Fórum sobre Planejamentos e Avaliações do PIC

Prezados Coordenadores, Professores e Alunos.

No Portal do PIC (https://18pic.obmep.org.br/) está disponibilizado um fórum de discussão sobre os Planejamentos e sobre as Avaliações do PIC.

Utilize este fórum para:

- Fazer comentários sobre os roteiros e as avaliações.
- Sugerir assuntos ou problemas para serem incorporados nos roteiros.
- Compartilhar sugestões e boas ideias.
- Compartilhar os materiais utilizados na sua região: listas de exercícios, resumos, apresentações em *PowerPoint*, atividades, jogos, materiais complementares, etc.
- Publicar soluções interessantes dos problemas propostos.
- Informar erros encontrados nos materiais disponibilizados.
- Ler os comentários e baixar os materiais compartilhados pelos colegas do PIC.
- etc.

Preferimos que os comentários sobre os Planejamentos e as Avaliações sejam postados nesse Fórum.

Muito obrigado.
Comitê Acadêmico do PIC

Roteiro de Estudos – PIC 2024
Grupo 3 – CICLO 3
ENCONTRO 1

- Assuntos a serem abordados: princípios Aditivo e Multiplicativo, permutações, combinações, permutações de elementos nem todos distintos.

- Textos para consulta:

- Capítulos 8 e 9 do livro "Primeiros Passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra, B. Holanda, E. A. Chagas, 2018.
- Capítulos 1 e 4 da apostila do PIC da OBMEP "Métodos de Contagem e Probabilidade", P. C. P. Carvalho. https://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática, "Princípio Fundamental da Contagem", F. S. Benevides, A. C. Muniz Neto (revisor). https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/7sv28v642xc8k.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática, "O Fatorial de um Número e as Permutações Simples", F. S. Benevides, A. C. Muniz Neto (revisor). https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/opxoni3ht1woc.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática, "Arranjos e Combinações Simples", F. S. Benevides, A. C. Muniz Neto (revisor). https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/dds0ww9e3tsgo.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática, "Permutações com Elementos Repetidos", F. S. Benevides, A. C. Muniz Neto (revisor). https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/9kfgsvbenaos0.pdf

- Exercícios a serem discutidos com os alunos: está disponibilizada uma lista de doze exercícios. O professor deverá propor os exercícios da lista para que os alunos resolvam. Acompanhando, individual ou coletivamente, a tentativa de resolução dos exercícios pelos alunos, o professor poderá perceber o nível de compreensão dos alunos. Para cada exercício da lista, sugere-se que pelo menos um dos alunos que o tenham resolvido apresente sua resolução para os demais alunos, e o professor acompanhe a resolução, corrigindo, destacando e aprofundando o entendimento da resolução. Se todos os exercícios da lista forem resolvidos durante o tempo do encontro, cabe ao professor propor exercícios adicionais sobre os assuntos abordados. Exercícios adicionais sobre os assuntos abordados podem ser encontrados, por exemplo, no texto para consulta.

Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem

Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p maneiras e, qualquer que seja essa escolha, uma decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a pq.

Princípio Aditivo

Ao dividir um problema de contagem em dois casos, sendo que, em cada caso, contamos o número de soluções que nele se enquadram e todas as soluções se enquadram em exatamente um dos casos, então o número total de soluções é igual à soma dos números de soluções de cada caso.

Permutações e Combinações

Seja $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ um conjunto de n elementos.

Uma lista ordenada formada por todos os elementos de A é dita uma *permutação (simples)* de a_1, a_2,..., a_n. Denotamos por P_n o número de permutações de a_1, a_2,..., a_n. Tem-se

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

De fato, para formar uma permutação de a_1, a_2,..., a_n, inicialmente, há n maneiras de escolher o primeiro elemento da permutação. Uma vez escolhido o primeiro elemento da permutação, há $n-1$ maneiras de escolher o segundo elemento da permutação (não pode ser igual ao primeiro elemento). Uma vez escolhidos o primeiro e segundo elementos da permutação, há $n-2$ maneiras de escolher o terceiro elemento da permutação (não pode ser igual ao primeiro elemento e nem igual ao segundo), e assim por diante. Pelo Princípio Multiplicativo, o número de permutações de a_1, a_2,..., a_n é $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Seja k um número inteiro, com $0 \le k \le n$. Uma *combinação (simples)* de a_1, a_2,..., a_n tomados k a k é um subconjunto de A com k elementos. Denotamos por C_n^k o número de combinações de a_1, a_2,..., a_n tomados k a k. Tem-se

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

De fato, vamos contar, de duas maneiras diferentes, o número de listas ordenadas formadas por k elementos de A.

- Primeira maneira:
  Há n maneiras de escolher o primeiro elemento da lista. Uma vez escolhido o primeiro elemento da lista, há $n-1$ maneiras de escolher o segundo elemento da lista (não pode ser igual ao primeiro elemento). Uma vez escolhidos o primeiro e segundo elementos da lista, há $n-2$ maneiras de escolher o terceiro elemento da

lista (não pode ser igual ao primeiro elemento e nem igual ao segundo), e assim por diante. Pelo Princípio Multiplicativo, o número de listas ordenadas formadas por k elementos de A é igual a $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1)$.

- Segunda maneira:

  Há C_n^k maneiras de escolher os k elementos que comporão a lista. Uma vez escolhidos os elementos da lista, há $P_k = k!$ de ordená-los, formando assim uma lista (ordenada). Pelo Princípio Multiplicativo, o número de listas ordenadas formadas por k elementos de A é igual a $C_n^k \cdot k!$.

