Лабораторная работа №8

«Помехоустойчивое кодирование. Коды БЧХ»

Цель работы: научиться строить порождающий многочлен кода БЧХ с заданной корректирующей способностью.

1

Условие: Рассмотреть поле $GF(2^4)$; положить m = 4.

Решение:

Пусть q = 2, m = 4, тогда рассматривается поле $GF(q^m) = GF(2^4)$, значит требуемая длина кода будет равна: $n = 2^m - 1 = 2^4 - 1 = 15$

2

Условие: Разложить на неприводимые множители многочлен $x^{15} + 1$.

Решение:

$$x^{15} + 1 = (x^4 + x^3 + 1) * (x^4 + x + 1) * (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) * (x^2 + x + 1) * (x + 1)$$

3

Условие: Выбрать в качестве примитивного многочлена многочлен $x^4 + x + 1$. Убедиться в том, что его корень α – примитивный элемент поля $GF(2^4)$

Решение:

Выбираем многочлен $x^4 + x + 1$ в качестве примитивного. Убедимся, что α – примитивный элемент поля $GF(2^4)$: $\alpha^4 + \alpha + 1 = \alpha + 1 + \alpha + 1 = 0$

4

Условие: Выбрать t = 2 и рассмотреть элементы α, $\alpha^{2,}$ $\alpha^{3,}$ $\alpha^{4.}$

Решение:

$$\propto_3 x^3 + \propto_2 x^2 + \propto_1 x + \propto_0$$

Адаменко

Вычислим подряд все степени x:

$x^0 = 1$
$x^1 = x$
$x^2 = x^2$
$x^3 = x^3$
$x^4 = x + 1$
$x^5 = x^4x = x^2 + x$
$x^6 = x^5x = x^3 + x^2$
$x^7 = x^6x = x^4 + x^3 = x + 1 + x^3$
$x^8 = x^7x = x^2 + x + x^4 = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 1$
$x^9 = x^8x = x^3 + x$
$x^{10} = x^9x = x^4 + x^2 = x + 1 + x^2$
$x^{11} = x^{10}x = x^3 + x^2 + x$
$x^{12} = x^{11}x = x^4 + x^3 + x^2 = x + 1 + x^3 + x^2$
$x^{13} = x^{12}x = x^2 + x + x^4 + x^3 = x^2 + x + x + 1 + x^3 = x^2 + 1 + x^3$
$x^{14} = x^{13}x = x^3 + x + x^4 = x^3 + x + x + 1 = x^3 + 1$
$x^{15} = x^{14}x = x^4 + x = x + 1 + x = 1$
$x^{16} = x^{15}x = x$

Запишем в виде таблицы:

x^0	1
x^1	x
x^2	x^2
x^3	x^3
x^4	$x + 1$
x^5	$x^2 + x$
x^6	$x^3 + x^2$
x^7	$x^3 + x + 1$
x^8	$x^2 + 1$
x^9	$x^3 + x$
x^{10}	$x^2 + x + 1$
x^{11}	$x^3 + x^2 + x$
x^{12}	$x^3 + x^2 + x + 1$
x^{13}	$x^3 + x^2 + 1$
x^{14}	$x^3 + 1$
x^{15}	1
x^{16}	x

Все элементы – это корни многочлена $x^{15} + 1$

5

Условие: Найти в разложении $x^{15} + 1$ минимальные многочлены $f_j(x)$ такие, что $f_j(a^j) = 0$ для j = 1, 2, 3, 4.

Решение:

$$x^{15} + 1 = (x^4 + x^3 + 1) * (x^4 + x + 1) * (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) * (x^2 + x + 1) * (x + 1)$$

Выбираем минимальные многочлены:

$$f_1(x) = x^4 + x + 1 = x + 1 + x + 1 = 0$$
$$f_1(x^2) = (x^2)^4 + x^2 + 1 = x^2 + 1 + x^2 + 1 = 0$$
$$f_1(x^4) = (x^4)^4 + x^4 + 1 = x + x + 1 + 1 = 0$$
$$f_1(x^8) = (x^8)^4 + x^8 + 1 = 0$$

