

第四节 环路定理 电势

一、静电力的功

二、环路定理

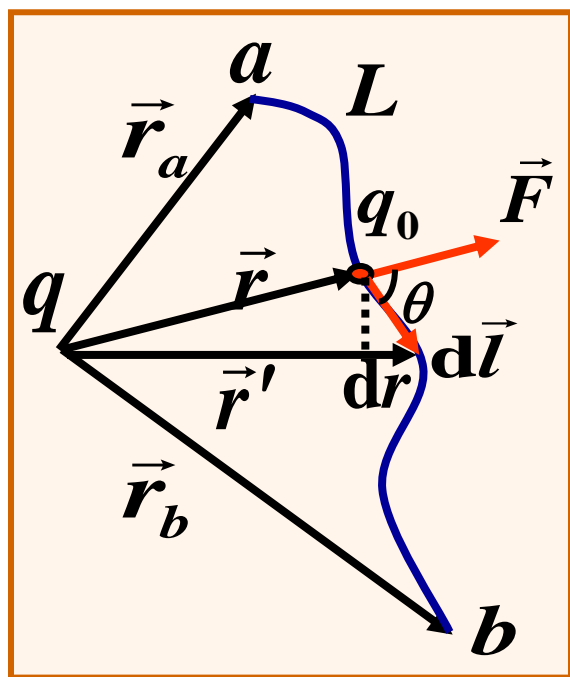
三、电势能

四、电势 U

五、场强与电势的关系

▲六、电势的计算

一、静电力的功



场源电荷: q
检验电荷: q_0

$$\left. \begin{array}{l} \text{场源电荷: } q \\ \text{检验电荷: } q_0 \end{array} \right\} \vec{F} = q_0 \vec{E} = \frac{q_0 q \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

元功: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0 q \vec{r} \cdot d\vec{l}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q_0 q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$A = \int_L dA = \int_{r_a}^{r_b} \frac{q_0 q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

结论: 静电力做功只与检验电荷起点、终点的位置有关, 与所通过的路径无关。

对点电荷系: $A = \int_L \mathbf{dA} = \int_{r_a}^{r_b} q_0 \vec{E} \cdot \mathbf{d}\vec{l}$

$$= \int_{r_a}^{r_b} q_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n) \cdot \mathbf{d}\vec{l}$$

$$= \int_{r_a}^{r_b} q_0 \vec{E}_1 \cdot \mathbf{d}\vec{l} + \int_{r_a}^{r_b} q_0 \vec{E}_2 \cdot \mathbf{d}\vec{l} + \dots + \int_{r_a}^{r_b} q_0 \vec{E}_n \cdot \mathbf{d}\vec{l}$$

点电荷系或带电体产生的电场力做功与路径无关。

静电力是保守力，静电场是保守场。

$$A = \oint_L \vec{F} \cdot \mathbf{d}\vec{l} = \oint_L q_0 \vec{E} \cdot \mathbf{d}\vec{l} = 0$$



静电场中任意闭合路径

二、环路定理

静电场环路定理： $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

 路径上各点所对应的总场强

静电场强沿任意闭合路径的线积分为零。

环路定理反映了静电力是**保守力**，静电场是**保守力场**。

凡保守力都有与其相关的势能，静电场是**有势场**。

三、电势能 W

由 $A_{\text{保}} = -\Delta E_P$ 得：

$$A_{\text{静电力}} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\Delta W = -(W_b - W_a) = W_a - W_b$$

令 b 为零势能点，则： $W_b = 0$

$$\therefore W_a = q_0 \overset{\text{零势能点}}{\int_a} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

q_0 在场中某点 (a) 的电势能等于将 q_0 由该点移到零势能点过程中电场力做的功。

$$W_a = q_0 \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

注意： W_a ：静电场与场中电荷 q_0 共同拥有。

W_a / q_0 ：取决于电场分布、场点位置和零势点的选取，与场中检验电荷 q_0 无关。可用以描述静电场自身的特性。

四、电势 U $U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 单位：伏特 (V)

静电场中某点电势等于单位正电荷在该点具有的电势能，或将单位正电荷由该点移至零势点过程中静电力所做的功。

$$\text{电势: } U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电势差:

$$U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_b^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{零势点}}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

