

Оглавление

Билет 1	2
Билет 2	5
Билет 3	8
Билет 4	10
Билет 5	14
Билет 6	16
Билет 7	18
Билет 8	22
Билет 9	24
Билет 10	27
Билет 11	33
Билет 12	35
Билет 13	36
Билет 14	38
Билет 15	41
Билет 16	43
Билет 17	44
Билет 18	46
Билет 19	47
Билет 20	48
Билет 21	51
Билет 22	52
Билет 23	53
Билет 24	54
Билет 25	55
Билет 26	56
Билет 27	57
Билет 28	58
Билет 29	60
Билет 30	61

## Билет 1

### 1) Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектриках интегральной форме. Вектор электрического смещения:

Поскольку источниками поля  $\vec{E}$  являются все электрические заряды — сторонние и

связанные, теорему Гаусса для поля  $\vec{E}$  можно записать так:  $\oint \epsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = (q + q')_{\text{внутр}} \quad (1)$

Где  $q$  и  $q'$  — сторонние и связанные заряды, охватываемые поверхностью  $S$ . Появление связанных зарядов  $q'$  усложняет дело, и формула оказывается малополезной для нахождения поля  $\vec{E}$  в диэлектрике.

Это затруднение, однако, можно обойти, если выразить заряд  $q'$  через поток вектора  $\vec{P}$  по формуле  $\oint \vec{P} d\vec{S} = -q'_{\text{внутр}}$ . Тогда выражение (1) можно преобразовать к такому виду:

$$\oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = q_{\text{внутр}}$$

Величину, стоящую под интегралом в скобках, обозначают буквой  $\vec{D}$ . Вектор

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2)$  называется вектором электрического смещения или вектором электрической индукции, где  $\vec{E}$  — вектор напряженности электрического поля,  $\vec{P}$  — вектор поляризованности диэлектрика.

Поток вектора  $\vec{D}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью:  $\oint \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{внутр}}$

Это и есть теорема Гаусса для поля вектора  $\vec{D}$ .

### В дифференциальной форме:

Следовательно, из теоремы Гаусса для вектора электрической напряженности  $\vec{E}$  следует теорема Гаусса для вектора электрического смещения в дифференциальной форме:  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ , т.е. дивергенция поля вектора  $\vec{D}$  равна объемной плотности стороннего заряда в той же точке.  $\rho > 0$  — источник поля  $\vec{D}$ ;  $\rho < 0$  — сток поля  $\vec{D}$

### Связь между векторами напряженности, электрического смещения и поляризованности.

#### Диэлектрическая восприимчивость и проницаемость диэлектриков:

В случае изотропных диэлектриков поляризованность  $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} \quad (3)$ , где  $\chi$  — безразмерная величина, называемая диэлектрической восприимчивостью вещества, она характеризует свойства самого диэлектрика. Всегда  $\chi > 0$

Подставив соотношение (3) в (2), получим  $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ , где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость вещества:  $\epsilon = 1 + \chi$

Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  является основной электрической характеристикой диэлектрика. Для всех веществ  $\epsilon > 1$ , для вакуума  $\epsilon = 1$ . Значения зависят от природы диэлектрика и колеблются от величин, весьма мало отличающихся от единицы (газы) до многих тысяч (у некоторых керамик). Большое значение имеет вода ( $\epsilon = 81$ ).

### 2) Уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} d\vec{l} &= - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (1) & \oint \vec{B} d\vec{S} &= 0 \quad (2) \\ \oint \vec{H} d\vec{l} &= \int (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S} \quad (3) & \oint \vec{D} d\vec{S} &= \int \rho dV \quad (4) \end{aligned}$$

— плотность тока проводимости.

Из уравнений Максвелла для циркуляции векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  следует, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как независимые: изменение во времени одного из этих

полей приводит к появлению другого. Поэтому имеет смысл лишь совокупность этих полей, описывающая единое электромагнитное поле.

Если же поля стационарны ( $\vec{E} = \text{const}$  и  $\vec{B} = \text{const}$ ), то уравнения Максвелла распадаются на две группы независимых уравнений:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 ; \oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$
$$\oint \vec{H} d\vec{l} = 0 ; \oint \vec{D} d\vec{S} = 0$$

В этом случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга.

В дифференциальной форме:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} ; \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Эти уравнения говорят о том, что электрическое поле может возникнуть по двум причинам. Во-первых, его источником являются электрические заряды, как сторонние, так и связанные. Во-вторых, поле  $\vec{E}$  образуется всегда, когда меняется во времени магнитное поле.

Эти же уравнения говорят о том, что магнитное поле  $\vec{B}$  может возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями, либо тем и другим одновременно.

Значение уравнений Максвелла в дифференциальной форме не только в том, что они выражают основные законы электромагнитного поля, но и в том, что путем их решения могут быть найдены сами поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

Физический смысл:

(1) Циркуляция вектора  $\vec{E}$  по любому замкнутому контуру равна со знаком минус производной по времени от магнитного потока через любую поверхность, ограниченную данным контуром. При этом под понимается не только вихревое электрическое поле, но и электростатическое (циркуляция последнего равна нулю).

(2) Поток вектора  $\vec{B}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность всегда равен нулю.

(3) Циркуляция вектора  $\vec{H}$  по любому замкнутому контуру равна полному току (току проводимости и току смещения) через произвольную поверхность, ограниченную данным контуром.

(4) Поток вектора  $\vec{D}$  сквозь любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Свойства:

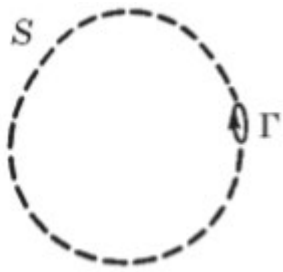
1) Уравнения Максвелла линейны.

Они содержат только первые производные полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  по времени и пространственным координатам и первые степени плотности электрических зарядов  $\rho$  и токов  $\vec{j}$ . Свойство линейности уравнений Максвелла непосредственно связано с принципом суперпозиции

2) Уравнения Максвелла содержат уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения электрического заряда. Возьмем бесконечно малый контур  $\Gamma$ , натянем на него произвольную конечную поверхность  $S$  (рисунок 1.1), а затем стянем этот контур в точку, оставляя поверхность  $S$  конечной. В пределе циркуляция  $\oint \vec{H} d\vec{l}$  обращается в нуль,

поверхность  $S$  становится замкнутой и (3) перейдет в  $\oint (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S} = 0$

И тогда:  $\oint \vec{j} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{D} d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}$  – это уравнение непрерывности, которое утверждает, что ток, вытекающий из объема  $V$  через замкнутую поверхность  $S$ , равен убыли заряда в единицу времени внутри этого объема  $V$ .



(Рисунок 1.1)

3) Уравнения Максвелла выполняются во всех инерциальных системах отсчета. Они являются релятивистски инвариантными. Это есть следствие принципа относительности, согласно которому все инерциальные системы отсчета физически эквивалентны друг другу.

4) О симметрии уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это обусловлено опять же тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных. Вместе с тем в нейтральной однородной непроводящей среде, где  $\rho = 0$  и  $j = 0$ , уравнения Максвелла приобретают симметричный вид, т.е.  $\bar{E}$  так связано с  $\partial \bar{B} / \partial t$ , как  $\bar{B}$  с  $\partial \bar{E} / \partial t$ :

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ \nabla \times \bar{H} &= \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \bar{D} = \rho \end{aligned}$$

Симметрия уравнений относительно электрического и магнитного полей не распространяется лишь на знак перед производными  $\partial \bar{B} / \partial t$  и  $\partial \bar{D} / \partial t$ .

5) О электромагнитных волнах. Из уравнений Максвелла следует важный вывод о существовании принципиально нового физического явления: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно — без электрических зарядов и токов. При этом изменение его состояния обязательно имеет волновой характер. Поля такого рода называют электромагнитными волнами. В вакууме они всегда распространяются со скоростью, равной скорости света  $c$ .

### Материальные уравнения

Материальные уравнения — равнения описывающие характеристики среды:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \epsilon \bar{E}; \quad \bar{B} = \mu_0 \mu \bar{H}; \quad \bar{j} = \sigma (\bar{E} + \bar{E}'),$$

Где  $\epsilon, \mu, \sigma$  — известные нам постоянные, характеризующие электрические и магнитные свойства среды (диэлектрическая и магнитная проницаемости и электропроводимость),  $\bar{E}'$  — напряженность поля сторонних сил, обусловленная химическими или тепловыми процессами.

### 3) Решение:

Пусть  $\bar{n}$  — вдоль оси  $z$ . Тогда

$$S_{1n} = E_{1x}H_{1y} - E_{1y}H_{1x} \quad \text{и} \quad S_{2n} = E_{2x}H_{2y} - E_{2y}H_{2x}$$

Используя граничное условие  $E_{1t} = E_{2t}$ ,  $H_{1t} = H_{2t}$  на границе ( $t=x$  или  $y$ ), мы видим, что

$$S_{1n} = S_{2n}$$

## Билет 2

### 1) Магнитное поле в вакууме:

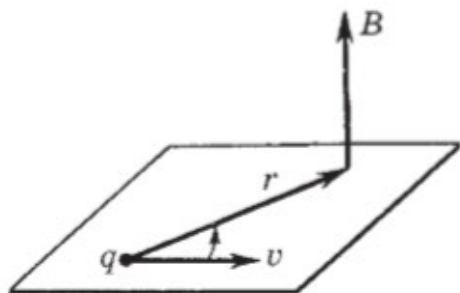
Магнитное поле – силовое поле, действующее на движущиеся электрические заряды. На покоящийся электрический заряд поле не действует. Оно характеризуется вектором магнитной индукции  $\vec{B}$  и вектором напряженности  $\vec{H}$ .

### Вектор индукции магнитного поля:

Вектор  $\vec{B}$  характеризует силовое действие магнитного поля на движущийся заряд и, следовательно, является в этом отношении аналогом вектора  $\vec{E}$ , характеризующего силовое действие электрического поля.

В результате обобщения экспериментальных данных был получен элементарный закон, определяющий поле  $\vec{B}$  точечного заряда  $q$ , движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью  $\vec{v}$ . Этот закон записывается в виде  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v} \vec{r}]}{r^3} (*)$ ,

$\mu_0$  – магнитная постоянная  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$   $\vec{r}$  – радиус вектор, проведенный от заряда  $q$  к точке наблюдения. Конец радиуса-вектора  $\vec{r}$  неподвижен в данной системе отсчета, а его начало движется со скоростью  $\vec{v}$  (рисунок 2.1), поэтому вектор  $\vec{B}$  в данной системе отсчета зависит не только от положения точки наблюдения, но и от времени.



(Рисунок 2.1)

В соответствии с формулой (\*) вектор  $\vec{B}$  направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ , причем вращение вокруг вектора  $\vec{v}$  в направлении вектора  $\vec{B}$  образует с направлением  $\vec{v}$  правовинтовую систему (рисунок 2.1). Отметим, что вектор  $\vec{B}$

является аксиальным (псевдовектором). Величину  $\vec{B}$  называют вектором магнитной индукции. Единицей магнитной индукции служит тесла (Тл).

### Закон Био-Савара-Лапласа:

Рассмотрим вопрос о нахождении магнитного поля, создаваемого постоянными

электрическими токами. Этот вопрос будет решать, исходя из закон  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v} \vec{r}]}{r^3}$ ,

определяющего индукцию поля  $\vec{B}$  равномерно движущегося точечного заряда. Подставив

$q = \rho dV$ , где  $dV$  – элементарный объем,  $\rho$  – объемная плотность заряда, являющегося

носителем тока, и учтем, что  $\rho \vec{v} = \vec{j}$  согласно. Тогда:  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j} \vec{r}]dV}{r^3}$  (1)

Если же ток  $I$  течет по тонкому проводу с площадью поперечного сечения  $\Delta S$ , то

$j dV = j \Delta S dl = I dl$ , где  $dl$  — элемент длины провода. Введя вектор  $dl$  в направлении тока

$I$ , перепишем предыдущее равенство так:  $\vec{j} dV = I d\vec{l}$ . Вектор  $\vec{j} dV$  и  $I d\vec{l}$  называют

соответственно объемным и линейным элементами тока.

Произведя в формулу (1) замену объемного элемента тока на линейный, получим

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) выражают закон Био-Савара.

### 2) Поляризация света:

Поляризация - воздействие на световую волну, вследствие которого колебания светового вектора  $\vec{E}$  каким-то образом упорядочены

#### Линейная поляризация:

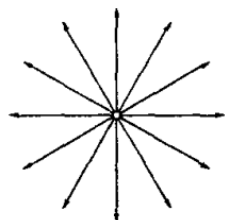
Если колебания вектора  $\vec{E}$  происходят только в одной плоскости, проходящей через луч, то это линейно-поляризованная волна.

#### Эллиптическая поляризация:

Данный вид поляризации заключается в том, что вектор  $\vec{E}$  вращается вокруг направления распространения волны, одновременно изменяясь периодически по модулю. При этом конец  $\vec{E}$  описывает эллипс (в каждой точке среды).

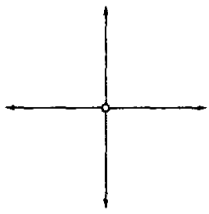
#### Естественный свет:

Несмотря на то, что световые волны и от обычных источников поперечны, они, как правило не обнаруживают асимметрии по отношению к направлению распространения. Такой свет называют естественным. В естественном свете колебания вектора  $\vec{E}$  в любой фиксированной точке среды совершаются в разных направлениях, быстро и беспорядочно сменяя друг друга. Условно это изображают (рисунок 2.2)



(Рисунок 2.2)

Естественный свет можно представить как наложение (сумму) двух некогерентных плоскополяризованных волн с взаимно ортогональными плоскостями поляризации (рисунок 2.3).



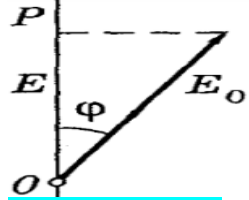
(Рисунок 2.3)

### Поляризованный свет:

Поляризованный свет – свет, в котором направления колебаний светового вектора  $\vec{E}$  упорядочены каким-либо образом

### Закон Малюса:

Поляризатор можно использовать в качестве анализатора – для определения характера и степени поляризации интересующего света.



(Рисунок 2.4)

Пусть на анализатор падает линейно-поляризованный свет, вектор  $\vec{E}_0$  которого составляет угол  $\varphi$  с плоскостью пропускания P (рисунок 2.4, где направление светового пучка перпендикулярен к плоскости рисунка). Анализатор пропускает только ту составляющую вектора  $\vec{E}_0$ , которая параллельна плоскости пропускания P, т.е.  $E = E_0 \cos \varphi$ . Интенсивность пропорциональна квадрату модуля светового вектора ( $I \sim E^2$ ), поэтому интенсивность прошедшего света

$I = I_0 \cos^2 \varphi$ , где  $I_0$  – интенсивность падающего плоскополяризованного света. Это соотношение и выражает собой закон Малюса

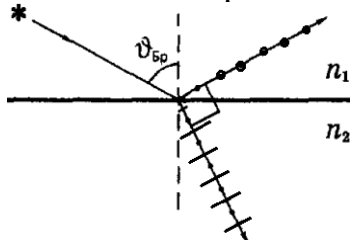
### Закон Брюстера:

Если угол падения естественного света на границу раздела двух прозрачных диэлектриков отличен от нуля, то отраженный и преломленный пучки оказываются частично-поляризованными. В отраженном свете преобладают колебания вектора  $\vec{E}$ , перпендикулярные к плоскости падения, а в преломленном свете – параллельные плоскости падения. Степень поляризации обеих волн зависит от угла падения.

При некотором значении угла падения отраженный свет становится полностью поляризованным, и его плоскость поляризации (плоскость колебаний вектора E) оказывается перпендикулярной к плоскости падения. Этот угол  $\vartheta_{\text{Бр}}$  удовлетворяет следующему условию:

$$\operatorname{tg} \vartheta_{\text{Бр}} = n_2 / n_1$$

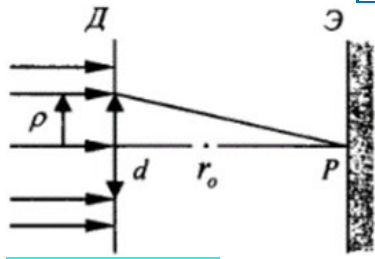
Данное соотношение называют законом Брюстера, а угол  $\vartheta_{\text{Бр}}$  – углом Брюстера или углом полной поляризации. Здесь  $n_2 / n_1$  – отношение показателей преломления второй среды и первой. Точками и черточками на отраженном и преломленном лучах этого рисунка 2.5 показаны направления колебаний вектора  $\vec{E}$ .



(Рисунок 2.5)

### 3) Решение:

Радиус отверстия соответствует радиусу  $k$ -й зоны Френеля при условии, что отверстие пропускает  $k$  зон, т.е.  $\rho_k = \frac{d}{2}$ .



(Рисунок 2.6)

Используя формулу  $\rho_k = \sqrt{kr_0\lambda}, r_0 = l$

Тогда  $\frac{d}{2} = \sqrt{kr_0\lambda}$ ,  $k = \frac{d^2}{4r_0\lambda} = 8$

Поскольку число открытых зон четно, то центр дифракционной картины будет темным

Ответ: Число зон Френеля укладывающихся в отверстии  $k=8$ , пятно темное.

### Билет 3

1) Электрический ток представляет собой перенос заряда через ту или иную поверхность  $S$  (например, через сечение проводника).

#### Носители тока в средах:

Носителями тока в проводящей среде могут быть электроны (в металлах), либо ионы (в электролитах), либо другие частицы (капельки, пылинки и т.д.). При отсутствии электрического поля носители тока совершают хаотическое движение и через любую воображаемую поверхность  $S$  проходит в обе стороны в среднем одинаковое число носителей того и другого знака, так что ток через поверхность  $S$  равен нулю. При включении же электрического поля на хаотическое движение носителей накладывается упорядоченное движение с некоторой средней скоростью  $u$  и через поверхность  $S$  появится ток. Таким образом, электрический ток — это упорядоченный перенос электрических зарядов.

#### Сила тока:



Количественной мерой электрического тока служит сила тока  $I$ , т.е. заряд, переносимый сквозь рассматриваемую поверхность  $S$  в единицу времени:  $I = \frac{dQ}{dt}$ ,

Единицей силы тока является ампер (А).

Зная вектор плотности тока в каждой точке интересующей нас поверхности  $S$ , можно найти и силу тока через эту поверхность как поток вектора  $\vec{j}$ :  $I = \int \vec{j} d\vec{S}$

### Плотность тока:

Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он протекает, неравномерно. Поэтому для более детальной характеристики тока вводят вектор плотности тока  $\vec{j}$ . Модуль этого вектора численно равен отношению силы тока  $dI$  через элементарную площадку, расположенную в данной точке перпендикулярно направлению движения

носителей, к ее площади  $dS_{\perp} : j = dI/dS_{\perp}$ . За направление вектора  $\vec{j}$  принимают направление

вектора скорости  $\vec{u}$  упорядоченного движения положительных носителей (или направление, противоположное направлению вектора скорости упорядоченного движения отрицательных носителей). Если носителями являются как положительные, так и отрицательные заряды, то плотность тока определяется формулой

$\vec{j} = \rho_+ \vec{u}_+ + \rho_- \vec{u}_-$ , где  $\rho_+$  и  $\rho_-$  – объемные плотности положительного и отрицательного зарядов-носителей;  $\vec{u}_+$  и  $\vec{u}_-$  – скорости их упорядоченного движения.

В проводниках же, где носителями являются только электроны ( $\rho_- < 0$  и  $\vec{u}_+ = 0$ ), плотность тока:  $\vec{j} = \rho_- \vec{u}_-$

### Уравнение непрерывности:

Представим себе в некоторой проводящей среде, где течет ток, замкнутую поверхность  $S$ . Для замкнутых поверхностей векторы нормалей, а следовательно, и векторы  $d\vec{S}$  принято брать наружу, поэтому интеграл  $\int \vec{j} d\vec{S}$  дает заряд, выходящий в единицу времени наружу из объема  $V$ , охватываемого поверхностью  $S$ . В силу закона сохранения заряда этот интеграл

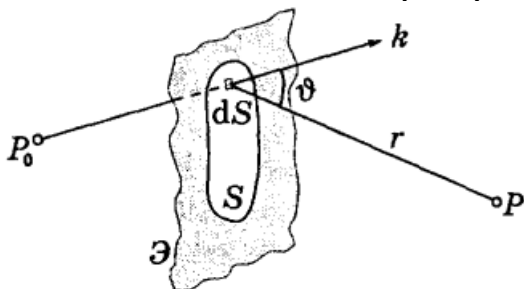
равен убыли заряда в единицу времени внутри объема  $V$ :  $\oint \vec{j} d\vec{S} = - \frac{dq}{dt}$

В случае постоянного тока  $dq/dt = 0$  и  $\vec{j}$  не имеет источников:  $\oint \vec{j} d\vec{S} = 0$

**2) Дифракция** – явление отклонения от прямолинейного распространения света в среде с резкими неоднородностями (края экранов, отверстия и др.), что связано с отклонениями от законов геометрической оптики. Это приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновению света в область тени.

### Принцип Гюйгенса-Френеля. Математическая формулировка принципа:

Этот принцип является основным постулатом волновой теории, описывающим и объясняющим механизм распространения волн, в частности световых.



(Рисунок 3.1)

Рассмотрим преграду N с некоторым отверстием, через которое проходит свет от точечного монохроматического источника  $P_0$  (рисунок 3.1). Задача состоит в определении напряжённости  $\vec{E}$  электрического поля в любой точке  $P$  за преградой.

В методе Френеля предполагается, что напряженность  $E$  в точках отверстия такова, как и при отсутствии преграды, и что в точках непосредственно за преградой  $E = 0$ . Т.е. считается, что существенна только форма отверстия преграды, но не сама преграда.

Разобьем поверхность  $S$  на элементарные участки  $dS$ , по предположению Френеля каждый из участков становится источником вторичной волны. Амплитуда вторичной волны равна  $\frac{a_0 dS}{r}$ , где  $a_0$  – величина определяемая амплитудой световой волны в месте нахождения элемента  $dS$ ,  $r$  – расстояние от элемента  $dS$  до точки  $P$ .

От каждого элемента  $dS$  волновой поверхности распространяющаяся сферическая волна вызывает колебание в точке  $P$   $dE = K \frac{a_0 dS}{r} \cos(\omega t - kr)$ ,  $k$  – волновое число ( $k = 2\pi/\lambda$ ).

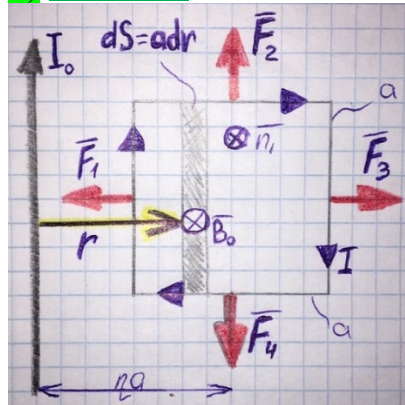
Коэффициент  $K$  зависит от угла  $\vartheta$  между нормально  $\vec{n}$  к элементу  $dS$  и  $r$ .

В точке  $P$  результирующее колебание может быть представлено как суперпозиция колебаний

$dE$  от всех элементов  $dS$  поверхности  $S$ :  $E = \int_S K(\vartheta) \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr) dS$  – математическая

формулировка принципа Гюйгенса-Френеля.

