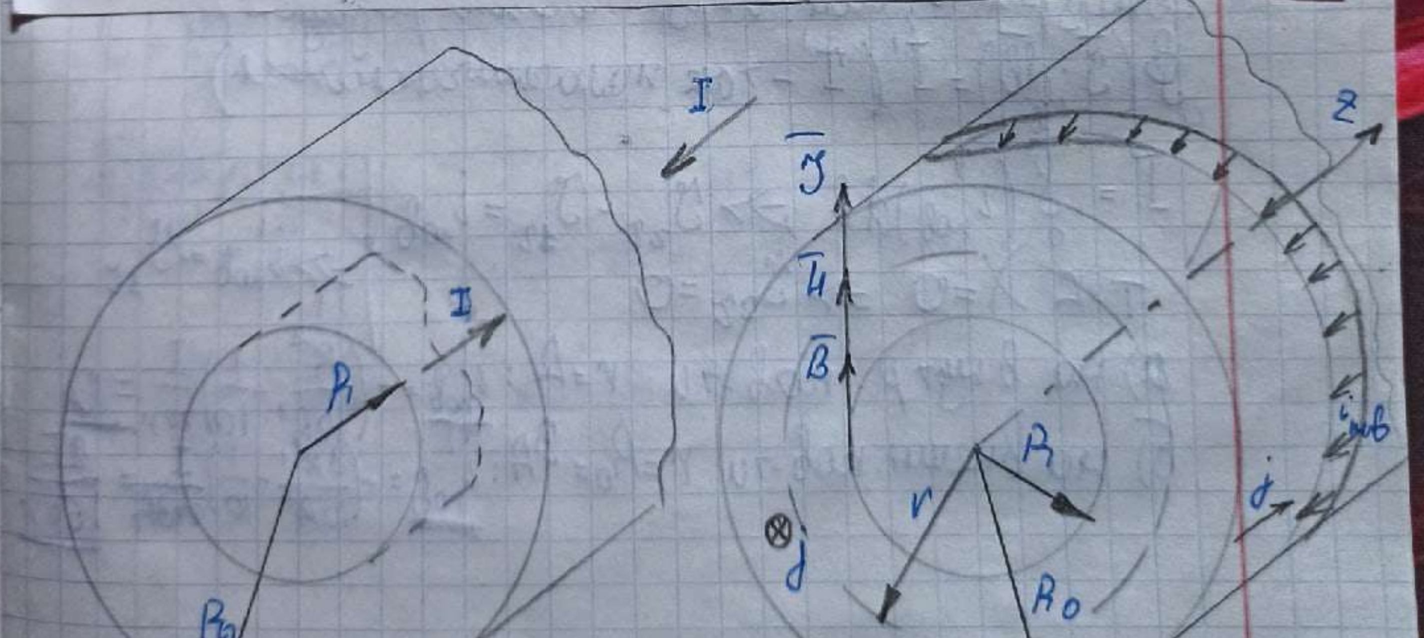
Задача №2.2

Вариант 14

По коаксиальному кабелю, радиусы внешнего и внутреннего проводника которого равны R_0 и R соответственно, протекает ток I. Пространство между проводниками заполнено магнетиком, магнитная проницаемость которого меняется по закону $\mu = f(r)$.

Построить графически распределения модулей векторов индукции $|\overline{B}|$ и напряжённости $|\overline{H}|$ магнитного поля, а также вектора намагниченности $|\overline{J(r)}|$; $R < r < R_0$. Определить поверхностную плотность токов намагничивания $i'_{\text{пов}}$ на внутренней и внешней поверхностях магнетика и распределение объёмной плотности токов намагничивания $j'_{\text{об}}(r)$. Определить индуктивность единицы длины кабеля.

$$\mu = \frac{R_0^n + r^n}{R_0^n + R^n} \qquad \frac{R_0}{R} = \frac{3}{1} = 3; R_0 = 3R \qquad n = 2$$



$$\mu = \frac{R_0^2 + r^2}{R_0^2 + R^2} = \frac{9 + \frac{r^2}{R^2}}{9+1} = \frac{9}{10} + \frac{r^2}{10R^2}$$

1) По т. о циркуляции вдоль контура l совпад. с окр. рад. r:

$$\oint_l (\bar{H}; d\bar{l}) = \Sigma I \Rightarrow H \cdot 2\pi r = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}, \text{ где } r \in (R; R_0)$$

2) $B = \mu \mu_0 H$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\frac{9}{10} + \frac{r^2}{10R^2}\right)$$

3) Намагниченность $\underline{J} = \chi H = (\mu - 1)H = \left(\frac{r^2}{10R^2} - \frac{1}{10}\right)\frac{I}{2\pi r}$

