

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский
университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)
Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»
Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

Домашнее задание №3 по дисциплине
«Прикладная механика»
Метод конечных элементов в задаче растяжения-сжатия

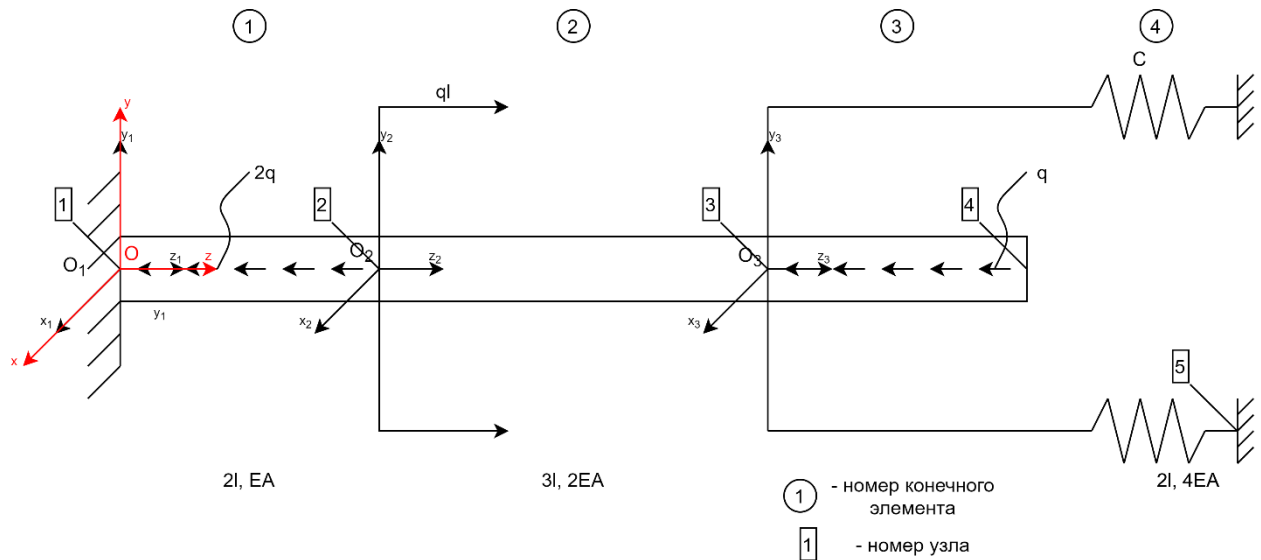
Вариант 14

Выполнил:
студент группы РК6-36Б
Петраков С.А.

Москва
2020

1) Разбить систему на конечные элементы.
Ввести локальные и глобальную систему координат, записать матрицы жесткости каждого конечного элемента.

Введем глобальную и локальную систему координат. Разобьём стержень на 4 конечных элемента и введем 5 узлов.



Запишем матрицы жесткости для всех конечных элементов:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} \\ -\frac{EA}{2l} & \frac{EA}{2l} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{3l} & -\frac{2EA}{3l} \\ -\frac{2EA}{3l} & \frac{2EA}{3l} \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \frac{4EA}{2l} & -\frac{4EA}{2l} \\ -\frac{4EA}{2l} & \frac{4EA}{2l} \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix}$$

2) Сформировать СЛАУ для нахождения узловых перемещений системы. Найти узловые перемещения системы.

$[K] * \{u\} = \{f\}$ – СЛАУ для нахождения узловых перемещений в стержне.

$[K]$ – матрица жесткости системы

$\{u\}$ – вектор узловых перемещений

$\{f\}$ – вектор сил

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2ql \\ -ql \\ -ql \\ -ql \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Сформируем таблицу индексов:

		Степень свободы	
		1'	2'
Номер КЭ	1	1	2
	2	2	3
	3	3	4
	4	3	5

Проведем ассемблирование:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{2l} & \frac{7EA}{6l} & \frac{-2EA}{3l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2EA}{3l} & \frac{8EA}{3l} + C & -\frac{2EA}{l} & -C \\ 0 & 0 & -\frac{2EA}{l} & \frac{2EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -C & 0 & C \end{bmatrix}$$

Учтем граничные условия:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7EA}{6l} & \frac{-2EA}{3l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2EA}{3l} & \frac{8EA}{3l} + C & -\frac{2EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2EA}{l} & \frac{2EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2ql \\ -ql \\ -ql \\ -ql \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Упрощение:

$$\begin{bmatrix} \frac{7EA}{6l} & \frac{-2EA}{3l} & 0 \\ \frac{-2EA}{3l} & \frac{8EA}{3l} + C & -\frac{2EA}{l} \\ 0 & -\frac{2EA}{l} & \frac{2EA}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -ql \\ -ql \\ -ql \end{Bmatrix}$$

