Петраков С.А. РК6-56Б

Задача 3.4

Условие:

Требуется найти аппроксимацию значения интеграла:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

$$f(x) = \cos^2 2x$$

$$(a, b) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

с помощью составной формулы Симпсона, используя сначала 3 и затем 9 узлов. Вычислите погрешность аппроксимации для каждого из случаев. Во сколько раз увеличилась точность вычисления при увеличении числа узлов в три раза? Объясните полученное значение.

Решение:

Точное значение:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos^2 2x\, dx = \frac{\sin(4x)}{8} + \frac{x}{2}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sin\left(4 * \frac{1}{2}\right)}{8} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{\sin\left(-4 * \frac{1}{2}\right)}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sin(2)}{8} - \frac{\sin(-2)}{8}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sin(2)}{4} = 0.7273244$$

Случай 3 узлов:

Т.к. $f(x)$ имеет степень гладкости C^5. Возможно применить формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\big(f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)\big) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

$$h_3 = \frac{b-a}{2}$$

$$x_1 = a$$

$$x_2 = x_1 + h_3$$

$$x_3 = x_1 + 2h_3$$

Вычислим $h = \frac{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{2}, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0, x_3 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Вычислим интеграл по формуле Симпсона опустив остаточный член:

$$\frac{h}{3}\big(f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)\big) = \frac{\frac{1}{2}}{3}\left(\cos^2\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) + 4\cos^2(2 * 0) + \cos^2\left(2\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\big(\cos^2(-1) + 4\cos^2(0) + \cos^2(1)\big) = \frac{1}{3}(\cos^2(1) + 2) = 0.7639755$$

Оценим остаточный член

$$c_3(\xi) = \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \xi \in (a; b)$$

$$f'(x) = \left(\cos^2 2x\right)' = -2\sin(4x)$$

$$f''(x) = (-2\sin(4x))' = -8\cos(4x)$$

$$f'''(x) = (-8\cos(4x))' = 32\sin(4x)$$

$$f^{(4)}(x) = (32\sin(4x))' = 128\cos(4x)$$

$$|c_3(\xi)| \le \left|\frac{\frac{1}{2}^5}{90} f_{max}^{(4)}(\xi)\right|, \xi \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$|c_3(\xi)| \le \left|\frac{\frac{1}{2}^5}{90} f_{max}^{(4)}(\xi)\right|, \xi \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$|c_3(\xi)| \le \left|\frac{1}{2880}(128\cos(4\xi))_{max}\right|, \xi \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Максимальное значение $128\cos(4\xi)$ будет приниматься при $\xi = 0$:

$$|c_3(\xi)| \le \left|\frac{1}{2880}(128\cos(4\xi))_{max}\right|, \xi \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$|c_3(\xi)| \le \frac{2}{45}$$

Тогда абсолютная погрешность равна:

$$|0.7273244 - 0.7639755| = 0.0366511$$

Относительная погрешность равна*:*

$$\frac{0.0366511}{0.7273244} * 100\% = 5.039\%$$

Случай 9 узлов:

Составная функция Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_1) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i}) + f(x_{n+1})\right) - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$$

В этом случае $n = 8$, $h_9 = \frac{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})}{8} = \frac{1}{8}$, а $x_i = a + h * (i-1)$.

Вычислим интеграл по составной формуле Симпсона опустив остаточный член:

$$\frac{h_9}{3}\left(f(x_1) + 2\sum_{i=1}^{3} f(x_{2i+1}) + 4\sum_{i=1}^{4} f(x_{2i}) + f(x_9)\right)$$
$$= \frac{h_9}{3}\Big(f(x_1) + 2\big(f(x_3) + f(x_5) + f(x_7)\big) + 4\big(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)\big) + f(x_9)\Big)$$

$$f(x_1) = \cos^2 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \cos^2 2\left(\frac{1}{2}\right) = f(x_9) = 0.292$$

$$f(x_2) = \cos^2 2\left(-\frac{3}{8}\right) = \cos^2 2\left(\frac{3}{8}\right) = f(x_8) = 0.535$$

$$f(x_3) = \cos^2 2\left(-\frac{1}{4}\right) = \cos^2 2\left(\frac{1}{4}\right) = f(x_7) = 0.77$$

$$f(x_4) = \cos^2 2\left(-\frac{1}{8}\right) = \cos^2 2\left(\frac{1}{8}\right) = f(x_6) = 0.939$$

$$f(x_5) = \cos^2 2(0) = 1$$

$$\frac{h_9}{3}\left[f(x_1) + 2\big(f(x_3) + f(x_5) + f(x_7)\big) + 4\big(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6)\big) + f(x_9)\right]$$
$$= \frac{h_9}{3}\left[2f(x_1) + 2\big(2f(x_3) + f(x_5)\big) + 4\big(2f(x_4) + 2f(x_2)\big)\right]$$
$$= \frac{1}{24}[2 * 0.292 + 4 * 0.77 + 2 * 1 + 8 * 0.939 + 8 * 0.535] = \frac{17.456}{24} = 0.72733333$$

Оценим остаточный член

$$c_3(\xi) = \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \xi \in (a; b)$$

$$f^{(4)}(x) = (32\sin(4x))' = 128\cos(4x)$$

$$|c_3(\xi)| \leq \left|\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{8}^4}{180} f^{(4)}(\xi)\right|, \xi \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$|c_3(\xi)| \leq \left|\frac{\frac{1}{8}^5}{180} f_{max}^{(4)}(\xi)\right|, \xi \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$|c_3(\xi)| \leq \left|\frac{1}{5898240}(128\cos(4\xi))_{max}\right|, \xi \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Максимальное значение $128\cos(4\xi)$ будет приниматься при $\xi = 0$:

$$|c_3(\xi)| \leq \left|\frac{1}{5898240}(128\cos(4\xi))_{max}\right|, \xi \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$|c_3(\xi)| \leq \frac{1}{5760}$$

Тогда абсолютная погрешность равна:

$$|0.7273244 - 0.72733333| = 0.00000893$$

Относительная погрешность равна*:*

$$\frac{0.00000893}{0.7273244} * 100\% = 0.00122778776\%$$

При изменении числа узлов с 3 на 9, абсолютная и относительная погрешность уменьшилась в 4104 раза, влияние остаточного члена уменьшилось в 256 раз.

Вывод:

Увеличение числа узлов, положительно влияет на точность вычисления интеграла.