

## 1.実験日の気温、湿度、天候

実験日:2019 年 6 月 29 日(金)

気温:26.1℃

湿度:44%

天候:晴れ

## 2.実験の目的

現在、通信システムの中で使われている伝送線路には、金属導体を主な材料とした平衡ケーブルや同軸ケーブルと、石英ガラスを材料とした光ファイバケーブルとがある。前者はアクセス系ネットワークや LAN(Local Area Network)を実現するための短距離・低速の通信システムに用いられ、後者は逆にバックボーンネットワークを実現するための長距離・高速の通信システムに用いられている。ここでは、前者の平衡ケーブルや同軸ケーブルについて基本的な伝送特性を把握し、通信システムの中で用いる伝送線路としての特徴を明らかにする。

### 3.使用機材

本実験における使用機材は、表 3 の通りである。

表 3 使用機材

機材名	メーカー、型番など	数量
オシロスコープ	岩崎通信機 SS-7821	2
周波数シンセサイザ	安藤電気 AJ-2730B	2
レベルメータ	安藤電気 AD-4731B	2
スイッチング ユニット	安藤電気 AL-5730B	2
平衡ケーブル	フジクラ CCP-P 0.65X100P 導体径: 0.65mm PE 絶縁厚: 0.20mm ケーブル径: 25.5mm 重量: 850kg/km 全長: 500m 特性インピーダンス: 1k-10kHz で約 700-200Ω 10k-1MHz で約 200-100Ω ユニット数: 10, カット数: 5, 心線数: 4 →ケーブル 1 本当たり 心線数 200 本 2 本 1 対なので 100 対	1
同軸ケーブル	フジクラ 8C-5AF 内部導体: 銅, 外径 2.1mm 外部導体: アルミ, 内径 8.5mm 絶縁体: ポリエチレン ケーブル外径: 11.9mm 重量: 130kg/km 全長: 1000m 特性インピーダンス: 75Ω	
平衡ケーブル用可変抵抗減衰器	安藤電気 AL-352	1
同軸ケーブル用可変抵抗減衰器	安藤電気 AL-401	1

## 4.実験内容と結果、および検討事項

### 4.1 実験 1 平衡ケーブルの信号減衰量の測定(500m ～4km)

#### 4.1.1 実験手順

(1)ユニットの接続を行った。

平衡ケーブルは 500m であるが、空間分割多重化されていて、その内訳は表 3 の平衡ケーブルの列に示した通りユニット数 10、各ユニットにおける心線数は 20 本、つまり 10 対である。これを図 4.1.1.1 のように各ユニットの端同士を接続用プラグで接続することで、各ユニットを跨いで 500m(と、厳密には接続用プラグの長さ、特に減衰特性を考えるとときには接続損失の分の仮想長さ)の整数倍の長さの心線を作り、次の長さの平衡ケーブルを実現した。

- ・ 2.00km

- ・ 4.00km

但し、直前で括弧書きしたことを考慮したときに、有効桁が 1 桁失われるものと仮定した。以下この仮定に基づいて議論を進める。

図 4.1.1.1 ユニットの接続

(2)図 4.1.1.2 のような測定系を構成し、平衡法による測定を行った。ここでの平衡法とは、被測定ケーブルをレベルメータで偏位法にて測定した電力[dBm]を確認し、これに最近の電力を実現すべく可変抵抗減衰器を調節し、その抵抗値に対応する減衰量を求め、これを被測定ケーブルの減衰量とみなす手法のことである。その為レベルメータにより消費されたエネルギーの分の誤差が打ち消されるため、高精度での測定が可能となる[1][智 剛1]。これは零位法の原理といえる[2][智 剛2]。

(2-1)可変抵抗減衰器では、インピーダンス選択スイッチによって測定回路の特性インピーダンスの情報を与えることで、抵抗値から減衰量が求められるため、そのためダイヤルには抵抗値ではなく、減衰量が示されている。(3)で 10kHz 以下の周波数で測定する場合はインピーダンス選択スイッチを 600Ωに、50kHz 以上の周波数で測定する場合は 75Ωに設定した。

(2-2)周波数シンセサイザで、周波数選択スイッチと周波数選択ダイヤルの調節により所望の周波数を持つ信号を発生させた。出力レベルは出力レベルダイヤルにより調節可能であり、これを 0dBm(つまり 1mW)とした。また(2-1)に示した基準通りに特性インピーダンスを設定した。

(2-3)レベルメータにおいても、特性インピーダンスを(2-1)の基準通りに設定した。

(2-4)スイッチングユニットを、被測定ケーブル側に切り替えた。

(2-5)レベルメータのレベルダイヤルを設定することで、メータが±1dBm の範囲内のどこかを指すよう調節した。この値を、(2-7)が完了するまで覚えておいた。

(2-6)スイッチングユニットを可変抵抗減衰器側に切り替えた。

(2-7)可変抵抗減衰器のダイヤル(減衰量切り替えダイヤル)を調節し、(2-5)で覚えた値の最近値をレベルメータが示すよう調節し、その時のダイヤル設定を記録した。この記録は、平衡法により求められた被測定ケーブルの減衰量である。

(3)(2)を次の周波数において実験した。

0.3, 3.4, 10, 50, 100, 200, 400, 600 kHz

(但し、2km での測定の時のみ、追加で 300kHz を自主的に行った)

図 4.1.1.2 信号減衰量測定系

#### 4.1.2 実験結果

この実験を行った結果、表 4.1.2.1、表 4.1.2.2、図 4.1.2.1 に示す結果を得た。ここから、4km の平衡ケーブルの伝送特性の近似曲線は $2.82\sqrt{f} - 0.0470f$ と求められ、減衰定数は $0.0892[\text{dB/m}]$ であり、位相定数は $0.0000470[\text{rad/m}]$ であるとわかった。

同様に、2km の平衡ケーブルの伝送特性の近似曲線は $1.12\sqrt{f} - 0.00601f$ と求められ、減衰定数は $0.0354[\text{dB/m}]$ であり、位相定数は $0.00000601[\text{rad/m}]$ であるといえた。

表 4.1.2.1 平衡ケーブル(4km)の伝送特性

測定回数 $m$ [回目]	周波数 $f$ [kHz]	信号減衰量 $A$ [dB]	$f\sqrt{f}$	$f^2$	$A\sqrt{f}$	$Af$
1	0.3	2.8	0.2	0.09	1.53	0.84
2	3.4	6.9	6.3	12	12.7	23
3	10	13.4	32	$1.0 \times 10^2$	42	$1.3 \times 10^2$
4	50	17.2	$3.5 \times 10^2$	$2.5 \times 10^3$	122	$8.6 \times 10^2$
5	100	21.5	$1.00 \times 10^3$	$1.00 \times 10^4$	215	$2.15 \times 10^3$
6	200	29.3	$2.82 \times 10^3$	$4.00 \times 10^4$	414	$5.86 \times 10^3$
7	400	38.7	$8.00 \times 10^3$	$1.600 \times 10^5$	774	$1.548 \times 10^4$
8	600	40.7	$1.47 \times 10^4$	$3.600 \times 10^5$	997	$2.442 \times 10^4$
(合計)	1364	170.5	$2.69 \times 10^4$	$5.726 \times 10^5$	2579	$4.892 \times 10^4$

