

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им.  
Н.Э. Баумана)

Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»

Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

**Домашнее задание**

**по дисциплине «Прикладная механика»**

**на тему «Метод КЭ в задаче растяжения-сжатия прямого стержня»**

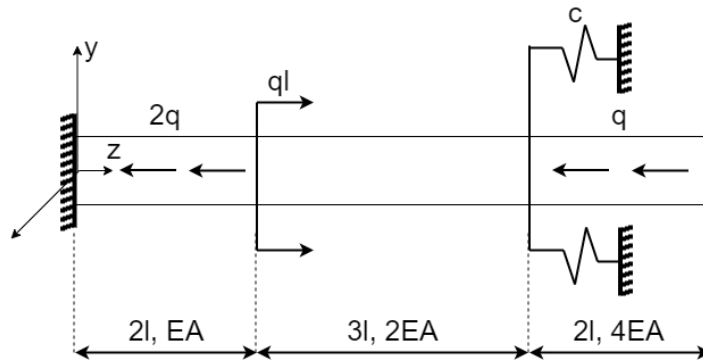
**Вариант 14**

Выполнил: студент группы РК6-31Б Петричук А.О.

Проверил: канд. техн. наук Шашурин Г.В.

Москва

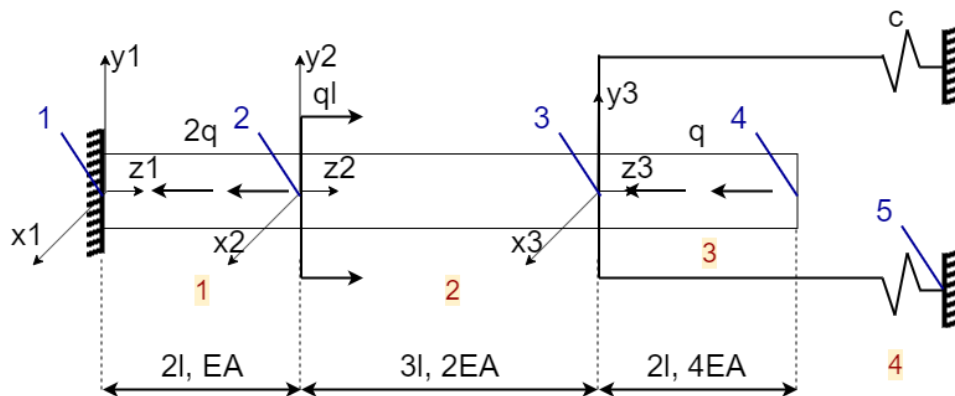
2019



**Задание 1.** Разбить стержень на конечные элементы. Ввести локальные и глобальную систему координат, записать матрицы жёсткости каждого конечного элемента.

**Решение:**

Введем глобальную систему координат, разобьём стержень на 4 конечных элемента, пронумеруем их по порядку слева направо. Введём локальные системы координат и обозначим 5 узлов по порядку слева направо:



Запишем матрицы жёсткости для каждого КЭ:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} \\ -\frac{EA}{2l} & \frac{EA}{2l} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{3l} & -\frac{2EA}{3l} \\ -\frac{2EA}{3l} & \frac{2EA}{3l} \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \frac{4EA}{2l} & -\frac{4EA}{2l} \\ -\frac{4EA}{2l} & \frac{4EA}{2l} \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix}$$

**Задание 2.** Сформировать СЛАУ для нахождения узловых перемещений в стержне. Найти узловые перемещения системы.

**Решение:**

СЛАУ для нахождения узловых перемещений в стержне:

$[K] \cdot \{u\} = \{f\}$ , где

$[K]$  – матрица жёсткости системы,

$\{u\}$  – вектор узловых перемещений,

$\{f\}$  – вектор сил (распределённые нагрузки заменяются двумя эквивалентными приложенными силами):

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2ql \\ -ql \\ -ql \\ -ql \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Таблица индексов:

Степень свободы \ Номер КЭ	1'	2'
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	3	5

Получение матрицы жёсткости с помощью ассемблирования:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{2l} & \frac{-EA}{2l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{2l} & \frac{7EA}{6l} & \frac{-2EA}{3l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2EA}{3l} & \frac{8EA}{3l} & \frac{-2EA}{l} & -C \\ 0 & 0 & \frac{-2EA}{l} & \frac{2EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -C & 0 & C \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2EA}{l} & -C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Учёт граничных условий точным способом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7EA}{6l} & \frac{-2EA}{3l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2EA}{3l} & \frac{8EA}{3l} & \frac{-2EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-EA}{l} & \frac{2EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2ql \\ -ql \\ -ql \\ -ql \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Упростим СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} \frac{7EA}{6l} & \frac{-2EA}{3l} & 0 \\ \frac{-2EA}{3l} & \frac{8EA}{3l} + C & \frac{-2EA}{l} \\ 0 & \frac{-2EA}{l} & \frac{2EA}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -ql \\ -ql \\ -ql \end{Bmatrix}$$

Решим СЛАУ с помощью Mathcad:

$$\begin{bmatrix} \frac{(7 \cdot E \cdot A)}{6 \cdot L} & \frac{-(2 \cdot E \cdot A)}{3 \cdot L} & 0 \\ \frac{-(2 \cdot E \cdot A)}{3 \cdot L} & \frac{(8 \cdot E \cdot A)}{3 \cdot L} + C & \frac{-(2 \cdot E \cdot A)}{L} \\ 0 & \frac{-(2 \cdot E \cdot A)}{L} & \frac{(2 \cdot E \cdot A)}{L} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -q \cdot L \\ -q \cdot L \\ -q \cdot L \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{8 \cdot L^2 \cdot q}{2 \cdot A \cdot E + 7 \cdot C \cdot L} - \frac{L \cdot q \cdot (6 \cdot C \cdot L^2 + 4 \cdot A \cdot E \cdot L)}{2 \cdot A^2 \cdot E^2 + 7 \cdot C \cdot L \cdot A \cdot E} \\ -\frac{18 \cdot L^2 \cdot q}{2 \cdot A \cdot E + 7 \cdot C \cdot L} \\ -\frac{11 \cdot L^2 \cdot q}{2 \cdot A \cdot E + 7 \cdot C \cdot L} - \frac{L^2 \cdot q \cdot (16 \cdot A \cdot E + 7 \cdot C \cdot L)}{2 \cdot A \cdot E \cdot (2 \cdot A \cdot E + 7 \cdot C \cdot L)} \end{bmatrix}$$

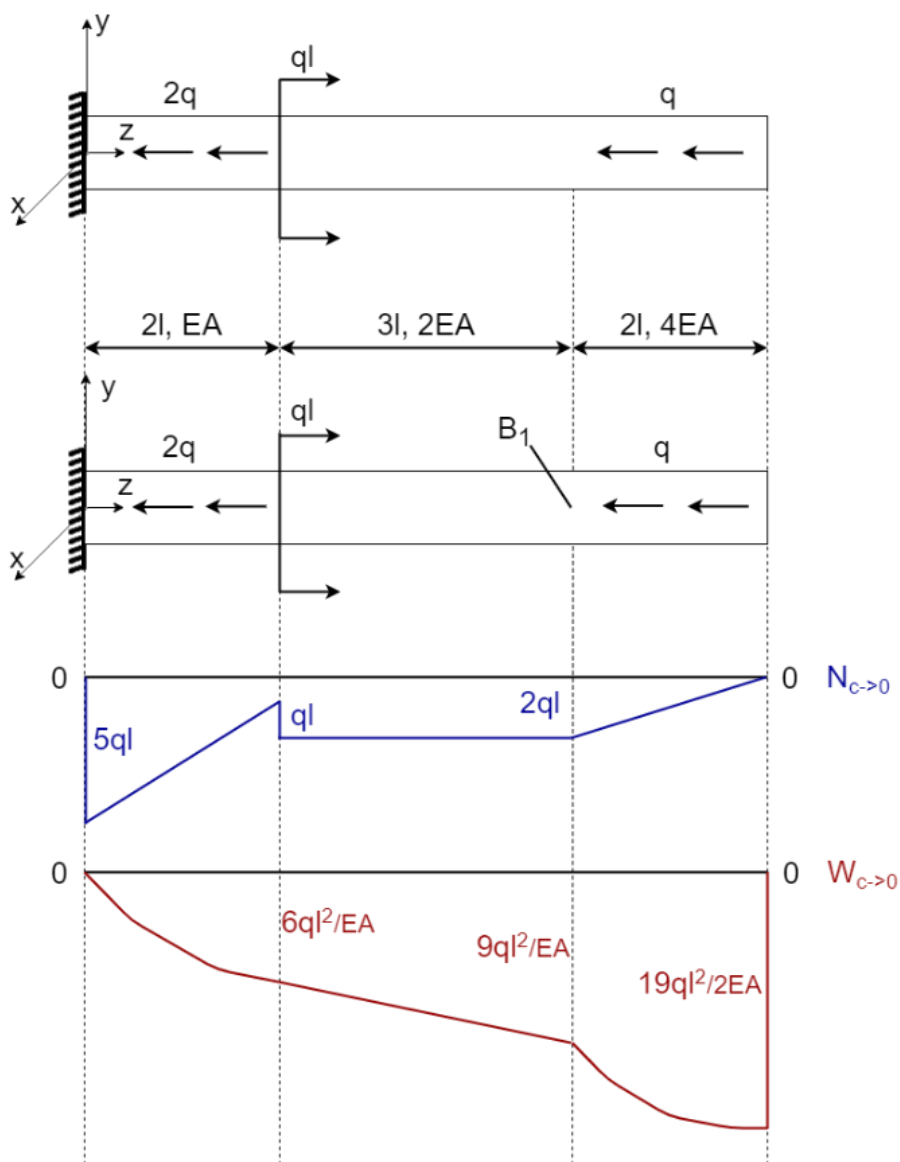
Таким образом:

$$W = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{ql^2(-12EA - 6Cl)}{EA(2EA + 7Cl)} \\ -\frac{18ql^2}{2EA + 7Cl} \\ \frac{ql^2(-38EA - 7Cl)}{2EA(2EA + 7Cl)} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Вычислим узловые перемещения стержня при  $C \rightarrow 0$ :

$$\lim_{c \rightarrow 0} W = \begin{pmatrix} 0 \\ \lim_{c \rightarrow 0} \left( \frac{ql^2(-12EA - 6Cl)}{EA(2EA + 7Cl)} \right) \\ \lim_{c \rightarrow 0} \left( -\frac{18ql^2}{2EA + 7Cl} \right) \\ \lim_{c \rightarrow 0} \left( \frac{ql^2(-38EA - 7Cl)}{2EA(2EA + 7Cl)} \right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6ql^2}{EA} \\ -\frac{9ql^2}{EA} \\ -\frac{19ql^2}{2EA} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Сравним с результатами из Д31:

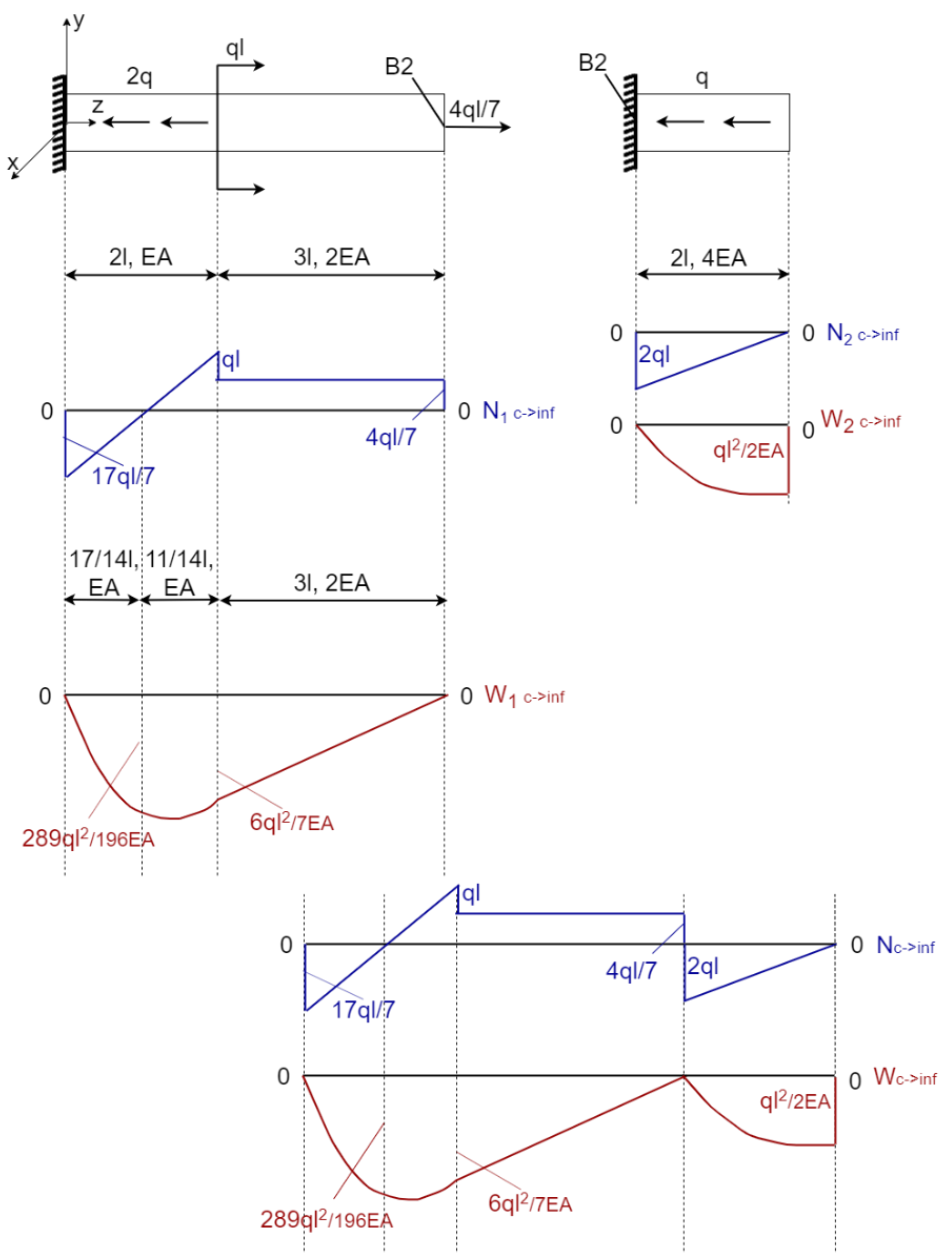


Как видно из рисунка, полученные методом конечных элементов значения перемещений совпадают с полученными ранее.

Вычислим узловые перемещения стержня при  $C \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{C \rightarrow \infty} W = \begin{Bmatrix} 0 \\ \lim_{C \rightarrow \infty} \left( \frac{ql^2(-12EA - 6Cl)}{EA(2EA + 7Cl)} \right) \\ \lim_{C \rightarrow \infty} \left( -\frac{18ql^2}{2EA + 7Cl} \right) \\ \lim_{C \rightarrow \infty} \left( \frac{ql^2(-38EA - 7Cl)}{2EA(2EA + 7Cl)} \right) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{6ql^2}{7EA} \\ 0 \\ -\frac{ql^2}{2EA} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Сравним с результатами из Д31:



Как видно из рисунка, полученные методом конечных элементов значения перемещений совпадают с полученными ранее.

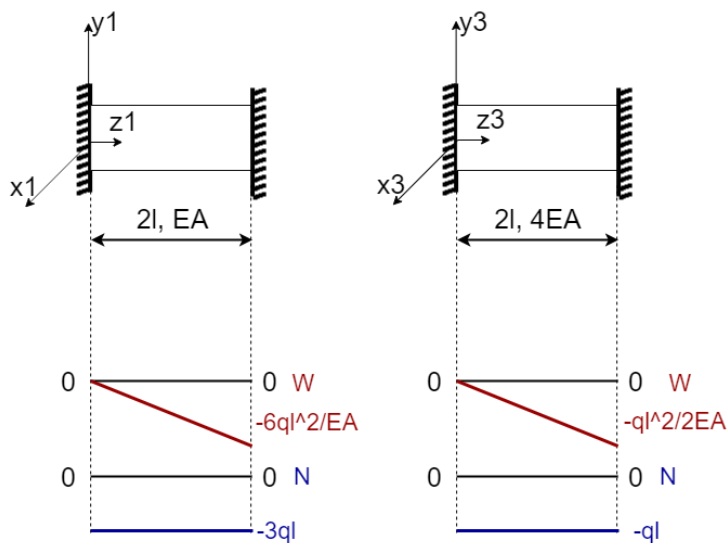
**Задание 3.** При  $C \rightarrow 0$  и при  $C \rightarrow \infty$  вычислить наибольшее значение осевой силы в системе.

**Решение:**

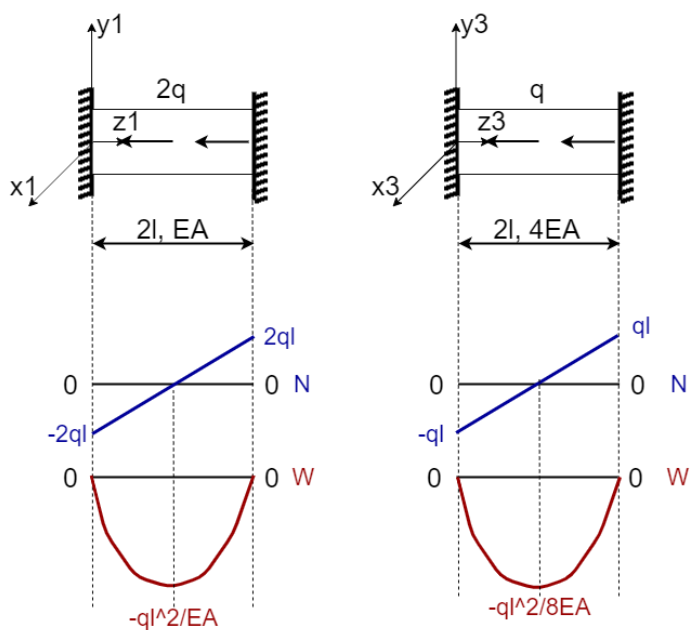
Так как на осевые силы влияют не только силы в узлах, но и распределенные нагрузки, то будем решать задачу следующим образом.

При  $C \rightarrow 0$ :

Построим эпюры на основе узловых перемещений на 1 и 3 участках:



Построим эпюры распределенных нагрузок на 1 и 3 участках:

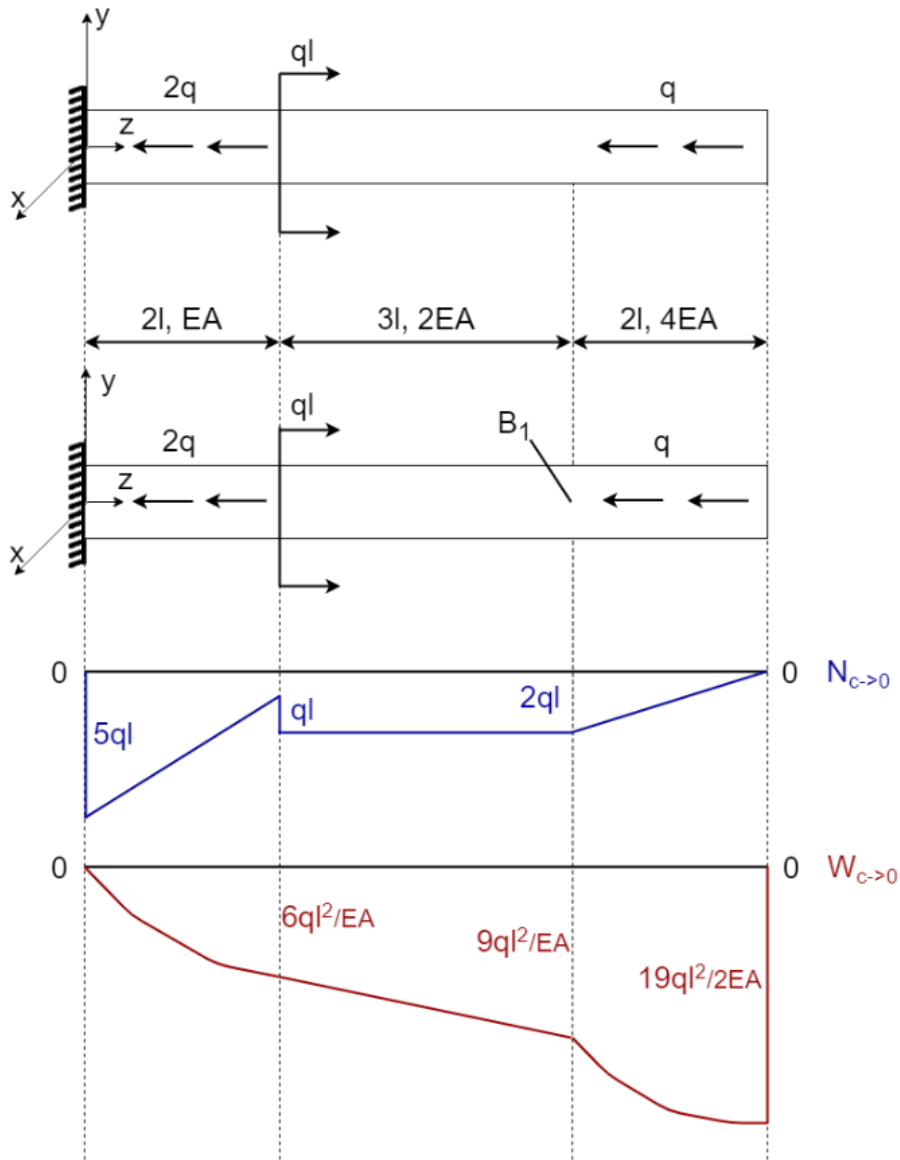


Таким образом:

$$N(0) = \begin{Bmatrix} -3ql - 2ql \\ -ql - ql \\ -ql - ql \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5ql \\ -2ql \\ -2ql \end{Bmatrix}$$

$$N(l_i) = \begin{Bmatrix} -3ql + 2ql \\ -2ql \\ -ql + ql \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -ql \\ -2ql \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Сравним с результатами из Д31:



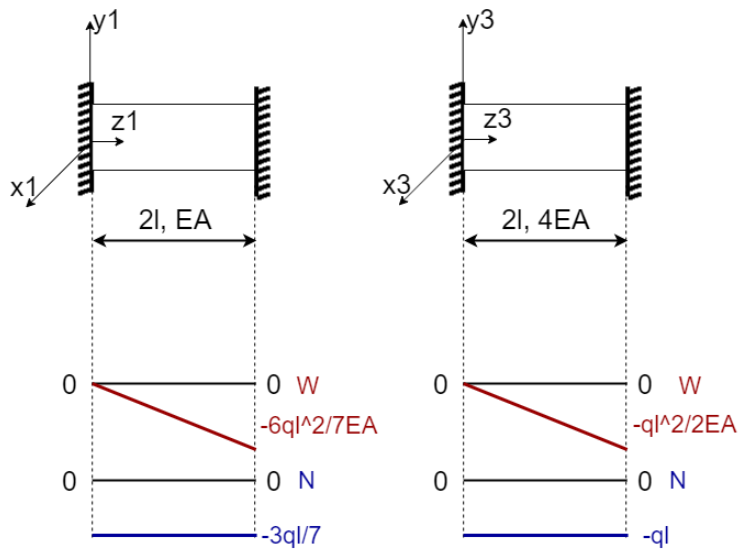
Как видно из рисунка, значения совпадают.

Значит  $N_{max} = 5ql$

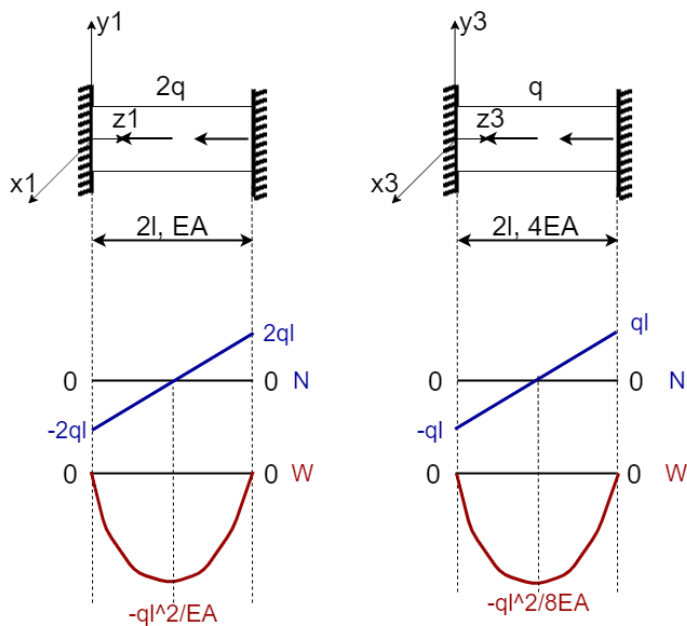


При  $C \rightarrow \infty$ :

Построим эпюры на основе узловых перемещений на 1 и 3 участках:



Построим эпюры распределенных нагрузок на 1 и 3 участках:

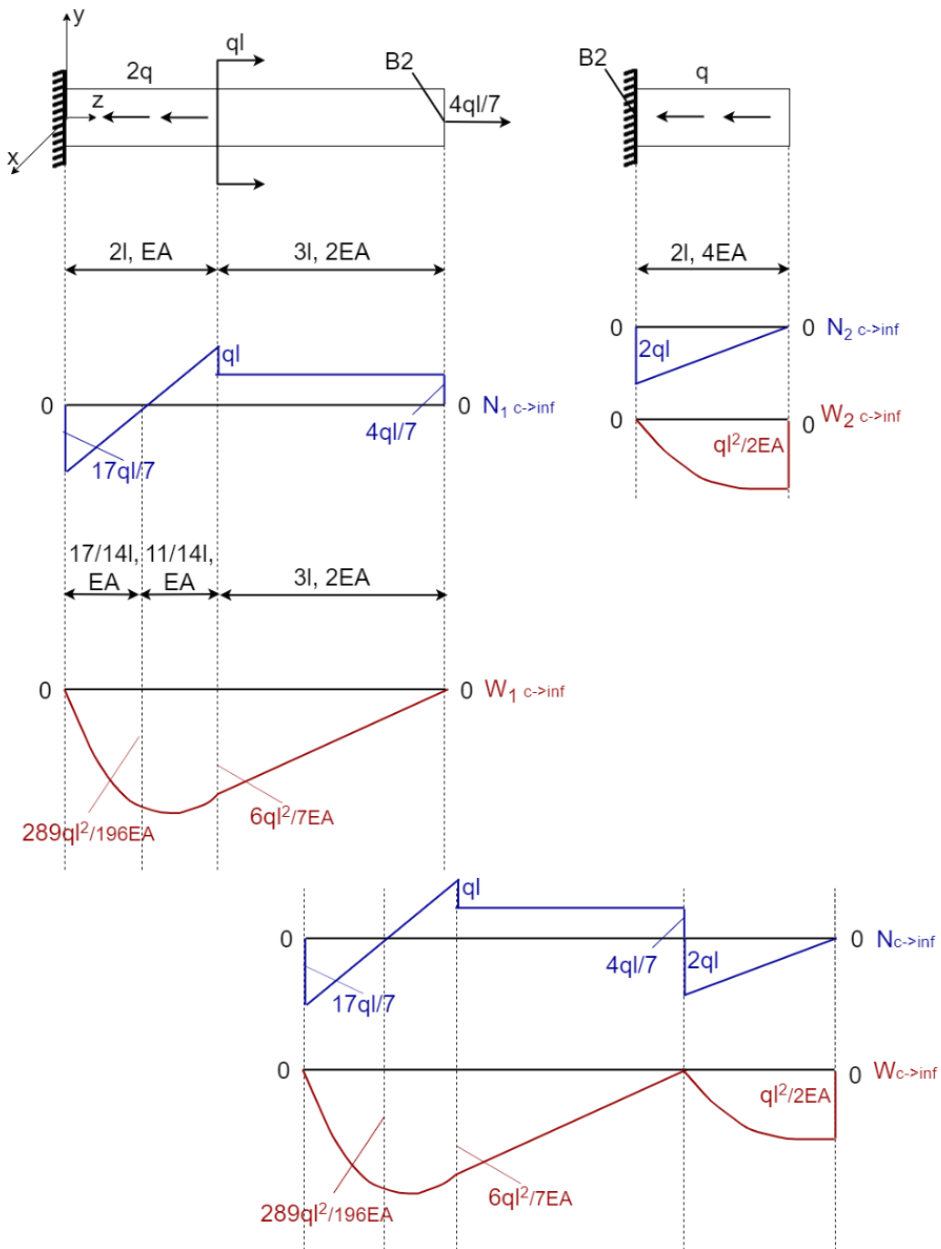


Таким образом:

$$N(0) = \begin{Bmatrix} -\frac{3ql}{7} - 2ql \\ \frac{11ql}{7} - ql \\ -ql - ql \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{17ql}{7} \\ \frac{4ql}{7} \\ -2ql \end{Bmatrix}$$

$$N(l_i) = \begin{Bmatrix} -\frac{3ql}{7} + 2ql \\ \frac{4ql}{7} \\ -ql + ql \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{11ql}{7} \\ \frac{4ql}{7} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Сравним с результатами из ДЗ1:



Как видно из рисунка, значения совпадают.

Значит 
$$N_{max} = \frac{17ql}{7}$$