ТПР

> 1 лаба (Метод принятия решений: метод перестановок и смещенного идеала)

1. Анализ парадигм исследования операций и принятия решений

ИО - применение математических, количественных методов. Построение количественной модели, выбор критерия, формализация ограничений и нахождение оптимального решения.

Парадигма - признанное всеми научное достижение, которое в течении определенного времени дает научному сообществу модель постановки проблемы и их решения.

Особенности ИО

1. Объективный характер. Различные специалисты с одними данными получат один и тот же результат
2. Решаются по заказу руководителя. Как только решение найдено, задача руководителя - внедрить его. Руководитель дает заказ и получает готовое решение.
3. Объективный критерий успехов. Показывает насколько новое решение лучше существующего.

Особенности ПР

1. Модель зависит от личности ЛПР (субъективный характер).
2. Аналитик помогает принять решение руковдителю (ЛПР). Изучается система ценностей ЛПР.
3. Выбирается лучшее решение исходя из системы ценностей конкретного ЛПР. Не всегда "субъективное" плохо, а "объективное" достижимо.

---

2. Классификация типов проблем

Хорошо структурированные
Все критерии количественные. Могут быть выраженны в числах или символах, получающих в конце концов численные оценки.

Неструктурированные
Все критерии качественные. Невозможно установить количественные связи.

Слабоструктурированные
Критерии как качественные, так и количественные

ИО - хорошо структурированные. Изучение реальной ситуации может быть дорогостоящей.
ПР - слабоструктурированные и неструктурированные проблемы.

---

3. Что такое проблема, цель, тип задачи

Проблема - кортеж?
Цель - заранее мыслимый результат сознательной деятельности человека или группы людей.

Основные типы задач

1. Линейное упорядочивание альтернатив. Дуга S_1 -> S_2, если S_1 доминирует над S_2
2. Выделение лучшей альтернативы
3. Выделение неупорядоченного множества лучших альтернатив (задача о рюкзаке)
4. Групповое упорядочивание альтернатив (стратификация) (непересекающиеся слои)
5. Неупорядоченное разбиение альтернатив (классификация) (классы альтернатив)

---

4. Альтернатива. Методы формирования множества альтернатив

Альтернатива - возможный способ достижения поставленной цели.
Множество альтернатив - совокупность альтернатив удовлетворяющих определенным ограничениям.

Используется информация о реальной ситуации и имещихся ограничениях, интуиция и опыт ЛПР. Может быть сформированно на основе комбинаторно-морфологического анализа. Задача разбивается на подзадачи. Для каждой подзадачи определяются возможные способы решения. Вариантом решенияя является набор элементов, в который входит элемент каждого уровня. Может использоваться "мозговой штурм".

---

5. Критерии и ограничения. Принципы формирования множества критериев

Характеристики степени достижения цели. Общие для всех альтернатив. Характеризуют общую ценность, ЛПР должен иметь стремление получить как можно предпочтительные оценки. Критерии должны быть независимы.

Принцип полноты
Добавление критериев не влияет на результат, отбрасывание критерия приводит к изменению реультата.

Принцип простоты
Как можно меньше критериев, не должны учитывать одно и тоже.

---

6. Основные типы шкал. Их характеристики. Аксиомы

1. Номинальная
   Тождество. Определение принадлежности к тому или иному классу. (Семейное положение, группа крови)
2. Ранговая
   Упорядоченность. (Служебное положение, образование, воинское звание)
3. Интервальная
   Растояние. (Температура C и F, Время)
4. Отношений
   Аддитивность [a+(b+c)=(a+b)+c]. (Длина, вес, деньги)

---

7. Методы оценки альтернатив

Оценки по шкалам можно получить Физ измерениями (показателей, который могут быть вычислены существующими расчетными методами) или экспериментальным путем (Если оценка не может быть проведена с помощью физ измерений).

Каждой альтернативе ставится в соответствие вектор оценок A. F:S->A

---

8. Основные особенности выявления системы предпочтения ЛПР

Предполагается, что ЛПР имеет некоторую систему предпочтений, они выявляются и структуризируются в ходе специальных исследований.

Существует граница возможностей человека. Основное внимание уделяется кратковременной памяти, ее предельный объем 7±2 структурные единицы (блока). Величина и содержимое блока зависит от человека.

Задачи выполняемые ЛПР можно разделить на Сложные (много противоречий) и Допустимые (мало противоречий).

Может наблюдаться противоречивость, для ее обнаружения проводится проверка на транзитивность.

---

9. Концептуальная модель системы поддержки принятия решения

Анализ проблем <--> Принятие решений
База данных <--> База моделей <--> База знаний

АП: Структуризация проблемы (формирование S, K, X)
ПР: определение типа задачи и решающего правила
Остальные осуществляют поддержку этих блоков.

---

10. Научно обоснованные методы принятия решений. Методы и требования, предъявляемые к ним

Требования

1. Способы получения данных должны соответствовать возможностям человека
2. Предусмотреть методы проверки информации на непротиворечивость
3. Любые соответствия между вариантами решений должны объясняться на основе информации от ЛПР
4. Любые допущения относительно решающего правила должны быть математически обоснованы

---

11. Решающее правило. Множество Эджворта-Парето

Решающее правило - принцип сравнения векторных оценок и вынесение суждений о предпочтительности одних по отношению к другим. Может задаваться в виде аналитического выражения, словестной формулировки или алгоритма.
Эвристические (свертывание критериев) и аксиоматические (использование теории полезности)

Множество Эджворта-Парето: Множество недоминируемых альтернатив. Нет альтернатив которые строго лучше всех.

---

12. Общая схема решения многокритериальных задач ПР

1. Анализ проблемной ситуации
2. Формирование множества альтернатив
3. Формирование множества критериев
4. Разработка оценочных шкал

5. Оценка альтернатив по шкалам критериев
6. Получение информации о предпочтениях ЛПР. Выявление противоречий
7. Выбор решающего правила
8. Упорядочивание альтренатив
9. Анализ результатов упорядочивания
10. Удволитворительно? да - 12, нет - 11
11. Анализ причин установление вида коррекции -> 1-7
12. Конец

> 2 лаба (Аналитико-Иерархический процесс)

1. Методологические основы АИП

Используется для решения слабоструктурированных и неструктурированных проблем. Опирается на системный подход, при котором проблема рассматривается как множествао разнородных объектов, а не изолированная и автономная совокупность.

АИП фокусируется на достижении целей, его использование приводит к рациональным решениям. **Рациональным решением** называется решение, которое наилучшим образом достигает множества целей, поставленных ЛПР. Ключевой момент здесь является фокусирование на целях, а не на альтернативах или атрибутах.

---

2. Принципы и аксиомы АИП

Принципы

1. Идентификации и декомпозиции
2. Дискриминации и сравнительных суждений
3. Синтеза
   Аксиомы
4. Если объекту i при сравнении с объектов j приписывается одна из целочисленных оценок, то действию j при сравнении с i приписывается обратное значение
5. Суждения вне порядка величины обычно приводят к снижению точности и увеличению противоречивости
6. Веса альтернатив всегда находятся в зависимости от весов элементов более высоких уровней, в то время как приоритеты подцелей не зависят от элементов более низкого уровня.

---

3. Определение иерархии и ее формализация

Иерархия - определенный тип системы, который предполагает, что элементы системы могут группироваться в несвязанные множества. Элементы каждой группы находятся под влиянием другой группы и оказывают влияние на элементы след группы.

Математически граф (G=(I,W) I - вершины, W - ребра), каждому объекту ставится в соответствие вес Веса следующих вершин определяются с помощью решающего правила
$Zi = \sum j \in Li\ VijZj$,

---

4. Шкала парных сравнений. Требования к ней. Закон Вербера-Фехнера.

Фундаментальная шкала Саати.