表 4.1.2.2 平衡ケーブル(2km)の伝送特性

測定回数 $m$ [回目]	周波数 $f$ [kHz]	信号減衰量 $A$ [dB]	$f\sqrt{f}$	$f^2$	$A\sqrt{f}$	$Af$
1	0.3	1.7	0.2	0.09	0.93	0.51
2	3.4	3.0	6.3	12	5.5	10
3	10	7.6	33	$1.0 \times 10^2$	24	76
4	50	7.5	$3.5 \times 10^2$	$2.5 \times 10^3$	53	$3.8 \times 10^2$
5	100	9.4	$1.00 \times 10^3$	$1.00 \times 10^4$	94	$9.4 \times 10^2$
6	200	13.9	$2.82 \times 10^3$	$4.00 \times 10^4$	197	$2.78 \times 10^3$
7	300	17.4	$5.20 \times 10^3$	$9.00 \times 10^4$	301	$5.22 \times 10^3$
8	400	20.2	$8.00 \times 10^3$	$1.600 \times 10^5$	404	$8.08 \times 10^3$
9	600	24.2	$1.47 \times 10^4$	$3.600 \times 10^5$	593	$1.452 \times 10^4$
(合計)	1664	104.9	$3.21 \times 10^4$	$6.626 \times 10^5$	1672	$3.200 \times 10^4$



但し図 4.1.2.1 に示す曲線はモデル関数 $g$ を減衰量 $A = g(f) = a\sqrt{f} + bf$ とおき、最小 2 乗法を適応したものである。つまり次の値が最小になるパラメータを求めたときの $g(f)$ である。

$$\sum_m (A_m - g(f_m))^2 \cdots \textcircled{1}$$

但し、 $m$ は測定 $m$ 回目における実測値を意味する。  
これを变形すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_m \left( (A_m)^2 - 2A_m g(f_m) + (g(f_m))^2 \right) \\ &= \sum_m (A_m)^2 - 2 \sum_m A_m g(f_m) + \sum_m (g(f_m))^2 \end{aligned}$$

これは $g(f_m) = h_m(p, q)$  ( $p, q$ は $g$ のパラメータであり、 $f_m$ は $h_m$ のパラメータ)とおくと

$$\left( \text{定数} \right) + \left( h_1(p, q) \text{の定数倍} \right) + \left( h_2(p, q) \text{の定数倍} \right) + \cdots + (h_1(p, q))^2 + (h_2(p, q))^2 + \cdots$$

の形をしているため、 $h_m(p, q)$ が連続であれば、つまり $g$ がパラメータに対して連続であれば、 $\textcircled{1}$ もパラメータに対して連続となる。

したがって、1 階偏微分と 2 階偏微分をそれぞれのパラメータに対して行い、以下のようにして最小値及びその時のパラメータを求めることができる。

- (1)まず 1 階偏微分が 0 となる極値あるいは変曲点となる
- (2)そのとき 2 階偏微分が正となることでその点は極小値と定まる
- (3)すべての極小値と、定義域の両端を比較し、これらの内の最小値が、関数全体の最小値となる

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial p} \sum_m (A_m - g(f_m))^2 \\ &= \sum_m \frac{\partial}{\partial p} (A_m - g(f_m))^2 \\ &= \sum_m \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial p} (A_m - g(f_m)) \right) \left( \frac{\partial}{\partial (A_m - g(f_m))} (A_m - g(f_m))^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_m \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial p} (A_m - g(f_m)) \right) (A_m - g(f_m)) \right\} \\
&= 2 \sum_m \left\{ \left( -\frac{\partial}{\partial p} g(f_m) \right) (A_m - g(f_m)) \right\} \\
&= 2 \sum_m \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial p} g(f_m) \right) (g(f_m) - A_m) \right\} \cdots \textcircled{2}
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2}{\partial p^2} \sum_m (A_m - g(f_m))^2 \\
&= \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} \sum_m (A_m - g(f_m))^2
\end{aligned}$$

②より

$$\begin{aligned}
&= 2 \frac{\partial}{\partial p} \sum_m \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial p} g(f_m) \right) (g(f_m) - A_m) \right\} \\
&= 2 \sum_m \left[ \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial p} g(f_m) \right) (g(f_m) - A_m) \right\} \right] \\
&= 2 \sum_m \left[ \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial p^2} g(f_m) \right) (g(f_m) - A_m) + \left( \frac{\partial}{\partial p} g(f_m) \right) \frac{\partial}{\partial p} (g(f_m) - A_m) \right\} \right] \\
&= 2 \sum_m \left[ \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial p^2} g(f_m) \right) (g(f_m) - A_m) + \left( \frac{\partial}{\partial p} g(f_m) \right) \frac{\partial}{\partial p} (g(f_m)) \right\} \right] \\
&= 2 \sum_m \left[ \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial p^2} g(f_m) \right) (g(f_m) - A_m) + \left( \frac{\partial}{\partial p} g(f_m) \right)^2 \right\} \right] \cdots \textcircled{3}
\end{aligned}$$

②、③に  $g(f_m) = a\sqrt{f_m} + bf_m$  を代入すると、

$$\textcircled{2} = 2 \sum_m \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial p} (a\sqrt{f_m} + bf_m) \right) (a\sqrt{f_m} + bf_m - A_m) \right\}$$



$p = a$ とすると、

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_m \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial a} (a\sqrt{f_m} + bf_m) \right) (a\sqrt{f_m} + bf_m - A_m) \right\} \\
&= 2 \sum_m \{ \sqrt{f_m} (a\sqrt{f_m} + bf_m - A_m) \} \\
&= 2 \sum_m \{ (af_m + bf_m\sqrt{f_m} - A_m\sqrt{f_m}) \} \\
&= 2 \left( a \sum_m f_m + b \sum_m f_m\sqrt{f_m} - \sum_m A_m\sqrt{f_m} \right) \\
&= 2 \left( a \sum_m f_m + b \sum_m f_m\sqrt{f_m} - \sum_m A_m\sqrt{f_m} \right) \cdots \textcircled{4}
\end{aligned}$$

$p = b$ とすると、

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_m \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial b} (a\sqrt{f_m} + bf_m) \right) (a\sqrt{f_m} + bf_m - A_m) \right\} \\
&= 2 \sum_m \{ f_m (a\sqrt{f_m} + bf_m - A_m) \} \\
&= 2 \left( a \sum_m f_m\sqrt{f_m} + b \sum_m f_m^2 - \sum_m A_m f_m \right) \cdots \textcircled{5}
\end{aligned}$$

また

$$\textcircled{3} = 2 \sum_m \left[ \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial p^2} (a\sqrt{f_m} + bf_m) \right) ((a\sqrt{f_m} + bf_m) - A_m) + \left( \frac{\partial}{\partial p} (a\sqrt{f_m} + bf_m) \right)^2 \right\} \right]$$

$p = a$ とすると、

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_m \left[ \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial a^2} (a\sqrt{f_m} + bf_m) \right) ((a\sqrt{f_m} + bf_m) - A_m) + \left( \frac{\partial}{\partial a} (a\sqrt{f_m} + bf_m) \right)^2 \right\} \right] \\
&= 2 \sum_m \left[ \left\{ 0 \times ((a\sqrt{f_m} + bf_m) - A_m) + \left( \frac{\partial}{\partial a} (a\sqrt{f_m} + bf_m) \right)^2 \right\} \right] \\
&= 2 \sum_m [\{(\sqrt{f_m})^2\}] \\
&= 2 \sum_m f_m \cdots \textcircled{6}
\end{aligned}$$

$p = b$  とすると、

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_m \left[ \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial b^2} (a\sqrt{f_m} + bf_m) \right) ((a\sqrt{f_m} + bf_m) - A_m) + \left( \frac{\partial}{\partial b} (a\sqrt{f_m} + bf_m) \right)^2 \right\} \right] \\
&= 2 \sum_m \left[ \left\{ 0 \times ((a\sqrt{f_m} + bf_m) - A_m) + \left( \frac{\partial}{\partial b} (a\sqrt{f_m} + bf_m) \right)^2 \right\} \right] \\
&= 2 \sum_m [\{f_m^2\}] \\
&= 2 \sum_m f_m^2 \cdots \textcircled{7}
\end{aligned}$$

極小値となる条件は④、⑤が 0 であり、かつ⑥、⑦が正となることである。  
しかし、 $f_m$  が正であるとき、⑥、⑦の式は明らかに正であることから、今回これらについては議論の必要がない。よって、④と⑤が 0 になることのみを考えればよい。

表 4.1.2.1、表 4.1.2.2 からこれを求めると、ケーブル長 4km のときは

$$\textcircled{4} = 2 \left( a \sum_m f_m + b \sum_m f_m \sqrt{f_m} - \sum_m A_m \sqrt{f_m} \right) = 0$$

$$a \sum_m f_m + b \sum_m f_m \sqrt{f_m} - \sum_m A_m \sqrt{f_m} = 0$$

$$1364a + 2.69 \times 10^4 b - 2.58 \times 10^3 = 0$$

$$1364a + 26900b - 2580 = 0$$

$$\textcircled{5} = 2 \left( a \sum_m f_m \sqrt{f_m} + b \sum_m f_m^2 - \sum_m A_m f_m \right) = 0$$

$$a \sum_m f_m \sqrt{f_m} + b \sum_m f_m^2 - \sum_m A_m f_m = 0$$

$$2.69 \times 10^4 a + 5.726 \times 10^5 b - 4.892 \times 10^4 = 0$$

$$26900a + 572600b - 48920 = 0$$

連立させて解くと、

$$\begin{cases} 1364a + 26900b - 2580 = 0 \\ 2690a + 57260b - 4892 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2690 \times 1364a + 2690 \times 26900b - 2690 \times 2580 = 0 \\ 1364 \times 2690a + 1364 \times 57260b - 1364 \times 4892 = 0 \end{cases}$$

$$(2690 \times 26900 - 1364 \times 57260)b - (2690 \times 2580 - 1364 \times 4892) = 0$$

$$(2690 \times 26900 - 1364 \times 57260)b = (2690 \times 2580 - 1364 \times 4892)$$

$$b = \frac{2690 \times 2580 - 1364 \times 4892}{2690 \times 26900 - 1364 \times 57260}$$

$$= -0.0470$$

$$a = 2.82$$

とわかる。これをモデル関数に代入すると、

$$A = 2.82\sqrt{f} - 0.0470f$$

となる。この式で $f$ の単位は[kHz]であるから、[Hz]に変換して等価の式を示すと

$$A = 2.82 \sqrt{\frac{f}{1000}} - 0.0470 \div 1000 f$$

つまり

$$A = 0.0892\sqrt{f} - 0.0000470f$$

となる。

したがって、減衰定数は0.0892[dB/m]であり、位相定数は0.0000470[rad/m]である。

ケーブル長 2km のときは

$$a \sum_m f_m + b \sum_m f_m \sqrt{f_m} - \sum_m A_m \sqrt{f_m} = 0 \text{ より}$$

より

$$1664a + 3.21 \times 10^4 b - 1672 = 0$$

$$1664a + 32100b - 1672 = 0$$

$$a \sum_m f_m \sqrt{f_m} + b \sum_m f_m^2 - \sum_m A_m f_m = 0$$

より

$$3.21 \times 10^4 a + 6.626 \times 10^5 b - 3.200 \times 10^4 = 0$$

$$32100a + 662600b - 32000 = 0$$

連立させて解くと、(途中式省略)

$$a = 1.12$$

$$b = -0.00601$$

よって、近似曲線はに代入すると、

$$A = 1.12\sqrt{f} - 0.00601f$$

となる。この式で $f$ の単位は[kHz]であるから、[Hz]に変換して等価の式を示すと

$$A = 1.12 \sqrt{\frac{f}{1000}} - 0.00601 \div 1000 f$$

つまり

$$A = 0.0354\sqrt{f} - 0.00000601f$$

となる。

したがって、減衰定数は0.0354[dB/m]であり、位相定数は0.00000601[rad/m]である。

## 4.2 実験 2 同軸ケーブルの信号周波数の測定(1km)

### 4.2.1 実験手順

(1)基本的には実験 1 の実験手順(見出し 4.1.1)の(2)を行った。

但し、以下の点は異なった。

- ・各装置には平衡端子と不平衡端子があったが、後者を用いた。
- ・各装置のインピーダンス選択スイッチ等は周波数に関係なく  $75\Omega$  で統一した。
- ・可変抵抗減衰器には不平衡ケーブル用のものを用いた。
- ・ケーブルの全長は 1km とした。

(2)測定周波数を 1, 10, 100, 400kHz および 1, 2, 5, 10, 15, 20MHz とした。

### 4.2.2 実験結果

この実験を行った結果、表 4.2.2.1 及び図 4.2.2.1 に示す結果を得た。見出し 4.1.2 に示す手順で近似曲線を求めたところ、

その式は  $A = 0.00855\sqrt{f} + 0.0000111f$  となり、

減衰定数は  $0.00270[\text{dB/m}]$ 、位相定数は  $0.000000111[\text{rad/m}]$  となることがわかった。

表 4.2.2.1 同軸ケーブル(1km)の伝送特性

測定回数 $m$ [回目]	周波数 $f$ [kHz]	信号減衰量 $A$ [dB]	$f\sqrt{f}$	$f^2$	$A\sqrt{f}$	$Af$
1	1	0.4	1	1	0.4	0.4
2	10	0.4	32	$1.0 \times 10^2$	1	4
3	100	0.9	$1.00 \times 10^3$	$1.00 \times 10^4$	9	$9 \times 10^1$
4	400	2.0	$8.00 \times 10^3$	$1.600 \times 10^5$	40	$8.0 \times 10^2$
5	$1.00 \times 10^3$	3.1	$3.16 \times 10^4$	$1.00 \times 10^6$	98	$3.1 \times 10^3$
6	$2.00 \times 10^3$	4.4	$8.94 \times 10^4$	$4.00 \times 10^6$	$2.0 \times 10^2$	$8.8 \times 10^3$
7	$5.00 \times 10^3$	6.9	$3.54 \times 10^5$	$2.500 \times 10^7$	$4.9 \times 10^2$	$3.55 \times 10^4$
8	$1.00 \times 10^4$	9.8	$1.00 \times 10^6$	$1.00 \times 10^8$	980	$9.8 \times 10^4$
9	$1.50 \times 10^4$	12.0	$1.84 \times 10^6$	$2.25 \times 10^8$	$1.47 \times 10^3$	$1.8 \times 10^5$
10	$2.00 \times 10^4$	14.0	$2.83 \times 10^6$	$4.00 \times 10^8$	$1.98 \times 10^3$	$2.8 \times 10^5$
(合計)	$5.35 \times 10^4$	53.9	$6.15 \times 10^6$	$7.55 \times 10^8$	$5.26 \times 10^3$	$6.1 \times 10^5$

近似曲線の導出:

モデル関数を  $A = a\sqrt{f} + bf$  とすると、

$$a \sum_m f_m + b \sum_m f_m \sqrt{f_m} - \sum_m A_m \sqrt{f_m} = 0$$

より

$$5.35 \times 10^4 a + 6.15 \times 10^6 b - 5.26 \times 10^3 = 0$$

$$5350a + 615000b - 526 = 0$$

$$a \sum_m f_m \sqrt{f_m} + b \sum_m f_m^2 - \sum_m A_m f_m = 0$$

より

$$6.15 \times 10^6 a + 7.55 \times 10^8 b - 6.1 \times 10^6 = 0$$

$$615a + 75500b - 610 = 0$$

連立させて解くと

$$a = -0.593, b = 0.0129$$

よって近似曲線は  $A = -0.593\sqrt{f} + 0.0129f$  である。

また  $f$  の単位を [Hz] に直すと、

$$A = -0.593 \sqrt{\frac{f}{1000}} + \frac{0.0129f}{1000}$$

$$A = -0.0188\sqrt{f} + 0.0000129f$$

となり、減衰定数は  $-0.0188[\text{dB/m}]$ 、位相定数は  $0.0000129[\text{rad/m}]$  となる。

## 5. 吟味

### 5.1 伝搬定数とフーリエ級数展開

特性インピーダンスから求められる「減衰定数」ないしは「位相定数」は、周波数特性を持つが、これらの特性から実験 3 の「LPF を通したかのような歪み」の説明を行うことは成功しなかった。以下その過程を示す。

伝搬定数は特性インピーダンスとも関連する、伝送路の性質を表すもう一つの指標であり、その実部は単位長さ当たりの減衰量を示す減衰定数、虚部は単位長さ当たりの位相ずれを示す位相定数となる。位相定数は特性インピーダンスの分母の 2 乗を特性インピーダンスに掛け算することにより求められる。

図 5.1 [智 剛3] の等価回路のインピーダンス、すなわち伝送路の伝搬定数は

$$\sqrt{(R_1 + j\omega L) \left( \frac{1}{R_2} + j\omega C \right)}$$

である。これの実部が減衰定数[Np/m]、虚部が位相定数[rad/m]となる。式を変形すると [智 剛4]

$$\sqrt{\left( \frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL \right) + j\omega \left( \frac{L}{R_2} + CR_1 \right)}$$

実部が 0 でない複素数の位相は  $2 \arctan \left( \frac{(\text{大きさ}) - (\text{実部})}{(\text{虚部})} \right)$  なので [1]

この法則を  $\left( \frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL \right) + j\omega \left( \frac{L}{R_2} + CR_1 \right)$  に適用し、

$$= \sqrt{\sqrt{\left( \frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL \right)^2 + \left( \omega \left( \frac{L}{R_2} + CR_1 \right) \right)^2} \exp \left( j 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{\left( \frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL \right)^2 + \left( \omega \left( \frac{L}{R_2} + CR_1 \right) \right)^2} - \left( \frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL \right)}{\omega \left( \frac{L}{R_2} + CR_1 \right)} \right) \right)}$$

指数法則より

$$= \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)^2 + \left(\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)\right)^2} \exp \left( \frac{j 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)^2 + \left(\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)\right)^2} - \left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)}{\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)} \right)}{2} \right)$$

となり、伝搬定数のフェーザ表示は

$$\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)^2 + \left(\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)\right)^2} \angle \arctan \left( \frac{\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)^2 + \left(\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)\right)^2} - \left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)}{\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)} \right)$$

とわかる。したがってこれを複素数表示すると

$$\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)^2 + \left(\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)\right)^2} \left( \cos \left( \arctan \left( \frac{\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)^2 + \left(\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)\right)^2} - \left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)}{\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)} \right) \right) \right. \\ \left. + j \sin \left( \arctan \left( \frac{\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)^2 + \left(\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)\right)^2} - \left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)}{\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)} \right) \right) \right)$$

となるから、実部つまり減衰定数  $\alpha\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$  は

$$\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)^2 + \left(\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)\right)^2} \cos \left( \arctan \left( \frac{\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)^2 + \left(\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)\right)^2} - \left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)}{\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)} \right) \right)$$

[Np/m]



虚部つまり位相定数  $\beta\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$  は

$$\sqrt[4]{\left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)^2 + \left(\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)\right)^2} \sin\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)^2 + \left(\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)\right)^2} - \left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)}{\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)}\right)\right)$$

[rad/m]

とわかる。

どちらも周波数の関数になっていることから、周波数によって減衰の仕方も位相ずれの度合いも異なってくるということがわかる。矩形波の歪みがこのことに起因すると考えられると仮定しよう。

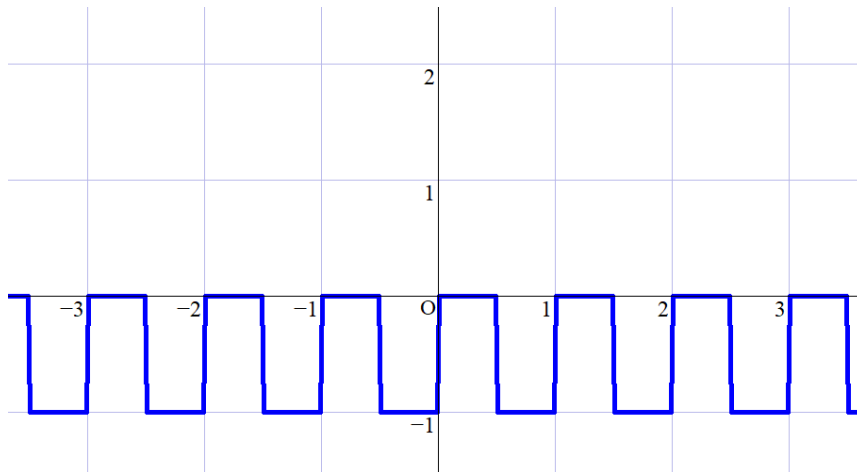
今回は 2MHz の周波数でビットを送信したが、ビットの状態が交互に 1,0 を繰り返すことで、2 倍の周期、すなわち 1MHz の周波数の矩形波が得られたわけである。このとき、周期は  $1\mu\text{s}$  となるから、 $t$  の単位を  $[\mu\text{s}]$  とすれば、周期は 1 となり、議論しやすい。

今回議論する波形(歪む前)は振幅  $\frac{1}{2}$  [V]、周期 1  $[\mu\text{s}]$  の矩形波が  $\frac{1}{2}$  [V] だけ下にさがったものだから、

まずこの矩形波をフーリエ級数展開し、 $\frac{1}{2}$  だけ下にずらしたものは

$$\left(\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sin\{(2N+1)2\pi t\} \right\}\right) - \frac{1}{2}$$

と表せる。これは ch1 で観測された波形の式であり、次のようになる。



この波形が、1km のケーブルを通るうちに歪むので、その減衰はおおよそ  $1000\alpha$  (周波数) [Np]、

位相ずれはおおよそ  $1000\beta$  (周波数) [rad] であつたと考えられる。

また減衰が  $1000\alpha$  (周波数)[Np] であるとは、

$-1000\alpha$  (周波数)[Np] =  $\exp(-1000\alpha \text{ (周波数)})$  [倍] になるということである。

以上のことを考慮に入れると、式は

$$\left( \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2N-1} \exp(-1000\alpha((2N-1)2\pi)) \sin[(2N-1)2\pi t + 1000\beta((2N-1)2\pi)] \right\} \right) - \frac{1}{2}$$

となる。

この式に  $\alpha$  や  $\beta$  を代入したもので、各パラメータ ( $R, R_2, L, C$ ) を適当に設定して、その波形を観測した結果、表 5.1.1 のようにどれも矩形波となってしまう、ch2 の波形は再現できなかった。但し青いグラフは ch1 を再現したもの、赤いグラフは ch2 の再現を試みたものであり、横軸は時間 [ $\mu$ s]、縦軸は電圧 [V] とする。また表 5.1.2 には、 $1000\beta(\frac{\omega}{2\pi})$  が  $1000\alpha(\frac{\omega}{2\pi})$  の

$$\tan \left( \arctan \left( \frac{\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)^2 + \left(\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)\right)^2} - \left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)}{\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)} \right) \right) \text{ 倍つまり}$$

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)^2 + \left(\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)\right)^2} - \left(\frac{R_1}{R_2} - \omega^2 CL\right)}{\omega\left(\frac{L}{R_2} + CR_1\right)} \text{ 倍になっていることを利用し、これを } \beta' \text{ とおき、式を}$$

$$\left( \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2N-1} \exp(-\alpha') \sin[(2N-1)2\pi t + \alpha'\beta'] \right\} \right) - \frac{1}{2}$$

と置き換えて再試行したものである。( $\alpha' > \beta'$ )

$K$  を鍵、 $e_s + Ke_n$  を暗号文として、平文  $e_s$  の送受信をできないか考えてみた。

送信者は傍受され得る伝送路 T1 に  $e_s + \left(\frac{K}{2} - 1\right)e_n$  の信号を送る。そして、傍受され得ない安全な伝送路 T2 に  $\frac{K}{2}$  の信号を送る。 $K$  の情報量が  $e_s$  の情報量より遥かに少ないものとすれば、この T2 の性能が悪い(伝達できる情報量が小さい)としても十分利用可能である。また、

T1 と T2 で、位相ずれが  $\alpha$  だけ生じる場合でも、 $\alpha$  が一定の大きさ以下であれば問題ない。

T1 に雑音  $e_n(\cos\theta + j\sin\theta)$  がのることで、受信時は自然に  $e_s + \left(\frac{K}{2} - 1 + \cos\theta + j\sin\theta\right)e_n$  へ

変化し、これが受信者へ伝わる。受信者はこの信号と、T2 から来た

$\frac{K}{2}(\cos(\theta + \alpha) + j\sin(\theta + \alpha))e_n \cdots \textcircled{1}$  を差動増幅回路に入力すれば、

$$e_s + \left(\frac{K}{2} - 1 + \cos\theta + j\sin\theta + \frac{K}{2}(\cos(\theta + \alpha) + j\sin(\theta + \alpha))\right)e_n$$

$$= e_s + \left(\cos\theta + j\sin\theta - 1 + \frac{K}{2}(\cos(\theta + \alpha) + j\sin(\theta + \alpha) + 1)\right)e_n$$

を得ることができる。…②

一定の確率で、 $\theta$ は0に十分近づく…⑦

⑦の場合受信信号は

$$e_s + \left( \frac{K}{2} (\cos \alpha + j \sin \alpha + 1) \right) e_n$$

となる。

テスト信号として $e_s = 0$ 、 $K = 2$ にすればこの信号と $e_n$ (T1を2つ用意すれば位相ずれを引

き起こさない)を差動増幅回路に入力したものから

$(\cos \alpha + j \sin \alpha) e_n$ を得る。これをオシロスコープなどを用いて $e_n$ と比較することにより、 $\alpha$ が求められる。…③

$\alpha$ を求めることができれば、補正も可能となるので、①で $\alpha$ を打消し、

$$\frac{K}{2} (\cos \theta + j \sin \theta) e_n \text{ とできる。 (これ以降 } e_s = 0, K = 2 \text{ とは限らない)}$$

このとき②は

$$e_s + \left( \cos \theta + j \sin \theta - 1 + \frac{K}{2} (\cos \theta + j \sin \theta + 1) \right) e_n$$

となる。

一定の確率で $\theta$ は0に近づく…④

④の場合、この信号は

$$e_s + \left( 1 - 1 + \frac{K}{2} (1 + 1) \right) e_n$$

$$= e_s + K e_n$$

となるから、受信者はT1から得られる $e_s + K e_n$ とT2から得られる

$K e_n (\cos \alpha + j \sin \alpha)$  ( $\alpha$ は既知)から $e_s$ を得ることができる。

さて⑦の条件がそろったことは、

③の手順で視覚的に確認できる。

しかし、④の条件がそろったことを確認する方法について議論する必要がある。

すなわち

$$e_s + \left( \cos \theta + j \sin \theta - 1 + \frac{K}{2} (\cos \theta + j \sin \theta + 1) - K \right) e_n$$

が $e_s$ に一致するか否かを確認する方法を考えなければならない。

一つの方法として、秘密のプロトコルを用意し、

$$e_s + \left( \cos \theta + j \sin \theta - 1 + \frac{K}{2} (\cos \theta + j \sin \theta + 1) - K \right) e_n \text{ がそのプロトコルに従うか否かで判}$$

断するというものが考えられる。



## 5.2 特性のモデル化手法

図 4.1.2.1 及び図 4.2.2.1 では(縦軸を $y$ ,横軸を $x$ として)モデル関数 $y = \alpha\sqrt{x} + \beta x$ がわかっていたからこそ、最小 2 乗法による近似を行うことができた。

では、このモデル関数がわからなかった場合、データからどのようにしてモデル関数を求めることができるのか考えてみよう。

### 5.2.1 一般化法

モデル関数が $f_1(x)$ かもしれないし $f_2(x)$ かもしれない場合、

$f(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$ をモデル関数と置けばよい。

#### 1 階微分

$$2 \sum_m \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial p} f(x_m) \right) (f(x_m) - y_m) \right\}$$

を解くと、

$$2 \sum_m \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial p} (\alpha f_1(x_m) + \beta f_2(x_m)) \right) (\alpha f_1(x_m) + \beta f_2(x_m) - y_m) \right\}$$

となるが、モデル関数が $f_1(x)$ の場合、 $\beta$ が 0 に近づくことで、この値も 0 に近づくようになるため、妥当である。2 階微分についても同様である。

その上、「 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ が混ざった関数」をモデルとする場合も同時に確かめることができるため、この方法では実質 3 通りの関数から、最適なモデルを選択することができる。

今回は 2 つの関数で説明したが、実際には $n$ つの関数について同様のことがいえ、その場合は

$$\sum_{m=1}^n \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

通りの関数から最適なモデルを選択できることになる。

(これは、 $n$  つのカードから  $m$  枚のカードを選ぶときの場合の数で  $m$  の総和をとれば求めたものに等しい)

例えば、定数関数、冪関数、多項式関数、有理関数、指数関数、対数関数、三角関数、逆三角関数( $\arctan$  のみ)のいずれかの関数に近似できる場合、次のように置けばよい

$$f(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\sim} a_i x^{c_i}}{\sum_{j=0}^{\sim} b_j x^{d_j}} + z + h g^{kx+l} + n \log_m(ox + p) + \frac{q \sin(rx + s)}{\sin(tx + u)} + v \cdot ((\arctan x) - w)$$

証明:

定数関数は、 $a$ を定数として $f_{\text{constant}}(x) = a$ と表される。…①

多項式関数は、 $b, c, d, e_n$ を定数として $f_{\text{polynomial}}(x) = bx^{e_1} + cx^{e_2} + \dots + dx^{e_{\text{end}}} + z$ と表される。…②

