



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Студент	Петраков Станислав Альбертович
Группа	РК6-56Б
Тип задания	лабораторная работа
Тема лабораторной работы	Интерполяция в условиях с измерений с неопределенностью (вариант 5)

Студент	<hr/>	<u>Петраков С.А.</u>
	<i>подпись, дата</i>	<i>фамилия, и.о.</i>
Преподаватель	<hr/>	<u>Соколов А.П.</u>
	<i>подпись, дата</i>	<i>фамилия, и.о.</i>

Москва, 2021 г.

Оглавление

Задание на лабораторную работу	3
Цель выполнения лабораторной работы	3
Выполненные задачи	3
1. Разработать алгоритм вычисления коэффициентов кубического сплайна.....	5
2. Вычисление значений кубического сплайна на промежутке и его первой производной	6
3. Построение кубического сплайна.....	6
4. Интерполяция полиномом Лагранжа	8
5. Анализ влияния погрешности входных данных на интерполяционный полином Лагранжа	9
6. Анализ влияния погрешности входных данных на кубический сплайн	12
Заключение	13
Список использованных источников	14

Задание на лабораторную работу

Интерполяция, вероятно, является самым простым способом определения недостающих значений некоторой функции при условии, что известны соседние значения. Однако, за кадром зачастую остается вопрос о том, насколько точно мы знаем исходные данные для проведения интерполяции или любой другой аппроксимации. К примеру, исходные данные могут быть получены путем снятия показаний с датчиков, которые всегда обладают определенной погрешностью. В этом случае всегда возникает желание оценить влияние подобных погрешностей и неопределенностей на аппроксимацию. В этом задании на простейшем примере мы познакомимся с интерполяцией в целом (базовая часть) и проанализируем, как неопределенности влияют на ее предсказания (продвинутая часть).

Таблица 1

Значения уровня поверхности вязкой жидкости

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
h_i	3.37	3.95	3.73	3.59	3.15	3.15	3.05	3.86	3.60	3.70	3.02

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы – написать алгоритмы интерполяции полиномом Лагранжа и кубическим сплайном, попытаться оценить устойчивость интерполяции при присутствии погрешности во входных данных.

Выполненные задачи

1. Разработать алгоритм вычисления коэффициентов кубического сплайна по входным значениям узлов
2. Вычисление значений кубического сплайна на промежутке и его первой производной
3. Построение кубического сплайна
4. Интерполяция полиномом Лагранжа

5. Анализ влияния погрешности входных данных на интерполяционный полином Лагранжа
6. Анализ влияния погрешности входных данных на кубический сплайн

1. Разработать алгоритм вычисления коэффициентов кубического сплайна

Из курса лекций мы знаем, что кубический сплайн имеет вид:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3; \quad (1.1)$$

Где коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i выражаются в следующем виде, где $h_i = x_{i+1} - x_i$:

$$a_i = f(x_i); \quad (1.2)$$

$$b_i = \frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i); \quad (1.3)$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}; \quad (1.4)$$

Самым «сложным» для вычислений является коэффициент c_i , который вычисляется решением матричного уравнения вида:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_2 + h_1) & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_3 + h_2) & h_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \frac{3}{h_3}(a_4 - a_3) - \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (1.5)$$

Так как это уравнение вида $AX = B$, его решением является $X = A^{-1}B$. Для получения обратной матрицы воспользовался функцией `np.linalg.inv`. А для вычисления скалярного произведения `numpy.dot()`. После вычисления коэффициента c_i нахождение остальных не является проблемой. В конце функции объединяю все коэффициенты в матрицу.

2. Вычисление значений кубического сплайна на промежутке и его первой производной

Так как коэффициенты кубического сплайна будут использоваться только для получения значений функции, я принял решение изменить входные параметры на массив известных точек и массив точек интерполируемого промежутка.

