

Задача №3.2.1

Вариант 14

По двум гладким медным шинам скользит перемычка массы m , закон движения которой задан $Y = f(t)$. Сопротивление перемычки равно R_0 , поперечное сечение S , концентрация носителей заряда (электронов) в проводнике перемычки равна n_0 . Сверху шины замкнуты электрической цепью, состоящей либо из конденсатора ёмкости C , либо из индуктивности L или из сопротивления R в соответствии с рисунком. Расстояние между шинами l . Система находится в однородном переменном магнитном поле с индукцией $B(t)$, перпендикулярном плоскости, в которой перемещается перемычка. Сопротивление шин, скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Ток через индуктивность, конденсатор и сопротивление в начальный момент времени равны 0.

Найти:

- 1) • закон изменения тока $I(t)$;
- 2) • максимальное значение тока I_{max} ;
- 5) • закон изменения проекций силы Лоренца на ось X (F_{Lx}) и на ось Y (F_{Ly}), действующей на электрон;
- 4) • закон изменения напряженности электрического поля в перемычке $E(t)$;
- 3) • силу $F(t)$, действующую на перемычку, необходимую для обеспечения заданного закона движения.
- 6) Установить связь между силой Ампера, действующей на перемычку, и силой Лоренца, действующей на все электроны в перемычке.

7) Построить зависимости тока через перемычку $\frac{I(t)}{I_{max}}$, силы Ампера $\frac{F_a(t)}{F_{amax}}$.

Закон движения перемычки: $Y = ae^{-nt}$;

Закон изменения магнитного поля: $B_z = -ce^{-mt}$.

Константы a и c считать известными.

$$n = 2m = \frac{4}{RC}$$

$$m = \frac{2}{R_0 C} = \frac{2}{RC}$$

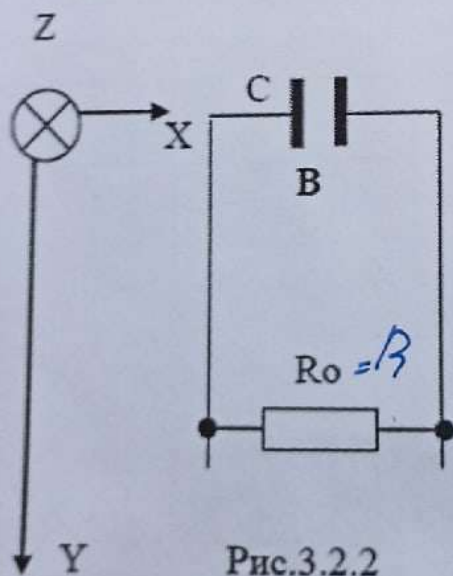
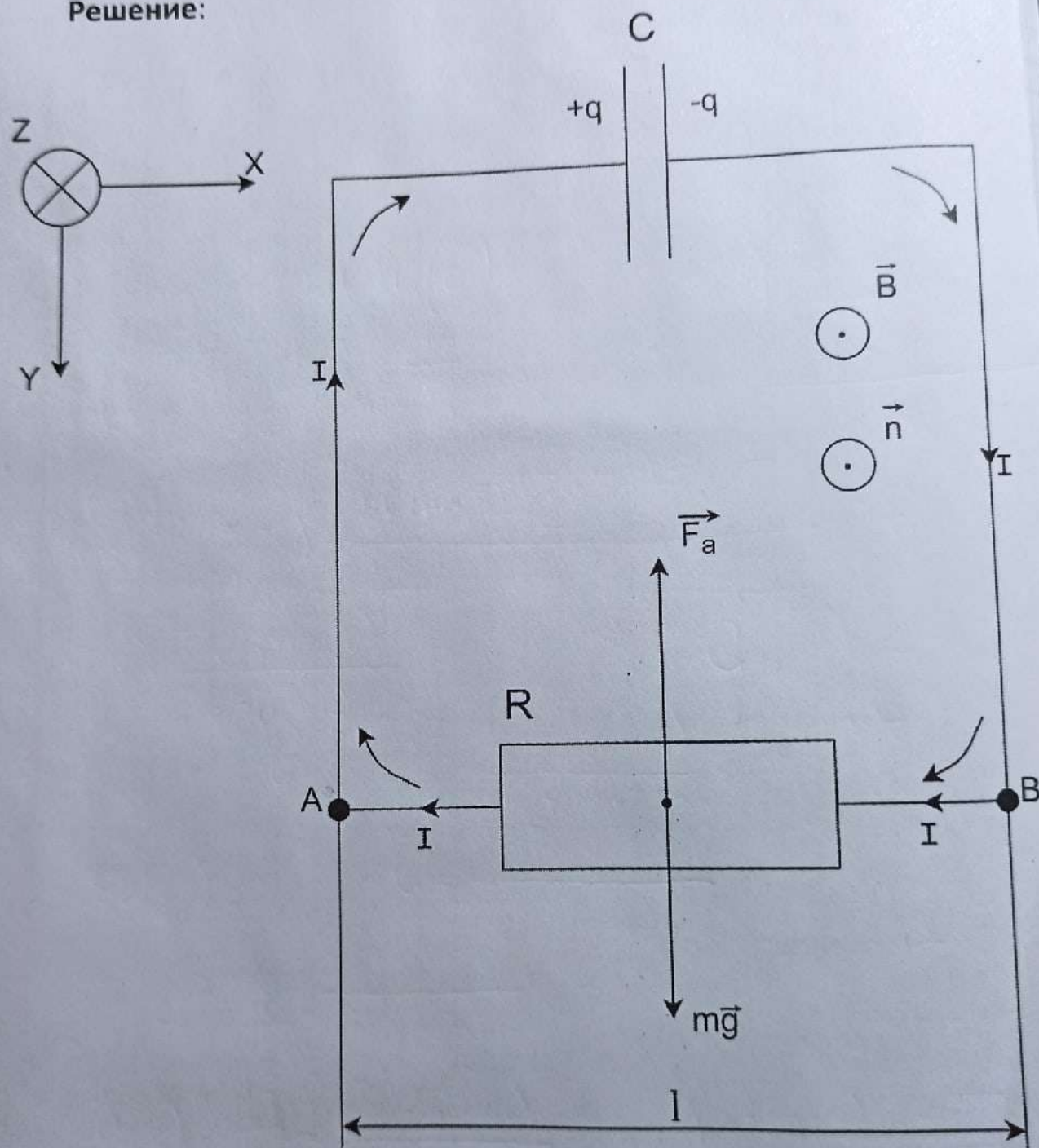