定数の和が定数であることより、 $z$ が $z + a$ 、に置き換わってもよいので、

$$\begin{aligned} f_{\text{polynomial}}'(x) \\ &= bx^{e_1} + cx^{e_2} + \dots + dx^{e_{\text{end}}} + z + a \\ &= f_{\text{polynomial}}(x) + f_{\text{constant}}(x) \end{aligned}$$

以上のことより、多項式関数を考えれば同時に定数関数も考えたことになる。

同様の推論より、

- ・多項式関数を考えれば同時に冪関数も考えたことになる。
- ・有理関数を考えれば多項式関数を考えたことになる。

従って、有理関数を考えれば、定数関数、冪関数、多項式関数、有理関数を考えたことになる。…④

指数関数は定数 $g$ を使って $f_{\text{exp}}(x) = g^x$ と表されるが、今回はさらに定数 $h, k, l$ を用いて $f_{\text{exp}}(x) = hg^{kx+l}$ と表すことにする。

対数関数は定数 $m, n, o, p$ を使って $f_{\log}(x) = n \log_m(ox + p)$ と表され、

三角関数は定数 $q, r, s, t, u$ を使って $f_{\sin}(x) = \frac{q \sin(rx+s)}{\sin(tx+u)}$ と表され、

逆三角関数(arctan)は定数 $v, w$ を使って $f_{\arcsin}(x) = v \cdot ((\arctan x) - w)$ と表される。

従って、確かに

$$f(x) = \frac{\sum_i^{0\sim} a_i x^{c_i}}{\sum_j^{0\sim} b_j x^{d_j}} + z + hg^{kx+l} + n \log_m(ox + p) + \frac{q \sin(rx + s)}{\sin(tx + u)} + v \cdot ((\arctan x) - w)$$

と置けばよい。

証明終わり。

また、式は一見複雑であるが、次のようにして、 $f_{i-1}()$ とデータの差のモデルを、 $f_i()$ となるようにすることで、各 $f_i()$ については容易に最小 2 乗法を適用できる。

$$f(x) = \sum_i^{0\sim} f_i(x)$$

但し $f_i(x)$ は、既知の $f_{i-1}(x_m)$ に対し、

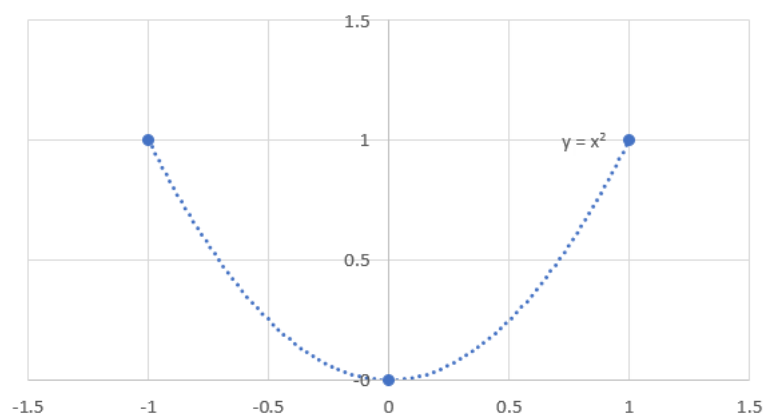
$$\sum_m^{0\sim} (y_m - f_{i-1}(x_m) - f_i(x_m))^2$$

が最小になるようにする。

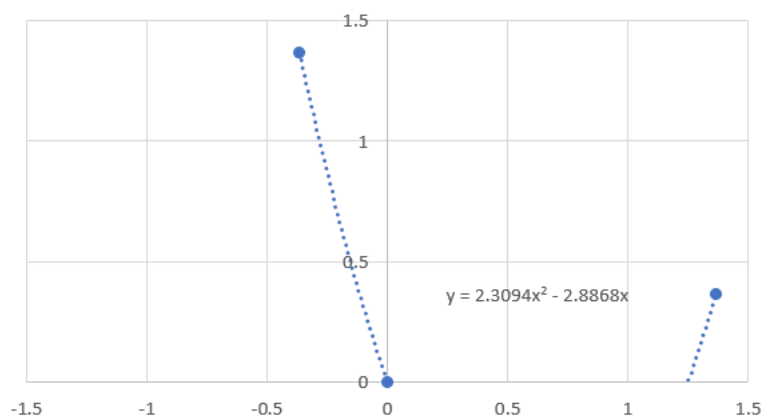
## 5.2.2 回転微分法

### 5.2.2.1 理論

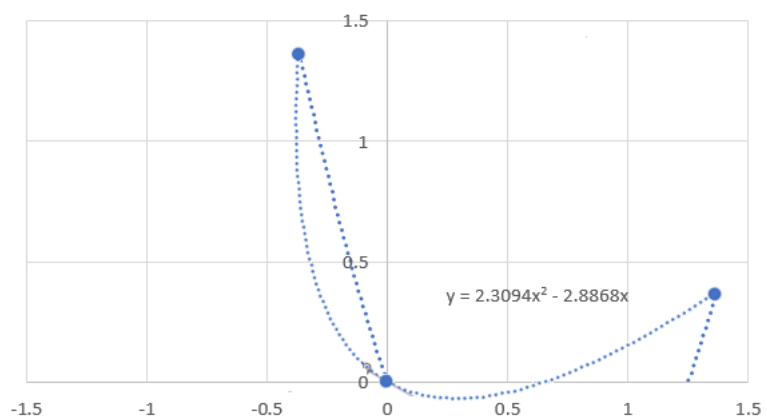
データを回転させ、あるいは軸を歪ませるだけで、離散的にサンプリングされたデータに対する近似曲線は大きく変化する。これは言い換えれば「離散的にサンプリングされたデータに対する近似曲線は、データに後から加えられた回転角の分だけ存在する」ということである。例えば、点(-1,1)、(0,0)、(1,1)の3点データを2次関数で近似すれば、近似曲線は $y = x^2$ となり、これは図 5.2.2.1 の(a)のように表される。しかし、3点を例えば原点を軸に、時計回りに30度回転させると、近似曲線は $y = 2.3094x^2 - 2.8868x$ となり、グラフは(b)のようになる。ここに(a)の近似曲線を重ねたものが(c)であり、二つの近似曲線は必ずしも重ならないことがわかる。ここからグラフを回転させることで様々な式によるモデル化を試みることが可能であるということが言える。これが回転微分法の「回転」の名前の理由である。



(a)



(b)



(c)

図 5.2.2.1 データの回転と近似曲線

回転微分法では、モデル関数には必ず「指数が全て 0 以上の整数になり、少なくとも 1 つ以上の、0 以外の指数で係数が 0 でないものを持つ」多項式関数を使うものとする。このようにすることで、モデル関数は微分を繰り返すと必ず 0 以



外の定数に帰着するものとなる(これを  $n$  階微分とする)。したがって、全データの  $n$  階差分の  $y$  平均値を求めれば、これが近似曲線の  $n$  階微分となる。これが回転微分法の「微分」の名前の理由である。後はこの  $n$  階微分を 1 階ずつ積分し、積分定数をその都度求めるのを  $n$  回繰り返せば、特性方程式を求めずに近似曲線を求めることができる。

### 5.2.2.2 データの移動

$x$  軸を  $\alpha$ 、 $y$  軸を  $\beta$  だけ反時計回りに回転させたとき、点  $(x, y)$  は次の点へ移動する。

データは  $\alpha$  だけ回転した後、 $y$  軸と  $x$  軸の間に新たに発生した角度差  $\beta - \alpha$  だけ「歪む」ことになる。この歪みにより、さらに多くの近似曲線を導くことができる。

