

追加ルール:無理に問題を作るのではなく、必要に応じて問題とまとめを使い分ける。但し、どちらも四角で囲む。また、太枠も廃止。

AM 波の電力と効率

について考えよう。

AM 波は

$$f_{AM}(t) = A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{max}} \right) \cos(2\pi f_c t + \theta_c)$$

であり、

平均電力 P_{AM} は波形を 2 乗したものの平均 $\overline{f_{AM}(t)^2}$

であるから、

$$\begin{aligned} P_{AM} &= \overline{\left(A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{max}} \right) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) \right)^2} \\ &= \overline{A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t + \theta_c) \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{max}} \right)^2} \\ &= \overline{A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t + \theta_c) \left(1 + m_{AM}^2 \frac{f(t)^2}{|f(t)|_{max}^2} + 2m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{max}} \right)} \\ &= \overline{A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t + \theta_c)} + \overline{A_c^2 m_{AM}^2 \frac{f(t)^2}{|f(t)|_{max}^2} \cos^2(2\pi f_c t + \theta_c)} \\ &\quad + \overline{2A_c^2 m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{max}} \cos^2(2\pi f_c t + \theta_c)} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} P_{AM} &= \overline{A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t + \theta_c)} + \overline{A_c^2 m_{AM}^2 \frac{f(t)^2}{|f(t)|_{max}^2} \cos^2(2\pi f_c t + \theta_c)} \\ &\quad + \overline{2A_c^2 m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{max}} \cos^2(2\pi f_c t + \theta_c)} \end{aligned}$$

また、

$$\overline{f(t)} = 0$$

のとき、

$$2A_c^2 m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{max}} \cos^2(2\pi f_c t + \theta_c) = 0$$

$$\overline{\cos^2(2\pi f_c t + \theta_c)} = 1/2$$

なので

$$P_{AM} = \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2 m_{AM}^2}{2|f(t)|_{MAX}^2} \overline{f(t)^2}$$

このうち、

信号のスペクトル成分は、側波帯

$$\frac{A_c^2 m_{AM}^2}{2|f(t)|_{MAX}^2} \overline{f(t)^2}$$

だけであるから、

$$\text{効率} \eta_{AM} = \left(\frac{\frac{A_c^2 m_{AM}^2}{2|f(t)|_{MAX}^2} \overline{f(t)^2}}{\frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2 m_{AM}^2}{2|f(t)|_{MAX}^2} \overline{f(t)^2}} \right) = \frac{\frac{m_{AM}^2}{|f(t)|_{MAX}^2} \overline{f(t)^2}}{1 + \frac{m_{AM}^2}{|f(t)|_{MAX}^2} \overline{f(t)^2}}$$

問題 37

リング変調器の変調波スペクトルの効率をいえ。

答え 37

$$f_{AM}(t) = A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{max}} \right) \cos(2\pi f_c t + \theta_c)$$

に対し、

リング変調器の出す変調波は

$$f_{ring}(t) = A_c m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{max}} \cos(2\pi f_c t + \theta_c)$$

である。

$$P_{AM} = \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2 m_{AM}^2}{2|f(t)|_{MAX}^2} \overline{f(t)^2}$$

と比較すると、

$$P_{ring} = \frac{A_c^2 m_{AM}^2}{2|f(t)|_{MAX}^2} \overline{f(t)^2}$$

と分かる。

このうち、信号のスペクトル成分も

$$\frac{A_c^2 m_{AM}^2}{2|f(t)|_{MAX}^2} \overline{f(t)^2}$$

なので、効率は分母と分子が全く同じになってしまい、1 となる。

リング変調波の変調波を、DSB 変調波といい、この方式を両側波帯通信という。

DSB 変調波の占有帯幅を半分にしたものを SSB 変調波といい、この方式を単側波帯通信という。

これは、

SSB 変調波が使えるのは、DSB 変調波の高域部分と低域部分が左右同型で同じ情報を持っているため、どちらか 1 つ残せば情報は失われないから

である。

SSB 変調波は、リング変調器で DSB 変調波を作り、理想的な BPF に通して作ることができる。

しかし、

BPF の遮断特性が理想的＝急峻(きゅうしゅん)であるためには高い技術が必要である

ため、

緩やかな遮断特性にも対応したものの通信方式

が必要である。

それが

残留側波帯通信、VSB 変調波

である。具体的には

BPF の遮断特性のために削られてしまった必要な側波帯を、入り込んでしまった他方の側波帯で補う

というものである。これには

同期検波

を用いる必要がある。

検波とは、変調波から変調信号を復元すること

である。

検波には

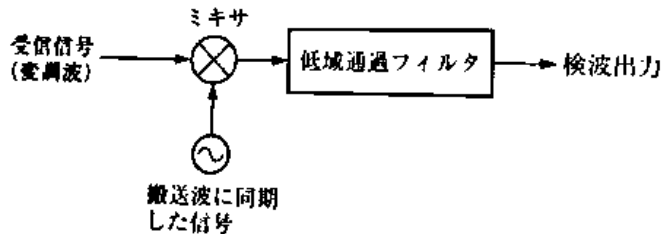
同期検波

と

包絡線検波

がある。

同期検波は



のように行われる。

ミキサにはリング変調器が用いられる。

変調波が

$$f_{AM}(t) = A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \cos(2\pi f_c t + \theta_c)$$

であり、

「搬送波に同期した信号」が

$$\cos(2\pi f_c t + \phi)$$

であるとき、

同期検波のミキサの出力は

$$A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

となる。

ここで、

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

より、

$$A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

$$= A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \frac{1}{2} (\cos(4\pi f_c t + \theta_c + \phi) + \cos(\theta_c - \phi))$$

であり、LPF を使用して $\cos(4\pi f_c t + \theta_c + \phi)$ の成分は取り除けるので、

変調波が

$$f_{AM}(t) = A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \cos(2\pi f_c t + \theta_c)$$

であり、

「搬送波に同期した信号」が

$$\cos(2\pi f_c t + \phi)$$

であるとき、

同期検波の検波出力は

$$A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \frac{1}{2} \cos(\theta_c - \phi)$$

(定数+ $f(t)$ の定数倍)

となる。

問題 38

DSB 変調波を同期検波した式を示せ。

答え 38

変調波が

$$f_{DSB}(t) = A_c \left(m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \cos(2\pi f_c t + \theta_c)$$

であり、

「搬送波に同期した信号」が

$$\cos(2\pi f_c t + \phi)$$

であるとき、

(積をとって積和公式に入れて LPF に通して)

同期検波の検波出力は

$$A_c \left(m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \frac{1}{2} \cos(\theta_c - \phi)$$

($f(t)$ の定数倍)

となる。

VSF 変調波は、同期検波で検波できる。

このことを説明しよう。

VSF 変調波を式で表すことは難しい

ので、

VSF 変調波のスペクトル(フーリエ変換したもの)で考える。

また、

VSF 変調波のフーリエ変換は、

DSB 変調波のフーリエ変換に BPF の伝達特性 $H_{VSF}(f)$ をかけたもの

$$H_{VSF}(f) \int_{-\infty}^{\infty} A_c \left(m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) e^{-j2\pi f t} dt$$

である

といえる。

問題 36 より

$$A_c(1) \cos(2\pi f_c t + \theta_c)$$

$$\leftrightarrow \frac{A_c}{2} (\delta(f - f_c) e^{j\theta_c} + \delta(f + f_c) e^{-j\theta_c})$$

$$A_c \left(m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \cos(2\pi f_c t + \theta_c)$$

$$\leftrightarrow \frac{A_c m_{AM}}{2|f(t)|_{MAX}} (F(f - f_c) e^{j\theta_c} + F(f + f_c) e^{-j\theta_c})$$

であるから、

VSB 変調波のフーリエ変換 $F_{VSB}(f)$ は、

$$F_{VSB}(f) = H_{VSB}(f) \frac{A_c m_{AM}}{2|f(t)|_{MAX}} (F(f - f_c) e^{j\theta_c} + F(f + f_c) e^{-j\theta_c})$$

である

議論を簡単にするために、変調波の位相を 0 とすると、

VSB 変調波のフーリエ変換 $F_{VSB}(f)$ は、

$$F_{VSB}(f) = H_{VSB}(f) \frac{A_c m_{AM}}{2|f(t)|_{MAX}} (F(f - f_c) + F(f + f_c))$$

