①

Espace de Hilbert : $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ complet, base hilb. $f = \sum \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$

φ_n ortho + $\exists$ cv de au sens $\| f - \sum^N \| \to 0$

$\|f\|^2 = \sum \langle f, \varphi_n \rangle^2$

Construc° : Gram-Schmidt : $L^2([a,b])$: pol legendre ; $L^2(\mathbb{R})$: pol. hermite $\cdot e^{-x^2/2}$ $\Big\} \to \varphi_n$ a n "oscill°" (zeros).

Construc° : domaines invariant par tans° $\leftrightarrow$ Fourier

$L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g}$ $\quad \varphi_n(x) = e^{inx}$ BON

$$\hat{f}_n = \langle f, \varphi_n \rangle = \frac{1}{2\pi}\int f(x) e^{-inx}\,dx \qquad f = \sum_n \hat{f}_n \varphi_n$$

Rappel du diagr com :

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{FT} & \hat{f}(\omega) \\ \downarrow & & \\ (f(n))_n & \xrightarrow{FS} & \sum f(n) e^{-in\omega} \end{array}$$

$\hat{f}(\omega) \xrightarrow{\text{per.}} \sum_n \hat{f}(\omega - n) = \sum f(n) e^{-in\omega}$ (Poisson)

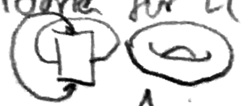
Convol : → cf feuille $\qquad$ Discret-fini → cf feuille

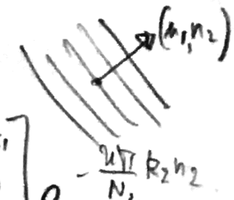
Lien avec la théorie des distribut° ↗↗ (fin de cette feuille) $\qquad$ lien EDP/EDO → cf feuille

---

En 2D : si φ_n bon de $L^2(X)$ $\Rightarrow$ $\varphi_{n_1} \otimes \varphi_{n_2}(x,y) \triangleq \varphi_{n_1}(x)\varphi_{n_2}(y)$ BON de $L^2(X^2)$

Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2)$ $\qquad e^{i\langle n, x \rangle} = e^{in_1x_1} e^{in_2x_2}$





En 2D discr : $\hat{f}_k = \sum_{n_1}\sum_{n_2} f_n e^{-2i\pi\left[\frac{n_1k_1}{N_1} + \frac{n_2k_2}{N_2}\right]} = \sum_{n_1} \underbrace{\left[\sum_{n_2} f_n e^{-2i\pi\frac{n_1k_1}{N_1}}\right]}_{\text{FFT lignes}} e^{-\frac{2i\pi}{N_2}k_2n_2}$

sur $\mathbb{R}/N_1\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/N_2\mathbb{Z}$

si on voit $f \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$ $\hat{c}$ matrice FFT col.

↳ cpxité $O\begin{pmatrix} N_1 N_2 \log(N_2) \\ + N_2 N_1 \log(N_1) \end{pmatrix}$

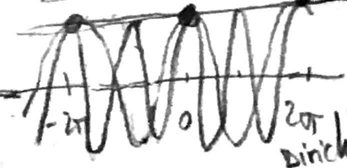
Rmq : $F_N = \left(e^{-\frac{2i\pi}{N}kn}\right)_{kn}$

$$\hat{f} = F \times f \times F$$

Tout s'étend : Shannon sampling / Convol°

Théorie distrib° : $\Pi = \sum_m \delta_m$ $\qquad \Pi \odot f = \sum_n f(n)\delta_n \rightsquigarrow \widehat{\Pi \odot f}(\omega) = \sum_n f(n) e^{-in\omega}$

$\overset{\text{Poisson}}{=} \sum_m \hat{f}(x - n) = \hat{f} * \Pi$



Poisson $\Leftrightarrow$ "$\hat{\Pi} = \Pi_{2\pi}$" $\qquad$ NB : $\check{f} = \frac{1}{2\pi}\bar{\hat{f}}$

$\widehat{\Pi \cdot f} = \frac{1}{2\pi}\hat{f} \odot \hat{\Pi}$

Dirichlet $\sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}$ → Plot

Convolut° sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$

Thm Young $f \in L^p, g \in L^q \Rightarrow f*g \in L^r$ et $\|f*g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$ eg. $L^1 * L^p \to L^p$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{r}$ L^1 struct d'algèbre, pas d'identité $L^1 * L^\infty \to L^\infty$ + continue!! $\Rightarrow$ Régul°

