



تحلیل پیچیدگی

مسئله‌ی ۱. اثبات

عبارت‌های زیر را اثبات کنید

الف) $2^{2^{2^{\dots}}} \in \Theta(1)$

ب) $4^n \notin O(2^n)$

ج) $\lg(5^x) \in \theta(x)$

د) $\log_c(n) \in \Theta(\log_2(n))$

ه) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \in \Theta(\lg n)$

و) $\lg(n!) \in \Theta(n \lg n)$

ز) $n^k \in O(c^n)$

مسئله‌ی ۲. مرتب‌سازی توابع یا توابع مرتب‌سازی. مسئله این است.

توابع زیر را به شکلی مرتب کنید که $g_i \in \Omega(g_{i+1})$

c	$n!$	$4^{\lg n}$	e^n	$n 2^n$
$\binom{n}{1,0}$	$(\lg n)^{\lg n}$	2^{2^n}	$(\sqrt{2})^{\lg n}$	n^3

مسئله‌ی ۳. ص/غ

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (برای موارد درست اثبات و برای موارد نادرست مثال نقض بیاورید.)

الف) $f(n) \notin O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n))$

$$f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in \Omega(f(n)) \quad (\text{ب})$$

$$f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \forall f(n) \in O(\forall g(n)) \quad (\text{ج})$$

$$f(n) + o(f(n)) \in \Theta(f(n)) \quad (\text{د})$$

$$f(n) + g(n) \in \Theta(\min[f(n), g(n)]) \quad (\text{ه})$$

$$f(n) \in O(g(n)), \exists n_0 : \forall n \geq n_0, \lg(g(n)) \geq 1, \lg(f(n)) \geq 1 \Rightarrow \lg(f(n)) \in O(\lg(g(n))) \quad (\text{و})$$

مسئله ۴. توابع بازگشتی

پیچیدگی توابع بازگشتی زیر را تحلیل کنید.

$$T(n) = T(n-1) + n \quad (\text{الف})$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{\lg n} \quad (\text{ب})$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{\lg n} \quad (\text{ج})$$

$$T(n) = \sqrt{n}T\left(\frac{n}{4}\right) + 1 \quad (\text{د})$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + 1 \quad (\text{ه})$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n} \quad (\text{و})$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^k T(\alpha_i n) + O(n); \quad k > 1, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \quad (\text{ز})$$

مرتب‌سازی

مسئله ۵. دنباله مرتب

d دنباله از عناصر ورودی داریم. هر یک از دنباله ها از پیش مرتب شده هستند و تعداد کل عناصر برابر n می باشد. الگوریتمی طراحی کنید که در $O(n \log(d))$ این d دنباله را در قالب یک دنباله مرتب کند.

مسئله ۶. توجه به مقایسه ها

دنباله ای از اعداد صحیح داریم به گونه ای که تعداد نابه جایی های آن از $O(n)$ می باشد. الگوریتم مرتب سازی مناسبی پیشنهاد کنید که تعداد مقایسه های آن در بدترین حالت برابر $O(n)$ باشد.

مسئله‌ی ۷. پرررو!

n نقطه در یک دایره ی واحد داده شده اند. میدانیم این نقاط به صورت یکنواخت توزیع شده اند (احتمال یافتن یک نقطه در هر ناحیه از دایره متناسب با مساحت آن ناحیه است). الگوریتمی از $\theta(n)$ پیشنهاد دهید تا نقاط را بر حسب فاصله ی آن ها از مرکز دایره مرتب کند.

مسئله‌ی ۸. یعنی میشه؟

آرایه ی A از اعداد داده شده است. اندازه ی این آرایه برابر n است و هر یک از اعداد این آرایه در بازه ی $[1, n^3]$ قرار دارند. آیا میتوان این آرایه را در $O(n)$ مرتب کرد؟

مسئله‌ی ۹. توان دو مطلوب

آرایه ی A از اعداد مثبت داده شده است. الگوریتمی بهینه پیشنهاد کنید تا حداکثر تعداد جفت های (i, j) را بیابد که حاصل $arr[i] + arr[j]$ توانی از دو باشد. هر یک از اعداد حداکثر در یک جفت استفاده شوند.