3) Решение:



(Рисунок 3.2)

а)  $B_0 = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$ , выберем произвольную точку

Найдём силы, действующие на стороны рамки, по правилу левой:  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_4$ ;  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_4$

$\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i \rightarrow F = F_1 - F_3$ , т.к. поле в точке приложения  $F_1$  больше

$$F_A = F_{13} = IB_{13} a \sin \frac{\pi}{2} = Ia \left( \frac{\mu_0 I_0}{2\pi(\eta a - \frac{a}{2})} - \frac{\mu_0 I_0}{2\pi(\eta a + \frac{a}{2})} \right) = \frac{\mu_0 I I_0}{2\pi(\eta^2 - \frac{1}{4})} = 45 \cdot 10^{-8} \text{ Н}$$

б) Нормаль к рамке  $\vec{n}_1$  меняется на обратную  $\vec{n}_2$

$$A = I \Delta \Phi$$

$$\Delta \Phi = 2\Phi_1 = 2 \int B_0 dS = 2 \int_{a(\eta - \frac{1}{2})}^{a(\eta + \frac{1}{2})} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I_0 a}{\pi} \ln \frac{\eta + \frac{1}{2}}{\eta - \frac{1}{2}} \rightarrow$$

$$A = \frac{\mu_0 a I I_0}{\pi} \ln \frac{\eta + \frac{1}{2}}{\eta - \frac{1}{2}} \approx 1248 \cdot 10^{-9} \text{ Дж}$$

Ответ:  $F_A = \frac{\mu_0 I I_0}{2\pi(\eta^2 - \frac{1}{4})} = 45 \cdot 10^{-8} \text{ Н}$ ;  $A = \frac{\mu_0 a I I_0}{\pi} \ln \frac{\eta + \frac{1}{2}}{\eta - \frac{1}{2}} \approx 1248 \cdot 10^{-9} \text{ Дж}$

Циркуляция вектора  $\vec{B}$  по произвольному контуру  $\Gamma$  равна произведению  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром  $\Gamma$ :  $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$  (1), где  $I = \sum I_k$ , причем  $I_k$  – величина алгебраическая.

Если ток  $I$  распределен по объему, где расположен контур  $\Gamma$ :  $I = \int \vec{j} d\vec{S}$

Интеграл здесь берется по произвольной поверхности  $S$ , натянутой на контур  $\Gamma$ . Плотность тока  $\vec{j}$  под интегралом соответствует точке, где расположена площадка  $dS$ , причем вектор  $dS$  образует с направлением обхода по контуру правовинтовую систему.

В общем случае уравнение (1):  $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{S} = \mu_0 \int j_n d\vec{S}$

В дифференциальной форме:

С этой целью рассмотрим отношение циркуляции вектора  $\vec{B}$  к площади  $S$ , ограниченной контуром. Предел, получаемый при указанной операции, представляет собой скалярную величину, которая ведет себя как проекция некоторого вектора на направление нормали  $n$  к плоскости контура, по которому берется циркуляция. Этот вектор называют ротором поля  $\vec{B}$  и

обозначают символом  $rot \vec{B}$ . Таким образом,  $\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{B} d\vec{l}}{S} = (rot \vec{B})_n$  (2)

Обратимся теперь к теореме о циркуляции вектора  $\vec{B}$ . Согласно (2) уравнение (1) можно

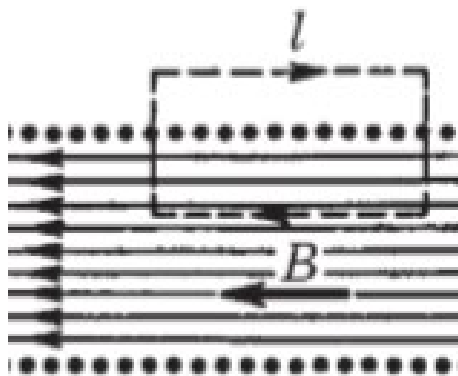
представить в виде  $\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{B} d\vec{l}}{S} = \mu_0 j_n$  или  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ .

Отсюда  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  – это дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$ .

Видно, что ротор поля  $\vec{B}$  совпадает по направлению с вектором  $\vec{j}$  — плотностью тока в данной точке, а модуль  $\nabla \times \vec{B}$  равен  $\mu_0 j$

Расчет магнитного поля соленоида:

Пусть ток  $I$  течет по проводнику, намотанному по винтовой линии на поверхность цилиндра. Такой обтекаемый током цилиндр называют соленоидом. Пусть на единицу длины соленоида приходится  $n$  витков проводника. Если шаг винтовой линии достаточно мал, то каждый виток соленоида можно приближенно заменить замкнутым витком. Будем также предполагать, что сечение проводника настолько мало, что ток в соленоиде можно считать текущим по его поверхности.



(Рисунок 4.1)

Опыт и расчет показывают, что чем длиннее соленоид, тем меньше индукция магнитного поля снаружи него. Для бесконечно длинного соленоида магнитное поле снаружи отсутствует вообще.

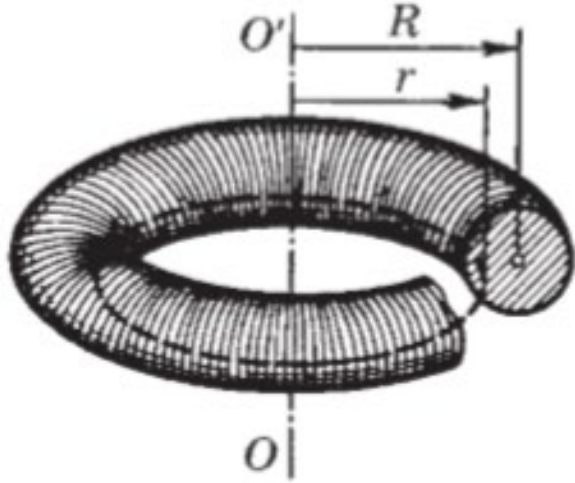
Из соображений симметрии ясно, что линии вектора  $\vec{B}$  внутри соленоида направлены вдоль его оси, причем вектор  $\vec{B}$  составляет с направлением тока в соленоиде правовинтовую систему.

Следует выбрать прямоугольный контур так, как показано на [рисунке 4.1](#). Циркуляция вектора  $\vec{B}$  по данному контуру равна  $Bl$ , и контур охватывает ток  $nIl$ . Согласно теореме о циркуляции  $[Bl = \mu_0 nIl]$ , откуда следует, что внутри длинного соленоида

$[B = \mu_0 nI \text{ (1)}]$ , т.е. поле внутри длинного соленоида однородно (за исключением областей, прилегающих к торцам соленоида). Произведение  $nI$  называют числом ампервитков.

#### Расчет магнитного поля тороида:

Тороид представляет собой провод, навитый на каркас, имеющий форму тора ([рисунок 4.2](#)).



(Рисунок 4.2)

Из соображений симметрии нетрудно понять, что линии вектора  $\vec{B}$  должны быть окружностями, центры которых расположены на оси  $OO'$  тороида. Поэтому ясно, что в качестве контура следует взять одну из таких окружностей. Если контур расположен внутри тороида, он охватывает ток  $NI$ , где  $N$  – число витков в тороидальной катушке;  $I$  – ток в проводе. Пусть радиус контура  $r$ , тогда по теореме о циркуляции  $[B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI]$ , откуда

следует, что внутри тороида  $[B = \mu_0 NI / 2\pi r]$

Видно, что внутри тороида магнитное поле совпадает с полем прямого тока  $NI$ , текущего вдоль оси  $OO'$ . Устремив  $N$  и радиус тороида  $R$  к бесконечности (при неизменном сечении тороида), в пределе получим выражение (1) для магнитного поля бесконечно длинного соленоида.

Если выбранный нами круглый контур проходит вне тороида, то токов он не охватывает, поэтому для такого контура  $[B \cdot 2\pi r = 0]$ . Это значит, что вне тороида магнитное поле отсутствует.

В предыдущих рассуждениях предполагалось, что линии тока лежат в меридиональных плоскостях, т. е. в плоскостях, проходящих через ось  $OO'$  тороида. У реального тороида линии тока (витки) не лежат строго в этих плоскостях, поэтому имеется составляющая тока вокруг оси  $OO'$ . Эта составляющая создает дополнительное поле, аналогичное полю кругового тока.

#### 2) Волновое уравнение для электромагнитного поля. Скорость распространения электромагнитных волн:

Электромагнитное поле способно существовать самостоятельно без электрических зарядов и токов, при этом изменение его состояние имеет волновой характер. Поля такого рода – электромагнитные волны, в вакууме их скорость –  $c$  (скорость света). Рассмотрим однородную нейтральную непроводящую среду с проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$ :

$$[\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}; \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}]$$

В этом случае плотности зарядов и токов равны 0 ( $\rho = 0$  и  $\vec{j} = 0$ ), и уравнения Максвелла:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ (1)} ; \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ (2)} - \text{уравнения выражают роторы } \vec{E} \text{ и } \vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 ; \nabla \cdot \vec{D} = 0 - \text{уравнения выражают дивергенции } \vec{B} \text{ и } \vec{D}$$

Продифференцировав уравнение (2) по времени получим и затем используем (1):

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \mu} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{1}{\mu_0 \mu} (-\nabla^2 \vec{E})$$
, где  $\nabla^2$  – оператор

Лапласа

Таким образом, мы приходим к идентичным волновым уравнениям для полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

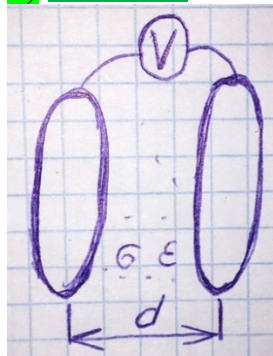
$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} ; \nabla^2 \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$
, где коэффициент перед второй производной по

времени – величина обратная квадрату скорости v распространения волны:

$$v = c / \sqrt{\varepsilon \mu} = 1 / \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \mu}$$
, где c – скорость распространения электромагнитной волны в

вакууме  $c = 1 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

**3) Решение:**



(Рисунок 4.3)

$$U = U \cos(\omega t)$$

Найдём напряженность поля, зная напряжение  $E = U/d = \frac{U}{d} \cos(\omega t)$

Тогда  $D = \varepsilon \varepsilon_0 E = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 U}{d} \cos(\omega t)$

Запишем уравнение Максвелла для циркуляции напряженности магнитного поля в

интегральной форме:  $\int_l H dl = \int_S (j + \frac{\partial D}{\partial t}) dS$

$$j = \sigma E = \frac{U}{d} \cos(\omega t) ; \frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 \omega U}{d} \sin(\omega t)$$

$$H \cdot 2\pi r = \left( j + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \pi r^2 \rightarrow H = \frac{rU}{2d} [\sigma \cos(\omega t) - \varepsilon \varepsilon_0 \omega \sin(\omega t)]$$

Приведём выражение к косинусу суммы. Разделив  $\sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2}$

$$\cos \delta = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2}} ; \sin \delta = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \omega}{\sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2}}$$

$$H = \frac{rU}{2d} \sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2} \cos(\omega t + \delta)$$

**Ответ:**  $H = \frac{rU}{2d} \sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2} \cos(\omega t + \delta)$

## Билет 5

### 1) Работа электростатического поля при перемещении зарядов:

Любое стационарное поле центральных сил является потенциальным, т.е. работа сил этого поля не зависит от пути, а зависит только от положения начальной и конечной точки. Именно таким свойством обладает электростатическое поле – поле, образованное системой неподвижных зарядов. Если в качестве пробного заряда, переносимого из точки 1 заданного поля  $\vec{E}$  в точку 2, взять единичный положительный заряд, то элементарная работа сил поля на перемещении  $d\vec{l}$  равна  $\vec{E}d\vec{l}$ , а вся работа сил поля на пути от точки 1 до точки 2 определяется как  $\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$  (1), где  $\vec{E}$  вектор – напряженность поля

### Потенциал электростатического поля:

Рассмотрим способ описания электрического поля с помощью вектора  $\vec{E}$  – с помощью потенциала  $\varphi$

Тот факт, что линейный интеграл (1), представляющий собой работу сил поля при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2, не зависит от пути между этими точками, позволяет утверждать, что в электрическом поле существует некоторая скалярная функция координат  $\varphi(\vec{r})$ , убывь которой  $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$  (2),

Где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – значения функции  $\varphi$  в точках 1 и 2. Так определенная величина  $\varphi(\vec{r})$  называется потенциалом поля.

Воспользуемся тем, что формула (2) справедлива не только для конечных перемещений, но и для элементарных  $d\vec{l}$ . Тогда согласно этой формуле элементарная убывь потенциала на этом перемещении есть  $-d\varphi = \vec{E}d\vec{l}$

Другими словами, если известно поле  $\vec{E}(\vec{r})$ , то для нахождения  $\varphi$  надо представить  $\vec{E}d\vec{l}$  как убывь некоторой функции. Эта функция и есть  $\varphi$ . Найдем потенциал поля неподвижного

точечного заряда:  $\vec{E}d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \vec{e}_r d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} + const\right)$ ,

где учтено, что  $\vec{e}_r d\vec{l} = 1 \cdot (d\vec{l})_r$ , ибо проекция вектора  $d\vec{l}$  на вектор  $\vec{e}_r$ , а значит, и на  $\vec{r}$  равна приращению модуля вектора  $\vec{r}$ , т.е.  $dr$ . Величина, стоящая в круглых скобках под знаком дифференциала, и есть  $\varphi(\vec{r})$ . Таким образом, потенциал поля точечного заряда  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$

Потенциал поля системы:  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}$ , где  $r_i$  – расстояние от точечного заряда  $q_i$  до интересующей нас точки поля.



## Связь вектора напряженности электростатического поля и потенциала:

Связь между  $\varphi$  и  $\vec{E}$  можно установить с помощью уравнения (2). Пусть перемещение  $d\vec{l}$  параллельно оси X, тогда  $d\vec{l} = \vec{i}dx$ , где  $\vec{i}$  – орт оси X,  $dx$  – приращение координаты  $x$ ,

$\vec{E}d\vec{l} = \vec{E}i dx = E_x$ , где  $E_x$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на орт  $\vec{i}$  (а не на перемещение  $d\vec{l}$ ).

Сопоставив последнее выражение с формулой (2), получим  $E_x = -\partial\varphi/\partial x$ , где символ частной производной подчеркивает, что функцию  $\varphi(x, y, z)$  надо дифференцировать только по  $x$ , считая  $y$  и  $z$  при этом постоянными.

Рассуждая аналогично, можно получить соответствующие выражения для проекций  $E_y$  и  $E_z$ .

А определив  $E_x, E_y, E_z$ , легко найти и сам вектор  $\vec{E}$ :  $\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$

Тогда:  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ , т.е. напряженность  $\vec{E}$  поля равна со знаком минус градиенту потенциала.

## Уравнение Пуассона:

Найдем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция —

потенциал. Для этого подставим в левую часть  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$  ( $\rho$  – объемная плотность заряда)

вместо  $\vec{E}$  его выражение через  $\varphi$ , т.е.  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ . В результате получим общее

дифференциальное уравнение для потенциала – уравнение Пуассона:  $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$ , где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа (лапласиан). В декартовых координатах он имеет вид

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$$

## 2) Пространственная и временная когерентность:

Необходимым условием интерференции волн является их когерентность, т.е. согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов. Этому условию удовлетворяют монохроматические волны – неограниченные в пространстве волны одной определенной и строго постоянной частоты. Так как ни один реальный источник не дает строго монохроматического света, то волны, излучаемые любыми независимыми источниками света, всегда некогерентны. Спектр частот реальной волны имеет конечную ширину  $\Delta\omega$ . Если в какой-то момент времени волны были в фазе, через некоторое время  $\tau_{\text{ког}}$  разность фаз будет уже равна  $\pi$  (волны в противофазе). Такую волну можно приближенно считать монохроматической только в течение времени  $\Delta t \ll \tau_{\text{ког}} = \pi/\Delta\omega$ ,  $\tau_{\text{ког}}$  – время когерентности немонохроматической волны. За промежуток времени разность фаз колебаний изменится на  $\pi$ .

Время когерентности – время, по истечении которого разность фаз волны в некоторой, но одной и той же точке пространства изменяется на  $\pi$ .

Волна с циклической частотой  $\omega$  и фазовой скоростью  $V$  распространяется за это время на расстояние  $l_{\text{ког}} = V\tau_{\text{ког}} = \pi V/\Delta\omega$ ,  $l_{\text{ког}}$  – длина когерентности, расстояние между точками, разность фаз в которых  $\pi$ .

Таким образом, длина когерентности есть расстояние, при прохождении которого две или несколько волн утрачивают когерентность. Отсюда следует, что наблюдение интерференции света возможно лишь при оптических разностях хода, которые меньше длины когерентности для используемого источника света.

Чем ближе волна к монохроматической, тем меньше ширина  $\Delta\omega$  и тем больше длина когерентности  $l_{\text{ког}}$ , а следовательно и время когерентности  $\tau_{\text{ког}}$ .

Когерентность колебаний, определяемая степенью монохроматичности волн, которая совершаются в одной и той же точке пространства, называется временной когерентностью.

Наряду с временной когерентностью для описания когерентных свойств волн в плоскости, перпендикулярной направлению их распространения, вводится понятие пространственной когерентности. Два источника, размеры и взаимное расположение которых позволяют наблюдать интерференцию, называются пространственно-когерентными. Радиусом когерентности (или длиной пространственной когерентности) называется максимальное, поперечное направлению распространения волны расстояние, на котором возможно проявление интерференции.

Таким образом, пространственная когерентность определится радиусом когерентности:

$$r_{\text{кор}} = \frac{\lambda}{\theta}, \lambda - \text{длина волны света, } \theta - \text{угловой размер источника.}$$

### 3) Решение:

Получим выражение для радиуса витка в зависимости от времени:

$$r(t) = \int \frac{dr}{dt} dt = \frac{dr}{dt} t + C$$

Найдём C из начальных условий: при  $t = 0 ; S = S_0 = \pi r_0^2 \rightarrow r_0 = \sqrt{\frac{S_0}{\pi}} \rightarrow$

$$r(t) = \frac{dr}{dt} t + \sqrt{\frac{S_0}{\pi}}$$

Магнитный поток через виток:  $\Phi = B \cdot S$

При изменении  $\Phi$  в ветке возникает ЭДС индукции:  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{ds}{dt} = -B \frac{d}{dt} (\pi r^2)$

$$|\mathcal{E}_i| = B 2\pi r \frac{dr}{dt} = B \frac{dr}{dt} 2\pi \left( \frac{dr}{dt} t + \sqrt{\frac{S_0}{\pi}} \right), \text{ найдем } \mathcal{E}_i \text{ в момент времени } t_0 = 0 \text{ и } t_1$$

$$\mathcal{E}_i(0) = 2\pi B \frac{dr}{dt} \sqrt{\frac{S_0}{\pi}} = 2\pi \cdot 42 \cdot 10^{-2} \cdot 46 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{0,285}{\pi}} = 0,37 \text{ В}$$

$$\mathcal{E}_i(t_1) = 2\pi B \frac{dr}{dt} \left( \frac{dr}{dt} t_1 + \sqrt{\frac{S_0}{\pi}} \right) = 2\pi \cdot 42 \cdot 10^{-2} \cdot 46 \cdot 10^{-2} \left( 46 \cdot 10^{-2} \cdot 2 + \sqrt{\frac{0,285}{\pi}} \right) = 1,48 \text{ В}$$

Ответ:  $\mathcal{E}_i(0) = 0,37 \text{ В} ; \mathcal{E}_i(t_1) = 1,48 \text{ В}$

Билет 6

### 1) Магнитное поле в магнетике:

Если в магнитное поле, образованное токами в проводниках, ввести то или иное вещество, поле изменится. Это объясняется тем, что всякое вещество является магнетиком, т.е. способно под действием магнитного поля намагничиваться — приобретать магнитный момент.

Намагниченное вещество создает свое магнитное поле  $\overline{B'}$ , которое вместе с первичным полем  $\overline{B_0}$ , обусловленным токами проводимости, образует результирующее поле  $\overline{B} = \overline{B'} + \overline{B_0}$

Здесь под  $\overline{B'}$  и  $\overline{B_0}$  имеются в виду поля, усредненные по физически бесконечно малому объему.

Поле  $\overline{B'}$ , как и поле  $\overline{B_0}$  токов проводимости, не имеет источников (магнитных зарядов), поэтому для результирующего поля  $\overline{B}$  при наличии магнетика справедлива теорема Гаусса:

$$\oint \overline{B} d\overline{S} = 0$$

Это означает, что линии вектора  $\overline{B}$  и при наличии вещества остаются всюду непрерывными.

### Вектор напряжённости магнитного поля:

В магнетиках, помещенных во внешнее магнитное поле, возникают токи намагничивания, поэтому циркуляция вектора  $\overline{B}$  теперь будет определяться не только токами проводимости, но и токами намагничивания, а именно:



$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0(I + I') \quad (1)$ , где  $I$  и  $I'$  – токи проводимости и намагничивания, охватываемые заданным контуром  $\Gamma$ .

С током  $I'$  связана циркуляция намагниченности:  $\oint \vec{J} d\vec{l} = I' \quad (2)$

Предполагая, что циркуляция векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{J}$  берется по одному и тому же контуру  $\Gamma$ ,

выразим  $I'$  в уравнении (1) по формуле (2), тогда:  $\oint \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I$

Величину, стоящую под интегралом в скобках, обозначают буквой  $\vec{H}$ . Итак, мы найдём

вспомогательный вектор  $\vec{H}$ :  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad (3)$  – вектор напряжённости магнитного поля.

Единицей величины  $H$  является ампер на метр (А/м).

Теорема о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля в интегральной форме:

Циркуляция вектора  $\vec{H}$  по произвольному контуру  $\Gamma$  равна алгебраической сумме токов

проводимости  $I$ , охватываемых этим контуром:  $\oint \vec{H} d\vec{l} = I$ . Эта формула выражает теорему о

циркуляции вектора  $\vec{H}$ : циркуляция вектора  $\vec{H}$  по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром.

В дифференциальной форме:

$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$ , т. е. ротор вектора  $\vec{H}$  равен плотности тока проводимости в той же точке вещества.

Связь вектора напряжённости магнитного поля с вектором намагниченности. Магнитная восприимчивость:

Намагниченность  $\vec{J}$  зависит от магнитной индукции  $\vec{B}$  в данной точке вещества. Однако  $\vec{J}$  принято связывать с вектором  $\vec{H}$ . Ограничимся рассмотрением только таких магнетиков, для которых зависимость между  $\vec{J}$  и  $\vec{H}$  имеет линейный характер, а именно:

$\vec{J} = \chi \vec{H} \quad (4)$ , где  $\chi$  – магнитная восприимчивость, безразмерная величина, характерная для каждого данного магнетика.

Магнитная восприимчивость  $\chi$  бывает как положительной, так и отрицательной.

Соответственно магнетики, подчиняющиеся зависимости (4), подразделяют на парамагнетики ( $\chi > 0$ ) и диамагнетики ( $\chi < 0$ ). У парамагнетиков  $\vec{J} \uparrow \uparrow \vec{H}$ , у диамагнетиков  $\vec{J} \uparrow \downarrow \vec{H}$ .

Связь вектора напряжённости магнитного поля с вектором магнитной индукции. Магнитная проницаемость:

Для магнетиков, которые подчиняются зависимости (4), выражение (3) принимает вид

$(1 + \chi) \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ . Отсюда  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ , где  $\mu$  – магнитная проницаемость

У парамагнетиков  $\mu > 1$ , у диамагнетиков  $\mu < 1$ , причем как у тех, так и у других  $\mu$  отличается от единицы весьма мало, т. е. магнитные свойства этих магнетиков выражены очень слабо.

## 2) Вихревые токи:

Индукционные токи в массивных сплошных имеют вихревой характер, их называют токами Фуко – индукционный объёмный электрический ток, возникающий в электрических проводниках при изменении во времени потока, действующего на них магнитного поля.

Вихревые токи порождают свои собственные магнитные потоки, которые, по правилу Ленца, противодействуют магнитному потоку катушки и ослабляют его.

Применение электромагнитной индукции:

Радиовещание

Переменное магнитное поле, возбуждаемое изменяющимся током, создаёт в окружающем пространстве электрическое поле, которое в свою очередь возбуждает магнитное поле, и т.д. Взаимно порождая друг друга, эти поля образуют

единое переменное электромагнитное поле - электромагнитную волну. Возникнув в том месте, где есть провод с током, электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью света -300000 км/с.

#### Магнитотерапия

В спектре частот разные места занимают радиоволны, свет, рентгеновское излучение и другие электромагнитные излучения. Их обычно характеризуют непрерывно связанными между собой электрическими и магнитными полями.

#### Синхрофазотроны

В настоящее время под магнитным полем понимают особую форму материи состоящую из заряженных частиц. В современной физике пучки заряженных частиц используют для проникновения в глубь атомов с целью их изучения. Сила, с которой действует магнитное поле на движущуюся заряженную частицу, называется силой Лоренца.

#### Расходомеры - счётчики

Метод основан на применении закона Фарадея для проводника в магнитном поле: в потоке электропроводящей жидкости, движущейся в магнитном поле наводится ЭДС, пропорциональная скорости потока, преобразуемая электронной частью в электрический аналоговый/цифровой сигнал.

#### Генератор постоянного тока

В режиме генератора якорь машины вращается под действием внешнего момента. Между полюсами статора имеется постоянный магнитный поток, пронизывающий якорь. Проводники обмотки якоря движутся в магнитном поле и, следовательно, в них индуцируется ЭДС, направление которой можно определить по правилу "правой руки". При этом на одной щетке возникает положительный потенциал относительно второй. Если к зажимам генератора подключить нагрузку, то в ней пойдет ток.

Явление ЭМИ широко применяется и в трансформаторах.

#### Индукционные печи

Тепловое действие токов Фуко используется в индукционных печах, где в катушку, питаемую высокочастотным генератором большой мощности, помещают проводящее тело, в котором возникают вихревые токи, разогревающие его до плавления. Подобным образом работают индукционные плиты, в которых расположенной внутри плиты.

### 3) Решение:

Магнитный момент кругового тока определяется по формуле:  $P_m = I \cdot S = I\pi R^2$

Магнитная индукция в центре кругового витка с током определяется по формуле:  $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$

Магнитная индукция В связана с напряженностью магнитного поля Н в однородной среде отношением:  $B = \mu_0 H$

Тогда:  $R = \sqrt[3]{\frac{P_m}{2\pi H}} = 11,7 \cdot 10^{-2}(\text{м})$  ;  $I = 2 \cdot R \cdot H = 35,1 (\text{А})$

#### Билет 7

### 1) Проводники в электростатическом поле:

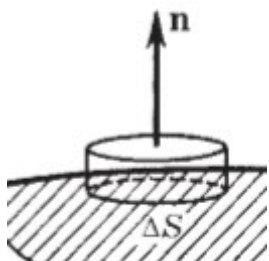
Внутри проводника  $\vec{E} = 0$ . Поместим металлический проводник во внешнее электростатическое поле или сообщим ему какой-нибудь заряд. В обоих случаях на все заряды проводника будет действовать электрическое поле, в результате чего все отрицательные заряды (электроны) сместятся против поля. Такое перемещение зарядов (ток) будет продолжаться до тех пор (практически это происходит в течение малой доли секунды), пока не установится определенное распределение зарядов, при котором электрическое поле во всех точках внутри проводника обратится в нуль. Таким образом, в статическом случае электрическое поле внутри проводника отсутствует ( $\vec{E} = 0$ ).

Далее, поскольку в проводнике всюду  $\vec{E} = 0$ , то плотность избыточных (нескомпенсированных) зарядов внутри проводника также всюду равна нулю ( $\rho = 0$ ).

Отсутствие поля внутри проводника означает, что потенциал  $\varphi$  в проводнике одинаков во всех его точках, т.е. любой проводник в электростатическом поле представляет собой эквипотенциальную область и его поверхность является эквипотенциальной. Из того факта следует, что непосредственно у этой поверхности поле  $\vec{E}$  направлено по нормали к ней в каждой точке.

#### Электростатическом поле вблизи поверхности проводника:

Пусть интересующий нас участок поверхности проводника граничит с вакуумом. Линии вектора  $\vec{E}$  перпендикулярны поверхности проводника, поэтому в качестве замкнутой поверхности возьмем небольшой цилиндр, расположив его так, как показано на рисунке 7.1.



(Рисунок 7.1)

Тогда поток вектора  $\vec{E}$  через эту поверхность будет равен только потоку через «наружный» торец цилиндра (потоки через боковую поверхность и внутренний торец равны нулю), и мы имеем  $E_n \Delta S = \sigma \Delta S / \epsilon_0$ , где  $E_n$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на внешнюю (по отношению к проводнику) нормаль  $\vec{n}$ ,  $\Delta S$  – площадь сечения цилиндра,  $\sigma$  – локальная поверхностная плотность заряда на проводнике. Получим  $E_n = \sigma / \epsilon_0$

Если  $\sigma > 0$ , то и  $E_n > 0$ , т.е. вектор  $\vec{E}$  направлен от поверхности проводника – совпадает по направлению с нормалью  $\vec{n}$ ; если же  $\sigma < 0$ , то  $E_n < 0$  – вектор  $\vec{E}$  направлен к поверхности проводника. Напряженность  $\vec{E}$  определяется всеми зарядами рассматриваемой системы, как и само значение  $\sigma$ .

#### Емкость проводников:

Рассмотрим какой-либо уединенный проводник, т.е. проводник, удаленный от других проводников, тел и зарядов. Опыт показывает, что между зарядом  $q$  такого проводника и его потенциалом  $\varphi$  (потенциал на бесконечности условно равен нулю) существует прямая пропорциональность:  $\varphi \sim q$ . Следовательно,  $q/\varphi$  не зависит от заряда  $q$ , для каждого уединенного проводника это отношение имеет свое значение. Величину  $C = q/\varphi$  называют емкостью уединенного проводника. Она численно равна заряду, сообщение которого проводнику повышает его потенциал на единицу. Емкость зависит от размеров и формы проводника, и измеряется в фарадах [Ф].

#### Емкость конденсаторов:

Если проводник не уединен, то его емкость будет существенно увеличиваться при приближении к нему других тел. Это обусловлено тем, что поле данного проводника вызывает перераспределение зарядов на окружающих телах — появление индуцированных зарядов. Пусть заряд проводника  $q > 0$ . Тогда отрицательные индуцированные заряды оказываются ближе к проводнику, нежели положительные. Поэтому потенциал проводника, являющийся алгебраической суммой потенциала собственных зарядов и зарядов, индуцированных на других телах, уменьшится при приближении к нему других незаряженных тел. А значит, его емкость увеличится.

Это позволило создать систему проводников, которая обладает емкостью, значительно большей, чем уединенный проводник, и притом не зависящей от окружающих тел. Такую систему называют конденсатором.

Чтобы внешние тела не оказывали влияния на емкость конденсатора, его обкладки располагают так относительно друг друга, чтобы поле, создаваемое накапливающимися на них зарядами, было сосредоточено практически полностью внутри конденсатора. Это означает, что линии вектора  $\vec{E}$ , начинающиеся на одной обкладке, должны заканчиваться на другой, т.е. заряды на обкладках должны быть одинаковы по модулю и противоположны по знаку ( $q$  и  $-q$ ).

Основной характеристикой конденсатора является его емкость. В отличие от емкости уединенного проводника под емкостью конденсатора понимают отношение заряда конденсатора к разности потенциалов между обкладками (эту разность называют напряжением):  $C = q/U$

Под зарядом  $q$  конденсатора имеют в виду заряд, расположенный на положительно заряженной обкладке.

#### Расчёт ёмкости плоского конденсатора:

Этот конденсатор состоит из двух параллельных пластин, разделенных зазором шириной  $h$ .

Если заряд конденсатора  $q$ , то напряженность поля между его обкладками  $E = \sigma/\epsilon_0$ , где

$\sigma = q/S$ ,  $S$  – площадь каждой пластины. Следовательно, напряжение между обкладками

$$U = Eh = qh/S\epsilon_0$$

Тогда  $C = S\epsilon_0/h$

#### Сферического:

Пусть радиусы внутренней и внешней обкладок конденсатора равны соответственно  $a$  и  $b$ .

Если заряд конденсатора  $q$ , то напряженность поля между обкладками определяется по

теореме Гаусса:  $E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$

Напряжение на конденсаторе:  $U = \int_a^b E_r dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$

Тогда, ёмкость сферического конденсатора:  $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{a-b}$

Полезно убедиться, что в случае малого зазора между обкладками, т. е. при условии  $(b - a) \ll a$  (или  $b$ ), полученное выражение переходит в выражение для емкости плоского конденсатора

#### Цилиндрического:

Рассуждая так же, как и в случае со сферическим конденсатором, получим  $C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(b/a)}$

Где  $l$  – длина конденсатора;  $a$  и  $b$  – радиусы внутренней и наружной цилиндрических обкладок. Здесь так же, как и в предыдущем случае, при малом зазоре между обкладками полученное выражение переходит в выражение для емкости плоского конденсатора.

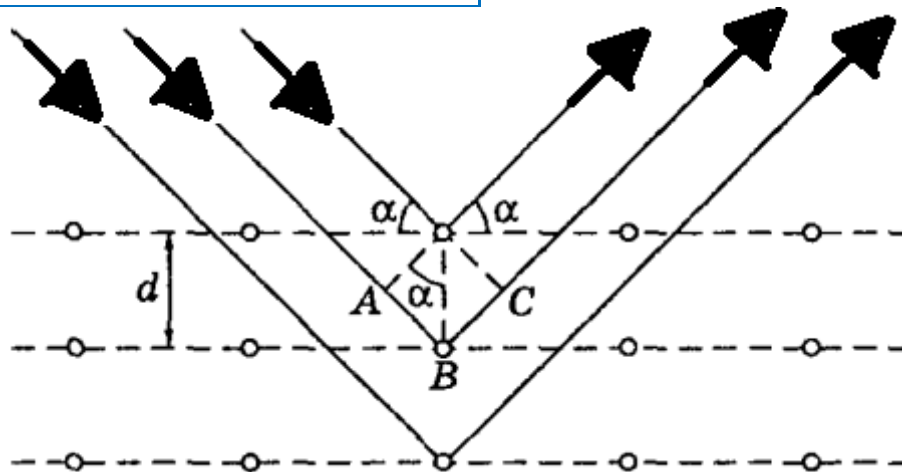
#### Дифракция рентгеновских лучей. Формула Вульфа – Бреггов:

Дифракцию рентгеновского излучения в кристалле можно рассматривать как результат зеркального отражения от системы параллельных кристаллических плоскостей, т.е. плоскостей, в которых лежат узлы кристаллической решётки. Вторичные волны, отразившись от разных атомных плоскостей, когерентны и будут интерферировать между собой.

Показатель преломления всех веществ для рентгеновских лучей близок к единице, поэтому разность хода двух волн, отразившихся зеркально от соседних кристаллических плоскостей, равна, как видно из рисунка 7.2,  $ABC = 2d \cdot \sin\alpha$ , где  $d$  – межплоскостное расстояние,  $\alpha$  –

угол скольжения. При этом направления, в которых возникают френгоферовы дифракционные максимумы определяются формулой Брэгга-Вульфа:

$$2d \cdot \sin \alpha = \pm m \lambda, m = 1, 2, \dots$$



(Рисунок 7.2)

Понятие о рентгеноструктурном анализе:

Рентгеноструктурный анализ – это метод исследования атомно-молекулярного строения веществ, преимущественно с кристаллической структурой, основанный на изучении дифракционной картины, полученной при взаимодействиях с исследуемым образцом рентгеновского излучения.

3) Решение:

$$\lambda = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$$

Радиус темных колец  $r_k = \sqrt{k \lambda R}$

$$\text{Тогда } \Delta r = r_5 - r_3 = \sqrt{5 \lambda R} - \sqrt{3 \lambda R} = \sqrt{\lambda R} (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 0,5 \text{ мм}$$

$$R = \frac{0,25}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 \lambda} = 1,64 \text{ м}$$

Ответ:  $R = 1,64 \text{ м}$

## Билет 8

### 1) Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле:

Когда контур с током находится во внешнем магнитном поле – мы будем предполагать, что оно постоянное, – на отдельные элементы контура действуют амперовы силы, а поэтому при перемещении контура эти силы будут совершать работу. Работа, которую совершают амперовы силы при элементарном перемещении контура с током  $I$ , определяется как

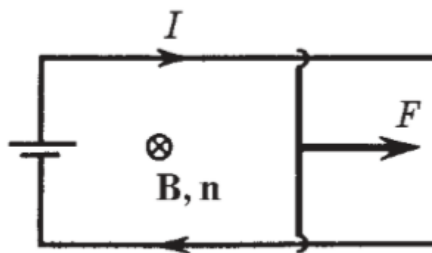
$\delta A = Id\Phi$  (1), где  $d\Phi$  – приращение магнитного потока сквозь контур при данном перемещении.

Доказательство этой формулы проведем в три этапа.

1. Сначала рассмотрим частный случай: контур (рисунок 8.1) с подвижной перемычкой длины  $l$  находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости контура и направленном за плоскость рисунка. На перемычку действует амперова сила  $F = IlB$ . При перемещении перемычки вправо на  $dx$  эта сила совершает положительную работу

$$\delta A = Fdx = IBldx = IBdS$$
 (2)

где  $dS$  – приращение площади, ограниченной контуром. Для определения знака магнитного потока  $\Phi$  условимся всегда брать нормаль  $\vec{n}$  к поверхности, ограниченной контуром, так, чтобы она образовывала с направлением тока в контуре правовинтовую систему (рисунок 8.1). При этом ток  $I$  будет всегда величиной положительной. Поток же  $\Phi$  может быть как положительным, так и отрицательным. Но в нашем случае как  $\Phi$ , так и  $d\Phi = B dS$  являются величинами положительными.



(Рисунок 8.1)

2. Полученный результат справедлив и для произвольного направления поля  $\vec{B}$ . Чтобы убедиться в этом, разложим вектор  $\vec{B}$  на три составляющие:  $\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_l + \vec{B}_x$ .

Составляющая  $\vec{B}_l$  – вдоль перемычки – параллельна току в ней и поэтому не оказывает на перемычку силового действия. Составляющая  $\vec{B}_x$  – вдоль перемещения – дает силу, перпендикулярную перемещению, работы она не совершает. Остается лишь составляющая  $\vec{B}_n$  – перпендикулярная плоскости, в которой перемещается перемычка. Поэтому в формуле (2) вместо  $\vec{B}$  надо брать только  $\vec{B}_n$ . Но  $\vec{B}_n dS = d\Phi$ , и мы опять приходим к формуле (1).

3. Теперь перейдем к рассмотрению любого контура при произвольном перемещении его в постоянном неоднородном магнитном поле (контур может при этом и произвольным образом деформироваться). Разобьем мысленно данный контур на бесконечно малые элементы тока и рассмотрим бесконечно малые перемещения их. В этих условиях магнитное поле, в котором перемещается каждый элемент тока, можно считать однородным. Для такого перемещения к



каждому элементу тока применимо выражение  $dA = Id'\Phi$  для элементарной работы, где под  $d'\Phi$  надо понимать вклад в приращение потока сквозь контур от данного элемента контура. Сложив такие элементарные работы для всех элементов контура, снова получим выражение (1), где  $d\Phi$  есть приращение магнитного потока сквозь весь контур.

Чтобы найти работу амперовых сил при полном перемещении контура с током от начального положения 1 до конечного 2, достаточно проинтегрировать выражение (1):  $A = \int_1^2 Id\Phi$

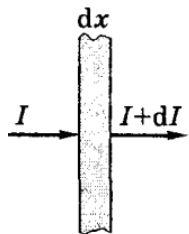
Если при этом перемещении поддерживать ток  $I$  постоянным, то  $A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$

## 2) Поглощение рассеяние света:

Прохождение световой волны через вещество сопровождается потерей энергии, затрачиваемой на возбуждение колебаний электронов. Частично эта энергия возвращается в излучение в виде вторичных волн, порождаемых колеблющимися электронами, поэтому интенсивность света при прохождении через обычное вещество уменьшается - свет поглощается в веществе.

### Закон Бугера:

Пусть через однородное вещество распространяется параллельный световой пучок. Выделим в этом веществе бесконечно тонкий плоский слой толщины  $dx$  (рисунок 8.2).



(Рисунок 8.2)

При прохождении этого слоя интенсивность свет уменьшиться, её убыль можно представить  $-dI$

Тогда величина пропорциональна интенсивности в данном слое:  $-dl = \chi I dx$

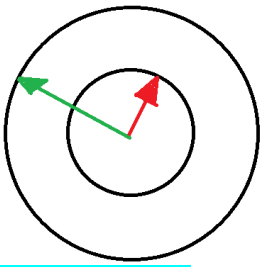
После интегрирования  $I = I_0 e^{-\chi x}$ , где  $\chi$  – коэффициент поглощения, характеризующий поглощающие свойства вещества.

Это и есть закон Бугера. Интенсивность света при прохождении однородного вещества уменьшается по экспоненциальному закону.

### Рассеяние света:

Световая волна, проходящая через вещество, вызывает колебания электронов в атомах. Электроны возбуждают вторичные волны, распространяющиеся по всем направлениям. При этом вторичные волны оказываются когерентными между собой и поэтому интерferируют. В случае однородной среды вторичные волны полностью гасят друг друга во всех направлениях, кроме направления распространения первичной волны. В силу этого перераспределения света по направлениям, то есть рассеяние света в однородной среде не происходит. При распространении света в неоднородной среде, дифрагируя на мелких неоднородностях среды, световые волны дают дифракционную картину в виде равномерного распределения интенсивности по всем направлениям. Это явление называют рассеянием света. Примерами таких сред служат с явно выраженной оптической неоднородностью могут служить так называемые мутные среды (аэрозоли, коллоидные растворы, матовые стекла).

## 3) Решение:



(Рисунок 8.3) (Стрелки это радиусы)

Из теоремы Гаусса:  $E_1 4\pi R_1^2 = \frac{4}{3\varepsilon_0} \rho \pi R^3 \rightarrow E_1 = \frac{\rho R_1}{3\varepsilon_0} ; E = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0} ; S = 4\pi R^2$

$$\begin{aligned} D &= \varepsilon_0 E \\ W &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \end{aligned} \rightarrow W = \frac{\varepsilon_0 \rho^2 R^2}{2(3\varepsilon_0)^2} = \frac{\rho^2 R^2}{18\varepsilon_0}$$

$$W_1 = \int_0^{R_1} W S dR = \int_0^{R_1} \frac{4\pi}{18\varepsilon_0} \rho^2 R^4 = \frac{4\pi \rho^2}{18\varepsilon_0} \cdot \frac{R_1^5}{5}$$

$$W = \int_{R_1}^R W S dR = \int_{R_1}^R \frac{4\pi}{18\varepsilon_0} \rho^2 R^4 = \frac{4\pi \rho^2}{18\varepsilon_0} \cdot \frac{(R^5 - R_1^5)}{5}$$

$$W_1 = W \rightarrow R_1^5 = R^5 - R_1^5 \rightarrow R_1 = R / \sqrt[5]{2}$$

Ответ:  $R_1 = R / \sqrt[5]{2}$

#### Билет 9

#### 1) Принцип суперпозиции и его применение к расчёту поля системы неподвижных зарядов:

Вектор напряженности поля, создаваемого системой точечных зарядов, равен векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

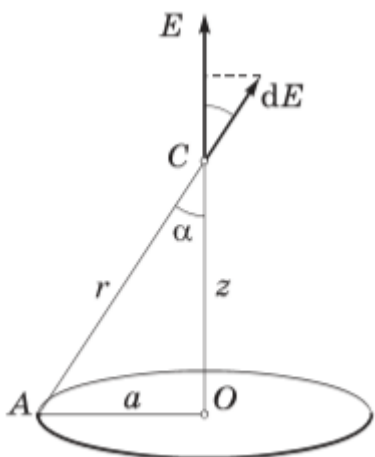
$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_{ri} , \text{ где } r_i - \text{расстояние между зарядом } q_i \text{ и интересующей нас точкой поля.}$$

Это утверждение называют принципом суперпозиции (наложения) электрических полей. Он позволяет вычислять напряженность поля любой системы зарядов, представив ее в виде совокупности точечных зарядов.

#### Расчёт электрического поля равномерно заряженного кольца:

Пусть заряд  $q > 0$  равномерно распределён по тонкому кольцу радиуса  $a$ .

Вектор  $\vec{E}$  должен быть направлен по оси кольца (Рисунок 9.1).



(Рисунок 9.1)

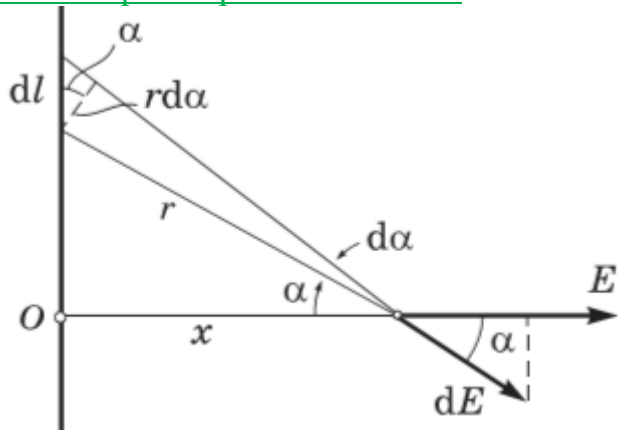


Выделим на кольце около точки А элемент  $dl$ . Запишем выражение для составляющей  $dE_z$  от этого элемента в точке С:

$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cos\alpha$ , где  $\lambda = q/2\pi a$ . Для всех элементов кольца  $r$  и  $a$  будут одними и теми же, поэтому интегрирование этого выражения сводится просто к замене  $\lambda dl$  на  $q$ . В результате

$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}$ , видно, что при  $z \gg a$  поле  $E \approx q/4\pi\epsilon_0 z^2$ , т.е. на больших расстояниях эта система ведет себя как точечный заряд.

Равномерно заряженной нити:



(Рисунок 9.2)

Пусть дана нить длиной  $l$ , которая равномерно заряжена зарядом  $q$

Из соображений симметрии ясно, что вектор  $\vec{E}$  должен иметь направление, показанное на рисунке. Это подсказывает, как надо поступить далее: определим составляющую  $dE_x$  от элемента  $dl$  нити с зарядом  $dq$  и затем проинтегрируем по всем элементам нити. В нашем случае

$dE_x = dE \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cos\alpha$ , где  $\lambda = \frac{q}{2l}$  – линейная плотность заряда нити. Из рисунка

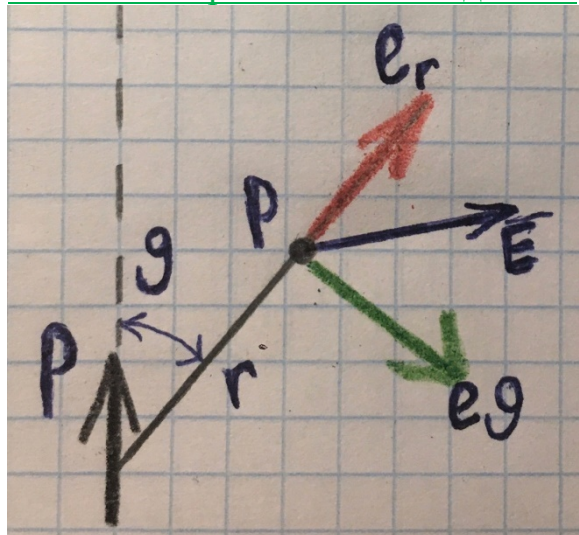
9.2 видно, что  $dl \cos\alpha = r d\alpha$  и  $r = x / \cos\alpha$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda r d\alpha}{r^2} = \left( \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \cos\alpha \right) d\alpha \rightarrow E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \int_0^{\alpha_0} (\cos\alpha) d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} 2 \sin\alpha_0,$$

где  $\alpha_0$  – максимальное значение угла  $\alpha$ ,  $\sin\alpha_0 = l / \sqrt{l^2 + x^2}$

Поэтому  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{x\sqrt{l^2+x^2}}$ , видно, что при  $x \gg l$  поле  $E \approx q/4\pi\epsilon_0 x^2$ , т.е. на больших расстояниях эта система ведет себя как точечный заряд.

