Оглавление

1. Работа потенциальной силы. Полная механическая энергия. Закон изменения полной механической энергии механической системы. Закон сохранения полной механической энергии....4
2. Радиус-вектор, скорость и ускорение материальной точки. Разложение ускорения на касательную и нормальную составляющие (с выводом)....5
3. Угловые скорость и ускорение твёрдого тела при вращательном движении. Связь угла поворота, угловой скорости и углового ускорения. Связь угловой скорости с линейной. Все аналитические выражения необходимо вывести....6
4. Уравнение изменения импульса механической системы (вывод из законов Ньютона). Закон сохранения импульса (с выводом). 7
5. Момент импульса материальной точки и механической системы. Уравнение моментов механической системы (вывод из законов Ньютона). Закон сохранения момента импульса механической системы (вывод из уравнения моментов)....10
6. Момент инерции Твердого тела относительно оси. Момент Инерции стержня относительно перпендикулярной ему оси, проходящей через его центр (с выводом). 12
7. Работа силы (определение для общего случая). Кинетическая энергия. Связь работы и изменения кинетической энергии (с выводом). Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (с выводом). 13
8. Консервативные силы. Работа в потенциальном поле. Связь между силой и потенциальной энергией. Выражение для нахождения силы в случае известной зависимости потенциальной энергии от координат. Все аналитические выражения необходимо вывести....15
9. Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести (в общем случае) и для однородного поля (с выводом)....17
10. Первое начало термодинамики (формулировка). Работа, совершаемая телом при изменении объёма (вывод из определения механической работы). Работа идеального газа при изотермическом процессе (вывод из формулы для работы тела при изменении объёма)....18
11. Импульс тела. Импульс механической системы. Уравнение изменения импульса механической системы (вывод из законов Ньютона). Закон сохранения импульса (с выводом)....20
12. Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний (вывод на примере пружинного маятника или любой другой колебательной системы квазиупругой силой). Его решение....21
13. Математический и физический маятники. Вывод формул для их собственных частот. 22
14. Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний одинакового направления равных частот....24
15. Сложение гармонических колебаний одинакового направления близких (но не равных) частот. Биения. Все аналитические выражения необходимо вывести....25

16. Свободные затухающие колебания. Дифференциальное уравнение (вывод на примере любой колебательной системы с вязким трением и квазиупругой силой). Его решение. Частота свободных затухающих колебаний. 26
17. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Зависимость амплитуды Вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы (с выводом) 27
18. Время релаксации, логарифмический декремент затухания и добротность колебательной системы. Вывод формул для нахождения этих величин. Связь добротности с убылью энергии (с Выводом). 29
19. Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний одинакового направления равных частот. 30
20. Уравнение Плоской гармонической волны. Характеристики волны: период, частота, Длина волны, волновое число и волновой вектор. Единицы измерения этих величин в си. Уравнение сферической волны (без вывода).....31
21. Одномерное волновое уравнение для продольной упругой волны в твёрдом теле (с выводом). Общий вид волнового уравнения (без вывода). 32
22. Объёмная плотность энергии упругой волны (вывод на примере плоской продольной волны). Вектор Умова (вектор плотности потока энергии). 33
23. Стоячая волна. Уравнение стоячей волны (вывод из уравнения бегущей волны). Узлы и пучности 34
24. Область применимости СТО. Постулаты СТО. Выражение для импульса в СТО (без вывода). Основное уравнение релятивистской динамики (без вывода). 35
25. Интервал между событиями в СТО. Инвариантность интервала (доказательство на основе преобразований Лоренца). 36
26. Кинетическая энергия релятивистской частицы (выведите, считая известным основное уравнение релятивистской динамики). Полная энергия и энергия покоя в СТО. 37
27. Преобразования Лоренца для координат и времени (вывод из постулатов СТО)....38
28. Вывод из преобразований Лоренца выражений для Лоренцева сокращения длины и изменения промежутка времени между событиями при переходе в другую систему отсчета в СТО. 40
29. Релятивистский закон сложения скоростей (используя преобразования Лоренца, выведите формулы для преобразования каждой из трёх компонент скорости). 41
30. Связь между импульсом и энергией релятивистской частицы (вывод на основе известных выражений для полной энергии и релятивистского импульса). 42
31. Теплопроводность идеальных газов. Вывод уравнения теплопроводности (закона Фурье) и формулы для коэффициента теплопроводности. 43
32. Барометрическая формула (с выводом). Распределение Больцмана.....44
33. Энтропия в статистической физике. Статистический вес. Статистическое обоснование второго начала термодинамики. Формула Больцмана для статистической энтропии. Аддитивность энтропии. 45
34. Распределение Максвелла для модуля скорости молекул (с выводом). 46

35. Адиабатический процесс. Вывод уравнения Пуассона для идеального газа на основе известных формул для Ср и Су. 48
36. Понятие числа степеней свободы механической системы. Число степеней свободы молекул Идеального газа. Внутренняя энергия идеального газа (вывод на основе формулы Для средней Кинетической энергии поступательного движения молекул). 49
37. Теплоёмкость. Теплоёмкость идеального газа в изохорическом и изобарическом процессах (с выводом). Уравнение Майера (с выводом). 50
38. Теорема Карно (1-ая теорема Карно), с доказательством. Термодинамическая шкала температур. Неравенство Клаузиуса (вывод из теоремы Карно). Равенство Клаузиуса. 51
39. Термодинамическая энтропия (определение и обоснование того, что она является функцией состояния термодинамической системы). Закон возрастания энтропии в замкнутой системе (с доказательством). Примечание: В ходе рассуждений, неравенство Клаузиуса можно считать известным. 53
40. Диффузия в идеальных газах. Вывод уравнения диффузии и формулы для коэффициента Диффузии.....54
41. Понятие эффективного диаметра молекулы. Вывод формулы для длины свободного пробега молекул идеального газа. 55
42. Основное уравнение МКТ идеального газа (с выводом). Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул (с выводом). 56
43. Первое начало термодинамики в интегральной и дифференциальной форме. Работа, совершаемая телом при изменении объёма (вывод из определения механической работы). Работа идеального газа при изотермическом процессе (вывод из формулы для работы тела при изменении объема). 57

Работа потенциальной силы. Полная механическая энергия. Закон изменения полной механической энергии механической системы. Закон сохранения полной механической энергии

Работа, совершаемая консервативными силами при изменении конфигурации системы, не зависит от того, как было осуществлено это изменение, и определяется только начальной и конечной конфигурациями системы:

$$A_{12} = E_{п1} - E_{п2}, \qquad (1.6.4)$$

здесь потенциальная энергия $E_п(x, y, z)$ – *функция состояния системы, зависящая только от координат всех тел системы в поле консервативных сил.* Из формулы (1.6.4) следует, что работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии: $dA = -dE_п$.

Нет единого выражения для $E_п$. В разных случаях она определяется по-разному.

$$E = U + T = U + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Изменение полной механической энергии системы тел происходит при совершении работы силами, действующими как между телами системы, так и со стороны внешних тел.

Изменение механической энергии ΔE системы тел определяется ***законом изменения полной механической энергии***:

$\Delta E = E_2 - E_1 = A_{внеш} + A_{тр(сопр)}$,

где E_1 — полная механическая энергия начального состояния системы; E_2 — полная механическая энергия конечного состояния системы; $A_{внеш}$ — работа, совершаемая над телами системы *внешними* силами; $A_{тр(сопр)}$ — работа, совершаемая силами трения (сопротивления), действующими *внутри* системы.

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Рассмотрим систему, состоящую из N частиц. Силы взаимодействия между частицами ($\vec{F}^{внутр}$) – консервативные. Кроме внутренних сил, на частицы действуют внешние консервативные и неконсервативные силы, т. е. рассматриваемая система частиц или тел консервативна. Тогда полная энергия этой системы

$$E = K + U_{внутр} + U_{внеш} = \text{const}. \qquad (1.6.11)$$

Для механической энергии ***закон сохранения*** звучит так: *полная механическая энергия консервативной системы материальных точек остаётся постоянной*.

Для *замкнутой системы*, т. е. для системы, на которую не действуют внешние силы, можно записать:

$$E = K + U_{внутр} = \text{const}, \qquad (1.6.12)$$

т. е. ***полная механическая энергия*** замкнутой системы материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы, *остаётся постоянной.*

Радиус-вектор, скорость и ускорение материальной точки. Разложение ускорения на касательную и нормальную составляющие (с выводом).

Радиус-вектор — вектор, задающий положение точки в пространстве относительно некоторой фиксированной точки (начало координат).

Скорость — векторная физическая величина, характеризующая быстроту перемещения и направление движения материальной точки относительно выбранной системы отсчёта.

Ускорение — векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости тела.

Вектор ускорения можно представить в виде суммы двух векторов - вектора $\vec{a}_t$, параллельного вектору скорости и вектора $\vec{a}_n$, перпендикулярного вектору скорости

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n .$$

Вектор ускорения $\vec{a}_t$ называется тангенциальным или касательным ускорением, а вектор ускорения $\vec{a}_n$ называется нормальным (перпендикулярным) ускорением.

Введем единичный вектор для направления скорости $\vec{\tau}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Этот вектор направлен по касательной к траектории в ту же сторону, что и вектор скорости. Тогда для ускорения должно быть

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{\tau}_{\vec{v}} + |\vec{v}|\dot{\vec{\tau}}_{\vec{v}} .$$

В этом выражении первое слагаемое определяет вектор, параллельный вектору скорости, а второе – перпендикулярный (так как $\vec{\tau}_{\vec{v}} \perp \dot{\vec{\tau}}_{\vec{v}}$), поэтому $\vec{a}_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{\tau}_{\vec{v}}$ и $\vec{a}_n = |\vec{v}|\dot{\vec{\tau}}_{\vec{v}}$.

Вектор $\vec{a}_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{\tau}_{\vec{v}}$ (тангенциальное или касательное ускорение) отвечает за изменение модуля вектора скорости. Проекция на направление скорости

Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n = |\vec{v}|\dot{\vec{\tau}}_{\vec{v}}$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\dot{\vec{\tau}}_{\vec{v}}$, т.е. в сторону поворота вектора скорости, следовательно, он отвечает за изменение направления вектора скорости.

Угловые скорость и ускорение твёрдого тела при вращательном движении. Связь угла поворота, угловой скорости и углового ускорения. Связь угловой скорости с линейной. Все аналитические выражения необходимо вывести.

Векторная величина

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \qquad (10.1)$$

(где Δt — время, за которое совершается поворот $\Delta\boldsymbol{\varphi}$) называется угловой скоростью тела[1]). Вектор $\boldsymbol{\omega}$

приращение $\Delta\boldsymbol{\omega}$. Изменение вектора угловой скорости со временем характеризуется величиной

$$\boldsymbol{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \qquad (10.6)$$

которую называют угловым ускорением. Вектор $\boldsymbol{\beta}$, как и $\boldsymbol{\omega}$, является аксиальным.

нулось на угол $\Delta\varphi$ (рис. 34). Точка, находящаяся на расстоянии R от оси, проходит при этом путь Δs, равный

$$\Delta s = R\,\Delta\varphi.$$

Линейная скорость точки по определению будет равна

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} =$$

$$= R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega,$$

т. е.

$$v = \omega R. \qquad (10.9)$$

Рис. 34.

Уравнение изменения импульса механической системы (вывод из законов Ньютона). Закон сохранения импульса (с выводом).

§ 22. Импульс

Уравнению второго закона Ньютона

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{f} \qquad (22.1)$$

можно придать другой вид. Учтя, что масса m в классической механике есть величина постоянная, ее можно внести под знак производной и записать (22.1) следующим образом:

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}=\mathbf{f}.$$

Векторную величину

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v} \qquad (22.2)$$

называют импульсом материальной точки[1]). Воспользовавшись определением импульса, уравнение второго закона можно написать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{f}, \qquad (22.3)$$

а сам закон сформулировать так: *производная импульса материальной точки по времени равна результирующей всех сил, действующих на точку.*

Умножив (22.3) на dt, придем к соотношению:

$$d\mathbf{p}=\mathbf{f}\,dt. \qquad (22.4)$$

интегрирование которого дает приращение импульса за промежуток времени, протекший от момента t_1 до момента t_2:

$$\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1=\int d\mathbf{p}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{f}\,dt. \qquad (22.5)$$

Закон сохранения импульса

времени. Это утверждение представляет собой содержание закона сохранения импульса, который формулируется следующим образом: *импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным.*

Пусть система состоит из трех тел (рис. 51). Каждой из внутренних сил, например $\mathbf{f}_{12}$, т. е. силе, с которой на тело *1* воздействует тело *2*, соответствует сила $\mathbf{f}_{21}$, с которой тело *1* воздействует на тело *2*, причем по третьему закону Ньютона $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$. Символами $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_3$ обозначены результирующие всех сил, с которыми внешние тела воздействуют соответственно на 1-е, 2-е и 3-е тело системы.

Рис. 51.

Напишем для каждого из трех тел уравнение (22.3)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_1 = \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{13} + \mathbf{F}_1,$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_2 = \mathbf{f}_{21} + \mathbf{f}_{23} + \mathbf{F}_2,$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_3 = \mathbf{f}_{31} + \mathbf{f}_{32} + \mathbf{F}_3.$$

Сложим все три уравнения вместе. Сумма внутренних сил будет равна нулю, вследствие чего

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) = \frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3. \qquad (23.4)$$

При отсутствии внешних сил получается, что

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = 0,$$

следовательно, для замкнутой системы $\mathbf{p}$ постоянен.

времени. Это утверждение представляет собой содержание закона сохранения импульса, который формулируется следующим образом: *импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным.*

точки, на внутренние и внешние. Результирующий момент внутренних сил, действующих на i-ю материальную точку, обозначим символом $\mathbf{M}'_i$, результирующий момент внешних сил, действующих на ту же точку, — символом $\mathbf{M}_i$. Тогда уравнение (37.6) для i-й материальной точки будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_i = \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Это выражение представляет собой совокупность N уравнений, отличающихся друг от друга значениями индекса i. Сложив эти уравнения, получим:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}'_i + \sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}_i. \qquad (37.9)$$

Величина

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{N}[\mathbf{r}_i,\ \mathbf{p}_i] \qquad (37.10)$$

называется моментом импульса системы материальных точек.

Момент импульса материальной точки и механической системы. Уравнение моментов механической системы (вывод из законов Ньютона). Закон сохранения момента импульса механической системы (вывод из уравнения моментов).

Аналогично моменту силы определяется момент импульса (момент количества движения) материальной точки. Момент импульса относительно точки O равен

$$\mathbf{L} = [\mathbf{rp}] = m\,[\mathbf{rv}], \qquad (37.1)$$

точки, на внутренние и внешние. Результирующий момент внутренних сил, действующих на i-ю материальную точку, обозначим символом $\mathbf{M}'_i$, результирующий момент внешних сил, действующих на ту же точку, — символом $\mathbf{M}_i$. Тогда уравнение (37.6) для i-й материальной точки будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_i = \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Это выражение представляет собой совокупность N уравнений, отличающихся друг от друга значениями индекса i. Сложив эти уравнения, получим:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}'_i + \sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}_i. \qquad (37.9)$$

Величина

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{N}[\mathbf{r}_i,\ \mathbf{p}_i] \qquad (37.10)$$

называется моментом импульса системы материальных точек.

Уравнение моментов

временем. Для этого продифференцируем (37.1) по времени t, воспользовавшись правилом дифференцирования произведения:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}\mathbf{p}] = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{p}\right] + \left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right]. \quad (37.5)$$

Первое слагаемое 0

направлению с вектором $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Вектор $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ по второму закону Ньютона равен действующей на тело силе $\mathbf{f}$ [см. (22.3)]. Следовательно, выражение (37.5) можно написать так:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{r}\mathbf{f}] = \mathbf{M}, \quad (37.6)$$

где $\mathbf{M}$ — момент приложенных к материальной точке сил, взятый относительно той же точки O, относительно которой берется момент импульса $\mathbf{L}$.

Сумма моментов внутренних сил [первая из сумм в правой части формулы (37.9)], как было показано в конце § 36, равна нулю. Следовательно, обозначив суммарный момент внешних сил символом $\mathbf{M}$, можно написать, что

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i = \mathbf{M} \quad (37.11)$$

[в символы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ в этой формуле вложен иной смысл, чем в такие же символы в формуле (37.6)].

Для замкнутой системы материальных точек $\mathbf{M} = 0$, вследствие чего суммарный момент импульса $\mathbf{L}$ не зависит от времени. Таким образом, мы пришли к закону сохранения момента импульса: *момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным.*

Момент инерции Твердого тела относительно оси. Момент Инерции стержня относительно перпендикулярной ему оси, проходящей через его центр (с выводом).

Физическая величина

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2, \qquad (38.2)$$

равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты их расстояний от оси z, называется моментом инерции системы материальных точек относительно оси z (отдельно взятое слагаемое $m_i R_i^2$ представляет собой момент инерции i-й материальной точки относительно оси z).

3) *Момент инерции тонкого стержня* относительно оси z, являющейся срединным перпендикуляром. Масса стержня m, длина L.

Выделим на расстоянии x от оси маленькую часть стержня длиной dx.

Масса этой части $dm = \frac{m}{L}dx$ и $r_\perp = x$. Поэтому

$$I_z = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{m}{3L}\frac{2L^3}{8} = \frac{mL^2}{12}.$$

Работа силы (определение для общего случая). Кинетическая энергия. Связь работы и изменения кинетической энергии (с выводом). Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (с выводом).

$$A = fs\cos\alpha. \qquad (24.2)$$

Работа — алгебраическая величина. Если сила и направление перемещения образуют острый угол ($\cos\alpha > 0$), работа положительна. Если угол α — тупой ($\cos\alpha < 0$), работа отрицательна. При $\alpha = \pi/2$ работа равна нулю. Последнее обстоятельство особенно

Кинетическая энергия. Пусть тело *1* (имеется в виду материальная точка) массы m, движущееся со скоростью $\mathbf{v}$, действует на соприкасающееся с ним тело *2* с силой $\mathbf{f}$ (рис. 61). За время dt точка приложения силы получит перемещение $d\mathbf{s} = \mathbf{v}\,dt$, вследствие чего тело *1* совершит над телом *2* работу

Рис. 61.

$$dA = \mathbf{f}\,d\mathbf{s} = \mathbf{f}\mathbf{v}\,dt. \qquad (27.1)$$

Очевидно, что в данном случае тело *1* совершает работу над другим телом за счет запаса энергии, которой оно обладает в силу своего движения, т. е. за счет запаса кинетической энергии T (если бы тело *1* не двигалось, было бы равно нулю перемещение $d\mathbf{s}$, а следовательно, и работа dA). Поэтому совершенную телом *1* работу можно приравнять убыли[1]) его кинетической энергии:

$$dA = -dT.$$

но сказать, что кинетическая энергия — это энергия движения, а потенциальная — энергия положения.

Вращение тела вокруг неподвижной оси. Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси, которую мы назовем осью z. Линейная скорость элементарной массы Δm_i может быть представлена в виде

$$v_i = R_i \omega,$$

где R_i — расстояние Δm_i от оси z. Следовательно, кинетическая энергия i-й элементарной массы равна

$$\Delta T_i = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \Delta m_i R_i^2 \omega^2.$$

Кинетическая энергия тела слагается из кинетических энергий его частей:

$$T = \sum \Delta T_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m_i R_i^2.$$

Сумма в правой части этого соотношения представляет собой момент инерции тела I_z относительно оси вращения. Таким образом, кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2}. \qquad (40.1)$$

Консервативные силы. Работа в потенциальном поле. Связь между силой и потенциальной энергией. Выражение для нахождения силы в случае известной зависимости потенциальной энергии от координат. Все аналитические выражения необходимо вывести.

Консервативные силы — это силы, для которых работа, совершаемая ими над телом, не зависит от пути, а определяется начальными и конечным положениями тела в пространстве. В этом случае поле сил называется потенциальным.

Консервативными силами являются:

- Сила всемирного тяготения. Она зависит только от расстояния между телами.
- Сила тяжести. Она является частным случаем силы всемирного тяготения.
- Сила кулоновского взаимодействия.
- Сила упругости.

Для каждой из консервативных сил можно определить **потенциальную энергию**.

Потенциальная энергия для консервативной силы - это физическая величина, зависящая только от положения точки (тела) относительно других тел, уменьшение которой равно работе соответствующей силы, действующей на точку (тело).

$$W_{\text{ПОТЕНЦ_НАЧАЛЬНАЯ}} - W_{\text{ПОТЕНЦ_КОНЕЧНАЯ}} = A$$

Поскольку в определении сказано о разности энергий, то энергию можно определить несколько «произвольным образом» - к определяющим соотношениям можно прибавить любую постоянную величину C, которая при взятии разности пропадет:

$$\left(W_{\text{П_НАЧ}} + C\right) - \left(W_{\text{П_КОН}} + C\right) = A\,.$$

Таким образом, потенциальная энергия определена с точностью до константы. Поэтому нельзя говорить об абсолютном значении потенциальной энергии без указания «начала отсчета» - точки, где указано конкретное значение энергии.

Работа консервативной силы не зависит от пути, вдоль которого двигалось тело, а только от него начального и конечного положений. Следовательно, работа консервативной силы по замкнутому пути равна нулю.

$$\int\limits_{Путь} \left(\vec{F}, d\vec{l}\right) = W_{ПОТ}^{НАЧ} - W_{ПОТ}^{КОН}\,.$$

Для замкнутого пути начальная и конечная равны, следовательно разность 0, чтд.

Работа консервативной силы $\vec{F}$ при перемещении между этими точками

$$A \approx F_x dx + F_y dy + F_z dz = W_{ПОТ}^{НАЧ} - W_{ПОТ}^{КОН} = -\left(W_{ПОТ}^{КОН} - W_{ПОТ}^{НАЧ}\right).$$

Но изменение потенциальной энергии при перемещении между точками можно записать в виде

$$W_{ПОТ}^{КОН} - W_{ПОТ}^{НАЧ} \approx \left(gradW, d\vec{r}\right) = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz .$$

или

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial W}{\partial x}dx - \frac{\partial W}{\partial y}dy - \frac{\partial W}{\partial z}dz$$

Так как вектор $d\vec{r} = \left(dx, dy, dz\right)$ произвольный, то поэтому $F_x = -\frac{\partial W}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial W}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial W}{\partial z}$, т.е. для консервативной силы должно выполняться равенство

$$\vec{F} = -gradW .$$

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести (в общем случае) и для однородного поля (с выводом).

2) Для силы тяжести $F_T=mg$ потенциальная энергия $W_П = mgh$

Здесь высота h определяется выбором начала отсчета энергии.

Проверим соотношение $\vec{F} = -gradW$.

В системе отсчёта, связанной с землёй , введем систему координат так, чтобы ось z была направлена вверх (против вектора силы тяжести), тогда потенциальная энергия тела равна $W_П = mgz + C$, где C определяется началом отсчета координаты z.

Эквипотенциальная поверхность – горизонтальная плоскость z=const , поэтому вектор силы должен быть направлен ей перпендикулярно, т.е. вертикально. Величина энергии увеличивается вверх, поэтому вектор силы должен быть направлен вниз. Действительно, $F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = 0$, $F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} = 0$,

$F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} = -mg$. Т.е. вектор силы $\vec{F} = (0,0,-mg)$ в этой системе координат действительно направлен вертикально вниз.

Хз про однородное поле

Первое начало термодинамики (формулировка). Работа, совершаемая телом при изменении объёма (вывод из определения механической работы). Работа идеального газа при изотермическом процессе (вывод из формулы для работы тела при изменении объёма).

Количество тепла, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы

Рис. 213.

и на совершение системой работы над внешними телами.

Перемещение точек приложения сил взаимодействия со провождается изменением объема тела. Следовательно, работа, совершаемая данным телом над внешними телами, может быть выражена через давление и изменения объема тела.

Пусть газ заключен в цилиндрический сосуд, закры тый плотно пригнанным легко скользящим поршнем (рис. 213). Если по каким-либо причинам газ станет расширяться, он будет перемещать поршень и совершать над ним работу. Элементарная работа, совершаемая газом при перемещении поршня на отрезок дельтаh равна

$$\Delta' A = f\,\Delta h,$$

где f — сила, с которой газ действует на поршень. Заменяя эту силу произведением давления газа *p* на площадь поршня *S,* получаем:

$$\Delta' A = pS\,\Delta h.$$

Но Sдельтаh представляет собой приращение объема газа дельтаV. Поэтому выражение для элементарной работы мож но записать следующим образом:

$$\Delta' A = p\,\Delta V.$$

Если давление газа остается постоянным (для этого должна одновременно изменяться соответствующим образом температура), работа, совершаемая при изменении объема от значения V1 до значения V2, будет равна

$$A_{12} = p\,(V_2 - V_1).$$

Если же при изменении объема давление не остается постоянным, формула справедлива только для достаточно малых дельтаV. В этом случае работа, совершаемая при конечных изменениях объема, должна вычисляться как сумма элементарных работ вида, т. е. путем интегрирования:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV.$$

3) **Изотермический процесс** – процесс изменения состояния газа, при котором температура газа остается постоянной T=const. Для изотермического процесса $pV = \text{const}$.

Так как температура газа постоянная, то изменение внутренней энергии равно нулю $\Delta U = 0$ и все подводимое к газу тепло расходуется на совершение газом работы: $Q=A$.
Работа газа в изотермическом процессе

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT\, ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Теплоемкость газа в этом процессе не определена (говорят, что теплоемкость изотермического процесса бесконечно большая).

Вывод νRT/V:

Т.к. концентрация молекул $n = \frac{N}{V}$, полное число молекул $N = \nu N_A$, постоянная Больцмана $k = \frac{R}{N_A}$, то получаем уравнение $p = \frac{\nu N_A}{V}\frac{R}{N_A}T$ или

$$pV = \nu RT\ .$$

Это уравнение Менделеева-Клапейрона, справедливое для идеального газа. Следовательно, ме-

Импульс тела. Импульс механической системы. Уравнение изменения импульса механической системы (вывод из законов Ньютона). Закон сохранения импульса (с выводом).

См вопрос 4.

Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний (вывод на примере пружинного маятника или любой другой колебательной системы квазиупругой силой). Его решение.

Колебания – движения или состояния, параметры которых повторяются во времени. Колебания в той или иной мере встречаются во всех явлениях природы: от пульсации излучения звезд, движения планет до внутриклеточных процессов или колебаний атомов и молекул, колебаний полей.

Свободными называют колебания, происходящие в отсутствии внешних воздействий на систему, совершающую колебания. Они появляются в результате однократного (при) действия на колебательную систему, которое выводит ее из состояния равновесия.

Гармонические колебания — это такие колебания, при которых колеблющаяся величина (например, отклонение маятника) изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

Если сила оказывается равной -kx, где k — постоянная положительная величина, то ее принято называть **квазиупругой**.

В случае упругих колебаний возвращающая сила F = –kx. Если нет других сил, кроме упругой силы, то колебания называют свободными. Согласно второму закону Ньютона

$$ma = \sum_{i=0}^{n} F_i = F_{упр} = -kx,$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Разделим оба слагаемых на m:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (7.7)$$

Последнее соотношение носит название основного уравнения гармонических свободных колебаний. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right),$$

в чем легко убедиться подстановкой x в исходное дифференциальное уравнение.

Математический и физический маятники. Вывод формул для их собственных частот.

Рис. 169.

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке. (Небольшой тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити) Отклонение маятника от положения равновесия характеризуется углом ϕ, образованным нитью с вертикалью (рис.169). При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент M=-mgl sinφ, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия.

(m – масса, l – длина маятника).

Напишем для маятника уравнение динамики вращательного движения. Обозначив угловое ускорение через $\ddot{\varphi}$ и учитывая, что момент инерции маятника равен ml^2, получаем:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi.$$

Последнее уравнение можно привести к виду

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \qquad (66.2)$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний. В этом случае можно положить $\sin\varphi \approx \varphi$. Введя, кроме того, обозначение

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2, \qquad (66.3)$$

мы придем к следующему уравнению:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \qquad (66.4)$$

которое идентично с уравнением (62.6) для шарика, подвешенного на пружине. Его решение имеет вид

$$\varphi = a\cos(\omega_0 t + \alpha). \qquad (66.5)$$

(P.s. ω0 – собственная частота маятника)

Следовательно, при малых колебаниях угловое отклонение математического маятника изменяется со временем по гармоническому закону. Как следует из (66.3), частота колебаний математического маятника зависит только от длины маятника и от ускорения

силы тяжести и не зависит от массы

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \qquad (62.8)$$

маятника.

По формуле (62.8) с учетом (66.3) получается известное из школьного курса выражение

для периода колебаний математического маятника: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания вокруг неподвижной точки, не совпадающей с его центром инерции. При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент M=-mgl sin φ, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия.

Обозначив момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, буквой I, можно написать:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi. \qquad (67.2)$$

Рис. 170.

В случае малых колебаний (67.2) переходит в уже известное нам уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \qquad (67.3)$$

Через ω_0^2 обозначена в данном случае следующая величина:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}. \qquad (67.4)$$

Из уравнений (67.3) и (67.4) следует, что при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания, частота которых зависит от массы маятника, момента инерции маятника относительно оси вращения и расстояния между осью вращения и центром инерции маятника. В соответствии с (67.4) период колебания физического маятника определяется выражением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}. \qquad (67.5)$$

Из сопоставления формул (66.6) и (67.5) получается, что математический маятник с длиной

$$l_{пр} = \frac{I}{ml} \qquad (67.6)$$

будет иметь такой период колебаний, как и данный физический маятник. Величину (67.6) называют **приведенной длиной** физического маятника.

Приведенная длина физического маятника — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

Центр качания - точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром инерции, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения. (см. точку O' на рис. 170).

Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний одинакового направления равных частот.

Рис. 171.

Векторная диаграмма – графическое изображение колебаний в виде векторов на плоскости.

Если привести вектор длины а во вращение с угловой скоростью ω0, то проекция конца вектора будет перемещаться по оси х в пределах от —а до + а, причем координата этой проекции будет изменяться со временем по закону

Т.е., гармоническое колебание может быть задано с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью х угол, равный начальной фазе колебания.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты. Смещение х колеблющегося тела будет суммой смещений хх и х% которые запишутся

наковой частоты. Смещение x колеблющегося тела будет суммой смещений x_1 и x_2, которые запишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \\ x_2 &= a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \end{aligned}\right\} \qquad (69.1)$$

Представим оба колебания с помощью векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ (рис. 172). Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор $\mathbf{a}$. Легко видеть, что проекция этого вектора на ось x равна сумме проекций слагаемых векторов:

$$x = x_1 + x_2.$$

Следовательно, вектор $\mathbf{a}$ представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же

следующим образом:

угловой скоростью ω_0, как и векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой ω_0, амплитудой a и начальной фазой α. Из построения видно, что

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] =$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \qquad (69.2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}. \qquad (69.3)$$

Сложение гармонических колебаний одинакового направления близких (но не равных) частот. Биения. Все аналитические выражения необходимо вывести.

Обозначим частоту одного из колебаний буквой ω, частоту второго колебания через $\omega + \Delta\omega$. По условию $\Delta\omega \ll \omega$. Амплитуды обоих колебаний будем полагать одинаковыми и равными a. Поскольку частоты колебаний несколько отличны, всегда можно выбрать начало отсчета времени так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю.

Тогда уравнения обоих колебаний будут иметь следующий вид:

$$x_1 = a\cos\omega t,$$
$$x_2 = a\cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

Складывая эти два выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем:

$$x = x_1 + x_2 = \left(2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t \qquad (70.1)$$

(во втором множителе пренебрегаем членом $\Delta\omega/2$ по сравнению с ω).

График функции (70.1) изображен на рис. 173, *а*. График построен для $\frac{\omega}{\Delta\omega} = 10$.

Заключенный в скобки множитель в формуле (70.1) изменяется гораздо медленнее, чем второй множитель.

(Савельев)Колебание (70.1) - гармоническое колебание частоты ω с пульсирующей амплитудой. Такое колебание называется биениями.

(Лекции)Таким образом, при сложении колебаний близких частот возникает периодическое изменение амплитуды и скачкообразное изменение фазы результирующего колебания – явление, которое называется биением

$$\text{амплитуда} = \left|2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|. \qquad (70.2)$$

Аналитическое выражение амплитуды:

График амплитуды показан на рис. 173,6.

Рис. 173.

Свободные затухающие колебания. Дифференциальное уравнение (вывод на примере любой колебательной системы с вязким трением и квазиупругой силой). Его решение. Частота свободных затухающих колебаний.

Рассмотрим движение тела в вязкой среде под действием квазиупругой силы вблизи положения равновесия (например, движение поршня на невесомой пружине). Будем считать, что сила сопротивления пропорциональна скорости тела:

$\vec{F}_{СОПР} = -r \cdot \vec{v}$, где r – коэффициент сопротивления (Н·с/м)

Уравнение движения поршня можно записать в виде $ma = -kx - rv$ или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

где введены обозначения $2\beta = \frac{r}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Это уравнение называется *уравнением свободных затухающих колебаний.*

Будем искать решение уравнения свободных затухающих колебаний в виде $x = e^{\lambda t}$. Подставив в уравнение и, сокращая, получаем *характеристическое* уравнение

$$\lambda^2 + 2\beta \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения $D = 4\beta^2 - 4\omega_0^2$,

значения корней $\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

Поэтому решение уравнения должно иметь вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} = e^{-\beta t}\left(C_1 e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}\right),$$

где C_1 и C_2 – постоянные коэффициенты.

Воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$, где $i = \sqrt{-1}$.

При $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$ решение не описывает колебания.

Колебания будут наблюдаться, если $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$. Введем обозначение $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$.

Тогда $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-\omega^2} = i \cdot \omega$ и решение уравнения примет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi).$$

Оно описывает *свободные колебания* циклической частоты ω, *затухающие* с течением времени. Циклическая частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, период $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$.

Величина $A = A_0 e^{-\beta t}$ является *амплитудой затухающих колебаний.*

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Зависимость амплитуды Вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы (с выводом)

Вынужденными называются такие колебания, которые возникают в колебательной системе под действием внешней периодически изменяющейся силы (вынуждающей силы).

Рассмотрим движение тела в вязкой среде вблизи положения равновесия под действием квазиупругой силы и некоторой периодической силы. Пусть это сила изменяется со временем по гармоническому закону:

$$f = F_0 \cos \omega t. \qquad (75.1)$$

Второй закон Ньютона $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t$ перепишем в виде:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \qquad (75.2)$$

где $f_0 = \frac{F_0}{m}$, $\beta = \frac{r}{2m}$ — коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — собственная частота колебаний системы.

Это уравнение называется уравнением вынужденных колебаний. Решением этого обыкновенного дифференциального уравнения является сумма решений однородного и частного решения неоднородного уравнений. Однородное уравнение $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ является уравнением свободных затухающих колебаний.

Предположим, что частное решение имеет вид:

$$x = a \cos(\omega t - \varphi) \qquad (75.4)$$

Дифференцируя (75.4) по времени, первые два члена уравнения (75.2) можно представить в виде:

$$2\beta\dot{x} = -2\beta\omega a \sin(\omega t - \varphi) = 2\beta\omega a \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (75.5)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 a \cos(\omega t - \varphi + \pi). \qquad (75.6)$$

Как следует из (75.2), гармоническое колебание $f_0 \cos \omega t$ является суммой трех гармонических колебаний той же частоты: колебания (75.6), колебания (75.5) и колебания $\omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t - \varphi)$. Если изобразить последнее колебание вектором длины $\omega_0^2 a$, направленным

Рис. 187.

вправо (рис. 187), то колебание (75.5) изобразится вектором длины $2\beta\omega a$, повернутым относительно вектора $\omega_0^2 x$ против часовой стрелки на угол $\pi/2$, а колебание (75.6) — вектором длины $\omega^2 a$, повернутым относительно вектора $\omega_0^2 x$ на угол π. Чтобы уравнение (75.2) было удовлетворено, векторная сумма перечисленных трех векторов должна совпадать с вектором, изображающим колебание $f_0 \cos \omega t$. Такое совпадение возможно лишь при значении амплитуды a, которое определяется условием (см. рис. 187, *а*)

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 a^2 + 4\beta^2 \omega^2 a^2 = f_0^2,$$

откуда

$$a = \frac{f_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \qquad (75.7)$$

Как следует из (75.2), гармоническое колебание $f_0 \cos \omega t$ является суммой трех гармонических колебаний той же частоты: колебания (75.6), колебания (75.5) и колебания $\omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t - \varphi)$. Если изобразить последнее колебание вектором длины $\omega_0^2 a$, направленным

Рис. 187.

вправо (рис. 187), то колебание (75.5) изобразится вектором длины $2\beta\omega a$, повернутым относительно вектора $\omega_0^2 x$ против часовой стрелки на угол $\pi/2$, а колебание (75.6) — вектором длины $\omega^2 a$, повернутым относительно вектора $\omega_0^2 x$ на угол π. Чтобы уравнение (75.2) было удовлетворено, векторная сумма перечисленных трех векторов должна совпадать с вектором, изображающим колебание $f_0 \cos \omega t$. Такое совпадение возможно лишь при значении амплитуды a, которое определяется условием (см. рис. 187, *а*)

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 a^2 + 4\beta^2 \omega^2 a^2 = f_0^2,$$

откуда

$$a = \frac{f_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \qquad (75.7)$$

Рис. 187, *а* отвечает случаю $\omega < \omega_0$. Из рис. 187, *б*, соответствующего случаю $\omega > \omega_0$, получается такое же значение a.

Время релаксации, логарифмический декремент затухания и добротность колебательной системы. Вывод формул для нахождения этих величин. Связь добротности с убылью энергии (с Выводом).

Временем *релаксации* называется время, за которое амплитуда убывает в *e* раз.

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e,\ e^{\beta\tau} = e, \text{ откуда } \tau = \frac{1}{\beta}.$$

Величина $A = A_0 e^{-\beta t}$ является *амплитудой затухающих колебаний*.

Декремент затухания – отношение амплитуд колебаний спустя период

$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}.$$

Логарифмический декремент затухания $\delta = ln\,\Delta = \beta T$. Поэтому $N_e = \frac{1}{\delta}$.
Величина $Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta}$ называется *добротностью колебательной системы*.

Энергию колебаний в момент времени *t* можно определить как $W = \frac{kA^2}{2} = \frac{kA_0{}^2 e^{-2\beta t}}{2}$.

Убыль энергии за один период $W_1 - W_2 = \frac{kA_0{}^2 e^{-2\beta t}}{2} - \frac{kA_0{}^2 e^{-2\beta(t+T)}}{2} = \frac{kA_0{}^2 e^{-2\beta t}}{2}\left(1 - e^{-2\beta T}\right)$.

