定积分

1). 知识点

定积分定义：$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a+(b-a)\frac{k}{n})$

Exercise1.1：计算极限 $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right)$

解

$$I = \lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{k}{n}\pi}{n^2+k}$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{k}{n}\pi}{n^2+n} < I < \lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{k}{n}\pi}{n^2}$$

一方面

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n}\pi = \int_0^1 \sin\pi x\ dx = -\frac{1}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi}$$

另一方面

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n}\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n}\pi\cdot\frac{n}{n+1} = \int_0^1 \sin\pi x\ dx = \frac{2}{\pi}$$

由夹逼准则得

$$I = \frac{2}{\pi}$$

Exercise1.2：计算极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

解

$$
\begin{aligned}
I = & \lim_{n\to\infty} e^{\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} \\
= & \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n! - \ln n} \\
= & \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}(\ln n! - n\ln n)} \\
= & \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{n\cdot n\cdots n}} \\
= & e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}} \\
= & e^{\int_0^1 \ln x \ dx} \\
= & e^{-1}
\end{aligned}
$$

2). 知识点

区间再现公式：$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

Exercise2.1：计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$

解

$$
\begin{aligned}
I =& \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x + \ln\cos x \ dx \\
=& \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\cos x \ dx \\
=& \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1}{2} + \ln\sin 2x \ dx \\
=& -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 + \frac{1}{2}I
\end{aligned}
$$

所以

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

该过程中用了一个小结论

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin kx \ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x \ dx (k \in z)$$

同样地

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \ dx$$

也有类似的结论。

思考欧拉积分和这个积分的关系：$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx$

解

$$
\begin{aligned}
I =& \arcsin x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \ dx \\
=& -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x \ dx \\
=& \frac{\pi}{2}\ln 2
\end{aligned}
$$

Exercise2.2：计算积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

解

该积分中出现 $1+x^2$, 注意到

$$(\ tanx)^{'} = \sec^2 x, 1+\tan^2 x = \sec^2 x$$

所以我们考虑换元

$$x = tant$$

$$\begin{aligned}
I =& \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\ dx \\
=& \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x))\ dx \\
=& \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\ dx \\
=& \frac{\pi}{8}\ln 2
\end{aligned}$$

3). 知识点

$$Wallis\text{公式}: I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$
$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1, & n\text{为正奇数} \end{cases}$$

Exercise3.1：计算积分 $\int_0^{2\pi} x \sin^8 x \ dx$

解

$$\begin{aligned} I =& \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2\pi - x) \sin^8 x + x \sin^8 x \ dx \\ =& \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2\pi \sin^8 x \ dx \\ =& \pi \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \ dx \\ =& 4\pi \cdot \frac{7}{8} \frac{5}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \\ =& \frac{35}{64} \pi^2 \end{aligned}$$

Exercise3.2：计算极限 $\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx$

解

注意到

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}), \sin x < 1$$

我们有

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \ dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \ dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \ dx$$

考虑

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx < \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\ dx\right)^2 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\, dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx$$

所以

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} < \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\ dx\right)^2 < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n}$$

由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

4). 知识点

积分放缩法: 假设 $f(x)$ 递减, 并且 $f(x)>0$。则有:

$$\int_1^{n+1} f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} f(k) < f(1) + \int_1^{n} f(x)\, dx$$

Exercise4.1：求 $\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$的整数部分

解

取 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$.

$$\int_1^{101} x^{-\frac{1}{2}}\ dx < \sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} < 1 + \int_1^{100} x^{-\frac{1}{2}}\ dx$$

$$2(\sqrt{101}-1) < \sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} < 19$$

我们可以得到 $\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$的整数部分为18

Exercise4.2 试证明: 对于每个正整数 n，有$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

证明:

一方面

$$\int_0^{n} \sqrt{x}\ dx < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

另一方面, 由于 $f(x)$ 是凸函数

$$\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2} < \int_k^{k+1} \sqrt{x}\ dx$$

即

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}+\frac{\sqrt{n}}{2}<\int_0^n \sqrt{x}\ dx$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^n+\frac{\sqrt{n}}{2}=\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

综上所述

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$$

5). 综合题:

计算积分 $\int_0^{3\pi} |x-\frac{\pi}{2}| cos^3 x\, dx$

求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x |\sin t|\, dt}{x}$

计算 $\int_0^1 \frac{1}{2-x} \ln\frac{1}{x}\, dx$ （已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}$）

1、

解

我们注意到:$|x-\frac{\pi}{2}|$是关于$\frac{\pi}{2}$的偶函数, 而$\cos^3 x$关于$\frac{\pi}{2}$的奇函数。

因此

$$\int_0^{\pi} |x-\frac{\pi}{2}| \cos^3 x\ dx = 0$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{3\pi} (x-\frac{\pi}{2}) \cos^3 x\ dx \\ &= \int_{\pi}^{3\pi} x\cos^3 x\ dx - \frac{\pi}{2} \int_{\pi}^{3\pi} \cos^3 x\ dx = I_1 - \frac{\pi}{2} I_2 \end{aligned}$$

一方面

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi} (4\pi - x)\cos^3 x + x\cos^3 x\ dx = 2\pi \int_{\pi}^{3\pi} \cos^3 x\ dx = 2\pi I_2$$

另一方面

我们注意到 $\cos^3(4\pi - x) = \cos^3 x$, 所以 $\cos^3 x$ 是关于 2π 的偶函数

即

$$I_2 = 2\int_{\pi}^{2\pi} \cos^3 x\ dx$$

同样地

由于 $\cos^3(3\pi - x) = -\cos^3 x$, 所以 $\cos^3 x$ 是关于 $\frac{3\pi}{2}$ 的奇函数。

所以

$$I_2 = 0$$

我们可以的得到

$$I = I_1 - \frac{\pi}{2} I_2 = \frac{3\pi}{2} I_2 = 0$$

2、

解

令 $n\pi < x < (n+1)\pi, n \to \infty$ 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{n\pi} |\sin x| \ dx}{(n+1)\pi} < I < \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{(n+1)\pi} |\sin x| \ dx}{n\pi}$$

利用积分的周期性得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin x \ dx < I < \lim_{x\to+\infty} \frac{n+1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin x \ dx$$

根据夹逼准则得

$$I = \frac{2}{\pi}$$

3、

解

当 $x \in (0,1)$, $\frac{1}{x-2}$ 可以展开为麦克劳林级数:$-\frac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{2})^n$

$$I = -\frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n \ln x \ dx = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^1 x^n \ln x \ dx$$

令 $-\ln x = t$

$$I = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^{+\infty} x e^{-(n+1)x} \ dx$$

令 $(n+1)x = t$

$$I = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{(n+1)^2} \int_0^{+\infty} x e^{-x} \ dx$$

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}$$