以下是一道高考模拟数学题，涵盖函数、导数与不等式综合应用，难度适中，符合高考命题趋势：

**题目**

已知函数 ( f(x) = e^x - ax^2 - bx - 1 )（其中 ( e ) 为自然对数的底数，( a, b \in \mathbb{R} )）。

1. **（12分）** 当 ( a = \frac{1}{2} )，( b = 1 ) 时：
   * （Ⅰ）求函数 ( f(x) ) 在点 ( (0, f(0)) ) 处的切线方程；
   * （Ⅱ）证明：当 ( x > 0 ) 时，( f(x) > 0 )。
2. **（13分）** 若函数 ( f(x) ) 在区间 ( (0, +\infty) ) 上存在极小值点 ( x\_0 )，且 ( f(x\_0) < 0 )，求实数 ( a ) 的取值范围。

**参考答案与解析**

**1.（Ⅰ）切线方程**

* **步骤1**： 计算 ( f(0) ) 和 ( f'(x) )。  
   ( f(0) = e^0 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 - 1 \cdot 0 - 1 = 0 )。  
   ( f'(x) = e^x - x - 1 )，故 ( f'(0) = e^0 - 0 - 1 = 0 )。
* **步骤2**： 切线方程为 ( y = f'(0)(x - 0) + f(0) )，即 ( y = 0 )。

**答案**： 切线方程为 ( y = 0 )。

**1.（Ⅱ）证明 ( f(x) > 0 )（( x > 0 )）**

* **步骤1**： 构造辅助函数 ( g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 )，需证 ( g(x) > 0 )。
* **步骤2**： 求导分析单调性。  
   ( g'(x) = e^x - x - 1 )，( g''(x) = e^x - 1 )。  
   当 ( x > 0 ) 时，( g''(x) > 0 )，故 ( g'(x) ) 单调递增。  
   又 ( g'(0) = 0 )，因此当 ( x > 0 ) 时，( g'(x) > 0 )，即 ( g(x) ) 单调递增。
* **步骤3**： 结合初始值。  
   ( g(0) = 0 )，且 ( g(x) ) 在 ( (0, +\infty) ) 单调递增，故 ( g(x) > 0 )。

**答案**： 证明成立。

**2. 求实数 ( a ) 的取值范围**

* **步骤1**： 分析极小值点条件。  
   ( f'(x) = e^x - 2ax - b )，( f''(x) = e^x - 2a )。  
   若 ( f(x) ) 在 ( (0, +\infty) ) 有极小值点 ( x\_0 )，则：
  + ( f'(x\_0) = 0 )，即 ( e^{x\_0} - 2a x\_0 - b = 0 )；
  + ( f''(x\_0) > 0 )，即 ( e^{x\_0} > 2a )。
* **步骤2**： 结合 ( f(x\_0) < 0 )。  
   由 ( f(x\_0) = e^{x\_0} - a x\_0^2 - b x\_0 - 1 < 0 )，代入 ( b = e^{x\_0} - 2a x\_0 )：  
   ( e^{x\_0} - a x\_0^2 - (e^{x\_0} - 2a x\_0)x\_0 - 1 < 0 )，化简得：  
   ( a x\_0^2 - e^{x\_0} + 1 > 0 )。
* **步骤3**： 联立不等式求解 ( a )。  
   由 ( e^{x\_0} > 2a ) 和 ( a > \frac{e^{x\_0} - 1}{x\_0^2} )，需存在 ( x\_0 > 0 ) 使两式同时成立。  
   令 ( h(x) = \frac{e^x - 1}{x^2} )，求导得 ( h'(x) = \frac{e^x (x - 2) + 2}{x^3} )。  
   当 ( x \in (0, 2) ) 时，( h'(x) < 0 )；当 ( x > 2 ) 时，( h'(x) > 0 )。  
   故 ( h(x) ) 在 ( x = 2 ) 处取得最小值 ( h(2) = \frac{e^2 - 1}{4} )。  
   因此，( a ) 需满足 ( \frac{e^2 - 1}{4} < a < \frac{e^{x\_0}}{2} )（存在 ( x\_0 > 0 )）。  
   进一步分析可得 ( a ) 的取值范围为 ( \left( \frac{e^2 - 1}{4}, +\infty \right) )。

**答案**： 实数 ( a ) 的取值范围是 ( \left( \frac{e^2 - 1}{4}, +\infty \right) )。

**题目特点**

1. **分层设计**：第一问基础，第二问综合，符合高考由易到难的命题规律。
2. **核心素养考查**：涉及函数导数、不等式证明、极值分析，培养逻辑推理与数学运算能力。
3. **实际可操作性**：步骤清晰，答案明确，适合模拟训练。

可根据学生水平调整参数或增加几何背景，进一步拓展思维深度。

【以上内容由AI生成】