1. Последовательностью называется числовая функция натурального аргумента. Если натуральному числу n при этом поставлено в соответствие число xn, то это число называется n-м элементом последовательности; n называют номером элемента xn.

Число a называется пределом последовательности {xn}, если для любого положительного ε существует номер N = N(ε) такой, что для всех номеров n > N выполняется неравенство |a − xn| < ε.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся.

Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности).

Любая сходящаяся последовательность имеет только один предел

Доказательство: пусть существует предел последовательности xn ,где n->бесконечности равный a и равный b, a не равно b, a <b. Расписываем Коши в обоих случаях. Модуль разности меньше либо равен суммы модулей. Выберем любой эпсилон, например e=|b-a|\2, тогда у нас |xn-a-xn+b|<=|xn-a|+|xn-b|, так как справа оба модуля меньше эпсилон (из Коши), то имеем, что |b-a|<=2e -> |b-a|<=|b-a| -> b-a = 0 -> a=b -> имеем противоречие. Доказано.

2. Числовая последовательность называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если множество ее значений ограничено сверху (снизу). Иначе говоря, числовая последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу), если существует такое число c $\in$ ***R***, что для всех номеров *n* выполняется неравенство $x_n \leq c$ (соответственно неравенство $x_n \geq c$).

Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности). Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть {xn} сходится, и пусть a = limn→∞ xn. Тогда для положительного числа 1 существует номер N такой, что при n > N выполняется неравенство |a − xn| < 1. Отсюда |xn| − |a| <= |a − xn| < 1, т.е. |xn| < |a| + 1. Следовательно, последовательность {xn} ограничена. Теорема доказана.

Признак Вейерштрасса (или теорема Вейерштрасса) звучит так: любая монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел, а также если она неубывающая и не ограниченна сверху, то она сходится, если она является невозрастающей и ограниченна снизу, то она сходится.

3. Существует также определение предела функции по *Гейне*, согласно которому функция f(x) имеет предел L в точке x=a, если для каждой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке a, последовательность $f(x_n)$ сходится к L.

Односторонний предел — предел числовой функции, подразумевающий «приближение» к предельной точке с одной стороны. Такие пределы называют соответственно левым и правым пределами.

А является пределом функции тогда и только тогда, когда она является и правым и левом приделами этой функции.

Доказательство:

1. Пусть существуют оба односторонних предела функции $f(x)$ и они равны a. Покажем, что в этом случае существует также двусторонний предел функции и он тоже равен a. Зададим произвольное сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Т.к. $\lim_{x\to x_0+} f(x) = a$, для этого ε существует такое $\delta_1 > 0$, что при $x \in \dot{u}_{\delta_1}(x_0+)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Т.к. $\lim_{x\to x_0-} f(x) = a$, для этого ε существует такое $\delta_2 > 0$, что при $x \in \dot{u}_{\delta_2}(x_0-)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Очевидно (рис. 3), что неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$ выполняется при $x \in \dot{u}_\delta(x_0)$. Последнее и означает, что существует $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

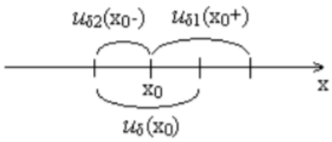

Рис. 3. Иллюстрация к доказательству теоремы о связи двустороннего предела функции с односторонними.

2. Пусть существует двусторонний предел функции $f(x)$ и он равен a. Покажем, что в этом случае существуют оба односторонних предела этой функции и они тоже равны a.
Зададим произвольное сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Т.к. $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, для этого ε существует такое $\delta > 0$, что при $x \in \dot{u}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Но, следовательно, оно выполняется при $x \in \dot{u}_\delta(x_0-)$, так и при $x \in \dot{u}_\delta(x_0+)$. Первое означает, что существует $\lim_{x\to x_0-} f(x) = a$, а второе, что существует $\lim_{x\to x_0+} f(x) = a$.

4. Если функция $f(x)$ в точке a имеет предел, то этот предел единственный.

