Математическая логика и теория алгоритмов

Лабораторная работа № 1

Логика высказываний

Теоретическая часть

Решить задачи согласно своему варианту:

Номер варианта	Номера задач											
1	2.4	7.1	8.16	10.3	11.21	14.4	17.4	23.3	30.2	35.8	38.4	48
2	2.5	7.2	8.17	10.4	12.1	14.5	18	23.4	30.3	35.9	38.5	49.1
3	2.6	7.3	8.18	10.5	12.2	14.6	19.4	23.5	30.4	35.10	38.6	49.2
4	2.7	7.4	8.19	10.6	12.3	14.7	19.2	23.6	30.5	35.11	38.7	49.3
5	2.8	7.5	8.20	10.7	12.4	14.8	19.3	23.7	30.6	35.12	38.8	49.4
6	2.9	7.6	8.21	10.8	12.5	14.9	20.1	23.8	30.7	35.13	39.1	50.2
7	2.11	7.7	8.22	10.9	12.7	14.10	20.2	24.1	30.8	35.14	39.2	50.3
8	2.12	7.8	8.23	10.10	12.9	14.11	20.3	24.2	30.9	35.15	39.3	51.1.а
9	2.13	7.9	9.1	10.11	12.10	14.12	20.4	24.3	31	35.16	39.4	51.1.б
10	2.14	7.11	9.2	10.12	12.12	14.13	20.5	25.1	32.1	36.1	39.5	51.2.а
11	3.2	7.12	9.3	10.14	12.13	14.14	20.7	25.2	32.2	36.3	39.6	51.2.б
12	3.3	7.13	9.4	11.1	12.14	14.17	20.8	25.3	32.3	36.4	39.7	52.1
13	3.4	7.14	9.5	11.2	12.15	14.18	21.1	25.4	32.4	36.5	39.8	52.2
14	4.1	7.15	9.6	11.3	12.16	14.11	21.2	26.1	32.5	36.6	39.9	53
15	4.2	7.16	9.7	11.5	12.17	15.1	21.4	26.2	32.6	36.7	39.10	54
16	4.3	7.17	9.8	11.6	12.18	15.2	21.5	26.1	32.7	36.8	40	55
17	4.4	8.18	9.9	11.7	12.19	15.3	21.6	26.2	32.8	36.9	41.1	55
18	4.5	8.1	9.10	11.8	12.20	15.4	21.7	26.1	32.9	36.10	41.2	57
19	5.1	8.2	9.11	11.9	13.1	15.6	21.8	27	32.10	37.1	42.1	58
20	5.3	8.3	9.12	11.10	13.2	15.7	22.1	28.1	32.11	37.2	42.2	59.1
21	5.4	8.4	9.13	11.11	13.3	15.8	22.2	28.2	32.12	37.3	46	59.2
22	5.5	8.5	9.15	11.12	13.4	15.9	22.3	29.1	32.13	37.4	44.1	59.3
23	5.6	8.6	9.16	11.13	13.5	16.1	22.4	29.2	33	37.5	44.2	59.5
24	5.7	8.8	9.17	11.14	13.6	16.2	22.5	29.3	34	37.6	44.3	59.6
25	5.8	8.10	9.18	11.15	13.8	16.3	22.6	29.4	35.1	37.7	44.4	59.7
26	6.10	8.11	9.19	11.16	13.9	16.4	22.7	29.5	35.2	37.8	45	59.8
27	6.9	8.12	9.20	11.17	13.10	16.5	22.8	29.6	35.3	37.9	47.1	59.9
28	6.8	8.13	9.21	11.18	14.1	17.1	22.9	29.8	35.5	37.10	47.2	59.10
29	6.6	8.14	10.1	11.19	14.2	17.2	22.10	29.8	35.6	38.2	47.3	59.11
30	6.7	8.15	10.2	11.20	14.3	17.3	23.1	30.1	35.7	38.3	47.4	59.12

Практическая часть

Разработать программный модуль, способный находить значение формулы (представленной в нормальной форме) на данной интерпретации. Разработать программу, способную считывать формулу логики высказываний в одной из нормальных форм (по выбору пользователя) и находить значения данной формулы на вводимых пользователем интерпретациях.

Содержание отчёта

1) Название и цель лабораторной работы.
2) Решение предложенных в теоретической части задач.
3) Программа на выбранном языке программирования в виде исходных кодов (с поясняющими комментариями) и в электронном варианте для демонстрации на ЭВМ.
4) Спецификация программы с указанием основных структур данных и алгоритмов.
5) Наборы тестовых данных.

Задачи

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями? Истинные они или ложные?

1) Берлин — столица Турции.
2) Каждое целое число является числом действительным.
3) Принтер предназначен для вывода информации на бумагу.
4) Математическая логика — интересный предмет.
5) В котором часу открывается библиотека?
6) $5 + x = 3(x + 1)^2$.
7) Да здравствует мир!
8) Луна — искусственный спутник Марса.
9) Во всяком четырёхугольнике противоположные стороны равны.
10) Сегодня хорошая погода.
11) Если $x^2 - 5x + 6 = 0$, то $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
12) Париж расположен на Сене и $2 + 3 = 5$.
13) Число 2 чётное и простое.
14) Здравствуйте, Василий Петрович.
15) Верно ли, что Пушкин родился в год Козы?

2. Запишите символически следующие фразы:

1) Идёт дождь или кто-то не выключил воду.
2) В огороде бузина, а в Киеве дядька.
3) Если в огороде нет бузины, то в Киеве нет дядьки.
4) Я сегодня сдам лабораторную работу по «Информатике» или по «Программированию», а потом поеду на дачу.
5) Четырёхугольник является квадратом тогда и только тогда, когда все его стороны и все углы равны.
6) 100 не делится ни на 3, ни на 7.
7) Пётр встанет и уйдёт, или Иван уйдёт.
8) Пётр встанет, и он или Иван уйдёт.

9) Пётр пойдёт на дискотеку, а Иван не пойдёт, или Пётр не пойдёт на дискотеку, а Иван приятно проведёт время.

10) В степи не будет пыльных бурь тогда и только тогда, когда будут лесозащитные полосы, а если лесозащитных полос не будет, то пыльные бури уничтожат посевы и нанесут урон хозяйству.

11) Для того, чтобы натуральное число было нечётным, достаточно, чтобы оно было простым и больше двух.

12) Если «Спартак» или «Динамо» проиграют, а «Салют» выиграет, то «Ротор» потеряет первое место и, кроме того, «Заря» покинет высшую лигу.

13) Если параллелограмм не ромб, то его диагонали не перпендикулярны и не делят углы пополам.

14) Если Париж расположен на Темзе, то белые медведи обитают в Африке.

15) Я сделаю зарядку и, если будет хорошая погода, поеду за город.

3. Опишите высказывания на естественном языке, если используется следующая символическая запись: A — «Сегодня ясно», B — «Сегодня идёт дождь», C — «Сегодня идёт снег», D — «Вчера было пасмурно».

1) $A \to (\overline{B \,\&\, C})$.
2) $\overline{D} \to A \vee B \,\&\, \overline{C}$.
3) $B \,\&\, \overline{C} \to D \,\&\, \overline{A}$.
4) $D \,\&\, A \to \overline{B \,\&\, C}$.
5) $B \vee C \to \overline{A} \,\&\, D$.

4. Опишите высказывания на естественном языке, если используется следующая символическая запись: A — «Число целое», B — «Число положительное», C — «Число простое», D — «Число делится на 3».

1) $A \,\&\, C \to D$.
2) $(A \vee C) \,\&\, (C \vee D)$.
3) $\overline{A} \vee \overline{D}$.
4) $(A \,\&\, B \,\&\, C) \vee \overline{D}$.
5) $C \to A \vee B \vee \overline{D}$.

5. Опустите лишние скобки и знак «&» в формулах:

1) $X \,\&\, \big(Y \,\&\, (X \vee \overline{Y})\big)$.
2) $\big((X \vee Y) \vee Z\big) \to \big((\overline{X} \,\&\, Y) \vee Z\big)$.
3) $(X \,\&\, Y) \,\&\, \Big((Y \,\&\, Z) \vee \big(\overline{X} \,\&\, Y) \vee (X \,\&\, \overline{Z})\big)\Big)$.
4) $\Big((X \,\&\, Y) \,\&\, \big(X \vee (Y \,\&\, Z)\big)\Big) \to (\overline{X} \,\&\, \overline{Y}) \to \overline{Z}$.
5) $(X \vee Y) \vee \Bigg(X \vee \Big(\big(Y \,\&\, (X \vee Z)\big) \,\&\, (Y \to Z)\Big) \leftrightarrow Z\Bigg)$.
6) $\big((X \vee Y) \to (X \,\&\, Y)\big) \vee \big((\overline{X} \,\&\, Y) \,\&\, (X \vee \overline{Y})\big)$.
7) $\big((X \vee Y) \,\&\, Z\big) \to \Big(\big((X \,\&\, Y) \vee Z\big) \leftrightarrow (\overline{X} \vee \overline{Y})\Big)$.
8) $\big(X \,\&\, (Y \vee Z)\big) \,\&\, \Big(\big(X \to (Y \to Z)\big) \leftrightarrow (X \,\&\, Y)\Big)$.

6. Восстановите скобки и знак «&» в формулах:

1) $\overline{X \vee Y \to Z}$.
2) $\overline{XY} \vee X\overline{Y}(\overline{Y \vee Z})$.
3) $X \vee Y(\overline{XY \vee Z})$.
4) $XY \vee X\overline{Y}\,\overline{Z} \to \overline{X} \vee YZ$.
5) $X \vee Y \to XY$.
6) $(X \to Y \vee YZ) \leftrightarrow (X \vee Y \to Z)$.
7) $(X \vee Y)\overline{Z} \to (XY \leftrightarrow \overline{Y} \vee \overline{Z})$.
8) $X \vee Y \to X \vee Y(X \to Z) \vee X(Y \leftrightarrow Z)$.
9) $XYZ \to (X \leftrightarrow YZ) \vee X \vee Y\big(X \to (Y \leftrightarrow Z)\big)$.
10) $XY \leftrightarrow X(Y \to Z)(X \leftrightarrow Y) \vee XZ \vee YZ$.

7. Постройте таблицы истинности, соответствующие следующим формулам:

1) $\overline{X \vee Y}$.
2) $X \mathbin{\&} \overline{Y}$.
3) $X \to (X \vee Y)$.
4) $X \mathbin{\&} Y \vee Z$.
5) $X \mathbin{\&} Y \vee X \mathbin{\&} Z$.
6) $(X \to Y) \mathbin{\&} (Y \to Z)$.
7) $X \to (Y \vee Z) \mathbin{\&} X$.
8) $X \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z)$.
9) $(P \to Q) \vee \big(P \to (Q \mathbin{\&} P)\big)$.
10) $\overline{X \vee Y} \to (X \leftrightarrow \overline{Z})$.
11) $\big(X \to (\overline{Y \mathbin{\&} Z})\big) \to \big(X \to (Y \vee Z)\big)$.
12) $(X \vee \overline{Y}) \to \Big((Y \mathbin{\&} \overline{Z}) \to \big(X \vee (Y \leftrightarrow Z)\big)\Big)$.
13) $\big((X \vee Y) \mathbin{\&} (Y \to Z)\big) \to (X \to Z)$.
14) $\big(\overline{P \to (\overline{Q \mathbin{\&} P})}\big) \to (P \vee R)$.
15) $\big(P \mathbin{\&} (Q \to P)\big) \to \overline{P}$.
16) $(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow \Big(\big(Z \to (\overline{X} \vee \overline{Y})\big) \to \overline{Z}\Big) \leftrightarrow (X \vee Y)$.
17) $X \vee Y \to (X \to \overline{Y} \vee Z)$.
18) $(X \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \to Y \mathbin{\&} \overline{Z}) \leftrightarrow X$.

8. Используя таблицы истинности, докажите равносильность формул:

1) $A \mathbin{\&} A \equiv A$.
2) $A \mathbin{\&} B \equiv B \mathbin{\&} A$.
3) $A \mathbin{\&} (B \mathbin{\&} C) \equiv (A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} C$.
4) $A \mathbin{\&} (B \vee C) \equiv (A \mathbin{\&} B) \vee (A \mathbin{\&} C)$.
5) $\big(A \mathbin{\&} (B \vee A)\big) \equiv A$.
6) $A \vee A \equiv A$.
7) $A \vee B \equiv B \vee A$.
8) $\overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \mathbin{\&} \overline{Y}$.
9) $\overline{X \mathbin{\&} Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$.
10) $X \leftrightarrow Y \equiv Y \leftrightarrow X$.
11) $X \to Y \equiv \overline{X} \vee Y$.
12) $X \leftrightarrow Y \equiv (X \to Y) \mathbin{\&} (Y \to X)$.
13) $X \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z) \equiv (X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow Z$.
14) $\overline{\overline{X}} \equiv X$.
15) $X \mathbin{\&} 1 \equiv X$.
16) $(A \to \overline{A}) \equiv \overline{A}$.
17) $\big((A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee \overline{B})\big) \equiv A$.
18) $X \mathbin{\&} 0 \equiv 0$.
19) $X \vee 1 \equiv 1$.
20) $X \vee 0 \equiv X$.
21) $0 \to X \equiv 1$.
22) $X \to 1 \equiv 1$.
23) $\big((A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C) \mathbin{\&} (B \vee D) \mathbin{\&} (C \vee D)\big) \equiv \big((A \mathbin{\&} D) \vee (B \mathbin{\&} C)\big)$.

