Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э. Баумана»
Национальный исследовательский университет техники и технологий
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

*Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация» Кафедра «Системы автоматизированного проектирования» (РК-6)*

# Отчет по лабораторной работе №2

По дисциплине «Прикладная механика»
На тему «Расчет статически неопределенной балки методом конечных элементов»

Выполнил студент группы РК6-33Б
Тройнин Н.А.
Проверил канд. техн. наук.
Шашурин Г.В.

*Москва, 2019 г.*

# Расчётная схема

<u>Задача</u>:

Составить конечно-элементную программу для расчета статически неопределимой балки и проверить корректность ее работы с использованием Siemens NX.

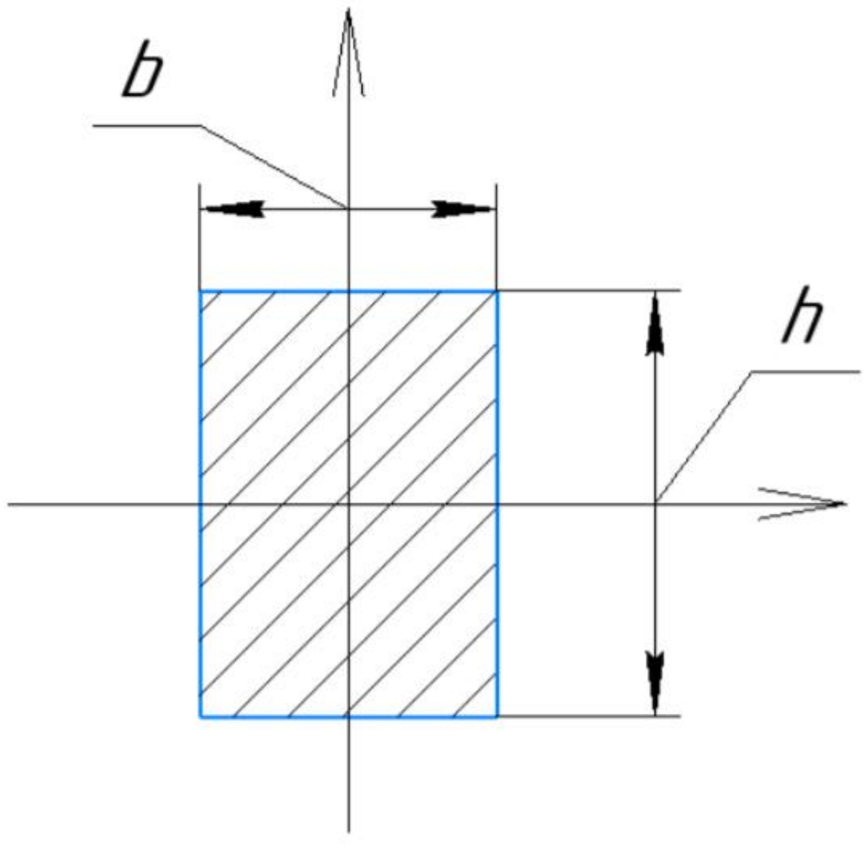
<u>Исходные данные:</u>

*Материал балки*: сталь (модуль Юнга $E$ = 2$e$11 Па).

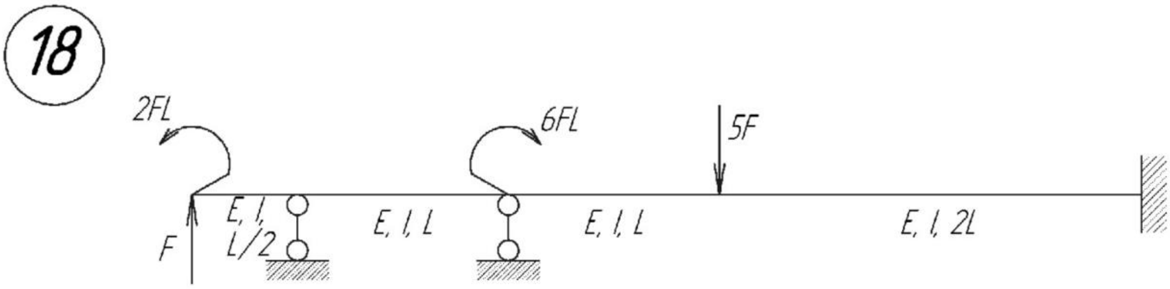
*Сечение балки*: прямоугольное (см. рисунок 1).