点  $(x, y)$  を  $\alpha$  だけ回転させた点は、 $\arctan$  の値域を  $[-\pi/2, \pi/2]$  として、

$$\left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos\left(\arctan \frac{y}{x} + \pi \times (x \text{ が負} \rightarrow 1, \text{ 正} \rightarrow 0) + \alpha\right)}, \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sin\left(\arctan \frac{y}{x} + \pi \times (x \text{ が負} \rightarrow 1, \text{ 正} \rightarrow 0) + \alpha\right)} \right)$$

となる(以下、条件 A が成立すると 1、不成立となると 0 となる関数を、 $if(A)$  と書くことにする)。

まず次のように極座標を導出できる。

直交座標の点  $(x, y)$  を極座標変換すると、

$$\left( \sqrt{x^2 + y^2}, \left( \arctan \frac{y}{x} + \pi \times if(x \text{ が負}) \right) \right)$$

となる。 $\alpha$  だけ回転させれば

$$\left( \sqrt{x^2 + y^2}, \left( \arctan \frac{y}{x} + \pi \times if(x \text{ が負}) + \alpha \right) \right)$$

となる。これを直交座標変換すると、

$$\left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos\left(\arctan \frac{y}{x} + \pi \times if(x \text{ が負}) + \alpha\right)}, \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sin\left(\arctan \frac{y}{x} + \pi \times if(x \text{ が負}) + \alpha\right)} \right)$$

となる。

次に、この移動した点  $(p, q)$  に対し、 $\beta - \alpha$  だけ「歪み」を生じさせなければならない。これは片方向の座標を平行移動させた平行四辺形への 1 対 1 写像(単射)を考えればよい。参考として図 5.2.2.2 を示す。

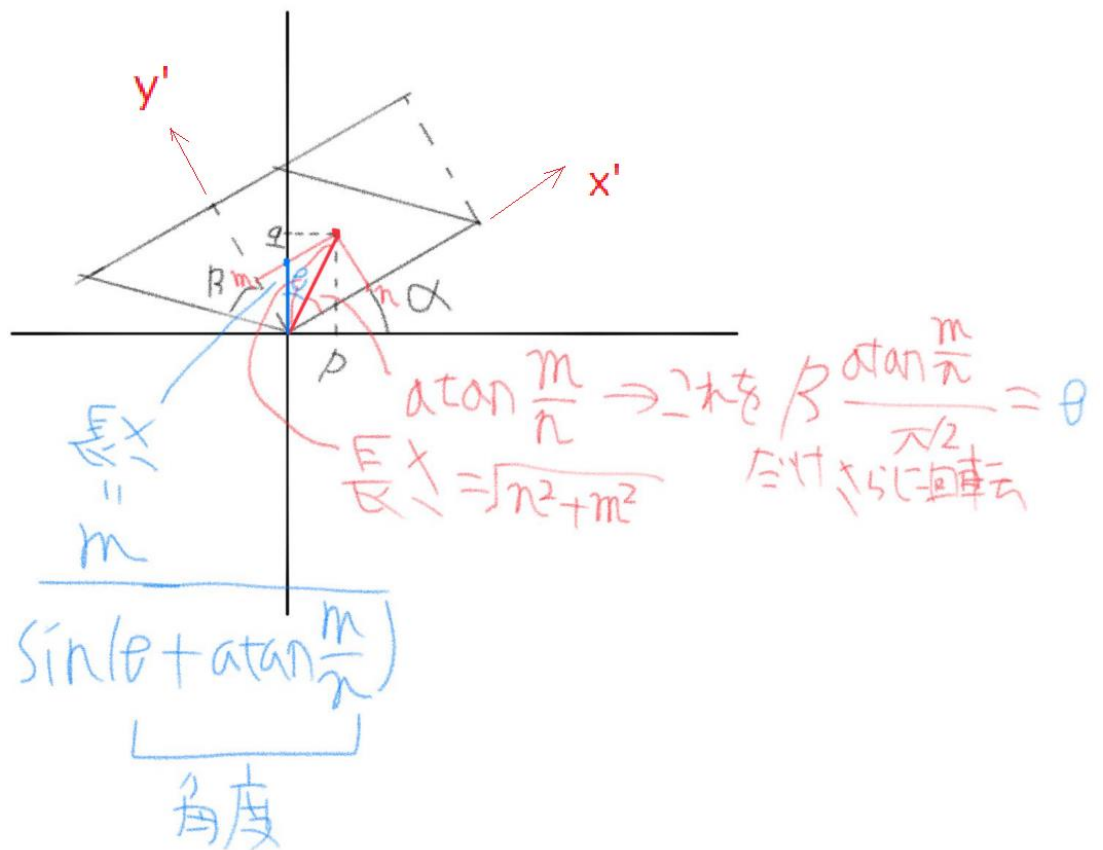


図 5.2.2.2  $\alpha$  だけ回転した座標系(赤)を  $\beta$  だけ歪ませる様子

$\alpha$  だけ回転して赤点へ移った点は、 $\beta$  だけ歪ませると青点へ移動する。  
赤点は元の直交座標で  $(p, q)$  であるとし、これを  $\alpha$  だけ回転させた座標系  
(赤の座標軸  $(x', y')$  の系) では点  $(m, n)$  とあらわされるものとする。また図 5.2.2.2  
に示す通り、赤の座標系で点  $(m, n)$  を極座標変換すると

$$\left( \sqrt{m^2 + n^2}, \arctan\left(\frac{m}{n} + \pi \times \text{if}(n \text{ が負})\right) \right)$$

となる。

ここで、図 5.2.2.2 の点線で示された長方形を歪ませることが、平行四辺形に  
対して全単射になるような歪みのルールを作ろう。歪みはもっぱら  $x'$  軸方向の全  
単射として生じ、 $y'$  軸方向には生じないものとし、また元の点の仰角が  $x'$  から近  
いほど歪みの大きさも小さく、遠いほど大きくなるものとする。この大小関係を  
線形とすれば、赤の座標系で角度座標は

$$\beta \cdot \frac{(\text{元の角度座標})}{\pi/2}$$

だけ足されればよいこととなる。今回の場合は

$$\beta \cdot \frac{\arctan\left(\frac{m}{n} + \pi \times \text{if}(n \text{が負})\right)}{\pi/2}$$

となる。これを $\theta$ とおく。

次に青点の原点からの距離を求める。

歪みは $y'$ 軸方向には生じないため、 $y'$ 座標が $m$ であるまま、角度座標だけ $\theta$ が加算される。このことから

$$\frac{m}{\sin\left(\theta + \arctan\left(\frac{m}{n} + \pi \times \text{if}(n \text{が負})\right)\right)}$$

と求められる。

したがって、赤の極座標では青点は

$$\left( \frac{m}{\sin\left(\theta + \arctan\left(\frac{m}{n} + \pi \times \text{if}(n \text{が負})\right)\right)}, \arctan\left(\frac{m}{n} + \pi \times \text{if}(n \text{が負})\right) + \theta \right)$$

となり、元の座標軸(黒の座標軸)では

$$\left( \frac{m}{\sin\left(\theta + \arctan\left(\frac{m}{n} + \pi \times \text{if}(n \text{が負})\right)\right)}, \arctan\left(\frac{m}{n} + \pi \times \text{if}(n \text{が負})\right) + \theta - \alpha \right)$$

