5元

桂林电子科技大学

概率论与数理统计

近年精选试卷及答案

试卷编号：A

桂林电子科技大学试卷

______学年第___学期　　　　课号______________

______________　　适用班级（或年级、专业）______________

课程名称 概率论与数理统计　　　　学号____________　　姓名__________

考试时间 120 分钟　班级__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	成绩
满分	12	12	20	20	16	20					100
得分											
评卷人											

一 填空题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 设随机变量 $X \sim b(n,p)$，且 $E(X)=0.5, D(X)=0.45$，则 $n=$______，$p=$______；

2. 若 $X \sim \chi^2(n)$，则 $D(X)=$____________；

3. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本。s 为样本标准差，μ,σ^2 未知。

   则 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为：______________________。

二 选择题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 事件 A 与 B 独立，且 P(A)=p，P(B)=q，则 $P(A\cup\overline{B})=$（　　）。

   (A) $1+p-q$；　(B) $p+q$；　(C) 1　；　(D) $1+pq-q$。

2. 若 $f(x)=\cos x$ 可以作为随机变量 X 的概率密度函数，则 X 的可能取值区间为：（　　）

   (A) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$；　(B) $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$；　(C) $[0,\pi]$；　(D) $\left[\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right]$。

3. 设 n 个随机变量 $X_1,X_2,\ldots X_n$ 相互独立且同分布，$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$。则（　　）。

   (A) s^2 不是 σ^2 的无偏估计；(B) s^2 与 $\overline{X}$ 不相互独立；(C) s^2 是 σ^2 的最大似然估计；

   (D) s^2 是 σ^2 的无偏估计。

三（每小题 10 分，共 20 分）

1. 连续型随机变量 X 的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}A+Be^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad (\lambda>0)$$

   (1) 试确定常数 A，B 的值；(2) 求概率密度 $f(x)$。

2. 设随机变量X在区间（0，1）上服从均匀分布，求$Y=\dfrac{1}{X+1}$的概率密度。

四（每小题 10 分，共 20 分）

1. X与Y独立同分布，且X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ $(\lambda>0)$

试求：(1) 若$E\left(X^2\right)=\dfrac{1}{8}$，求$\lambda$；

(2) $Z=\max(X,Y)$的概率密度。

2. 某人进行投篮训练，共投 100 次，设每次投入的概率为 0.9，X表示投中的次数，Y表示投不中的次数。

试求：(1) X的分布律；(2) $Cov\left(X,Y\right)$。

五、（每小题 8 分，共 16 分）

1. 已知随机变量X与Y相互独立，$X\sim N(0,1)$，Y在区间（0，2）上服从均匀分布，

试求：$P\{X\ge Y\}$。

2. 设随机变量(X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}A(1+2x)(1+2y) & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

试求：

(1)A；(2) X 与 Y是否独立，为什么？

六、（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设$X_1,X_2,\cdots,X_6$是总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，$s^2=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{6}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$为样本方差。

试求：$5s^2/\sigma^2$ 的分布及参数。

2. 设总体X的分布率为：

X	1	2	3
P_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$\theta(0<\theta<1)$是未知参数。已知取得样本为：$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$。试求：θ的矩估计和最大似然估计。

试卷编号：B

桂林电子科技大学试卷

________________学年第___学期　　　　课号______________

课程名称 概率与数理统计　　适用班级（或年级、专业）______________

考试时间 120 分钟　班级__________　学号____________　姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	成绩
满分	12	12	20	20	16	20					100
得分											
评卷人											

一、填空题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 若事件 A 与 B 相互独立，则 $P(\overline{A}\cap\overline{B})=$____________；

2. 设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，则对任意的 $\varepsilon>0$ 关于 X 的切比雪夫不等式为：__________；

3. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本。s^2 为样本方差，则 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ 服从________分布。

二、 选择题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{3}, A,B,C$ 相互独立，则 A,B,C 至少有一个发生的概率为（　）。

(A) $\dfrac{2}{3}$；　(B) $\dfrac{19}{27}$；　(C) $\dfrac{26}{27}$；　(D) $\dfrac{1}{27}$。

2. 设总体 $X\sim b(n,p)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，s^2 为样本方差。则 $E(s^2)=$（　）。

(A) $np(1-p)$；　(B) np；

(C) $(np)^2$；　(D) np^2。

3. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本。s^2 为样本方差，μ,σ^2 均未知。

则 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为：

(A) $\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}(n-1)\right)$；(B) $\left(\overline{X}\pm\dfrac{s}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$；

(C) $\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$；(D) $\left(\overline{X}\pm\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$。

三（每小题 10 分，共 20 分）

1. 某班有 30 位同学，其中有 3 位同学身高在 1.8 米以上，现从中任抽取三人，X 表示从

中任抽取三人身高在1.8米以上的人数。试求：

(1) X 的分布律 ；(2) $P(X=0)$。

2. 设 $X\sim U(a,b)$,$E(X)=1$ ，$D(X)=3$。试求：

(1). a,b ；

(2). $Y=2X+1$ 的概率密度。

四（每小题10分，共20分）

1.设 (X,Y) 在矩形域D：$0\le x\le 1,1\le y\le 2$ 上服从均匀分布。试求：

(1) (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)$；(2) X 与 Y 是否独立，为什么？(3) $P\{-X+Y>\frac{3}{2}\}$。

2.（X,Y）的联合分布律为：

Y \ X	-1	1	2
-1	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$
2	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

试求：

（1） X 的边缘分布律；

（2） X，Y 是否相互独立，并说明原因。

五、(每小题8分，共16分)

1. 已知随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(0,\frac{1}{2})$，试求：$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度。

2. 设一批零件的重量都是随机变量，它们相互独立，且服从相同的分布。其期望为0.5kg，方差为0.5kg。问5000只零件的总重量超过2510kg的概率是多少？（$\Phi(0.2)=0.5793$）

六、(每小题10分，共20分)

1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的样本，$\mu=E(X)$，$\sigma^2=D(X)$ 存在且未知。试求 σ^2 的矩估计和无偏估计。

2. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，且 σ^2 已知。

H_0：$\mu=\mu_0$（已知），H_1：$\mu\ne\mu_0$ 。

试求：（1）检验统计量；

（2）对给定的置信水平 α，其拒绝域；

(3) 当 $\mu_0=3.27$，$\sigma=0.02$，$n=16,\bar{x}=3,\alpha=0.1$ 时，是接受原假设 H_0，还是拒绝原假设 H_0。(参考数据 $z_{0.05}=1.64$)

试卷编号：C

桂林电子科技大学试卷

________________学年第___学期　　　　课号______________

课程名称 概率论与数理统计 　适用班级（或年级、专业）______________

考试时间 120 分钟　班级__________　学号____________　姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	成绩
满分	12	12	24	24	20	8					100
得分											
评卷人											

一　填空题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 若随机事件 A，B 相互独立，P(A)=0.2，P(B)=0.45，则 $P(A\cup B)=$______________。

2. 设ξ,η是相互独立的随机变量，其分布函数分别为$F_\xi(x),F_\eta(y)$，则$Z=\max(\xi,\eta)$的分布函数为：________________；

3. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的样本，s^2为样本方差。

则$E(s^2)=$________。

二 选择题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随σ增大概率$P\{|X-\mu|<\sigma\}$应（　　）；

（A）单调增大；　(B) 单调减少；　(C) 增减不定；　(D) 保持不变。

2. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的样本，$\overline{X}$为样本均值，

$s_k^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^k,k=1,2,3,4$。则服从自由度为$n-1$的$t$分布的随机变量是（　）；

（A）$t=\frac{\overline{X}-\mu}{s_1/\sqrt{n}}$；(B)　$t=\frac{\overline{X}-\mu}{s_2/\sqrt{n}}$；　(C)　$t=\frac{\overline{X}-\mu}{s_3/\sqrt{n}}$；(D)　$t=\frac{\overline{X}-\mu}{s_4/\sqrt{n}}$。

3. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的样本，$\overline{X}$为样本均值。则$\overline{X}$服从（　）。

（A）$N(\mu,\sigma^2)$；　(B)　$N(\mu,\left(\sigma/n\right)^2)$；　(C)　$N(\mu,\sigma^2/n)$；　(D)　$N(\mu/n,\sigma^2)$。

三（每小题 12 分，共 24 分）

1．甲乙两人进行投篮比赛，各投两次，每人投中的概率均为 0.5，设X_1,X_2 分别表示甲乙投中的次数，试求：(1) (X_1,X_2)的分布率。(2) $E(X_1X_2)$。

2. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}ke^{-(3x+4y)}, x>0, y>0\\ 0,其他\end{cases}$$

求 ：（1）常数k；　（2）验证X和Y是否相互独立。

四（每小题 12 分，共 24 分）

1. 设(x,y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

试求：(1). (X,Y)的联合分布函数；

（2）$P\{X^2+Y^2\le 1\}$。

2. 根据历史资料分析，某地连续两次强地震时间间隔的年数X为随机变量，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-0.05x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

现在该地区刚发生一次强地震，试求：

(1) X的概率密度 ；(2) 今后 10 年内再次发生强地震的概率；

五（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设总体X的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}1-\left(1/x\right)^{\theta} & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}$$

其中$\theta(\theta>1)$未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的样本。试求θ的矩估计量和最大似然估计量。

2. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的样本，$a\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1}-X_i\right)^2$为$\sigma^2$的无偏估计。试求数$a$。

六 （8 分）设随机变量X的概率密度为：

$$f_X(x)=\frac{2}{\pi(1+x^2)},\quad x>0$$

试证明：随机变量$Y=\dfrac{1}{X}$与X服从同一分布。

试卷编号：D

桂林电子科技大学试卷

______学年第___学期　　　　课号______

课程名称 概率论与数理统计　　适用班级（或年级、专业）______

考试时间 120 分钟　班级______　学号______　姓名______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	成绩
满分	12	12	12	12	20	22	10				100
得分											
评卷人											

一　填空题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度与边缘概率密度分别为$f(x,y),f_X(x),f_Y(y)$，则X与Y相互独立的充要条件是______；

2. 设总体X服从二项分布，即$X\sim b(1,p)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的样本，$\overline{X}$为样本均值。

