第七章　二阶电路

第一部分　要点、考点归纳

§7-1　二阶电路的零输入响应

1．线性二阶电路的输入—输出方程是常系数二阶微分方程。

以 RLC 串联电路的放电电路为例，如图 7.1.1 所示。

设　$u_c(0_-)=U_0$　　$i_L(0_-)=I_0$

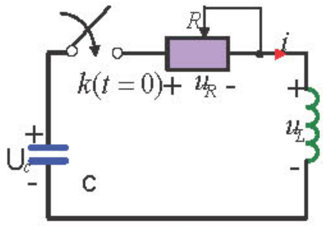

图7.1.1

依 KVL，有　$-u_c+u_R+u_c=0$

由于　$i=-C\dfrac{du_c}{dt}$　　$u_R=Ri=-RC\dfrac{du_c}{dt}$

$$u_L=L\frac{di}{dt}=-LC\frac{d^2u_c}{dt}$$

代入上式得　$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c=0 \quad (7\text{-}1\text{-}1)$$

这是以 u_c 为变量的二阶常系数线性**齐次**微分方程。

2．常系数二阶**齐次**微分方程的求解。

式(7-1-1)对应的特征方程为　$LCP^2+RCP+1=0$

特征根　$$\mathrm{P}_{1,2}=-\frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{L}}\pm\sqrt{\left(\frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{L}}\right)^2-\frac{1}{\mathrm{LC}}} \quad (7\text{-}1\text{-}2)$$

零输入响应　$$u_c=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t} \quad (7\text{-}1\text{-}3)$$

当二阶微分方程的特征根不同时，响应的形式不同。

1）　特征根为不等负实数时，其通解是非振荡（过阻尼）的衰减波，

即 $f(t)=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}$

2）　特征根为共轭复数时（$p_{1,2}=-\alpha\pm \mathrm{j}\omega_{\mathrm{d}}$），其通解是衰减振荡（欠阻尼）的正弦波，即 $f(t)=Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t+\theta)$

3）　特征根为相等负实数时，其通解介于衰减振荡与非振荡之间，称临界振荡，即

$f(t)=(A_1+A_2e^{pt})$

A_1，A_2 为两个积分常数，由初始条件确定。

即 RLC 串联电路过渡过程的性质取决于电路元件的参数

a） 当 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时为非振荡过程，其暂态分量的形式为 $f''(t) = (A_1 + A_2 e^{pt})$；

b） 当 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时为振荡过程，其暂态分量的形式为 $f''(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t + \theta)$；

c） 当 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时为临界振荡过程，其暂态分量的形式为 $f''(t) = (A_1 + A_2 e^{pt})$。

§7-2 二阶电路的零状态响应和阶跃响应

二阶电路的初始储能为零（即电容两端的电压和电感中的电流都为零），仅由外施激励引起的响应称为二阶电路的零状态响应。

1．线性二阶电路的输入—输出方程是常系数二阶微分方程。

以 GCL 并联电路为例，如图 7.2.1 所示。

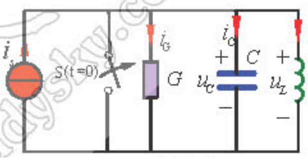

图7.2.1

设 $u_c(0_-) = 0$ $i_L(0_-) = 0$

$t = 0$ 时，开关 S 打开， 依 KVL，有

$i_C + i_G + i_L = i_S$

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL\frac{di_L}{dt} + i_L = i_S \quad (7\text{-}2\text{-}1)$$

这是以 i_L 为变量的二阶常系数线性**非齐次**微分方程。

2．常系数二阶**非齐次**微分方程的求解。

式(7-2-1)的解由特解 i'_L 和对应的齐次方程的通解 i''_L 组成。 $i_L = i'_L + i''_L$

特解 i'_L 即稳态解。齐次方程的通解 i''_L 的求解见 7.1 节。

3．二阶电路的阶跃响应

二阶电路在阶跃激励下的零状态响应称为二阶电路的阶跃响应，其求解方法与零状态响应的求解方法相同。

§ 7-3 二阶电路的冲激响应

二阶电路的初始储能为零（即电容两端的电压和电感中的电流都为零），仅由冲激函数激励下引起的响应称为二阶电路的冲激响应。

1．线性二阶电路的输入—输出方程是常系数二阶微分方程。

以 RCL 串联电路为例，如图 7.3.1 所示。

设　$u_C(0_-)=0$　　$i_L(0_-)=0$

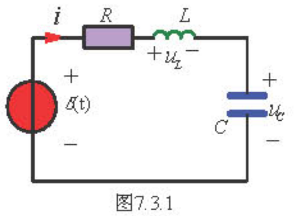

图7.3.1

依 KVL，有

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=\delta(t) \qquad (7\text{-}3\text{-}1)$$

这是以 u_C 为变量的二阶常系数线性**非齐次**微分方程。

2．常系数二阶**非齐次**微分方程的求解。

由于 $\delta(t)$ 在 $t\neq0$ 时为零，而在 $t=0$ 时电路受冲激电压激励而获得了一定能量，

在 $t>0$ 时放电，即在 $t>0_+$ 时，有 $LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$，关键在于求出与初始能量对应的初始条件：$u_C(0_+)$ 和 $i(0_+)$。通过对式(7-3-1)两边求 t 从 0_- 到 0_+ 积分，得

$$\frac{du_C}{dt}\Big|_{t=0^+}=\frac{1}{LC} \qquad \text{即} \quad i(0_+)=C\frac{du_C}{dt}\Big|_{t=0^+}=\frac{1}{L}$$

再加上电容两端的电压不会突变，$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$。

$t\geq0$　时为零输入解，其过渡过程的分析和解答与§7-1 相同。

第二部分　例题

例1：图 7-1 中所示电路，已知 $R_1=1\Omega$，$R_2=3\Omega$，$L=5H$，$C=0.05F$，电流源 $i_s=4A$，求当 $t=0$ 时，K 打开后电感中的电流 i_L。

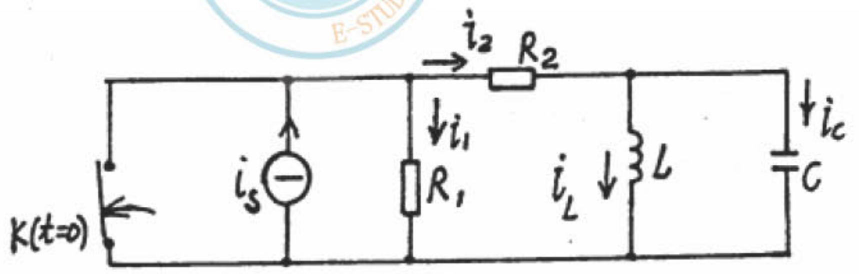

图 7-1

解：KCL：$i_1+i_2=i_s$

$i_L+i_C=i_2$

KVL：$R_2i_2+L\frac{di_L}{dt}=R_1i_1$

$L\frac{di_L}{dt}=u_C$　　　$i_C=C\frac{du_C}{dt}$

由上面方程，取 $i_L(t)$ 为变量，得微分方程

解：KCL：$i_1+i_2=i_3$

$i_L+i_C=i_2$

KVL：$R_2i_2+L\frac{di_L}{dt}=R_1i_1$

$L\frac{di_L}{dt}=u_C \qquad i_C=C\frac{du_C}{dt}$

由上面方程，取 $i_L(t)$ 为变量，得微分方程

$(R_1+R_2)LC\frac{d^2i_L}{dt^2}+L\frac{di_L}{dt}+(R_1+R_2)i_L=R_1i_S$

代入各元件数值得以 i_L 为未知变量的二阶常微分方程

特征方程为 $p^2+5p+4=0$

特征根为 $p_1=-1, \qquad p_2=-4$

电路的过渡过程是过阻尼情况，其通解为

$i_L(t)=1+A_1e^{-t}+A_2e^{-4t}$

$t=0_+$ 时 $\qquad i_L(0_+)=0$

$\frac{di_L}{dt}|_{0_+}=\frac{1}{L}u_L(0_+)=\frac{1}{L}u_C(0_+)=0$

代入通解后得 $\qquad A_1+A_2=-1$

$A_1+4A_2=0$

∴ $\qquad A_1=-\frac{4}{3} \qquad A_2=\frac{1}{3}$

最后 $\qquad i_L(t)=1-\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-4t}(A) \quad (t\geq 0)$