Доказательство то же, как и в 1 пункте.

5. Функция называется *локально ограниченной в точке x* = *a*, если существует такая окрестность точки *U*(*a*), в которой значения функции удовлетворяют неравенству m<=f(x)<=M , где *m* и *M* – некоторые числа.

Функция называется *ограниченной*, если существует такое положительное число *M*, что $|f(x)| \le M$ для всех значений *x*.

Если предел функции $f(x)$ при $x \to a$ равняется A, то найдётся окрестность точки a, во всех точках которой функция $f(x)$ ограничена.

6. Бесконечно малая функция - функция, предел которой равен нулю при стремлении к бесконечности или а.

Если функция $y = f(x)$ имеет предел $\lim_{x\to a} f(x) = A$, то разность между функцией и значением предела есть функция, бесконечно малая при $x \to a$.

Доказательство. Необходимо показать, что

$\lim_{x\to a} f(x) = A$ <=> *f(x)-A* б.м. функция при $x \to a$.

Так как $\lim_{x\to a} f(x) = A$, то

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, для $|x - a| < \delta$ будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Сравним это с определением б. м. функции:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, для $|x - a| < \delta$ будет выполняться неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.
Сравнивая определения предела функции и б. м. функции, видим, что *f(x)-A* - б.м. при $x \to a$.

7. Алгебраическая сумма двух, трех и вообще любого конечного числа бесконечно малых есть функция бесконечно малая.

Доказательство: пусть f(x)=A(x)+B(x), где слагаемые - б.м.ф. Нужно доказать, что |f(x)|<e. Из Коши для б.м.ф. имеем, что |A(x)|<e\2 & |B(x)|<e\2. Знаем, что |f(x)|=|A(x) + B(x)| и, что |A(x) + B(x)|<=|A(x)|+|B(x)|<e -> |f(x)|<e. Доказано.

8. Произведение бесконечно малой функции *α(x)* на ограниченную функцию *f(x)* при *x→a* (или при *x→∞*) есть бесконечно малая функция.

Доказательство: Так как функция *f(x)* ограничена, то существует число *М* такое, что при всех значениях *x* из некоторой окрестности точки *a*|*f(x)*|≤*M.* Кроме того, так как *α(x)* – бесконечно малая функция при *x→a*, то для произвольного ε>0 найдется окрестность точки *a*, в которой будет выполняться неравенство |*α(x)*|< ε/*M*. Тогда в меньшей из этих окрестностей имеем | *αf*|< ε. А это и значит, что *αf* – бесконечно малая.

9. Бесконечно большая — числовая функция или последовательность, которая стремится к бесконечности определённого знака.

> Если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

> Если функция $\alpha(x)$ являются бесконечно малой при $x \to x_0$, и $\alpha(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to x_0$.

Доказательство: Пусть A(x)-б.м.ф., тогда распишем Коши и имеем, что |A(x)|<e -> 1\|A(x)|>1\e, обозначим 1\e = M, 1\A(x) = F(x), тогда еще раз перепишем Коши с изменениями и видим, что переписанное определение - предел по Каши данного вида lim F(x)=бесконечности, а следовательно F(x) - б.б.ф.

10. Предел суммы - сумма пределов, предел произведения - произведение пределов, предел частного - отношение пределов, если делитель не равен нулю.
11. Пусть существует lim f(x)=A (x->a); lim f(y)=B (y->A), тогда если в некоторой проколотой окрестности (a) определена сложная функция d(f(x)) & f(x) не равна A при любом x из этой окрестности, то существует lim d(f(x))=B (x->a).
12. Если функция f(x) имеет в точке a отличный от нуля конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности этой точки значения функции сохраняют знак предела.
13. Пусть существуют пределы f(x) & g(x) = b1 & b, а также проколотая окрестность их стремления (a) такая, что любой x из этой окрестности удовлетворяют неравенству f(x)<=g(x) -> b1<=b2 -> lim f(x) <= lim g(x),
14. Пусть у g(x) & f(x) lim=b (x->a), и существует проколотая окрестность (a) такая, что любой x из этой окрестности удовлетворяет двойному неравенству: f(x)<=d(x)<=g(x) --> существует lim d(x)=b (x->a).
15. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Доказательство. Заметим, что отношение $\frac{\sin x}{x}$ представляет собой четную функцию. Поэтому при анализе поведения этой функции можно ограничиться областью малых положительных значений аргумента x.

