Задача 5.5. Вывод методов Адамса–Башфорта основан на аппроксимации интеграла

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))dt \tag{31}$$

квадратурой, полученной путем аппроксимации $f(t, y(t))$ интерполянтом Лагранжа:

$$f(t, y(t)) = L_{p-1}(t) + \frac{f^{(p)}(\xi_i, y(\xi_i))}{p!} \prod_{j=1}^{p} (t - t_{i-j+1}), \tag{32}$$

где $t_{i+1-p}, t_{i+2-p}, \ldots t_{i-1}, t_i$ являются равномерно распределенными узлами с шагом h. Требуется доказать[17], что соответствующая квадратура с остаточным членом имеет вид:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))dt = h \sum_{j=1}^{p} a_j f(t_{i-j+1}, y(t_{i-j+1})) + \frac{h^{p+1}}{p!} f^{(p)}(\mu, y(\mu)) \int_0^1 \prod_{j=1}^{p} (s + j - 1) ds. \tag{33}$$

[17] В процессе вывода удобно использовать замену $t = t_i + sh$ под знаком интеграла

где $\mu \in (t_{i+1-p}; t_i)$ и

$$a_j = \int_0^1 \prod_{j \neq k} \frac{s + k - 1}{k - j} ds, \quad j = 1, \ldots, p. \tag{34}$$