Для вычисления значений кубического сплайна нам необходимо знать какой сплайн нам брать была создана функция *IndexForCubicSpline(x, xNodes)* которой на вход мы подаем значения точки x и массив известных точек по оси абсцисс $xNodes$, как результат мы получаем индекс нужного сплайна.

Теперь мы знаем всё для вычисления и вычисляем его по формуле 1.1.

В программной реализации она представлена функцией *CubicSpline* в модуле *BasePart*

Вычислим первую производную функции:

$$S'(x) = S'_i(x) = b_i + c_i(x - x_i) + d_i(x - x_i)^2; \quad (2.1)$$

В программной реализации она представлена функцией *DCubicSpline* в модуле *BasePart*.

3. Построение кубического сплайна

Для его построения необходимо получить значения сплайна на промежутке. Я подал на вход функции *CubicSpline* из модуля *BasePart* значения из таблицы 1 и значения по оси абсцисс на промежутке $[0; 1]$ с шагом 10^{-3} . По полученным значениям был построен график, представленный на рисунке 3.1. Также был построен график первой производной кубического сплайна, представленный на рисунке 3.2.

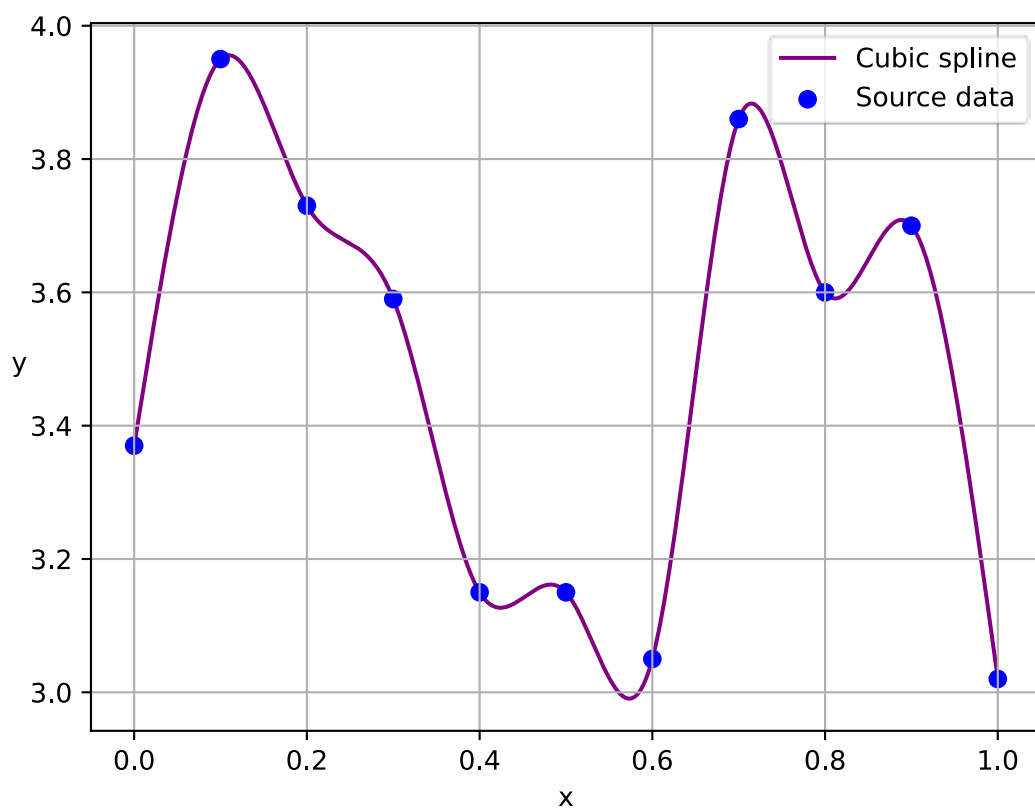


