Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)
Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»
Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

Домашнее задание №2 по дисциплине
«Прикладная механика»
Метод начальных параметров в задаче растяжения-сжатия

Вариант 14

Выполнил:
студент группы РК6-36Б
Петраков С.А.

Москва
2020

1) Записать в матричном виде уравнения состояния стержня при растяжении сжатии.

$$Y(z) = A(z)Y_0 + Q(z)$$

Где $Y(z)$ – вектор состояния сечения в точке z;

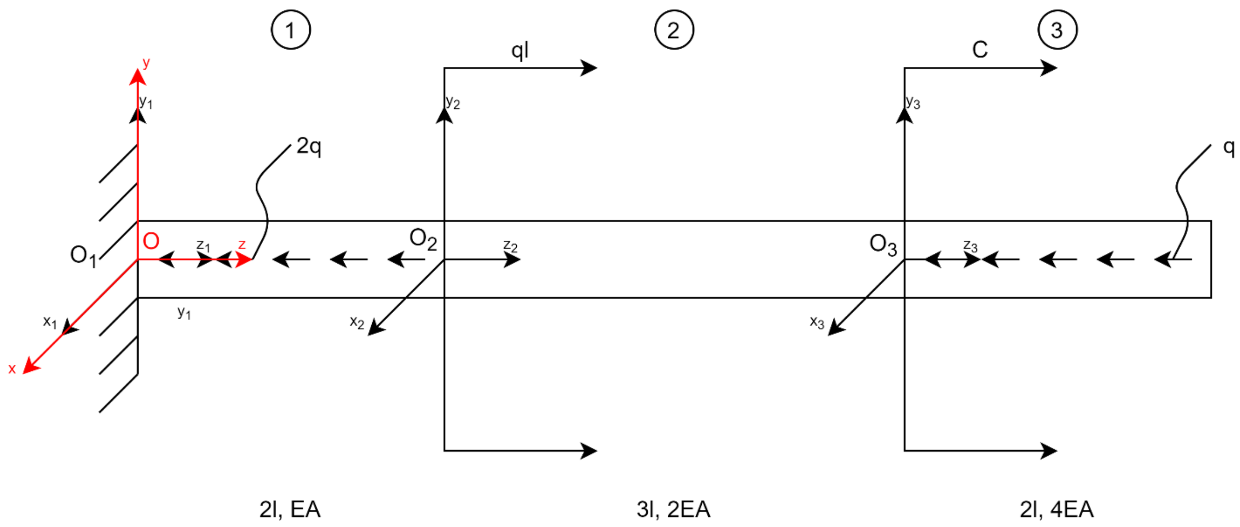
$A(z)$ – матрица преобразований в точке z;

Y_0 – вектор начальных состояний;

$Q(z)$ – вектор сил, воздействующих на сечение стержня в точке z;

2)Разбить систему на отдельные стержни, ввести глобальную и локальные системы координат. Записать в матричном виде уравнения изменения вектора состояния при переходе от левого края системы к ее правому краю. Записать в матричном виде граничные условия. Сформировать СЛАУ для поиска вектора начальных параметров. Найти вектор начальных параметров.

Разбиваем систему на отдельные стержни и вводим глобальную и локальные системы координат



Ищем вектора A(z) и Q(z) на каждом участке:

$$A_1(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{EA} & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{2EA} & 1 \end{bmatrix} A_3(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{4EA} & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_1(z) = \begin{bmatrix} -qz \\ \frac{qz^2}{2EA} \end{bmatrix} \qquad Q_2(z) = 0 \qquad Q_3(z) = \begin{bmatrix} -qz \\ \frac{qz^2}{8EA} \end{bmatrix}$$

Найдем начальное состояние первого участка $Y_1(0)$:

