

1 160823

(160823) 证明恒等式 $\left[x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

2 160824

(160824) 计算曲线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2\geqslant a^2$ 所围成的面积.

3 160825

(160825) 试证: 对任意无理数 α 和任意正整数 n, 都存在正整数 q_n 和整数 p_n 使得 $\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{nq_n}$, $\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}$.

4 160826

(160826) 设 α 是无理数, 试证: $A=\{m+n\alpha;m,n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 也即: 任何一个开区间至少含有 A 中一元.

5 160827

(160827) 试证: $\{\cos n;n\in\mathbb{N}\}$ 在 $[-1,1]$ 上稠密.

6 160828

(160828) 设 $\alpha\in(0,1)$, 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]$.

7 160829

(160829) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2016}}{n^x-(n-1)^x}=\frac{1}{2017}$, 试求 x.

8 160830

(160830) 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1+n\cos n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}}$.

9 160831

(160831) 定义数列 $\{a_n\}$ 的上下极限分别为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n=\inf\limits_{n\geqslant1}\sup\limits_{k\geqslant n}a_k$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n=\sup\limits_{n\geqslant1}\inf\limits_{k\geqslant n}a_k$. 试证: $\{a_n\}$ 收敛的充要条件为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n=$ 且当极限存在时, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$.

10 160901

(160901) 试证: 对正数列 $\{a_n\}$ 有 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n}$.

11 160902

(160902) 设正数列 $\{a_n\}$ 适合 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 1$, 试证: $\{a_n\}$ 收敛.

12 160903

(160903) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 为数列且 $\{a_n\}$ 收敛, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n, \quad \varliminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n.$$

13 160904

(160904) 试求 $\displaystyle\int \frac{1 - x^2\cos x}{(1 + x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.

14 160905

(160905) 设 $f(x) = \dfrac{1 + x\mathrm{e}^x}{1 + x}$, 试求 $f^{(5)}(0)$.

15 160906

(160906) 试证: 函数 $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_x^\infty \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ 在 $x > 0$ 时严格单调减少, 且成立 $\dfrac{x}{x^2+1} < f(x) < \dfrac{1}{x}$.

16 160907

(160907) 设 f 在 $[0,1]$ 上可积, 且有 $0 < m \leqslant f(x) \leqslant M$, 试证:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

17 160908

(160908) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的非负函数, 适合 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. 试证:

$$x > 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{x^2}{1+x^2}; \quad x < 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1+x^2}.$$

18 160909

(160909) 设 $M \geqslant 1$ 是一正数, μ 是一个概率测度, 试证: 对 $0 \leqslant f \leqslant M$, 有

$$\left|\ln \int f\,\mathrm{d}\mu - \int \ln f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \frac{M\,\|g\|_{L^2}}{\|f\|_{L^1}},$$

其中 $g = \ln f - \int \ln f\,\mathrm{d}\mu$.

19 160910

(160910) 试举一个不满足 A_1 公理 (A_2 公理) 的拓扑空间.

20 160911

(160911) 试举一个拓扑空间 X, 其有一子集 Y, 是有界闭的, 但不是紧致的.

21 160912

(160912) 平面上的两个互不相交的闭集的距离一定大于零么?

22 160913

(160913) 设 $0 < F \in C[a,b]$ 单调减少, 试证: $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b xF^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b F^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b xF(x)\,\mathrm{d}x$.

23 160914

(160914) 设 $[a,b]$ 上的函数 f,g 适合 $[f(x)-f(y)]\cdot[g(x)-g(y)] \geqslant 0,\quad \forall\, x,y \in [a,b]$. 又设 $0 < p \in \mathcal{R}[a,b]$, 试证:

$$\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

24 160915

(160915) 设 $f \in C[0,1]$ 适合 $0 \leqslant f < 1$, 试证: $\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}{1-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$.

25 160916

(160916) 设 $f \in C^{2n}[a,b]$ 适合 $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$, $k = 0,1,2,\cdots,n-1$. 试证:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(n!)^2(b-a)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(2n)}(x)|.$$

26 160917

(160917) 设函数 $f,g \in C[a,b]$ 适合 $f(x) \not\equiv 0$, $g > 0$. 记 $d_n = \int_a^b |f(x)|^n g(x)\,\mathrm{d}x,\quad n = 1,2,\cdots$. 试证: 数列 $\left\{\frac{d_{n+1}}{d_n}\right\}$ 收敛, 并求出其极限.

27 160918

(160918) 试求 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$.

28 160919

(160919) 对 $a \in \mathbb{R}$, 试证: $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\sqrt{2k-1}}{n}a^2\right) = \mathrm{e}^{-\frac{a^4}{2}}$.

29 160920

(160920) 设 f 是 $[1,\infty)$ 上的非负单调减少函数, 令 $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$, $n = 1,2,\cdots$. 试证: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

30 160921

(160921) 求 $\int_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s$, 其中 Γ 由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= a^2 \\ x+z &= a \end{cases}$ 决定.

31 160922

(160922) 设方程 $\sin x - x\cos x = 0$ 在 $(0,+\infty)$ 中的第 n 个解为 x_n. 证明: $n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$.

32 160923

(160923) 设 $f(x,y,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 适合 $rf\in L^1(\mathbb{R}^3)$, $\frac{f}{r}\in L^1(\mathbb{R}^3)$, $\frac{f}{r}\in L^1(\mathbb{R}^3)$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 试证: 对 $1\leqslant p\leqslant 2$, 有 $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\leqslant\|rf\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac12}\left\|\frac{f}{r}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac1p-\frac12}\left\|\frac{f}{r}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^{1-\frac1p}$.

33 160924

(160924) 设 $f(x,y,z)=f(r,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $(r=\sqrt{x^2+y^2})$ 适合 $\lim\limits_{r^2+z^2\to\infty}f(r,z)=0$,

$$r\nabla f\in L^1(\mathbb{R}^3),\quad \frac{\nabla f}{r}\in L^1(\mathbb{R}^3),\quad \frac{\nabla f}{r}\in L^\infty(\mathbb{R}^3).$$

试证:

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\leqslant\sqrt{2}\,\|r\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac14}\left\|\frac{\nabla f}{r}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac14}\left\|\frac{\nabla f}{r}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^{\frac12}.$$

34 160925

(160925) 试求 $\int\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

35 160926

(160926) 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 适合 $f\in L^1(\mathbb{R}^2)\cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, 再设 $K:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 适合

$$\exists\ C>0,\ \exists\ x_0\in\mathbb{R}^2,\ \text{s.t. } |K(x)|\leqslant\frac{C}{|x-x_0|},\quad\forall\ x\in\mathbb{R}^2.$$

试证:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}K(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 2\sqrt{2\pi}\,\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{\frac12}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^{\frac12}.$$

36 160927

(160927) 试证:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{2(1-\cos\phi)+s}}=2\int_0^{\pi}\frac{\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{2(1-\cos\phi)+s}},\quad s>0.$$

37 160928

(160928) 设 $f(r,z):\Omega=(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 适合 $r^3f\in L^1(\Omega)$, $rf\in L^1(\Omega)$, $f\in L^\infty(\Omega)$. 试证:

$$\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}z\int_1^\infty|f|\frac{r^3}{(r^2+z^2)^{\frac32}}\,\mathrm{d}r\lesssim\|r^3f\|_{L^1(\Omega)}^{\frac14}\|rf\|_{L^1(\Omega)}^{\frac14}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac12}.$$

38 160929

(160929) 设 f 在 $D=\{z\in\mathbb{C};\ |z|\leqslant1\}$ 上除点 $z_0\in D$ 外处处解析, 且满足 (1) 在 D 内 f 没有零点; (2) $z\in\partial D\Rightarrow f(z)\in\partial D$; (3) z_0 是 f 的一阶极点. 试证:

$$\exists\ \theta\in\mathbb{R},\ \text{s.t. } f(z)=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{1-\bar z_0z}{z-z_0}.$$

39 160930

(160930) 已知函数 $f(x)=\ln x-ax$, 其中 a 为常数. 如果 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2. 试证: $x_1x_2>\mathrm{e}^2$.

40 161001

(161001) 设 $A=(a_{ij})$, 且定义

$$\nabla_A f(A)=\left(\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}\right).$$

试证: (1) $\nabla_A \mathrm{tr}\,(AB)=B^T$; (2) $\nabla_A \mathrm{tr}\,(ABA^TC)=CAB+C^TAB^T$.

41 161002

(161002) 试求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

42 161003

(161003) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$ 存在, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=f(1)$. 试证: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)+2\xi f'(\xi)=0$.

43 161004

(161004) 设 $f\in C^2[0,1]$ 适合 $f(0)=f(1)=0$, $f\not\equiv 0$. 试证: $\displaystyle|f(x)|\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x,\quad\forall\, x\in[0,1]$.

44 161005

(161005) 设 M 为自然数集, 试给出 M 的两个双射变换 σ,τ 使得 $\sigma\tau\neq\tau\sigma$.

45 161006

(161006) 证明: 当 $\lambda<1$ 时, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}R^\lambda\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta=0$.

46 161007

(161007) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 试证: $A^n=A^{n-2}+A^2-E$, 并计算 A^{100}.

47 161008

(161008) 试求 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^6)^2}$.

48 161009

(161009) A strong solution (by which we mean $\boldsymbol{u}\in L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))\cap L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^3))$) is in fact smooth.

This is a classical result, and can be located in many references. Here, we refer to Page 870–871 of the following paper:

Chen, Qionglei; Miao, Changxing; Zhang, Zhifei. The Beale-Kato-Majda criterion for the 3D magneto-hydrodynamics equations. Comm. Math. Phys. 275 (2007), no. 3, 861–872.

49 161010

(161010) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 试证: 在 $(0,1)$ 内存在不同的 λ, μ 使得 $f'(\lambda)[f'(\mu)+1]=2$.

分析. 看到导数, 想到微分中值定理; 看到不同的 ξ,η, 想到在 $[0,a]$ 及 $[a,1]$ 上利用微分中值定理. 那么如何选取 a 呢? 假设 $f(a)=b$, 则 $\exists\ \lambda\in(0,a)$, s.t. $f'(\lambda)=\dfrac{b}{a}$; $\exists\ \mu\in(a,1)$, s.t. $f'(\mu)=\dfrac{1-b}{1-a}$. 于是

$$2=f'(\lambda)[f'(\mu)+1]=\frac{b}{a}\cdot\frac{2-a-b}{1-a}\Rightarrow b=a \text{ 或 } 2(1-a).$$

那么是否存在 a 使得 $f(a)=a$ 或 $f(a)=2(1-a)$ 呢? 想到连续函数介值定理.

50 161011

(161011) 这段时间一直在看 [Gallay Thierry, Vladimir Sverak, Remarks on the Cauchy problem for the axisymmetric Navier-Stokes equations, arXiv preprint arXiv:1510.01036 (2015)]. 一两个礼拜了. 那个 Proposition 2.4 终于验算完毕 (也确实得到了作者给出的条件, 不过确实过程复杂, 写出来也乱). 总结下教训: 开始没注意到 (28) 最前面有个系数 $r^\alpha/\bar r^\beta$; 后来又没注意到不同 cases 时在 "$\xi^\beta F'(\xi)$ 有界" 所选取的 β 不同; 最后在不同 cases 时, 如何估计又失算了, 少算了一两个可能情形. 如此耗费时间...问作者又没丝毫回应. 不过现在也好了.

51 161012

(161012) 已知函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 计算 $f^{(i)}(0)$, $i=1,2,3$.

52 161013

(161013) 试求 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin\tan x-\tan\sin x}{\arcsin\arctan x-\arctan\arcsin x}$.

53 161014

(161014) 试证: 当 $0<x<1$ 时, $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$.

54 161015

(161015) 设 $a_n\geqslant0$, $(n\in\mathbb{Z}_+)$; $\quad A_n=\displaystyle\sum_{k=0}^n a_k$. 再设 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n=+\infty$, $\quad\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n}=0$. 试证: 级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ 的收敛半径 $r=1$.

55 161016

(161016) 试求 $\displaystyle\prod_{n=2}^\infty\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

56 161017

(161017) 设 $h(t)$ 是 $[0,T)$ 上的连续函数, 适合 $\displaystyle\lim_{t\to T^-}h(t)=+\infty$. 再设 $H(t)=\displaystyle\max_{0\leqslant s\leqslant t}h(s)$, $\quad 0\leqslant s<T$. 试证:

$$\exists\ t_k\nearrow T,\ \text{s.t. } h(t_k)=H(t_k)\nearrow+\infty.$$

57 161018

(161018) 设 A,B,C 均为 n 阶方阵.

(1) 证明 $\begin{pmatrix}A&A\\C-B&C\end{pmatrix}$ 可逆的充要条件是 AB 可逆; (2) 若 $\begin{pmatrix}A&A\\C-B&C\end{pmatrix}$ 可逆, 求出 $\begin{pmatrix}A&A\\C-B&C\end{pmatrix}$ 的逆.

58 161019

(161019) 多项式

$$f(x)=f_0(x^n)+xf_1(x^n)+\cdots+x^{n-1}f_{n-1}(x^n),$$

且 $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\mid f(x)$. 求证: $f(1)=0$. [(感谢 93zixufeng@sina.com 告知我此题有问题, 当 $f_0,f_1,\cdots,f_{n-1}$ 都是相等的非零常数时, 结论不成立!)]

59 161020

(161020) (1) 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r, 任取 A 的 r 个线性无关的行向量, 再取 A 的 r 个线性无关的列向量, 试证它们对应的行列构成的 r 阶子式不为零. (2) 设对称矩阵 A 的秩为 r, 试证: A 有一个非零的 r 阶主子式.

60 161021

(161021) 对于实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n^2 维线性空间 $V=\mathbb{R}^{n\times n}$, 定义 V 上的二元函数

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:\ (P,Q)\mapsto\mathrm{tr}\,(P^TQ),\quad\forall\ P,Q\in V.$$

并记 $|P|^2=\langle P,P\rangle$. 试证: (1) V 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 成为一个欧氏空间; (2)

$$\langle P,Q\rangle\leqslant\left|\frac{P+Q}{2}\right|^2,\quad\forall\ P,Q\in V.$$

61 161022

(161022)

$$\|\nabla f\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}\lesssim\|\Lambda^\alpha f\|_{L^2}^{\frac{2\alpha+1}{4}}\left\|\Lambda^\alpha\nabla^2 f\right\|_{L^2}^{\frac{3-2\alpha}{4}},\tag{1}$$

where $1<\alpha\leqslant\dfrac{3}{2}$, $\Lambda=(-\Delta)^{\frac12}$.

Indeed,

$$\begin{aligned}\|\nabla f\|_{L^4}&\lesssim\|\nabla f\|_{L^{\frac{2}{2-\alpha}}}^{1-\theta}\left\|\nabla^\alpha\nabla^2 f\right\|_{L^2}^{\theta}\quad\left(\theta=\frac{3-2\alpha}{4}\text{ by Gagliardo-Nirenberg inequality}\right)\\&\lesssim\|\Lambda^\alpha f\|_{L^2}^{1-\theta}\left\|\Lambda^\alpha\nabla^2 f\right\|_{L^2}^{\theta}\quad(\text{by Sobolev inequality}).\end{aligned}$$

62 161023

(161023) 设

$$l_i=c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\cdots+c_{in}x_n,\quad i=1,2,\cdots,p+q,$$

这里 $c_{ij}\in\mathbb{R}$. 试证明实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2$$

的正惯性指数 $\leqslant p$, 负惯性指数 $\leqslant q$.

63 161024

(161024) 设 A 是 n 阶半正定矩阵, 试证:

$$a_{ii}=0\Rightarrow a_{kl}=0,\ k=i\text{ 或 }\ l=i.$$

这即说明: 若半正定矩阵某对角元为 0, 则其所在的行与列中的元素均为 0.

64 161025

(161025) 设 $a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_1+\cdots+a_n}$ $(n\geqslant 1)$. 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2\ln n}}=1$.

65 161026

(161026) 设 $a_1>0,\ a_{n+1}=\ln(1+a_n)$ $(n\geqslant 1)$. 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(na_n-2)}{\ln n}=\dfrac{2}{3}$.

66 161027

(161027) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $\nearrow$, $f(0)>0$, $f(1)<1$. 试证: $\exists\, x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=x_0^2$. (福建师范大学)

67 161028

(161028) [华中师范大学2009高代] 设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵, B 是非零的 $m\times 1$ 阶矩阵. 考虑线性方程组 $AX=B$, 其中 X 是变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的列向量. 证明: (1) 线性方程组 $AX=B$ 的任意有限个解向量 $X_1,\cdots,X_k$ 的向量组的秩 $\leqslant n-r+1$. (2) 若线性方程组 $AX=B$ 有解, 则它有 $n-r+1$ 个解向量是线性无关的.

68 161029

(161029) [华中师范大学2009高代] 设 A 为 n 阶实矩阵, $\lambda_t=r+s\mathrm{i}$ 是 A 的特征根, 其中 r,s 是实数, i 是虚数单位. (1) 证明: $\frac{1}{2}(A+A^T)$ 的特征根都是实数; 令 $\mu_1\leqslant\cdots\leqslant\mu_n$ 是 $\frac{1}{2}(A+A^T)$ 的全部特征根; (2) 证明: $\mu_1\leqslant r\leqslant\mu_n$. (3) 你有类似的估计 s 的办法吗?

69 161030

(161030) [湖南师范大学2013高代] 设 A 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶方阵, 向量 $\alpha\in\mathbb{R}^n$ (实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 维列空间), 使得

$$\alpha, A\alpha, A^2\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基. 如果 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶方阵 B 满足条件 $AB=BA$. 证明:

(1) 存在实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $B\alpha=f(A)\alpha$;

(2) 对于 (1) 中找到的多项式 $f(x)$, 必有 $B=f(A)$.

70 161031

(161031) 设 $a_0=\pi,\quad a_1=\pi^2,\ a_{n+1}=a_n+\dfrac{2a_{n-1}}{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$. 试证: $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$ 收敛.

71 161101

(161101) 设 A 是 n 阶方阵, $b\neq 0$ 是 n 维列向量, 适合 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,b)=r$. 记 $Ax=b$ 的所有解集合为 S, 试证: (1) S 中含有 $n-r+1$ 个线性无关的向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$; (2) ξ 是 S 中元素的充要条件是存在 k_i $(1\leqslant i\leqslant n-r+1)$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n-r+1}k_i=1,\ \xi=\sum\limits_{i=1}^{n-r+1}k_i\eta_i$.

72 161102

(161102) [湖南师范大学2012高代] 设 m,n 是正整数. 证明: $(x^m-1,x^n-1)=x-1$ 当且仅当 $(m,n)=1$.

73 161103

(161103) [湖南师范大学2010高代] 设正整数 m 与 n 为一奇一偶, 请简略地说明此时有: $(x^m+1, x^n+1)=1$.

74 161104

(161104) [湖南师范大学2010高代] 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换. 请简略说明一定存在正整数 m, 使得 $\mathscr{A}^{2m}V=\mathscr{A}^mV$.

75 161105

(161105) 证明:

$$1 \leqslant \iint_\Omega \sin(x^2)+\cos(y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \sqrt{2},$$

其中 $\Omega=\{(x,y);\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

76 161106

(161106) [中国科学院2011数分] 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ 为非负数列, 而且对任意 $k\geqslant 0$, 有

$$a_{k+1}^2 \leqslant (a_k+b_k)^2-\xi_k^2.$$

(1) 证明: $\sum_{i=1}^k \xi_i^2 \leqslant \left(a_1+\sum_{i=0}^k b_i\right)^2$. (2) 若数列 $\{b_k\}$ 还满足 $\sum_{k=0}^\infty b_k^2<\infty$, 则 $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \xi_i^2=0$.

77 161107

(161107) [湖南师范大学2016数分] 若广义积分 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}$ 收敛, 试求实数 p 的取值范围.

78 161108

(161108) [湖南师范大学2010数分] 求极限

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^\alpha \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\alpha>0$, $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数.

79 161109

(161109) [江西师范大学2013高数] 设 $f(x)$ 二次可导, $f(0)=f'(0)=f(1)=0$, 试证: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)+4\xi f'(\xi)+(4\xi^2+2)f(\xi)=0$.

分析. 肯定是用微分中值定理. 按照要求, 也肯定是某个函数 F 的二阶导在某点 ξ 处为 0. 注意观察题中所给函数, 考虑积分因子 e^{x^2}, 而由

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{x^2}[f''(x)+4xf'(x)+(4x^2+2)f(x)]\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}f'(x)+\int \mathrm{e}^{x^2}[4xf'(x)+(4x^2+2)f(x)]\,\mathrm{d}x\\
&= \mathrm{e}^{x^2}f'(x)+\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}f(x)+\int(4x^2+2)\mathrm{e}^{x^2}f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \mathrm{e}^{x^2}f'(x)+\int \mathrm{d}[2x\mathrm{e}^{x^2}f(x)]=\mathrm{e}^{x^2}f'(x)+2x\mathrm{e}^{x^2}f(x)+A,
\end{aligned}$$

$$\int[\mathrm{e}^{x^2}f'(x)+2x\mathrm{e}^{x^2}f(x)+A]\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x^2}f(x)+Ax+B$$

知可选 $F(x)=\mathrm{e}^{x^2}f(x)+Ax+B$, 其中 A,B 待定.

80 161110

(161110) (1) 函数 $u(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $u'(x)$ 绝对可积. 求证:

$$\sup_{x\in[0,1]}|u(x)|\leqslant\int_0^1|u(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^1|u'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(2) 二元函数 $u(x,y)$ 在 $\Omega=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上连续, 且偏导数 u_x,u_y,u_{xy} 绝对可积. 求证:

$$\sup_{(x,y)\in\Omega}|u(x)|\leqslant\iint\limits_{\Omega}|u|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Omega}|u_x|+|u_y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Omega}|u_{xy}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

81 161111

(161111) [江西师范大学2013高数] 使用连续函数的介值定理证明: 对于平面上给定的一个三角形, 在任意方向上都存在一条直线, 能将三角形分成面积相等的两部分.

分析. 本题关键在于叙述清楚, 而其前提是选好坐标系.

82 161112

(161112) 试证: $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,\infty)$ 内不一致收敛.

分析. 含参量积分 $\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在区间 I 上一致收敛是指:

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ A>0,\ \text{s.t.}\ A_2>A_1\geqslant A,\ y\in I\Rightarrow\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

而含参量积分 $\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在区间 I 上不一致收敛是指:

$$\exists\ \varepsilon_0>0,\ \exists\ B_n>A_n\to\infty,\ \exists\ y_0\in I\ \text{s.t.}\ \left|\int_{A_n}^{B_n}f(x,y_0)\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

83 161113

(161113) 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, A 是一个 n 阶 $\mathbb{F}$ 方阵, 这里 n 是大于 1 的正整数. 用 E_{ij} 表示 (i,j) 位置为 1 其余位置为 0 的 n 阶 $\mathbb{F}$ 方阵. 证明以下 3 条等价:

(1) A 和所有 $\mathbb{F}$ 方阵相乘可交换;

(2) A 和所有可逆 $\mathbb{F}$ 方阵相乘可交换;

(3) A 和所有的 E_{ij} (其中 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 但是 $i\neq j$) 相乘可交换.

84 161114

(161114) [Abel 定理] 设幂级数 $g(x)=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ 在 $|x|<1$ 内收敛, 且 $\sum_{n=0}^\infty a_n=s$ 收敛. 则

$$\lim_{x\to1^-}g(x)=s.$$

85 161115

(161115) [南开大学2014数分] 求级数 $\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{3n+2}$ 的值.

86 161116

(161116) [南开大学2014数分] 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}$.

87 161117

(161117) [武汉大学2015数分] 设 $0<\alpha<1$, 求积分 $\displaystyle\int_0^1 f(t^\alpha)\,\mathrm{d}t$ 的上确界, 其中连续函数 f 满足

$$\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 1.$$

88 161118

(161118) [华中师范大学2012高代] 设 n,k 是整数, $n>2$, $1\leqslant k\leqslant n$. 设复数 ω 满足 $\omega^n=1$ 但是 $\omega^T\neq 1$ 对任意 $t=1,\cdots,n-1$ (称这样的 ω 为 n 次本原单位根). 令 $A=(\omega^{ij})_{0\leqslant i,j\leqslant n-1}$ 是一个 n 阶方阵. 令 $A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_k\\ j_1\cdots j_k\end{pmatrix}$ 是由 A 的第 i_1 行, $\cdots$, 第 i_k 行和第 j_1 列, $\cdots$, 第 j_k 列的交叉位置的元素构成的 k 阶子矩阵, 这里 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$, $1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n$.

(1) 证明: 对任意 $1\leqslant k\leqslant n$, $A\begin{pmatrix} 1\cdots k\\ j_1\cdots j_k\end{pmatrix}$ 是可逆矩阵.

(2) 对任意 $1\leqslant k\leqslant n$, 以及对任意的 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$, $1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n$, $A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_k\\ j_1\cdots j_k\end{pmatrix}$ 一定可逆吗? 如果是, 给出证明; 如果不是, 给出反例.

89 161119

(161119) [导数介值定理] 设 f 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$, 则 $\exists\,\xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)<0$.

90 161120

(161120) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=f(1)$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 且对一切 $x\in[0,1]$ 都有 $f'(x)\neq 1$, 记 $g(x)=f(x)-x$, $n\geqslant 2$ 为正整数, 求证:

(1) $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调递减;

(2) $-\dfrac{n}{2}<\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)<-\frac{n}{2}+1$;

(3) $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\dfrac{1}{2}$.

91 161121

(161121) 求由 $z=x+y$ 和 $z=x^2+y^2$ 围成的几何体体积.

92 161122

(161122) 设 D 为平面上的有界域, $f(x,y)$ 在 D 上可微, 在 $\bar{D}$ 上连续, 在 $\bar{D}$ 的边界上 $f(x,y)=0$, 且在 D 上满足: $f_x+f_y=f$. 证明: 在 $\bar{D}$ 上 $f(x,y)=0$.

93 161123

(161123) 设 $f(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上连续, 当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 以直线 $y=ax+b$ 为渐近线, 求证: $f(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上一致连续.

94 161124

(161124) 设 A,B,C 均为 n 阶方阵, 适合 $\mathrm{r}\,(AB)=\mathrm{r}\,(B)$. 试证: $\mathrm{r}\,(ABC)=\mathrm{r}\,(BC)$.

95 161125

(161125) 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $M_n(\mathbb{F})$ 是由所有 n 阶 $\mathbb{F}$ 矩阵在矩阵加法和数乘矩阵之下构成的 $\mathbb{F}$ 向量空间. 设 V 是 $M_n(\mathbb{F})$ 的一个非零子空间, 且满足 V 中的任何非零矩阵都是可逆矩阵.

(1) 举出一个这样的子空间 V 的例子从而说明这样的子空间确实存在.

(2) 证明 V 的维数满足: $\dim V\leqslant n$.

96 161126

(161126) [湖南师范大学2009数分] 求证:

(1) 对任一收敛正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 必存在正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, 满足: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$;

(2) 对任一通项为正的发散级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 必存在发散正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, 满足: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=0$.

97 161127

(161127) [湖南师范大学2012数分] 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 当 $x\geqslant 0$ 时 $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$, 求证: 在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$.

98 161128

(161128) [湖南师范大学2007数分] 设 $f(x)$ 在 a 点处具有直到 n 阶的导数, $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(a)\neq 0$, 证明:

(1) 当 n 为奇数时, $f(a)$ 不是极值;

(2) 当 n 为偶数时, $f(a)$ 是极值, 并指出什么时候是极大值, 什么时候是极小值.

99 161129

(161129) [湖南师范大学2008数分] 设 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|f(x)|\leqslant M_0$, $|f''(x)|\leqslant M_1$, 证明: $|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_1}$.

100 161130

(161130) 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x^2+x+1)^n}{n(n+1)}$ 的收敛性和一致收敛性.

101 161201

(161201) [湖南师范大学2009数分] 设常数 $0<c<1$, $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(cx)}{x}=A$ 存在且有限, 求证: $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导, 并证明: $f'(0)=\dfrac{A}{1-c}$.

102 161202

(161202) [第七届全国大学生数学竞赛预赛试题] 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上有下界或者有上界的连续函数且存在正数 a 使得

$$f(x)+a\int_{x-1}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$$

为常数. 求证: $f(x)$ 为常数.

103 161203

(161203) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, $f(x)\geqslant c>0$, 试证: $\ln f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

分析. f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积 $\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, s.t. 只要 $[a,b]$ 的分划 $T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 的细度 $\|T\|<\delta$, 就有

$$\sum_{k=0}^n (M_i^f-m_i^f)\Delta x_i<\varepsilon,$$

其中

$$M_i^f=\sup_{[x_{i-1},x_i]} f,\quad m_i^f=\inf_{[x_{i-1},x_i]} f.$$

104 161204

(161204) 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数, $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)>0$, 试求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$, 其中 $u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

105 161205

(161205) 试证: $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\sin x\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛.

106 161206

(161206) 对 $\forall\ x,y\in\mathbb{R}^n$, $\beta\geqslant1$, 试证:

$$(|x|^{\beta-1}x-|y|^{\beta-1}y)\cdot(x-y)\geqslant\frac12\left(|x|^{\beta-1}+|y|^{\beta-1}\right)|x-y|^2,$$

且 $\dfrac12$ 不能再改进. 这里,

$$x\cdot y=\sum_{i=1}^n x_iy_i,\quad x=(x_1,\cdots,x_n),\quad y=(y_1,\cdots,y_n).$$

107 161207

(161207) For $f\in\dot{B}^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)$, $g,h\in H^1(\mathbb{R}^3)$ and any $\varepsilon>0$, $0<r<1$, $k\in\{1,2,3\}$, we have

$$\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k f\cdot gh\,\mathrm{d}x\leqslant C\,\|f\|_{\dot{B}^r_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{1+r}}\|(g,h)\|_{L^2}^2+\varepsilon\,\|\nabla(g,h)\|_{L^2}^2\,. \tag{2}$$

108 161208

(161208) [Hardy type inequality] If $1<p<+\infty$, $r\neq1$, $f\geqslant0$, and

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, & r>1,\\ \displaystyle\int_x^\infty f(t)\,\mathrm{d}t, & r<1,\end{cases}$$

then

$$\int_0^\infty x^{-r}F^p\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{|r-1|}\right)^p\int_0^\infty x^{-r}(xf)^p\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

109 161209

(161209) Suppose that $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ and $g \in W^{1,q}(\mathbb{R}^3)$ with $1 < p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Then $\nabla(fg)$ is in $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$. Furthermore, we have

$$\|\nabla(fg)\|_{\mathcal{H}^1} \leqslant C \|\nabla f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} + C \|f\|_{L^p} \|\nabla g\|_{L^q}, \tag{4}$$

where C is independent of f and g.

