自动控制原理 Automatic Control Theory

西南交通大学

电气工程学院

第六章 The Design of Control Systems
控制系统设计

6.1 Introduction 概述

6.2 Several Compensators 常用校正环节

6.3 Control System Design by Frequency Response 基于频率法的串联校正

6.4 Control System Design by Root-locus Method 基于根轨迹法的串联校正

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

第六章 The Design of Control Systems
控制系统设计

Key Words

Cascade Compensation Network

Compensator

Phase Lag Network / Phase Lead Network

Phase Lag Compensation

Phase Lead Compensation

PID Controller

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.1 概述

6.1.1 Steps for the design of control system

1) Performance Analysis 分析**性能指标**

- Time Domain: e_{ss} ; $\delta\%$, T_s, T_r 等等
- Frequency Domain: e_{ss} ; $\gamma(\Phi_{pm}$ PM), g_m (GM), ω_c, ω_g, M_r, ω_r
- Performance Indices(ISE / ITAE / IAE):

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt \to \min, \quad ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt \to \min$$

根据控制对象、过程的性质及生产工艺要求等，审查、分析给定的性能指标，确定是否合理，提出修改意见。

确切地制定出性能指标，是控制系统设计中的一项最重要的工作。

6.1.1 控制系统设计的主要步骤

2) 建立系统**数学模型**(系统的结构图)

已知：对象，执行元件，反馈检测元件等

确定各环节传递函数及相应的参数(分析法，试验测量法)

3) 检查**稳态精度**和**动态响应指标**(分析哪些指标不合要求)

4) **对系统进行校正(补偿)**：加校正环节——确定校正环节的形式和参数

5) 检查校正后的各项指标

如不满足，再调整校正环节，直到满意为止。

经典控制理论的设计，校正方法是**试探法**。可应用计算机仿真进行辅助设计。

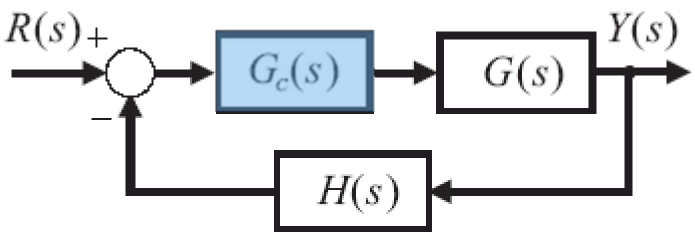
6.1 概述

6.1.2 控制系统的校正

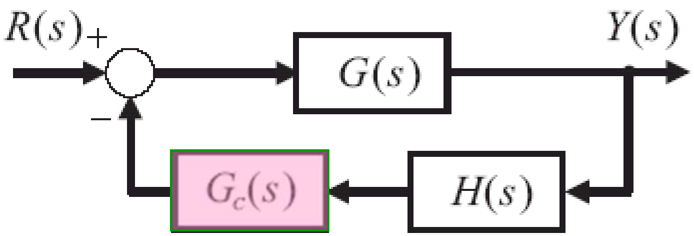
加入**校正环节**，使系统达到要求的性能指标。

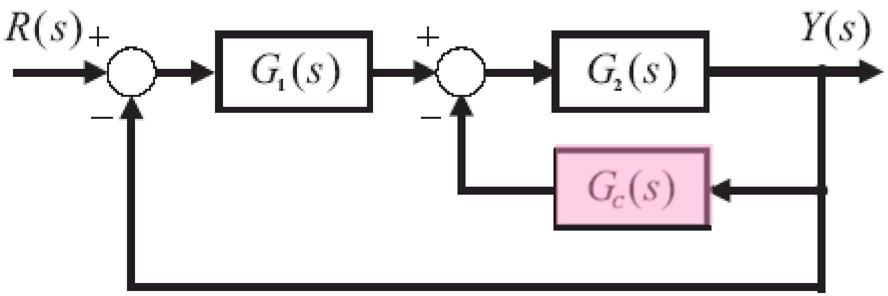
1） 校正方式

- 串联校正



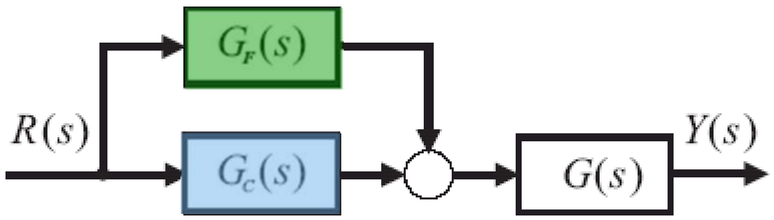
- 局部反馈校正

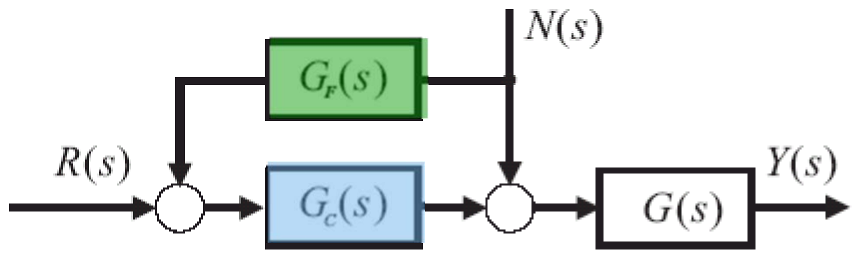




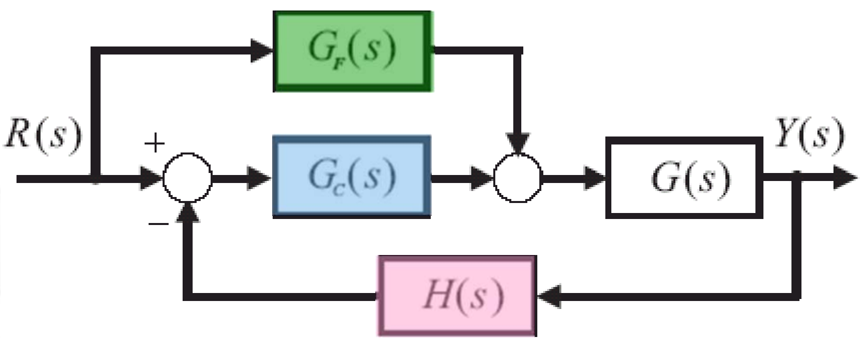
6.1.2 控制系统的校正

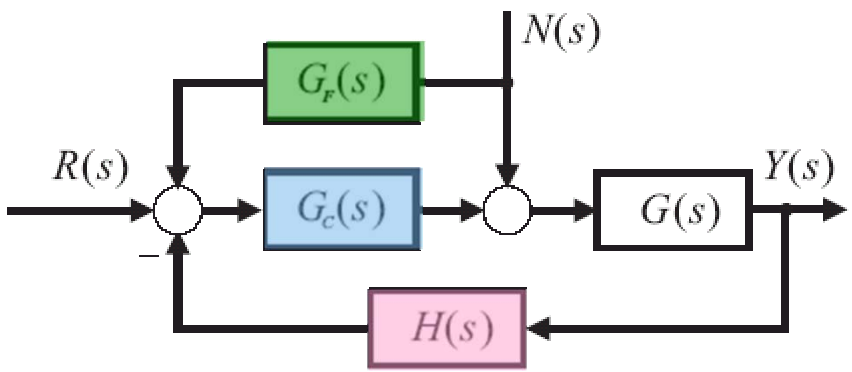
- 前馈校正





- 复合校正

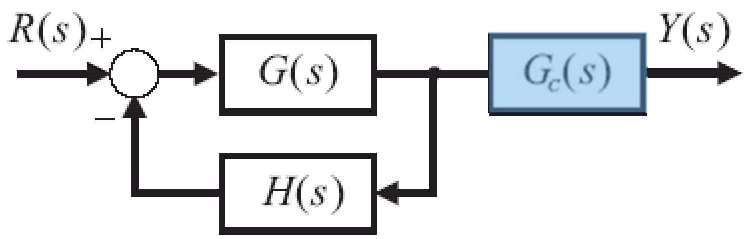




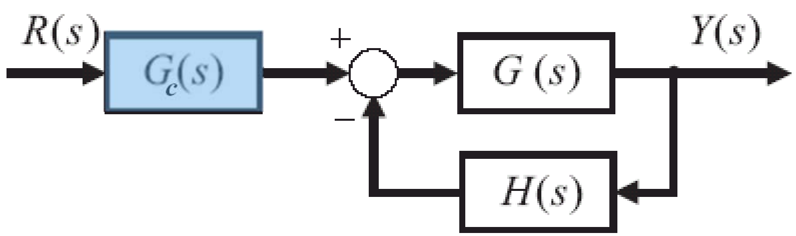
E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.1.2 控制系统的校正

- 输出校正



- 输入校正



6.1.2 控制系统的校正

2) 校正方法

a) 满足**稳态精度**(静态指标)

提高开环增益(增大K)；

加入积分环节 $1/s$ (会影响稳定性)；

b) 满足**动态指标**

- **频率法**: 调整$\gamma\,(\Phi_{pm})$, g_m (GM), ω_c 等

  (修正静态指标也很方便)

- **根轨迹法**: 调整闭环极点位置

一般，给出频域指标，常用频率法；

给出时域指标，常用根轨迹法；(也可将时域指标转换为频域指标，而采用频率法)

6.1.2 控制系统的校正

- **频率法校正**

由**开环频率特性**

低频段: 反映系统的稳态特性(希望“高” “陡”);

中频段(幅穿频率w_c附近): 反映系统的相对稳定性，动态指标(要求的稳定裕量等);

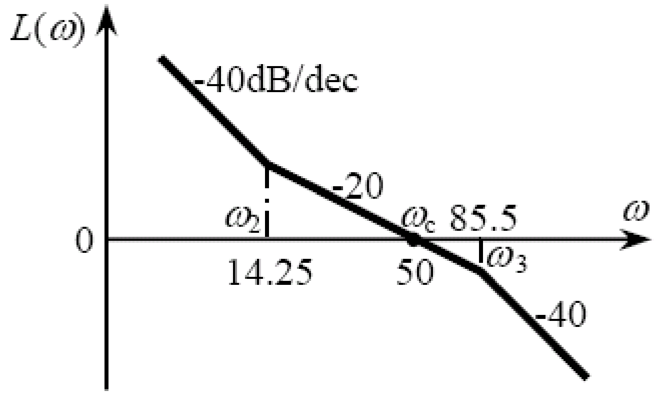
高频段: 反映系统的滤波特性(系统阶次);

工程上的一种希望， “-2/ -1/ -3”特性:

低频段: -40dB/dec

中频段: -20dB/dec

高频段: -60dB/dec



6.1.2 控制系统的校正

根轨迹法校正

考察增加开环零点、极点对原根轨迹的影响：

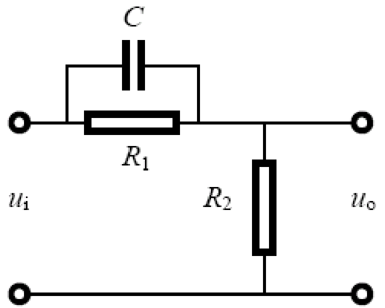
增加开环零点、极点→改变根轨迹→改变闭环极点位置→改变系统指标

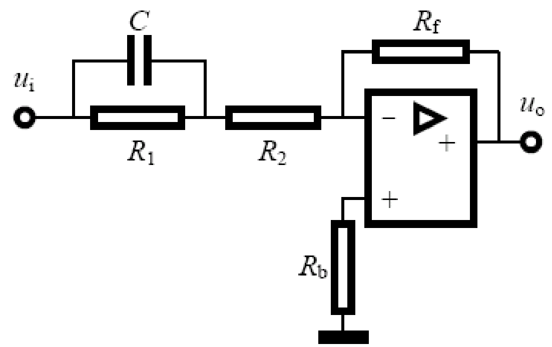
返回

6.2 常用校正环节

1) 超前校正网络

传递函数(根据无源网络)





$$Z_1 = \frac{R_1 / Cs}{R_1 + 1/Cs} = \frac{R_1}{1 + R_1 Cs}, Z_2 = R_2$$

$$G_c(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2}{R_2 + \dfrac{R_1}{1 + R_1 Cs}} = \frac{R_2(1 + R_1 Cs)}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 Cs}$$

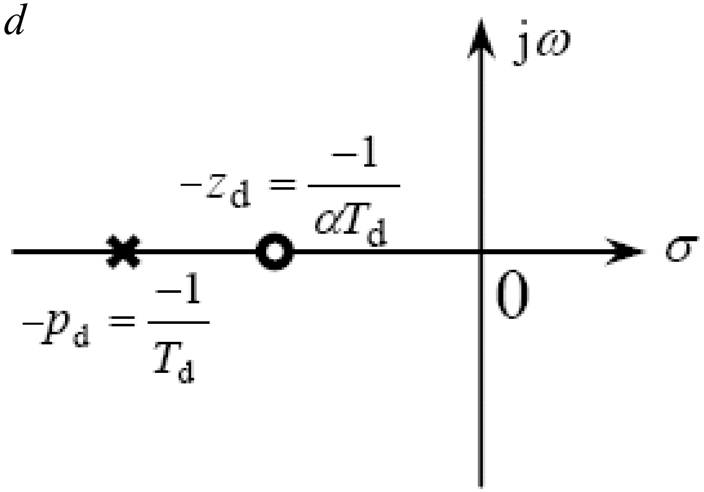
$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + R_1 Cs}{1 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} Cs}$$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.2 常用校正环节

Transfer Function of the Phase-lead Compensation Network (超前校正网络传函)：

$$G_c(s) = \frac{1}{\alpha}\frac{\alpha T_d s + 1}{T_d s + 1} = \frac{s + z_d}{s + p_d} \qquad (6.1)$$



其中 $\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1, T_d = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}C$

分度系数　　时间常数

零点: $-z_d = -\frac{1}{\alpha T_d}$　极点: $-p_d = -\frac{1}{T_d}$　　$z_d < p_d$

6.2 常用校正环节

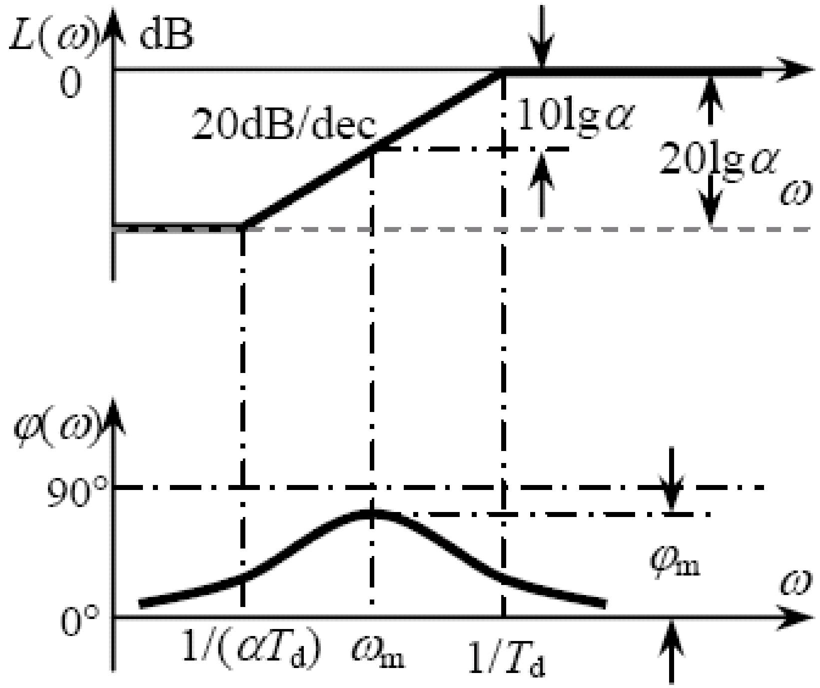
超前校正网络传函：

频率特性：$\boxed{G_c(j\omega)=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1+j\alpha T_d\omega}{1+jT_d\omega}}$

$$G_c(j\omega)\overset{\omega\to 0}{=}\frac{1}{\alpha},\qquad G_c(j\omega)\overset{\omega\to\infty}{=}1$$

转折频率：

$$\omega_1=\frac{1}{\alpha T_d}=z_d,\ \omega_2=\frac{1}{T_d}=p_d$$



相频特性：

$$\varphi_d(\omega)=\arctan(\alpha T_d\omega)-\arctan(T_d\omega)=\arctan\left[\frac{(\alpha-1)T_d\omega}{1+\alpha T_d^{\,2}\omega^2}\right]$$

6.2 常用校正环节

容易证明，ω_m 是 $\omega_1=\dfrac{1}{\alpha T_d}$ $\omega_2=\dfrac{1}{T_d}$ 的几何中点：

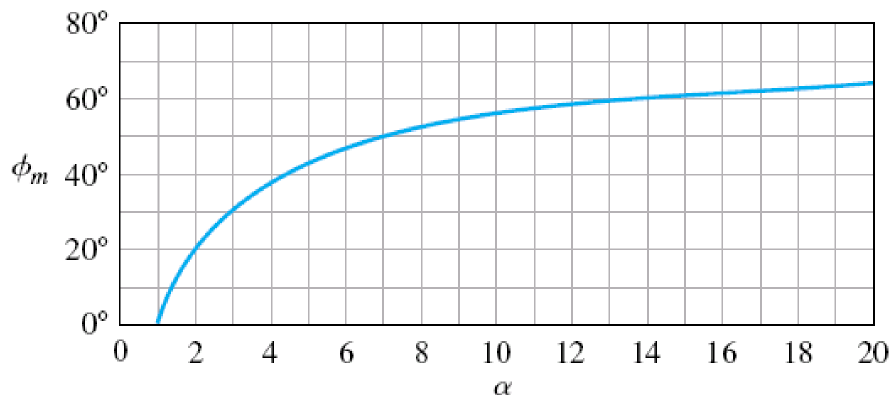
$$\omega_m=\sqrt{\frac{1}{\alpha T_d}\frac{1}{T_d}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}T_d} \tag{6.2}$$

或

$$\lg\omega_m=\frac{1}{2}\left(\lg\frac{1}{\alpha T_d}+\lg\frac{1}{T_d}\right) \tag{6.3}$$

$$\varphi_m=\varphi_d(\omega_m)=\arctan\frac{(\alpha-1)}{2\sqrt{\alpha}}=\arcsin\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \tag{6.4}$$

因此 $\alpha=\dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$ (6.5)



6.2 常用校正环节

ω_m处的对数幅值$L_c(\omega_m)$为：

$$L_c(\omega_m) = 20\lg\left|G_c(j\omega_m)\right| = 20\lg\left|\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right| = -20\lg\sqrt{\alpha} = -10\lg\alpha \quad (6.6)$$

超前校正，要确定 α 和 T_d:

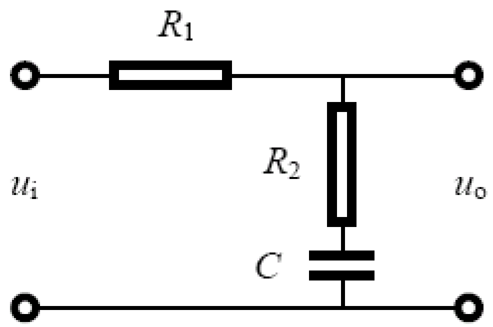
$$\left.\begin{array}{c} \varphi_m \rightarrow \alpha \\ \omega_m \end{array}\right\} \rightarrow T_d$$

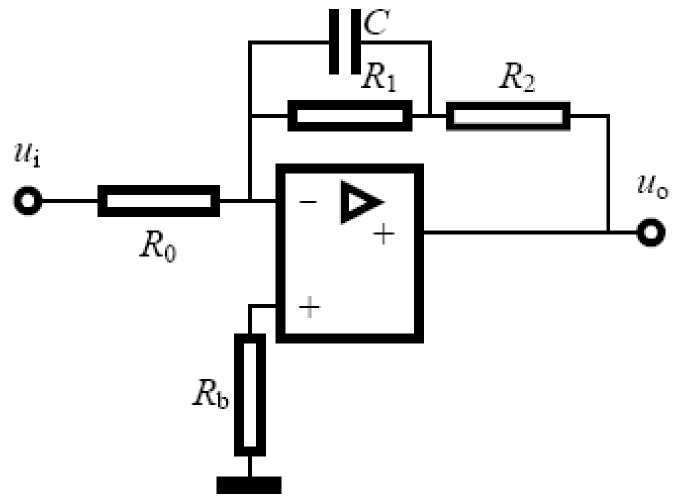
超前校正主要是利用超前校正环节的超前相角。

6.2 常用校正环节

2) 滞后校正网络

传递函数(根据无源网络)





$$Z_1 = R_1, Z_2 = R_2 + \frac{1}{Cs} = \frac{R_2 Cs + 1}{Cs}$$

$$G_c(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}$$

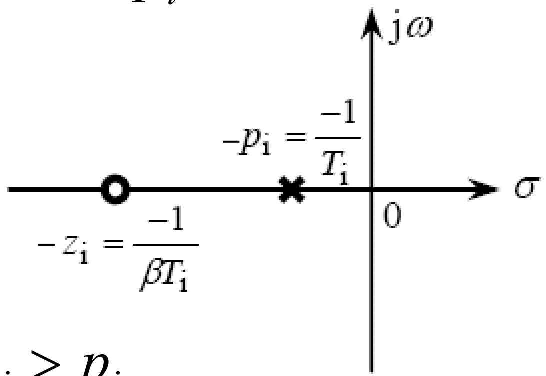
6.2 常用校正环节

滞后校正网络传函：

$$G_c(s)=\frac{\beta T_i s+1}{T_i s+1}=\beta\frac{s+z_i}{s+p_i} \qquad (6.7)$$

其中 $\beta=\dfrac{R_2}{R_1+R_2}<1, T_i=(R_1+R_2)C$

分度系数　　时间常数



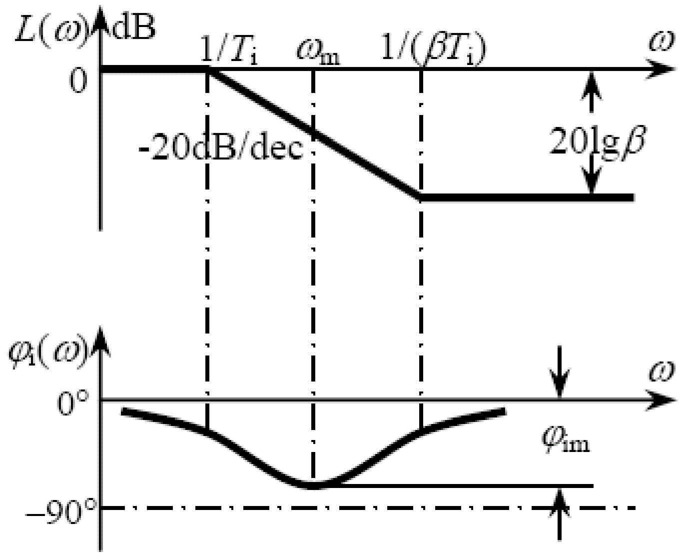
零点：$-z_i=-\dfrac{1}{\beta T_i}$　极点：$-p_i=-\dfrac{1}{T_i}$　$z_i>p_i$

频率特性：$G_c(j\omega)=\dfrac{1+j\beta T_i\omega}{1+jT_i\omega}$

转折频率：$\omega_1=\dfrac{1}{T_i}=p_i,\quad \omega_2=\dfrac{1}{\beta T_i}=z_i$

$$\omega_m=\sqrt{\frac{1}{\beta T_i}\frac{1}{T_i}}=\frac{1}{\sqrt{\beta}T_i}$$

$$\varphi_m=\sin^{-1}\frac{\beta-1}{\beta+1} \quad (\varphi_m\text{为负角}) \qquad (6.8)$$

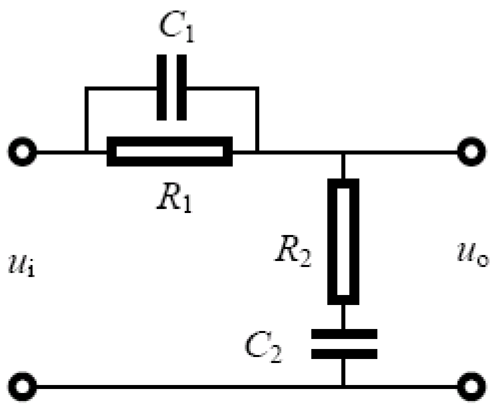


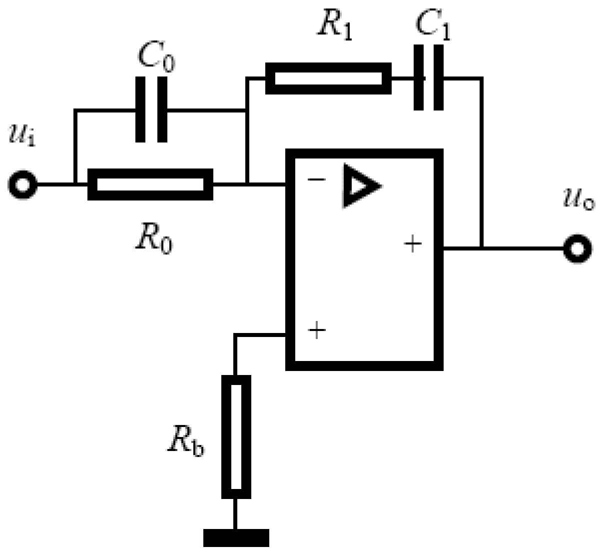
6.2 常用校正环节

采用滞后校正，是利用其高频幅值衰减特性，而避开它的滞后相角。

3) 滞后—超前校正网络

传递函数(根据无源网络)





$$Z_1=\frac{R_1\dfrac{1}{C_1s}}{R_1+\dfrac{1}{C_1s}}=\frac{R_1}{1+R_1C_1s},Z_2=R_2+\frac{1}{C_2s}=\frac{1+R_2C_2s}{C_2s}$$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.2 常用校正环节

$$G_c(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{R_1C_1R_2C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$$

滞后—超前校正网络传函：

$$G_c(s)=\underbrace{\frac{\beta T_is+1}{T_is+1}}_{\text{滞后部分}}\underbrace{\frac{\alpha T_ds+1}{T_ds+1}}_{\text{超前部分}}=\frac{s+z_i}{s+p_i}\frac{s+z_d}{s+p_d} \qquad (6.9)$$

其中 $\beta T_i=R_1C_1,\quad T_i=R_1C_1/\beta;\quad \alpha T_d=R_2C_2,\quad T_d=R_2C_2/\alpha;$

由 $T_iT_d=R_1C_1R_2C_2=\alpha\beta T_iT_d\Rightarrow\alpha\beta=1$

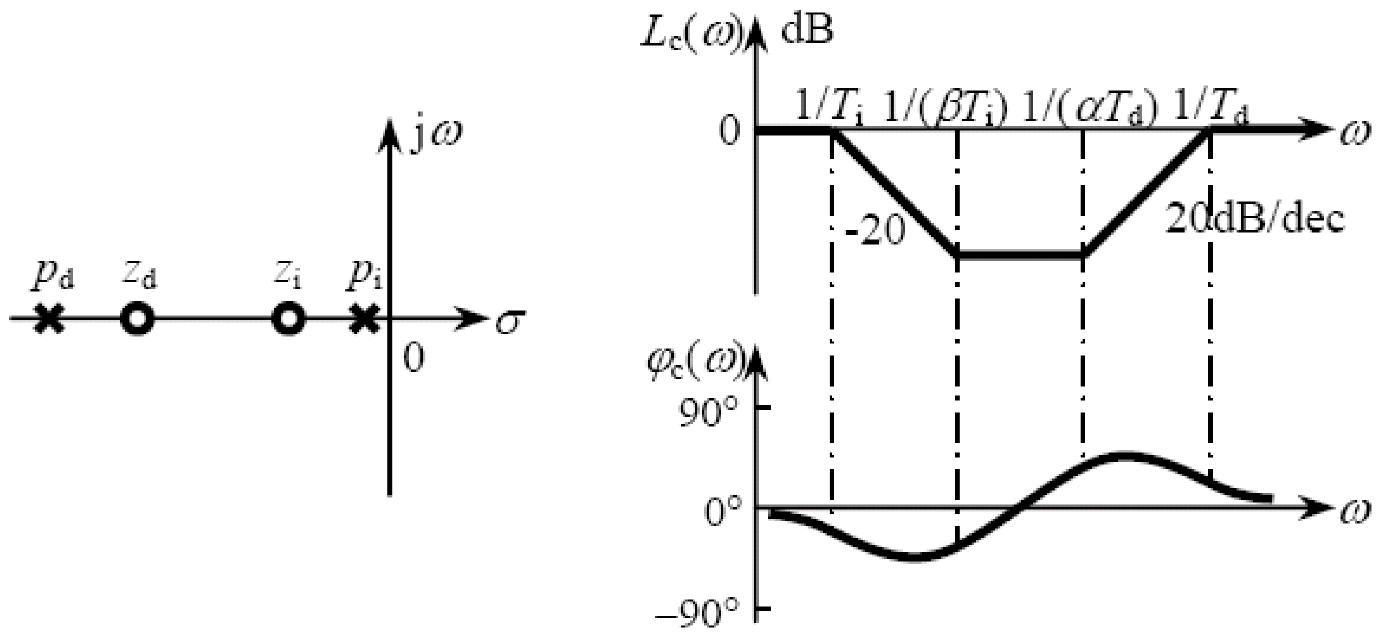
注意： $\beta<1,\alpha=\dfrac{1}{\beta}>1;\ T_i>T_d$

6.2 常用校正环节

转折频率

$$\omega_1 = \frac{1}{T_i} = p_i; \quad \omega_2 = \frac{1}{\beta T_i} = z_i; \quad \omega_3 = \frac{1}{\alpha T_d} = z_d; \quad \omega_4 = \frac{1}{T_d} = p_d$$

$$p_i < z_i < z_d < p_d$$



E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.2 常用校正环节

4) PID控制器

PID控制器是工业过程中广泛采用的一种控制器，也称为三项控制器

- **PID(比例-积分-微分)控制器传函**

PID (Proportional plus Integral plus Derivative)

积分增益K_I

$$G_c(s)=\boxed{K_P}+\frac{\boxed{K_I}}{s}+\boxed{K_D}s \qquad (6.10)$$

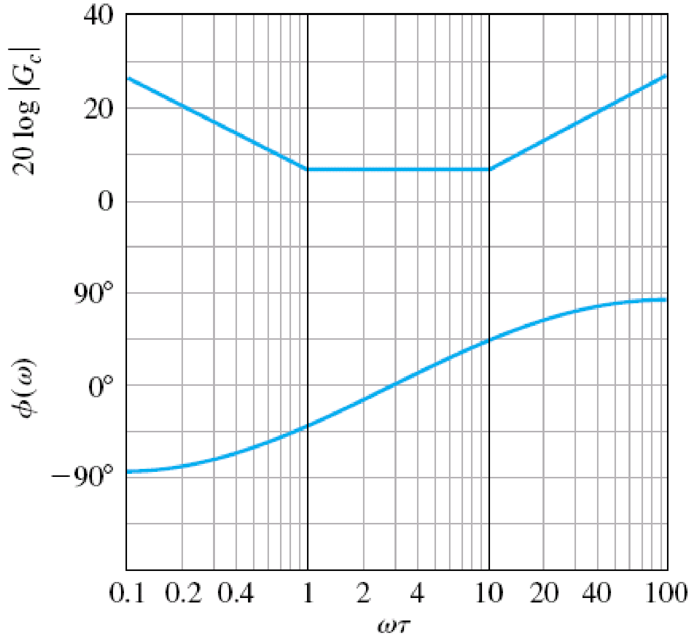
比例增益K_P　　　**微分增益K_D**

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.2 常用校正环节

$$G_c(s)=\frac{K_I\left(\frac{K_D}{K_I}s^2+\frac{K_P}{K_I}s+1\right)}{s}=\frac{K_I(\tau s+1)\left(\frac{\tau}{\alpha}s+1\right)}{s}$$

给出K_P=2, α=10时，以$\omega\tau$ 为自变量的Bode图(一类以K_i为可调变量的带阻滤波器)：



E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.2 常用校正环节

PID控制器传函中的微分项实际上多为：

$$G_d(s)=\frac{K_D s}{\tau_D s+1} \tag{6.11}$$

其中 τ_D 远小于受控对象的时间常数。

(6.10)中，当$K_D=0$，或 $K_I=0$ 时，可分别得到：

- **比例-积分控制器(PI)**：

$$G_c(s)=K_P+\frac{K_I}{s} \tag{6.12}$$

- **比例-微分控制器(PD)**：

$$G_c(s)=K_P+K_D s \tag{6.13}$$

6.2 常用校正环节

超前校正环节相当于PD控制器中的微分环节采用 $G_d(s)=\dfrac{K_D s}{\tau_D s+1}$ ，为带有滤波环节的PD控制器。

滞后校正环节的极点和零点一般为一对偶极子且紧靠坐标原点(这时, $T_i>>1$, β很小), 滞后校正环节近似为PI控制器。

偶极子：系统中相距很近(相对于其他极点、零点)的一对极点和零点。这时零、极点到离它们较远的点的矢量近似相等。

返回

6.3 Design a compensator with Bode Plot

性能指标以频域指标给出，如相角裕量、增益裕量、幅穿频率、相穿频率等，宜采用频率法校正。有时，给出的时域指标，也可转换为频域指标，而采用频率法校正。

6.3.1 串联超前校正

要点：

- 改善静态特征：增大开环增益
- 改善动态特征：超前校正环节转折频率$1/\alpha T_d$和 $1/T_d$选择在预定的幅穿频率ω_c的两边，使$\omega_m=\omega_c$，提高相角裕量。

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.1 Introduction 概述

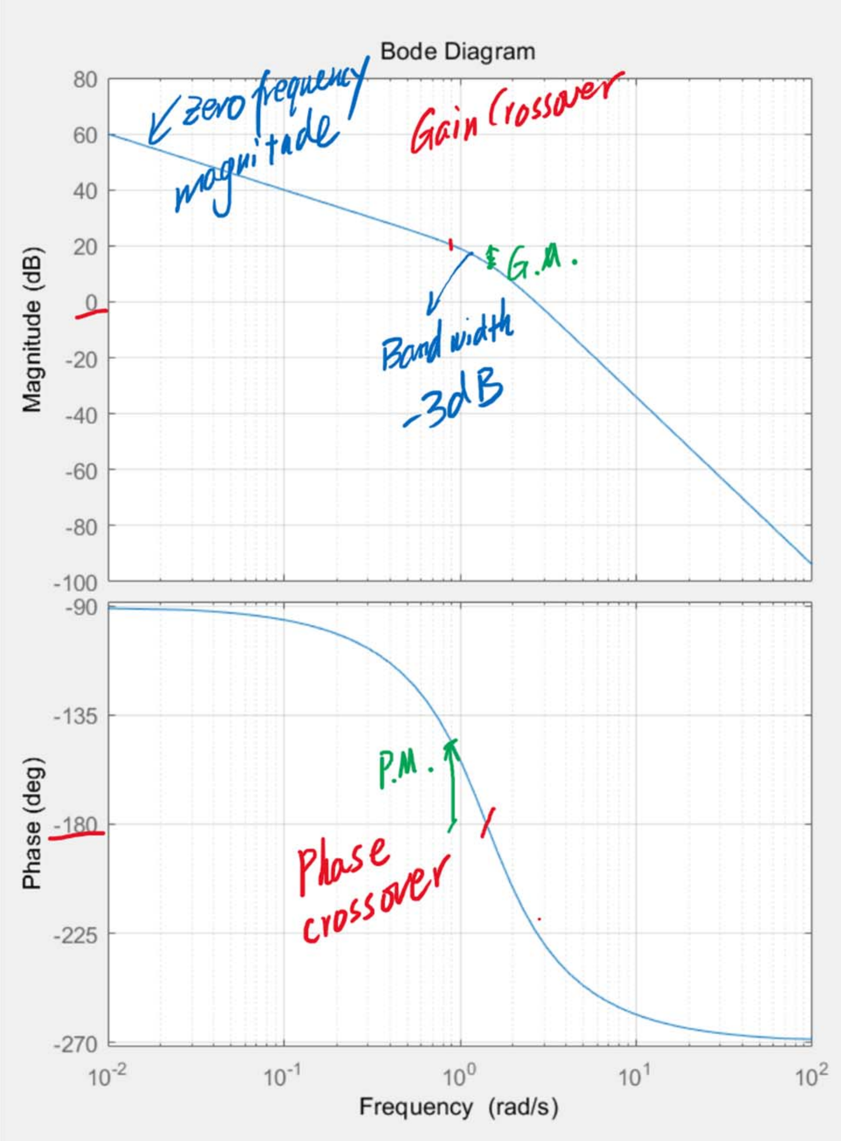
6.2 Several Compensators 常用校正环节

6.3 Control System Design by Frequency Response 基于频率法的串联校正

6.4 Control System Design by Root-locus Method 基于根轨迹法的串联校正

Key words:

- Phase margin
- Gain margin
- Gain crossover
- Bandwidth
- Zero-Frequency magnitude
- Steady State Error
- Cutoff frequency
(upper lower)

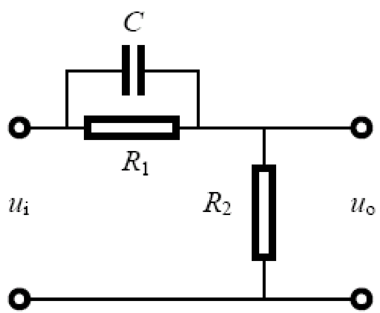


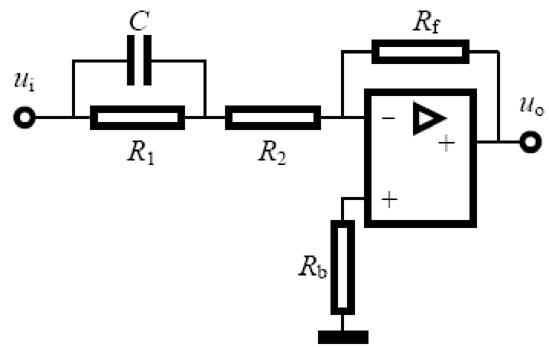
E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

Review

1) Phase Lead Network

The Transfer Function





$$Z_1 = \frac{R_1/Cs}{R_1 + 1/Cs} = \frac{R_1}{1+R_1Cs}, Z_2 = R_2$$

$$G_c(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{R_2}{R_2 + \dfrac{R_1}{1+R_1Cs}} = \frac{R_2(1+R_1Cs)}{R_1+R_2+R_1R_2Cs}$$

$$= \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1+R_1Cs}{1+\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}Cs}$$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

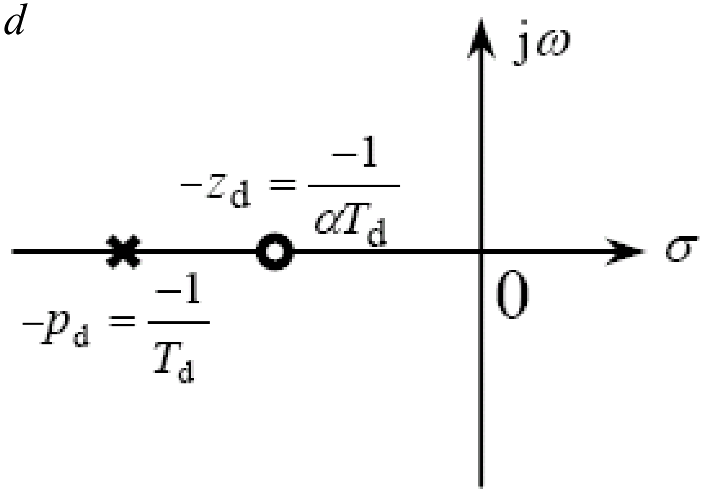
Review

Transfer Function of the Phase-lead Compensation Network (超前校正网络传函)：

$$G_c(s)=\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha T_d s+1}{T_d s+1}=\frac{s+z_d}{s+p_d} \qquad (6.1)$$

其中 $\alpha=\dfrac{R_1+R_2}{R_2}>1, T_d=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}C$

分度系数　　时间常数



Zeros: $-z_d=-\dfrac{1}{\alpha T_d}$ Poles: $-p_d=-\dfrac{1}{T_d}$ 　 $z_d<p_d$

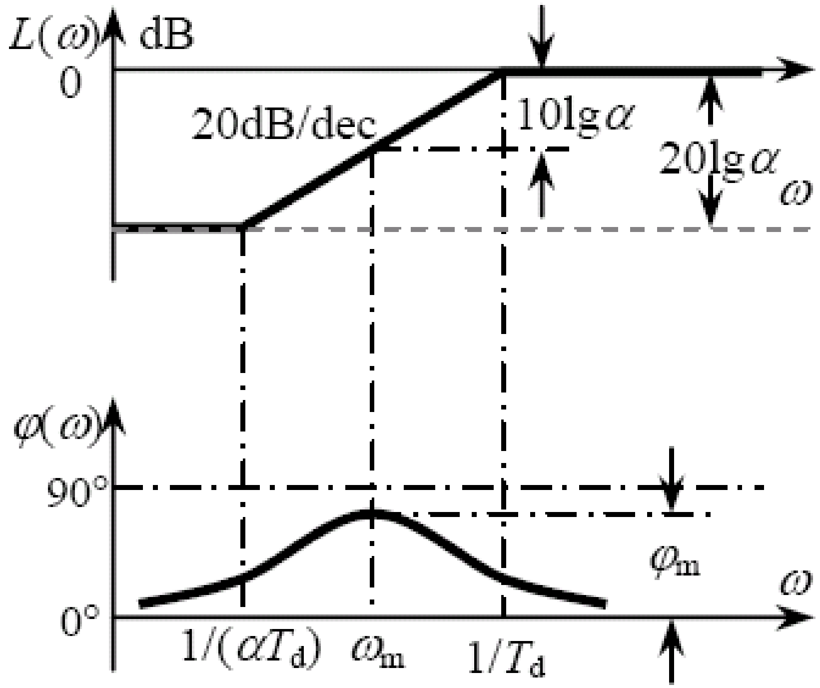
E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

Review

Frequency response :

$$G_c(j\omega)=\frac{1}{\alpha}\frac{1+j\alpha T_d\omega}{1+jT_d\omega}$$

$$G_c(j\omega)\overset{\omega\to 0}{=}\frac{1}{\alpha},\qquad G_c(j\omega)\overset{\omega\to\infty}{=}1$$



Cutoff Frequency :

$$\omega_1=\frac{1}{\alpha T_d}=z_d,\ \omega_2=\frac{1}{T_d}=p_d$$

Phase Angle :

$$\varphi_d(\omega)=\arctan(\alpha T_d\omega)-\arctan(T_d\omega)=\arctan\left[\frac{(\alpha-1)T_d\omega}{1+\alpha T_d{}^2\omega^2}\right]$$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

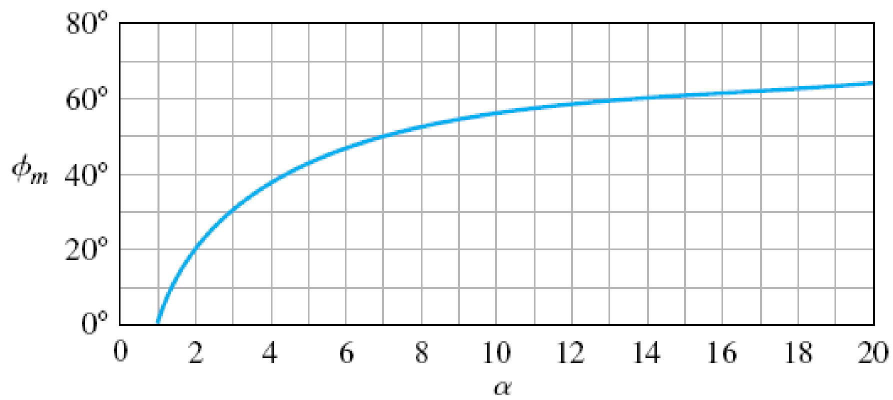
Review

$$\omega_1 = \frac{1}{\alpha T_d} \quad \omega_2 = \frac{1}{T_d}$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{\alpha T_d}\frac{1}{T_d}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T_d}$$

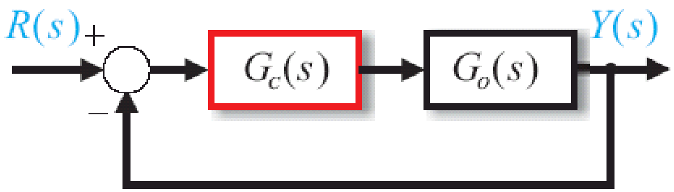
$$\varphi_m = \varphi_d(\omega_m) = \arctan\frac{(\alpha-1)}{2\sqrt{\alpha}} = \arcsin\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

$$\alpha = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$$



6.3.1 Phase Lead Design Using Bode Diagram

<E6.1> A feed back system has a loop transfer function



$$G_o(s)=\frac{4}{s(s+2)}$$

Design a compensator $G_c(s)$ to meet the following requirements:

The steady-state error coefficient $K_v \geq 20s^{-1}$

The phase margin $\Phi_{pm} \geq 50^\circ$

The gain margin $GM \geq 10\text{dB}$.

For a ramp input: $R(s)=\frac{1}{s^2}$

type 0: $e_{ss}=\infty$

type I: $e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{K(\ )}{s(\ )}=K$

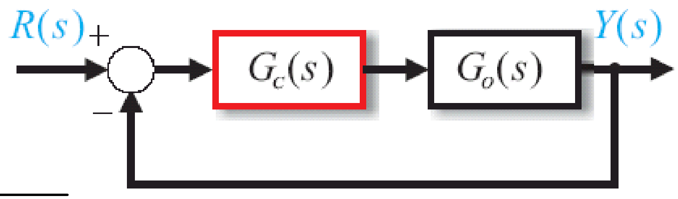
type II: $e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{K(\ )}{s^2(\ )}=0$

$$G(s)H(s)=\frac{K\Pi(\ )}{s^{v}\Pi(\ )}$$

$$\boxed{\begin{aligned} e_{ss}&=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+GH}R(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+GH}\cdot\frac{1}{s^2}\\ &=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sGH}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sGH}\end{aligned}}$$

6.3.1 Phase Lead Design Using Bode Diagram

<E6.1> A feed back system has a loop transfer function



$$G_o(s)=\frac{4}{s(s+2)}$$

Design a compensator $G_c(s)$ to meet the following requirements:

The steady-state error coefficient $K_v \geq 20s^{-1}$

The phase margin $\Phi_{pm} \geq 50°$

The gain margin $GM \geq 10\text{dB}$.

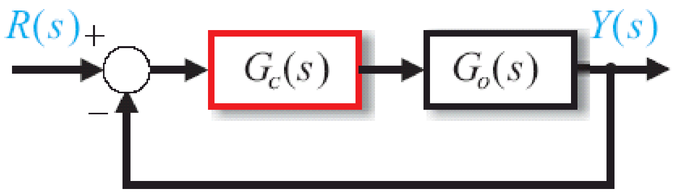
1) Add K_{c1} to the system.

$$K_v=\lim_{s\to 0} s\left[K_{c1}G_o(s)\right]=\lim_{s\to 0}\frac{4K_{c1}}{s+2}=2K_{c1}\geq 20$$

$$K_{c1}=10$$

6.3.1 串联超前校正

<例6.1> 控制系统如图所示。



被控对象 $G_o(s)=\dfrac{4}{s(s+2)}$

设计校正环节 $G_c(s)$ 使系统满足：

$K_v \geq 20s^{-1}$，相角裕量 $\Phi_{pm} \geq 50°$，幅值裕量 $GM \geq 10\text{dB}$.

解：

1) 考虑静态误差，加入K_{c1}

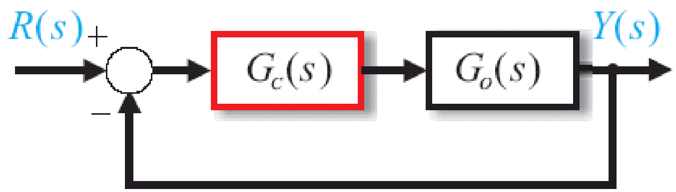
$$K_v=\lim_{s\to 0} s\left[K_{c1}G_o(s)\right]=\lim_{s\to 0}\frac{4K_{c1}}{s+2}=2K_{c1}\geq 20$$

取 $K_{c1}=10$

6.3.1 Phase Lead Design Using Bode Diagram

2) Plot the Bode diagram of the un-compensated system.

$K_{c1}G_o(j\omega)$



$$K_{c1}G_o(j\omega) = \frac{40}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{20}{j\omega(\frac{j\omega}{2}+1)}$$

$$20\lg 20 \approx 26dB$$

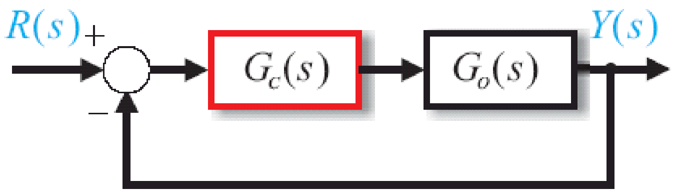
Phase-Frequency response characteristic can be modified as :

ω :	0.1×2	0.16×2	0.4×2	2.5×2	6.3×2	10×2
$\Delta\varphi$:	-5.7°	相交	$+5.3^\circ$	-5.3°	相交	$+5.7^\circ$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.3.1 Phase Lead Design Using Bode Diagram

2) 画出$K_{c1}G_o(j\omega)$的Bode图：

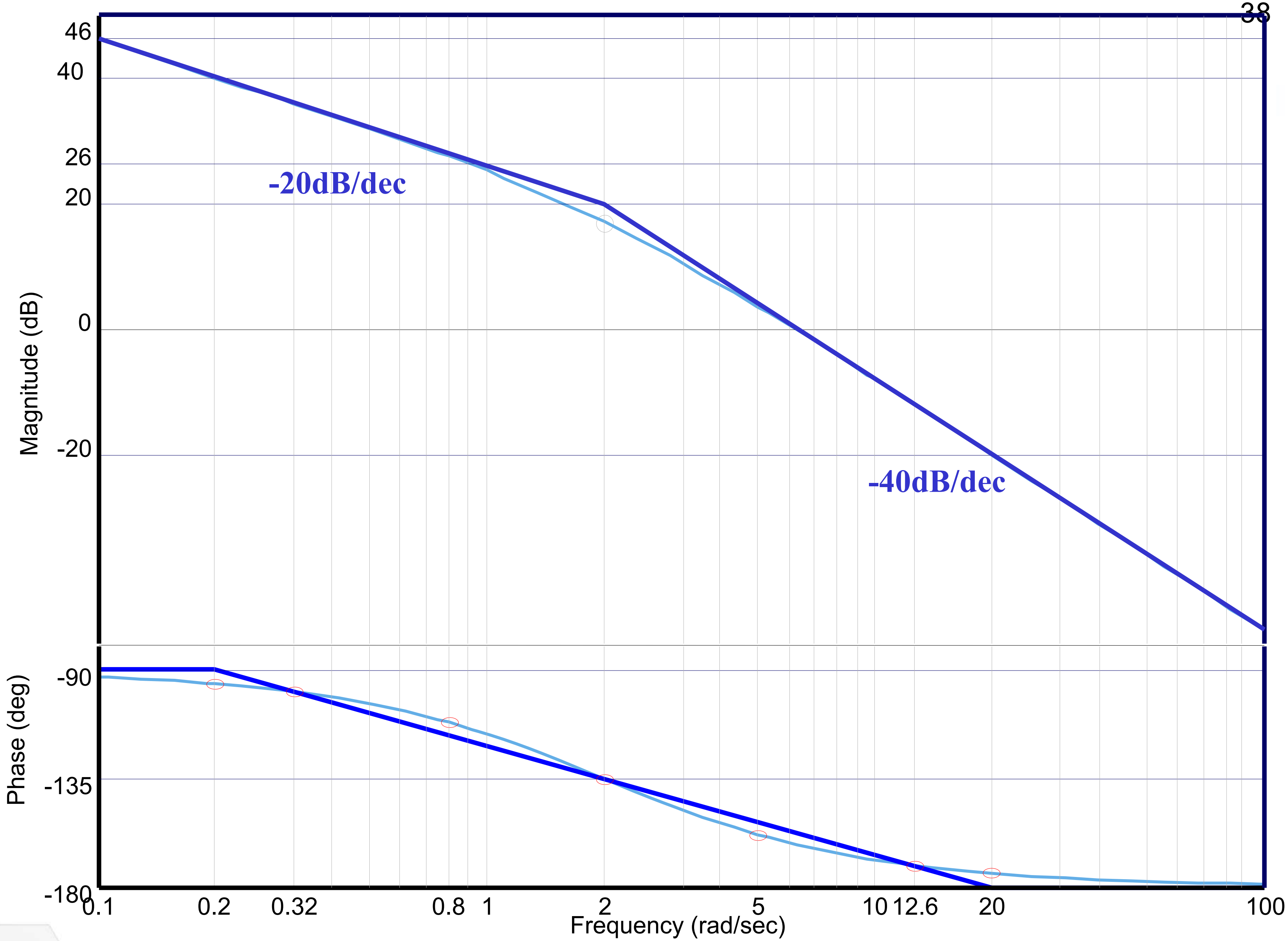


$$K_{c1}G_o(j\omega)=\frac{40}{j\omega(j\omega+2)}=\frac{20}{j\omega(\frac{j\omega}{2}+1)}$$

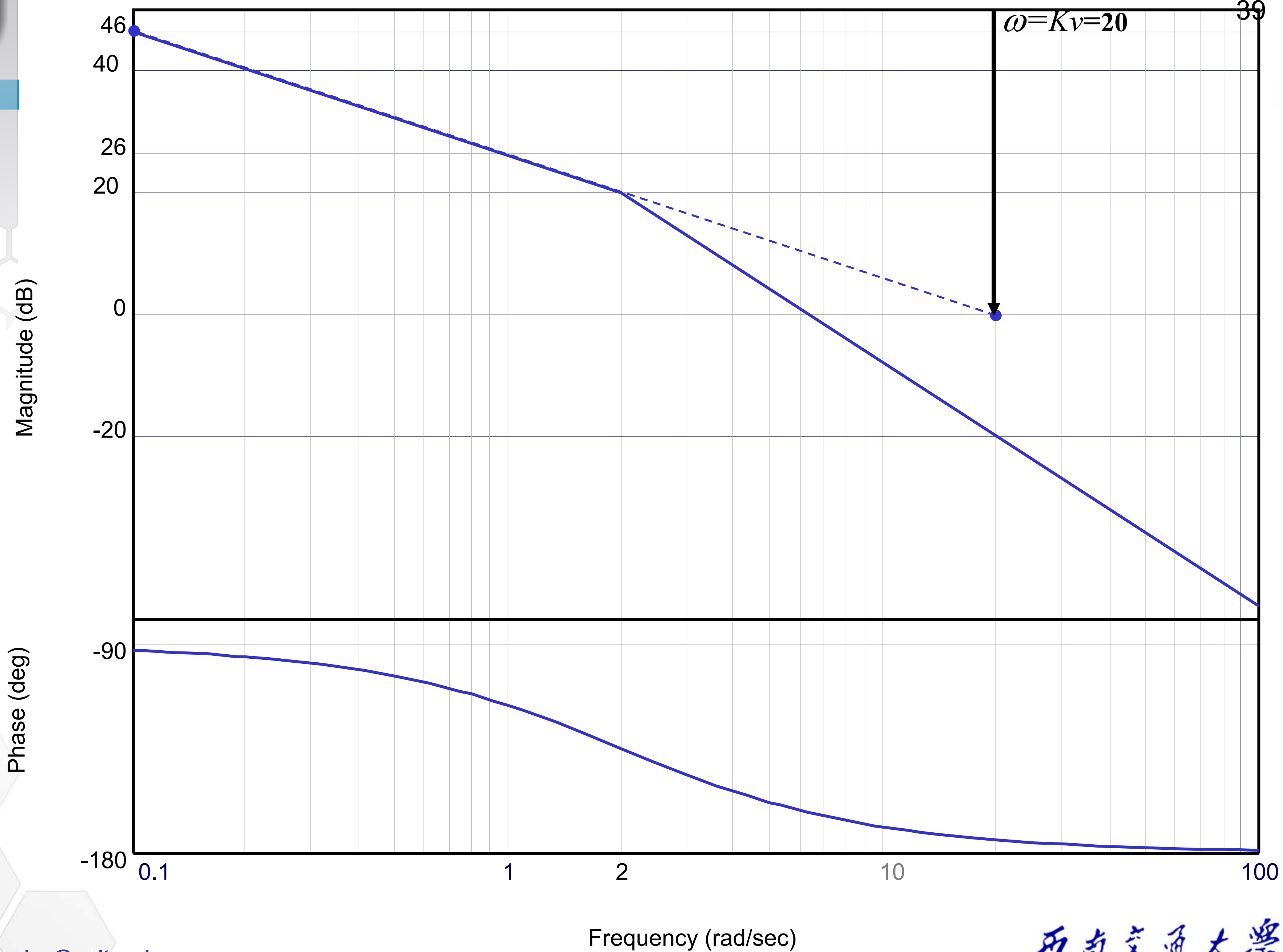
$$20\lg 20\approx 26dB$$

相频特性修正：

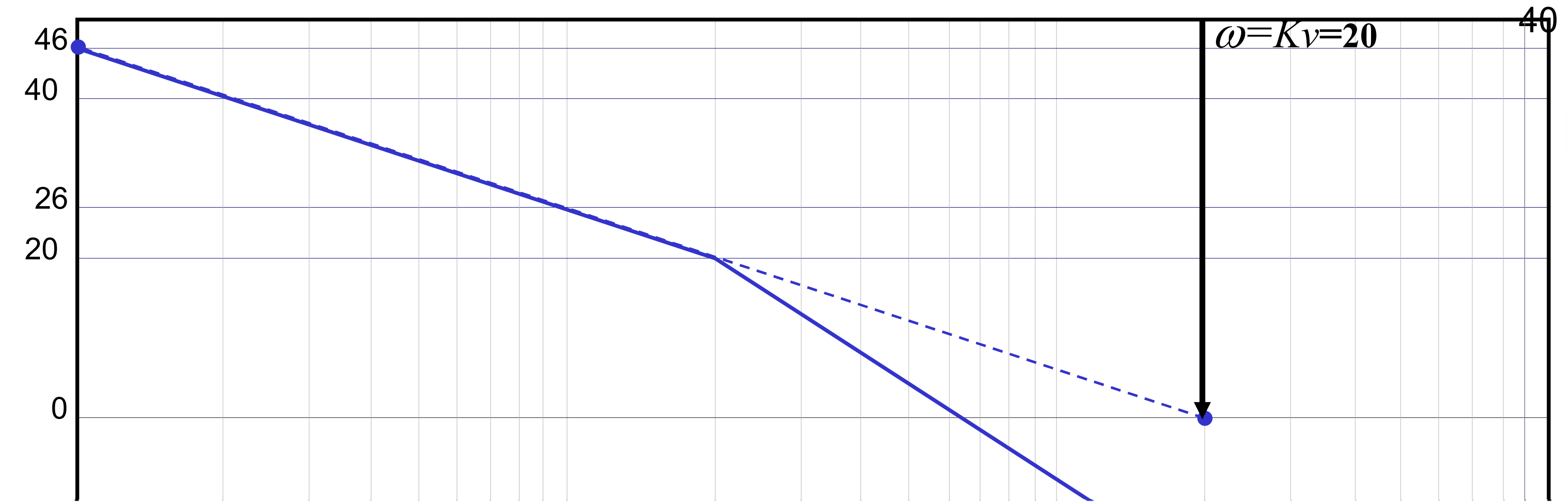
ω :	0.1×2	0.16×2	0.4×2	2.5×2	6.3×2	10×2
$\Delta\varphi$:	$-5.7°$	相交	$+5.3°$	$-5.3°$	相交	$+5.7°$



E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn



E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

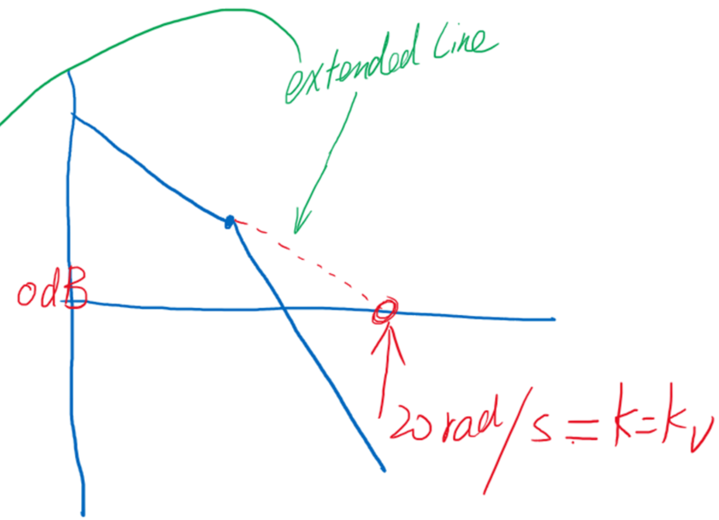


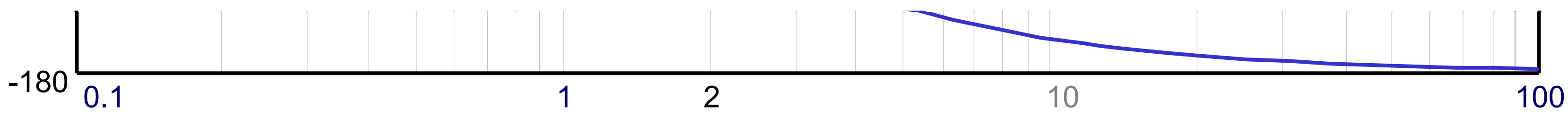
$$G(s)=\frac{20}{s(\frac{s}{2}+1)} \qquad G(j\omega)=\frac{20}{j\omega(\frac{j\omega}{2}+1)}$$

when $\omega\to 0$ $\quad A(\omega)=\,?$

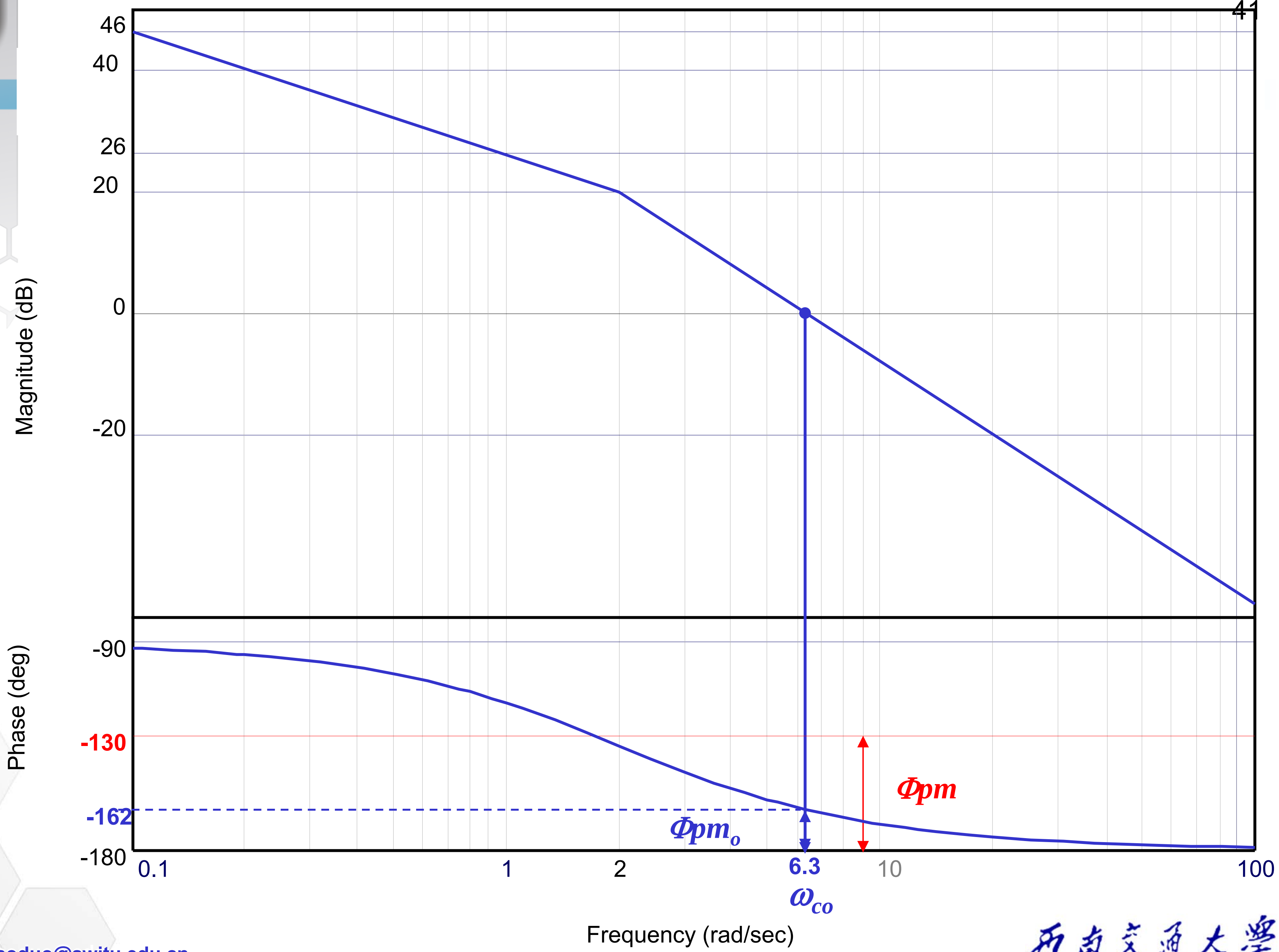
$$A(\omega)\Big|_{\omega\to 0}=20\log\left|\frac{20}{j\omega}\right|\Big|_{\omega\to 0}=\underline{20\log\left|\frac{20}{\omega}\right|}$$

$$A(\omega)=0\,dB \Rightarrow \left|\frac{20}{\omega}\right|=1 \Rightarrow \omega=20$$