Рис.3.2.2

Решение:



1) Выберем напр. \vec{n} ($|\vec{n}|=1$) так, чтобы $\vec{n} \uparrow \uparrow \vec{B}$, тогда поток положительный.

Поток вектора \vec{B} сквозь пов-ть $ACBA$:

$$\Phi = (\vec{B}, \vec{n}) l_y \quad (1)$$

ЭДС индукуи из-за изм. тока:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} (B_z(t) * l_y * l) \quad (2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{закон Фарадея} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{ур. Кирхгофа: } \mathcal{E}_i - \frac{q}{C} = IR \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C} + IR = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{dq}{dt} R + \frac{q}{C} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (4)$$

Подставим в (2):

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} (l c e^{-mt}) a e^{-nt} l = c a l (m+n) e^{-(m+n)t}$$

Полученное подставим в (4)

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{c a l (m+n) e^{-(m+n)t}}{R} \quad \text{— неоднор. л.у.} \quad (5)$$

Ищем л.р.п.:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \quad \int \frac{dq}{q} = -\int \frac{dt}{RC}$$

$$q = e^{\frac{-t+k^*}{cA}} \Rightarrow q = K e^{\frac{-t}{cA}}$$

Duga u-k

$$\text{Torqa: } q = u e^{\frac{-t}{cA}}$$

$$\frac{dq}{dt} = u' e^{\frac{-t}{cA}} - \frac{1}{cA} u e^{\frac{-t}{cA}}$$

Dograbuu b (5):

$$u' e^{\frac{-t}{cA}} - \frac{1}{cA} u e^{\frac{-t}{cA}} + \frac{1}{cA} u e^{\frac{-t}{cA}} = \frac{cal(m+n)e^{-(m+n)t}}{A}$$