Уравнение состояния 1-го участка:

$$Y_2(2l) = A_1(2l)Y_1(0) + Q_1(2l)$$

Начальные условия для 2-го участка:

$$Y_2(0) = Y_1(2l) + \begin{bmatrix} -ql \\ 0 \end{bmatrix}$$

Уравнение состояния для 2-го участка:

$$Y_2(3l) = A_2(3l)Y_1(0)$$

Матрица перехода через пружину:

$$N_2(3l) + W_2(3l) * C = N_3(0)$$

$$W_2(3l) = W_3(0)$$

$$Y_3(0) = L_1 Y_2(3l)$$

Где:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_3(0) = L_1 * Y_2(3l) = L_1 A_2(3l) Y_2(0) = L_1 A_2(3l)\left(Y_1(2l) + \begin{bmatrix} -ql \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= L_1 A_2(3l)\left(A_1(2l)Y_1(0) + Q_1(2l) + \begin{bmatrix} -ql \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

Уравнение состояния для 3-го участка:

$$Y_3(2l) = A_3(2l)Y_3(0) + Q_3(2l)$$

Граничные условия:

$$0 * N_1(0) + 1 * W_1(0) = 0$$

$$[1 \quad 0]Y_1(0) = 0$$

$$1 * N_3(2l) + 0 * W_3(2l) = 0$$

$$[1 \quad 0]Y_3(2l) = 0$$

$$[1 \quad 0]Y_3(2l) =$$

$$= (1 \quad 0)\left(A_3(2l)\left(L_1 A_2(3l)\left(A_1(2l)Y_1(0) + Q_1(2l) + \begin{bmatrix} -ql \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right) + Q_3(2l)\right)$$

Пусть:

$$A = [1 \quad 0]A_3(2l)L_1 A_2(3l)A_1(2l)$$

$$B = -[1 \quad 0]A_3(2l)L_1 A_2(3l)\left(Q_1(2l) + \begin{bmatrix} -ql \\ 0 \end{bmatrix}\right) - [1 \quad 0]Q_3(2l)$$

В результате мы получаем СЛАУ, где необходимо решить матричное выражение:

$$AY_1(0) = B$$

Матрица А:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2l}{4EA} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3l}{2EA} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2l}{EA} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2EA + 7CL}{2EA} & C \end{bmatrix}$$

Матрица B:

$$B = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2l}{4EA} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3l}{2EA} & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4ql \\ \frac{8ql^2}{2EA} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ql \\ 0 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2ql \\ \frac{4ql^2}{8EA} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-10qlEA - 17ql^2C}{2EA}$$

Решение СЛАУ:

$$AY_1(0) = B$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2EA + 7CL}{2EA} & C \end{bmatrix} Y_1(0) = \frac{-10qlEA - 17ql^2C}{2EA}$$

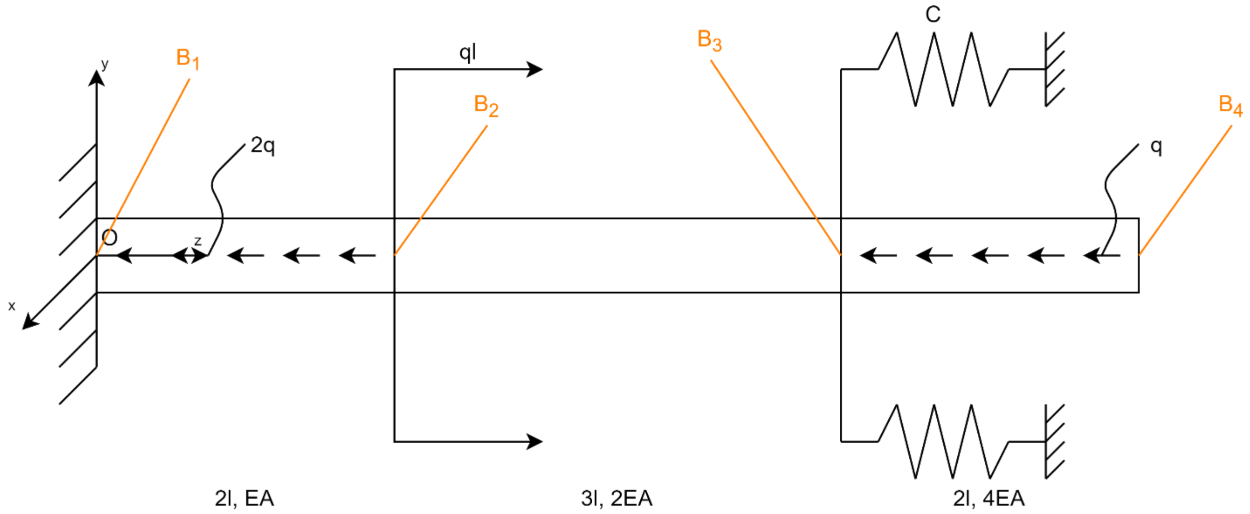
$$\frac{2EA + 7Cl}{2EA} N_1(0) = \frac{-10qlEA - 17ql^2C}{2EA}$$