110 161210

(161210) 已知 $a_0 > 0$, $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

111 161211

(161211) Let $\frac{3}{2} < q < 3$, and $f, g \in C_c^1(\mathbb{R}^3)$, we have

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 |g|^2 \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_3 \leqslant C \|\nabla f\|_{L^q}^2 \|g\|_{L^2}^{\frac{2(2q-3)}{q}} \|\nabla_h g\|_{L^2}^{\frac{2(3-q)}{q}},$$

where C depends only on q.

112 161212

(161212) [南开大学2012高代] 判断下列论断是否正确, 并证明你的结论:

设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是 n 维实线性空间 V 上的两个线性变换, 且 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$; 又已知 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 都存在特征向量, 则 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 必有公共的特征向量.

113 161213

(161213) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 试证:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (n+1)x^n f(x) \,\mathrm{d}x = f(1).$$

114 161214

(161214) [上海财经大学2015数分] 试证: (1) $\inf\limits_{n\geqslant 1} |\sin n| = 0$; (2) $\{\sin n\}$ 发散; (3) 试求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sin n) x^{n-1}$ 的收敛域及和函数.

115 161215

(161215) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义, 且 $g(0) > 0$, $g(1) < 0$, $f(x) + g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增. 试证: 存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $g(\xi) = 0$.

116 161216

(161216) [浙江大学2014高代] 定义 ψ 为 $[0,1]$ 到 n 阶方阵全体组成的欧氏空间的连续映射, 使得 $\psi(0)$ 为第一类正交阵, $\psi(1)$ 为第二类正交阵. 证明: 存在 $T_0 \in (0,1)$, 使得 $\psi(T_0)$ 退化.

117 161217

(161217) [华中师范大学2015数分] 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中简单光滑闭曲面 Σ 所围的有界连通区域. 考查问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y,z) \in \Omega \\ u|_{\Sigma} = f(x,y,z), & (x,y,z) \in \Sigma \end{cases}, \tag{5}$$

其中 $f(x,y,z)$ 为已知连续函数, $u(x,y,z)$ 为具有二阶连续偏导的未知函数. 证明若问题 (5) 有界, 则其解是唯一的, 即若 $u(x,y,z), v(x,y$
皆满足 (5), 则有 $u(x,y,z) = v(x,y,z)$.

118 161218

(161218) (1) 证明方程 $\tan x = x$ 在 $\left(n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内存在实根 ξ_n, $n = 1, 2, \cdots$; (2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\xi_{n+1} - \xi_n)$.

119 161219

(161219) 设 $n \geqslant 2$, 实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都大于 -1, 并且它们有着相同的符号. 证明:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) > 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

120 161220

(161220) [矩阵迹的一些性质] 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵, 则 A 的迹 (trace) 为

$$\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

它有如下性质:

(1) [线性泛函] $\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(A^T)$, $\mathrm{tr}\,(A+B) = \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B)$, $\mathrm{tr}\,(cA) = c \cdot \mathrm{tr}\,(A)$, $\forall\, c \in \mathbb{F}$;

(2) [相似不变量] 若 A, B 相似, 则 $\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(B)$;

(3) $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$;

(4) $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\,(A^TB)$ 是 n 阶实方阵全体构成的实线性空间 $M_n(\mathbb{R})$ 上的内积.

121 161221

(161221) [南京师范大学2015高代] 设 A, B 为半正定矩阵, 且 $\mathrm{tr}\,(AB) = 0$, 求证: 对任意正整数 m, 都有 $(A+B)^m = A^m + B^m$.

122 161222

(161222) Let λ_1, ν, α be positive and $\beta > 3$. If

$$\lambda_1 \nu^2 [\nu\alpha(\beta-1)]^{\frac{2}{\beta-3}} > \frac{\beta-3}{\beta-1},$$

then there exists a positive δ such that

$$\nu\lambda_1 + \alpha(|x|^{\beta-1} + |y|^{\beta-1}) - \frac{1}{2\nu}(|x|^2 + |y|^2) \geqslant \delta, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

123 161223

(161223) [Evans PDE P 307] Integrate by parts to prove

$$\|Du\|_{L^p} \leqslant C\, \|u\|_{L^p}^{\frac{1}{2}} \left\|D^2u\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$$

for $2 \leqslant p < \infty$ and all $u \in C_c^\infty(U)$.

124 161224

(161224) [Evans PDE P 309] Use the Fourier transform to prove that if $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ for $s > n/2$, then $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, with the bound

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

125 161225

(161225) 判断: 若对数列 $\{a_n\}$ 的任意两个子列 $\{a_{n_k}\}$ 与 $\{a_{m_k}\}$, 均有 $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k} - a_{m_k}) = 0$, 则$\{a_n\}$ 收敛.

126 161226

(161226) 设 A, B 都是 n 阶实方阵, A 半正定, B 半负定, 则 $\operatorname{tr}(AB) \leqslant 0$.

127 161227

(161227) 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f(x) > 0$, 定义

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 对每个 $t \neq 0$, 有 $|\hat{f}(t)| < \hat{f}(0)$.

128 161228

(161228) [华中科技大学2017数分, 郑州大学2017数分] 设 $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$, $f \in C^1(D)$, 试证:

$$\iint\limits_D |f(x,y) - f(0,0)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_D \frac{\sqrt{f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

129 161229

(161229) 设

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + \mathrm{e}^{-a_n}\ (n \geqslant 0).$$

再设 $b_n = a_n - \ln n\ (n \geqslant 1)$. 试证:

$$0 < b_{n+1} < b_n, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

130 161230

(161230) 设 $\{a_n\}$ 递减趋于零, 试证:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n} < \infty \Leftrightarrow a_n = O\left(\frac{1}{\ln n}\right), \ \sum_{n=1}^\infty (a_n - a_{n+1})\ln n < \infty.$$

131 161231

(161231) 已知函数 $f(x)$ 的反函数是 $\varphi(y)$, 写出用 f', f'', f''' 表示 $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ 的表达式.

132 170101

(170101) 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶反对称矩阵. 若 n 是奇数, 试证: $|A| = 0$.

133 170102

(170102) 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶反对称矩阵, α 是 n 维列向量. 若 n 是偶数, 试证:

$$|A+x\alpha\alpha^T|=|A|.$$

134 170103

(170103) 设 A 是 $m\times n$ 阶实矩阵, 试证:

$$\mathrm{r}\,(A)=\mathrm{r}\,(A^TA)=\mathrm{r}\,(AA^T).$$

135 170104

(170104) 设 A,B 是 n 阶实半正定矩阵, 试证:

$$\mathrm{r}\,(A+B)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\mathrm{r}\,(A,B).$$

136 170105

(170105) 设 A,B 是 $m\times n$ 阶实矩阵, 满足 $A^TB+B^TA=0$. 试证:

$$\mathrm{r}\,(A+B)\geqslant\max\left\{\mathrm{r}\,(A),\mathrm{r}\,(B)\right\}.$$

137 170106

(170106) 设 $f:(-a,a)\setminus\{0\}\to(0,+\infty)$ 满足

$$\lim_{x\to0}\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]=2.$$

试证: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

138 170107

(170107) 设 $\alpha>0$, 试证: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$.

139 170108

(170108) 设

$$\lim_{x\to0}f(x)=0,\quad\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0.$$

试证:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0.$$

140 170109

(170109) Zhou, Yong. Weighted regularity criteria for the three-dimensional Navier-Stokes equations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 139 (2009), no. 3, 661–671.

141 170110

(170110) 设 $f(x),g(x)$ 分别是 m 次和 n 次多项式, 其中 $m>0,n>0$. 证明:

(1) 存在次数低于 n 的多项式 $u(x)$ 与次数低于 m 的多项式 $v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=res(f(x),g(x))$;

(2) $(f(x),g(x))=1$ 当且仅当 $res(f(x),g(x))\neq 0$.

这里, 对任意的多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$

我们定义 $f(x),g(x)$ 的结式 $res(f(x),g(x))$ 为由两多项式系数形成的 Sylvester 矩阵 A 的行列式, 其中 (f 的系数有 m 行, g 的系数有 n 行)

$$A=\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{pmatrix},$$

142 170111

(170111) Stein, E. M. Note on singular integrals. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 250–254.

143 170112

(170112) Caffarelli, L.; Kohn, R.; Nirenberg, L. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. Comm. Pure Appl. Math. 35 (1982), no. 6, 771–831.

144 170113

(170113) Zhou, Yong. Regularity criteria in terms of pressure for the 3-D Navier-Stokes equations in a generic domain. Math. Ann. 328 (2004), no. 1-2, 173–192.

145 170114

(170114) Fan, Jishan; Ahmad, Bashir; Hayat, Tasawar; Zhou, Yong. On blow-up criteria for a new Hall-MHD system. Appl. Math. Comput. 274 (2016), 20–24. (已打印)

146 170115

(170115) 已知 A 为三阶实正交矩阵, $\det A=1$. 试证: 存在正交矩阵 P, 使得

$$P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

其中

$$\cos\theta=\frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}-1}{2}.$$

147 170116

(170116) Ru, Shaolei; Chen, Jiecheng. Global solution of the 3D incompressible Navier - Stokes equations in the Besov spaces $\dot{R}^{\sigma,1}_{r_1,r_2,r_3}$. Z. Angew. Math. Phys. 68 (2017), no. 2, 68:30. (已打印)

148 170117

(170117) Tran, Chuong V.; Yu, Xinwei. Note on Prodi-Serrin-Ladyzhenskaya type regularity criteria for the Navier-Stokes equations. J. Math. Phys. 58 (2017), no. 1, 011501, 10 pp. (已打印)

149 170118

(170118) Chen, Qionglei; Miao, Changxing. Existence theorem and blow-up criterion of the strong solutions to the two-fluid MHD equation in $\mathbb{R}^3$. J. Differential Equations 239 (2007), no. 1, 251–271. (已打印)

150 170119

(170119) 春风绿江岸, 万里快行船. 大江流日夜, 奔梦天地宽. (坤宁)

151 170120

(170120) 桃李春风一杯酒, 江湖夜雨十年灯. (黄庭坚)

152 170121

(170121) 直道相思了无益, 未妨惆怅是清狂. (李商隐)

153 170122

(170122) 他年我若为青帝, 报与桃花一处开. (黄巢)

154 170123

(170123) 会意:家 $\to$ 冢. 注意这一点的位置.

155 170124

(170124) 好了歌: 世人都晓神仙好, 惟有功名忘不了! 古今将相在何方? 荒冢一堆草没了. 世人都晓神仙好, 只有金银忘不了! 终朝只恨聚无多, 及到多时眼闭了. 世人都晓神仙好, 只有娇妻忘不了! 君生日日说恩情, 君死又随人去了. 世人都晓神仙好, 只有儿孙忘不了! 痴心父母古来多, 孝顺儿孙谁见了? (曹雪芹《红楼梦》)

156 170125

(170125) 设 f 在 (a,b) 上单增, 试证: 对 $\forall\ x\in(a,b)$,

$$f(x-0)=\sup_{y<x}f(y),\quad f(x+0)=\inf_{y>x}f(y)$$

存在.

157 170126

(170126) 单调函数的不连续点集是可数集.

158 170127

(170127) Liu Y, Zhang P. On the global well-posedness of 3-D axi-symmetric Navier-Stokes system with small swirl component[J]. arXiv preprint arXiv:1702.06279, 2017. (已打印)

159 170128

(170128) 设 X 是 Banach 空间, f 是 X^2 到 X 的双线性映射. 若

$$\exists\, 0<\alpha<\frac{1}{4\|f\|},\quad \|f\|=\sup_{\|u\|,\|v\|\leqslant 1}\|f(u,v)\|,$$

则

$$\forall\, a\in B(0,\alpha),\ \exists\,|\ x\in B(0,2\alpha),\ \text{s.t. } x=a+f(x,x).$$

160 170129

(170129) 试证:

$$2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi,\quad x>1.$$

161 170130

(170130) 试建立 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 之间的一一对应.

162 170131

(170131) 设 u 为 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^5$ 中的单位向量, 定义 $T_u(x)=x-2\langle x,u\rangle u$. 现设 α,β 是 $\mathbb{R}^5$ 中线性无关的两个单位向量, 问当 α,β 满足什么条件时, 存在正整数 k 使得 $(T_\alpha T_\beta)^k$ 为单位映射.

163 170201

(170201) 在度量空间 (X,ρ) 中, 开球 $B(x,r)=\{y\in X;\rho(y,x)<r\}$ 的闭包一定是 $\{y\in X;\rho(y,x)\leqslant r\}$ 么? 如果是, 请给出证明; 如果不是, 请举出反例.

164 170202

(170202) 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 均是连续的周期函数, 满足

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0.$$

试证: $f\equiv g$.

165 170203

(170203) 设 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 一致连续, 满足

$$\lim_{n\to\infty}f(x+n)=0,\quad\forall\, x\geqslant 0.$$

试证: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

166 170204

(170204) 设 (X,ρ) 是度量空间, A 是 X 的非空子集, 考虑

$$f(x)=\operatorname{dist}(x,A)\overset{\text{def}}{=}\inf_{y\in A}\rho(x,y),\quad x\in X.$$

试证: f 是 X 上的一致连续函数.

167 170205

(170205) 不管工作生活给了我们多大的压力和烦恼, 都不要理会. 随它去吧. 能做好就做好, 能做的差不多就差不多, 不能做就不能做.

168 170206

(170206) 黑云去来意, 乌江败成齐. 我心素已闲, 安坐闹市席. (张祖锦《修》)

169 170207

(170207) 设 f 在 $[-1,1]$ 上可导, $M=\sup|f'|$. 若

$$\exists\, a\in(0,1),\ \text{s.t.}\ \int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

试证:

$$\left|\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M(1-a^2).$$

170 170208

(170208) 设 f 在 $[0,2]$ 上连续可导, 且 $f(0)=f(2)=1$. 若 $|f'|\leqslant 1$, 试证:

$$1\leqslant\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 3.$$

171 170209

(170209) 设 f 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0)=f(1)=f'(0)=0$, $f'(1)=1$. 试证:

$$\int_0^1|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 4,$$

并指出不等式中等号成立的条件.

172 170210

(170210) 对任意的 $a>0$, 试证:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+a}\sqrt{\frac{a}{k}}<\pi.$$

173 170211

(170211) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ $(n\geqslant 2)$ 都是正数, 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n<1$. 证明:
(1) $\dfrac{1}{1-\sum_{k=1}^n a_k}>\prod\limits_{k=1}^n(1+a_k)>1+\sum\limits_{k=1}^n a_k$; (2) $\dfrac{1}{1+\sum_{k=1}^n a_k}>\prod\limits_{k=1}^n(1-a_k)>1-\sum\limits_{k=1}^n a_k$.

174 170212

(170212) 设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$, 且 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$. 证明 Chebychëv (切比雪夫, 1821Ĩ894) 不等式:

$$\sum_{i=1}^n a_i\sum_{i=1}^n b_i\leqslant n\sum_{i=1}^n a_ib_i.$$

175 170213

(170213) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!\mathrm{e})$.

176 170214

(170214) 设常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$. 求证:

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^n a_k\sin\sqrt{x+k}=0.$$

177 170215

(170215) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

178 170216

(170216) 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶对合阵, 即 $A^2=E_n$. 试证; $n-\operatorname{tr}A$ 是偶数; 且 $\operatorname{tr}A=n\Leftrightarrow A=E_n$.

179 170217

(170217) 设方阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a&a&0\\a-2&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

可对角化, 求 a 的值.

180 170218

(170218) 设 $A_1,\cdots,A_n\in M_n(\mathbb{F})$, $g(x)\in\mathbb{F}[x]$, 使得 $g(A_1),\cdots,g(A_n)$ 都是非异阵. 证明: 存在$h(x)\in\mathbb{F}[x]$, 使得 $g(A_i)^{-1}=h(A_i)$ 对所有的 $1\leqslant i\leqslant m$ 都成立.

181 170219

(170219) [导数介值定理] 设 f 在 $[a,b]$ 上可导, 实数 k 满足 $f'(a)<k<f'(b)$. 试证:

$$\exists\,\xi\in(a,b),\ \text{s.t. } f'(\xi)=k.$$

182 170220

(170220) 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶连续可微, 满足

$$|f(x)|\leqslant A,\quad |f''(x)|\leqslant B,\quad\forall\,x\in[a,b],$$

并且

$$\exists\, x_0 \in [a,b],\ \text{s.t. } |f'(x_0)| \leqslant D.$$

试证:

$$|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{AB} + D, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

183 170221

(170221) [杨忠道定理] 拓扑空间中每个子集的导集都是闭集当且仅当每个单点集的导集是闭集.

184 170222

(170222) 势利之交, 难以经远. 士之相知, 温不增华, 寒不改叶, 贯四时而不衰, 历夷险而益固. (诸葛亮)

译文: 建立在权势和名利之上的交往, 是难以持久的. 有修养的人之间彼此深交而心息相通时, 就好比花木, 温暖时也不会多开花, 寒冷时也不会改变叶子的颜色, 能够经历一年四季而不衰败, 经历艰险日益牢固.

185 170223

(170223) 不要停止学习, 即便你很老很老, 也要对这个世界保持好奇; 学会感恩, 要相信所有的经历都是生命的馈赠.

186 170224

(170224) 人生注定要迎来死亡, 但是我们也要认真地生活!

187 170225

(170225) 希望失去贪, 嗔和怒.

188 170226

(170226) 帝王可以借权势改几本史书, 却改变不了天下人的评价.

189 170227

(170227) 等待延后满足.

190 170228

(170228) 已知 $c^2 - 4ab \neq 0$, 计算行列式

$$\begin{vmatrix} c & a & & & \\ b & c & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & c & a \\ & & & b & c \end{vmatrix}.$$

191 170301

(170301) 设矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$, 定义 $C = (a_{ij}b_{ij})_{n\times n}$. 证明: 若 A, B 半正定, 则 C 半正定.

192 170302

(170302) 学生要体验 "学而时习之" 的快乐, 必须放弃手机拍照而手写. 老师要做到 "温故而知新", 也要少用PPT 而多板书.

193 170303

(170303) 人世间最美好的礼物是来自陌生人的善意.

194 170304

(170304) 在传统熟人社会, 决定人们关系的主要是血缘和地缘这种天然纽带; 但在计划经济体制下, 能帮你排除困难的人或能给你带制造困难的人, 才是你最重要的社会资源.

195 170305

(170305) 礼尚往来, 来而不往非礼也. 注重的是礼节和礼数, 而非礼物的价值本身.

196 170306

(170306) 很多时候, 我们本来是上网找一个东西, 结果看着看着, 看别的东西去了, 一个广告有兴趣, 点开来; 一个没见过的词, 查下; 等等. 结果半天后, 自己要找的东西还没开始弄了. 这就是知识的迷宫.

为此, 一定要有明确的目标, 摒弃一切杂念.

197 170307

(170307) 年轻人不守时是永远迟到; 老年人不守时是永远早到.

198 170308

(170308) 生活就是一种永恒的沉重的努力. (米兰.昆德拉)

199 170309

(170309) 相遇和作别有很多种, 最棒的莫过于温暖一笑, 急人之难, 临去时挥一挥手, 道声再见.

200 170310

(170310) A represented matroid is a pair $M=(E,U)$ consisting of a finite set E together with a subspace U of $\mathbb{F}^E$. We say that a matrix A generates a represented matroid $M=(E,U)$ if U is the row-space of A; the represented matroid generated by A is denoted $M(A)$.

不是很懂, 但是也可稍微翻译下: 一个可表示拟阵 $M=(E,U)$ 由一个有限集 E 和 $\mathbb{F}^E$ 的一个子空间构成. 我们说一个矩阵 A 生成一个可表示拟阵 $M=(E,U)$ 如果 U 是 A 的行向量; 记 A 生成的可表示拟阵为 $M(A)$.

理解: 首先, 要知道 $\mathbb{F}^E$ 是指集合 E 到数域 $\mathbb{F}$ 的所有映射全体构成的集合, 也即

$$\mathbb{F}^E=\{f:E\to\mathbb{F}\}.$$

(实变或拓扑我不太记得是否用过这个记号...).

其次, 数域 $\mathbb{F}$ 上的 $m\times n$ 矩阵 A 如果写成行向量的形式

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix},$$

那么可选

$$E=\{1,\cdots,n\},\quad U=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},$$

其中每个 α_i 因为有 n 个分量 $(a_{i1},\cdots,a_{in})$, 而可看成 E 到 $\mathbb{F}$ 的映射

$$\begin{array}{rccc}\alpha_i: & E & \to & \mathbb{F}\\ & j & \mapsto & a_{ij}.\end{array}$$

这样, $\alpha_i\in\mathbb{F}^E$, $U\subset\mathbb{F}^E$.

201 170311

(170311) 试证:

$$\arctan a-\arctan b>\frac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}},\quad \forall\ a>b>0.$$

202 170312

(170312) 设 R 是集合 X 上的等价关系; $p:X\to X/R$ 是自然映射; 对 $i=1,2$, $p_i:X\times X\to X$ 是第 i 个投射, 也即

$$p_1(x,y)=x,\quad p_2(x,y)=y,\ \forall\ (x,y)\in X\times X.$$

试证:

$$p^{-1}[p(A)]=p_2[p_1^{-1}(A)\cap R],\ \forall\ A\subset X.$$

203 170313

(170313) [南京师范大学2010年常微分方程复试试题] 当 a 取何值时, 边值问题

$$\begin{cases}y''(x)+ay(x)=1\\ y(0)=y(1)=0\end{cases}$$

没有解.

204 170314

(170314) [南京师范大学2010年常微分方程复试试题] 设 $f(x)$ 是 $(a,+\infty)$ 上的连续函数, 且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L,$$

$x_0>a$ 是一常数, k 是一正常数. 求初值问题

$$\begin{cases}y'+ky=f(x)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

的解, 并计算该解当 $x\to+\infty$ 时的极限.

205 170315

(170315) [熊金城点集拓扑习题1-3-03] 设 $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{d,e,f,g\}$, $R=\{(a,d),(a,e),(b,f)\}$, $A=\{a,c\}$, $B=\{d,e,g\}$. 试求 $R(A)$, $R^{-1}(B)$, R 的值域与定义域.

206 170316

(170316) [熊金城点集拓扑习题1-4-04] 实数集合 $\mathbb{R}$ 中第一个关系 R 定义为

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x-y\in\mathbb{Z}\right\}.$$

证明 R 是一个等价关系.

207 170317

(170317) [熊金城点集拓扑习题1-5-01] 设 X,Y 是两个集合, $f:X\to Y$. 试证:

(1) 对于任意 $A\subset X$,

$$A\subset f^{-1}(f(A));$$

(2) 对于任意 $B\subset Y$,

$$B\supset f(f^{-1}(B)),$$

(3) f 是一个满射当且仅当

$$B=f(f^{-1}(B))$$

对于任何 $B\subset Y$ 成立.

208 170318

(170318) [熊金城点集拓扑习题1-7-02] 设 A 是实数集合 $\mathbb{R}$ 的一个子集, 它包含着某个非退化的开区间, 即存在 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, 使得 $A\supset(a,b)$. 证明 $\operatorname{card}A=\aleph$.

209 170319

(170319) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, $\mathrm{r}\,(A)=k$, 证明:

(1) 若 $A=A_1+A_2+\cdots+A_l$, 且 $\mathrm{r}\,(A_i)=1, i=1,2,\cdots,l$, 则 $l\geqslant k$;

(2) 存在秩为 1 的矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 使得 $A=A_1+A_2+\cdots+A_k$.

210 170320

(170320) [熊金城点集拓扑习题2-1-01] 设 $\sigma,\sigma':\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 有 $\sigma(x,y)=(x-y)^2$ 和 $\sigma'(x,y)=|x^2-y^2|$. 证明 σ 和 σ' 都不是 $\mathbb{R}$ 的度量.

211 170321

(170321) [熊金城点集拓扑习题2-2-10] 试证:

(1) 从拓扑空间到平庸空间的任何映射都是连续映射;

(2) 从离散空间到拓扑空间的任何映射都是连续映射.

212 170322

(170322) [熊金城点集拓扑习题2-4-01] 求集合的导集和闭包:

(1) 设 A 是有限补空间 X 中的一个无限子集, 求 A 的导集和闭包;

(2) 设 A 是可数补空间 X 中的一个不可数子集, 求 A 的导集和闭包;

(3) 求实数空间 $\mathbb{R}$ 中的有理数集 $\mathbb{Q}$ 的导集和闭包;

(4) 设 X^* 是 §2.2 习题 9 中定义的拓扑空间, 求单点集 $\{\infty\}$ 的导集和闭包.

213 170323

(170323) [熊金城点集拓扑习题2-5-02] 设 X 是一个拓扑空间, $A, B \subset X$. 证明:

(1) $A^- = A \cup \partial A$, $A^o = A \setminus \partial A$;

(2) $\partial(A^o) \subset \partial A$, $\partial(A^-) \subset \partial A$;

(3) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, $(A \cup B)^o \supset A^o \cup B^o$;

(4) $\partial A = \varnothing$ 当且仅当 A 是一个既开又闭的集合;

(5) $\partial(\partial A) \subset \partial A$;

(6) $A \cap B \cap \partial(A \cap B) = A \cap B \cap (\partial A \cup \partial B)$.

214 170324

(170324) [熊金城点集拓扑习题2-6-07] 设 X 是一个度量空间. 证明: 如果 X 有一个基只含有有限个元素, 则 X 必为含有有限多个点的离散空间.

215 170325

(170325) [熊金城点集拓扑习题3-1-02] 如果 Y 是拓扑空间 X 的一个开 (闭) 子集, 则 Y 作为 X 的子空间时特别地被称为 X 的开 (闭) 子空间. 证明:

(1) 如果 Y 是拓扑空间 X 的一个开子空间, 则 $A \subset Y$ 是 Y 中的一个开集当且仅当 A 是 X 的一个开集;

(2) 如果 Y 是拓扑空间 X 的一个闭子空间, 则 $A \subset Y$ 是 Y 中的一个闭集当且仅当 A 是 X 的一个闭集.

216 170326

(170326) [熊金城点集拓扑习题3-2-01] 设 (X, ρ) 是一个度量空间, 证明映射 $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ 是一个连续映射.

217 170327

(170327) 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续可微函数, 满足 $f(0) = f(1) = 0$. 试证:

$$\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \frac{1}{12}\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

且等号成立当且仅当 $f(x) = Ax(1-x)$, 其中 A 是常数.

218 170328

(170328) [南开大学2014高代] 设 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1,$$

且满足 $a_{ij}=-a_{ji},\ i,j=1,2,\cdots,n$. 对任意的 x, 求 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}.$$

219 170329

(170329) [南开大学2014高代] 设 A 为 $s\times n$ 矩阵. 证明:

$$s-\mathrm{r}\,(E_s-AA^T)=n-\mathrm{r}\,(E_n-A^TA).$$

220 170330

(170330) [南开大学2014高代] 设 A 为对称矩阵, 存在线性无关的向量 x_1,x_2, 使得 $x_1^TAx_1>0$, $x_2^TAx_2<0$. 证明: 存在线性无关的向量 x_3,x_4 使得 x_1,x_2,x_3,x_4 线性相关, 且 $x_3^TAx_3=x_4^TAx_4=0$.

221 170331

(170331) [南开大学2014高代] 设 σ,τ 为线性变换, 且 σ 有 n 个不同的特征值. 证明: 若 $\sigma\tau=\tau\sigma$, 则 τ 可由 $I,\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^{n-1}$ 线性表出, 其中 I 为恒等变换.

222 170401

(170401) [南开大学2014高代] 设 $f(x)$ 为 A 的特征多项式, 且存在互素的次数分别为 p,q 的多项式 $g(x),h(x)$ 使得 $f(x)=g(x)h(x)$. 求证:

$$\mathrm{r}\,[g(A)]=q,\quad \mathrm{r}\,[h(A)]=p.$$

223 170402

(170402) [北京大学数学系数分习题集05-09] 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 n 次可微, 且

$$|f(x)|\leqslant M_0,\quad |f^{(n)}(x)|\leqslant M_n,\quad (M_0,M_n\text{ 为常数}).$$

求证:

(1) $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界;

(2) $|f^{(k)}(x)|\leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{n}}M_n^{\frac{k}{n}}$, $(0\leqslant k\leqslant n)$.

224 170403

(170403) 试求

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\mathrm{e}^x\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

225 170404

(170404) [熊金城点集拓扑习题3-3-05] 设 X,Y 是两个拓扑空间, $f:X\to Y$ 是商映射. 令

$$R=\left\{(x,y)\in X^2;f(x)=f(y)\right\}.$$

试证: (1) R 是 X 中的一个等价关系; (2) Y 同胚于商空间 X/R.

226　170405

(170405) [熊金城点集拓扑习题4-1-01] 设 A 和 B 是拓扑空间 X 的隔离子集, 证明: 如果 $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, 则 A_1 和 B_1 也是隔离子集.

227　170406

(170406) [熊金城点集拓扑习题4-3-01] 设 X 是一个拓扑空间, $x, y \in X$ 是连通的. 证明: 如果 E 是一个既开又闭的子集, 则或者 $x, y \in E$ 或者 $x, y \notin E$. (此命题的逆命题不成立, 见下题.)

228　170407

(170407) [熊金城点集拓扑习题4-4-02] 证明: 任何一个有限补空间和任何一个可数补空间都是局部连通空间.

229　170408

(170408) [熊金城点集拓扑习题4-5-01] 设 $A \subset \mathbb{R}$, 试证: A 是连通的 $\Leftrightarrow$ A 是道路连通的.

230　170409

(170409) [熊金城点集拓扑习题5-1-06] 设 X 是一个满足第一可数性公理的空间, $A \subset X$. 证明 A 是一个开子集当且仅当对于 X 中的任何一个序列 $\{x_i\}$, 只要 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x \in A$, 则存在 $N > 0$ 使得当 $i \geqslant N$ 时有 $x_i \in A$.

231　170410

(170410) [熊金城点集拓扑习题5-2-04] 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$ 是一个连续映射. 证明: 如果 X 是一个可分空间, 则 $f(X)$ 也是可分的. (这说明可分性是一个连续映射所保持的性质, 并且由此可见, 它是一个拓扑不变性质, 可商性质.)