Расчёт электрического поля диполя:



### (Рисунок 9.3)

Для нахождения поля диполя воспользуемся формулой  $E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}$  ( $E_l$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на перемещение  $dl$ ), вычислив с помощью нее проекции вектора  $\vec{E}$  на два взаимно перпендикулярных направления — вдоль ортов  $e_r$  и  $e_\vartheta$  (Рисунок 9.3)

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p \cos \vartheta}{r^3}; \quad E_\vartheta = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \vartheta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \sin \vartheta}{r^3}, \text{ где } p = ql - \text{электрический момент диполя.}$$

$$E = \sqrt{E_\vartheta^2 + E_r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \vartheta}$$

### 2) Давление электромагнитной волны:

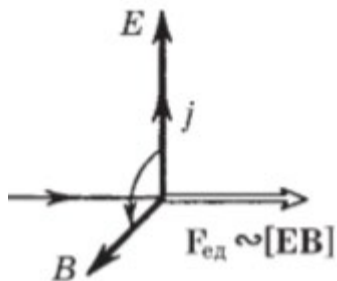
Максвелл теоретически показал, что электромагнитные волны, отражаясь или поглощаясь в телах, на которые они падают, оказывают на них давление. Это давление возникает в результате воздействия магнитного поля волны на электрические токи, возбуждаемые электрическим полем той же волны.

Пусть электромагнитная волна распространяется в однородной среде, обладающей поглощением. Наличие поглощения означает, что в среде будет выделяться джоулева теплота с объемной плотностью  $\rho j^2 = \sigma E^2$ , а поэтому  $\sigma \neq 0$ , т.е. поглощающая среда обладает проводимостью.

Электрическое поле волны в такой среде возбуждает электрический ток с плотностью

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \text{ Вследствие этого на единицу объема среды действует амперова сила плотности}$$

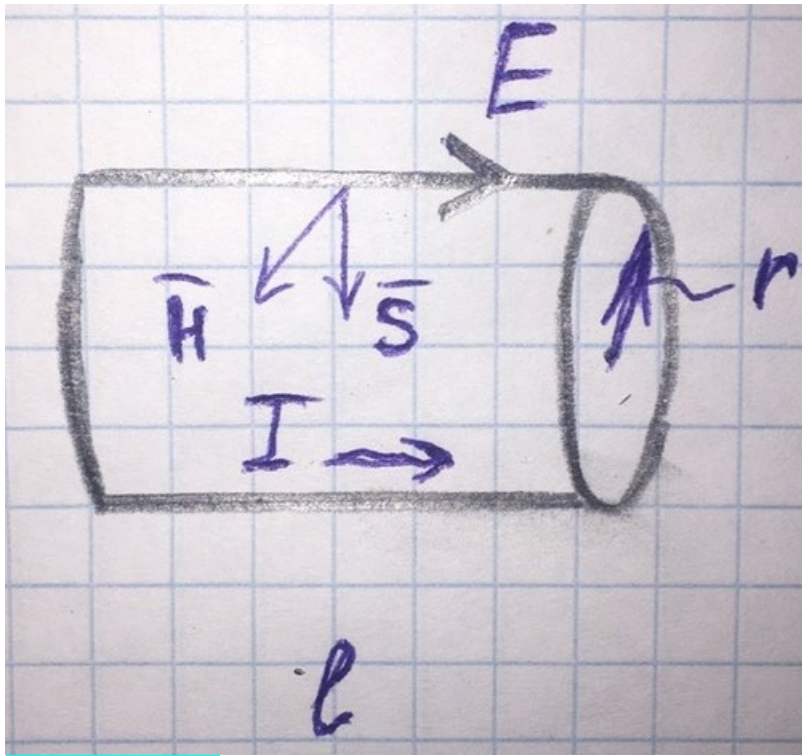
$$F_{ед} = [\vec{j} \vec{B}] = \sigma [\vec{E} \vec{B}], \text{ направленная в сторону распространения волны (рисунок 9.4). Эта сила и вызывает давление электромагнитной волны.}$$



### (рисунок 9.4)

При отсутствии поглощения проводимость  $\sigma = 0$  и  $F_{ед} = 0$ , т.е. в этом случае электромагнитная волна не оказывает никакого давления на среду.

### 1) Решение:



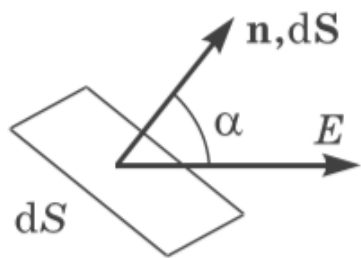
(Рисунок 9.5)

$$j = \sigma E ; j / \sigma = E = j \rho = I \rho / \pi r^2 ; H = I / 2 \pi r ; S = EH = \rho I^2 / 2 \pi^2 r^3$$

$$\int_S S dS = S \cdot 2 \pi r l = l \rho I^2 / \pi r^2$$

$$Q = I^2 R = l \rho I^2 / \pi r^2 = \int_S S dS$$

Ответ: Весть ток уходит в теплоту



(Рисунок 10.1)

Для большей наглядности воспользуемся геометрической картиной описания электрического поля (с помощью линий вектора  $\vec{E}$ ) и еще, для упрощения рассуждений, будем считать, что густота линий  $\vec{E}$  равна модулю вектора  $\vec{E}$ . Тогда число линий, пронизывающих элементарную площадку  $dS$ , нормаль  $\vec{n}$  которой составляет угол  $\alpha$  с вектором  $\vec{E}$ , определяется согласно рисунку 10.1 как  $E dS \cos \alpha$ . Эта величина и есть поток  $d\Phi$  вектора  $\vec{E}$  сквозь площадку  $dS$ . В

более компактной форме:  $d\Phi = E_n dS = \vec{E} d\vec{S}$ ,

Где  $E_n$  — проекция вектора  $\vec{E}$  на нормаль  $\vec{n}$  к площадке  $d\vec{S}$ ,  $d\vec{S}$  — вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление совпадает с нормалью  $\vec{n}$  к площадке. Заметим, что выбор направления вектора  $\vec{n}$  (а следовательно, и  $d\vec{S}$ ) условен, его можно было бы направить и в противоположную сторону.

Если имеется некоторая произвольная поверхность  $S$ , то по ток вектора  $\vec{E}$  сквозь нее

$$\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S}$$

Теорема Гаусса в интегральной форме в вакууме:

Поток вектора  $\vec{E}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$  обладает свойством: он зависит только от алгебраической суммы зарядов, охватываемых этой поверхностью. А

именно  $\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{внутр}}$  — это выражение и составляет суть теоремы Гаусса: поток вектора

$\vec{E}$  сквозь замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, деленной на  $\epsilon_0$

В дифференциальной форме:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

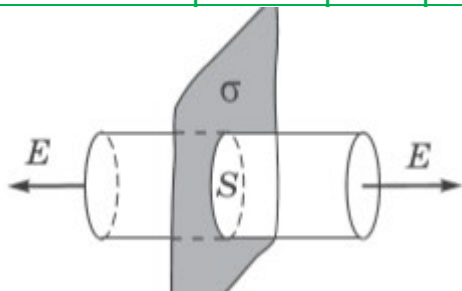
, где  $\rho$  — объемная плотность заряда

В дифференциальной форме теорема Гаусса является локальной теоремой: дивергенция поля  $\vec{E}$  в данной точке зависит только от плотности электрического заряда  $\rho$  в той же точке и больше ни от чего. Это одно из замечательных свойств электрического поля.

Применение для расчёта теоремы Гаусса:

Теорема Гаусса оказывается весьма эффективным аналитическим инструментом: она позволяет получить ответы на некоторые принципиальные вопросы, не решая задачи, а также находить и само поле  $\vec{E}$ , причем чрезвычайно простым путем.

Расчет поля равномерно заряженной плоскости:



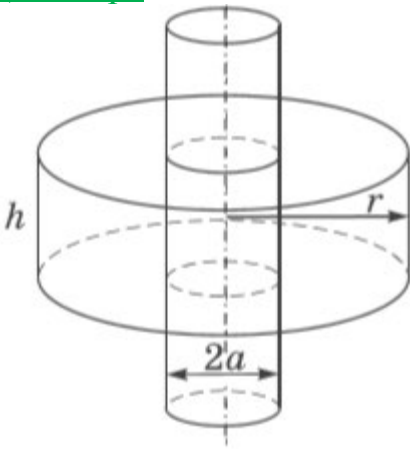
(Рисунок 10.2)

Пусть поверхностная плотность заряда равна  $q$ . Из симметрии задачи очевидно, что вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен заряженной плоскости. В симметричных относительно этой плоскости точках вектор  $\vec{E}$  одинаков по модулю и противоположен по направлению. Такая конфигурация поля подсказывает, что в качестве замкнутой поверхности следует выбрать прямой цилиндр, расположенный, как на [рисунке 10.2](#), где предполагается  $q > 0$ . Поток сквозь боковую поверхность этого цилиндра равен нулю, и поэтому полный поток через всю поверхность цилиндра будет  $2E\Delta S$ , где  $\Delta S$  – площадь каждого торца. Внутри цилиндра заключен заряд  $q\Delta S$ . Согласно теореме Гаусса  $2E\Delta S = q\Delta S/\epsilon_0$ , откуда

$E_n = q/2\epsilon_0$ , где  $E_n$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на нормаль  $\vec{n}$  к заряженной плоскости, причем вектор  $\vec{n}$  направлен от этой плоскости.

Если  $q > 0$ , то и  $E_n > 0$ , значит, вектор  $\vec{E}$  направлен от заряженной плоскости, как на [рисунке 10.2](#), и наоборот.

Цилиндра:



(Рисунок 10.3)

Поле бесконечного круглого цилиндра, заряженного равномерно по поверхности так, что на единицу его длины приходится заряд  $q$ .

Из соображений симметрии следует, что поле здесь имеет радиальный характер, т.е. вектор  $\vec{E}$  в каждой точке перпендикулярен оси цилиндра, а модуль вектора  $\vec{E}$  зависит только от расстояния  $r$  до оси цилиндра. Это подсказывает, что замкнутую поверхность здесь надо взять в форме коаксиального прямого цилиндра ([рисунк 10.3](#)). Тогда поток вектора  $\vec{E}$  сквозь торцы этого цилиндра равен нулю, а через боковую поверхность  $E_r 2\pi r h$ , где  $E_r$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на радиус-вектор  $\vec{r}$ , совпадающий по направлению с нормалью  $\vec{n}$  к боковой поверхности цилиндра радиусом  $r$  и высотой  $h$ . По теореме Гаусса для случая  $r > a$  имеем

$$E_r 2\pi r h = qh/\epsilon_0, \text{ откуда } E_r = q/2\pi\epsilon_0 r^2 \quad (r > a)$$

При  $q > 0$ , то и  $E_r > 0$ , значит, вектор  $\vec{E}$  направлен от заряженного цилиндра, как на рисунке, и наоборот.

Если  $r < a$ , то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому в этой области  $\vec{E} = 0$  независимо от  $r$ . Таким образом, внутри равномерно заряженного по поверхности круглого бесконечного цилиндра поля нет.

Сферы:

Поле сферической поверхности радиусом  $a$ , заряженной равномерно зарядом  $q$ . Это поле, очевидно, центрально-симметричное: направление вектора  $\vec{E}$  в любой точке проходит через центр сферы, а модуль вектора  $\vec{E}$  должен зависеть только от расстояния  $r$  до центра сферы. Ясно, что при такой конфигурации поля в качестве замкнутой поверхности надо взять

концентрическую сферу. Пусть ее радиус  $r > a$ , тогда по теореме Гаусса  $E_r 4\pi r^2 = q/\epsilon_0$ ,

откуда  $E_r = q/4\pi r^2 \epsilon_0 \quad (r > a)$ ,

Где  $E_r$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на радиус-вектор  $\vec{r}$ , совпадающий по направлению с нормалью к поверхности в каждой ее точке. Знак заряда  $q$  и здесь определяет знак проекции  $E_r$ , а следовательно, и направление самого вектора  $\vec{E}$ : от заряженной сферы (при  $q > 0$ ) или к ней (при  $q < 0$ ).

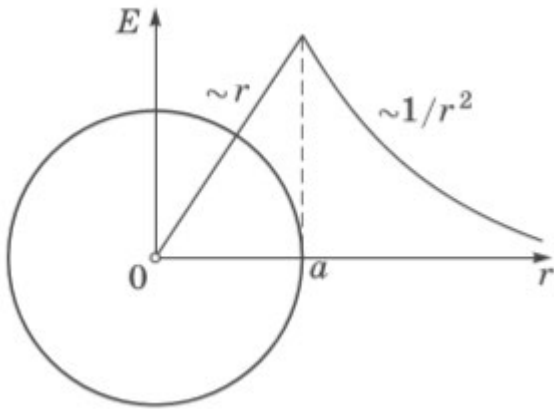
Если  $r < a$ , то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому в этой области всюду  $\vec{E} = 0$ , т. е. внутри равномерно заряженной сферической поверхности электрическое поле отсутствует. Вне этой поверхности поле убывает с расстоянием  $r$  по такому же закону, как у точечного заряда.

### Шара:

Пусть заряд  $q$  равномерно распределен по шару радиусом  $a$ . Поле такой системы, очевидно, также центрально-симметричное, поэтому и здесь для нахождения поля следует в качестве замкнутой поверхности взять концентрическую сферу. Для поля вне шара получится тот же результат, что и в предыдущем примере (сферы). Внутри же шара выражение для поля будет другим. Сфера радиусом  $r < a$  охватывает заряд  $q' = q(r/a)^3$ , ибо в нашем случае заряды относятся как объемы, а последние как кубы радиусов. Поэтому согласно теореме Гаусса

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q(r/a)^3$$

Откуда  $E_r = qr/4\pi\epsilon_0 a^3 \quad (r \leq a)$ , т.е. внутри равномерно заряженного шара напряженность растет линейно с расстоянием  $r$  от его центра. График зависимости  $\vec{E}$  от  $r$  показан на рисунке 10.4.



(Рисунок 10.4)

### 2) Плоская электромагнитная волна:

В плоской волне волновые поверхности (где точки среды колеблются в одинаковой фазе) имеют вид плоскостей. Когда говорят, что плоская волна распространяется вдоль  $X$ , то это надо понимать так, что её волновые поверхности (плоскости) перпендикулярны этой оси.

### Поперечность электромагнитных волн:

Перепишем уравнения Максвелла так, что роторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  представлены были бы в виде определителей:

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} H_x + \frac{\partial}{\partial y} H_y + \frac{\partial}{\partial z} H_z = 0$$



Установим основные свойства электромагнитной волны на примере плоской волны.

Направим ось X перпендикулярно волновым поверхностям, при этом E и H и их проекции на Y и Z не будут зависеть от координат y и z, производные по y и z будут равны 0. Поэтому уравнения примут вид:

$$\begin{cases} 0 = \mu_0 \partial H_x / \partial t \\ \partial E_z / \partial x = \mu_0 \partial H_y / \partial t \\ \partial E_y / \partial x = -\mu_0 \partial H_z / \partial t \\ \partial E_x / \partial x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 = \varepsilon_0 \partial E_x / \partial t \\ -\partial H_z / \partial x = \varepsilon_0 \partial E_y / \partial t \\ \partial H_y / \partial x = \varepsilon_0 \partial E_z / \partial t \\ \partial H_x / \partial x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

т.к.  $\partial E_x / \partial x = 0$  и  $\partial E_x / \partial t = 0$  следует, что  $E_x$  не зависит ни от t ни от x (так же как и  $H_x$ ). Это значит, что отличные от нуля  $E_x$  и  $H_x$  могут быть обусловлены лишь постоянным однородными полями, накладываемыми на поле волны. А для переменного поля плоской волны  $E_x = 0$  и  $H_x = 0$ , т.е. векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярно направлению распространения волны – оси X. Значит, электромагнитная волна является поперечной. Кроме того, оказывается, векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$

в электромагнитной волне взаимно ортогональны.

В нашем случае, когда плоская волна распространяется в вакууме вдоль X, например, в ее положительном направлении

$$E_y = E_y(t - x/v); \quad H_z = H_z(t - x/v); \quad \varphi = (t - x/v)$$

Где  $E_y$  и  $H_z$  – функции, характеризующие форму волны:

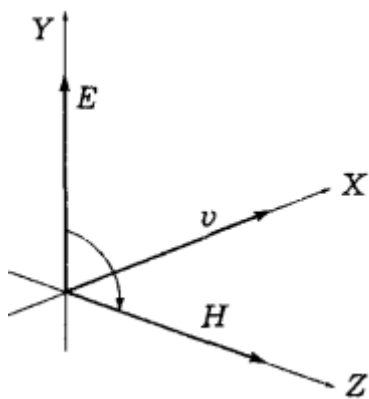
Возьмем производные от  $E_y$  по x и от  $H_z$  по t:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} \left(-\frac{1}{v}\right); \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \cdot 1 \quad \text{– подставив в (1):}$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}; \quad \text{т.к.} \quad v = 1/\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \quad \text{получим}$$

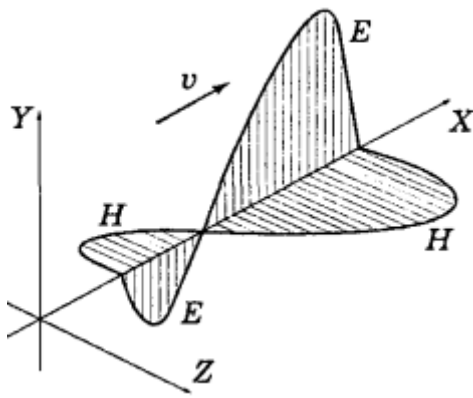
$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E_y = \sqrt{\mu \mu_0} H_z \quad \text{– вектора } \vec{E} \text{ и } \vec{H} \text{ взаимно ортогональны, составляют правовинтовую}$$

систему с направлением распространения и изменяются синфазно – одинаковы в каждый момент по знаку и одновременно обращаются в 0 (рисунок 10.5).



(Рисунок 10.5)

Кроме того  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются при этом синфазно (рисунок 10.6).



(Рисунок 10.6)

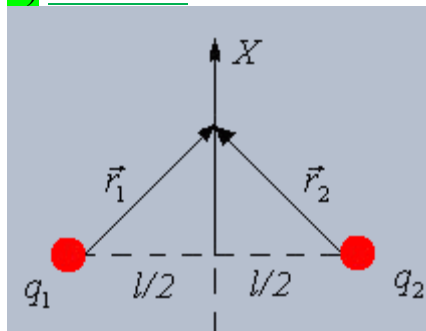
Волновое уравнение для плоской электромагнитной волны:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

Его общее решение:

$E = E_m \cos(\omega t - kx)$ ;  $H = H_m \cos(\omega t - kx)$ , где  $\omega$  – циклическая частота,  $k$  – волновое число,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны.

3) Решение:



(Рисунок 10.7)

Принцип суперпозиции для напряженности:  $\vec{E} = k \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$

В нашем случае:  $\vec{E} = k \frac{q_1}{r_1^3} \vec{r}_1 + k \frac{q_2}{r_2^3} \vec{r}_2$

Из рисунка видно:  $r_1 = r_2 = r = \sqrt{\frac{l^2}{4} + x^2}$ ;  $r_{1x} = r_{2x} = x$

Тогда проекция на ось  $x$ :

$$E_x = k \left( \frac{q_1 x}{\left(\frac{l^2}{4} + x^2\right)^{3/2}} + \frac{q_2 x}{\left(\frac{l^2}{4} + x^2\right)^{3/2}} \right) = \frac{2kqx}{\left(\frac{l^2}{4} + x^2\right)^{3/2}}$$

Из симметрии задачи напряженность направлена вверх по оси ОХ. Напряженность максимальна в той точке, в которой ее первая производная равна 0

$$E'(x) = 2kq \frac{\left(\frac{l^2}{4} + x^2\right)^{3/2} - 3x^2 \sqrt{\frac{l^2}{4} + x^2}}{\left(\frac{l^2}{4} + x^2\right)^3} = 2kq \frac{\left(\frac{l^2}{4} - 2x^2\right)}{\left(\frac{l^2}{4} + x^2\right)^{5/2}} = 0$$

Ответ напряжённость максимальна в точках:  $x = \pm \frac{l\sqrt{2}}{4} = \pm 1,8 \text{ (см)}$

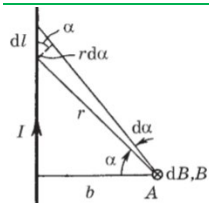


## Билет 11

### 1) Принцип суперпозиции магнитных полей:

Магнитное поле, создаваемое несколькими токами равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых каждым током в отдельности  $\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i$

### Расчёт магнитного поля прямого тока:



(Рисунок 11.1)

Магнитное поле прямого тока, т. е. тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины (рисунок 11.1).

В произвольной точке А векторы  $d\vec{B}$  от всех элементов тока имеют одинаковое направление — за плоскость рисунка. Поэтому сложение векторов  $d\vec{B}$  можно заменить сложением их

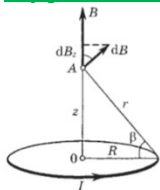
модулей  $dB$ , причем  $dB = \mu_0 I dl \cos \alpha / 4\pi r^2$ ;  $dl \cos \alpha = r d\alpha$ ;  $r = b / \cos \alpha$

$$dB = \mu_0 I \cos \alpha d\alpha / 4\pi b$$

Интегрируя последнее выражение по всем элементам тока, что эквивалентно интегрированию

по  $\alpha$  от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ , находим  $B = \mu_0 2I / 4\pi b$

### Кругового тока:



(Рисунке 11.2)

На рисунке 11.2 показан вектор  $d\vec{B}$  от элемента тока  $Idl$ , находящегося справа. От всех элементов тока будет образовываться конус векторов  $d\vec{B}$ , и легко сообразить, что результирующий вектор  $\vec{B}$  в точке А будет

направлен вверх по оси Z. Это значит, что для нахождения модуля вектора  $\vec{B}$  достаточно сложить проекции векторов  $d\vec{B}$  на ось Z. Каждая такая проекция имеет вид

$dB_z = db \cos \beta = \mu_0 I dl \cos \beta / 4\pi r^2$ , где учтено, что угол между элементом  $d\vec{l}$  и радиусом-

вектором  $r$  равен  $\pi/2$ , поэтому синус равен единице. Интегрируя это выражение по всем  $dl$  (это дает  $2\pi R$ ) и учитывая, что  $\cos \beta = R/r$  и  $r^2 = z^2 + R^2$ , получаем

$$B = \mu_0 2\pi R^2 I / 4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}$$

Отсюда следует, что в центре витка с током ( $z = 0$ ) и на расстоянии  $z \gg R$  модуль вектора  $\vec{B}$  равен соответственно

$$B_{z=0} = \mu_0 2\pi I / 4\pi R \quad \text{и} \quad B_{z \gg R} \approx \mu_0 2\pi R^2 I / 4\pi z^3$$

### 2) Интерферометр:

Измерительный прибор, в котором используется интерференция волн. Оптические интерферометры применяются для измерения длин волн спектральных линий, показателей

преломления прозрачных сред, абсолютных и относительных длин, угловых размеров звёзд и пр.

### Применение интерференции:

Явление интерференции используется для получения высокоотражающих покрытий. В этом случае используют тонкую пленку из материала, абсолютный показатель преломления которого больше абсолютного показателя преломления стекла. В этом случае отражение от передней грани происходит с потерей полуволны, так как  $n_{\text{п}} > n_{\text{возд}}$ , а отраженные от задней границы – без потери полуволны. В результате  $\Delta = \lambda$  и отраженные волны усилят друг друга.

### 3) Решение:

Найдём с помощью теоремы Гаусса поле внутри и вне шара:

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r (r \leq R) ; \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (r \geq R)$$

Теперь вычислим собственную электрическую энергию шара:

$$W = W_1 + W_2 = \int_0^R \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\epsilon_0 E_2^2}{2} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\epsilon_0 \pi R} \left( \frac{1}{5} + 1 \right)$$

Отсюда следует, что  $W = \frac{3Q^2}{4\epsilon_0 \pi R}$

Ответ:  $W = \frac{3Q^2}{4\epsilon_0 \pi R}$

## Билет 12

### 1) Магнитное поле в магнетиках:

Если в магнитное поле, образованное токами в проводах, ввести то или иное вещество, поле изменится. Это объясняется тем, что всякое вещество является магнетиком, т.е. способно под действием магнитного поля намагничиваться-приобретать магнитный момент.

