



مجموعه‌های مجزا

مسئله‌ی ۱. مگس وزن

وزن یک دور از گراف را برابر با اندازه‌ی بیشینه یال موجود در آن دور تعریف می‌کنیم. الگوریتمی از $O(m \log(m))$ پیشنهاد دهید که وزن کم‌وزن‌ترین دور یک گراف با تعداد یال m را پیدا کند.

حل.

یال‌ها را بر اساس وزن‌شان به صورت صعودی مرتب کنید و به ترتیب به مجموعه‌ی مجزا اضافه کنید. اولین جایی که دور تشکیل بشود آن یال جواب مساله است.

▷

مسئله‌ی ۲. اجتماع

ثابت کنید عمل union برای m عنصر، در هر دو حالت زیر دارای پیچیدگی زمانی $O(\log(m))$ است.

(الف) بر حسب بیشینه ارتفاع دو درخت

(ب) بر حسب تعداد راس‌های دو درخت

حل.

(الف) اگر بیشینه ارتفاع دو درخت متفاوت باشد، بیشینه ارتفاع درخت نهایی تفاوتی نمی‌کند. ولی اگر برابر باشد ارتفاع درخت نهایی یکی بیشتر می‌شود. با استقرا می‌توانیم ثابت کنیم که هر درختی که بیشینه ارتفاعش برابر k است حداقل دارای k^2 راس است.

(ب) هنگامی ارتفاع یک راس یکی زیاد می‌شود که تعداد رئوس زیر درختش دوبرابر می‌شود. در نتیجه ارتفاع هر راس در نهایت حداکثر $\log(n)$ است.

▷

مسئله‌ی ۳. بیشتر و بیشتر

وزن هر مسیر در گراف را برابر با کمینه وزن یال‌های آن مسیر تعریف می‌کنیم. برای دو راس x

و y تابعی به نام $f(x, y)$ را تعریف می‌کنیم که برابر با بیشینه وزن مسیرهای بین x و y است. به ازای تمامی x و y جمع مقادیر $f(x, y)$ را پیدا کنید.

حل.

یال‌ها را به صورت صعودی مرتب کنید سپس به ترتیب به مجموعه‌های مجزا اضافه کنید. هرگاه با اضافه کردن یک یال، دو مولفه‌ی همبندی به هم وصل شدند، وزن این یال برابر با $f(x, y)$ تمام y های x داخل یک مولفه و y های داخل مولفه‌ی دیگر است. (چرا؟)

▷

مسئله‌ی ۴. کلید و وزن.

گرافی داده شده است که هر یال دارای مقداری برابر با ۰ و یا ۱ است. روی هر رأس کلیدی وجود دارد که اگر آن کلید را بزنیم تمامی یال‌های متصل به آن رأس حالتشان عوض می‌شود. آیا می‌توان در $O(m \log(m))$ تمامی یال‌ها را برابر با ۰ کرد.

حل.

هر یال دو حالت یک یا صفر دارد. اگر یال برابر با یک باشد دقیقاً یکی از رأس‌هایش باید کلیک شود. اگر مقدار یال برابر با صفر باشد یا هیچ کدام و یا هر دو رأس یال باید کلیک شوند. پس نتیجه می‌گیریم که اگر کلیک کردن را مقدار یک رأس قرار دهیم، به ازای یال با اندازه‌ی یک، رأس‌ها دارای مقادیر متفاوتی می‌شوند ولی به ازای یال با اندازه‌ی صفر، این دو مقدار با هم برابرند. بنابراین رأس‌ها به تعدادی مولفه با مقدار برابر افزای می‌شوند. برای این که همه‌ی یال‌ها را بتوان صفر کرد، این مولفه‌ها چه ویژگی‌ای باید داشته باشند؟

▷

مسئله‌ی ۵. گراف درخواست دار

در ابتدا یک گراف خالی از یال داریم که روی هر رأس عددی نوشته شده است. تعدادی درخواست داده می‌شود:

- کوچکترین عدد در مولفه همبندی شامل رأس v چیست؟
- عدد روی رأس v را به بی نهایت تغییر بده.
- از v به u یال بکشید.

اگر تعداد درخواست‌ها برابر با q باشد در $O((q+n) \log(n+q)^2)$ به درخواست‌ها رسیدگی کنید.

حل.

تعدادی هیپ در نظر می‌گیریم. هر موقع بین دو رأس یالی کشیده شد هیپ کوچکتر را در هیپ بزرگتر میریزیم.

▷

درخت مرتبه آماری

مسئله‌ی ۶. درخت داستان دار

یک آرایه به طول n داده شده است. در $O(n \log(n))$ تعداد نابه‌جایی‌های آرایه را با استفاده از درخت مرتبه‌ی آماری پیدا کنید.

