

3.6 Модель биологического нейрона (вариант 5)

Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 1-го порядка активно используются далеко за пределами стандартных инженерных задач. Примером области, где подобные численные методы крайне востребованы, является нейробиология, где открытые в XX веке модели биологических нейронов выражаются через дифференциальные уравнения 1-го порядка. Математическая формализация моделей биологических нейронов также привела к появлению наиболее реалистичных архитектур нейронных сетей, известных как спайковые нейронные сети (Spiking Neural Networks). В данной лабораторной работе мы исследуем одну из простейших моделей подобного типа: модель Ижикевича.

Задача 20 (Модель Ижикевича)

Дана система из двух ОДУ 1-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = f_1(u, v) = 0.04v^2 + 5v + 140 - u + I; \\ \frac{du}{dt} = f_2(u, v) = a(bv - u); \end{cases} \quad (22)$$

и дополнительного условия, определяющего возникновение импульса в нейроне:

$$\text{если } v \geq 30, \text{ то } \begin{cases} v \leftarrow c; \\ u \leftarrow u + d; \end{cases} \quad (23)$$

где v – потенциал мембраны (мВ), u – переменная восстановления мембраны (мВ), t – время (мс), I – внешний ток, приходящий через синапс в нейрон от всех нейронов, с которыми он связан.

Описания параметров представленной системы:

a – задает временной масштаб для восстановления мембраны (чем больше a , тем быстрее происходит восстановление после импульса);

b – чувствительность переменной восстановления к флуктуациям разности потенциалов;

Таблица 3: Характерные режимы заданной динамической системы и соответствующие значения ее параметров

Режим	a	b	c	d
Tonic spiking (TS)	0.02	0.2	-65	6
Phasic spiking (PS)	0.02	0.25	-65	6
Chattering (C)	0.02	0.2	-50	2
Fast spiking (FS)	0.1	0.2	-65	2

c – значение потенциала мембраны сразу после импульса;

d – значение переменной восстановления мембраны сразу после импульса.

Требуется (базовая часть).

1. Реализовать следующие функции, каждая из которых возвращает дискретную траекторию системы ОДУ с правой частью, заданной функцией f^{71} , начальным условием x_0 , шагом по времени h и конечным временем t_n :

– $euler(x_0, t_n, f, h)$, где дискретная траектория строится с помощью метода Эйлера;

– $implicit_euler(x_0, t_n, f, h)$, где дискретная траектория строится с помощью неявного метода Эйлера⁷²;

– $runge_kutta(x_0, t_n, f, h)$, где дискретная траектория строится с помощью метода Рунге–Кутты 4-го порядка.

2. Для каждого из реализованных методов численно найти траектории заданной динамической системы, используя шаг $h = 0.5$ и характерные режимы, указанные в таблице 3. В качестве начальных условий можно использовать $v(0) = c$ и $u(0) = bv(0)$. Внешний ток принимается равным $I = 5$.

3. Вывести полученные траектории на четырех отдельных графиках как зависимости потенциала мембраны v от времени t , где каждый график должен соответствовать своему характерному режиму работы нейрона.

4. По полученным графикам кратко описать особенности указанных режимов.

Требуется (продвинутая часть).

5. Ответьте на следующие вопросы.

а) В чем принципиальные отличия реализованных методов друг от друга? В чем они схожи?

б) Для каждой из схем каково значение шага, при котором она становится неустойчивой⁷³?

в) Какая из схем по вашему мнению предоставляет оптимальный баланс между устойчивостью решения и временем вычислений⁷⁴?

6. Произвести интегрирование во времени до 1000 мс нейронной сети с помощью метода Эйлера, используя следующую информацию.

а) Динамика каждого нейрона в нейронной сети описывается заданной моделью Ижикевича. В нейронной сети имеется 800 возбуждающих нейронов и 200 тормозных. Возбуждающие нейроны имеют следующие значения параметров: $a = 0.02$, $b = 0.2$, $c = -65 + 15\alpha^2$, $d = 8 - 6\beta^2$ и внешний ток в отсутствие токов от других нейронов равен $I = I_0 = 5\xi$, где α, β и ξ – случайные числа от 0 до 1 (распределение равномерное).

⁷¹В контексте поставленной задачи: $f = [f_1(u, v), f_2(u, v)]^T$ (см. систему (22))

⁷²Для решения нелинейных уравнений вы можете использовать функцию `scipy.optimize.root`

⁷³Это значение вы можете найти эмпирически.

⁷⁴Замеры времени в секундах в Python производятся, например, с помощью функции `timeit.default_timer()`. Вызвав эту функцию до и после нужного участка кода, а затем найдя разницу между полученными замерами, вы найдете время исполнения кода.

Тормозные нейроны имеют следующие значения параметров: $a = 0.02 + 0.08\gamma$, $b = 0.25 - 0.05\delta$, $c = -65$, $d = 2$ и внешний ток в отсутствие токов от других нейронов равен $I = I_0 = 2\zeta$, где γ, δ и ζ – случайные числа от 0 до 1. В качестве начальных условий используются значения $v(0) = -65$ и $u(0) = bv(0)$.

б) Нейронная сети может быть смоделирована с помощью полного графа. Матрица смежности \mathbf{W} этого графа описывает значения токов, передаваемых от нейрона к нейрону в случае возникновения импульса. То есть, при возникновении импульса нейрона j внешний ток связанного с ним нейрона i одновременно увеличивается на величину W_{ij} и затем сразу же падает до нуля, что и моделирует передачу импульса по нейронной сети. Значение W_{ij} равно 0.5θ , если нейрон j является возбуждающим, и $-\tau$, если тормозным, где θ и τ – случайные числа от 0 до 1.

7. Вывести на экран импульсы всех нейронов как функцию времени⁷⁵ и определить частоты характерных синхронных (или частично синхронных) колебаний нейронов в сети.

⁷⁵К примеру, вы можете отобразить график в форме scatter plot, где ось абсцисс будет соответствовать времени, ось ординат – номеру нейрона, а отдельный импульс будет обозначаться черной точкой.

Вопросы и ответы

Вопрос 1

Какой должен быть размер шрифта текстовых подписей, включенных в состав иллюстрации?

Ответ

Шрифт текста на иллюстрациях должен быть сравним со шрифтом подписи к иллюстрации и может быть немногим меньше шрифта основного текста документа.

Комментарий

Разрешение иллюстраций не должно быть ниже 300dpi, что позволит осуществлять некоторое масштабирование без потери качества текстовых подписей.

Вопрос 2

Могут ли использоваться различные шрифты в одном документе (в части размера, курсива, полужирного, типа)?

Ответ

Нет.

Комментарий

Применение различных шрифтов в одном документе для подготовки основного текста недопустимо и является признаком некомпетентности. Каждый шрифт используется для решения специальной задачи: выделение заголовков и подзаголовков (увеличенный, полужирный), написание основного текста (обычный), выделение терминов (курсив), подписи к рисункам, таблицам и листингам (уменьшенный, обычный).

Вопрос 3

Какого размера должна быть одна иллюстрация на странице?

Ответ

Субъективно с точки зрения автора: для определения размера одной иллюстрации по ширине текста на странице следует использовать правило золотого сечения.

Комментарий

В дополнение следует отметить, что размер иллюстрации должен быть минимально возможным, но достаточным для представления необходимой информации. Не следует оставлять на иллюстрациях лишние поля и непропорционально большие пустые пространства.

Вопрос 4

Каким форматам следует отдавать предпочтение при подготовке иллюстраций?

Ответ

Векторным (например, EPS) и лишь затем растровым (JPG, PNG) с расширением не ниже 300dpi.

Комментарий

Векторные форматы не зависят от размера области представления, позволяют масштабировать изображение с сохранением качества.

Вопрос 5

Насколько допустима вставка чужих иллюстраций в свои документы?

Ответ

Крайне нежелательна.

Комментарий

Если осуществляется вставка чужих иллюстраций, то это следует делать с обязательной ссылкой на первоисточник. В противном случае такое заимствование может расцениваться максимум как плагиат, и как минимум – некомпетентность.