

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۹۷-۹۸

وقت امتحان: ۳ ساعت



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

۲۰ اسفند ۱۳۹۷

آزمون تئوری اول

توجه: پاسخ هر سوال را در برگه ای جداگانه بنویسید.

سوالات کوتاه‌پاسخ (۲۰ نمره)

- الف) درستی یا نادرستی عبارات را مشخص کنید. در یک یا دو خط جواب خود را توجیه کنید. (۵ نمره)
- در مرتب‌سازی مبنایی (Radix Sort) می‌توان از هر الگوریتم مرتب‌سازی درستی برای مرتب‌کردن هر رقم استفاده کرد.
 - در درخت اجرای merge-sort در هر سطح از درخت تقریباً مقدار کار برابری انجام می‌شود.
 - اگر یک آرایه مرتب شده را به یک الگوریتم مرتب‌سازی درجا (in-place) بدهیم، هیچ تغییری بر روی آرایه اعمال نمی‌شود.
- ب) می‌خواهیم کتاب‌های یک کتابخانه را بر اساس شناسه آن‌ها مرتب کنیم. می‌دانیم که هر کتاب حداکثر در فاصله ۵ از مکان اصلی خود می‌باشد. کدام الگوریتم زیر برای مرتب‌سازی مناسب‌تر است؟ در یک یا دو خط جواب خود را توجیه کنید. (۵ نمره)
- Bubble Sort
 - Merge Sort
 - Insertion Sort
 - Counting Sort
- ج) در دو مورد زیر جواب نهایی را بنویسید. (۵ نمره)
- یک داده ساختار با دو عملیات حذف و درج را در نظر بگیرید. برای پیاده‌کردن این داده ساختار از آرایه استفاده می‌کنیم. هنگامی که آرایه پر شود یک آرایه با اندازه ۱۰ درصد بیشتر می‌سازیم و اعضای آرایه ی اول را به آرایه ی جدید منتقل می‌کنیم. هزینه سرشکن هر عمل را بنویسید.
 - یک پشته داریم که سه عمل push، pop و backup را پشتیبانی می‌کند. ساینز آن هیچگاه بیشتر از K نمی‌شود. بعد از هر K عمل push یا pop یک backup از کل اعضای پشته گرفته می‌شود و در یک مکان در حافظه ذخیره می‌شود. هزینه سرشکن هر عمل را بنویسید.
- د) برای هر یک از توابع زیر، بهترین مرتبه زمانی را انتخاب کنید. (۵ نمره)

```
def f1(n):  
    x = 0  
    for i in range(n):  
        for j in range(i):  
            x += 1  
  
    return x
```

```
def f(n):  
    if n == 0:  
        return 0  
    sum = 0  
    for i in range(n):  
        sum += 1  
    return f(n/2) + f(n/2)
```

مسئله ۱. تحلیل زمانی (۱۵ نمره)

مرتبه زمانی توابع زیر را تحلیل کنید.

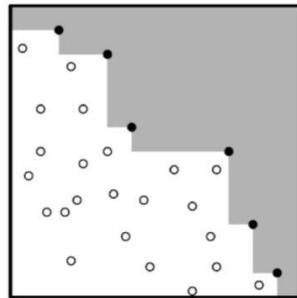
$$T(n) = T(\sqrt{n}) + n \bullet$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2} + 18\right) + n \quad : n > 100 \bullet$$

$$T(n) = 1 \quad : n \leq 100$$

مسئله ۲. نقطه‌ها (۲۰ نمره)

در صفحه‌ی مختصات دوبعدی می‌گوییم نقطه‌ی (x_1, y_1) بر نقطه‌ی (x_2, y_2) سایه می‌اندازد اگر $x_2 \leq x_1$ و $y_2 \leq y_1$. یک نقطه را روشن می‌نامیم اگر هیچ نقطه‌ی دیگری بر آن سایه نیندازد. برای مثال در شکل زیر نقاط توپر، نقاط روشن هستند.



- الگوریتمی درست ارائه دهید تا تمام نقاط روشن را پیدا کند. (۵ نمره)
- الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $O(n \lg n)$ تمام نقاط روشن یک مجموعه را پیدا کند. (۱۵ نمره)
در صورت حل این قسمت، نمره‌ی قسمت اول نیز به شما تعلق می‌گیرد.

