

11 stycznia 2022 r.

Mateusz Andryszak  
322422

## Metoda Gaussa-Seidela dla równań macierzowych $AX = B$ oraz $XA = B$

Projekt nr 2

### 1 Opis metody

Za zadanie mamy wyznaczyć macierz  $X$  spełniającą jedno z poniższych równań:

$$AX = B \tag{1}$$

gdzie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$XA = B \tag{2}$$

gdzie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

za pomocą metody iteracyjnej Gaussa-Seidela.

Do wyznaczenia macierzy  $X$  posłużymy się macierzą iteracyjną.

Przedstawiamy macierz  $A$  jako sumę trzech macierzy  $A = L + D + U$ , gdzie

$L$  jest macierzą trójkątną dolną zawierającą elementy leżące pod diagonalą  $A$ ,  $D$  jest macierzą diagonalną, zawierającą elementy diagonali  $A$ , a  $U$  jest macierzą trójkątną górną zawierającą elementy leżące ponad diagonalą  $A$

Dla równania (1):

$$AX = (L + D + U)X = (L + D)X + UX = B$$

$$(L + D)X = -UX + B$$

$$X = -(L + D)^{-1}UX + (L + D)^{-1}B$$

Dla odpowiedniej iteracji:

$$X^{(k+1)} = -(L + D)^{-1}UX^{(k)} + (L + D)^{-1}B, \quad k = 0, 1, \dots$$

Czyli oznaczając odpowiednie macierze:

$$X^{(k+1)} = B_{gs}X^{(k)} + C_{gs}, \quad k = 0, 1, \dots$$

gdzie:

$$B_{gs} = -(L + D)^{-1}U, \quad C_{gs} = (L + D)^{-1}B$$

Dla równania (2):

$$XA = X(L + D + U) = X(L + D) + XU = B$$

$$X(L + D) = -XU + B$$

$$X = -XU(L + D)^{-1} + B(L + D)^{-1}$$

Dla odpowiedniej iteracji:

$$X^{(k+1)} = -X^kU(L + D)^{-1} + B(L + D)^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Czyli oznaczając odpowiednie macierze:

$$X^{(k+1)} = B_{gs}X^{(k)} + C_{gs}, \quad k = 0, 1, \dots$$

gdzie:

$$B_{gs} = -U(L + D)^{-1}, \quad C_{gs} = B(L + D)^{-1}$$

## 2 Opis programu obliczeniowego

Funkcja *gaus\_seidel* służy do wyznaczenia macierzy  $X$  z równania  $AX = B$

Funkcja *gaus\_seidel\_2* służy do wyznaczenia macierzy  $X$  z równania  $XA = B$

Obie funkcje przyjmują 5 parametrów:

$A$  - Macierz  $A$  z równania

$B$  - Macierz  $B$  z równania

*max\_iterations* - parametr opcjonalny określający maksymalną ilość iteracji. W przypadku braku parametru *max\_iterations* przy wywołaniu funkcji jest on ustawiony na *max\_iterations* = 100

*tolerance* - parametr opcjonalny określający dokładność wyniku, przy której kolejna iteracja nie zostanie już wykonana. W przypadku braku parametru *tolerance* przy wywołaniu funkcji jest on ustawiony na *tolerance* = 0.00001

$A_0$  - parametr opcjonalny określający przybliżenie początkowe macierzy  $X$ . W przypadku braku parametru  $A_0$  przy wywołaniu funkcji jest on ustawiony na  $X = \mathbf{0}$

Funkcja *gaus\_seidel* zwraca trzy wartości:

$X$  - szukana macierz  $X$

*error* - błąd szukanej macierzy

$r$  - promień spektralny macierzy  $B_{gs}$

Błąd obliczamy za pomocą normy:  $error = norm(GoodX - X)$  gdzie *GoodX* jest macierzą obliczoną za pomocą operacji na macierzach. Zakładamy, że macierz  $A$  jest odwracalna. W przypadku gdy macierz  $A$  nie jest odwracalna, program zadziała, lecz błąd nie zostanie policzony.

### 3 Przykłady obliczeniowe

Program został przetestowany na wielu przykładach.

#### 1. Rozwiązywanie układu równań liniowych - promień spektralny macierzy $B_{gs}$ mniejszy od 1

Jako przykład bierzemy macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

parametrów opcjonalnych nie dodajemy.

Po zastosowaniu funkcji *gaus\_seidel* macierz  $B_{gs} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$

więc jej promień spektralny jest mniejszy od 1, a gdy promień spektralny macierzy iteracyjnej jest mniejszy od 1 to metoda gaussa-seidela jest zbieżna globalnie. Dla wystarczającej ilości iteracji, otrzymany błąd dla danego przykładu jest bliski 0.

#### 2. Rozwiązywanie układu równań liniowych - promień spektralny macierzy $B_{gs}$ większy od 1

Jako przykład bierzemy macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$$

parametrów opcjonalnych nie dodajemy.

Po zastosowaniu funkcji *gaus\_seidel* macierz  $B_{gs} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 2.5 \end{pmatrix}$

więc jej promień spektralny jest większy od 1, a gdy promień spektralny macierzy iteracyjnej jest większy od 1 to metoda gaussa-seidela nie jest zbieżna globalnie, a w naszym przypadku dla początkowego przybliżenia macierzy  $X = \mathbf{0}$  metoda jest rozbieżna i błąd jest duży. Jednak w podanym przykładzie wystarczy zamiana wierszy drugiego z trzecim w macierzach  $A$  i  $B$  aby metoda zadziałała w celu znalezienia rozwiązań układu równań.

### 3. Macierz przekątniowo dominująca

Stwórzmy dowolną macierz  $A$  taką, żeby na pewno była przekątniowo dominująca:

$$A = (\text{rand}(4) + 3 * \text{eye}(4)) * 100$$

Następnie weźmy dowolną macierz  $B$ :

$$B_1 = \text{rand}(4, 3), \quad B_2 = \text{rand}(5, 4)$$

Dla każdych takich macierzy funkcje *gaus\_seidel*( $A, B_1$ ) oraz *gaus\_seidel\_2*( $A, B_2$ ) są zbieżne globalnie, gdyż jeżeli macierz  $A$  jest przekątniowo dominująca to macierz iteracyjna ma promień spektralny mniejszy od 1. Dla wystarczającej ilości iteracji, błąd w takich przykładach będzie bliski zera.

### 4. Promień spektralny macierzy $B_{gs}$ jest większy od jeden, jednak wynik jest poprawny

Jako przykład bierzemy macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 32 \\ 10 & 3 & 18 \\ 10 & 20 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

parametrów opcjonalnych nie dodajemy.

Po zastosowaniu dowolnej z funkcji *gaus\_seidel*, *gaus\_seidel\_2*, mimo tego, że promień spektralny macierzy  $B_{gs}$  jest znacznie większy od 1 to wynik jest poprawny, ponieważ początkowe przybliżenie jest od razu przybliżeniem dobrym.

### 5. $\mathbf{AX=XA=B}$

Jako przykład bierzemy macierze:

$$A_1 = \text{rand}(3), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Okazuje się, że wynik funkcji *gaus\_seidel* będzie taki sam jak wynik funkcji *gaus\_seidel\_2*, jeżeli użyjemy tą samą liczbę iteracji oraz tą samą macierz początkową. Nie ma znaczenia czy metoda jest zbieżna czy nie. Dzieje się tak, ponieważ:

$$X = -(L + D)^{-1}UX + (L + D)^{-1}B \iff AX = B$$

$$X = -XU(L + D)^{-1} + B(L + D)^{-1} \iff XA = B$$

$$AX = XA \iff -XU(L + D)^{-1} + B(L + D)^{-1} = -(L + D)^{-1}UX + (L + D)^{-1}B$$

więc każda kolejna iteracja, będzie zwracała ten sam wynik.

## 6. Za mała ilość iteracji

Jako przykład bierzemy macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Po zastosowaniu funkcji *gaus\_seidel*(*A*, *B*, 2) otrzymamy błąd  $e1 \approx 0.1$

Po zastosowaniu funkcji *gaus\_seidel*(*A*, *B*, 3) otrzymamy błąd  $e1 \approx 0.02$

Po zastosowaniu funkcji *gaus\_seidel*(*A*, *B*) otrzymamy błąd bardzo bliski 0

Jeżeli przykład jest zbieżny, wraz ze wzrostem iteracji wzrasta dokładność wyniku i tym samym maleje błąd.

## 4 Analiza wyników

Metoda działa zawsze jeżeli promień spektralny macierzy  $B_{gs}$  jest mniejszy od 1. Dzieje się tak zawsze gdy macierz *A* jest przekątniowo dominująca i jest to warunek wystarczający zbieżności globalnej. Macierz *B* może być dowolna, gdyż od niej nie zależy to czy metoda będzie zbieżna. Natomiast w przypadku gdy macierz  $B_{gs}$  ma promień spektralny większy od 1, metoda może zadziałać jeżeli iteracja trafi akurat na wartość bliską poprawnego wyniku. Jednak wydarzy się to tylko dla nielicznie wybranych przybliżeń początkowych, a dla większości metoda będzie rozbieżna. Dodatkowo możemy zauważyć, że wraz ze wzrostem promienia spektralnego macierzy  $B_{gs}$  rośnie błąd wyniku. Obrazuje to poniższy wykres stworzony na podstawie wylosowanych macierzy.

