Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)
Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»
Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

Домашнее задание №2 Часть 1 по дисциплине
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Вариант 14

Выполнил:
студент группы РК6-36Б
Петраков С.А.

Москва
2020

Оглавление

Задача 1.

Известно, что плотность распределения $f(x)$ одномерной случайной величины X представляет собой трапецию, для которой (здесь и далее значения всех параметров берутся из таблиц исходных данных к ДЗ №1):

$f(R1) = 0$

$f(R1 + G1) = h$

$f(R1 + G1 + B1) = h,$

$f(R1 + G1 + B1 + R2) = 0$

R1 = 11

G1 = 10

B1 = 11

$f(11) = 0$

$f(21) = h\left(\frac{1}{21}\right)$

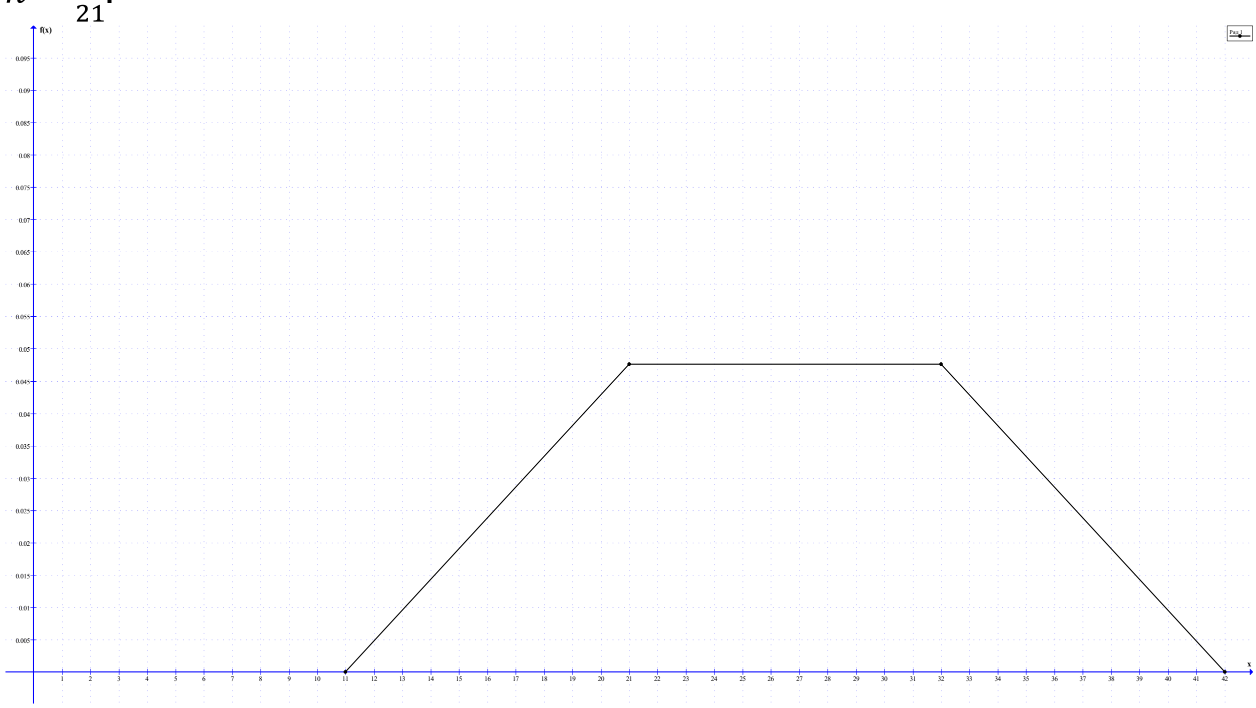
$f(32) = h\left(\frac{1}{21}\right)$

$f(42) = 0$

1. Рассчитать величину h;

Т.к. площадь под графиком плотности распределения равна 0. Мы знаем, что график образует трапецию, тогда $S = \frac{a+b}{2}h$, где $a = 31, b = 11, S = 1$. Тогда

$h = \frac{1}{21}$.



2. Записать аналитическое выражение для функции плотности распределения f(x).

Функция плотности распределения является кусочной:

- $y = k_1 x + b_1$

  $\begin{cases} \frac{1}{21} = k_1 21 + b_1 \\ 0 = k_1 11 + b_1 \end{cases}$, о тсюда $\begin{cases} k_1 = \frac{1}{210} \\ b_1 = -\frac{11}{210} \end{cases}$, тогда $y = \frac{1}{210}x - \frac{11}{210}$

- $y = k_2 x + b_2$

  $\begin{cases} \frac{1}{21} = k_2 32 + b_2 \\ 0 = k_2 42 + b_2 \end{cases}$, о тсюда $\begin{cases} k_2 = -\frac{1}{210} \\ b_2 = \frac{1}{5} \end{cases}$, тогда $y = -\frac{1}{210}x + \frac{1}{5}$

Тогда кусочная функция будет записана так:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{210}x - \frac{11}{210}, x \in [11; 21) \\ \frac{1}{21}, x \in [21; 32) \\ -\frac{1}{210}x + \frac{1}{5}, x \in [32; 42] \end{cases}$$

3. Записать аналитическое выражение для функции распределения F(x).

Т.к. $f(x) = (F(x))'$, то $F(x) = \int f(x)\,dx$

Интегрируем каждую часть кусочной функции:

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{210}x - \frac{11}{210}\right)dx = \frac{x^2}{420} - \frac{11x}{210} + C;$$

$$\frac{11^2}{420} - \frac{11*11}{210} + C = 0; C = \frac{121}{420};$$

$$F(x) = \int \frac{1}{21}dx = \frac{x}{21} + C;$$

$$\frac{21}{21} + C = \frac{21^2}{420} - \frac{11*21}{210} + \frac{121}{420}; C = -\frac{16}{21};$$

$$F(x) = \int -\frac{1}{210}x + \frac{1}{5}dx = -\frac{x^2}{420} - \frac{x}{5} + C;$$

$$-\frac{42^2}{420} + \frac{42}{5} + C = 1; C = -\frac{16}{5};$$

Итоговый вид функции распределения:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{420} - \frac{11x}{210} + \frac{121}{420}, x \in [11; 21) \\ \frac{x}{21} - \frac{16}{21}, x \in [21; 32) \\ -\frac{x^2}{420} - \frac{x}{5} - \frac{16}{5}, x \in [32; 42] \end{cases}$$

4. Рассчитать математическое ожидание случайной величины M(X).

$$M(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(x * f(x)\right)dx =$$

$$= \int_{11}^{21} x\left(\frac{1}{210}x - \frac{11}{210}\right)dx + \int_{21}^{32} x\left(\frac{1}{21}x\right)dx +$$

$$+ \int_{32}^{42} x\left(-\frac{1}{210}x + \frac{1}{5}\right)dx = \frac{265}{63} + \frac{23507}{63} - \frac{4006}{63} = \frac{19766}{63} =$$

$$= 313.746031$$

5. **Рассчитать дисперсию случайной величины D(X).**

$$D(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(x - M(x)\right) f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left(x - x * f(x)\right)^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{11}^{21} \left(x - x\left(\frac{1}{210}x - \frac{11}{210}\right)\right)^2 \left(\frac{1}{210}x - \frac{11}{210}\right) dx$$

$$+ \int_{21}^{32} \left(x - x\left(\frac{1}{21}x\right)\right)^2 \left(\frac{1}{21}x\right) dx +$$

$$+ \int_{32}^{42} \left(x - x\left(-\frac{1}{210}x + \frac{1}{5}\right)\right)^2 \left(-\frac{1}{210}x + \frac{1}{5}\right) dx$$

$$= \frac{3917545}{55566} + \frac{676548631}{555660} + \frac{7802420}{27783} = \frac{96863609}{61740} = 1568.8955$$

Задача 2.

Имеется функция $\varphi(x) = \left(x - (R2 + G2)\right) * \left(x - (R2 + G2 + B2)\right)$. Будем рассматривать случайную величину Y как результат вычисления функции φ для случайного аргумента X (рассмотренного в задаче 1).

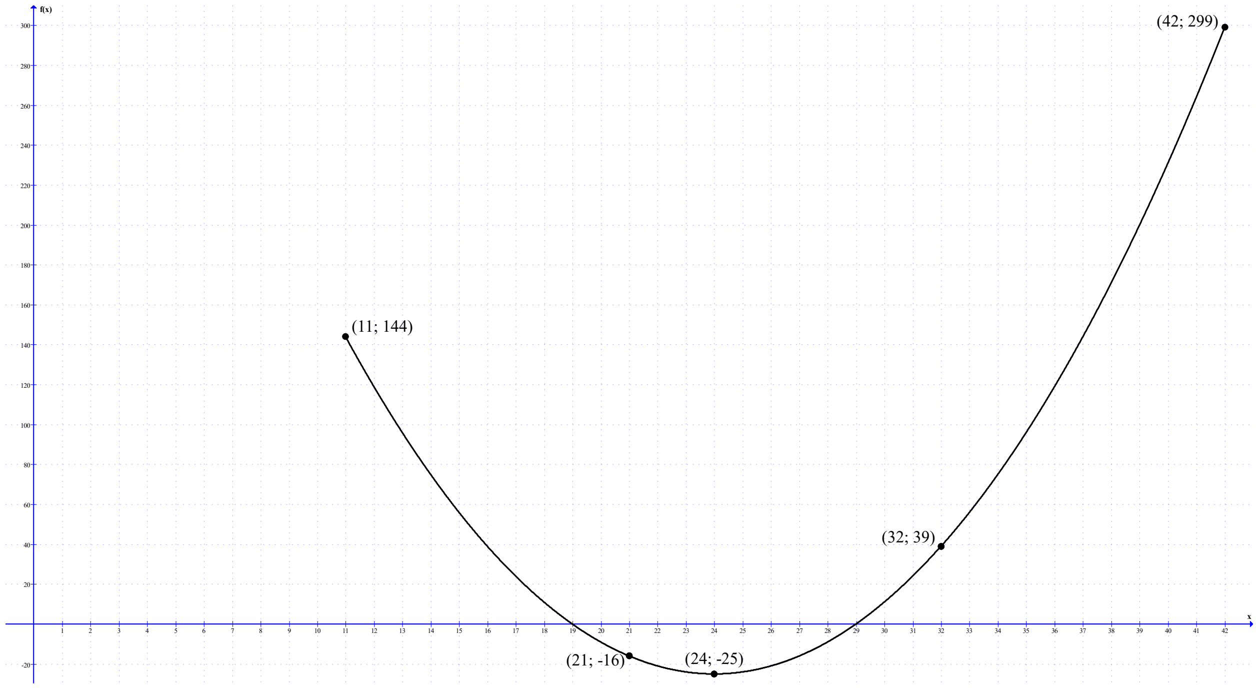
R2 = 10

G2 = 9

B2 = 10

$$\varphi(x) = (x - 19) * (x - 29) = (x - 24)^2 - 25$$

$$x \in [11; 42]$$



1. Записать аналитическое выражение для функции плотности распределения f(y).

Функция возрастает на $x \in [11; 24]$ и убывает на $x \in [24; 42]$.

Найдем $\psi_1(y), \psi_2(y)$ таких, что $\varphi\left(\psi_1(y)\right) = \varphi\left(\psi_2(y)\right) = y$.
Тогда $\psi_1(y) = 24 - \sqrt{y + 25}$, $\psi_2(y) = 24 + \sqrt{y + 25}$.

Тогда $f(\psi_1)$ и $f(\psi_2)$ равны:

$$f(\psi_1) = \begin{cases} \frac{1}{210}\left(24 - \sqrt{y + 25}\right) - \frac{11}{210}, x \in [11; 21) \\ \frac{1}{21}, x \in [21; 32) \\ -\frac{1}{210}\left(24 - \sqrt{y + 25}\right) + \frac{1}{5}, x \in [32; 42] \end{cases}$$

$$f(\psi_2) = \begin{cases} \frac{1}{210}\left(24-\sqrt{y+25}\right) - \frac{11}{210}, x \in [11; 21) \\ \frac{1}{21}, x \in [21; 32) \\ -\frac{1}{210}\left(24-\sqrt{y+25}\right) + \frac{1}{5}, x \in [32; 42] \end{cases}$$

Для объединения этих двух функций воспользуемся формулой $\sum_{i=0}^{n} f(\psi_i)|\psi_i|$. Т.к. $f(x)$ – кусочная функция, а $\varphi(x)$ имеет два промежутка монотонности. То искомая функция $f(y)$ будет иметь промежутки: $[-25; -16), [-16; 39), [39; 144), [144,299]$.

$$|\psi_1'| = |\psi_2'| = \frac{1}{2\sqrt{y+25}}$$

Тогда:

$f(\psi_1) * |\psi_1'| + f(\psi_2) * \ |\psi_2'|, \{\ x_1, x_2 \in [21, 32), y \in [-25, -16)\}$

$f(\psi_1) * |\psi_1'| + f(\psi_2) * |\psi_2'|, \{x_1 \in [11{,}21)\ , x_2 \in [21, 32), y \in [-16, 39)\}$

