第一节

第二章

随机事件

一、随机试验

1、随机试验的特点

- 试验能在相同条件下重复进行；
- 每次试验的可能结果不止一个；
- 能事先明确试验的所有可能结果；
- 每次试验前不能确定哪一个结果会出现。

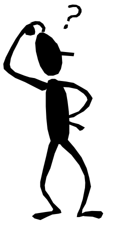
一、随机试验

2、随机试验E举例

3、样本空间S：试验的所有可能结果的集合

二、随机事件

- 样本点
- 随机事件
- 随机事件举例



二、随机事件

三个特殊情况

基本事件 — 只含有一个样本点

必然事件 S — 包括试验的全部样本点，每次试验都发生

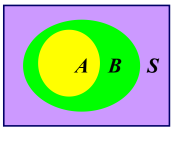
不可能事件 ϕ — 不包括任何样本点，每次试验都不发生

三、事件间的关系及运算

1 包含关系：$A\subset B$ 或 $B\supset A$

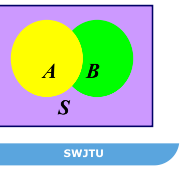
事件A发生 $\Rightarrow$ 事件B发生

若$A\subset B$且$B\subset A$，则 $A=B$



2 和事件：$A\cup B=\{e|e\in A$或$e\in B\}$

$A\cup B$发生 $\Leftrightarrow$ A, B中至少有一个发生



三、事件间的关系及运算

推　广

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n$$

$$= \{A_1, A_2, \cdots, A_n\text{中至少有一个发生}\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots$$

$$= \{A_1, A_2, \cdots\text{中至少有一个发生}\}$$

三、事件间的关系及运算

3　**积事件：** $A \cap B = \{e \in A \text{ 且 } e \in B\}$

即当且仅当A, B同时发生时, $A \cap B$才发生,

可简记为AB.

推广：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\text{同时发生}\}$$

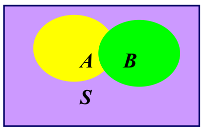
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \{A_1, A_2, \cdots\text{同时发生}\}$$

三、事件间的关系及运算

4　**差事件：** $A - B = \{e | e \in A \text{且} e \notin B\}$

当且仅当A发生，B不发生时，

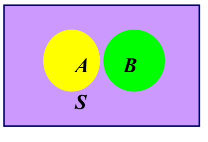
事件A-B发生



5　**不相容性：** 若$AB = \phi$，则称

事件A与B互不相容/互斥

特别，基本事件两两互不相容

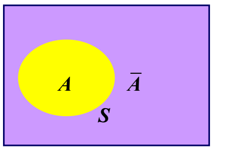


三、事件间的关系及运算

6　**逆事件/对立事件**

若$AB = \phi$，且 $A \cup B = S$，则称

事件A与事件B互为逆事件。



A的逆事件常记为$\bar{A}$，即有

$$A \bigcap \bar{A} = \phi, \quad A \bigcup \bar{A} = S, \quad \bar{A} = S - A$$

四、事件的运算性质

- **交换律**　$A \bigcup B = B \bigcup A$　　$A \bigcap B = B \bigcap A$
- **结合律**　$A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$
  $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$
- **分配律**　$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$
  $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$
- **德・摩根律**　$\overline{A \bigcup B} = \bar{A} \bigcap \bar{B}$　　$\overline{A \bigcap B} = \bar{A} \bigcup \bar{B}$

课 堂 练 习

***Ex*1**：我开车回家，途经4个信号灯，A_i表示第 i 个路口遇上红灯（i = 1,2,3,4），试用 A_i 表示以下事件：

1）　一路绿灯；

2）　至少遇到一次红灯；

3）　只遇到一次红灯；

4）　最多遇到3次红灯。

课 堂 练 习

*Ex*2. 若 B是 A的子事件，则$A\cup B=$ (A)，$AB=$ (B)

*Ex*3. 设事件 $A=$“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，

则 A 的对立事件为（ ④ ）

① 甲种产品滞销，乙种产品畅销；

② 甲、乙两种产品均畅销；

③ 甲种产品滞销；

④ 甲种产品滞销或者乙种产品畅销

第二章

第二节

概率的公理化定义及性质

一、概率的公理化定义

设E为随机试验，S为其样本空间，对于S 的每一事件 A，赋予一实数$P(A)$，若集函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件，则称$P(A)$为事件A的概率：

1° 非负性　$\forall A\subset S,\ P(A)\geq 0$

2° 规范性　$P(S)=1$

3° 可列可加性　若$\forall$ $i\neq j$，$A_iA_j=\phi$，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

——柯尔莫哥洛夫（苏）,1933

二、概率的基本性质

1　$P(\phi)=0$

2　$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$　——有限可加性

这里 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容

3　若 $A\subset B$，则 $P(B)\geq P(A)$，且

$P(B-A)=P(B)-P(A)$

二、概率的基本性质

4　对于任何一个事件A，都有 $0\leq P(A)\leq 1$

5　$P(A)+P(\bar{A})=1$

6　$P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ —— 加法公式

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_iA_j)+\sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_iA_jA_k)$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\dots A_n)$$

课 堂 练 习

Ex：当A, B 同时发生时，C必发生，则(　　)

①$P(C)=P(AB)$

②$P(C)=P(A\cup B)$

③$P(C)\geq P(A)+P(B)-1$

④$P(C)=P(A)+P(B)-1$

三、确定概率的古典方法

1° 样本空间中的元素个数只有有限个，可记为

$S=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$

2° 每个基本事件e_i出现的可能性相等，i=1,2,…,n,

$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\ldots=P(\{e_n\})=1/n$

则

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中的基本事件总数}}$$

例 题 -1

一批产品中有a个次品和b个合格品，采取有放回及不放回抽样方式抽n个产品，问正好有k个次品的概率？

解：$A=\{n$个产品中恰有k个次品$\}$

[有放回] 样本点总数为 $(a+b)^n$

A中样本点数为 $C_n^k a^k b^{n-k}$

$$P(A)=\frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n}=C_n^k\left(\tfrac{a}{a+b}\right)^k\left(\tfrac{b}{a+b}\right)^{n-k}$$

—— 二项分布

[无放回]样本点总数为 C_{a+b}^n

A中样本点数为 $C_a^k C_b^{n-k}$

$$P(A)=\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

—— 超几何分布

例 题 -2

某药厂生产的某种药品，声称对某疾病的治愈率为80%，现任意抽取100个此种病患者进行临床试验，结果有76个患者被治愈。请问这种药品的治愈率80%是否可信呢？

（实际推断原理）

例 题 -3

有100个人，每个人的生日都不在2月29日。试求下列事件的概率：

（1）$A=\{$这100个人的生日全不相同$\}$；

（2）$B=\{$恰好10个人的生日在1月1日$\}$.

(1) A所含基本事件数为：$C_{365}^{100}\cdot 100!$

故 $$P(A)=\frac{C_{365}^{100}\cdot 100!}{365^{100}}=\frac{365!}{365^{100}\cdot 265!}$$

(2) B所含基本事件数为：$C_{100}^{10}\cdot 364^{90}$

$$P(B)=\frac{C_{100}^{10}\cdot 364^{90}}{365^{100}}=C_{100}^{10}\cdot\left(\frac{1}{365}\right)^{10}\left(1-\frac{1}{365}\right)^{90}$$

例 题 -4

某专业研究生复试时，有3张考签，3个考生应试，一个人抽一张看后立即放回，再让另一个抽，如此3个人各抽一次，试求抽签结束后，至少有一张考签没有被抽到的概率。

例 题 -5

设有带号码1,2,3的三件物品，任意的放在标有1,2,3的箱子中，至少有一件物品与它所占的空格号码相一致的概率为多少？

解：记$A_i=\{$第i件物品放在第i号空格内$\}$ $i=1,2,3$

则有 $P(A_i)=\frac{1}{3}$ $\quad i=1,2,3$

$P(A_iA_j)=\frac{1}{3\times 2}$ $\quad 1\le i<j\le 3$ $\qquad P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{3\times 2\times 1}$

$$P\left(A_1\cup A_2\cup A_3\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}P\left(A_i\right)-\sum_{1\le i<j\le 3}P\left(A_iA_j\right)+P\left(A_1A_2A_3\right)$$

$$=3\times\frac{1}{3}-C_3^2\cdot\frac{1}{3\times 2}+C_3^3\cdot\frac{1}{3!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=\frac{2}{3}$$

四、确定概率的几何方法

若 ① 样本空间Ω充满某个区域，

其度量(长度、面积、体积)为S_Ω;

② 落在Ω中的任一子区域A的概率，

只与子区域的度量S_A有关，

而与子区域的位置无关(等可能的).