9. Применяя таблицы истинности, выясните, являются ли следующие формулы тождественно истинными:

1) $X \leftrightarrow X$.
2) $\overline{X \mathbin{\&} \overline{X}}$.
3) $\overline{\overline{X}} \leftrightarrow X$.
4) $X \to (Y \to X)$.
5) $\overline{X} \to (X \to Y)$.
6) $\big((X \to Y) \mathbin{\&} X\big) \to Y$.
7) $\big((X \to Y) \mathbin{\&} \overline{Y}\big) \to \overline{X}$.
8) $B \to C \vee B \mathbin{\&} \overline{C}$.
9) $\big((X \to Z) \mathbin{\&} (Y \to Z)\big) \to \big((X \vee Y) \to Z\big)$.
10) $(P \to Q) \vee (Q \to P)$.
11) $(P \to Q) \vee (P \to \overline{Q})$.
12) $P \to \big(Q \to (P \mathbin{\&} Q)\big)$.
13) $(\overline{P} \to \overline{Q}) \to (Q \to P)$.
14) $(Q \to R) \to \big((P \vee Q) \to (P \vee R)\big)$.
15) $(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})$.
16) $\big(X \to (Y \to Z)\big) \to (X \mathbin{\&} Y \to Z)$.
17) $(X \mathbin{\&} Y \to Z) \to \big(X \to (Y \to Z)\big)$.
18) $(X \to Y) \mathbin{\&} (Y \to Z) \to (X \to Z)$.
19) $X \mathbin{\&} (X \to Y) \mathbin{\&} (X \to \overline{Y})$.
20) $X \mathbin{\&} Y \mathbin{\&} (X \mathbin{\&} Y \to Z) \mathbin{\&} \overline{Z}$.

10. Используя равносильные преобразования докажите, выполняются ли следующие соотношения:

1) $XY \equiv \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}$.

2) $X \vee Y \equiv \overline{\overline{X}\,\overline{Y}}$.
3) $P \to Q \equiv \overline{Q} \to \overline{P}$.
4) $X \to Y \equiv \overline{X\overline{Y}}$.
5) $(P \vee Q) \,\&\, (P \vee \overline{Q}) \equiv P$.
6) $P \,\&\, (\overline{P} \vee Q) \equiv P \,\&\, Q$.
7) $X \vee XY \equiv X$.
8) $X \vee \overline{X}Y \equiv X \vee Y$.
9) $(X \to Y) \to Y \equiv X \vee Y$.
10) $P \vee Q \,\&\, R \,\&\, S \equiv P \vee Q$.
11) $\big(P \to (Q \to R)\big) \equiv Q \to (P \to R)$.
12) $X \to Y \equiv \overline{X}$.
13) $P \,\&\, Q \vee P \,\&\, \overline{Q} \vee \overline{P} \,\&\, Q \vee \overline{P} \,\&\, \overline{Q} \equiv 1$.
14) $(P \leftrightarrow Q) \equiv (\overline{P} \leftrightarrow \overline{Q})$.

11. Найдите КНФ для следующих формул:

1) $X \vee Y \,\&\, \overline{Z}$.
2) $\overline{X \vee Y \vee Z}$.
3) $X \,\&\, Y \to X \vee Z$.
4) $(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})$.
5) $X \,\&\, Z \to Y \,\&\, X$.
6) $X \vee YZ$.
7) $XY \vee YZ \vee \overline{Z}$.
8) $X \vee YZ \vee \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$.
9) $X \to ZY$.
10) $X \leftrightarrow Y \leftrightarrow Z$.
11) $X \vee \overline{Y} \vee Z \vee Y$.
12) $(X \leftrightarrow Y) \to (Z \vee X) \,\&\, (Y \to Z \,\&\, X)$.
13) $X \to ZYW$.
14) $X \leftrightarrow ZY$.
15) $XY \leftrightarrow \overline{X}\,\overline{Y}$.
16) $X \vee Y \leftrightarrow X \leftrightarrow Z$.
17) $P \vee (\overline{P} \,\&\, Q \,\&\, R)$.
18) $\overline{P \to Q} \vee (P \vee Q)$.
19) $\overline{P \to Q}$.
20) $(P \to Q) \to R$.
21) $(\overline{P} \,\&\, Q) \vee (\overline{Q} \,\&\, P)$.

12. Найдите ДНФ для следующих формул:

1) $X \,\&\, (\overline{X} \vee \overline{Y})$.
2) $\overline{\overline{X} \to \overline{X} \vee Y \vee Z}$.
3) $\overline{X} \,\&\, (\overline{X \,\&\, Y})$.
4) $X \,\&\, Y \leftrightarrow Z \vee \overline{Y}$.
5) $Y \to Y \vee X$.
6) $X \vee Y \to Z \leftrightarrow \overline{Y}$.
7) $X \to (Y \to Z)$.
8) $XY \vee (X \to Y)$.
9) $(X \vee Y \vee Z) \,\&\, (X \to Y)$.
10) $(X \vee Y) \,\&\, (Y \vee Z) \to (X \vee Z)$.
11) $(X \leftrightarrow Y)(Y \leftrightarrow Z) \to (X \leftrightarrow Z)$.
12) $(X \leftrightarrow Y) \,\&\, (Y \leftrightarrow Z) \,\&\, (X \leftrightarrow Z)$.
13) $X \leftrightarrow Y$.
14) $X \leftrightarrow Y \leftrightarrow Z$.
15) $(X \to Y) \leftrightarrow (\overline{X \to Y \to Z})$.
16) $\overline{P} \,\&\, Q \to R$.
17) $P \to \big((Q \,\&\, R) \to S\big)$.
18) $\overline{P \vee \overline{Q}} \,\&\, (S \to R)$.
19) $\overline{P \,\&\, Q} \,\&\, (P \vee Q)$.
20) $(P \to Q) \to R$.

13. Докажите при помощи КНФ или ДНФ тождественную истинность формул:

1) $X \to (Y \to X)$.
2) $X \,\&\, Y \to X$.
3) $X \to Y \vee X$.
4) $\big(X \to (Y \to Z)\big) \to \big((X \to Y) \to (X \to Z)\big)$.
5) $(X \to Y) \to \Big((X \to Z) \to \big(X \to (Y \,\&\, Z)\big)\Big)$.
6) $(X \to Z) \to \big((Y \to Z) \to (X \vee Y \to Z)\big)$.
7) $(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})$.
8) $X \to \overline{\overline{X}}$.
9) $(X \,\&\, Y \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (Y \to X)$.
10) $(X \vee Y \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (X \to Y)$.

14. Упростите вид следующих формул, используя равносильные преобразования:

1) $X \,\&\, \overline{Y} \vee X \,\&\, \overline{Z} \vee Z \vee Y \vee Y \vee Z$.
2) $X \,\&\, Y \,\&\, Z \vee X \,\&\, Y \,\&\, \overline{Z} \vee X \,\&\, \overline{Y}$.
3) $\overline{(X \to Y) \,\&\, (Y \to \overline{X})}$.
4) $(X \to \overline{Y}) \vee \overline{X \vee Y}$.

5) $\overline{\overline{\overline{X}} \,\&\, \overline{\overline{Y}}} \vee (X \to Y) \,\&\, X$.
6) $(\overline{\overline{X} \vee Y} \to X \vee Y) \,\&\, Y$.
7) $\overline{(X \to Y)(Y \to X)}$.
8) $(X \vee Y)(Y \leftrightarrow X)$.
9) $(X \to Y)(Y \to Z) \to (Z \to X)$.
10) $XY(X \leftrightarrow Y)$.
11) $XZ \vee X\overline{Z} \vee YZ \vee \overline{X}YZ$.
12) $\overline{XY(X \to Y)}$.
13) $(X \to \overline{Y})(Y \leftrightarrow X)$.
14) $(X \to \overline{Y}) \vee (\overline{Y \vee X})$.
15) $\big((\overline{X \,\&\, \overline{X} \to Y}) \vee X\big) \,\&\, (Y \vee Z \vee \overline{Z})$.
16) $\big(X \vee \overline{Y} \to (Z \to Y \vee \overline{Y} \vee X)\big) \,\&\, \big(X \vee (\overline{X \to X})\big) \to Y$.
17) $\big(X \,\&\, (\overline{X \,\&\, \overline{X} \to Y \,\&\, \overline{Y}}) \to Z\big) \vee X \vee (Y \,\&\, Z)$.
18) $\big(X_1 \,\&\, (X_2 \vee X_3 \to X_2 \vee X_3)\big) \vee X_1\big(X_2 \,\&\, (\overline{X_1 \,\&\, \overline{X_1}})\big)$.

15. Приведением к нормальной форме выясните, какие из следующих формул являются тождественно истинными, тождественно ложными, выполнимыми:

1) $XY \to X \vee Y$.
2) $X \vee Y \to XY$.
3) $\overline{X}Y \to X\overline{Y}$.
4) $(X \to Y) \,\&\, X \to X \vee Y \vee Z$.
5) $X \vee Y \to X \vee Z$.
6) $(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})$.
7) $(X \to Z) \to \Big((Y \to Z) \to \big((X \vee Y) \to Z\big)\Big)$.
8) $\overline{X}YZ \vee X\overline{Y}Z \vee XY\overline{Z} \vee \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$.
9) $XY \vee \overline{X}\,\overline{Y} \leftrightarrow (X \vee Y)(\overline{X} \vee \overline{Y})$.

16. При каких значениях переменных X, Y, Z, U, V, W следующие формулы ложны:

1) $\Big(\big(X \to (Y \,\&\, Z)\big) \to (\overline{Y} \to \overline{X})\Big) \to \overline{Y}$.
2) $(X \,\&\, Y) \vee (X \,\&\, Z) \vee (Y \,\&\, Z) \vee (U \,\&\, V) \vee (U \,\&\, W) \vee (\overline{X} \,\&\, \overline{U})$.
3) $(X \vee Y \vee Z) \to \big((X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z)\big)$.
4) $\big((X \vee Y) \,\&\, (Y \vee Z) \vee (Z \vee X)\big) \to (X \,\&\, Y \,\&\, Z)$.
5) $(X \vee Y) \to \big((\overline{X} \,\&\, Y) \vee (X \,\&\, \overline{Y})\big)$.

17. Докажите следующие утверждения:

1) Если формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ тождественно истинны, то $\mathfrak{B}$ также тождественно истинна.

2) Если формулы $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C}$ тождественно истинны, то $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$ также тождественно истинна.

3) Если формулы $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ тождественно истинны, то $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}$ также тождественно истинна.

4) Если формулы $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}$ тождественно истинны, то $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ также тождественно истинна.

18. Возможна ли формула, которая находится и в КНФ, и в ДНФ? Если да, то приведите пример.

19. Проверьте эквивалентность следующих формул, преобразуя формулы с обеих сторон от знака «$\equiv$» к одной и той же нормальной форме:

1) $(P \to Q) \mathbin{\&} (P \to R) \equiv \big(P \to (Q \mathbin{\&} R)\big)$.
2) $(P \to Q) \to (P \mathbin{\&} Q) \equiv (\overline{P} \to Q) \mathbin{\&} (Q \to P)$.
3) $P \mathbin{\&} Q \mathbin{\&} (\overline{P} \vee \overline{Q}) \equiv \overline{P} \mathbin{\&} \overline{Q} \mathbin{\&} (Q \vee P)$.
4) $P \vee \big(P \to (Q \mathbin{\&} P)\big) \equiv \overline{Q} \vee \overline{P} \vee (Q \mathbin{\&} P)$.

20. Для каждой из следующих формул найдите ДНФ и КНФ:

1) $\overline{X \vee Y}$.
2) $\overline{X}Y(\overline{X \to Y})$.
3) $X \to Y$.
4) $X \leftrightarrow Y$.
5) XY.
6) $X \to (Y \to X)$.
7) $X \vee Y \to Z$.
8) $XY \to Z$.

21. Приведите к СКНФ следующие формулы:

1) $\overline{X} \vee \overline{Y}$.
2) $X \to (Y \to X)$.
3) $(\overline{X} \to Y) \to X$.
4) $X \to (Y \to Z)$.
5) $(X \to Y)(Y \to Z) \to (X \to Z)$.
6) $(X \to Y)(Y \to Z)(Z \to X)$.
7) $(X \vee Y)(Y \vee Z)(Z \leftrightarrow X)$.
8) $(X \to Y)(Y \to Z)(Z \to W)$.

22. Приведите к СДНФ следующие формулы:

1) $(X \to Y) \to X \vee \overline{Y}$.
2) $\overline{X\,Y}$.
3) $X\overline{Y}(X \to Y)$.
4) $X \to YZ$.
5) XYZ.
6) $(X \vee Y)(Y \to Z)(Z \leftrightarrow X)$.
7) $X \vee Y \to (X \to Z)$.
8) $\big((X \to Y) \leftrightarrow (Y \to \overline{X})\big) \mathbin{\&} Z$.
9) $XY \to ZW$.

23. Приведением к совершенным нормальным формам докажите неравносильность следующих формул:

1) $X \vee Y \not\equiv X \to Y$.
2) $X \to Y \not\equiv X \leftrightarrow Y$.
3) $X \to (Y \to Z) \not\equiv (X \to Y) \to Z$.
4) $XY \vee Z \not\equiv X \mathbin{\&} (Y \vee Z)$.
5) $(X \to Y) \vee Z \not\equiv (X \to Y) \to Z$.
6) $(X \to Y) \leftrightarrow Z \not\equiv (X \leftrightarrow Y) \to Z$.
7) $(X \vee Y) \leftrightarrow Z \not\equiv (X \leftrightarrow Y) \vee Z$.
8) $XY \leftrightarrow Z \not\equiv (X \leftrightarrow Y) \mathbin{\&} Z$.

24. Составьте формулы, реализующие булевы функции, заданные табличным способом (см. табл. 1.1). Упростите полученные формулы.

Таблица 1.1

Таблицы истинности для задачи № 24

X	Y	Z	1) $f_1(X,Y,Z)$	2) $f_2(X,Y,Z)$	3) $f_3(X,Y,Z)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1

25. Составьте релейно-контактные схемы для функций:

1) $(X \to Y) \mathbin{\&} (Y \to Z)$.
2) $(X \to Y) \mathbin{\&} (Y \to Z) \to (X \to Z)$.
3) $(X \to Y) \to \big(\overline{X} \mathbin{\&} (Y \vee Z)\big)$.
4) $\big(X \to (Y \to Z)\big) \to (Y \to \overline{X})$.