$$\int du = - \int \frac{cal(m+n)e^{-(m+n)t} e^{\frac{t}{cA}}}{A} dt$$

$$u = \frac{c^2 al(m+n)}{cA(m+n)-1} e^{t(\frac{1}{cA} - (m+n))} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = C \cdot e^{\frac{-t}{cA}} + \frac{c^2 al(m+n)}{cA(m+n)-1} e^{-(m+n)t}$$

$$\text{T.K. } q(0) = 0 \Rightarrow C = - \frac{c^2 al(m+n)}{cA(m+n)-1}$$

$$\text{torqa } q = \frac{c^2 al(m+n)}{cA(m+n)-1} (-e^{\frac{-t}{cA}} + e^{-(m+n)t})$$

$$J(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{c^2 al(m+n)}{cA(m+n)-1} \left(-(m+n)e^{-(m+n)t} + \frac{e^{\frac{-t}{cA}}}{cA} \right)$$

$$C=2$$

Погребену му н:

$$\begin{aligned} \underline{J(t)} &= \frac{6ac^2l}{5AC} \cdot \left(\frac{1}{CA} e^{-\frac{t}{CA}} - \frac{6}{CA} e^{-\frac{6t}{CA}} \right) = \\ &= \underline{\frac{6ac^2l}{5A^2C^2} \left(e^{-\frac{t}{CA}} - 6e^{-\frac{6t}{CA}} \right)} \end{aligned}$$

$$2) J'(t) = 0 - \max$$

$$\frac{dJ}{dt} \left(e^{-\frac{t}{CA}} - 6e^{-\frac{6t}{CA}} \right) = 0$$

$$\frac{1}{CA} e^{-\frac{t}{CA}} = 36 \frac{1}{CA} e^{-\frac{6t}{CA}} \quad \Bigg| \cdot e^{\frac{6t}{CA}}$$

$$e^{\frac{5t}{CA}} = 36$$

$$\frac{5t}{CA} = 2 \ln 6$$

$$t_{\max} = \frac{2}{5} CA \ln 6 \quad - \text{т. максимуму на}$$

$$J_{\max}(t_{\max}) = \frac{6ac^2l}{5A^2C^2} \cdot \frac{5\sqrt{216}}{36} = \frac{ac^2l\sqrt{216}}{6A^2C^2}$$

3) Ур-е движение перемычки

$$(y): m a_y = m g - \mathcal{B} l B_z + F_y(t)$$

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = a n^2 e^{-nt}$$

$F_y(t)$ - проекция силы $F(t)$ на ось y

$$F_y(t) = m a n^2 e^{-nt} - m g + l (-c e^{-mt}) \frac{6 a c^2 l}{5 R^2 c^2},$$

$$\cdot \left(e^{-\frac{t}{CA}} - 6 e^{-\frac{6t}{CA}} \right) = \frac{m 2 a l b}{R c^3} e^{-\frac{4t}{RC}} - m g + \frac{6 a c^3 l^2}{5 R^2 c^2} e^{-\frac{2t}{RC}}.$$

$$\cdot \left(-e^{-\frac{t}{CA}} + 6 e^{-\frac{6t}{CA}} \right) =$$

$$F(t) = m \left(\frac{32 a}{R^3 c^3} e^{-\frac{4t}{RC}} - m g \right) + \frac{6 a c^3 l^2}{5 R^2 c^2} \left(6 e^{-\frac{2t}{CA}} - e^{-\frac{3t}{CA}} \right)$$

4) Поток тока в перемычке:

$$j = \frac{\mathcal{I}(t)}{S}$$

Напр. поля в перемычке в дифф. форме:

$$E(t) = \frac{j}{\sigma} = j \rho_{yg}$$

$$E(t) = \frac{\mathcal{I}(t)}{S} \rho_{yg}$$

ρ_{yg} - удельное сопр. меди

$$E(t) = \frac{\rho_{yg}}{S} \cdot \frac{6 a c^2 l}{5 R^2 c^2} \left(e^{-\frac{t}{CA}} - 6 e^{-\frac{6t}{CA}} \right)$$