Como as duas maneiras acima descritas contam o mesmo conjunto, então $C_n^k \cdot k! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$, ou seja, $C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$. Além disso, multiplicando o numerador e o denominador da fração precedente por $(n-k)!$, e considerando que $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k)! = n!$, tem-se $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Permutações de Elementos nem Todos Distintos

Sejam a_1, a_2,..., a_n elementos nem todos distintos, de modo que um deles aparece k_1 vezes, outro aparece k_2 vezes, e assim por diante, de forma que $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, sendo m o número de elementos distintos. Uma permutação desses elementos é uma lista ordenada formada por todos esses elementos. Denotamos por $P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ o número de tais permutações. Tem-se

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_m!}.$$

De fato, para simplificar a notação, vamos contar o número de permutações dos elementos a, a, a, b, b, c, ou seja, vamos calcular $P_6^{3,2,1}$ (o caso geral é análogo). Inicialmente, há C_6^3 maneiras de escolher 3 posições na permutação para nelas colocar os 3 elementos iguais a a. Uma vez colocados os 3 elementos iguais a a nas 3 posições escolhidas da permutação, há C_3^2 maneiras de escolher 2 posições na permutação para nelas colocar os 2 elementos iguais a b. Depois disso, há apenas $C_1^1 = 1$ maneira de escolher uma posição na permutação para nela colocar o único elemento igual a c. Pelo Princípio Multiplicativo, o número de permutações de a, a, a, b, b, c é $P_6^{3,2,1} = C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} \cdot \frac{3\cdot2\cdot1}{2\cdot1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(3\cdot2\cdot1)\cdot(2\cdot1)\cdot1} = \frac{6!}{3!\cdot2!\cdot1!}$.

Lista de Exercícios – PIC 2024 – Grupo 3 – Ciclo 3 – Encontro 1
ENUNCIADOS

No que segue, apresentamos uma lista de problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo do conteúdo durante a aula. Estes exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da Matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

Exercício 1 ("Primeiros Passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra" – Problema 8.5, pág. 61):
Em um relógio digital, as horas são exibidas por meio de quatro algarismos. O relógio varia das $00:00$ às $23:59$. Quantas vezes por dia os quatro algarismos mostrados são todos pares?

Exercício 2 ("Primeiros Passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra" – Problema 8.9, pág. 62):
Quantos números naturais de três algarismos distintos existem?

Exercício 3 ("Primeiros Passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra" – Problema 8.15, pág. 63):
De quantas formas podemos colocar 4 bolas verdes idênticas e 4 bolas amarelas idênticas em um tabuleiro 4×4 de modo que cada coluna e cada linha possua exatamente uma bola de cada cor?

Exercício 4 ("Círculos Matemáticos de Moscou: Problemas Semana-a-Semana" – Problema 3.2, pág.7):
Quantos números naturais de três dígitos possuem todos os seus algarismos com a mesma paridade?

Exercício 5 (Material Teórico do Portal da Matemática, "Arranjos e Combinações Simples" – Exemplo 14):
Um cartão da Mega-Sena contém um conjunto de 60 números, de 1 até 60. Um jogo consiste em uma escolha de 6 números desse cartão. Contudo, o jogador tem a opção de marcar mais do que 6 números. Ao fazer isso, ele estará apostando em todos os jogos que podem ser formados com 6 números do conjunto dos números marcados. Atualmente, o preço para apostar em um jogo é $R\$\,3{,}50$. Assim, ao marcar uma

quantidade maior de números em um cartão, o jogador irá pagar por todos os jogos que podem ser formados com os números escolhidos.

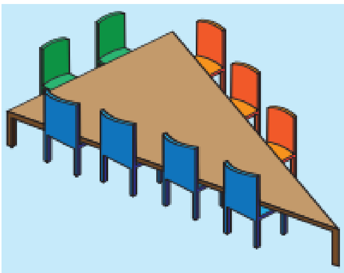
a) Qual é o total de jogos da Mega-Sena?
b) Caso um apostador marque 9 números do cartão, quanto ele irá pagar e qual será a sua chance de ganhar?

Exercício 6 (Apostila do PIC "Métodos de Contagem e Probabilidade" – Problema 8, pág. 37):
Quantos são os números naturais de 7 algarismos nos quais o algarismo 4 figura exatamente 3 vezes e o algarismo 8 exatamente 2 vezes?

Exercício 7 (Apostila do PIC "Métodos de Contagem e Probabilidade" – Problema 11, pág. 37):
Quantos são os anagramas da palavra PARAGUAIO que não possuem consoantes juntas?

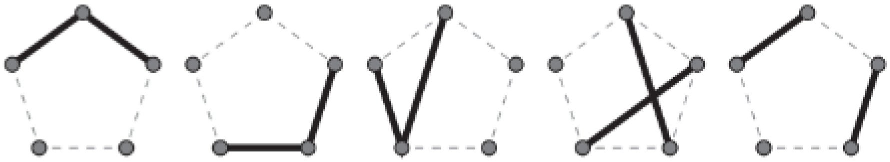
Exercício 8 (Material Teórico do Portal da Matemática, "Permutações com Elementos Repetidos" – Exemplo 9):
Um sapo está sobre uma reta. A cada pulo que ele dá, ele anda exatamente 15 cm para a direita ou 15 cm para a esquerda. Sabe-se que ele deu 10 pulos e retornou à sua posição original. Determine a quantidade de percursos distintos que ele pode ter percorrido.

Exercício 9 (Prova da OBMEP 2012 – Primeira Fase – Questão 18 – Nível 3):
Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?



Exercício 10 (Prova da OBMEP 2009 – Primeira Fase – Questão 17 – Nível 3):

Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferentes unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.



Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo?

Exercício 11 (Banco de Questões da OBMEP 2014 – Questão 17 – Nível 3):

Papai Noel chegou à casa de Arnaldo e Bernaldo carregando dez brinquedos distintos e enumerados de 1 a 10 e disse a eles: “o brinquedo número 1 é para você, Arnaldo e o brinquedo número 2 é para você, Bernaldo. Mas esse ano, vocês podem escolher ficar com mais brinquedos, contanto que deixem ao menos um para mim”. Diga de quantos modos Arnaldo e Bernaldo podem dividir entre eles o restante dos brinquedos.

Exercício 12 (Prova da OBMEP 2019 – Segunda Fase – Questão 5 – Nível 3):

Um tabuleiro preenchido com as letras A, B, C e D é bacana se essas quatro letras aparecem em qualquer quadriculado 2×2 do tabuleiro. Por exemplo, dos tabuleiros abaixo, o da esquerda é bacana e o da direita não é bacana.

C	D	C
A	B	A
C	D	C

C	B	C
C	D	A
A	C	B

a) Preencha os tabuleiros abaixo de modo que eles sejam bacanas e diferentes entre si.

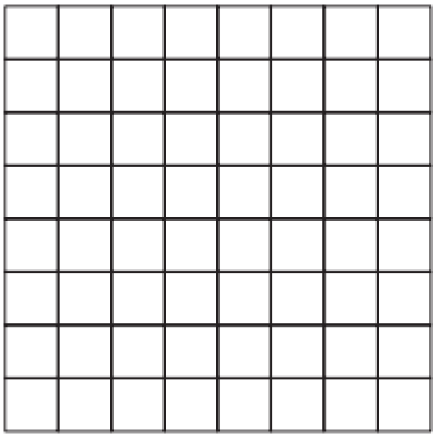
A	B	
C	D	

A	B	
C	D	

A	B	
C	D	

b) Quantos tabuleiros bacanas 2×8 existem?

c) Quantos tabuleiros bacanas 8×8 existem?



Solução do Exercício 1:
Vamos pensar em três blocos de dígitos. O primeiro bloco é formado pelos dois primeiros dígitos, que formam a hora do dia, o segundo é formado pelo terceiro dígito, que forma a dezena do minuto, e o terceiro é formado pelo quarto dígito, que forma a unidade do minuto. Há 7 maneiras de escolher o primeiro bloco de dígitos (00, 02, 04, 06, 08, 20 ou 22). Uma vez escolhido o primeiro bloco de dígitos, há 3 maneiras de escolher o segundo bloco de dígitos (0, 2 ou 4). Uma vez escolhidos o primeiro e o segundo blocos de dígitos, há 5 maneiras de escolher o terceiro bloco de dígitos (0, 2, 4, 6 ou 8). Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $7 \cdot 3 \cdot 5 = 105$ horas do dia em que todos os quatro algarismos mostrados no relógio são todos pares.

Solução do Exercício 2:
Há 9 maneiras de escolher o algarismo das centenas (não podemos escolher o zero). Uma vez escolhido o algarismo das centenas, há 9 maneiras de escolher o algarismo das dezenas (não podemos escolher o algarismo escolhido para ser o algarismo das centenas). Uma vez escolhidos os algarismos das centenas e das dezenas, há 8 maneiras de escolher o algarismo das unidades (não podemos escolher o algarismo escolhido para ser o algarismo das centenas e nem o algarismo escolhido para ser o algarismo das dezenas). Logo, pelo Princípio Multiplicativo, a quantidade de números naturais de três algarismos distintos é igual a $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Solução do Exercício 3:
Observemos que em cada linha do tabuleiro precisa ter uma única bola verde. Para a primeira linha do tabuleiro, há 4 maneiras de escolher a coluna em que ficará uma bola verde. Uma vez escolhida a coluna em que ficará na primeira linha uma bola verde, há 3 maneiras de escolher a coluna em que ficará a bola verde da segunda linha (pois não pode ser a mesma coluna em que está a bola verde da primeira linha). Uma vez escolhidas as colunas em que ficarão as bolas verdes da primeira e segunda linhas, há 2 maneiras de escolher a coluna em que ficará a bola verde da terceira linha (pois não pode ser nenhuma das colunas em que estão as bolas verdes da primeira e segunda linhas). Uma vez escolhidas as colunas em que ficarão as bolas verdes da primeira, segunda e terceira linhas, há apenas 1 maneira de escolher a coluna em que ficará a bola verde da quarta linha (pois não pode ser nenhuma das colunas em que estão as bolas verdes da primeira, segunda e terceira linhas). Assim, há $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de escolher uma disposição das bolas verdes no tabuleiro. Observemos que,

para cada bola verde disposta no tabuleiro, precisa ter uma única bola amarela na mesma linha dessa bola verde e uma única bola amarela na mesma coluna dessa bola verde. Assim, uma vez escolhida uma disposição das bolas verdes no tabuleiro, há 3 maneiras de escolher uma coluna em que ficará uma bola amarela na primeira linha (não pode ser a mesma coluna em que está a bola verde da primeira linha). Uma vez escolhidas uma disposição das bolas verdes no tabuleiro e uma coluna em que ficará uma bola amarela na primeira linha, há 3 maneiras de escolher uma linha em que ficará uma bola amarela na mesma coluna em que está a bola verde da primeira linha. Agora, observemos que, uma vez feitas as escolhas anteriores, há apenas 1 maneira de escolher as posições das bolas amarelas restantes. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o número de maneiras de dispor as bolas no tabuleiro de modo que cada coluna e cada linha possua exatamente uma bola de cada cor é igual a $24 \cdot 3 \cdot 3 = 216$.

Solução do Exercício 4:

Vamos considerar os dois casos que esgotam todas as possibilidades e se excluem mutuamente: (1) quando todos os dígitos são pares e (2) quando todos os dígitos são ímpares.

Caso 1:

Neste caso, há 4 maneiras de escolher o algarismo das centenas (pode ser 2, 4, 6 ou 8). Uma vez escolhido o algarismo das centenas, há 5 maneiras de escolher o algarismo das dezenas (pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8). Uma vez escolhidos os algarismos das centenas e das dezenas, há 5 maneiras de escolher o algarismo das unidades (pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8). Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ números de três algarismos com todos os algarismos pares.

Caso 2:

Neste caso, há 5 maneiras de escolher o algarismo das centenas (pode ser 1, 3, 5, 7 ou 9). Uma vez escolhido o algarismo das centenas, há 5 maneiras de escolher o algarismo das dezenas (pode ser 1, 3, 5, 7 ou 9). Uma vez escolhidos os algarismos das centenas e das dezenas, há 5 maneiras de escolher o algarismo das unidades (pode ser 1, 3, 5, 7 ou 9). Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ números de três algarismos com todos os algarismos ímpares.

Pelo Princípio Aditivo, a quantidade de números naturais de três dígitos que possuem todos os seus algarismos com a mesma paridade é igual a $100 + 125 = 225$.

Solução do Exercício 5:

a) Como um jogo é um subconjunto de 6 elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, 60\}$, então o total de jogos é igual a $C_{60}^{6} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6!} = 50063860$.

b) Ao marcar 9 números do cartão, o jogador estará apostando em todos os jogos de 6 números escolhidos dentre os números que ele marcou. O número de tais jogos é igual a $C_9^6 = 84$. Assim, ele pagará por este cartão $84 \cdot 3{,}50 = 294$ reais. Sua chance de ganhar é de 84 em 50063860, ou seja, aproximadamente de uma em 596 mil possibilidades.