1. Диапазон изменяемости должен соответствовать результатам когнитивной психологии
2. Шкала должна давать возможность улавливать различия ощущения людей

Закон Вебера гласит, что различия в ощущениях становятся замеченными, когда значение стимула увеличивается не некоторый постоянный процент.
Если S-значение стимула; Δ-минимальная величина стимула, когда наши ощущения будут различать изменения в стимулах.
r= ΔS/S * 100%
Причем закон справедлив, когда $Smin \le S \le Smax$
Фехнер сформулирован последовательности предельно значимых различий в стимулах, первый член которой обозначен $S0$

$$S_1 = S_0 + \Delta S_0 = S_0 + \frac{\Delta S_0}{S_0} S_0 = S_0(1+r) = S_0\alpha\,;$$
$$S_2 = S_1 + \Delta S_1 = S_1(1+r) = S_0(1+r)^2 = S_0\alpha^2\ ;1+r=\alpha$$
$$\ldots$$
$$S_n = S_{n-1}\alpha = S_0\alpha^n;$$

Таким образом, значимые различия в стимулах описывается геометрической прогрессией. Фехнер заметил, что соответствующие числам ощущения описываются арифметической прогрессией дискретных чисел. Их можно получить выразив n из последнего уравнения.

$$n = \frac{\log S_n - \log S_0}{\log \alpha}$$

Если ощущения (реакцию) обозначить М, а S – значения стимула, то психофизический закон Вебера-Фехнера будет иметь вид

$$M = a \log S + b$$

Положив b = 0 (колибровкой), определим

$S_0 = 1$, то $M_0 = a \log S_0 = 0$ (ощущений нет)

$M_1 = a \log \alpha$

$M_2 = 2a \log \alpha$

$\vdots$

$M_n = na \log \alpha$

Разделим все M_i на $a \log \alpha$. Мы получим последовательность абсолютных чисел фундаментальной шкалы Саати.

---

5. Основные соотношения для идеально-согласованной матрицы парных сравнений

1. $r^*_{ij} = r^*_{ik} r^*_{kj}$ $\forall i,j,k$ (1)

   Соотношение (1) соответствует правилу логического вывода: Если i объект предпочтительней объекта k на r^_*ik и k объект предпочтительней j объекта на r*^_kj, то i объект должен быть предпочтительней j на r^*_ij.

   Теорема. Если матрица $R^* = \{r^*_{ij}\} i,j = \overline{1,n}$ обладает свойством (1), то тогда существует такие числа $\vartheta^*_i > 0 i = \overline{1,n}$, что имеет место равенство:

   $$r^*_{ij} = \frac{\vartheta^*_i}{\vartheta^*_j} \qquad i,j = \overline{1,n} \qquad (2.2)$$

2.
3. R имеет rang = 1, a ϑ^*_i, $i = \overline{1,n}$ является собственным вектором матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\vartheta^*_1}{\vartheta^*_1} & \frac{\vartheta^*_1}{\vartheta^*_2} & \cdots & \frac{\vartheta^*_1}{\vartheta^*_n} \\ \frac{\vartheta^*_2}{\vartheta^*_1} & \frac{\vartheta^*_2}{\vartheta^*_1} & & \frac{\vartheta^*_2}{\vartheta^*_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\vartheta^*_n}{\vartheta^*_1} & \frac{\vartheta^*_n}{\vartheta^*_2} & \cdots & \frac{\vartheta^*_n}{\vartheta^*_n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vartheta^*_1 \\ \vartheta^*_2 \\ \vdots \\ \vartheta^*_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \vartheta^*_1 \\ \vartheta^*_2 \\ \vdots \\ \vartheta^*_n \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

или $R^* \bar{\vartheta}^* = n \bar{\vartheta}^*$

Практически добиться полной согласованности (т. е. непротиворечивости) суждений ЛПР/эксперта далеко не всегда возможно. Поэтому в общем случае

$$r_{ij}$$

будут отклоняться от «идеальных»

$$r^*_{ij} = \frac{v^*_i}{v^*_j}$$

вследствие чего соотношения 1, 2, 3 не будут иметь место.

---

6. Формулировка задачи обработки реальной МПС

Для дальнейшего анализа полезными являются следующие два факта из теории матриц:

1. Сумма всех собственных чисел матрицы, если на диагонали 1 равна n. Если матрица идеально согласованная то все собственные числа, кроме одного равного n, равны нулю.
2. Если элемент этой положительной обратносимметричной матрицы незначительно изменить, то они все также незначительно изменятся, т.е. они являются непрерывными функциями ее элементов.

Для нахождения весов дуг или объектов первого уровня по полученной в результате метода парных сравнений матрице R необходимо определить собственный вектор , соответствующий максимальному собственному числу, т. е. решить уравнение

$$\bar{R}\bar{\vartheta} = \lambda_{max}\bar{\vartheta}$$

---

7. Содержательное отличие между индексом согласованности и относительной согласованностью

Так как малые изменения в

$$r_{ij}; i, j = 1, n$$

вызывают мало изменение

$$\lambda_{max}$$

, отклонение последнего от n является мерой согласованности.

Индекс согласованности (ИС):

$$\text{ИС} = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

Отклонение от идеально проведенного эксперимента.

Если ИС ≤10%, то практически считается, что мера согласованности находится на приемлемом уровне.
Случайный индекс согласованности -- ИС для случайно сгенерированных матриц

Отношение согласованности

$$\text{ОС} = \frac{\text{ИС}}{\text{СИ}} * 100\%$$

На сколько оцениваемая степень согласованности сходится со степенью самого неидеального случая.

---

8. Принцип иерархической композиции (принцип синтеза). Локальные и глобальные приоритеты

Искомые веса находятся последовательно начиная со второго уровня иерархии.

$$z_i = \sum_{j \in L_i} \vartheta_{ij} z_j \, , \ \forall i \in V_2, ..., i \in V_m .$$

$$L_i = \{j \mid (i,j) \in W\}.$$

Веса оъектов уровня альтернатив, можно считать результатом измерения их в шкале отношения от 0 до 1. (Глобальные приоритеты - искомые веса объектов).

Согласованность всей иерархии

$$C = \frac{\sum_{i \in D} \text{ИС}_i z_i}{\sum_{i \in D} \overline{\text{СИ}}_i z_i},$$

где $D = \dot{I} \backslash V_m$, ИС_i , $\overline{\text{СИ}}_i$

В результате обработки матрицы на втотром этапе по определению собственного вектора, получаем **«локальные»** приоритеты элементов группы по отношению к родителю.

> 3 лаба (Рациональное распределение ресурсов на основе АИП)

1. Алгоритм модифицированного синтеза. Его особенности и приемущества

1. Определяем вектора альтернатив относительно элементов предпоследнего уровня иерархии
2. Аналогичным образом обрабатываем матрицы парных сревнений для остальных элементов
3. Осуществляется собственно иерархический синтез, заключающийся в последовательном определении приоритетов
   альтернатив относительно E^i_j, находящихся на всех уровнях кроме предпоследнего.
   Вычисление приоритетов альтернатив проводится в направлении от нижних уровней к верхним с учетом конкретных связей между элементами. Вычисление проводится путем перемножения соответствующий векторов и матриц.

Особенности и приемущества
Двигаемся снизу вверх, не пользуемся понятием весов дуг

---

2. Абсолютные и относительные измерения

Стандарт устанавливает уровень качества объекта относительно критерия.

Абсолютные (литры, килограммы, градусы и т.д.) - измерение, основанное на прямых измерениях одной или нескольких основных величин и (или) использовании значений физических констант.
Относительные - измерение отношения величины к одноименной величине, играющей роль единицы, или измерение изменения величины по отношению к одноименной величине, принимаемой за исходную.

---

3. Метод стандартов и его преимущество

1. Может использоваться для анализа >9 альтернатив
2. Не меняется порядок при добавлении новых альтернатив
3. Альтернативы могут поступать не одновременно

Альтернативы сравниваются относительно стандартов. Стандарт устанавливает уровень качества объекта относительно критерия.

Число стандартов для каждого критерия может быть различно
Стандарты определяются экспертом с учетом ситуации
Численное значение стандартов получаем с помощью МПС

---

4. Что такое рациональное распределение ресурсов

Рационально распределить ресурсы означает распределить их так, чтобы они наилучшим образом удовлетворяли целям организации

---

5. «Задача о рюкзаке». Формальная постановка

Пусть имеется набор предметов, каждый из которых имеет два параметра — вес и ценность. Также имеется рюкзак определенной вместимости. Задача заключается в том, чтобы собрать рюкзак с максимальной ценностью предметов внутри, соблюдая при этом весовое ограничение рюкзака.

6. График границ эффективности. Его построение и применение.