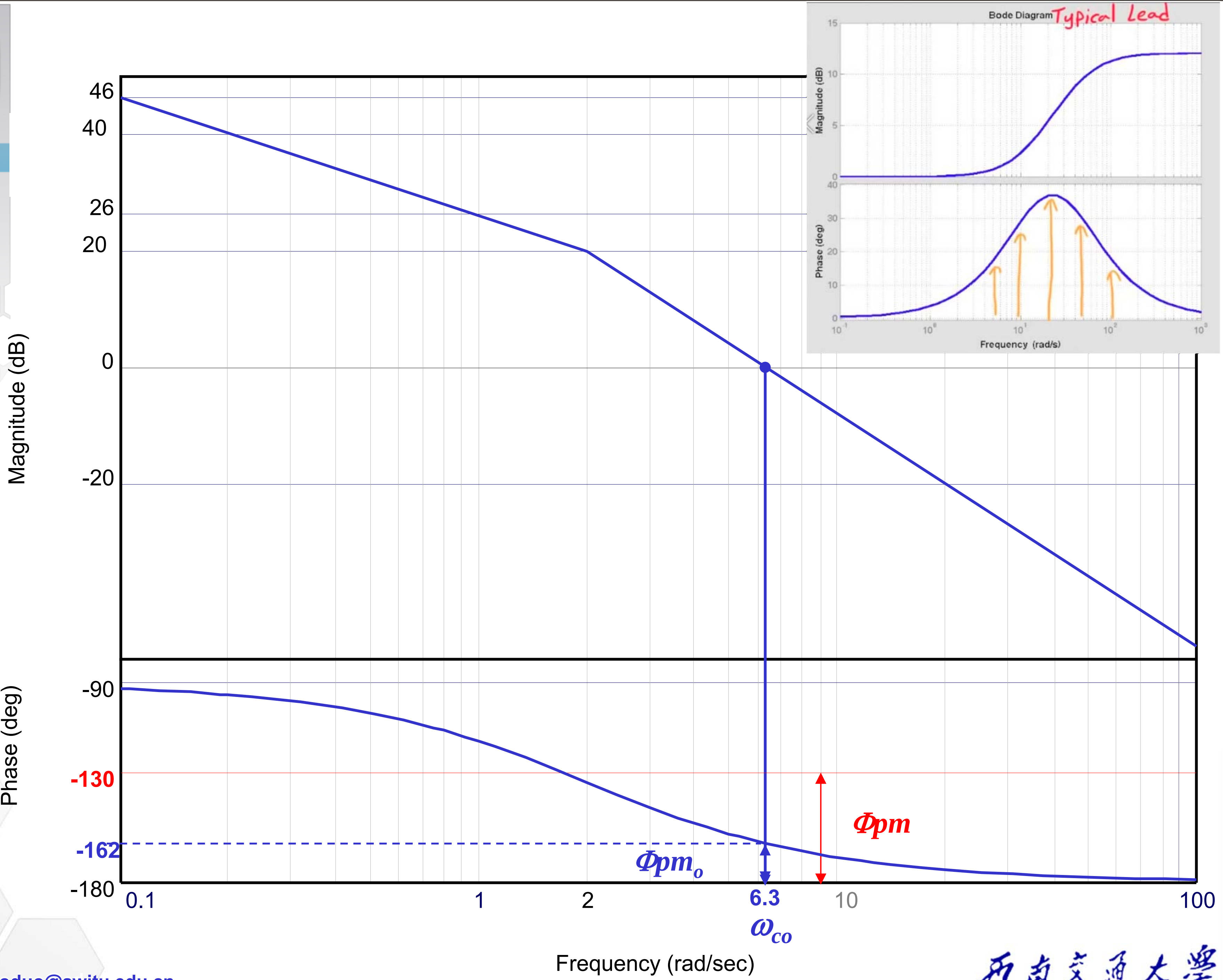




E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn



E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn



E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.3.1 Phase Lead Design Using Bode Diagram

由Bode图读出：$\omega_{c0} = 6.3\ rad/sec$ $\Phi_{pm0} = 18°$，$GM = \infty$

要使$\Phi_{pm} \geq 50°$，应该加入超前校正环节：

$$G_c(s) = K_c \frac{s+z_d}{s+p_d} = K_{c1}K_{c2}\frac{s+\dfrac{1}{\alpha T_d}}{s+\dfrac{1}{T_d}} = K_{c1}K_{c2}\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha T_d s+1}{T_d s+1}$$

所缺相角：$\Phi_{pm} - \Phi_{pm0} = 50° - 18° = 32°$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

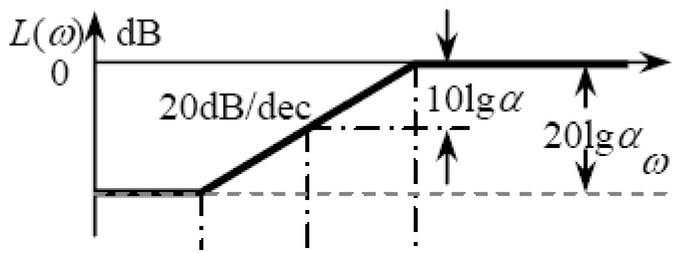
6.3.1 Phase Lead Design Using Bode Diagram

3) 确定校正环节的参数： Bode图

考虑到，加超前校正环节会使($\omega_c\nearrow$右移)， $\Phi_{pm}\searrow$ 因此，计算 φ_m 时应预留一个相角ε(ε的取值可视ω_c附近相频特性下降的快慢而定，可参考幅频特性在ω_c附近的斜率；-40dB/dec 时可取ε=5°~10°， -60dB/dec 时可取ε=15° ~20°)

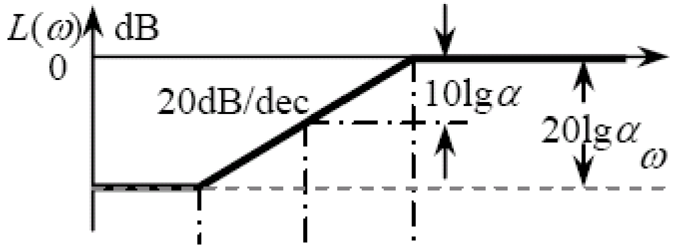
取 $\varphi_m = 50° - 18° + \varepsilon = 37°$

$$\alpha = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} = 4.023, \frac{1}{\alpha} = 0.249$$



E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.3.1 Phase Lead Design Using Bode Diagram



为了使K_v不下降，

应使 $\frac{K_{c2}}{\alpha}=1 \Rightarrow K_{c2}=\alpha=4.023$

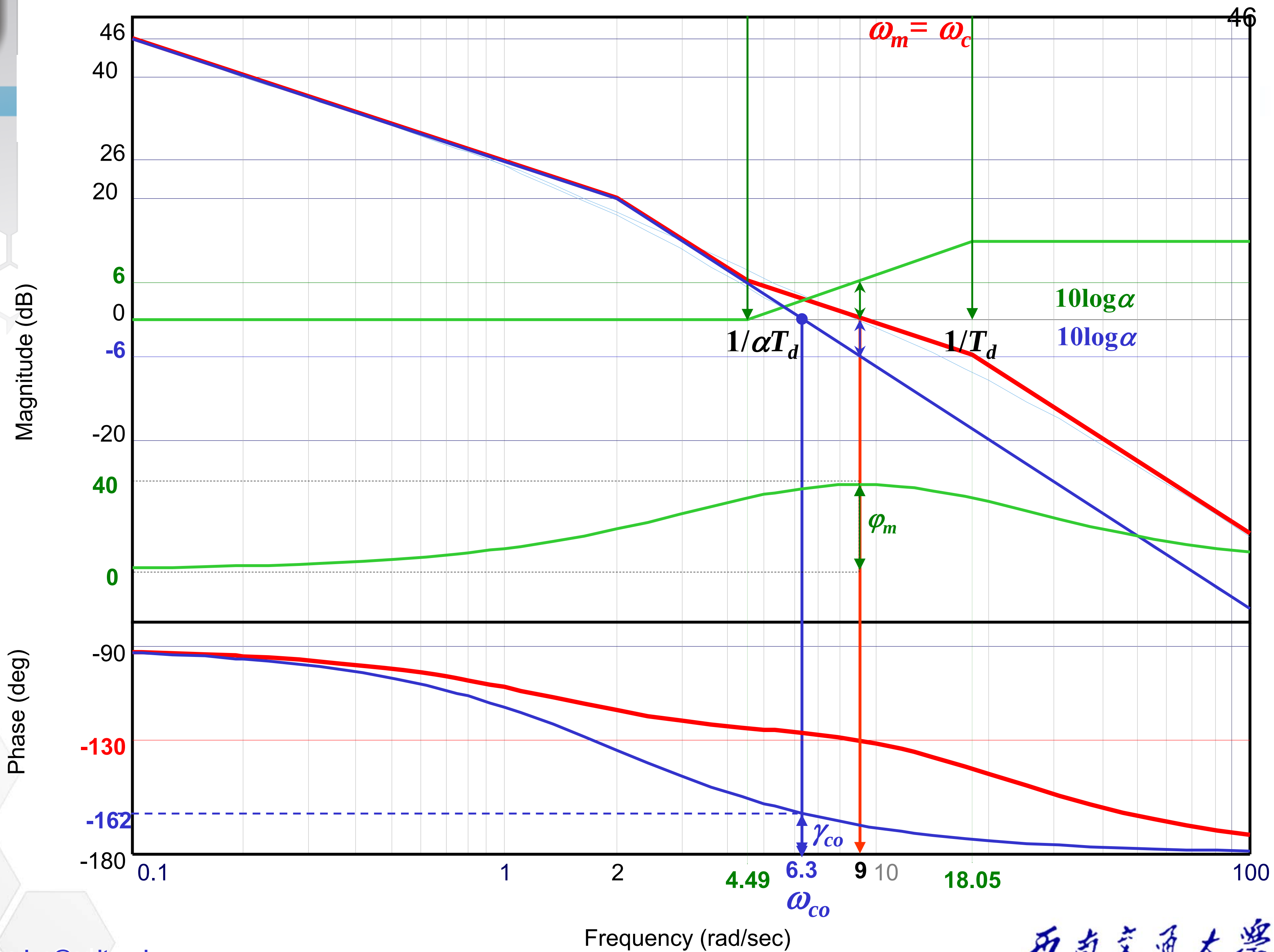
选择 ω_m: 使$\omega_m=\omega_c$(校正后) — 以充分利用超前相角

当 $\omega_c=\omega_m=\frac{1}{\sqrt{\alpha}T_d}$ 时

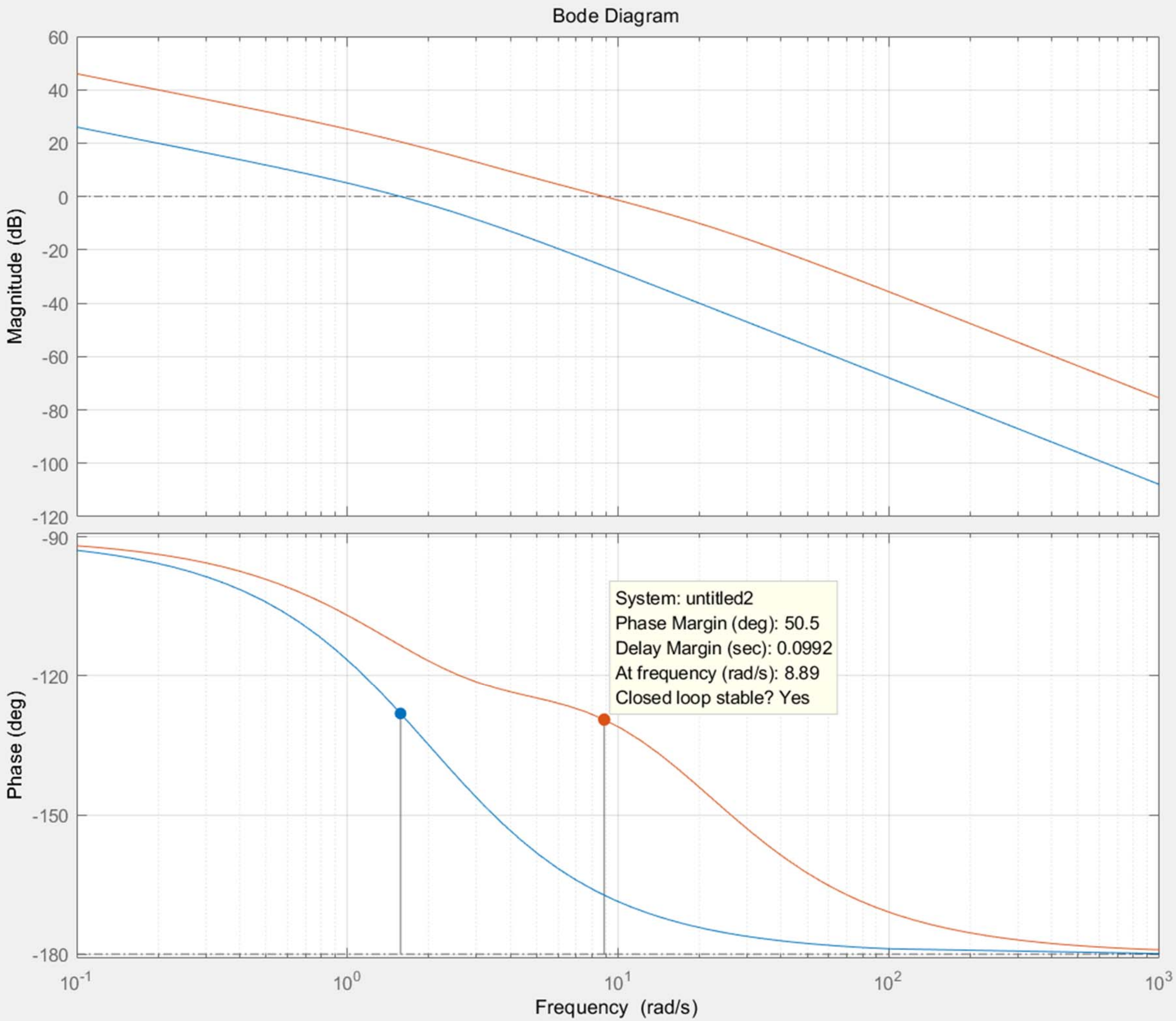
$$\frac{1}{\alpha}\left|\frac{1+j\alpha T_d\omega_m}{1+jT_d\omega_m}\right|=\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \frac{K_{c2}}{\alpha}\left|\frac{1+j\alpha T_d\omega_m}{1+jT_d\omega_m}\right|=\sqrt{\alpha}$$

