第六章 离散时间信号与系统的z域分析

主讲教师：郭爱
主讲课程：信号与系统

6.1 离散信号的z变换

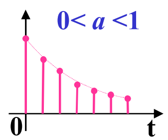
目录

♣ z变换的定义

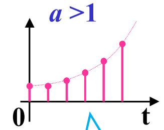
离散信号的傅立叶变换为: $F(j\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)e^{-j\Omega k}$

离散信号$f(k)=a^k u(k)$ $a>0$

$0< a <1$



$a>1$



$f(k)$的傅立叶变换为:

$$F(j\Omega)=\sum_{k=0}^{\infty}(a^k e^{-j\Omega k})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(ae^{-j\Omega})^k$$

$$=1+ae^{-j\Omega}+(ae^{-j\Omega})^2+(ae^{-j\Omega})^3+\ldots=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$$

傅里叶
变换
不存在

6.1 离散信号的z变换

当函数$f(k)$不是收敛序列时，将$f(k)$乘以衰减因子$e^{-\alpha k}$（α为一实常数），恰当地选取α的值就可以使$f(k)e^{-\alpha k}$ 变为收敛序列，因而可求的其傅立叶变换。

$f(k)e^{-\alpha k}$的傅立叶变换为：
$$F(j\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)e^{-\alpha k}e^{-j\Omega k}$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)e^{-(\alpha+j\Omega)k}$$

令 $z=e^{\alpha+j\Omega}$
$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}$$

双边z变换的定义

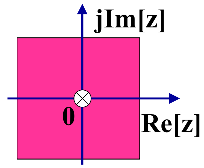
$$F(z)=\cdots+f(-2)z^{2}+f(-1)z^{1}+f(0)z^{0}+f(1)z^{-1}+f(2)z^{-2}+\cdots$$

6.1 离散信号的z变换

例6.1-1 求有限长序列$f(k)=u(k+1)-u(k-2)$的双边z变换

解：按双边z变换的定义，有
$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[u(k+1)-u(k-2)]z^{-k}$$
$$=\sum_{k=-1}^{1}z^{-k}=z+1+z^{-1}$$

收敛域为



收敛域为：$0<|z|<\infty$

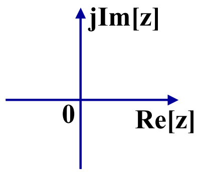
6.1 离散信号的z变换

1、z变换的收敛域

对任意给定的有界序列$f(k)$，使其z变换式收敛的所有z值的集合，称为$F(z)$的收敛域

2、z平面

以z的实部Re[z]为实轴、虚部Im[z]为纵轴构成的平面。



3、级数收敛的充分必要条件为 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)z^{-k}\right|<\infty$

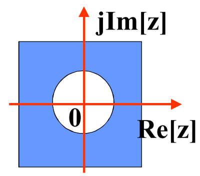
6.1 离散信号的z变换

例6.1-2 求因果序列$f(k)=a^{k}u(k)$的双边z变换

解：按双边z变换的定义，有
$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^{k}u(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}a^{k}z^{-k}=1+az^{-1}+a^{2}z^{-2}+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-az^{-1}}\qquad \left|az^{-1}\right|<1$$
$$=\frac{z}{z-a}\qquad |z|>|a|$$

收敛半径

收敛域为



例6.1-3 求反因果序列$f(k)=-b^k u(-k-1)$的双边z变换

解：按双边z变换定义

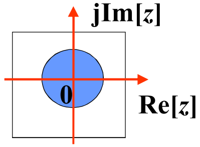
$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[-b^k u(-k-1)\right]z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{-1}(-b^k z^{-k})$$