Рассмотрим отношение запасенной энергии к убыли энергии за один период колебаний

$$\frac{W}{W_1 - W_2} = \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}}.$$

При малом логарифмическом декременте затухания $\delta = \beta T << 1$ воспользуемся разложением
$1 - e^{-2\beta T} = 1 - (1 - 2\beta T + \ldots) \approx 2\beta T$. Т.к, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ и при малых β можно приближенно считать $\omega \approx \omega_0$, то

$$\frac{W}{W_1 - W_2} = \frac{1}{2\beta T} = \frac{1}{2\beta\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{2\beta 2\pi} = \frac{Q}{2\pi}.$$

Для затухающих свободных колебаний добротность характеризует скорость убывания энергии при малых затуханиях.

Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний одинакового направления равных частот.

Векторная диаграмма.

Рассмотрим радиус-вектор точки М, вращающейся вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью ω. Угол между радиус-вектором и осью X меняется с течением времени по закону $\varphi = \omega t + \varphi_0$, где φ_0 – его начальное значение. Пусть длина радиус-вектора |OM| =A. Координаты точки М:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),\ y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

описывают колебания осцилляторов вдоль осей X и Y.

Данная форма представления колебаний называется амплитудной (векторной) диаграммой.

Рассмотрим сложение двух колебаний одного направления: пусть два осциллятора совершают колебания вдоль оси X с циклическими частотами w1 и w2.

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) \text{ и } x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Зададим эти колебания на векторной диаграмме с помощью векторов.

1-е колебание задаётся вектором $\vec{A}_1$, который вращается вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью ω_1, угол вращения меняется по закону $\varphi_1 = \omega_1 t + \alpha_1$.

2-е колебание задаётся вектором $\vec{A}_2$, соответственно, угол $\varphi_2 = \omega_2 t + \alpha_2$.

Тогда результирующему колебанию $x_\Sigma = x_1 + x_2$ сопоставим вектор $\vec{A}_\Sigma = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ с фазой $\varphi_\Sigma = \omega_\Sigma t + \alpha_\Sigma$

По теореме косинусов

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - \delta)$$

Учтем, что $\cos(\pi - \delta) = -\cos\delta$,

$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1$, тогда

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\big((\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1\big)$$

$tg\varphi_\Sigma = \frac{y_\Sigma}{x_\Sigma} = \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$ или $tg(\omega_\Sigma t + \alpha_\Sigma) = \frac{A_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+A_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2)}{A_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2)}$.

Соответственно, $tg(\alpha_\Sigma) = \frac{A_1\sin(\alpha_1)+A_2\sin(\alpha_2)}{A_1\cos(\alpha_1)+A_2\cos(\alpha_2)}$.

1) Пусть $A_1 = A_2 := A$, $\omega_1 = \omega_2 := \omega$. Тогда $A_\Sigma^2 = 2A^2 + 2A^2\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 2A^2(1 + \cos(\alpha_2 - \alpha_1))$.

Амплитуда результирующего колебания в этом случае не зависит от времени.

Если разность начальных фаз колебаний $\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi n$, где n – целое число, то наблюдается усиление колебаний $A_\Sigma = 2A$.

Если разность начальных фаз колебаний $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi + 2\pi n$, где n – целое число, то колебания гасят друг друга $A_\Sigma = 0$.

Для вывода формулы результирующего колебания воспользуемся соотношением $\cos\beta_1 + \cos\beta_2 = 2\cos\left(\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta_2+\beta_1}{2}\right)$, поэтому, учитывая четность косинуса:

$$x_\Sigma = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right)$$

Амплитудой должно быть выражение, не зависящее от времени, но амплитуда не может быть отрицательной величиной, следовательно

$$A_\Sigma = 2A\left|\cos\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)\right|,$$

Тогда

$$x_\Sigma = 2A\left|\cos\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)\right|\cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2+\alpha_1}{2} + \theta\right).$$

Если $\cos\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right) > 0$, то $\theta = 0$, если $\cos\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right) < 0$ то $\theta = \pi$.

Уравнение Плоской гармонической волны. Характеристики волны: период, частота, Длина волны, волновое число и волновой вектор. Единицы измерения этих величин в си. Уравнение сферической волны (без вывода)

Уравнение плоской волны

Найдем вид функции ξ в случае плоской волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер.

Пусть колебание точек, лежащих в плоскости $x = 0$, имеет вид (при начальной фазе $\varphi = 0$)

$$\xi = \xi(0, t) = A\cos\omega t. \qquad (2.4.4)$$

Найдем вид колебания частиц в плоскости, соответствующей произвольному значению x. Чтобы пройти путь x, необходимо время $\tau = x/\upsilon$. *Следовательно*, колебания частиц в плоскости x будут отставать по времени на τ от колебаний частиц в плоскости $x = 0$, т. е.

$$\xi(x, t) = A\cos\omega(t - \tau) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) \qquad (2.4.5)$$

– это ***уравнение плоской волны*** (рис. 2.4.3).

Длиной волны называют кратчайшее пространственное расстояние между ее точками, совершающими колебания в одной фазе. Обозначают длину волны, чаще всего буквой . Измеряется в [м].

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi}{k}$$

Период – это промежуток времени, за который волна пробегает путь, равный своей длине. Измеряется в [с].

Частота – это число колебаний за одну секунду. Измеряется в [Гц].

Волновое число — это отношение 2π радиан к длине волны. Измеряется в [м$^{-1}$].

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\nu T} = \frac{\omega}{\nu}$$

Волновой вектор — вектор, направление которого перпендикулярно фазовому фронту бегущей волны, а абсолютное значение равно волновому числу. Измеряется в [м$^{-1}$].

$$\vec{k} = k \cdot \vec{n} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \vec{n},$$

где k – волновое число,
$\vec{n}$ – единичный вектор,
перпендикулярный к фронту волны.

Уравнение сферической волны:

$$\xi = \frac{a}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)$$

где a — постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице. Размерность a равна размерности амплитуды, умноженной на размерность длины (размерность r).

Одномерное волновое уравнение для продольной упругой волны в твёрдом теле (с выводом). Общий вид волнового уравнения (без вывода).

Уравнение плоской волны

Найдем вид функции ξ в случае плоской волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер.

Пусть колебание точек, лежащих в плоскости $x = 0$, имеет вид (при начальной фазе $\varphi = 0$)

$$\xi = \xi(0, t) = A\cos\omega t. \qquad (2.4.4)$$

Найдем вид колебания частиц в плоскости, соответствующей произвольному значению x. Чтобы пройти путь x, необходимо время $\tau = x/\upsilon$. *Следовательно*, колебания частиц в плоскости x будут отставать по времени на τ от колебаний частиц в плоскости $x = 0$, т. е.

$$\xi(x, t) = A\cos\omega(t - \tau) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) \qquad (2.4.5)$$

– это ***уравнение плоской волны*** (рис. 2.4.3).

Таким образом, ξ есть ***смещение*** любой из точек с координатой x в момент времени t. При выводе мы предполагали, что амплитуда колебания $A = \text{const}$. Это будет, если энергия волны не поглощается средой.

Такой же вид уравнение (2.4.5) будет иметь, если колебания распространяются вдоль оси y или z.

В общем виде уравнение плоской волны *записывается так*:

$$\xi = A\cos\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right), \text{ или } \xi = A\cos\omega\left[\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right) + \varphi\right]. \qquad (2.4.6)$$

Выражения (2.4.5) и (2.4.6) есть ***уравнения бегущей волны***.

Уравнение волны можно записать и в другом виде.

Введем ***волновое число*** $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, или в векторной форме

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n},$$

где $\vec{k}$ – волновой вектор; $\vec{n}$ – нормаль к волновой поверхности.

Так как $\lambda = \upsilon T$, то $k = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{2\pi\nu}{\upsilon} = \frac{\omega}{\upsilon}$. Отсюда $\upsilon = \frac{\omega}{k}$. Тогда ***уравнение плоской волны*** запишется так:

$$\xi = A\cos(\omega t - kx).$$

Общий вид волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Объёмная плотность энергии упругой волны (вывод на примере плоской продольной волны). Вектор Умова (вектор плотности потока энергии).

Энергия, переносимая волной

Рассмотрим выделенный участок стержня длиной Δx. При колебаниях скорость этого участка $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ и величина деформации $\frac{\partial \xi}{\partial x}$. Соответственно, кинетическая и потенциальные энергии выделенного участка равны $W_K = \frac{1}{2}\rho S \Delta x \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2$ и $W_П = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 S\Delta x$. Объем участка $V = S\Delta x$. Объемная плотность механической энергии $w = \frac{W_K + W_П}{V} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$.

Если уравнение движения волны записать в виде $\xi = A\cos(\omega t - kx + \alpha)$, то с учетом соотношений для скорости $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kx + \alpha)$ и деформации $\frac{\partial \xi}{\partial x} = kA\sin(\omega t - kx + \alpha)$ получается

$w = \rho \cdot \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) + \frac{1}{2}E \cdot k^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)$или

$$w = (\rho \cdot \omega^2 + E \cdot k^2)\frac{1}{2}A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha).$$

Используем выражение для скорости волны $v^2 = \frac{E}{\rho} = \frac{\omega^2}{k^2}$:

$$w = \rho \cdot \omega^2\left(1 + \frac{E}{\rho}\frac{k^2}{\omega^2}\right)\frac{1}{2}A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) = \rho \cdot \omega^2 2\frac{1}{2}A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)$$

$$w = \frac{\rho \cdot \omega^2 A^2}{2}(1 - \cos(2[\omega t - kx + \alpha])).$$

Среднее значение плотности потока энергии, переносимой волной

$$\langle w \rangle = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t}\int_0^t \frac{\rho \cdot \omega^2 A^2}{2}(1 - \cos(2[\omega t - kx + \alpha]))dt\right] = \frac{\rho \cdot \omega^2 A^2}{2}$$

Вектор Умова

Пусть энергия переносится со скоростью $\vec{v}$ в направлении под углом α к нормали некоторой малой площадки S. Тогда вся энергия, прошедшая через эту площадку за малое время dt окажется в области, объем которой $dV = S \cdot V \cdot \cos\alpha \cdot dt$ (на рисунке эта область является косым цилиндром). Если объемная плотность энергии равна w, то энергия этого объема

$$W = w \cdot dV = w \cdot S \cdot V \cdot \cos\alpha \cdot dt$$

Мощность переноса энергии через площадку S:

$$\frac{dW}{dt} = w \cdot S \cdot V \cdot \cos\alpha.$$

Введем вектор плотности потока энергии (Вектор Умова)

$$\vec{j} = w \cdot \vec{v},$$

тогда $\frac{dW}{dt} = j \cdot S \cdot \cos\alpha$. Если ввести вектор $\vec{S} = \vec{n} \cdot S$, направленный по нормали к площадке, и скалярное произведение $j \cdot S \cdot \cos\alpha = (\vec{j}, \vec{S})$ определить как поток вектора Умова через площадку S, то *мощность переноса энергии через площадку определяется потоком вектора Умова через эту площадку* $\frac{dW}{dt} = (\vec{j}, \vec{S})$.

Стоячая волна. Уравнение стоячей волны (вывод из уравнения бегущей волны). Узлы и пучности

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\xi_1 = a\cos(\omega t - kx),$$

$$\xi_2 = a\cos(\omega t + kx).$$

Складывая вместе оба уравнения и преобразовывая результат по формуле для суммы косинусов, получаем:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2a\cos kx\cos\omega t.$$

Заменив волновое число k его значением $2\pi/\lambda$, выражению для ξ можно придать следующий вид:

$$\xi = \left(2a\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos\omega t. \qquad (84.1)$$

Уравнение (84.1) и есть уравнение стоячей волны. Из него видно, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты, что и у встречных волн, причем амплитуда оказывается зависящей от x:

$$\text{амплитуда} = \left|2a\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|.$$

В точках, где

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (84.2)$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения $2a$. Эти точки называются **пучностями** стоячей волны. Из условия (84.2) получаются значения координат пучностей:

$$x_{\text{пучн}} = \pm n\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (84.3)$$

В точках, где

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (84.2$$

амплитуда колебаний достигает максимального значени 2a. Эти точки называются **пучностями** стоячей вол ны. Из условия (84.2) получаются значения координа пучностей:

$$x_{\text{пучн}} = \pm n\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (84.3$$

В точках, где

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.),$$

амплитуда колебаний обращается в нуль. Эти точки на зываются **узлами** стоячей волны. Точки среды, нахо дящиеся в узлах, колебаний не совершают. Координаты узлов имеют следующие значения:

$$x_{\text{узл}} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (84.4$$

Из формул (84.3) и (84.4) следует, что расстояние между соседними пучностями, так же как и расстояние между соседними узлами, равно $\lambda/2$. Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны.

Область применимости СТО. Постулаты СТО. Выражение для импульса в СТО (без вывода). Основное уравнение релятивистской динамики (без вывода).

Область применимости СТО

Специальная теория относительности применима для изучения движения тел с любыми скоростями (в том числе близкими или равными скорости света) при условии отсутствия очень сильных гравитационных полей.

Постулаты СТО

1. Принцип постоянства скорости света: скорость света не зависит от движения источника и одинакова во всех инерциальных системах отсчета в вакууме и является предельной скоростью передачи сигнала. Величина скорости света в вакууме равна $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с.
2. Принцип относительности. Все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, следовательно уравнения выражающие законы природы инвариантны при переходе от одной системы отсчета к другой.

