Operációkutatás II. gyakorlat 2024/2025 tavasz

1. feladatsor

1. Ismételjük át: LP feladat, poliéder, politóp, iránykúp, növelő irány, Farkas-lemma geometriai alak

Dualitás-tétel

2. (GY) Tekintsük az alábbi LP feladatot:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 12 \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 &\leq 16 \\ x_2, x_3 &\geq 0 \\ \max\ x_1 + 7x_2 + 2x_3 & \end{aligned}$$

Adjunk minél jobb megoldást a feladatra! Adjunk minél jobb felső korlátot! Hogyan lehetne bizonyítani, hogy a kapott megoldásunk optimális?

3. (GY) Írjuk fel a Dualitás-tétel általános alakját (azt az alakot, melyben lehetnek valós/nemnegatív valós értékű változók illetve egyenlőtlenségek és egyenlőségek is).

4. (GY) Milyen lényegesen különböző kimenetele lehet megoldhatóság és korlátosság szempontjából egy optimalizálási feladatnak? Vessük össze ezeket a duális oldal három kimenetelével! Használva a $\max\emptyset = \min(\mathbb{R}) = -\infty$ és $\min\emptyset = \max(\mathbb{R}) = \infty$ jelöléseket fogalmazzuk meg a Dualitás-tétel összes esetét egy mondattal.

5. (GY) Térjünk vissza a 2. feladathoz! Fogalmazzuk meg nem nulla változók és az egyenlőséggel teljesülő feltételek segítségével, hogy mikor optimális egyszerre egy (x, y) primál-duál megoldás pár! (A válasz ilyen alakú lesz: "Ha valamely i-re $x_i \neq 0$, akkor y-ra igaz, hogy ..... illetve, ha valamely j-re $y_j \neq 0$, akkor x .....")

6. Adjunk példát olyan LP feladatra, ahol a primál és a duál poliéder egyaránt üres.

7. Adott egy digráf, élein $l(e) \leq u(e)$ alsó/felső korlátok és egy c költségfüggvény. Írjuk fel a minimális költségű megengedett áram feladatot LP-ként! Mit ad rá a Dualitás-tétel? (Elég a duális LP feladatot felírni, nem kell kombinatorikus tartalmat kiolvasni.)

Dualitás-tétel vs. Farkas-lemma

8. Adott egy orákulum, mely egy $Ax \leq b, \max cx$ feladatnak megadja egy optimumát/növelő irányát, *feltéve*, hogy az inputban megadunk egy x_0 elemet is, melyre $Ax_0 \leq b$. Ennek segítségével döntsük el, hogy egy LP feladatnak van-e megoldása!

9. Adott egy orákulum, amely eldönti, hogy egy LP feladatnak van-e megoldása, és meg is ad egy ilyet. Hogyan lehetne ezt optimalizálásra használni? (Kezeljük egy optimalizálási feladat minden lehetséges kimenetelét.)

Algoritmikus visszavezetések

10. Adott egy orákulum, amely megadja a $\max\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$ alakú feladat egy optimális primál-duál megoldását. Keressük a $\max\{cx : Qx \leq q\}$ feladat egy optimális primál-duál megoldását az előbbi szubrutin egyszeri meghívásával!

11. Adott egy orákulum, amely egy egyenlőtlenség-rendszerről megmondja, hogy üres-e. Ezt felhasználva adjunk polinomiális algoritmust az $Ax = b, x \geq 0$ rendszer egy megoldásának meghatározására!

12.* Adott egy orákulum, amely egy $Ax = b, x \geq 0, \mathbf{1}x = 1$ rendszerről megmondja, hogy megoldható-e, és ha igen, megad egy megoldást. Ezt felhasználva adjunk polinomiális algoritmust egy tetszőleges egyenlőtlenség-rendszer megoldhatóságának eldöntésére.

Folytatás a másik oldalon!

Lineáris algebra felfrissítő

Ismételjük át: lineáris függetlenség/összefüggőség, mátrix rangja, altér rangja, bázis, Fredholm alternatíva-tétel

13. Villámkérdések:

a) Mekkora az alábbi mátrix rangja?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Mekkora lehet egy $m \times n$-es mátrix rangja?

c) Az $Ax = b$ egyenletrendszernek van megoldása. Mondjunk ezzel ekvivalens állítást az *oszloptér* szó felhasználásával.

d) Mikor egyértelmű egy $Ax = b$ egyenletrendszer megoldása?

e) Adott egy vektortérből néhány vektor, melyekhez hozzáveszünk még egyet. Hogyan változhat az általuk generált altér dimenziója?

14. Adott egy $Ax = b$ egyenletrendszer, melynek létezik megoldása. Hozzáveszünk a rendszerhez egy $qx = \beta$ feltételt. Mikor marad megoldható a feladat, ha A sorterében benne van q? És ha nincs benne?

15. Adott egy $Ax = b$ egyenletrendszer. Hogyan redukálhatjuk a feladatot, ha A sorai összefüggőek?

16. Adjunk tanút arra, hogy egy q vektor nincs benne a $w_1, \ldots, w_k$ vektorok által generált altérben.

17. A $v_1, \ldots, v_k$ vektorok függetlenek, és az általuk generált altérben benne van egy q vektor: $q = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$. A λ_i együtthatók ismeretében mondjuk meg, mely i-kre igaz, hogy $\{v_1, \ldots, v_k\} - v_i + q$ is független. (Bónusz kérdés: igaz az, hogy ekkor ugyanazt az alteret generálják?)

Ajánlott irodalom: Frank-Király jegyzet „Lineáris egyenletrendszerek” fejezet.

Operációkutatás II. gyakorlat 2024/2025 tavasz
2. feladatsor

Mire jók a TU mátrixok?

Ismételjük át az alábbi fogalmakat: bázismegoldás, erős-bázismegoldás, TU mátrix, egész poliéder.

18. (GY) Legyen A egy TU mátrix, b egész vektor, és tekintsük az $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ poliédert. Egészítsük ki:
a) Ha az előbbi poliéder nem üres, akkor van ...... megoldása is, mert minden ......
b) Ha egy c célfüggvényre nézve az előbbi poliéder optimuma $K \in \mathbb{R}$, akkor létezik ......

19. Adjunk példát olyan poliéderre, amely egész, de nem minden erős-bázismegoldás egész.

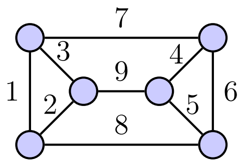
I. Tört $\longrightarrow$ egész megoldás

20. Legyen A TU mátrix, b egész vektor, és az $x_1, x_2 \in \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ egész vektorok olyanok, hogy $0 \cdot \mathbf{1} \leq x_1 \leq 21 \cdot \mathbf{1}$ és $21 \cdot \mathbf{1} \leq x_2 \leq 41 \cdot \mathbf{1}$. Lássuk be, hogy létezik olyan *egész* $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, amelyre $10 \cdot \mathbf{1} \leq x_0 \leq 31 \cdot \mathbf{1}$.

21. Idézzük fel egy páros gráf teljes párosításainak poliéderét, majd adjunk meg egy ezt definiáló egyenlőtlenség rendszert. Igazoljuk poliéderes eszközökkel, hogy egy k-reguláris páros gráf élhalmaza felbomlik k teljes párosításra!

22. (korábbi ZH) Egy hipergráf r-reguláris, ha minden pontját pontosan r hiperél tartalmazza. Bizonyítsuk be poliéderes eszközökkel, hogy egy r-reguláris TU-hipergráf pontjai fedhetők diszjunkt élekkel! (Egy hipergráf TU, ha az incidenciamátrixa TU.)

23. Mutassunk meg, hogy a páros gráfok esetére tanult teljes párosítás poliéder nem adja meg a teljes párosítások poliéderét tetszőleges gráfra! Ehhez tekintsük az alábbi (nem páros) gráf A incidencia mátrixán a páros gráfokon megismert poliédert: $Ax = 1, x \geq 0$. Bizonyítsuk be, hogy $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ a poliéderben van, de nem áll elő teljes párosítások konvex kombinációjaként!



24. Adott egy $D = (V, A)$ digráf, élein $c : A \to \mathbb{R}$ kapacitásfüggvény, $s, t \in V$ kijelölt forrás- és nyelőpontok.
a) Adjuk meg a megengedett ill. maximális megengedett s-t folyamok poliéderét! (Mit értünk azon, hogy „a megengedett folyamok poliédere”?)
b) Mutassuk meg TU mátrixok segítségével, hogy ha egy hálózati folyam feladatban az élkapacitások egészek, akkor a maximális s-t folyamok között van egészértékű.

II. Dualitás, karakterizációk

Ismételjük át a Farkas-lemma és a Dualitás-tétel TU mátrixokra vonatkozó változatát.

25. (korábbi ZH) Adott egy izolált csúcs nélküli páros gráf. Adjunk min-max tételt maximális stabil ponthalmaz méretére. (Egy ponthalmaz stabil, ha pontjai között nem megy él.)

26. (korábbi ZH) Legyen G egy páros gráf és legyen ν_2 azon élek maximális száma, amelyek közül minden pontra legfeljebb 2 él illeszkedik. Fogalmazzunk meg és bizonyítsunk be min-max tételt ν_2-re!

27. A primál-duál poliéderek segítségével adjunk új bizonyítást arra, hogy egy teljes párosítással rendelkező élsúlyozott páros gráfban egy lefogó súlyozás pontosan akkor minimális összsúlyú, ha a rá nézve pontos élek részgráfjában van teljes párosítás.

28. Mutassuk meg poliéderes eszközökkel, hogy nem üres páros gráfban van csúcs, melyet minden maximális méretű párosítás fed.

29.* Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, és egy $g : V \to \mathbb{Z}_+$ függvény. Mikor lehet úgy megirányítani az éleket, hogy minden $v \in V : \varrho(v) \leq g(v)$ teljesüljön? (Farkas-lemmával)

Operációkutatás II. gyakorlat 2024/2025 tavasz

3. feladatsor

Mire jók a TU mátrixok? II.

Hálózati mátrixok

30. Igazoljuk, hogy az alábbi mátrixok hálózati mátrixok (az incidencia-mátrixban a soroknak a pontok, az oszlopoknak az élek felelnek meg):

a) (GY) páros gráf incidencia-mátrixa és alatta egy 1-esekből álló sor;

b) (GY) irányított fa irányított részútjaiból kapott hipergráf incidencia-mátrixa (a hipergráf alaphalmaza az eredeti élek halmaza);

c) * S alaphalmazon két lamináris hipergráf incidencia-mátrixainak transzponáltja egymás alá írva (egy hipergráf lamináris, ha bármely két hiperéle vagy diszjunkt vagy egyik tartalmazza a másikat).

31. Adott egy $D = (V, A)$ digráf és benne egy F feszítőfa, melyek meghatároznak egy M hálózati mátrixot. Mutassuk meg, hogy egy e nem fa élhez tartozó M-beli oszlop nem más, mint a digráf Q incidencia mátrixában az e élhez tartozó Q-beli oszlopot előállító koordináták (-1)-szerese az F feszítőfa Q-beli oszlopai alkotta bázis felett.

32. Legyen I egy nemüres zárt intervallum, és $I_1, \ldots, I_k$ nemüres zárt részintervallumai I-nek, amelyek együtt lefedik I-t. Adjunk min-max tételt az $I_1, \ldots, I_k$ közül I-t fedő intervallumok minimális számára!

33. Mutassunk példát olyan hálózati mátrixra, amelynek transzponáltja nem hálózati mátrix! (A hálózati mátrix definíciójában szerepelő gráfban lehetnek hurokélek és párhuzamos élek is.)

34.* Igaz-e, hogy egy invertálható hálózati mátrix inverze is hálózati mátrix?

Egyenletes színezés, kerekítés

Ismételjük át a Hoffman-Kruskal és a Ghouila-Houri tételeket!

35. (GY) Legyen A TU, b egész, c tetszőleges. Igazoljuk, hogy a $P = \{x : Ax \leq b\}$ poliéder tetszőleges x pontjának van olyan $z \in P$ kerekítése, amelyre $cx \leq cz$.

36. (GY) Bizonyítsuk be, hogy egy páros gráf éleit meg lehet színezni k színnel úgy, hogy minden v csúcsra és mindegyik j színre a v-be menő $d(v)$ darab él közül $\lfloor d(v)/k \rfloor$ vagy $\lceil d(v)/k \rceil$ darab színe j. Mi mondható, ha még a színosztályok méretét is egyenletesnek szeretnénk választani?

37. Előadáson igazoltuk, hogy egy $m \times n$-es valós mátrix elemei kerekíthetők úgy, hogy minden sorösszeg és oszlopösszeg kevesebb mint eggyel változzon. Lássuk be, hogy ez még úgy is megtehető, hogy minden $1 \leq i \leq m$-re az első i sor elemeinek összege is kevesebb mint eggyel változik, és minden $1 \leq j \leq n$-re az első j oszlop elemeinek összege is kevesebb mint eggyel változik.

TU mátrixok karakterizációja

38. (GY) Mutassunk példát olyan $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixra, amely nem TU, de minden $b \in \mathbb{Z}^m$ egész vektorra a $P_b := \{x : x \geq 0, Ax \leq b\}$ poliéder egész.

39. Mutassuk meg, hogy egy A egész mátrix pontosan akkor TU, ha minden egész b és egész c vektorra a $\max\{cx : x \geq 0, Ax \leq b\} = \min\{yb : y \geq 0, yA \geq c\}$ optimum felvétetik egész x és egész y vektoron, ha az $\{x : x \geq 0, Ax \leq b\}$ poliéder nem üres és a célfüggvény felülről korlátos.

40. Legyen A egy $\{0, \pm 1\}$ mátrix, amelynek oszloponként pontosan két nemnulla eleme van. Bizonyítsuk be, hogy A pontosan akkor TU, ha a sorai partícionálhatóak két osztályra úgy, hogy minden oszlopra: a két nemnulla elem előjele pontosan akkor egyezik, ha különböző osztályba kerülnek.

41.* Bizonyítsuk be, hogy egy négyzetes, invertálható TU mátrix inverze is TU.

42. (GY, Szimplex módszer előzetes) Tekintsük a $P = \{x : Ax \leq b\}$ csúcsos poliédert és tegyük fel, hogy *nem degenerált*, azaz a különböző bázisokhoz tartozó bázismegoldások különbözők (más szóval, minden bázismegoldásra a bázishoz nem tartozó egyenlőtlenségek szigorúan teljesülnek).

a) Adjunk polinomiális algoritmust egy x_0 bázismegoldásból kiinduló összes olyan él megtalálására, amely mentén haladva a célfüggvény javul.

b) Bizonyítsuk be, hogy egy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bázismegoldás pontosan akkor optimális egy $c \in \mathbb{R}^n$ célfüggvényre nézve, ha nem indul ki belőle olyan él, amely mentén haladva a célfüggvény javul.

Operációkutatás II. gyakorlat 2024/2025 tavasz

Programozási feladat

Implementáljuk a kétfázisú primál szimplex módszert az $Ax = b, x \geq 0, \max cx$ alakú feladat megoldására, ahol $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ és $b \in \mathbb{Z}^m$. A program korlátos célfüggvény esetén az optimumérték mellett egy x és egy y primál ill. duál optimum helyet írjon ki, felülről nem korlátos célfüggvény esetén pedig egy növelő irányt. A pontosság kedvéért az algoritmus során törtekkel számoljunk (ne lebegőpontos számokkal), és az outputban is törtek szerepeljenek.

A feladatért 5 pont kapható, a beadási határidő április 6. éjfél. Bármilyen programozási nyelv használható.

A program fájlból olvassa be az inputját, melynek a formátuma a következő:

n	// változók száma
m	// sorok száma
$c_1\ c_2\ \dots\ c_n$	// célfüggvény
$a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n}\ b_1$	// 1. sor
$a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n}\ b_2$	// 2. sor
$\vdots$	$\vdots$
$a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\ a_{mn}\ b_m$	// m. sor

Például tekintsük az alábbi LP feladatot:

$$
\begin{aligned}
\max\ & 40x_1 + 30x_2 \\
& x_1 + x_2 = 16 \\
& 3x_1 - 2x_2 = 24 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Az ehhez tartozó input:

```
2
2
40  30
1    1    16
3   -2    24
```

Operációkutatás II. gyakorlat 2024/2025 tavasz

4. feladatsor

Szimplex módszerek

Megoldhatóság eldöntése szimplex módszerrel

43. Adott egy $Ax = b, x \geq 0$ alakú feladat. Miért tehetjük fel a szimplex algoritmusokban, hogy az $Ax = b, x \geq 0$ standard alakú feladatban A sorai lineárisan függetlenek? Mely megoldások a bázismegoldások? Ha adott az oszloptér egy bázisa, ahhoz hogyan rendelhető bázismegoldás? Mindig tartozik hozzá ilyen? Egy bázismegoldáshoz csak egy bázis tartozhat?

44. Tekintsük az alábbi A mátrix és b vektor által definiált standard alakú LP feladatot. Indokoljuk meg, hogy ez miért azt a feladatot írja le, hogy bizonyos pontok konvex burkában benne van-e egy másik. (Melyek ezek a pontok?) Oldjuk meg az alábbi feladatot a megoldhatóság eldöntésére szolgáló, első félévben tanult szimplex módszerrel, az első három oszlop bázisából indulva. Ábrázoljuk, hogy minek felelnek meg az egyes lépések a síkon!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

45. a) Vegyük egy szabályos, origó középpontú háromszög csúcsait, és az ezeket pozitív irányba kissé elforgatva majd az origótól való távolságot megfelezve kapott három pontot. Írjunk fel LP feladatot annak eldöntésére, hogy ezen hat pont konvex burkában benne van-e az origó, és mutassuk meg, hogy ennek megoldása közben a Bland-szabály nélkül a Szimplex módszer ciklizálhat. b)* Előfordulhat, hogy a kijelölt pont nincs benne a konvex burokban és a Bland-szabály nélkül a szimplex módszer ciklizálhat?

Primál/duál szimplex módszerek

46. Ismételjük át az alábbi fogalmakat: primál megengedett bázis, duál megengedett bázis. Miért optimálisak az egyszerre primál- és duál megengedett báziskohoz tartozó megoldások? Ha a primál és a duál feladat is megoldható, miért van primál-duál megengedett bázis? Hogyan bizonyítható a Dualitás-tétel a szimplex módszer végességéből?

47. a) Adjuk meg a 44. feladat legalább egy-egy primál megengedett/nem megengedett bázisát. b) Adjunk ugyanígy duál megengedett/nem megengedett bázisokat a $c = (7, 6, 8, 7, 3)$ költségfüggvényre nézve. A duál poliéder mely pontjai tartoznak duál megengedett bázishoz? c) Oldjuk is meg a feladatot duál szimplex módszerrel egy tetszőleges duál megengedett, de nem primál megengedett bázisból indulva.

48. Mi mondható a duál megengedett bázisokról csupa nulla célfüggvény esetén? Oldjuk meg újra a 44. feladatot duál szimplex módszerrel, a csupa nulla c célfüggvényre. Mit veszünk észre?

49. (GY) Az alábbi állítások közül melyik igaz a primál illetve a duál szimplexre?

a) az aktuális x primál megengedett,
b) az aktuális y duál megengedett,
c) először az derül ki, hogy melyik oszlop kerül ki a bázisból,
d) először az derül ki, hogy melyik oszlop kerül be a bázisba,
e) az aktuális célfüggvényérték monoton nő,
f) az aktuális célfüggvényérték monoton csökken.

50. (GY) a) A primál szimplex módszer futásakor mely lépésnél áll meg az algoritmus, ha a célfüggvény a poliéderen felülről nem korlátos? Hogyan lehet a szimplex táblából kiolvasni egy növelő irányt? b) Mikor érdemes primál illetve a duál szimplexet használni, ha már van egy optimális primál-duál megoldásunk, de a feladat megváltozik: új oszlopot vagy feltételt veszünk be, esetleg megváltozik egy együttható?

51. (korábbi ZH) Adott egy standard alakú LP feladat: $Ax = b, x \geq 0, \max cx$, melyben az A mátrix sorai lineárisan függetlenek. Legyen B egy egyszerre primál és duál megengedett bázis, y_B pedig a hozzá tartozó duál megoldás. Igaz-e, hogy ha y_B csak a bázis alatti duál-feltételeket teljesíti egyenlőséggel, akkor pontosan egy optimális primál megoldás van?

52. (korábbi ZH) Adott egy $\max\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$ standard alakú LP feladat és benne egy optimális bázis ($b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$). Adott továbbá egy $v \in \mathbb{R}^m$ vektor. Milyen λ értékek esetén marad az optimális bázis primál megengedett, ha a b korlátozó vektort $b + \lambda v$-vel helyettesítjük?

53. (GY) A szimplex módszer futása során adott egy szimplex tábla. Hogyan számolható ki ebből a következő tábla?

Operációkutatás II. gyakorlat 2024/2025 tavasz

5. feladatsor

Szintező algoritmusok

54. Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és a csúcsokon egy $g : V \to \mathbb{Z}_+$ befok felső korlát függvény. Keressünk szintező algoritmussal olyan irányítást, amelyben minden csúcs befoka legfeljebb a megadott felső korlát, vagy mutassunk bizonyítékot arra, hogy nem létezik ilyen! Mi állítható az inputról, ha kiürül a 0. szint?

55. Hogyan lehet olyan irányítást keresni szintező algoritmussal, amelyben minden csúcs befoka adott alsó és felső korlátok között van?

56. Keressünk egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban az S osztályt fedő párosítást szintező algoritmussal úgy, hogy a) csak az S osztály csúcsait szintezzük, b) csak a T osztály csúcsait szintezzük.

57.* Szintező algoritmussal keressünk egy gráfban két éldiszjunkt feszítőfát. Segítség: Szintezzük az éleket úgy, hogy minden fabeli élhez tartozó vágás egyéb élei legfeljebb egy szinttel legyenek lejjebb. Bizonyítsuk be, hogy egy fabeli él cseréje egy alsóbb szinten lévő vágásbeli élre megőrzi a fenti invariáns tulajdonságot. Ha üres szint keletkezik, akkor olvassunk ki bizonyítékot arra, hogy nem létezik két éldiszjunkt feszítőfa.

Programozási feladat

Implementáljuk a javítóutas és a szintező algoritmust befok felső korlátos irányítás keresésére. A `input.txt` nevű input fájl első sora tartalmazza a csúcsok számát, a második sor a fokszám korlátokat, majd minden sor egy-egy él két végpontját. A csúcshalmaz legyen $\{0, \ldots, n-1\}$. Ha létezik megengedett irányítás, akkor az `output.txt` nevű output fájl a keresett irányított gráf egy-egy irányított élét tartalmazza soronként; ha nem létezik a keresett irányítás, akkor a sértő csúcshalmaz egy-egy csúcsát tartalmazza soronként.

A feladatért 3+3 pont kapható, a beadási határidő április 13. éjfél. Bármilyen programozási nyelv használható.

