Problems

Yu Xiang, University of Science and Technology of China[1]

January 16, 2018

[1]Please mail to xy123@mail.ustc.edu.cn

附录 A

Gamma 函数与 Beta 函数

A.1 $\Gamma(z)$ 与 $\mathrm{B}(z,w)$

[1] 对满足 $\Re z>0$ 的复数 z, 定义

$$\Gamma\left(z\right)=\int_0^{\infty}t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

$\Gamma(z)$ 称为 Gamma 函数, 也称为 Euler 第二积分. 从定义看, $\Gamma(z)$ 是右半平面 $\Re z>0$ 上的解析函数. 其基本性质为

$$\Gamma\left(z+1\right)=z\Gamma\left(z\right)\quad 和 \quad\Gamma\left(n\right)=\left(n-1\right)!,$$

这里 z 是负数, 而 n 为正整数, 这由分部积分即可证明.

另一个重要性质是

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}.$$

对于实部为正的两个复数 z,w, 定义

$$\mathrm{B}\left(z,w\right)=\int_0^1t^{z-1}\left(1-t\right)^{w-1}\mathrm{d}t=\int_0^1t^{w-1}\left(1-t\right)^{z-1}\mathrm{d}t.$$

$\mathrm{B}(z,w)$ 称为 Beta 函数, 也称为 Euler 第一积分, 它与 Gamma 函数之间的关系为

$$\mathrm{B}\left(z,w\right)=\frac{\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(w\right)}{\Gamma\left(z+w\right)},$$

证明如下

$$\begin{aligned}\Gamma\left(z+w\right)\mathrm{B}\left(z,w\right)&=\Gamma\left(z+w\right)\int_0^1t^{w-1}\left(1-t\right)^{z-1}\mathrm{d}t\\&=\Gamma\left(z+w\right)\int_0^{\infty}u^{w-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{z+w}\mathrm{d}u\quad t=\frac{u}{1+u}\\&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}u^{w-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{z+w}v^{z+w-1}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v\mathrm{d}u\end{aligned}$$

[1]这里参考了 GTM249 Fourier analysis

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{w-1} s^{z+w-1} \mathrm{e}^{-s(u+1)} \mathrm{d}s\mathrm{d}u \quad s = \frac{v}{1+u} \\
&= \int_0^\infty s^z \mathrm{e}^{-s} \int_0^\infty (us)^{w-1}\, \mathrm{e}^{-su} \mathrm{d}u\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\infty s^z \mathrm{e}^{-s} \Gamma(w)\, \mathrm{d}s = \Gamma(z)\, \Gamma(w)
\end{aligned}
$$

A.2 Stirling 公式

Stirling 公式给出了 Gamma 函数在 $x \to \infty$ 时的渐近性质

$$
\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \sqrt{2\pi x}} = 1.
$$

利用变量替换 $t = x + sx\sqrt{\frac{2}{x}}$ 可得

$$
\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^x \mathrm{d}t = \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \sqrt{2x} \int_{-\sqrt{x/2}}^\infty \frac{\left(1 + s\sqrt{2/x}\right)^x}{\mathrm{e}^{2s\sqrt{x/2}}} \mathrm{d}s.
$$

令 $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$, 我们得到

$$
\frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \sqrt{2x}} = \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{(1+s/y)^y}{\mathrm{e}^s}\right)^{2y} \mathbf{1}_{(-y,\infty)}(s)\, \mathrm{d}s.
$$

这里 $\mathbf{1}$ 为特征函数, 下面证明最后的积分收敛到 $\sqrt{\pi}$. 首先不难得到

$$
\lim_{y\to\infty} \left(\frac{(1+s/y)^y}{\mathrm{e}^s}\right)^{2y} = \mathrm{e}^{-s^2}.
$$

齐次当 $y \geqslant 1$ 时,

$$
\left(\frac{(1+s/y)^y}{\mathrm{e}^s}\right)^{2y} \leqslant \begin{cases} \frac{(1+s)^2}{\mathrm{e}^s}, & s \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-s^2}, & -y < s < 0 \end{cases}
$$

再由 $y \to \infty$ 时, $\mathbf{1}_{(-y<s<\infty)} \to 1$, 结合 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$
\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \sqrt{2x}} = \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{(\mathbf{1}+s/y)^y}{\mathrm{e}^s}\right) 1_{(-y,\infty)}(s)\, \mathrm{d}s = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s = \sqrt{\pi}.
$$

更为精确的的 Stirling 公式为

$$
\ln\Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r(2r-1)} + O\left(x^{-2n-1}\right),
$$

这里 B_r 为第 r 个 Bernoulli 数.