Намагниченное вещество создаёт своё магнитное поле  $\vec{B}'$ , которое вместе с первичным полем  $\vec{B}_0$ , обусловленным токами проводимости образует результирующее поле  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ .

Теорема Гаусса для результирующего поля при наличии магнетика:  $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ .

Это означает, что линии вектора  $\vec{B}$  и при наличии вещества остаются всюду непрерывными.

### Вектор намагниченности:

Степень намагничивания магнетика характеризуют магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют намагниченностью и обозначают  $\vec{J}$ . По определению  $\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum p_m$

### Связь вектора намагниченности с молекулярными токами:

Где  $\Delta V$  – физически бесконечно малый объем в окрестности данной точки,  $\vec{p}_m$  — магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование проводится по всем молекулам в объеме  $\Delta V$ .

Намагничивание вещества обусловлено преимущественной ориентацией или индуцированием магнитных моментов отдельных молекул в одном направлении. Это же можно сказать и об элементарных круговых токах, связанных с каждой молекулой, их называют молекулярными токами.

### Теорема о циркуляции вектора намагниченности в интегральной форме:

Для стационарного случая циркуляция намагниченности  $\vec{J}$  по произвольному контуру  $\Gamma$  равна алгебраической сумме токов намагничивания  $I'$ , охватываемых контуром  $\Gamma$ :  $\oint \vec{J} d\vec{l} = I'$

Где  $I' = \int \vec{J} d\vec{S}$ , причём интегрирование проводится по произвольной поверхности, натянутой на контур  $\Gamma$ .

### Дифференциальной форме:

$\nabla \times \vec{J} = \vec{j}'$ , т.е. ротор намагниченности  $\vec{J}$  равен плотности тока намагничивания в той же точке пространства.

### 2) Шкала электромагнитных излучений:

Гамма излучение  $\lambda < 1,2 \cdot 10^{-3}$  нм

Рентгеновское  $1,2 \cdot 10^{-3}$  нм  $< \lambda < 12$  нм

Ультрафиолетовое  $12$  нм  $< \lambda < 380$  нм

Видимый спектр  $380$  нм  $< \lambda < 760$  нм

Инфракрасное  $760$  нм  $< \lambda < 10^6$  нм

Радиоволны  $\lambda > 10^6$  нм

### Оптическое излучение:

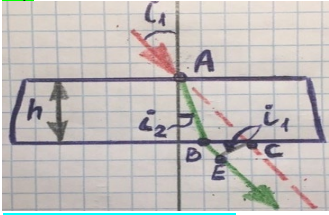
Оптическое излучение, свет в широком смысле слова, электромагнитные волны, длины которых заключены в диапазоне с условными границами от 1 нм до 1 мм. К оптическому излучению помимо воспринимаемого человеческим глазом видимого света относятся инфракрасное и ультрафиолетовое излучения.

### Интенсивность:

Световая волна характеризуется интенсивностью  $I$  – это модуль среднего по времени значение плотности потока энергии  $I = \langle \Pi \rangle \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$

$$I \sim E_m H_m; H_m \sim \sqrt{\epsilon} E_m = n E_m \Rightarrow I \sim n E_m^2 = n A^2$$

### 3) Решение:



(Рисунок 12.1)

1) Оптическая длина пути:  $L = nl$ , где  $l$  – геометрическая длина пути;  $n$  – показатель преломления среды.

При нормальном падении волны оптическая длина пути волны в пластине  $L_2 = nl = nh$ , где  $h$  – толщина пластины; В воздухе  $L_1 = h (n \approx 1)$ . Следовательно, изменение оптической длины

$$\Delta = L_2 - L_1 = h(n - 1) = 5 \cdot 10^{-4} (\text{м}) = 0,5 (\text{мм})$$

2) При падении под углом неравным нулю изменение оптической длины пути

$$\Delta = L_2 - L_1 = |AB|n + |BE| - |AC|; |AB| = h / \cos i_2; |BE| = |AB| \sin(i_1 - i_2) \operatorname{tg} i_1; |AC| = h / \cos i_1$$

По закону преломления света  $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n$ , тогда  $i_2 = \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right)$

$$\Delta = \frac{h}{\cos\left(\arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right)\right)} \cdot \left(n + \sin(i_1 - \arcsin(\sin i_1 / n)) \operatorname{tg} i_1\right) - h / \cos i_1$$

$$\Delta = 10^{-3} / \cos\left(\arcsin\left(\sin 30^\circ / 1,5\right)\right) \cdot \left(n + \sin(30^\circ - \arcsin(\sin 30^\circ / 1,5)) \operatorname{tg} 30^\circ\right) - 10^{-3} / \cos 30^\circ$$

$$\Delta = 0,548 \cdot 10^{-3} (\text{м})$$

Ответ: 1)  $\Delta = 0,5 (\text{мм})$  2)  $\Delta = 0,548 \cdot 10^{-3} (\text{м})$

### Билет 13

### Поляризация диэлектриков:

Диэлектриками называют вещества, практически не проводящие электрического тока. Это значит, что в диэлектриках нет зарядов, способных перемещаться на значительные расстояния, создавая ток.

Под действием внешнего электрического поля происходит поляризация диэлектрика. Это явление заключается в следующем. Если диэлектрик состоит из неполярных молекул, то в пределах каждой молекулы происходит смещение зарядов — положительных по полю, отрицательных против поля. Если же диэлектрик состоит из полярных молекул, то при отсутствии внешнего поля их дипольные моменты ориентированы совершенно хаотически (из-за теплового движения). Под действием же внешнего поля дипольные моменты ориентируются преимущественно в направлении внешнего поля. Наконец, в диэлектрических кристаллах типа NaCl при включении внешнего поля все положительные ионы смещаются по полю, отрицательные — против поля\*. Таким образом, механизм поляризации связан с конкретным строением диэлектрика.

### Электростатическое поле в диэлектрике:

Полем  $\vec{E}$  в диэлектрике мы будем называть величину, являющуюся суперпозицией поля  $\vec{E}_0$  сторонних зарядов и поля  $\vec{E}'$  связанных зарядов: 
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

где  $\vec{E}_0$  и  $\vec{E}'$  представляют собой макрополя, т. е. усредненные по физически бесконечно малому объему микрополя соответственно сторонних и связанных зарядов. Ясно, что определенное таким образом поле  $E$  в диэлектрике является также макрополем.

### Поляризованность. Вектор поляризованности:

Для количественного описания поляризации диэлектрика естественно взять дипольный момент единицы объема. Если внешнее поле или диэлектрик (или то и другое) неоднородны, степень поляризации оказывается различной в разных точках диэлектрика. Чтобы охарактеризовать поляризацию в данной точке, мысленно выделяют физически бесконечно малый объем  $\Delta V$ , содержащий эту точку, затем находят векторную сумму дипольных моментов молекул в этом объеме и составляют отношение

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_i$$

Определенный таким образом вектор  $\vec{P}$  называют поляризованностью диэлектрика. Этот вектор равен дипольному моменту единицы объема вещества.

### 2) Дисперсия света:

Дисперсия света – явления, обусловленные зависимостью показателя преломления вещества от длины волны (или частоты):  $n = f(\lambda)$ ,  $\lambda$  – длина волны света в вакууме.

### Нормальная и аномальная дисперсия:

Производную  $dn/d\lambda$  – называют дисперсией вещества. Интервал длин волн, в которых

$dn/d\lambda < 0$  (прозрачные бесцветные вещества) соответствует нормальной дисперсии

(рисунок 13.1.1),  $dn/d\lambda > 0$  – аномальной (рисунок 13.1.2). На рисунке 2 показан график зависимости  $n(\lambda)$  с участками нормальной и аномальной дисперсии. Заметим, что область аномальной дисперсии совпадает с полой поглощения  $\chi(\lambda)$

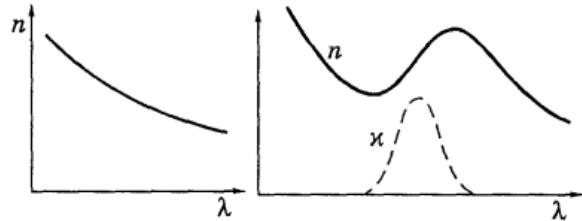


Рис. 1

Рис. 2

### Рисунок (13.1)

### Электронная теория дисперсии

$n = \sqrt{\mu\epsilon}$  – формула, связывающая оптические, магнитные и электрические свойства, для видимого спектра всех волн  $\mu=1$ ;

$\epsilon = 1 + \chi$ ;  $\chi = \frac{p}{\epsilon_0 E}$ ;  $n^2 = 1 + \frac{p}{\epsilon_0 E}$ ;  $p = n_0 e x$ ,  $n_0$  – концентрация электронов.  $\vec{F}_{\text{вын}} = eE =$

$eE_m \cos \omega t$  – внешняя вынуждающая сила.

Все силы:  $m\ddot{a} = \vec{F} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{вын}} + \vec{F}_{\text{тр}}; \vec{F}_{\text{упр}}$  – сила упругости, возникающая при смещении частицы от положения устойчивого равновесия,  $\vec{F}_{\text{тр}}$  – сила радиационного трения.

$m\ddot{x} + kx + \beta\dot{x} = eE_m \cos \omega t \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma\dot{x} = \frac{eE_m}{m} \cos \omega t;$

$k/m = \omega_0^2$ ;  $\beta = 2\gamma$ . Затухание волн при прохождении через прозрачный диэлектрик мало

$\gamma \rightarrow 0 \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_m}{m} \cos \omega t$ ; решением данного уравнения будет:  $x = A \cos \omega t$ ;

$A = \frac{eE_m}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$  подставив в начальную формулу:  $n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}$

### 3) Решение:

Найдём с помощью теоремы Гаусса поле внутри и вне шара:

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon R^3} r (r \leq R) ; E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} (r \geq R)$$

Теперь вычислим собственную электрическую энергию шара:

$$W = W_1 + W_2 = \int_0^R \frac{\epsilon E_1^2}{2} 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\epsilon E_2^2}{2} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\epsilon\pi R} \left( \frac{1}{5} + 1 \right)$$

Отсюда следует, что  $W = 3q^2 / 4\epsilon\pi R$

Ответ:  $W = 3q^2 / 4\epsilon\pi R$

Билет 14

1) Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях:

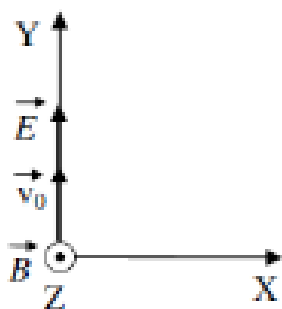
Опыт показывает, что сила  $\vec{F}$ , действующая на точечный заряд  $q$ , зависит в общем случае не только от положения этого заряда, но и от его скорости  $\vec{V}$ . Соответственно этому силу  $\vec{F}$  разделяют на две составляющие – электрическую  $\vec{F}_э$  (она не зависит от движения заряда) и магнитную  $\vec{F}_м$  (она зависит от скорости заряда). В любой точке пространства направление и

модуль магнитной силы зависит от скорости  $\vec{V}$  заряда, причем эта сила всегда перпендикулярна вектору  $\vec{V}$ ; кроме того, в любом месте магнитная сила перпендикулярна определенному в данном месте направлению и, наконец, ее модуль пропорционален той составляющей скорости, которая перпендикулярна этому выделенному направлению. Все эти свойства магнитной силы можно описать, если ввести понятие магнитного поля. Характеризуя это поле вектором  $\vec{B}$ , определяющим выделенное в каждой точке пространства направление, запишем выражение для магнитной силы в виде  $\vec{F}_m = q[\vec{V} \vec{B}]$

Тогда полная электромагнитная сила, действующая на заряд  $q$ :  $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{V} \vec{B}]$ . Ее называют силой Лоренца.

Направление вектора силы, действующей на положительный заряд, определяется правилом левой руки:

Вектор силы перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{V}$  и  $\vec{B}$ , при этом, если вектор индукции входит в ладонь левой руки, пальцы направлены вдоль вектора скорости, то отогнутый большой палец укажет направление силы, действующей на положительный заряд (для отрицательного заряда – правая рука).



(Рисунок 14.1)

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} ma_x = qv_y B \\ ma_y = qE - qv_x B \\ ma_z = 0 \end{cases}$$

### Ускорение заряженных частиц. Циклотрон:

Ускорители – установки, предназначенные для ускорения заряженных частиц до высоких энергий (выше 1МэВ). В основе работы ускорителя заложено взаимодействие заряженных частиц с электрическим и магнитным полями. Электрическое поле способно напрямую совершать работу над частицей, то есть увеличивать её энергию. Магнитное же поле, создавая силу Лоренца, лишь отклоняет частицу, не изменяя её энергии, и задаёт орбиту, по которой движутся частицы.

Ускорители можно разделить на линейные и циклические.

В линейных ускорителях частицы движутся практически по прямой траектории, разгоняясь при движении специальными электромагнитными устройствами.

В циклических ускорителях частицы движутся по практически замкнутой траектории под действием магнитной силы Лоренца и разгоняются на определённых участках.

Принцип действия циклотрона основан на независимости периода оборота заряженной частицы в магнитном поле от её скорости

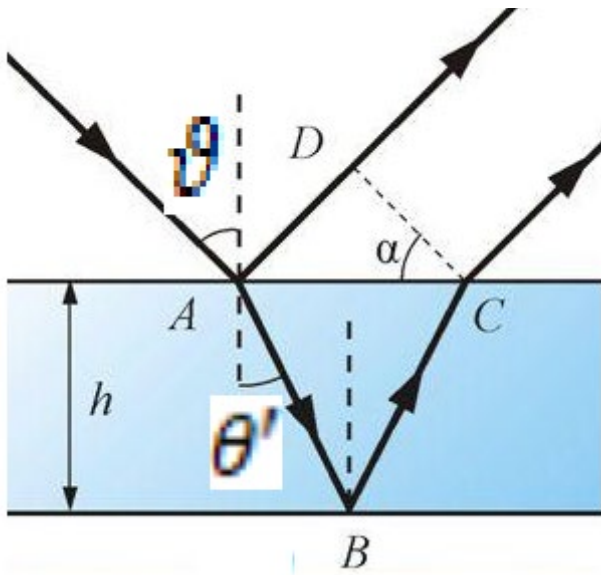
$$T = 2\pi \frac{m}{qB}$$

В фазотроне индукция магнитного поля уменьшается к краям, следовательно, при увеличении радиуса траектории начинает увеличиваться оборота период частиц. Поэтому, по мере разгона частиц, уменьшать частоту колебаний напряжения между дуантами.

В синхротроне траектория частиц не меняется – это обеспечивается изменяющимся во времени магнитным полем.

### 2) Интерференция света в тонких плёнках. Интерференционные полосы равной толщины и равного наклона:





(Рисунок 14.2)

При падении на пластинку плоской волны образуются две отраженные волны, разность хода которых определяется формулой  $\Delta = n(AB + BC) - AD$ .  $AB = BC = \frac{2b}{\cos\theta'}$  и  $AD = 2b \tan\theta' \sin\theta$ . В результате получим  $\Delta = n2b \cos\theta'$ .

Поскольку при отражении от оптически более плотной среды происходит скачок фазы на  $\pi$  у отраженной волны (потеря полуволны):  $\Delta = n2b \cos\theta' \pm \frac{\lambda}{2}$ .

$\sin\theta = n \sin\theta' \Rightarrow \Delta = n2b \sqrt{n^2 - \sin^2\theta} \pm \frac{\lambda}{2}$ . Эти волны могут интерферировать, если оптическая разность хода не превышает длину когерентности (расстояние, при прохождении которого две или несколько волн утрачивают когерентность). Мах:

$$m\lambda = n2b \sqrt{n^2 - \sin^2\theta} \pm \frac{\lambda}{2}.$$

**Кольца Ньютона** – это кольцевые полосы равной толщины, наблюдаемые при отражении света от поверхностей зазора между стеклянной пластинкой и соприкасающейся с ней выпуклой линзой. При нормальном падении света кольца в отраженном свете имеют вид концентрических окружностей с центром в точке соприкосновения линзы с пластинкой. Радиусы темных колец:  $b$  – расстояние между

линзой и пластинкой  $\Delta = 2b + \frac{\lambda}{2} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2b = m\lambda$ ; по теореме

Пифагора:  $r^2 = R^2 - (R - b)^2$ , учитывая, что  $b \ll R \Rightarrow r^2 = 2bR \Rightarrow r = \sqrt{2bR}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  Для светлых:  $r = \sqrt{(m - \frac{1}{2})\lambda R}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$

**3) Решение:**

$$mV^2/r = F_3 = eE; E = \frac{kq}{r^2} = \frac{ke}{r^2} \rightarrow V = \sqrt{\frac{ke^2}{m_e r}}$$

$$E_{\text{ион}} = h\nu(\text{не скорость}) = \frac{h}{2\pi r} \cdot \sqrt{\frac{ke^2}{m_e r}}$$

$$r = \left( \frac{h}{2\pi E_{\text{ион}}} \cdot \sqrt{\frac{ke^2}{m_e}} \right)^{3/2}$$

$h$  и  $k$  – постоянные Больцмана и Планка



## Билет 15

### 1) Магнетики

В магнитном отношении все вещества можно разделить на слабомагнитные (парамагнетики и диамагнетики) и сильномагнитные (ферромагнетики). Пара- и диамагнетики при отсутствии магнитного поля, как мы знаем, не намагничены и характеризуются однозначной зависимостью  $J = \chi H$  намагниченности  $J$  от  $H$ . Ферромагнетиками называют вещества (твердые), которые могут обладать спонтанной намагниченностью, т. е. намагничены уже при отсутствии внешнего магнитного поля. Типичные представители ферромагнетиков — это железо, кобальт и многие их сплавы.

### 2) Уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (1) \quad \oint \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (2)$$
$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S} \quad (3) \quad \oint \vec{D} d\vec{S} = \int \rho dV \quad (4)$$

,  $\rho$  – объемная плотность сторонних зарядов,  $\vec{j}$

– плотность тока проводимости.

Из уравнений Максвелла для циркуляции векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  следует, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как независимые: изменение во времени одного из этих полей приводит к появлению другого. Поэтому имеет смысл лишь совокупность этих полей, описывающая единое электромагнитное поле.

Если же поля стационарны ( $\vec{E} = \text{const}$  и  $\vec{B} = \text{const}$ ), то уравнения Максвелла распадаются на две группы независимых уравнений:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 ; \quad \oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$
$$\oint \vec{H} d\vec{l} = 0 ; \quad \oint \vec{D} d\vec{S} = 0$$

В этом случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга.

### В дифференциальной форме:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} ; \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Эти уравнения говорят о том, что электрическое поле может возникнуть по двум причинам. Во-первых, его источником являются электрические заряды, как сторонние, так и связанные. Во-вторых, поле  $E$  образуется всегда, когда меняется во времени магнитное поле.

Эти же уравнения говорят о том, что магнитное поле  $\vec{B}$  может возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями, либо тем и другим одновременно.

Значение уравнений Максвелла в дифференциальной форме не только в том, что они выражают основные законы электромагнитного поля, но и в том, что путем их решения могут быть найдены сами поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

### Физический смысл:

(1) Циркуляция вектора  $\vec{E}$  по любому замкнутому контуру равна со знаком минус производной по времени от магнитного потока через любую поверхность, ограниченную данным контуром. При этом под понимается не только вихревое электрическое поле, но и электростатическое (циркуляция последнего равна нулю).

(2) Поток вектора  $\vec{B}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность всегда равен нулю.

(3) Циркуляция вектора  $\vec{H}$  по любому замкнутому контуру равна полному току (току проводимости и току смещения) через произвольную поверхность, ограниченную данным контуром.

(4) Поток вектора  $\vec{D}$  сквозь любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Свойства:

1) Уравнения Максвелла линейны.

Они содержат только первые производные полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  по времени и пространственным координатам и первые степени плотности электрических зарядов  $q$  и токов  $\vec{j}$ . Свойство линейности уравнений Максвелла непосредственно связано с принципом суперпозиции

2) Уравнения Максвелла содержат уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения электрического заряда. Возьмем бесконечно малый контур  $\Gamma$ , натянем на него произвольную конечную поверхность  $S$  (рисунок 1.1), а затем стянем этот контур в точку, оставляя поверхность  $S$  конечной. В пределе циркуляция  $\oint \vec{H} d\vec{l}$  обращается в нуль,

поверхность  $S$  становится замкнутой и (3) перейдет в  $\oint (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S} = 0$

И тогда:  $\oint \vec{j} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{D} d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}$  – это уравнение непрерывности, которое утверждает, что ток, вытекающий из объема  $V$  через замкнутую поверхность  $S$ , равен убыли заряда в единицу времени внутри этого объема  $V$ .



Рисунок 1.1)

3) Уравнения Максвелла выполняются во всех инерциальных системах отсчета. Они являются релятивистски инвариантными. Это есть следствие принципа относительности, согласно которому все инерциальные системы отсчета физически эквивалентны друг другу.

4) О симметрии уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это обусловлено опять же тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных. Вместе с тем в нейтральной однородной непроводящей среде, где  $\rho = 0$  и  $\vec{j} = 0$ , уравнения Максвелла приобретают симметричный вид, т.е.  $\vec{E}$  так связано с  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , как  $\vec{B}$  с  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{aligned}$$

Симметрия уравнений относительно электрического и магнитного полей не распространяется лишь на знак перед производными  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

5) О электромагнитных волнах. Из уравнений Максвелла следует важный вывод о существовании принципиально нового физического явления: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно — без электрических зарядов и токов. При этом изменение его состояния обязательно имеет волновой характер. Поля такого рода называют электромагнитными волнами. В вакууме они всегда распространяются со скоростью, равной скорости света  $c$ .

Материальные уравнения

Материальные уравнения – равнения описывающие характеристики среды:

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \overline{E}; \quad \overline{B} = \mu_0 \mu \overline{H}; \quad \overline{j} = \sigma (\overline{E} + \overline{E}'),$$

Где  $\varepsilon, \mu, \sigma$  – известные нам постоянные, характеризующие электрические и магнитные свойства среды (диэлектрическая и магнитная проницаемости и электропроводимость),  $\overline{E}'$  – напряженность поля сторонних сил, обусловленная химическими или тепловыми процессами.

3) Решение:

$$R = \lambda / \Delta \lambda = mN; \quad d = l / N; \quad N = l / d$$

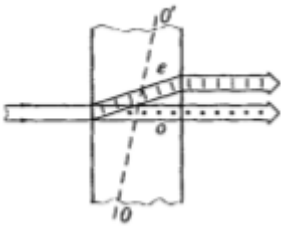
$$l = \lambda d / m \Delta \lambda = 10^{-2} \text{ м}$$

## Билет 16

1) Помещаем в однородное магнитное поле (металлический) проводник выполненный в виде прямоугольного параллелепипеда так, чтобы силовые линии магнитного поля были направлены перпендикулярно одной из пар граней. Затем через вторую пару граней пропускаем электрический ток. Тогда между третьей парой граней появится напряжение. Это явление называется эффектом Холла или гальваномагнитным явлением. Напряжение Холла между гранями  $U_H = R_H b j B$ , где  $b$  – расстояние между гранями  $j$  – плотность тока. На электроны, движущиеся по параллелепипеду действует  $F_L$ , которая отклоняет их на одну из граней. Так образуется разность потенциалов. Когда перераспределение зарядов заканчивается, то  $F_a = F_L$ . Отсюда  $qE = q[vB] \Rightarrow E = [vB] = jB/q \Rightarrow$

$$U = Eb = jBb/q$$

2)



явление двойного лучепреломления заключается в том, что падающий на кристалл пучок света разделяется внутри кристалла на два пучка, распространяющиеся, вообще говоря, в разных направлениях и с разными скоростями. Существуют кристаллы одноосные и двуосные. У одноосных кристаллов один из преломленных пучков подчиняется обычному закону

преломления ( $n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2$ ). Его называют обыкновенным и обозначают буквой  $o$  или индексом  $o$ . Другой пучок необыкновенный ( $e$ ), он не подчиняется обычному закону преломления, и даже при нормальном падении светового пучка на поверхность кристалла необыкновенный пучок может отклоняться от нормали. И как правило, необыкновенный луч не лежит в плоскости падения.