上升了

$$20\lg\left|\frac{K_{c2}}{\alpha}\frac{1+j\alpha T_d\omega_m}{1+jT_d\omega_m}\right|=20\lg\sqrt{\alpha}=6dB$$



E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn


Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
System: untitled2
Phase Margin (deg): 50.5
Delay Margin (sec): 0.0992
At frequency (rad/s): 8.89
Closed loop stable? Yes

6.3.1 Phase Lead Design Using Bode Diagram

因此，将ω_m选在原$K_{c1}G_o(j\omega)$的幅频特性 Bode图

$$20\lg\left|K_{c1}G_o(j\omega)\right| = -6dB$$

处，就可以使新的幅穿频率$\omega_c = \omega_m$

由Bode图上读出 $\omega_c = \omega_m = 9\ rad/sec$

$$T_d = \frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{18.05} = 0.0554, \qquad \frac{1}{T_d} = 18.05$$

$$\alpha T_d = 0.223, \qquad \frac{1}{\alpha T_d} = 4.487$$

$$K_c = K_{c1}K_{c2} = 40.2, \qquad \frac{K_c}{\alpha} = K_{c1} = 10$$

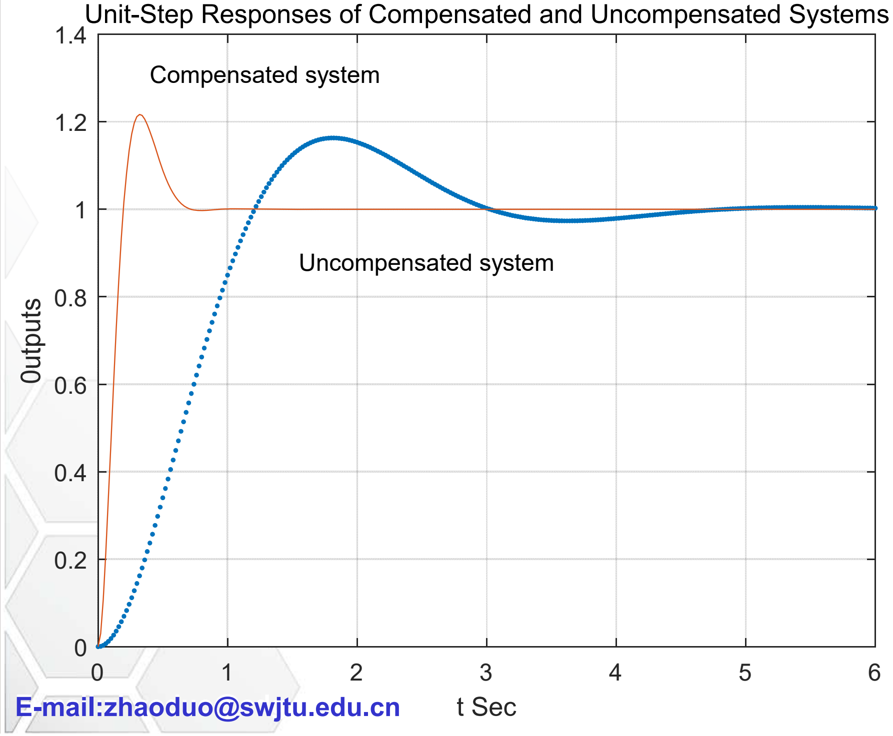
$$G_c(s) = K_c\frac{s+z_d}{s+p_d} = 40.2\frac{s+4.487}{s+18.05} = 10\frac{1+0.223s}{1+0.055s}$$

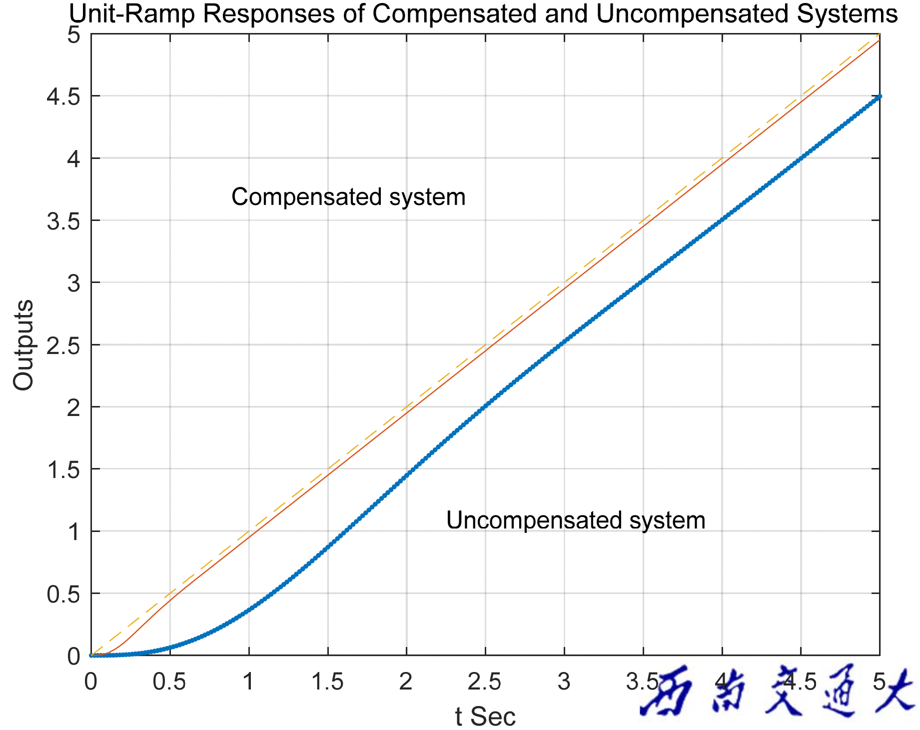
6.3.1 Phase Lead Design Using Bode Diagram

4) According to the Bode diagram of compensated system, we can get the performance specifications:

$$K_v = 20s^{-1}, \phi_{pm} \approx 50°, \quad GM = \infty, \quad \omega_c = 9rad/\sec$$

The bandwidth is increased, and speed of system response is faster, the steady state error meets the requirement.





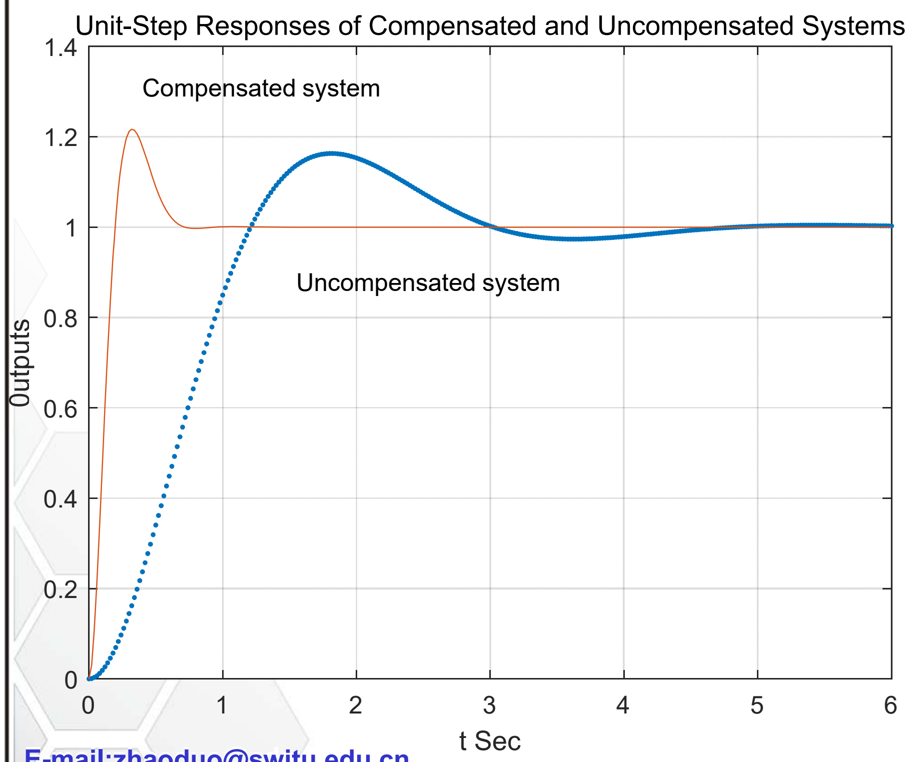
E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

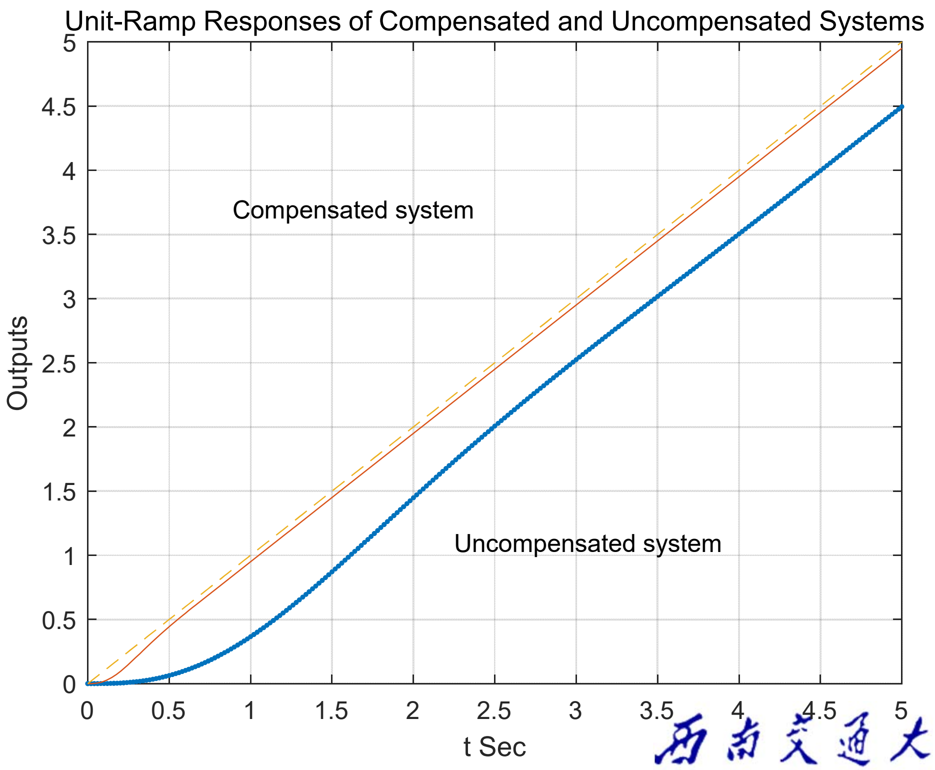
6.3.1 Phase Lead Design Using Bode Diagram

4) 由校正后系统的Bode图，检验性能指标：

$$K_v = 20s^{-1}, \phi_{pm} \approx 50°, \quad GM = \infty, \quad \omega_c = 9rad/\sec$$

频带加宽了，响应速度(略为)变快些Bode图





E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.3.1 Phase Lead Design Using Bode Diagram

Compensate STEPs:

1) Evaluate the uncompensated system phase margin when the error constants are satisfied.(By adding K_{c1} or increasing the type of the system)
2) Plot the bode diagram of $K_{c1}G_o(j\omega)$, get Φ_{pm0} and GM_o
3) Allowing for a small amount of safety, where determine the necessary additional phase lead φ_m where $\varphi_m = \Phi_{pm} - \Phi_{pm0} + \varepsilon$
4) Evaluate α from: $\alpha = \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$
5) Evaluate $10\log\alpha$ and determine the frequency where the uncompensated magnitude curve is equal to $-10\log\alpha$ dB
6) The frequency at which is the new 0dB crossover frequency and ω_m simultaneously $\omega_m = \omega_c$.

6.3.1 Phase Lead Design Using Bode Diagram

Compensate STEPs：

7) Calculate the cutoff frequency: $\dfrac{1}{\alpha T_d}, \dfrac{1}{T_d}$

8) For an acceptable design, raise the gain of the amplifier in order to account for the attenuation $1/\alpha$, by adding $K_{c2} = \alpha$

9) Finally, draw compensated frequency response, check the resulting phase margin and gain margin, and repeat the steps if necessary.

6.3.1 Phase Lead Design Using Bode Diagram

频率法串联超前校正参考步骤:

1) 根据静态误差系数，确定附加增益K_{c1}；

2) 画出$K_{c1}G_o(j\omega)$的Bode图，得到Φ_{pm0}和GM_o；并根据ω_c附近频率特性下降的情况取相角预留量ε；于是，超前环节的最大超前相角φ_m取为:

$$\varphi_m = \Phi_{pm} - \Phi_{pm0} + \varepsilon$$

3) 由$\alpha = \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$计算系数$\alpha$ 或者$(1/\alpha)$

4) 选取ω_m位于校正后的ω_c处: $\omega_m = \omega_c$

6.3.1 Phase Lead Design Using Bode Diagram

频率法串联超前校正参考步骤:

5) 由 $\omega_m = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha T_d}}$，计算$T_d$于是可得出超前校正环节的转折频率 $\dfrac{1}{\alpha T_d}, \dfrac{1}{T_d}$

6) 确定补偿超前环节增益衰减应附加的增益，即

$\dfrac{K_{c2}}{\alpha} = 1$，则超前环节总的附加增益$K_c = K_{c1} K_{c2}$

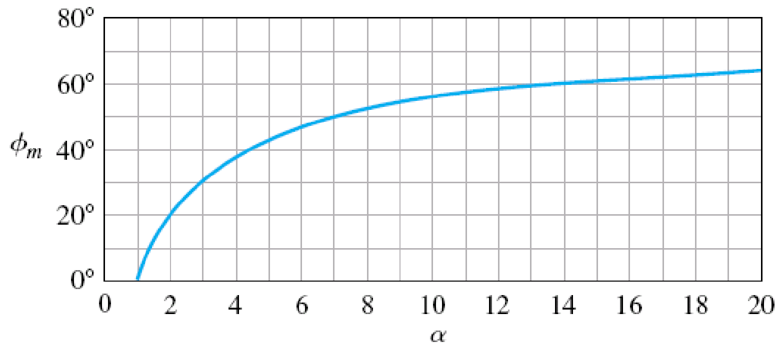
7) 作出校正后系统的Bode图，检查多项性能指标是否满足要求。

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.3.1 Phase Lead Design Using Bode Diagram

频率法串联超前校正注记：

1) 若需要φ_m太大时(>60°),串联一个超前环节难以满足要求。



2) 若原系统 $G_o(j\omega)$ 的相频特性 $\varphi_o(\omega)$ 在ω_c附近下降太快时，超前校正往往无效.

$\varphi_o(\omega)$ 在ω_c附近下降太快→预留量$\varepsilon\nearrow\rightarrow\varphi_m\nearrow\rightarrow\alpha\nearrow\rightarrow$
原 ω_{co} 距 ω_m 越远 所需要预留量 ε 越大。

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.3 Design a compensator with Bode Plot

6.3.2 串联滞后校正

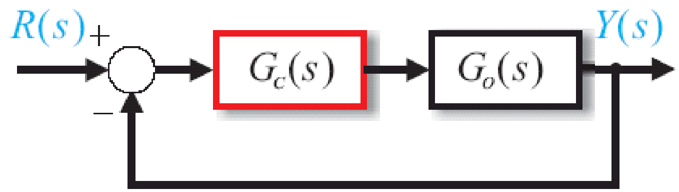
校正前系统在幅穿频率ω_c附近相频特性下降很快，一般采用超前校正往往无效。此时，若对校正后系统的幅穿频率要求不高时，可考虑采用滞后校正。

要点：

- 利用滞后环节中、高频段的幅值衰减特性，使校正后的幅穿频率ω_c下降(左移)，以获得要求的相角裕量；
- 避免滞后相角：使最大滞后相移角处的频率ω_m远离幅穿频率 ω_c，即$\omega_m << \omega_c$。

6.3.2 串联滞后校正

<例6.2> 控制系统如图所示:



被控对象 $G_o(s)=\dfrac{1.05}{s(s+1)(s+2)}$

设计校正环节 $G_c(s)$ 使系统满足:

$K_v \geq 5\ s^{-1}$，相角裕量 $\Phi_{pm} \geq 40°$，幅值裕量 $GM \geq 10$dB.

