Петраков С.А. РК6-56Б

Задача 4.1

Условие:

Рассмотрим аппроксимирующую функцию $f(x)$, которая используется для нахождения приближения дискретных данных $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$.

Вид функции $f(x)$ известен:

$$f(x) = \gamma * x^{\alpha};$$

где α, γ – неизвестные коэффициенты.

Требуется записать формулировку оптимизационной задачи для метода наименьших квадратов (МНК) для нахождения неизвестных коэффициентов и найти ее аналитическое решение.

Решение:

Формулировка задачи:

$$\min_{a_0,a_1} E_2(a_0, a_1) = \min_{a_0,a_1} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \tilde{f}(x_i, a_0, a_1)\right)^2;$$

Где $E_2(\alpha, B)$ – сумма квадратов отклонений.

Решение:

Необходимо свести задачу к линейной регрессии, для этого:

Прологарифмируем по основанию e искомую функцию:

$$\ln(y) = \alpha * \ln(x) + \ln(\gamma)$$

Пусть $Y = \ln(y)$, $X = \ln(x)$, $B = \ln(\gamma)$:

$$Y = \alpha * X + B$$

Таким образом задача может быть сведена к задаче линейной регрессии.

После того как свели к линейной регрессии, теперь можно решить задачу оптимизации для МНК:

$$\min_{\alpha,\gamma} E_2(\alpha, \gamma) = \min_{\alpha,\gamma} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i, \alpha, \gamma)\right)^2;$$

Где $E_2(\alpha, B)$ – сумма квадратов отклонений.

Для линейной регрессии, в данном случае, она будет иметь вид:

$$[a^*, B^*] = \underset{\alpha,B}{argmin}\, \widehat{E_2}(\alpha, B) = \underset{\alpha,B}{argmin} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha * X_i - B)^2$$

Тогда выражение $\widehat{E_2}(\alpha, B) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha * X_i - B)^2$, примет экстремальное при следующих условиях и значениях α, B:

$$\frac{\partial \widehat{E_2}}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha * X_i - B) = 0$$

$$\frac{\partial \widehat{E_2}}{\partial B} = 0 \Rightarrow -2\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i - \alpha * X_i - B) = 0$$

Получаем систему уравнений относительно α, B:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \alpha * X_i - B) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i - \alpha * X_i - B) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Y_i - n\alpha - B\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}(X_i Y_i) - B\sum_{i=1}^{n} X_i - \alpha\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \end{cases}$$

Решив её получаем значения α, B:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 * \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i * \sum_{i=1}^{n}(X_i Y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}$$

$$B = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(X_i Y_i) - \sum_{i=1}^{n} X_i * \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}$$

Выполним обратную подстановку ($Y = \ln(y)$, $X = \ln(x)$, $B = \ln(\gamma)$):

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln(x_i))^2 * \sum_{i=1}^{n}\ln(y_i) - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) * \sum_{i=1}^{n}(\ln(x_i) * \ln(y_i))}{n\sum_{i=1}^{n}(\ln(x_i))^2 - (\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i))^2}$$

$$\gamma = e^{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln(x_i) * \ln(y_i)) - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) * \sum_{i=1}^{n}\ln(y_i)}{n\sum_{i=1}^{n}(\ln(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right)^2}}$$

Проверим полученные коэффициенты:

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad y := \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 15 \\ 26 \end{bmatrix} \quad n := 5$$

$$\alpha := \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\ln\left(x_i\right)\right)^2\right) \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(y_i\right)\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(x_i\right)\right) \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(x_i\right) \cdot \ln\left(y_i\right)\right)}{n \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\ln\left(x_i\right)\right)^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(x_i\right)\right)\right)^2}$$

$$\gamma := e^{\frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(x_i\right) \cdot \ln\left(y_i\right)\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(x_i\right)\right) \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(y_i\right)\right)}{n \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\ln\left(x_i\right)\right)^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(x_i\right)\right)\right)^2}}$$

$$\alpha = 1.952 \quad x\_lin := 1, 1.01 .. 5 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\gamma = 1.064$$

$$f := \gamma \cdot x\_lin^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1.064 \\ \vdots \end{bmatrix}$$