



مجموعه‌های مجزا

مسئله‌ی ۱. مگس وزن

وزن یک دور از گراف را برابر با اندازه‌ی بیشینه یال موجود در آن دور تعریف می‌کنیم. الگوریتمی از $O(m \log(m))$ پیشنهاد دهید که وزن کم‌وزن‌ترین دور یک گراف با تعداد یال m را پیدا کند.

مسئله‌ی ۲. اجتماع

ثابت کنید عمل union برای m عنصر، در هر دو حالت زیر دارای پیچیدگی زمانی $O(\log(m))$ است.

الف) بر حسب بیشینه ارتفاع دو درخت

ب) بر حسب تعداد راس‌های دو درخت

مسئله‌ی ۳. بیشتر و بیشتر

وزن هر مسیر در گراف را برابر با کمینه وزن یال‌های آن مسیر تعریف می‌کنیم. برای دو راس x و y تابعی به نام $f(x, y)$ را تعریف می‌کنیم که برابر با بیشینه وزن مسیرهای بین x و y است. به ازای تمامی x و y جمع مقادیر $f(x, y)$ را پیدا کنید.

مسئله‌ی ۴. کلید و وزن

گرافی داده شده است که هر یال دارای مقداری برابر با \bullet و یا \circ است. روی هر راس کلیدی وجود دارد که اگر آن کلید را بزنیم تمامی یال‌های متصل به آن راس حالتشان عوض می‌شود. آیا میتوان در $O(m \log(m))$ تمامی یال‌ها را برابر با \bullet کرد؟

مسئله‌ی ۵. گراف درخواست دار

در ابتدا یک گراف n رأسی خالی از یال داریم که روی هر راس عددی نوشته شده است. تعدادی درخواست داده می‌شود:

- کوچکترین عدد در مولفه همبندی شامل راس v چیست؟
- عدد روی راس v را به بی نهایت تغییر بده.
- از v به u یال بکشید.

اگر تعداد درخواست‌ها برابر با q باشد در $O((q+n)\log(n+q)^2)$ به درخواست‌ها رسیدگی کنید.

درخت مرتبه آماری

مسئله ۶. درخت داستان دار

یک آرایه به طول n داده شده است. در $O(n\log(n))$ تعداد نابه‌جایی‌های آرایه را با استفاده از درخت مرتبه‌ی آماری پیدا کنید.

مسئله ۷. دستورات

multiset را برابر با مجموعه‌ای تعریف می‌کنیم که تکرار عضو در آن مجاز است. درخواست‌هایی با فرمت زیر وارد می‌شود:

- با ورود دستور $\text{add } x$ یک x را به multiset اضافه کن
- با ورود دستور $\text{get } l \ r$ تعداد x هایی را پیدا کنید که $l \leq x \leq r$

اگر تعداد درخواست‌ها برابر با q باشد در $O(q\log(q))$ به درخواست‌ها رسیدگی کنید.

درهم سازی

مسئله ۸. زیررشته‌ی برابر

یک multiset به طول m و یک رشته به طول n از رنگ‌ها داریم. در $O(m+n)$ تعداد زیررشته‌هایی از رشته را پیدا کنید که اعضای آن برابر با multiset داده شده باشد.

مثال:

multiset:
آبی زرد زرد آبی آبی

رشته:
زرد آبی زرد آبی آبی آبی زرد قرمز

جواب:
زرد آبی زرد آبی آبی
زرد آبی آبی آبی زرد
پس تعداد زیررشته‌ها ۲ است.

مسئله ۹. رشته‌ی زیررشته‌دار و زیررشته‌ی رشته‌دار

مجموعه‌ای از m رشته S_i که $\sum |S_i| = S$ و یک رشته t به طول n داریم. اگر بگیریم $S + n = A$ آنگاه در $O(A \log(A) \sqrt{A})$ بگویید S_i وجود دارد که زیررشته‌ی t باشد؟

مسئله ۱۰. شیف‌ت چرخشی

رشته‌ی s به طول n داده شده است. در زمان $O(n)$ تعداد اعداد طبیعی k را بیابید که اگر رشته را به اندازه‌ی k بچرخانیم (شیف‌ت چرخشی) مجدد برابر با s شود.
مثال: abcde پس از دو بار شیف‌ت چرخشی برابر است با deabc

مسئله ۱۱. راس‌های خوب

گرافی ساده با n راس و m یال داریم. $S(v)$ را برابر با مجموعه همسایه‌های راس v تعریف می‌کنیم. جفت راس‌ها u و v را خوب می‌نامیم اگر داشته باشیم: $S(v) - \{v\} = S(u) - \{u\}$.
تعداد جفت راس‌های خوب را در $O(m \log(n))$ به دست آورید.

مسئله ۱۲. زیررشته‌ی داستان دار

پسوندهای رشته‌ای به طول n به ترتیب نامشخصی به عنوان ورودی داده می‌شود. در زمان $O(n \log^2(n))$ آنها را مرتب کنید عدد متناظر با هرکدام را در خروجی نمایش دهید.

مثال:

رشته‌ی ورودی: daabwa

پسوندها:
a
aabw
abwa
bwa
daabwa
wa

پس عدد خروجی (از راست به چپ) برابر است با: ۵ ۱ ۴ ۳ ۲ ۶

موفق باشید: