Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»

Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

**Домашнее задание**

**по дисциплине «Прикладная механика»**

**на тему «Метод КЭ в задаче растяжения-сжатия прямого стержня»**

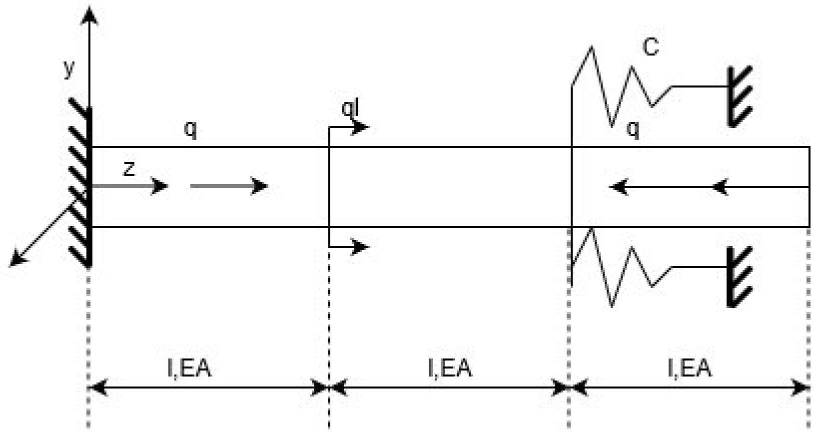
**Вариант 1**

Выполнил: студент группы РК6-31Б Андреева П.П.

Проверил: канд. техн. наук Шашурин Г.В.

Москва

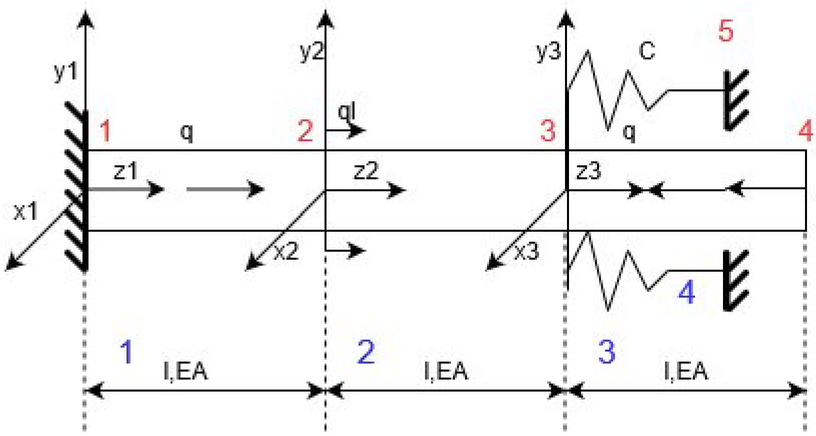
2019




**Задание 1.** Разбить стержень на конечные элементы. Ввести локальные и глобальную систему координат, записать матрицы жёсткости каждого конечного элемента.

**Решение:**

Введем глобальную систему координат, разобьём стержень на 4 конечных элемента, пронумеруем их по порядку слева направо. Введём локальные системы координат и обозначим 5 узлов по порядку слева направо:




Запишем матрицы жёсткости для каждого КЭ:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & \frac{-EA}{l} \\ \frac{-EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & \frac{-EA}{l} \\ \frac{-EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{l} & \dfrac{-EA}{l} \\ \dfrac{-EA}{l} & \dfrac{4EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix}$$

**Задание 2.** Сформировать СЛАУ для нахождения узловых перемещений в стержне. Найти узловые перемещения системы.

**Решение:**

СЛАУ для нахождения узловых перемещений в стержне:

[K]*{u} = {f}, где [K] – матрица жёсткости системы, $\{u\}$ – вектор узловых перемещений, {f} - вектор сил (распределённые нагрузки заменяются двумя эквивалентными приложенными силами):

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix}$$

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{ql}{2} \\ \dfrac{3ql}{2} \\ \dfrac{-ql}{2} \\ \dfrac{-ql}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Таблица индексов:

| Степень свободо / Номер КЭ | 1’ | 2’ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 4 |
| 4 | 3 | 5 |

Получение матрицы жёсткости с помощью ассемблирования:

$$K=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & \frac{-EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{l} & \frac{EA}{l}+\frac{EA}{l} & \frac{-EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-EA}{l} & \frac{EA}{l}+\frac{EA}{l}+\mathrm{C} & \frac{-EA}{l} & -\mathrm{C} \\ 0 & 0 & \frac{-EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{C} & 0 & \mathrm{C} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & \frac{-EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{l} & \frac{2EA}{l} & \frac{-EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-EA}{l} & \frac{2EA}{l}+\mathrm{C} & \frac{-EA}{l} & -\mathrm{C} \\ 0 & 0 & \frac{-EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{C} & 0 & \mathrm{C} \end{bmatrix}$$

Учёт граничных условий точным способом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EA}{l} & \frac{-EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-EA}{l} & \frac{2EA}{l}+\mathrm{C} & \frac{-EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{W}_1 \\ \mathrm{W}_2 \\ \mathrm{W}_3 \\ \mathrm{W}_4 \\ \mathrm{W}_5 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{ql}{2} \\ \frac{3ql}{2} \\ \frac{-ql}{2} \\ \frac{-ql}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Упростим СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} \frac{2EA}{l} & \frac{-EA}{l} & 0 \\ \frac{-EA}{l} & \frac{2EA}{l}+C & \frac{-EA}{l} \\ 0 & \frac{-EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{W}_2 \\ \mathrm{W}_3 \\ \mathrm{W}_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{3ql}{2} \\ \frac{-ql}{2} \\ \frac{-ql}{2} \end{Bmatrix}$$

Решим СЛАУ с помощью Mathcad:

$$\begin{pmatrix} \frac{2E\cdot A}{1} & \frac{-E\cdot A}{1} & 0 \\ \frac{-E\cdot A}{1} & \frac{2\cdot E\cdot A + C\cdot 1}{1} & \frac{-E\cdot A}{1} \\ 0 & \frac{-E\cdot A}{1} & \frac{EA}{1} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3\cdot q\cdot 1}{2} \\ \frac{-q\cdot 1}{2} \\ \frac{-q\cdot 1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3\cdot 1\cdot q\cdot\left(2\cdot EA\cdot A\cdot E\cdot 1 - A^2\cdot E^2\cdot 1 + C\cdot EA\cdot 1^2\right)}{2\cdot\left(3\cdot EA\cdot A^2\cdot E^2 - 2\cdot A^3\cdot E^3 + 2\cdot C\cdot EA\cdot 1\cdot A\cdot E\right)} - \frac{EA\cdot 1^2\cdot q}{2\cdot\left(3\cdot EA\cdot A\cdot E - 2\cdot A^2\cdot E^2 + 2\cdot C\cdot EA\cdot 1\right)} - \frac{A\cdot E\cdot 1^2\cdot q}{2\cdot\left(3\cdot EA\cdot A\cdot E - 2\cdot A^2\cdot E^2 + 2\cdot C\cdot EA\cdot 1\right)} \\ \frac{EA\cdot 1^2\cdot q}{2\cdot\left(3\cdot EA\cdot A\cdot E - 2\cdot A^2\cdot E^2 + 2\cdot C\cdot EA\cdot 1\right)} - \frac{A\cdot E\cdot 1^2\cdot q}{3\cdot EA\cdot A\cdot E - 2\cdot A^2\cdot E^2 + 2\cdot C\cdot EA\cdot 1} \\ \frac{A\cdot E\cdot 1^2\cdot q}{2\cdot\left(3\cdot EA\cdot A\cdot E - 2\cdot A^2\cdot E^2 + 2\cdot C\cdot EA\cdot 1\right)} - \frac{1^2\cdot q\cdot(3\cdot A\cdot E + 2\cdot C\cdot 1)}{2\cdot\left(3\cdot EA\cdot A\cdot E - 2\cdot A^2\cdot E^2 + 2\cdot C\cdot EA\cdot 1\right)} \end{bmatrix}$$

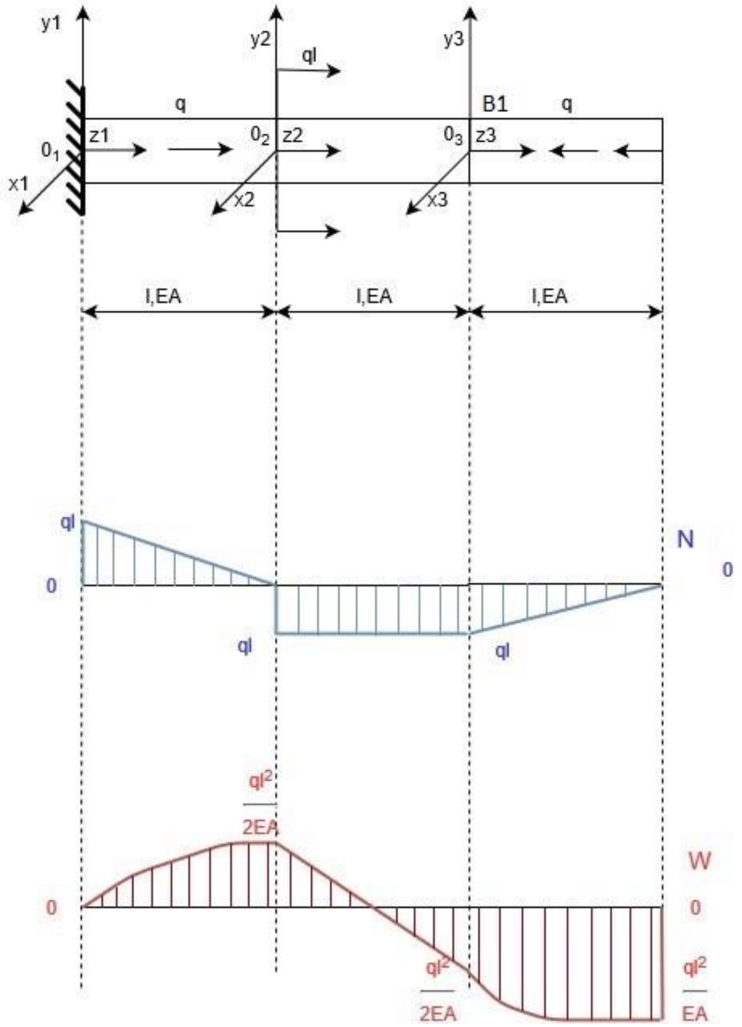
Таким образом:

$$W = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{ql^2(EA + 3Cl)}{EA(2EA + 4Cl)} \\ \frac{-ql^2}{2EA + 4Cl} \\ \frac{ql^2(-2EA - 2Cl)}{EA(2EA + 4Cl)} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Вычислим узловые перемещения стержня при C → 0:

$$\lim_{C\to 0} W = \begin{Bmatrix} 0 \\ \lim_{C\to 0}\left(\frac{ql^2(EA + 3Cl)}{EA(2EA + 4Cl)}\right) \\ \lim_{C\to 0}\left(\frac{-ql^2}{2EA + 4Cl}\right) \\ \lim_{C\to 0}\left(\frac{-ql^2(EA + Cl)}{EA(EA + 2Cl)}\right) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{ql^2}{2EA} \\ \frac{-ql^2}{2EA} \\ \frac{-ql^2}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Сравним с результатами из ДЗ1:

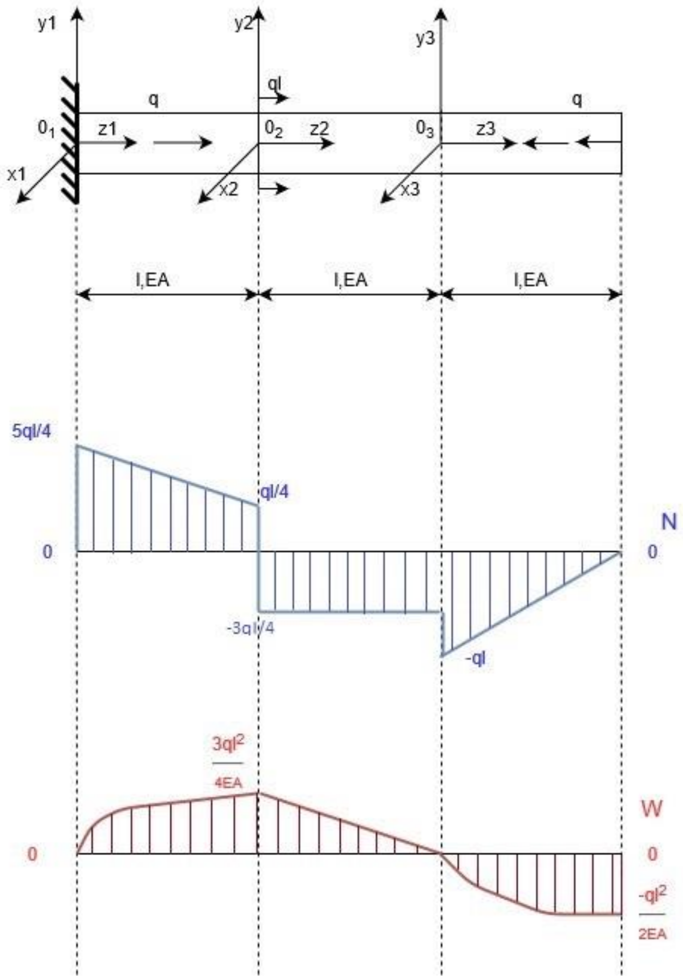



Как видно из рисунка, полученные методом конечных элементов значения перемещений совпадают с полученными ранее.

Вычислим узловые перемещения стержня при С → ∞:

$$\lim_{C\to\infty} W = \begin{Bmatrix} 0 \\ \lim\limits_{C\to\infty}\left(\dfrac{ql^2(EA+3Cl)}{EA(2EA+4Cl)}\right) \\ \lim\limits_{C\to\infty}\left(\dfrac{-ql^2}{2EA+4Cl}\right) \\ \lim\limits_{C\to\infty}\left(\dfrac{-ql^2(EA+Cl)}{EA(EA+2Cl)}\right) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{3ql^2}{4EA} \\ 0 \\ \dfrac{-ql^2}{2EA} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Сравним с результатами из ДЗ1:



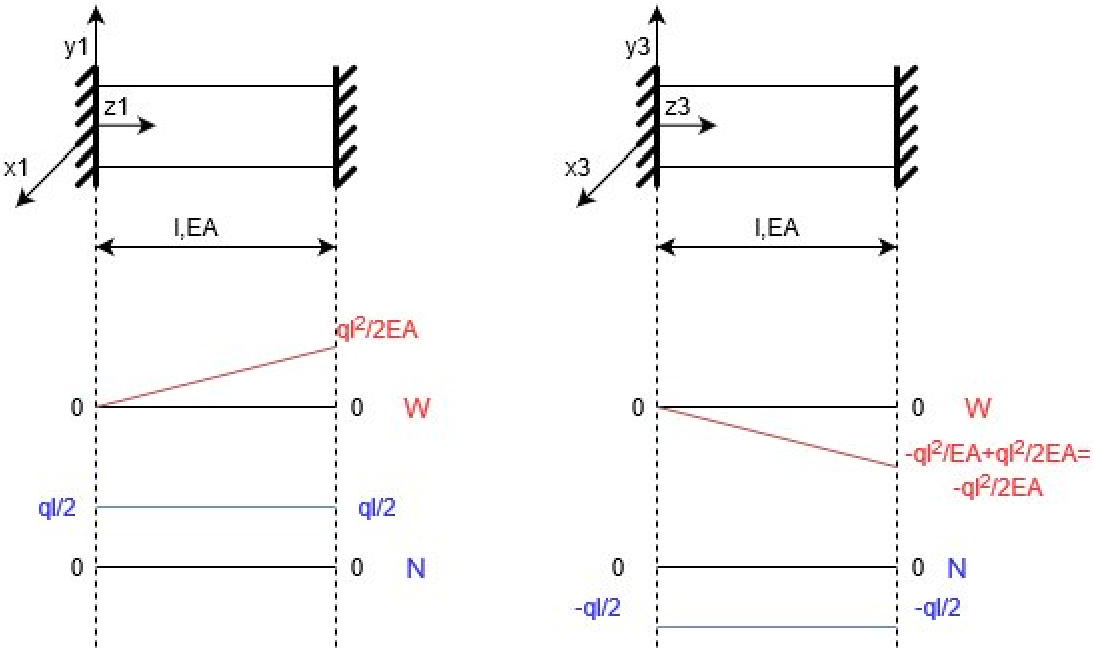

Как видно из рисунка, полученные методом конечных элементов значения перемещений совпадают с полученными ранее.

**Задание 3.** При С→0 и при С→ ∞ вычислить наибольшее значение осевой силы в системе.

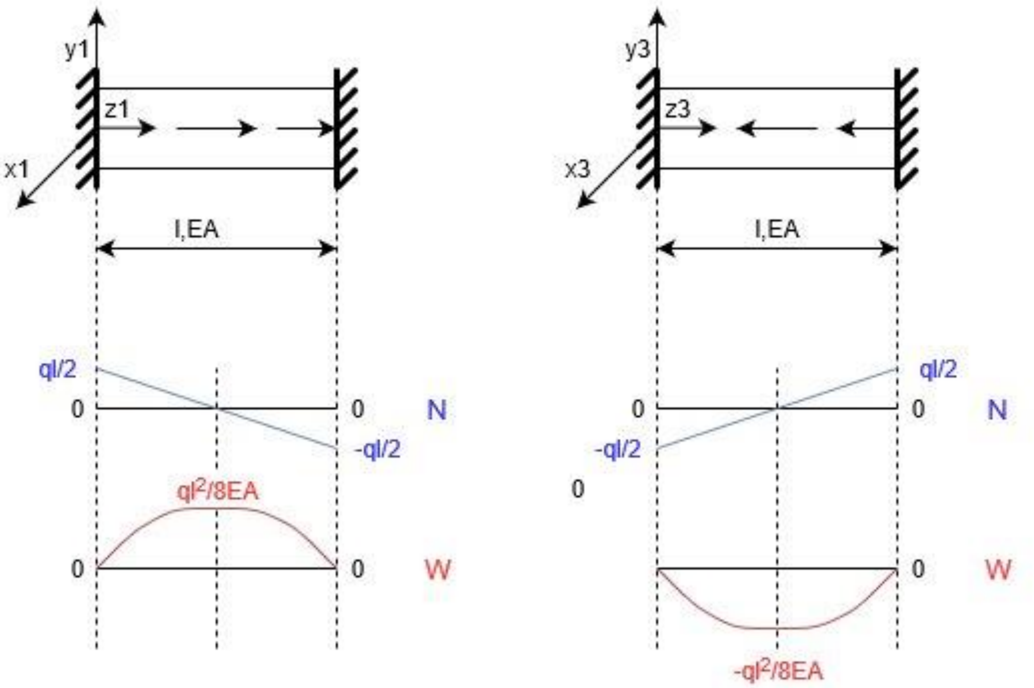
**Решение:**

Так как на осевые силы влиют не только силы в узлах, но и распределенные нагрузки, то будем решать задачу следующим образом.

