



## تحلیل سرشکن

### مسئله‌ی ۱. چندپشتک

داده ساختار چندپشتک، داده ساختاری است متشکل از دنباله ای نامتناهی از پشته ها مانند  $S_0, S_1, \dots$  به طوری که ظرفیت پشته  $S_i$ ،  $2^i$  می باشد. اگر کاربر بخواهد عنصری در پشته پر  $S_i$  درج کند، باید ابتدا تمامی عناصر  $S_i$  را حذف کند و در  $S_{i+1}$  درج کند تا  $S_i$  خالی شود، سپس عنصر مورد نظر را در  $S_i$  درج کند. (اگر  $S_{i+1}$  پر باشد، ابتدا به صورت بازگشتی، عناصر آن را در  $S_{i+2}$  درج می کنیم). فرض کنید که عملیات درج ( $push$ ) و حذف ( $pop$ ) در هر پشته از مرتبه  $O(1)$  باشد.

### الف

در بدترین حالت، چقدر طول می کشد که یک عنصر جدید، در یک چندپشتکی که  $n$  عنصر دارد، درج شود؟

### ب

ثابت کنید که هزینه سرشکن عملیات درج در یک چند پشتک از مرتبه  $O(\log(n))$  است. (در صورتی که  $n$  بیشینه تعداد عناصر موجود در چند پشتک باشد)

### مسئله‌ی ۲. شمارنده دودویی

یک شمارنده  $n$  بیتی دودویی در نظر بگیرید. که هزینه تعویض بیت  $i$  ام آن  $i$  است. مثلا اگر شمارنده ۱۰۰۱۱۱ باشد هزینه افزایش آن به ۱۰۱۰۰۰ (عدد بعدی) برابر است با

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

## الف

ثابت کنید که هزینه سرشکن افزایش یک واحد این شمارنده،  $O(1)$  است

## ب

فرض کنید هزینه تعویض بیت  $i$  ام به جای  $i$ ،  $2^i$  باشد، و شمارنده را از صفر تا عدد  $k$  افزایش دهیم. ثابت کنید هزینه سرشکن هر افزایش،  $O(\log(k))$  خواهد بود.

## مسئله ۳. آرایه نمایی

قصد داریم داده ساختار پشته را پیاده سازی کنیم. این داده ساختار باید قابلیت های درج و حذف داشته باشد. همانطور که می دانید، یک راه برای پیاده سازی پشته این است که آرایه ای از اعداد در نظر بگیریم و تا زمانی که آرایه پر نشده، اعداد را در این آرایه درج کنیم و هنگامی که پر شد، آرایه ای دیگر با ۲ برابر اندازه در نظر گرفته و اعداد را به آن منتقل کنیم. یک مشکلی که این روش دارد، این است که اگر تعداد زیادی عنصر درج شده، و سپس همه حذف شوند، آرایه بزرگ می ماند. برای رفع این مشکل قصد داریم هنگامی که تعداد عناصر موجود در آرایه از نصف بیشینه ظرفیت آن کمتر شد، آرایه ای با نصف اندازه در نظر گرفته، و تمامی اعضا را به آن انتقال دهیم.

## الف

دنباله ای از درج و حذف ها پیشنهاد دهید که برای آن، هزینه سرشکن درج و یا هزینه سرشکن حذف،  $O(1)$  نباشد.

## ب

ثابت کنید که اگر به جای این که هنگامی که آرایه تا نصف پر شد، آرایه ای با نصف اندازه در نظر بگیریم، هنگامی که آرایه تا یک چهارم پر شد، آرایه با نصف اندازه در نظر بگیریم، هزینه عمل درج و عمل حذف،  $O(1)$  است.

## پشته و صف

### مسئله ۴. صف و پشته

اعداد طبیعی  $n$  و  $z$ ، به همراه یک دنباله  $n$  تایی  $a$  از اعداد حقیقی داده شده است. می خواهیم بدانیم که آیا دو اندیس  $i$  و  $j$  یافت می شوند که

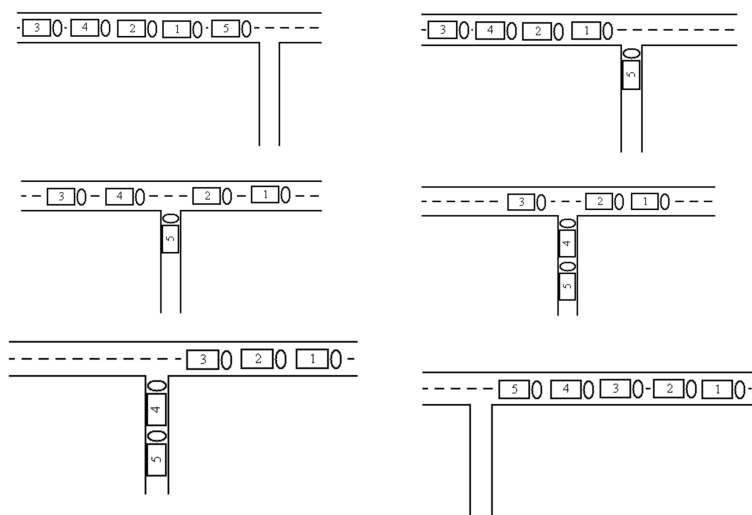
$$|i - j| < z, a[i] - a[j] > 10^9$$

الگوریتمی از  $O(n)$  برای حل مساله بدهید.

### مسئله ۵. قطار

برای تولید جایگشت های اعداد ۱ تا  $n$ ، از ماشین artemis که به شکل زیر کار می کند استفاده می کنیم.

ماشین یک ریل ورودی، یک ریل خروجی و یک برای ذخیره اعداد میانی دارد. هر عدد، از سمت چپ وارد ماشین شده و می تواند مستقیم از سمت راست خارج شود و یا وارد ریل میانی شود. ریل میانی مانند یک پشته عمل می کند بنابراین تنها عنصر بالایی آن می تواند خارج شود. ماشین، دنباله ی اعداد ۱ تا  $n$  را ورودی گرفته و جایگشتی از آن را خروجی می دهد. برای مثال اگر ورودی جایگشت ۵، ۱، ۲، ۴، ۳ باشد، می توان برای تولید جایگشت ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ به شکل زیر عمل کرد



در هر دو بخش سوال، فرض کنید که ورودی، جایگشت  $1, 2, \dots, n$  می باشد

## الف

تعداد جایگشت های قابل تولید با ماشین فوق را به دست آورید.

ب

الگوریتمی از مرتبه زمانی خطی ارایه دهید که یک جایگشت از اعداد ۱ تا  $n$  را ورودی بگیرد و مشخص کند که آیا این جایگشت، توسط ماشین فوق، قابل تولید هست یا نه؟

## مسئله ۶. پارانترز و براکت

رشته ای متشکل از تعدادی کاراکتر پارانترز '(', ')', و تعدادی براکت '[', ']' در اختیار داریم. الگوریتمی از  $O(n)$  ارایه دهید که تشخیص دهد که آیا پارانترز و براکت گذاری در این رشته صحیح است یا نه. به عنوان مثال، رشته زیر صحیح نیست

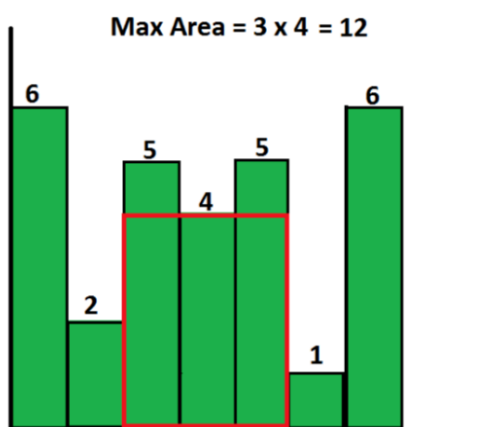
([])

ولی رشته زیر صحیح است

(([])(([]))())

## مسئله ۷. بیشینه مساحت

دنبال ای از اعداد  $a_1, \dots, a_n$  به شما داده شده است. همانند شکل زیر، مستطیل هایی با عرض یکسان و ارتفاع  $a_i$ ، را در کنار هم قرار داده ایم. الگوریتمی از مرتبه زمانی خطی ارایه دهید که بزرگترین زیرمستطیل را از نظر مساحت بیابد



## لیست پیوندی

### مسئله ۸. آینه پیوندی

فرض کنید که یک رشته به طول  $n$  را در یک لیست پیوندی یک طرفه ذخیره شده و می خواهیم بدون تغییری در لیست، بررسی کنیم که آیا این رشته، آینه ای است یا نه

#### الف

با استفاده از حافظه اضافی  $O(1)$ ، الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O(n^2)$  برای این کار ارائه دهید

#### ب

با استفاده از حافظه اضافی  $O(\log(n))$ ، الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O(n \log(n))$  برای این کار ارائه دهید

### مسئله ۹. دور کم حافظه

الگوریتمی ارائه دهید که بدون تغییر ساختار یک لیست پیوندی و با استفاده از حافظه  $O(1)$ ، در زمان خطی تشخیص دهد که این لیست دور دارد یا خیر؟

## پیمایش درخت

### مسئله ۱۰. مسیر سنگین

در یک درخت دودویی (لزوما درخت جست و جو نیست) منظور از وزن یک مسیر، مجموع اعداد روی راس های آن مسیر است. الگوریتمی با زمان خطی ارائه دهید، که سنگین ترین مسیر را بیابد

### مسئله ۱۱. درخت کم حافظه

الگوریتمی غیر بازگشتی ارائه دهید که با  $O(1)$  حافظه اضافی، یک درخت دودویی را پیمایش پس ترتیب کند و همه اعضای آن را چاپ کند.

## سوال های ترکیبی

### مسئله ۱۲. غیرممکن

داده ساختاری طراحی کنید که بتواند اعمال  $\text{push}$ ،  $\text{pop}$ ، و  $\text{find min}$  را در  $O(1)$  انجام دهد. آیا می توان داده ساختار را به گونه ای تغییر داد که عمل  $\text{delete min}$  را نیز در  $O(1)$  انجام دهد؟

### مسئله ۱۳. صف سریع با پشته

با استفاده از ۲ پشته، داده ساختار صف را طوری پیاده سازی کنید که هزینه سرشکن اعمال درج و حذف،  $O(1)$  باشد.

موفق باشید (:)