



درخت دودویی جستجو

مسئله‌ی ۱. سنگین‌ترین مسیر

در یک درخت دودویی وزن یک مسیر از راس a به b را مجموع اعداد رئوس این مسیر در نظر بگیرید. الگوریتمی خطی ارائه دهید که وزن سنگین‌ترین مسیر یک درخت را بیابد.

مسئله‌ی ۲. پیمایش درخت

الف. الگوریتمی از مرتبه زمانی خطی طراحی کنید که لیست مرتب شده از عناصر د.د.ج را خروجی دهد.

ب. با داشتن کدام یک از پیمایش‌های پیش‌ترتیب، میان‌ترتیب و پس‌ترتیب از یک د.د.ج می‌توان آن را به طور یکتا ساخت؟ اثبات کنید یا مثال نقض بیاورید.

ج. الگوریتمی ارائه دهید که با گرفتن پیمایش پیش‌ترتیب یک درخت جستجوی دودویی تمام برگ‌های درخت را (بدون ساختن درخت) پیدا کند.

مسئله‌ی ۳. نیاکان مشترک

الف. الگوریتمی طراحی کنید که در د.د.ج عمیق‌ترین جد مشترک دو گره (LCA) را پیدا کند. دقت کنید عمیق‌ترین جد مشترک دو گره در واقع از سمت دو گره نزدیک‌ترین جد مشترک است.

ب. با استفاده از قسمت قبل الگوریتمی طراحی کنید با داشتن د.د.ج و دو عنصر داده شده، بزرگترین عنصر در مسیر بین دو عنصر داده شده را پیدا کند.

ج. کم‌ترین فاصله بین دو راس متمایز x و y در د.د.ج را بدست آورید. بهترین مرتبه زمانی برای حل این سوال چیست؟ راه حل خود را با تحلیل ارائه دهید.

مسئله‌ی ۴. تشخیص د.د.ج

درخت دودویی‌ای داده شده است، از مرتبه زمانی خطی تشخیص دهید که این درخت، یک درخت جستجوی دودویی است یا خیر. (رویه‌ی بازگشتی‌ای برای سوال ارائه دهید و مرتبه زمانی آن را تحلیل کنید.)

مسئله‌ی ۵. گذار در درخت

الف. یک د.د.ج و یک عدد داده شده‌است. روشی پیشنهاد کنید که نزدیکترین عنصر د.د.ج به عدد را پیدا کند.

ب. ابتدا روشی با استفاده از پیمایش د.د.ج پیشنهاد کنید که برای هر k داده شده، k مین عنصر درخت را در زمان خطی برگرداند. سپس با پیشنهاد کردن تغییری در ساختار د.د.ج کاری کنید که برای هر n عنصر داده شده بعد از قرار گیری عناصر در د.د.ج بتوانید در $O(h)$ که h ارتفاع درخت است برای هر k داده شده k مین عنصر درخت را برگردانید.

ج. با کمک ایده‌ی قسمت ب نشان دهید می‌توان در $O(h)$ جواب داد که چند عنصر بین a تا b وجود دارد.

د. نشان دهید با شروع از هر راس در درخت جستجوی دودویی، می‌توان در $O(h+k)$ ، k عنصر بعدی آن را یافت که در آن، منظور از h ارتفاع درخت است.

مسئله‌ی ۶. وسط عناصر

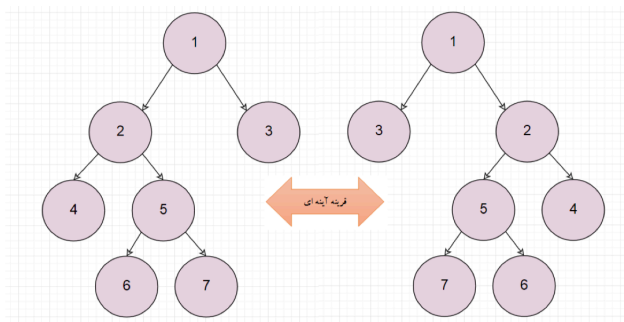
الف. الگوریتمی طراحی کنید که در $O(\log n)$ میانه‌ی دو آرایه‌ی مرتب را که هر کدام دقیقاً n عضو دارند را بیابد.

ب. الگوریتمی طراحی کنید که با انجام پیش‌پردازشی از مرتبه زمانی $O(n)$ روی دو د.د.ج، بتواند میانه‌ی کل عناصر دو د.د.ج را در $O(h)$ پیدا کند که h ، ارتفاع درخت بلندتر است و n مجموع عناصر دو درخت است.

دو د.د.ج. پس از پیش‌پردازش باید قابلیت‌های یک د.د.ج. عادی را داشته باشد.

مسئله‌ی ۷. درخت‌های آینه‌ای

الگوریتمی خطی ارائه دهید که با گرفتن دو درخت دودویی، مشخص کند که آیا قرینه‌ی آینه‌ای هم هستند یا نه.



مسئله‌ی ۸. مجموعه‌های جستجو

فرض کنید جستجو برای کلید k در یک BST به یک برگ ختم شود. سه مجموعه زیر را در نظر بگیرید: A ، کلیدهای سمت چپ مسیر جستجو، B ، کلیدهای روی مسیر و C ، کلیدهای سمت راست مسیر. آیا به ازای هر سه کلید $a \in A$ و $b \in B$ ، $c \in C$ باید داشته باشیم $a \leq b \leq c$ ؟ در صورتی که جواب شما مثبت است اثبات کنید و در صورتی که منفی باشد، مثال نقض بیاورید.

ترای

مسئله‌ی ۹. ترتیب الفبایی

الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(n)$ برای مرتب سازی n کلمه بر اساس ترتیب الفبایی ارائه دهید.

مسئله‌ی ۱۰. XOR بهینه

فرض کنید آرایه‌ای از اعداد ۳۲ بیتی داریم.

الف) به ازای عدد a ، بیشترین XOR آن با اعضای آرایه را پیدا کند.

ب) در زمان $O(n)$ جفت عدد با کمترین XOR را پیدا کنید.

ج) در زمان $O(n)$ زیرآرایه با بزرگترین XOR را پیدا کنید.

مسئله‌ی ۱۱. طولانی‌ترین پیشوند مشترک

الگوریتمی ارائه دهید که طولانی‌ترین پیشوند مشترک مجموعه‌ای از کلمات را در زمان خطی بدست آورد.

مسئله‌ی ۱۲. داستان‌نویسی

داستانی به طول n که از کلمات حداکثر k حرفی (k عدد ثابت) تشکیل شده است داریم.

الف) الگوریتمی ارائه دهید که تعداد کلمات متفاوت آن را در زمان $O(kn)$ بدست آورد.

ب) الگوریتمی ارائه دهید که با انجام پیش‌پردازشی از $O(kn)$ تعداد دفعات تکرار کلمه‌ی w را در در زمان $O(k)$ بدست آورد.

ج) الگوریتمی ارائه دهید که کلمه‌ی با بیشترین تکرار را پیدا کند.

مسئله ۱۳. trie پیشرفته

متنی شامل رشته‌هایی از حروف داریم (به عبارتی، یک داستان:)). با ایجاد تغییراتی در ساختار trie هنگام وارد کردن رشته‌ها، قابلیت‌های زیر را به trie اضافه کنید.

الف) ویژگی auto-complete. به عبارتی به ازای رشته‌ی ناقص w اگر این رشته پیشوند رشته‌های از قبل ذخیره شده‌ای باشد، آن‌ها را چاپ کند.

ب) برگرداندن تعداد رشته‌هایی که رشته‌ی w پیشوند آن است.

موفق باشید :)