TF de L^1 : $\hat{f}(\omega) \triangleq \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f(x)\,dx$

SF : sur $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$: $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\underbrace{e^{-inx}}_{\text{Base Hilbertienne}}\,dx$ ①

$f(x) = \sum_n c_n e^{inx}$ [conv. abs de L^2]
si $f \in C^1$ alors vrai en tout point.

si $\hat{f} \in \hat{L}^1 \Rightarrow$ TFI : $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)\,d\omega$ et f est C^0

Extension de L^2 [f régulier $\leftrightarrow \hat{f}$ décroît rapid^t] si $\int |\hat{f}|(1+|\omega|^p) < \infty \to f \in C^p$; si $f \in C^p$ et $f^{(p)} \in L^1 \to \hat{f} = O\left(\frac{1}{|\omega|^p}\right)$

par exemple $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \to \hat{f}(\omega) = 2\frac{\sin(\omega)}{\omega}$

• si $f \in L^1 \cap L^2$ alors $\int |f|^2 = \frac{1}{2\pi}\int |\hat{f}|^2 \Rightarrow$ on peut étendre par continuité la TF à L^2 (par exp $\mathbb{1}_{[-\pi,\pi]} \notin L^1 \xrightarrow{L^2} f$)

Thm Shannon : si $|f(x)| \leq c(1+|x|)^{-3}$ et supp$(\hat{f}) \subset \left[-\frac{\pi}{s}, \frac{\pi}{s}\right]$ alors $\forall x$, $f(x) = \sum_n \operatorname{sinc}\left(\frac{x - ns}{s}\right) f(sn)$ ← cv uniforme de la série

$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

OPS : $s = 1$ en faisant $g = f(\cdot s) \to \hat{g} = s\hat{f}(\cdot s) \Rightarrow$ supp$(\hat{g}) \subset [-\pi,\pi]$

[FAIRE ICI LE DIAGRAMME + RAPPELS séries Fourier]

Formule Poisson : On définit $\hat{f}_P(\omega) = \sum_n \hat{f}(\omega - 2\pi n)$

Si f décroît rapidement et $\hat{f}$ supp compact alors $\sum_n \hat{f}(\omega - 2\pi n) = \sum_n f(n) e^{-i\omega n}$ [CV unif]

Démo : $\hat{f}$ supp. compact $\Rightarrow \hat{f}_P$ bien défini
f décroît rapid^t $\Rightarrow \hat{f}_P$ est C^1 car $\int |f(x)|(1+|x|)^1\,dx < +\infty \to \hat{f}$ C^1

$\Rightarrow \hat{f}_P$ est somme de sa série de Fourier (cv uniforme) $\hat{f}_P(\omega) = \sum_n c_n e^{in\omega}$ (Conv. Unif)

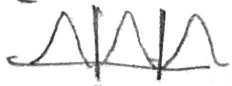
$c_k = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}_P, e^{-ik\omega}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_n \hat{f}(\omega - 2\pi n)e^{-ik\omega}\,d\omega$

ok car $\int_0^{2\pi}\sum_n |\hat{f}(\cdot - 2\pi n)| = \int |\hat{f}|$ et $\hat{f} \in L^1$ (support compact et $\hat{f}$ C^1)

$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\omega)e^{-ik\omega}\,d\omega \underset{\hat{f} \in L^1}{\overset{\text{TFI}}{=}} f(-k)$

Diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, shift left, "FT"] \arrow[d, "\text{sample}"'] & \hat{f}(\omega) \arrow[l, shift left, "iFT"] \arrow[dr, "\text{periodise}"] & \\ (f(n))_{n\in\mathbb{Z}} \arrow[r, shift left, "FS"] & \sum_n f(n)e^{-in\omega} \arrow[l, shift left, "FC"] \arrow[r, equal, "\text{POISSON}"] & \sum_n \hat{f}(\omega - n) \triangleq \hat{f}_P \end{tikzcd}$$



Démo Shannon : $\hat{f}(\omega) = \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(\omega)\,\hat{f}_P(\omega)$

TFI : ok car $\hat{f} \in L^1$: $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}_P(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_n f(n)e^{-i\omega n}e^{i\omega x}\,d\omega$.

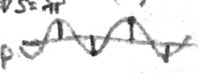
ok car f décroît

$= \sum_n f(n)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\omega(x-n)}\,d\omega = \sum_n f(n)\operatorname{sinc}(x-n)$.

$= \left[\frac{e^{i\omega(x-n)}}{i(x-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\sin\pi(x-n)}{x-n}$

+BON L^2 de sinc translatés

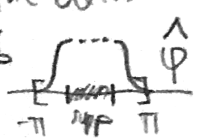
$\hat{f}(x) = \frac{1}{2}\delta_1 - \frac{1}{2}\delta_{-1}$
$f(x) = \sin(x)$
$\Rightarrow s = \pi$



$\to$ Exp
$\to$ Aliasing

sinc décroît lent^t

$\to$ Matlab



sinc $\to \varphi$

$\to$ thresholding

spline cubique

Tridiag