Input fájl:

n	// a csúcsok száma, legyen a csúcshalmaz $\{0, \ldots, n-1\}$
$g_0\ g_1\ \cdots\ g_{n-1}$	// befok felső korlátok a csúcsokra
$i_0\ j_0$	// 0. él végpontjai
$i_1\ j_1$	// 1. él végpontjai
$\vdots$	$\vdots$
$i_{m-1}\ j_{m-1}$	// $(m-1)$. él végpontjai

Output fájl megoldható feladat esetén:

$k_0\ l_0$	// 0. irányított él kezdő- és végpontja
$k_1\ l_1$	// 1. irányított él kezdő- és végpontja
$\vdots$	$\vdots$
$k_{m-1}\ l_{m-1}$	// $(m-1)$. irányított él kezdő- és végpontja

Output fájl nem megoldható feladat esetén:

k_0	// 0. sértő csúcs
k_1	// 1. sértő csúcs
$\vdots$	$\vdots$
k_{q-1}	// $(q-1)$. sértő csúcs

$b(A) = 1$, $b(B) = 2$, $b(C) = 0$, $b(D) = -3$.

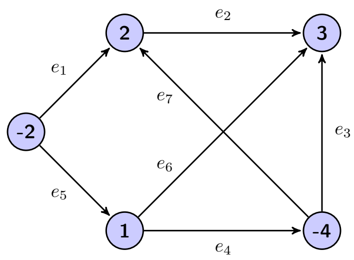
Operációkutatás II. gyakorlat 2024/2025 tavasz

6. feladatsor

Hálózati szimplex módszer

Ismételjük át: Milyen feladatot old meg a primál hálózati szimplex algoritmus? Mi az algoritmus inputja?

58. (GY) Tekintsük a $\max\{cx : \rho_x(v) - \delta_x(v) = b_v \ \forall v \in V, x \geq 0\}$ feladatot az alábbi gráfon:



A gráf csúcsaiban a b_v értékek szerepelnek. A mátrixból azt a sort hagyjuk el, mely a $b_v = -2$ értékű csúcshoz tartozik. Legyen $c = (1, 2, 3, 4, 3, 2, 1)$. Induljunk ki az $\bar{x} = (1, 3, 0, 0, 1, 0, 4)$ primál megengedett megoldásból. Mi lesz a kiinduláskori $\bar{y}$ és $\bar{c}$? A primál hálózati szimplex módszert használva mi lesz az optimális $\bar{x}$ és mi lesz az ehhez tartozó $\bar{y}$ és $\bar{c}$?

59. a) Mennyi egy irányított gráf incidencia-mátrixának rangja? b) Minek felelnek meg a hálózati szimplex módszerbeli bázisok? c) Hogyan számolható ki gyorsan egy bázishoz tartozó x? d) És egy y? e) Milyen fogalommal írhatók le a duális poliéder y megoldásai? (Tipp: használjuk a $-c$ vektort!) f) Amikor belép egy új él a bázisba, mi lesz a primál szimplex módszerben használt x'? g) Mi lesz a λ? h) Hogyan lehet egy lépés degenerált? i) Miért lehet itt báziscsere után az új y duálvektort gyorsabban kiszámolni, mint az általános esetben?

60. (korábbi ZH) A hálózati szimplex módszerben adott egy aktuális primál megengedett bázis. Bizonyítsuk be, hogy az y duális vektorhoz tartozó sértő élek halmaza független attól, hogy kezdetben melyik sort töröltük ki az incidencia mátrixból.

61. Legyen A egy *irányított gráf incidencia mátrixa*. Hogyan lehet megoldani a $\max\{cx : Ax = b,\ l \leq x \leq u\}$ feladatot az előadáson tanult hálózati szimplex módszerrel?

62. Legyen A egy *hálózati mátrix*. Bizonyítsuk be, hogy a $\max\{cx : a \leq Ax \leq b,\ l \leq x \leq u\}$ feladat visszavezethető maximális költségű áram feladatra.

63. Egy munkahelyen n ember dolgozik. Tudjuk, hogy a hét j-edik napján legalább l_j emberre van szükség, és az i-edik dolgozónak pontosan d_i napot kell dolgoznia a héten. Az i-edik dolgozó a j-edik napon c_{ij} hatékonysággal dolgozik. Hálózati szimplex módszerrel határozzuk meg a dolgozók olyan heti beosztását, amelyben az összhatékonyság maximális!

Operációkutatás II. gyakorlat 2024/2025 tavasz

7. feladatsor

Oszlopgenerálás

64. Tekintsük az előadáson szereplő többtermékes folyam problémát.

a) A költségfüggvény nemnegativitása helyett milyen általánosabb tulajdonság mellett marad megoldható a feladat?

b) Vegyük a feladat azon változatát, melyben az éleken adott egy ℓ alsó korlát is. Gondoljuk meg, hogy ilyenkor szükséges lehet irányított körökön is folyamot indítani! Hogyan kell változtatni az oszlopgeneráláson?

65. Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, c súly- és u kapacitásfüggvénnyel az éleken. Keressünk oszlopgenerálással maximális súlyú tört feszítőfa pakolást, azaz a feszítőfákhoz rendeljünk nemnegatív együtthatókat úgy, hogy minden e élre az őt tartalmazó feszítőfák együtthatóinak az összege legfeljebb $u(e)$.

66. (GY) Adott egy $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf. A vágás pakolás feladatban maximálisan sok olyan vágást keresünk, amelyeknek az élhalmaza diszjunkt. A feladatot a következő változókkal modellezzük: minden vágás $C \subseteq E$ élhalmazára bevezetünk egy-egy x_C bináris változót, mely azt mondja meg, hogy a C vágást kiválasztjuk-e.

a) Fogalmazzuk meg a problémát IP feladatként, változókként csak az x_C-ket használva.

b) Hogyan lehet a feladat LP relaxáltját oszlopgenerálással megoldani? Hogyan lehet hatékonyan megkeresni egy beveendő oszlopot?

Lineáris egészértékű programozás

67. Legyen $P = \{x : Ax \leq b\}$ poliéder és tekintsük a $Q = \text{conv}(P \cap \mathbb{Z})$ halmazt. Adjunk példát olyan P-re, melyre a) Q nem poliéder, b) Q poliéder, de sokkal több csúcsa van, mint P-nek (az arány bármilyen nagy lehet).