*Геометрические параметры балки*: $l$ = 0.1 м, $b$ = 10 мм, $h$ = 20 мм

*Величина нагрузки*: $F$ = 10 Н.




*(рис. 1. Поперечное сечение балки)*




*(рис.2 Расчётная схема)*

## Решение системы в MATLAB

### Описание алгоритма программы на языке MATLAB

1. Конечно-элементное разбиение системы, выбор глобальной системы координат (СК), назначение числа балочных конечных элементов (КЭ)системы $N\_el$, определение количества узлов $N\_node$, общего количества степеней свободы $n$.
2. Составление матриц жесткости отдельных конечных элементов. Для каждого конечного элемента балки составляется матрица жесткости в его локальной системе координат вида:

$$[K_i^{elem}] = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{-12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}$$

Где $i$–номер текущего КЭ, $i$= 1 … $N\_el$; $[K_i^{elem}]$ –матрица жесткости i-го КЭ. в его локальной системе координат; E, I, l –параметры балочного КЭ (модуль Юнга, длина, геометрический момент инерции, соответственно).

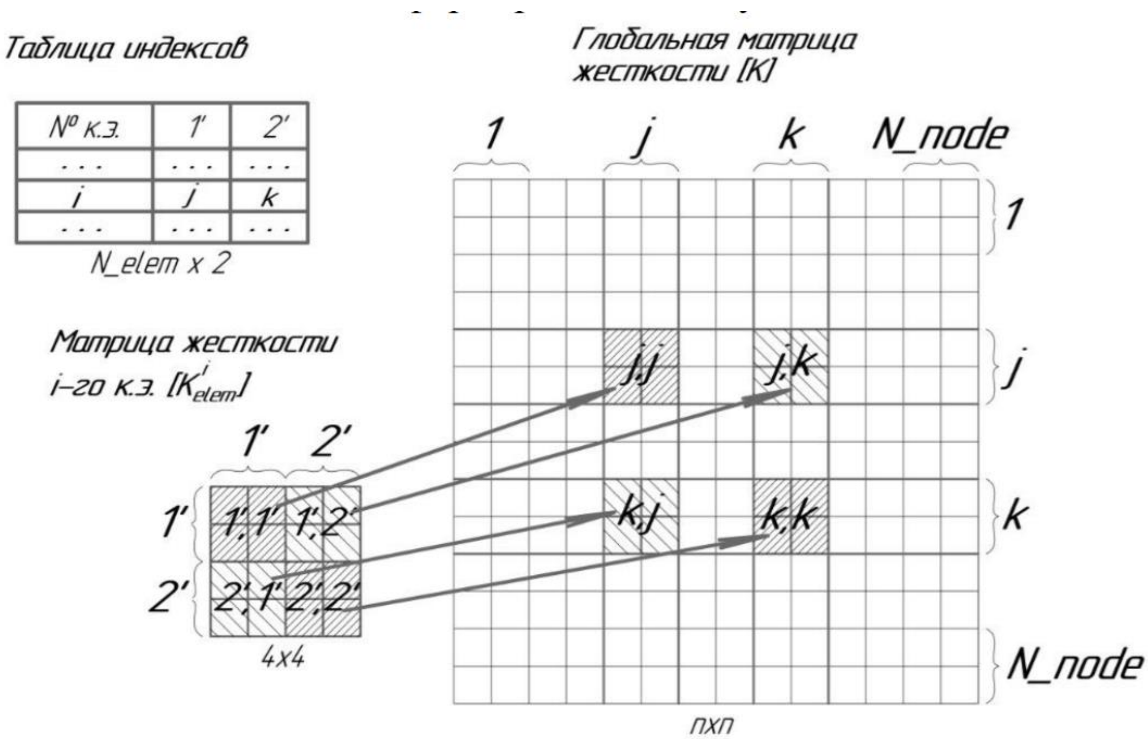
3. Составление таблицы индексов. Для заданной балочной системы составляется таблица индексов вида:

*Таблица 1. Таблица индексов.*

| № КЭ | 1’ (номер первого узла в локальной СК в глобальной СК) | 2’ (номер второго узла в локальной СК в глобальной СК) |
|---|---|---|
| 1 | 1 | … |
| … | … | … |
| *i* | *j* | *k* |
| … | … | … |
| N_el | … | N_node |

4. Операция ансамблирования. В соответствии с таблицей индексов составляется глобальная матрица жесткости всей конструкции из

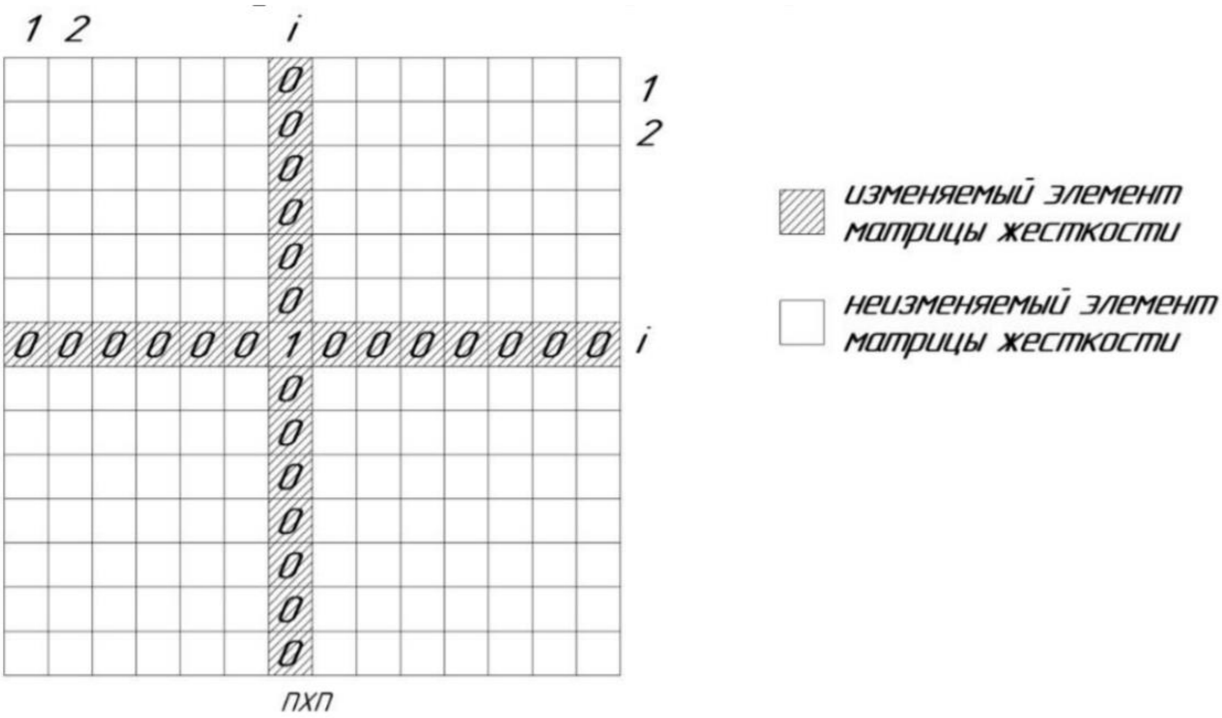
матриц жесткости отдельных КЭ, сформированных в пункте 2:




*(рис. 3) Операция ансамблирования.*

5. Наложение кинематических граничных условий, модификация матрицы жесткости Учет кинематических граничных условий (ГУ)проходит согласно следующей последовательности:
   - идентифицируются закрепления, представленные в балочной системе (шарниры, заделки, ограничители поворота);
   - определяются номера закрепленных степеней свободы;
   - для каждой из закрепленных степеней свободы производится операция модификации матрицы жесткости согласно алгоритму, представленному на рисунке ниже (точный способ учета кинематических граничных условий).

Итогом учета кинематических граничных условий является модифицированная матрица жесткости $[Kmod]$.