$$N_1(0) = \frac{-10qlEA - 17ql^2C}{2EA + 7Cl}$$

Итог – вектор начальных параметров:

$$Y_1(0) = \begin{bmatrix} \frac{-10qlEA - 17ql^2C}{2EA + 7Cl} \\ 0 \end{bmatrix}$$

3)Используя метод начальных параметров, вычислить перемещения сечений стержня при C→0 и при C→∞.



$\boldsymbol{C \to 0}$

$$\lim_{C\to 0} Y_1(0) = \lim_{C\to 0}\begin{bmatrix}\dfrac{-10qlEA - 17ql^2C}{2EA + 7Cl}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5ql\\ 0\end{bmatrix}$$

$$Y_1(2l) = A_1(2l)Y_1(0) + Q_1(2l) = \begin{bmatrix}-ql\\ \dfrac{-6ql^2}{EA}\end{bmatrix}$$

$$Y_2(0) = Y_1(2l) + \begin{bmatrix}-ql\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-ql\\ \dfrac{-6ql^2}{EA}\end{bmatrix}$$

$$Y_2(3l) = A_2(3l)Y_2(0) = \begin{bmatrix}-2ql\\ \dfrac{-9ql^2}{EA}\end{bmatrix}$$

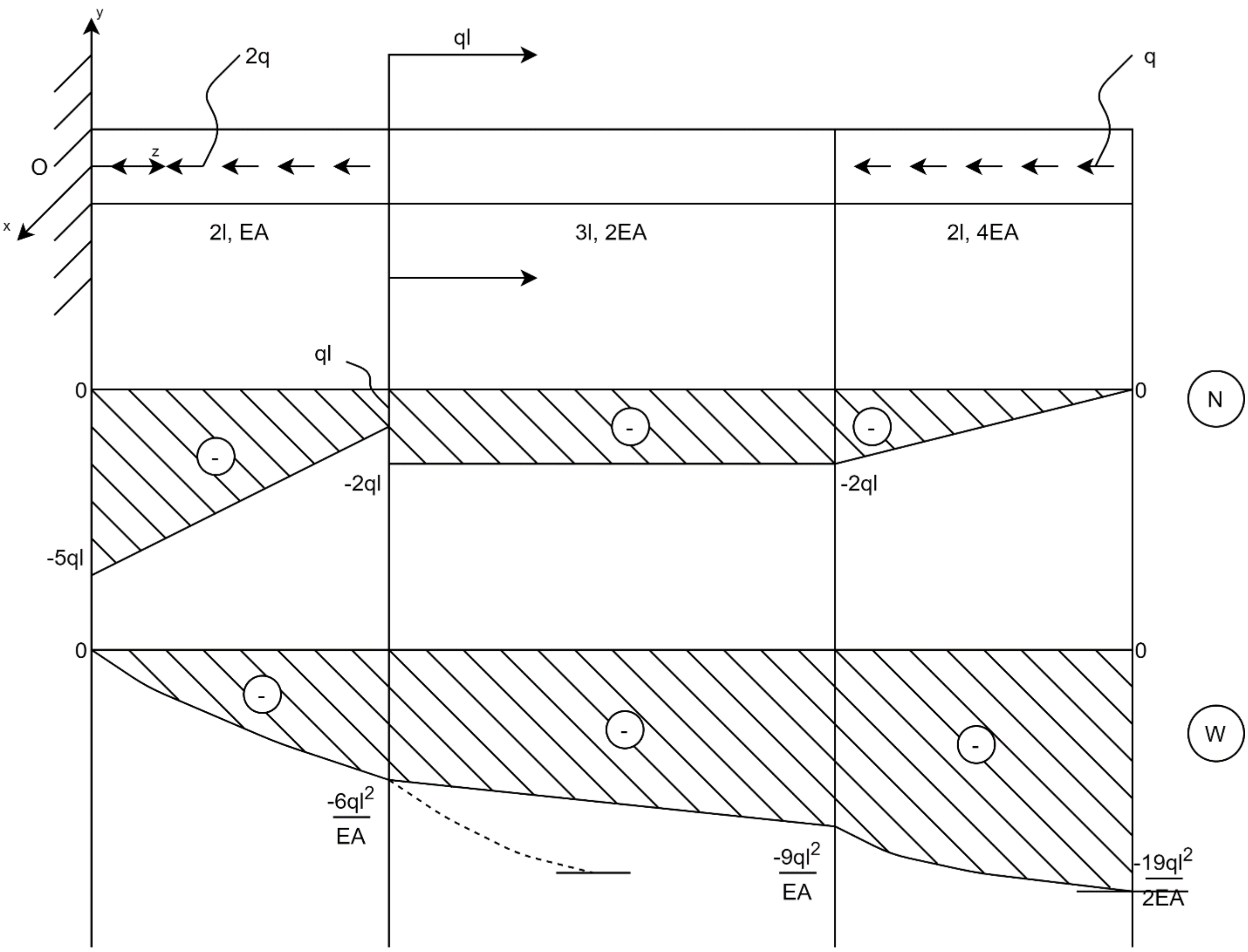
$$Y_3(0) = Y_2(3l) = \begin{bmatrix}-2ql\\ \dfrac{-9ql^2}{EA}\end{bmatrix}$$

$$Y_3(2l) = A_3(2l)Y_3(0) + Q_3(2l) = \begin{bmatrix}0\\ \dfrac{-19ql^2}{2EA}\end{bmatrix}$$

Получили:

$W_{B_1} = 0$ $\quad W_{B_2} = \frac{-6ql^2}{EA}$ $\quad W_{B_3} = \frac{-9ql^2}{EA}$ $\quad W_{B_4} = \frac{-19ql^2}{2EA}$

Сравниваем полученные значения со значениями, полученными в первом ДЗ:



$$W_{B_1}^{dz} = 0 \quad W_{B_2}^{dz} = \frac{-6ql^2}{EA} \quad W_{B_3}^{dz} = \frac{-9ql^2}{EA} \quad W_{B_4}^{dz} = \frac{-19ql^2}{2EA}$$

Значения совпадают. Решено верно.

$\boldsymbol{C} \to \infty$

$$\lim_{C\to\infty} Y_1(0) = \lim_{C\to\infty} \begin{bmatrix} \dfrac{-10qlEA - 17ql^2C}{2EA + 7Cl} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-17ql}{7} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_1(2l) = A_1(2l)Y_1(0) + Q_1(2l) = \begin{bmatrix} \dfrac{11ql}{7} \\ \dfrac{-6ql^2}{7EA} \end{bmatrix}$$

$$Y_2(0) = Y_1(2l) + \begin{bmatrix} -ql \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4ql}{7} \\ \dfrac{-6ql^2}{7EA} \end{bmatrix}$$