68. Egy üzem k fajta terméket gyárt m fajta erőforrásból. Az erőforrásokból adott mennyiség áll rendelkezésre, és tudjuk, hogy az egyes termékekből egy egység előállításához melyik erőforrásból mennyire van szükség. Ismerjük a termékek értékesítési egységárát is.

a) Írjunk fel IP modellt arra, hogy melyik termékből mennyit kell gyártani a bevétel maximalizálásához!

b) Vegyük hozzá a modellhez, hogy az i termék gyártásának az elindítása egyszeri s_i összegbe kerül.

69. Modellezzünk a Sudoku-feladványt IP-ként.

70. Modellezzük IP-ként a legnagyobb vágás feladatot irányítatlan $G = (V, E)$ gráfban, azaz keressünk olyan $S \subseteq V$ csúcshalmazt, amelyre S és $V \setminus S$ között a lehető legtöbb él megy.

71. (tavalyi ZH) A $G = (V, E)$ és a $G' = (V', E')$ gráfokat akkor nevezzük izomorfnak, ha létezik olyan $f : V \to V'$ bijekció, amelyre minden $u, v \in V$ csúcspárra $uv \in E$ pontosan akkor, ha $f(u)f(v) \in E'$. Írjunk fel egészértékű programot annak eldöntésére, hogy két gráf izomorf-e!

72.* Egy bútorlapszabászatban az i. megrendelő c_i összeget fizet egy a_i széles és b_i magas téglalap alakú bútorlapért, amelyben az erezet a b_i oldallal párhuzamosan fut ($i = 1, \ldots, n$). Egy darab a széles és b magas téglalap alakú alapanyaguk van, az erezet pedig a b oldallal párhuzamos. Keressünk olyan rendelés halmazt, amelyet ki lehet vágni az alapanyagból, és az összbevétel a lehető legnagyobb.

73. Írjuk fel a 68b feladat IP modelljét valamilyen modellezési nyelven (például a Python MIP vagy PuLP csomagját használva).

Operációkutatás II. gyakorlat 2024/2025 tavasz

8. feladatsor

Dinamikus programozás

74. Adott egy egészekből álló n hosszú sorozat. Keressünk leghosszabb monoton növő részsorozatot dinamikus programozással! Vezessük vissza a feladatot DAG-ban (directed acyclic graph) való leghosszabb út keresésére is! Mi a kapcsolat a két algoritmus között? *(2) Mutassuk meg, hogy a feladat megoldható $\mathcal{O}(n \log n)$ időben is.

75. Adott egy digráf az élein konzervatív súlyozással, s, t kijelölt csúcsok. Hogyan lehet a legrövidebb s-t út keresést modellezni DAG-ban való legrövidebb út keresésként?

76. (Korábbi ZH) A Futrinka utcában n ház épült egy sorban, mindnek adott egy c_i nemnegatív értéke. Egy rabló érkezik a környékre, és éppen azt tervezgeti, hová törjön be. Soha nem rabol ki szomszédos házakat, mert a lakók figyelmeztetik szomszédaikat a veszélyre. Segítsünk megtervezni a rablónak, hogy mely házakat rabolja ki a bevétele maximalizálásához!

77. (Korábbi ZH) Adott egy $G = (S, T; E)$ páros gráf, melynek csúcsai osztályonként egy-egy párhuzamos egyenespáron helyezkednek el. Adjunk dinamikus programozási algoritmust a legnagyobb, önmagát nem metsző párosítás kiszámolására.

78. Adott egy n jegyű szám. Hogyan tudjuk a legkevesebb számjegyet törölve palindromszámmá alakítani? (Palindromszámok olyan számok, amiknek a számjegyeit fordított sorrendben írva ugyanazt a számot kapjuk.)

79. Adott egy $T = (V, E)$ fa, egy kijelölt $r \in V$ gyökér, és minden $v \in V$-re egy $c_v \in \mathbb{R}$ súly. Egy **gyökeres részfa** egy olyan részfája T-nek, ami tartalmazza r-et. Egy V' csúcshalmazú gyökeres részfa súlya $\sum_{v \in V'} c_v$. Adjunk dinamikus programozási algoritmust, ami $O(|V|)$ lépésben megtalál egy maximális súlyú gyökeres részfát.

80. * Egy balatonfüredi béka szeretne átugrálni a Balaton túlpartjára lapulevélről levélre ugrálva, majd vissza a kiindulási helyére. A levelek egy sorban helyezkednek el, egymástól egyforma távolságra, és a béka legfeljebb k levelet tud átugrani egyszerre ($k \geq 1$). Ha egy levélre ráugrott, az eltörik, és visszafelé már nem lesz használható. Minden levélnek van egy valós számmal kifejezhető értéke. Adjunk dinamikus programozásra épülő algoritmust maximális összértékű jó ugrabugrálás meghatározására.

81. * A Duna egyenes partszakaszán n horgász ül egymás mellett. A vízben van k bója, mindegyikre adott, hogy onnan melyik horgász hány halat tud kifogni. Melyik horgász melyik bójához dobja be a horgát ahhoz, hogy a napi összes fogás a lehető legnagyobb legyen? Egy bójánál csak egy horog lehet, és természetesen a zsinórok nem keresztezhetik egymást.

Programozás

82. (2-2p) Project Euler feladatok: 185, 250, 345, 411.

Operációkutatás II. gyakorlat 2024/2025 tavasz

9. feladatsor

Közelítő (approximációs) algoritmusok

83. (GY) Adjunk 2-közelítő algoritmust egy irányított gráfban egy olyan legnagyobb élszámú részgráf megkeresésére, mely nem tartalmaz irányított kört!

84. (GY) Egy gráfban maximális méretű párosítást akarunk keresni. Milyen approximációt adnak a következő algoritmusok? Az éleket tetszőleges sorrendbe rendezzük és

a) az üres halmazból indulunk ki, mohó módon egyesével bevesszük az éleket úgy, hogy párosítás maradjon;

b) az összes élből indulunk ki, mohó módon törlünk éleket úgy, hogy ha egy él törlése után mindkét pont izolálttá válna, akkor ezt az élt nem töröljük.

