Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Московский государственный университет
имени Н. Э. Баумана.

Факультет: **Робототехника и комплексная автоматизация.**
Кафедра: Теория машин и механизмов (РК2).

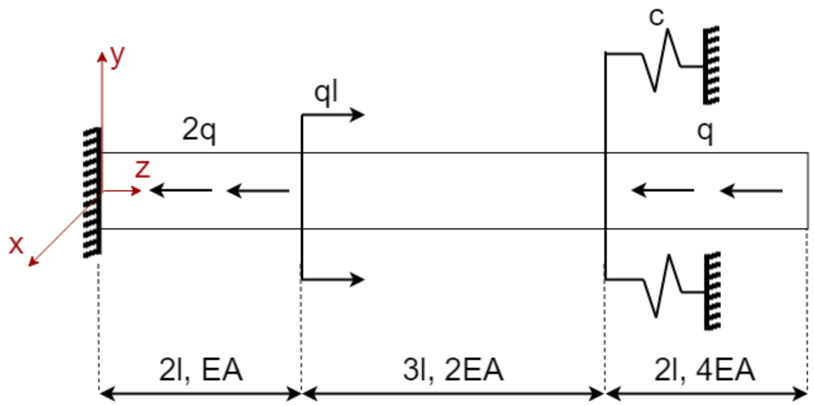
Домашнее задание №2
по дисциплине: Прикладная механика
на тему: «Метод начальных параметров в задаче растяжения-сжатия»

Вариант 14

Выполнил
студ. гр. РК6-31б Петричук А.О.

Преподаватель
канд. техн. наук. Шашурин Г.В.

Москва 2019



1) Записать в матричном виде уравнения состояния стержня при растяжении-сжатии.

Определим с помощью системы ДУ нагрузки и перемещения на участке стержня с распределённой нагрузкой q:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dz} = -q; \\ \dfrac{dW}{dz} = \dfrac{N}{EA}; \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} N(z) = N_0 - \displaystyle\int_0^z q dz = N_0 - qz + 0 * W_0 \\ W(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{N_0 - qz}{EA} dz = \frac{N_0 z}{EA} - \frac{qz^2}{2EA} + 1 * W_0 \end{cases}$$

В матричном виде:

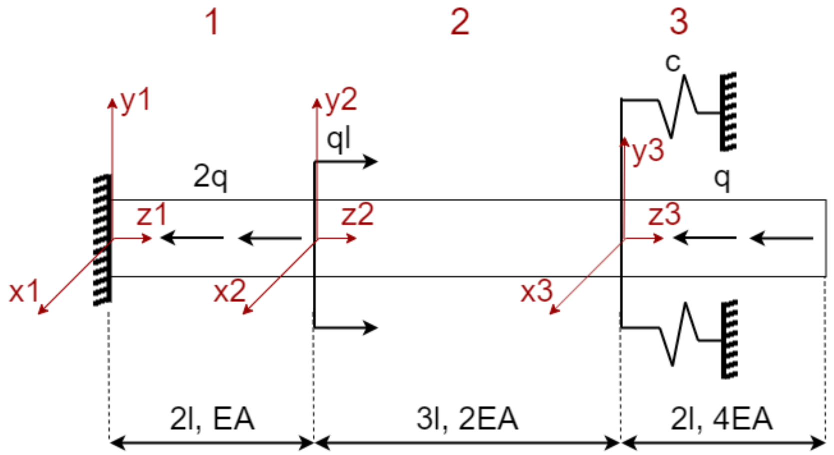
$$\begin{pmatrix} N(z) \\ W(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{z}{EA} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ W_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -qz \\ \dfrac{-qz^2}{2EA} \end{pmatrix}$$

И:

$$Y(z) = A(z)Y_0 + Q(z)$$

2) **Разбить систему на отдельные стержни, ввести глобальную и локальные системы координат. Записать в матричном виде уравнения изменения вектора состояния при переходе от левого края системы к её правому краю. Записать в матричном виде граничные условия. Сформировать СЛАУ для поиска вектора начальных параметров. Найти вектор начальных параметров.**