である

ここで、

同期検波では、変調波に
「搬送波に同期した信号」
をかける(→ミキサの出力)

ので、これを $\cos 2\pi f_c t$

とすると、ミキサの出力は、

VSB 変調波を $f_{VSB}(t)$ を用いて

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f_{VSB}(t) \cos 2\pi f_c t e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{VSB}(t) (e^{-j2\pi(f-f_c)t} + e^{-j2\pi(f+f_c)t}) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{VSB}(t) e^{-j2\pi(f-f_c)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{VSB}(t) e^{-j2\pi(f+f_c)t} dt \\ &= \frac{1}{2} (F_{VSB}(f - f_c) + F_{VSB}(f + f_c)) \end{aligned}$$

これに

$$F_{VSB}(f) = H_{VSB}(f) \frac{A_c m_{AM}}{2|f(t)|_{MAX}} (F(f - f_c) + F(f + f_c))$$

を代入して計算すると、

$$\frac{1}{2} \left(H_{VSB}(f - f_c) \frac{A_c m_{AM}}{2|f(t)|_{MAX}} (F(f - 2f_c) + F(f)) + H_{VSB}(f + f_c) \frac{A_c m_{AM}}{2|f(t)|_{MAX}} (F(f) + F(f + 2f_c)) \right)$$

となる。

よって、

同期検波について、

搬送波に同期した信号を $\cos 2\pi f_c t$

とすして、VSB 変調波を検波しようとする、

ミキサの出力のスペクトルは、

$$\frac{1}{2} \left(H_{VSB}(f - f_c) \frac{A_c m_{AM}}{2|f(t)|_{MAX}} (F(f - 2f_c) + F(f)) + H_{VSB}(f + f_c) \frac{A_c m_{AM}}{2|f(t)|_{MAX}} (F(f) + F(f + 2f_c)) \right)$$

となる

といえる。

但し、この計算には

オイラーの公式

を用いた。

これを、LPF に通すので、

同期検波について、

搬送波に同期した信号を $\cos 2\pi f_c t$

とすして、VSB 変調波を検波すると、

検波出力のスペクトルは、

$$\frac{1}{2} \left(H_{VSB}(f - f_c) \frac{A_c m_{AM}}{2|f(t)|_{MAX}} F(f) + H_{VSB}(f + f_c) \frac{A_c m_{AM}}{2|f(t)|_{MAX}} F(f) \right)$$

となる

BPF に

$$H_{VSB}(f - f_c) + H_{VSB}(f + f_c) = (f \text{ に拠らず一定値})$$

という条件(この一定値を h としよう)を与えると、

同期検波について、
搬送波に同期した信号を $\cos 2\pi f_c t$
とすして、VSB 変調波を検波すると、
検波出力のスペクトルは、

$$\frac{A_c m_{AM} h}{4|f(t)|_{MAX}} F(f)$$
 となる。

といえる。

そのため、

同期検波について、
搬送波に同期した信号を $\cos 2\pi f_c t$
とすして、VSB 変調波を検波すると、
検波出力は、

$$\frac{A_c m_{AM} h}{4|f(t)|_{MAX}} f(t)$$
 となり、元の変調信号の定数倍となる。

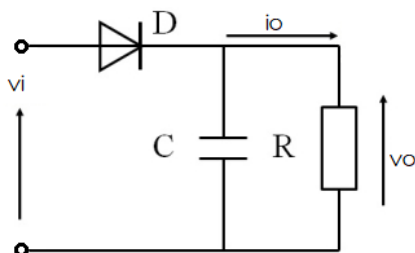
包絡線検波とは、
同期検波のように安定した動作をする
発信機を必要としない検波方式

である。

包絡線検波では、
DSB、VSB、SSB などを
検波することはできない。

まず、

包絡線検波器は



である。

変調波が極大付近の時、 C は充電
される($i_o = 0$)が、
それ以外の時は C は放電する。
この時 i_o は

$$i_o = -\frac{dQ}{dt} = -C \frac{dv_o}{dt}$$

と表される。

また、当然

$$i_o = -\frac{v_o}{R}$$

である。

したがって、

$$\frac{dv_o}{dt} = -\frac{v_o}{CR}$$

といえる。

$$\text{係数比較法により微分方程式を解く}$$

と、

$$\frac{1}{v_o} dv_o = -\frac{1}{CR} dt$$

$$\int \frac{1}{v_o} dv_o = -\frac{1}{CR} \int dt$$

$$\log v_o = -\frac{t}{CR} + (\text{constant}_1) \quad (v_o > 0)$$

$$v_o = e^{-\frac{t}{CR}} e^{\text{constant}_1}$$

$$v_o = (\text{constant}_2) \cdot e^{-\frac{t}{CR}}$$

$$t = 0 \text{ のとき } v_o = v_{LocalMax}$$

なので、

$$v_o = v_{LocalMax} \cdot e^{-\frac{t}{CR}}$$

となる。

したがって、

変調波が極大付近の時、C は充電
される($i_o = 0$)が、
それ以外の時は C は
CRが定める勢いで放電する。

CRが大きすぎると、
包絡線が下がったときに追従できない。

CRが小さすぎると、
電圧を維持できず、無意味になってしまう。

また、

$$\frac{1}{f_c} < CR < \frac{1}{W}$$

である必要があるそうだ。

同期検波における雑音の影響について考えよう。

同期検波で、「搬送波に同期した信号」が
搬送波と位相が揃っているとき、
検波出力は

$$A_c \left(m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \frac{1}{2}$$

となる。

従って、

同期検波で、「搬送波に同期した信号」が
搬送波と位相が揃っているとき、
検波出力の平均電力は

$$\left(A_c \left(m_{AM} \frac{1}{|f(t)|_{MAX}} \right) \frac{1}{2} \right)^2 \overline{f(t)^2}$$

となる。

また、

最も大きな影響を与える雑音は、
受信機の入り口で増幅を行う際の白色雑音

であるため、

正の周波数だけで考えた白色雑音スペクトル密度を N_0 とし、

また、変調波の占有帯域幅が正の周波数だけでは $2W$ となることより、

雑音の平均電力はおよそ

$$2N_0W$$

である

といえる。

ここで、

雑音を、
搬送波の位相と振幅の不規則な変動
とみなす

と、

雑音の波形 $n(t)$ は
$$n(t) = A(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_c + \theta(t))$$

と表される。

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

より、

$$\begin{aligned} n(t) &= A(t) (\cos(2\pi f_c t) \cos(\theta_c + \theta(t)) - \sin(2\pi f_c t) \sin(\theta_c + \theta(t))) \\ &= A(t) \cos(\theta_c + \theta(t)) \cos(2\pi f_c t) + A(t) (-\sin(\theta_c + \theta(t))) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} n(t) &= n_c(t) \cos(2\pi f_c t) + n_s(t) \sin(2\pi f_c t) \\ \text{但し} \\ n_c(t) &= A(t) \cos(\theta_c + \theta(t)) \\ n_s(t) &= A(t) (-\sin(\theta_c + \theta(t))) \end{aligned}$$

といえる。

ここで、

$$\begin{aligned} \overline{n(t)^2} &= \overline{n_c(t)^2 \cos^2(2\pi f_c t) + 2n_c(t) \cos(2\pi f_c t) n_s(t) \sin(2\pi f_c t) + n_s(t)^2 \sin^2(2\pi f_c t)} \\ &= \overline{n_c(t)^2 \cos^2(2\pi f_c t)} + \overline{n_s(t)^2 \sin^2(2\pi f_c t)} \\ &\quad (\because \overline{\cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t)} = 0) \\ &= \frac{\overline{n_c(t)^2}}{2} + \frac{\overline{n_s(t)^2}}{2} \end{aligned}$$

(ヒント:1 周期積分して周期で割れば平均になる)

である。つまり、

$$\overline{n(t)^2} = \frac{\overline{n_c(t)^2}}{2} + \frac{\overline{n_s(t)^2}}{2}$$

である。

ここで、

$$\overline{n_c(t)^2} = \overline{n_s(t)^2}$$

とすると、また雑音の平均電力より、

$$\overline{n(t)^2} = \overline{n_c(t)^2} = \overline{n_s(t)^2} = 2N_0W$$

である。

(補足、講義では取り上げていなかったかも。)

雑音の波形 $n(t)$ は

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_c t) + n_s(t) \sin(2\pi f_c t)$$