85. Előadáson szerepelt egy-egy 2-közelítő algoritmus a minimális elemszámú ill. költségű lefogó ponthalmaz feladatra. Mutassuk meg, hogy a minimális költséges verzióra adott algoritmus általánosítása a minimális pontszámúnak (azaz ha minden csúcs azonos értékű, a költséges algoritmus ugyanazokat a lépéseket teszi, mint a másik).

86. Adott az $S = \{1, \ldots, n\}$ alaphalmaznak m darab részhalmaza: $A_1, \ldots, A_m$ és minden részhalmazhoz tartozik egy $c(A_i)$ pozitív költség. Minimális összköltségű fedést keresünk, azaz olyan részhalmazokat, melynek uniója egyenlő az S alaphalmazzal. Írjuk fel ezt IP feladatként! Ha a halmazrendszerben a maximális fok Δ, hogyan lehet egy optimális törtmegoldásból az IP-feladat egy Δ-közelítő megoldásához jutni?

Operációkutatás II. gyakorlat 2024/2025 tavasz
5. feladatsor

Játékelmélet

87. (GY) Mikor van egy kétszemélyes 0 összegű játéknak tiszta Nash-egyensúlya?

88. (GY) Tekintsük az alábbi kétszemélyes 0 összegű játékot, ahol az A mátrix a sorjátékos hasznossági mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Keressünk tiszta Nash-egyensúlyt a fenti játékban. Van-e valamelyik játékosnak dominált stratégiája? Mi történik, ha az ilyen stratégiákat töröljük a mátrixból, és ezt a lépést megismételjük?

b) Az oszlopjátékos az egyes stratégiákat $(0,5; 0,1; 0,2; 0,2)$ eséllyel választja. Mi a sorjátékos legjobb válasza? Az előző oszlopstratégia mellé a sorjátékosé $(0,3; 0,2; 0,25; 0,25)$. Mennyi a várható nyereményük?

89. (0,5) A fej vagy írás játék egy változata: két játékos egyszerre mutat 1-est vagy 2-est. Ha az összeg páros, az első játékos nyer a másiktól annyit, amennyi az összeg, ha páratlan, akkor pedig a második. Határozzuk meg a Nash-egyensúly(oka)t!

90. (0,5) Tekintsük azt a kétszemélyes játékot, ahol az első játékos hasznossági mátrixa A, a másodiké pedig B (mindkettőnél a sorok az első játékos stratégiái):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

0-összegű ez a játék? Szimmetrikus? Van-e valamelyik játékosnak domináns stratégiája? Az első játékos egyes stratégiájára van-e a másiknak legjobb válasza? Számoljuk ki az összes kevert Nash-egyensúlyt.

91. (1) Előadáson szerepel a domináns stratégia fogalma. Általánosítsuk a fogalmat kevert stratégiákra! Mutassunk példát olyan játékra, ahol tisztán domináló stratégia nincs, de kevert értelemben van!

92. (1,5 maximális pont életszerű, izgalmas példára jár) Elemezzünk egy életből vett helyzetet: írjuk le szövegesen, majd hasznossági mátrixszal is! Elemezzük játéktulajdonságok, egyensúlyi helyzetek szempontjából a szituációt!

Lineáris egészértékű programozás

93. (1) Legyen $P = \{x : Ax \leq b\}$ poliéder és tekintsük a $Q = \text{conv}(P \cap \mathbb{Z})$ halmazt. Adjunk példát olyan P-re, melyre a) Q nem poliéder, b) Q poliéder, de sokkal több csúcsa van, mint P-nek (az arány bármilyen nagy lehet).

94. (0,5-0,5) Egy üzem k fajta terméket gyárt m fajta erőforrásból. Az erőforrásokból adott mennyiség áll rendelkezésre, és tudjuk, hogy az egyes termékekből egy egység előállításához melyik erőforrásból mennyire van szükség. Ismerjük a termékek értékesítési egységárát is.

a) Írjunk fel IP modellt arra, hogy melyik termékből mennyit kell gyártani a profit maximalizálásához!

b) Vegyük hozzá a modellhez, hogy az i termék gyártásának az elindítása egyszeri s_i összegbe kerül.

95. (1) Modellezzünk a Sudoku-feladványt IP-ként.

96. (1) Modellezzük IP-ként a legnagyobb vágás feladatot irányítatlan $G = (V, E)$ gráfban, azaz keressünk olyan $S \subseteq V$ csúcshalmazt, amelyre S és $V \setminus S$ között a lehető legtöbb él megy.

97.*Egy bútorlapszabászatban az i. megrendelő c_i összeget fizet egy a_i széles és b_i magas téglalap alakú bútorlapért, amelyben az erezet a b_i oldallal párhuzamosan fut $(i = 1, \ldots, n)$. Egy darab a széles és b magas téglalap alakú alapanyaguk van, az erezet pedig a b oldallal párhuzamos. Keressünk olyan rendelés halmazt, amelyet ki lehet vágni az alapanyagból, és az összbevétel a lehető legnagyobb.

98. Írjuk át a $\min\{\max\{x_i : x_i \text{ koordinátája } x\text{-nek}\} : Ax \leq b\}$ feladatot lineáris optimalizálási feladattá!

99.*Írjuk fel a minimális súlyú Hamilton-kör problémát egészértékű optimalizálási feladatként úgy, hogy a változók és az egyenlőtlenségek száma a gráf méretében polinomiális legyen.

100. (2p) Írjuk fel a 76b feladat IP modelljét valamilyen modellezési nyelven. (Tipp: az AMPL nyelv, és a Python MIP ill. PuLP csomagjai kényelmesen használhatóak.)

