メモ:
ソレノイド、トロイドもやること！！
トロイドの外に、磁場はもれない
(電一、でなく、永久一でも)磁石の中では、電荷が円運動をしていて、その電荷が磁場を作っている。

問題 1

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

問題 2

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ とするとき、

・ベクトル微分演算子$\boldsymbol{\nabla}$=(ア)

・発散div $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}$(イ)$\boldsymbol{A} =$ (ウ)

・回転rot $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}$(エ)$\boldsymbol{A} =$ (オ)

・勾配 grad$\varphi = \boldsymbol{\nabla}$(カ)$\varphi =$ (キ)

問題 3

クーロン法則の式を言え

問題 4

力線とはベクトル場を視覚化する方法である。
ベクトルの大きさ及び向きはそれぞれ力線ではどう表現されるか

問題 5

線積分の式を示し、変数など説明せよ

問題 6

面積分の式を示し、変数など説明せよ

問題 7

$\boldsymbol{F}$[N]の力が印加されて物体が移動した軌跡をλとする。この時、仕事の総量を言え

問題 8

面Sからベクトル$\boldsymbol{A}$が流れ出ている時、全面積から流れ出るベクトルの総量を言え

問題 9

体積V内の湧き出しの総量は、当然表面から出る力線の量に等しい。
このことを式にせよ。またその式を何というか。

問題 10
参考:http://eman-physics.net/electromag/static2.html
半径 r の球による内側の曲面 S で電場を面積分せよ。またそれを電荷について解け。

問題 11
球V(表面をSとする)の内部に電荷が密度ρ[C/m^3]で分布している時、
この球の電荷を求めよ。またそれに
問題 9 の式を代入した式が何を意味するのか述べよ。
(問題 10 のことを用いてよい)

問題 12
無限に長い直線に沿ってλ[C/m]で電荷が分布しているとする。この直線から距離rの点における電場の大きさを求めよ。

問題 13
「同軸コンデンサ」について考えよう。
円の中心と長さ l が共通な 2 つの円筒形導体 A(半径 a)と B(半径 b)を考える。
a<b<<l とする。B の電位を 0 V であるとする。このようなコンデンサについて、静電容量を求めよ。

問題 14
電流、電気力線、電束、電束密度、誘電率、電場、電位、電荷、力、仕事の関係をそれぞれ説明した次の文章を穴埋めせよ。

電荷とは物体が帯びている電気の量であり、すべての電気現象の根本である。
よって、電荷を出発点として、他の物理量の関係性を見ていくことにする。

電荷qは電場$\boldsymbol{E}$を作る。

電場$\boldsymbol{E}$は(電荷からの)距離$|\boldsymbol{r}|$の 2 乗に反比例する。

電気力線は、電場$\boldsymbol{E}$に単位面積当たり$|\boldsymbol{E}|$本の密度で引くことに決められている。

したがって、

電荷qの作る電場$\boldsymbol{E}$は

$$\boldsymbol{E} = \left(\text{定数}\right) \times \frac{q}{|\boldsymbol{r}|^2} \times \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

の形で表される

はずであり、これは

電荷qは

単位面積当たり$|\boldsymbol{E}| = \left(\text{定数}\right) \times \dfrac{q}{|\boldsymbol{r}|^2}$

本の電気力線を放射する

という言い方も出来る。
球の表面積は必ず$4\pi|\boldsymbol{r}|^2$なので、

(即ち

球の表面積は必ず$|\boldsymbol{r}|^2$に比例する　これが「電場$\boldsymbol{E}$は…2 乗に反比例する」に結び付く

)

電荷qは全方位に合計で

$$4\pi|\boldsymbol{r}|^2 \times \left(定数\right) \times \frac{q}{|\boldsymbol{r}|^2}$$

本の電気力線を放射する。

計算すると、

電荷qは
全方位に合計

$$4\pi\left(定数\right)q$$

本の電気力線を放射する

といえる。
さて、環境が水だったり真空だったりで、電荷qが放射できる電気力線の本数は変わってくる。このことは、環境によって、電気力線の放射のしにくさ(=電場の作りにくさ)が異なることを意味する。

環境の、電気力線の放射のしにくさ(つまり電場の作りにくさ)を誘電率εという。
(誘うといっておきながら実際には放射を妨げている。。。)

そのため、

$$\left(定数\right) = \frac{\left(別の定数\right)}{\varepsilon}$$

という形をしている。

さらに、

電荷qが誘電率εの環境で放つ電気力線の本数が

$$\frac{q}{\varepsilon}$$

で表されるようにすると、

$$\left(\text{定数}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

となる。
したがって、

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

となり、

電荷qは
単位面積当たり$|\boldsymbol{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{|\boldsymbol{r}|^2}$
本の電気力線を放射する（電気力線密度）

ともいえる。
また、電気力線とよく似た概念に電束というものがあり、

電荷qが誘電率εの環境で放つ電束の本数は
q

と決められている。これに従えば

電束密度$|\boldsymbol{D}|$は
$|\boldsymbol{D}| = |\varepsilon\boldsymbol{E}| = q \div 4\pi|\boldsymbol{r}|^2$

となる。
ここで、

電場$\boldsymbol{E}$に突入した電荷Qは、力$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}$を受けることになる。

したがって、

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{qQ}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

となる。

力$\boldsymbol{F}$を受け、電荷Qが$\boldsymbol{d}$だけ移動させられたとき、電場がした仕事Wは

$$W = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{d} = Q \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{d}$$

である。(独自解釈)

また、

電場が電荷Qにしうる仕事Wはそのまま電荷Qの位置エネルギーUといえる

ので、

電荷Qの、$\boldsymbol{d}$だけ離れた点における電気的な位置エネルギーUは、電場を$\boldsymbol{E}$として

$$U = Q \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{d}$$

ということが出来る。ここで、

単位電荷当たりの位置エネルギーのことを電位という。

このことより、

電位は、

$$\frac{U}{Q} = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{d}$$

と表される。

二地点の電位の差を電位差(電圧)V

$$V = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{d_1} - \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{d_2}$$

という。

二地点間の電圧V、抵抗値Rのとき、電流Iは

$I = \frac{V}{R}$

となる。

問題 15
磁束密度、磁力線、磁束、磁場、透磁率、電流
をそれぞれ説明した次の文章を穴埋めせよ

問題 14 の通り、

二地点間の電圧V、抵抗値Rのとき、電流Iは

$I = \frac{V}{R}$

なわけであるが、

電流Iとは電荷qの流れであり、単位時間あたりに運ばれる電荷のことである。

言い換えると、

電流Iとは、ある平面$\boldsymbol{S}$を単位時間あたりに通過する電荷のことである。

平面$\boldsymbol{S}$を単位時間あたりに通過する電荷は、単位時間あたりに平面$\boldsymbol{S}$を通過する電荷群の体積を電荷の「単位体積当たりの個数」(数密度)nで割ることにより求めることが出来る。

電荷群の速度を$\boldsymbol{v}$とすると、
平面$\boldsymbol{S}$を単位時間あたりに通過する体積は
$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S}$
で表される。

従って、

電荷群の速度を$\boldsymbol{v}$、数密度を$\boldsymbol{n}$とすると、

平面$\boldsymbol{S}$を単位時間あたりに通過する電荷の個数は
$n\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}$
で表される。

従って、

電荷qの群の速度を$\boldsymbol{v}$、数密度をnとすると、
平面$\boldsymbol{S}$を単位時間あたりに通過する電荷は
$I = qn\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}$
で表される。

電流Iに電圧Vをかけると、
単位時間あたりに運ばれる電荷に電位の差をかけたことになる。

問題 14 のことより、電荷に電位をかけるとエネルギーになる

ので、

電流Iに電圧Vをかけたものは、
単位時間あたりの「エネルギーの差」となる。
これを電力P
という。

電力Pに時間をかけたものが、電力量と呼ばれ、「エネルギーの差」即ち仕事Wとなる。

ところで、電流の周りには磁場が発生する。
http://wakariyasui.sakura.ne.jp/p/elec/ryuujiba/ryuujiba_ho.html#bio

磁場の大きさは電流からの距離の 2 乗に反比例する。

（これも球の表面積が距離の 2 乗に比例するからである。）
そして、電流の大きさに比例する。したがって、

ある微小区間$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$を通過する電流Iが生む磁場$\mathrm{d}\boldsymbol{H}$は、微小区間からの距離を$\boldsymbol{R}$として、
$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \left(\text{定数}\right) \times \frac{I}{|\boldsymbol{R}|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}$$

