Математическая логика и теория алгоритмов
Лекция 6
Автоматическое доказательство теорем

Куценко Дмитрий Александрович

Белгородский государственный технологический университет
имени В. Г. Шухова

Институт информационных технологий и управляющих систем

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники
и автоматизированных систем

7 октября 2011 г.

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции $\&$, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rrightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}) \mathbin{\&} (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;
2. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Rrightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;
3.
   - $\overline{\forall x\, \mathfrak{A}(x)} \Rrightarrow \exists x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\exists x\, \mathfrak{A}(x)} \Rrightarrow \forall x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \Rrightarrow \mathfrak{A}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \Rrightarrow \overline{\mathfrak{A}} \mathbin{\&} \overline{\mathfrak{B}}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B}} \Rrightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$.

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции $\&$, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B})\ \&\ (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;
2. $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;
3.
   - $\overline{\forall x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \exists x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\exists x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \forall x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \Rightarrow \mathfrak{A}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}}\ \&\ \overline{\mathfrak{B}}$;
   - $\overline{\mathfrak{A}\ \&\ \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$.

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции &, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;
2. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;
3.
   - $\overline{\forall x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \exists x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\exists x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \forall x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \Rightarrow \mathfrak{A}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$.

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции $\&$, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;
2. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;
3.
   - $\overline{\forall x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \exists x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\exists x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \forall x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \Rightarrow \mathfrak{A}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$.

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции $\&$, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;
2. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;
3.
   - $\overline{\forall x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \exists x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\exists x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \forall x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \Rightarrow \mathfrak{A}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$.

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции $\&$, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}) \mathbin{\&} (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;
2. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;
3.
   - $\overline{\forall x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \exists x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\exists x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \forall x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \Rightarrow \mathfrak{A}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \mathbin{\&} \overline{\mathfrak{B}}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$.

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции $\&$, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;
2. $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;
3.
   - $\overline{\forall x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \exists x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\exists x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \forall x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \Rightarrow \mathfrak{A}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$.

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции $\&$, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B})\ \&\ (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;
2. $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;
3.
   - $\overline{\forall x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \exists x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\exists x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \forall x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \Rightarrow \mathfrak{A}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}}\ \&\ \overline{\mathfrak{B}}$;
   - $\overline{\mathfrak{A}\ \&\ \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$.

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции &, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B})\ \&\ (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;
2. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;
3.
   - $\overline{\forall x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \exists x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\exists x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \forall x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \Rightarrow \mathfrak{A}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}}\ \&\ \overline{\mathfrak{B}}$;
   - $\overline{\mathfrak{A}\ \&\ \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$.

Пример

Получить приведённую форму формулы

$$\forall x\Big(P(x) \to \forall y\big(P(y) \to P(f(x,y))\big)\ \&\ \overline{\forall y\big(Q(x,y) \to P(y)\big)}\Big).$$

Решение

$$\forall x\Big(P(x) \to \forall y\big(P(y) \to P(f(x,y))\big)\ \&\ \overline{\forall y\big(Q(x,y) \to P(y)\big)}\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(\overline{P(x)} \vee \forall y\big(\overline{P(y)} \vee P(f(x,y))\big)\ \&\ \overline{\forall y\big(\overline{Q(x,y)} \vee P(y)\big)}\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(\overline{P(x)} \vee \forall y\big(\overline{P(y)} \vee P(f(x,y))\big)\ \&\ \exists y\big(\overline{\overline{Q(x,y)} \vee P(y)}\big)\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(\overline{P(x)} \vee \forall y\big(\overline{P(y)} \vee P(f(x,y))\big)\ \&\ \exists y\big(Q(x,y)\ \&\ \overline{P(y)}\big)\Big).$$

Пример

Получить приведённую форму формулы

$$\forall x\Big(P(x) \to \forall y\big(P(y) \to P(f(x,y))\big) \,\&\, \overline{\forall y\big(Q(x,y) \to P(y)\big)}\Big).$$

Решение

$$\forall x\Big(P(x) \to \forall y\big(P(y) \to P(f(x,y))\big) \,\&\, \overline{\forall y\big(Q(x,y) \to P(y)\big)}\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(\overline{P(x)} \vee \forall y\big(\overline{P(y)} \vee P(f(x,y))\big) \,\&\, \overline{\forall y\big(\overline{Q(x,y)} \vee P(y)\big)}\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(\overline{P(x)} \vee \forall y\big(\overline{P(y)} \vee P(f(x,y))\big) \,\&\, \exists y\big(\overline{\overline{Q(x,y)} \vee P(y)}\big)\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(\overline{P(x)} \vee \forall y\big(\overline{P(y)} \vee P(f(x,y))\big) \,\&\, \exists y\big(Q(x,y) \,\&\, \overline{P(y)}\big)\Big).$$

Пример

Получить приведённую форму формулы

$$\forall x\Big(P(x) \to \forall y\big(P(y) \to P(f(x,y))\big) \,\&\, \overline{\forall y\big(Q(x,y) \to P(y)\big)}\Big).$$

Решение

$$\forall x\Big(P(x) \to \forall y\big(P(y) \to P(f(x,y))\big) \,\&\, \overline{\forall y\big(Q(x,y) \to P(y)\big)}\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(\overline{P(x)} \vee \forall y\big(\overline{P(y)} \vee P(f(x,y))\big) \,\&\, \overline{\forall y\big(\overline{Q(x,y)} \vee P(y)\big)}\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(\overline{P(x)} \vee \forall y\big(\overline{P(y)} \vee P(f(x,y))\big) \,\&\, \exists y\big(\overline{\overline{Q(x,y)} \vee P(y)}\big)\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(\overline{P(x)} \vee \forall y\big(\overline{P(y)} \vee P(f(x,y))\big) \,\&\, \exists y\big(Q(x,y) \,\&\, \overline{P(y)}\big)\Big).$$

Пример

Получить приведённую форму формулы

$$\forall x\Big(P(x)\to\forall y\big(P(y)\to P\big(f(x,y)\big)\big)\ \&\ \overline{\forall y\big(Q(x,y)\to P(y)\big)}\Big).$$

Решение

$$\forall x\Big(P(x)\to\forall y\big(P(y)\to P\big(f(x,y)\big)\big)\ \&\ \overline{\forall y\big(Q(x,y)\to P(y)\big)}\Big)\equiv$$

$$\equiv\forall x\Big(\overline{P(x)}\vee\forall y\big(\overline{P(y)}\vee P\big(f(x,y)\big)\big)\ \&\ \overline{\forall y\big(\overline{Q(x,y)}\vee P(y)\big)}\Big)\equiv$$

$$\equiv\forall x\Big(\overline{P(x)}\vee\forall y\big(\overline{P(y)}\vee P\big(f(x,y)\big)\big)\ \&\ \exists y\big(\overline{\overline{Q(x,y)}\vee P(y)}\big)\Big)\equiv$$

$$\equiv\forall x\Big(\overline{P(x)}\vee\forall y\big(\overline{P(y)}\vee P\big(f(x,y)\big)\big)\ \&\ \exists y\big(Q(x,y)\ \&\ \overline{P(y)}\big)\Big).$$

Пример

Получить приведённую форму формулы

$$\forall x\Big(P(x) \to \forall y\big(P(y) \to P(f(x,y))\big) \,\&\, \overline{\forall y(Q(x,y) \to P(y))}\Big).$$

Решение

$$\forall x\Big(P(x) \to \forall y\big(P(y) \to P(f(x,y))\big) \,\&\, \overline{\forall y(Q(x,y) \to P(y))}\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(\overline{P(x)} \vee \forall y\big(\overline{P(y)} \vee P(f(x,y))\big) \,\&\, \overline{\forall y(\overline{Q(x,y)} \vee P(y))}\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(\overline{P(x)} \vee \forall y\big(\overline{P(y)} \vee P(f(x,y))\big) \,\&\, \exists y\,\overline{(\overline{Q(x,y)} \vee P(y))}\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(\overline{P(x)} \vee \forall y\big(\overline{P(y)} \vee P(f(x,y))\big) \,\&\, \exists y(Q(x,y) \,\&\, \overline{P(y)})\Big).$$

Предварённая нормальная форма

Всякую формулу логики предикатов, находящуюся в приведённой форме, с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в предварённой нормальной форме (ПНФ), в которой все кванторы стоя́т в её начале, а область действия каждого из них распространяется до конца формулы, т. е. привести к виду

$$\underbrace{\text{Ӿ}_1 x_1 \ldots \text{Ӿ}_n x_n \ldots}_{\text{префикс}} \; \underbrace{\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n, \ldots)}_{\text{матрица}},$$

где $\text{Ӿ}_1, \ldots, \text{Ӿ}_n$ — кванторы (либо $\exists$, либо $\forall$), называемые префиксом, формула $\mathfrak{A}$ не содержит кванторов и называется матрицей.

Замечание

В ПНФ префикса может и не быть.

Предварённая нормальная форма

Всякую формулу логики предикатов, находящуюся в приведённой форме, с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в предварённой нормальной форме (ПНФ), в которой все кванторы стоя́т в её начале, а область действия каждого из них распространяется до конца формулы, т. е. привести к виду

$$\underbrace{\mathrm{K}_1 x_1 \ldots \mathrm{K}_n x_n \ldots}_{\text{префикс}} \underbrace{\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n, \ldots)}_{\text{матрица}},$$

где $\mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_n$ — кванторы (либо $\exists$, либо $\forall$), называемые префиксом, формула $\mathfrak{A}$ не содержит кванторов и называется матрицей.

Замечание

В ПНФ префикса может и не быть.

Предварённая нормальная форма (продолжение)

Для получения предварённой нормальной формы используют следующие преобразования:

1. Разделение связанных переменных:

$$\mathsf{X}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \mathsf{X}_2 x\, \mathfrak{B}(\ldots x \ldots) \ldots) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathsf{X}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \mathsf{X}_2 y\, \mathfrak{B}(\ldots y \ldots) \ldots).$$

   Теперь формула не содержит случайно совпадающих связанных переменных.

2. Приведение к предварённой форме:

$$\mathfrak{A} \vee \mathsf{X} x\, \mathfrak{B}(x) \Rightarrow \mathsf{X} x (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(x));$$
$$\mathfrak{A} \,\&\, \mathsf{X} x\, \mathfrak{B}(x) \Rightarrow \mathsf{X} x (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}(x)).$$

Замечание

Одна формула может допускать много эквивалентных предварённых нормальных форм.

Предварённая нормальная форма (продолжение)

Для получения предварённой нормальной формы используют следующие преобразования:

1. Разделение связанных переменных:

$$\text{Ӿ}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \text{Ӿ}_2 x\, \mathfrak{B}(\ldots x \ldots) \ldots) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{Ӿ}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \text{Ӿ}_2 y\, \mathfrak{B}(\ldots y \ldots) \ldots).$$

   Теперь формула не содержит случайно совпадающих связанных переменных.

2. Приведение к предварённой форме:

$$\mathfrak{A} \vee \text{Ӿ}x\, \mathfrak{B}(x) \Rightarrow \text{Ӿ}x(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(x));$$
$$\mathfrak{A} \mathbin{\&} \text{Ӿ}x\, \mathfrak{B}(x) \Rightarrow \text{Ӿ}x(\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B}(x)).$$

Замечание

Одна формула может допускать много эквивалентных предварённых нормальных форм.

Предварённая нормальная форма (продолжение)

Для получения предварённой нормальной формы используют следующие преобразования:

1. Разделение связанных переменных:

$$\text{Ӿ}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \text{Ӿ}_2 x\, \mathfrak{B}(\ldots x \ldots) \ldots) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{Ӿ}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \text{Ӿ}_2 y\, \mathfrak{B}(\ldots y \ldots) \ldots).$$

   Теперь формула не содержит случайно совпадающих связанных переменных.

2. Приведение к предварённой форме:

$$\mathfrak{A} \vee \text{Ӿ} x\, \mathfrak{B}(x) \Rightarrow \text{Ӿ} x (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(x));$$
$$\mathfrak{A} \,\&\, \text{Ӿ} x\, \mathfrak{B}(x) \Rightarrow \text{Ӿ} x (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}(x)).$$

Замечание

Одна формула может допускать много эквивалентных предварённых нормальных форм.

Предварённая нормальная форма (продолжение)

Для получения предварённой нормальной формы используют следующие преобразования:

1. Разделение связанных переменных:

$$\text{Ӿ}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \text{Ӿ}_2 x\, \mathfrak{B}(\ldots x \ldots) \ldots) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{Ӿ}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \text{Ӿ}_2 y\, \mathfrak{B}(\ldots y \ldots) \ldots).$$

   Теперь формула не содержит случайно совпадающих связанных переменных.

2. Приведение к предварённой форме:

$$\mathfrak{A} \vee \text{Ӿ} x\, \mathfrak{B}(x) \Rightarrow \text{Ӿ} x\big(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(x)\big);$$
$$\mathfrak{A} \,\&\, \text{Ӿ} x\, \mathfrak{B}(x) \Rightarrow \text{Ӿ} x\big(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}(x)\big).$$

Замечание

Одна формула может допускать много эквивалентных предварённых нормальных форм.

Предварённая нормальная форма (продолжение)

Для получения предварённой нормальной формы используют следующие преобразования:

1. Разделение связанных переменных:

$$\mathsf{X}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \mathsf{X}_2 x\, \mathfrak{B}(\ldots x \ldots) \ldots) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathsf{X}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \mathsf{X}_2 y\, \mathfrak{B}(\ldots y \ldots) \ldots).$$

   Теперь формула не содержит случайно совпадающих связанных переменных.

2. Приведение к предварённой форме:

$$\mathfrak{A} \vee \mathsf{X} x\, \mathfrak{B}(x) \Rightarrow \mathsf{X} x \big(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(x)\big);$$
$$\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathsf{X} x\, \mathfrak{B}(x) \Rightarrow \mathsf{X} x \big(\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B}(x)\big).$$

Замечание

Одна формула может допускать много эквивалентных предварённых нормальных форм.

Пример

Найти предварённую нормальную форму для формулы

$$\forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y\exists x\big(\overline{Q(x,y)} \vee R(a,x,y)\big)\Big).$$

Решение

$$\forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y\exists x\big(\overline{Q(x,y)} \vee R(a,x,y)\big)\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y\exists z\big(\overline{Q(z,y)} \vee R(a,z,y)\big)\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\forall y\exists z\Big(P(x)\ \&\ \big(\overline{Q(z,y)} \vee R(a,z,y)\big)\Big).$$

Пример

Найти предварённую нормальную форму для формулы

$$\forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y \exists x\big(\overline{Q(x,y)} \vee R(a,x,y)\big)\Big).$$

Решение

$$\forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y \exists x\big(\overline{Q(x,y)} \vee R(a,x,y)\big)\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y \exists z\big(\overline{Q(z,y)} \vee R(a,z,y)\big)\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x \forall y \exists z\Big(P(x)\ \&\ \big(\overline{Q(z,y)} \vee R(a,z,y)\big)\Big).$$

Пример

Найти предварённую нормальную форму для формулы

$$\forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y\exists x(\overline{Q(x,y)} \vee R(a,x,y))\Big).$$

Решение

$$\forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y\exists x(\overline{Q(x,y)} \vee R(a,x,y))\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y\exists z(\overline{Q(z,y)} \vee R(a,z,y))\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\forall y\exists z\Big(P(x)\ \&\ (\overline{Q(z,y)} \vee R(a,z,y))\Big).$$

Пример

Найти предварённую нормальную форму для формулы

$$\forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y\exists x(\overline{Q(x,y)} \vee R(a,x,y))\Big).$$

Решение

$$\forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y\exists x(\overline{Q(x,y)} \vee R(a,x,y))\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y\exists z(\overline{Q(z,y)} \vee R(a,z,y))\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\forall y\exists z\Big(P(x)\ \&\ (\overline{Q(z,y)} \vee R(a,z,y))\Big).$$

Сколемизация

Часто необходимы ещё более строгие формы, при этом достаточно, чтобы из ложности исходной формулы $\mathfrak{A}$ следовала ложность преобразованной формулы $\mathfrak{A}'$:

$$\overline{\mathfrak{A}} \vdash \overline{\mathfrak{A}'},$$

в общем случае $\mathfrak{A}' \not\equiv \mathfrak{A}$.

Одной из таких форм является сколемовская нормальная форма — такая предварённая нормальная форма, в которой исключены кванторы существования.

Кванторы существования можно удалить (элиминировать), заменяя их на функции, называемые сколемовскими.

Сколемизация

Часто необходимы ещё более строгие формы, при этом достаточно, чтобы из ложности исходной формулы $\mathfrak{A}$ следовала ложность преобразованной формулы $\mathfrak{A}'$:

$$\overline{\mathfrak{A}} \vdash \overline{\mathfrak{A}'},$$

в общем случае $\mathfrak{A}' \not\equiv \mathfrak{A}$.

Одной из таких форм является сколемовская нормальная форма — такая предварённая нормальная форма, в которой исключены кванторы существования.

Кванторы существования можно удалить (элиминировать), заменяя их на функции, называемые сколемовскими.

Сколемизация

Часто необходимы ещё более строгие формы, при этом достаточно, чтобы из ложности исходной формулы $\mathfrak{A}$ следовала ложность преобразованной формулы $\mathfrak{A}'$:

$$\overline{\mathfrak{A}} \vdash \overline{\mathfrak{A}'},$$

в общем случае $\mathfrak{A}' \not\equiv \mathfrak{A}$.

Одной из таких форм является сколемовская нормальная форма — такая предварённая нормальная форма, в которой исключены кванторы существования.

Кванторы существования можно удалить (элиминировать), заменяя их на функции, называемые сколемовскими.

Сколемизация

Часто необходимы ещё более строгие формы, при этом достаточно, чтобы из ложности исходной формулы $\mathfrak{A}$ следовала ложность преобразованной формулы $\mathfrak{A}'$:

$$\overline{\mathfrak{A}} \vdash \overline{\mathfrak{A}'},$$

в общем случае $\mathfrak{A}' \not\equiv \mathfrak{A}$.
Одной из таких форм является сколемовская нормальная форма — такая предварённая нормальная форма, в которой исключены кванторы существования.
Кванторы существования можно удалить (элиминировать), заменяя их на функции, называемые сколемовскими.

Сколемизация (продолжение)

Рассмотрим формулу $\forall x \exists y\, P(x, y)$.

Здесь предикат $P(x, y)$ выполняется для любого x и некоторого y; при этом y, возможно, зависит от x.

Эту зависимость можно обозначить явно с помощью некоторой функции $f(x) = y$, ставящей в соответствие каждому x то значение y, которое существует согласно записи $\exists y$.

Если заменить y на $f(x)$, то квантор $\exists y$ можно отбросить:

$$\forall x\, P(x, f(x)).$$

Т. о. если в префиксе имеется пара кванторов $\forall x \exists y$, то $\exists y$ удаляется, а все вхождения связанной с ним переменной y заменяется на функцию $f(x)$.

Сколемизация (продолжение)

Рассмотрим формулу $\forall x \exists y\, P(x, y)$.

Здесь предикат $P(x, y)$ выполняется для любого x и некоторого y; при этом y, возможно, зависит от x.

Эту зависимость можно обозначить явно с помощью некоторой функции $f(x) = y$, ставящей в соответствие каждому x то значение y, которое существует согласно записи $\exists y$.

Если заменить y на $f(x)$, то квантор $\exists y$ можно отбросить:

$$\forall x\, P(x, f(x)).$$

Т. о. если в префиксе имеется пара кванторов $\forall x \exists y$, то $\exists y$ удаляется, а все вхождения связанной с ним переменной y заменяется на функцию $f(x)$.

Сколемизация (продолжение)

Рассмотрим формулу $\forall x \exists y\, P(x, y)$.

Здесь предикат $P(x, y)$ выполняется для любого x и некоторого y; при этом y, возможно, зависит от x.

Эту зависимость можно обозначить явно с помощью некоторой функции $f(x) = y$, ставящей в соответствие каждому x то значение y, которое существует согласно записи $\exists y$.

Если заменить y на $f(x)$, то квантор $\exists y$ можно отбросить:

$$\forall x\, P(x, f(x)).$$

Т. о. если в префиксе имеется пара кванторов $\forall x \exists y$, то $\exists y$ удаляется, а все вхождения связанной с ним переменной y заменяется на функцию $f(x)$.

Сколемизация (продолжение)

Рассмотрим формулу $\forall x \exists y\, P(x, y)$.

Здесь предикат $P(x, y)$ выполняется для любого x и некоторого y; при этом y, возможно, зависит от x.

Эту зависимость можно обозначить явно с помощью некоторой функции $f(x) = y$, ставящей в соответствие каждому x то значение y, которое существует согласно записи $\exists y$.

Если заменить y на $f(x)$, то квантор $\exists y$ можно отбросить:

$$\forall x\, P(x, f(x)).$$

Т. о. если в префиксе имеется пара кванторов $\forall x \exists y$, то $\exists y$ удаляется, а все вхождения связанной с ним переменной y заменяется на функцию $f(x)$.

Сколемизация (продолжение)

Рассмотрим формулу $\forall x \exists y\, P(x, y)$.

Здесь предикат $P(x, y)$ выполняется для любого x и некоторого y; при этом y, возможно, зависит от x.

Эту зависимость можно обозначить явно с помощью некоторой функции $f(x) = y$, ставящей в соответствие каждому x то значение y, которое существует согласно записи $\exists y$.

Если заменить y на $f(x)$, то квантор $\exists y$ можно отбросить:

$$\forall x\, P(x, f(x)).$$

Т. о. если в префиксе имеется пара кванторов $\forall x \exists y$, то $\exists y$ удаляется, а все вхождения связанной с ним переменной y заменяется на функцию $f(x)$.