Solução do Exercício 6:

Vamos esquecer que a primeiro dígito (da esquerda para a direita) do número não pode ser igual a zero. Isso fará com que contemos a mais e, depois, descontaremos o que foi contado indevidamente. Há C_7^3 maneiras de escolher os dígitos que serão ocupados pelo algarismo 4. Uma vez escolhidos os dígitos que serão ocupados pelo algarismo 4, há C_4^2 maneiras de escolher os dígitos que serão ocupados pelo algarismo 8. Uma vez feitas as escolhas anteriores, há $8 \cdot 8$ maneiras de preencher os 2 dígitos restantes (não podemos usar nesses dígitos os algarismos 4 e 8). Assim, pelo Princípio Multiplicativo, a resposta seria $C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot 8 \cdot 8 = 13440$. Mas, devemos subtrair o total de números começados por 0. Se o número começa por 0, raciocinando de forma análoga, conclui-se que há um total de $C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot 8 = 480$ números começados por 0. Assim, a resposta é $13440 - 480 = 12960$.

Solução alternativa:

Vamos contar separadamente os três casos abaixo, que são dois a dois mutuamente excludentes e esgotam todas as possiblidades:

i. números que começam em 4;
ii. números que começam em 8;
iii. números que não começam nem em 4 nem em 8.

i. Há 1 única maneira de preencher o primeiro dígito com o algarismo 4. Uma vez preenchido o primeiro dígito, há C_6^2 maneiras de escolher os outros 2 dígitos que serão preenchidos com o algarismo 4. Em seguida, há C_4^2 maneiras de escolher os 2 dígitos que serão ocupados pelo algarismo 8. Finalmente, há $8 \cdot 8$ maneiras de preencher os 2 dígitos restantes (não podemos usar nesses dígitos os algarismos 4 e 8). Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $1 \cdot C_6^2 \cdot 1 \cdot C_4^2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 8 = 5760$ números do tipo (i).
ii. Há 1 única maneira de preencher o primeiro dígito com o algarismo 8. Uma vez preenchido o primeiro dígito, há C_6^1 maneiras de escolher o outro dígito que será preenchido com o algarismo 8. Em seguida, há C_5^3 maneiras de escolher os 3 dígitos que serão ocupados pelo algarismo 4. Finalmente, há $8 \cdot 8$ maneiras de preencher os 2 dígitos restantes (não podemos usar nesses dígitos os algarismos 4 e 8). Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $1 \cdot C_6^1 \cdot C_5^3 \cdot 8 \cdot 8 = 3840$ números do tipo (ii).

iii. Há 7 maneiras de preencher o primeiro dígito (não podemos usar nem 4, nem 8 e nem 0). Uma vez preenchido o primeiro dígito, há C_6^3 maneiras de escolher os 3 dígitos que serão preenchidos com o algarismo 4. Depois disso, há C_3^2 maneiras de preencher os 2 dígitos com o algarismo 8. Finalmente, há 8 maneiras de preencher o dígito restante (não podemos usar nesses dígitos os algarismos 4 e 8). Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $7 \cdot C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot 8 = 3360$ números do tipo (iii).

Pelo Princípio Aditivo, a resposta é $5760 + 3840 + 3360 = 12960$.

Solução do Exercício 7:

Para formar um anagrama da palavra PARAGUAIO, primeiro, colocamos as vogais. Como a letra A aparece 3 vezes e as letras U, I e O aparecem 1 vez cada, o número de maneiras de dispô-las é $P_6^{3,1,1,1} = \frac{6!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 120$. Uma vez dispostas as vogais, colocamos as consoantes em três dos 7 espaços antes, entre e depois das vogais. Há 7 maneiras de escolher o espaço para colocar a letra P. Depois disso, há 6 maneiras de escolher o espaço para colocar a letra R e, finalmente, há 5 maneiras de escolher o espaço para a letrar G. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o número de anagramas é igual a $120 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 25200$.

Solução do Exercício 8:

Para poder voltar para a posição inicial, o número de pulos que o sapo deu para a direita deve ter sido igual ao número de pulos que ele deu para a esquerda. Como ele deu 10 pulos ao todo, ele precisou dar exatamente 5 pulos para a esquerda e 5 para a direita. Assim, o percurso percorrido pelo sapo está inteiramente determinado por uma sequência de 5 letras E e 5 letras D, que representam, respectivamente, os pulos para a esquerda e para a direita. Logo, a quantidade de percursos possíveis é igual ao número de anagramas de EEEEEDDDDD, que é igual a $P_{10}^{5,5} = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = 252$.

Solução do Exercício 9:

Há 6 maneiras de escolher dois lugares juntos no mesmo lado da mesa: 1 no lado com 2 lugares, 2 no lado com 3 lugares e 3 no lado com 4 lugares. Uma vez escolhidos dois lugares no mesmo lado da mesa, há 2 maneiras de Alice e Bernardo se sentarem nesses lugares. Depois disso, usando o Princípio Multiplicativo, conclui-se que há $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ maneiras dos outros quatro amigos se sentarem nos 7 lugares restantes. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, os amigos podem se sentar à mesa de $6 \cdot 2 \cdot 840 = 10080$ maneiras diferentes.

Solução do Exercício 10:

O pentágono tem 5 lados e 5 diagonais, num total de 10 segmentos de reta. Uma figura consiste de 2 desses segmentos de reta, e escolhas distintas de 2 segmentos de reta correspondem a figuras distintas. Logo, o número de figuras distintas é igual ao número de subconjuntos de 2 elementos do conjunto dos 10 segmentos de reta, ou seja, é igual a $C_{10}^{2} = \frac{10 \cdot 9}{2!} = 45$.

