高数 A1 期末自测卷 2

一、选择题

1．绝对值函数 $y=|x|,\ x\in(-\infty,+\infty)$ 为（　　　　）

A．周期函数　　　　B．有界函数　　　　C．偶函数　　　　D．单调函数

2．已知 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$，要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，需补充定义 $f(1)$ 为（　　　　）

A．1　　　　B．-1　　　　C．0　　　　D．2

知识点分析：间断点的分类

延伸思考：1. $x=1$ 是 $f(x)$ 的什么类型的间断点？

2. $x=3$ 是 $f(x)$ 的什么类型的间断点？

3．曲线 $y=\arcsin x$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\pi}{6}\right)$ 处的切线的斜率为（　　　　）

A．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　　　B．$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　　　C．0　　　　D．$\dfrac{4}{5}$

4．已知 $df(x)=2xdx$，则函数 $f(x)$ 为（　　　　）.

A．$\dfrac{x^2}{2}+C$（C 为任意常数）　　　　B．x^3+C（C 为任意常数）

C．$x+C$（C 为任意常数）　　　　D．x^2+C（C 为任意常数）

5．函数 $y=x-\sin^2 x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上的单调性、凹凸性为（　　　　）

A．单调减少、凸的　　　　B．单调减少、凹的

C．单调增加、凸的　　　　D．单调增加、凹的.

知识点分析：1. 单调性的判别方法（看 y' 的符号）

2. 凹凸性的判定方法（看 y'' 的符号）

延伸思考： $y'=0$ 的点一定是极值点吗？ $y''=0$ 的点一定是拐点吗？

二、填空题

1．函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{x}=$__________________.

2．不定积分 $\int e^{3t}dt=$__________________.

3．定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\sin x dx =$____________________.

4．曲线 $y=f(x)$ (≥ 0) 与直线 $x=a,\ x=b,\ y=0$ 所围曲边梯形的面积公式 $A=$____________________.

5. 已知 $x^2y+2xy^3-1=0$，则它所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}=$____________________.

三、计算题一

1．求微分方程 $\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}-(x+1)^2=0$ 的通解.

2．计算函数极限 $\lim_{x\to 0^+} x^{\tan x}$.

四、计算题二

1．已知 $y=e^t\sin 2t$，求 y' 和 y''；

2．求 $y=x-a-a\ln\frac{x}{a}$ 的极值点和极值，其中常数 $a>0$；

3．计算 $\int(1+x^2)\ln x dx$；

4．计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+4x^2}$.

五、解答题

1．已知一个球体的半径为 R，试利用积分方法推导出球体的体积计算公式；

2．先求微分方程 $y''-5y'+6y=0$ 的通解，再求满足初始条件 $y|_{x=0}=2,\ y'|_{x=0}=1$ 的特解.

六、证明题

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都连续，在 (a,b) 内都可导，先证在 (a,b) 内存在一点 ξ，使得

$$f(a)g(b)-g(a)f(b)=(b-a)[f(a)g'(\xi)-g(a)f'(\xi)],$$

再证在 (a,b) 内存在一点 η，使得

$$be^a-ae^b=(b-a)[e^a-ae^\eta].$$

参考答案

一、选择题　C BADC

二、填空题　　1．5　　2．$\frac{1}{3}e^{3t}+C$

3．$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\sin xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 x\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 xd\sin x=\left[\frac{2}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$

4．$\int_a^b f(x)dx$

5．本题考查隐函数求导法：$x^2y+2xy^3-1=0$　方程两边同时对 x 求导，得

$$2x\cdot y+x^2y'+2\left(y^3+x\cdot 3y^2\cdot y'\right)=0$$

解得　$y'=-\frac{2xy+2y^3}{x^2+6xy^2}$

延伸复习：参数方程求导法

三、计算题一

1．解：分离变量得　$\frac{dy}{1+y^2}=(x+1)^2dx$，

等号两边积分得方程的通解：$\arctan y=\frac{1}{3}(x+1)^3+C$

延伸复习：三种常见一阶方程及其解法（可分离方程，一阶线性方程，齐次方程）

2．解：因为 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\tan x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\tan x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\ln x}$，而

$$\lim_{x\to0^+}\tan x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\cot x}\overset{\text{洛必达}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot(-\sin x)=0,$$

（解法二：$\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\ln x\overset{\text{无穷小代换}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\text{洛必达}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$）