   则$E(\overline{X})$=______，$D(\overline{X})$=______；

3. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的样本，且σ^2已知。

   H_0：$\mu=\mu_0$（已知），H_1：$\mu\neq\mu_0$。则用于检验假设H_0的统计量为：______。

二　选择题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 一个小组有 6 个学生，则这 6 个学生的生日都不相同的概率为（设一年为 365 天）（　）。

   (A) $\dfrac{1}{C_{365}^6}$；　(B) $\dfrac{1}{A_{365}^6}$；　(C) $\dfrac{C_{365}^6}{(365)^6}$；　(D) $\dfrac{P_{365}^6}{(365)^6}$。

2. 设ξ,η是相互独立的随机变量，其分布函数分别为$F_\xi(x),F_\eta(y)$，则$Z=\min(\xi,\eta)$的分布函数为（　）

   (A) $F_Z(z)=F_\xi(z)$；　(B) $F_Z(z)=1-[1-F_\xi(z)][1-F_\eta(z)]$；

   (C) $F_Z(z)=\min\{F_\xi(z),F_\eta(z)\}$；　(D) $F_Z(z)=F_\eta(z)$。

3. 设X_1,X_2,X_3是总体X的样本，$\mu=E(X)$存在，$\varphi(X_1,X_2,X_3)=aX_1+b(3X_3-2X_2)$是$\mu$的无偏估计。则（　）。

   (A) $a=1,b$可以是任意实数；(B) $a=b$；(C) $a+b=1$；(D) $a+b=2$。

三（12 分）已知二维随机变量(X,Y)的联合分布律为：

(1) 求关于X, Y的边缘分布律；

(2) 求条件分布律；

(3) 问X, Y是否相互独立？

Y \ X	1	2	3
2	0.10	0.20	0.10
4	0.15	0.30	0.15

四（12分）

设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{k}(1-x)y & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

试求：(1) k； (2) $P\{Y\le\frac{1}{2}X\}$；(3) 判断X与Y是否相互独立。

五（每小题10分，共20分）

1．设随机变量X与Y相互独立，且服从同一分布。试证明：

$P\{a<\min(X,Y)\le b\}=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2$ 。

2. 设X与Y独立同分布，且$P(X=k)=\frac{1}{3}$，k=1,2,3。

试求：(1) (X,Y)的联合分布律； (2) D(Y)。

六（每小题11分，共22分）

1． 设总体X服从正态分布，即$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的样本。试求a使$\hat{\sigma}=a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|X_i-X_j\right|$为$\sigma$的无偏估计。

2. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的样本。$\overline{X},s$ 为样本均值与样本标准差，μ,σ^2未知。试求：

（1）μ的置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间；

（2）当$n=9,\bar{x}=49.9,s=\sqrt{0.29},\alpha=0.05$时，检验假设$H_0:\mu=50$的合理性 。

(参考数据：$t_{0.025}(8)=2.306$)

七（10分） 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}c(R-\sqrt{x^2+y^2}),x^2+y^2<R^2\\ 0,x^2+y^2\ge R^2\end{cases}$$

试求：（1）系数c； （2）(X,Y)落在圆域$x^2+y^2<r^2(r<R)$内的概率。

试卷编号：E

桂林电子科技大学试卷

____________学年第___学期　　　　课号____________

课程名称 概率论与数理统计　　适用班级（或年级、专业）____________

考试时间 120 分钟　班级________　学号__________　姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	成绩
满分	12	12	20	24	20	12					100
得分											
评卷人											

一、　填空题（每小题 4 分，共 12 分）

1、设 X,Y 是相互独立的随机变量，且均服从正态分布 $N(6,4)$，则 $E[(Y-1)(X^2-1)]$ =____________。

2、设总体 $X\sim U(0,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是 X 的样本。则

$P\{\max(X_1,X_2,\cdots,X_5)>\theta/2\}$=________________________。

3、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值。则 $\overline{X}$ 的概率密度为：________________。

二、　选择题（每小题 4 分，共 12 分）

1、设 A,B 为任意的两个随机事件，且 $A\subset B,P(A)>0$，则下列选项不正确的是_____。

（A）、$P(\overline{A})<P(\overline{B})$；　　（B）、$P(A+B)=P(B)$；

（C）、$P(AB)=P(B)$；　　（D）、$P(A)<P(A|B)$。

2、若 $X\sim b(n,p)$，则 $E(X^2)=$_______。

（A）$(1-np)^2$　　（B）$np(1-p-np)$

（C）$(1+np)^2$　　（D）$np(1-p+np)$

3、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，且 σ^2 已知。H_0：$\mu=\mu_0$（已知），H_1：$\mu\le\mu_0$。则适合于检验假设的统计量为：________________

(A)、$\dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ ；（B)、$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ；（C)、$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ ；（D)、$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 。

三（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设随机变量 $X \sim N(10,4)$，$Y = 5X - 2$，试求：

   (1)、Y 的概率密度；　　(2)、$P\{Y < 48\}$。

2. 设随机变量 X 的分布律为：$P\{X = k\} = \dfrac{1}{3}, k = 0,1,2$，试求：

   (1)、$Y = X^2 - 1$ 的分布律；　　(2)、$D(Y)$。

四（每小题 12 分，共 24 分）

1. 设来自 A，B，C 三个学校的考生人数分别为 10，15，25 名，其中女生分别占 3，5，7 名，若随机叫一名考生，试求：
   (1)、是女生的概率；
   (2)、已知叫的是一名女生，问该女生是 A 校的概率。

2. 已知 (X,Y) 的联合分布律为：

$X \backslash Y$	-1	1
0	$1/3$	$\frac{1}{6}$
1	β	$1/3$

试求：(1)、β；　(2)、X 与 Y 是否独立；　(3)、$E(XY)$。

五（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设总体 $X \sim \pi(\lambda)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的样本，试求 $p(X = 0)$ 的最大似然估计。

2. 设总体 $X \sim N(0,2^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_4$ 是 X 的样本，

$Y = a(4X_4 - 3X_3)^2 + b(2X_2 - X_1)^2$，且 Y 服从 χ^2 分布。试求常数 a,b。

六 (共 12 分)

设 X,Y 的联合概率密度为：

$$f(x,y) = \begin{cases} ce^{-(x+y)}, x > 0, y > 0 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

试求：(1) c 的值；(2) 边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；　(3) $Z = X - Y$ 的概率密度。

试卷编号：F

桂林电子科技大学试卷

________________学年第___学期　　　　课号______________

课程名称<u>概率论与数理统计</u>　　适用班级（或年级、专业）______________

考试时间<u>120</u>　分钟　班级__________　学号____________　姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	成绩
满分	12	12	20	20	16	20					100
得分											
评卷人											

一．　填空题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 设 $X \sim b(2,p)$，$Y \sim b(3,p)$，若 $P(X \ge 1) = 5/9$，则 $P(Y=1) =$__________。

2. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 X,Y 的相关系数 ρ_{XY} ＝________。

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的样本，$\mu = E(X),\sigma^2 = D(X)$ 存在，S^2 为 X 的样本方差。则 $E(S^2)$=_______。

二．　选择题（每小题 4 分，共 12 分）

1. X 服从区间[0，1]上的均匀分布，对 $0<a<1<b$，则 $P(a<X<b)$=（　）

(A) a；　(B) $b-a$；　(C) $1-a$；　(D) $b-1$。

2. 下列正确的是（　）

（A）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；　（B）$P(AB)=P(A)P(B)$；

（C）$P(B|A)=\dfrac{P(A)}{P(B)}$　$(P(\mathrm{B})\neq 0)$；（D）$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(\mathrm{A})}$，　$P(A)>0$。

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的样本，$\mu = E(X),\sigma^2 = D(X)$ 存在，$\overline{X}$ 是 X 的样本均值。则下列正确的是( )。

(A) $X_i(i=1,2,\cdots n)$ 不是 μ 的无偏估计；　(B) $\overline{X}$ 作为 μ 的无偏估计比 X_i 更有效；

(C) X_i 作为 μ 的无偏估计比 $\overline{X}$ 更有效；　(D) $\overline{X}$ 不是 μ 的无偏估计。

三．　（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设随机变量Y服从参数为 10 的指数分布，求关于 x 的二次方程 $4x^2+4xY+Y+2=0$ 有实根的概率。

2. 设 $(X,Y) \sim f(x,y) = \begin{cases} x^2 + Axy & 0<x<1, 0<y<2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

试求：(1) A 的值；　(2) $P(X+Y<1)$；　(3) 判断 X,Y 的独立性。

四、（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设 ξ 与 η 是相互独立同分布的随机变量，且 $P\{\xi=k\}=\frac{1}{3}$，k=1,2,3。

$X=\max\{\xi,\eta\},Y=\min\{\xi,\eta\}$。试求：

(1). (X,Y) 的联合分布律；　(2). D(Y) 。

2. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，$\overline{X}$ 与 s^2 分别为样本均值与方差，

μ,σ^2 均未知。试求：

(1) μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间；

(2) 当 $\overline{x}=5,s=0.9,n=9,$ 时，μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间。（参考数据 $t_{0.025}(8)=2.306$）。

五、（每小题 8 分，共 16 分）

1. 已知随机变量 X 的分布律为：

X	-1	0	1	3
P	0.1	0.2	0.5	0.2

试求：

(1) $Y=X^2+1$ 的分布律；

(2) $E(X)$ 及 $D(X)$ 的值。

2. 已知事件 A 与 $\overline{B}$ 相互独立。证 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立。

六.（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设随机变量 X 服从正态分布，即 $X \sim N(0,\sigma^2)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是总体 X 的样本。试求：

(1) $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 的概率密度函数；

(2) $E(\overline{x}^4)$。

2.设总体 $X \sim U(a,b)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本。试求 a,b 的矩估计和最大似然估计。

试卷编号：H

桂林电子科技大学试卷

________________学年第___学期　　　　　课号______________

课程名称 概率论与数理统计　　适用班级（或年级、专业）______________

考试时间 120 分钟　班级__________　学号____________　姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	成绩
满分	12	12	20	20	20	16					100
得分											
评卷人											