と表される。
ここで、

磁場の強さ$\mathrm{d}|\boldsymbol{H}|$は磁力線の単位面積当たりの本数(即ち密度)に相当する

ので、

$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$を通過した電流Iが放出する磁力線の大きさは

$$4\pi|\boldsymbol{R}|^2\ \ \mathrm{d}|\boldsymbol{H}| = 4\pi|\boldsymbol{R}|^2\ \ \left|\left(定数\right)\times\frac{I}{|\boldsymbol{R}|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}\right|$$

$$= 4\pi\left(定数\right)I\mathrm{d}|\boldsymbol{s}|$$

($\because$ $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$との距離が$|\boldsymbol{R}|^2$である点を集めた立体は球なので、常に $\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{R} = (\mathrm{d}|\boldsymbol{s}|)|\boldsymbol{R}|$)

$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$を通過した電流Iが放出する磁力線の大きさが$I\mathrm{d}|\boldsymbol{s}|$
(電気力線のときは、このタイミングで空間の誘電率を考慮したが、
磁力線の場合、このタイミングでは空間の透磁率を考慮しない)

になるべく調整すると、

$$\left(定数\right) = \frac{1}{4\pi}$$

となる。

これをベクトルで無理やり表そう。
(計画:球の表面積の公式を、重積分で表し、半径を表す変数をベクトルに。)

$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$を通過した電流Iが放出する磁力線は

$$4\pi|\boldsymbol{R}|^2\ \ \mathrm{d}\boldsymbol{H} = 4\pi|\boldsymbol{R}|^2\ \ \left|\left(定数\right)\times\frac{I}{|\boldsymbol{R}|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}\right|$$

$S = 2\int_0^r 2\pi\sqrt{(r^2 - x^2)}\, dx$

微小区間 d$\boldsymbol{s}$を点とみなすと、d$\boldsymbol{s}$はId|$\boldsymbol{s}$|[本]の磁力線を生む磁荷であると言える。

(独自解釈)

これを、電線で(線)積分すると、

電線(全体)が作る磁場$\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{I}{|\boldsymbol{R}|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}$$

とわかる。

磁力線とよく似た考えに、磁束というものがある。

電気力線密度$\boldsymbol{E}$に対して、空間が電気力線の放射をどれだけ妨げるかを表す誘電率εをかけ、
「空間による妨げが無かった(＝基準値 1 であった)場合の電気力線密度」である
電束密度$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$を考えた

のと同様、

磁力線密度$\boldsymbol{H}$に対して、空間が磁力線の放射をどれだけ妨げるかを表す透磁率μをかけ、
「空間による妨げが無かった(＝基準値 1 であった)場合の磁力線密度」である
磁束密度$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$を考える

ことにしよう。
磁荷d$\boldsymbol{s}$がId|$\boldsymbol{s}$|[本]の磁力線を生むので、

d$\boldsymbol{s}$から距離|$\boldsymbol{R}$|だけ離れた点における磁力線密度$\boldsymbol{H}$は

$$\boldsymbol{H} = \frac{I\mathrm{d}|\boldsymbol{s}|}{4\pi|\boldsymbol{R}|^2}$$

となる。

磁束は B×面積であり、磁荷 ds が

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}=\frac{1}{4\pi}\times\frac{I}{|\boldsymbol{R}|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}$$

を生むことより

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu}{4\pi}\times\frac{I}{|\boldsymbol{R}|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}$$

である。これは単位面積当たりの磁束密度であり、
磁荷 ds が生む磁束は

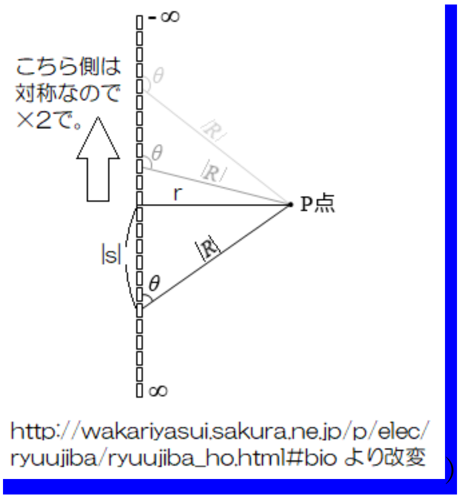
$$4\pi|\boldsymbol{R}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{B}=I\mu\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}$$

電線を直線(無限遠から無限遠へ無限の長さ)として、計算すると、

$$|\boldsymbol{H}|=\frac{1}{4\pi}2I\int_0^\infty\frac{\sin\theta}{|\boldsymbol{R}|^2}\mathrm{d}|\boldsymbol{s}|=\frac{1}{2\pi}I\int_0^\infty\frac{\sin\theta}{|\boldsymbol{R}|^2}\mathrm{d}|\boldsymbol{s}|$$

$\boldsymbol{H}$の向きは$\int\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{R}$の向き

(電流は一定とする。また、次のようにrとθを定義する。



)

$$|\boldsymbol{H}|=\frac{1}{2\pi}I\int_0^\infty\frac{\sin\theta}{|\boldsymbol{R}|^2}\mathrm{d}|\boldsymbol{s}|$$

の式で、$|\boldsymbol{s}|$によって変化する変数は$|\boldsymbol{s}|$、$|\boldsymbol{R}|$、θである。これら 3 変数の内、どれか 1 つで、

他の２つを表すことが出来ないと、積分を計算することが出来ない。
また、「どれか１つ」としてθを選ぶと、積分区間が始点終点共に有限値となる。

したがって、

$$|\boldsymbol{H}| = \frac{1}{2\pi} I \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\theta\text{と定数でのみ表される式}\right) \mathrm{d}\theta$$

の形で表すことが出来れば有限の積分で計算できる。

$$\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{s}|}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \frac{r}{\tan\theta} = -\frac{r}{\sin^2\theta}$$

よって

$$\mathrm{d}|\boldsymbol{s}| = \left(-\frac{r}{\sin^2\theta}\right) \mathrm{d}\theta$$

また

$$|\boldsymbol{R}|^2 = \left(\frac{r}{\sin\theta}\right)^2$$

より、

$$|\boldsymbol{H}| = \frac{1}{2\pi} I \int_{0}^{\infty} \frac{\sin\theta}{|\boldsymbol{R}|^2} \mathrm{d}|\boldsymbol{s}|$$

$$= \frac{1}{2\pi} I \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin\theta}{\left(\frac{r}{\sin\theta}\right)^2} \left(-\frac{r}{\sin^2\theta}\right) \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} I \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin\theta}{r} (-1) \mathrm{d}\theta$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \frac{I}{r} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r} \left[\frac{l}{l} \cos\theta \frac{l}{l}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$= \frac{I}{2\pi r}$$

と求められる。

http://lecture1.vu.kyutech.ac.jp/otabe/html/chap5a.html

↑これはまた別の問題で。

問題 16
磁場と電場と磁束と電束と透磁率と誘電率と磁束密度と電束密度と磁力線と電気力線の関係を述べよ。問題 14 と問題 15 を参考にしてよい。

答え 16
・磁場は磁力線の密度であるのに対し、電場は電気力線の密度である。
・磁束は、磁力線の本数に、空間が磁力線の放射をどれだけ妨げるかを表す透磁率 μ をかけ、空間による妨げが基準値 1 であった場合の磁力線の本数を表すのに対し、
電束は、電気力線の本数に、空間が電気力線の放射をどれだけ妨げるのかを表す誘電率 ε をかけ、空間による妨げが基準値 1 であったときの電気力線の本数を表すものである。
・単位面積当たりの磁束や電束の本数を、磁束密度とか電束密度という。
・磁力線は、

電気力線密度 E に対して、空間が電気力線の放射をどれだけ妨げるかを表す誘電率 ε をかけ、「空間による妨げが無かった(＝基準値 1 であった)場合の電気力線密度」である
電束密度 $D=\varepsilon E$ を考えた

のと同様、

磁力線密度 H に対して、空間が磁力線の放射をどれだけ妨げるかを表す透磁率 μ をかけ、「空間による妨げが無かった(＝基準値 1 であった)場合の磁力線密度」である
磁束密度 $B=\mu H$ を考える

問題 17
直線電流、円電流の場合についてそれぞれ磁場の公式を求めよ。

問題 18
質量を英語にすると、(ア)である。
座標を英語にすると、(イ)である。
速度を英語にすると、(ウ)である。
加速度を英語にすると、(エ)である。
仕事の定義式は(オ)、単位は(カ)である。電気でいうところの(キ|名称と定義式を示せ)(単位は(ク))に相当する。
仕事率の定義式は(ケ)、単位は(コ)である。電気でいうところの(サ|名称と定義式を示せ)(単位は

(シ))に相当する。SI 基本単位で表した単位は(ス)である。
電荷を英語にすると、(セ)である。SI 基本単位で表した単位は(ソ)である。
電場を SI 基本単位で表した単位は(タ)である。
電束密度を SI 基本単位で表した単位は(チ)であるから、誘電率を SI 基本単位で表した単位は(ツ)である。
磁場を SI 基本単位で表した単位は(テ)である。
磁束密度を電束密度のように「磁荷/面積」と言おうとするとき、磁荷 Wb なるものは(ト)ということができる。この議論により、磁束密度を SI 基本単位で表した単位は(ナ)であるとわかる。普段は T(テスラ)を用いる。

