Задача №4.2

Вариант 14

Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в вакууме в положительном направлении оси Oy. Вектор плотности потока электромагнитной энергии $\vec{S}$ имеет вид: $\vec{S}(y,t) = \overrightarrow{S_m}\cos^2(\omega t - ky)$. Считая волновое число k и амплитудное значение S_m вектора $\vec{S}$ известными и действительными величинами, что допустимо для однородной изотропной среды без эффектов поглощения, найти:

+1. вектор напряжённости электрического поля $\vec{E}$ этой волны как функцию времени t и координат точки наблюдения;
+2. вектор напряжённости магнитного поля $\vec{H}$ этой волны как функцию времени t и координат точки наблюдения;
+3. объёмную плотность энергии w;
+4. средний вектор Пойнтинга $\langle\vec{S}\rangle$;
+5. среднее значение $\langle S\rangle$ плотности потока энергии, переносимой этой волной;
+6. вектор плотности тока смещения $\overrightarrow{j_{\text{см}}}$;
+7. среднее за период колебаний значение модуля плотности тока смещения $\langle|\overrightarrow{j_{\text{см}}}|\rangle$;
+8. величину импульса $K_{\text{ед}}$(в единице объёма).
9. записать волновое уравнение для магнитной и электрической компонент рассматриваемой электромагнитной волны и изобразить схематично мгновенную фотографию этой волны.

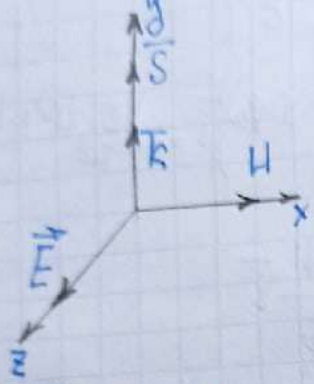
$S_m = 113.9 \frac{Дж}{с \cdot м^2}$

$k = 0,5\ м^{-1}$

1)

1) Т.к. волна распр. по оси Oy, а тройки $\bar{k}\bar{E}\bar{H}$ и $\bar{S}\bar{E}\bar{H}$ – правые, то $\bar{k} \uparrow\uparrow \bar{S} \uparrow\uparrow Oy$

$\bar{H} \uparrow\uparrow Ox$; $\bar{E} \uparrow\uparrow Oz$



Представим векторы $\bar{E}$ и $\bar{H}$ плоск. гарм. волны в комплексной форме:

$$\bar{E}(r;t) = \bar{E}_m e^{i(\omega t - \bar{k}\bar{r} + \varphi_0)} \quad \bar{H}(r;t) = \bar{H}_m e^{i(\omega t - \bar{k}\bar{r} + \varphi_0)} \quad (1)$$

$\bar{E}_m$ и $\bar{H}_m$ – амплитуды колебания

$$\bar{k}\bar{r} = k_x x + k_y y + k_z z = k_y y = ky$$

Подставим в (1):

$$\bar{E}(y,t) = \bar{E}_m e^{i(\omega t - ky + \varphi_0)} \quad \bar{H}(y;t) = \bar{H}_m e^{i(\omega t - ky + \varphi_0)} \quad (2)$$

$$\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (3)$$

$E_z = |\bar{E}| = E$; $E_x = E_y = 0$; $H_x = |\bar{H}| = H$; $H_y = H_z = 0$ =>

$$\Rightarrow \operatorname{rot}\bar{E} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\partial E(y;t)}{\partial y}\bar{i} - \frac{\partial E(y;t)}{\partial x}\bar{j} = \frac{\partial}{\partial y}\left(E_m e^{i(\omega t - ky + \varphi_0)}\right)\bar{i} = -kE_m e^{i(\omega t - ky + \varphi_0)}\bar{i}$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial t}\bar{i} + \frac{\partial H_y}{\partial t}\bar{j} + \frac{\partial H_z}{\partial t}\bar{k} = \frac{\partial H}{\partial t}\bar{i}$$

Подставим в (3)

$$-kE_m e^{i(\omega t - ky + \varphi_0)}\bar{i} = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}\bar{i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{kE_m}{\mu_0} e^{i(\omega t - ky + \varphi_0)}$$

$$H = \int \frac{kE_m}{\mu_0} e^{i(\omega t - ky + \varphi_0)} dt = \frac{kE_m}{\mu_0 \omega} e^{i(\omega t - ky + \varphi_0)} \quad (4)$$

Из (2) и (4): $H_m = \frac{kE_m}{\mu_0 \omega}$ (5)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \omega = kc$$

Подставим в (5): $H_m = \frac{E_m}{\mu_0 c}$

$\bar{S}(y;t) = \bar{S}_m \cos^2(\omega t - ky)$; $\bar{S} = [\bar{E}\bar{H}]$ (2) (6) и $\bar{E} \perp \bar{H} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{S} = [\bar{E}\bar{H}] = E_m \cos(\omega t - ky + \varphi_0) \cdot H_m \cos(\omega t - ky + \varphi_0) =$$

$$= \frac{E_m^2}{\mu_0 c} \cos^2(kct - ky + \varphi_0)$$

$$S_m \cos^2(kct - ky) = \frac{E_m^2}{\mu_0 c} \cos^2(kct - ky + \varphi_0)$$

Можно предположить, что $\varphi_0 = 0$, т.к. можно будет сократить на $\cos^2$

$$S_m = \frac{E_m^2}{\mu_0 c}\ ;\ E_m = \sqrt{\mu_0 c S_m}\ ;\ E = \sqrt{\mu_0 c S_m} \cos(kct - ky) \quad (7)$$

Вектор $\bar{E}(y;t) \uparrow\uparrow O_z \Rightarrow \bar{E}(y;t) = \sqrt{\mu_0 c S_m} \cos(kct - ky)\bar{k} \quad (8)$

Подставим $\underline{\bar{E}(y;t) = 19.44\sqrt{S_m} \cos(3 \cdot 10^8 t - 1y)\bar{k}}$

2) Из (2), (6), (7):

$$H(y;t) = H_m \cos(kct - ky) = \frac{E_m}{\mu_0 c} \cos(kct - ky) =$$

$$= \sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}} \cos(kct - ky)$$

$\bar{H}(y;t) \uparrow\uparrow O_x \Rightarrow \bar{H}(y;t) = \sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}} \cos(kct - ky)\bar{i} \quad (9)$

Подставим: $\underline{H(y;t)} = 0,0517 \cdot \sqrt{S_m} \cos(3 \cdot 10^8 t - 1y)\bar{i}$

3) $$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{\varepsilon_0 E^2(y;t)}{2} + \frac{\mu_0 H^2(y;t)}{2} \quad (10)$$

$$\omega(y;t) = \frac{\varepsilon_0}{2}\mu_0 c S_m \cos^2(kct - ky) + \frac{\mu_0}{2}\frac{S_m}{\mu_0 c}\cos^2(kct - ky) =$$

$$= \frac{S_m}{c}\cos^2(kct - ky) \quad (11)$$

Подставим: $\omega(y;t) = S_m \cdot 0,333 \cdot 10^{-8} \cos^2(3 \cdot 10^8 t - 1y)$

4) $\langle \bar{S} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \bar{S}(t)\,dt$ (12)

$\langle \bar{S} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \bar{S}_m \cos^2(kct-ky)\,dt = \frac{\bar{S}_m}{T}\int_0^T \cos^2(kct-ky)\,dt$

$\langle \bar{S} \rangle = \frac{\bar{S}_m}{T}\left(\frac{T}{2}-0\right) = \frac{\bar{S}_m}{2}$ (13)

$\langle \bar{S} \rangle = \frac{\bar{S}_m}{2} = 0{,}5\, S_m \bar{j}$

5) Среднее за период колебаний значение плотности потока энергии:

$\langle S \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\,dt$

$\langle S \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T S_m \cos^2(kct-ky)\,dt = \frac{S_m}{2}$ (14)

$\langle S \rangle = 0{,}5 \cdot S_m$

6) $\bar{j}_{см} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ (15); $\bar{D}$ - вектор электр. смещения

$\bar{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \bar{E}$ т.к. вакуум $\varepsilon = 1 \Rightarrow \bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E}$

$\bar{D} = \varepsilon_0 \sqrt{\mu_0 c S_m} \cos(kct-ky)\bar{k}$ (16)

$\bar{j}_{см} = \frac{\partial D}{\partial t} = -\varepsilon_0 kc\sqrt{\mu_0 c S_m}\sin(kct-ky)\bar{k} =$

$= -k\sqrt{\varepsilon_0 c S_m}\sin(kct-ky)\bar{k}$ (17)

Подставим:

$\bar{j}_{см} = -0{,}0517 \cdot k\sqrt{S_m}\sin(1{,}44\cdot 10^9 t - 0{,}48y)\bar{k}$

7) $\langle|\vec{j}_{см}|\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \left| k\sqrt{\varepsilon_0 c S_m}\, \sin(kct - ky)\right| dt =$

$= \frac{kc}{2\pi} k\sqrt{\varepsilon_0 c S_m} \int_0^{\frac{2\pi}{kc}} |\sin(kct - ky)|\, dt =$

$= \frac{kc}{2\pi} k\sqrt{\varepsilon_0 c S_m} \left(\int_0^{\frac{\pi}{kc}} \sin(kct - ky)\, dt + \int_{\frac{\pi}{kc}}^{\frac{2\pi}{kc}} (-\sin(kct - ky))\, dt \right) =$

$= \frac{kc}{2\pi} k\sqrt{\varepsilon_0 c S_m} \int_0^{\frac{\pi}{kc}} \sin(kct - ky)\, dt = \frac{2k}{\pi}\sqrt{\varepsilon_0 c S_m}$

$\langle|\vec{j}_{см}|\rangle = \frac{2k}{\pi}\sqrt{\varepsilon_0 c S_m}$ (18)

$\langle|\vec{j}_{см}|\rangle = 0{,}0329\, k\sqrt{S_m}$

8) $\overline{k_{eg}} = \frac{\overline{S}}{c^2}$ (9)

$k_{eg}(y;t) = \frac{w(y;t)}{c}$ (20)

Используя (11) получим:

$k_{eg}(y;t) = \frac{S_m}{c^2}\cos^2(kct - ky)$ (21)

$k_{eg}(y;t) = 0{,}1111 \cdot \sqrt{S_m} \cdot 10^{-16} \cos^2(3\cdot 10^8 t - 1y)$

9) В общем виде:

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial z^2}\right)$$ где $v = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}$

В нашем случае

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y^2}$$

(8) и (9) этим условиям удовл.:

$$\bar{E}(y;t) = \sqrt{\mu_0 c S_m}\cos(kct - ky)\,\bar{k}$$

$$\bar{H}(y;t) = \sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\cos(kct - ky)\,\bar{i}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = -k^2c^2\sqrt{\mu_0 c S_m}\cos(kct - ky)\,\bar{k}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial y^2} = -k^2\sqrt{\mu_0 c S_m}\cos(kct - ky)\,\bar{k}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial t^2} = -k^2c^2\sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\cos(kct-ky)\,\overline{i}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial y^2} = -k^2\sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\cos(kct-ky)\,\overline{i}$$

Для изображения выберем момент времени $t=0$

$$\overline{E}(y;0) = \sqrt{\mu_0 c S_m}\cos(ky)\,\overline{k}$$

$$\overline{H}(y;0) = \sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\cos(ky)\,\overline{i}$$