Механические колебания

Колебания – движения или процессы, повторяющиеся во времени

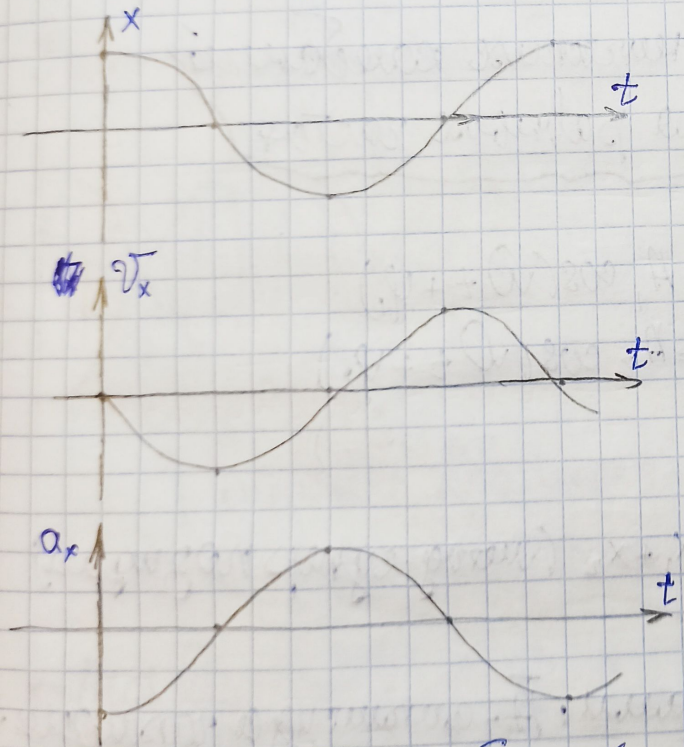
Кинематика колебаний

- Период колебаний (T) – наименьший интервал времени, определ. частоту повторений значений ф-ии $x(t)$ [с]

$$x(t+T)=x(t)$$

- Частота колебаний (ν) – обратная величина к периоду колебаний (кол-во колебаний в секунду) $\nu=\frac{1}{T}$ [Гц] $1\,Гц=\frac{1}{1с}$

- Гармонические колебания – простейшие периодические колебания (физ. вел., изменяющаяся по закону sin или cos)



$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

или

$$x=A\sin(\omega t+\varphi^*)$$

$A, \omega, \varphi, \varphi^*=const$

- Амплитуда колебаний – максимальное значение x

Циклическая (круговая) частота (ω) $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu$ [$с^{-1}$]

! φ и φ^* фазы колебаний – арг. триг. ф-ии $\varphi=\omega t+\varphi$

$\varphi^*=\omega t+\varphi^*$

• Начальные фазы колебаний φ и φ^* – ~~арг. принадлежат р. ф.~~ значение фазы в нач. момент времени $t=0$

! $\varphi^* = \varphi + \pi/2$; $\varphi^* = \varphi + \pi/2$

За T фаза колебаний изменя: $2\pi = \Phi(t+T) - \Phi(t)$

• $v_x(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) = A\omega \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$

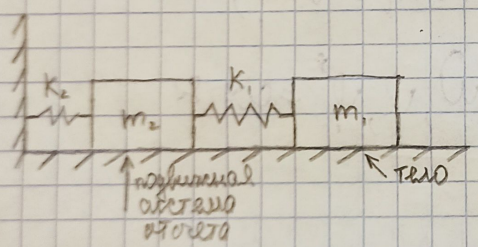
$v_x(t)$ опережает по фазе ф-ю $x(t)$ на $\pi/2$

• $a_x(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi)$

a_x опереж $v_x(t)$ по фазе на $\pi/2$; и $x(t)$ на π.

