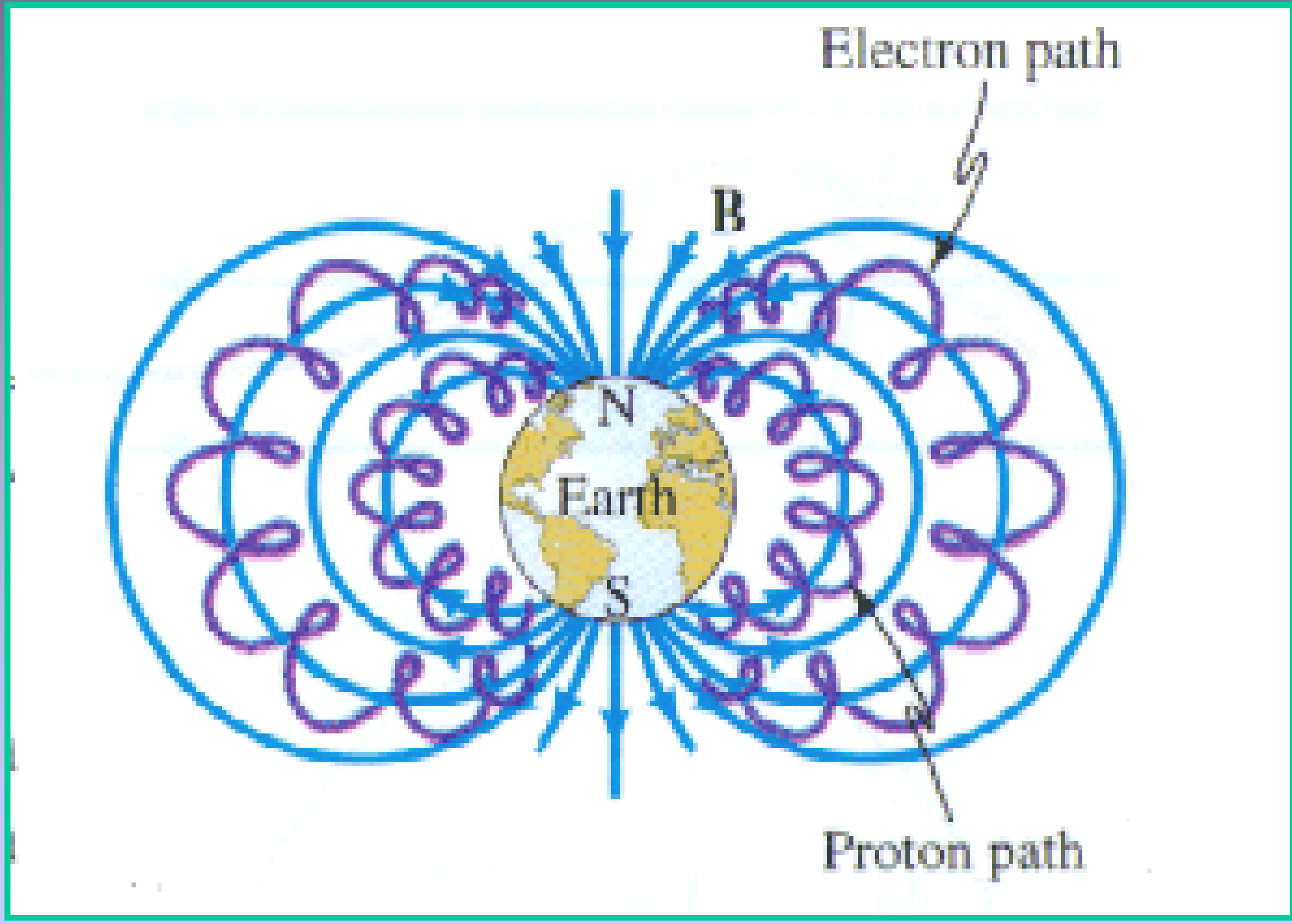
同学们好！

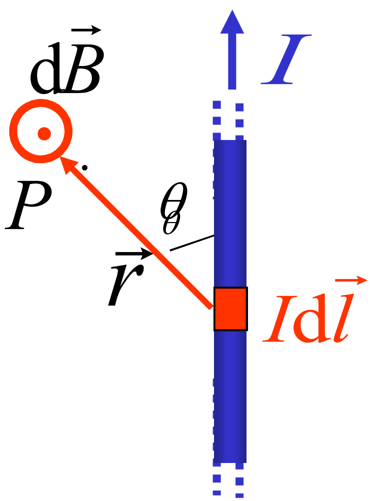


复习：§10.2 磁感应强度毕 — 萨定律及其应用

一、低速运动的点电荷产生的磁场 $\vec{B}=\dfrac{\mu_0 q\vec{u}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$

二、毕奥 — 萨伐尔定律：电流元产生磁场的规律,

与点电荷电场公式作用地位等价



$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{4\pi r^3}}$$

三、典型电流磁场公式：

1. 无限长直电流：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

2. 圆电流轴线上磁场：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2 \vec{i}}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \vec{P}_m}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

圆电流圆心处磁场：

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

电流的磁矩：

$$\vec{P}_m = I \cdot S\vec{n}$$

§ 10.3 磁场的高斯定理和安培环路定理

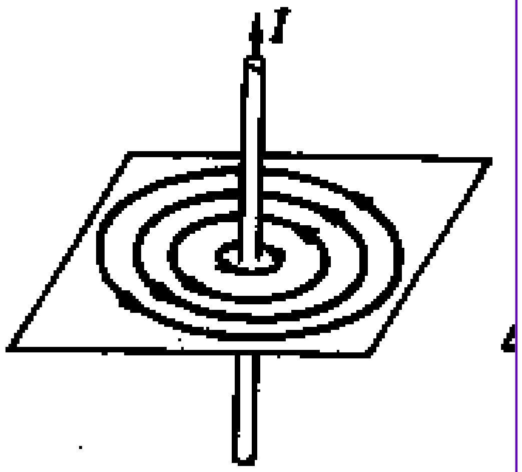
一. 稳恒磁场的高斯定理

描述空间矢量场一般方法：
- 用场线描述场的分布
- 用高斯定理，环路定理揭示场的基本性质

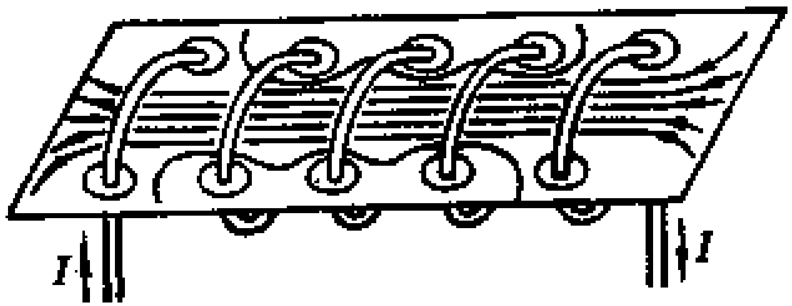
1.磁感应线
- 切向：该点 $\vec{B}$ 方向
- 疏密：正比于该点 $\vec{B}$ 的大小

$$B = \mathrm{d}\phi_m / \mathrm{d}s_{\perp}$$

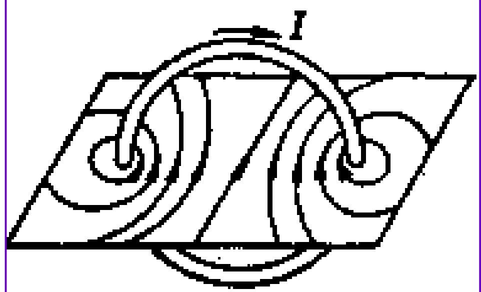
特点：
- 闭合，或两端伸向无穷远；
- 与载流回路互相套联；
- 互不相交。



(a) 直线电流



(c) 螺线管电流



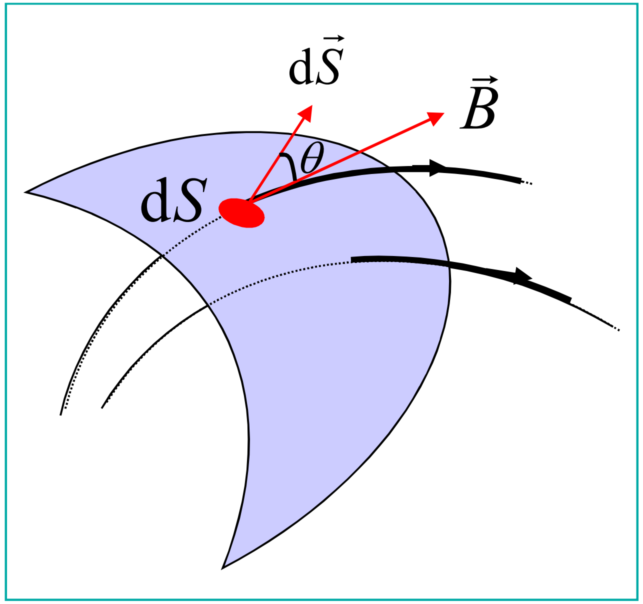
(b) 圆电流

特点

- 闭合，　或两端伸向无穷远；
- 与载流回路互相套联；
- 互不相交。

2. 磁通量

通过磁场中某给定面的磁感应线的总条数



微元分析法（以平代曲，以不变代变）

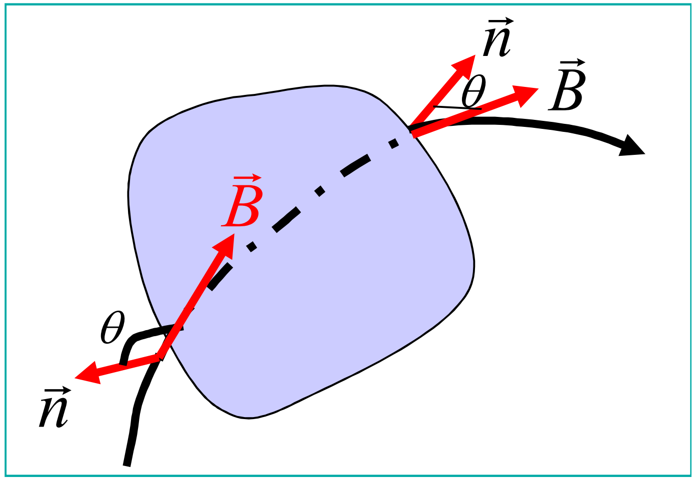
$$\mathrm{d}\phi_m = B\mathrm{d}S_\perp = B\cos\theta \mathrm{d}S = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

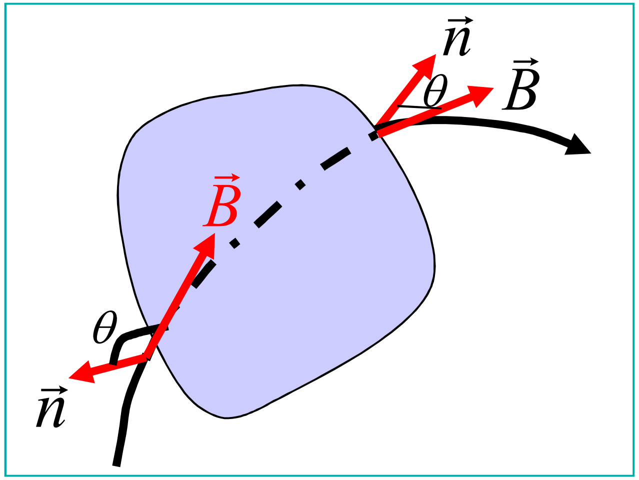
$$\boxed{\phi_m = \int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

对封闭曲面，规定外法向为正

进入的磁感应线 $\phi_m < 0$

穿出的磁感应线 $\phi_m > 0$





$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

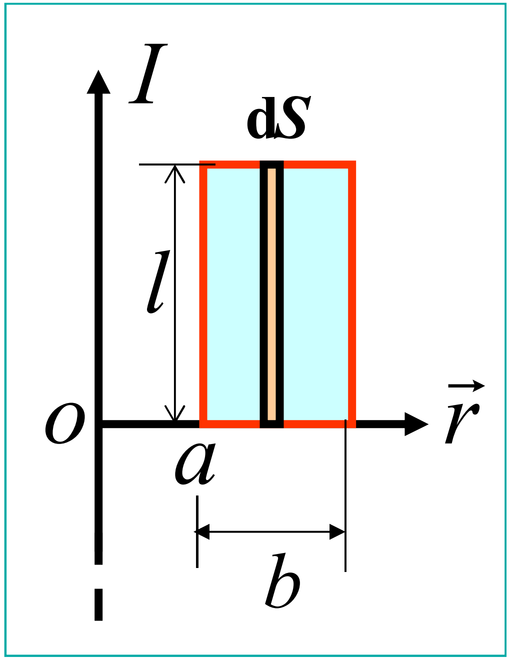
3. 磁场的高斯定理

穿过磁场中任意封闭曲面的磁通量为零：$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$

磁场是无源场 $\begin{cases} \text{磁感应线闭合成环，无头无尾} \\ \text{不存在磁单极。} \end{cases}$

注： 磁场无源，是指不存在磁单极，并非说它是“无源之水”，它的源是运动的电荷。

练习



已知：I, a, b, l

求：φ_m

解：$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ 方向：$\otimes$

$$\mathrm{d}S = l\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}\varphi_m = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\varphi_m = \int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I l \mathrm{d}r}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$$

比较	高斯定理		环路定理
静电场	$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$	有源场	$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$ 保守场
稳恒磁场	$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$	无源场	$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=?$?

二. 稳恒磁场的安培环路定理 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = ?$

1. 导出： 可由毕 — 萨定律出发严格推证

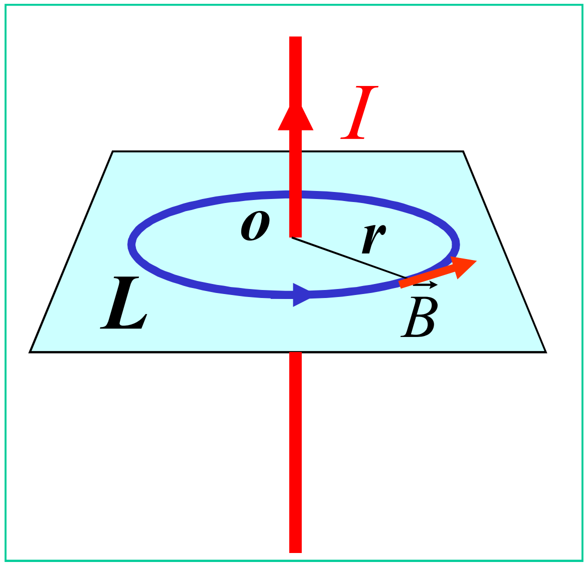
采用： 以无限长直电流的磁场为例验证

推广到任意稳恒电流磁场（从特殊到一般）

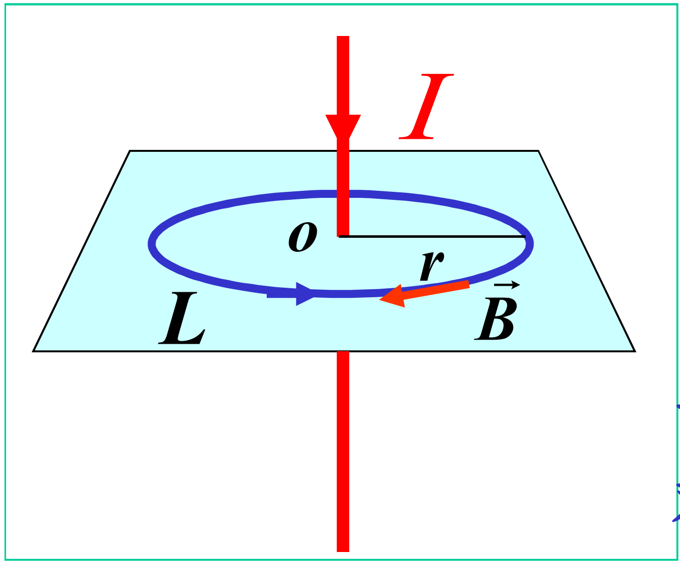
1） 选在垂直于长直载流导线的平面内，以导线与平面交点o为圆心，半径为 r 的圆周路径 L，其指向与电流成右旋关系。

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot \mathrm{d}l\cdot\cos 0^\circ$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\int_0^{2\pi r}\mathrm{d}l = \mu_0 I$$



若电流反向：



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^{2\pi r} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}l\cos\pi$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\int_0^{2\pi r}\mathrm{d}l = -\mu_0 I$$

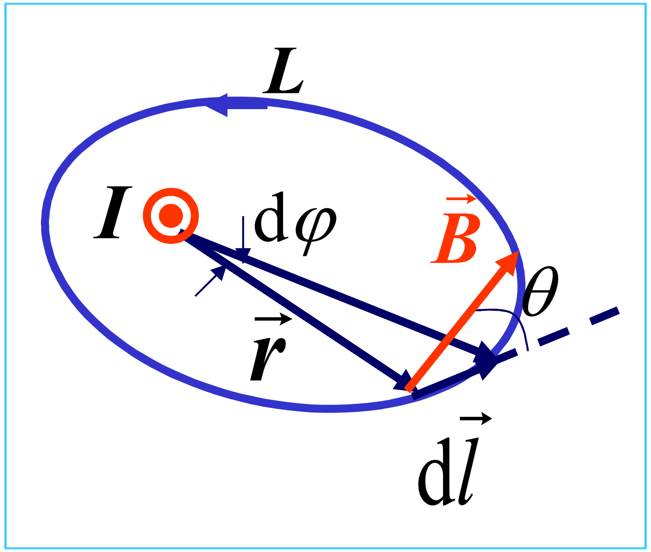
与环路绕行方向成右旋关系的电流对环流的贡献为正，反之为负。

2）在垂直于导线平面内围绕电流的任意闭合路径

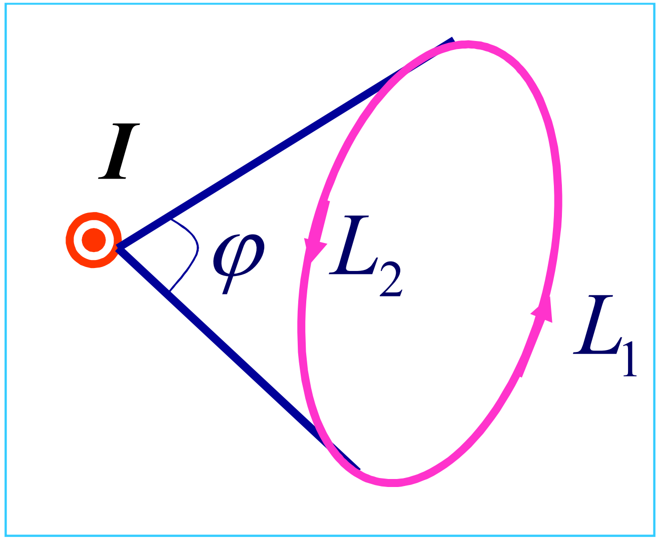
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\underline{\cos\theta \mathrm{d}l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\underline{r\mathrm{d}\varphi}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \mu_0 I$$

若电流反向，则为 $-\mu_0 I$



3）闭合路径不包围电流



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_{L_1} \mathrm{d}\varphi + \int_{L_2} \mathrm{d}\varphi\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\varphi + (-\varphi)\right] = 0$$

穿过 L 的电流：对 $\vec{B}$ 和 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 均有贡献

不穿过 L 的电流：对 L 上各点 $\vec{B}$ 有贡献；

对 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 无贡献

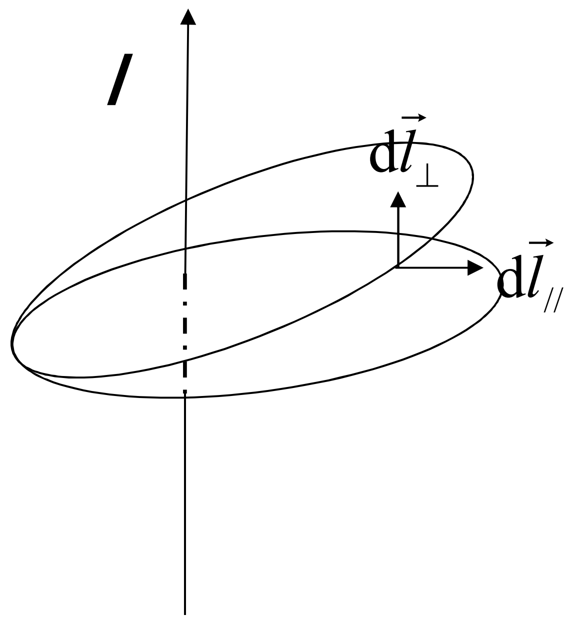
4）空间存在多个长直电流时，由磁场叠加原理

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \cdots + \vec{B}_n)\cdot d\vec{l}$$

$$= \oint_L \vec{B}_1\cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{B}_2\cdot d\vec{l} + \cdots + \oint_L \vec{B}_n\cdot d\vec{l}$$

$$= \mu_0 \sum_{(L内)} I_i$$

注：若积分路径平面不与电流垂直时以上结论仍然成立。



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{B}\cdot(d\vec{l}_{//} + d\vec{l}_\perp)$$

$$= \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}_{//} + 0$$

$$= \begin{cases} \mu_0 I & （I\text{ 穿过}L） \\ 0 & （I\text{不穿过}L） \end{cases}$$

2. 推广：稳恒磁场的安培环路定理

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(\text{穿过}L)} I_i}$$

稳恒磁场中，磁感应强度$\vec{B}$沿任意闭合路径 L 的线积分（环流）等于穿过闭合路径的电流的代数和与真空磁导率的乘积。

稳恒磁场的安培环路定理：

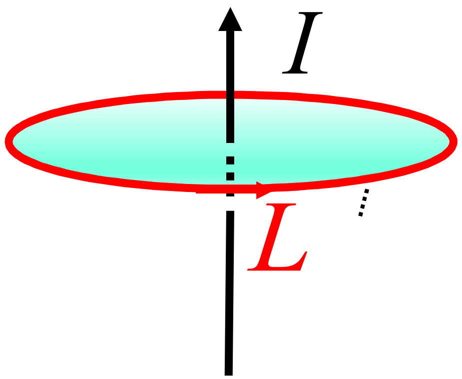
$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(穿过L)} I_i}$$

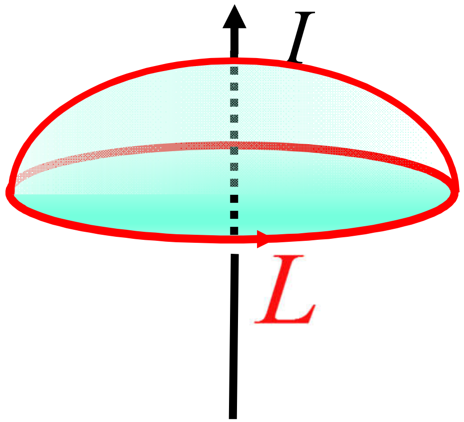
成立条件：稳恒电流的磁场

L： 场中任一闭合曲线 — 安培环路（规定绕向）

$\vec{B}$： 环路上各点总磁感应强度（包含空间穿过 L，不穿过 L 的所有电流的贡献）

$\sum\limits_{(穿过L)} I_i$ ： 穿过以 L 为边界的任意曲面的电流的代数和。

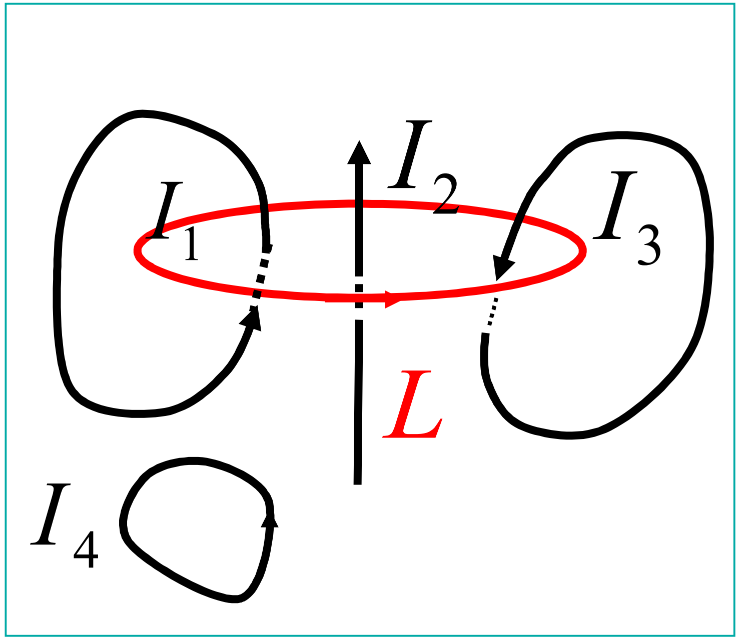


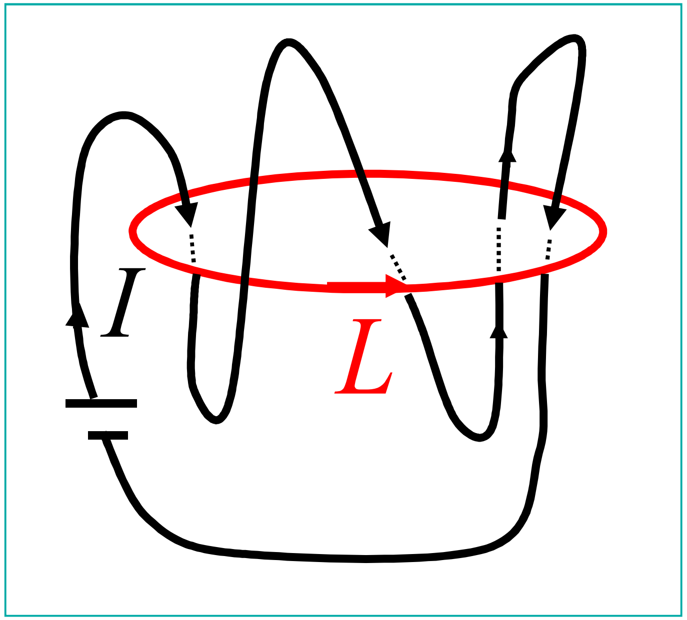


规定： 与 L 绕向成右旋关系 $I_i > 0$

与 L 绕向成左旋关系 $I_i < 0$

例如：





$$\sum_{(\text{穿过}L)} I_i = I_1 + I_2 - I_3$$

$$\sum_{(\text{穿过}L)} I_i = I - 3I = -2I$$

注意：

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(\text{穿过}L)} I_i}$$

$\vec{B}$：与空间所有电流有关

$\vec{B}$ 的环流：只与穿过环路的电流代数和有关

穿过 L 的电流：对 $\vec{B}$ 和 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 均有贡献

不穿过 L 的电流：对 L 上各点 $\vec{B}$ 有贡献；

对 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 无贡献

安培环路定理揭示磁场是非保守场（涡旋场）

比较	高斯定理	环路定理
静电场	$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$ 有源场	$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ 保守场、有势场
稳恒磁场	$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ 无源场	$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(穿过L)} I_i$ 非保守场、无势场（涡旋场）

三. 安培环路定理的应用

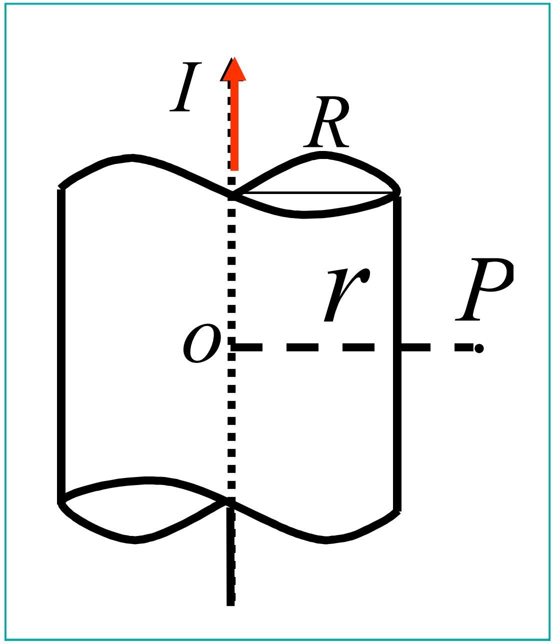
——— 求解具有某些对称性的磁场分布

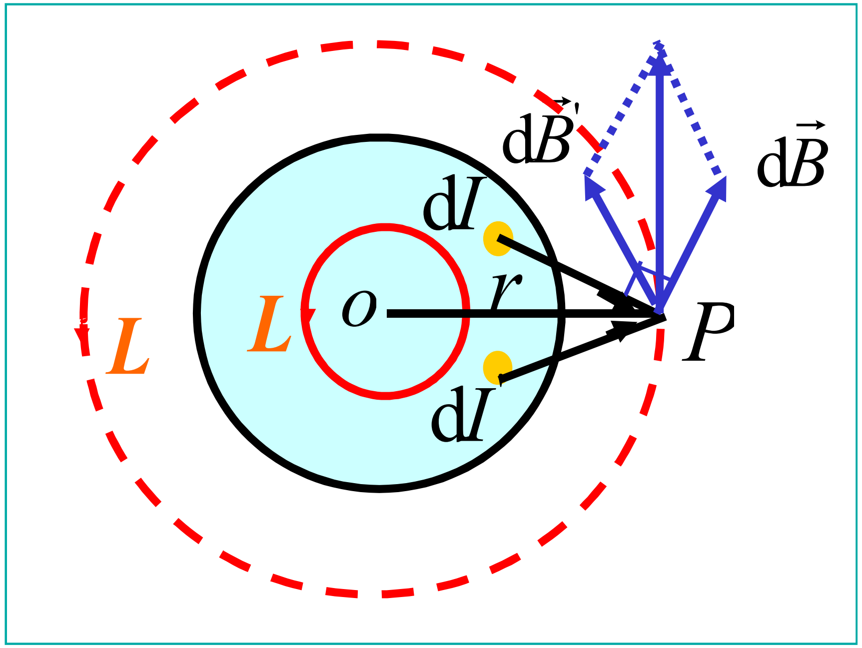
$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(\text{穿过}L)} I_i}$$

适用条件：稳恒电流的磁场

求解条件：电流分布(磁场分布)具有某些对称性，以便可以找到恰当的安培环路L，使 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$能积出，从而方便地求解 $\vec{B}$。

[例一] 无限长均匀载流圆柱体 (I, R) 内外磁场.





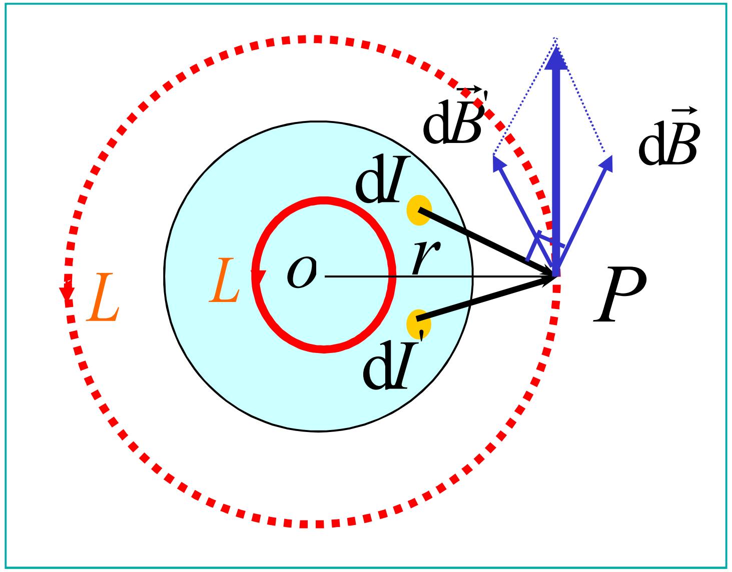
对称性分析：

在$\perp I$平面内，作以o为中心、半径r 的圆环L，

L上各点等价：$\vec{B}$ 大小相等，方向沿切向 。

以L为安培环路，逆时针绕向为正：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_{内}$$



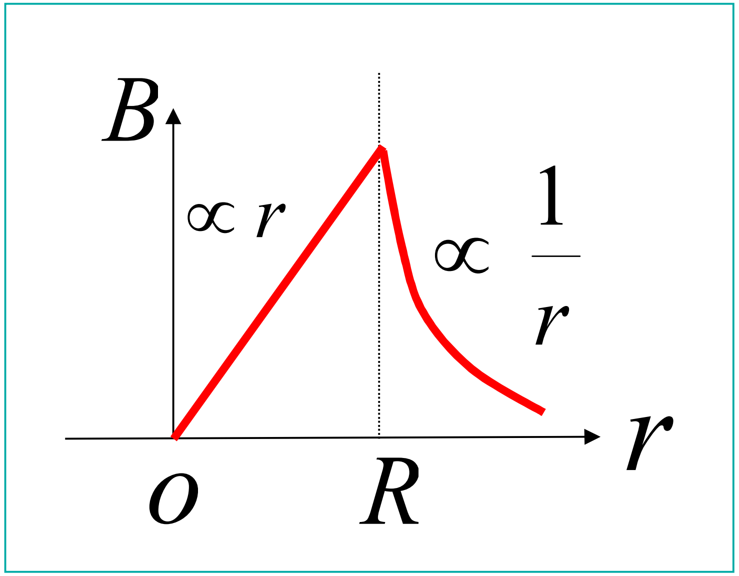
$r \geq R:$ $\sum I_{内} = I$

$$B_{外} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \propto \frac{1}{r}$$

$r \leq R:$

$$\sum I_{内} = \frac{I}{\pi R^2}\cdot \pi r^2 = \frac{Ir^2}{R^2}$$

$$B_{内} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \propto r$$

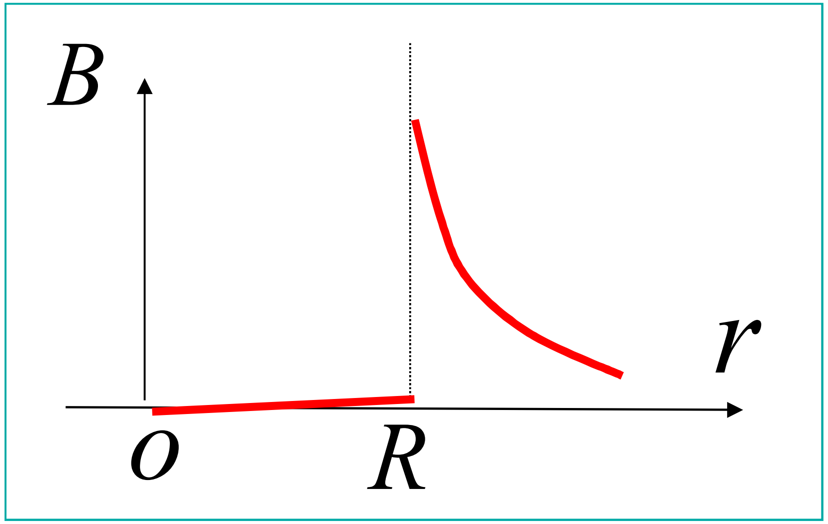


$\vec{B}$ 方向与 I 指向满足右旋关系

思考： 无限长均匀载流直圆筒 $B \sim r$ 曲线？

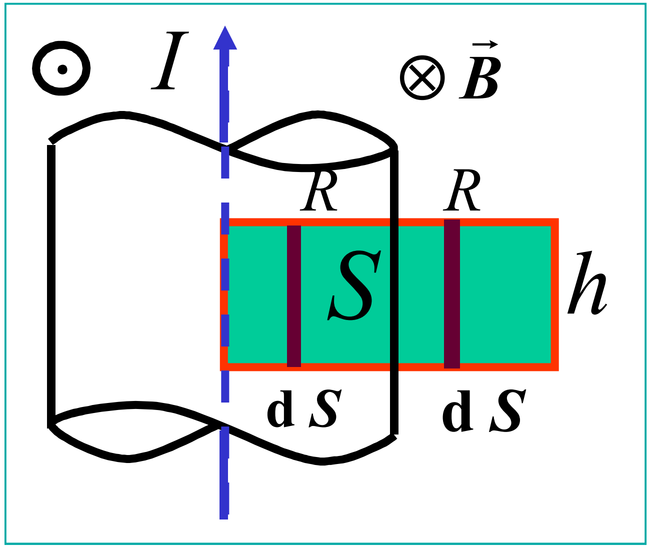
$$B_{内} = 0 \qquad B_{外} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$\vec{B}_{外}$方向与 I 指向满足右旋关系



练习：

无限长均匀载流圆柱体（ R ，I）如图，求通过 S（ $2R$, h ）的磁通量. 解：磁场分布



$$B_{内} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \qquad B_{外} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

微元分析法：取 $\mathrm{d}S = h\mathrm{d}r$

且 $\mathrm{d}\vec{S}$ 与 $\vec{B}$ 方向相同

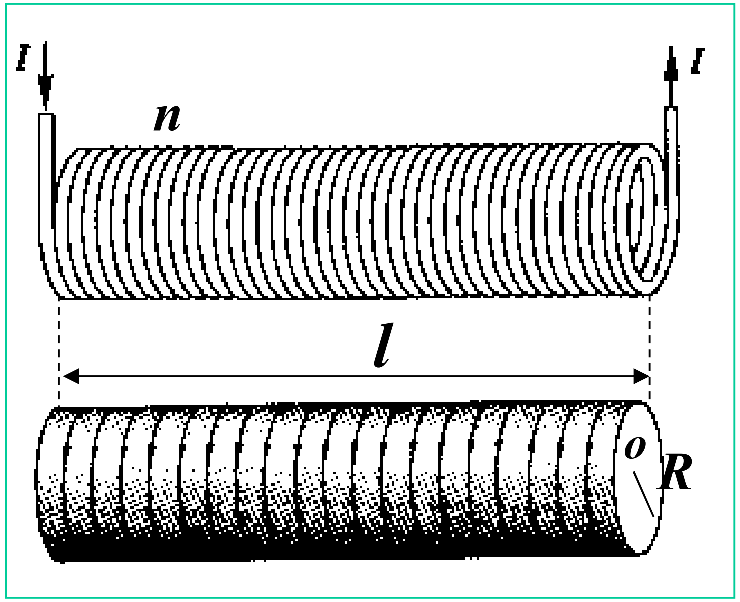
$$\phi_m = \int_s \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_{内}} B_{内}\mathrm{d}S + \int_{S_{外}} B_{外}\,\mathrm{d}S$$

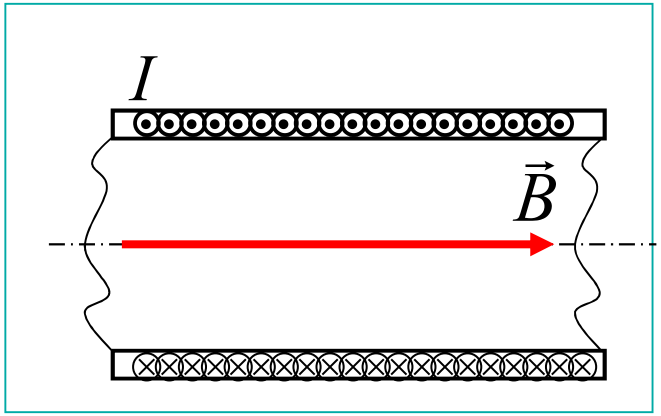
$$= \int_0^R \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} h\mathrm{d}r + \int_R^{2R} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I h}{4\pi}(1 + 2\ln 2)$$

[例二] 无限长直载流螺线管内磁场（I. n. 线密绕）

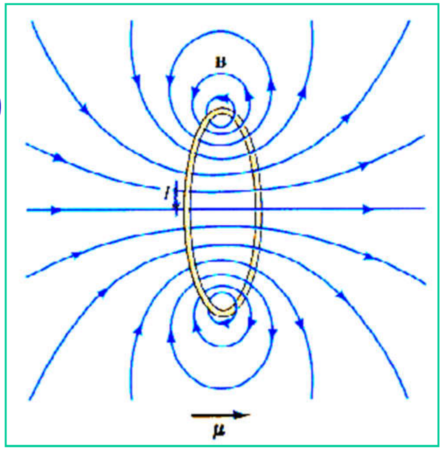
单位长度上的匝数

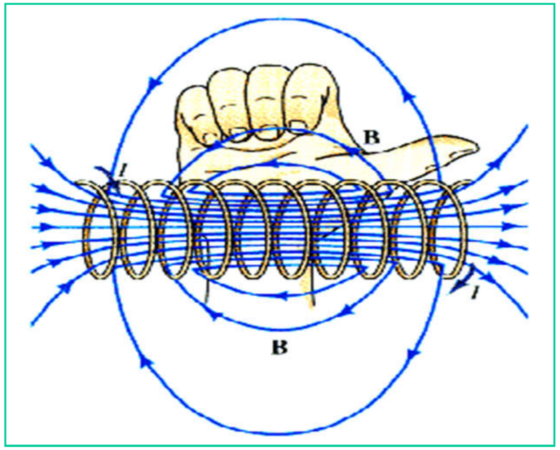
螺距为零





解：1）



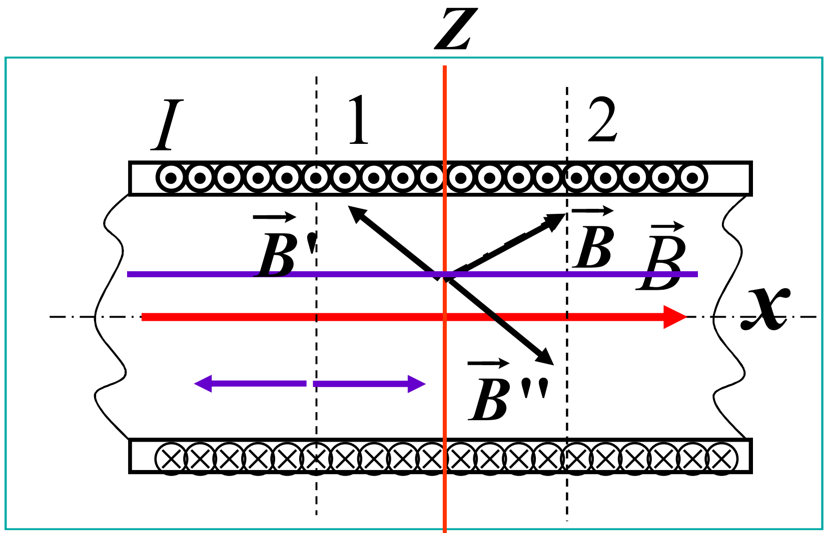


磁感应线不泄露

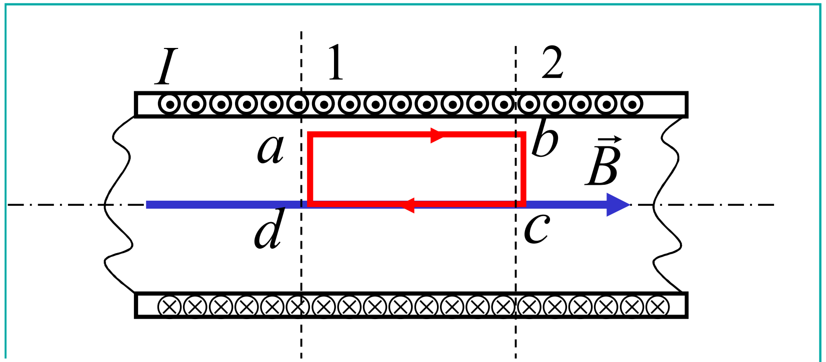
$$\vec{B}_{外} = 0$$

解：2）反证法证明 $\overrightarrow{B_{内}}$ 始终沿x轴方向

$$\mathrm{B}_y=\mathrm{B}_z=0$$



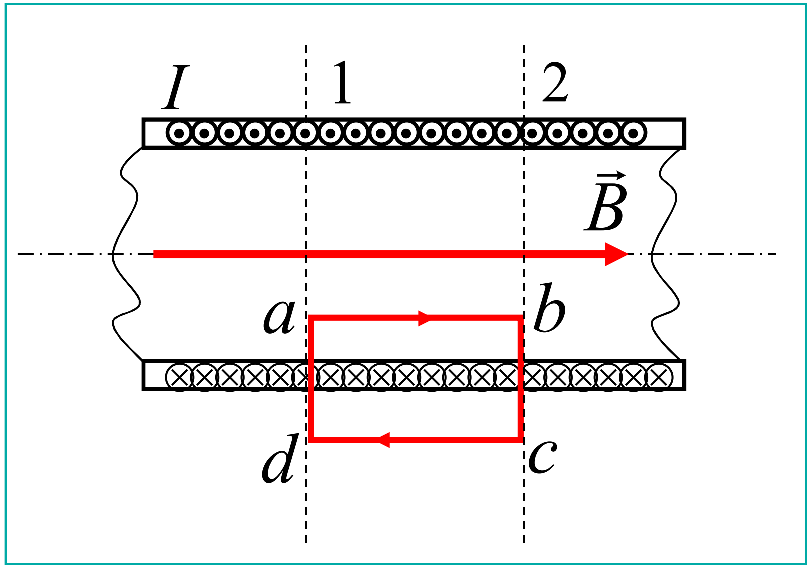
3）做过轴线的回路可证明 $\overrightarrow{B_{内}}$ 处处相等



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_a^b \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_b^c \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_c^d \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_d^a \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

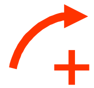
$$=B_{ab}\overline{ab}+0+B_{cd}(-\overline{cd})+0=\mu_0\sum I_{内}=0$$

$$\therefore B_{ab}=B_{cd}$$



作矩形安培环路如图，

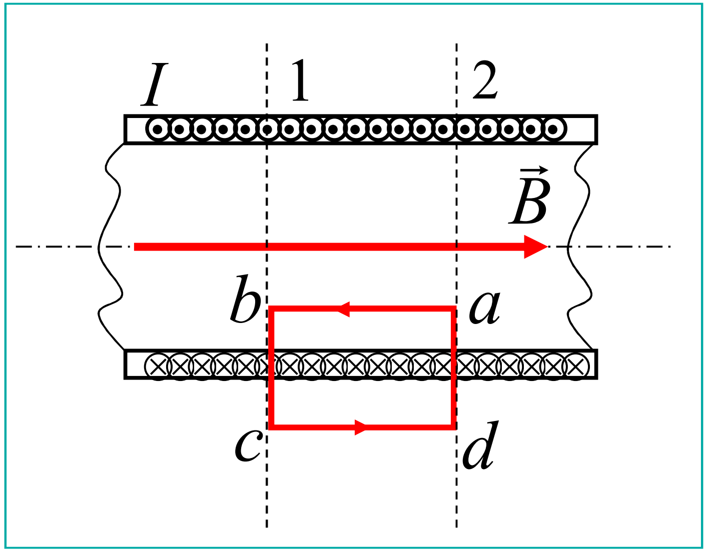
规定：



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_b^c \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_c^d \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_d^a \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= B\cos 0\overline{ab} + 0 + 0 + 0 = B\overline{ab}$$

$$\sum I_{内} = nI\overline{ab}$$



由安培环路定律：

$$B\,\overline{ab} = \mu_0 n I\,\overline{ab}$$

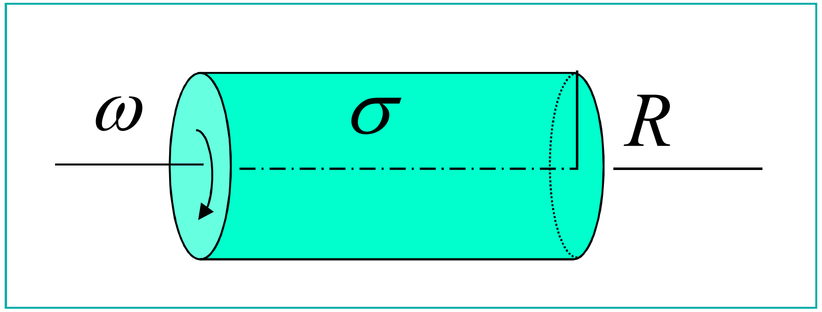
$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

无限长直螺线管内为均匀磁场

练习： 半径R无限长均匀带电圆筒绕轴线匀速旋转

已知： $\sigma \quad . R \quad . \omega$

求： 内部 $\vec{B} = ?$



解：

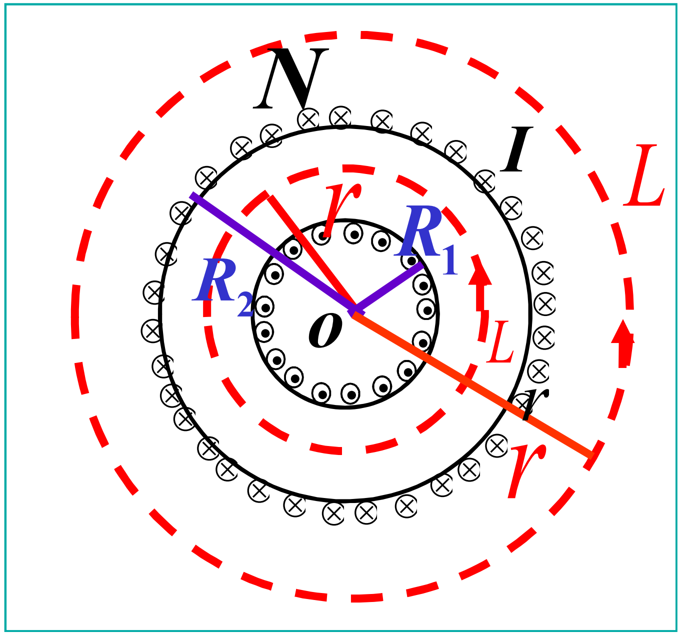
等效于长直螺线管 $B = \mu_0 nI$

单位长度上电流 $nI = ?$

$$nI = 2\pi R \cdot \sigma \cdot \frac{\omega}{2\pi}$$

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 R \sigma \omega$$

[例三] 载流螺绕环的磁场分布（R_1．R_2．N．I ）



对称性分析：

$\vec{B}$ 大小相等的点的集合：同心圆环

环上各点 $\vec{B}$ 方向： 切向

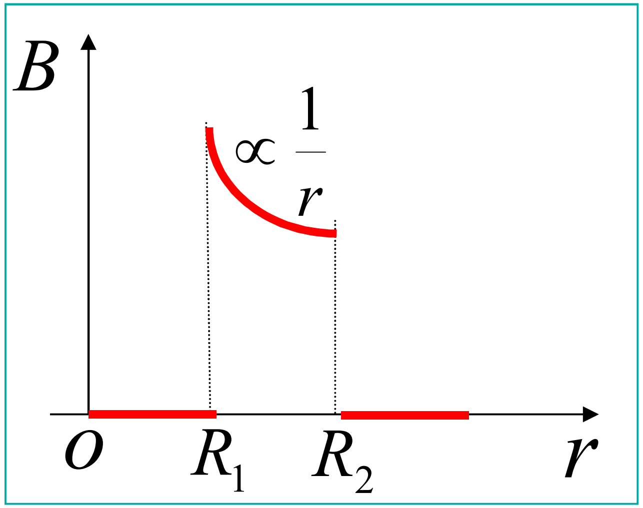
以中心 o，半径 r 的圆环为安培环路

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_{内}$$

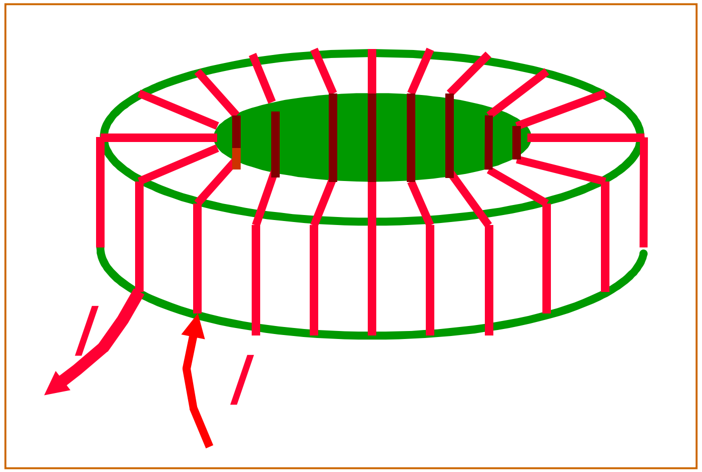
$r<R_1$ ， $r>R_2$： $\sum I_{内} = 0 \quad B_{外} = 0$

$R_1<r<R_2$： $\sum I_{内} = NI$

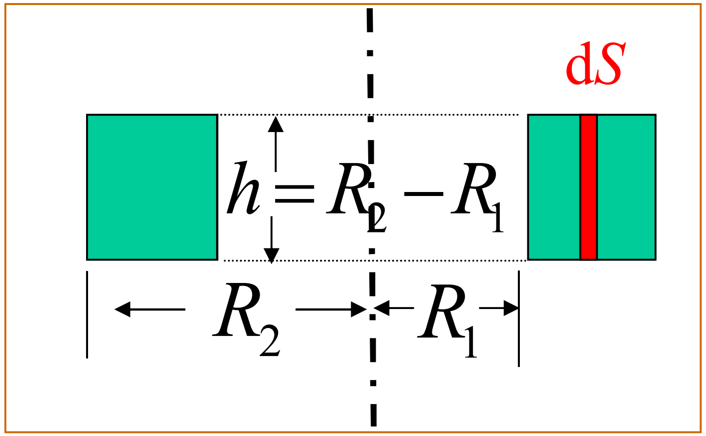
$$\boxed{B_{内} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}}$$



练习：若螺绕环截面为正方形，求通过螺绕环截面的磁通量。



解：$\mathrm{d}S = h\mathrm{d}r = (R_2 - R_1)\mathrm{d}r$



$$\mathrm{d}\phi_m = B_{内}\mathrm{d}S$$

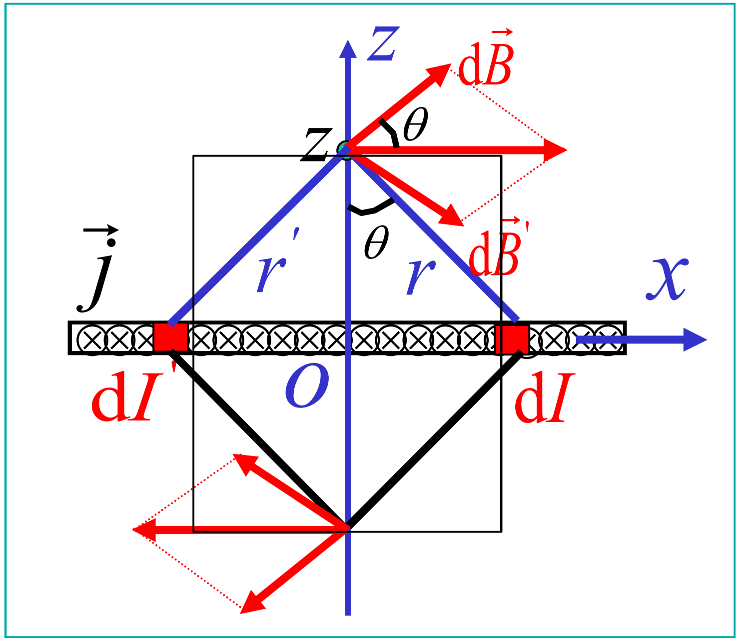
$$= \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}(R_2 - R_1)\mathrm{d}r$$

$$\phi_m = \int \mathrm{d}\phi_m = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}(R_2 - R_1)\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

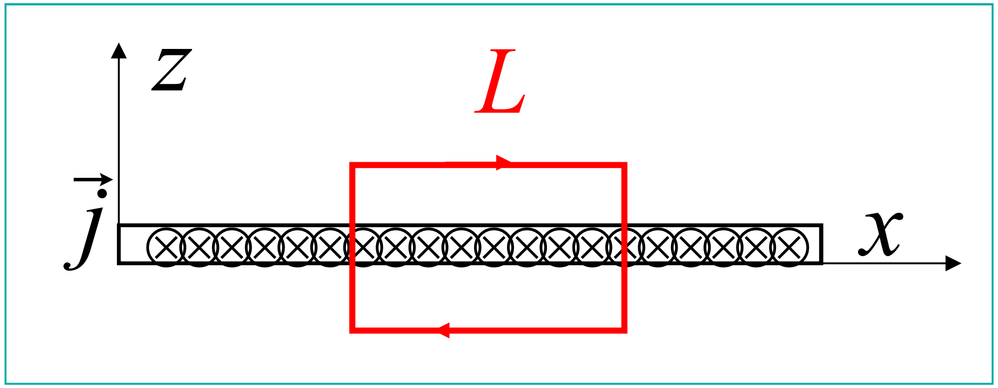
$$= \frac{\mu_0 NI}{2\pi}(R_2 - R_1)\ln\frac{R_2}{R_1}$$

练习： 无限大导体平板，电流沿y方向，线密度j(x方向、单位长上的电流)。求：$\vec{B}$ 分布

1. 对称性分析



2. 用安培环路定理



在对称性分析的基础上

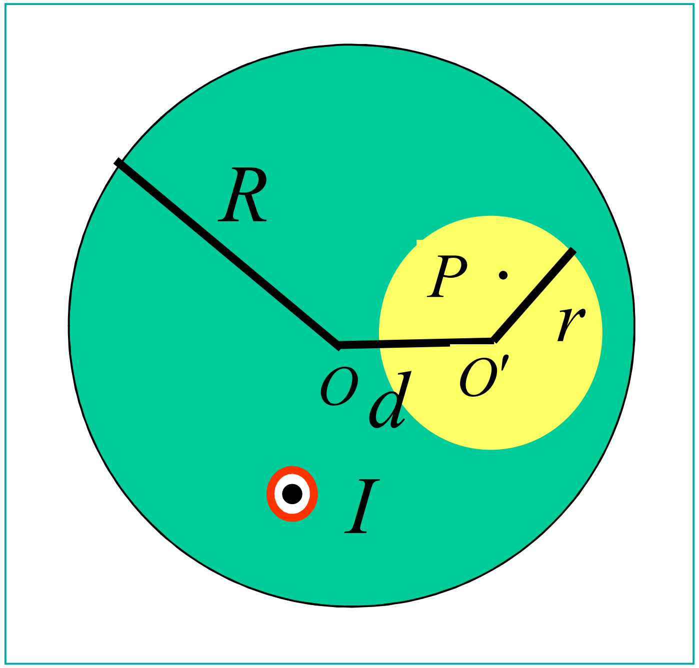
选如图安培环路 ↱⊕

由：$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2lB = \mu_0 jl$　　得：$B = \dfrac{\mu_0 j}{2}$

例五：P. 281　10-11

半径R的长圆柱形导体内与轴线平行地挖去一个半径为r的圆柱形空腔:$oo' = d$，电流I在截面内均匀分布，方向平行于轴线，求：

1. 圆柱轴线上磁感应强度 B_O
2. 空心部分中任一点的磁感应强度B

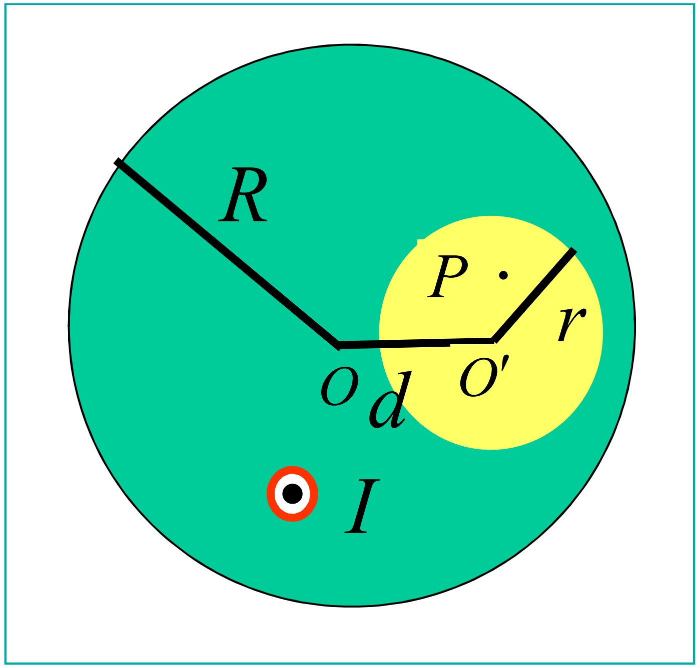


解：

用补偿法 .

即在空心部分中补上与实体具有相同的电流密度的电流$\odot$和$\otimes$这等价于原来的空心部分。

$\odot$ 部分电流与原柱体部分的电流I构成实心圆柱电流I_1，方向：$\odot$



原电流分布等效于：

$$\begin{cases} \text{实心圆柱电流} & I_1 \odot - \vec{B}_1 \\ \text{空腔部分反向电流} & I_2 \otimes - \vec{B}_2 \end{cases}$$

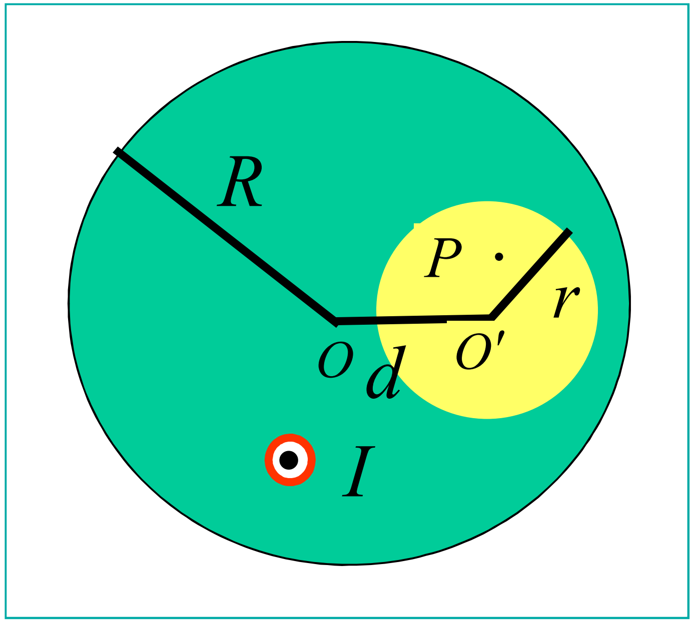
原磁场为： $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

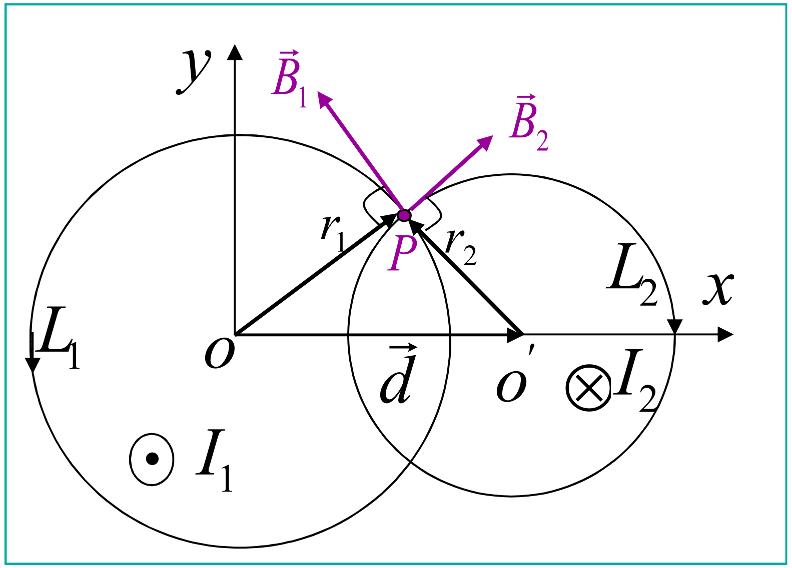
电流密度 $j = \dfrac{I}{\pi R^2 - \pi r^2}$ 　　电流 $\begin{cases} I_1 = j\pi R^2 \\ I_2 = j\pi r^2 \end{cases}$

1） 由安培环路定理：

$$\left.\begin{array}{l} B_{O1} = 0 \\ B_{O2} = \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \end{array}\right\} B_o = B_{o1} + B_{o2} = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi d(R^2 - r^2)}$$

2) 对空腔内任一点 P 设 $\overline{OP} = r_1$ ，$\overline{O'P} = r_2$

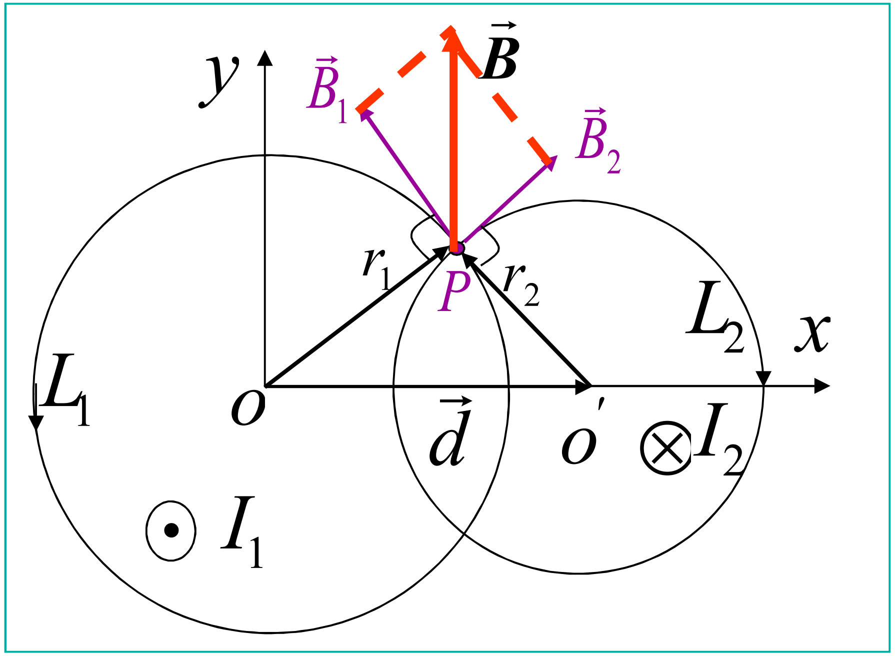




由安培环路定理： $\oint_{L_1} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = B_1 2\pi r_1 = \mu_0 j \pi r_1^2$

得： $$B_1 = \frac{\mu_0 r_1 j}{2}$$

同理可得： $$B_2 = \frac{\mu_0 r_2 j}{2}$$



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 r_1 j}{2}\vec{k}\times\frac{\vec{r}_1}{r_1}$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 r_2 j}{2}\vec{k}\times\frac{\vec{r}_2}{r_2}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 j}{2}\vec{k}\times\vec{r}_1 - \frac{\mu_0 j}{2}\vec{k}\times\vec{r}_2$$

$$= \frac{\mu_0 j}{2}\vec{k}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 j}{2}\vec{k}\times\vec{d}$$

空腔内为垂直于$\vec{d}$的均匀磁场： $B = \dfrac{\mu_0 I d}{2\pi(R^2-r^2)}$

小结：形成均匀磁场的方法

长直载流螺线管

无限大载流平面上、下

圆柱载流导体内平行于轴线的空腔……

1. 总结出用安培环路定理求解磁场分布的思路

- 对称性分析
- 选环路L并规定绕向
- 由 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{内}$ 求 $\vec{B}$。

小结： 2. 典型电流磁场结果

- 运动点电荷 $\vec{B}=\dfrac{\mu_0 q\vec{u}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$
- 无限长直电流 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$
- 圆电流轴线上 $\vec{B}=\dfrac{\mu_0 IR^2\vec{i}}{2(R^2+x^2)^{3/2}}=\dfrac{\mu_0\vec{P}_m}{2\pi(R^2+x^2)^{3/2}}$

  圆心处： $B_0=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

- 长直载流螺线管 $B=\mu_0 nI$
- 螺绕环 $B_{内}=\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$