Первый минимальный найден:

$$f_1(x) = x^4 + x + 1$$

Найдём теперь многочлен, для которого x^3 является корнем:

$$f_2(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$
$$f_2(x^3) = (x^3)^4 + (x^3)^3 + (x^3)^2 + x^3 + 1 = x^3 + x^2 + x + 1 + x^3 + x + x^3 + x^2 + x^3 + 1 = 0$$

Корни $f_1(x)$: x, $x^{2,}$ $x^{4,}$ x^8

Корни $f_2(x)$: $x^{3,}$ $x^{6,}$ x^{12}

6

Условие: Положить $g(x) = \text{НОК}\{f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x)\}$; определить его степень r.

Решение:

Так как эти многочлены не имеют общих корней, то они не имеют и общих множителей при разложении. Следовательно, их НОК равен их произведению:

$$g(x) = (x^4 + x + 1) * (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$$

$$n = 15; \quad n - k = 8; \quad k = 7$$

Адаменко

7

Условие: Взять произвольное ненулевое информационное слово длиной k. Получить кодовое слово длины n по формуле циклического кодирования.

Решение:

$$I = 1001001$$
$$I(x) = x^6 + x^3 + 1$$
$$C(x) = I(x) * x^r + R_{g(x)}(I(x) * x^r) = (x^6 + x^3 + 1) * x^8 + x^5 + x^2 = x^{14} + x^{11} + x^8 + x^5 + x^2$$
$$C = 100100100100100$$

8

Условие: Внести в кодовое слово одну произвольную ошибку. Вычислить синдром. Локализовать ошибку и исправить её. Получить информационное слово. Убедиться в идентичности полученного информационного и изначального слов.

Решение:

Совершаем ошибку в восьмом бите: $V = 100100110100100$

Вычисляем синдром:

$$S(V(x)) = R_{g(x)}(V(x)) = R_{x^8+x^7+x^6+x^4+1}(x^{14} + x^{11} + x^8 + x^7 + x^5 + x^2) = x^7$$

Для определения места ошибки составим таблицу соответствия многочленов ошибки и синдромов:

Многочлен ошибки	**Синдром**
1	1
x^1	x
x^2	x^2
x^3	x^3
x^4	x^4
x^5	x^5
x^6	x^6
x^7	x^7
x^8	$x^7 + x^6 + x^4 + 1$
x^9	$x^6 + x^5 + x^4 + x + 1$

x^{10}	$x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + x$
x^{11}	$x^4 + x^3 + x^2 + 1$
x^{12}	$x^5 + x^4 + x^3 + x$
x^{13}	$x^6 + x^5 + x^4 + x^2$
x^{14}	$x^7 + x^6 + x^5 + x^3$

По таблице видно, что нашему синдрому соответствует x^7, следовательно ошибка совершена в бите, соответствующему x^7 – в восьмом.

Исправим ошибку:

$$C(x) = V(x) + e(x) = x^{14} + x^{11} + x^8 + x^7 + x^5 + x^2 + x^7 = x^{14} + x^{11} + x^8 + x^5 + x^2$$
$$C = 100100100100100$$
$$I(x) = x^6 + x^3 + 1$$
$$I = 1001001$$

9

Условие: Создать подпрограмму для реализации алгоритма помехоустойчивого циклического кодирования для кода БЧХ. На вход подпрограмме передаётся информационное слово. Подпрограмма возвращает кодовое слово.

10

Условие: Создать подпрограмму для декодирования кодового слова с учётом возможных ошибок. На вход подпрограмме передаётся кодовое слово. Подпрограмма вычисляет синдром, и при наличии ошибок исправляет его. Далее подпрограмма выделяет информационные биты и возвращает информационное слово.

11

Условие: Создать программу, демонстрирующую работу подпрограмм. Программа позволяет пользователю ввести информационное слово. Далее вызывается первая подпрограмма, и слово кодируется, затем заносятся или не заносятся случайная ошибка. Следом программа вызывает вторую подпрограмму и декодирует кодовое слово, исправляя ошибку. Результат каждого этапа выводится на экран.