232　170411

(170411) [熊金城点集拓扑习题5-3-01] 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$ 是一个连续映射. 证明: 如果 X 是一个 Lindelöff 空间, 则 $f(X)$ 也是一个 Lindelöff 空间.

233　170412

(170412) [熊金城点集拓扑习题6-1-01] 设 X 是一个拓扑空间, 证明: X 是 T_0 空间当且仅当对于任何 $x, y \in X$, $x \neq y$, 或者 $\{x\} \cap \overline{\{y\}} = \varnothing$ 或者 $\{y\} \cap \overline{\{x\}} = \varnothing$.

234　170413

(170413) [熊金城点集拓扑习题6-1-05] 设 X 是一个拓扑空间, 证明: X 是 T_1 空间当且仅当对于任何 $x \in X$, 点 x 的所有邻域的交恰是单点集 $\{x\}$.

235　170414

(170414) [熊金城点集拓扑习题7-1-10] 设 U 是拓扑空间 X 中的一个开集. 证明: 如果 X 中的一个由紧致闭集构成的集族 $\mathscr{B}$ 满足条件 $\bigcap_{B\in\mathscr{B}} B \subset U$, 则存在 $\mathscr{B}$ 的一个有限子族 $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ 满足条件

$$B_1 \cap \cdots \cap B_n \subset U.$$

236 170415

(170415) [熊金城点集拓扑习题7-2-01] 设 X 是一个 Hausdorff 空间, $\mathscr{A}$ 是它的一个非空集族, 且由 X 的紧致子集构成. 证明: $\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}} A$ 是 X 的一个紧致子集.

237 170416

(170416) 如果

$$\|\nabla^2 u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\varOmega))}\leqslant C,$$

则

$$\|\nabla^2 u_n\|_{L^2(\varOmega\times(0,T))}\leqslant C,$$

而有子列弱收敛

$$\nabla^2 u_{n_k}\rightharpoonup \nabla^2 u,\ \text{in}\ L^2(\varOmega\times(0,T)).$$

238 170417

(170417) 设 A,B 都是实反对称矩阵, 且 A 可逆, 则 $|A^2-B|>0$.

239 170418

(170418) 设 X,Y 分别为 $m\times n$ 与 $n\times m$ 阵, 且

$$YX=E_n,\quad A=E_m+XY.$$

证明: A 相似于对角阵.

240 170419

(170419) 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的增函数. 再设 $x_0\in[a,b)$, 而点列 $\{x_n\}$ 满足: $x_n>x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在.

241 170420

(170420) 设 A 为 n 阶正定矩阵, x, y 为 n 维列向量且满足 $x^Ty>0$. 试证: 矩阵

$$M=A+\frac{xx^T}{x^Ty}-\frac{Ayy^TA}{y^TAy}$$

正定.

242 170421

(170421)

$$\begin{aligned}\int\Delta f|f|^{q-2}f\,\mathrm{d}x&=-\int\nabla f\cdot\left[(q-2)|f|^{q-3}\frac{f}{|f|}\nabla f\cdot f+|f|^{q-2}\nabla f\right]\mathrm{d}x=-\int(q-2)|f|^{q-4}|f|^2|\nabla f|^2+|f|^{q-2}|\nabla f|\,\mathrm{d}x\\&=-(q-1)\int|f|^{q-2}|\nabla f|^2\,\mathrm{d}x=-(q-1)\int|f|^{q-2}|\nabla|f||^2\,\mathrm{d}x\qquad\left(\nabla|f|=\frac{f}{|f|}\nabla f\right)\\&=-(q-1)\int||f|^{\frac{q}{2}-1}\nabla|f||^2\,\mathrm{d}x=-\frac{4(q-1)}{q^2}\int|\nabla|f|^{\frac{q}{2}}|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

243 170422

(170422) 已知函数 $f(x)=\ln x-ax$, 其中 a 为常数. 如果 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2. 试证: $x_1x_2>\mathrm{e}^2$.

244 170423

(170423) 设 f 在 $[0,1]$ 上可微, 且满足条件 $f(1)=3\int_0^{1/3}\mathrm{e}^{x-1}f(x)\,\mathrm{d}x$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

245 170424

(170424) 设 f 为 $[0,1]$ 上的连续正函数, 且 $f^2(t)\leqslant 1+2\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s$. 证明: $f(t)\leqslant 1+t$.

246 170425

(170425) For $2<q<\infty$,

$$\begin{aligned}
-\int\Delta\boldsymbol{u}\cdot|\boldsymbol{u}|^{q-2}\boldsymbol{u}&=\int\partial_iu_j\partial_i\left(|\boldsymbol{u}|^{q-2}u_j\right)=\int\partial_iu_j\partial_i|\boldsymbol{u}|^{q-2}u_j+\int\partial_iu_j|\boldsymbol{u}|^{q-2}\partial_iu_j\\
&=\frac{1}{2}\int\partial_i|\boldsymbol{u}|^2\cdot\partial_i|\boldsymbol{u}|^{q-2}+\int|\boldsymbol{u}|^{q-2}|\nabla\boldsymbol{u}|^2=\frac{q-2}{2}\int|\boldsymbol{u}|\partial_i|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{u}|^{q-3}\partial_i|\boldsymbol{u}|+\int|\boldsymbol{u}|^{q-2}|\nabla\boldsymbol{u}|^2\\
&=\frac{q-2}{2}\int|\boldsymbol{u}|^{q-2}|\nabla|\boldsymbol{u}||^2+\int|\boldsymbol{u}|^{q-2}|\nabla\boldsymbol{u}|^2=\frac{4(q-2)}{q^2}\int|\nabla|\boldsymbol{u}|^{\frac{q}{2}}|^2+\int|\boldsymbol{u}|^{q-2}|\nabla\boldsymbol{u}|^2;
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}|^q=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\boldsymbol{u}|^2)^{\frac{q}{2}}=\frac{q}{2}(|\boldsymbol{u}|^2)^{\frac{q}{2}-1}\cdot2\boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=q|\boldsymbol{u}|^{q-2}\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}.$$

247 170426

(170426) 设 f 为 $[0,1]$ 上的连续非负函数, 找出满足条件

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1,\quad\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=a,\quad\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=a^2$$

的所有 f, 其中 a 为给定实数.

248 170427

(170427) 设 $f\in C^2[0,\pi]$, 且 $f(\pi)=2$, $\int_0^\pi[f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x=5$. 求 $f(0)$.

249 170428

(170428) 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 定义 $F(x)=\int_a^b f(x+t)\cos t\,\mathrm{d}t$, $a\leqslant x\leqslant b$. (1) 证明: F 在 $[a,b]$ 上可导; (2) 计算 $F''(x)$.

250 170429

(170429) 设 $n\in\mathbb{N}^+$, 计算积分 $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

251 170430

(170430) 令 $B(m,n)=\sum_{k=0}^n C_n^k\frac{(-1)^k}{m+k+1}$, $m,n\in\mathbb{N}^+$. (1) 证明 $B(m,n)=B(n,m)$; (2) 计算 $B(m,n)$.

252 170501

(170501) 证明: 当 $m<2$ 时, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^m}\int_0^x\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=0$.

253 170502

(170502) 证明: 当 $\lambda<1$ 时, $\lim\limits_{R\to+\infty} R^\lambda \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta=0$.

254 170503

(170503) 计算以下渐近等式

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad (n\to\infty)$$

中的待定常数 a,b.

255 170504

(170504) 设非负严格增加函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 有积分中值定理, 对于每个 $p>0$ 存在唯一的 $x_p\in(a,b)$, 使

$$f^p(x_p)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)\,\mathrm{d}t.$$

试求 $\lim\limits_{p\to\infty} x_p$.

256 170505

(170505) 设 $f\in C[0,+\infty)$, a 为实数, 且存在有限极限

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)+a\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

证明; $f(+\infty)=0$.

257 170506

(170506)

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha(fg)-(D^\alpha f)g\|_{L^2}\leqslant C\left(\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{H^m}+\|f\|_{H^{m-1}}\|\nabla g\|_{L^\infty}\right).$$

258 170507

(170507) Assume that a is a positive constant, $x(t),y(t)$ are two nonnegative $C^1(\mathbb{R}^+)$ functions, and $D(t)$ is a nonnegative function, satisfying

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2+y^2)+D\leqslant a(x^2+y^2+x+y)D.$$

If additionally, the initial data satisfy

$$x^2(0)+y^2(0)+\sqrt{2(x^2(0)+y^2(0))}<\frac{1}{a},$$

then, for any $t>0$, one has

$$x^2(t)+y^2(t)+x(t)+y(t)<x^2(0)+y^2(0)+\sqrt{2(x^2(0)+y^2(0))}<\frac{1}{a}.$$

259 170508

(170508) For $f\in H^s(\mathbb{R}^3)$ with $s>\frac{3}{2}$, we have

$$\|f\|_{L^\infty}\leqslant C\left(1+\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\right)\ln\left(1+\|f\|_{H^s}\right),\quad s>\frac{3}{2}.$$

260 170509

(170509)

$$(\nabla \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{b} = -\nabla \frac{|\boldsymbol{b}|^2}{2} + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{b}.$$

261 170510

(170510) 设 $x \neq 0$, 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

计算 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}(A^n - E)$.

262 170511

(170511) 设 $f(x) = x^2\ln(x+1)$, 求 $f^{(n)}(0)$.

263 170512

(170512) 证明不等式:

$$1 + x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) > \sqrt{1+x^2}, \quad x > 0.$$

264 170513

(170513) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi$, $x_{n+1} = \sin x_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. (1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求其极限; (2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$; (3) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n = 1$; (4) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(1 - \frac{nx_n^2}{3}\right)$.

265 170514

(170514) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 又

$$\phi(x) = f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

单调递减. 证明: $f \equiv 0$.

266 170515

(170515) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 其正负惯性指数分别是 p, q. 再设

$$f(x) = x^T Ax, \quad N_f = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = 0\}.$$

证明:

(1) 包含于 N_f 的线性空间的维数至多是 $n - \max\{p, q\}$;

(2) 若 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间, 将二次型限定在 W 中得到正负惯性指数分别是 p_1, q_1, 则有 $p_1 \leqslant p$, $q_1 \leqslant q$.

267 170516

(170516) 在 [Yosida, Kō saku. Functional analysis. Reprint of the sixth (1980) edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995] 第 126-127 页给出了一致凸 Banach 空间的定义: 若 Banach 空间 X 满足

$$\begin{gathered}\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \text{s.t.}\\ \|x\|\leqslant 1,\ \|y\|\leqslant 1,\ \|x-y\|\geqslant\varepsilon\Rightarrow\|x+y\|\leqslant 2(1-\delta).\end{gathered}$$

则称 X 是一致凸的 Banach 空间. 试证: 若 $\{x_n\},\{y_n\}\subset X$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=1,\quad \|x_n-y_n\|\geqslant\varepsilon'>0,$$

则

$$\varlimsup_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|<2.$$

268 170517

(170517) 设 V 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的三维线性空间, $\mathscr{A}:\ V\to V$ 是一个线性变换. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in V$ $(\alpha_1\neq 0)$ 满足

$$\mathscr{A}\alpha_1=\alpha_2,\quad \mathscr{A}\alpha_2=\alpha_3,\quad \mathscr{A}\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2.$$

证明: 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 V 的一组基.

269 170518

(170518) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)=0$, $f\left(\frac12\right)=1$. 证明: 对于任意的实数 λ, 一定存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f'(\xi)-\lambda f(\xi)+\lambda f(\xi)=1.$$

270 170519

(170519) 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减, 证明: 对于任何 $\alpha\in(0,1)$,

$$\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

271 170520

(170520) 设 $a_n>0$, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ 发散, 证明: $\sum\limits_{n=1}^\infty\dfrac{a_n}{S_n}$ 发散.

272 170521

(170521) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶连续可导, $f(a)=0$. 证明:

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x-\frac12\int_a^b[f'(x)]^2(x-a)^2\,\mathrm{d}x.$$

273 170522

(170522) 设 $f(x)$ 二阶连续可导, $f(0)=f(1)=0$, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant1}f(x)=2$. 证明:

$$\min_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\leqslant-16.$$

274 170523

(170523) 试证:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

275 170524

(170524) 设 A 是 n 阶 Hermite 矩阵, 即 $A^* \equiv \bar{A}^T = A$. 试证:

(1) $\alpha^* A\alpha \in \mathbb{R},\ \forall\ \alpha \in \mathbb{C}^n$;

(2) A 的特征值均为实数;

(3) $\|(A \pm \mathrm{i}E)\alpha\|^2 = \|A\alpha\|^2 + \|\alpha\|^2,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{C}^n$;

(4) $A \pm \mathrm{i}E$ 可逆;

(5) $B = (A - \mathrm{i}E)(A + \mathrm{i}E)^{-1}$ 是酉矩阵, 即 $B^*B = BB^*$;

(6) $E - B$ 可逆;

(7) $A = \mathrm{i}(E + B)(E - B)^{-1}$.

276 170525

(170525) 设 B 是 n 阶酉矩阵, 满足 $\mathrm{r}\,(E - B) = n$. 试证: 存在唯一的 n 阶 Hermite 矩阵 A 使得 $(A - \mathrm{i}E)(A + \mathrm{i}E)^{-1} = B$.

277 170526

(170526) 试证:

$$\frac{x^{\frac{1}{\ln 2}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(1+x)} > 1, \quad x > 1.$$

278 170527

(170527) 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 满足

$$\bar{D}^+ f(x) = \overline{\lim_{y \to x^+}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0,\ a \leqslant x \leqslant b.$$

试证: $f(a) \leqslant f(b)$.

279 170528

(170528) 在实数空间 $\mathbb{R}$ 中给定如下等价关系:

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in (-\infty, 1) \text{ 或者 } x, y \in [1, 2) \text{ 或者 } x, y \in [2, +\infty).$$

设在这个等价关系下得到的商集 $Y = \{[-2], [1], [2]\}$, 试写出 Y 的商拓扑.

280 170529

(170529) 域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵 A 称为幂等矩阵, 如果 $A^2 = A$. 试证: 若 A 幂等, 则 A 可对角化, 且 $\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{tr}\,(A)$.

281 170530

(170530) [兰州大学2013高代] 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ 是 $\mathbb{F}$ 上所有 n 级矩阵构成的 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, f 是 V 上的线性变换, 证明: 若 f 保持矩阵的乘法运算, 即对任意 $A,B\in V$,

$$f(AB)=f(A)\cdot f(B).$$

则存在 n 级可逆矩阵 Q 使得对任意 $X\in V$, 有 $f(X)=Q^{-1}XQ$.

282 170531

(170531)

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a}).$$

see [李大潜, 秦铁虎, 物理学与偏微分方程 (第二版) 上册, 北京: 高等教育出版社, 2005 年] 第 163 页.

283 170601

(170601)

$$0<p<\infty\Rightarrow H_p=\dot{F}^0_{p,2};\quad BMO=\dot{F}^0_{\infty,2}.$$

see [H. Triebel, Theory of function spaces I, Birkhäuser, Basel, 1983] Page 244.

284 170602

(170602)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{b}=0\Rightarrow\nabla\times[(\nabla\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}]=\nabla\times[\nabla\cdot(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{b})].$$

证明: 右端第一个分量为

$$\begin{aligned}&\sum_i\partial_2(\partial_i(b_ib_3))-\partial_3(\partial_i(b_ib_2))=\sum_i\partial_2(b_i\partial_ib_3)-\partial_3(b_i\partial_ib_2)=\sum_i\partial_2b_i\partial_ib_3-\partial_3b_i\partial_ib_2+\sum_ib_i\partial_i(\partial_2b_3-\partial_3b_2)\\&=\partial_2b_1\partial_1b_3+\partial_2b_2\partial_2b_3+\partial_2b_3\partial_3b_3-\partial_3b_1\partial_1b_2-\partial_3b_2\partial_2b_2-\partial_3b_3\partial_3b_2+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)j_1\\&=\partial_2b_1\partial_1b_3-\partial_2b_3\partial_1b_1-\partial_3b_1\partial_1b_2+\partial_3b_2\partial_1b_1+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)j_1=\partial_2b_1\partial_1b_3-\partial_3b_1\partial_1b_2-j_1\partial_1b_1+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)j_1\\&=-(\partial_3b_1-\partial_1b_3)\partial_2b_1-(\partial_1b_2-\partial_2b_1)\partial_3b_1-j_1\partial_1b_1+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)j_1=-j_2\partial_2b_1-j_3\partial_3b_1-j_1\partial_1b_1+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)j_1\\&=-(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)b_1+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)j_1.\end{aligned}$$

利用公式

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a}),$$

我们知

$$\nabla(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{j}-(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}.$$

而左端的第一项也为 $-(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)b_1+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)j_1$. 故有结论.

see [D. Chae, M. Schonbek, On the temporal decay for the Hall-magnetohydrodynamic equations, J. Differential Equations, 255 (2013), 3971–3982].

285 170603

(170603)

$$\dot{B}^0_{\infty,2} \subsetneq BMO.$$

see [T. Ogawa, Sharp Sobolev inequality of logarithmic type and the limiting regularity criterion to the harmonic heat flow, SIAM J. Math. Anal., 34 (2003), 1318–1330], [J. Bergh, J. Löfström, Interpolation spaces: an introduction, Grundlehren Math. Wiss. 223, Springer-Verlag, Berlin, New York, Heidelberg, 1976] or [R.S. Strichartz, Bounded mean oscillation and Sobolev sapces, Indiana Univ. Math. J., 29 (1980), 539–558].

286 170604

(170604) 设 $f \in L(\mathbb{R})$, 试证:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2 x)$$

在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处收敛到一 Lebesgue 函数.

287 170605

(170605) Let

$$\begin{aligned} \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant p, q \leqslant r \leqslant \infty, \quad 0 < \theta < 1, \\ -\lambda + \frac{n}{p} < \frac{n}{r} < -\mu + \frac{n}{q}, \\ \frac{n}{r} = (1-\theta)\left(-\lambda + \frac{n}{p}\right) + \theta\left(-\mu + \frac{n}{q}\right). \end{aligned}$$

Then

$$\|f\|_{\dot{B}^0_{r,1}} \leqslant \|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{\lambda}_{p,\infty}} \|f\|^{\theta}_{\dot{B}^{\mu}_{q,\infty}}.$$

see [S. Machihara, T. Ozawa, Interpolation inequalities in Besov spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 131 (2002), 1553–1556].

288 170606

(170606) 设 $\mathbb{F}$ 为数域, 如果 $p_1(x), \cdots, p_r(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 r 个两两不同的首相系数为 1 的不可约多项式, 证明: $f(x) = p_1(x) \cdots p_r(x)$ 在数域 $\mathbb{F}$ 上无重根.

289 170607

(170607) 设 V 是由次数不超过 4 的一切实系数一元多项式组成的向量空间. 对于 V 上的任意多项式 $f(x)$, 以 $x^2 - 1$ 除 $f(x)$ 所得的商式及余式分别为 $q(x)$ 和 $r(x)$, 记

$$f(x) = q(x)(x^2 - 1) + r(x).$$

设 $\mathscr{A}$ 是 V 到 V 的映射, 使得

$$\mathscr{A}(f(x)) = r(x).$$

试证: $\mathscr{A}$ 是一个线性变换, 并求它关于基底 $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ 的矩阵.

290 170608

(170608) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, $f(a) = f(b) = 0$, 则对 $\forall\, x \in [a, b]$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

291 170609

(170609) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 试证: 对任意 $c\in(a,b)$, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f''(\xi)}{2}=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

292 170610

(170610) 设 f 在 $[0,c]$ 上连续, $f(0)=0$, 且当 $x\in(0,c)$ 时, $f''(x)<0$. 试证: 当 $0<a<b<a+b<c$ 时,

$$f(a+b)<f(a)+f(b).$$

293 170611

(170611) 试证:

$$(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b)<(1+a+b)\ln(1+a+b),\quad \forall\ a,b>0.$$

294 170612

(170612) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a)<f(b)$, 又设对一切 $x\in(a,b)$, $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x+t)-f(x-t)}{t}$ 存在, 用 $g(x)$ 表示这一极限值. 试证: 存在 $c\in(a,b)$, 使得 $g(c)\geqslant0$. (南开大学)

(注意题目未假定导数存在)

295 170613

(170613) 试证:

$$g(n,i)\equiv\sum_{k=0}^n C_n^k(-1)^k k^i=\begin{cases}0, & 0\leqslant i\leqslant n-1\\ (-1)^n n!, & i=n\end{cases},\ n=1,2,\cdots.$$

296 170614

(170614) [南京大学2013数分] 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的 C^1 函数. 如果 f 满足以下条件:

$$f(x)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(2x),\quad \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

证明: f 恒等于零.

297 170615

(170615) 若函数 $p(t)$ 在 $[0,\infty)$ 连续, 且当 $t\to+\infty$ 时, $p(t)=o(t^N)$ (N 为正整数). 又 $\lambda<0$, 证明: 当 $t\to\infty$ 时,

$$\int_t^\infty p(\tau)\mathrm{e}^{\lambda\tau}\,\mathrm{d}\tau=o(t^{N+1})\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

(北京师范大学)

298 170616

(170616) 设 $f\in C^{n+1}(\mathbb{R})$, 试证: 对 $\forall\ a\in\mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]_{x=a}=\frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}.$$

299 170617

(170617) 试计算矩阵 $A=(\sin(\alpha_i+\alpha_j))_{n\times n}$ $(n\geqslant 2)$ 的行列式.

300 170618

(170618) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(a)=f'(b)$, 试证:

$$\exists\,\xi\in(a,b),\ \text{s.t. } f'(\xi)(\xi-a)=f(\xi)-f(a).$$

301 170619

(170619) 设 H^{-1} 是 H_0^1 的对偶空间, 定义域为 $[0,1]$. 试证:
(1) $\{h\sin(2\pi hx);\ h>0\}$ 在 H^{-1} 中有界;
(2) 试求 $h\sin(2\pi hx)$ 在 H^{-1} 中的弱极限.

302 170620

(170620) 已知二次型

$$f(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$$

的秩是 2, 求参数 b, 并指出方程

$$f(x,y,z)=4$$

表示什么曲面?

303 170621

(170621) 试求

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}\right),\quad x>0.$$

304 170622

(170622) 无穷多个无穷小量相乘还是无穷小量么?

305 170623

(170623) 设立体 Σ 由 $x^2+y^2=2z$ 与 $z=4-\sqrt{x^2+y^2}$ 围成, 求 Σ 的体积与表面积.

306 170624

(170624) 对任两酉阵 U,V, 有

$$\|A\|_F=\|UAV\|_F\,.$$

事实上,

$$\begin{aligned}\|UAV\|_F^2&=\mathrm{tr}\,(V^*A^*U^*\cdot UAV)=\mathrm{tr}\,(V^*A^*AV)=\mathrm{tr}\,(AVV^*A^*)\quad(\mathrm{tr}\,(AB)=\mathrm{tr}\,(BA))\\&=\mathrm{tr}\,(AA^*)=\mathrm{tr}\,(A^*A)=\|A\|_F^2\,.\end{aligned}$$

307 170625

(170625) 设 D 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域, f 在 D 上连续且有偏导数. 如果在 D 上有

$$f_x+f_y+f_z=f,\quad f|_{\partial D}=0\ (\partial D \text{ 记 } D \text{ 的边界}).$$

则 f 在 D 上恒等于 0.

308 170626

(170626) [中国科学技术大学2013年数分] 设

$$\vec{F}=\left(a-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{bx}{y^2},-\frac{cxy}{z^2}\right),$$

其中 a,b,c 是三个常数.

(i) 问 a,b,c 取何值时, $\vec{F}$ 为有势场.

(ii) 当 $\vec{F}$ 为有势场时, 求出它的势函数.

309 170627

(170627) 设 f 是从区间 $[0,1]$ 映到 $[0,1]$ 的函数, 其图像 $\{(x,f(x));\ x\in[0,1]\}$ 是单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 的闭子集. 证明: f 是连续函数.

310 170628

(170628) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n\sin^n x}$. (内蒙古大学)

311 170629

(170629) 设矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 通过初等行变换化为 $\begin{pmatrix}E_r & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 则 A 的秩为 r, 且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 A 的列向量组的一个极大无关组, $(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)b$.

312 170630

(170630) 梁济自杀前问儿子梁漱溟：这个世界会好吗？

自杀前三天，即 1918 年 11 月 7 日，已经下了决定的梁济问儿子梁漱溟：“这个世界会好吗？”正在北京大学当哲学讲师的儿子回答说：“我相信世界是一天一天往好里去的。”“能好就好啊!”梁济说罢离开了家。这是他留给儿子的最后的话。

313 170701

(170701) [南开大学2017数分] 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^n\frac{k\sin^2 k}{n^2+k\sin^2 k}$ $(n=1,2,\cdots)$. 求证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

分析. 注意到 $0\leqslant k\sin^2 k\leqslant k=o(n^2)$, 我们写下

$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^n k\sin^2 k\leqslant x_n=\sum_{k=1}^n\frac{k\sin^2 k}{n^2+k\sin^2 k}\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k\sin^2 k$$

于是我们仅需估算 $\sum\limits_{k=1}^n k\sin^2 k$.

314 170702

(170702) [南京大学2013数分] 在 $\mathbb{R}^4$ 中定义如下有界区域 Ω:

$$\Omega=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4;\ |x|+|y|+\sqrt{z^2+w^2}\leqslant 1\right\}.$$

计算 Ω 的体积.

315 170703

(170703) [南京大学数分] 设 $\{a_n\}$ 为数列, $S_n=\sum\limits_{k=1}^n a_k$ 为部分和.

(1). 当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 时, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}=0$.
(2). 设 $\{S_n\}$ 有界, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.
(3). 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ 时, 能否推出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$? 若能, 给出证明; 若不能, 请构造反例.

316 170704

(170704) [武汉大学2017数分] 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n\left(\mathrm{e}^{\frac{k^2}{n^3}}-1\right)$.

317 170705

(170705) [天津大学1979数分] 计算

$$\oint_L x^2yz\,\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y+(x+y+1)\,\mathrm{d}z,$$

其中 L 为曲面 $x^2+y^2+z^2=5$ 和 $z=x^2+y^2+1$ 的交线, 从 z 轴正向看 L 是逆时针方向.

318 170706

(170706) [(170705) 的另外解法: 通过 Stokes 公式]

319 170707

(170707) [(170705) 的另外解法: 通过 Stokes 公式, 另外一张曲面]

320 170708

(170708) 试证: $\sum\limits_{k=0}^\infty\dfrac{2^kz^{2^k}}{1+z^{2^k}}=\dfrac{z}{1-z},\ \forall\ z:\ |z|<1$.

321 170709

(170709) [扬州大学2017数分] 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续可导, $f(0)=f(1)=0$, 求证:

$$\left[\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\frac{1}{45}\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立当且仅当 $f(x)=A(x-x^3)$ 时成立, 其中 A 为常数.

322 170710

(170710) 设 f 是 $[a,b]$ 上的可微凹函数, $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)=\alpha>0$, $f'(b)=\beta<0$. 试证:

$$0\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\alpha\beta\frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}.$$

323 170711

(170711) 试求

$$I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\,\mathrm{d}x.$$

324 170712

(170712) [中南大学2016数分] 已知球缺高为 h, 所在球半径为 R 的球缺体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$. 现有一球体:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant 12$$

被平面 $x+y+z=1$ 所截下的小球缺为 $\varOmega$, 记球缺上的球冠为 $\varSigma$, 方向指向球外, 求第二型曲面积分:

$$I=\iint\limits_{\varSigma}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

325 170713

(170713) [郑州大学2017高代] 设 A,B 均为 n 阶实正交阵, 证明 $|\det(A+B)|\leqslant 2^n$.

326 170714

(170714) [郑州大学2017高代] 设 A,B 都是 n 阶矩阵, $AB=BA=0$, $\mathrm{r}\,(A^2)=\mathrm{r}\,(A)$. 证明: $\mathrm{r}\,(A+B)=\mathrm{r}\,(A)+\mathrm{r}\,(B)$.

327 170715

(170715) [郑州大学2017高代] 设实对称矩阵 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式都大于 0, 但 $\det A=0$. 证明: A 半正定.

328 170716

(170716) [郑州大学2017高代] 在 n 维欧氏空间 V 中, $W_1,\cdots,W_r$ 是 V 的真子空间, 求证: 必存在一组正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 使得所有的 α_i 不属于 $W_1\cup\cdots\cup W_r$.

329 170717

(170717) [郑州大学2017高代] 设 V 为 n 维线性空间, J 为 n 阶矩阵, 满足 $J^n=2^nE$. 令 $W=\{x\in V;\ Jx=2x\}$, 证明: W 是 V 的线性子空间, 且

$$\dim W=\frac{\mathrm{tr}\,J}{2n}+\frac{\mathrm{tr}\,J^2}{2^2n}+\cdots+\frac{\mathrm{tr}\,J^n}{2^nn}.$$

330 170718

(170718) [赣南师范大学2017高代] A 是 n 阶实对称矩阵, 证明 A 可逆充要条件是存在矩阵 B 使得 $AB+B^TA$ 是正定矩阵.

331 170719

(170719) [华中科技大学2011数分] 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上可积, 证明

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\pi-x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n},$$

其中

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\quad (n=1,2,3,\cdots).$$

332 170720

(170720) [华中科技大学2011数分] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微, 证明:

$$|f'(0)|\leqslant 9\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

333 170721

(170721) [Erdös 对均值不等式的简单证明] 设 $a_i>0$ $(i=1,\cdots,n)$, 则

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}.$$

334 170722

(170722) 对速度 $u=(u_1,u_2,u_3)$, 其旋度定义为

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{u}=(\partial_2u_3-\partial_3u_2,\partial_3u_1-\partial_1u_3,\partial_1u_2-\partial_2u_1).$$

而有公式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0\Rightarrow\nabla\times[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}]=(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}.$$

335 170723

(170723) 设 $A=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;n=1,2,\cdots\right\}$, $B=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{1}{n}+1;n=1,2,\cdots\right\}$, 求 $\mathrm{int}A$, A', $\bar{A}$, $\mathrm{int}B$, B', $\bar{B}$.

336 170724

(170724) 设 $f(x)=\begin{cases}x^3\mathrm{e}^{-x}, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 1, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否 Riemann 可积? 是否 Lebesgue 可积? (须说明理由), 若可积, 求出积分值.