Аргумент (OX) — стоимость
Значение функции(OY) — полезность

Выбираем бюджет и проводим перпендикуляр с OX, все проекты слева от прямой попадут в реализацию.
Оценка чувствительности. Уменьшая и увеличивая бюджет на процент X не гарантирует изменение полезности на то же значение.

---

7. Какие шаги необходимо выполнить для рационального распределения ресурсов в организации.

1. Определить альтернативы (например различные виды проектов)
2. Определить и структурировать цели организации в подцели в соответствии со структурой организации
3. Оценить вклад каждой альтернативы в реализацию этих целей
4. Нахождение лучшего набора альтернатив, учитывая организационные ограничения и ограничения, накладываемые окружающими условиями

> 4 лаба (Аналитико-Сетевой процесс)

1. Различия и сходства между АИП и АСП

1. Не постулируется предположение о независимости элементов высоких уровней от элементов более низких уровней и независимость элементов в пределах уровня (кластера). Отсюда следует, что АИП рассматривается как частный случай АСП.
2. АСП располагает по приоритетом не только элементы, но также кластеры элементов.
3. АСП – нелинейная структура, которая имеет дело с истоками, циклами, стеками. Иерархия линейна с целью в верхнем уровне и альтернативах в нижнем уровне.
4. АСП более открытая структура, что делает возможным представление проблемы без учета (как это требуется в АИП), что необходимо выполнить до, а что после.

---

2. Формализация первого этапа АСП

Элементы задачи объединяются в кластеры между которыми возможно произвольные связь, кластер имеет **внешнюю связь**, если хотя бы один его эелемент связан с другим элементом в другом кластере. **Внутреннюю связь**, если его элементы связаны с элементами в этом же кластере.

Эмерджентность (Свойство системы не является простой суммой свойств элементов этой системы, но в то же время свойства системы зависят от свойств составляющих ее элементов.)

Результатом первого этапа будет граф кластеров, с дугами отображающими влияение кластеров друг на друга.

---

3. Основные особенности, реализации второго этапа АСП

Строим МПС для кластеров, затем для элементов. Влияние ключевое словой для АСП.
Если кластер влияет только на 1, то ставим 1, если не влияет, то 0. Если на несколько, то на сколько j кластер влияет на все остальные по шкале Саати.
Следующий вопрос "Степень влияния"

МПС для элементов.
Формируем суперматрицу. Как заполняется блок:

1. Если кластер не влияет на кластер, то блок заполняется нулями
2. Если влияет, то если элементы не влияют друг на друга, то столбец заполняется нулями, иначе собственными значениями из МПС этих элементов

Каждую блочную матрицу W_ij умножают на коэффициент V_ij, так называемая нормировка, сумма каждого столбца = 1.

---

4. Относительные и абсолютные приоритеты

Относительные приоритеты - приоритеты показывающие влияние одного элемента на другой в системе.
Абсолютные приоритеты - приоритет любого элемента безотносительно того на какие элементы он влияет.

Этап синтеза (третий этап) определяет абсолютный приоритет

---

5. Сущность третьего этапа АСП. Что такое устойчивое предельное состояние системы?

Этап синтеза (третий этап) определяет абсолютный приоритет, который соответствует устойчивому предельному состоянию системы с обратными связями.

Следующая теорема, то, на чем основывается определение этого состояния

---

6. Формулировка теоремы, используемой на этапе синтеза

Если W_* является примитивной, стохастической (по столбцам), то имеет место следующее свойство

$$w = lim_{k \to \infty} W_*^k; k = 1, 2, \ldots$$

где ω матрица, имеющая одинаковые столбцы (единственный вектор равновесного состояния), элементы которых не изменяются при дальнейшем увеличении показателя степени.

Определение. Если матрица имеет единственный вектор, то матрица называется примитивной.

Определение. Неотрицательная матрицы $W*$ называется стохастической, тогда и только тогда, когда решением уравнения eT $W*$ = e является единичный вектор eT = (1,1, ... 1).

Столбец из матрицы ω связывают с абсолютными (предельными приоритетами) (размерностью M). Предельные приоритеты можно интерпретировать как прогнозируемые значения вклада рассматриваемых элементов в цель с учетом их взаимного влияния.

> 5 лаба (МК выбор на основе нечетких множеств)

1. Суть принципа несовместимости

Принцип несовместимости: Чем сложнее система, тем менее мы способны дать точные и в тоже время имеющие практическое значение суждения о ее поведении. Для систем, сложность которых превосходит пороговый уровень: точность и практический смысл становятся почти исключающими друг друга характеристиками.

Ключевыми элементами мышления являются **суждения**, а не числа.

Индукция - способ обнаружения закона для бесконечного числа данных по конечному числу данных. Однако подобное принципиально невозможно.

---

2. Нечеткое множество, его определение и способы задания

Четкое множество в подавляющем большинстве случаев не отвечает проыессам, протекающим в реальных сложных системах, т.е. приводит к неоправданной идеализации математического описания таких систем.

Нечетким множеством на базовом множестве X называется совокупность пар

$$\tilde{A} = \{< \mu_{\tilde{A}}(x)/x >\} \; (*),$$

где

$$\mu_A : X \to [0, 1]$$

отображение множества X в единичный отрезок [0, 1] называется **функцией принадлежности нечеткого множества**.
Значение данной функции называется **степенью принадлежности.**

Если X - непрерывное множество, то

$$\tilde{A} = \int_X \mu_{\tilde{A}}(x)/x, \; \forall x \in X$$

понимается как объединение однотипных множеств (синглтоном) и используется в случае непрерывной функции принадлежности.

При дискретном конечном числе элементов в базовом множестве X используется следующая запись

$$\tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(x_1)/x_1 + \mu_{\tilde{A}}(x_2)/x_2 + \ldots + \mu_{\tilde{A}}(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i$$

Способы задания: перечисление; функция принадлежности

---

3. Нечеткое множество, примеры для различного типа базового множества

Пример. В качестве примера рассмотрим нечеткое множество $\tilde{A}$, соответствующее нечеткому понятию «Разумное число детей в семье».

Носителем данного нечеткого множества является конечное множество $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Знак $\triangleq$ обозначает равно по определению. «Разумное число детей в семье» $= \{< 0{,}1/0 >, < 0{,}3/1 >, < 0{,}7/2 >, < 1/3 >, < 0{,}7/4 >, < 0{,}3/5 >, < 0{,}1/6 >\}$

Базовое множество упорядоченное, дискретное.

$\widetilde{A} \triangleq$ «скорость порядка 50 км/ч». Нечетким множеством, определенным на отрезке оси действительных чисел, может быть формализовано, например, понятие «скорость порядка 50 км/ч».

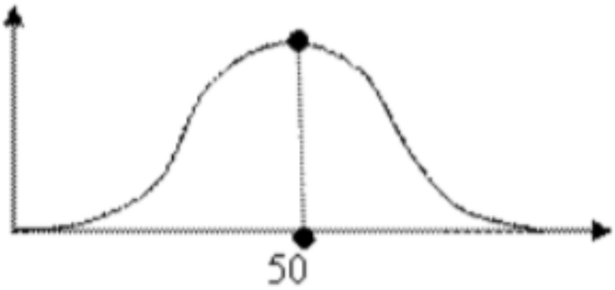


Рисунок 5.1.

$$\mu_A(x) = \int \frac{1}{1+\left(\frac{x-50}{10}\right)^4} \Big/ x$$

Нормальное: если максимальная верхняя точка = 1
Субнормальное: если такой точки нет. Всегда можно привести к нормальному с помощью разделения каждого на максимальный.

---

4. Алгебра нечетких множеств. Максиминный и вероятностный базис. Законы, которые удовлетворяют нечеткому множеству максиминного базиса

Объединение: "ИЛИ", "ЛИБО" (максимумы)

$$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} \triangleq \int_X (\mu_{\widetilde{A}}(x) \vee \mu_{\widetilde{B}}(x))/x, \forall x \in X$$

Пересечение: "И" (минимумы)

$$\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \triangleq \int_X (\mu_{\widetilde{A}}(x) \vee \mu_{B}(x))/x, \forall x \in X,$$

Дополнение (отрицание): "НЕ"

$$\int_X \frac{1-\mu_{\widetilde{A}}(x)}{x}$$

Эти операции называют минимаксные (минимаксный базис).

