习题课：$\vec{E}$、U的计算

一、$\vec{E}$的计算

1. 由定义求

2. 由点电荷(或典型电荷分布)$\vec{E}$公式和叠加原理求

3. 由高斯定理求

4. 由$\vec{E}$与U的关系求

典型静电场：

点电荷：$$\vec{E}=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

均匀带电圆环轴线上：$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx\vec{i}}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

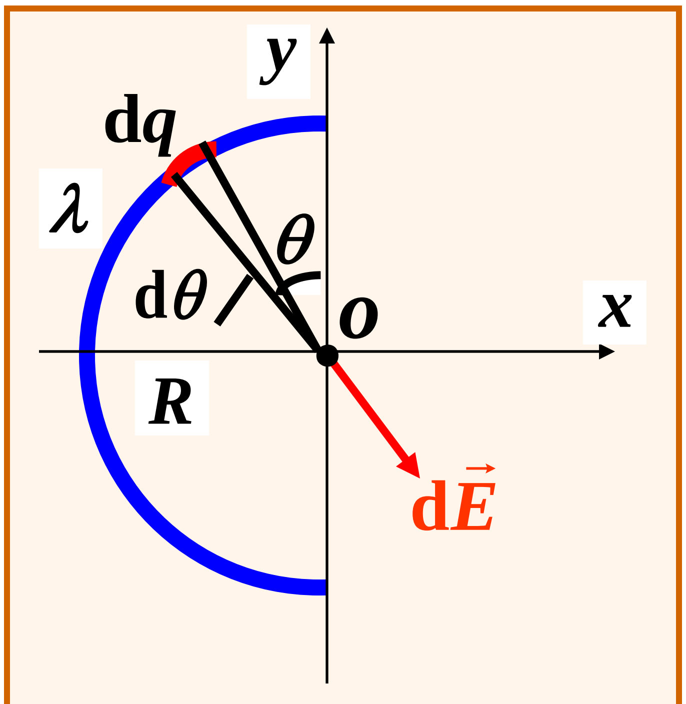
无限长均匀带电直线：$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$ （⊥带电直线）

均匀带电球面：$$\vec{E}_{内}=0\ ,\quad \vec{E}_{外}=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

无限大均匀带电平面：$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ （⊥带电平面）

习题1： 求半径 R 的带电半圆环环心处的电场强度

1. 均匀带电，线密度为 λ
2. 上半部带正电，下半部带负电，线密度为 λ
3. 非均匀带电，线密度为 $\lambda=\lambda_0\sin\theta$