Solução do Exercício 11:

Para cada um dos 8 brinquedos, do número 3 ao número 10, devemos decidir se ele vai pertencer a Arnaldo, a Bernaldo ou deve ser deixado para Papai Noel. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o número de maneiras de dividir os brinquedos entre Arnaldo, Bernaldo e Papai Noel, incluindo os casos em que Papai Noel fica sem nenhum brinquedo, é igual a

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3}_{8 \text{ fatores}} = 3^8 = 6561.$$

Restará, então, contar o número de maneiras de dividir todos os brinquedos entre Arnaldo e Bernaldo (sem deixar nada para Papai Noel), e subtrair esse número de 6561. Para dividir os brinquedos entre Arnaldo e Bernaldo, devemos decidir, para cada um dos 8 brinquedos, para qual dos dois o brinquedo vai. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de maneiras de dividir todos os brinquedos entre Arnaldo e Bernaldo é igual a

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{8 \text{ fatores}} = 2^8 = 256.$$

Assim, a resposta é $6561 - 256 = 6305$.

Solução do Exercício 12:

a)

A	B	A
C	D	C
A	B	A

A	B	C
C	D	A
A	B	C

A	B	A
C	D	C
B	A	B

b) Há $4!$ maneiras de preencher as quatro casas do primeiro quadrado 2×2 da esquerda. Depois disso, cada coluna seguinte pode ser preenchida de 2 maneiras. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, há $4! \cdot 2^6 = 1536$ tabuleiros bacanas 2×8.

c) Fixemos momentaneamente um preenchimento do quadrado 2×2 superior esquerdo. Conforme visto na solução do item (b), há $2^6 = 64$ maneiras de preencher as duas primeiras linhas do tabuleiro 2×8, mantendo o preenchimento do quadrado superior esquerdo 2×2 que fixamos.

Dentre essas 64 possibilidades de preenchimento, uma delas é tal que na primeira linha do tabuleiro aparecem apenas duas letras que se alternam. Nesse caso, a segunda linha também tem alternância de duas letras em seu preenchimento, e essa alternância está determinada de modo único devido ao preenchimento do quadrado superior esquerdo 2×2 que fixamos inicialmente. Assim, nesse caso, nas demais 6 linhas também deve ocorrer alternância de duas letras, havendo 2 possibilidades de preenchimento para cada linha e, portanto, há $2^6 = 64$ possibilidades de preenchimento.

Nos outros 63 casos (em que não há alternância de duas letras na primeira linha), estando as duas primeiras linhas do tabuleiro corretamente preenchidas, há um único preenchimento para as demais linhas.

Logo, pelo Princípio Aditivo, há $64 + 63 = 127$ possibilidades de preenchimento, uma vez fixado o preenchimento do quadrado superior esquerdo 2×2. Como esse quadrado pode ser preenchido de $4!$ maneiras, distintas, pelo Princípio Multiplicativo, há $4! \cdot 127 = 3048$ tabuleiros bacanas 8×8.

Roteiro de Estudos – PIC 2024
Grupo 3 – CICLO 3
ENCONTRO 2

- Assuntos a serem abordados: probabilidade.

- Textos para consulta:

- Capítulo 2 da apostila do PIC da OBMEP "Métodos de Contagem e Probabilidade", P. C. P. Carvalho.
  https://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática, "O que é Probabilidade", F. S. Benevides, A. C. Muniz Neto (revisor).
  https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/cwxho8oykn408.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática, "Ferramentas Básicas", F. S. Benevides, A. C. Muniz Neto (revisor).
  https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/7t27369hjy80k.pdf

- Exercícios a serem discutidos com os alunos: está disponibilizada uma lista de doze exercícios. O professor deverá propor os exercícios da lista para que os alunos resolvam. Acompanhando, individual ou coletivamente, a tentativa de resolução dos exercícios pelos alunos, o professor poderá perceber o nível de compreensão dos alunos. Para cada exercício da lista, sugere-se que pelo menos um dos alunos que o tenham resolvido apresente sua resolução para os demais alunos, e o professor acompanhe a resolução, corrigindo, destacando e aprofundando o entendimento da resolução. Se todos os exercícios da lista forem resolvidos durante o tempo do encontro, cabe ao professor propor exercícios adicionais sobre os assuntos abordados. Exercícios adicionais sobre os assuntos abordados podem ser encontrados, por exemplo, no texto para consulta.

Probabilidade

Um experimento (ou um jogo) tem vários resultados possíveis. Um evento é um conjunto de resultados possíveis. Quando todos os resultados têm a mesma chance de ocorrer, a probabilidade de um evento é igual à razão entre número de resultados relativos ao evento e o número total de resultados, ou seja, é a razão entre o número de casos favoráveis à ocorrência do evento e o número total de possíveis casos. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Um dado é lançado. Qual é a probabilidade de o resultado ser maior que 4?

Solução: Aqui o experimento é o lançamento do dado. Temos 6 resultados possíveis. O evento é o conjunto dos resultados maiores que 4. Temos 2 resultados favoráveis à ocorrência do evento. Portanto, a probabilidade é $\frac{1}{3}$.

Exemplo 2: Em uma urna há 5 bolas vermelhas e 4 pretas, todas do mesmo tamanho e feitas do mesmo material. Retiramos duas bolas sucessivamente da urna, sem repô-las. Qual é a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas?

Solução: O experimento é retirar duas bolas. Quantos são os resultados possíveis? Como desejamos observar as cores das bolas, como resultados possíveis poderíamos considerar os seguintes pares ordenados: (v, p), (p, v), (v, v) e (p, p), sendo que v e p representam as cores vermelho e preto, respectivamente, e a primeira e segunda coordenadas do par ordenado são as cores da primeira e segunda bolas retiradas, respectivamente. Porém, temos várias bolas da mesma cor e quantidades diferentes de uma cor e de outra e, portanto, temos, por exemplo, maior chance de obter a configuração (v, v) do que a configuração (p, p). Assim, não podemos calcular a probabilidade pedida como sendo $\frac{1}{4}$. Uma forma de contornar essa situação é imaginar que as bolas vermelhas estão numeradas como v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 e as bolas pretas como p_1, p_2, p_3 e p_4, e considerar como resultados possíveis os seguintes pares ordenados: (x, y), com $x, y \in \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ e $x \neq y$, sendo a primeira e segunda coordenadas do par ordenado a primeira e segunda bolas retiradas, respectivamente. Neste caso, todos os resultados têm a mesma chance de ocorrer. O número total de possíveis casos é o total de pares ordenados (x, y), com $x \neq y$, que é igual a $9 \times 8 = 72$. O número de casos favoráveis à ocorrência do evento é igual ao número de pares (v_i, v_j), com $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $i \neq j$, que é igual a $5 \times 4 = 20$. A probabilidade pedida é, de fato, $\frac{20}{72} = \frac{5}{18}$.

