

双目基础

9. 投影^[1]：已知一点世界坐标 $X = (X_1, X_2, X_3)$ ，求其分别在左右两个相机平面上的投影。

设左相机的外参矩阵为 $(R_l|t_l)$ ，右相机矩阵的外参矩阵为 $(R_r|t_r)$ ；

已知左右相机的内参矩阵 M_l 和 M_r ；

左相机平面上的投影点记作 (u_l, v_l) ，右相机平面上的投影点记作 (u_r, v_r) ，则：

对于左侧相机：

a) 由外参矩阵可得世界坐标系 \rightarrow 相机坐标系：

$$\begin{bmatrix} X_{1cl} \\ X_{2cl} \\ X_{3cl} \\ 1 \end{bmatrix} = [R_l|t_l] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) 带入内参矩阵系数后可得相机坐标系 \rightarrow 图像坐标系：

$$X_{3c} \begin{bmatrix} u_l \\ v_l \\ 1 \end{bmatrix} = M_l \begin{bmatrix} X_{1cl} \\ X_{2cl} \\ X_{3cl} \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中：

$$M_l = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于右侧相机同理可得：

$$X_{3cr} \begin{bmatrix} u_r \\ v_r \\ 1 \end{bmatrix} = M_r [R_r|t_r] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中：

$$M_r = \begin{bmatrix} f'_x & 0 & c'_x \\ 0 & f'_y & c'_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. 对极线方程推导^{[2][3][4][5]}：

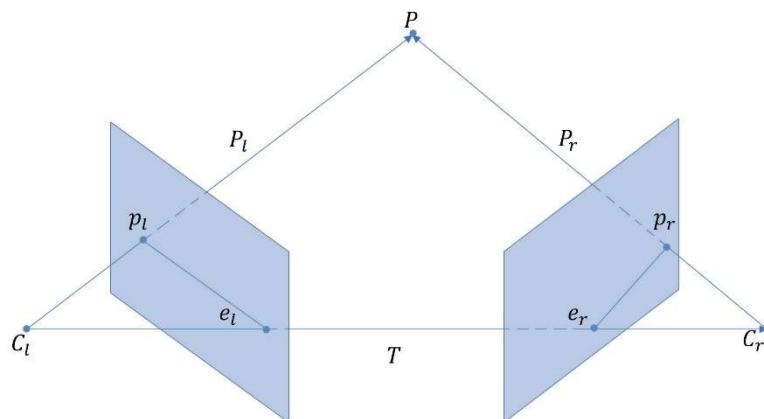


Figure 1 对极几何推导参考图

1) Figure 1 中符号说明：

- a) C_l 、 C_r ：分别为左右两侧相机的原点。
- b) P ：物点。
- c) p_l 、 p_r ：像点。物点 P 投影在两个相平面上的像。
- d) P_l 、 P_r ：相机坐标下物点 P 的表示，用三维向量表示。 $P_l = [P_{lx} \ P_{ly} \ P_{lz}]^T$ ， $P_r = [P_{rx} \ P_{ry} \ P_{rz}]^T$ 。
- e) 极平面：由 C_l 、 C_r 、 P 构成的平面。
- f) e_l 、 e_r ：极点。其中左极点 e_l 是右侧相机原点坐标投影在左侧像平面上的像；右极点 e_r 是左侧相机原点坐标投影在右侧像平面上的像。
- g) 极线：极平面与两个像平面的交线，在图中表示为 $l_l = p_l e_l$ 和 $l_r = p_r e_r$ 。

2) 物点在左右两侧相机坐标之间的关系推导：

由题目已知信息：从左侧相机坐标位置转换到右侧相机坐标所需用到的外参矩阵是 $(R|t)$ 。

那么假设已知左侧相机坐标下的物点 P_l ，则右侧相机坐标下的物点 P_r 可以表示为：

$$P_r = (R|t)P_l \quad (1)$$

其中 R 是旋转矩阵， t 是平移矩阵。(1)又可写作：

$$P_r = R(P_l - t) \quad (2)$$

由于旋转矩阵 R 是一个正交矩阵，根据正交矩阵的性质，那么：

$$P_l - t = R^{-1}P_r = R^T P_r \quad (3)$$

3) 极平面的求解：

根据Figure 1所示，为了写出极平面的表示方式，我们可以任取极平面上三个不共线的向量，等式记作这三个向量的混合积为0。我们可以用 P_l 、 $P_l - t$ 、 t 这三个向量表示极平面。可以写作：

$$(P_l - t)^T \cdot t \times P_l = 0 \quad (4)$$

带入步骤2的推导，(4)又可写作：

$$(P_r^T R) \cdot (t \times P_l) = 0 \quad (5)$$

其中：

$$t \times P_l = \begin{vmatrix} i & j & k \\ t_x & t_y & t_z \\ P_{lx} & P_{ly} & P_{lz} \end{vmatrix} = (t_y P_{lz} - t_z P_{ly})i + (t_z P_{lx} - t_x P_{lz})j + (t_x P_{ly} - t_y P_{lx})k$$

用矩阵乘法可表示为：

$$SP_l = \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{lx} \\ P_{ly} \\ P_{lz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_y P_{lz} - t_z P_{ly} \\ t_z P_{lx} - t_x P_{lz} \\ t_x P_{ly} - t_y P_{lx} \end{bmatrix} \quad (6)$$

即，将(6)代入(5)，极平面的混合积表示又可写作：

$$P_r^T R S P_l = 0 \quad (7)$$

4) 本质矩阵的引入：

我们定义本质矩阵的符号为E，本质矩阵仅仅依赖于外参R和t。

$$E = RS \quad (8)$$

则(7)又可记作：

$$P_r^T E P_l = 0 \quad (9)$$

5) 由相机坐标转换到像素级别：

将相机坐标系下的坐标转换为像素级别：

$$\begin{cases} p_l = \frac{f_l}{P_{lz}} P_l \\ p_r = \frac{f_r}{P_{rz}} P_r \end{cases}$$

那么式(9)在像素级别下可以写作：

$$\left(\frac{P_{rz}}{f_r} p_r \right)^T E \left(\frac{P_{lz}}{f_l} p_l \right) = 0$$

由于等式中乘系数 $\frac{P_{rz}}{f_r}$ 、 $\frac{P_{lz}}{f_l}$ 实际上只是一个深度方向上常数的变化关系，对于混合积为0的等式关系不构成影响，因此进一步又可化简为：

$$p_r^T E p_l = 0 \quad (10)$$

6) 引入点线关系：

设 \tilde{l} 是某侧相平面上的极线， \tilde{p} 是该相平面上且经过 \tilde{l} 的一点，那么根据点线结合关系可得：

$$\tilde{p}^T \tilde{l} = \tilde{l}^T \tilde{p} = 0 \quad (11)$$

其中：

$$\tilde{p} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

7) 右极线推导：

又由式(10)的关系结合式(11)的关系得，若令：

$$\tilde{l}_r = E p_l \quad (12)$$

那么：

$$p_r^T \tilde{l}_r = 0$$

也就是说明对于一个物点在右侧投影的像点来说，该像点一定在右极线 \tilde{l}_r 上。

题目解答：

将式(12)代入题目中已知信息，将题目中的像点 x_l 代入到 p_l 中。像点在左侧像平面投影的像点为：

$$x_l = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

由左侧相机坐标投影到右侧相机坐标的外参矩阵为： $(R|t)$ ，再将其代入到本质矩阵 E 中，即可求得右侧像平面的极线，物点在右侧的投影一定位于右极线 \tilde{l}'_r 上。

$$\tilde{l}'_r = R \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix} x_l$$