مسئله‌ی ۱۰. BirdBox

سال ۲۰۵۰ است و موجودات عجیبی به جهان حمله کرده اند. تنها راه زنده ماندن از دست آنان پناه بردن به آرمان شهری که این موجودات قادر به ورود به آن نیستند است. برای رفتن به این آرمان شهر باید از رودخانه ی خروشان عبور کنیم ولی تنها یک قایق وجود دارد که حداکثر دو نفر ظرفیت دارد. در بین راه عوارضی ای وجود دارد که از هر شخص هم در راه رفت و هم در راه برگشت مقداری پول می گیرد. چون به جز تعداد محدودی، همه خودکشی کرده اند مسافران مجبورند که قایق را خودشان برانند. بنابراین پس از هر سفر یکی از افراد باید برگردد تا قایق را به ساحل اولیه برساند.

n برابر با تعداد نفراتی که باید جا به جا شوند و A آرایه ی قیمت هاست. هر عنصر نشان دهنده ی هزینه ای است که هر فرد در موقعی که به تنهایی سفر کند باید پردازد. اگر قایق دو سرنشین داشته باشد مقدار هزینه برابر بیشینه هزینه های انفرادی دو نفر است. مثال:

$$n = 4$$

$$A = [100, 500, 200, 300]$$

در این سوال حالت بهینه به این شکل است که نفر اول با نفر دوم برود و سپس نفر اول برگردد. نفر اول با نفر سوم برود و سپس نفر اول برگردد. در انتها، نفر اول با نفر چهارم برود. جمع هزینه ها در این حالت برابر با ۱۲۰۰ است.

الگوریتمی ارایه کنید که در $O(n \log n)$ کمترین مقدار هزینه لازم را مشخص کند.

تقسیم و حل

مسئله ۱۱. غالب ترین

در مجموعه‌ی اعداد $\{a_1, \dots, a_n\}$ عدد x را غالب می‌گوییم اگر بیش از نیمی از اعداد مجموعه با x برابر باشند. مجموعه‌ای از کارت‌ها داریم که پشت هر کارت یک عدد نوشته شده است. ما نمی‌توانیم اعداد پشت کارت‌ها را مشاهده کنیم، اما ماشینی وجود دارد که به ازای هر دو کارتی که به آن می‌دهیم به ما می‌گوید که این دو کارت برابر هستند یا خیر. می‌خواهیم بدانیم در بین اعداد پشت کارت‌ها عدد غالبی وجود دارد یا خیر و اگر وجود دارد مجموعه‌ی کارت‌هایی که این عدد پشت آن‌ها نوشته شده است را پیدا کنیم. فرض کنید تعداد کارت‌ها n باشد. الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(n \log n)$ برای انجام این کار ارائه دهید.

مسئله ۱۲. یه دیواره...

بعد از صرف هزینه‌های میلیاردی، مسئولان دیوار جدیدی در دانشگاه ساخته‌اند که ارتفاع آن در بخش‌های مختلف، متفاوت است! در واقع این دیوار از n ستون به هم چسبیده تشکیل شده است که عرض هریک از این ستون‌ها یک متر و ارتفاع آن‌ها متفاوت است. حال مسئولان میخواهند تمام دیوار را با کاغذ رنگی بپوشانند تا به بهانه‌ی زیباسازی دانشگاه دلیلی برای این همه خرج داشته باشند. در واقع میخواهند تعدادی کاغذ رنگی به عرض یک متر به صورت افقی یا عمودی روی دیوارها بچسبانند به صورتی که تمام دیوار پوشیده شود اما هیچ دو تایی از کاغذ رنگی‌ها هم پوشانی نداشته باشند. الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(n^2)$ ارائه دهید که کم‌ترین تعداد کاغذ رنگی لازم برای پوشاندن کل دیوار را پیدا کند؟ (توجه کنید که طول کاغذ رنگی‌ها مهم نیست).

موفق باشید (: