

## Оглавление

1.	Электрический заряд. Закон Кулона. Напряжённость электростатического поля. Силовые линии.....	3
2.	Принцип суперпозиции и его применение к расчёту поля системы неподвижных зарядов. Расчет поля равномерно заряженной нити, кольца. ....	3
3.	Поток вектора напряжённости электрического поля. Теорема Гаусса в интегральной и дифференциальной формах в вакууме и её применение для расчёта электростатических полей. Расчет поля равномерно заряженной плоскости, цилиндра, шара. ....	6
4.	Работа электростатического поля при перемещении зарядов. Теорема о циркуляции вектора напряжённости электростатического поля в интегральной и дифференциальной форме. 8	
5.	Работа электростатического поля при перемещении зарядов. Потенциал. Связь напряжённости и потенциала. Уравнение Пуассона .....	9
	Лекция 3 .....	10
6.	Электрический диполь в электростатическом поле. Силы, действующие на диполь. ....	10
7.	Электростатическое поле в диэлектрике. Поляризация диэлектриков. Поляризованность. 10	
8.	Свободные и связанные заряды. Теорема Гаусса для вектора поляризованности.....	11
9.	Вектор электрического смещения. Обобщение теоремы Гаусса для поля в диэлектрике. ....	11
10.	Электростатическое поле на границе раздела диэлектриков.....	12
	Лекция 4 .....	13
11.	Поле вблизи поверхности проводника. Электроёмкость проводников и конденсаторов. Ёмкости плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов. ....	13
12.	Энергия системы неподвижных зарядов. Энергия заряженного проводника, конденсатора.....	15
13.	Объёмная плотность энергии электростатического поля.....	15
14.	Электрический ток, носители тока в средах, сила и плотность тока. Уравнение непрерывности. ....	16
15.	Электрическое поле в проводнике с током, сторонние силы. Циркуляция вектора напряженности электрического поля в замкнутом контуре с током. ЭДС.....	16
16.	Закон Ома и Джоуля - Ленца в интегральной и дифференциальной формах.....	17
	Лекция 5-6 .....	18
17.	Вектор индукции магнитного поля. Закон Био-Савара-Лапласа.....	18
18.	Принцип суперпозиции магнитных полей. Расчёт поля прямого и кругового токов.....	19
19.	Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля. ....	19
20.	Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах. Расчёт магнитного поля тороида и соленоида. ....	20
21.	Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Ускорение заряженных частиц.....	21
22.	Эффект Холла. ....	22
23.	Проводники с током в магнитном поле. Закон Ампера. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.....	24

24.	Контур с током в магнитном поле. Магнитный момент контура с током. Силы, действующие на контур с током в магнитном поле.....	26
25.	Магнитное поле в магнетиках. Намагченность вещества. Вектор намагченности.....	27
26.	Вектор напряжённости магнитного поля и его связь с векторами индукции и намагченности. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость вещества.....	28
27.	Теоремы о циркуляции векторов напряжённости и намагченности в интегральной и дифференциальной формах.....	29
28.	Магнитное поле на границе раздела магнетиков.....	31
29.	Диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики. ....	31
	<b>Лекция 9 .....</b>	<b>31</b>
30.	Электромагнитная индукция. Закон Фарадея. Правило Ленца. Самоиндукция. Взаимная индукция. Индуктивность. Индуктивность соленоида. ....	31
31.	Вихревые токи.....	34
32.	Плотность энергии магнитного поля. ....	35
33.	Энергия и силы в магнитном поле. Магнитное давление. ....	35
	<b>Лекция 10 .....</b>	<b>37</b>
34.	Основные положения электромагнитной теории Максвелла. Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Закон полного тока. ....	37
35.	Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах и их физический смысл.....	39
	<b>Лекция 11 .....</b>	<b>40</b>
36.	Волновое уравнение для электромагнитного поля. Скорость распространения электромагнитных волн.....	40
37.	Плоская электромагнитная волна. Уравнения Максвелла для плоской волны. Поперечность электромагнитных волн. Связь векторов напряженности векторов электрического и магнитного полей в плоской волне .....	41
38.	Общее решение волнового уравнения плоской электромагнитной волны. ....	41
39.	Энергия и импульс электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга. Теорема Пойнтинга....	42
40.	Дисперсия электромагнитных волн. Электронная теория дисперсии, нормальная и аномальная дисперсия. Закон Бугера, рассеяние света.....	44
41.	Шкала электромагнитных излучений. Оптическое излучение, его интенсивность. ....	45
42.	Интерференция электромагнитных волн. Расчёт интерференционной картины с двумя источниками. Ширина полосы интерференции. ....	46
43.	Пространственно-временная когерентность. ....	47
44.	Интерференция света в тонких плёнках. Интерференционные полосы равной толщины и равного наклона. ....	47
45.	Применение интерференции. ....	50
	<b>Лекция 13 .....</b>	<b>50</b>
46.	Дифракция света. Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля.....	50
47.	Дифракция от круглого отверстия и от круглого диска. Спираль Френеля.....	53
48.	Дифракция Фраунгофера от щели. ....	55
49.	Предельный переход от волновой оптики к геометрической. ....	57

50.	Дифракционная решётка. Спектральные характеристики дифракционных решёток. ....	58
51.	Дифракция рентгеновских лучей. Формула Вульфа - Брэггов. Понятие о рентгеноструктурном анализе. ....	60
	Лекция 16 .....	61
52.	Естественный и поляризованный свет. Виды поляризации световых волн. Способы получения и степень поляризованных световых волн. ....	61
53.	Световые волны в кристаллах. Оптическая анизотропия. Одноосные и двуосные кристаллы.....	62
54.	Распространение электромагнитных волн в одноосных кристаллах. Обыкновенная и необыкновенная волна. Скорости обыкновенной и необыкновенной волн. Положительные и отрицательные кристаллы.....	63
55.	Двойное лучепреломление. Поляризация света при двойном лучепреломлении. ....	63
56.	Закон Малюса. Закон Брюстера .....	64
57.	Поляризационные призмы и поляроиды.....	65
58.	Физические основы голографии. Опорная и предметная световые волны.....	66
59.	Запись и воспроизведение голограмм. Применение голографии. ....	67

# Лекция 1

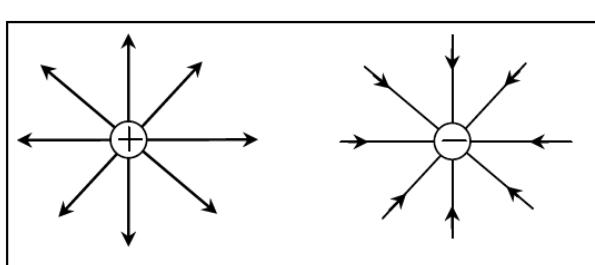
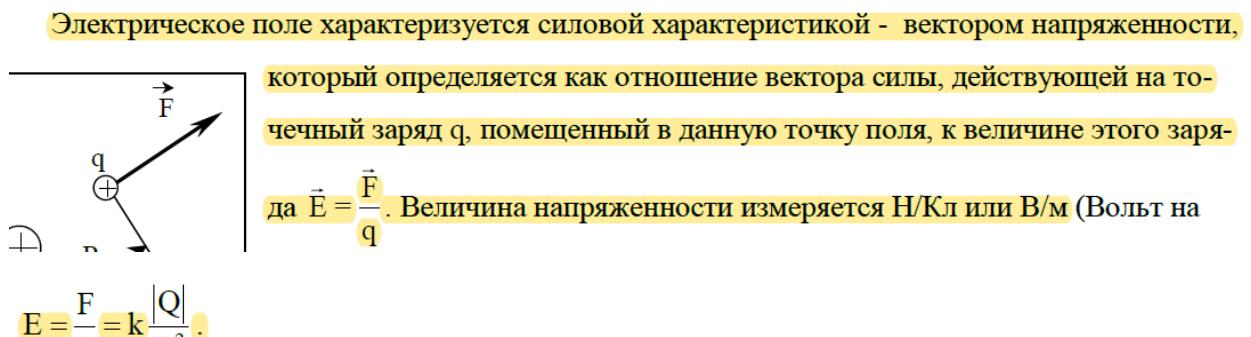
1. Электрический заряд. Закон Кулона. Напряжённость электростатического поля. Силовые линии.

Элементарным зарядом называется абсолютная величина электрического заряда электрона или ядра атома водорода – протона. В СИ величина элементарного заряда равна  $e=1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл (единицы измерения – Кулон.) В природе величина любого электрического заряда целочисленно кратна элементарному заряду.

Электрические заряды могут появляться или исчезать только *попарно*. Отсюда следует: закон сохранения электрического заряда – алгебраическая сумма зарядов в замкнутой системе остается постоянной.

*Два точечных неподвижных заряда, находящиеся на расстоянии R друг от друга взаимодействуют друг с другом с силой, величина которой пропорциональна произведению величин зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:*

$$F = k \frac{|q_1 \cdot q_2|}{R^2}.$$

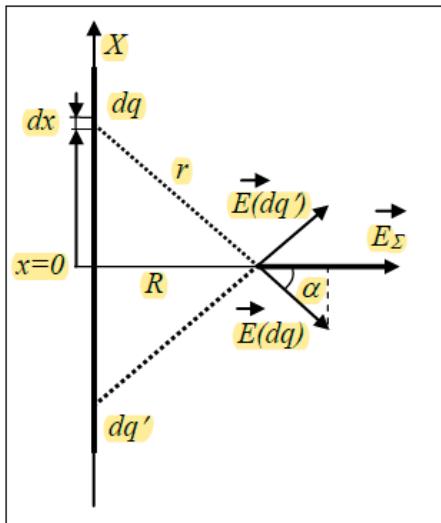


Силовой линией электрического поля называется линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора  $\vec{E}$ . Таким образом, силовые линии электрического поля направлены от положительного заряда к отрицательному.

2. Принцип суперпозиции и его применение к расчёту поля системы неподвижных зарядов. Расчет поля равномерно заряженной нити, кольца. Вектор напряженности поля, создаваемого системой зарядов, равен векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:  $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ .

Это следует из того, что силы складываются как векторы:  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ , поэтому

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{q} = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{q} = \sum_i \vec{E}_i.$$



2) Найдем напряженность поля, создаваемого бесконечной прямой равномерно заряженной тонкой нитью. Пусть  $\lambda > 0$  - линейная плотность заряда нити (это означает, что кусок длиной  $L$  имеет заряд  $q = \lambda \cdot L$ ). Будем искать напряженность в точке, расположенной от нити на расстоянии  $R$ . Вдоль нити вводим ось  $X$ , начало которой является основанием перпендикуляра, опущенного из рассматриваемой точки на нить. На некотором расстоянии от начала выделяем малый участок нити длиной  $dx$ , тогда заряд этого куска  $dq = \lambda \cdot dx$ . Рассматривая этот кусок как точечный заряд  $dq$ , находим создаваемый им вектор напряженности в рассматриваемой точке

$\vec{E}_{dq}$ . Симметричный (относительно начала оси  $X$ ) точечный заряд  $dq'$  создает симметричный вектор напряженности  $\vec{E}_{dq'}$ . Их векторная сумма  $\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_{dq} + \vec{E}_{dq'}$  лежит на перпендикуляре к ните. Таким образом, общий вектор напряженности тоже должен быть направлен перпендикулярно ните. Следовательно, при суммировании векторов напряжённостей от всех точечных зарядов на ните можно учитывать только их перпендикулярную составляющую, т.е. найти сумму проекций на перпендикулярное направление:  $E = \sum_{dq} E_{dq} \cos \alpha$ . Так как  $E_{dq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{R}{r}$ ,  $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ , переходим к интегралу  $E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \frac{R}{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

Интегрируем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R^2 dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R^2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(R^2 + x^2) dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{1}{R^2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

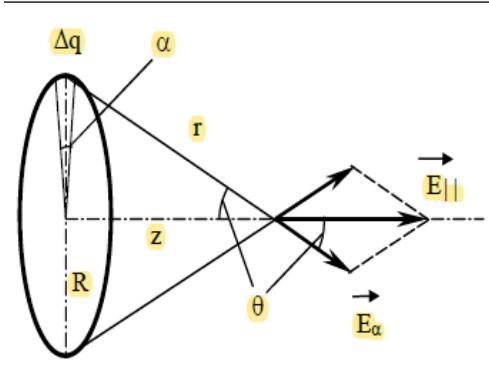
Берём второй интеграл по частям  $\int u dv = uv - \int v du$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \left[ \begin{array}{l} dv = \frac{x dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ u = x, \quad du = dx \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right] = -\frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} = -2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{Откуда } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R^2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} + 2 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = \frac{2}{R^2}.$$

$$\text{Окончательно: } E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

3) Найдем напряженность поля на оси равномерно заряженного кольца, радиус которого  $R$ , а за-  
ряд  $Q > 0$ . Разобьем кольцо на большое количество участ-



ков, опирающихся на центральный угол  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$ . (Длина

одного участка  $L = \frac{2\pi R}{N}$ .) Заряд одного участка  $q = \frac{Q}{N}$ .

Принимая малый участок кольца за точечный заряд можно найти напряженность поля на оси кольца, созданную одним участком:  $E_a = k \frac{q}{r^2}$ , где  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$  - расстояние

от заряда до рассматриваемой точки. При этом участок, расположенный симметрично относи-  
тельно центра кольца, создает вектор напряженности, симметричный уже найденному. Их сумма  
будет лежать на оси кольца (вектор  $\vec{E}_{||}$ ). Поэтому при суммировании всех векторов напряженно-  
стей от каждого из участков будем учитывать только составляющую вектора, параллельную оси  
кольца, длина которой  $E_a \cos \theta$ , где  $\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$ . В итоге получаем,

$$E = \sum E_a \cos \theta = Nk \frac{q}{r^2} \cdot \frac{z}{r} = Nk \frac{Q/N}{R^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = k \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Отметим, что в центре кольца ( $z=0$ ) напряженность поля равна нулю. ♣

3. Поток вектора напряжённости электрического поля. Теорема Гаусса в интегральной и дифференциальной формах в вакууме и её применение для расчёта электростатических полей. Расчет поля равномерно заряженной плоскости, цилиндра, шара.

Потоком вектора напряжённости электрического поля через ориентированную поверхность  $S$  называется величина  $\oint_S (\vec{E}, d\vec{S})$ . Единица измерения В·м.

Поток вектора напряжённости электрического поля через произвольную замкнутую поверхность, ориентированную наружу, прямо пропорционален алгебраической сумме электрических зарядов, охваченных этой поверхностью. Коэффициент пропорциональности  $\frac{1}{\epsilon_0}$ .

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

Если ввести функцию объёмного распределения электрического заряда  $\rho(x, y, z)$ , такую, что

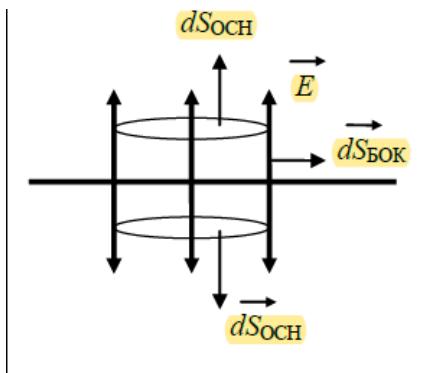
$$\iiint_V \rho dV = \sum_i q_i$$

и воспользоваться теоремой Остроградского-Гаусса  $\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) dV$ , то из равенства

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

получим дифференциальную форму теоремы Гаусса:

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$



получится часть пути длиной  $L$ , поэтому внутрь —  $-L$ . Поэтому  $E2\pi RL = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0}$ , откуда  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$ .

3) Поле бесконечной заряженной плоскости. Пусть поверхностьная плотность заряда  $\sigma > 0$ . Картина силовых линий симметрична относительно плоскости. Найдём поток через поверхность прямого цилиндра, основания которого параллельны плоскости, и расположенного так, что плоскость делит

цилиндр пополам. В этом случае наблюдается симметрия относительно плоскости.

$$\iint_{\text{цилиндр}} (\vec{E}, d\vec{S}) = \iint_{\text{основания}} (\vec{E}, d\vec{S}) + \iint_{\text{боковая поверхность}} (\vec{E}, d\vec{S}).$$

Тогда  $\iint_{\text{боковая поверхность}} (\vec{E}, d\vec{S}) = 0.$

На основаниях цилиндра величина потока будет одинаковой (из-за симметрии):

$$\iint_{\text{основания}} (\vec{E}, d\vec{S}) = 2ES_{\text{основание}}.$$

Величина заряда внутри цилиндра  $q = \sigma \cdot S_{\text{основание}}$ .

Поэтому, по теореме Гаусса  $2ES_{\text{основание}} = \frac{\sigma \cdot S_{\text{основание}}}{\epsilon_0}$ , откуда  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

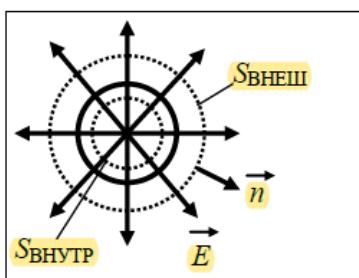
5) Поле, создаваемое полым бесконечным заряженным цилиндром радиуса  $R$ .

Картина силовых линий симметрична относительно оси цилиндра.

Внутри цилиндра  $E=0$ , а снаружи  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ , где  $\lambda$  - линейная плотность заряда цилиндра,  $r$  - рас-

стояние от оси цилиндра. Если для цилиндра задана поверхностная плотность заряда  $\sigma$ , то, т.к. за-  
ряд куска цилиндра длиной  $L$   $q = \lambda L = \sigma 2\pi R L$ , откуда получаем  $\lambda = \sigma 2\pi R$ , поэтому

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{R}{r}.$$



6) Поле, создаваемое шаром радиуса  $R$  и заряженным равномерно зарядом  $q$ . Картина силовых линий обладает центральной симметрией. Выделим внутри шара сферу радиуса  $r$  с центром, совпа-  
дающим с центром шара. Тогда

$$\iint_{S_{\text{внутр}}} (\vec{E}, d\vec{S}) = ES_{\text{внутр}} = \frac{q_{\text{внутр}}}{\epsilon_0}.$$

Заряд внутри сферы  $q_{\text{внутр}} = \frac{q}{V_{\text{шар}}} V_{\text{внутр}}$ , где объём шара  $V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ , объём внутри сферы

$V_{\text{внутр}} = \frac{4}{3}\pi r^3$ , площадь поверхности внутренней сферы  $S_{\text{внутр}} = 4\pi r^2$ . Тогда

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^3} \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ поэтому внутри шара } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} r.$$

4. Работа электростатического поля при перемещении зарядов. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в интегральной и дифференциальной форме.

**Работа, совершаемая силами консервативного поля, при относительном изменении положения двух зарядов равна уменьшение потенциальной энергии системы зарядов:**

$$A = W_{\text{пот\_нач}} - W_{\text{пот\_кон}} = q\Phi_{\text{нач}} - q\Phi_{\text{кон}}$$

Тогда, с учетом определения потенциала работу сил поля по перемещению заряда  $q$  можно записать в виде  $A = q(\Phi_{\text{нач}} - \Phi_{\text{кон}})$ .

$$A = W_{\text{пот\_нач}} - W_{\text{пот\_кон}} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{R_{\text{нач}}} - k \frac{q_1 \cdot q_2}{R_{\text{кон}}}.$$

Т.о. разность потенциалов между двумя точками поля – это отношение работы сил поля (кулоновских сил) по переносу заряда между этими точками к величине этого заряда

$$\Phi_{\text{нач}} - \Phi_{\text{кон}} = \frac{A_{\text{кул}}}{q}.$$

Работа сил электрического поля

$$A_{\text{кул}} = \int_{\text{нач}}^{\text{конец}} (\vec{F}_{\text{кул}}, d\vec{l}) = \int_{\text{нач}}^{\text{конец}} (q \cdot \vec{E}, d\vec{l}) = q \cdot \int_{\text{нач}}^{\text{конец}} (\vec{E}, d\vec{l}).$$

В то же время  $A_{\text{кул}} = q(\Phi_{\text{нач}} - \Phi_{\text{кон}})$ .

Сравниваем эти выражения и получаем

$$\Phi_{\text{нач}} - \Phi_{\text{кон}} = \int_{\text{нач}}^{\text{конец}} (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Если обозначить изменение потенциала как  $\Delta\phi = \Phi_{\text{кон}} - \Phi_{\text{нач}}$  (НЕ ПУТАЙТЕ С ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА!), то получим связь напряженности и потенциала в интегральной форме

$$\Delta\phi = - \int_{\text{нач}}^{\text{конец}} (\vec{E}, d\vec{l})$$

Из этого выражения следует теорема о циркуляции для электростатического поля:

для любой замкнутой траектории  $\Gamma$  находящейся в области пространства, где создано электростатическое поле значение интеграла

$$\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

вдоль этой замкнутой линии  $\Gamma$  всегда равно нулю.

Действительно, в случае, когда точечный заряд перемещается вдоль какой-то замкнутой траектории  $\Gamma$ , выполняется равенство  $\Phi_{\text{кон}} = \Phi_{\text{нач}}$ , поэтому

$$\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{\text{нач}}^{\text{конец}} (\vec{E}, d\vec{l}) = -\Delta\phi = \Phi_{\text{нач}} - \Phi_{\text{кон}} = 0.$$

Из теоремы Стокса следует **дифференциальная форма теоремы о циркуляции**:

т.к. электростатическое поле потенциальное, то его ротор равен нулевому вектору в каждой точке:

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{0}.$$

## 5. Работа электростатического поля при перемещении зарядов. Потенциал. Связь напряжённости и потенциала. Уравнение Пуассона

**Работа, совершаяя силами консервативного поля, при относительном изменении положения двух зарядов равна уменьшение потенциальной энергии системы зарядов:**

$$A = W_{\text{пот\_нач}} - W_{\text{пот\_кон}} = q\Phi_{\text{нач}} - q\Phi_{\text{кон}}$$

Тогда, с учетом определения потенциала работу сил поля по перемещению заряда  $q$  можно записать в виде  $A = q(\Phi_{\text{нач}} - \Phi_{\text{кон}})$ .

$$A = W_{\text{пот\_нач}} - W_{\text{пот\_кон}} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{R_{\text{нач}}} - k \frac{q_1 \cdot q_2}{R_{\text{кон}}}$$

**Т.о. разность потенциалов между двумя точками поля – это отношение работы сил поля (кулоновских сил) по переносу заряда между этими точками к величине этого заряда**

$$\Phi_{\text{нач}} - \Phi_{\text{кон}} = \frac{A_{\text{кул}}}{q}$$

Следовательно, если определить на бесконечности  $\Phi_{\infty} = 0$ , потенциал данной точки поля можно определить как **отношение работы сил поля по перемещению заряда  $q$  на очень большое расстояние из данной точки к величине этого заряда**  $\Phi_{\text{нач}} = \frac{A}{q} + \Phi_{\infty} = \frac{A}{q}$ .

Если поле создается точечным зарядом  $Q$ , то на расстоянии  $R$  от него потенциал определяется по формуле (при  $C=0$ )  $\Phi = \frac{W}{q} = k \frac{Q}{R}$ .

Поверхности в пространстве, на которых потенциал остается постоянным, называются **эквипотенциальными поверхностями**.

Общая задача электростатики состоит в том, чтобы по распределению зарядов в пространстве определить потенциал  $\Phi$  и, следовательно, напряжённость электростатического поля.

Из соотношений  $\vec{E} = -\text{grad}\Phi$  и  $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  получаем уравнение

$$\text{div}(\text{grad}\Phi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

описывающее распределение потенциала по заданному распределению заряда.

В декартовой системе координат  $\text{div}(\text{grad}\Phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Delta\Phi$

( $\Delta$  – оператор Лапласа), поэтому уравнение принимает вид  $\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Это **уравнение Пуассона**.

При отсутствии зарядов ( $\rho=0$ ) получаем **уравнение Лапласа**  $\Delta\Phi = 0$ .

Так как энергия взаимодействия точечного заряда с электрическим полем и сила, действующая на этот заряд со стороны поля, связаны соотношением  $\vec{F} = -\text{grad}(W_{\text{пот}})$ , то из определений получаем  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = -\frac{1}{q} \text{grad}(W_{\text{пот}}) = -\text{grad}\left(\frac{W_{\text{пот}}}{q}\right) = -\text{grad}(\Phi)$ .

Таким образом, связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля дается выражением (в дифференциальной форме)

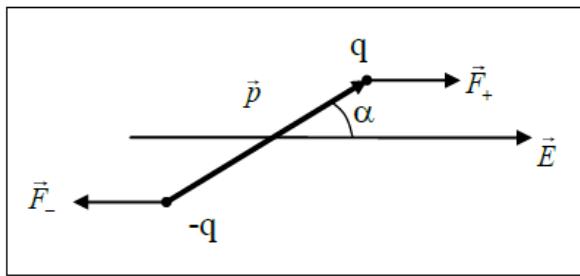
$$\vec{E} = -\text{grad}(\Phi).$$

Следовательно, электростатическое поле является потенциальным полем.

## Лекция 3

### 6. Электрический диполь в электростатическом поле. Силы, действующие на диполь.

В простейшем случае молекулу можно представить как два одинаковых по величине, но



противоположных по знаку заряда. Такая система зарядов называется **диполь**. Электрическим **дипольным** моментом называется векторная величина  $\vec{p} = q\vec{L}$ , где  $q$  – величина заряда,  $L$  – расстояние между зарядами. (Единица измерения Кл·м).

Вектор момента  $\vec{p}$  направлен от отрицательного заряда к положительному.

На **диполь**, помещенный в электрическое поле, действует момент пары сил, величина которого

$$M = F_+ L \sin \alpha = qEL \sin \alpha = pE \sin \alpha.$$

В векторном виде

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

### 7. Электростатическое поле в диэлектрике. Поляризация диэлектриков.

Поляризованность.

Это явление разделения связанных зарядов и появления дополнительного поля называется **поляризацией диэлектрика**.

Рассмотрим в диэлектрике некоторый физически малый объем величиной  $V$ . Введем **вектор поляризованности вещества**

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{V}.$$

Единица измерения Кл/м<sup>2</sup>. В однородном изотропном диэлектрике этот вектор направлен параллельно вектору напряженности, поэтому можно записать

$$\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}.$$

Безразмерный параметр  $\alpha$  называется коэффициентом поляризуемости или диэлектрической восприимчивостью вещества.

На диполь, помещенный в электрическое поле, действует момент пары сил, величина которого

$$M = F_+ L \sin \alpha = qEL \sin \alpha = pE \sin \alpha.$$

В векторном виде

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

В состоянии равновесия диполя вектор дипольного момента  $\vec{p}$  параллелен вектору напряженности  $\vec{E}$ .

В отсутствии внешнего поля в диэлектрике с полярными молекулами, диполи ориентированы хаотически. В диэлектрике, находящемся в электростатическом поле, в состоянии равновесия диполи преимущественно расположены вдоль поля.

## 8. Свободные и связанные заряды. Теорема Гаусса для вектора поляризованности.

**В диэлектрике при нормальных условиях нет свободно движущихся носителей зарядов.**

**Все заряды, из которых состоит диэлектрик, связаны друг с другом. Их называют связанными.**

$$\Phi_p = \iint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = \iint_S |P| \cos \alpha dS \approx |P| \cos \alpha S = \sigma' S = q'.$$

**Таким образом, поток вектора поляризованности через некоторую малую площадку равен величине связанныго заряда, создающего этот вектор.**

Рассмотрим поток этого вектора через некоторую замкнутую ориентированную поверхность внутри диэлектрика

$$\iint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = \iint_S |P| \cos \alpha dS = \iint_S \sigma' dS.$$

Предположим, что вектор поляризованности направлен наружу, т.е. внутри поверхности суммарный связанный заряд отрицательный. Тогда, учитывая, что поток вектора положительный, а заряд отрицательный:

$$\iint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = \iint_S \sigma' dS = -q'.$$

**Это теорема Гаусса для вектора поляризованности в интегральном виде. Соответственно, в дифференциальном виде:**

$$\operatorname{div}(\vec{P}) = -\rho'.$$

9. Вектор электрического смещения. Обобщение теоремы Гаусса для поля в диэлектрике.

**Вектор  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  называется вектором электрического смещения или вектором электрической индукции.** Следовательно, из теоремы Гаусса для вектора электрической напряженности следует теорема Гаусса для вектора электрического смещения

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \rho_{\text{стор}}.$$

Это теорема Гаусса для электрического поля в веществе (в дифференциальной форме).

**В интегральной форме теорема Гаусса для электрического поля в веществе: поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность, ориентированную наружу, равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью.**

$$\iint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q.$$

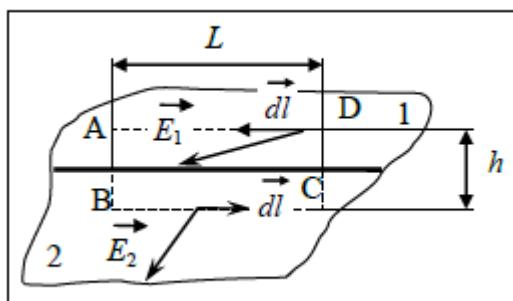
В однородном, изотропном диэлектрике  $\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$ , поэтому

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \alpha \epsilon_0 \vec{E} = (\alpha + 1) \epsilon_0 \vec{E}$$

Если обозначить  $\epsilon = \alpha + 1$  – (относительную) диэлектрическую проницаемость вещества, то для вектора смещения внутри однородного изотропного диэлектрика  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ .

## 10. Электростатическое поле на границе раздела диэлектриков.

### Поле на границе раздела диэлектриков.



Рассмотрим поле на плоской границе раздела (в случае неплоской границы достаточно рассмотреть очень малый участок). Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора напряженности в интегральном виде

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

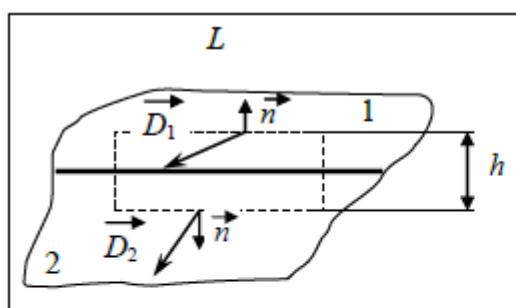
В качестве контура интегрирования выберем прямоугольник ABCD размером  $L \times h$ , расположенный таким образом, что одна сторона DA находится в первом диэлектрике, вторая BC – во втором, а граница делит прямоугольник пополам.

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{DA} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{AB} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{BC} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{CD} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

При устремлении  $h \rightarrow 0$  значения второго и четвертого интегралов стремятся к нулю.

Но  $(\vec{E}, d\vec{l}) = E_t dl$ , где  $E_t$  – касательная составляющая вектора напряженности.

Поэтому  $\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) \approx \int_{DA} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{AB} (\vec{E}, d\vec{l}) = E_{1t} L - E_{2t} L = 0$ .



Окончательно,  $E_{1t} = E_{2t}$  – на границе раздела диэлектриков величина касательной составляющей вектора напряженности электрического поля не меняется.

Теперь применим теорему Гаусса в веществе.

$$\iint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q.$$

В качестве поверхности интегрирования выберем прямой цилиндр высотой  $h$ , основания которого (площадью  $S$  каждое) параллельны границе раздела. Пусть граница раздела делит пополам цилиндр. Тогда

$$\iint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \iint_{S_{1\text{осн}}} (\vec{D}, d\vec{S}) + \iint_{S_{2\text{осн}}} (\vec{D}, d\vec{S}) + \iint_{S_{\text{бок}}} (\vec{D}, d\vec{S}) = q.$$

Учтем, что  $(\vec{D}, d\vec{S}) = (\vec{D}, \vec{n}) dS = D_n dS$ , где  $D_n$  – нормальная составляющая вектора смещения.

Если высота цилиндра стремится к нулю  $h \rightarrow 0$ , интеграл по боковой поверхности цилиндра стремится к нулю, поэтому

$$\iint_{S_{1\text{осн}}} (\vec{D}, d\vec{S}) + \iint_{S_{2\text{осн}}} (\vec{D}, d\vec{S}) \approx -D_{1n} S + D_{2n} S$$

В пределе, с учетом  $q = \iint_{S_{\text{осн}}} \sigma dS = \sigma S$ , получаем

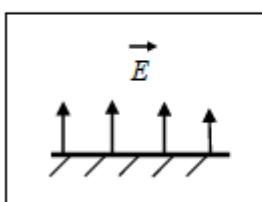
$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma.$$

Изменение величины нормальной составляющей вектора смещения на границе раздела диэлектриков равно плотности стороннего заряда на границе. Если на границе нет сторонних зарядов ( $\sigma = 0$ ), то нормальная составляющая вектора смещения не меняется:  $D_{2n} = D_{1n}$ .

## Лекция 4

11. Поле вблизи поверхности проводника. Электроёмкость проводников и конденсаторов.  
Ёмкости плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов.

$$\iint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q_{\text{ВНУТР}} = 0.$$



Так как поверхность проводника в этом случае тоже **эквипотенциальная**, то силовые линии электрического поля направлены перпендикулярно поверхности проводника в каждой его точке.

**Из теоремы Гаусса следует, что вблизи поверхности проводника выполняется соотношение  $D = \sigma$  - величина вектора электрического смещения равна поверхностной плотности сторонних зарядов.**

Опыт показывает, что между зарядом уединённого проводника и его потенциалом существует линейная зависимость  $q = C \cdot \varphi$  (при условии  $\varphi = 0$  на бесконечно большом расстоянии от проводника). Коэффициент пропорциональности  $C$  называется **коэффициентом электрической ёмкости или электроёмкостью**:

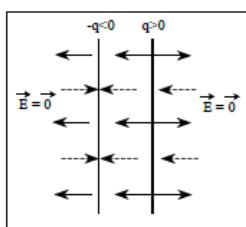
$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

**Единица измерения электроёмкости – Фарад.**  $\Phi = \frac{\text{Кл}}{\text{В}}$ .

**Конденсатором** называется система из двух проводников, заряженных одинаковыми по величине, но разными по знаку зарядами. Величина заряда одного из проводников называется зарядом конденсатора. Проводники называются **обкладками конденсатора**.

**Электроёмкость конденсатора определяется по формуле**  $C = \frac{q}{U}$ .

Плоский  
(воздушный)  
конденсатор



В этом случае при расчете картины поля можно пользоваться результатами, полученными для поля бесконечной заряженной пластины. Так как заряды и площади пластин равны по величине, то и величина напряженности поля, создаваемого каждой из пластин одинакова  $E = \frac{q}{2\epsilon_0 S}$ , но направления векторов напряженности разные (вектор напряженности от отрицательно заряженной пластины показан пунктиром). Между пластинами векторы напряженности направлены одинаково, поэтому величина суммарной напряженности равна сумме величин напряженностей

$$E_{\text{ВНУТРИ}} = E_+ + E_- = \frac{q}{2\epsilon_0 S} + \frac{q}{2\epsilon_0 S} = \frac{q}{\epsilon_0 S}.$$

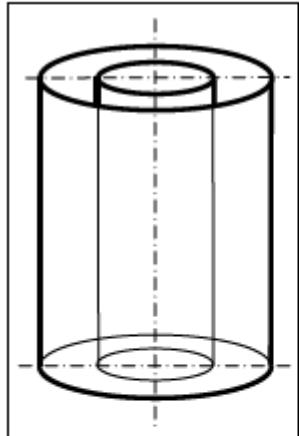
Снаружи пластин векторы напряженности поля направлены противоположно, поэтому напряженность поля снаружи равна нулю. Таким образом, у конденсатора напряженность поля отлична от нуля только между пластинами.

Так как электростатическое поле является полем консервативной силы, то интеграл  $\Phi_1 - \Phi_2 = \int_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l})$  не зависит от траектории, поэтому разность потенциалов между пластинами можно найти, например, вдоль перпендикуляра, соединяющего пластины, длина которого равна  $d$ :

$$U = |\Phi_1 - \Phi_2| = E_{\text{ВНУТРИ}} \cdot d = \frac{q \cdot d}{\epsilon_0 S}, \text{ где } d - \text{расстояние между пластинами. Тогда электроёмкость}$$

$$\text{плоского (воздушного) конденсатора } C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

Цилиндрический (воздушный) конденсатор представляет собой два коаксиальных цилиндра одинаковой длины, вложенных друг в друга так, что расстояние между обкладками много меньше размеров обкладок.



Пусть длина конденсатора  $L$ , заряд внутренней обкладки положительный  $q > 0$ . Радиусы обкладок  $R_1$  и  $R_2$ ,  $R_1 < R_2$ . Величина напряжённости поля между обкладками на расстоянии  $r$  от внутренней обкладки  $R_1 < r < R_2$ :  $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r}$ . Напряжение между обкладками

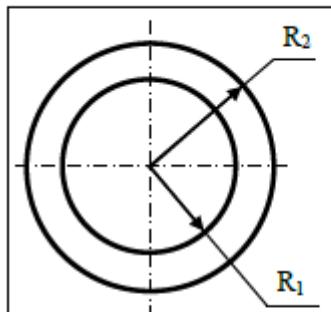
$$U = |\Phi_1 - \Phi_2| = \left| \int_{R_1}^{R_2} (\vec{E}, d\vec{l}) \right| = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q dr}{2\pi\epsilon_0 L r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Поэтому электроёмкость цилиндрического (воздушного) конденсатора

5

Семестр 3. Лекция 4.

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$



Сферический (воздушный) конденсатор представляет собой две вложенные концентрические сферы с радиусами обкладок  $R_1$  и  $R_2$ ,  $R_1 < R_2$ . Пусть заряд внутренней обкладки положительный  $q > 0$ . Величина напряжённости поля между обкладками на расстоянии  $r$  от внутренней обкладки  $R_1 < r < R_2$ :  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ . Напряжение между обкладками

$$U = |\Phi_1 - \Phi_2| = \left| \int_{R_1}^{R_2} (\vec{E}, d\vec{l}) \right| = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Поэтому электроёмкость сферического (воздушного) конденсатора  $C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$ .

12. Энергия системы неподвижных зарядов. Энергия заряженного проводника, конденсатора.

Энергия уединенного заряженного проводника определяется как энергия системы зарядов  $W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i$ . На проводнике  $\Phi = \text{const}$ , поэтому энергия уединенного проводника

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i = \frac{1}{2} \Phi \sum_i q_i = \frac{1}{2} \Phi q.$$

Для системы заряженных проводников  $W = \sum_k \frac{1}{2} \Phi_k q_k$ .

В частности для двух проводников, имеющих одинаковые по величине, но разные по знаку заряды  $q$ :  $W = \frac{1}{2} \Phi_1 q_1 + \frac{1}{2} \Phi_2 q_2 = \frac{q}{2} |\Phi_1 - \Phi_2|$

Энергия заряженного конденсатора  $W = \sum_k \frac{1}{2} \Phi_k q_k = \frac{q}{2} U = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$ .

13. Объёмная плотность энергии электростатического поля.

#### Объёмная плотность энергии электростатического поля.

Рассмотрим плоский воздушный конденсатор. Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 S}{2d} (E \cdot d)^2 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} S \cdot d.$$

Объём пространства между пластинами конденсатора  $V = S \cdot d$ . Если поле между пластинами рассматривать как однородное, то единица объема этого поля обладает энергией  $w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ .

Эта величина  $w = \frac{W}{V}$  называется *объёмной плотностью энергии*.

Для случая неоднородного поля объёмная плотность энергии определяется соотношением  $w = \frac{dW}{dV}$ .

В веществе объёмную плотность энергии электрического поля, по аналогии, можно задать выражением  $w = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2}$ . В случае однородного изотропного диэлектрика  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ , поэтому  $w = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon \epsilon_0}$ . Т.к.  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , то  $w = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2} = \frac{\epsilon_0 (\vec{E}, \vec{E})}{2} + \frac{(\vec{E}, \vec{P})}{2}$ , где  $\frac{\epsilon_0 (\vec{E}, \vec{E})}{2}$  -

энергия электрического поля в вакууме;  $\frac{(\vec{E}, \vec{P})}{2}$  - энергия поляризации вещества.

## 14. Электрический ток, носители тока в средах, сила и плотность тока. Уравнение непрерывности.

**Электрический ток** – это упорядоченное движение электрических зарядов, которые называются носителями тока (например -электроны, ионы, макроскопические заряженные частицы – капельки, пылинки и т.д.)

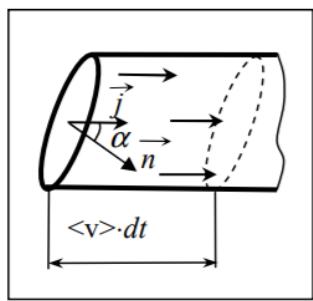
Характеристикой электрического тока является *вектор плотности тока*

$$\vec{j} = qn \langle \vec{v} \rangle,$$

где  $q$  – заряд носителей,  $n$  - концентрация носителей,  $\langle \vec{v} \rangle$  - вектор средней скорости упорядоченного движения. Единица измерения величины плотности тока  $\text{А/м}^2$  (Ампер на метр квадратный).

Если вектор плотности в любой точке тока не зависит от времени, то говорят, что ток *постоянный*.

При этом вектор плотности тока может меняться от точке к точке.



*Линия тока* – линия, касательная к которой в каждой точке направлена так же как и вектор плотности тока.

**Силой тока**, текущего в проводнике, называется величина отношение заряда  $dQ$ , переносимого через поперечное сечение проводника (с учетом направления) за промежуток времени  $dt$ , к величине

этого промежутка времени:  $I = \frac{dQ}{dt}$ .

сила тока в проводнике  $I = \left| \frac{dQ}{dt} \right| = \left| (\vec{j}, \vec{S}) \right|$ .

$$\oint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = -\frac{dQ}{dt} = 0.$$

Так как замкнутая поверхность ориентирована наружу, то поток векторного поля, направленного наружу - положительный, а направленного внутрь – отрицательный. Поэтому можно сказать, что сила втекающего тока имеет отрицательный знак, а втекающего - положительный:

Тогда

$$I_{\text{ВЫТЕК}} - I_{\text{ВТЕК}} = -\frac{dQ}{dt} = 0$$

Т.е. в случае постоянного заряда сила втекающего тока равна силе вытекающего тока.

## 15. Электрическое поле в проводнике с током, сторонние силы. Циркуляция вектора напряженности электрического поля в замкнутом контуре с током. ЭДС.

Силы, действующие на заряженную частицу и отличные от кулоновских, называются *сторонними*. При перемещении заряда эти силы тоже совершают работу А.стор. Отношение работы сторонних сил по перемещению электрического заряда между двумя точками поля к вели-

чине перенесенного заряда называется *электродвижущей силой* (ЭДС):  $\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q}$ .

Как видно из определения, ЭДС измеряется в Вольтах.

## 16. Закон Ома и Джоуля - Ленца в интегральной и дифференциальной формах.

Опыт показывает, что в большинстве проводников на движущиеся заряженные частицы кроме внешних сил, вызывающих движение, действуют силы сопротивления движению. Поэтому скорость частиц ограничена по величине. При этом величина средней скорости упорядоченного движения заряженной частицы пропорциональна величине внешней силы.

Силы сопротивления могут быть вызваны различными причинами (неоднородностями, нарушениями кристаллической структуры, тепловыми колебаниями и т.д.). Но для данного вещества существует прямая зависимость между величиной средней скорости упорядоченного движения носителей и величиной напряжённости электрического поля или поля сторонних сил

$\langle v \rangle = \mu E$ . Коэффициент  $\mu = \frac{\langle v \rangle}{E}$  называется *коэффициентом подвижности носителей*, единицы измерения  $\frac{m^2}{B \cdot c}$ .

Тогда для вектора плотности тока можно написать  $\vec{j} = qn \langle \vec{v} \rangle = qn\mu \vec{E} = \gamma \vec{E}$ .

Коэффициент  $\gamma = qn\mu$  называется *коэффициентом удельной электропроводности* (удельной проводимости) вещества. Единица измерения удельной проводимости См/м (Сименс/метр).

Удельная величина  $\rho = \frac{1}{\gamma}$  называется *удельным сопротивлением* вещества. Единица измерения удельного сопротивления Ом·м.

Выражение

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

является выражением закона Ома в дифференциальной форме. Из этого закона следует, в частности, что линии тока и силовые линии электрического поля (поля сторонних сил) в проводнике совпадают.

Величина  $R = \frac{l}{\gamma S_1} = \rho \frac{l}{S_1}$  называется (электрическим) *сопротивлением* проводника. Единицы измерения сопротивления – Ом. Тогда получаем соотношение

$$IR = |\phi_1 - \phi_2 + \Sigma_{12}|.$$

Это выражение называется законом Ома в *интегральной форме*.

*Величина силы тока в проводнике прямо пропорциональна полному напряжению на этом проводнике и обратно пропорциональна сопротивлению этого проводника*

Согласно первому началу термодинамики работа внешних сил равна изменению энергии системы и количеству тепла, отданного системой:

$$A' = \Delta W + \tilde{Q}$$

(тильда введена для отличия обозначений количества теплоты от величины заряда).

Изменение энергии равно сумме изменений кинетической, потенциальной и внутренней энергий:

$$\Delta W = \Delta W_{kin} + \Delta W_{pot} + \Delta U$$

Если проводник поконится и его форма не меняется, то изменением кинетической и потенциальной можно пренебречь  $\Delta W_{kin} = 0$ ,  $\Delta W_{pot} = 0$ . Если температура проводника постоянная, то внутренняя энергия не меняется  $\Delta U = 0$ . Поэтому изменение энергии

$$\Delta W = \Delta W_{kin} + \Delta W_{pot} + \Delta U = 0.$$

Тогда  $A' = \tilde{Q}$  - работа внешних сил равна количеству теплоты, выделившемуся в проводнике.

При протекании тока по проводнику работу совершают кулоновские и сторонние силы

$$A_{кул} + A_{стор} = (\varphi_1 - \varphi_2) q$$

На однородном участке проводника  $A_{кул} = (\varphi_1 - \varphi_2) q$ . Если по проводнику протекает постоянный ток силой  $I$ , то за интервал времени  $dt$  через сечение проводника пройдет заряд  $|q| = I \cdot dt$ , поэтому в абсолютных величинах  $|A_{кул}| = |(\varphi_1 - \varphi_2)| |q| = UI dt$ .

Т.е. количество теплоты, выделившееся в проводнике при протекании постоянного тока за время  $dt$  равно

$$\delta \tilde{Q} = UI dt = \frac{U^2}{R} dt = I^2 R dt$$

(Выделившееся количество считается положительным  $\tilde{Q} > 0$ ). Эта запись закона Джоуля-Ленца в интегральной форме.

Если у рассматриваемого цилиндрического проводника площадь поперечного сечения равна  $S_\perp$ , длина  $l$ , а удельное сопротивление  $\rho$ , то сила тока  $I = jS_\perp$ , сопротивление  $R = \rho \frac{l}{S_\perp}$ , поэтому

$$\delta \tilde{Q} = I^2 R dt = j^2 S_\perp^2 \rho \frac{l}{S_\perp} dt = j^2 \rho S_\perp l dt$$

Т.к. объем проводника  $V = lS_\perp$ , то можно найти объемную мощность тепловыделения

$$\bar{q} = \frac{\delta \tilde{Q}}{V dt} = j^2 \rho$$

Это выражение закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.

## Лекция 5-6

### 17. Вектор индукции магнитного поля. Закон Био-Савара-Лапласа.

Магнитное поле в любой точке поля характеризуется вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ . Величина индукции измеряется в Теслах (Тл). Силовой линией магнитного поля называется линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке направлена как вектор  $\vec{B}$ .

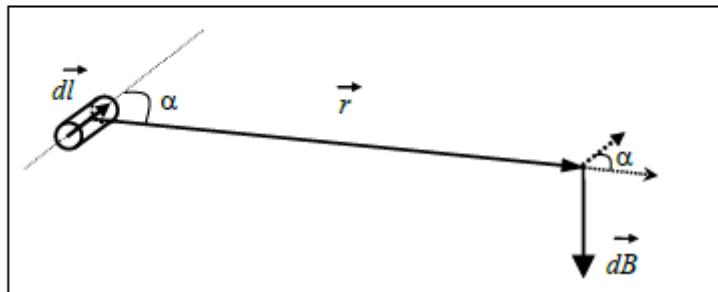
*Принцип суперпозиции для магнитного поля:* вектор индукции магнитного поля, создаваемого системой движущихся электрических зарядов (электрических токов), равен векторной сумме индукций магнитных полей, создаваемых каждым из движущихся электрических зарядов (токов) в отдельности:

$$\vec{B}_\Sigma = \sum_i \vec{B}_i$$

Опыт показывает, что магнитная индукция, создаваемая малым участком проводника с током  $I$ , определяется законом Био-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3}.$$

Величина вектора  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \alpha$ . Здесь  $d\vec{l}$  - касательный вектор к линии тока, направленный



### 18. Принцип суперпозиции магнитных полей. Расчёт поля прямого и кругового токов.

*Принцип суперпозиции для магнитного поля:* вектор индукции магнитного поля, создаваемого системой движущихся электрических зарядов (электрических токов), равен векторной сумме индукций магнитных полей, создаваемых каждым из движущихся электрических зарядов (токов) в отдельности:

$$\vec{B}_\Sigma = \sum_i \vec{B}_i.$$

### 19. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля. Магнитный поток.

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через ориентированную поверхность  $S$  называется величина  $\Phi_B = \iint_S (\vec{B}, d\vec{S})$ . Единицы измерения магнитного потока Вебер (Вб). В случае, когда площадка – плоская, а магнитное поле – однородное магнитный поток равен:  $\Phi_B = B \cdot S \cdot \cos \alpha$ , где  $S$  – величина площади,  $B$  – величина индукции,  $\alpha$  - угол между нормалью  $\vec{n}$  к площадке и вектором  $\vec{B}$ .

Так как силовые линии магнитного поля замкнуты (магнитное поле является вихревым), то они нигде не начинаются и не оканчиваются – поэтому магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю (сколько линий «вошло» внутрь замкнутой поверхности – столько же и «вышло»):

$$\iint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0.$$

Это выражение *теоремы Гаусса для магнитного поля* в интегральной форме.

Следовательно, в дифференциальной форме теорема Гаусса имеет вид:

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$$

это означает, что в природе нет точечных источников магнитного поля, т.е. раздельных положительных и отрицательных магнитных зарядов.

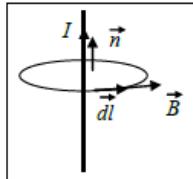
## 20. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах. Расчёт магнитного поля тороида и соленоида.

Так как силовые линии магнитного поля замкнутые, то это поле является *вихревым*, т.е.

$\text{rot}(\vec{B}) \neq \vec{0}$ , поэтому циркуляция этого векторного поля вдоль любого контура  $\Gamma$  не равна нулю

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot}(\vec{B}), d\vec{S}) \neq 0.$$

*Пример.* Найдем циркуляцию вектора магнитной индукции поля, создаваемого прямым проводом с током.



В качестве контура  $\Gamma$  возьмём какую-нибудь силовую линию (представляющую собой, как нам уже известно, окружность с центром на оси провода и лежащую в плоскости, перпендикулярной к проводу). Пусть радиус этой линии равен  $R$ , тогда величина магнитной индукции на этой линии постоянна и равна  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ . Выберем ориентацию на контуре  $\Gamma$  так, чтобы векторы  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$  были направлены одинаково. (В этом случае нормаль  $\vec{n}$  к кругу, ограниченному контуром, и направление тока совпадают.) Тогда

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_{\Gamma} B \cos(0^\circ) dl = \oint_{\Gamma} B dl = B \oint_{\Gamma} dl = B 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I.$$

Выберем ориентацию на силовой линии так, чтобы векторы  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  были направлены противоположно, (при этом нормаль  $\vec{n}$  к кругу, ограниченному контуром, и направление тока тоже будут направлены противоположно). В этом случае

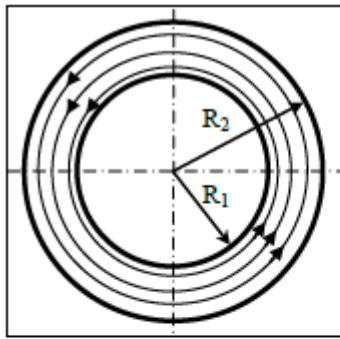
$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_{\Gamma} B \cos(180^\circ) dl = - \oint_{\Gamma} B dl = - B \oint_{\Gamma} dl = - B 2\pi R = - \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = - \mu_0 I.$$

Этот результат не является случайным, его можно обобщить в виде **теоремы о циркуляции вектора индукции магнитного поля**.

*Циркуляция вектора индукции магнитного поля по любому ориентированному замкнутому контуру пропорциональна алгебраической сумме токов, пронизывающих ориентированную площадку, ограниченную контуром. Ориентация контура и площадки согласованы правилом правого винта. Коэффициент пропорциональности – магнитная постоянная.*

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum_k I_k$$

*Сила тока берётся со знаком плюс, если угол между направлением тока и направлением нормали к площадке меньше 90 градусов, и минус если больше.*



*Тороид* – это тонкий проводник, плотно намотанный на поверхность тора (бублика).

Магнитное поле тороида обладает осевой симметрией, поэтому силовые линии являются концентрическими окружностями, с центрами на оси тороида. Пусть число витков в тороиде равно  $N$ , сила тока  $I$ . Рассмотрим циркуляцию вектора индукции вдоль контура  $\Gamma$  радиуса  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ), совпадающего с одной из:

силовых линий:  $\oint (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 NI$ . Вдоль  $\Gamma$  величина  $B$  постоянная, поэтому  $\oint (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint B dl = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$ , откуда внутри тороида  $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ .

Предположим, что диаметр сечения торoidalной части много меньше внутреннего радиуса  $d = R_2 - R_1 \ll R_1$ . Если ввести плотность намотки на внутреннем радиусе  $n = \frac{N}{2\pi R_1}$ , то можно записать  $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R_1} \frac{R_1}{r} = \mu_0 nI \left( \frac{r-x}{r} \right) = \mu_0 nI \left( 1 - \frac{x}{r} \right)$ , где  $0 < x < d \ll R_1 < r$ , то можно приближенно считать индукцию постоянной внутри тороида  $B \approx \mu_0 nI$ .

## 21. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Ускорение заряженных частиц.

Опыт показывает, что на заряженную частицу, которая движется в магнитном поле, действует сила, которая называется *магнитной силой* Лоренца. Если скорость частицы  $\vec{v}$ , заряд частицы  $q$ , индукция магнитного поля  $\vec{B}$ , то вектор магнитной силы Лоренца определяется соотношением

$$\vec{F}_{M\_L} = q(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Векторы  $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{F}_{M\_L})$  образуют правую тройку векторов.

Величина силы

$$F_{M\_L} = qvB \sin \alpha,$$

здесь  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

*Замечание.* Напомним практическое правило: направление вектора силы  $\vec{F}_{M\_L}$ , действующей на положительный заряд  $q > 0$ , определяется *правилом левой руки*: вектор силы  $\vec{F}_{M\_L}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . При этом, если вектор индукции  $\vec{B}$  входит в ладонь левой руки, пальцы (собранные вместе) направлены вдоль вектора скорости  $\vec{v}$ , то отогнутый большой палец укажет направление силы, действующей на положительный заряд (для отрицательного заряда – правая рука).

Так как вектор магнитной силы Лоренца перпендикулярен скорости, то её мощность и работа равна нулю. Поэтому кинетическая энергия (и величина скорости) заряженной частицы, движущейся только в магнитном поле остается постоянной.

Ускорители – установки, предназначенные для ускорения заряженных частиц до высоких энергий (выше 1МэВ, т.е. выше  $1,6 \cdot 10^{13}$  Дж).

В основе работы ускорителя заложено взаимодействие заряженных частиц с электрическим и магнитным полями. Электрическое поле способно напрямую совершать работу над частицей, то есть увеличивать её энергию. Магнитное же поле, создавая силу Лоренца, лишь отклоняет частицу, не изменяя её энергии, и задаёт орбиту, по которой движутся частицы.

Ускорители можно разделить на линейные и циклические.

В *линейных* ускорителях частицы движутся практически по прямой траектории, разгоняясь при движении специальными электромагнитными устройствами.

В *циклических* ускорителях частицы движутся по практически замкнутой траектории под действием магнитной силы Лоренца и разгоняются электрическим полем на определённых участках.

## 22. Эффект Холла.

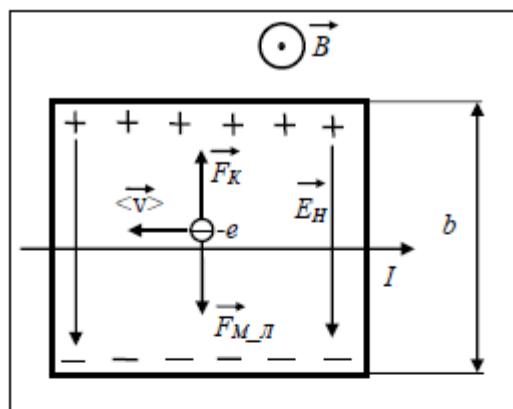
Помещаем в однородное магнитное поле (металлический) проводник выполненный в виде прямоугольного параллелепипеда так, чтобы силовые линии магнитного поля были направлены перпендикулярно одной из пар граней. Затем через вторую пару граней пропускаем электрический ток. Тогда между третьей парой граней появится напряжение. Это явление называется *эффектом Холла* или *гальваномагнитным явлением*.

*Напряжение Холла* между гранями

$$U_H = R_H b j B$$

$R_H$  – постоянная Холла,  $b$  – расстояние между гранями, между которыми возникает напряжение,  $j$  – величина плотности тока,  $B$  – величина магнитной индукции.

Ток в металлах создаётся валентными (свободными) электронами. Так как знак заряда электронов отрицательный, то они движутся против положительного направления для тока. На



движущиеся электроны в магнитном поле действует магнитная сила Лоренца, под действием которой электроны начинают перемещаться к одной из граней, где образуется избыточный отрицательный заряд. Тогда у противоположной грани будет наблюдаться недостаток электронов, т.е. избыток положительного (не скомпенсированного) заряда. Т.е. произойдёт разделение электрических зарядов у пары противоположных граней, что приведёт к появлению «наведённого» (индуцированного) электрического поля, напряженность которого  $E_H$ . Со стороны этого поля на электроны будет действовать сила Кулона, вектор которой будет направлен против вектора магнитной силы Лоренца. Когда перераспределение

зарядов «закончится» (наступит равновесие для движения в поперечном направлении), то эти силы уравновесят друг друга  $\vec{F}_K + \vec{F}_{M\_L} = \vec{0}$ , откуда  $qE_H = q\langle v \rangle B$ . Величина напряжённости электрического поля (Холла)  $E_H = \langle v \rangle B$ .

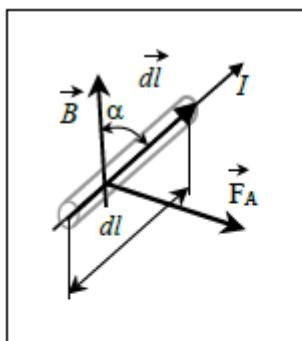
Среднюю скорость упорядоченного движения носителей можно найти из выражения для плотности тока  $j = qn\langle v \rangle$ , откуда  $\langle v \rangle = \frac{j}{qn}$ .

Для напряжения Холла  $U_H = E_H b$ , поэтому  $U_H = \frac{j}{qn} B b$ . Следовательно, постоянная Холла  $R_H = \frac{1}{qn}$ .

Эффект наблюдается не только в металлах, но и в полупроводниках. По знаку постоянной Холла судят о знаке заряда носителей.

Эффект Холла используется, например, в приборах, регистрирующих магнитные поля.

### 23. Проводники с током в магнитном поле. Закон Ампера. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.



Опыт показывает, что на прямолинейный проводник с током в однородном магнитном поле действует сила, зависящая от силы тока, индукции магнитного поля, длины проводника и положения проводника относительно силовых линий магнитного поля. Вектор этой силы направлен перпендикулярно проводнику. Эта сила называется *силой Ампера*.

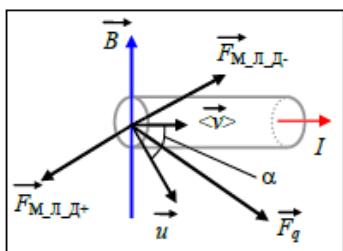
Если рассмотреть малый участок тонкого проводника длиной  $dl$ , по которому течёт ток силой  $I$ , то в магнитном поле с индукцией  $B$  на него будет действовать сила, вектор которой определяется соотношением:

$$\vec{F}_A = I(\vec{dl} \times \vec{B}).$$

Здесь, как и ранее,  $\vec{dl}$  - это вектор, направленный по касательной к линии тока в положительном направлении для тока. Векторы  $(\vec{dl}, \vec{B}, \vec{F}_A)$  образуют правую тройку векторов. Величина силы  $F_A = IB \sin \alpha dl$ , где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{dl}$  и  $\vec{B}$ .

#### Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.

Рассмотрим (металлический) проводник, который *поступательно* движется с некоторой скоростью  $\vec{u}$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  (предполагаем, что  $u \ll c$ ). У каждого носителя тока есть дополнительная скорость упорядоченного движения вместе с проводником  $\vec{u}$ . Т.к. проводник в целом электрически нейтрален, то в нём присутствуют и положительные заряды,



покоящиеся относительно проводника, и которые тоже будут перемещаться со скоростью  $\vec{u}$  вместе с проводником. Суммарный заряд этих положительных зарядов в объёме проводника равен по величине суммарному заряду электронов. Суммарная дополнительная плотность тока равна в этом случае нулю

$$\vec{j}_{\text{доп}} = q_+ n_+ \vec{u} + q_- n_- \vec{u} = Q_+ \vec{u} + Q_- \vec{u} = \vec{0}.$$

На свободные электроны, помимо силы  $\vec{F}_q = q(\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B})$ , вызванной вектором средней скорости упорядоченного движения, будет действовать дополнительная магнитная сила Лоренца, вызванная вектором скорости  $\vec{u}$   $\vec{F}_{M\_L\_D-} = -q(\vec{u} \times \vec{B})$ .

Так как положительные заряды тоже перемещаются в магнитном поле (вместе с проводником), то появится дополнительная магнитная сила Лоренца  $\vec{F}_{M\_L\_D+} = q(\vec{u} \times \vec{B})$ .

Магнитные силы Лоренца, действующие на положительные и отрицательные заряды и вызванные дополнительной скоростью  $\vec{u}$ , компенсируют друг друга

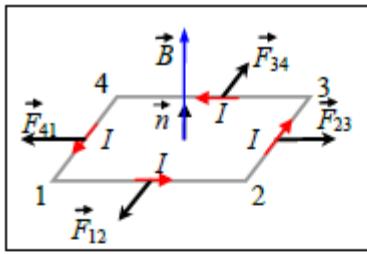
$$\vec{F}_{M\_L\_D+} + \vec{F}_{M\_L\_D-} = \vec{0}.$$

Поэтому выражение для суммарной магнитной силы Лоренца, действующей на проводник с током, движущийся в магнитном поле, не изменится

$$\vec{F}_A = I(\vec{dl} \times \vec{B}).$$

Найдём работу этой силы на малом перемещении проводника  $d\vec{r}$ , считая силу тока постоянной

$$\delta A_A = (\vec{F}_A, d\vec{r}) = I((\vec{dl} \times \vec{B}), d\vec{r}).$$



Пусть в декартовой системе координат  $d\vec{l} = (dx, dy, dz)$  и

$d\vec{r} = (dr_x, dr_y, dr_z)$ , а  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  - орты, тогда, т.к

$$(d\vec{l} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ dx & dy & dz \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix},$$

то

$$((d\vec{l} \times \vec{B}), d\vec{r}) = \begin{vmatrix} dr_x & dr_y & dr_z \\ dx & dy & dz \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ dx & dy & dz \\ dr_x & dr_y & dr_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ dr_x & dr_y & dr_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = ((d\vec{r} \times d\vec{l}), \vec{B}).$$

(Сначала переставили первую и третью строки, а затем вторую и третью).

Т.е. работу силы Ампера можно записать в виде  $\delta A_A = I((d\vec{l} \times \vec{B}), d\vec{r}) = I((d\vec{r} \times d\vec{l}), \vec{B})$ .

По определению векторного произведения векторов  $(d\vec{r} \times d\vec{l}) = d\vec{S}$  - это вектор, перпендикулярный к векторам  $d\vec{r}$  и  $d\vec{l}$ , а длина его равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $d\vec{r}$  и  $d\vec{l}$ . Поэтому  $((d\vec{r} \times d\vec{l}), \vec{B}) = (\vec{B}, d\vec{S}) = d\Phi_B$  - поток вектора магнитной индукции через эту малую площадку. Следовательно, работа  $\delta A_A = I \cdot d\Phi_B$ .

В общем случае, при *постоянной силе тока*  $I$ , можно записать выражение для работы силы Ампера

$$A_A = I \iint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = I \cdot \Delta\Phi_B$$

где  $\Delta\Phi_B = \iint_S (\vec{B}, d\vec{S})$  - магнитный поток через поверхность «заметаемую» проводником при его

движении, при этом в каждый момент времени векторы  $(d\vec{r}, d\vec{l}, d\vec{S})$  образуют правую тройку.

## 24. Контур с током в магнитном поле. Магнитный момент контура с током. Силы, действующие на контур с током в магнитном поле.

Рассмотрим прямоугольный (ориентированный) контур 12341 с постоянным током, находящийся в однородном магнитном поле. Направление нормали к контуру и направление тока в контуре согласованы правилом правого винта (буравчика). Пусть сила тока в контуре  $I$ ,  $B$  – величина индукции магнитного поля,  $\alpha$  – угол между нормалью к контуру и вектором  $\vec{B}$ . Пусть длина стороны 12 равна  $a$ , а стороны 23 –  $b$ .

Рассмотрим несколько различных случаев.

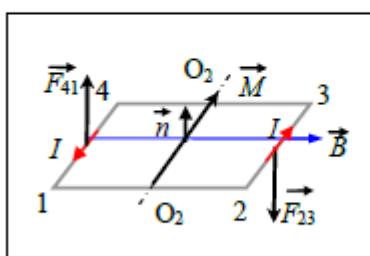
1) Пусть угол  $\alpha=0$ , т.е. векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{n}$  сонаправлены.

12

---

Семестр 3. Лекции 7-8.

На стороны прямоугольника действуют силы  $F_{12} = F_{34} = IBa$ ,  $F_{23} = F_{41} = IBb$ . Векторы всех сил лежат в одной плоскости и растягивают контур. Сумма сил равна нулевому вектору, и суммарный момент сил – тоже нулевой вектор. Если угол  $\alpha=\pi$ , то силы сжимают контур.



2) Пусть  $\alpha=\pi/2$  и вектор  $\vec{B}$  параллелен стороне 12. В этом случае  $F_{12} = F_{34} = 0$ ,  $F_{23} = F_{41} = IBb$ . Сумма сил равна нулевому вектору, но суммарный момент сил равен моменту пары сил (например, относительно оси  $O_1O_2$ )

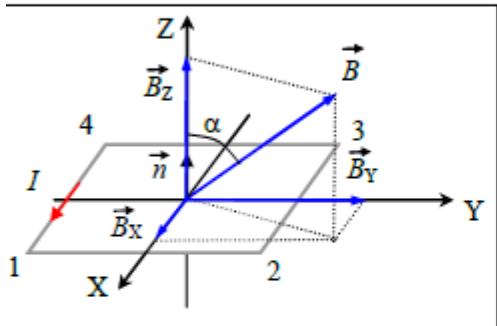
$$M_{O_1O_2} = F_{23} \cdot \frac{a}{2} + F_{41} \cdot \frac{a}{2} = IBba. \text{ А вектор момента сил } \vec{M} \text{ лежит на оси } O_1O_2 \text{ (т.к. векторы сил стремятся развернуть контур вокруг этой оси).}$$

Напоминание – направление вектора момента силы вдоль оси согласовано с возможным направлением поворота под действием силы вокруг этой оси «правым винтом».

3) Рассмотрим случай, когда вектор  $\vec{B}$  направлен произвольным образом. Введём декартову систему координат, начало которой поместим в центре прямоугольника, ось Z направлена вдоль нормали, а стороны параллельны осям X и Y. Тогда в координатной записи  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ .

Расписываем проекции моментов сил на оси

$M_x = IB_y ab$ ,  $M_y = -IB_x ab$ ,  $M_z = 0$ . Для этого контура вектор магнитного момента равен



$$\vec{p}_m = \bar{n}IS = \bar{n}Iab, \text{ его координаты } \vec{p}_m = (0, 0, lab).$$

*Утверждение.* Момент сил, действующий на контур с током в магнитном поле равен

$$\vec{M} = (\vec{p}_m \times \vec{B}).$$

*Доказательство.* Это утверждение легко проверить во введённой декартовой системе координат. Действительно

$$\vec{M} = (\vec{p}_m \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ p_{mx} & p_{my} & p_{mz} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & lab \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x IB_y ab - \vec{e}_y lab B_x. \clubsuit$$

*Следствие.* Величина момента сил, действующих на контур с током в магнитном поле равна

$$M = p_m B \sin \alpha = ISB \sin \alpha.$$

Отсюда следует, что вектор момента силы равен нулю в двух случаях: при  $\alpha=0$  и  $\alpha=\pi$ . Но положение равновесия при  $\alpha=\pi$  является неустойчивым. Следовательно, момент сил стремится развернуть контур так, чтобы вектор магнитного момента был сонаправлен вектору индукции магнитного поля.

## 25. Магнитное поле в магнетиках. Намагниченность вещества. Вектор намагниченности.

Опыт показывает, что в веществе магнитное поле изменяется по сравнению с магнитным полем в вакууме  $\vec{B}_0$ . Всякое вещество является *магнетиком*, т.е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитные свойства (намагничиваться). При этом вещество создаёт собственное магнитное поле  $\vec{B}'$ , поэтому по принципу суперпозиции в веществе

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'.$$

Для характеристики магнитных свойств вещества вводят *вектор намагниченности вещества* – усреднённый суммарный магнитный момент единицы (физически малого) объёма

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V},$$

единицы измерения величины *намагниченности* – А/м (Ампер/метр).

Рассмотрим в веществе теорему о циркуляции  $\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}_\Sigma$ . Суммарное магнитное поле  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$  создаётся суммарной плотностью тока – векторной суммой микроскопических (атомарных и молекулярных) токов и макроскопических токов (вызванных переносом сторонних зарядов – их называют *токами проводимости* или *сторонними токами*)  $\vec{j}_\Sigma = \vec{j}_M + \vec{j}_{CT}$ .

Так как  $\operatorname{rot}(\vec{B}_0) = \mu_0 \vec{j}_{CT}$  и  $\operatorname{rot}(\vec{B}') = \mu_0 \vec{j}_M$ , то из выражения  $\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 (\vec{j}_M + \vec{j}_{CT})$  следует, что для определения магнитной индукции в веществе, надо знать плотность молекулярных токов. Оказывается, для вектора намагниченности вещества справедливо соотношение

$$\operatorname{rot}(\vec{J}) = \vec{j}_M.$$

В однородном изотропном магнетике (для слабых полей) векторы намагниченности и напряжённости совпадают по направлению

---

Семестр 3. Лекции 5-6.

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

где безразмерный коэффициент  $\chi$  носит название *магнитная восприимчивость вещества*.

26. Вектор напряжённости магнитного поля и его связь с векторами индукции и намагниченности. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость вещества.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

(единицы измерения А/м (Ампер/метр)), тогда для вектора напряжённости магнитного поля получаем теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{j}_{CT}$$

откуда можно получить теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в интегральной форме. Пусть  $\sum_k I_{CT\_k} = \iint_S (\vec{j}_{CT}, d\vec{S})$  – алгебраическая сумма сторонних токов (токов проводимости), пронизывающих некоторую незамкнутую ориентированную поверхность внутри магнетика, тогда

$$\oint_\Gamma (\vec{H}, d\vec{l}) = \sum_k I_{CT\_k},$$

В однородном изотропном магнетике (для слабых полей) векторы намагниченности и напряжённости совпадают по направлению

---

Семестр 3. Лекции 5-6.

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

где безразмерный коэффициент  $\chi$  носит название *магнитная восприимчивость вещества*.

Поэтому выражение  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$  в однородном изотропном магнетике можно записать в виде

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$$

Величина  $\mu = 1 + \chi$  имеет название *относительная магнитная проницаемость вещества*.

Поэтому в однородном изотропном магнетике для индукции поля и напряжённости

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

27. Теоремы о циркуляции векторов напряжённости и намагниченности в интегральной и дифференциальной формах.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

(единицы измерения А/м (Ампер/метр)), тогда для вектора напряжённости магнитного поля получаем теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в дифференциальной форме

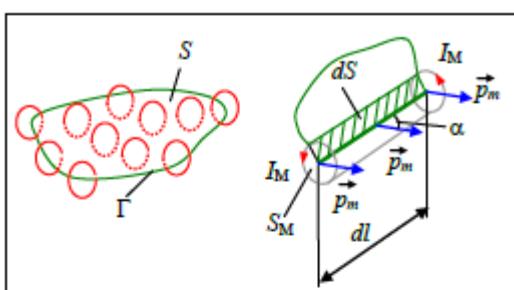
$$rot(\vec{H}) = \vec{j}_{ct}$$

откуда можно получить теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в интегральной форме. Пусть  $\sum_k I_{CT\_k} = \iint_S (\vec{j}_{ct}, d\vec{S})$  - алгебраическая сумма сторонних токов (токов проводимости), пронизывающих некоторую незамкнутую ориентированную поверхность внутри магнетика, тогда

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = \sum_k I_{CT\_k},$$

т.е. циркуляция вектора напряжённости магнитного поля вдоль края любой ориентированной поверхности внутри магнетика равна алгебраической сумме токов проводимости через эту поверхность.

Выделим внутри вещества (магнетика) какую-то ориентированную (незамкнутую) поверхность  $S$  и найдем поток плотности молекулярного тока через эту поверхность



$$\Phi_{j_M} = \iint_S (\vec{j}_M, d\vec{S}).$$

Те молекулярные токи, которые не охватывают край этой поверхности, будут пронизывать эту поверхность дважды – в прямом и обратном направлении, поэтому их вклад в поток равен нулю

$$\iint_{S_{\text{внеш}}^{\text{внутр}}} (\vec{j}_M, d\vec{S}) = 0.$$

Для рассмотрения потока от токов, охватывающих край, выделим настолько малую часть поверхности с примыкающим краем, чтобы все молекулярные токи, которые охватывают край можно было бы считать одинаково ориентированными. Пусть длина граничной линии этой части равна  $dl$ . Предположим, что векторы магнитных моментов молекулярных токов направлены под углом  $\alpha$  к этой части граничной линии. Выделим косой цилиндр, осью которого является часть граничной линии, а основанием – молекулярный круговой ток, площадь контура которого  $S_M$ . Этот цилиндр отсекает от поверхности  $S$  кусок, площадь которого  $dS$ . Тогда поток плотности молекулярного тока через этот кусок  $dS$  равен суммарному молекулярному току всех круговых токов, попавших в цилиндр

$$\Phi_{j_M} = \iint_{dS} (\vec{j}_M, d\vec{S}) \approx (\vec{j}_M, d\vec{S}) = \sum_{\text{цилиндр}} I_M.$$

Объём цилиндра  $V = S_M dl \cos \alpha$ , сумма проекций векторов магнитных моментов на ось цилиндра

$$\text{ра } \sum_{\text{цилиндр}} p_n \cos \alpha = \sum_{\text{цилиндр}} I_M S_M \cos \alpha = S_M \cos \alpha \sum_{\text{цилиндр}} I_M. \text{ Так как } \bar{J} = \frac{\sum p_n}{V}, \text{ то}$$

$$J \cos \alpha = \frac{\sum p_n \cos \alpha}{V} = \frac{S_M \cos \alpha \sum_{\text{цилиндр}} I_M}{S_M dl \cos \alpha} = \frac{1}{dl} \sum_{\text{цилиндр}} I_M.$$

Поэтому вблизи края поверхности можно записать равенство

$$J dl \cos \alpha = \sum_{\text{цилиндр}} I_M = (\vec{j}_M, d\vec{S}) \text{ или } (\bar{J}, d\vec{l}) = (\vec{j}_M, d\vec{S}),$$

где  $dS$  – часть поверхности вблизи края. Соответственно, вдоль всего её края  $\Gamma$

$$\oint_{\Gamma} (\bar{J}, d\vec{l}) = \iint_{S_{\text{внеш}}} (\vec{j}_M, d\vec{S})$$

Но всю поверхность  $S$  можно разбить на две части  $S = S_{\text{ВНУТР}} + S_{\text{ВНЕШ}}$ . Так как  $\iint_{S_{\text{внеш}}} (\vec{j}_M, d\vec{S}) = 0$ ,

то можно записать равенство

$$\oint_{\Gamma} (\bar{J}, d\vec{l}) = \iint_{S_{\text{внеш}}} (\vec{j}_M, d\vec{S}) + \iint_{S_{\text{внутр}}} (\vec{j}_M, d\vec{S}) = \iint_S (\vec{j}_M, d\vec{S})$$

т.е. циркуляция вектора намагнченности вдоль края любой ориентированной поверхности внутри магнетика равна потоку плотности молекулярного тока через эту поверхность.

Используя теорему Стокса  $\oint_{\Gamma} (\bar{J}, d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot}(\bar{J}), d\vec{S})$  можно переписать это равенство в виде

$$\iint_S (\text{rot}(\bar{J}), d\vec{S}) = \iint_S (\vec{j}_M, d\vec{S})$$

откуда следует дифференциальная форма теоремы о циркуляции  $\text{rot}(\bar{J}) = \vec{j}_M$ .

Подставив это соотношение в равенство  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 (\vec{j}_M + \vec{j}_{cr})$ , получим

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \text{rot}(\bar{J}) + \vec{j}_{cr} \text{ или } \text{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \bar{J}\right) = \vec{j}_{cr}.$$

28. Магнитное поле на границе раздела магнетиков.

29. Диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

1) Диамагнетики – это магнетики, у которых магнитная восприимчивость принимает отрицательные значения  $\chi < 0$ , но при этом выполняется  $0 < \mu = 1 + \chi < 1$ .

Так как  $\vec{J} = \chi \vec{H} = \chi \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right)$ , откуда  $\vec{J} = \frac{\chi}{1 + \chi} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ , то у диамагнетиков вектор намагниченности направлен против вектора индукции магнитного поля.

Диамагнетики выталкиваются из области сильного магнитного поля.

2) Парамагнетики – магнетики, у которых магнитная восприимчивость положительна, но не принимает больших значений. Вектор намагниченности сонаправлен с вектором индукции.

3) Ферромагнетики – вещества, магнитная проницаемость которых достигает больших значений (тысячи и более). Намагниченность ферромагнетиков зависит от их предыдущего состояния (гистерезис).

## Лекция 9

30. Электромагнитная индукция. Закон Фарадея. Правило Ленца. Самоиндукция.

Взаимная индукция. Индуктивность. Индуктивность соленоида.

Опыт показывает, что если взять замкнутый проводник, то при *изменении* магнитного потока через площадку ограниченную проводником, в проводнике появляется индукционный ток – это явление называется *электромагнитной индукцией*. Индукционный ток появляется под действием сторонних сил со стороны *вихревого электрического поля*, возникающего при изменении магнитного потока. Величина ЭДС индукции определяется скоростью изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} \iint_S (\vec{B}, d\vec{S}).$$

Знак минус принято писать для согласования с **правилом Ленца**: *индукционный ток направлен так, чтобы создаваемое им магнитное поле компенсировало изменение магнитного потока*.

Закон электромагнитной индукции носит имя Фарадея (*Фарадей (Faraday) Майкл (1791-1867)*,

### Самоиндукция

Ток, протекающий по замкнутому проводнику, создаёт магнитное поле и, соответственно, магнитный поток через площадку, ограниченную проводником. Если форма проводника постоянная, то между силой тока в проводнике и магнитным потоком через площадку, ограниченную проводником, существует прямая зависимость  $\Phi_B = L \cdot I$ . Коэффициент пропорциональности  $L$  при отсутствии ферромагнетиков является постоянной величиной и называется *индуктивностью* контура или *коэффициентом самоиндукции* контура. Единица измерения индуктивности – Генри (Гн).

При изменении силы тока  $I$  в контуре будет изменяться и магнитный поток через площадку контура  $\Phi$ , поэтому в контуре появится индукционный ток  $I_i$ , направление которого определяется правилом Ленца. Этот ток будет направлен так, чтобы скомпенсировать изменение магнитного потока, т.е. основного тока  $I$ . Это явление называется *самоиндукцией*. Согласно закону Фарадея  $\Sigma_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ , поэтому ЭДС самоиндукции

$$\Sigma_{si} = -L \frac{dI}{dt}.$$

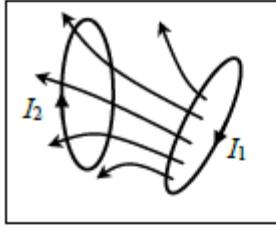
*Пример.* Найдем индуктивность длинного соленоида, внутри которого нет ферромагнетика (но, возможно, есть диамагнетик или парамагнетик). Будем предполагать, что длина соленоида значительно превосходит его диаметр, поэтому можно считать, что магнитное поле внутри соленоида является однородным. Пусть  $N$  – число витков,  $l$  – длина соленоида,  $R$  – радиус. Если сила тока, протекающего в соленоиде равна  $I$ , то величина индукции внутри равна

$$B = \mu\mu_0 I \frac{N}{l}.$$

Магнитный поток через поверхность, ограниченную одним витком  $\Phi = BS = \mu\mu_0 I \frac{N}{l} \pi R^2$ , потокосцепление во всем соленоиде  $\Phi_\Sigma = N\Phi = \mu\mu_0 I \frac{N^2}{l} \pi R^2$ . Индуктивность соленоида

$$L = \frac{\Phi_\Sigma}{I} = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} \pi R^2. \clubsuit$$

## Взаимная индуктивность



Рассмотрим два контура (расположенных на не очень большом расстоянии друг от друга), по которым текут токи  $I_1$  и  $I_2$ . Каждый из контуров создаёт в окружающем пространстве магнитное поле и, соответственно, магнитный поток через другой контур. По аналогии с коэффициентом самоиндукции можно записать:

магнитный поток, создаваемый во втором контуре током  $I_1$ , протекающим в первом контуре  $\Phi_2 = L_{21}I_1$ ;

магнитный поток, создаваемый в первом контуре током  $I_2$ , протекающим во втором контуре  $\Phi_1 = L_{12}I_2$ .

Коэффициенты  $L_{12}$ ,  $L_{21}$  называются *коэффициентами взаимной индукции* (или *взаимной индуктивностью*) контуров. Контуры при этом принято называть (магнитно) *связанными*.

В отсутствие ферромагнетиков выполняется равенство  $L_{12}=L_{21}$ . Очевидно, эти коэффициенты зависят от формы и относительно расположения контуров.

Энергия магнитного поля, создаваемого парой таких контуров с токами, определяется

формулой  $W = \iiint_V w dV = \iiint_V \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{2} dV$ . Т.к. по принципу суперпозиции  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$  и

$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$ , то

$$W = \iiint_V \frac{(\vec{B}_1 + \vec{B}_2, \vec{H}_1 + \vec{H}_2)}{2} dV = \iiint_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_1)}{2} dV + \iiint_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_2)}{2} dV + \iiint_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_2)}{2} dV + \iiint_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_1)}{2} dV$$

Энергия магнитного поля, созданная каждым контуром в отдельности

$$W_1 = \iiint_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_1)}{2} dV = \frac{L_1 I_1^2}{2}, \quad W_2 = \iiint_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_2)}{2} dV = \frac{L_2 I_2^2}{2}.$$

Если в среде нет ферромагнетиков, то  $\frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_2)}{2} = \frac{\mu_0 \mu (\vec{H}_1, \vec{H}_2)}{2} = \frac{(\vec{H}_1, \vec{B}_2)}{2}$ , поэтому

$$\iiint_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_2)}{2} dV = \frac{L_{12} I_1 I_2}{2} = \frac{L_{21} I_1 I_2}{2} = \iiint_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_1)}{2} dV.$$

Тогда энергия взаимодействия двух контуров может быть записана в виде  $W_{12} = L_{12} I_1 I_2$ .

### 31. Вихревые токи.

следует, что силовые линии поля сторонних сил и линии тока совпадают. Но т.к. поле вихревое

$$\text{rot}(\vec{E}_{CT}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$$

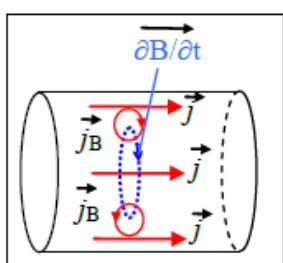
то его силовые линии – замкнутые, поэтому и линии тока

$$\text{rot}(\vec{j}) = \text{rot}(\gamma \vec{E}_{CT}) = -\gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$$

будут замкнутыми. Т.е. векторное поле плотности тока, возникающее в проводнике при изменении внешнего магнитного поля, тоже вихревое. Такие токи получили название **вихревые токи** или **токи Фуко**. Знак минус в этом выражении указывает на правило Ленца – вектор плотности вихревого тока в окрестности данной точки направлен так, чтобы создаваемое им магнитное поле компенсировало изменение индукции внешнего магнитного поля.

Токи Фуко возникают, например, при движении проводников в неоднородном магнитном поле. При этом проводник начинает разогреваться (закон Джоуля-Ленца), на участки проводника с вихревыми токами действуют силы Ампера, тормозящие проводник. (Явление разогрева используют в индукционных печах, явление торможения – в демпферных устройствах, служащих для успокоения колебаний).

Если по массивному проводнику протекает переменный электрический ток с плотностью  $\vec{j}$ , то внутри проводника он создаёт переменное магнитное поле, вектор изменения которого



$\partial \vec{B} / \partial t$ , в свою очередь, приводит к появлению **вихревых токов** с плотностью  $\vec{j}_B$ , препятствующих изменению магнитного поля. Эти токи направлены так, что внутри проводника они ослабляют основной ток, а у поверхности, наоборот, усиливают. Таким образом, суммарная плотность тока у поверхности проводника усиливается, а внутри уменьшается.

Такое явление называют **скин-эффектом**. Следовательно, при скин-эффекте, если «выкинуть» внутренность проводника, то это не повлияет на его сопротивление переменному току. Поэтому, в устройствах, где протекает ток высокой частоты, проводники выполняют в форме полых трубок, при этом их внешнюю поверхность даже покрывают веществом с большой проводимостью (например, серебром).

### 32. Плотность энергии магнитного поля.

#### Объёмная плотность энергии магнитного поля.

Пусть длина катушки равна  $l$ , радиус  $R$ , число витков  $N$ . Если по обмотке катушки протекает ток силой  $I$ , то энергия магнитного поля равна  $W_M = \frac{LI^2}{2}$ . Индуктивность катушки

$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} \pi R^2$ . Индукция магнитного поля в катушке  $B = \mu\mu_0 \frac{N}{l} I$ , напряжённость магнитного поля  $H = \frac{B}{\mu\mu_0} = \frac{N}{l} I$ , объём пространства внутри соленоида  $V = \pi R^2 l$ . Поэтому

$$W_M = \frac{1}{2} \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} \pi R^2 I^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi R^2 l \cdot \mu\mu_0 \frac{N}{l} I \cdot \frac{N}{l} I = \frac{1}{2} \cdot V \cdot B \cdot H.$$

Т.к. поле внутри соленоида можно рассматривать как однородное, то объёмная плотность энергии  $w = \frac{W}{V}$  магнитного поля определяется соотношением

$$w = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{2}.$$

### 33. Энергия и силы в магнитном поле. Магнитное давление.

Энергия магнитного поля, создаваемого парой таких контуров с токами, определяется

формулой  $W = \iiint_V w dV = \iiint_V \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{2} dV$ . Т.к. по принципу суперпозиции  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$  и

$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$ , то

$$W = \iiint_V \frac{(\vec{B}_1 + \vec{B}_2, \vec{H}_1 + \vec{H}_2)}{2} dV = \iiint_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_1)}{2} dV + \iiint_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_2)}{2} dV + \iiint_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_2)}{2} dV + \iiint_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_1)}{2} dV$$

Энергия магнитного поля, создаваемая каждым контуром в отдельности

$$W_1 = \iiint_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_1)}{2} dV = \frac{L_1 I_1^2}{2}, \quad W_2 = \iiint_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_2)}{2} dV = \frac{L_2 I_2^2}{2}.$$

Если в среде нет ферромагнетиков, то  $\frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_2)}{2} = \frac{\mu_0 \mu (\vec{H}_1, \vec{H}_2)}{2} = \frac{(\vec{H}_1, \vec{B}_2)}{2}$ , поэтому

$$\iiint_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_2)}{2} dV = \frac{L_{12} I_1 I_2}{2} = \frac{L_{21} I_1 I_2}{2} = \iiint_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_1)}{2} dV.$$

Тогда энергия взаимодействия двух контуров может быть записана в виде  $W_{12} = L_{12} I_1 I_2$ .

## Силы в магнитном поле.

Найдём силу взаимодействия  $F$  между витками (почти идеального) соленоида. Т.к. в каждом из витков токи текут в одинаковых направлениях, то витки взаимно притягиваются, поэтому силы взаимодействия стремятся сжать соленоид. Векторы этих сил направлены параллельно силовым линиям магнитного поля в соленоиде, поэтому их принято называть *натяжениями в магнитном поле*.

8

---

Семестр 3. Лекция 9.

Предположим, что при постоянной силе тока длина соленоида очень медленно увеличивается на малую величину  $dl$ . Тогда работа внешних сил равна изменению энергии соленоида  $\delta A_{\text{ВНЕШ}} = dW_M$ . Но

$$\delta A_{\text{ВНЕШ}} = \sum_{i=1}^N F_{\text{ВНЕШ}} \delta x_i,$$

где  $\delta x_i$  - перемещение каждого из витков. Очевидно, что  $\sum_{i=1}^N \delta x_i = dl$ . Очевидно, что внешняя

сила, растягивающая соленоид, равна по величине силе взаимодействия между витками

$F_{\text{ВНЕШ}} = F$ , поэтому

$$\delta A_{\text{ВНЕШ}} = \sum_{i=1}^N F_{\text{ВНЕШ}} \delta x_i = F \sum_{i=1}^N \delta x_i$$

Изменение длины соленоида приведёт к изменению объёма магнитного поля внутри, следовательно, к изменению энергии  $dW = W_K - W_H = w \cdot dV = w \cdot S \cdot dl$ . Здесь  $w$  – объёмная плотность энергии магнитного поля,  $S$  – площадь поперечного сечения соленоида. Отсюда следует, что сила взаимодействия между витками (натяжения в магнитном поле)  $F = wS$ , а величина напряжения натяжения (вдоль силовых линий) равна  $p_{\parallel} = \frac{F}{S} = w$  – объёмной плотности энергии магнитного поля.

Теперь найдём силу  $F_{\perp}$  в направлении перпендикулярном силовым линиям магнитного поля внутри соленоида – эти силы «распирают» витки в радиальном направлении. Такие силы принято называть *давлениями* в магнитном поле. Предположим, что при постоянной силе тока радиус соленоида увеличился на малую величину  $dR$ . Объём соленоида увеличится – поэтому увеличится и энергия магнитного поля  $dW = W_K - W_H = w \cdot dV = w \cdot S_{\text{внутр}} \cdot dR$ . Здесь  $w$  – объёмная плотность энергии магнитного поля,  $S_{\text{внутр}}$  – площадь внутренней поверхности соленоида. Так как работа силы  $F_{\perp}$  равна  $\delta A = F_{\perp} dR$ , то  $F_{\perp} = w \cdot S_{\text{внутр}}$ , соответственно, напряжение давления равно  $p_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{S_{\text{внутр}}} = w$  – объёмной плотности энергии магнитного поля.

*Определение.* Силы, действующие на тела со стороны магнитного (или электрического) поля, называют *пондемоторными*.

## Лекция 10

34. Основные положения электромагнитной теории Максвелла. Вихревое электрическое поле.

Ток смещения. Закон полного тока.

Закон электромагнитной индукции Фарадея

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} \iint_s (\vec{B}, d\vec{S}) \text{ или } \operatorname{rot}(\vec{E}_{ct}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

свидетельствует о том, что изменение магнитного поля приводит к появлению сторонних сил в проводнике, действующих на носители тока. Как показывает пример с проводником, поступательно движущимся в магнитном поле, эти сторонние силы аналогичны силам, действующим на электрические заряды со стороны электрического поля. Поле этих сил является вихревым, поэтому его называют *вихревым электрическим полем*.

Первая гипотеза Максвелла состоит в том, что появление вихревого электрического поля из-за изменяющегося во времени магнитного поля в некоторой области пространства, не зависит от наличия в этой области проводника или носителей тока. При этом электрическое поле в любой области пространства является *суперпозицией* электростатического (кулоновского) поля (с напряжённостью  $\vec{E}_q$ ), создаваемого электрическими зарядами, и вихревого электрического полей (с напряжённостью  $\vec{E}_B$ ), созданного переменным магнитным полем. Напряженность суммарного электрического поля  $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$ . Найдем дивергенцию суммарного электрического поля. Т.к.

$$\operatorname{div}(\vec{E}_q) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ и } \operatorname{div}(\vec{E}_B) = 0, \text{ то } \operatorname{div}(\vec{E}) = \operatorname{div}(\vec{E}_q) + \operatorname{div}(\vec{E}_B) = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Из  $\vec{E}_q = -\operatorname{grad}(\phi)$  и  $\operatorname{rot}(\vec{E}_q) = \operatorname{rot}(-\operatorname{grad}(\phi)) = \vec{0}$  следует равенство

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = \operatorname{rot}(\vec{E}_q) + \operatorname{rot}(\vec{E}_B) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

### Ток смещения.

Теорема о циркуляции для вектора напряженности магнитного поля имеет вид  $\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}$ .

Применим к обеим частям дивергенцию  $\text{div}(\text{rot}(\vec{H})) = \text{div}(\vec{j})$ . Левая часть равна нулю

$\text{div}(\text{rot}(\vec{H})) = 0$ , но правая  $\text{div}(\vec{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  (уравнение непрерывности электрического заряда – см.

Приложение 1).

### Семестр 3. Лекция 10.

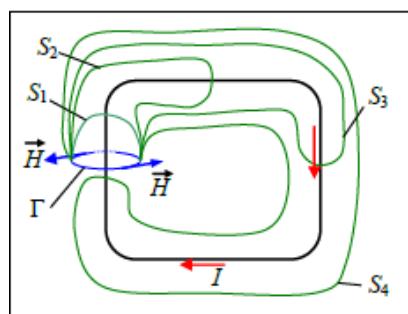
Откуда следует  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , т.е. объемная плотность заряда не зависит от времени. Следовательно, раз

енство  $\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}$  применимо для случая, когда  $\text{div}(\vec{j}) = 0$ . В этом случае векторное поле плот-

ности тока  $\vec{j}$  является вихревым, поэтому линии тока замкнутые. Рассмотрим теорему о циркуляции вектора напряженности вдоль замкнутого проводника, в котором течёт постоянный ток:  $\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = I$ . Линии тока в этом случае замкнутые, поэтому если взять несколько поверхностей  $S_1, S_2, S_3, S_4$  имеющих вид мешков, общим горлом которых является контур  $\Gamma$ , то должно выполняться равенство

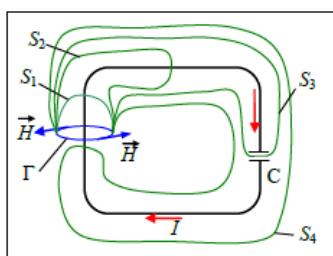
$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = \iint_{S_1} (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_{S_2} (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_{S_3} (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_{S_4} (\vec{j}, d\vec{S}) = I$$

т.к. сила тока в любом сечении проводника одинаковая.



Теперь поместим в цепь конденсатор С. Пусть по цепи протекает постоянный ток. Поверхность  $S_3$  проведём таким образом, чтобы она охватывала одну из обкладок конденсатора. Так как в конденсаторе нет тока проводимости, то  $\iint_{S_3} (\vec{j}, d\vec{S}) = 0$ , но по-прежнему

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = \iint_{S_1} (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_{S_2} (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_{S_4} (\vec{j}, d\vec{S}) = I.$$



Но расположение конденсатора можно поменять, так, чтобы одна его обкладка находилась внутри поверхности  $S_3$ , а например,  $S_2$ . Тогда получим равенства  $\iint_{S_2} (\vec{j}, d\vec{S}) = 0$  и

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = \iint_{S_1} (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_{S_3} (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_{S_4} (\vec{j}, d\vec{S}) = I.$$

Получаем противоречие – циркуляция векторного поля по контуру  $\Gamma$ , не охватывающему участок цепи с конденсатором, зависит от произвольного выбора места расположения конденсатора. Чтобы снять это противоречие Максвелл выдвинул (вторую) гипотезу о том, что наряду с током проводимости существует *ток смещения*, который также создаёт магнитное поле. Плотность тока смещения задаётся скоростью изменения вектора электрического смещения

$$\vec{j}_{CM} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

**Закон полного тока:** сила полного тока равна сумме тока проводимости и тока смешения.

**Выход.** Если в теореме о циркуляции для напряженности магнитного поля ток проводимости заменить на полный ток, то противоречие будет снято:

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j}_{\text{провод}} + \vec{j}_{\text{смеш}}, \quad \text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Или, в интегральной форме:

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = I + \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{D}, d\vec{S})$$

- циркуляция вектора напряженности магнитного поля по любому замкнутому (ориентированному) контуру равна сумме токов проводимости и смешения через ориентированную поверхность, ограниченную этим контуром. Ориентации контура и поверхности согласованы правилом правого винта (буравчика).

Это соотношение свидетельствует о том, что магнитное поле может порождаться переменным во времени электрическим полем.

### 35. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах и их физический смысл.

Гипотезы Максвелла позволяют записать систему уравнений электромагнитного поля.

	Дифференциальная форма	Интегральная форма
Теорема Гаусса для электрического поля	$\text{div} \vec{D} = \rho$	$\iint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q_z$
Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея) (теорема о циркуляции вектора напряженности электрического поля)	$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{d}{dt} \iint_S (\vec{B}, d\vec{S})$
Теорема Гаусса для магнитного поля	$\text{div} \vec{B} = 0$	$\iint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$
Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля	$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = I_z + \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{D}, d\vec{S})$

В материальной среде эти системы дополняются уравнениями (материальные уравнения)

	Дифференциальная форма	Интегральная форма
Закон Ома	$\vec{j} = \gamma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{ct})$	$I \cdot R = \phi_1 - \phi_2 + \varepsilon_{12}$
Закон сохранения электрического заряда	$\text{div}(\vec{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	$\iint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}, \text{ в однородном изотропном диэлектрике } \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J}), \text{ в однородном, изотропном магнетике } \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

$$\text{Условия на границе раздела сред } D_{2n} - D_{in} = \sigma, E_{in} = E_{2n}, B_{2n} = B_{in}, H_{2n} - H_{in} = i.$$

Данная система уравнений в дифференциальной форме содержит 15 координат векторов  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{j}$  и функцию  $\rho$  - объёмной плотности электрического заряда – итого 16 переменных. Количество уравнений Максвелла в координатной форме равно 8, материальных уравнений – 10, итого 18 уравнений. При этом некоторые уравнения могут быть следствием других в данной системе.

## Лекция 11

36. Волновое уравнение для электромагнитного поля. Скорость распространения электромагнитных волн.

Рассмотрим уравнения Максвелла в вакууме, при отсутствии зарядов и токов.

При  $\rho=0$ ,  $\vec{j}=\vec{0}$ ,  $\epsilon=1$ ,  $\mu=1$  уравнения в дифференциальной форме примут вид

$$\operatorname{div}\vec{D}=0, \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \operatorname{div}\vec{B}=0, \operatorname{rot}\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Учитываем материальные уравнения  $\vec{D}=\epsilon_0\vec{E}$ ,  $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$  и получаем систему уравнений

$$\operatorname{div}(\vec{E})=0 \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\vec{H})=0 \quad (3)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Начинаем преобразования уравнений (2) и (4):  $\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{E})=-\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$ , откуда

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \quad (5)$$

Т.к. из (4) следует, что  $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{\epsilon_0}\operatorname{rot}\vec{H}$ , то равенство (5) примет вид  $\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\epsilon_0}\operatorname{rot}\vec{H}\right)=-\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$  или

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{H})=-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \quad (6)$$

Но, как известно из предыдущей лекции  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{H}))=\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{H}))-\Delta\vec{H}$ , поэтому с учётом (3), уравнение (6) равносильно уравнению

$$\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\Delta\vec{H}=\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \quad (7)$$

Аналогичные преобразования можно провести для вектора  $\vec{E}$ : из (2) следует  $\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=-\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{E}$ ,

из (4) следует  $\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}(\vec{H}))=\operatorname{rot}\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=\operatorname{rot}\left(-\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{E}\right)=-\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E})$ ,

Учитывая (1), получаем  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E}))=\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{E}))-\Delta\vec{E}=-\Delta\vec{E}$ , поэтому

$$\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\Delta\vec{E}=\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad (8)$$

Полученные уравнения (7) и (8) имеют вид волнового уравнения – они описывают распространение плоских электромагнитных волн. Сразу можно сказать, что *фазовая скорость*

электромагнитной волны в вакууме равна  $c=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\approx 3\cdot 10^8$  м/с и совпадает со значением скорости света в вакууме. При распространении электромагнитных волн в среде с постоянными

значениями  $\epsilon$  и  $\mu$ , выражение для фазовой скорости примет вид  $v=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon\mu_0\mu}}=\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}=\frac{c}{n}$ , где величина  $n=\sqrt{\epsilon\mu}$  называется (абсолютным) показателем преломления среды.

37. Плоская электромагнитная волна. Уравнения Максвелла для плоской волны.

Поперечность электромагнитных волн. Связь векторов напряженности векторов электрического и магнитного полей в плоской волне

38. Общее решение волнового уравнения плоской электромагнитной волны.

Продифференцировав по  $x$  второе уравнение (110.5), найдем после аналогичных преобразований волновое уравнение для  $H_z$ :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (110.8)$$

Напомним, что остальные составляющие  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  равны нулю, так что  $E = E_y$  и  $H = H_z$ . Мы сохранили в уравнениях (110.7) и (110.8) индексы  $y$  и  $z$  при  $E$  и  $H$  для того, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  направлены по взаимно перпендикулярным осям  $y$  и  $z$ .

Уравнения (110.7) и (110.8) представляют собой частный случай уравнений (109.8) и (109.9). Простейшим решением уравнения (110.7) будет функция .

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1). \quad (110.9)$$

Решение уравнения (110.8) имеет аналогичный вид

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2). \quad (110.10)$$

В этих формулах  $\omega$  — частота волны,  $k$  — волновое число, равное  $\omega/v$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — начальные фазы колебаний в точках с координатой  $x = 0$ .

Подставим функции (110.9) и (110.10) в уравнения (110.5):

$$kE_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu \mu_0 \omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2),$$

$$kH_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = \epsilon \epsilon_0 \omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1).$$

Для того чтобы уравнения удовлетворялись, необходимо равенство начальных фаз  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Кроме того, должны соблюдаться соотношения:

$$kE_m = \mu \mu_0 \omega H_m,$$

$$\epsilon \epsilon_0 \omega E_m = kH_m.$$

Перемножив эти два равенства, находим, что

$$\epsilon \epsilon_0 E_m^2 = \mu \mu_0 H_m^2.$$

Таким образом, колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят с одинаковой фазой ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ), а амплитуды этих векторов связаны соотношением

$$E_m \sqrt{\epsilon \epsilon_0} = H_m \sqrt{\mu \mu_0}. \quad (110.11)$$

## 39. Энергия и импульс электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга. Теорема Пойнтинга.

Плотность энергии электромагнитного поля  $w$  слагается из плотности энергии электрического поля [определенной формулой (30.2)] и плотности энергии магнитного поля [определенной формулой (61.8)]:

$$w = w_E + w_H = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}.$$

В данной точке пространства векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  изменяются в одинаковой фазе<sup>1)</sup>. Поэтому соотношение (110.11) между амплитудными значениями  $E$  и  $H$  справедливо и для их мгновенных значений. Отсюда следует, что плотность энергии электрического и магнитного полей каждый момент времени одинакова:  $w_E = w_H$ . Поэтому можно написать, что

$$w = 2w_E = \epsilon_0 E^2.$$

<sup>1)</sup> Это справедливо только для непроводящей среды. В проводящей среде фазы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не совпадают.

407

Воспользовавшись тем, что  $E \sqrt{\epsilon_0} = H \sqrt{\mu_0}$ , выражению для плотности энергии электромагнитной волны можно придать вид

$$w = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} EH. \quad (112.1)$$

В соответствии с формулой (109.10) скорость электромагнитной волны равна  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ . Умножив плотность энергии  $w$  на скорость  $v$ , получим плотность потока энергии

$$S = wv = EH. \quad (112.2)$$

Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Поэтому направление вектора  $[EH]$  совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен  $EH$  ( $\sin \alpha = 1$ ). Следовательно, вектор плотности потока энергии можно представить как векторное произведение  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{S} = [EH]. \quad (112.3)$$

Вектор  $\mathbf{S}$  называется вектором Пойнтинга.

Вектор  $\vec{\Pi} = (\vec{E} \times \vec{H})$  ( $\Pi$  - буква «пи») называется вектором Пойнтинга (Джон Генри

Пойнтинг - британский физик (1852 - 1914)). Окончательно получим равенство, называемое теоремой Пойнтинга

$$-\frac{dW}{dt} = \iint_S (\vec{\Pi}, d\vec{S}) + \frac{d\vec{Q}}{dt}.$$

Скорость изменения энергии электромагнитного поля в некоторой области равна, с обратным знаком, сумме мощности выделения теплоты (по закону Джоуля-Ленца) и потока вектора Пойнтинга через границу области, ориентированную наружу.

Если в области нет тепловыделения  $\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0$ , то в случае, когда векторное поле  $\vec{\Pi}$  на границе  $S$  направлено внутрь области, поток отрицателен  $\iint_S (\vec{\Pi}, d\vec{S}) < 0$ , а  $\frac{dW}{dt} > 0$  - энергия области увеличивается. И наоборот, если поток вектора Пойнтинга направлен наружу из области  $V$ ,

т.е.  $\iint_S (\vec{\Pi}, d\vec{S}) > 0$ , то  $\frac{dW}{dt} < 0$  - энергия в области убывает.

Падая на какое-либо тело, электромагнитная волна должна оказывать на него давление. Происхождение этого давления легко пояснить на примере проводящего тела ( $\sigma \neq 0$ ). Пусть плоская волна падает по нормали на плоскую поверхность тела (рис. 243). Электрический вектор волны возбуждает в теле ток плотности  $j = \sigma E$ . Магнитное поле волны будет действовать на ток с силой, величину которой в расчете на единицу объема тела можно найти по формуле (47.2):

$$f_{\text{ед. об}} = [jB] = \mu_0 [jH].$$

Направление этой силы, как видно из рис. 243, совпадает с направлением распространения волны.

410

Согласно вычислению Максвелла в случае, когда тело полностью поглощает падающую на него энергию, давление равно среднему (по времени) значению плотности энергии в падающей волне:

$$p = \bar{\omega} = \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2}. \quad (113.1)$$

Если тело отражает волну, посыпая в обратном направлении волну интенсивности  $S = kS_0$  ( $S_0$  — интенсивность, т. е. плотность потока энергии падающей волны,  $k$  — коэффициент отражения), то давление равно

$$p = (1 + k)\bar{\omega}, \quad (113.2)$$

где  $\bar{\omega}$  — среднее значение плотности энергии падающей волны. Для идеально отражающего тела  $k = 1$  и  $p = 2\bar{\omega}$ .

Из того факта, что электромагнитная волна оказывает давление, вытекает, что поле электромагнитной волны обладает импульсом. Вычисления дают для импульса единицы объема (плотности импульса) поля в пустоте значение

$$K_{\text{ед. об}} = \frac{1}{c^2} S = \frac{1}{c^2} [EH]. \quad (113.3)$$

Наличие импульса заставляет приписать электромагнитному полю массу, связанную с импульсом соотношением  $K = mc$  (поле в вакууме распространяется со скоростью  $c$ ). Разделив модуль выражения (113.3) на  $c$ , получим массу единицы объема поля

$$m_{\text{ед. об}} = \frac{EH}{c^3}.$$

Выражение  $\frac{EH}{c}$  дает плотность энергии поля  $\omega$ . Следовательно, можно написать, что

$$m_{\text{ед. об}} = \frac{\omega}{c^2}.$$

Полученное нами соотношение является частным случаем вытекающего из теории относительности

соотношения между массой и энергией:

$$W = mc^2, \quad (113.4)$$

согласно которому всякое изменение энергии системы (под которой понимается совокупность тел и полей) связано с изменением ее массы и, наоборот, изменение массы системы влечет за собой изменение ее энергии.

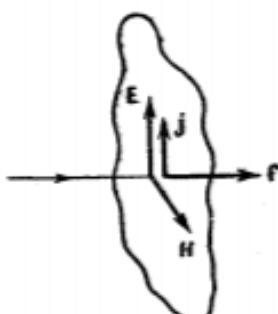
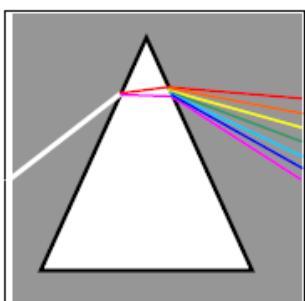


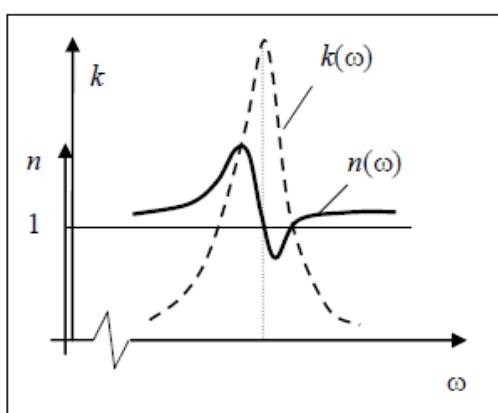
Рис. 243.

## 40. Дисперсия электромагнитных волн. Электронная теория дисперсии, нормальная и аномальная дисперсия. Закон Бугера, рассеяние света.



Явление зависимости показателя преломления вещества от длины волны излучения называется *дисперсией*. Нормальная дисперсия – показатель преломления увеличивается при уменьшении длины волны (увеличении частоты). Обратная зависимость носит название *аномальной дисперсии*.

Нормальная дисперсия наблюдается, в частности, в опыте Ньютона по разложению белого света в спектр при прохождении его через стеклянную призму. В этом опыте у красного света, имеющего большую длину волны, меньший показатель преломления, чем у фиолетового, длина волны которого меньше.



Аномальная дисперсия в веществе наблюдается в области частот, соответствующих сильному поглощению. Если совместить два графика – зависимость коэффициента поглощения и показателя преломления от частоты, то можно увидеть, что аномальная дисперсия в веществе наблюдается в области частот, соответствующих сильному поглощению. Аномальную дисперсию можно наблюдать, например, в разреженных газах и парах металлов.

При рассеянии и поглощении энергия падающей волны уменьшается. При прохождении волной расстояния  $dl$  интенсивность  $I$  уменьшается на величину  $dI$ . Введём коэффициент пропорциональности  $k$ , называемый *коэффициентом поглощения* (единицы измерения 1/м)

$$dI = -k \cdot I \cdot dl .$$

Откуда получаем закон уменьшения интенсивности (закон Бугера)  $I = I_0 e^{-kl}$

где  $I_0$  – величина интенсивности при  $l=0$ . При прохождении расстояния, величина которого равна обратному коэффициенту поглощения, интенсивность излучения уменьшается в  $e$  раз.

Так как причиной появления рассеянного излучения и поглощения энергии являются вынужденные колебания электронов и атомов, то вблизи резонансных частот должно наблюдаться резкое увеличение амплитуды колебаний, следовательно, коэффициент поглощения  $k$  зависит от частоты излучения. Таких частот, вообще говоря, может быть несколько.

Для веществ, атомы которых слабо взаимодействуют между собой (газы при невысоких давлениях), коэффициент поглощения заметно отличен от нуля только вблизи резонансных частот поглощения (так называемый *линейчатый спектр поглощения*). Например, результаты опы-

При колебаниях электроны движутся с ускорением, поэтому излучают электромагнитные волны такой же частоты, что и частота падающей волны. Мощность излучения пропорциональна квадрату ускорения. При колебаниях амплитуда ускорения равна  $a_{MAX} = A\omega^2$ . Следовательно, мощность излучения электронов под действием падающей волны пропорциональна 4-й степени частоты волны. Это излучение называется *рассеянным излучением*.