1. Частным случаем является определение операций для четких множеств.
   1.1. Если $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0$, то $\mu_{\overline{\widetilde{A}}}(x) = 1$.

1.2. Если $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$, то $\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x)=0$.

1.3. Если $\mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{B}}(x)=0$, то $\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=0$.

1.4. Если $\mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{B}}(x)=1$, то $\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=1$.

1.5. Если $\mu_{\tilde{A}}(x)=0,\ \mu_{\tilde{B}}(x)=1$, то $\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=1,\ \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=0$.

2. Функции принадлежности $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}$ не больше, а функция $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}$ не меньше, чем функции принадлежности каждого из множеств $\widetilde{A}$ или $\widetilde{B}$. $\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)\geq\max(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x))$, $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)\leq\max(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x))$

3. Выполняются законы теоретико-множественных операций обычной теории множеств (которые образуют булеву алгебру).

3.1. Коммутативность: $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}=\widetilde{B}\cup\widetilde{A}$, $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}=\widetilde{B}\cap\widetilde{A}$.

Доказательство:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\max(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x))=\max(\mu_{\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{A}}(x))=\mu_{\tilde{B}\cup\tilde{A}}(x$$

3.2. Ассоциативность $(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\cup\widetilde{C}=\widetilde{A}\cup(\widetilde{B}\cup\widetilde{C})$, $(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})\cap\widetilde{C}=\widetilde{A}\cap(\widetilde{B}\cap\widetilde{C})$.

3.3. Доказательство:

$$\mu_{(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cup\tilde{C}}(x)=\max(\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{C}}(x))=\max(\max(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)),\mu_{\tilde{C}}(x))=$$
$$=\max(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{C}}(x))=\max(\mu_{\tilde{A}}(x),(\max(\mu_{\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{C}}(x))))=\mu_{\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cup\tilde{C}}$$

3.4. Идемпотентность $\widetilde{A}\cap\widetilde{A}=\widetilde{A}$, $\widetilde{A}\cup\widetilde{A}=\widetilde{A}$.

3.5. Дистрибутивность $\widetilde{A}\cup(\widetilde{B}\cap\widetilde{C})=(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\cap(\widetilde{A}\cup\widetilde{C})$.

3.6. Инволюция $\neg(\neg\widetilde{A})=\widetilde{A}$.

Доказательство: $\mu_{\neg(\neg\tilde{A})}(x)=1-\mu_{\neg\tilde{A}}=1-1+\mu_{\tilde{A}}=\mu_{\tilde{A}}$.

3.7. Правило Моргана $\neg(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})=(\neg\widetilde{A}\cap\neg\widetilde{B})$.

4. Но не все законы выполняются.

4.1 Комплиментарности

Для четких множеств этот закон записывается: $A\cap\bar{A}=\emptyset$

Для нечетких множеств: $\widetilde{A}\cap\neg\widetilde{A}\supseteq\emptyset$

4.2 Исключающееся

Для четких множеств: $A\cup\bar{A}=X$

Для нечетких множеств: $\widetilde{A}\cup\neg\widetilde{A}\subseteq X$

Если интерпретация функции принадлежности вероятностная, то операции пересечения определяются по-иному:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)\vee\mu_{\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x),$$
$$\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\cdot\mu_{\tilde{B}}(x).$$

Декартово произведение:

$$\widetilde{A_1}\times\widetilde{A_2}\triangleq\int_{X_1\times X_2}(\mu_{\widetilde{A_1}}(x)\wedge\mu_{\widetilde{A_2}}(x))/(x_1x_2)$$

Степень нечеткого множества:

$$\tilde{A}^{\varepsilon} \triangleq \int_X \frac{[\mu_{\tilde{A}}^{\varepsilon}(x)]^{\varepsilon}}{x}, \forall x \in X$$

где e – некоторое число. e = 2 == CON. e = 0.5 == DIL

Множество альфа уровня:

$$S_\alpha = \{x / x \in X \wedge \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \text{ где } \alpha = [0,1].$$

---

5. Индексы нечеткости и особенности их использования, расстояние между нечеткими множествами

Требования предъявляемые для введения расстояния:

1. $\rho(\tilde{A}, \tilde{B}) > 0$, причем $\rho(\tilde{A}, \tilde{A}) = 0$;
2. $\rho(\tilde{A}, \tilde{B}) = \rho(\tilde{B}, \tilde{A})$ – симметричность;
3. $\rho(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \rho(\tilde{A}, \tilde{C}) + \rho(\tilde{C}, \tilde{B})$ – транзитивность.

Расстояние по Хеммингу

$$\rho(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|, |X| = n.$$

$$\rho'(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\rho(\tilde{A}, \tilde{B})}{n} \quad \text{Очевидно, } 0 \leq \rho(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq n$$

Расстояние по Евклиду

$$\varepsilon(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_{\tilde{A}}(x_j) - \mu_{\tilde{B}}(x_j))^2}, \; 0 \leq \varepsilon(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \sqrt{n}$$

$$. \; \varepsilon'(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\varepsilon(\tilde{A}, \tilde{B})}{\sqrt{n}}$$

Индекс нечеткости - показатель размытости нечеткого множества.
Т.к. степень принадлежности от 0 до 1, то двусмысленность объекта в отношении нечеткого множества проявляется втом, что он хотя и в разной степени принадлежит двум противоположным классам, эта двусмысленность максимальноа когда степень принадлежности равна 0.5, и минимальна при 0 или 1

Чем больше расстояние от нечеткого множества до его ближайшего четкого множества, тем больше степень его нечеткости.
Ближайшее четкое множество можно задать с помощью

$$\mu_A(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x_i) \leq 0{,}5, \\ 1, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x_i) > 0{,}5 \end{cases}$$

Введем следующие индексы нечеткости:

1. Линейный индекс нечеткости $d(\widetilde{A}) = 2\rho'(\widetilde{A}, A)$ – линейное (по Хеммингу) расстояние. $d(\widetilde{A}) = \frac{2}{n}\rho(\widetilde{A}, A)$
2. Квадратичный индекс нечеткости $d(\widetilde{A}) = 2\varepsilon'(\widetilde{A}, A)$ – Евклидово расстояние. $d(\widetilde{A}) = \frac{2}{\sqrt{n}}\varepsilon(\widetilde{A}, A)$

Степень нечеткости - показатель неопределенности, обусловленной неполной, частичной принадлежностью объектов множеству.

Энтропийный подход

$$H = -\frac{1}{\ln N}\sum_{i=1}^{N}\mu_{\widetilde{A}}(x_i)\ln\mu_{\widetilde{A}}(x_i),\ 0 \le H \le 1$$

$$\mathrm{H} = 0, \text{ если } \exists j\ j = \overline{1, n},\ p_j = 1,$$

$$\mathrm{H} = 1, \text{ если } \forall j\ j = \overline{1, n},\ p_j = \frac{1}{n}.$$

---

6. Методы построения функций принадлежности

С помощью стандартного набора графиков (это я помню)

Прямой метод: эксперт каждому элементу множества X ставит в соответствие определенную степень принадлежности. Эти значения согласуются с его предпочтениями следующим образом:

1. Для любых $x_1, x_2 \in X$, $\mu_{\widetilde{A}}(x_1) < \mu_{\widetilde{A}}(x_2)$ тогда и только тогда, когда x_2 в большей степени характеризуется понятием $\widetilde{A}$, чем x_1.
2. Для любых $x_1, x_2 \in X$, $\mu_{\widetilde{A}}(x_1) = \mu_{\widetilde{A}}(x_2)$ тогда и только тогда, когда x_1, x_2 неразличимы относительно понятия $\widetilde{A}$.

скорость, время, температура, давление и т.п. При использовании прямых методов зачастую не требуется абсолютно точного поточечного задания степени принадлежности . Как правило, бывает достаточно зафиксировать вид функции принадлежности и характерные точки, по которым дискретное представление функции принадлежности аппроксимируется непрерывным аналогом – наиболее подходящей типовой функцией принадлежности

Косвенный метод (наиболее известен метод парных сравнений) используются в тех случаях, когда отсутствуют измеримые свойства объектов в рассматриваемой предметной области. В силу специфики рассматриваемых задач при построении нечетких систем автоматического управления, как правило, применяются прямые методы.