静电场中 a 、 b 两点的电势差等于将单位正电荷由 a 沿任意路径移至 b 过程中静电力做的功。

$$W_a = qU_a \longrightarrow \text{已知电势求电势能}$$

$$A_{ab} = q(U_a - U_b) \longrightarrow \text{已知电势差求电场力做功}$$



$$U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad U_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

注意：1. U 为空间标量函数。

2. U 具有相对意义，其值与零势点选取有关，但 U_{ab} 与零势点选取无关。

3. 电势遵从电势叠加原理：

$$\begin{aligned} \text{点电荷系 } U_a &= \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{\text{零势点}} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{l} \\ &= \int_a^{\text{零势点}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_a^{\text{零势点}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + \int_a^{\text{零势点}} \vec{E}_n \cdot d\vec{l} \\ &= U_1 + U_2 + \dots + U_n = \sum U_i \quad (\text{零势点相同}) \end{aligned}$$

即：点电荷系场中任一点的电势等于各点电荷单独存在时在该点产生的电势的代数和。

五、场强与电势的关系

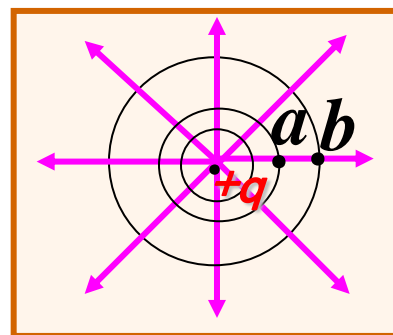
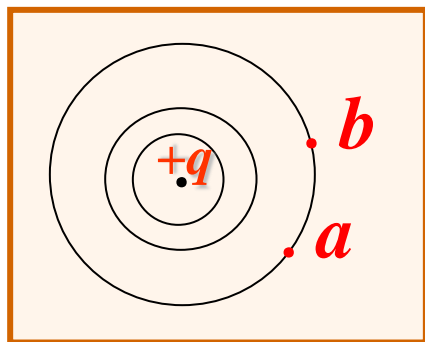
1. 等势面与电场线的关系

等势面: 电场中电势的值相等的各点组成的曲面。

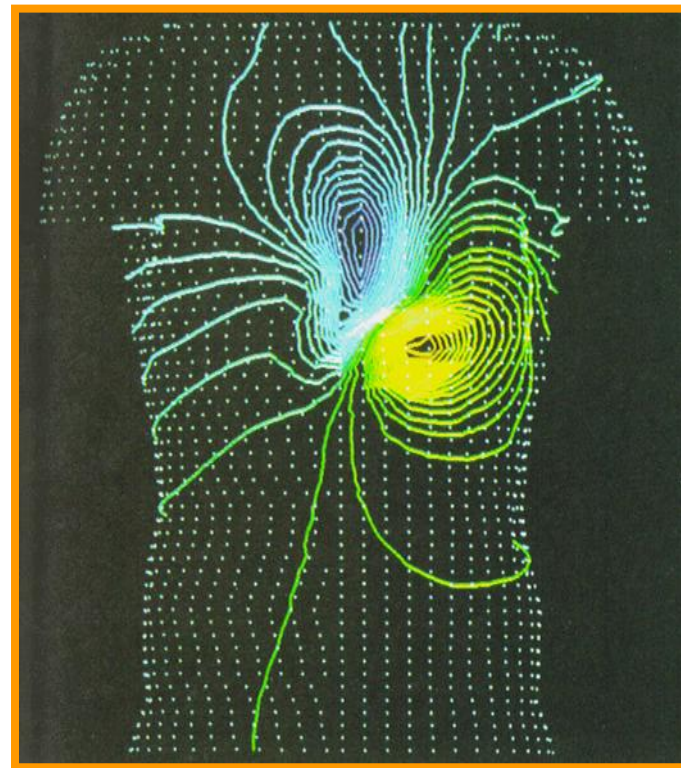
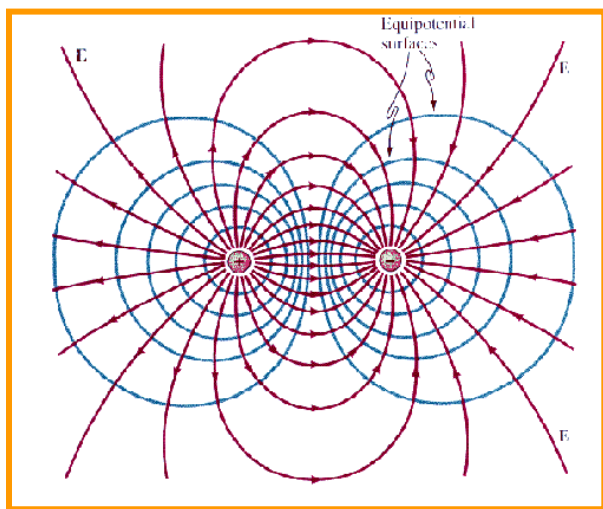
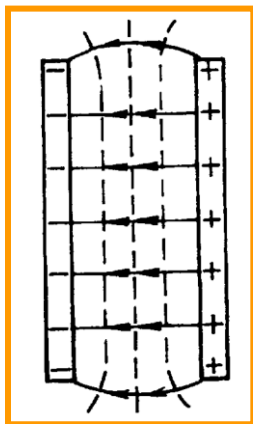
规定: 在电场中画等势面时使两两相邻的等势面间的电势差 ΔU 相等。

