

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

**«Московский Государственный Технический Университет
имени Н. Э. Баумана»**

Национальный исследовательский университет техники и технологий
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

Факультет: «Робототехника и комплексная автоматизация» (РК-6)

Кафедра: «Теория машин и механизмов» (РК-2)

ОТЧЕТ

**По дисциплине
«Прикладная механика»**

**Задание №3
Вариант №14**

Выполнил студент

Группы РК6-33Б:

Кузнецов Д. С.

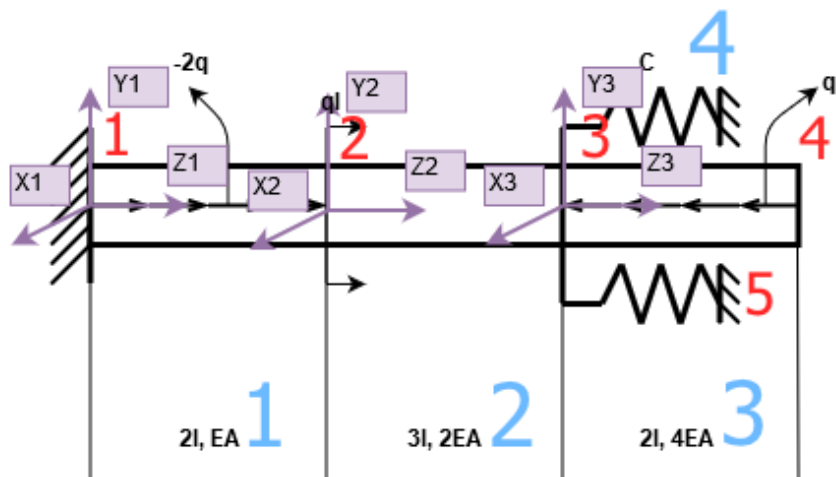
Проверил

кандидат технических наук:

Шашурин Г. В.

- 1) Разбить стержень на конечные элементы. Ввести локальные и глобальную систему координат, записать матрицы жёсткости каждого конечного элемента.

Введем глобальную систему координат и разобьем стержень на КЭ и пронумеруем их. Введем локальные системы координат и обозначим узлы



■ - Номер Конечного Элемента
 ■ - Степень свободы

Матрицы жесткости для КЭ:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{2L} & -\frac{EA}{2L} \\ -\frac{EA}{2L} & \frac{EA}{2L} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{3L} & -\frac{2EA}{3L} \\ -\frac{2EA}{3L} & \frac{2EA}{3L} \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{L} & -\frac{2EA}{L} \\ -\frac{2EA}{L} & \frac{2EA}{L} \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix}$$

- 2) Сформировать СЛАУ для нахождения узловых перемещений в стержне. Найти узловые перемещения системы.
 [K] - матрица жесткости

$\{u\}$ - вектор узловых перемещений

$\{f\}$ - вектор сил

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2qL \\ qL \\ qL \\ qL \\ 0 \end{Bmatrix}$$

		Степ. Своб.	Степ. Своб.
№ КЭ	1	1	2
№ КЭ	2	2	3
№ КЭ	3	3	4
№ КЭ	4	3	5

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{2L} & -\frac{EA}{2L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{2L} & \frac{7EA}{6L} & -\frac{2EA}{3L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2EA}{3L} & \frac{8EA}{3L} + C & -\frac{2EA}{L} & -C \\ 0 & 0 & -\frac{2EA}{L} & \frac{2EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -C & - & C \end{bmatrix}$$

Учтем граничные условия и составим СЛАУ

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{2L} & -\frac{EA}{2L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{2L} & \frac{7EA}{6L} & -\frac{2EA}{3L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2EA}{3L} & \frac{8EA}{3L} + C & -\frac{2EA}{L} & -C \\ 0 & 0 & -\frac{2EA}{L} & \frac{2EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -C & 0 & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2qL \\ qL \\ qL \\ qL \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{2L} & \frac{7EA}{6L} & -\frac{2EA}{3L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2EA}{3L} & \frac{8EA}{3L} + C & -\frac{2EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2EA}{L} & \frac{2EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2qL \\ qL \\ qL \\ qL \\ 0 \end{Bmatrix}$$