$v_{max} = A\omega \quad a_{max} = A\omega^2$

Сложение гармонических колебаний 1ого направления равных частот



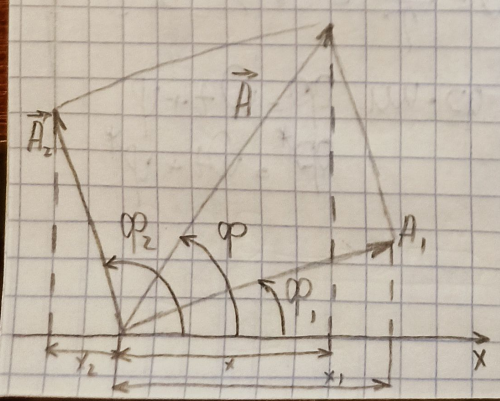
$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

Колебания тела отн. НСО : $x = x_1 + x_2$ (метод суперпозиции)

При методе

Метод векторных диаграмм: $\vec{A}$ – амплитуда гармонических колебаний, вращается с угловой скоростью ω вокруг т. O



$x_1 = A_1 \cos\varphi_1$; $\varphi_1 = \omega t + \varphi_1$

$x_2 = A_2 \cos\varphi_2$; $\varphi_2 = \omega t + \varphi_2$

$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

Сложение гармонических колебаний одного направления близких частот

• Когерентные колебания – согласованные во времени и пространстве колебания, у которых разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ – величина постоянная ($\Delta\varphi = const$)

т.к. $\Delta\varphi = const \Rightarrow A = const$ (при слож. когер. колебаний)

Пусть
$\omega_2 \approx \omega_1$
$A_1 = A_2 = A_0$
$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

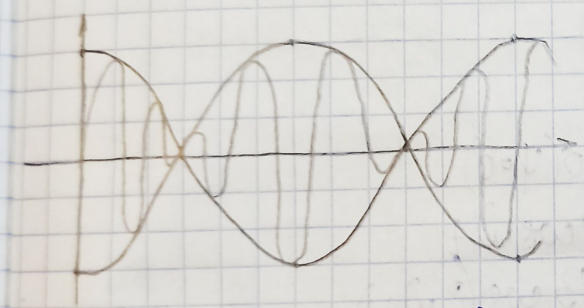
$$x = x_1 + x_2 = A_0 \cos\omega_1 t + A_0 \cos\omega_2 t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 2A_0 \cos(\omega_{ср} t)\cos(\omega_{мод} t)$$

$\omega_{ср} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ – ср. угол. частота

$\omega_{мод} = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ – угол. частота модуляции (частота биений)

Почти гармонич. колебания: $x = A_{мод}(t)\cos(\omega_{ср} t)$

$A_{мод}(t) = A_0 \cos(\omega_{мод} t)$



Сложение взаимноперпендикулярных гармонических колебаний

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos\omega t \\ y &= B\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

*) частица движется по эллипсу

Частные случаи:

1) $\Delta\varphi = 0$ ($\varphi = 0$): $y = \frac{B}{A}x$

результирующие колебания – гармонические

Смещение частицы вдоль прямой $r = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\omega t$

2) $\Delta\Phi = \pm\pi \ (\varphi = \pm\pi)$: $y = -\frac{B}{A}x$

$y = \frac{B}{A}x$ и $y = -\frac{B}{A}x$ – линейно поляризованные колебания

3) $\Delta\Phi = \pm\frac{\pi}{2} \ (\varphi = \pm\frac{\pi}{2})$: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ – эллиптически-поляризованные колебания

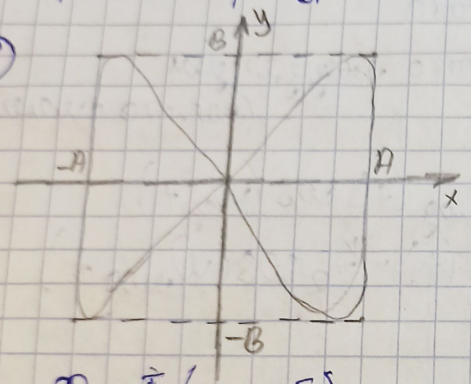
При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ – движение по ходу часовой стрелки

При $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ – против хода часовой стрелки