У одноосных кристаллов имеется направление – оптическая ось  $OO'$ , вдоль которого обыкновенная и необыкновенная волны распространяются, не разделяясь пространственно и с одинаковой скоростью. Оптическая ось  $OO'$  кристалла не является какой-то особой прямой линией. Она характеризует лишь избранное направление в кристалле и может быть проведена через произвольную точку кристалла.

Любую плоскость, проходящую через оптическую ось, называют главным сечением или главной плоскостью кристалла. Обыкновенным и необыкновенная волны линейно поляризованы. Колебания вектора  $E$  в обыкновенной волне совершаются в направлении, перпендикулярном главному сечению кристалла для обыкновенного луча. Колебания же вектора  $E$  в необыкновенной волне – в главном сечении кристалла для необыкновенного луча. Поляризации обеих волн взаимно ортогональны, это наблюдается практически при любой ориентации оптической оси, поскольку угол между обыкновенным и необыкновенным лучами достаточно мал.

$$3) \quad P = \kappa \varepsilon_0 E; \quad \varepsilon_0 = 1 + \kappa; \quad E = \frac{E_0}{\varepsilon_0} = \frac{E_0}{1 + \kappa}; \quad E = \frac{q}{4\pi R^3} \vec{r}$$

$$P = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0}{\varepsilon} E = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 q}{4\varepsilon\varepsilon_0\pi R^3} \vec{r} = \frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon R^3} \vec{r}$$

$$q' = \int P dS = \int \frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon R^3} r dS = P \oint dS = -q \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}$$

## Билет 17

1) При протекании тока на поверхности проводника выступает избыточный заряд. Внутри проводника он всюду равен 0. Значит снаружи имеется тангенциальная и нормальная  $E_n = \sigma/\varepsilon$  составляющие вектора  $E$ . Сам вектор направлен под некоторым углом к нормали. Движущиеся заряды создают такое же кулоновское поле, как и неподвижные заряды той же конфигурации. Стало быть, электрическое поле стационарных токов – потенциальное. Поле  $E$  у стационарных токов существует и внутри проводника с током.

Силы, действующие на заряженную частицу и отличные от кулоновских, называются сторонними. При перемещении заряда эти силы тоже совершают работу  $A_{\text{стор}}$ . Отношение работы сторонних сил по перемещению электрического заряда между двумя точками поля к величине перенесенного заряда называется электродвижущей силой (ЭДС):

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{стор}}}{q} \quad [\text{В}]; \quad \varepsilon_{12} = \int_{\Gamma} (\vec{E}_{\text{стор}}, d\vec{l})$$

$$U_{\text{полное}} = \left| \frac{A}{q} \right| = \left| \frac{A_{\text{кул}} + A_{\text{стор}}}{q} \right| = |\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}|$$

$U = |\varphi_1 - \varphi_2|$  – напряжение между точками поля.

Сторонние силы можно характеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по замкнутой цепи или ее участку зарядами.

Величина, равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда в цепи,

называется электродвижущей силой (ЭДС), действующей в цепи:  $E = \frac{A}{q} = \left[ \frac{Дж}{Кл} \right] = [\text{В}]$

Стороннюю силу, действующую на заряд, можно представить в виде  $\vec{F}_{\text{ст}} = \vec{E}_{\text{ст}} q$ , где

$\vec{E}_{\text{ст}}$  – напряженность поля сторонних сил

Работа сторонних сил на участке 1-2  $A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}$

Тогда  $E_{12} = \frac{A_{12}}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}$ . Для замкнутой цепи:  $E = \sum E_i = \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}$

Циркуляция вектора напряженности сторонних сил равна ЭДС, действующей в замкнутой цепи (алгебраической сумме ЭДС)

2) Рассмотрим положение первого минимума для дифракции на щели  $\sin \vartheta = \pm \frac{\lambda}{b}$ . В случае  $\frac{\lambda}{b} \ll 1$  это выражение

можно записать в виде  $\vartheta \approx \frac{\lambda}{b}$ .

Но при  $\frac{\lambda}{b} \ll 1$  относительные интенсивности всех максимумов, кроме центрального, стремятся к нулю  $I/I_0 \rightarrow 0$ .

Поэтому на экране будет видна резкая граница тени от краёв щели. Подобную картину можно получить применением законов геометрической оптики. Однако в данном случае будет наблюдаться небольшое различие относительных размеров изображения щели на экране. При построении методами геометрической оптики размеры щели и изображения на (параллельно расположенном) экране будут одинаковыми независимо от расстояния  $l$  между экраном и перегородкой со щелью. Если строить изображение щели методом волновой оптики, то граница тени

соответствует первому минимуму, положение которого определяется углом  $\vartheta \approx \frac{\lambda}{b}$  .. Поэтому относительный размер изображения равен

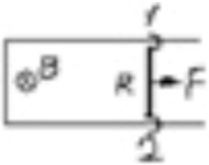
$$\frac{b+2 \cdot l \cdot \tan \vartheta}{b} \approx \frac{b+2 \cdot l \cdot \vartheta}{b} = 1 + 2 \frac{l \cdot \frac{\lambda}{b}}{b} = 1 + 2 \frac{l \lambda}{b^2}$$

Следовательно, если величина  $\frac{l\lambda}{b^2} \ll 1$ , то результаты построения методами волновой и геометрической оптики практически совпадают. В обратном случае надо пользоваться методами волновой оптики. Но тогда следует различать ситуации, в которых либо  $\frac{l\lambda}{b^2} \sim 1$ , либо  $\frac{l\lambda}{b^2} \gg 1$ . Но дифракционные явления становятся заметными, когда размер щели (отверстия) или преграды соизмерим с длиной волны света  $b \sim \lambda$ . Тогда условие  $\frac{l\lambda}{b^2} \gg 1$  примет вид  $\frac{l}{b} \gg 1$ . А это означает, что расстояние от перегородки до экрана много больше размера отверстия (преграды). Следовательно, лучи, падающие на экран можно считать параллельными друг другу – это дифракция Фраунгофера. Применяя формулу для радиуса зон Френеля при дифракции Фраунгофера

$r_m = \sqrt{ml\lambda}$ , и учитывая, что  $b \sim r_m$ , найдём число зон Френеля, которые видно из точки наблюдения. В этом случае  $m = \frac{b^2}{l\lambda} \ll 1$ , т.е. видно только малую часть первой зоны. Оставшийся случай  $\frac{l\lambda}{b^2} \sim 1$  соответствует дифракции Френеля.

Это можно пояснить, используя формулу для радиусов зон Френеля  $r_m = \sqrt{m \frac{al\lambda}{(a+l)}}$ . Принимая оценку величины отверстия  $b \sim r_m$ , получаем  $b^2 = m \frac{al\lambda}{(a+l)}$ , откуда из  $\frac{l\lambda}{b^2} \sim 1$  следует  $\frac{l\lambda}{m \frac{al\lambda}{(a+l)}} = \frac{(a+l)}{ma} \sim 1$ . Это выражение означает, что расстояния от источника света соизмеримо с расстоянием от перегородки до экрана. Поэтому волна является сферической и наблюдается дифракция Френеля, при которой из точки наблюдения видно небольшое число зон  $m$ .

3)



Помимо приложенной силы на перемычку действует сила Ампера:  $F_A = IBl$

Уравнение Кирхгофа для цепи:  $\varepsilon_\Phi = IR$ ;  $-\frac{d\Phi}{dt} = IR$ ;  $\left(Bl \frac{d}{dt} x\right) = -IR$ ;  $I = -\left(\frac{Bl}{R} \frac{d}{dt} x\right)$ .

Второй закон Ньютона, записанный для перемычки:  $m \frac{d\vartheta}{dt} = F + F_A$ ;  $m \frac{d\vartheta}{dt} = F - IBl$ ;  $m \frac{d\vartheta}{dt} = F - \frac{Bl}{R} \frac{d}{dt} xBl$ ;

$$m \frac{d\vartheta}{dt} = F - \frac{Bl}{R} \vartheta Bl; \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{F}{m} - \frac{B^2 l^2}{mR} \vartheta; \quad \frac{d\vartheta}{\frac{F}{m} - \frac{B^2 l^2}{mR} \vartheta} = dt; \quad \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\frac{F}{m} - \frac{B^2 l^2}{mR} \vartheta} = \int_0^t dt;$$

$$\vartheta(t) = \frac{FR}{B^2 l^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{B^2 l^2}{mR} t\right)\right).$$

## Билет 18

1) Под действием внешнего электрического поля происходит поляризация диэлектрика. Если диэлектрик состоит из неполярных молекул, то в пределах каждой молекулы происходит смещение зарядов -положительных по полю, отрицательных против поля. Если же диэлектрик состоит из полярных молекул, то при отсутствии внешнего поля и дипольный момент ориентирован совершенно хаотически (из-за теплового движения). Под действием же внешнего поля дипольные моменты ориентируются преимущественно в направлении внешнего поля. В диэлектрических кристаллах типа NaCl при включении внешнего поля все положительные ионы смещаются по полю, отрицательные — против поля.

Поляризованность – векторная сумма дипольных моментов молекул в бесконечно малом объеме:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{p}_i}{V}$$

Рассмотрим в диэлектрике некоторый физически малый объем величиной  $V$ . Введем вектор поляризованности вещества  $\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{p}_i}{V}$ . (Кл/м<sup>2</sup>). В однородном изотропном диэлектрике этот вектор направлен параллельно вектору напряженности, поэтому можно записать  $\bar{P} = \epsilon \epsilon_0 \bar{E}$ . Безразмерный параметр  $\epsilon$  называется коэффициентом поляризуемости или диэлектрической восприимчивости вещества.

Рассмотрим тонкий косой цилиндр, ось которого параллельна вектору напряженности внешнего поля.

$$|\bar{P}| = \left| \frac{\sum_{i=1}^N \bar{p}_i}{V} \right| = \frac{Nq'L}{NSL\cos\alpha} = \frac{\sigma'}{\cos\alpha}$$

где  $q'$  - величина связанного заряда. Обратите внимание: величина вектора не зависит от количества суммируемых диполей – она определяется только поверхностной плотностью связанного заряда.

Отсюда получаем для нормальной составляющей вектора  $P_n = |\bar{P}| \cos\alpha = \sigma'$ . Нормальная составляющая вектора поляризованности равна поверхностной плотности связанного заряда.

Теперь найдём поток вектора поляризованности через некоторую малую поверхность  $S$ .

$$\Phi_P = \iint_S (\bar{P}, d\vec{s}) = \iint_S |\bar{P}| \cos\alpha dS \approx |\bar{P}| \cos\alpha S = \sigma' S = q'$$

Таким образом, поток вектора поляризованности через некоторую малую площадку равен величине связанного заряда, создающего этот вектор.

Рассмотрим поток этого вектора через некоторую замкнутую ориентированную поверхность внутри диэлектрика

$$\oint_S (\bar{P}, d\vec{s}) = \oint_S |\bar{P}| \cos\alpha dS = \oint_S \sigma' dS$$

Предположим, что вектор поляризованности направлен наружу, т.е. внутри поверхности суммарный связанный заряд отрицательный. Тогда, учитывая, что поток вектора положительный, а заряд отрицательный:

$$\oint_S (\bar{P}, d\vec{s}) = \oint_S \sigma' dS = -q'$$

Это теорема Гаусса для вектора поляризованности в интегральном виде. Соответственно, в дифференциальном виде:  $\text{div}\bar{P} = -\rho'$ .

Запишем теорему Гаусса для электростатического поля внутри диэлектрика  $\text{div}\bar{E} = \frac{\rho_{\text{стор}} + \rho'}{\epsilon_0}$ . (здесь указано, что электрическое поле создается сторонними зарядами с объемной плотностью  $\rho$  и связанными зарядами с объемной плотностью  $\rho'$ ).

$$\text{div}(\epsilon_0 \bar{E}) = \rho_{\text{стор}} + \rho' = \rho_{\text{стор}} - \text{div}\bar{P}$$

$$\text{div}(\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) = \rho_{\text{стор}}$$

2)

$$\omega = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{BH}{2}$$

3)

Внутри цилиндрического провода имеется внешний ток плотности  $\frac{I}{\pi R^2}$ . Это дает магнитное поле  $H_\Phi$  с

$$H_\Phi 2\pi r = I \frac{r^2}{R^2} \text{ или } H_\Phi = \frac{Ir}{2\pi R^2}$$

Из этого  $B_\Phi = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$  и  $J_\Phi = \frac{\mu-1}{2\pi} \frac{Ir}{R^2} = \frac{\chi I}{2\pi R} dl = \chi I$  = Намагниченность.

Следовательно, объемный молекулярный ток,



$$\oint_{r=R} \vec{J}_\Phi \cdot d\vec{r} = \int \frac{\chi I}{2\pi R} dl = \chi I$$

Поверхностный ток получается с использованием эквивалентности плотности поверхностного тока к

$$\vec{J} \times \vec{n}, \text{ это приводит к плотности поверхностного тока в } z\text{-направлении} - \frac{\chi I}{2\pi R}$$

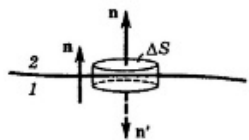
Поверхностный молекулярный ток

$$I'_{\text{пов}} = -\frac{\chi I}{2\pi R} (2\pi R) = -\chi I$$

Оба тока имеют противоположные знаки

## Билет 19

1) В магнитном отношении все вещества можно разделить на слабомагнитные (парамагнетики и диамагнетики) и сильномагнитные (ферромагнетики). Пара- и диамагнетики при отсутствии магнитного поля не намагничены и характеризуются однозначной зависимостью  $J = \chi H$  намагниченности  $J$  от  $H$ . Ферромагнетиками называют вещества (твердые), которые могут обладать спонтанной намагниченностью, т. е. намагничены уже при отсутствии внешнего магнитного поля. Типичные представители ферромагнетиков — это железо, кобальт и многие их сплавы.



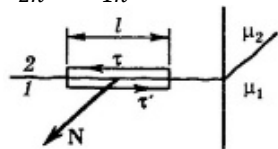
Условие для вектора В:  $B_{2n} \Delta S + B_{1n'} \Delta S = 0$

Взяв обе проекции вектора  $B$  на общую нормаль  $n$ , получим:

$$B_{1n'} = -B_{1n}$$

и предыдущее уравнение после сокращения на  $\Delta S$  примет следующий вид:

$$B_{2n} = B_{1n}$$



Условия для вектора Н:

$H_{2\tau} l + H_{1\tau'} l = i_N l$ , где  $i_N$  — проекция  $i$  на нормаль  $N$  к контуру. Взяв обе проекции вектора  $H$  на общий орт касательной (в среде 2), получим

$$H_{1\tau'} = -H_{1\tau}, \text{ и после сокращения на } l \text{ предыдущее уравнение примет вид:}$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_N$$

Преломление линий вектора В. На границе раздела двух магнетиков линии вектора  $B$  испытывают преломление (рис.).

Найдем отношение тангенсов углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{B_{2\tau}/B_{2n}}{B_{1\tau}/B_{1n}}. \text{ Ограничимся случаем, когда на границе раздела тока проводимости нет:}$$

$$B_{2\tau}/\mu_2 = B_{1\tau}/\mu_1, \quad B_{2n} = B_{1n}. \text{ С учетом последних соотношений получим закон преломления линий } B \text{ (а значит, и линий } H): \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

2) Импульс электромагнитного поля. Поскольку электромагнитная волна оказывает давление на вещество, последнее приобретает определенный импульс. Но в замкнутой системе, состоящей из вещества и электромагнитной волны, возникло бы нарушение закона сохранения импульса, если бы импульсом обладало только вещество. Импульс такой системы может сохраняться лишь при условии, что электромагнитное поле (волна) также обладает импульсом: вещество приобретает импульс за счет импульса, передаваемого ему электромагнитным полем. Введем понятие плотности импульса  $G$  электромагнитного поля как величину, численно равную импульсу поля в единице объема.

$G = \Pi / c^2$ , где  $\Pi$  – вектор Пойнтинга. Для электромагнитной волны в вакууме  $\sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$ , поэтому плотность энергии  $w$  и модуль  $\Pi$  вектора Пойнтинга равны соответственно:  $w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}$ ,

$\Pi = EH = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2$ . Отсюда следует, что  $\Pi = w / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ , а так как  $\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 1/c$ , то  $\Pi = wc$ , тогда для эmv в вакууме  $G = w/c$ .

Если говорить об энергии электромагнитного поля, то его полная энергия в данном объеме будет изменяться как за счет вытекания ее из объема, так и за счет того, что поле передает свою энергию веществу (заряженным частицам), т. е. производит работу над веществом. Макроскопически это утверждение можно записать так:  $-\frac{dW}{dt} = \oint \Pi dS + P$ , где  $dS$  – элемент поверхности. Это уравнение выражает **теорему Пойнтинга**: убыль энергии за единицу времени в данном объеме равна потоку энергии сквозь поверхность, ограниченную этим объемом, плюс мощность  $P$ , которую силы поля производят над зарядами вещества внутри данного объема.

Если среда не содержит сегнетоэлектриков и ферромагнетиков (т. е. нет явления гистерезиса), то плотность энергии электромагнитного поля  $w = \frac{ED}{2} + \frac{BH}{2}$ .

Плотность же потока энергии электромагнитного поля – вектор  $\Pi$ , называемый **вектором Пойнтинга**, – определяется как  $\Pi = [EH]$ .

3) Сила взаимодействия токов которые текут по двум параллельным длинным проводникам на единицу длины проводов определяется по формуле:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} (1).$$

$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$  – магнитная постоянная.

Запишем формулу для определения работы по перемещению одного проводника с током в магнитном поле, создаваемого другим проводником с током:

$$A = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} dR = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad I_1 = I_2 = I, \quad R_2 = 2 \cdot R_1$$

$$A = \frac{I^2 \mu_0}{2\pi} \ln 2 \quad (2).$$

$$A = 50,0 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

Токи в проводниках текут в одну сторону, проводники притягиваются, работа отрицательная.

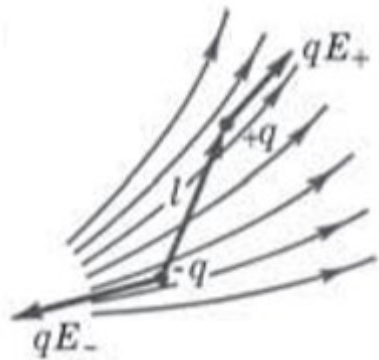
## Билет 20

### 1) Электрический диполь в электростатическом поле:

Электрический диполь – это система из двух одинаковых по модулю разноименных точечных зарядов  $+q$  и  $-q$ , находящихся на некотором расстоянии  $l$  друг от друга.

### Сила, действующая на диполь:

Сила, действующая на диполь. Поместим диполь во внешнее неоднородное электрическое поле. Пусть  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  – напряженности внешнего поля в точках, где расположены положительный и отрицательный заряды диполя. Тогда результирующая сила  $\vec{F}$ , действующая на диполь, равна **(рисунок 20.1)**:



(Рисунок 20.1)

$\vec{F} = q\vec{E}_+ - q\vec{E}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)$ . Разность  $\vec{E}_+ - \vec{E}_-$  — это приращение  $\Delta\vec{E}$  вектора  $\vec{E}$  на отрезке, равном длине диполя  $l$ , в направлении вектора  $\vec{l}$ . Вследствие малости этого отрезка можно

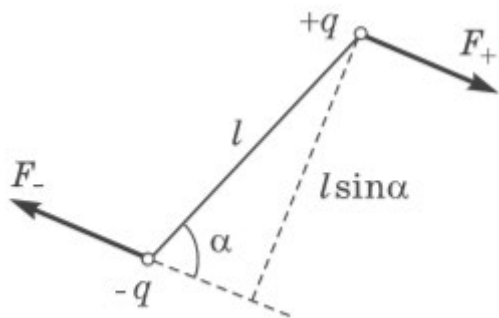
записать:  $\Delta\vec{E} = \vec{E}_+ - \vec{E}_- = \frac{\Delta\vec{E}}{l} l = \frac{\partial\vec{E}}{\partial l} l$

После подстановки этого выражения в формулу для  $\vec{F}$  получим, что сила, действующая на

диполь:  $\vec{F} = p \frac{\partial\vec{E}}{\partial l}$ , где  $p = ql$  — электрический момент диполя. Входящую в это выражение

производную принято называть производной вектора по направлению. Знак частной производной подчеркивает, что эта производная берется по определенному направлению — направлению, совпадающему с вектором  $\vec{l}$  или  $\vec{p}$ .

Момент сил, действующих на диполь:



(Рисунок 20.2)

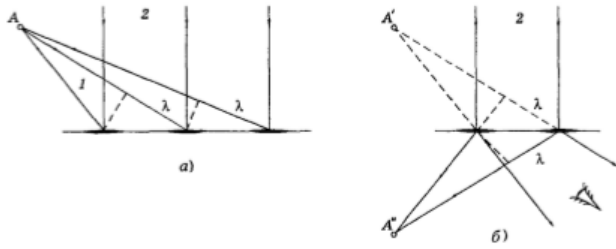
Рассмотрим, как ведет себя электрический диполь  $\vec{p}$  во внешнем электрическом поле  $\vec{E}$ . Как видно из **рисунка 20.2**, силы, действующие на положительный и отрицательный заряды

диполя, образуют пару  $\vec{F}_+ = q\vec{E}$  и  $\vec{F}_- = -q\vec{E}$ , плечо которой равно  $l \sin \alpha$ , т.е. зависит от

ориентации диполя относительно поля  $\vec{E}$ . Модуль каждой из этих сил равен  $qE$ , и на диполь будет действовать механический момент  $N$ , определяемый произведением  $qE$  на плечо пары, т.е.  $N = qE \cdot l \sin \alpha = pE \cdot \sin \alpha$ , где  $p = ql$  — электрический момент диполя.

Полученную формулу можно представить в векторном виде как  $\vec{N} = [\vec{p}\vec{E}]$ .

Этот момент сил стремится повернуть диполь так, чтобы его электрический момент  $\vec{p}$  установился по направлению внешнего поля  $\vec{E}$ . Такое положение диполя является устойчивым.



Рассмотрим светящуюся нить А, которая испускает цилиндрическую волну. На рисунке показана стадия записи, нить перпендикулярна плоскости рисунка. Пусть плоская опорная волна 2 падает нормально на фотопластинку, а предметная волна 1, когерентная с 2, наклонно (а). Колебания опорной волны достигают пластинки все в одной фазе, а предметной – с разными. Вследствие интерференции в тех местах, куда колебаний придут в одной фазе с колебаниями опорной волны, возникнут максимумы интенсивности, следовательно, и максимумы почернения. После химической обработки голограмма имеет вид чередующихся светлых и темных прямых полос, представляющих зонную пластинку Френеля, только с другой формой зон.

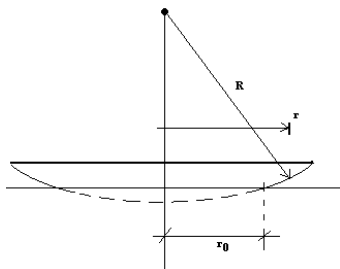
На стадии восстановления изображения голограмму освещают только опорной волной 2 (б). В результате дифракции максимально усиливать друг друга будут только те колебания, разность хода между которыми от соседних зон равна длине волны  $\lambda$ . Есть 2 возможности выполнения этого условия: или в направлении продолжения лучей падавшей предметной волны, или симметрично относительно нормали. В первом случае будем наблюдать мнимое изображение  $A'$ , а во втором – действительное  $A''$ . Наибольший интерес для голографии играет волна, дающая мнимое изображение.

Наиболее широкое применение голография находит в науке и технике. Голографическими методами контролируют точность изготовления изделий сложной формы, исследуют их деформации и вибрации. Для этого деталь, подлежащую контролю, облучают светом лазера, и отраженный свет пропускают сквозь голограмму эталонного образца. При отклонении размеров от эталонных, искажении формы и появлении поверхностных напряжений возникают полосы интерференции, число и расположение которых характеризует степень отличия изделия от образца или величину деформаций. Аналогичным образом исследуют обтекание тел потоками жидкости и газа: голограммы позволяют не только увидеть в них вихри и области уплотнений, но и оценить их интенсивность.