令$m=-k$，则 $F(z)=\sum_{m=1}^{\infty}(-b^{-m}z^{m})=1+\sum_{m=0}^{\infty}(-b^{-m}z^{m})=1-\sum_{m=0}^{\infty}b^{-m}z^{m}$

$$F(z)=1-\frac{1}{1-b^{-1}z} \qquad |b^{-1}z|<1$$

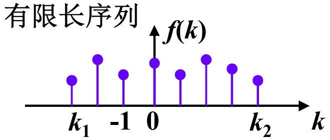
$$=\frac{z}{z-b} \qquad |z|<|b|$$

收敛域为



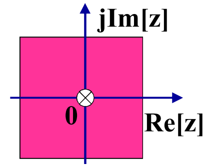
收敛域的形式

- 有限长序列



收敛域为：

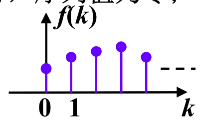
$0<|z|<\infty$



- 因果序列

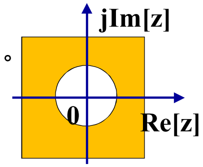
有始无终的序列。

在$k\le 0$时，序列值为零；在$k>k_2$时，有非零值，。



收敛域为：

$|z|>R_{x2}$



例6.1-4 求双边序列 $f(k)=a^k u(k)-b^k u(-k-1)$，其中$|b|>|a|$，的双边$z$变换

解：按双边z变换定义

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[a^k u(k)-b^k u(-k-1)\right]z^{-k}$$

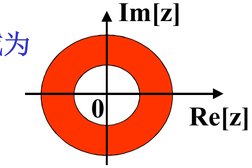
$$=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}}_{F_1(z)}+\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1}(-b^k z^{-k})}_{F_2(z)}$$

$$F_1(z)=\frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

$$F_2(z)=\frac{z}{z-b} \qquad |z|<|b|$$

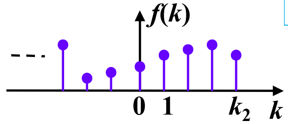
$$F(z)=\frac{z}{z-a}+\frac{z}{z-b} \qquad |a|<|z|<|b|$$

收敛域为



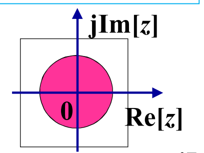
- 无限长反因果序列

有终无始的序列。在$k\le k_2$时，有非零值，在$k>k_2$时，序列值为零。

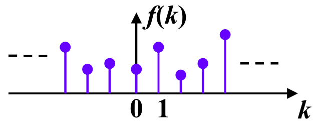


收敛域为：

$0<|z|<R_{x2}$

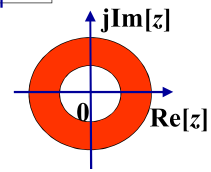


- 双边序列



如果有收敛域为：

$R_{x1}<|z|<R_{x2}$



6.1 离散信号的z变换

一个序列的z变换要包括z变换的表达式和相应的收敛域，二者缺一不可。

否则，z变换的表达式不能与序列一一对应

6.1 离散信号的z变换

$$F^*(s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[f(kT)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)e^{-st}dt}_{e^{-kTs}}\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[f(kT)e^{-kTs}\right]$$

令$z=e^{sT}$、$T=1$，所以有：

$$F^*(s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[f(k)z^{-k}\right]=F(z)$$

$z=e^{sT}$ 把s平面映射到z平面

令$T=1$　$z=e^{s}=e^{\sigma+j\omega}=e^{\sigma}(\cos\omega+j\sin\omega)$

6.1 离散信号的z变换

♣ z变换与拉氏变换的关系

设$f_s(t)$是连续信号$f(t)$的理想抽样信号，则

$$f_s(t)=f(t)\cdot\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)\cdot\delta(t-kT)$$ 其中:T为抽样时间

对上式两边取拉氏变换，得到：

$$F^*(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)\right]e^{-st}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)e^{-st}dt\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[f(kT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)e^{-st}dt\right]$$

