

2025 届全国新课标 II 卷数学试题

试卷满分：150 分 考试时间：120 分钟

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。
写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。

1. 2, 8, 14, 16, 20 的平均数是（ ）
A. 8 B. 9 C. 12 D. 18
2. 已知 $z = 1 + i$ ， $\frac{1}{z-1} = ()$
A. $-i$ B. i C. -1 D. 1
3. 设集合 $A = \{-4, 0, 1, 2, 8\}$, $B = \{x | x^2 = x\}$ ，则 $A \cap B = ()$
A. {0, 1, 2} B. {1, 2, 8} C. {2, 8} D. {0, 1}
4. 解不等式 $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$ ，其解集为（ ）
A. $\{x | -2 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x | x \leq -2\}$
C. $\{x | -2 \leq x < 1\}$ D. $\{x | x > 1\}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 2$, $AC = 1 + \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{6}$, 则角 $A = ()$
A. 45° B. 60° C. 120° D. 135°
6. 对于抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 焦点为 F , 点 A 在 C 上, 过 A 作准线的垂线, 垂足为 B 。若 $\triangle ABF$ 的准线 $l: y = -2x + 2$, 求 $|AF| = ()$
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
7. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_3 = 6$, $S_5 = -5$, 则 $S_6 = ()$
A. -20 B. -15 C. -10 D. -5
8. 已知 $0 < \alpha < \pi$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = ()$
A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{10}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, q 为 $\{a_n\}$ 的公比, $q > 0$, $S_3 = 7$, $a_3 = 1$, 则下列说法正确的是 ()
A. $q = \frac{1}{2}$ B. $a_2 = \frac{1}{9}$ C. $S_5 = 8$ D. $a_n + S_n = 8$
10. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, $x > 0$ 时, $f(x) = (x^2 - 3)e^x + 2$, , 则下列说法正确的是 ()
A. $f(0) = 0$
B. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$
C. $f(x) \geq 2$ 当且仅当 $x \geq \sqrt{3}$
D. $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

11. 对于双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 左、右焦点为 F_1, F_2 , 左、右顶点为 A_1, A_2 。以 F_1F_2 为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 M, N , 且 $\angle NA_1M = \frac{\pi}{6}$, 下列说法正确的是()

- A. $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$
- B. $|MA_1| = 2|MA_2|$
- C. C 的离心率为 $\sqrt{3}$
- D. 当 $a = \sqrt{2}$ 时, 四边形 NA_1MA_2 的面积为 $8\sqrt{3}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知 $\vec{a} = (x, 1)$, $\vec{b} = (x+1, 2x)$, 且 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 求 $|\vec{a}|$ 为_____

13. 若 $x = 2$ 是 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点, 求 $f(-1)$ 的值为_____

14. 一个底面半径为 $4cm$ 、高为 $9cm$ 的封闭圆柱形容器内有两个半径相等的铁球, 求铁球半径的最大值(单位: cm)为_____

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知 $f(x) = \cos(2x + \varphi) (0 \leq \varphi < \pi)$, 且 $f(0) = \frac{1}{2}$ 。

(1) 求 φ 的值;

(2) 设 $g(x) = f(x) + f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, 求 $g(x)$ 的值域和单调区间。

16. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，长轴长为 4。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过点(0, -2)的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点， O 为坐标原点，若 $S_{\triangle OAB} = \sqrt{2}$ ，求 $|AB|$ 。

17. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $AB//CD$ ， $\angle DAB = 90^\circ$ ， F 为 CD 中点， E 在 AB 上， $EF//AD$ ， $AB = 3AD$ ， $CD = 2AD$ 。将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$ ，使得面 $EFD'A'$ 与面 CFB 所成的二面角为 60° 。

(1) 证明: $A'B//$ 平面 CDF ；

(2) 求面 BCD' 与面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值。

18. 已知 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3$, $0 < k < \frac{1}{3}$ 。

(1) 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在唯一极值点和唯一零点;

(2) 设 x_1, x_2 为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的极值点和零点;

①设 $g(t) = f(x_1 + t) - f(x_1 - t)$, 证明: $g(t)$ 在 $(0, x_1)$ 单调递增;

②比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小, 并证明。

19. 甲、乙乒乓球练习, 每个球胜者得 1 分, 负者得 0 分。设每个球甲胜概率为

$p \left(\frac{1}{2} < p < 1 \right)$, 乙胜概率为 q , $p + q = 1$, 且各球胜负独立。对正整数 $k \geq 2$,

记 P_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率, q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得 2 分的概率。

(1) 求 p_3, p_4 (用 p 表示);

(2) 若 $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4$, 求 p ;

(3) 证明: 对任意正整数 m , $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$ 。

2025 年全国统一高考数学试卷（新高考II）

参考答案（网传版）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $2, 8, 14, 16, 20$ 平均数为（ ）

- A. 8 B. 9 C. 12 D. 18

【答案】C

【解答】 $\bar{x} = \frac{2+8+14+16+20}{5} = 12$

2. $z = 1+i$, $\frac{1}{z-1} =$ ()

- A. $-i$ B. i C. -1 D. 1

【答案】A

【解答】 $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+i-1} = \frac{1}{i} = -i$.

3. $A = \{-4, 0, 1, 2, 8\}$ $B = \{x \mid x^3 = x\}$, $A \cap B =$ ()

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{1, 2, 8\}$ C. $\{2, 8\}$ D. $\{0, 1\}$

【答案】D

【解答】 $B = \{x \mid x(x-1)(x+1) = 0\} = \{0, -1, 1\}$, $A \cap B = \{0, 1\}$.

4. $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$ 解集是 ()

- A. $\{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x \mid x \leq -2\}$ C. $\{x \mid -2 \leq x < 1\}$ D. $\{x \mid x > 1\}$

【答案】C

【解答】

$$\frac{x-4}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x-1} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow -(x+2)(x-1) \geq 0 \text{ 且 } x-1 \neq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x < 1.$$

5. $\triangle ABC$, $BC = 2$, $AC = 1 + \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{6}$, $A = (\quad)$

A. 45°

B. 60°

C. 120°

D. 135°

【答案】A

【解答】由余弦定理

$$\cos A = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC \cdot AB} = \frac{(1+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2}{2 \times (1+\sqrt{3}) \times \sqrt{6}} = \frac{2(\sqrt{3}+3)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+3)} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$A \in (0, \pi), \text{ 故 } A = \frac{\pi}{4}.$$

6. 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 焦点 F , $A \in C$, 过 A 作 C 准线的垂线, 垂足为 B . 若

$l_{BF}: y = -2x + 2$, 则 $|AF| = (\quad)$

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】C

【解答】 $l_{BF}: y = -2x + 2$ 与 x 轴交于 F 点, 则 $F(1, 0)$,

$$\text{故 } \frac{p}{2} = 1 \Leftrightarrow p = 2 \Leftrightarrow C: y^2 = 4x;$$

设 $l_{BF}: y = -2x + 2$ 与 y 轴交于 N 点, 则 $N(0, 2)$;

准线与 x 轴交于 M 点, 由 $\triangle FON \sim \triangle FMB$, $MB = 2NO = 4$, 故 $y_A = 4$,

$$\text{代入 } C: y^2 = 4x \text{ 得 } x_A = 4, A(4, 4), |AF| = \sqrt{(4-1)^2 + 4^2} = 5$$

7. S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和, $S_3 = 6$, $S_5 = -5$, $S_6 = (\quad)$

A. -20

B. -15

C. -10

D. -5

【答案】B

【解答】 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 故 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 该等差数列的公差为 d_1

$$\frac{S_5}{5} - \frac{S_3}{3} = 2d_1 \Rightarrow d_1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{S_6}{6} = \frac{S_5}{5} + d_1 = -1 - \frac{3}{2} \Rightarrow S_6 = -15.$$

8. $0 < \alpha < \pi$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = (\quad)$

A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

【答案】D

【解答】

$$\because \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = -\frac{3}{5},$$

又 $\because 0 < \alpha < \pi$,

$$\therefore \sin \alpha = \frac{4}{5},$$

$$\text{则 } \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha - \cos \alpha) = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的 0 分。

9. S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和， q 为 $\{a_n\}$ 公比， $q > 0$ ， $S_3 = 7$ ， $a_3 = 1$ ，则 ()

A. $q = \frac{1}{2}$

B. $a_5 = \frac{1}{9}$

C. $S_5 = 8$

D. $a_n + S_n = 8$

【答案】AD

【解答】由已知条件

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{a_3}{q^2} + \frac{a_3}{q} + a_3 = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 = 7 \Rightarrow \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} - 6 = 0 \Rightarrow (\frac{1}{q} + 3)(\frac{1}{q} - 2) = 0$$

$$\text{又 } q > 0, \text{ 则 } \frac{1}{q} = 2 \Rightarrow q = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 4, a_n = 4 \times (\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^{n-3}, S_n = 8 - (\frac{1}{2})^{n-3},$$

$$a_5 = a_3 q^2 = \frac{1}{4}, S_5 = 8 - (\frac{1}{2})^2 \neq 8, a_n + S_n = (\frac{1}{2})^{n-3} + 8 - (\frac{1}{2})^{n-3} = 8,$$

