Лекция № 7

Механические волны

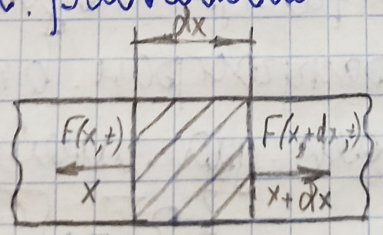
- Волна – физ. процесс распространения возмущений в веществе.
  Возмущения – ф-ия координат $\bar{r}(x,y,z)$ и времени t.
  Может быть скалярной $f = f(\bar{r};t)$ или векторной $\bar{f} = \bar{f}(\bar{r};t)$.
- Виды движения в пространстве или в теле волн:
  1) одномерные (в стержнях, струнах и др.)
  2) поверхностные (на границе раздела сред)
  3) пространственные (в любой физ. среде занимающая опред. область пространства)
- Виды волн по направлению распр. возмущения:
  1) продольные (возм. напр. вдоль движ. волн)
  2) поперечные (возм. напр. ⊥ направлению движ. волн)
- Упругие волны – процесс распр. возмущ. в упруг. среде.
- Звуковые (акустические) волны – процесс распр. в упругой среде колебаний

Упругие волны в стержне

В упругом стержне распростр. продольн. волны.

$\xi(x;t)$ – смещение частицы в момент времени t относит. полож. равновесия

коорд полож равновесия



Смещение происходит из-за того, что на его границах дейст. разн. силы.

Изменение импульса эл-а: $\rho S d \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(x+dx,t) - F(x,t)$

плотность материала

ускорение эл-а стержня dx

площадь поперечного сечения стержня

$$F(x+dx,t) - F(x,t) = \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

$$\frac{F(x,t)}{S} = \sigma(x,t)$$ – напряжение в стержне $\left[\frac{Н}{м^2}\right]$

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$ – деформация (отн. изменение длины)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{d t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$$ – волновое ускорение

скорость продольных упругих волн

$$v = \sqrt{\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}$$

Если материал стержня обладает линейной упругостью, (свойства материала подчиняются закону Гука)

$$\sigma = E\varepsilon$$

модуль Юнга

то скорость упругих волн в этой среде: $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

$\xi(x;t) = f_1(vt - x) + f_2(vt + x)$ – общее решение волнового уравнения

f_1 – прямая волна, распростран. вдоль оси x

f_2 – обратная волна, распростран. в противоположн. направл.

Скорость поперечных волн для линейно-упругой среды

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}}$$

$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ – модуль сдвига

μ – коэф. Пуассона материала

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$ – волновое уравнение,

описывающее распростран возмущения в неограник. упр. сред.

$\xi = \xi(x, y, z, t)$ – смещение частицы среды

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ – дифференц оператор Лапласа

Скорость продольной волны (для твердой линейно-упр тела)

$$v_{пр} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$ – модуль объемной упругости.

Скорость продольн. волны (внутри газообразн./жидкой среды)

$$v = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$ p – давление среды

ρ – плотность среды

Скорость волн зависит от физ.-мех. свойств сост. среды

Характеристики волновых процессов

Многие волновые процессы периодические => параметры среды изменятся также периодически

$\xi = A\cos\omega t$ – источник гармоник. колебаний (в стержне)

амплитуда колебаний; циклич. частота

=> распростран. волна гармоническая

Приход волны в произв. точку запаздывает на $\frac{x}{v}$

- $\xi(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$ – ур-е прямой волны, распр. в стержне в полож. направл.

- $\xi(x,t) = A\cos\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)$ – — // — в противополож. направл.

$\xi(x,t) = A\cos\frac{\omega}{v}(vt - x)$
$\xi'(x,t) = A\cos\frac{\omega}{v}(vt + x)$ } общ. реш. волнового ур-я

$\Phi = \omega(t - \frac{x}{v})$
$\Phi' = \omega(t + \frac{x}{v})$

- Волновое поле – область среды, приведенн. в возмущ. состоян. распространяющ. волной.
- Фронт волны – геометрич. место точек, состав. поверхность, на котор. волна в произвольн. момент времени имеет одинак. фазу
- Передний фронт волн – граничная поверхность, отделяющ. волн. поле от области невозмущ. состояния.
- Форма фронта определяет вид волн:
  1) плоские
  2) цилиндрические
  3) сферические и др.
- Длина волны – расстояние между 2 ближайшими частицами среды, фазы колебаний котор. одинаковы

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = vT$$

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ – частота колебаний частиц среды в волновом поле

$T = \frac{1}{\nu}$ – период колебаний частиц среды в волновом поле

- Монохроматическая волна – гармоническая волна, распростр. с постоян. амплитудой и частотой.

