第二章　电阻电路的等效变换

引言

- 电阻电路 ⟹ 仅由电源和线性电阻构成的电路

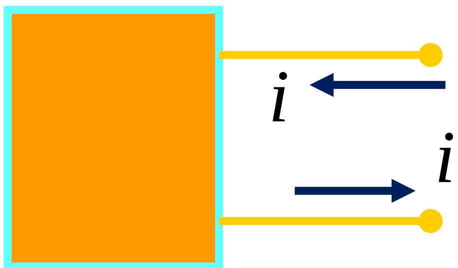
- 分析方法 ⟹ （1）欧姆定律和基尔霍夫定律是分析电阻电路的依据；

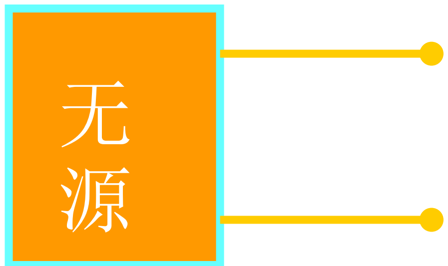
（2）等效变换的方法，也称化简的方法

几个概念

1. 二端网络

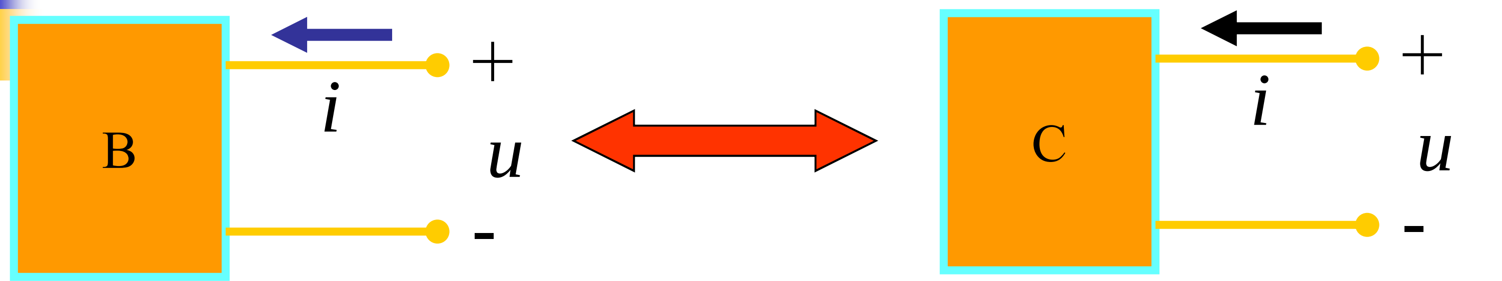
任何一个复杂的电路，向外引出两个端钮，且从一个端子流入的电流等于从另一端子流出的电流，则称这一电路为二端网络（电路）。



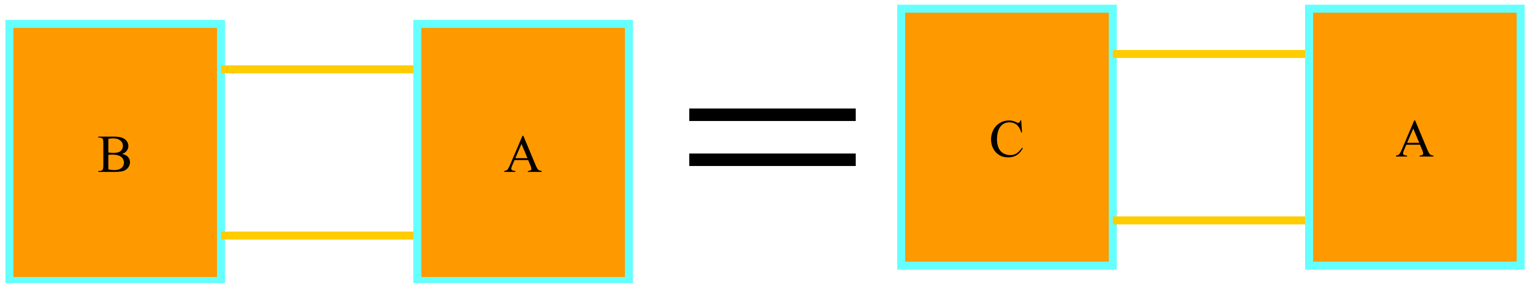


2. 二端电路等效的概念

两个二端电路，端口具有相同的电压、电流关系，则称它们是等效的电路。



对A电路中的电流、电压和功率而言，满足



明确

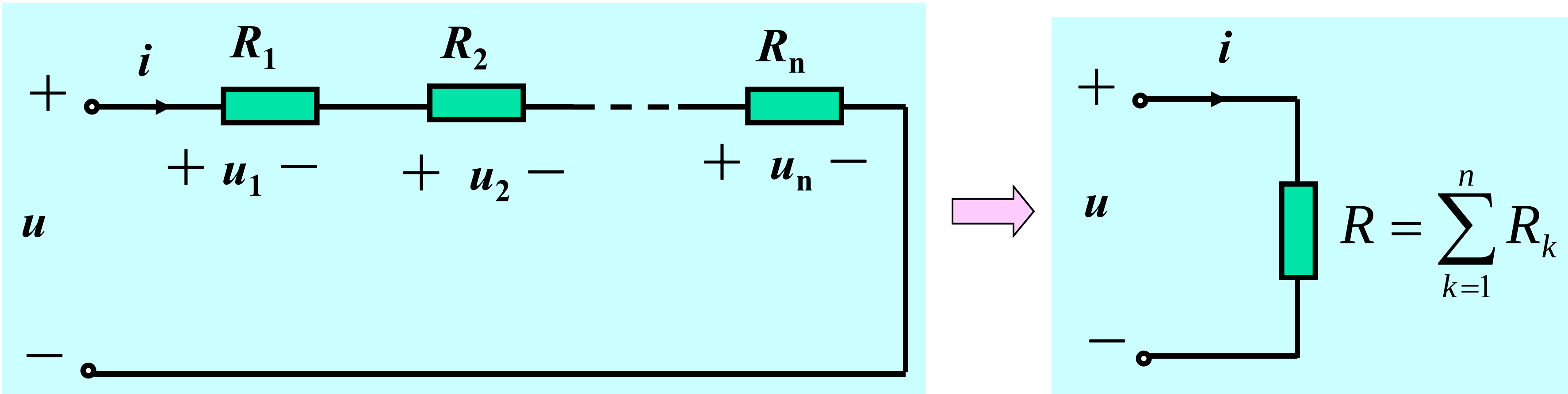
（1）电路等效变换的条件 → 两电路具有相同的VCR（电压电流阻抗）

（2）电路等效变换的对象 → 未变化的外电路A中的电压、电流和功率

（3）电路等效变换的目的 → 化简电路，方便计算

§2-1 电阻的串联、并联

一、电阻的串联



KVL $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

所以 $u = R_1 i + R_2 i + \cdots + R_n i$

$= (R_1 + R_2 + \cdots + R_n) i = Ri$

R:等效电阻、输入电阻

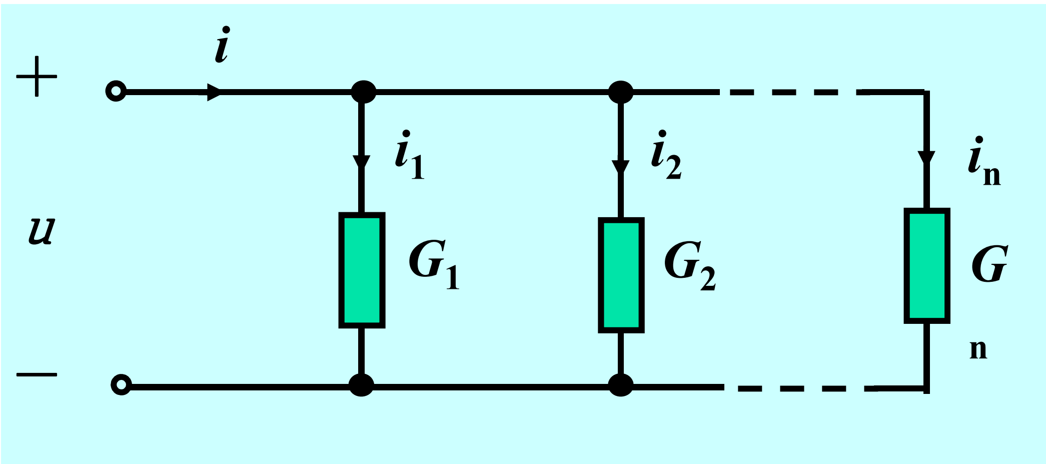
串联电路特点——分压： $u_k = R_k i = \dfrac{R_k}{R} u$

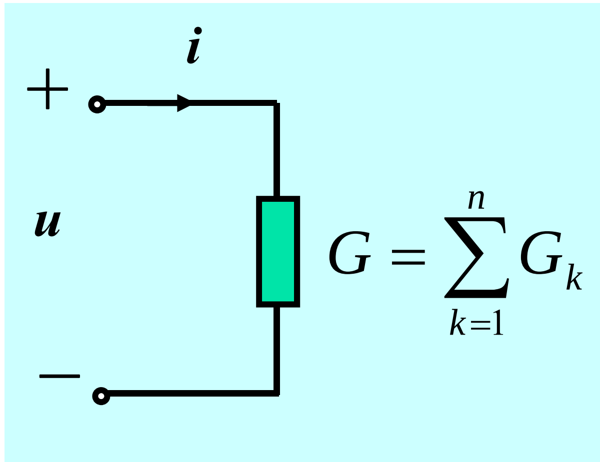
电路吸收的总功率：

$$p = ui = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)i$$

$$= p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$$

二、电阻的并联





KCL $$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n = \sum_{k=1}^{n} i_k$$

$$i = (G_1 + G_2 + \cdots + G_n)u = Gu$$

$$G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n = \sum_{k=1}^{n} G_k$$

G：等效电导、输入电导

并联电路特点——分流： $$i_k = G_k u = \frac{G_k}{G} i$$

电路吸收的总功率： $$p = ui = (i_1 + i_2 + \cdots + i_n)u$$

$$= p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$$

- 问题：采用等效电阻来计算电路总功率是否可行？

串联总功率 $p=R_{eq}i^2=(R_1+R_2+\ldots+R_n)\,i^2$

$$=R_1i^2+R_2i^2+\ldots+R_ni^2$$

$$=p_1+p_2+\ldots+p_n$$

并联总功率 $p=G_{eq}u^2=(G_1+G_2+\ldots+G_n)\,u^2$

$$=G_1u^2+G_2u^2+\ldots+G_nu^2$$

$$=p_1+p_2+\ldots+p_n$$

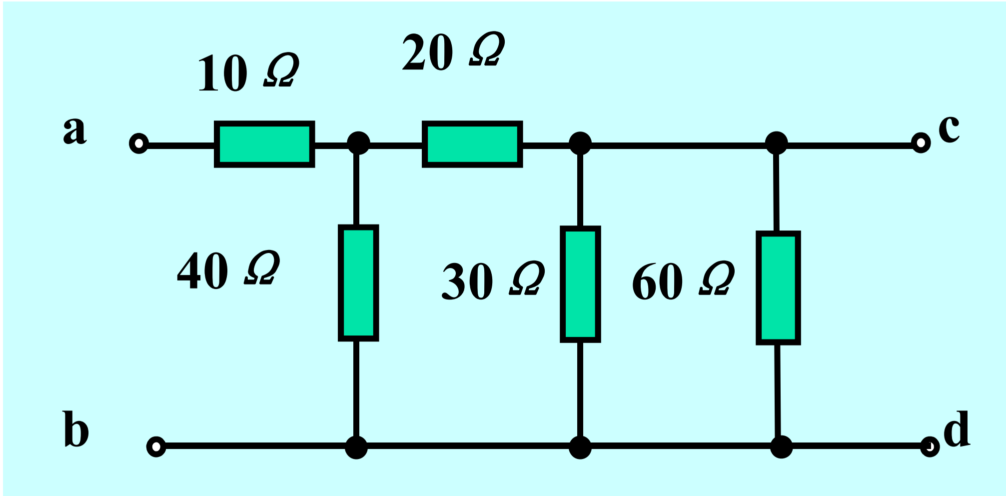
（1） 电阻串连时，各电阻消耗的功率与电阻大小成正比, 电阻并连时，各电阻消耗的功率与电阻大小成反比。