Lista de Exercícios – PIC 2024 – Grupo 3 – Ciclo 3 – Encontro 2
ENUNCIADOS

No que segue, apresentamos uma lista de problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo do conteúdo durante a aula. Estes exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da Matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

Exercício 1 (Livro "Análise Combinatória e Probabilidade" – A. C. O. Morgado, J. B. P. Carvalho, P. C. P. Carvalho, P. Fernandez):
Dois dados são lançados simultaneamente. Calcule a probabilidade de que a soma dos números das faces de cima seja 7.

Exercício 2 (Livro "Análise Combinatória e Probabilidade" – A. C. O. Morgado, J. B. P. Carvalho, P. C. P. Carvalho, P. Fernandez):
Suponha que de ? objetos escolhemos ? ao acaso com reposição. Qual a probabilidade que nenhum objeto seja escolhido mais de uma vez?

Exercício 3 (Apostila do PIC "Métodos de Contagem e Probabilidade" – Problema 5, pág. 19):
Duas peças de dominó comum são sorteadas. Qual a probabilidade de elas terem um número em comum?

Exercício 4 (Apostila do PIC "Métodos de Contagem e Probabilidade" – Problema 6, pág. 19):
Ana, Joana e Carolina apostam em um jogo de cara-e-coroa. Ana vence na primeira vez que saírem duas caras seguidas; Joana vence na primeira vez que saírem duas coroas seguidas; Carolina vence quando sair uma cara seguida de uma coroa. Qual é a probabilidade que cada uma tem de vencer?

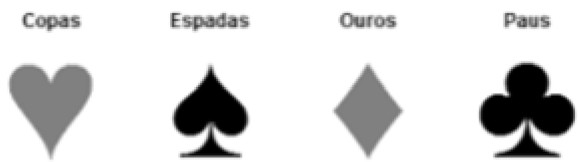
Exercício 5:
Escolhendo um número de 26 até 175 qual a probabilidade de:

a) ser múltiplo de 4;
b) ser múltiplo de 6;
c) ser múltiplo de 4 e de 6;
d) ser múltiplo de 4 ou de 6.

Exercício 6 (Banco de Questões da OBMEP 2011 – Questão 91 – Nível 3 – Pág. 51):
Tio Mané tem duas caixas, uma com sete bolas distintas numeradas de 1 a 7 e outra com oito bolas distintas numeradas com todos os números primos positivos menores que 20. Ele sorteia uma bola de cada caixa. Qual é a probabilidade de que o produto dos números das bolas sorteadas seja par?

Exercício 7 (Banco de Questões da OBMEP 2011 – Questão 95 – Nível 3 – Pág. 51):
Considere uma urna que contém uma bola preta, quatro bolas brancas e algumas bolas azuis. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, sua cor é observada e ela é devolvida à urna. Em seguida, retira-se novamente, ao acaso, outra bola dessa urna. Para quais quantidades de bolas azuis, a probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor é igual $\frac{1}{2}$?

Exercício 8 (Banco de Questões da OBMEP 2016 – Questão 14 (adaptada) – Nível 3 – Pág. 51):
Manuel é um matemático que gosta de jogos de cartas. Ele encontra os irmãos Jonas e Jonatan durante uma viagem de ônibus e propõe um jogo. Serão usados apenas os quatro ases do baralho, o de copas e o de ouros são vermelhos enquanto o de espadas e o de paus são pretos.



Manuel será o banco e os dois irmãos, um de cada vez, apostarão 1 real contra ele em cada rodada. As cartas são postas viradas com face para baixo. Jonas escolhe uma carta e Jonatan a vira para cima. Jonas escolhe mais uma carta e Jonatan novamente a vira. Se as duas cartas tiverem a mesma cor, então Jonas ganha 1 real de Manuel. Caso contrário, Manuel ganha 1 real de Jonas. Em seguida, Jonas e Jonatan trocam de posição e o jogo segue. Veja que Manuel não mexe nas cartas, por isto não pode manipular o jogo. Qual é a probabilidade de Manuel ganhar o jogo?

Exercício 9 (Banco de Questões da OBMEP 2018 - Problema 10 adaptado- Nível 3- Pág. 47):
Um jogo é composto das seguintes regras:

i. Em cada rodada, ocorre o lançamento de um dado comum não viciado.
ii. Se sair o número 3, então o jogador A ganha.
iii. Se sair um dos números do conjunto $\{4, 5, 6\}$, então o jogador B ganha.

iv. Se sair um dos números do conjunto $\{1, 2\}$, então o dado é lançado outra vez até resultar em 3 ou 4 ou 5 ou 6.

O jogador que ganhar uma rodada primeiro vence o jogo.

a) Qual é a probabilidade de que o jogador B vença na primeira rodada?
b) Qual é a probabilidade de que o jogador B vença na segunda rodada?
c) Qual é a probabilidade de que o jogador B vença na rodada n, sendo n um número natural?
d) Qual é a probabilidade de que o jogador B vença até a rodada n, sendo n um número natural?

Exercício 10:
Em uma copa do mundo 20 países são divididos em grupos de 4. Calcule a probabilidade de que Brasil e Argentina fiquem no mesmo grupo.

Exercício 11 (Banco de Questões da OBMEP 2018 – Questão 4 – Nível 3 - Pág. 44):
Em um torneio com 10 times, cada um deles se enfrenta uma única vez. Além disso, não ocorrem empates e cada um possui 50% de chance de ganhar qualquer partida. Qual a probabilidade de, após contabilizadas as pontuações dos $\frac{10\times 9}{2} = 45$ jogos, não existirem dois times com o mesmo número de vitórias?

Exercício 12:
São dispostos em uma fila duas meninas e quatro meninos. Qual a probabilidade de que as meninas não fiquem juntas?