Скорости точек, величина которых сравнима со скоростью света (и, конечно, обязательно меньше!) принято называть *релятивистскими*.

Величину

$$\vec{P} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} \qquad (2)$$

называют релятивистским импульсом частицы. Тогда второй закон Ньютона приобретает формально такой же вид, что и в классической механике

Основное уравнение релятивистской динамики

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}. \qquad (3)$$

Интервал между событиями в СТО. Инвариантность интервала (доказательство на основе преобразований Лоренца).

§ 39. Интервал

Какое-либо событие можно охарактеризовать местом, где оно произошло (координатами x, y, z), и временем t, когда оно произошло. Таким образом, событию можно сопоставить четыре числа: x, y, z, t. Введем воображаемое четырехмерное пространство, на координатных осях которого будем откладывать пространственные координаты и время. В этом пространстве событие изобразится точкой, которую принято называть мировой точкой. Всякой частице (даже неподвижной) соответствует в в четырехмерном пространстве некоторая линия, называемая мировой линией (для покоящейся частицы она имеет вид прямой линии, параллельной оси t).

Пусть одно событие имеет координаты x_1, y_1, z_1, t_1, другое событие — координаты x_2, y_2, z_2, t_2. Величину

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \qquad (39.1)$$

называют интервалом между соответствующими событиями. Введя расстояние

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

между точками обычного трехмерного пространства, в которых произошли оба события, и обозначив разность $t_2 - t_1$ через t_{12}, выражение для интервала можно записать в виде:

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}. \qquad (39.2)$$

Легко убедиться в том, что величина интервала между двумя данными событиями оказывается во всех инерциальных системах одной и той же. Чтобы упростить выкладки, запишем квадрат интервала в системе K в виде

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2,$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$ и т. д.

Интервал между теми же событиями в системе K' равен

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2. \qquad (39.3)$$

Согласно формулам (37.11)

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\,\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Подставив эти значения в формулу (39.3), после несложных преобразований получим, что $\Delta s'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$, т. е. что

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2.$$

Таким образом, интервал (39.1) является инвариантом по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой. В предыдущем параграфе мы

Кинетическая энергия релятивистской частицы (выведите, считая известным основное уравнение релятивистской динамики). Полная энергия и энергия покоя в СТО.

Следовательно, релятивистское выражение второго закона Ньютона имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\mathbf{f}, \qquad (42.8)$$

где $\mathbf{f}$ — результирующая сил, действующих на тело.

Найдем релятивистское выражение для энергии материальной точки (для краткости будем называть ее частицей). Будем исходить из уравнения движения (42.8). Умножим его на $\mathbf{v}\,dt$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\mathbf{v}\,dt=\mathbf{f}\mathbf{v}\,dt.$$

Правая часть этого соотношения дает работу dA, совершаемую над частицей за время dt. Из закона сохранения энергии следует, что работа, совершаемая над частицей, должна быть равна приращению энергии частицы dE. Поэтому можно написать:

$$dE=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\mathbf{v}\,dt=\mathbf{v}\,d\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Преобразуем правую часть этого выражения, помня, что $v^2=\mathbf{v}^2$, а $v\,dv=\mathbf{v}\,d\mathbf{v}$:

$$dE=\mathbf{v}\left\{\frac{m_0\,d\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{m_0\mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\,d\mathbf{v}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right\}=$$

$$=\frac{m_0\mathbf{v}\,d\mathbf{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}=\frac{m_0c^2d\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}{2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}=d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Интегрирование полученного нами соотношения дает:

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\text{const}.$$

Эйнштейн положил константу равной нулю. При этом условии для энергии частицы получается выражение:

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=mc^2, \qquad (42.9)$$

где m — релятивистская масса частицы.

В случае, когда скорость частицы $v=0$, энергия принимает значение

$$E_0=m_0c^2. \qquad (42.10)$$

Величина (42.10) носит название энергии покоя частицы. Эта энергия, очевидно, представляет собой внутреннюю энергию частицы, не связанную с движением частицы как целого.

Кинетическую энергию частицы T естественно определить как разность E и E_0. Подставив значения (42.9) и (42.10) этих величин, получим:

$$T=E-E_0=\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2\right)=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right). \qquad (42.11)$$

Преобразования Лоренца для координат и времени (вывод из постулатов СТО).

§ 37. Преобразования Лоренца

Обратимся снова к рассмотрению двух инерциальных систем отсчета K и K' (K' движется относительно K со скоростью $\mathbf{v}$). Направим координатные оси так, как показано на рис. 141. Какому-либо событию соответствуют в системе K значения координат и времени, равные x, y, z, t, в системе K' — x', y', z', t'. В классической физике считалось, что время в обеих системах течет одинаково, т. е. что $t = t'$. Если в момент $t = t' = 0$ начала координат обеих систем совпадали, то тогда между координатами событий в обеих системах имеются следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + vt' = x' + vt, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= t'. \end{aligned}\right\} \qquad (37.1)$$

Совокупность уравнений (37.1) носит название преобразований Галилея[1]). Из них вытекает закон сложения скоростей классической механики:

$$u_x = u'_x + v, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z. \qquad (37.2)$$

Легко видеть, что этот закон находится в противоречии с принципом постоянства скорости света. Действительно, если в системе K' световой сигнал распространяется со скоростью c ($u'_x = c$), то согласно (37.2) в системе K скорость сигнала окажется равной $u_x = c + v$, т. е. превзойдет c. Отсюда вытекает, что преобразования Галилея должны быть заменены другими формулами. Эти формулы нетрудно найти.

Из однородности пространства следует, что формулы преобразования не должны изменяться при переносе начала координат (т. е. при замене x на $x + a$ и т. д.). Этому условию могут удовлетворять только линейные преобразования. При указанном на рис. 141 выборе координатных осей плоскость $y = 0$ совпадает с плоскостью $y' = 0$, а плоскость $z = 0$ — с плоскостью $z' = 0$. Отсюда следует, что, например, координаты y и y' могут быть связаны только соотношением вида

$$y = \varepsilon y'.$$

В силу полной равноправности систем K и K' должно также соблюдаться соотношение

$$y' = \varepsilon y$$

с тем же значением ε, что и в первом случае. Перемножая оба соотношения, получим, что $\varepsilon^2 = 1$, откуда $\varepsilon = \pm 1$. Знак плюс соответствует одинаково направленным осям y и y', знак минус — противоположно направленным. Направив оси одинаковым образом, получим:

$$y = y'. \qquad (37.3)$$

Такие же рассуждения приводят к формуле:

$$z = z'. \qquad (37.4)$$

Обратимся к нахождению преобразований для x и t. Начало координат системы K имеет координату $x = 0$ в системе K и $x' = -vt'$ в системе K'. Следовательно, при обращении $x' + vt'$ в нуль должна обращаться в нуль и координата x. Для этого линейное преобразование должно иметь вид:

$$x = \gamma(x' + vt'). \qquad (37.5)$$

Аналогично, начало координат системы K' имеет координату $x' = 0$ в системе K' и $x = vt$ в системе K, откуда следует, что

$$x' = \gamma(x - vt). \qquad (37.6)$$

Из полного равноправия систем K и K' вытекает, что коэффициент пропорциональности в обоих случаях должен быть один и тот же (различный знак при v в этих формулах обусловлен противоположным направлением движения систем друг относительно друга — если система K' движется относительно K вправо, то система K движется относительно K' влево).

Формула (37.5) позволяет по известным координате x' и времени t' события в системе K' определить координату x события в системе K. Чтобы найти формулу

для определения времени t события в системе K, исключим x из уравнений (37.5) и (37.6) и разрешим получившееся выражение относительно t. В результате получим:

$$t=\gamma\left[t'+\frac{x'}{v}\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)\right]. \qquad (37.7)$$

Для нахождения коэффициента пропорциональности γ используем принцип постоянства скорости света. Предположим, что в момент времени $t=t'=0$ (в обеих системах время отсчитывается от момента, когда их начала координат совпадают) в направлении оси x посылается световой сигнал, который производит вспышку света на экране, находящемся в точке с координатой $x=a$. Это событие (вспышка) описывается координатами $x=a$, $t=b$ в системе K и $x'=a'$, $t'=b'$ в системе K', причем $a=cb$, $a'=cb'$, так что кординаты события в обеих системах можно представить в виде:

$$x=cb, \quad t=b \quad \text{и} \quad x'=cb', \quad t'=b'.$$

Подставив эти значения в формулы (37.5) и (37.6), получим:

$$\left.\begin{aligned} cb &= \gamma(cb'+vb')=\gamma(c+v)b', \\ cb' &= \gamma(cb-vb)=\gamma(c-v)b. \end{aligned}\right\} \qquad (37.8)$$

Перемножив оба уравнения, придем к соотношению:

$$c^2=\gamma^2(c^2-v^2),$$

откуда

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (37.9)$$

Подстановка этого значения в (37.5) и (37.7) даст окончательные формулы для x и t. Добавив к ним формулы (37.3) и (37.4), получим совокупность уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (37.10)$$

По формулам (37.10) осуществляется переход от координат и времени, отсчитанных в системе K', к координатам и времени в системе K (короче, переход от системы K' к системе K). Если разрешить уравнения (37.10) относительно штрихованных величин, получатся формулы преобразования для перехода от системы K к системе K':

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (37.11)$$

Как и следовало ожидать, учитывая полную равноправность систем K и K', формулы (37.11) отличаются от формул (37.10) только знаком при v. Формулы (37.10) и (37.11) носят название преобразований Лоренца.

Вывод из преобразований Лоренца выражений для Лоренцева сокращения длины и изменения промежутка времени между событиями при переходе в другую систему отсчета в СТО.

Длина тел в разных системах. Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x и покоящийся относительно системы отсчета K' (рис. 142). Длина его в этой системе равна $l_0 = x'_2 - x'_1$, где x'_1 и x'_2 — не изменяющиеся со временем t' координаты концов стержня. Относительно системы K стержень движется со скоростью v. Для определения его длины в этой системе нужно отметить координаты концов стержня x_1 и x_2 в один и тот же момент времени $t_1 = t_2 = b$. Их разность $l = x_2 - x_1$ даст длину стержня, измеренную в системе K. Чтобы найти соотношение между l_0 и l, следует взять ту из формул преобразований Лоренца, которая содержит x', x и t, т. е. первую из формул (37.11). Согласно этой формуле

$$x'_1 = \frac{x_1 - vb}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x'_2 = \frac{x_2 - vb}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

откуда

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

или окончательно

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (38.1)$$

Длительность событий в разных системах. Пусть в точке, неподвижной относительно системы K', происходит событие, длящееся время $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$. Началу события соответствует в этой системе координата $x'_1 = a$ и момент времени t'_1, концу события — координата $x'_2 = a$ и момент времени t'_2. Относительно системы K точка, в которой происходит событие, перемещается. Согласно формулам (37.10) началу и концу события соответствуют в системе K:

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

откуда

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Введя обозначение $t_2 - t_1 = \Delta t$, получим:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (38.2)$$

Релятивистский закон сложения скоростей (используя преобразования Лоренца, выведите формулы для преобразования каждой из трёх компонент скорости).

§ 40. Сложение скоростей

Рассмотрим движение материальной точки В системе K положение точки определяется в каждый момент времени t координатами x, y, z. Выражения:

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

представляют собой проекции на оси x, y, z вектора скорости точки относительно системы K. В системе K' положение точки характеризуется каждый момент времени t' координатами x', y', z'. Проекции на оси x', y', z' вектора скорости точки относительно системы K' определяются выражениями:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (37.10)$$

Из формул (37.10) вытекает, что

$$dx = \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Разделив первые три равенства на четвертое, получим формулы преобразования скоростей при переходе от одной системы отсчета к другой:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \\ u_y &= \frac{u'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \\ u_z &= \frac{u'_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (40.1)$$

Связь между импульсом и энергией релятивистской частицы (вывод на основе известных выражений для полной энергии и релятивистского импульса).

Преобразование импульса и энергии

Пусть в системе отсчета К импульс тела направлен вдоль оси X: $p = p_x = \frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$. Соответственно, полная энергия тела $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$. В системе отсчета К′, которая движется вдоль оси X со скоростью v, импульс тела будет равен $p' = p_x' = \frac{m_0 u'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}$, а энергия $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}$.

Но скорости связаны соотношением $u = \frac{u'+v}{1+\frac{vu'}{c^2}}$.

Тогда $p_x = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{u'+v}{1+\frac{v}{c^2}u'}\right)^2}} \frac{u'+v}{1+\frac{v}{c^2}u'}$, $p_x = \frac{m_0(u'+v)}{\sqrt{\left(1+\frac{vu'}{c^2}\right)^2-\left(\frac{u'+v}{c}\right)^2}}$, $p_x = \frac{m_0(u'+v)}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$,

$$p_x = \frac{\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}u' + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{p_x' + \frac{W'}{c^2}v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{u'+v}{1+\left(\frac{v}{c^2}\right)u'}\right)^2}},$$

$$W = \frac{m_0 c^2\left(1+\frac{v}{c^2}u'\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{v}{c^2}u'\right)^2-\frac{(u'+v)^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2\left(1+\frac{v}{c^2}u'\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)}\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}},$$

$$W = \frac{\frac{m_0 c^2}{\sqrt{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)}} + \frac{m_0 u'}{\sqrt{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)}}v}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{W' + p_x' v}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}.$$

Теплопроводность идеальных газов. Вывод уравнения теплопроводности (закона Фурье) и формулы для коэффициента теплопроводности.