При $A = B = R$: $y^2 + x^2 = R^2$ – циркулярно-поляризованные колебания

Если $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{m}{n}$, m и n – целые числа, то частица движется по замкнутым фигурам Лиссажу:

1

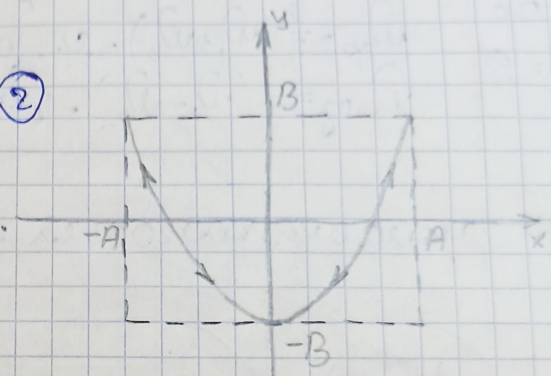


$\Delta\Phi = \pm\frac{\pi}{2} \ (\varphi = \pm\frac{\pi}{2})$

$x = A\cos\omega t$

$y = B\cos(2\omega t + \frac{\pi}{2})$

2

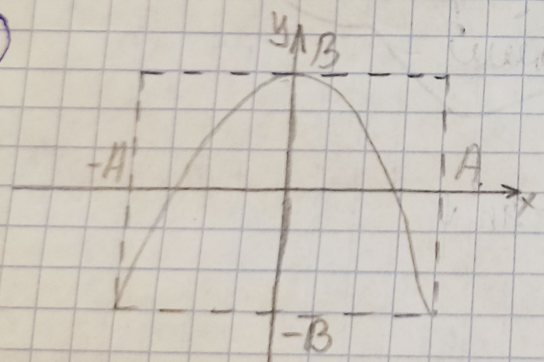


$\Delta\Phi = 0 \ (\varphi = 0)$

$x = A\cos\omega t$

$y = B\cos(2\omega t)$

3

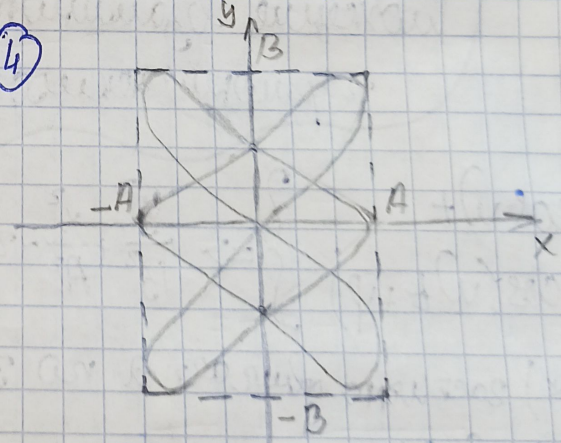


$\Delta\Phi = \pi \ (\varphi = \pi)$

$x = A\cos\omega t$

$y = -B\cos(2\omega t)$

4



$\Delta\Phi = \frac{\pi}{4} \ (\varphi = \frac{\pi}{4})$

$x = A\cos(3\omega t)$

$y = B\cos(2\omega t + \pi/2)$

1, 2, 3 $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2} = \frac{\omega}{2\omega}$

4: $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{3}{2}$

Динамика колебаний
Свободные незатухающие колебания

Свободные незатухающие колебания происходят в системах, где нет рассеивания энергии

У свободной колебат. системы есть устойчивое положение, где система обладает минимальной потенциальной энергией

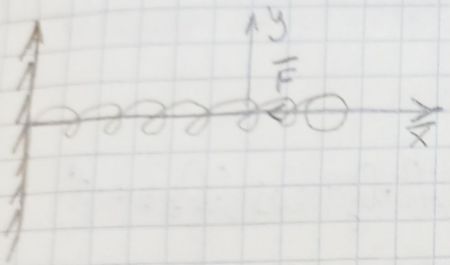
$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2}U''(0)x^2 + \ldots$$