Разобьем систему на участки, пронумеруем их и введем локальные системы координат:



Найдём вектора A(z) и Q(z) на каждом из участков:

$$A_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{z}{EA} & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{z}{2EA} & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{z}{4EA} & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_1(z) = \begin{pmatrix} -qz \\ \dfrac{-qz^2}{2EA} \end{pmatrix} \qquad Q_2(z) = 0 \qquad Q_3(z) = \begin{pmatrix} -qz \\ \dfrac{-qz^2}{8EA} \end{pmatrix}$$

Найдём $Y_1(0)$, для этого запишем:

Уравнение состояния 1 участка:

$$Y_1(2l) = A_1(2l)Y_1(0) + Q_1(2l)$$

Начальные условия для 2 участка:

$$Y_2(0) = Y_1(2l) + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix}$$

Уравнение состояния для 2 участка:

$$Y_2(3l) = A_2(3l)Y_2(0)$$

Матрица перехода через пружину:

$$N_2(3l) + W_2(3l) * c = N_3(0)$$
$$W_2(3l) = W_3(0)$$
$$Y_3(0) = L_1 Y_2(3l)$$

Где:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_3(0) = L_1 * Y_2(3l) = L_1 A_2(3l) Y_2(0) = L_1 A_2(3l)\left[Y_1(2l) + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= L_1 A_2(3L)\left[A_1(2l)Y_1(0) + Q_1(2l) + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Уравнение состояния 3 участка:

$$Y_3(2l) = A_3(2l)Y_3(0) + Q_3(2l)$$

Граничные условия:

$$0 * N_1(0) + 1 * W_1(0) = 0$$
$$(0 \quad 1)Y_1(0) = 0$$
$$1 * N_3(2l) + 0 * W_3(2l) = 0$$
$$(1 \quad 0)Y_3(2l) = 0$$

$$(1 \quad 0)Y_3(2l) =$$

$$= (1 \quad 0)\left[A_3(2l)\left[L_1 A_2(3l)\left[A_1(2l)Y_1(0) + Q_1(2l) + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right] + Q_3(2l)\right] = 0$$

Пусть:

$$A = (1 \quad 0)A_3(2l)L_1 A_2(3l)A_1(2l)$$

$$B = -(1 \quad 0)A_3(2l)L_1 A_2(3l)\left[Q_1(2l) + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix}\right] - (1 \quad 0)Q_3(2l)$$

Получаем СЛАУ, к решению которого сводится решение матричного выражения:

$$AY_1(0) = B$$

Матрица А:

$$A = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2l}{4EA} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3l}{2EA} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2l}{EA} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2EA + 7cl}{2EA} & c \end{pmatrix}$$

Матрица В:

$$B = -(1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2l}{4EA} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3l}{2EA} & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 4ql \\ \frac{8ql^2}{2EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix}\right] - (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 2ql \\ \frac{4ql^2}{8EA} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-10qlEA - 17ql^2c}{2EA}$$

Решим СЛАУ:

$$AY_1(0) = B$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2EA + 7cl}{2EA} & c \end{pmatrix} Y_1(0) = \frac{-10qlEA - 17ql^2c}{2EA}$$

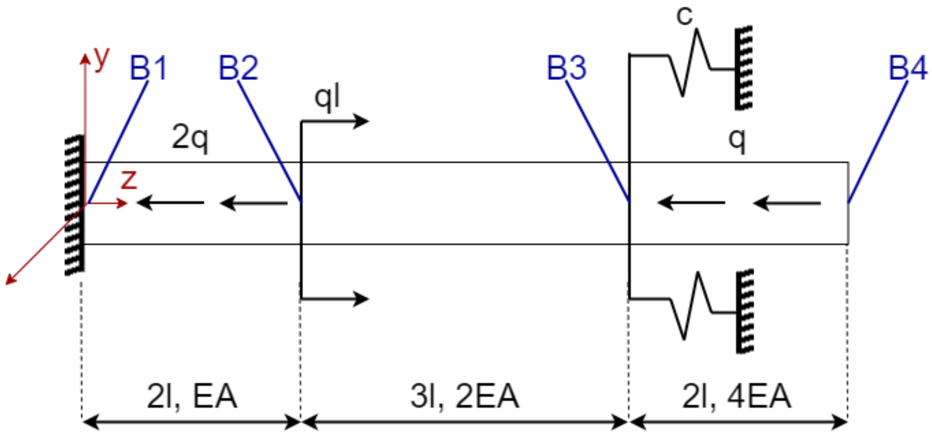
$$\frac{2EA + 7cl}{2EA} N_1(0) = \frac{-10qlEA - 17ql^2c}{2EA}$$

