端効果を考慮したコンデンサの特性

1.動機

　コンデンサを使用して比誘電率測定器を作ることができれば、それをタイル状に並べることで、「人間の手の写真」のようなものを映すことができる。このことによって、痴漢冤罪の証明ができるかもしれない。またさらに、手を充電し、手のひらと手の甲の間の電圧を測定することで空気や特定の何か以外に触れていないことを証明するのにも、やはりコンデンサについての議論が欠かせない。

　しかし、極板の間に手を挟めるほど極板間隔を大きくとり、それと同時に可用性が確保できる程度までコンデンサを小さくすることを考える場合、端効果を無視できず、電場がコンデンサ内で一定にならない。そのため端効果を無視した等式では比誘電率、充電に必要な電力(量)などを議論できない。そこで、端効果を考慮しながらコンデンサの間に成り立つ等式を、電磁気学の知見から導出してみることにした。

2.静電容量の導出

まず、正極板を$\begin{pmatrix} \pm\frac{l_x}{2} \\ \frac{d}{2} \\ \pm\frac{l_z}{2} \end{pmatrix}$で指定される長方形、

まず、負極板を$\begin{pmatrix} \pm\frac{l_x}{2} \\ -\frac{d}{2} \\ \pm\frac{l_z}{2} \end{pmatrix}$で指定される長方形、

とする。またこの資料では座標はすべて自分を終点、原点を始点とする位置ベクトルで表現する。即ち点(a,b,c)は$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$と表現する。

2.1 端効果を無視できる場合

　まず、端効果を無視できる場合で、さらに外部に生じる電場を考えない場合について
静電容量に関する既知の公式

$$C = \frac{\varepsilon l_x l_z}{d}$$

を得ることを試みよう。

2.2 節で端効果を考慮する場合も、今回と同じやり方で議論すればよい。

　正極板が$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$に作る電場$\boldsymbol{E}_+\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$は

$$\boldsymbol{E}_+\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (|x| \le l_x, |z| \le l_z, y \le d/2)$$

である。

負極板が$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$に作る電場$\boldsymbol{E}_-\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$は

$$\boldsymbol{E}_-\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (|x| \le l_x, |z| \le l_z, y \ge -d/2)$$

である。

よって全体の電場$\boldsymbol{E}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$は

$$\boldsymbol{E}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}_+\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \boldsymbol{E}_-\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} (|x| \le l_x, |z| \le l_z, |y| \le d/2) \ldots (1)$$

である。

$|x| \le l_x, |z| \le l_z, |y| \le d/2$に該当する領域の表面$S$の面積ベクトルを$\boldsymbol{S}$とすると、ガウスの法則より次式を得る。

$$\varepsilon \oint_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{E}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

式(1)より$\boldsymbol{E}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$は($S$の領域では)定数ベクトルであることが明らかなので

$$\varepsilon \cdot \left(\boldsymbol{E}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \oint_{\boldsymbol{S}} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \right) = Q$$

計算すると

$$\varepsilon \cdot \left(0 \int_{\boldsymbol{S}_x} \mathrm{d}\boldsymbol{S} - 2 \int_{\boldsymbol{S}_y} \mathrm{d}\boldsymbol{S} + 0 \int_{\boldsymbol{S}_z} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \right) = Q$$

$$\varepsilon \cdot (-2) l_x l_z = Q$$

$$\varepsilon \boldsymbol{E}_y \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} l_x l_z \qquad = Q \ldots (2)$$

ここで、各電場ベクトルの始点と終点の電位差V'はその距離を$l_E{}'$とすると

$$-V' = \left| \boldsymbol{E}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| l_E{}'$$

と表せる。
コンデンサの極板間の電位差Vは

$$V=\sum_{l_x l_z}V'=-\left(\sum_{l_x l_z}\left|\boldsymbol{E}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|l_E{}'\right)\ldots(3)$$

電場はdの方向に一様なので
$l_E{}'=d$とできるから、コンデンサの極板間の電位差Vは

$$V=-\left|\boldsymbol{E}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|d$$

式(1)より$\left|\boldsymbol{E}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|=-\boldsymbol{E}_y\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$なので

$$-V=\boldsymbol{E}_y\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}d\ldots(4)$$

式(2)と式(4)を連立すると

$$V=\frac{Q}{\varepsilon l_x l_z}d$$

よって静電容量Cは

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{\varepsilon l_x l_z}{d}$$

のように得られる。

2.2 端効果を無視できない場合

2.1 節同様、

$$\varepsilon\oint_{\boldsymbol{S}}\left(\boldsymbol{E}_+\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\boldsymbol{E}_-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=Q$$

を考えればよい。
式(3)より

$$Q=C\cdot\left(-\sum_{l_x l_z}\left(\left|\boldsymbol{E}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|l_E'\right)\right)$$

といえるから

$$C=-\left(\varepsilon\oint_{\boldsymbol{S}}\left(\boldsymbol{E}_+\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\boldsymbol{E}_-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\div\sum_{l_x l_z}\left(\left|\boldsymbol{E}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|l_E'\right)\right)$$

である。

正電荷または負電荷上の点$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$が$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$に作る電場$\boldsymbol{E}_{\pm,\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

は次のように表される。

$$\boldsymbol{E}_{\pm,\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{\pm\begin{pmatrix}x-\alpha\\ y-\beta\\ z-\gamma\end{pmatrix}}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}\left(\text{複号同順}\right)$$

ここで、$\boldsymbol{E}_{\pm,\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$を$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$の範囲で積分すれば$\boldsymbol{E}_{\pm}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$を得られるから、

極板のx,z座標の全体集合を$S_p=\left\{\begin{pmatrix}x\\ z\end{pmatrix}\middle| |x|\le\frac{l_x}{2},|z|\le\frac{l_z}{2}\right\}$

とし、その面積ベクトルを$\boldsymbol{S_p}$として、次式を得る。

$$\boldsymbol{E}_{\pm}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\int_{\boldsymbol{S_p}}\boldsymbol{E}_{\pm,\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S_p}$$

[1]を参考に計算すると、

$$\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{S_p}}\boldsymbol{E}_{\pm,\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S_p}\\
&=\int_{-l_z}^{l_z}\int_{-l_x}^{l_x}\left(\boldsymbol{E}_{\pm,\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right)_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\
&=\int_{-l_z}^{l_z}\int_{-l_x}^{l_x}\frac{y-\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\
&=(y-\beta)\int_{-l_z}^{l_z}\left[\ln\left(x-a+\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}\right)\right]_{-l_x}^{l_x}\mathrm{d}z\\
&=(y-\beta)\int_{-l_z}^{l_z}\ln\frac{l_x-a+\sqrt{(l_x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}{-(l_x+a)+\sqrt{(l_x+\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

ここで、Wolfram Alpha によって

$$\int \log\left(\frac{a+\sqrt{b^2+(z-\gamma)^2}}{\alpha+\sqrt{\beta^2+(z-\gamma)^2}}\right)dz =$$
$$\sqrt{b^2-a^2}\,\tan^{-1}\left(\frac{z-\gamma}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)-\sqrt{b^2-a^2}\,\tan^{-1}\left(\frac{a\,(z-\gamma)}{\sqrt{b^2-a^2}\,\sqrt{b^2+(z-\gamma)^2}}\right)+$$
$$(z-\gamma)\log\left(\frac{a+\sqrt{b^2+(z-\gamma)^2}}{\alpha+\sqrt{\beta^2+(z-\gamma)^2}}\right)+a\log\left(\sqrt{b^2+(z-\gamma)^2}-\gamma+z\right)-$$
$$\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\,\tan^{-1}\left(\frac{z-\gamma}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\right)+\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\,\tan^{-1}\left(\frac{\alpha\,(z-\gamma)}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\,\sqrt{\beta^2+(z-\gamma)^2}}\right)-$$
$$\alpha\log\left(-\gamma+\sqrt{\beta^2+(z-\gamma)^2}+z\right)+\text{constant}$$

(assuming a complex-valued logarithm)

Open code

$\log(x)$ is the natural logarithm

$\tan^{-1}(x)$ is the inverse tangent function

$$\int_{-l_z}^{l_z}\ln\frac{l_x-a+\sqrt{(l_x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}{-(l_x+a)+\sqrt{(l_x+\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}\mathrm{d}z$$

を実行した結果、図 1 のようになったことから、

$$\int_{-l_z}^{l_z}\ln\frac{l_x-a+\sqrt{(l_x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}{-(l_x+a)+\sqrt{(l_x+\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}\mathrm{d}z$$

= ？？？

を得る。

$$\int \log\left(\frac{a+\sqrt{b^2+(z-\gamma)^2}}{\alpha+\sqrt{\beta^2+(z-\gamma)^2}}\right)dz =$$
$$\sqrt{b^2-a^2}\,\tan^{-1}\left(\frac{z-\gamma}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)-\sqrt{b^2-a^2}\,\tan^{-1}\left(\frac{a\,(z-\gamma)}{\sqrt{b^2-a^2}\,\sqrt{b^2+(z-\gamma)^2}}\right)+$$
$$(z-\gamma)\log\left(\frac{a+\sqrt{b^2+(z-\gamma)^2}}{\alpha+\sqrt{\beta^2+(z-\gamma)^2}}\right)+a\log\left(\sqrt{b^2+(z-\gamma)^2}-\gamma+z\right)-$$
$$\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\,\tan^{-1}\left(\frac{z-\gamma}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\right)+\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\,\tan^{-1}\left(\frac{\alpha\,(z-\gamma)}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\,\sqrt{\beta^2+(z-\gamma)^2}}\right)-$$
$$\alpha\log\left(-\gamma+\sqrt{\beta^2+(z-\gamma)^2}+z\right)+\text{constant}$$

(assuming a complex-valued logarithm)

Open code

$\log(x)$ is the natural logarithm

$\tan^{-1}(x)$ is the inverse tangent function

図 1 $\int \log\left(\frac{a+\sqrt{b^2+(z-\gamma)^2}}{\alpha+\sqrt{\beta^2+(z-\gamma)^2}}\right)dz$ の計算結果(底はネイピア数)

これを式(5)に代入すると、

$$\boldsymbol{E}_{\pm}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm \int_{\boldsymbol{S_p}} \frac{\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \\ z-\gamma \end{pmatrix}}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S_p}$$

[1] http://www.eng.hokudai.ac.jp/labo/soilmech/lectures/AM2/PPT14.pdf