一、 填空题（每小题 4 分，共 12 分）

1、 已知 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(B\mid A)=0.7$，则 $P(\overline{A}\mid B)=$________________；

2、 高炮发射一发炮弹而击中敌机的概率是 0.5。当每门高炮只射一发时，至少需要____门高炮同时发射才能以 99%的把握击中来犯的一架敌机；

3、 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则

$E(|\overline{X}-\mu|)=$________________。

二、 选择题（每小题 4 分，共 12 分）

1、 对任意事件 A，B，下列选项正确的是：（　　）

（A） $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；　　（B） $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$；

（C） $P(AB)<P(A)$；　　（D） $P(A-B)=P(A)-P(B)$。

2、在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，其排列结果为 ability 的概率是：（　　）

（A） $\dfrac{4}{P_{11}^7}$；（B） $\dfrac{7}{11}$；（C） $\dfrac{2}{C_{11}^7}$；（D） $\dfrac{2}{P_{11}^7}$。

3、设随机变量 X 的均值 $E(X)$ 与方差 $D(X)$ 存在，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，则切比雪夫不等式为：（　　）

(A) $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\le\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$；　　（B） $P\{|X-D(X)|<\varepsilon\}\le\dfrac{E(X)}{\varepsilon^2}$；

(C) $P\{|X-E(X)|\ge\varepsilon\}\le\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$；　　（D） $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\le\dfrac{1}{\varepsilon^2}$。

三、 （每小题 10 分，共 20 分）

1. 已知随机变量 (X,Y) 的联合分布率为：

X \ Y	1	2	3
0	0.1	0.25	0.15
1	0.05	0.05	0.10
2	0.10	0.05	0.15

$U=\max(X,Y)$，$V=|X-Y|$，试求：

1)、U及V的分布律；

2)、$E(XY)$；

3)、在$X=0$的条件下Y的条件分布律。

2. 设X 的概率密度为$f(x)=\dfrac{A}{x^4}$ $(x\geq 1)$

试求：(1) A ； (2) $E(X)$, $D(X)$。

四、(每小题 10 分，共 20 分)

1、设X，Y为随机变量，相关系数为ρ_{XY}，$U=aX+b$，$V=cY+d$，（a,b,c,d均为常数，且$ac<0$）。证U与V的相关系数$\rho_{UV}=-\rho_{XY}$。

2、已知连续型随机变量X的分布函数$F(x)=a+b\arctan(x)$，$-\infty<x<+\infty$。

1）确定a,b ； 2)、求$P(-1<X\leq\sqrt{3})$； 3）求c使$P\{X>c\}=\dfrac{1}{4}$。

五、(每小题 10 分，共 20 分)

1. 设总体$X\sim N(\mu,0.5^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$是X的样本。试求：

(1) 当$\mu=0$时，$P\left\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2\geq 4\right\}$；

(2) （2）当μ未知时，$P\left\{\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\geq 2.85\right\}$。

(参考数据:$\chi^2_{0.25}(10)=11.4,\chi^2_{0.1}(10)=16$)

2. 设从总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$中采集了$n=36$个样本观测值，且$\bar{x}=58.61,s^2=33.8$。

试求均值μ与方差σ^2的置信水平为 90%的置信区间。

(参考数据:$t_{0.05}(35)=1.69,\chi^2_{0.05}(35)=49.8,\chi^2_{0.95}(35)=22.47$)。

六、(每小题 8 分，共 16 分)

1. 根据历史资料分析，某地连续两次强地震时间间隔的年数X为随机变量，其分布函数

为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-0.05x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

现在该地区刚发生一次强地震，试求：

(1) X 的概率密度 ； (2) 今后 10 年内再次发生强地震的概率；

2. 设随机变量 X 的概率密度为：

$$f_X(x)=\frac{2}{\pi(1+x^2)},\quad x>0$$

试证明：随机变量 $Y=\dfrac{1}{X}$ 与 X 服从同一分布。

试卷编号：1

桂林电子科技大学试卷

____________学年第___学期　　　　课号__________

课程名称 概率论与数理统计　　适用班级（或年级、专业）__________

考试时间 120 分钟　班级________　学号__________　姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	成绩
满分	12	12	20	20	16	20					100
得分											
评卷人											

一、 填空题 (每小题 4 分，共 12 分)

1. 若 A 和 B 互不相容，且 $P(A)=p,0<p<1$,则 $P(B|A)=$__________;

2. 设 ξ,η 是相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_\xi(x),F_\eta(y)$，则 $Z=\max(\xi,\eta)$ 的分布函数为____________________;

3. 已知 $\chi^2\sim\chi^2(n)$。则 $E(\chi^2)=$________，$D(\chi^2)=$__________。

二、 选择题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 设随机变量 X 的分布率为 $\mathrm{P(X=k)=ae^{-k},k=0,1,2,\cdots}$) 则 a=(　　)

(A) 1　(B) $1-e^{-1}$　(C) $1+e^{-1}$　(D) 0

2. 设随机变量 X 服从二项分布 $\mathrm{b(n,p)}$，且 $\mathrm{EX=1.2,DX=0.84}$，则 $\mathrm{P(X=2)}=$（　　）

(A) 0.2646　(B) 0.21　(C) 0.09　(D) 0.49

3. 设总体 $X\sim F(x;\sigma^2)$，$\sigma^2=D(X)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，

$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2,B_2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 。则下列正确的选项是（　　）

（A） B_2 是 σ^2 无偏估计；(B) S^2 是 σ^2 有偏估计；

(C) S^2 是 σ^2 无偏估计；(D) B_2，S^2 都是 σ^2 无偏估计。

三（每小题 10 分，共 20 分）

1 某工厂甲乙丙三个车间加工同一零件，产量分别占全厂的 45%，35%，20%，又知各车间的正品率分别为 96%，98%，95%，求全厂的次品率。

2 已知$X \sim N$（μ，σ^2），即$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，证明$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N$（0,1）。

四、（每小题 10 分，共 20 分）

1．已知离散型随机变量X的分布律为：

X	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求：$Y=X^2$的分布律及$P(-1<Y<1.5)$。

2　设$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases} a(x+y) & 0\le x\le 2, 0\le y\le \frac{x}{2} \\ 0 & 其他 \end{cases}$

求：（1）a的值；　（2）$P(Y<\frac{X}{4})$；　（3）X的边缘概率密度$f_X(x)$。

五、（每小题 8 分，共 16 分）

1．证明：若A,B,C三个随机事件相互独立，则$A\cup B$与C相互独立。

2．设随机变量X在（0，2）内服从均匀分布，求随机变量$Y=X^2$的概率密度。

六、（每小题 10 分，共 20 分）

1．设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的样本，$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$。

试求：$E(Y)$和$D(Y)$。

2．设总体$X\sim N(20,3)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{25}$是X的样本，$\overline{X}_1=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i,\overline{X}_2=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}X_{10+i}$

试求：$P\{|\overline{X}_1-\overline{X}_2|>0.3\}$（其中$\Phi(0.42)=0.6628$，$\Phi(0.101)=0.5402$）。

试卷编号：A

桂林电子科技大学试卷评分标准与参考答案

____________学年第___学期　　　　课号__________

课程名称 概率论与数理统计　　适用班级（或年级、专业）__________

一 填空题（每小题4分，共12分）

1. 设随机变量 $X \sim b(n,p)$，且 $E(X)=0.5, D(X)=0.45$，则 $n=\underline{5}$，$p=\underline{0.1}$；

2. 若 $X \sim \chi^2(n)$，则 $D(X)=\underline{2n}$；

3. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本。S 为样本标准差，μ,σ^2 未知。则 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为：$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$。

二 选择题（每小题4分，共12分）

1. 事件A与B独立，且 P(A)= p，P(B)= q，则 $P(A\cup\overline{B})=$ (D)；

(A) $1+p-q$； (B) $p+q$； (C) 1 ； (D) $1+pq-q$。

2. 若 $f(x)=\cos x$ 可以作为随机变量 X 的概率密度函数，则 X 的可能取值区间为：(A)；

(A) $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$； (B) $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$； (C) $[0,\pi]$； (D) $\left[\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{7\pi}{4}\right]$。

3. 设 n 个随机变量 $X_1,X_2,\ldots X_n$ 相互独立且同分布，$s^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$。则(C)。

(A) s^2 不是 σ^2 的无偏估计；(B) s^2 与 $\overline{X}$ 不相互独立；(C) s^2 是 σ^2 的最大似然估计；

(D) s^2 是 σ^2 的无偏估计。

三（每小题10分，共20分）

解：

1. 因连续型随机变量的分布函数在 $x=0$ 处右连续。

$\therefore\ F(0)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(A+Be^{-\lambda x})=A+B$ ……2分

又 $\because F(0)=0$ 即 $A+B=0$

又 $\because F(+\infty)=1$，且 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(A+Be^{-\lambda x})=A$ ……2分

得：$A=1$ ……1分

所以 $B=-A=-1$ ……1 分

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$ ……4 分

2. 记 X，Y 的分布函数分别为：$F_X(x)$，$F_Y(y)$。则

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\frac{1}{X+1}\le y\}$$ ……2 分

$$=P\{X\ge\frac{1-y}{y}\}$$

$$=1-P\{X<\frac{1-y}{y}\}$$

$$=1-F_X(\frac{1-y}{y})$$ …5 分

对上式两边求导得：

$$\therefore \quad f_Y(y)=-f_X(\frac{1-y}{y})(\frac{1-y}{y})'$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{y^2} & \frac{1}{2}<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ ……4 分

$$\left[f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\right]$$ ……1 分

四（每小题 10 分，共 20 分）

解 1.

（1）$\because E(X)=1/\lambda,\ D(X)=1/\lambda^2$， ……1 分

$\therefore E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=2/\lambda^2$ ……1 分

又 $\because E(X^2)=1/8$ ，$\therefore \frac{2}{\lambda^2}=\frac{1}{8}$， ……2 分

得：$\lambda=4$ ……1 分

（2） X 的分布函数为：

$$F_X(x)=\begin{cases}\int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$ ……1 分

$$\therefore \quad F_Z(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)$$ ……1 分

$$=\begin{cases}(1-e^{-\lambda z})^2 & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$ ……2 分

$\therefore$ $$f_Z(z)=\begin{cases}2\lambda e^{-\lambda z}(1-e^{-\lambda z}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$ ……1 分

2. 解 （1） 根据题意知：$X\sim b(100,0.9)$ ……2 分

$\therefore$ X 的分布律为：$P\{X=i\}=C_{100}^{i}(0.9)^{i}(0.1)^{100-i}\quad(i=0,1,\ldots,100)$ ……3 分

（2） $\because Cov(X,Y)=Cov(X,100-X)=-Cov(X,X)=-D(X)$ ……2 分

又$\because D(X)=100\times0.9\times(1-0.9)=9$。 ……2 分

$\therefore Cov(X,Y)=-9$ ……1 分

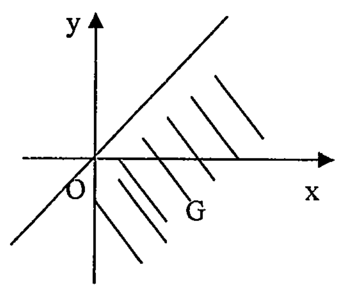
五（每小题 8 分，共 16 分）

1. 解： $\because$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\qquad -\infty<x<+\infty$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<y<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ ……1 分

且 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ ……1 分



$$\therefore P\{X\ge Y\}=P\{X-Y\ge 0\}$$

$$=\iint_G f(x,y)dxdy$$

$$=\iint_G \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dxdy$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_0^2 dx\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dy+\int_2^{+\infty}dx\int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dy\right]$$ ……2 分

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(1-e^{-2})+[1-\Phi(2)]$$

≈ 0.1953 。 ……4 分

2. 解 （1）由

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 A(1+2x)(1+2y)dxdy=4A=1$$ ……1 分

$\Rightarrow A=\dfrac{1}{4}$。 ......1 分

（2） ∵

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^1\dfrac{(1+2x)(1+2y)}{4}dy=\dfrac{1+2x}{2} & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ ......2 分

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1\dfrac{(1+2x)(1+2y)}{4}dx=\dfrac{1+2y}{2} & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ ......2 分

∵对任意的$(x,y)\in R^2$ $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ ......1 分

∴ X,Y相互独立。 ......1 分

六 **（每小题 10 分，共 20 分）**

1. 解：

∵ $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ □ $N(0,1)$， ...2 分

又∵ $s^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\right)-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\right]^2$ ...4 分

∴ $5s^2\big/\sigma^2\sim\chi^2(5)$。且参数为 5。 ......4 分

2. 解：

（1） ∵ $E(X)=\theta^2+4\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=3-2\theta$ ...2 分

由 $\overline{X}=E(X)$，$\overline{x}=2$。 ...1 分

∴有θ的矩估计值为：$\hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{X}}{2}=\dfrac{1}{2}$ 。 ......2 分

（2）∵ θ的似然函数为：

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{3}P\{X=x_i\}=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot(1-\theta)^2=2\theta^3(1-\theta)^3$ ......2 分

∴ $\ln(L(\theta))=\ln 2+3\ln\theta+3\ln(1-\theta)$， ......1 分

令 $\dfrac{d[\ln(L(\theta))]}{d\theta}=0$，得：$\hat{\theta}=\dfrac{1}{2}$ ......1 分

∴θ的最大似然估计值为：$\hat{\theta}=\dfrac{1}{2}$ 。 ......1 分

试卷编号：B

桂林电子科技大学试卷评分标准与参考答案

______________学年第___学期　　　　课号____________

课程名称__概率论与数理统计____　　适用班级（或年级、专业）

一　填空题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 若事件 A 与 B 相互独立，则 $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\underline{P(\overline{A})P(\overline{B})}=\underline{[1-P(A)][1-P(B)]}$；

2. 设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，则对任意的 $\varepsilon>0$ 关于 X 的切比雪夫不等式为：

$\underline{P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}$；

3. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本。s^2 为样本方差，则 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ 服从(自由度为 $n-1$ 的 χ^2)分布。

二　选择题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}, A,B,C$ 相互独立，则 A,B,C 至少有一个发生的概率为（ B ）

(A) $\frac{2}{3}$；　(B) $\frac{19}{27}$；　(C) $\frac{26}{27}$；　(D) $\frac{1}{27}$　。

2. 设总体 $X\sim b(n,p)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，s^2 为样本方差。则 $E(s^2)$ 是　(A)

(A) $np(1-p)$　；　　(B) np　；

(C) $(np)^2$；　　(D) np^2。

3. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本。s^2 为样本方差，μ,σ^2 均未知。则 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为：(D)

(A) $\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}(n-1)\right)$；(B) $\left(\overline{X}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$　；

(C) $\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$；　(D) $\left(\overline{X}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$。

三（每小题 10 分，共 20 分）

1. 解：（1）依题意知服从超几何分布，$\therefore X$ 的分布律为：

$$\mathrm{P}\{X=k\}=\frac{C_3^k C_{27}^{3-k}}{C_{30}^3} \qquad (k=0,1,2,3)$$ …5 分

$$P(X\ge 0)=1-P(X=0)=\frac{C_3^0 C_{27}^3}{C_{30}^3}=\frac{5\times 9\times 13}{28\times 29}\approx 0.72$$ …5 分

2. 解：（1）$\because X\sim U(a,b)$，$\therefore E(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$，且 $a<b$。

$$\therefore \begin{cases}\dfrac{a+b}{2}=1\\ \dfrac{(b-a)^2}{12}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=4\end{cases}$$ …5 分

（2） 因 $X\sim U(-2,4)$，即 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & -2<x<4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

由 $\mathrm{Y}=2X+1$，得 $X=\dfrac{Y-1}{2}$ …3 分

而 $(\dfrac{y-1}{2})'=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{12} & -3<y<9\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ …2 分

四（每小题 10 分，共 20 分）

1. 解： （1）设 $f(x,y)=\begin{cases}M & 0\le x\le 1, 1\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$$ …1 分

$$\Rightarrow \int_0^1\int_1^2 Mdydx=1\Rightarrow M=1$$ …1 分

$\therefore$联合概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1, 1\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ …1 分

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_1^2 dy=1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ …2 分

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1 dx=1 & 1\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ …2 分

$\because$对任意的 $(x,y)\in R^2$，有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X,Y 相互独立。

(3) $P\{-X+Y>\frac{3}{2}\}=\iint\limits_{y-x>3/2} f(x,y)\,dxdy=\int_0^{1/2}dx\int_{x+3/2}^{2}dy=\frac{1}{8}$ …3 分

2. 解：（1）X 的边缘分布率为：

X	-1	1	2
P_i	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{20}$

...3 分

（2）Y 的边缘分布率为：

Y	-1	2
P_i	$\frac{13}{20}$	$\frac{7}{20}$

...2 分

$\because P(X=-1,Y=-1)=\frac{5}{20}\neq P(X=-1)\cdot P(Y=-1)=\frac{2}{5}\times\frac{13}{20}$ ...3 分

$\therefore$ X 与 Y 不相互独立。 ...2 分

五 （每小题 8 分，共 16 分）

1. 解：由题设知：

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}\qquad(-\infty<y<+\infty)$$ ...2 分

则 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{\pi}e^{-(x^2+y^2)}$，$(x,y)\in R^2$

$\because F_Z(z)=P\{Z\le z\}$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=P(Z\le z\}=P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right)=0$

当 $z\ge 0$ 时，

$$F_Z(z)=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}f_X(x)f_Y(y)\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{z}\frac{r}{\pi}e^{-r^2}dr=2\int_0^{z}re^{-r^2}dr$$

$$=1-e^{-z^2}$$ ...4 分

所以

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ 2ze^{-z^2} & z>0\end{cases}$$ ...2 分

2. 解：令 X_i 表示"第i件设备的重量"，则 $E(X_i)=0.5(\mathrm{kg}),D(X_i)=0.5$（kg²）。

则所求概率为：

$$P\{\sum_{k=1}^{5000}X_k>2510\}=P\{\frac{\sum_{k=1}^{5000}X_k-\mathrm{E}(\sum_{k=1}^{5000}X_k)}{\sqrt{\mathrm{D}(\sum_{k=1}^{5000}X_k)}}>\frac{2510-2500}{50}\}$$ ...8 分

$$\approx 1-\Phi(0.2)=1-0.5793=0.4207$$

六、（每小题 10 分，共 20 分）

1. 解：令 $\begin{cases}\overline{X}=E(X)\\ A_2=E(X^2)\end{cases}$ ...3 分

则 σ^2 的矩估计为：$\hat{\sigma}^2=A_2-\overline{X}^2=B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ ...4 分

$\therefore\sigma^2$ 的无偏估计为：$\hat{\sigma}_2^2=\frac{n}{n-1}B_2$ 或 $\hat{\sigma}_2^2=\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2$ ...3 分

2. 解：$\because$ 检验统计量为：$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ...2 分

则对给定的置信水平 α，拒绝域为：

$C_\alpha=\{Z\,\|Z|\ge z_{\alpha/2}\}$ ...3 分

当 $\mu_0=3.27$，$\sigma=0.02$，$n=16,\overline{x}=3,\alpha=0.1$ 时，有

$z=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{3-3.27}{0.02/\sqrt{16}}=--54$， ...3 分

查表可得：　$z_{0.05}=1.64$

$\therefore|z|=54>z_{0.05}=1.64$，拒绝原假设 H_0。 ...2 分

试卷编号：C

桂林电子科技大学试卷评分标准与参考答案

________________学年第___学期　　　　　课号______________

课程名称 概率论与数理统计　　　适用班级（或年级、专业）一　填空题（每小题4分，共12分）

4. 若随机事件A，B相互独立，P(A)=0.2，P(B)=0.45，则 $P(A\cup B)=$0.56。

5. 设 ξ,η 是相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_\xi(x),F_\eta(y)$，则 $Z=\max(\xi,\eta)$ 的分布函数为：$F_\xi(z)\cdot F_\eta(z)$。

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，s^2 为样本方差。

则 $E(s^2)=\sigma^2$。

二 选择题（每小题4分，共12分）

1. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随 σ 增大概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ 应（D）；

（A）单调增大；　(B) 单调减少；　(C) 增减不定；　(D) 保持不变。

2. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，

$s_k^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^k,k=1,2,3,4$。则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是（B）