Operációkutatás II. gyakorlat 2024/2025 tavasz

6. feladatsor

Dinamikus programozás

101. (0.5) Adott egy egészekből álló n hosszú sorozat. Keressünk leghosszabb monoton növő részsorozatot dinamikus programozással! Vezessük vissza a feladatot DAG-ban (directed acyclic graph) való leghosszabb út keresésére. Mi a kapcsolat a két algoritmus között? *(2) Mutassuk meg, hogy a feladat megoldható $\mathcal{O}(n \log n)$ időben is.

102. (0.5) Adott egy digráf az élein konzervatív súlyozással, s, t kijelölt csúcsok. Hogyan lehet a legrövidebb $s - t$ út keresést modellezni DAG-ban való legrövidebb út keresésként?

103. (1) Adott egy n jegyű szám. Hogyan tudjuk a legkevesebb számjegyet törölve palindromszámmá alakítani? (Palindromszámok olyan számok, amiknek a számjegyeit fordított sorrendben írva ugyanazt a számot kapjuk.)

104. (1) Adott néhány ház $(H_1, \ldots, H_n)$ egy sorban, mindet szeretnénk a piros, kék és zöld színek valamelyikére befesteni, de szomszédos házakat nem festhetünk azonos színűre. Minden H_i háznak adott egy-egy $c_{i,p}, c_{i,k}, c_{i,z}$ értéke, melyek azt fejezik ki, hogy az adott szín mennyire szép a házon. Keressünk maximális összértékű festést!

105. (1) Adott egy $T = (V, E)$ fa, egy kijelölt $r \in V$ gyökér, és minden $v \in V$-re egy $c_v \in \mathbb{R}$ súly. Egy **gyökeres részfa** egy olyan részfája T-nek, ami tartalmazza r-et. Egy V' csúcshalmazú gyökeres részfa súlya $\sum_{v \in V'} c_v$. Adjunk dinamikus programozási algoritmust, ami $O(|V|)$ lépésben megtalál egy maximális súlyú gyökeres részfát.

106.*Egy balatonfüredi béka szeretne átugrálni a Balaton túlpartjára lapulevélről levélre ugrálva, majd vissza a kiindulási helyére. A levelek egy sorban helyezkednek el, egymástól egyforma távolságra, és a béka legfeljebb k levelet tud átugrani egyszerre $(k \geq 1)$. Ha egy levélre ráugrott, az eltörik, és visszafelé már nem lesz használható. Minden levélnek van egy valós számmal kifejezhető értéke. Adjunk dinamikus programozásra épülő algoritmust maximális összértékű jó ugrabugrálás meghatározására.

107.*A Duna egyenes partszakaszán n horgász ül egymás mellett. A vízben van k bója, mindegyikre adott, hogy onnan melyik horgász hány halat tud kifogni. Melyik horgász melyik bójához dobja be a horgát ahhoz, hogy a napi összes fogás a lehető legnagyobb legyen? Egy bójánál csak egy horog lehet, és természetesen a zsinórok nem keresztezhetik egymást. (0.5 pontért beadható az az eset, amikor a bóják egy egyenesen helyezkednek el.)

Programozás

108. (2-2) Project Euler feladatok: 185, 250, 345, 411.

Operációkutatás II. gyakorlat 2024/2025 tavasz

8. feladatsor

Közelítő (approximációs) algoritmusok

109. Adjunk $\frac{1}{2}$-közelítő algoritmust egy irányított gráfban egy olyan legnagyobb élszámú részgráf megkeresésére, mely nem tartalmaz irányított kört!

110. Egy gráfban maximális méretű párosítást akarunk keresni. Milyen approximációt adnak a következő algoritmusok: rendezzük az éleket tetszőleges sorrendbe és

a) az üres halmazból indulunk ki, mohó módon egyesével bevesszük az éleket úgy, hogy párosítás maradjon;

b) az összes élből indulunk ki, mohó módon törlünk éleket úgy, hogy ha egy él törlése után mindkét pont izolálttá válna, akkor ezt az élt nem töröljük.

111. Előadáson szerepelt egy-egy 2-közelítő algoritmus a minimális elemszámú ill. költségű lefogó ponthalmaz feladatra. Mutassuk meg, hogy a minimális költséges verzióra adott algoritmus általánosítása a minimális pontszámúnak (azaz ha minden csúcs azonos értékű, a költséges algoritmus ugyanazokat a lépéseket teszi, mint a másik).

112. Az n pontú teljes gráf élein adott egy c pozitív költségfüggvény, amely kielégíti a háromszög-egyenlőtlenséget. Adott továbbá a csúcsoknak egy U részhalmaza. *Steiner fának* nevezünk egy olyan fa részgráfot, aminek csúcshalmaza tartalmazza U-t. Mutassuk meg, hogy egy minimmális költségű Steiner fa minden levele U-beli csúcs. Mutassunk polinomiális idejű 2-közelítő algoritmust minimális költségű Steiner fa megtalálására.

113. Adott az $S = \{1, \dots, n\}$ alaphalmaznak m darab részhalmaza: $A_1, \dots, A_m$ és minden részhalmazhoz tartozik egy $c(A_i)$ pozitív költség. Minimális összköltségű fedést keresünk, azaz olyan részhalmazokat, melynek uniója egyenlő az S alaphalmazzal. Írjuk fel ezt IP feladatként! Ha a halmazrendszerben a maximális fok Δ, hogyan lehet egy optimális törtmegoldásból az IP-feladat egy Δ-közelítő megoldásához jutni?

114. Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, és egy $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény. Adjunk a maximális súlyú vágás feladatra 2-közelítő algoritmust!

Programozás

115. (3-3) Project Euler feladatok: 185, 250, 345, 411.

116. (GY) Manhattanben egy csoport turista az 59th Street és 8th Avenue sarkáról a 42nd Street and Lexington Avenue sarkán lévő Chrysler Building-hez szeretne eljutni úgy, hogy sose távolodjanak a céltól, de közben a lehető legtöbb nevezetességet csodálhassák meg (az utcák szerekezete egy négyzetrács). Dinamikus programozással keressünk egy optimális útvonalat!