（2） 等效电阻消耗的功率等于各串（并）连电阻消耗功率的总和

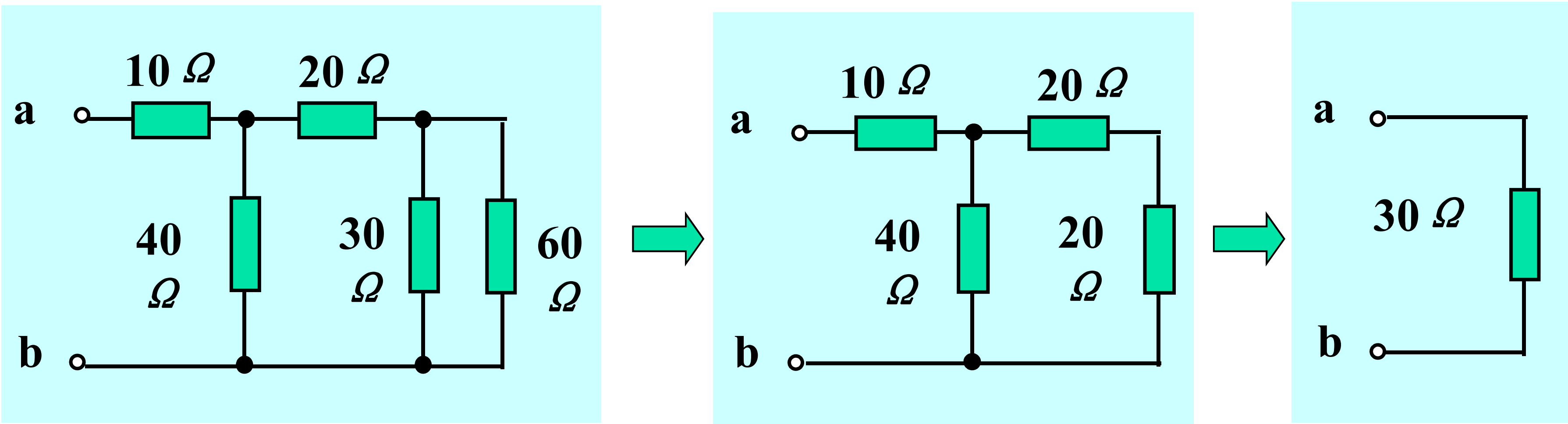
例2—1 电路如图。求：

（1）R_{ab}

（2）R_{cd}

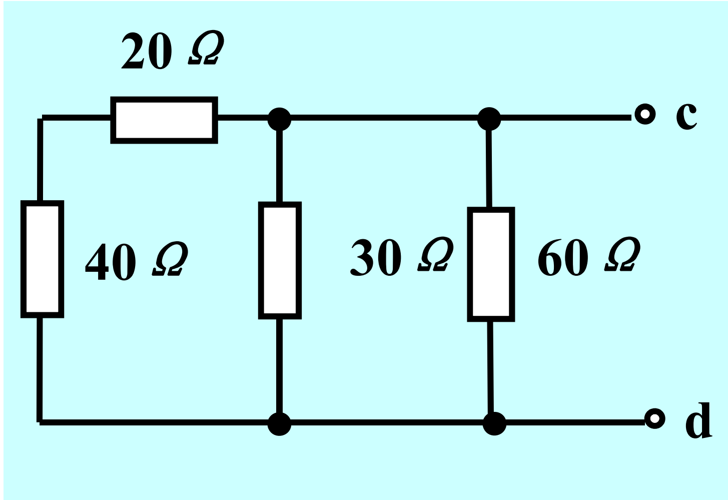


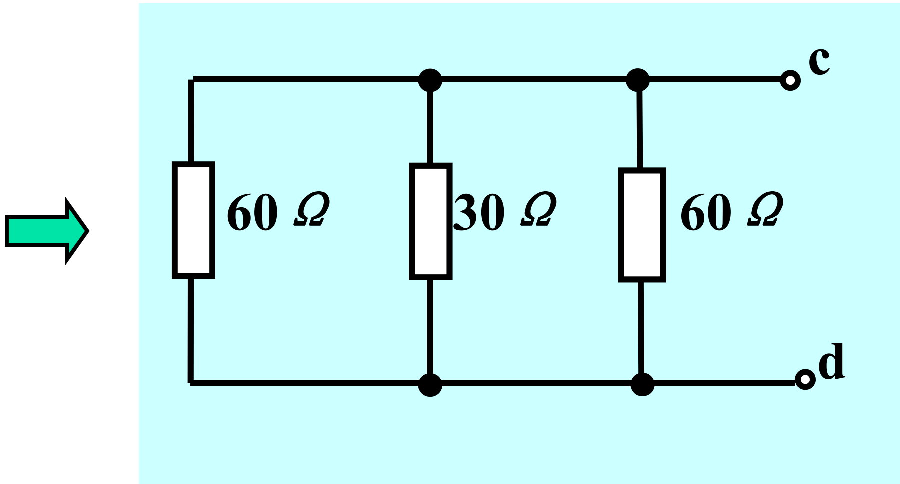
解：（1）求解R_{ab}

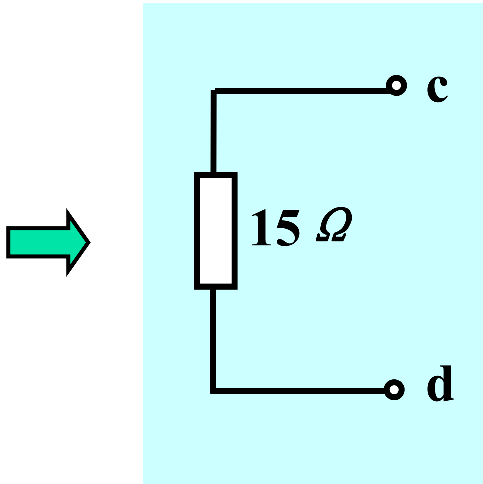


$$\therefore R_{ab} = 30\Omega$$

（2） 求R_{cd}







$$\therefore R_{cd} = 15\Omega$$

例2—2 求惠斯通电桥的平衡条件

解：电桥平衡时

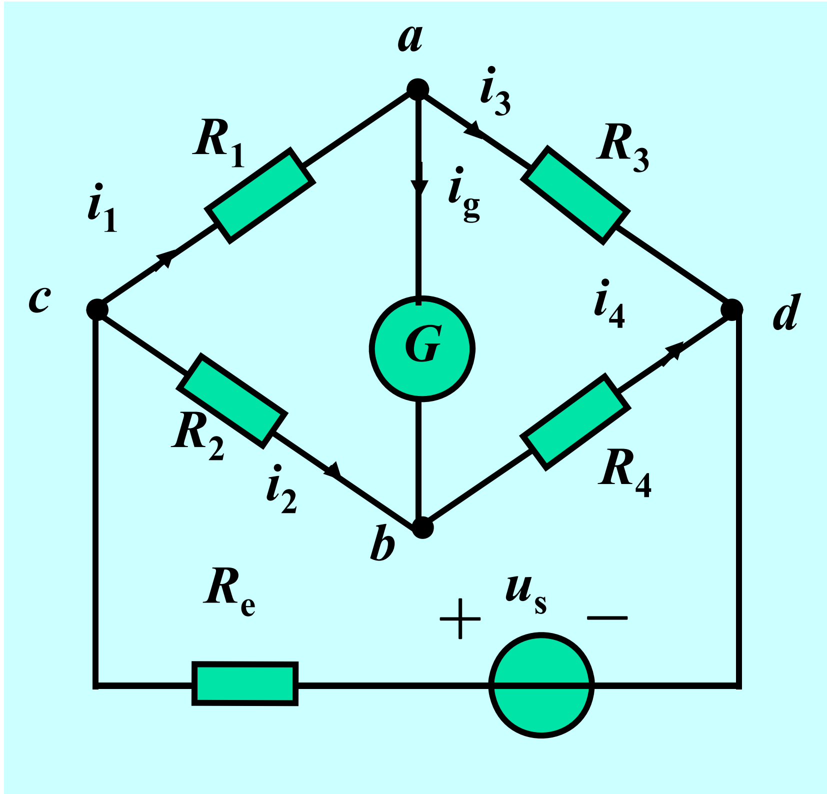
$$i_g = 0, i_1 = i_3, i_2 = i_4$$

另外 $u_{ab} = 0$

所以 $u_{ca} = u_{cb}$

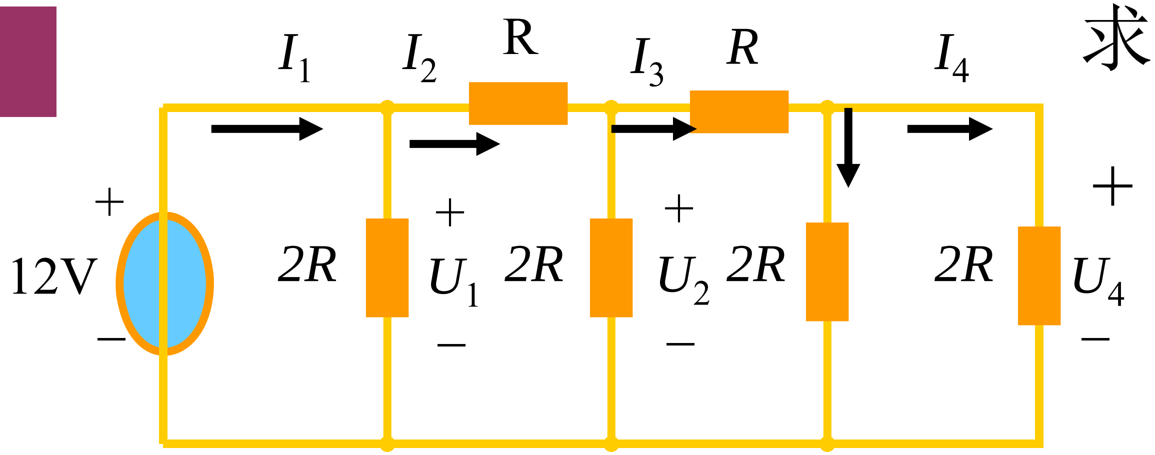
即 $R_1 i_1 = R_2 i_2$

$u_{ad} = u_{bd}$ 即 $R_3 i_3 = R_4 i_4$



故电桥平衡的条件：$\dfrac{R_1}{R_3} = \dfrac{R_2}{R_4}$ 即 $R_1 R_4 = R_2 R_3$

例3



求：I_1，I_4，U_4

解

① 用分流方法做

$$I_4 = \frac{1}{2} I_3 = \frac{1}{4} I_2 = \frac{1}{8} I_1 = \frac{1}{8}\frac{12}{R} = \frac{3}{2R} \qquad I_1 = \frac{12}{R}$$

$$U_4 = I_4 \times 2R = 3\ \text{V}$$

②用分压方法做

$$U_4 = \frac{U_2}{2} = \frac{1}{4} U_1 = 3\ \text{V} \qquad I_4 = \frac{3}{2R}$$

从以上例题可得求解串、并联电路的一般步骤：

（1） 求出等效电阻或等效电导；

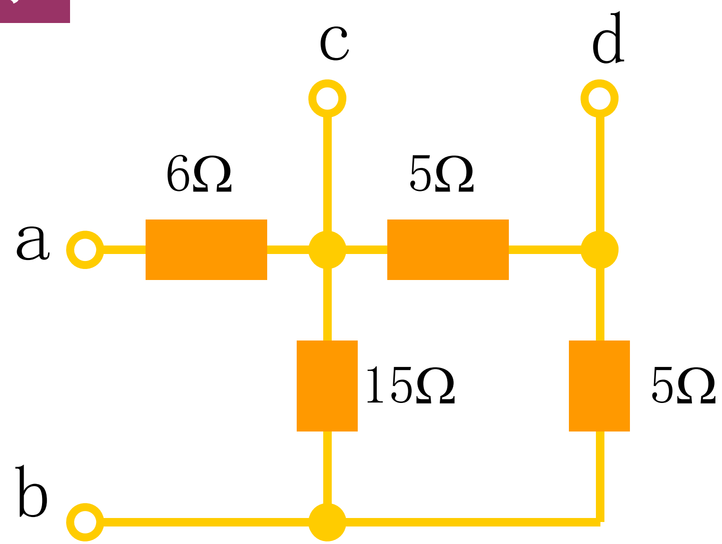
（2）应用欧姆定律求出总电压或总电流；

（3）应用欧姆定律或分压、分流公式求各电阻上的电流和电压

以上的关键在于识别各电阻的串联、并联关系！

例

求：R_{ab}，R_{cd}



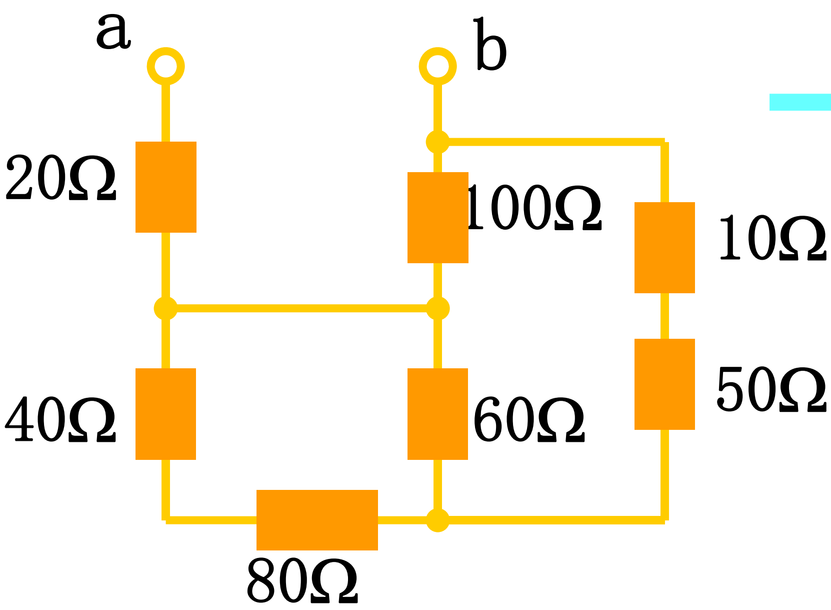
$$R_{ab}=(5+5)//15+6=12\Omega$$

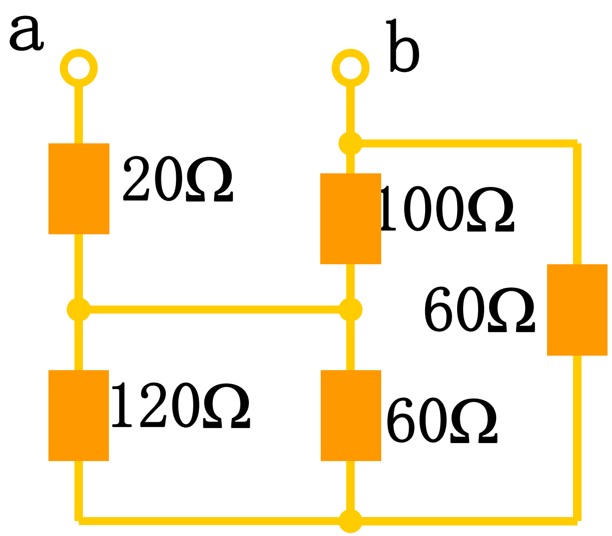
$$R_{cd}=(15+5)//5=4\Omega$$

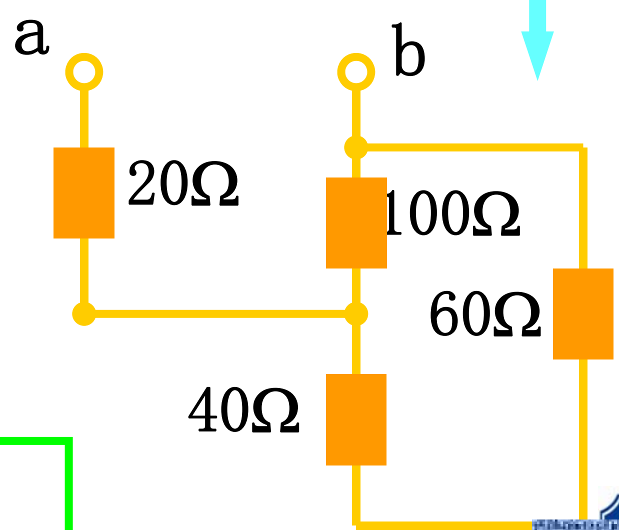
等效电阻针对电路的某两端而言，否则无意义。

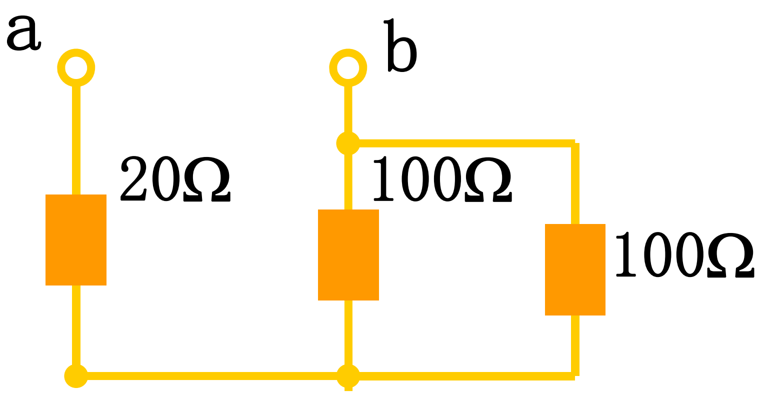
例

求：R_{ab}



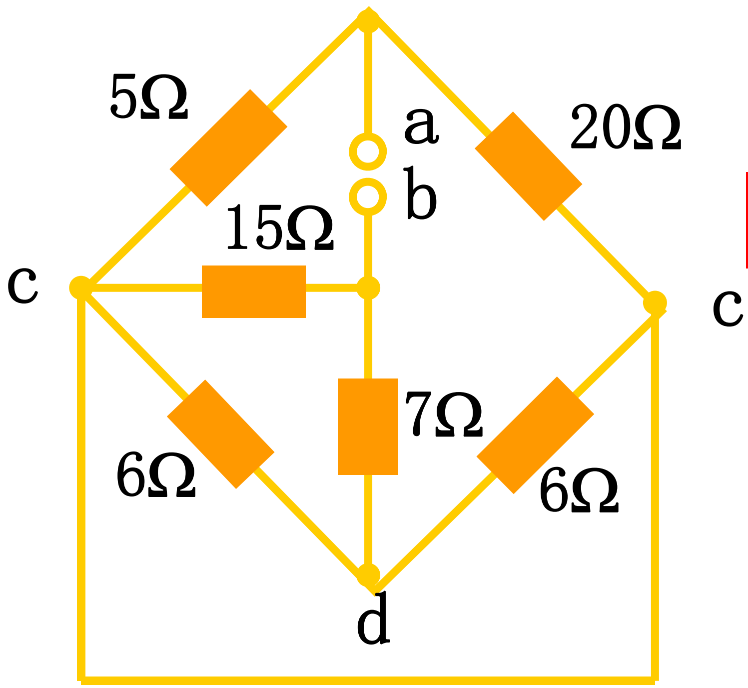




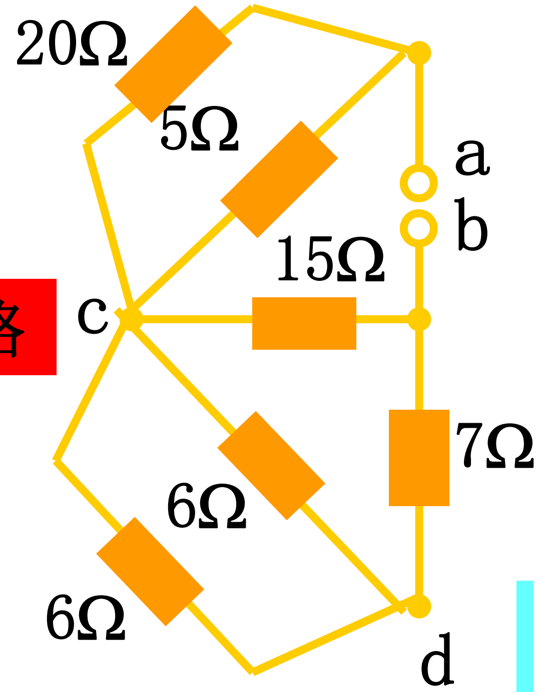


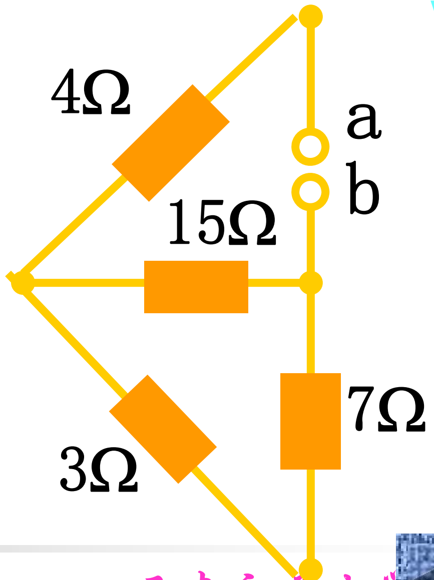
$$\boxed{R_{ab}=70\Omega}$$

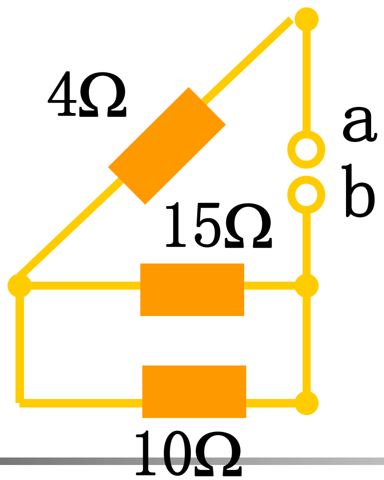
例　求：R_{ab}



缩短无电阻支路







$$\boxed{R_{ab}=10\Omega}$$

§2-2 电阻的三角形（Δ）联接与星形（Y）联接

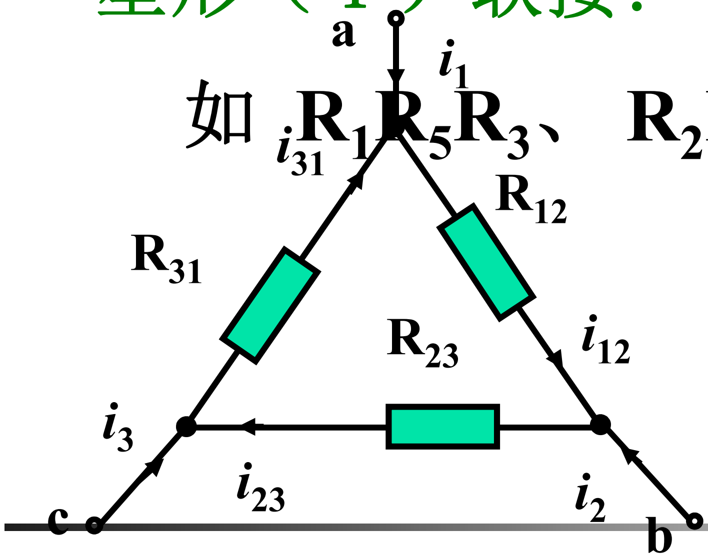
一、电阻的三角形（Δ）与星形（Y）联接

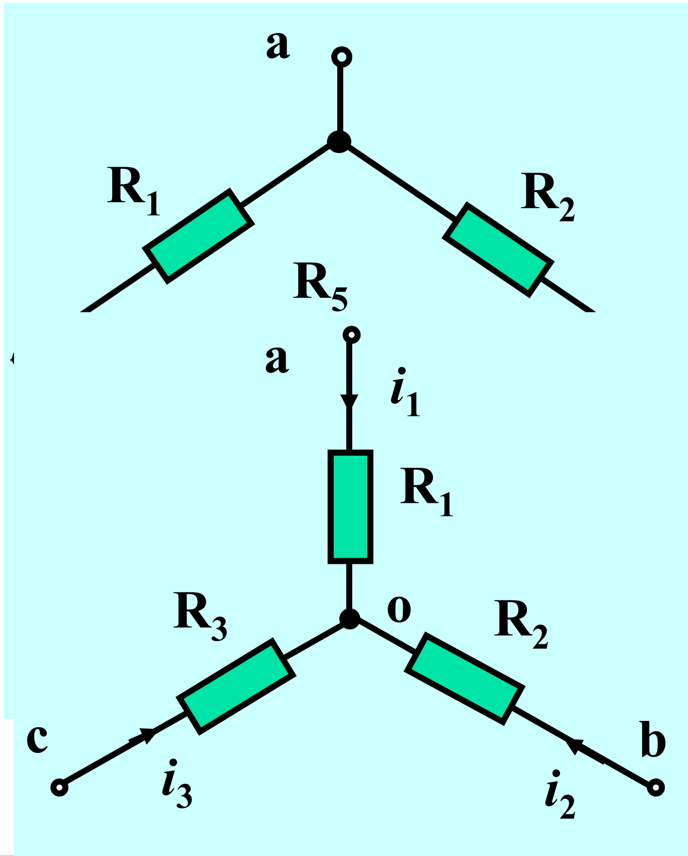
三角形（Δ）联接:

如 $R_1R_2R_5$、$R_3R_4R_5$

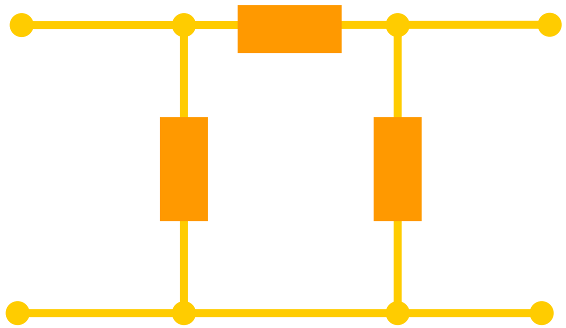
星形（Y）联接:

如 $R_1R_5R_3$、$R_2R_5R_4$

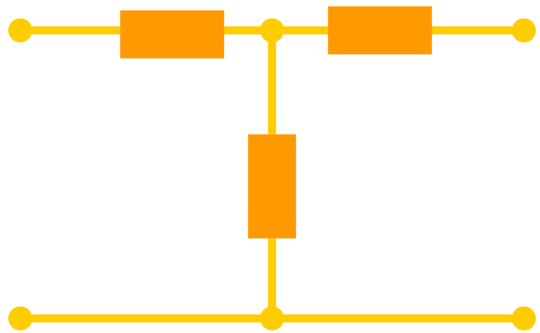




Δ ，Y 网络的变形：



π 型电路 (Δ 型)



T 型电路 (Y、星 型)

这两个电路当它们的电阻满足一定的关系时，能够相互等效

二、Δ联接与Y联接的等效变换

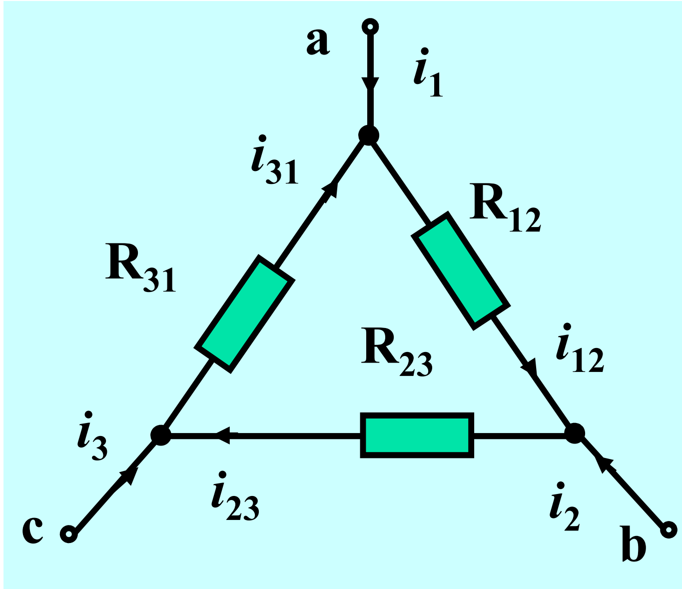
$$Y \rightarrow \Delta$$

已知R_1、R_2、R_3求R_{12}、R_{23}、R_{31}

根据KCL $i_1 = i_{12} - i_{31} = \dfrac{u_{ab}}{R_{12}} - \dfrac{u_{ca}}{R_{31}}$

$$i_2 = i_{23} - i_{12} = \frac{u_{bc}}{R_{23}} - \frac{u_{ab}}{R_{12}}$$

$$i_3 = i_{31} - i_{23} = \frac{u_{ca}}{R_{31}} - \frac{u_{bc}}{R_{23}}$$

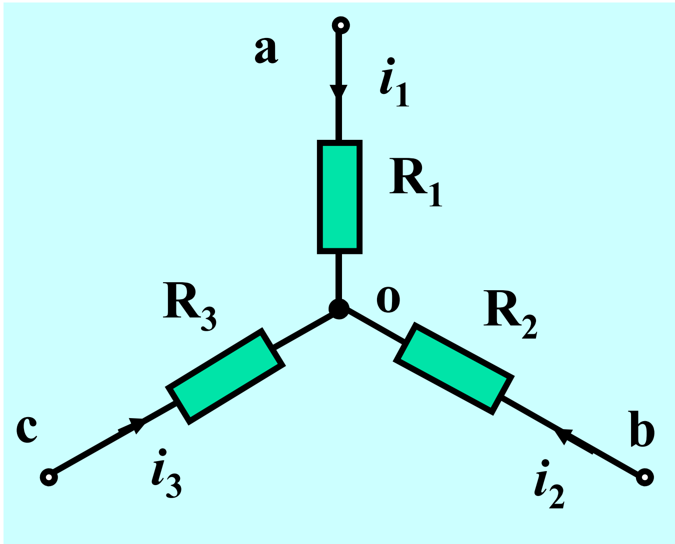


根据KVL $u_{ab} = R_1 i_1 - R_2 i_2$

$$u_{bc} = R_2 i_2 - R_3 i_3$$

$$u_{ca} = R_3 i_3 - R_1 i_1 = -(u_{ab} + u_{bc})$$

另根据KCL $i_1 + i_2 + i_3 = 0$



$$\because i_1 + i_2 + i_3 = 0 \qquad \therefore i_1 = -i_2 - i_3$$

$$\left.\begin{aligned} \text{则 } u_{ca} &= R_3 i_3 - R_1 i_1 = R_3 i_3 + R_1 (i_2 + i_3) \\ &= R_1 i_2 + (R_1 + R_3)\, i_3 \\ u_{bc} &= R_2 i_2 - R_3 i_3 \end{aligned}\right\} \text{联立求解}\, \boldsymbol{i}_3$$

$$i_3 = \frac{u_{ca}}{\dfrac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}} - \frac{u_{bc}}{\dfrac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}}$$

对应 $i_3 = \dfrac{u_{ca}}{R_{31}} - \dfrac{u_{bc}}{R_{23}}$

$$i_1 = \frac{u_{ab}}{\dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3}} - \frac{u_{ca}}{\dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}}$$

$$i_2 = \frac{u_{bc}}{\dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}} - \frac{u_{ab}}{\dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3}}$$

$$i_3 = \frac{u_{ca}}{\dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}} - \frac{u_{bc}}{\dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}}$$

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}$$

$$R_{31} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}$$

同理

$$R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

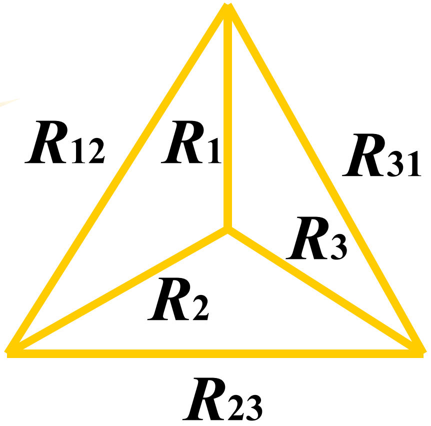
$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