A.3 Euler 极限公式

对正整数 n 和正实部的复数 z, 考虑函数

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \mathrm{d}t.$$

首先由分部积分公式可得

$$\Gamma_n(z) = \frac{n}{nz} \frac{n-1}{n(z+1)} \frac{n-2}{n(z+2)} \cdots \frac{1}{n(z+n-1)} \int_0^n t^{z+n-1} \mathrm{d}t = \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

下面我们证明

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(z) = \Gamma(z).$$

把 $\Gamma(z) - \Gamma_n(z)$ 写成三部分

$$\begin{aligned}
I_1(z) &= \int_n^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t, \\
I_2(z) &= \int_{\frac{n}{2}}^n \left(\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right) t^{z-1} \mathrm{d}t, \\
I_3(z) &= \int_0^{\frac{n}{2}} \left(\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right) t^{z-1} \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

显然当 $n \to \infty$ 时, $I_1(z) \to 0$. 对 I_2, 有 $0 \leqslant t < n$, 由 Taylor 公式可得

$$\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) = -t - L,$$

其中

$$L = \frac{t^2}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{3n} + \frac{t^2}{4n^2} + \cdots\right).$$

因此可得

$$0 < \mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-L}\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

因此当 $n \to \infty$ 时, $I_2(z) \to 0$. 对 I_3 有 $\frac{t}{n} \leqslant 12$, 意味着

$$L \leqslant \frac{t^2}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)2^{k-1}} = \frac{t^2}{n} c.$$

因此对 $\frac{t}{n} \leqslant 12$ 有

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-t}\left(1 - \mathrm{e}^{-L}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-t} L \leqslant \mathrm{e}^{-t} \frac{ct^2}{n}.$$

因此可得

$$|I_3(z)| \leqslant \frac{c}{n} \Gamma(\Re(z) + 2),$$

这就意味着当 $n \to \infty$ 时 $I_3 \to 0$, 因此我们得到了 Gamma 函数的另一个表达式——Euler 极限公式

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

进一步, 由 $\Gamma_n(z)$ 的表达式可得

$$1 = \Gamma_n(z)\, z \exp\left\{z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}-\ln n\right)\right\}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}.$$

令 $n\to\infty$, 我们得到 Euler 极限公式的 Weirstrass 无穷乘积形式

$$1 = \Gamma(z)\, z\mathrm{e}^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}.$$

由 Euler 极限公式可得到

$$\frac{1}{|\Gamma(x+\mathrm{i}y)|^2} = \frac{1}{|\Gamma(x)|^2}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{(k+x)^2}\right),$$

其中 $x\in\mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,\cdots\}$, $y\in\mathbb{R}$.

A.4 余元公式与乘积公式

余元公式是指等式

$$\frac{1}{|\Gamma(x+\mathrm{i}y)|^2} = \frac{1}{|\Gamma(x)|^2}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{(k+x)^2}\right).$$

乘积公式是指

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}\, n^{\frac{1}{2}-nz}\,\Gamma(nz)\,.$$

以上两个式子都可以利用 Euler 极限公式证明.

附录 B

Dirichlet 积分的计算方法

Dirichlet 积分, 是指下面的广义积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{2}.$$

方法一　利用二重积分交换次序.

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\sin x\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

方法二　利用含参变量积分：考虑积分 $I\left(\alpha\right)=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x\ (\alpha\geqslant 0)$, 则

$$I'\left(\alpha\right)=-\int_0^{\infty}\sin x\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

注意到 $I(+\infty)=0$, 因此

$$I\left(\alpha\right)=\int_{\alpha}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}-\arctan\alpha.$$

因此 $I=I(0)=\frac{\pi}{2}$.

方法三　利用无穷级数．把原积分写成级数形式

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

令 $n=2m$ 或 $n=2m-1$ 时, 再作换元 $x=m\pi+t$ 或 $x=m\pi-t$, 不难得知

$$\begin{aligned}\int_{2m\frac{\pi}{2}}^{(2m+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x&=(-1)^m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{m\pi+t}\mathrm{d}t,\\\int_{(2m-1)\frac{\pi}{2}}^{2m\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x&=(-1)^{m-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{m\pi-t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因此我们得到

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\left(\frac{1}{t}+\sum_{m=1}^{\infty}(1-)^m\frac{2t}{t^2-m^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

其中我们利用了有理分式展开式 $\dfrac{1}{\sin t} = \dfrac{1}{t} + \sum\limits_{m=1}^{\infty} (1-)^m \dfrac{2t}{t^2 - m^2\pi^2}\ (t \neq m\pi)$.