所以原式$=e^0=1.$

知识点分析：本题考查幂指函数求极限的方法以及洛必达法则。幂指函数求极限的方法通常有两种：一是本题中用到的取对数方法；二是利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

四、计算题二

1．解： $y'=e^t\sin 2t+e^t\cos 2t\cdot 2=e^t(\sin 2t+2\cos 2t)$；

$$y''=e^t(\sin 2t+2\cos 2t)+e^t(2\cos 2t-4\sin 2t)=e^t(.4\cos 2t-3\sin 2t).$$

2．解：由 $y'=1-\dfrac{a}{x}=0$ 得唯一驻点 $x=a$，

又 $y''=\dfrac{a}{x^2}$， $y''\big|_{x=a}=\dfrac{1}{a}>0$，

故 $x=a$ 是极小值点，函数在该点取极小值 $y\big|_{x=a}=0.$

3．解：
$$\int(1+x^2)\ln x dx=\int\ln x d(x+\frac{1}{3}x^3)=(x+\frac{1}{3}x^3)\ln x-\int(x+\frac{1}{3}x^3)\frac{1}{x}dx$$
$$=(x+\frac{1}{3}x^3)\ln x-\int(1+\frac{1}{3}x^2)dx$$
$$=(x+\frac{1}{3}x^3)\ln x-(x+\frac{1}{9}x^3)+C.$$

4．解：
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+4x^2}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d(2x)}{1+(2x)^2}=\frac{1}{2}\arctan 2x\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{4}.$$

五、解答题

1．**[解法一]**：利用平行截面已知的立体体积公式

以球心为圆心建立直角坐标系，沿 x 轴对球体切片，则截面面积函数为

$$A(x)=\pi(R^2-x^2)，$$

由元素法，并利用对称性，得

$$V=2\int_0^R A(x)dx=2\int_0^R\pi(R^2-x^2)dx=2\pi(R^3-\frac{1}{3}R^3)=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

[解法二]：利用旋转体体积公式

把球体看成如图 1 的半圆绕 x 轴旋转而成

$$V_x=\pi\int_{-R}^R f^2(x)dx=\pi\int_{-R}^R\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{-R}^R\left(R^2-x^2\right)dx=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

[解法三]：利用旋转体体积公式

把球体看成如图 2 的半圆绕 y 轴旋转而成

$$V_y=\pi\int_{-R}^R\varphi^2(y)dy=\pi\int_{-R}^R\left(\sqrt{R^2-y^2}\right)^2dy=\pi\int_{-R}^R\left(R^2-y^2\right)dy=\frac{4}{3}\pi R^3$$

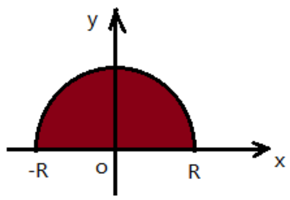

图 1

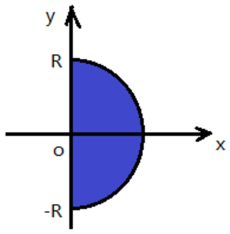

图 2

2．解：解特征方程$r^2-5r+6=0$得：$r_1=2$，$r_2=3$.

从而所求通解为$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$.

进一步有$y'=2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}$，代入初始条件得

$$C_1+C_2=2，\quad 2C_1+3C_2=1，$$

从而得$C_1=5$，$C_2=-3$，所求特解为$y=5e^{2x}-3e^{3x}$.

六、证明题（5 分）

证：（1）记$F(x)=f(a)g(x)-g(a)f(x)$，则$F(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理条件，且$F'(x)=f(a)g'(x)-g(a)f'(x)$，

故存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$F(b)-F(a)=(b-a)F'(\xi)，$$

即

$$f(a)g(b)-g(a)f(b)=(b-a)[f(a)g'(\xi)-g(a)f'(\xi)].$$

（注：也可以取$F(x)=\dfrac{g(x)}{g(a)}-\dfrac{f(x)}{f(a)}$等）

（2）在上面的小问中，取$f(x)=e^x$，$g(x)=x$，利用其结论得

存在$\eta\in(a,b)$，使得

$$e^ab-ae^b=(b-a)[e^a\cdot 1-ae^\eta],$$

即$be^a-ae^b=(b-a)[e^a-ae^\eta]$.