$$N_1(0) = \frac{-10qlEA - 17ql^2c}{2EA + 7cl}$$

Получим вектор начальных параметров:

$$Y_1(0) = \begin{pmatrix} \dfrac{-10qlEA - 17ql^2c}{2EA + 7cl} \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) **Используя метод начальных параметров, вычислить перемещение сечений стержня при C→0 и при C→ ∞.**



<u>C → 0</u>

$$\lim_{c\to 0} Y_1(0) = \lim_{c\to 0}\begin{pmatrix} \dfrac{-10qlEA - 17ql^2c}{2EA + 7cl} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5ql \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_1(2l) = A_1(2l)Y_1(0) + Q_1(2l) = \begin{pmatrix} -ql \\ \dfrac{-6ql^2}{EA} \end{pmatrix}$$

$$Y_2(0) = Y_1(2l) + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ql \\ \dfrac{-6ql^2}{EA} \end{pmatrix}$$

$$Y_2(3l) = A_2(3l)Y_2(0) = \begin{pmatrix} -2ql \\ \dfrac{-9ql^2}{EA} \end{pmatrix}$$

$$Y_3(0) = Y_2(3l) = \begin{pmatrix} -2ql \\ \dfrac{-9ql^2}{EA} \end{pmatrix}$$

$$Y_3(2l) = A_3(2l)Y_3(0) + Q_3(2l) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-19ql^2}{2EA} \end{pmatrix}$$

Получили перемещения в узлах:

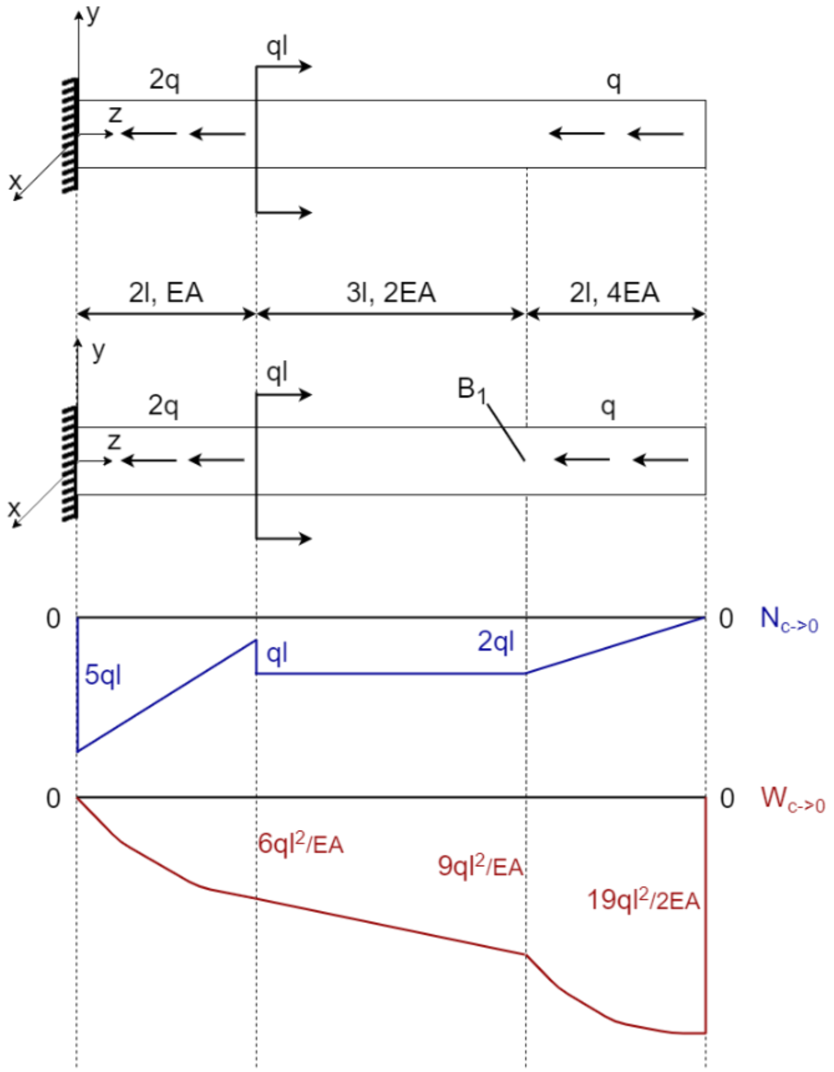
$$W_{B1} = 0$$

$$W_{B2} = -\frac{6ql^2}{EA}$$

$$W_{B3} = -\frac{9ql^2}{EA}$$

$$W_{B4} = -\frac{19ql^2}{2EA}$$

Эпюры, полученные в первом ДЗ:



Значения перемещений, полученные при решении первого ДЗ:

$$W_{B1}^{1дз} = 0$$

$$W_{B2}^{1дз} = -\frac{6ql^2}{EA}$$

$$W_{B3}^{1дз} = -\frac{9ql^2}{EA}$$

$$W_{B4}^{1дз} = -\frac{19ql^2}{2EA}$$

Как видим:

$W_{B1} = W_{B1}^{1дз}$;

$W_{B2} = W_{B2}^{1дз}$;

$W_{B3} = W_{B3}^{1дз}$;

$W_{B4} = W_{B4}^{1дз}$;

то есть, значения перемещений, полученные методом начальных параметров, совпадают со значениями на эпюрах, полученных в первом ДЗ.

<u>C → ∞</u>

$$\lim_{c\to\infty} Y_1(0) = \lim_{c\to\infty}\begin{pmatrix} \frac{-10qlEA - 17ql^2c}{2EA+7cl} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17ql}{7} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_1(2l) = A_1(2l)Y_1(0) + Q_1(2l) = \begin{pmatrix} \frac{11ql}{7} \\ \frac{-6ql^2}{7EA} \end{pmatrix}$$

$$Y_2(0) = Y_1(2l) + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4ql}{7} \\ \frac{-6ql^2}{7EA} \end{pmatrix}$$

$$Y_2(3l) = A_2(3l)Y_2(0) = \begin{pmatrix} \frac{4ql}{7} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Т.к. c→∞, участок 3 можно рассмотреть как отдельную систему:

$$(1 \quad 0)Y_3(2l) = (1 \quad 0)[A_3(2l)Y_3(0) + Q_3(2l)] = 0$$
$$N_3(0) = -2ql$$
$$Y_3(0) = \begin{pmatrix} -2ql \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_3(2l) = A_3(2l)Y_3(0) + Q_3(2l) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-ql^2}{2EA} \end{pmatrix}$$

Получили перемещения в узлах:

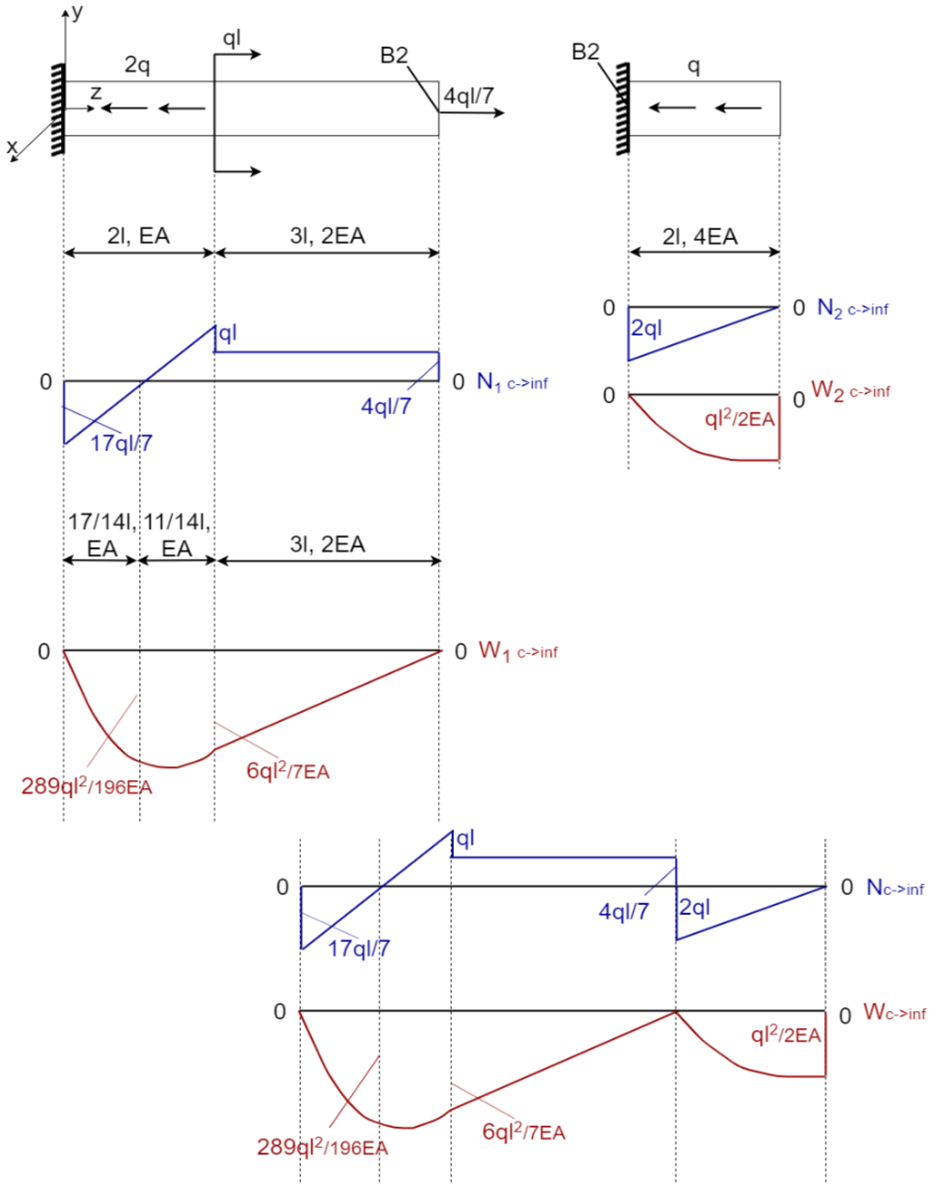
$W_{B1} = 0$

$W_{B2} = -\frac{6ql^2}{7EA}$

$W_{B3} = 0$

$W_{B4} = -\frac{ql^2}{2EA}$

Эпюры, полученные в первом ДЗ:



Значения перемещений, полученные при решении первого ДЗ:

$$W_{B1}^{1\text{дз}} = 0$$

$$W_{B2}^{1\text{дз}} = -\frac{6ql^2}{7EA}$$

$$W_{B3}^{1\text{дз}} = 0$$

$$W_{B4}^{1\text{дз}} = -\frac{ql^2}{2EA}$$

Как видим:

$W_{B1} = W_{B1}^{1\text{дз}}$;

$W_{B2} = W_{B2}^{1\text{дз}}$;

$W_{B3} = W_{B3}^{1\text{дз}}$;

$W_{B4} = W_{B4}^{1\text{дз}}$;

то есть, значения перемещений, полученные методом начальных параметров, совпадают со значениями на эпюрах, полученных в первом ДЗ.