

# 基于模糊数学的三角形模式识别的探究

王浩男, 刘海涛, 刘威

(辽宁工程技术大学理学院, 辽宁阜新 123000)

**摘要:** 模糊数学发展至今, 三角形类型的模糊模式识别与三角形识别不准确的问题是热门核心研究。本研究团队就如何合理解决三角形类型模糊模式识别提出一种新方法, 基于给定阈值的最大隶属度原则和贴近度原则, 建立及格合格因子, 利用及格指标因子归类法去解决实际问题, 并提出以三角形内角和差关系作为底数和指数变量的指数型隶属函数, 最终结果表明求得的隶属度在及格因子的范围内, 利用指数函数性质所求得的隶属度差距较大, 区别明显, 便于识别, 且与三角形的三个内角紧密相关。

**关键词:** 模糊数学; 三角形; 最大隶属度; 模糊识别;

**中图分类号:** O159

## Research on triangle pattern recognition based on Fuzzy Mathematics

WANG Haonan, LIU Haitao, LIU Wei

(School of Sciences, Liaoning Technical University, Fuxin, Liaoning 123000, China)

**Abstract:** Since the development of fuzzy mathematics, the problem of fuzzy pattern recognition of triangle type and inaccurate triangle recognition is a hot core research. The research team proposed a new method on how to reasonably solve the triangular type fuzzy pattern recognition. Based on the maximum membership principle and closeness principle of a given threshold, the passing factor was established, the passing index factor classification method was used to solve practical problems, and the exponential membership function with the sum difference relationship of internal angles of triangles as the base and exponential variables was proposed. The final results show that the membership degree obtained is within the range of pass factor, and the membership degree obtained by using the properties of exponential function has a large gap, obvious difference, easy to identify, and is closely related to the three internal angles of triangle

**Key words:** Fuzzy mathematics; Triangle; Maximum membership; Fuzzy recognition

## 0 引言

1965 年, 美国著名计算机与控制专家查德(Zadeh)教授提出了模糊的概念, 并在国际期刊《Information and Control》并发表了第一篇用数学方法研究模糊现象的论文“Fuzzy Sets”(模糊集合), 开创了模糊数学的新领域<sup>[1]</sup>。近几十年来, 当今时代的人工智能、数据挖掘、机器学习发展迅速, 随着模糊数学理论的不断崛起, 人们开始尝试用计算机自动识别染色体或进行白血球分类等问题, 但是在解决问题过程中, 科学家们总是将实际问题转变成对几何图形的识别, 其中最常用的是对几何图形中最稳定的三角形类型识别。实际上, 由于不同人对认识事物方法和实施上的千差万别, 以及三角形的边缘度识别不准确等问题<sup>[2]</sup>, 在现实里, 绝对的等边、等腰、直角、等腰直角和非典型三角形即使存在, 也可能因测量条件的限制而不能被准确识别。因此, 很多研究团队在进行模式识别时将图形的边缘度监测视为模糊的概

**作者简介:** 王浩男 (2000-), 男, 本科生, 主要研究方向: 数据分析, 数据挖掘, 机器学习, 数学建模, 人工智能

**通信联系人:** 刘海涛, 男, 副教授, 硕导, 主要研究方向: 机器学习, 人工智能, 模糊数学. E-mail: haitao641@163.com

念, 并对如何合理解决三角形类型模糊模式识别新方法进行研究, 尤其在利用最大隶属度原则和贴近度原则上对隶属度函数的选取做了更多研究。由于隶属函数的选取直接决定模糊模式识别的合理性, 尝试选取一次多项式为隶属函数, 并给出分母为 180、60、90 的理由, 具体的定义隶属函数为原多项式的二次方。因此本研究团队讨论了模糊数学方向的文献资料中隶属度函数的优越性, 创造性的提出了一种较新的解法, 首先给出基本的概念及准则, 其次介绍如何建立指数型隶属函数, 然后给出了三角形类型模糊模式识别的一般步骤, 用实例对比, 最后得出结论。

## 1 基本概念及准则

模糊数学的基本思想是隶属度的思想。应用模糊数学方法建立数学模型的关键是建立符合实际的隶属函数<sup>[3]</sup>。对于有些模糊集合而言, 直接给出隶属度函数有时是很困难的, 但可以利用“二元对比排序法”来确定, 即首先通过两两比较确定两个元素相应隶属度的大小排出顺序, 然后用数学方法加工处理得到所需的隶属函数。

**定义 1:** 设论域  $U, V$ , 乘积空间上  $U \times V = \{(u, v) | u \in U, v \in V\}$  上的一个模糊子集  $R$  为从集合  $U$  到集合  $V$  的模糊关系。如果模糊关系  $R$  的隶属函数为:

$$\mu_R: U \times V \rightarrow [0, 1], (x, y) \rightarrow \mu_R(x, y)$$

则称隶属度  $\mu_R(x, y)$  是  $(x, y)$  关于模糊关系  $R$  的相关程度

**定义 2:** 设  $A$  为给定论域上的一个模糊模式,  $u_1, u_2, u_3 \dots u_n$  为  $U$  中的  $n$  个待识别对象, 则可以表示为:

$$A(u_i) = \max\{A(u_1), A(u_2), \dots, A(u_n)\}$$

其中, 将判定  $u_i$  优先归属于模糊模式  $A$ , 这就是最大隶属原则。

**定义 3:** 首先假定论域为  $U$ ,  $U$  上的模糊集全体记为  $F(U)$ 。

设  $A, B, C \in F(U)$ , 若映射  $N: F(U) \times F(U) \rightarrow [0, 1]$ , 满足条件:

- (1)  $N(A, B) = N(B, A)$
- (2)  $N(A, A) = 1, N(U, \Phi) = 0$ ,  $\Phi$  为空集
- (3) 若  $A \subseteq B \subseteq C$ , 则  $N(A, C) \leq N(A, B) \wedge N(B, C)$

则称  $N(A, B)$  为模糊集  $A$  与  $B$  的贴近度, 其中  $N$  为  $F(U)$  上的贴近度函数。

**定义 4: 阈值原则:** 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为给定论域上  $n$  个模糊模式, 规定一个阈值  $\lambda \in (0, 1]$ ,  $u \in U$  为一个待识别对象。若存在

$$\max\{A_1(u), A_2(u), \dots, A_n(u)\} < \lambda$$

则作“拒绝识别”的判决, 这时应查找原因, 另作分析。若

$$\max(A_1(u), A_2(u) \dots A_n(u)) \geq \lambda$$

并有  $k$  个模糊模式  $A_{i1}(u), A_{i2}(u), \dots, A_{ik}(u)$  大于或等于  $\lambda$ ，则认为识别可行，并将  $u$  划归为

$$\bigcap_{j=1}^k A_{ij}。$$

**定义 5:** 设  $\beta$  为给定的指标集常数，且  $\beta \in [0, 1]$ ， $u_i$  为待识别对象，若待识别对象的隶属度  $A(u_i) \geq \beta$  时，判决对象  $u$  归属于模糊模式  $A$ ，称这样的  $\beta$  为合格指标因子。

## 80 2 确定隶属度函数

若想构建简单模糊模式的三角形识别，需要建立五个模糊模式三角形识别的隶属函数。首先，在论域  $U$  上的模糊集分别用模糊集  $E$ 、 $I$ 、 $R$ 、 $IR$ 、 $T$  分别表示等边、等腰、直角、等腰直角和非典型三角形，设三角形的三个内角分别为  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 。

把三个内角从大到小排列，即

$$85 \quad \alpha \geq \beta \geq \gamma$$

因此可以用

$$u = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

来表示等腰、等边、直角、等腰直角，非典型等三角形。设定

$$U = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha + \beta + \gamma = 180, \alpha \geq \beta \geq \gamma\}$$

90 其具体的隶属度函数如下：

(1) 等边三角形 ( $E$ ) 的隶属度函数：

令

$$t = \alpha - \beta$$

假设一个三角形等边三角形的充要条件为  $\alpha = \beta$ ，因此  $t = 0$ ，由于  $t$  的上确界是 180，

95 所以

$$E = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(1 - \frac{t}{180}\right)^t$$

(2) 等腰三角形 ( $I$ ) 的隶属度函数

令

$$t = (\alpha - \beta) \wedge (\beta - \gamma)$$

100 由于  $u = (\alpha, \beta, \gamma) \in U$  是等腰三角形的充要条件为  $\alpha = \beta$  或  $\beta = \gamma$ ，即  $t = 0$ ，而  $t$  的上确界是 60，

所以

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = \left(1 - \frac{t}{60}\right)^t, t = (\alpha - \beta) \wedge (\beta - \gamma)$$

(3) 直角三角形 ( $R$ ) 的隶属度函数

105 令

$$t = |\alpha - 90|$$

$u = (\alpha, \beta, \gamma) \in U$  是直角三角形的充要条件为  $\alpha = 90$ ，即  $t = 0$  而  $t$  的上确界为 90，所以

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - \frac{t}{90})^t, t = |\alpha - 90|$$

110 (4) 等腰直角三角形 (IR) 的隶属度函数

由于

$$u = (\alpha, \beta, \gamma) \in U$$

是等腰直角三角形的充要条件就是  $u$  既是等腰三角形又是直角三角形，所以

115 
$$IR(\alpha, \beta, \gamma) = I(\alpha, \beta, \gamma) \wedge R(\alpha, \beta, \gamma)$$

(5) 非典型三角形 (T) 的隶属度函数

由于  $u = (\alpha, \beta, \gamma) \in U$  是非典型三角形的充要条件是非等边三角形，同时也非等腰和直角三角形，所以

$$T(\alpha, \beta, \gamma) = T(u) = (1 - E(u)) \wedge (1 - I(u)) \wedge (1 - R(u))$$

120

### 3 构建三角形类型的模糊模式识别模型

采用模糊识别方法来识别三角形问题，本研究团队将具体的实际过程分为以下几个步骤。

#### Step1: 提取识别对象的特性指标

125 以三角形识别为例，三角新的特性指标为其边长或者是内角，由上述模型建立的过程可知，我们选取的三角形特性指标为三角形的三个内角  $\alpha, \beta, \gamma$

$$(\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ)$$

并记作

$$u = (\alpha, \beta, \gamma)$$

130 **Step2: 构造模糊模式的隶属函数**

构造模糊模式的隶属函数就是利用特性指标来对模糊现象和模糊概念进行一定度量的刻画，本研究团队通过三角形的特性指标建立了相关的隶属函数，在应用过程中可以把  $u$  分别代入即可求出其隶属度，相关隶属函数如下

$$E(u), I(u), R(u), IR(u), T(u)$$

135 **Step3: 识别判断**

对于三角形类型的识别，给定的阈值和最大隶属度原则，比较隶属度的大小，可以得到最终的判别结果。

(1) **阈值原则**: 把所求的隶属度分别与给定的阈值作比较, 若所有的隶属度都小于给定的阈值, 则认为“拒绝识别”应该查找原因, 对目标重新分析; 若存在隶属度大于等于给定的阈值, 则进行下一步识别。

(2) **最大隶属原则**: 把所求的五个隶属度  $E(u), I(u), R(u), IR(u), T(u)$  进行大小排序。

(3) **合格因子**: 由于实际研究中的模糊三角形识别通常是伴随几个三角形同时存在的, 所以本研究团队将定义一个合格因子, 将其中五种三角形模式的隶属度与合格因子作比较, 大于合格因子的模式作为一个集合, 此集合中所有三角形模式都可以作为该三角形的形状判别, 其中的隶属度为该三角形与五种基本类型的相识度<sup>[4]</sup>。但是由于固定的合格因子不能对各类三角形做出合理的判别, 并且在还需根据不同的数据做出相应的更改, 因此本研究团队创新性的提出动态合格因子, 将原来不变的合格因子改为随着最大隶属度和阈值不断变化的数值, 通过大量的实验初步得出合格因子与最大隶属度和阈值是相乘的关系其常系数为 0.5。

## 4 结论

本文给出了三角形类型模糊模式识别中的合格指标因子归结法和指数型隶属函数, 利用给定阈值和最大隶属原则, 论证了对生物细胞中染色体识别、白血球分类等三角形类型模糊模式识别的合理性与优越性。但对待所给隶属函数的优越性和获取的数据为模糊凸区间、梯形模糊数的情形<sup>[5]</sup>, 留作进一步地探讨。

## [参考文献] (References)

- [1] 梁保松, 曹殿立. 模糊数学及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 104-110.
- [2] 吴士力, 通俗模糊数学与程序设计[M], 北京: 中国水利水电出版社, 2008: 72-75
- [3] 曹炳元, 应用模糊数学与系统[M], 北京: 科学出版社, 2005: 15-21
- [4] 刘海涛, 郭嗣琮. 基于结构元理论及信息熵的模糊多属性决策方法[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(17): 1-5.
- [5] 周锦涛. 基于模糊数学的博弈论组合赋权法边坡稳定性评价[J]. 人民珠江, 2021, 42(09): 14-20+27.