Сколемизация (продолжение)

Аналогично, если в префиксе имеется набор кванторов $\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists z$, то $\exists z$ удаляется, а переменная z всюду заменяется на функцию $g(y_1, \ldots, y_n)$.

Очевидно, что если самой левой группой кванторов являются кванторы существования $\exists x_1 \ldots \exists x_{n_1}$, то они удаляются, а переменные $x_1 \ldots x_{n_1}$ заменяются на константы $a_1, \ldots, a_{n_1}$.

Правило элиминирования кванторов существования

Каждое вхождение переменной, относящейся к квантору существования, заменяется на сколемовскую функцию, аргументами которой являются те переменные, которые связаны с кванторами всеобщности, в область действия которых попал удаляемый квантор существования. Если левее квантора существования нет кванторов всеобщности, то соответствующая переменная заменяется на константу. Элиминирование происходит слева направо.

Сколемизация (продолжение)

Аналогично, если в префиксе имеется набор кванторов $\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists z$, то $\exists z$ удаляется, а переменная z всюду заменяется на функцию $g(y_1, \ldots, y_n)$.
Очевидно, что если самой левой группой кванторов являются кванторы существования $\exists x_1 \ldots \exists x_{n_1}$, то они удаляются, а переменные $x_1 \ldots x_{n_1}$ заменяются на константы $a_1, \ldots, a_{n_1}$.

Правило элиминирования кванторов существования

Каждое вхождение переменной, относящейся к квантору существования, заменяется на сколемовскую функцию, аргументами которой являются те переменные, которые связаны с кванторами всеобщности, в область действия которых попал удаляемый квантор существования. Если левее квантора существования нет кванторов всеобщности, то соответствующая переменная заменяется на константу. Элиминирование происходит слева направо.

Сколемизация (продолжение)

Аналогично, если в префиксе имеется набор кванторов $\forall y_1 \dots \forall y_n \exists z$, то $\exists z$ удаляется, а переменная z всюду заменяется на функцию $g(y_1, \dots, y_n)$.
Очевидно, что если самой левой группой кванторов являются кванторы существования $\exists x_1 \dots \exists x_{n_1}$, то они удаляются, а переменные $x_1 \dots x_{n_1}$ заменяются на константы $a_1, \dots, a_{n_1}$.

Правило элиминирования кванторов существования

Каждое вхождение переменной, относящейся к квантору существования, заменяется на сколемовскую функцию, аргументами которой являются те переменные, которые связаны с кванторами всеобщности, в область действия которых попал удаляемый квантор существования. Если левее квантора существования нет кванторов всеобщности, то соответствующая переменная заменяется на константу. Элиминирование происходит слева направо.

Пример

Приведём к сколемовской нормальной форме формулу

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w\, P(x, y, z, u, v, w).$$

Кванторы существования элиминируем слева направо.
В этой формуле левее $\exists x$ нет кванторов всеобщности, левее $\exists u$ стоят $\forall y$ и $\forall z$, а левее $\exists w$ стоят $\forall y$, $\forall z$ и $\forall v$.
Отбросим все кванторы существования, а переменную x заменим на константу a, переменную u — на функцию $f(y, z)$, переменную w — на функцию $g(y, z, v)$.
Т. о. получим следующую форму:

$$\forall y \forall z \forall v\, P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v)).$$

Пример

Приведём к сколемовской нормальной форме формулу

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w\, P(x, y, z, u, v, w).$$

Кванторы существования элиминируем слева направо.
В этой формуле левее $\exists x$ нет кванторов всеобщности, левее $\exists u$ стоят $\forall y$ и $\forall z$, а левее $\exists w$ стоят $\forall y$, $\forall z$ и $\forall v$.
Отбросим все кванторы существования, а переменную x заменим на константу a, переменную u — на функцию $f(y, z)$, переменную w — на функцию $g(y, z, v)$.
Т. о. получим следующую форму:

$$\forall y \forall z \forall v\, P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v)).$$

Пример

Приведём к сколемовской нормальной форме формулу

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w\, P(x, y, z, u, v, w).$$

Кванторы существования элиминируем слева направо.
В этой формуле левее $\exists x$ нет кванторов всеобщности, левее $\exists u$ стоят $\forall y$ и $\forall z$, а левее $\exists w$ стоят $\forall y$, $\forall z$ и $\forall v$.
Отбросим все кванторы существования, а переменную x заменим на константу a, переменную u — на функцию $f(y, z)$, переменную w — на функцию $g(y, z, v)$.
Т. о. получим следующую форму:

$$\forall y \forall z \forall v\, P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v)).$$

Пример

Приведём к сколемовской нормальной форме формулу

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w\, P(x, y, z, u, v, w).$$

Кванторы существования элиминируем слева направо.
В этой формуле левее $\exists x$ нет кванторов всеобщности, левее $\exists u$ стоят $\forall y$ и $\forall z$, а левее $\exists w$ стоят $\forall y$, $\forall z$ и $\forall v$.
Отбросим все кванторы существования, а переменную x заменим на константу a, переменную u — на функцию $f(y, z)$, переменную w — на функцию $g(y, z, v)$.
Т. о. получим следующую форму:

$$\forall y \forall z \forall v\, P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v)).$$

Пример

Приведём к сколемовской нормальной форме формулу

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w \, P(x, y, z, u, v, w).$$

Кванторы существования элиминируем слева направо.
В этой формуле левее $\exists x$ нет кванторов всеобщности, левее $\exists u$ стоят $\forall y$ и $\forall z$, а левее $\exists w$ стоят $\forall y$, $\forall z$ и $\forall v$.
Отбросим все кванторы существования, а переменную x заменим на константу a, переменную u — на функцию $f(y, z)$, переменную w — на функцию $g(y, z, v)$.
Т. о. получим следующую форму:

$$\forall y \forall z \forall v \, P\big(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v)\big).$$

Сколемизация (окончание)

Любую формулу логики предикатов можно привести к сколемовской нормальной форме с сохранением противоречивости.

Идея использования функций вместо групп кванторов восходит к работам Т. Сколема и Ж. Эрбра́на, поэтому такие функции называют сколемовскими или (реже) эрбрановскими, а их добавление — сколемизацией.

Туральф Ско́лем (1887—1963) — норвежский математик, логик и философ

Жак Эрбра́н (1908—1931) — французский математик

Автоматическое доказательство теорем

Доказательство теорем, реализуемое программно, называется автоматическим доказательством теорем.

Процесс доказательства основывается на логике высказываний и логике предикатов.

В настоящее время автоматическое доказательство теорем применяется в системах искусственного интеллекта, а также в промышленности при разработке и верификации интегральных схем.

Автоматическое доказательство теорем

Доказательство теорем, реализуемое программно, называется автоматическим доказательством теорем.

Процесс доказательства основывается на логике высказываний и логике предикатов.

В настоящее время автоматическое доказательство теорем применяется в системах искусственного интеллекта, а также в промышленности при разработке и верификации интегральных схем.

Автоматическое доказательство теорем

Доказательство теорем, реализуемое программно, называется автоматическим доказательством теорем.

Процесс доказательства основывается на логике высказываний и логике предикатов.

В настоящее время автоматическое доказательство теорем применяется в системах искусственного интеллекта, а также в промышленности при разработке и верификации интегральных схем.

Постановка задачи

Алгоритм, который проверяет отношение

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$$

для формулы $\mathfrak{B}$ относительно формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, называется алгоритмом автоматического доказательства теорем (ААДТ).

В общем случае ААДТ невозможен, т. е. не существует алгоритма, который для любых $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}$ выдавал бы ответ «Да», если $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$, и «Нет» в противном случае.

Для некоторых простых формальных теорий и некоторых простых классов формул ААДТ известны.

Пример

Доказательство с помощью таблиц истинности в логике высказываний является ААДТ.

Постановка задачи

Алгоритм, который проверяет отношение

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$$

для формулы $\mathfrak{B}$ относительно формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, называется алгоритмом автоматического доказательства теорем (ААДТ).

В общем случае ААДТ невозможен, т. е. не существует алгоритма, который для любых $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}$ выдавал бы ответ «Да», если $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$, и «Нет» в противном случае.

Для некоторых простых формальных теорий и некоторых простых классов формул ААДТ известны.

Пример

Доказательство с помощью таблиц истинности в логике высказываний является ААДТ.

Постановка задачи

Алгоритм, который проверяет отношение

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$$

для формулы $\mathfrak{B}$ относительно формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, называется алгоритмом автоматического доказательства теорем (ААДТ).

В общем случае ААДТ невозможен, т. е. не существует алгоритма, который для любых $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}$ выдавал бы ответ «Да», если $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$, и «Нет» в противном случае.

Для некоторых простых формальных теорий и некоторых простых классов формул ААДТ известны.

Пример

Доказательство с помощью таблиц истинности в логике высказываний является ААДТ.

Постановка задачи

Алгоритм, который проверяет отношение

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$$

для формулы $\mathfrak{B}$ относительно формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, называется алгоритмом автоматического доказательства теорем (ААДТ).

В общем случае ААДТ невозможен, т. е. не существует алгоритма, который для любых $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}$ выдавал бы ответ «Да», если $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$, и «Нет» в противном случае.

Для некоторых простых формальных теорий и некоторых простых классов формул ААДТ известны.

Пример

Доказательство с помощью таблиц истинности в логике высказываний является ААДТ.

Доказательство «от противного»

В основе многих ААДТ лежит идея доказательства «от противного».

Теорема

Если $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \overline{\mathfrak{B}} \vdash 0$, то $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$.

Доказательство

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \overline{\mathfrak{B}} \vdash 0 &\equiv \mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{B}} \to 0 \equiv \\
&\equiv \overline{\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}} \vee 0 \equiv \\
&\equiv \overline{\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}} \equiv \\
&\equiv \overline{\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n} \vee \mathfrak{B} \equiv \\
&\equiv \mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B} \equiv \\
&\equiv \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}.
\end{aligned}$$

Доказательство «от противного»

В основе многих ААДТ лежит идея доказательства «от противного».

Теорема

Если $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \overline{\mathfrak{B}} \vdash 0$, то $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$.

Доказательство

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \overline{\mathfrak{B}} \vdash 0 &\equiv \mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{B}} \to 0 \equiv \\ &\equiv \overline{\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}} \vee 0 \equiv \\ &\equiv \overline{\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}} \equiv \\ &\equiv \overline{\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n} \vee \mathfrak{B} \equiv \\ &\equiv \mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B} \equiv \\ &\equiv \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Доказательство «от противного»

В основе многих ААДТ лежит идея доказательства «от противного».

Теорема

Если $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \overline{\mathfrak{B}} \vdash 0$, то $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$.