则事件A的概率为：$P(A)=S_A/S_\Omega$

例 题 -6

蒲丰投针问题

平面上画有间隔为d的等距平行线，向平面任意投掷一枚长为l（$l<d$）的针，求针与平行线相交的概率.

$$P(A)=\frac{2l}{\pi d} \longrightarrow \pi=\frac{2l}{P(A)d}\approx\frac{2l}{f_n(A)d}$$

➨ 蒙特卡罗法（MonteCarlo）

Ex 1. 在一张印有方格的纸上投一枚直径为1的硬币，试问方格边长a 要多大才能使硬币与线不相交的概率小于1%？

Ex 2. 若在区间(0, 1) 内任取两个数，则两数之和小于 6/5 的概率是多少？

第三节 第二章

条 件 概 率

一、条件概率

1. 引例

一副扑克牌（4种花色、每种13张，大、小王各1张，共54张牌），从中任意抽取一张，

记　事件A={抽到J、Q、K中之一}

　　事件B= {抽到红心}

如果已知抽得的牌是J、Q或K，那么这张牌是红心的可能性为多少？

一、条件概率

2．定义

设A, B为两事件，且$P(A)>0$，称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件A发生条件下事件B发生的条件概率（conditional probability）。

一、条件概率

3．性质

- 非负性：$\forall B\subset S, P(B|A)\geq 0$
- 规范性：$P(S|A)=1$
- 可列可加性：若B_1，B_2,……两两互不相容，则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\middle|A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$

一、条件概率

- 所有概率性质对条件概率均成立

例如$\forall B_1, B_2\subset S$, 都有

- $P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)-P(B_1B_2)$
- $P(B_1\cup B_2|A)$
  $=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A)$

二、乘法公式

$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$,　　$P(A)>0$

$\Downarrow$

$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)$

$P(A_1A_2)>0$?

$\Downarrow$

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$

$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$

例 题-2

（抓阄问题）10个人只有一张音乐会的入场券，为了公平起见，决定抓阄(无放回抽取)。 试问每个人抽得入场券的机会与先后顺序有关吗？

分 析

记$A_i=\{$第 i 个人抽到入场券$\}$ $\quad i=1,2,\cdots,10$

$P(A_1)$、$P(A_2)$、…、$P(A_{10})$

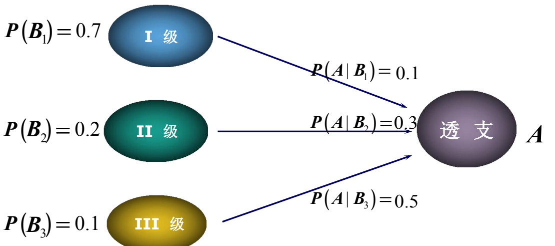
$$P(A_3)=P(\bar A_1\bar A_2A_3)$$

$$=P(\bar A_1)P(\bar A_2|\bar A_1)P(A_3|\bar A_1\bar A_2)$$

$$=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10} \Rightarrow \boxed{P(A_i)=\frac{1}{10}}$$

三、全概率公式

1. 引例



$P(A)=$?

三、全概率公式

2. 定理 若$B_1,B_2,\cdots,B_n$满足以下条件：

(1) $B_iB_j=\phi$, $\forall i\neq j$

(2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$

样本空间的划分

且 $P(B_i)>0$, $i=1,2,3,\cdots,n$

则$\forall A\subset S$，有

$$\boxed{P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$

例 题-3

设有N个袋子，每个袋子中装有a只黑球，b只白球，从第一个袋子中任取一个放入第二个袋子中，然后从 第二个袋子中任取一个放入第三个袋子中，如此下去，从最后一个袋子中任取一个是黑球的概率是多少？

记$A_i=\{$从第i个袋子中任取一个是黑球$\}$ $\quad i=1,2,\cdots,N$

分 析

$$P(A_1)=\frac{a}{a+b}$$

$$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\bar A_1A_2)$$

$$=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar A_1)P(A_2|\bar A_1)$$

全概率公式的最简单形式

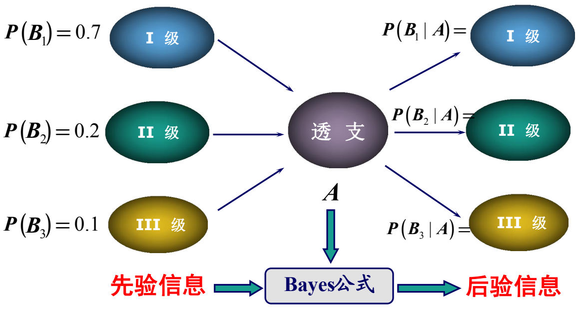
$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+1}$$

$$=\frac{a(\cancel{a+1+b})}{(a+b)(\cancel{a+b+1})}=\frac{a}{a+b} \Rightarrow \boxed{P(A_N)=\frac{a}{a+b}}$$