$f(\psi_1) * |\psi_1'| + f(\psi_2) * |\psi_2'|, \{x_1 \in [11{,}21)\ , x_2 \in [32{,}42], y \in [39{,}144)\}$

$f(\psi_2) * |\psi_2'|\ \{x_2 \in [32, 42]\ ), y \in [144, 299]\}$

Итог:

$$f = \begin{cases} \frac{1}{21\sqrt{y+25}}, y \in [-25, -16) \\ -\frac{23}{42\sqrt{y+25}} + \frac{1}{42}, y \in [-16, 39) \\ \frac{13084}{7385\sqrt{y+25}} - \frac{3271}{44310}, y \in [39{,}144) \\ \frac{2472}{1055\sqrt{y+25}} - \frac{103}{1055}, y \in [144, 299] \end{cases}$$

2. Записать аналитическое выражение для функции распределения F(y).

Проинтегрируем все части f(y):

$$\int \frac{1}{21\sqrt{y+25}} dy = \frac{2\sqrt{25+y}}{21} + C$$

$$\frac{2\sqrt{(25-25)}}{21} + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\int -\frac{23}{42\sqrt{y+25}}+\frac{1}{42}dy=\frac{\left(y\ -\ 46\sqrt{25+y}\right)}{42}+C$$

$$\frac{\left(-16\ -\ 46\sqrt{25-16}\right)}{42}+C=\frac{2\sqrt{(25-16)}}{21}+0\Longrightarrow C=\frac{83}{21}$$

$$\int \frac{13084}{7385\sqrt{y+25}}-\frac{3271}{44310}=\frac{3271\left(-y\ +\ 48\sqrt{25\ +\ y}\right)}{44310}+C$$

$$\frac{3271\left(-39\ +\ 48\sqrt{25\ +\ 39}\right)}{44310}+C=\frac{\left(39\ -\ 46\sqrt{25+39}\right)}{42}+\frac{83}{21}\Longrightarrow C=-\frac{18578}{633}$$

$$\int \frac{2472}{1055\sqrt{y+25}}-\frac{103}{1055}dy=\frac{103\left(-y\ +\ 48\sqrt{25+y}\right)}{1055}+C$$

$$\frac{103\left(-299\ +\ 48\sqrt{25+299}\right)}{1055}+C=1\Longrightarrow C=-\frac{11428}{211}$$

$$f=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{25+y}}{21}+0, y\in[-25,-16)\\ \dfrac{\left(y\ -\ 46\sqrt{25+y}\right)}{42}+\dfrac{83}{21}, y\in[-16,39)\\ \dfrac{3271\left(-y\ +\ 48\sqrt{25\ +\ y}\right)}{44310}-\dfrac{18578}{633}, y\in[39,144)\\ \dfrac{103\left(-y\ +\ 48\sqrt{25+y}\right)}{1055}-\dfrac{11428}{211}, y\in[144,299]\end{cases}$$

3. **Рассчитать математическое ожидание случайной величины M(Y).**

$$M(Y) = M\big(\varphi(X)\big) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) * f(x)\,dx =$$

$$= \int_{11}^{21} ((x-24)^2 - 25)\left(\frac{1}{210}x - \frac{11}{210}\right)dx$$

$$+ \int_{21}^{32} ((x-24)^2 - 25)\left(\frac{1}{21}x\right)dx +$$

$$+ \int_{32}^{42} ((x-24)^2 - 25)\left(-\frac{1}{210}x + \frac{1}{5}\right)dx = -\frac{15881}{252} = -63.0198$$

4. **Рассчитать дисперсию случайной величины D(Y).**

$$D(Y) = D\big(\varphi(X)\big) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\varphi(x) - M\big(\varphi(X)\big)\Big)^2 * f(x)\,dx$$

$$= \int_{11}^{21} \Big((x-24)^2 - 25 - M\big(\varphi(X)\big)\Big) \mathrm{\hat{}}2 \left(\frac{1}{210}x - \frac{11}{210}\right)dx$$

$$+ \int_{21}^{32} \Big((x-24)^2 - 25 - M\big(\varphi(X)\big)\Big)^2 \left(\frac{1}{21}x\right)dx +$$

$$+ \int_{32}^{42} \Big((x-24)^2 - 25 - M\big(\varphi(X)\big)\Big)^2 \left(-\frac{1}{210}x + \frac{1}{5}\right)dx$$

$$= 1934.68 + 48933.1 + 7815.27 = 85683.05$$