В свою очередь, в зависимости от числа привлеченных к опросу экспертов как прямые, так и косвенные методы делятся на одиночные и групповые. Наиболее грубую оценку характеристических точек функции принадлежности можно получить путем опроса одного эксперта, который просто задает для каждого значения x ∈ X соответствующее значение μ A x.

7. Алгоритм МК выбора альтернатив на основе нечетких множеств.

Дано множество альтернатив и критериев

$$S = S_j, j = 1, m; K = K_i, i = 1, n$$

, представляющие собой нечеткие понятия. Для количественных критериев имеются оценки

$$x_i^j$$

Поставим в соответствие критерию нечеткое множество (нечеткое понятие), базовым множеством которого является множество альтернатив

$$\tilde{K}_i = \{< \mu_{\tilde{K}_i}(S_1)/S_1 >, < \mu_{\tilde{K}_i}(S_2)/S_2 >, \ldots, < \mu_{\tilde{K}_i}(S_m)/S_m >\},$$

где

$$\mu_{\tilde{K}_i}(S_j) \in [0, 1]$$

которое показывает, в какой степени альтернатива S_j соответствует критерию K_i - эта оценка может быть получена двумя способами:

Для количественных методов как совместимость альтернативы Sj с целевой функцией, связываемая с критерием.

Пусть для альтернативы Sj по количественному критерию Ki оценка равна x^j_i. В таком случае целевая функция выражает индивидуальные особенности предпочтений ЛПР.

Если Ki для данного множества альтернатив получилось субнормальным, то его необходимо нормализовать.

Рисунок 5.10.

Для качественных критериев методом парных сравнений. Строится матрица парных сравнений размерностью m m. Какая из двух альтернатив, Si или S j , в большей степени характеризует понятие K i и степень его доминирования.

K_i	S_1	S_2	…	S_m
S_1	1	…	…	…
S_2	…	1	…	…
…	…	…	…	…
S_m	…	…	…	1

Таблица 5.4.

Получив собственный вектор $\{v_j\}$ его нормализуют следующим образом $\mu_{\tilde{K}_i}(S_j) = \dfrac{v_j}{\max\limits_{j=1,\,m} v_j}$.

Так, решающее правило может быть сформулировано вербально следующим образом:

Искомой является та альтернатива, которая лучше всего удовлетворяет критериям (подцелям) $\tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2 \cup \ldots \cup \tilde{K}_n$. Такое решающее правило может быть формализовано с использованием операции пересечения (так как базовое множество для всех критериев оценок) для получения обобщенного критерия (цели) – $\tilde{K} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \tilde{K}_i$ или

$\mu_{\tilde{K}}(S_j) = \min\limits_{i=1,\,n}\{\mu_{\tilde{K}_1}(S_j),\ \mu_{\tilde{K}_2}(S_j), \ldots, \mu_{\tilde{K}_n}(S_j)\},\ \forall S_j \in S$ если базис максиминный.

В качестве лучшей выбирается альтернатива S^*, имеющая наибольшую степень принадлежности в нечетком множестве $\tilde{K}_i$, таким образом,

$$\tilde{K}_i = \{\mu_{\tilde{K}}(S_1)/S_1,\ \mu_{\tilde{K}}(S_2)/S_2, \ldots, \mu_{\tilde{K}}(S_n)/S_n\}$$

$$S^* = \arg[\max \mu_{\tilde{K}}(S_j)],\ \forall S_j \in S.$$

Обратить внимание! Нас интересует не столько значения параметра x^j_i, сколько их соответствие нашему пониманию наилучшей альтернативы, то есть большое значение означает субъективность отношения к этим значениям.

В случае если критерии $\tilde{K}_i$ имеют различную важность, каждому из них присваивается число $\lambda_i > 0$. Чем важнее критерий, тем больше λ_i, причем $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ и обобщенный критерий примет вид: $\tilde{K} = \tilde{K}_1^{\alpha_1} \cap \tilde{K}_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap \tilde{K}_n^{\alpha_n} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \tilde{K}_i^{\alpha_i}$.

Коэффициент относительной важности определяется на основе процедуры парного сравнения критериев.

$$\alpha_i = n\lambda_i,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n,\ 0 \le \alpha_i \le n$$

Такая нормировка необходимая для того, чтобы изменять форму функции принадлежности (степень нечеткости): либо в сторону концентрации, либо в сторону растяжения. Доминировать будет тот критерий, который наиболее концентрирован, то есть который наиболее важен. (только если операция пересечения)

Обобщенная цель может быть представлена в виде бинарного дерева.

---

8. Вербальное задание решающего правила в общем виде

Решающее правило в общем случае задается вербально в соответствии с правилами
<обобщенная цель> = (<цель>)/(<цель> op <цель>)
<цель> = (<элементарная цель>)/(<цель> op <цель>)

Пример вербального решающего правила: «выбрать автомобиль с очень малым расходом топлива (основное), новый (важно), с умеренной ценой (желательно) и с высокой максимальной скоростью (неплохо бы)». Слова в скобках неявно упорядочивают элементарные цели.

---

9. Нечеткие запросы к реляционной базе данных

1. В нечетком запросе выявляются нечеткие понятия и ставят им в соответствие нечеткое множество
2. из БД для текущего объекта, соответствующим нечетким понятиям атрибутам определяют четкие значения
3. Для найденных четких значений определяют степень принадлежности к нечетким понятиям нечеткого запроса
4. Определяем степень принадлежности объекта таблицы нечеткому запросу используя операции алгебры нечетких множеств
5. Упорядочиваем объекты по убыванию степени принадлежности

> 6 лаба (Выбор альтернатив на основе композиционного правила вывода)

1. Нечеткая и лингвистическая переменная

Нечеткой переменной называется кортеж , где
a - название нечеткой переменной,
X={x} - область ее определения (базовое множество),
C - нечеткое множество на X, которое описывает ограничение на значения нечеткой переменной (ее семантику), \mu_a(x) - это возможность того, что переменная a примет значение x (т.е. нечеткое множество используется для формализации ограничения на возможные значения)

Пример: <"несколько", {1,...,10}, {0.5/3, 0.8/4, 1/5, 1/6, 0.8/7, 0.1/8}>

Лингвистической переменной называется кортеж , где
b - Наименование лингвистической переменной
T - Базовое терм множество (ее значений), наименования нечетких переменных
X - Область определения наименований нечетких переменных
G - Синтаксическая процедура (позволяет расширить базовое терм множество)
M - Семантическое правило (каждому значению из T ставит в соответствие его смысл M(t) - нечеткое подмножество множества X)
Пример: , где
b - "температура воды"
T - «малая температура», «средняя температура», «большая температура»
X - (0; 100)
G - процедура образования новых термов с помощью языковых связок «И», «ИЛИ», а также модификаторов «ОЧЕНЬ», «НЕ», «СЛЕГКА» и т.д. (например, «не очень большая температура»)
M - Семантическое правило (каждому значению из T ставит в соответствие его смысл M(t) - нечеткое подмножество множества X)

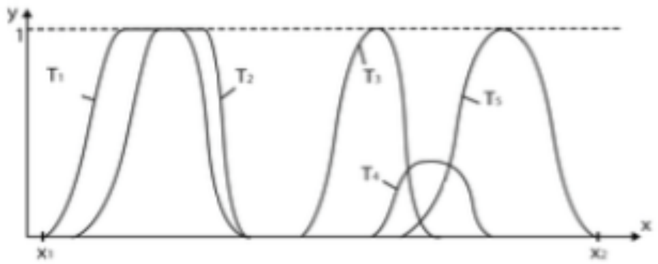
Лингвистические переменные предназначены для характеристики сложных и плохо определенных явлений. В сущности говоря, отказываясь от использования количественных переменных и опираясь на словесные описания типа тех, которыми оперирует человек, приобретается способность анализировать системы настолько сложные, что они недоступны обычном у математическому анализу. Ключевой идеей концепции лингвистической переменной является возможность формирования ограничений, порождаемых всеми допустимыми x из ограничений, порожденных базовым термом X.