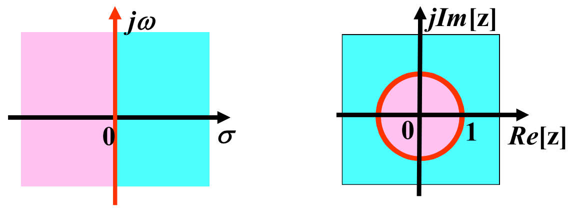
6.1 离散信号的z变换

$z=e^{\sigma}(\cos\omega+j\sin\omega)$

s平面的虚轴：$\sigma=0$，$z=(\cos\omega+j\sin\omega)$，即$|z|=1$

s左半开平面：$\sigma<0$，$|z|<1$　　s右半开平面：$\sigma>0$，$|z|>1$

s平面与z平面的映射关系



6.1 离散信号的z变换

单边z变换

- 单边z变换的定义和收敛域

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k} \text{——正变换} \quad \boxed{F(z)=f(0)z^{0}+f(1)z^{1}+f(2)z^{2}+\cdots}$$

$$f(k)=\begin{cases}0 & k<0\\ \dfrac{1}{2\pi j}\oint_C F(z)z^{k-1}dz & k\geq 0\end{cases} \text{——逆变换}$$

***F*(*z*)称为*f*(*k*)的象函数，*f*(*k*)称为*F*(*z*)的原函数。**

它们之间的对应关系记：$f(k)\leftrightarrow F(z)$

6.1 离散信号的z变换

3、指数序列a^k

$$Z\left[a^{k}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}a^{k}z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(az^{-1})^{k}=\frac{1}{1-az} \qquad |az^{-1}|<1$$

$$\boxed{\therefore a^{k}\leftrightarrow\frac{z}{z-a} \qquad |z|>a} \qquad =\frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

4、虚指数序列$e^{j\beta k}$

$$Z\left[e^{j\beta k}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}(e^{j\beta})^{k}z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(e^{j\beta}z^{-1})^{k}=\frac{1}{1-e^{j\beta}z^{-1}} \qquad |e^{j\beta}z^{-1}|<1$$

$$\boxed{\therefore e^{j\beta k}\leftrightarrow\frac{z}{z-e^{j\beta}} \qquad |z|>1} \qquad =\frac{z}{z-e^{j\beta}} \qquad |z|>1$$

6.1 离散信号的z变换

- 典型序列的单边z变换

1、单位脉冲序列$\delta(k)$ $\quad Z[\delta(k)]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=\delta(0)z^{0}=1$

收敛域为整个z平面

2、单位阶跃序列$u(k)$

$$z[u(k)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z^{-1}|<1$$

$$=\frac{z}{z-1} \qquad |z|>1 \qquad \boxed{\therefore u(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-1} \qquad |z|>1}$$

6.1 离散信号的z变换

5、$f(k)=ka^{k-1}$

$$a^{k}\leftrightarrow\frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}a^{k}z^{-k}=\frac{z}{z-a}$$

两边对z求导：

$$\frac{d}{dz}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a^{k}z^{-k}\right]=\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-a}\right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^{k}(-k)z^{-(k+1)}=\frac{(z-a)-z}{(z-a)^{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^{k}(-k)z^{-(k+1)}=\frac{-a}{(z-a)^{2}}$$

两边同乘以(-1)，除以a，再乘以z，有：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\underline{a^{k-1}k}z^{-k}=\frac{z}{(z-a)^{2}}$$

$$\therefore ka^{k-1}\leftrightarrow\frac{z}{(z-a)^{2}} \qquad |z|>|a|$$

6.2 z变换的基本性质

这些性质表示离散序列在时域和z域间的关系

1、线性性质

若 $Z[f_1(k)]=F_1(z)$ $|z|>R_1$

$Z[f_2(k)]=F_2(z)$ $|z|>R_2$

则 $Z[af_1(k)+bf_2(k)]=aF_1(z)+bF_2(z)$

其中a、b为任意常数，

$R=max\{R_1,R_2\}$

例6.2-1 求$\cos\omega k$的z变换。

解：根据欧拉公式

$$\cos\omega k=\frac{e^{j\omega k}+e^{-j\omega k}}{2}$$

$$Z[\cos\omega k]=0.5Z[e^{j\omega k}]+0.5Z[e^{-j\omega k}]$$

$$=\frac{0.5z}{z-e^{j\omega}}+\frac{0.5z}{z-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{0.5z(2z-e^{j\omega}-e^{-j\omega})}{z^2-(e^{j\omega}+e^{-j\omega})z+1}$$