Solução do Exercício 1:
O espaço amostral possui $6 \times 6 = 36$ pares de números possíveis. Os seguintes pares terão soma igual a 7: $(6, 1)$, $(5, 2)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(2, 5)$, $(1, 6)$. Portanto, a probabilidade de a soma ser 7 é $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Solução do Exercício 2:
O número de casos possíveis é n^r. O número de casos favoráveis (retirar r objetos sem repetição) é $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$. Portanto, a probabilidade pedida é $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{n^r}$.

Solução do Exercício 3:
Um dominó tem 28 peças. Logo, podemos selecionar duas peças, uma de cada vez, de $28 \cdot 27$ modos. Se a primeira peça é uma das 7 que são duplas, há 6 modos de escolher a segunda de modo a conter o mesmo número (há, no total, 7 peças em que esse número aparece). Se a primeira peça é uma das 21 que têm dois números, a segunda pode ser escolhida de 12 modos (6 para cada). Logo, usando os princípios multiplicativo e aditivo, a probabilidade é $\frac{6 \cdot 7 + 21 \cdot 12}{28 \cdot 27} = \frac{7}{18}$.

Solução do Exercício 4:
Primeiro, observe que o jogo termina com duas ou três rodadas. Representando cara e coroa por C e K, respectivamente, Ana vence nos seguintes casos: CC (probabilidade igual a $\frac{1}{4}$) e KCC (probabilidade igual a $\frac{1}{8}$). Portanto, Ana tem probabilidade igual a $\frac{3}{8}$ de vencer. Carolina vence se sair CK (probabilidade igual a $\frac{1}{4}$) ou KCK (probabilidade igual a $\frac{1}{8}$). Portanto, Carolina também tem probabilidade igual $\frac{3}{8}$ de vencer. Joana vence apenas se sair KK e, portanto, tem probabilidade igual a $\frac{1}{4}$ de vencer.

Solução do Exercício 5:
De 26 até 175, temos 150 números.

a) Dentre esses 150 números, o menor múltiplo de 4 é o $28 = 4 \times 7$ e o maior múltiplo de 4 é o $172 = 4 \times 43$ e, portanto, temos $43 - 7 + 1 = 37$ múltiplos de 4. Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{37}{150}$.

b) Dentre esses 150 números, o menor múltiplo de 6 é o $30 = 6 \times 5$ e o maior é o $174 = 6 \times 29$ e, portanto, temos $29 - 5 + 1 = 25$ múltiplos de 6. Então, a probabilidade pedida é igual a $\frac{25}{150} = \frac{1}{6}$.

c) Um número inteiro é múltiplo de 4 e 6 quando é múltiplo de 12. Dentre os 150 números inteiros entre 26 e 175, o menor múltiplo de 12 é o $36 = 12 \times 3$ e o maior é o $168 = 12 \times 14$ e, portanto, temos $14 - 3 + 1 = 12$ possíveis múltiplos de 4 e 6. Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{12}{150} = \frac{2}{25}$.

d) Dentre os 150 números inteiros entre 26 e 175, a quantidade de números inteiros que múltiplos de 4 ou de 6 pode obtida somando a quantidade de números inteiros que são múltiplos de 4 com a quantidade de números inteiros que são múltiplos de 6 e, em seguida, subtraindo dessa soma a quantidade de números inteiros que são múltiplos de 4 e de 6 (observe que, na soma, cada número inteiro que é múltiplo de 4 e de 6 é contado exatamente duas vezes, e é por isso que é preciso subtrair uma vez o total de números inteiros que são múltiplos de 4 e de 6). Assim, segue da solução dos itens (a), (b) e (c), que a probabilidade pedida é igual a $\frac{37+25-12}{150} = \frac{1}{3}$.

Solução do Exercício 6:

As possibilidades de números das duas caixas podem ser representadas por pares ordenados (x, y), sendo $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $y \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} = \{\text{números primos positivos menores do que } 20\}$. Como há 7 possibilidades para x e, para cada uma destas possibilidades, há 8 possibilidades para y, então as possibilidades de números das duas caixas é igual a $7 \times 8 = 56$. O produto dos números sorteados é ímpar quando as duas bolas sorteadas têm números ímpares, ou seja, quando $x \in \{1, 3, 5, 7\}$ e $y \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. Assim, há $4 \times 7 = 28$ possibilidades de o produto dos números sorteados ser ímpar e, portanto, há $56 - 28 = 28$ possibilidades de o produto ser par. Assim, a probabilidade de o produto dos números sorteados ser par é igual a $\frac{28}{56} = \frac{1}{2}$.

Solução do Exercício 7:

Seja n o número de bolas azuis.

As duas bolas retiradas são da mesma cor exatamente quando são ambas pretas ou são ambas brancas ou são ambas azuis, sendo que esses casos são dois a dois mutuamente excludentes. Pelo Princípio Multiplicativo, as duas bolas retiradas são pretas em $1^2 = 1$ caso apenas, são brancas em $4^2 = 16$ casos e são ambas azuis em n^2. Logo, pelo Princípio Aditivo, as duas bolas retiradas são da mesma cor em $1 + 16 + n^2 = 17 + n^2$ casos. Pelo Princípio Multiplicativo, o número total de casos possíveis é igual a $(5 + n)^2$. Assim, a probabilidade de as duas bolas retiradas serem da mesma cor é igual a $\frac{17+n^2}{(5+n)^2}$.

Queremos saber o valor de n tal que $\frac{17+n^2}{(5+n)^2} = \frac{1}{2}$, ou seja, $n^2 - 10n + 9 = 0$. Como $n^2 - 10n + 9 = (n-1)(n-9)$, então $n = 1$ ou $n = 9$.

Solução do Exercício 8:

Temos $4 \times 3 = 12$ configurações possíveis para o resultado das cartas. Manuel ganha se as cores forem distintas e para que isso ocorra inicialmente pode ser retirada qualquer carta, para o qual há 4 possibilidades. Após isso, precisa ser retirada uma carta de cor oposta, que tem 2 possibilidades. Portanto, a probabilidade de Manuel ganhar é $\frac{4\times 2}{12} = \frac{2}{3}$.