$$Y_2(3l) = A_2(3l)Y_2(0) = \begin{bmatrix} \dfrac{4ql}{7} \\ 0 \end{bmatrix}$$

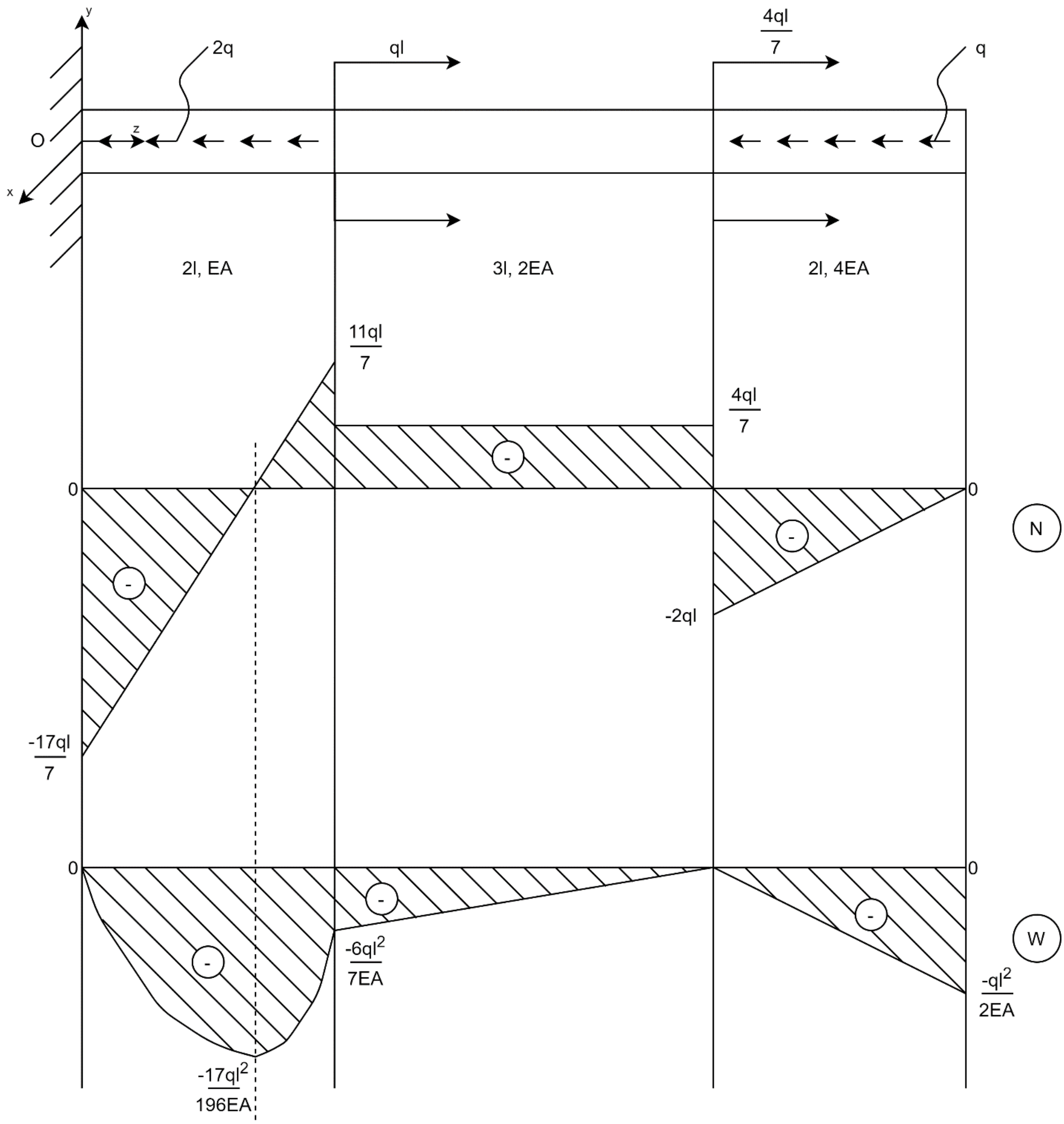
$$Y_3(0) = Y_2(3l) = \begin{bmatrix} -2ql \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_3(2l) = A_3(2l)Y_3(0) + Q_3(2l) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-ql^2}{2EA} \end{bmatrix}$$

Получили:

$W_{B_1} = 0$ $\qquad$ $W_{B_2} = \frac{-6ql^2}{7EA}$ $\qquad$ $W_{B_3} = 0$ $\qquad$ $W_{B_4} = \frac{-ql^2}{2EA}$

Сравниваем полученные значения со значениями, полученными в первом ДЗ:



$$W_{B_1}^{dz} = 0 \qquad W_{B_2}^{dz} = \frac{-6ql^2}{7EA} \qquad W_{B_3}^{dz} = 0 \qquad W_{B_4}^{dz} = \frac{-ql^2}{2EA}$$

Значения совпадают. Решено верно.