13 grudnia 2022 r.

Mateusz Andryszak
322422

Obliczanie całek złożonymi kwadraturami Simpsona

Projekt nr 1

1 Opis metody

Za zadanie mamy obliczyć całkę

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

gdzie

$$D = [a, b] \times [c, d]$$

za pomocą złożonych kwadratur używając metody Simpsona ze względu na każdą zmienną.

Do obliczenia możemy użyć dwóch kwadratur dla funkcji jednej zmiennej

$$S_1(g_1) = \sum_{i=0}^{n} A_i g_1(x_i) \approx \int_a^b g_1(x)dx$$

$$S_2(g_2) = \sum_{j=0}^{n} B_j g_2(y_j) \approx \int_c^d g_2(y)dy$$

Stosując kwadraturę S_1 do funkcji f ze względu na zmienną x otrzymamy:

$$S_1(f)(y) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i, y)$$

Stosując teraz kwadraturę S_2 do S_1(f)

$$S_2(S_1(f)) = \sum_{j=0}^{m} B_j \left(\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i, y_j) \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} A_i B_j f(x_i, y_j)$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \approx S(f) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} C_{ij} f(x_i, y_j)$$

gdzie $C_{ij} = A_i B_j$

Złożony wzór Sipmsona na przedziale $[a,b]$ ma postać:

$$S_1(g_1) = \frac{H_1}{3} \left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a + 2kH_1) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(a + 2kH_1 + H_1) \right)$$

gdzie $H_1 = \frac{b-a}{2n}$, a $g_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$

Podobnie złożony wzór Sipmsona na przedziale $[c,d]$ ma postać:

$$S_2(g_2) = \frac{H_2}{3} \left(f(c) + f(d) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(c + 2jH_2) + 4\sum_{j=0}^{n-1} f(c + 2jH_2 + H_2) \right)$$

gdzie $H_2 = \frac{d-c}{2n}$, a $g_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$

Oznaczmy przez A oraz B, odpowiednio wektor wszystkich współczynników kwadratury S_1 oraz S_2. Wtedy:

$$A = \frac{H_1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ \vdots \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{H_2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ \vdots \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Współczynniki C_{ij} kwadratury złożonej $S_2(S_1(f))$ są iloczynami współczynników kwadratur składowych, zatem można je zapisać w macierzy C postaci:

$$C = BA^T = \frac{H_1 H_2}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & \dots & 1 \\ 4 & 16 & 4 & 16 & 4 & \dots & 4 \\ 2 & 4 & 16 & 4 & 16 & \dots & 2 \\ 4 & 16 & 4 & 16 & 4 & \dots & 4 \\ 2 & 4 & 16 & 4 & 16 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Mając macierz C łatwo jesteśmy w stanie obliczyć kwadraturę $S(f) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} C_{ij} f(x_i, y_j)$

2 Opis programu obliczeniowego

Funkcja odpowiedzialna za obliczenie danej całki $RectangleSimpsonQuadrature$ przyjmuje 6 parametrów:

f - funkcja dwóch zmiennych, którą chcemy całkować

a, b, c, d - parametry wyznaczające obszar $[a, b] \times [c, d]$ na którym będziemy całkować funkcję f

N - parametr opcjonalny określający ilość podprzedziałów na które podzielone zostaną przedziały $[a, b]$ oraz $[c, d]$ w celu zastosowania metody Simpsona. W przypadku braku parametru N przy wywołaniu funkcji jest on ustawiony na $N = 100$

Funkcja $RectangleSimpsonQuadrature$ zwraca 2 wartości:

res - wynik liczbowy całki

$error$ - błąd obliczonej całki

Błąd obliczamy używając funkcji wbudowanej i$ntegral2$, która oblicza wartość przybliżoną podwójnej całki. Od tak obliczonej wartości odejmujemy wynik otrzymany przez funkcję $RectangleSimpsonQuadrature$ otrzymując błąd

3 Przykłady obliczeniowe

Program został przetestowany na wielu przykładach, z któych wybrane zostało 6 ciekawych, dla któych zostały stworzone wykresy zależności błędu całkowania danej funkcji na danym przedziale od ilości węzłów.