4) По т. о циркуляции для намагниченности вдоль контура l, явл. окружностью радиуса r:

$$\oint_l (\bar{J}; d\bar{l}) = I' \quad (I' \text{ - ток намагниченности})$$

$$I' = \int_0 (i'_{пов})\,dl \Rightarrow J_{2\tau} - J_{1\tau} = i_{пов} \;\Big|\; \Rightarrow i'_{пов} = -J_{1\tau}$$

т.к. $\chi = 0 \Rightarrow J_{2\tau} = 0$

а) на внутр. пов-ти $r = R$: $i'_{пов} = -\left(\frac{R^2}{10R^2} - \frac{1}{10}\right)\frac{I}{2\pi r} = 0$

б) на внешн. пов-ти $r = R_0 = 3R$: $i'_{пов} = -\left(\frac{9R^2}{10R^2} - \frac{1}{10}\right)\frac{I}{2\pi 3R} = \frac{2I}{15\pi r}$

5) Объемная пл-ть токов намагн. $\bar{j}'_{об}(r)$ в магнетике

$$j'_{об}(r) = rot(\bar{J})$$

В цилиндрической системе координат:

$$\bar{j}' = \left(\left(\frac{1}{r}(\partial J_z/\partial\varphi) - (\partial J_\varphi/\partial z)\right)\bar{e}_r + (\partial J_r/\partial z - \partial J_z/\partial r)\bar{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\partial(rJ_\varphi)/\partial r - \partial J_z/\partial\varphi\right)\bar{e}_z\right.$$

; где $J_z; J_\varphi; J_z$ – проекции

Учтя осевую симметрию: $\bar{j}'(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rJ)}{\partial r} = \frac{I}{10\pi R^2}$

6) Индуктивность $L = \frac{\Phi}{I}$

$$\Phi = \int_R^{R_0} Bl\,dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \int_R^{3R} \frac{1}{r}\left(\frac{9}{10} + \frac{r^2}{10R^2}\right)dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l\left(\frac{9}{10}\ln(3) + 4\right)$$

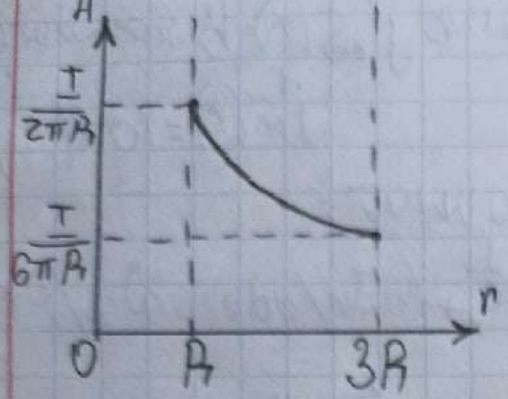
$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\frac{9}{10}\ln(3) + 4\right) \qquad \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{9}{10}\ln(3) + 4\right)$$

Проверка:

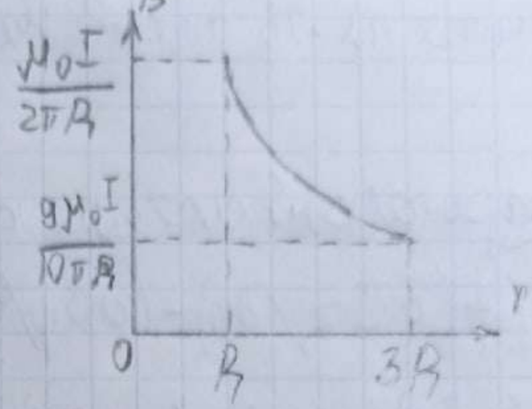
$$I' = \oint_0 i'_{пов}\,dl + \int_S (j')\,dS = \int_0^{2\pi R_0} -\frac{2I}{15\pi r}\,dl + \int_R^{R_0 = 3R} \frac{I 2\pi r}{10\pi R^2}\,dr =$$

$$\frac{4}{5}I$$

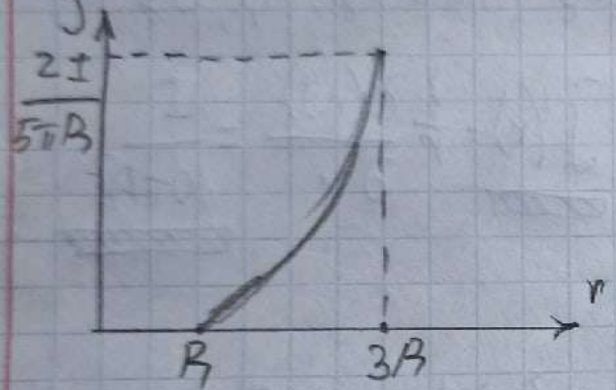
$$= -\frac{4}{5}I + \frac{4}{5}I = 0 \Rightarrow \text{всё верно}$$



H
I
2πR
I
6πR
r
0
R
3R



B
μ₀I
2πR
9μ₀I
10πR
r
0
R
3R



J
2I
5πR
r
R
3R