8) 左极线推导：

左极线和右极线推导过程同理：

$$\tilde{l}_l = E^T p_r \quad (13)$$

即，对于一个物点在左侧投影的像点来说，该像点一定在左极线 \tilde{l}_l 上。

11.基本矩阵^[3]：

本质矩阵使用到的是相机外参，是基于相机坐标系的。如果分析的是数字图像，则需要用到内参矩阵。

像素级别下的坐标可以表示为：

$$\begin{cases} \bar{p}_l = M_l P_l \\ \bar{p}_r = M_r P_r \end{cases}$$

代入式(9)可得：

$$(M_r^{-1} \bar{p}_r)^T E (M_l^{-1} \bar{p}_l) = 0 \quad (14)$$

式(14)又可写作：

$$\bar{p}_r^T (M_r^{-T} E M_l^{-1}) \bar{p}_l = 0 \quad (15)$$

基本矩阵 F 写作：

$$F = (M_r^{-T} E M_l^{-1}) \quad (16)$$

题目解答：

那么，对于题目要求满足：

$$x_l^T F' x_r = 0$$

其中基本矩阵可以写作：

$$F' = (M_l^{-T} E M_r^{-1})$$

12.使用 OpenCV API 进行双目标定^{[6][7]}

1) 首先，我使用 left 和 right 两个数据集下可以提取到 7×6 规模棋盘角点的所有图片分别对左右相机做了单目标定，获得内参矩阵和畸变参数。

左侧相机内参矩阵：

$$l_{\text{mtx}} = \begin{bmatrix} 534.071 & 0 & 341.534 \\ 0 & 534.119 & 232.946 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

左侧相机畸变参数：

$$l_{\text{dist}} = [-2.930e-01 \ 1.077e-01 \ 1.310e-03 \ -3.110e-05 \ 4.348e-02]$$

右侧相机内参矩阵：

$$r_{\text{mtx}} = \begin{bmatrix} 538.081 & 0 & 326.110 \\ 0 & 537.622 & 247.902 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

右侧相机畸变参数：

$$r_{\text{dist}} = [-3.029e-01 \ 2.098e-01 \ -1.014e-04 \ 9.898e-04 \ -1.911e-01]$$

2) 之后调用函数cv2.stereoCalibrate(), 并选取 left 和 right 数据集下标号为 :01、03、04、06、07、12、13、14 这八对图片, 提取棋盘角点作为立体标定的像素点, 并传入之前获取的左右两侧相机的内参和畸变参数。

3) 由函数输出可获得：左侧相机转换到右侧相机位置的旋转矩阵R、平移矩阵T、本质矩阵E和基本矩阵F。

具体结果如下：

左右相机之间旋转矩阵关系：

$$R = \begin{bmatrix} 0.97944689 & 0.00372202 & -0.2016679 \\ 0.00991457 & 0.99773271 & 0.06656675 \\ 0.20145843 & -0.06719804 & 0.9771893 \end{bmatrix}$$

左右相机之间平移矩阵关系：

$$T = \begin{bmatrix} -0.58508554 \\ -0.93756811 \\ 0.29861235 \end{bmatrix}$$

本质矩阵：

$$E = \begin{bmatrix} -0.19184161 & -0.23493257 & -0.93605917 \\ 0.41034535 & -0.03820516 & 0.5115188 \\ 0.91249729 & -0.58026933 & -0.22802463 \end{bmatrix}$$

基本矩阵：

$$F = \begin{bmatrix} 2.66840909e-06 & 3.26748489e-06 & 5.28113468e-03 \\ -5.71254674e-06 & 5.31818007e-07 & -1.97598170e-03 \\ -6.28353951e-03 & 3.14517760e-03 & 1.00000000e+00 \end{bmatrix}$$

2018.4.26 修正：

从计算结果分析, 我发现平移矩阵的结果数值在x方向上过小, 不符合日常关于摄像头

之间距离的常识，因此我重新对两个数据集中的图片进行分析，发现标号为 14 的图片在使用 OpenCV API 提取棋盘角点时，提取到的角点的位置和顺序的映射关系和其他图片有显著差异。角点提取实际上是从红色的一行坐标开始，按照标注所示的“之”字形顺序存储的。如下图所示：

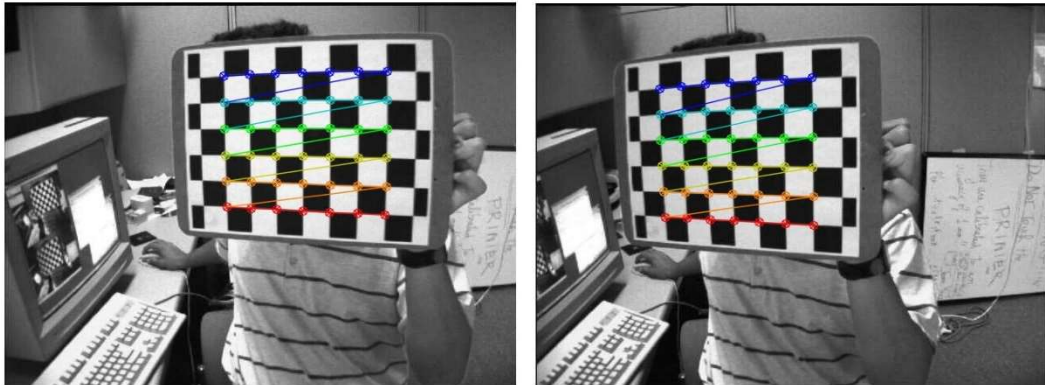


Figure 2 正常角点映射关系 (01)

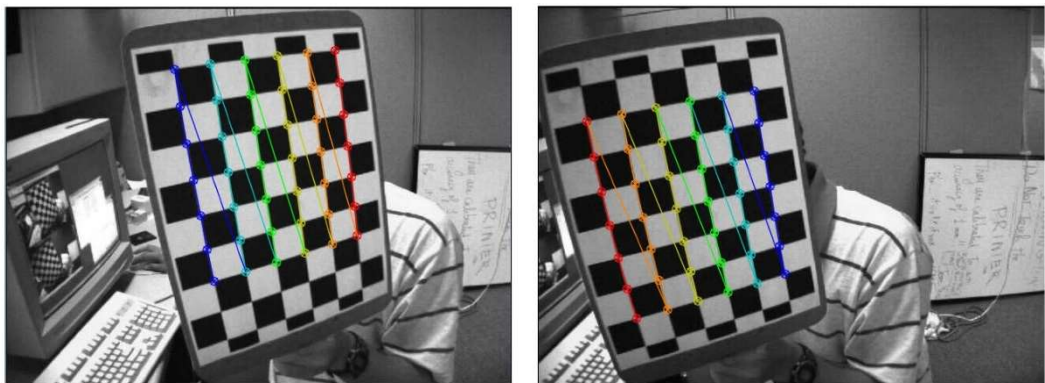


Figure 3 异常角点映射关系 (14)

因此我在原有选取八对图片的基础上，去掉了编号 14 的图片，计算结果如下：
左右相机之间旋转矩阵关系：

$$R = \begin{bmatrix} 0.99998067 & 0.00378873 & 0.00492996 \\ -0.00375482 & 0.99996936 & -0.00686889 \\ -0.00495583 & 0.00685024 & 0.99996426 \end{bmatrix}$$

左右相机之间平移矩阵关系：

$$T = \begin{bmatrix} -3.33009495 \\ 0.03832581 \\ 0.00890258 \end{bmatrix}$$

代码见：https://github.com/SelinaFelton/Stereo-Calibration/blob/master/temp2_4.py

14. 已知像点的物点 3D 坐标推导^{[8][9][10]}：

1) 已知左侧图像的像点的图像坐标 p_l ，其可根据该点求得右极线：

$$l_r = Fp_l$$

其中F是基本矩阵，具体表示形式见式(16)。即物点在右侧图像平面上的投影一定落在右极线 l_r 上。

2) 物点 3D 坐标推导过程：

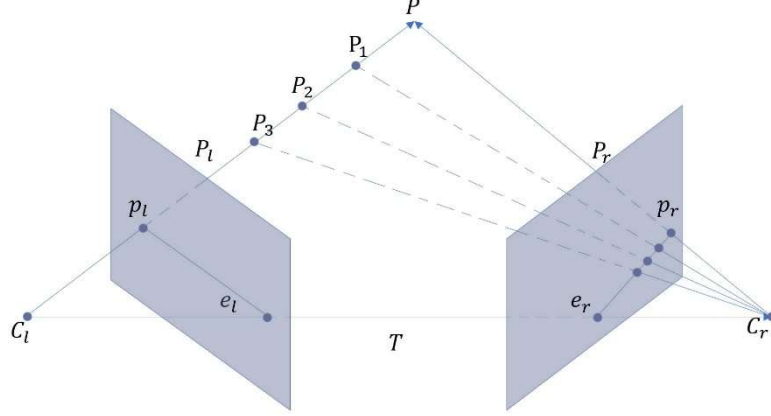


Figure 4 物点极线约束关系图

已知左侧图像坐标系下像点 \bar{p}_l ，选取右极线上的任意一点 \bar{p}_r ，在已知相机坐标位置的基础下，可根据这两点反推出物点P的世界坐标。根据极线约束关系，在右极线上选取不同的点与左侧成像平面上的像点还原出的和物点P的位置见Figure 4所示。

其中：

$$\bar{p}_l = \begin{bmatrix} u_l \\ v_l \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}_r = \begin{bmatrix} u_r \\ v_r \\ 1 \end{bmatrix}$$

且满足 $\bar{p}_r^T l_r = 0$ 。

设左侧相机的坐标位置 C_l 为世界坐标系原点，物点P在世界坐标系下的坐标为：

$$P = [X Y Z 1]^T$$

那么左侧相机的外参矩阵可以表示为：

$$[R_l | t_l] = [I | 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则，右侧相机外参矩阵可根据两相机之间的位置转换关系矩阵表示为：

$$[R_r | t_r] = [R | t]$$

将 \bar{p}_l 和 \bar{p}_r 由图像坐标系转换到相机坐标系下坐标 p_l 和 p_r ：

$$p_l = M_l^{-1} \bar{p}_l$$

$$p_r = M_r^{-1} \bar{p}_r$$

利用相机坐标系下点的表示方式我们可以得到如下等式：

$$\begin{cases} Z_l p_l = [R_l | t_l] P \\ Z_r p_r = [R_r | t_r] P \end{cases}$$

又因为相机的世界坐标 C_i 、物点的世界坐标 P 、物点 P 与相机坐标连线在成像平面上交点的世界坐标 p_i 存在三点共线的关系，因此取两段由这三点中的任意两点所构成的向量叉积为0。可得到以下方程组：

$$\begin{cases} p_l \times [R_l | t_l] P = 0 \\ p_r \times [R_r | t_r] P = 0 \end{cases}$$

通过最小二乘法求解该线性方程组即可得到 P 点的坐标。

15.双目校正^{[6][11][12][13][14]}：

双目平行校正的步骤如下：

- 1) 首先进行双目标定操作，具体标定结果见第12问，标定后分别获得左右相机的内参矩阵、畸变矩阵，两相机坐标之间的平移矩阵和旋转矩阵。
- 2) 调用函数`cv2.stereoRectify()`进行立体校正，函数返回值包括两台相机的旋转矩阵 $R1$ 和 $R2$ ，校正后两台相机各自的投影矩阵 $P1$ 和 $P2$ ，视差矩阵 Q 等。
- 3) 调用函数`cv2.initUndistortRectifyMap()`分别计算左右两个相机的失真和整改变换图。
- 4) 在获得的失真和整改变换图的基础上，调用`cv2.remap()`对原始图片进行像素插值重构。
- 5) 画上矩形框和线条，以验证左右两张图片校正后的像素点是否对齐。

实验结果：

根据以下结果可以看出，经过双目平行校正后，两幅图片中的像素点基本上实现了对齐的操作。

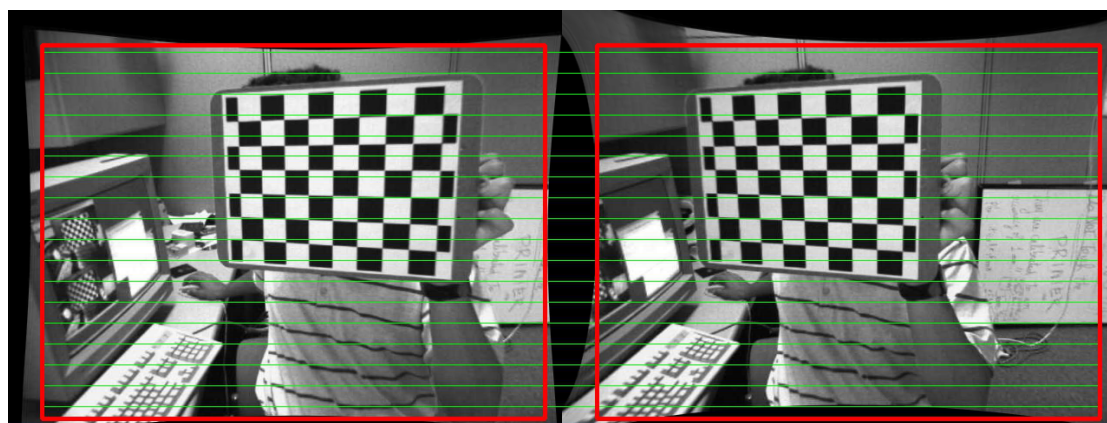


Figure 5 标号 01 图片双目校正

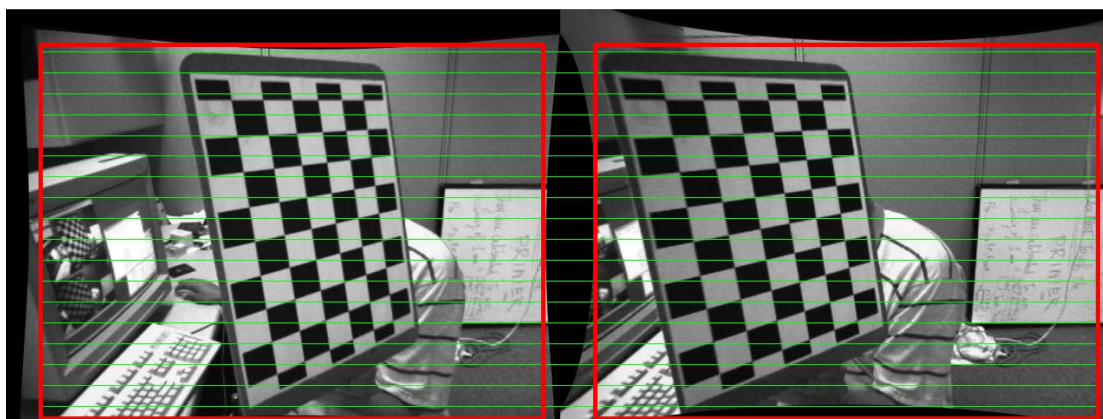


Figure 6 标号 11 图片双目校正

代码见：https://github.com/SelinaFelton/Stereo-Calibration/blob/master/temp2_6.py

平行校正后的基线推导：

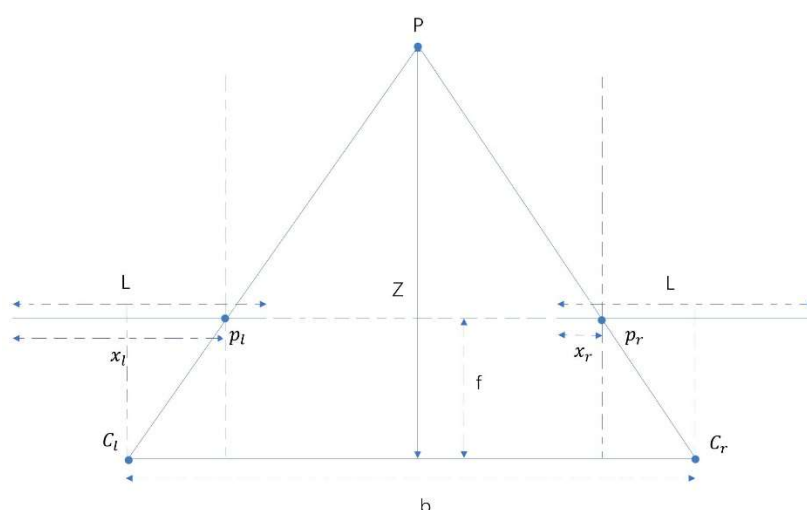


Figure 7 平行校正基线示意图

基线：两个光学中心的连线，在双目平行校正后基线的表示如Figure 7所示。

极线校正中最常使用Bouguet方法。Bouguet方法将双目标定得到的旋转矩阵 R 分解成左右相机分别需要旋转而达到光轴平行的旋转矩阵 R_1 和 R_2 。而这两个选择矩阵的分解原则是使得左右图像重投影造成的畸变最小，左右视图的共同面积最大。

Bouguet 极线校正^{[15][16][17]}步骤如下：

- 1) 将右图像平面相对于左图像平面的旋转矩阵分解成两个旋转矩阵 R_1 和 R_2 ，也称为左右相机的合成矩阵。其中：

$$\begin{cases} R_1 = R^{\frac{1}{2}} \\ R_2 = R^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

- 2) 将左右相机分别按照 R_1 和 R_2 旋转，使得相机光轴平行。此时左右相机的成像投影平

面达到平行，但是基线与成像投影平面仍然不平行。

- 3) 使用右相机相对于左相机的平移矩阵 T ，构造变换矩阵 R_{rect} 使得基线与成像投影平面平行。具体构造方法如下：

- a) 构造 e_1 。变换矩阵将左视图的极点变换到无穷远点，使得极线达到水平。左右相机的投影中心之间的平移向量就是左极点方向：

$$e_1 = \frac{T}{\|T\|}$$

其中：

$$T = [T_x \ T_y \ T_z]^T$$

- b) e_2 方向与主光轴方向正交，沿图像方向与 e_1 垂直，则 e_2 方向可通过 e_1 与主光轴方向的叉积并做归一化处理获得：

$$e_2 = \frac{[-T_y \ T_x \ 0]}{\sqrt{T_x^2 + T_y^2}}$$

- c) e_3 同时与 e_1 和 e_2 正交， e_3 可由 e_1 和 e_2 的叉积获得：

$$e_3 = e_1 \times e_2$$

- d) 变换矩阵 R_{rect} 可将左相机的极点转换到无穷远处，其构造如下：

$$R_{rect} = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{bmatrix}$$

- 4) 通过合成旋转矩阵和变换矩阵相乘可以获得左右相机的整体旋转矩阵。左右相机坐标系乘以各自的整体旋转矩阵即可使得左右相机的主光轴平行，且像平面与基线平行。

$$\begin{cases} R_l = R_{rect} R_1 \\ R_r = R_{rect} R_2 \end{cases}$$

对于求解基线长度，可以通先将左右光心位置进行Bouguet极线校正，校正后的x方向坐标的差值即为基线的长度 b 。计算过程如下：

左相机校正后的光心坐标：

$$\begin{bmatrix} c_{lx} \\ c_{ly} \\ c_{lz} \end{bmatrix} = R_l \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

右相机校正后的光心坐标：

$$\begin{bmatrix} c_{rx} \\ c_{ry} \\ c_{rz} \end{bmatrix} = R_r \begin{bmatrix} c'_x \\ c'_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

即：

$$b = |c_{rx} - c_{lx}|$$

16.深度－视差^[18]：

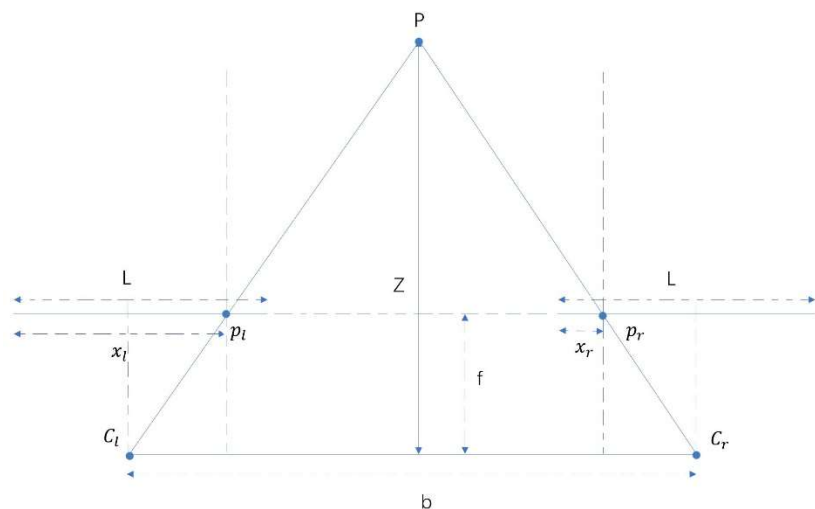


Figure 7 平行校正基线示意图（复现）

对于已经过平行校正的双目系统，其结构如Figure 7所示，首先将两个投影位置由图像坐标系转换为相机坐标系。若此时相机矩阵是已经过双目平行校正后的新相机矩阵 M_l 和 M_r ，那么在平行校正后相机坐标系下的左右侧像点的坐标 P_l 和 P_r 可以表示如下：