1. **Funkcja będąca wielomianem stopnia nie większego niż 4**
   Jako przykład bierzemy funkcję $smallPolynomial$ na przedziale $[2, 3] \times [1, 4]$

   $$smallPolynomial(x, y) = 3 + x^2 + 2xy - 3x^2y^3$$

   Ponieważ błąd złożonej kwadratury Simpsona wynosi:

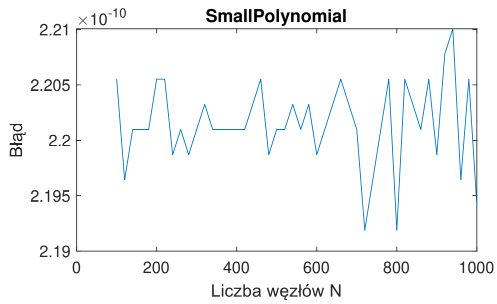
   $$E(f) = \frac{-1}{180 \cdot 2^4} H^4(b - a)f^{(4)}(\mu)$$

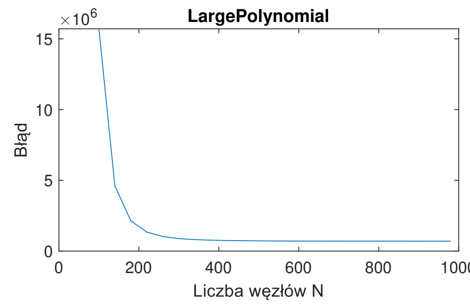
   To nasza funkcja jest dokładna a błąd obliczony przez nasz program jest bardzo mały dla dowolnej ilości węzłów.

2. **Funkcja będąca wielomianem stopnia większego niż 4**
   Jako przykład bierzemy funkcję $largePolynomial$ na przedziale $[2, 3] \times [1, 4]$

   $$largePolynomial(x, y) = x^{22} + y^{24} - x^3y^{15}$$

Korzystając z wcześniej pokazanego błędu złożonej kwadratury Simpsona możemy zauważyć, że błąd kwadratury jest zależny od czwartej pochodnej funkcji całkowanej więc wielomiany stopnia większego od 4 mają ten błąd niezerowy, a im wyższy stopień wielomianu tym większy błąd. Dodatkowo możemy zauważyć, że wraz ze wzrostem liczby węzłów wynik jest dokładniejszy, a tym samym błąd mniejszy.





3. **Funkcja niecałkowalna lub o trudnej do znalezienia funkcji pierwotnej**
   Jako przykład bierzemy funkcję $NonIntegral$ na przedziale $[2,3] \times [1,4]$

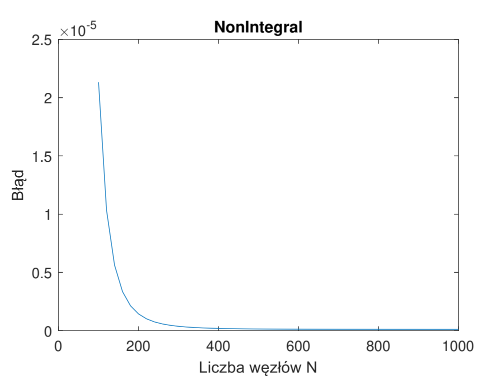
$$NonIntegral(x,y) = e^{x^2}$$

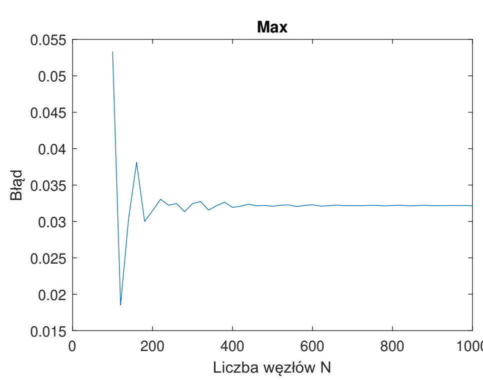
   Funkcja ta ma bardzo trudną lub niemożliwą do znalezienia funkcję pierwotną, mimo to nasza metoda jest w stanie ją numerycznie zcałkować. Jej błąd maleje wraz ze wzrostem liczby węzłów.

