

Экзаменационный билет № 1 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Числовая последовательность. Определение предела последовательности, его геометрическая интерпретация. Сходящиеся последовательности. Основные свойства предела последовательности. Доказать необходимое условие сходимости последовательности. Определение числа « ϵ » (5 баллов).
2. Дать определение непрерывности функции на отрезке и сформулировать свойства функции, непрерывной на отрезке. (3 балла).
3. Найти точки разрыва функции и сделать геометрическую интерпретацию вблизи точек разрыва (4 балла):

$$f(x) = \frac{2^x - 8}{x^2 - 3x}$$

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Сформулировать правило Лопиталья – Бернулли. Примеры. Доказать теорему о сравнении роста показательной, степенной и логарифмической функций при $x \rightarrow +\infty$. (5 баллов)
5. Разложить функцию $f(x) = \sqrt{x+3}$ в точке $x_0 = 1$ по формуле Тейлора порядка 4 с остаточным членом в форме Пеано (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график (6 баллов)

$$y = 2^{x - \frac{1}{2}x^2}$$

7. Дополнительные вопросы (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 2 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Общее определение предела функции по Коши при произвольном стремлении аргумента. Расшифровка определения и геометрическая интерпретация предела для случаев: $x \rightarrow a -$, $x \rightarrow \infty$. Доказать локальную ограниченность функции, имеющей конечный предел и сформулировать теорему о замене переменной в пределе (5 баллов).

2. Найти предел последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^n + 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n + 2^{n+2}}$. (3 балла).

3. Сравнить при $x \rightarrow +\infty$ функции $f(x) = \frac{\arcsin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x+1}}$ и

$$g(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x}. \text{ (4 балла)}$$

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Определение экстремума функции. Доказать теорему Ферма (необходимое условие экстремума). Определение критической и стационарной точек функции. Сформулировать достаточное условие экстремума (4 балла).
5. Сформулировать теорему о представлении функции по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Разложить функцию $\ln(1+x)$ по формуле Маклорена порядка n (4 балла).
6. Исследовать функцию и построить её график (6 баллов)

$$y = \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 2x + 1}.$$

7. Дополнительные вопросы (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 3 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Общее определение предела функции по Коши при произвольном стремлении аргумента. Расшифровка определения и геометрическая интерпретация предела для случаев: $x \rightarrow a +$, $x \rightarrow +\infty$. Сформулировать теоремы о локальных свойствах предела функции: (а) о локальной ограниченности функции, имеющей предел; (б) о локальной знакоопределенности функции, имеющей предел, отличный от нуля (о сохранении функцией знака своего предела). Доказать одну из них (5 баллов).
2. Дать определение эквивалентности двух функций при данном стремлении. В качестве примера, из первого замечательного предела вывести эквивалентности (при $x \rightarrow 0$) для функций $\operatorname{tg} x$ и $1 - \cos x$ (3 балла).
3. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 5x + 4})$. (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Определение производной функции в точке, ее геометрический и механический смысл. Определение дифференцируемости функции в точке. Доказать теорему о связи дифференцируемости и существования конечной производной. Сформулировать теорему о связи дифференцируемости и непрерывности. (5 баллов)
5. Найти производную функции $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos^3(\sqrt{x})}$ (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график (6 баллов)

$$y = \frac{4x - 8}{(x - 1)^2}$$

7. Дополнительные вопросы (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 4 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Общее определение предела функции по Коши при произвольном стремлении аргумента. Расшифровка определения и геометрическая интерпретация предела для случаев: $x \rightarrow a$, $x \rightarrow -\infty$. Сформулировать теоремы: (а) о предельном переходе в неравенстве; (б) о пределе промежуточной функции. Доказать одну из них (5 баллов).
2. Дать определение эквивалентности двух функций. В качестве примера, из второго замечательного предела вывести эквивалентности (при $x \rightarrow 0$) для функций $\ln(1 + x)$ и $a^x - 1$ (3 балла).
3. Найти точки разрыва функции $f(x) = \frac{x\sqrt{4 + 3x - x^2}}{\sin x}$, сделать геометрическую интерпретацию вблизи точек разрыва. (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Сформулировать правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций, теорему о производной сложной функции, теорему о производной обратной функции, доказать две из них. (5 баллов)
5. Найти производную функции $y = (3 + 2x^2)^{\sqrt{2+4x}}$ (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график $y = x \cdot (\ln x - 1)$ (6 баллов)
7. **Дополнительные вопросы (по программе): (4 балла)**