26. Упростите релейно-контактные схемы (рис. 1.1).

27. Из контактов X, Y, Z составьте схему так, чтобы она замкнулась тогда и только тогда, когда замкнуты какие-нибудь два из трёх контактов.

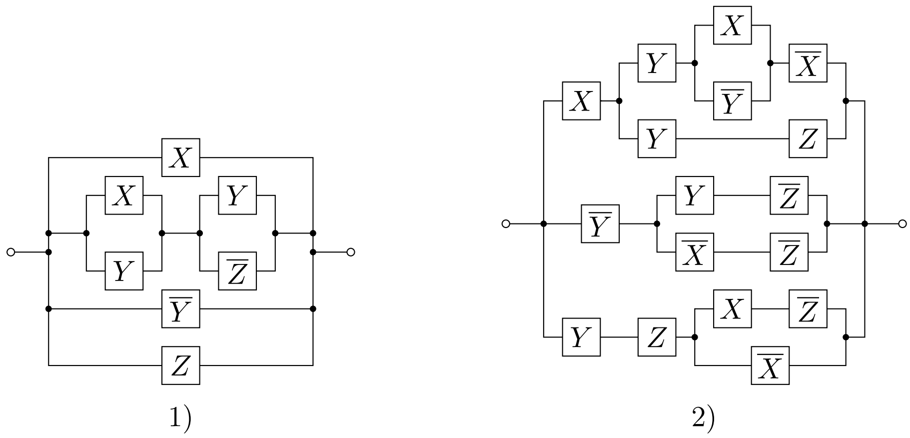

Рис. 1.1. Релейно-контактные схемы для задачи № 26

28. Постройте простейшую релейно-контактную схему, условия работы которой заданы табл. 1.2.

Таблица 1.2

Таблицы истинности для задачи № 28

X	Y	Z	1) $f_1(X,Y,Z)$	2) $f_2(X,Y,Z)$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

29. Найдите двойственные формулы:

1) $X(\overline{Y} \vee Z)$.
2) $(\overline{Y \vee Z})\ \&\ (X \vee \overline{YZ})$.
3) $X\bigl(Y \vee Z(\overline{X \vee Y})\bigr)$.
4) $(X \vee Y)(\overline{X \vee Z} \vee XY) \vee \overline{(X \vee Y)Z} \vee X$.
5) $XY\bigl(\overline{YZ} \vee XYZ(\overline{XZ} \vee \overline{YZ}) \vee \overline{XY}\bigr)(X \vee Y \vee Z)$.
6) $XY \vee XZ$.
7) $(XY \vee YZ \vee ZY)(\overline{X \vee Y \vee Z})$.
8) $\overline{XYZ} \vee XY\overline{Z} \vee X\overline{Y}Z \vee \overline{X}YZ$.

30. Для следующих выражений найдите двойственные:

1) XX.
2) XY.
3) $X \vee 0$.
4) $X \vee (Y \vee Z)$.
5) $X \vee (X \vee Y)$.
6) $\overline{XY}$.
7) $X \vee \overline{X}Y$.
8) $X \vee XY \vee YZ$.
9) $\overline{X}Y \vee X\overline{Y}Z \vee \overline{XZ}$.

31. Докажите, что формулы $XY \vee \overline{X}\,\overline{Y}$ и $(\overline{X} \vee Y)(X \vee \overline{Y})$ равносильны. Запишите равносильность, которая следует из доказанной согласно принципу двойственности.

32. Для каждой из следующих формул определите, является ли она общезначимой, противоречивой или выполнимой:

1) $\overline{\overline{P}} \to P$.
2) $P \to (P \,\&\, Q)$.
3) $\overline{P \vee Q} \vee \overline{Q}$.
4) $(P \vee Q) \to P$.
5) $(P \to Q) \to (\overline{Q} \to \overline{P})$.
6) $(P \to Q) \to (Q \to P)$.
7) $P \vee (P \to Q)$.
8) $\big(P \,\&\, (Q \to P)\big) \to P$.
9) $P \vee (Q \to \overline{P})$.
10) $(P \vee \overline{Q}) \,\&\, (\overline{P} \vee Q)$.
11) $\overline{P} \vee \overline{P \to Q}$.
12) $P \to \overline{P}$.
13) $\overline{P} \to P$.

33. Рассмотрите следующее утверждение и выясните, противоречиво ли оно: «Если конгресс отказывается принять новые законы, то забастовка не будет окончена, кроме случая, когда она длится более месяца и президент фирмы уйдёт в отставку; и либо конгресс примет новые законы, либо забастовка не закончится, хотя она и длилась более месяца».

34. Считая утверждения «В хоккей играют настоящие мужчины» и «Трус не играет в хоккей» посылкой и заключением верного умозаключения, сформулируйте подразумеваемую вторую посылку. Проверьте правильность полученного умозаключения.

35. Выяснить, является ли первая формула логическим следствием остальных:
1) $Y;\ X \to Y,\ X$.
2) $X;\ X \to Y,\ Y$.
3) $\overline{X};\ X \to Y,\ \overline{Y}$.
4) $\overline{Y};\ X \to Y,\ \overline{X}$.
5) $Y;\ X \vee Y,\ \overline{X}$.
6) $X \to Z;\ X \to Y,\ Y \to Z$.
7) $(X \vee Y) \to Z;\ X \to Y,\ Y \to Z$.
8) $Z \to X;\ X \to Y,\ \overline{Y} \to \overline{Z}$.
9) $X \vee Y;\ X \to Y,\ \overline{X} \to \overline{Y},\ \overline{X} \vee \overline{Y}$.
10) $\overline{X};\ X \leftrightarrow Y,\ Y \vee \overline{Z},\ Z$.
11) $Z;\ X \to Y,\ \overline{Y} \vee Z,\ X$.
12) $\overline{Y} \vee \overline{Z};\ X \vee \overline{Z},\ Y \to XZ,\ X$.
13) $X \to Y;\ X \to Y,\ \overline{X},\ Z$.
14) $\overline{Z} \to \overline{X};\ X \to Y,\ XY,\ \overline{Z} \to \overline{Y}$.
15) $X \vee T;\ X \to Y,\ Y \to \overline{Z},\ X \vee Z \to YT$.
16) $XT;\ X \to Z,\ \overline{Y} \to \overline{Z},\ Z \to Y \vee T,\ Z \vee T$.

36. Найти все (с точностью до равносильности) логические следствия из посылок:
1) $X,\ X \to Y$.
2) $\overline{X},\ X \leftrightarrow Y$.
3) $X,\ \overline{Y},\ X \vee Y$.
4) $X \to (Y \to Z),\ Y \to Z$.
5) $X \to (Y \to Z),\ Y \to \overline{Z}$.
6) $X \to Y,\ Y \to Z$.
7) $X \vee Y,\ Y \vee Z,\ X \vee Z$.
8) $X,\ X \vee Y,\ X \vee Y \vee Z$.
9) $X \to \big(Y \to (Z \to T)\big),\ X \to (Y \to Z)$.
10) $X \to (Y \to Z),\ X \to (Z \to T)$.

37. Найти все (с точностью до равносильности) посылки, логическим следствием которых являются формулы:
1) XY.
2) $X \leftrightarrow Y$.
3) $X \vee Y$.
4) $X \to Y$.
5) $X \vee Y \to XY$.
6) XYZ.
7) $(X \vee Y)Z$.
8) $(X \to Y)Z$.
9) $X \to YZ$.
10) $X \to (Y \to \overline{Z})$.

38. Докажите правильность умозаключений:
1) $\dfrac{A \to B,\ A}{B}$.
2) $\dfrac{A \to B,\ \overline{B}}{\overline{A}}$.
3) $\dfrac{A \vee B,\ \overline{A}}{B}$.
4) $\dfrac{A \to B,\ B \to C}{A \to C}$.
5) $\dfrac{A \to B,\ B \to C,\ A}{C}$.
6) $\dfrac{A \to B,\ B \to C,\ \overline{C}}{\overline{A}}$.
7) $\dfrac{A \vee B,\ A \to B}{B}$.
8) $\dfrac{A \to B,\ B \to C,\ C \to A}{A \to BC}$.

39. Выяснить, правильны ли следующие силлогизмы:
1) $\dfrac{A \to B,\ B}{A}$.
2) $\dfrac{A \to B,\ \overline{A} \to B}{A \leftrightarrow B}$.
3) $\dfrac{A \vee B,\ A \to B}{A}$.

4) $\dfrac{A \to (B \to C),\ (A \to B) \to C}{B \to C}$.

5) $\dfrac{A \to BC,\ B \to CA,\ C \to AB,\ A \vee B \vee C}{ABC}$.

6) $\dfrac{A \to B,\ \overline{A}}{\overline{B}}$.

7) $\dfrac{A \to B,\ \overline{B} \to \overline{A}}{A \leftrightarrow B}$.

8) $\dfrac{A \to B,\ B \to A,\ A \vee B}{AB}$.

9) $\dfrac{A \to (B \to C),\ (A \to B) \to C}{A \to C}$.

10) $\dfrac{A \vee B \to C,\ B \vee C \to A,\ C \vee A \to B,\ A \vee B \vee C}{ABC}$.

40. Докажите, что отношение следования формул не обладает свойством симметричности.

41. Докажите, что:

1) тавтология следует из любой формулы.
2) из тождественно ложной формулы следует любая формула.

42. Расположите следующие формулы в таком порядке, чтобы из каждой формулы следовали все, стоящие после неё:

1) $X \vee \overline{X}$, $X \mathbin{\&} Y$, $X \mathbin{\&} \overline{X}$, $X \to Y$, $X \leftrightarrow Y$.
2) $\overline{X} \leftrightarrow Y$, $\overline{X \to (\overline{X} \to Y)}$, $X \to (Y \to X)$, $X \vee Y$, $\overline{X} \mathbin{\&} Y$.

43. Докажите, что отношение следования между формулами обладает свойствами рефлексивности и транзитивности.

44. Определите, следует ли на уровне логики высказываний:

1) из теоремы, обратной данной, теорема, противоположная данной.
2) из данной теоремы ей обратно-противоположная.
3) из данной теоремы ей противоположная.
4) из данной теоремы ей обратная.

45. Докажите, что если из формулы $\mathfrak{A}_1$ следует формула $\mathfrak{A}_2$, а из формулы $\mathfrak{A}_2$ следует формула $\mathfrak{A}_1$, то эти формулы равносильны. Докажите обратное.

46. Следует ли из предложения «Если студент много занимается, то он успешно сдаёт экзамены» предложение «Студент, провалившийся на экзамене, занимался мало»?

47. Доказать, что:

1) $X \vee Y$ и $X \vee \overline{Y}$ являются следствием $\overline{X \to Y}$.
2) $X \mathbin{\&} Y \vee \overline{X} \mathbin{\&} Y \vee \overline{X} \mathbin{\&} \overline{Y}$ является следствием $X \leftrightarrow Y$.
3) $X \to Y$ является следствием $\overline{X} \vee Y \vee Z$.
4) $\overline{X_1} \to X_2$ является следствием $X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee X_4$, $X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee \overline{X_4}$, $X_1 \vee X_2 \vee \overline{X_3} \vee X_4$, $X_1 \vee X_2 \vee \overline{X_3} \vee \overline{X_4}$.

48. Доказать, что $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}^* \equiv \mathfrak{B}^*$, где $\mathfrak{A}^* = f(X_1, \dots, X_n) \equiv \equiv \mathfrak{A} = h(\overline{X_1}, \dots, \overline{X_n})$.

49. Найдите все следствия из посылок:

1) $X \to Y$, $\overline{Y}$.
2) $X \to Y$, $Y \vee Z$, $XY \leftrightarrow Z$.
3) $X \leftrightarrow Y$, $Y \leftrightarrow Z$.
4) $(X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$, Y, Z.

50. Найдите все следствия из посылок, выразите полученные следствия в содержательной форме:

1) «Если данное число делится на 2 и на 5, то оно делится на 10»; «Данное число делится на 2 или не делится на 5».

2) «Если последняя цифра целого числа n обозначает чётное число, то это целое число делится на 2 или на 4».

3) «Если целое число n делится на 4, то оно делится на 2».

51. Найдите все следствия из посылок. Для каждого из следствий напишите формулу с теми же переменными, которая из него следует, но не равносильна ему.

1) $\overline{X}Y \vee Z$, $\overline{XY}$, $Y \to (X \vee \overline{Z})$, содержащие только переменные:

а) X, Z.

б) Y, Z.

2) $X_1 \vee X_2$, $X_1 \to X_3$, $X_2 \leftrightarrow X_4$, содержащие только переменные:

а) X_1, X_4.

б) X_2, X_3, X_4.

52. Даны посылки: «Если данный четырёхугольник — ромб, то его диагонали перпендикулярны»; «Если данный четырёхугольник — квадрат, то его диагонали равны»; «Если диагонали данного четырёхугольника не равны, то он не квадрат»; «Диагонали данного четырёхугольника не перпендикулярны и равны». Найдите следствие, состоящее из высказываний:

1) «Данный четырёхугольник — ромб» и «Данный четырёхугольник — квадрат»;

2) «Данный четырёхугольник — ромб» и «Диагонали данного четырёхугольника равны».

53. На складе совершено хищение. Подозрение пало на трёх человек A, B и C. Установлено следующее: Никто кроме A, B, C не был замешен в деле. A никогда не ходит на дело без, по крайней мере, одного соучастника. C не виновен. Виновен ли B?

54. Рассмотрите следующие утверждения: F_1 — «Том не может быть хорошим студентом, если неверно, что он способный и его отец помогает ему». F_2 — «Том — хороший студент, только, если его отец помогает ему». Покажите, что F_2 есть логическое следствие F_1.

55. Покажите, что для следующих утверждений F_2 есть логическое следствие F_1. F_1 — «Если президент не имеет соответствующего авторитета или если он не желает взять на себя ответственность, то порядок не будет восстановлен и распространение волнений не прекратиться до тех пор, пока участникам волнений это не надоест и власти не начнут примирительные действия». F_2 — «Если президент не желает взять на себя ответственность и участникам волнений это не надоест, то волнения будут расширяться».

56. Покажите, что Q есть логическое следствие $P \to Q$ и P (правило modus ponens).

57. Докажите, что $\overline{Q} \to \overline{P}$ есть логическое следствие формулы $P \to Q$.

58. Проблема химического синтеза. Предположим, что мы можем провести следующие химические реакции: $MgO + H_2 \to Mg + H_2O$; $C + O_2 \to CO_2$; $CO_2 + H_2O \to H_2CO_3$. Имея MgO, H_2, C и O_2, можно ли получить H_2CO_3?

59. Решить задачи:

1) Если конгресс отказывается принять новые законы, то забастовка не будет окончена, кроме случая, когда она длится более года и президент фирмы уйдёт в отставку. Допустим, что конгресс отказывается действовать, забастовка оканчивается, и президент фирмы не уходит. Длилась ли забастовка более года?

2) На некотором острове, населённом рыцарями и лжецами, (рыцарь говорит только правду, лжец — только ложь), разнёсся слух о том, что на нём зарыто сокровище. Вы прибываете на остров и спрашиваете одного из местных жителей (назовём его A): «Есть ли на острове золото?». В ответ на ваш вопрос A заявляет: «Сокровище на этом острове есть в том и только в том случае, если я рыцарь».

а) можно ли определить кто A — рыцарь или лжец?
б) есть ли сокровища на острове?

3) Четыре студентки Марина, Нина, Оля и Тамара участвовали в соревнованиях и заняли первые четыре места. Когда стали устанавливать распределение мест, то получили три разных ответа:

а) Ольга заняла 1-е место, Нина — 2-е место;
б) Ольга заняла 2-е место, Тамара — 3-е место;
в) Марина заняла 2-е место, Тамара — 4-е место.

Известно также, что в каждом ответе хотя бы одна часть верна. Определить правильное распределение мест.

4) Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.

— Говорит Мегрэ. Есть новости?

— Да шеф. Поступили сведения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то Этьен убийца или Франсуа лжёт. Муссье считает, что Этьен убийца, или Франсуа не был пьян, и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать, что если убийство было совершено после полуночи, то Этьен убийца или Франсуа лжёт.

— Всё, спасибо. Этого достаточно. — Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжёт. Теперь он знал всё. Какой вывод сделал Мегрэ?

5) Джонс утверждает, что не встречал этой ночью Смита. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал его этой ночью, а убийство было совершено после полуночи. Если убийство было совершено после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Кто был убийцей?

6) Перед последним туром футбольного чемпионата сложилась турнирная ситуация, позволяющая утверждать следующее. Если «Динамо» проиграет свой последний матч, то в случае выигрыша «Спартака» он станет чемпионом. Если же «Спартак» выиграет матч и станет чемпионом, то «Торпедо» займёт второе место. В последнем туре первыми стали известны результаты встреч с участием «Динамо» и «Спартака»: «Динамо» проиграл, а «Спартак» выиграл. Можно ли в этом случае, не дожидаясь результатов других встреч, утверждать, что «Спартак» стал чемпионом, а «Торпедо» занял второе место?

7) Предположим, что меня спрашивают: «А верно ли, что если вы любите Еву, то вы также любите и Маргарет?». А я отвечаю: «Если это правда, то я люблю Еву, и если я люблю Еву, то это правда». Люблю ли я Маргарет?

8) Левин, Митреев и Набатов работают в банке в качестве бухгалтера, счетовода и кассира. Если Набатов — кассир, то Митреев счетовод; если Набатов — счетовод, то Митреев — бухгалтер; если Митреев — не кассир, то Левин — не счетовод; если Левин — бухгалтер, то Набатов — счетовод. Кто какую должность занимает, если известно, что Левин — не кассир.

9) Некая страна населена жителями, каждый из которых либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт и которые отвечают на вопросы посредством «да» или «нет». К развилке дорог, из которых одна ведёт в столицу, а другая туда не приводит, приходит турист. Никаких знаков, указывающих, какую дорогу следует выбрать, при развилке нет. Зато здесь стоит местный житель. Какой вопрос, требующий ответа «да» или «нет», должен задать ему турист, чтобы выбрать нужную ему дорогу?

10) В спортивном клубе действуют следующие правила: тот, кто не состоит в шахматной секции, не может быть членом секции плавания; каждый член шахматной секции должен заниматься в секциях плавания и спортивной гимнастики. Обязан ли член клуба заниматься в секции спортивной гимнастики, если он состоит в секции плавания?

11) Обвиняемые A, B, C дали следующие показания:

A: B виновен, а C невиновен.

B: A невиновен или C виновен

C: Я невиновен, но хотя бы один из A и B виновен.

Предполагая, что все показания правдивы, определите, кто виновен.

12) В школе кто-то разбил стекло. Подозреваются Лёня, Дима, Толя и Миша. Каждый из них дал показания.

Лёня: Я не виновен. Я даже не подходил к окну. Миша знает, кто это сделал.

Дима: Я не разбивал. С Мишей я не был знаком до школы. Это сделал Толя.

Толя: Я не виновен. Это сделал Миша. Дима врёт, что я разбил.

Миша: Я не виноват. Стекло разбил Лёня. Дима может поручиться за меня, так как знает меня очень давно.

Потом каждый из них признался, что дал два верных и одно ложное показание. Кто разбил стекло? При решении нужно учесть, что виновным был только один мальчик. Высказывания удобно обозначить первой буквой имени и номером: T_2 — «Это сделал Миша» или D_1 — «Я не разбивал».

Математическая логика и теория алгоритмов

Лабораторная работа № 2

Логика предикатов

Теоретическая часть

Решить задачи к теоретической части согласно варианту.

Номер варианта	Номера задач для теоретической части				
1	17	5.3	10.13	24.1	31
2	18.1	5.4	10.14	24.2	32
3	18.2	5.6	10.15	24.3	33
4	18.3	6.1	11.1	24.4	34
5	19	6.2	11.2	24.5	35
6	20	6.3	11.3	24.6	36
7	21	6.4	12.1	24.7	37
8	22	7	12.2	24.8	38
9	2.2	8.1	12.3	24.9	39
10	2.3	8.2	12.4	24.10	40
11	2.4	8.3	12.5	24.11	41
12	2.5	8.4	13.1	25.1	42
13	2.6	8.5	13.2	25.2	43
14	3.1	8.6	13.3	26	44
15	3.2	9.1	14.1	27.1	45
16	3.3	9.2	14.2	27.2	46
17	3.4	9.3	14.3	27.3	47
18	3.5	9.4	14.4	28	48
19	3.6	10.1	14.5	29.4	49
20	3.7	10.2	14.6	29.1	50
21	4.1	10.3	14.7	29.2	51
22	4.2	10.4	15.1	29.3	52
23	4.3	10.5	15.2	29.4	53
24	4.4	10.6	15.3	29.1	54
25	4.5	10.7	16.1	29.2	55
26	4.6	10.8	16.2	29.3	56
27	4.7	10.9	16.3	29.4	57
28	4.8	10.10	16.4	29.5	43
29	5.1	10.11	16.5	26	44
30	5.2	10.12	16.6	28	45

Практическая часть

Разработать программу, решающую задачи согласно своему варианту по табл. 2.1. Программа должна считывать формулу логики высказываний в указанной нормальной форме. При решении задачи воспользоваться разработками из предыдущей лабораторной работы. Алгоритмы, выполняющие решение задачи, должны содержаться в отдельном модуле.

Таблица 2.1

Варианты заданий к практической части

Номер арианта	Форма	Номера задач	Номер варианта	Форма	Номера задач
1	КНФ	1, 2	16	ДНФ	2, 4
2	КНФ	1, 3	17	ДНФ	2, 5
3	КНФ	1, 4	18	ДНФ	3, 4
4	КНФ	1, 5	19	ДНФ	3, 5
5	КНФ	2, 3	20	ДНФ	4, 5
6	КНФ	2, 4	21	КНФ	1, 2
7	КНФ	2, 5	22	КНФ	1, 3
8	КНФ	3, 4	23	КНФ	1, 4
9	КНФ	3, 5	24	КНФ	1, 5
10	КНФ	4, 5	25	КНФ	2, 3
11	ДНФ	1, 2	26	КНФ	2, 4
12	ДНФ	1, 3	27	КНФ	2, 5
13	ДНФ	1, 4	28	КНФ	3, 4
14	ДНФ	1, 5	29	КНФ	3, 5
15	ДНФ	2, 3	30	КНФ	4, 5

Задачи к практической части

1) Программа должна строить полную таблицу истинности введённой формулы.
2) Программа должна доказывать общезначимость введённой формулы.
3) Программа должна доказывать противоречивость введённой формулы.
4) Программа должна отыскивать все интерпретации, на которых введённая формула принимает истинное значение.
5) Программа должна отыскивать все интерпретации, на которых введённая формула принимает ложное значение.

Содержание отчёта

1) Название и цель лабораторной работы.
2) Решение предложенных в теоретической части задач.
3) Программа на выбранном языке программирования в виде исходных кодов (с поясняющими комментариями) и в электронном варианте для демонстрации на ЭВМ.
4) Спецификация программы с указанием основных структур данных и алгоритмов.
5) Примеры работы программы на тестовых данных.

Задачи к теоретической части

1. Записать формулы логики предикатов, описывающие следующие утверждения:

1) Каждый студент изучает или английский, или немецкий, или французский язык.
2) Некоторые устройства укомплектованы амперметром.
3) Не все автомобили работают хорошо.
4) Ни один студент не окажется отличником.
5) Все сотрудники, которые вышли на работу, получили премии.
6) Число b есть предел функции f в точке a.
7) Функция f непрерывна в точке a.

2. Записать с помощью предиката равенства $E(x, y)$ — «x равен y», определённого на множестве натуральных чисел, используя функцию умножения $p(x, y) = x \cdot y$:

1) z есть общее кратное для x и y.
2) z есть наименьшее общее кратное для x и y.
3) x и y взаимно просты.
4) Если один из двух сомножителей делится на некоторое число z, то на него делится и произведение.
5) Если произведение $x \cdot y$ делится на простое число z, а x не делится на z, то y делится на z.
6) Произведение любого числа x на 1 равно x.

3. Перевести на русский язык, если $p(x, y)$ — функция умножения x на y, а $E(x, y)$ — предикат «x равен y»:

1) $\forall z \exists x \Big(E\big(p(z, z), x\big) \Big)$.
2) $\forall z \exists x \Big(E\big(p(3, z), x\big) \Big)$.
3) $\forall y \forall z \exists x \Big(E\big(p(y, z), x\big) \Big)$.
4) $\forall y \exists z \exists x \Big(E\big(p(y, y), z\big) \,\&\, E\big(p(z, y), x\big) \Big)$.
5) $\forall y \exists z \exists x \Big(E\big(p(y, y), z\big) \,\&\, E\big(p(z, z), x\big) \Big)$.
6) $\forall x \forall y \Big(\exists u\, E\big(p(y, u), x\big) \,\&\, \exists v\, E\big(p(x, v), y\big) \to E(x, y) \Big)$.
7) $\forall x \forall y \forall z \forall t \Big(E\big(p(y, z), t\big) \,\&\, \exists u\, E\big(p(t, y), x\big) \to \exists v\, E\big(p(y, v), x\big) \,\&\, \exists w\, E\big(p(z, w), x\big) \Big)$.

4. Определить, какие вхождения переменных являются свободными, а какие связанными в следующих формулах. Указать области действия кванторов.

1) $\forall x \big(P(x, y) \to \forall y\, Q(y) \big)$.
2) $\forall x\, P(x, y) \to \forall y\, R(x, y)$.
3) $\exists x\, Q(x, x) \,\&\, R\big(f(y, x)\big)$.
4) $\forall x \Bigg(E\Big(d(x, y), s\big(x, n(y)\big) \Big) \Bigg)$.
5) $L(x, y) \to \exists z \big(L(x, z) \,\&\, L(z, y) \big)$.
6) $\forall y\, G(y, 0) \to \exists z\, E\big(x, p(y, z)\big)$.
7) $\forall x \exists y \big(P(x, y) \to Q(x, y, z) \big)$.
8) $\exists u \forall v \big(F(u, v) \to \exists t\, F(t, v) \big)$.

5. Пусть задано множество точек, прямых и плоскостей трёхмерного евклидова пространства со следующими предикатами:

предикат $P(x)$ — «x — точка»;
предикат $S(x)$ — «x — плоскость»;
предикат $L(x)$ — «x — прямая»;
предикат $R(x, y)$ — «x лежит на y».

Записать в виде формул:

1) Через каждые две точки можно провести прямую, если эти точки различны, то такая прямая единственная.

2) Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость.

3) Определение параллельных прямых*.

4) Определение параллельных плоскостей**.

5) Прямые x, y, z не проходят через одну точку.

6) Через всякую точку, не лежащую на прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

6. Определить противоречивость, общезначимость или выполнимость следующих формул:

1) $\forall x\, P(x) \,\&\, \exists y\, \overline{P(y)}$.

2) $\forall x\, P(x) \to \exists y\, P(y)$.

3) $P(a) \to \overline{\exists x\, P(x)}$.

4) $\forall x\, P(x) \vee \exists y\, \overline{P(y)}$.

7. Доказать, что $Q(a)$ является логическим следствием $P(a)$ и $\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big)$.

8. Определить, выполнимы ли следующие формулы:

1) $\exists x\, P(x)$.

2) $\forall x\, P(x)$.

