高数 A1 期末自测卷（一）

一、选择题

1、已知函数 $f(x)=\begin{cases} a+x^2, x<0 \\ 1, \quad x=0 \\ \ln(b+x+x^2), x>0 \end{cases}$，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 a,b 的值为（　）

（A）$a=0,b=0$　（B）$a=1,b=1$　（C）$a=1,b=e$　（D）$a=e,b=0$

2、设 $y=x\cos x-\ln a^x+\sin e$，则 $y'=$（　）

（A）$\cos x-x\sin x-a^{-x}+\cos e$　　（B）$\cos x+x\sin x-a^{-x}$

（C）$\cos x-x\sin x-a^{-x}$　　（D）$\cos x-x\sin x-\ln a$

3、若 $\int_0^1(2x+k)dx=2$，则 $k=$（　）

（A）1　（B）-1　（C）0　（D）$\frac{1}{2}$

4、数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\mathrm{n})=$（　）

（A） 0　（B）$\frac{1}{2}$　（C）1　（D）不存在

二、填空题

1、$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{x^2-1}=$__________

2、$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\cos t^2dt=$__________

3、微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解为__________

4、已知 $y=\frac{\ln x}{x}$，则 $y'=$__________

5、$\int_0^4|x-1|dx=$__________

三、计算题

1、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$

2、求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$

3、设 $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$，求 dy

4、求由方程 $y^2\cos x=5\sin(3xy)$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 y'

5、计算 $\int x\cos 3xdx$

6、求 $\int_{-1}^{1}\dfrac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

7、计算曲线 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 $0\le x\le 1$ 的一段弧长

8、求方程 $(x^2-1)y'+2xy=\cos x$ 的通解

四、解答题

1、求函数 $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ 的极值

2、曲线 $y=y(\mathrm{x})$ 满足 $y^2y''+1=0$，通过点 $(0,\dfrac{1}{2})$，且在该点处的切线斜率为 2，求这个曲线方程

五、证明题

设 $\mathrm{F}(x)=(x-1)f(x)$，其中 f(x) 在[1,2]具有一阶连续导数，在(1,2)二阶可导，且 $f(1)=f(2)=0$，试证明存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $\mathrm{F}''(\xi)=0$

参考答案

一、选择题：

1、解： $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(a+x^2\right)=a,\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(\mathrm{b}+x+x^2)=\ln b,$

连续则极限存在，故有 $a=\ln b,$

又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，$f(0)=1$，则 $a=\ln b=1\Rightarrow a=1,b=e$

2、解：

$$y=x\cos x-\ln a^x+\sin e\Rightarrow y'=x'\cos x+x\left(\cos x\right)'-\frac{1}{a^x}\left(a^x\right)'+0$$

$$=\cos x-x\sin x-\frac{1}{a^x}a^x\ln a$$

$$=\cos x-x\sin x-\ln a$$

3、解：

$$\int_0^1 (2x+k)dx=[x^2+kx]_0^1=1+k$$ 故 k=1

4、解：进行分子有理化：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\mathrm{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+\mathrm{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+\mathrm{n}}=\frac{1}{2}$

二、填空题：

1、 3　　　2、解答：$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\cos t^2dt=\cos x^4\cdot\left(x^2\right)'=2x\cos x^4$

3、特征方程为$r^2-2r-3=0\Rightarrow r_1=3,r_2=-1$，通解为$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$

4、$y'=\frac{(\ln x)'x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

5、$\int_0^4|x-1|dx=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^4(x-1)dx=5$

三、计算题：

1、解：此为$\frac{0}{0}$型极限，利用洛必达法则求导

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{-(1+x)\sin x}$$ （利用无穷小代换$\sin x\sim x$）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{-(1+x)x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1$$

2、解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=e\cdot 1=e$

3、解：

$$y=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\Rightarrow y'=\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)'\left(1+\sqrt{x}\right)-\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)'}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=-\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

则 $dy=-\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx$

4、解：方程两边同时对 x 求导

$$2yy'\cos x+y^2(-\sin x)=5\cos(3xy)\cdot 3(y+xy')$$

解得 $y'=\frac{y^2\sin x+15y\cos(3xy)}{2y\cos x-15x\cos(3xy)}$

5、解：利用分部积分公式

$$\int x\cos 3xdx=\frac{1}{3}\int xd\sin 3x=\frac{1}{3}\left(x\sin 3x-\int \sin 3xdx\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(x\sin 3x+\frac{1}{3}\cos 3x\right)+C$$

6、解：令 $\sqrt{5-4x}=t$ ，则 $x=\frac{5-t^2}{4},dx=-\frac{t}{2}dt.$

当 $x=-1$ 时， $t=3$ ，当 $x=1$ 时， $t=1$

$$\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}=\int_{3}^{1}\frac{\frac{5-t^2}{4}\left(-\frac{t}{2}\right)dt}{t}=\frac{1}{8}\int_{1}^{3}(5-t^2)dt=\frac{1}{6}$$

7、解： $s=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+(x^{\frac{1}{2}})^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

8、解：方程可化为 $y'+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1}$ ，是一阶线性方程

$P(x)=\frac{2x}{x^2-1},Q(x)=\frac{\cos x}{x^2-1}$

则通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)$

$$=e^{-\ln(x^2-1)}(\int\frac{\cos x}{x^2-1}e^{-\ln(x^2-1)}dx+C)$$

$$=\frac{1}{x^2-1}(\int\cos xdx+C)=\frac{1}{x^2-1}(\sin x+C)$$

四、解答题

1、解：定义域$(0，+\infty)$ ， $y'=\frac{(2-\ln x)\ln x}{x^2}$

驻点：$x_1=1$，$x_2=e^2$

x	(0,1)	1	$(1,e^2)$	e^2	$(e^2,+\infty)$
y’	—	0	+	0	—
y	↓		↑		↓

$\therefore$ 函数有极小值$y(1)=0$,极大值$y(e^2)=\frac{4}{e^2}$

2、解：依题意,有$\begin{cases}y^2y''+1=0\\ y|_{x=0}=\frac{1}{2},y'|_{x=0}=2\end{cases}$.

令 $p=y'$，则$y''=p\dfrac{dp}{dy}$ ，原方程化为 $y^2 p\dfrac{dp}{dy}=-y^{-2}$

解得 $\dfrac{p^2}{2}=\dfrac{1}{y}+C_1$，代入初始条件，解得 $C_1=0$

故 $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{\dfrac{2}{y}}$ ，解得 $\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2}x+C_2$

代入初始条件，解得 $C_2=\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{2})^{\frac{3}{2}}$

所求曲线方程为 $y^3=\dfrac{1}{2}(3x+\dfrac{1}{2})^2$

五、证明题

证明：因$f(x)$在$[1,2]$具有一阶连续导数，在$(1,2)$内二阶可导，

则$F(x)$在$[1,2]$具有一阶连续导数，在$(1,2)$内二阶可导，

因$F(1)=F(2)=0$ (因$f(2)=0$)。

则$F(x)$在$[1,2]$上满足罗尔定理条件

则至少存在$\xi_1\in(1,2)$使$F'(\xi_1)=0$

又$F'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$，而$f(1)=0$，则$F'(1)=0$

$F'(x)$在$[1,\xi_1]$上满足罗尔定理条件

则至少存在$\xi\in(1,\xi_1)\subset(1,2)$使$F''(\xi)=0$

即存在$\xi\in(1,2)$使$F''(\xi)=0$.