Рассмотрим поток вдоль некоторой оси X. Плотность потока величины в поперечном сечении с координатой x определяется суммой двух встречных потоков $j_F = j_F^{'} - j_F^{''}$. Так как величина F переносится молекулами, то с учётом усреднения по длине свободного пробега λ

$$j_F^{'} = j \cdot F|_{x-\lambda} \text{ и } j_F^{''} = j \cdot F|_{x+\lambda}$$

но $j = \frac{1}{6}\langle v\rangle \cdot n$, $F|_{x\pm\lambda} \approx F|_x \pm \left.\frac{dF}{dx}\right|_x \cdot \lambda$, откуда

$$j_F = j \cdot [F|_{x-\lambda} - F|_{x+\lambda}] = \frac{1}{6}\langle v\rangle n \cdot \left[F|_x - \left.\frac{dF}{dx}\right|_x \cdot \lambda - F|_x - \left.\frac{dF}{dx}\right|_x \lambda\right] = -\frac{1}{3}\langle v\rangle \cdot n \cdot \left.\frac{dF}{dx}\right|_x \cdot \lambda,$$

т.е.

$$j_F = -\frac{1}{3}\langle v\rangle n \left.\frac{dF}{dx}\right|_x \lambda.$$

Соответственно, поток величины F через площадку S перпендикулярную оси X $J_F = j_F \cdot S$:

$$J_F = -\frac{1}{3}\langle v\rangle n \cdot S \left.\frac{dF}{dx}\right|_x \lambda.$$

Теплопроводность – процесс выравнивания температуры в различных точках среды. Молекулы газа, находясь в постоянном хаотическом движении, при упругих соударениях обмениваются кинетической энергией поступательного движения, что приводит к выравниванию температуры. Введем физическую величину $F = \frac{3}{2}kT$ - энергия теплового движения центра масс молекулы, тогда получаем уравнение

$$j_Q = -\frac{1}{3}\langle v\rangle n \frac{3}{2} k\lambda \frac{dT}{dx}$$

но $n\frac{3}{2}k = \frac{N}{V}\frac{3}{2}k = \frac{\nu N_A}{V}\frac{3}{2}k = \frac{\nu}{V}\frac{3}{2}R = \frac{m}{V}\frac{\nu c_V}{m} = \rho \cdot C_{УД_V}$, поэтому $j_Q = -\frac{1}{3}\langle v\rangle \rho \cdot C_{УД_V}\lambda\frac{dT}{dx}$.

Если ввести обозначение $\frac{1}{3}\langle v\rangle \rho \cdot C_{УД_V}\lambda = æ$ - *коэффициент теплопроводности*, то плотность потока теплоты можно записать в виде $j_Q = -æ\frac{dT}{dx}$, а поток теплоты $J_Q = -æS\frac{dT}{dx}$.

Барометрическая формула (с выводом). Распределение Больцмана.

Распределение Больцмана.

Пусть идеальный газ находится во внешнем поле силы тяжести при постоянной температуре. Рассмотрим равновесие малого объёма газа

$$pS - dmg - (p + dp)S = 0$$

$$-dpS = \rho S dz g$$

где плотность газа $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$

$$-dp = \frac{p\mu}{RT} dz g, \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz, p = Ce^{-\frac{\mu g z}{RT}}$$

Задавая давление при z=0 p=p_0, получаем $p = p_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}}$.

Делим числитель и знаменатель на число Авогадро: $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$ - масса молекулы, $k = \frac{R}{N_A}$ - постоянная Больцмана

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}} = p_0 e^{-\frac{m_0 g z}{kT}}$$

Это соотношение носит название *барометрическая формула* для изотермического столба газа в однородном поле силы тяжести.

Энтропия в статистической физике. Статистический вес. Статистическое обоснование второго начала термодинамики. Формула Больцмана для статистической энтропии. Аддитивность энтропии.

Равновесные флуктуации.

Флуктуации – это случайные отклонения какого-либо параметра термодинамической системы от его среднего значения. Флуктуации возникают из-за хаотического теплового движения частиц термодинамической системы. В любой, даже равновесной системе существуют случайные отклонения от средних значений параметров, которые можно экспериментально наблюдать при долговременных измерениях. Например, флуктуации давления проявляются в броуновском движении малых твёрдых частичек, взвешенных в жидкости.

Статистическое обоснование второго начала термодинамики.

Для равновесных систем вероятность возникновения флуктуации обратно пропорциональна её величине – чем больше величина отклонения, тем меньше вероятность её возникновения. Например, вероятность того, что все молекулы газа соберутся в одной части сосуда очень мала, т.е. процесс самопроизвольного перехода в неравновесное состояние маловероятен, что согласуется со вторым началом термодинамики. Всякий самопроизвольный необратимый процесс переводящий систему из неравновесного состояния в равновесное с гораздо большей вероятностью протекает в природе, чем обратный ему процесс. Необратимыми являются те процессы, вероятность протекания которых в прямом направлении выше, чем в обратном. Это

приводит к возникновению в природе преимущественного направления протекания термодинамических процессов. Термодинамической величиной, характеризующей направление протекания процесса, является энтропия.

Пусть в сосуде, объем которого V_0 находится одна молекула. Тогда вероятность того, что она будет находиться в части сосуда, объём которой V, равна $p(V)=\frac{V}{V_0}$. Если молекул две, то $p(V)=\left(\frac{V}{V_0}\right)^2$, а если их число равно N, то $p(V)=\left(\frac{V}{V_0}\right)^N$. Поэтому отношение вероятностей для разных объёмов равно $\frac{p(V_2)}{p(V_1)}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^N$.

С другой стороны, рассмотрим изотермическое расширение идеального газа от объёма V_1 до объёма V_2. В этом случае $dU=0$, поэтому $\delta Q=\delta A=\nu RT\cdot dV$. Следовательно,

$$S_2-S_1=\int_1^2\frac{\delta Q}{T}=\int_{V_1}^{V_2}\nu R\frac{dV}{V}=\nu R\,ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Однако, $\nu R=\frac{N}{N_A}R=Nk$, поэтому $S_2-S_1=k\,ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^N=k\,ln\left(\frac{p(V_2)}{p(V_1)}\right)$.

Из этой формулы следует, что энтропия состояния пропорциональна вероятности того, что система придет в это состояние.

Статистическим весом G макроскопического состояния называется величина, численно равная количеству равновесных микросостояний, с помощью которых может быть реализовано рассматриваемое макросостояние. Статистический вес пропорционален вероятности G ~ p. Если система состоит из N частиц, каждая из которых может находится в одном из K дискретных состояниях, то статистический вес системы равен $G=\frac{N!}{N_1!N_2!...N_2!}$, а соответствующая вероятность $p=\frac{N!}{N_1!N_2!...N_2!}K^{-N}$, где N_i – число частиц в состоянии с номером i, и $\sum_{i=1}^{K}N_i=N$.

Данное рассуждение может служить обоснованием для *формулы Больцмана,* связывающей энтропию со статистическим весом

$$S=k\,ln\,G.$$

Замечание. Для статистической энтропии также выполняется закон аддитивности - если систему разбить на две невзаимодействующие между собой части, то $G=G_1\cdot G_2$ и

$$S=k\,ln\,G=k\,ln\,G_1+k\,ln\,G_2=S_1+S_2.$$

Замечание. С законом возрастания энтропии связана «тепловая смерть» Вселенной, т.е. состояние с максимальной энтропией и максимальным статистическим весом. Но в такой системе должны происходить флуктуации. Сегодняшнее состояние Вселенной является такой флуктуацией.

Распределение Максвелла для модуля скорости молекул (с выводом).

Распределение Максвелла.

Скорость любой молекулы $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ полностью задаётся трёмя координатами. Поэтому её можно задать как точку в трехмерном пространстве скоростей. Тогда вероятность того, что координаты скорости молекулы будут находиться в определенных интервалах должна определяться через плотность распределения скорости

$$p(v_{1x}<v_x<v_{2x},v_{1y}<v_y<v_{2y},v_{1z}<v_z<v_{2z})=\int_{v_{1x}}^{v_{2x}}\int_{v_{1y}}^{v_{2y}}\int_{v_{1z}}^{v_{2z}} f(v_x,v_y,v_z)\,dv_x dv_y dv_z .$$

При этом должны быть выполнены условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x,v_y,v_z)\,dv_x dv_y dv_z=1 .$$

Так как каждая из координат скоростей не зависит от других, то плотность распределения должна имеет вид

$$f(v_x,v_y,v_z)=\varphi(v_x)\cdot\varphi(v_y)\cdot\varphi(v_z) .$$

где $p(v_{1x}<v_x<v_{2x})=\int_{v_{1x}}^{v_{2x}}\varphi(v_x)dv_x$, $p(v_{1y}<v_y<v_{2y})=\int_{v_{1y}}^{v_{2y}}\varphi(v_y)dv_y$,

$$p(v_{1z}<v_z<v_{2z})=\int_{v_{1z}}^{v_{2z}}\varphi(v_z)dv_z .$$

Должны быть также выполнены условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v_x)dv_x=1,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v_y)dv_y=1,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v_z)dv_z=1 .$$

Во всех интегралах считается, что проекция скорости принимается любые значения, вплоть до бесконечных. Очевидно, что это не так. Но если подынтегральные функции быстро убывают с ростом значений проекций скорости, то эта добавка будет вносить малую погрешность. Таким образом, к искомым функция предъявляется требование «быстрого убывания на бесконечности». Для поиска вида функции

$$f(v_x,v_y,v_z)=\varphi(v_x)\cdot\varphi(v_y)\cdot\varphi(v_z)$$

мы применим принцип *детального равновесия* - в равновесной системе вероятность протекания прямого и обратного процесса одинаковые. Т.е. если формально обратить направление течения времени, то это не повлияет на протекание процессов в системе. Например, если в системе молекула движется в каком-то направлении, то при обращении времени она должны будет двигаться в обратную сторону. Но так как обращение не должно изменить состояния системы, то должна быть такая же молекула, которая до обращения времени уже двигалась в обратном направлении, следовательно, после обращения времени она будет двигаться в прямом направлении. Это означает, что искомая функция может зависеть только от величины скорости молекул, т.е. от $v=\sqrt{v^2}=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$. Но в пространстве все направления равноправны. Если повернуть систему координат, то изменятся координаты вектора скорости, но не изменится длина вектора. Потребуем, чтобы функция f не меняла своё значение при повороте системы координат. Таким образом, при $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2=const$ должно быть

$$f(v)=\varphi(v_x)\cdot\varphi(v_y)\cdot\varphi(v_z)=const$$

Найдём градиент от искомой функции

$$gradf=\left(\frac{\partial\varphi(\mathrm{v}_x)}{\partial\mathrm{v}_x}\cdot\varphi(\mathrm{v}_y)\cdot\varphi(\mathrm{v}_z);\varphi(\mathrm{v}_x)\cdot\frac{\partial\varphi(\mathrm{v}_y)}{\partial\mathrm{v}_y}\cdot\varphi(v_z);\varphi(\mathrm{v}_x)\cdot\varphi(\mathrm{v}_y)\cdot\frac{\partial\varphi(\mathrm{v}_z)}{\partial\mathrm{v}_z}\right).$$

Рассмотрим вектор, параллельный градиенту (учтем, что $f(\mathrm{v}_x,\mathrm{v}_y,\mathrm{v}_z)\neq 0$):

$$\frac{gradf}{f}=\left(\frac{1}{\varphi(\mathrm{v}_x)}\frac{\partial\varphi(\mathrm{v}_x)}{\partial\mathrm{v}_x};\frac{1}{\varphi(\mathrm{v}_y)}\frac{\partial\varphi(\mathrm{v}_y)}{\partial\mathrm{v}_y};\frac{1}{\varphi(\mathrm{v}_z)}\frac{\partial\varphi(\mathrm{v}_z)}{\partial\mathrm{v}_z}\right).$$

Т.к. $\mathrm{v}^2=\mathrm{v}_x^2+\mathrm{v}_y^2+\mathrm{v}_z^2$ является функцией координат, то $grad(\mathrm{v}^2)=(2\mathrm{v}_x,2\mathrm{v}_y,2\mathrm{v}_z)$.

