Петраков С.А. РК6-56Б

Задача 4.1

Условие:

Рассмотрим аппроксимирующую функцию $f(x)$, которая используется для нахождения приближения дискретных данных $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$.

Вид функции $f(x)$ известен:

$$f(x) = \{\alpha * x^{\gamma}\};$$

где α, γ – неизвестные коэффициенты.

Требуется записать формулировку оптимизационной задачи для метода наименьших квадратов (МНК) для нахождения неизвестных коэффициентов и найти ее аналитическое решение.

Решение:

Формулировка:

$$\min_{a_0, a_1} E_2(a_0, a_1) = \min_{\alpha, B} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2;$$

Где $E_2(\alpha, B)$ – сумма квадратов отклонений.

Решение:

Необходимо свести задачу к линейной регрессии, для этого:

Прологарифмируем по основанию e искомую функцию:

$$\ln(y) = \alpha * \ln(x) + \ln(\gamma)$$

Заменим $Y = \ln(y)$, $X = \ln(x)$, $B = \ln(\gamma)$:

$$Y = \alpha * X + B$$

Таким образом задача была сведена к линейной регрессии.

После того как свели к линейной регрессии, теперь можно решить задачу оптимизации для МНК:

$$\min_{a_0, a_1} E_2(a_0, a_1) = \min_{\alpha, B} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2;$$

Где $E_2(\alpha, B)$ – сумма квадратов отклонений.

Для линейной регрессии, в данном случае, она будет иметь вид:

$$\min_{\alpha, B} E_2(\alpha, B) = \min_{\alpha, B} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha * X_i - B)^2$$

Тогда выражение $E_2(\alpha, B) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha * X_i - B)^2$, примет экстремальное при следующих условиях и значениях α, B:

$$\frac{\partial E_2}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha * X_i - B)^2 = 0$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial B} = 0 \Rightarrow -2\sum_{i=1}^{n} x_i (Y_i - \alpha * X_i - B)^2 = 0$$

Получаем систему уравнений относительно α, B:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha * X_i - B)^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - \alpha * X_i - B)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Y_i - n\alpha - B\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (X_i Y_i) - \alpha \sum_{i=1}^{n} X_i - B\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \end{cases}$$

Решив её получаем значения α, B:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 * \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i * \sum_{i=1}^{n} (X_i Y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i Y_i) - \sum_{i=1}^{n} X_i * \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

Выполним обратную подстановку:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\ln(x_i))^2 * \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) * \sum_{i=1}^{n} (\ln(x_i) * \ln(y_i))}{n\sum_{i=1}^{n} (\ln(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right)^2}$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\ln(x_i) * \ln(y_i)) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) * \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} (\ln(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right)^2}$$