$\xi = A\cos(\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi)$ – ур-е плоской монохром. волны, распр. вдоль оси OX

$A = const$; $\omega = const$; $\varphi = const$

$\Phi = \omega(t - \frac{x}{v}) = \omega t - \omega\frac{x}{v} = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x$

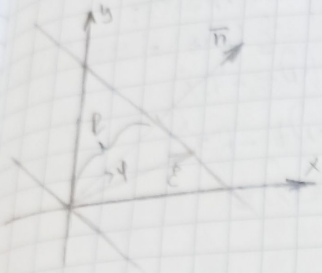
- $K = \frac{2\pi}{x} = \frac{\omega}{v}$ – волновое число

$\Phi = \omega t - Kx$

$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$

Если плоская волна распростр. в произвольном напр., то гармонаудиофрона определяем через волн. вектор

- $\bar{k} = k\bar{n}$ – волн вектор



Фаза колебаний в начале координат на фронте волны $\varphi = \omega t$

За τ фронт волны сместится на l ($l = v\tau$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = \omega\left(t - \frac{l}{v}\right) = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} l$, т.к. $l = (\bar{n};\bar{r})$

$\frac{2\pi}{\lambda} l = kl = k(\bar{n};\bar{r}) = (\bar{k}|\bar{r})$

$\xi(\bar{r};t) = A\cos(\omega t - (\bar{k};\bar{r}))$ – ур-е плоской волны распростр. в произв. направлении

$\xi(x;t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$

$\xi(\bar{r};t) = Ae^{i(\omega t - (\bar{k};\bar{r}))}$ комплексное представление ур-ния гармонической волны

Формула Эйлера: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$x = \frac{1}{k}(\omega t - \varphi)$ – коорд. точек с один. фазой

$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$ – фазовая скорость

$\left(\frac{\omega}{k} = 2\pi\nu\frac{\lambda}{2\pi} = \nu\lambda = v\right.$

Продольная волна – сферическая, если физ. величина этого прод. зависит только от радиуса r и времени t

$\xi = \xi(r,t)$ – смещ. частиц в сфер. волне

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} + \frac{2\partial\xi}{r\partial r} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$ – волновое ур-е для сфер. волн ($\frac{\partial\xi}{\partial r} \gg \frac{\xi}{r}$ в среде слабые возмущения)

v – скорость сферической волны

$\xi(r,t) = \frac{1}{r} f_1(vt - r) + \frac{1}{r} f_2(vt + r)$

f_1 ; f_2 – ф-ии расходящ. и сходящ. сферические волн.

Энергия упругой волны

Пусть:

В упругой среде распростр. плоская монохрам. волна:

$\xi(x;t) = A\cos(\omega t - kx)$

Скорость точку среды: $u(x;t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kx)$

$\varepsilon(x;t) = \frac{\partial \xi}{\partial x} = Ak\sin(\omega t - kx)$

ΔV_0 – объем в волновом поле; в ΔV_0 u и ε одинаковы

$$\left.\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2}\rho u^2 \Delta V_0 \\ \Delta U &= \frac{1}{2}\rho v^2 \varepsilon^2 \Delta V_0 \end{aligned}\right\} \text{кинетич. и потенциальн. энергия}$$

$\Delta E = \Delta T + \Delta U = \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2\varepsilon^2)\Delta V_0$ – полн. энергия ΔV

$w = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{dE}{dV}$ – объемная плотность энергии

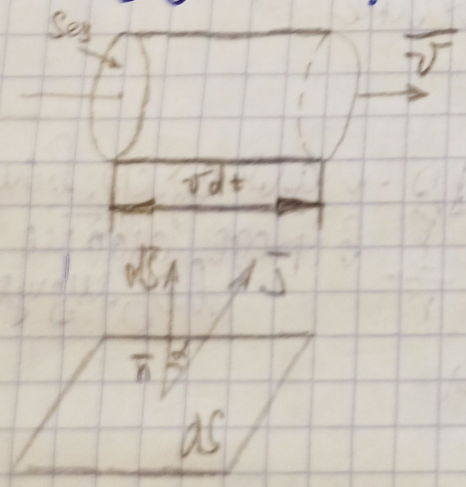
$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$ – объем. плотность упругой волны

$\langle w \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T w(x,t)\,dt = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 = \frac{1}{2}\rho u_{max}^2$ – локальная

универс. характер.

