

西南交通大学 2017—2018 学年第(2)学期半期测试题

课程代码 1272005 课程名称 《高等数学》BII 考试时间 90 分钟

一、选择题（每小题 5 分，共 6 个小题，共 30 分）

1. 曲面 $\frac{x^2}{4} - y^2 - z^2 = 3$ 是 【 】

- (A) xoy 面上的双曲线绕 x 轴旋转一周所得;
 (B) xoz 面上的双曲线绕 z 轴旋转一周所得;
 (C) $yozy$ 面上的双曲线绕 y 轴旋转一周所得;
 (D) xoz 面上的双曲线绕 z 轴旋转一周所得.

2. 设有直线 $l_1: x-1 = \frac{y-5}{-2} = z+8$ 与 $l_2: \begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$, 则 l_1 与 l_2 的夹角为 【 】

- (A) $\frac{\pi}{6}$; (B) $\frac{\pi}{4}$; (C) $\frac{\pi}{3}$; (D) $\frac{\pi}{2}$.

3. 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处 【 】

- (A) 可微分; (B) 不连续, 偏导数存在;
 (C) 连续, 偏导数不存在; (D) 不连续, 偏导数不存在.

4. 设 $z = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中函数 f 可微, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ 【 】

- (A) $-2z - y^2 f'\left(\frac{y}{x}\right)$; (B) $2z$; (C) $-y^2 f'\left(\frac{y}{x}\right)$; (D) $y^2 f'\left(\frac{y}{x}\right)$.

5. 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = xdx + ydy$, 则点 $(0, 0)$ 【 】

- (A) 不是 $f(x, y)$ 的连续点; (B) 不是 $f(x, y)$ 的极值点;
 (C) 是 $f(x, y)$ 的极小值点; (D) 是 $f(x, y)$ 的极大值点.

6. 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho d\rho$ 可以写为 【 】

- (A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$; (B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$;

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$;

(D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy$.

二、填空题（每小题 6 分，共 5 个小题，共 30 分）

7. 过直线 $x = y = 2z$ 且平行于直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}$ 的平面方程为_____.

8. 若函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $e^z - xyz = e$ 确定，则 $dz|_{(1,0)} =$ _____.

9. 曲面 $x^2 + y^2 + z = 4$ 在点 $P(1, 1, 2)$ 处的法线方程是_____.

10. 函数 $u = xy^2z$ 在点 $A(1, -1, 2)$ 处沿增加最快方向的方向导数是_____.

11. 设平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ ，则二重积分 $\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy =$ _____.

三、解答题（每小题 10 分，共 4 个小题，共 40 分，要求有必要的解题步骤）

12. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线方程和法平面方程.

13. 已知直角三角形的斜边长为 l ，则其周长不可能超过多少？

14. 计算二重积分 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$ ，其中 D 是由直线 $y = x$ 及抛物线 $x = y^2$ 所围成的区域.

15. 设区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ，计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$.

西南交通大学 2017—2018 学年第(2)学期半期测试题解答

课程代码 1272005 课程名称 《高等数学》BII 考试时间 90 分钟

一、选择题（每小题 5 分，共 6 个小题，共 30 分）

1. 曲面 $\frac{x^2}{4} - y^2 - z^2 = 3$ 是【 A 】

(A) xoy 面上的双曲线绕 x 轴旋转一周所得；

(B) xoz 面上的双曲线绕 z 轴旋转一周所得；

(C) $yozy$ 面上的双曲线绕 y 轴旋转一周所得；

(D) xoz 面上的双曲线绕 z 轴旋转一周所得.

解：因为曲面方程 $\frac{x^2}{4} - y^2 - z^2 = 3$ 即为 $\frac{x^2}{4} - (y^2 + z^2) = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - (\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 = 3$,

所以曲面 $\frac{x^2}{4} - y^2 - z^2 = 3$ 可以看作是由 xoy 面上的双曲线 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - y^2 = 3 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所得，或

者是由 xoz 面上的双曲线 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - z^2 = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所得；从而应选 (A) .

2. 设有直线 $l_1: x-1 = \frac{y-5}{-2} = z+8$ 与 $l_2: \begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$ ，则 l_1 与 l_2 的夹角为【 C 】

(A) $\frac{\pi}{6}$; (B) $\frac{\pi}{4}$; (C) $\frac{\pi}{3}$; (D) $\frac{\pi}{2}$.

解：因为直线 $l_1: x-1 = \frac{y-5}{-2} = z+8$ 的一个方向向量为 $\overrightarrow{s_1} = (1, -2, 1)$,

直线 $l_2: \begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$ 的一个方向向量为 $\overrightarrow{s_2} = (1, -1, 0) \times (0, 2, 1) = (-1, -1, 2)$,

则直线 l_1 与 l_2 的夹角 $\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 为：

$$\cos \theta = \left| \cos(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}) \right| = \frac{|\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}|}{|\overrightarrow{s_1}| \cdot |\overrightarrow{s_2}|} = \frac{|-1+2+2|}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{1+1+4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{ 故应选 (C) .}$$

3. 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处【 B 】

- (A) 可微分; (B) 不连续, 偏导数存在;
(C) 连续, 偏导数不存在; (D) 不连续, 偏导数不存在.

解: (1) 先判断 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性:

$$\text{因为 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} \xrightarrow{\text{换元: } \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}} \lim_{\rho \rightarrow 0+0} \frac{\rho \cos \theta \cdot \rho \sin \theta}{\rho^2} = \frac{1}{2} \sin(2\theta) \text{ 随 } \theta \text{ 的取值不同}$$

而不同, 故极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在,

根据函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的连续的定义 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 得函数 $f(x, y)$ 在点

$(0, 0)$ 处不连续. 故排除选项 (A) 与 (C).

(2) 再判断 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的偏导数的存在性:

$$\text{因为 } f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot \Delta y}{0^2 + (\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 0 = 0,$$

所以函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的两个偏导数都存在, 且 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$. 故应选 (B).

4. 设 $z = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中函数 f 可微, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ 【 B 】

- (A) $-2z - y^2 f'\left(\frac{y}{x}\right)$; (B) $2z$; (C) $-y^2 f'\left(\frac{y}{x}\right)$; (D) $y^2 f'\left(\frac{y}{x}\right)$.

解: 因为 $z = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$, 且函数 f 可微, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf\left(\frac{y}{x}\right) + xy \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{-y}{x^2} = yf\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xf\left(\frac{y}{x}\right) + xy \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = xf\left(\frac{y}{x}\right) + yf'\left(\frac{y}{x}\right),$$

所以 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \left[yf\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) \right] + y \left[xf\left(\frac{y}{x}\right) + yf'\left(\frac{y}{x}\right) \right] = 2xyf\left(\frac{y}{x}\right) = 2z$, 故应选 (B).

5. 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = xdx + ydy$, 则点 $(0, 0)$ 【 C 】

(A) 不是 $f(x, y)$ 的连续点; (B) 不是 $f(x, y)$ 的极值点;

(C) 是 $f(x, y)$ 的极小值点; (D) 是 $f(x, y)$ 的极大值点.

解: 因为函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = xdx + ydy$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = x, \frac{\partial z}{\partial y} = y$;

$$\text{令} \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}, \text{得唯一驻点}(0, 0);$$

$$\text{又 } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} = 1, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} = 1,$$

$$\text{则 } \Delta = AC - B^2 = 1 - 0 = 1 > 0, \text{ 且 } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} = 1 > 0,$$

故驻点 $(0, 0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的极小值点, 从而应选 (C).

另解 (利用“平面曲线上对坐标的曲线积分与路径无关”的等价条件中的“全微分方程”):

$$\text{因为 } dz = xdx + ydy = d\left(\frac{x^2}{2}\right) + d\left(\frac{y^2}{2}\right) = d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right), \text{ 则 } z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C,$$

$$\text{即 } f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C; \text{ 显然 } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C \geq C \text{ (当且仅当 } x = y = 0 \text{ 时等号才成立),}$$

$$\text{则 } f(x, y) \geq C \text{ (当且仅当 } x = y = 0 \text{ 时等号才成立),}$$

根据极值的定义, 得 $(0, 0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的极小值点, 从而应选 (C).

6. 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho d\rho$ 可以写为 【 D 】

$$(A) \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx; \quad (B) \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$$

$$(C) \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy; \quad (D) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy.$$

解: 因为二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho d\rho$ 的积分区域 $D: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \cos\theta$ 是

由上半圆周 $x^2 + y^2 = x (y \geq 0)$ 与 x 轴围成的半圆域,

则该二次积分的积分区域在直角坐标下可表示为:

$$D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x-x^2} \text{ 或 } D: 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2},$$

$$\text{则} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho d\rho \underset{\text{直角坐标}}{\int_0^1 dx} \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy$$

$$\text{或者} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho d\rho \underset{\text{直角坐标}}{\int_0^{\frac{1}{2}}} dy \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x, y) dx. \text{从而应选 (D).}$$

二、填空题（每小题 6 分，共 5 个小题，共 30 分）

7. 过直线 $x = y = 2z$ 且平行于直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}$ 的平面方程为 $5x - 6y + 2z = 0$.

解：方法一（平面束）：因为直线 $x = y = 2z$ 的一般方程为 $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ ；

由条件，所求平面过直线 $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ ，可设过直线 $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ 的平面束为

$$\lambda(x - y) + \mu(x - 2z) = 0, \text{ 即 } (\lambda + \mu)x - \lambda y - 2\mu z = 0;$$

又所求平面平行于直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}$ ，则 $(\lambda + \mu, -\lambda, -2\mu) \perp (2, 3, 4)$ ，

$$\text{故 } 2(\lambda + \mu) - 3\lambda - 8\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -6\mu;$$

所以 $-5\mu x + 6\mu y - 2\mu z = 0$ ，即 $5x - 6y + 2z = 0$ 为所求平面方程.

方法二（平面的点法式方程）：因为直线 $x = y = 2z$ 即为 $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ ；

由条件，直线 $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ 在所求平面上，而直线 $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ 过点 $O(0, 0, 0)$ ，

则所求平面过直线 $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ 上的任意一点，即所求平面过点 $O(0, 0, 0)$ ，且其法向量 \vec{n} 与直线

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \text{ 的方向向量 } (2, 2, 1) \text{ 垂直，即 } \vec{n} \perp (2, 2, 1);$$

又所求平面平行于直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}$ ，则 $\vec{n} \perp (2, 3, 4)$ ；

从而可取所求平面的一个法向量为 $\vec{n} = (2, 2, 1) \times (2, 3, 4) = (5, 6, -2)$ ，

又所求平面过点 $O(0, 0, 0)$ ，根据平面的点法式方程，得所求平面方程为： $5x - 6y + 2z = 0$.

8. 若函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $e^z - xyz = e$ 确定，则 $dz|_{(1,0)} = \underline{0dx + \frac{1}{e}dy}$.

解：将 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 代入方程 $e^z - xyz = e$ ，得 $e^z - 0 = e \Rightarrow z = 1 \Rightarrow z(1, 0) = 1$.

方法一（利用全微分公式进行求解）：因为 $z = f(x, y)$ ，则 $dz|_{(1,0)} = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,0)} dx + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,0)} dy$ ；

令 $F(x, y, z) = e^z - xyz - e$ ，则

$$F'_x(1, 0, 1) = -yz|_{(1,0,1)} = 0, F'_y(1, 0, 1) = -xz|_{(1,0,1)} = -1, F'_z(1, 0, 1) = (e^z - xy)|_{(1,0,1)} = e,$$

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,0,1)} = -\frac{F'_x(1, 0, 1)}{F'_z(1, 0, 1)} = -\frac{0}{e} = 0, \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,0,1)} = -\frac{F'_y(1, 0, 1)}{F'_z(1, 0, 1)} = -\frac{-1}{e} = \frac{1}{e},$$

$$\text{从而 } dz|_{(1,0,1)} = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,0,1)} dx + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,0,1)} dy = 0dx + \frac{1}{e}dy = \frac{1}{e}dy.$$

方法二（利用多元函数全微分形式的不变性）：对方程 $e^z - xyz = e$ 两边同时取全微分，得

$$d(e^z - xyz) = d(e) \Rightarrow d(e^z) - d(xyz) = 0 \Rightarrow e^z dz - [yzdx + xzdy + xydz] = 0$$

$$\Rightarrow dz = \frac{yz}{e^z - xy} dx + \frac{xz}{e^z - xy} dy \Rightarrow dz|_{(1,0,1)} = \frac{yz}{e^z - xy}\bigg|_{(1,0,1)} dx + \frac{xz}{e^z - xy}\bigg|_{(1,0,1)} dy = 0dx + \frac{1}{e}dy = \frac{1}{e}dy,$$

$$\text{故 } dz|_{(1,0,1)} = \frac{1}{e}dy.$$

9. 曲面 $x^2 + y^2 + z = 4$ 在点 $P(1, 1, 2)$ 处的法线方程是 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$.

解：将点 $P(1, 1, 2)$ 代入曲面方程 $x^2 + y^2 + z = 4$ ，得 $1^2 + 1^2 + 2 = 4$ 成立，则点 $P(1, 1, 2)$ 是切点. 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 4$ ，则曲面 $x^2 + y^2 + z = 4$ 在点 $P(1, 1, 2)$ 处的法向量为

$$\vec{n} = (F'_x, F'_y, F'_z)|_{(1,1,2)} = (2x, 2y, 1)|_{(1,1,2)} = (2, 2, 1),$$

$$\text{则由直线的点向式方程，得所求法线方程为 } \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

10. 函数 $u = xy^2z$ 在点 $A(1, -1, 2)$ 处沿增加最快方向的方向导数是 $\sqrt{21}$.

解：因为函数 $u = xy^2z$ 在点 $A(1, -1, 2)$ 处沿增加最快方向的方向导数就是“函数 $u = xy^2z$ 在点 $A(1, -1, 2)$ 处的方向导数的最大值”，即为“函数 $u = xy^2z$ 在点 $A(1, -1, 2)$ 处梯度 $\text{gradu}(1, -1, 2)$ 的模 $|\text{gradu}(1, -1, 2)|$ ”，

$$\text{而 } \text{gradu}(1, -1, 2) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)\bigg|_{(1,-1,2)} = (y^2z, 2yz, xy^2)\bigg|_{(1,-1,2)} = (2, -4, 1),$$

$$\text{则 } |\text{gradu}(1, -1, 2)| = |(2, -4, 1)| = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}, \text{ 故所求方向导数为 } \sqrt{21}.$$

11. 设平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ ，则二重积分 $\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy = \underline{0}$.

解：方法一（利用二重积分的积分区域的对称性与被积函数的奇偶性）：

因为区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ 关于 x 轴对称，而二重积分 $\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy$ 的被积函数 $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是关于 y 的奇函数，所以 $\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy = 0$ 。

方法二（计算该二重积分）：

因为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ 的极坐标表示为 $D: -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1$ ，则

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{\rho \cos \theta \cdot \rho \sin \theta}{1+\rho^2} \cdot \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho^2} d\rho \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos(2\theta)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \left[\frac{-(-1)}{2} - \frac{-(-1)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho^2} d\rho = 0, \end{aligned}$$

$$\text{即 } \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy = 0.$$

三、解答题（每小题 10 分，共 4 个小题，共 40 分，要求有必要的解题步骤）

12. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线方程和法平面方程。

解：将点 $(1, -2, 1)$ 代入曲线方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} 1^2 + (-2)^2 + 1^2 = 6 \\ 1 - 2 + 1 = 0 \end{cases}$ 成立，

则点 $(1, -2, 1)$ 是切点。

因为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的法向量为 $\vec{n}_1 = (2x, 2y, 2z)|_{(1, -2, 1)} = 2(1, -2, 1)$ ，

平面 $x + y + z = 0$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的法向量为 $\vec{n}_2 = (1, 1, 1)|_{(1, -2, 1)} = (1, 1, 1)$ ，

则曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切向量为

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2(1, -2, 1)) \times (1, 1, 1) = 2((1, -2, 1) \times (1, 1, 1)) = 2(-3, 0, 3) = -6(1, 0, -1),$$

则所求切线方程为： $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}$ ；法平面方程为 $(x-1) - (z-1) = 0$ ，即 $x - z = 0$ 。

注：此题中的切线方程 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}$ 不能错误的写成 $\frac{x-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ （因为方程 $\frac{x-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 在

空间中表示的是一个平面，不是一条直线）。

13. 已知直角三角形的斜边长为 l ，则其周长不可能超过多少？

解：设直角三角形的两条直角边的长度为 x, y ，则三角形的周长为 $f(x, y) = x + y + l$ ，

其中 $x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = l^2$ 。

则所求问题为：求函数 $f(x, y) = x + y + l$ 在限制条件 $x^2 + y^2 = l^2$ （其中 $x > 0, y > 0$ ）下的最大值。

方法一（用拉格朗日乘数法）：令 $L(x, y, \lambda) = x + y + l + \lambda(x^2 + y^2 - l^2)$ ，

$$\text{则根据} \begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - l^2 = 0 \end{cases}, \text{解得 } x = y = \frac{l}{\sqrt{2}}; \text{ 故 } f\left(\frac{l}{\sqrt{2}}, \frac{l}{\sqrt{2}}\right) = \frac{l}{\sqrt{2}} + \frac{l}{\sqrt{2}} + l = (1 + \sqrt{2})l$$

由实际问题可知，周长的最大值存在。

所以当直角三角形的两条直角边的长度都是 $\frac{l}{\sqrt{2}}$ 时，其周长取得最大值

$$f\left(\frac{l}{\sqrt{2}}, \frac{l}{\sqrt{2}}\right) = (1 + \sqrt{2})l.$$

方法二（转化为无条件极值）：将 $\begin{cases} x = l \cos t \\ y = l \sin t \end{cases}, 0 < t < \frac{\pi}{2}$ 代入 $f(x, y) = x + y + l$ ，得

$$f(l \cos t, l \sin t) = l \cos t + l \sin t + l = \sqrt{2} l \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + l,$$

$$\text{而 } 0 < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < t + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \left(\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)_{\max} = 1,$$

所以 $f_{\max} = \sqrt{2} l \cdot 1 + l = (1 + \sqrt{2})l$ 。即周长的最大值为 $(1 + \sqrt{2})l$ 。

方法三（转化为无条件极值）：将 $y = \sqrt{l^2 - x^2}, 0 < x < l$ 代入 $f(x, y) = x + y + l$ ，得

$$f\left(x, \sqrt{l^2 - x^2}\right) = x + \sqrt{l^2 - x^2} + l \quad (0 < x < l),$$

$$\text{根据 } \frac{df}{dx} = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{l^2 - x^2} - x}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{l^2 - 2x^2}{\sqrt{l^2 - x^2}(\sqrt{l^2 - x^2} + x)} \stackrel{\text{令}}{=} 0, \text{ 得唯一驻点 } x = \frac{l}{\sqrt{2}};$$

$$\text{当 } 0 < x < \frac{l}{\sqrt{2}} \text{ 时 } \frac{df}{dx} = \frac{l^2 - 2x^2}{\sqrt{l^2 - x^2}(\sqrt{l^2 - x^2} + x)} > 0,$$

$$\text{当 } \frac{l}{\sqrt{2}} < x < l \text{ 时 } \frac{df}{dx} = \frac{l^2 - 2x^2}{\sqrt{l^2 - x^2}(\sqrt{l^2 - x^2} + x)} < 0;$$

所以唯一驻点 $x = \frac{l}{\sqrt{2}}$ 是函数 $f(x, \sqrt{l^2 - x^2}) = x + \sqrt{l^2 - x^2} + l$ ($0 < x < l$) 的极大值点;

又函数 $f(x, \sqrt{l^2 - x^2}) = x + \sqrt{l^2 - x^2} + l$ 在 $x \in (0, l)$ 内可导, 且极值唯一,

故该唯一的极值 (极大值) 即为最值 (最大值),

即当 $x = \frac{l}{\sqrt{2}}$ 时, $f_{\max}\left(\frac{l}{\sqrt{2}}, \frac{l}{\sqrt{2}}\right) = \frac{l}{\sqrt{2}} + \frac{l}{\sqrt{2}} + l = (1 + \sqrt{2})l$, 即周长的最大值为 $(1 + \sqrt{2})l$.

方法四 (利用向量的数量积与其模的乘积的关系) 因为 $f(x, y) = x + y + l = (x, y) \cdot (1, 1) + l$,

而向量 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$, 且 $|\cos(\vec{a}, \vec{b})| \leq 1$, 故 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| |\cos(\vec{a}, \vec{b})| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$,

$$\begin{aligned} \text{从而 } f(x, y) &= x + y + l = (x, y) \cdot (1, 1) + l \leq |(x, y)| \cdot |(1, 1)| + l \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{2} + l = l \cdot \sqrt{2} + l = (1 + \sqrt{2})l, \end{aligned}$$

即 $f(x, y) = x + y + l \leq (1 + \sqrt{2})l$, 故其周长取得最大值 $(1 + \sqrt{2})l$.

14. 计算二重积分 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x$ 及抛物线 $x = y^2$ 所围成的区域.

解: (注意: 本题只能用“直角坐标”的“先对 x 积分再对 y 积分”的积分次序进行计算)

联立 $\begin{cases} y = x \\ x = y^2 \end{cases}$, 得交点 $(0, 0)$ 与 $(1, 1)$; 则 $D: 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y$,

$$\text{所以 } \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} dy \int_{y^2}^y dx = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} \cdot (y - y^2) dy = \int_0^1 (1 - y) \sin y dy$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (1 - y) d(-\cos y) \stackrel{\text{分部积分}}{=} [(1 - y) \cdot (-\cos y)]_0^1 - \int_0^1 (-\cos y) \cdot (-1) dy \\ &= [(y - 1) \cos y]_0^1 - \int_0^1 \cos y dy = [0 - (-1)] - [\sin y]_0^1 = 1 - (\sin 1 - 0) = 1 - \sin 1, \end{aligned}$$

$$\text{即 } \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy = 1 - \sin 1.$$

15. 设区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$.

解: 因为 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则

方法一 (“先二后一”): 因为 $\Omega: -1 \leq z \leq 1, D_z: x^2 + y^2 \leq 1 - z^2$, 则

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz \xrightarrow{\text{“先二后一”}} \int_{-1}^1 z^2 dz \iint_{D_z} dx dy = \int_{-1}^1 z^2 \bullet \pi(1-z^2) dz \xrightarrow{\text{奇偶性}} 2\pi \int_0^1 (z^2 - z^4) dz \\
 &= 2\pi \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} \right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] = \frac{4\pi}{15}, \\
 \text{即 } I &= \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \frac{4\pi}{15}.
 \end{aligned}$$

方法二（柱面坐标）： 因为 $\Omega: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, -\sqrt{1-\rho^2} \leq z \leq \sqrt{1-\rho^2}$ ，则

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz \xrightarrow{\text{柱面坐标}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} z^2 \bullet \rho dz = 2\pi \int_0^1 \rho \bullet 2 \bullet \frac{(\sqrt{1-\rho^2})^3}{3} d\rho \\
 &= \frac{4}{3}\pi \int_0^1 \rho(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} d\rho \xrightarrow{\text{“凑微分”}} \frac{4}{3}\pi \bullet \frac{-1}{2} \int_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} d(1-\rho^2) \\
 &= \frac{-2}{3}\pi \bullet \left[\frac{2}{5}(1-\rho^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{-2}{3}\pi \bullet \frac{2}{5}[0-1] = \frac{4\pi}{15}, \\
 \text{即 } I &= \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \frac{4\pi}{15}.
 \end{aligned}$$

方法三（球面坐标）： 因为 $\Omega: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq 1$ ，则

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz \xrightarrow{\text{球面坐标}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 (r \cos \varphi)^2 \bullet r^2 \sin \varphi dr = 2\pi \int_0^{\pi} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr \\
 &= 2\pi \left[\frac{-1}{3} \cos^3 \varphi \right]_0^{\pi} \bullet \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{-1}{3}(-1-1) \right] \bullet \left[\frac{1}{5} - 0 \right] = \frac{4\pi}{15}, \\
 \text{即 } I &= \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \frac{4\pi}{15}.
 \end{aligned}$$