Пусть x – центральный угол окружности единичного радиуса, выраженный в радианах. Сравним между собой площади фигур, показанных на рисунке 1.

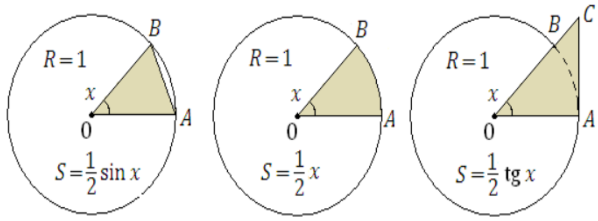

Рис.1. Равнобедренный треугольник *AOB*, круговой сектор *AOB* и прямоугольный треугольник *AOC*.

Очевидно, что для всех $0 < x < \pi/2$ выполняется неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Представим $\operatorname{tg} x$ в виде отношения $\sin x$ к $\cos x$ и разделим обе части этого двойного неравенства на $\sin x$. Тогда неравенство

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

влечет за собой

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Поскольку $\cos x \to 1$ при $x \to 0$, то и $\frac{\sin x}{x} \to 1$.

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$$

16. 1.1Функции α(x) и β(x) называют б.м. одного порядка при x→a (α(x) = O(β(x))), если при x→a существует конечный от нуля предел отношения α(x) / β(x).

Функцию α(x) называют б.м. более высокого порядка малости относительно β(x) при x→a (α(x) = o(β(x))), если существует и равен нулю предел отношения α(x) / β(x).

В таком случае β(x) – б.м. более низкого порядка малости.

Функцию α(x) называют б.м. k порядка малости относительно β(x) при x→a, а число k – порядком малости, если функции α(x) и β(x)^k являются б.м. одного порядка при x→a.

Функции α(x) и β(x) называют несравнимыми при x→a, если не существует ни конечного ни бесконечного предела их отношения.

Функции α(x) и β(x) называют эквивалентными, если предел их отношения при x→a равен единице.

1.2.Для бесконечно больших функций вводят классификацию, аналогично ^:

v(x) называют б.б. одного роста относительно w(x) при x→a, если существует предел отношения v/w; v(x) называют б.б. меньшего порядка роста если предел =0; большего если предел равен бесконечности. Если предела не существует то функции несравнимы при x→a. Если предел отношения v(x) / w(x)^k, то v(x) называют б.б k порядка относительно w, k – порядок б.б.ф. v(x). Функции v и w называют эквивалентными, если предел их отношения равен единице.

17. Функцию f(x) называют непрерывной в точке a , если:

в этой точке существует конечный предел функции, и он совпадает с её значением f(a)

каково бы ни было число е >0, для него найдётся число δ>0 такое, что для всех x принадлежащих проколотой окрестности (а), удовлетворяющих неравенству |x-a| < δ выполняется условие |f(x) – f(a)| < e

приращение функции в этой точке является функцией, б.м. при дельта икс стремящемся к нулю.

Теорема: Если функция y = f(x) непрерывна в точке a, а функция g(y) непрерывна в соответствующей точке b = f(a), то сложная функция g(f(x)) непрерывна в точке a.

18.

Доказательство. Пусть Δx – приращение аргумента в произвольной точке x_0 области определения функции. Тогда

3

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x).$$

Поскольку $\sin\frac{\Delta x}{2} \to 0$ при $\Delta x \to 0$ (см. упражнение в Лекции 2.2), то и $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда согласно следствию 3 функция $y = \sin x$ непрерывна в точке x_0.