2、右移性质

若 $Z[f(k)]=F(z)$ 则： $f(k-1)u(k-1)\leftrightarrow z^{-1}F(z)$

证明：由z变换的定义

$$Z[f(k-1)u(k-1)]=\sum_{k=0}^{\infty}f(k-1)u(k-1)z^{-k}$$

令$m=k-1$

$$Z[f(k-1)u(k-1)]=\sum_{m=-1}^{\infty}f(m)u(m)z^{-m-1}=z^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}f(m)z^{-m}$$

所以 $f(k-1)u(k-1)\leftrightarrow z^{-1}F(z)$

同理： $f(k-2)u(k-2)\leftrightarrow z^{-2}F(z)$ $f(k-3)u(k-3)\leftrightarrow z^{-3}F(z)$

例6.2-2 求$\delta(k-1)$和$u(k-1)$的单边z变换

解：因为 $\delta(k)\leftrightarrow 1$ $u(k)\leftrightarrow \frac{z}{z-1}$

$\boxed{f(k-1)u(k-1)\leftrightarrow z^{-1}F(z)}$

根据时域位移特性，有： $\delta(k-1)\leftrightarrow z^{-1}$

$$u(k-1)\leftrightarrow z^{-1}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{1}{z-1}$$

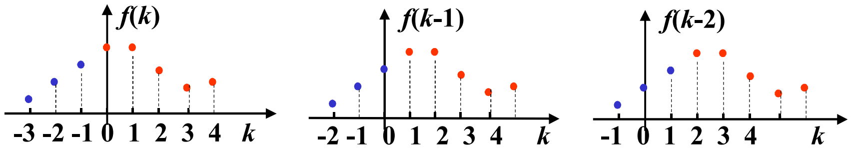
例6.2-3 已知$f(k)=a^{k-2}u(k-1)$，求$f(k)$的z变换

解： $\because a^k\leftrightarrow\frac{z}{z-a}$ $f(k)=a^{k-2}u(k-1)=a^{-1}a^{k-1}u(k-1)$

$$\therefore f(k)\leftrightarrow a^{-1}\cdot z^{-1}\frac{z}{z-a}=\frac{a^{-1}}{z-a}$$