問題 19
距離 a[m]離れた 2 点に電荷 Q1[C]、Q2[C]を置く。
(1)Q1>0 および Q2= n Q1(n>1)であるとき、2 つの電荷を結ぶ直線上で、電場がなくなる点を求めよ。
(2) Q1>0 および Q2=－ n Q1(n>1)であるとき、2 つの電荷を結ぶ直線上で、電位がなくなる点を求めよ。

答え 19
(1)

直線上で、Q1 から距離 x だけ Q2 に近づいた点について考えよう。

電場ベクトルの式は$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$

である。よって、

Q1 の、Q1→Q2 方向の電場の大きさは $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x^2}$

であり、

Q2 の、Q2→Q1 方向の電場の大きさは $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{(a-x)^2}$

である。

(i)考える地点が Q1 と Q2 の間にある場合

電場がなくなるので、

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{(a-x)^2}$$

$(x>0)$

これを解くと、

$$x=\frac{a}{\sqrt{n}+1}$$

(ii)考える地点が Q1 と Q2 の外(Q1 寄り)にある場合

電場がなくなるので、

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{(a+x)^2}$$

$(x>0)$

これを解くと、

解なし

(iii)考える地点が Q1 と Q2 の外(Q2 寄り)にある場合

電場がなくなるので、

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{(x-a)^2}$$

$(x>a)$

これを解くと、

解なし

よって、答えとなる地点は

Q1 と Q2 の間にあり、

かつ Q1 から

$$\frac{a}{\sqrt{n}+1}[\mathrm{m}]$$

だけ離れた地点

である。

(2)

直線上で、Q1 から距離 x だけ Q2 に近づいた点について考えよう。

電位の式は$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$

である。よって、

Q1 の、Q1→Q2 方向の電位の大きさは

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x}$$

であり、

Q2 の、Q2→Q1 方向の電場の大きさは

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{a-x}$$

である。

(i)考える地点が Q1 と Q2 の間にある場合

電位がなくなるので、

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{a-x}$$

$(x > 0)$

これを解くと、

$$x = \frac{a}{n+1}$$

(ii)考える地点が Q1 と Q2 の外(Q1 寄り)にある場合

電位がなくなるので、

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{a+x}$$

$(x > 0)$

これを解くと、

$$x = \frac{a}{n-1}$$

(iii)考える地点が Q1 と Q2 の外(Q2 寄り)にある場合

電位がなくなるので、

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{x-a}$$

$(x>a)$

これを解くと、

解なし

よって、答えとなる地点は

・Q1 と Q2 の間で、

Q1 から

$$\frac{a}{n+1}[\mathrm{m}]$$

だけ離れた地点

・Q1 と Q2 の外(Q1 寄り)で、

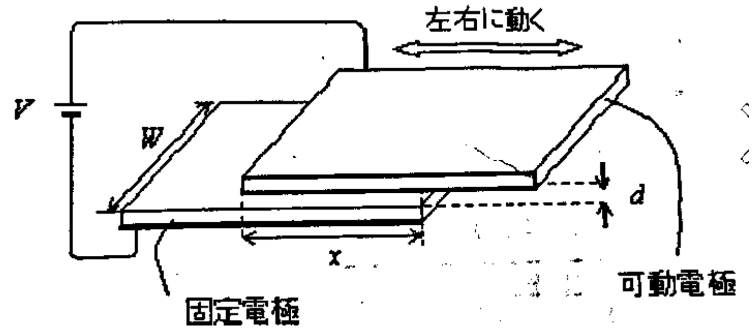
Q1 から

$$\frac{a}{n-1}[\mathrm{m}]$$

だけ離れた地点

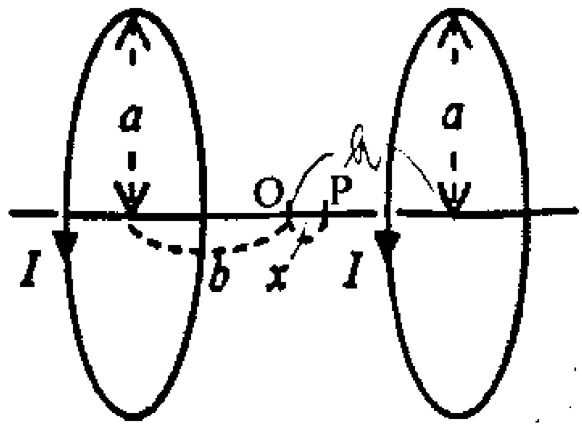
である。

問題 20



(1)この図で、重なりの長さが x[m]であるときの 2 枚の導体平板間の静電容量 C と、電圧が V[V]のときに電極間にたまる静電エネルギーU[J]を求めよ。
(2)このとき可動電力に働く力$\boldsymbol{F}$を求めよ。

問題 21



(1)点 P での磁束密度を求めよ
(2)a=2b のとき、両方のコイルの間の磁場がほぼ一定になることを示せ。テイラー展開が有効。

問題 22

ローレンツ力とは クーロン力とアンペールの力を合わせたものである

といえる。どういうことか説明せよ

問題 23
参考: http://www.geocities.jp/sugachan1973/doc/funto105-no400.html

・クーロンの法則
・rot $\boldsymbol{E}=0$
・導体中では$\boldsymbol{E}=0$、$\phi=$一定
は、静電場のみで正しい

時間的に変化する電場ではそれぞれどうなるのかいえ

問題 24
外部からの電場を 0 とする。
一様磁場内における荷電粒子の円運動の半径を求めよ。

問題 25
外部からの電場を 0 とする。
一様磁場内における荷電粒子の円運動の半径は

$r=\dfrac{mv}{qB}$(ラーモア半径)

である。(問題 24 を参照のこと)
一様磁場 1.0×10^3[T]で Z 方向(XY 平面を奥から手前への方向)のとき、
電子(9.1×10^-31[kg]、-1.6×10^19[C])が速さ v で打ち込まれたとする。
(1)電子の回転方向、
(2)サイクロトン角周波数の大きさ、
(3)ラーモア半径が 0.01m のときの v
をそれぞれ求めよ

問題 26

磁場は

(ア)

(イ)

によって作られる。

特に(ア)のことを、

原子や分子が(ウ)を持つ

と表現することがある。

(ウ)とは、 大きさ(エ) 向き(オ) のベクトル

であり、

(ウ)は、 通常向きがバラバラであるが、 (カ)では揃う。

問題 27

磁化ベクトルとは何か

問題 28

磁気モーメントと磁化電流の関係をいえ。

また、磁性体が存在する場合のアンペールの法則を式で表せ

問題 29

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = I$$

ここで

(ア)

（イ）

より

アンペールの法則の微分系
$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$

が導かれる。

問題 30
磁性体がある場合の静磁場

$\mathrm{div}\,(ア) = (イ)$

$\mathrm{rot}\,(ウ) = (エ)$

$\boldsymbol{B} = (オ) = (カ)$

誘電体がある場合の静磁場

$\mathrm{div}\,(キ) = (ク)$

$\mathrm{rot}\,(ケ) = (コ)$

$\boldsymbol{B} = (サ) = (シ)$

問題 31

どんな物質にも(ア)がある。
温度依存性は(イ)。
外部磁場が消えれば磁化も消える。

しかし、

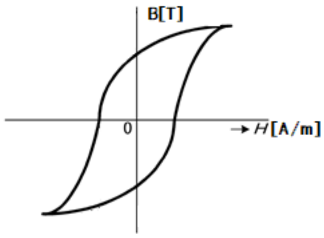
常または強磁性体では、
(ア)が打ち消されてしまう。

常磁性の原因は(ウ)である。
温度が上がると(エ)ため磁化率低下。
外部磁場が消えれば磁化も消える。
また(ウ)のことは(オ)にみられる。

問題 32
非磁性体とは何か。名称を答えよ。

問題 33
強磁性体とは何か。物質の例、性質、内部構造をそれぞれいえ。

問題 34
次の図はヒステリシスループといって、横軸が外部から加えられる磁場を、縦軸がそれを受けて決まる磁化を意味する。最初の状態は原点で表されるが、一度磁場をかけると右上の状態になり、磁場を取り除いても原点に戻ることはなく、必ず外側のループ上のどこかの状態になる。



飽和磁束密度 Bm(「これ以上強い磁場をかけても、これ以上強く磁化されることはない」と)、
残留磁束密度 Br(磁場を取り除いても残る磁化)、
保持力-Hc(磁化されていない状態に戻すために必要な反対向きの外部磁場の強さ)
をそれぞれ示せ。

問題 35
ヒステリシスループにおいて、透磁率を表すものは何か。またヒステリシスループの面積は何を意味するか。

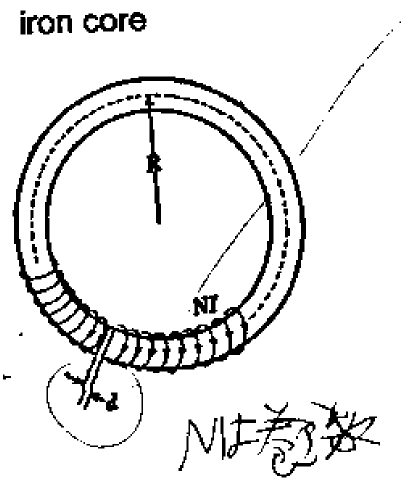
問題 36
永久磁石の材料となるような強磁性体のヒステリシスループをかけ。ヒントとしては、保磁力や残留磁気などについて考えよ。

問題 37

ヒステリシスループを考える上での理想的な磁気記録材料は作れない。なぜか。

問題 38

右図のトロイドの中に幅 d ($d << R$)のギャップを有する鉄心(比透磁率 μ_r)を入れた場合のギャップ内の磁束密度は，鉄心のない場合の何倍になるか (ギャップ内の磁場は一様であるとする).



問題 39～42

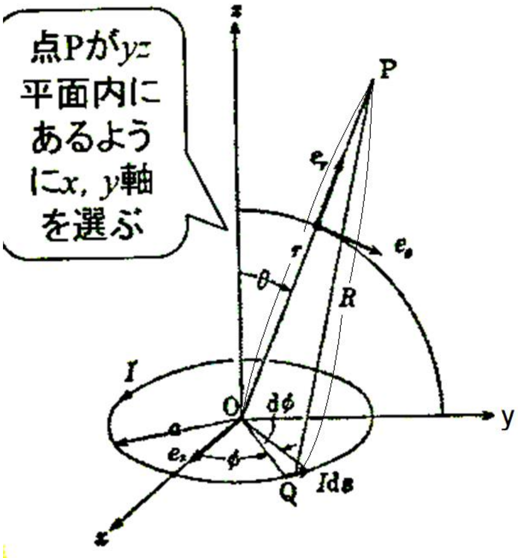
原点 O を中心とし、xy 平面上に位置し、半径が a である円がある。この周りを電流が流れる。この電流が点 P に作る磁束密度を考えたい。

問題 39 この時、P を yz 平面内にあるものと見なしても、P は xyz 空間の任意の場所を表現できるということを説明せよ

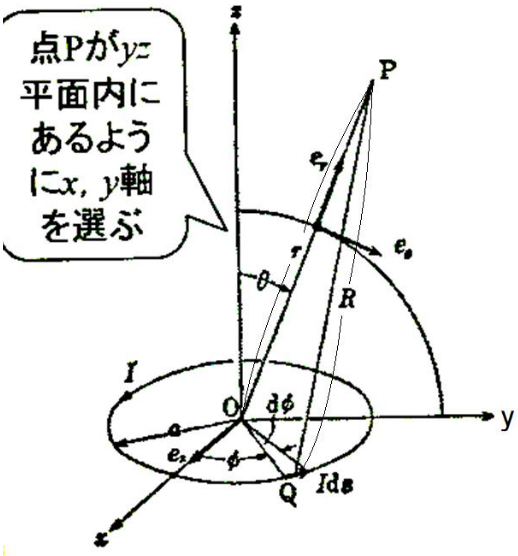
問題 40

次の図において、$\boldsymbol{R}$と$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$を$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_r$で表せ。但し、$\boldsymbol{e}_x$は x 方向の、$\boldsymbol{e}_r$は OP 方向の、$\boldsymbol{e}_\theta$は yz 平面で、OP 方向に直行する方向でかつ z 成分が減少し y 成分が増加する方向の、それぞれ単位ベクトルとする。

ヒント: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \overrightarrow{OQ}$



問題 41
ビオ・サバールの法則を用いて磁荷(とみなせるもの)d$\boldsymbol{s}$が点 P につくる磁束$\boldsymbol{B}$を求めよ。
問題 40 の結果を用いよ。r>>a とする。



問題 42
問題 41 の答えを磁気双極子モーメントを用いて表せ

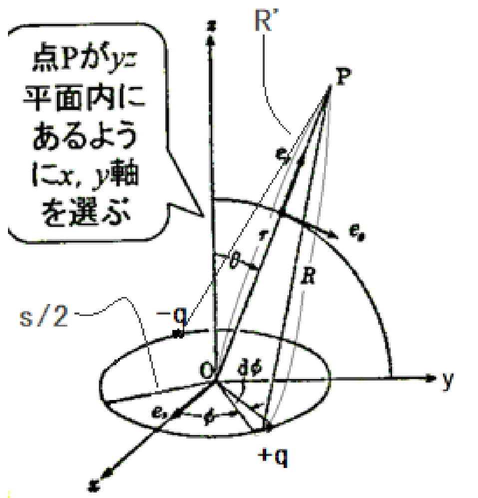
問題 43
電気双極子モーメントを用いて、
$\boldsymbol{E}$を r 方向と θ 方向の成分で表せ。

答え 43

クーロンの法則

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

より、



の図のようにすると、

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{+q}+\boldsymbol{E}_{-q}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')}{R^3}$$

といえる。
問題 41 のことより

$$\begin{pmatrix} x\text{方向} \\ \theta\text{方向} \\ r\text{方向} \end{pmatrix}$$とすると、

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} -\frac{s}{2}\cos\phi \\ -\frac{s}{2}\cos\theta\sin\phi \\ r-\frac{s}{2}\sin\theta\sin\phi \end{pmatrix}$$

である。
$\boldsymbol{R}'$はϕをπすすませ(つまりϕに関する sin や cos の符号を反転させ)て、

$$\boxed{\boldsymbol{R}' = \begin{pmatrix} \frac{s}{2}\cos\phi \\ \frac{s}{2}\cos\theta\sin\phi \\ r+\frac{s}{2}\sin\theta\sin\phi \end{pmatrix}}$$

よって

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\left(\begin{pmatrix} -\frac{s}{2}\cos\phi \\ -\frac{s}{2}\cos\theta\sin\phi \\ r-\frac{s}{2}\sin\theta\sin\phi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{s}{2}\cos\phi \\ \frac{s}{2}\cos\theta\sin\phi \\ r+\frac{s}{2}\sin\theta\sin\phi \end{pmatrix}\right)}{R^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\begin{pmatrix} -s\cos\phi \\ -s\cos\theta\sin\phi \\ -s\sin\theta\sin\phi \end{pmatrix}}{R^3}$$

ϕは任意なので、自由に決めることができる。x 成分が 0 になるように決めると、

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\begin{pmatrix} 0 \\ -s\cos\theta\sin\phi \\ -s\sin\theta\sin\phi \end{pmatrix}}{R^3}$$

？？？

問題 44

遠方で双極子が等価って話

問題 45

磁気モーメントp_{m1}, p_{m2}[A・m²]の 2 つの小さな棒磁石が中心距離 r[m]の位置に一直線上に置かれているとき、互いに及ぼしあう力を求めよ。但し、r は大きい。

問題 46

電荷を持っている宇宙線が地球に降り注ぐとき、電荷にかかる力が一番弱いのは地球上のどこ付近か。理由も含めて答えよ

問題 47

誘電体を扱うのに電場(電気力線密度)$\boldsymbol{E}$でなく、電束密度$\boldsymbol{D}$を用いたほうが便利である。その理由を、実際に電荷 q を表す式を、$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{D}$それぞれを用いて立てることで実感せよ。

問題 48
磁性体を扱うのに磁束密度$\boldsymbol{B}$でなく、磁場(磁力線密度)$\boldsymbol{H}$を用いたほうが便利である。その理由を、実際に電荷 q を表す式を、$\boldsymbol{H}$と$\boldsymbol{B}$それぞれを用いて立てることで実感せよ。

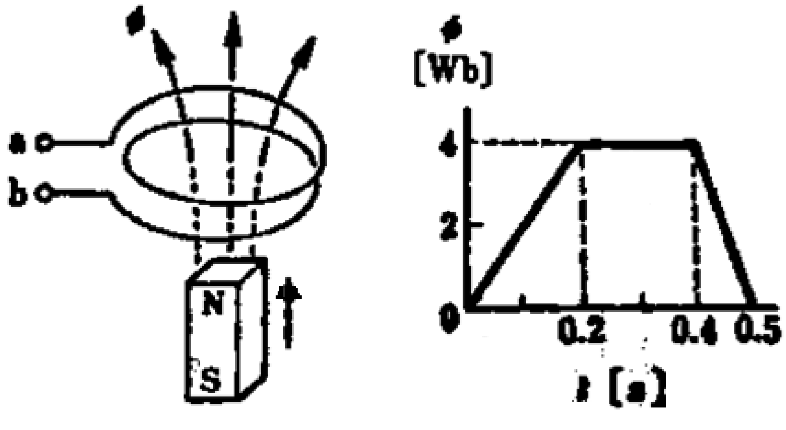
問題 49
0.5[T]の磁束密度の中を、2[C]の荷電粒子が 10[m/s]の速度で通過する。
荷電粒子に働く力の大きさを求めよ。
(1)磁場と平行な方向に進むとき
(2)磁場と垂直な方向に進むとき

問題 50
反磁性体とは(ア)が(イ)よりも(ウ)い物質。

問題 51
誘導起電力の式と意味を言え

問題 52
ファラデーの法則を積分形から微分形に変形せよ

問題 53



起電力と時間の関係を図示せよ(コイルは 2 回巻きとする)

問題 54

一様な磁束密度B[T]の中で縦a[m]横b[m]巻き数N[回]のコイルを毎秒f[回転]させた。この時

発生する電圧の振幅をいえ

問題 55

答え 1

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = bf\boldsymbol{i} + cd\boldsymbol{j} + ae\boldsymbol{k} - ce\boldsymbol{i} - af\boldsymbol{j} - bd\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$$

答え 2

(ア):$\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$

次のようにも表せる

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(イ):「・」(内積)

(ウ):$\dfrac{\partial}{\partial x}A_x + \dfrac{\partial}{\partial y}A_y + \dfrac{\partial}{\partial z}A_z$

(エ):「×」(外積)

(オ):$\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial A_y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial A_z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial A_z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial A_x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial A_x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial A_y}\right)\boldsymbol{k}$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial A_y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial A_z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial A_z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial A_x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial A_x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial A_y} \end{pmatrix}$$

(カ):「 」(スカラの積)

(キ):$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$

答え 3

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

電荷が 3 つ以上ある場合

$$\boldsymbol{F}=\sum_i\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_i}{r_i^2}\frac{\boldsymbol{r_i}}{r_i}$$

答え 4

ベクトルの大きさは力線の密度で、

ベクトルの向きは力線の瞬間的な(つまり接線の)方向で表現される。

答え 5

$$I_\lambda=\int_\lambda\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$\boldsymbol{A}$を(曲)線λで積分する式である。

$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$(線素という)はλの接線方向を向き、大きさは$\mathrm{d}\lambda$である。

答え 6

$$I_S=\iint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$\boldsymbol{A}$を(曲)面Sで積分する式である。

$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$(面積素)はSの接平面に垂直で、大きさは $\mathrm{d}S$である。

また$\boldsymbol{S}$を面積ベクトルという。

答え 7

$$\int_\lambda\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

答え 8

$$\iint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

答え 9

$$\iiint_V\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\iint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

ガウスの定理

答え 10

$$\iint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = |\boldsymbol{E}|S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

したがって、

$$q = \varepsilon_0 \iint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

答え 11

問題 10 より

$$q = \varepsilon_0 \iint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

である。

$$q = \varepsilon_0 \iint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \rho \mathrm{d}V$$

といえる。これをガウスの法則の積分形という。

問題 9 の式(ガウスの定理)に代入すると

$$\varepsilon_0 \iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\mathrm{d}V = \iiint_V \rho \mathrm{d}V$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

これをガウスの法則の微分形といい、電場(の湧き出し)は電荷密度を誘電率で割ったものであるということがわかる。

ちなみに、

http://wakariyasui.sakura.ne.jp/p/elec/dennba/rikisenn.html#dennkagausu

によると、Q[C]の電荷から出る電気力線は

$$4\pi \times \frac{1}{4\pi\varepsilon}Q$$

本なのだという。(電荷が全方向に対称的に(＝球の形で)広がるから、$4\pi r^2 \times E$本となる。)

これが$\dfrac{Q}{\varepsilon}$となるべく、Eが定義されている。

EやFの式に$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}$が出てくるのはそのためである。

答え 12

電荷の分布する直線に、円の中心を重ねて円柱(半径 r、高さ l)をぶっさすことを考えればよい。円柱底面に電束は通らない。円柱側面を通る電束が円柱を通る電束全体λlになる。
円柱側面の電束を求めると、

$$\varepsilon_0 \iint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 E 2\pi r l$$

よって

$$\varepsilon_0 E 2\pi r l = \lambda l$$

解くと

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

答え 13
問題 12 のことより、蓄えられる電荷量を Q とすると、中心軸から r の距離の電場 E(r)は

$E(r) = \dfrac{\mathrm{Q}}{2\pi\varepsilon_0 l r}$とかける。$\left(\lambda に \dfrac{Q}{l} を代入\right)$

電位$\phi(r)$は電場を距離で積分すれば求められるので

$$\phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\log_e r + \phi_0$$

$$\phi(b) = 0$$

よりϕ_0を求めると(省略)、

$$\phi(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\log_e \frac{b}{r}$$

A,B 間の電位差Vは

$$V = \phi(a) - \phi(b) = \phi(a) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\log_e \frac{b}{a}$$

よって、静電容量Cは

$$C = \frac{Q}{V} = Q \div \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\log_e \frac{b}{a} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\log_e \frac{b}{a}}$$

答え 18
(ア):mass
(イ):coordinate
(ウ):velocity
(エ):acceleration
(オ):W=Fx
(カ):J(ジュール)
(キ):電力量 W=∫VIdt
(ク):W・s
(ケ):P=dW/dt
(コ):W
(サ)電力 P=VI
(シ):W
(ス):m2･kg･s-3
(セ):charge(但し、変数の記号は q や Q がつかわれる。また、単位も C だが Coulomb の C である。)
(ソ):s･A
(タ):m･kg･s-3･A-1
解説:電場=力/電荷
(電場=電気力線密度)
(チ):m-2･s･A
電束密度=電荷/面積
(ツ):m-3･kg-1･s4･A2
解説:誘電率=電束密度/電場
(電場=電気力線密度である。)
(テ):m-1･A
(ト):エネルギー/電流
(ナ):kg･s-2･A-1

答え 20

(1)

公式。

$$C=\frac{\varepsilon_0 Wx}{d}$$

(Wxは平板の面積)

$$\boxed{U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{\varepsilon_0 WxV^2}{2d}}$$

(2)

$$\begin{pmatrix}\text{左}(x)\text{成分}\\ \text{上}(d)\text{成分}\\ \text{奥成分}\end{pmatrix}$$とする。

ここで、

エネルギーとは、 それを持っている者が他者に対して仕事をする能力

である。また、

仕事とは それを行う者が「他者」に加える力を、 その「他者」を移動させた距離で積分したもの

である。

だから、静電エネルギー$\boldsymbol{U}$とは、

$\boldsymbol{F}$が仕事をする能力を表す。

ここで、仕事とは力を距離で積分したものだったのだから、言い換えると、

力とは それを加える者がすべき仕事を、 それを加える者が移動させるべき距離で微分したもの

といえる。したがって、

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U}{\partial d} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

計算すると、

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U}{\partial d} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\varepsilon_0 W x V^2}{2d}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial d}\left(\dfrac{\varepsilon_0 W x V^2}{2d}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\varepsilon_0 W}{2d} V^2 \\ -\dfrac{\varepsilon_0 W x V^2}{2d^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

従って、

左向き成分$\dfrac{\varepsilon_0 W}{2d} V^2$[N]

下向き成分$\dfrac{\varepsilon_0 W x V^2}{2d^2}$[N]

答え 21

半径aの円を流れる電流があり、
その円の中心軸上で、円からx離れた地点
における磁場Hは

$$H = \frac{Ia^2}{2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

と表される。

図で、左の円電流が P に作る磁場は

$$\frac{Ia^2}{2(a^2+(b+x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(右向き)であり、

右の円電流が P に作る磁場は

$$\frac{Ia^2}{2(a^2+(b-x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(右向き)である。

あわせると、
右向きに
$$\frac{Ia^2}{2}\left(\frac{1}{(a^2+(b+x)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(a^2+(b-x)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$
である。
また、

磁束密度は透磁率×磁場

である。
したがって、

磁束密度は
$$\frac{\mu_0 Ia^2}{2}\left(\frac{1}{(a^2+(b+x)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(a^2+(b-x)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

である。

(2)
(1)の議論より、

磁束密度は
$$\frac{\mu_0 Ia^2}{2}\left(\frac{1}{(a^2+(b+x)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(a^2+(b-x)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

といえる。
また、テイラー展開とは、

テイラー展開
$x=a$の付近で
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

である。

テイラー展開によって、「ほぼ一定」を示せる
ということは、
$(x-a)^n$の低次の係数が小さくなることを意味する。

したがって、これを確かめればよい。
磁束密度を 4 ステップで変形しよう。

1 ステップ目

$$\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(\frac{1}{(a^2+(b+x)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(a^2+(b-x)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$=\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left((a^2+(b+x)^2)^{-\frac{3}{2}}+(a^2+(b-x)^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left((a^2+b^2+2bx+x^2)^{-\frac{3}{2}}+(a^2+b^2-2bx+x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

となる。

2 ステップ目

$(a^2+b^2+2bx+x^2)^{-\frac{3}{2}}$ $(=g(2bx+x^2)$とする。また $2bx+x^2=X$とする$)$

を$x=0$つまり$X=0$のまわりでテイラー展開すると

$$(a^2+b^2+2bx+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\simeq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}X^n \quad (\text{但し}g^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}g)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}X^n$$

$$=\frac{g(0)}{0!}X^0+\frac{g^{(1)}(0)}{1!}X^1+\frac{g^{(2)}(0)}{2!}X^2+\cdots$$

$$=(a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{-\frac{3}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}}{1!}X^1+\frac{\frac{15}{4}(a^2+b^2)^{-\frac{7}{2}}}{2!}X^2+\cdots$$

3 ステップ目

$(a^2+b^2-2bx+x^2)^{-\frac{3}{2}}$ $(=h(-2bx+x^2)$とする。また$-2bx+x^2=\chi$とする$)$

を$x=0$つまり$\chi=0$のまわりでテイラー展開すると

$$(a^2+b^2-2bx+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\simeq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\chi^n \quad (\text{但し}h^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\chi^n}h)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\chi^n$$

$$=\frac{h(0)}{0!}\chi^0+\frac{h^{(1)}(0)}{1!}\chi^1+\frac{h^{(2)}(0)}{2!}\chi^2+\cdots$$

$$=(a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{-\frac{3}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}}{1!}\chi^1+\frac{\frac{15}{4}(a^2+b^2)^{-\frac{7}{2}}}{2!}\chi^2+\cdots$$

4 ステップ目

2 ステップ目と 3 ステップ目の結果を代入すると、

磁束密度は

$$\frac{\mu_0 I a^2}{2}($$

$$(a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{-\frac{3}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}}{1!}X^1+\frac{\frac{15}{4}(a^2+b^2)^{-\frac{7}{2}}}{2!}X^2+\cdots+$$

$$(a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{-\frac{3}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}}{1!}\chi^1+\frac{\frac{15}{4}(a^2+b^2)^{-\frac{7}{2}}}{2!}\chi^2+\cdots$$

$$)$$

$$=$$

$$\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(2(a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}(X+\chi)+\frac{15}{8}(a^2+b^2)^{-\frac{7}{2}}(X^2+\chi^2)-\cdots\right)$$

$$=$$

$$\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(2(a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}(2x^2)+\frac{15}{8}(a^2+b^2)^{-\frac{7}{2}}(8b^2x^2+2x^4)-\cdots\right)$$

と分かる。

$a=2b$とすると、

$$\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(2(5b^2)^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(5b^2)^{-\frac{5}{2}}(2x^2)+\frac{15}{8}(5b^2)^{-\frac{7}{2}}(8b^2x^2)+\frac{15}{8}(5b^2)^{-\frac{7}{2}}2x^4-\cdots\right)$$

$$=$$

$$\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(2(5b^2)^{-\frac{3}{2}}-3(5b^2)^{-\frac{5}{2}}x^2+15(5b^2)^{-\frac{7}{2}}(b^2x^2)+15(5b^2)^{-\frac{7}{2}}2x^4-\cdots\right)$$

$$=$$

$$\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(2(5b^2)^{-\frac{3}{2}}-3\left(\sqrt{5}b\right)^{-5}x^2+15\left(\sqrt{5}b\right)^{-7}(b^2x^2)+15(5b^2)^{-\frac{7}{2}}2x^4-\cdots\right)$$

$$=$$

$$\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(2(5b^2)^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{25\sqrt{5}}b^{-5}x^2+\frac{15}{125\sqrt{5}}b^{-7}b^2x^2+15(5b^2)^{-\frac{7}{2}}2x^4-\cdots\right)$$

$$=$$

$$\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(2(5b^2)^{-\frac{3}{2}}+15(5b^2)^{-\frac{7}{2}}2x^4-\cdots\right)$$

$$\simeq$$

$$\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(2(5b^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$=$$

$$\mu_0 I a^2 \left(\frac{5}{4}a^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$=$

$$\frac{\mu_0 I}{a}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

よって、磁場は、ほぼ一定値

$$\frac{\mu_0 I}{a}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

になる。

※計算もかなり難しいので、必ずやって慣れること

答え 22

クーロン力の公式

$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$

アンペール力の公式

$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$

($\boldsymbol{v}$はqの速度)

これを足し合わせると

ローレンツ力

$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$

(補足)

アンペール力について。

$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{F} = q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{B}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{B}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}$$

問題 15 よりわかるが、

$I\mathrm{d}\boldsymbol{s}$は磁荷$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$が生む磁力線の本数

である。

よって

$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}$

$I\mathrm{d}\boldsymbol{s}$は磁荷$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$が生む磁力線の本数

答え 23

時間的に変化する電場においては、
クーロンの法則は成り立たないので
・ローレンツ力
・$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
を使って考える

時間的に変化する電場においては、
$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{t}}$

時間的に変化する電場においては、
導体中で 0 となるとは限らない。
電磁波とみて、
マクスウェル方程式に当てはめる
必要があるそうだ。

答え 24

外部からの電場を 0 とする。

一様磁場内では、
荷電粒子は等速円運動を行う。

この時ローレンツ力は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

となる。
また、等速円運動なので、

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

よって

$$\boxed{\frac{mv^2}{r} = qvB}$$

である。よって

$$\boxed{r = \frac{mv}{qB}\text{(ラーモア半径)}}$$

補足:

$$\boxed{\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}}$$

答え 25

(1)反時計回り。フレミング左手の法則を使って、さらに電荷の移動の向きは(マイナスなので)反対にする。

(2)

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} = -\frac{(1.6 \times 10^{19})(1.0 \times 10^{3})}{9.1 \times 10^{-31}}$$

これを解いて絶対値を出せばよい

(3)

$$v = \frac{qBr}{m} = -\frac{(1.6 \times 10^{19})(1.0 \times 10^{3})(0.01)}{9.1 \times 10^{-31}}$$

を解けばよい

答え 26

(ア):原子核の周りを回る電子による環状電流

(イ):電子自体のスピン

(ウ):磁気モーメント

(エ):$P_m = IS[\mathrm{A \cdot m^2}]$

(オ):電流の回転方向を表す右ネジ

(カ):磁性体

答え 27

磁化ベクトル$\boldsymbol{M}$とは、

磁気モーメント$\boldsymbol{P_m}$を用いて

$$\boldsymbol{M} = \sum_i \frac{\boldsymbol{P_{mi}}}{\Delta V}$$

と表されるベクトルであり、磁気モーメントを巨視的に見たものであるということも出来る。ΔVは体積である。

答え 28

> 磁化電流とは、
> 磁気モーメントを作り出す電流

のことである。

> 磁化電流I'は、
> $$I' = \frac{\Sigma_i}{\Delta V}\oint \boldsymbol{P_{mi}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$
> $$= \oint \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

と表される。
また、

> アンペールの法則
> $$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = I$$

より

$$\boxed{\oint \boldsymbol{H}_{\text{今まで}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = I' + I_{\text{外部}}}$$

といえるから、

$$\boxed{\oint \left(\boldsymbol{H}_{\text{今まで}} - \boldsymbol{M}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = I_{\text{外部}}}$$

である。

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_{\text{今まで}} - \boldsymbol{M}$$

つまり

$$\boxed{\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}}$$

と再定義すると、

$$\boxed{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = I_{外部}}$$

といえる。

答え 29
(ア):

$$\boldsymbol{I} = \int \boldsymbol{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$\boldsymbol{i}$は電流密度
(イ):
ストークスの定理

$$線積分 \oint \boldsymbol{Vector} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 面積分 \int \mathrm{rot}\, \boldsymbol{Vector} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

答え 30

磁性体がある場合の静磁場
$\mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0$
$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} = \mu \boldsymbol{H}$

誘電体がある場合の静磁場
$\mathrm{div}\, \boldsymbol{D} = \rho$
$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} = 0$
$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon \boldsymbol{E}$

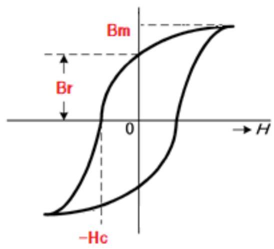
答え 31
(ア):反磁性
(イ):小さい
(ウ):
その物質の原子や分子に固有の磁気モーメントがあり、外部磁場の方向にその向きをある

程度揃えること
(エ):熱運動が(ウ)を妨げる
(オ):電子が奇数個である原子や分子や、内部の電子核が不安定な遷移元素

答え 32
反磁性体と常磁性体

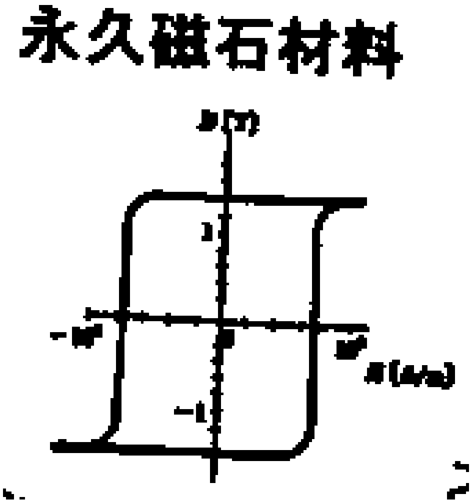
答え 33
鉄、コバルト、ニッケル、フェライトなど。
磁場により強く磁化され、磁場を除いても磁化が残る(＝過去の状態に依存して
今の状態があるという磁気ヒステリシス)。
内部は自発磁化を持つ磁区に分かれており、外部磁場による軸の方向と体積が変化することで強磁性体特有の性質を示す。

答え 34



答え 35
透磁率はヒステリシスループの傾き。(B＝μH)
また、面積は、ループ上を移動するときに消費されるエネルギー。

答え 36
保持力が大きくないと、簡単にひっくり返ってしまう。残留磁気が大きくないとそもそも磁気を帯びない。そう考えると、どちらも大きいはずである。



答え 37
再生感度のため、残留磁気が大きくないといけない。その為 B 軸が広い。
また、記録密度を高めるため、保持力も大きくないといけない。その為 H 軸が広い。
記録感度のため、傾きが大きくないといけない。
これらは互いに矛盾する。

答え 38
まず、

$$\boxed{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}s = NI}$$

である。

鉄心ありの場合、

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}s = \frac{B}{\mu_r\mu_0}\cdot 2\pi R + \frac{B}{\mu_0}\cdot d$$

であるから、

$$\frac{B}{\mu_r\mu_0}\cdot 2\pi R + \frac{B}{\mu_0}\cdot d = NI$$

よって

鉄心ありの場合、

$$B=\frac{\mu_r\mu_0}{2\pi R+d\mu_r}NI$$

鉄心なしの場合、

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}s=\frac{B}{\mu_0}\cdot 2\pi R$$

であるから、

$$\frac{B}{\mu_0}\cdot 2\pi R=NI$$

よって

鉄心なしの場合、

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$$

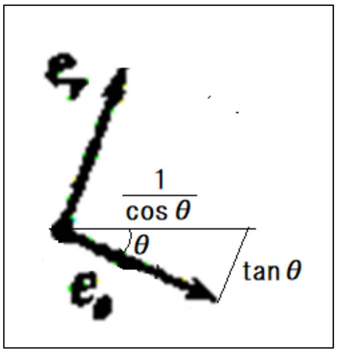
両者を比較すればよい。

答え 39
まず、円に対して垂直な方向を z で表現できる。
そして、円の対称性より、xy 平面と円の位置関係を回転させても矛盾が生じることはない。
y 軸を xy 平面内で回転させることで、P の存在する方向の z 以外の成分を、y 成分で表現できるようになる。

答え 40
まず

y 方向に$\boldsymbol{e}_y$という単位ベクトル
$\boldsymbol{e}_y=\sin\theta\,\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\,\boldsymbol{e}_\theta$

をとって



の関係より、

$$\tan\theta\,\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{e}_\theta=\frac{1}{\cos\theta}\boldsymbol{e}_y$$

である。

また、

$$\overrightarrow{OQ}=a\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x+a\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y$$

である。よって、

$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\overrightarrow{OQ}=r\boldsymbol{e}_r-\big(a\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x+a\sin\phi\,(\sin\theta\,\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\,\boldsymbol{e}_\theta)\big)$

$$\boldsymbol{R}=-a\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x-a\cos\theta\sin\phi\cdot\boldsymbol{e}_\theta+(r-a\sin\theta\sin\phi)\cdot\boldsymbol{e}_r$$

また、$d\phi$の大きさが非常に小さいとき、

$$\cos d\phi\simeq 1$$
$$\sin d\phi\simeq\tan d\phi\simeq d\phi$$

である。

Q を $\pi/2$ だけ進ませた点を Q'とすると、
$\overrightarrow{OQ'}$は$\overrightarrow{OQ}$を、
x 成分を y 成分に、
y 成分を-x 成分に、
それぞれ置き換えることで得られる。

(「Q'の参考図」を見よ)

よって、

$\overrightarrow{OQ}=a\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x+a\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y$

より

$\overrightarrow{OQ'}=a\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y-a\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x$

$$\overrightarrow{OQ'} = a\cos\phi\sin\theta\,\boldsymbol{e}_r + a\cos\phi\cos\theta\,\boldsymbol{e}_\theta - a\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x$$

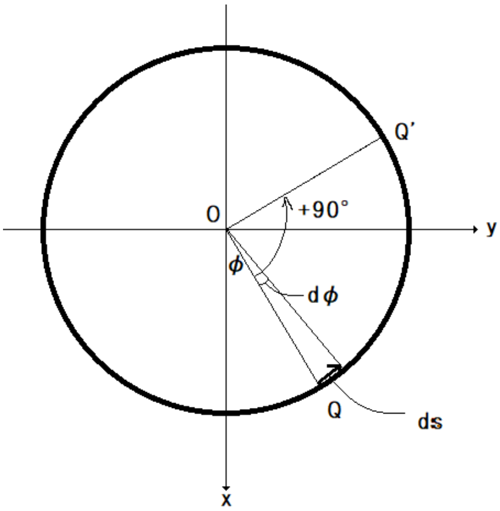
である。
また

Q を $\pi/2$ だけ進ませた点を Q'とすると、

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \left(\frac{\overrightarrow{OQ'}}{a}\right)\cdot a\tan\mathrm{d}\phi \simeq \mathrm{d}\phi\overrightarrow{OQ'}$$

である(「Q'の参考図」で視覚的に確かめられるはず)から、

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = a\mathrm{d}\phi(\cos\phi\sin\theta\,\boldsymbol{e}_r + \cos\phi\cos\theta\,\boldsymbol{e}_\theta - \sin\phi\,\boldsymbol{e}_x)$$



(Q'の参考図)

答え 41

$$\boldsymbol{R} = -a\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x - a\cos\theta\sin\phi\cdot\boldsymbol{e}_\theta + (r - a\sin\theta\sin\phi)\cdot\boldsymbol{e}_r$$

であり、

$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_r$は互いに直交

よって、

$$R = \sqrt{(-a\cos\phi)^2 + (-a\cos\theta\sin\phi)^2 + (r - a\sin\theta\sin\phi)^2}$$
$$= \sqrt{(a\cos\phi)^2 + (a\cos\theta\sin\phi)^2 + r^2 - 2ra\sin\theta\sin\phi + (a\sin\theta\sin\phi)^2}$$
$$= \sqrt{(a\cos\phi)^2 + (a\cos\theta\sin\phi)^2 + (a\sin\theta\sin\phi)^2 + r^2 - 2ra\sin\theta\sin\phi}$$
$$= \sqrt{(a\cos\phi)^2 + (a\sin\phi)^2((\cos\theta)^2 + (\sin\phi)^2) + r^2 - 2ra\sin\theta\sin\phi}$$
$$= \sqrt{(a\cos\phi)^2 + (a\sin\phi)^2 + r^2 - 2ra\sin\theta\sin\phi}$$
$$= \sqrt{a^2((\cos\phi)^2 + (\sin\phi)^2) + r^2 - 2ra\sin\theta\sin\phi}$$

$$= \sqrt{a^2 + r^2 - 2ra\sin\theta\sin\phi}$$

$$\boxed{R = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ra\sin\theta\sin\phi}}$$

である。

ビオ・サバールの法則

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{R}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi\left(\sqrt{a^2 + r^2 - 2ra\sin\theta\sin\phi}\right)^3}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{R}$$

テイラー展開

を用いて近似すると、

$$\left(\sqrt{a^2 + r^2 - 2ra\sin\theta\sin\phi}\right)^{-3} = r^{-3}\left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r}\sin\theta\sin\phi}\right)^{-3}$$

$$\simeq r^{-3}\left(\sqrt{1 + -\frac{2a}{r}\sin\theta\sin\phi}\right)^{-3}$$

$$\simeq r^{-3}\left(1 + \frac{3a}{r}\sin\theta\sin\phi\right)$$

よって、

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{B} \simeq \frac{\mu_0 I\left(1+\frac{3a}{r}\sin\theta\sin\phi\right)}{4\pi r^3}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{R}}$$

ここで、

$$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf-ce \\ cd-af \\ ae-bd \end{pmatrix}}$$

より、

$$\begin{pmatrix} x\text{方向} \\ \theta\text{方向} \\ r\text{方向} \end{pmatrix}$$

とすると、

$\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{R} =$

$$a\mathrm{d}\phi\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\cos\phi \\ -a\cos\theta\sin\phi \\ r-a\sin\theta\sin\phi \end{pmatrix} =$$

$$a\mathrm{d}\phi\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta\,(r-a\sin\theta\sin\phi)-\cos\phi\sin\theta\,(-a\cos\theta\sin\phi) \\ \cos\phi\sin\theta\,(-a\cos\phi)-(-\sin\phi)(r-a\sin\theta\sin\phi) \\ (-\sin\phi)(-a\cos\theta\sin\phi)-\cos\phi\cos\theta\,(-a\cos\phi) \end{pmatrix} =$$