Методами акустической голографии удастся получать объемные изображения предметов в мутной воде, где обычная оптика бессильна.

Голограммы музейных редкостей уже сделались довольно обычной вещью: они не только экспонируются на выставках, но и продаются в сувенирных ларьках. Начинают появляться, объемные книжные иллюстрации.

3)



Воздушный зазор между линзой и стеклянной пластиной есть функция радиуса:

$$h = \sqrt{R^2 - r_0^2} - \sqrt{R^2 - r^2};$$

$$\text{Наложим условие малой толщины зазора } R \gg r: h = R^2 - \frac{r_0^2}{2R} - (R^2 - \frac{r^2}{2R}); h(r) = \frac{r^2 - r_0^2}{2R};$$

Оптическая разность хода первоотраженного луча и луча, отраженного от стеклянной пластины:  $\delta=2h$ ; Радиус К-го светового кольца соответствует разности хода:  $\delta=(k - 1/2)\lambda$ ;  $2 \frac{r^2-r_0^2}{2R}=(k - 1/2)\lambda$ ;

$$r_k=\sqrt{R(k - \frac{1}{2})\lambda + r_0^2}; \quad r_6=3.759 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

## Билет 21

1) Если в магнитное поле, образованное токами в проводах, ввести то или иное вещество, поле изменится. Это объясняется тем, что всякое вещество является магнетиком, т. е. способно под действием магнитного поля намагничиваться — приобретать магнитный момент. Намагниченное вещество создает свое магнитное поле  $B'$ , которое вместе с первичным полем  $B_0$ , обусловленным токами проводимости, образует результирующее поле  $B = B' + B_0$ . Поле  $B'$ , как и поле  $B_0$  токов проводимости, не имеет источников (магнитных зарядов), поэтому для результирующего поля  $B$  при наличии магнетика справедлива теорема Гаусса:  $\oint B dS = 0$ .

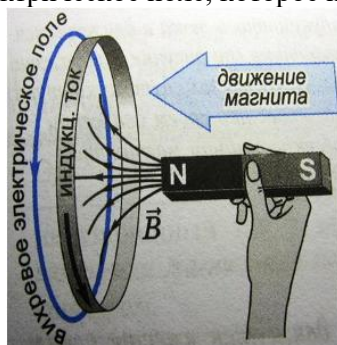
При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул ориентированы беспорядочно, поэтому обусловленное ими результирующее магнитное поле равно нулю, как и суммарный магнитный момент вещества. Последнее относится и к тем веществам, молекулы которых при отсутствии внешнего поля не имеют магнитных моментов.

Если же вещество поместить во внешнее магнитное поле, то магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию в одном направлении, и вещество намагничивается. При этом магнитные поля отдельных молекул уже не компенсируют друг друга, в результате возникает поле  $B'$ . Внесение веществ, молекулы которых при отсутствии внешнего поля не имеют магнитных моментов, во внешнее поле индуцирует элементарные круговые токи в молекулах, и молекулы, а вместе с ними и все вещество приобретают магнитный момент, что также приводит к возникновению поля  $B'$ .

**Намагниченность.** Степень намагничивания магнетика характеризуют магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют намагниченностью и обозначают  $J$ . По определению  $J = \frac{1}{\Delta V} \sum p_m$ , где  $\Delta V$  - физически бесконечно малый объем в окрестности данной точки,  $p_m$  - магнитный момент отдельной молекулы. Намагниченность можно представить как  $J = n \langle p_m \rangle$ , где  $n$  - концентрация молекул;  $\langle p_m \rangle$  — средний магнитный момент одной молекулы. Видно, что вектор  $J$  сонаправлен со средним вектором  $\langle p_m \rangle$ .

**Токи намагничивания  $I'$ .** Намагничивание вещества, как уже было сказано, обусловлено преимущественной ориентацией или индуцированием магнитных моментов отдельных молекул в одном направлении. Это же можно сказать и об элементарных круговых токах, связанных с каждой молекулой, их называют **молекулярными токами**. Такое поведение молекулярных токов приводит к появлению макроскопических токов  $I'$ , называемых токами намагничивания. Обычные токи, текущие по проводникам, связаны с перемещением в веществе носителей тока, их называют токами проводимости  $I$ .

2) **Вихревое электрическое поле** - это электрическое поле, которое порождается переменным магнитным полем и



линии напряженности которого замкнуты.

Переменное магнитное поле порождает индуцированное электрическое поле. Если магнитное поле постоянно, то индуцированного электрического поля не возникнет. Следовательно, индуцированное электрическое поле не связано с зарядами, как это имеет место в случае электростатического поля; его силовые линии не начинаются и не заканчиваются на зарядах, а замкнуты сами на себя, подобно силовым линиям магнитного поля. Это означает, что индуцированное электрическое поле, подобно магнитному, является вихревым.

3) **Решение:**

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -3ar^2; \quad 4\pi r^2 E_r = \frac{q}{\varepsilon_0}; \quad 4\pi d(r^2 E_r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho 4\pi r^2 dr; \quad r^2 dE_r + 2r E_r dr = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho r^2 dr$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{2}{r} E_r = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad -6ar + (-6ar) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\rho = -12ar\varepsilon_0$$

## Билет 22

1) **Энергия уединенного проводника.** Пусть проводник имеет заряд  $q$  и потенциал  $\varphi$ . Поскольку значение  $\varphi$  во всех точках, где имеется заряд, одинаково,  $\varphi$  можно вынести из-под знака интеграла в формуле полной энергии взаимодействия (1)  $W = 1/2 \int \rho \varphi dV$ , тогда оставшийся интеграл есть не что иное, как заряд  $q$  на проводнике, и  $W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$ , где  $C = q/\varphi$ .

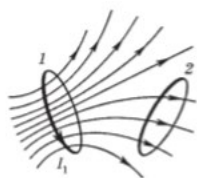
**Энергия конденсатора.** Пусть  $q$  и  $\varphi_+$  — заряд и потенциал положительно заряженной обкладки конденсатора. Согласно формуле (1) интеграл можно разбить на две части — для одной и другой обкладок. Тогда  $W = (q_+ \varphi_+ + q_- \varphi_-)/2$ . Так как  $q_- = -q_+$ , то  $W = q_+(\varphi_+ - \varphi_-)/2 = qU/2$ , где  $q = q_+$  — заряд конденсатора,  $U$  — разность потенциалов на его обкладках. Приняв во внимание, что  $C = q/U$ , получим следующие выражения для энергии конденсатора:  $W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$ .

2) В 1831 г. Фарадеем было сделано одно из наиболее фундаментальных открытий в электродинамике — **явление электромагнитной индукции**. Оно заключается в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока (т. е. потока вектора  $B$ ), охватываемого этим контуром, возникает электрический ток — его назвали индукционным. Появление индукционного тока означает, что при изменении магнитного потока в контуре возникает э.д.с. индукции  $\varepsilon_i$ .

**Закон электромагнитной индукции.** Согласно этому закону, какова бы ни была причина изменения магнитного потока, охватываемого замкнутым проводящим контуром, возникающая в контуре э.д.с. индукции определяется формулой  $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ .

Направление индукционного тока (а значит, и знак э.д.с. индукции) определяется **правилом Ленца**: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей. Иначе говоря, индукционный ток создает магнитный поток, препятствующий изменению магнитного потока, вызывающего э.д.с. индукции.

Электромагнитная индукция возникает во всех случаях, когда изменяется магнитный поток сквозь контур. При этом совершенно не важно, чем вызывается это изменение потока. Если в некотором контуре течет изменяющийся во времени ток, то магнитное поле этого тока также будет изменяться. Это влечет за собой изменение магнитного потока через контур, а следовательно, и появление э.д.с. индукции. Таким образом, изменение тока в контуре ведет к возникновению э.д.с. индукции в этом же самом контуре. Данное явление называют **самоиндукцией**.



Если в пространстве, где находится контур стоком  $I$ , нет ферромагнетиков, поле  $B$ , а значит, и полный магнитный поток  $\Phi$  через контур будут пропорциональны силе тока  $I$ , и можно написать  $\Phi = LI$ , где  $L$  — коэффициент, называемый **индуктивностью контура**.

**Взаимная индуктивность.** Рассмотрим два неподвижных контура 1 и 2, расположенные достаточно близко друг к другу. Если в контуре 1 течет ток  $I_1$ , он создает через контур 2 полный магнитный поток  $\Phi_2$ , пропорциональный току  $I_1$ :  $\Phi_2 = L_{21}I_1$ . Совершенно так же, если в контуре 2 течет ток  $I_2$ , он создает через контур 1 полный магнитный поток  $\Phi_1 = L_{12}I_2$ . Коэффициенты пропорциональности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называют взаимной индуктивностью контуров.

Найдем **индуктивность соленоида**, пренебрегая краевыми эффектами. Пусть  $V$  — объем соленоида,  $n$  — число витков на единицу его длины,  $\mu$  — магнитная проницаемость вещества внутри соленоида.  $L = \Phi/I$ . При токе  $I$  магнитное поле в соленоиде  $B = \mu \mu_0 n I$ . Магнитный поток через один виток соленоида  $\Phi_1 = BS = \mu \mu_0 n I S$ , а полный магнитный поток, пронизывающий  $n$  витков:  $\Phi = N\Phi_1 = n I B S = \mu \mu_0 n^2 V I$  где  $V = S l$

Индуктивность соленоида  $L = \mu \mu_0 n^2 V$



$$3) \left[ D = \frac{d\alpha}{d\lambda}; \left[ (dsina)' = (m\lambda) \right]; dcosada = md\lambda; \frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\alpha} \right]$$

$$sina = \frac{m\lambda}{d}; cosa = \sqrt{1 - sin^2\alpha}; cosa = \sqrt{1 - \frac{m^2\lambda^2}{d^2}}. D = \frac{m}{d\cos\alpha} = \frac{m}{d\sqrt{1 - \frac{m^2\lambda^2}{d^2}}} = 1,1547 \times 10^6.$$

## Билет 23

1) Это физическая величина, численно равная отношению потенциальной энергии поля, заключенной в элементе объема, к этому объему. Для однородного поля объемная плотность энергии равна  $w = W/V$ . Для плоского конденсатора, объем которого  $Sd$ , где  $S$  - площадь пластин,  $d$  - расстояние между пластинами, имеем

$$w = \frac{W}{Sd} = \frac{1}{2} \frac{CU^2}{Sd}.$$

С учетом, что  $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$  и  $U = Ed$

$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}$$

или

$$w = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0}.$$

Энергию заряженного конденсатора можно выразить через величины, характеризующие электрическое поле в зазоре между обкладками. Сделаем это на примере плоского конденсатора. Подстановка выражения для емкости в формулу для энергии конденсатора дает

$$W_k = CU^2/2 = \epsilon\epsilon_0 SU^2/2d = (\epsilon\epsilon_0/2)(U/d)^2 Sd$$

Частное  $U/d$  равно напряженности поля в зазоре; произведение  $S \cdot d$  представляет собой объем  $V$ , занимаемый полем. Следовательно,

$$W_k = \epsilon\epsilon_0 E^2 V/2$$

Если поле однородно (что имеет место в плоском конденсаторе при расстоянии  $d$  много меньшем, чем линейные размеры обкладок), то заключенная в нем энергия распределяется в пространстве с постоянной плотностью  $w$ .

Тогда *объемная плотность энергии* электрического поля равна

$$w = W_k/V = \epsilon\epsilon_0 E^2/2$$

С учетом соотношения  $D = \epsilon\epsilon_0 E$  можно записать

$$w = \epsilon\epsilon_0 E^2/2 = ED/2 = D^2/2\epsilon\epsilon_0$$

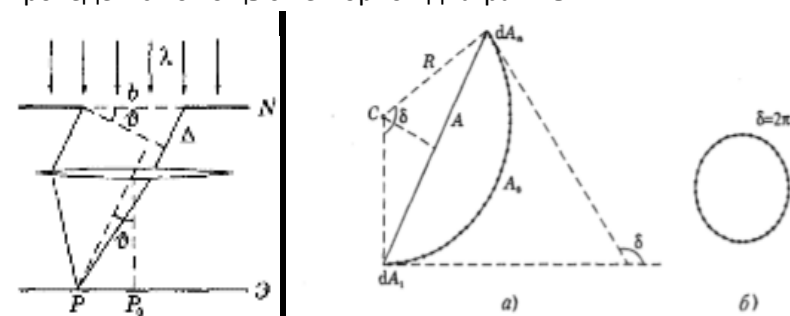
В изотропном диэлектрике направления векторов  $D$  и  $E$  совпадают и  $w = ED/2$

Подставим выражение  $D = (\epsilon_0 E + P)$ , получим

$$w = E(\epsilon_0 E + P)/2 = \epsilon_0 E^2/2 + EP/2$$

Первое слагаемое в этом выражении совпадает с плотностью энергии поля в вакууме. Второе слагаемое представляет собой энергию, затрачиваемую на поляризацию диэлектрика.

2) Рассмотрим случай, когда на щель ширины  $b$  падает нормальная плоская световая волна. Разобьём щель на узкие одинаковые по ширине зоны-полоски, параллельные прямолинейным краям щели. Суммирование вторичных волн проведём с помощью векторной диаграммы.



Колебания, приходящие в точку Р от каждой зоны-полоски, имеют одинаковую амплитуду  $dA$ , поскольку распространяются параллельно друг другу перед линзой, значит  $dA$  не зависит от пройденного пути до Р. При этом разность фаз между колебаниями, приходящими в точку Р от соседних зон-полосок, будет одинакова. Отсюда следует, что при графическом изображении мы получим цепочку векторов  $dA_i$ , одинаковых по модулю и повернутых на один и тот же угол относительно друг друга. Результирующая амплитуда изобразится вектором  $A$  – хордой дуги окружности с центром в точке С. Для точки  $P_0$  цепочка образует прямую, что соответствует максимуму интенсивности.

Условие минимумов: если разность хода крайних лучей составляет  $\Delta = \lambda$ , то их разность фаз  $\delta = 2\pi$ , цепочка оказывается замкнутой и амплитуда результирующего колебания обращается в нуль (б). Это первый минимум дифракционной картины, представляющей собой симметричную относительно середины систему чередующихся светлых и темных полос, параллельных щели. Результирующая амплитуда обращается в нуль и тогда, когда разности фаз от крайних элементов щели равна  $2\pi m$ , где  $m=1,2,\dots$ . Цепочка при этом замыкается после  $m$  оборотов, практически не меняя своей длины  $A_0$ , поскольку угол дифракции  $\vartheta$  обычно достаточно мал. Разность фаз  $\delta$  связана с разностью хода  $\Delta$ :  $\delta = 2\pi\Delta/\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны света. Так как  $\Delta = b \sin \vartheta$  и в минимуме  $\delta = 2\pi m$ , то из трёх равенств следует условие минимумов:  $b \sin \vartheta_m = \pm m\lambda$ ,  $m=1, 2, \dots$  ( $m \neq 0$ , т.к. при  $m=0$  образуется максимум).

Распределение интенсивности: Найдём интенсивность световой волны в зависимости от угла дифракции  $\vartheta$ . Из (Рис. (а)). Обозначив радиус цепочки-дуги через  $R$ , запишем:  $A = 2R \sin(\delta/2)$ ,  $A_0 = R\delta$ .

В итоге получаем:  $A = A_0 \frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2}$

А т.к.  $I \sim A^2$ , то искомая зависимость:  $I = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$ ,

где  $\alpha = \delta/2 = \pi \Delta/\lambda = \pi b \sin \vartheta/\lambda$ .

3)  $R = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = mN$  – разрешающая способность, где  $\delta \lambda$  – минимальная разница в длинах волн соседних спектральных линий, при которой эти линии еще можно наблюдать отдельно,  $m$  – порядок спектра,  $N$  – число щелей.  $d \sin \varphi = \pm m\lambda$ , где  $d$  – период дифракционной решетки.

$\sin \varphi \leq 1 \Rightarrow \frac{m\lambda}{d} \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{d}{\lambda}$  тогда  $R \leq \frac{Nd}{\lambda} = \frac{l}{\lambda}$  ч.т.д.

## Билет 24

1) Каждый носитель тока испытывает действие магнитной силы. Действие этой силы передается проводнику, по которому заряды движутся. В результате магнитное поле действует с определенной силой на сам проводник с током.

Пусть объемная плотность заряда, являющегося носителем тока, равна  $\rho$ . Выделим мысленно элемент объема  $dV$  проводника. В нем находится заряд – носитель тока, равный  $\rho dV$ . Тогда сила, действующая на элемент  $dV$  проводника:

$dF = \rho[uB]dV$ , где  $u$  – скорость упорядоченного движения зарядов.

Так как  $j = \rho u$ , то  $dF = [jB]dV$ .

Если ток течет по тонкому проводнику, то согласно  $j dV = Idl$  и

$dF = I[dl, B]$ , где  $dl$  – вектор, совпадающий по направлению с током и характеризующий элемент длины тонкого проводника. Полученные формулы выражают **закон Ампера**.

2) По теореме Гаусса поток вектора  $D$  сквозь замкнутую поверхность  $\oint D dS = q$ , откуда  $\oint \frac{\partial D}{\partial t} dS = \frac{\partial q}{\partial t}$ .

С другой стороны, согласно уравнению непрерывности  $\oint j dS = -\frac{\partial q}{\partial t}$ . Сложим отдельно левые и правые части уравнений:  $\oint (j + \frac{\partial D}{\partial t}) dS = 0$ . Это уравнение аналогично уравнению непрерывности для постоянного тока, где кроме плотности тока проводимости  $j$  имеется еще одно слагаемое  $\frac{\partial D}{\partial t}$ , размерность которого равна размерности плотности тока. Максвелл назвал это слагаемое плотностью **тока смещения**:  $j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t}$ . Сумму же тока проводимости и тока смещения называют **полным током**, плотность которого равна  $j_{полн} = j + \frac{\partial D}{\partial t}$ .

3)  $P = \mathcal{E} \mathcal{E}_0 E$ ;  $\mathcal{E}_0 = 1 + \mathcal{K}$ ;  $E = \frac{E_0}{\mathcal{E}_0} = \frac{E_0}{1 + \mathcal{K}}$ ;  $E = \frac{q}{4\pi R^3} \vec{r}$

$P = \frac{(\mathcal{E}-1)\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}} E = \frac{(\mathcal{E}-1)\mathcal{E}_0 q}{4\pi \mathcal{E}_0 R^3} \vec{r} = \frac{(\mathcal{E}-1)q}{4\pi \mathcal{E} R^3} \vec{r}$

$$q' = \oint P dS = \int \frac{(\epsilon-1)q}{4\pi\epsilon R^3} r dS = P \oint dS = -q \frac{(\epsilon-1)}{\epsilon}$$

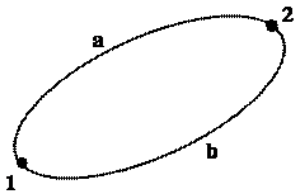
## Билет 25

1) Если в качестве пробного заряда, переносимого из точки 1 заданного поля  $E$  в точку 2, взять единичный положительный заряд, то элементарная работа сил поля на перемещении  $d\mathbf{l}$  равна  $E dl$ , а вся работа сил поля на пути от точки 1 до точки 2 определяется как  $\int_1^2 E dl$

Это утверждение и называют теоремой о циркуляции вектора  $E$ .

Для доказательства этой теоремы разобьем произвольный замкнутый путь на две части  $1a2$  и  $2b1$ . Так как линейный интеграл  $\int_{12}$  не зависит от пути между точками 1 и 2, то  $\int_{12}^{(a)} = \int_{12}^{(b)}$ .

С другой стороны ясно, что  $\int_{12}^{(b)} = -\int_{21}^{(b)}$ . Поэтому  $\int_{12}^{(a)} + \int_{21}^{(b)} = \int_{12}^{(a)} - \int_{12}^{(b)} = 0$  (стр. 26)



В дифференциальной форме теорему о циркуляции записывают как:  $\text{rot} \vec{E} = 0$

2) Ограничимся случаем, когда система состоит из двух контуров с токами  $I_1$  и  $I_2$ . Магнитная энергия такой системы может быть представлена в виде

$$W = (I_1 \Phi_1 + I_2 \Phi_2) / 2 \quad (1)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — полные магнитные потоки, пронизывающие контуры 1 и 2 соответственно.

Согласно закону сохранения энергии работа  $\delta A^*$ , которую совершают источники тока, включенные в контуры 1 и 2, идет на теплоту  $\delta Q$ , на приращение магнитной энергии системы  $dW$  и на механическую работу  $\delta A_{\text{мех}}$

$$\delta A^* = \delta Q + dW + \delta A_{\text{мех}}$$

Мы предположили, что емкость контуров пренебрежимо мала, и поэтому электрическую энергию учитывать не будем.

В дальнейшем нас будет интересовать не вся работа источника тока  $\delta A^*$ , а только та ее часть, которая совершается *против* э.д.с. индукции и самоиндукции (в каждом контуре). Эта работа (мы назвали ее дополнительной)  $\delta A^{\text{доп}} =$

$-(\epsilon_{i1} + \epsilon_{s1})I_1 dt - (\epsilon_{i2} + \epsilon_{s2})I_2 dt$ . Учитывая, что для каждого контура

$$\epsilon_i + \epsilon_s = -d\Phi/dt, \text{ перепишем выражение для дополнительной работы в виде } \delta A^{\text{доп}} = I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2$$

Именно эта часть работы источников тока (работа против э.д.с. индукции и самоиндукции), связанная с изменением потоков  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , и идет на приращение магнитной энергии системы и на механическую работу:

$$I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2 = dW + dA_{\text{мех}}$$

Если потоки постоянны,  $\Phi_k = \text{const}$ , где  $k = 1$  и  $2$ , то  $\delta A_{\text{мех}} = -dW|_{\Phi}$  ( $\Phi$  подчеркивает, что приращение магнитной энергии системы должно быть вычислено при постоянных потоках через контуры)

Если токи постоянны,  $I_k = \text{const}$ , то  $\delta A_{\text{мех}} = dW|_I$ . Действительно, при  $I_k = \text{const}$  из (1) следует, что

$dW|_I = (I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2) / 2$ . Необходимо подчеркнуть, что оба полученных нами выражения и определяют механическую работу одной и той же силы, т. е. можно написать:  $F dl = -dW|_{\Phi} = dW|_I$

Магнитное давление на обмотку соленоида. Увеличим мысленно радиус сечения соленоида на  $dr$ , сохраняя при этом неизменным ток  $I$  через обмотку. Тогда силы Ампера совершат работу  $\delta A_{\text{мех}} = dW|_I$ . В нашем случае

$$\delta A_{\text{мех}} = p S dr,$$

где  $p$  — искомое давление,  $S$  — боковая поверхность соленоида,

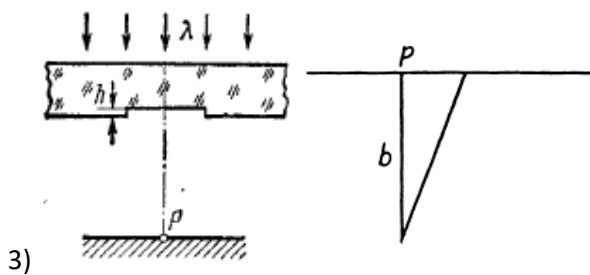
$$dW|_I = d \left( \frac{B^2}{2\mu_0} V \right) = \frac{B^2}{2\mu_0} S dr$$

Здесь учтено, что при  $I = \text{const}$  и  $B = \text{const}$ . Из равенства

двух этих выражений находим  $p = B^2 / 2\mu_0$ .

