$f_{AM}(t)+n(t)$における
包絡線は

$$A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\sqrt{1+\frac{2n_c(t)}{A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}+\frac{n_c(t)^2+n_s(t)^2}{A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}}$$

である。※1

雑音の電力に対して、極めて大きな信号の電力

という設定だったので、

$$\frac{n_c(t)^2+n_s(t)^2}{A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}$$を無視できる。

よって、包絡線は

$$A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\sqrt{1+\frac{2n_c(t)}{A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}}$$

と見なせる。
ここで、

$$\sqrt{1+\frac{2n_c(t)}{A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}}$$

を

$\sqrt{1+X}$

とおく。

テイラー展開
$x=a$の周りで
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

より、

$\sqrt{1+X}$を$X=0$のまわりでテイラー展開
（これを特に「マクローリン展開」という）
すると、$1+\frac{1}{2}X$とみなすことができる

ので、※2
X を戻して、包絡線は

$$A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\left(1+\frac{n_c(t)}{A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}\right)$$

つまり

$$A_c+A_c m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}+n_c(t)$$

と表される。

※

$$\sqrt{\left(A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)+n_c(t)\right)^2+n_s(t)^2}$$

$$=\sqrt{\left(A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\right)^2+2A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)n_c(t)+n_c(t)^2+n_s(t)^2}$$

$$=\sqrt{\left(A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\right)^2\left(1+\frac{2n_c(t)}{A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}+\frac{n_c(t)^2+n_s(t)^2}{\left(A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\right)^2}\right)}$$

$$=A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\sqrt{1+\frac{2n_c(t)}{A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}+\frac{n_c(t)^2+n_s(t)^2}{A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}}$$

※2

$f(X)=\sqrt{1+X}$

を

$X=0$

のまわりでテイラー展開すると、

$\sqrt{1+X}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}X^n$$

$$=\frac{\sqrt{1}}{0!}X^0+\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+0}}}{1!}X^1+\cdots$$

$$\simeq 1+\frac{1}{2}X$$

といえる。

以下余談

問題 39

雑音の電力に対して、
極めて大きな信号の電力である場合、
AM を包絡線検波するのと同期検波するのでは、
同等な性能を示す。

このことを証明せよ。

答え 39

$$f_{AM}(t) = A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\cos(2\pi f_c t)$$

(つまり搬送波の位相 0)とする。

雑音の波形$n(t)$は

$$n(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_c t) + n_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

但し

$$n_c(t) = A(t)\cos\big(\theta_c + \theta(t)\big)$$

$$n_s(t) = A(t)\Big(-\sin\big(\theta_c + \theta(t)\big)\Big)$$

である。

AM 変調波$f_{AM}(t)$と雑音$n(t)$をあわせると、

$$f_{AM}(t) + n(t)$$

$$= A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\cos(2\pi f_c t) + n_c(t)\cos(2\pi f_c t) + n_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

$$= \left(A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right) + n_c(t)\right)\cos(2\pi f_c t) + n_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

ここで、

三角関数の合成

$$A\sin\theta + B\cos\theta = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(\theta + \tan^{-1}\left(-\frac{A}{B}\right)\right)$$

を用いると、

$$f_{AM}(t) + n(t)$$

$$= \left(A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right) + n_c(t)\right)\cos(2\pi f_c t) + n_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

$$= \sqrt{\left(A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right) + n_c(t)\right)^2 + n_s(t)^2}\cos\left(2\pi f_c t + \tan^{-1} - \frac{n_s(t)}{A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right) + n_c(t)}\right)$$

といえる。

$$\cos\left(2\pi f_c t + \tan^{-1} - \frac{n_s(t)}{A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right) + n_c(t)}\right)$$

を搬送波とみなせるので、

$f_{AM}(t) + n(t)$における
包絡線は

$$\sqrt{\left(A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right) + n_c(t)\right)^2 + n_s(t)^2}$$

と分かる。

$$\sqrt{\left(A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right) + n_c(t)\right)^2 + n_s(t)^2}$$

$$= \sqrt{\left(A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\right)^2 + 2A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)n_c(t) + n_c(t)^2 + n_s(t)^2}$$

$$= \sqrt{\left(A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\right)^2 \left(1 + \frac{2n_c(t)}{A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)} + \frac{n_c(t)^2 + n_s(t)^2}{\left(A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\right)^2}\right)}$$

$$= A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\sqrt{1 + \frac{2n_c(t)}{A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)} + \frac{n_c(t)^2 + n_s(t)^2}{A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}}$$

雑音の電力に対して、極めて大きな信号の電力

という設定だったので、

$\dfrac{n_c(t)^2 + n_s(t)^2}{A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}$を無視できる。

よって、包絡線は

$$A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\sqrt{1 + \frac{2n_c(t)}{A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}}$$

とみなせる。

ここで、

テイラー展開 $x = a$の周りで $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

より、

$$\sqrt{1 + \frac{2n_c(t)}{A_c\left(1 + m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}}$$

を

$$\frac{2n_c(t)}{A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}=0$$

のまわりでテイラー展開すると、

$$\sqrt{1+\frac{2n_c(t)}{A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}}$$

$$=\frac{\sqrt{1}}{0!}\left(\frac{2n_c(t)}{A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}\right)^0+\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+0}}}{1!}\left(\frac{2n_c(t)}{A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}-0\right)^1+\cdots$$

$$\simeq 1+\frac{1}{2}\frac{2n_c(t)}{A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}$$

といえる。よって、包絡線は

$$A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)\left(1+\frac{n_c(t)}{A_c\left(1+m_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}\right)}\right)$$

$$=A_c+A_cm_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}+n_c(t)$$

とみなせる。よって、

$f_{AM}(t)+n(t)$における
包絡線は

$$A_c+A_cm_{AM}\frac{f(t)}{|f(t)|_{MAX}}+n_c(t)$$

である。
雑音の平均電力は
$\overline{n_c(t)^2}=2N_0W$
であり、
信号の平均電力は

$$A_c^2 m_{AM}^2 \frac{\overline{f(t)^2}}{|f(t)|^2{}_{MAX}}$$

であるから、

包絡線検波器の SN 比は

$$\frac{S}{N} = \frac{A_c^2 m_{AM}^2 \frac{\overline{f(t)^2}}{|f(t)|^2{}_{MAX}}}{2N_0 W} = \frac{A_c^2 m_{AM}^2 \overline{f(t)^2}}{2|f(t)|_{MAX}^2 N_0 W}$$

であり、また

同期検波器の SN 比は

$$\frac{S}{N} = \frac{\frac{A_c^2 m_{AM}^2}{4} \frac{\overline{f(t)^2}}{|f(t)|_{MAX}^2}}{\frac{N_0 W}{2}} = \frac{A_c^2 m_{AM}^2 \overline{f(t)^2}}{2|f(t)|_{MAX}^2 N_0 W}$$

であった。

よって、雑音の電力に対して、極めて大きな信号の電力である場合、AM を包絡線検波するのと同期検波するのでは、同等な性能を示す。