方法四 留数定理. 考虑复积分 $\oint_L \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z$ 以及由 $y \geqslant 0$ 和 $\varepsilon \leqslant |z| \leqslant R$ 组成的半圆环区域的边界, 利用留数定理不难得到

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Im\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_L \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\Im\left(\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}, z=0\right)\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

方法五 利用 Laplace 变换. 首先有

$$F(s) = \mathcal{L}(\sin x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-sx}\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{1+s^2}.$$

由此得到

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\mathcal{L}(\sin x)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\infty}\frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}.$$

方法六 利用 Fourier 变换. 考虑函数

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ \frac{1}{2}, & |t| = 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

则 $f(t)$ 的 Fourier 变换为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{i}x} = \frac{2\sin x}{x}.$$

于是由 Fourier 反变换公式得

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\cos(xt)}{x}\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\sin xt}{x}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\cos(xt)}{x}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\cos(xt)}{x}\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & |t| < 1 \\ \frac{\pi}{2}, & |t| = 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}.$$

取 $t = 1$ 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

附录 C

Basel 问题的求解

Basel 问题指的是级数

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

的求解. 这个级数两边除以 4, 等价于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{24}$, 于是也等价于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

下面我们给出它的多种计算方法. [1]

方法一　Euler 的证明：首先注意到

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots.$$

从而

$$\frac{\sin(x)}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots.$$

显然可以得知 $\frac{\sin x}{x}=0$ 的所以根为 $x=n\pi,(n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$. 于是可以假定 [2].

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{x}&=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots\\&=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.\end{aligned}$$

考虑此无穷乘积的 x^2 项的系数可知

$$-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.[3]

方法二　一个较为初等的证明

[1] http://www.cnblogs.com/misaka01034/p/BaselProof.html 方法摘自此博客, 感谢博主整理

[2] 这个无穷乘积 Euler 后来也给出了严格的证明

[3] Euler 用这种方法还计算出了 $\zeta(4),\zeta(6)$ 等更高的偶次方的和

引理 C.1. 设 $\omega_m = \dfrac{\pi}{2m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, 则

$$\cot^2 \omega_m + \cot^2(2\omega_m) + \cdots + \cot^2(m\omega_m) = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

证明 由于

$$\begin{aligned}
\sin n\theta &= \binom{n}{1} \sin\theta \cos^{n-1}\theta - \binom{n}{3} \sin^3\theta \cos^{n-3}\theta + \cdots \pm \sin^n\theta \\
&= \sin^n\theta \left(\binom{n}{1} \cot^{n-1}\theta - \binom{n}{3} \cot^{n-3}\theta + \cdots \pm 1 \right)
\end{aligned}$$

令 $n = 2m+1$, 则 $\cot^2\omega_m, \cot^2(2\omega_m), \cdots, \cot^2(m\omega_m)$ 刚好是多项式

$$\binom{n}{1} x^m - \binom{n}{3} x^{m-1} + \cdots \pm 1$$

的所有不同实根, 从而利用 Vieta 定理就完成引理的证明. □

再根据三角不等式 $\sin x < x < \tan x$ 在 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 成立, 因此 $\cot^2 x < \dfrac{1}{x^2} < 1 + \cot^2 x$. 于是由上述引理可得

$$\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < \frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2} + \frac{m\pi^2}{(2m+1)^2}.$$

令 $m \to \infty$, 利用夹逼准则即证.

方法三 利用数学分析方法. 首先注意到恒等式

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 x^{n-1} y^{n-1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是利用单调收敛定理可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} y^{n-1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

利用二重积分换元 $(x, y) = (u - v, u + v)$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \iint_S \frac{1}{1-u^2+v^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

其中 S 是由点 $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $(1,0)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ 构成的正方形. 利用正方形的对称性可得

$$\begin{aligned}
&2 \iint_S \frac{1}{1-u^2+v^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
=&4 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{u} \frac{1}{1-u^2+v^2} \mathrm{d}v\mathrm{d}u + 4 \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
=&4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \mathrm{d}u + 4 \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&4\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u+4\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\arcsin u}{2}\right)\mathrm{d}u\\
=&2\left[\arcsin\left(u^2\right)\right]\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\left[\pi\arcsin u-\arcsin\left(u^2\right)\right]\Big|_{\frac{1}{2}}^1\\
=&\frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{36}=\frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}
$$

方法四 数学分析方法, 用上一种方法的结论, 但是现在计算

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1-x^2y^2}.$$

换元

$$(u,v)=\left(\arctan x\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}},\arctan x\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}\right)$$

即 $(x,y)=\left(\frac{\sin u}{\cos v},\frac{\sin v}{\cos u}\right)$. 次变换的 Jacob 行列式为

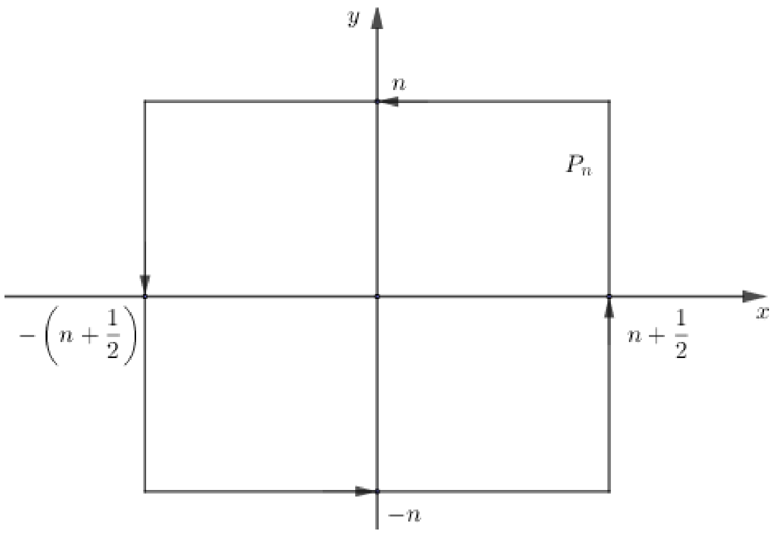
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin u\sin v}{\cos^2 v}\\ \frac{\sin u\sin v}{\cos^2 u} & \frac{\cos v}{\cos u}\end{vmatrix}=1-\frac{\sin^2 u\sin^2 v}{\cos^2 u\cos^2 v}=1-x^2y^2.$$

从而

$$\frac{3}{4}\zeta(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\iint_A\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{\pi^2}{8}.$$

其中 $A=\left\{(u,v)\,\middle|\,u>0,v>0,u+v<\frac{\pi}{2}\right\}$, 从而 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$.

方法五 留数法. 考虑函数 $f(z)=\frac{\cot(\pi z)}{z^2}$, 积分路径 P_n 为中心在原点的长方形如下图



与实轴交点为 $\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)$, 与虚轴交点为 $\pm n\mathrm{i}$. 而若 $\pi z=x+\mathrm{i}y$, 直接计算可得

$$|\cot(\pi z)|^2=\frac{\cos^2 x+\sinh^2 y}{\sin^2 x+\sinh^2 y}.$$

因此 $|\cot(\pi z)| < 2$ 对每根积分线都成立, 而此时 $|z| \geqslant n$, 故

$$\left|\oint_{P_n} \frac{\cot}{(\pi z)} z^2 \mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{2}{n^2}(8n+2).$$

当 $n \to \infty$ 时, 该积分趋于 0.

利用留数定理有

$$\lim_{n\to\infty} \oint_{P_n} \frac{\cot(\pi z)}{z^2} \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^2}, z = k\right).$$

不难得知

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^2}, z = 0\right) = -\frac{\pi}{3}, \ \operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^2}, z = k\right) = \frac{1}{\pi k^2} \, (k \neq 0, k \in \mathbb{Z}) \, .$$

因此 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2} = \frac{\pi}{3}$, 即证.

