

# ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۹۸-۹۷

وقت امتحان: ۳ ساعت



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

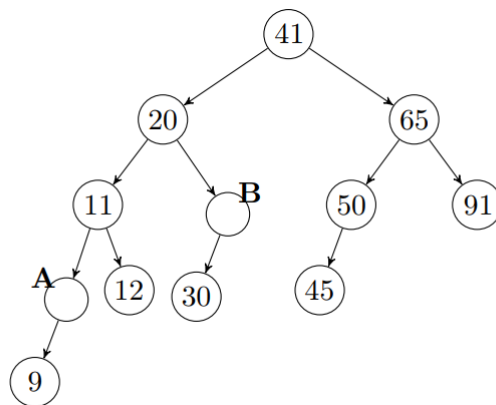
۱۹ اردیبهشت ۱۳۹۸

آزمون میان‌ترم دوم

- فراموش نکنید همانا او می‌بیند
- شما اینجا هستی تا یاد بگیرید پس با آرامش به حل سوالات بپردازید
- دقت کنید نام و شماره دانشجویی خود را بر روی هر برگه از پاسخنامه بنویسید و پاسخ هر سوال را در برگه‌ای جداگانه از پاسخنامه نوشته و تحویل دهید.

## سوالات کوتاه پاسخ (۳۰ نمره)

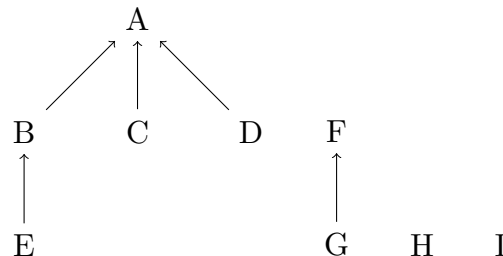
- الف) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. جواب خود را توجیه کنید. (جواب بدون دلیل نمره‌ای ندارد).
- الگوریتم مرتب‌سازی مقایسه‌ای وجود دارد که ۵ عدد را با حداکثر ۶ مقایسه در بدترین حالت مرتب می‌کند.
- ب) یک جایگشت از اعداد  $1, \dots, n$  ارائه دهید که با درج آن‌ها در یک درخت دودویی جست‌وجو، درختی با ارتفاع  $\Omega(n)$  داشته باشیم.
- ج)  $k$  لیست مرتب داریم که طول هر کدام از آن‌ها  $\frac{n}{k}$  است. ثابت کنید هر الگوریتم مقایسه‌ای برای ادغام این  $k$  لیست در بدترین حالت از  $\Omega(n \lg k)$  است. (راهنمایی:  $(\frac{n}{e})^n < n!$ )
- د) درخت دودویی جست‌وجو زیر را در نظر بگیرید. این درخت شامل مقادیر صحیح و غیر تکراری می‌باشد. به سوالات زیر پاسخ دهید.



- A و B چه مقدار (مقادیری) می‌توانند بگیرند؟
- ارتفاع درخت را مشخص کنید.
- کمینه تعداد راس‌هایی که باید اضافه شوند تا این درخت را کامل کنند چه مقدار می‌باشد؟
- چه تعداد راس می‌تواند به این درخت اضافه شود بدون اینکه ارتفاع آن زیاد شود؟

ه) مجموعه های مجزای A, B, C, D, E, F, G, H, I را داریم. دو تابع Find و Union را نیز داریم. در این سوال از Union-By-Rank و Path Compression استفاده می شود. در تابع Union در هنگام تساوی بر اساس ترتیب الفبایی ریشه انتخاب می شود.

- ترتیبی از دستورات Find و Union ارائه دهید که نتیجه آن جنگل زیر شود.



- حال در ادامه جنگل بخش قبل، جنگل نهایی حاصل از عملیات های زیر را بکشید.

1.Find(B), 2.Union(G,H), 3.Union(A,G), 4.Union(E,I)

و) فرض کنید یک جدول درهم سازی با ظرفیت ۱۰ داریم و می خواهیم مقادیر زیر را در جدول درهم سازی وارد کنیم.