*(рис. 4) Модифицированная матрица жесткости*

6. Составление вектора внешних узловых усилий $\{f\}$ Вектор внешних узловых усилий $\{f\}$ – вектор-столбец размерностью $nx1$. В данном векторе представлены все силовые факторы (силы и изгибающие моменты), внешние по отношению к системе. Знак элементов, входящих в вектор $\{f\}$, определяется согласно следующим правилам:

   - сила положительна, если она на направлена по положительному направлению оси глобальной системы координат;
   - момент положителен, если он вращает против часовой стрелки относительно положительного направления оси глобальной системы координат.

7. Решение СЛАУ, определение вектора узловых перемещений Производится решение СЛАУ вида: $[Kmod] *\{u\} = \{f\}$ Вектор узловых перемещений определяется как: $\{u\} = inv([Kmod]) *\{f\}$ . Вектор узловых перемещений $\{u\}$ содержит в себе обобщенные перемещения узлов балочной системы (вертикальные перемещения, углы поворота). При работе в системе СИ вертикальные перемещения имеют размерность метр, углы поворота – радиан.

## Результаты расчёта

```
-0.0069 mm
 0.0098e-1 deg
      0 mm
 0.0061e-1 deg
      0 mm
-0.0089e-1 deg
-0.6076 mm
-0.0016e-1 deg
      0 mm
      0 deg
```

## Текст программы

```
function main

format short
h = 20;             %высота поперечного сечения%       (мм)
b = 10;             %ширина поперечного сечения        (мм)

Jy = b*h^3/12;      %момент инерции относительно оси Y (мм^4)
l = 100;            %длина отрезка                     (мм)
E = 2e11;           %модуль упругости
F = 10;             %сила                              (Н)

N_el = 4;                          %количество конечных элементов
E_sys = [E, E, E, E];              %вектор модулей упругости
l_sys = [l/2, l, l, 2*l];          %вектор длин элементов
N_DOFs = 2*(N_el+1);               %количество степеней свободы системы

K_g = zeros(N_DOFs);               %матрица жёсткости

U_Node = [1,     1, 0, 1, 0,     1,   1, 1, 0, 0]; %Вектор узловых
перемещений
F_Node = [10, 2000, 0, 0, 0, -6000, -50, 0, 0, 0]; %Вектор узловых сил

K_loc = zeros(4);                   %локальная матрица жёсткости


Index_M = [1:4,                     %Матрица индексов
           3:6,
           5:8,
           7:10];

for k = 1:N_el
% Инициализируем локальные матрицы жёсткости
    K_loc = K_loc_calc(l_sys(k), E_sys(k), Jy);
```

