Петраков С.А. РК6-56Б

Задача 5.5

Условие:

Вывод методов Адамса-Башфорта основан на аппроксимации интеграла:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt$$

квадратурой, полученной путем аппроксимации $f\big(t, y(t)\big)$ интерполянтом Лагранжа:

$$f\big(t, y(t)\big) = L_{p-1}(t) + \frac{f^{(p)}\big(\xi_i, y(\xi_i)\big)}{p!} \prod_{i=1}^{p} \big(t - t_{i-j+1}\big),$$

где $t_{i+1-p}, t_{i+2-p}, \dots t_{i-1}, t_i$ являются равномерно распределенными узлами с шагом h. Требуется доказать, что соответствующая квадратура с остаточным членом имеет вид:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt = h \sum_{j=1}^{p} a_j f\left(t_{i-j+1}, y\big(t_{i-j+1}\big)\right) + \frac{h^{p+1}}{p!} f^{(p)}\big(\mu, y(\mu)\big) \int_0^1 \prod_{j=1}^{p} (s + j - 1)\, ds,$$

Где $\mu \in \big(t_{i+1-p}; t_i\big)$ и $a_j = \int_0^1 \prod_{j \neq k} \frac{s+k-1}{k-j} ds\, , j = 1, \dots, p$.

Решение:

Получим квадратуру используя интерполянт Лагранжа:

$$f\big(t, y(t)\big) = L_{p-1}(t) + \frac{f^{(p)}\big(\xi_i, y(\xi_i)\big)}{p!} \prod_{i=1}^{p} \big(t - t_{i-j+1}\big), \text{где } \xi_i = \xi_i(t) \in \big(t_{i+1-p}; t_i\big)$$

Выполняем разложение $L_{p-1}(t)$:

$$L_{p-1}(t) = \sum_{j=1}^{p} l_i(t) * f\left(t_{i-j+1}, y\big(t_{i-j+1}\big)\right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{t - t_{i-k+1}}{t_{i-j+1} - t_{i-k+1}} \right) * f\left(t_{i-j+1}, y\big(t_{i-j+1}\big)\right) \right)$$

Тогда интеграл примет вид:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt \\
&\quad = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{t - t_{i-k+1}}{t_{i-j+1} - t_{i-k+1}} \right) * f\left(t_{i-j+1}, y\big(t_{i-j+1}\big)\right) \right) \right) dt \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{f^{(p)}\big(\xi_i, y(\xi_i)\big)}{p!} \prod_{i=1}^{p} \big(t - t_{i-j+1}\big) \right) dt \\
&\quad = \sum_{j=1}^{p} f\left(t_{i-j+1}, y\big(t_{i-j+1}\big)\right) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{t - t_{i-k+1}}{t_{i-j+1} - t_{i-k+1}} \right) \right) dt \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{f^{(p)}\big(\xi_i, y(\xi_i)\big)}{p!} \prod_{i=1}^{p} \big(t - t_{i-j+1}\big) \right) dt,
\end{aligned}$$

$$\text{где } \xi_i = \xi_i(t) \in \big(t_{i+1-p}; t_i\big), \quad (1)$$

$$A = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{t - t_{i-k+1}}{t_{i-j+1} - t_{i-k+1}} \right) \right) dt$$

$$B = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{f^{(p)}(\xi_i, y(\xi_i))}{p!} \prod_{i=1}^{p} (t - t_{i-j+1}) \right) dt$$

Введем замену $t = t_i + s * h$

- Упростим интеграл A в сумме, заменив переменную в подынтегральной функции, но не в интеграле:

$$A = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{t_i + s * h - (t_i + (-k+1)h)}{(t_i + (-j+1)h) - (t_i + (-k+1)h)} \right) \right) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{s + k - 1}{k - j} \right) \right) dt$$

Теперь выполним замену переменной в интеграле A с t на s:

$$A = h \int_{0}^{1} \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{s + k - 1}{k - j} \right) \right) ds, \quad (2)$$

- Упросим интеграл B, выполнив аналогичную замену:

$$B = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{f^{(p)}(\xi_i, y(\xi_i))}{p!} \prod_{i=1}^{p} (t_i + s * h - (t_i + (-j+1)h)) \right) dt = h^p \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{f^{(p)}(\xi_i, y(\xi_i))}{p!} \prod_{i=1}^{p} (s + j - 1) \right) dt$$

Выполним аналогичную замену переменной в интеграле B с t на s:

$$B = \frac{h^p}{p!} \int_{0}^{1} \left(f^{(p)}(\xi_i, y(\xi_i)) \prod_{i=1}^{p} (s + j - 1)\, h \right) ds = \frac{h^{p+1}}{p!} \int_{0}^{1} \left(f^{(p)}(\xi_i, y(\xi_i)) \prod_{i=1}^{p} (s + j - 1) \right) ds$$

Можно применить теорему о среднем значении для интеграла B, т.к. функция непрерывна и не меняет свой знак при $s \in [0; 1], \mu \in (t_{i+1-p}; t_i)$:

$$h^{p+1} \int_{0}^{1} \left(\frac{f^{(p)}(\xi_i, y(\xi_i))}{p!} \prod_{i=1}^{p} (s + j - 1) \right) ds = \frac{h^{p+1}}{p!} f^{(p)}(\mu, y(\mu)) \int_{0}^{1} \left(\prod_{i=1}^{p} (s + j - 1) \right) ds \quad (3)$$

Подставим все (2) и (3) в (1):

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$
$$= h \sum_{j=1}^{p} \left(\int_{0}^{1} \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{s + k - 1}{k - j} \right) \right) ds * f\left(t_{i-j+1}, y(t_{i-j+1})\right) \right)$$
$$+ \frac{h^{p+1}}{p!} f^{(p)}(\mu_i, y(\mu)) \int_{0}^{1} \left(\prod_{i=1}^{p} (s + j - 1) \right) ds$$

Введем замену $a_j = \int_0^1 \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{s+k-1}{k-j} \right) \right) ds$:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt = h \sum_{j=1}^{p} \left(a_j * f\left(t_{i-j+1}, y(t_{i-j+1})\right) \right) + \frac{h^{p+1}}{p!} f^{(p)}(\mu_i, y(\mu)) \int_{0}^{1} \left(\prod_{i=1}^{p} (s + j - 1) \right) ds,$$

где $a_j = \int_0^1 \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{s+k-1}{k-j} \right) \right) ds, j = 1, \dots, p$

Ч.т.д.