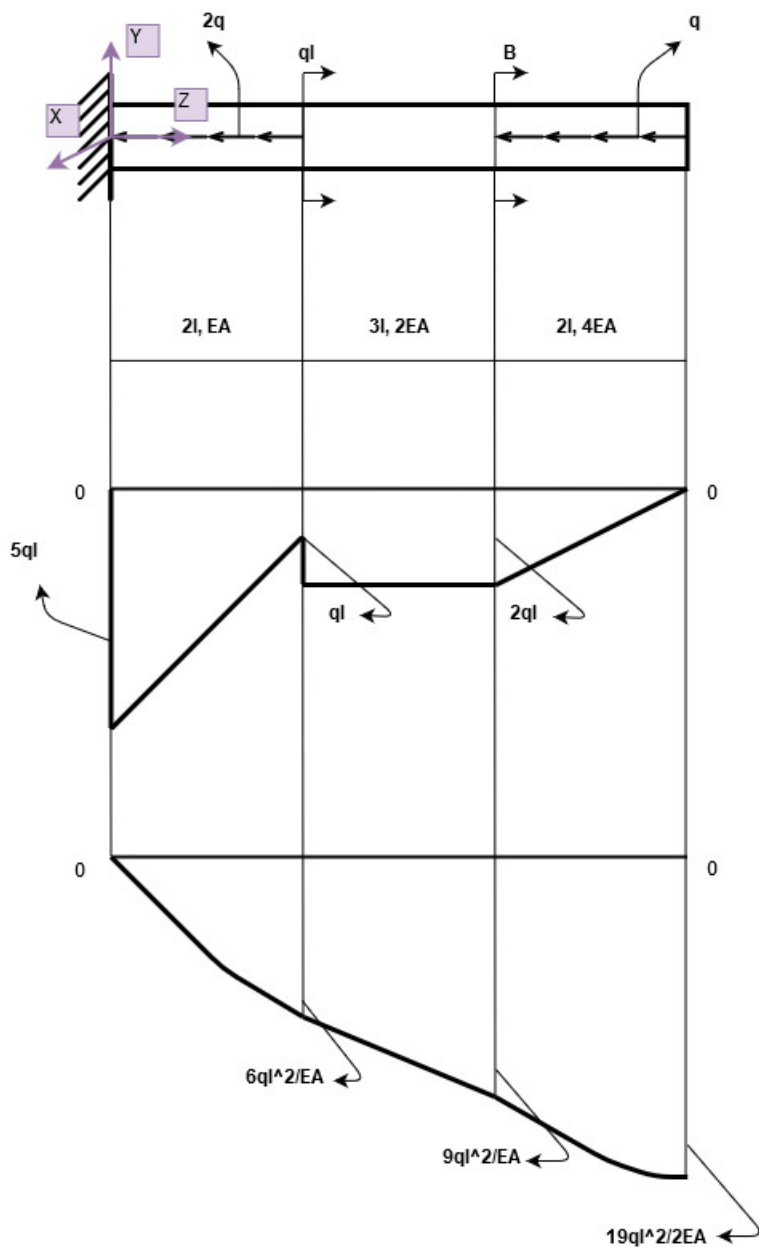
$$\begin{bmatrix} \frac{7EA}{6L} & -\frac{2EA}{3L} & 0 \\ -\frac{2EA}{3L} & \frac{8EA}{3L} + C & -\frac{2EA}{L} \\ 0 & -\frac{2EA}{L} & \frac{2EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL \\ qL \\ qL \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{(7 \cdot E \cdot A)}{6 \cdot L} & \frac{-(2 \cdot E \cdot A)}{3 \cdot L} & 0 \\ \frac{-(2 \cdot E \cdot A)}{3 \cdot L} & \frac{(8 \cdot E \cdot A)}{3 \cdot L} + C & \frac{-(2 \cdot E \cdot A)}{L} \\ 0 & \frac{-(2 \cdot E \cdot A)}{L} & \frac{(2 \cdot E \cdot A)}{L} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -q \cdot L \\ -q \cdot L \\ -q \cdot L \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{8 \cdot L^2 \cdot q}{2 \cdot A \cdot E + 7 \cdot C \cdot L} - \frac{L \cdot q \cdot (6 \cdot C \cdot L^2 + 4 \cdot A \cdot E \cdot L)}{2 \cdot A^2 \cdot E^2 + 7 \cdot C \cdot L \cdot A \cdot E} \\ -\frac{18 \cdot L^2 \cdot q}{2 \cdot A \cdot E + 7 \cdot C \cdot L} \\ -\frac{11 \cdot L^2 \cdot q}{2 \cdot A \cdot E + 7 \cdot C \cdot L} - \frac{L^2 \cdot q \cdot (16 \cdot A \cdot E + 7 \cdot C \cdot L)}{2 \cdot A \cdot E \cdot (2 \cdot A \cdot E + 7 \cdot C \cdot L)} \end{bmatrix}$$