解:

1) $$K_{vo}=\lim_{s\to 0} s\left[G_o(s)\right]=0.525\,\mathrm{s}^{-1}$$

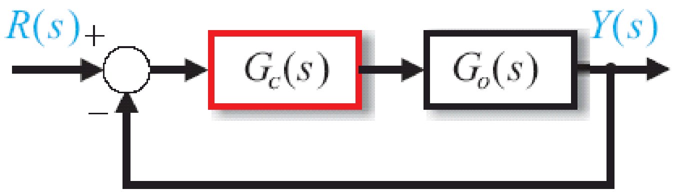
加入附加增益K_c，使$K_v \geq 5\ \mathrm{s}^{-1}$，

$$K_v=\lim_{s\to 0} s\left[K_cG_o(s)\right]=\lim_{s\to 0}\frac{1.05K_c}{2}\geq 5 \Rightarrow K_c \geq \frac{10}{1.05}=9.52$$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.3.2 串联滞后校正

取 $K_c = 9.52$

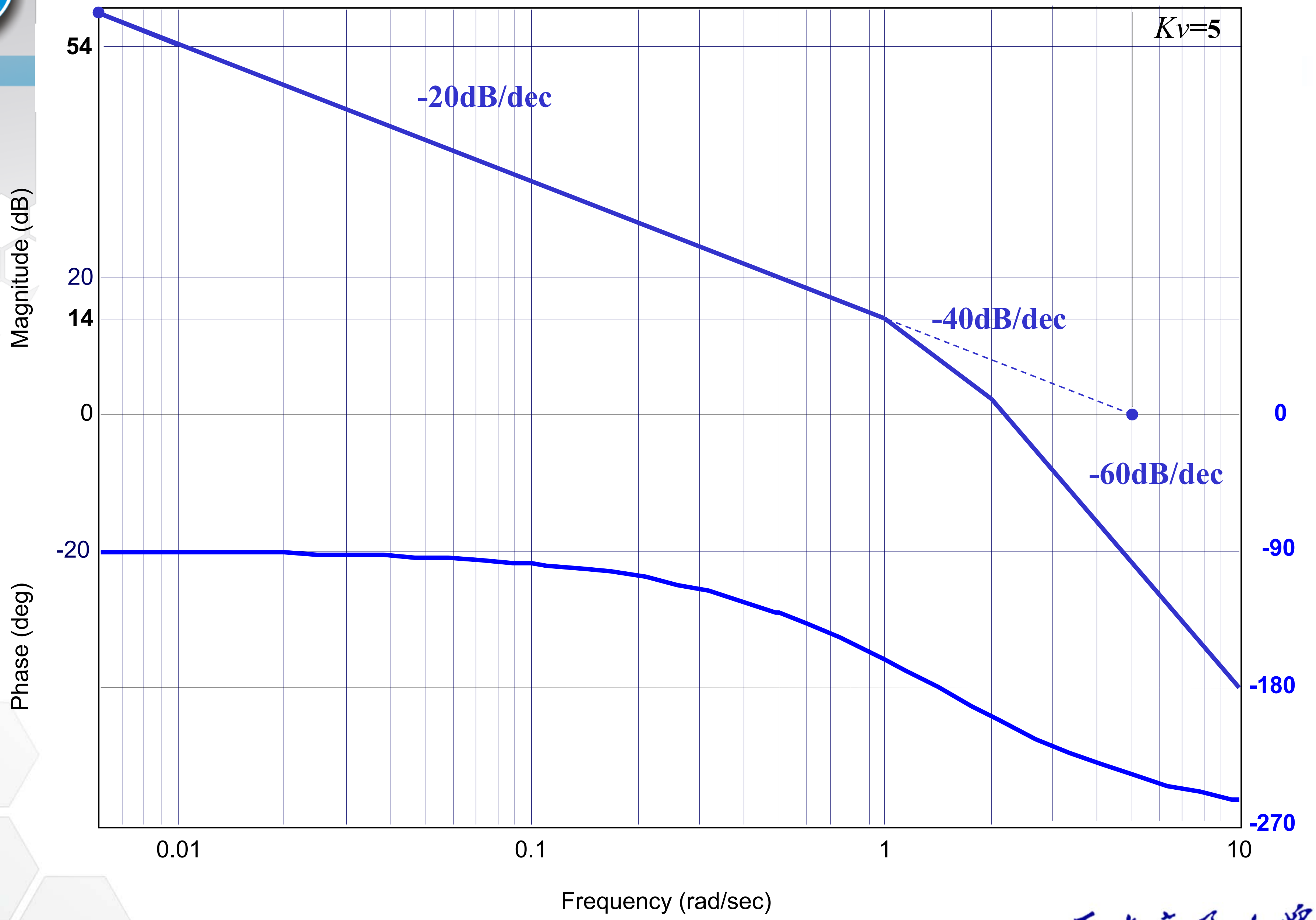


2) 画出$K_c G_o(j\omega)$的Bode图：

$$K_c G_o(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{5}{j\omega(j\omega+1)(\frac{j\omega}{2}+1)}$$

$$20\lg 5 = 13.98dB$$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn


Kv=5
54
20
14
0
-20
-20dB/dec
-40dB/dec
-60dB/dec
0
-90
-180
-270
Magnitude (dB)
Phase (deg)
0.01
0.1
1
10
Frequency (rad/sec)

6.3.2 串联滞后校正

3) 由 $K_cG_o(j\omega)$的Bode图读出：

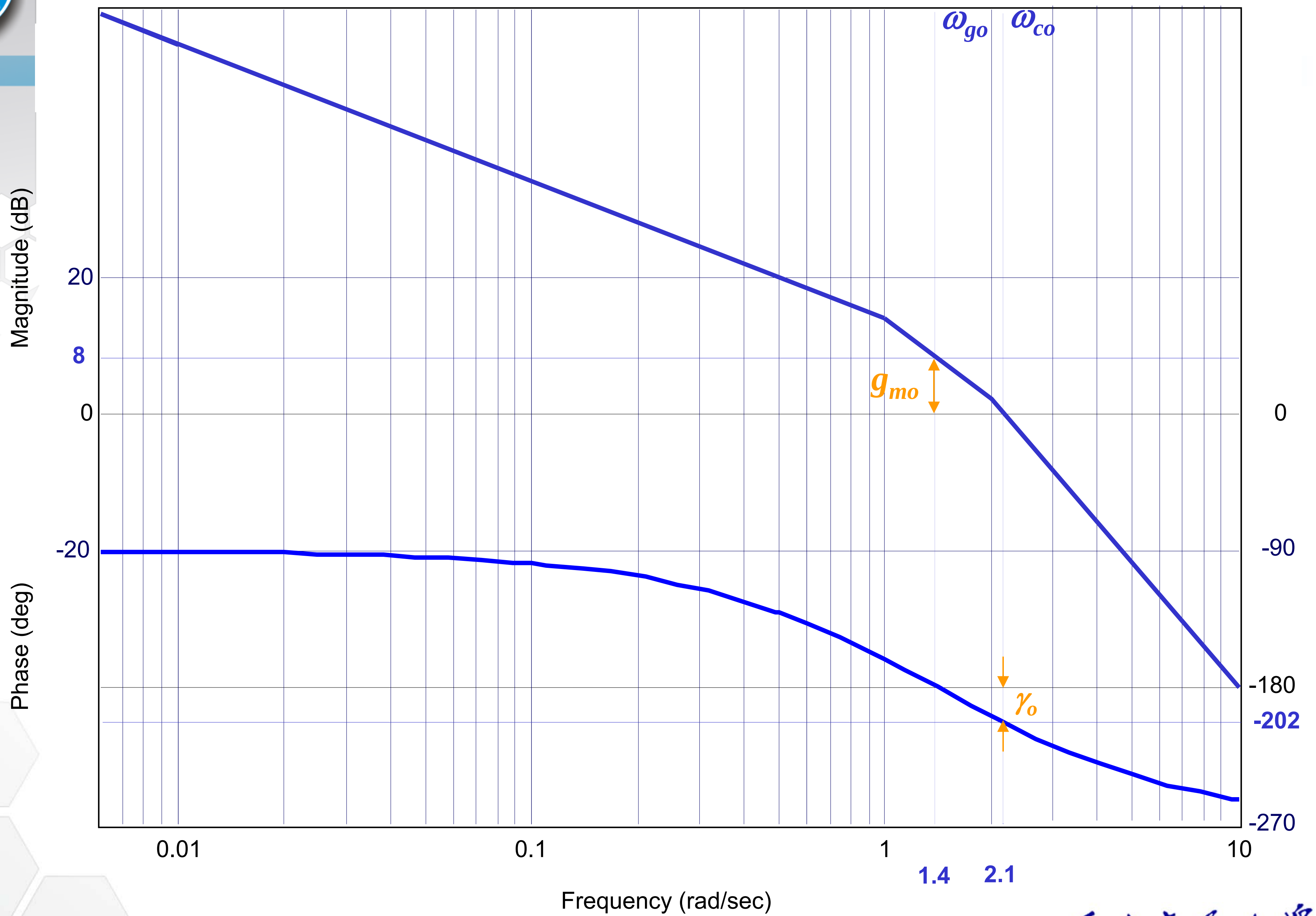
$$\omega_{c0}=2.1rad/s,\quad \phi_{pm0}=-22°;\quad \omega_0=1.4rad/s,\quad GM_0=-8dB$$

$K_cG_o(j\omega)$的相频特性 $\varphi_o(\omega)$ 在ω_{co}附近(略大于ω_{co}处)下降太快，用超前校正无效。

采用滞后校正(因对幅穿频率未作要求)：

将幅频特性的中频段衰减，使ω_c左移。

$$G_c(s)=K_c\frac{\beta T_i s+1}{T_i s+1}=K_c\beta\frac{s+\dfrac{1}{\beta T_i}}{s+\dfrac{1}{T_i}}$$


ω_{go}
ω_{co}
Magnitude (dB)
Phase (deg)
20
8
0
-20
0
-90
-180
-202
-270
g_{mo}
γ_o
0.01
0.1
1
10
1.4
2.1
Frequency (rad/sec)

6.3.2 串联滞后校正

4) 选择幅穿频率ω_c：

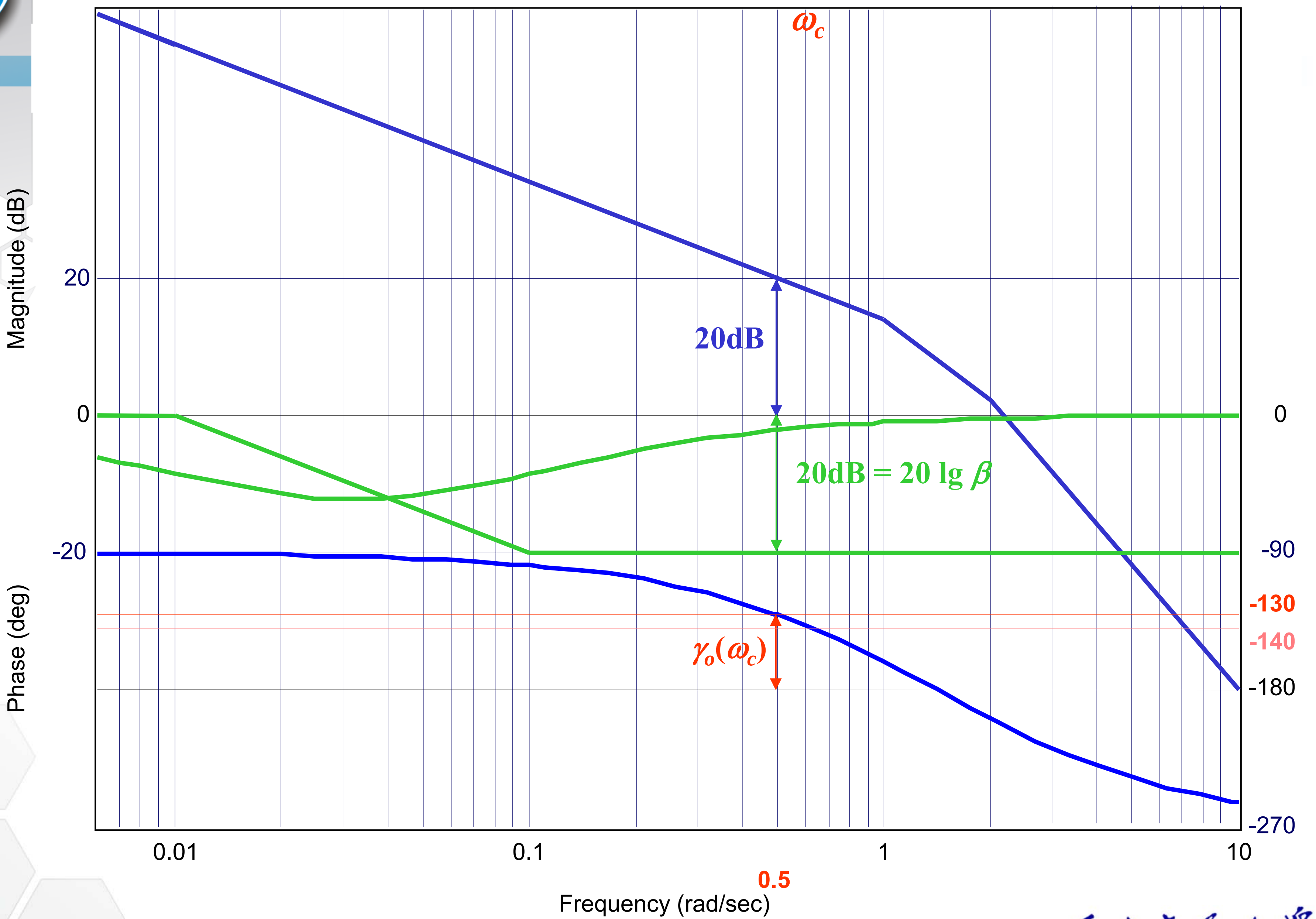
根据 相角裕量 $\Phi_{pm} \geq 40°$

由 $K_c G_o(j\omega)$的Bode图， $\omega = 0.6,\quad \varphi_o(\omega) + 180° > 40°$

同时，考虑到加入$G_c(s)$ 后，会使ω_c处的相角下降 $\varphi_i(\omega_c)$ ($\varphi_i(\omega_c)$为滞后校正环节$G_c(s)$ 在ω_c处的滞后相角量)，因此选择 ω_c 应保证：

$$\phi_{pm0}(\omega_c) = \phi_{pm} + \left|\varphi_i(\omega_c)\right| \qquad (6.14)$$

一般取$|\varphi_i(\omega_c)|$为5°～12°，视校正装置转折频率远离ω_c的程度而定。



E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.3.2 串联滞后校正

取$\Phi_{pm0}(\omega_c)=50°$，由$K_cG_o(j\omega)$的相频特性$\varphi_o(\omega)$读出:

$$\omega_c=0.5rad/\sec$$

5) 确定 $G_c(s)$ 的分度系数β :