Экзаменационный билет № 5 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Определение бесконечно малой функции при данном стремлении аргумента. Расшифровка и геометрическая интерпретация для случаев $x \rightarrow a +$, $x \rightarrow +\infty$. Доказать теоремы о связи функции, ее предела и бесконечно малой при некотором стремлении аргумента. Сформулировать свойства бесконечно малых функций (5 баллов)
2. Сформулировать теорему о «втором замечательном пределе», доказать её следствия. (3 балла).
3. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x - 3}{\sqrt{x} - 1}$ (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Определение дифференциала функции, его геометрический смысл. Сформулировать правила нахождения дифференциала суммы, произведения и частного двух функций. Доказать инвариантность формы первого дифференциала. Определение дифференциалов высших порядков. (5 баллов)
5. Найти производную функции $y = (\arctg x)^{x^2}$ (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график
$$y = \frac{x}{\ln x} \quad (6 \text{ баллов})$$
7. **Дополнительные вопросы (по программе): (4 балла)**

Экзаменационный билет № 6 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Определение бесконечно малой функции при данном стремлении аргумента. Расшифровка и геометрическая интерпретация для случаев $x \rightarrow a -$, $x \rightarrow -\infty$. Сформулировать свойства бесконечно малых функций. Доказать одно из них. (5 баллов)
2. Определение порядка малости (или роста) одной функции относительно другой при данном стремлении аргумента. Привести примеры. (3 балла).
3. Найти предел функции. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-3x}{2-x} \right)^{\frac{\ln(1+2x)}{x^2}}$ (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Доказать теорему Коши. Сформулировать теорему Лагранжа, дать геометрическую интерпретацию этой теоремы. (5 баллов)
5. Найти производную функции $y = \frac{(2x-1)^5 \cdot \sqrt{\sin 3x}}{\cos^3 x}$ (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график
$$y = \frac{x^3}{3-x^2} \quad (6 \text{ баллов})$$
7. **Дополнительные вопросы (по программе): (4 балла)**