3) $\exists x \forall y\big(Q(x,x) \,\&\, \overline{Q(x,y)}\big)$.

4) $\exists x \exists y\big(P(x) \,\&\, \overline{P(y)}\big)$.

5) $\exists x \forall y\big(Q(x,y) \to \forall z\, R(x,y,z)\big)$.

6) $P(x) \to \forall y\, P(y)$.

9. Выяснить, являются ли тождественно истинными следующие формулы:

1) $\exists x\, P(x) \to \forall x\, P(x)$.

2) $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$.

3) $\exists x \forall y\, Q(x,y) \to \forall y \exists x\, Q(x,y)$.

4) $\forall x \exists y\, Q(x,y) \to \exists y \forall x\, Q(x,y)$.

10. Проверить, являются ли следующие формулы тождественно истинными:

1) $\overline{\exists x\, A(x)} \to \overline{\forall x\, A(x)}$.

2) $\exists x\Big(A(x) \,\&\, \big(\overline{D} \to C(x)\big)\Big) \to \overline{\forall x\big(A(x) \to \overline{C(x)} \,\&\, \overline{D}\big)}$.

3) $\forall x\big(A(x) \to \overline{B(x)}\big) \to \overline{\exists x\, A(x) \,\&\, \forall x\, B(x)}$.

4) $\forall x\big(A(x) \to \overline{B(x)}\big) \to \forall x\big(A(x) \,\&\, \exists x\, B(x)\big)$.

5) $\overline{\forall x\, A(x)} \leftrightarrow \exists x\, \overline{A(x)}$.

6) $\overline{\exists x\, A(x)} \leftrightarrow \forall x\, \overline{A(x)}$.

7) $\forall x\big(A(x) \,\&\, B(x)\big) \leftrightarrow \forall x\, A(x) \,\&\, \forall x\, B(x)$.

8) $\exists x\big(A(x) \vee B(x)\big) \leftrightarrow \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$.

9) $\exists x \exists y\, P(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x\, P(x,y)$.

10) $\forall x \forall y\, P(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x\, P(x,y)$.

11) $\exists x\big(P(x) \,\&\, Q(x)\big) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \,\&\, \exists x\, Q(x)$.

12) $\forall x\big(P(x) \,\&\, Q(x)\big) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \,\&\, \forall x\, Q(x)$.

13) $\forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$.

14) $\exists x\big(P(x) \,\&\, Q(x)\big) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \,\&\, \exists x\, Q(x)$.

15) $\exists x \forall y\, P(x,y) \to \forall y \exists x\, P(x,y)$.

11. Доказать, что существуют такие предикаты P и Q, что:

1) $\forall x\big(Q(x) \vee P(x)\big) \not\equiv \forall x\, Q(x) \vee \forall x\, P(x)$.

2) $\exists x\big(Q(x) \,\&\, P(x)\big) \not\equiv \exists x\, Q(x) \,\&\, \exists x\, P(x)$.

3) $\forall y \exists x\, P(x,y) \to \exists x \forall y\, P(x,y) \not\equiv 1$.

12. Определить, какие из следующих формул тождественно истинны:

1) $\forall x\big(Q(x) \to P(x)\big) \to \big(\forall x\, Q(x) \to \forall x\, P(x)\big)$.

2) $\forall x\big(Q(x) \to P(x)\big) \to \big(\exists x\, Q(x) \to \exists x\, P(x)\big)$.

3) $\exists x\big(Q(x) \to P(x)\big) \to \big(\forall x\, Q(x) \to \forall x\, P(x)\big)$.

---

* Две прямые являются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

** Две плоскости являются параллельными, если они не имеют общих точек.

4) $\exists x\big(Q(x) \to P(x)\big) \leftrightarrow \big(\forall x\, Q(x) \to \exists x\, P(x)\big)$.
5) $\forall x\big(Q(x) \to P(x)\big) \leftrightarrow \big(\exists x\, Q(x) \to \forall x\, P(x)\big)$.

13. Привести к сколемовской нормальной форме:

1) $\exists x \forall y\, Q(x, y) \to \forall x \exists y\, Q(x, y)$.
2) $\exists x \forall y \exists z \forall v\, R(x, y, z, v)$.
3) $\forall x \exists y \forall z \exists v\, R(x, y, z, v)$.

14. Привести к предварённой нормальной форме:

1) $\overline{\exists x \forall y \exists z \forall u\, A}$.
2) $\exists x \forall y\, A(x, y)\ \&\ \exists x \forall y\, B(x, y)$.
3) $\exists x \forall y\, A(x, y) \vee \exists x \forall y\, B(x, y)$.
4) $\exists x \forall y\, A(x, y) \to \exists x \forall y\, B(x, y)$.
5) $\forall x\, P(x) \to \exists y\, Q(x, x)$.
6) $\exists x\Big(\overline{\exists y\, P(x, y)} \to \big(\exists z\, Q(z) \to R(x)\big)\Big)$.
7) $\forall x \forall y\Big(\exists z\, P(x, y, z) \vee \big(\exists u\, Q(x, u) \to \exists v\, Q(y, v)\big)\Big)$.

15. Дана следующая интерпретация:

$$\mathscr{D} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\};\ a = \mathbf{1};\ f(\mathbf{1}) = \mathbf{2},\ f(\mathbf{2}) = \mathbf{2};$$
$$P(\mathbf{1}) = 0,\ P(\mathbf{2}) = 1;\ Q(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = Q(\mathbf{1}, \mathbf{2}) = Q(\mathbf{2}, \mathbf{2}) = 1,\ Q(\mathbf{2}, \mathbf{1}) = 0.$$

Определить, являются ли следующие формулы общезначимыми, противоречивыми или выполнимыми в указанной интерпретации.

1) $\exists x\Big(P\big(f(x)\big)\ \&\ Q\big(x, f(a)\big)\Big)$.
2) $\exists x\big(P(x)\ \&\ Q(x, a)\big)$.
3) $\forall x \exists x\big(P(x)\ \&\ Q(x, y)\big)$.

16. Дана следующая интерпретация:

$$\mathscr{D} = \{a, b\};\ P(a, a) = P(b, b) = 1,\ P(a, b) = P(b, a) = 0.$$

Определить, являются ли следующие формулы общезначимыми, противоречивыми или выполнимыми в указанной интерпретации.

1) $\forall x \exists y\, P(x, y)$.
2) $\exists x \forall y\, P(x, y)$.
3) $\forall x \forall y\, P(x, y)$.
4) $\exists y\, \overline{P(a, y)}$.
5) $\forall x\, P(x, x)$.
6) $\forall x \forall y\, \big(P(x, y) \to P(y, x)\big)$.

17. Дана формула $\mathfrak{A} = \exists x\, P(x) \to \forall x\, P(x)$.

1) Доказать, что $\mathfrak{A}$ всегда истинна, если область $\mathscr{D}$ содержит только один элемент.

2) Пусть $\mathscr{D} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$. Найти интерпретацию с областью $\mathscr{D}$, в которой $\mathfrak{A}$ имеет значение 0.

18. Дана следующая интерпретация:

$$\mathscr{D} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\};\ a = \mathbf{1},\ b = \mathbf{1};\ f(\mathbf{1}) = \mathbf{2},\ f(\mathbf{2}) = \mathbf{1};$$
$$P(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = P(\mathbf{1}, \mathbf{2}) = 1,\ P(\mathbf{2}, \mathbf{1}) = P(\mathbf{2}, \mathbf{2}) = 0.$$

Определить, являются ли следующие формулы общезначимыми, противоречивыми или выполнимыми в указанной интерпретации.

1) $P\big(a, f(a)\big)\ \&\ P\big(b, f(b)\big)$.
2) $\forall x \exists y\, P(y, x)$.
3) $\forall x \forall y\Big(P(x, y) \to P\big(f(x), f(y)\big)\Big)$.

19. Пусть формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ таковы: $\mathfrak{A} = \forall x\big(P(x) \to Q(x)\big)$, $\mathfrak{B} = \overline{Q(a)}$. Доказать, что $\overline{P(a)}$ — логическое следствие $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

20. Каждый студент честен. Джон нечестен. Доказать, что Джон не студент.

21. Каждый атлет силён. Каждый, кто силён и умён, добьётся успеха в своей карьере. Пётр — атлет. Пётр умён. Доказать, что Пётр добьётся успеха в своей карьере.

22. Предположим, что Святого Луку любит каждый, кто любит кого-нибудь. Предположим также, что каждый кого-нибудь любит. Показать, что святого Луку любит каждый.

23. Доказать:

1) $\exists x\forall y\, A(x, y) \vdash \forall y\exists x\, A(x, y)$.
2) $\exists x\big(A(x) \vee B(x)\big) \vdash \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$.
3) $\exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \vdash \exists x\big(A(x) \vee B(x)\big)$.
4) $\forall x\big(A(x) \to C\big) \vdash \exists x\, A(x) \to C$.
5) $\exists x\, A(x) \to C \vdash \forall x\big(A(x) \to C\big)$.
6) $\exists x\big(A(x) \to B(x)\big) \vdash \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$.
7) $\forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x) \vdash \exists x\big(A(x) \to B(x)\big)$.
8) $\exists x\, A(x) \to \exists x\, B(x) \vdash \exists x\big(A(x) \to B(x)\big)$.
9) $\forall x\, \overline{A(x)} \vdash \overline{\exists x\, A(x)}$.
10) $\overline{\forall x\, A(x)} \vdash \exists x\, \overline{A(x)}$.
11) $\exists x\, A(x) \vdash \overline{\forall x\, \overline{A(x)}}$.
12) $\overline{\forall x\, \overline{A(x)}} \vdash \exists x\, A(x)$.
13) $\vdash \forall x\big(\overline{A(x)\; \&\; \overline{A(x)}}\big)$.
14) $\vdash \forall x\big(A(x) \vee \overline{A(x)}\big)$.
15) $\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) \vdash \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$.
16) $\vdash \forall x\, A(x) \to \exists x\, A(x)$.
17) $\forall x\forall y\, A(x, y) \vdash \forall x\, A(x, x)$.
18) $\exists x\, A(x, x) \vdash \exists x\exists y\, A(x, y)$.
19) $\exists x\, \overline{\overline{A(x)}} \vdash \overline{\overline{\exists x\, A(x)}}$.
20) $\exists x\big(A(x) \to B(x)\big) \vdash \exists x\exists y\big(A(x) \to B(y)\big)$.
21) $\exists x\exists y\big(A(x) \to B(y)\big) \vdash \exists x\big(A(x) \to B(x)\big)$.
22) $\forall x\, A(x)\; \&\; \forall x\, B(x) \vdash \forall x\big(A(x)\; \&\; B(x)\big)$.
23) $\forall x\big(A(x)\; \&\; B(x)\big) \vdash \forall x\, A(x)\; \&\; \forall x\, B(x)$.
24) $\exists x\big(A(x)\; \&\; B(x)\big) \vdash \exists x\, A(x)\; \&\; \exists x\, B(x)$.
25) $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \vdash \forall x\big(A(x) \vee B(x)\big)$.
26) $\exists x\big(A(x) \to B(x)\big) \vdash \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$.
27) $\forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x) \vdash \exists x\big(A(x) \to B(x)\big)$.

24. Привести к предварённой нормальной форме:

1) $\big(\overline{\exists x\, F(x, y, z)} \to \forall x\, F(x, x, x)\big) \vee F(x, y, z)$.
2) $\overline{\exists z\overline{\forall x\big(G(x, y)\; \&\; F(x, z)\big)}} \to \forall y\, H(y, z)$.
3) $\forall x\left(\overline{F(x)} \to \forall y\left(\overline{F(y)} \to \big(\overline{\forall z\, F(z)} \to \forall u\, F(u)\big)\right)\right)$.
4) $\exists x_1\forall x_2\, F(x_1, x_2)\; \&\; \forall x_1\forall x_2\exists x_3\, F(x_1, x_2, x_3)\; \&\; \overline{\exists x_1\, F(x_1, x_1)}$.
5) $\overline{\exists x\forall y\exists z\forall u\, P(x, y, z, u)}$.
6) $\overline{\forall x\, R(x)}\; \&\; \exists x\, Q(x, y)$.
7) $\overline{P \to \exists x\, R(x)}$.
8) $\exists x\exists y\, P(x, y) \to \exists x\exists y\, Q(x, y)$.

9) $\exists x\forall y\, P(x,y)\ \&\ \exists x\forall y\, Q(x,y)$.
10) $\forall x\exists y\big(A(x)\leftrightarrow A(y)\big)$.
11) $\forall x\big(A(x)\to\exists y\, B(y)\big)$.

25. Привести к сколемовской нормальной форме:
1) $\forall x\, P(x)\to\exists x\, Q(x)$.
2) $\forall x\forall y\exists z\big(P(x,z)\ \&\ P(y,z)\to Q(x,y,z)\big)$.

26. Найти предварённую нормальную форму, а затем перейти к сколемовской:

$$\forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y\exists x\big(Q(x,y)\to\forall z\, R(a,x,y)\big)\Big).$$

27. Найти все стандартные формы (предварённую, сколемовскую, клазуальную):
1) $\overline{\forall x\, P(x)\to\exists y\forall z\, Q(y,z)}$.
2) $\forall x\Bigg(\overline{E(x,a)}\to\exists y\Big(E\big(y,d(x)\big)\ \&\ \forall z\Big(E\big(z,d(x)\big)\to E(y,z)\Big)\Big)\Bigg)$.
3) $\overline{\forall x\, P(x)\to\exists y\, P(y)}$.

28. $\mathfrak{A}$ — «Каждый, кто хранит деньги, получает проценты». $\mathfrak{B}$ — «Если не выплачиваются никакие проценты, то никто не хранит деньги». Пусть $S(x,y)$ — «x хранит y», $M(x)$ — «x — деньги», $I(x)$ — «x — проценты», $E(x,y)$ — «x получает y». Записать символически $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Найти стандартные формы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

29. Определить, унифицируемо ли каждое из следующих множеств. Если да, то получить наиболее общий унификатор.
1) $\{Q(a),\ Q(b)\}$.
2) $\{Q(a,x),\ Q(a,a)\}$.
3) $\big\{Q\big(a,x,f(x)\big),\ Q(a,y,y)\big\}$.
4) $\big\{Q(x,y,z),\ Q\big(u,h(v),u\big)\big\}$.
5) $\big\{P\big(x_1,d(x_1),x_2,h(x_1,x_2),x_3,k(x_1,x_2,x_3)\big),\ P\big(y_1,y_2,e(y_2),y_3,f(y_2,y_3),y_4\big)\big\}$.

30. Найти все возможные резольвенты (если есть) следующих пар дизъюнктов:
1) $\mathfrak{C}=\overline{P(x)}\vee Q(x)$, $\mathfrak{D}=\overline{P(a)\vee Q(b)}$.
2) $\mathfrak{C}=\overline{P(x)}\vee Q(x,x)$, $\mathfrak{D}=\overline{Q\big(a,f(a)\big)}$.
3) $\mathfrak{C}=\overline{P(x,y,u)}\vee\overline{P(y,z,v)}\vee P(x,v,w)\vee P(u,z,w)$, $\mathfrak{D}=P\big(g(x,y),x,y\big)$.
4) $\mathfrak{C}=\overline{P(v,z,v)}\vee P(w,z,w)$, $\mathfrak{D}=P\big(w,h(x,x),w\big)$.

31. Доказать методом резолюций, что формула $\overline{P}$ выводима из $P\to Q$ и $\overline{Q}$.

32. Доказать методом резолюций, что $\overline{\mathfrak{B}}$ выводима из формул $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_3$, причём $\mathfrak{A}_1=P\to\big(\overline{Q}\vee(R\ \&\ S)\big)$, $\mathfrak{A}_2=P$, $\mathfrak{A}_3=\overline{S}$, $\mathfrak{B}=Q$.

33. Доказать методом резолюций, что формула $\exists x\big(O(x)\ \&\ R(x)\big)$ является логическим следствием формул $\forall x\Big(C(x)\to\big(W(x)\ \&\ P(x)\big)\Big)$ и $\exists x\big(C(x)\ \&\ O(x)\big)$.

34. Доказать методом резолюций, что $\overline{B}$ выводима из формул $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_3$, причём $\mathfrak{A}_1=\forall x\Big(\big(E(x)\&\overline{V(x)}\big)\to\exists y\big(S(x,y)\&C(y)\big)\Big)$, $\mathfrak{A}_2=\exists x\Big(P(x)\&E(x)\&\forall y\big(S(x,y)\to P(y)\big)\Big)$, $\mathfrak{A}_3=\forall x\big(P(x)\to\overline{V(x)}\big)$, $\mathfrak{B}=\exists x\big(P(x)\ \&\ C(x)\big)$.

35. Заданы предикаты $P(x,y,z)$ — «z — наибольший общий делитель x и y» и $G(x,y)$ — «x больше y», а также функция вычитания $d(x,y)=x-y$. Алгоритм Евклида задан следующими формулами логики предикатов:

$\mathfrak{A}_1=\forall x\, P(x,x,x)$,

$$\mathfrak{A}_2 = \forall x \forall y \forall z \Big(G(x,y) \,\&\, P\big(d(x,y), y, z\big) \to P(x,y,z) \Big),$$
$$\mathfrak{A}_3 = \forall x \forall y \forall z \Big(G(y,x) \,\&\, P\big(x, d(y,x), z\big) \to P(x,y,z) \Big).$$

Доказать, что $P(6,4,z)$ выводима из $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_3$ при $z = 2$.

36. Некоторые пациенты любят своих докторов. Ни один пациент не любит знахаря. Следовательно, ни какой доктор не является знахарем. Доказать это с помощью метода резолюций.

37. Каждый, кто хранит деньги, получает проценты. Значит, если не существует процентов, то никто не хранит денег. Доказать это с помощью метода резолюций.

38. Студенты — граждане. Значит, голоса студентов есть голоса граждан. Доказать это с помощью метода резолюций.

39. Если конгресс отказывается принять новые законы, то забастовка не будет окончена, если только она не длится более года и президент не уйдёт в отставку. Закончится ли забастовка, если конгресс отказывается действовать и забастовка только что началась. Проверить это с помощью метода резолюций.

40. Если кто-то в Белгороде, то он не в Москве. Василий в Белгороде. Находится ли он в Москве? Проверить это с помощью метода резолюций.

41. Идёт дождь или жарко. Если дождь идёт, то жарко. Если не идёт дождь, то не жарко. Верно ли, что если жарко, то не должен идти дождь? Проверить это с помощью метода резолюций.

42. Шутят для того, чтобы забавлять. Никакое постановление думы не является шуткой. Верно, ли, что никакое постановление думы не издано для того, чтобы забавлять? Проверить это с помощью метода резолюций.

43. Каждый, кто въехал в нашу страну и не был высокопоставленным лицом, подвергался досмотру. Уильям — торговец наркотиками. Уильям въехал в нашу страну. Уильяма досматривали только торговцы наркотиками. Никакой торговец наркотиками не был высокопоставленным лицом. Найти человека, который был и торговцем наркотиками, и таможенником с помощью метода резолюций.

44. Все студенты нашей группы — члены клуба «Спартак». Каждый член клуба «Спартак» занимается спортом. Следовательно, все студенты нашей группы занимаются спортом. Доказать это с помощью метода резолюций.

45. Все студенты нашей группы — болельщики «Спартака», причём некоторые занимаются спортом. Следовательно, некоторые из болельщиков «Спартака» занимаются спортом. Доказать это с помощью метода резолюций.

46. Если деталь обрабатывалась на токарном станке, то она обрабатывалась и на фрезерном. Деталь d обрабатывалась на токарном станке. Следовательно, она обрабатывалась и на фрезерном станке. Доказать это с помощью метода резолюций.

47. Если кто-нибудь может решить эту задачу, то и любой математик может её решить. Олег — математик, но не может решить эту задачу. Следовательно, задачу не сможет решить никто. Доказать это с помощью метода резолюций.

48. Всякий, кто может решить эту задачу — математик. Олег — математик, но не может решить эту задачу. Следовательно, задачу не может решить никто. Доказать это с помощью метода резолюций.

49. Если кто-нибудь может решить эту задачу, то и какой-нибудь математик может её решить. Олег — математик, но не может решить задачу. Следовательно, задачу не может решить никто. Доказать это с помощью метода резолюций.

50. Некоторые из первокурсников знакомы со всеми спортсменами института. Ни один первокурсник не знаком ни с одним любителем подлёдного лова. Следовательно, ни один спортсмен не является любителем подлёдного лова. Доказать это с помощью метода резолюций.

51. Каждый из первокурсников знаком с кем-либо из спортсменов. Некоторые из первокурсников не знакомы ни с одним любителем подлёдного лова. Следовательно, ни один спортсмен не является любителем подлёдного лова. Доказать это с помощью метода резолюций.

52. Если подозреваемый совершил эту кражу, то она была тщательно подготовлена или он имел соучастника. Если бы кража была тщательно подготовлена, то если бы он имел соучастника, был бы украден дорогой сервиз. Сервиз остался на месте. Следовательно, подозреваемый невиновен. Доказать это с помощью метода резолюций.

53. В бюджете возникнет дефицит, если не повысят пошлины. Если в бюджете возникнет дефицит, то расходы на социальные нужды сократятся. Следовательно, если повысят пошлины, то расходы на социальные нужды не сократятся. Доказать это с помощью метода резолюций.

54. Намеченная атака удастся, если захватить противника врасплох или его позиции плохо защищены. Захватить противника врасплох можно, если он беспечен. Противник не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Следовательно, намеченная атака не удастся. Доказать это с помощью метода резолюций.

55. Если губернатор не имеет соответствующего авторитета или если он не желает принимать на себя ответственность, то порядок не будет восстановлен и волнения не прекратятся до тех пор, пока участникам волнений это не надоест, и власти не начнут примирительные действия. Следовательно, если губернатор не желает взять на себя ответственность и участникам волнений это не надоест, то волнения не прекратятся. Доказать это с помощью метода резолюций.

56. Членом правления клуба может быть каждый совершеннолетний член клуба. Игорь и Андрей — члены клуба. Игорь — совершеннолетний, а Андрей старше Игоря. Следовательно, Андрей может быть членом правления клуба. Доказать это с помощью метода резолюций.

57. Таможенные чиновники обыскивают всякого, кто въезжает в страну, кроме высокопоставленных лиц. Некоторые люди, способствующие провозу наркотиков, въезжали в страну и были обысканы исключительно людьми, также способствовавшими провозу наркотиков. Никто из высокопоставленных лиц не способствовал провозу наркотиков. Следовательно, некоторые из таможенников способствовали провозу наркотиков. Доказать это с помощью метода резолюций.

58. Любой человек смертен. Конфуций — человек. Смертен ли Конфуций? Определить это с помощью метода резолюций.

Лабораторная работа № 3

Формальные теории

Задания к выполнению лабораторной работы

Теоретическая часть

Решить задачи к теоретической части согласно своему варианту.

Номер варианта	Номера задач для теоретической части			
1	2.2	12.3	15.1	20.1
2	2.3	12.4	15.2	20.2
3	2.4	12.5	15.3	20.3
4	4.1	12.6	15.4	20.4
5	4.2	12.7	15.5	20.5
6	4.3	12.8	15.6	20.6
7	4.5	12.9	15.7	20.7
8	6.1	12.10	15.8	20.8
9	6.2	12.11	15.9	20.9
10	6.3	12.12	15.10	20.10
11	6.4	12.13	15.11	20.11
12	9.2	12.14	15.12	20.12
13	9.3	12.15	15.13	20.13
14	9.4	12.16	15.14	20.14
15	9.5	12.17	15.15	20.15
16	9.6	12.18	15.16	20.16
17	9.7	12.19	15.17	20.17
18	9.8	12.20	15.18	20.18
19	10.1	12.21	15.19	20.19
20	10.2	12.22	15.20	20.20
21	10.3	13.1	15.21	20.21
22	5.1	13.2	15.22	20.22
23	5.2	13.3	15.23	20.23
24	14.1	13.4	15.24	20.24
25	14.2	13.5	15.25	20.25
26	14.3	13.6	15.26	20.26
27	14.4	13.7	15.27	20.27
28	14.5	13.8	15.28	20.28
29	12.1	13.9	15.29	20.29
30	12.2	13.10	15.30	20.30

Практическая часть

Разработать программный модуль, способный находить совершенную форму формулы логики высказываний. Разработать программу, способную считывать формулу логики высказываний в одной из нормальных форм (по выбору пользователя) и находить совершенную нормальную форму этой формулы. При решении задачи воспользоваться разработками предыдущих лабораторных работ.

Содержание отчёта

1) Название и цель лабораторной работы.
2) Решение предложенных в теоретической части задач.
3) Программа на выбранном языке программирования в виде исходных кодов (с поясняющими комментариями) и в электронном варианте для демонстрации на ЭВМ.
4) Спецификация программы с указанием основных структур данных и алгоритмов.
5) Примеры работы программы на тестовых данных.

Задачи к теоретической части

1. Доказать, что $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

2. Доказать, что

1) $A \to B \vdash \overline{B} \to \overline{A}$.
2) $\overline{B} \to \overline{A} \vdash A \to B$.
3) $\vdash (A \to B) \,\&\, (\overline{B} \to \overline{A})$.
4) $\vdash (A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$.

3. Проверить правильность рассуждения:

Данный треугольник прямоугольный или правильный. Если треугольник правильный, то он равносторонний. Данный треугольник не является прямоугольным. Следовательно, он равносторонний и правильный.

4. Проверить правильность вывода:

1) $X \vee Y \vee Z, \overline{X} \,\&\, \overline{Z}, X \vee Y \to \overline{Z} \vdash \overline{Z} \,\&\, Y$.
2) $\overline{X} \to \overline{Y}, \overline{Z} \,\&\, \overline{Y}, Y \vdash X \vee \overline{Z}$.
3) $\overline{X} \to Y, Z \to \overline{Y}, \overline{Z}, Y, X \vdash X \vee Z$.
4) $X \to Y, X, Y \to Z \vdash Y \,\&\, (X \to Z)$.
5) $X \,\&\, Y \to Z, X, \overline{Z}, X \,\&\, \overline{Z}, X \,\&\, \overline{Z} \to \overline{Y}, X \vee \overline{Z} \vdash \overline{Y}$.

5. Проверить правильность вывода в исчислении высказываний:

1) Данная система линейных уравнений несовместна или имеет единственное решение. Если ранг матрицы системы не совпадает с рангом её расширенной матрицы, то система несовместна. Система несовместна. Следовательно, её ранги не совпадают.

2) Алексей старше Бориса или Борис старше Владимира. Однако, Борис не старше Владимира. Следовательно, Алексей старше Бориса.

6. Вывести в исчислении высказываний:

1) $A \to A$.
2) $(A \vee A) \to A$.
3) $A \to \overline{\overline{A}}$.

4) $\overline{\overline{A}} \to A$.
5) $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$.

7. Доказать, что $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}$.

8. Доказать, что множество формул Γ непротиворечиво тогда и только тогда, когда существует формула, не выводимая в исчислении высказываний из Γ.

9. Доказать в исчислении высказываний:

1) $\Gamma, \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$.
2) $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$.
3) $\Gamma, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$.
4) Если $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ и $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \overline{\mathfrak{B}}$, то $\Gamma \vdash \overline{\mathfrak{A}}$.
5) $\Gamma, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A}$.
6) $\Gamma, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{B}$.
7) Если $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C}$ и $\Gamma, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$, то $\Gamma, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$.
8) $\Gamma, \overline{\overline{\mathfrak{A}}} \vdash \mathfrak{A}$.

