University Physics

大学物理

大学
物理

复习：

1. 角动量

质点 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$

质点系 $\vec{L}=\vec{r}_c\times M\vec{v}_c+\sum\limits_i \vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i'=\vec{L}_{轨道}+\vec{L}_{自旋}$

定轴刚体 $L_z=\omega\sum\limits_i r_i^2 m_i=J\omega$

2. 转动惯量

$$J=\sum_i r_i^2 m_i \qquad J=\int r^2 \mathrm{d}m$$

§ 5.2　角动量的时间变化率

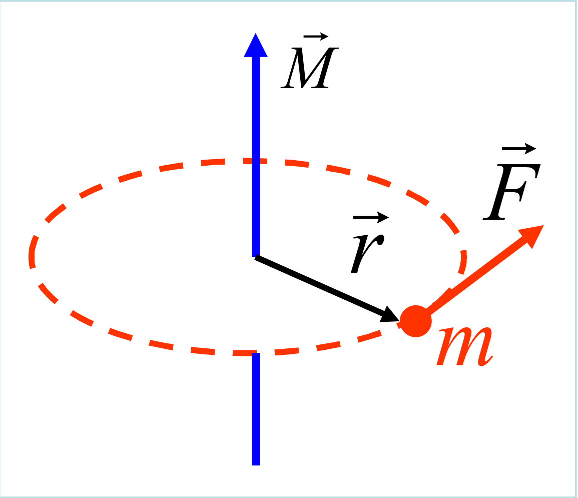
一、质点角动量的时间变化率

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$\because\quad \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}=\vec{v}\times\vec{p}=\vec{v}\times m\vec{v}=0$$

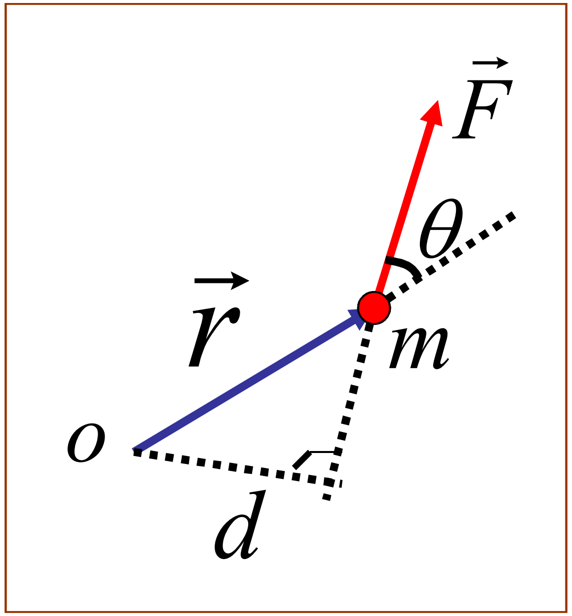
$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\underbrace{\vec{r}}_{\text{质点位矢}}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\underbrace{\vec{F}}_{\text{合力}}$$



$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$

大小： $\left|\vec{r}\times\vec{F}\right|=rF\sin\theta=Fd$

方向：服从右手螺旋法则



二、力矩

1、对参考点的力矩

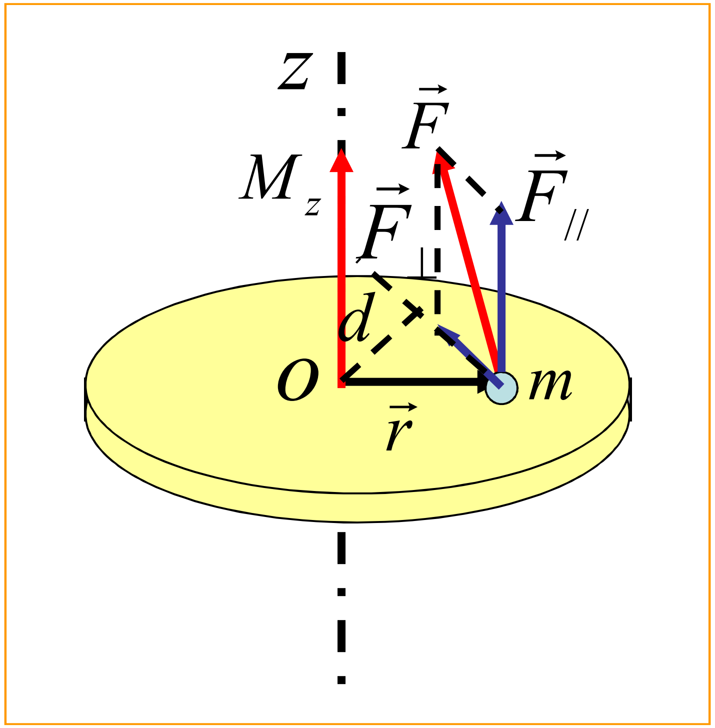
定义：　$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

大小：　$Fd = Fr\sin\theta$

方向：　垂直于 $\vec{r}$ 和 $\vec{F}$ 组成的平面

服从右手螺旋法则

2、对轴的力矩



$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times(\vec{F}_{//}+\vec{F}_{\perp})$$