总　结

- 什么情况需要用全概率公式呢？
- 如果此人第一个月就出现了透支的情况，那么对此人的信用评价是否改变？

思考题



四、贝叶斯公式（逆概公式）

定理　设试验E的样本空间为S，A是随机事件，存在一个划分 $B_1,B_2,\cdots,B_n$，且$P(A)>0$，

$P(B_i)>0$，$i=1,2,3,\cdots,n$，则

$$P(B_k|A)=\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$

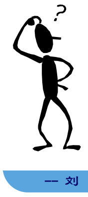
课堂练习

口袋中有一只球，不知它是黑的还是白的。现再往口袋中放入一只白球，然后从口袋中任意取出一只，发现是白球。试问口袋中原来的那只球是白球的可能性多大？

! 注意区分问题是条件概率还是无条件概率

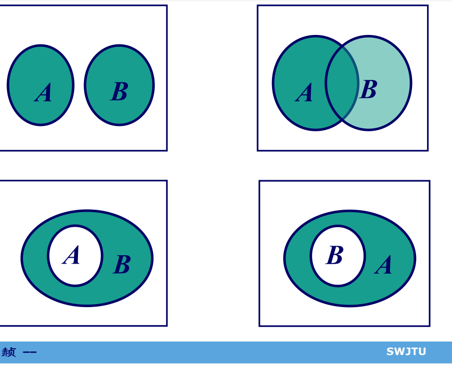
思考题

- 条件概率与无条件概率有必然的大小关系吗？



提示：可以根据目标事件B和条件事件A的相互关系，分四种情况讨论

四种关系



第四节 第二章

独 立 性

一、两个事件的相互独立性

- 相互独立性定义
- 对立事件的相互独立性
- 相互独立与互不相容

一、两个事件的相互独立性

1. 定义

Def.1 设A、B是两事件，如果满足

$$P(B|A) = P(B)$$

则称A、B为相互独立事件。

Def.2 等价条件

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

例 题 -1

设n件产品有$k(<n)$件次品, 每次任取一件,试验证放回抽样的两次抽取是独立的，而不放回抽样的两次抽取是不独立的。

证明：设 $A=\{第一次抽到次品\}$，

$B=\{第二次抽到次品\}$

(1) 放回抽样：因$P(A)=P(B)=\dfrac{k}{n}$

而 $P(AB)=\dfrac{k\times k}{n\times n}=\dfrac{k}{n}\times\dfrac{k}{n}=P(A)P(B)$

故 A、B相互独立

(2) 不放回抽样：因$P(A)=\dfrac{k}{n}$

而 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$

$$=\frac{k}{n}\times\frac{k-1}{n-1}+\frac{n-k}{n}\times\frac{k}{n-1}=\frac{k}{n}$$

又 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\dfrac{k}{n}\times\dfrac{k-1}{n-1}$

$$\neq P(A)P(B)=k^2/n^2$$

即 A,B不是相互独立的。

一、两个事件的相互独立性

2. 对立事件的相互独立性

定理　若四对事件A与B，$\overline{A}$ 与B，A与$\overline{B}$

和$\overline{A}$与$\overline{B}$ 中有一对是独立的事件，

则另外各对事件也是相互独立的

事件。

例 题 -2

设A与B相互独立，若$P(A)=0.3$，$P\left(A\cup B\right)=0.6$，

求$P\left(\overline{B}\,|\,A\right)$.

解：　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.6$

$\Rightarrow P(B)=3/7$

A、B相互独立 $\Rightarrow$ A与$\overline{B}$ 相互独立

$P(\overline{B}|A)=P(\overline{B})=1-P(B)=4/7$

一、两个事件的相互独立性

3. 相互独立与互不相容

若 $P(A)>0$，$P(B)>0$ ，则 A、B 相互独立与 A、B互不相容不能同时成立。

$$\begin{cases} A、B\text{相互独立} \Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)>0 \\ A、B\text{互不相容} \Leftrightarrow AB=\Phi，\text{即 } P(AB)=0 \end{cases}$$

二、多个事件的独立性

- 三个事件间的两两独立性
- 三个事件间的相互独立性
- 多事件相互独立性

二、多个事件的独立性

1. 三个事件的两两独立性

Def. 设A、B、C为三事件，如果具有等式

$P(AB)=P(A)\,P(B)$

$P(BC)=P(B)\,P(C)$

$P(CA)=P(C)\,P(A)$

则称三事件A、B、C为两两独立的事件。

二、多个事件的独立性

2. 三个事件的相互独立性

Def. 若事件A, B, C 两两独立，且满足

$$P(ABC)=P(A)\,P(B)\,P(C)$$

则称A, B, C 为相互独立的事件。

注：$\begin{cases} \text{相互独立} \Rightarrow \text{两两独立} \\ \text{两两独立} \not\Rightarrow \text{相互独立} \end{cases}$