При С→0:



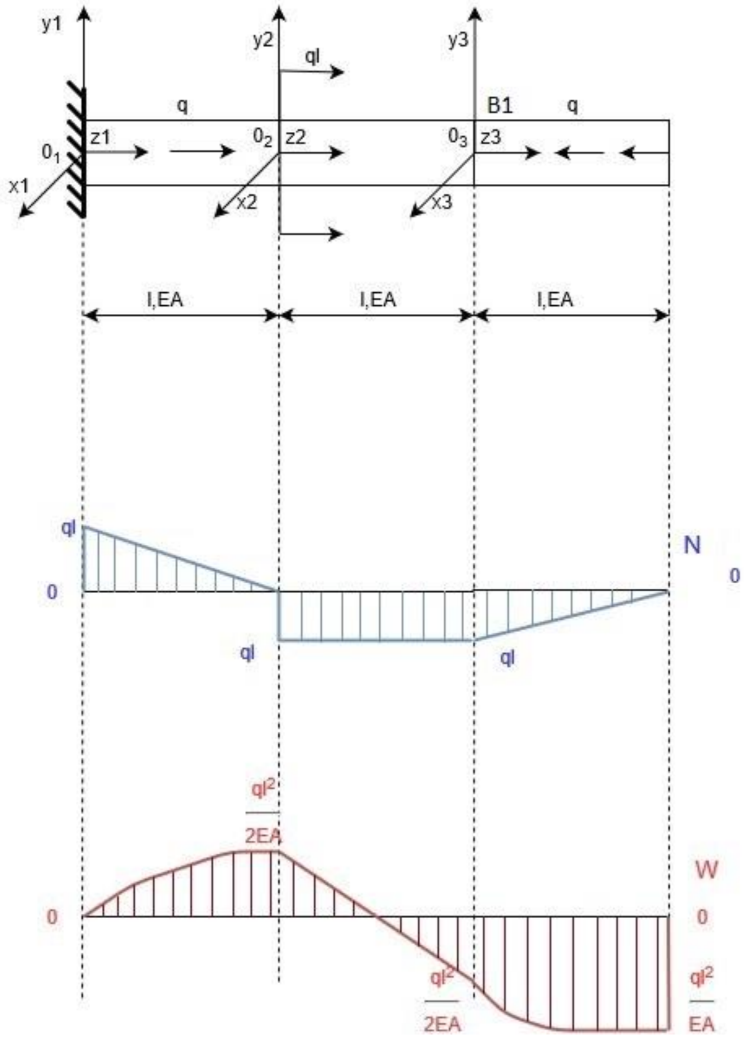

Построим эпюры распределенных нагрузок на 1 и 3 участках:




Таким образом:

$$N(0) = \begin{Bmatrix} \frac{\mathrm{ql}}{2} + \frac{\mathrm{ql}}{2} \\ 0 - \mathrm{ql} \\ \frac{-ql}{2} - \frac{ql}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathrm{ql} \\ -\mathrm{ql} \\ -\mathrm{ql} \end{Bmatrix} N(l_i) = \begin{Bmatrix} \frac{\mathrm{ql}}{2} - \frac{\mathrm{ql}}{2} \\ -\mathrm{ql} \\ \frac{-ql}{2} + \frac{ql}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\mathrm{ql} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Сравним с результатами из ДЗ1:

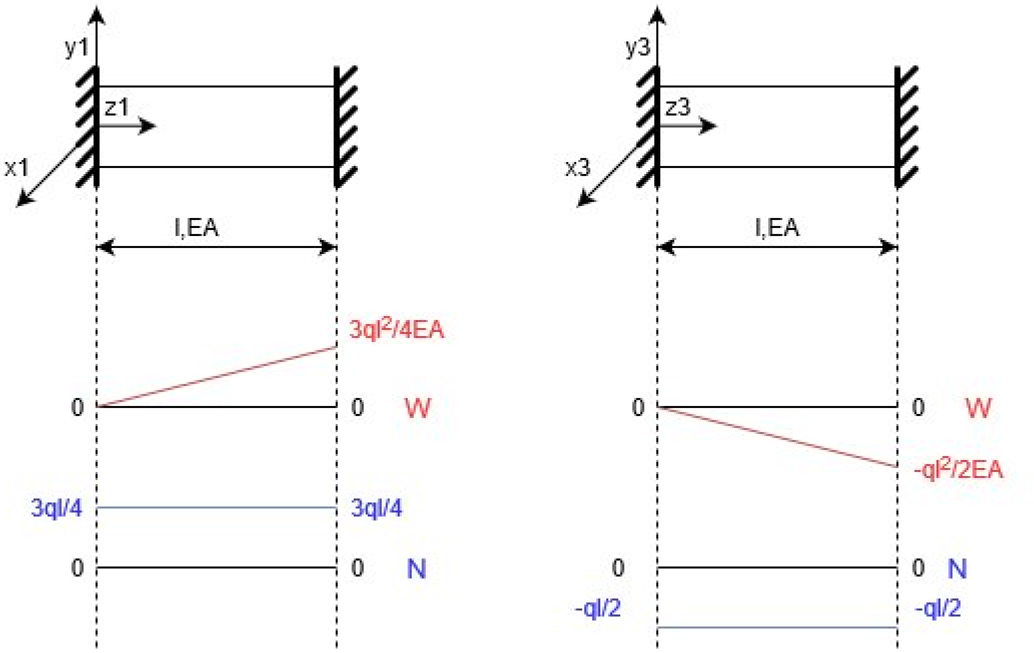



Как видно из рисунка, значения совпадают.

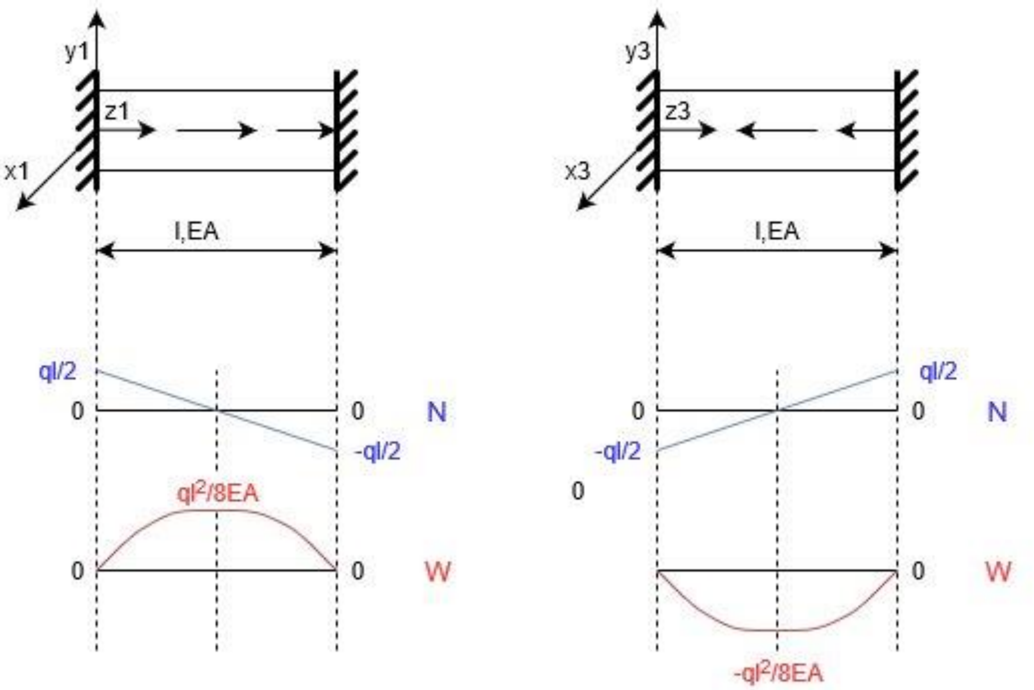
Значит $N_{max}$=ql

При С→∞:

Построим эпюры на основе узловых перемещений на 1 и 3 участках:



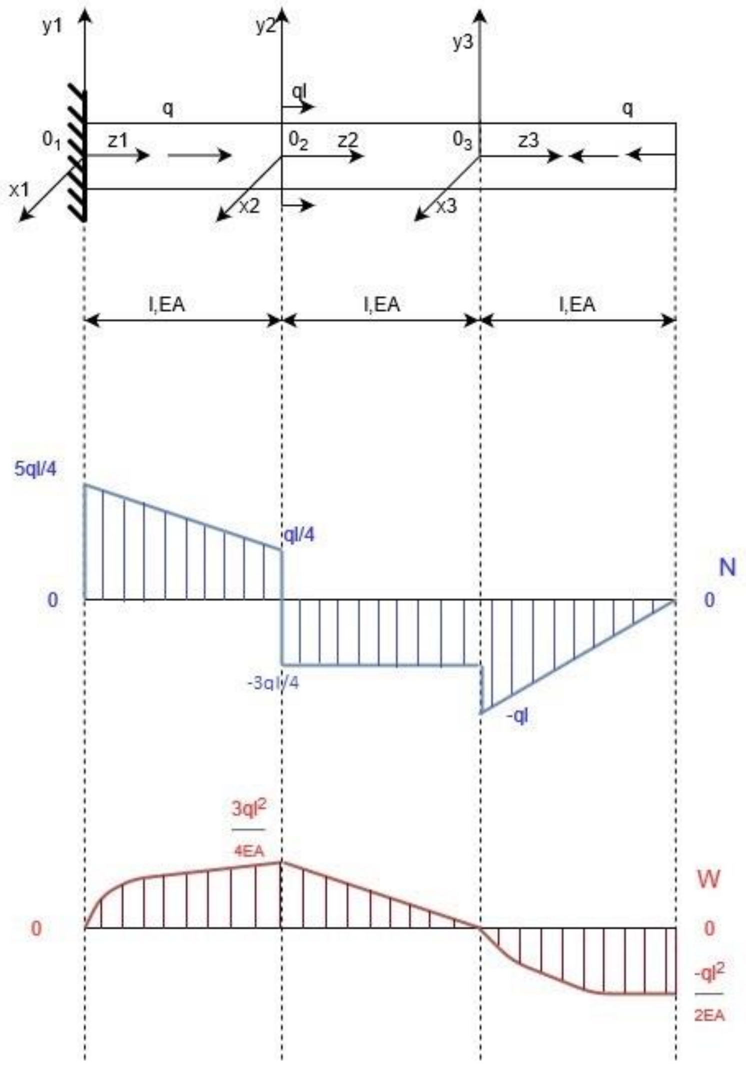

Построим эпюры распределенных нагрузок на 1 и 3 участках:




Таким образом:

$$N(0) = \begin{Bmatrix} \frac{3ql}{4} + \frac{\mathrm{ql}}{2} \\ \frac{\mathrm{ql}}{4} - \mathrm{ql} \\ \frac{-ql}{2} - \frac{ql}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{5\mathrm{ql}}{4} \\ -\frac{3\mathrm{ql}}{4} \\ -\mathrm{ql} \end{Bmatrix} N(l_i) = \begin{Bmatrix} \frac{3ql}{4} - \frac{\mathrm{ql}}{2} \\ -\frac{3\mathrm{ql}}{4} \\ \frac{ql}{2} - \frac{ql}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\mathrm{ql}}{4} \\ -\frac{3\mathrm{ql}}{4} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Сравним с результатами из ДЗ1:




Как видно из рисунка, значения совпадают.

Значит $N_{max}$=5ql/4