← проекция вектора смещения системы от положения равновесия

← потенциальная энергия системы

Т.к. малые колебания другие слагаемые ↑ не учитываются

В положении равновесия $U'(0)=0$; т.к. это минимальная потенциальная энергия $\Rightarrow U'(0)=0 \Rightarrow U(x)=\frac{1}{2}U''(0)x^2$



$$Ox: m\bar{a} = \bar{F}$$
$$ma_x = F_x$$
$$ma_x = -kx$$
$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – (собственная) циклическая частота свободн. незатухающих колебаний.

$$a_x = \frac{dx^2}{dt^2} = \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$x(t) = a\cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$ – ур-е гармонического осциллятора (система, совершающая колебания)

при $t=0$: $x(0)=x_0$; $\dot{x}(0)=v_{0x}$

$$\dot{x}(t) = -C_1\omega_0 \sin\omega_0 t + C_2\omega_0\cos\omega_0 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = x_0;\ C_2 = \frac{v_{0x}}{\omega_0}$$

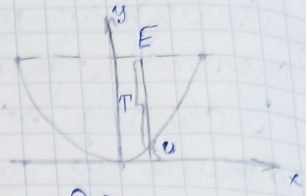
$$\Rightarrow x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_{0x}}{\omega_0}\sin\omega t \sim x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega_0^2}}$$

$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{v_{0x}}{x_0\omega_0}$ – начальная фаза

Энергия гармонического осциллятора

$U = \frac{kx^2}{2}$ – потенциальная энергия свободных незатухающих колебаний тела, скрепленного пружиной



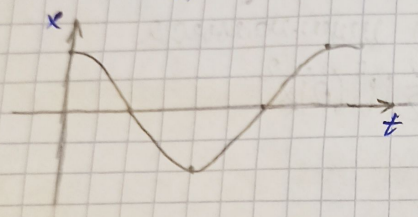
Полная энергия: $E = T + U = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$

$v_x = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

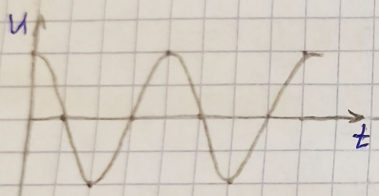
$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow U_{max} = \frac{kA^2}{2} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2$

$T = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow T_{max} = \frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2$

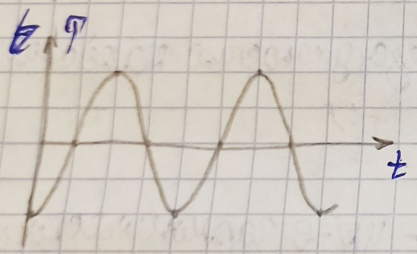
- $E = T_{max} = U_{max} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 = const$



$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$



$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$



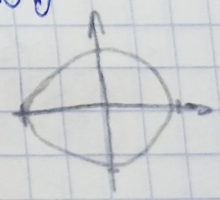
$T = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Импульс гармонического осциллятора $p_x = mv_x$

$p_x = -mA\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p_x}{m^2 A^2 \omega_0^2} = 1$ – эллипс.

$p_x(x)$ – фазовая траектория



$S_{эллипса} = \pi x_{max} p_{max}$; $x_{max} = A$; $p_{max} = m\omega_0 A$

$$S = \frac{2\pi m A^2 \omega_0^2}{\omega_0 \cdot 2} = \frac{1}{\nu_0} E_0 = \int p_x dx$$

Физический маятник

– твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс

$M = -mgl\sin\varphi$ – вращ. момент маятника

$M = I\varepsilon$; $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \Rightarrow$

$\Rightarrow I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$, т.к. $\sin\varphi \approx \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$

т.к. $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} = \frac{2\pi}{T}$

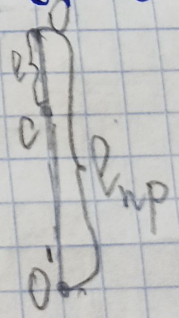
$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$