۱۲, ۱۱, ۱۷, ۲۲, ۱۴, ۲۵, ۱۵

در هر بخش جدول درهم سازی نهایی را رسم کنید و تعداد برخوردها را بنویسید و راه حل را به طور خلاصه توضیح دهید.

تابع درهم سازی اولیه را با ارزش ترین رقم  $h(۴۲) = ۴$  و تابع درهم سازی ثانویه را در صورت لزوم کم ارزش ترین رقم  $g(۴۲) = ۲$  در نظر بگیرید.

- مقادیر را در جدولی که از کاوش خطی استفاده می کند وارد کنید.
- مقادیر را در جدولی که از کاوش مربعی با پارامترهای  $c_1 = ۰$  و  $c_2 = ۱$  استفاده می کند وارد کنید.
- مقادیر را در جدولی که از درهم سازی دوتایی استفاده می کند وارد کنید.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

## مسئله ۱. تو هیچ‌گاه تنها گام برنخواهی داشت (۱۵ نمره)

اکبر، ایی، ممد و متین به دکتر شریفی با شعار "تو هیچ‌گاه تنها گام برنخواهی داشت" قول داده‌اند تا با اتحاد و همدلی تاریخ سازی کنند و انتقام میانترم اول را با برگزاری یک امتحان آبرومندانه بگیرند. آن‌ها در سوال اول مسئله زیر را مطرح می‌کنند:

فرض کنید  $A$  آرایه‌ای از اعداد طبیعی است که هر کدام از آن‌ها در بازه  $[0, k]$  هستند و تعداد اعضای  $A$  برابر با  $n$  است. همچنین می‌دانیم که  $n < k$  است. می‌خواهیم عددی طبیعی مانند  $x$  متعلق به بازه  $[0, k]$  را بیابیم که داخل آرایه  $A$  نباشد اما برای این کار می‌توانیم فقط از  $O(1)$  حافظه اضافی استفاده کنیم. همچنین قابلیت اضافه کردن هیچ اطلاعات اضافی به آرایه  $A$  را نداریم و صرفاً مجاز هستیم که اعضای آن را با یکدیگر جابه‌جا کنیم. با استفاده از روش بخش‌بندی (*partition*) در مرتب‌سازی سریع الگوریتمی با پیچیدگی زمانی متوسط  $O(n)$  برای حل این سوال ارائه دهید. پیچیدگی زمانی و حافظه‌ای این الگوریتم را به صورت دقیق تحلیل کنید.

## مسئله ۲. دیدن سوال صددرصد دلخواه در صبح زیبای ماه رمضان<sup>۱</sup> (۲۰ نمره)

در یک صبح زیبای ماه رمضان، متین در جلسه میانترم سوال صددرصد دلخواهش را می‌بیند. راستش را بخواهید آن قدرها هم سوال قشنگی نیست. سوال سختی هم نیست. سوال نکته‌داری هم نیست. سوال تازه و جدیدی هم نیست. اما هنوز از پنجاه قدمی می‌توانم بفهمم که سوال صددرصد دلخواه من است.