5) Ср. скор. направл. движе. зл. зарядов:

$$\bar{j} = |e| n_0 \langle \bar{u} \rangle$$

$$\langle \bar{u} \rangle = \frac{j}{|e| n_0}$$

$|e|$ - модуль заряда электр

n_0 - обьемная конц. носителей

Точная скорость носителей заряда (электронов):

$$\bar{v} = \langle \bar{u} \rangle + \bar{v}_n$$

\bar{v}_n - скор. перемещения

Сила Лоренца, действ. на один заряд:

$$\bar{F}_n = |e| [\bar{v} \cdot \bar{B}] = |e| [\langle \bar{u} \rangle \cdot \bar{B}] + |e| [\bar{v}_n \cdot \bar{B}] \quad \left\{ \bar{v}_n \frac{dy}{dt} = -\gamma n e^{-\gamma t} \right.$$

Т.к. вект. перемещ. и вект. сил \perp , то:

$$F_n = |e| \sqrt{[\langle \bar{u} \rangle \cdot \bar{B}]^2 + [\bar{v}_n \cdot \bar{B}]^2}$$

$$F_{nx} = |e| |\bar{v}_n| |\bar{B}| = |e| a \frac{4}{AC} e^{-\frac{4t}{AC}} \cdot c e^{-\frac{2t}{AC}} = |e| \frac{4cl}{AC} e^{-\frac{6t}{AC}}$$

$$F_{ny} = |e| \langle \bar{u} \rangle |\bar{B}| = |e| \left| \frac{y(t)}{|e| n_0 S} \right| c e^{-\frac{2t}{AC}} =$$

$$= \frac{6ac^3 l}{5AC n_0 S} e^{-\frac{3t}{AC}} \left| 1 - 6e^{-\frac{5t}{5A}} \right|$$

6) Сила Лоренца действ. на все носители:

$$F_n^* = F_n \sin \alpha_0 = \sin \alpha_0 |e| \sqrt{[<\bar{u}> * \bar{B}]^2 + [<\bar{v}_n> * \bar{B}]^2}$$

Сила Ампера действ. на перемычку:

$$F_n = IlB_z$$

$$F_A = \frac{6ac^3 l^2}{5R^2 C^2} \left(6e^{-\frac{6t}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}} \right) e^{-\frac{2t}{RC}} = \frac{6ac^3 l^2}{5R^2 C^2} \left(6e^{-\frac{8t}{RC}} - e^{-\frac{3t}{RC}} \right)$$

$$\frac{d}{dt} F_A = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(6e^{-\frac{8t}{RC}} - e^{-\frac{3t}{RC}} \right) = 0$$

$$-\frac{8}{RC} \cdot 6e^{-\frac{8t}{RC}} + \frac{3}{RC} e^{-\frac{3t}{RC}} = 0$$

$$16e^{-\frac{8t}{RC}} = e^{-\frac{3t}{RC}} \cdot e^{\frac{8t}{RC}}$$

$$16 = e^{\frac{5t}{RC}}$$

$$\frac{5t}{RC} = 4 \ln(2) \Rightarrow t_{\max} = \frac{4 \ln(2)}{5} RC$$

$$F_{A \max} = \frac{3ac^3 l^2 \sqrt{8}}{5R^2 C^2 \cdot 32}$$

$$\frac{F_A}{F_n^*} = \frac{IlB}{F_n \sin \alpha_0} = \frac{|e| n_0 <\bar{u}> \sin \alpha_0}{\sin \alpha_0 |e| \sqrt{[<\bar{u}> * \bar{B}]^2 + [<\bar{v}_n> * \bar{B}]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_n}{u} \right)^2}} \leq 1$$

$$7) \frac{I(t)}{I_{max}} = \frac{6ac^2 (e^{-\frac{t}{CA}} - 6e^{-\frac{6t}{CA}}) 6B^2c^2}{5A^2c^2 \cdot 1ac^2 \cdot 5\sqrt{216}} = \frac{36}{5\sqrt{216}} \left(e^{-\frac{t}{CA}} - 6e^{-\frac{6t}{CA}} \right)$$

$$\frac{F_A(t)}{F_{Amax}} = \frac{6ac^2 \cdot 3c^2 \cdot B^2c^2 \cdot 32}{5A^2c^2 \cdot 8ac^3 \cdot 5\sqrt{8}} \quad (\text{штырае}) =$$

$$= \frac{64}{5\sqrt{8}} \left(6e^{-\frac{8t}{AC}} - e^{-\frac{3t}{AC}} \right)$$