方法六 复积分方法. 考虑积分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2\cos x) \, \mathrm{d}x.$$

利用 Euler 公式可得 $2\cos x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})$, 则

$$\ln(2\cos x) = \ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right) = \mathrm{i}x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right).$$

代入原积分可得

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{i}x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\right) \mathrm{d}x = \mathrm{i}\frac{\pi^2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{i}\frac{\pi^2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}nx} \mathrm{d}x = \mathrm{i}\frac{\pi^2}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2\mathrm{i}n^2} \left(1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}n}\right) \\
&= \mathrm{i}\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{3}{4}\zeta(2)\right)
\end{aligned}$$

由于 I 是实数, 右边是纯虚数, 因此两边都是 0, 这就证得了结论, 同时还得到一个副产品

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) \, \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

方法七 Taylor 级数. 利用反正弦函数 $\arcsin x$ 的 Taylor 级数

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

对 $|x| \leqslant 1$ 都成立, 从而令 $x = \sin t$ 可得

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} t}{2n+1}$$

对 $|t| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 成立. 再利用公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

于是把等式两边在 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 积分得

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

这也得到了结果.

方法八　Fourier 级数. 考虑函数 $f(x), x \in (-\pi, \pi)$ 及其 2π 周期延拓, 将其 Fourier 展开可得 $x \in (-\pi, \pi)$ 时,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx \right).$$

令 $x = 0$ 即可证得.

方法九　Fourier 级数考虑函数 $f(x) = x, x \in (-\pi, \pi)$, 同样作 2π 周期延拓后得到 Fourier 级数

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right).$$

利用 Parseval 等式可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x.$$

即

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2.$$

方法十　Poisson 求和公式. 考虑函数 $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, 则 f 的 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|x|} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \xi x} \mathrm{d}x = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \xi^2}.$$

利用 Poisson 求和公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a^2 + 4\pi^2 k^2} = \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|x|} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2a} \coth a - \frac{1}{a^2}.$$

上式中令 $ato0$ 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2} = \lim_{a \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a^2 + 4\pi^2 k^2} = \lim_{a \to 0} \left(\frac{1}{2a} \tanh a - \frac{1}{a^2} \right) = \frac{1}{12}.$$

方法十一　概率论方法. 设 X_1, X_2 独立同分布, 概率密度均为 $p(x) = \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}(x > 0)$. 令 $Y = \dfrac{X_1}{X_2}$, 则 Y 的概率密度为

$$p_Y(y) = \int_0^{\infty} x p_{X_1}(xy) p_{X_2}(x) \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2y^2)(1+x^2)} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi^2(y^2-1)}\left[\log\left(\frac{1+x^2y^2}{1+x^2}\right)\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{2}{\pi^2}\frac{\log(y^2)}{y^2-1} = \frac{4}{\pi^2}\frac{\log(y)}{y^2-1}.$$

由于 X_1, X_2 独立同分布, 所以 $P(Y>1) = P(X_1 > X_2) = \dfrac{1}{2}$, 则

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln y}{y^2-1}\mathrm{d}y.$$

即

$$\frac{\pi^2}{8} = -\int_0^1 \frac{\ln y}{1-y^2}\mathrm{d}y = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} y^{2n}\ln y\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

方法十二　三角恒等式. 从等式

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\pi+x}{2}}\right)$$

出发就可得到

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{4}}\right) = \cdots \\ &= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

又由于当 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 时, $\dfrac{1}{\sin^2 x} > \dfrac{1}{x^2} > \dfrac{1}{\tan^2 x}$. 现在令 $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$, 对 $k = 0, 1, \cdots, 2^{n-1}-1$ 求和得

$$1 > \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{(2k+1)^2} > 1 - \frac{1}{2^n}.$$

令 $n \to \infty$ 即证.

附录 D

$\zeta(-1) = -\dfrac{1}{12}$ 的证明

虽然 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 在 $\Re(z) > 1$ 才收敛, 但在解析延拓意义下也可以得到 $\Re(z) \leqslant 1$ 的值, 这里证明 $\zeta(s) = 1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}$.

方法一 考虑下面两个式子

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots, \quad T = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots.$$

利用发散级数求和方法, 考虑 Taylor 级数

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + c \ldots$$

将其应用到 x 的发散区域, 令 $x = 1$ 可得 $T = \frac{1}{4}$, 则

$$T = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots) - 2\,(2 + 4 + 6 + \cdots) = (1 + 2 + 3 + \cdots)\,(1 - 4) = -3S.$$

于是 $S = -\frac{T}{3} = -\frac{1}{12}$.

方法二 Riemann ζ 函数满足反射公式

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s)\zeta(s).$$

令 $x = 2$ 可得

$$\zeta\,(-1) = 2\,(2\pi)^{-2} \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) \Gamma\,(2)\,\zeta\,(2) = \frac{1}{2\pi^2} \cos\,(\pi)\,\frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}.$$