但し

$$n_c(t) = A(t) \cos(\theta_c + \theta(t))$$

$$n_s(t) = A(t) (-\sin(\theta_c + \theta(t)))$$

であり、さらに

$$\overline{n(t)^2} = \overline{n_c(t)^2} = \overline{n_s(t)^2} = 2N_0W$$

であった。

ここで、雑音に対する同期検波器のミキサー出力 $z_{mixer}(t)$ を考えよう。

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$$

より

同期検波器の、雑音に対する

ミキサー出力 $z_{mixer}(t)$ は

$$z_{mixer}(t) = n(t) \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

$$= (n_c(t) \cos(2\pi f_c t) + n_s(t) \sin(2\pi f_c t)) \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

$$= n_c(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) \cos(2\pi f_c t) + n_s(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) \sin(2\pi f_c t)$$

$$= n_c(t) \frac{1}{2} (\cos(4\pi f_c t + \phi) + \cos \phi) + n_s(t) \frac{1}{2} (\sin(4\pi f_c t + \phi) - \sin \phi)$$

したがって、

同期検波器の、雑音に対するミキサー出力 $z_{mixer}(t)$ は

$$z_{mixer}(t)$$

$$= n_c(t) \frac{1}{2} (\cos(4\pi f_c t + \phi) + \cos \phi) + n_s(t) \frac{1}{2} (\sin(4\pi f_c t + \phi) - \sin \phi)$$

となる。

同期検波器ではこれを LPF に通して出力するので、

同期検波器の、雑音に対する出力 $z_{out}(t)$ は

$$\frac{1}{2} (n_c(t) \cos \phi - n_s(t) \sin \phi)$$

となる。

平均電力

$$\left(\frac{1}{2} (n_c(t) \cos \phi - n_s(t) \sin \phi) \right)^2$$

を計算すると、

$$= \frac{1}{4} (\overline{n_c(t)^2} \cos^2 \phi + \overline{n_s(t)^2} \sin^2 \phi)$$

$$= \frac{1}{4} (\overline{n(t)^2} \cos^2 \phi + \overline{n(t)^2} \sin^2 \phi)$$

$$= \frac{1}{4} (\overline{n(t)^2} \cos^2 \phi + \overline{n(t)^2} \sin^2 \phi)$$

$$= \frac{1}{4} \overline{n(t)^2}$$

なので、

同期検波器の、雑音に対する出力の平均電力は

$$\frac{N_0 W}{2}$$

といえる。よって、

同期検波器の SN 比は

$$\frac{S}{N} = \frac{\frac{A_c^2 m_{AM}^2}{4} \overline{f(t)^2}}{\frac{N_0 W}{2}} = \frac{A_c^2 m_{AM}^2 \overline{f(t)^2}}{2 |f(t)|_{MAX}^2 N_0 W}$$

問題 39

雑音の電力に対して、
極めて大きな信号の電力である場合、
AM を包絡線検波するのと同様検波するのでは、
同等な性能を示す。

このことを証明せよ。

答え 39

$$f_{AM}(t) = A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \cos(2\pi f_c t)$$

(つまり搬送波の位相 0) とする。

雑音の波形 $n(t)$ は
$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_c t) + n_s(t) \sin(2\pi f_c t)$$

但し
$$n_c(t) = A(t) \cos(\theta_c + \theta(t))$$

$$n_s(t) = A(t) (-\sin(\theta_c + \theta(t)))$$

である。

AM 変調波 $f_{AM}(t)$ と雑音 $n(t)$ をあわせると、

$$\begin{aligned} & f_{AM}(t) + n(t) \\ &= A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \cos(2\pi f_c t) + n_c(t) \cos(2\pi f_c t) + n_s(t) \sin(2\pi f_c t) \\ &= \left(A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) + n_c(t) \right) \cos(2\pi f_c t) + n_s(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

ここで、

三角関数の合成

$$A \sin \theta + B \cos \theta = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \left(\theta + \tan^{-1} \left(-\frac{A}{B} \right) \right)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} & f_{AM}(t) + n(t) \\ &= \left(A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) + n_c(t) \right) \cos(2\pi f_c t) + n_s(t) \sin(2\pi f_c t) \\ &= \sqrt{\left(A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) + n_c(t) \right)^2 + n_s(t)^2} \cos \left(2\pi f_c t + \tan^{-1} - \frac{n_s(t)}{A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) + n_c(t)} \right) \end{aligned}$$

といえる。

$$\cos \left(2\pi f_c t + \tan^{-1} - \frac{n_s(t)}{A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) + n_c(t)} \right)$$

を搬送波とみなせるので、

$f_{AM}(t) + n(t)$ における
包絡線は

$$\sqrt{\left(A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) + n_c(t) \right)^2 + n_s(t)^2}$$

と分かる。

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) + n_c(t) \right)^2 + n_s(t)^2} \\ &= \sqrt{\left(A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \right)^2 + 2A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) n_c(t) + n_c(t)^2 + n_s(t)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\right)^2 \left(1 + \frac{2n_c(t)}{A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)} + \frac{n_c(t)^2 + n_s(t)^2}{\left(A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\right)^2}\right)} \\
&= A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right) \sqrt{1 + \frac{2n_c(t)}{A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)} + \frac{n_c(t)^2 + n_s(t)^2}{A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}}
\end{aligned}$$

雑音の電力に対して、極めて大きな信号の電力

という設定だったので、

$$\frac{n_c(t)^2 + n_s(t)^2}{A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)} \text{を無視できる。}$$

よって、包絡線は

$$A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right) \sqrt{1 + \frac{2n_c(t)}{A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}}$$

とみなせる。

ここで、

テイラー展開

$x = a$ の周りで

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

より、

$$\sqrt{1 + \frac{2n_c(t)}{A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}}$$

を

$$\frac{2n_c(t)}{A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)} = 0$$

のまわりでテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + \frac{2n_c(t)}{A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}} \\ &= \frac{\sqrt{1}}{0!} \left(\frac{2n_c(t)}{A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)} \right)^0 + \frac{1}{2\sqrt{1+0}} \frac{1}{1!} \left(\frac{2n_c(t)}{A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)} - 0 \right)^1 + \dots \\ &\simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{2n_c(t)}{A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)} \end{aligned}$$

といえる。よって、包絡線は

$$\begin{aligned} & A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right) \left(1 + \frac{n_c(t)}{A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}\right) \\ &= A_c + A_c m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} + n_c(t) \end{aligned}$$

とみなせる。よって、

$f_{AM}(t) + n(t)$ における
包絡線は

$$A_c + A_c m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} + n_c(t)$$

である。

雑音の平均電力は

$$\overline{n_c(t)^2} = 2N_0W$$

であり、

信号の平均電力は

$$A_c^2 m_{AM}^2 \frac{\overline{f(t)^2}}{|f(t)|_{MAX}^2}$$

であるから、

包絡線検波器の SN 比は

$$\frac{S}{N} = \frac{A_c^2 m_{AM}^2 \frac{\overline{f(t)^2}}{|f(t)|_{MAX}^2}}{2N_0 W} = \frac{A_c^2 m_{AM}^2 \overline{f(t)^2}}{2|f(t)|_{MAX}^2 N_0 W}$$

であり、また

同期検波器の SN 比は

$$\frac{S}{N} = \frac{\frac{A_c^2 m_{AM}^2}{4} \frac{\overline{f(t)^2}}{|f(t)|_{MAX}^2}}{\frac{N_0 W}{2}} = \frac{A_c^2 m_{AM}^2 \overline{f(t)^2}}{2|f(t)|_{MAX}^2 N_0 W}$$

であった。

よって、雑音の電力に対して、極めて大きな信号の電力である場合、AM を包絡線検波するのと同期検波するのでは、同等な性能を示す。

搬送波は本来

$$A_c \cos(2\pi f_c t + \theta_c)$$

であるが、今回は

搬送波は

$$A_c \cos\left(\int_0^t 2\pi f_c d\tau + \theta_c\right)$$

と表現することにする。

AM 波は

$$f_{AM}(t) = A_c \left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{max}}\right) \cos\left(\int_0^t 2\pi f_c d\tau + \theta_c\right)$$

であり、搬送波の振幅を

$$\left(1 + m_{AM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{max}}\right)$$

倍したものである。

FM 波は

$$f_{FM}(t) = A_c \cos\left(\int_0^t 2\pi f_c \left(1 + k_{FM} \frac{f(\tau)}{|f(\tau)|_{max}}\right) d\tau + \theta_c\right)$$

であり、搬送波の周波数を

$$\left(1 + k_{FM} \frac{f(\tau)}{|f(\tau)|_{max}}\right)$$

倍したものである。

PM 波は

$$f_{PM}(t) = A_c \cos \left(\int_0^t 2\pi f_c d\tau + \theta_c + 2\pi \left(1 + k_{PM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{max}} \right) \right)$$

であり、搬送波の位相を

$$\left(1 + k_{PM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{max}} \right)$$

周期分ずらしたものである。

問題 40

FM 波は

$$f_{FM}(t) = A_c \cos \left(\int_0^t 2\pi f_c \left(1 + k_{FM} \frac{f(\tau)}{|f(\tau)|_{max}} \right) d\tau + \theta_c \right)$$

である。

これを

FM 波は

$$f_{FM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + m_{FM} \cos 2\pi f_m t)$$

である

といたいとき、

$f(t), \theta_c$ をそれぞれいえ。

答え 40

$$\begin{aligned} f_{FM}(t) &= A_c \cos \left(\int_0^t 2\pi f_c \left(1 + k_{FM} \frac{f(\tau)}{|f(\tau)|_{max}} \right) d\tau + \theta_c \right) \\ &= A_c \cos \left(2\pi f_c t + \int_0^t 2\pi f_c k_{FM} \frac{f(\tau)}{|f(\tau)|_{max}} d\tau + \theta_c \right) \end{aligned}$$

よって、

$$\int_0^t 2\pi f_c k_{FM} \frac{f(\tau)}{|f(\tau)|_{max}} d\tau + \theta_c = m_{FM} \cos 2\pi f_m t$$

とみなせばよい。

$$\frac{2\pi f_c k_{FM}}{|f(t)|_{max}} (F(t) - F(0)) + \theta_c = m_{FM} \cos 2\pi f_m t$$

これは

$$F(t) = \frac{m_{FM} \cos 2\pi f_m t - \theta_c}{2\pi f_c k_{FM}} |f(t)|_{max} + F(0)$$

と変形できる。

ここで、

$$F(0) = \frac{m_{FM} - \theta_c}{2\pi f_c k_{FM}} |f(t)|_{max} + F(0)$$

より

$$\theta_c = m_{FM}$$

である。

また $F(t)$ を微分すると、

$$f(t) = \frac{m_{FM} (-\sin 2\pi f_m t) 2\pi f_m}{2\pi f_c k_{FM}} |f(t)|_{max} + F(0)$$

$$f(t) = \frac{m_{FM} (-\sin 2\pi f_m t) f_m}{f_c k_{FM}} |f(t)|_{max} + F(0)$$

であり、さらに

$$-1 \leq \frac{f(t)}{|f(t)|_{max}} \leq 1$$

であるから、

$$-1 \leq \frac{m_{FM} (-\sin 2\pi f_m t) f_m}{f_c k_{FM}} + \frac{F(0)}{|f(t)|_{max}} \leq 1$$

そして、

$$-1 \leq -\sin 2\pi f_m t \leq 1$$

でもあるから、整合性を考慮すると、

$$F(0) = 0$$

$$m_{FM} = \pm \frac{f_c k_{FM}}{f_m}$$

が導かれる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{m_{FM} (-\sin 2\pi f_m t) f_m}{f_c k_{FM}} |f(t)|_{max} + F(0) \\ &= \pm (-\sin 2\pi f_m t) |f(t)|_{max} \end{aligned}$$

なので、

$$f(t) = n \sin 2\pi f_m t \quad (n \in \mathbb{Z})$$

といえる。

よって

$$m_{FM} = \pm \frac{f_c k_{FM}}{f_m}$$

$$\theta_c = m_{FM}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= n \sin 2\pi f_m t \\ (n &\in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$f(t) = n \sin 2\pi f_m t \ (n \in \mathbb{Z})$$

とは、つまり変調信号が正弦波であるということである。

問題 40 の議論より、

変調信号が正弦波のとき、

FM 波は

$$f_{FM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + m_{FM} \cos 2\pi f_m t)$$

であるといえる

また、関数論により

三角関数の角度成分に別の三角関数が
含まれるとき、

「第 1 種ベッセル関数」

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jx \sin \theta} \cdot e^{-jn\theta} d\theta$$

を用いて

三角関数の級数として表すことができる

ということが知られている。

したがって、

変調信号が正弦波のとき、

FM 波は

「第 1 種ベッセル関数」を用いて

三角関数の級数として表すことができる

のである。

たとえば

$$\cos(x \cos \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \cos 2n\theta$$

$$\sin(x \cos \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n-1}(x) (\cos(2n-1)\theta)$$

ということがわかっている。よって、

$$\begin{aligned} f_{FM}(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t + m_{FM} \cos 2\pi f_m t) \\ &= A_c (\cos 2\pi f_c t \cdot \cos(m_{FM} \cos 2\pi f_m t) - \sin 2\pi f_c t \cdot \sin(m_{FM} \cos 2\pi f_m t)) \\ &= A_c (\cos(2\pi f_c t) \cdot \cos(m_{FM} \cos 2\pi f_m t) - \sin 2\pi f_c t \cdot \sin(m_{FM} \cos 2\pi f_m t)) \end{aligned}$$

で、これが

$$f_{FM}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_{FM}) \cos\left(2\pi(f_c + n f_m)t + \frac{n\pi}{2}\right)$$

となるそうだ。これを

$$f_{AM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \theta_c) + \frac{A_c m_{AM}}{2} \cos(2\pi(f_c + f_s)t + \theta_c) + \frac{A_c m_{AM}}{2} \cos(2\pi(f_c - f_s)t + \theta_c)$$

つまり

$$f_{AM}(t) = A_c \sum_{n=-1}^1 \frac{|n|}{2} m_{AM} \cos(2\pi(f_c + n f_s)t + \theta_c)$$

と比較しよう。すると、次のことがわかる。

変調で生じる側波帯信号:(n の範囲から確認できる)
 振幅変調→搬送波より f_s だけ高域と低域に 1 つずつ
 周波数変調→搬送波から高低域に f_m 間隔で無限に発生

変調波に含まれる搬送波の周波数成分:(n=0 を代入して確認できる)
 振幅変調→変調信号にかかわらず A_c で一定。
 周波数変調→変調指数に依存。 $A_c J_0(m_{FM})$

参考: <http://eman-physics.net/math/differential20.html>

第 1 種ベッセル関数を級数で表すと

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m! \Gamma(n+m+1)}$$

となることが知られている。

但し $n+m \geq 0$ のとき、

$$\Gamma(n+m+1) = (n+m)!$$

また、常に

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

である。

したがって、

第 1 種ベッセル関数を級数で表すと

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m! (n+m)!}$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m! (n+m)!}$$

when $(n \geq 0)$

と書くことができる。

$|x| \ll 1$ のとき、2 次以上の項を無視すると、

when $|x| \ll 1$,

$$J_n(x) \simeq \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{2m+n \geq 2 \text{ の直前}} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m! \Gamma(n+m+1)}$$

(when $0 \leq n < 2$)

$$J_n(x) \simeq 0$$

(when $n \geq 2$)

といえる。

これを

$$f_{FM}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_{FM}) \cos\left(2\pi(f_c + nf_m)t + \frac{n\pi}{2}\right)$$

に代入すると、

$$\begin{aligned} &\simeq A_c \sum_{n=-1}^1 J_n(m_{FM}) \cos\left(2\pi(f_c + nf_m)t + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= A_c \left(\left(-\frac{m_{FM}}{2}\right) \cos\left(2\pi(f_c - f_m)t - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \cdot \cos(2\pi f_c t) + \left(\frac{m_{FM}}{2}\right) \cos\left(2\pi(f_c + f_m)t + \frac{\pi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

ここで

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$$

より

$$= A_c \left(\frac{m_{FM}}{2} \cos\left(2\pi(f_c - f_m)t + \frac{\pi}{2}\right) + 1 \cdot \cos(2\pi f_c t) + \frac{m_{FM}}{2} \cos\left(2\pi(f_c + f_m)t + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

なので、

$$f_{FM}(t) = A_c \sum_{n=-1}^1 \frac{|n|}{2} m_{FM} \cos\left(2\pi(f_c + nf_m)t + \frac{|n|}{2} \pi\right)$$

となる。これは

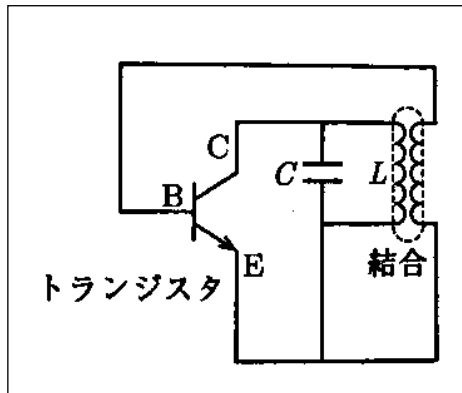
$$f_{AM}(t) = A_c \sum_{n=-1}^1 \frac{|n|}{2} m_{AM} \cos(2\pi(f_c + nf_s)t + \theta_c)$$

とよく似ている。

問題 41

周波数変調を行うための電子回路を作ろう。

まず LC 発振器は、例えば



のように構成できる。

発振器では C と L の「抵抗みたいなもの」であるインピーダンスが最大になるときの周波数が発振される

ので、これを求めよう。

C のインピーダンスは

$$\frac{1}{j\omega C}$$

であり、

L のインピーダンスは

$$j\omega L$$

である

から、

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{j\omega C}\right) + j\omega L} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 CL}$$

より

L と C が並列つなぎになった
合成インピーダンスは

$$\frac{j\omega L}{1 - \omega^2 CL}$$

である。この大きさが最大、つまり無限大になるときの周波数は

$$1 - \omega^2 CL = 1 - (2\pi f_c)^2 CL = 0$$

より、

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

である。よって、

発振器では

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

の周波数が発振される

といえる。

よって、もし

$$L = (\text{ア})$$

のように、可変にできれば、

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C}} \left(1 - \frac{a}{2} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right)$$

となり、

「変調信号に比例した、搬送波の周波数変化」つまり周波数変調を実現
できたことになる。(定数が2で割られているのは、(イ|理由をいえ))

答え 41

(ア):

$$L_0 \left(1 - \frac{a}{2} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right)^{-2}$$

解説:

$$\begin{aligned} f_c &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C}} \left(1 - \frac{a}{2} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 \left(1 - \frac{a}{2} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right)^{-2} C}} \end{aligned}$$

よって

$$L_0 \left(1 - \frac{a}{2} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right)^{-2}$$

(イ):(ア)を近似したときに簡潔になるから

解説:

$$L_0 \left(1 - \frac{a}{2} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right)^{-2}$$

をマクローリン展開で近似すると、

$$L_0 \left(1 + a \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right)$$

となる。これは、aが非常に小さいときのみ成り立つ。

参考: <http://www.kochi-tech.ac.jp/library/ron/2000/ele/1010332.pdf>
http://www.ritsumei.ac.jp/se/re/fujinolab/FujinolabHP_old/semicon/semicon13.pdf
<http://fhiroseyz.yamagata-u.ac.jp/img/mos14.pdf>
http://www.gxk.jp/elec/musen/1ama/H17/html/H1704A07_.html

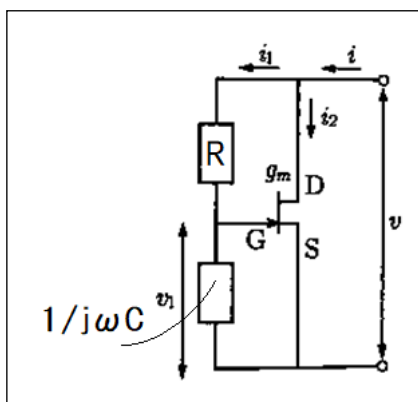
問題 41 の議論より、

$$L = L_0 \left(1 + a \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right)$$

(但し $|a| \ll 1$)

とすることができれば、周波数変調が実現する。

これを実現する回路は



のように表される。(この回路をコイルのようなものとみなすことができる)

この回路全体のインピーダンス v/i の逆数であるアドミタンス Y を計算すると、

$$Y = \left(\frac{v}{i} \right)^{-1} \\ = \frac{i_1 + i_2}{v}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i_1}{v} + \frac{v_1 g_m}{v} \\
&= \frac{i_1}{v} \left(1 + \frac{g_m}{j\omega C} \right) \\
&= \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \left(1 + \frac{g_m}{j\omega C} \right) \\
&= \frac{j\omega C}{j\omega CR + 1} \left(1 + \frac{g_m}{j\omega C} \right)
\end{aligned}$$

$$\omega CR \gg 1$$

とすると、

$$\simeq \frac{1}{R} \left(1 + \frac{g_m}{j\omega C} \right)$$

この逆数を考えると

$$\frac{R}{1 + \frac{g_m}{j\omega C}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega \frac{RC}{g_m}}} = R // j\omega \frac{RC}{g_m}$$

したがって

回路全体のインピーダンスは

$$R // j\omega \frac{RC}{g_m}$$

である

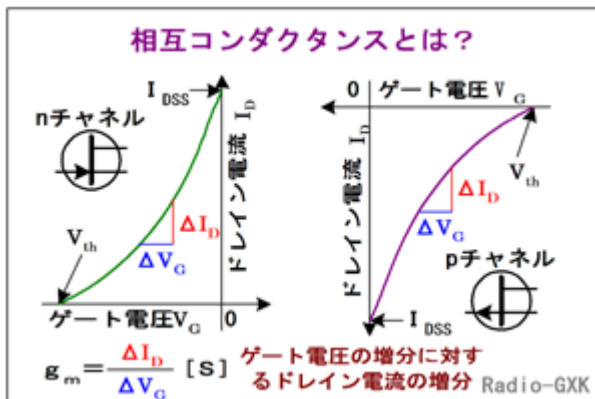
ため、

この回路は抵抗値 R の抵抗器とインピーダンス $\frac{RC}{g_m}$ のコイルを
並列つなぎにしたものであるとみなすことができる。

ここで、相互コンダクタンス gm は

$$g_m = \frac{i_2}{v_1}$$

としたが、



(但し今回の回路では $I_D \rightarrow i_2$ 、 $V_G \rightarrow v_1$ と読み替えよ。n チャンネル。)
 のことより、 i_2 - v_1 特性は(線形で近似するよりは、まだ)放物線で近似でき
 そうだ。ということで、

$$i_2 \simeq \alpha(v_1)^2 + bv_1 + c$$

但し $\alpha > 0, b > 0, c \in \mathbb{R}$

という式で近似できそうである。

したがって、

$$g_m = \frac{di_2}{dv_1} = 2\alpha v_1 + b$$

といえるのだろう。

よって、 v_1 の部分をバイアス電圧 V_G で与えることによって、

回路全体のインピーダンスは

$$R // j\omega \frac{RC}{dV_G + b}$$

である。

但し $d > 0, b > 0$

ここで、

$$R \rightarrow \infty$$

とすると、

回路全体のインピーダンスは

$$j\omega \frac{RC}{dV_G + b}$$

である。

但し $d > 0, b > 0$

といえる。

これを

$$j\omega L_0 \left(1 + a \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right)$$

と見なすので、

$$\frac{RC}{dV_G + b} = 1 + a \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}$$

が成り立つ。これを計算すると、

$$V_G = \frac{1}{d} \left(\frac{RC}{L_0 \left(1 + a \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right)} - b \right)$$

問題 42

受信側が周波数変調波を検波するには、
入力信号の瞬時周波数の変化に比例して
出力信号のレベルが変化する電子回路
「周波数弁別器」
を用いればよい

この回路では例えば



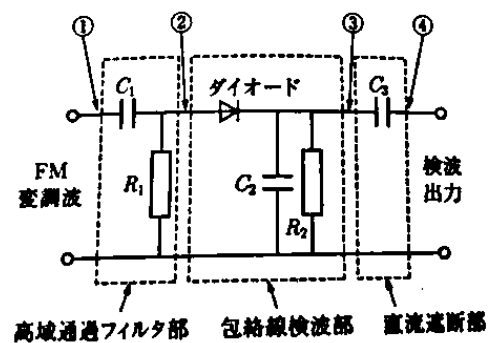
のような FM は、検波されると



のようになるべきである。

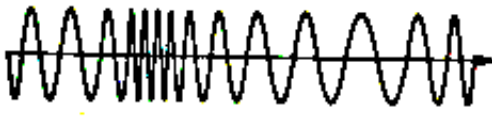
また、

周波数弁別器は HPF や AM 検波を組み合わせる



のように実現できる。

①の波形が

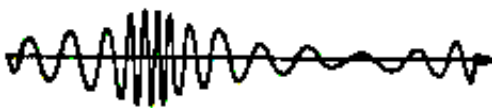


のとき、

②～④の波形を示せ。

答え 42

②

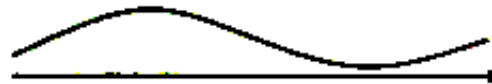


解説:

周波数が高いほどよく通過し、

周波数が小さいほどあまり通過しない

③



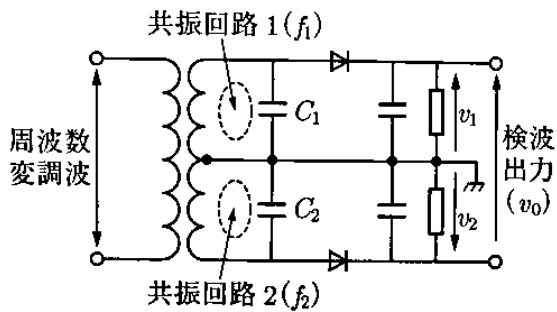
④



解説:

直流成分遮断

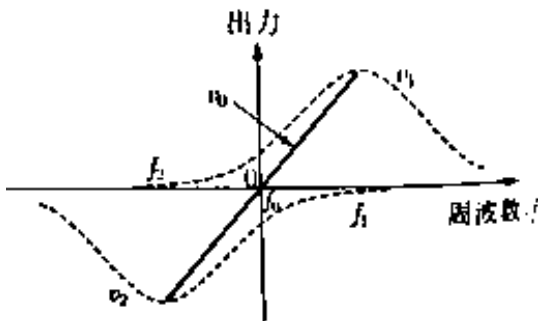
問題 43



とすると、周波数弁別器の改良版となる。具体的に言うと、HPF の特性が線形でないことにより生じる歪を(ほぼ)打ち消すことができる。これを説明せよ。

答え 43

搬送波 f_0 よりちょっとだけ周波数の高い f_1 における共振回路と搬送波 f_0 よりちょっとだけ周波数の低い f_2 における共振回路を用意し、それぞれの作る電圧を引き算することで、あたかも線形の特徴を持つ HPF であるかのようにしている。



周波数変調の雑音について考えよう。

周波数変調波を検波した波の瞬時値は、
瞬時の周波数に比例する。

よって、

周波数変調波を検波した波の瞬時値は、
周波数変調波の角度成分を時間微分したもの
に比例する。

また、

周波数変調波の角度成分を時間微分したものは

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\int_0^t 2\pi f_c \left(1 + k_{FM} \frac{f(\tau)}{|f(\tau)|_{MAX}} \right) d\tau + \theta_c \right) \\ &= 2\pi f_c \left(1 + k_{FM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right) \end{aligned}$$

である。

そのため、定数を無視することになると、

周波数変調波を検波した波の瞬時値は、

$$2\pi f_c k_{FM} \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}$$

とすることができる。

この時、

平均電力は

$$\left(2\pi f_c k_{FM} \frac{\overline{f(t)}}{|f(t)|_{MAX}} \right)^2$$

となる。次に、

検波された後の波が持つ雑音電力を求める。

説明を簡単にするため、

$$f(t) \simeq 0$$

とする。また、 $\theta_c = 0$ とする。

信号と雑音が混じった波形は

$$f_{FM+noise}(t) = A_c \cos 2\pi f_c t + n_c(t) \cos 2\pi f_c t + n_s(t) \sin 2\pi f_c t$$

となる。

これを計算すると、

$$f_{FM+noise}(t) = \sqrt{(A_c + n_c(t))^2 + n_s(t)^2} \cos \left(2\pi f_c t + \tan^{-1} \left(-\frac{n_s(t)}{A_c + n_c(t)} \right) \right)$$

この波形の角度成分を時間微分したものが、検波した波の瞬時値となるので、

$f_{FM+noise}(t)$ を検波した波は

$$\frac{d}{dt} \tan^{-1} \left(-\frac{n_s(t)}{A_c + n_c(t)} \right) \simeq \frac{d}{dt} \tan^{-1} \left(-\frac{n_s(t)}{A_c} \right) \simeq -\frac{1}{A_c} \frac{dn_s(t)}{dt}$$

(雑音が十分小さい場合)

である。

さらに

$$f(t) \simeq 0$$

とおいたことより、これはほとんど雑音である。

よって、

$f_{FM+noise}(t)$ を検波した波の雑音成分は

$$-\frac{1}{A_c} \frac{dn_s(t)}{dt}$$

であるといえる。

また、ここで

$$\frac{dx(t)}{dt}$$

のフーリエ変換を考える。但し $x(t)$ は有限時間のみに存在する非周期信号とし、 $x(t) \leftrightarrow X(f)$ とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} dt$$

ここで、

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= [x(t)e^{-j2\pi ft}]_{-\infty}^{\infty} - (-j2\pi f) \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$x(t)$ は有限時間のみに存在する信号なので、

$x(\pm\infty) = 0$ である。

よって、

$$= j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= j2\pi f X(f)$$

整理すると

$x(t)$ は有限時間のみに存在する非周期信号とする場合

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

ならば

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j2\pi f X(f)$$

このことより、

任意の連続する T 秒間だけ雑音を拾い、
それ以外の時間は 0 を返す雑音 $n_{s<T>}(t)$ を考え、
 $n_{s<T>}(t) \leftrightarrow N_{s<T>}(f)$
とすると、
 $f_{FM+noise}(t)$ を検波した波の雑音成分のフーリエ変換は
$$-\frac{1}{A_c} j 2\pi f N_{s<T>}(f)$$

となる。

$$(\text{電力スペクトル}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2 \left| (\text{波形のスペクトル}) \right|^2}{T}$$

より、

$f_{FM+noise}(t)$ を検波した波の雑音の電力スペクトルは

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2 |2\pi f N_{s<T>}(f)|^2}{A_c^2 T}$$

となる。

一方、

$f_{FM+noise}(t)$ の雑音の電力スペクトル密度は

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2 |N_{s<T>}(f)|^2}{T}$$

であり、これを

白色雑音

とすると、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2|N_{s<T>}(f)|^2}{T} = 2N_0$$

といえる。よって、

$$f_{FM+noise}(t) \text{ を検波した波の雑音の電力スペクトル密度は } \frac{2(2\pi)^2 N_0}{A_c^2} f^2$$

となる。このことより、

高い周波数領域ほど雑音が強調

されることがわかる。

問題 44

FM 波の雑音成分を変調波に乗る白色雑音とする。FM 波を検波したものの雑音平均電力を求めよ。また、AM の性能と比較し、FM のほうが高性能となる条件を求めよ。

FM を検波したときの信号成分の平均電力は

$$\left(2\pi f_c k_{FM} \frac{\overline{f(t)}}{|f(t)|_{MAX}}\right)^2$$

AM の SN 比は

$$\frac{A_c^2 m_{AM}^2 \overline{f(t)^2}}{2|f(t)|_{MAX}^2 N_0 W}$$

答え 44

$$P_n = \int_0^W (\text{雑音の電力スペクトル密度}) df$$

であり、

$$(\text{雑音の電力スペクトル密度}) = \frac{2(2\pi)^2 N_0}{A_c^2} f^2$$

これを計算すると、

$$P_n = \frac{2(2\pi)^2 N_0 W^3}{3A_c^2}$$

ここで、

FM を検波したときの信号成分の平均電力は

$$\left(2\pi f_c k_{FM} \frac{\overline{f(t)}}{|f(t)|_{MAX}}\right)^2$$

であるため、

FM の SN 比は

$$\frac{\left(2\pi f_c k_{FM} \frac{\overline{f(t)}}{|f(t)|_{MAX}}\right)^2}{\frac{2(2\pi)^2 N_0 W^3}{3A_c^2}} = \frac{3A_c^2 k_{FM}^2 f_c^2}{2N_0 W^3} \frac{\overline{f(r)^2}}{|f(t)|_{MAX}^2}$$

