Лабораторная работа №2 (М103)

Определение момента инерции маятника Максвелла

Цель: изучить динамику сложного движения твердого тела на примере маятника Максвелла, который одновременно находится во вращ. движ. и совершает поступ. перемещение; определить момент инерции маятника Максвелла относит. своей оси симм.

Теория:

Сложное движение можно разложить на поступательное и вращ. движение

I способ: $\begin{cases} ma = mg - 2F \\ I_0 \varepsilon_0 = 2F_r \end{cases}$

m - масса маятника

F - сила натяжения нитей

a_0 - ускорение центра масс при спуске

I_0 - момент инерции маятн. отн. оси симм.

ε_0 - угловое ускорения маятника

r - радиус осевого вала

$v_0 = \omega_0 r$

v_0 - скорость центра масс

ω_0 - угл. скор. вращ. маятн. отн. оси

$a_0 = \varepsilon_0 r$, где $a_0 = \frac{dv_0}{dt}$; $\varepsilon_0 = \frac{d\omega_0}{dt}$ =>

=> $I_0 = mr^2\left(\frac{g}{m_0} - 1\right)$

II способ:

$I_A \varepsilon_A = mgr$ - ур-е дин. вращат. движ.

ε_A - углов. уск. маят. относит. мгновен. оси (через т. A)

I_A - момент инерции маятника (через т. A)

По теор. Штейнера: $I_A = I_0 + mr^2$

$a_0 = \varepsilon_A r$ => $I_0 = mr^2\left(\frac{g}{m} - 1\right)$

$a_0 = const$ и $\varepsilon_0 = const$ (равнопеременн. движение) =>

=> $h = a_0 \frac{t_n^2}{2}$

h - высота спуска

t_n - время спуска

$I_0 = mr^2\left(\frac{g t_n^2}{2h} - 1\right)$

III способ

Закон сохр. энергии: $mgh = \frac{m v_0^2}{2} + \frac{I \omega_0^2}{2}$

потенц. энергия маятника

кинетич. энерг. поступат. движ

кинетич. энерг. вращат. движения

$v_0 = 2a_0 h$

$t = t_n$

Сила натяжения

$$F = \frac{m}{2}(g - a_0)$$

v_{0max} - максим. скорость спуска

Закон изменения импульса:

$$(2F_{max} - mg)\Delta t = m v_{0max} - (-m v_{0max}) = 2m v_{0max}$$

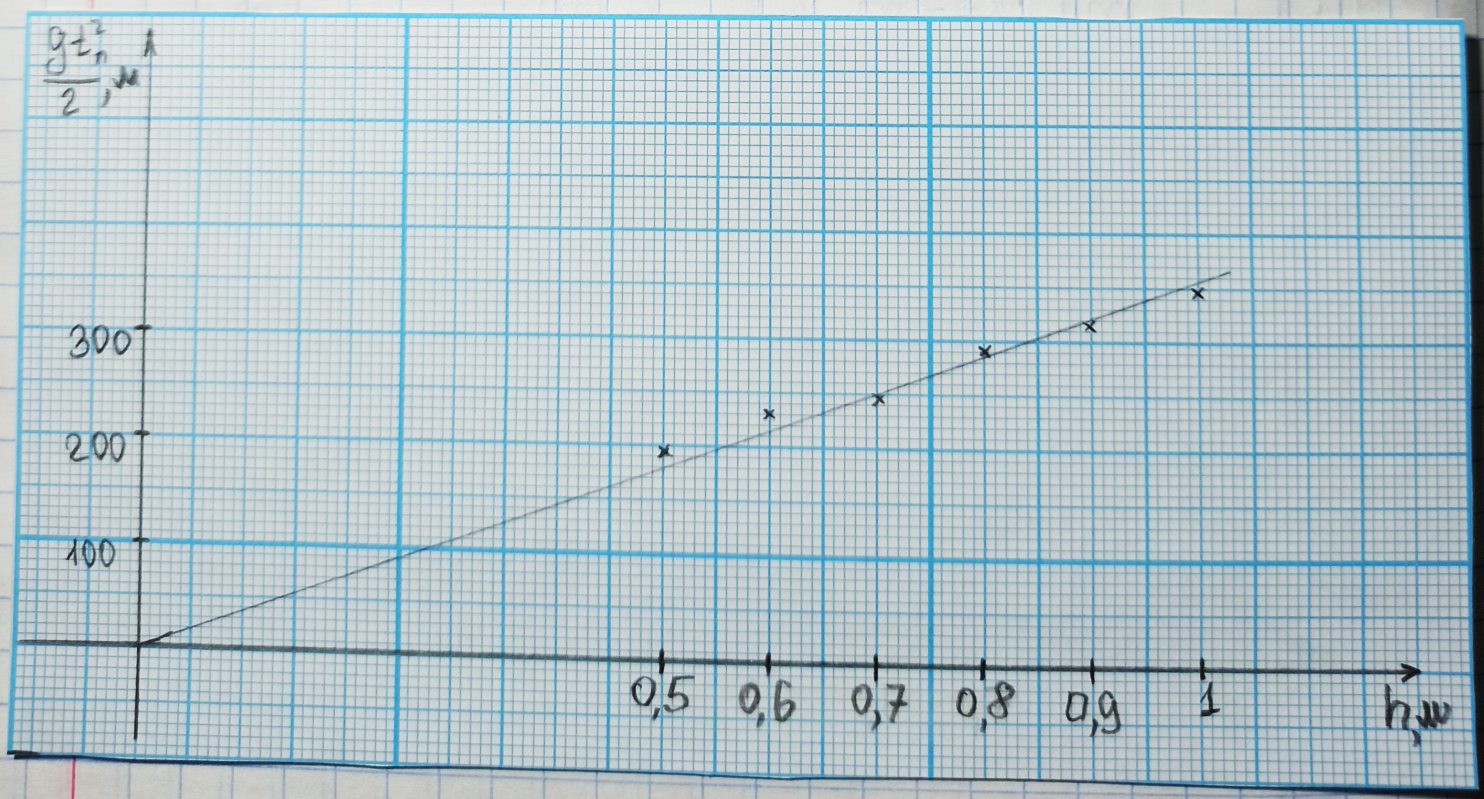
$$v_{0max} = \frac{\pi r}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi r}{v_{0max}}$$

$$2F_{max} = 2m v_{0max}^2 \cdot \frac{1}{\pi r} + mg$$

$$v_{0max}^2 = 2a_0 h \Rightarrow F_{max} > mg$$

$F_{max} = \frac{1}{2}\left(\frac{4h}{\pi r} m a_0 + mg\right)$ - максим. сила натяж. нитей

h, m	t_i, c	$t_n = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} t_i, c$	t_n^2, c^2	$\frac{1}{2} g t_n^2, м$
0,5	$t_1 = 6,12$ $t_2 = 6,23$ $t_3 = 6,51$	6,29	39,56	193,84
0,6	$t_1 = 6,90$ $t_2 = 6,97$ $t_3 = 6,98$	6,95	48,30	236,67
0,7	$t_1 = 7,16$ $t_2 = 7,26$ $t_3 = 7,23$	7,22	52,13	255,437
0,8	$t_1 = 7,67$ $t_2 = 7,70$ $t_3 = 7,90$	7,76	60,22	295,08
0,9	$t_1 = 8,28$ $t_2 = 8,23$ $t_3 = 8,09$	8,2	67,24	329,48
1	$t_1 = 8,47$ $t_2 = 8,48$ $t_3 = 8,68$	8,54	72,93	357,36



1) $tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \alpha = arctg\frac{gt_n^2}{2n}$

$\alpha = arctg\left(\frac{357,36}{1}\right) \approx 89,84 \; (tg\alpha = 357,36)$

2) $I_0 = mr^2(tg\alpha - 1)$ $(m = 0,436 кг; r = 2,5 мм)$

$I_0 = 0,436\,(2,5)^2 \cdot \frac{1}{10^6} \cdot (357,36 - 1) = 0,97 \cdot 10^{-3}$ кг·м²

3) Абсолютная погрешность измерения момента инерции маят. Максвелла

$\Delta I_0 = \frac{mr^2}{\cos^2\alpha} \cdot \Delta\alpha$ $(\Delta\alpha = \alpha_{max} - \alpha$ или $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_{min})$

наибольш. берем

$\alpha_1 = arctg\left(\frac{193,84}{0,5}\right) = arctg(387,68) \approx 89,85$

$\alpha_2 = arctg\left(\frac{236,67}{0,6}\right) = arctg(394,45) \approx 89,95$

$\alpha_3 = arctg(364,91) \approx 89,84$

$\alpha_4 = arctg(368,85) \approx 89,84$

$\alpha_5 = arctg(366,09) \approx 89,84$

$\alpha_6 \approx 89,84$

$\alpha_{max} = 89,85$; $\Delta\alpha$ – наибольш. величина

$\Delta\alpha = \alpha_{max} - \alpha = 89,85 - 89,84 = 0,01$

$\Delta I_0 = \frac{mr^2}{\cos^2\alpha}\Delta\alpha = \frac{0,436 \cdot (2,5)^2}{10^6 \cdot \cos^2(89,84)} \cdot 0,01 = 0,003$ кг·м²

Ответ: $I_0 \pm \Delta I$: $(0,97 \pm 3) \cdot 10^{-3}$ кг·м²

Ответы на вопросы:

① $\begin{cases} ma_0 = mg - 2F & \text{– ур-е поступ. движ.} \\ I_0\varepsilon_0 = 2Fr & \text{– ур-е вращат. движ.} \end{cases}$

② $I_A\varepsilon_A = mgr$ – ур-е вращ. относит. мгновенной оси

③ Закон сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2}$$

④ $F = \frac{m}{2}(g - a_0)$ – сила натяж. нитей

$$2F_{max} = \frac{2mv_{0max}^2}{\pi r} + mg$$

$$v_{0max}^2 = 2a_0h \Rightarrow F_{max} > mg$$

$$F_{max} = \frac{1}{2}\left(\frac{4h}{\pi r}ma_0 + mg\right)$$