19. Функцию y=f(x) называют непрерывной на отрезке [a,b], если она непрерывна в интервале (a,b), в точке a непрерывна справа, а в точке b непрерывна слева.

Теоремы:

1. Функция непрерывна в точке а тогда и только тогда, когда функция непрерывна в этой точке и слева и справа.
2. Если функция непрерывна в точек а, то она локально ограничена при x ---> a.
3. Пусть f(x) непрерывна в точке a и f(a) не равна 0, тогда f(x) в некоторой окрестности точки a сохраняет знак значения f(a) в точке a.
4. Пусть f(x) & g(x) непрерывны в точке a, тогда их сумма, разность, произведение и частное, если g(x) не равно нулю, есть функции непрерывные в точке a.
5. Пусть существует предел f(x)=A, d(y) непрерывна в точке A, тогда, если в проколотой окрестности стремления предела сложная функция d(f(x)) определена, то существует lim d(f(x)) = d(lim(f(x))=d(A). (везде x-->*)

6. Пусть f(x) непрерывна в точке a, d(y) непрерывна в точке b=f(a), тогда, если в окрестности точки a определена сложная функция d(f(x)), то она непрерывна в точке a.

Производная функции в точке.
Касательная к графику функции, геометрический смысл производной.
Вывод уравнений касательной и нормали к графику функции.

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ – уравнение касательной к графику. Тангенс угла между ней и осью ох – геометрический смысл производной.

$y = f(x_0) - (x-x_0)/f'(x_0)$ — уравнение нормали к графику. Они перпендикулярны друг другу, так что $k_n = -1/k$.

Дифференцируемость функции в точке.
Теорема о связи дифференцируемости функции с существованием конечной производной (с доказательством).
Связь дифференцируемости и непрерывности функции (с доказательством).

Пусть функция y=f(x) определена на интервале (a,b), x-некоторая фиксированное значение аргумента из указанного интервала, Δx-любое приращение аргумента. Опр. Функция y=f(x) называется дифференцируемой в данной точке x, если приращение Δy этой функции в точке x, соответствующее приращению аргумента Δx, может быть представлено в виде $\Delta y=A\Delta x + \alpha \Delta x$, где A - некоторое число, не зависящее от Δx, а α - функция аргумента Δx, является бесконечно малой при $\Delta x\to 0$.

Теорема. Для того чтобы функция y=f(x) являлась дифференцируемой в данной точке x, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Док-во: 1) Необходимость: пусть функция y=f(x) дифференцируема в данной точке x, то есть ее приращение Δy в этой точке представимо в виде $\Delta y=A\Delta x + \alpha \Delta x$. Предположив, что Δx#0 поделим это равенство на Δx. Получим $\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\alpha$. Из этого равенства вытекает существование производной, т.е.lim($\Delta x\to 0$) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=A$

2) Достаточность: пусть функция y=f(x) имеет в данной точке x конечную производную, т.е. существует предельное значение lim($\Delta x\to 0$) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$

В силу определения предельного значения функция $\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f''(x)$ аргумента Δx является бесконечно малой при $\Delta x\to 0$, т.е. $\Delta y= f''(x) \Delta x +\alpha \Delta x$, где lim($\Delta x\to 0$) $\alpha=0$. Это представление совпадает с представлением $\Delta y=A\Delta x + \alpha \Delta x$, если обозначать через A не зависящее от Δx число $f''(x)$. Т.е. функция y=f(x) дифференцируема в точке x.

Основные правила дифференцирования.

Вывод формул для вычисления производных суммы, произведения, частного.

Теорема 1. Если функции u = u(x) и v = v(x) дифференцируемы в данной точке, то в той же точке дифференцируема и их сумма, причем производная суммы равна сумме производных слагаемых:

$$(u+v)' = u'+v', \quad (u-v)' = u' - v'.$$

Формула обобщается на случай любого конечного числа слагаемых.

