

А.Н.Огурцов

## ФИЗИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ

### ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

*ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ*

**3**

<http://users.kpi.kharkov.ua/ogurtsov/lect3ele-7.pdf>

<http://www.ilt.kharkov.ua/bvi/ogurtsov/ln.htm>

## Электростатика

**Электростатика** – раздел учения об электричестве, изучающий взаимодействие неподвижных электрических зарядов и свойства постоянного электрического поля.

### 1. Электрический заряд.

Электрический заряд – это внутреннее свойство тел или частиц, характеризующее их способность к электромагнитным взаимодействиям.

**Единица электрического заряда – кулон (Кл)** – электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 ампер за время 1 секунда.

Существует **элементарный** (минимальный) **электрический заряд**  
 $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Носитель элементарного отрицательного заряда – **электрон**. Его масса  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг. Носитель элементарного положительного заряда – **протон**. Его масса  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг.

Фундаментальные свойства электрического заряда установленные опытным путем:

- Существует в двух видах: **положительный** и **отрицательный**. Одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются.
- Электрический заряд **инвариантен** – его величина не зависит от системы отсчета, т.е. от того, движется он или покоится.
- Электрический заряд **дискретен** – заряд любого тела составляет целое кратное от элементарного электрического заряда  $e$ .
- Электрический заряд **аддитивен** – заряд любой системы тел (частиц) равен сумме зарядов тел (частиц), входящих в систему.
- Электрический заряд подчиняется **закону сохранения заряда**: *Алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы остается неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри данной системы.*

Под замкнутой системой в данном случае понимают систему, которая не обменивается зарядами с внешними телами.

В электростатике используется физическая модель – **точечный электрический заряд** – заряженное тело, форма и размеры которого несущественны в данной задаче.

### 2. Закон Кулона

Закон взаимодействия точечных зарядов – **закон Кулона**: сила взаимодействия  $F$  между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам  $q_1$  и  $q_2$ , и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Сила  $\vec{F}$  направлена по прямой, соединяющей взаимодействующие заряды, т.е. является центральной, и соответствует притяжению ( $F < 0$ ) в

случае разноименных зарядов и отталкиванию ( $F > 0$ ) в случае одноименных зарядов. В векторной форме, сила, действующая на заряд  $q_1$  со стороны заряда  $q_2$

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}.$$

На заряд  $q_2$  со стороны заряда  $q_1$  действует сила  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ .

$\epsilon_0$  – **электрическая постоянная**, относящаяся к числу фундаментальных физических постоянных

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \quad \text{или} \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}. \quad \text{Тогда} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\Phi},$$

где **фарад (Ф)** – единица электрической емкости (п.21).

Если взаимодействующие заряды находятся в изотропной среде, то кулоновская сила

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2},$$

где  $\epsilon$  – **диэлектрическая проницаемость среды** – безразмерная величина, показывающая во сколько раз сила взаимодействия  $F$  между зарядами в данной среде меньше их силы взаимодействия  $F_0$  в вакууме

$$\epsilon = \frac{F_0}{F}.$$

Диэлектрическая проницаемость вакуума  $\epsilon_{\text{вак}} = 1$ . Подробнее диэлектрики и их свойства будут рассмотрены ниже (п.15).

Всякое заряженное тело можно рассматривать как совокупность точечных зарядов, аналогично тому, как в механике всякое тело можно считать совокупностью материальных точек. Поэтому электростатическая сила, с которой одно заряженное тело действует на другое, равна геометрической сумме сил, приложенных ко всем точечным зарядам второго тела со стороны каждого точечного заряда первого тела.

Часто бывает значительно удобнее считать, что заряды **распределены в заряженном теле непрерывно** – вдоль некоторой линии (например, в случае заряженного тонкого стержня), поверхности (например, в случае заряженной пластины) или объема. Соответственно пользуются понятиями линейной, поверхностной и объемной плотностей зарядов.

$$\text{Объемная плотность электрических зарядов } \rho = \frac{dq}{dV},$$

где  $dq$  – заряд малого элемента заряженного тела объемом  $dV$ .

$$\text{Поверхностная плотность электрических зарядов } \sigma = \frac{dq}{dS},$$

где  $dq$  – заряд малого участка заряженной поверхности площадью  $dS$ .

$$\text{Линейная плотность электрических зарядов } \tau = \frac{dq}{dl},$$

где  $dq$  – заряд малого участка заряженной линии длиной  $dl$ .

### 3. Напряженность электростатического поля

Электростатическим полем называется поле, создаваемое неподвижными электрическими зарядами.

Электростатическое поле описывается двумя величинами: **потенциалом** (энергетическая скалярная характеристика поля) и **напряженностью** (силовая векторная характеристика поля).

**Напряженность электростатического поля** – векторная физическая величина, определяемая силой, действующей на единичный положительный заряд  $q_0$ , помещенный в данную точку поля.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

**Единица напряженности электростатического поля** – **ньютон на кулон** (Н/Кл): 1 Н/Кл = 1 В/м, где В (вольт) – единица потенциала электростатического поля.

**Напряженность поля точечного заряда** в вакууме (и в диэлектрике)

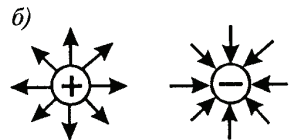
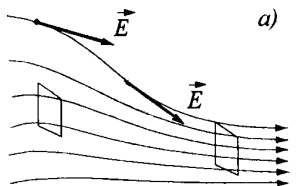
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r} \quad \left( \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r^2} \vec{r} \right),$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, соединяющий данную точку поля с зарядом  $q$ .

В скалярной форме  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad \left( E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r^2} \right).$

**Направление вектора  $\vec{E}$**  совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд.

Если поле создается **положительным** зарядом, то вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль радиуса-вектора от заряда во внешнее пространство (отталкивание пробного положительного заряда). Если поле создается **отрицательным** зарядом, то вектор  $\vec{E}$  направлен к заряду (притяжение).



Графически электростатическое поле изображают с помощью **линий напряженности** – линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\vec{E}$  (рис.(а)). Линиям напряженности приписывается направление, совпадающее с направлением вектора напряженности. Так как в данной точке пространства вектор напряженности имеет лишь одно направление, то линии напряженности никогда не пересекаются. Для **однородного поля** (когда вектор напряженности в любой точке постоянен по модулю и направлению) линии напряженности параллельны вектору напряженности.

Если поле создается точечным зарядом, то линии напряженности – радиальные прямые, выходящие из заряда, если он положителен, и входящие в него, если заряд отрицателен (рис.(б)).

### 4. Поток вектора $\vec{E}$ .

Чтобы с помощью линий напряженности можно было характеризовать не только направление, но и значение напряженности электростатического поля, их проводят с определенной густотой: число линий напряженности,

пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряженности, должно быть равно модулю вектора  $\vec{E}$ .

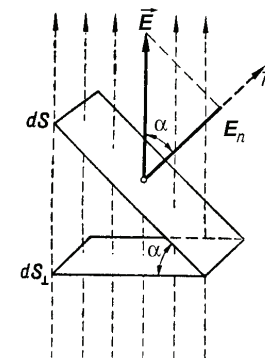
Тогда число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку  $dS$ , равно  $E \cdot dS \cos \alpha = E_n dS$ , где  $E_n$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на нормаль  $\vec{n}$  к площадке  $dS$ . (Вектор  $\vec{n}$  – единичный вектор, перпендикулярный площадке  $dS$ ). Величина

$$d\Phi_E = E \cdot dS_{\perp} = E \cdot dS \cos \alpha = E_n dS = \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

называется поток вектора напряженности через площадку  $dS$ . Здесь  $\vec{dS} = dS \vec{n}$  – вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление вектора совпадает с направлением  $\vec{n}$  к площадке.

Поток вектора  $\vec{E}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS}.$$



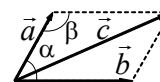
### 5. Принцип суперпозиции электростатических полей.

К кулоновским силам применим рассмотренный в механике **принцип независимости действия сил** – резльтирующая сила, действующая со стороны поля на пробный заряд равна векторной сумме сил, приложенных к нему со стороны каждого из зарядов, создающих электростатическое поле.

Напряженность резльтирующего поля, создаваемого системой зарядов, также равна **геометрической** сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

Эта формула выражает **принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей**. Он позволяет рассчитать электростатические поля любой системы неподвижных зарядов, представив ее в виде совокупности точечных зарядов.

Напомним правило определения величины вектора  $\vec{c}$



суммы двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

$$|\vec{c}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta}.$$

### 6. Теорема Гаусса.

Вычисление напряженности поля системы электрических зарядов с помощью принципа суперпозиции электростатических полей можно значительно упростить, используя теорему Гаусса, определяющую поток вектора напряженности электрического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность.

Рассмотрим поток вектора напряженности через сферическую поверхность радиуса  $r$ , охватывающую точечный заряд  $q$ , находящийся в ее центре

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Этот результат справедлив для любой замкнутой поверхности произвольной формы, охватывающей заряд.

Если замкнутая поверхность не охватывает заряда, то *поток сквозь нее равен нулю*, так как число линий напряженности, входящих в поверхность, равно числу линий напряженности, выходящих из нее.

Рассмотрим *общий случай произвольной поверхности, окружающей  $n$  зарядов*. Согласно принципу суперпозиции напряженность поля  $\vec{E}$ , создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей  $\vec{E}_i$ , создаваемых каждым зарядом в отдельности. Поэтому

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \left( \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i.$$

**Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме:** *поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленных на  $\epsilon_0$ .*

Если заряд распределен в пространстве с объемной плотностью  $\rho = dq/dV$ , то теорема Гаусса

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

### 7. Циркуляция вектора напряженности.

Если в электростатическом поле точечного заряда  $q$  из точки 1 в точку 2 вдоль произвольной траектории перемещается другой точечный заряд  $q_0$ , то сила, приложенная к заряду, совершает работу. Работа силы на элементарном перемещении  $d\vec{l}$  равна

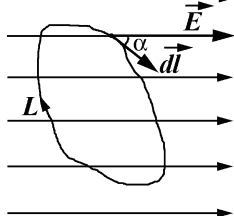
$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr.$$

Работа при перемещении заряда  $q_0$  из точки 1 в точку 2

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{qq_0}{r_1} - \frac{qq_0}{r_2} \right).$$

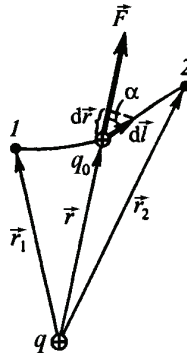
Работа  $A_{12}$  не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной и конечной точек. Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является **потенциальным**, а электростатические силы – **консервативными**.

Таким образом, работа перемещения заряда в электростатическом поле по любому замкнутому контуру  $L$  равна нулю



$$\oint_L dA = 0.$$

Если переносимый заряд **единичный**, то элементарная работа сил поля на пути  $d\vec{l}$  равна  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E_l dl$ , где  $E_l = E \cos \alpha$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на направление элементарного перемещения  $d\vec{l}$ .



Интеграл  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L E_l dl$  называется **циркуляцией вектора напряженности** по заданному замкнутому контуру  $L$ .

**Теорема о циркуляции вектора  $\vec{E}$ :**

*Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю*

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0.$$

Силовое поле, обладающее таким свойством, называется **потенциальным**. Эта формула справедлива **только для** электрического поля **неподвижных** зарядов (**электростатического**).

### 8. Потенциальная энергия заряда.

В потенциальном поле тела обладают потенциальной энергией и работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии.

Поэтому работу  $A_{12}$  можно представить, как разность потенциальных энергий заряда  $q_0$  в начальной и конечной точках поля заряда  $q$

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r_2} = W_1 - W_2.$$

Потенциальная энергия заряда  $q_0$ , находящегося в поле заряда  $q$  на расстоянии  $r$  от него равна

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r} + const.$$

Считая, что при удалении заряда на бесконечность, потенциальная энергия обращается в нуль, получаем:  $const = 0$ .

Для **одноименных** зарядов потенциальная энергия их взаимодействия (**отталкивания**) **положительна**, для **разноименных** зарядов потенциальная энергия из взаимодействия (**притяжения**) **отрицательна**.

Если поле создается системой  $n$  точечных зарядов, то потенциальная энергия заряда  $q_0$ , находящегося в этом поле, равна сумме его потенциальных энергий, создаваемых каждым из зарядов в отдельности

$$W = \sum_{i=1}^n U_i = q_0 \sum_{i=1}^n \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_i}.$$

### 9. Потенциал электростатического поля.

Отношение  $\frac{W}{q_0}$  не зависит от пробного заряда  $q_0$  и является, энергетической характеристикой поля, называемой **потенциалом**

$$\varphi = \frac{W}{q_0}.$$

**Потенциал  $\varphi$**  в какой-либо точке электростатического поля есть **скалярная** физическая величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в эту точку.

Например, потенциал поля, создаваемого точечным зарядом  $q$ , равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

### 10. Разность потенциалов

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда  $q_0$  из точки 1 в точку 2, может быть представлена как

$$A_{12} = W_1 - W_2 = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = q_0\Delta\varphi.$$

то есть, равна произведению перемещаемого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках.

**Разность потенциалов** двух точек 1 и 2 в электростатическом поле определяется работой, совершаемой силами поля, при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = \frac{A_{12}}{q_0}.$$

Пользуясь определением напряженности электростатического поля, можем записать работу  $A_{12}$  в виде

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 q_0 \vec{E} d\vec{l} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Отсюда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = \frac{A_{12}}{q_0} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl.$$

где интегрирование можно производить вдоль любой линии, соединяющей начальную и конечную точки, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории перемещения.

Если перемещать заряд  $q_0$  **из произвольной точки за пределы поля** (на бесконечность), где потенциальная энергия, а значит и потенциал, равны нулю, то работа сил электростатического поля  $A_\infty = q_0\varphi$ , откуда

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q_0}.$$

Таким образом, еще одно определение потенциала: потенциал – физическая величина, определяемая работой по перемещению единичного положительного заряда при удалении его из данной точки в бесконечность.

**Единица потенциала – вольт (В):** 1В есть потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1Кл обладает потенциальной энергией 1Дж (1В=1Дж/1Кл).

**Принцип суперпозиции потенциалов электростатических полей:** Если поле создается несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен *алгебраической сумме* потенциалов полей всех этих зарядов.

### 11. Связь между напряженностью и потенциалом.

Для потенциального поля, между потенциальной (консервативной) силой и потенциальной энергией существует связь

$$\vec{F} = -\text{grad}W = -\nabla W.$$

где  $\nabla$  ("набла") – **оператор Гамильтона**:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ .

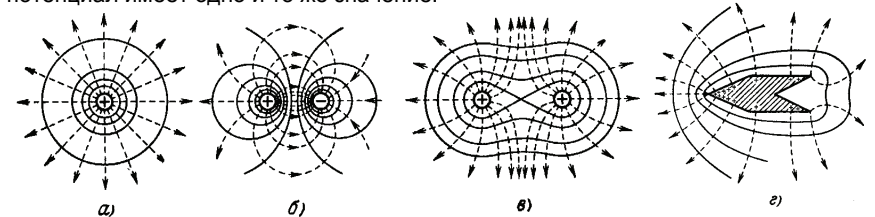
Поскольку  $\vec{F} = q\vec{E}$  и  $W = q\varphi$ , то

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\nabla\varphi.$$

Знак минус показывает, что вектор  $\vec{E}$  направлен в сторону убывания потенциала.

### 12. Эквипотенциальные поверхности.

Для графического изображения распределения потенциала используются **эквипотенциальные поверхности** – поверхности во всех точках которых потенциал имеет одно и то же значение.



Эквипотенциальные поверхности обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризует напряженность поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряженность поля больше. На рисунке пунктиром изображены силовые линии, сплошными линиями – сечения эквипотенциальных поверхностей для: положительного точечного заряда (а), диполя (б), двух одноименных зарядов (в), заряженного металлического проводника сложной конфигурации (г).

Для точечного заряда потенциал  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ , поэтому эквипотенциальные

поверхности – концентрические сферы. С другой стороны, линии напряженности – радиальные прямые. Следовательно, линии напряженности перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

Можно показать, что во всех случаях

- 1) вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен эквипотенциальным поверхностям и
- 2) всегда направлен в сторону убывания потенциала.

### 13. Примеры расчета наиболее важных симметричных электростатических полей в вакууме.

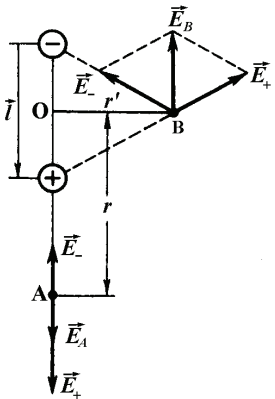
#### 1. Электростатическое поле электрического диполя в вакууме.

**Электрический диполь** (или двойным электрическим полюсом) называется система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов  $(+q, -q)$ , расстояние  $l$  между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля ( $l \ll r$ ).

**Плечо диполя**  $\vec{l}$  – вектор, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними.

**Электрический момент диполя**  $\vec{p}_e$  – вектор, совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению модуля заряда  $|q|$  на плечо  $\vec{l}$ :

$$\vec{p}_e = |q|\vec{l}$$



1) Напряженность поля диполя на продолжении оси диполя в точке **A**

$$E_A = E_+ - E_-, \quad \varphi = \varphi_+ + \varphi_-.$$

Пусть  $r$  – расстояние до точки A от середины оси диполя. Тогда, учитывая что  $r \gg l$ ,

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e}{r^3},$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r - l/2} - \frac{q}{r + l/2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^2}.$$

2) Напряженность поля в точке B на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины при  $r' \gg l$

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r')^2 + (l/2)^2} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r')^2}, \quad \frac{E_B}{E_+} \approx \frac{l}{r'}, \text{ поэтому}$$

$$E_B = (E_+) \frac{l}{r'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{(r')^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{(r')^3},$$

$$\varphi_B = 0.$$

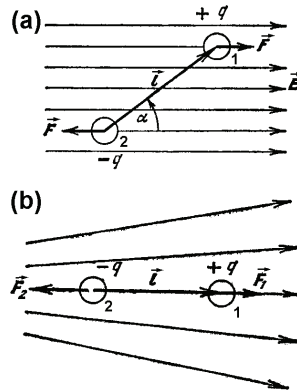
Точка B равноудалена от зарядов  $+q$  и  $-q$  диполя, поэтому потенциал поля в точке B равен нулю. Вектор  $\vec{E}_B$  направлен противоположно вектору  $\vec{l}$ .

3) Во внешнем электрическом поле на концы диполя действует пара сил, которая стремится повернуть диполь таким образом, чтобы электрический момент  $\vec{p}_e$  диполя развернулся вдоль направления поля  $\vec{E}$  (рис.(а)).

Во внешнем **однородном** поле момент пары сил равен  $M = qEl \sin \alpha$  или  $\vec{M} = [\vec{p}_e, \vec{E}]$ . Во внешнем **неоднородном** поле (рис.(в)) силы, действующие на концы диполя, неодинаковы ( $|\vec{F}_2| > |\vec{F}_1|$ ) и их результирующая стремится передвинуть диполь в область поля с большей напряженностью – диполь втягивается в область более сильного поля.

## 2. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.

Бесконечная плоскость заряжена с постоянной поверхностной плотностью  $+\sigma = dq/dS$ . Линии напряженности перпендикулярны рассматриваемой плоскости и направлены от нее в обе стороны.



В качестве Гауссовой поверхности примем поверхность цилиндра, образующие которого перпендикулярны заряженной плоскости, а основания параллельны заряженной плоскости и лежат по разные стороны от нее на одинаковых расстояниях.

Так как образующие цилиндра параллельны линиям напряженности, то поток вектора напряженности через боковую поверхность цилиндра равен нулю, а полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь его основания  $2ES$ . Заряд, заключенный внутри цилиндра, равен  $\sigma S$ . По теореме Гаусса  $2ES = \sigma S/\epsilon_0$ , откуда:

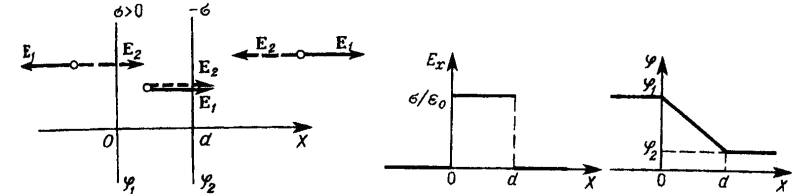
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$E$  не зависит от длины цилиндра, т.е. напряженность поля на любых расстояниях одинакова по модулю. Такое поле называется **однородным**.

Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  от плоскости, равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1).$$

## 3. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей с равными по абсолютному значению поверхностными плотностями зарядов $\sigma > 0$ и $-\sigma$ .



Из предыдущего примера следует, что векторы напряженности  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  первой и второй плоскостей равны по модулю и всюду направлены перпендикулярно плоскостям. Поэтому в пространстве вне плоскостей они компенсируют друг друга, а в пространстве между плоскостями суммарная напряженность  $\vec{E} = 2\vec{E}_1$ . Поэтому между плоскостями

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{в диэлектрике } E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}).$$

Поле между плоскостями однородное. Разность потенциалов между плоскостями

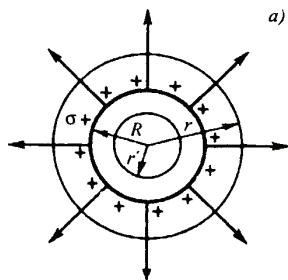
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \quad (\text{в диэлектрике } \Delta\varphi = \frac{\sigma d}{\epsilon\epsilon_0} = Ed).$$

## 4. Поле равномерно заряженной сферической поверхности.

Сферическая поверхность радиуса  $R$  с общим зарядом  $q$  заряжена

равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$ .

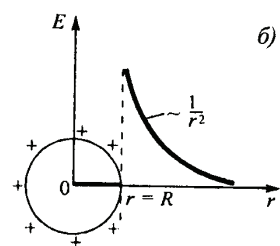




Поскольку система зарядов и, следовательно, само поле центрально-симметрично относительно центра сферы, то линии напряженности направлены радиально.

В качестве Гауссовой поверхности выберем сферу радиуса  $r$ , имеющую общий центр с заряженной сферой. Если  $r > R$ , то внутрь поверхности попадает весь заряд  $q$ . По теореме Гаусса

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0}, \text{ откуда } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}, \quad (r \geq R).$$



При  $r \leq R$  замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферы  $E = 0$ .

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра сферы ( $r_1 > R, r_2 > R$ ), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Если принять  $r_1 = r$  и  $r_2 = \infty$ , то потенциал поля вне сферической поверхности  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ .

Вне заряженной сферы поле такое же, как поле точечного заряда  $q$ , находящегося в центре сферы. Внутри заряженной сферы поля нет, поэтому потенциал всюду одинаков и такой же, как на поверхности

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}.$$

### 5. Поле объемно заряженного шара.

Заряд  $q$  равномерно распределен в вакууме по объему шара радиуса  $R$  с объемной плотностью  $\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ . Центр шара является центром симметрии поля.

1) Для поля вне шара ( $r > R$ ) получаем тот же результат, что и в случае сферической поверхности

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

$$2) \text{ При } r = R \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}.$$

$$3) \text{ Внутри шара сфера радиусом } r < R \text{ охватывает заряд } q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

$$\text{По теореме Гаусса} \quad 4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0}.$$

Отсюда, для точек, лежащих внутри шара ( $r_1 < R, r_2 < R$ ), с учетом  $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ ,

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (r_2^2 - r_1^2).$$

### 6. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити).

Бесконечный цилиндр радиуса  $R$  заряжен

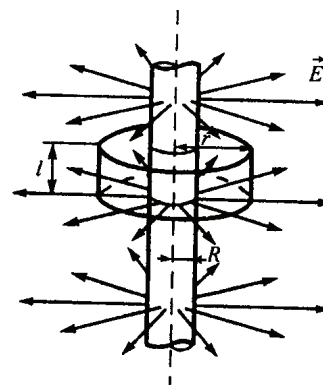
равномерно с линейной плотностью  $\tau = \frac{dq}{dl}$ .

Линии напряженности будут направлены по радиусам круговых сечений цилиндра с одинаковой плотностью во все стороны относительно оси цилиндра.

В качестве Гауссовой поверхности выберем цилиндр радиуса  $r$  и высотой  $l$  коаксиальный с заряженной нитью.

Торцы этого цилиндра параллельны линиям напряженности, поэтому поток через них равен нулю.

Поток через боковую поверхность равен  $E 2\pi r l$ .



$$\text{По теореме Гаусса (при } r > R) \quad 2\pi r l E = \frac{\tau l}{\epsilon_0}, \quad \text{откуда при } r_1 > R, r_2 > R$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}, \quad \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Если  $r < R$ , то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому  $E = 0$ .

### 14. Электростатическое поле в диэлектрической среде

**Диэлектриками** называются вещества, которые при обычных условиях практически не проводят электрический ток.

Диэлектрик, как и всякое другое вещество, состоит из атомов или молекул, каждая из которых в целом электрически нейтральна.

Если заменить положительные заряды ядер молекул суммарным зарядом  $+q$ , находящимся в, так сказать, "центре тяжести" положительных зарядов, а заряд всех электронов – суммарным отрицательным зарядом  $-q$ , находящимся в "центре тяжести" отрицательных зарядов, то молекулы можно рассматривать как **электрические диполи с электрическим моментом**.

Различают три типа диэлектриков.

1) **Диэлектрики с неполярными молекулами**, симметричные молекулы которых в отсутствие внешнего поля имеют нулевой дипольный момент (например,  $N_2, H_2, O_2, CO_2$ ).

2) **Диэлектрики с полярными молекулами**, молекулы которых вследствие асимметрии имеют ненулевой дипольный момент (например,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{SO}_2$ ,  $\text{CO}$ ).

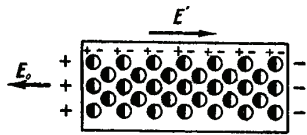
3) **Ионные диэлектрики** (например  $\text{NaCl}$ ,  $\text{KCl}$ ). Ионные кристаллы представляют собой пространственные решетки с правильным чередованием ионов разных знаков.

Внесение диэлектриков во внешнее электрическое поле приводит к возникновению отличного от нуля результирующего электрического момента диэлектрика.

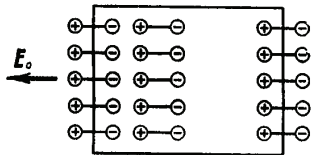
**Поляризацией** диэлектрика называется процесс ориентации диполей или появления под воздействием электрического поля ориентированных по полю диполей.

Соответственно трем видам диэлектриков различают три вида поляризации.

1) **Электронная**, или **деформационная, поляризация** диэлектрика с неполярными молекулами – за счет деформации электронных орбит возникает индуцированный дипольный момент у атомов или молекул диэлектрика.



2) **Ориентационная**, или **дипольная, поляризация** диэлектрика с полярными молекулами – ориентация имеющихся дипольных моментов молекул по полю (эта ориентация тем сильнее, чем больше напряженность электрического поля и чем ниже температура).



3) **Ионная поляризация** диэлектрика с ионными кристаллическими решетками – смещение подрешетки положительных ионов вдоль поля, а отрицательных ионов против поля приводит к возникновению дипольных моментов.

### 15. Поляризованность.

Поместим пластину из однородного диэлектрика во внешнее электрическое поле созданное двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями.

Во внешнем электрическом поле диэлектрик объемом  $V$  *поляризуется*, т.е. приобретает дипольный момент  $\vec{p}_V = \sum_i \vec{p}_i$ , где  $\vec{p}_i$  – дипольный момент одной молекулы.

Для количественного описания поляризации диэлектрика используется векторная величина – **поляризованность** – которая определяется как дипольный момент единицы объема диэлектрика

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}_V}{V} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}.$$

В случае изотропного диэлектрика поляризованность (для большинства диэлектриков за исключением сегнетоэлектриков) линейно зависит от напряженности внешнего поля

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E},$$

где  $\chi$  – **диэлектрическая восприимчивость вещества**, характеризующая свойства диэлектрика (положительная безразмерная величина).

### 16. Диэлектрическая проницаемость среды.

Вследствие поляризации на поверхности диэлектрика появляются нескомпенсированные заряды, которые называются **связанными** (в отличие от **свободных** зарядов, которые создают внешнее поле).

Поле  $\vec{E}'$  внутри диэлектрика, создаваемое связанными зарядами, направлено против внешнего поля  $\vec{E}_0$ , создаваемого свободными зарядами. Результирующее поле внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E'.$$

В нашем примере поле, создаваемое двумя бесконечно заряженными плоскостями с поверхностной плотностью зарядов  $\sigma'$ :  $E' = \sigma' / \epsilon_0$ . Поэтому

$$E = E_0 - \sigma' / \epsilon_0.$$

Полный дипольный момент диэлектрической пластинки с толщиной  $d$  и площадью грани  $S$  равен  $p_V = PV = PSd$ , с другой стороны  $p_V = qd = \sigma' Sd$ . Отсюда  $\sigma' = P$ . Следовательно,

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{\chi \epsilon_0 E}{\epsilon_0} = E_0 - \chi E.$$

Откуда напряженность результирующего поля внутри диэлектрика равна

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\epsilon}.$$

Безразмерная величина  $\epsilon = 1 + \chi = \frac{E_0}{E}$  называется **диэлектрической**

**проницаемостью среды**. Она характеризует способность диэлектриков поляризоваться в электрическом поле и показывает во сколько раз поле ослабляется диэлектриком.

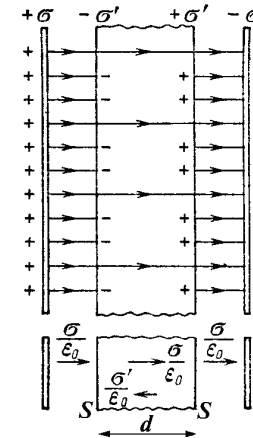
### 17. Электрическое смещение.

Напряженность электростатического поля зависит от свойств среды (от  $\epsilon$ ). Кроме того, вектор напряженности  $\vec{E}$ , переходя через границу диэлектриков, претерпевает скачкообразное изменение, поэтому для описания (непрерывного) электрического поля системы зарядов с учетом поляризационных свойств диэлектриков вводится вектор **электрического смещения** (электрической индукции), который для изотропной среды записывается как

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

**Единица электрического смещения** – Кл/м<sup>2</sup>.

Вектор  $\vec{D}$  описывает электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами (т.е. в вакууме), но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.





Аналогично линиям напряженности, можно ввести *линии электрического смещения*. Через области поля, где находятся связанные заряды, линии вектора  $\vec{D}$  проходят не прерываясь.

Для произвольной замкнутой поверхности  $S$  поток вектора  $\vec{D}$  сквозь эту поверхность

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS,$$

где  $D_n$  – проекция вектора  $\vec{D}$  на нормаль  $\vec{n}$  к площадке  $dS$ .

**Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике:** *поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных электрических зарядов*

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^n q_i.$$

Для непрерывного распределения заряда в пространстве с объемной плотностью  $\rho = dq/dV$

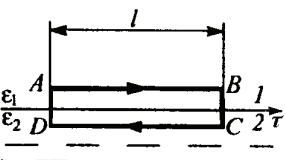
$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV.$$

Другая форма записи этого соотношения с учетом определения дивергенции вектора (стр.1-31)

$$\text{div } \vec{D} = \rho.$$

### 18. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред

При отсутствии на границе двух диэлектриков свободных зарядов, циркуляция вектора  $\vec{E}$  по контуру  $\oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{l} = 0$ , откуда  $E_{t1}l - E_{t2}l = 0$ . Поэтому



$$E_{t1} = E_{t2}.$$

Учитывая  $D = \epsilon_0 \epsilon E$ , получим

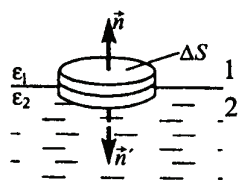
$$\frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

По теореме Гаусса поток вектора  $\vec{D}$  через цилиндр ничтожно малой высоты равен нулю (нет свободных зарядов)  $D_n \Delta S - D_{n'} \Delta S = 0$ , поэтому

$$D_{n1} = D_{n2},$$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}.$$

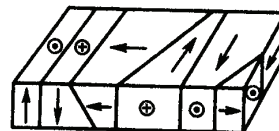
Таким образом, при переходе через границу раздела двух диэлектрических сред тангенциальная составляющая вектора  $\vec{E}$  ( $E_t$ ) и нормальная составляющая вектора  $\vec{D}$  ( $D_n$ ) изменяются непрерывно (не претерпевают скачка), а нормальная составляющая вектора  $\vec{E}$  ( $E_n$ ) и тангенциальная составляющая вектора  $\vec{D}$  ( $D_t$ ) претерпевают скачок.



### 19. Сегнетоэлектрики.

Сегнетоэлектриками называются кристаллические диэлектрики, у которых в отсутствие внешнего электрического поля возникает самопроизвольная ориентация дипольных электрических моментов составляющих его частиц.

Примеры: сегнетова соль  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ; титанат бария  $\text{BaTiO}_3$



Сегнетоэлектрики состоят из **доменов** – областей с различными направлениями поляризованности.

Температура, выше которой исчезают сегнетоэлектрические свойства – **точка Кюри**.

Для сегнетоэлектриков связь между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$  нелинейная и наблюдается явление **диэлектрического гистерезиса** – сохранения **остаточной поляризованности** при снятии внешнего поля.

**Пьезоэлектрики** – кристаллические диэлектрики, в которых при сжатии или растяжении возникает электрическая поляризация – **прямой пьезоэффект**.

**Обратный пьезоэффект** – появление механической деформации под действием электрического поля.

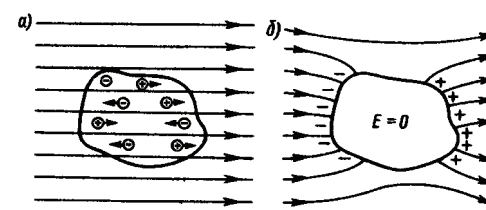
### 20. Проводники в электростатическом поле.

Если поместить проводник во внешнее электростатическое поле или его зарядить, то на заряды проводника будет действовать электростатическое поле, в результате чего они начнут перемещаться до тех пор, пока не установится равновесное распределение зарядов, при котором электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль  $\vec{E} = 0$ .

Иначе, если бы поле не было равно нулю, то в проводнике возникло бы упорядоченное движение зарядов без затраты энергии от внешнего источника, что противоречит закону сохранения энергии.

Следствия этого ( $\vec{E} = -\text{grad } \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const}$ ):

- потенциал во всех точках проводника **одинаков**;
- поверхность проводника является **экипотенциальной**;
- вектор  $\vec{E}$  направлен по **нормали** к каждой точке поверхности;
- При помещении нейтрального проводника во внешнее поле свободные заряды (электроны и ионы) начнут перемещаться: положительные – по полю, а отрицательные – против поля (рис.(а)). На одном конце проводника будет **избыток** положительных зарядов, на другом – отрицательных. Эти заряды называются **индуцированными**. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока напряженность поля **внутри проводника** не станет **равной нулю**, а линии напряженности вне проводника – **перпендикулярными** его поверхности (рис.(б)).



если проводнику сообщить некоторый заряд  $q$ , то **нескомпенсированные заряды** располагаются **только на поверхности** проводника, причем  $D = \sigma$  и

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ , где  $\sigma$  – поверхностная плотность зарядов, и  $\varepsilon$  – диэлектрическая

проницаемость среды, окружающей проводник.

Нейтральный проводник, внесенный в электростатическое поле, *разрывает* часть линий напряженности; они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных.

Индуцированные заряды распределяются на **внешней** поверхности проводника. Явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике во внешнем электростатическом поле называется **электростатической индукцией**.

## 21. Емкость.

Рассмотрим **удиненный проводник** – проводник, удаленный от других тел и зарядов. Из опыта следует, что разные проводники, будучи одинаково заряженными, имеют разные потенциалы.

Физическая величина  $C$ , равная отношению заряда проводника  $q$  к его потенциалу  $\varphi$ , называется **электрической емкостью** этого проводника.

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

**Емкость уединенного проводника** численно равна заряду, который нужно сообщить этому проводнику для того, чтобы изменить его потенциал на единицу.

Она зависит от формы и размеров проводника и от диэлектрических свойств окружающей среды. Емкости геометрически подобных проводников пропорциональны их линейным размерам.

**Пример: емкость уединенного проводящего шара**  $C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 R$ .

**Единица емкости** – фарад (Ф): 1Ф – емкость такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1В при сообщении ему заряда 1Кл. Емкостью 1Ф обладает шар с радиусом  $R = 9 \cdot 10^6$  км. Емкость Земли 0,7мФ.

## 22. Конденсаторы.

Если к проводнику с зарядом  $q$  приблизить другие тела, то на их поверхности возникнут индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды. Эти заряды *ослабляют* поле, создаваемое зарядом  $q$ , тем самым, *понижая потенциал* проводника и *повышая его емкость*.

**Конденсатор** – это система из двух проводников (обкладок) с одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами, форма и расположение которых таковы, что поле сосредоточено в узком зазоре между обкладками.

**Емкость конденсатора** – физическая величина, равная отношению заряда  $q$ , накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  между его обкладками

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}.$$

1. **Емкость плоского конденсатора** (две параллельные металлические пластины площадью  $S$  каждая, расположенные на расстоянии  $d$  друг от друга ( $\sigma = \frac{q}{S}$ ))

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{\frac{\sigma d}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}.$$

2. **Емкость цилиндрического конденсатора** (два коаксиальных цилиндра длиной  $l$  с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  ( $\tau = q/l$ ))

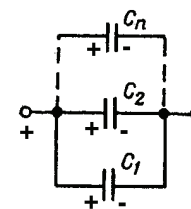
$$C = \frac{q}{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

3. **Емкость сферического конденсатора** (две концентрических сферы с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ )

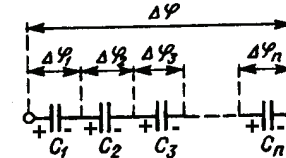
$$C = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

## 23. Соединения конденсаторов.

У **параллельно соединенных конденсаторов**  $C_1, C_2 \dots C_n$  разность потенциалов на обкладках конденсаторов одинакова  $\Delta\varphi$ . Полная емкость



$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\Delta\varphi} = \frac{\sum_{i=1}^n C_i \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = \sum_{i=1}^n C_i.$$



У **последовательно соединенных конденсаторов**  $C_1, C_2 \dots C_n$  заряды  $q$  всех обкладок равны по модулю, а суммарная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{q}{C_i} = \frac{q}{C},$$

откуда

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}.$$

## 24. Энергия системы неподвижных точечных зарядов.

Для системы двух зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга, каждый из них в поле другого обладает потенциальной энергией

$$W_1 = q_1 \varphi_{12} = q_1 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r} = q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r} = q_2 \varphi_{21} = W_2.$$

Поэтому  $W = q_1 \varphi_{12} = q_2 \varphi_{21} = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_{12} + q_2 \varphi_{21})$ . Добавляя последовательно по одному заряду, получим, что энергия взаимодействия системы  $n$  неподвижных точечных зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i,$$

где  $\varphi_i$  – потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд  $q_i$ , всеми зарядами, кроме  $i$ -го.

### 25. Энергия заряженного уединенного проводника.

Рассмотрим уединенный проводник, заряд, емкость и потенциал которого равны  $q, C, \varphi$ . Элементарная работа  $dA$ , совершаемая внешними силами по преодолению кулоновских сил отталкивания при перенесении заряда  $dq$  из бесконечности на проводник, равна  $dA = \varphi dq = C\varphi d\varphi$ . Чтобы зарядить проводник от нулевого потенциала до  $\varphi$ , необходимо совершить работу

$$A = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

**Энергия заряженного уединенного проводника** (используя  $C = q/\varphi$ )

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2}.$$

### 26. Энергия заряженного конденсатора.

Элементарная работа внешних сил по перенесению малого заряда  $dq$  с обкладки 2 конденсатора на обкладку 1

$$dA = \Delta\varphi dq = \frac{q dq}{C}.$$

Работа внешних сил при увеличении заряда конденсатора от 0 до  $q$

$$A = \int_0^q \frac{q dq}{C} = \frac{q^2}{2C}.$$

**Энергия заряженного конденсатора** (используя  $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ )

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} = \frac{q\Delta\varphi}{2}.$$

### 27. Энергия электростатического поля.

В общем случае **электрическую энергию любой системы заряженных неподвижных тел** – проводников и непроводников – можно найти по формуле

$$W = \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma dS + \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV,$$

где  $\sigma$  и  $\rho$  – поверхностная и объемная плотности свободных зарядов;  $\varphi$  – потенциал результирующего поля всех свободных и связанных зарядов в точках малых элементов  $dS$  и  $dV$  заряженных поверхностей и объемов. Интегрирование проводится по всем заряженным поверхностям  $S$  и по всему заряженному объему  $V$  тел системы.

На примере поля плоского конденсатора выразим энергию поля через его напряженность. Для конденсатора  $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$  и  $\Delta\varphi = Ed$ . Отсюда

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 S d = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 V.$$

В **однородном** поле конденсатора его энергия распределена равномерно по всему объему поля  $V = Sd$ .

**Объемная плотность энергии** электростатического поля плоского конденсатора  $w$

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} ED,$$

где  $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$  – электрическое смещение.

Эта формула является отражением того факта, что электростатическая энергия сосредоточена в электростатическом поле. Это выражение справедливо также и для неоднородных полей.

### 28. Пондеромоторные силы.

Механические силы, действующие на заряженные тела, помещенные в электромагнитное поле, называются пондеромоторными силами (от латинских слов *ponderis* – тяжесть и *motor* – движущий).

Например, в плоском конденсаторе сила, с которой пластины конденсатора притягивают друг друга, совершает работу за счет уменьшения

потенциальной энергии системы. С учетом  $\sigma = \frac{q}{S}$  и  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ , получаем

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = -\frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon\varepsilon_0} = -\frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 S,$$

где знак минус указывает на то, что эта сила является силой притяжения. Под действием этой силы обкладки конденсатора сжимают пластину диэлектрика, помещенного между ними, и в диэлектрике возникает давление

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2.$$

## Постоянный электрический ток

### 29. Постоянный электрический ток, сила и плотность тока.

**Электродинамика** – раздел учения об электричестве, в котором рассматриваются явления и процессы, обусловленные движением электрических зарядов.

**Электрическим током** называется упорядоченное движение электрических зарядов.

За **направление** тока принимают направление движения **положительных** зарядов.

Количественной мерой электрического тока служит **сила тока**  $I$  – скалярная физическая величина, равная отношению заряда  $dq$ , переносимого сквозь рассматриваемую поверхность за малый промежуток времени, к

величине  $dt$  этого промежутка

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Электрический ток называется постоянным, если сила тока и его направление не изменяются с течением времени.

Для постоянного тока 
$$I = \frac{q}{t},$$

где  $q$  – электрический заряд, проходящий за время  $t$  через поперечное сечение проводника.

**Единица силы тока – ампер (А)** (см. "Механика" стр. 1-2).

Для характеристики направления электрического тока в разных точках рассматриваемой поверхности и распределения силы тока по этой поверхности служит **вектор плотности тока**  $\vec{j}$ . Сила тока сквозь произвольную поверхность  $S$  определяется как поток вектора плотности тока

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S},$$

где  $d\vec{S} = \vec{n} dS$  ( $\vec{n}$  – единичный вектор нормали (орт) к площадке  $dS$ ).

**Плотностью электрического тока** называется вектор  $\vec{j}$ , совпадающий с направлением электрического тока в рассматриваемой точке и численно равный отношению силы тока  $dI$  сквозь малый элемент поверхности, **ортогональной** направлению тока, к площади  $dS_{\perp}$  этого элемента

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

Для постоянного тока  $I$ , текущего перпендикулярно сечению  $S$  проводника

$$j = \frac{I}{S}.$$

Если за время  $dt$  через поперечное сечение  $S$  проводника переносится заряд  $dq = ne\langle v \rangle S dt$  (где  $n$ ,  $e$  и  $\langle v \rangle$  – концентрация, заряд и средняя скорость упорядоченного движения зарядов), то сила тока  $I = \frac{dq}{dt} = ne\langle v \rangle S$ , а плотность тока

$$\vec{j} = ne\langle \vec{v} \rangle.$$

**Единица плотности тока – А/м<sup>2</sup>.**

### 30. Сторонние силы.

Для возникновения и существования электрического тока необходимо:

- 1) наличие свободных **носителей тока** – заряженных частиц, способных перемещаться упорядоченно;
- 2) наличие **электрического поля**, энергия которого должна каким-то образом **восполняться**.

Если в цепи действуют только силы электростатического поля, то происходит перемещение носителей таким образом, что потенциалы всех точек цепи выравниваются и электростатическое поле исчезает.

Для существования постоянного тока *необходимо наличие в цепи устройства, способного создавать и поддерживать разность потенциалов за счет сил **не электростатического** происхождения.*

Такие устройства называются **источниками тока**.

Силы не электростатического происхождения, действующие на заряды со стороны источников тока, называются сторонними.

**Количественная характеристика сторонних сил** – поле сторонних сил и его напряженность  $\vec{E}_{\text{стор}}$ , определяемая сторонней силой, действующей на единичный положительный заряд.

**Природа сторонних сил** может быть различной. Например, в гальванических элементах они возникают за счет энергии химических реакций между электродами и электролитами; в генераторе – за счет механической энергии вращения ротора генератора, в солнечных батареях – за счет энергии фотонов и т.п. Роль источника тока в электрической цепи такая же как роль насоса, который необходим для поддержания тока жидкости в гидравлической системе.

Под действием создаваемого поля сторонних сил электрические заряды движутся *внутри источника тока **против** сил электростатического поля*, благодаря чему на концах цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи течет постоянный электрический ток.

### 31. Электродвижущая сила и напряжение.

Физическая величина, определяемая работой, которую совершают сторонние силы при перемещении единичного положительного заряда, называется **электродвижущей силой (ЭДС)** действующей в цепи

$$\Theta = \frac{A}{q_0}.$$

Эта работа совершается за счет энергии, затрачиваемой в источнике тока, поэтому величину  $\Theta$ , можно назвать электродвижущей силой источника тока, включенного в цепь. ЭДС, как и потенциал выражается в **вольтах**.

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется однородным. Участок, на котором на носители тока действуют сторонние силы, называется неоднородным.

Работа сторонних сил по перемещению заряда  $q_0$  **на замкнутом участке** цепи

$$A = \oint \vec{F}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l} = q_0 \oint \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}.$$

Отсюда, ЭДС действующая в замкнутой цепи – **это циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил**

$$\Theta = \oint \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}.$$

Следовательно, для поля сторонних сил циркуляция его напряженности по замкнутому контуру **не равна нулю**. Поэтому **поле сторонних сил – непотенциально**.

ЭДС, действующая на участке 1–2 цепи, равна

$$\Theta_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}.$$

Если на заряд  $q_0$  действуют как сторонние силы, так и силы электростатического поля, то результирующая сила

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{стор}} + \vec{F}_e = q_0 (\vec{E}_{\text{стор}} + \vec{E}).$$

Работа результирующей силы по перемещению заряда  $q_0$  на участке 1—2

$$A_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} + q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = q_0 \Theta_{12} + q_0 (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Для замкнутой цепи работа электростатических сил равна нулю, поэтому

$$A = q_0 \Theta.$$

**Напряжением**  $U$  на участке 1—2 называется физическая величина, численно равная суммарной работе совершаемой электростатическими и сторонними силами по перемещению единичного положительного заряда на данном участке цепи

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q_0} = \varphi_1 - \varphi_2 + \Theta_{12}.$$

Понятие **напряжения** является обобщением понятия разности потенциалов: *напряжение на концах участка цепи равно разности потенциалов, если участок не содержит источника тока* (т.е. на участке не действует ЭДС; сторонние силы отсутствуют).

### 32. Закон Ома. Электрическое сопротивление.

Закон Ома для однородного участка цепи (не содержащего источника тока): *сила тока, текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна напряжению на конце проводника* (интегральная форма закона Ома).

Коэффициент пропорциональности  $R$  называется **электрическим сопротивлением** проводника.

**Единица электрического сопротивления – ом (Ом):** 1 Ом – сопротивление такого проводника, в котором при напряжении 1В течет постоянный ток 1А.

Величина  $G = \frac{1}{R}$  называется **электрической проводимостью** проводника.

**Единица электрической проводимости – сименс (См):** 1 См – проводимость участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом.

Сопротивление проводника зависит от его размеров и формы, а также от материала из которого проводник изготовлен. Например, для однородного линейного проводника длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$  сопротивление рассчитывается по формуле:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

где коэффициент пропорциональности  $\rho$ , характеризующий материал проводника, называется **удельным электрическим сопротивлением**.

**Единица удельного электрического сопротивления – ом-метр (Ом·м).**

Величина обратная удельному сопротивлению называется **удельной электрической проводимостью** вещества проводника:

$$\gamma = \frac{1}{\rho}$$

**Единица удельной электрической проводимости – сименс на метр (См/м).**

В проводнике  $\frac{U}{l} = E$  – напряженность электрического поля,  $R = \rho \frac{l}{S}$ ,  $j = \frac{I}{S}$ . Из

закона Ома получим соотношение  $\frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l}$ , откуда следует  $j = \gamma E$ .

В векторной форме соотношение

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

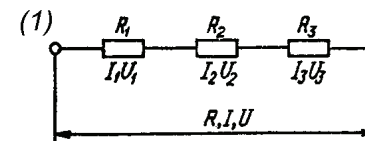
называется **законом Ома в дифференциальной форме**. Этот закон связывает *плотность тока в любой точке внутри проводника с напряженностью электрического поля в той же точке*.

### 33. Сопротивление соединения проводников.

(1). **Последовательное соединение  $n$  проводников:**  $I_1 = I_2 = \dots = I_n = I$

$$IR = U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n I_i R_i = I \sum_{i=1}^n R_i$$

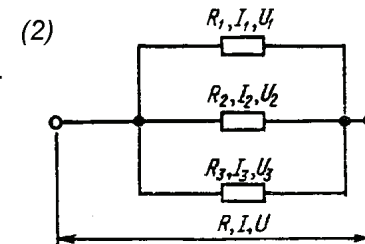
$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$



(2). **Параллельное соединение  $n$  проводников:**  $U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$

$$\frac{U}{R} = I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{R_i} = U \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$



### 34. Температурная зависимость сопротивления.

Опытным путем было установлено, что для большинства случаев изменение удельного сопротивления (а значит и сопротивления) с температурой описывается линейным законом

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t) \quad \text{или} \quad R = R_0 (1 + \alpha t),$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$ ,  $R$  и  $R_0$  – соответственно удельные сопротивления и сопротивления проводника при температурах  $t$  и  $0^\circ\text{C}$  (шкала Цельсия),  $\alpha$  – **температурный коэффициент сопротивления**.

На зависимости электрического сопротивления металлов от температуры основано действие **термометров сопротивления**.

Сопротивление многих металлов при очень низких температурах  $T_k$  (0,14–20 К (шкала Кельвина)), называемых **критическими**, характерных для каждого вещества, скачкообразно уменьшается до нуля и металл становится абсолютным проводником. Это явление называется **сверхпроводимостью**.

### 35. Работа и мощность тока.

Кулоновские и сторонние силы при перемещении заряда  $q$  вдоль электрической цепи совершают работу  $A$ .

Рассмотрим однородный проводник с сопротивлением  $R$  к концам которого приложено напряжение  $U$ . За время  $dt$  через сечение проводника переносится заряд  $dq = I dt$ . Работа по перемещению заряда  $q_0$  между двумя точками поля равна

$$A_{12} = q_0 \Delta\varphi, \quad \text{откуда} \quad dA = U dq = UI dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt.$$

#### Мощность тока

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

Если размерности  $[I] = \text{А}$ ,  $[U] = \text{В}$ ,  $[R] = \text{Ом}$ , то  $[A] = \text{Дж}$  и  $[P] = \text{Вт}$ .

**Внесистемные единицы работы тока:** ватт-час (Вт·ч) и киловатт-час (кВт·ч). 1 Вт·ч – работа тока мощностью 1 Вт в течении 1 ч: 1 Вт·ч = 3600 Вт·с =  $3,6 \cdot 10^3$  Дж. Аналогично: 1 кВт·ч = 1000 Вт·ч =  $3,6 \cdot 10^6$  Дж.

#### 36. Закон Джоуля–Ленца.

При прохождении тока по проводнику происходит рассеяние энергии вследствие столкновений носителей тока между собой и с любыми другими частицами среды. Если ток проходит по *неподвижному* проводнику, то вся работа тока  $dA$  идет на нагревание проводника (выделение теплоты  $dQ$ ).

По закону сохранения энергии  $dA = dQ$ ,

$$dQ = IU dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt.$$

Количество теплоты  $Q$ , выделяющееся за конечный промежуток времени от 0 до  $t$  постоянным током  $I$  во всем объеме проводника, электрическое сопротивление которого равно  $R$ , получаем, интегрируя предыдущее выражение,

$$Q = \int_0^t I^2 R dt = I^2 R t.$$

**Закон Джоуля–Ленца (в интегральной форме):** количество теплоты, выделяемое постоянным электрическим током на участке цепи, равно произведению квадрата силы тока на время его прохождения и электрическое сопротивление этого участка цепи.

Выделим в проводнике цилиндрический объем  $dV = dS dL$  (ось цилиндра совпадает с направлением тока). Сопротивление этого объема  $R = \rho \frac{dL}{dS}$ . По

закону Джоуля–Ленца, за время  $dt$  в этом объеме выделится теплота

$$dQ = I^2 R dt = \frac{\rho dL}{dS} (j dS)^2 dt = \rho j^2 dV dt.$$

**Удельной тепловой мощностью тока**  $w$  называется количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема

$$w = \frac{dQ}{dV dt} = \rho j^2.$$

Используя дифференциальную форму закона Ома  $j = \gamma E$  и определение  $\rho = \frac{1}{\gamma}$ , получим **закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме**

$$w = jE = \gamma E^2.$$

Тепловое действие электрического тока используется в осветительных, лампах накаливания, электросварке, электронагревательных приборах и т.д.

#### 37. Закон Ома для неоднородного участка цепи.

Рассмотрим **неоднородный** участок цепи 1—2 на котором присутствуют силы неэлектрического происхождения (*сторонние силы*).

Обозначим через  $\Theta_{12}$  – ЭДС на участке 1—2;  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  – приложенную на концах участка разность потенциалов.

Если участок цепи 1—2 **неподвижен**, то (по закону сохранения энергии) **общая работа**  $A_{12}$  сторонних и электростатических сил, совершаемая над носителями тока, равна теплоте  $Q$ , выделяющейся на участке.

Работа сил, совершаемая при перемещении заряда  $q_0$

$$A_{12} = q_0 \Theta_{12} + q_0 \Delta\varphi.$$

ЭДС  $\Theta_{12}$ , как и сила тока  $I$ , – величина скалярная. Если ЭДС способствует движению положительных зарядов в выбранном направлении, то  $\Theta_{12} > 0$ , если препятствует, то  $\Theta_{12} < 0$ .

За время  $t$  в проводнике выделится теплота  $Q = I^2 R t = IR(It) = IRq_0$ .

Отсюда следует **закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме**, который является **обобщенным законом Ома**

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \Theta_{12}$$

или

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \Theta_{12}}{R}.$$

#### Частные случаи.

1) Если на данном участке цепи источник тока **отсутствует**, то мы получаем **закон Ома для однородного участка цепи**

$$I = \frac{U}{R}.$$

2) Если цепь **замкнута** ( $\Delta\varphi = 0$ ), то получаем **закон Ома для замкнутой цепи**

$$I = \frac{\Theta}{R} = \frac{\Theta}{r_{\text{внутр}} + R_{\text{внеш}}},$$

где  $\Theta$  – ЭДС, действующая в цепи,

$R$  – суммарное сопротивление всей цепи,

$R_{\text{внеш}}$  – сопротивление внешней цепи,

$r_{\text{внутр}}$  – внутреннее сопротивление источника тока.

3) Если цепь **разомкнута**, то  $I = 0$  и  $\Theta_{12} = \varphi_2 - \varphi_1$ , т.е. ЭДС, действующая в разомкнутой цепи равна разности потенциалов на ее концах.



4) В случае **короткого замыкания** сопротивление внешней цепи

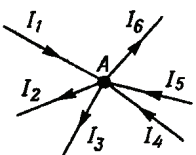
$$R_{\text{внешн}} = 0 \text{ и сила тока } I = \frac{\Theta}{r_{\text{внутр}}} \text{ в этом случае ограничивается только}$$

величиной внутреннего сопротивления источника тока.

### 38. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей.

**Узлом электрической цепи** называется любая точка разветвления цепи, в которой сходится не менее трех проводников с током. Ток, входящий в узел, считается положительным, а ток, выходящий из узла – отрицательным.

**Первое правило Кирхгофа** – алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю

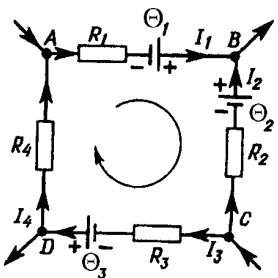


$$\sum_k I_k = 0.$$

Например, для узла  $A$  на рисунке первое правило Кирхгофа

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 + I_5 - I_6 = 0.$$

**Второе правило Кирхгофа** – в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов  $I_i$  на сопротивление  $R_i$  соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС  $\Theta_k$ , встречающихся в этом контуре



Например, для обхода по часовой стрелке замкнутого контура  $ABCD A$  второе правило Кирхгофа имеет вид

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = \Theta_1 - \Theta_2 + \Theta_3.$$

При расчете сложных цепей с применением правил Кирхгофа необходимо:

1. **Выбрать произвольное направление токов** на всех участках цепи; действительное направление токов определяется при решении задачи: если искомый ток получится положительным, то его направление было выбрано правильно, а если – отрицательным – его истинное направление противоположно выбранному.
2. **Выбрать направление обхода** контура и строго его придерживаться; произведение  $IR$  положительно, если ток на данном участке совпадает с направлением обхода. ЭДС, действующие по выбранному направлению обхода, считаются положительными, против – отрицательными.
3. **Составить столько уравнений**, чтобы их число было равно числу искомых величин (в систему уравнений должны входить все сопротивления и ЭДС рассматриваемой цепи); каждый рассматриваемый контур должен содержать хотя бы один элемент, не содержащийся в предыдущих контурах, чтобы не получались уравнения, которые являются простой комбинацией уже составленных уравнений.

## Электрические токи в металлах, вакууме и газах.

### 39. Электрические токи в металлах.

Носителями электрического тока в металле являются свободные электроны.

При образовании кристаллической решетки электроны внешних оболочек атомов (валентные электроны) **обобществляются** и кристалл представляет собой решетку неподвижных ионов металла, между которыми хаотически движутся свободные электроны, образуя **электронный газ**, обладающий свойствами идеального газа.

Согласно **теории Друде–Лоренца**, электроны обладают той же энергией теплового движения, что и молекулы одноатомного газа. Средняя скорость теплового движения электронов

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}},$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – **постоянная Больцмана**,

$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг – масса электрона,

$T$  – абсолютная (или термодинамическая) температура (в Кельвинах).

При комнатной температуре ( $T = 300$  К) средняя скорость теплового движения электронов равна  $\langle u \rangle = 1,1 \cdot 10^5$  м/с. Хаотическое тепловое движение электронов не может привести к возникновению тока.

При наложении внешнего электрического поля на металлический проводник в дополнение к **хаотическому** тепловому движению возникает **упорядоченное** движение электронов (электрический ток).

Даже при предельно допустимых значениях плотности тока, средняя скорость  $\langle v \rangle$  упорядоченного движения электронов, обуславливающего электрический ток, значительно меньше их скорости теплового движения  $\langle u \rangle$

$$\langle v \rangle \ll \langle u \rangle.$$

### 40. Основные законы электрического тока в классической теории электропроводности металлов.

#### Закон Ома.

Пусть в металлическом проводнике действует поле  $E = \text{const}$ . Под действием силы  $F = eE$  заряд  $e$  движется равноускоренно с ускорением

$$a = \frac{eE}{m} \text{ и к концу свободного пробега приобретает скорость } v_{\text{max}} = \frac{eE \langle t \rangle}{m}.$$

Среднее время свободного пробега электронов  $\langle t \rangle = \frac{\langle l \rangle}{\langle u \rangle}$  определяется

средней длиной свободного пробега  $\langle l \rangle$  и средней скоростью движения электронов относительно кристаллической решетки  $\langle u \rangle + \langle v \rangle \equiv \langle u \rangle$ .

Средняя скорость направленного движения электронов

$$\langle v \rangle = \frac{v_{\max} + 0}{2} = \frac{eE \langle t \rangle}{2m} = \frac{eE \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle}.$$

Плотность тока

$$j = ne \langle v \rangle = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle} E = \gamma E,$$

где  $\gamma = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle} = -$  удельная проводимость металла.

#### Закон Джоуля-Ленца.

К концу свободного пробега электрон под действием поля приобретает дополнительную кинетическую энергию

$$\langle E_K \rangle = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{e^2 \langle l \rangle^2}{2m \langle u \rangle^2} E^2,$$

которая при соударении электрона с ионом полностью передается решетке.

Если  $n$  – концентрация электронов, то в единицу времени в единицу объема происходит  $n \frac{\langle u \rangle}{\langle l \rangle}$  столкновений и решетке передается энергия

$$w = n \frac{\langle u \rangle}{\langle l \rangle} \langle E_K \rangle = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle} E^2 = \gamma E^2.$$

#### Закон Видемана-Франца.

Отношение теплопроводности  $\lambda$  к удельной проводимости  $\gamma$  для всех металлов при одной и той же температуре одинаково и увеличивается пропорционально температуре

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \beta T, \quad \text{где } \beta = 3 \left( \frac{k}{e} \right)^2.$$

#### Трудности классической теории.

1. Температурная зависимость сопротивления:  $\langle u \rangle \sim \sqrt{T}$ ,  $R \sim 1/\gamma$ , следовательно,  $R \sim \sqrt{T}$ , что противоречит опытным данным, согласно которым  $R \sim T$ .
2. Оценка среднего пробега электронов. Чтобы получить величины удельной проводимости  $\gamma$ , совпадающие с опытными данными, следует принимать  $\langle l \rangle$  в сотни раз больше межатомных расстояний в кристалле.
3. Теплоемкость металла складывается из теплоемкости кристаллической решетки и теплоемкости электронного газа. Поэтому удельная (рассчитанная на один моль) теплоемкость металла должна быть существенно выше теплоемкости диэлектриков, у которых нет свободных электронов, что противоречит эксперименту.

Все эти трудности снимаются квантовой теорией.

#### 41. Эмиссионные явления.

**Работа выхода электронов из металла** – работа, которую нужно затратить для удаления электрона из металла в вакуум.

Работа выхода зависит от химической природы металлов и от чистоты их поверхности. Подобрав определенным образом покрытие поверхности, можно значительно изменить работу выхода.

Работа выхода выражается в электрон-вольтах (эВ): 1 эВ равен работе, которую совершают силы поля при перемещении элементарного электрического заряда между точками разность потенциалов между которыми равна 1 В. Так как  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, то 1 эВ =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

**Электронная эмиссия** – явление испускания электронов из металлов при сообщении электронам энергии, равной или большей работы выхода.

1. **Термоэлектронная эмиссия** – испускание электронов нагретыми металлами. Пример использования – электронные лампы.
2. **Фотоэлектронная эмиссия** – эмиссия электронов из металла под действием электромагнитного излучения. Пример использования – фотодатчики.
3. **Вторичная электронная эмиссия** – испускание электронов поверхностью металлов, полупроводников или диэлектриков при бомбардировке их пучком электронов. Отношение числа вторичных электронов  $n_2$  к числу первичных  $n_1$ , вызвавших эмиссию, называется **коэффициентом вторичной электронной эмиссии**  $\delta = n_2/n_1$ . Пример использования – фотоэлектронные умножители.
4. **Автоэлектронная эмиссия** – эмиссия электронов с поверхности металлов под действием сильного внешнего электрического поля.

#### 42. Газовые разряды.

Под действием **ионизатора** (сильный нагрев, жесткое излучение, потоки частиц) нейтральные молекулы (атомы) газа расщепляются на ионы и свободные электроны – происходит **ионизация** газа.

**Энергия ионизации** – энергия, которую надо затратить, чтобы из молекулы (атома) выбить один электрон.

**Рекомбинацией** – называется процесс обратный ионизации: положительные и отрицательные ионы, положительные ионы и электроны, встречаясь, воссоединяются между собой с образованием нейтральных атомов и молекул.

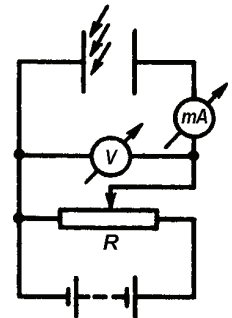
Прохождение электрического тока через ионизированный газ называется **газовым разрядом**.

Разряд, существующий только под действием внешних ионизаторов, называется **несамостоятельным газовым разрядом**.

Разряд в газе, сохраняющийся после прекращения действия внешнего ионизатора, называется **самостоятельным газовым разрядом**.

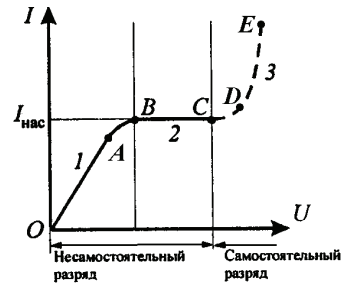
Рассмотрим цепь, содержащую газовый промежуток (см. рисунок), подвергающийся непрерывному, постоянному по интенсивности воздействию ионизатора.

В результате действия ионизатора газ приобретает некоторую электропроводность и в цепи потечет ток, зависимость которого от



приложенного напряжения (**вольт-амперная характеристика**) представлена на следующем рисунке.

На участке  $OA$  выполняется закон Ома. Затем (участок  $AB$ ) рост силы тока замедляется, а затем (участок  $BC$ ) прекращается совсем. В этом случае число ионов и электронов, создаваемых внешним ионизатором равно числу ионов и электронов достигающих электродов (и нейтрализующихся на электродах). Ток  $I_{\text{нас}}$ , соответствующий участку  $BC$  называется **током насыщения** и его величина определяется мощностью ионизатора.



При увеличении напряжения, первичные электроны (созданные ионизатором), ускоренные электрическим полем, в свою очередь начинают ударно ионизовать молекулы газа, образуя вторичные электроны и ионы. Общее количество электронов и ионов будет возрастать по мере приближения электронов к аноду лавинообразно. Это является причиной увеличения тока на участке  $CD$ . Описанный процесс называется **ударной ионизацией**.

И, наконец, при значительных напряжениях между электродами газового промежутка положительные ионы, ускоренные электрическим полем, также приобретают энергию, достаточную для ионизации молекул газа, что порождает ионные лавины. Когда возникают кроме электронных лавин еще и ионные, сила тока растет уже практически без увеличения напряжения (участок  $DE$ ).

Лавинообразное размножение электронов и ионов приводит к тому, что разряд становится самостоятельным, т.е. сохраняется после прекращения действия внешнего ионизатора. Напряжение, при котором возникает самостоятельный газовый разряд называется **напряжением пробоя**.

В зависимости от давления газа, конфигурации электродов, параметров внешней цепи можно говорить о **четырёх типах самостоятельного разряда**:

1. **Тлеющий разряд** — возникает при низком давлении.
2. **Искровой разряд** — возникает при большой напряженности электрического поля в газе, находящимся под давлением порядка атмосферного.
3. **Дуговой разряд** — возникает: а) если после зажигания искрового разряда от мощного источника постепенно уменьшать расстояние между электродами; б) минуя стадию искры, если электроды (например, угольные) сблизить до соприкосновения, а потом развести.
4. **Коронный разряд** — возникает при высоком давлении в резко неоднородном поле вблизи электродов с большой кривизной поверхности.

Для возникновения самостоятельного газового разряда **необходимо**, чтобы **концентрация** и **энергия** вторичных ионов и электронов, образовавшихся под действием ионизатора, были достаточны для **лавинного размножения** носителей (число вторичных носителей должно превышать число носителей, покидающих газовый разряд вследствие рекомбинации или нейтрализации на поверхностях, окружающих газовый разряд).

А.Н.Огурцов

## ФИЗИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ

### МАГНЕТИЗМ

*ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ*

**4**

<http://users.kpi.kharkov.ua/ogurtsov/lect4mag-7.pdf>

<http://www.ilt.kharkov.ua/bvi/ogurtsov/ln.htm>

## Магнитное поле

### 1. Основные особенности магнитного поля.

В 19 веке опытным путем были исследованы законы взаимодействия постоянных магнитов и проводников, по которым пропускался электрический ток. Опыты показали, что подобно тому, как в пространстве, окружающем электрические заряды, возникает электростатическое поле, так и в пространстве, окружающем токи и постоянные магниты, возникает силовое поле, которое называется **магнитным**.

Были установлены два экспериментальных факта:

- 1) магнитное поле действует на движущиеся заряды;
- 2) движущиеся заряды создают магнитное поле.

Этим магнитное поле существенно отличается от электростатического, которое действует как на движущиеся, так и на неподвижные заряды.

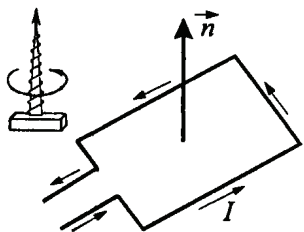
*Магнитное поле не действует на покоящиеся заряды.*

Опыт показывает, что характер воздействия магнитного поля на ток зависит от (1) *формы* проводника, по которому течет ток; от (2) *расположения* проводника и от (3) *направления* тока.

### 2. Рамка с током. Направление магнитного поля.

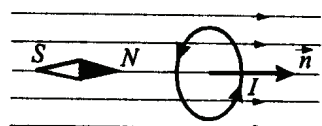
Аналогично тому, как при исследовании электростатического поля использовался точечный пробный заряд, при исследовании магнитного поля используется замкнутый плоский контур с током (рамка с током), линейные размеры которого малы по сравнению с расстоянием до токов, образующих магнитное поле.

Ориентация контура в пространстве характеризуется направлением нормали  $\vec{n}$  к контуру.



В качестве **положительного направления нормали** принимается направление, связанное с током **правилом правого винта (правилом буравчика)**:

*За положительное направление нормали принимается направление поступательного движения правого винта, головка которого вращается в направлении тока, текущего в рамке.*



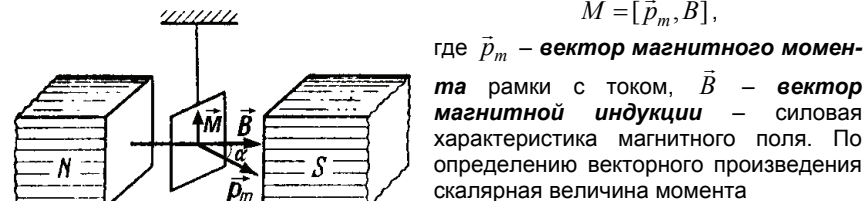
Магнитное поле оказывает на рамку с током ориентирующее действие, поворачивая её определенным образом. Это свойство используется для выбора **направления магнитного поля**.

**За направление магнитного поля в данной точке** принимается направление, вдоль которого располагается **положительная нормаль** к свободно подвешенной рамке с током, или направление, совпадающее с направлением силы, действующей на северный полюс (N) магнитной стрелки, помещенный в данную точку поля.

### 3. Вектор магнитной индукции.

Вращающий момент сил зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств рамки с током и определяется векторным произведением

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}],$$



где  $\vec{p}_m$  – **вектор магнитного момента** рамки с током,  $\vec{B}$  – **вектор магнитной индукции** – силовая характеристика магнитного поля. По определению векторного произведения скалярная величина момента

$$M = p_m B \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ .

Для плоского контура с током  $I$  магнитный момент определяется как

$$\vec{p}_m = IS\vec{n},$$

где  $S$  – площадь поверхности контура (рамки),  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности рамки. В этом случае вращающий момент  $\vec{M} = IS[\vec{n}, \vec{B}]$ .

Если в данную точку магнитного поля помещать рамки с различными магнитными моментами, то на них действуют различные вращающие моменты,

но отношение  $\frac{M_{\max}}{p_m}$  для всех контуров одно и то же.

Аналогично тому, как силовая векторная характеристика электростатического поля – напряженность – определялась как сила, действующая на пробный заряд, **силовая характеристика магнитного поля – магнитная индукция**  $\vec{B}$  – определяется максимальным вращающим моментом, действующим на рамку с магнитным моментом, равным единице, когда нормаль к рамке перпендикулярна направлению поля.

Графически магнитное поле, так же как электрическое, изображают с помощью **линий магнитной индукции** – линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\vec{B}$ .

**Линии магнитной индукции всегда замкнуты** и охватывают проводники с током, в то время как **линии электростатического поля – разомкнуты** (они начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах).

### 4. Макротоки и микротоки.

В дальнейшем мы будем различать **макроскопические токи**, т.е. электрические токи, протекающие по проводникам в электрических цепях и **микроскопические токи**, обусловленных движением электронов в атомах и молекулах.

Намагниченность постоянных магнитов является следствием существования в них **микротоков**.

Внешнее магнитное поле оказывает ориентирующее, упорядочивающее действие на эти микротоки. Например, если вблизи какого-то тела поместить проводник с током (**макроток**), то под действием его магнитного поля **микротоки** во всех атомах определенным образом ориентируются, создавая в теле **дополнительное** магнитное поле.

Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  характеризует *резльтирующее* магнитное поле, создаваемое *всеми макро- и микротоками*.

Поэтому, при одном и том же макротоке, вектор  $\vec{B}$  в различных средах будет иметь разные значения.

Магнитное поле макротока описывается **вектором напряженности магнитного поля  $\vec{H}$** .

В среде магнитное поле макротоков усиливается за счет поля микротоков среды.

#### 5. Связь между $\vec{B}$ и $\vec{H}$ .

Для однородной изотропной среды вектор магнитной индукции

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная (см. п.12),  $\mu$  – **магнитная проницаемость среды** (п.39), безразмерная величина, показывающая, во сколько раз магнитное поле макротоков  $H$  усиливается за счет поля микротоков среды.

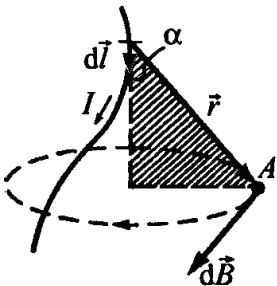
#### 6. Подобие векторных характеристик электростатического и магнитного полей.

Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  – *аналог* вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$ . Эти величины определяют силовые действия этих полей и зависят от свойств среды.

Аналогом вектора электрического смещения  $\vec{D}$  является вектор напряженности  $\vec{H}$  магнитного поля.

Для магнитного поля, как и для электрического, **справедлив принцип суперпозиции**: магнитная индукция результирующего поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме магнитных индукций полей, создаваемых каждым током или движущимся зарядом.

#### 7. Закон Био–Савара–Лапласа.



Элемент проводника  $d\vec{l}$  с током  $I$  создает в некоторой точке  $A$  индукцию поля

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3},$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из элемента  $d\vec{l}$  проводника в точку  $A$ .

Направление  $d\vec{B}$  перпендикулярно  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ , и совпадает с касательной к линии магнитной индукции. Модуль вектора  $d\vec{B}$  определяется выражением

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I d\sin\alpha}{r^2},$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

#### 8. Магнитное поле прямого тока.

Ток течет по прямому проводу бесконечной длины. В качестве постоянной интегрирования выберем угол  $\alpha$ .

$$\text{Из рисунка} \quad r = \frac{R}{\sin\alpha}, \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin\alpha}.$$

$$\text{Следовательно} \quad dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} \sin\alpha d\alpha.$$

Угол  $\alpha$  для всех элементов прямого провода изменяется от 0 до  $\pi$ . По принципу суперпозиции

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi R} I \int_0^\pi \sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi R} 2I.$$

Если ток течет по отрезку провода (см. рисунок), то

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi R} I (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Эта формула переходит в формулу для бесконечного длинного проводника при  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi$ .

#### 9. Магнитное поле в центре кругового тока.

В данном случае сложение векторов можно заменить сложением их модулей, учитывая  $\sin\alpha = 1$  и  $r = R$ ,

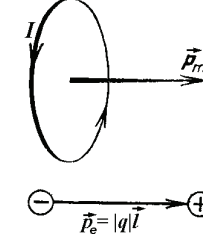
$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl, \quad \text{откуда}$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R^2} \int dl = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}$$

Можно показать, что на расстоянии  $r$  от центра витка вдоль оси витка

$$\text{магнитное поле будет равно} \quad B = \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{IR^2}{(\sqrt{R^2 + r^2})^3}.$$

Напряженность магнитного поля, создаваемого круговым током, на большом расстоянии от витка с током ( $r \gg R$ )



$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu} = \frac{IR^2}{2r^3} = \frac{IR^2 \cdot 2\pi}{2r^3 \cdot 2\pi} = \frac{2I \cdot \pi R^2}{4\pi r^3} = \frac{2IS}{4\pi r^3} = \frac{2p_m}{4\pi r^3},$$

где  $p_m = IS$  – магнитный момент витка с током.

Сравним эту формулу с формулой для электрического поля диполя (с электрическим дипольным моментом  $p_e$ ) на оси диполя (см. 3–п.13)

$$D = \epsilon_0 \epsilon E = \epsilon_0 \epsilon \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \frac{2p_e}{r^3} = \frac{2p_e}{4\pi r^3}.$$

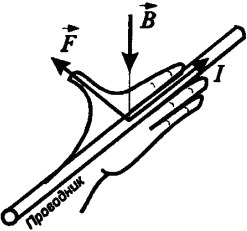
Очевидное подобие этих формул объясняет, почему часто говорят, что контур с током подобен "магнитному диполю", имеющему равный с контуром магнитный момент.



### 10. Закон Ампера.

Действие магнитного поля на рамку с током – это пример воздействия магнитного поля на проводник с током. Ампер установил, что сила  $d\vec{F}$ , с которой магнитное поле действует на элемент проводника  $d\vec{l}$  с током, находящегося в магнитном поле, равна

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}],$$



где  $d\vec{l}$  – вектор по модулю равный  $dl$  и совпадающий по направлению с током,  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции.

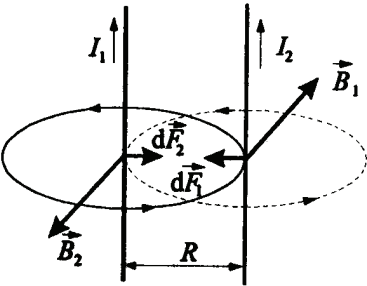
Наглядно направление силы Ампера принято определять по **правилу левой руки**: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор  $\vec{B}$ , а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый

большой палец покажет направление силы Ампера.

### 11. Взаимодействие параллельных токов.

Закон Ампера применяется для определения силы взаимодействия двух токов.

Два параллельных проводника с токами  $I_1$  и  $I_2$  находятся на расстоянии  $R$  друг от друга. Направление сил  $d\vec{F}_1$  и  $d\vec{F}_2$ , с которыми поля  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  действуют на проводники с токами  $I_2$  и  $I_1$ , определяются по правилу левой руки.



$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1}{R}, \quad dF_1 = I_2 B_1 dl.$$

$$\text{Отсюда: } dF_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \text{ Аналогично}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_2}{R}, \quad dF_2 = I_1 B_2 dl,$$

$$dF_2 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad \text{Таким образом:}$$

$$dF_1 = dF_2 = dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl.$$

Проводники с токами *одинакового* направления *притягиваются*, с токами *разного* направления – *отталкиваются*.

### 12. Магнитная постоянная.

В системе СИ единица измерения силы тока – **ампер** – вместе с килограммом, метром и секундой является основной единицей. По определению "ампер есть сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 метра один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  ньютона на каждый метр длины".

В вакууме ( $\mu = 1$ ) сила взаимодействия на единицу длины проводника

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R}$$

при  $I_1 = I_2 = 1\text{А}$  и  $R = 1\text{м}$ :  $\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}$ . Отсюда

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}},$$

где **генри (Гн)** – единица индуктивности – будет определена позднее.

### 13. Единицы магнитной индукции и напряженности магнитного поля.

Пусть элемент проводника  $d\vec{l}$  с током  $I$  перпендикулярен направлению магнитного поля. Закон Ампера  $d\vec{F} = I\vec{B}d\vec{l}$ , откуда

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF}{dl}.$$

**Единица магнитной индукции  $B$  – тесла (Тл)** – магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1Н на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику проходит ток 1А:  $1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}$

Из формулы  $B = \mu_0 \mu H$  в вакууме ( $\mu = 1$ ) получим  $H = \frac{B}{\mu_0}$ .

**Единица напряженности магнитного поля  $H$  – ампер на метр (А/м)** – напряженность такого поля, индукция которого в вакууме равна  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Тл}$ .

### 14. Магнитное поле свободно движущегося заряда.

Проводник с током создает вокруг себя магнитное поле. Электрический ток – это упорядоченное движение электрических зарядов. Магнитное поле  $\vec{B}$  точечного заряда  $q$ , свободно движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью  $\vec{v}$  ( $v \ll c$ )

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}, \quad B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{qv}{r^2} \sin \alpha,$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из заряда  $q$  к точке наблюдения,  $\alpha$  – угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ .

### 15. Сила Лоренца.

Так же как и на проводник с током, магнитное поле действует и на отдельный заряд, движущийся в магнитном поле.

Сила, действующая на электрический заряд  $q$ , движущийся в магнитном поле  $\vec{B}$  со скоростью  $\vec{v}$ , называется **силой Лоренца**

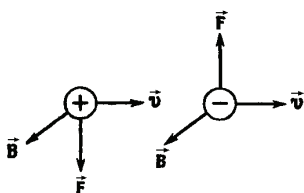
$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$$

$$\text{или } F = qvB \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Сводная таблица.

|                      | Проводник с током  | Свободно движущийся заряд  |
|----------------------|--|--|
| Магнитное поле       | $\vec{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I[\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3}$<br>закон Био–Савара–Лапласа | $\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$ |
| Сила, действующая на | $\vec{d}\vec{F} = I[\vec{dl}, \vec{B}]$<br>сила Ампера   | $\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$<br>сила Лоренца                    |



Направление силы Лоренца, так же как и силы Ампера, определяется по *правилу левой руки*. Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы. Поэтому она изменяет только направление этой скорости, не изменяя ее модуля. Следовательно, сила Лоренца работы не совершает.

Постоянное магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем заряженной частицей и кинетическая энергия этой частицы при движении в магнитном поле не изменяется.

Движение заряда, на который кроме магнитного поля с индукцией  $\vec{B}$  действует и электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ , описывается **формулой Лоренца**

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}].$$

### 16. Движение заряженных частиц в магнитном поле.

Считаем, что магнитное поле *однородно* и на частицы не действуют электрические поля. Рассмотрим три возможных случая:

1.  $\vec{v} \parallel \vec{B}$  – Заряженная частица движется в магнитном поле вдоль линий

магнитной индукции (угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  равен 0 или  $\pi$ ). Сила Лоренца равна нулю. Магнитное поле на частицу не действует, и она движется **равномерно и прямолинейно**.

2.  $\vec{v} \perp \vec{B}$  – Заряженная частица движется в магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции (угол  $\alpha = \pi/2$ ).

Сила Лоренца  $F = qvB$ : постоянна по модулю и нормальна к траектории частицы. **Частица будет двигаться по окружности** радиуса  $R$  с центростремительным ускорением  $a_n = \frac{v^2}{R}$ . Из второго закона Ньютона  $qvB = \frac{mv^2}{R}$

получаем радиус окружности  $R = \frac{mv}{qB}$  и период вращения  $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$ .

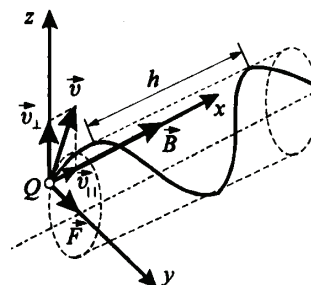
3. Заряженная частица движется под углом  $\alpha$  к линиям магнитной индукции.

Движение частицы можно представить в виде **суммы двух движений**:

1) равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha,$$

2) равномерного движения по окружности в плоскости, перпендикулярной полю.



Суммарное движение будет движением по спирали, ось которой параллельна магнитному полю. Шаг винтовой линии  $h = v_{\parallel} T = v T \cos \alpha$ , где

$$T = \frac{2\pi R}{v} \text{ – период вращения частицы, и } R = \frac{mv}{qB}$$

$$h = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}.$$

Если магнитное поле неоднородно и заряженная частица движется под углом к линиям магнитного поля в направлении возрастания

поля, то величины  $R$  и  $h$  уменьшаются с ростом  $\vec{B}$ . На этом основана фокусировка заряженных частиц магнитным полем.

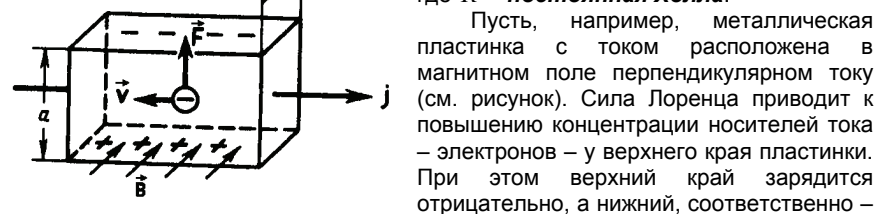
### 17. Эффект Холла.

**Эффект Холла** – это возникновение электрического поля в проводнике или полупроводнике с током при помещении его в магнитное поле.

Эффект Холла – следствие влияния силы Лоренца на движение носителей тока. В магнитном поле  $\vec{B}$  при протекании через проводник тока с плотностью  $\vec{j}$  устанавливается электрическое поле с напряженностью

$$\vec{E} = R[\vec{B}, \vec{j}],$$

где  $R$  – **постоянная Холла**.



Пусть, например, металлическая пластинка с током расположена в магнитном поле перпендикулярном току (см. рисунок). Сила Лоренца приводит к повышению концентрации носителей тока – электронов – у верхнего края пластинки. При этом верхний край зарядится отрицательно, а нижний, соответственно –

положительно. Стационарное распределение зарядов будет достигнуто, когда действие созданного таким образом электрического поля уравновесит силу Лоренца:  $eE = e \frac{\Delta \phi}{a} = evB$ , или  $\Delta \phi = vBa$ , где  $a$  – ширина пластинки,  $e$  –

заряд электрона,  $\Delta \phi$  – **поперечная (холловская) разность потенциалов**.

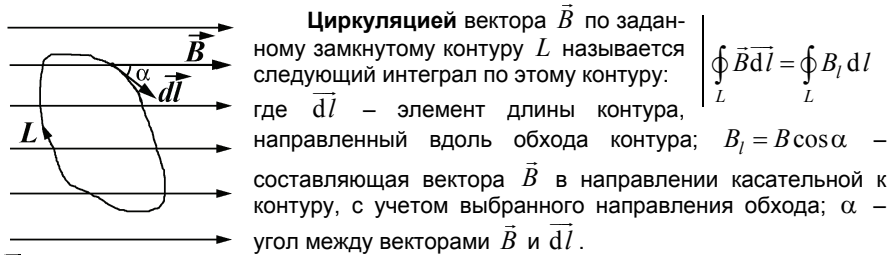
Поскольку сила тока  $I = jS = nevS$  ( $S = ad$  – площадь поперечного сечения пластинки толщиной  $d$  и шириной  $a$ ,  $n$  – концентрация электронов,  $v$  – средняя скорость упорядоченного движения электронов), то

$$\Delta \phi = \frac{I}{nead} Ba = \frac{1}{en} \frac{IB}{d} = R \frac{IB}{d}.$$

Знак постоянной Холла  $R = \frac{1}{en}$  совпадает со знаком носителей тока,

поэтому эффект Холла используют для определения природы носителей тока в веществах и определения их концентрации.

### 18. Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ .



**Теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  (закон полного магнитного поля в вакууме):** циркуляция вектора  $\vec{B}$  по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k,$$

где  $n$  – число проводников с токами, охватываемых контуром  $L$  произвольной формы.

Эта теорема справедлива *только для поля в вакууме*, поскольку для поля в веществе надо учитывать молекулярные токи. Каждый ток учитывается столько раз, сколько он охватывается контуром. Положительным считается ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру *правилом правого винта*.

**Пример:** магнитное поле прямого тока.

Замкнутый контур представим в виде окружности радиуса  $r$ . В каждой точке этой окружности вектор  $\vec{B}$  одинаков по модулю и направлен по касательной к окружности:

$$\oint_L B_l dl = \oint_L B dl = B \oint_L dl = B 2\pi r = \mu_0 I, \text{ отсюда } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Сравним выражения для циркуляций векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

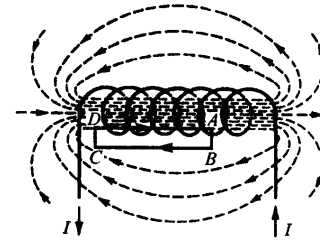
$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k.$$

Принципиальное различие между этими формулами в том, что циркуляция вектора  $\vec{E}$  электростатического поля *всегда равна нулю*. Такое поле является **потенциальным**. Циркуляция вектора  $\vec{B}$  магнитного поля *не равна нулю*. Такое поле называется **вихревым** или **соленоидальным**.

### 19. Магнитное поле соленоида.

**Соленоидом** называется свернутый в спираль изолированный проводник по которому течет электрический ток. Рассмотрим соленоид длиной  $l$ , имеющий  $N$  витков. Циркуляция вектора  $\vec{B}$  по замкнутому контуру  $ABCD$ , охватывающему все  $N$  витков, равна

$$\oint_{ABCD} B_l dl = \mu_0 NI.$$



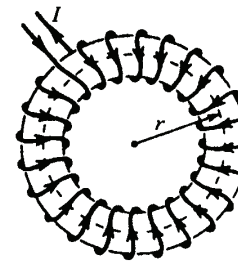
магнитной индукции, внутри соленоида поле однородно ( $B_l = B$ ), поэтому

$$\int_{DA} B_l dl = Bl = \mu_0 NI.$$

Магнитная индукция (бесконечного) соленоида в вакууме

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}.$$

### 20. Магнитное поле тороида в вакууме.



**Тороидом** – называется кольцевая катушка с витками, намотанными на сердечник, имеющий форму тора, по которой течет ток.

Магнитное поле отсутствует вне тороида, а внутри его оно является однородным.

Линии магнитной индукции, как следует из соображений симметрии, есть окружности, центры которых расположены на оси тороида.

В качестве контура выберем одну такую окружность радиуса  $r$ . По теореме о циркуляции  $B 2\pi r = \mu_0 NI$ , где  $N$  – число витков тороида. Отсюда

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

### 21. Поток вектора магнитной индукции.

**Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком)** через площадку  $dS$  называется *скалярная физическая величина*, равная

$$d\Phi_B = \vec{B} d\vec{S} = B_n dS,$$

где  $B_n = B \cos \alpha$  – проекция вектора  $\vec{B}$  на направление нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$ ,  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$ ,  $d\vec{S}$  – вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление совпадает с направлением нормали  $\vec{n}$  к площадке.

Поток вектора  $\vec{B}$  может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака  $\cos \alpha$ .

Поток вектора  $\vec{B}$  связывают с контуром по которому течет ток. Положительное направление нормали к контуру связано с направлением тока по правилу правого винта. Поэтому *магнитный поток, создаваемый контуром с током через поверхность, ограниченную им самим, всегда положителен*.

Поток вектора магнитной индукции через произвольную поверхность  $S$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B_n dS.$$

Если поле однородно и перпендикулярно ему расположена плоская поверхность с площадью  $S$ , то

$$\Phi_B = BS.$$

**Единица магнитного потока – вебер (Вб):** 1Вб – магнитный поток, проходящий сквозь плоскую поверхность площадью  $1\text{м}^2$ , расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1Тл (1 Вб=1 Тл·м<sup>2</sup>).

## 22. Теорема Гаусса для магнитного поля в вакууме

Поток вектора магнитной индукции сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Эта теорема отражает факт отсутствия магнитных зарядов, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала ни конца и являются замкнутыми.

## 23. Потокосцепление.

Магнитный поток через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, называется **потокосцеплением**  $\Psi$  этого **контюра**.

Потокосцепление контура, обусловленное магнитным полем тока в самом этом контуре, называется **потокосцеплением самоиндукции**.

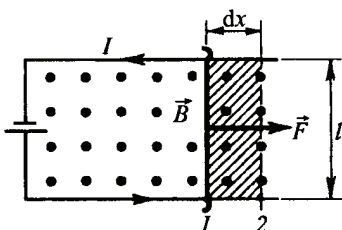
Например, найдем потокосцепление самоиндукции соленоида с сердечником с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Магнитный поток сквозь один виток соленоида площадью  $S$  равен  $\Phi_1 = BS$ . Полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида равен

$$\Psi = \Phi_1 N = BSN = \frac{\mu_0 \mu N I}{l} SN = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S.$$

Потокосцепление контура, обусловленное магнитным полем тока, идущего в другом контуре, называется **потокосцеплением взаимной индукции** этих двух контуров.

## 24. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.

Проводник длиной  $l$  (он может свободно перемещаться) с током  $I$  находится в однородном магнитном поле (см. рисунок). Поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка – из-за чертежа. Сила Ампера  $F = IBl$ .



Под ее действием проводник переместился из положения 1 в положение 2.

Работа, совершаемая магнитным полем:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{x} = I d\vec{x} [\vec{l}, \vec{B}] = IB dx = IB dS = I d\Phi.$$

Использованы соотношения:

$dS = l dx$  – площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле;  $B dS = d\Phi$  – поток вектора магнитной

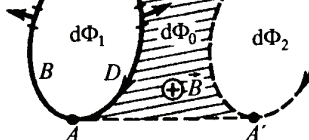
индукции, пронизывающий эту площадь. Таким образом,  $dA = I d\Phi$ .

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока на магнитный поток, пересеченный движущимся проводником.

## 25. Работа по перемещению контура с током в магнитном поле.

Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка – за чертеж. Работа  $dA$  сил Ампера при перемещении контура  $ABCD$  равна сумме работ по перемещению проводников  $ABC$  ( $dA_1$ ) и  $CDA$  ( $dA_2$ ), т.е.

$$dA = dA_1 + dA_2.$$



При перемещении участка  $CDA$  силы Ампера направлены в сторону перемещения (образуют с направлением перемещения острые углы), поэтому  $dA_2 > 0$

$$dA_2 = I(d\Phi_0 + d\Phi_2).$$

Силы, действующие на участок  $ABC$  контура, направлены против перемещения (образуют с направлением перемещения тупые углы), поэтому  $dA_1 < 0$

$$dA_1 = -I(d\Phi_0 + d\Phi_1).$$

В сумме

$$dA = I(d\Phi_2 - d\Phi_1), \text{ или } A = I\Delta\Phi, \text{ или } A = I(\Psi_2 - \Psi_1).$$

Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, сцепленного с контуром (или на его потокосцепление).

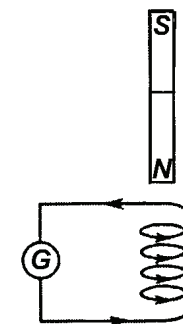
## Электромагнитная индукция.

### 26. опыты Фарадея.

#### Опыт 1.

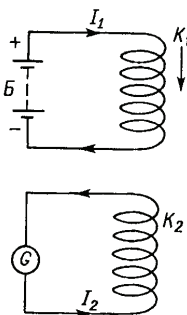
Соленоид подключен к гальванометру. Если в соленоид вдвигать (или выдвигать) постоянный магнит, то в моменты вдвигания (или выдвигания) наблюдается отклонение стрелки гальванометра, т.е. в соленоиде индуцируется ЭДС.

Направление отклонения стрелки при вдвигании и выдвигании противоположны. Если постоянный магнит развернуть так, чтобы полюса поменялись местами, то и направление отклонения стрелки изменится на противоположное. Отклонение стрелки гальванометра тем больше, чем больше скорость движения магнита относительно соленоида. Такой же эффект будет, если постоянный магнит оставить неподвижным, а относительно его перемещать соленоид.



**Опыт 2.**

Один соленоид ( $K_1$ ) подключен к источнику тока. Другой соленоид ( $K_2$ ) подключен к гальванометру. Отклонение стрелки гальванометра наблюдается в моменты включения или выключения тока, в моменты его увеличения или уменьшения или при перемещении катушек друг относительно друга. При включении и выключении стрелка отклоняется в разные стороны, т.е. знак индуцированной ЭДС в этих случаях различен. Такой же эффект – наведение в катушке  $K_2$  ЭДС различного знака – наблюдается при увеличении или уменьшении тока в катушке  $K_1$ ; при сближении или удалении катушек.



В опытах Фарадея было открыто **явление электромагнитной индукции**. Оно заключается в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток, получивший название **индукционного**.

Основные свойства индукционного тока:

1. Индукционный ток возникает всегда, когда происходит **изменение** сцепленного с контуром **потока магнитной индукции**.
2. Сила индукционного тока не зависит от способа изменения потока магнитной индукции, а определяется лишь **скоростью** его изменения.

Открытие явления электромагнитной индукции:

- 1) показало взаимосвязь между электрическим и магнитным полем;
- 2) предложило способ получения электрического тока с помощью магнитного поля.

**27. Закон Фарадея.**

Обобщая результаты опытов, Фарадей показал, что всякий раз, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции, в контуре возникает индукционный ток.

Возникновение индукционного тока указывает на наличие в цепи электродвижущей силы.

Эта ЭДС называется **электродвижущей силой электромагнитной индукции**.

**Закон Фарадея:** ЭДС электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром

$$\Theta_i = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Для замкнутого контура магнитный поток  $\Phi$  есть не что иное, как потокосцепление  $\Psi$  этого контура. Поэтому в электротехнике закон Фарадея часто записывают в форме

$$\Theta_i = - \frac{d\Psi}{dt}.$$

Направление индукционного тока определяется по **правилу Ленца**: При **всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на замкнутый проводящий контур, в последнем возникает индукционный ток такого направления, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока**.

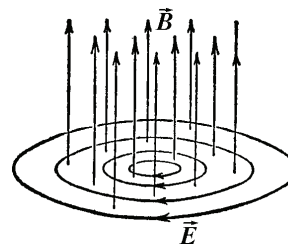
ЭДС электромагнитной индукции выражается в вольтах.

$$\left[ \frac{d\Phi}{dt} \right] = \frac{\text{Вб}}{\text{с}} = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \text{В}.$$

**28. ЭДС индукции в неподвижных проводниках.**

Согласно закону Фарадея, возникновение ЭДС электромагнитной индукции возможно и в случае **неподвижного** контура, находящегося в **переменном** магнитном поле. Однако сила Лоренца на неподвижные заряды не действует, поэтому в данном случае ею нельзя объяснить возникновение ЭДС индукции.

Кроме того, опыт показывает, что ЭДС индукции **не зависит** от рода вещества проводника, от состояния проводника, в частности, от его температуры, которая может быть неодинаковой вдоль проводника. Следовательно, сторонние силы, индуцируемые магнитным полем, **не связаны с изменением свойств проводника** в магнитном поле, а обусловлены самим магнитным полем.



Максвелл для объяснения ЭДС индукции в неподвижных проводниках предположил, что **переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле**, которое и является причиной возникновения индукционного тока в проводнике.

На рисунке приведен пример вихревого электрического поля, возникающего при возрастании магнитного поля.

**Вихревое электрическое поле не является электростатическим.**

Силовые линии **электростатического** поля всегда разомкнуты – они начинаются и заканчиваются на электрических зарядах. Именно поэтому напряжение по замкнутому контуру в электростатическом поле всегда равно нулю, это поле не может поддерживать замкнутое движение зарядов и, следовательно, не может привести к возникновению электродвижущей силы.

Напротив, **электрическое поле, возбуждаемое изменениями магнитного поля**, имеет непрерывные силовые линии, т.е. представляет собой вихревое поле. Такое поле вызывает в проводнике движение электронов по замкнутым траекториям и приводит к возникновению ЭДС – сторонними силами являются силы вихревого электрического поля.

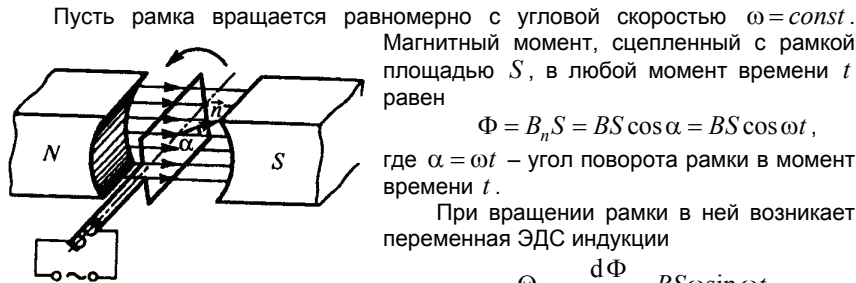
Циркуляция  $\vec{E}_B$  этого поля по любому контуру  $L$  проводника представляет собой ЭДС электромагнитной индукции

$$\Theta_i = \oint_L \vec{E}_B \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

**29. Вращение рамки в магнитном поле.**

Явление электромагнитной индукции применяется для преобразования механической энергии в энергию электрического тока. Для этой цели используются **генераторы**, принцип действия которых рассмотрим на примере плоской рамки, вращающейся в однородном ( $B = \text{const}$ ) магнитном поле.





Пусть рамка вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ . Магнитный момент, сцепленный с рамкой площадью  $S$ , в любой момент времени  $t$  равен

$$\Phi = B_n S = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t,$$

где  $\alpha = \omega t$  – угол поворота рамки в момент времени  $t$ .

При вращении рамки в ней возникает переменная ЭДС индукции

$$\Theta_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t.$$

Максимальное значение ЭДС индукции  $\Theta_{\text{max}} = BS\omega$ . Тогда

$$\Theta_i = \Theta_{\text{max}} \sin \omega t.$$

При равномерном вращении рамки в однородном магнитном поле в ней возникает переменная ЭДС, изменяющаяся по гармоническому закону.

Процесс превращения механической энергии в электрическую обратим. Если по рамке, помещенной в магнитное поле, пропускать электрический ток, то на нее будет действовать вращающий момент  $\vec{M} = IS[\vec{n}, \vec{B}]$  и рамка начнет вращаться. На этом принципе основана работа **электродвигателей**.

### 30. Вихревые токи (токи Фуко).

Индукционный ток возникает не только в линейных проводниках, но и в массивных сплошных проводниках, помещенных в переменное магнитное поле. Эти токи замкнуты в толще проводника и называются **вихревыми или токами Фуко**.

Токи Фуко также подчиняются правилу Ленца: их магнитное поле направлено так, чтобы противодействовать изменению магнитного потока, индуцирующему вихревые токи. Поэтому массивные проводники тормозятся в магнитном поле. Кроме того, вихревые токи вызывают сильное нагревание проводников. В электрических машинах, для того чтобы минимизировать влияние токов Фуко, сердечники трансформаторов и магнитные цепи электрических машин собирают из тонких пластин, изолированных друг от друга специальным лаком или оксидом.

Джоулево тепло, выделяемое токами Фуко, используется в индукционных металлургических печах.

Взаимодействие вихревых токов с высокочастотным магнитным полем приводит к неравномерному распределению магнитного потока по сечению магнитопроводов – вытеснение магнитного потока из объема в приповерхностные области проводника. Это явление называется **магнитным скин-эффектом**.

Вихревые токи возникают и в самом проводнике, по которому течет переменный ток, что приводит к неравномерному распределению тока по сечению проводника – вытеснение токов высокой частоты в приповерхностные области проводника. Это явление называется **электрическим скин-эффектом**.

### 31. Индуктивность контура.

Электрический ток, текущий в замкнутом контуре, создает вокруг себя магнитное поле, **индукция которого**, по закону Био-Савара-Лапласа

**пропорциональна току**. Поэтому **сцепленный с контуром** магнитный поток пропорционален току в контуре

$$\Phi = LI,$$

где коэффициент пропорциональности  $L$  называется **индуктивностью контура**.

Пример: индуктивность длинного соленоида.

Потокоосцепление соленоида (полный магнитный поток сквозь соленоид)

$$\Psi = BSN = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S, \quad \text{откуда:}$$

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l},$$

где  $N$  – число витков соленоида,  $l$  – его длина,  $S$  – площадь,  $\mu$  – магнитная проницаемость сердечника.

**Индуктивность** контура в общем случае зависит только от геометрической формы контура, его размеров и магнитной проницаемости той среды, в которой он находится.

В этом смысле **индуктивность контура** – **аналог** электрической емкости уединенного проводника, которая также зависит только от формы проводника, его размеров и диэлектрической проницаемости среды.

### 32. Самоиндукция.

При изменении силы тока в контуре будет изменяться и сцепленный с ним магнитный поток, а это, в свою очередь будет индуцировать ЭДС в этом контуре. Возникновение ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока называется **самоиндукцией**.

**Единица индуктивности – генри (Гн):** 1Гн – индуктивность такого контура, магнитный поток самоиндукции которого при токе в 1А равен 1Вб (1Гн=1Вб/А=1В·с/А).

$$\text{Из закона Фарадея ЭДС самоиндукции} \quad \Theta_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI).$$

Если контур не деформируется и магнитная проницаемость среды не изменяется, то  $L = \text{const}$  и ЭДС самоиндукции

$$\Theta_s = -L \frac{dI}{dt},$$

где знак минус, обусловленный правилом Ленца, показывает, что наличие индуктивности в контуре приводит к **замедлению изменения** тока в нем.

Если ток со временем возрастает, то  $\Theta_s < 0$ , т.е. ток самоиндукции направлен навстречу току, обусловленному внешним источником, и замедляет его возрастание.

Если ток со временем убывает, то  $\Theta_s > 0$ , т.е. ток самоиндукции имеет такое же направление, как и убывающий ток в контуре, и замедляет его убывание.

Таким образом, контур, обладая определенной индуктивностью, приобретает электрическую "инертность".



### 33. Токи при размыкании и замыкании цепи.

При всяком изменении силы тока в проводящем контуре возникает ЭДС самоиндукции, в результате чего в контуре появляются дополнительные токи, называемые **экстратоками самоиндукции**.

Пусть в цепи сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$  под действием внешней ЭДС  $\Theta$  течет постоянный ток  $I_0 = \Theta/R$ . В момент времени  $t = 0$  **выключим** источник тока. Возникает ЭДС самоиндукции  $\Theta_s = -L \frac{dI}{dt}$ , препятствующая уменьшению тока. Ток в цепи определяется законом

Ома  $IR = \Theta_s$ , или  $IR = -L \frac{dI}{dt}$ . Разделяем переменные:  $\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$ , и

интегрируем по  $I$  (от  $I_0$  до  $I$ ) и по  $t$  (от 0 до  $t$ ):  $\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{Rt}{L}$ , или

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (\text{кривая 1})$$

где  $\tau = \frac{L}{R}$  – постоянная, называемая **временем релаксации** – время, в течение которого сила тока уменьшается в  $e$  раз.

Таким образом, при выключении источника тока сила тока убывает по экспоненциальному закону (а не мгновенно).

Оценим значение ЭДС самоиндукции при мгновенном увеличении сопротивления от  $R_0$  до  $R$

$$I = \frac{\Theta}{R_0} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right), \quad \text{откуда} \quad \Theta_s = -L \frac{dI}{dt} = \frac{R}{R_0} \Theta \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right).$$

Т.е. при **резком размыкании** контура ( $R \gg R_0$ ) ЭДС самоиндукции  $\Theta_s$  может во много раз превысить  $\Theta$ , что может привести к пробое изоляции и выводу из строя измерительных приборов.

При **замыкании** цепи помимо внешней ЭДС  $\Theta$  возникает ЭДС самоиндукции  $\Theta_s = -L \frac{dI}{dt}$ , препятствующая возрастанию тока. По закону Ома,

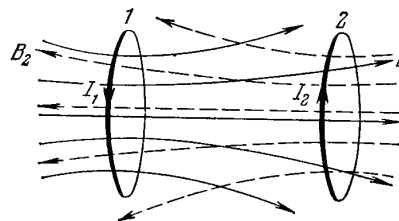
$IR = \Theta + \Theta_s$ , или  $IR = \Theta - L \frac{dI}{dt}$ . Можно показать, что решение этого уравнения имеет вид

$$I = I_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right), \quad (\text{кривая 2})$$

где  $I_0 = \frac{\Theta}{R}$  – установившийся ток (при  $t \rightarrow \infty$ ).

Таким образом, при включении источника тока сила тока возрастает по экспоненциальному закону (а не мгновенно).

### 34. Взаимная индукция.



**Взаимной индукцией** называется явление возбуждения ЭДС электромагнитной индукции в одной электрической цепи при изменении электрического тока в другой цепи или при изменении взаимного расположения этих двух цепей.

Рассмотрим два неподвижных контура 1 и 2 с токами  $I_1$  и  $I_2$ , расположенных достаточно близко друг от друга. При протекании в контуре 1 тока  $I_1$  магнитный поток пронизывает второй контур

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1, \quad \text{аналогично} \quad \Phi_{12} = L_{12} I_2.$$

Коэффициенты пропорциональности  $L_{21}$  и  $L_{12}$  равны друг другу  $L_{12} = L_{21} = L$  и называются **взаимной индуктивностью контуров**.

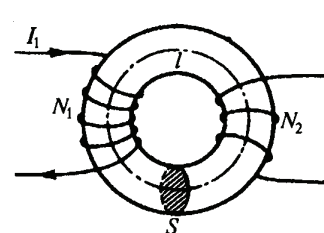
При изменении силы тока в одном из контуров, в другом индуцируется ЭДС

$$\Theta_{i2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L \frac{dI_1}{dt}, \quad \Theta_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L \frac{dI_2}{dt}.$$

Взаимная индуктивность контуров зависит от геометрической формы, размеров, взаимного расположения контуров и от магнитной проницаемости окружающей контуры среды.

Для примера рассчитаем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на тороидальный сердечник.

Первая катушка с числом витков  $N_1$  и током  $I_1$  создает поле



$$B = \mu_0 \mu \frac{N_1 I_1}{l}. \quad \text{Магнитный поток сквозь один}$$

$$\text{виток второй катушки} \quad \Phi_2 = BS = \mu_0 \mu \frac{N_1 I_1}{l} S,$$

где  $l$  – длина сердечника по средней линии. Тогда полный магнитный поток (потокосцепление) сквозь вторичную обмотку, содержащую  $N_2$  витков:

$$\Psi = \Phi_2 N_2 = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S I_1. \quad \text{Поскольку поток } \Psi \text{ создается током } I_1, \text{ то}$$

$$L = \frac{\Psi}{I_1} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

Данное устройство является примером трансформатора.

### 35. Трансформаторы.

Принцип действия трансформаторов, применяемых для повышения или понижения напряжения переменного тока, основан на явлении взаимной индукции. Переменный ток  $I_1$  создает в первичной обмотке переменное

магнитное поле. Это вызывает во вторичной обмотке появление ЭДС взаимной индукции. При этом

$$\Theta_2 = -\frac{N_2}{N_1} \Theta_1,$$

где  $N_1$  и  $N_2$  – число витков в первичной и вторичной обмотках, соответственно.

Отношение  $k = \frac{N_2}{N_1}$ , показывающее, во сколько раз ЭДС во вторичной

обмотке трансформатора больше (или меньше), чем в первичной, называется коэффициентом трансформации.

Если  $k > 1$ , то трансформатор – **повышающий**, если  $k < 1$  – **понижающий**.

### 36. Энергия магнитного поля.

Проводник, по которому протекает электрический ток, всегда окружен магнитным полем. Магнитное поле появляется и исчезает вместе с появлением и исчезновением тока. Магнитное поле, подобно электрическому, является носителем энергии. Энергия магнитного поля равна работе, которую затрачивает ток на создание этого поля.

Рассмотрим контур индуктивностью  $L$ , по которому течет ток  $I$ .

С данным контуром сцеплен магнитный поток  $\Phi = LI$ .

При изменении тока на  $dI$  магнитный поток изменяется на  $d\Phi = L dI$ .

Для такого изменения магнитного потока необходимо совершить работу

$$dA = I d\Phi = LI dI.$$

$$A = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}.$$

Тогда работа по созданию магнитного потока  $\Phi$  будет равна

$$A = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}.$$

**Энергия магнитного поля**, связанного с контуром,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

На примере однородного магнитного поля внутри длинного соленоида выразим энергию магнитного поля через величины, характеризующие это поле в окружающем пространстве.

Индуктивность соленоида  $L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}$ , следовательно,  $W = \frac{1}{2} \mu_0 \mu \frac{N^2 I^2}{l} S$ .

Магнитная индукция поля соленоида  $B = \frac{\mu_0 \mu NI}{l}$ , следовательно,  $I = \frac{Bl}{\mu_0 \mu N}$ .

По определению вектора напряженности магнитного поля  $B = \mu_0 \mu H$ .

Используя эти соотношения

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V = \frac{BH}{2} V,$$

где  $Sl = V$  – объем соленоида.

Магнитное поле длинного соленоида однородно и сосредоточено внутри него, поэтому энергия заключена в объеме соленоида и распределена в нем с **объемной плотностью**

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

Эти соотношения носят общий характер и справедливы и для неоднородных полей, но только для сред, для которых связь между  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  линейная (т.е. для пара- и диамагнетиков).

Выражение для объемной плотности энергии магнитного поля аналогично соответствующему выражению для объемной плотности энергии

электростатического поля:  $w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}$ , с той разницей, что

электрические величины заменены в нем магнитными.

## Магнитные свойства вещества.

### 37. Магнитные моменты электронов и атомов.

До сих пор влияние среды на магнитные явления учитывалось формально введением магнитной проницаемости  $\mu$ . Для того, чтобы разобраться в магнитных свойствах сред и их влиянии на магнитную индукцию, необходимо рассмотреть действие магнитного поля на атомы и молекулы вещества.

Все вещества, помещенные в магнитное поле, намагничиваются, поскольку в любом теле существуют **микроскопические токи** (микротоки), обусловленные движением электронов в атомах и молекулах.

Для многих целей, в том числе и для объяснения многих магнитных явлений, можно использовать **квазиклассическую модель**, в которой предполагается, что атом состоит из положительно заряженного ядра, вокруг которого обращаются электроны по круговым или эллиптическим орбитам, подобно планетам солнечной системы (планетарная модель атома).

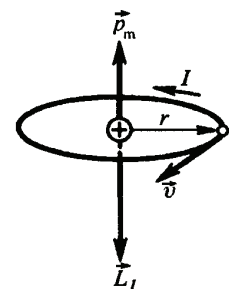
Такие электроны, обращающиеся по орбитам, представляют собой замкнутые электрические токи, и поэтому естественно предположить, что именно они являются микротоками (существование которых предполагал еще Ампер), ответственными за намагничивание вещества.

Если электрон совершает  $\nu$  оборотов в секунду, то сила тока  $I = e\nu$ . **Орбитальный магнитный момент электрона**, движущегося по круговой орбите, площадью  $S$

$$p_m = IS = e\nu S.$$

Если электрон движется по часовой стрелке, то ток направлен против часовой стрелки и вектор  $\vec{p}_m$  (в соответствии с правилом правого винта) направлен перпендикулярно плоскости орбиты электрона.

Так как электронам присущ не только заряд, но еще и масса, то каждый орбитально движущийся электрон обладает не только магнитным моментом (как и всякий замкнутый ток), но еще и определенным



механическим моментом импульса  $\vec{L}_l$ , т.е. подобен волчку

$$L_l = mvr = m\omega r^2 = 2mvS,$$

где  $\omega = 2\pi\nu$  – угловая скорость электрона,  $\pi r^2 = S$ . Вектор  $\vec{L}_l$  называется орбитальным механическим моментом электрона. Поскольку направление вектора  $\vec{L}_l$  также определяется по правилу правого винта, то направления  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}_l$  противоположны. Поэтому

$$\vec{p}_m = e\nu S = -\frac{e}{2m}\vec{L}_l = \Gamma \cdot \vec{L}_l,$$

где величина  $\Gamma = -\frac{1}{2}\left(\frac{e}{m}\right)$  называется гиромагнитным отношением

орбитальных моментов,  $\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг – удельный заряд электрона.

Кроме орбитальных моментов, электрон обладает собственным механическим моментом импульса  $\vec{L}_s$ , называемый спином.

Спину электрона соответствует собственный (спиновый) магнитный момент  $\vec{p}_{ms}$ . Проекция спина на направление вектора  $\vec{B}$  может принимать только одно из следующих двух значений

$$p_{msB} = \pm \frac{e\hbar}{2m_e} = \pm \mu_B,$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  ( $h$  – постоянная Планка),  $\mu_B$  – **магнетон Бора**, являющийся единицей магнитного момента электрона.

Общий магнитный момент атома или молекулы равен векторной сумме магнитных моментов (орбитальных и спиновых) входящих в атом (молекулу) электронов

$$\vec{p}_a = \sum \vec{p}_m + \sum \vec{p}_{ms}.$$

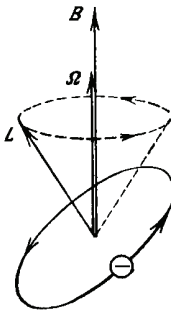
Магнитные моменты атомных ядер в тысячи раз меньше магнитных моментов электронов, поэтому ими как правило пренебрегают.

### 38. Диа- и парамагнетики.

Всякое вещество является **магнетиком**, т.е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться).

На вращающийся по орбите электрон, как на замкнутый ток, в магнитном поле действует вращающий момент сил. В результате электрон получает дополнительное равномерное вращение, при котором вектор  $\vec{L}$  будет описывать конус вокруг направления индукции  $\vec{B}$  с некоторой угловой скоростью  $\Omega$ . Такое движение называется **прецессией**.

**Теорема Лармора:** действие магнитного поля на электронную орбиту можно свести к сообщению этой орбите прецессии с угловой скоростью  $\Omega$ .



Прецессионное движение электронных орбит эквивалентно круговому микротoku. Так как этот микроток индуцирован внешним магнитным полем, то, согласно правилу Ленца, у атома появляется **магнитный момент**, направленный **против внешнего поля**.

Наведенные составляющие магнитных полей атомов складываются и образуют собственное магнитное поле вещества, ослабляющее внешнее магнитное поле. Этот эффект получил название диамагнитного эффекта, а вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле против направления поля, называются диамагнетиками (например, Ag, Au, Cu...).

Так как диамагнитный эффект обусловлен действием внешнего магнитного поля на электроны атомов вещества, то диамагнетизм свойствен всем веществам.

Наряду с диамагнитными веществами существуют и парамагнитные – вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле по направлению поля (пример: редкоземельные металлы, Pt, Al...).

У парамагнитных веществ при отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты электронов не компенсируют друг друга, и молекулы парамагнетиков всегда обладают магнитным моментом (такие молекулы называются полярными).

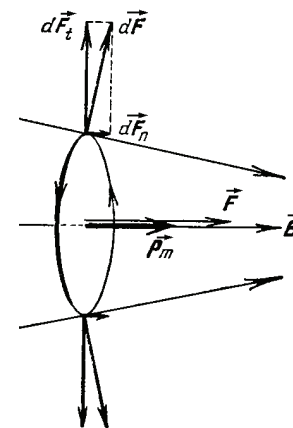
Вследствие теплового движения молекул их магнитные моменты ориентированы беспорядочно, поэтому, в отсутствие магнитного поля, парамагнитные вещества магнитными свойствами не обладают.

При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле устанавливается **преимущественная** ориентация магнитных моментов атомов (молекул) **по полю** (полной ориентации препятствует тепловое движение атомов).

Таким образом, парамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, **совпадающее по направлению с внешним полем** и усиливающим его.

Этот **эффект** называется парамагнитным. Если магнитный момент атомов (молекул) велик, то парамагнитные свойства преобладают над диамагнитными и вещество является парамагнетиком.

Пара- и диамагнетики по-разному ведут себя в неоднородных магнитных полях.



Рассмотрим малый виток с током в неоднородном магнитном поле (см. рисунок). Силы  $d\vec{F}$ , действующие на отдельные участки витка, перпендикулярны к току и к магнитному полю. Составляющие  $d\vec{F}_t$ , параллельные витку, создают усилия, растягивающие (или сжимающие) виток. Составляющие  $d\vec{F}_n$ , перпендикулярные к плоскости витка, складываясь, дадут некую силу  $\vec{F}$ , стремящуюся перемещать виток в магнитном поле. Если магнитный момент тока  $\vec{p}_m$  сонаправлен с вектором магнитной индукции  $\vec{B}$  (как изображено на рисунке), то виток будет втягиваться в область более сильного поля. Если же вектор  $\vec{p}_m$  противоположен вектору  $\vec{B}$ , то

виток будет выталкиваться и перемещаться в область более слабого поля.

Поэтому парамагнетики **втягиваются** в область сильного поля, в то время, как диамагнетики **выталкиваются** из этой области.

### 39. Намагниченность. Магнитное поле в веществе.

Подобно тому, как для количественного описания поляризации диэлектриков была введена поляризованность, для количественного описания намагничивания магнетиков вводят векторную величину – **намагниченность**, определяемую магнитным моментом единицы объема магнетика

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{\sum \vec{p}_a}{V},$$

где  $\vec{P}_m = \sum \vec{p}_a$  – магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул.

В несильных полях намагниченность пропорциональна напряженности  $\vec{H}$  поля, вызывающего намагничение. Поэтому, аналогично диэлектрической восприимчивости, можно ввести понятие магнитной восприимчивости вещества  $\chi$

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

$\chi$  – безразмерная величина.

Для диамагнетиков  $\chi$  **отрицательна** ( $\chi < 0$  поле молекулярных токов противоположно внешнему полю), для парамагнетиков – **положительна** ( $\chi > 0$  поле молекулярных токов совпадает с внешним).

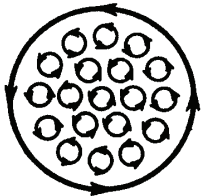
Абсолютное значение магнитной восприимчивости для диа- и парамагнетиков очень мало – порядка  $10^{-4} - 10^{-6}$ .

Магнитное поле  $\vec{B}$  в веществе складывается из двух полей: внешнего поля  $\vec{B}_0$ , создаваемого намагничивающим током в вакууме, и поля  $\vec{B}'$  намагниченного вещества

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}',$$

где  $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$ .

Для описания поля, создаваемого молекулярными токами, рассмотрим магнетик в виде кругового цилиндра сечения  $S$  и длины  $l$ , внесенного в



однородное внешнее магнитное поле с индукцией  $\vec{B}_0$  параллельное оси цилиндра. Если рассмотреть любое сечение цилиндра, перпендикулярное его оси, то во внутренних участках сечения магнетика молекулярные токи соседних атомов направлены навстречу друг другу и взаимно компенсируются. Нескомпенсированными будут лишь молекулярные токи, выходящие на поверхность цилиндра.

Магнитную индукцию тока  $I'$ , текущего по боковой поверхности цилиндра, вычислим (считая для простоты  $\mu = 1$ ) по формуле для соленоида с  $N = 1$  (соленоид из одного витка)

$$B' = \frac{\mu_0 I'}{l}.$$

Магнитный момент этого суммарного тока микротоков внутри магнетика

$$P = I'S = I' \frac{Sl}{l} = I' \frac{V}{l}, \text{ где } V - \text{объем магнетика.}$$

$$\text{Намагниченность магнетика } J = \frac{P}{V} = \frac{I'Sl}{Vl} = \frac{I'}{l}, \text{ следовательно,}$$

$$B' = \mu_0 J$$

или в векторной форме

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}.$$

Следовательно,

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}.$$

Безразмерная величина

$$\mu = 1 + \chi = \frac{B}{B_0}$$

называется **магнитной проницаемостью вещества**. Именно эта величина использовалась ранее в соотношении  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ .

**Для диамагнетиков  $\mu < 1$ , для парамагнетиков  $\mu > 1$ .**

### 40. Закон полного тока для магнитного поля в веществе.

Этот закон является обобщением закона полного тока для магнитного поля в вакууме (стр. 4-10).

*Циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости и молекулярных токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную*

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 (I + I'),$$

где  $I$  и  $I'$  – соответственно алгебраические суммы макроток (токов проводимости) и микротоков (молекулярных токов), охватываемых произвольным замкнутым контуром  $L$ .

При этом циркуляция намагниченности  $\vec{J}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна алгебраической сумме *молекулярных токов*, а циркуляция вектора  $\vec{H}$  – сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром

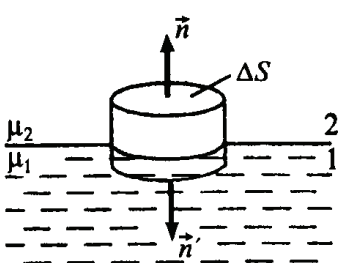
$$\oint_L \vec{J} d\vec{l} = I', \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I.$$

Последнее выражение представляет собой **теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$** .

С учетом того, что сила тока  $I$  сквозь поверхность  $S$ , охватываемую контуром  $L$ , является потоком вектора плотности тока через эту поверхность,  $I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$  (стр.3-22), теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$  будет иметь вид

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

#### 41. Условия на границе раздела двух магнетиков.



Рассмотрим поведение векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  на границе раздела двух однородных магнетиков с магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  при отсутствии на границе тока проводимости.

Построим вблизи границы раздела магнетиков 1 и 2 прямой цилиндр ничтожно малой высоты, одно основание которого находится в первом магнетике, другое – во втором.

Считаем, что основания  $\Delta S$  цилиндра настолько малы, что в пределах каждого из них вектор  $\vec{B}$  неизменен.

По теореме Гаусса

$$B_{n2}\Delta S - B_{n1}\Delta S = 0,$$

(поскольку  $\vec{n}$  и  $\vec{n}'$  противоположны). С учетом соотношения  $B = \mu_0\mu H$ , нормальные составляющие

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad \frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Вблизи границы раздела магнетиков 1 и 2 построим небольшой замкнутый прямоугольный контур  $ABCD$  длиной  $l$ . Согласно теореме о циркуляции  $\vec{H}$

$$\oint_{ABCD} \vec{H} d\vec{l} = 0,$$

поскольку токов проводимости на границах нет. Отсюда

$$H_{\tau 2}l - H_{\tau 1}l = 0$$

(знаки интегралов по  $AB$  и  $CD$  разные, т.к. пути интегрирования противоположны, а интегралы по  $BC$  и  $DA$  бесконечно малы). Поэтому, тангенциальные составляющие

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}, \quad \frac{B_{\tau 1}}{B_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

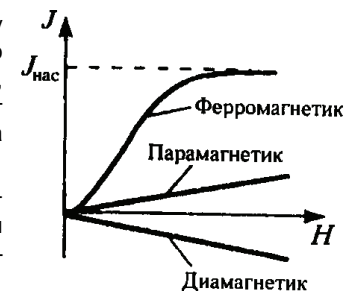
Таким образом, при переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора  $\vec{B}$  и тангенциальная составляющая вектора  $\vec{H}$  изменяются непрерывно, а тангенциальная составляющая вектора  $\vec{B}$  и нормальная составляющая вектора  $\vec{H}$  претерпевают скачок.

#### 42. Ферромагнетики и их свойства.

Помимо *слабмагнитных* веществ – диа- и парамагнетиков, существуют *сильномагнитные* вещества – **ферромагнетики** – вещества, обладающие *спонтанной намагниченностью*, т.е. они сохраняют намагниченность при отсутствии внешнего магнитного поля.

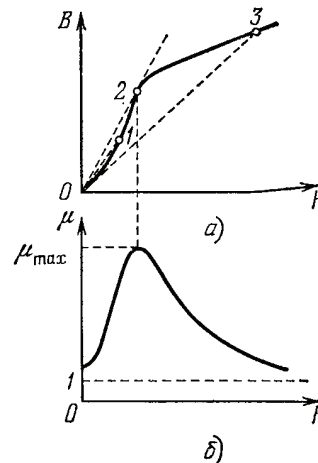
В отличие от слабмагнитных веществ, у которых намагниченность  $J$  линейно изменяется с ростом  $H$ , у ферромагнетиков, при увеличении  $H$ , намагниченность растет сначала быстро, а затем выходит на насыщение  $J_{\text{нас}}$ .

Магнитная проницаемость  $\mu$  ферромагнетиков достигает больших значений (для железа –  $\approx 5000$ , для сплава супермаллоя –  $\approx 800\,000$ ).



Магнитная проницаемость и магнитная индукция  $B$  ферромагнетиков зависит от  $H$ .

$B = \mu_0(H + J)$  в слабых полях растет быстро с ростом  $H$  (участок 0–1–2 на рисунке (а)), а в сильных полях, поскольку  $J = J_{\text{нас}}$ ,  $B$  растет с увеличением  $H$  линейно (участок 2–3).



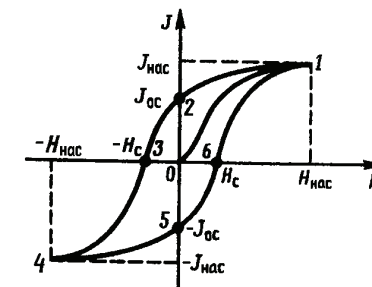
Соответственно  $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = 1 + \frac{J}{H}$  вначале

растет с ростом  $H$  (рисунок (б)), а затем, достигая максимума, начинает уменьшаться, стремясь в случае сильных полей к единице.

Зависимость намагниченности  $J$  от напряженности магнитного поля  $H$  в ферромагнетике определяется предысторией намагничивания. Это явление называется

#### магнитным гистерезисом.

Если ферромагнетик намагнитить до насыщения (кривая 0–1), а затем уменьшать  $H$  (кривая 1–2), то при  $H = 0$  в ферромагнетике останется **остаточная намагниченность**  $J_{\text{ос}}$ .



Это явление используют при изготовлении **постоянных магнитов**.

Для того чтобы уменьшить намагниченность до нуля, надо приложить противоположно-направленное поле (точка 3), с напряженностью  $H_c$ , которая называется **коэрцитивная сила**. При дальнейшем увеличении противоположного поля ферромагнетик перемагничивается (кривая 3–4), достигая насыщения (точка 4). Затем его можно опять размагнитить (кривая 4–5–6) и вновь перемагничить до насыщения (кривая 6–1).

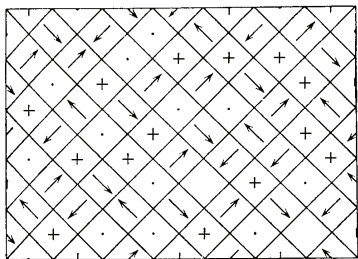
Таким образом, изменение намагниченности описывается кривой 1–2–3–4–5–6–1, которая называется **петля гистерезиса**.

Для каждого ферромагнетика имеется определенная температура, называемая **точкой Кюри**, при которой он теряет свои магнитные свойства.



При нагревании выше точки Кюри ферромагнетик превращается в обычный парамагнетик.

Причина такого поведения в том, что при температурах ниже точки Кюри ферромагнетик разбивается на большое число микроскопических областей – **доменов**, самопроизвольно намагниченных до насыщения. Направление намагничивания домена определенным образом связано с расположением атомов в ряды и слои (на рисунке схематически показаны домены в кристалле железа). При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты отдельных доменов ориентированы хаотически и компенсируют друг друга. Поэтому суммарный магнитный момент ферромагнетика равен нулю и ферромагнетик не намагничен.



Внешнее поле **ориентирует** по полю не магнитные моменты отдельных атомов (как это имеет место в случае парамагнетиков), а **магнитные моменты целых областей** спонтанной намагниченности, причем домены поворачиваются по полю скачком.

Формирование доменов обусловлено квантовыми свойствами электронов. Ферромагнитными свойствами обладают вещества, в атомах которых есть **недостроенные** внутренние электронные оболочки с **нескомпенсированными** спинами. В этом случае могут возникать **обменные силы**, которые вынуждают спиновые магнитные моменты электронов ориентироваться **параллельно** друг другу. Это приводит к возникновению областей спонтанного намагничивания.

Существуют вещества, в которых обменные силы вызывают антипараллельную ориентацию спиновых моментов электронов. Такие вещества называются **антиферромагнетиками**. Для них также существует **антиферромагнитная точка Кюри (точка Нееля)**, выше которой разрушается магнитное упорядочение и антиферромагнетик превращается в парамагнетик.

### Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

#### 43. Вихревое электрическое поле.

Для объяснения возникновения индукционного тока в неподвижных проводниках (второй опыт Фарадея) Максвелл предположил, **что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле**, которое и является причиной возникновения индукционного тока в контуре (**первое основное положение теории Максвелла**).

Циркуляция вектора напряженности  $\vec{E}_B$  этого поля

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \oint_L E_{Bl} dl = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

По определению поток вектора  $\vec{B}$ :  $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ , откуда следует

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Здесь и в дальнейшем мы используем частную производную по времени, поскольку в общем случае электрическое поле может быть неоднородным, и может зависеть не только от времени, но и от координат.

Таким образом, циркуляция вектора  $\vec{E}_B$  не равна нулю, т.е. **электрическое поле  $\vec{E}_B$ , возбуждаемое переменным магнитным полем, как и само магнитное поле, является вихревым.**

Суммарное электрическое поле складывается из электрического поля, создаваемого зарядами  $\vec{E}_q$  и вихревого электрического поля  $\vec{E}_B$ . Поскольку циркуляция  $\vec{E}_q$  равна нулю, то циркуляция суммарного поля

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Это – **первое уравнение** системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

#### 44. Ток смещения.

Максвелл предположил, что аналогично магнитному полю и **всякое изменение электрического поля вызывает в окружающем пространстве вихревое магнитное поле** (**второе основное положение теории Максвелла**).

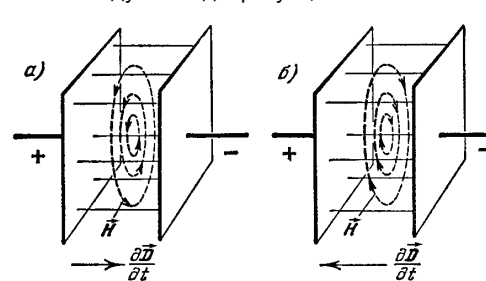
Поскольку магнитное поле есть основной, обязательный признак всякого тока, то Максвелл назвал переменное электрическое поле **током смещения**, в отличие от тока проводимости, обусловленного движением заряженных частиц.

Надо сказать, что термин **ток смещения** не является удачным. Он имеет некоторое основание в случае диэлектриков, так как в них действительно смещаются заряды в атомах и молекулах. Однако понятие тока смещения применяется и для полей в вакууме, где никаких зарядов, а следовательно и никакого их смещения нет. Тем не менее этот термин сохранился в силу исторических традиций.

**Плотность тока смещения**

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Следует подчеркнуть, что ток смещения определяется производной



вектора  $\vec{D}$ , но не самим вектором  $\vec{D}$ . Так, например, в поле плоского конденсатора вектор  $\vec{D}$  всегда направлен от положительной пластины к отрицательной. Но в случае, если электрическое поле возрастает, то  $\partial \vec{D} / \partial t$ , а следовательно и ток смещения направлены так, как показано на

рисунке (а). Если же электрическое поле убывает, то  $\partial \vec{D} / \partial t$  направлено от отрицательной пластины к положительной, и магнитное поле противоположно (рис. (б)) по сравнению с первым случаем.



Если в каком-либо проводнике имеется переменный ток, то внутри проводника существует переменное электрическое поле. Поэтому внутри проводника имеется и **ток проводимости**, и **ток смещения** и магнитное поле проводника определяется суммой этих двух токов.

Максвелл ввел понятие **полного тока**, равного сумме токов проводимости и смещения. **Плотность полного тока**

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Полный ток всегда замкнут. На концах проводников обрывается лишь ток проводимости, а в диэлектрике (или в вакууме) между концами проводника имеется ток смещения, который замыкает ток проводимости.

Из всех физических свойств, присущих току проводимости, Максвелл приписал току смещения лишь одно – способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле.

Максвелл обобщил теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$ , используя полный ток

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

**Обобщенная теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$**  представляет собой второе уравнение системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

#### 45. Полная система уравнений Максвелла.

Третье уравнение системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля это теорема Гаусса для поля  $\vec{D}$ . Для заряда, непрерывно распределенного внутри замкнутой поверхности с объемной плотностью  $\rho$ , это уравнение имеет вид

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV.$$

Четвертое уравнение Максвелла – это теорема Гаусса для поля  $\vec{B}$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Таким образом, **система уравнений Максвелла в интегральной форме**

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= \int_V \rho dV, \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} &= \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \\ \oint_S \vec{B} d\vec{S} &= 0. \end{aligned}$$

Для того, чтобы эта система уравнений была **полной** ее необходимо дополнить такими соотношениями, в которые входили бы величины, характеризующие индивидуальные свойства среды, в которой возбуждаются электрические и магнитные поля. Эти соотношения называются **материальными соотношениями**

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E},$$

где  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  – соответственно электрическая и магнитная постоянные,  $\epsilon$  и  $\mu$  – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости,  $\gamma$  – удельная проводимость вещества.

Из уравнений Максвелла следует, что

- **источниками** электрического поля являются либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля,
- **магнитные поля могут возбуждаться** либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями,
- переменное магнитное поле всегда **связано** с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным, т.е. электрическое и магнитное поля **неразрывно** связаны друг с другом – они образуют единое **электромагнитное поле**.

Для **стационарных полей** ( $E = \text{const}$  и  $B = \text{const}$ ) уравнения Максвелла имеют вид

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q; \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I; \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

В этом случае электрические и магнитные поля **независимы** друг от друга, что позволяет изучать *отдельно* постоянные электрическое и магнитное поле.

Воспользуемся известными из векторного анализа теоремами Стокса и Гаусса (см. стр.1-31)

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{A} d\vec{l} &= \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}, \\ \oint_S \vec{A} d\vec{S} &= \int_V \text{div } \vec{A} dV. \end{aligned}$$

По определению, **дивергенцией** и **ротором** векторного поля  $\vec{A}$  в данной точке  $M$  называют следующие производные по объёму

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A}(M) &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{A} d\vec{S}}{V}, & \text{rot } \vec{A}(M) &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_L [\vec{A}, d\vec{S}]}{V}, \end{aligned}$$

где интегралы  $\oint_S \vec{A} d\vec{S}$  и  $\oint_S [\vec{A}, d\vec{S}]$  есть, соответственно, **скалярный** и **векторный** потоки векторного поля через замкнутую поверхность  $S$ , которая окружает данную точку  $M$ , охватывая область с объёмом  $V$ .

Дивергенция есть мера **источников** поля. Если в некоторой области дивергенция равна нулю, то векторное поле в этой области свободно от

источников. Те точки поля в которых дивергенция положительна называются **источниками** поля, а в которых отрицательна – **стоками** векторного поля.

Используя теоремы Стокса и Гаусса, можно представить **полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме** (характеризующих поле в каждой точке пространства)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Уравнения Максвелла **не симметричны** относительно электрического и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных.

Так, например, уравнение  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$  явно демонстрирует, что источниками электрического поля являются положительные электрические заряды, а стоками – отрицательные электрические заряды. Уравнение  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  отражает тот факт, что не существует источников и стоков магнитного поля – "магнитных зарядов".

В случае если заряды и токи распределены в пространстве *непрерывно*, то обе формы уравнений Максвелла – интегральная и дифференциальная – *эквивалентны*. Однако если имеются *поверхности разрыва* – поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, то *интегральная форма уравнений является более общей*.

Для того чтобы эти уравнения Максвелла в дифференциальной форме были справедливы и на границах сред, где величины, входящие в уравнения, меняются скачкообразно, необходимо *дополнить* эти уравнения **граничными условиями**, которым должно удовлетворять магнитное поле на границе раздела двух сред. Эти соотношения были рассмотрены ранее:

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad E_{\tau1} = E_{\tau2}, \quad B_{n1} = B_{n2}, \quad H_{\tau1} = H_{\tau2}$$

(первое и последнее уравнения выведены для случая, когда на границе раздела нет ни свободных зарядов, ни токов проводимости).

*Уравнения Максвелла – наиболее общие уравнения для электрических и магнитных полей в поющихся средах. Они играют в учении об электромагнетизме такую же роль, как законы Ньютона в механике.*

А.Н.Огурцов

## ФИЗИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ

### ОПТИКА

*ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ*

**6**

<http://users.kpi.kharkov.ua/ogurtsov/lect6opt-7.pdf>

<http://www.ilt.kharkov.ua/bvi/ogurtsov/ln.htm>

## Геометрическая оптика

**Оптика** – раздел физики, который изучает природу света, световые явления и взаимодействие света с веществом.

Оптическое излучение представляет собой электромагнитные волны, и поэтому оптика является *частью общего учения об электромагнитном поле*.

В зависимости от круга рассматриваемых явлений оптику делят на **геометрическую** (лучевую), **волновую** (физическую), **квантовую** (корпускулярную).

### 1. Основные законы геометрической оптики.

Еще до установления природы света были известны следующие законы:

**Закон прямолинейного распространения света** – свет в оптически однородной среде распространяется прямолинейно.

**Световой луч** – линия, вдоль которой переносится световая энергия. В однородной среде лучи света представляют собой **прямые линии**.

**Закон независимости световых пучков** – эффект, производимый отдельным пучком, не зависит от того, действуют ли одновременно остальные пучки или они устранены.

**Закон отражения** – отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и перпендикуляром, проведенным к границе раздела двух сред в точке падения; угол отражения  $i'_1$  равен углу падения  $i_1$ :

$$i'_1 = i_1.$$

**Закон преломления** – луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, проведенный к границе раздела двух сред в точке падения, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных сред, равная  $n_{21}$  – **относительному показателю преломления** второй среды относительно первой, который равен отношению абсолютных показателей преломления двух сред.

Следовательно, закон преломления будет иметь вид

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

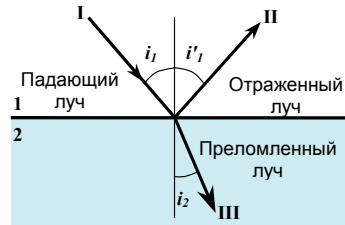
**Абсолютным показателем преломления** среды называется величина  $n$ , равная отношению скорости электромагнитных волн в вакууме  $c$  к их фазовой скорости  $v$  в среде. Поскольку  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ , то

$$n = \sqrt{\epsilon\mu},$$

где  $\epsilon$  и  $\mu$  – соответственно электрическая и магнитная проницаемость среды.

### 2. Полное отражение.

Если свет распространяется **из среды с большим показателем преломления**  $n_1$  (оптически более плотной) **в среду с меньшим показателем преломления**  $n_2$  (оптически менее плотную) ( $n_1 > n_2$ ) (например, из стекла в воздух или из воды в воздух), то



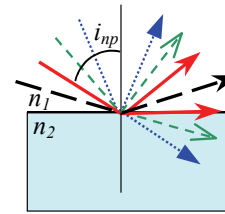
$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21}$$

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

$$n = \frac{c}{v}$$

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}$$



$$\frac{\sin i_2}{\sin i_1} = \frac{n_1}{n_2} > 1$$

Следовательно, угол преломления  $i_2$  больше угла падения  $i_1$ . Увеличивая угол падения, при некотором **предельном угле**  $i_{пр}$  угол преломления окажется равным  $\pi/2$ . При углах падения  $i_1 > i_{пр}$  весь падающий свет **полностью отражается**.

При углах падения  $i_{пр} > i_1 > \pi/2$  луч не преломляется, а полностью отражается в первую среду, причем интенсивности отраженного и падающего лучей одинаковы.

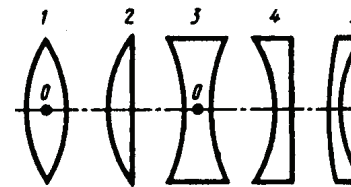
Это явление называется **полным внутренним отражением света**. Предельный угол определяется соотношением

$$\sin i_{пр} = \frac{n_2}{n_1} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

Явление полного отражения используется в призмах полного отражения и световодах.

### 3. Линзы.

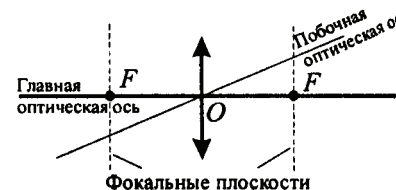
**Линзой** называется прозрачное тело, ограниченное с двух сторон криволинейной поверхностью. (В частном случае одна из поверхностей может быть плоской).



По внешней форме линзы делятся на 1) двояковыпуклые; 2) плосковыпуклые; 3) двояковогнутые; 4) плосковогнутые; 5) выпукло-вогнутые.

Линза называется **тонкой**, если ее толщина значительно меньше, чем радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  обеих поверхностей. На оптических схемах линзы обычно обозначают **двунаправленной стрелкой**.

**Радиус кривизны**  $R > 0$  для **выпуклой** поверхности;  $R < 0$  для **вогнутой**.



Прямая проходящая через центры кривизны поверхностей линзы называется **главной оптической осью**.

**Оптический центр линзы** (обычно обозначается  $O$ ) называется точка, лежащая на главной оптической оси и обладающая тем свойством, что лучи проходят сквозь нее не преломляясь.

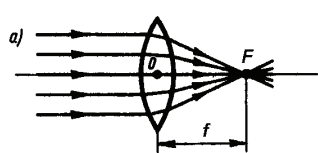
**Побочными оптическими осями**

называются прямые, проходящие через оптический центр линзы и не совпадающие с главной оптической осью.

**Фокусом** линзы  $F$  называется точка, лежащая на главной оптической оси, в которой пересекаются лучи **параксиального** (приосевого) светового пучка, распространяющиеся параллельно главной оптической оси.

**Фокальной плоскостью** называется плоскость, проходящая через фокус линзы перпендикулярно ее главной оптической оси.

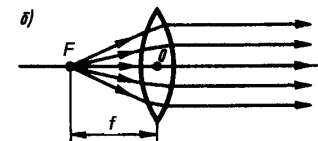
**Фокусным расстоянием**  $f$  называется расстояние между оптическим центром линзы  $O$  и ее фокусом  $F$ :



$$f = \frac{1}{(n_{21} - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

**Формула тонкой линзы:**

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

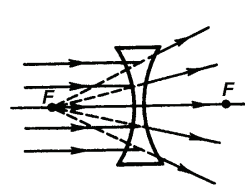


где  $a$  и  $b$  – расстояния от линзы до предмета и его изображения. Если  $a = \infty$ , т.е. лучи падают на линзу параллельным пучком (а), то  $b = f$ .

Если  $b = \infty$ , т.е. изображение находится в бесконечности (б), и, следовательно, лучи выходят из линзы параллельным пучком, то  $a = f$ .

Фокусные расстояния линзы, окруженной с обеих сторон одинаковой средой, равны.

Величина  $\Phi = 1/f$  называется **оптической силой линзы**. Ее единица – **диоптрия** (дптр) – оптическая сила линзы с фокусным расстоянием 1 м.

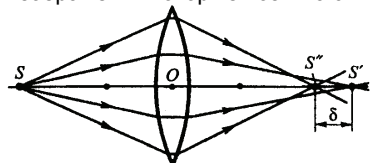


Линзы с **положительной** оптической силой являются **собирающими**, с **отрицательной** – **рассеивающими**.

В отличие от собирающей линзы, рассеивающая линза имеет **мнимые** фокусы. В мнимом фокусе сходятся (после преломления) воображаемые продолжения лучей, падающих на рассеивающую линзу параллельно главной оптической оси.

#### 4. Аберрации оптических систем.

В реальных оптических системах используются пучки отличающиеся от параксиальных, показатель преломления линз зависит от длины волны падающего света, а сам свет немонахроматичен. Искажения оптического изображения которые возникают при этом называются **абберациями**.

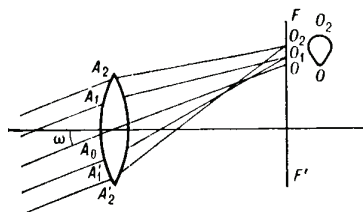


Сферическая аберрация частным случаем астигматизма.

**Кома.** Если через оптическую систему проходит широкий пучок от точечного источника света, расположенного не на оптической оси, то получаемое изображение этой точки будет в виде освещенного пятна неправильной формы.

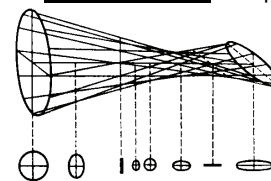
**Точечным источником света** назы-

**Сферическая аберрация.** Фокус  $S''$  для лучей, более удаленных от оптической оси чем параксиальные, находится ближе, чем фокус  $S'$  параксиальных лучей. В результате изображение светящейся точки имеет вид расплывчатого пятна.

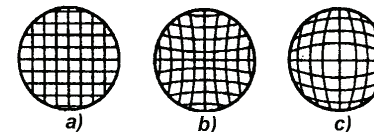


вается источник, размерами которого можно пренебречь.

**Астигматизм.** Погрешность, обусловленная неодинаковостью кривизны оптической поверхности в разных плоскостях сечения падающего на нее светового пучка.

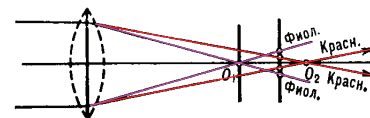


**Дисторсия.** Погрешность, при которой при больших углах падения лучей на линзу линейное увеличение для точек предмета, которые находятся на разных расстояниях от главной оптической



оси, несколько-ко различается. В результате нарушается геометрическое подобие между предметом (например, прямоугольная сетка) и его изображением (рисунок (б) – подушкообразная дисторсия, (с) – бочкообразная дисторсия).

**Хроматическая аберрация.** При падении на оптическую систему белого света отдельные составляющие его монохроматические лучи фокусируются в разных точках (наибольшее фокусное расстояние имеют красные лучи, наименьшее – фиолетовые), поэтому изображение размыто и по краям окрашено.



#### 5. Энергетические величины в фотометрии.

**Фотометрия** – раздел оптики, в котором рассматриваются энергетические характеристики оптического излучения в процессах его испускания, распространения и взаимодействия с веществом. При этом значительное внимание уделяется вопросам измерения интенсивности света и его источников.

**Энергетические величины в фотометрии** – характеризуют энергетические параметры оптического излучения без учета особенностей его воздействия на тот или иной приемник излучения.

**Поток излучения**  $\Phi_e$  – величина, равная отношению энергии  $W$  излучения ко времени  $t$ , за которое излучение произошло (мощность излучения). **Единица потока излучения – ватт (Вт).**

$$\Phi_e = \frac{W}{t}$$

**Энергетическая светимость (излучательность)**  $R_e$  – величина, равная отношению потока излучения  $\Phi_e$ , испускаемого поверхностью, к площади  $S$  сечения, сквозь которое этот поток проходит (поверхностная плотность потока излучения). **Единица энергетической светимости – ватт на метр в квадрате (Вт/м²).**

$$R_e = \frac{\Phi_e}{S}$$

**Энергетическая сила света (сила излучения)**  $I_e$  – величина, равная отношению потока излучения  $\Phi_e$  точечного источника к телесному углу  $\omega$ , в пределах которого это излучение распространяется. **Единица энергетической силы света – ватт на стерадиан (Вт/ср).**

$$I_e = \frac{\Phi_e}{\omega}$$

**Энергетическая яркость (лучистость)**  $B_e$  – величина, равная отношению энергетической силы света  $\Delta I_e$  элемента излучающей поверхности к площади  $\Delta S$  проекции этого

$$B_e = \frac{\Delta I_e}{\Delta S}$$

элемента на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения. Единица энергетической яркости – **ватт на стерадиан-метр в квадрате (Вт/(ср·м<sup>2</sup>))**.

**Энергетическая освещенность (облученность)  $E_e$**  – характеризует величину потока излучения, падающего на единицу освещаемой поверхности. Единица энергетической освещенности – **ватт на метр в квадрате (Вт/м<sup>2</sup>)**.

## 6. Световые величины в фотометрии.

Различные приемники, используемые при оптических измерениях, обладают **селективностью (избирательностью)**. Для каждого из них характерна своя кривая чувствительности к энергии различных длин волн.

Световые измерения, являясь субъективными, отличаются от объективных, энергетических, и для них вводятся световые единицы, используемые только для видимого света.

Основной световой единицей в СИ является единица силы света  $I$  – кандела (кд) – сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой  $540 \cdot 10^{12}$  герц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет  $\frac{1}{683}$  Вт/ср.

Единица светового потока  $\Phi$  (мощности оптического излучения) – **люмен (лм)**: 1лм – световой поток, испускаемый точечным источником силой света в 1кд внутри телесного угла в 1ср (**1лм=1кд·ср**).

**Светимость  $R$**  – суммарный поток, посылаемый светящейся площадкой с площадью  $S$ . Единица светимости – **люмен на метр в квадрате (лм/м<sup>2</sup>)**.

**Яркость** светящейся поверхности в некотором направлении  $\varphi$  есть величина, равная отношению силы света  $I$  в этом направлении к площади  $S$  проекции светящейся поверхности на плоскость, перпендикулярную данному направлению. Единица яркости – **кандела на метр в квадрате (кд/м<sup>2</sup>)**.

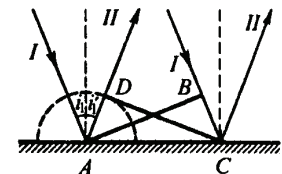
**Освещенность  $E$**  – величина, равная отношению светового потока  $\Phi$ , падающего на поверхность, к площади  $S$  этой поверхности. Единица освещенности – **люкс (лк)**: 1лк – освещенность поверхности, на один квадратный метр которой падает световой поток в 1лм (1лк=1лм/м<sup>2</sup>).

## Интерференция света.

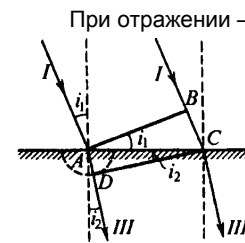
### 7. Принцип Гюйгенса.

Волновая теория света основывается на **принципе Гюйгенса**: каждая точка, до которой доходит волна, служит центром вторичных волн, а огибающая этих волн дает положение волнового фронта в следующий момент времени.

Законы отражения и преломления света легко выводятся, используя принцип Гюйгенса.



Пусть на границу раздела двух сред падает плоская волна (плоскость волны –  $AB$ ), распространяющаяся вдоль направления  $I$ . Пока фронт проходит расстояние  $BC$  (за время  $t$ ), фронт вторичных волн из точки  $A$  проходит расстояние  $AD$ .



При отражении –  $\Delta ABC = \Delta ADC$ , следовательно,  $i_1' = i_1$ .

При преломлении – за время  $t$  фронт падающей волны проходит расстояние  $BC = v_1 t$ , а фронт преломленной –  $AD = v_2 t$ . Из соотношения  $AC = BC / \sin i_1 = AD / \sin i_2$  следует

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

### 8. Когерентность.

**Когерентностью** называется согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов.

**Монохроматические волны** – неограниченные в пространстве волны одной определенной и постоянной частоты – являются когерентными.

Так как **реальные** источники не дают строго монохроматического света, то волны, излучаемые любыми независимыми источниками света, **всегда некогерентны**. В источнике свет излучается атомами, каждый из которых испускает свет лишь в течение времени  $\approx 10^{-8}$  с. Только в течение этого времени волны, испускаемые атомом имеют постоянные амплитуду и фазу колебаний.

Немонохроматический свет можно представить в виде совокупности сменяющих друг друга коротких гармонических импульсов излучаемых атомами – **волновых цугов**.

Средняя продолжительность одного цуга  $\tau_{\text{ког}}$  называется **временем когерентности**.

Если волна распространяется в однородной среде, то фаза колебаний в определенной точке пространства сохраняется только в течение времени когерентности. За это время волна распространяется в вакууме на расстояние  $l_{\text{ког}} = c \tau_{\text{ког}}$ , называемое **длиной когерентности** (или **длиной цуга**). Поэтому наблюдение интерференции света возможно лишь при оптических разностях хода, меньших длины когерентности для используемого источника света.

**Временная когерентность** – это, определяемая степенью монохроматичности волн, когерентность колебаний, которые совершаются в одной и той же точке пространства. Временная когерентность существует до тех пор, пока разброс фаз в волне в данной точке не достигнет  $\pi$ .

**Длина когерентности** – расстояние, на которое перемещается волна за время когерентности.

В плоскости, перпендикулярной направлению распространения цуга волн, случайные изменения разности фаз между двумя точками увеличивается с увеличением расстояния между ними. **Пространственная когерентность** – когерентность колебаний в один и тот же момент времени, но в разных точках такой плоскости – теряется, если разброс фаз в этих точках достигает  $\pi$ . **Длина пространственной когерентности (радиус когерентности)**

$$r_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda}{\Delta \varphi}, \quad \text{где } \lambda \text{ – длина волн, } \Delta \varphi \text{ – разность фаз.}$$

Источники должны быть пространственно когерентными, чтобы возможно было наблюдать интерференцию излучаемых ими световых волн.



## 9. Интерференция света.

**Интерференция света** – сложение в пространстве двух или нескольких когерентных световых волн, при котором в разных его точках получается усиление или ослабление амплитуды результирующей волны.

Пусть в данной точке  $M$  две монохроматические волны с циклической частотой  $\omega$  возбуждают два колебания, причем до точки  $M$  одна волна прошла в среде с показателем преломления  $n_1$  путь  $s_1$  с фазовой скоростью  $v_1$ , а вторая – в среде  $n_2$  путь  $s_2$  с фазовой скоростью  $v_2$

$$x_1 = A_1 \cos \omega \left( t - \frac{s_1}{v_1} \right), \quad x_2 = A_2 \cos \omega \left( t - \frac{s_2}{v_2} \right).$$

Амплитуда результирующего колебания  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta$ .

Интенсивность результирующей волны ( $I \sim A^2$ )

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos \delta.$$

Разность фаз  $\delta$  колебаний, возбуждаемых в точке  $M$ , равна

$$\delta = \omega \left( \frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1} \right) = \omega \left( \frac{s_2}{c/n_2} - \frac{s_1}{c/n_1} \right) = \frac{\omega}{c} (s_2 n_2 - s_1 n_1) = \frac{2\pi\nu}{c} (L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta.$$

(Использовали:  $v = c/n$ ;  $\omega = 2\pi\nu$ ;  $c/\nu = \lambda_0$  – длина волны в вакууме).

Произведение **геометрической длины пути**  $s$  световой волны в данной среде на **показатель преломления** этой среды  $n$  называется **оптической длиной пути**

$$L = s \cdot n.$$

Разность  $\Delta = L_2 - L_1 = s_2 n_2 - s_1 n_1$  оптических длин проходимых волнами путей называется **оптической разностью хода**.

**Условие интерференционного максимума:**

Если оптическая разность хода  $\Delta$  равна целому числу длин волн в вакууме (четному числу полуволен)

$$\Delta = \pm m \lambda_0 = \pm 2m \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

то  $\delta = \pm 2m\pi$  и колебания, возбуждаемые в точке  $M$ , будут происходить в **одинаковой фазе**.

**Условие интерференционного минимума.**

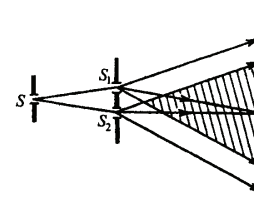
Если оптическая разность хода  $\Delta$  равна нечетному числу полуволен

$$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

то  $\delta = \pm (2m + 1)\pi$  и колебания, возбуждаемые в точке  $M$ , будут происходить в **противофазе**.

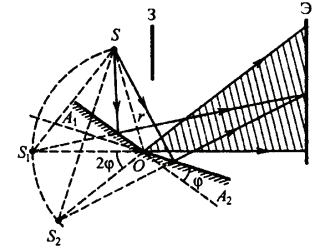
## 10. Методы наблюдения интерференции.

До изобретения лазеров, во всех приборах когерентные световые пучки получали разделением волны, излучаемой одним источником, на две части, которые после прохождения разных оптических путей накладывали друг на друга и наблюдали интерференционную картину.

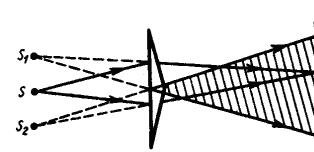


**1. Метод Юнга.** Свет от ярко освещенной щели  $S$  падает на две щели  $S_1$  и  $S_2$ , играющие роль когерентных источников. Интерференционная картина  $BC$  наблюдается на экране  $\mathcal{E}$ .

**2. Зеркала Френеля.** Свет от источника  $S$  падает расходящимся пучком на два плоских зеркала  $A_1O$  и  $A_2O$ , расположенных под малым углом  $\varphi$ . Роль когерентных источников играют мнимые  $S_1$  и  $S_2$  изображения источника  $S$ . Интерференционная картина наблюдается на экране  $\mathcal{E}$ , защищенном от прямого попадания света заслонкой  $3$ .



**3. Бипризма Френеля.** Свет от источника  $S$  преломляется в призмах, в результате чего за бипризмой распространяются световые лучи, как бы исходящие из мнимых когерентных источников  $S_1$  и  $S_2$ .



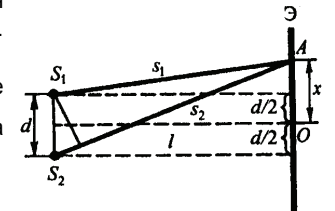
## 4. Зеркало Ллойда.

Точечный источник  $S$  находится близко к поверхности плоского зеркала  $M$ . Когерентными источниками служат сам источник  $S$  и его мнимое изображение  $S_1$ .



## 11. Расчет интерференционной картины от двух щелей.

Две щели  $S_1$  и  $S_2$  находятся на расстоянии  $d$  друг от друга и являются когерентными источниками. Экран  $\mathcal{E}$  параллелен щелям и находится от них на расстоянии  $l \gg d$ . Интенсивность в произвольной точке  $A$  определяется разностью хода  $\Delta = s_2 - s_1$ , где  $s_2^2 = l^2 + (x + d/2)^2$ ,  $s_1^2 = l^2 + (x - d/2)^2$ , откуда  $s_2^2 - s_1^2 = 2xd$  или  $\Delta = s_2 - s_1 = 2xd/(s_1 + s_2)$ . Из  $l \gg d$  следует  $s_1 + s_2 \approx 2l$ , поэтому  $\Delta = xd/l$ .



**Положение максимумов:**  $\frac{xd}{l} = \pm m \lambda_0 \Rightarrow x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$ .

**Положение минимумов:**  $\frac{xd}{l} = \pm \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda_0 \Rightarrow x_{\min} = \pm \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{l}{d} \lambda_0 \quad (m = 0, 1, \dots)$

Расстояние  $\Delta x$  между двумя соседними максимумами (минимумами) называется **шириной интерференционной полосы**

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda_0.$$

Интерференционная картина представляет собой чередование на экране светлых и темных полос, параллельных друг другу.

## 12. Полосы равного наклона.

Пусть из воздуха ( $n_0 = 1$ ) на плоскопараллельную прозрачную пластинку с показателем преломления  $n$  и толщиной  $d$  под углом  $i$  падает плоская монохроматическая волна (рис. (а)). В точке  $O$  луч частично отразится (1), а частично преломится, и после отражения на нижней поверхности пластины в точке  $C$  выйдет из пластины в точке  $B$  (2). Лучи 1 и 2 когерентны и параллельны. С помощью собирающей линзы их можно свести в точке  $P$ .

Необходимо отметить важную особенность отражения электромагнитных волн (и, в частности, оптических лучей) при падении их на границу раздела двух сред из среды с меньшей диэлектрической проницаемостью (а, значит и меньшим показателем преломления): **при отражении света от более плотной среды ( $n_0 < n$ ) фаза изменяется на  $\pi$** . Изменение фазы на  $\pi$  **равносильно потере полуволны при отражении**. Такое поведение электромагнитной волны на границе двух сред следует из граничных условий, которым должны удовлетворять тангенциальные компоненты векторов напряженности электрического и магнитного поля на границе раздела:  $E_{t1} = E_{t2}$ ,  $H_{t1} = H_{t2}$ . С учетом этого, оптическая разность хода

$$\Delta = n(OC + CB) - (OA - \lambda_0/2).$$

Используя  $\sin i = n \sin r$  (закон преломления),  $OC = CB = d/\cos r$  и  $OA = OB \sin i = 2d \operatorname{tg} r \sin i$ , запишем

$$\Delta - \frac{\lambda_0}{2} = \frac{2dn}{\cos r} - 2dn \operatorname{tg} r \sin r = 2dn \left( \frac{1}{\cos r} - \frac{\sin^2 r}{\cos r} \right) = 2dn \cos r = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$

В точке  $P$  будет **интерференционный максимум**, если

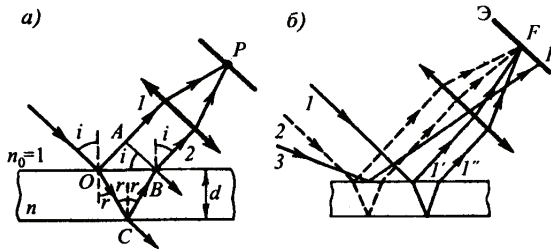
$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

В точке  $P$  будет **интерференционный минимум**, если

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda_0}{2} = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

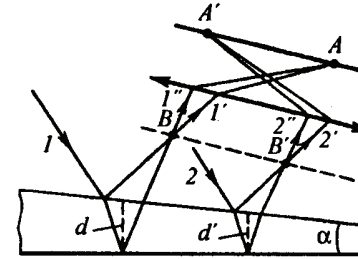
Таким образом, для данных  $\lambda_0$ ,  $d$  и  $n$  каждому наклону  $i$  лучей соответствует своя интерференционная полоса. Интерференционные полосы, возникающие в результате наложения лучей, падающих на плоскопараллельную пластинку под одинаковыми углами, называются **полосами равного наклона**.

Интерферирующие лучи (например, 1' и 1'' на рис.(б)) параллельны друг другу, поэтому говорят, что **полосы равного наклона локализованы в бесконечности**. Для их наблюдения используют собирающую линзу и экран. Радиальная симметрия линзы приводит к тому, что интерференционная картина на экране будет иметь вид концентрических колец с центром в фокусе линзы.



## 13. Полосы равной толщины.

Пусть на прозрачную пластинку **переменной толщины** – **клин** с малым углом  $\alpha$  между боковыми гранями – падает плоская волна в направлении параллельных лучей 1 и 2. Интенсивность интерференционной картины, формируемой лучами, отраженными от верхней и нижней поверхностей клина, зависит от толщины клина в данной точке ( $d$  и  $d'$  для лучей 1 и 2 соответственно). Когерентные пары лучей (1' и 1'', 2' и 2'') пересекаются вблизи поверхности клина (точки  $B$  и  $B'$ ) и собираются линзой на экране (в точках  $A$  и  $A'$ ). Таким образом, на экране возникает система интерференционных полос – **полос равной толщины** – каждая из которых возникает при отражении от мест пластинки, имеющих одинаковую толщину. **Полосы равной толщины локализованы вблизи поверхности клина** (в плоскости, отмеченной пунктиром  $B'-B$ ).



## 14. Кольца Ньютона.

**Кольца Ньютона**, являющиеся классическим примером полос равной толщины, наблюдаются при **отражении света от воздушного зазора**, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой с большим радиусом кривизны. Параллельный пучок света падает нормально на плоскую поверхность линзы. Полосы равной толщины имеют вид концентрических окружностей. С учетом  $d^2 \rightarrow 0$

$$R^2 = (R - d)^2 + r^2 = R^2 - 2Rd + d^2 - r^2 \Rightarrow d = r^2/2R.$$

В отраженном свете оптическая разность хода  $\Delta = 2d + \frac{\lambda_0}{2} = 2 \frac{r^2}{2R} + \frac{\lambda_0}{2}$ .

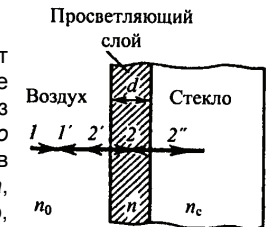
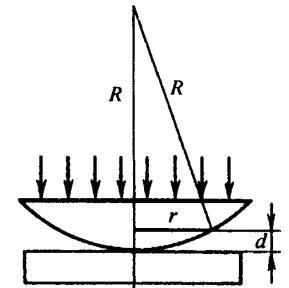
$$\text{Радиусы светлых колец:} \quad r_m = \sqrt{(m - 1/2)\lambda_0 R} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

$$\text{Радиусы темных колец:} \quad r_m = \sqrt{m\lambda_0 R} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Интерференцию можно наблюдать и **в проходящем свете**, причем **в проходящем свете максимумы интерференции соответствуют минимумам интерференции в отраженном свете и наоборот**.

## 15. Просветление оптики.

Объективы оптических приборов содержат большое количество линз. Даже незначительное отражение света каждой из поверхностей линз приводит к тому, что **интенсивность прошедшего пучка света значительно уменьшается**. Кроме того, в объективах возникают **блики и фон рассеянного света**, что снижает эффективность оптических систем. Но, если на границах сред создать условия, при которых **интерференция отраженных лучей 1' и 2'' дает минимум интенсивности отраженного света**, то при этом **интенсивность света**, прошедшего через



оптическую систему будет максимальной. Этого можно добиться, например, нанесением на поверхность линз *тонких пленок* с показателем преломления  $n_0 < n < n_c$ , причем  $n = \sqrt{n_0 n_c}$ . В этом случае амплитуды когерентных лучей 1' и 2" будут одинаковы, а условие минимума для отраженных лучей ( $i = 0$ ) будет  $2nd = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}$ . При  $m = 0$  **оптическая толщина пленки**  $nd$  удовлетворяет условию

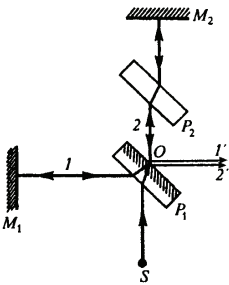
$$nd = \frac{\lambda_0}{4}$$

и происходит *гашение отраженных лучей*. Для каждой длины волны  $\lambda_0$  должна быть своя толщина пленки  $d$ . Поскольку этого добиться невозможно, обычно оптику просветляют для длины волны  $\lambda_0 = 550$  нм, к которой наиболее чувствителен глаз человека.

### 16. Интерферометры.

При плавном изменении разности хода интерферирующих пучков на  $\lambda_0/2$  интерференционная картина сместится настолько, что на месте максимумов окажутся минимумы. Поэтому явление интерференции используют в **интерферометрах** для измерения длины тел, длины световой волны, изменения длины тела при изменении температуры, сравнимых с  $\lambda_0$ .

В **интерферометре Майкельсона** монохроматический луч от источника  $S$  разделяется на *полупрозрачной пластинке*  $P_1$  на два луча 1' и 2", которые, отразившись от зеркал  $M_1$  и  $M_2$ , снова с помощью  $P_1$  сводятся в один пучок, в котором лучи 1' и 2" формируют интерференционную картину. *Компенсационная пластинка*  $P_2$  размещается на пути луча 2, чтобы он так же, как и луч 1, дважды прошел через пластинку. Возникающая интерференционная картина чрезвычайно чувствительна к любому изменению разности хода лучей, (например, к смещению одного из зеркал).



## Дифракция света

### 17. Принцип Гюйгенса-Френеля.

**Дифракцией** называется *огибание волнами препятствий*, встречающихся на их пути, или в более широком смысле – *любое отклонение распространения волн вблизи препятствий от законов геометрической оптики*.

Дифракцию объясняет принцип Гюйгенса – именно вторичные волны огибают препятствия на пути распространения первичных волн.

Френель *дополнил* принцип Гюйгенса представлением о *когерентности вторичных волн и их интерференции*.

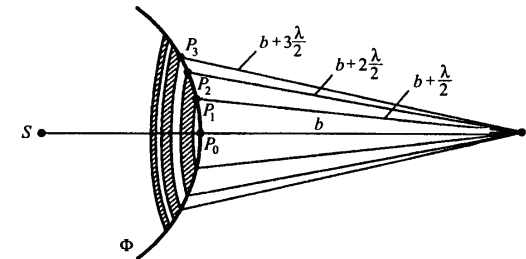
Согласно **принципу Гюйгенса-Френеля**, световая волна, возбуждаемая каким-либо источником  $S$ , может быть представлена как результат суперпозиции (сложения) когерентных вторичных волн, излучаемых

*вторичными (фиктивными) источниками* – бесконечно малыми элементами любой замкнутой поверхности, охватывающей источник  $S$ .

### 18. Зоны Френеля.

Рассмотрим в произвольной точке  $M$  амплитуду световой волны, распространяющейся в однородной среде из точечного источника  $S$ . Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, заменим действие источника  $S$  действием воображаемых источников, расположенных на вспомогательной поверхности  $\Phi$ , являющейся поверхностью фронта волны, идущей из  $S$  (поверхность сферы с центром  $S$ ). Разобьем волновую поверхность  $\Phi$  на кольцевые зоны такого размера, чтобы расстояния от краев зоны до  $M$  отличались на  $\lambda/2$ . Тогда, обозначив амплитуды колебаний от 1-й, 2-й, ...  $m$ -й зон через  $A_1, A_2, \dots, A_m$  (при этом  $A_1 > A_2 > A_3 > \dots$ ), получим амплитуду результирующего колебания

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$$



При таком разбиении волновой поверхности на зоны оказывается, что амплитуда колебания  $A_m$  от некоторой  $m$ -й зоны Френеля равна среднему арифметическому от амплитуд примыкающих к ней зон

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Тогда результирующая амплитуда в точке  $M$  будет равна

$$A = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2} = \left( \frac{A_1}{2} \right)_{m \gg 1} = \frac{A_1}{2},$$

т.к. при  $m \gg 1$   $A_1 \gg A_m$ . Площади всех зон Френеля равны  $\sigma = \frac{\pi ab \lambda}{a + b}$ ,

где  $a$  – длина отрезка  $SP_0$  – радиус сферы  $\Phi$ ,  $b$  – длина отрезка  $P_0M$ .

Радиус внешней границы  $m$ -й зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda}.$$

При  $a = b = 10$  см и  $\lambda = 500$  нм радиус первой зоны  $r_1 = 0,158$  мм. Следовательно, распространение света от  $S$  к  $M$  происходит так, будто световой поток распространяется внутри очень узкого канала вдоль  $SM$ , т.е. прямолинейно.

Таким образом, **принцип Гюйгенса-Френеля позволяет объяснить прямолинейное распространение света в однородной среде**.

### 19. Дифракция в сходящихся лучах (Дифракция Френеля).

Дифракция в сходящихся лучах (дифракция Френеля) – это дифракция сферических волн, осуществляемая в том случае, когда дифракционная картина наблюдается на конечном расстоянии от препятствия, вызвавшего дифракцию.

**Дифракция на круглом отверстии.** Сферическая волна, распространяющаяся из точечного источника  $S$ , встречает на своем пути экран с круглым отверстием. Вид дифракционной картины зависит от числа зон Френеля, укладывающихся в отверстие. Амплитуда света в точке  $B$  экрана  $\mathcal{E}$  будет  $A = A_1/2 \pm A_m/2$ , где знак "плюс" для случая, когда отверстие открывает *нечетное* число  $m$  зон Френеля, а знак "минус" – для *четного*  $m$ . Дифракционная картина будет иметь вид чередующихся темных и светлых колец с центром в точке  $B$  (если  $m$  – четное, то центральное кольцо будет темным, если  $m$  нечетное, то – светлым).

**Дифракция на диске.** Сферическая волна, распространяющаяся от точечного источника  $S$ , встречает на своем пути диск. Если диск закрывает первые  $m$  зон Френеля, то амплитуда колебания в точке  $B$  экрана  $\mathcal{E}$

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left( \frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots = \frac{A_{m+1}}{2}.$$

Таким образом, в точке  $B$  всегда наблюдается интерференционный максимум (светлое пятно), соответствующий половине действия *первой* открытой зоны Френеля. Центральный максимум окружен концентрическими с ним темными и светлыми кольцами.

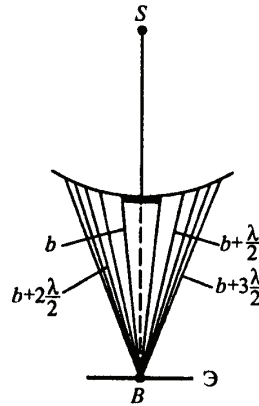
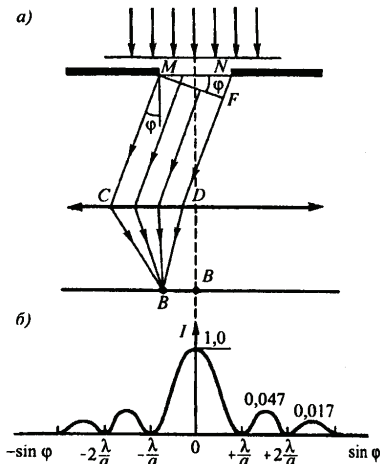
## 20. Дифракция в параллельных лучах (Дифракция Фраунгофера).

**Дифракция Фраунгофера** наблюдается в том случае, когда источник света и точка наблюдения бесконечно удалены от препятствия, вызывающего дифракцию. Параллельный пучок лучей обычно создают, помещая точечный источник света в фокусе собирающей линзы. Дифракционную картину с помощью второй собирающей линзы, установленной за препятствием, фокусируют на экран.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера плоской монохроматической волны на одной бесконечно длинной щели шириной  $a = MN$ . Оптическая разность хода между крайними лучами  $MC$  и  $ND$  (см. рисунок)

$$\Delta = NF = a \sin \varphi.$$

Разобьем открытую часть волновой поверхности  $MN$  на зоны Френеля, параллельные ребру  $M$  щели. Ширина каждой зоны выбирается так, чтобы разность хода от краев этих зон была равна



$\lambda/2$ , поэтому на ширине щели уместится  $\Delta : \lambda/2$  зон.

Все точки волнового фронта в плоскости щели имеют одинаковую фазу и амплитуду колебаний. Поэтому суммарная интенсивность колебаний от двух любых соседних зон Френеля равна нулю. Следовательно:

$$1) \text{ если число зон Френеля четное, то } a \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

– условие дифракционного минимума (полная темнота)

$$2) \text{ если число зон Френеля нечетное, то } a \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

– условие дифракционного максимума,

соответствующего действию одной некомпенсированной зоны Френеля.

В направлении  $\varphi = 0$  щель действует как одна зона Френеля и в этом направлении свет распространяется с наибольшей интенсивностью – центральный дифракционный максимум.

Направления, в которых амплитуда максимальна или равна нулю

$$\sin \varphi_{\max} = \pm \frac{(2m+1)\lambda}{2a}, \quad \sin \varphi_{\min} = \pm \frac{m\lambda}{a}.$$

Распределение интенсивности на экране, получаемое вследствие дифракции, называется дифракционным спектром (рисунок (б)).

Интенсивности в центральном и последующих максимумах относятся как  $1:0,047:0,017:0,0083:\dots$ , т.е. основная часть световой энергии сосредоточена в центральном максимуме.

Положение дифракционных максимумов зависит от  $\lambda$ . При освещении щели белым светом, центральный максимум наблюдается в виде белой полосы (при  $\varphi = 0$  разность хода равна нулю для всех  $\lambda$ ) – он общий для всех длин волн. Боковые максимумы радужно окрашены фиолетовым краем к центру дифракционной картины (поскольку  $\lambda_{\text{фиол}} < \lambda_{\text{красн}}$ ).

## 21. Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке.

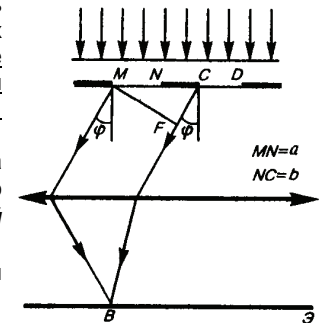
**Одномерная дифракционная решетка** – система параллельных щелей равной ширины, лежащих в одной плоскости и разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками.

Распределение интенсивности в дифракционном спектре каждой щели определяется направлением дифрагированных лучей и дифракционные картины, создаваемые каждой щелью будут одинаковыми.

Суммарная дифракционная картина есть результат взаимной интерференции волн, идущих от всех щелей – в дифракционной решетке осуществляется многолучевая интерференция когерентных дифрагированных пучков света, идущих от всех щелей.

Если  $a$  – ширина каждой щели;  $b$  – ширина непрозрачных участков между щелями, то величина  $d = a + b$  называется постоянной (периодом) дифракционной решетки.

$$d = \frac{1}{N_0} \quad \left| \begin{array}{l} \text{где } N_0 - \text{число щелей, приходящееся} \\ \text{на единицу длины.} \end{array} \right.$$





Разности хода  $\Delta$  лучей, идущих от двух соседних щелей, будут для данного направления  $\varphi$  одинаковы в пределах всей дифракционной решетки

$$\Delta = CF = (a + b) \sin \varphi = d \sin \varphi.$$

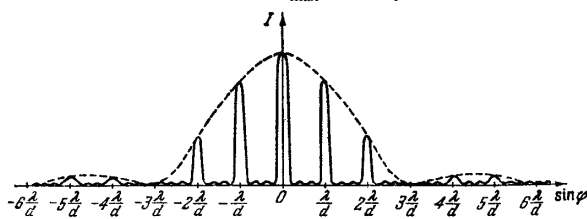
Очевидно, что в тех направлениях, в которых ни одно из щелей не распространяет свет, он не будет распространяться и при двух щелях, т.е. **прежние (главные) минимумы** интенсивности будут наблюдаться в направлениях  $a \sin \varphi = \pm m\lambda$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ). Кроме того, вследствие взаимной интерференции, в направлениях, определяемых условием  $d \sin \varphi = \pm (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$  световые лучи, посылаемые двумя соседними щелями, будут гасить друг друга – **возникнут дополнительные минимумы**. Наоборот, действие одной щели будет усиливать действие другой, если  $d \sin \varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) – **условие главных максимумов**.

В общем случае, если дифракционная решетка состоит из  $N$  щелей, то:

- **условие главных максимумов:**  $d \sin \varphi = \pm m\lambda$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ),
- **условие главных минимумов:**  $a \sin \varphi = \pm m\lambda$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ),
- **между** двумя главными максимумами располагается  $N - 1$  дополнительных минимумов, разделенных вторичными максимумами, создающими слабый фон.

**Условие дополнительных минимумов:**  $d \sin \varphi = \pm m'\lambda/N$ , (где  $m'$  может принимать все целочисленные значения, кроме 0,  $N$ ,  $2N, \dots$  при которых данное условие переходит в условие главных максимумов).

**Амплитуда главного максимума** есть сумма амплитуд колебаний от каждой щели  $A_{\max} = NA_1$ . Поэтому, **интенсивность главного максимума** в  $N^2$  раз больше интенсивности  $I_1$ , создаваемой одной щелью в направлении главного максимума  $I_{\max} = N^2 I_1$ .



Например, на рисунке представлена дифракционная картина для  $N = 4$ . Пунктирная кривая изображает интенсивность от одной щели, умноженную на  $N^2$ .

**Положение главных максимумов** зависит от длины волны  $\lambda$ , поэтому при пропускании через решетку белого света **все максимумы**, кроме центрального ( $m = 0$ ), **разложатся в спектр**, фиолетовая область которого будет обращена к центру дифракционной картины, красная – наружу. Поэтому дифракционная решетка может быть использована как **спектральный прибор** для разложения света в спектр и измерения длин волн.

**Число главных максимумов**, даваемое дифракционной решеткой

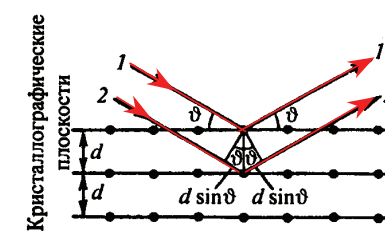
$$m \leq \frac{d}{\lambda} \quad (\text{поскольку } |\sin \varphi| \leq 1).$$

## 22. Дифракция на пространственной решетке.

Дифракция света наблюдается **на одномерных решетках** (система параллельных штрихов), **на двумерных решетках** (штрихи нанесены во взаимно перпендикулярных направлениях в одной и той же плоскости) и **на пространственных (трехмерных) решетках** – пространственных образованиях, в которых элементы структуры подобны по форме, имеют геометрически правильное и периодически повторяющееся расположение, а также постоянные (периоды) решеток, соизмеримые с длиной волны электромагнитного излучения.

Кристаллы, являясь трехмерными пространственными образованиями с постоянной решеткой порядка  $10^{-10}$  м, могут быть использованы для наблюдения дифракции рентгеновского излучения ( $\lambda \approx 10^{-12} \div 10^{-8}$  м).

Представим кристалл в виде параллельных кристаллографических плоскостей, отстоящих друг от друга на расстоянии  $d$ . Пучок параллельных монохроматических лучей (1, 2) падает под **углом скольжения**  $\vartheta$  (угол между направлением падающих лучей и кристаллографической плоскостью) и возбуждает атомы кристаллической решетки, которые становятся источниками когерентных вторичных волн (1' и 2'), интерферирующих между собой.



**Максимумы интенсивности** будут наблюдаться в тех направлениях, в которых все отраженные атомными плоскостями волны будут находиться в

одинаковой фазе  $2d \sin \vartheta = m\lambda$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) – **формула Вульфа-Брэггов**.

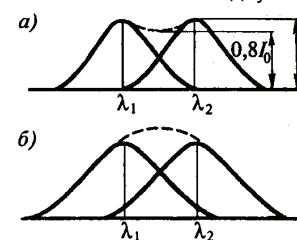
Эта формула используется в:

- 1) **рентгеноструктурном анализе** – если известна  $\lambda$  рентгеновского излучения, то, наблюдая дифракцию на кристаллической структуре неизвестного строения и измеряя  $\vartheta$  и  $m$ , можно найти  $d$ , т.е. определить структуру вещества;
- 2) **рентгеновской спектроскопии** – если известна  $d$ , то измеряя  $\vartheta$  и  $m$ , можно найти длину волны  $\lambda$  падающего рентгеновского излучения.

## 23. Разрешающая способность спектрального прибора.

Если бы даже существовала идеальная оптическая система без дефектов и aberrаций, то все равно изображение любой светящейся точки, вследствие волновой природы света, будет в виде центрального светлого пятна, окруженного чередующимися темными и светлыми кольцами.

**Критерий Рэлея** – изображения двух близлежащих одинаковых точечных источников или двух близлежащих спектральных линий с равными интенсивностями и одинаковыми симметричными контурами разрешимы (разделены для восприятия), если **центральный максимум** дифракционной картины от **одного** источника (линии) **совпадает с первым минимумом** дифракционной картины от **другого** (рис. (а)). При этом интенсивность "провала" между максимумами составляет 80% интенсивности в максимуме. Этого достаточно для разрешения



линий  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Если критерий Рэлея нарушен, то наблюдается одна линия (рис. (б)).

**Разрешающей способностью спектрального прибора** называют безразмерную величину  $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$ , где  $\delta\lambda$  – абсолютное значение минимальной разности длин волн двух соседних спектральных линий, при которой эти линии регистрируются раздельно.

#### 24. Разрешающая способность дифракционной решетки.

Пусть максимум  $m$ -го порядка для длины волны  $\lambda_2$  наблюдается под углом  $\varphi_{\max}$  ( $d \sin \varphi_{\max} = m\lambda_2$ ). В том же порядке ближайший дифракционный минимум для волны  $\lambda_1$  находится под углом  $\varphi_{\min}$  ( $d \sin \varphi_{\min} = m\lambda_1 + \lambda_1/N$ ). По критерию Рэлея  $\varphi_{\max} = \varphi_{\min}$ , откуда  $m\lambda_2 = m\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{N}$  или  $\delta\lambda \equiv \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_1}{mN}$ .

$$R_{\text{дифр.реш.}} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN.$$

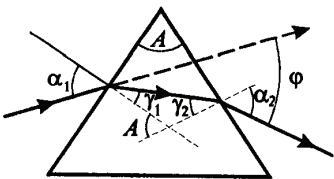
Таким образом, **разрешающая способность дифракционной решетки** пропорциональна порядку спектра  $m$  и числу  $N$  щелей.

### Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

#### 25. Дисперсия света.

**Дисперсией света** называется зависимость показателя преломления  $n$  от частоты  $\nu$  (длины волны  $\lambda$ ) света (или зависимость фазовой скорости  $v$  световых волн от его частоты  $\nu$ ).

Следствием дисперсии является разложение в спектр пучка белого света при прохождении его через призму. **Дисперсия проявляется лишь при распространении немонохроматических волн.**



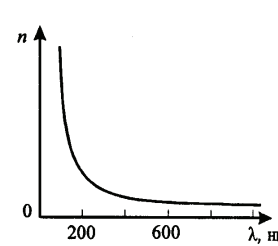
Рассмотрим дисперсию света в призме. Пусть монохроматический луч под углом  $\alpha_1$  падает на призму с показателем преломления  $n$  и преломляющим углом  $A$ . После двукратного преломления на левой и правой гранях призмы луч отклоняется на угол  $\varphi$ .

$$\varphi = (\alpha_1 - \gamma_1) + (\alpha_2 - \gamma_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - A.$$

Если углы  $A$  и  $\alpha_1$  (а значит и  $\alpha_2$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ) малы, то  $\frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{n}{1}$  и  $\frac{\gamma_2}{\alpha_1} = \frac{1}{n}$ .

Поскольку  $\gamma_1 + \gamma_2 = A$ , то  $\alpha_2 = \gamma_2 n = n(A - \gamma_1) = n(A - \alpha_1/n) = nA - \alpha_1$ , откуда  $\alpha_1 + \alpha_2 = nA$ . Поэтому  $\varphi = A(n-1)$  – угол отклонения лучей призмой тем больше, чем больше преломляющий угол призмы.

Величина  $D = \frac{dn}{d\lambda}$  называется **дисперсией вещества**. Для всех прозрачных веществ показатель преломления уменьшается с увеличением



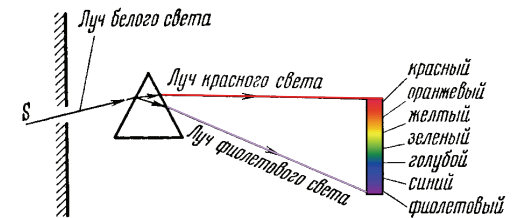
длины волн:  $\frac{dn}{d\lambda} < 0$  (см. рисунок). Такая дисперсия называется **нормальной** (или отрицательной).

Вблизи линий и полос сильного поглощения ход кривой  $n(\lambda)$  – **кривой дисперсии** – обратный:

$\frac{dn}{d\lambda} > 0$ . Такая дисперсия называется **аномальной**.

На явлении нормальной дисперсии основано действие **призмных спектрографов**. Угол

отклонения лучей призмой зависит от показателя преломления, который в свою очередь, зависит от длины волны. Поэтому призма разлагает белый свет в спектр, отклоняя красные лучи (длина волны больше) слабее, чем фиолетовые (длина волны меньше).



#### 26. Электронная теория дисперсии.

**Электронная теория дисперсии Лоренца** рассматривает дисперсию света как результат взаимодействия электромагнитных волн с заряженными частицами, входящими в состав вещества и совершающими вынужденные колебания в переменном электромагнитном поле волны.

**Абсолютный показатель преломления среды**  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ , где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $\mu$  – магнитная проницаемость.

В оптической области спектра для всех веществ  $\mu \approx 1$ , поэтому  $n = \sqrt{\epsilon}$ .

Согласно теории Лоренца, **дисперсия света** – следствие зависимости  $\epsilon$  от частоты (длины волны) световых волн. По определению

$$\epsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E},$$

где  $\chi$  – диэлектрическая восприимчивость среды,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $P$  и  $E$  – мгновенные значения поляризованности и напряженности внешнего электрического поля.

В оптической области спектра частота колебаний электрического поля световой волны высока ( $\nu \approx 10^{13}$  Гц), поэтому ориентационная поляризация диэлектриков не существенна, и главную роль играет **электронная (деформационная) поляризация** – вынужденные колебания электронов под действием электрической составляющей поля световой волны.

Пусть вынужденные колебания совершает только один внешний, слабо связанный с ядром атома, электрон – **оптический электрон**. Его наведенный дипольный момент:  $p = ex$ , где  $e$  – заряд электрона,  $x$  – смещение электрона под действием электрического поля световой волны.

Мгновенное значение поляризованности  $P = n_0 p = n_0 ex$ ,

где  $n_0$  – концентрация атомов в диэлектрике.



Следовательно, 
$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e x}{\varepsilon_0 E}.$$

Пусть внешнее поле  $E$  изменяется по гармоническому закону  $E = E_0 \cos \omega t$ . Тогда уравнение вынужденных колебаний электрона (без учета силы сопротивления, обуславливающей поглощение энергии падающей волны)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F_0 \cos \omega t = \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t,$$

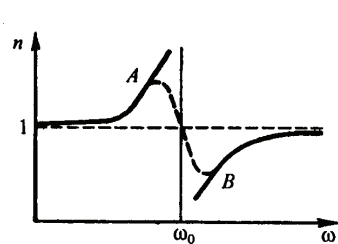
где  $F_0 = eE_0$  – амплитудное значение силы, действующей на электрон со стороны поля волны,  $\omega_0$  – собственная частота колебаний электрона,  $m$  – масса электрона.

Решение этого уравнения  $x = A \cos \omega t$ , где  $A = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ . Поэтому

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Полученная зависимость выражает явление **дисперсии** –  $n = n(\omega)$ .

График этой зависимости приведен на рисунке. Разрыв  $n$  вблизи  $\omega_0$



обусловлен тем, что не учтены силы сопротивления среды (поглощение электромагнитных волн средой).

Если учесть поглощение, то в области  $\omega_0$  зависимость  $n(\omega)$  задается пунктирной линией  $AB$  – это **область аномальной дисперсии** ( $n$  убывает с ростом  $\omega$ ). Остальные участки описывают **нормальную дисперсию** ( $n$  растет с ростом  $\omega$ ).

В общем случае, если в веществе имеются различные заряды  $e_i$  с массами  $m_i$ , совершающие вынужденные колебания с различными собственными частотами  $\omega_{0i}$ , то

$$n^2 = 1 + \frac{n_0}{\varepsilon_0} \sum_i \frac{e_i}{m_i} \frac{1}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)}$$

и кривая  $n(\omega)$  имеет особенности вблизи каждой собственной частоты  $\omega_{0i}$ .

## 27. Поглощение (абсорбция) света.

**Поглощением (абсорбцией) света** называется явление уменьшения энергии световой волны при ее распространении в веществе вследствие преобразования энергии волны в другие виды энергии (внутреннюю энергию вещества, энергию вторичного излучения в других направлениях и другого спектрального состава и др.).

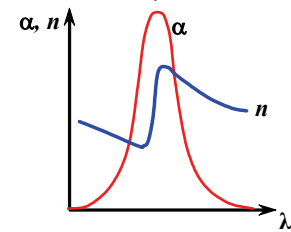
В результате поглощения интенсивность света при прохождении через вещество уменьшается:

$$I = I_0 \exp(-\alpha x) \quad \text{– закон Бугера.}$$

Здесь  $I_0$  и  $I$  – интенсивности плоской монохроматической волны на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной  $x$ ,  $\alpha$  – **коэффициент поглощения**, зависящий от длины волны света, химической природы и состояния вещества и не зависящий от интенсивности света. Численное значение этого коэффициента  $\alpha$  показывает толщину слоя  $x$ , равную  $1/\alpha$ , после прохождения которого интенсивность плоской волны падает в  $e=2,72$  раза.

## 28. Виды спектров поглощения:

- **Линейчатый спектр поглощения** – характерен для **одноатомных газов** (или паров). Очень резкие и узкие линии в таких спектрах соответствуют частотам собственных колебаний электронов в атомах. Если плотность газа увеличивать, то взаимодействие атомов между собой приводит к уширению линий поглощения.
- **Спектр поглощения в виде полос поглощения** – характерен для **поглощения молекул**. Колебания атомов (и вращение групп атомов) в молекулах приводит к тому, что образуются широкие полосы поглощения.
- **Сплошной спектр поглощения** – характерен для **жидкостей и твердых тел**, в которых образуются **коллективные возбуждения** (например, электроны проводимости в металлах) которые обуславливают поглощение света в широкой области частот (длин волн).



На рисунке показана типичная зависимость коэффициента поглощения  $\alpha$  от длины волны света  $\lambda$  и зависимость показателя преломления  $n$  от  $\lambda$  в области полосы поглощения. Внутри полосы поглощения наблюдается аномальная дисперсия.

Зависимость коэффициента поглощения от длины волны объясняется окрашенностью поглощающих тел.

## Поляризация света.

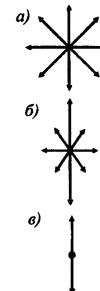
### 29. Естественный и поляризованный свет.

При действии света на вещество основное значение имеет электрическая составляющая электромагнитного поля световой волны, поскольку именно она оказывает основное действие на электроны в атомах вещества. Поэтому, для описания закономерностей поляризации будем рассматривать только **световой вектор** – вектор напряженности  $\vec{E}$  электрического поля.

Свет представляет собой суммарное электромагнитное излучение множества независимо излучающих атомов. Поэтому все ориентации вектора  $\vec{E}$  будут равновероятны. Такой свет называется **естественным** (рис. (а)).

**Поляризованным светом** называется свет, в котором направления колебания вектора  $\vec{E}$  каким-либо образом упорядочены.

**Частично поляризованный свет** (рис.(б)) – свет с



преимущественным направлением колебаний вектора  $\vec{E}$ .

**Плоскополяризованный свет** – свет, в котором вектор  $\vec{E}$  колеблется только в одной, проходящей через луч плоскости (рис. (в) на предыдущей странице и рис. (а) и (б) на этой). Эта плоскость называется **плоскостью поляризации**.

Если концы вектора  $\vec{E}$  с течением времени описывают в плоскости, перпендикулярной лучу, окружность или эллипс (рис. (в)), то свет называется **циркулярно** или **эллиптически поляризованным**.

**Степенью поляризации** называется величина  $P$ : 
$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$
 где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  – соответственно, максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света. Для естественного света  $I_{\max} = I_{\min}$  и  $P = 0$ , для плоскополяризованного  $I_{\min} = 0$  и  $P = 1$ .

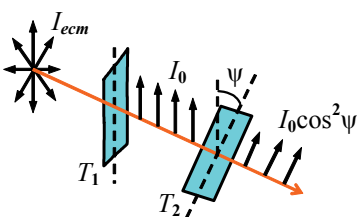
Естественный свет можно преобразовать в плоскополяризованный, используя так называемые **поляризаторы**, пропускающие колебания только определенного направления. В качестве поляризаторов используются среды, анизотропные в отношении колебаний  $\vec{E}$ .

### 30. Закон Малюса.

Пропустим естественный свет с интенсивностью  $I_{\text{ест}}$  через поляризатор  $T_1$ . Колебание амплитуды  $A$ , совершающееся в плоскости, образующей с плоскостью поляризатора угол  $\varphi$ , можно разложить на два колебания с амплитудами  $A_{\parallel} = A \cos \varphi$  и  $A_{\perp} = A \sin \varphi$ . Интенсивность прошедшей волны пропорциональна  $A_{\parallel}^2 = A^2 \cos^2 \varphi$ . В естественном свете все значения  $\varphi$  равновероятны, поэтому доля света, прошедшего через поляризатор, будет равна среднему значению  $\langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2$ , а интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего

через первый поляризатор  $T_1$  равна

$$I_0 = \frac{I_{\text{ест}}}{2}.$$



Поставим на пути плоскополяризованного света второй поляризатор  $T_2$  (**анализатор**) под углом  $\psi$  к первому. Интенсивность  $I$  света, прошедшего через анализатор, меняется в зависимости от угла  $\psi$  по **закону Малюса**:

$$I = I_0 \cos^2 \psi.$$

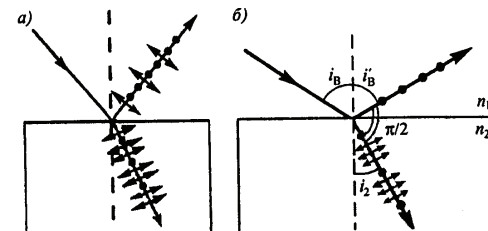
Следовательно, интенсивность света, прошедшего через два поляризатора  $I = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} \cos^2 \psi$ . Поэтому,  $I_{\max} = \frac{1}{2} I_{\text{ест}}$ , когда поляризаторы параллельны и  $I_{\min} = 0$ , когда поляризаторы скрещены.