10. Доказать, что

1) Все аксиомы исчисления высказываний тождественно истинны;
2) Все правила вывода сохраняют тождественную истинность формул;
3) Все выводимые в исчислении высказываний формулы тождественно истинны.

11. Найти такие формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в исчисления высказываний, что из выводимости $\mathfrak{A}$ следует выводимость $\mathfrak{B}$, но неверно, что $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$.

12. Доказать, что следующие формулы выводимы в исчислении высказываний.
Указание: для доказательства $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ необходимо доказать, что $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A}$.

1) $A \,\&\, (B \,\&\, C) \equiv (A \,\&\, B) \,\&\, C$.
2) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$.
3) $A \,\&\, B \equiv B \,\&\, A$.
4) $A \vee B \equiv B \vee A$.
5) $A \,\&\, (B \vee C) \equiv (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$.
6) $A \vee (B \,\&\, C) \equiv (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$.
7) $(A \,\&\, A) \equiv A$.
8) $A \vee A \equiv A$.
9) $A \vee (A \,\&\, B) \equiv A$.
10) $A \,\&\, (B \vee A) \equiv A$.
11) $\overline{\overline{A}} \equiv A$.
12) $\vdash \overline{A \,\&\, \overline{A}}$.
13) $\vdash A \vee \overline{A}$.
14) $A \,\&\, B \equiv \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$.
15) $A \vee B \equiv \overline{\overline{A} \,\&\, \overline{B}}$.
16) $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$.
17) $A \to B \equiv \overline{A \,\&\, \overline{B}}$.
18) $A \,\&\, B \equiv \overline{A \to \overline{B}}$.
19) $A \vee B \equiv \overline{A} \to B$.
20) $\overline{A \,\&\, B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$.
21) $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \,\&\, \overline{B}$.
22) $\overline{\overline{\overline{A}}} \equiv \overline{A}$.

13. Используя теорему о дедукции доказать, что:

1) $A \to B, B \leftrightarrow C \vdash A \to C$.
2) $\vdash (B \to C) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$.
3) $\vdash \big(A \to (A \to B)\big) \to (A \to B)$.
4) $\vdash \big(A \to (B \to C)\big) \to \big(B \to (A \to C)\big)$.
5) $\vdash A \to (B \to A)$.
6) $\vdash \big((A \to B) \to A\big) \to A$.
7) $\vdash \big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$.
8) $\vdash (A \to B) \lor (B \to A)$.
9) $(A \to B) \to C \vdash B \to C$.
10) $\big((A \to B) \to C\big) \to A \vdash C \to A$.
11) $C \to A \vdash \big((A \to B) \to C\big) \to A$.

14. Доказать выводимость:

1) $(A \,\&\, B) \to C \vdash A \to (B \to C)$.
2) $A \to (B \to C) \vdash (A \,\&\, B) \to C$.
3) $\vdash (A \lor B) \to \big((A \to B) \to B\big)$.
4) $\vdash (A \to B) \lor (B \to A)$.
5) $A \lor B, \overline{B} \lor C \vdash A \lor C$.
6) $\overline{A \to B} \vdash A \,\&\, \overline{B}$.
7) $\overline{A \to B} \vdash A \to \overline{B}$.
8) $A \to C, B \to D, A \lor B \vdash C \lor D$.

15. Построить выводы в различных исчислениях высказываний:

1) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$.
2) $\vdash (B \to C) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$.
3) $\vdash \big(A \to (A \to B)\big) \to (A \to B)$.
4) $\vdash \big(A \to (B \to C)\big) \to \big(B \to (A \to C)\big)$.
5) $\vdash A \to (B \to C)$.
6) $\vdash \big((A \to B) \to A\big) \to A$.
7) $\vdash \big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$.
8) $A \,\&\, B \vdash B \,\&\, A$.
9) $A \,\&\, (B \,\&\, C) \vdash (A \,\&\, B) \,\&\, C$.
10) $(A \,\&\, B) \to C \vdash A \to (B \to C)$.
11) $A \to (B \to C) \vdash (A \,\&\, B) \to C$.
12) $A \lor (B \lor C) \vdash (A \lor B) \lor C$.
13) $\vdash (A \lor B) \to \big((A \to B) \to B\big)$.
14) $\vdash A \lor \overline{A}$.
15) $A \to B, A \to \overline{B} \vdash \overline{A}$.
16) $\overline{A \,\&\, \overline{B}} \vdash A \to B$.
17) $\overline{A \to \overline{B}} \vdash A \,\&\, B$.
18) $A \to B \vdash \overline{B} \to \overline{A}$.
19) $\overline{B} \to \overline{A} \vdash A \to B$.
20) $A \to C, B \to D, A \lor B \vdash C \lor D$.
21) $A \lor B, \overline{B} \lor C \vdash A \lor C$.
22) $\overline{A \to B} \vdash A \,\&\, \overline{B}$.
23) $\overline{A \to B} \vdash A \to \overline{B}$.
24) $\vdash (A \to B) \lor (B \to A)$.
25) $\vdash \big((A \to B) \to (B \to A)\big) \to (B \to A)$.

26) $\vdash \overline{A} \vee \overline{\overline{A}}$.
27) $(A \to B) \to C \vdash B \to C$.
28) $\big((A \to B) \to C\big) \to A \vdash C \to A$.
29) $C \to A \vdash \big((A \to B) \to C\big) \to A$.
30) $\vdash \big((A \to B) \to A\big) \to A$.

16. Вывести $C \vee D$ из посылок $A \to C$, $B \to D$, $A \vee B$.

17. Вывести $\big(A \to (B \to C)\big) \to \big(B \to (A \to C)\big)$.

18. Вывести заключение из посылок.

П о с ы л к и:

1) Мери бросила Джона и уехала в Россию или Израиль.
2) Если Мери уехала в Россию, то её арестовала ФСБ.
3) Если Мери уехала в Израиль, то её арестовал Мосад.
4) Мери не арестовали ни Мосад, ни ФСБ.

З а к л ю ч е н и е: Это лживая выдумка (т. е. посылки несовместимы).

19. Вывести $\big((A \to B) \to A\big) \to A$.

20. Доказать в исчислении предикатов:

1) $\exists x \forall y\, A(x,y) \vdash \forall y \exists x\, A(x,y)$.
2) $\exists x\big(A(x) \vee B(x)\big) \vdash \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$.
3) $\exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \vdash \exists x\big(A(x) \vee B(x)\big)$.
4) $\forall x\big(A(x) \to C\big) \vdash \exists x\, A(x) \to C$.
5) $\exists x\, A(x) \to C \vdash \forall x\big(A(x) \to C\big)$.
6) $\exists x\big(A(x) \to B(x)\big) \vdash \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$.
7) $\forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x) \vdash \exists x\big(A(x) \to B(x)\big)$.
8) $\exists x\, A(x) \to \exists x\, B(x) \vdash \exists x\big(A(x) \to B(x)\big)$.
9) $\forall x\, \overline{A(x)} \vdash \overline{\exists x\, A(x)}$.
10) $\overline{\forall x\, A(x)} \vdash \exists x\, \overline{A(x)}$.
11) $\exists x\, A(x) \vdash \overline{\forall x\, \overline{A(x)}}$.
12) $\overline{\forall x\, \overline{A(x)}} \vdash \exists x\, A(x)$.
13) $\vdash \forall x\big(\overline{A(x) \,\&\, \overline{A(x)}}\big)$.
14) $\vdash \forall x\big(A(x) \vee \overline{A(x)}\big)$.
15) $\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) \vdash \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$.
16) $\vdash \forall x\, A(x) \to \exists x\, A(x)$.
17) $\forall x \forall y\, A(x,y) \vdash \forall x\, A(x,x)$.
18) $\exists x\, A(x,x) \vdash \exists x \exists y\, A(x,y)$.
19) $\exists x\, \overline{\overline{A(x)}} \vdash \overline{\overline{\exists x\, A(x)}}$.
20) $\exists x\big(A(x) \to B(x)\big) \vdash \exists x \exists y\big(A(x) \to B(y)\big)$.
21) $\exists x \exists y\big(A(x) \to B(y)\big) \vdash \exists x\big(A(x) \to B(x)\big)$.
22) $\forall x\, A(x) \,\&\, \forall x\, B(x) \vdash \forall x\big(A(x) \,\&\, B(x)\big)$.
23) $\forall x\big(A(x) \,\&\, B(x)\big) \vdash \forall x\, A(x) \,\&\, \forall x\, B(x)$.
24) $\exists x\big(A(x) \,\&\, B(x)\big) \vdash \exists x\, A(x) \,\&\, \exists x\, B(x)$.
25) $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \vdash \forall x\big(A(x) \vee B(x)\big)$.
26) $\exists x\big(A(x) \to B(x)\big) \vdash \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$.
27) $\forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x) \vdash \exists x\big(A(x) \to B(x)\big)$.
28) $\exists x\, A(x) \to \forall x\, B(x) \vdash \forall x\big(A(x) \to B(x)\big)$.
29) $\forall x\big(A(x) \leftrightarrow B(x)\big) \vdash \exists x\, A(x) \leftrightarrow \exists x\, B(x)$.
30) $\forall x\big(A(x) \leftrightarrow B(x)\big) \vdash \forall x\, A(x) \leftrightarrow \forall x\, B(x)$.

Лабораторная работа № 4

Теория алгоритмов

Номер варианта	Номера задач			
1	1	17	61	65.4
2	2	18	35	67.2
3	3	19	56	67.4
4	4	20	37	68.4
5	5	21	36	68.7
6	6	22	33	68.8
7	7	23	42	67.1
8	8	24	46	66.9
9	9	25	52	69.1
10	10	26	34	66.5
11	11	27	40	68.3
12	12	28	58	66.6
13	13	29	55	67.3
14	14	30	59	66.2
15	15	31	53	66.7
16	16	32	54	65.1
17	15	31	49	70.2
18	14	30	41	65.2
19	13	29	45	68.5
20	12	28	44	65.3
21	11	27	50	66.8
22	10	26	57	68.1
23	9	25	62	69.2
24	8	24	43	68.2
25	7	23	38	70.1
26	6	22	48	68.6
27	5	21	60	66.3
28	4	20	47	66.4
29	3	19	51	69.3
30	2	18	39	66.1

Задания к выполнению лабораторной работы

Теоретическая часть

Решить задачи из лабораторного практикума по математической логике согласно своему варианту. Для построения машин Тьюринга и Поста воспользоваться программным эмулятором Algo2000 или аналогичным.

Практическая часть

Разработать программу на языке Brainfuck, решающую вторую задачу теоретической части данной лабораторной работы. Для выполнения программы воспользоваться интерпретатором языка Brainfuck. При написании программы допустимо пользоваться процедурными расширениями языка.

Содержание отчёта

1. Название и цель лабораторной работы.
2. Описание построенных при решении задач машин Тьюринга и Поста в виде таблицы состояний (либо набора правил), а также в электронном виде для демонстрации работы на программном эмуляторе. Для машины Тьюринга построить граф переходов. Представить словесное описание алгоритма работы построенных машин. Граф и таблица (набор правил) должны сопровождаться поясняющими комментариями.
3. Решение задачи из раздела «Частично рекурсивные функции».
4. Программа на языке Brainfuck в виде исходных кодов (с поясняющими комментариями), а также в электронной форме для демонстрации на интерпретаторе.

Задания

Машина Тьюринга

1. На информационной ленте машины Тьюринга содержится массив символов «`+`» (здесь и далее без кавычек). Необходимо разработать функциональную схему машины Тьюринга, которая каждый второй символ «`+`» заменит на «`-`». Головка в состоянии q_0 находится над одним из символов указанного массива.

2. На информационной ленте машины Тьюринга в трёх ячейках в произвольном порядке записаны три цифры «`1`», «`2`», «`3`» (без кавычек). Головка обозревает крайнюю левую цифру. Необходимо составить функциональную схему машины Тьюринга, которая расположит эти цифры в порядке возрастания.

3. Даны два натуральных числа n и m, представленные в унарной системе счисления. Между этими числами стоит знак «`?`» (здесь и далее без кавычек). Выяснить отношение m и n, т. е. заменить знак «`?`» на один из подходящих знаков «`>`», «`<`», «`=`».

4. Дан номер года. Определить, високосный он или нет.

5. На информационной ленте машины Тьюринга находится массив, состоящий только из символов «`A`» (здесь и далее без кавычек) и «`B`». Сжать массив, удалив из него все элементы «`B`».

6. На ленте машины Тьюринга находится десятичное число. Определить, делится это число на 5 без остатка. Если делится, то записать справа от числа слово «да» (здесь и далее без кавычек), если нет — «нет». Головка находится над одной из цифр числа.

7. На информационной ленте машины Тьюринга в трёх ячейках в произвольном порядке записаны три различные буквы: «A» (здесь и далее без кавычек), «B» и «C». Головка в состоянии q_0 обозревает крайнюю справа букву. Необходимо составить функциональную схему машины Тьюринга, которая сумеет поменять местами крайние буквы.

8. Дана строка из букв «a» (здесь и далее без кавычек) и «b». Разработать машину Тьюринга, которая переместит все буквы «a» в левую, а буквы «b» — в правую части строки. Головка находится над крайним левым символом строки.

9. На ленте машины Тьюринга записано число в десятичной системе счисления. Головка находится над крайней правой цифрой. Записать цифры этого числа в обратном порядке.

10. Дано число n в восьмеричной системе счисления. Разработать машину Тьюринга, которая увеличивала бы заданное число n на 1.

11. На ленте машины Тьюринга находится число, записанное в десятичной системе счисления. Умножить это число на 2, если головка находится над крайней левой цифрой числа.

12. Дана десятичная запись натурального числа $n > 1$. Разработать машину Тьюринга, которая уменьшала бы заданное число n на 1. При этом запись числа $n - 1$ не должна содержать левый нуль, например, $100 - 1 = 99$, а не 099. Начальное положение головки — крайняя правая цифра.