等势面特点: 电场线与等势面正交; 电场线总是指向电势降低的方向; 电场强的地方等势面较密, 电场弱的地方等势面较稀。

点电荷等势面



实际问题中常常先由实验测得等势面分布，再得出电场线分布。



作心电图时人体的等势面分布

2. E 与 U 的关系

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} = -\nabla W$$

$$\vec{E} = -\nabla\left(\frac{W}{q_0}\right) = -\nabla U = -\text{grad} U$$

静电场中某点的场强等于该点电势梯度的负值。

即： \vec{E} 是 U 沿电场线方向的空间变化率，指向 U 降低的方向。

给出又一种求 \vec{E} 的方法：

$$\vec{E} = -\text{grad}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\text{又：} E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\therefore \vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

▲六、电势的计算(两种基本方法)

1. 场强积分法(由定义求)

(1) 确定 \vec{E} 分布

(2) 选零势点和便于计算的积分路径

积分路径尽量沿着
电场强度 \vec{E} 的方向

作笔记

(3) 由电势定义得 $U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{\text{零势点}} E \cos \theta dl$ 计算 U_a

适合情况: \vec{E} 分布已知或容易求到

注意: ➤ 若路径上各段 \vec{E} 的表达式不同, 应分段积分。

➤ 选取零势点的原则: 使场中电势分布有确定值。

一般: 场源电荷有限分布: 选 $U_\infty = 0$

场源电荷无限分布: 不选 $U_\infty = 0$

许多实际问题中选 $U_{\text{地球}} = 0$

例1 (P₂₀₆ 例2)：求点电荷 q 场中的电势分布

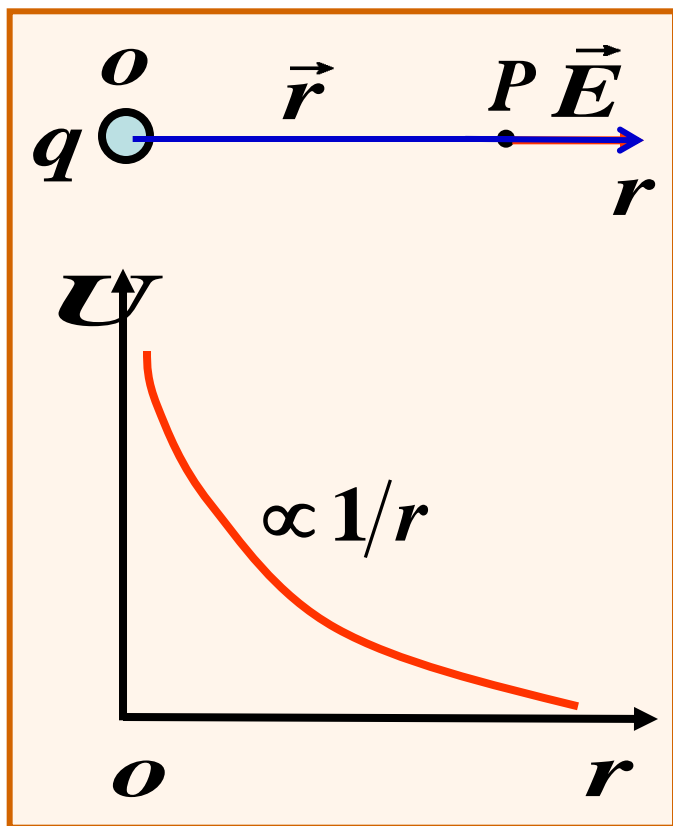
解： $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

坐标系：以径向 r 轴

令 $U_\infty = 0$ ，沿径向积分

$$U = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^\infty \frac{q\vec{r} \cdot d\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$
$$= \int_r^\infty \frac{qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

记住!