(省略)＝

$$a\mathrm{d}\phi\begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi-a\sin\theta \\ a\cos\theta \end{pmatrix}$$

よって

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} \simeq \frac{\mu_0 Ia\mathrm{d}\phi\left(1+\frac{3a}{r}\sin\theta\sin\phi\right)}{4\pi r^3}\begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi-a\sin\theta \\ a\cos\theta \end{pmatrix}$$

つまり

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{B} \simeq \frac{\mu_0 Ia\mathrm{d}\phi\left(1+\frac{3a}{r}\sin\theta\sin\phi\right)}{4\pi r^3}(r\cos\phi\cos\theta\,\boldsymbol{e}_x+(r\sin\phi-a\sin\theta)\boldsymbol{e}_\theta+a\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r)}$$

よって、

$\boldsymbol{B}$

$$= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{B}$$

$$= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\mu_0 I a \left(1 + \frac{3a}{r}\sin\theta\sin\phi\right)}{4\pi r^3} (r\cos\phi\cos\theta\,\boldsymbol{e}_x + (r\sin\phi - a\sin\theta)\boldsymbol{e}_\theta + a\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r)\mathrm{d}\phi$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} ((r\cos\phi\cos\theta + 3a\sin\theta\sin\phi\cos\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_x +$$

$$\left(r\sin\phi - a\sin\theta + 3a\sin\theta\sin^2\phi - \frac{3a^2}{r}\sin^2\theta\sin\phi\right)\boldsymbol{e}_\theta +$$

$$(a\cos\theta + \frac{3a^2}{r}\sin\theta\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_r)$$

$$\mathrm{d}\phi$$

ここで、

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi+a}^{\pi+a} \cos nx dx = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} \pi & (n = m \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外}), \end{cases}$$

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} \pi & (n = m \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} \cos nx \sin mx dx = 0 \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

aは実数

より

$$= \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3}(0\boldsymbol{e}_x +$$

$$(0 - a\sin\theta \times 2\pi + 3a\sin\theta \times \pi - 0)\boldsymbol{e}_\theta +$$

$$(a\cos\theta \times \pi + 0)\boldsymbol{e}_r$$

$$)$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3}(a\sin\theta \times \pi\boldsymbol{e}_\theta + a\cos\theta \times 2\pi\boldsymbol{e}_r)$$

$$= \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi r^3}(\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta + 2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r)$$

よって、

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi r^3}(\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta + 2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r)}$$

である。

答え 42

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I\pi a^2}{4\pi r^3}(\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta + 2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r)$$

である。ここで、

磁気双極子モーメント
$p_m = I\pi a^2$

を用いて、

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 p_m \sin\theta}{4\pi r^3}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\mu_0 p_m \cos\theta}{2\pi r^3}\boldsymbol{e}_r$$

答え 45

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 p_m \sin\theta}{4\pi r^3}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\mu_0 p_m \cos\theta}{2\pi r^3}\boldsymbol{e}_r$$

より、

磁気モーメント(磁石) p_{m1}がつくる磁場の、r 方向の成分の大きさは

$$B = \frac{\mu_0 p_{m1}\cos\theta}{2\pi r^3}$$

であり、今回 θ =0 なので、

$$B(r) = \frac{\mu_0 p_{m1}}{2\pi r^3}$$

ここで、問題 44 のことより

p_{m2}を s だけ離れた磁荷$\pm q_{m2}$とみなす

ことができる。このとき、

$$p_{m2} = q_{m2}s$$

である。

$+q_{m2}$に加わる力F_+は

$$F_+ = +q_{m2}B\left(r + \frac{s}{2}\right)$$

$+q_{m2}$に加わる力F_+は

$$\boxed{F_- = -q_{m2}B\left(r - \frac{s}{2}\right)}$$

よって、求める力

$$\boxed{F = F_+ + F_-}$$

は

$$\frac{q_{m2}\mu_0 p_{m1}}{2\pi\left(r+\frac{s}{2}\right)^3} - \frac{q_{m2}\mu_0 p_{m1}}{2\pi\left(r-\frac{s}{2}\right)^3} =$$

$$\frac{q_{m2}\mu_0 p_{m1}}{2\pi}\left(\left(r+\frac{s}{2}\right)^{-3} - \left(r-\frac{s}{2}\right)^{-3}\right) =$$

$$\frac{q_{m2}\mu_0 p_{m1}}{2\pi r^3}\left(\left(1+\frac{s}{2r}\right)^{-3} - \left(1-\frac{s}{2r}\right)^{-3}\right) \simeq$$

$$\frac{q_{m2}\mu_0 p_{m1}}{2\pi r^3}\left(\left(1-\frac{3s}{2r}\right) - \left(1+\frac{3s}{2r}\right)\right) =$$

$$\frac{\frac{p_{m2}}{s}\mu_0 p_{m1}}{2\pi r^3}\left(-\frac{3s}{r}\right) =$$

$$-\frac{3p_{m2}\mu_0 p_{m1}}{2\pi r^4}$$

よって

$$\boxed{F = -\frac{3p_{m2}\mu_0 p_{m1}}{2\pi r^4}}$$

答え 46

電荷にかかる力は ローレンツ力 $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ である。

外積の大きさについての公式

$$\boxed{|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin(\boldsymbol{A}\text{と}\boldsymbol{B}\text{がなす角})}$$

より、

ローレンツ力が最も弱くなるのは、
磁場の方向と粒子の降り注ぐ方向が
最も近づくとき

といえる。よって、

ローレンツ力が最も弱くなるのは
南極や北極である。

答え 47
ガウスの法則より

$$q = \iint_S (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

但し、$\boldsymbol{P}$は分極ベクトル。

電束密度$\boldsymbol{D}$を用いれば、分極ベクトルを考えずに、
真電荷を表すガウスの法則を記述できる。

逆に言えば、

$$q - \left(分極電荷\right) = \varepsilon_0 \iint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

に対し

$$q = \iint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

であるため、

$\boldsymbol{D}$を使えば分極電荷を切り離して
真電荷 q だけでガウスの法則を記述できる

答え 48
アンペールの法則より

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = I$$

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I + \oint \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

但し$\boldsymbol{M}$は磁化ベクトル。
ガウスの法則より

$$q = \iint_S (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

但し、$\boldsymbol{P}$は分極ベクトル。

磁力線密度$\boldsymbol{H}$を用いれば、磁化ベクトルを考えずに、
外部から印加する電流を表すアンペールの法則を
記述できる。

$$\oint \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

は磁化電流

といえる(独自解釈)ので、

磁力線密度$\boldsymbol{H}$を用いれば、磁化電流を切り離して
外部から印加する電流だけでアンペールの法則を
記述できる。

答え 49

荷電粒子にかかる力の大きさは
ローレンツ力の大きさ

$F = qvB\sin(v$とBのなす角$)$

(1) v と B のなす角が 0° なので 0[N]
(2) v と B のなす角が 90° なので sin90° =1 より、qvB を計算して 10[N]

答え 50
(ア):比透磁率
(イ):1
(ウ):小さ

答え 51
閉回路を貫く磁束の時間変化

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

によって、誘導起電力

$$\boxed{\varepsilon = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}$$

が生じる

答え 52

ファラデーの法則(積分形)

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

ここで

ストークスの定理

$$\text{線積分} \oint \boldsymbol{Vector} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \text{面積分} \int \mathrm{rot}\, \boldsymbol{Vector} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

より

$$\boxed{\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}$$

また問題 51 より

$$\boxed{\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}}$$

である。
ここで、磁束=磁束密度・面積より

$$\boxed{\Phi = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}$$

である。よって

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\partial \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\partial t}$$

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

つまり

$$\boxed{\int_S \mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}$$

よって

ファラデーの法則(微分形)

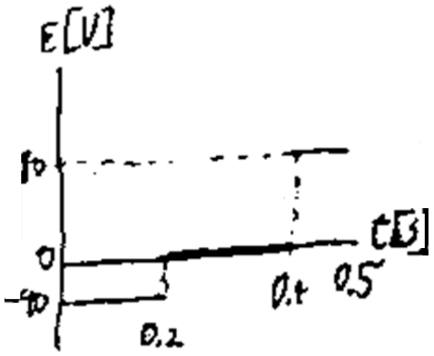
$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

答え 53

$$\boxed{\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}$$

なので、

ϕ-t グラフを微分したものを-2 倍したグラフを書けばよい。



答え 54

$$\max\left(-\frac{\partial}{\partial t}N \cdot B \cdot (ab\cos 2\pi f t)\right) = 2\pi f N B a b$$