Атомы (и молекулы) вещества тоже могут совершать колебания под действием падающей волны. Кинетическая энергия колебаний пропорциональна квадрату скорости  $v_{MAX} = \omega A$ , т.е. квадрату частоты колебаний. Увеличение кинетической энергии колебаний приводит к увеличению внутренней энергии тела. Таким образом, часть энергии волны *поглощается веществом*.

#### 41. Шкала электромагнитных излучений. Оптическое излучение, его интенсивность.

Электромагнитный спектр принято делить на радиоволны, инфракрасное, видимое, ультрафиолетовое, рентгеновское и гамма-излучение. Между ними нет резких переходов. Участки перекрываются, а границы между ними условны.

К *радиоволнам* относят излучение с длиной волны больше 0,1 мм.

При этом их подразделяют на:

- сверхдлинные радиоволны, для которых длина волны больше 10 км;
- длинные волны  $1 \text{ км} \leq \lambda \leq 10 \text{ км}$ ;
- средние волны  $100 \text{ м} \leq \lambda \leq 1 \text{ км}$ ;
- короткие волны  $10 \text{ м} \leq \lambda \leq 100 \text{ м}$ ;
- ультракороткие волны  $\lambda \leq 10 \text{ м}$ .

Ультракороткие волны, в свою очередь подразделяют на метровые, дециметровые, миллиметровые и субмиллиметровые.

Волны с длиной менее 1 м принято называть волнами *сверхвысоких частот* (соответственно, частоты таких волн более  $3 \cdot 10^8$  Гц.)

К *оптическому диапазону* относят волны в диапазоне  $10 \text{ нм} \leq \lambda \leq 2 \text{ мм}$ .

Он включает:

- инфракрасное излучение  $760 \text{ нм} \leq \lambda \leq 2 \text{ мм}$ ;
- видимый свет  $400 \text{ нм} \leq \lambda \leq 760 \text{ нм}$ ;
- ультрафиолет  $10 \text{ нм} \leq \lambda \leq 400 \text{ нм}$ .

*Естественный белый свет* включает волны с длинами всего видимого диапазона.

Средний поток излучения определяется как среднее значение плотности потока энергии, переносимой световой волной, в данной точке пространства. Плотность потока электромагнитной энергии определяется выражением

деляется вектором Пойнтига  $\mathbf{S}$ . Следовательно,

$$I = |\langle \mathbf{S} \rangle| = |\langle [\mathbf{E} \mathbf{H}] \rangle|. \quad (110.7)$$

42. Интерференция электромагнитных волн. Расчёт интерференционной картины с двумя источниками. Ширина полосы интерференции.

*Интерференция волн – взаимное усиление или ослабление когерентных волн при их наложении друг на друга (суперпозиции волн при одновременном распространении в пространстве), что приводит к перераспределению энергии колебаний, устойчивому во времени.*

Светлые полосы соответствуют максимуму интенсивности. В этом случае оптическая разность

$$\text{хода равна целому числу длин волн } \frac{xd}{l} = m\lambda, \text{ откуда координаты максимумов } x_m^{MAX} = m \frac{l}{d} \lambda.$$

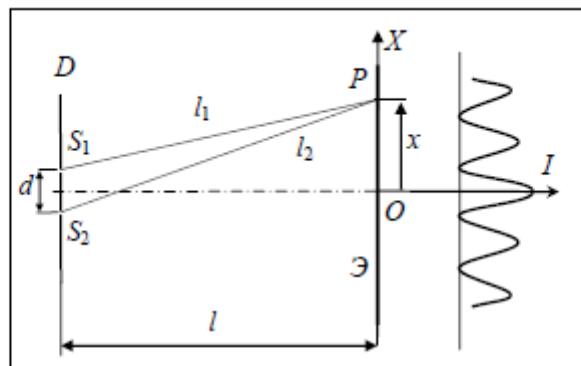
Два соседних максимума с номерами  $m$  и  $m+1$  находятся на расстоянии, величина которого называется *ширина интерференционной полосы*  $\Delta x = \frac{l}{d} \lambda$ .

Рассмотрим интерференцию от двух очень узких щелевых источников монохроматического света. В непрозрачной перегородке ( $D$ ) есть две узкие щели ( $S_1$  и  $S_2$ ), являющиеся источниками света. Интерференционную картину наблюдают на экране ( $\mathcal{E}$ ). Расстояние между щелями много меньше расстояния между экраном и перегородкой  $d \ll l$ . Показатель преломления среды принимаем равным единице  $n = 1$ .

Интерференционная картина на экране представляет собой череду *параллельных* тёмных и светлых полос. Будем предполагать, что начальные фазы колебаний от источников равны. Тогда центральная полоса ( $O$ ), расположенная симметрично относительно источников будет всегда светлой. Вдоль экрана направим ось  $X$ , чтобы координата  $x=0$  соответствовала точке  $O$ .

Оптическая разность хода лучей от источников до некоторой полосы ( $P$ ) равна

$$L_2 - L_1 = l_2 - l_1 = \frac{l_2^2 - l_1^2}{l_2 + l_1}$$



Т.к.  $d \ll l$ , то при небольших значениях  $x$  можно предполагать, что  $l_2 + l_1 \approx 2l$ . Учитывая, что

$$l_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 \text{ и } l_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2, \text{ получаем, что}$$

$$L_2 - L_1 \approx \frac{l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - l^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}{2l} = \frac{xd}{l}.$$

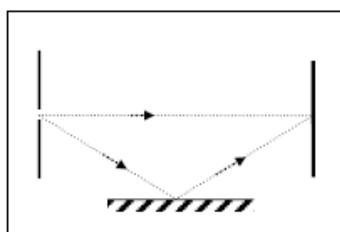
### 43. Пространственно-временная когерентность.

Волны естественного излучения являются суперпозицией множества волн от точечных источников, излучающих спонтанно. Даже в волне, спонтанно испущенной одним источником, частота меняется в узком диапазоне. Фазы двух волн излученных друг за другом одним источником никак не связаны друг с другом. Все это приводит к тому, что в результирующей волне частота и фаза являются усредненными величинами по излучению множества источников. Поэтому их значения колеблются случайным образом около неких средних значений. Следовательно, колебания разных точек волновой поверхности, вообще говоря, могут не быть когерентными.

Рассмотрим две разные точки одной волновой поверхности в один и тот же момент времени. Максимальное расстояние (вдоль этой поверхности), на котором излучение в точках ещё являются когерентными, называется *радиусом пространственной когерентности*. Эта величина определяется соотношением  $\rho \sim \frac{\lambda}{\gamma}$ , где  $\lambda$  - основная длина волны,  $\gamma$  - угловой размер источника (из точки наблюдения).

Так как начальная фаза волны естественного света меняется

спонтанно, то разность фаз двух волн одинаковой частоты, испущенных из одной и той же точке волновой поверхности, но в *разное время*, вообще говоря, будет меняться во времени. Т.е. волны не будут являться когерентными. В этом случае говорят о *временной когерентности*.

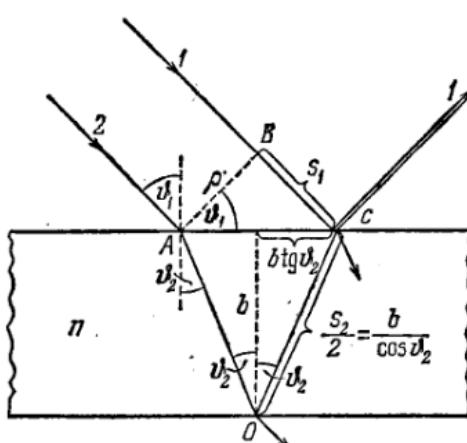


Следовательно, если рассмотреть интерференцию лучей, прямо из щели попадающих на экран и лучей, попадающих после отражения от зеркала, интерференция возможна в случае, если разность хода лучей не больше длины когерентности

$$\Delta l \leq l_{\text{ког}}.$$

Поэтому можно определить время когерентности  $t_{\text{ког}} = \frac{l_{\text{ког}}}{c} = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}$ .

### 44. Интерференция света в тонких пленках. Интерференционные полосы равной толщины и равного наклона.



Разность хода, приобретаемая лучами 1 и 2 до того, как они сойдутся, где  $s_1$  — длина отрезка  $BC$ , а  $s_2$  — суммарная длина отрезков  $AO$  и  $OC$ ,  $n$  — показатель преломления пластиинки. Показатель преломления среды, окружающей пластиинку, полагаем равным единице. Из рис. 122.1 видно, что  $s_1 = 2b \operatorname{tg} \vartheta_2 \sin \vartheta_1$ ,  $s_2 = 2b/\cos \vartheta_2$  ( $b$  — толщина пластиинки). Подстановка этих значений в выражение (122.1) дает, что

$$\Delta = \frac{2bn}{\cos \vartheta_2} - 2b \operatorname{tg} \vartheta_2 \sin \vartheta_1 = 2b \frac{n^2 - n \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1}{n \cos \vartheta_2}.$$

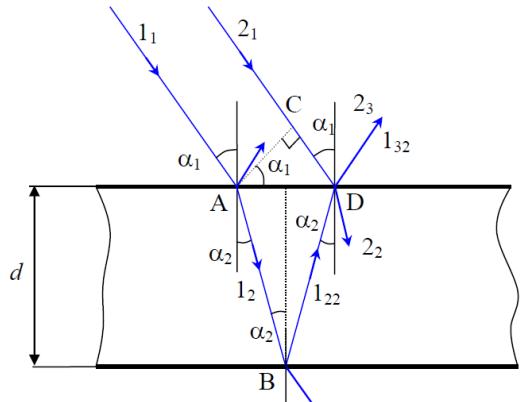
Произведя замену  $n \sin \vartheta_2 = \sin \vartheta_1$  и учитя, что

$$n \cos \vartheta_2 = \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 \vartheta_2} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1},$$

легко привести формулу для  $\Delta$  к виду

$$\Delta = 2b \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1}. \quad (122.2)$$

Рис. 122.1.



Будем рассматривать интерференцию лучей  $1_{32}$  и  $2_3$ . Оптическая разность хода этих лучей  $\Delta L = n_2(|AB| + |BD|) - n_1|CD|$  или

$$\Delta L = 2 \frac{d}{\cos \alpha_2} n_2 - 2d \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1 n_1.$$

С учётом закона преломления  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$  и тригонометрического тождества  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ :

$$\Delta L = 2 \frac{d}{\cos \alpha_2} n_2 - 2d \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1 n_1 = \frac{2d(n_2 - n_1 \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1)}{\cos \alpha_2} = \frac{2n_2 d(n_2 - n_2 \sin^2 \alpha_2)}{n_2 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2}},$$

$$\Delta L = \frac{2d(n_2^2 - n_2^2 \sin^2 \alpha_2)}{\sqrt{n_2^2 - n_2^2 \sin^2 \alpha_2}} = 2d \sqrt{n_2^2 - n_2^2 \sin^2 \alpha_2} = 2d \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1},$$

$$\Delta L = 2n_1 d \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \alpha_1}.$$

Теперь предположим, что  $n_2 > n_1$  - т.е. вторая среда оптически более плотная, чем первая.

В этом случае фаза отражённого луча  $2_3$  отличается от фазы падающего луча  $2_1$  на  $\pi$ . Это равносильно тому, что оптическая длина хода 2 луча изменилась на  $\frac{\lambda}{2}$ . Действительно, изменение

фазы будет равно  $\Delta\phi = k \frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = \pi$ .

Поэтому условие интерференционных максимумов имеет вид  $\Delta L \pm \frac{\lambda}{2} = m\lambda$ . Откуда

**Кольца Ньютона.** Классическим примером полос равной толщины являются кольца Ньютона. Они наблюдаются при отражении света от соприкасающихся друг с другом плоскопараллельной толстой стеклянной пластинки и плоско-выпуклой линзы с большим радиусом кривизны (рис. 122.6). Роль тонкой пленки, от поверхности которой отражаются когерентные волны, играет воздушный зазор между пластинкой и линзой. (вследствие большой толщины пластинки и линзы за счет отражений от других поверхностей интерференционные полосы не возникают). При нормальном падении света полосы равной толщины имеют вид концентрических окружностей, при наклонном падении — эллипсов. Найдем радиусы колец Ньютона, получающихся при падении света по нормали к пластинке. В этом случае  $\sin \vartheta_1 = 0$  и оптическая разность хода равна удвоенной толщине зазора (см. формулу (122.2); предполагается, что в зазоре  $n = 1$ ). Из рис. 122.6 следует, что

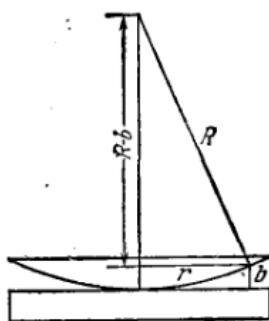


Рис. 122.6.

$$R^2 = (R - b)^2 + r^2 \approx R^2 - 2Rb + b^2, \quad (122.9)$$

где  $R$  — радиус кривизны линзы,  $r$  — радиус окружности, всем точкам которой соответствует одинаковый зазор  $b$ . Ввиду малости  $b$  мы пренебрегли величиной  $b^2$  по сравнению с  $2Rb$ . В соответствии с (122.9)  $b=r^2/2R$ . Чтобы учесть возникающее при отражении от пластиинки изменение фазы на  $\pi$ , нужно к  $2b=r^2/R$  прибавить  $\lambda_0/2$ . В результате получится

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}. \quad (122.10)$$

В точках, для которых  $\Delta=m'\lambda_0=2m'(\lambda_0/2)$ , возникнут максимумы, в точках, для которых  $\Delta=(m'+1/2)\lambda_0=(2m'+1)(\lambda_0/2)$ , — минимумы интенсивности. Оба условия можно объединить в одно:

$$\Delta = m \frac{\lambda_0}{2},$$

причем четным значениям  $m$  будут соответствовать максимумы, а нечетным — минимумы интенсивности. Подставив сюда выражение (122.10) для  $\Delta$  и разрешив получившееся уравнение относительно  $r$ , найдем радиусы светлых и темных колец Ньютона:

$$r = \sqrt{R\lambda_0(m-1)/2} \quad (m=1, 2, 3, \dots). \quad (122.11)$$

Четным  $m$  соответствуют радиусы светлых колец, нечетным  $m$  — радиусы темных колец. Значению  $m=1$  соответствует  $r=0$ , т. е. точка в месте касания пластиинки и линзы. В этой точке наблюдается минимум интенсивности, обусловленный изменением фазы на  $\pi$  при отражении световой волны от пластиинки.

## 45. Применение интерференции.

Интерферометр - оптический прибор, принцип действия которого основан на разделении пучка света на два или несколько когерентных пучков, которые проходят различные оптические пути, а затем сводятся вместе.

Полученная интерференционная картина позволяет:

- контролировать качество поверхностей и однородность оптических материалов;
- измерять показатели преломления, длины волн, напряжения в деталях и т.п.

15

Семестр 3. Лекции 12-13

Интерферометры применяются для измерения длины волны спектральных линий и их структуры и абсолютного показателя преломления сред; для измерения длин и перемещений тел; для контроля формы; микрорельефа и деформаций поверхностей оптических деталей; частоты металлических поверхностей и пр.

## Лекция 13

### 46. Дифракция света. Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля.

Дифракция – это явление отклонения от прямолинейного распространения света, если оно не может быть следствием отражения, преломления или изгибаия световых лучей, вызванным пространственным изменением показателя преломления. При этом отклонение от законов геометрической оптики тем меньше, чем меньше длина волны света.

Замечание. Между дифракцией и интерференцией нет принципиального различия. Оба явления сопровождаются перераспределением светового потока в результате суперпозиции волн.

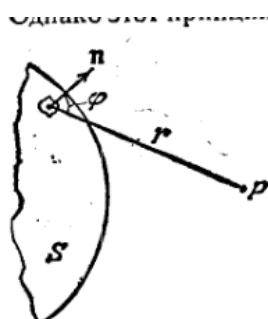


Рис. 126.1.

и об интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях. Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением об интерференции вторичных волн. Учет амплитуд и фаз вторичных волн позволяет найти амплитуду результирующей волны в любой точке пространства. Развитый таким способом принцип Гюйгенса получил название **принципа Гюйгенса — Френеля**.

Согласно принципу Гюйгенса — Френеля каждый элемент волновой поверхности  $S$  (рис. 126.1) служит источником вторичной сферической волны, амплитуда которой пропорциональна величине элемента  $dS$ . Амплитуда сферической волны убывает с расстоянием  $r$  от источника по закону  $1/r$  (см. формулу (94.10)). Следовательно, от каждого участка  $dS$  волновой поверхности в точку  $P$ , лежащую

перед этой поверхностью, приходит колебание

$$dE = K \frac{a_0 dS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha_0). \quad (126.1)$$

В этом выражении  $(\omega t + \alpha_0)$  — фаза колебания в месте расположения волновой поверхности  $S$ ,  $k$  — волновое число,  $r$  — расстояние от элемента поверхности  $dS$  до точки  $P$ . Множитель  $a_0$  определяется амплитудой светового колебания в том месте, где находится  $dS$ . Коэффициент  $K$  зависит от угла  $\varphi$  между нормалью  $n$  к площадке  $dS$  и направлением от  $dS$  к точке  $P$ . При  $\varphi=0$  этот коэффициент максимальен, при  $\varphi=\pi/2$  он обращается в нуль.

Результирующее колебание в точке  $P$  представляет собой суперпозицию колебаний (126.1), взятых для всей волновой поверхности  $S$ :

$$E = \int_S K(\varphi) \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha_0) dS. \quad (126.2)$$

Эта формула является аналитическим выражением принципа Гюйгенса — Френеля.

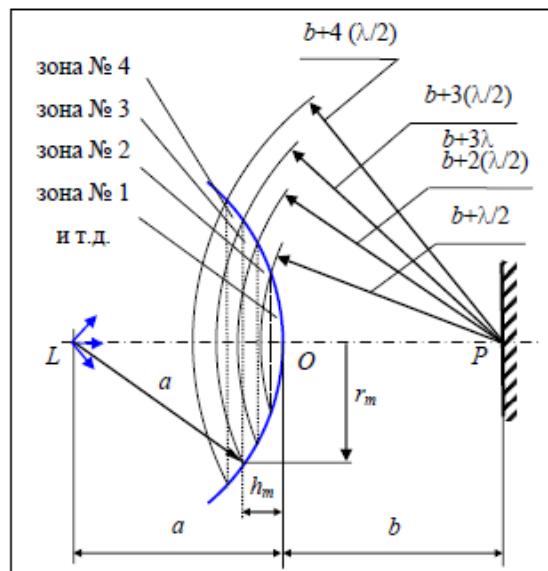
Для нахождения амплитуды колебаний в точке наблюдения  $P$  всю волновую поверхность  $S$  разбивают на участки (зоны Френеля). Предположим, что мы наблюдаем дифракцию в расходящихся лучах (дифракцию Френеля), т.е. рассматриваем сферическую, распространяющуюся от некоторого точечного источника  $L$ . Волна распространяется в вакууме.

Зафиксируем волновую поверхность в некоторый момент времени  $t$ . Пусть радиус этой поверхности равен  $a$ . Линия  $LP$  пересекает волновую поверхность в точке  $O$ . Предположим, что расстояние между точками  $O$  и  $P$  равно  $b$ . От точки  $P$  последовательно откладываем сферы, радиусы которых  $R_m = b + m \frac{\lambda}{2}$ . Две соседние сферы «отсекают» на волновой поверхности кольцевые участки, называемые зонами Френеля. (Как известно, две сферы пересекаются по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной прямой, на которой лежат центры этих сфер). Найдём расстояние от точки  $O$  до границы зоны с номером  $m$ . Пусть радиус внешней границы зоны Френеля равен  $r_m$ . Т.к. радиус волновой поверхности равен  $a$ , то  $r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = 2ah_m - h_m^2$ .

При этом,

$$r_m^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_m)^2 = mb\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - 2bh_m - h_m^2.$$

$$\text{Поэтому } 2ah_m - h_m^2 = mb\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - 2bh_m - h_m^2, \text{ откуда } h_m = \frac{mb\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)}.$$



Для длин волн видимого диапазона и не очень больших значений номеров  $m$  можно пренебречь слагаемым  $\left(m\frac{\lambda}{2}\right)^2$  по сравнению с  $m\lambda$ . Следовательно, в этом случае  $h_m = \frac{mb\lambda}{2(a+b)}$  и

для квадрата радиуса получаем выражение  $r_m^2 = 2ah_m - h_m^2 = 2a\frac{mb\lambda}{2(a+b)} - \left(\frac{mb\lambda}{2(a+b)}\right)^2$ , в котором

опять можно пренебречь последним слагаемым. Тогда радиус  $m$ -й зоны Френеля (для дифракции в расходящихся лучах)

$$r_m = \sqrt{m \frac{ab\lambda}{(a+b)}}.$$

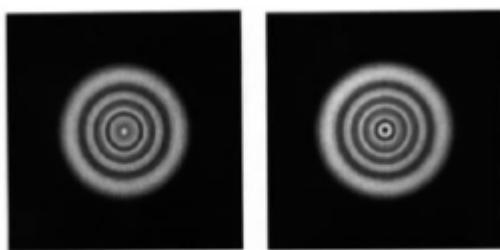
*Следствие.* Для дифракции в параллельных лучах (дифракции Фраунгофера) радиус зон Френеля получается предельных переходом  $a \rightarrow \infty$ :

$$r_m = \sqrt{mb\lambda}.$$

## 47. Дифракция от круглого отверстия и от круглого диска. Спираль Френеля.

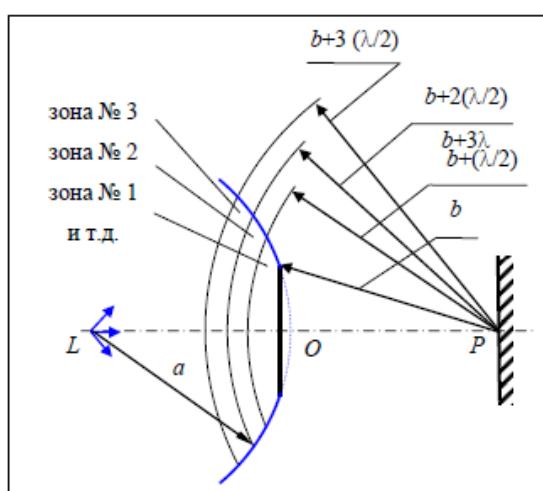
### Дифракция на круглом отверстии.