例 题 -3

在四张标有数字1，2，3，4的卡片中等可能的任取一张，设事件A={取到数字1或2}，B={取到数字1或3}，C={取到数字1或4} 。

解：$AB = BC = AC = \{$取到数字 1$\}$

$$P(AB)=\frac{1}{4} \quad P(AC)=\frac{1}{4} \quad P(BC)=\frac{1}{4}$$

$$P(A)=\frac{1}{2} \quad P(B)=\frac{1}{2} \quad P(C)=\frac{1}{2}$$

易见 $P(AB)=P(A)P(B)$

$P(BC)=P(B)P(C)$

$P(CA)=P(C)P(A)$

又 $P(ABC)=1/4$

$$P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\neq P(ABC)$$

故A、B、C两两独立，但不是相互独立。

二、多个事件的独立性

3. 多事件的相互独立性

定义 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为n 个事件，如果任意k $(2\le k\le n)$个事件

$A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$ $(1\le i_j\le n, j=1,2,\cdots,k)$均有

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right)=P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\cdots P\left(A_{i_k}\right)$$

则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$为相互独立的事件。

例 题 -4

（下赌注问题） 17世纪末，法国的*De Mere*爵士与人打赌，在“连续掷4次一颗骰子至少出现一次6点”的情况下他赢了钱，可“连续掷24次两颗骰子至少出现一次双6点”的情况下却输了钱，这是为什么？

解：(1) 记 $A_i=\{$第i次出现6点$\}$，$i=1,2,3,4$

故 $P\left(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\right)$

$$=1-P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4\right)$$

$$=1-P\left(\bar{A}_1\right)P\left(\bar{A}_2\right)P\left(\bar{A}_3\right)P\left(\bar{A}_4\right)$$

$$=1-\left(\tfrac{5}{6}\right)^4\approx 0.518$$

即此概率大于0.5，故赢钱的可能性大.

(2) 设 $B_i=\{$第i次出现双6 点$\}$，$i=1,2,\cdots,24$

则 $P(B_i)=1/36 \qquad P(\bar{B}_i)=35/36$

$$故\ P\left(\bigcup_{i=1}^{24}B_i\right)=1-P\left(\bar{B}_1\bar{B}_2\cdots\bar{B}_{24}\right)$$

$$=1-\prod_{i=1}^{24}P\left(\bar{B}_i\right)=1-\left(35/36\right)^{24}\approx 0.491$$

即此概率小于0.5，故赢钱的可能性稍小。

例 题 -5

设一个社区有n个人，只有一个银行，开c个窗口，每个窗口都办理所有业务。c太小，经常排长队；c太大又不经济。假设在任一时刻，这n个人中每一个是否到银行是独立的，每人到银行的概率都是p。若要求：“在每一时刻每个窗口排队人数（包括正在办理业务的人）不超过m”这一事件的概率不小于a（如a=0.90）。问：至少须设多少窗口？

$$P(\text{每个窗口排队人数不超过}\, m) = \sum_{k=0}^{cm} C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$$

课 堂 练 习

设某购物网站任一时刻有k个顾客点击浏览的概率为

$$p_k = \frac{8^k}{k!}e^{-8}, \quad k = 0,1,2,\ldots\ldots$$

而每一个顾客购物的概率是0.15。假设每一个顾客是否购物是相互独立的，试问在任一时刻恰好有10个顾客在该网站购物的概率是多少？

记$A_k = \{\text{恰好有}k\text{个人浏览网站}\}$ $B = \{\text{恰好有10个人购物}\}$

思 考 题

甲、乙两选手进行乒乓球单打比赛，已知在每局中甲获胜的概率为**0.6**，乙获胜的概率为**0.4**。比赛可以采用三局二胜制或者五局三胜制，问哪一种比赛制度对选手甲更有利？为什么？

2、随机试验举例

E1：将一硬币抛三次，观察正面**H**，反面**T**出现的情况；

E2：将一硬币抛三次，观察出现正面的次数；

E3：抛一颗骰子，观察出现的点数；

E4：记录一分钟内某网站的访问次数；

E5：在一批灯泡中任意取一只，测试其寿命（以小时计）；

E6：记录某地一昼夜的最高温度t_2，最低温度t_1。

BACK