Régul° : $\underline{ex}$ $f \in L^1$ et $g \in C^1$ + borné $\Rightarrow f*g$ dérivable $(f*g)' = f*g'$

Appli : Id approchée (cv L^p $1 \leq p < +\infty$, cv ds L^∞ si $f \in C^0$ unif.)
Denoising (cf. + tard)

$\to$ Rmq : $\widehat{f \cdot g} = \frac{1}{2\pi}\hat{f}*\hat{g}$

TF sur $\mathbb{R}$: $\hat{f}(\omega) \triangleq \int f(x)e^{-i\omega x}dx$ ds L^1 : $\widehat{f*g} = \hat{f} \odot \hat{g}$ isomorphisme $(L^1,*) \to (L^1,\odot)$.

TF sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$: $\hat{f}_k = \int f(x)\underbrace{e^{-ikx}}_{BON}dx$. ds L^1 : " $\longrightarrow (\ell^1,\odot)$

$\hookrightarrow$ dc aussi ds ts les $L^p \subset L^1$

Opérateur invariant : **Thm** $H : f \in L^2(\mathbb{T}) \mapsto f \in L^2(\mathbb{T})$ continu tq $H \circ T_\tau = T_\tau \circ H$ $T_\tau f = f(\cdot - \tau)$.

alors $\exists c \in \ell^2$ tq. $\widehat{H(f)} = \hat{f}_k \odot c_k$

Proof : $H(e^{in\cdot}) = H(e^{in\tau}T_\tau(e^{in\cdot})) = e^{in\tau}T_\tau \circ H(e^{in\cdot})$.

$\langle H(e^{in\cdot}), e^{im\cdot}\rangle = e^{in\tau}\langle T_\tau \circ H(e^{in\cdot}), e^{im\cdot}\rangle = e^{i\tau(m-n)}\langle H(e^{in\cdot}), e^{im\cdot}\rangle$

$n \neq m \Rightarrow \langle H(e^{in\cdot}), e^{in\cdot}\rangle = 0$ et $T_{-\tau}$ $\langle H(e^{in\cdot}), e^{in\cdot}\rangle \triangleq c_n \Rightarrow H(e_n) = c_n e_n$

$H(\sum_n \langle f, e_n\rangle e_n) = \sum_n \langle f, e_n\rangle H(e_n) = \sum_n c_n \langle f, e_n\rangle$ continuité $\Leftrightarrow \exists A \; \|He_n\| \leq A\|e_n\|$
$\Leftrightarrow |c|_\infty \leq A$

$\uparrow$ H continue ($\lim \sum_{-N}^{N}$).

Intuit° : H convol° contre h tq $\hat{h} = c$ borné.

Discrete FT : $\hat{f}_k \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{2i\pi}{N}kn}$ → Sampling of $(e^{ikx})_k$ aux points $\left(\frac{2\pi}{N}n\right)_n$

$f \in \mathbb{R}^N$ $\quad k=0,\dots,N-1$ $\quad = \langle f, \underbrace{e^{\frac{2i\pi}{N}k\cdot}}_{e_k} \rangle_{\mathbb{C}^N}$ → Approx° de la TF (cf "FFT & TF")

Orthogonal $\langle e_k, e_{k'} \rangle = \sum_{n=0}^{N} e^{\frac{2i\pi}{N}(k-k')n} = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq k' \\ N & \text{if } k=k' \end{cases}$ ⇒ IDFT ! $\boxed{f_n = \frac{1}{N}\sum_k \hat{f}_k e^{\frac{2i\pi}{N}kn}}$

→ Exemple en Matlab

FFT : $N = 2N'$:
$$\hat{f}_{2k} = \sum_{n=0}^{N/2-1} \underbrace{(f_n + f_{n+\frac{N}{2}})}_{(f_e)_n} e^{-\frac{2i\pi}{N/2}kn}$$
$$\hat{f}_{2k+1} = \sum_{n=0}^{N/2-1} \underbrace{e^{-\frac{2i\pi}{N}n}}_{\alpha_N} \underbrace{(f_n - f_{n+N/2})}_{(f_o)_n} e^{-\frac{2i\pi}{N/2}kn}$$
→ $F_N(f) = \text{interleave}\begin{bmatrix} F_{N/2}(f_e) \\ F_{N/2}(f_o \odot \alpha_N) \end{bmatrix}$