（A）$t=\frac{\overline{X}-\mu}{s_1/\sqrt{n}}$；(B) $t=\frac{\overline{X}-\mu}{s_2/\sqrt{n}}$；(C) $t=\frac{\overline{X}-\mu}{s_3/\sqrt{n}}$；(D) $t=\frac{\overline{X}-\mu}{s_4/\sqrt{n}}$。

3. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值。则 $\overline{X}$ 服从（C）；

（A）$N(\mu,\sigma^2)$；　(B) $N(\mu,(\sigma/n)^2)$；　(C) $N(\mu,\sigma^2/n)$；　(D) $N(\mu/n,\sigma^2)$。

三（每小题12分，共24分）

1. 甲乙两人进行投篮比赛，各投两次，每人投中的概率均为0.5，设 X_1,X_2 分别表示甲乙投中的次数，试求：(1) (X_1,X_2) 的分布率。(2) $E(X_1X_2)$。

3. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}ke^{-(3x+4y)},x>0,y>0\\0,\text{其他}\end{cases}$$

求：（1）常数k；　（2）验证X和Y是否相互独立。

1、解：（1）(X_1,X_2)的分布率为：

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2
0	$(\frac{1}{2})^4$	$(\frac{1}{2})^3$	$(\frac{1}{2})^4$
1	$(\frac{1}{2})^3$	$(\frac{1}{2})^2$	$(\frac{1}{2})^3$
2	$(\frac{1}{2})^4$	$(\frac{1}{2})^3$	$(\frac{1}{2})^4$

（2）$E(X_1X_2)=(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})^3+2(\frac{1}{2})^3+4(\frac{1}{2})^4=1$。

2、解：（1）$\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，得

$$k\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(3x+4y)}dxdy=1$$

$\therefore \frac{1}{12}k=1$，故 $k=12$

（2）由$k=12$

$$\therefore \quad f_X(x)=\begin{cases}12\int_0^{+\infty}e^{-(3x+4y)}dy=3e^{-3x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases},$$

同理

$$f_Y(x)=\begin{cases}12\int_0^{+\infty}e^{-(3x+4y)}dx=4e^{-4y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

$\therefore$ 对$\forall x,y\in R$，有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以X,Y相互独立。

四（每小题12分，共24分）

3. 设(x,y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

试求：(1). (X,Y)的联合分布函数；

（2）$P\{X^2+Y^2\le 1\}$。

4. 根据历史资料分析，某地连续两次强地震时间间隔的年数X为随机变量，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-0.05x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

现在该地区刚发生一次强地震，试求：

(1) X的概率密度 ； (2) 今后 10 年内再次发生强地震的概率；

1. 解：（1） $\because F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$

$\therefore$ 当$0<x<1$且$0<y<1$时，

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 4xydxdy=x^2y^2$$

$$\therefore\quad F(x,y)=\begin{cases}x^2y^2 & 0<x<1,0<y<1\\ x^2 & 0<x<1,1\le y\\ y^2 & 1\le x,0<y<1\\ 1 & x\ge 1,y\ge 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

（2） $\because\quad f(x,y)=\begin{cases}4xy & 0<x<1,0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$$\therefore\quad P\{X^2+Y^2\le 1\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)dxdy=2\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta d\theta\int_0^1\rho^3d\rho=1/2$$

2. 解： $\because F'(x)=f(x)$

$\therefore\quad$ 当$x\ge 0,F'(x)=(1-e^{-0.05x})'=0.05e^{-0.05x}$

当$x<0$时，$F'(x)=0$。

$$\therefore\quad f(x)=\begin{cases}0.05e^{-0.05x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

（3） 依题意，即求$P\{X<10\}$

$P\{X<10\}=F(10)=1-e^{-0.05\times 10}=1-e^{-0.5}$。

五（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设总体X的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}1-\left(1/x\right)^{\theta} & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}$$

其中$\theta(\theta>1)$未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的样本。试求θ的矩估计量和最大似然估计

量。

2. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的样本，$a\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计。试求数$a$。

解：1.

$$\because\ f_X(x)=F'(x)=\begin{cases}\theta x^{-(1+\theta)} & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}$$

$\therefore\ E(X)=\int_1^{+\infty}\theta x^{-\theta}dx=\dfrac{\theta}{\theta-1}$ 令$\overline{X}=E(X)$，θ的矩估计量为：$\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$ 。

又$\because$当$x_i>1,(i=1,2,\cdots,n)$时，θ的似然函数为：

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{-(1+\theta)}$ $\quad\therefore \ln L(\theta)=n\ln\theta-(1+\theta)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令$\dfrac{d(\ln L(\theta))}{d\theta}=0$，得：$n/\theta-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)=0$。

$\therefore\theta$的最大似然估计量为：$\hat{\theta}=n\Big/\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)$

2. $\because$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1}^2-2X_{i+1}X_i+X_i^2\right)\right]$$
$$=\sum_{i+1}^{n-1}\left[\left(E\left(X_{i+1}^2\right)\right)-2E(X_{i+1}X_i)+E\left(X_i^2\right)\right]=\sum_{i=1}^{n-1}\left[2E\left(X^2\right)-2E(X)E(X)\right]$$
$$=2(n-1)\left[\left(\sigma^2+\mu^2-\mu^2\right)\right]=2(n-1)\sigma^2$$

$\therefore\ a=1\big/2(n-1)$。

六 （8分）设随机变量X的概率密度为：

$$f_X(x)=\frac{2}{\pi(1+x^2)},\quad x>0$$

试证明：随机变量$Y=\dfrac{1}{X}$与X服从同一分布。

证明：依题意，易知$Y=\dfrac{1}{X}>0$，故当$y<0$时，$f_Y(y)=0$。

当$y>0$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\dfrac{1}{X}\le y\}=P\{X\ge\dfrac{1}{y}\}$

$$=1-P\{X<\frac{1}{y}\}=1-F_X(\frac{1}{y})$$

$\therefore\quad f_Y(y)=F_Y'(y)=-f_X(\frac{1}{y})\cdot(-\frac{1}{y^2})=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(\frac{1}{y})^2}\cdot(-\frac{1}{y^2})=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}$

$\therefore\quad Y=\frac{1}{X}$ 与 X 服从同一分布。

试卷编号：D

桂林电子科技大学试卷评分标准与参考答案

____________学年第___学期　　　　课号____________

课程名称 概率论与数理统计　　　适用班级（或年级、专业）

一　填空题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度与边缘概率密度分别为：

$f(x,y),f_X(x),f_Y(y)$。则X与Y相互独立的充要条件是：

对$\forall x,y\in R$，$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$；

2. 设总体X服从二项分布，即$X\sim b(1,p)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的样本，$\overline{X}$为样本均值。

则$E(\overline{X})=$ p，$D(\overline{X})=$$p(1-p)/n$；

3. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的样本，且σ^2已知。

H_0：$\mu=\mu_0$（已知），H_1：$\mu\neq\mu_0$。则用于检验假设H_0的统计量为：$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。

二 选择题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 一个小组有 6 个学生，则这 6 个学生的生日都不相同的概率为（设一年为 365 天）：(D)。

(A) $\dfrac{1}{C_{365}^6}$；　(B) $\dfrac{1}{P_{365}^6}$；　(C) $\dfrac{C_{365}^6}{(365)^6}$；　(D) $\dfrac{P_{365}^6}{(365)^6}$。

2. 设ξ,η是相互独立的随机变量，其分布函数分别为：$F_\xi(x),F_\eta(y)$，则$Z=\min(\xi,\eta)$的分布函数为（B）

(A) $F_Z(z)=F_\xi(z)$；　　(B) $F_Z(z)=1-[1-F_\xi(z)][1-F_\eta(z)]$；

(C) $F_Z(z)=\min\{F_\xi(z),F_\eta(z)\}$；　　(D) $F_Z(z)=F_\eta(z)$。

3. 设X_1,X_2,X_3是总体X的样本，$\mu=E(X)$存在，且

$\varphi(X_1,X_2,X_3)=aX_1+b(3X_3-2X_2)$是$\mu$的无偏估计。则（ C ）。

(A) $a=1,b$可以是任意实数；(B) $a=b$；　(C) $a+b=1$；　(D) $a+b=2$。

三（12 分）

解：（1）X,Y 的边缘分布律为：

Y \ X	1	2	3	$p_{\cdot j}$
2	0.10	0.20	0.10	0.40
4	0.15	0.30	0.15	0.60
$p_{i\cdot}$	0.25	0.50	0.25	

(2) 条件分布律：

$$P\{X=i|Y=j\}=\frac{P\{X=i,Y=j\}}{P\{Y=j)} \qquad i=1,2,3;j=2,4$$

$$P\{Y=j|X=i\}=\frac{P\{X=i,Y=j\}}{P\{X=i)} \qquad i=1,2,3;j=2,4$$

按上述公式计算，列成下表：

X	1	2	3
$P\{X=i\|Y=2\}$	0.25	0.50	0.25
$P\{X=i\|Y=4\}$	0.25	0.50	0.25
Y	2	4	
$P\{Y=j\|X=1\}$	0.40	0.60	
$P\{Y=j\|X=2\}$	0.40	0.60	
$P\{Y=j\|X=3\}$	0.40	0.60	

(4) 从联合分布律与边缘分布律来看：对任何的 i,j 经计算都有

$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\}$ 成立，所以 X,Y 相互独立。

四（12 分）

解：（1）$\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，

又 $\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=k\int_0^1\int_0^x(1-x)ydxdy=\frac{k}{24}$

$\therefore k=24$。

（2）$\because P\{Y\le\frac{1}{2}X\}=\iint\limits_{y\le x/2}f(x,y)dxdy=24\int_0^1(1-x)dx\int_0^{x/2}ydy=\frac{1}{4}$ 。

(3)$\because f_X(x)=\begin{cases}24\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=24\int_0^x(1-x)ydy=12(1-x)x^2 & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}24\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=24\int_y^1(1-x)ydx=12y(1-y)^2 & 0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$\therefore f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=6\neq f_X\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f_Y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$， $\therefore X$ 与 Y 不相互独立。

五（共 10 分）

1．设随机变量 X 与 Y 相互独立，且服从同一分布。试证明：

$P\{a<\min(X,Y)\le b\}=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2$ 。

2. 设 X 与 Y 独立同分布，且 $P(X=k)=\frac{1}{3}$，k=1,2,3

试求：(1) (X,Y)的联合分布律； (2) D(Y)。

1． 解：（1）令 $Z=\min(X,Y)$ 则有 $F_Z(z)=1-[1-F_X(z)]^2$

故 $P\{a<Z\le b\}=F_Z(b)-F_Z(a)=1-[1-F_X(b)]^2-1+[1-F_X(a)]^2$

$=[1-P\{X\le a\}]^2-[1-P\{X\le b\}]^2=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2$

2．解： (1) $P\{X=i,Y=j\}=P(X=i)P(T=j)=\frac{1}{9}$ $(i,j=1,2,3)$

(2) $E(Y)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}=2$

$E(Y^2)=1\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}+9\times\frac{1}{3}=\frac{14}{3}$

$\therefore D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{14}{3}-4=\frac{2}{3}$。

六（每小题 12 分，共 24 分）

解：1.$\because$当 $i\neq j$， $i,j=1,2,\cdots,n$ 时， $X_i-X_j\sim N(0,2\sigma^2)$

$$\therefore E(|X_i-X_j|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2\sigma^2}}\exp\left(-x^2/4\sigma^2\right)dx=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

当 $i=j$， $i,j=1,2,\cdots,n$ 时， $E(|X_i-X_j|)=0$

$$\therefore E(\hat{\sigma})=E\left(a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|X_i-X_j|\right)=a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E|X_i-X_j|=a\cdot n\cdot(n-1)\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$\therefore$当 $a=\frac{\sqrt{\pi}}{2n\cdot(n-1)}$ 时， $\hat{\sigma}$ 为 σ 的无偏估计。

2. （1）μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为：

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

（2）检验假设的统计量为：$t=\dfrac{\overline{X}-50}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

对给定的置信水平α，又拒绝域为：$C_\alpha=\left\{t\middle||t|>t_{\alpha/2}(n-1)\right\}$

查表可得：$t_{0.025}(8)=2.306$

又$\because |t|=\left|\dfrac{\overline{x}-50}{S/\sqrt{n}}\right|=0.56<t_{0.025}(8)=2.306$

$\therefore$应接受H_0，可以认为H_0是合理的。

七（10分）

解：（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$得：$c\iint\limits_{x^2+y^2<R^2}(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy=1$

令　$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,r\in[0,R],\theta\in[0,2\pi]$　故上式为：

$$c\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R(R-r)rdr=c\frac{1}{3}\pi R^3=1\quad \text{所以}\ c=\frac{3}{\pi R^3}$$

（2）(X,Y)落在圆域$x^2+y^2<r\ (r<R)$内的概率为：

$$P\left(X^2+Y^2<r^2\right)=\iint\limits_{x^2+y^2<r^2}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2<r^2}\frac{3}{\pi R^3}(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

当$x=t\cos\theta,y=t\sin\theta,t\in[0,r],\theta\in[0,2\pi]$时，有

$$P\left(X^2+Y^2<r^2\right)=\frac{3}{\pi R^3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0(R-t)tdt=\frac{3Rr^2-2r^3}{R^3}\quad。$$

试卷编号：E

桂林电子科技大学试卷评分标准与参考答案

____________学年第__学期　　　　课号__________

课程名称 概率论与数理统计　　　适用班级（或年级、专业）

一、填空题（每小题 4 分，共 12 分）

3、设 X,Y 是相互独立的随机变量，且均服从正态分布 $N(6,4)$，则 $E[(Y-1)(X^2-1)]$ ＝195。

4、设总体 $X\sim U(0,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是 X 的样本。则

$P\left\{\max(X_1,X_2,\cdots,X_5)>\theta/2\right\}$=31/32 。

5、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值。则 $\overline{X}$ 的概率密度为：$f_{\overline{X}}(x)=\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{n(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$。

二、选择题（每小题 4 分，共 12 分）

6、设 A,B 为任意的两个随机事件，且 $A\subset B,P(A)>0$，则下列选项不正确的是 (A) 。

（A）、$P(\overline{A})<P(\overline{B})$；　　（B）、$P(A+B)=P(B)$；

（C）、$P(AB)=P(A)$；　　（D）、$P(A)\le P(A|B)$。

7、若 $X\sim b(n,p)$，则 $E(X^2)=$ (D) 。

（A）$(1-np)^2$；　　（B）$np(1-p-np)$；

（C）$(1+np)^2$；　　（D）$np(1-p+np)$。

3、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，且 σ^2 已知。H_0：$\mu=\mu_0$（已知），H_1：$\mu\le\mu_0$。则适合于检验假设的统计量为：(B) 。

（A）、$\dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$；（B）、$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$；（C）、$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$；（D）、$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$。

三（每小题 10 分，共 20 分）

1、解：（1）依题意，$f_X(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{8}},-\infty<x<+\infty$　　…2 分

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{5X-2\le y\}=P\{X\le \frac{2+y}{5}\}=F_X(\frac{2+y}{5}) \quad \cdots 2\text{ 分}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(\frac{2+y}{5})\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-48)^2}{200}},-\infty<y<+\infty \quad \cdots 2\text{ 分}$$

（2） 由第一问知，$Y\sim N(48,10^2)$，所以

$$P\{Y<48\}=P\{\frac{Y-48}{10}<\frac{48-48}{20}\}=\Phi(0)=0.5 \quad \cdots 4\text{ 分}$$

2、解：（1） 当$x=0$时，$Y=-1$；当$x=1$时，$Y=0$；当$x=2$时，$Y=3$，所以

$P\{Y=-1\}=P\{X=0\}=\frac{1}{3}$； $P\{Y=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{3}$；

$P\{Y=3\}=P\{X=2\}=\frac{1}{3}$。 …4 分

故$Y=X^2-1$的分布律为：

Y	-1	0	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

…1 分

（2） 由Y的分布律知：

$$E(Y)=-1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \quad \cdots 1\text{ 分}$$

$$E(Y^2)=(-1)^2\times\frac{1}{3}+0^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}=\frac{10}{3} \quad \cdots 1\text{ 分}$$

于是 $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{10}{3}-\frac{4}{9}=\frac{26}{9}$ …3 分

四（每小题 12 分，共 24 分）

1、解：（1） 设A_1为叫到的是 A 校，A_2为叫到的是 B 校，A_3为叫到的是 C 校，N为叫到的是女生。则

$$P(N)=P(N\mid A_1)\cdot P(A_1)+P(N\mid A_2)\cdot P(A_2)+P(N\mid A_3)\cdot P(A_3)$$

$$=\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{15}\times\frac{1}{3}+\frac{7}{25}\times\frac{1}{3}=\frac{137}{450} \quad \cdots 6\text{ 分}$$

（2） $P(A_1\mid N)=\frac{P(N\mid A_1)\cdot P(A_1)}{P(N)}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}}{\frac{137}{450}}=\frac{45}{137}$ …6 分

2、解：（1） 依题意知，$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\beta+\frac{1}{3}=1\Rightarrow\beta=\frac{1}{6}$ …2 分

（2） $\because$ $P\{X=0\}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$， $P\{X=1\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

$\therefore \quad P\{X=0,Y=-1\}=\frac{1}{3}\neq P\{X=0\}\cdot P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

故 X,Y 不相互独立。 …5 分

（3） $E(XY)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_i y_j\cdot P_{ij}$ …5 分

$$=0\times(-1)\times\frac{1}{3}+0\times1\times\frac{1}{6}+1\times(-1)\times\frac{1}{6}+1\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ 。$$

五 （每小题 10 分，共 20 分）

解：1. $\because \lambda$ 的似然函数为：

$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}$， $\therefore \ln L(\lambda)=-n\lambda+\ln\lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)$， …4 分

令 $\frac{d[\ln L(\lambda)]}{d\lambda}=0$，得：$-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0$ 即 $\hat{\lambda}=\overline{x}$ 。 …2 分

$\therefore P(X=0)$ 的最大似然估计量为：$\hat{P}(X=0)=e^{-\overline{X}}$ …4 分

2. $\because 2X_2-X_1\sim N(0,20)$，$4X_4-3X_3\sim N(0,100)$。 …2 分

$\therefore (2X_2-X_1)/2\sqrt{5}\sim N(0,1)$，$(4X_4-3X_3)/10\sim N(0,1)$。 …2 分

当 $a=\frac{1}{100},b=\frac{1}{20}$ 时，Y 服从 $\chi^2(2)$ 分布。 …6 分

六 (共 12 分)

解：

（1） 由因 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$ …2 分

$c\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}dxdy=c=1\Rightarrow c=1$ …2 分

（2） 由（1）可知，$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ …1 分

于是，当 $x\le0$ 时，$f_X(x)=0$

当 $x<0$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x+y)}dy=e^{-x}$

$\therefore \quad f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le0\end{cases}$ …1 分

同理 $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le0\end{cases}$ …1 分

（3） $\because \quad F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X-Y\le z\}=\iint\limits_{x-y\le z} f(x,y)dydx$

$\therefore$ 当 $z\ge 0$ 时，$F_Z(z)=1-\int_z^{+\infty}dx\int_0^{x-z}e^{-(x+y)}dy=1-\frac{1}{2}e^{-z}$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=\int_{-z}^{+\infty}dy\int_0^{y+z}e^{-(x+y)}dx=\frac{1}{2}e^{z}$

$$\therefore \quad F_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}e^{-z} & z\ge 0\\ \frac{1}{2}e^{z} & z<0\end{cases}$$ …2 分

故：$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-z} & z\ge 0\\ \frac{1}{2}e^{z} & z<0\end{cases}$$ …1 分

试卷编号：F

桂林电子科技大学试卷评分标准与参考答案

________学年第___学期　　　　课号________

课程名称　概率论与数理统计　　适用班级（或年级、专业）

一、 填空题（每小题4分，共12分）

1. 设$X \sim b(2,p)$，$Y \sim b(3,p)$，若$P(X \geq 1)=5/9$，则$P(Y=1)=\frac{4}{9}$；

2. 设X,Y是相互独立的随机变量，且均服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则X,Y的相关系数ρ_{XY} = ___0___；

3. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体X的样本，$\mu=E(X),\sigma^2=D(X)$存在，S^2为X的样本方差。

则$E(S^2)=\underline{\sigma^2}$。

二、选择题（每小题4分，共12分）

1. X服从区间[0，1]上的均匀分布，对$0<a<1<b$，则$P(a<X<b)$=（C）；

(A) a；　(B) $b-a$；　(C) $1-a$；　(D) $b-1$。

2. 下列正确的是（D)；

（A）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；　（B）$P(AB)=P(A)P(B)$；

（C）$P(B\mid A)=\frac{P(A)}{P(B)}$　$(P(B)\neq 0)$；（D）$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，　$P(A)>0$。

3. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体X的样本，$\mu=E(X),\sigma^2=D(X)$存在，$\overline{X}$是X的样本均值。则下列正确的是(B)。

(A) $X_i(i=1,2,\cdots n)$不是μ的无偏估计；　(B) $\overline{X}$作为μ的无偏估计比X_i更有效；

(C) X_i作为μ的无偏估计比$\overline{X}$更有效；　(D) $\overline{X}$不是μ的无偏估计。

三、 （每小题10分，共20分）

1. 解：∵　Y服从参数为10的指数分布，

∴Y的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} & x>0 \\ 0 & \text{其它}\end{cases},\qquad \cdots 2\text{分}$$

从而Y的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{10}} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$。 …2 分

方程$4x^2+4Yx+Y+2=0$有实根$\Leftrightarrow \Delta\ge 0$ …1 分

即$(4Y)^2-4\times4(Y+2)\ge0 \Leftrightarrow Y^2-Y-2\ge0$

$\Leftrightarrow Y\ge 2或Y\le -1$。

$$P\left(Y^2-Y-2\ge 0\right)=P\{Y\ge 2\}+P\{Y\le -1\}$$

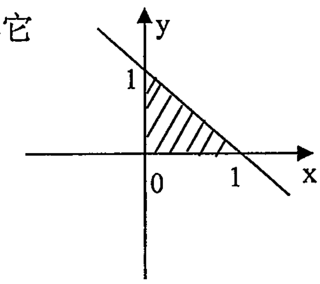
$$=1-P\{Y<2\}+P\{Y\le -1\}$$

$$=1-F(2)+F(-1)=e^{-\frac{1}{5}}。$$ …5 分

2. 解：（1） 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，得 $\int_0^1 dx\int_0^2(x^2+Axy)dy=1$。

即$\frac{2}{3}+A=1 \quad \therefore \quad A=\frac{1}{3}$ …2 分

（2） 由上一目知： $f(x,y)=\begin{cases}x^2+\frac{1}{3}xy & 0\le x\le1,0\le y\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$ …1 分



$$\therefore \quad P\{X+Y<1\}=\iint\limits_{x+y<1}(x^2+\frac{1}{3}xy)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+\frac{1}{3}xy)dy=\frac{7}{72}$$

…2 分

（3） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^2(x^2+\frac{1}{3}xy)dy & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$$=\begin{cases}2x^2+\frac{2x}{3} & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$ …2 分

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1(x^2+\frac{1}{3}xy)dx & 0\le y\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{y}{6} & 0\le y\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$$ …2 分

故对$\forall x,y\in R$ $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，于是$X,Y$不相互独立。 …1 分

四、 （每小题 10 分，共 20 分）

解：1. (X,Y)的联合分布律为：

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1/9	0	0
2	2/9	1/9	0
3	2/9	2/9	1/9

…4 分

$\therefore Y$ 的分布律为：

Y	1	2	3
P_n	5/9	3/9	1/9

…2 分

$\therefore E(Y)=14/9, E(Y^2)=26/9, \therefore D(Y)=38/81$。 …4 分

2. 解：（1） μ 的置信度为$1-\alpha$ 的双侧置信区间为：$\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$。 …5 分

（2） μ 的置信度为 0.95 的右侧置信区间为：$\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)=(4.31,5.69)$。…5 分

五、（每小题 8 分，共 16 分）

1. 解：（1） $\because$ Y 可取到的值有：1，2，10，且

$$P\{Y=1\}=P\{X=0\}=0.2;$$

$$P\{Y=2\}=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=0.1+0.5=0.6;$$

$$P\{Y=10\}=P\{X=3\}=0.2;$$ …2 分

故Y的分布律为：

Y	1	2	10
P	0.2	0.6	0.2

…2 分

（2） $E(X)=-1\times0.1+0\times0.2+1\times0.5+3\times0.2=1$ …1 分

$$E(X^2)=(-1)^2\times0.1+0^2\times0.2+1^2\times0.5+3^2\times0.2=2.4$$ …1 分

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2.4-1^2=1.4$$ …2 分

2. 解：证明： $\because \quad \overline{B}=\overline{B}(A\cup\overline{A})=\overline{B}A+\overline{B}\overline{A}$ …2 分

$\therefore \quad P(\overline{B})=P(\overline{B}A)+P(\overline{B}\overline{A})=P(\overline{B})P(A)+P(\overline{B}\overline{A})$ …2 分

故 $P(\overline{B}\overline{A})=P(\overline{B})(1-P(A))=P(\overline{B})P(\overline{A})$

所以 $\overline{A},\overline{B}$ 相互独立。 …4 分

六.（每小题 10 分，共 20 分）

1. 解： （1）. $\because \overline{X}\sim N\left(0,\sigma^2/n\right)$ …5 分

（2）. $E(\overline{X}^4)=\dfrac{3\sigma^4}{n^2}$。 …5 分

2. 解：$\because E(X)=\dfrac{b+a}{2}$， $E\left(X^2\right)=D(X)+\left[E(X)\right]^2=b^2+ab+a^2/3$ …2 分

令 $A_i=E\left(X^i\right),i=1,2$。其中 $A_i=\dfrac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}X_l^i$

$\therefore a,b$ 的矩估计量为：$\hat{a}=\overline{X}-\sqrt{3A_2},\hat{b}=\overline{X}+\sqrt{3A_2},$)。 …4 分

$\because$关于 a,b 的似然函数为：

$$L(a,b)=\prod_{i=1}^{n}f_X(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n} & a\le x_i\le b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$ …2 分

$\therefore$ 最大似然估计量为：

$\hat{a}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},\hat{b}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$。 …2 分

试卷编号：H

桂林电子科技大学试卷评分标准与参考答案

________________学年第___学期　　　　课号_______________

课程名称<u>概率论与数理统计</u>　　适用班级（或年级、专业）

一、填空题（每小题 4 分，共 12 分）

1、已知 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(B|A)=0.7$，则 $P(\overline{A}|B)=\dfrac{19}{40}$；

2、高炮发射一发炮弹而击中敌机的概率是 0.5。当每门高炮只射一发时，至少需要 <u>7</u> 门高炮同时发射才能以 99%的把握击中来犯的一架敌机；

3、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则

$E(|\overline{X}-\mu|)=\underline{\sqrt{2\sigma^2/n\pi}}$。

二、选择题（每小题 4 分，共 12 分）

1、对任意事件 A，B，下列选项正确的是（B）。

（A）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；　　（B）$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$；

（C）$P(AB)<P(A)$；　　（D）$P(A-B)=P(A)-P(B)$。

2、在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，其排列结果为 ability 的概率是（A）。

（A）$\dfrac{4}{P_{11}^7}$；　（B）7/11；　（C）$\dfrac{2}{C_{11}^7}$；　（D）$\dfrac{2}{P_{11}^7}$；

3、设随机变量 X 的均值 $E(X)$ 与方差 $D(X)$ 存在，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，则切比雪夫不等式为：（C）。

(A) $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\le\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$；　（B）$P\{|X-D(X)|<\varepsilon\}\le\dfrac{E(X)}{\varepsilon^2}$；

(C) $P\{|X-E(X)|\ge\varepsilon\}\le\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$；　（D）$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\le\dfrac{1}{\varepsilon^2}$。

三、　（每小题 11 分，共 22 分）

1. 解：（1）　$U=\max(X,Y)$ 可能的取值为：1，2，3，且

$$P\{U=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=1)=0.1+0.05=0.15$$

$$P\{U=2\}=P\{X=2,Y=1\}+P\{X=2,Y=2\}+P\{X=1,Y=2\}++\mathrm{P}\{\mathrm{X}=0,\mathrm{Y}=2\}$$

$$=0.10+0.05+0.05+0.25=0.45$$

$P\{U=3\}=P\{X=0,Y=3\}+P\{X=1,Y=3\}+P\{X=2,Y=3\}$

$=0.15+0.1+0.15=0.40$ …1 分

∴ U 的分布律为：

U	1	2	3
P	0.15	0.45	0.40

…1 分

$V=|X-Y|$ 可能的取值有：0，1，2，3。

$P\{V=0\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=2\}=0.05+0.05=0.10$

$P\{V=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=3\}+P\{X=2,Y=1\}$

$=0.1+0.05+0.15+0.10=0.40$

$P\{V=2\}=P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=3\}=0.25+0.1=0.35$

$P\{V=3\}=P\{X=0,Y=3\}=0.15$ 。 …2 分

∴ V 的分布律为：

V	0	1	2	3
P	0.10	0.40	0.35	0.15

…2 分

（2）$E(XY)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{3}g(x_i,y_i)\cdot P_{ij}$

$$=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{3}x_i y_j P_{ij}=0\times1\times0.1+0\times2\times0.25+0\times3\times0.15$$

$$+1\times1\times0.05+1\times2\times0.05+1\times3\times0.1$$
$$+2\times1\times0.1+2\times2\times0.05+2\times3\times0.15$$
$$=1.75$$ …2 分

（3） $P\{Y=1\,|\,X=0\}=\dfrac{P\{X=0,Y=1\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{0.1}{0.5}=\dfrac{10}{50}$

$(P\{X=0\}=0.1+0.25+0.15=0.5)$

$P\{Y=2\,|\,X=0\}=\dfrac{P\{X=0,Y=2\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{0.25}{0.5}=\dfrac{25}{50}$

$$P\{Y=3|X=0\}=\frac{P\{X=0,Y=3\}}{P\{X=0\}}=\frac{0.15}{0.5}=\frac{15}{50} \qquad \cdots 2\text{分}$$

$\therefore$在 $X=0$ 的条件下 Y 的条件分布律：

$Y=K$	1	2	3
$P\{Y=K\mid X=0\}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{25}{50}$	$\frac{15}{50}$

…1 分

2 设 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{A}{x^4} \quad (x\geq 1)$

(1) $\because \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$，又$\because \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int^{\infty} A/x^4 dx=A/3$，

$\therefore A=3$。 …3 分

(2) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int^{\infty} 3/x^3 dx=3/2$， …2 分

又$\because$ $E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int^{\infty} 3/x^2 dx=3$ …2 分

$\therefore D(x)=E(x^2)-[E(x)]^2=3-9/4=3/4$。 …4 分

四、(每小题 10 分，共 20 分)

1. 证明：$\because$ $U=aX+b, V=cY+d$

$\therefore$ $E\{[U-E(U)][V-E(V)]\}$

$=E\{[aX+b-E(aX+b)][cY+d-E(cY+d)]\}$

$=abE\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=acCov(X,Y)$ …2 分

即 $Cov(U,V)=acCov(X,Y)$

$D(U)=D(aX+b)=a^2D(X), D(V)=D(cY+d)=c^2D(Y)$ …2 分

$$\therefore \quad \rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)D(V)}}=\frac{acCov(X,Y)}{\sqrt{a^2D(X)c^2D(Y)}}=-\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=-\rho_{XY}\text{。} \cdots 6\text{分}$$

2. $\because$ $F'(x)=f(x)=b\cdot\frac{1}{1+x^2} \quad -\infty<x<+\infty$ …1 分

又 $\because$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

$\therefore$ $b\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=b\cdot\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=b\cdot\pi=1\Rightarrow b=\frac{1}{\pi}$ …2 分

又$\because F(-\infty)=0$，$\therefore a=\frac{1}{2}$。 …2 分

（2）$P\{-1<X\le\sqrt{3}\}=F(\sqrt{3})-F(-1)=\frac{1}{\pi}[\arctan(\sqrt{3})-\arctan(-1)]=\frac{7}{12}$ …2 分

（3）即求c使 $1-P\{X\le c\}=\frac{1}{4}$，即 $P\{X\le c\}=\frac{3}{4}$ …1 分

又 $P\{X\le c\}=F(c)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan c=\frac{3}{4}\Rightarrow\arctan c=\frac{1}{4}\pi$

$\therefore\quad c=1$ …2 分

五、（每小题 10 分，共 20 分）

1．解：（1）当$\mu=0$时，$Y^2=\sum_{i=1}^{10}\left(X_i/0.5\right)^2\sim\chi^2(10)$。 …5 分

$P\left\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2\ge 4\right\}=P\left\{Y^2\ge 16\right\}$ 查表得：$\chi^2_{0.1}(10)=16$，$\therefore P\left\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2\ge 4\right\}=0.1$。…5 分

（2）$\because\ Z^2=\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i-\mu}{0.5}\right)^2\sim\chi^2(10)$， …3 分

$\therefore\ P\left\{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2\ge 2.85\right\}=P\left(Z^2>2.85/0.25\right)=P\left(Z^2>11.4\right)$， …3 分

查表得：$\chi^2_{0.25}(10)=11.4$，$\therefore\ P\left\{\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\ge 2.85\right\}$=0. 25。 …4 分

2． 解：均值μ的置信水平为 90%的置信区间为：

$$\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)=(49.09,\quad 68.13)$$ …5 分

方差σ^2的置信水平为 90%的置信区间为：

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=(23.76,\quad 52.6)$$ …5 分

六、（每小题 8 分，共 16 分）

1．解： (1)$\because F'(x)=f(x)$

$\therefore$ 当$x\ge 0,F'(x)=(1-e^{-0.05x})'=0.05e^{-0.05x}$

当$x<0$时，$F'(x)=0$。 …2 分

$\therefore \quad f(x)=\begin{cases}0.05e^{-0.05x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ …2 分

（2） 依题意，即求 $P\{X<10\}$

$\therefore \; P\{X<10\}=F(10)=1-e^{-0.05\times 10}=1-e^{-0.5}$ …4 分

2. 证明：依题意，易知 $Y=\dfrac{1}{X}>0$，故当 $y<0$ 时，$f_Y(y)=0$。 …1 分

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\dfrac{1}{X}\le y\}=P\{X\ge \dfrac{1}{y}\}$

$$=1-P\{X<\frac{1}{y}\}=1-F_X(\frac{1}{y})$$ …4 分

$$\therefore \quad f_Y(y)=F_Y'(y)=-f_X(\frac{1}{y})\cdot(-\frac{1}{y^2})=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(\frac{1}{y})^2}\cdot(-\frac{1}{y^2})=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}$$

$\therefore \quad Y=\dfrac{1}{X}$ 与 X 服从同一分布。 …3 分

试卷编号：1

桂林电子科技大学试卷评分标准与参考答案

________学年第___学期　　　　课号________

课程名称 <u>概率论与数理统计</u>　　适用班级（或年级、专业）

一、填空题 (每小题 4 分，共 12 分)

1. 若 A 和 B 互不相容，且 $P(A)=p, 0<p<1$，则 $P(B|A)=\underline{0}$；

2. 设 ξ,η 是相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_\xi(x), F_\eta(y)$，则 $Z=\max(\xi,\eta)$ 的分布函数为：$\underline{F_Z(z)=F_\xi(z)F_\eta(z)}$，$\underline{z\in R}$；

3. 已知 $\chi^2\sim\chi^2(n)$。则 $E(\chi^2)=\underline{n}$，$D(\chi^2)=\underline{2n}$。

二、 选择题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 设随机变量 X 的分布率为 $\mathrm{P(X=k)=ae^{-k}, k=0,1,2,\cdots}$ 则 a=(B)；

 (A) 1　(B) $1-e^{-1}$　(C) $1+e^{-1}$　(D) 0

2. 设随机变量 X 服从二项分布 $\mathrm{b(n,p)}$，且 $\mathrm{EX=1.2, DX=0.84}$，则 $\mathrm{P(X=2)}=$（ A ）；

 (A) 0.2646　(B) 0.21　(C) 0.09　(D) 0.49

3. 设总体 $X\sim F(x;\sigma^2)$，$\sigma^2=D(X)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2, B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$。则下列正确的选项是（C）。

 （A）B_2 是 σ^2 无偏估计；(B) S^2 是 σ^2 有偏估计；

 (C) S^2 是 σ^2 无偏估计；(D) B_2，S^2 都是 σ^2 无偏估计。

三、（每小题 10 分，共 20 分）

解：1. 设该工厂某段时间内生产的该零件共有 n 个，则来自于甲、乙、丙三车间得数目分别为：$0.45n, 0.35n, 0.2n$。　　…2 分

设次品率为：

$P=45\%\times(1-96\%)+35\%\times(1-98\%)+20\%\times(1-95\%)=3.5\%$　　…8 分

证明：2. $\because Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 亦服从正态分布，而 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$ …4 分

$$\therefore E(Y)=E(\frac{X-\mu}{\sigma})=\frac{1}{\sigma}E(X)-\frac{\mu}{\sigma}=0 \quad \cdots 2 \text{分}$$

$$D(Y)=D(\frac{X-\mu}{\sigma})=\frac{1}{\sigma^2 D(X)}=1 \quad \cdots 2 \text{分}$$

$\therefore \quad Y \sim N(0,1)$。 …2 分

四（每小题 10 分，共 20 分）

1、解：$Y=X^2$ 的分布律为：

Y	0	1	4
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{17}{30}$

…5 分

$$P(-1<Y<1.5)=P(Y=0)+P(Y=1)=\frac{1}{5}+\frac{7}{30}=\frac{13}{30} \quad \cdots 5 \text{分}$$

2、解：

（1） 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$ …2 分

$\therefore \quad a\int_0^2 dx\int_0^{\frac{x}{2}}(x+y)dy=1 \quad \therefore \quad a=\frac{3}{5}$ …1 分

（2） $P(Y<\dfrac{X}{4})$

$$=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{x}{4}}\frac{3}{5}(x+y)dy=\frac{3}{5}\int_0^2\frac{9}{32}x^2dx=\frac{9}{20} \quad \cdots 4 \text{分}$$

（3） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{3}{5}(x+y)dy=\frac{3}{8}x^2 & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ …3 分

五、（每小题 10 分，共 20 分）

1. 证明：$\because \quad P[(A\cup B)C]=P[(AC)\cup(BC)]$

$$=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$$

$$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$$

$$=P(C)[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

$$=P(C)P(A\cup B) \quad \cdots 8 \text{分}$$

$\therefore \quad A \cup B$ 与 C 相互独立。 …2 分

2. 解：由已知，X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<x<2 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ …2 分

当 $0 \le y \le 4$ 时，

$F_Y(y)=P(Y \le y)=P\{X^2 \le y)=P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx=\frac{\sqrt{y}}{2}$，…4 分

$\therefore \quad Y$ 的概率密度为：

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}} & 0<y<4 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 。 …4 分

六、（每小题 10 分，共 20 分）

1. 解：令 $Z_i=X_i-\mu$，则 $Z_i \sim N(0,\sigma^2)$ …2 分

$\therefore E(Y)=E(|Z_i|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z| f_{Z_i}(z)dz=\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}}$， …4 分

$\therefore D(Y)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(|Z_i|)=\frac{1}{n}\left[E(Z_i^2)-E^2(|Z_i|)\right]=\frac{(1-2/\pi)\sigma^2}{n}$ 。 …4 分

2. 解：$\because \overline{X}_1 \sim N(20, 3/10), \overline{X}_2 \sim N(20, 3/15), \overline{X}_1-\overline{X}_2 \sim N(0, 1/2)$）。 …5 分

$\therefore \quad P\{|\overline{X}_1-\overline{X}_2|>0.3\}=1-P\{|\overline{X}_1-\overline{X}_2| \le 0.3\}=2[1-\Phi(0.3\times\sqrt{2})]=0.6744$ 。…5 分