6.2 z变换的基本性质

例6.2-3 已知 $f(k) \leftrightarrow F(z)$ 求$f(k-1)$、$f(k-2)$的z变换



$$\boxed{f(k-1)=f(k-1)u(k-1)+f(-1)\delta(k)} \quad k\geq 0$$

$$f(k-1)\leftrightarrow z^{-1}F(z)+f(-1)$$

$$\boxed{f(k-2)=f(k-2)u(k-2)+f(-1)\delta(k-1)+f(-2)\delta(k)} \quad k\geq 0$$

$$f(k-2)\leftrightarrow z^{-2}F(z)+f(-1)z^{-1}+f(-2)$$

6.2 z变换的基本性质

例6.2-4 求周期序列 $f(k)$的z变换

解：若周期序列$f(k)$ 的周期为N，即

$f(k)=f(k+N)$ $k\geq 0$

令$f_1(k)$表示$f(k)$的第一个周期，

因为$f_1(k)$是有限长序列，所以其z变换为：$F_1(z)=\sum_{k=0}^{N-1} f_1(k)z^{-k}$

周期序列$f(k)$用$f_1(k)$表示为：

$f(k)=f_1(k)+f_1(k-N)+f_1(k-2N)+\ldots$

$f(k)$的z变换为：

$$F(z)=F_1(z)[1+z^{-N}+z^{-2N}+\cdots]=F_1(z)\cdot\frac{z^N}{z^N-1}$$

6.2 z变换的基本性质

$$f(k-1)\leftrightarrow z^{-1}F(z)+f(-1)$$

$$f(k-2)\leftrightarrow z^{-2}F(z)+f(-1)z^{-1}+f(-2)$$

同理：

$$f(k-3)\leftrightarrow z^{-3}F(z)+f(-1)z^{-2}+f(-2)z^{-1}+f(-3)$$

$$f(k-m)\leftrightarrow z^{-m}F(z)+\sum_{k=0}^{m-1} f(k-m)z^{-k}$$

6.2 z变换的基本性质

2、左移性质

若 $Z[f(k)]=F(z)$ 则：$f(k+1)\leftrightarrow z[F(z)-f(0)]$

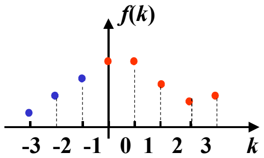
证明：根据z变换的定义 $Z[f(k+1)]=\sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-k}$

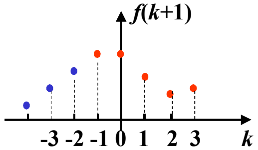
令 $i=k+1$，则有：$Z[f(k+1)]=\sum_{i=1}^{\infty} f(i)z^{-i+1}=z\sum_{i=1}^{\infty} f(i)z^{-i}$

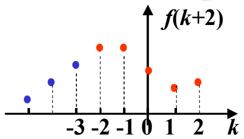
$$=z\{\sum_{i=0}^{\infty} f(i)z^{-i}-f(0)\}=z\{F(z)-f(0)\}$$

所以有：$f(k+1)\leftrightarrow z[F(z)-f(0)]=zF(z)-zf(0)$

6.2 z变换的基本性质







$$f(k+1) \leftrightarrow zF(z) - zf(0)$$

$$\boxed{f(k+2) \leftrightarrow z^2F(z) - z^2 f(0) - zf(1)}$$

$$f(k+3) \leftrightarrow z^3F(z) - z^3 f(0) - z^2 f(1) - f(2)$$

$$Z[f(k+m)] = z^m F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{m-k}$$

6.2 z变换的基本性质

4、时域卷积定理

若 $Z[f_1(k)]=F_1(z)$ $Z[f_2(k)]=F_2(z)$ 则 $Z[f_1(k)*f_2(k)]=F_1(z)F_2(z)$

证明：$Z[f_1(k)*f_2(k)] = Z[\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m) f_2(k-m)]$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{[\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m) f_2(k-m)] z^{-k}\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{f_1(m)[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_2(k-m) z^{-k}]\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{f_1(m) \cdot z^{-m} F_2(z)\}$$

$$= F_2(z) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{f_1(m) \cdot z^{-m}\} = F_2(z) F_1(z)$$

6.2 z变换的基本性质

3、z域微分（序列线性加权）

若 $Z[f(k)]=F(z)$

则 $\boxed{Z[kf(k)] = (-z)\dfrac{dF(z)}{dz}}$

证明：$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$

上式两边对z求导，得：

$$\frac{dF(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)(-k) z^{-k-1}$$

$$= -z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} kf(k) \cdot z^{-k}$$

$$\therefore \quad Z[kf(k)] = (-z)\frac{dF(z)}{dz}$$

例6.2-6 求$k \cdot u(k)$的z变换

解：$\because u(k) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-1}$

$$k \cdot u(k) \leftrightarrow (-z)\frac{d}{dz}[\frac{z}{z-1}]$$

$$ku(k) \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}$$

6.3 z反变换

$$\begin{array}{r} z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots \\ z^2-2z+1\overline{)\,z\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{z-2+z^{-1}} \\ 2-z^{-1} \\ \underline{2-4z^{-1}+2z^{-2}} \\ 3z^{-1}-2z^{-2} \\ \underline{3z^{-1}-6z^{-2}+3z^{-3}} \\ 4z^{-2}-3z^{-3} \\ \cdots\cdots \end{array}$$

$$\therefore F(z)=z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k}$$

所以原函数为$f(k)=ku(k)$

1、幂级数展开法（长除法）

由z变换的定义

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}=f(0)+f(1)z^{-1}+f(2)z^{-2}+\cdots$$