Доказательство

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \overline{\mathfrak{B}} \vdash 0 &\equiv \mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_n \mathbin{\&} \overline{\mathfrak{B}} \to 0 \equiv \\
&\equiv \overline{\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_n \mathbin{\&} \overline{\mathfrak{B}}} \vee 0 \equiv \\
&\equiv \overline{\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_n \mathbin{\&} \overline{\mathfrak{B}}} \equiv \\
&\equiv \overline{\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_n} \vee \mathfrak{B} \equiv \\
&\equiv \mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B} \equiv \\
&\equiv \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}.
\end{aligned}
$$

Метод резолюций для логики высказываний

Пусть дана формула логики высказываний $\mathfrak{A}$.
Общезначимость формулы $\mathfrak{A}$ можно проверить с помощью метода резолюций, предложенного А. Робинсоном в 1965 г.

Метод резолюций является ААДТ, основанным на доказательстве «от противного», т. е. вместо доказательства $\vdash \mathfrak{A}$ доказывается, что формула $\overline{\mathfrak{A}}$ является противоречием.

Джон Алан Ро́бинсон (род. в 1930 г.) — американский математик и информатик

Метод резолюций для логики высказываний (продолжение)

Для доказательства $\vdash \mathfrak{A}$ сначала формируют отрицание $\overline{\mathfrak{A}}$.

Формулу $\overline{\mathfrak{A}}$ приводят к КНФ, т. е.

$$\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{D}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{D}_p,$$

где $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_p$ — дизъюнкции конечного числа пропозициональных переменных или их отрицаний.

Из них формируется множество дизъюнктов $\mathscr{K}$:

$$\mathscr{K} = \{\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_p\}.$$

Метод резолюций для логики высказываний (продолжение)

Для доказательства $\vdash \mathfrak{A}$ сначала формируют отрицание $\overline{\mathfrak{A}}$.

Формулу $\overline{\mathfrak{A}}$ приводят к КНФ, т. е.

$$\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{D}_p,$$

где $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_p$ — дизъюнкции конечного числа пропозициональных переменных или их отрицаний.

Из них формируется множество дизъюнктов $\mathscr{K}$:

$$\mathscr{K} = \{\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_p\}.$$

Метод резолюций для логики высказываний (продолжение)

Для доказательства $\vdash \mathfrak{A}$ сначала формируют отрицание $\overline{\mathfrak{A}}$.

Формулу $\overline{\mathfrak{A}}$ приводят к КНФ, т. е.

$$\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{D}_p,$$

где $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_p$ — дизъюнкции конечного числа пропозициональных переменных или их отрицаний.

Из них формируется множество дизъюнктов $\mathscr{K}$:

$$\mathscr{K} = \{\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_p\}.$$

Метод резолюций для логики высказываний (продолжение)

Находят два дизъюнкта этого множества $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}_j$, содержащие пропозициональные переменные с противоположными знаками,— контрарные литералы (к примеру X и $\overline{X}$):

$$\mathfrak{D}_i = \mathfrak{A} \vee X, \quad \mathfrak{D}_j = \mathfrak{B} \vee \overline{X}$$

При этом $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}_j$ формируют третий дизъюнкт — резольвенту $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, в которой исключены контрарные литералы:

$$\frac{\mathfrak{A} \vee X,\ \mathfrak{B} \vee \overline{X}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} (\mathrm{R}).$$

В частности, если $\mathfrak{D}_i = X$ и $\mathfrak{D}_j = \overline{X}$, то резольвента для них — это дизъюнкт, равный 0, т. к. $X \mathbin{\&} \overline{X} \equiv 0$.

Его называют пустым дизъюнктом или пустой резольвентой и обозначают знаком «$\Box$».

Метод резолюций для логики высказываний (продолжение)

Находят два дизъюнкта этого множества $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}_j$, содержащие пропозициональные переменные с противоположными знаками,— контрарные литералы (к примеру X и $\overline{X}$):

$$\mathfrak{D}_i = \mathfrak{A} \vee X, \quad \mathfrak{D}_j = \mathfrak{B} \vee \overline{X}$$

При этом $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}_j$ формируют третий дизъюнкт — резольвенту $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, в которой исключены контрарные литералы:

$$\frac{\mathfrak{A} \vee X,\ \mathfrak{B} \vee \overline{X}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}(\mathrm{R}).$$

В частности, если $\mathfrak{D}_i = X$ и $\mathfrak{D}_j = \overline{X}$, то резольвента для них — это дизъюнкт, равный 0, т. к. $X \mathbin{\&} \overline{X} \equiv 0$.
Его называют пустым дизъюнктом или пустой резольвентой и обозначают знаком «$\square$».

Метод резолюций для логики высказываний (продолжение)

Находят два дизъюнкта этого множества $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}_j$, содержащие пропозициональные переменные с противоположными знаками,— контрарные литералы (к примеру X и $\overline{X}$):

$$\mathfrak{D}_i = \mathfrak{A} \vee X, \quad \mathfrak{D}_j = \mathfrak{B} \vee \overline{X}$$

При этом $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}_j$ формируют третий дизъюнкт — резольвенту $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, в которой исключены контрарные литералы:

$$\frac{\mathfrak{A} \vee X,\ \mathfrak{B} \vee \overline{X}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} (\mathrm{R}).$$

В частности, если $\mathfrak{D}_i = X$ и $\mathfrak{D}_j = \overline{X}$, то резольвента для них — это дизъюнкт, равный 0, т. к. $X \,\&\, \overline{X} \equiv 0$.
Его называют пустым дизъюнктом или пустой резольвентой и обозначают знаком «$\square$».

Метод резолюций для логики высказываний (продолжение)

Находят два дизъюнкта этого множества $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}_j$, содержащие пропозициональные переменные с противоположными знаками,— контрарные литералы (к примеру X и $\overline{X}$):

$$\mathfrak{D}_i = \mathfrak{A} \vee X, \quad \mathfrak{D}_j = \mathfrak{B} \vee \overline{X}$$

При этом $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}_j$ формируют третий дизъюнкт — резольвенту $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, в которой исключены контрарные литералы:

$$\frac{\mathfrak{A} \vee X,\ \mathfrak{B} \vee \overline{X}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} (\mathrm{R}).$$

В частности, если $\mathfrak{D}_i = X$ и $\mathfrak{D}_j = \overline{X}$, то резольвента для них — это дизъюнкт, равный 0, т. к. $X \mathbin{\&} \overline{X} \equiv 0$.
Его называют пустым дизъюнктом или пустой резольвентой и обозначают знаком «$\square$».

Метод резолюций для логики высказываний (продолжение)

Полученная резольвента $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ является логическим следствием дизъюнктов $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{A} \vee X$ и $\mathfrak{D}_j = \mathfrak{B} \vee \overline{X}$, т. е.

$$\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}_j \vdash (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}).$$

Полученная резольвента $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ добавляется в множество дизъюнктов $\mathscr{K}$.

Неоднократно применяя правило получения резольвент (принцип резолюции) к множеству дизъюнктов, стремятся получить пустую резольвенту $\square$.

Наличие $\square$ свидетельствует о том, что $\overline{\mathfrak{A}}$ противоречива, т. к. если $\overline{\mathfrak{A}} \vdash 0$, то $\vdash \mathfrak{A}$.

Метод резолюций для логики высказываний (продолжение)

Полученная резольвента $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ является логическим следствием дизъюнктов $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{A} \vee X$ и $\mathfrak{D}_j = \mathfrak{B} \vee \overline{X}$, т. е.

$$\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}_j \vdash (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}).$$

Полученная резольвента $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ добавляется в множество дизъюнктов $\mathscr{K}$.

Неоднократно применяя правило получения резольвент (принцип резолюции) к множеству дизъюнктов, стремятся получить пустую резольвенту $\Box$.

Наличие $\Box$ свидетельствует о том, что $\overline{\mathfrak{A}}$ противоречива, т. к. если $\overline{\mathfrak{A}} \vdash 0$, то $\vdash \mathfrak{A}$.

Метод резолюций для логики высказываний (продолжение)

Полученная резольвента $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ является логическим следствием дизъюнктов $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{A} \vee X$ и $\mathfrak{D}_j = \mathfrak{B} \vee \overline{X}$, т. е.

$$\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}_j \vdash (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}).$$

Полученная резольвента $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ добавляется в множество дизъюнктов $\mathscr{K}$.

Неоднократно применяя правило получения резольвент (принцип резолюции) к множеству дизъюнктов, стремятся получить пустую резольвенту $\Box$.

Наличие $\Box$ свидетельствует о том, что $\overline{\mathfrak{A}}$ противоречива, т. к. если $\overline{\mathfrak{A}} \vdash 0$, то $\vdash \mathfrak{A}$.

Метод резолюций для логики высказываний (продолжение)

Полученная резольвента $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ является логическим следствием дизъюнктов $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{A} \vee X$ и $\mathfrak{D}_j = \mathfrak{B} \vee \overline{X}$, т. е.

$$\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}_j \vdash (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}).$$

Полученная резольвента $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ добавляется в множество дизъюнктов $\mathscr{K}$.

Неоднократно применяя правило получения резольвент (принцип резолюции) к множеству дизъюнктов, стремятся получить пустую резольвенту $\square$.

Наличие $\square$ свидетельствует о том, что $\overline{\mathfrak{A}}$ противоречива, т. к. если $\overline{\mathfrak{A}} \vdash 0$, то $\vdash \mathfrak{A}$.

Алгоритм метода резолюций для логики высказываний

1. Взять отрицание формулы $\mathfrak{A}$, т. е. $\overline{\mathfrak{A}}$.
2. Привести формулу $\overline{\mathfrak{A}}$ к КНФ.
3. Выписать множество её дизъюнктов $\mathscr{K} = \{\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_p\}$.
4. Выполнить анализ пар множества $\mathscr{K}$ по правилу: если существуют дизъюнкты $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}_j$, один из которых ($\mathfrak{D}_i$) содержит некоторый литерал X, а другой ($\mathfrak{D}_j$) — контрарный литерал $\overline{X}$, то нужно соединить эту пару с помощью дизъюнкции ($\mathfrak{D}_i \vee \mathfrak{D}_j$) и сформировать новый дизъюнкт — резольвенту, исключив из неё контрарные литералы X и $\overline{X}$.
5. Если в результате соединения дизъюнктов будет получена пустая резольвента $\square$, то результат достигнут (доказательство подтвердило противоречие), в противном случае включить резольвенту в множество дизъюнктов $\mathscr{K}$ и перейти к шагу 4.

Алгоритм метода резолюций для логики высказываний

1. Взять отрицание формулы $\mathfrak{A}$, т. е. $\overline{\mathfrak{A}}$.
2. Привести формулу $\overline{\mathfrak{A}}$ к КНФ.
3. Выписать множество её дизъюнктов $\mathscr{K} = \{\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_p\}$.
4. Выполнить анализ пар множества $\mathscr{K}$ по правилу: если существуют дизъюнкты $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}_j$, один из которых ($\mathfrak{D}_i$) содержит некоторый литерал X, а другой ($\mathfrak{D}_j$) — контрарный литерал $\overline{X}$, то нужно соединить эту пару с помощью дизъюнкции $(\mathfrak{D}_i \vee \mathfrak{D}_j)$ и сформировать новый дизъюнкт — резольвенту, исключив из неё контрарные литералы X и $\overline{X}$.
5. Если в результате соединения дизъюнктов будет получена пустая резольвента $\square$, то результат достигнут (доказательство подтвердило противоречие), в противном случае включить резольвенту в множество дизъюнктов $\mathscr{K}$ и перейти к шагу 4.

Алгоритм метода резолюций для логики высказываний

1. Взять отрицание формулы $\mathfrak{A}$, т. е. $\overline{\mathfrak{A}}$.
2. Привести формулу $\overline{\mathfrak{A}}$ к КНФ.
3. Выписать множество её дизъюнктов $\mathscr{K} = \{\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_p\}$.
4. Выполнить анализ пар множества $\mathscr{K}$ по правилу: если существуют дизъюнкты $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}_j$, один из которых ($\mathfrak{D}_i$) содержит некоторый литерал X, а другой ($\mathfrak{D}_j$) — контрарный литерал $\overline{X}$, то нужно соединить эту пару с помощью дизъюнкции $(\mathfrak{D}_i \vee \mathfrak{D}_j)$ и сформировать новый дизъюнкт — резольвенту, исключив из неё контрарные литералы X и $\overline{X}$.
5. Если в результате соединения дизъюнктов будет получена пустая резольвента $\square$, то результат достигнут (доказательство подтвердило противоречие), в противном случае включить резольвенту в множество дизъюнктов $\mathscr{K}$ и перейти к шагу 4.

Алгоритм метода резолюций для логики высказываний

1. Взять отрицание формулы $\mathfrak{A}$, т. е. $\overline{\mathfrak{A}}$.
2. Привести формулу $\overline{\mathfrak{A}}$ к КНФ.
3. Выписать множество её дизъюнктов $\mathscr{K} = \{\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_p\}$.
4. Выполнить анализ пар множества $\mathscr{K}$ по правилу: если существуют дизъюнкты $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}_j$, один из которых ($\mathfrak{D}_i$) содержит некоторый литерал X, а другой ($\mathfrak{D}_j$) — контрарный литерал $\overline{X}$, то нужно соединить эту пару с помощью дизъюнкции $(\mathfrak{D}_i \vee \mathfrak{D}_j)$ и сформировать новый дизъюнкт — резольвенту, исключив из неё контрарные литералы X и $\overline{X}$.
5. Если в результате соединения дизъюнктов будет получена пустая резольвента $\square$, то результат достигнут (доказательство подтвердило противоречие), в противном случае включить резольвенту в множество дизъюнктов $\mathscr{K}$ и перейти к шагу 4.

Алгоритм метода резолюций для логики высказываний

1. Взять отрицание формулы $\mathfrak{A}$, т. е. $\overline{\mathfrak{A}}$.
2. Привести формулу $\overline{\mathfrak{A}}$ к КНФ.
3. Выписать множество её дизъюнктов $\mathscr{K} = \{\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_p\}$.
4. Выполнить анализ пар множества $\mathscr{K}$ по правилу: если существуют дизъюнкты $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}_j$, один из которых ($\mathfrak{D}_i$) содержит некоторый литерал X, а другой ($\mathfrak{D}_j$) — контрарный литерал $\overline{X}$, то нужно соединить эту пару с помощью дизъюнкции $(\mathfrak{D}_i \vee \mathfrak{D}_j)$ и сформировать новый дизъюнкт — резольвенту, исключив из неё контрарные литералы X и $\overline{X}$.
5. Если в результате соединения дизъюнктов будет получена пустая резольвента $\square$, то результат достигнут (доказательство подтвердило противоречие), в противном случае включить резольвенту в множество дизъюнктов $\mathscr{K}$ и перейти к шагу 4.

Результаты алгоритма

При реализации указанного алгоритма возможны три случая:

1. Среди текущего множества дизъюнктов нет резольвируемых. Это означает, что формула $\mathfrak{A}$ не является общезначимой.
2. На каком-то шаге получается пустая резольвента. Формула $\mathfrak{A}$ общезначима.
3. Процесс не останавливается, т. е. множество дизъюнктов пополняется всё новыми резольвентами, среди которых нет пустых. В таком случае нельзя ничего сказать об общезначимости формулы $\mathfrak{A}$.

Результаты алгоритма

При реализации указанного алгоритма возможны три случая:

1. Среди текущего множества дизъюнктов нет резольвируемых. Это означает, что формула $\mathfrak{A}$ не является общезначимой.
2. На каком-то шаге получается пустая резольвента. Формула $\mathfrak{A}$ общезначима.
3. Процесс не останавливается, т. е. множество дизъюнктов пополняется всё новыми резольвентами, среди которых нет пустых. В таком случае нельзя ничего сказать об общезначимости формулы $\mathfrak{A}$.

Результаты алгоритма

При реализации указанного алгоритма возможны три случая:

1. Среди текущего множества дизъюнктов нет резольвируемых. Это означает, что формула $\mathfrak{A}$ не является общезначимой.
2. На каком-то шаге получается пустая резольвента. Формула $\mathfrak{A}$ общезначима.
3. Процесс не останавливается, т. е. множество дизъюнктов пополняется всё новыми резольвентами, среди которых нет пустых. В таком случае нельзя ничего сказать об общезначимости формулы $\mathfrak{A}$.

Результаты алгоритма

При реализации указанного алгоритма возможны три случая:

1. Среди текущего множества дизъюнктов нет резольвируемых. Это означает, что формула $\mathfrak{A}$ не является общезначимой.
2. На каком-то шаге получается пустая резольвента. Формула $\mathfrak{A}$ общезначима.
3. Процесс не останавливается, т. е. множество дизъюнктов пополняется всё новыми резольвентами, среди которых нет пустых. В таком случае нельзя ничего сказать об общезначимости формулы $\mathfrak{A}$.

Доказательство логического следствия

Метод резолюций годен и для доказательства того, что формула $\mathfrak{B}$ является логическим следствием формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, поскольку

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B} \;\equiv\; \vdash \mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}.$$

Для того чтобы применить метод резолюций для данного случая, предварительно нужно воспользоваться равенством

$$\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B} \;\equiv\; \overline{\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_n \mathbin{\&} \overline{\mathfrak{B}}}.$$

Формула $\mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_n \mathbin{\&} \overline{\mathfrak{B}}}$ будет общезначимой, если формула $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_n \mathbin{\&} \overline{\mathfrak{B}}$ является противоречием.

После этого можно применить алгоритм метода резолюций для формулы $\overline{\mathfrak{C}}$.

Доказательство логического следствия

Метод резолюций годен и для доказательства того, что формула $\mathfrak{B}$ является логическим следствием формул $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$, поскольку

$$\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B} \ \equiv \ \vdash \mathfrak{A}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}.$$

Для того чтобы применить метод резолюций для данного случая, предварительно нужно воспользоваться равенством

$$\mathfrak{A}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B} \ \equiv \ \overline{\mathfrak{A}_1 \,\&\dots\&\, \mathfrak{A}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}}.$$

Формула $\mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{A}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \mathfrak{A}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}}$ будет общезначимой, если формула $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{A}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \mathfrak{A}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}$ является противоречием.

После этого можно применить алгоритм метода резолюций для формулы $\mathfrak{C}$.

Доказательство логического следствия

Метод резолюций годен и для доказательства того, что формула $\mathfrak{B}$ является логическим следствием формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, поскольку

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B} \;\equiv\; \vdash \mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}.$$

Для того чтобы применить метод резолюций для данного случая, предварительно нужно воспользоваться равенством

$$\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B} \;\equiv\; \overline{\mathfrak{A}_1 \,\&\ldots\&\, \mathfrak{A}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}}.$$

Формула $\mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}}$ будет общезначимой, если формула $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}$ является противоречием.

После этого можно применить алгоритм метода резолюций для формулы $\mathfrak{C}$.

Доказательство логического следствия

Метод резолюций годен и для доказательства того, что формула $\mathfrak{B}$ является логическим следствием формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, поскольку

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B} \;\equiv\; \vdash \mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}.$$

Для того чтобы применить метод резолюций для данного случая, предварительно нужно воспользоваться равенством

$$\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B} \;\equiv\; \overline{\mathfrak{A}_1 \,\&\ldots\&\, \mathfrak{A}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}}.$$

Формула $\mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}}$ будет общезначимой, если формула $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}$ является противоречием.

После этого можно применить алгоритм метода резолюций для формулы $\mathfrak{C}$.

Пример

Доказать с помощью метода резолюций, что формула $\overline{B}$ является логическим следствием формул $\overline{A \,\&\, B}$ и A.

Доказательство

Чтобы формула $\overline{B}$ была логическим следствием формул $\overline{A \,\&\, B}$ и A, должно выполняться равенство

$$\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \to \overline{B} \equiv 1.$$

Поскольку метод резолюций устанавливает тождественную ложность формул, задачу необходимо переформулировать в виде противоречия.

Эквивалентными преобразованиями равенство можно привести к виду $\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \,\&\, B \equiv 0$, пригодному для применения метода резолюций.

КНФ полученной формулы будет иметь вид:

$$(\overline{A} \vee \overline{B}) \,\&\, A \,\&\, B.$$

Пример

Доказать с помощью метода резолюций, что формула $\overline{B}$ является логическим следствием формул $\overline{A \mathbin{\&} B}$ и A.

Доказательство

Чтобы формула $\overline{B}$ была логическим следствием формул $\overline{A \mathbin{\&} B}$ и A, должно выполняться равенство

$$\overline{A \mathbin{\&} B} \mathbin{\&} A \to \overline{B} \equiv 1.$$

Поскольку метод резолюций устанавливает тождественную ложность формул, задачу необходимо переформулировать в виде противоречия.

Эквивалентными преобразованиями равенство можно привести к виду $\overline{A \mathbin{\&} B} \mathbin{\&} A \mathbin{\&} B \equiv 0$, пригодному для применения метода резолюций.

КНФ полученной формулы будет иметь вид:

$$(\overline{A} \vee \overline{B}) \mathbin{\&} A \mathbin{\&} B.$$

Пример

Доказать с помощью метода резолюций, что формула $\overline{B}$ является логическим следствием формул $\overline{A \,\&\, B}$ и A.

Доказательство

Чтобы формула $\overline{B}$ была логическим следствием формул $\overline{A \,\&\, B}$ и A, должно выполняться равенство

$$\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \to \overline{B} \equiv 1.$$

Поскольку метод резолюций устанавливает тождественную ложность формул, задачу необходимо переформулировать в виде противоречия.

Эквивалентными преобразованиями равенство можно привести к виду $\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \,\&\, B \equiv 0$, пригодному для применения метода резолюций.

КНФ полученной формулы будет иметь вид:

$$(\overline{A} \vee \overline{B}) \,\&\, A \,\&\, B.$$

Пример

Доказать с помощью метода резолюций, что формула $\overline{B}$ является логическим следствием формул $\overline{A \,\&\, B}$ и A.

Доказательство

Чтобы формула $\overline{B}$ была логическим следствием формул $\overline{A \,\&\, B}$ и A, должно выполняться равенство

$$\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \to \overline{B} \equiv 1.$$

Поскольку метод резолюций устанавливает тождественную ложность формул, задачу необходимо переформулировать в виде противоречия.

Эквивалентными преобразованиями равенство можно привести к виду $\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \,\&\, B \equiv 0$, пригодному для применения метода резолюций.

КНФ полученной формулы будет иметь вид:

$$(\overline{A} \vee \overline{B}) \,\&\, A \,\&\, B.$$

Пример

Доказать с помощью метода резолюций, что формула $\overline{B}$ является логическим следствием формул $\overline{A \mathbin{\&} B}$ и A.

Доказательство

Чтобы формула $\overline{B}$ была логическим следствием формул $\overline{A \mathbin{\&} B}$ и A, должно выполняться равенство

$$\overline{A \mathbin{\&} B} \mathbin{\&} A \to \overline{B} \equiv 1.$$

Поскольку метод резолюций устанавливает тождественную ложность формул, задачу необходимо переформулировать в виде противоречия.

Эквивалентными преобразованиями равенство можно привести к виду $\overline{A \mathbin{\&} B} \mathbin{\&} A \mathbin{\&} B \equiv 0$, пригодному для применения метода резолюций.

КНФ полученной формулы будет иметь вид:

$$(\overline{A} \vee \overline{B}) \mathbin{\&} A \mathbin{\&} B.$$

Пример (продолжение)

Доказательство (продолжение)

Выпишем набор дизъюнктов:

$$\mathscr{K} = \{\mathfrak{D}_1 = \overline{A} \vee \overline{B}; \quad \mathfrak{D}_2 = A; \quad \mathfrak{D}_3 = B\}.$$

Получим новые дизъюнкты:

- $\mathfrak{D}_4 = \overline{B}$ — получен с помощью принципа резолюции для $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$;
- $\mathfrak{D}_5 = \square$ — получен с помощью принципа резолюции для $\mathfrak{D}_3$ и $\mathfrak{D}_4$.

В итоге мы получили пустой дизъюнкт.

Следовательно, равенство $\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \,\&\, B \equiv 0$ является верным, а значит, верным также является равенство $\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \to \overline{B} \equiv 1$.

Это, в свою очередь, означает, что исходное утверждение «формула $\overline{B}$ является логическим следствием формул $\overline{A \,\&\, B}$ и A» верно, что и требовалось доказать.

Пример (продолжение)

Доказательство (продолжение)

Выпишем набор дизъюнктов:

$$\mathscr{K} = \{\mathfrak{D}_1 = \overline{A} \vee \overline{B}; \quad \mathfrak{D}_2 = A; \quad \mathfrak{D}_3 = B\}.$$

Получим новые дизъюнкты:

- $\mathfrak{D}_4 = \overline{B}$ — получен с помощью принципа резолюции для $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$;
- $\mathfrak{D}_5 = \square$ — получен с помощью принципа резолюции для $\mathfrak{D}_3$ и $\mathfrak{D}_4$.

В итоге мы получили пустой дизъюнкт.

Следовательно, равенство $\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \,\&\, B = 0$ является верным, а значит, верным также является равенство $\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \to \overline{B} \equiv 1$.

Это, в свою очередь, означает, что исходное утверждение «формула $\overline{B}$ является логическим следствием формул $\overline{A \,\&\, B}$ и A» верно,
что и требовалось доказать.

Пример (продолжение)

Доказательство (продолжение)

Выпишем набор дизъюнктов:

$$\mathscr{K} = \{\mathfrak{D}_1 = \overline{A} \vee \overline{B}; \quad \mathfrak{D}_2 = A; \quad \mathfrak{D}_3 = B\}.$$

Получим новые дизъюнкты:

- $\mathfrak{D}_4 = \overline{B}$ — получен с помощью принципа резолюции для $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$;
- $\mathfrak{D}_5 = \square$ — получен с помощью принципа резолюции для $\mathfrak{D}_3$ и $\mathfrak{D}_4$.

В итоге мы получили пустой дизъюнкт.

Следовательно, равенство $\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \,\&\, B \equiv 0$ является верным, а значит, верным также является равенство $\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \to \overline{B} \equiv 1$.

Это, в свою очередь, означает, что исходное утверждение «формула $\overline{B}$ является логическим следствием формул $\overline{A \,\&\, B}$ и A» верно, что и требовалось доказать.

Пример (продолжение)

Доказательство (продолжение)

Выпишем набор дизъюнктов:

$$\mathscr{K} = \{\mathfrak{D}_1 = \overline{A} \vee \overline{B};\quad \mathfrak{D}_2 = A;\quad \mathfrak{D}_3 = B\}.$$

Получим новые дизъюнкты:

- $\mathfrak{D}_4 = \overline{B}$ — получен с помощью принципа резолюции для $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$;
- $\mathfrak{D}_5 = \square$ — получен с помощью принципа резолюции для $\mathfrak{D}_3$ и $\mathfrak{D}_4$.

В итоге мы получили пустой дизъюнкт.

Следовательно, равенство $\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \,\&\, B \equiv 0$ является верным, а значит, верным также является равенство $\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \to \overline{B} \equiv 1$.

Это, в свою очередь, означает, что исходное утверждение «формула $\overline{B}$ является логическим следствием формул $\overline{A \,\&\, B}$ и A» верно,
что и требовалось доказать.

Пример (продолжение)

Доказательство (продолжение)

Выпишем набор дизъюнктов:

$$\mathscr{K} = \{\mathfrak{D}_1 = \overline{A} \vee \overline{B}; \quad \mathfrak{D}_2 = A; \quad \mathfrak{D}_3 = B\}.$$

Получим новые дизъюнкты:

- $\mathfrak{D}_4 = \overline{B}$ — получен с помощью принципа резолюции для $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$;
- $\mathfrak{D}_5 = \square$ — получен с помощью принципа резолюции для $\mathfrak{D}_3$ и $\mathfrak{D}_4$.

В итоге мы получили пустой дизъюнкт.

Следовательно, равенство $\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \,\&\, B \equiv 0$ является верным, а значит, верным также является равенство $\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \to \overline{B} \equiv 1$.

Это, в свою очередь, означает, что исходное утверждение «формула $\overline{B}$ является логическим следствием формул $\overline{A \,\&\, B}$ и A» верно, что и требовалось доказать.

Пример (продолжение)

Доказательство (продолжение)

Выпишем набор дизъюнктов:

$$\mathscr{K} = \{\mathfrak{D}_1 = \overline{A} \vee \overline{B}; \quad \mathfrak{D}_2 = A; \quad \mathfrak{D}_3 = B\}.$$

Получим новые дизъюнкты:

- $\mathfrak{D}_4 = \overline{B}$ — получен с помощью принципа резолюции для $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$;
- $\mathfrak{D}_5 = \square$ — получен с помощью принципа резолюции для $\mathfrak{D}_3$ и $\mathfrak{D}_4$.

В итоге мы получили пустой дизъюнкт.

Следовательно, равенство $\overline{A \mathbin{\&} B} \mathbin{\&} A \mathbin{\&} B \equiv 0$ является верным, а значит, верным также является равенство $\overline{A \mathbin{\&} B} \mathbin{\&} A \to \overline{B} \equiv 1$.

Это, в свою очередь, означает, что исходное утверждение «формула $\overline{B}$ является логическим следствием формул $\overline{A \mathbin{\&} B}$ и A» верно, что и требовалось доказать.

Пример (продолжение)

Доказательство (продолжение)

Выпишем набор дизъюнктов:

$$\mathscr{K} = \{\mathfrak{D}_1 = \overline{A} \vee \overline{B}; \quad \mathfrak{D}_2 = A; \quad \mathfrak{D}_3 = B\}.$$

Получим новые дизъюнкты:

- $\mathfrak{D}_4 = \overline{B}$ — получен с помощью принципа резолюции для $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$;
- $\mathfrak{D}_5 = \square$ — получен с помощью принципа резолюции для $\mathfrak{D}_3$ и $\mathfrak{D}_4$.

В итоге мы получили пустой дизъюнкт.

Следовательно, равенство $\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \,\&\, B \equiv 0$ является верным, а значит, верным также является равенство $\overline{A \,\&\, B} \,\&\, A \to \overline{B} \equiv 1$.

Это, в свою очередь, означает, что исходное утверждение «формула $\overline{B}$ является логическим следствием формул $\overline{A \,\&\, B}$ и A» верно, что и требовалось доказать.

Метод резолюций в логике предикатов. Терминология

Введём рекурсивное определение терма логики предикатов:

1. Любая предметная переменная x является термом.
2. Любая предметная константа a является термом.
3. Если f — n-местный функциональный символ, а $t_1, \dots, t_n$ — термы, то $f(t_1, \dots, t_n)$ является термом.
4. Других термов не существует.

Примеры термов

$$f(b, x, g(x, y)), \quad f(b, b, b), \quad b, \quad x, \quad g\Big(b, f\big(x, y, g(x, y)\big)\Big),$$

где f — трёхместный, g — двухместный функциональные символы, x, y — предметные переменные, b — предметная константа.

Метод резолюций в логике предикатов. Терминология

Введём рекурсивное определение терма логики предикатов:

1. Любая предметная переменная x является термом.
2. Любая предметная константа a является термом.
3. Если f — n-местный функциональный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ является термом.
4. Других термов не существует.

Примеры термов

$$f(b, x, g(x, y)), \quad f(b, b, b), \quad b, \quad x, \quad g\Big(b, f(x, y, g(x, y))\Big),$$

где f — трёхместный, g — двухместный функциональные символы, x, y — предметные переменные, b — предметная константа.

Метод резолюций в логике предикатов. Терминология

Введём рекурсивное определение терма логики предикатов:

1. Любая предметная переменная x является термом.
2. Любая предметная константа a является термом.
3. Если f — n-местный функциональный символ, а $t_1, \dots, t_n$ — термы, то $f(t_1, \dots, t_n)$ является термом.
4. Других термов не существует.

Примеры термов

$$f(b, x, g(x, y)), \quad f(b, b, b), \quad b, \quad x, \quad g\Big(b, f\big(x, y, g(x, y)\big)\Big),$$

где f — трёхместный, g — двухместный функциональные символы, x, y — предметные переменные, b — предметная константа.

Метод резолюций в логике предикатов. Терминология

Введём рекурсивное определение терма логики предикатов:

1. Любая предметная переменная x является термом.
2. Любая предметная константа a является термом.
3. Если f — n-местный функциональный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ является термом.
4. Других термов не существует.

Примеры термов

$$f(b, x, g(x, y)), \quad f(b, b, b), \quad b, \quad x, \quad g\Big(b, f(x, y, g(x, y))\Big),$$

где f — трёхместный, g — двухместный функциональные символы, x, y — предметные переменные, b — предметная константа.

Метод резолюций в логике предикатов. Терминология

Введём рекурсивное определение терма логики предикатов:

1. Любая предметная переменная x является термом.
2. Любая предметная константа a является термом.
3. Если f — n-местный функциональный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ является термом.
4. Других термов не существует.

Примеры термов

$$f(b, x, g(x, y)), \quad f(b, b, b), \quad b, \quad x, \quad g\Big(b, f\big(x, y, g(x, y)\big)\Big),$$

где f — трёхместный, g — двухместный функциональные символы, x, y — предметные переменные, b — предметная константа.

Метод резолюций в логике предикатов. Терминология

Введём рекурсивное определение терма логики предикатов:

1. Любая предметная переменная x является термом.
2. Любая предметная константа a является термом.
3. Если f — n-местный функциональный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ является термом.
4. Других термов не существует.

Примеры термов

$f(b, x, g(x, y))$, $f(b, b, b)$, b, x, $g\Big(b, f\big(x, y, g(x, y)\big)\Big)$,
где f — трёхместный, g — двухместный функциональные символы, x, y — предметные переменные, b — предметная константа.

Метод резолюций в логике предикатов. Терминология

Введём рекурсивное определение терма логики предикатов:

1. Любая предметная переменная x является термом.
2. Любая предметная константа a является термом.
3. Если f — n-местный функциональный символ, а $t_1, \dots, t_n$ — термы, то $f(t_1, \dots, t_n)$ является термом.
4. Других термов не существует.

Примеры термов

$f(b, x, g(x, y))$, $f(b, b, b)$, b, x, $g\Big(b, f\big(x, y, g(x, y)\big)\Big)$,
где f — трёхместный, g — двухместный функциональные символы, x, y — предметные переменные, b — предметная константа.

Терминология (продолжение)

Далее также будем использовать следующие термины.

Если P — n-местный предикатный символ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ — атом.

Литера — это атом или отрицание атома.

Дизъюнкт — это дизъюнкция литер.

n-литерный дизъюнкт — это дизъюнкт, содержащий n литер.

Однолитерный дизъюнкт — дизъюнкт, состоящий из одной литеры.

Дизъюнкт, не содержащий литер, называется пустым дизъюнктом (обозначается $\Box$).

Под выражением будем понимать терм, множество термов, множество атомов, литеру, дизъюнкт, множество дизъюнктов.

Терминология (продолжение)

Далее также будем использовать следующие термины.

Если P — n-местный предикатный символ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ — атом.

Литера — это атом или отрицание атома.

Дизъюнкт — это дизъюнкция литер.

n-литерный дизъюнкт — это дизъюнкт, содержащий n литер.

Однолитерный дизъюнкт — дизъюнкт, состоящий из одной литеры.

Дизъюнкт, не содержащий литер, называется пустым дизъюнктом (обозначается $\square$).

Под выражением будем понимать терм, множество термов, множество атомов, литеру, дизъюнкт, множество дизъюнктов.

Терминология (продолжение)

Далее также будем использовать следующие термины.

Если P — n-местный предикатный символ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ — атом.

Литера — это атом или отрицание атома.

Дизъюнкт — это дизъюнкция литер.

n-литерный дизъюнкт — это дизъюнкт, содержащий n литер.

Однолитерный дизъюнкт — дизъюнкт, состоящий из одной литеры.

Дизъюнкт, не содержащий литер, называется пустым дизъюнктом (обозначается $\square$).

Под выражением будем понимать терм, множество термов, множество атомов, литеру, дизъюнкт, множество дизъюнктов.

Терминология (продолжение)

Далее также будем использовать следующие термины.

Если P — n-местный предикатный символ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ — атом.

Литера — это атом или отрицание атома.

Дизъюнкт — это дизъюнкция литер.

n-литерный дизъюнкт — это дизъюнкт, содержащий n литер.

Однолитерный дизъюнкт — дизъюнкт, состоящий из одной литеры.

Дизъюнкт, не содержащий литер, называется пустым дизъюнктом (обозначается $\square$).

Под выражением будем понимать терм, множество термов, множество атомов, литеру, дизъюнкт, множество дизъюнктов.

Терминология (продолжение)

Далее также будем использовать следующие термины.

Если P — n-местный предикатный символ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ — атом.

Литера — это атом или отрицание атома.

Дизъюнкт — это дизъюнкция литер.

n-литерный дизъюнкт — это дизъюнкт, содержащий n литер.

Однолитерный дизъюнкт — дизъюнкт, состоящий из одной литеры.

Дизъюнкт, не содержащий литер, называется пустым дизъюнктом (обозначается $\square$).

Под выражением будем понимать терм, множество термов, множество атомов, литеру, дизъюнкт, множество дизъюнктов.

Терминология (продолжение)

Далее также будем использовать следующие термины.

Если P — n-местный предикатный символ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ — атом.

Литера — это атом или отрицание атома.

Дизъюнкт — это дизъюнкция литер.

n-литерный дизъюнкт — это дизъюнкт, содержащий n литер.

Однолитерный дизъюнкт — дизъюнкт, состоящий из одной литеры.

Дизъюнкт, не содержащий литер, называется пустым дизъюнктом (обозначается $\square$).

Под выражением будем понимать терм, множество термов, множество атомов, литеру, дизъюнкт, множество дизъюнктов.

Терминология (продолжение)

Далее также будем использовать следующие термины.

Если P — n-местный предикатный символ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ — атом.

Литера — это атом или отрицание атома.

Дизъюнкт — это дизъюнкция литер.

n-литерный дизъюнкт — это дизъюнкт, содержащий n литер.

Однолитерный дизъюнкт — дизъюнкт, состоящий из одной литеры.

Дизъюнкт, не содержащий литер, называется пустым дизъюнктом (обозначается $\square$).

Под выражением будем понимать терм, множество термов, множество атомов, литеру, дизъюнкт, множество дизъюнктов.

Терминология (продолжение)

Далее также будем использовать следующие термины.

Если P — n-местный предикатный символ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ — атом.

Литера — это атом или отрицание атома.

Дизъюнкт — это дизъюнкция литер.

n-литерный дизъюнкт — это дизъюнкт, содержащий n литер.

Однолитерный дизъюнкт — дизъюнкт, состоящий из одной литеры.

Дизъюнкт, не содержащий литер, называется пустым дизъюнктом (обозначается $\square$).

Под выражением будем понимать терм, множество термов, множество атомов, литеру, дизъюнкт, множество дизъюнктов.

Подстановки

Подстановка — конечное множество $\{t_1/v_1, \dots, t_n/v_n\}$, где каждая v_i — предметная переменная, каждый t_i — терм, а запись t_i/v_i означает, что переменная v_i заменяется термом t_i, причём t_i отличается от v_i, а среди $v_1, \dots, v_n$ нет одинаковых переменных.

Подстановки будем обозначать строчными греческими буквами $\alpha, \dots, \omega$.

Подстановка, не содержащая элементов, называется пустой и обозначается символом ε.

Пример

Следующие множества являются подстановками:

$$\theta = \{f(z)/x,\ y/z\}, \quad \sigma = \{a/x,\ g(y)/y,\ f(g(b))/z\}, \quad \varepsilon = \{\}.$$

Подстановки

Подстановка — конечное множество $\{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$, где каждая v_i — предметная переменная, каждый t_i — терм, а запись t_i/v_i означает, что переменная v_i заменяется термом t_i, причём t_i отличается от v_i, а среди $v_1, \ldots, v_n$ нет одинаковых переменных.

Подстановки будем обозначать строчными греческими буквами $\alpha, \ldots, \omega$.

Подстановка, не содержащая элементов, называется пустой и обозначается символом ε.

Пример

Следующие множества являются подстановками:

$$\theta = \{f(z)/x,\ y/z\}, \quad \sigma = \{a/x,\ g(y)/y,\ f(g(b))/z\}, \quad \varepsilon = \{\}.$$

Подстановки

Подстановка — конечное множество $\{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$, где каждая v_i — предметная переменная, каждый t_i — терм, а запись t_i/v_i означает, что переменная v_i заменяется термом t_i, причём t_i отличается от v_i, а среди $v_1, \ldots, v_n$ нет одинаковых переменных.

Подстановки будем обозначать строчными греческими буквами $\alpha, \ldots, \omega$.

Подстановка, не содержащая элементов, называется пустой и обозначается символом ε.

Пример

Следующие множества являются подстановками:

$$\theta = \{f(z)/x,\ y/z\}, \quad \sigma = \{a/x,\ g(y)/y,\ f(g(b))/z\}, \quad \varepsilon = \{\}.$$

Подстановки

Подстановка — конечное множество $\{t_1/v_1, \dots, t_n/v_n\}$, где каждая v_i — предметная переменная, каждый t_i — терм, а запись t_i/v_i означает, что переменная v_i заменяется термом t_i, причём t_i отличается от v_i, а среди $v_1, \dots, v_n$ нет одинаковых переменных.

Подстановки будем обозначать строчными греческими буквами $\alpha, \dots, \omega$.

Подстановка, не содержащая элементов, называется пустой и обозначается символом ε.

Пример

Следующие множества являются подстановками:

$$\theta = \{f(z)/x,\ y/z\},\quad \sigma = \{a/x,\ g(y)/y,\ f(g(b))/z\},\quad \varepsilon = \{\}.$$

Подстановки

Подстановка — конечное множество $\{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$, где каждая v_i — предметная переменная, каждый t_i — терм, а запись t_i/v_i означает, что переменная v_i заменяется термом t_i, причём t_i отличается от v_i, а среди $v_1, \ldots, v_n$ нет одинаковых переменных.

Подстановки будем обозначать строчными греческими буквами $\alpha, \ldots, \omega$.

Подстановка, не содержащая элементов, называется пустой и обозначается символом ε.

Пример

Следующие множества являются подстановками:

$$\theta = \{f(z)/x,\ y/z\}, \quad \sigma = \{a/x,\ g(y)/y,\ f(g(b))/z\}, \quad \varepsilon = \{\}.$$

Примеры

Пусть $\theta = \{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$ — подстановка, $\mathfrak{E}$ — выражение.
Выражение $\mathfrak{E}^\theta$ называется **примером** $\mathfrak{E}$, если $\mathfrak{E}^\theta$ получено из $\mathfrak{E}$ путём замены одновременно всех вхождений переменных $v_1, \ldots, v_n$ на термы $t_1, \ldots, t_n$ соответственно.

Пример

Пусть $\theta = \{a/x, \;\; f(b)/y, \;\; c/z\}$, $\mathfrak{E} = P(x, y, z)$.
Тогда $\mathfrak{E}^\theta = P(a, f(b), c)$.

Примеры

Пусть $\theta = \{t_1/v_1, \dots, t_n/v_n\}$ — подстановка, $\mathfrak{E}$ — выражение. Выражение $\mathfrak{E}^\theta$ называется примером $\mathfrak{E}$, если $\mathfrak{E}^\theta$ получено из $\mathfrak{E}$ путём замены одновременно всех вхождений переменных $v_1, \dots, v_n$ на термы $t_1, \dots, t_n$ соответственно.

