Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)
Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»
Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

Домашнее задание №2 Часть 2 по дисциплине
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Вариант 14

Выполнил:
студент группы РК6-36Б
Петраков С.А.

Москва
2020

Оглавление

Задача 1.

Известно, что плотность распределения $f(x)$ одномерной случайной величины X представляет собой трапецию, для которой (здесь и далее значения всех параметров берутся из таблиц исходных данных к ДЗ №1):

$f(R1) = 0$

$f(R1 + G1) = h$

$f(R1 + G1 + B1) = h,$

$f(R1 + G1 + B1 + R2) = 0$

R1 = 11

G1 = 10

B1 = 11

$f(11) = 0$

$f(21) = h\left(\frac{1}{21}\right)$

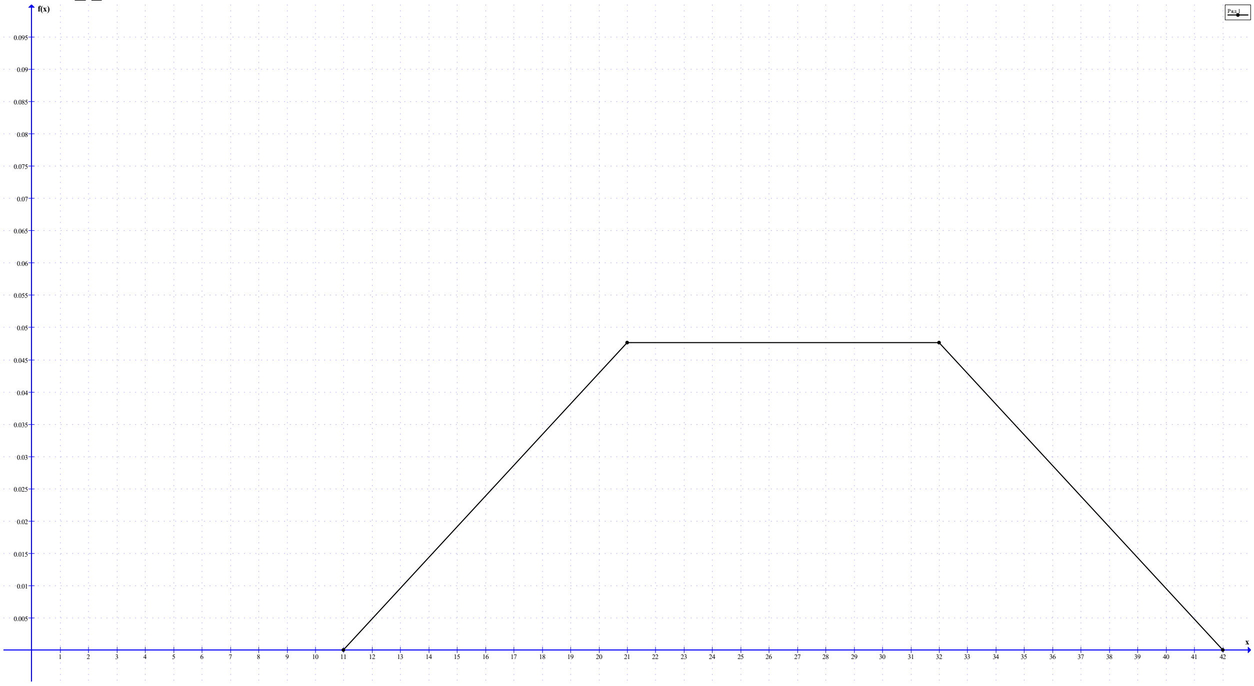
$f(32) = h\left(\frac{1}{21}\right)$

$f(42) = 0$

1. Рассчитать величину h;

Т.к. площадь под графиком плотности распределения равна 0. Мы знаем, что график образует трапецию, тогда $S = \frac{a+b}{2}h$, где $a = 31, b = 11, S = 1$. Тогда

$h = \frac{1}{21}$.



2. Записать аналитическое выражение для функции плотности распределения f(x).

Функция плотности распределения является кусочной:

- $y = k_1 x + b_1$

  $\begin{cases} \frac{1}{21} = k_1 21 + b_1 \\ 0 = k_1 11 + b_1 \end{cases}$, о тсюда $\begin{cases} k_1 = \frac{1}{210} \\ b_1 = -\frac{11}{210} \end{cases}$, тогда $y = \frac{1}{210}x - \frac{11}{210}$

- $y = k_2 x + b_2$

  $\begin{cases} \frac{1}{21} = k_2 32 + b_2 \\ 0 = k_2 42 + b_2 \end{cases}$, о тсюда $\begin{cases} k_2 = -\frac{1}{210} \\ b_2 = \frac{1}{5} \end{cases}$, тогда $y = -\frac{1}{210}x + \frac{1}{5}$

Тогда кусочная функция будет записана так:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 11) \\ \frac{1}{210}x - \frac{11}{210}, x \in\ [11; 21) \\ \frac{1}{21}, x \in [21; 32) \\ -\frac{1}{210}x + \frac{1}{5}, x \in [32; 42] \\ 0, x \in (42, +\infty) \end{cases}$$

3. Записать аналитическое выражение для функции распределения F(x).

Т.к. $f(x) = (F(x))'$, то $F(x) = \int f(x)\,dx$

Интегрируем каждую часть кусочной функции:

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{210}x - \frac{11}{210}\right)dx = \frac{x^2}{420} - \frac{11x}{210} + C;$$

$$\frac{11^2}{420} - \frac{11*11}{210} + C = 0; C = \frac{121}{420};$$

$$F(x) = \int \frac{1}{21}dx = \frac{x}{21} + C;$$

$$\frac{21}{21} + C = \frac{21^2}{420} - \frac{11*21}{210} + \frac{121}{420}; C = -\frac{16}{21};$$

$$F(x) = \int -\frac{1}{210}x + \frac{1}{5}dx = -\frac{x^2}{420} + \frac{x}{5} + C;$$

$$-\frac{32^2}{420} + \frac{32}{5} + C = \frac{32}{21} - \frac{16}{21}; C = -\frac{16}{5};$$

Итоговый вид функции распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 11) \\ \dfrac{x^2}{420} - \dfrac{11x}{210} + \dfrac{121}{420}, x \in [11; 21) \\ \dfrac{x}{21} - \dfrac{16}{21}, x \in [21; 32) \\ -\dfrac{x^2}{420} + \dfrac{x}{5} - \dfrac{16}{5}, x \in [32; 42] \\ 0, x \in (42, +\infty) \end{cases}$$

4. Рассчитать математическое ожидание случайной величины M(X).

$$M(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(x * f(x)\right) dx =$$

$$= \int_{11}^{21} x\left(\frac{1}{210}x - \frac{11}{210}\right)dx + \int_{21}^{32} x\left(\frac{1}{21}\right)dx +$$

$$+ \int_{32}^{42} x\left(-\frac{1}{210}x + \frac{1}{5}\right)dx = \frac{265}{63} + \frac{583}{63} + \frac{530}{63} = \frac{1378}{63}$$

$$= 21.(873015)$$

5. Рассчитать дисперсию случайной величины D(X).

$$D(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(x - M(x)\right)^2 f(x)\,dx =$$

$$= \int_{11}^{21} \left(x - \frac{1378}{63}\right)^2 \left(\frac{1}{210}x - \frac{11}{210}\right) dx + \int_{21}^{32} \left(x - \frac{1378}{63}\right)^2 \left(\frac{1}{21}\right) dx +$$

$$+ \int_{32}^{42} \left(x - \frac{1378}{63}\right)^2 \left(-\frac{1}{210}x + \frac{1}{5}\right) dx = \frac{461375}{83349} + \frac{1374923}{83349} + \frac{3705770}{83349}$$

$$= \frac{263908}{3969} = 66\frac{1954}{3969} = 66.492315$$

Задача 2.

Имеется функция $\varphi(x) \; = \; \big(x - (R2 + G2)\big) * \big(x - (R2 + G2 + B2)\big)$. Будем рассматривать случайную величину Y как результат вычисления функции φ для случайного аргумента X (рассмотренного в задаче 1).