六、电势的计算

例2 (P₂₀₆ 例3)：均匀带电球面场中电势分布 (q R)

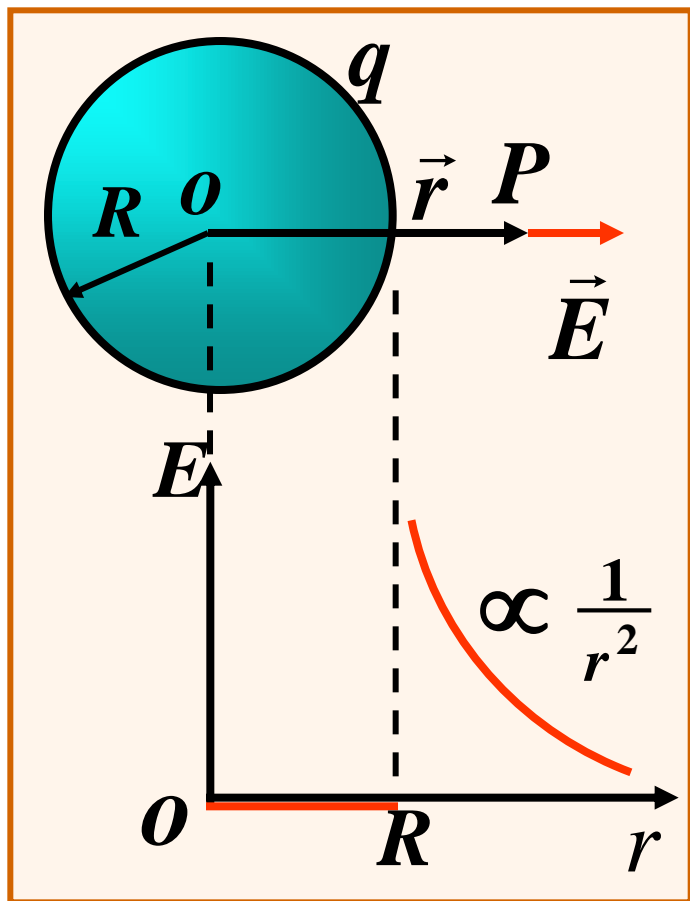
解：由高斯定理：

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} & (r > R) \end{cases}$$

坐标系：以径向 r 轴

令 $U_\infty = 0$ ，沿径向(r 轴)积分

$$\begin{aligned} U_{\text{外}} &= \int_P \vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{q\vec{r} \cdot d\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ &= \int_r^\infty \frac{qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \propto \frac{1}{r} \end{aligned}$$



$$U_{\text{外}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \propto \frac{1}{r}$$

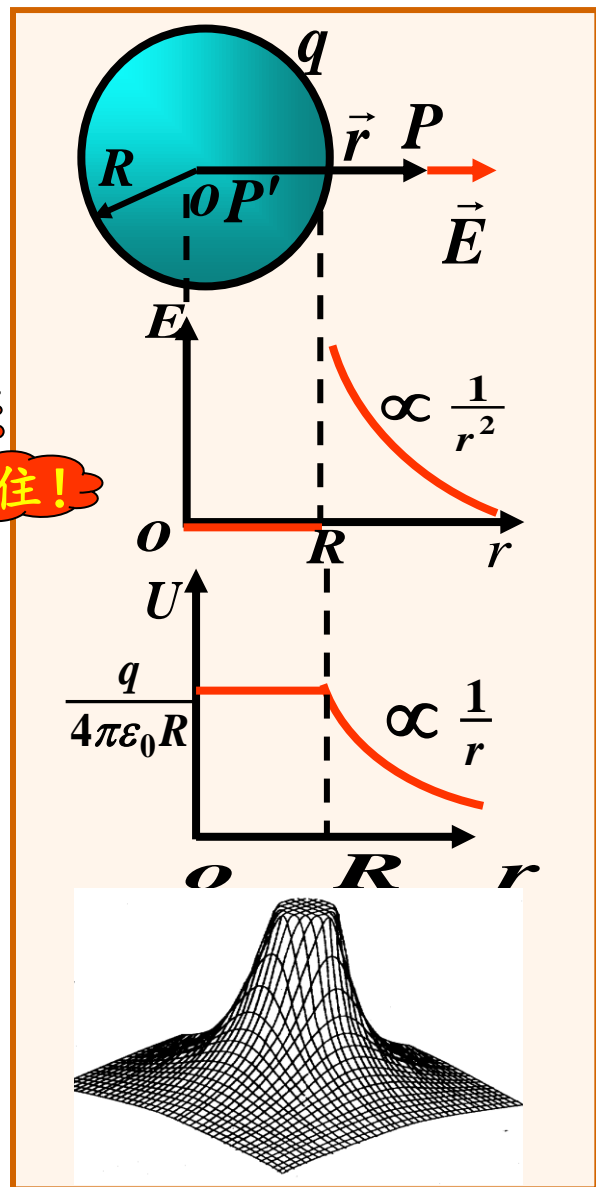
$$U_{\text{内}} = \int_{P'}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{P'}^R \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{r} + \int_R^{\infty} \vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_R^{\infty} \frac{q\vec{r} \cdot d\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \text{恒量}$$

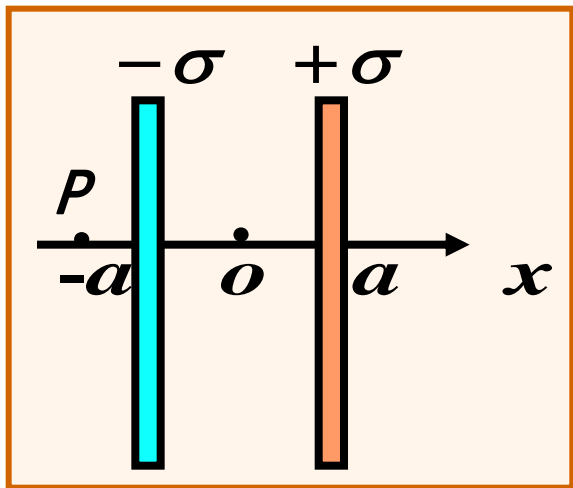
记住!

结论:

均匀带电球面内电势与球面处电势相等，球面外电势与电量集中于球心的点电荷情况相同。



例3 (P₂₃₇ 9. 20) : 求无限大均匀带电平面 $\pm\sigma$ 场中电势分布

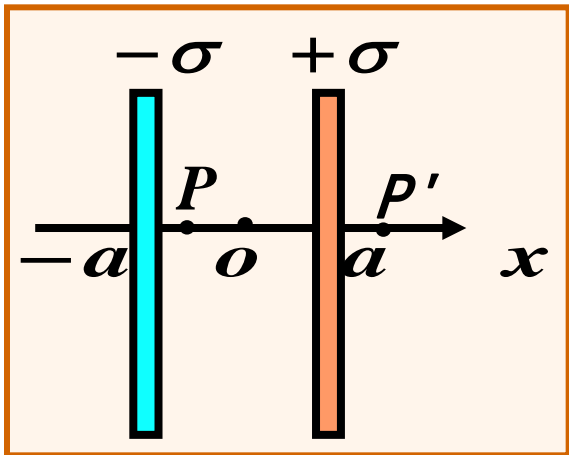


解：电场分布：

$$E = \begin{cases} -\frac{\sigma}{\epsilon_0} & (-a < x < a) \\ 0 & (x < -a, x > a) \end{cases}$$

电荷无限分布，在有限远处选零势点。令 $U_o = 0$ ，沿 x 轴积分。

$$\begin{aligned} x < -a \text{ 区域: } U &= \int_P^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_x^{-a} E dx + \int_{-a}^0 E dx \\ &= 0 + \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)a = -\frac{\sigma a}{\epsilon_0} \end{aligned}$$



$$x < -a \text{ 区域: } U = -\frac{\sigma a}{\epsilon_0}$$

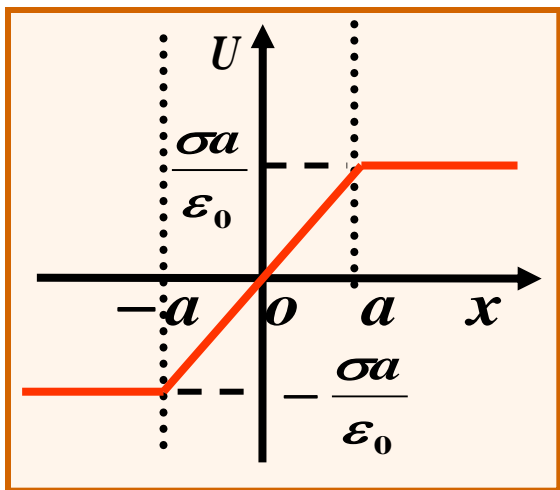
$$-a \leq x \leq a \text{ 区域:}$$

$$U = \int_p^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_x^0 E dx = \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)(-x) = \frac{\sigma x}{\epsilon_0}$$

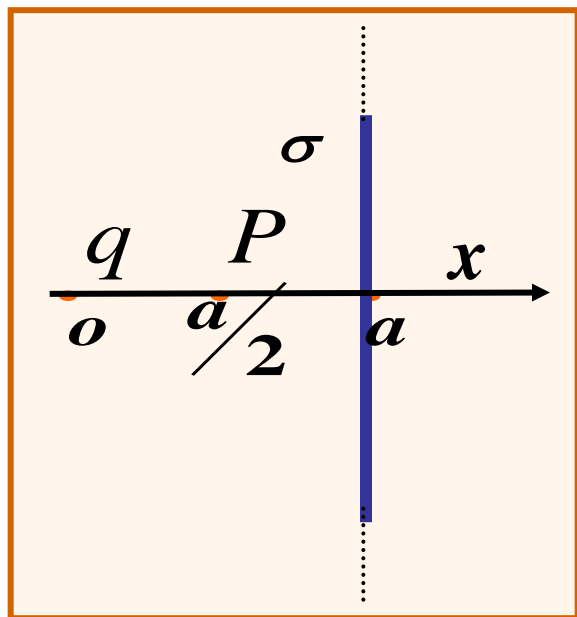
$$x > a \text{ 区域:}$$

$$\begin{aligned} U &= \int_{p'}^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_x^a E dx + \int_a^0 E dx \\ &= 0 + \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)(-a) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$U-x$ 曲线如图



例4:在与面电荷密度为 σ 的无限大均匀带电平板相距 a 处有一点电荷 q , 求点电荷至平板垂线中点处的电势 U_p



解:建立如图所示坐标系,
由场强积分法:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

选共同的零势点: $U_a = 0$, 沿 x 轴积分。

$$\begin{aligned} U_P &= \int_P^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\frac{a}{2}}^a E_x dx \\ &= \int_{\frac{a}{2}}^a \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) dx = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{\sigma a}{4\epsilon_0} \end{aligned}$$

2. 叠加法

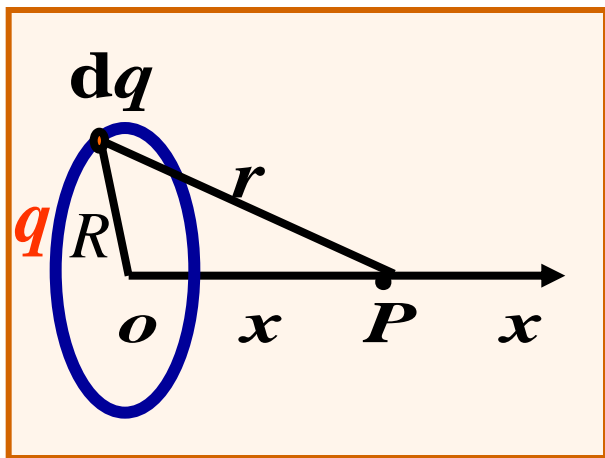
(1) 将带电体划分为电荷元 dq 的集合

(2) 选零势点，写出 dq 在场点的电势 dU

(3) 由叠加原理： $U = \sum dU$ 或 $U = \int dU$

***适合**带电体整体场强不容易求到的情况

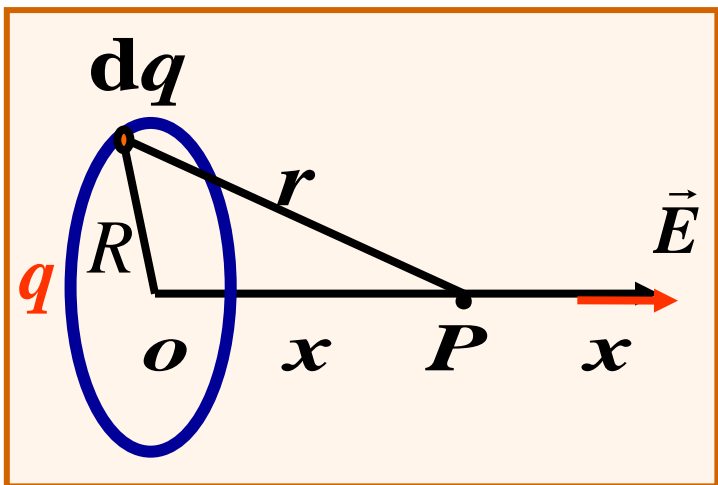
例4 (P₂₂₇ 例5)：求均匀带电圆环轴线上的电势分布



解：在圆环上取电荷元 dq

$$\text{令 } U_{\infty} = 0$$

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$



$$U = \int dU = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_0^{2\pi R} \frac{\frac{q}{2\pi R} dl}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}$$

环心处: $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

可进一步由电势分布求电场强度分布:

$$\vec{E} = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} = \frac{qx\vec{i}}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

练习：一锥顶角为 2θ 的圆台，上下底面半径分别为 R_1 和 R_2 ，其侧面均匀带电，电荷面密度为 σ ，以无穷远处为电势零点，求顶点 O 的电势。

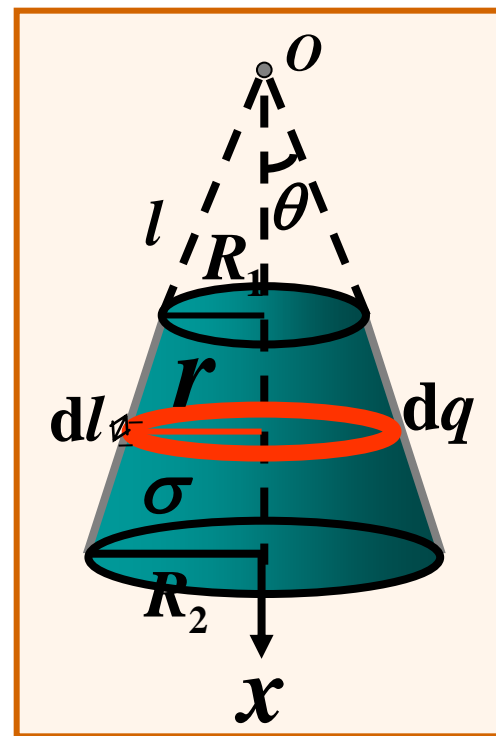
解：将圆台侧面视为由许多圆环组成，建立如图坐标系，在 x 处取高 dx 的圆环。

$$\begin{aligned} dq &= \sigma dS = \sigma 2\pi r \cdot dl = \sigma 2\pi r \cdot dx / \cos \theta \\ &= \sigma 2\pi x \tan \theta \cdot dx / \cos \theta \end{aligned}$$