Решение СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} \frac{7EA}{6l} & \frac{-2EA}{3l} & 0 \\ \frac{-2EA}{3l} & \frac{8EA}{3l} + C & -\frac{2EA}{l} \\ 0 & -\frac{2EA}{l} & \frac{2EA}{l} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -ql \\ -ql \\ -ql \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{(6 \cdot C \cdot l^2 + 4 \cdot A \cdot E \cdot l) \cdot ql}{7 \cdot A \cdot C \cdot E \cdot l + 2 \cdot A^2 \cdot E^2} - \frac{8 \cdot l \cdot ql}{7 \cdot C \cdot l + 2 \cdot A \cdot E} \\ \frac{-(18 \cdot l \cdot ql)}{7 \cdot C \cdot l + 2 \cdot A \cdot E} \\ \frac{(7 \cdot C \cdot l^2 + 16 \cdot A \cdot E \cdot l) \cdot ql}{14 \cdot A \cdot C \cdot E \cdot l + 4 \cdot A^2 \cdot E^2} - \frac{11 \cdot l \cdot ql}{7 \cdot C \cdot l + 2 \cdot A \cdot E} \end{bmatrix}$$

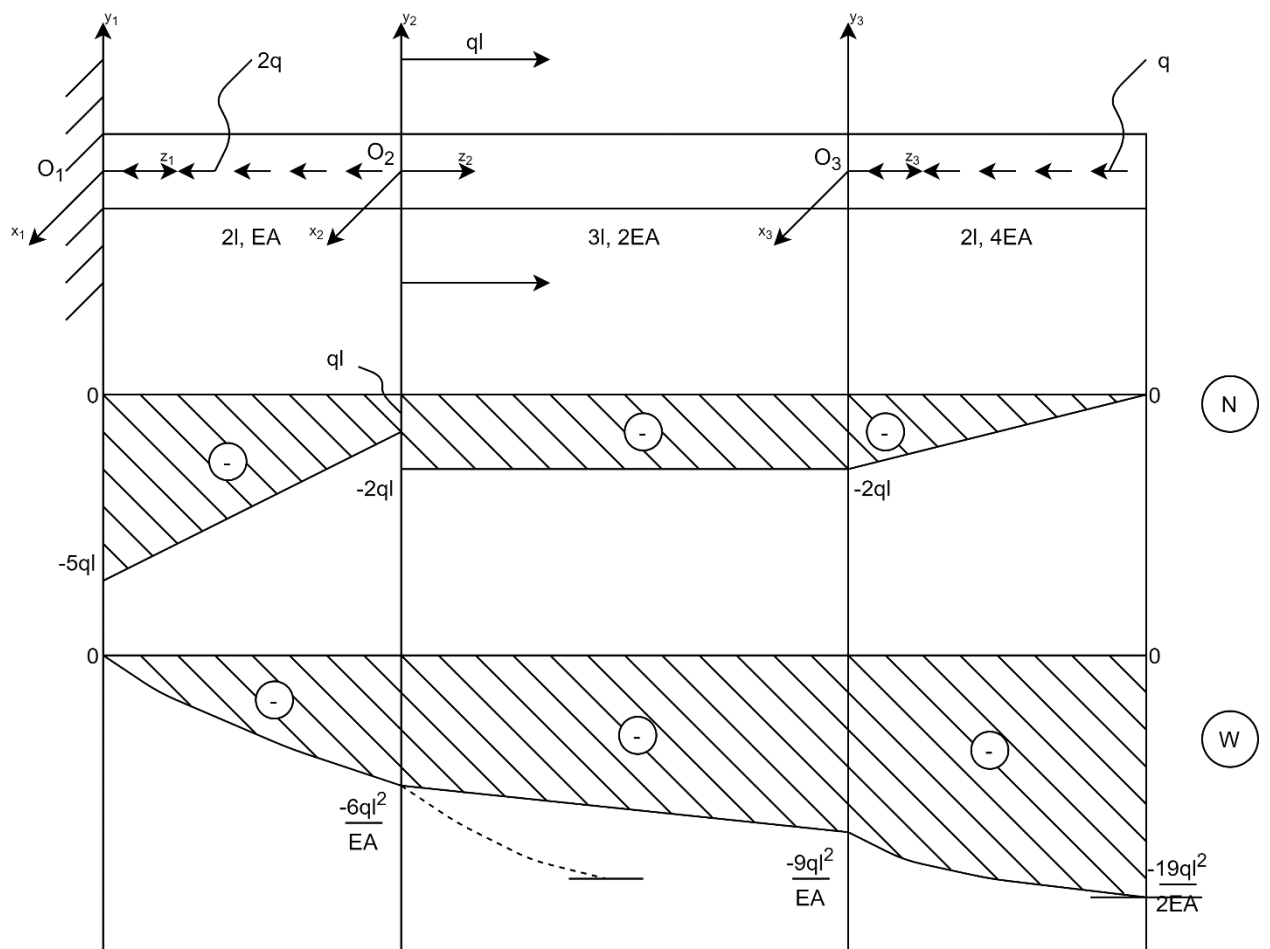
Тогда:

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ql^2(-12EA - 6Cl)}{EA(2EA + 7Cl)} \\ -\frac{18ql^2}{2EA + 7Cl} \\ \frac{ql^2(-38EA - 7Cl)}{2EA(2EA + 7Cl)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим узловые перемещения при $C \rightarrow 0$:

$$\lim_{C \rightarrow 0} W = \begin{Bmatrix} 0 \\ \lim_{C \rightarrow 0} \frac{ql^2(-12EA - 6Cl)}{EA(2EA + 7Cl)} \\ \lim_{C \rightarrow 0} -\frac{18ql^2}{2EA + 7Cl} \\ \lim_{C \rightarrow 0} \frac{ql^2(-38EA - 7Cl)}{2EA(2EA + 7Cl)} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{6ql^2}{EA} \\ -\frac{9ql^2}{EA} \\ -\frac{19ql^2}{2EA} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Сравним с 1 ДЗ:

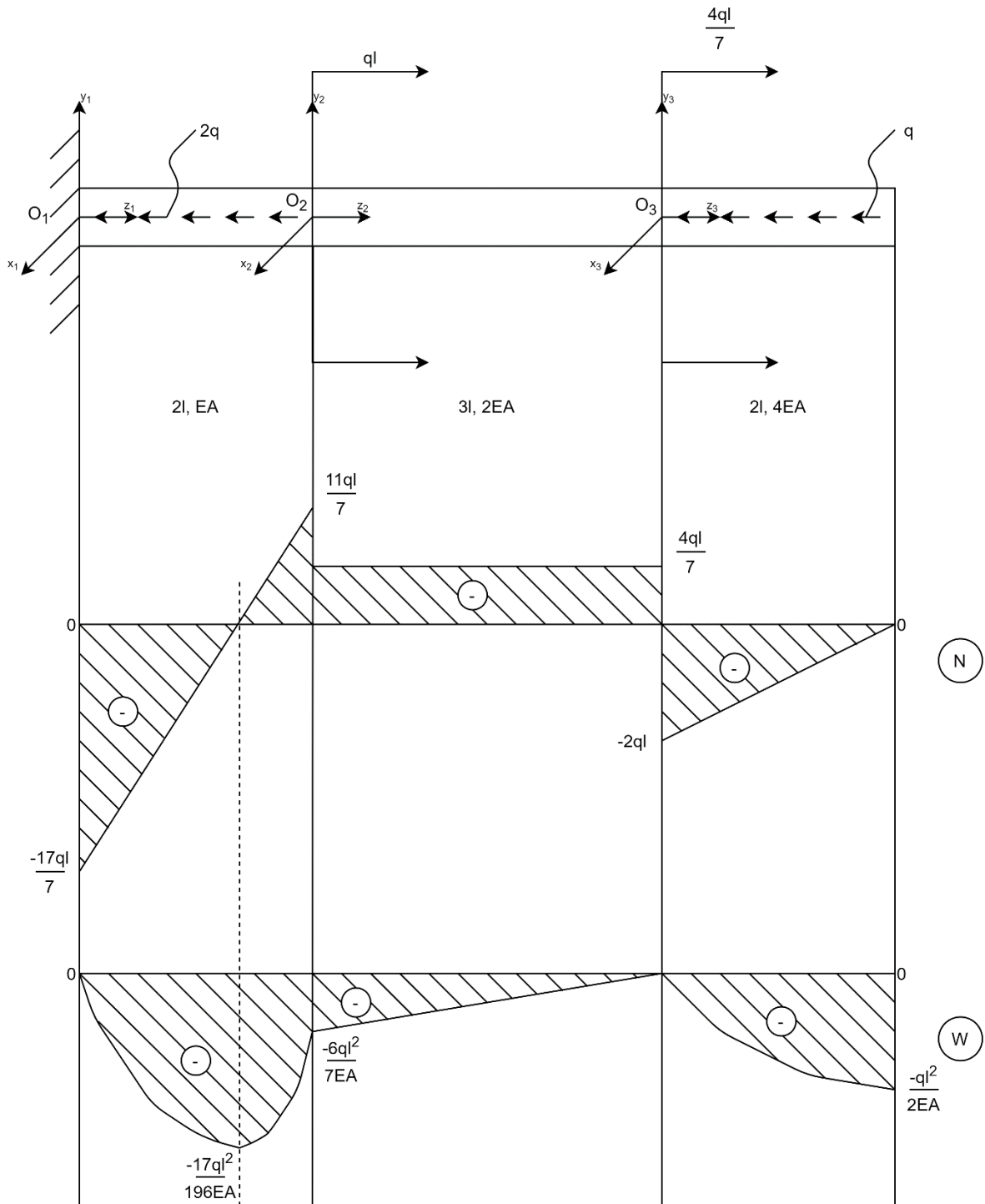


Все совпадает, значит найдено верно

Вычислим узловые перемещения при $C \rightarrow \infty$:

$$\lim_{C \rightarrow \infty} W = \begin{pmatrix} 0 \\ \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{ql^2(-12EA - 6Cl)}{EA(2EA + 7Cl)} \\ \lim_{C \rightarrow \infty} -\frac{18ql^2}{2EA + 7CL} \\ \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{ql^2(-38EA - 7Cl)}{2EA(2EA + 7Cl)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6ql^2}{7EA} \\ -0 \\ -\frac{ql^2}{2EA} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Сравним с 1 ДЗ:



Все совпадает, значит найдено верно

3) При $C \rightarrow 0$ и при $C \rightarrow \infty$ вычислить

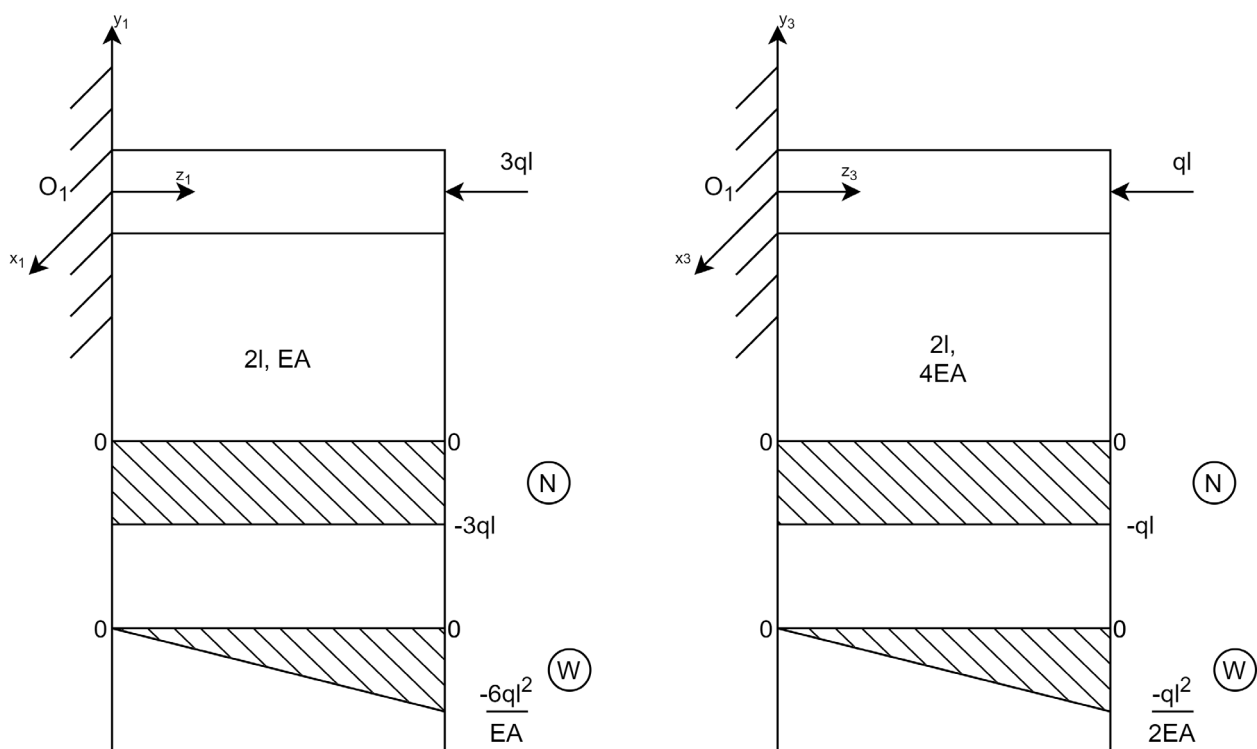
наибольшее значения осевой силы в системе.