特例：若三个电阻相等(对称)，则有

$$R_\Delta = 3R_Y$$

外大内小



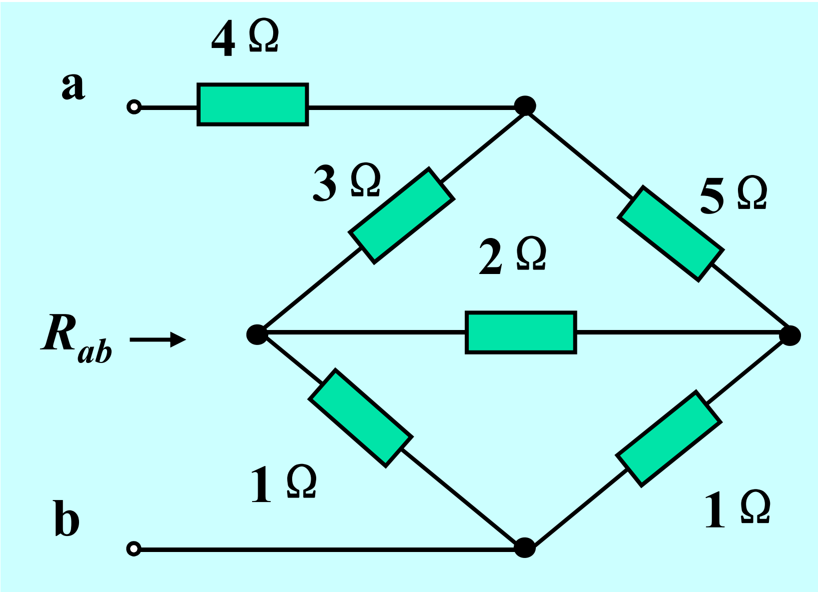
注意

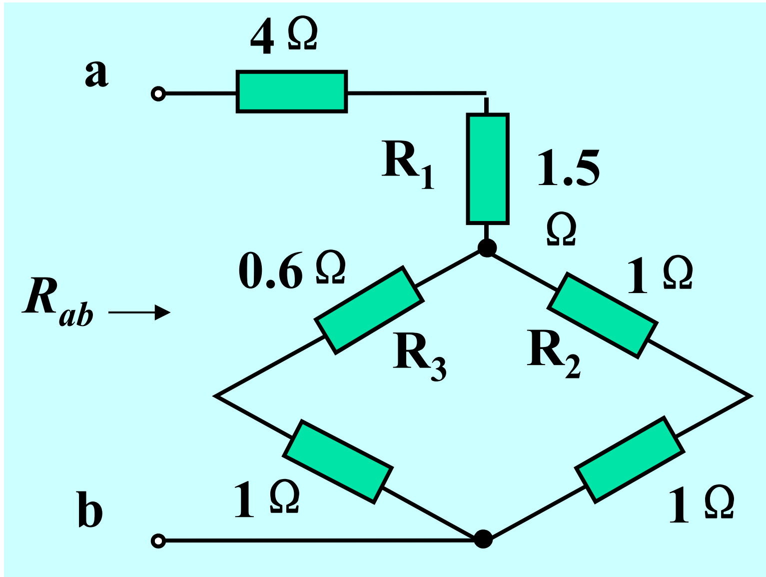
(1) 等效对外部(端钮以外)有效。

(2) 等效电路与外部电路无关。

(3) 用于简化电路

例： 求R_{ab} 。





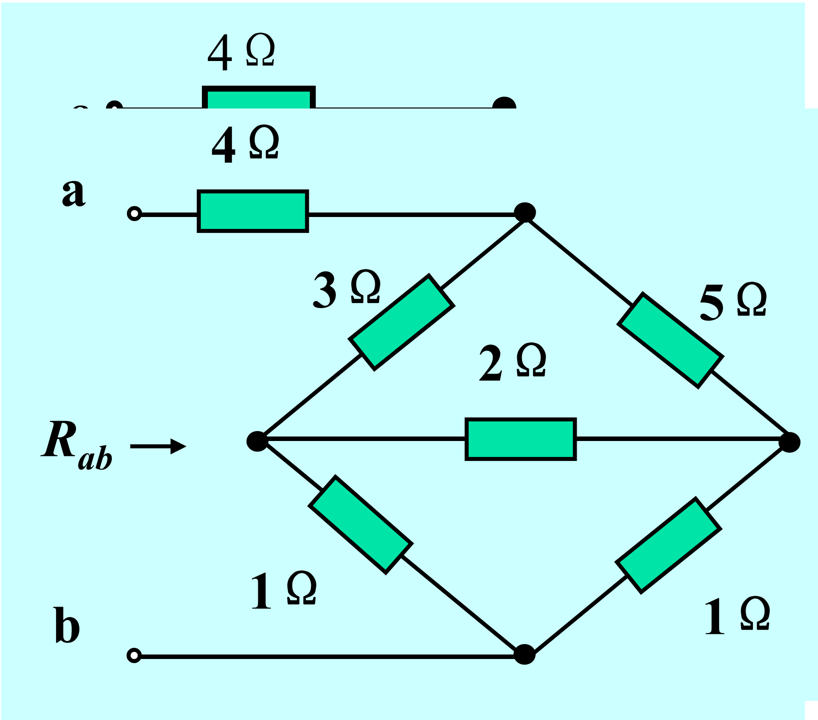
解:

$$R_1 = \frac{3\times5}{3+5+2} = 1.5\Omega \qquad R_2 = \frac{2\times5}{3+5+2} = 1\Omega$$

$$R_3 = \frac{2\times 3}{3+5+2} = 0.6\Omega$$

$$R_{ab} = 4 + 1.5 + \frac{2\times 1.6}{2+1.6} = 5.5 + 0.89 = 6.39\Omega$$

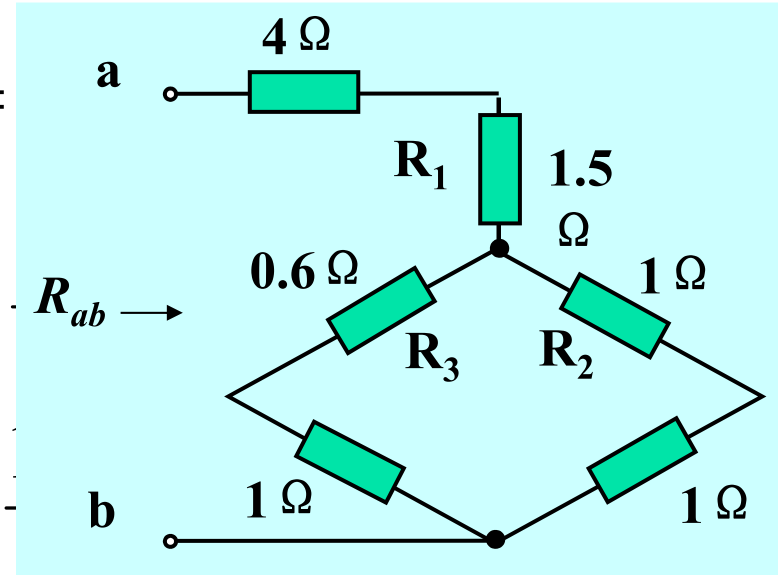
另解 Y → Δ 变换



$R_1 =$

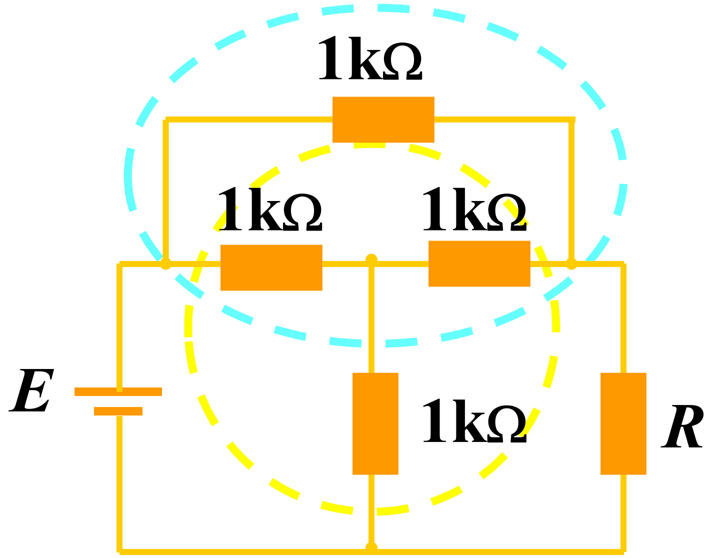
$R_2 =$

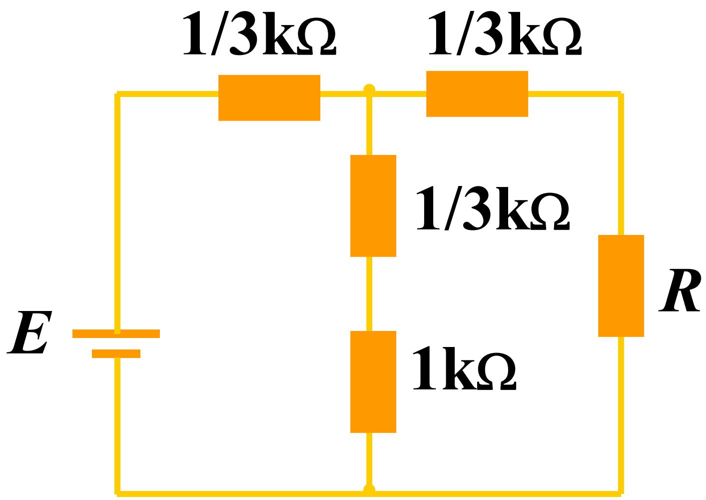
$R_3 =$

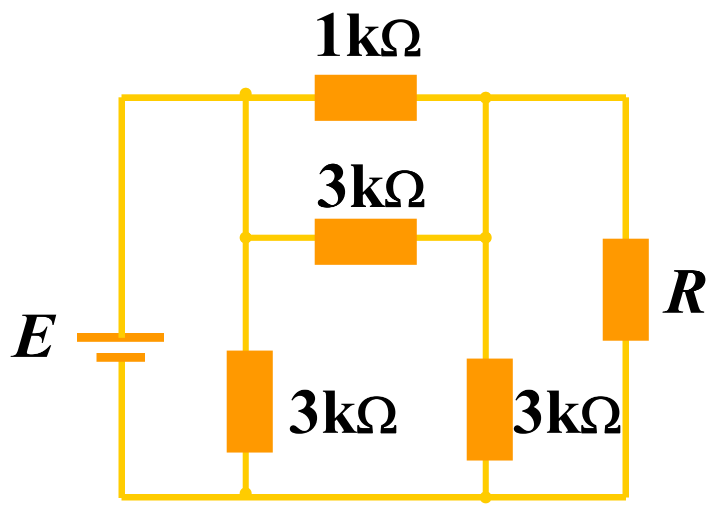


$$R_{ab} = 4 + \frac{5.5\times 4.224}{5.5+4.224} = 6.39\Omega$$

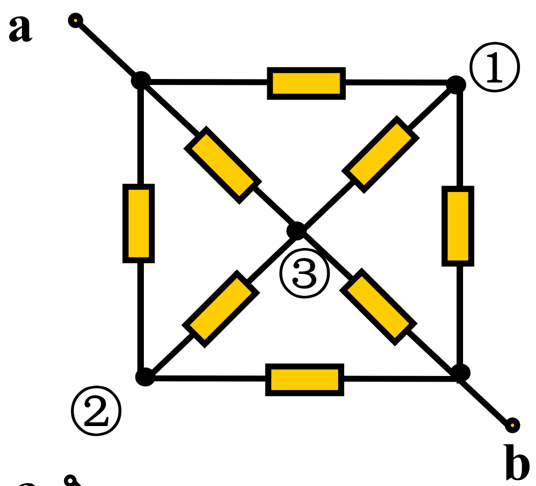
例 桥 T 电路

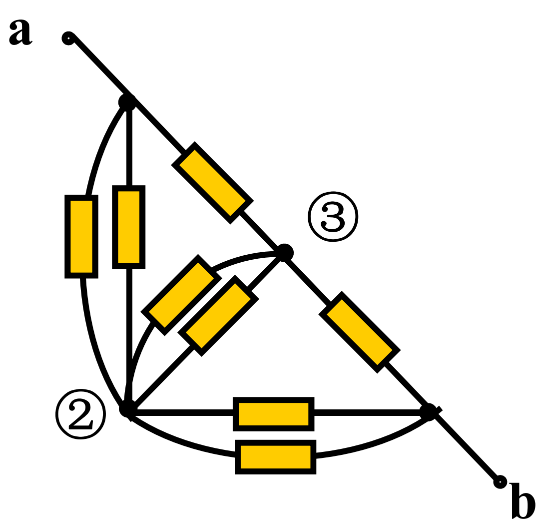


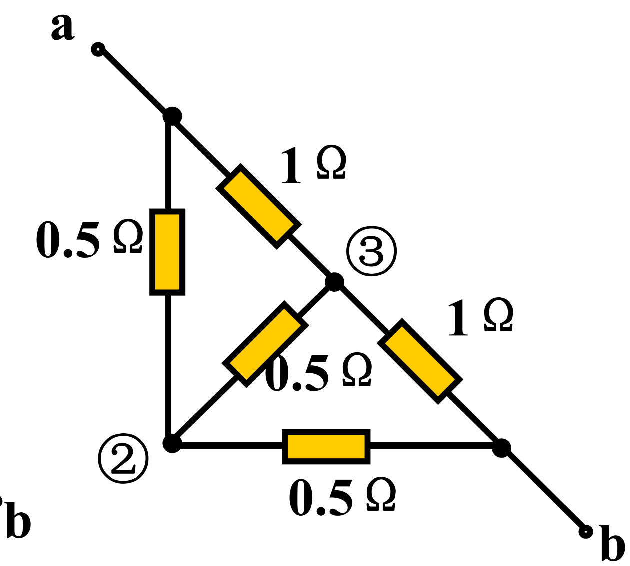


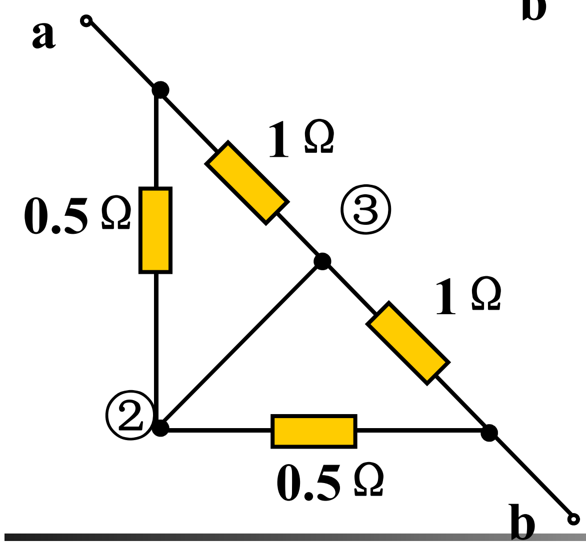


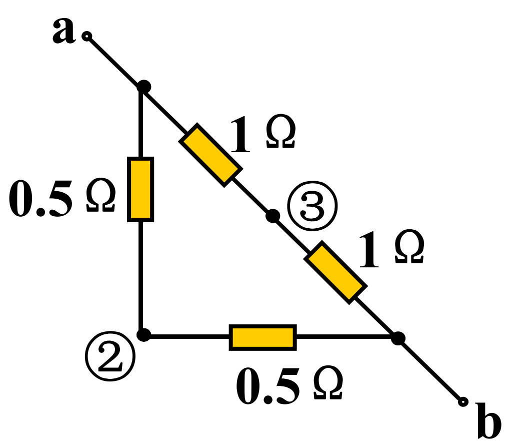
例： 电路如图，各电阻的阻值均为1Ω。试求*ab*间的等效电阻。





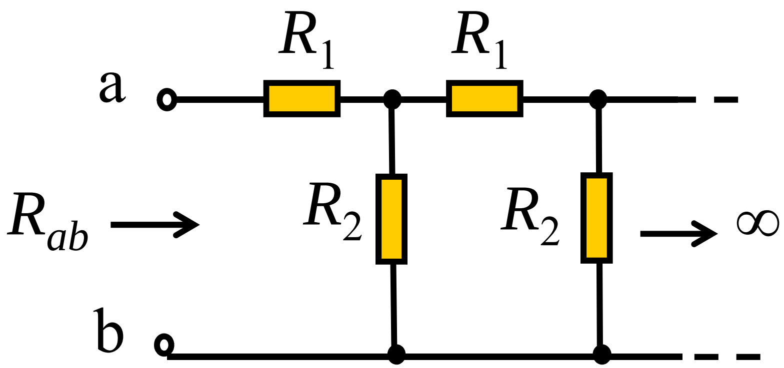


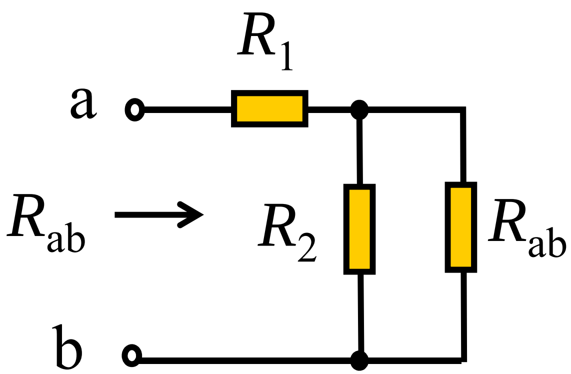




$$R_{ab}=\frac{2}{3}\Omega$$

例： 图示电路为一个无限链形网络，每个环节由R_1与R_2组成，求输入电阻R_{ab}。





解： $R_{ab} = R_1 + \dfrac{R_2 R_{ab}}{R_2 + R_{ab}}$， $R_{ab}^{\ 2} - R_1 R_{ab} - R_1 R_2 = 0$

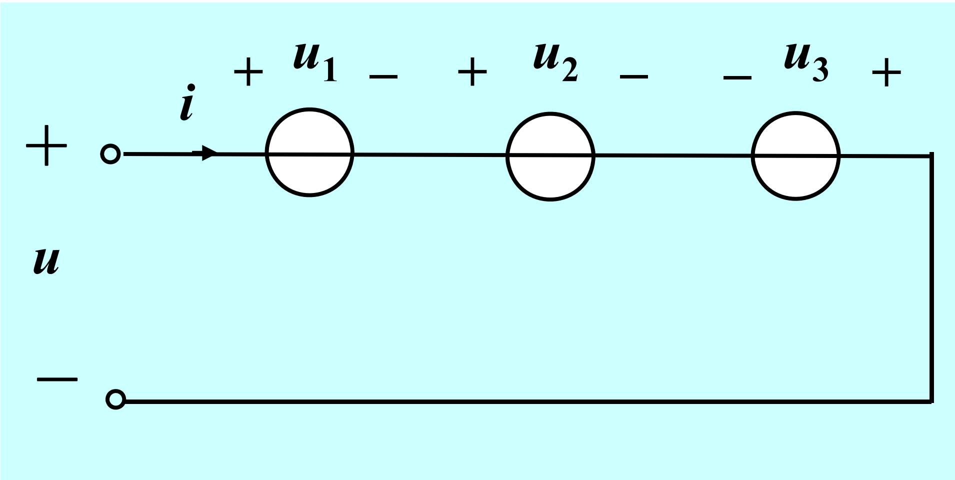
$$R_{ab} = \frac{R_1 \pm \sqrt{R_1^{\ 2} + 4R_1 R_2}}{2}$$

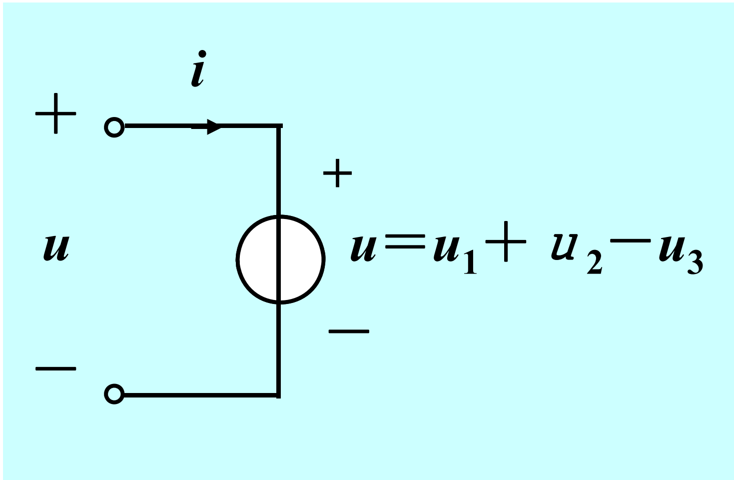
由于R_{ab} >0, 所以 $R_{ab} = \dfrac{R_1 + \sqrt{R_1^{\ 2} + 4R_1 R_2}}{2}$

§2-3　电源的串联、并联

一、电压源的串联与并联

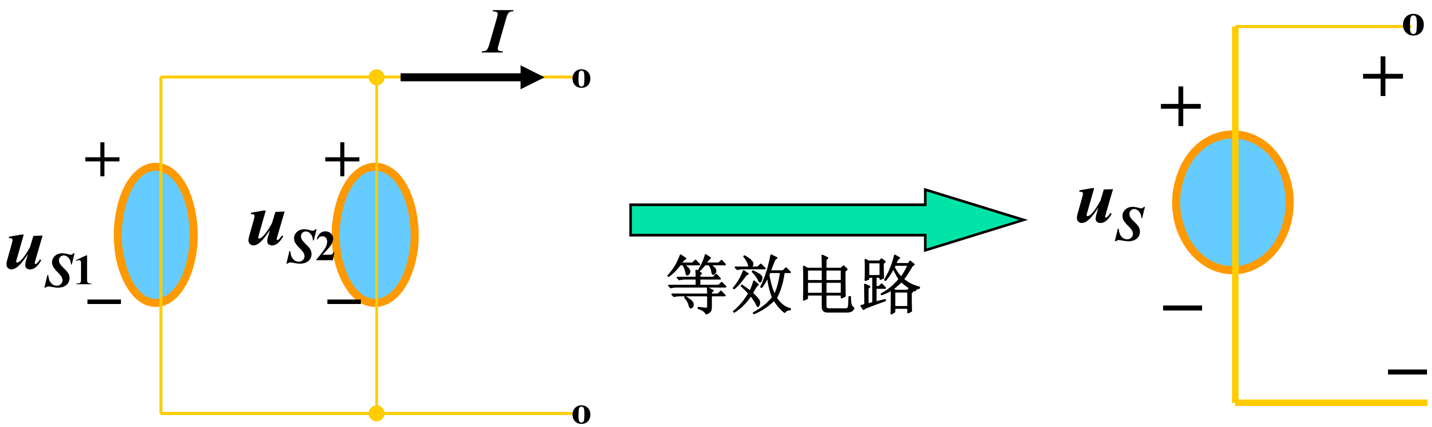
电压源的串联：





根据KVL　　$u = u_1 + u_2 - u_3$

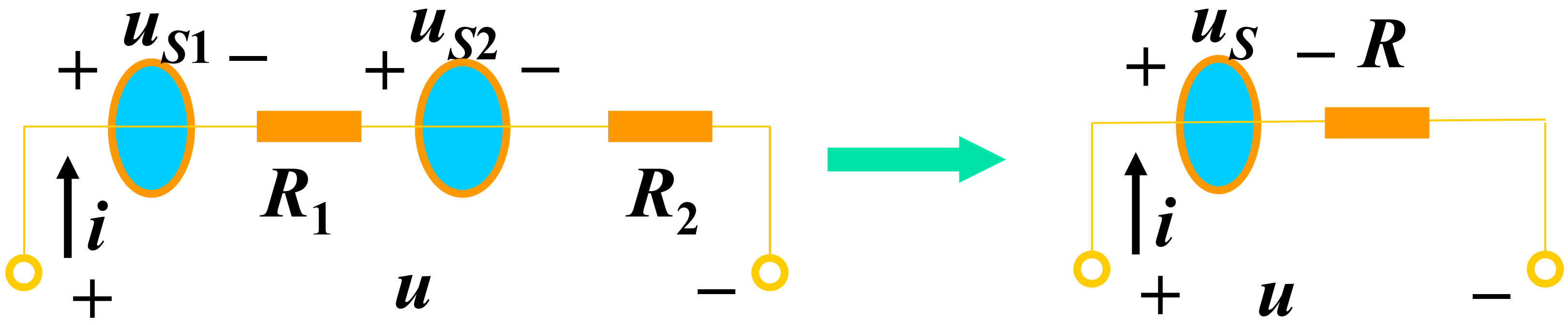
电压源的并联:大小相等、方向相同



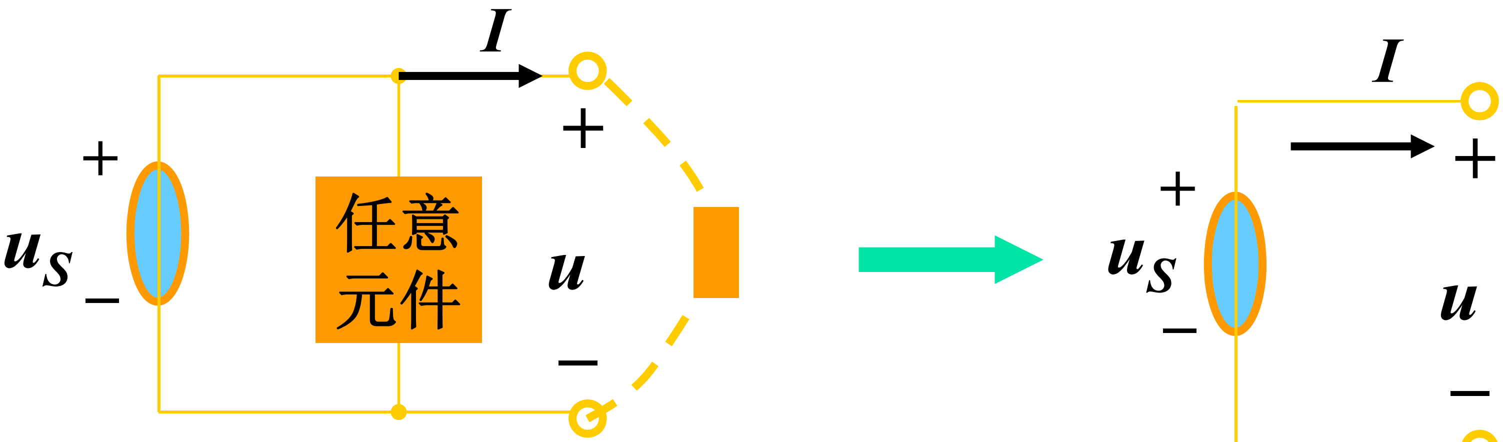
$$u_s = u_{s1} = u_{s2}$$

相同的电压源才能并联,电源中的电流不确定。

● 电压源与支路的串、并联等效



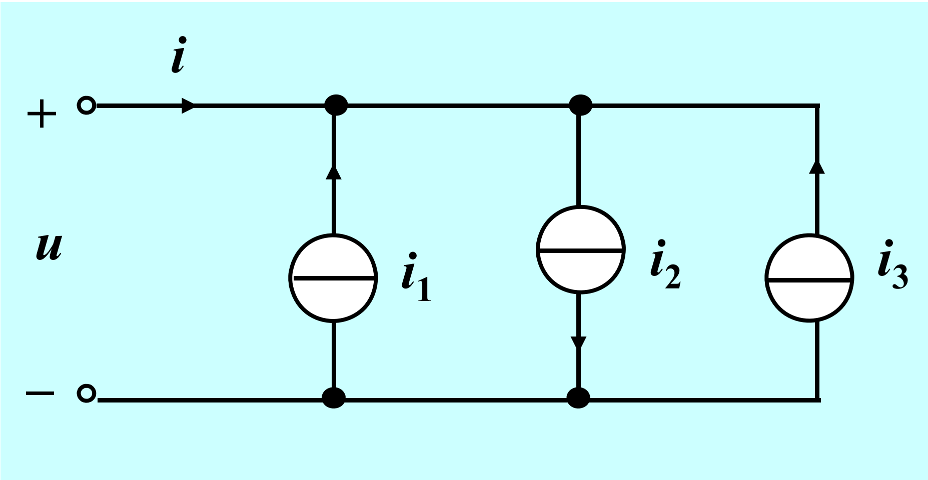
$$u = u_{s1} + R_1 i + u_{s2} + R_2 i = (u_{S1} + u_{S2}) + (R_1 + R_2)i = u_S + Ri$$

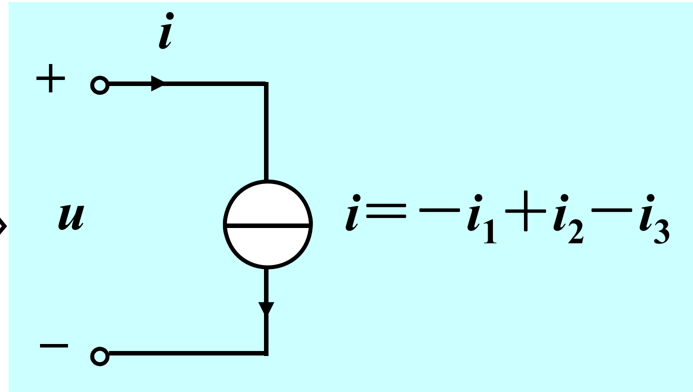


对外等效！

二、电流源的并联与串联

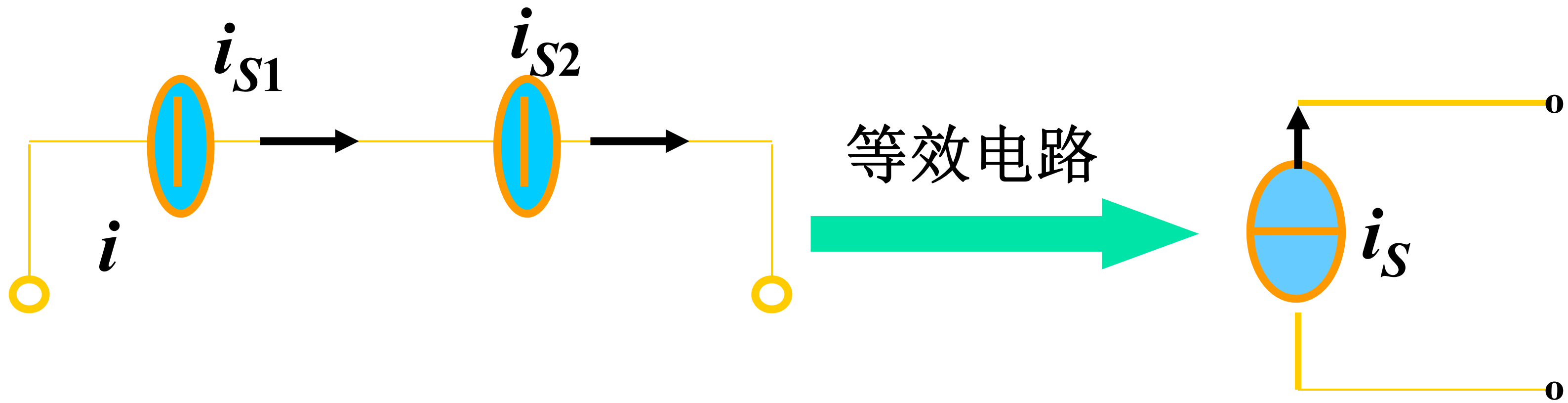
电流源的并联：





根据KCL $\quad i=-i_1+i_2-i_3$

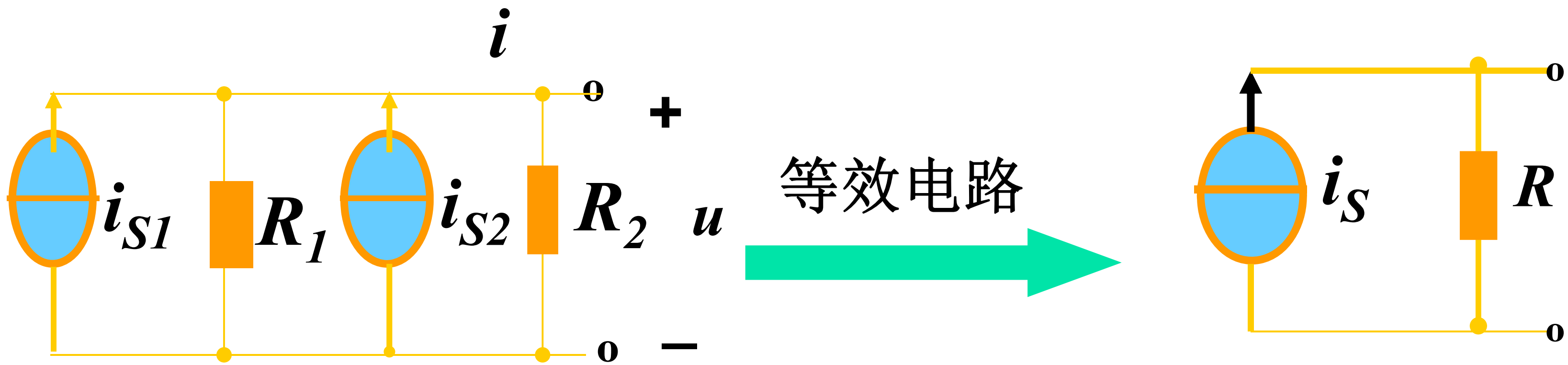
电流源的串联:大小相等、方向相同



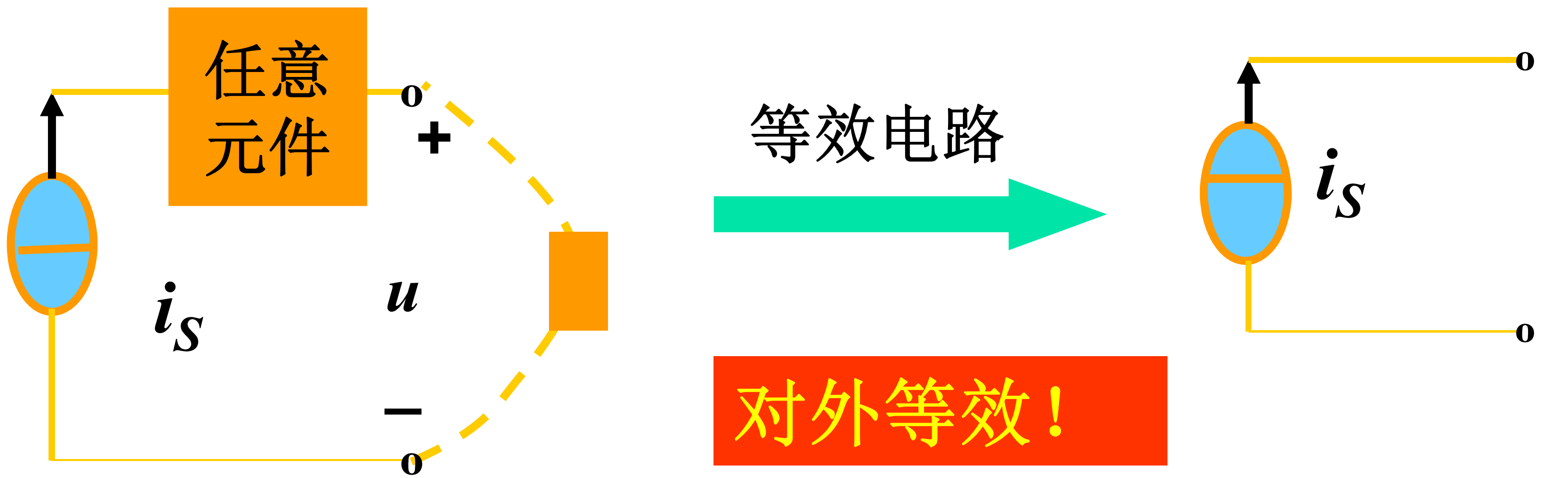
$$i_s = i_{s1} = i_{s2}$$

相同的理想电流源才能串联, 每个电流源的端电压不能确定

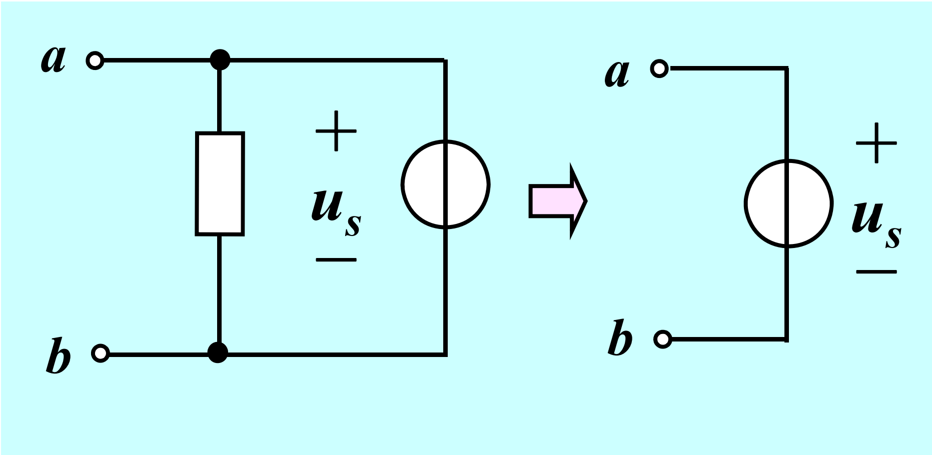
● 电流源与支路的串、并联等效

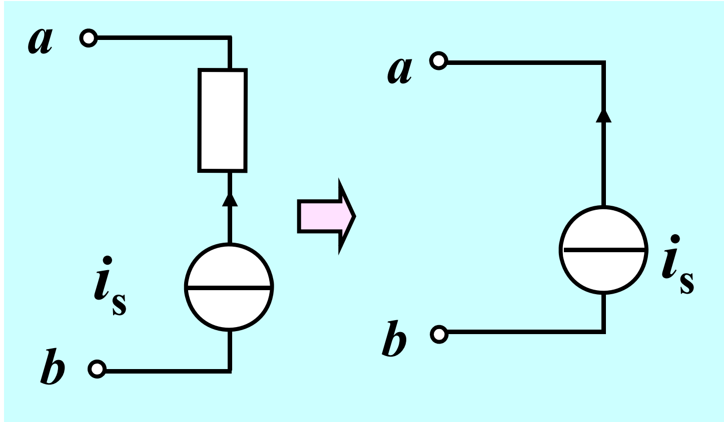


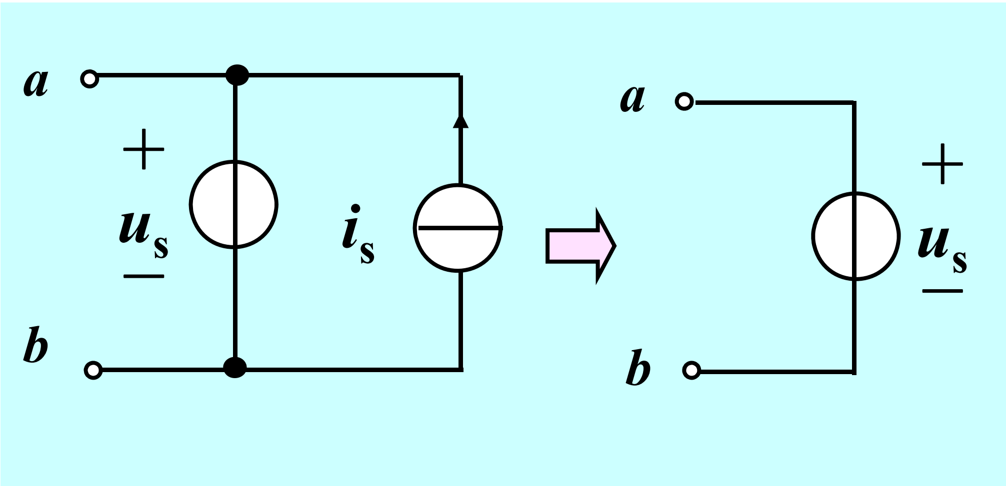
$$i = i_{s1} + u/R_1 + i_{s2} + u/R_2 = i_{s1} + i_{s2} + (1/R_1 + 1/R_2)u = i_s + u/R$$

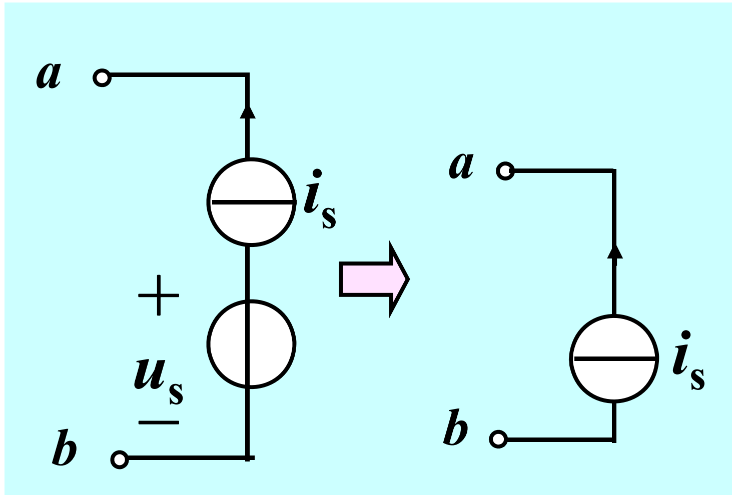


对外电路而言：

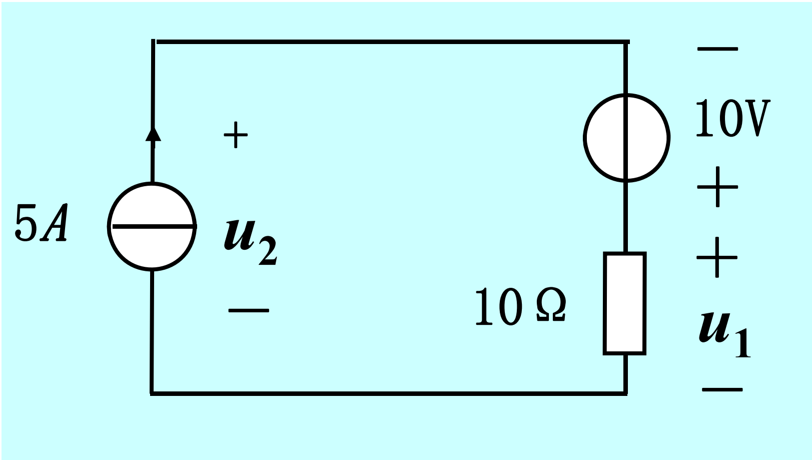


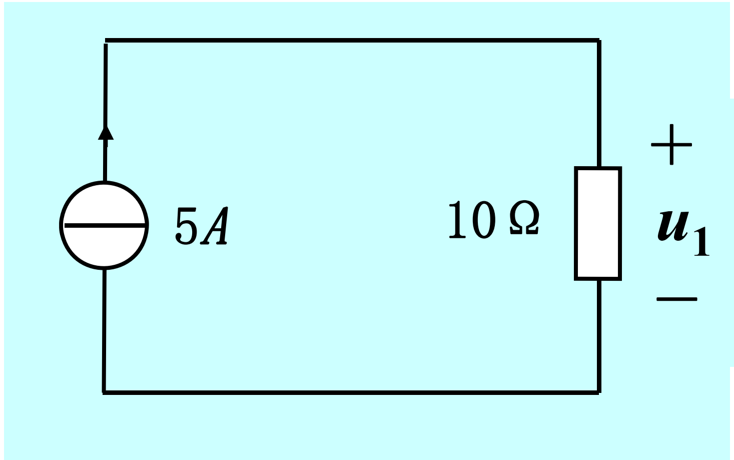






例： 求电阻和电流源上的电压。





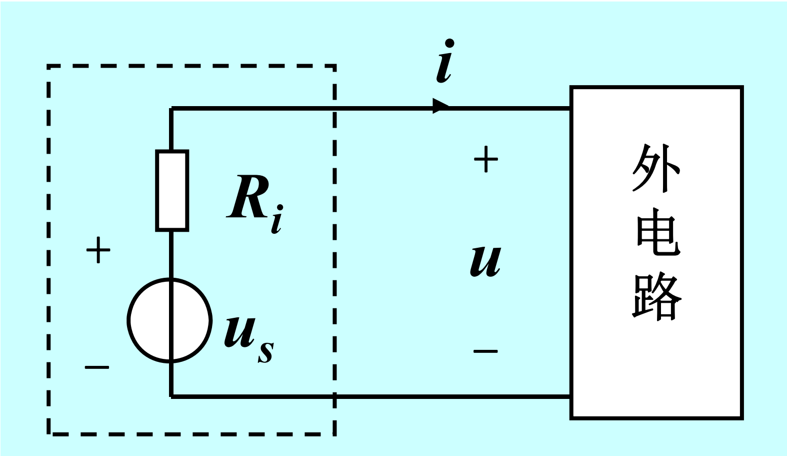
解：

$$u_1 = 5\times 10 = 50V$$

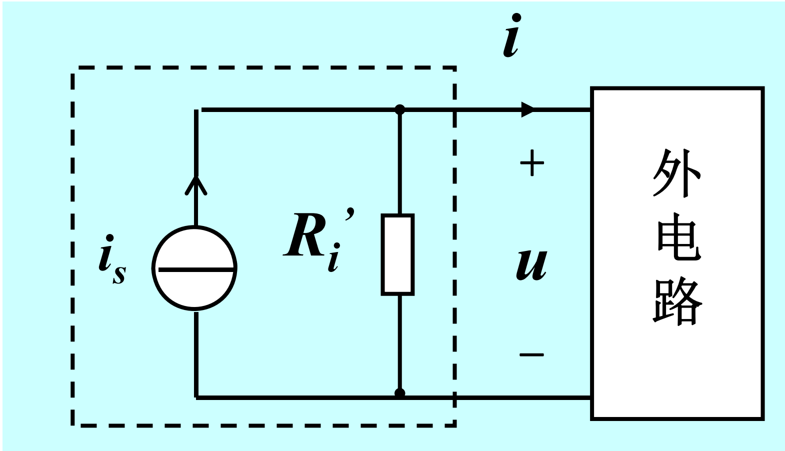
$$u_2 = -10 + u_1 = -10 + 50 = 40V$$

§2-4　电源的等效变换

实际电压源、实际电流源两种模型可以进行等效变换，所谓的等效是指端口的电压、电流在转换过程中保持不变。



（a）

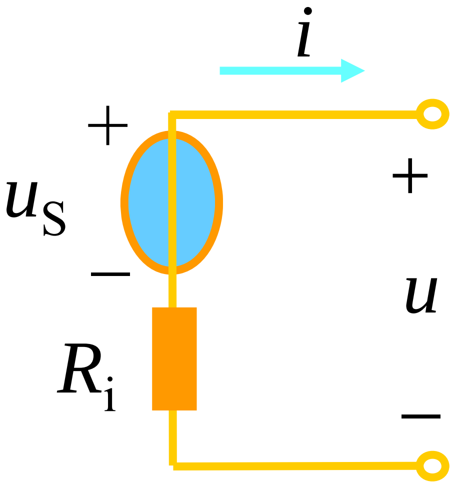


（b）

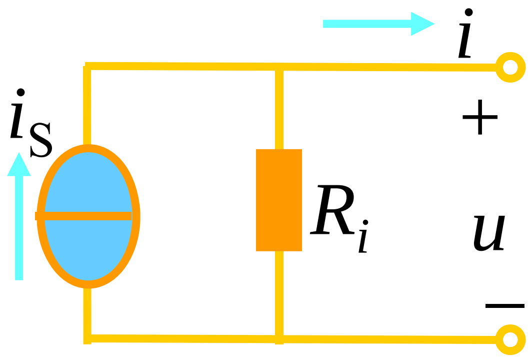
- 对图(a) $i = \dfrac{u_s}{R_i} - \dfrac{1}{R_i}u$　　对图(b) $i = i_s - \dfrac{1}{R_i'}u$