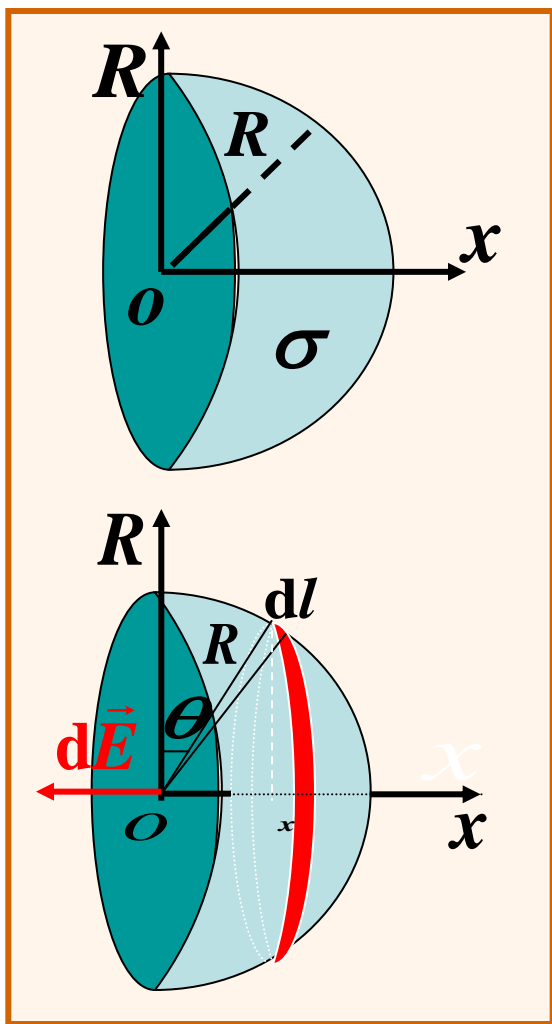
以无穷远处为电势零点：

$$dU = \frac{dq}{4\pi \varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{\sigma \tan \theta}{2\varepsilon_0} dx$$

$$\text{由叠加原理：} U = \int dU = \frac{\sigma \tan \theta}{2\varepsilon_0} \int_{R_1/\tan \theta}^{R_2/\tan \theta} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (R_2 - R_1)$$



类似情况：求均匀带电半球面（已知 R, σ ）球心处电势。



将半球面视为由许多圆环拼成。

$$\begin{aligned} dq &= \sigma dS = \sigma 2\pi r \cdot dl \\ &= \sigma 2\pi R \cos \theta \cdot R d\theta \end{aligned}$$

$$dU = \frac{dq}{4\pi \varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{dq}{4\pi \varepsilon_0 R}$$

由叠加法：

$$U = \int dU = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma R \cos \theta}{2\varepsilon_0} d\theta$$

例5 (P₂₃₇ 9.18): 求均匀带电球壳腔内任意点电势

已知: R_1, R_2, ρ 求: U_P

解: 将带电球壳视为许多均匀带电球面 (薄球壳) 的集合。

取半径 r , 厚 dr 的球壳为电荷元:

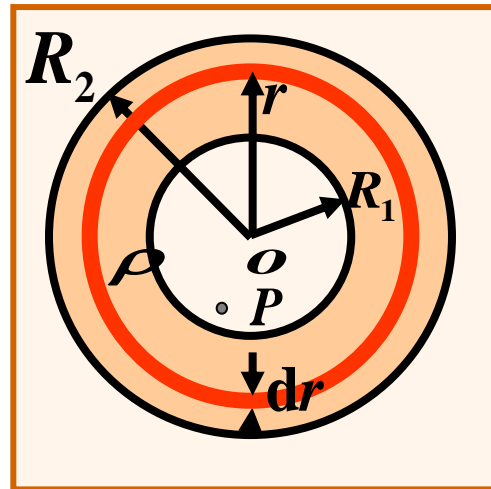
$$dq = \rho \cdot 4\pi r^2 \cdot dr$$

令 $U_\infty = 0$, dq 在腔内产生的电势:

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho \cdot 4\pi r^2 dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho r dr}{\epsilon_0}$$

$$\text{由叠加原理: } U = \int dU = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{\epsilon_0} r dr = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$$

即: 腔内各点等势



练习: 已知: 两个均匀带电同心球面

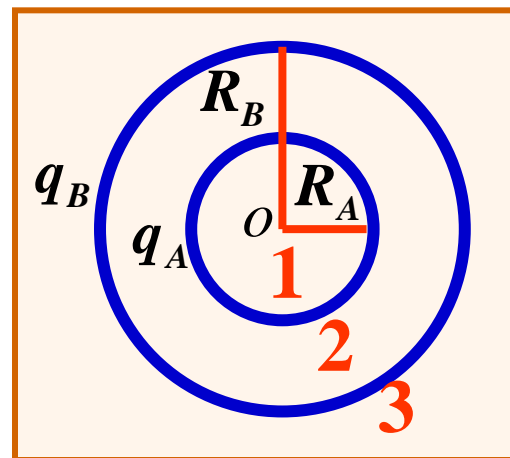
R_A, R_B, q_A, q_B 求: U_1, U_2, U_3

带电球面的电势分布:

球面内: $U = q / (4\pi\epsilon_0 R)$

球面外: $U = q / (4\pi\epsilon_0 r)$

记住!



解: 由叠加原理得 $r \leq R_A$: $U_1 = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 R_A} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 R_B}$

$$R_A < r < R_B: U_2 = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 R_B}$$

$$r \geq R_B: U_3 = \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 r_3}$$