综上 AD 正确。

10. $f(x)$ 定义在 \mathbf{R} 上奇函数, $x > 0$ 时, $f(x) = (x^2 - 3)e^x + 2$, 则 ()

- A. $f(0) = 0$
- B. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$
- C. $f(x) \geq 2$ 当且仅当 $x \geq \sqrt{3}$
- D. $x = -1$ 是 $f(x)$ 极大值点

【答案】ABD

【解答】 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数, 故 $f(0) = 0$, A 正确;

$$x < 0 \text{ 时}, -x > 0, \text{ 故 } f(-x) = [(-x)^2 - 3]e^{-x} + 2 = (x^2 - 3)e^{-x} + 2,$$

$$f(x) = -f(-x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2, \text{ B 正确;}$$

$$x > 0 \text{ 时}, f(x) = (x^2 - 3)e^x + 2 \Rightarrow f'(x) = (x+3)(x-1)e^x, f'(1) = 0;$$

$0 < x < 1$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, $x > 1$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 故 $x = 1$ 为

$f(x)$ 极小值点, 由 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数, 故 $x = -1$ 为 $f(x)$ 极大值点, D 正确;

$f(-1) = 2e - 2 = 2(e - 1) > 2$, C 错.

11. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 左右焦点为 F_1, F_2 , 左右顶点为 A_1, A_2 . 以 F_1F_2 为

直径的圆与 C 的一条渐近线交于 M, N , 且 $\angle N A_1 M = \frac{5\pi}{6}$, 则 ()

- A. $\angle A_1 M A_2 = \frac{\pi}{6}$
- B. $|MA_1| = 2|MA_2|$
- C. C 离心率为 $\sqrt{13}$
- D. 当 $a = \sqrt{2}$ 时, 四边形 $N A_1 M A_2$ 面积为 $8\sqrt{3}$

【答案】ACD

【解答】

由对称性不妨取斜率为正的渐近线 $l_{MN} : y = \frac{b}{a}x$,

又 $MO = r = c$, 则易知 $M(a, b)$, 又 $A_1(-a, 0)$,

$A_2(a, 0)$,

则 $MA_2 \perp A_1A_2$, 如图

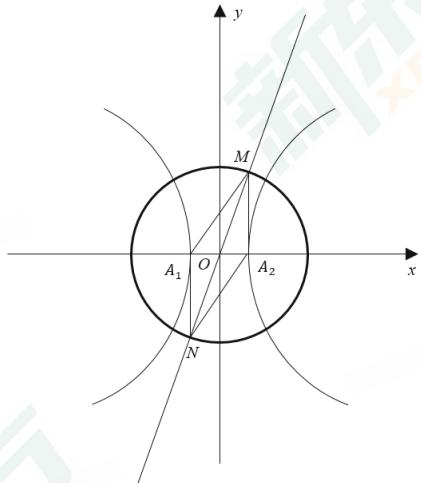
$$\angle A_1MA_2 = \pi - \angle NA_1M = \frac{\pi}{6}, \text{ A 选项正确;}$$

则在 $Rt\triangle A_1MA_2$ 中, $|MA_1| = \frac{2}{\sqrt{3}}|MA_2|$, B 选项错误,

$$\because \tan \angle A_1MA_2 = \frac{2a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{则 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{13}, \text{ C 选项正确;}$$

$$\text{当 } a = \sqrt{2} \text{ 时, } S_{NA_1MA_2} = 2 \times \frac{1}{2} |A_1A_2| \cdot |MA_2| = 2ab = 8\sqrt{3}, \text{ D 选项正确.}$$



三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. $\vec{a} = (x, 1)$, $\vec{b} = (x-1, 2x)$, $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$ 则 $|\vec{a}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$

【解答】 $\vec{a} - \vec{b} = (1, 1-2x)$, $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow x+1-2x=0 \Rightarrow x=1$.

所以 $\vec{a} = (1, 1)$, 即 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$

13. $x=2$ 是 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】-4

【解答】 $f'(x) = (x-2)(x-a) + (x-1)(x-a) + (x-1)(x-2)$,

若 $x=2$ 为 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(2) = 2-a = 0 \Rightarrow a=2$.

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2 \Rightarrow f(0) = -1 \times 4 = -4$$

14. 一个底面半径为 4cm , 高为 9cm 的封闭圆柱形容器内有两个半径相等的铁球. 则铁球半径的最大值为_____ cm

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解答】

设铁球半径为 r , 两铁球位置如图所示,

$$\text{竖直方向有, } h = O_1H_1 + O_1O_2 \cdot \sin \theta + O_2H_2,$$

$$\text{即 } 9 = 2r + 2r \sin \theta,$$

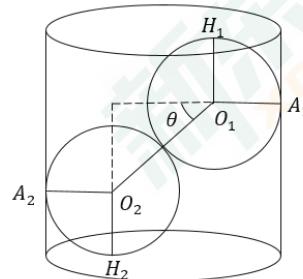
$$\text{水平方向有, } 2r = A_1O_1 + O_1O_2 \cdot \cos \theta + A_2O_2,$$

$$\text{即 } 8 = 2r + 2r \cos \theta, \text{ 则 } (9 - 2r)^2 + (8 - 2r)^2 = 4r^2$$

$$\text{化简得: } 4r^2 - 68r + 145 = 0, (2r - 29)(2r - 5) = 0,$$

$$\text{解得: } r = \frac{5}{2}, r = \frac{29}{2} \text{ (舍)}$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{2}$$



四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ ($0 \leq \varphi < \pi$), $f(0) = \frac{1}{2}$

(1) 求 φ ;

(2) $g(x) = f(x) + f(x - \frac{\pi}{6})$, 求 $g(x)$ 的值域和单调区间.

【解答】解: (1) $f(0) = \cos \varphi = \frac{1}{2}$, 由 $0 \leq \varphi < \pi$, 故 $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

(2) $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$, $f(x - \frac{\pi}{6}) = \cos 2x$, $g(x) = f(x) + f(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} \cos(2x + \frac{\pi}{6})$

故 $g(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$,

令 $2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \pi + 2k\pi$, 解得 $-\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi$,

即 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$

同理可得 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$

16. (15分) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 长轴长为 4.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $(0, -2)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 若 $S_{\triangle OAB} = \sqrt{2}$, 求 $|AB|$.

【解答】(1) $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{2}$, 椭圆方程为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$;

(2) 设 $l: y = kx - 2$, 点 $P(0, -2)$, 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = kx - 2 \end{cases}$ 可得: $(2k^2 + 1)x^2 - 8kx + 4 = 0$, 其判别式为 $\Delta = 32k^2 - 16$,

$$x_1 + x_2 = \frac{8k}{2k^2 + 1}, \quad x_1 x_2 = \frac{4}{2k^2 + 1} > 0 \quad (\text{两根同号}),$$

$$\text{由 } \Delta > 0, \text{ 可得 } k > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } k < -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OPB} - S_{\triangle OPA} = \frac{1}{2} \times 2|x_2| - \frac{1}{2} \times 2|x_1| = |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{2k^2 + 1} = \sqrt{2},$$

$$\text{解得 } k^2 = \frac{3}{2},$$

$$|AB| = \sqrt{k^2 + 1}|x_2 - x_1| = \sqrt{\frac{5}{2}} \times \sqrt{2} = \sqrt{5}.$$

17. (15分). 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, F 为 CD 中点, E 在 AB 上, $EF \parallel AD$, $AB = 3AD$, $CD = 2AD$ 。将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFDA'$, 使得面 $EFDA'$ 与面 $EFCB$ 所成的二面角为 60°

(1) 证明: $A'B \parallel \text{平面 } CD'F$;

(2) 求面 BCD' 与面 $EFDA'$ 所成二面角的正弦值.

【解答】(1) 由 $EB \parallel FC$, $A'E \parallel D'F$, $A'E \cap EB = E$,

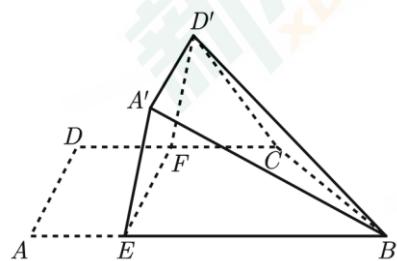
$$D'F \cap CF = F$$

$$A'E \subset \text{平面 } A'EB, \quad EB \subset \text{平面 } A'EB,$$

$$D'F \subset \text{平面 } D'FC, \quad CF \subset \text{平面 } D'FC,$$

可得平面 $A'EB \parallel \text{平面 } D'FC$, 又由 $A'B \subset \text{平面 } D'FC$

故 $A'B \parallel \text{平面 } A'EB$;

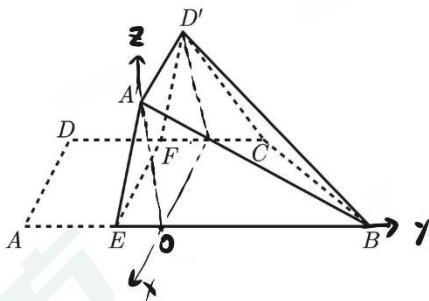


(2) 由 $EF \perp A'E$ 且 $EF \perp EB$, 可知 $A'EB$ 即为二面角的平面角, 为 60°

不妨设 $AD=1$, 在平面 $A'EB$ 内, 由点 A' 作 EB 垂线, 垂足为 O ,

可证 $A'O \perp$ 底面 $EBCF$, $EO = \frac{1}{2}$, $OB = \frac{3}{2}$

如图建系,



$\overrightarrow{FE} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{EA'} = (0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 设平面 $EFD'A'$ 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$$\text{则有 } \begin{cases} x_1 = 0 \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } y_1 = -\sqrt{3}, \vec{n}_1 = (0, -\sqrt{3}, 1);$$

$\overrightarrow{CB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{D'B} = (1, \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, 设平面 BCD' 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则有

$$\begin{cases} x_2 + y_2 = 0 \\ x_2 + \frac{3}{2}y_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } y_2 = \sqrt{3}, \text{ 则 } \vec{n}_2 = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$$

即平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 成角 θ , 则有 $\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \times |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{7}}{7}$, 故 $\sin \theta = \frac{\sqrt{42}}{7}$.

$$18. (17 \text{ 分}) f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3, 0 < k < \frac{1}{3}.$$

(1) 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在唯一极值点和唯一零点;

(2) 设 x_1 , x_2 为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的极值点和零点;

(i) $g(t) = f(x_1 + t) - f(x_1 - t)$. 证明: $g(t)$ 在 $(0, x_1)$ 单调递减.

(ii) 比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小, 并证明.

【解答】(1) 证明: 因为 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3$, $k \in (0, \frac{1}{3})$,

所以 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - 3kx^2$

$$= \frac{1-x+x+x^2-3kx^2-3kx^3}{1+x}$$

$$= \frac{-3kx^2}{1+x}(x+1-\frac{1}{3k}),$$

当 $x > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{3k} - 1 > 0$,

所以当 $0 < x < \frac{1}{3k} - 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x > \frac{1}{3k} - 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

所以 $x = \frac{1}{3k} - 1$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上唯一的极值点, 是极大值点.

又因为 $f(\frac{1}{3k} - 1) > f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2k}) = \ln(1 + \frac{1}{2k}) - \frac{1}{2k} < 0$,

所以 $\exists x_2 \in (\frac{1}{3k} - 1, \frac{1}{2k})$, $f(x_2) = 0$,

即 x_2 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上唯一的零点;

(2) 解: (i) 因为 $g(t) = f(x_1 + t) - f(x_1 - t)$,

所以 $g'(t) = f'(x_1 + t) + f'(x_1 - t)$

$$= \frac{-3k(x_1 + t)^2}{1+x_1+t}(x_1 + t - x_1) + \frac{-3k(x_1 - t)^2}{1+x_1-t}(x_1 - t - x_1)$$

$$= 3kt \left[\frac{(x_1 - t)^2}{1+x_1+t} + \frac{(x_1 + t)^2}{1+x_1-t} \right]$$

$$= \frac{6kt^2(t^2 - x_1^2 - 2x_1)}{(1+x_1)^2 - t^2},$$

因为 $t \in (0, x_1)$, 所以 $t^2 - x_1^2 - 2x_1 < 0$, $(1+x_1)^2 - t^2 > 0$,

所以 $g'(t) = \frac{6kt^2(t^2 - x_1^2 - 2x_1)}{(1+x_1)^2 - t^2} < 0$,

即 $g(t)$ 在 $t \in (0, x_1)$ 上单调递减;

(ii) 由 (i) 得, $g(t)$ 在 $t \in (0, x_1)$ 上单调递减,

所以 $g(x_1) < g(0)$,

即 $f(2x_1) - f(0) < f(x_1) - f(x_1) = 0$, $f(2x_1) < 0$,

因为 x_2 是 $f(x)$ 的零点, 所以 $f(x_2) = 0$,

所以 $f(2x_1) < f(x_2)$,

又因为 $x_2 > x_1$, $2x_1 > x_1$, 且 $f(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $2x_1 > x_2$.

19. (17 分)

甲、乙乒乓球练习, 每个球胜者得 1 分, 负者得 0 分。设每个球甲胜的概率为 p ($\frac{1}{2} < p < 1$),

乙胜的概率为 q , $p + q = 1$, 且各球胜负独立。对正整数 $k \geq 2$, 记 p_k 为打完 k 个球后, 甲比乙至少多得 2 分的概率, q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得 2 分的概率。

(1) 求 p_3, p_4 (用 p 表示);

(2) 若 $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4$, 求 p ;

(3) 证明: 对任意正整数 m , $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$.

【解答】(1) 3 球后甲比乙至少多两分, 只能是甲 3 分乙 0 分, 因此 $p_3 = p^3$;

4 球后甲比乙至少多两分, 可能是甲 4 分乙 0 分, 或者甲 3 分乙 1 分,

因此 $p_4 = C_4^3 p^3 q + p^4 = 4p^3 q + p^4 = 4p^3(1-p) + p^4 = 4p^3 - 3p^4$.

(2) 根据对称性, 以及 (1) 的结果, 可得 $q_3 = q^3, q_4 = 4q^3 - 3q^4$.

因此 $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = \frac{4p^3 - 3p^4 - p^3}{4q^3 - 3q^4 - q^3} = \frac{3p^3(1-p)}{3q^3(1-q)} = \frac{p^3 q}{q^3 p} = \frac{p^2}{q^2} = 4$

因此 $\frac{p}{q} = 2$, 又 $p + q = 1$, 故 $p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$.

答案为 $p = \frac{2}{3}$

(3) 记 $a_m(x)$ 表示 m 球甲得 x 分的概率

$$p_{2m+1} = p_{2m} - q \cdot a_{2m}(m+1)$$

$$q_{2m+1} = q_{2m} - p \cdot a_{2m}(m-1)$$

故

$$p_{2m+1} - p_{2m} = -q \cdot a_{2m}(m+1)$$

$$q_{2m+1} - q_{2m} = -p \cdot a_{2m}(m-1)$$

故要证:

$$p_{2m+1} - p_{2m} < q_{2m+1} - q_{2m}$$

只需证:

$$p \cdot a_{2m}(m-1) < q \cdot a_{2m}(m+1)$$

即只需证:

$$p \cdot p^{m-1} \cdot q^{m+1} \cdot C_{2m}^{m-1} < q \cdot p^{m+1} \cdot q^{m-1} \cdot C_{2m}^{m+1}$$

即只需证:

$$p^m q^{m+1} < q^m p^{m+1}$$

即 $q < p$. 由条件 $q = 1 - p < \frac{1}{2} < p$, 故结论成立.

由

$$p_{2m+2} = p_{2m+1} + p \cdot a_{2m+1}(m+1) = p_{2m} + p \cdot a_{2m+1}(m+1) - qa_{2m}(m+1)$$

$$q_{2m+2} = q_{2m+1} + q \cdot a_{2m+1}(m) = q_{2m} + q \cdot a_{2m+1}(m) - pa_{2m}(m-1)$$

现在考虑右边的不等式

$$p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$$

只需证:

$$p \cdot a_{2m+1}(m+1) - qa_{2m}(m+1) > qa_{2m+1}(m) - p \cdot a_{2m}(m-1)$$

只需证:

$$p^{m+2} q^m C_{2m+1}^{m+1} - p^{m+1} q^m C_{2m}^{m+1} > q^{m+2} p^m C_{2m+1}^{m+1} - q^{m+1} p^m C_{2m}^{m+1}$$

只需证:

$$p^2 C_{2m+1}^{m+1} - p C_{2m}^{m+1} > q^2 C_{2m+1}^{m+1} - q C_{2m}^{m+1}$$

只需证:

$$(p-q)(p+q) C_{2m+1}^{m+1} > (p-q) C_{2m}^{m+1}$$

只需证:

$$C_{2m+1}^{m+1} > C_{2m}^{m+1}$$

因为 $C_{2m+1}^{m+1} = C_{2m}^{m+1} + C_{2m}^m$, 且 $C_{2m}^m > 0$, 故上面不等式成立. 证毕.