$$i_s = \frac{u_s}{R_i}, R_i' = R_i$$

由电压源变换为电流源：

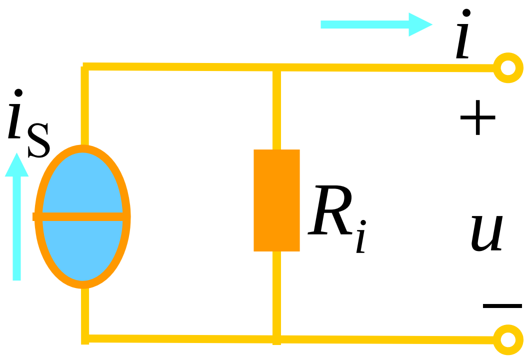


转换

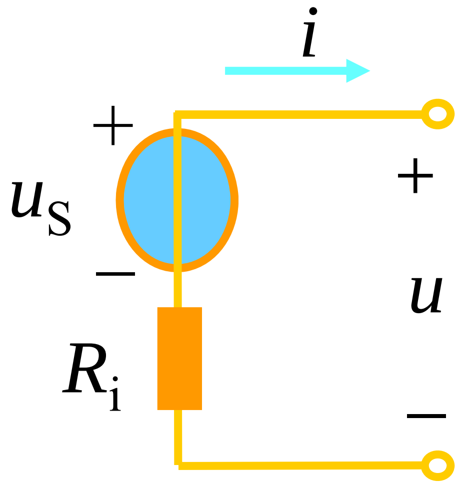


$$i_s = u_s / R_i \,, \quad R_i$$

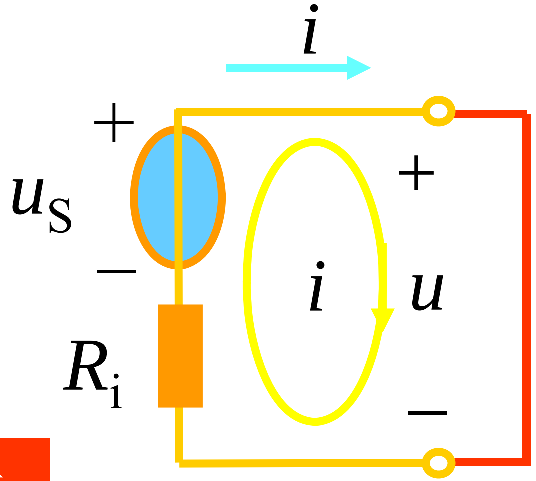
由电流源变换为电压源：

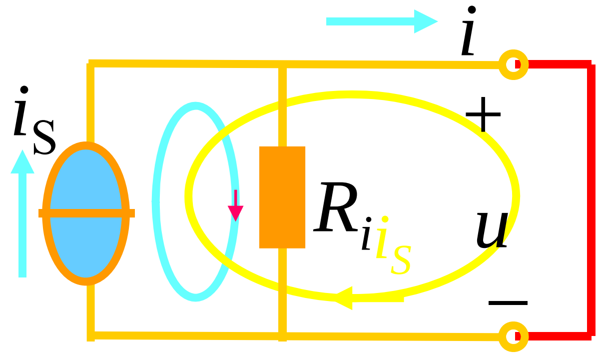


转换



$$u_s = i_s R_i$$





注意

(1) 变换关系　数值关系：$u_s = i_s R_i$

方向：电流源电流方向与电压源电压（降）方向相反。

（2）等效是对外部电路等效，对内部电路是不等效的。

表现在

- 开路的电压源中无电流流过 R_i；

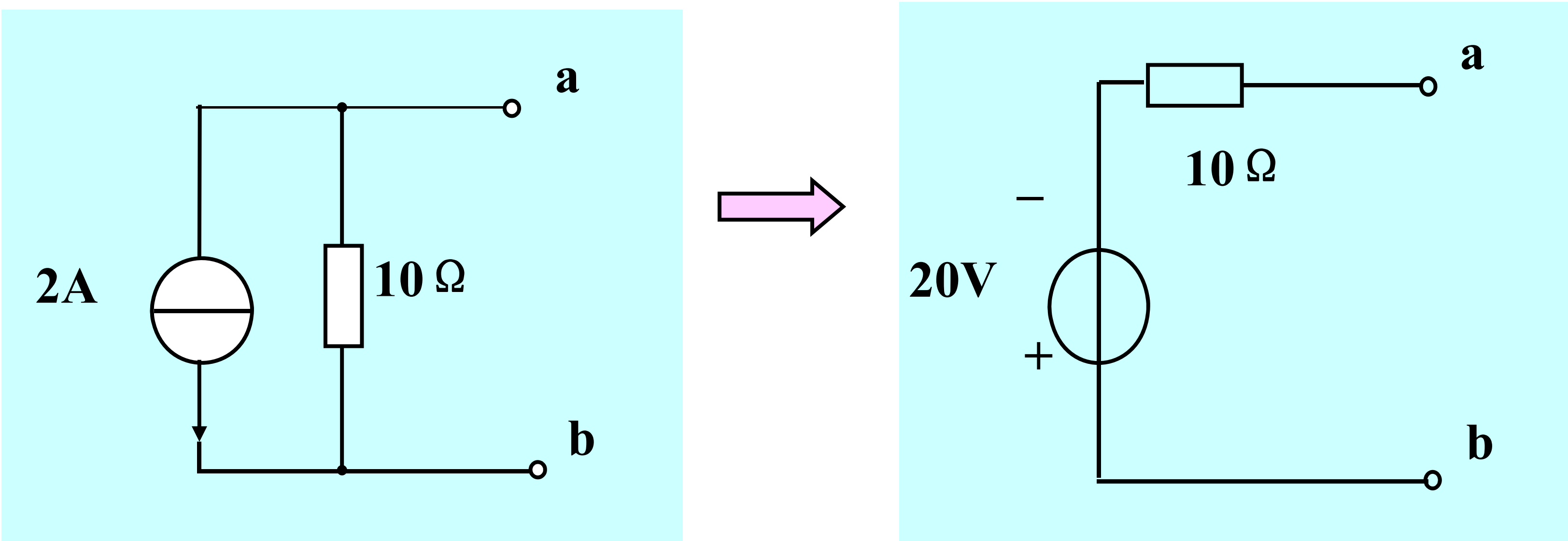
  开路的电流源可以有电流流过并联电阻R_i 。

- 电压源短路时，电阻中R_i有电流；

  电流源短路时，　并联电阻R_i中无电流。

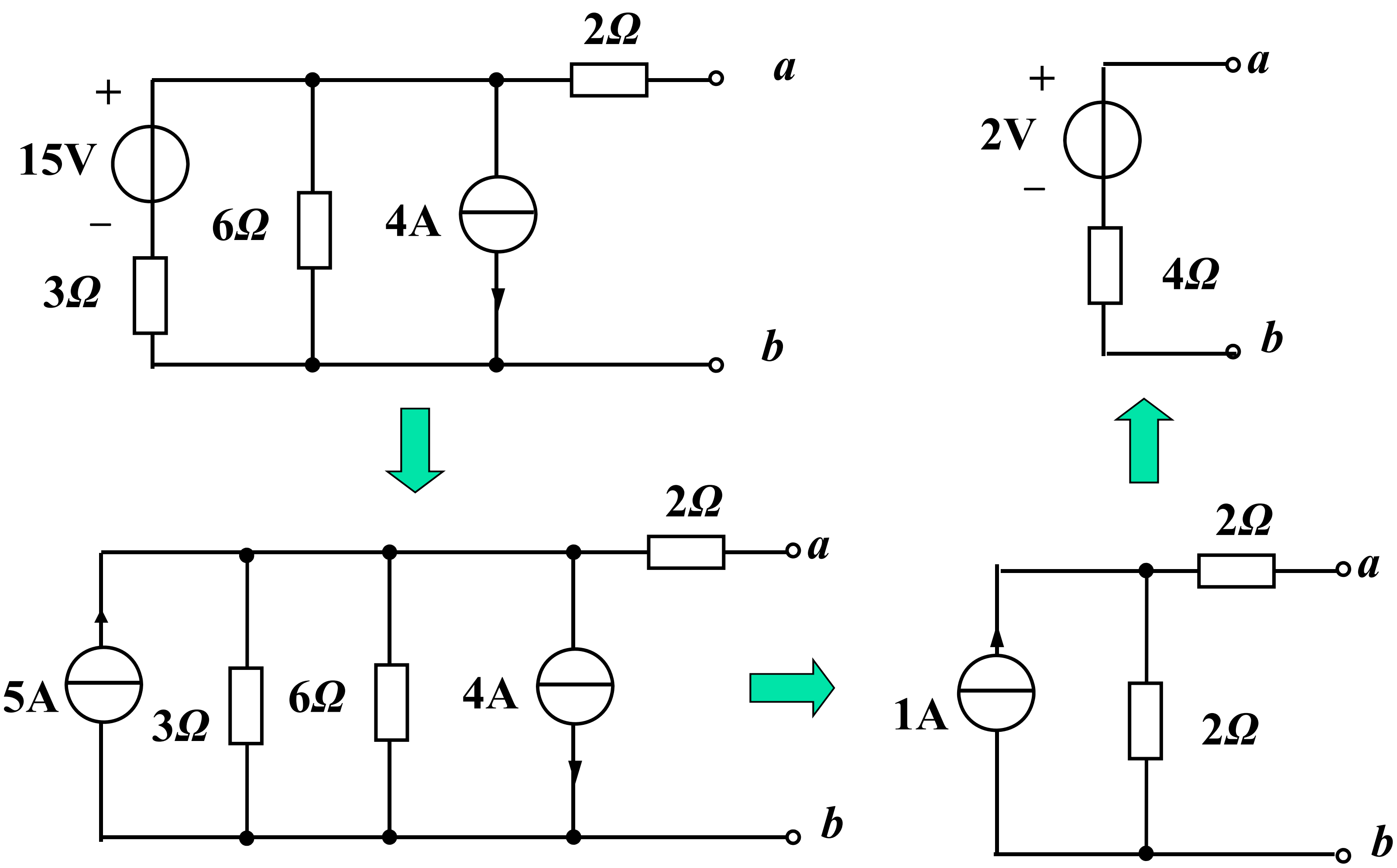
（3）理想电压源与理想电流源不能相互转换。

例2-7　将图示电路等效为电压源串电阻的形式。

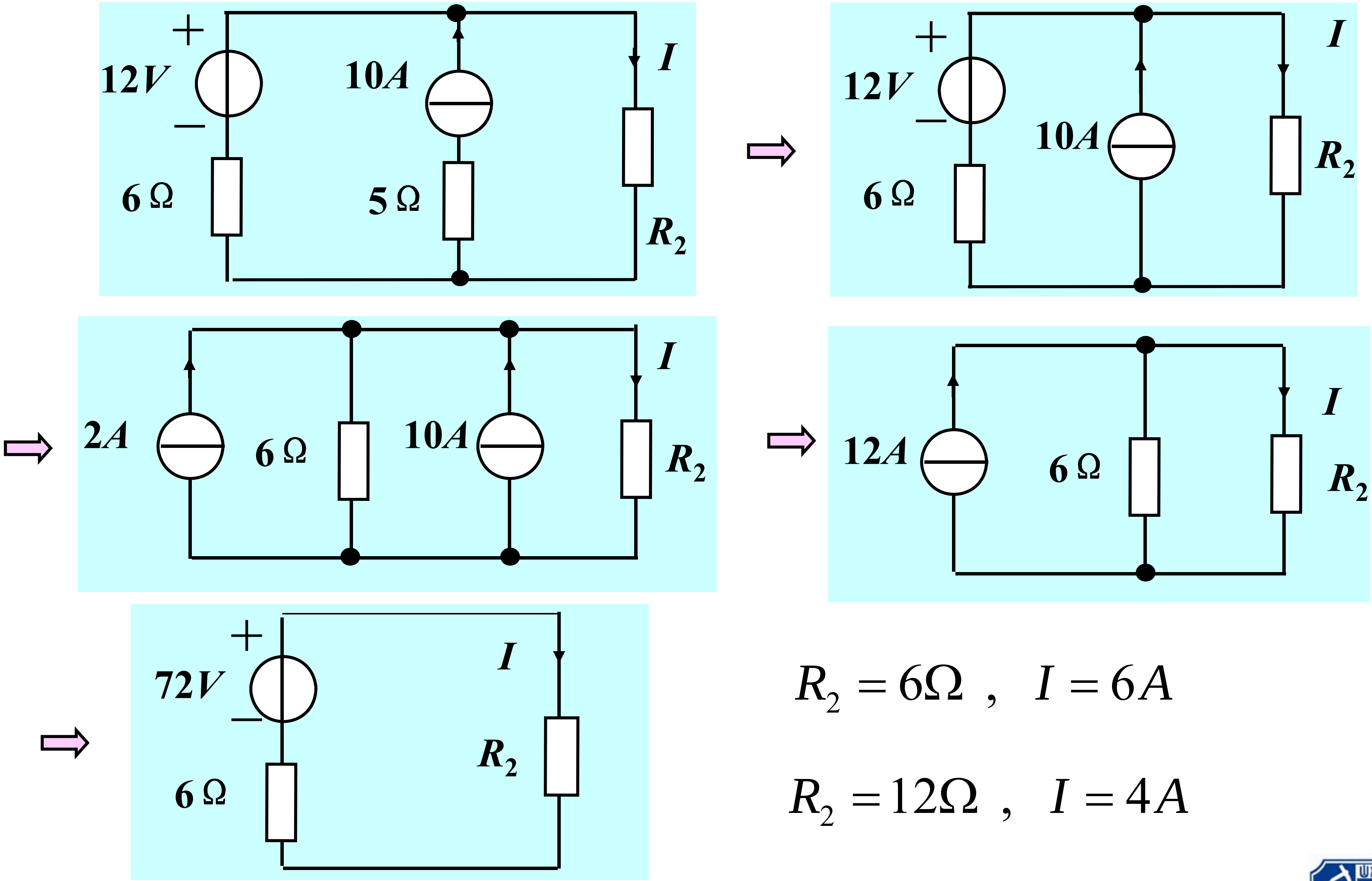


检查方法：等效变换前后两电路的开路电压应相等。
等效变换前后两电路的短路电流应相等。

例：简化电路



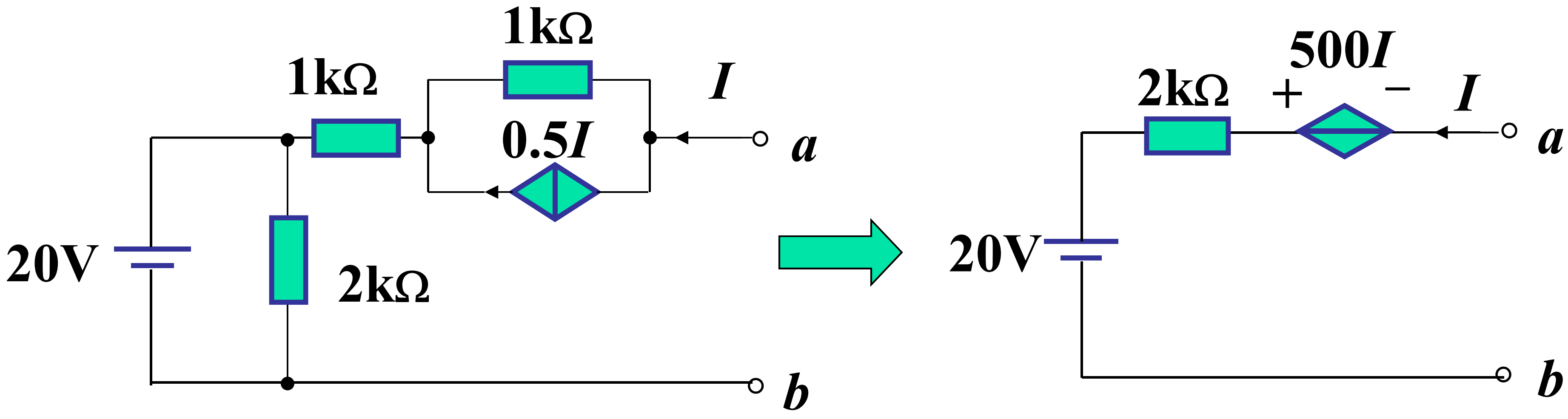
例2-8 用电源等效变换法求流过负载的电流I。



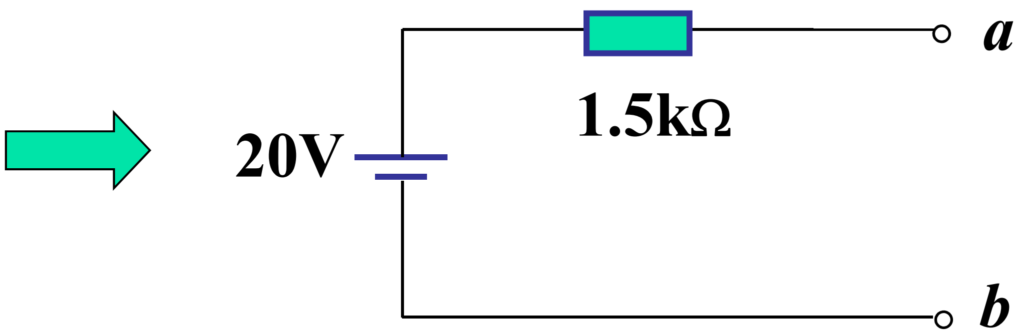
$R_2 = 6\Omega$， $I = 6A$

$R_2 = 12\Omega$， $I = 4A$

例 简化电路

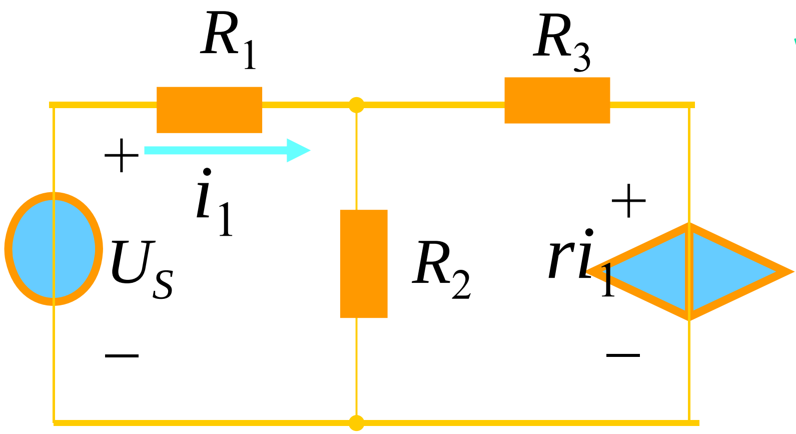


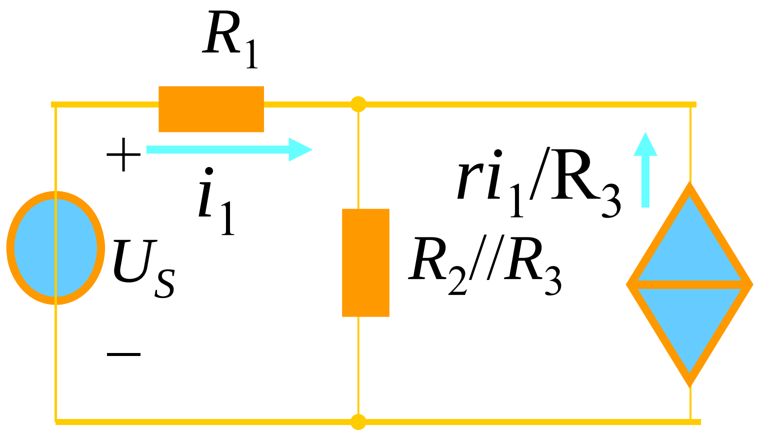
$$U_{ab}=-500I+2000I+20=1500I+20$$

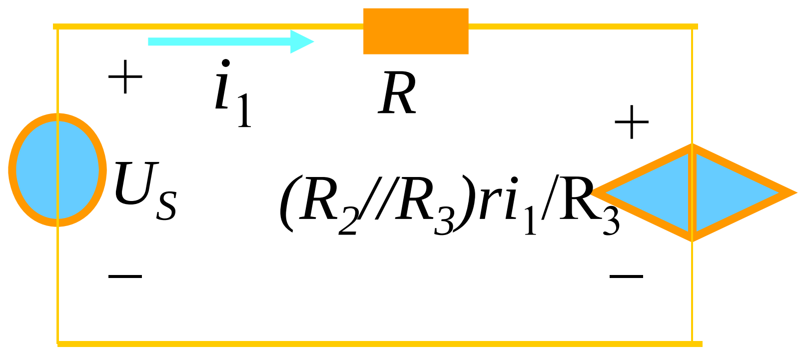


受控源和独立源一样可以进行电源转换

例5. 求电流 i_1







$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$Ri_1 + (R_2 // R_3)ri_1 / R_3 = U_S$$

$$i_1 = \frac{U_S}{R + (R_2 // R_3)r / R_3}$$