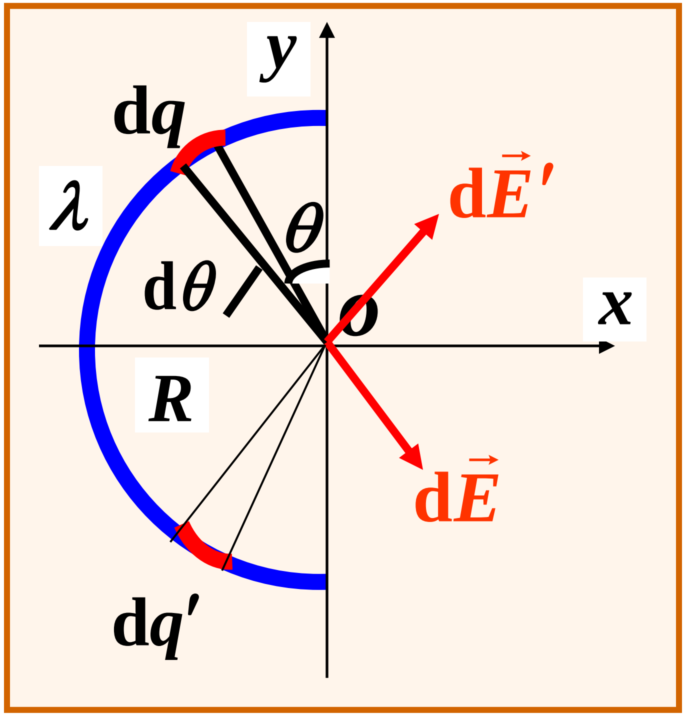
思路： 叠加法

$$\mathrm{d}q \to \mathrm{d}\vec{E} \to \vec{E}$$

解： 建立如图所示坐标系

1. $\mathrm{d}q=\lambda R\mathrm{d}\theta$

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$;沿径向



用分量积分：

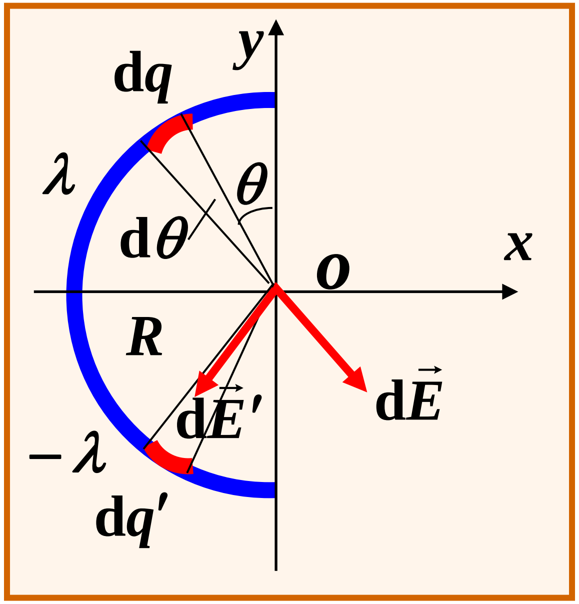
$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E \cdot \sin\theta$$

由对称性：$E_y = \int \mathrm{d}E_y = 0$

$$E = E_x = \int \mathrm{d}E_x = \int \mathrm{d}E \cdot \sin\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\lambda \sin\theta \mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\therefore \vec{E}_o = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = \frac{\lambda \vec{i}}{2\pi\varepsilon_0 R}$$



2. $$dq = \lambda R d\theta$$

$$dE = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2};沿径向$$

$$dq' = -\lambda R d\theta$$

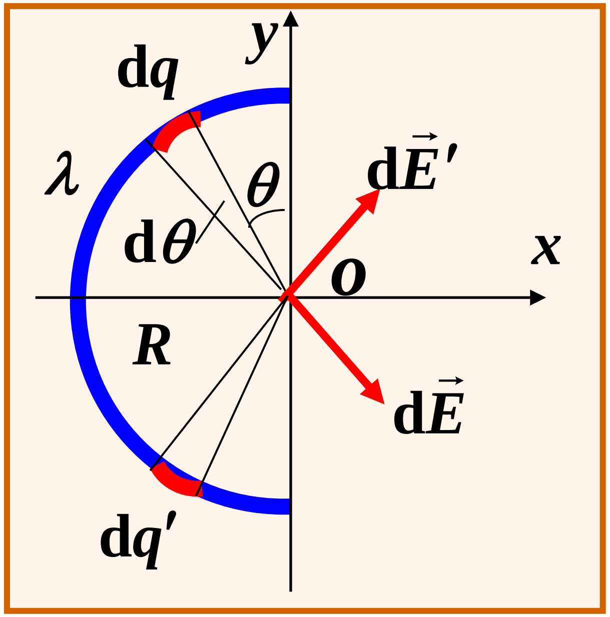
$$dE' = \frac{-\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2};沿径向$$

$$dE_y = -dE \cdot \cos\theta$$

由对称性：$E_x = \int dE_x = 0$

$$E_o = E_y = \int dE_y = 2\int_0^{\pi/2} dE_y = 2\int_0^{\pi/2} -\frac{\lambda\cos\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\therefore \vec{E}_o = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = -\frac{\lambda\vec{j}}{2\pi\varepsilon_0 R}$$



3. $$\mathrm{d}q = \lambda R\,\mathrm{d}\theta = \lambda_0 \sin\theta R\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2};\text{沿径向}$$

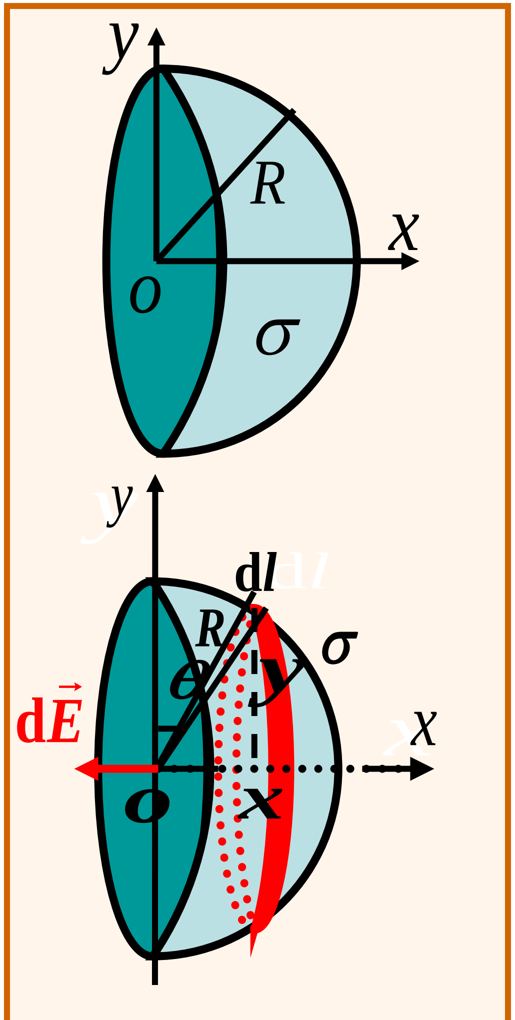
$$\mathrm{d}q' = \lambda_0 \sin(\pi - \theta) R\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \lambda_0 \sin\theta R\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}q$$

$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E \cdot \sin\theta$ y方向具有**对称性！** $E_y = \int \mathrm{d}E_y = 0$

$$E = E_x = \int \mathrm{d}E_x = \int_0^{\pi} \frac{\lambda_0 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda}{8\varepsilon_0 R}$$

$$\therefore \vec{E}_o = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = \frac{\lambda \vec{i}}{8\varepsilon_0 R}$$

习题2 (P_{235}9.6)：求均匀带电半球面（已知R, σ）球心处电场。



解：将半球面视为由许多圆环拼成，任取一个圆环：

$$dq = \sigma \cdot 2\pi y dl = \sigma \cdot 2\pi R\cos\theta \cdot R d\theta$$

$$dE = \frac{x dq}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + x^2)^{3/2}}$$

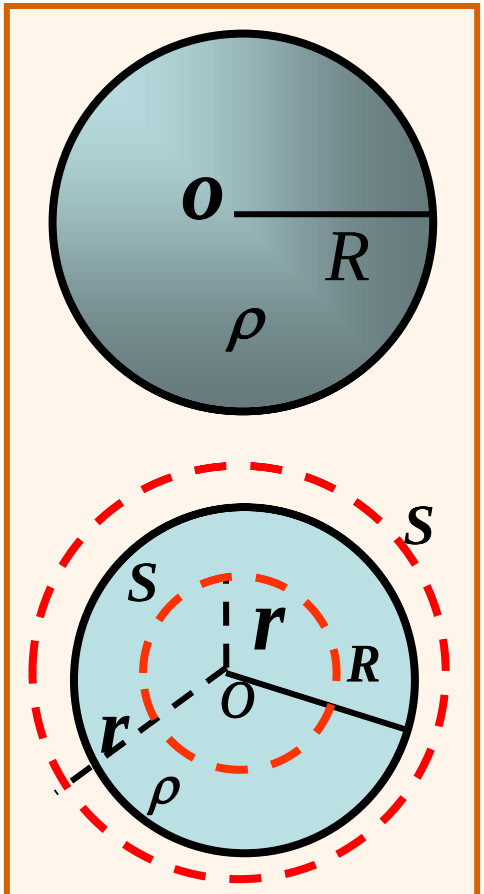
$$= \frac{R\sin\theta dq}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\sigma\cos\theta\sin\theta}{2\varepsilon_0} d\theta$$ 沿$-x$方向

因为各圆环在o点处 $d\vec{E}$ 同向，可直接积分。

$$\therefore E_0 = \int dE = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\cos\theta\sin\theta}{2\varepsilon_0} d\theta = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

沿$-x$方向。

习题3(P$_{236}$ 9.14)：求半径为R，电荷体密度$\rho = k/r$（k为常数，$r \le R$）的带电球体内外的场强 。



思考：选用哪种方法求解更方便？

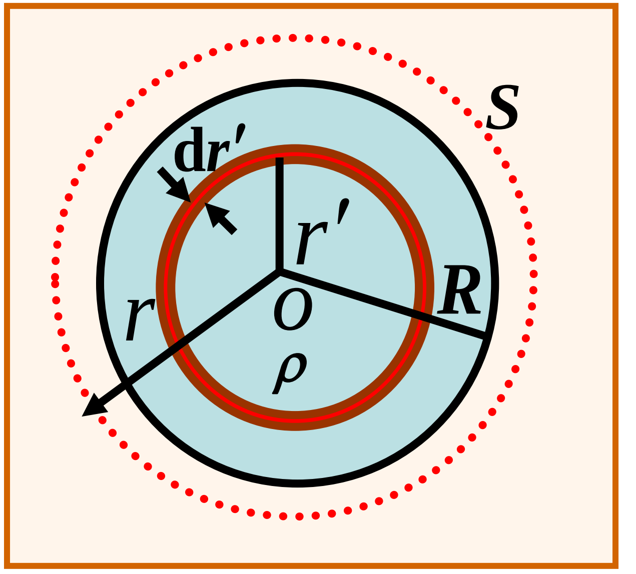
$\rho = k/r$ 未破坏电场分布的球对称性。用高斯定理求解方便。

解:高斯面为:半径为 r的同心球面S

$$\oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2$$

$$\sum q_{内} = \rho \cdot V = \frac{\kappa}{r} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