Complexity : $C(N) = 2C\left(\frac{N}{2}\right) + NK$ $\quad K = \begin{cases} N \text{ addit}^{\circ} \\ N/2 \text{ mult}^{\circ} \end{cases}$

$\ell = \log(N)$ $\quad T(\ell) = \frac{C(N)}{N} \iff C(N) = 2^\ell T(\ell)$

$2^\ell T(\ell) = 2 \cdot 2^{\ell-1} T(\ell-1) + 2^\ell K$

$T(\ell) = T(\ell-1) + K \Rightarrow T(\ell) = \overset{0}{T(0)} + \ell K \Rightarrow \boxed{C(N) = KN\log_2(N)}$

⇝ ext° qd N pas puis de 2 mais est factorisable avec petit entier

⇝ sinon approcher par 0 padding/extension

Appl° : convol° / resol EDO/EDP / mult° de poly. ou d'entiers.

Convol° : $(f * g)_n = \sum_k f_k g_{n-k}$ $(\mathbb{C}^N, *)$ structure d'algèbre com, elt neutre δ_0

$\overset{TF}{\updownarrow}$ $(\mathbb{C}^N, \odot)$ $\mathbb{1}_N$

$= \sum_{k+k'=n} f_k g_{k'}$ $\quad$ $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ $\quad$ TFD : isométrie d'algèbre

Pté : $\widehat{f*g} = \hat{f} \odot \hat{g}$ $\quad$ Démo : $T : g \to f*g$ $\quad (Te_\ell)_n = \sum_k f_k e^{\frac{2i\pi}{N}\ell(n-k)} = e^{\frac{2i\pi}{N}\ell n} \hat{f}_\ell$

$e_\ell = \left(e^{\frac{2i\pi}{N}\ell n}\right)_n \Rightarrow e_\ell$ eigv. avec eigen-value $\hat{f}_\ell$

$V = [e_1 | \dots | e_N] = F^*$
$A = VDV^{-1}$
$= \frac{1}{N} F^* D F = F^{-1} D F$

$F = \left(e^{-\frac{2i\pi}{N}kn}\right)_{kn}$ $\quad F^{-1} = \frac{1}{N}\left(e^{+\frac{2i\pi}{N}kn}\right)_{nk} = F^*/n$

$\Rightarrow T = F^{-1} * \text{diag}(\hat{f}) * F \Rightarrow F(f*g) = \hat{f} \cdot F(g)$

Applic° : calcul "naif" $O(N^2) \xrightarrow{FFT} O(N\log N)$

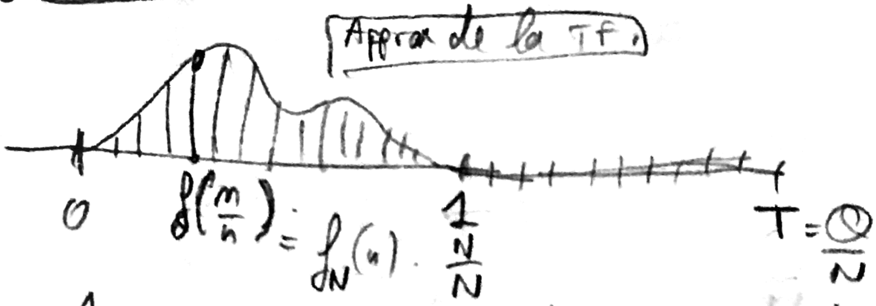
Mult° de poly : $\left(\sum_{i=0}^{A} a_i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{B} b_j X^j\right) = \sum_{k=0}^{A+B} \underbrace{\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right)}_{a * b \; (\mathbb{Z}/N)} X^k$ $\quad$ [0. … A+B] ⇒ Aboutir de 0 !