حل.

از چپ به راست اعداد آرایه را در درخت آماری اضافه می‌کنیم و تعداد راس‌های درخت آماری را که کوچکتر از عدد اضافه شده است بدست می‌آوریم.

مسئله‌ی ۷. دستورات

multiset را برابر با مجموعه‌ای تعریف می‌کنیم که تکرار عضو در آن مجاز است. درخواست‌هایی با فرمت زیر وارد می‌شود:

• با ورود دستور $\text{add } x$ یک x را به multiset اضافه کن

• با ورود دستور $\text{get } l \ r$ تعداد x هایی را پیدا کنید که $l \leq x \leq r$

اگر تعداد درخواست‌ها برابر با q باشد در $O(q \log(q))$ به درخواست‌ها رسیدگی کنید.

حل.

تعداد اعداد $l \leq x \leq r$ برابر است با تعداد اعداد $x \leq r$ منهای تعداد اعداد $x \leq l - 1$

برای بدست آوردن تعداد اعداد $x \leq T$ نیز می‌توانیم از درخت مرتبه آماری استفاده کنیم.

درهم سازی

مسئله‌ی ۸. زیررشته‌ی برابر

یک multiset به طول m و یک رشته به طول n از رنگ‌ها داریم. در $O(m+n)$ تعداد زیررشته‌هایی از رشته را پیدا کنید که اعضای آن برابر با multiset داده شده باشد.

مثال:

multiset:

آبی زرد زرد آبی آبی

رشته:

زرد آبی زرد آبی آبی آبی زرد قرمز

جواب:

زرد آبی زرد آبی آبی

زرد آبی آبی آبی زرد

پس تعداد زیررشته‌ها ۲ است.

حل.

multiset را با

$$\sum_{i=1}^m n^{a_i}$$

▷

hash می‌کنیم.

مسئله ۹. رشته‌ی زیررشته‌دار و زیررشته‌ی رشته‌دار

مجموعه‌ای از m رشته S_i که $\sum |S_i| = S$ و یک رشته t به طول n داریم. اگر بگیریم $S + n = A$ آنگاه در $O(A \log(A) \sqrt{A})$ بگویید S_i وجود دارد که زیررشته‌ی t باشد؟

حل.

تعداد رشته‌هایی که طولشان از \sqrt{A} بیشتر است از \sqrt{A} کمترند. سوال را به دو قسمت رشته‌های کوتاه‌تر از \sqrt{A} و بزرگتر از \sqrt{A} تقسیم کنید.

▷

مسئله ۱۰. شیف چرخشی

رشته‌ی s به طول n داده شده است. در زمان $O(n)$ تعداد اعداد طبیعی k را بیابید که اگر رشته را به اندازه‌ی k بچرخانیم (شیف چرخشی) مجدد برابر با s شود. مثال: abcde پس از دو بار شیف چرخشی برابر است با deabc

حل.

هر پیشوند i را به صورت

$$\sum_{j=1}^i s_j * base^j$$

▷

(base یک عدد دلخواه) hash می‌کنیم.

مسئله ۱۱. راس‌های خوب

گرافی ساده با n راس و m یال داریم. $S(v)$ را برابر با مجموعه همسایه‌های راس v تعریف می‌کنیم. جفت راس‌ها u و v را خوب می‌نامیم اگر داشته باشیم: $S(v) - \{v\} = S(u) - \{u\}$. تعداد جفت راس‌های خوب را در $O(m \log(n))$ به دست آورید.

حل.

مساله را برای u و v های همسایه و غیرهمسایه جدا می‌کنیم. به ازای هر راس مقدار $s(v)$ و $v + s(v)$ را hash می‌کنیم.

▷

مسئله ۱۲. زیررشته‌ی داستان دار

پسوندهای رشته‌ای به طول n به ترتیب نامشخصی به عنوان ورودی داده می‌شود. در زمان $O(n \log^2(n))$ آنها را مرتب کنید عدد متناظر با هرکدام را در خروجی نمایش دهید.

مثال:

رشته‌ی ورودی: daabwa

پسوندها:

a

aabw

abwa

bwa

daabwa

wa

پس عدد خروجی (از راست به چپ) برابر است با: ۵ ۱ ۴ ۳ ۲ ۶

حل.

این سوال مانند این است که بخواهیم اعداد ۱ تا n را مرتب کنیم به گونه ای که عدد i از j کوچکتر است اگر پسوند i از پسوند j کوچکتر باشد. برای چک کردن پسوندها می‌توانیم از باینری سرچ برای به دست آوردن اولین کاراکتر نامساوی استفاده کنیم.

▷

(موفق باشید.)