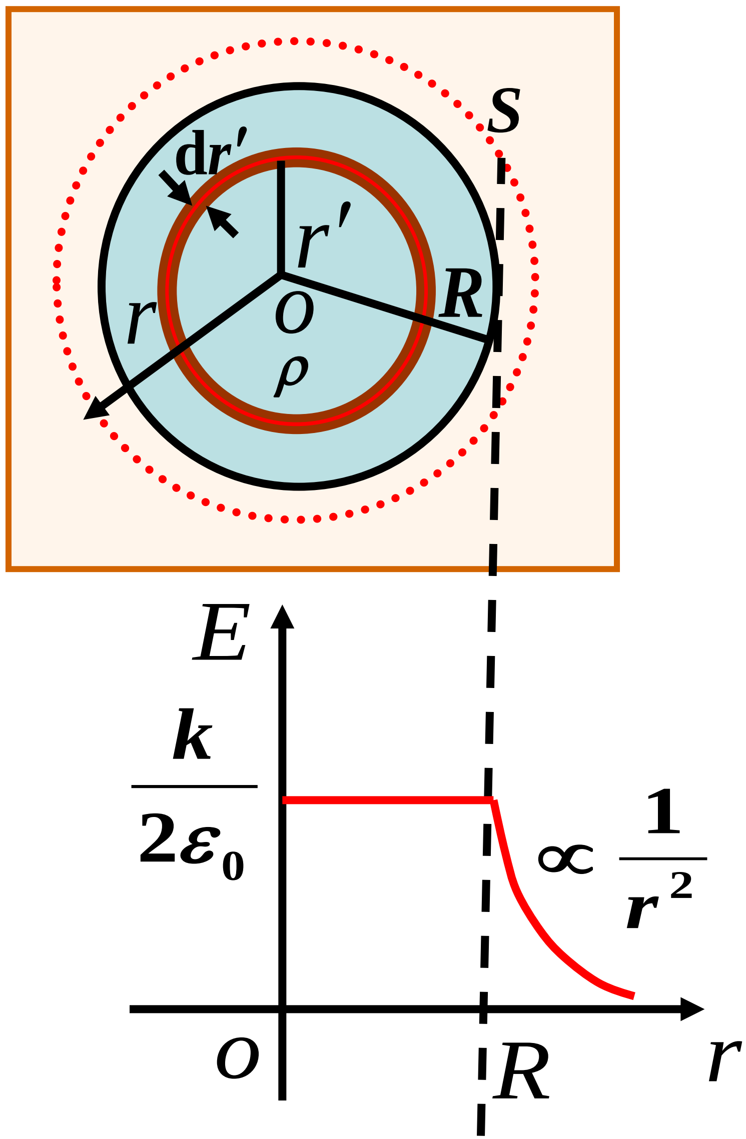
对否？



$$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V = \frac{k}{r'} \cdot 4\pi r'^2 \mathrm{d}r'$$

$r > R$:
$$\sum q_{内} = \int \mathrm{d}q = \int_0^R \frac{k}{r'} \cdot 4\pi r'^2 \mathrm{d}r' = 2\pi k R^2$$

$r < R$:
$$\sum q_{内} = \int \mathrm{d}q = \int_0^r \frac{k}{r'} \cdot 4\pi r'^2 \mathrm{d}r' = 2\pi k r^2$$



由高斯定理得:

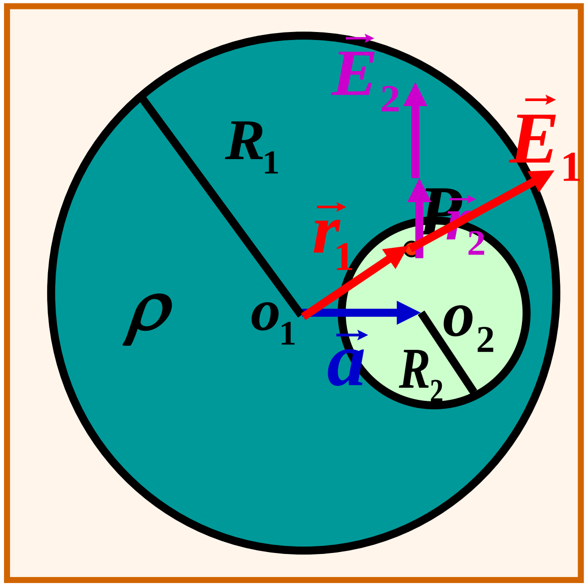
$$E\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

$$\therefore E_{内}=\frac{2\pi k r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{k}{2\varepsilon_0}$$

$$E_{外}=\frac{2\pi k R^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2}$$

沿径向

习题4(P_{236} 9.13)：在半径R_1，体电荷密度ρ 的均匀带电球体内挖去一个半径R_2的球形空腔。空腔中心 o_2与带电球体中心o_1相距为$a[(R_2+a)<R_1]$,求空腔内任一点电场。



思考：选用何种方法求解？

挖去空腔 —— 失去球对称性，用补偿法恢复对称性！

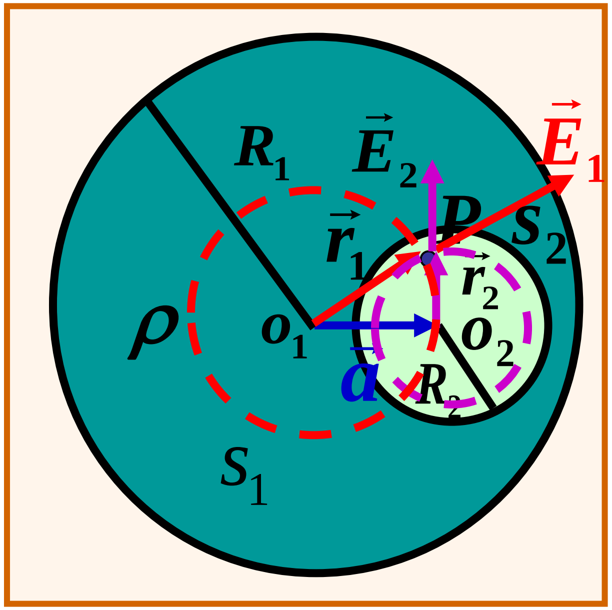
设：

半径为R_1均匀带电实心球体在P点的场强：$\vec{E}_1$

半径为R_2均匀带电实心球体在P点的场强：$\vec{E}_2$

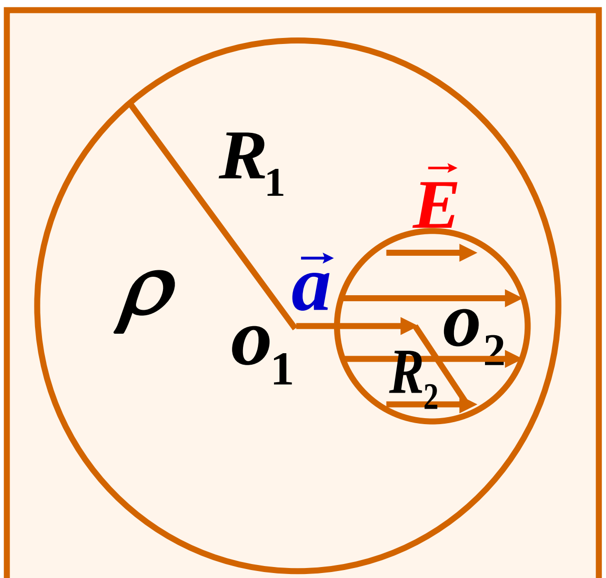
$\vec{E}_1$、$\vec{E}_2$ 均可由高斯定理求出

所求场强 $\vec{E}_P = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$



$$E_1 \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3 \qquad \vec{E}_1 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\varepsilon_0}$$

$$E_2 \cdot 4\pi r_2^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3 \qquad \vec{E}_2 = \frac{\rho \vec{r}_2}{3\varepsilon_0}$$

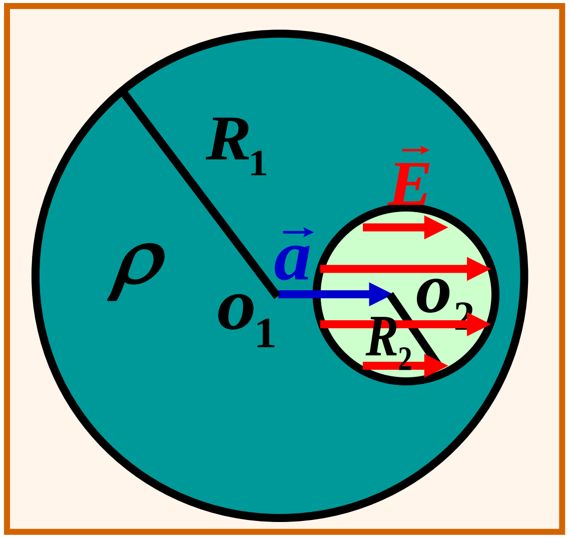


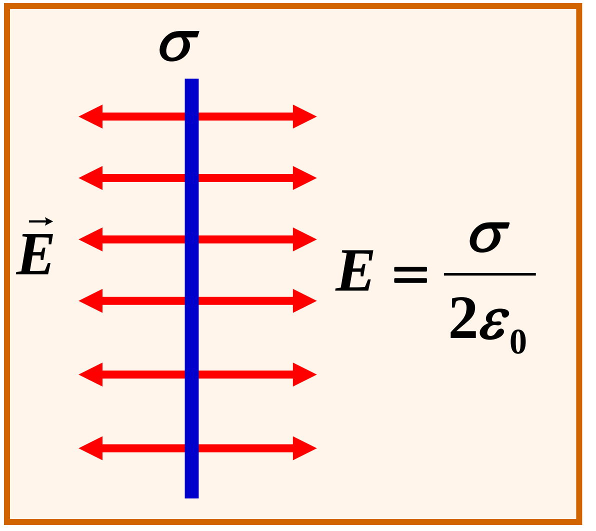
$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho \vec{a}}{3\varepsilon_0}$$

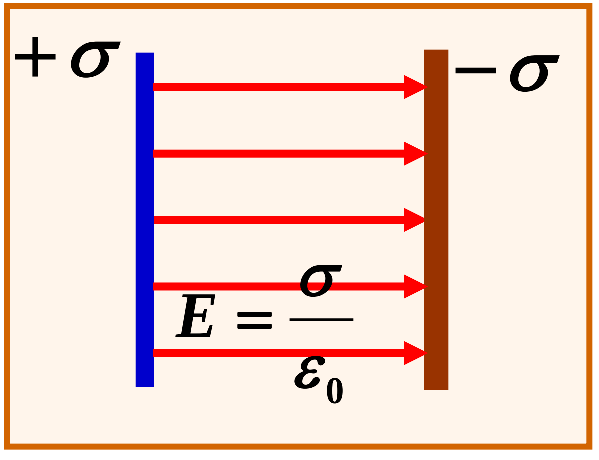
腔内为平行于 $\overrightarrow{o_1 o_2} = \vec{a}$

的均匀电场！

请总结获得均匀电场的方法：







……

二、U的计算 $\begin{cases}\text{场强积分法}\\ \text{叠加法}\end{cases}$

1. 场强积分法

$$\boxed{U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

适合：场强已知或容易求到的情况.

注意

(1) 积分与路径无关，可依题意选最简便的积分路径。

(2) $\vec{E}$ 为路径上各点总场，若各区域 $\vec{E}$ 表达式不同，应分段积分.

(3) 积分值与零势点选取有关 。选取原则：

电荷有限分布选 $U_\infty = 0$ ；电荷无限分布选 $U_{\text{有限处}} = 0$

2. 叠加法 思路： $dq \to dU \to U = \int dU$

适合： 场强不知或不容易求到的情况.

注意:应用典型带电体的电势公式时需选取相同的零势点

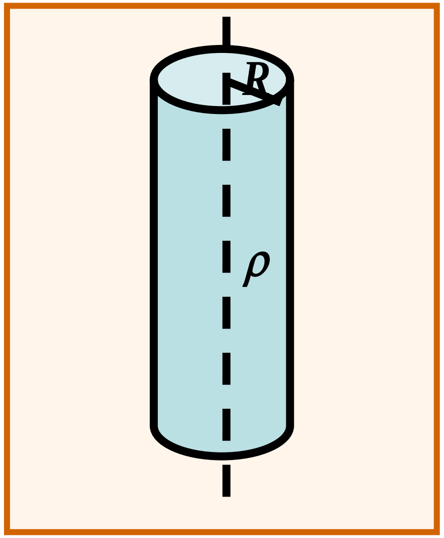
典型带电体的电势：

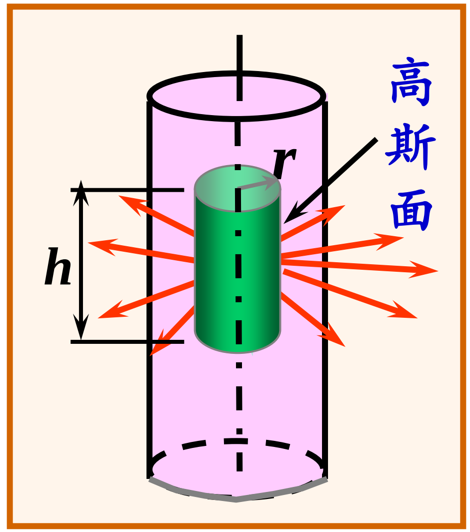
点电荷： $$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

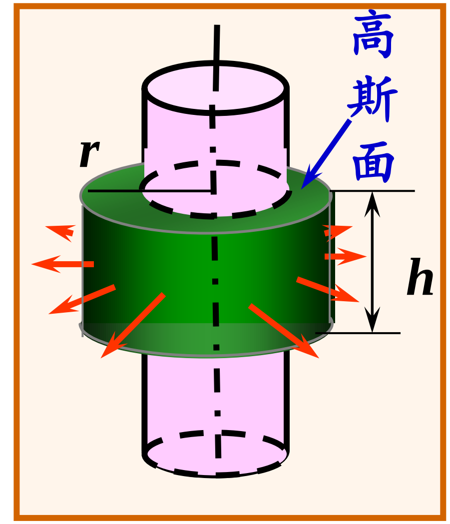
均匀带电圆环轴线上： $$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}$$

均匀带电球面： $$U_{内} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad U_{外} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

习题5（P_{237} 9.19）：求无限长均匀带电圆柱体(R,ρ)电势分布





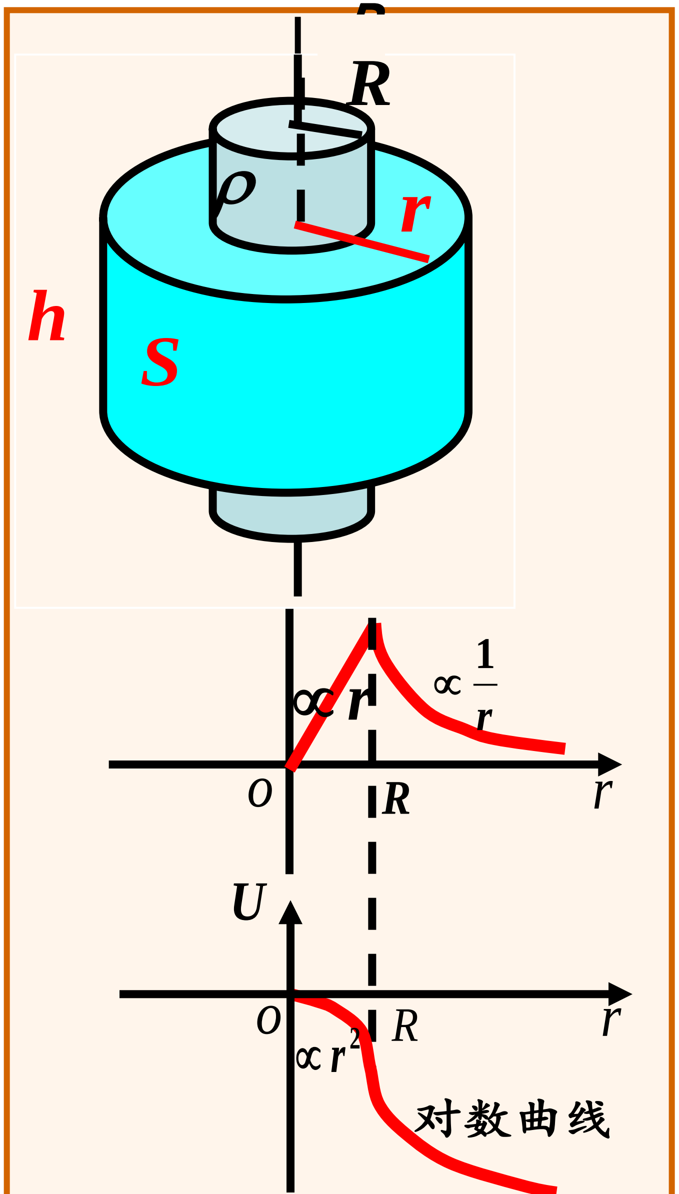


解： 场强积分法：$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 2\pi rh = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$

$r \le R$：$\sum q_{内} = \rho\cdot\pi r^2 h$ $\qquad \vec{E}_{内} = \dfrac{\rho\vec{r}}{2\varepsilon_0}$

$r \ge R$：$\sum q_{内} = \rho\cdot\pi R^2 h$ $\qquad \vec{E}_{外} = \dfrac{\rho R^2\vec{r}}{2\varepsilon_0 r^2}$

二、U的计算



令$r=0$处$U=0$，沿径向积分。

$$U_{内}=\int_r^0 \vec{E}_{内}\cdot d\vec{r}=\int_r^0 \frac{\rho\vec{r}\cdot d\vec{r}}{2\varepsilon_0}$$

$$=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_r^0 r dr=-\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}$$

$$U_{外}=\int_r^R \vec{E}_{外}\cdot d\vec{r}+\int_R^0 \vec{E}_{内}\cdot d\vec{r}$$

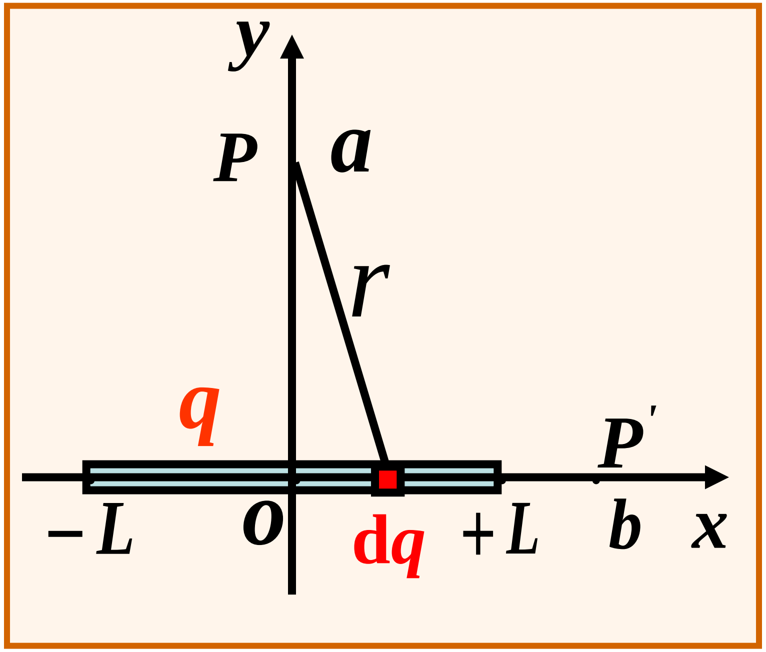
$$=\int_r^R \frac{\rho R^2 dr}{2\varepsilon_0 r}+\int_R^0 \frac{\rho r dr}{2\varepsilon_0}$$

$$=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}-\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}$$

习题6(P$_{237}$ 9.23)：电量q均匀分布在长为$2L$的细棒上。

求：(1) 细棒中垂面上距细棒中心a处P点的电势。

(2) 细棒延长线上距细棒中心b处P'点的电势。



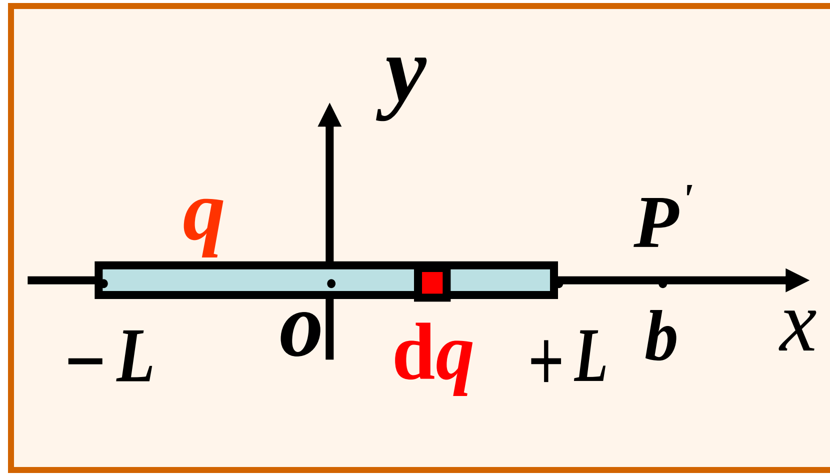
解：将带电细棒视为点电荷集合用叠加法。建立如图所示坐标系：

$$\mathrm{d}q=\frac{q}{2L}\mathrm{d}x \quad 令\ U_{\infty}=0$$

$$(1)\ \mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{q\mathrm{d}x}{8\pi\varepsilon_0 L(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$U_P=\int\mathrm{d}U=\int_{-L}^{L}\frac{q\mathrm{d}x}{8\pi\varepsilon_0 L(x^2+a^2)^{1/2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{L+\sqrt{a^2+L^2}}{a}$$

(2) 求细棒延长线上距细棒中心b处P'点的电势



$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(b-x)}$$

$$= \frac{q\mathrm{d}x}{8\pi\varepsilon_0 L(b-x)}$$

$$U_{P'} = \int \mathrm{d}U = \int_{-L}^{L} \frac{q\mathrm{d}x}{8\pi\varepsilon_0 L(b-x)}$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{b+L}{b-L}$$

作业

1. No.7（希望在作业题纸中选择、填空、判断各题的相应位置处写出其关键步骤）；
2. 自学本章各例题并完成书上的习题(对照书后的参考答案自己订正)。

第十二周星期三交作业