Поток энергии ($\Phi_э$) = кол-ву энергии переносимой волной через поверхность в ед. времени $\Phi_э = \frac{dE}{dt}$ [Вт]

Плотность потока энергии j = потоку энергии через единичную площадку (⊥ направлению распростран. волны) $j = \frac{\Phi_э}{S_{ед}}$



$dV = S_{ед} v\,dt$

$j = \frac{dE}{S_{ед}dt} = \frac{w\,dV}{S_{ед}dt} = \frac{w S_{ед} v\,dt}{S_{ед}\,dt} = wv$

$\vec{j} = w\vec{v}$ – вектор плотности потока энергии (вектор Умова)

$d\Phi_э = (\vec{j}; d\vec{S})$

$d\vec{S} = dS\vec{n}$ – вектор элементарной площадки

$\Phi_э = \int d\Phi_э = \int_S (\vec{j}; d\vec{S})$

Интерференция света

Принцип суперпозиции (наложения) волн: колебание любой частицы можно представить в виде суммы колебаний, проходящих через эту точку

Когерентные волны — волны, у которых разность фаз — величина постоянная $\Delta\varphi = const$

Интерференц. происходит из-за суперпозиции когерентных волн.

В зависимости от соотношения между фазами волн происходит их взаимное усиление или ослабление, т.е происх перераспред. энергии

Частный случай: стоячая волна (наложение 2-х монохроматических волн, которые распростран. в противоположн. направлениях)

$$\left.\begin{aligned} \xi_1(x;t) &= A\cos(\omega t - kx) \\ \xi_2(x;t) &= A\cos(\omega t + kx) \end{aligned}\right\}$$ ур-е плоских монохром. волн прямой и обратной

При наложении: $\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$ — ур-е стоячей волны

$A_{ст} = 2A\cos(kx)$

$kx = \frac{2\pi}{\lambda}x = \pi n \quad (n = 0, \pm 1; \pm 2; \dots)$

$x = n\frac{\lambda}{2}$ — коорд. точек, где наиб. амплитуда колебаний (пучность)

$A_{ст} = 2A$

$kx = \frac{2\pi}{\lambda}x = (2\pi + 1)\frac{\pi}{2}$

$x = (2\pi + 1)\frac{\lambda}{4}$ — коорд. точек, где амплит. колеб. $= 0$

$A_{ст} = 0$

Расстояние между ближайшими узлами (пучностями) = длине стоячей волны $\lambda_{ст} = \frac{\lambda}{2}$ (λ — длина волн. исходн)

В стоячей волне нет переноса энергии

Ответы на вопросы:

1) Волновой процесс – физический процесс распространения возмущений в веществе. В волновое ур-е входят скорость распр. волны; смещение частицы в момент времени t.

2) Продольные волны – волны, в котор. возмущ. напр. вдоль движ. волны
Поперечная волна – волна, в котор. возмущ. напр. перп. —"—

3) Фронт волны – геом. место точек, составляющ. поверхность, на которой волна в произвольный момент времени имеет одну фазу.
Виды: плоская; цилиндрическая; сферическая и др.

4) Волновой вектор; – вектор, направление которого перпендик. фазовому фронту волны, а абсолютн. значение = волновому числу

5) Монохроматическая волна – гармонич. волна, распр. с постоянной амплитудой и частотой.

6) Интерференция происходит из-за суперпозиции когерентных волн

7) Биения волна происходит из-за наложения 2 монохроматических волн, которые распр. в противоположн. напр.

8) Объемная плотность энергии механ. волны. $w = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{dE}{dV}$

9) Поток энергии равно кол-ву энергии переносимой волной через поверхность в ед. времени [Вт]

10) Вектор Умова (вектор плотности потока энергии):

$$\vec{j} = w\vec{v}$$