といえる。また

AM の SN 比は

$$\frac{A_c^2 m_{AM}^2 \overline{f(t)^2}}{2|f(t)|_{MAX}^2 N_0 W}$$

である。よって、

AM より FM のほうが高性能である場合、

$$\frac{3A_c^2 k_{FM}^2 f_c^2}{2N_0 W^3} \frac{\overline{f(r)^2}}{|f(t)|_{MAX}^2} > \frac{A_c^2 m_{AM}^2 \overline{f(t)^2}}{2|f(t)|_{MAX}^2 N_0 W}$$

$$\frac{3k_{FM}^2 f_c^2}{W^2} > m_{AM}^2$$

$$k_{FM}^2 f_c^2 > \frac{W^2 m_{AM}^2}{3}$$

$$k_{FM} f_c > \frac{W m_{AM}}{\sqrt{3}}$$

整理すると、

AM より FM のほうが高性能である場合、

$$k_{FM} f_c > \frac{W m_{AM}}{\sqrt{3}}$$

といえる。

「どんな」AM よりも FM のほうが高性能である場合を考えるなら、
 m_{AM} に最大値 1 を代入して、

AM より FM のほうが高性能である場合、

$$k_{FM}f_c > \frac{W}{\sqrt{3}}$$

という言い方をすることも出来る。

雑音が大きい場合も含めて、周波数変調の雑音について考えよう。

「周波数変調の雑音について考えよう」を見よ。

$f_{FM+noise}(t)$ を検波した波は

$$\frac{d}{dt} \tan^{-1} \left(-\frac{n_s(t)}{A_c + n_c(t)} \right) \simeq \frac{d}{dt} \tan^{-1} \left(-\frac{n_s(t)}{A_c} \right) \simeq -\frac{1}{A_c} \frac{dn_s(t)}{dt}$$

(雑音が十分小さい場合)

は、雑音が十分小さい場合ことを前提に成り立っている。

今回これは成り立たず、

$f_{FM+noise}(t)$ を検波した波は

$$\frac{d}{dt} \tan^{-1} \left(-\frac{n_s(t)}{A_c + n_c(t)} \right)$$

(雑音が十分小さいといえない場合)

と考えることになる。また、

$$n_c(t) = n_0 \cos 2\pi f_n t$$

$$n_s(t) = n_0 \sin 2\pi f_n t$$

とおく。(理屈不明)

(i) 変調波の電力とくらべて雑音の電力が極めて大きい場合

$f_{FM+noise}(t)$ を検波した波は

$$\frac{d}{dt} \tan^{-1} \left(-\frac{n_s(t)}{A_c + n_c(t)} \right) \simeq \frac{d}{dt} \tan^{-1} \left(-\frac{n_s(t)}{n_c(t)} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \tan^{-1} (-\tan 2\pi f_n t)$$

$$= \frac{d}{dt} \tan^{-1} (\tan(-2\pi f_n t))$$

$$= \frac{d}{dt} (-2\pi f_n t)$$

$$= -2\pi f_n$$

よって

変調波の電力とくらべて雑音の電力が極めて大きい場合
雑音の平均電力は $(2\pi f_n)^2$

(ii) 変調波の電力と雑音の電力がどちらも無視できない場合
(とりあえず教科書では無視していたっぽい)

(iii) 変調波の電力とくらべて雑音の電力が極めて小さい場合(参考)

$f_{FM+noise}(t)$ を検波した波は

$$-\frac{1}{A_c} \frac{dn_s(t)}{dt}$$

$$= -\frac{2\pi f_n n_0}{A_c} \cos 2\pi f_n t$$

よって

変調波の電力とくらべて雑音の電力が極めて小さい場合
雑音の平均電力は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi f_n n_0}{A_c} \right)^2$$

また、(参考までに) 振幅変調の(包絡線検波の場合の) 雑音の平均電力を示すと、

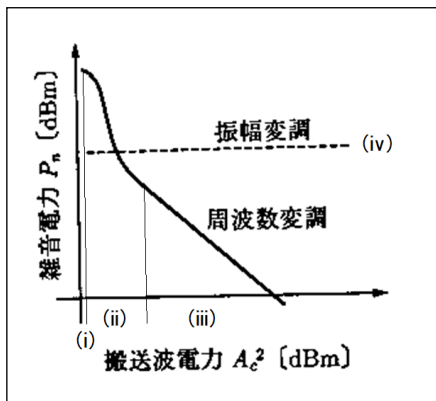
$$P_n = \overline{n_c(t)^2}$$

であるから、計算すると

振幅変調(包絡線検波)の場合
雑音の平均電力は

$$\frac{n_0^2}{2}$$

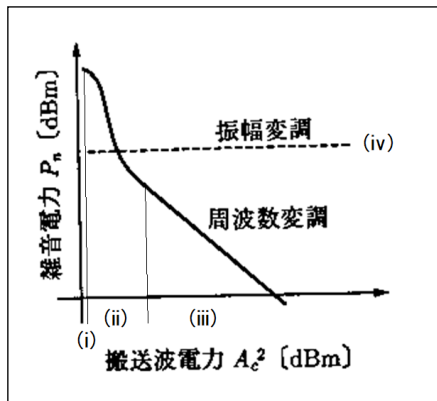
これをまとめると



のようになる。

周波数変調の SN 比と搬送波電力の関係を明らかにしよう。

雑音が多い場合も含めて、周波数変調の雑音成分についてはすでに



...(い)

ということがわかっている。だから今度は、

雑音が多い場合も含めて、周波数変調の信号成分について考えよう。

周波数変調波を検波したときの
信号成分の電力スペクトルは

$$\left(2\pi f_c k_{FM} \frac{\overline{f(t)}}{|f(t)|_{MAX}} \right)^2$$

である...(ア)

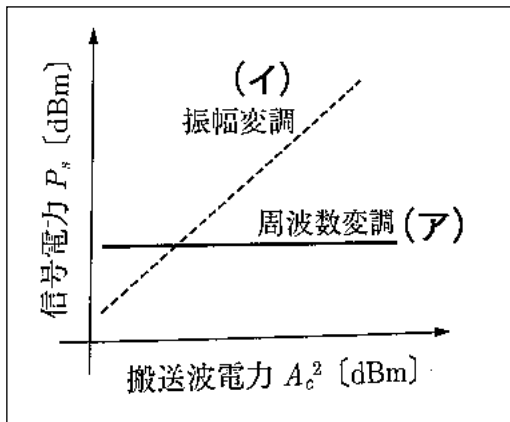
参考までに、

振幅変調波を包絡線検波したときの
信号成分の電力スペクトルは

$$\frac{A_c^2 m_{AM}^2 \overline{f(t)^2}}{|f(t)|_{MAX}^2}$$

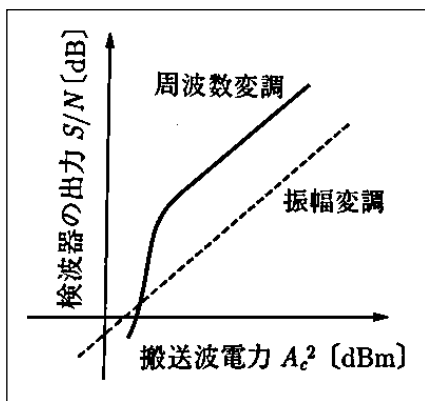
である...(イ)

(ア)(イ)より信号電力と搬送波電力の関係を図示すると



...(ろ)

(ろ)÷(い)より(実際には対数グラフになっているから(ろ)-(い)だけど)



$$f_{FM+noise}(t) \text{ を検波した波の雑音の電力スペクトル密度は}$$

$$\frac{2(2\pi)^2 N_0}{A_c^2} f^2$$

である。(但し雑音は白色雑音とする)