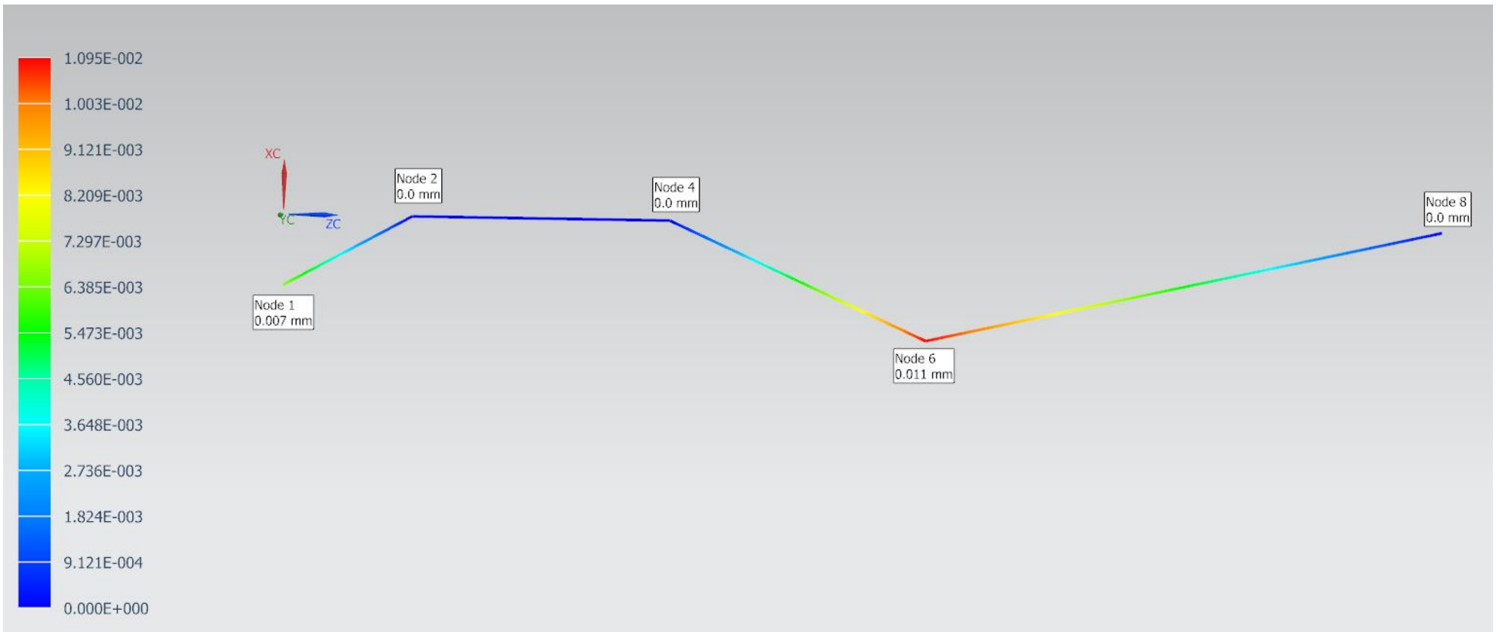
```
% Записываем локальную матрицу жёсткости по координатам из матрицы
индексов
     for i=1:N_el
      for j=1:N_el
                K_g(Index_M(k, i), Index_M(k, j))= K_g(Index_M(k, i),
Index_M(k,j)) + K_loc(i,j);
        end
    end
end

for i = 1:N_DOFs
    if (U_Node(i) == 0)
        K_g(i, :) = 0;
        K_g(:, i) = 0;
        K_g(i,i) = 1;
    end
end

inv(K_g);
U = inv(K_g)*F_Node';

for i=2:2:N_DOFs
    U(i) = rad2deg(U(i));
end

U
end
%                ИНИЦИАЛИЗАТОР МАТРИЦЫ ЖЁСТКОСТИ КЭ
function K = K_loc_calc(l, E, J);

K = [12*E*J/(l^3),  6*E*J/(l^2), -12*E*J/(l^3),  6*E*J/(l^2);
      6*E*J/(l^2),  4*E*J/l,      -6*E*J/(l^2),  2*E*J/l;
    -12*E*J/(l^3), -6*E*J/(l^2),  12*E*J/(l^3), -6*E*J/(l^2);
      6*E*J/(l^2),  2*E*J/l,      -6*E*J/(l^2),  4*E*J/l];

end
```