В трехмерном пространстве скоростей поверхности уровней функций v^2 и f являются концентрическими сферами с центром в начале координат, поэтому их векторы-градиенты параллельны в каждой точке, следовательно, пропорциональны друг другу:

$$\frac{gradf}{f}=\lambda\cdot grad(\mathrm{v}^2).$$

В итоге из покоординатных равенств векторов получили систему уравнений

$$\frac{1}{\varphi(\mathrm{v}_x)}\frac{\partial\varphi(\mathrm{v}_x)}{\partial\mathrm{v}_x}=\lambda 2\mathrm{v}_x,\ \frac{1}{\varphi(\mathrm{v}_y)}\frac{\partial\varphi(\mathrm{v}_y)}{\partial\mathrm{v}_y}=\lambda 2\mathrm{v}_y,\ \frac{1}{\varphi(\mathrm{v}_z)}\frac{\partial\varphi(\mathrm{v}_z)}{\partial\mathrm{v}_z}=\lambda 2\mathrm{v}_z.$$

После интегрирования

$$\varphi(\mathrm{v}_x)=C_1e^{\lambda\mathrm{v}_x^2},\ \varphi(\mathrm{v}_y)=C_2e^{\lambda\mathrm{v}_y^2},\ \varphi(\mathrm{v}_z)=C_3e^{\lambda\mathrm{v}_z^2}.$$

Используем условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}C_1e^{\lambda\mathrm{v}_x^2}dv_x=1$. Этот интеграл - несобственный. Он сходится только в том случае, когда число λ - отрицательное $\lambda=-|\lambda|$. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-|\lambda|\mathrm{v}_x^2}d\mathrm{v}_x$ является «табличным» $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-|\lambda|\mathrm{v}_x^2}d\mathrm{v}_x=\sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}}$, поэтому $C_1\sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}}=1$ или $C_1=\sqrt{\frac{|\lambda|}{\pi}}$.

На каждую степень свободы молекулы приходится энергия $\frac{kT}{2}$. Для идеального газа средняя кинетическая энергия одномерного движения равна $\left\langle\frac{m\mathrm{v}_x^2}{2}\right\rangle=\frac{kT}{2}$.

С другой стороны

$$\left\langle\frac{m\mathrm{v}_x^2}{2}\right\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}C_1\frac{m\mathrm{v}_x^2}{2}e^{-|\lambda|\mathrm{v}_x^2}d\mathrm{v}_x=\sqrt{\frac{|\lambda|}{\pi}}\frac{m}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{v}_x^2e^{-|\lambda|\mathrm{v}_x^2}d\mathrm{v}_x=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{1}{|\lambda|}\frac{m}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\lambda|\mathrm{v}_x^2e^{-|\lambda|\mathrm{v}_x^2}d\left(\mathrm{v}_x\sqrt{|\lambda|}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{1}{|\lambda|}\frac{m}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{1}{|\lambda|}\frac{m}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{m}{4|\lambda|}=\frac{kT}{2}.$$

График функции $\tilde{\varphi}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$

Откуда $|\lambda|=\frac{m}{2kT}$ и $C_1=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$.

Поэтому $\varphi(\mathrm{v}_x)=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}e^{-\frac{m\mathrm{v}_x^2}{2kT}}$.

Аналогично $\varphi(\mathrm{v}_y)=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}e^{-\frac{m\mathrm{v}_y^2}{2kT}}$,

$\varphi(\mathrm{v}_z)=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}e^{-\frac{m\mathrm{v}_z^2}{2kT}}$.

В итоге получаем выражение для функции плотности распределения молекул по скоростям

$$f(\mathrm{v})=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{m\mathrm{v}^2}{2kT}}=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{W_K}{kT}}.$$

Адиабатический процесс. Вывод уравнения Пуассона для идеального газа на основе известных формул для Ср и Су.

4) **Адиабатический (адиабатный) процесс**. Это процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой δQ=0. Теплоёмкость адиабатического процесса равна нулю. Первое начало термодинамики для адиабатического процесса: 0=ΔU + A или –ΔU = A - газ совершает положительную работу за счет уменьшения внутренней энергии.

Для малых изменений параметров $dU + pdV = 0$,

$dU = \nu C_V dT$, $d(pV) = d(\nu RT)$ или $Vdp + pdV = \nu RdT$, откуда $dT = \dfrac{Vdp + pdV}{\nu R}$

Тогда $\nu C_V dT + pdV = 0$, $\nu C_V \dfrac{Vdp + pdV}{\nu R} + pdV = 0$, $C_V Vdp + (C_V + R)pdV = 0$

Учитывая соотношение Майера $C_V + R = C_p$ и деля на pV, получаем

$$C_V \frac{dp}{p} + C_p \frac{dV}{V} = 0,\ d(\ln p) + d\left(\ln V^{\frac{C_p}{C_V}}\right) = 0,\ d\left(\ln\left(pV^{\frac{C_p}{C_V}}\right)\right) = 0,$$

Уравнение для адиабатического процесса $pV^{\gamma} = const$ (*Уравнение Пуассона*).

Коэффициент $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ называется показателем адиабаты (или *коэффициентом Пуассона*).

Для идеального газа $\gamma = \dfrac{i+2}{i}$.

	Одноатомный i=3	Двухатомный i=5	Многоатомный i=6
γ	$\gamma = \frac{5}{3}$	$\gamma = \frac{7}{5}$	$\gamma = \frac{4}{3}$

Понятие числа степеней свободы механической системы. Число степеней свободы молекул Идеального газа. Внутренняя энергия идеального газа (вывод на основе формулы Для средней Кинетической энергии поступательного движения молекул).

Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы.

Количеством степеней свободы тела i называется минимальное количество координат, которые надо задать для однозначного определения положения тела.

Для материальной точки – это три координаты (x, y, z) –поэтому количество степеней свободы для материальной точки равно i=3.

Для двух материальных точек, соединенных жестким стержнем постоянной длины, необходимо задать 5 координат: 3 координаты для одной точки и 2 угла для определения положения второй точки относительно первой. Поэтому в этом случае количество степеней равно i=5.

Максимально возможное количество степеней свободы, связанных с движением в пространстве, равно 6.

Так как у идеального газа отсутствует потенциальная энергия взаимодействия молекул, то *внутренняя энергия равна суммарной кинетической энергии всех молекул*:

$$U = \sum_N W_K = NW_K = \nu \cdot N_A \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \nu \cdot RT .$$

$$U = \nu \cdot \frac{i}{2} RT = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} RT .$$

Теплоёмкость. Теплоёмкость идеального газа в изохорическом и изобарическом процессах (с выводом). Уравнение Майера (с выводом).

Теплоемкостью тела называется коэффициент пропорциональности между изменением его температуры и количеством подведённой теплоты $C = \frac{Q}{\Delta T}$ (Дж/К).

Удельной теплоемкостью вещества называется теплоемкость единицы массы этого вещества $C_{УД} = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m\Delta T}$ (Дж/К·кг).

Мольной (молярной) теплоемкостью называется теплоемкость одного моля вещества $C_M = \frac{C}{\nu} = \frac{Q}{\nu\Delta T}$ (Дж/моль·К).

2) **Изобарический (изобарный) процесс** - процесс изменения состояния газа, при котором давление газа остается постоянным *p*=const. Для изобарного процесса $\frac{V}{T} = \text{const}$.

В этом случае работа газа равна $A=p(V_K - V_H)$. Первое начало термодинамики для этого процесса: $Q = \Delta U + A = \nu C_V \Delta T + p(V_K - V_H)$.

Из уравнения Менделеева-Клапейрона $p(V_K - V_H) = \frac{m}{\mu} R(T_K - T_H) = \frac{m}{\mu} R \cdot \Delta T = \nu \cdot R \cdot \Delta T$.

Поэтому $Q = \Delta U + A = \nu C_V \Delta T + p(V_K - V_H) = \nu C_V \Delta T + \nu \cdot R \cdot \Delta T = \nu(C_V + R)\Delta T$.

Если обозначить через C_P - молярную теплоемкость газа для изобарического процесса, то

$$Q_{P=const} = \nu C_P \Delta T = \nu(C_V + R)\Delta T.$$

Отсюда для *молярной изобарной теплоемкости*:

$$C_P = C_V + R$$

Теорема Карно (1-ая теорема Карно), с доказательством. Термодинамическая шкала температур. Неравенство Клаузиуса (вывод из теоремы Карно). Равенство Клаузиуса.

Теоремы Карно.

1-я теорема Карно.

КПД любой тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно, не зависит от природы рабочего тела и устройства машины, а является функцией только температур нагревателя и холодильника.

Докажем 1-ю теорему Карно.

Возьмем две тепловые машины, возможно, разной конструкции и использующие разные рабочие тела, но имеющие общие нагреватель и холодильник и работающие по циклу Карно.
Пусть КПД 1й машины больше чем КПД 2й машины $\eta_1 > \eta_2$.
Это означает, что $1 - \frac{Q'_{X1}}{Q_{H1}} > 1 - \frac{Q'_{X2}}{Q_{H2}}$.

Запустим 1ю машину по прямому циклу, а вторую по – обратному. Учитывая, что для прямого и обратного цикла выполняется равенство $\eta_{ПР} = \frac{1}{\eta_{ОБР}}$, соотношение для КПД примет вид

$$1 - \frac{Q'_{X1}}{Q_{H1}} > 1 - \frac{Q_{X2}}{Q'_{H2}} \text{ или } \frac{Q_{X2}}{Q'_{H2}} > \frac{Q'_{X1}}{Q_{H1}}$$

Установим связь между обеими машинами так, чтобы первая совершала работу над второй и, при этом, выполнялось равенство $Q'_{X1} = Q_{X2}$. Тогда $Q_{H1} > Q'_{H2}$ или $Q_{H1} - Q'_{X1} > Q_{H2} - Q'_{X2}$. Но это означает, что работа первой машины больше, чем работа, которую надо совершить над второй машиной. Поэтому

$$A_{ОБЩ} = A_1 + A_2 = Q_{H1} - Q'_{X1} - (Q_{H2} - Q'_{X2}) > 0 .$$

Итак, общая теплота, получаемая холодильником, будет равна нулю, а у нагревателя будет отобрана теплота $Q_H = Q_{H1} - Q'_{H2} > 0$ и при этом совершена работа $A_{ОБЩ} > 0$. Противоречие со вторым началом термодинамики в формулировке Томсона. Следовательно, неравенство $\eta_1 > \eta_2$ не выполняется.
Пусть теперь $\eta_1 < \eta_2$. Запустим первую машину по обратному циклу, а вторую – по прямому. И повторим рассуждения.

Отсюда следует, что машины имеют одинаковые КПД. Однако если рабочим телом одной из машин является идеальный газ, то КПД такого процесса известен $\eta = 1 - \frac{T_X}{T_H}$.

В итоге получаем, что для любой тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно

$$\eta = 1 - \frac{Q'_X}{Q_H} = 1 - \frac{T_X}{T_H} .$$

Отсюда следует полезное равенство $\frac{Q'_X}{Q_H} = \frac{T_X}{T_H}$.

Термодинамическая шкала температур

Температура T была введена вначале эмпирическим путем с помощью газового термометра исходя из зависимости между давлением и температурой идеального газа. Но уравнение для идеального газа справедливо в ограниченном интервале значений давлений и температур.

Из выражения для КПД машины, работающей по циклу Карно, следует, что

$$\frac{Q_X}{Q_H} = \frac{T_X}{T_H}.$$

Вообще говоря, это соотношение позволяет опытным путём ввести новую абсолютную шкалу температур, которая *не зависит от свойств рабочего тела* и такую, что КПД для цикла Карно будет зависеть только от новых температур и будет выполняться равенство

$$\frac{Q_X}{Q_H} = \Phi(T_X, T_H) = \frac{T_X}{T_H}.$$

Рассмотрим цикл Карно 1-2-5-6 с температурами нагревателя T_1 и холодильника T_3, состоящий из двух «подциклов» 1-2-3-4 и 3-5-6-4 с промежуточной температурой T_2.
Для всех трех циклов можно записать

$$\frac{Q_2'}{Q_1} = \Phi(T_2, T_1),\ \frac{Q_3'}{Q_2} = \Phi(T_3, T_2),\ \frac{Q_3'}{Q_1} = \Phi(T_3, T_1).$$

Так как $\frac{Q_3'}{Q_1} = \frac{Q_3'}{Q_2}\frac{Q_2'}{Q_1}$, то при этом должно выполняться

$$\Phi(T_3, T_1) = \Phi(T_2, T_1)\,\Phi(T_3, T_2).$$

Но левая часть не зависит от T_2. Это возможно в случае, когда

$$\Phi(T_3, T_1) = \frac{\Theta(T_3)}{\Theta(T_1)},\ \Phi(T_3, T_2) = \frac{\Theta(T_3)}{\Theta(T_2)} \text{ и } \Phi(T_2, T_1) = \frac{\Theta(T_2)}{\Theta(T_1)}$$

где $\Theta(T)$ искомая температура.

В области, где выполняется приближение идеального газа должно выполняться равенство $\Theta(T) = T$ в реперных токах (например, в «тройной точке» для воды). Поэтому введенная ранее температура совпадает с абсолютной термодинамической температурой.

Неравенство Клаузиуса.

Из второй теоремы Карно следует $\frac{Q'_{\text{НЕРАВ_X}}}{T_X} > \frac{Q_{\text{НЕРАВ_Н}}}{T_{\text{Н}}}$. Перепишем его в виде

$$\frac{Q'_X}{T_X} \geq \frac{Q_{\text{Н}}}{T_{\text{Н}}}$$

подразумевая, что для обратимых процессов выполняется равенство, а для необратимых - неравенство. По договоренности об обозначениях $Q'_X = |Q_X|$, т.е. $Q_X = -Q'_X$, откуда $Q'_X = -Q_X$. Следовательно

$$0 \geq \frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q'_X}{T_X} = \frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_X}{T_X}$$

В общем случае циклический процесс можно разделить на некоторое множество участков, на которых подводится или отводится теплота.