Экзаменационный билет № 7 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Определение бесконечно малой функции при данном стремлении аргумента. Расшифровка и геометрическая интерпретация для случаев $x \rightarrow a$, $x \rightarrow \infty$. Сформулировать арифметические теоремы о пределах (предел суммы, произведения и частного двух функций). Доказать одну из них. (5 баллов)
2. Дать определение односторонней непрерывности функции в точке. Сформулировать теорему о связи односторонней непрерывности с обычной (двусторонней). (3 балла).
3. Найти предел функции. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \operatorname{ctg}(5\pi x)$. (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Доказать теорему Ролля. Дать геометрическую интерпретацию этой теоремы. (5 баллов)
5. Найти производную функции $y = \left(\frac{3x-1}{5x+2}\right)^{\arcsin 2x}$ (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график
 $y = x + 2\operatorname{arctg} x$ (6 баллов)
7. **Дополнительные вопросы** (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 8 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Определение бесконечно большой функции при данном стремлении аргумента. Расшифровка и геометрическая интерпретация для случаев $x \rightarrow a +$, $x \rightarrow \infty$. Доказать теорему о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций. (5 баллов)
2. Определение непрерывности функции в точке. Дать эквивалентные формулировки. Сформулировать теорему о соответствующем свойстве элементарных функций. (3 балла)
3. Найти точки разрыва функции $y = \frac{3}{2 - 4^{1/x}}$. Сделать геометрическую интерпретацию вблизи точек разрыва. (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Доказать теорему Коши. Сформулировать правило Бернулли – Лопиталя. (5 баллов)
5. Найти производную функции $y = (\sin 3x)^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$ (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график $y = -x \cdot e^{2-2x}$
(6 баллов)
7. **Дополнительные вопросы** (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 9 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Сформулировать теорему о пределе промежуточной функции. Доказать теорему о «первом замечательном пределе». Сформулировать ее следствия. (5 баллов)
2. Определение непрерывности функции на отрезке. Сформулировать свойства функции, непрерывной на отрезке. (3 балла)
3. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{(\operatorname{ctg} 2x)/x}$. (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Определение многочлена Тейлора в точке x_0 для функции $f(x)$. Доказать теорему о нем (о значениях функции, многочлена Тейлора и их производных в точке x_0). Сформулировать теорему о представимости функции по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. (5 баллов)
5. Найти производную неявно заданной функции:
 $\ln \frac{y}{x} - y^3 e^{2x} = 1, \quad y'_x = ?$ (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график
 $y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$ (6 баллов)
7. **Дополнительные вопросы** (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 10 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Сравнение функций при данном стремлении аргумента, определение отношений « \sim » и «о-малое», примеры. Сформулировать теоремы об эквивалентных функциях. Доказать одну из них. (5 баллов)
2. Дать определение асимптоты графика функции. Сформулировать правила нахождения вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции $y = f(x)$ (3 балла)
3. Найти предел функции: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 3x + 1} - x)$. (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Дать определение монотонности (возрастания, убывания) функции на интервале. Доказать достаточное условие и сформулировать необходимое условие монотонности дифференцируемой функции. (5 баллов)
5. Найти вторую производную функции, заданной параметрически:
 $x = \sin^3 t, y = \cos^2 t, \quad y''_{xx} = ?$ (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график (6 баллов)
 $y = (x - 4) \cdot \sqrt[3]{x}$
7. **Дополнительные вопросы** (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 11 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Определение эквивалентных функций при данном стремлении. Сформулировать свойства отношения эквивалентности. Вывести эквивалентности для $\arcsin x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^a - 1$ при $x \rightarrow 0$. Применение эквивалентностей при вычислении пределов (5 баллов)
2. Определение точки разрыва функции. Классификация точек разрыва. Примеры. (3 балла)
- 3.. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^{2x+5}$ (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Определение производной функции, её физический и геометрический смысл. Вывести производные функций $\sin x$ и a^x (5 баллов).
5. Разложить по Формуле Маклорена 3-го порядка с остаточным членом в форме Пеано функцию $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$ (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график $y = \frac{\ln x}{x^2}$ (6 баллов)
7. **Дополнительные вопросы** (по программе) (4 балла)

Экзаменационный билет № 12 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Определение предела последовательности, его геометрическая интерпретация. Сходящиеся последовательности. Сформулировать основные свойства предела последовательности. Доказать необходимой условие сходимости и сформулировать достаточное условие. Число «е» (5 баллов).
2. Дать определение функции, непрерывной в точке x_0 , привести равносильные формулировки. Сформулировать локальные свойства функции, непрерывной в точке x_0 . (3 балла)
- 3.. Сравнить при $x \rightarrow 0$ функции $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{\sin \sqrt{x}}$ и $g(x) = \sqrt{4+x} - 2$ (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Определение экстремума функции. Доказать необходимое условие экстремума. Определение критической и стационарной точек функции. Сформулировать достаточное условие экстремума в критической точке. (5 баллов)
5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + \sin x - \cos(3x)}{x^2}$ (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график $y = \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 2x + 1}$. (6 баллов)
7. **Дополнительные вопросы** (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 13 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Определение бесконечно малой функции при данном стремлении аргумента, расшифровать для стремления $x \rightarrow a$. Доказать теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой при некотором стремлении аргумента. Сформулировать свойства бесконечно малых функций, и доказать одно из них. (5 баллов)
2. Определение непрерывности функции в точке и на промежутке. Определение композиции функции и обратной функции. Сформулировать теоремы о непрерывности: (а) композиции двух функций; (б) обратной функции (3 балла)
3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x - 8}{\sqrt{x+1} - 2}$ (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Доказать теорему Ролля и дать ей геометрическую интерпретацию. (5 баллов)
5. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x+3}$ по формуле Тейлора порядка 3, в точке $x_0 = -1$ с остаточным членом в форме Лагранжа (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график $y = x + 5 \arcsctg x$ (6 баллов)
7. **Дополнительные вопросы** (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 14 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Определение предела функции и бесконечно малой функции, Сформулировать свойства бесконечно малых. Сформулировать арифметические теоремы о пределах (предел суммы, произведения и частного двух функций). Доказать две из них. (5 баллов)
- 2.. Сформулировать теорему о «втором замечательном пределе» и ее следствия. (3 балла)

- 3.. Найти точки разрыва функции $y = \frac{\arctg \frac{x+1}{x-1}}{x+2}$. Сделать геометрическую интерпретацию вблизи точек разрыва. (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Доказать теорему Лагранжа, дать её геометрическую интерпретацию. (5 баллов)
5. Найти дифференциал функции $y(x)$, заданной неявно:
 $x^3 e^{2y} + \sin(x+3y) = 2$ (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график $y = (x^2 - x)e^{-x}$ (6 баллов)
7. **Дополнительные вопросы** (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 15 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Доказать теорему о «первом замечательном пределе». Сформулировать ее следствия. Доказать два из них. (5 баллов)
- 2.. Сформулировать свойства локального знакопостоянства функции, имеющей предел, теоремы о предельном переходе в неравенстве и о пределе промежуточной функции. Привести примеры. (3 балла)
3. Найти точки разрыва функции $y = e^{\frac{x+1}{x^2(x-2)}}$. Сделать геометрическую интерпретацию вблизи точек разрыва. (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

- 4.. Определение выпуклости функции (её графика) на промежутке. Доказать достаточное условие выпуклости графика. (5 баллов)
5. Разложить функцию $f(x) = \sqrt{x+1}$ в точке $x_0 = 3$ по формуле Тейлора порядка 3 с остаточным членом в Форме Лагранжа. (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график :
 $y = \frac{1}{x} + \ln|x|$ (6 баллов)
7. **Дополнительные вопросы** (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 16 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Дать общее определение предела функции при произвольном стремлении и расшифровать и дать его геометрическую интерпретацию для $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow a -$, Сформулировать общие свойства предела (о единственности, о локальной ограниченности и о локальном знакопостоянстве) и доказать одно из них. (4 балла)
2. Определение функции, непрерывной на интервале и на отрезке. Сформулировать теоремы о свойствах функции, непрерывной на отрезке. (3 балла)
- 3..Сравнить при $x \rightarrow +\infty$ функции: $f(x) = \left(\arcsin \frac{1}{x}\right) \cdot (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$ и $g(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{x^4+5x+1}}$. (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Определение точки перегиба графика. Доказать необходимое условие перегиба графика в данной точке. Сформулировать достаточное условие перегиба. (5 баллов)
5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + x - \sin 3x - \cos x}{x \cdot \ln(1+x)}$ (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график
 $y = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (6 баллов)
7. **Дополнительные вопросы** (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 17 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Определение предела последовательности, его геометрическая интерпретация. Сходящиеся последовательности. Сформулировать основные свойства предела последовательности. Доказать необходимое условие и сформулировать достаточное условие сходимости последовательности. Определение числа « ϵ » (5 баллов)

2. Сравнение функций при данном стремлении аргумента, определение отношений « \sim » и «о-малое», примеры. Сформулировать свойства отношения эквивалентности и необходимое и достаточное условие эквивалентности двух функций. (3 балла)

3. Найти точки разрыва функции $y = \frac{x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-2}$. Сделать геометрическую интерпретацию вблизи точек разрыва. (4 балла).

Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной

4. Определение дифференциала функции, его геометрический смысл. Сформулировать правила нахождения дифференциала суммы, произведения и частного двух функций. Доказать инвариантность формы первого дифференциала. (5 баллов)

5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2x + 4)^{\arcsin(1/2x)}$ (3 балла)

6. Исследовать функцию и построить её график

$$y = \frac{x}{2} + \operatorname{arccotg}(2x) \quad (6 \text{ баллов})$$

7. Дополнительные вопросы (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 18 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Определение асимптоты графика функции. Виды асимптот. Критерий существования горизонтальной и вертикальной асимптот. Вывести формулы для вычисления коэффициентов уравнения наклонной асимптоты. Примеры (5 баллов)

2. Определение непрерывности функции в точке. Сформулировать теорему о переходе к пределу под знаком непрерывной функции и теоремы о непрерывности, связанные с суммой, произведением, частным и композицией двух функций (3 балла).

3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\log_2(2x-5)}$ (4 балла).

Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной

4. Определение дифференцируемости функции в точке. Доказать теоремы о связи дифференцируемости и: (а) существования конечной производной; (б) непрерывности функции в точке. (5 баллов)

5. Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{\operatorname{arctg}(3x)}$ (3 балла)

6. Исследовать функцию и построить её график $y = x \cdot \ln^2 x$ (6 баллов)

7. Дополнительные вопросы (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 19 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Дать общее определение предела функции при произвольном стремлении аргумента. Дать его расшифровку и геометрическую интерпретацию при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow a +$. (4 балла)
2. Дать определение бесконечно малой функции. Сформулировать свойства бесконечно малых и доказать одно из них. (4 балла)
3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3^{\sin^3 x} - 1}{(x - \pi)^3}$ (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Дать определение локального экстремума функции. Сформулировать первый и доказать второй достаточный признак экстремума. (5 баллов)
5. Разложить функцию $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ по формуле Маклорена порядка 3 (4 балла).
6. Исследовать функцию и построить её график
 $y = (x+1)^2 e^{-x}$ (6 баллов)

7. Дополнительные вопросы (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 20 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Сформулировать локальные свойства функций, имеющих конечный предел и доказать два из них. (5 баллов)
2. Дать определение функции, непрерывной на отрезке. Сформулировать свойства функций, непрерывных на отрезке. Привести примеры, показывающие существенность условий для выполнения этих свойств. (3 балла).
3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 3x + 5) \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right)$ (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Доказать необходимое условие локального экстремума функции (теорему Ферма) (5 баллов)
5. Найти производную функции
 $f(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{4+x^2} + 2 \ln(x + \sqrt{4+x^2}) + \frac{1}{4} \ln \frac{x-2}{x+2}$ (3 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график $y = \frac{4x^2}{3+x^2}$
(6 баллов)

7. Дополнительные вопросы (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 21 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Дать общее определение предела функции при произвольном стремлении аргумента. Дать его расшифровку и геометрическую интерпретацию при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow a +$. (4 балла)
2. Дать определение эквивалентности бесконечно малых функций. Доказать эквивалентности для $\arcsin x$ и $1 - \cos x$ при $x \rightarrow 0$ (4 балла).
3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln x) \operatorname{ctg} \frac{1}{x}$ (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Дать определение точки перегиба функции. Сформулировать необходимое и доказать достаточное условие перегиба. (5 баллов)
5. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ по формуле Тейлора 3-го порядка в точке $x_0 = 8$ (4 балла).
6. Исследовать функцию и построить её график

$$y = \frac{x^2}{x^3 + 1} \text{ (6 баллов)}$$

7. **Дополнительные вопросы** (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 22 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Сформулировать теорему о втором замечательном пределе. Сформулировать следствия из нее и доказать два из них. (3 балла).
2. Доказать непрерывность функции $f(x) = \sin x$. Определение элементарной функции. Сформулировать теорему о связи понятий элементарная функция и непрерывная функция. (4 балла).
3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\sqrt{1 + 2x^2} - 1}$ (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Сформулировать теорему о разложении функции по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Разложить функцию $f(x) = \sin x$ по формуле Маклорена. (5 баллов).
5. Найти производную неявно заданной функции $x + y = x^3 + y^3 - xy$ (3 балла).
6. Исследовать функцию и построить её график $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ (6 баллов).

7. **Дополнительные вопросы** (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 23 по курсу:

«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Дать равносильные определения функции, непрерывной в точке. Сформулировать теорему о предельном переходе под знаком непрерывной функции и теоремы о сохранении непрерывности относительно арифметических операций, доказать одну из них. (4 балла)

2. Для функции $f(x) = \frac{\sqrt{1 + \ln(1 + x^3)} - 1}{3x^2 - 1} \cos x$ выделить главную часть вида Cx^k и определить порядок относительно x при $x \rightarrow 0$. (4 балла)

3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + x \sin x)^{1/(x-\pi)}$ (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Сформулировать и доказать теорему Ролля. (4 балла)

5. Сформулировать теорему о разложении функции по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Разложить функцию $f(x) = e^x$ по формуле Маклорена порядка n (вывод). (4 балла).

6. Исследовать функцию и построить её график

$$y = 2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \quad (6 \text{ баллов})$$

7. **Дополнительные вопросы** (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 24 по курсу:

«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Дать определение предела числовой последовательности. Доказать необходимое условие сходимости и сформулировать достаточное условие сходимости последовательности. (4 балла)

2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{4x^2 - 1} \cos(1/x)$ (4 балла).

3. Выделить главную часть вида Cx^k функции $y = (e^{\sqrt{x}} - 1) \ln\left(\frac{x+6}{x+3}\right)$ при $x \rightarrow \infty$ и определить порядок относительно функции $\frac{1}{x}$ (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Дать определение дифференцируемости функции в точке. Доказать теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции. (4 балла)

5. Доказать теорему Коши. Вывести из нее теорему Лагранжа и дать ее геометрическую интерпретацию. (4 балла)

6. Исследовать функцию и построить её график $y = \frac{x^4}{x^3 + 1}$
(6 баллов)

7. **Дополнительные вопросы** (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 25 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Дать общее определение предела функции при произвольном стремлении аргумента. Дать его расшифровку для случаев $x \rightarrow a$ и $x \rightarrow +\infty$. Дать геометрическую интерпретацию (4 балла)
2. Для функции $f(x) = \frac{2^{1/x}}{2^{1/x} - 2}$ найти точки разрыва, определить их тип и нарисовать эскиз графика функции в окрестности точек разрыва. (4 балла)
3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctg x \cdot x^2 \cdot \ln \left(\frac{1+x^2}{2+x^2} \right) \right)$ (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Сформулировать правило Лопиталья – Бернулли раскрытия неопределенностей $\left[\frac{0}{0} \right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ и доказать его для случая $\left[\frac{0}{0} \right]$. (4 балла)
5. Дать определение выпуклости графика функции на интервале. Доказать достаточное условие выпуклости. (4 балла).
6. Исследовать функцию и построить её график
 $y = x^3 \ln x$. (6 баллов)
7. **Дополнительные вопросы** (по программе): (4 балла)

Экзаменационный билет № 26 по курсу:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

МТ, РК, Э-5, 1 курс, 1-й семестр

Модуль 1: Элементарные функции и пределы

1. Дать определение односторонних пределов функции. Доказать теорему о связи односторонних пределов и предела функции. (4 балла).
2. Доказать теорему о первом замечательном пределе. Сформулировать следствия из нее (4 балла).
3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\sqrt{x})^{10} - 1}{x + 2\sqrt{x}}$ (4 балла).

**Модуль 2: Дифференциальное исчисление
функций одной переменной**

4. Сформулировать 1-й и 2-й достаточные признаки экстремума функции. Доказать один из них. (4 балла)
5. Найти производную функции $y = (1 + \ln^3 x)^{\frac{x+1}{x-1}}$. (4 балла)
6. Исследовать функцию и построить её график $y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$
(6 баллов)
7. **Дополнительные вопросы** (по программе): (4 балла)