Масса маятника сосредоточена в центре масс: $I = ml^2$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Приведенная длина физического маятника = длине маятника у которого период колебаний периоду колебаний данного физ. маятника $l_{пр} = \frac{I}{ml}$

Если на прямой, соединяющей ось вращения (т. O) с центром масс (т. C), отложить $l_{пр}$ найдем центр качания физ. маятника (т. O') (если ось вращения заменить на центр качания период физ. маятника не изменится)



Теорема Штейнера

$I = I_c + ml^2$; $l_{пр} = \frac{I_c}{ml} + l$; I_c – момент инерции тела отн. т. C

$l'_{пр} = \frac{I_c}{m(l_{пр} - l)} + (l_{пр} - l)$ – отн. O' $\Rightarrow$

$\Rightarrow l_{пр} = l'_{пр}$ (период не изменится)

Квазиупругие силы

– силы, природа которых отлична от природы упругих сил, но зависимость имеет вид: $F_x = -kx$ k – коэф

x – смещ. отн. пол. равн.

Свободные затухающие колебания

~~Работа ведет~~

Энергия расходуется на работу против сил сопротивления и сил внутреннего трения (диссипативная колебательная система)

Тормозящая систему сила пропорц. скорости

$\vec{F} = -r\vec{v}$; r – коэф. сопр.

$OX: ma_x = -kx - rv_x$

$\delta = \frac{r}{2m}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

коэф. затухания (демпфирование)

цикл. частота колебаний

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

при $\delta < \omega_0$

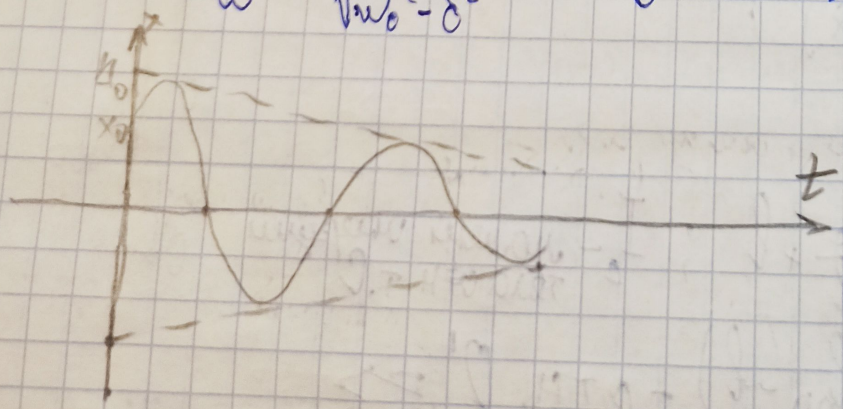
$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$

A_0 – начальная амплитуда

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – собств. цикл. частота

$A(t) = A_0 e^{-\delta t}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ – (условный) период колебаний



$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$ – декремент затухания

$\ln e^{\delta T} = \delta T$

$\chi = \delta T$ – логарифмический декремент затухания

Время релаксации τ – интервал времени, в течении которого амплитуда колебаний уменьш. в e раз.

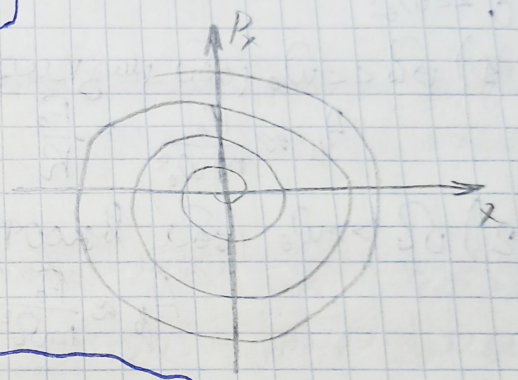
$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta \tau} = e \Rightarrow \delta\tau = 1$ или $\delta = \frac{1}{\tau}$