مسئله ۳. دکتر شریفی و تعداد امتحانات (۲۰ نمره)

دکتر شریفی بعد از مشاهده‌ی تقویم پیشنهادی کیانوش برای درس ساختمان داده‌ها و امتحانات و کوییزهای متعددی که وی در آن تقویم گنجانده بود تصمیم گرفت که تقویم درس را به صورت مخفیانه عوض کند. البته برای این که کیانوش متوجه این تغییر نشود دکتر باید او را سرگرم کاری می‌کرد! بنابراین او یک رشته‌ی n حرفی از پرانتزهای باز و بسته به کیانوش داد و به او گفت که طول طولانی‌ترین زیررشته‌ای از آن را پیدا کند که یک پرانتزگذاری معتبر است. کیانوش که به این درخواست عجیب دکتر شریفی مشکوک شده بود، می‌خواست در سریع‌ترین زمان ممکن این طول را پیدا کند و مجدداً به اوضاع درس مسلط شود!

الگوریتمی از $O(n)$ پیدا کنید که این کار را انجام دهد.

دقت کنید که «زیررشته» یعنی یک تکه‌ی متوالی از رشته اصلی و جواب این سوال برای رشته‌ی $((((()))'$ برابر با ۴، برای رشته‌ی $((((()))'$ برابر با ۶ و برای رشته‌ی $((((()))'$ برابر با ۲ است.

مسئله ۴. مریخ (۲۵ نمره)

به تازگی شعبه‌ی پردیس دانشگاه در مریخ با ظرفیت یک میلیارد دانشجو افتتاح شده است. این پردیس قوانین عجیبی دارد. دانشجویان در هر موقعی از سال می‌توانند به پردیس جذب شوند و هر موقع از سال که پردیس خواست، یک دانشجو فارغ التحصیل می‌شود. تنها قانون پردیس آن است که دانشجویی می‌تواند فارغ التحصیل شود که همه‌ی دانشجویانی که زودتر از او جذب پردیس شده‌بودند، قبلاً فارغ‌التحصیل شده‌باشند.

هر دانشجو در هنگام جذب در این پردیس، یک سطح سواد دارد که به صورت یک عدد صحیح (احتمالاً منفی!) نمایش داده می‌شود. همه‌ی دانشجویان هر روز در یک کلاس شرکت می‌کنند و در پایان روز، عددی صحیح (بازهم احتمالاً منفی!) به سطح سواد همه‌ی دانشجویان پردیس اضافه می‌شود. سطح سواد هر دانشجو در هنگام فارغ التحصیلی در مدرکش ثبت می‌شود.

معاونت آموزشی پردیس در حال طراحی یک سیستم «سوادداری» است. این سیستم از سه تابع پشتیبانی می‌کند:

$\text{Register}(x)$

این تابع در هنگام جذب دانشجویی با سطح سواد x به پردیس فراخوانی می‌شود. اگر برای جذب این دانشجو ظرفیت کافی وجود داشته باشد، این تابع مقدار «درست» برمی‌گرداند و دانشجو را اضافه می‌کند. وگرنه، مقدار «نادرست» برمی‌گرداند و دانشجو جذب نمی‌شود.

$\text{Add}(x)$

با فراخوانی این تابع، x واحد به سواد همه‌ی دانشجویانی که در پردیس مشغول به تحصیل هستند اضافه می‌شود. اگر هیچ دانشجویی در پردیس نباشد، این تابع کاری نمی‌کند.

$\text{Graduate}()$

با فراخوانی این تابع، یک دانشجو فارغ التحصیل می‌شود. سطح سواد این دانشجو باید توسط این تابع برگردانده شود. اگر هیچ دانشجویی در حال تحصیل در پردیس نباشد، این تابع باید مقدار تهی برگرداند.

داده‌ساختار و الگوریتمی برای پیاده‌سازی سه تابع بالا بنویسید. ابتدا راه حل خود را توضیح دهید و سپس آن را به صورت سودوکد پیاده‌سازی کنید. همچنین زمان اجرای هر عمل را محاسبه کنید.

اگر راه حل شما درست و کامل باشد اما به لحاظ زمانی بهینه نباشد، ۱۰ نمره از این مساله می‌گیرید. در صورت ارائه‌ی راه حل درست، کامل و بهینه، کل ۲۵ نمره را خواهید گرفت.