---

2. Требования к лингвистической переменной

Пусть $T = \{T_i\}$ – базовое терм-множество лингвистической переменной $< \beta, \mathrm{T}, \mathrm{X}, \mathrm{G}, \mathrm{M} >$. Рассмотрим $< T_i, X, \widetilde{C}_i >$ – нечеткая переменная, соответствующая терму $T_i \in T$, $\widetilde{C}_i = \int\limits_{x \in X} \mu_{\widetilde{C}_i}(x)/x$. Будем считать, что $X \subseteq R^1$. S_i – носитель C_i $\mathrm{S}_i = Support(\widetilde{C}_i)$. Обозначим $|T| = N$. Обозначим наименьшую верхнюю границу $\sup x = x_2, x \in X$, наибольшую нижнюю границу $inf x = x, x \in \mathrm{X}$ (?). Упорядочим множество T в соответствии с выражением $\forall T_i \in T \; u \; \forall T_j \in T \left[i > j \Leftrightarrow \exists x \in S_i, \forall y \in S_j, x > y \right]$.

Это означает что терм, который имеет носитель, расположенный левее, получает меньший номер. Тогда любая лингвистическая переменная должна удовлетворять следующим условиям: Пример n=5. Пусть лингвистическая переменная задана следующей функцией принадлежности (контроль исходных данных).



1. $\mu_{C_1}(x_1)=1, \mu_{C_2}(x_2)=1.$

   Не допускается функции принадлежности крайних термов (в примере T_1 = T_5), иметь вид колокообразных кривых.

2. $\forall T_i \in T \left(0 < \max_{x \in X} \mu_{\tilde{C}_i \cap \tilde{C}_{i+1}} < 1\right).$

   Условие не допускает существование в базовом множестве T пар термов типа T_1 - T_2 и T_2 - T_3, поскольку в первом случае отсутствует естественное разграничение понятий аппроксимируемых термов, а во втором случае участку области определения не соответствует никакое понятие.

3. $\forall T_i \in T, \exists x \in X \Rightarrow \mu_{\tilde{C}_i}(x)=1.$

   Посколькукаждоепонятие имеет хотя бы один типичный объект, обозначаемый этим понятием. То есть не допускается наличие термов T_4.

4. $\forall \beta \Rightarrow |X| < \infty \vee \exists x_1 \in R', \exists x_2 \in R', \forall x \in X, x_1 \le x \le x_2$

   У словие ограничивает область определения X либо конечным множеством точек (при дискретном характере области определения), либо некоторым отрезком или интервалом. Данное условие констатирует имеющиеся в любой задаче управления физические ограничения на числовые значения параметра.

5. $\forall T_i \in T \Rightarrow \left(0 < \int_{S_i} \mu_{\tilde{C}_i}(x)dx < \infty\right).$

   Отличие функций принадлежности термов лингвистической переменной от закона распределения вероятности.

---

3. Принцип обобщения и его применение в нечеткой логике

Принцип обощения для нечетких множеств представляет собой в сущности основное равенство, позволяющее расширить область определения U отображения или отношения, включив в нее наряду с точками произвольные нечеткие подмножества U. Более конкретно предположим, что f:U->V, а A - нечеткое подмножество вида:

$$A = \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_n u_n.$$

Тогда принцип обобщения утверждает, что

$$f(A) = f(\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_n u_n) \equiv \mu_1 f(u_1) + \ldots + \mu_n f(u_n).$$

Итак, образ множества A при отображении f можно получить зная образы элементов u_1,...,u_n при этом отображении.

Можно вычислять составные термины. Пусть истинность факта A задана нечетким множеством.

Обратить внимание на следующее: «ложный» – при формализации использовался принцип обобщения, преобразованию подвергалось базовое множество, а функции принадлежности остаются не измененными, так как осуществляется переход от одного факта к другому (в частности от факта А к факту не А).
Во втором случае наоборот (когда вычисляются составные термы) осуществляет переход от одного терма к другому. Естественно, что в последнем случае должны видоизменяться функции принадлежности

$$M[\text{очень истинный}] = \frac{\mu_1^2}{x_1} + \frac{\mu_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_n^2}{(x_n)}, \qquad x_i \in (0,1]$$

$$M[\text{очень ложный}] = \frac{\mu_1^2}{1-x_1} + \frac{\mu_2^2}{1-x_2} + \cdots + \frac{\mu_n^2}{(1-x_n)},$$
$$x_i \in (0,1]$$

---

4. Нечеткие отношения. Операции и отношения

Параметры технологических объектов могут быть связаны между собой различного вида отношениями.

Определение. Пусть X, Y – некоторые четкие множества. Под нечетким бинарным отношением $\tilde{R}$ понимают нечеткое подмножество на декартовом произведении $X \times Y$, которое определяется $\tilde{R} = \int_{X\times Y} \mu_R(x,y)/(x,y)$, где $\mu_R : X\times Y \to [0,1]$ – функция принадлежности. Значение функции принадлежности в данном случае определяет в какой степени выполняется xRy, которое интерпретируется как сила связи между элементами $x \in X$, $y \in Y$.

Определение. Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ – некоторые четкие множества. Тогда нечетким n-нарным отношением $\tilde{R}$ называется нечеткое подмножество декартова произведения

$$\tilde{R} = \int_{X_1\times X_2\times ...\times X_n} \frac{\mu_R(x_1,x_2,...,x_n)}{x_1,x_2,...,x_n}, \text{ где } \mu_R: X_1\times X_2\times ...\times X_n \to [0,1].$$

Нечеткие отношения образуют алгебру с операциями объединения, пересечения, дополнения, т. е. $\tilde{S} = \int_{X\times Y} \mu_S(x,y)/(x,y)$,

$$\tilde{Q} = \int_{X\times Y} \mu_Q(x,y)/(x,y)$$

$$\tilde{R} = \tilde{S} \cap \tilde{Q} \qquad \mu_{\tilde{R}}(x,y) = \mu_{\tilde{S}}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{Q}}(x,y)$$

$$\tilde{R} = \tilde{S} \cup \tilde{Q} \qquad \mu_{\tilde{R}}(x,y) = \mu_{\tilde{S}}(x,y) \vee \mu_{\tilde{Q}}(x,y)$$

$$\neg\tilde{R} \qquad \mu_{\neg\tilde{R}}(x,y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x,y)$$

Проекции нечеткого отношения

Определение. Пусть задано бинарное отношение $\widetilde{R}$ на множестве $X \times Y$. Проекцией на X называется нечеткое множество $\widetilde{R}_1^1$, заданное на множестве X с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}_1}(x) = \vee_y \mu_R(x, y)$.

Проекцией на Y называется нечеткое множество, заданное на множестве Y с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}_2}(y) = \vee_x \mu_R(x, y)$.

Величина $h(\tilde{R}) = \vee_x \mu_{R_1}(x) = \vee_y \mu_{R_2}(y)$ называется проекцией отношения $\widetilde{R}$. Если $h(\widetilde{R}) = 1$, то отношение $\widetilde{R}$ нормально, в противном случае - субнормально.

Пример. Пусть $X = \{X_1 X_2 X_3\}$ $Y = \{Y_1 Y_2 Y_3\}$. В примере используем max-min базис.

$$\widetilde{R} = \begin{array}{c|ccccc|c} & Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 & R_1^1 \\ X_1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 1 & 0{,}3 & 0{,}9 & 1 \\ X_2 & 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}9 \\ X_3 & 0{,}4 & 0 & 0 & 1 & 0{,}3 & 1 \end{array}$$

$$R_2^1 = \quad 0{,}9 \quad 0{,}2 \quad 1 \quad 1 \quad 0{,}9 \quad 1$$

Композиция двух нечетких отношений

Пусть $\widetilde{R}_1$ заданы на $X \times Y$, а $\widetilde{R}_2$ на Y × Z– нечеткие бинарные отношения. Используя произведение (композицию) $R_1 \circ R_2$, получаем нечеткое бинарное отношение:

$$\tilde{Q} = \tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 = \int_{X \times Z} \vee_y \left(\mu_{\tilde{R}_1}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y, z)\right)$$

Пример. Пусть $X = \{X_1, X_2\}$, $Y = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$, $Z = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$.

$$\widetilde{R}_1 \circ \widetilde{R}_2 = \widetilde{Q}$$

$$\begin{vmatrix} 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ 1 & 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} \circ \begin{vmatrix} 0{,}9 & 0 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 1 & 0 & 0{,}5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \end{vmatrix}$$

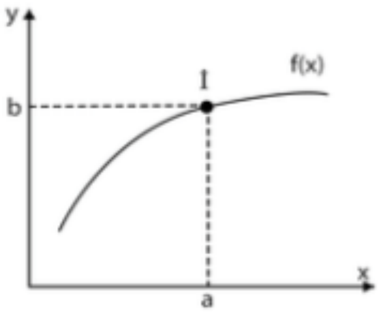
$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x_1, z_1) = \left[\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_1) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y_1, z_1)\right] \vee \left[\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_2) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y_2, z_1)\right] \vee$$

Свойства бинарных нечетких отношений:

1. Рефлексивность. Если $\forall x \in X$, то $\mu_{\tilde{R}}(x, x) = 1$.
2. Антирефлексивность. Если $\forall x \in X$, то $\mu_{\tilde{R}}(x, x) = 0$.
3. Симметричность. Если $\forall x, y \in X$, то $\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(y, x)$.
4. Ассиметричность. Если $\forall x, y \in X$ *из* $\mu_{\tilde{R}}(x, y) > 0$ следует $\mu_{\tilde{R}}(y, x) = 0$.
5. Транзитивность. $\tilde{R} \circ \tilde{R} \subseteq \tilde{R}$

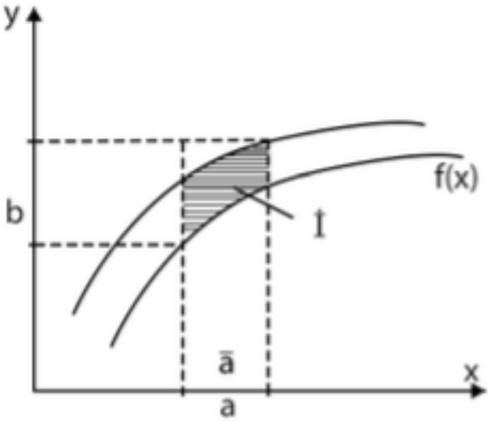
5. Композиционное правило выбора

Композиционное правило – это обобщение следующей знакомой процедуры.

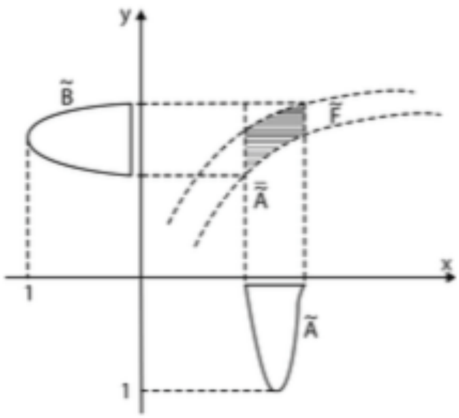


$$\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} y \underline{\underline{\Delta}}\, f(x) \\ x \underline{\underline{\Delta}}\, a \end{array}\right\} & \textit{Предпосылки} \\ \hline y = b = f(a) & \textit{Вывод} \end{array}$$

Обобщим эту процедуру, предположив, что a – интервал, a f(x) – функция, значение которой суть интервал.



В этом случае, чтобы найти интервал $y = b$ соответствующему интервалу a, строится множество $\bar{a}$ с основанием a и находится пересечение $\dot{I}$. Затем проектируется это пересечение на ось OY и получаем желаемое значение в виде интервала b.



Предположим, что $\widetilde{A}$ – нечеткое подмножество оси OX, а $\widetilde{F}$ – нечеткая функция, которая задается нечетким отношением в $OX \times OY$. Вновь образуем множество $\widetilde{A}$ (цилиндрическое) с основанием $\widetilde{A}$ и его пресечение с нечетким отношением $\widetilde{F}$, получим нечеткое подмножество $\overline{\widetilde{A}} \cap \widetilde{F}$, которое является нечеткой точкой пересечения. Проецируя затем это множество на ось OY получим значения в виде нечеткого множества OY.

Формализуем, то есть перейдем на уровень функции принадлежности. Более конкретно, пусть $\mu_{\tilde{A}}$, $\mu_{\bar{\bar{A}}}$, $\mu_{\tilde{F}}$ и $\mu_{\tilde{B}}$ функции принадлежности $\tilde{A}$, $\bar{\bar{A}}$, $\tilde{F}$ и $\tilde{B}$. Тогда $\mu_{\bar{\bar{A}}}(x, y) = \mu_{\tilde{A}}(x)$, так как $\bar{\bar{A}}$ – цилиндрическое множество согласно определения. Следовательно,

$$\mu_{\bar{\bar{A}} \cap \tilde{F}}(x, y) = \mu_{\bar{\bar{A}}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{F}}(x, y) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{F}}(x, y)$$

Проецируем множество $\bar{\bar{A}} \cap \tilde{F}$ на ось OY $\mu_3(y) = \bigvee_x (\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{F}}(x, y))$ согласно определения.

Определение. Пусть $\tilde{R}(x)$, $\tilde{R}(x, y)$ и $\tilde{R}(y)$ обозначают ограничения на *x*, *(x, y)* и *y* соответственно представляют собой нечеткие отношения в *X*, $X \times Y$ и *Y*. Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{F}$ нечеткие подмножества множеств X и $X \times Y$. Тогда композиционное правило вывода утверждает, что решением уравнений назначений относительно *y*:

$$\frac{\left.\begin{array}{l} \tilde{R}(x, y) \underline{\Delta} \tilde{F} \\ \tilde{R}(x) \underline{\Delta} \tilde{A} \end{array}\right\} \text{Предпосылки}}{\tilde{R}(y) = \tilde{A} \circ \tilde{F} \text{ (вывод)}}$$

Пример. Пусть

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{R}(x) = \tilde{A} \underline{\Delta} \text{"малый"} = 1/1 + 0{,}6/2 + 0{,}2/3 + 0/4 \\ \tilde{R}(x, y) = \tilde{F} \underline{\Delta} \text{"приблизительно равны"} \end{array}\right\},$$

$X = Y = 1 + 2 + 3$

Следовательно,

$$\tilde{R}(y) = \text{"малый"} \circ \text{"приблизительно равны"} = (1; 0{,}6; 0{,}2; 0) \circ \begin{vmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 1 \end{vmatrix}$$

---

6. Обобщенное правило вывода

Перейдём к рассмотрению связи между правилом modus ponens и композиционным правилом ввода и определим обобщенное правило modus ponens (fuzzy modus ponens – FMP).

Определение. Пусть $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ и $\tilde{B}$ нечеткие подмножества множеств *X*, *X* и *Y* соответственно. Предположим, что $\tilde{A}_1$ назначено отношению $\tilde{R}(x)$, а $\tilde{A}_2 \Rightarrow \tilde{B}$ назначено отношению $\tilde{R}(x, y)$, то есть

$\tilde{R}(x, y) \underline{\Delta} \tilde{A}_2 \Rightarrow \tilde{B}$ (правило, знания)

$\tilde{R}(x) \triangleq \tilde{A}_1$ (факт),

как было показано раньше, эти уравнения назначения в композиционном правиле вывода в отношениях можно разрешить относительно ограничения на Y следующим образом

$$\tilde{R}(y) = \tilde{A}_1 \circ (\tilde{A}_2 \Rightarrow \tilde{B})$$

и составляет формулировку обобщенного правила modus ponens.
Приведенная формулировка отличается от традиционной формулировки modus ponens в следующем:

1. $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ и $\tilde{B}$ – нечеткие множества
2. $\tilde{A}_1$ не обязательно идентично $\tilde{A}_2$;
3. если рассмотреть $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = \tilde{A}$, то можно доказать, что $A \circ (A \Rightarrow B)$ строго выполняется, когда A и B конечные множества, и приближенно, когда A и B нечеткие множества.