只要把$F(z)$在给定的收敛域内按z^{-1}的幂展开，则级数的系数就是序列$f(k)$的值。

例6.3-1　已知 $F(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$　求$f(k)$

解：将$F(z)$的分子、分母按z的降幂排列 $F(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+1}$

2、部分分式展开法

常用的z变换对为：

$$\delta(k)\leftrightarrow 1$$

$$a^k \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$$

所以对$F(z)$部分分式展开时，整理成形如$\dfrac{z}{z-a}$ 的形式

步骤：

1. 将$F(z)$除以z，得到$\dfrac{F(z)}{z}$；
2. 将$\dfrac{F(z)}{z}$展成部分分式；
3. 将展开的部分分式乘以z，得到$F(z)$的表达式；
4. 对各分式进行z反变换得到原序列$f(k)$。

6.3 z反变换

例6.3-2 已知 $F(z)=\frac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$ 试求**F(z)**的反变换

解：$F(z)=\frac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$

$$=\frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$

$$\therefore \frac{F(z)}{z}=\frac{z}{(z-1)(z-0.5)}$$

$$=\frac{A_1}{(z-1)}+\frac{A_2}{(z-0.5)}$$

$$A_1=\left[(z-1)\frac{F(z)}{z}\right]_{z=1}=2$$

$$A_2=\left[(z-0.5)\frac{F(z)}{z}\right]_{z=0.5}=-1$$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{2}{z-1}+\frac{-1}{z-0.5}$$

$$\therefore\ F(z)=\frac{2z}{z-1}+\frac{-1\cdot z}{z-0.5}$$

原序列$f(k)=2u(k)-(0.5)^k u(k)$

6.3 z反变换

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{-2}{z-2}+\frac{-4}{z-3}+\frac{-2}{(z-3)^2}+\frac{3}{(z-3)^3}$$

$$F(z)=\frac{-2z}{z-2}+\frac{-4z}{z-3}+\frac{-2z}{(z-3)^2}+\frac{3z}{(z-3)^3}$$

$\boxed{2^k\leftrightarrow\frac{z}{z-2}}$ $\boxed{3^k\leftrightarrow\frac{z}{z-3}}$ 利用z域微分性求$\frac{z}{(z-3)^2}$、$\frac{z}{(z-3)^3}$的原函数。

$$k\cdot 3^{k-1}\leftrightarrow\frac{z}{(z-3)^2}\qquad k\cdot(k-1)\cdot 3^{k-2}\leftrightarrow\frac{2z}{(z-3)^3}$$

$$f(k)=-2\cdot 2^k-4\cdot 3^k-2k\cdot 3^{k-1}+\frac{3}{2}k(k-1)3^{k-2}$$

6.3 z反变换

例6.3-3 已知 $F(z)=\frac{z^2}{(z-2)(z-3)^3}$，试求**F(z)**的反变换

解：$\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{(z-2)(z-3)^3}=\frac{A}{(z-2)}+\frac{k_1}{(z-3)}+\frac{k_2}{(z-3)^2}+\frac{k_3}{(z-3)^3}$

$$A=\left[(z-2)\frac{F(z)}{z}\right]_{z=1}=-2\qquad k_3=\left[(z-3)^3\frac{F(z)}{z}\right]_{z=3}=3$$

$$k_2=\{\frac{d}{dz}\left[(z-3)^3\frac{F(z)}{z}\right]\}|_{z=3}=-2\qquad k_1=\frac{1}{2!}\{\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-3)^3\frac{F(z)}{z}\right]\}|_{z=3}=-4$$

6.4 离散系统的z域分析

若离散系统的差分方程为：

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_0y(k)$$
$$=b_mf(k+m)+b_{m-1}f(k+m-1)+\cdots+b_0f(k)$$