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{8L^2q}{2EA+7CL} - \frac{ql(6CL^2+4EAL)}{2E^2A^2+7CL} \\ -\frac{18L^2q}{2EA+7CL} \\ -\frac{11L^2q}{2EA+7CL} - \frac{ql^2(16AE^2+7CL)}{2EA(2EA+7CL)} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

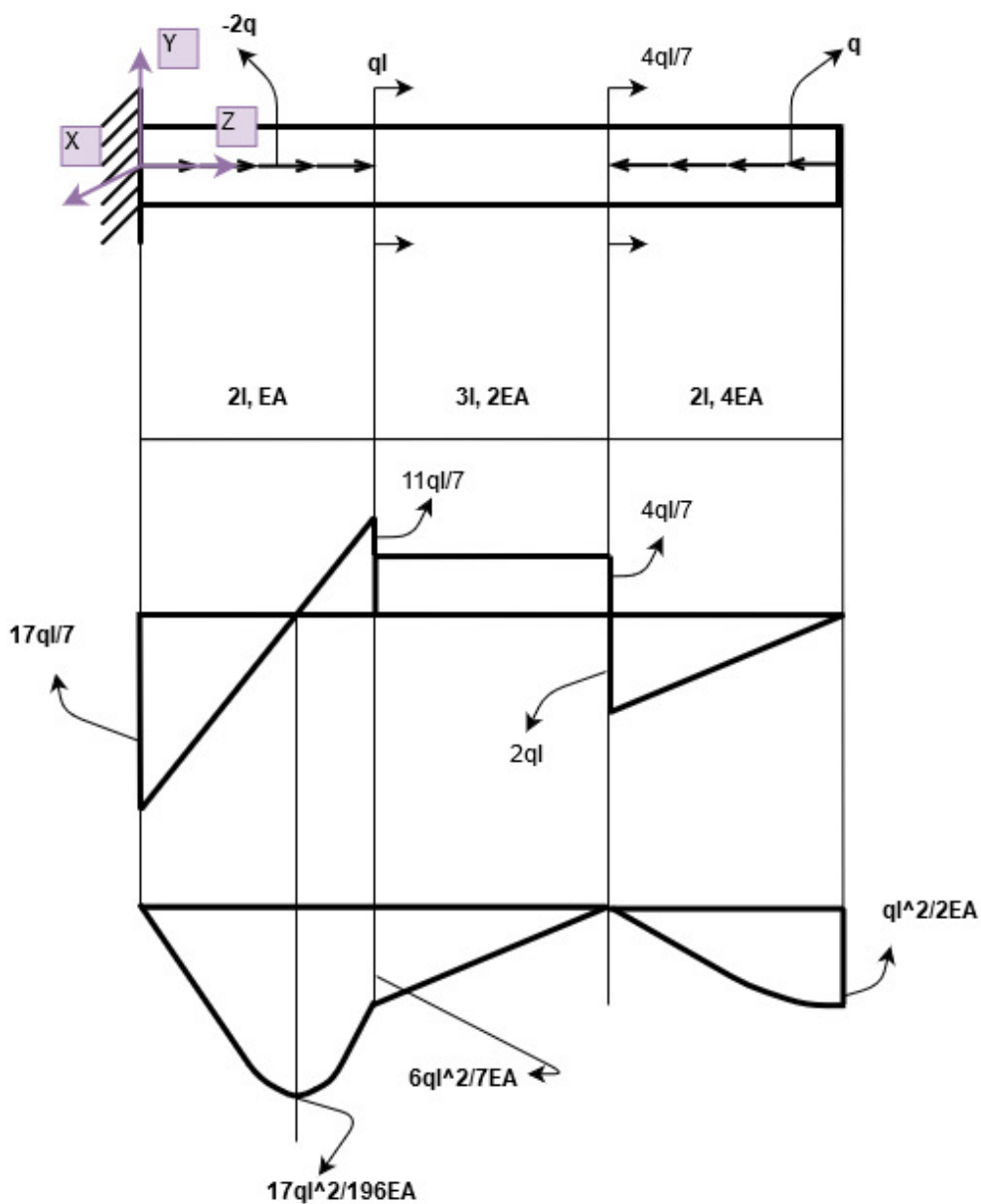
Узловые перемещения стержня при $C \rightarrow 0$