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

Величина $\frac{Q}{T}$ называется *приведённым количеством теплоты* (Дж/К)
В пределе для элементарных количеств теплоты

$$\oint_{\text{цикл}} \frac{\delta Q}{T} \leq 0\ .$$

(Кружок в интеграле показывает, что процесс круговой.)
Это соотношение носит название неравенства Клаузиуса - суммарное количество приведенной теплоты в любом замкнутом цикле для любой термодинамической системы не может быть положительным.

Знак равенства можно поставить <u>только для обратимых процессов</u>.

$$\oint_{\text{цикл}} \frac{\delta Q}{T} = 0\ .$$

Термодинамическая энтропия (определение и обоснование того, что она является функцией состояния термодинамической системы). Закон возрастания энтропии в замкнутой системе (с доказательством). Примечание: В ходе рассуждений, неравенство Клаузиуса можно считать известным.

Рассмотрим произвольный обратимого циклического процесса, состоящий из двух процессов (1A2) и (2B1). Суммарное приведённое количество теплоты для такого процесса равно нулю

$$\oint_{\text{цикл}} \frac{\delta Q}{T} = \oint_{1A2} \frac{\delta Q}{T} + \oint_{2B1} \frac{\delta Q}{T} = 0 .$$

С учетом того, что при смене направления процесса

$$\oint_{2B1} \frac{\delta Q}{T} = -\oint_{1B2} \frac{\delta Q}{T} ,$$

получаем $\oint_{1A2} \frac{\delta Q}{T} = \oint_{1B2} \frac{\delta Q}{T}$,

т.е. значение интеграла не зависит от процесса, а только от начального и конечного состояний. Поэтому элементарное количество приведенной теплоты для обратимого процесса является полным дифференциалом некоторой функции равновесного состояния системы

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

изменение которой равно суммарному количеству приведённой теплоты в равновесном процессе $S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$. Это величина называется *термодинамической энтропией S* и измеряется в Дж/К. Энтропия является аддитивной величиной – энтропия системы равна сумме энтропий частей, входящих в систему.

Теперь рассмотрим циклический процесс, одна половина которого (1A2) – необратимый процесс, а вторая половина (2B1) – обратимый процесс. Тогда должно быть $\oint_{\text{цикл}} \frac{\delta Q}{T} \leq 0$.

Действуя по аналогии, получаем

$$\oint_{\text{цикл}} \frac{\delta Q}{T} = \oint_{1A2} \frac{\delta Q}{T} + \oint_{2B1} \frac{\delta Q}{T} = \oint_{1A2} \frac{\delta Q}{T} - \oint_{1B2} \frac{\delta Q}{T} = \oint_{1A2} \frac{\delta Q}{T} - (S_2 - S_1) \leq 0$$

$$\text{т.е. } S_2 - S_1 \geq \oint_{1A2} \frac{\delta Q}{T} .$$

Если система является адиабатически изолированной, то $\delta Q = 0$, поэтому $S_2 - S_1 \geq 0$

В адиабатически изолированной системе энтропия не убывает. Это закон возрастания энтропии для адиабатически замкнутой системы. Отсюда следует смысл энтропии - энтропия служит мерой необратимости процесса. Она показывает направление протекания необратимого процесса.

Диффузия в идеальных газах. Вывод уравнения диффузии и формулы для коэффициента Диффузии.

1) *Диффузия* – это процесс *самопроизвольного* выравнивания концентраций веществ в смесях. Например, в смеси двух газов условие отсутствия перемешивания состоит в том, что суммарное давление постоянно. По закону Дальтона $p = p_1 + p_2 = n_1kT + n_2kT = const$, поэтому для концентрации $n = n_1 + n_2 = const$. Введем физическую величину – относительную концентрацию молекул одного из газов $F_1 = \frac{n_1}{n}$, тогда для плотности потока концентрации

$$j_{n_1} = -\frac{1}{3}\langle v_1\rangle n \cdot \lambda_1 \frac{d}{dx}\left(\frac{n_1}{n}\right) = -\frac{1}{3}\langle v_1\rangle \lambda_1 \frac{dn_1}{dx}.$$

Или $j_{n_1} = -D_1 \frac{dn_1}{dx}$, $J_{n_1} = -D_1 S \frac{dn_1}{dx}$ где $D_1 = \frac{1}{3}\langle v_1\rangle \lambda_1$ - *коэффициент диффузии*. Если m_1 – масса молекулы, то плотность газа $\rho_1 = m_1 n_1$, поэтому для потока плотности получается уравнение

$$J_{\rho_1} = -D_1 S \frac{d\rho_1}{dx}$$ ур. Диффузии

которое называется *первым законом Фика*.

Понятие эффективного диаметра молекулы. Вывод формулы для длины свободного пробега молекул идеального газа.

Молекулы газа, находясь в тепловом движении, непрерывно сталкиваются друг с другом. Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется **эффективным диаметром** молекулы d (рис. 248).

Рис. 248.

Длина свободного пробега молекулы.

Длина свободного пробега молекулы λ - это среднее расстояние, которое пролетает молекула между двумя последовательными столкновениями с другими молекулами.

Замечание. Если молекула чаще сталкивается с другими молекулами, чем со стенками сосуда, то это означает, что размеры сосуда много больше длины свободного пробега.

Рассмотрим газ, состоящий из одинаковых молекул. Размерами молекул *не пренебрегаем*, но средние значения величин скоростей молекул считаем одинаковыми.

Две молекулы столкнутся, если центр одной из них находится на расстоянии не большем, чем $d = 2r$ от центра другой при их встречном движении (r – радиус молекулы). Пусть одна из них покоится, а вторая налетает с относительной скоростью $v_{\text{отн}}$. Рассмотрим прямой цилиндр, связанный с этой покоящейся молекулой, определяемый условием, что внутри цилиндра не должно быть других молекул. Если объём этого цилиндра $V_0 = L\pi d^2$ (L – расстояние до соседней молекулы), то объем всего газа можно определить как $V = N \cdot V_0$, где N – количество молекул. Тогда концентрация молекул $n = \frac{N}{V} = \frac{N}{NV_0} = \frac{1}{V_0} = \frac{1}{L\pi d^2}$. Откуда получаем, что $L = \frac{1}{\pi d^2 n}$.

Если λ - длина свободного пробега, то время между двумя последовательными столкновениями не зависит от системы отсчета. Пусть $< v >$ - средняя скорость молекул, тогда

$$\Delta t = \frac{L}{v_{OTH}} = \frac{\lambda}{\langle v \rangle}, \text{ откуда } \lambda = \frac{\langle v \rangle}{v_{OTH}} L.$$

Относительная скорость двух молекул $\vec{v}_{OTH} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, поэтому

$$(\vec{v}_{OTH})^2 = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1) = v_2^2 + v_1^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha$$

Усредняем это выражение

$$\langle (\vec{v}_{OTH})^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle + \langle v_1^2 \rangle - 2\langle v_1 v_2 \rangle \langle \cos\alpha \rangle$$

Для среднего значения должно выполняться $\int_0^{2\pi} \langle \cos\alpha \rangle d\alpha = \int_0^{2\pi} \cos\alpha \, d\alpha = 0$, откуда $\langle \cos\alpha \rangle = 0$.

Поэтому $\langle (\vec{v}_{OTH})^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle + \langle v_1^2 \rangle = 2\langle v^2 \rangle$, так как по предположению $\langle v_2^2 \rangle = \langle v_1^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$.

Вообще-то, $\langle v^2 \rangle \neq \langle v \rangle^2$, но в грубом приближении можно записать $\langle v_{OTH} \rangle \approx \sqrt{2}\langle v \rangle$.

Окончательно, для длины свободного пробега молекул получаем формулу $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$.

Величина $\sigma = \pi d^2$ называется *эффективным сечением взаимодействия* молекул. Принято считать, что эта величина слабо зависит от температуры.

Длина свободного пробега молекул обратно пропорциональна концентрации молекул

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}.$$

Основное уравнение МКТ идеального газа (с выводом). Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул (с выводом).

<u>Давление газа.</u>

Рассмотрим механическую модель газа, находящегося в термодинамическом равновесии со стенками сосуда. Молекулы упруго сталкиваются не только друг с другом, но и со стенками сосуда, в котором находится газ.

В качестве идеализации модели, заменим атомы в молекулах материальными точками. Величина скорость всех молекул предполагается *одинаковой*. Также предполагаем, что материальные точки не взаимодействуют друг с другом на расстоянии, поэтому потенциальную энергию такого взаимодействия принимаем нулевой.

Пусть $n = \frac{N}{V}$ – концентрация молекул газа, T – температура газа, u – средняя скорость поступательного движения молекул. Выберем систему координат так, чтобы стенка сосуда лежала в плоскости XY, а ось Z была направлена перпендикулярно стенке внутрь сосуда. Рассмотрим удары молекул о стенки сосуда. Т.к. удары упругие, то после удара о стенку импульс молекулы меняет направление, но его величина не меняется.

За период времени Δt до стенки долетят только те молекулы, которые находятся от стенки на расстоянии не далее, чем $L = u{\cdot}\Delta t$. Общее число молекул в цилиндре, с площадью основания S и высотой L, объем которого равен $V = LS = u{\cdot}\Delta t{\cdot}S$ равно $N = n{\cdot}V = n{\cdot}u{\cdot}\Delta t S$.

В данной точке пространства можно условно выделить три различных направления движения молекул, например, вдоль осей X, Y, Z. Молекула может двигаться вдоль каждого из направлений «вперед» и «назад». Поэтому по направлению к стенке, будут двигаться не все молекулы в выделенном объёме, а только шестая часть от их общего числа. Следовательно, количество молекул, которые за время Δt ударятся о стенку:

$$N_1 = N/6 = n{\cdot}u{\cdot}\Delta t{\cdot}S/6$$

Изменение импульса молекул при ударе равно импульсы силы, действующей на молекулы со стороны стенки - с такой же по величине силой молекулы действуют на стенку

$$\Delta P_Z = P_{2Z} - P_{1Z} = F{\cdot}\Delta t,$$

или

$$N_1 m_0{\cdot}u - (-N_1 m_0{\cdot}u) = F{\cdot}\Delta t,$$
$$2{\cdot}N_1 m_0 u = F{\cdot}\Delta t,$$
$$\frac{n{\cdot}u{\cdot}\Delta t{\cdot}S}{6} 2 m_0 u = F{\cdot}\Delta t,$$
$$\frac{1}{3} n \cdot m_0 u^2 = \frac{F}{S}.$$

Откуда находим давление газа на стенку:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{1}{3} n \cdot m_0 u^2 = \frac{2}{3} n \cdot W_K^{ПОСТ},$$

где $W_K^{ПОСТ} = \frac{m_0 u^2}{2}$ - кинетическая энергия материальной точки (поступательного движения молекулы). Следовательно, давление такого (механического) газа пропорционально кинетической энергии поступательного движения молекул (центра масс молекулы)

$$p = \frac{2}{3} n W_K^{ПОСТ}.$$

Это уравнение называется *основным уравнением МКТ* .

Первое начало термодинамики в интегральной и дифференциальной форме. Работа, совершаемая телом при изменении объёма (вывод из определения механической работы). Работа идеального газа при изотермическом процессе (вывод из формулы для работы тела при изменении объема).

$$Q = \Delta U + A$$ ∫-ФОРМА

Для элементарных (очень малых) количеств

$$\delta Q = dU + \delta A.$$ δ-ФОРМА

Так как внутренняя энергия – это однозначная функция состояния, то dU - полный дифференциал.

Работа газа против внешних тел $\delta A = F \cdot dr \cdot \cos\alpha$.
С учетом выражения $F = p \cdot S$ и изменения объема
$dV = S \cdot dr \cdot \cos\alpha$

$$\delta A = p \cdot S \cdot dr \cdot \cos\alpha = p \cdot dV.$$

При конечных изменениях объема $A = \int_{\Delta V} p dV$

§ 29. Работа при изотермическом изменении объема идеального газа

Чтобы определить работу при изотермическом изменении объема газа, необходимо, согласно уравнению (23.2), вычислить интеграл

$$\int dA = \int p\, dV$$

вдоль изотермы. Мы не можем вынести p за знак интеграла, так как давление во время расширения непрерывно изменяется. А изменяется оно с изменением объема по закону Бойля — Мариотта, т. е.

$$pV = RT = \text{const}, \quad \text{откуда} \quad p = \frac{RT}{V}.$$

Подставив это выражение для p под знак интеграла, получим для работы A при изменении объема от V_1 до V_2:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} RT \frac{dV}{V} = RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (29.1)$$

Это и есть выражение для работы изотермического расширения (или сжатия) 1 моля идеального газа. Если масса газа равна не 1 молю, то формула (29.1) принимает вид:

$$A = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \qquad (29.2)$$

где M/μ — число молей,