Теорема 2. Если функции u = u(x) и v = v(x) дифференцируемы в данной точке x, то в этой же точке дифференцируемо и их произведение, при этом: $(u*v)' = u'*v + v'*u$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(c*u)' = c*u'$.

Теорема 3. Если в данной точке x функции u = u(x) и v = v(x) дифференцируемы и v не равно 0, то в той же точке дифференцируемо и их частное, причем $(u/v)' = (u'*v - v'*u)/v^2$.

Теорема о дифференцируемости сложной функции (формулировка).

Пусть g(x) имеет производную в точке x_0, а f(x) имеет производную в точке $g_0 = g(x_0)$. Тогда f(g(x)) будет иметь производную в точке x_0 и справедливо соотношение $(f(g(x)))' = f'(g(x))*g'(x)$.

Теорема о дифференцируемости обратной функции (формулировка).

Пусть $y = f^{-1}(x)$ – обратная функция к x = f(y), имеющей производную в точке x_0 и $f'(y_0)$ не равно 0. Тогда обратная функция $y = f^{-1}(x)$ имеет производную в точке $x_0 = f(y_0)$, причем $(f^{-1}(x_0))' = 1/(f'(y_0))$.

Дифференциал функции (определение, геометрический смысл).

Инвариантность формы записи дифференциала первого порядка (с доказательством).

Дифференциал функции в точке равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда получит приращение. Его геометрический смысл — Дифференциал функции y = f(x) равен приращению ординаты касательной S, проведённой к графику этой функции в точке M(x; y), при изменении x (аргумента) на величину $\Delta x = dx$.

Дифференциал функции z = g(y) в точке y0 имеет вид: $dz = g'(y_0)\,dy$, где dy — дифференциал тождественного отображения $y \to y$: $dy(h) = h, \quad h \in \mathbb{R}$. Пусть теперь $y = f(x),\ x \in U(x_0),\ f \in \mathcal{D}(x_0)$. Тогда $dy = f'(x_0)\,dx$, и согласно цепному правилу: $dz = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)\,dx = g'(y_0)\,dy$.

Таким образом, форма первого дифференциала остаётся одной и той же вне зависимости от того, является ли переменная функцией или нет.

Формулировки теорем Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.

Теорема Ферма: *Дифференциал функции z = g(y) в точке y0 имеет вид:* $dz = g'(y_0)\,dy,$ *где dy — дифференциал тождественного отображения* $y \to y$*:* $dy(h) = h, \quad h \in \mathbb{R}.$

Пусть теперь $y = f(x),\ x \in U(x_0),\ f \in \mathcal{D}(x_0).$ *Тогда* $dy = f'(x_0)\,dx$*, и согласно цепному правилу:*

$dz = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)\,dx = g'(y_0)\,dy.$ *Таким образом, форма первого дифференциала остаётся одной и той же вне зависимости от того, является ли переменная функцией или нет.*

Теорема Ролля: *Пусть функция y = f (x)*

1)непрерывна на отрезке [a;b];

2)дифференцируема на интервале (a;b) ;

3)на концах отрезка [a;b] принимает равные значения: f (a) = f (b) . Тогда на интервале (a;b) найдется по крайней мере одна точка x0 , в которой f ′(x0) = 0.

Теорема Лагранжа: *Пусть функция y = f(x) :*

1)непрерывна на отрезке [a;b];

2)дифференцируемана интервале (a;b) .

Тогда на интервале (a;b) найдется по крайней мере одна точка x0 такая, что f (b) − f (a) = f ′(x0) /(b −a)

Теорема Коши: *Если функции y = f (x) и y = g(x)*

1)непрерывны на отрезке [a;b] ;

2)дифференцируемы на интервале (a;b) ;

3)производная g′(x) ≠ 0 на интервале (a;b) .

Тогда на интервале (a;b) найдется по крайней мере одна точка x_0 *такая, что* $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$

Формулировка теоремы Бернулли-Лопиталя для предела отношения двух бесконечно малых функций.