337 170725

(170725) 设 (X,ρ) 是距离空间, 证明: 当 $0<\alpha<1$ 时, $d(x,y)=[\rho(x,y)]^\alpha$, $x,y\in X$, 也是 X 上的距离.

338 170726

(170726) 讨论 $x_n(t)=\begin{cases}1-nt, & t\in[0,1/n)\\ 0, & t\in[1/n,1]\end{cases}$ $(n=1,2,\cdots)$ 是否为 $C[0,1]$ 中的 Cauchy 列? 是否为 $L^1[0,1]$ 中的 Cauchy 列?

339 170727

(170727) 设 $Ax=\left(\xi_1,\frac{1}{2}\xi_2,\frac{1}{3}\xi_3,\cdots\right),\forall\ x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in\ell^\infty$, ℓ^∞ 为有界数列空间, 证明算子 A 是 ℓ^∞ 到 ℓ^∞ 的有界线性算子, 并求 $\|A\|$.

340 170728

(170728) 证明: 任何一个复矩阵可以表为两个对称矩阵的乘积, 且其中一个为可逆矩阵.

341 170729

(170729) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是一列内积空间, 令 $X=\left\{\{x_n\};x_n\in X_n,\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|^2<\infty\right\}$, 当 $\{x_n\},\{y_n\}\in X$ 时, 规定 $\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}=\{\alpha x_n+\beta y_n\}$, α,β 是数, $\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle=\sum_{n=1}^\infty\langle x_n,y_n\rangle$. 证明 X 是内积空间.

342 170730

(170730) 设 $K(x,t)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant t\\ t, & t\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$, 映射 $T:C[0,1]\to C[0,1]$, 对 $\phi(t)\in C[0,1]$,

$$\phi(x)=k_0+\alpha\int_0^1 K(x,t)\phi(t)\,\mathrm{d}t,$$

k_0 和 α 是常数, 当 k_0 和 α 是何值时, T 是压缩映射.

343 170731

(170731) 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 Q 和对角线元素为负的上三角矩阵 R, 使 $A=QR$.

344 170801

(170801) H 为内积空间, $M,N\subset H$, L 是由 M 和 N 张成的线性空间, 证明 $L^\perp=M^\perp\cap N^\perp$.

345 170802

(170802) [华中师大17数分] 利用 Parseval 等式证明: 如果 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数 f 和三角函数系

$$\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

中每个函数正交, 那么必有 $f(x)=0$.

346 170803

(170803) [华中师大17数分] 设二元函数 $z(x,y)$ 在上半平面 $D=\{(x,y);y>0\}$ 内具有具有连续偏导数, 且满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{6}$$

(1) 变换 $\begin{cases}u=x+a\sqrt{y}\\ v=x+b\sqrt{y}\end{cases}$, $(a\neq b)$ 将上述方程 (6) 变换为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 求 a,b 的值; (2) 利用 (1) 的结果求方程 (6) 的通解.

347 170804

(170804) 试证: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n!\mathrm{e}\pi)=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2n!\mathrm{e}\pi)=2\pi$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2[n\sin(2n!\mathrm{e}\pi)-2\pi]=-\dfrac{2\pi(2\pi^2+3)}{3}$.

348 170805

(170805) 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\dfrac{n}{n}\right)^n\right]=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

349 170806

(170806) (1) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可微, 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^n f\left(\dfrac{k}{n}\right)-n\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]=\dfrac{f(1)-f(0)}{2}$;

(2) 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{n}{4}}n^{-\frac{n+1}{2}}\left(1^1\cdot 2^2\cdots n^n\right)^{\frac{1}{n}}=1$.

350 170807

(170807) 试证: 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=A$, 则对任意固定的整数 n_0 都有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{n_0+n}|}=a.\quad\text{(北京理工大学)}$$

351 170808

(170808) 证明: 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}c_n\leqslant c$, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{c_n}{1+|c_n|}\leqslant\frac{c}{1+|c|}.$$

352 170809

(170809) 给定正数列 $\{a_n\}$, 证明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geqslant \mathrm{e}.\quad\text{(国外赛题)}$$

353 170810

(170810) 求解 Cauchy 问题 $\begin{cases}u_t-u_{xx}-2u_x-u=0,\ -\infty<x<+\infty,\ t>0\\ u|_{t=0}=x,\ -\infty<x<+\infty\end{cases}$.

354 170811

(170811) [宁波大学2017复试] 证明 $\mathbb{R}$ 中的所有可测子集族 $\mathscr{M}$ 的基数为 $2^{\aleph}$, 其中 $\aleph$ 为连续基数.

355 170812

(170812) [宁波大学2017复试] 计算下列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{[0,\infty)}\dfrac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

356 170813

(170813) [浙江大学2018数分] 设 $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ 是可微函数, 且存在 $L>0$, 使得 $|f'(x)-f'(y)|\leqslant L|x-y|$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$. 试证: $[f'(x)]^2<2Lf(x)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

357 170814

(170814) 设 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ 存在. 这里 L 是有限数, $+\infty$ 或 $-\infty$. 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x=L$.

358 170815

(170815) 试求无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{2}{1+n^3}\right)$.

359 170816

(170816) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 满足 $1=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$. 试证: $\int_0^1[f(x)]^2\,\mathrm{d}x\geqslant 4$.

360 170817

(170817) [cmc09] 在空间直角坐标系中, 设单叶双曲面 $\varGamma$ 的方程为 $x^2+y^2-z^2=1$. 设 P 为空间中的平面, 它交 $\varGamma$ 于一抛物线 C. 求该平面 P 的法线与 z- 轴的夹角.

361 170818

(170818) [cmc09] 设 $\varGamma=\{W_1,W_2,\cdots,W_r\}$ 为 r 个各不相同的可逆 n 阶复方阵构成的集合. 若该集合关于矩阵乘法封闭 (即, $\forall\ M,N\in\varGamma$, 有 $MN\in\varGamma$), 证明: $\sum\limits_{i=1}^{r}W_i=0$ 当且仅当 $\sum\limits_{i=1}^{r}\mathrm{tr}\,(W_i)=0$, 其中 $\mathrm{tr}\,(W_i)$ 表示 W_i 的迹.

362 170819

(170819) [cmc09] 给定非零实数 a 及实 n 阶反对称矩阵 A (即, A 的转置 A^T 等于 $-A$), 记矩阵有序对集合 T 为

$$T=\left\{(X,Y);\ X\in\mathbb{R}^{n\times n},\ Y\in\mathbb{R}^{n\times n},\ XY=aI+A\right\},$$

其中 I 为 n 阶单位阵, $\mathbb{R}^{n\times n}$ 为所有实 n 阶方阵构成的集合. 证明: 任取 T 中两元: (X,Y) 和 (M,N), 必有 $XN+Y^TM^T\neq 0$.

363 170820

(170820) [cmc09] 设 $\{a_n\}$ 是递增数列, $a_1>1$. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界. 又问级数通项分母中的 a_n 能否换成 a_{n+1}?

364 170821

(170821) [cmc09] 设 $f(x)=\arctan x$, A 为常数. 若 $B=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)-An\right]$ 存在, 求 A,B.

365 170822

(170822) [cmc09] 设 $f(x)=1-x^2+x^3$ ($x\in[0,1]$), 计算以下极限并说明理由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x}$.

366 170823

(170823) [cmc09nonmathfin] 设 a,b,c,d 是互不相同的正实数, x,y,z,w 是实数, 满足 $a^x=bcd, b^y=cda, c^z=dab, d^w=abc$. 试求行列式 $\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -w \end{vmatrix}$.

367 170824

(170824) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续且递增, 试证: $\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\leqslant 2\int_0^1 x[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

368 170825

(170825) 对任一实数 $\lambda>1$, 已 $f(\lambda)$ 表示方程 $x(1+\ln x)=\lambda$ 的实数根, 试证: $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{f(\lambda)\ln\lambda}{\lambda}=1$.

369 170826

(170826) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微的凸函数, 试证: $f(x+f'(x))\geqslant f(x)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

370 170827

(170827) 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续, 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $f(a)=f(b)$, $f'(a)=f'(b)$. 试证: $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$, $\exists\ \xi\in(a,b)$, s.t. $f''(\xi)-\lambda[f'(\xi)]^2=0$.

371 170828

(170828) 设 $a,b>0$, $x,c>1$, 试证: $x^{a^c}+x^{b^c}\geqslant 2x^{(ab)^{c/2}}$.

372 170829

(170829) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_n<a_{2n}+a_{2n+1}$, 试证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

373 170830

(170830) 设 $-1<a_0<1$, $a_n=\sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}$, $(n>0)$. 问极限 $\lim\limits_{n\to\infty}4^n(1-a_n)$ 是否存在? 存在的话, 求出极限值.

374 170831

(170831) (1) 计算 Fibonacci 数列 F_n 的通项, 其中 $F_1=F_2=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. (2) 证明: $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$ $(n\geqslant 2)$. (3) 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$. (4) 试求 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{F_n^2}\right]$.

375 170901

(170901) 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 三阶可导, 且 $f'''(x)\geqslant 0$, $\forall\ x\in[0,1]$; $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 试证:

$$10\int_0^1 x^3f(x)\,\mathrm{d}x+6\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 15\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x.$$

376 170902

(170902) 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$, 又存在常数 M, 使得在 $[a,b]$ 上恒有 $|f''(x)|\leqslant M$, 试证: 在 $[a,b]$ 上恒有 $|f(x)|\leqslant\dfrac{M}{16}(b-a)^2$.

377 170903

(170903) 设 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$, 试证: $P_{2n+1}(x)$ 有唯一实根.

378 170904

(170904) (1) 求 $I(\alpha)=\int_0^1|\alpha x-1|\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 上的最小值. (2) 设 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$, $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明: $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|\geqslant\sqrt{}$

379 170905

(170905) 计算二重积分: $I=\iint\limits_D\dfrac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中积分区域由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

380 170906

(170906) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^1\dfrac{f(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$, 需要证明.

381 170907

(170907) 求 $x\to1^-$ 时, 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

382 170908

(170908) [浙江大学2018数分] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\sin\dfrac{k\pi}{n^2}$.

383 170909

(170909) [浙江大学2018数分] 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+\tan^2 x-(\mathrm{e}^x-1)^5}$.

384 170910

(170910) [浙江大学2018数分] 求 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{Rx\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+R)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半球面的上侧, R 为一常数.

385 170911

(170911) [浙江大学2018数分] (1) 用极限定义叙述 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq+\infty$. (2) 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin x}{\sqrt{x}+1}\neq+\infty$.

386 170912

(170912) [浙江大学2018数分] 证明有界闭集上的有限覆盖定理.

387 170913

(170913) [浙江大学2018数分] 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 上一致连续, 并且 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

388 170914

(170914) [浙江大学2018数分] 构造或者证明是否存在函数 $f(x)$: (1) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内连续可导, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有无限个零点, 且对任一的 $x\in(0,1)$ 上不存在 x 使得 $f(x)=f'(x)=0$. (2) 加入 $f(0)$ 和 $f(1)$ 都不等于 0, 问上述的 $f(x)$ 是否成立?

389 170915

(170915) [浙江大学2018数分] 设 $f(y)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $K(x,y)=\begin{cases} y(1-x), & y<x \\ x(1-y), & y\geqslant x \end{cases}$. 令 $u(x)=\int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$, 问 $u(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否连续并且求 $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$.

390 170916

(170916) [浙江大学2018数分] 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛, 定义 $x_n=a_{n+1}+2a_{n+2}+\cdots+ka_{n_k}+\cdots$, $(n=1,2,\cdots)$. (1) 问 x_n 是否有意义? (2) 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

391 170917

(170917) [浙江大学2018数分] 设函数集合 $S=\left\{f(x);\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|x^m\dfrac{\mathrm{d}^kf}{\mathrm{d}x^k}\right|<+\infty,\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$. 若 $f(x)\in S$, 求证 $\hat{f}(x)\in S$, 其中 $\hat{f}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t$, $f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t$.

392 170918

(170918) 设 I 是包含原点的开区间, f 在 I 上 k $(k\geqslant 1)$ 阶连续可导, 再设 $R_k(x)=f(x)-\sum\limits_{i=0}^{k}\dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i$, $x\in I$. 试证:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{R_k(u)-R_k(v)}{(u-v)(u^2+v^2)^{\frac{k-1}{2}}}=0.$$

393 170919

(170919) 设 f,g 是 $[0,1]$ 上的连续可微函数, 满足 $\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$. 试证:

$$\int_0^1 f^2\int_0^1 g^2\geqslant 4\left(\int_0^1 f\int_0^1 g\right)^2,\quad \int_0^1 f^2\left(\int_0^1 g\right)^2+\int_0^1 g^2\left(\int_0^1 f\right)^2\geqslant 4\left(\int_0^1 f\int_0^1 g\right)^2.$$

394 170920

(170920) 设 f 是 $[0,\infty)$ 上的递减函数, 满足 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. 定义 $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n f(nx)$, $x\in(0,\infty)$. (1) 若 f 在 $x=0$ 处连续, 且在 $[0,\infty)$ 上为凸函数, 试证: $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\dfrac{f(0)}{2}$. (2) 若 f 在 $[0,\infty)$ 上二阶连续可导, 且 $\int_0^\infty |f''(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$. 试证: $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\dfrac{f(0)}{2}$.

395 170921

(170921) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可微, 满足 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 试证: $\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x \geqslant 27\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$.

396 170922

(170922) 设 n 是自然数, f 在 $\mathbb{R}$ 上 $(4n+3)$ 次连续可导, 试证: $\exists\, a\in\mathbb{R}$, s.t. $\prod_{i=0}^{4n+3} f^{(i)}(a)\geqslant 0$.

397 170923

(170923) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可微, $A=f(1)$, $B=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$. 试求

$$L=\lim_{n\to\infty} n\left\{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^n\left[\frac{k^2}{n^2}-\frac{(k-1)^2}{n^2}\right]f\left(\frac{(k-1)^2}{n^2}\right)\right\}.$$

398 170924

(170924) 设 f 在 $[-1,1]$ 上二阶连续可导, $f(0)=0$. 试证: $\int_{-1}^1 [f''(x)]^2\,\mathrm{d}x\geqslant 10\left[\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$.

399 170925

(170925) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 试证: $\exists\, c\in(0,1)$, s.t. $c^2f(c)=\int_0^c (x+x^2)f(x)\,\mathrm{d}x$.

400 170926

(170926) 设 f 是 $[0,1]$ 上的非常值连续函数, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 记 $m=\min_{x\in[0,1]} f(x)$, $M=\max_{x\in[0,1]} f(x)$, 试证:

$$\left|\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{-mM}{2(M-m)}.$$

401 170927

(170927) 设 $f(x)=\frac{x}{\ln(1-x)}$, 试证: $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n(1-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)=-\frac{1}{2}xf(x)$, $\forall\ 0<x<1$.

402 170928

(170928) 设 $p>0, r\geqslant 1$; f 是 $[0,\infty)$ 上的连续可导函数, 满足 $\int_0^\infty |f(x)|^p\,\mathrm{d}x<\infty$, $\int_0^\infty |f'(x)|^r\,\mathrm{d}x<\infty$. 试证: $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

403 170929

(170929) 设 $a_1=a\in[0,2]$, $a_{n+1}=2^n-\sqrt{2^n(2^n-a_n)}$, $n\geqslant 1$. 试求 $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$.

404 170930

(170930) 设 $\alpha>1$, $u_n>0$ 满足 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-u_{n+1}}{u_n^\alpha}$ 存在但不等于 0. 试证: $\sum_{n=1}^\infty u_n$ 收敛当且仅当 $\alpha<2$.

405 171001

(171001) 设 f 是 $[0,1]$ 上的有界函数, 在 $x=1$ 处连续, 试求 $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1\left(\sum_{k=n}^\infty \frac{x^k}{k}\right)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

406 171002

(171002) 设 $a<c<d<b$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导且 $f(c)=f(d)=0$. 再设 $p>1$, 试证:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|^p \leqslant A\int_a^b |f''(x)|^p\,\mathrm{d}x,\quad A=\frac{1}{2}\left[\frac{(c-a)^{3+\frac{2}{p-1}}+(b-d)^{3+\frac{2}{p-1}}}{3+\frac{2}{p-1}}\right]^{p-1}.$$

407 171003

(171003) 对 n 阶复方阵 A, 其数值范围 (numerical range) 为 $W(A)=\{x^*Ax;\|x\|=1,\ x\in\mathbb{C}^n\}$, 其中 x^* 表示 x 的共轭转置. 若 $0\notin W(A)$, 则称 A 是完全可逆的. 试证: 若 A 完全可逆, 则 A^{-1} 也完全可逆.

408 171004

(171004) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数, 满足 $f(x+y)+f(x-y)-2f(x)\leqslant y^2$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$. 试证: f 可微, 且 $|f'(x)-f'(y)|\leqslant|x-y|$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$.

409 171005

(171005) 设 $n\geqslant 2$, $a_2,\cdots,a_n>0$ 满足 $\prod_{k=2}^n a_k=1$. 试证: $\prod_{k=2}^n(1+a_k)^k>\frac{2}{\mathrm{e}}\left(\frac{n}{2}\right)^{2n-1}$.

410 171006

(171006) [Carlson 不等式] 设 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足 $\int_0^\infty f^2(x)\,\mathrm{d}x<\infty$, $\int_0^\infty x^2f^2(x)\,\mathrm{d}x<\infty$. 试证:

$$\left[\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\right]^4\leqslant\pi^2\int_0^\infty f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^\infty x^2f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

411 171007

(171007) 设 $f(n)=\sum_{k=1}^n k^k$, $g(n)=\sum_{k=1}^n f(k)$, 试求 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{g(n+2)}{g(n+1)}-\frac{g(n+1)}{g(n)}\right]$.

412 171008

(171008) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $f(0)=0$, $f(1)=1$. 试证:

$$\forall\ n\in\mathbb{Z}_+,\ \exists\ 0<c_1<\cdots<c_n<1,\ \text{s.t.}\ \prod_{k=1}^n f'(c_k)=1.$$

413 171009

(171009) 设 f 在 $[-1,1]$ 上 $2n+2$ 阶连续可导, $f(0)=f^{(2)}(0)=\cdots=f^{(2n)}(0)=0$. 试证:

$$\frac{1}{2}[(2n+2)!]^2(4n+5)\left[\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_{-1}^1[f^{(2n+2)}(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

414 171010

(171010) 设 f 在 $[0,\infty)$ 上连续且不恒等于零, 满足

$$S=\int_0^\infty f^2(x)\,\mathrm{d}x<\infty,\quad T=\int_0^\infty x^2f^2(x)\,\mathrm{d}x<\infty,\quad U=\int_0^\infty x^4f^2(x)\,\mathrm{d}x<\infty.$$

再令 $V=T+\sqrt{T^2+3SU}$. 试证: $\left(\int_0^\infty|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^4\leqslant\frac{\pi^2S(T+V)^2}{9V}$.

415 171011

(171011) 设 f 是 $[0,\infty)$ 上的非负有界连续函数, 试求

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\sqrt[n]{\int_0^\infty f^{n+1}(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}-\sqrt[n]{\int_0^\infty f^n(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}\right].$$

416 171012

(171012) 设 f 是 $[0,\infty)$ 上的正值连续函数, 试证:

$$\left[\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2-2\int_0^\infty xf^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 2\sqrt{\int_0^\infty f^2(x)\,\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_0^\infty x^2f^2(x)\,\mathrm{d}x}.$$

417 171013

(171013) 设 f 是 $[0,1]$ 上的非负可积函数, 试证: $\frac{3}{4}\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\frac{1}{16}+\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x$.

418 171014

(171014) 设 $n\in\mathbb{Z}_+$; $0<y_i\leqslant x_i<1$, $1\leqslant i\leqslant n$; $0\leqslant t\leqslant 1$. 试证:

$$\frac{\ln x_1+\cdots+\ln x_n}{\ln y_1+\cdots+\ln y_n}\leqslant\left(\frac{1-x_1}{1-y_1}+\cdots+\frac{1-x_n}{1-y_n}\right)^T.$$

419 171015

(171015) 设 f 是 $[0,1]$ 上的正值连续函数, 试证:

$$\left[\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right]^{-1}\leqslant\exp\left[\int_0^1\ln f(x)\,\mathrm{d}x\right]\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

420 171016

(171016) 设 f 是 $[0,1]$ 上的正值连续函数, 试证:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\left[\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right]^{-1}\leqslant\max_{0\leqslant x,y\leqslant 1}\left[\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(y)}\right]^2.$$

421 171017

(171017) 设 $f\in C^2[0,1]$, $f(0)=-1$, $f'(1)=3$, $\int_0^1 xf''(x)\,\mathrm{d}x=1$. 试求 $f(1)$.

422 171018

(171018) 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1+xy^3}{1+x^3y}=0.$.

423 171019

(171019) 设 f 是 $[0,1]$ 上的二阶连续可导函数, $1<p\in\mathbb{Z}_+$, 且 $\sum_{k=1}^{p-1}f\left(\frac{k}{p}\right)=-\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]$, 试证:

$$\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\frac{1}{5!p^4}\int_0^1[f''(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

424 171020

(171020) 设 f 是 $[0,1]$ 上的非负连续函数, 试证: $\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 4\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 xf^2(x)\,\mathrm{d}x$.

425 171021

(171021) [华东师大2018数学竞赛] 证明: 曲线 $\left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=z \\ 2x^2+z^2=1 \end{array}\right.$ 是球面曲线, 并写出此球面的方程.

426 171022

(171022) [华东师大2018数学竞赛] 设 $\mathbb{K}$ 是数域, $A,B\in M_n(\mathbb{K})$, $AB=BA$. 若 $A^{2018}=B^{2019}=E$, 证明: $A+B+E$ 可逆.

427 171023

(171023) 设 $z_1,\cdots,z_n$ 是复数, 试证:

$$\left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2\right)^2-\left|\sum_{k=1}^n z_k\right|^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^n |\operatorname{Re} z_k|-\left|\sum_{k=1}^n \operatorname{Re} z_k\right|\right)^2.$$

428 171024

(171024) 对 $\forall\ n\in\mathbb{Z}_+$, 试证:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}<\sum_{k=1}^n \frac{1}{\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)}<\frac{n}{4}+\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

429 171025

(171025) [华东师大2018数学竞赛] 设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{R})$, 且 $b_i\neq 0,\ \forall\ i=1,2,\cdots,n-1$. 证明: A 有 n 个互异的实特征值.

430 171026

(171026) [华东师大2018数学竞赛] 设 f 定义在 $[a,+\infty)$ 上, 给定 $\delta>0$, $t_0\geqslant a$, 记

$$\omega(f;t_0,\delta)=\sup\left\{|f(t_1)-f(t_2)|;t_1,t_2\geqslant t_0,\ |t_1-t_2|\leqslant\delta\right\}.$$

证明:若 $\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛, 则 $\lim_{t\to\infty} f(t)=0$ 当且仅当 $\lim_{\substack{t_0\to\infty\\ \delta\to 0}}\omega(f;t_0,\delta)=0$.

431 171027

(171027) [华东师大2018数学竞赛] 求极限 $\lim_{x\to 1^-}\prod_{n=0}^\infty \left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right)^{x^n}$.

432 171028

(171028) [华东师大2018数学竞赛] 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可导, 且 $\sup_{-\infty<x<+\infty}|\mathrm{e}^{-x^2}f'(x)|<+\infty$, 证明:

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|x\mathrm{e}^{-x^2}f(x)|<+\infty.$$

433 171029

(171029) [华东师大2018数学竞赛] 设 $\{a_n\}$ 是单调递减的正数列. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在任何区间上一致收敛的充分必要条件是 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

434 171030

(171030) 设 $A_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n!}(1+x^2)^{\frac{n}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$. 试证:

$$\int_{\mathbb{R}} A_m(x)A_n(x)\,\mathrm{d}x = \delta(m,n),\ \forall\ m,n\in\mathbb{N},\quad \delta(m,n) = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}.$$

435 171031

(171031) 试求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh 2^n}$.

436 171101

(171101) 设 f 在 $[0,1]$ 上非负连续, $\mu_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$. 试证: $\mu_{n+1}\mu_0 \geqslant \mu_n\mu_1,\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

437 171102

(171102) 设 $n\in\mathbb{N}$, f 在 $[0,1]$ 上连续, 满足 $\int_0^1 f^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 试证: $\frac{(2n+1)^{2n+1}}{(2n)^{2n}}\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^{4n} \leqslant \int_0^1 f^{4n}(x)\,\mathrm{d}x$.

438 171103

(171103) 设 $0<x<y\leqslant 1$, 试证: $|y\ln y - x\ln x| \leqslant |y-x|^{1-\frac{1}{e}}$.

439 171104

(171104) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 试证: $\forall\ n\in\mathbb{Z}_+$, $\exists\ \xi\in(0,1)$, s.t. $n\int_0^{\xi} x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \xi^{n+1}f(\xi)$.

440 171105

(171105) 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上正值连续, 满足 $\lim_{x\to\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)} = 0$, g 在 $\mathbb{R}$ 上满足 $\lim_{x\to\infty} g(x) > -1$. 试证: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+xg(x))}{f(x)} = -1$.

441 171106

(171106) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 满足 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 试证: $\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant 320\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$.

442 171107

(171107) 设 $a_n = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}$, $b_n = n^{\sin^2 x}(a_{n+1}^{\cos^2 x} - a_n^{\cos^2 x})$, 试求 $\lim_{n\to\infty} b_n(x)$.

443 171108

(171108) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且 $f'(x) > 0$, $\forall\ x\in(a,b)$. 试证: 对 $\forall\ a\leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, $f(x_1)f(x_2) > 0$, 存在 $\xi\in(x_1,x_2)$, s.t. $\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)} = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$.

444 171109

(171109) 设 A 是 n 阶正定矩阵, 最小特征值为 λ, 最大特征值为 $\varLambda$. 试证:

$$\left(\frac{\operatorname{tr} A}{n\varLambda}+\frac{n\varLambda}{\operatorname{tr} A}\right)^n \leqslant \det\left(\frac{A}{\varLambda}+\varLambda A^{-1}\right), \quad \left(\frac{n}{\lambda \operatorname{tr} A^{-1}}+\frac{\lambda \operatorname{tr} A^{-1}}{n}\right)^n \leqslant \det\left(\frac{A}{\lambda}+\lambda A^{-1}\right).$$

445 171110

(171110) 设 f 在 $[0,1]$ 上 n 阶连续可微, 满足 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$; 对任一小于 n 的偶数 i, $f^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right)=0$. 试证:

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{(2n+1)2^{2n}(n!)^2}\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

446 171111

(171111) 设 $\varepsilon>0$, f 是 $(0,+\infty)$ 上的正值可微函数, $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\varepsilon}}f(x)=\infty$. 试证: $\varliminf\limits_{x\to\infty}\left|\frac{f'(x)}{f^{1+\varepsilon}(x)}\right|=0$.

447 171112

(171112) 设 $f:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{R}_+$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=a>0$, 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{\prod\limits_{k=1}^{n+1} f(k)}-\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} f(k)}\right]$.

448 171113

(171113) 试证: $\forall\, n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $t(n)>0$, 使得 $[t(n)-1]\ln t(n)=n$, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} t(n)\frac{\ln n}{n}$.

449 171114

(171114) 设 $\{a_n\}$ 是有界数列, $b_n=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$. 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的极限点构成的集合分别为 A, B. 试证: 若 $A=B$, 则 A 是有界闭区间 (单点集是长度退化为零的闭区间). 其逆命题对么?

450 171115

(171115) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有原函数 F, 且满足 $2xF(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. 试求 $f(x)$.

451 171116

(171116) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 试证: $\exists\, c\in(0,1)$, s.t. $\int_0^c f(x)\,\mathrm{d}x=(1-c)f(c)$.

452 171117

(171117) 设 $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ 是 m 阶矩阵列, 满足 $A_0=A$, $A_{n+1}=A_n^2-A_n+\frac{3}{4}E$ $(n\geqslant 0)$, 其中 A 是 m 阶正定矩阵满足 $\operatorname{tr} A<1$. 试求 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

453 171118

(171118) 设 $\{x_n\}$ 是有界数列, $a\in\mathbb{R}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^j=a^j$, $j=1,2$. 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x_k=\sin a$.

454 171119

(171119) 设 f 在 $[0,\infty)$ 上连续, 且满足 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t=1$, 试证: $\lim\limits_{x\to\infty} 3xf^3(x)=1$.

455 171120

(171120) 设 $A_1,\cdots,A_{n+1}$ 是 $n+1$ 个 n 阶矩阵, 试证: 存在 $a_1,\cdots,a_{n+1}$ 使得 $a_1A_1+\cdots+a_{n+1}A_{n+1}$ 奇异.

456 171121

(171121) 求解 $2^x=\dfrac{2x^2+x+3}{3}$.

457 171122

(171122) 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}}\,\mathrm{d}x\right)^n$.

458 171123

(171123) 设 $\alpha\in\mathbb{R}^m$ 是列向量, 试化简 $(1-\alpha^T(E+\alpha\alpha^T)^{-1}\alpha)^{-1}$.

459 171124

(171124) 试求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{\cos x},\ x\in\mathbb{R}$ 的最大值.

460 171125

(171125) 设 f 是 $[1,\infty)$ 上的递减非负函数, 满足 $\int_1^\infty xf(x)\,\mathrm{d}x<\infty$. 试证: $\int_1^\infty \dfrac{f(x)}{|\sin x|^{1-\frac{1}{x}}}\,\mathrm{d}x<\infty$.

461 171126

(171126) 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\dfrac{n}{n^2+k^2}$.

462 171127

(171127) 设 $f_n(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的一列单调函数, 且在 $[a,b]$ 上逐点收敛于连续函数 $f(x)$. 试证: $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

463 171128

(171128) 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 且 $\int_0^1 xf(x)[x^2+f^2(x)]\,\mathrm{d}x\geqslant\dfrac{2}{5}$. 试求 $\int_0^1\left[x^2+\dfrac{1}{3}f^2(x)\right]^2\mathrm{d}x$ 的最小值.

464 171129

(171129) 设 A 是 n 阶矩阵, $\mathrm{tr}\,A=0$. 试证: 存在 n^2-1 个 n 阶矩阵 $B_1,\cdots,B_{n^2-1}$, 使得 $A=B_1+\cdots+B_{n^2-1}$, $B_i=0$, $i=1,\cdots,n^2-1$.

465 171130

(171130) 设 A 是可逆矩阵, $a \neq 1$. 试证: 存在可逆矩阵 B, 使得 $AB - aBA = E$.

466 171201

(171201) 试证: $\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$.

467 171202

(171202) 设 f 是 $[1, \infty)$ 上的非负 Lebesgue 可积函数, 试证: (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(nx)$ a.e. 收敛; (2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

468 171203

(171203) [浙江省2018高数竞赛] 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$.

469 171204

(171204) [浙江省2018高数竞赛] 求定积分 $\int_{-1}^1 \frac{(x-\cos x)^2 \cos x}{x^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

470 171205

(171205) [浙江省2018高数竞赛] 设 $z = z(x,y)$ 是由方程 $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$ 确定的隐函数, 求 $z''_{xy}(0,0)$.

471 171206

(171206) [浙江省2018高数竞赛] 计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 为由不等式 $\sqrt{2x-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}$ 所确定的区域.

472 171207

(171207) [浙江省2018高数竞赛] 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x [\mathrm{e}^{(x-t)^2}-1]t\,\mathrm{d}t}{x^4}$.

473 171208

(171208) [浙江省2018高数竞赛] 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[2+(-1)^n]^n}{n} x^n$ 的收敛域及级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[2+(-1)^n]^n}{n6^n}$ 的和.

474 171209

(171209) [浙江省2018高数竞赛] 分析函数 $f(x,y) = (x^2+y^2-6y+10)\mathrm{e}^y$ 的极值问题.

475 171210

(171210) [浙江省2018高数竞赛] 已知质线 $L: \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 的线密度 $\rho = |x^2+x-y^2-y|$, 求 L 的质量.

476 171211

(171211) [浙江省2018高数竞赛] 已知 $a_n > 0$, $a_1 < 1$, $(n+1)a_{n+1}^2 = na_n^2 + a_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

477 171212

(171212) 设 A, C 是 n 级实正定方阵, 已知矩阵方程 $AX+XA=C$ 有唯一解 $X=B$, 证明: (1) B 是对称矩阵; (2) B 是正定矩阵.

478 171213

(171213) 设 W 是一个实的 3×3 反对称矩阵, $X(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))^T$ 是向量微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=WX$ 的一个实解. (1) 证明 $\|X(t)\|$ 是不依赖于 t; (2) 证明如果 v 是 W 的零空间的一个向量, 那么 $X(t)$ 于 v 的内积是于 t 无关的; (3) 证明 $X(t)$ 的值全位于三维空间的一个圆上.

479 171214

(171214) (1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$; (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}\left(\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

480 171215

(171215) 设 a_n 是 $x^n+x=1$ 在 $(0,1)$ 中的实根, $n\in\mathbb{Z}_+$. 试证: (1) $a_n\nearrow$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(1-a_n)=1$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln\ln n}\left(1-a_n-\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

481 171216

(171216) 试证: $\forall\ \alpha$: $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\left(1-\dfrac{2x}{\pi}\right)^n\tan^n x$ 在 $[0,\alpha]$ 上一致收敛. 若记其和函数 $S(x)$, 试证 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}S(x)=+\infty$. (北京师范大学)

482 171217

(171217) (1) 试证: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\nearrow\mathrm{e}\ (n\to\infty)$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\searrow\mathrm{e}\ (n\to\infty)$; (2) 试证: $\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$; (3) 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$; (4) 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{[(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}\right\}$.

483 171218

(171218) [中山大学2018数分] 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}$.

484 171219

(171219) [华南理工大学2010数分] 确定 α 与 β 的值使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+4n-2}-\alpha n-\beta\right)=0$.

485 171220

(171220) [华南理工大学2010数分] 讨论函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性, 其中

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\text{ 为无理数},\\ x, & x\text{ 为有理数};\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}-x^2, & x\text{ 为无理数},\\ x^2, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

486 171221

(171221) [华南理工大学2010数分] 已知 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续, 且满足 $0 \leqslant f(x) \leqslant x,\ x \in [0,\infty)$. 设

$$a_1 \geqslant 0,\ a_{n+1} = f(a_n),\ n = 1,2,3,\cdots.$$

证明: (1) $\{a_n\}$ 收敛. (2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 则 $f(l) = l$.

487 171222

(171222) [华南理工大学2010数分] 判断下面级数的敛散性: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)},\ x \geqslant 0$.

488 171223

(171223) [华南理工大学2010数分] 讨论函数 $f(x,y) = (1+\mathrm{e}^y)\cos y - y\mathrm{e}^y$ 的极大值与极小值.

489 171224

(171224) [华南理工大学2010数分] 计算 $\iint\limits_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + 3z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

490 171225

(171225) [中山大学2018数分] 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的敛散性.

491 171226

(171226) [中山大学2018数分] 设函数 $f(x)$ 在 (x_0-1,x_0+1) 连续, 在 $(x_0-1,x_0)\cup(x_0,x_0+1)$ 上可导. 又设 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = a$. 证明: $f'(x_0)$ 存在, 且 $f'(x_0) = a$.

492 171227

(171227) [中山大学2018数分] 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right) x^n$ 的收敛域.

493 171228

(171228) [中山大学2018数分] 函数 $f(x) = x\sin x^{\frac{1}{4}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是否一致连续? 试说明理由.

494 171229

(171229) [中山大学2018数分] 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\ln n}$ 在 $[0,1)$ 上的一致收敛性.

495 171230

(171230) [中山大学2018数分] 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(x+\dfrac{k}{n}\right)$, 证明 $f_n(x)$ 在任意区间 (a,b) 上一致收敛. 又问, $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上也一定一致收敛吗? 若否, 举出反例.

496 171231

(171231) [中山大学2018高代] 设 A,B 为 n 阶方阵, 满足条件 $AB-BA=A$, 判断 A 是否可逆, 并说明你的理由.

497 180101

(180101) (1) 设 n 阶实对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 正定, 证明 $\det A\leqslant a_{11}\cdots a_{nn}$; (2) 设 B,D 分别为 n 阶, m 阶实方阵, 且实矩阵 $H=\begin{pmatrix}B & C\\ C^T & D\end{pmatrix}$ 正定, 证明: $\det H\leqslant \det B\cdot\det D$.

498 180102

(180102) [华南理工大学2010数分] 设 p 为正常数, 函数 $f(x)=\cos(x^p)$. 证明: 当 $0<p\leqslant 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续.

499 180103

(180103) [华南理工大学2010数分] 证明 $\int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}$, 并计算积分 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x\ (b>a>0)$.

500 180104

(180104) [华南理工大学2010数分] 令 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0.\end{cases}$ 证明 $f(x,y)$ 在其定义域内是连续的.

501 180105

(180105) [华南理工大学2010数分] 求积分

$$I=\iint\limits_D\left(\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 D 由曲线 $\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}=1$ 和 $x=c$, $y=c$ 所围成.

502 180106

(180106) [华南理工大学2010数分] 设 f 为定义在 (a,∞) 上的函数, 在每一有限区间 (a,b) 上有界, 且

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]=A.$$

证明: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=A$.

503 180107

(180107) [华南理工大学2010数分] 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 证明:

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\Delta:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 为 $[a,b]$ 的任一分割; $\xi_i,\theta_i\in[x_i,x_{i+1}]$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n)$; $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta x_i|$.

504 180108

(180108) [华南理工大学2010高代] 设 $m,n\in\mathbb{N}$. 证明: $(x^m-1,x^n-1)=x^{(m,n)}-1$.

505 180109

(180109) [华南理工大学2010高代] 当 a, b 为何值时, 下列线性方程组无解,有唯一解, 有无穷多解? 当方程组有解时, 写出其全部解.

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x+(a+3)y-3z=3, \\ -2x+(a-1)y+bz=-1. \end{cases}$$

506 180110

(180110) [华南理工大学2010高代] 设 V 是 n 维线性空间 $(n \geqslant 3)$, 又设 X 和 Y 是 V 的两个子空间, 并且 $\dim(X)=n-1$, $\dim(Y)=n-2$. (1) 证明: $\dim\,(X \cap Y)=n-2$ or $n-3$. (2) 证明: $\dim\,(X \cap Y)=n-2 \Leftrightarrow Y \subset X$. (3) 举例说明: 存在满足假设条件的线性空间 V 及其子空间 X 和 Y 使得 $\dim\,(X \cap Y)=n-2$ or $n-3$.

507 180111

(180111) [华南理工大学2010高代] 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 若 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式均大于零, 而 $\det(A)=0$. 证明: n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x^TAx$ 是半正定的, 其中 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$.

508 180112

(180112) [华南理工大学2010高代] 设 $\mathscr{A}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 的线性空间 V 的线性变换, $\mathscr{A}^2=\mathscr{E}$ (恒等变换). 令

$$V^+=\{x \in V;\ \mathscr{A}x=x\}, \quad V^-=\{x \in V;\ \mathscr{A}x=-x\}.$$

证明: $V=V^+ \oplus V^-$.

509 180113

(180113) [华南理工大学2010高代] 设 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为非零实 $1 \times n$ 矩阵. 求 (1) $\operatorname{rank}(A^TA)$; (2) A^TA 的特征值与特征向量.

510 180114

(180114) [华南理工大学2010高代] 设 α 为 n 维欧氏空间 V 的非零向量, 对 $\xi \in V$, 定义 $\mathscr{A}\xi=\xi-\dfrac{2(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha, \xi \in V$. (1) 证明: $\mathscr{A}$ 是 V 的正交变换. (2) 记 $W=\operatorname{span}\{\alpha\}^\perp$, 则 W 是 $(n-1)$ 维子空间, 并且 $\mathscr{A}\xi=\begin{cases} \xi, & \xi \in W, \\ -\xi, & \xi=\alpha. \end{cases}$ (3) 设 $\dim(V)=4$. 令 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 为 V 的标准正交基, 并设 $\alpha=-\dfrac{1}{2}\varepsilon_1-\dfrac{1}{2}\varepsilon_2-\dfrac{1}{2}\varepsilon_3+\dfrac{1}{2}\varepsilon_4$. 求 $\mathscr{A}$ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵.

511 180115

(180115) [华南理工大学2010高代] 在欧氏空间中有两组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$. 如果 (1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 都是两两正交的单位向量; (2) $\operatorname{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_i\}=\operatorname{span}\{\beta_1, \cdots, \beta_i\}$, $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant s$. 证明: $\alpha_i=\pm\beta_i$, $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n$.

512 180116

(180116) [华南理工大学2010高代] 设 A, B 都是实对称矩阵. 证明:

$$AB=BA \Leftrightarrow \exists \text{ 正交阵 } Q, \text{ s.t. } Q^{-1}AQ,\ Q^{-1}BQ \text{ 同时为对角阵}.$$

513 180117

(180117) [华南理工大学2009数分] 设函数 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 的某个小邻域有定义且在该点处可导. 求 $f'(0)$.

514 180118

(180118) [华南理工大学2009数分] 设 $0<x<y<\pi$. 证明: $x\sin x+2\cos x+\pi x<y\sin y+2\cos y+\pi y$.

515 180119

(180119) [华南理工大学2009数分] 设 $x>0,\ y>0$. 求 $f(x,y)=x^2y\,(4-x-y)$ 的极值.

516 180120

(180120) [华南理工大学2009数分] 设 $f(x)=\dfrac{\int_0^x du\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t}{x(1-\cos x)}$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

517 180121

(180121) [华南理工大学2009数分] 计算 $\oint\limits_C x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x$, 其中 C 为椭圆 $(x+2y)^2+(3x+2y)^2=1$, 方向为逆时针方向.

518 180122

(180122) [华南理工大学2009数分] 计算 $\iint\limits_S (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+x(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围成的空间区域 Ω 的整个边界, 取外侧.

519 180123

(180123) [华南理工大学2009数分] 设 $f(x)=\sin\sqrt{x}$. 判断 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上是否一致连续, 并给出证明.

520 180124

(180124) [华南理工大学2009数分] 计算积分 $\iint\limits_D \min\left\{x^2y,2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y);\ 0\leqslant x\leqslant 4,\ 0\leqslant y\leqslant 3\}$.

521 180125

(180125) [华南理工大学2009数分] 计算积分 $I(y)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\sin 2xy\,\mathrm{d}x$.

522 180126

(180126) [华南理工大学2009数分] 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x^2+y^2=0.\end{cases}$ 讨论以下性质:
(1) f 的连续性; (2) f_x, f_y 的存在性及连续性; (3) f 的可微性.

523 180127

(180127) [华南理工大学2009数分] 设 $x_0=\sqrt{6}$, $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$, $n\in\mathbb{N}$. 判断级数 $\sum\limits_{n=0}^\infty\sqrt{3-x_n}$ 的敛散性.

524 180128

(180128) [华南理工大学2009数分] 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续的一阶导数. 证明: (1) 若 $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$, 则方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少有一个实根; (2) 若 $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=0$, 则方程 $f'(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少有一个实根.

525 180129

(180129) [华南理工大学2009高代] 设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $\mathbb{P}[x]$ 中的多项式, 且

$$g(x)=s^m(x)g_1(x)(m\geqslant 1),\quad (s(x),g_1(x))=1,\quad s(x)|f(x).$$

证明: 不存在 $f_1(x),r(x)\in\mathbb{P}[x]$, 且 $r(x)\neq 0$, $\partial(r(x))<\partial(s(x))$, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{s^m(x)}+\frac{f_1(x)}{s^{m-1}(x)g_1(x)}. \tag{7}$$

526 180130

(180130) [华南理工大学2009高代] 设 $\mathbb{P}[x]_n$ 表示数域 $\mathbb{P}$ 上所有次数 $<n$ 的多项式及零多项式构成的线性空间. 令多项式

$$f_i(x)=(x-a_1)\cdot\cdots\cdot(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdot\cdots\cdot(x-a_n),\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{8}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是数域 $\mathbb{P}$ 中 n 个互不相同的数. 证明: $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 是 $\mathbb{P}[x]_n$ 的一组基. 在 (8) 中, 取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为全体 n 次单位根. 求由基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到基 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 的过渡矩阵.

527 180131

(180131) [华南理工大学2009高代] 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$, 且 $\operatorname{rank}(A)=r$. (1) 证明: $\operatorname{tr}(A)=r$. (2) 求 $\det(A+E)$ 的值.

528 180201

(180201) [华南理工大学2009高代] 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是欧氏空间 V 的一组标准正交基, 设

$$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ \alpha_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ W=\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}.$$

(1) 求 W 的一组标准正交基. (2) 求 $W^\perp$ 的一组标准正交基. (3) 求 $\alpha=\varepsilon_2+2\varepsilon_3$ 在 W 中的内射影 (即求 $\beta\in W$, s.t. $\alpha=\beta+\gamma$, $\gamma\in W^\perp$), 并求 α 到 W 的距离.

529 180202

(180202) [华南理工大学2009高代] 设 $\mathscr{A}$ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换, $f(x),g(x)\in P[x]$. 证明: (1) $f(\mathscr{A})^{-1}(0)+g(\mathscr{A})^{-1}(0)\subset(f(\mathscr{A})g(\mathscr{A}))^{-1}(0)$. (2) 当 $(f(x),g(x))=1$ 时, 有 $f(\mathscr{A})^{-1}(0)\oplus g(\mathscr{A})^{-1}(0)=(f(\mathscr{A})g(\mathscr{A}))^{-1}(0)$.

530 180203

(180203) [华南理工大学2009高代] 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 为 n 元二次型. 若矩阵 A 的顺序主子式 $\Delta_k(k=1,2,\cdots,n)$ 都不为零. 证明: $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可经过非退化的线性变换化为下述标准型

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

这里 $\lambda_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$, $i=1,2,\cdots,n$, 并且 $\Delta_0=1$.

531 180204

(180204) [华南理工大学2009高代] 设 A, B 分别为数域 $\mathbb{P}$ 上的 $m\times n$ 与 $n\times s$ 矩阵, 又设

$$W=\left\{B\alpha;\ AB\alpha=0,\ \alpha\in\mathbb{P}^{s\times 1}\right\}\subset\mathbb{P}^{n\times 1}.$$

证明: $\dim(W)=\operatorname{rank}(B)-\operatorname{rank}(AB)$.

532 180205

(180205) [华南理工大学2009高代] 设 $f(x,y)$ 为定义在数域 P 上的 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数. 证明:

$$f(x,y)=x^TAy=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j$$

可以表示成两个线性函数 $f_1(x)=\sum_{i=1}^n b_ix_i, f_2(y)=\sum_{i=1}^n c_iy_i$, 之积的充分必要条件是 $f(X,Y)$ 的度量矩阵 A 的秩 $\leqslant 1$.

533 180206

(180206) [浙江大学2010数分] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

534 180207

(180207) [浙江大学2010数分] 求积分 $\iint\limits_{[0,\pi]\times[0,1]} y\sin(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

535 180208

(180208) [浙江大学2010数分] 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{\sin^3 x}$.

536 180209

(180209) [浙江大学2010数分] 计算 $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 其中 Σ 是三角形 $\{(x,y,z);\ x,y,z\geqslant 0,\ x+y+z=1\}$, 其法方向与 $(1,1,1)$ 相同.

537 180210

(180210) [浙江大学2010数分] 求积分 $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$

538 180211

(180211) [浙江大学2010数分] $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

539 180212

(180212) [浙江大学2010数分] 设 $a_n=\sin a_{n-1}$, $n\geqslant 2$, 且 $a_1>0$. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}a_n$.

540 180213

(180213) [浙江大学2010数分] 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, n为奇数. 证: 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^n}=1$. 则方程 $f(x)+x^n=0$ 有实根.

541 180214

(180214) [浙江大学2010数分] 证明 $\int_0^\infty \frac{\sin xy}{y}\,\mathrm{d}y$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致连续 (其中 $\delta>0$).

542 180215

(180215) [浙江大学2010数分] 设 $f(x)$ 连续. 证明 Possion 公式:

$$\int_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^1 f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t\right)\mathrm{d}t.$$

543 180216

(180216) [浙江大学2010数分] 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 1},\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 为实数序列, 满足 (1) $\lim_{n\to+\infty}|b_n|=\infty$; (2) $\left\{\frac{1}{|b_n|}\sum_{i=1}^{n-1}|b_{i+1}-b_i|\right\}_{n\geqslant 1}$ 有界. 证明: 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 也存在.

544 180217

(180217) [浙江大学2010高代] 设多项式 $(f_1(x),\cdots,f_k(x))=1$, $A\in\mathbb{P}^{n\times n}$, $X\in\mathbb{P}^{n\times 1}$. 求证:

$$f_i(A)X=0,\ \forall\ 1\leqslant i\leqslant k\Rightarrow X=0.$$

545 180218

(180218) [浙江大学2010高代] 设 $\beta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\3\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\-1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\2\end{pmatrix}$. 又设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\8\\3\\-3\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\5\\2\\-2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1\\4\\-4\\-2\end{pmatrix}$$

为 $V=\mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$ 的一组基 (I). (1) 求线性空间 V 的由 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 中的一部分向量组成的一组基 (II). (2) 求出由基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵. (3) 求出 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 中除掉基 (II) 的向量外, 剩余向量 β_i 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

546 180219

(180219) [浙江大学2010高代] 考虑线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4 &= 1,\\ x_1+x_2-3x_3+x_4 &= 1.\end{cases}$ (1) 求该方程的解. (2) 求全体解集合向量组的极大无关组.

547 180220

(180220) [浙江大学2010高代] 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是某数域上的 n 维线性空间上的两个线性变换, 满足 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$, $\exists\, N\in\mathbb{Z}_+$, s.t. $\mathscr{A}^N=0$. 证明: $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 是可逆线性变换 $\Leftrightarrow\mathscr{B}$ 是可逆线性变换.

548 180221

(180221) [浙江大学2010高代] 设 A 是 n 阶实对称矩阵. 证明: 存在幂等矩阵 B_i, $1\leqslant i\leqslant s$, 使得 $A=\sum_{i=1}^s\lambda_iB_i$, $\lambda_i\in\mathbb{R}$..

549 180222

(180222) [浙江大学2010高代] 用正交变换将矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 化成对角阵, 并求 $A^3+3A^2+4A+6E$.

550 180223

(180223) [浙江大学2010高代] 设 $f(x)$ 是复系数一元多项式, 且满足

$$n\in\mathbb{Z}\Rightarrow f(n)\in\mathbb{Z}. \tag{9}$$

证明: $f(x)$ 的系数都是有理数. 举例说明存在不是整系数的多项式满足 (9).

551 180224

(180224) [浙江大学2010高代] 设 $a,b\in\mathbb{C}$, 根据不同的 a,b, 求 n 阶上三角阵 $A=\begin{pmatrix}a&b&\cdots&b&b\\&a&\cdots&b&b\\&&\ddots&\vdots&\vdots\\&&&a&b\\&&&&a\end{pmatrix}$ 的最小多项式和 Jordan 标准型.

552 180225

(180225) [浙江大学2010高代] 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是欧氏空间中一组两两正交的单位向量, 又设 $\alpha\in V$. (1) 证明: Bessel 不等式 $\sum\limits_{i=1}^{k}(\alpha,\alpha_i)^2\leqslant|\alpha|^2$. (2) 证明: 向量 $\beta=\alpha-\sum\limits_{i=1}^{k}(\alpha,\alpha_i)\alpha_i$ 与每个 α_i 都正交.

553 180226

(180226) [浙江大学2010高代] 设复线性空间 V 有一线性变换 $\mathscr{A}$, 且 $\mathscr{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}$. 证明: 根子空间 $V_{\lambda_i}=\mathrm{Ker}\ (\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^{r_i}\ (i=1,2)$ 均为 $\mathscr{A}-$不变子空间.

554 180227

(180227) [浙江大学2009数分] 求 $\displaystyle\int\frac{1}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}\,\mathrm{d}x\ (ab\neq0)$.

555 180228

(180228) [浙江大学2009数分] 求 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t-x}{(\mathrm{e}^x-1)^2(1-\cos^2x)\arctan x}$.

556 180301

(180301) [浙江大学2009数分] 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

557 180302

(180302) [浙江大学2009数分] 求 $\displaystyle\iint_D(x+y)\mathrm{sgn}\,(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=[0,1]\times[0,1]$.

558　180303

(180303) [浙江大学2009数分] 如果 $f(x)$ 在 x_0 的某领域内可导, 且 $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}=\frac{1}{2}$. 证明 $f(x)$ 在点 x_0 处取极小值.

559　180304

(180304) [浙江大学2009数分] 设 $f(x,y,z)$ 表示从原点到椭球面 $\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a>0,b>0,c>0)$ 上点 $p(x,y,z)$ 处的切平面的距离. 求第一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{f(x,y,z)}$.

560　180305

(180305) [浙江大学2009数分] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $\min_{x\in[a,b]}f(x)=1$. 证明: $\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{[f(x)]^n}\right\}^{\frac{1}{n}}=1$.

561　180306

(180306) [浙江大学2009数分] 设对任意 $a>0$, $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上黎曼可积,且 $\lim_{x\to\infty}f(x)=C$. 证明:

$$\lim_{t\to0^+}t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x=C.$$

562　180307

(180307) [浙江大学2009数分] 证明 $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ 在 $(0,1)$ 与 $(-1,0)$ 上均一致连续, 但在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 上不一致连续.

563　180308

(180308) [浙江大学2009数分] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$上可导, 导函数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调下降, 且 $f'(b)>0$. 证明:

$$\left|\int_a^b\cos f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{f'(b)}.$$

564　180309

(180309) [浙江大学2009高代] 设 $\mathbb{P}$ 是数域, 在 n 个变元的多项式环 $\mathbb{P}[x_1,\cdots,x_n]$ 中引入对第 k 个变元的偏导子, 由下列式子定义: $\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sum_{i_1\cdots i_n}a_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_k^{i_k}\cdots x_n^{i_n}\right)=\sum_{i_1\cdots i_n}i_ka_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_k^{i_k-1}\cdots x_n^{i_n}$, 其中 $a_{i_1\cdots i_n}\in\mathbb{P}$. (1) 证明: 在 $\frac{\partial}{\partial x^k}$ 下取零值的多项式集合是 $(n-1)$ 个变元的多项式环 $\mathbb{P}[x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n]$. (2) 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个 m 次齐次多项式. 证明:

$$\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_1,\cdots,x_n)=mf(x_1,\cdots,x_n).$$

该式称为 Euler 恒等式. 反之, 证明: 对任意正整数 m, 满足 Euler 恒等式的多项式必为 m 次齐次多项式.

565　180310

(180310) [浙江大学2009高代] 设 $A=\begin{pmatrix}2a_1b_1&a_1b_2+a_2b_1&\cdots&a_1b_n+a_nb_1\\a_2b_1+a_1b_2&2a_2b_2&\cdots&a_2b_n+a_nb_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_nb_1+a_1b_n&a_nb_2+a_2b_n&\cdots&2a_nb_n\end{pmatrix}$. 计算 $\det(A)$.

566 180311

(180311) [浙江大学2009高代] 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&2\end{pmatrix}$. 记 $\mathbb{R}^{5\times 2}$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上所有 5×2 阶矩阵组成的线性空间. 再设 $W=\left\{B\in\mathbb{R}^{5\times 2};\ AB=0\right\}$. 证明: W 是 $\mathbb{R}^{5\times 2}$ 的子空间, 并求出它在 $\mathbb{R}$ 上的维数.

567 180312

(180312) [浙江大学2009高代] 设 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 是实数. 给出一个次数不超过 2 的实系数多项式 $f(x)$ 使得满足

$$f(-1)=\alpha,\ f(1)=\beta,\ f(3)=\gamma,\ f(0)=\delta \tag{10}$$

的充要条件.

568 180313

(180313) [浙江大学2009高代] 设 $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是实数域上某个 n 维线性空间上的两个线性变换, 满足 $\mathscr{A}\mathscr{B}=x\mathscr{A}+y\mathscr{B}$. 证明: $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$.

569 180314

(180314) [浙江大学2009高代] 设 A 是一个 n 阶实对称矩阵. 证明: 存在某个充分大的实数 α, 使得 $\mathbb{R}^n$ 关于运算

$$(\alpha,\beta)=\alpha^T(A+\alpha E)\beta,\ \alpha\in\mathbb{R}^n,\ \beta\in\mathbb{R}^n$$

构成一个欧氏空间.

570 180315

(180315) [浙江大学2009高代] 设 A 是 n 阶复方阵, 零是 A 的 k 重特征值. 证明: $\operatorname{rank}(A^k)=n-k$.

571 180316

(180316) [浙江大学2009高代] 用正交变换将矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&3&-3\\3&-1&-3\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 化成对角阵, 并求 $A^3+3A^2+4A+6E$.

572 180317

(180317) [浙江大学2009高代] 对 n 维欧氏空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$, 若存在固定的单位向量 $\eta\in V$, 使对 $\alpha\in V$, 有

$$\mathscr{A}(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\eta)\eta,$$

则称 $\mathscr{A}$ 是 V 上的镜面反射, $\mathscr{A}$ 在标准正交基下的矩阵称为镜面反射矩阵. 证明: n 阶实方阵 A 是镜面反射矩阵当且仅当存在单位向量 $\omega\in\mathbb{R}^n$, 使得 $A=E-2\omega\omega^T$.

573 180318

(180318) 设 A 是 n 阶复方阵. (1) 证明: A 的最小多项式等于 A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 的最高次不变因子. (2) 求 $A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$ 的最小多项式.

574 180319

(180319) [南京师范大学2004实变函数复试试题] 设 $E=[0,1]$, F 是 Cantor 集, $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\in[0,1/2)\setminus F\\ \cos\pi x, & x\in[1/2,1]\setminus F\\ \mathrm{e}^{x^2}, & x\in F\end{cases}$, 试求 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$.

575 180320

(180320) [南京师范大学2004实变函数复试试题] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\frac{nx}{1+n^2x^2}\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

576 180321

(180321) [南京师范大学2004实变函数复试试题] 设 A 是无限集, B 为至多可数集, 则 $A\cup B$ 与 A 对等.

577 180322

(180322) [南京师范大学2004实变函数复试试题] 试证: (1) A 为任意集, 则

$$m^*A=\inf\{mG;\ A\subset G,\ G\text{ 为开集}\};$$

(2) A 为任意集, 则存在可测集 B, 使得 $B\supset A$, 且 $m^*A=mB$.

578 180323

(180323) [南京师范大学2004实变函数复试试题] 设 E 可测, f 在 E 上有定义, 且满足: $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 E 的可测子集 E_ε, 使得 f 在 E_ε 上可测, 且 $m(E\setminus E_\varepsilon)<\varepsilon$, 则 f 在 E 上可测.

579 180324

(180324) [南京师范大学2004实变函数复试试题] 设 $\{f_n\}$ 为可测集 E 上的可测函数列, 且 $\sum\limits_{n=1}^\infty\int_E|f_n(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$, 试证: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$, a.e. 于 E; (2) $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n(x)$ 为 E 上的可测函数, 且 $\int_E\sum\limits_{n=1}^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^\infty\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

580 180325

(180325) [南京师范大学2016实变函数复试试题] (1). 叙述可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上可测函数的定义, 并讨论函数 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 可测性之间的关系. (2). 证明 $\mathbb{R}^n$ 中的任意开集必可表成可数个闭集之并.

581 180326

(180326) [南京师范大学2016实变函数复试试题] 证明对任意 $p>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{\ln^p(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x=0$.

582 180327

(180327) [南京师范大学2016实变函数复试试题] 设在 E 上 $f_n\Rightarrow f$, 则存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 E 上 a.e. 收敛于 f.

583 180328

(180328) [南京师范大学2016实变函数复试试题] 设 $f(x)$ 是 E 上的函数, 对任意 $\delta>0$, 存在闭子集 $E_\delta\subset E$, 使得 $f(x)$ 在 E_δ 上连续, 且 $m(E\setminus E_\delta)<\delta$. 证明: f 是 E 上 a.e. 有限的可测函数.

584 180329

(180329) [南京师范大学2016实变函数复试试题] 设 $f_n(x)$ 为可测集 E 上 a.e. 有限的可测函数列 $(mE>0)$, 而 $f_n(x)$ 在 E 上 a.e. 收敛, 证明存在常数 C 及正测度集 $E_0\subset E$ 使得在 E_0 上, 对任意 n, 有 $|f_n(x)|\leqslant C$.

585 180330

(180330) [南京师范大学2016实变函数复试试题] 设 $mE<+\infty$, $f_n(x),f(x)$ 在 E 上均 可积, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E|f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0$ 当且仅当 (1). $f_n\Rightarrow f$; (2). 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使对一切 $A\subset E$, $mA<\delta$, 有 $\int_A|f_n(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon$.

586 180331

(180331) [南京师范大学2016常微分方程复试试题] 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且有界, 证明: 方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=f(x)$ 的所有解均在 $[0,+\infty)$ 上有界.

587 180401

(180401) [南京师范大学2016常微分方程复试试题] 证明: 对任意的 x_0 及满足条件 $0<y_0<1$ 的 y_0, 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(y-1)}{1+x^2+y^2}$$

的满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y=y(x)$ 的存在区间是 $(-\infty,+\infty)$.

588 180402

(180402) [南京师范大学2016常微分方程复试试题] 在方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 中, $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 I 上连续且 $p(x)\neq 0$. $\varphi(x)$ 和 $\phi(x)$ 是它的两个解, $W(x)$ 是它们的 Wronsky 行列式. (1). 试叙述 Liouville 公式; (2). 若 $\varphi(x)$ 和 $\phi(x)$ 线性无关, 证明: $W(x)$ 是区间 I 上的严格单调函数.

589 180403

(180403) [南京师范大学2016常微分方程复试试题] (1). 设初值问题 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=f(t,X)\\ X(t_0)=X_0\end{cases}$ (其中 $X_0\in\mathbb{R}^n, f(t,0)\equiv 0$) 的解为 $X=\varphi(t,t_0,X_0)$, 叙述此问题零解稳定和渐近稳定的概念. (2). 给定方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+f(x)=0$, 其中 $f(x)$ 是连续函数且满足 $f(0)=0$, 当 $x\neq 0$ 时, $xf(x)>0$, $(-k<x<k)$. 试将其化为一阶微分方程组, 并用形如 $V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$ 的 Lyapunov 函数讨论方程组零解的稳定性.

590 180404

(180404) [南京师范大学2016常微分方程复试试题] (1). 叙述初值问题 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 解的存在与唯一性定理. (2). 简述此定理存在性的证明. (3). 叙述 Bellman 不等式并利用此不等式证明解的唯一性.

591 180405

(180405) [南京师范大学2016常微分方程复试试题] 求方程组 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=x-y-z\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=x+y\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=3x+z\end{cases}$ 的通解.

592 180406

(180406) [浙江省2017高数竞赛(数学类)] 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\sqrt{\cos 2x}\cos x}{x-\ln(1+x)}$.

593 180407

(180407) [浙江省2017高数竞赛(数学类)] 求不定积分 $\int x[3+\ln(1+x^2)]\arctan x\,\mathrm{d}x$.

594 180408

(180408) [浙江省2017高数竞赛(数学类)] 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的和.

595 180409

(180409) [浙江省2017高数竞赛(数学类)] 设 $f(x)$ 连续且 $f(x)=3x+\int_0^x(t-x)^2f(t)\,\mathrm{d}t$, 求 $f^{(2017)}(0)$ 的值.

596 180410

(180410) [浙江省2017高数竞赛(数学类)] 设 $f(x)=\sin(\pi x^2)$, 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-f(x)\right]$.

597 180411

(180411) [浙江省2017高数竞赛(数学类)] 已知 $f(x)$ 连续且 $f(x+2)-f(x)=\sin x$, $\int_0^2f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 求积分 $\int_1^3f(x)\,\mathrm{d}x$.

598 180412

(180412) [浙江省2017高数竞赛(数学类)] 计算曲线积分 $\int_L\dfrac{(x-1)\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2+y^2}$, 其中 L 是从 $(-2,0)$ 到 $(2,0)$ 的上半椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

599 180413

(180413) [浙江省2017高数竞赛(数学类)] 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可导, 证明: $\max f(x)-\min f(x)\leqslant\sqrt{\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x}$.

600 180414

(180414) [浙江省2017高数竞赛(数学类)] 设 g 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\infty$, 证明: $f(x)=xg(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续.

601 180415

(180415) [浙江省2017高数竞赛(工科类)] 求曲线 $C:\ y=x^2$ 与直线 $L:\ y=x$ 所围图形绕直线 L 旋转所成旋转体的体积.

602 180416

(180416) [浙江省2017高数竞赛(工科类)] 计算 $\iint\limits_D |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D=\left\{(x,y);\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

603 180417

(180417) [浙江省2017高数竞赛(工科类)] 证明: $(\cos x)^p\leqslant\cos(px)$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0<p<1$.

604 180418

(180418) [浙江省2017高数竞赛(工科类)] 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可导, $f(0)=0$. 证明: $|f(x)|\leqslant\sqrt{\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x}$.

605 180419

(180419) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] $a\neq b$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{bx}-\mathrm{e}^{ax}}{\sin bx-\sin ax}=$ ________.

606 180420

(180420) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 并设 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2$, 则 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=$ ________.

607 180421

(180421) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且对任意给定的实数 α, 有 $g(x)=\int_x^{\alpha+3x}f(t)\,\mathrm{d}t$ 为常值函数, 则函数 $f(x)$ 的表达式为 ________.

608 180422

(180422) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 曲线 $y=f(x)=\dfrac{2}{1+x^{2n}}$, 记其在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴交点为 $(x_n,0)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ ________.

609 180423

(180423) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{2-2\cos x}{x^2}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, 则 $f''(0)=$ ________.

610 180424

(180424) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的邻域内有定义, 且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0+h)}{h}=2$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点 ( )

A. 不连续 B. $f'(x_0)=2$ C. 连续, 不可导 D. 条件不足, 无法确定连续性和可导性

611 180425

(180425) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的导数, 且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=1$, 则 ( )

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ B. $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 不能判断 C. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不能判断 D. 以上都不正确

612 180426

(180426) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 考虑下列关于数列的描述:

1^o 对于数列 $\{a_n\}$, 如果 $\{a_{2n}\}$ 和 $\{a_{2n-1}\}$ 都是收敛的, 则该数列一定是收敛的;

2^o 数列 $\{a_n\}$, 如果数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 收敛于 0, 则数列 $\{a_n\}$ 是收敛的;

3^o $\{a_n\}$ 的极限为 0 和数列 $\{|a_n|\}$ 的极限为 0 是等价的;

4^o 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 有界, 则数列 $\{a_nb_n\}$ 是收敛的.

其中正确的结论个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

613 180427

(180427) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 已知函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^y(x^2+y-2x)$, 则它在点 $(1,0)$ 处取 ( )

A. 极小值 -1 B. 极大值 -1 C. 不取极值 D. 取极大值 1

614 180428

(180428) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 设函数 $f(x)=\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\tan x}{|x|}$, 则 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的 ( ).

A. 无穷间断点 B. 跳跃间断点 C. 可去间断点 D. 以上都不正确

615 180429

(180429) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 设函数 $z=f(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)=y$, $f(0,y)=1+y^2$, 求函数 $f(x,y)$.

616 180430

(180430) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 证明 $\displaystyle\int_0^{2017}\frac{1}{x}\left\{1-\left(1-\frac{x}{2017}\right)^{2017}\right\}\mathrm{d}x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2017}$.

617 180501

(180501) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上取正值的连续函数, D 为 $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$. 证明:

$$\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}\sigma\geqslant(b-a)^2.$$

618 180502

(180502) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, $f'(0)=8$, 求极限 $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\mathrm{e}^{\sin^4 t}-1}\int_0^T\mathrm{d}x\int_x^1 f(xy)\,\mathrm{d}y$.

619 180503

(180503) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0$, $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$. 求证: $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{12}(b-a)^3$.

620 180504

(180504) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 设函数 $f(x,y)$ 在 $D:\left\{(x,y);x^2+y^2\leqslant 1\right\}$ 上由连续的偏导数, 且在边界 $x^2+y^2=1$ 上满足 $f(x,y)=0$. 求极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D_ε 为 $\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$.

621 180505

(180505) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 函数 $f(x,y)$ 在区间 $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 上可导, 且在该区间上满足 $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$ 以及 $f(0)=0$. 求证: $f(x)\equiv 0$.

622 180506

(180506) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 计算曲线积分 $I=\oint\limits_C\frac{xy^2\,\mathrm{d}x-yx^2\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$, 其中 C 为正向曲线 $2x^2+3y^2=1$.

623 180507

(180507) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{(x+y+z)^2}, & x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ 0, & x^2+y^2+z^2>0\end{cases}$, $\varSigma$ 为曲面 $x+y+z=t$, 求 $I=\iint\limits_{\varSigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$.

624 180508

(180508) [天津市2017大学生数学竞赛(理工类)] 设 $a_1>0$, $a_{n+1}=\frac{2}{1+a_n^2}$, $n=1,2,3,\cdots$. 讨论数列 $\{a_n\}$ 的收敛性.

625 180509

(180509) [华东师范大学2017数学竞赛] 试问: 在 $\mathbb{R}^3$ 中, $(3x+y)(y+2z)=3x+2y+2z$ 是柱面方程么? 若是, 请求出它的母线方向向量.

626 180510

(180510) [华东师范大学2017数学竞赛] 设 A,B 是 n 阶矩阵, 证明: (1) 若 $AB=BA=0$, $\mathrm{r}\,(A^2)=\mathrm{r}\,(A)$, 则 $\mathrm{r}\,(A+B)=\mathrm{r}\,(A)+\mathrm{r}\,(B)$; (2) 若 $AB=BA=0$, 则存在正整数 m, 使得 $\mathrm{r}\,(A^m+B^m)=\mathrm{r}\,(A^m)+\mathrm{r}\,(B^m)$.

627 180511

(180511) [华东师范大学2017数学竞赛] 设 A 是 n 阶实矩阵, $A^2=A$, 若对于任意的列向量 $x\in\mathbb{R}^n$, 恒有 $x^TA^TAx\leqslant x^Tx$ 成立, 证明: $A^T=A$.

628 180512

(180512) [华东师范大学2017数学竞赛] 设 $a_n=\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x$, $n=1,2,\cdots$. (1) 求 a_n; (2) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}4^na_n=0$; (3) 证明: 存在正整数数列 $\{n_k\}$, $n_1<n_2<n_3<\cdots$, 使得级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}4^{n_k}a_{n_k}$ 收敛.

629 180513

(180513) [华东师范大学2017数学竞赛] 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 且对 $\forall\, x\neq y$, $f(x)\neq f(y)$. 若对 $\forall\, x\in(-\infty,+\infty)$, $f(2x-f(x))=x$. (1) 求证: $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是等差数列, 其中 $f_n(x)=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n}(x)$; (2) 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 的公差是 $d(x)$, 证明: $d(x)$ 是常值函数.

630 180514

(180514) [华东师范大学2017数学竞赛] 设函数列 $\{u_n(x)\}$, $u_n(x)\in C[a,b]$, $n=1,2,\cdots$. 若 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^\infty u_n(x)$, $x\in[a,b]$. 证明: $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最小值.

631 180515

(180515) [华东师范大学2017数学竞赛] 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的一阶导数, 且对 $\forall\ x,y\in(-\infty,+\infty)$, $x<y$, 有 $f(y)-f(x)=f'\left(\dfrac{x+y}{2}\right)(y-x)$. 求证: $f(x)$ 是一条抛物线 (直线, 常值函数).

632 180516

(180516) [北京大学2017数分] 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^n x}{\sqrt{\pi-2x}}\mathrm{d}x=0$.

633 180517

(180517) [北京大学2017数分] 证明 $\sum\limits_{n=1}^\infty\dfrac{1}{1+nx^2}\sin\dfrac{x}{n^\alpha}$ 在任何有限区间上一致收敛的充要条件是 $\alpha>\dfrac{1}{2}$.

634 180518

(180518) [北京大学2017数分] 设 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ 收敛. 证明: $\lim\limits_{s\to0^+}\sum\limits_{n=1}^\infty a_nn^{-s}=\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$.

635 180519

(180519) [北京大学2017数分] 设 I 是区间, 称 $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, $t\in I$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 向量场 $(P(x,y),Q(x,y))$ 的积分曲线, 若 $x'(t)=P(\gamma(t))$, $y'(t)=Q(\gamma(t))$, $\forall\, t\in I$. 设 P_x+Q_y 在 $\mathbb{R}^2$ 上处处非零, 证明向量场 (P,Q) 的积分曲线不可能封闭 (单点情形除外).

636 180520

(180520) [北京大学2017数分] 假设 $x_0=1$, $x_n=x_{n-1}+\cos x_{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明: 当 $n\to\infty$ 时, $x_n-\dfrac{\pi}{2}=o\left(\dfrac{1}{n^n}\right)$.

637 180521

(180521) [北京大学2017数分] 假设 $f\in C[0,1]$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\alpha<\beta=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. 证明: $\forall\ \lambda\in(\alpha,\beta)$, $\exists\ x_1,x_2\in[0,1]$ 使得 $\lambda=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

638 180522

(180522) [北京大学2017数分] 设 f 是 $(0,+\infty)$ 上的凹 (或凸) 函数且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在有限, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=0$ (仅在 f 可导的点考虑极限过程).

639 180523

(180523) [北京大学2017数分] 设 $\phi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, ϕ 及其各个偏导数 $\partial_i\phi$ $(i=1,2,3)$ 在点 $x_0 \in \mathbb{R}^3$ 处取值都是 0. x_0 的 δ 邻域记为 U_δ $(\delta>0)$. 如果 $(\partial_{ij}^2\phi(x_0))_{3\times 3}$ 是严格正定的, 则当 δ 充分小时, 证明如下极限存在并求之:

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}} \iiint\limits_{U_\delta} e^{-t\phi(x_1,x_2,x_3)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3.$$

640 180524

(180524) [北京大学2017数分] 将 $(0,\pi)$ 上常值函数 $f(x)=1$ 进行周期 2π 奇延拓并展成正弦级数:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$$

该 Fourier 级数的前 n 项和记为 $S_n(x)$, 则 $\forall\, x\in(0,\pi)$, $S_n(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=1$. 证明: $S_n(x)$ 的最大值点是 $\dfrac{\pi}{2n}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

641 180525

(180525) [湖南大学2014数分] 用极限定义证明若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

642 180526

(180526) [湖南大学2014数分] (1). 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin 3x}\right)}{2^x-1}=2$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$. (2). 设 $f(x)$ 有一阶连续导数, 且 $f(0)=0$, $f'(0)=2$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$.

643 180527

(180527) [湖南大学2014数分] 已知 $f(x)$ 有三阶导数, 且 $g(x)=|x-1|^3 f(x)$. 试证: 当 $f(1)=0$ 时, $g(x)$ 在 $x=1$ 处有三阶导数, 但当 $f(1)\neq 0$ 时, $g(x)$ 在 $x=1$ 处无三阶导数.

644 180528

(180528) [湖南大学2014数分] 设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界可积, 且 $h=\dfrac{1}{n}$, 证明:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n} f(kh)\cdot h-\frac{h}{2}[f(1)-f(0)]+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

645 180529

(180529) [湖南大学2014数分] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续, $f(0)=f(1)=0$, 并且 $x\in(0,1)$ 时, $|f''(x)|\leqslant A$. 求证:

$$|f'(x)|\leqslant\frac{a}{2},\ \forall\, x\in(0,1).$$

646 180530

(180530) [湖南大学2014数分] 计算第一型曲面积分 $\displaystyle\iint\limits_S \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}S$, 其中 $S=\left\{(x,y,z); x^2+y^2=1,\ 0\leqslant z\leqslant 1\right\}$.

647 180531

(180531) [湖南大学2014数分] 设 $f_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $g(x,y)$ 在闭区间 $D=\{(x,y);\ a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant b\}$ 上连续, 对任何 $x\in[a,b]$, 令 $f_n(x)=\int_0^x g(x,y)f_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y,\ n=1,2,3,\cdots$. 证明: 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于零.

648 180601

(180601) [湖南大学2014数分] 求椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限中的切平面与三个坐标平面所围成四面体的最小体积 V.

649 180602

(180602) [厦门大学2017高代] n 阶行列式 $\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(\quad)$.

650 180603

(180603) [厦门大学2017高代] 将 $\begin{pmatrix}2&1&3\\0&5&2\\-2&4&1\end{pmatrix}$ 表示为对称矩阵和反对称矩阵的和 ( ).

651 180604

(180604) [厦门大学2017高代] 若矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 经过行初等变换化为 $\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&0&2&4\\0&-1&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的无关组是 ( ), 其余向量由此极大无关组线性表出的表达式为 ( ).

652 180605

(180605) [厦门大学2017高代] 设 n 阶方阵 A 的秩为 $n-1$, 且 a_{11} 的代数余子式 $A_{11}\neq0$, 则线性方程组 $AX=0$ 的通解是 ( ).

653 180606

(180606) [厦门大学2017高代] 设 $p(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上首一的不可约多项式, $f(x),g(x)\in\mathbb{F}[x]$, 若 $p(x)\mid f(x)g(x)$, 但 $p(x)$ 不整除 $f(x)$, 则 $(p(x),g(x))=(\quad)$.

654 180607

(180607) [厦门大学2017高代] 设 $\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$, $\{\eta_1,\eta_2\}$ 分别是 V 和 U 的一组基, ϕ 是 V 到 U 的线性映射, 满足 $\phi(\xi_1)=\eta_1+2\eta_2$, $\phi(\xi_2)=\eta_2$, $\phi(\xi_3)=\eta_1+2\eta_2$, 则 $\dim\ker\phi=(\quad)$, $\ker\phi=(\quad)$.

655 180608

(180608) [厦门大学2017高代] 设 A 是 n 阶实对称阵, 则在复数域上 A 与 $-A$ ( ) (选填: “ 必”, “未必”) 合同, 在实数域上 A 与 $-A$ ( ) (选填: “必”, “未必”) 合同.

656 180609

(180609) [厦门大学2017高代] 2 阶实对称正交阵全体按正交相似分类, 可分成 ( ) 类, 每类的正交相似标准型是 ( ).

657 180610

(180610) [厦门大学2017高代] 已知 3 阶非零矩阵 B 的每个列向量都是齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$ 的解向量. (1) 求 λ 的值; (2) 求行列式 $\det B$.

658 180611

(180611) [厦门大学2017高代] 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^*BA=2BA-8E$, 计算 B.

659 180612

(180612) [厦门大学2017高代] 设 $f(x),g(x)$ 是非零多项式, 证明 $(f(x),g(x))=1$ 的充要条件是对任意 $h(x)\in\mathbb{F}[x]$, 都有 $(h(x)f(x),g(x))=(h(x),g(x))$.

660 180613

(180613) [厦门大学2017高代] 设 A 是 n 阶正定矩阵, α 是 n 维非零实向量, 令 $B=A\alpha\alpha^T$, 其中 α^T 表示 α 的转置. 试求 B 的所有特征值和相应的特征子空间, 并给出特征值子空间的基和维数.

661 180614

(180614) [厦门大学2017高代] 设 V_1 和 V_2 是 n 维线性空间 V 的真子空间. 证明: $V=V_1\oplus V_2$ 的充要条件是存在 V 上的幂等变换 σ, 使得 $\operatorname{im}\sigma=V_1$, $\ker\sigma=V_2$.

662 180615

(180615) [厦门大学2017高代] 设 W 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中形如 $AB-BA$ 的矩阵生成的子空间, 求 $\dim W$ 并证明.

663 180616

(180616) [厦门大学2017高代] 求证 $\mathbb{C}$ 上两个 n 阶方阵 A,B 相似的充分必要条件是, 对于任意的复数 a 和任意正整数 k, 均有

$$\mathrm{r}\,(aE-A)^k=\mathrm{r}\,(aE-B)^k.$$

664 180617

(180617) [中山大学2017数分] 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

665 180618

(180618) [中山大学2017数分] 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{k\pi}{n}$.

666 180619

(180619) [中山大学2017数分] 求 $\iint\limits_{x^2+y^2<1} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

667 180620

(180620) [中山大学2017数分] 求 $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{y/2}^1 x^3\cos(x^5)\,\mathrm{d}x$.

668 180621

(180621) [中山大学2017数分] $\oint\limits_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线.

669 180622

(180622) [中山大学2017数分] 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{n!} x^{2n-1}$ 的和函数.

670 180623

(180623) [中山大学2017数分] 判断下列函数是否在 $(0,+\infty)$ 上一致连续, 并说明理由: (1) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$; (2) $f(x)=x\ln x$.

671 180624

(180624) [中山大学2017数分] 如果 $u_n>0$, $n=1,2,\cdots$ 为单调递增数列. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ 当 u_n 有界时收敛, 而当 u_n 无界时发散.

672 180625

(180625) [中山大学2017数分] 求证: 方程 $\mathrm{e}^x=ax^2+bx+c$ 的根不超过三个.

673 180626

(180626) [中山大学2017数分] $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上右导数存在, 且 $f(a)=f(b)$. 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'_+(\xi)\leqslant 0$.

674 180627

(180627) [中山大学2017数分] 判别广义积分 $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性, 并说明理由.

675 180628

(180628) [中山大学2017数分] 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一致收敛性.

676 180629

(180629) [中山大学2017数分] 把函数 $f(x)=(x-\pi)^2$ 在 $(0,\pi)$ 上展开成余弦级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

677 180630

(180630) [中山大学2017数分] 计算 $\iint\limits_S (z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $z=\frac{x^2+y^2}{2}$, $0\leqslant z\leqslant 2$ 下侧.

678 180701

(180701) [中山大学2017数分] 设 $f(x)>0, x\in[0,1]$. 证明 $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant 1$.

679 180702

(180702) [中山大学2017数分] 设 $\{p_n(x)\}$ 为多项式序列. 若级数 $p_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(p_{n+1}(x)-p_n(x))$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$. 证明: $f(x)$ 必为一多项式.

680 180703

(180703) [中山大学2017高代] 设 $f(x)=x^4+3x-2$, $g(x)=3x^3-x^2-7x+4$. (1) 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首一的最大公因式 (f,g), 并求 $u(x),v(x)$ 使 $uf+vg=(f,g)$; (2) 把 $g(x)$ 分别在数域 $\mathbb{C},\mathbb{R}$ 及 $\mathbb{Q}$ 上分解为不可约因式的乘积.

681 180704

(180704) [中山大学2017高代] 求下列矩阵的行列式: (1) $A=\begin{pmatrix}1823&823&23&3\\1549&549&49&9\\1667&667&67&7\\1986&986&86&6\end{pmatrix}$; (2) $B=\begin{pmatrix}a&1&\cdots&1\\1&a&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&a\end{pmatrix}_{n\times n}$.

682 180705

(180705) [中山大学2017高代] 设有理数域 $\mathbb{F}$ 上的齐次线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\x_1+ax_2+\cdots+x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\x_1+x_2+\cdots+ax_n=0,\end{cases}$ $n\geqslant 2$. 试讨论 a 为何值时, 方程组仅有零解, 有无穷多个解? 对于有无穷多个解的情况给出方程组的基础解系.

683 180706

(180706) [中山大学2017高代] 设有实矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. (1) 求正交矩阵 P 使 P^TAP 为对角矩阵, 这里 P^T 指 P 的转置, (2) 试求正定矩阵 B 使得 $B^2=A$.

684 180707

(180707) [中山大学2017高代] 设复矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$. (1) 求 A 的 Jordan 标准型, (2) 求 A 的最小多项式以及 A^{100}.

685 180708

(180708) [中山大学2017高代] 设 A 为数域 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 阶方阵. 证明 A 的秩为 1 当且仅当存在非零的 n 维列向量 α,β, 使得 $A=\alpha\beta^T$.

686 180709

(180709) [中山大学2017高代] 设 σ,τ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, id_V 是 V 上的恒等变换. 证明若 $\sigma\tau=\mathrm{id}_V$, 则有 $\tau\sigma=\mathrm{id}_V$.

687 180710

(180710) [中山大学2017高代] 设 V 为一个 n 维欧几里得空间, σ 为 V 上的一个线性变换. 若有单位向量 η 使得 $\sigma(\alpha)=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta$, 则称 σ 为镜面反射. 这里 (η,α) 表示 η 和 α 的内积.

(1) 若 σ 是镜面反射, 证明 V 有正交分解 $V=\ker(\mathrm{id}_V+\sigma)\oplus\ker(\mathrm{id}_V-\sigma)$. 这里 id_V 表示 V 上的恒等变换. 对于线性变换 σ, $\ker\sigma$ 表示 σ 的核空间.

(2) 若 α,β 为 V 上两个线性无关的单位向量, 求一个镜面反射 τ 使得 $\tau(\alpha)=\beta$.

688 180711

(180711) [中山大学2017高代] 设 A 是一个 n 阶实矩阵, 其有 n 个绝对值小于 1 的实特征值, 证明:

$$\ln(\det(I-A))=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\mathrm{tr}(A^k),$$

其中 ln 为自然对数, I 表示 n 阶单位矩阵, $\det A$ 表示 A 的行列式, $\mathrm{tr}(A)$ 表示 A 的迹, 即其对角线上元素之和.

689 180712

(180712) [南京航空航天大学2017数分] 计算下列极限 (1). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$; (2). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right)$.

690 180713

(180713) [南京航空航天大学2017数分] 写出点 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点的定义, 并证明: 区间 (a,b) 上的单调函数的间断点必是第一类的.

691 180714

(180714) [南京航空航天大学2017数分] 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 可微, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$. 证明: 存在 $\xi\in(a,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

692 180715

(180715) [南京航空航天大学2017数分] 已知 $y=\arcsin x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

693 180716

(180716) [南京航空航天大学2017数分] 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f''(x)\leqslant 0$, $x\in[0,1]$. 证明:

$$\int_0^1 f(x^2)\,\mathrm{d}x\leqslant f\left(\frac{1}{3}\right).$$

694 180717

(180717) [南京航空航天大学2017数分] (1). 写出反常积分 $I=\int_a^{\infty}\frac{\ln x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, $(a>0)$ 在变换 $t=\frac{a^2}{t}$ 下的形式;

(2). 计算反常积分 $I=\int_a^{\infty}\frac{\ln x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, $(a>0)$.

695 180718

(180718) [南京航空航天大学2017数分] 若 $f_n(x)=xn^k\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 求 k 的取值范围.

696 180719

(180719) [南京航空航天大学2017数分] 设二元函数 $f(x,y)=|x-y|g(x,y)$, 其中 $g(x,y)$ 连续且 $g(0,0)=0$. (1). 求 $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$; (2). 判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的可微性.

697 180720

(180720) [南京航空航天大学2017数分] 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 的邻域内存在一阶连续偏导数, 且 $f(0,1)=0$, $f_y'(0,1)\neq 0$. 令 $g(x,y)=f\left(x,\int_0^y\sin t\,\mathrm{d}t\right)$. (1). 根据隐函数定理验证方程 $g(x,y)=0$ 在点 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 的邻域内能确定一单值函数 $y=\phi(x)$; (2). 求 $\phi'(0)$.

698 180721

(180721) [南京航空航天大学2017数分] 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}x^2\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V$, 其中 Ω 为曲面 $z\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 围成的有界区域.

699 180722

(180722) [南京航空航天大学2017数分] 设函数 $f(x,y)$ 在 xoy 平面上二阶连续可微, L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线. (1). 证明曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y$ 与路径无关; (2). 若 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(ax+1)\mathrm{e}^{ax-y}$, 且 $f(0,y)=\mathrm{e}y$, 求 $I(t)$ 的最小值.

700 180723

(180723) [南京航空航天大学2017数分] 设第二型曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{z}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1, z=2$ 所围成立体表面的外侧. (1). 分析该曲面积分能否用 Gauss 公式计算; (2). 求 I 的值.

701 180724

(180724) [南京航空航天大学2017高代] 设 4 阶矩阵 A 的特征多项式是 $f(x)=x^4-5x^3+5x^2+ax+b$, 且 $x^2-1\mid f(x)$, 这里 "|" 表示多项式的整除. 1. 求 a,b 的值; 2. 求 A 的全部特征值; 3. 问: x^2-1 是否有可能成为矩阵 A 的最小多项式? 并说明理由.

702 180725

(180725) [南京航空航天大学2017高代] 设 V_1 是由向量组 $\alpha_1=(1,0,2)^T$, $\alpha_2=(2,1,1)^T$, $\alpha_3=(3,a,3)^T$ 生成的 $\mathbb{R}^3$ 的一个 2 维子空间 (这里 "T" 表示转置, 以下各题相同. 1. 求 a 的值; 2. 求 V_1 的正交补 $V_1^\perp$ 的维数和基; 3. 若 V_2 是由向量组 $\alpha_1=(1,1,0)^T$, $\alpha_2=(2,1,3)^T$ 生成的 $\mathbb{R}^3$ 的另一个子空间, 求 $V_1\cap V_2$ 的维数和基.

703 180726

(180726) [南京航空航天大学2017高代] 设有非齐次线性方程组

$$(I)\begin{cases}x_1-x_3=a,\\2x_1+3x_2+x_3=2;\end{cases}\qquad(II)\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=1,\\x_1+bx_2+x_3=1.\end{cases}$$

1. 证明对任意实数 a, 方程组 (I) 有无穷多解; 2. 求 a,b 的值, 使得方程组 (I) 和 (II) 同解; 3. 在方程组 (I) 和 (II) 同解的情况下, 求方程组在实数域上模最小的特解.

704 180727

(180727) [南京航空航天大学2017高代] 设 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 α, 使得向量组 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关, 且满足 $A^3\alpha = 2A^2\alpha - A\alpha$, 矩阵 $P=(\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$. 1. 求矩阵 B, 使得 $A=PBP^{-1}$; 2. 求行列式 $|E+A|$, 这里 E 表示单位矩阵; 3. 问: 矩阵 A 是否可以对角化? 如能, 求与其相似的对角标准形; 如不能, 求与其相似的 Jordan 标准形.

705 180728

(180728) [南京航空航天大学2017高代] 设有二次型 $f(X)=X^TAX=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+tx_1x_2+tx_1x_3+tx_2x_3)$. 1. 写出 $f(X)$ 在正交变换 $X=PY$ 下的一个标准形; 2. 若 $f(X)$ 为正定二次型, 求 t 的取值范围; 3. 若 $t=1$, 求正定矩阵 B, 使得 $A=B^2$.

706 180729

(180729) [南京航空航天大学2017高代] 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵, 且 $ABA=A$. 证明: 1. 秩 (AB) = 秩 (A); 2. 非线性方程组 $AX=\beta$ 有解的充分必要条件是 $AB\beta=\beta$; 3. 若以 E_r 表示 r 阶单位矩阵, 则 AB 与形如 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的分块矩阵相似, 且 r 是 A 的秩.

707 180730

(180730) [南京航空航天大学2017高代] 设 A,B 是两个 n 阶矩阵, 且 $AB=A-B$. 证明: 1. B 可逆的充分必要条件是 A 可逆; 2. α 是 B 的特征向量的充分必要条件是 α 是 A 的特征向量; 3. 若 A 是正定矩阵, 则 B 也是正定矩阵.

708 180731

(180731) [南京航空航天大学2017高代] 设 $\varGamma$ 是 n 维欧氏空间 V的线性变换, $\varGamma$ 满足条件: 对任意 $\alpha,\beta\in V$, 有

$$(\varGamma(\alpha),\beta)=-(\alpha,\varGamma(\beta)),$$

这里 $(\cdot,\cdot)$ 表示欧氏空间上的内积. 证明: 1. 若 $\varGamma$ 有特征值, 则其特征值为 0; 2. 若 $\varGamma$ 没有特征值, 则 $\varGamma$ 可逆; 3. $\varGamma^2$ 有 n 个实特征值, 其特征值均小于或等于 0; 4. 若 n 为奇数, 则 $\varGamma$ 不可逆.

709 180801

(180801) [华南理工大学2017数分] 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t-x\cos x}{x-\sin x}$.

710 180802

(180802) [华南理工大学2017数分] 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n k^{\frac{1}{k}}$.

711 180803

(180803) [华南理工大学2017数分] 计算积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}\sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$ $(\alpha>\beta>0)$.

712 180804

(180804) [华南理工大学2017数分] 计算曲线积分 $\oint_C y^2\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线.

713 180805

(180805) [华南理工大学2017数分] 计算曲面积分 $\iint_\Sigma (2x+3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(3z+4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为顶点是 $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ 及 $(0,0,1)$ 的四面体的外表面.

714 180806

(180806) [华南理工大学2017数分] 设 $f(x)$ 在 (a,b) 区间连续, 取 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 试证存在 $\xi\in[x_1,x_n]$, 使得 $f(\xi)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)$.

715 180807

(180807) [华南理工大学2017数分] 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续, 且对 $\forall\,\varepsilon>0$, 积分 $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 都收敛, 试证对 $\forall\,z>y>0$, 有 $\int_0^{+\infty}\frac{f(xy)-f(xz)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{z}{y}$.

716 180808

(180808) [华南理工大学2017数分] 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的收敛域及和函数.

717 180809

(180809) [华南理工大学2017数分] 研究 $u=xyz$ 在条件 $x^2+y^2-z^2=1$ 及 $x+y+z=0$ 之下是否有极值.

718 180810

(180810) [华南理工大学2017数分] 设不收敛数列 $\{x_n\}$ 有界, 试证存在 $\{x_n\}$ 的两个收敛子列 $\left\{x_{n_k}^{(1)}\right\}$ 及 $\left\{x_{n_k}^{(2)}\right\}$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}^{(1)}\neq\lim_{k\to\infty}x_{n_k}^{(2)}.$$

719 180811

(180811) [华南理工大学2017数分] 设 $f(x,y)$ 的二阶混合偏导数在 (x_0,y_0) 的邻域内连续, 试证存在 $0<\theta_i<1$ $(i=1,2,3,4)$, 使得

$$f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\theta_4\Delta y).$$

720 180812

(180812) [华南理工大学2017数分] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导且满足 (1) $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ 对 $\forall\,x\in[a,b]$; (2) $f(a)<0$, $f(b)>0$; 令 $x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$, $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$. 试证 $\{x_n\}$ 收敛到 $f(x)$ 在 (a,b) 上的零点.

721 180813

(180813) [华南理工大学2017高代] 设 $g(x)$, $h(x)$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的多项式, $\partial(g(x))=m$,$\partial(h(x))=n$, 且 $(g(x),h(x))=1$. 又设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的任一次数 $<n+m$ 的多项式, 证明: 存在 $r(x),s(x)\in\mathbb{P}[x]$ 使得 $f(x)=r(x)g(x)+s(x)h(x)$, 其中 $r(x)=0$ 或者 $\partial(r(x))<n$, $\partial(s(x))<m$.

722 180814

(180814) [华南理工大学2017高代] 设三元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的系数矩阵的秩 $\mathrm{r}(A)=1$, 这里 A 为三阶方阵, $X=(x_1,x_2,x_3)'$, $b=(b_1,b_2,b_3)'\neq 0$. 已知 η_1,η_2,η_3 是 $AX=b$ 的三个解向量, $\eta_1+\eta_2=(1,2,3)',\eta_2+\eta_3=(0,-1,1)'$, $\eta_3+\eta_1=(1,0,-1)'$. 求该方程组的基础解系.

723 180815

(180815) [华南理工大学2017高代] 设 A 为 n 阶方阵, A 的 (i,j)- 元素 $a_{ij}=|i-j|$, 求行列式 $|A|$ 的值.

724 180816

(180816) [华南理工大学2017高代] 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维欧氏空间 V 的一组基, 且这组基的度量矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\1&0&4\end{pmatrix}$, 求 V 的一组标准正交基 (用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示出来).

725 180817

(180817) [华南理工大学2017高代] 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间, V_1 是 V 的子空间且 $\dim V_1\geqslant\frac{n}{2}$. (1) 证明: 存在 V 的子空间 W_1,W_2 使得 $V=V_1\oplus W_1=V_1\oplus W_2$, 而 $W_1\cap W_2=\{0\}$; (2) 问: 当 $\dim V_1<\frac{n}{2}$ 时, 上述结论是否成立? 为什么?

726 180818

(180818) [华南理工大学2017高代] 设 $f(x)$, $g(x)$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的多项式, $(f(x),g(x))=1$, A 是 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵. 证明: $f(A)g(A)=0$ 当且仅当 $\mathrm{r}(f(A))+\mathrm{r}(g(A))=n$.

727 180819

(180819) [华南理工大学2017高代] 设 A 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的任一个 n 阶方阵. (1) 设 λ_1 是 A 的一个特征值, 证明: 存在 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶可逆方阵 T 使得 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\0&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\&\cdots&\cdots&\\0&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}$. (2) 对 n 作归纳法证明, A 必相似于一个上三角矩阵:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\&\lambda_2&\cdots&c_{2n}\\&&\cdots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

728 180820

(180820) [华南理工大学2017高代] 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换. 证明: 对 $\forall\,\alpha\in V$ 都有 $(\mathscr{A}\alpha,\alpha)\geqslant 0$ 的充分必要条件是 $\mathscr{A}$ 的特征值全是非负实数.

729 180821

(180821) [湖南大学2017高代] (1) 设 a,b,c,d 均为有理数, $\sqrt{d}$ 是无理数, 且 $b\neq 0$. 若 $a+b\sqrt{d}$ 是有理系数多项式 $f(x)$ 的根, 证明 $a-b\sqrt{d}$ 也是 $f(x)$ 的根.

(2) 构造一个次数最低的首项系数为 1 的有理系数多项式, 使得 $1+\sqrt{2}$, $3-\mathrm{i}$ 都是它的根.

730 180822

(180822) [湖南大学2017高代] 设 A 是一个 n 级方阵. 证明: 存在正整数 m, 使得对任意 $s\geqslant m$ 有 $\mathrm{r}(A^s)=\mathrm{r}(A^m)$, 这里 $\mathrm{r}(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

731 180823

(180823) [湖南大学2017高代] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 其中 P 为 n 阶置换矩阵, 它的每一行每一列只有一个元素为 1, 其余元素均为 0. (1) 证明存在 $n-1$ 阶多项式 $f(\lambda)$, 使得 $A=f(P)$; (2) 求矩阵 A 的所有特征值与特征向量; (3) 计算行列式 $|A|$.

732 180824

(180824) [湖南大学2017高代] 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是 $m\times n$ 阶实矩阵, $b\in\mathbb{R}^m$ 是 m 维实向量, A^T 表示矩阵的转置. 证明: (1) 线性方程组 $Ax=b$ 有解的充要条件是 b 与齐次线性方程组 $A^Tx=0$ 的解空间正交. (2) 若线性方程组 $Ax=b$ 无解, 则存在 $\hat{x}\in\mathbb{R}^n$, 使得对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 有 $\|A\hat{x}-b\|\leqslant\|Ax-b\|$, 其中 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, $\langle,\rangle$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的内积.

733 180825

(180825) [湖南大学2017高代] 设 n 阶实方阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=r$, 证明: (1) 存在列满秩 $n\times r$ 实矩阵 B 和行满秩 $r\times n$ 矩阵 C, 使得 $A=BC$; (2) 若 $\mathbb{R}^n=\{y\in\mathbb{R}^n; y=Bx, x\in\mathbb{R}^r\}\oplus\{x\in\mathbb{R}^n; Cx=0\}$, 则矩阵 CB 可逆, 其中 $\oplus$ 表示两个子空间的直和.

734 180826

(180826) [湖南大学2017高代] 设 A 为实对称正定矩阵, B 为实对称矩阵, P^T 表示矩阵的转置. 证明: (1) 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^T(A+B)P$ 为对角矩阵; (2) 若 B 也是正定的, 则 $\dfrac{1}{2}(A+B)-2(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ 为半正定矩阵.

735 180827

(180827) [湖南大学2017高代] 设 $m_A(x)$, $m_B(x)$ 分别为 n 阶方阵 A 和 B 的最小多项式, $\lambda_A(x)$ 为矩阵 A 的特征多项式, 试问当 $m_A(x), m_B(x)$ 互素时, $\lambda_A(B)$ 是否可逆? 证明你的结论.

736 180828

(180828) [湖南大学2017高代] 设 A 为 n 阶是对称矩阵, $S_A=\left\{x\in\mathbb{R}^n; x^TAx=0\right\}$. 这里 x^T 表示 x 的转置向量, B^T 表示矩阵的转置. 证明: (1) 若 A 为半正定矩阵, 则存在 n 阶实方阵 B 使得 $A=B^TB$; (2) S_A 为 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间的充要条件是 A 为半正定或半负定矩阵.

737 180829

(180829) [湖南大学2017高代] 设 $\langle,\rangle$ 是 n 维欧氏空间 V 中的内积, 对 V 中任意一个单位向量 η, 定义 V 上的变换

$$A_\eta(\alpha)=\alpha-2\langle\eta,\alpha\rangle\eta.$$

证明: (1) A_η 是正交变换; (2) $A_\eta^2=\mathrm{id}_V$, 这里 id_V 表示 V 上的单位变换; (3) 设 α,β 是 V 中的两个不同的单位向量, 则存在 V 中的一个由单位向量 η 决定的正交变换 A_η, 使得 $A_\eta(\alpha)=\beta$.

738 180830

(180830) [湖南大学2017高代] 设 $V=\mathbb{R}^n$ 是 n 维向量空间, A 是 n 阶反对称矩阵, 定义 $f:V\times V\to\mathbb{R}$ 如下:

$$f(\alpha,\beta)=\alpha^TA\beta,$$

α^T 表示 α 的转置向量. 记 $N=\{\alpha\in V;\text{ 对所有 }\beta\in V\text{ 有 }f(\alpha,\beta)=0\}$. 证明: (1) N 是 V 的线性子空间; (2) 矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=n-\dim N$, 其中 $\dim N$ 表示 N 的维数; (3) $\mathrm{r}(A)$ 是偶数.

739 180831

(180831) [宁波大学2018数分] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=f(1)$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $2f'(\xi)+(\xi-1)f''(\xi)=0$.

740 180901

(180901) [宁波大学2018数分] 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 且对任意的 $x_0>a$, $\{f(nx_0)\}_{n=1}^\infty$ 极限存在. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

741 180902

(180902) [北京邮电大学2018数分] 当 $x\to\infty$ 时, 函数 $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-1\right)$ 与 $\dfrac{a}{x^n}$ 是等价无穷小, 求常数 a 及 n.

742 180903

(180903) [北京邮电大学2018数分] 设 $f(x)=\ln(3+7x-6x^2)$, 求 $f^{(n)}(1)$.

743 180904

(180904) [北京邮电大学2018数分] 设 $f(x,y)$ 在 $0\leqslant x,y\leqslant 1$ 内连续, $f(0,0)=0$, 且在 $(0,0)$ 处可微, $f_y(0,0)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^4}{4}}}$.

744 180905

(180905) [北京邮电大学2018数分] 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ 收敛. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty (a_n^{a_n}-1)^2$ 收敛.

745 180906

(180906) [北京邮电大学2018数分] 证明不等式 $\dfrac{x(1-x)}{\sin(\pi x)}<\dfrac{1}{\pi},\ x\in(0,1)$.

746 180907

(180907) [北京邮电大学2018数分] 证明 $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$, 其中 α 为常数.

747 180908

(180908) [南开大学2010数分] 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - x^4\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

748 180909

(180909) [南开大学2010数分] 计算积分 $I=\iint\limits_{S}(x+z)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是曲面 $x^2+z^2=2az\ (a>0)$ 被曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所截取的有限部分.

749 180910

(180910) [南开大学2010数分] 计算积分 $I=\iint\limits_{D} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 D 位于第一象限且由曲面

$$z=p(x^2+y^2),\ z=q(x^2+y^2),\ xy=a,\ xy=b,\ y=\alpha x,\ y=\beta x$$

所围, 这里 $0<p<q$, $0<a<b$, $0<\alpha<\beta$.

750 180911

(180911) [南开大学2010数分] 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{3^n}$.

751 180912

(180912) [南开大学2010数分] 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{\ln n}}}$, 它是绝对收敛, 条件收敛还是发散的?

752 180913

(180913) [南开大学2010数分] 证明并讨论如下问题: (1) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对任意 $x\in[a,b]$, 都有 $f(x)\in[a,b]$. 证明: $\exists\, c\in[a,b]$, s.t. $f(c)=c$. (2) 是否存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$ 使得 $f(x)$ 在有理点上取值为无理数, 在无理点上取值为有理数? 为什么?

753 180914

(180914) [南开大学2010数分] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在二阶导数, 且 $f(0)=0,\ f(1)=3,\ \min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$. 证明:

$$\exists\, c\in(0,1),\ \text{s.t. } f''(c)\geqslant 18.$$

754 180915

(180915) [南开大学2010数分] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在连续的二阶导数, 且满足 $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. 记

$$M_1=\sup_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|,\ M_2=\sup_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|.$$

证明: $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M_1}{2}(b-a)^2+\frac{M_2}{3}(b-a)^3$.

755 180916

(180916) [南开大学2010数分] 设对任意 $a>0$, $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上黎曼可积, 且 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$. 证明:

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\alpha\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}f(x)\,\mathrm{d}x=A.$$

756 180917

(180917) [中山大学2018高代] 设 σ 是 n 维实向量空间 V 上的线性变换, 并且有正整数 m 使得 σ^m 是 V 上的恒等变换. 证明 V 中存在一个基使得 σ 在其上的矩阵为正交矩阵.

757 180918

(180918) 设 D 是闭单位圆, 中心在原点. 函数 $f: D\to\mathbb{R}$ 是二阶连续可微的凸函数, 且 $f\geqslant 0$ 在 ∂D. 试证:

$$f(0)\geqslant -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\iint\limits_D (f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{2}}.$$

758 180919

(180919) 设区域 D: $-1<x<1, -1<y<x$, $f(x)=x^2+x\int_0^{x^2} f(x-t)\,\mathrm{d}t+\iint\limits_D f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $f(1)=0$. 试求 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

759 180920

(180920) 试证: $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3\cdot 7\cdots(4n-1)}{5\cdot 9\cdots(4n+1)}\right]^2(4n+3)=3\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{1}{2}}x\,\mathrm{d}x}$.

760 180921

(180921) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微, $\lambda\in\mathbb{R}$. 试证: $f'(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 递增等价于 $f'(x)+\lambda f(x)$ 递增.

761 180922

(180922) 试证: (1) 若 α 是无理数, 则存在无穷多个有理数 $\frac{p}{q}$ $(q>0)$, 使得 $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$.

(2) 若 α 是无理数, 则 $\exists\ \mathbb{Z}_+\ni q_n\nearrow+\infty$, $p_n\in\mathbb{Z}$, s.t. $\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}$.

762 180923

(180923) $\lim_{n\to\infty}|n\sin n|=+\infty$ 对么? 试说明理由.

763 180924

(180924) [赣南师范大学2017数分] 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$, $g(x)=x^2$, $-\infty<x<+\infty$. 计算 $f(g(x))$, $g(f(x))$.

764 180925

(180925) [赣南师范大学2017数分] 计算极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{n}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+2\sqrt{n}}\right)$.

765 180926

(180926) [赣南师范大学2017数分] 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-x^3-1}{\sin^6 x}$.

766 180927

(180927) [赣南师范大学2017数分] 设 $g(0)=g'(0)=0$, $f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 求 $f'(0)$.

767 180928

(180928) [赣南师范大学2017数分] 设 $P_3(x)=x^3+4x^2+5$, (1) 计算 $P_3(x)$ 在 $x=1$ 处的泰勒公式; (2) 计算积分 $\int\dfrac{P_3(x)}{(x-1)^4}\,\mathrm{d}x$.

768 180929

(180929) [赣南师范大学2017数分] 设函数 $u=f(x+g(y))$, 其中 f,g 均二阶可导, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

769 180930

(180930) [赣南师范大学2017数分] 设 $x_0=0,\ x_1=1,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2},\ n=1,2,\cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

770 181001

(181001) [赣南师范大学2017数分] 设函数 f 在以 x_0 为内点的区间上有定义且 $\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)]=0$, 请判断 x_0 点是否为函数 f 的连续点, 若是则证明, 否则举例说明.

771 181002

(181002) [赣南师范大学2017数分] 计算函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $36x^2+16y^2+9z^2=144$ 下的最大值和最小值.

772 181003

(181003) [赣南师范大学2017数分] 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且满足 $f(x)=\ln x-\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\,\mathrm{d}x$, 计算积分 $\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\,\mathrm{d}x$.

773 181004

(181004) [赣南师范大学2017数分] 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0,\delta)$ 内的偏导数 f_x,f_y 均有界, 证明函数 $f(x,y)$ 在 $U(P_0,\delta)$ 上连续.

774 181005

(181005) [赣南师范大学2017数分] 设函数 f 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. (1) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$ 收敛, 并求其和; (2) 若二阶导数 $f''(x)<0, x\in[1,+\infty)$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f'(n)$ 收敛.

775 181006

(181006) [赣南师范大学2017数分] 设 D 为两直线 $y=x,y=4x$ 和两双曲线 $xy=1,xy=4$ 所围区域, $F(u)$ 具有连续导数, 令 $f(u)=F'(u)$, 求证 $\oint_L 2\,\mathrm{d}x+\dfrac{F(xy)}{y}\,\mathrm{d}y=\ln2\int_1^4 f(u)\,\mathrm{d}u$, 其中 L 为 D 的边界, 逆时针方向.

776 181007

(181007) [赣南师范大学2017数分] 计算积分 $\iint\limits_S (x^4 - z^4 + y^2z^2 - x^2y^2 + 1)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为锥面 $x^2 + z^2 = y^2$ $(y \geqslant 0)$ 被圆柱面 $x^2 + z^2 = 2x$ 截取的部分.

777 181008

(181008) [赣南师范大学2017高代] 设 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. 用辗转相除法求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式 $(f(x), g(x))$, 并求 $u(x), v(x)$ 使得 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.

778 181009

(181009) [赣南师范大学2017高代] 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$.

779 181010

(181010) [赣南师范大学2017高代] 求 a, b 的值, 使下列非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 3x_5 = a, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -1, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 7x_4 - 5x_5 = b \end{cases}$$

有解, 并在它有解的情况下, 用它的一个解和它的导出组的一个基础解系表示它的全部解.

780 181011

(181011) [赣南师范大学2017高代] 用非退化线性替换化实系数二次型 $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$ 为标准形, 写出所作的非退化线性替换, 并指出正、负惯性指数及符号差.

781 181012

(181012) [赣南师范大学2017高代] 设 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上是$n \times n$ 矩阵的全体关于矩阵的加法和数量乘法构成的数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, V_1 和 V_2 分别是 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 上的对称矩阵和反对称矩阵的全体, (1) 证明: V_1 和 V_2 分别是 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 的子空间; (2) 证明: $\mathbb{P}^{n\times n} = V_1 \oplus V_2$.

782 181013

(181013) [赣南师范大学2017高代] 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是实数域上线性空间 V 的一组基, V 上线性变换 σ 定义为:

$$\sigma(\varepsilon_1) = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,\ \sigma(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3,\ \sigma(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3.$$

(1) 写出 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵 A; (2) 求出 σ 的特征值和特征向量; (3) 矩阵 A 是否与对角矩阵相似? 若是, 求出可逆矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 成对角形矩阵; (4) 求 A^n; (5) 求出矩阵 A 的最小多项式.

783 181014

(181014) [赣南师范大学2017高代] 设 A 是正交矩阵. (1) 举例说明 A 未必有实特征值; (2) 若 A 有实特征值 λ, 那么 $\lambda = 1$ 或 -1.

784 181015

(181015) [武汉大学2015数学分析] 求极限 $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}\int_0^t\int_0^t \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 或证明此极限不存在.

785 181016

(181016) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可导, $f(0)=0$, 求证: $\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x$.

786 181017

(181017) [赣南师范大学2018年全国大学生数学竞赛(专业组)选拔试题] 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-a}{x_n+a}=0$, 证明: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

787 181018

(181018) [赣南师范大学2018年全国大学生数学竞赛(专业组)选拔试题] 设非负函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}} = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

788 181019

(181019) [赣南师范大学2018年全国大学生数学竞赛(专业组)选拔试题] 设函数 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则存在数列 $\{x_n\}\subset[a,+\infty)$ 满足条件

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

789 181020

(181020) [赣南师范大学2018年全国大学生数学竞赛(专业组)选拔试题] 设 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$, $\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$, $A=\alpha\beta^T, \beta^T\alpha = 3$, 求 A 的特征值和特征向量.

790 181021

(181021) [赣南师范大学2018年全国大学生数学竞赛(专业组)选拔试题] 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换, W 是 V 的子空间, $\mathscr{A}^{-1}W=\{\alpha\in V;\ \mathscr{A}\alpha\in W\}$. 证明: (1) $\mathscr{A}^{-1}W$ 是 V 的子空间; (2) $\mathscr{A}^{-1}(\mathscr{A}W)=W+\mathscr{A}^{-1}(0)$; (3) $\mathscr{A}(\mathscr{A}^{-1}W)=W\cap\mathscr{A}V$.

791 181022

(181022) [赣南师范大学2018年全国大学生数学竞赛(专业组)选拔试题] 试自原点作球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的切线, 求由切线所产生的锥面的的方程.

792 181023

(181023) [谢惠民等数学分析习题课讲义1.3.2小节题1] 关于 Bernoulli 不等式的推广: (1) 证明: 当 $-2 \leqslant h \leqslant -1$ 时, Bernoulli 不等式 $(1+h)^n \geqslant 1+hn$ 仍成立; (2) 证明: 当 $h \geqslant 0$ 时成立不等式 $(1+h)^n \geqslant \dfrac{n(n-1)h^2}{2}$, 并推广之; (3) 证明: 若 $a_i > -1$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 且同号, 则成立不等式

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant 1+\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

793 181024

(181024) [谢惠民等数学分析习题课讲义1.3.2小节题2] 阶乘 $n!$ 在数学分析以及其他课程中经常出现, 以下是几个有关的不等式, 它们都可以从平均值不等式得到: (1) 证明: 当 $n > 1$ 时成立 $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$; (2) 利用 $(n!)^2 = (n\cdot 1)[(n-1)\cdot 2]\cdots(1\cdot n)$ 证明: 当 $n > 1$ 时成立

$$n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n;$$

(3) 比较 (1) 和 (2) 中两个不等式的优劣, 并说明原因; (4) 证明: 对任意实数 r 成立 $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^r\right)^n \geqslant n^n (n!)^r$.

794 181025

(181025) [谢惠民等数学分析习题课讲义1.3.2小节题3] 证明**几何平均值-调和平均值不等式**: 若 $a_k > 0,\ k = 1,2,\cdots,n$, 则有

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}.$$

795 181026

(181026) [谢惠民等数学分析习题课讲义1.3.2小节题4] 证明: 当 a,b,c 为非负数时成立 $\sqrt[3]{abc} \leqslant \sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$. (这个结果还可以推广到 n 个非负数的情况.)

796 181027

(181027) [谢惠民等数学分析习题课讲义1.3.2小节题5] 证明以下几个不等式:

(1) $|a-b| \geqslant |a|-|b|$ 和 $|a-b| \geqslant ||a|-|b||$; (2) $|a_1| - \sum\limits_{k=2}^{n} |a_k| \leqslant \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$; 又左边可否为 $\left||a_1| - \sum\limits_{k=2}^{n} |a_k|\right|$? (3) $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$; (4) $|(a+b)^n - a^n| \leqslant (|a|+|b|)^n - |a|^n$.

797 181028

(181028) [谢惠民等数学分析习题课讲义1.3.2小节题6] 试按下列提示, 给出 Cauchy 不等式的几个不同证明: (1) 用数学归纳法; (2) 用 Lagrange 恒等式 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_k|\right)^2 = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} (|a_k||b_i| - |a_i||b_k|)^2$; (3) 用不等式 $|AB| \leqslant \dfrac{A^2+B^2}{2}$; (4) 构造复的辅助数列 $c_k = a_k^2 - b_k^2 + 2i|a_k b_k|,\ k = 1,2,\cdots,n$, 再利用 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|$.

798 181029

(181029) [谢惠民等数学分析习题课讲义1.3.2小节题7] 用向前-向后数学归纳法证明: 设 $0 < x_i \leqslant \dfrac{1}{2},\ i = 1,2,\cdots,n$, 则

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n} \leqslant \frac{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)}{\left[\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\right]^n}.$$

799 181030

(181030) [谢惠民等数学分析习题课讲义1.3.2小节题8] 设 a,c,g,t 均为非负数, $a+c+g+t=1$, 证明 $a^2+c^2+g^2+t^2\geqslant 1/4$, 且等号成立的充要条件是 $a=c=g=t=1/4$.

800 181031

(181031) [第十届全国大学生数学竞赛数学类试题] 在空间直角坐标系下, 设马鞍面 S 的方程为 $x^2-y^2=2z$. 设 σ 为平面 $z=\alpha x+\beta y+\gamma$, 其中 α,β,γ 为给定常数. 求马鞍面 S 上点 P 的坐标, 使通过 P 且落在马鞍面 S 上的直线均平行于平面 σ.

801 181101

(181101) [第十届全国大学生数学竞赛数学类试题] $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶实方阵, 满足 (1) $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a>0$; (2) 对每个 i $(i=1,\cdots,n)$, 有 $\sum_{j=1}^n|a_{ij}|+\sum_{j=1}^n|a_{ji}|<4a$. 求 $f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 的规范形.

802 181102

(181102) [第十届全国大学生数学竞赛数学类试题] 元素皆为整数的矩阵称为整矩阵. 设 n 阶方阵 A,B 皆为整矩阵. (1) 证明以下两条等价: (i) A 可逆且 A^{-1} 仍为整矩阵; (ii) A 的行列式的绝对值为 1. (2) A 的行列式的绝对值为 1. (ii) 若又知 A, $A-2B$, $A-4B$, $\cdots$, $A-2nB$, $A-2(n+1)B$, $\cdots$, $A-2(n+n)B$ 皆可逆, 且它们的逆矩阵皆仍为整矩阵. 证明: $A+B$ 可逆.

803 181103

(181103) [第十届全国大学生数学竞赛数学类试题] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 在 $x=0$ 处有任意阶导数, $f^{(n)}(0)=0$ $(\forall\ n\geqslant 0)$, 且存在常数 $C>0$ 使得 $|xf'(x)|\leqslant C|f(x)|$, $\forall\ x\in[0,1]$. 证明: (1) $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^n}=0$ $(\forall\ n\geqslant 0)$; (2) 在 $[0,1]$ 上成立 $f(x)\equiv 0$.

804 181104

(181104) [第十届全国大学生数学竞赛数学类试题] 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个数列, $a_n>0$ $(n\geqslant 1)$, $\sum_{n=1}^\infty b_n$ 绝对收敛, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+b_n,\ n\geqslant 2.$$

求证: (1) $\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\ln(n+1)}{\ln n}+b_n$ $(n\geqslant 2)$; (2) $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 发散.

805 181105

(181105) [第十届全国大学生数学竞赛数学类试题] 设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是一可微函数, 且对所有 $x,y\in\mathbb{R}$, 有 $|f'(x)-f'(y)|\leqslant|x-y|^\alpha$, 其中 $\alpha\in(0,1]$ 是常数. 求证: 对所有 $x\in\mathbb{R}$, 有 $|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x)$.

806 181106

(181106) [第十届全国大学生数学竞赛非数学类试题] 设 $\alpha\in(0,1)$, 则 $\lim_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]=$ ____________.

807 181107

(181107) [第十届全国大学生数学竞赛非数学类试题] 若曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=t+\cos t\\ \mathrm{e}^y+ty+\sin t=1\end{cases}$ 确定, 则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为 ____________.

808 181108

(181108) [第十届全国大学生数学竞赛非数学类试题] $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x=$ ______.

809 181109

(181109) [第十届全国大学生数学竞赛非数学类试题] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=$ ______.

810 181110

(181110) [第十届全国大学生数学竞赛非数学类试题] 设函数 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时一阶连续可导, 且 $f(1)=0$, 求函数 $f(x^2-y^2)$, 使得曲线 $\int_L [y(2-f(x^2-y^2))]\,\mathrm{d}x+xf(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关, 其中 L 为任一不予直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑曲线.

811 181111

(181111) [第十届全国大学生数学竞赛非数学类试题] 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $1\leqslant f(x)\leqslant 3$. 证明:

$$1\leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{4}{3}.$$

812 181112

(181112) [第十届全国大学生数学竞赛非数学类试题] 计算三重积分 $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, 其中 V 是由

$$x^2+y^2+(z-2)^2\geqslant 4, x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 9, z\geqslant 0$$

所围成的空心立体.

813 181113

(181113) [第十届全国大学生数学竞赛非数学类试题] 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微, 且 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\leqslant M$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内. 证明: $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M|AB|$, 其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

814 181114

(181114) [第十届全国大学生数学竞赛非数学类试题] 证明: 对于连续函数 $f(x)>0$, 有 $\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\ln f(x)\,\mathrm{d}x$.

815 181115

(181115) [第十届全国大学生数学竞赛非数学类试题] 已知 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 是正项级数, 且 $b_{k+1}-b_k\geqslant\delta>0$, $k=1,2,\cdots$, δ 为一正常数. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$ 收敛.

816 181116

(181116) 设 f,g 是 $[a,b]$ 上的非负可积函数, 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\sqrt[n]{f^n(x)+g^n(x)\,\mathrm{d}x}=\int_a^b\max\{f(x),g(x)\}\,\mathrm{d}x$.

817 181117

(181117) 设 f 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微, 满足 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 试证: $4860\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 11\int_0^1|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x$.

818 181118

(181118) [赣南师范大学2018年高等代数考研试题] 设 $f(x)=x^3+6x^2-px+8$, 试确定 p 的值, 使 $f(x)$ 有重根, 并求其根.

819 181119

(181119) [赣南师范大学2018年高等代数考研试题] 计算 n 级行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

820 181120

(181120) [赣南师范大学2018年高等代数考研试题] 讨论线性方程组

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (3-2\lambda)x_1 & + & (2-\lambda)x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ (2-\lambda)x_1 & + & (2-\lambda)x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & x_2 & + & (2-\lambda)x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

的解的情况, 并在有解时求其解.

821 181121

(181121) [赣南师范大学2018年高等代数考研试题] 用非退化线性替换化实二次型 $x_1^2-2x_1x_2-3x_2^2+2x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准形, 并求正、负惯性指数及符号差. 判断它是否为正定二次型.

822 181122

(181122) [赣南师范大学2018年高等代数考研试题] 设 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X.

823 181123

(181123) [赣南师范大学2018年高等代数考研试题] 设 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上 $n\times n$ 矩阵的全体关于矩阵的加法和数乘构成的线性空间, V_1 是反对称矩阵的全体. (1) 证明: (1) V_1 是 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 的子空间; (2) 求 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 的一个子空间 V_2, 使 $\mathbb{P}^{n\times n}=V_1\oplus V_2$.

824 181124

(181124) [赣南师范大学2018年高等代数考研试题] 设 σ 是线性空间 V 上的可逆线性变换. (1) 证明: σ 的特征值一定不为零; (2) 证明: 如果 λ 是 σ 的特征值, 那么 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 σ^{-1} 的特征值.

825 181125

(181125) [赣南师范大学2018年高等代数考研试题] 设正定的实对称矩阵 A 是正交矩阵, 证明 A 为单位矩阵.

826 181126

(181126) [赣南师范大学2018年高等代数考研试题] 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是实数域上线性空间 V 的一组基, V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 定义为

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1)=2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-2\varepsilon_3,\quad \mathscr{A}(\varepsilon_2)=2\varepsilon_1-\varepsilon_2+4\varepsilon_3,\quad \mathscr{A}(\varepsilon_3)=-2\varepsilon_1+4\varepsilon_2-\varepsilon_3.$$

(1) 写出 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 A; (2) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值和特征向量; (3) 试问 $\mathscr{A}$ 是否对角化? 若能, 求 V 的一组基 η_1,η_2,η_3, 使得 $\mathscr{A}$ 在该组基下的矩阵为对角矩阵; (4) 求 $\mathscr{A}$ 的最小多项式.

827 181127

(181127) [赣南师范大学2018年数学分析考研试题] 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)\right].$$

828 181128

(181128) [赣南师范大学2018年数学分析考研试题] 计算极限 $\lim\limits_{x\to0^+}(\tan x)^{\sin x}$.

829 181129

(181129) [赣南师范大学2018年数学分析考研试题] 设 $y=\dfrac{(x+2)^2(x-4)^4}{(x+3)^3(x-5)^5}$, 其中 $x>5$, 求 y'.

830 181130

(181130) [赣南师范大学2018年数学分析考研试题] 计算不定积分 $\int \mathrm{e}^x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

831 181201

(181201) [赣南师范大学2018年数学分析考研试题] 设 $F(x)=\int_1^{u(x)}\dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, 其中 $u(x)=\int_0^x\cos^2 t\,\mathrm{d}t$, 求一阶导数 $F'(x)$.

832 181202

(181202) [赣南师范大学2018年数学分析考研试题] 设 $z=2x^3+y^2$, 其中 $y=f(x)$ 为由方程 $x^2-xy+y^2-2=0$ 所确定的隐函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$.

833 181203

(181203) [赣南师范大学2018年数学分析考研试题] 设 $0<a_1<1$, $a_{n+1}=a_n(2-a_n)$, $n=1,2,3,\cdots$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

834 181204

(181204) [赣南师范大学2018年数学分析考研试题] 设函数 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上连续且 $f(2)=f(4)$. 证明: 存在 $a,b\in[2,4]$ 使得 $b-a=1$ 且 $f(a)=f(b)$.

835 181205

(181205) [赣南师范大学2018年数学分析考研试题] 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{1}{2n-1}-\arctan\dfrac{1}{2n+1}\right)$.

836 181206

(181206) [赣南师范大学2018年数学分析考研试题] 设 $P(x,y)$ 在 xy 平面上有连续偏导数, 曲线积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+3xy^2\,\mathrm{d}y$ 与积分路径无关, 且对任意的 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} P(x,y)\,\mathrm{d}x+3xy^2\,\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)} P(x,y)\,\mathrm{d}x+3xy^2\,\mathrm{d}y$, 请求解二元函数 $P(x,y)$.

837 181207

(181207) [赣南师范大学2018年数学分析考研试题] 设函数 $f_0(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 令

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t,\ x\in[0,1],\ n=1,2,\cdots.$$

请证明: 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

838 181208

(181208) [赣南师范大学2018年数学分析考研试题] 证明 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点连续且偏导数存在, 但在此点不可微.

839 181209

(181209) [赣南师范大学2018年数学分析考研试题] 计算曲面积分 $\iint_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的外侧.

840 181210

(181210) [赣南师范大学2018年数学分析考研试题] 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 x^n$ 的和函数, 并指其和函数的定义域.

841 181211

(181211) [华南理工大学2018年数学分析考研试题1] 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}y\int_0^y \arctan t\,\mathrm{d}t}{x(1-\cos x)}$.

842 181212

(181212) [华南理工大学2018年数学分析考研试题2] 计算 $\oint_\ell xy^2\,\mathrm{d}x-x^2y\,\mathrm{d}y$, 其中 ℓ 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 方向为逆时针.

843 181213

(181213) [华南理工大学2018年数学分析考研试题3] 计算 $\iint_S xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x^2-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z-x^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是 $x^2+y^2=4z$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧.

844 181214

(181214) [华南理工大学2018年数学分析考研试题4] 试在变换 $u=x+y, v=x-y$ 及 $z=w-2xy$ 下, 将方程 $z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}=0$ 变换成 $w=w(u,v)$ 满足的方程.

845 181215

(181215) [华南理工大学2018年数学分析考研试题5] 设 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y-z+10)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是 $x^2+y^2+z^2=3$ 的内部区域, 试证 $28\sqrt{3}\pi\leqslant I\leqslant 52\sqrt{3}\pi$.

846 181216

(181216) [华南理工大学2018年数学分析考研试题6] 在曲面 $z-2xy=0$ 上找一点, 使这点的法线垂直于平面 $x+2y+3z+4=0$, 并写出此法线方程.

847 181217

(181217) [华南理工大学2018年数学分析考研试题7] 求曲线 $x^2+xy+y^2+2x-2y-12=0$ 上的点到原点的距离之极值.

848 181218

(181218) [华南理工大学2018年数学分析考研试题8] 计算 $\int_0^\pi \ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x$.

849 181219

(181219) [华南理工大学2018年数学分析考研试题9] 设对任意 $x\in[a,b]$, $u_n(x)\geqslant u_{n+1}(x)>0$, 且 $\{u_n(x)\}$ 收敛于零, 并且对每个 n, 函数 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上单调递增, 试证: $\sum\limits_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

850 181220

(181220) [华南理工大学2018年数学分析考研试题10] 设 $\{f_n(x)\}$ 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数列, 且 $f_n(x)\geqslant f_{n+1}(x)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处成立, 试证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值.

851 181221

(181221) [华南理工大学2018年数学分析考研试题11] 设函数 f 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域中有连续偏导数 f_y, 在该点存在偏导数 f_x, 试证 f 在该点可微.

852 181222

(181222) [华南理工大学2018年数学分析考研试题12] 设非负函数列 $\{f_n(x)\}$ 中的每个 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界可积, 且对任意 $c\in(0,1)$, $f_n(x)$ 在 $[c,1]$ 上一直趋于零, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=1$, 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{f_n(x)\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x=2$.

853 181223

(181223) [华南理工大学2018年高等代数考研试题1] 设 $f(x),g(x)\in\mathbb{P}[x]$, $d(x)=(f(x),g(x))$ 且 $\partial\left(\frac{f(x)}{d(x)}\right)\geqslant 1$, $\partial\left(\frac{g(x)}{d(x)}\right)\geqslant 1$, 则存在唯一的 $u(x),v(x)\in\mathbb{P}[x]$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$, 这里 $\partial(u(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{d(x)}\right)$, $\partial(v(x))<\partial\left(\frac{f(x)}{d(x)}\right)$.

854 181224

(181224) [华南理工大学2018年高等代数考研试题2] 计算 n 阶行列式: $D_n=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-2}&a_1^{n-1}+\frac{S}{a_1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-2}&a_2^{n-1}+\frac{S}{a_2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-2}&a_n^{n-1}+\frac{S}{a_n}\end{vmatrix}$, 这里 $S=\prod\limits_{i=1}^n a_i$.

855 181225

(181225) [华南理工大学2018年高等代数考研试题3] 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$. (1) 求 A^{-1}; (2) 若 $AB-A=B$, 求 $B'AB^{-1}$.

856 181226

(181226) [华南理工大学2018年高等代数考研试题4] 已知 A 为 $m\times s$, B 为 $m\times n$ 矩阵. (1) 证明: 矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 $\mathrm{r}\,(A,B)=\mathrm{r}\,(A)$; (2) 试问: 矩阵方程 $XA=B$ 有解的充分必要条件是什么?

857 181227

(181227) [华南理工大学2018年高等代数考研试题5] 设 $\mathscr{A}$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间 V 的线性变换, $f(x)\in\mathbb{P}[x]$ 使得 $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$, $f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$, 且 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 两两互素. 令 $V_i=(f_i(\mathscr{A}))^{-1}(0)$, $i=1,2,\cdots,s$. 证明: $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$.

858 181228

(181228) [华南理工大学2018年高等代数考研试题6] 设线性方程组 $\begin{cases}x_1\quad\quad+x_3\quad\quad=0\\\quad\quad x_2\quad\quad+x_4=0\end{cases}$ 的解空间为 W, 求向量 $\alpha=(2,3,4,5)$ 在 W 上的内射影以及 α 到 W 的距离. (由分解式 $V=V_1\oplus V_1^\perp$, 对任意 $\alpha\in V$ 有 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_1\in V_1$, $\alpha_2\in V_1^\perp$, 称 α_1 为向量 α 在子空间 V_1 上的内射影.)

859 181229

(181229) [华南理工大学2018年高等代数考研试题7] 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2ax_2x_3$ 通过正交线性替换 $x=Py$ 化成标准型 $f=3y_1^2+3y_2^2+by_3^2$, 求 a,b 的值及正交矩阵 P.

860 181230

(181230) [华南理工大学2018年高等代数考研试题8] 设 A 为 $n\times n$ 实矩阵, k 为自然数, 满足 $A^k=0$, 证明: $A^n=0$.

861 181231

(181231) [厦门大学2018年高等代数考研试题1(1)] 若 $\begin{vmatrix}x&y&z\\3&0&2\\1&1&1\end{vmatrix}=1$, 则 $\begin{vmatrix}x-2&y-2&z-2\\4&1&3\\1&1&1\end{vmatrix}=$________.

862 190101

(190101) [厦门大学2018年高等代数考研试题1(2)] 设 $\left\{V=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{3\times 3};\ a_{11}+a_{12}+a_{13}=0\right\}$, 则 V 的维数 $\dim V=$________, 而 ________是 V 的一个基.

863 190102

(190102) [厦门大学2018年高等代数考研试题1(3)] 设 φ 是线性空间 V 的线性变换, φ 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}A&B\\0&C\end{pmatrix}$, 其中 A 为 $r\times r$ 矩阵, 则 ________是 V 的一个非平凡 φ-子空间.

864 190103

(190103) [厦门大学2018年高等代数考研试题1(4)] 以 $\sqrt{2}+\mathrm{i}$ 为根的次数最小的有理系数多项式是 ________.

865 190104

(190104) [厦门大学2018年高等代数考研试题1(5)] 已知 $\alpha=(1,2,2)$, $A=\alpha^T\alpha$. 若矩阵 A,B 相似, 则 $(B-3E)^2$ 的特征值是 ________, 其中 α^T 表示 α 的转至, E 表示 3 阶单位矩阵.

866 190105

(190105) [厦门大学2018年高等代数考研试题1(6)] 设 n 阶方阵 A 的秩为 r $(0<r<n)$, 且满足 $A^2=0$, 则 A 的 Jordan 标准形为 ________.

867 190106

(190106) [厦门大学2018年高等代数考研试题1(7)] 设欧氏空间 V 的两个向量 α,β 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, φ 是 V 的一个正交变换, 则 $\varphi(\alpha),\varphi(\beta)$ 的夹角是 ________.

868 190107

(190107) [厦门大学2018年高等代数考研试题1(8)] 设 W_1 是 n 元齐次线性方程组 $A_1x=0$ 的解空间. 若 $\mathrm{r}\,(A_1)=1$, 则维数 $\dim W_1=$ ________. 又设 W_2 是 n 元齐次线性方程组 $A_2x=0$ 的解空间, 秩 $\mathrm{r}\,(A-2)=1$. 若 $W_1\neq W_2$, 则 $\dim(W_1\cap W_2)=$ ________.

869 190108

(190108) [厦门大学2018年高等代数考研试题2] 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, 且 $A^*X=A^{-1}+2X$, 其中 A^* 表示 A 的伴随. 求矩阵 X.

870 190109

(190109) [厦门大学2018年高等代数考研试题3] 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系, 向量 β 不是 $Ax=0$ 的解. 证明: $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关.

871 190110

(190110) [厦门大学2018年高等代数考研试题4] 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 元实二次型, 且存在实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,\cdots,b_n$, 使得 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)>0$ 和 $f(b_1,b_2,\cdots,b_n)<0$. 证明: 存在不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$, 使得 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)=0$.

872 190111

(190111) [厦门大学2018年高等代数考研试题5] 设 A 为 n 阶方阵, $f(\lambda)$ 为 A 的特征多项式, 并令 $g(\lambda)=\dfrac{f(\lambda)}{(f(\lambda),f'(\lambda))}$, 其中 $f'(\lambda)$ 表示 $f(\lambda)$ 的导数, $(f(\lambda),f'(\lambda))$ 表示 $f(\lambda)$, $f'(\lambda)$ 的最大公因式. 证明: A 相似于对角矩阵的充分必要条件是 $g(A)=0$.

873 190112

(190112) [厦门大学2018年高等代数考研试题6] 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换, 满足 $\varphi_i^2=\varphi_i$, $\varphi_i\varphi_j=\mathscr{O}$, $1\leqslant i\neq j\leqslant m$. 证明: $V=\operatorname{im}\varphi_1\oplus\operatorname{im}\varphi_2\oplus\cdots\oplus\operatorname{im}\varphi_m\oplus\bigcap\limits_{i=1}^m\ker\varphi_i$, 其中 $\operatorname{im}\varphi_i$ 表示 φ_i 的像空间, $U\oplus W$ 表示 U 和 W 的直和.

874 190113

(190113) [厦门大学2018年高等代数考研试题7] 设 $A_1,A_2,\cdots,A_{2018}$ 均为 2017 阶实方阵. 证明: 存在一组不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_{2018}$, 使得行列式 $\det(c_1A_1+c_2A_2+\cdots+c_{2018}A_{2018})=0$.

875 190114

(190114) [厦门大学2018年高等代数考研试题8] 设 A,B 是 n 阶复方阵, 且 $A^2=A$, $B^2=B$. 证明: $\mathrm{r}(A-B)=\mathrm{r}(A-AB)+\mathrm{r}(B-AB)$, 其中 $\mathrm{r}(A)$ 表示 A 的秩.

876 190115

(190115) [中国科学技术大学2018年数学分析考研试题1] (1) 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|^{\arctan x+\frac{\pi}{2}}$; (2) 已知 a_k 为正数数列, 且

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(a_kx)}{k^2}\right|\leqslant|\tan x|,\ x\in(-1,1).$$

证明: $a_k=o(k^2),\ k\to+\infty$.

877 190116

(190116) [中国科学技术大学2018年数学分析考研试题2] 设 $\varPhi(x)$ 为周期为 1 的 Riemann 函数. (1) 求 $\varPhi(x)$ 的连续点和间断点的类型; (2) 计算积分 $\displaystyle\int_0^1\varPhi(x)\,\mathrm{d}x$.

878 190117

(190117) [中国科学技术大学2018年数学分析考研试题3] 已知 $\varOmega$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界域, $\vec{n}$ 为单位向量, 求证: 存在以 $\vec{n}$ 为法向量的平面平分 $\varOmega$ 的体积.

879 190118

(190118) [中国科学技术大学2018年数学分析考研试题4] 已知 $f(x)$ 为周期为 2π 的奇函数, 当 $x\in(0,\pi)$ 时, $f(x)=-1$. 试利用 f 的 Fourier 级数计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

880 190119

(190119) [中国科学技术大学2018年数学分析考研试题5] 设 $\varphi(x)$ 为有势场 $F(x,y,z)=(x^2-y,y^2-x,-z^2)$ 下的势函数, 求三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

881 190120

(190120) [中国科学技术大学2018年数学分析考研试题6] 已知 $f\in C^2[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, 且 $f(x)$ 在 x_0 处取得最小值 -1. (1) 求 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 Lagrange 余项的 Taylor 展式; (2) 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)=8$.

882 190121

(190121) [中国科学技术大学2018年数学分析考研试题7] 已知

$$D_t=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ (x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1,\ y\geqslant t\right\},f(t)=\iint\limits_{D_t}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

计算 $f'(0)$.

883 190122

(190122) [中国科学技术大学2018年数学分析考研试题8] 已知 $u(x)\in C[0,1]$, $u(x)\in C^2(0,1)$, $u''(x)\geqslant 0$, 令 $v(x)=u(x)+\varepsilon x^2$, $\varepsilon>0$. (1) 证明: $v(x)$ 为 $(0,1)$ 上的严格凸函数; (2) 证明: $u(x)$ 的最大值于端点处取得.

884 190123

(190123) [中国科学技术大学2018年数学分析考研试题9] 已知 $B_r=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leqslant r^2\right\}$, $B=B_1$, $u(x,y)\in C(\bar{B})\cap C^2(B)$, $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (1) 当 $\Delta u\geqslant 0$, $\forall\,(x,y)\in B$, 证明: $u(x,y)$ 在 $\bar{B}$ 上的最大值于边界 ∂B 上达到; (2) 当 $\Delta u=0$, $\forall\,(x,y)\in B$, 证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_{\partial B_r}u(x,y)\,\mathrm{d}s\right)=0$, $\forall\,r\in(0,1)$; (3) 证明: $u(0,0)=\dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_{\partial B_r}u(x,y)\,\mathrm{d}s$.

885 190124

(190124) [中国科学技术大学2018年数学分析考研试题10] 已知 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导, 且满足 $u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)$, 记 $F(t)=\displaystyle\int_t^{2-t}(u_t^2(x,t)+u_x^2(t,x))\,\mathrm{d}x$, 证明: $\dfrac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$.

886 190125

(190125) [裴礼文数学分析中的典型问题与方法第二版第220页练习题] 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $g(x)$ 在 (a,b) 内可微, 且 $g(a)=0$, 且 $g(a)=0$, 若有实数 $\lambda\neq 0$, 使得 $|g(x)\cdot f(x)+\lambda g'(x)|\leqslant|g(x)|$, $x\in(a,b)$ 成立, 试证: $g(x)\equiv 0$. (浙江大学)

887 190126

(190126) [北京大学2018-2019-1数学分析I期中考试试题1] 判断下列极限是否存在:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin 2x}{2(2+\sin 2x)}+\dfrac{\sin 3x}{3(3+\sin 3x)}+\cdots+\dfrac{\sin nx}{n(n+\sin nx)}\right)$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(\pi n!\mathrm{e})$.

888 190127

(190127) [北京大学2018-2019-1数学分析I期中考试试题2] 下列问题若回答是, 请给出证明; 若回答否, 请举出反例. (1) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上均一致连续, 问 $f(x)g(x)$ 在 $(0,1)$ 上是否一致连续; (2) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上均一致连续, 问 $f(x)g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是否一致连续; (3) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上均一致连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, 问 $f(x)g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是否一致连续; (4) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $|f(x)|$ 一致连续, 问 $f(x)$ 是否一致连续?

889 190128

(190128) [北京大学2018-2019-1数学分析I期中考试试题3] 设 $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $a_3=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$, $a_{n+1}=\sqrt{2}^{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 证明: 此数列当 $n\to\infty$ 时, 极限存在, 并求其值.

890 190129

(190129) [北京大学2018-2019-1数学分析I期中考试试题4] 假设 $g(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数, $g(0)=1$, $g(1)=0$, 如果存在一个定义在 $[0,1]$ 上的连续函数 $h(x)$ 使得 $g(x)+h(x)$ 单调上升, 证明: $g(x)$ 可以取到 0 与 1 之间的任一实数.

891 190130

(190130) [北京大学2018-2019-1数学分析I期中考试试题5] 设 $f(x)$ 是定义在整个实数轴上的连续函数. 证明: 函数方程 $f(f(x))=-x^3+\sin(x^3+\ln(1+|x|))$ 不可能有连续解.

892 190131

(190131) [北京大学2018-2019-1数学分析I期中考试试题6] 设 $f(x)\in C[0,1]$, 如果极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f(1)}{n}=M,$$

其中 M 是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值, 证明: $f(x)\equiv M$.

893 190201

(190201) [北京大学2018-2019-1数学分析I期中考试试题7] 设 $f(x)$ 是定义在实数轴 $\mathbb{R}$ 上最小正周期为无理数 $\mu(\mu>0)$ 的连续函数. 证明: 当 $n\to+\infty$ 时, 数列 $\{f(x_n)\}$ 的极限不存在.

894 190202

(190202) 试求满足 $\dfrac{1}{n-c}\leqslant\sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{n-d}$ $(\forall\ n\geqslant 1)$ 的 c 的最大值和 d 的最小值.

895 190203

(190203) [山东师范大学2017年数学分析考研试题1] 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & -1\leqslant x<0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$ 请回答下列问题: (1) $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是否存在原函数? 请说明理由; (2) 是否存在函数 $F(x)$, 使得 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=F(1)-F(-1)$? 若不存在, 请说明理由; 若存在, 请给出一个这样的 $F(x)$.

896 190204

(190204) [山东师范大学2017年数学分析考研试题2-1] 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2\sin\dfrac{1}{n}+\cos n^2}$.

897 190205

(190205) [山东师范大学2017年数学分析考研试题2-2] 设 $y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$, 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}$.

898 190206

(190206) [山东师范大学2017年数学分析考研试题2-3] 求重极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

899 190207

(190207) [山东师范大学2017年数学分析考研试题2-4] 求积分 $I=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$.

900 190208

(190208) [山东师范大学2017年数学分析考研试题2-5] 设 $z=f(x^2+y^2+z^2,xyz)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

901 190209

(190209) [山东师范大学2017年数学分析考研试题2-6] 计算曲面积分 $\iint_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半部分并取外侧为正向.

902 190210

(190210) [山东师范大学2017年数学分析考研试题2-7] 求积分 $I=\int_0^1\frac{x(x-1)}{\ln x}\,\mathrm{d}x$.

903 190211

(190211) [山东师范大学2017年数学分析考研试题2-8] 求函数 $f(x)=\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式, 并确定它收敛于该函数的区间.

904 190212

(190212) [山东师范大学2017年数学分析考研试题3-1] 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 的敛散性, 若收敛请说明是绝对收敛还是条件收敛.

905 190213

(190213) [山东师范大学2017年数学分析考研试题3-2] 讨论含参量反常积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin xy}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$, $x\in[1,+\infty)$ 的一致收敛性.

906 190214

(190214) [山东师范大学2017年数学分析考研试题4-1] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 证明: $\lim_{n\to\infty}n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=f(1)$.

907 190215

(190215) [山东师范大学2017年数学分析考研试题4-2] 若 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$, 且对每个正整数 n, f_n 在 I 上有界, 则 $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界.

908 190216

(190216) [山东师范大学2017年数学分析考研试题4-3] 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可微且 $f''(x)\neq 0$, 并且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=A<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=B<0$, 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上必没有最大值或最小值.

909 190217

(190217) [山东师范大学2017年数学分析考研试题4-4] 设 $u_n(x)=x^n\ln x,\ n=1,2,\cdots$. 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1) 在 $(0,1]$ 上不一致收敛; (2) 对 $\forall\ \delta\in(0,1)$, 在 $(0,\delta]$ 上一致收敛.

910 190218

(190218) [山东师范大学2017年数学分析考研试题4-5] 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上无界, 证明: $\exists\ c\in[a,b]$, 使得 $\forall\ \delta>0$, $f(x)$ 在 $(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ 上无界.

911 190219

(190219) 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 非负递增, 并且积分 $\int_1^\infty \frac{f(x)-x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

912 190220

(190220) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right)$.

913 190221

(190221) 设 $f=(f_1,f_2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 具有连续偏导数, 再设

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}>0,\quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2>0,\quad \forall\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

试证: f 是单射.

914 190222

(190222) [南京航空航天大学2018年高等代数题2] 设 V_1 是由向量组 $\alpha_1=(1,1,a)^T$, $\alpha_2=(-2,a,4)^T$, $\alpha_3=(-2,a,a)^T$ 生成的 $\mathbb{R}^3$ 的子空间, V_2 是由向量组 $\beta_1=(1,1,a)^T$, $\beta_2=(1,a,1)^T$, $\beta_3=(a,1,1)^T$ 生成的 $\mathbb{R}^3$ 的另一个子空间. (1) 若 $\dim V_1=2$, 求 a 的值; (2) 若 V_1 不是 V_2 的子空间, 求 a 的值; (3) 证明: $\mathbb{R}^3=V_1+V_2$.

915 190223

(190223) [Tai-Peng Tsai, Lectures on Navier-Stokes equations Problem 1.1] (Channel flow) Find the stationary solution of (NS) in the strip $(x,y)\in\mathbb{R}\times(0,h)$ of the form $v=f(y)e_x$, with $v(x,0)=0$ and $v(x,h)=e_x$. And find the pressure.

916 190224

(190224) [中山大学2018年数学分析考研试题1(1)] $\lim\limits_{x\to0}(1+\tan x)^{\frac{2018}{x}}$.

917 190225

(190225) [中山大学2018年数学分析考研试题1(2)] 设函数 $y=f(x)$ 在点 x 二阶可导, 且 $f'(x)\neq 0$. 若 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$, 试求 $(f^{-1})''(y)$.

918 190226

(190226) [中山大学2018年数学分析考研试题1(3)] $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

919 190227

(190227) [中山大学2018年数学分析考研试题1(4)] 设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$, 其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=3xyz$ 所确定, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1,1)}$.

920 190228

(190228) [中山大学2018年数学分析考研试题1(5)] $\iint\limits_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1}(\sqrt{x}+\sqrt{y})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

921 190301

(190301) [中山大学2018年数学分析考研试题1(6)] 计算 $\oint_L x^2yz\,\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y+(x+y+1)\,\mathrm{d}z$, 其中 L 为曲面 $x^2+y^2+z^2=5$ 与 $z=1+x^2+y^2$ 的交线, 从 oz 轴正向看为顺时针方向.

922 190302

(190302) [中山大学2018年数学分析考研试题3] 讨论函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在约束条件: $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$ 下的最值.

923 190303

(190303) [中山大学2018年数学分析考研试题5] 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在, 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

924 190304

(190304) [中山大学2018年数学分析考研试题8] 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2\cos x$ 的极值.

925 190305

(190305) [中山大学2018年高等代数考研试题1] 设 $f(x),g(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式, $u(x)=(x^2+1)f(x)+(x^2+x+1)g(x)$, $v(x)=xf(x)+(x+1)g(x)$, 证明: $(f(x),g(x))=(u(x),v(x))$.

926 190306

(190306) [中山大学2018年高等代数考研试题2] 设 $f(x)=x^3+2x^2+2x+1$, $g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$. (1) 求 $f(x)$ 的所有有理根; (2) 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的所有公共复根.

927 190307

(190307) [中山大学2018年高等代数考研试题3] 求矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆.

928 190308

(190308) [中山大学2018年高等代数考研试题4] 在空间直角坐标架下求通过点 $(1,1,1),(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,0,0)$ 的球面方程.

929 190309

(190309) [中山大学2018年高等代数考研试题5] 设 $A=\begin{pmatrix} t+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2t+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & nt+1 \end{pmatrix}$, 求 A 的行列式, 并指出 t 取何值时 A 正定.

930 190310

(190310) [中山大学2018年高等代数考研试题6] 设实矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. (1) 求正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵; (2) 试求实向量空间 $\left\{\sum_{i=0}^m a_iA^i;\ a_i\in\mathbb{R},\ m\in\mathbb{N}\right\}$ 的维数与一组基.

931 190311

(190311) [中山大学2018年高等代数考研试题8] 设 A 为 n 阶方阵, $m(x)$ 为 A 的最小多项式, $f(x)$ 为次数大于 0 的多项式. 若 $(f(x),m(x))=d(x)$. 证明: $\operatorname{rank}(f(A))=\operatorname{rank}(d(A))$.

932 190312

(190312) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(1)=f(0)+1$. 求证: 对任一 $n\in\mathbb{Z}_+$, 存在 $\xi\in[0,1]$, 使得 $f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)-\frac{1}{n}$.

933 190313

(190313) [湖南师范大学2011年高等代数考研试题13] 设 n 阶矩阵 A 的元素为 0 或 1, 且满足 $AA^T=E+2J$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, J 是元素全为 1 的 n 阶矩阵. 证明: (1) $AJ=3J$; (2) $n=4$, 且 $A^TA=E+2J$.

934 190314

(190314) 设 f 是测度有限的可测集 E 上的非负可测函数, 试证: $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x<\infty$ 的充分必要条件是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} mE[f\geqslant k]<\infty$.

索引