---

7. Применение многозначных логических систем при формализации нечетких правил «Если А, то Б»

До сих пор нами использовалось только одно выражение для формализации предпосылки: $\mu_{\tilde{A}} \to \mu_{\tilde{B}}$

$$\tilde{A} \to \tilde{B} \sim \textit{ЕСЛИ } \tilde{A}, \text{ ТО } \tilde{B} \triangleq \tilde{A} \times \tilde{B} \cup \neg\tilde{A} \times Y = \int_{X \times Y} \left(\mu_{\tilde{A}} \wedge \left(\mu_{\tilde{B}} \vee \left(1 - \mu_{\tilde{A}}\right)\right)\right) / (x, y)$$

Кроме этого выражения им предложено и следующее арифметическое правило:

$\textit{ЕСЛИ } \tilde{A}, \text{ ТО } \tilde{B} \triangleq \neg\tilde{A} \times Y \oplus X \times \tilde{B}$, где $\oplus$ – предельная сумма

$$\mu_A \oplus \mu_B = \begin{cases} \mu_A + \mu_B, & \textit{если } \mu_A + \mu_B \le 1 \\ 1, & \textit{если } \mu_A + \mu_B > 1 \end{cases}$$

Правило Мамдани

$$\textit{ЕСЛИ } \tilde{A}, \text{ ТО } \tilde{B} \triangleq \tilde{A} \times \tilde{B}$$

---

8. Критерии анализа эффективности различных формализаций нечетких правил «Если А, то Б»

Для анализа эффективности этих определений пользуются некоторыми критериями. Смысл данных критериев заключается в том, что они дают возможность проверить, насколько то или иное правило нечеткого вывода удовлетворяет человеческой интуиции при приближенных рассуждениях. Эти критерии имеют следующий вид:

Критерий I.

$$\frac{\textit{Пред. №1: Если } x \text{ есть } \tilde{A}, \text{ то } y \text{ есть } \tilde{B} \qquad \text{Пред. №2: } x \text{ есть } \tilde{A}}{\text{Вывод: } y \textit{ есть } \tilde{B}}$$

Критерий II_1.

$$\frac{\textit{Пред. №1: Если } x \text{ есть } \tilde{A}, \text{ то } y \text{ есть } \tilde{B} \qquad \text{Пред. №2: } x \text{ есть очень } \tilde{A}}{\text{Вывод: } y \textit{ есть очень } \tilde{B}}$$

Критерий II_2.

$$\frac{\textit{Пред. №1: Если } x \text{ есть } \tilde{A}, \text{ то } y \text{ есть } \tilde{B} \qquad \text{Пред. №2: } x \text{ есть очень } \tilde{A}}{\text{Вывод: } y \textit{ есть } \tilde{B}}$$

Критерий III.

$$\frac{\textit{Пред. №1: Если } x \text{ есть } \tilde{A}, \text{ то } y \text{ есть } \tilde{B} \qquad \text{Пред. №2: } x \text{ есть более или менее } \tilde{A}}{\text{Вывод: } y \textit{ есть более или менее } \tilde{B}}$$

Критерий IV_1.

$$\frac{\textit{Пред. №1: Если } x \text{ есть } \tilde{A}, \text{ то } y \text{ есть } \tilde{B} \qquad \text{Пред. №2: } x \text{ есть не } \tilde{A}}{\text{Вывод: } y \textit{ неизвестно (безразлично)}}$$

Критерий IV_2.

$$\frac{\textit{Пред. №1: Если } x \text{ есть } \tilde{A}, \text{ то } y \text{ есть } \tilde{B} \qquad \text{Пред. №2: } x \text{ есть не } \tilde{A}}{\text{Вывод: } y \textit{ есть не } \tilde{B}}$$

---

9. Алгоритм выбора альтернатив на основе КПВ

Рассматривается метод МК выбора альтернатив с использованием композиционного правила. О предпочтениях ЛПР, заданных в виде нечетких суждений (правил Если... То...). Этот метод включает следующие шаги:

1. Формируем набор критериев К и мнжество альтернатив S. Ставим в соответствие каждому критерию лингвистическую переменную
2. Предпочтения ЛПР выражены правилами Если... то.... Антецеденты которых содержат составные выражения, состоящие из базовых термов критериев, соединенных связками «И», «ИЛИ» и модификаторами «НЕ», «ОЧЕНЬ», «ПОЧТИ» в соответствии с грамматикой. Консеквент этого правила представляет собой значение лингвистической переменной, которая

указывает степень истинности составного выражения (антецедента) или как оно удовлетворяет цели ЛПР:
Y = <"степень соответствия цели", T, [0,1], G, M>

$$T = \{\widetilde{T}_i\}, i = \overline{1, k}$$

Каждое из лингвистических значений представляет собой нечеткую переменную, определенную на отрезке [0, 1]. Будем пользоваться дискретным представлением этого отрезка

$$d_j : \text{Если } \widetilde{K}_1 \text{ есть } \widetilde{T}^1_{i_1} \begin{pmatrix} и \\ или \end{pmatrix} K_2 \text{ есть } \widetilde{T}^2_{i_2} \ldots \begin{pmatrix} и \\ или \end{pmatrix} \widetilde{K}_n \text{ есть } \widetilde{T}^n_{i_n}, \text{ ТО } Y = \widetilde{T}_i,$$

$$j = \overline{1, r}, i = \overline{1, 5}$$

I = {0; 0.1; 0.2; ... ; 1}, |I| = 11. В общем виде это правило запишется

$$\widetilde{T}_i \in T^*$$

3. Так как все критерии задаются на едином базовом множестве S, то после выполнения операций объединения, пересечения и операции, соответствующей модификаторам «НЕ», «CON», «DIL», получим:

$$d_j : \text{Если } K = \widetilde{T}_j, \text{ ТО } Y \underline{\underline{\Delta}} \widetilde{T}_i \Rightarrow D_j, \ j = \overline{1, r}, i = \overline{1, 5}$$

Формализуем каждое нечеткое суждение в бинарное нечеткое отношение (по Заде) на декартовом произведении

$$S \times \dot{I};$$

$$\widetilde{D}_j = \tilde{A} \times \widetilde{T}_i \cup \neg \tilde{A} \times I \text{ или } \widetilde{D}_j = \tilde{A} \times I \rightarrow S \times \widetilde{T}_i \text{ или}$$
$$\widetilde{D}_j = (\tilde{A} \times \dot{I} \rightarrow S \times \widetilde{T}_i) \cap (\neg \tilde{A} \times \dot{I} \rightarrow S \times \neg \widetilde{T}_i),$$

Импликация выбирается из вышерассмотренных логик. Размер полученного бинарного нечеткого отношения |S|•|I|

4. При выводе будем учитывать правила d_1 и d_2 и т.д., тогда

$$\widetilde{D} = \bigcap_{i=1}^{r} \widetilde{D}_i$$

с учетом важности правил

$$\lambda_i = r_i v_i$$

где v_i важность правила, полученная на основе МПС.
Обобщенная цель (степень истинности)

$$\widetilde{D} = \bigcap_{i=1}^{r} \widetilde{D}_i^{\lambda_i}$$

5. Степень истинности S_j – альтернативы определим на основе композиционного правила вывода: $\widetilde{G}_j = \widetilde{S}_j \circ \widetilde{D}, \ j = \overline{1, m}$, где S_j – j-я альтернатива записана в виде нечеткого множества, то есть $\widetilde{S}_j = \{0/S_1; 0/S_2; ...; 1/S_j; ...; 0/S_m\}$. $\widetilde{G}_j$ – нечеткое множество на единичном интервале, которое и представляет собой степень соответствия j-й альтернативы с обобщенной целью.

Дефазификация
Каждому такому нечеткому множеству ставится в соответствие число, которое определяется следующим образом (то есть точечная оценка нечеткого множества).

Определение.

$F(\tilde{A}) \triangleq \frac{1}{\alpha_{max}} \int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha) d\alpha$, где $\alpha_{\max}$ – максимальная степень принадлежности нечеткого множества $\tilde{A}$,

A_α – α -уровневое множество согласно определению:

$A_\alpha = \{i \mid i \in \dot{I} \wedge \mu_{\tilde{A}}(i) \geq \alpha\}$,

$M(A_\alpha)$ – мощность α -уровневого множества, которое определяется: $M(A_\alpha) = \frac{1}{l} \sum_{k=\overline{1,l}} i_k$, $i_k \in A_\alpha$

Как видно, при определении числового значения учитывается не только значение базового множества, но и степень принадлежности.

> 7 лаба (Экспертные системы на основе нечеткой логики)