令初值为零，两边取z变换，有：

$$(z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0)Y(z)=(b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1z+b_0)F(z)$$

$$\therefore H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}$$

♣ 系统函数$H(z)$与系统传输算子间$H(E)$的关系

$$H(z)=H(E)|_{E=z}$$

$$f(k)\rightarrow\boxed{\text{零状态离散系统}}\rightarrow y_f(k)$$

$y_f(k)$ —零状态响应

$y_f(k)=h(k)*f(k)$

两边取z变换，有：$Y_f(z)=H(z)F(z)$

离散系统的系统传递函数

$$\therefore H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}$$

例6.4-1 根据下面描述离散系统的不同形式，求各系统传递函数$H(z)$

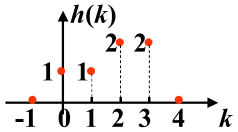
(1) $y(k)-2y(k-1)-5y(k-2)+6y(k-3)=f(k)$

系统传输算子 $H(E)=\dfrac{1}{1-2E^{-1}-5E^{-2}+6E^{-3}}$

系统传递函数 $H(z)=\dfrac{1}{1-2z^{-1}-5z^{-2}+6z^{-3}}$

6.4 离散系统的z域分析

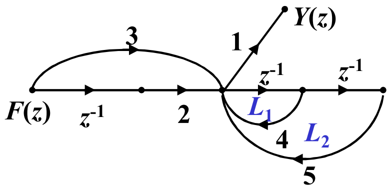
(2)单位响应$h(k)$波形如图所示



$$h(k)=\delta(k)+\delta(k-1)+2\delta(k-2)+2\delta(k-3)$$

$$H(z)=1+z^{-1}+2z^{-2}+2z^{-3}$$

(3)系统的信号流图如图所示



$$H(z)=\frac{3\times1+2z^{-1}\times1}{1-4z^{-1}-5z^{-2}}$$

6.4 离散系统的z域分析

例6.4-3 已知描述系统的差分方程为$y(k)-\frac{1}{3}y(k-1)=f(k)$

系统的零状态响应$y_f(k)=3[2^{-k}-3^{-k}]u(k)$，求输入$f(k)$=?

解：求系统传递函数

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

零状态响应

$$Y_f(z)=\frac{3z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{3z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$\because F(z)=\frac{Y_f(z)}{H(z)}=\frac{1}{2(z-\frac{1}{2})}$$

所以输入$f(k)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{k-1}u(k-1)$

6.4 离散系统的z域分析

例6.4-2 已知描述系统的差分方程为

$$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)+2f(k-1)$$

激励为$f(k)=3(-2)^k u(k)$，求系统的零状态响应$y_f(k)$

解：系统传递函数$H(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}=\frac{z^2+2z}{z^2-z-2}=\frac{z(z+2)}{(z-2)(z+1)}$

输入 $F(z)=\frac{3z}{z+2}$

零状态响应 $Y_f(z)=F(z)H(z)=\frac{3z}{z+2}\cdot\frac{z(z+2)}{(z-2)(z+1)}=\frac{3z^2}{(z-2)(z+1)}$

$Y_f(z)=\frac{2z}{z-2}+\frac{z}{z+1}$ $\quad\therefore y_f(k)=[2\times2^k+(-1)^k]u(k)$

6.4 离散系统的z域分析

例6.5-4 已知某离散系统输入为$f_1(k)=u(k)$时，零状态响应为$y_{1f}(k)=3^k u(k)$。求输入为$f_2(k)=2(k+1)u(k)$时系统的零状态响应$y_{2f}(k)$。