Полученное выражение для давления можно обобщить на случай, когда по разные стороны от поверхности с током

магнитное поле разное —  $B_1$  и  $B_2$ . В этом случае, оказывается магнитное давление  $p = \left| \frac{B_1 H_1}{2} - \frac{B_2 H_2}{2} \right|$



3)

Нам понадобится вклад в амплитуду волны в точке из половины зоны Френеля. Для этого мы исходим непосредственно из принципа Френеля - Гюйгенса. Комплексная амплитуда записывается как  $E = \int K(\varphi) \frac{a_0}{r} e^{-ikr} dS$ , где  $K(\varphi)$  - фактор, зависящий от угла  $\varphi$  между нормалью  $\vec{n}$  до площади  $dS$  и направления от  $dS$  до точки  $P$ , а  $r$  - расстояние от элемента  $dS$  до  $P$ . Мы видим, что для первой зоны Френеля ( $r \approx b + \frac{\rho^2}{2b}$  (используя  $\sqrt{\rho^2 + b^2}$ ))  $E = \frac{a_0}{b} \int_0^{\sqrt{b\lambda}} e^{-ikb} e^{-ik\rho^2/2b} 2\pi\rho d\rho (K(\varphi) \approx 1)$

Для первой зоны Френеля  $r = b + \lambda/2$ , так что  $r^2 \approx b^2 + b\lambda$  и  $\rho^2 = b\lambda$ . Таким образом  $E \approx \frac{a_0}{b} e^{-ikb} 2\pi \int_0^{\frac{b\lambda}{2}} e^{-\frac{ikx}{b}} dx = \frac{a_0}{b} 2\pi e^{-ikb} \frac{e^{-ik\lambda/2} - 1}{-ik/b} = \frac{a_0}{k} 2\pi i e^{-ikb} (-2) = -\frac{4\pi}{k} i a_0 e^{-ikb} \approx A_1$

Для следующей половины зоны

$$E = \frac{a_0}{b} e^{-ikb} 2\pi \int_{\frac{b\lambda}{2}}^{\frac{3b\lambda}{2}} e^{-\frac{ikx}{b}} dx = \frac{a_0}{k} 2\pi i e^{-ikb} (e^{-3ik\lambda/4} - e^{-ik\lambda/2}) = \frac{a_0}{k} 2\pi i e^{-ikb} (1+i) = -\frac{A_1(1+i)}{2}$$

Если вычислить вклад полной зоны Френеля, мы получим  $-A_1$ , если мы учтем факторы  $K(\varphi)$  и  $1/r$ , монотонно убывающих, мы ожидаем, что вклад изменится на  $-A_2$ . Таким образом, мы запишем вклад полузоны во 2-й зоне Френеля как  $-\frac{A_2(1+i)}{2}$ , а также  $-\frac{A_2(1-i)}{2}$ .

Часть, лежащая в углублении, имеет дополнительную разность фаз, равную  $-\delta = -\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)h$ . Таким образом полная амплитуда (заметим, что правильная форма  $e^{-ikr}$ )  $(A_1 - \frac{A_2}{2}(1+i))e^{+i\delta} - \frac{A_2}{2}(1-i) + A_3 - A_4 + \dots \approx (\frac{A_1}{2}(1-i))e^{+i\delta} - \frac{A_2}{2}(1-i) + \frac{A_3}{2} \approx (\frac{A_1}{2}(1-i))e^{+i\delta} + i\frac{A_1}{2}$

( $A_2 \approx A_3 \approx A_1$ ) и  $A_3 - A_4 + A_5 \dots = \frac{A_3}{2}$ . Соответствующая интенсивность

$$I = \frac{A_1^2}{4} ((1-i)e^{+i\delta} + i)((1+i)e^{-i\delta} - i) = I_0(3 - 2\cos\delta + 2\sin\delta) = I_0(3|2\sqrt{2}\sin(\delta - \pi/4))$$

(а) Для максимальной интенсивности  $\sin(\delta - \pi/4) = +1$  или  $\delta - \pi/4 = 2k\pi + \pi/2, k=0,1,2, \dots$   $\delta = 2k\pi + 3\pi/4 = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)h$ , так  $h = \frac{\lambda}{n-1}(k + 3/8)$ .

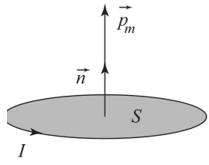
(б) Для минимальной интенсивности  $\sin(\delta - \pi/4) = -1$   $\delta - \pi/4 = 2k\pi + 3\pi/2$  или  $\delta = 2k\pi + 7\pi/4$ , так

$$h = \frac{\lambda}{n-1}(k + 7\pi/8).$$

## Билет 26

**1) Сила, действующая на контур с током.** Результирующая амперова сила, которая действует на контур с током в магнитном поле, определяется как  $\vec{F} = I \oint [d\vec{l}, \vec{B}]$ , где интегрирование ведется по данному контуру с током  $I$ . Если магнитное поле однородно, то вектор  $\vec{B}$  можно вынести из-под интеграла и задача сводится к вычислению векторного интеграла  $\oint d\vec{l}$ . Этот интеграл представляет собой замкнутую цепочку элементарных векторов  $d\vec{l}$ , поэтому он равен нулю. Значит, и  $\vec{F} = 0$ , т. е. результирующая амперова сила равна нулю в однородном магнитном поле.

Для дальнейшего особый интерес представляет случай, когда контур с током плоский и его размеры достаточно малы. Такой контур с током называют элементарным. Поведение элементарного контура с током удобно описывать с помощью магнитного момента  $p_m$ . По определению  $p_m = ISn$



Расчет с учетом малости контура приводит к следующему выражению для силы, действующей на элементарный контур в неоднородном магнитном поле  $F = p_m \frac{\partial B}{\partial n}$ .

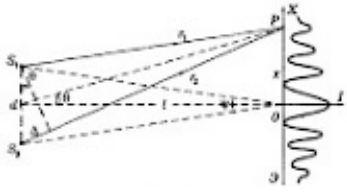
Рассмотрим плоский контур с током  $I$  в однородном магнитном поле  $B$ . Мы выяснили, что результирующая сила, которая действует на контур с током в однородном магнитном поле, равна нулю. А из механики известно, что если результирующая сил, действующих на любую систему, равна нулю, то суммарный момент этих сил не зависит от точки  $O$ , относительно которой определяют моменты этих сил. Раз так, можно просто говорить о результирующем моменте амперовых сил в нашем случае.

По определению, результирующий момент амперовых сил  $N = \oint [r, dF]$ . Если провести расчет, то момент сил можно представить  $N = [p_m B]$

**2) Интерференция** - взаимное увеличение или уменьшение результирующей амплитуды двух или нескольких

когерентных волн при их наложении друг на друга.

Рассмотрим 2 волны, исходящие из когерентных источников. В зоне интерференции (области, где волны перекрываются - Э) возникает система чередующихся максимумов и минимумов освещенности.



$\Delta = r_2 - r_1$  - разность хода. Если разность хода равна целому числу длин волн  $\Delta = m\lambda$ ,

$m=0, +1, +2, \dots$ , где  $m$  - порядок интерференции, то колебания, возбуждаемые в т. Р обеими волнами, будут происходить в фазе (условие максимума). Если  $\Delta$  равно полуцелому числу длин волн, образуются минимумы. В случае, если волны распространяются в среде с показателем преломления  $n$ , то под  $\Delta$  следует понимать не геометрическую, а оптическую разность хода,  $\Delta = n(r_2 - r_1)$ . Ширина полосы: угол  $\theta \approx \frac{x}{l} \ll 1$  и  $\Delta$  можно записать как  $\Delta = d\theta \Rightarrow d \frac{x}{l} = m\lambda$

отсюда:  $x = \frac{m\lambda l}{d}$ . При переходе к соседнему максимуму  $m$  меняется на 1, поэтому ширина интерференции -  $\Delta x = \frac{\lambda l}{d}$  или  $\Delta x = \frac{\lambda}{\psi}$ .

**3).**  $\Delta y = \frac{\lambda b}{d}$

$$\lambda = \frac{\Delta y d}{b} = \frac{0,5 * 3}{3 * 10^3} = 0,5 \text{ мкм}$$

## Билет 27

**1) Закон Ома:** сила тока, протекающего по однородному проводнику, пропорциональна разности на его концах:

$$I = U/R, \text{ где } R - \text{электрическое сопротивление [Ом]}. \quad R = \rho \frac{l}{S}$$

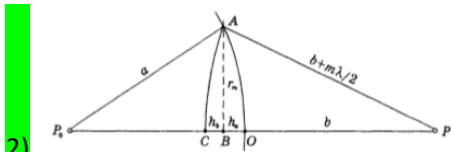
Закон Ома в локальной форме:  $j ds = \frac{Edl}{\rho dl/dS} \rightarrow j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E, \sigma$  - удельная электропроводимость среды [См/м]

Обобщенный закон Ома:  $j = \sigma(E + E^*)$

$$\delta A = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = I(\varphi_1 - \varphi_2)dt \rightarrow \dot{Q} = RI^2 \text{ - закон Джоуля-Ленца.}$$

$$\delta A = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{dS} (j dS)^2 dt = \rho j^2 dV dt \quad | : dV dt;$$

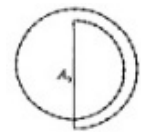
$$\dot{Q}_{уд} = \rho j^2 \text{ - удельная тепловая мощность. } \dot{Q}_{уд} = jE = \sigma E^2; \text{ В локальной форме: } \dot{Q}_{уд} = \rho j^2 = j(E + E^*)$$



2) Чтобы определить амплитуду колебаний в точке Р за круглым отверстием на его оси разобьем волновую поверхность S на кольцевые зоны с центром на оси отверстия. Эти зоны выбираем так, чтобы расстояния от краев каждой зоны до точки Р отличались друг от друга на половину длины волны - это есть **зоны Френеля**. Радиус m-ой зоны:  $h_a + h_b = \frac{m\lambda}{2}$ ;  $r_m^2 = a^2 - (a - h_a)^2 = h_a(2a - h_a)$ ;  $h_a \ll 2a \Rightarrow h_a = \frac{r_m^2}{2a}$  аналогично  $h_b = \frac{r_m^2}{2b}$ . Получаем  $r_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}$  Если падающая нормально на данное отверстие волна плоская ( $a \rightarrow \infty$ )  $r_m = \sqrt{m\lambda b}$  (Если сферическая, то в знаменателе a-b).

Фазы колебаний, возбуждаемых в точке Р соседними зонами, отличаются на  $\pi$ , поэтому векторы-амплитуды нечётных зон противоположны по направлению с векторам-амплитудам от чётных зон. И результирующая амплитуда, а значит и интенсивность, зависит от того четное или нечетное число зон Френеля уместится в отверстии. Если число нечетное наблюдается максимум, если четное – минимум. **Спираль Френеля** представляет собой графический метод сложения амплитуд. Волновую поверхность мысленно разбивают на узкие кольцевые зоны, амплитуду колебаний создаваемую каждой из зон изображает вектором dA, отставание по фазе изображают поворотом каждого вектора dA против часовой стрелки на соответствующий угол и получают цепочку векторов, векторная сумма которых есть результирующая амплитуда колебаний в точке Р. Цепочка по мере увеличения числа узких кольцевых зон будет закручивается в спираль, и в результате амплитуда от действия всех зон будет равна

$$A_{\infty} = \frac{A_1}{2}.$$



$$3) \bar{P} = \bar{P}_0 \left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right)$$

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}; \bar{E} = -\frac{\bar{P}}{\epsilon_0}; \Phi = 4\pi r^2 E_r = 0; E_r = 0;$$

$$\bar{E} = \frac{\bar{P}_0}{\epsilon_0} \left(\frac{x^2}{d^2} - 1\right); \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \bar{E} d\vec{r}$$

$$\varphi(d) - \varphi(-d) = - \int_{-d}^d \frac{\bar{P}_0}{\epsilon_0} \left(\frac{x^2}{d^2} - 1\right) dx = - \frac{P_0}{\epsilon_0} \left(\frac{x^3}{3d^2} - x\right) \Big|_{-d}^d = - \frac{P_0}{\epsilon_0} \left(\frac{d}{3} + \frac{d}{3} - d - d\right) = \frac{4dP_0}{3\epsilon_0}$$

## Билет 28

1) Пусть поле вблизи границы раздела в диэлектрике 1 равно  $E_1$ , а в диэлектрике 2 равно  $E_2$ . Согласно теореме о циркуляции вектора E около границы раздела циркуляция E по замкнутому контуру длины L с пренебрежимо малой высотой равна  $E_{1t}L - E_{2t}L = 0$ , где  $E_{1t}$  и  $E_{2t}$  – проекции вектора напряженности на контур с учетом направления обхода (направление по часовой, отсюда минус).  $\Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$  - тангенциальная составляющая не претерпевает скачка. Рассмотрим малой высоты цилиндр на границе раздела. По теореме Гаусса для вектора D:  $D_{1t}\Delta S - D_{2t}\Delta S = \sigma\Delta S$ , где  $\sigma$  – поверхностная плотность стороннего заряда на границе раздела, проекции вектора D взяты на общую нормаль (в направление от диэлектрика 1 к диэлектрику 2). Получаем  $D_{1t} - D_{2t} = \sigma$  – нормальная составляющая вектора D претерпевает скачок на величину поверхностной плотности.

Если сторонних зарядов на границе раздела нет, то  $E_{1t} = E_{2t}$  и  $\epsilon_1 E_{1t} = \epsilon_2 E_{2t}$ .

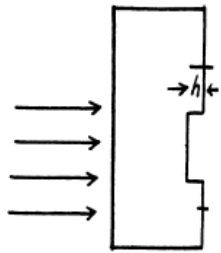
2) явление двойного лучепреломления заключается в том, что падающий на кристалл пучок света разделяется внутри кристалла на два пучка, распространяющиеся, вообще говоря, в разных направлениях и с разными скоростями. Существуют кристаллы одноосные и двуосные. У одноосных кристаллов один из преломленных пучков подчиняется обычному закону



преломления ( $n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2$ ). Его называют обыкновенным и обозначают буквой или индексом о. Другой пучок необыкновенный (е), он не подчиняется обычному закону преломления, и даже при нормальном падении светового пучка на поверхность кристалла необыкновенный пучок может отклоняться от нормали. И как правило, необыкновенный луч не лежит в плоскости падения.

Любую плоскость, проходящую через оптическую ось, называют главным сечением или главной плоскостью кристалла. Обыкновенным и необыкновенная волны линейно поляризованы. Колебания вектора  $E$  в обыкновенной волне совершаются в направлении, перпендикулярном главному сечению кристалла для обыкновенного луча. Колебания же вектора  $E$  в необыкновенной волне – в главном сечении кристалла для необыкновенного луча. Поляризации обеих волн взаимно ортогональны, это наблюдается практически при любой ориентации оптической оси, поскольку угол между обыкновенным и необыкновенным лучами достаточно мал.

3)



Вклад в амплитуду волны внутренней полузоны равен

$$\frac{2\pi a_0 e^{-ikb}}{b} \int_0^{\sqrt{\frac{b\lambda}{2}}} e^{\frac{-ik\rho^2}{2b}} \rho d\rho = \frac{2\pi a_0 e^{-ikb}}{b} \int_0^{\sqrt{\frac{b\lambda}{4}}} e^{\frac{-ikx}{b}} dx = \frac{2\pi a_0 e^{-ikb}}{b} \left( e^{-\frac{ik\lambda}{4}} - 1 \right) \frac{1}{-ik} = \frac{2\pi i a_0 e^{-ikb}}{k} (-i - 1) = \frac{A_1}{2} (1 + i)$$

С фазовым множителем  $\frac{A_1}{2} (1 + i) e^{i\delta}$ , где  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n - 1)h$ . Вклад оставшейся амплитуды  $\frac{A_1}{2} (1 - i)$

(так что сумма двух частей при  $\delta = 0$  равна  $A_1$ )

Таким образом полная амплитуда

$$\frac{A_1}{2} (1 + i) e^{i\delta} + \frac{A_1}{2} (1 - i)$$

и интенсивность

$$I = I_0 [(1 + i) e^{i\delta} + (1 - i)] [(1 - i) e^{-i\delta} + (1 + i)] = I_0 [2 + 2 + (1 - i)^2 e^{-i\delta} + (1 + i)^2 e^{i\delta}]$$

$$= I_0 [4 - 2i e^{-i\delta} + 2i e^{i\delta}] = I_0 (4 - 4 \sin \delta)$$

$I_0 = \frac{A_1^2}{4}$  – интенсивность падающего света. Тогда  $I$  является минимальной когда  $\sin \delta = 1$

Или  $\delta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ . И так  $h = \frac{\lambda}{n-1} \left( k + \frac{1}{4} \right)$  и  $I_{\max} = 0$

## Билет 29

1) Электрический заряд – это физическая величина, характеризующая свойство частиц или тел вступать в электромагнитные силовые взаимодействия.

Закон Кулона: Два точечных неподвижных заряда, находящиеся на расстоянии  $R$  друг от друга взаимодействуют друг с другом с силой, величина которой пропорциональна произведению величин зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{R^2}, k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \approx \frac{9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2}{\epsilon \text{ Кл}^2}$$

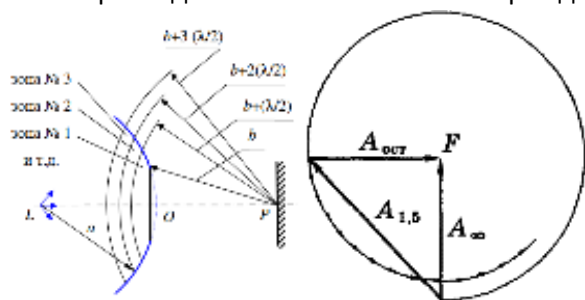
Силовая характеристика электрического поля – вектор напряженности, который определяется как отношение вектора

силы, действующей на точечный заряд  $q$ , помещенный в данную точку поля к величине этого заряда:  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \text{ Н/Кл}$

Силовой линией электрического поля называется линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора  $E$ . Таким образом силовые линии электрического поля направлены от

положительного заряда к отрицательному. Уравнение в пространстве:  $\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$

2) Рассмотрим схему опыта, в котором на пути световой волны расположен непрозрачный круглый диск, радиус которого соизмерим с радиусами первых зон Френеля. Для рассмотрения дифракционной картины помимо обычных зон построим дополнительные зоны от края диска.



$$A_p = A_{\infty} + A_{\text{ост}}$$

Зоны Френеля от края диска будем строить по принципу – расстояния от границ двух соседних зон до точки наблюдения отличаются на половины длины волны. Амплитуда в точке наблюдения

$A_p = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \dots + \left(\frac{A_{m-1}}{2} - A_m + \frac{A_{m+1}}{2}\right) + \dots$  с учётом оценки  $A_m \approx \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$  будет равна  $A_p = \frac{A_1}{2}$ . Следовательно, в точке наблюдения, в центре геометрической тени всегда будет светлое пятно –

максимум интенсивности. Это пятно называется пятном Пуассона.

3) 1) Рассмотрим сферу радиуса  $r < R$ , тогда заряд, включенный в рассматриваемую сферу  $q_{\text{вкл}} = \int_0^r 4\pi r^2 dr \rho = \int_0^r 4\pi r^2 \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) dr$ . Теперь, применив теорему Гаусса,

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{вкл}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_0^r 4\pi r^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right) dr \quad (\text{где } E_r - \text{проекция электрического поля вдоль радиальной линии}) \quad E_r = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left[r - \frac{3r^2}{4R}\right].$$

2) Если  $r > R$ , то  $q_{\text{вкл}} = \int_0^R 4\pi r^2 dr \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$  (т.к. за пределами шара нет заряда).

По теореме Гаусса  $E_r 4\pi r^2 = \int_0^R 4\pi r^2 dr \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) / \varepsilon_0$ , тогда  $E_r = \frac{\rho_0}{r^2 \varepsilon_0} \left[\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4R}\right] = \frac{R^3 \rho_0}{12r^2 \varepsilon_0}$ .

## Билет 30

1) Поток вектора магнитной индукции через площадку  $dS$  называется скалярная физическая величина равная:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS;$$

$$B_n = B \cos \alpha.$$

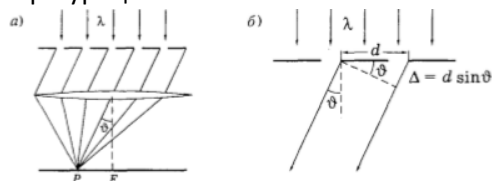
Теорема Гаусса для поля  $\vec{B}$ : Поток вектора  $\vec{B}$  сквозь любую замкнутую поверхность равен 0:  $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ , поток не зависит от формы поверхности.

$$\text{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

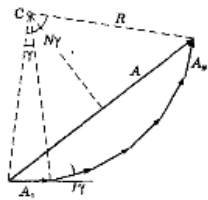
$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

2)

Дифракционная решётка предназначена для разложения света в спектр и измерения длин волн. Представляет собой стеклянную или металлическую пластинку, на которых нанесено много прямых равноотстоящих штрихов одинаковой конфигурации.



$d \cdot \sin \theta = \pm \frac{m'}{N} \lambda$  – это выражение представляет собой условие интерференционных минимумов (при целочисленных значениях  $m'$ , кроме 0, N, 2N,...). Оно же содержит и условие для главных максимумов (при  $m'=0, N, 2N, \dots$ ).



Интенсивность главных максимумов.

Из диаграммы видно, что результирующую амплитуду  $A$  при интерференции  $N$  волн можно записать:  $A = 2R \sin(N\gamma/2)$ , где  $R$  – вспомогательный радиус дуги окружности, описанной вокруг данной цепочки векторов. Кроме того, амплитуда  $A_1$  колебаний от каждой щели, как видно из рисунка:  $A_1 = 2R \sin(\gamma/2)$ , в итоге получаем:

$$A = A_1 \frac{\sin(N\gamma/2)}{\sin(\gamma/2)}, \text{ учитывая, что } A_1 \text{ определяется } A = A_0 \frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2}, \text{ и } I \sim A^2:$$

$$I = I_0 = \frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2} * \frac{\sin(N\gamma/2)}{\sin(\gamma/2)}, \text{ где } \delta = 2\pi b \sin \vartheta / \lambda, \gamma = 2\pi d \sin \vartheta / \lambda.$$

Основные характеристики спектрального прибора:

1. Угловая дисперсия  $D$  характеризует степень пространственного (углового) разделения волн с различными длинами  $\lambda$ . По определению  $D = d\vartheta/d\lambda$ . Дифференцируя формулу  $d \sin \vartheta_m = \pm m\lambda$  при данном  $m$  находим для решётки  $d \cos \vartheta_m d\vartheta = m d\lambda$ , откуда

$$\frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \vartheta_m}. \text{ Видно, что для заданного порядка } m \text{ спектра угловая дисперсия тем больше, чем меньше период } d$$

решётки, так же дисперсия растёт с увеличением порядка  $m$  спектра.

2. Разрешающая способность  $R$ . По определению,  $R = \lambda/\delta\lambda$ , где  $\delta\lambda$  – наименьшая разность длин волн спектральных линий, при которых эти линии воспринимаются ещё раздельно, т.е. разрешаются.

Согласно критерию Рэля, спектральные линии с разными длинами волн, но одинаковой интенсивности, считаются разрешёнными, если главный максимум одной спектральной линии совпадает с первым максимумом другой.

Итак, согласно критерию Рэля и  $d \sin \vartheta = \pm \frac{m'}{N} \lambda$ , необходимо, чтобы максимум  $m$ -го порядка ( $m' = mN$ ) линии с длиной волны  $\lambda + \delta\lambda$  совпадают по направлению с первым минимумом линии  $\lambda(m' = mN + 1)$ , т.е.

$$d \sin \vartheta_m = m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right) \lambda. \text{ Отсюда } \lambda/\delta\lambda = mN - \text{ искомая формула для разрешающей способности.}$$

3. Область дисперсии  $\Delta\lambda$  – это ширина спектрального интервала, при которой ещё нет перекрытия спектров соседних порядков. Если спектры соседних порядков перекрываются, то спектральный аппарат становится непригодным для исследования соответствующего участка спектра. Длинноволновый конец спектра  $m$ -го порядка совпадает с коротковолновым концом спектра  $(m+1)$ -го порядка, если  $m(\lambda + \Delta\lambda) = \lambda(m+1)$ , откуда область дисперсии:  $\Delta\lambda = \lambda/m$ .

$$3) . \Delta = 2dn + \frac{\lambda}{2}, \Delta = 2m \frac{\lambda}{2}, 2dn + \frac{\lambda}{2} = 2m \frac{\lambda}{2}, d_{\min} \text{ соответствует } m=1;$$

$$2dn = \frac{\lambda}{2}, d = \frac{\lambda}{4n} = 0,1 \text{ мкм}$$