Петраков С.А. РК6-56Б

Задача 5.5

Условие:

Вывод методов Адамса-Башфорта основан на аппроксимации интеграла:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt$$

квадратурой, полученной путем аппроксимации $f\big(t, y(t)\big)$ интерполянтом Лагранжа:

$$f\big(t, y(t)\big) = L_{p-1}(t) + \frac{f^{(p)}\big(\xi_i, y(\xi_i)\big)}{p!}\prod_{i=1}^{p}\big(t - t_{i-j+1}\big),$$

где $t_{i+1-p}, t_{i+2-p}, \ldots t_{i-1}, t_i$ являются равномерно распределенными узлами с шагом h. Требуется доказать, что соответствующая квадратура с остаточным членом имеет вид:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt = h\sum_{j=1}^{p} a_j f\left(t_{i-j+1}, y\big(t_{i-j+1}\big)\right) + \frac{h^{p+1}}{p!} f^{(p)}\big(\mu, y(\mu)\big)\int_0^1 \prod_{j=1}^{p}(s + j - 1)\, ds,$$

Где $\mu \in \big(t_{i+1-p}; t_i\big)$ и $a_j = \int_0^1 \prod_{j \neq k} \frac{s+k-1}{k-j} ds\,, j = 1, \ldots, p.$

Решение:

Получим квадратуру используя интерполянт Лагранжа:

$$f\big(t, y(t)\big) = L_{p-1}(t) + \frac{f^{(p)}\big(\xi_i, y(\xi_i)\big)}{p!}\prod_{i=1}^{p}\big(t - t_{i-j+1}\big)\text{, где } \xi_i = \xi_i(t) \in \big(t_{i+1-p}; t_i\big)$$

Выполняем разложение $L_{p-1}(t)$:

$$L_{p-1}(t) = \sum_{j=1}^{p} l_i(t) * f\left(t_{i-j+1}, y\big(t_{i-j+1}\big)\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\prod_{k\neq j}\left(\frac{t - t_{i-k+1}}{t_{i-j+1} - t_{i-k+1}}\right) * f\left(t_{i-j+1}, y\big(t_{i-j+1}\big)\right)\right)$$

Тогда интеграл примет вид:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt \\
&\qquad = \int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\sum_{j=1}^{p}\left(\prod_{k\neq j}\left(\frac{t - t_{i-k+1}}{t_{i-j+1} - t_{i-k+1}}\right) * f\left(t_{i-j+1}, y\big(t_{i-j+1}\big)\right)\right)\right)dt \\
&\qquad + \int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\frac{f^{(p)}\big(\xi_i, y(\xi_i)\big)}{p!}\prod_{i=1}^{p}\big(t - t_{i-j+1}\big)\right)dt \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{p} f\left(t_{i-j+1}, y\big(t_{i-j+1}\big)\right)\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sum_{j=1}^{p}\left(\prod_{k\neq j}\left(\frac{t - t_{i-k+1}}{t_{i-j+1} - t_{i-k+1}}\right)\right)dt \\
&\qquad + \int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\frac{f^{(p)}\big(\xi_i, y(\xi_i)\big)}{p!}\prod_{i=1}^{p}\big(t - t_{i-j+1}\big)\right)dt,
\end{aligned}$$

$$\text{где } \xi_i = \xi_i(t) \in \left(t_{i+1-p}; t_i\right), \quad (1)$$

Введем замену $t = t_i + s * h$

- Упростим первый интеграл в сумме:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{t_i + s * h - (t_i + (-k+1)h)}{(t_i + (-j+1)h) - (t_i + (-k+1)h)} \right) \right) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{s + k - 1}{k - j} \right) \right) dt$$

Выполним замену переменной в интеграле с t на s:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{s + k - 1}{k - j} \right) \right) dt \to h \int_{0}^{1} \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{s + k - 1}{k - j} \right) \right) ds, \quad (2)$$

- Упросим второй интеграл:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{f^{(p)}(\xi_i, y(\xi_i))}{p!} \prod_{i=1}^{p} \left(t_i + s * h - (t_i + (-j+1)h)\right) \right) dt = h^p \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{f^{(p)}(\xi_i, y(\xi_i))}{p!} \prod_{i=1}^{p} (s + j - 1) \right) dt$$

Выполним замену переменной в интеграле с t на s:

$$\frac{h^{p+1}}{p!} \int_{0}^{1} \left(f^{(p)}(\xi_i, y(\xi_i)) \prod_{i=1}^{p} (s + j - 1) \right) ds$$

Можно применить теорему о среднем значении, т.к. функция непрерывна и не меняет свой знак при $s \in [0; 1], \mu_i \in (t_i; t_{i+1})$:

$$h^{p+1} \int_{0}^{1} \left(\frac{f^{(p)}(\xi_i, y(\xi_i))}{p!} \prod_{i=1}^{p} (s + j - 1) \right) ds = \frac{h^{p+1}}{p!} f^{(p)}(\mu_i, y(\mu)) \int_{0}^{1} \left(\prod_{i=1}^{p} (s + j - 1) \right) ds, \quad (3)$$

Подставим все (2) и (3) в (1):

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$
$$= h \sum_{j=1}^{p} \left(\int_{0}^{1} \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{s + k - 1}{k - j} \right) \right) ds * f\left(t_{i-j+1}, y(t_{i-j+1})\right) \right)$$
$$+ \frac{h^{p+1}}{p!} f^{(p)}(\mu_i, y(\mu)) \int_{0}^{1} \left(\prod_{i=1}^{p} (s + j - 1) \right) ds$$

Введем замену $a_j = \int_0^1 \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{s+k-1}{k-j} \right) \right) ds$:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt = h \sum_{j=1}^{p} \left(a_j * f\left(t_{i-j+1}, y(t_{i-j+1})\right) \right) + \frac{h^{p+1}}{p!} f^{(p)}(\mu_i, y(\mu)) \int_{0}^{1} \left(\prod_{i=1}^{p} (s + j - 1) \right) ds,$$

где $a_j = \int_0^1 \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{k \neq j} \left(\frac{s+k-1}{k-j} \right) \right) ds \,, j = 1, \dots, p$

Ч.т.д.