4. **Funkcja Maksimum**
   Jako przykład bierzemy funkcję max na przedziale $[0,80] \times [-43,40]$

$$max(x,y) = \begin{cases} x & dla \quad x \geqslant y, \\ y & dla \quad x < y \end{cases}$$

   Funkcja max ma niewielki błąd dla dowolnych przypadków, jednak co ciekawe, wraz ze wzrostem węzłów błąd dąży do liczby bliskiej 0, lecz różnej od 0.





5. **Funkcja stała na prawie całej dziedzinie**
Jako przykład bierzemy *almostConstant* na przedziale $[-1, 10] \times [3, 4]$

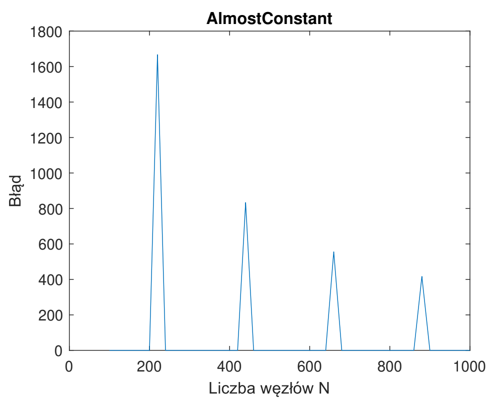
$$almostConstant(x, y) = \begin{cases} 0 \quad dla \quad x \neq 0, \\ 100000 \quad dla \quad x = 0 \end{cases}$$

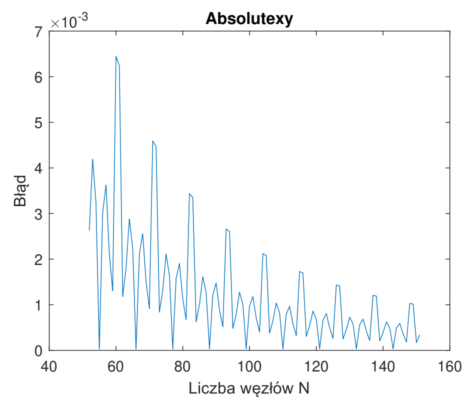
Całka z takiej funkcji na dowolnym przedziale wynosi 0, jeżeli jednak któryś z węzłów tej funkcji zostanie umieszczony w punkcie $x_0 = 0$, wartość obliczonej całki będzie różna od zera i pojawi się błąd, który będzie również zależny od ilości węzłów. Wraz ze wzrostem liczby węzłów natrafienie na jednym na wartość funkcji w punkcie $x_0 = 0$ będzie miało mniejszy wpływ na całkowity wynik, a więc błąd będzie mniejszy.

6. **Funkcja, dla której mały wzrost liczby węzłów może powodować zwiększenie błędu**
Jako przykład bierzemy funkcję *absolutexy* na przedziale $[-1, 10] \times [3, 4]$

$$absolutexy(x, y) = |xy|$$

Wraz z dużym wzrostem węzłów błąd obliczania tej funkcji maleje. Jednak na wykresie błędu od ilości węzłów możemy zobaczyć skoki oznaczające, że mały wzrost liczby węzłów, może zwiększyć błąd obliczanej całki.





4 Analiza wyników

Metoda działa prawie bezbłędnie dla wielomianów stopnia nie większego niż 4. Błąd jest największy dla funkcji, których pochodne 4 stopnia przyjmują duże liczby w danym przedziale. Na ogół błąd funkcji maleje wraz ze wzrostem liczby węzłów. Można znaleźć jednak wyjątkowe przypadki, dla których nie do końca to tak działa. Niestety wzrost liczby węzłów oznacza też wzrost czasu działania funkcji. Dodatkowo funkcja jest w stanie zcałkować numerycznie funkcje, dle których funkcja pierwotna nie istnieje.