Рис 3.1 – Естественный кубический сплайн, построенный на 11 точках из таблицы 1

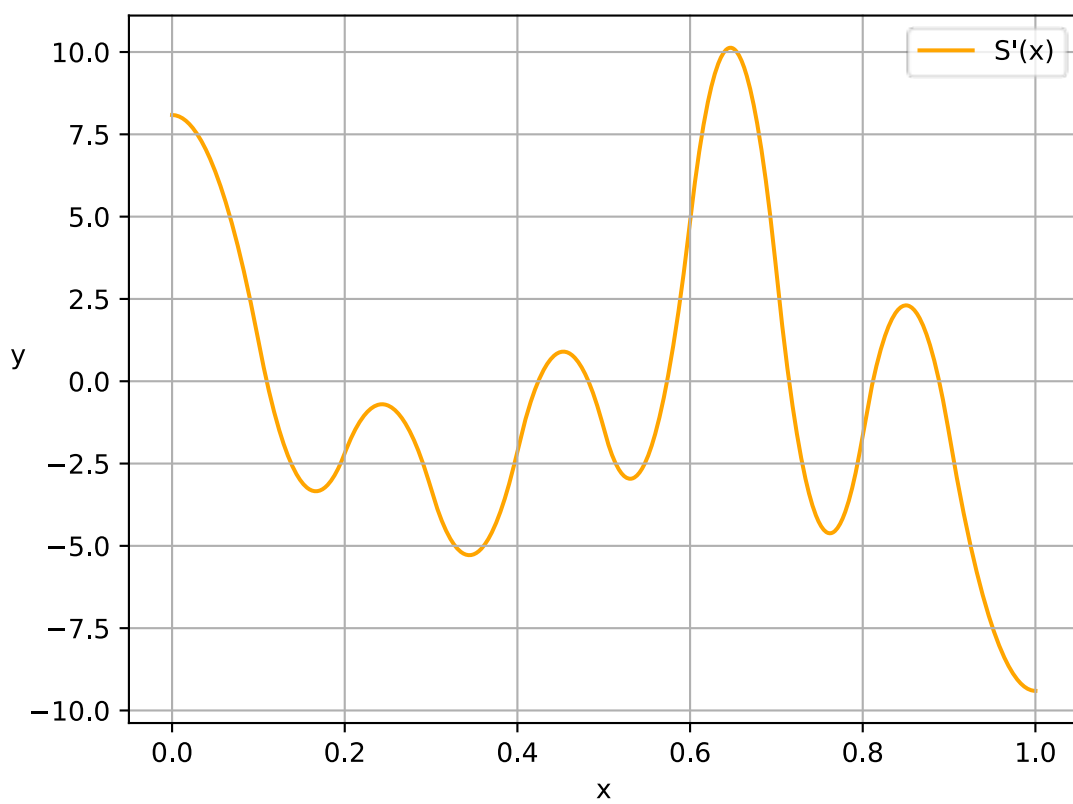


Рис 3.2 – Естественный кубический сплайн, построенный на 11 точках из таблицы 1

4. Интерполяция полиномом Лагранжа

Интерполяционный многочлен Лагранжа представляет собой сумму произведений, представленных в виде:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x); \quad (4.1)$$

В данной формуле $l_i(x)$ являются базисными полиномами Лагранжа и представлены в виде:

$$l_i(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}; \quad (4.2)$$

Для вычисления базисных полиномов Лагранжа (4.2) была создана функция *BasicLagrangePolynomial* в модуле *AdvancedPart*. Далее на её основе была создана функция *LagrangePolynomial* в том же модуле, которая на основе интерполируемого промежутка и значений исходных данных выдает массив значений полинома Лагранжа на интерполируемом промежутке.

График полинома Лагранжа, построенный по исходным данным таблицы 1 представлен на рисунке 4.1. Можно наблюдать ярко выраженные осцилляции к концам отрезка.