Правило говорит, что если функции f(x) и g(x) обладают следующим набором усло вий:

20. $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$ *или* ∞*;*

21. $\exists \lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;

22. $g'(x) \neq 0$ *в проколотой окрестности а;*

23. *Если g(x) и f(x) — дифференцируемы в проколотой окрестности а, тогда существует* $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$*. При этом теорема верна и для дру гих баз.*

Сравнение на бесконечности порядков роста показательной, степенной и логарифмических функций.

Теорема. Пусть $a > 1, \alpha > 0$*. Тогда*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$*;*

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\log_a x} = +\infty$*.*

Лемма 1. Следующие утверждения эквивалентны

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log_a^\alpha x} = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = +\infty.$$

Замечание. Если одно из этих утверждений выполняется для любых $a > 1, \alpha > 0$*, то и два других справедливы* $\forall a > 1, \alpha > 0$*.*

Доказательство.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\log_a^\alpha x} = +\infty$

$$\forall\, x_n:\ x_n \to +\infty \Rightarrow \log_a x_n \to +\infty \Rightarrow$$

Необходимость. $\Rightarrow \dfrac{a^{\log_a x_n}}{\log_a^\alpha x_n} \to +\infty \Rightarrow \dfrac{x_n}{\log_a^\alpha x_n} \to +\infty.$

$$\forall\, x_n\ x_n \to +\infty \Rightarrow a^{x_n} \to +\infty \Rightarrow$$

Достаточность. $\Rightarrow \dfrac{a^{x_n}}{(\log_a a^{x_n})^\alpha} \to +\infty \Rightarrow \dfrac{a^{x_n}}{x_n^\alpha}.$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\log_a^\alpha x} = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\log_a x} = +\infty \quad \dfrac{x^\alpha}{\log_a x} = \left(\dfrac{x}{\log_a^{1/\alpha} x}\right)^\alpha$

$$\forall\, x_n:\ x_n \to +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{\log_a^{1/\alpha} x_n} \to +\infty \Rightarrow$$

Необходимость. $\left(\dfrac{x}{\log_a^{1/\alpha} x}\right)^\alpha \to +\infty \Rightarrow \dfrac{x_n}{\log_a x_n} \to +\infty. \quad \dfrac{x}{\log_a^\alpha x} = \left(\dfrac{x^{1/\alpha}}{\log_a x}\right)^\alpha$

$$\forall\, x_n:\ x_n \to +\infty \Rightarrow \frac{x_n^{1/\alpha}}{\log_a x_n} \to +\infty \Rightarrow$$

Достаточность. $$\Rightarrow \left(\frac{x_n^{1/\alpha}}{\log_a x_n}\right)^{\alpha} \to +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{\log_a^{\alpha} x_n} \to +\infty.$$

Лемма 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty.$

Доказательство. $\frac{a^x}{x^\alpha} = \left(\frac{\left(a^{1/\alpha}\right)^x}{x}\right)^{\alpha}.$

Осталось доказать, что $\forall\, a > 1 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty.$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\log_a x} = +\infty$

(по лемме 1, $\alpha = 1$*)* $\frac{x}{\log_a x} = \frac{x}{\ln x}\ln a \qquad (\ln a > 0)$

Осталось доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty.$

Докажем, что $\forall x \in [e^2; +\infty)\ \ \frac{x}{\ln x} > \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\ln x} > 1.$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x} - 1.$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x - \sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 2}{2\sqrt{x}\ln^2 x},$

при $x > e^2$ $f'(x) > 0$, f *строго возрастает.* $f(e^2) = \frac{e}{\ln e^2} - 1 = \frac{e}{2} - 1 > 0.$

Следовательно, $\forall x \in [e^2; +\infty) \qquad f(x) > 0.$

Формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа (формулировка соответствующих теорем).

Пусть функция $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *производные доп-го порядка включительно. Тогда для остаточного члена имеет место равенство*

$R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$ *при* $x \to x_0$.

