

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Московский государственный технический
университет имени Н.Э.Баумана (национальный исследовательский
университет)» (МГТУ им. Н.Э.Баумана)
Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»
Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

Домашнее задание №1 по дисциплине

«Прикладная механика»

Статически неопределимая система растяжения-сжатия

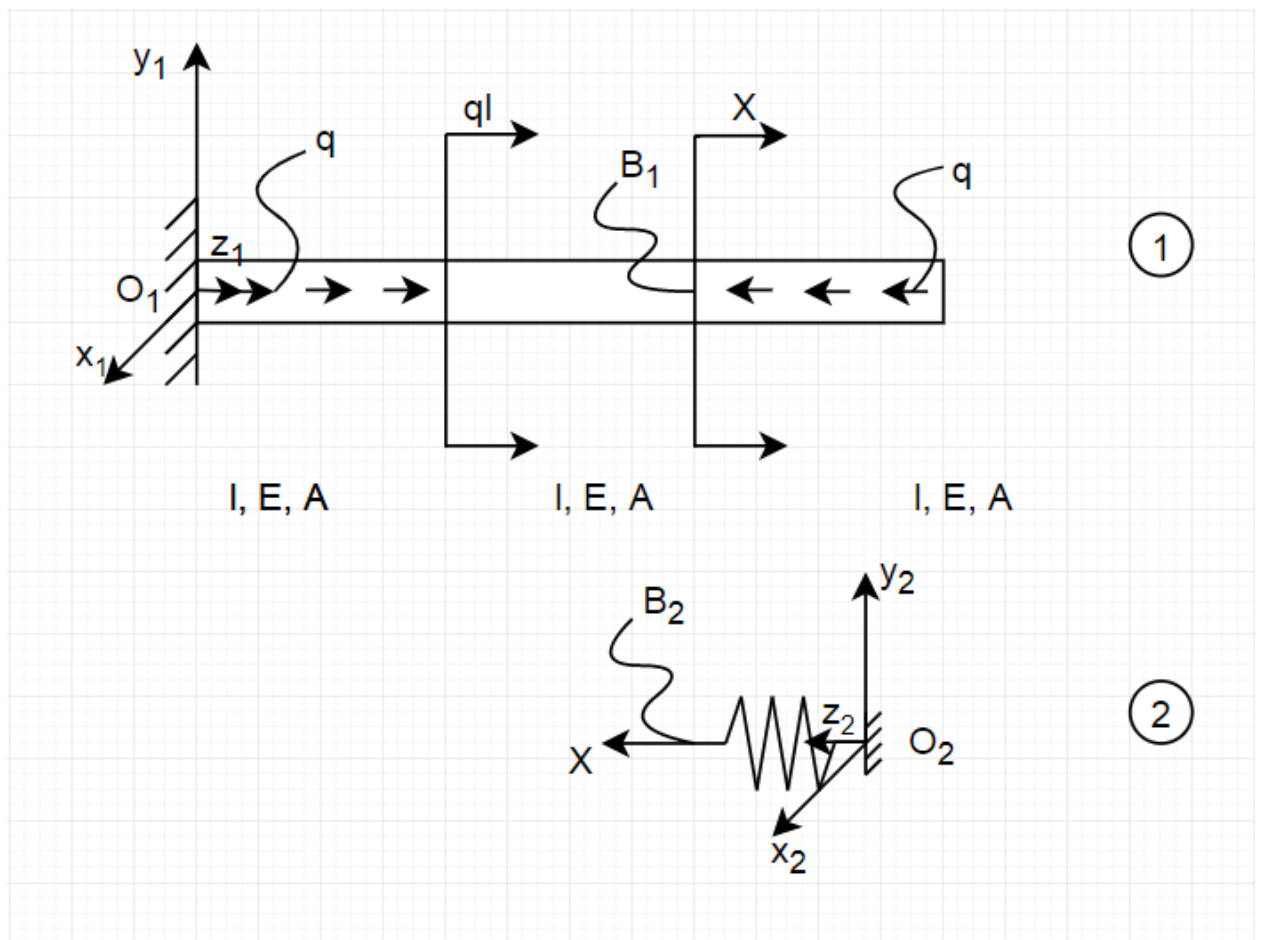
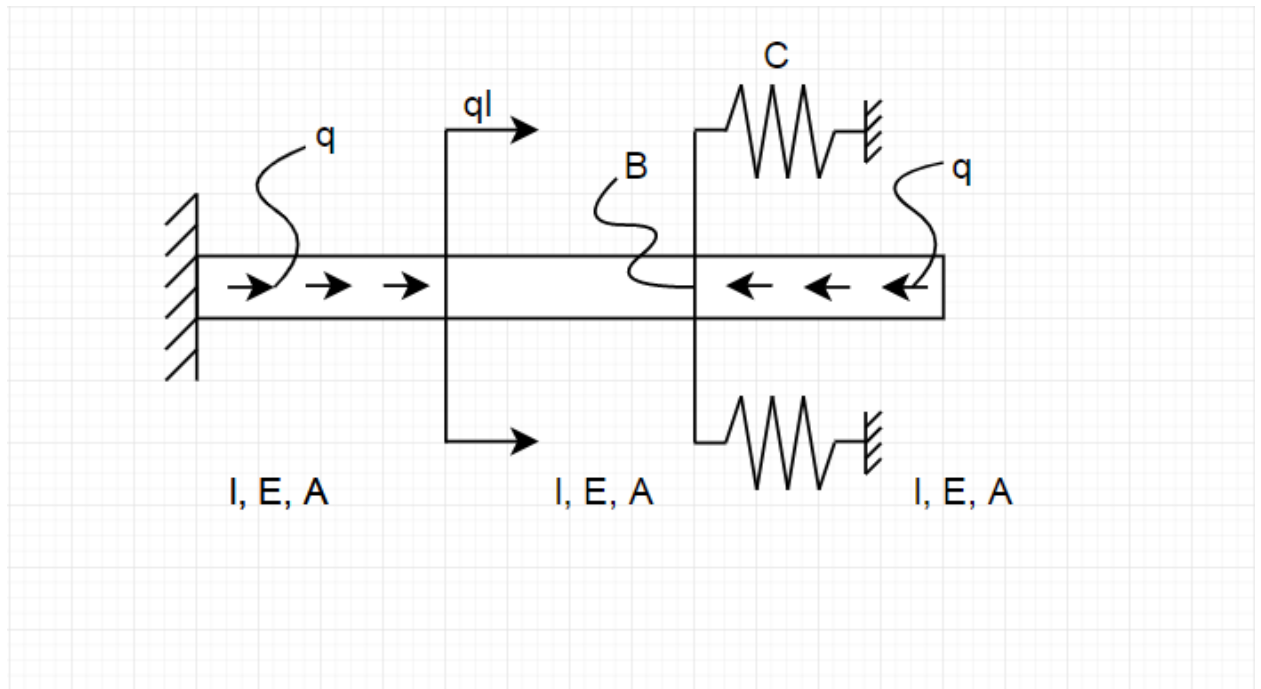
Вариант 1

Выполнил: студент группы РК6-34б Амеликина А.-М. С.