### 31. Поляризация света при отражении и преломлении.

Если естественный свет падает на границу раздела двух диэлектриков, то **отраженный и преломленный лучи являются частично поляризованными**.

В отраженном луче преобладают колебания перпендикулярные плоскости падения, а в преломленном – колебания, лежащие в плоскости падения.

Если угол падения равен **углу Брюстера**, который определяется соотношением  $\tan i_B = n_{21}$ , то **отраженный луч является плоскополяризованным**.



**Преломленный луч** в этом случае поляризуется максимально но не полностью. При этом **отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны**:

$$\begin{aligned} \tan i_B &= \frac{\sin i_B}{\cos i_B} = n_{21}, \quad \frac{\sin i_B}{\sin i_2} = n_{21} \Rightarrow \\ \cos i_B &= \sin i_2 \quad \text{или} \quad i_B + i_2 = \pi/2, \\ \text{но } i'_B &= i_B, \text{ поэтому } i'_B + i_2 = \pi/2. \end{aligned}$$

Степень поляризации отраженного и преломленного света при различных углах падения можно рассчитать из уравнений Максвелла, если учесть граничные условия для электромагнитного поля на границе раздела двух диэлектриков (Лекц.5, п.49).

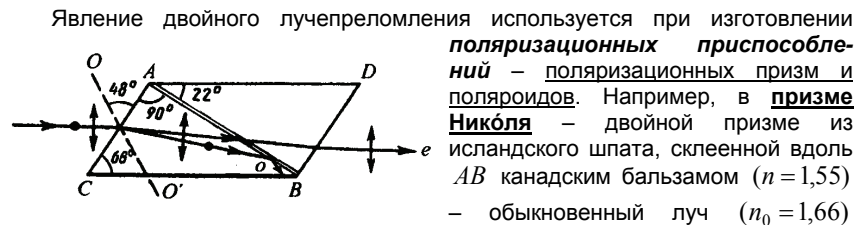
### 32. Двойное лучепреломление.

**Двойное лучепреломление** – это способность прозрачных кристаллов (кроме оптически изотропных кристаллов кубической системы) **раздваивать** каждый падающий на них световой пучок. Это явление объясняется особенностями распространения света в **анизотропных** средах и непосредственно вытекает из уравнений Максвелла. Если на кристалл направить узкий пучок света, то из кристалла выйдут **два пространственно разделенных луча параллельных друг друга и падающему лучу**. Даже в том случае, когда пучок падает на кристалл нормально, преломленный пучок разделяется на два: один из них является продолжением первичного (называется **обыкновенным (о)**), а второй отклоняется (называется **необыкновенным (е)**).

Направление в **оптически анизотропном кристалле**, по которому луч света распространяется, **не испытывая двойного лучепреломления**, называется **оптической осью кристалла**. Плоскость, проходящая через направление луча света и оптическую ось кристалла называется **главной плоскостью кристалла**.

**о- и е-лучи** плоскополяризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях: колебания светового вектора в **о-луче** происходят перпендикулярно главной плоскости, в **е-луче** – в главной плоскости. **о-луч** распространяется по всем направлениям кристалла с одинаковой скоростью  $v_o = c/n_o$  – показатель преломления  $n_o$  для него есть величина постоянная. **е-лучи** распространяются по различным направлениям с разными скоростями  $v_e = c/n_e$  – показатель преломления  $n_e$  необыкновенного луча является переменной величиной, зависящей от направления луча.

### 33. Поляризационные призмы и поляроиды.



испытывает *полное отражение* (так как канадский бальзам для него среда оптически менее плотная), а плоскополяризованный *необыкновенный* луч ( $n_e = 1,51$ ) выходит из призмы. (Оптическая ось призмы  $OO'$  составляет с входной гранью угол  $48^\circ$ ).

Двоупреломляющие кристаллы обладают свойством **дихроизма** – различного поглощения света в зависимости от ориентации электрического вектора световой волны. *Дихроичные кристаллы* используются при производстве **поляроидов** – тонких пластиковых пленок, в которые вкраплены кристаллики веществ с сильно выраженным **дихроизмом** (например, герпатит) – такие пленки уже при толщине  $\sim 0,1$  мм *полностью поглощают* обыкновенные лучи видимой области спектра, являясь в таком тонком слое *совершенным поляризатором*.

### 34. Искусственная оптическая анизотропия.

В оптически изотропных веществах возможно индуцировать **искусственную оптическую анизотропию** под воздействием: 1) одностороннего сжатия или растяжения; 2) электрического поля (**эффект Керра**); 3) магнитного поля (**эффект Коттона-Муттона**). При этом индуцированная оптическая ось совпадает с направлением деформации, электрического или магнитного полей.

**Эффект Керра** – оптическая анизотропия веществ под действием электрического поля – объясняется различной поляризуемостью молекул вещества по разным направлениям. Если приложить разность потенциалов к **ячейке Керра** – кювете с исследуемой жидкостью, которая размещена между скрещенными поляризатором  $P$  и анализатором  $A$ , и в которую помещены пластины конденсатора – то жидкость становится двоупреломляющей и свет проходит через анализатор. Разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей:  $n_e - n_0 = B\lambda_0 E^2$ , где  $\lambda_0$  – длина волны света в вакууме,  $E$  – напряженность электрического поля,  $B$  – постоянная Керра, которая зависит от температуры, длины волны света и природы вещества.

**Эффект Коттона-Муттона** – магнитный аналог эффекта Керра – возникновение оптической анизотропии у некоторых изотропных веществ при помещении их в сильное внешнее магнитное поле. При этом  $n_e - n_0 = C\lambda_0 H^2$ , где  $H$  – величина напряженности внешнего магнитного поля,  $C$  – постоянная Коттона-Муттона, которая зависит от температуры, длины волны света и природы вещества.

### 35. Вращение плоскости поляризации.

Некоторые вещества (например, кварц, сахар, скипидар), называемые **оптически активными**, обладают способностью вращать плоскость поляризации. Угол поворота плоскости поляризации  $\varphi = \alpha \cdot d$ , где  $d$  – толщина слоя вещества,  $\alpha$  – удельное вращение – угол поворота плоскости поляризации слоем оптически активного вещества единичной толщины. При этом  $\alpha \sim \lambda_0^{-2}$  – **закон Био** ( $\lambda_0$  – длина волны света в вакууме). Для растворов угол  $\varphi$  зависит еще и от концентрации  $c$  раствора  $\varphi = \alpha \cdot c \cdot d$ .

Если между скрещенными поляризатором  $P$  и анализатором  $A$  поместить оптически активное вещество, то поле зрения анализатора просветляется. Поворачивая анализатор можно определить угол  $\varphi$ , при котором поле зрения вновь становится темным – угол поворота плоскости поляризации оптически активным веществом. В зависимости от направления вращения, оптически активные вещества разделяются на **право-** и **левовращающие**. В первом случае плоскость поляризации, если смотреть навстречу лучу, смещается по часовой стрелке, во втором – против.

Оптическая активность обуславливается: 1) строением молекул вещества (их асимметрией); 2) особенностями расположения частиц в кристаллической решетке.

**Эффект Фарадея** – вращение плоскости поляризации в оптически неактивных телах помещенных во внешнее магнитное поле. Угол поворота плоскости поляризации  $\varphi = VHd$ , где  $H$  – напряженность внешнего магнитного поля,  $d$  – толщина образца,  $V$  – **постоянная Верде**, зависящая от природы вещества и длины волны света.

## Квантовая природа излучения

**Квантовая оптика** – раздел оптики, занимающийся изучением явлений, в которых проявляются квантовые свойства света.

### 36. Виды оптических излучений.

Колебания электрических зарядов, входящих в состав вещества, обуславливают электромагнитное излучение, которое сопровождается потерей энергии веществом.

При рассеянии и отражении света формирование вторичных световых волн и продолжительность излучения веществом происходит за время, сравнимое с периодом световых колебаний.

Если излучение продолжается в течение времени, значительно превышающем период световых колебаний, то возможны два типа излучения: 1) **тепловое излучение** и 2) **люминесценция**.

Равновесным состоянием системы тело-излучение является состояние, при котором распределение энергии между телом и излучением остается неизменным для каждой длины волны. Единственным видом излучения, которое может находиться в равновесии с излучающим телом, является **тепловое излучение** – свечение тел, обусловленное нагреванием.

**Люминесценцией** называется неравновесное излучение, избыточное при данной температуре над тепловым излучением тела и имеющее длительность, большую периода световых колебаний.

### 37. Тепловое излучение и его характеристики.

**Тепловое излучение** совершается за счет энергии теплового движения атомов и молекул вещества (*внутренней энергии*) и свойственно всем телам при температурах выше 0 К. **Тепловое излучение равновесно** – тело в единицу времени поглощает столько же энергии, сколько и излучает.

Количественной характеристикой теплового излучения служит **спектральная плотность энергетической светимости (испускательная способность) тела**  $R_{\nu,T}$  – мощность излучения с единицы площади поверхности тела в интер-

вале частот единичной ширины. ( $dW_{\nu,\nu+d\nu}^{\text{изл}}$  – энергия электромагнитного излучения, испускаемого за 1 с (мощность излучения) с площади  $1 \text{ м}^2$  поверхности тела в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ ). Её единица – **джоуль на метр в квадрате**. Испускательную способность можно представить в виде функции

длины волны: т.к.  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ , то  $R_{\nu,T} = R_{\lambda,T} \frac{d\lambda}{d\nu} = R_{\lambda,T} \frac{\lambda^2}{c}$ .

Интегральная по  $\nu$  **энергетическая светимость**  $R_T = \int_0^\infty R_{\nu,T} d\nu$ .

Способность тел поглощать падающее на них излучение характеризуется **спектральной поглощательной способностью**  $A_{\nu,T}$ , показывающей, какая доля энергии

$dW_{\nu,\nu+d\nu}$ , приносимой за единицу времени на единицу площади тела падающими на нее электромагнитными волнами с частотами от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ , поглощается телом.

### 38. Абсолютно черное тело.

Тело, способное поглощать при любой температуре **все** падающее на него излучение любой частоты называется **абсолютно черным телом**.

**Спектральная поглощательная способность** черного тела для всех частот и температур **тождественно равна единице**:  $A_{\nu,T} \equiv 1$ . Абсолютно черных тел в природе нет, однако такие тела, как сажа и черный бархат в определенном интервале частот близки к ним. **Идеальной моделью черного тела** является замкнутая полость с небольшим отверстием  $O$ , внутренняя поверхность которой зачернена. Луч, попавший внутрь такой полости, полностью поглощается.

Наряду с понятием черного тела используют понятие **серого тела** – тела, поглощательная способность которого меньше единицы, **но одинакова для всех частот** и зависит только от температуры, материала и состояния поверхности тела

$$A_{\nu,T} = A_T = \text{const} < 1.$$

### 39. Закон Кирхгофа.

Закон Кирхгофа определяет соотношение между испускательной и поглощательной способностями тел.

Отношение испускательной и поглощательной способностей тела не зависит от природы тела и является универсальной для всех тел функцией частоты и температуры  $r_{\nu,T}$ .

Для черного тела  $A_{\nu,T} \equiv 1$ , поэтому **универсальная функция Кирхгофа**  $r_{\nu,T}$  есть спектральная плотность энергетической светимости (*испускательная способность*) черного тела. Нахождение **явной зависимости**  $r_{\nu,T}$  **от частоты и температуры** является важной задачей теории теплового излучения.

### 40. Закон Стефана-Больцмана.

Энергетическая светимость серого тела (интегральная по  $\nu$ )

$$R_T^c = \int_0^\infty A_{\nu,T} r_{\nu,T} d\nu = A_T \int_0^\infty r_{\nu,T} d\nu = A_T R_e, \quad \text{где } R_e = \int_0^\infty r_{\nu,T} d\nu -$$

энергетическая светимость черного тела, которая зависит только от температуры. Эту зависимость описывает экспериментальный **закон Стефана-Больцмана**: Энергетическая светимость черного тела пропорциональна четвертой степени термодинамической температуры

$$R_e = \sigma T^4 \quad (\text{следовательно } R_T^c = A_T \sigma T^4),$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – **постоянная Стефана-Больцмана**.

### 41. Закон смещения Вина.

Закон Стефана-Больцмана ничего не говорит о спектральном составе излучения черного тела. **Положение максимума** в спектре его излучения описывается экспериментальным **законом смещения Вина**:

Длина волны  $\lambda_{\text{max}}$ , при которой излучательная способность  $r_{\lambda,T}$  черного тела максимальна, **обратно пропорциональна** его термодинамической температуре

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T},$$

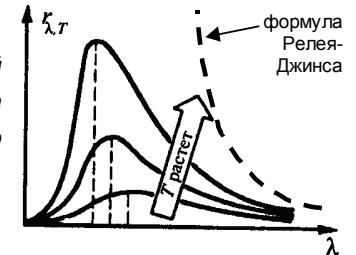
где  $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$  – **постоянная Вина**.

### 42. Формулы Рэлея-Джинса и Вина.

Применяя к тепловому излучению классический закон **равнораспределения** энергии по степеням свободы Рэлей и Джинс получили выражение для зависимости испускательной способности черного тела  $r_{\nu,T}$  от частоты света

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,$$

где  $\langle \varepsilon \rangle = kT$  – средняя энергия осциллятора с собственной частотой  $\nu$ .





Однако попытка получить закон Стефана-Больцмана из этой формулы приводит к **абсурдному** результату –  $R_e$  неограниченно растет, достигая чрезвычайно больших значений в ультрафиолете, – который получил название **"ультрафиолетовая катастрофа"**

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu = \frac{2\pi kT}{c^2} \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu = \infty.$$

Формула Рэлея-Джинса согласуется с экспериментом только в области малых частот и больших температур. В области больших частот хорошо описывает эксперимент **формула Вина** (закон излучения Вина)

$$R_{\nu,T} = C_1 \nu^3 \exp(-C_2 \nu/T), \quad \text{где } C_1 \text{ и } C_2 - \text{константы.}$$

#### 43. Квантовая гипотеза Планка.

Макс Планк **предположил**, что теория классического гармонического осциллятора неприменима к атомным осцилляторам; *атомные осцилляторы излучают энергию не непрерывно*, а определенными *порциями* – **квантами**.

**Энергия кванта**  $\varepsilon_0 = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = \hbar\omega,$

где  $h = 2\pi\hbar = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – **постоянная Планка**.

В механике есть имеющая размерность "энергия×время" величина, которая называется **действием**. Поэтому постоянную Планка иногда называют **квантом действия**. Размерность  $h$  совпадает с размерностью момента импульса.

Поскольку энергия излучается порциями, то **энергия осциллятора** может принимать лишь определенные дискретные значения, кратные целому числу квантов  $\varepsilon = n h \nu \quad (n = 1, 2, \dots).$

Среднюю энергию осцилляторов  $\langle \varepsilon \rangle$  нельзя принимать равной  $kT$ . Планк использовал распределение Больцмана частиц по энергиям. Тогда вероятность  $p_i$  того, что энергия колебания осциллятора частоты  $\nu$  имеет значение  $\varepsilon_i$  определяется выражением (1), где  $N_i$  – число осцилляторов с энергией  $\varepsilon_i$ ,  $N$  – полное число осцилляторов. Отсюда можно получить выражение для средней энергии осцилляторов (2).

Тогда универсальная функция Кирхгофа  $r_{\nu,T}$  будет иметь вид (3) – **формула Планка**.

Или в виде (4)  $r_{\lambda,T}$  – функции длины волны (учитывая  $c = \lambda\nu$ ,  $r_{\lambda,T} = r_{\nu,T} c/\lambda^2$ ).

В области малых частот  $h\nu \ll kT$   $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$  и формула Планка переходит в формулу Рэлея-Джинса.

$$p_i = \frac{N_i}{N} = \frac{\exp(-\varepsilon_i/kT)}{\sum_i \exp(-\varepsilon_i/kT)} \quad (1)$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\varepsilon_0}{\exp\left(\frac{\varepsilon_0}{kT}\right) - 1} \quad (2)$$

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (3)$$

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda}\right) - 1} \quad (4)$$

Закон Стефана-Больцмана  $R_e = \sigma T^4$  получается из формулы Планка её интегрированием по частотам.

При этом постоянная Стефана-Больцмана равна  $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}.$

Закон смещения Вина получается при анализе формулы Планка на экстремум  $T\lambda_{\max} = hc/(4,965k) = b.$

Таким образом формула Планка обобщает все законы теплового излучения и является полным решением основной задачи теории теплового излучения.

#### 44. Фотоэффект.

**Фотоэлектрическим эффектом (фотоэффектом)** называется высвобождение электронов под действием электромагнитного излучения.

Различают фотоэффект *внутренний, вентильный и внешний*.

**Внутренний фотоэффект** – это вызванные электромагнитным излучением переходы электронов внутри полупроводника или диэлектрика из связанных состояний в свободные без вылета наружу. В результате концентрация носителей тока внутри тела увеличивается, что приводит к возникновению **фотопроводности** – повышению электропроводности полупроводника или диэлектрика при его освещении.

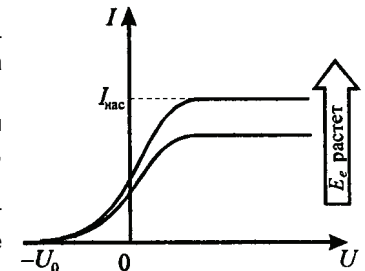
**Вентильный фотоэффект** (разновидность внутреннего фотоэффекта) – возникновение ЭДС (**фото-ЭДС**) при освещении контакта двух разных полупроводников или полупроводника и металла (при отсутствии внешнего электрического поля). Вентильный фотоэффект используется в солнечных батареях для прямого преобразования солнечной энергии в электрическую.

**Внешний фотоэффект (фотоэлектронной эмиссией)** называется испускание электронов веществом под действием электромагнитного излучения.

**Схема для исследования внешнего фотоэффекта.** Два электрода (катод  $K$  из исследуемого металла и анод  $A$ ) в вакуумной трубке подключены к батарее так, что можно изменять не только значение, но и знак подаваемого на них напряжения. Ток, возникающий при освещении катода монохроматическим светом (через кварцевое окошко) измеряется включенным в цепь миллиамперметром. Зависимость фототока  $I$ , образуемого потоком электронов, испускаемых катодом под действием света, от напряжения  $U$  между катодом и

анодом называется **вольт-амперной характеристикой фотоэффекта**.

По мере увеличения  $U$  фототок постепенно возрастает пока не выходит на насыщение. Максимальное значение тока  $I_{\text{нас}}$  – фототок насыщения – определяется таким значением  $U$ , при котором все электроны, испускаемые катодом, достигают анода:  $I_{\text{нас}} = en$ , где  $n$  – число электронов, испускаемых катодом в 1с. При  $U = 0$  фототок не



исчезает, поскольку фотоэлектроны при вылете из катода обладают некоторой начальной скоростью. Для того чтобы фототок стал равным нулю, необходимо приложить **задерживающее напряжение**  $U_0$ . При  $U=U_0$  ни один из электронов, даже обладающий при вылете максимальной начальной скоростью, не может преодолеть задерживающего поля и достигнуть анода:  $K_{\max} = m v_{\max}^2 / 2 = e U_0$ , т.е., измерив задерживающее напряжение  $U_0$ , можно определить максимальное значение скорости  $v_{\max}$  и кинетической энергии  $K_{\max}$  фотоэлектронов.

#### 45. Законы фотоэффекта.

- (1) **Закон Столетова:** при фиксированной частоте падающего света число фотоэлектронов, испускаемых фотокатодом в единицу времени, пропорционально интенсивности света (сила фототока насыщения пропорциональна энергетической освещенности  $E_e$  катода).
- (2) Максимальная начальная скорость (максимальная начальная кинетическая энергия) фотоэлектронов не зависит от интенсивности падающего света, а определяется только его частотой  $\nu$ .
- (3) Для каждого вещества существует **красная граница фотоэффекта** – минимальная частота  $\nu_0$  света (зависящая от химической природы вещества и состояния его поверхности), ниже которой фотоэффект невозможен.

Для объяснения **механизма фотоэффекта Эйнштейн предположил**, что свет частотой  $\nu$  не только **испускается** отдельными квантами (согласно гипотезе Планка), но и **распространяется** в пространстве и **поглощается** веществом отдельными порциями (квантами), энергия которых  $\epsilon_0 = h\nu$ .

Кванты электромагнитного излучения, движущиеся со скоростью  $c$  распространения света в вакууме, называются **фотонами**.

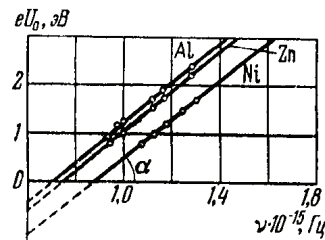
Энергия падающего фотона расходуется на совершение электроном **работы выхода**  $A$  из металла (см. стр.3-31) и на сообщение вылетевшему фотоэлектрону кинетической энергии. **Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:**

$$h\nu = A + \frac{m v_{\max}^2}{2}.$$

Это уравнение объясняет зависимость кинетической энергии фотоэлектронов от частоты падающего света (2й закон). Предельная частота  $\nu_0 = \frac{A}{h}$  (или  $\lambda_0 = \frac{hc}{A}$ ), при которой кинетическая энергия фотоэлектронов становится равной нулю, и есть красная граница фотоэффекта (3й закон).

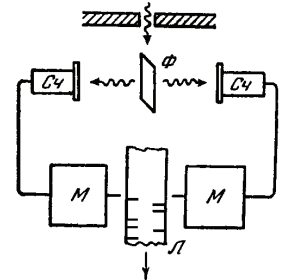
Другая форма записи уравнения Эйнштейна  $eU_0 = h(\nu - \nu_0)$ .

На рисунке изображена зависимость максимальной кинетической энергии фотоэлектронов от частоты облучающего света для алюминия, цинка и никеля. Все прямые параллельны друг другу, причем производная  $d(eU_0)/d\nu$  не зависит от материала катода и численно равна постоянной Планка  $h$ . Отрезки, отсекаемые на оси ординат, численно равны работе  $A$  выхода электронов из соответствующих металлов.



На явлении фотоэффекта основано действие фотоэлементов и фотосопротивлений (фоторезисторов) в фотоэкспонетрах, люксметрах и устройствах управления и автоматизации различных процессов, пультах дистанционного управления, а также полупроводниковых фотоэлектронных умножителей и солнечных батарей.

Существование фотонов было продемонстрировано в **опыте Боте**. Тонкая металлическая фольга  $\Phi$ , расположенная между двумя счетчиками  $Сч$ , под действием жесткого облучения испускала рентгеновские лучи. Если бы излучаемая энергия распространялась равномерно во все стороны, как это следует из волновых представлений, то оба счетчика должны были бы срабатывать одновременно, и на движущейся ленте  $Л$  появлялись бы синхронные отметки маркерами  $М$ . В действительности же расположение отметок было беспорядочным. Следовательно, в отдельных актах испускания рождаются световые частицы (фотоны), летящие то в одном, то в другом направлении.



#### 46. Масса и импульс фотона. Единство корпускулярных и волновых свойств света.

Используя соотношения  $E^2 = m_0^2 c^4 + p_\gamma^2 c^2$ ;  $\epsilon_0 = m_\gamma c^2$ ;  $m_0 = 0$ , получаем выражения для **энергии, массы и импульса** фотона

$$\epsilon_0 = h\nu \quad m_\gamma = \frac{h\nu}{c^2} \quad p_\gamma = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Эти соотношения связывают квантовые (**корпускулярные**) характеристики фотона – массу, импульс и энергию – с **волновой** характеристикой света – его частотой.

Свет обладает **одновременно волновыми** свойствами, которые проявляются в закономерностях его распространения, интерференции, дифракции, поляризации, и **корпускулярными**, которые проявляются в процессах взаимодействия света с веществом (испускания, поглощения, рассеяния).

#### 47. Давление света.

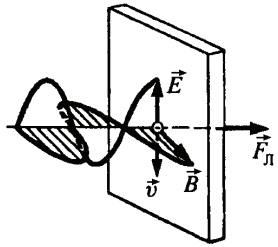
Если фотоны обладают импульсом, то свет, падающий на тело, должен оказывать на него давление.

Пусть поток монохроматического излучения частоты  $\nu$  падает перпендикулярно поверхности. Если за 1с на  $1\text{ м}^2$  поверхности тела падает  $N$  фотонов, то при коэффициенте отражения  $\rho$  света от поверхности тела отразится  $\rho N$  фотонов, а  $(1-\rho)N$  фотонов – поглотится. Каждый поглощенный фотон передает поверхности импульс  $p_\gamma$ , а каждый отраженный фотон –  $2p_\gamma$ .

Давление света на поверхность равно импульсу, который передают поверхности за 1с  $N$  фотонов  $p = \frac{2h\nu}{c}\rho N + \frac{h\nu}{c}(1-\rho)N = (1+\rho)\frac{h\nu}{c}N$ .

**Энергетическая освещенность поверхности**  $Nh\nu = E_e$  (энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени). **Объемная плотность энергии излучения:**  $w = \frac{E_e}{c}$ . Отсюда  $p = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = w(1+\rho)$ .



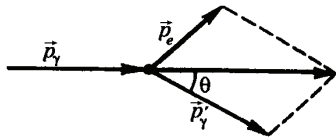


Волновая теория света на основании уравнений Максвелла приходит к такому же выражению. Давление света в волновой теории объясняется тем, что под действием электрического поля  $\vec{E}$  электромагнитной волны электроны в металле будут двигаться в направлении (обозначенном  $\vec{v}$  на рисунке) противоположном  $\vec{E}$ . Магнитное поле  $\vec{B}$  электромагнитной волны действует на движущиеся электроны с силой Лоренца в направлении (по правилу левой руки) перпендикулярном поверхности

металла. Таким образом, электромагнитная волна оказывает на поверхность металла давление.

#### 48. Эффект Комптона.

Корпускулярные свойства света отчетливо проявляются в **эффекте Комптона** – упругом рассеянии коротковолнового электромагнитного излучения (рентгеновского и  $\gamma$ -излучений) на свободных (или слабосвязанных) электронах вещества, **сопровождающееся увеличением длины волны**. Это увеличение  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  не зависит от длины волны  $\lambda$  падающего излучения и природы рассеивающего вещества, а определяется только углом рассеяния  $\theta$



$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

где  $\lambda'$  – длина волны рассеянного излучения,  $\lambda_C$  – **комптоновская длина волны**. При

рассеянии на электроне 
$$\lambda_C^e = \frac{h}{m_e c} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

Фотон (с энергией  $\varepsilon_\gamma = h\nu$  и импульсом  $p_\gamma = h\nu/c$ ), столкнувшись с электроном (энергия покоя  $W_0 = m_e c^2$ ,  $m_e$  – масса покоя электрона), передает ему часть своей энергии и импульса и изменяет направление движения (рассеивается). В процессе этого **упругого** столкновения выполняются законы сохранения энергии  $W_0 + \varepsilon_\gamma = W + \varepsilon'_\gamma$  и импульса  $\vec{p}_\gamma = \vec{p}_e + \vec{p}'_\gamma$ , где

$W = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4}$  – релятивистская энергия электрона после столкновения,

Таким образом 
$$m_e c^2 + h\nu = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} + h\nu',$$

$$p_e^2 = p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - p_\gamma p_\gamma' \cos \theta = (h\nu/c)^2 + (h\nu'/c)^2 - 2(h^2/c^2) \cos \theta. \text{ Следовательно}$$

$$\text{но, } m_e c^2 (\nu - \nu') = h\nu\nu' \cos \theta. \text{ С учетом } \nu = c/\lambda, \text{ получим } \Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2 (\theta/2).$$

Эффект Комптона не может наблюдаться в видимой области спектра, поскольку энергия фотона видимого света сравнима с энергией связи электрона с атомом, при этом даже внешний электрон атома нельзя считать свободным.

*Эффект Комптона, излучение черного тела и фотоэффект служат доказательством квантовых (корпускулярных) представлений о свете как о потоке фотонов.*