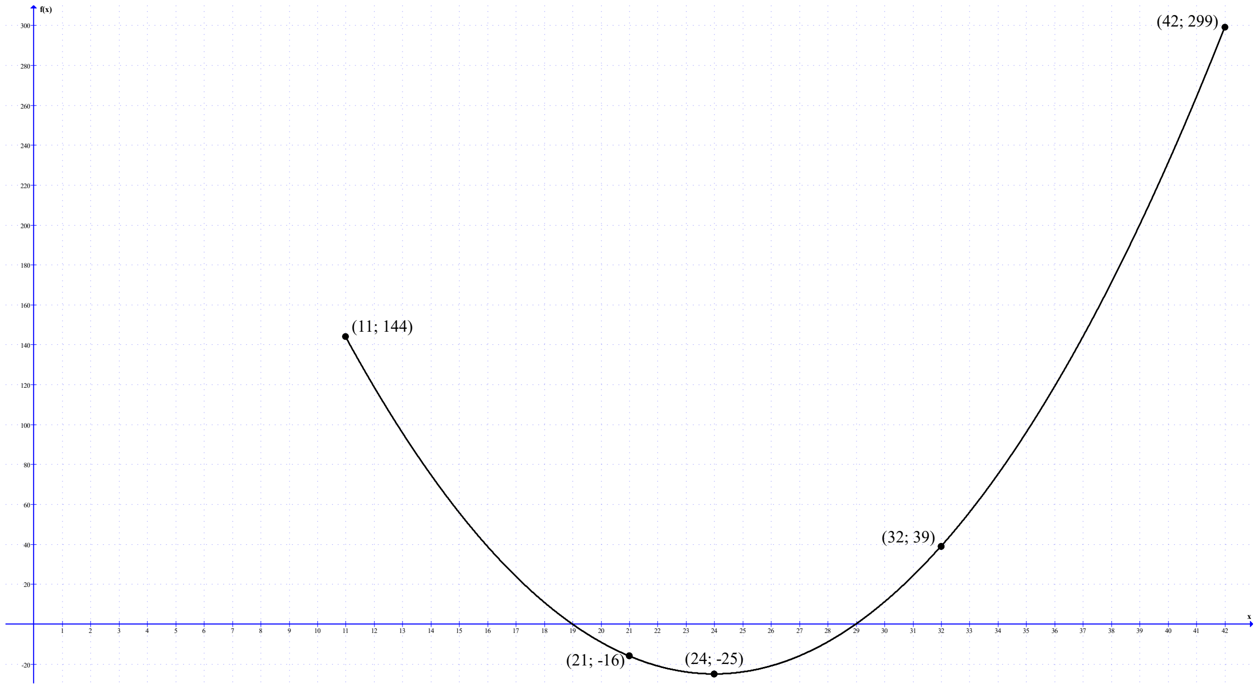
R2 = 10

G2 = 9

B2 = 10

$$\varphi(x) \; = \; (x - 19) * (x - 29) = (x - 24)^2 - 25$$

$$x \in [11; 42]$$



1. **Записать аналитическое выражение для функции плотности распределения f(y).**

Функция возрастает на $x \in [11; 24]$ и убывает на $x \in [24; 42]$.

Найдем $\psi_1(y), \psi_2(y)$ таких, что $\varphi\big(\psi_1(y)\big) = \varphi\big(\psi_2(y)\big) = y$.
Тогда $\psi_1(y) = 24 - \sqrt{y + 25}, \psi_2(y) = 24 + \sqrt{y + 25}$.

Тогда $f(\psi_1)$ и $f(\psi_2)$ равны:

$$f(\psi_1) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 11) \\ \frac{1}{210}\left(24 - \sqrt{y+25}\right) - \frac{11}{210}, x \in [11; 21) \\ \frac{1}{21}, x \in [21; 32) \\ -\frac{1}{210}\left(24 - \sqrt{y+25}\right) + \frac{1}{5}, x \in [32; 42] \\ 0, x \in (42, +\infty) \end{cases}$$

$$f(\psi_2) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 11) \\ \dfrac{1}{210}\left(24 + \sqrt{y+25}\right) - \dfrac{11}{210}, x \in [11; 21) \\ \dfrac{1}{21}, x \in [21; 32) \\ -\dfrac{1}{210}\left(24 + \sqrt{y+25}\right) + \dfrac{1}{5}, x \in [32; 42] \\ 0, x \in (42, +\infty) \end{cases}$$

Для объединения этих двух функций воспользуемся формулой $\sum_{i=0}^{n} f(\psi_i)|\psi_i|$. Т.к. $f(x)$ – кусочная функция, а $\varphi(x)$ имеет два промежутка монотонности. То искомая функция $f(y)$ будет иметь промежутки: $[-25; -16), [-16; 39), [39; 144), [144,299]$.

$$|\psi_1'| = |\psi_2'| = \frac{1}{2\sqrt{y+25}}$$

Тогда:

$f(\psi_1) * |\psi_1'| + f(\psi_2) * \ |\psi_2'|, \{ x_1, x_2 \in [21, 32), y \in [-25, -16)\}$

$f(\psi_1) * |\psi_1'| + f(\psi_2) * |\psi_2'|, \{x_1 \in [11,21)\ , x_2 \in [21, 32), y \in [-16, 39)\}$

$f(\psi_1) * |\psi_1'| + f(\psi_2) * |\psi_2'|, \{x_1 \in [11,21)\ , x_2 \in [32,42], y \in [39,144)\}$

$f(\psi_2) * |\psi_2'|\ \{x_2 \in [32, 42]\ ), y \in [144, 299]\}$

Итог:

$$f = \begin{cases} \dfrac{1}{21\sqrt{y+25}}, y \in [-25, -16) \\ \dfrac{23 - \sqrt{y+25}}{420\sqrt{y+25}}, y \in [-16, 39) \\ \dfrac{31 - 2\sqrt{y+25}}{420\sqrt{y+25}}, y \in [39,144) \\ \dfrac{18 - \sqrt{y+25}}{420\sqrt{y+25}}, y \in [144, 299] \end{cases}$$

2. **Записать аналитическое выражение для функции распределения F(y).**

Проинтегрируем все части f(y):

$$\int \frac{1}{21\sqrt{y+25}}dy = \frac{2\sqrt{25\ +\ y}}{21} + C$$

$$\frac{2\sqrt{25-25}}{21} + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\int \frac{23-\sqrt{y+25}}{420\sqrt{y+25}}dy = \frac{\left(-y\ +\ 46\sqrt{25\ +\ y}\right)}{420} + C$$

$$\frac{\left(16\ +\ 46\sqrt{25\ -16}\right)}{420} + C = \frac{2\sqrt{25\ -16}}{21} + 0 \Rightarrow C = \frac{2}{7}$$

$$\int \frac{31-2\sqrt{y+25}}{420\sqrt{y+25}}dy = \frac{\left(-y\ +\ 31\sqrt{25\ +\ y}\right)}{210} + C$$

$$\frac{\left(-39\ +\ 31\sqrt{25\ +39}\right)}{210} + C = \frac{\left(-39\ +\ 46\sqrt{25\ +\ 39}\right)}{420} + \frac{2}{7} \Rightarrow C = \frac{449}{420}$$

$$\int \frac{18-\sqrt{y+25}}{420\sqrt{y+25}}dy = \frac{\left(-y\ +\ 36\sqrt{25\ +\ y}\right)}{420} + C$$

$$\frac{\left(-144\ +\ 36\sqrt{25\ +\ 144}\right)}{420} + C = \frac{\left(-144\ +\ 31\sqrt{25\ +\ 144}\right)}{210} + \frac{449}{420} \Rightarrow C = \frac{967}{420}$$

$$F = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{25\ +\ y}}{21}, y \in [-25,-16) \\ \dfrac{\left(-y\ +\ 46\sqrt{25\ +\ y}\right)}{420} + \dfrac{2}{7}, y \in [-16,39) \\ \dfrac{\left(-y\ +\ 31\sqrt{25\ +\ y}\right)}{210} + \dfrac{449}{420}, y \in [39,144) \\ \dfrac{\left(-y\ +\ 36\sqrt{25\ +\ y}\right)}{420} + \dfrac{967}{420}, y \in [144,299] \end{cases}$$

3. **Рассчитать математическое ожидание случайной величины M(Y).**

$$M(Y) = M\big(\varphi(X)\big) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) * f(x)\,dx =$$

$$= \int_{11}^{21} \big((x-19)*(x-29)\big)\left(\frac{1}{210}x - \frac{11}{210}\right)dx$$

$$+ \int_{21}^{32} \big((x-19)*(x-29)\big)\left(\frac{1}{21}\right)dx +$$

$$+ \int_{32}^{42} \big((x-19)*(x-29)\big)\left(-\frac{1}{210}x + \frac{1}{5}\right)dx = \frac{310}{63} - \frac{286}{63} + \frac{545}{21}$$

$$= \frac{79}{3} = 26.(3)$$

4. **Рассчитать дисперсию случайной величины D(Y).**

$$D(Y) = D\big(\varphi(X)\big) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\varphi(x) - M\big(\varphi(X)\big)\Big)^2 * f(x)\,dx$$

$$= \int_{11}^{21} \left((x-19)*(x-29) - \frac{79}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{210}x - \frac{11}{210}\right)dx$$

$$+ \int_{21}^{32} \left((x-19)*(x-29) - \frac{79}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{21}\right)dx +$$

$$+ \int_{32}^{42} \left((x-19)*(x-29) - \frac{79}{3}\right)^2 \left(-\frac{1}{210}x + \frac{1}{5}\right)dx$$

$$= 274.84 + 816.32 + 2396.9 = 3488.06$$