

Лабораторная работа №2

«Канальные матрицы»

Вариант 1

Цель работы: научиться работать с различными канальными матрицами, вычислять характеристики источника и приёмника информации.

1

Условие:

P(B/A)	b ₁	b ₂	b ₃
a ₁	0,57	0,05	0,38
a ₂	0,31	0,65	0,04
a ₃	0,06	0,24	0,7

$$P(a_1) = 0,76; P(a_2) = 0,05; P(a_3) = 0,19$$

Решение:

Восстановим оставшиеся канальные матрицы и вероятности. Сперва найдем матрицу P(A;B):

$$P(a_1; b_1) = P(b_1/a_1) \times P(a_1) = 0,57 \times 0,76 = 0,43$$

$$P(a_1; b_2) = P(b_2/a_1) \times P(a_1) = 0,05 \times 0,76 = 0,03$$

$$P(a_1; b_3) = P(b_3/a_1) \times P(a_1) = 0,38 \times 0,76 = 0,28$$

$$P(a_2; b_1) = P(b_1/a_2) \times P(a_2) = 0,31 \times 0,05 = 0,02$$

$$P(a_2; b_2) = P(b_2/a_2) \times P(a_2) = 0,65 \times 0,05 = 0,03$$

$$P(a_2; b_3) = P(b_3/a_2) \times P(a_2) = 0,04 \times 0,05 = 0,01$$

$$P(a_3; b_1) = P(b_1/a_3) \times P(a_3) = 0,06 \times 0,19 = 0,01$$

$$P(a_3; b_2) = P(b_2/a_3) \times P(a_3) = 0,24 \times 0,19 = 0,05$$

$$P(a_3; b_3) = P(b_3/a_3) \times P(a_3) = 0,7 \times 0,19 = 0,13$$

Получаем матрицу:

P(A;B)	b ₁	b ₂	b ₃
a ₁	0,43	0,03	0,28
a ₂	0,02	0,03	0,01
a ₃	0,01	0,05	0,13

Для проверки просуммируем все элементы матрицы:

$$0,43 + 0,03 + 0,28 + 0,02 + 0,03 + 0,01 + 0,01 + 0,05 + 0,13 \approx 1$$

Теперь найдем вероятности событий b_j :

$$P(b_1) = 0,43 + 0,02 + 0,01 = 0,46$$

$$P(b_2) = 0,03 + 0,03 + 0,05 = 0,12$$

$$P(b_3) = 0,28 + 0,01 + 0,13 = 0,42$$

Восстановим матрицу $P(A/B)$:

$$P(a_1/b_1) = \frac{P(a_1; b_1)}{P(b_1)} = \frac{0,43}{0,46} = 0,94$$

$$P(a_2/b_1) = \frac{P(a_2; b_1)}{P(b_1)} = \frac{0,02}{0,46} = 0,03$$

$$P(a_3/b_1) = \frac{P(a_3; b_1)}{P(b_1)} = \frac{0,01}{0,46} = 0,03$$

$$P(a_1/b_2) = \frac{P(a_1; b_2)}{P(b_2)} = \frac{0,03}{0,12} = 0,33$$

$$P(a_2/b_2) = \frac{P(a_2; b_2)}{P(b_2)} = \frac{0,03}{0,12} = 0,28$$

$$P(a_3/b_2) = \frac{P(a_3; b_2)}{P(b_2)} = \frac{0,05}{0,12} = 0,39$$

$$P(a_1/b_3) = \frac{P(a_1; b_3)}{P(b_3)} = \frac{0,28}{0,42} = 0,68$$

$$P(a_2/b_3) = \frac{P(a_2; b_3)}{P(b_3)} = \frac{0,01}{0,42} = 0,01$$

$$P(a_3/b_3) = \frac{P(a_3; b_3)}{P(b_3)} = \frac{0,13}{0,42} = 0,31$$

Получаем матрицу:

$P(A/B)$	b_1	b_2	b_3
a_1	0,94	0,33	0,68
a_2	0,03	0,28	0,01
a_3	0,03	0,39	0,31

Найдем информационные характеристики канала связи:

$$H(A) = -\sum P(a_i) \times \log_2(P(a_i)) \approx 0,97$$

$$H(B) = -\sum P(b_j) \times \log_2(P(b_j)) \approx 1,4$$

$$H(A/B) = -\sum P(b_j) \times (\sum P(a_i/b_j) \times \log_2(P(a_i/b_j))) \approx 1,04$$

$$H(B/A) = -\sum P(a_i) \times (\sum P(b_j/a_i) \times \log_2(P(b_j/a_i))) \approx 1,18$$

$$H(A;B) = -\sum \sum P(a_i; b_j) \times \log_2(P(a_i; b_j)) \approx 2,15$$

$$I(A;B) = H(A) + H(B) - H(A;B) = 0,97 + 1,4 - 2,15 = 0,22 \text{ б/сим}$$

Условие:

P(A/B)	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄
a ₁	0,65	0,38	0,07	0,3
a ₂	0,08	0,39	0,13	0,05
a ₃	0,01	0,13	0,68	0,32
a ₄	0,26	0,1	0,12	0,33

$$P(b_1) = 0,6; P(b_2) = 0,09; P(b_3) = 0,28; P(b_4) = 0,03$$

Решение:

Восстановим оставшиеся каналные матрицы и вероятности. Сперва найдем матрицу P(A;B):

$$P(a_1; b_1) = P(a_1/b_1) \times P(b_1) = 0,65 \times 0,6 = 0,39$$

$$P(a_2; b_1) = P(a_2/b_1) \times P(b_1) = 0,08 \times 0,6 = 0,05$$

$$P(a_3; b_1) = P(a_3/b_1) \times P(b_1) = 0,01 \times 0,6 = 0,01$$

$$P(a_4; b_1) = P(a_4/b_1) \times P(b_1) = 0,26 \times 0,6 = 0,16$$

$$P(a_1; b_2) = P(a_1/b_2) \times P(b_2) = 0,38 \times 0,09 = 0,03$$

$$P(a_2; b_2) = P(a_2/b_2) \times P(b_2) = 0,39 \times 0,09 = 0,03$$

$$P(a_3; b_2) = P(a_3/b_2) \times P(b_2) = 0,13 \times 0,09 = 0,01$$

$$P(a_4; b_2) = P(a_4/b_2) \times P(b_2) = 0,1 \times 0,09 = 0,01$$

$$P(a_1; b_3) = P(a_1/b_3) \times P(b_3) = 0,07 \times 0,28 = 0,02$$

$$P(a_2; b_3) = P(a_2/b_3) \times P(b_3) = 0,13 \times 0,28 = 0,04$$

$$P(a_3; b_3) = P(a_3/b_3) \times P(b_3) = 0,68 \times 0,28 = 0,19$$

$$P(a_4; b_3) = P(a_4/b_3) \times P(b_3) = 0,12 \times 0,28 = 0,03$$

$$P(a_1; b_4) = P(a_1/b_4) \times P(b_4) = 0,3 \times 0,03 = 0,01$$

$$P(a_2; b_4) = P(a_2/b_4) \times P(b_4) = 0,05 \times 0,03 = 0,01$$

$$P(a_3; b_4) = P(a_3/b_4) \times P(b_4) = 0,32 \times 0,03 = 0,01$$

$$P(a_4; b_4) = P(a_4/b_4) \times P(b_4) = 0,33 \times 0,03 = 0,01$$

Получаем матрицу:

P(A;B)	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄
a ₁	0,39	0,03	0,02	0,01
a ₂	0,05	0,03	0,04	0,01
a ₃	0,01	0,01	0,19	0,01
a ₄	0,16	0,01	0,03	0,01

Для проверки просуммируем все элементы матрицы:

$$0,39 + 0,05 + 0,06 + 0,16 + 0,03 + 0,03 + 0,01 + 0,01 + 0,02 + 0,04 + 0,19 + 0,03 + 0,01 + 0,01 + 0,01 + 0,01 \approx 1$$

Теперь найдем вероятности событий a_i :

$$P(a_1) = 0,39 + 0,03 + 0,02 + 0,01 = 0,45$$

$$P(a_2) = 0,05 + 0,03 + 0,04 + 0,01 \approx 0,12$$

$$P(a_3) = 0,01 + 0,01 + 0,19 + 0,01 = 0,22$$

$$P(a_4) = 0,16 + 0,01 + 0,03 + 0,01 = 0,21$$

Восстановим матрицу $P(B/A)$:

$$P(b_1/a_1) = \frac{P(a_1; b_1)}{P(a_1)} = \frac{0,39}{0,45} = 0,87$$

$$P(b_2/a_1) = \frac{P(a_1; b_2)}{P(a_1)} = \frac{0,03}{0,45} = 0,07$$

$$P(b_3/a_1) = \frac{P(a_1; b_3)}{P(a_1)} = \frac{0,02}{0,45} = 0,04$$

$$P(b_4/a_1) = \frac{P(a_1; b_4)}{P(a_1)} = \frac{0,01}{0,45} = 0,02$$

$$P(b_1/a_2) = \frac{P(a_2; b_1)}{P(a_2)} = \frac{0,05}{0,12} = 0,38$$

$$P(b_2/a_2) = \frac{P(a_2; b_2)}{P(a_2)} = \frac{0,03}{0,12} = 0,23$$

$$P(b_3/a_2) = \frac{P(a_2; b_3)}{P(a_2)} = \frac{0,04}{0,12} = 0,31$$

$$P(b_4/a_2) = \frac{P(a_2; b_4)}{P(a_2)} = \frac{0,05}{0,12} = 0,08$$

$$P(b_1/a_3) = \frac{P(a_3; b_1)}{P(a_3)} = \frac{0,01}{0,27} = 0,04$$

$$P(b_2/a_3) = \frac{P(a_3; b_2)}{P(a_3)} = \frac{0,01}{0,27} = 0,04$$

$$P(b_3/a_3) = \frac{P(a_3; b_3)}{P(a_3)} = \frac{0,19}{0,27} = 0,70$$

$$P(b_4/a_3) = \frac{P(a_3; b_4)}{P(a_3)} = \frac{0,01}{0,27} = 0,04$$

$$P(b_1/a_4) = \frac{P(a_4; b_1)}{P(a_4)} = \frac{0,16}{0,21} = 0,76$$

$$P(b_2/a_4) = \frac{P(a_4; b_2)}{P(a_4)} = \frac{0,01}{0,21} = 0,05$$

$$P(b_3/a_4) = \frac{P(a_4; b_3)}{P(a_4)} = \frac{0,03}{0,21} = 0,14$$

$$P(b_4/a_4) = \frac{P(a_4; b_4)}{P(a_4)} = \frac{0,01}{0,21} = 0,05$$

Получаем матрицу:

P(B/A)	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄
a ₁	0,87	0,07	0,04	0,02
a ₂	0,38	0,23	0,31	0,08
a ₃	0,04	0,04	0,70	0,04
a ₄	0,76	0,05	0,14	0,05

Найдем информационные характеристики канала связи:

$$H(A) = -\sum P(a_i) \times \log_2(P(a_i)) \approx 1,88$$

$$H(B) = -\sum P(b_j) \times \log_2(P(b_j)) \approx 1,42$$

$$H(A/B) = -\sum P(b_j) \times (\sum P(a_i/b_j) \times \log_2(P(a_i/b_j))) \approx 1,37$$

$$H(B/A) = -\sum P(a_i) \times (\sum P(b_j/a_i) \times \log_2(P(b_j/a_i))) \approx 1,13$$

$$H(A;B) = -\sum \sum P(a_i; b_j) \times \log_2(P(a_i; b_j)) \approx 3,02$$

$$I(A;B) = H(A) + H(B) - H(A;B) = 1,88 + 1,42 - 3,02 = 0,28 \text{ б/сим}$$

Условие:

$P(A;B)$	b_1	b_2
a_1	0,23	0,28
a_2	0,45	0,04

Решение:

Восстановим оставшиеся каналные матрицы и вероятности. Сперва найдем вероятности событий a_i и b_j :

$$P(a_1) = 0,23 + 0,28 = 0,51$$

$$P(a_2) = 0,45 + 0,04 = 0,49$$

$$P(b_1) = 0,23 + 0,45 = 0,68$$

$$P(b_2) = 0,28 + 0,04 = 0,32$$

Восстановим матрицу (A/B) :

$$P(a_1/b_1) = \frac{P(a_1; b_1)}{P(b_1)} = \frac{0,23}{0,68} = 0,39$$

$$P(a_2/b_1) = \frac{P(a_2; b_1)}{P(b_1)} = \frac{0,45}{0,68} = 0,66$$

$$P(a_1/b_2) = \frac{P(a_1; b_2)}{P(b_2)} = \frac{0,28}{0,32} = 0,88$$

$$P(a_2/b_2) = \frac{P(a_2; b_2)}{P(b_2)} = \frac{0,04}{0,32} = 0,13$$

Получаем матрицу:

$P(A/B)$	b_1	b_2
a_1	0,39	0,88
a_2	0,66	0,13

Восстановим матрицу (B/A) :

$$P(a_1/b_1) = \frac{P(a_1; b_1)}{P(a_1)} = \frac{0,23}{0,51} = 0,45$$

$$P(a_1/b_2) = \frac{P(a_1; b_2)}{P(a_1)} = \frac{0,28}{0,51} = 0,55$$

$$P(a_2/b_1) = \frac{P(a_2; b_1)}{P(a_2)} = \frac{0,45}{0,49} = 0,92$$

$$P(a_2/b_2) = \frac{P(a_2; b_2)}{P(a_2)} = \frac{0,04}{0,49} = 0,08$$

Получаем матрицу:

$P(B/A)$	b_1	b_2
a_1	0,45	0,55
a_2	0,92	0,08

Найдем информационные характеристики канала связи:

$$H(A) = -\sum P(a_i) \times \log_2(P(a_i)) \approx 1$$

$$H(B) = -\sum P(b_j) \times \log_2(P(b_j)) \approx 0,9$$

$$H(A/B) = -\sum P(b_j) \times (\sum P(a_i/b_j) \times \log_2(P(a_i/b_j))) \approx 0,8$$

$$H(B/A) = -\sum P(a_i) \times (\sum P(b_j/a_i) \times \log_2(P(b_j/a_i))) \approx 0,7$$

$$H(A;B) = -\sum \sum P(a_i; b_j) \times \log_2(P(a_i/b_j)) \approx 1,7$$

$$I(A;B) = H(A) + H(B) - H(A;B) = 1 + 0,9 - 1,7 = 0,2 \text{ б/сим}$$