

## 2 Лабораторная работа 2

### 2.1 Требования к знаниям для выполнения

Для выполнения лабораторной работы обучающийся должен обладать знаниями:

- владеть навыками разработки программного обеспечения на языке Python (рекомендуется) или C++ на базовом уровне;
- владеть навыками использования программных инструментов: numpy;
- знать понятия: численное дифференцирование, численное интегрирование, метод наименьших квадратов, тригонометрические полиномы, быстрое преобразование Фурье.

## 2.9 Использование аппроксимаций для численной оптимизации (вариант 5)

Методы аппроксимации, такие как интерполяция и численное интегрирование, часто используются как составные блоки других, более сложных численных методов. В данной лабораторной работе мы рассмотрим одну из старейших задач вариационного исчисления: задачу о брахистохроне, т.е. задачу о кривой наискорейшего спуска. Она состоит в нахождении такой кривой, по которой материальная точка из точки  $(x, y) = (0, 0)$  достигнет точки  $(x, y) = (a, y_a)$  под действием силы тяжести за наименьшее время (здесь и далее ось  $y$  направлена вниз). Решением этой задачи является такая кривая  $y(x)$ , которая минимизирует следующий функционал, являющийся полным временем движения материальной точки:

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx, \quad (16)$$

где  $g$  обозначает ускорение свободного падения, и  $y'(x) = dy/dx$ . Эта задача имеет аналитическое решение, которым является параметрически заданная циклоида:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2} \sin(2t) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где  $t \in [0; T]$  и  $C, T$  являются константами, значения которых находятся из граничного условия. В базовой части требуется воспользоваться численным интегрированием для нахождения полного времени движения материальной точки по кривой наискорейшего спуска. В продвинутой части требуется разработать метод для нахождения аппроксимации этой кривой. Здесь и далее принимается  $a = 2$  и  $y_a = 1$ .

**Задача 15 (Аппроксимация)** *Требуется (базовая часть):*

1. Написать функцию `composite_simpson(a, b, n, f)` численного интегрирования функции  $f$  на интервале  $[a; b]$  по  $n$  узлам с помощью составной формулы Симпсона.

2. Написать функцию `composite_trapezoid(a, b, n, f)` численного интегрирования функции  $f$  на интервале  $[a; b]$  по  $n$  узлам с помощью составной формулы трапеций.
3. Рассчитать интеграл (16) для функции  $y(x)$ , соответствующей кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций для множества значений  $n \in [3; 9999]$ . Постройте  $\log\text{-}\log$  график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул.
4. Объясните, каким образом по полученному графику можно определить порядок точности формулы.
5. Для обеих формул сравните порядок, полученный с помощью графика, с аналитическим порядком точности.
6. Существует ли оптимальный шаг интегрирования для данной формулы, минимизирующий достижимую погрешность? Обоснуйте свой ответ.

Требуется (продвинутая часть):

1. Используя кусочно-линейную интерполяцию с равноудаленными узлами, преобразовать задачу о минимизации функционала (16) к полудискретной форме, где аргументами минимизации будут параметры кусочно-линейной интерполяции.
2. Далее, используя составную формулу Симпсона, преобразовать задачу к полностью дискретной форме.
3. Решить полученную задачу минимизации, используя различные конфигурации дискретизации: с шагом интерполяции и шагом интегрирования от  $10^{-3}$  до 1<sup>53</sup>.
4. Используя  $\log\text{-}\log$  графики и линии уровня, оценить зависимость погрешности решения от шага интерполяции и шага интегрирования<sup>54</sup>.
5. Опциональное задание №1. Использовать метод градиентного спуска и автоматическое дифференцирование для численного решения задачи оптимизации.
6. Опциональное задание №2. Использовать интерполяцию кубическими сплайнами (возможно, с модификациями) вместо кусочно-линейной интерполяции.

<sup>53</sup>Минимальное значение можно найти, например, с помощью `scipy.optimize.minimize`.

<sup>54</sup>Погрешность решения в данном случае рассчитывается как расстояние между двумя функциями. В данном случае разумно использовать  $L_2$ -норму для вычисления расстояния (см. раздел 1.3.3. “Некоторые понятия функционального анализа” в подробных конспектах лекций).

## 5 Вопросы и ответы

**Вопрос 1** Какой должен быть размер шрифта текстовых подписей, включенных в состав иллюстрации?

**Ответ**

Шрифт текста на иллюстрациях должен быть сравним со шрифтом подписи к иллюстрации и может быть немногим меньше шрифта основного текста документа.

**Комментарий**

Разрешение иллюстраций не должно быть ниже 300dpi, что позволит осуществлять некоторое масштабирование без потери качества текстовых подписей.

**Вопрос 2** Могут ли использоваться различные шрифты в одном документе (в части размера, курсива, полужирного, типа)?

**Ответ**

Нет.

**Комментарий**

Применение различных шрифтов в одном документе для подготовки основного текста недопустимо и является признаком некомпетентности. Каждый шрифт используется для решения специальных задач: выделение заголовков и подзаголовков (увеличенный, полужирный), написание основного текста (обычный), выделение терминов (курсив), подписи к рисункам, таблицам и листингам (уменьшенный, обычный).

**Вопрос 3** Какого размера должна быть одна иллюстрация на странице?

**Ответ**

Субъективно с точки зрения автора: для определения размера одной иллюстрации по ширине текста на странице следует использовать правило золотого сечения.

**Комментарий**

В дополнение следует отметить, что размер иллюстрации должен быть минимально возможным, но достаточным для представления необходимой информации. Не следует оставлять на иллюстрациях лишние поля и непропорционально большие пустые пространства.

**Вопрос 4** Каким форматам следует отдавать предпочтение при подготовке иллюстраций?

**Ответ**

Векторным (например, EPS) и лишь затем растровым (JPG, PNG) с расширением не ниже 300dpi.

**Комментарий**

Векторные форматы не зависят от размера области представления, позволяют масштабировать изображение с сохранением качества.

**Вопрос 5** Насколько допустима вставка чужих иллюстраций в свои документы?

**Ответ**

Крайне нежелательна.

**Комментарий**

Если осуществляется вставка чужих иллюстраций, то это следует делать с обязательной ссылкой на первоисточник. В противном случае такое заимствование

*может расцениваться как максимум как плагиат, и как минимум – некомпетентность. Если же иллюстрация растровая и является простой схемой или качественным графиком функции, то такую иллюстрацию лучше подготовить заново.*

## Список литературы

- [1] Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 140.
- [2] Соколов, А.П., Першин, А.Ю. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., Першин, А.Ю., 2018-2021. С. 9.