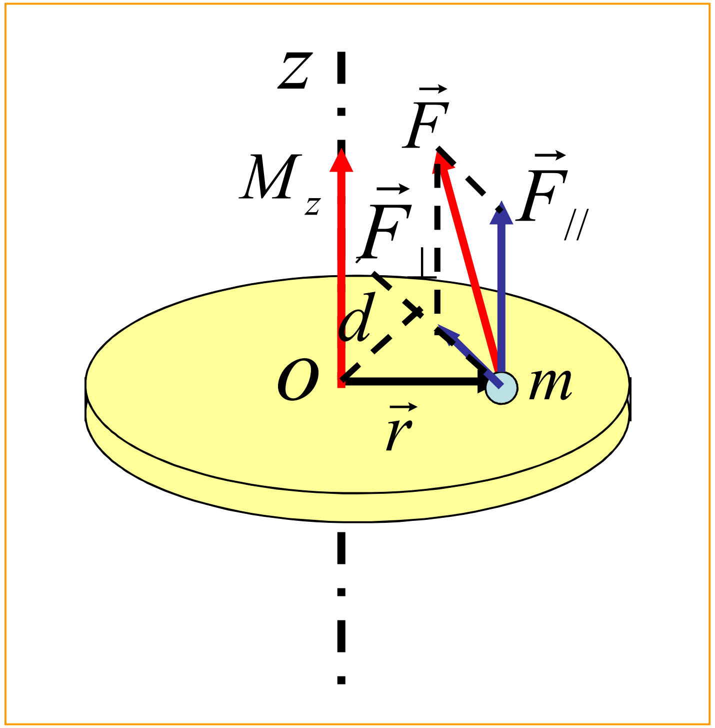
$$=\vec{r}\times\vec{F}_{//}+\vec{r}\times\vec{F}_{\perp}$$

第一项　$\vec{M}_1=\vec{r}\times\vec{F}_{//}$

方向垂直于轴，其效果是改变轴的方位，在定轴问题中，与轴承约束力矩平衡。

第二项 $\vec{M}_z = \vec{r} \times \vec{F}_\perp$

方向平行于轴，其效果是改变绕轴转动状态，称为力对轴的矩，表为代数量： $M_z = \pm\left|\vec{r} \times \vec{F}_\perp\right|$



$\vec{r}$：　轴与转动平面的交点*o*到力作用点的位矢

$\vec{F}_{\perp}$：　力在转动平面内的分量

$$M_z = \pm\left|\vec{r}\times\vec{F}_{\perp}\right|$$　力对*o* 点 的力矩在*z*轴方向的分量

即：

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(yF_z - zF_y\right) + \vec{j}\left(zF_x - xF_z\right) + \vec{k}\left(xF_y - yF_x\right)$$

$$M_z = xF_y - yF_x$$

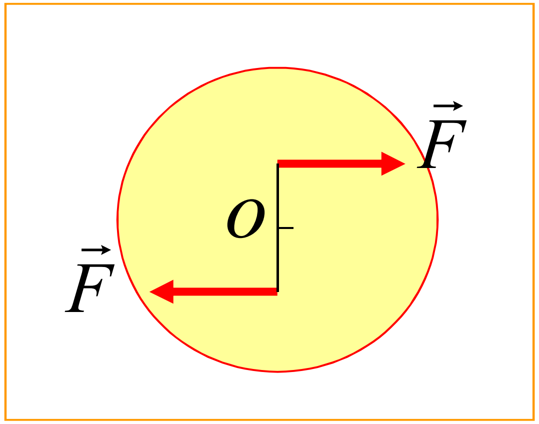
注意:

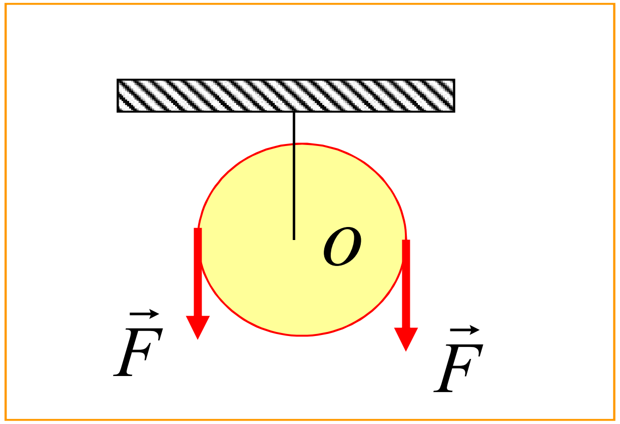
(1) 力矩求和只能对同一参考点（或轴）进行。

$$\vec{M}_o = \vec{M}_{1o} + \vec{M}_{2o} + \cdots$$ 矢量和

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + \cdots$$ 代数和

(2)





$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{M} \neq 0$$

$$\sum \vec{F} \neq 0$$

$$\sum \vec{M} = 0$$

(3) 质点系角动量的时间变化率

对 N 个质点 $m_1, m_2, \cdots, m_N$ 组成的质点系，由

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$ 可得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{L}_1}{\mathrm{d}t} &= \vec{M}_{1外} + \vec{M}_{1内} \\
\frac{\mathrm{d}\vec{L}_2}{\mathrm{d}t} &= \vec{M}_{2外} + \vec{M}_{2内} \\
&\cdots\cdots \\
\frac{\mathrm{d}\vec{L}_N}{\mathrm{d}t} &= \vec{M}_{N外} + \vec{M}_{N内}
\end{aligned}\right\}$$