$$\lim_{C \rightarrow 0} W = \begin{Bmatrix} 0 \\ \lim_{C \rightarrow 0} \left(-\frac{8L^2 q}{2EA + 7CL} - \frac{ql(6CL^2 + 4EAL)}{2E^2 A^2 + 7CL} \right) \\ \lim_{C \rightarrow 0} \left(-\frac{18L^2 q}{2EA + 7CL} \right) \\ \lim_{C \rightarrow 0} \left(-\frac{11L^2 q}{2EA + 7CL} - \frac{ql^2(16AE^2 + 7CL)}{2EA(2EA + 7CL)} \right) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{6qL^2}{EA} \\ \frac{9qL^2}{EA} \\ \frac{19qL^2}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Узловые перемещения стержня при $C \rightarrow \infty$

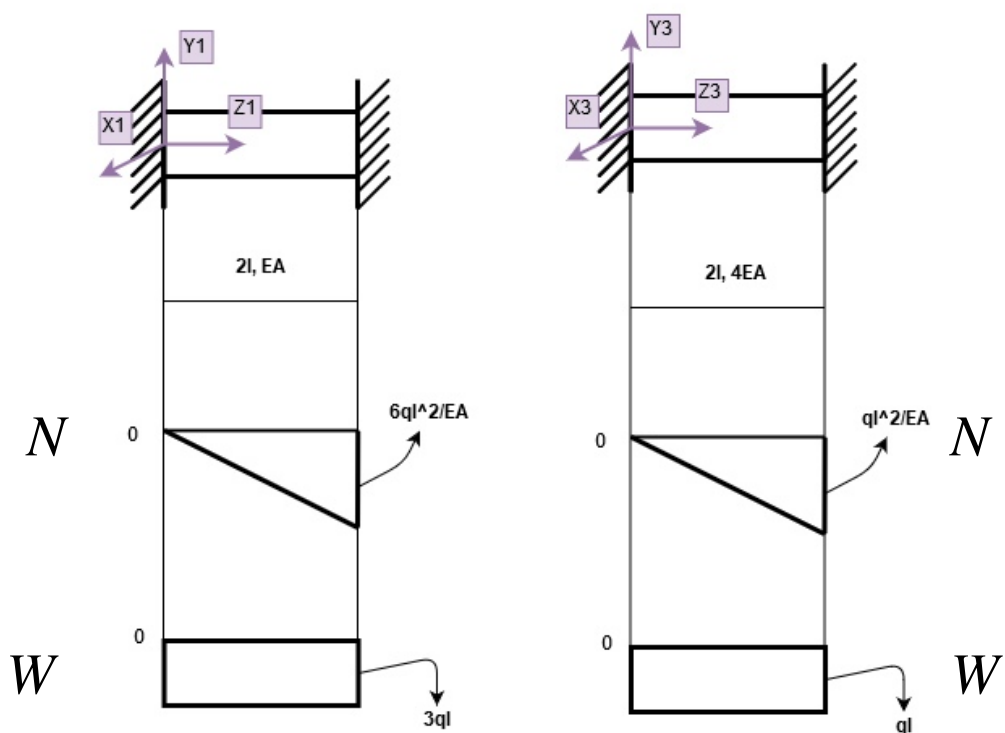
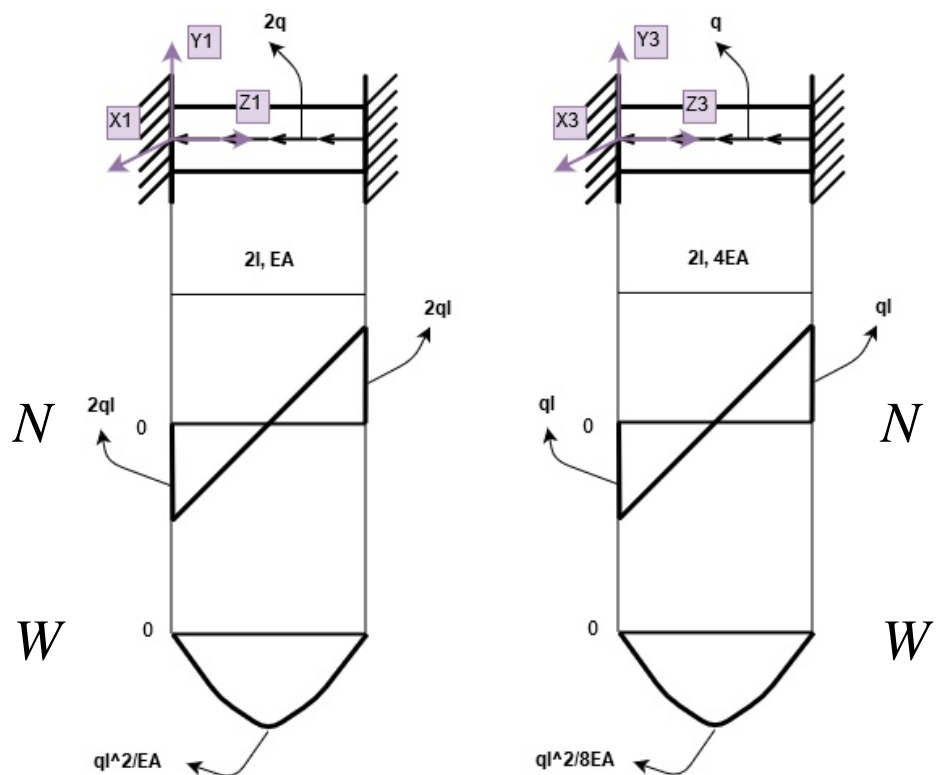
$$\lim_{C \rightarrow \infty} W = \begin{Bmatrix} 0 \\ \lim_{C \rightarrow \infty} \left(-\frac{8L^2 q}{2EA + 7CL} - \frac{ql(6CL^2 + 4EAL)}{2E^2 A^2 + 7CL} \right) \\ \lim_{C \rightarrow \infty} \left(-\frac{18L^2 q}{2EA + 7CL} \right) \\ \lim_{C \rightarrow \infty} \left(-\frac{11L^2 q}{2EA + 7CL} - \frac{ql^2(16AE^2 + 7CL)}{2EA(2EA + 7CL)} \right) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{6qL^2}{7EA} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{2EA} \\ 0 \end{Bmatrix}$$



3) При $C \rightarrow 0$ и при $C \rightarrow \infty$ вычислить наибольшее значение осевой силы в системе.

При $C \rightarrow 0$

Построим эпюры узловых перемещений и распределенных нагрузок на участке 1 и 3



$$N(0) = \begin{Bmatrix} -3qL - 2qL \\ -qL - qL \\ -qL - qL \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5qL \\ -2qL \\ -2qL \end{Bmatrix}$$

$$N(L_i) = \begin{Bmatrix} -3qL + 2qL \\ -2qL \\ -qL + qL \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL \\ -2qL \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Сверху мы можем провести сравнение с эпюрами из первого домашнего задания $\rightarrow N_{max} = 5ql$



При $C \rightarrow 0$

Построим эпюры узловых перемещений и распределенных нагрузок на участке 1 и 3

$$N(0) = \begin{Bmatrix} \frac{-3qL}{7} - 2qL \\ \frac{11qL}{7} - qL \\ -qL - qL \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{17qL}{7} \\ \frac{4qL}{7} \\ -2qL \end{Bmatrix}$$

$$N(L_i) = \begin{Bmatrix} \frac{-3qL}{7} - 2qL \\ \frac{4qL}{7} \\ -qL + qL \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{17qL}{7} \\ \frac{4qL}{7} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Сверху мы можем провести сравнение с эпюрами из первого домашнего задания $\rightarrow N_{max} = \frac{17ql}{7}$