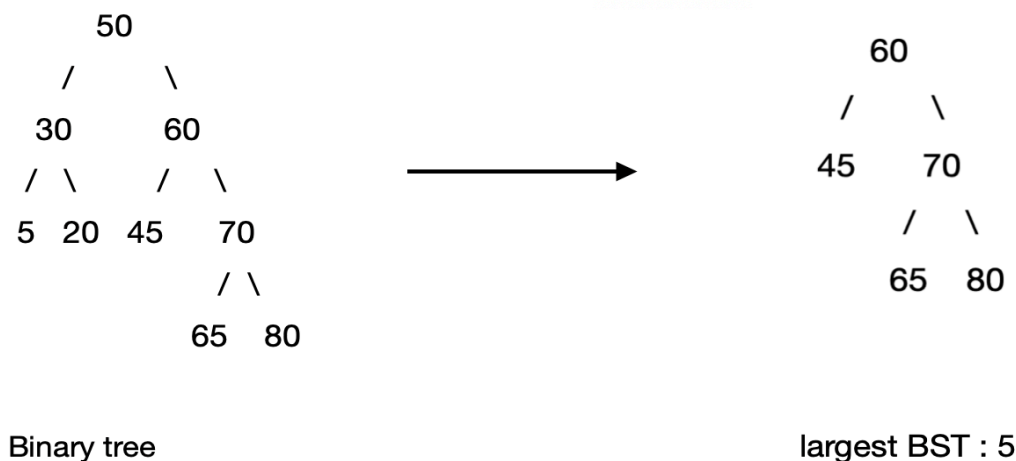
تابع  $f(a, b)$  را طوری تعریف می‌کنیم که به ازای هر دو رشته ورودی  $a$  و  $b$ ، طول بزرگترین پیشوند مشترک بین این دو رشته را به عنوان خروجی بازگرداند. رشته‌های  $s_1, s_2, \dots, s_n$  از طول حداکثر  $10^5$  داده شده است. الگوریتمی از پیچیدگی زمانی  $O(n)$  ارائه دهید که به ازای هر  $i$  و  $j$  که  $i \neq j$  است، مجموع تمام  $f(s_i, s_j)$  ها را محاسبه کند. (دقت کنید که  $f(s_i, s_j) = f(s_j, s_i)$ ، در نتیجه فقط یک بار باید در مجموع نهایی محاسبه شود).

## مسئله ۳. وصیت‌نامه‌ی گالوا (۱۵ نمره)

اواریسست گالوا (*Evariste Galois*) ریاضیدان نابغه‌ی اهل کشور فرانسه بود که علارغم عمر کوتاه خود باعث ایجاد نقطه‌ی عطفی در علم جبر شد و تغییرات شگرفی را در آن پدید آورد.

در شب بیست و نهم ماه مه گالوا در حالی که تنها بیست و یک سال داشت وصیت‌نامه‌ای را نزد دوست خود فرستاد که در آن کشفیات خود به علاوه‌ی سوالی که ذهنش را مشغول کرده بود نوشته بود. در این نامه گالوا به دوئلی اشاره کرد که به دلیل یک رقابت عشقی، قصد داشت فردای آن شب در آن شرکت کند. و اما سوالی که گالوا در وصیت نامه‌ی خود درست در شب مرگش به آن اشاره کرده بود:

یک درخت دودویی به سائز  $n$  به شما داده شده است. الگوریتمی از  $O(n)$  پیدا کنید که سائز بزرگترین زیردرختی که درخت جست‌وجوی دودویی نیز می‌باشد را پیدا کند. با کشته شدن گالوا امید ما تنها به شما است تا جواب این سوال را پیدا کنید.



<sup>۱</sup> برگرفته از هاروکی موراکامی

#### مسئله‌ی ۴. مَمَدَهایِ که بودن (۲۰ نمره)

بنا و دوستانش قصد دارند که اکبر را به مناسبت تولدش سوپرایز کنند. به همین دلیل بنا خانه‌ی درویشی خود را برای برگزاری این مراسم آماده می‌کند و از دوست مشترک خود و اکبر یعنی اِکی می‌خواهد که با هرچه شور بیشتر در مراسم حاضر شود. این شور بیش از حد سبب می‌شود که در روز مراسم همه‌چیز طبق برنامه قبلی پیش نرود و شرایط و اوضاع از دستان بنا خارج شود.

حال بنا که آبرو و حیثیت خود را در خطر می‌بیند سعی می‌کند که شرایط را آرام کند. به همین خاطر به سراغ کسی که بیش از همه شور گرفته‌اش یعنی اِبی می‌رود تا بلکه به واسطه او بقیه نیز آرام شوند. بنا نقطه ضعف اِبی را می‌داند و آن، علاقه بیش از حد او به مباحث مربوط به داده‌ساختارها و الگوریتم‌ها است. بنا با مطرح کردن سوال زیر سعی می‌کند تا اِبی را به چالش بکشد:

”رشته‌ای به طول  $n$  از صفر و یک داده شده است. الگوریتمی از پیچیدگی زمانی  $O(n \log(n))$  ارائه دهید تا طول بزرگترین زیررشته با حداقل دو بار تکرار را پیدا کند.”  
به اِبی کمک کنید تا پاسخ سوال را بدهد و مراسم را به شیوه خود جلو ببرد.