Добротность Q колебательной системы – отношение энергии колеб. системы ($E(t)$) в момент времени t к изм. энергии за посл. период колебаний (ΔE)

$$\Delta E = E(t) - E(t+T)$$

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

при $\chi \ll 1$: $Q = \frac{\pi}{\chi}$



Вынужденные колебания

На систему действ. внешняя сила $F(t)$

$$ma_x + rv_x + kx = F_x$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_x}{m}; \quad \delta = \frac{r}{2m} \text{ и } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

(слаг. дост. малы)

частот решение

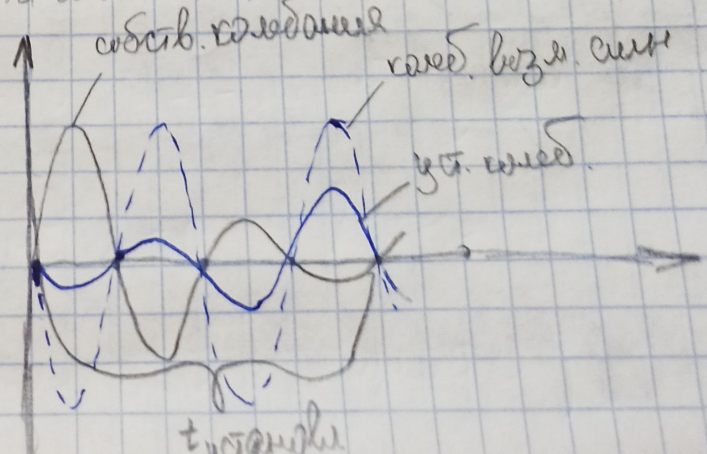
Если $F_x(t) = F_0 \cos \Omega t \Rightarrow x_г = A\cos(\Omega t - \alpha)$

амплитуда

цик. частота внеш. силы

$x_{общ} = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$

$x = x_{общ.} + x_г$



$$\dot{x} = -\Omega A \sin(\Omega t - \alpha) = A\Omega \cos\left(\Omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\ddot{x} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha) = A\Omega^2 \sin\cos(\Omega t - \alpha + \pi)$$

...

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$
$$tg\,\alpha = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Резонанс – физ. явление, при котором колебат. система оказыв. наиболее отзывчивой к внешнему воздействию

$$A_p = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$ – амплитуда резонанса

$\delta \ll \omega_0$:

1) $\Omega \ll \omega_0$ (обл. низких частот)

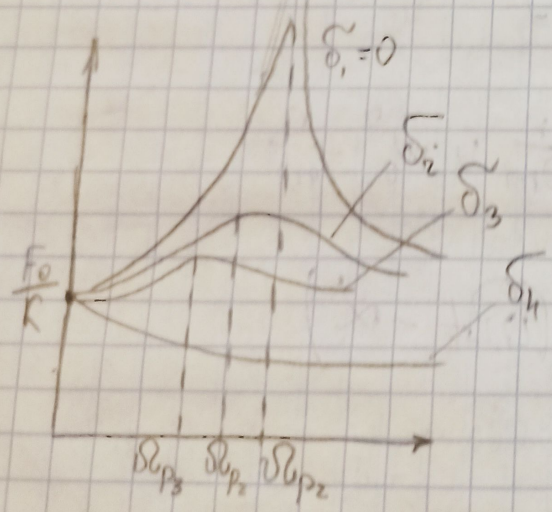
$$A_н \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

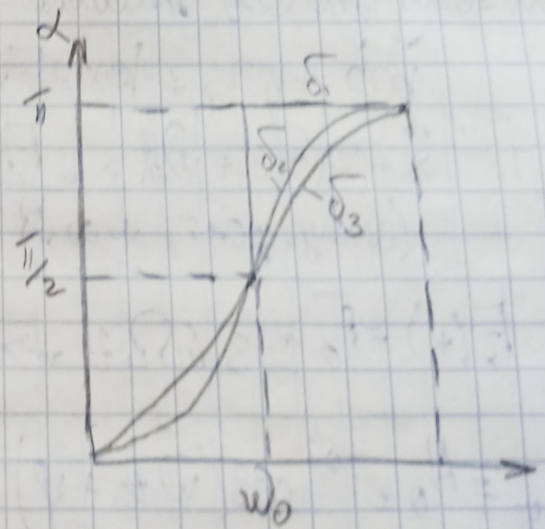
2) $\Omega \gg \omega_0$ (обл. высоких частот)

$$A_в \approx \frac{F_0}{m\Omega^2}$$

3) $\Omega \approx \omega_0$

$$A_p = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$





Ответы на вопросы.