Пример

Пусть $\theta = \{a/x,\ \ f(b)/y,\ \ c/z\}$, $\mathfrak{E} = P(x, y, z)$.
Тогда $\mathfrak{E}^\theta = P(a, f(b), c)$.

Примеры

Пусть $\theta = \{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$ — подстановка, $\mathfrak{E}$ — выражение. Выражение $\mathfrak{E}^\theta$ называется **примером** $\mathfrak{E}$, если $\mathfrak{E}^\theta$ получено из $\mathfrak{E}$ путём замены одновременно всех вхождений переменных $v_1, \ldots, v_n$ на термы $t_1, \ldots, t_n$ соответственно.

Пример

Пусть $\theta = \{a/x, \;\; f(b)/y, \;\; c/z\}$, $\mathfrak{E} = P(x, y, z)$.
Тогда $\mathfrak{E}^\theta = P(a, f(b), c)$.

Примеры

Пусть $\theta = \{t_1/v_1, \dots, t_n/v_n\}$ — подстановка, $\mathfrak{E}$ — выражение. Выражение $\mathfrak{E}^\theta$ называется примером $\mathfrak{E}$, если $\mathfrak{E}^\theta$ получено из $\mathfrak{E}$ путём замены одновременно всех вхождений переменных $v_1, \dots, v_n$ на термы $t_1, \dots, t_n$ соответственно.

Пример

Пусть $\theta = \{a/x,\ \ f(b)/y,\ \ c/z\}$, $\mathfrak{E} = P(x, y, z)$.
Тогда $\mathfrak{E}^\theta = P(a, f(b), c)$.

Примеры

Пусть $\theta = \{t_1/v_1, \dots, t_n/v_n\}$ — подстановка, $\mathfrak{E}$ — выражение. Выражение $\mathfrak{E}^\theta$ называется **примером** $\mathfrak{E}$, если $\mathfrak{E}^\theta$ получено из $\mathfrak{E}$ путём замены одновременно всех вхождений переменных $v_1, \dots, v_n$ на термы $t_1, \dots, t_n$ соответственно.

Пример

Пусть $\theta = \{a/x,\ \ f(b)/y,\ \ c/z\}$, $\mathfrak{E} = P(x, y, z)$.
Тогда $\mathfrak{E}^\theta = P\big(a, f(b), c\big)$.

Композиция подстановок

Пусть $\theta = \{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$ и $\lambda = \{u_1/y_1, \dots, u_1/y_m\}$ — две подстановки.

Композицией θ и λ называют подстановку $\theta \circ \lambda$, которая получается из множества

$$\{t_1^\lambda/x_1, \dots, t_n^\lambda/x_n,\ u_1/y_1, \dots, u_m/y_m\}$$

вычёркиванием всех элементов t_j^λ/x_j, для которых $t_j^\lambda = x_j$, а также всех элементов u_i/y_i, таких, что $y_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$.

Композиция подстановок ассоциативна:

$$(\theta \circ \lambda) \circ \mu = \theta \circ (\lambda \circ \mu).$$

Пустая подстановка обладает следующим свойством:

$$\varepsilon \circ \theta = \theta \circ \varepsilon = \theta.$$

Композиция подстановок

Пусть $\theta = \{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$ и $\lambda = \{u_1/y_1, \dots, u_1/y_m\}$ — две подстановки.

Композицией θ и λ называют подстановку $\theta \circ \lambda$, которая получается из множества

$$\{t_1^\lambda/x_1, \dots, t_n^\lambda/x_n, \; u_1/y_1, \dots, u_m/y_m\}$$

вычёркиванием всех элементов t_j^λ/x_j, для которых $t_j^\lambda = x_j$, а также всех элементов u_i/y_i, таких, что $y_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$.

Композиция подстановок ассоциативна:

$$(\theta \circ \lambda) \circ \mu = \theta \circ (\lambda \circ \mu).$$

Пустая подстановка обладает следующим свойством:

$$\varepsilon \circ \theta = \theta \circ \varepsilon = \theta.$$

Композиция подстановок

Пусть $\theta = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$ и $\lambda = \{u_1/y_1, \ldots, u_1/y_m\}$ — две подстановки.

Композицией θ и λ называют подстановку $\theta \circ \lambda$, которая получается из множества

$$\{t_1^\lambda/x_1, \ldots, t_n^\lambda/x_n,\ u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$$

вычёркиванием всех элементов t_j^λ/x_j, для которых $t_j^\lambda = x_j$, а также всех элементов u_i/y_i, таких, что $y_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Композиция подстановок ассоциативна:

$$(\theta \circ \lambda) \circ \mu = \theta \circ (\lambda \circ \mu).$$

Пустая подстановка обладает следующим свойством:

$$\varepsilon \circ \theta = \theta \circ \varepsilon = \theta.$$

Композиция подстановок

Пусть $\theta = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$ и $\lambda = \{u_1/y_1, \ldots, u_1/y_m\}$ — две подстановки.

Композицией θ и λ называют подстановку $\theta \circ \lambda$, которая получается из множества

$$\{t_1^\lambda/x_1, \ldots, t_n^\lambda/x_n,\ u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$$

вычёркиванием всех элементов t_j^λ/x_j, для которых $t_j^\lambda = x_j$, а также всех элементов u_i/y_i, таких, что $y_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Композиция подстановок ассоциативна:

$$(\theta \circ \lambda) \circ \mu = \theta \circ (\lambda \circ \mu).$$

Пустая подстановка обладает следующим свойством:

$$\varepsilon \circ \theta = \theta \circ \varepsilon = \theta.$$

Пример нахождения композиции подстановок

Пусть даны подстановки

$$\theta = \{t_1/x_1,\ t_2/x_2\} = \{f(y)/x,\ z/y\},$$
$$\lambda = \{u_1/y_1,\ u_2/y_2,\ u_3/y_3\} = \{a/x,\ b/y,\ y/z\}.$$

Тогда их композиция образуется из множества

$$\{t_1^\lambda/x_1,\quad t_2^\lambda/x_2,\quad u_1/y_1,\quad u_2/y_2,\quad u_3/y_3\} =$$
$$= \{f(b)/x,\quad y/y,\quad a/x,\quad b/y,\quad y/z\}.$$

Вычёркиваем $t_2^\lambda/x_2 = y/y$, т. к. $t_2^\lambda = x_2$.

Вычёркиваем $u_1/y_1 = a/x$ и $u_2/y_2 = b/y$,
т. к. y_1 и y_2 содержатся среди $\{x_1, x_2\} = \{x, y\}$.

В итоге получаем $\theta \circ \lambda = \{f(b)/x,\ y/z\}$.

Пример нахождения композиции подстановок

Пусть даны подстановки

$$\theta = \{t_1/x_1,\ t_2/x_2\} = \{f(y)/x,\ z/y\},$$
$$\lambda = \{u_1/y_1,\ u_2/y_2,\ u_3/y_3\} = \{a/x,\ b/y,\ y/z\}.$$

Тогда их композиция образуется из множества

$$\{t_1^\lambda/x_1,\quad t_2^\lambda/x_2,\quad u_1/y_1,\quad u_2/y_2,\quad u_3/y_3\} =$$
$$= \{f(b)/x,\quad y/y,\quad a/x,\quad b/y,\quad y/z\}.$$

Вычёркиваем $t_2^\lambda/x_2 = y/y$, т. к. $t_2^\lambda = x_2$.

Вычёркиваем $u_1/y_1 = a/x$ и $u_2/y_2 = b/y$,
т. к. y_1 и y_2 содержатся среди $\{x_1, x_2\} = \{x, y\}$.

В итоге получаем $\theta \circ \lambda = \{f(b)/x,\ y/z\}$.

Пример нахождения композиции подстановок

Пусть даны подстановки

$$\theta = \{t_1/x_1,\ t_2/x_2\} = \{f(y)/x,\ z/y\},$$
$$\lambda = \{u_1/y_1,\ u_2/y_2,\ u_3/y_3\} = \{a/x,\ b/y,\ y/z\}.$$

Тогда их композиция образуется из множества

$$\begin{aligned} &\{t_1^\lambda/x_1,\quad t_2^\lambda/x_2,\quad u_1/y_1,\quad u_2/y_2,\quad u_3/y_3\} = \\ = &\{f(b)/x,\quad y/y,\quad a/x,\quad b/y,\quad y/z\}. \end{aligned}$$

Вычёркиваем $t_2^\lambda/x_2 = y/y$, т. к. $t_2^\lambda = x_2$.

Вычёркиваем $u_1/y_1 = a/x$ и $u_2/y_2 = b/y$,
т. к. y_1 и y_2 содержатся среди $\{x_1, x_2\} = \{x, y\}$.

В итоге получаем $\theta \circ \lambda = \{f(b)/x,\ y/z\}$.

Пример нахождения композиции подстановок

Пусть даны подстановки

$$\theta = \{t_1/x_1,\ t_2/x_2\} = \{f(y)/x,\ z/y\},$$
$$\lambda = \{u_1/y_1,\ u_2/y_2,\ u_3/y_3\} = \{a/x,\ b/y,\ y/z\}.$$

Тогда их композиция образуется из множества

$$\begin{aligned} &\{t_1^\lambda/x_1,\quad t_2^\lambda/x_2,\quad u_1/y_1,\quad u_2/y_2,\quad u_3/y_3\} = \\ = &\{f(b)/x,\quad y/y,\quad a/x,\quad b/y,\quad y/z\}. \end{aligned}$$

Вычёркиваем $t_2^\lambda/x_2 = y/y$, т. к. $t_2^\lambda = x_2$.

Вычёркиваем $u_1/y_1 = a/x$ и $u_2/y_2 = b/y$,
т. к. y_1 и y_2 содержатся среди $\{x_1, x_2\} = \{x, y\}$.

В итоге получаем $\theta \circ \lambda = \{f(b)/x,\ y/z\}$.

Пример нахождения композиции подстановок

Пусть даны подстановки

$$\theta = \{t_1/x_1,\ t_2/x_2\} = \{f(y)/x,\ z/y\},$$
$$\lambda = \{u_1/y_1,\ u_2/y_2,\ u_3/y_3\} = \{a/x,\ b/y,\ y/z\}.$$

Тогда их композиция образуется из множества

$$\begin{aligned} &\{t_1^\lambda/x_1,\quad t_2^\lambda/x_2,\quad u_1/y_1,\quad u_2/y_2,\quad u_3/y_3\} = \\ = &\{f(b)/x,\quad y/y,\quad a/x,\quad b/y,\quad y/z\}. \end{aligned}$$

Вычёркиваем $t_2^\lambda/x_2 = y/y$, т. к. $t_2^\lambda = x_2$.

Вычёркиваем $u_1/y_1 = a/x$ и $u_2/y_2 = b/y$,
т. к. y_1 и y_2 содержатся среди $\{x_1, x_2\} = \{x, y\}$.

В итоге получаем $\theta \circ \lambda = \{f(b)/x,\ y/z\}$.

Ссылка для скачивания этой лекции: