Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»

Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

Домашнее задание №2 по дисциплине

«Прикладная механика»

Вариант 8

Выполнила: студент группы РК6-34Б, Котельникова Е.Ю.

Проверил: декан факультета РК, Шашурин Г.В.

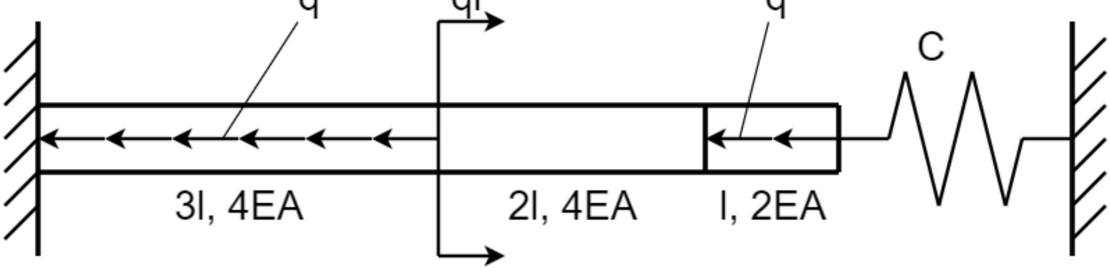
Москва

2019

Метод начальных параметров в задаче растяжения-сжатия

Для данной системы требуется:

1. Записать в матричном виде уравнения состояния стержня при растяжении-сжатии.
2. Разбить систему на отдельные стержни, ввести глобальную и локальные системы координат. Записать в матричном виде уравнения изменения вектора состояния при переходе от левого края системы к ее правому краю. Записать в матричном виде граничные условия. Сформировать СЛАУ для поиска вектора начальных параметров. Найти вектор начальных параметров.
3. Используя метод начальных параметров, вычислить перемещения сечений стержня при $C \to 0$ и при $C \to \infty$.



Решение

С помощью системы ДУ определим нагрузки и перемещения на участке стержня с распределенной нагрузкой q:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dz} = -q \\ \dfrac{dW}{dz} = \dfrac{N}{EA} \end{cases} => \begin{cases} N(z) = N_0 - \int_0^z q dz = N_0 - qz + 0 * W_0 \\ W(z) = \int_0^z \dfrac{N_0 - qz}{EA} dz = \dfrac{N_0 z}{EA} - \dfrac{qz^2}{2EA} + W_0 \end{cases}$$

Запишем систему в матричном виде:

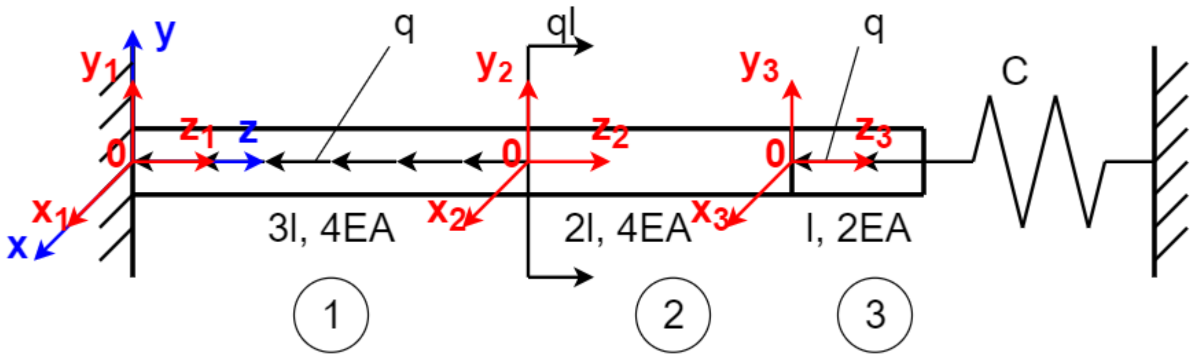
$$\begin{pmatrix} N(z) \\ W(z) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{z}{EA} & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} N_0 \\ W_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -qz \\ -\dfrac{qz^2}{2EA} \end{pmatrix}$$

Или в компактной форме:

$$Y(z) = A(z) * Y_0 + Q(z), \text{где}$$

$$Y(z) = \begin{pmatrix} N(z) \\ W(z) \end{pmatrix}, A(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{z}{EA} & 1 \end{bmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} N_0 \\ W_0 \end{pmatrix}, Q(z) = \begin{pmatrix} -qz \\ -\dfrac{qz^2}{2EA} \end{pmatrix}$$