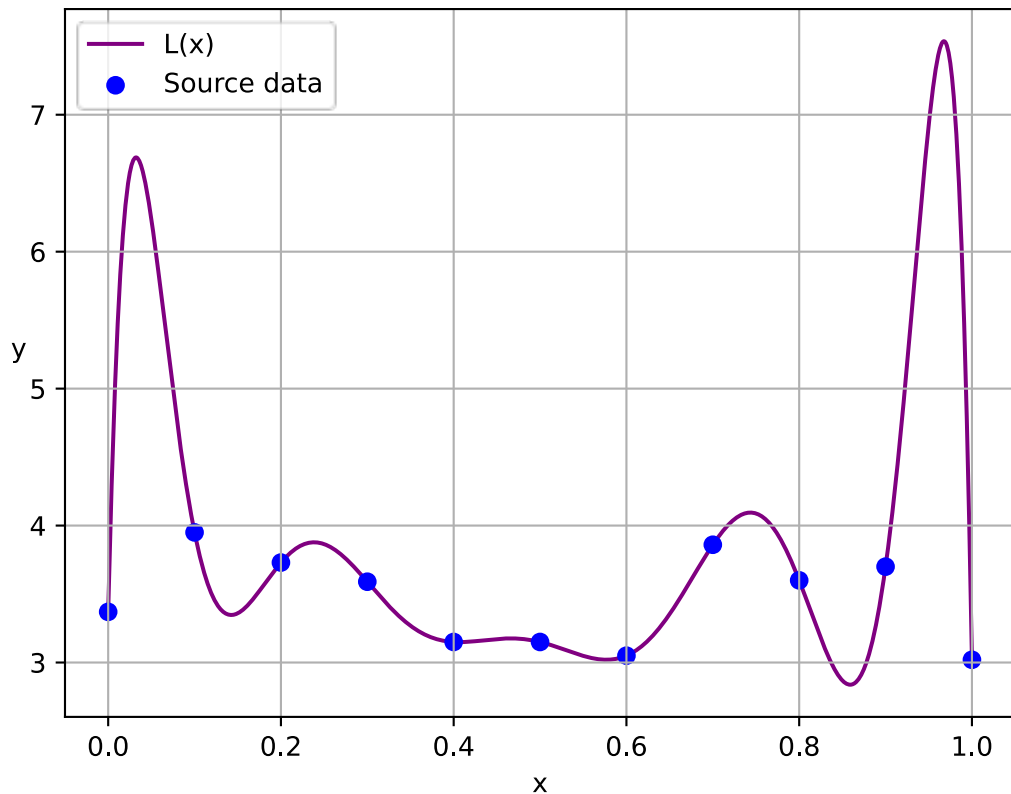


Рис 4.1 – Полином Лагранжа 10 степени для исходных 11 точек таблицы 1

5. Анализ влияния погрешности входных данных на интерполяционный полином Лагранжа

По заданию необходимо сформировать 1000 векторов значений $[\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{11}]^T$, где $\tilde{x}_i = x_i \pm Z$, где значения x_i взяты из таблицы 1, а Z является нормально распределенной случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением 10^{-2} .

Для формирования данных векторов значений была реализована функция *GenerateSetOfErroneousData* в модуле *AdvancedPart*, которой на вход подается вектор значений, которому необходимо добавить погрешность, количество векторов для формирования, математическое ожидание и стандартное отклонение.

После создания этих векторов было построено 1000 полиномов Лагранжа, представленных на рисунке 5.1.