Так как на осевые силы влияют не только силы в узлах, но и распределенные нагрузки, то решение будет следующим:

При $C \rightarrow 0$:

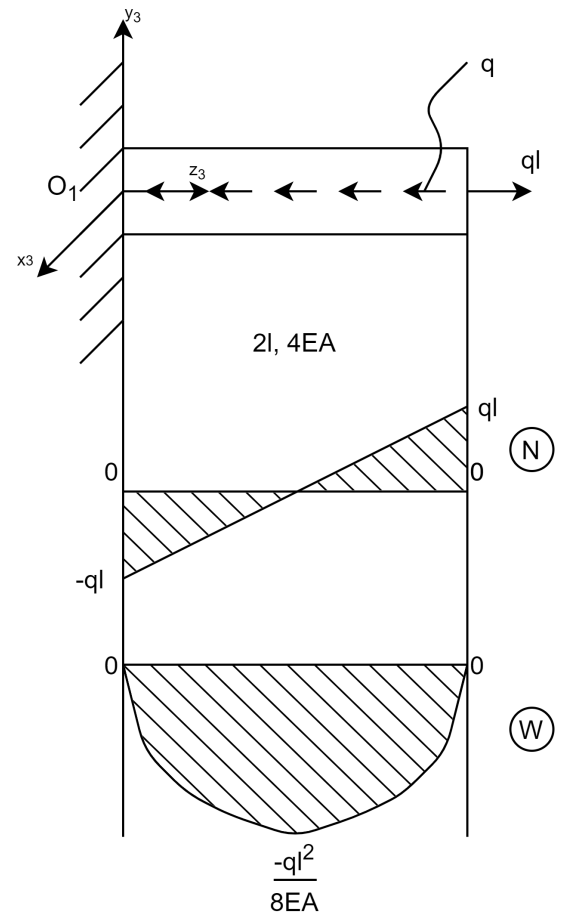
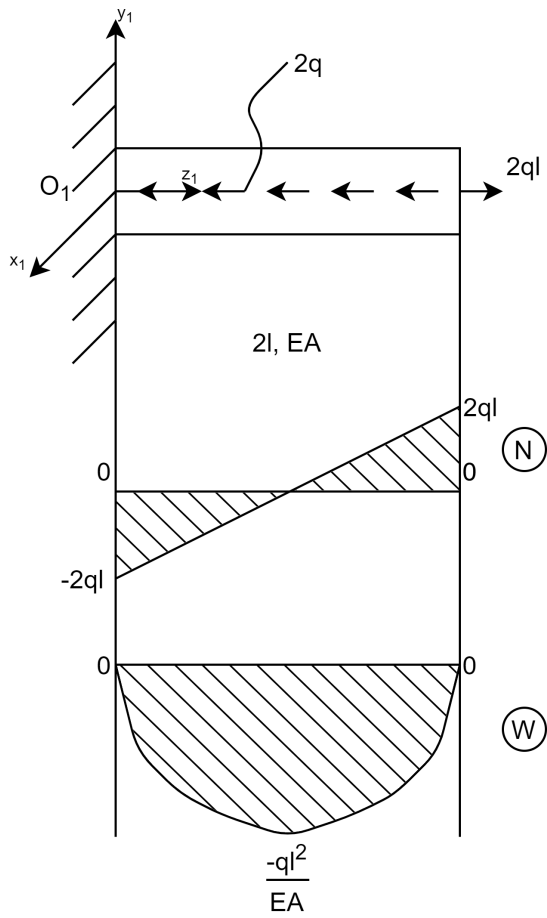
Эпюры узловых перемещений на 1 и 3 участке:

Узловые перемещения



Эпюры распределенных нагрузок на 1 и 3 участке:

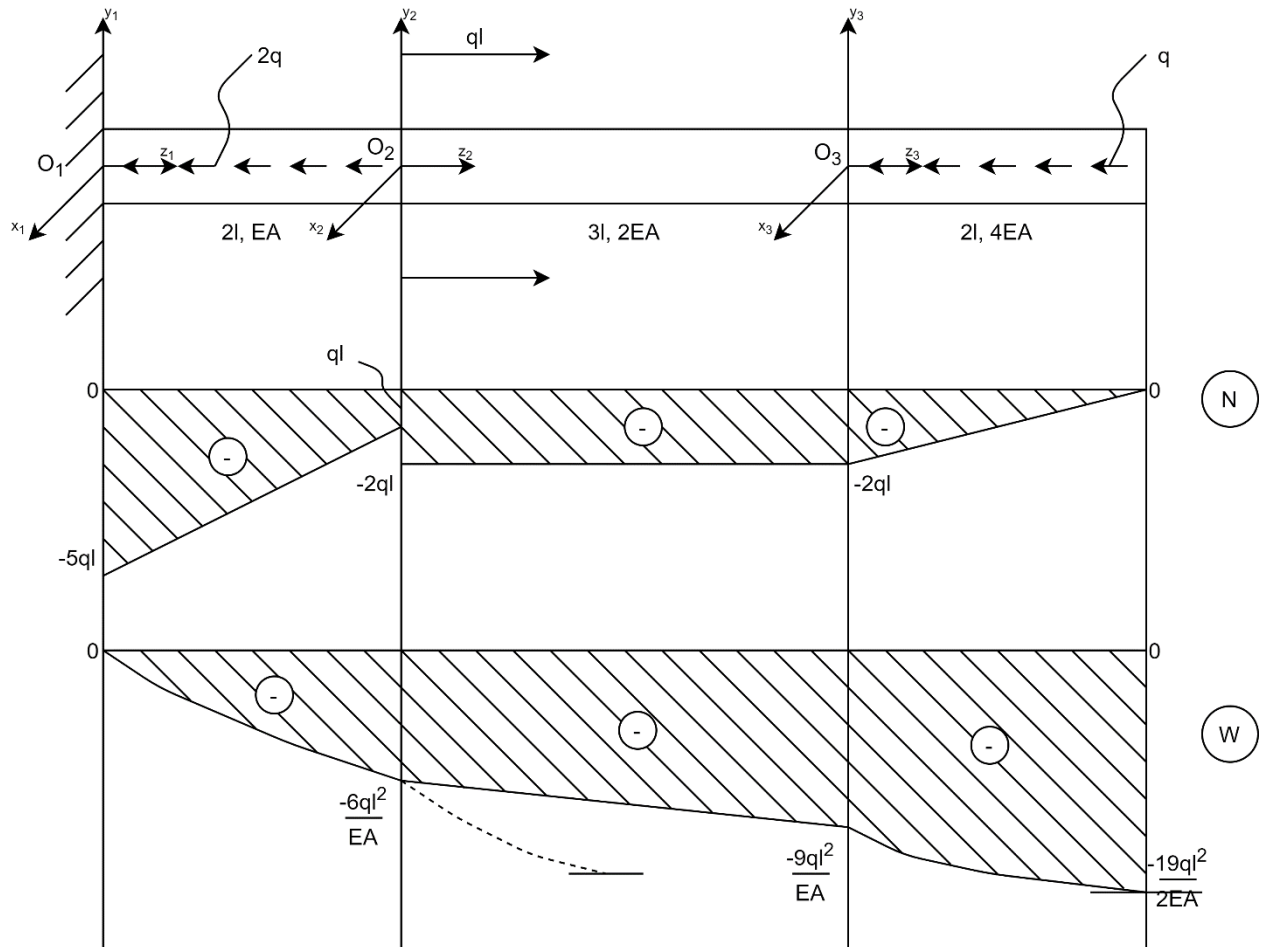
Распределённая нагрузка



Тогда:

$$N(0) = \begin{Bmatrix} -3ql - 2ql \\ -ql - ql \\ -ql - ql \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5ql \\ -2ql \\ -2ql \end{Bmatrix} \quad N(l_i) = \begin{Bmatrix} -3ql + 2ql \\ -2ql \\ -ql + ql \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -ql \\ -2ql \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Сравним с 1 ДЗ:

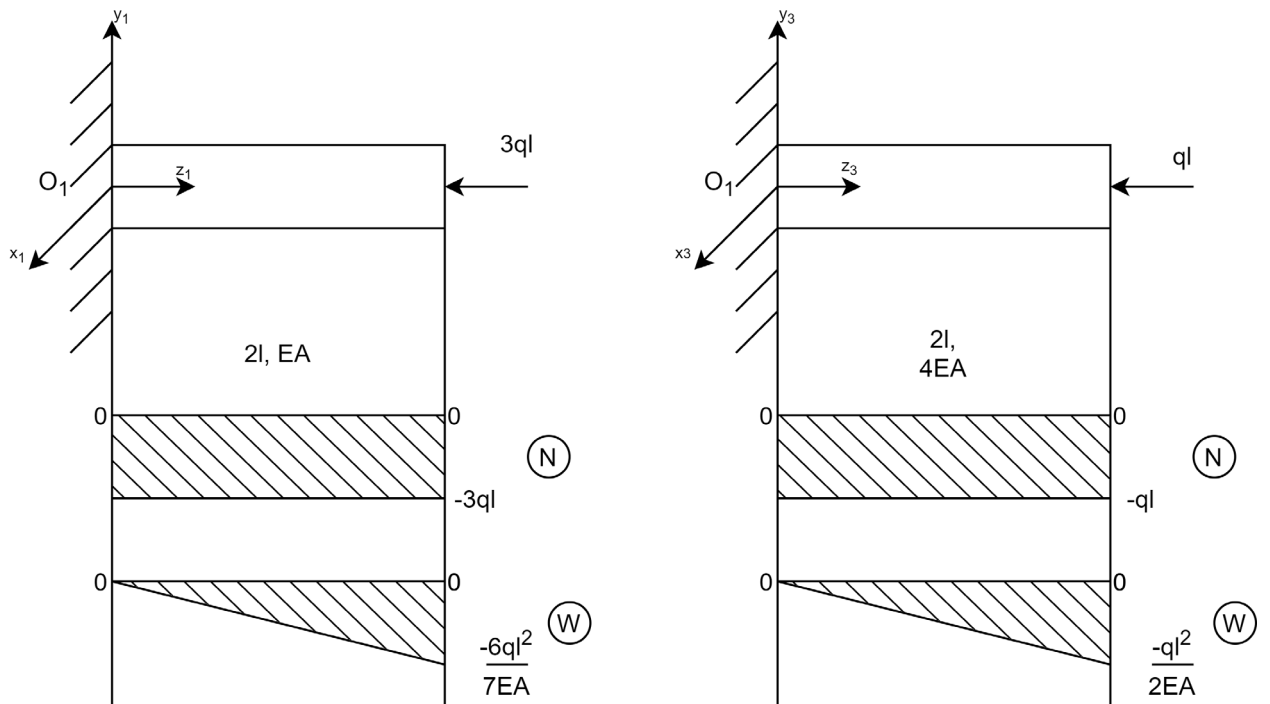


Все совпало, тогда $N_{max} = 5ql$

При $C \rightarrow \infty$:

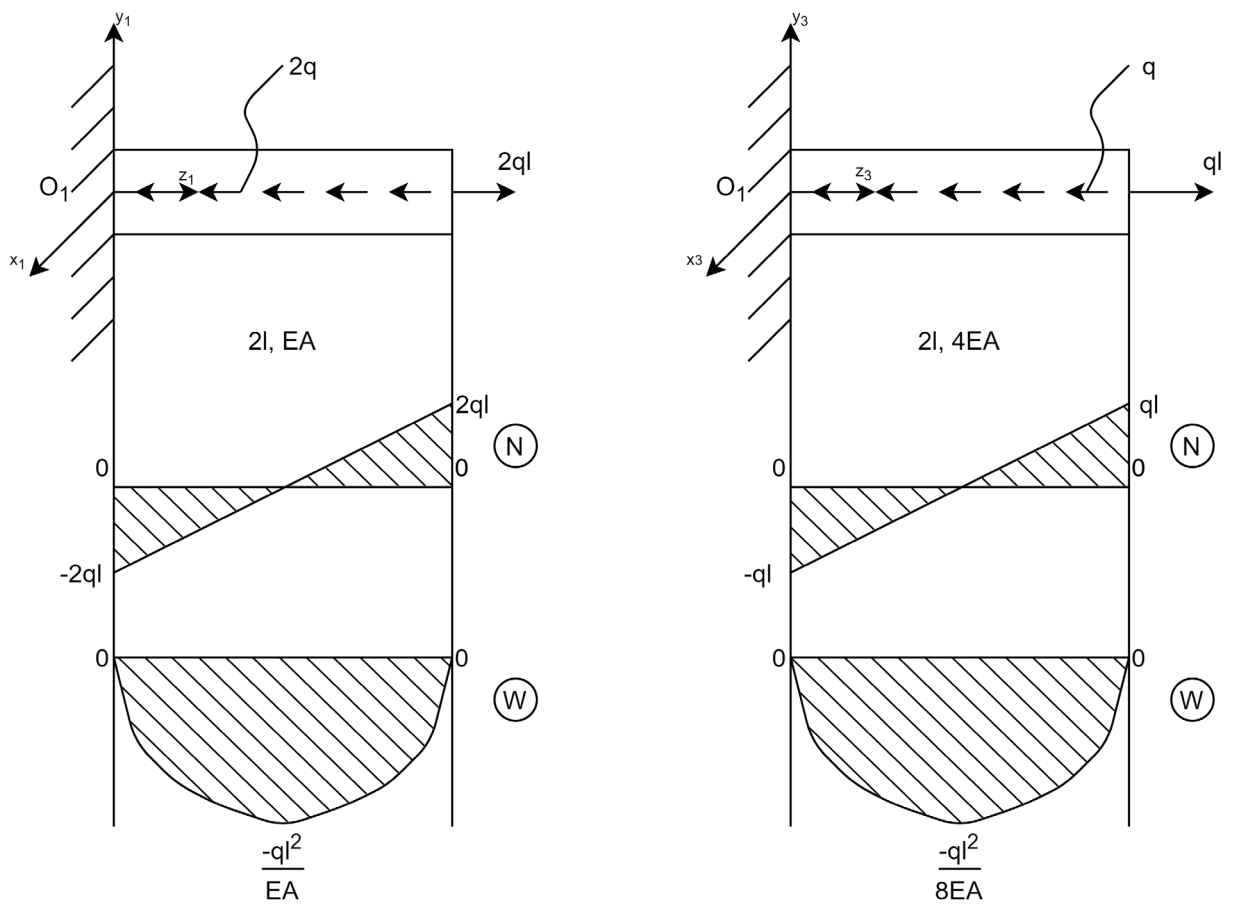
Эпюры узловых перемещений на 1 и 3 участке:

Узловые перемещения



Эпюры распределенных нагрузок на 1 и 3 участке:

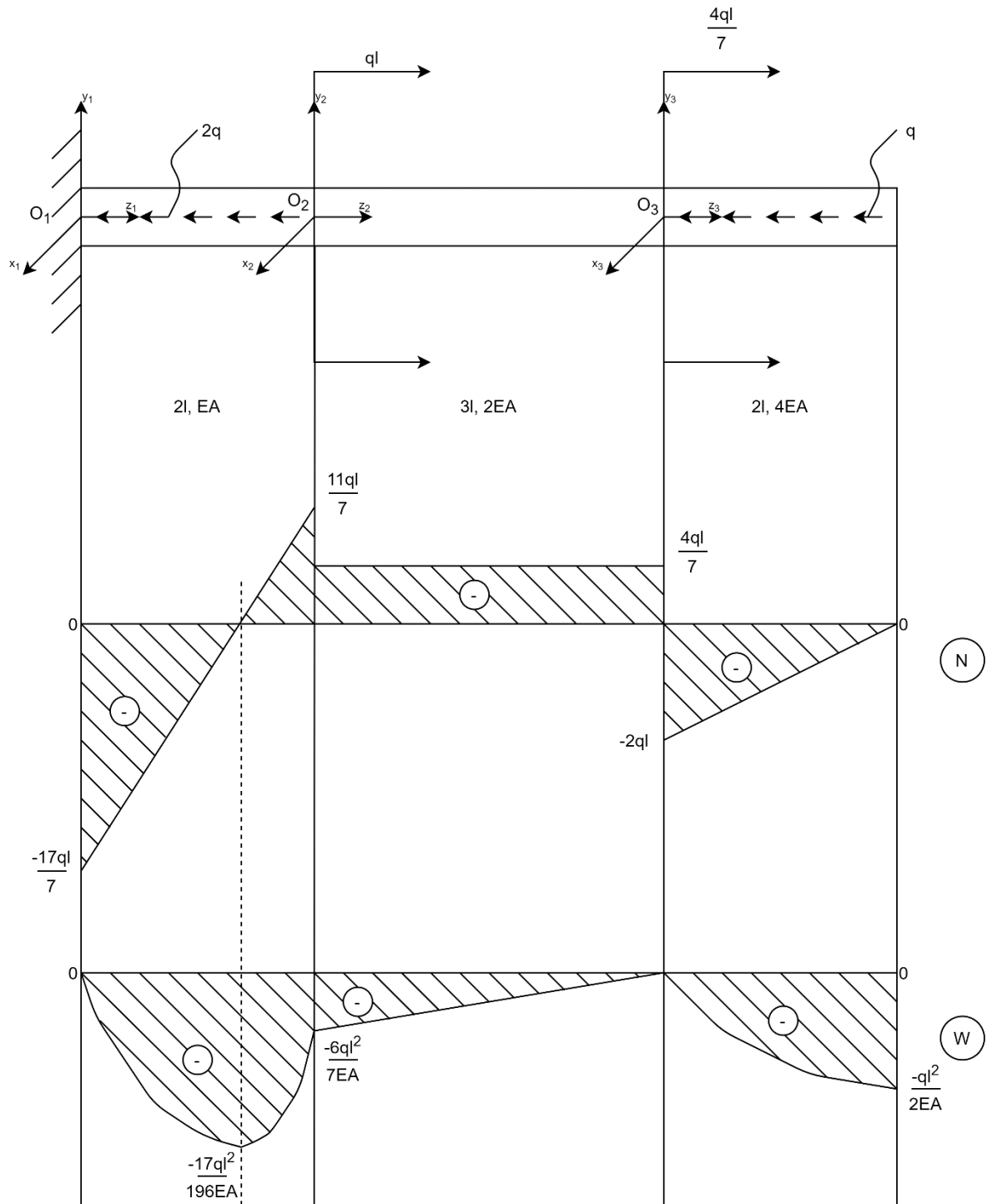
Распределённая нагрузка



Тогда

$$N(0) = \begin{Bmatrix} -\frac{3ql}{7} - 2ql \\ -\frac{11ql}{7} - ql \\ -ql - ql \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{17ql}{7} \\ -\frac{4ql}{7} \\ -2ql \end{Bmatrix} \quad N(l_i) = \begin{Bmatrix} -\frac{3ql}{7} + 2ql \\ -\frac{4ql}{7} \\ -ql + ql \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{11ql}{7} \\ -\frac{4ql}{7} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Сравним с 1 ДЗ:



Все совпало, тогда $N_{max} = \frac{17ql}{7}$