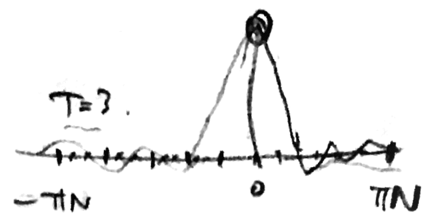
⇒ mult° de grands entiers (exacte) → exemple Matlab

→ FFT en 2D

FFT & TF

Approx de la TF :



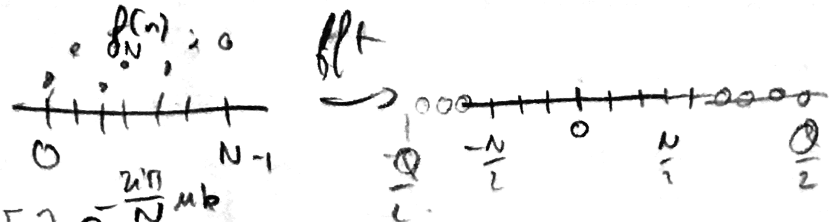


$$\frac{1}{N}\hat{f}_N[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{n}{N}\right) e^{-\frac{2i\pi}{Q} nk}$$

$$\underset{O\left(\frac{1}{N}\right)}{\approx} \int_0^1 f(x)\, e^{-\left(\frac{2i\pi k}{T}\right)x}\, dx \approx \hat{f}\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \qquad k = -\frac{Q}{2} : \frac{Q}{2}$$

$\rightsquigarrow$ Matlab example on ⊓

Zero padding



$$\hat{f}_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{-\frac{2i\pi}{N} nk}$$

$Q = TN$

$n = 0$

Pour $l = 0 : Q-1$,

$$\frac{Q}{N} \times \underbrace{\left[\frac{1}{Q}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \hat{f}_N[k]\, e^{+\frac{2i\pi}{Q} lk}\right]}_{\text{zeropad + ifft}} = \frac{1}{N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\sum_n f_N[n]\, e^{-\frac{2i\pi}{N} nk}\, e^{\frac{2i\pi}{Q} lk}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} f_N[n] \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{2i\pi\left(-\frac{n}{N}+\frac{l}{Q}\right)k}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} f_N[n] \frac{\sin\left[\pi N\left(\frac{l}{Q}-\frac{n}{N}\right)\right]}{N \sin\left[\pi\left(\frac{l}{Q}-\frac{n}{N}\right)\right]}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} f_N[n]\, \mathrm{sinc}_N\left(\frac{l}{T} - n\right) \qquad T = Q/N$$

$$\mathrm{sinc}_N(x) = \frac{\sin(\pi x)}{N \sin\left(\frac{\pi x}{N}\right)}$$

2N-periodic (!!)

<u>NB</u> $a = -b$, $\rho = e^{i\omega}$

$$\sum_{i=a}^{b} \rho^i = \rho^a \cdot \frac{1-\rho^{b-a+1}}{1-\rho} = \frac{\rho^{a-\frac{1}{2}} - \rho^{b+\frac{1}{2}}}{\rho^{-\frac{1}{2}} - \rho^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin\left(b+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

Fourier et EDP/EDO : (informelle → théorie des distrib°)

Sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$: $\widehat{f^{(k)}}(\omega) = (i\omega)^k \hat{f}(\omega) \to f^{(k)}$ est une "convol°" contre $\delta^{(k)}$.

Sur $\mathbb{R}^d$: $\widehat{\Delta f}(\omega) = -\|\omega\|^2 \hat{f}(\omega)$.

→ replace dif. eq° by algebraic eq° → EDP by EDO

Example : $\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta f_t \to \frac{\partial \hat{f}_t(\omega)}{\partial t} = -\|\omega\|^2 \hat{f}_t(\omega) \rightsquigarrow \hat{f}_t(\omega) = \hat{f}_0(\omega) \cdot e^{-\|\omega\|^2 t} \rightsquigarrow f_t = f_0 * G_{\sqrt{2t}}$

Prop : $F^{-1}\left(e^{-\|\omega\|^2 t}\right) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} = G_\sigma(x)$, $\sigma = \sqrt{2t}$ $\quad \sigma^2 = 2t$

⇒ cf Matlab test_denoising.m

Sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$: $\widehat{\Delta f}_k = \|k\|^2 \hat{f}_k$

$e^{\frac{2i\pi}{N}}$

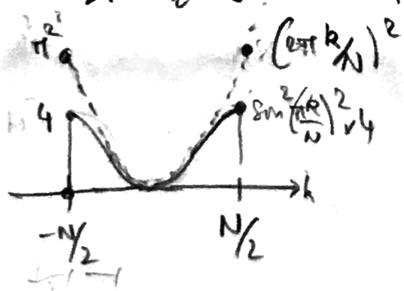
$\hat{f}(\omega) e^{i\omega}$

$\omega \leftrightarrow 2\pi k$

Sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$:

- $D_1 f = \frac{1}{h}(f_{n+1} - f_n)_n = f * d_1$, $h = 1/N$ $\quad d_1 = [0 \dots 0, -1, 1, 0 \dots 0]/h$ ($n=0$, $n=1$)
  $\bar{d}_1 = [0\,0\,0\,-1, 1\,0\,0\,0\,0\,0]/h$
- $D_2 f = \frac{1}{h^2}(f_{n+1} + f_{n-1} - 2f_n) = f * d_2$ $\quad d_2 = d_1 * \bar{d}_1$

$\widehat{D_2 f} = \hat{d}_2 \odot \hat{f}$ $\quad \hat{d}_{2,k} = \frac{1}{h^2}\left[e^{\frac{2i\pi}{N}k} + e^{-\frac{2i\pi}{N}k} - 2\right] = -4N^2 \sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)^2 \underset{N \to +\infty}{\sim} -(2\pi k)^2$



$k = \frac{N}{2} \to -4N^2$ vs $-\pi^2 N^2$

Théorie des groupes : $(G,+)$ groupe fini commutatif.

Défⁿ : Caractère : $\chi : (G,+) \to (\mathbb{C}^*,\cdot)$ morphisme, $\chi(n+m) = \chi(n)\chi(m)$

$\hat{G} = \{\chi : \chi \text{ caract}\}$ le dual, c'est aussi un gpe pour la mult$^{\circ}$ ponctuelle

$\chi_1\chi_2(n) = \chi_1(n)\chi_2(n)$

Gpe cyclique : $G \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ alors $\hat{G} = \{e_k : k = 0 \dots N-1\}$. $e_k = \left(e^{\frac{2i\pi}{N}kn}\right)_n$

en particulier $G \equiv \hat{G}$

Dem : ① les e_k s^t des caractères. ② $\omega = \chi(1)$ $\omega^N = \chi(1)^N = \chi(N) = \chi(0) = 1 \Rightarrow \omega = e^{\frac{2i\pi}{N}k}$ $\exists k$

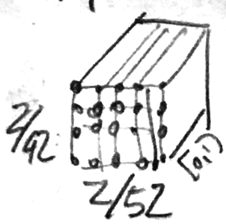
$\chi(n) = \chi(1)^n = \omega^n = e^{\frac{2i\pi}{N}kn} \Rightarrow \chi = e_k$

Gpe qcq : **Thm de structure** : si G est de type fini (engendré par un nombre fini de générateurs $x = a_1x_1 + \dots + a_kx_k$, $a \in \mathbb{Z}$, $x \in G$)

$$G \simeq \mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z} \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}/N_d\mathbb{Z} \otimes \underbrace{\mathbb{Z}^Q}_{\text{Partie } \infty}$$

$x = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1})$.

$$\chi = \exp\left[\left(\frac{x_1k_1}{N_1} + \dots + \frac{x_dk_d}{N_d} + x_{d+1}\omega_d\right)2i\pi\right] \quad \omega_d \in [0,1]$$



Rq : il faut ajouter la contrainte χ continue [ex. sur $\mathbb{R}$, $\chi(x) = e^{i\omega x}$, $\omega \in \mathbb{R}$

$$\hat{G} = \mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z} \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}/N_d\mathbb{Z} \otimes \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

Cα : si G fini, $G \simeq \hat{G}$ (non canonique)

$G \simeq \hat{\hat{G}}$ (canonique) $n \in G \to [\chi \in \hat{G} \mapsto \chi(n)]$

Gpe non commutatif : **ex.** $G = \Sigma_N$ permut$^{\circ}$, $\hat{G} = \{Id, \varepsilon\}$ ← signature

$\varepsilon(P_1 \circ \dots \circ P_k) = (-1)^k$ P_i = permut$^{\circ}$

$\to G \not\simeq \hat{G}$

→ Théorie des représentations : $\chi : G \to \mathbb{C}^*$

$\Downarrow$

$\rho : G \to GL(V)$ si $\dim(V) = 1$, $GL(V) \simeq \mathbb{C}^*$

$\rho(\underset{\text{mult}^{\circ}}{x \cdot y}) = \rho(x) \circ \rho(y)$

→ Σ_4 → OK !

→ $SO(3)$ etc