このことと、

一般に高い周波数ほど、変調信号のレベルが低下してしまう

ということより、

高い周波数ほど雑音の影響を強く受けてしまう

ことがわかる。

このことを解決するため、

変調前の段階で高い周波数成分を強調する「プレンファシス」

と

変調後の段階で高い周波数成分を抑制する「デエンファシス」

が行われる。

それぞれは、フィルタを通すことで行われる。

フィルタの伝達関数をそれぞれ $H_{pre}(f)$ 、 $H_{de}(f)$ とすると、

$$H_{pre}(f) \cdot H_{de}(f) = 1$$

である必要がある(両方通した後何もなかったことにならなきゃいけないんだから当然)。

これらの条件(強調、抑制、伝達関数積が 1)をすべて満たすものとして

$$H_{pre}(f) = 1 + j \frac{f}{f_0}$$

や

$$H_{de}(f) = \left(1 + j \frac{f}{f_0}\right)^{-1}$$

が用いられる。

となる。

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega \frac{RC}{dV_G + b}}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{dV_G + b}{j\omega RC}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{R} \left(1 + \frac{dV_G + b}{j\omega C} \right)} \\
&= \frac{R}{1 + \frac{dV_G + b}{j\omega C}} \\
&= \frac{R \left(1 + \frac{dV_G + b}{j\omega C} \right)}{\left(1 + \frac{dV_G + b}{j\omega C} \right) \left(1 - \frac{dV_G + b}{j\omega C} \right)} \\
&= \frac{R \left(1 + \frac{dV_G + b}{j\omega C} \right)}{1 - \left(\frac{dV_G + b}{j\omega C} \right)^2} \\
&= \frac{R \left(1 + \frac{dV_G + b}{j\omega C} \right)}{1 + \frac{(dV_G)^2 + 2dV_G b + b^2}{\omega^2 C^2}}
\end{aligned}$$

これと

$$L_0 \left(1 + a \frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}} \right)$$

が同一視できない

ここに数式を入力します。

つまり

FET には

(キャリアのドリフト速度)=(移動度)×(電界)

という関係があり、この移動度はバイアス電圧 V_{gs} に依存し、

g_m は次式のように、移動度に依存する。

$$g_m = (\text{移動度}) \frac{(\text{チャンネル幅})}{(\text{チャンネル長})} \frac{(\text{酸化膜の誘電率})}{(\text{酸化膜の厚さ})} (\text{ドレイン電圧})$$

よって今回の回路では

$$g_m = (\text{移動度}) (\text{定数 } 1) v$$

といえる。

また、移動度には、次のような関係もある。

(ドリフト電流)

$$= (\text{移動度}) \frac{(\text{チャンネル幅})}{(\text{チャンネル長})} (\text{単位面積当たりの容量}) \left((\text{ゲート電圧}) - (\text{閾値電圧}) (\text{ドレイン電圧}) - \frac{1}{2} (\text{ドレイン電圧})^2 \right)$$

この関係式を今回の回路に当てはめると

$$i_2 = (\text{移動度}) (\text{定数 } 2) \left((v_1 - V_T) v - \frac{1}{2} v^2 \right)$$

整理すると、

$$(\text{移動度}) = \frac{i_2}{(\text{定数 } 2) \left(v_1 - (\text{定数 } 4) v - \frac{1}{2} v^2 \right)}$$

よって、

$$\begin{aligned}
 g_m &= (\text{定数 } 3) \frac{i_2}{\left(v_1 - (\text{定数 } 4)\right) - \frac{1}{2}v} \\
 &= \frac{i_2}{\frac{\left(v_1 - (\text{定数 } 4)\right) - \frac{1}{2}v}{(\text{定数 } 3)}}
 \end{aligned}$$

といえ、

$$\frac{\left(v_1 - (\text{定数 } 4)\right) - \frac{1}{2}v}{(\text{定数 } 3)} = v_1$$

となる。

これを整理すると、

$$\left(v_1 - (\text{定数 } 4)\right) - \frac{1}{2}v = v_1 (\text{定数 } 3)$$

$$\frac{1}{2}v = \left(v_1 - (\text{定数 } 4)\right) - v_1 (\text{定数 } 3)$$

よって、

$$\frac{\left(v_1 - (\text{定数 } 4)\right) - \frac{1}{2}v}{(\text{定数 } 3)}$$

=

$$\frac{\left(v_1 - (\text{定数 } 4)\right) - \left(\left(v_1 - (\text{定数 } 4)\right) - v_1 (\text{定数 } 3)\right)}{(\text{定数 } 3)}$$

$$A_c \left(\cos 2\pi f_c t \cdot \left(J_0(m_{FM}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(m_{FM}) \cos 4n\pi f_m t \right) - \sin 2\pi f_c t \right. \\ \left. \cdot \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n-1}(m_{FM}) (\cos((2n-1)2\pi f_m t)) \right) \right)$$

=

$$A_c \left(\cos 2\pi f_c t \cdot \left(J_0(m_{FM}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(m_{FM}) \cos 4n\pi f_m t \right) - \sin 2\pi f_c t \right. \\ \left. \cdot \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n-1}(m_{FM}) (\cos((2n-1)2\pi f_m t)) \right) \right)$$

=

$$A_c \left(\left(J_0(m_{FM}) \cos 2\pi f_c t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(m_{FM}) \cos 4n\pi f_m t \cos 2\pi f_c t \right) \right. \\ \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n-1}(m_{FM}) (\cos((2n-1)2\pi f_m t)) \sin 2\pi f_c t \right)$$

ここで

$$\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} = \cos \alpha \cos \beta$$

と

$$$$

を使って変形を続けると、

=

$$A_c \left(\left(J_0(m_{FM}) \cos 2\pi f_c t + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(m_{FM}) (\cos 2\pi(2nf_m + f_c)t + \cos 2\pi(2nf_m - f_c)t) \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n-1}(m_{FM}) (\sin(2\pi t(f_c + (2n-1)f_m) + \sin(2\pi t(f_c - (2n-1)f_m))) \right) \right)$$

Σ をまとめて

=

$$A_c \left(\left(J_0(m_{FM}) \cos 2\pi f_c t \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(J_{2n}(m_{FM}) (\cos 2\pi(2nf_m + f_c)t + \cos 2\pi(2nf_m - f_c)t) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + J_{2n-1}(m_{FM}) (\sin(2\pi t(f_c + (2n-1)f_m) + \sin(2\pi t(f_c - (2n-1)f_m))) \right) \right) \right)$$

三角関数内の項の順番を整え(コサインは角度の正負入れ替わっても同じ)て

=

$$A_c \left(\left(J_0(m_{FM}) \cos 2\pi f_c t \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(J_{2n}(m_{FM}) (\cos 2\pi(f_c + 2nf_m)t + \cos 2\pi(f_c - 2nf_m)t) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + J_{2n-1}(m_{FM}) (\sin(2\pi t(f_c + (2n-1)f_m) + \sin(2\pi t(f_c - (2n-1)f_m))) \right) \right) \right)$$

サインをコサインに変形して

=

$$\begin{aligned}
& A_c \left(\left(J_0(m_{FM}) \cos 2\pi f_c t \right. \right. \\
& \quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(J_{2n}(m_{FM}) (\cos 2\pi(f_c + 2nf_m)t + \cos 2\pi(f_c - 2nf_m)t) \right. \\
& \quad \left. \left. + J_{2n-1}(m_{FM}) \left(\cos \left(2\pi t(f_c + (2n-1)f_m) + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(2\pi t(f_c - (2n-1)f_m) + \frac{\pi}{2} \right) \right) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

初期位相 π を必要に応じて与えて

=

$$\begin{aligned}
& A_c \left(\left(J_0(m_{FM}) \cos 2\pi f_c t \right. \right. \\
& \quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-J_{2n}(m_{FM}) (\cos(2\pi(f_c + 2nf_m)t + \pi) + \cos(2\pi(f_c - 2nf_m)t + \pi)) \right. \\
& \quad \left. \left. + J_{2n-1}(m_{FM}) \left(\cos \left(2\pi t(f_c + (2n-1)f_m) + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(2\pi t(f_c - (2n-1)f_m) + \frac{\pi}{2} \right) \right) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

=

$$\begin{aligned}
& A_c \left(\left(J_0(m_{FM}) \cos 2\pi f_c t \right. \right. \\
& \quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-J_{2n}(m_{FM}) (\cos(2\pi(f_c + 2nf_m)t + \pi) + \cos(2\pi(f_c - 2nf_m)t + \pi)) \right. \\
& \quad \left. \left. + J_{2n-1}(m_{FM}) \left(\cos \left(2\pi t(f_c + (2n-1)f_m) + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(2\pi t(f_c - (2n-1)f_m) + \frac{\pi}{2} \right) \right) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_c \left(\left(J_0(m_{FM}) \cos 2\pi f_c t \right. \right. \\
& \quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(m_{FM}) (\cos 2\pi(2nf_m + f_c)t + \cos 2\pi(2nf_m - f_c)t) \\
& \quad + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n-1}(m_{FM}) (\sin(2\pi t(f_c + (2n-1)f_m) + \sin(2\pi t(f_c - (2n-1)f_m))) \right) \\
& \quad \left. \right) \right)
\end{aligned}$$