例 2 RLC 串联电路中，电容电压 $u_C(t)$ 和电感电流 $i_L(t)$ 取关联参考方向，电容初始储能 $W_C(0_-)=2J$，$u_C(t)=e^{-3t}[5\cos 4t+3\sin 4t]V \quad (t\geq 0)$。求 R、L 及 $u_C(0_+)$、$i_L(0_+)$。

解： 令 $t=0$，由已知表达式得 $\qquad u_C(0)=5V$

由 $$W_C(0_+)=W_C(0_-)=\frac{1}{2}Cu_C^2(0_+)$$

得 $$C=\frac{2W_C(0_+)}{u_C^2(0_+)}=\frac{2\times 2}{25}=0.16(F)$$

由已知表达式 $u_C(t)=e^{-3t}[5\cos 4t+3\sin 4t]V$ 可知，电路工作于欠阻尼，且

$$\alpha=-3, \qquad \omega_d=4$$

所以 $$p_{1,2}=-3\pm j4$$

则

$$p_1 p_2 = \omega_d^2 = \frac{1}{LC} = (-3+\mathrm{j}4)(-3 \pm \mathrm{j}4$$

$$p_1 + p_2 = -\frac{R}{L} = (-3+\mathrm{j}4)+(-3-\mathrm{j}4) = -6$$

解得

$$L = 0.25\mathrm{H}，\ R = 1.5\Omega$$

所以

$$i_L(0_+) = i_C(0_+) = C\frac{du_C}{dt}\bigg|_{t=0_+} = -0.48(A)$$

例 3 电路如图 7.2.2 所示,已知 $u_s(t)=12\mathrm{V}$，$u_C(0)=1\mathrm{V}$，$i_L(0)=2\mathrm{A}$。

a) 列写关于 u_C 的二阶微分方程。

b) 求 $u_C(t)$，并写出 u_C 的暂态分量和稳态分量。

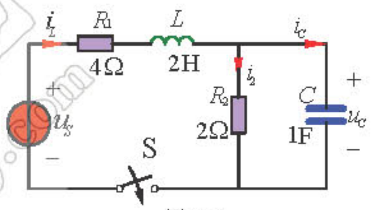

图7.2.2

解:（1） 由 KCL 得

$$i_L = i_2 + i_C \quad 或 \quad i_L = \frac{u_C}{R_2} + C\frac{du_C}{dt} \qquad (1)$$

由 KVL 得

$$i_L R_1 + L\frac{di_L}{dt} + u_C = u_S \qquad (2)$$

由（1)、(2）式得

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R_1C + \frac{L}{R_2})\frac{du_C}{dt} + (1+\frac{R_1}{R_2})u_C = u_S$$

或

$$2\frac{d^2u_C}{dt^2} + 5\frac{du_C}{dt} + 3u_C = 12 \qquad (3)$$

方程（3）的初始条件为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 1\mathrm{V} \qquad (4)$$

$$\frac{du_C}{dt}\bigg|_{t=0_+} = \frac{1}{C}i_C(0_+) = \frac{1}{C}\left[i_L(0_+) - \frac{1}{R_2}u_C(0_+)\right] = 1.5\mathrm{V/s} \qquad (5)$$

（2）方程（3）对应的齐次方程的通解计算如下:

特征方程及特征根

$$2p^2+5p+3=0,\qquad p_1=-1,\ p_2=-1.5$$

齐次方程通解

$$u''_C=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}=A_1e^{-t}+A_2e^{-1.5t}$$

非齐次方程特解为一常量，及

$$u'_C=\frac{12}{3}=4V$$

方程（3）的通解为

$$u_C(t)=4+A_1e^{-t}+A_2e^{-1.5t}$$

由初始条件（4)、(5）式求待定系数，得

$$A_1=-6V\qquad A_2=3V$$

故 $$u_C(t)=4-6e^{-t}+3e^{-1.5t}\,(V)\qquad t\geq 0$$

u_C的暂态分量为 $$u''_C=-6e^{-t}++3e^{-1.5t}$$

u_C的稳态分量为 $$u'_C=4V$$