



هرم و مرتب‌سازی هرمی

مسئله‌ی ۱. تعداد هرم‌های بیشینه

یک رابطه بازگشتی برای تعداد هرم‌های کمینه با $2^n - 1$ عنصر متمایز بیابید.

مسئله‌ی ۲. عنوان سوال

یک هرم بیشینه با اعداد ۱ تا ۱۰۲۴ در نظر بگیرید. چه تعداد از اعداد بزرگتر از ۱۰۰۰ می‌توانند در برگ‌های هرم قرار گیرند؟

مسئله‌ی ۳. ادغام لیست‌های مرتب شده

تعداد d دنباله از عناصر ورودی داریم، به گونه‌ای که هر دنباله از پیش مرتب شده و تعداد کل عناصر n است. الگوریتمی از $O(n \lg(d))$ ارائه دهید که یک آرایه مرتب شده از همه عناصر در خروجی قرار دهد.

مسئله‌ی ۴. آرایه نیمه مرتب

یک آرایه در نظر بگیرید که هر عنصر آن با موقعیت خود در آرایه سورت شده حداکثر به اندازه k فاصله دارد. الگوریتمی از $O(k + (n - k) \log k)$ طرح کنید که این آرایه را مرتب کند.

مسئله‌ی ۵. یافتن میانه

یک داده ساختار طراحی کنید که هر یک از عملیات‌های زیر را در پیچیدگی زمانی $O(\log n)$ انجام دهد.

• درج یک عنصر در داده ساختار

• دادن عنصر میانه

- حذف یک عنصر

مسئله ۶. چندمین کوچکترین

الگوریتمی ارائه دهید که امین k عنصر کوچک یک آرایه را در پیچیدگی زمانی مطلوب مشخص کند.

- $O(n \log n)$
- $O(n + k \log n)$
- $O(n + k^2)$

درخت تصمیم

مسئله ۷. چاه‌های آلوده

در شهری n چاه متمایز وجود دارد و مطمئن هستیم k تای آنها آلوده به ویروس است، اما نمیدانیم کدامیک آلوده و کدام تمیز است. میخواهیم با حداقل تعداد آزمایش چاه‌های آلوده را تشخیص دهیم. در هر آزمایش آب‌های مجموعه را با هم قاطی و آزمایش میکنیم که آیا این آب حاوی ویروس است یا خیر.

- الف. بر اساس درخت تصمیمی که میسازید کران پایین تعداد آزمایش‌ها را به دست آورید.
- ب. یک الگوریتم با $O(k \lg n)$ برای حل مسائل ارائه دهید.

مرتب‌سازی سریع و مرتب‌سازی سریع تصادفی

مسئله ۸. مرتب‌سازی سریع، لیست پیوندی و دیگران

در الگوریتم مرتب‌سازی سریع، به جای آرایه‌ای از اعداد، به شما یک لیست پیوندی داده شده است بدین صورت که هر عدد تنها به عدد بعدی خود اشاره می‌کند. الگوریتم مرتب‌سازی سریع را برای این لیست پیوندی بازنویسی کنید.

مسئله ۹. چقدر سریع؟!

• الف در یک الگوریتم مرتب‌سازی سریع تصادفی، احتمال آنکه این الگوریتم n عنصر را در زمان $\Omega(n^2)$ مرتب کند چقدر است؟

• ب در یک الگوریتم مرتب‌سازی سریع، اگر در این الگوریتم، محور همواره عنصر میانه باشد، در آن صورت پیچیدگی الگوریتم چگونه خواهد بود؟

مسئله‌ی ۱۰. محور کجاست؟ مسئله این است!

در گونه جدیدی از مرتب‌سازی سریع، برای انتخاب محور از میان n عنصر، $1 + \sqrt{n}$ عنصر اول آرایه را انتخاب می‌کنیم و با یک الگوریتم ساده مانند مرتب‌سازی درجی، آن‌ها را مرتب می‌کنیم. محور، عنصر میانه این تعداد عنصر مرتب‌شده است. بقیه الگوریتم مانند قبل عمل می‌کند. بدترین زمان اجرای این الگوریتم را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۱۱. Typical

اگر در الگوریتم مرتب‌سازی سریع تصادفی، تمام اعداد آرایه مورد نظر با یکدیگر برابر باشند، زمان اجرای الگوریتم را تحلیل کنید. در الگوریتم مرتب‌سازی سریع چگونه است؟ (آیا نحوه پیاده‌سازی الگوریتم، تاثیری در محاسبه پیچیدگی دارد؟)

مسئله‌ی ۱۲. The Curious Case of Quick Sort

در یک الگوریتم مرتب‌سازی سریع، این الگوریتم در هر مرحله، آرایه ورودی را با نسبت‌های α و $1 - \alpha$ تقسیم می‌کند که $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. حال نشان دهید که کمترین عمق یک برگ در درخت بازگشتی الگوریتم برابر $-\frac{\lg n}{\lg \alpha}$ و بیشترین عمق برابر $-\frac{\lg n}{\lg(1-\alpha)}$ می‌باشد.

(موفق باشید:)