解：$f_1(k)=u(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-1}$

$y_{1f}(k)=3^k u(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-3}$

系统传递函数

$$H(z)=\frac{Y_{1f}(z)}{F_1(z)}=\frac{z-1}{z-3}$$

$2u(k)\leftrightarrow\frac{2z}{z-1}$ $\quad 2ku(k)\leftrightarrow\frac{2}{(z-1)^2}$

$$\therefore F_2(z)=\frac{2z}{(z-1)^2}+\frac{2z}{z-1}$$

零状态响应$Y_{2f}(z)=H(z)F_2(z)$

$$=\frac{z-1}{z-3}\cdot[\frac{2z}{(z-1)^2}+\frac{2z}{z-1}]$$

$$=\frac{3z}{z-3}-\frac{z}{z-1}$$

$$\therefore y_{2f}(k)=(3\cdot3^k-1)u(k)$$

6.4 离散系统的z域分析

例6.5-5 已知描述系统的差分方程为 $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)$

初始条件为 $y(-1)=0$，$y(-2)=3$；激励为 $f(k)=6u(k)$，求系统响应 $y(k)$

解:对差分方程两边取z变换

$$Y(z)+3[z^{-1}Y(z)+y(-1)]+2[z^{-2}Y(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)]=F(z)$$

$$Y(z)=\frac{F(z)-[3y(-1)+2z^{-1}y(-1)+2y(-2)]}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$$

将 $F(z)=\frac{6z}{z-1}$ 和初始条件代入，得到

$$Y(z)=\frac{6z^2}{(z-1)(z+1)(z+2)}=\frac{z}{z-1}+\frac{3z}{z+1}-\frac{4z}{z+2}$$

系统响应 $y(k)=u(k)+3\cdot(-1)^k-4\cdot(-2)^k \quad k\geq0$

6.4 离散系统的z域分析

2、求零状态响应(用z域法求)

$$F(z)=Z[2^k u(k)]=\frac{z}{z-2} \qquad |z|>2$$

$$Y(z)=H(z)F(z)=\frac{3z(z-2)}{(z-0.2)(z-0.5)}\cdot\frac{z}{z-2}$$

$$=z[\frac{3z}{(z-0.2)(z-0.5)}]=\frac{-2z}{z-0.2}+\frac{5z}{z-0.5}$$

求z反变换有：$y_f(k)=[-2\times0.2^k+5\times0.5^k]u(k)$

3、求全响应

$y(k)=y_f(k)+y_x(k)=[-2\times0.2^k+5\times0.5^k]+[12\times(0.5)^k-10\times(0.2)^k]$

$=17\times(0.5)^k-12\times(0.2)^k \quad k\geq0$

6.4 离散系统的z域分析

例6.5-6 已知系统传递函数为 $H(z)=\frac{3z(z-2)}{(z-0.2)(z-0.5)}$

输入 $f(k)=2^k u(k)$，$y_x(0)=2$，$y_x(1)=4$；求输出 $y(k)$

解：1、求零输入响应

用时域法求。$H(E)$的极点为 $\lambda_1=0.5 \quad \lambda_2=0.2$

零输入响应分量 $y(k)=c_1(0.5)^k+c_2(0.2)^k$

由初值确定 c_1、c_2 $\begin{cases} y_x(0)=c_1+c_2=2 \\ y_x(1)=0.5c_1+0.2c_2=4 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} c_1=12 \\ c_2=-10 \end{cases}$

$\therefore y_x(k)=12\times(0.5)^k-10\times(0.2)^k \quad k\geq0$

6.4 离散系统的z域分析

♣ 稳定性

如果 $|f(k)|\leqslant M_f \quad |y_f(k)|\leqslant M_y$ （M_f、M_y为有界常数）

则该系统是稳定的。

充分必要条件: $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|\leqslant M$ （为有界正常数）

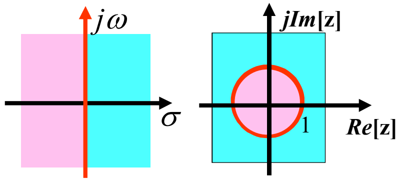
$$\Uparrow$$

$$\lim_{k\to\infty}h(k)=0$$

分为：渐进稳定、临界稳定、不稳定

6.4 离散系统的z域分析

*s*平面与*z*平面关系



系统传递函数的极点

① 全位于单位圆内时，-----稳定系统。

② 有位于单位圆外或有重极点位于单位圆上时，------不稳定系统。

③ 有单极点位于单位圆上，其余全位于单位圆内时，

------临界稳定系统。