# Решение системы в Siemens NX

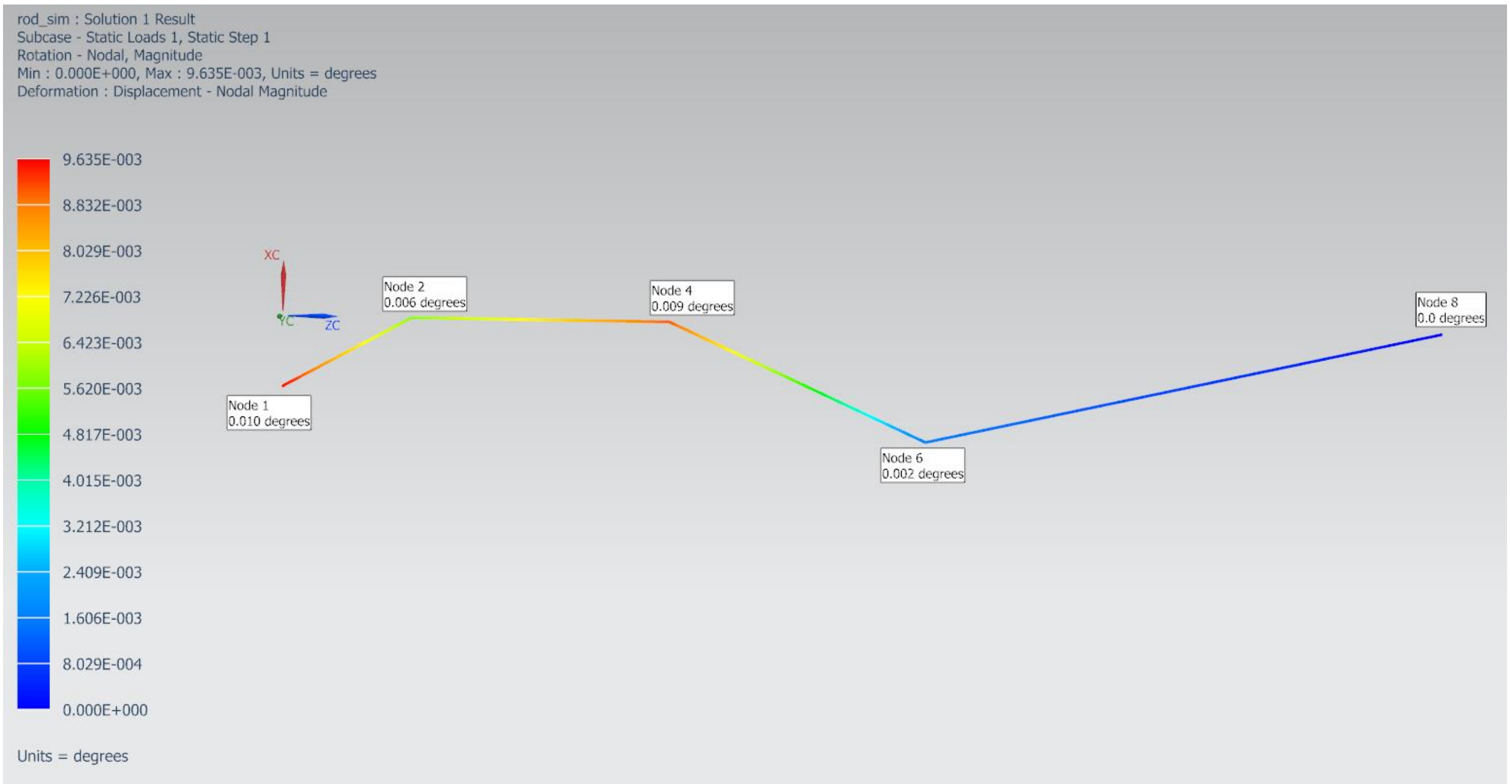
## Описание выполнения расчёта

1. Создание геометрии: построение линии (из 4 отрезков) и задание координат
2. Задание точек.
3. Создание конечно-элементной модели.
4. Построение конечно-элементной сетки.
5. Задание нужного поперечного сечения: тип, размеры, материал.
6. Задание ограничений и нагрузок.
7. Решение, ознакомление с результатами.
8. Внесение изменений в модель.

## Результаты расчёта




*(рис. 5) Линейные перемещения в узлах*




*(Рис. 6) Углы поворота в узлах*

## Сравнение результатов

*Таблица 2. Сравнение результатов.*

| Перемещения | Результаты в MATLAB | Результаты в Siemens NX |
|---|---|---|
| $U_1$ | -0,00685 | 0,007 |
| $\theta_1^y$ | 0,00982 | 0,010 |
| $U_2$ | 0 | 0 |
| $\theta_2^y$ | 0,00606 | 0,006 |
| $U_3$ | 0 | 0 |
| $\theta_3^y$ | -0,00890 | 0,009 |
| $U_4$ | -0,01061 | 0,011 |
| $\theta_4^y$ | -0.00159 | 0,002 |
| $U_5$ | 0 | 0 |
| $\theta_5^y$ | 0 | 0 |

## Вывод

Решив статически-неопределимую систему двумя различными способами, мы получили почти одни и те же результаты (с известной точностью), что позволяет использовать любой из двух способов для решения похожих задач.