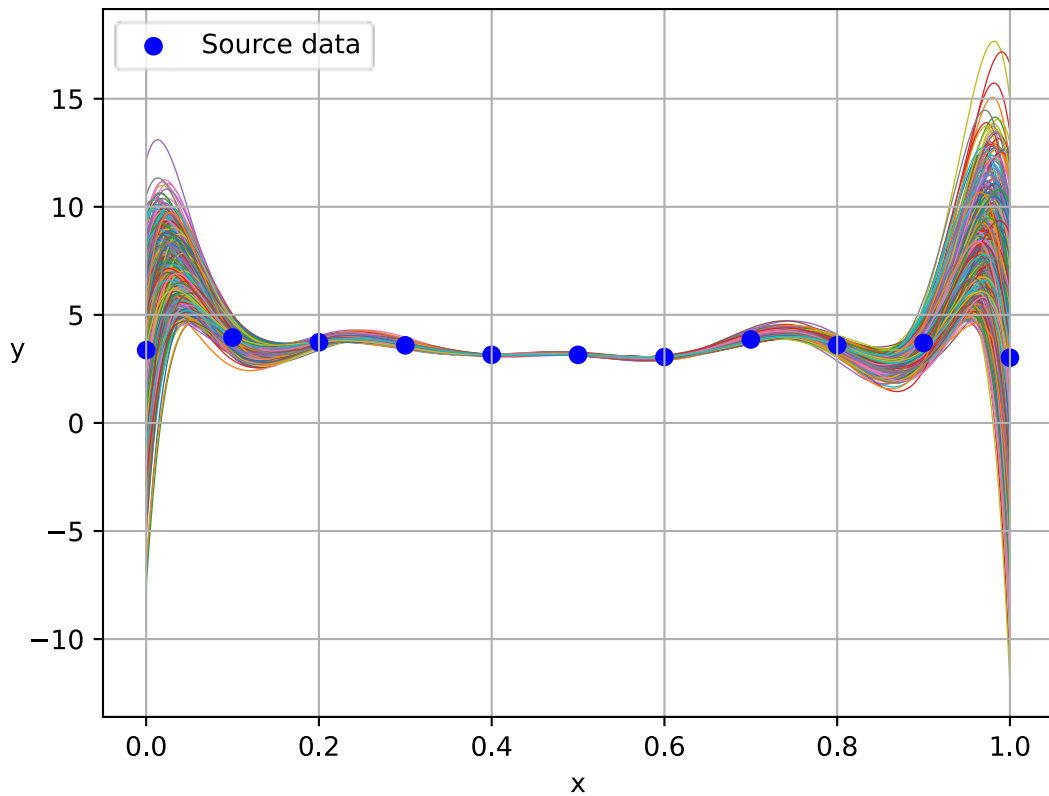


Рис 5.1 – 1000 полиномов Лагранжа, построенные с погрешностью входных данных из таблицы 1

Далее я провел анализ данных графиков, предполагая, что каждый интерполянт является равновероятным событием, построю функции \tilde{h}_l , \tilde{h}_u , \tilde{h}_m , где $\tilde{h}_m, \tilde{h}_l < \tilde{h}_u, x \in [0; 1]$. \tilde{h}_l – нижняя кривая доверительной полосы. \tilde{h}_u – верхняя кривая доверительной полосы. \tilde{h}_m – усредненный интерполянт.

Для нахождения данных кривых была создана функция *DeterminationOfConfidenceCurves*, на вход ей подаются интерполянты и вероятность попадания в доверительную полосу, как результат получая 3 массива значений кривых \tilde{h}_l , \tilde{h}_u , \tilde{h}_m . Результаты данных вычислений представлены на рисунке 5.2 для погрешности по оси абсцисс и рисунке 5.3 для погрешности по оси ординат.

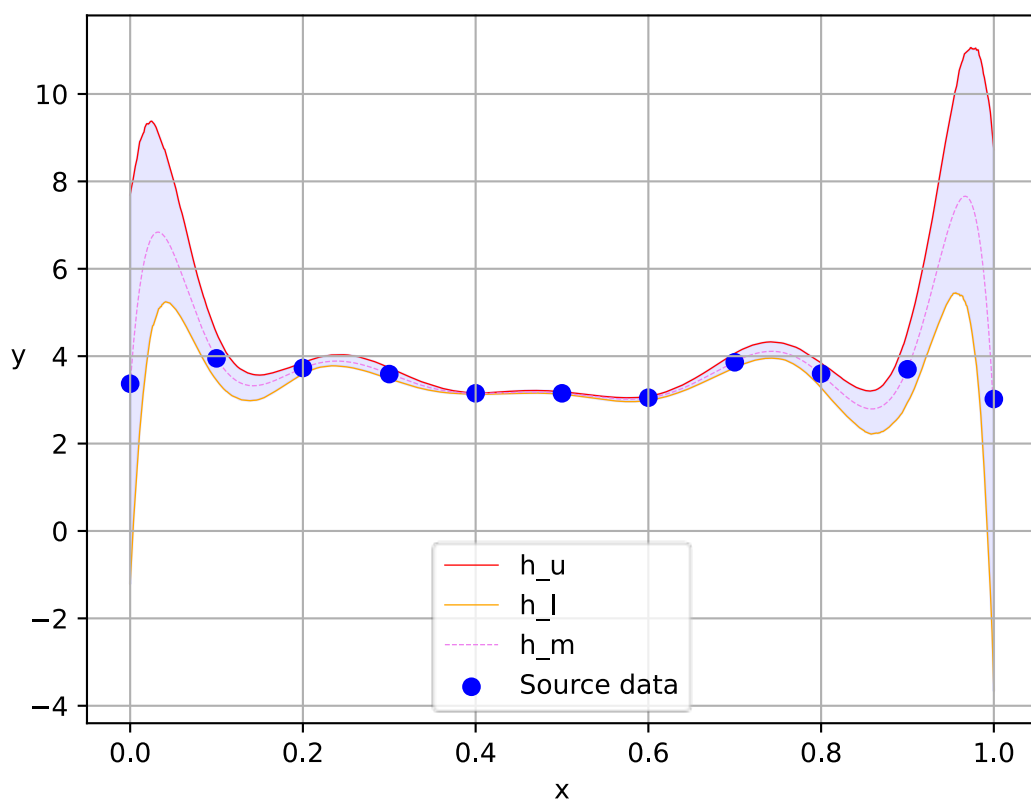


Рис 5.2 – Доверительная полоса и усредненный интерполянт Лагранжа при погрешности по оси абсцисс

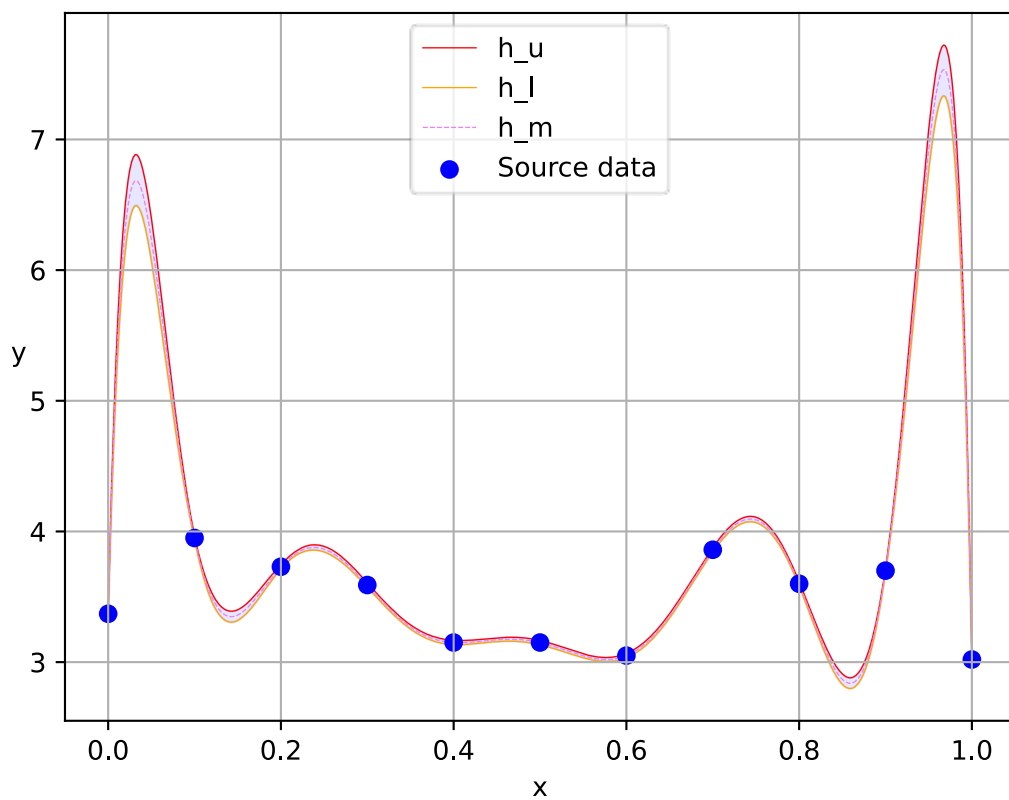


Рис 5.3 – Доверительная полоса и усредненный интерполянт Лагранжа при погрешности по оси ординат

Проведя анализ полученных графиков, можно сделать вывод, что наибольшее влияние имеет во время погрешности по оси абсцисс. Также можно заметить, что т.к. мы можем наблюдать «паразитные» осцилляции на краях интерполируемого отрезка (их можно уменьшить используя узлы Чебышева), как раз на этих осцилляциях и видно наиболее сильное влияние отклонения от усредненного интерполянта.

6. Анализ влияния погрешности входных данных на кубический сплайн

Следующим заданием было провести аналогичный анализ результаты, которого представлены на рисунках 6.1 и 6.2, с погрешностью по оси абсцисс и оси ординат соответственно.

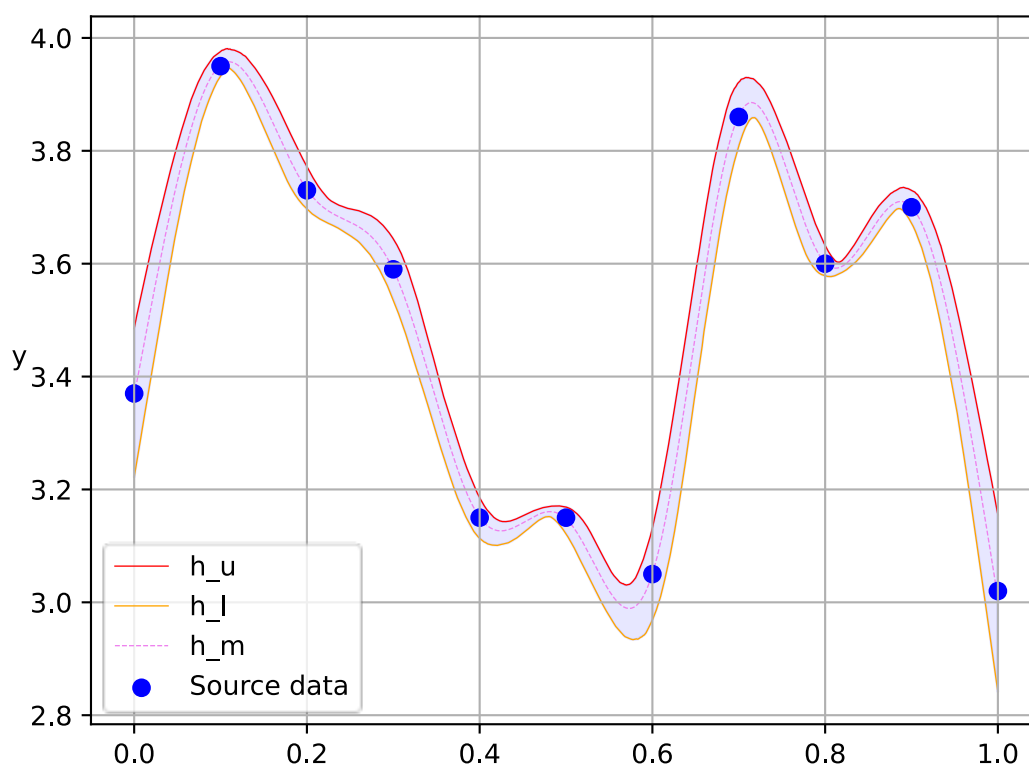


Рис 6.1 – Доверительная полоса и усредненный интерполянт кубического при погрешности по оси абсцисс

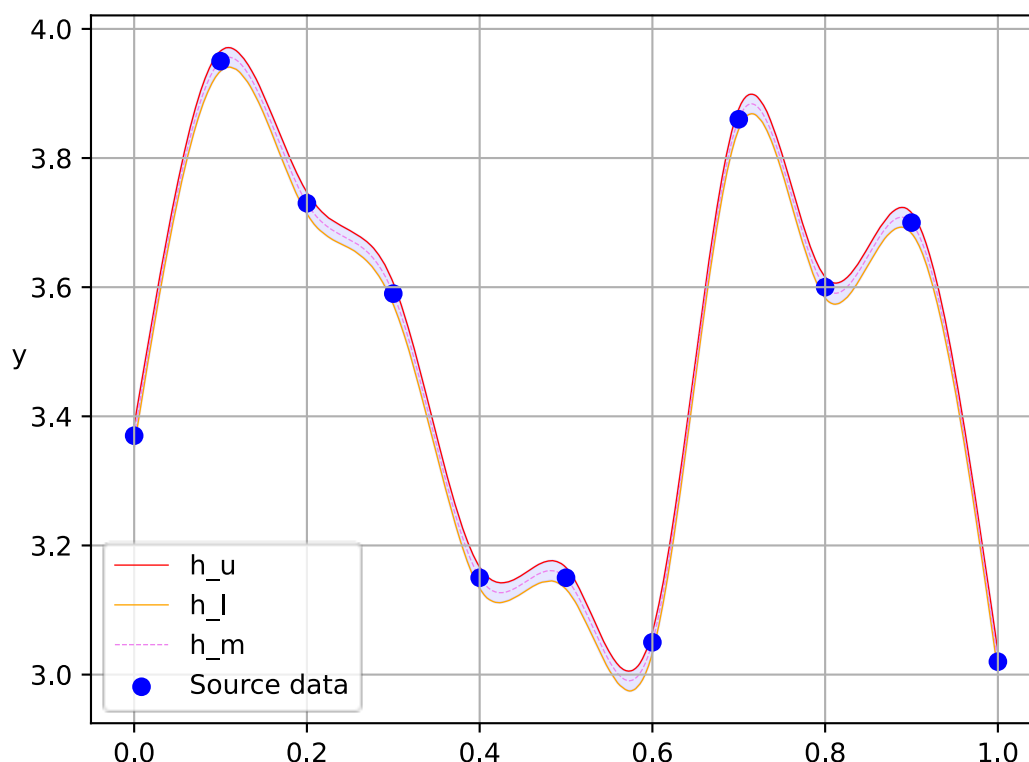


Рис 6.2 – Доверительная полоса и усредненный интерполянт кубического сплайна при погрешности по оси ординат

Проанализировав эти графики, я заметил, что не видно на всей длине доверительной полосы явных расширений, но сравнивая доверительные полосы, можно заметить, что при погрешности по оси абсцисс доверительная полоса шире, чем при погрешности по оси ординат.

Заключение

По результатам можно сделать вывод, что при погрешности по оси абсцисс в случае кубического сплайна и полинома Лагранжа, оказывают большее влияние на результат, чем погрешности по оси ординат.

Самыми уязвимыми участками при погрешности при интерполировании полиномом Лагранжа являются края интерполируемого участка, скорее всего по причине «паразитических» осцилляций.

Для кубического сплайна самыми уязвимыми местами являются экстремумы, хотя доверительная полоса намного постоянна, чем доверительная полоса полинома Лагранжа.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика. Москва, 2018-2021, С. 140.