となる。

$\theta$ を代入すると

$$\left( \frac{m}{\sin\left(\left(\frac{2\beta}{\pi} + 1\right) \arctan\left(\frac{m}{n} + \pi \times \text{if}(n \text{が負})\right)\right)}, \left(\frac{2\beta}{\pi} + 1\right) \arctan\left(\frac{m}{n} + \pi \times \text{if}(n \text{が負})\right) - \alpha \right) \cdots \textcircled{1}$$

となる。

ここで、 $m$ と $n$ を $p$ と $q$ で表そう。座標を統一して考える。点 $(n, m)$ は点 $(p, q)$ を原点を軸に $-\alpha$ だけ回転させた点であるといえるから、 $(p, q)$ の極座標変換

$$\left( \sqrt{p^2 + q^2}, \arctan\left(\frac{q}{p} + \pi \times \text{if}(p < 0)\right) \right)$$

の角度座標に $-\alpha$ を加え、

$$\left( \sqrt{p^2 + q^2}, \arctan\left(\frac{q}{p} + \pi \times \text{if}(p < 0)\right) - \alpha \right)$$

とすれば、これの直交座標変換

$$\left( \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\cos\left(\arctan\left(\frac{q}{p} + \pi \times if(p < 0)\right) - \alpha\right)}, \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sin\left(\arctan\left(\frac{q}{p} + \pi \times if(p < 0)\right) - \alpha\right)} \right)$$

が $(n, m)$ に一致する。

これを①に代入すると、

$$\left( \frac{\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sin\left(\arctan\left(\frac{q}{p} + \pi \times if(p < 0)\right) - \alpha\right)}}{\sin\left(\left(\frac{2\beta}{\pi} + 1\right)\arctan\left(\frac{1}{\tan\left(\arctan\left(\frac{q}{p} + \pi \times if(p < 0)\right) - \alpha\right)} + \pi \times if(n < 0)\right)}\right)} \right. \\ \left. \left(\frac{2\beta}{\pi} + 1\right)\arctan\left(\frac{1}{\tan\left(\arctan\left(\frac{q}{p} + \pi \times if(p < 0)\right) - \alpha\right)} + \pi \times if(n < 0)\right) - \alpha \right)$$

となる。ここに $(p, q) =$

$$\left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x} + \pi \times if(x < 0)\right) + \alpha\right)}, \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sin\left(\arctan\left(\frac{y}{x} + \pi \times if(x < 0)\right) + \alpha\right)} \right)$$

を代入すると、

$$\begin{pmatrix}
\sqrt{\left(\frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cos\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sin\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}\right)^2} \\
\sin\left(\arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sin\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cos\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}}+\pi\times if\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cos\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}<0\right)\right)-\alpha\right) \\
\hline
\sin\left(\left(\frac{2\beta}{\pi}+1\right)\arctan\left(\frac{1}{\tan\left(\arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sin\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cos\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}}+\pi\times if\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cos\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}<0\right)\right)-\alpha\right)}+\pi\times if(n<0)\right)\right) \\
\hline
\left(\frac{2\beta}{\pi}+1\right)\arctan\left(\frac{1}{\tan\left(\arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sin\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cos\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}}+\pi\times if\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cos\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}<0\right)\right)-\alpha\right)}+\pi\times if(n<0)\right)-\alpha
\end{pmatrix}$$

つまり

$$\begin{pmatrix}
\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\left(\frac{1}{\cos\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}\right)^2+\left(\frac{1}{\sin\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}\right)^2} \\
\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{\tan\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}+\pi\times if\left(\cos\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)<0\right)\right)-\alpha\right) \\
\hline
\sin\left(\left(\frac{2\beta}{\pi}+1\right)\arctan\left(\frac{1}{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\tan\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}+\pi\times if\left(\cos\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)<0\right)\right)-\alpha\right)}+\pi\times if(n<0)\right)\right) \\
\hline
\left(\frac{2\beta}{\pi}+1\right)\arctan\left(\frac{1}{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\tan\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)}+\pi\times if\left(\cos\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\times if(x<0)+\alpha\right)<0\right)\right)-\alpha\right)}+\pi\times if(n<0)\right)-\alpha
\end{pmatrix}$$

黒の座標系では $x'$ 軸は

$$y = (\tan \alpha)x$$

であり、 $y'$ 軸は

$$y = -\frac{1}{(\tan \alpha)}x$$

である。

$x'$ 軸を、点 $(p, q)$ を通るように平行移動すると

$$y - q = (\tan \alpha)(x - p)$$

となり、これと $y'$ 軸の交点

$$(\sin \alpha (p \sin \alpha - q \cos \alpha), -\cos \alpha (p \sin \alpha - q \cos \alpha))$$

が赤の座標系で $(0, m)$ となる。このことは

$$(\sin \alpha (p \sin \alpha - q \cos \alpha), -\cos \alpha (p \sin \alpha - q \cos \alpha))$$

を原点を軸に $-\alpha$ だけ回転させたら $(0, m)$ となるということを意味している。

極座標変換すると

$$\left( \sqrt{(\sin \alpha (p \sin \alpha - q \cos \alpha))^2 + (-\cos \alpha (p \sin \alpha - q \cos \alpha))^2}, \right.$$

$$\left. \arctan \left( \frac{-\cos \alpha (p \sin \alpha - q \cos \alpha)}{\sin \alpha (p \sin \alpha - q \cos \alpha)} + \pi \times \text{if} \left( \sin \alpha (p \sin \alpha - q \cos \alpha) \text{が負} \right) \right) \right)$$

つまり

$$\left( |p \sin \alpha - q \cos \alpha|, \arctan \left( -\frac{1}{\tan \alpha} \right) + \pi \times \text{if} \left( \sin \alpha (p \sin \alpha - q \cos \alpha) \text{が負} \right) \right)$$

となる。ただし、冗長なので以降は $\text{if} \left( \sin \alpha (p \sin \alpha - q \cos \alpha) \text{が負} \right)$ を $i$ とおく。

$-\alpha$ だけ回転させると

$$\left( |p \sin \alpha - q \cos \alpha|, \arctan \left( -\frac{1}{\tan \alpha} \right) + \pi \times i - \alpha \right)$$

となり、直交座標変換すると、

$$\left( \frac{|p \sin \alpha - q \cos \alpha|}{\cos \arctan \left( -\frac{1}{\tan \alpha} \right) + \pi \times i - \alpha}, \right)$$

となり、これが

$(0, m)$ となる

その極座標は、 $\alpha$ だけ回転させた基準(赤の座標軸)で

$$(m/\sin(\theta + \text{atan}(m/n)), \theta + \text{atan}(m/n))$$

であるから、元の基準では $(m/\sin(\theta + \text{atan}(m/n)), \theta + \text{atan}(m/n) + \alpha)$

$\theta$ を代入すると $(m/\sin(((2\beta/\pi)+1)\text{atan}(m/n)), ((2\beta/\pi)+1)\text{atan}(m/n) + \alpha)$

これを直交座標に直し、さらに  $m$  と  $n$  を  $p$  と  $q$  で表せばよい。

#### 5.2.2.3 実例

数式で表現すると、直前の見出しで述べた通り複雑になってしまうが、プログラムで書くと、この変形は比較的容易にできた。 (未完成)

### 6. 参考資料

[1] 令和元年度 東京電機大学工学部 情報通信工学科 3 年前期講義「計測制御工学」

(鈴木 剛先生) 資料「第 5 回 データ変換(1) レベル変換」

[2] フーリエ級数展開 - 信号処理 — 未確認飛行 C

<https://ufcpp.net/study/sp/dsp/fourierseries/>

(2019 年 6 月 28 日閲覧)

及び数式処理ソフト「grapes.exe」により検証