Рассуждения, приведённые выше, позволяют сделать вывод, что амплитуда колебания в точке  $P$  зависит от числа зон Френеля. Если для точки наблюдения открыто нечётное число зон Френеля, то в этой точке будет максимум интенсивности. Если открыто чётное число зон – то минимум.



тени, а внутри освещённость практически не будет меняться.

### Дифракция на малом диске.



Рассмотрим схему опыта, в котором на пути световой волны расположен непрозрачный круглый диск, радиус которого соизмерим с радиусами первых зон Френеля.

Для рассмотрения дифракционной картины помимо обычных зон построим дополнительные зоны от края диска.

Зоны Френеля от края диска будем строить по прежнему принципу - расстояния от границ двух соседних зон до точки наблюдения отличаются на половины длины волны. Амплитуда в точке наблюдения

$$A_p = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots + \left( \frac{A_{m-1}}{2} - A_m + \frac{A_{m+1}}{2} \right) + \dots .$$



с учётом оценки  $A_m \approx \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$  будет равна  $A_p = \frac{A_1}{2}$ . Следовательно, в точке наблюдения - в центре геометрической тени всегда будет светлое пятно – максимум интенсивности. Это пятно называется *пятном Пуассона*.

Разобьём мысленно волновую поверхность на очень узкие кольцевые зоны с амплитудами  $dA$ , которые с увеличением  $r$  будут убывать по модулю и отставать по фазе от колебаний, создаваемых предыдущей зоной. Изобразив отставание по фазе поворотом каждого вектора  $dA$  против часовой стрелки на соответствующий угол, получаем цепочку векторов, векторная сумма которых есть результирующая амплитуда колебаний в т.  $P$ .

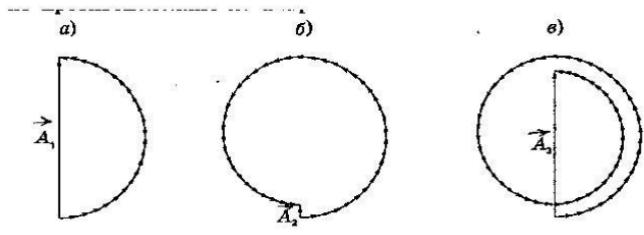


Рис. 5.5



Рис. 5.6

**результат действия**  
а) – результирующей а) – результирующей  
действия 1-й зоны Френеля;  
б) – результирующей б) – результирующей  
действия первых двух зон  
Френеля;

в) – результат действия первых трёх зон Френеля.

Цепочка по мере увеличения числа узких кольцевых зон «закручивается» в спираль, и в результате амплитуда от действия всех зон (всей волновой поверхности) должна равняться  $A_\infty$ .

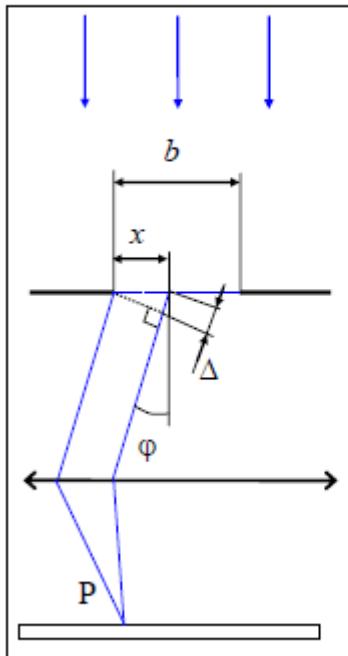
Видно, что амплитуда колебаний в точке  $P$  при наличии преграды с круглым отверстием, открывающим только 1-ю зону Френеля, в 2 раза больше, а интенсивность в 4 раза больше ( $I \sim A^2$ ) чем от полностью открытой волновой поверхности (преграды вообще нет).

При отверстии в преграде, открывающем для точки  $P$  две зоны Френеля, интенсивность в этой точке падает практически до нуля.

## 48. Дифракция Фраунгофера от щели.

### Дифракция Фраунгофера от щели.

Рассмотрим дифракционную картину от узкой длинной щели шириной  $b$ , на которую



нормально падает плоская волна. За щелью расположена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран для наблюдения дифракционной картины.

Элементарные участки волнового фронта в форме узких длинных полосок, параллельных краям щели, становятся источниками вторичных *цилиндрических* волн. Разобьем волновую поверхность в щели на полоски малой ширины  $dx$ , каждая из которых в точке  $P$  создает колебание

$$dA = K A_0 \cos(\omega t - k\Delta)$$

Где  $\Delta = x \sin \varphi$  - геометрическая разность хода лучей от края щели и от луча на расстоянии  $x$  от края. Здесь множителя  $\frac{1}{r}$  в амплитуде нет, поскольку рассматриваются *плоские* волны. Каждая полоска шириной  $dx$  даёт одинаковый вклад амплитуды

$$K A_0 = \frac{A_0}{b} dx, \text{ где } A_0 - \text{амплитуда волны.}$$

$$\text{Тогда для всей щели } A_p = \int_0^b \frac{A_0}{b} \cos(\omega t - k(x \sin \varphi)) dx = -\frac{A_0}{b k \sin \varphi} \sin(\omega t - k(x \sin \varphi)) \Big|_0^b$$

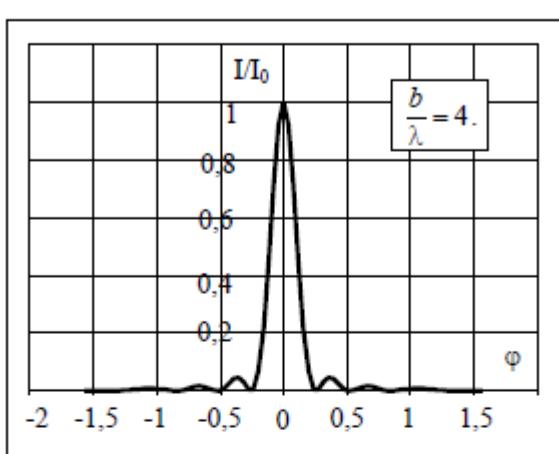
$$\begin{aligned} A_p &= -\frac{A_0}{b k \sin \varphi} (\sin(\omega t - k(b \sin \varphi)) - \sin(\omega t)) = \\ &= -\frac{A_0}{b k \sin \varphi} \left( \cos\left(\omega t - k(b \sin \varphi) - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right) = \\ &= -\frac{2A_0}{b k \sin \varphi} \cos\left(\frac{kb \sin \varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{k(b \sin \varphi)}{2}\right) \\ A_p &= \frac{2A_0}{b k \sin \varphi} \sin\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{k(b \sin \varphi)}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{С учетом } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ получаем амплитуду колебания в точке } P \quad A_{p0} = A_0 \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) b \sin \varphi} \right|.$$

При  $\varphi \ll 1$  амплитуда в точке  $P$  равна амплитуде падающей волны  $A_{p0} = A_0$ , а при выполнении условия  $b \sin \varphi = m\lambda$ , где  $m$  – целое число, амплитуда равна нулю  $A_{p0} = 0$ .

Для интенсивности волны в направлении задаваемом углом  $\varphi$

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right)^2}.$$

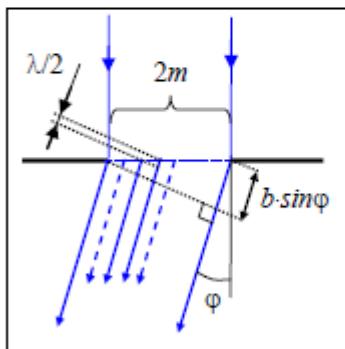


При этом  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ .

При  $\varphi=0$  находится центральный максимум  $I_\varphi = I_0$ , значительно превосходящий по величине остальные максимумы.

Условие минимумов  $b \sin \varphi = m\lambda$ , где  $m$  – целое число. Центральный максимум ограничен с двух сторон первыми минимумами, положение которых задаётся углом  $\sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{b}$ .

Дифракционная картина на экране в этом случае будет иметь вид чередующихся тёмных и светлых полос, причем яркость светлых сильно убывает по направлению от центральной полосы. Однако, можно сказать, что на экране не будет резкого перехода от света к тени.



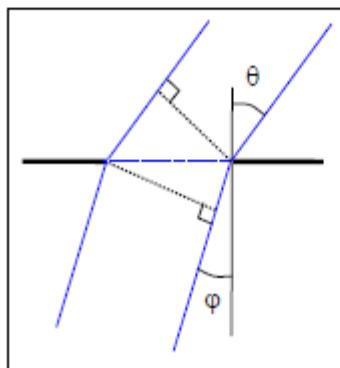
Рассмотрим условие минимумов для интерференционной картины от щели подробнее. Перепишем равенство

$b \sin \varphi = m\lambda$  в виде  $b \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2}$ . Выражение  $\Delta L = 2m \frac{\lambda}{2}$  можно трактовать как сумму чётного числа  $2m$  длин полуволн. Т.е. в случае минимума интенсивности всю щель можно разбить на чётное число одинаковых участков так, что разность хода волн от граничных точек двух любых соседних участков до точки

наблюдения равна  $\frac{\lambda}{2}$ . Но в этом случае, как известно, в точке наблюдения будет минимум интенсивности.

Если свет падает на щель не перпендикулярно, а под некоторым углом  $\theta$ , то разность хода волн от краёв щели равна  $\Delta L = b \sin \theta - b \sin \varphi = b (\sin \theta - \sin \varphi)$ , поэтому, аналогично, условие минимумов будет иметь вид

$$\Delta L = 2m \frac{\lambda}{2} = m\lambda \text{ или } b (\sin \theta - \sin \varphi) = m\lambda.$$



## 49. Предельный переход от волновой оптики к геометрической.

Предельный переход от волновой оптики к геометрической.

Рассмотрим положение первого мини-

мума для дифракции на щели  $\sin \phi = \pm \frac{\lambda}{b}$ .

В случае  $\frac{\lambda}{b} \ll 1$  это выражение можно запи-

сать в виде  $\phi \approx \frac{\lambda}{b}$ . Но при  $\frac{\lambda}{b} \ll 1$  относительные интенсивности всех максимумов, кроме центрального, стремятся к нулю  $I/I_0 \rightarrow 0$ .

Поэтому на экране будет видна резкая гра-



ница тени от краёв щели. Подобную же картину можно получить применением методов геометрической оптики. Однако в данном случае будет наблюдаться небольшое различие относительных размеров изображения щели на экране.

При построении методами геометрической оптики размеры щели и изображения на (параллельно расположенному) экране будут одинаковыми независимо от расстояния  $l$  между экраном и пе-

регородкой с щелью.

Если строить изображение щели методом волновой оптики, то граница тени соответст-

вует первому минимуму, положение которого определяется углом  $\phi \approx \frac{\lambda}{b}$ . Поэтому относитель-

ный размер изображения равен

$$\frac{b+2 \cdot l \cdot \tan \phi}{b} \approx \frac{b+2 \cdot l \cdot \phi}{b} = 1 + 2 \frac{l \cdot \phi}{b} = 1 + 2 \frac{l \cdot \lambda}{b^2}.$$

Следовательно, если выполняется  $\frac{l \cdot \lambda}{b^2} \ll 1$ , то результаты построения методами волновой и гео-

метрической оптики практически совпадают.

В обратном случае надо пользоваться методами волновой оптики. Но тогда следует раз-

личать ситуации, в которых либо  $\frac{l \cdot \lambda}{b^2} \sim 1$ , либо  $\frac{l \cdot \lambda}{b^2} \gg 1$ . Но дифракционные явления становятся

заметными, когда размер щели (отверстия) или преграды соизмерим с длиной волны света  $b \sim \lambda$ .

Тогда условие  $\frac{l \cdot \lambda}{b^2} \gg 1$  примет вид  $\frac{l}{b} \gg 1$ . А это означает, что расстояние от перегородки до эк-

рана много больше размера отверстия (преграды). Следовательно, лучи, падающие на экран

можно считать параллельными друг другу – это дифракция Фраунгофера. Применяя формулу для радиуса зон Френеля при дифракции Фраунгофера  $r_m = \sqrt{ml\lambda}$ , и учитывая, что  $b \sim r_m$ , найдём число зон Френеля, которые видно из точки наблюдения. В этом случае  $m = \frac{b^2}{l\lambda} \ll 1$ , т.е. видно только малую часть первой зоны.

Оставшийся случай  $\frac{l \cdot \lambda}{b^2} \sim 1$  соответствует дифракции Френеля. Это можно пояснить, ис-

пользуя формулу для радиусов зон Френеля  $r_m = \sqrt{m \frac{al\lambda}{(a+l)}}$ . Принимая оценку величины отвер-  
стия  $b \sim r_m$ , получаем  $b^2 = m \frac{al\lambda}{(a+l)}$ , откуда из  $\frac{l \cdot \lambda}{b^2} \sim 1$  следует  $\frac{l \cdot \lambda}{\left(m \frac{al\lambda}{(a+l)}\right)} = \frac{(a+l)}{ma} \sim 1$ . Это вы-

ражение означает, что расстояния от источника света соизмеримо с расстоянием от перегородки до экрана. Поэтому волна является сферической и наблюдается дифракция Френеля, при которой из точки наблюдения видно небольшое число зон Френеля.

Замечание. Формулу для первого минимума  $b \sin \phi = \lambda$  можно трактовать следующим образом: параллельные лучи света после прохождения отверстия шириной  $b$  отклоняются на угол  $\phi$ , величина которого зависит от отношения  $\frac{\lambda}{b}$ . Это отклонение приводит к расхождению лучей – *любой пучок параллельных лучей света после дифракции претерпевает «расхождение» на угло-*  
*вую величину, пропорциональную  $\frac{\lambda}{b}$ .*

Т.к.  $\sin \phi \leq \phi$  (в радианах), то закон расхождения лучей при дифракции можно записать в виде  $\sin \phi = \frac{\lambda}{b} \leq \phi$  или  $\phi \geq \frac{b}{\lambda}$ .

Следовательно, пучков света, состоящих из *абсолютно параллельных* лучей, быть не может в принципе. Это «запрещено» волновой природой света. Любое устройство, формирующее параллельные лучи, неизбежно будет приводить к явлению дифракции и, соответственно, к расхождению лучей.

## 50. Дифракционная решётка. Спектральные характеристики дифракционных решёток.

Дифракционной решёткой называется совокупность большого числа одинаковых, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние щелей (рис. 130.1). Расстояние  $d$  между серединами соседних щелей называется периодом решётки.

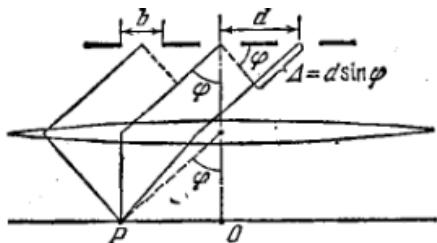


Рис. 130.1.

нность, создаваемая одной щелью; см. (129.6)).

В дальнейшем мы будем предполагать, что радиус когерентности падающей волны намного превышает длину решётки, так что колебания от всех щелей можно считать когерентными друг относительно друга. В этом случае результирующее колебание в точке  $P$ ,

положение которой определяется углом  $\varphi$ , представляет собой сумму  $N$  колебаний с одинаковой амплитудой  $A_\varphi$ , сдвинутых друг относительно друга по фазе на одну и ту же величину  $\delta$ . Согласно формуле (124.5) интенсивность при этих условиях равна

$$I_{\text{реш}} = I_\varphi \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \quad (130.1)$$

(в данном случае роль  $I_0$  играет  $I_\varphi$ ).

Из рис. 130.1 видно, что разность хода от соседних щелей равна  $\Delta = d \sin \varphi$ . Следовательно, разность фаз

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi, \quad (130.2)$$

где  $\lambda$  — длина волны в данной среде.

Подставив в формулу (130.1) выражение (129.6) для  $I_\varphi$  и (130.2) для  $\delta$ , получим

$$I_{\text{реш}} = I_0 \frac{\sin^2(\pi b \sin \varphi / \lambda)}{(\pi b \sin \varphi / \lambda)^2} \frac{\sin^2(N\pi d \sin \varphi / \lambda)}{\sin^2(\pi d \sin \varphi / \lambda)} \quad (130.3)$$

( $I_0$  — интенсивность, создаваемая одной щелью против центра линзы).

Первый множитель в (130.3) обращается в нуль в точках, для которых

$$b \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k=1, 2, 3, \dots). \quad (130.4)$$

В этих точках интенсивность, создаваемая каждой из щелей в отдельности, равна нулю (см. условие (129.5)).

Второй множитель в (130.3) принимает значение  $N^2$  в точках, удовлетворяющих условию

$$d \sin \varphi = \pm m\lambda \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (130.5)$$

(см. (124.7)). Для направлений, определяемых этим условием, колебания от отдельных щелей взаимно усиливают друг друга, вследствие чего амплитуда колебаний в соответствующей точке экрана равна

$$A_{\max} = N A_\varphi \quad (130.6)$$

( $A_\varphi$  — амплитуда колебания, посыпанного одной щелью под углом  $\varphi$ ).

Условие (130.5) определяет положения максимумов интенсивности, называемых главными. Число  $m$  дает порядок главного максимума. Максимум нулевого порядка только один, максимумов 1-го, 2-го и т. д. порядков имеется по два.

Возведя равенство (130.6) в квадрат, получим, что интенсивность главных максимумов  $I_{\max}$  в  $N^2$  раз больше интенсивности  $I_\varphi$ , создаваемой в направлении  $\varphi$  одной щелью:

$$I_{\max} = N^2 I_\varphi. \quad (130.7)$$

Кроме минимумов, определяемых условием (130.4), в промежутках между соседними главными максимумами имеется ( $N-1$ ) добавочных минимумов. Эти минимумы возникают в тех направлениях, для которых колебания от отдельных щелей взаимно погашают друг друга. В соответствии с формулой (124.8) направления добавочных минимумов определяются условием

$$d \sin \varphi = \pm \frac{k'}{N} \lambda \quad (k' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots). \quad (130.8)$$

В формуле (130.8)  $k'$  принимает все целочисленные значения, кроме  $0, N, 2N, \dots$ , т. е. кроме тех, при которых условие (130.8) переходит в (130.5).

#### Спектральные характеристики дифракционных решёток.

Условая дисперсия  $D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$ , где  $\delta\varphi$  — угловое расстояние между двумя главными максимумами

одного порядка, соответствующим волнам, длины которых отличаются на величину  $\delta\lambda$ . Из

формулы  $d \sin \varphi = m\lambda$ , получаем  $d \cos \varphi \cdot \delta\varphi = m \cdot \delta\lambda$ , откуда  $D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}$ .

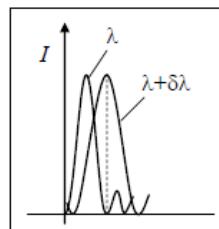
*Дисперсионная область.* Если спектры соседних порядков перекрываются, то спектральный прибор становится непригодным для исследования соответствующих участков спектра. Максимальная ширина спектрального интервала  $\Delta\lambda$ , при которой еще не происходит перекрытия спектров, называется дисперсионной областью спектрального прибора. Для решетки из условия совпадения максимумов соседних порядков для разных длин волн

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda, \text{ получаем, что должно быть } \Delta\lambda < \frac{\lambda}{m}.$$

Как правило,  $m \leq 3$ . Поэтому решетки пригодны для исследования широких участков спектра.

*Разрешающая сила* Разрешающей способностью спектрального прибора называется величина

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \text{ где } \Delta\lambda \text{ — минимальная разность длин двух волн, при которой они воспринимаются раздельно друг от друга.}$$



*Критерий разрешения Рэлея.* Спектральные линии с близкими значениями  $\lambda$  и  $\lambda + \delta\lambda$  считаются разрешенными (т.е. визуально воспринимаются раздельными), если главный максимум для одной длины волны совпадает по своему расположению с первым минимумом для другой длины волны.

Если главный максимум порядка  $m$  для длины волны  $\lambda + \delta\lambda$

накладывается на первый вторичный минимум того же порядка, то  $m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda$ . От-

куда  $m\delta\lambda = \frac{\lambda}{N}$ , поэтому разрешающая сила дифракционной решётки определяется по фор-

$$\text{муле } R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN.$$

## 51. Дифракция рентгеновских лучей. Формула Вульфа - Брэгга. Понятие о рентгеноструктурном анализе.

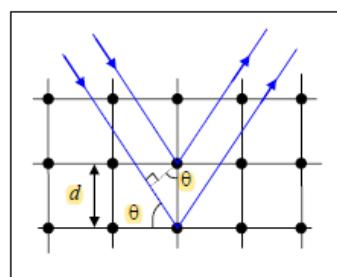
### Дифракция рентгеновских лучей.

Если две дифракционные решетки наложить одна на другую так, чтобы их штрихи были взаимно перпендикулярными, то такая пластиинка будет являться двумерной решёткой.

Естественным примером трёхмерной дифракционной решётки являются все кристаллические тела. В расположении атомов у таких тел наблюдается определённая упорядоченность, характеризуемая пространственным периодом. Период расположения атомов зависит от направления. Среднее расстояние между атомами в кристаллических телах имеет порядок  $10^{-10}$  м, что сопоставимо с длиной волны рентгеновского излучения. Поэтому на кристаллических телах наблюдается дифракция рентгеновских лучей.

Впервые дифракция рентгеновских лучей от кристаллов была экспериментально обнаружена немецкими физиками М. Лауз, В. Фридрихом и П. Книппингом в 1912 г.

Под действием рентгеновского излучения каждый атом кристаллической решётки становится вторичным источником сферических волн той же частоты, что и падающих волн. Русский



ученый Ю. В. Вульф и английские физики У. Г. и У. Л. Брэгги показали независимо друг от друга, что расчет дифракционной картины от кристаллической решётки можно провести следующим простым способом.

Проведем через узлы кристаллической решётки параллельные равнодistantные плоскости. В дальнейшем мы будем называть их *атомными плоскостями*. Если падающая на кристалл волна плоская, то огибающая вторичных волн, порождаемых атомами, лежащими в такой плоскости, также будет плоской. Таким образом, суммарное излучение атомов, лежащих в одной атомной плоскости, можно представить в виде плоской волны, отразившейся от усеянной атомами поверхности по обычным законам отражения. Плоские вторичные волны, отразившиеся от разных атомных плоскостей, когерентны и будут интерферировать между собой подобно волнам, посыпаемым в данном направлении различными щелями дифракционной решётки. При этом вторичные волны будут практически гасить друг друга во всех направлениях, кроме тех, для которых разность хода между соседними волнами является кратной  $\lambda$ . Разность хода двух волн, отразившихся от сосед-

них атомных плоскостей, равна  $2d \sin \theta$ , где  $d$  – расстояние между атомными плоскостями,  $\theta$  – угол, дополнительный к углу падения и называемый углом скольжения падающих лучей. Следовательно, направления, в которых получаются дифракционные максимумы, определяются условием:

$$2d \sin \theta = m\lambda.$$

Соотношение называется *формулой Вульфа – Брэгга*.

Плоскости, в которых наблюдается наибольшее количество атомов, называются *главными атомными* (или *кристаллографическими*) плоскостями. При дифракции рентгеновского излучения на кристалле наблюдается отражение от большого количества различных атомных плоскостей, но наибольшая интенсивность у излучения, отразившегося от главных атомных плоскостей.

*Рентгеновский структурный анализ* (рентгеноструктурный анализ) – это метод исследования атомно-молекулярного строения веществ, преимущественно с кристаллической структурой, основанный на изучении дифракционной картины, полученной при взаимодействии с исследуемым образцом рентгеновского излучения.

# Лекция 16

## 52. Естественный и поляризованный свет. Виды поляризации световых волн. Способы получения и степень поляризации световых волн.

**Поляризованный свет** – это свет, в котором направление колебаний вектора напряжённости электрического поля каким-то образом упорядочено. Если вектор  $\vec{E}$  колеблется в одной плоскости, содержащей луч, то говорят, что свет является **плоско** (или **линейно**) поляризованным.

Если вектор  $\vec{E}$  вращается вокруг луча, то говорят об **эллиптической** поляризации. (**Круговая** поляризация – это частный случай эллиптической поляризации.)

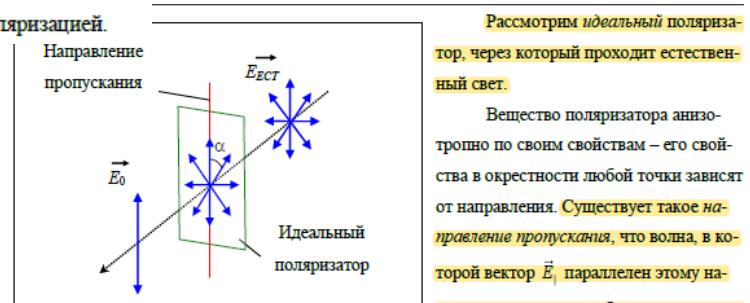
Введём декартову систему координат так, чтобы ось Z была направлена вдоль луча. Тогда световая волна распространяется вдоль оси Z, поэтому вектор напряженности лежит в плоскости XY, т.е.  $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$ . Раскладывая  $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$ , где  $\vec{E}_x = (E_{0x} \sin(\omega t - kz + \alpha_x), 0, 0)$ ,  $\vec{E}_y = (0, E_{0y} \sin(\omega t - kz + \alpha_y), 0)$  получаем, что конец вектора  $\vec{E}$  совершает одновременно два взаимно перпендикулярных колебания. Т.е. он описывает траекторию – фигуру Лиссажу. В зависимости от разности начальных фаз  $\Delta\alpha = \alpha_y - \alpha_x$  траекторией будет либо отрезок прямой – линейная поляризация, либо – эллипс (эллиптическая поляризация).

**Поляризатор** – это оптический прибор, приводящий к поляризации света. После прохождения через **идеальный поляризатор** получается линейно поляризованный свет, в котором полностью отсутствуют колебания в определённом направлении. После прохождения через **несовершенный поляризатор** получается частично поляризованный свет – свет, у которого интенсивность в определённом направлении преобладает над интенсивностью в другом направлении.

Степень поляризации света  $P = \frac{I_{MAX} - I_{MIN}}{I_{MAX} + I_{MIN}}$ . Для линейно поляризованного света  $P=1$ .

Для естественного света  $P=0$ . Для частично поляризованного  $0 < P < 1$ .

**Замечание.** Степень поляризованности не применима к свету с эллиптической поляризацией.



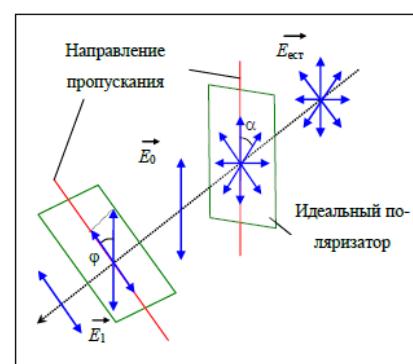
Рассмотрим **идеальный поляризатор**, через который проходит естественный свет.

Вещество поляризатора анизотропно по своим свойствам – его свойства в окрестности любой точки зависят от направления. Существует такое **направление пропускания**, что волна, в которой вектор  $\vec{E}$  параллелен этому направлению, проходит беспрепятственно

а с перпендикулярным вектором  $\vec{E}_{\perp}$  – нет. Но  $E_{\parallel} = E \cos \alpha$ , поэтому для интенсивности  $I_{\parallel} \sim E_{\parallel}^2 = E^2 \cos^2 \alpha \sim I \cos^2 \alpha$ . В естественном свете все направления колебаний равноправны, поэтому углу  $d\alpha$  соответствует интенсивность  $I = \frac{I_{ECT}}{2\pi} d\alpha$ . Тогда для интенсивности прошедшего света

$$I_0 = \sum_{\alpha} I_{\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{I_{ECT}}{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = I_{ECT} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha}{2\pi} d\alpha = \frac{I_{ECT}}{2}$$

Т.е. через идеальный поляризатор проходит только половина от интенсивности естественного света.



Теперь рассмотрим два идеальных поляризатора, у которых направления пропускания расположены под углом  $\phi$  друг к другу.

Так как после первого поляризатора свет выходит линейно-поляризованным, то в предыдущем рассуждении всё повториться, за исключением усреднения по углу  $\phi$  (т.к. этот угол зафиксирован). После первого поляризатора выходит свет с интенсивностью

$$I_0 = \frac{I_{ECT}}{2}, \text{ после второго } I_1 = I_0 \cos^2 \phi, \text{ поэтому}$$

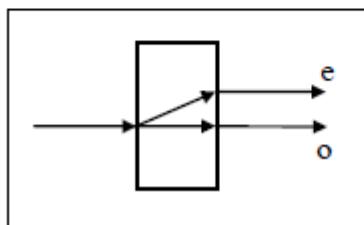
### 53. Световые волны в кристаллах. Оптическая анизотропия. Одноосные и двуосные кристаллы.

Если естественный свет проходит через прозрачные кристаллы, решётка которых не является кубической, то наблюдается явление, заключающееся в том, что падающий луч внутри кристалла разделяется на два луча, распространяющихся в разных направлениях с разными скоростями. Это явление носит название *двойного лучепреломления*.

Кристаллы, в которых наблюдается двойное лучепреломление подразделяются на одноосные и двуосные.

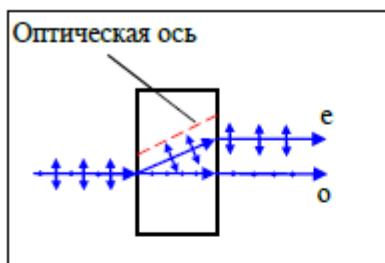
Типичные **одноосные** кристаллы – исландский шпат, кварц, турмалин.

В таких кристаллах один из преломлённых лучей подчиняется обычным законам преломления,



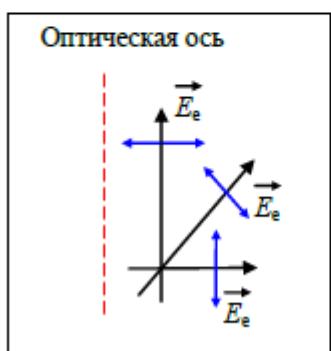
поэтому его называют *обыкновенным* лучом и обозначают «*о*» (*o - ordinary*), а второй не подчиняется законам преломления, поэтому его называют *необыкновенным* лучом и обозначают «*е*» (*e - extraordinary*). Даже при нормальном падении света необыкновенный луч может отклоняться от нормали. При

этом необыкновенный луч не лежит в плоскости, содержащей падающий луч и нормаль к поверхности.



Но у одноосных кристаллов существует такое направление, что лучи распространяющиеся вдоль него не разделяются. Это направление называется *главной оптической осью* кристалла. Любая плоскость, параллельная оптической оси называется *главной оптической плоскостью* (главным сечением). Если рассмотреть прошедшие лучи, то окажется, что

необыкновенный луч линейно поляризован так, что вектор  $\vec{E}_e$  колеблется в главной плоскости, содержащей необыкновенный луч, а у обыкновенного луча – в перпендикулярном направлении к главной плоскости, содержащей обыкновенный луч.

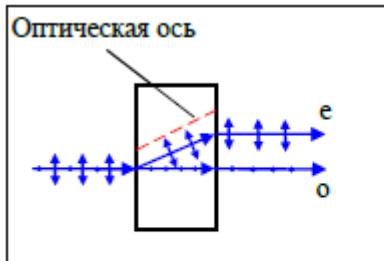


У **двуосных** кристаллов существуют две оптические оси. Оба луча ведут себя как необыкновенные. Типичные представители – слюда, гипс.

Для изготовления поляризаторов используются вещества, у которых ярко выражено явление *дихроизма* – поглощения одного из лучей. Например, в турмалине обыкновенный луч практически полностью поглощается уже при толщине в 1 мм.

Двойное лучепреломление объясняется *анизотропией* диэлектрических свойств – величина относительной диэлектрической проницаемости зависит от направления внутри кристалла относительно оптической оси. У обыкновенного луча направле-

## 54. Распространение электромагнитных волн в одноосных кристаллах. Обыкновенная и необыкновенная волна. Скорости обыкновенной и необыкновенной волн. Положительные и отрицательные кристаллы.

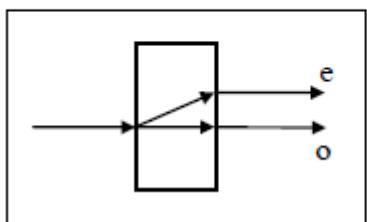


Но у одноосных кристаллов существует такое направление, что лучи распространяющиеся вдоль него не разделяются. Это направление называется **главной оптической осью** кристалла. Любая плоскость, параллельная оптической оси называется **главной оптической плоскостью** (главным сечением). Если рассмотреть прошедшие лучи, то окажется, что

необыкновенный луч линейно поляризован так, что вектор  $\vec{E}_e$  колеблется в главной плоскости содержащей необыкновенный луч, а у обыкновенного луча – в перпендикулярном направлении к главной плоскости, содержащей обыкновенный луч.

Типичные одноосные кристаллы – исландский шпат, кварц, турмалин.

В таких кристаллах один из преломлённых лучей подчиняется обычным законам преломления



поэтому его называют **обыкновенным** лучом и обозначают (o - *ordinary*), а второй не подчиняется законам преломления поэтому его называют **необыкновенным** лучом и обозначают «е» (e - *extraordinary*). Даже при нормальном падении света необыкновенный луч может отклоняться от нормали. При

этом необыкновенный луч не лежит в плоскости, содержащей падающий луч и нормаль к поверхности.

Так как в оптически прозрачной среде  $\mu \approx 1$  и поэтому  $n \approx \sqrt{\epsilon}$ , то показатели преломления и фазовые скорости обыкновенного и необыкновенного лучей будут разными в направлении перпендикулярном оптической оси. Следовательно, фазовая скорость лучей будет одинаковой вдоль оптической оси и разной в перпендикулярном направлении. Кристаллы принято делить на положительные – это когда  $n_o < n_e$ , и отрицательные – в этом



случае  $n_o > n_e$ .

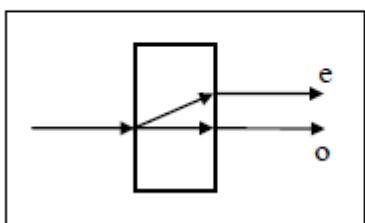
## 55. Двойное лучепреломление. Поляризация света при двойном лучепреломлении.

Если естественный свет проходит через прозрачные кристаллы, решётка которых не является кубической, то наблюдается явление, заключающееся в том, что падающий луч внутри кристалла разделяется на два луча, распространяющихся в разных направлениях с разными скоростями. Это явление носит название **двойного лучепреломления**.

Кристаллы, в которых наблюдается двойное лучепреломление подразделяются на одноосные и двуосные.

Типичные одноосные кристаллы – исландский шпат, кварц, турмалин.

В таких кристаллах один из преломлённых лучей подчиняется обычным законам преломления

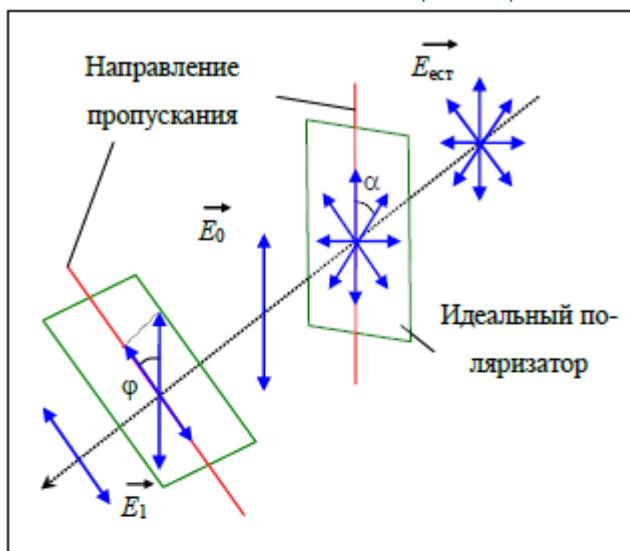


постоинной  $n_o$ , поэтому его называют *обыкновенным* лучом и обозначают (o - *ordinary*), а второй не подчиняется законам преломления, поэтому его называют *необыкновенным* лучом и обозначают «е» (e - *extraordinary*). Даже при нормальном падении света необыкновенный луч может отклоняться от нормали. При этом необыкновенный луч не лежит в плоскости, содержащей падающий луч и нормаль к поверхности.

$\Delta n$

Двойное лучепреломление объясняется анизотропией диэлектрических свойств – величина относительной диэлектрической проницаемости зависит от направления внутри кристалла относительно оптической оси. У обыкновенного луча направление  $E_o$  всегда перпендикулярно главной плоскости, содержащей этот луч, т.е. всегда перпендикулярно оптической оси, поэтому величина  $\epsilon_0$  не меняется. У обыкновенного луча вектор  $\vec{E}_o$  лежит в главной плоскости, содержащей этот луч, поэтому может быть как параллельным оптической, так и перпендикулярным ей. Следовательно, величина  $\epsilon_o$  не постоянная.

## 56. Закон Малюса. Закон Брюстера



Теперь рассмотрим два идеальных поляризатора, у которых направления пропускания расположены под углом  $\phi$  друг к другу.

Так как после первого поляризатора свет выходит линейно-поляризованным, то в предыдущем рассуждении всё повториться, за исключением усреднения по углу  $\phi$  (т.к. этот угол зафиксирован). После первого поляризатора выходит свет с интенсивностью

$I_0 = \frac{I_{ECT}}{2}$ , после второго  $I_1 = I_0 \cos^2 \phi$ , поэтому

$$I_1 = \frac{I_{ECT}}{2} \cos^2 \phi.$$

**Закон Брюстера:** тангенс угла падения, при котором отражённый свет полностью поляризован, равен относительному показателю преломления сред:

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}$$

При падении света на диэлектрик под углом Брюстера **отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.**

**Преломленный луч** при угле Брюстера будет оставаться частично поляризованным, но с максимальной степенью поляризации.

## 57. Поляризационные призмы и поляроиды

**Поляроид** (поляризационный светофильтр) - один из основных типов оптических линейных поляризаторов; представляет собой тонкую поляризационную плёнку, заклеенную для защиты от механических повреждений и действия влаги между двумя прозрачными пластинками (плёнками).

**Пример.** Призма Николя (николь) - поляризационное устройство, в основе принципа действия которого лежат эффекты двойного лучепреломления и полного внутреннего отражения. Устройство изобрёл Уильям Николь в 1820 г.

Призма Николя представляет собой две одинаковые треугольные призмы из исландского шпата, склеенные тонким слоем канадского бальзама. Призмы вытачиваются так, чтобы торец был скошен под углом  $68^\circ$  относительно направления проходящего света, а склеиваемые стороны составляли прямой угол с торцами. При этом оптические оси кристаллов параллельны друг

другу и образуют угол  $48^\circ 15'$  с торцами призм. Призмы склеены между собой специальным kleem - канадским бальзамом, показатель преломления которого по величине находится между показателями преломления обычного и необыкновенного лучей (Призма не может применяться



для поляризации ультрафиолета, так как канадский бальзам поглощает ультрафиолет.)

Свет с произвольной поляризацией, проходя через торец призмы испытывает двойное лучепреломление, расщепляясь на два луча - обычный, имеющий горизонтальную плоскость поляризации и необыкновенный, с вертикальной плоскостью поляризации. После чего обычный луч испытывает полное внутреннее отражение о плоскость склейивания и поглощается заслонкой нижней гранью. Необыкновенный луч беспрепятственно выходит через противоположный торец призмы.

## 58. Физические основы голограммии. Опорная и предметная световые волны.

*Голограммия* (от греч. *holos* - весь, полный и *grapho* - пишу) - способ записи и восстановления волнового поля, основанный на регистрации интерференционной картины, которая образована волной, отражённой предметом, освещаемым источником света (предметная волна), и когерентной с ней волной, идущей непосредственно от источника света (опорная волна). Зарегистрированная интерференционная картина называется *голограммой*. Голограмма, освещённая опорной волной, создаёт такое же амплитудно-фазовое пространственное распределение волнового поля, которое создавала при записи предметная волна. Таким образом, в соответствии с принципом Гюйгенса - Френеля, голограмма преобразует опорную волну в копию предметной волны.

В процессе *фотографирования на фотопластинке фиксируется лишь распределение интенсивности, то есть амплитуды электромагнитной волны, отражённой от объекта (интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды)*. Однако световая волна при отражении от объекта изменяет не только амплитуду, но и фазу в соответствии со свойствами поверхности объекта в данной точке.

*Голограммия позволяет получить более полную информацию об объекте, так как представляет собой процесс регистрации на фотопластинке не только амплитуд, но и фаз световых волн, рассеянных объектом*. Для этого на фотопластинку одновременно с волной, рассеянной объектом (предметная волна), необходимо направить вспомогательную волну, идущую от того же источника света (лазера), с фиксированной амплитудой и фазой (опорная волна).

*Интерференционная картина (чередование тёмных и светлых полос или пятен), возникающая в результате взаимодействия сигнальной и опорной волн, содержит полную информацию об амплитуде и фазе предметной волны, то есть об объекте*. Зафиксированная на светочувствительной поверхности интерференционная картина после проявления называется *голограммой*. Если рассматривать голограмму в микроскоп, то в простейшем случае видна система чередующихся светлых и тёмных полос. Интерференционный узор реальных объектов весьма сложен.

## 59. Запись и воспроизведение голограмм. Применение голографии.

*Принцип голографии.* Обычно для получения изображения какого-либо объекта фотографическим методом пользуются фотоаппаратом, который фиксирует на фотопластинке излуче-

ние, рассеиваемое объектом. Каждая точка объекта в этом случае является центром рассеяния падающего света; она посылает в пространство расходящуюся сферическую световую волну, которая фокусируется с помощью объектива в небольшое пятнышко на светочувствительной поверхности фотопластинки. Так как отражательная способность объекта меняется от точки к точке, то интенсивность света, падающего на соответствующие участки фотопластинки, оказывается различной. Поэтому на фотопластинке возникает изображение объекта. Это изображение складывается из получающихся на каждом участке светочувствительной поверхности изображений соответствующих точек объекта. При этом трёхмерные объекты регистрируются в виде плоских двухмерных изображений.

В процессе *фотографирования на фотопластинке фиксируется лишь распределение интенсивности, то есть амплитуды электромагнитной волны*, отражённой от объекта (интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды). Однако световая волна при отражении от объекта изменяет не только амплитуду, но и фазу в соответствии со свойствами поверхности объекта в данной точке.

Записанные на голограмме световые волны при их восстановлении создают полную иллюзию существования объекта, неотличимого от оригинала. В пределах телесного угла, охватываемого голограммой, изображение объекта можно осматривать с разных направлений, т. е. оно является трёхмерным. Эти свойства голограмм используются в лекционных демонстрациях, при создании объёмных копий произведений искусства, голографических портретов (изобразительная голограмма). Трёхмерные свойства голографических изображений используются для исследования движущихся частиц, капель дождя или тумана, треков ядерных частиц в пузырьковых камерах и искровых камерах. При этом голограмму создают с помощью импульсного лазера, а изображения восстанавливают в непрерывном излучении.

Объёмность изображения делает перспективным создание голографического кино и телевидения. Главная трудность - создание огромных голограмм, через которые как через окно одновременно могло бы наблюдать изображение большое число зрителей. Эти голограммы должны быть динамическими, т. е. меняться во времени в соответствии с изменениями, происходящими с объектом. Голографическое телевидение также встретилось с трудностями создания динамических сред в передающей и приёмной частях телевизионной системы. Другая трудность состоит в недостаточно большой полосе пропускания телевизионного канала, которую необходимо увеличить на несколько порядков для передачи трёхмерных движущихся сцен. С помощью голограммы решается проблема визуализации акустических полей и электромагнитных полей в радиодиапазоне. Если поместить голограмму на то место, где она экспонировалась, и осветить опорным пучком, то восстановится волна, рассеивавшаяся объектом во время экспозиции. Если же объект не убирать, то можно одновременно наблюдать две волны: непосредственно идущую от объекта и восстановленную голограммой. Эти волны когерентны и могут интерферировать. Если с объектом происходят какие-либо изменения, ведущие к фазовымискажениям рассеянной им волны (например, деформация или изменение коэффициента преломления), то это скажется на виде наблюдаемой картины. Появятся интерференционные полосы, форма которых однозначно связана с изменениями. На этом основана голографическая ин-

С помощью голограммы можно восстановить интерференционные картины световых волн, рассеянных объектом в разных направлениях. Это позволяет изучать пространственные неоднородности показателя преломления.

Одним из первых применений голографической интерферометрии было исследование механических деформаций. На одной и той же фотопластинке в различные моменты времени записываются две голограммы исследуемого объекта. При восстановлении обе волны, несущие информацию об объекте, накладываются друг на друга. Если за время между экспозициями с объектом произошли какие-либо изменения, то на восстановленном изображении появляется система интерференционных полос. Расшифровывая полученную интерференционную картину,

Голография применяется для хранения и обработки информации. Информация об объекте, записанная в виде интерференционной структуры, однородно распределена на большой площади. Это обуславливает высокую плотность записи информации и её большую надёжность. Обработка записанного на голограмме массива информации световым пучком происходит одновременно по всей голограмме (с огромной скоростью).

Записывая голограммы в средах со специальными свойствами, можно воспроизводить состояние поляризации предметной волны и даже её изменение во времени.