13. У каждого слова длиной более трёх символов в алфавите $\mathscr{A} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}\}$ стереть три последних символа, а слова меньшей длины переработать в пустое слово.

14. Распознать, является ли слово на информационной ленте машины Тьюринга палиндромом.

15. Найти для натурального n (в двоичном представлении) значение $n + 1$ (также двоичное).

16. Проверить, даёт ли длина слова при делении на 3 остаток 2.

17. Реализовать функцию $f(x) = x'$, где x' — обращение слова x.

18. Реализовать функцию $f(x) = xx'$, где x' — обращение слова x.

19. Найти произведение двух натуральных чисел m и n, заданных в унарной системе счисления. Соответствующие наборы символов «1» (здесь и далее без кавычек) разделены знаком «*», а справа от последнего символа правого члена стоит знак «=». Поместить результат умножения этих чисел вслед за знаком «=».

20. На информационной ленте машины Тьюринга находится массив из $2 \cdot N$ меток. Уменьшить этот массив в 2 раза.

21. На информационной ленте машины Тьюринга находится десятичное число. Найти результат целочисленного деления этого числа на 2.

22. На ленте машины Тьюринга находится слово, состоящее из букв латинского алфавита. Подсчитать число букв «a» (без кавычек) в данном слове и полученное значение записать на ленту левее исходного слова через пробел. Головка обозревает крайнюю левую букву.

23. На ленте машины Тьюринга находится целое положительное число, записанное в десятичной системе счисления. Найти произведение этого числа на число 11. Головка обозревает крайнюю правую цифру числа.

24. Даны два натуральных числа n и m, заданных в унарной системе счисления. Числа n и m представлены наборами символов «`1`» (здесь и далее без кавычек), разделённых символом «`\`». В конце набора стоит символ «`=`». Разработать машину Тьюринга, которая будет производить деление нацело двух натуральных чисел n и m и находить остаток от деления. При этом результат должен быть записан следующим образом: после «`=`» должен находиться набор символов «`1`» частного (он может быть и пустым), после чего ставится знак «`(`», за которым следует набор символов «`1`» остатка от деления n на m.

25. Дан массив из открывающихся и закрывающихся скобок. Построить машину Тьюринга, которая удаляла бы пары взаимных скобок, ставя на их месте символы «`.`» (здесь и далее без кавычек). Например, если дано слово «`)(()(()`», то его надо преобразовать в слово «`)...((.`».

26. Даны два целых положительных числа в десятичной системе счисления. Сконструировать машину Тьюринга, которая будет находить разность этих чисел, если известно, что первое число больше второго, а между ними стоит знак «`-`» (без кавычек). Головка находится над крайней левой цифрой первого числа.

27. Даны два целых положительных числа в различных системах счисления, одно — в троичной системе, другое — в десятичной. Разработать машину Тьюринга, которая будет находить сумму этих чисел в десятичной системе счисления.

28. Сконструировать машину Тьюринга, которая выполняет функции двоично-восьмиричного дешифратора.

29. Дана конечная последовательность меток, записанных в ячейки ленты подряд, без пропусков. Необходимо разработать машину Тьюринга, которая будет записывать в десятичной системе счисления число этих меток.

30. Даны два натуральных числа m и n, представленных в унарной системе счисления. Соответствующие наборы символов «`1`» (здесь и далее без кавычек) разделены «`-`», вслед за последним символом набора n стоит знак «`=`». Разработать машину Тьюринга, которая будет находить разность чисел m и n. При этом результат должен быть записан следующим образом: если $m > n$, то справа от «`=`» должны стоять знак «`+`» и набор символов «`1`» в количестве $m - n$; если $m = n$, то справа от знака «`=`» должна стоять пустая ячейка; если $m < n$, то справа от «`=`» должны стоять знак «`-`» и набор символов «`1`» в количестве $n - m$.

31. Построить машину Тьюринга, которая распознаёт, является ли слово x началом слова y.

32. Построить машину Тьюринга, которая находит наибольшее общее начало слов x и y.

Машина Поста

33. На ленте машины Поста расположен массив из N меток. Составить программу, действуя по которой машина выяснит, делится ли число на 3. Если да, то после массива через одну пустую ячейку поставить метку.

34. На ленте машины Поста расположен массив из N отмеченных ячеек. Необходимо справа от данного массива через одну пустую ячейку разместить массив вдвое больший (он должен состоять из $2 \cdot N$ меток). При этом исходный массив может быть стёрт.

35. Число k представлено на ленте машины Поста $k+1$ идущими подряд метками. Найти остаток от деления целого неотрицательного числа k на 3, если известно, что головка находится справа от заданного числа.

36. На ленте машины Поста расположен массив из N меток (метки расположены через пробел). Нужно сжать массив так, чтобы все N меток занимали N расположенных подряд ячеек.

37. Число k представляется на ленте машины Поста $k + 1$ идущими подряд метками. Одна метка соответствует нулю. Составить программу копирования исходного числа и прибавления к нему единицы. Головка расположена над одной из меток, принадлежащих заданному числу k. При этом исходное число должно остаться на ленте.

38. На информационной ленте машины Поста расположено N массивов меток, отделённых друг от друга свободной ячейкой. Головка находится над крайней левой меткой первого массива. Определить количество массивов.

39. На ленте машины Поста расположен массив из N меток. Составить программу, действуя по которой машина выяснит, делится ли число на 3. Если да, то в исходном массиве удаляются метки через одну.

40. Составить программу нахождения разности двух неотрицательных целых чисел a и b, находящихся на ленте машины Поста. Головка находится над левой меткой первого числа. Неизвестно, какое число больше: a или b.

41. На информационной ленте машины Поста находится массив меток. Головка находится где-то над массивом (но не над крайней меткой). Удалить все метки, кроме крайних, таким образом, чтобы положение головки при этом не изменилось.

42. На ленте машины Поста расположен массив из $2 \cdot N$ отмеченных ячеек. Составить программу, по которой машина Поста раздвинет на расстояние в одну ячейку две равные части данного массива.

43. На ленте машины Поста расположен массив из N меток. Составить программу, действуя по которой машина выяснит, является ли число N чётным. Если да, то после массива через одну пустую ячейку поставить метку.

44. На ленте машины Поста расположен массив из $2 \cdot N - 1$ меток. Составить программу отыскания средней метки массива и стирания её.

45. На ленте машины Поста расположен массив из N меток. Составить программу, действуя по которой машина выяснит, является ли число N нечётным. Если да, то после массива через одну пустую ячейку поставить метку.

46. На информационной ленте либо вправо, либо влево от ячейки, над которой расположена головка, находится массив меток. Расстояние до массива выражается конечным числом. Необходимо составить программу, работая по которой машина Поста найдёт этот массив и установит головку на начало этого массива.

47. На ленте машины Поста расположен массив из N меток. Составить программу, действуя по которой машина выяснит, делится ли число на 3. Если да, то в исходном массиве удаляются метки через две ячейки.

48. На ленте машины Поста находится n массивов меток, после последнего массива на расстоянии более трёх пустых ячеек находится одна метка. Массивы разделены тремя пустыми ячейками. Количество меток в массивах не может быть меньше двух. Произвести обработку массивов следующим образом: если количество меток в массиве кратно 3, то стереть метки в данном массиве через одну, иначе массив стереть полностью. Головка находится над крайней левой меткой первого массива.

49. На ленте машины Поста расположен массив из N меток. Составить программу, действуя по которой машина выяснит, делится ли число на 5. Если да, то после массива через одну пустую ячейку поставить метку.

50. На ленте машины Поста расположен массив из N отмеченных ячеек. Необходимо справа от данного массива через одну пустую ячейку разместить массив вдвое больший (он состоять из $2 \cdot N$ меток). При этом исходный массив должен остаться на месте.

51. На ленте машины Поста расположен массив из N меток. Составить программу, действуя по которой машина выяснит, делится ли число на 6. Если да, то после массива через одну пустую ячейку поставить метку.

52. На ленте машины Поста расположен массив из N отмеченных ячеек. Необходимо справа от данного массива через несколько пустых ячеек разместить массив вдвое больший (он состоять из $2 \cdot N$ меток), причём метки второго массива должны располагаться по две через одну пустую ячейку. При этом исходный массив должен остаться на месте.

53. Число k представлено на ленте машины Поста $k+1$ идущими подряд метками. Найти остаток от деления целого неотрицательного числа k на 2, если известно, что головка находится справа от заданного числа.

54. На ленте машины Поста расположен массив из N отмеченных ячеек. Необходимо справа от данного массива через одну пустую ячейку разместить массив втрое больший (он состоять из $3 \cdot N$ меток). При этом исходный массив может быть стёрт.

55. Дан массив меток. Головка обозревает первую пустую ячейку перед началом массива. Раздвиньте массив так, чтобы после каждой метки была пустая ячейка.

56. На ленте машины Поста расположен массив в N отмеченных ячеек. Необходимо справа от данного массива через одну пустую ячейку разместить массив втрое больший (он состоять из $3 \cdot N$ меток). При этом исходный массив должен остаться на месте.

57. На ленте машины Поста расположен массив из N меток. Составить программу, действуя по которой машина выяснит, является ли число чётным. Если да, то в исходном массиве удаляются метки через одну.

58. На ленте машины Поста расположен массив из N отмеченных ячеек. Необходимо справа от данного массива через несколько пустых ячеек разместить число $M = 2 \cdot N + 1$ в виде массива из $2 \cdot N + 1$ меток и проверить, делится ли M на 3. Если да, то после числа через одну пустую ячейку поставить две метки, если нет — поставить одну метку. При этом исходный массив может быть стёрт.

59. На ленте массива Поста находится n массивов меток. Соседние массивы разделены тремя пустыми ячейками. Головка находится над одной из ячеек первого массива. Удалить все массивы с чётными номерами.

60. На ленте машины Поста расположен массив из N меток (метки расположены через две пустые ячейки). Нужно сжать массив так, чтобы все N меток занимали N расположенных подряд ячеек.

61. Число k представляется на ленте машины Поста $k + 1$ идущими подряд метками. Одна метка соответствует нулю. Составить программу копирования исходного числа так, чтобы во втором числе метки располагались на ленте через одну пустую ячейку. Головка расположена над одной из меток, принадлежащих заданному числу. При этом исходное число должно остаться на ленте.

62. На ленте машины Поста расположен массив из $2 \cdot N$ отмеченных ячеек. Составить программу, по которой машина Поста раздвинет на расстояние в 2 ячейки две равные части данного массива.

63. Число k представляется на ленте машины Поста $k+1$ идущими подряд метками. Одна метка соответствует нулю. Составить программу копирования исходного числа и прибавления к нему двух меток. Головка расположена над одной из меток, принадлежащих заданному числу. При этом исходное число должно остаться на ленте.

64. На ленте машины Поста расположен массив из $2 \cdot N + 1$ меток ($N > 1$). Составить программу отыскания и стирания трёх средних меток.

Частично рекурсивные функции

Во всех заданиях $x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant y, \\ x - y, & \text{если } x > y. \end{cases}$

65. Доказать, что если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ примитивно рекурсивна, то следующие функции примитивно рекурсивны:

1) $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$ — перестановка аргументов;
2) $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, \ldots, x_n, x_1)$ — циклическая перестановка аргументов;
3) $p(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — введение фиктивного аргумента;
4) $q(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ — отождествление аргументов.

66. Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

1) $f(x) = x + n$ (здесь n — константа);
2) $f(x) = n$ (здесь n — константа);
3) $f(x, y) = x + y$;
4) $f(x, y) = x \cdot y$;
5) $f(x) = 10^x$ (здесь $0^0 = 1$);
6) $f(x, y) = x^y$ (здесь $0^0 = 1$);
7) $f(x) = x!$ (здесь $0! = 1$);
8) $f(x) = x \dot{-} 2$;
9) $f(x) = 2^{x \dot{-} 1}$.

67. Определить функцию, которая получится с помощью схемы примитивной рекурсии:

1) $\begin{cases} f(x, 0) = x, \\ f(x, y+1) = x^{f(x,y)}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} f(x, 0) = x, \\ f(x, y+1) = \big(f(x, y)\big)^x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} g(x, 0) = 2, \\ g(x, y+1) = \big(g(x, y)\big)^2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} f(x, 0) = x, \\ f(x, y+1) = f(x, y) \cdot x. \end{cases}$

68. Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

1) $\min\{x, y\}$;
2) $\max\{x, y\}$;
3) $|x - y|$;
4) $\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$
5) $\overline{\mathrm{sg}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$
6) $f(x, y) = x \dot{-} y$;
7) $f(x, y) = 10^{y \dot{-} x}$;
8) $f(x, y) = y \dot{-} (y \dot{-} x)$.

69. Пусть g — примитивно рекурсивная функция. Доказать, что следующие функции являются примитивно рекурсивными.

1) $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \sum\limits_{i=0}^{x_{n+1}} g(x_1, \ldots, x_n, i)$;

2) $f(x_1, \ldots, x_n, y, z) = \begin{cases} \sum\limits_{i=y}^{z} g(x_1, \ldots, x_n, i), & \text{если } y \leqslant z, \\ 0, & \text{если } y > z; \end{cases}$

3) $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \prod\limits_{i=0}^{x_{n+1}} g(x_1, \ldots, x_n, i)$;

4) $f(x_1, \ldots, x_n, y, z) = \begin{cases} \prod\limits_{i=y}^{z} g(x_1, \ldots, x_n, i), & \text{если } y \leqslant z, \\ 0, & \text{если } y > z; \end{cases}$

70. Доказать, что частично рекурсивны следующие функции:

1) $f(x, y) = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geqslant y, \\ \text{не определена в остальных случаях;} \end{cases}$

2) $f(x, y) = \begin{cases} z, & \text{если } z^y = x, \\ \text{не определена в остальных случаях;} \end{cases}$

3) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & \text{если } y \text{ делит } x, \\ \text{не определена в остальных случаях.} \end{cases}$