاسبه $C[u]$ می‌بایست $C[a_k]$ را حساب کرده باشیم. برای حل این مشکل به ترتیب برعکس توپولوژیکی آن نگاه می‌کنیم. حال می‌توانیم برای هر راس در ترتیب برعکس از رابطه

$$C[u] = \max \{V_u, C[a_1], \dots, C[a_k]\}$$

استفاده کنیم چرا که $C[a_k]$ در این صورت از قبل حساب شده است. در واقع به جای شروع از اول، از آخر شروع می‌کنیم تا مقادیر لازم را در هر مرحله حساب کرده باشیم.

ب) در این حالت ابتدا SCC ها را پیدا می‌کنیم. سپس گراف G' را بدین گونه تشکیل می‌دهیم که به جای هر مولفه قویا همبند یک راس گذاشته و یال‌های میان این راس‌ها را، همان یال‌های میان SCC ها در G قرار می‌دهیم. برای هر راس در G' می‌بایست یک V نیز پیدا کنیم. با توجه به آنکه هر راس در آن نماینده یک مولفه قویا همبند است، و با توجه به آنکه در هر مولفه قویا همبند، از هر راس به راس دیگری مسیر وجود دارد، پس V مربوط به آن راس در G' را برابر ماکسیمم تمام

V_i های موجود در آن مولفه همبندی قرار می‌دهیم. حال با توجه به آنکه G' یک DAG است، با استفاده از قسمت قبلی سوال جواب را پیدا می‌کنیم.

▷

مسئله ۲. فردیت موج می‌زنه

گراف n راسی G دور زوج ندارد. ثابت کنید این گراف حداکثر $\frac{3(n-1)}{4}$ یال دارد.

حل.

درخت BFS این گراف را با ریشه دلخواه در نظر می‌گیریم. کل یال‌های گراف دو دسته‌اند یا بین دو راس از دو طبقه‌ی متفاوت در این درخت یا بین دو راس از یک طبقه. اگر یک یال بین دو راس از دو طبقه‌ی متفاوت باشد حتماً این دو راس در دو طبقه‌ی مجاورند. چرا که در BFS یک راس به راسی که اختلاف ارتفاعش با آن بیش از ۱ باشد یال ندارد. از طرفی با توجه به این که گراف دور زوج ندارد، هر راس حداکثر به یک راس از رئوس طبقه‌ی بالایش و حداکثر به یک راس از رئوس هم‌طبقه‌اش یال دارد. حال برای شمارش کل یال‌ها کافی است جمع یال‌های هر کدام از دو دسته‌ی ذکر شده را بشماریم. تعداد یال‌هایی که بین دو راس از طبقات متفاوتند را بوسیله‌ی راس در طبقه با ارتفاع بیش‌تر می‌شماریم. گفتیم هر راس به جز ریشه حداکثر می‌تواند یک یال به رئوس طبقه‌ی بالاتر داشته باشد. بنابراین تعداد یال‌های این دسته حداکثر $n-1$ است. حال تعداد یال‌هایی که دو سرشان هم‌طبقه‌اند را می‌شماریم. گفتیم هر راس غیر ریشه می‌تواند به حداکثر یک راس هم‌طبقه‌اش یال داشته باشد. بنابراین اگر همه‌ی رئوس غیر ریشه با یک راس هم‌طبقه‌یشان یال داشته باشند، تعداد سرهای یال‌های این دسته $n-1$ است و این در حالی است که هر یال دو سر دارد بنابراین تعداد یال‌های این دسته حداکثر $\frac{n-1}{2}$ است. بنابراین در مجموع تعداد یال‌های گراف حداکثر $\frac{3(n-1)}{4}$ است.

▷

(موفق باشید :)