注:

受控源和独立源一样可以进行电源转换；转换过程中注意不要丢失控制量。

总结求等效电路的方法

- ✓ 电阻的串并联化简
- ✓ 电阻的Y/Δ变换 → 不含受控源的电路
- ✓ 其他情况：平衡电桥,等电位点合并

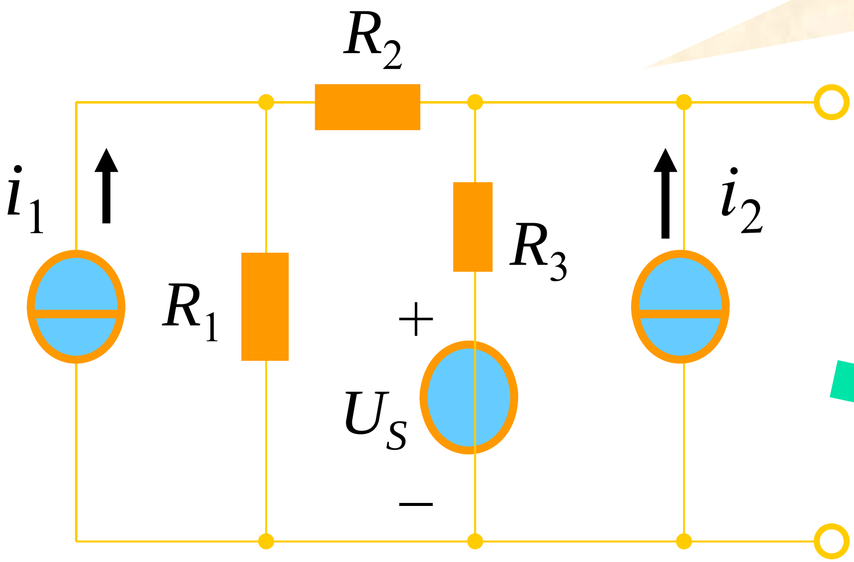
- ✓ 电源的等效变换 → 含受控源的电路
- ✓ 其他情况：外加电源法

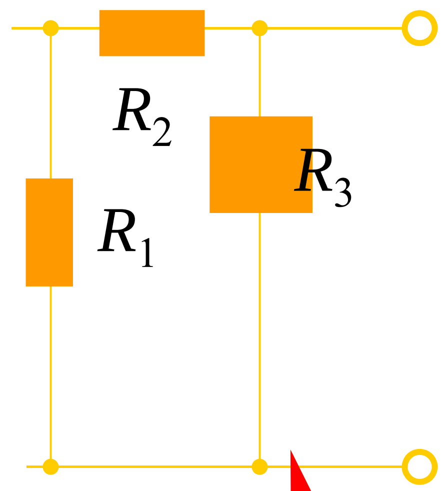
即在端口加电压源，求得电流，或在端口加电流源，求得电压，得其比值。

计算下例一端口电路的输入电阻

例1.

有源网络先把独立源置零：电压源短路；电流源断路，再求输入电阻

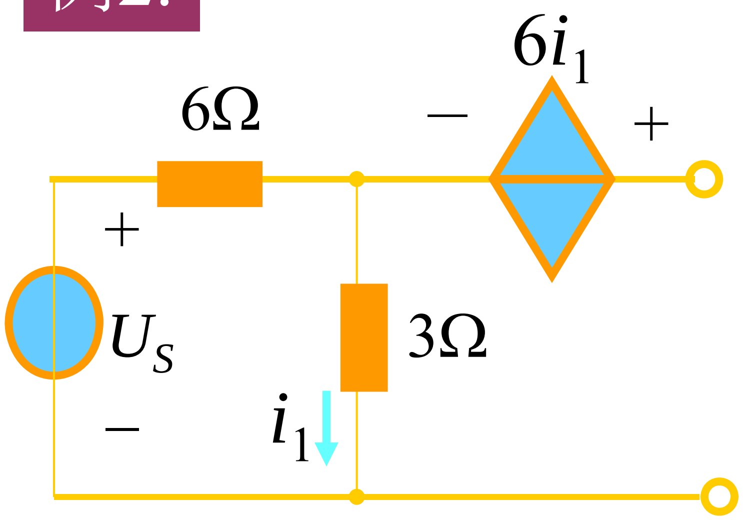


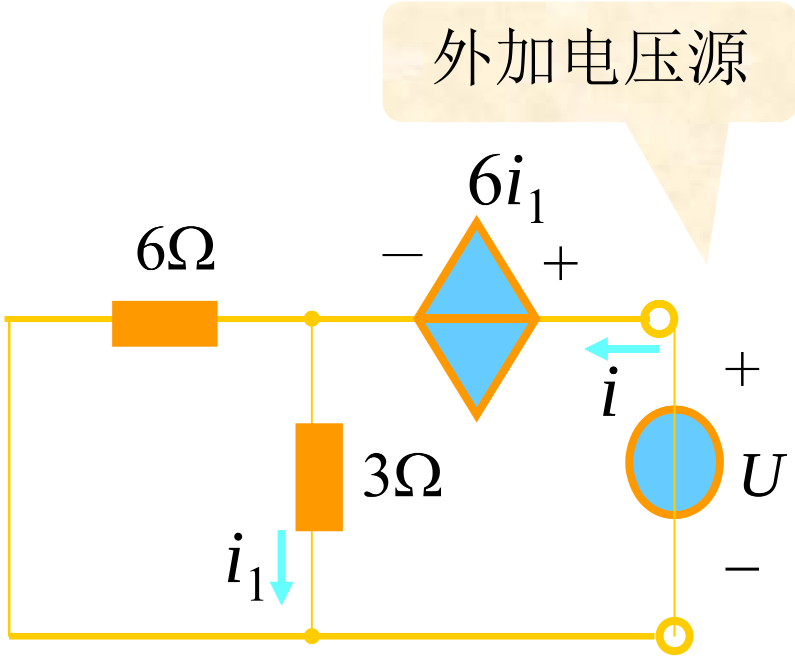


$$R_{in} = (R_1 + R_2) // R_3$$

无源电阻网络

例2.



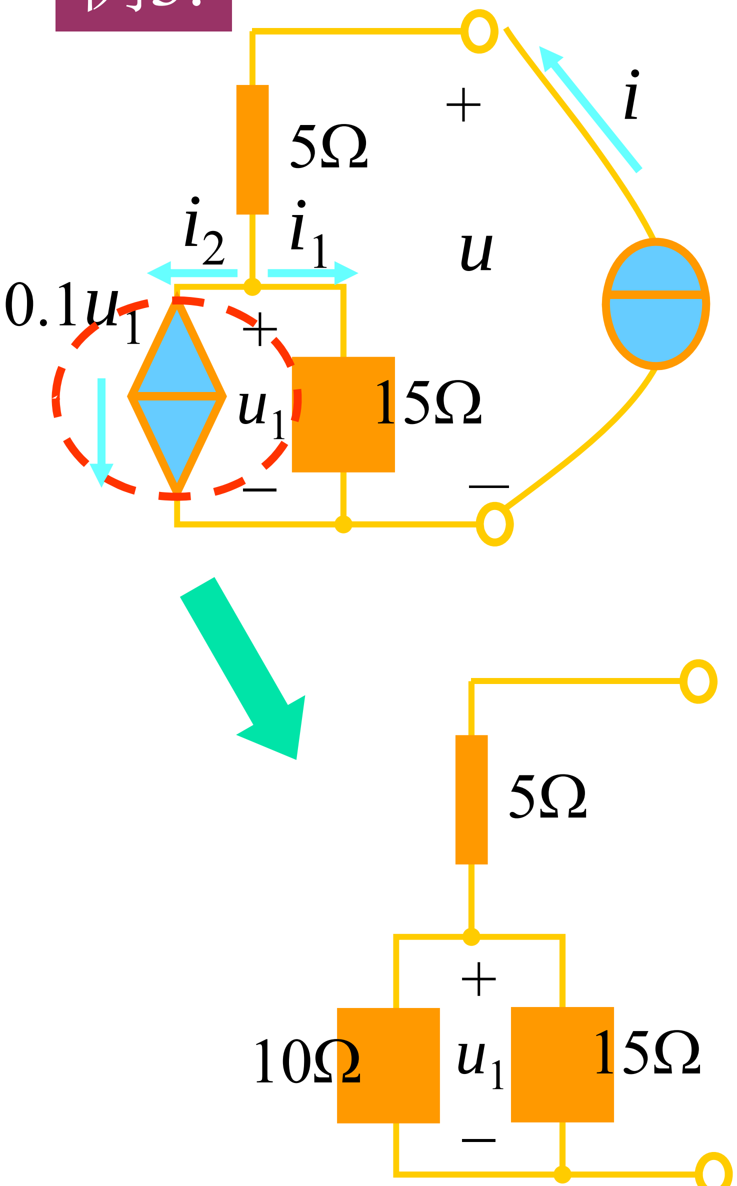


$$i = i_1 + \frac{3i_1}{6} = 1.5i_1$$

$$U = 6i_1 + 3i_1 = 9i_1$$

$$R_{in} = \frac{U}{i} = \frac{9i_1}{1.5i_1} = 6\Omega$$

例3.



$$u_1 = 15i_1 \qquad i_2 = 0.1u_1 = 1.5i_1$$

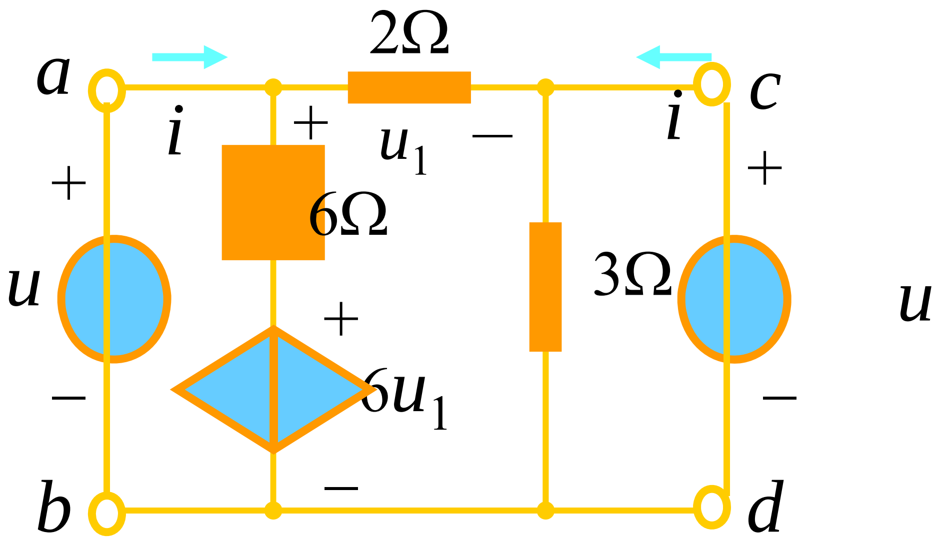
$$i = i_1 + i_2 = 2.5i_1$$

$$u = 5i + u_1 = 5\times 2.5i_1 + 15i_1$$
$$= 27.5i_1$$

$$R_{in} = \frac{u}{i} = \frac{27.5i_1}{2.5i_1} = 11\Omega$$

$$R_{in} = 5 + \frac{10\times 15}{10+15} = 11\Omega$$

例4. 求R_{ab}和R_{cd}



$$u_{ab}=u_1+3u_1/2=2.5u_1$$

$$u_1=u_{ab}/2.5=0.4u_{ab}$$

$$i=\frac{u_1}{2}+\frac{u_{ab}-6u_1}{6}=-u_{ab}/30$$

$$R_{ab}=u_{ab}/i=-30\Omega$$

$$u_{cd}=-u_1+6u_1+\frac{6\times(-u_1)}{2}=2u_1$$

$$i=-u_1/2+u_{cd}/3=u_1/6$$

$$R_{cd}=u_{cd}/i=12\Omega$$