Пусть функция $f(x)$ *имеет в некотором промежутке, содержащем точку* x_0*, производные до* $(n+1)$*-гопорядка включительно. Тогда для любого* x *из этого промежутка найдётся точка* $c \in (x_0, x)$ *такая, что*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x - x_0)^{n+1}$$

Формула Маклорена.

Разложение по формуле Маклорена основных элементарных функций.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x). \qquad (10.12)$$

Необходимое и достаточное условия возрастания и убывания дифференцируемой функции (формулировка).

Если дифференцируемая на некотором интервале $(a;b)$ *функция* $y=f(x)$ *возрастает (убывает) на нем, то* $f'(x)\geq 0$ *(*$f'(x)\leq 0$*) для всех* $x\in(a;b)$.

Если функция $y=f(x)$ *дифференцируема на интервале* $(a;b)$ *и* $f'(x)>0$ *(*$f'(x)<0$*) для всех* $x\in(a;b)$*, то функция* $y=f(x)$ *возрастает (убывает) на этом интервале.*

Понятие экстремума.

Формулировка необходимого условия существования экстремума дифференцируемой функции.

Формулировка достаточного условия существования экстремума функции по ее первой производной.

Формулировка достаточного условия существования экстремума функции по ее второй производной.

Экстремум — максимальное или минимальное значение функции на заданном множестве. Точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума.

Если точка x_0 *— точка экстремума функции* $f(x)$*, то она критическая.*

Пусть функция y=f(x) дифференцируема в ε*-окрестности точки* x_0*, а в самой точке* x_0 *непрерывна.*

Тогда если $f'(x)>0$ *при* $x\in(x_0-\varepsilon;x_0)$ *и* $f'(x)<0$ *при* $x\in(x_0;x_0+\varepsilon)$*, то* x_0 *- точка максимума, если* $f'(x)<0$ *при* $x\in(x_0-\varepsilon;x_0)$ *и* $f'(x)>0$ *при* $x\in(x_0;x_0+\varepsilon)$*, то* x_0 *- точка минимума.*

Пусть $f'(x_0)=0$*, если* $f''(x_0)>0$*, то* x_0 *- точка минимума, если* $f''(x_0)<0$*, то* x_0 *- точка максимума.*

Понятие выпуклой (вверх, вниз) функции (ее графика).

Формулировка достаточного условия выпуклости дважды дифференцируемой функции.

Функция y = f(x) называется выпуклой вниз(вверх)[1]*на промежутке X если для любых двух значений x1, x2∈X из этого промежутка выполняется неравенство* $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\left(f(\frac{x_1+x_2}{2}) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$.

Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка X, то функция выпукла вниз (вверх) на этом промежутке.

Доказательство этой теоремы основано на том, что если вторая производная положительна (отрицательна), то первая возрастает (убывает), что говорит о выпуклости функции вниз (вверх).

Определение точек перегиба функции.

Формулировка необходимого и достаточного условий для точек перегиба функции.

Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла и вогнута.

Если точка x_0 *— точка перегиба функции* $f(x)$ *и если* $\exists f''(x)$ *в некоторой окрестности точки* x_0 *(непрерывная в точке* x_0*), то* $f''(x_0) = 0$.

Если функция $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *и имеет в этой точке конечную или бесконечную производную и если* $f''(x_0)$ *меняет знак при переходе через точку* x_0*, то точка* x_0 *— точка перегиба функции* $f(x)$.

Асимптоты функции.
Вывод уравнения наклонной асимптоты.

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Прямая $y = kx + b$ *называется наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ *(*$x \to -\infty$ *), если выполняется равенство* $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left| f(x) - kx - b \right| = 0$.

Наличие наклонной асимптоты устанавливают с помощью следующей теоремы.

Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ *имел при* $x \to +\infty$ *(*$x \to -\infty$ *) наклонную асимптоту* $y = kx + b$*, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы* $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k$ *и* $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left| f(x) - kx \right| = b$*. Если хотя бы один из этих пределов не существует или равен бесконечности, то кривая* $y = f(x)$ *наклонной асимптоты не имеет.*