左侧相机矩阵坐标：

$$P_l = \begin{bmatrix} X_l \\ Y_l \\ Z_l \\ 1 \end{bmatrix} = M_l^{-1} \begin{bmatrix} x_l \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

右侧相机矩阵坐标：

$$P_r = \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \\ 1 \end{bmatrix} = M_r^{-1} \begin{bmatrix} x_r \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

之后进行深度推导，当相机的水平和垂直方向焦距均相同的情况下，则可用 f 表示经过标定此时相机的焦距。假设成像平面的长度为 L ，根据三角形相似定理可做以下推导：

$$\frac{p_l p_r}{Z - f} = \frac{C_l C_r}{Z}$$

由于：

$$\begin{aligned} C_l C_r &= b \\ |x_l - x_r| &= d \end{aligned}$$

那么，上式又可写成：

$$\frac{b - [(x_l - \frac{L}{2}) + (\frac{L}{2} - x_r)]}{Z - f} = \frac{b}{Z}$$

即：

$$Z = \frac{bf}{d}$$

若以左侧相机位置作为世界坐标系原点，那么， P 点坐标可以表示为：

$$P = [X_l \ Y_l \ Z]^T$$

参考文献

- [1].参考相机基础部分 report : [Camera Basics]
- [2].参考论文: Andrea F, Emanuele T, Alessandro V. "A compact algorithm for rectification of stereo pairs" *Machine Vision and Applications* · October 2000
- [3].参考博客:[计算机视觉基础 5——本质矩阵与基本矩阵(Essential and Fundamental Matrices)], <http://www.cnblogs.com/gemstone/archive/2011/12/20/2294805.html>
- [4].参考博客:[对极几何 (Epipolar Geometry)], <https://www.cnblogs.com/clarenceliang/p/6704970.html>
- [5].参考博客:[Epipolar geometry 对极几何], <https://blog.csdn.net/lin453701006/article/details/55096777>
- [6].参考 OpenCV 文档:[stereoCalibrate, stereoRectify, initUndistortRectifyMap], https://docs.opencv.org/2.4/modules/calib3d/doc/camera_calibration_and_3d_reconstruction.html?highlight=t=stereocalibrate#cv2.stereoCalibrate
- [7].参考博客:[机器视觉学习笔记 (7) —— 基于 OpenCV 的双目摄像机标定], <https://blog.csdn.net/xuelabizp/article/details/50432715>
- [8].参考课件:[Epipolar Geometry and Stereo], https://courses.engr.illinois.edu/cs543/sp2011/lectures/Lecture%2023%20-%20Epipolar%20Geometry%20and%20Stereo%20-%20Vision_Spring2011.pdf
- [9].参考计算机视觉类教材: Richard H, Andrew Z. "Multiple View Geometry in Computer Vision, Second Edition", (pages 284-285)
- [10].参考博客:[Monocular slam 中的理论基础], <https://blog.csdn.net/heyijia0327/article/details/50774104>
- [11].参考博客:[双目立体视觉简单介绍], <https://blog.csdn.net/qdut2015go/article/details/48391949>
- [12].参考博客:[双目校正 : 杂谈], https://blog.csdn.net/sss_369/article/details/60469818
- [13].参考网页:[Tutorial on Rectification of Stereo Images], http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/CVonline/LOCAL_COPIES/FUSIELLO/tutorial.html
- [14].参考博客:[使用 OpenCV/python 进行双目测距], <https://www.cnblogs.com/zhuyishou/p/5767592.html>
- [15].参考论文:郑楷鹏, "摄像机标定及立体匹配技术研究, 南京理工大学硕士学位论文, 2017.3
- [16].参考论文: Annika K. "Comparison of Stereo Matching Algorithms for Mobile Robots" February 2000
- [17].参考博客:[Bouguet 极线校正的方法], <https://blog.csdn.net/zkl99999/article/details/48372077>
- [18].参考博客:[双目测距中用到的视差图和景深的关系推导 ---- 三种方法详细解], <https://blog.csdn.net/wangxiaokun671903/article/details/40587431>