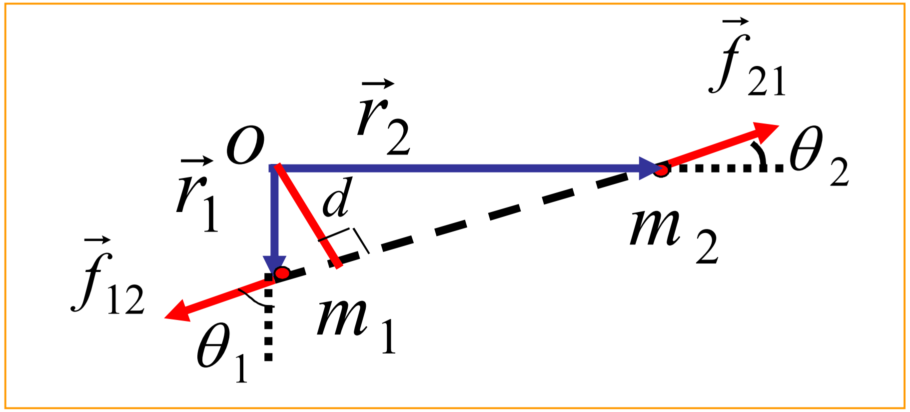
两边求和得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec{L}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \sum_i \vec{M}_{i外} + \sum_i \vec{M}_{i内}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec{L}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{M}_{i外} + \sum_i \vec{M}_{i内}$$

由图可知



$$\sum_i \vec{M}_{i内} = 0$$

于是：$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_{外} = \sum_{\mathrm{i}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i外}$$

质点系总角动量的时间变化率等于质点系所受外力矩的矢量和 (合外力矩)

非合力的力矩

[例] 质量为 m，长为 L 的细杆在水平粗糙桌面上绕过其一端的竖直轴旋转，杆与桌面间的摩擦系数为 μ，求摩擦力矩。

1) 杆的质量均匀分布

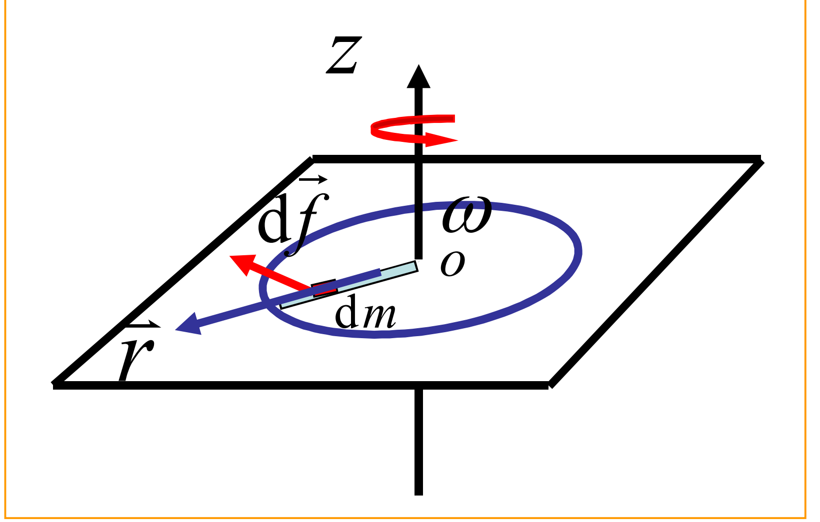
2) 杆的密度与离轴距离成正比

解1）

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{L}\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}f = \mu \mathrm{d}mg$$

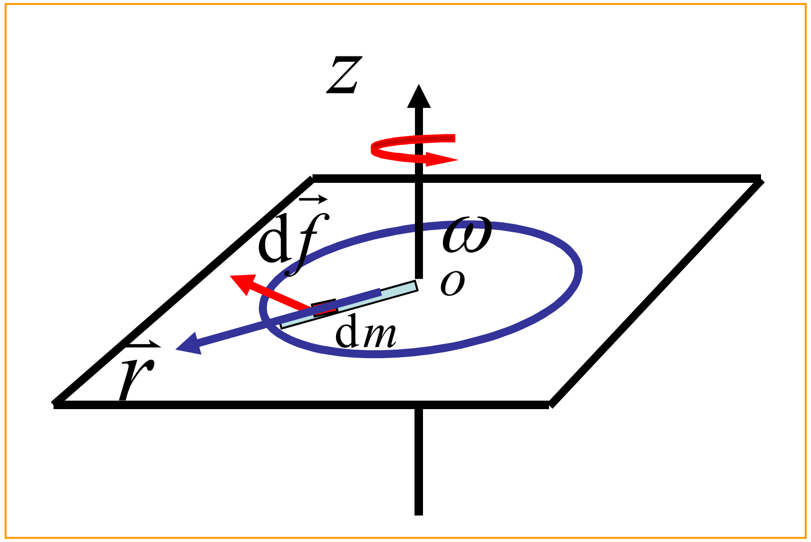
$$\mathrm{d}M = -r\mathrm{d}f$$



$$M = \int \mathrm{d}M = -\int_0^L r\mu \frac{m}{L} g\mathrm{d}r = -\frac{1}{2}\mu mgL$$

解2）设杆的线密度　$\lambda = kr$

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}r = kr\mathrm{d}r$$



由　$$m = \int \mathrm{d}m = \int_0^L kr\mathrm{d}r = \frac{1}{2}kL^2$$

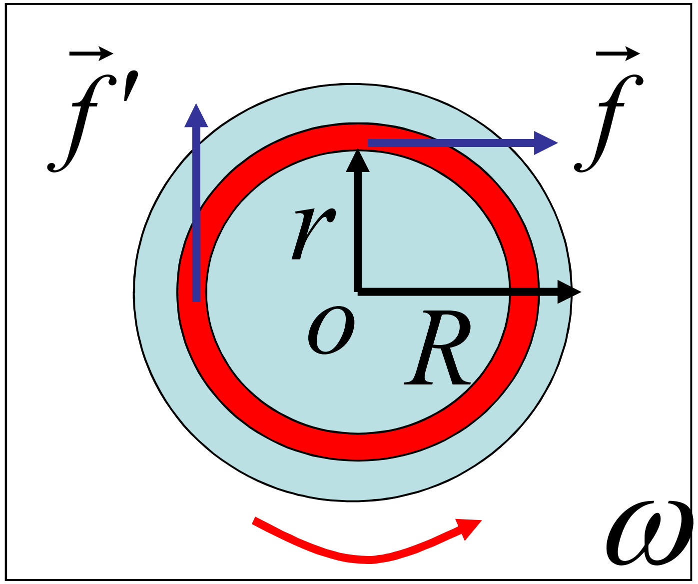
得　$$k = \frac{2m}{L^2}$$

$$\mathrm{d}f = \mu \mathrm{d}mg = \frac{2\mu mg}{L^2} r\mathrm{d}r$$

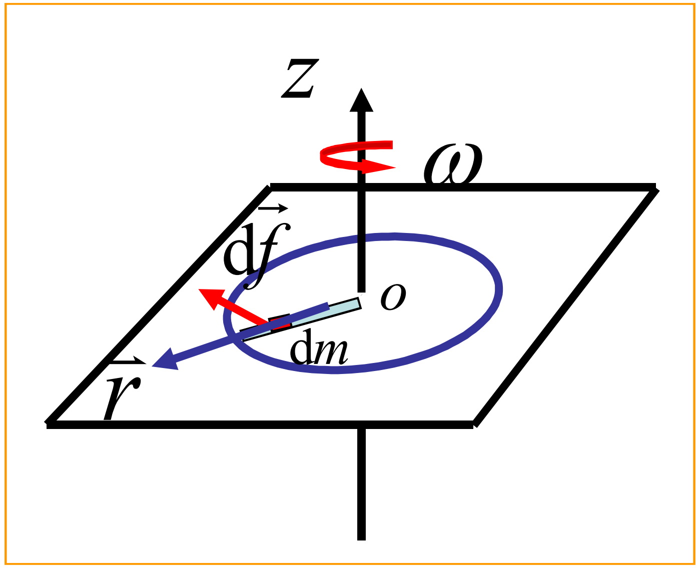
$$\mathrm{d}M = -r\mathrm{d}f$$

$$M = \int \mathrm{d}M = -\int_0^L \frac{2\mu mg}{L^2} r^2 \mathrm{d}r = -\frac{2}{3}\mu mgL$$

思考：



等效



半径 R，质量 m 的匀质圆盘，与桌面间摩擦系数 μ，求摩擦力矩

简化模型：

长 R，线密度 $\lambda = kr$ 总质量 m 的细杆

三、角动量定理的微分形式

1. 质点

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}}_{\mathbf{0}} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

质点角动量的时间变化率等于质点所受的合力矩

三、角动量定理的微分形式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} & \text{力是改变动量的原因} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} & \text{力矩是改变角动量的原因} \end{cases}$$

2. 质点系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec{L}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{M}_{i外} + \sum_i \vec{M}_{i内}$$

$$\sum_i \vec{M}_{i内} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_{外} = \sum_{\mathrm{i}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i外}$$

质点系总角动量的时间变化率等于质点系所受外力矩的矢量和。

内力矩只改变质点系总角动量在系内的分配，不影响总角动量。

3. 定轴刚体

由 $$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}_{外} \qquad L_z=\omega\sum_i r_i^2 m_i = J\omega$$

得 $$M_z=\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\omega)=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J\beta$$

比较

$$\begin{cases}\vec{F}=m\vec{a}\\ M_z=J\beta\end{cases}$$

m　是物体平动惯性的量度。

J　是物体转动惯性的量度。

$\vec{F}$　改变物体平动状态的原因

M_z　改变物体绕轴转动状态的原因

$\boxed{M_z = J\beta}$　　刚体定轴转动定律

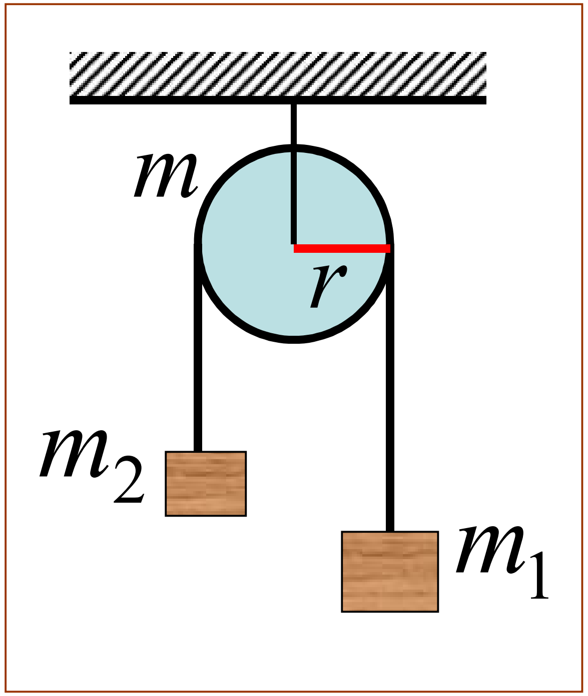
物体平衡的条件：$\sum \vec{F} = 0$　　$\sum \vec{M} = 0$

物体运动规律：

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \qquad \sum \vec{\boldsymbol{M}}_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad M_z = J\beta$$

例：　一定滑轮的质量为 m ，半径为 r ，一轻绳两边分别系 m_1 和 m_2 两物体挂于滑轮上，绳不伸长，绳与滑轮间无相对滑动。不计轴的摩擦，初角速度为零，求滑轮转动角速度随时间变化的规律。



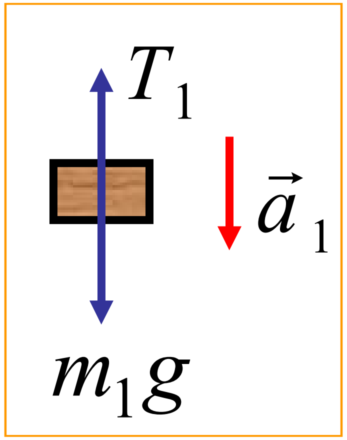
已知：

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad r,\quad \omega_0 = 0$$

求：　$\omega(t) = ?$

思路：先求角加速度　β

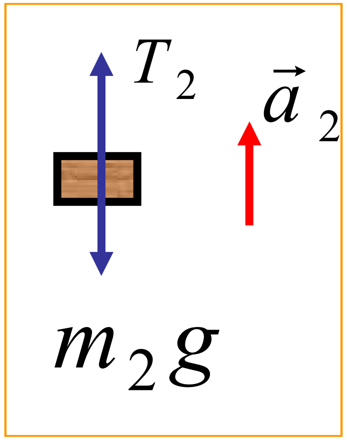
解： 在地面参考系中，分别以 m_1， m_2， m 为研究对象，用隔离法，分别以牛顿第二定律和刚体定轴转动定律建立方程。



以向下为正方向

$$m_1: \quad m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \qquad (1)$$

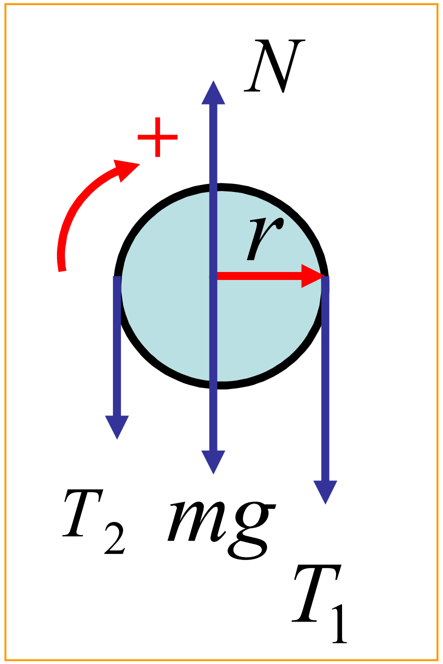
以向上为正方向



$$m_2: \quad T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \qquad (2)$$

思考：

$a_1 = a_2$ ？ √ $\quad T_1 = T_2$ ？ ×



滑轮m：　以顺时针方向为正方向

$$T_1 r - T_2 r = J\beta = \frac{1}{2} m r^2 \beta \qquad (3)$$

四个未知数：$a_1 = a_2 = a$，T_1，T_2，β

三个方程 ？

绳与滑轮间无相对滑动，由角量和线量的关系：

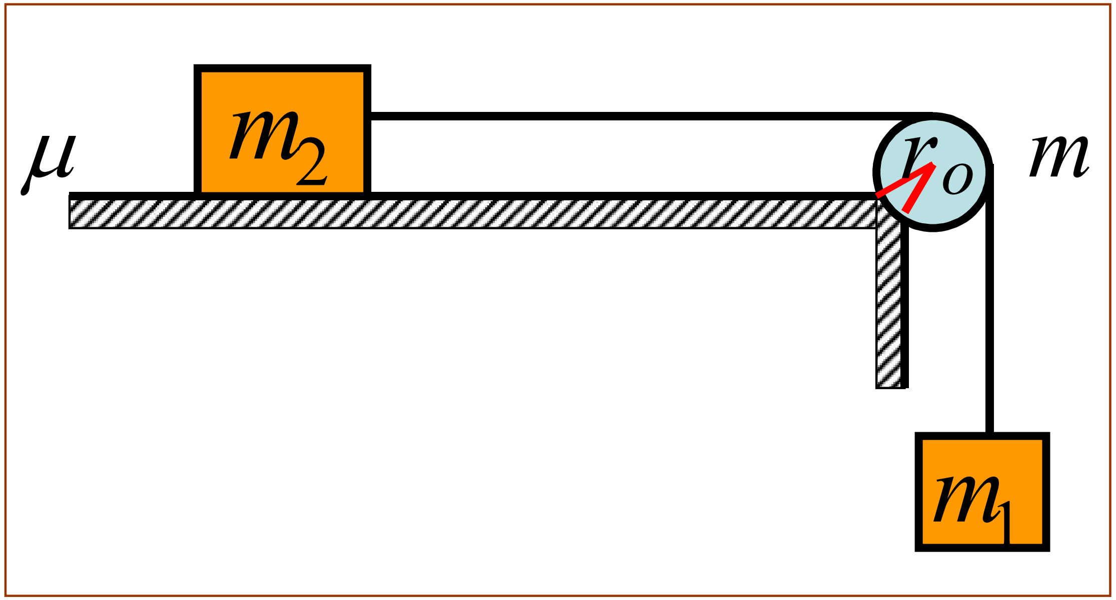
$$a = r\beta \qquad (4)$$

解得：

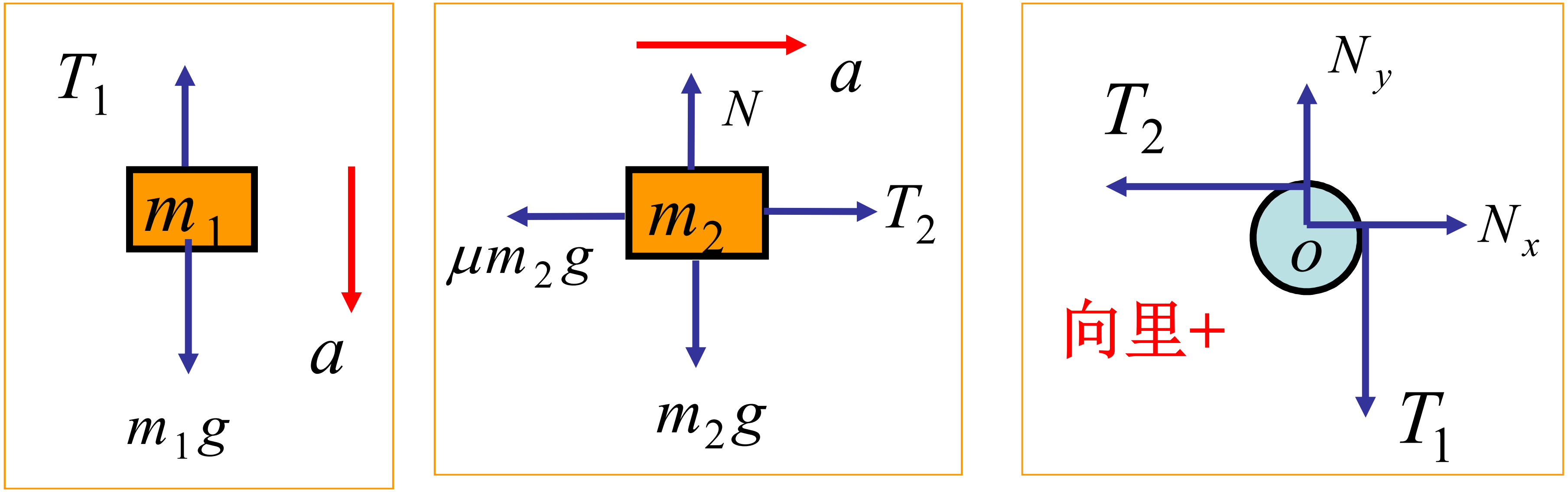
$$\beta = \frac{(m_1 - m_2)g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m\right)r} \qquad \omega = \omega_0 + \beta t = \frac{(m_1 - m_2)gt}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m\right)r}$$

练习

如图示，两物体质量分别为m_1 和m_2 ，滑轮质量为 m ，半径为 r 。已知 m_2 与桌面间的滑动摩擦系数为 μ ，求 m_1 下落的加速度和两段绳中的张力。



解：在地面参考系中，选取 m_1 、m_2 和滑轮为研究对象，分别运用牛顿定律和刚体定轴转动定律得：

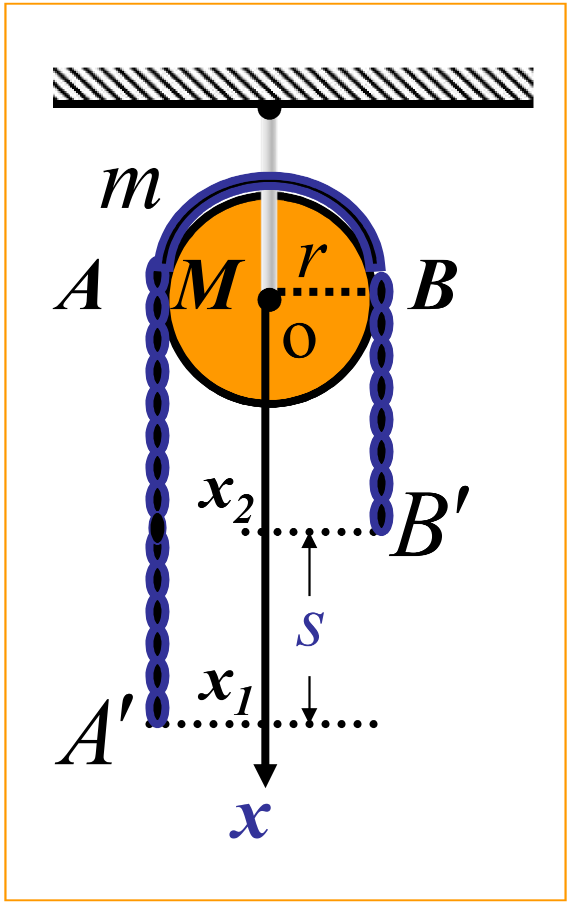


列方程如下：

$$
\begin{cases}
m_1 g - T_1 = m_1 a \\
T_2 - \mu m_2 g = m_2 a \\
(T_1 - T_2) r = \dfrac{1}{2} m r^2 \beta \\
a = r\beta
\end{cases}
$$

可求解

例. 质量为 **M** 的匀质圆盘，可绕通过盘中心垂直于盘的固定光滑轴转动，绕过盘的边缘有质量为 **m**、长为 **l** 的匀质柔软绳索（如图）。设绳与圆盘无相对滑动，试求当圆盘两侧绳长差为 **s** 时，绳的加速度的大小。

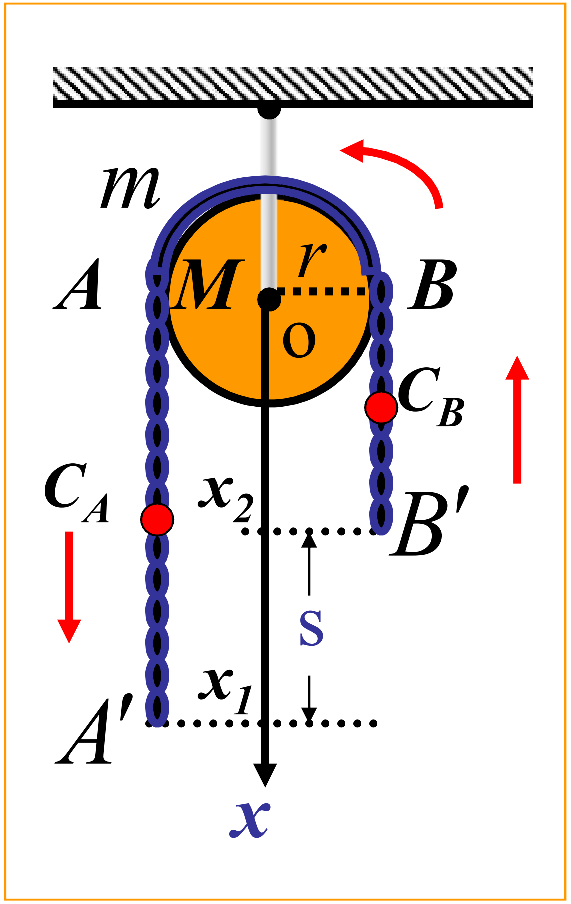


解：在地面参考系中，建立如图 **x** 坐标，设滑轮半径为 **r** 有：

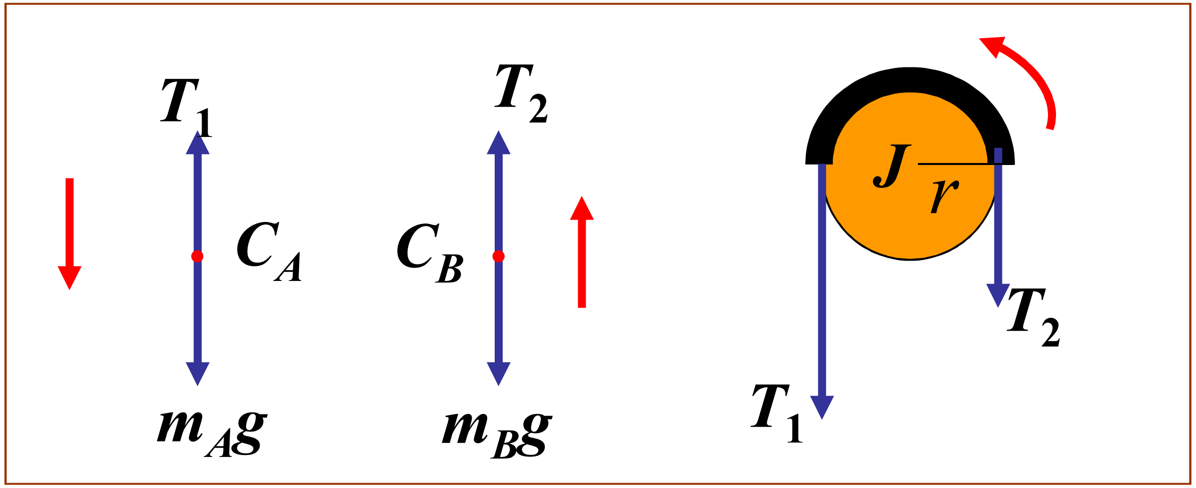
$$l = AA' + \overset{\frown}{AB} + BB' = x_1 + x_2 + \pi r$$

$$s = x_1 - x_2 \qquad m_{\mathrm{AB}} = \frac{m}{l}\cdot\pi r$$

$$m_{\mathrm{AA'}} = \frac{m}{l}\cdot x_1, \qquad m_{\mathrm{BB'}} = \frac{m}{l}\cdot x_2,$$



用隔离法列方程: (以逆时针方向为正)



$$\begin{cases} m_Ag - T_1 = m_Aa \\ T_2 - m_Bg = m_Ba \\ T_1r - T_2r = J\beta \\ J = J_M + J_{AB} = \frac{1}{2}Mr^2 + m_{AB}r^2 \end{cases}$$

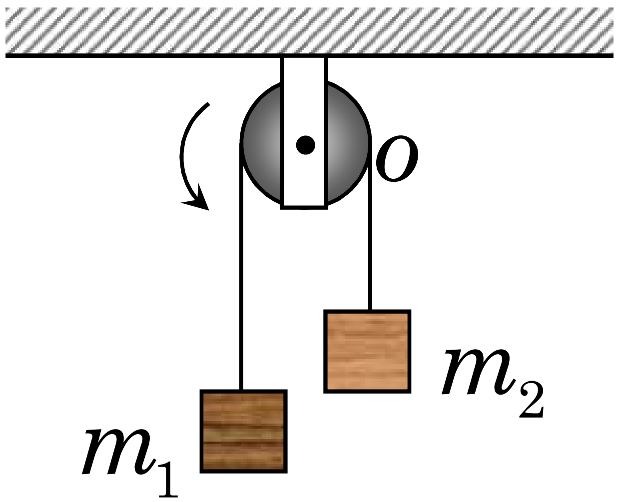
又: $a = r\beta$

$$s = x_1 - x_2$$

解得: $a = \dfrac{mgs}{(m + \frac{1}{2}M)l}$

练习1.一轻绳跨过一具有水平光滑轴、质量为M的定滑轮，绳的两端分别悬有质量m_1和m_2的物体($m_1 < m_2$)，如图所示.绳与轮之间无相对滑动，某时刻滑轮沿逆时针方向转动，则绳的张力

(A) 处处相等.
(B) 左边大于右边.
(C) 右边大于左边.
(D) 无法判断.



[C]

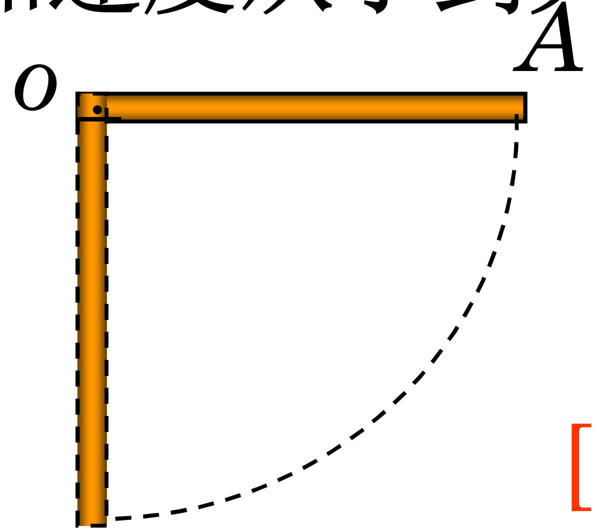
练习2.均匀细棒 *oA* 可绕通过其一端 *o* 而与棒垂直的水平固定光滑轴转动,如图所示.今使棒从水平位置由静止开始自由下落,在棒摆动到竖直位置的过程中,下列情况哪一种说法是正确的?

(A) 角速度从小到大,角加速度从大到小.

(B) 角速度从小到大,角加速度从小到大.

(C) 角速度从大到小,角加速度从大到小.

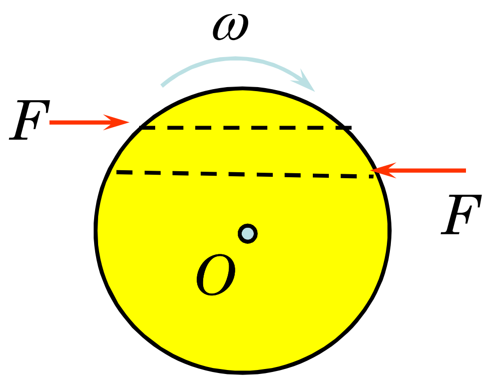
(D) 角速度从大到小,角加速度从小到大.



[A]

练习3.一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的轴 *o* 以角速度 *w* 按图示方向转动,若如图所示的情况那样,将两个大小相等方向相反但不在同一条直线的力 *F* 沿盘面同时作用到盘上,则盘的角速度 *w*

（A）必然增大;（B）必然减少;
（C）不会改变;（D）如何变化,不能确定。



[A]