Solução do Exercício 9:

a) A probabilidade do jogador B vencer na primeira rodada é igual a $\frac{1}{2}$.

b) Para que o jogador B vença na segunda rodada, é preciso que na primeira rodada ocorra um dos números do conjunto $\{1, 2\}$ e na segunda rodada ocorra um dos números do conjunto $\{4, 5, 6\}$, o que resulta em $2 \cdot 3$ configurações favoráveis a que B vença na segunda rodada. Considerando que em duas rodadas há $6 \cdot 6$ configurações possíveis, então a probabilidade de que o jogador B vença na segunda rodada é igual a $\frac{2\cdot 3}{6\cdot 6} = \frac{1}{6}$.

c) Para que o jogador B vença na rodada n, é preciso que em cada uma das primeiras $n-1$ rodadas ocorra um dos números do conjunto $\{1, 2\}$ e na rodada n ocorra um dos números do conjunto $\{4, 5, 6\}$, o que resulta em $2^{n-1} \cdot 3$ configurações favoráveis a que B vença na rodada n. Considerando que em n rodadas há 6^n configurações possíveis, então a probabilidade de que o jogador B vença na rodada n é igual a $\frac{2^{n-1}\cdot 3}{6^n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

d) Os n casos do jogador B ganhar na primeira rodada ou ganhar na segunda rodada, ..., ou ganhar na rodada n são dois a dois mutuamente excludentes e esgotam todos os casos favoráveis ao jogador B ganhar até a rodada n. O número de configurações favoráveis a que o jogador B vença na rodada j, com $1 \leq j \leq n$, é igual a $2^{j-1} \cdot 3 \cdot 6^{n-j}$. Logo, pelo Princípio Aditivo, o total de configurações favoráveis ao jogador B ganhar até a rodada n é igual a

$$3 \cdot 6^{n-1} + 2 \cdot 3 \cdot 6^{n-2} + 2^2 \cdot 3 \cdot 6^{n-3} + \cdots + 2^{n-2} \cdot 3 \cdot 6 + 2^{n-1} \cdot 3 =$$

$$= 3 \cdot 6^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right).$$

O número de configurações possíveis até a rodada n é igual a 6^n.
Assim, a probabilidade de que o jogador B vença até a jogada n é igual a

$$\frac{3 \cdot 6^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)}{6^n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right).$$

Observações:

1) A soma $1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ é a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica de primeiro termo igual a 1 e razão igual a $\frac{1}{3}$. Assim,

$$1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

   Portanto, a probabilidade de que o jogador B vença até a jogada n é igual a

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

2) Quando n cresce indefinidamente, $\frac{1}{3^n}$ aproxima-se de zero. Assim, é possível concluir que a probabilidade de que o jogador B vença é igual a $\frac{3}{4}$.

Solução do Exercício 10:

Vamos inicialmente calcular a quantidade de configurações possíveis dos grupos.
Distribuindo todos os países ordenadamente temos $20!$ possibilidades. Agora, levando em consideração que a ordem dos países dentro de cada um dos 5 grupos não altera a configuração, obtemos $\frac{20!}{4!}$. Por último, consideramos também que a ordem de disposição dos 5 grupos não altera a configuração, então temos que a quantidade possível de configurações totais é $\frac{20!}{4! \times 5!}$.
Agora, vamos contar as possibilidades de Brasil e Argentina estarem no mesmo grupo. Temos 4 posições possíveis para o Brasil e 3 para a Argentina, sobrando, então, 2 posições nesse grupo e todas as outras posições nos demais grupos para distribuir os times restantes, o que nos dá (levando em consideração a ordem) $4 \times 3 \times 18!$ possibilidades. Como são 5 grupos, temos $5 \times 4 \times 3 \times 18!$ possibilidades. Como a ordem não diferencia a configuração dos países dentro de cada grupo, e nem a ordem dos grupos altera a configuração total, temos $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 18!}{5! \times 4!}$ configurações possíveis para Brasil e Argentina no mesmo grupo.
Então, a probabilidade pedida é

$$\frac{\frac{5 \times 4 \times 3 \times 18!}{5! \times 4!}}{\frac{20!}{4! \times 5!}} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 18!}{20!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{20 \times 19} = \frac{3}{19}.$$

Solução alternativa:

Outra forma de resolver esse exercício é fazer todas as contagens considerando a ordem. Temos $20!$ possibilidades de distribuir os países. Para os casos em que queremos Brasil e Argentina juntos em um dado grupo, temos 4 posições possíveis para o Brasil, 3 para Argentina e depois distribuímos todos os outros países nas outras 18 posições restantes, obtendo $4 \times 3 \times 18!$ configurações possíveis. Como são 5 grupos, então temos $5 \times 4 \times 3 \times 18!$ possibilidades para Brasil e Argentina ficarem no mesmo grupo. Portanto, a probabilidade pedida é $\frac{5\times4\times3\times18!}{20!} = \frac{3}{19}$.

Solução do Exercício 11:

Como cada uma das 45 partidas possui dois resultados possíveis, existem 2^{45} maneiras distintas de distribuir as vitórias do torneio. Cada time pode vencer de 0 até 9 partidas. Como são 10 times, para que todos os números de vitórias sejam distintos, cada elemento do conjunto $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ deve ser associado com o número de vitórias de um único time. Isso pode ser feito de $10!$ formas. Resta saber se essa distribuição de números de vitórias é realizável neste torneio. Se j_i é o time que deverá vencer i partidas, com $i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, então j_i deve ganhar de todos os jogadores $j_0, j_1, \dots, j_{i-1}$ e perder de todos os jogadores $j_{i+1}, j_{i+2}, \dots, j_{10}$. Isso garantirá a distribuição planejada. Portanto, a probabilidade pedida é $\frac{10!}{2^{45}}$.

Solução do Exercício 12:

O total de possibilidades para organizar a fila é 6!. Para contar as possibilidades de as meninas ficarem juntas, consideramos que temos 5 pessoas e depois multiplicamos por 2, pois elas podem alternar a ordem entre si. Portanto, são $2 \times 5!$ possibilidades. Assim, as meninas ficam separadas em $6! - 2 \times 5! = 4 \times 5!$ possibilidades. A probabilidade de as meninas ficarem separadas é $\frac{4\times5!}{6!} = \frac{2}{3}$.