Москва

2019

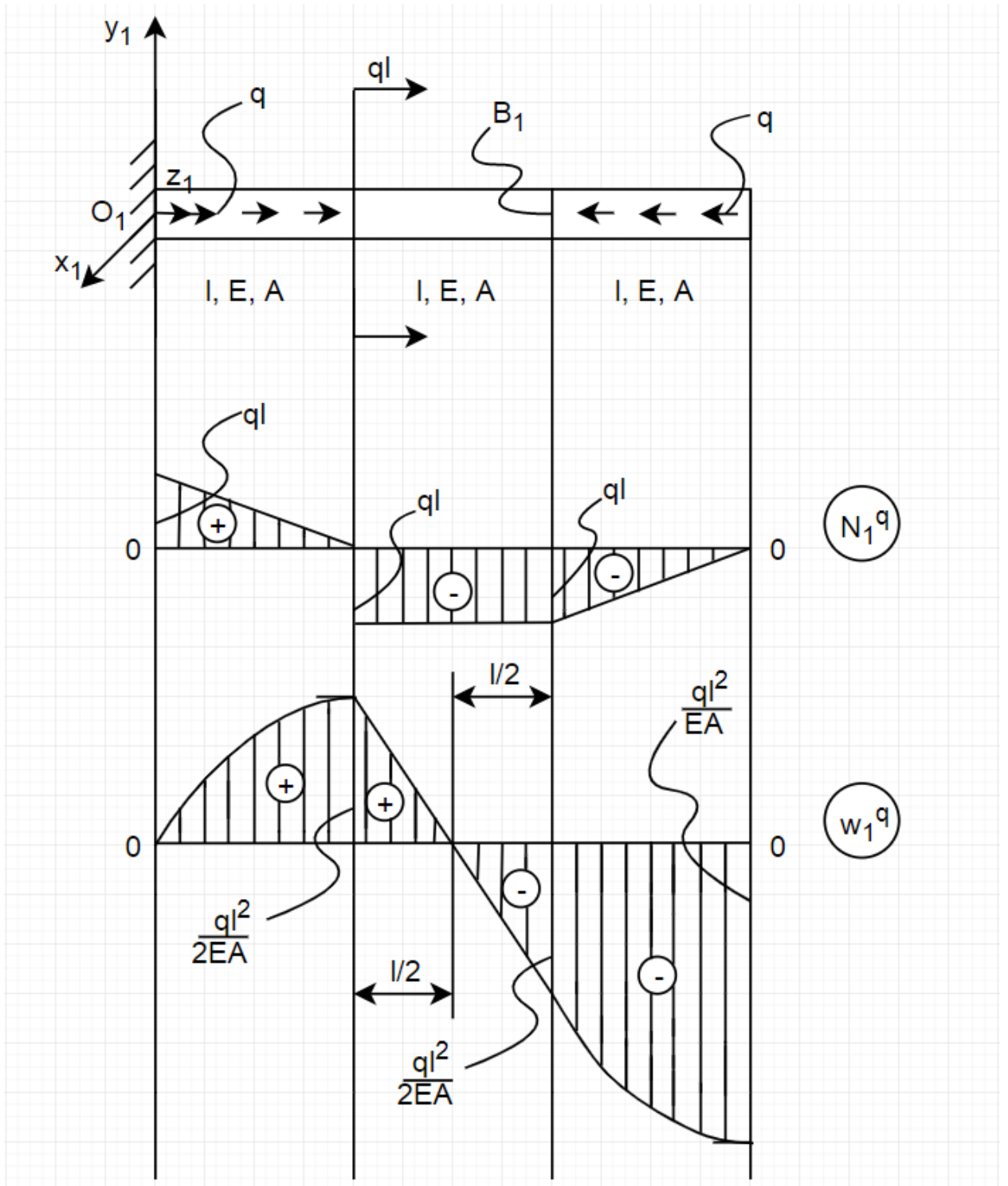
1.



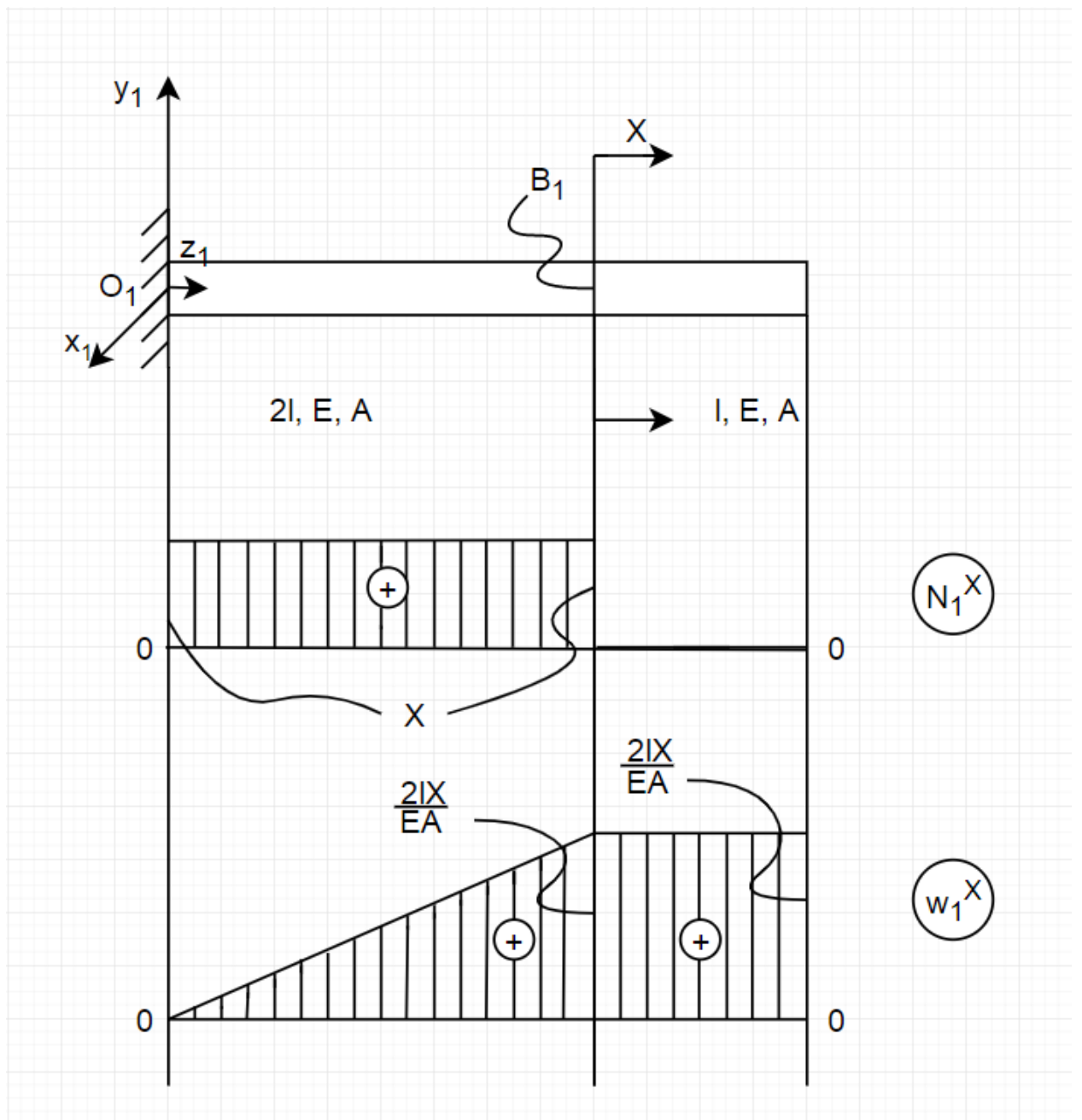
$$w_{B_1} = w_{B_1}^q + w_{B_1}^X$$

$$w_{B_2} = w_{B_2}^X$$

$$w_{B_1} = -w_{B_2}$$

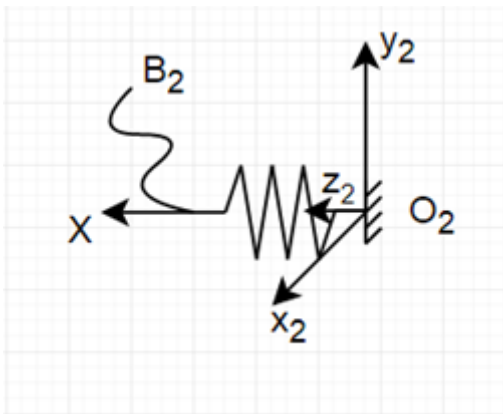


$$w_{B_1}^q = -\frac{ql^2}{2EA}$$



$$w_{B_1}^X = \frac{2lX}{EA}$$

$$w_{B_1} = -\frac{ql^2}{2EA} + \frac{2lX}{EA}$$



$$w_{B_2}^X = \frac{X}{C}$$

$$w_{B_1} = -w_{B_2}$$

$$-\frac{ql^2}{2EA} + \frac{2lX}{EA} = -\frac{X}{C}$$

$$\frac{ql^2}{2EA} - \frac{2lX}{EA} = \frac{X}{C}$$

$$\frac{ql^2}{2EA} = \left(\frac{2l}{EA} + \frac{1}{C}\right)X$$

$$X = \frac{ql^2}{2EA} \left(\frac{CEA}{2lC + EA}\right)$$

$$X = \frac{ql^2 C}{2(2lC + EA)}$$

При $C \rightarrow 0$: $X \rightarrow 0$

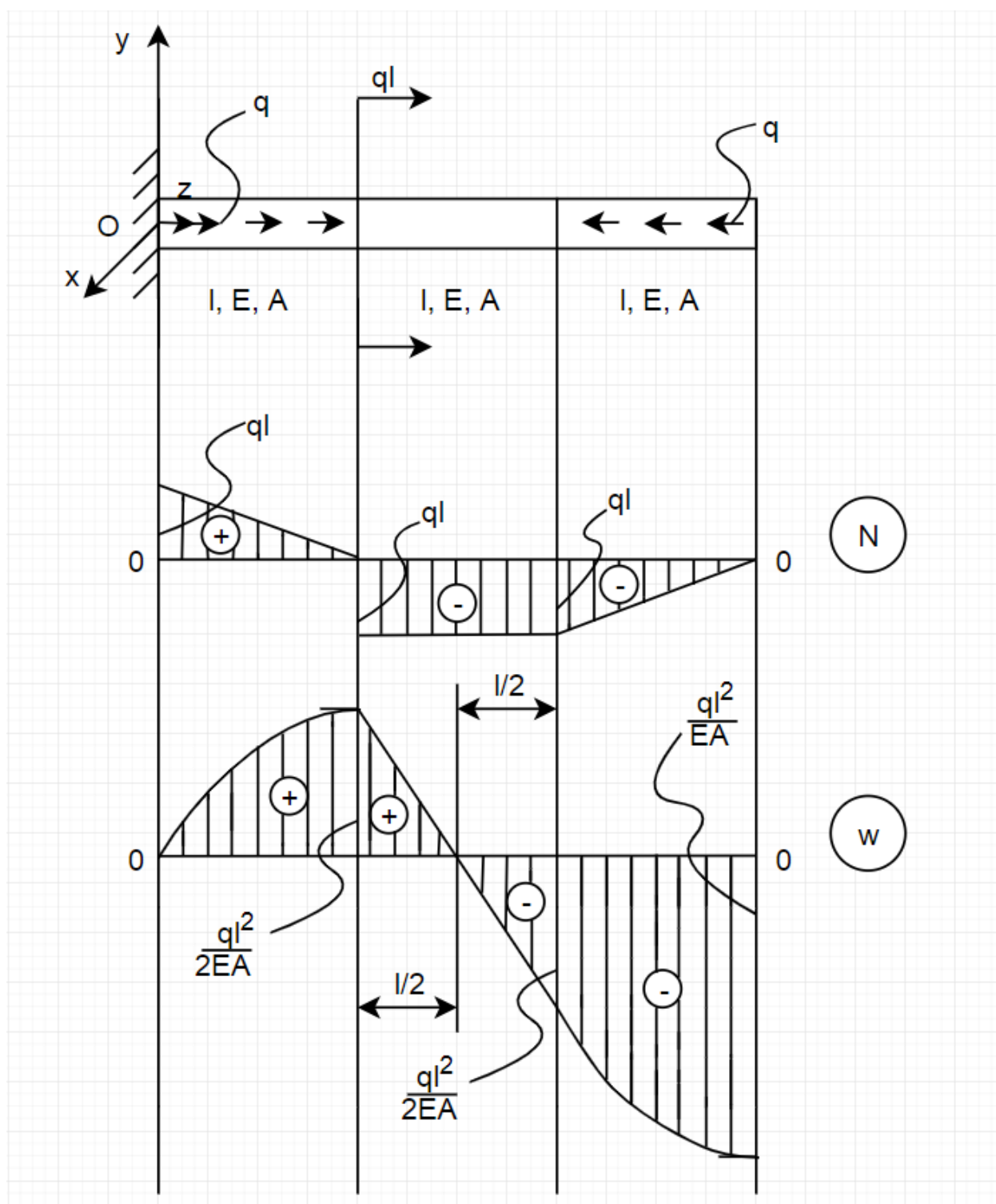
При $C \rightarrow \infty$:

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \frac{ql^2 C}{4lC + 2EA} = \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{ql^2}{4l} = \frac{ql}{4}$$

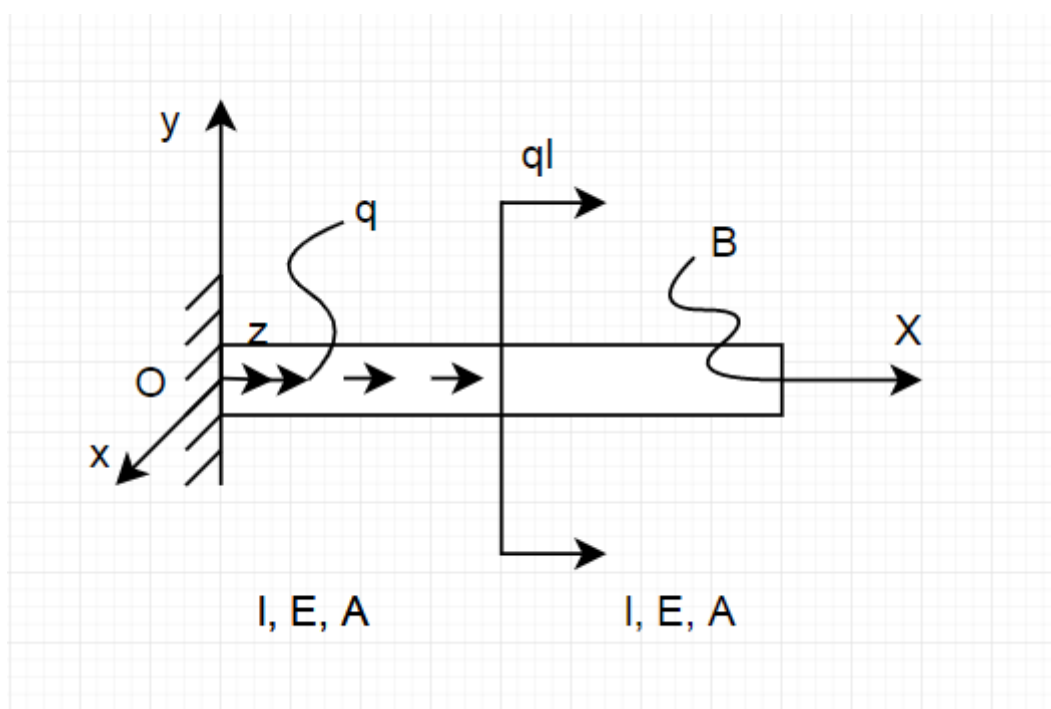
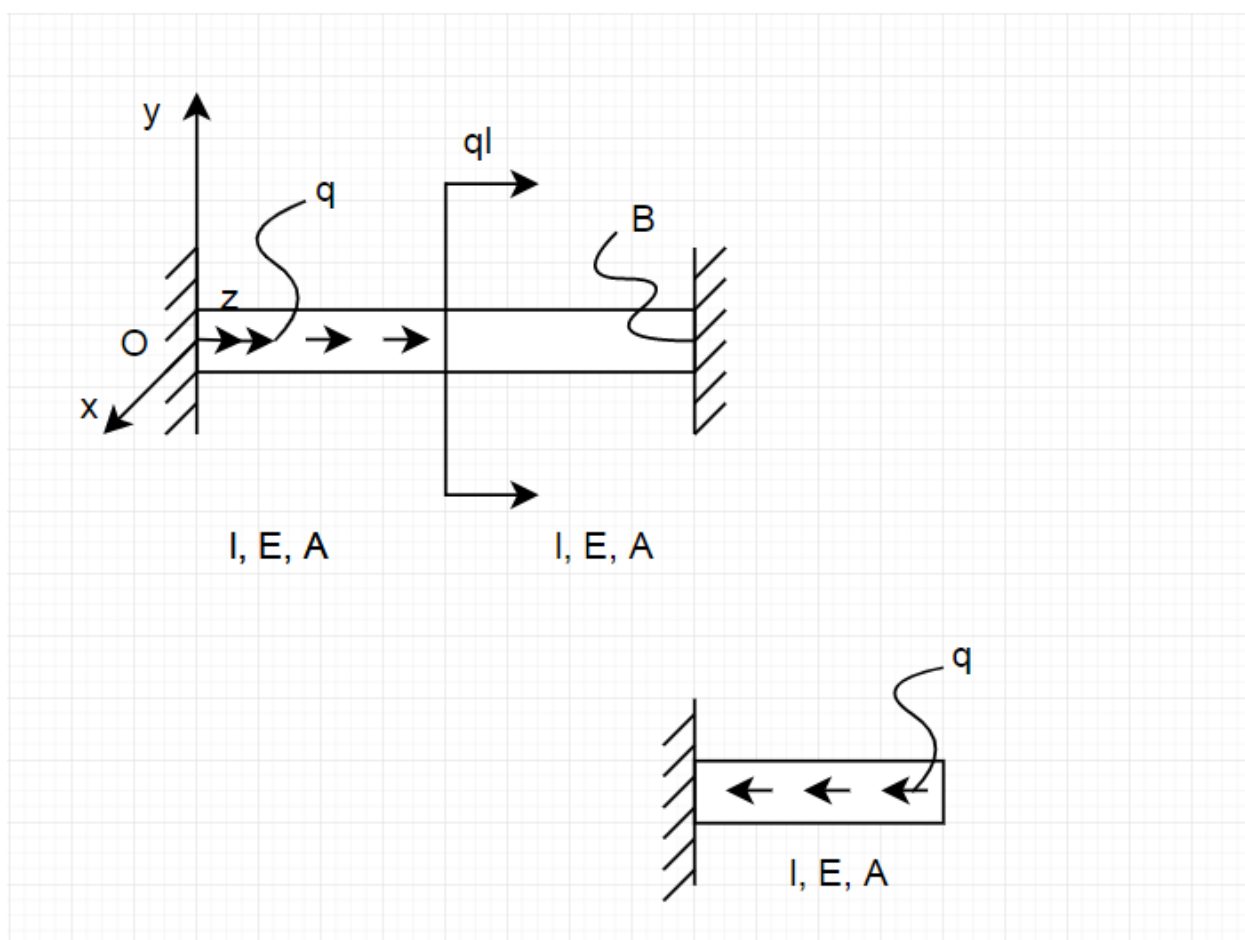
$$X \rightarrow \frac{ql}{4}$$

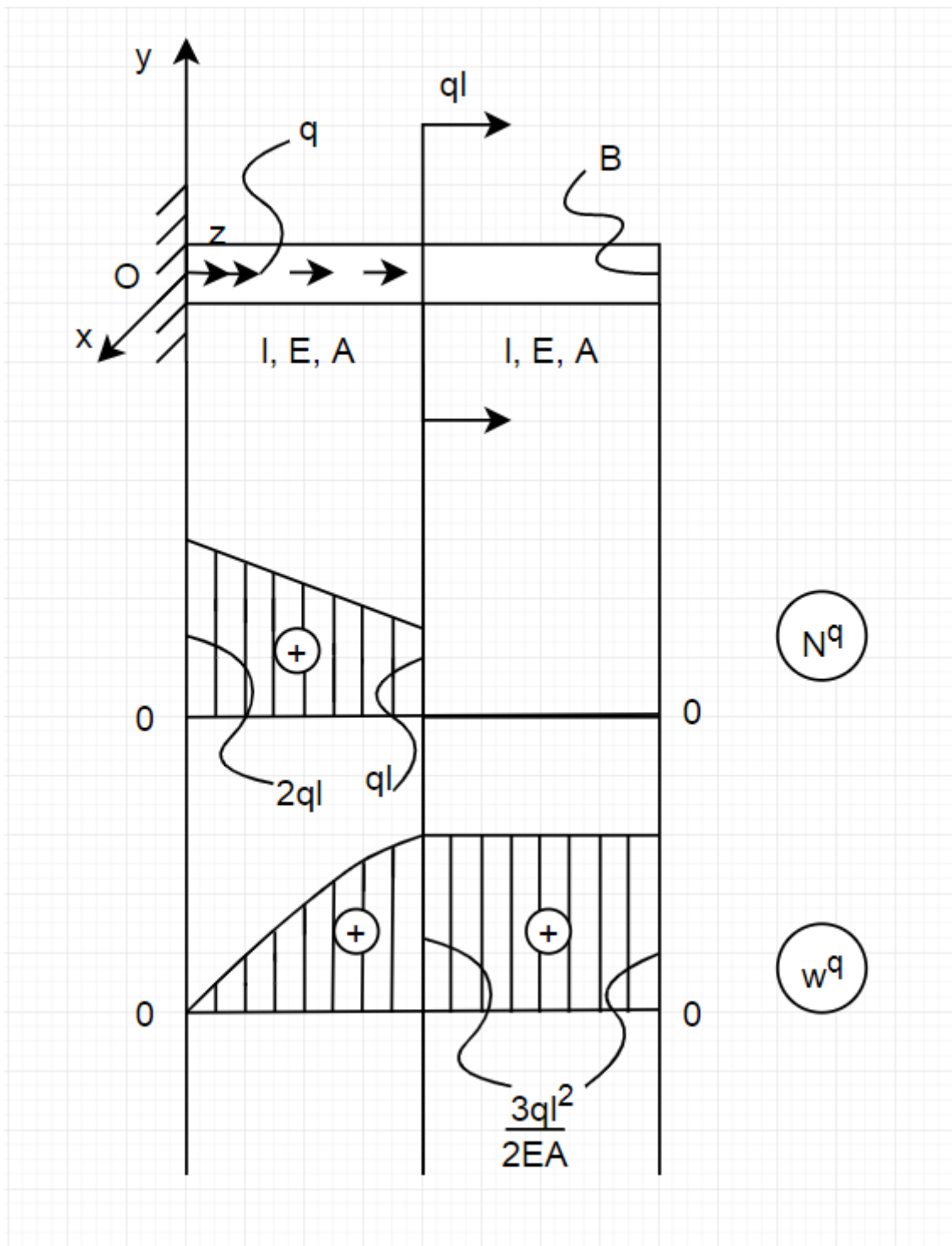
2.

При $C \rightarrow 0$: $X \rightarrow 0$

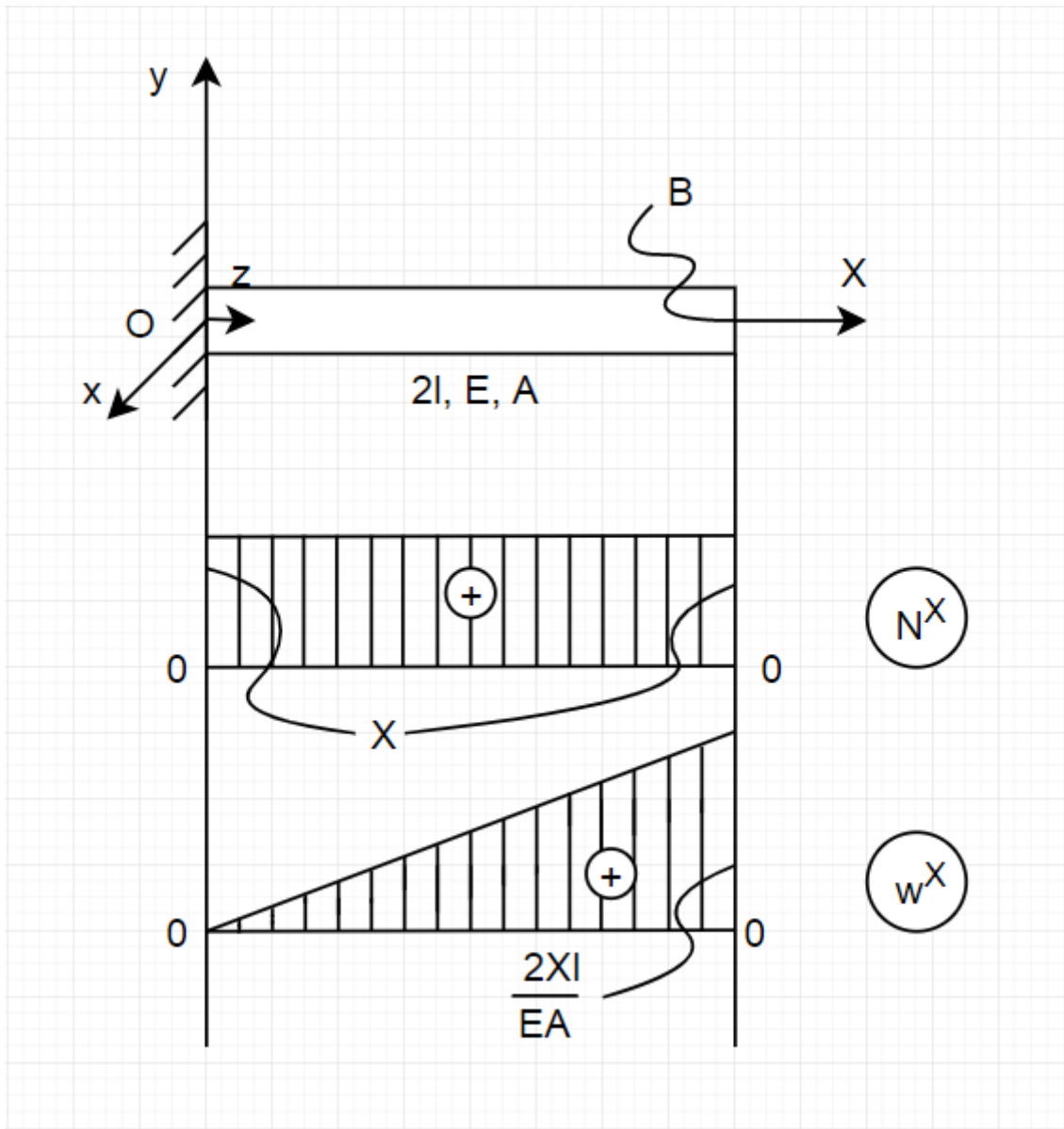


При $C \rightarrow \infty$:





$$w_B^q = \frac{3ql^2}{2EA}$$



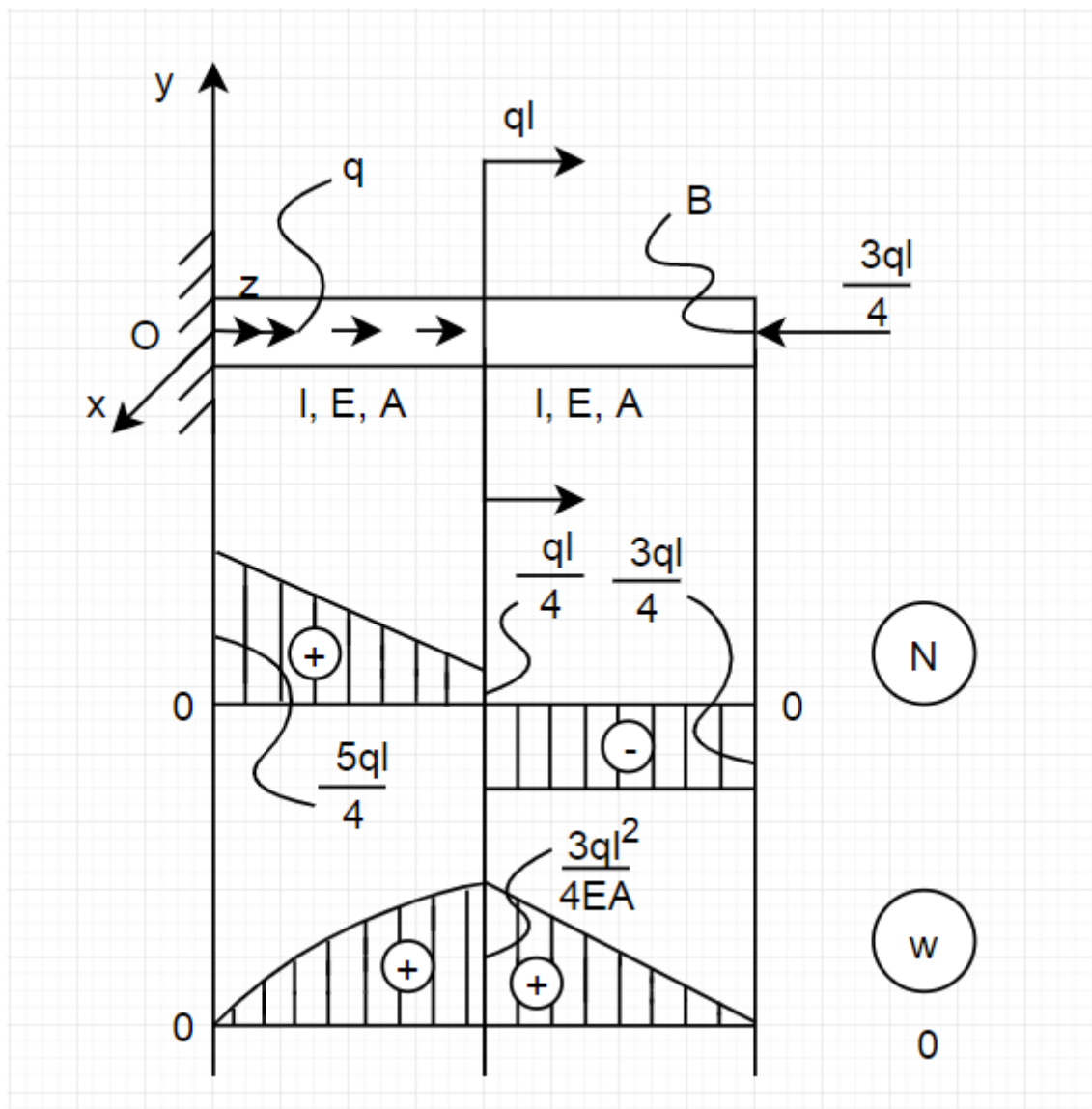
$$w_B^x = \frac{2Xl}{EA}$$

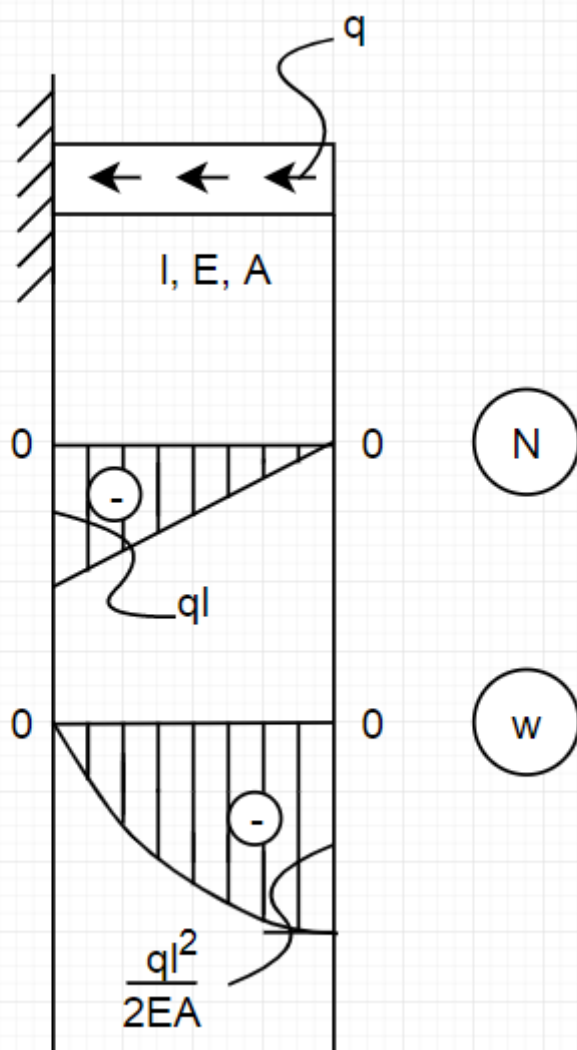
$$w_B^q + w_B^x = 0$$

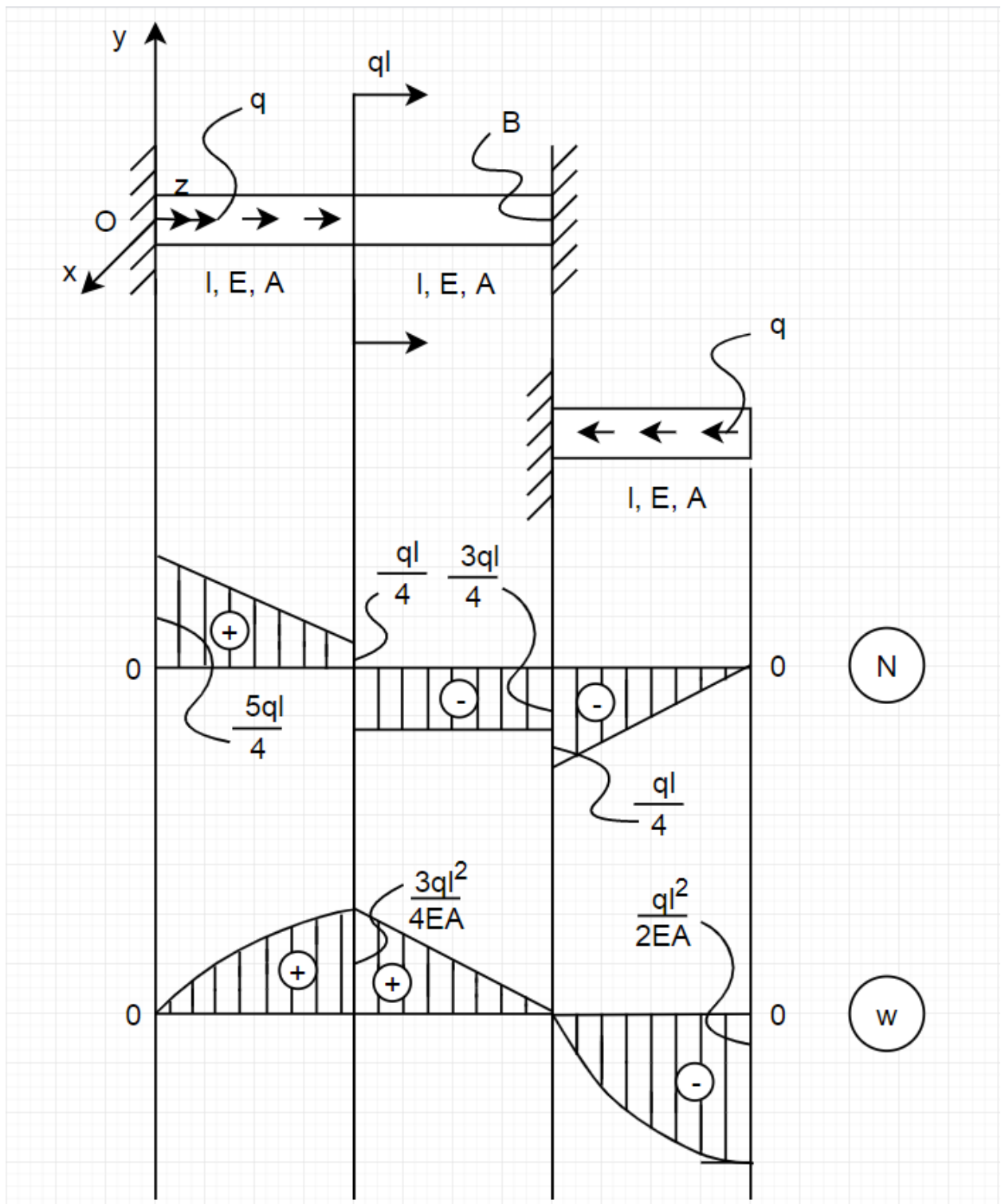
$$\frac{3ql^2}{2EA} + \frac{2Xl}{EA} = 0$$

$$\frac{2Xl}{EA} = -\frac{3ql^2}{2EA}$$

$$X = -\frac{3ql}{4}$$







Работа внешних сил и потенциальная энергия деформаций

При $C \rightarrow 0$: $X \rightarrow 0$:

Рассмотрим три участка стержня:

$$N_1 = q(l - z) \quad w_1 = \int \frac{q(l-z)dz}{EA} = \int \frac{qldz}{EA} - \int \frac{qzdz}{EA} = \frac{qlz}{EA} - \frac{qz^2}{2EA} = \frac{qz(2l-z)}{2EA}$$

$$N_2 = -ql \quad w_2 = \int \frac{-qldz}{EA} + \frac{ql^2}{2EA} = -\frac{qlz}{EA} + \frac{ql^2}{2EA}$$

$$N_3 = -q(l - z) \quad w_3 = \int \frac{-q(l-z)dz}{EA} - \frac{ql^2}{2EA} = \int \frac{-qldz}{EA} + \int \frac{qzdz}{EA} - \frac{ql^2}{2EA} =$$

$$-\frac{qlz}{EA} + \frac{qz^2}{2EA} - \frac{ql^2}{2EA} = -\frac{qz(2l-z)}{2EA} - \frac{ql^2}{2EA}$$

Работа внешних сил:

$$A = \sum_{i=1} \frac{1}{2} F_i w_i$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\int_0^l q \frac{qz(2l-z)}{2EA} dz + ql \frac{ql^2}{2EA} - \int_0^l q \left(-\frac{qz(2l-z)}{2EA} - \frac{ql^2}{2EA} \right) dz \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{2EA} \int_0^l z(2l-z) dz + \frac{q^2 l^3}{2EA} - \frac{q^2}{2EA} \int_0^l (-z(2l-z) - l^2) dz \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{2EA} \left[\int_0^l 2zldz - \int_0^l z^2 dz \right] + \frac{q^2 l^3}{2EA} - \frac{q^2}{2EA} \left[\int_0^l -2zl dz + \int_0^l z^2 dz - \int_0^l l^2 dz \right] \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2 l^3}{2EA} - \frac{q^2 l^3}{6EA} + \frac{q^2 l^3}{2EA} + \frac{q^2 l^3}{2EA} - \frac{q^2 l^3}{6EA} + \frac{q^2 l^3}{2EA} \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{2q^2 l^3}{EA} - \frac{q^2 l^3}{3EA} \right) = \frac{5q^2 l^3}{6EA}$$

$$A = \frac{5q^2 l^3}{6EA}$$

Потенциальная энергия деформаций:

$$U = \sum_{i=1} \frac{1}{2} \frac{N_i^2 l_i}{EA}$$

$$U = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \frac{q^2(l-z)^2}{EA} dz + \int_0^l \frac{q^2 l^2}{EA} dz + \int_0^l \frac{q^2(l-z)^2}{EA} dz \right)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{EA} \left(2 \int_0^l (l-z)^2 dz + \int_0^l l^2 dz \right) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{EA} \left(2 \int_0^l (l^2 - 2lz + z^2) dz + l^3 \right)$$

$$U = \frac{q^2 l^3}{2EA} + \frac{q^2}{EA} \left(l^3 - l^3 + \frac{l^3}{3} \right) = \frac{q^2 l^3}{2EA} + \frac{q^2 l^3}{3EA} = \frac{5q^2 l^3}{6EA}$$

$$U = \frac{5q^2 l^3}{6EA}$$

$A=U$, значит найдены правильно.

При $C \rightarrow \infty$:

Рассмотрим три участка стержня:

$$N_1 = q(l-z) + \frac{ql}{4} \quad w_1 = \int \frac{q(l-z)dz}{EA} + \int \frac{ql dz}{4EA} = \int \frac{ql dz}{EA} - \int \frac{qz dz}{EA} + \int \frac{ql dz}{4EA} =$$

$$\frac{qlz}{EA} - \frac{qz^2}{2EA} + \frac{qlz}{4EA} = \frac{5qlz}{4EA} - \frac{qz^2}{2EA} = \frac{qz(5l-2z)}{4EA}$$

$$N_2 = -\frac{3ql}{4} \quad w_2 = \int \frac{-3ql dz}{4EA} + \frac{3ql^2}{4EA} = -\frac{3qlz}{4EA} + \frac{3ql^2}{4EA} = \frac{3ql(l-z)}{4EA}$$

$$N_3 = -q(l-z) \quad w_3 = \int \frac{-q(l-z)dz}{EA} = \int \frac{-ql dz}{EA} + \int \frac{qz dz}{EA} = -\frac{qlz}{EA} + \frac{qz^2}{2EA} =$$

$$-\frac{qz(2l-z)}{2EA}$$

Работа внешних сил:

$$A = \sum_{i=1} \frac{1}{2} F_i w_i$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\int_0^l q \frac{qz(5l-2z)}{4EA} dz + ql \frac{3ql^2}{4EA} - \int_0^l q \left(-\frac{qz(2l-z)}{2EA} \right) dz \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{4EA} \int_0^l z(5l-2z) dz + \frac{3q^2 l^3}{4EA} + \frac{q^2}{2EA} \int_0^l (z(2l-z)) dz \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{4EA} \left[\int_0^l 5z l dz - \int_0^l 2z^2 dz \right] + \frac{3q^2 l^3}{4EA} + \frac{q^2}{2EA} \left[\int_0^l 2z l dz - \int_0^l z^2 dz \right] \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{5q^2 l^3}{8EA} - \frac{q^2 l^3}{6EA} + \frac{3q^2 l^3}{4EA} + \frac{q^2 l^3}{2EA} - \frac{q^2 l^3}{6EA} \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{15q^2 l^3}{8EA} - \frac{q^2 l^3}{3EA} \right) = \frac{37q^2 l^3}{48EA}$$

$$A = \frac{37q^2 l^3}{48EA}$$

Потенциальная энергия деформаций:

$$U = \sum_{i=1} \frac{1}{2} \frac{N_i^2 l_i}{EA}$$

$$U = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \frac{q^2 \left((l-z) + \frac{l}{4} \right)^2}{EA} dz + \int_0^l \frac{9q^2 l^2}{16EA} dz + \int_0^l \frac{q^2 (l-z)^2}{EA} dz \right)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{EA} \left(\int_0^l (l-z)^2 dz + \int_0^l \frac{l^2}{16} dz + \int_0^l 2(l-z) \frac{l}{4} dz + \frac{9}{16} \int_0^l l^2 dz + \int_0^l (l-z)^2 dz \right)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{EA} \left(2 \int_0^l (l^2 - 2lz + z^2) dz + \int_0^l \frac{10l^2}{16} dz + \int_0^l \frac{(l-z) l}{2} dz \right)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{EA} \left(\frac{2l^3}{3} + \frac{5l^3}{8} + \frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{4} \right)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2 l^3}{EA} \left(\frac{16}{24} + \frac{21}{24} \right) = \frac{37q^2 l^3}{48EA}$$

$$U = \frac{37q^2 l^3}{48EA}$$

A=U , значит найдены правильно.