Введем глобальную и локальные системы координат, обозначим участки:



Найдем $A(z)$ и $Q(z)$ для каждого из участков:

$$A_1(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{4EA} & 1 \end{bmatrix} \quad Q_1(z) = \begin{pmatrix} qz \\ \frac{qz^2}{8EA} \end{pmatrix}$$

$$A_2(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{4EA} & 1 \end{bmatrix} \quad Q_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{2EA} & 1 \end{bmatrix} \quad Q_3(z) = \begin{pmatrix} qz \\ \frac{qz^2}{4EA} \end{pmatrix}$$

Найдем начальное состояние первого участка Y_1^0.

Составим уравнение состояния для 1-го участка:

$$Y_1(3l) = A_1(3l) * Y_1^0 + Q_1(3l),\ \ Y_1^0 - ?$$

Составим уравнение состояния для 2-го участка:

$$Y_2(2l) = A_2(2l) * Y_2^0$$

Начальные параметры для 2-го участка:

$$Y_2^0 = Y_1(3l) + N_2, \text{где } N_2 = \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix}$$

Составим уравнение состояния для 3-го участка:

$$Y_3(l) = A_3(l) * Y_3^0 + Q_3(l)$$

Начальные параметры для 3-го участка:

$$Y_3^0 = Y_2(2l)$$

Запишем уравнение равновесия:

$$N_3(l) + C * W_3(l) = 0$$

В матричном виде:

$$L * Y_3(l) = 0, \text{где } L = \begin{pmatrix} 1 & C \end{pmatrix}$$

$$L * Y_3(l) = L\Big(A_3(l) * Y_3^0 + Q_3(l)\Big) = L\big(A_3(l) * Y_2(2l) + Q_3(l)\big)$$
$$= L\big(A_3(l) * A_2(2l) * (Y_1(3l) + N_2) + Q_3(l)\big)$$
$$= L\big(A_3(l) * A_2(2l) * (A_1(3l) * Y_1^0 + Q_1(3l) + N_2) + Q_3(l)\big) = 0$$

$$L * A_3(l) * A_2(2l) * A_1(3l) * Y_1^0 = -L * (A_3(l) * A_2(2l) * (Q_1(3l) + N_2) + Q_3(l))$$

Или в более краткой форме:

$$A * Y_1^0 = B, \quad \text{где } A = L * A_3(l) * A_2(2l) * A_1(3l),$$

$$B = -L * (A_3(l) * A_2(2l) * (Q_1(3l) + N_2) + Q_3(l))$$

Найдем матрицу A:

1. $L * A_3(l) = \begin{pmatrix} 1 & C \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{2EA} & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2EA+Cl}{2EA} & C \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} \frac{2EA+Cl}{2EA} & C \end{pmatrix} * A_2(2l) = \begin{pmatrix} \frac{2EA+Cl}{2EA} & C \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{2EA} & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA+Cl}{EA} & C \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} \frac{EA+Cl}{EA} & C \end{pmatrix} * A_1(3l) = \begin{pmatrix} \frac{EA+Cl}{EA} & C \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3l}{4EA} & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4EA+7Cl}{4EA} & C \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4EA+7Cl}{4EA} & C \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу B:

1. $A_3(l) * A_2(2l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{2EA} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{2EA} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{bmatrix}$
2. $Q_1(3l) + N_2 = \begin{pmatrix} 3ql \\ \frac{9ql^2}{8EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ql \\ \frac{9ql^2}{8EA} \end{pmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 2ql \\ \frac{9ql^2}{8EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ql \\ \frac{25ql^2}{8EA} \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 2ql \\ \frac{25ql^2}{8EA} \end{pmatrix} + Q_3(l) = \begin{pmatrix} 2ql \\ \frac{25ql^2}{8EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ql \\ \frac{ql^2}{4EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3ql \\ \frac{27ql^2}{8EA} \end{pmatrix}$
5. $-L * \begin{pmatrix} 3ql \\ \frac{27ql^2}{8EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & C \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3ql \\ -\frac{27ql^2}{8EA} \end{pmatrix} = -3ql - \frac{27ql^2C}{8EA}$

$$B = -3ql - \frac{27ql^2C}{8EA}$$

Решим СЛАУ:

$$A * Y_1^0 = B;$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4EA+7Cl}{4EA} & C \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} N_1^0 \\ W_1^0 \end{pmatrix} = -3ql - \frac{27ql^2C}{8EA}$$

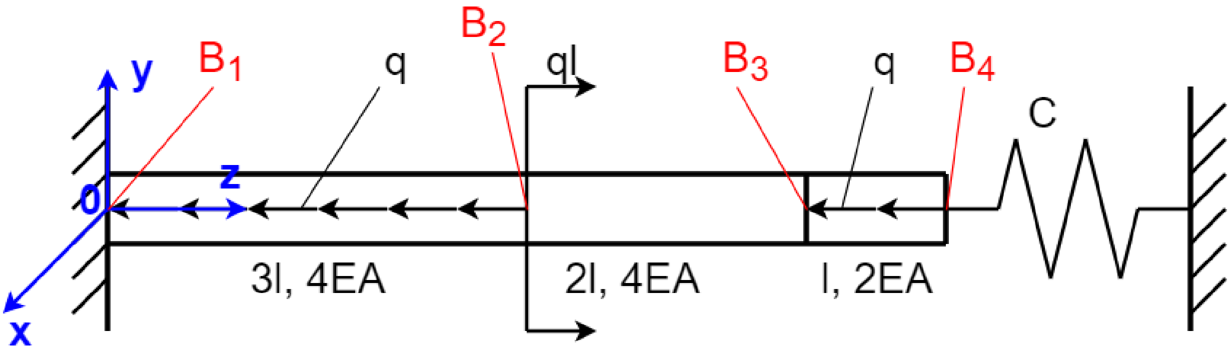
$$\frac{4EA+7Cl}{4EA} N_1^0 = -3ql - \frac{27ql^2C}{8EA}, \text{т. к. } W_1^0 = 0$$

$$N_1^0 = \frac{-24qlEA - 27ql^2C}{8EA + 14lC}$$

Тогда:

$$Y_1^0 = \begin{pmatrix} \frac{-24qlEA - 27ql^2C}{8EA + 14lC} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обозначим узлы $B_1 - B_4$:



При С → 0:

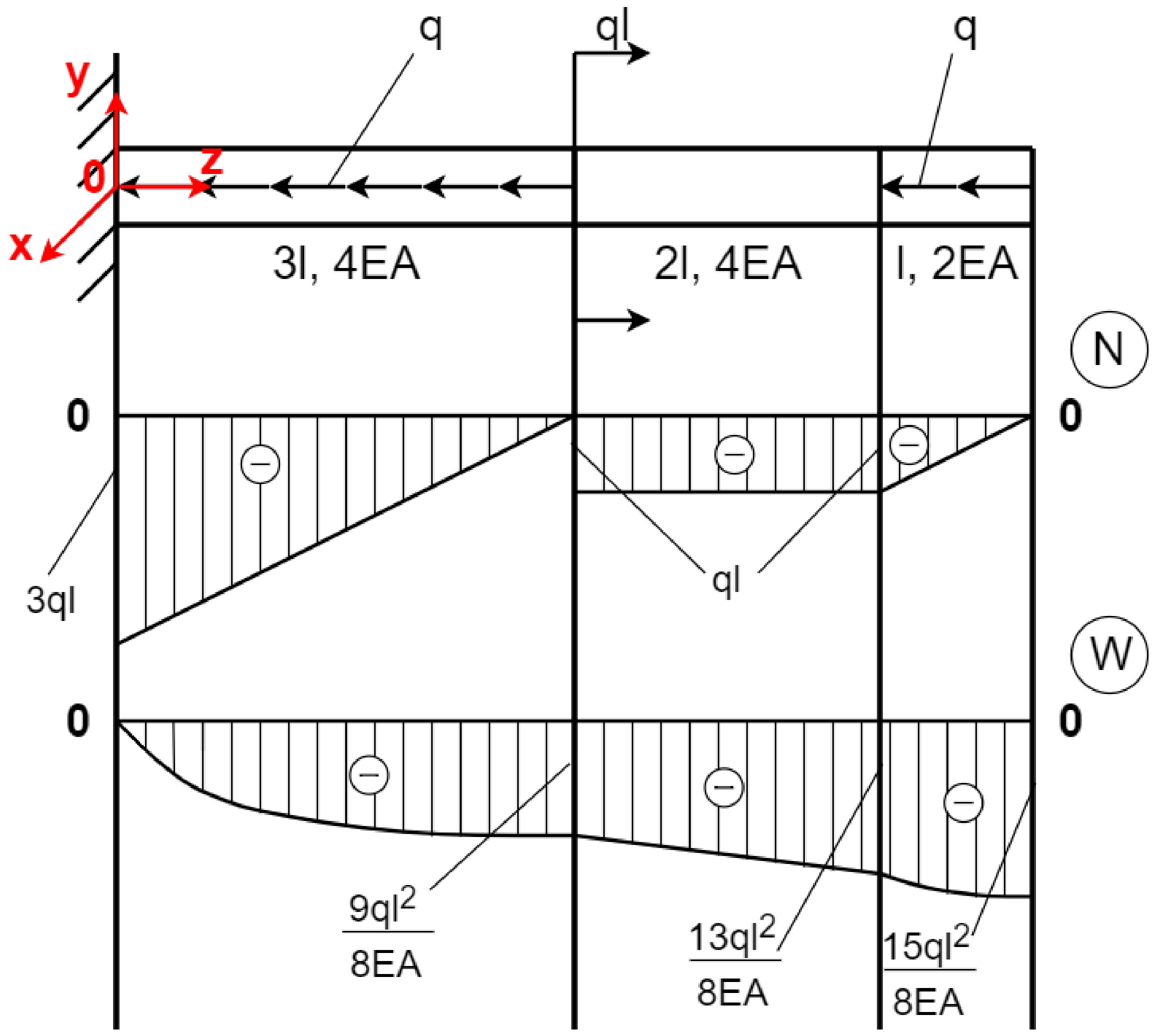
$$\lim_{C\to 0} Y_1^0 = \begin{pmatrix} \lim\limits_{C\to 0} \frac{-24qlEA - 27ql^2C}{8EA + 14lC} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3ql \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. $Y_1(3l) = A_1(3l) * Y_1^0 + Q_1(3l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3l}{4EA} & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} -3ql \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3ql \\ \frac{9ql^2}{8EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{9ql^2}{8EA} \end{pmatrix}$
2. $Y_2^0 = Y_1(3l) + N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{9ql^2}{8EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ql \\ -\frac{9ql^2}{8EA} \end{pmatrix}$
3. $Y_2(2l) = A_2(2l) * Y_2^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{2EA} & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} -ql \\ -\frac{9ql^2}{8EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ql \\ -\frac{13ql^2}{8EA} \end{pmatrix}$
4. $Y_3^0 = Y_2(2l) = \begin{pmatrix} -ql \\ -\frac{13ql^2}{8EA} \end{pmatrix}$

$$5.\ \ Y_3(l) = A_3(l) * Y_3^0 + Q_3(l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{2EA} & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} -ql \\ -\frac{13ql^2}{8EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ql \\ \frac{ql^2}{4EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{15ql^2}{8EA} \end{pmatrix}$$

$$W_{B_1} = 0\ \ W_{B_2} = -\frac{9ql^2}{8EA}\ \ W_{B_3} = -\frac{13ql^2}{8EA}\ \ W_{B_4} = -\frac{15ql^2}{8EA}$$

Сравним значения перемещений, полученные методом начальных параметров, со значениями, полученными при построении эпюр в ДЗ №1:



Значения перемещений, полученные разными методами, совпадают.

При C → ∞:

$$\lim_{C\to\infty} Y_1^0 = \begin{pmatrix} \lim\limits_{C\to\infty} \frac{-24qlEA - 27ql^2C}{8EA + 14lC} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{27ql}{14} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1.\ \ Y_1(3l) = A_1(3l) * Y_1^0 + Q_1(3l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3l}{4EA} & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} -\frac{27ql}{14} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3ql \\ \frac{9ql^2}{8EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15ql}{14} \\ -\frac{9ql^2}{28EA} \end{pmatrix}$$

2. $Y_2^0 = Y_1(3l) + N_2 = \begin{pmatrix} \frac{15ql}{14} \\ -\frac{9ql^2}{28EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ql}{14} \\ -\frac{9ql^2}{28EA} \end{pmatrix}$

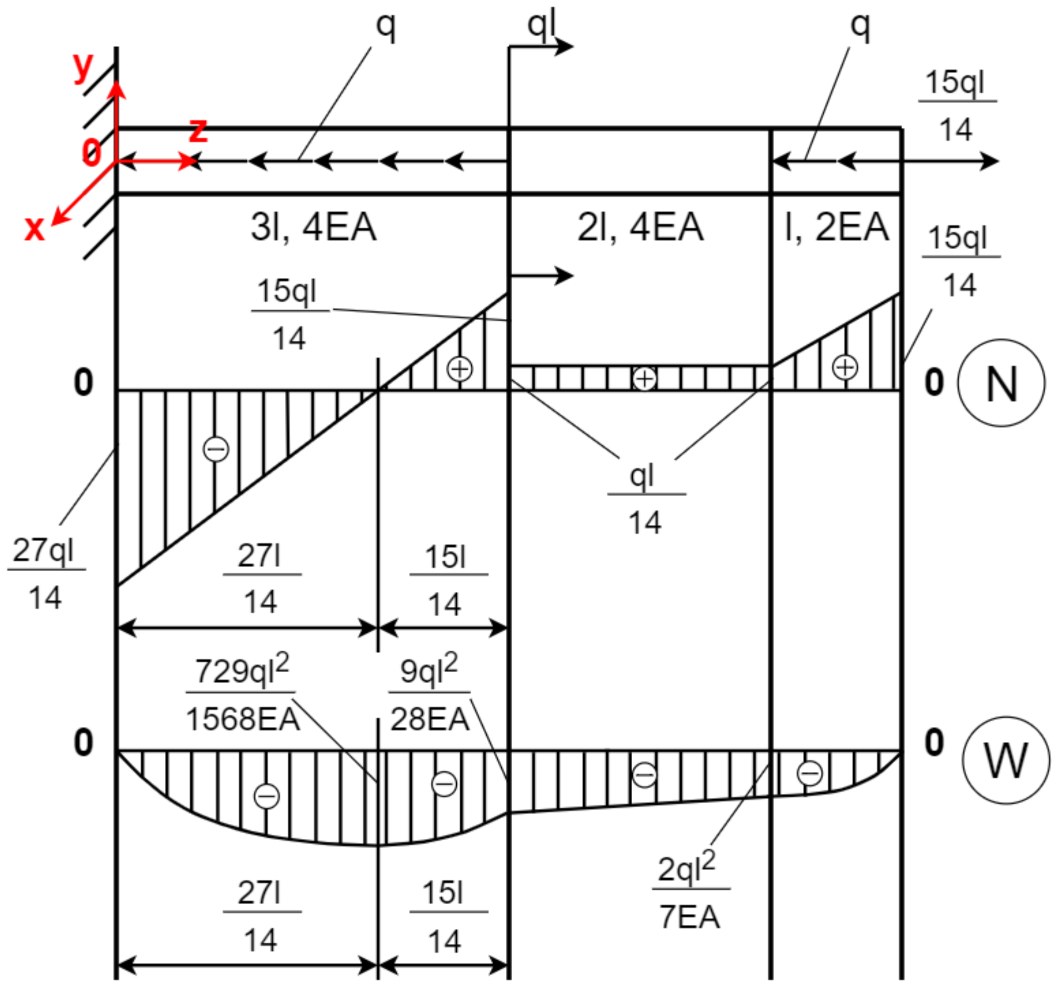
3. $Y_2(2l) = A_2(2l) * Y_2^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{2EA} & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{ql}{14} \\ -\frac{9ql^2}{28EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ql}{14} \\ -\frac{2ql^2}{7EA} \end{pmatrix}$

4. $Y_3^0 = Y_2(2l) = \begin{pmatrix} \frac{ql}{14} \\ -\frac{2ql^2}{7EA} \end{pmatrix}$

5. $Y_3(l) = A_3(l) * Y_3^0 + Q_3(l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{2EA} & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{ql}{14} \\ -\frac{2ql^2}{7EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ql \\ \frac{ql^2}{4EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15ql}{14} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$W_{B_1} = 0 \quad W_{B_2} = -\frac{9ql^2}{28EA} \quad W_{B_3} = -\frac{2ql^2}{7EA} \quad W_{B_4} = 0$$

Сравним значения перемещений, полученные методом начальных параметров, со значениями, полученными при построении эпюр в ДЗ №1:



Значения перемещений, полученные разными методами, совпадают.