1. Колебательное движение – движение или процесс, повторяющийся во времени

2. • Период колебаний (T) – наименьший интервал времени, определяющий частоту повторений значения функции $x(t)$

• Частота колебаний (ν) – обратна величина к периоду.

• Амплитуда колебаний – макс. значение x

• Циклическая частота – число полн. колебаний за 2π

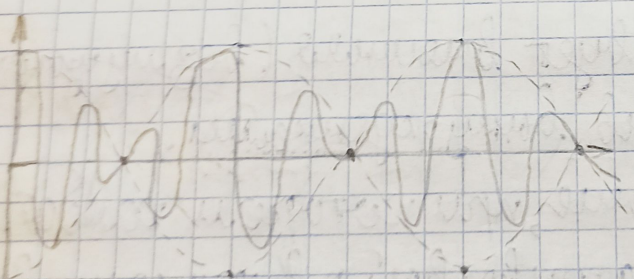
• Фаза колебаний – аргументы тригоном. ф-ий.

3. Фаза колебаний – аргумент тригоном. ф-ий

$$x = A\cos(\underbrace{\omega t + \varphi}_{\text{фа}})$$

4. Чтобы определить результирующее колебание используют метод суперпозиции, которое удобно найти с помощью метода векторных диаграмм.

5. Если результирующее колебание – гармоническое колеб. с изменяющейся амплитудой, то такой колебательный процесс назыв. биением



6. Если при взаимно перп. гармонич. колебан. $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{m}{n}$, где m, n – целые числа, то частица движется по кривым – фигурам Лиссажу.

7. Свободные незатухающие колебания происходят в системах, где нет рассеивания энергии.

8. Полная энергия: $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$

9. Фазовая траектория ($p_x(x)$) гармон. осциллятора имеет вид эллипса.

10. Физический маятник – твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс.

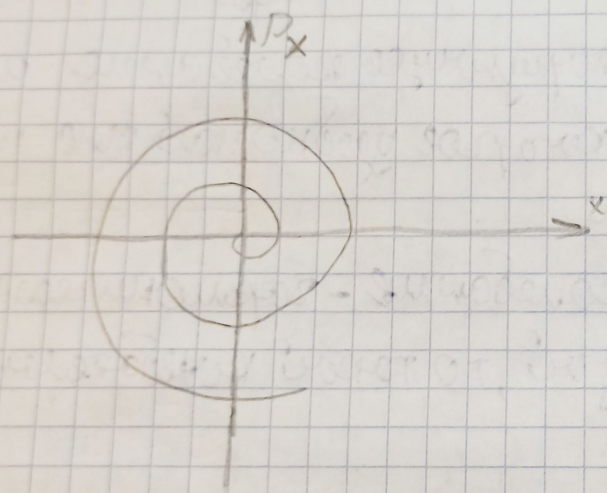
11. Если энергия расходуется на работу против сил сопротивления и сил внутреннего трения, то колебания будут незатухающими.

12. Добротность колеб. системы – отношение энергии колеб. системы к изменению энергии за последующий период колебаний.

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$$

$$e^{\delta T} = \frac{A(t)}{A(t+T)}$$ – декремент затухания

13.



Фазовая диаграмма затух. колебаний

14. Если на систему действует внешняя (возмущающая) сила, то колебания назыв. вынужденными.

15. Резонанс – физ. явление, при котором колебат. систем. оказывается наиболее отзывчивой к внешнему воздейств. Он возникает, когда частота изм. внешн. силы ≈ частоте его свободных колебаний.