$\omega_c=0.5$ 处

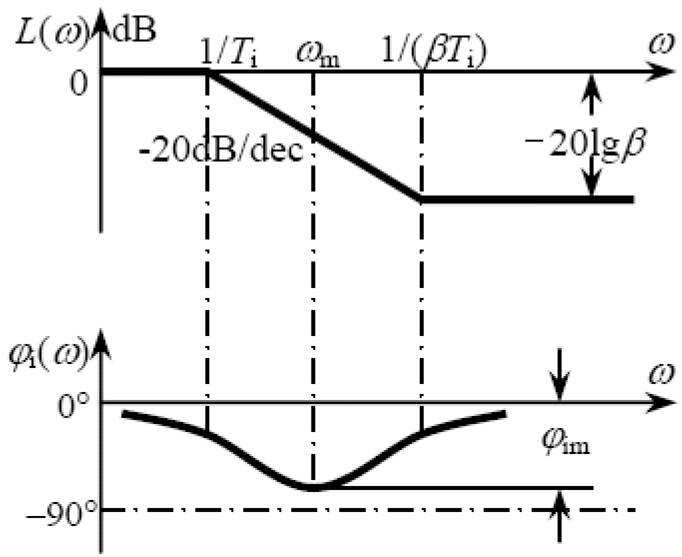
$20\lg|K_cG_o(j\omega_c)|\approx 20$ dB

$$20\lg|K_cG_o(j\omega_c)|+20\lg\beta=0$$

$$20\lg\beta=-20\lg|K_cG_o(j\omega_c)|$$

$$20\lg\beta=-20dB$$

$$\beta=0.1$$



(6.15)

6.3.2 串联滞后校正

6) 确定 $G_c(s)$ 的转折频率：

确定 $\dfrac{1}{\beta T_i}$ 的原则：

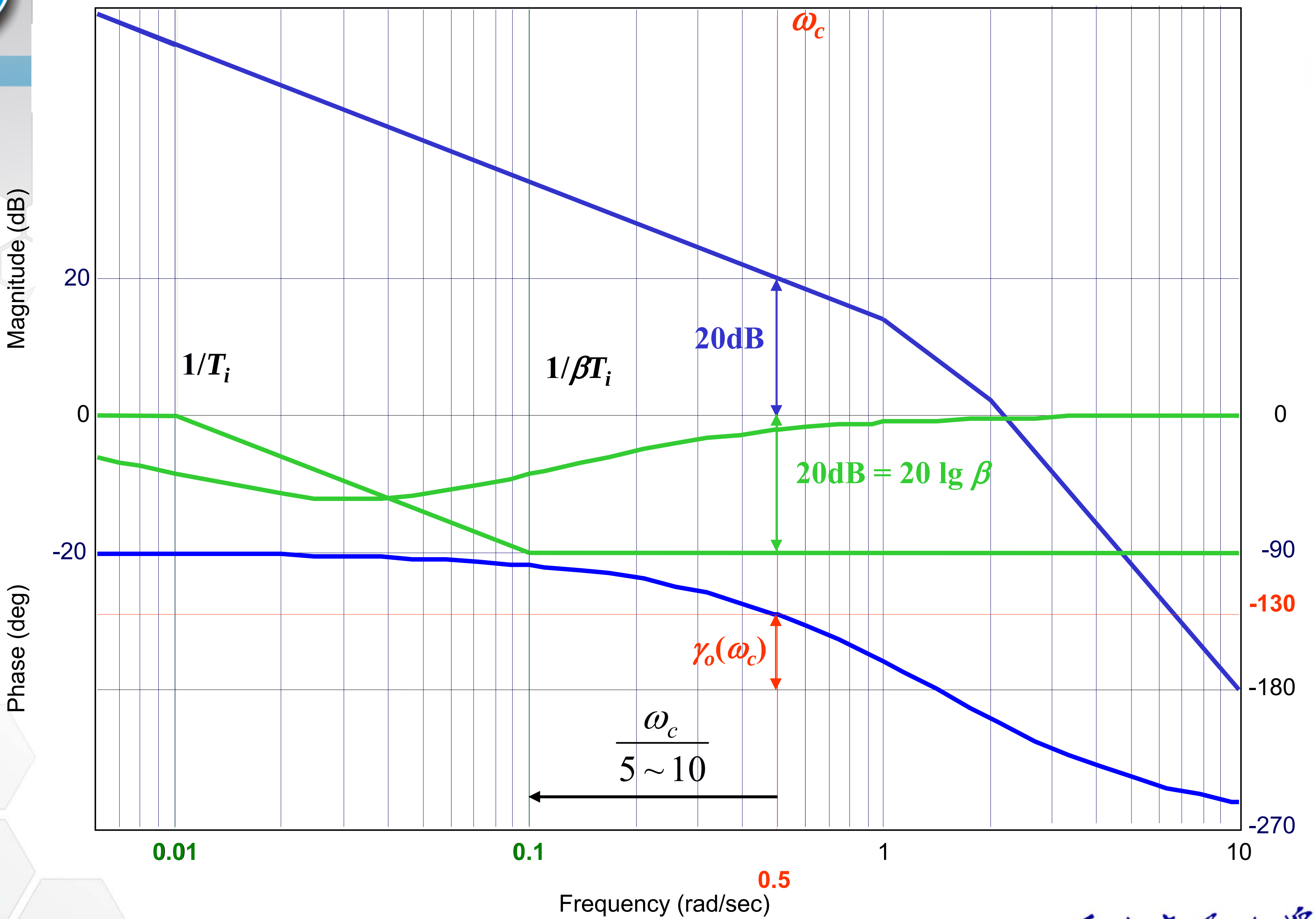
- 要离开ω_c一定距离，以保证 $\phi_{pm0}(\omega_c)=\phi_{pm}+|\varphi_i(\omega_c)|$
- 为便于实现，$\dfrac{1}{\beta T_i}$ 也不能太小($\dfrac{1}{\beta T_i}$ 很小→βT_i 、T_i 很大)

一般取 $$\frac{1}{\beta T_i}=z_i=\frac{\omega_c}{5\sim10} \qquad (6.16)$$

取，零点 $\dfrac{1}{\beta T_i}=0.1,\quad \beta T_i=10,\quad T_i=100$

极点 $\dfrac{1}{T_i}=\dfrac{1}{100}=0.01$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn



E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.3.2 串联滞后校正

校正后的开环传函：

$$G(s)=G_c(s)G_o(s)=\frac{(1+\frac{s}{0.1})}{(1+\frac{s}{0.01})}\frac{5}{s(1+s)(1+\frac{s}{2})}=\frac{s+0.1}{s(s+1)(s+2)(s+0.01)}$$

7) 检验性能指标：

$$\omega_c=0.5rad/\sec,\quad \phi_{pm}\approx 40^\circ$$

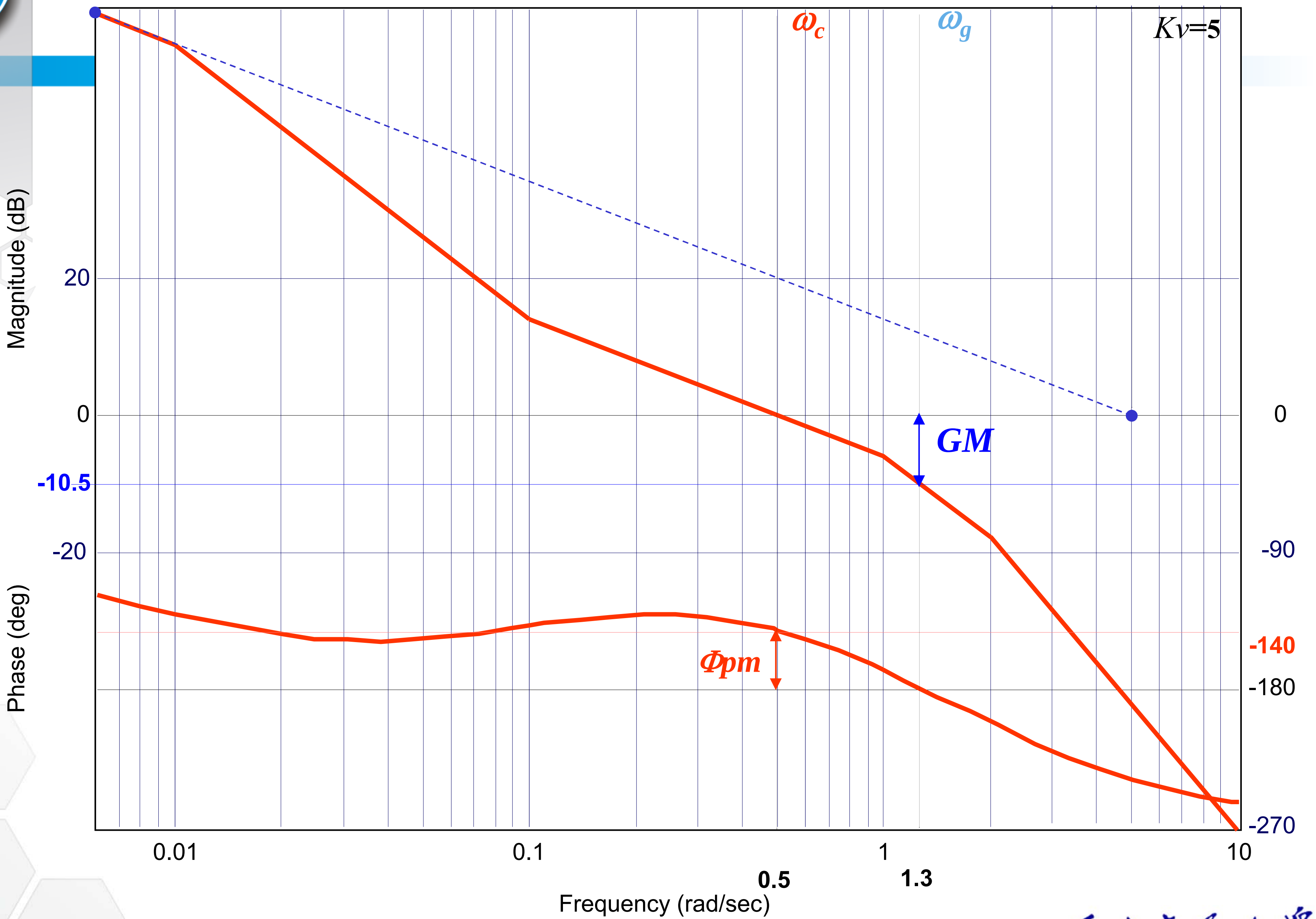
$$\omega_g=1.3rad/\sec,\quad GM=10.5dB$$

$$K_v=5\,\mathrm{s}^{-1}$$

幅穿频率: $\omega_{co}=2.1$ rad/sec 下降到 $\omega_c=0.5$ rad/sec

带宽减小，会使响应时间有所增大。

(而超前校正使带宽增大)


ωc
ωg
Kv=5
Magnitude (dB)
20
0
-10.5
-20
GM
Phase (deg)
0
-90
-140
-180
-270
Φpm
0.01
0.1
1
10
0.5
1.3
Frequency (rad/sec)

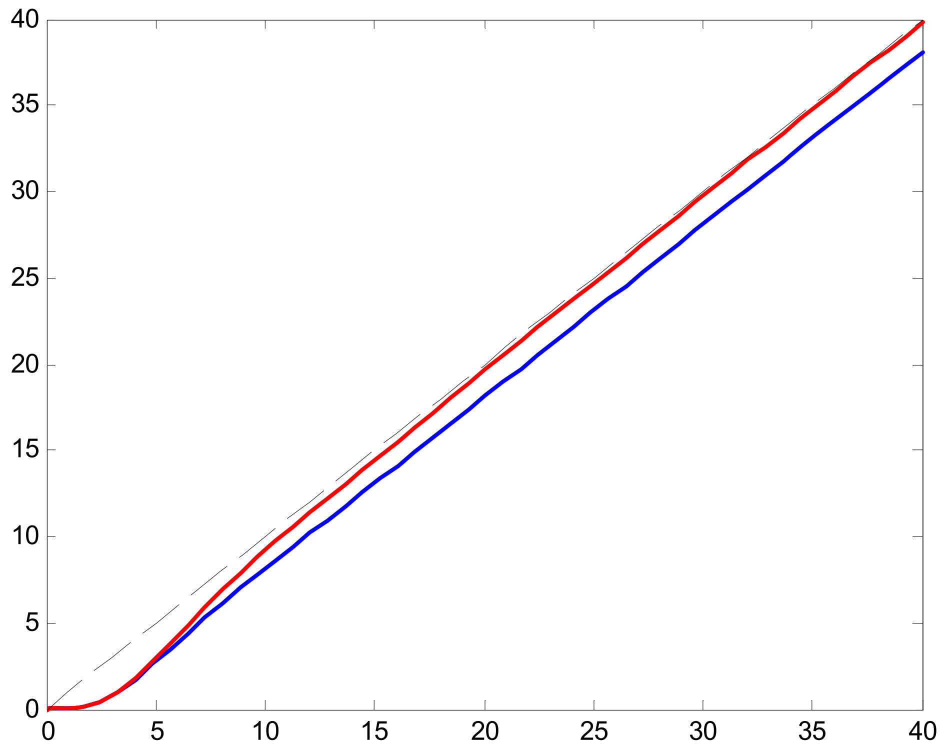
6.3.2 串联滞后校正

$$K_{vo} = \lim_{s\to 0} s\left[G_o(s)\right] = 0.525\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$e_{ss} = 1/K_{vo} = 1.905$$

$$K_v = 5\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$e_{ss} = 1/K_v = 0.2$$



6.3.2 串联滞后校正

频率法串联滞后校正参考步骤：

1) 根据稳态指标(静态误差系数)，确定附加增益K_c（系统的开环增益）；

2) 绘制$K_cG_o(j\omega)$的Bode图，确定Φ_{pmo}和GM_o；

3) 选取新的幅穿频率ω_c，该点的相位应满足：

$$\phi_{pm0}(\omega_c)=\phi_{pm}+\left|\varphi_i(\omega_c)\right|$$

4) 确定未校正系统的幅频特性在新的幅穿频率处下降到0dB所需的衰减量，使：

$$20\lg|K_cG_o(j\omega_c)|+20\lg\beta=0$$

以此确定β;

6.3.2 串联滞后校正

频率法串联滞后校正参考步骤：

5) 选择转折频率 $\dfrac{1}{\beta T_i}$(零点)，使$\left|\varphi_i(\omega_c)\right|$不大于预留的滞后相角。 一般取 $\dfrac{1}{\beta T_i}=\dfrac{\omega_c}{5\sim10}$

6) 根据 $G_c(j\omega)G_o(j\omega)$ 的Bode图，检验系统的性能指标是否满足要求。

6.3 基于频率法的串联校正

6.3.3 串联滞后—超前校正

同时利用**超前**和**滞后**两种校正：

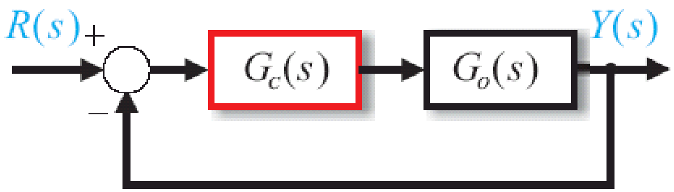
超前部分——增加稳定裕量，改善动态特性；

滞后部分——提高开环增益，改善稳态精度。

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.3.3 串联滞后—超前校正

<例6.3> 控制系统如图所示:



被控对象 $G_o(s)=\dfrac{10}{s(s+2)(s+6)}$

设计校正环节 $G_c(s)$ 使系统满足：

$K_v \ge 15\ s^{-1}$， $\omega_c \ge 3.5$ rad/sec, $\phi_{pm} \ge 50°$, $GM \ge 10$dB.

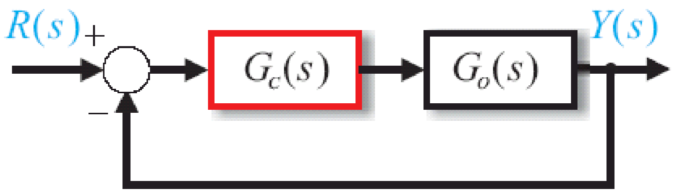
解：

1) 根据 $K_v \ge 15\ s^{-1}$， 确定附加增益K_{c1}： 使

$$K_v=\lim_{s\to 0} s\left[K_{c1}G_o(s)\right]=\lim_{s\to 0}\left[\frac{10K_{c1}}{(s+2)(s+6)}\right]=\frac{10K_{c1}}{12}\ge 15$$

$$K_{c1}\ge\frac{12\times 15}{10}=18 \qquad \text{取} \quad K_{c1}=18$$

6.3.3 串联滞后—超前校正

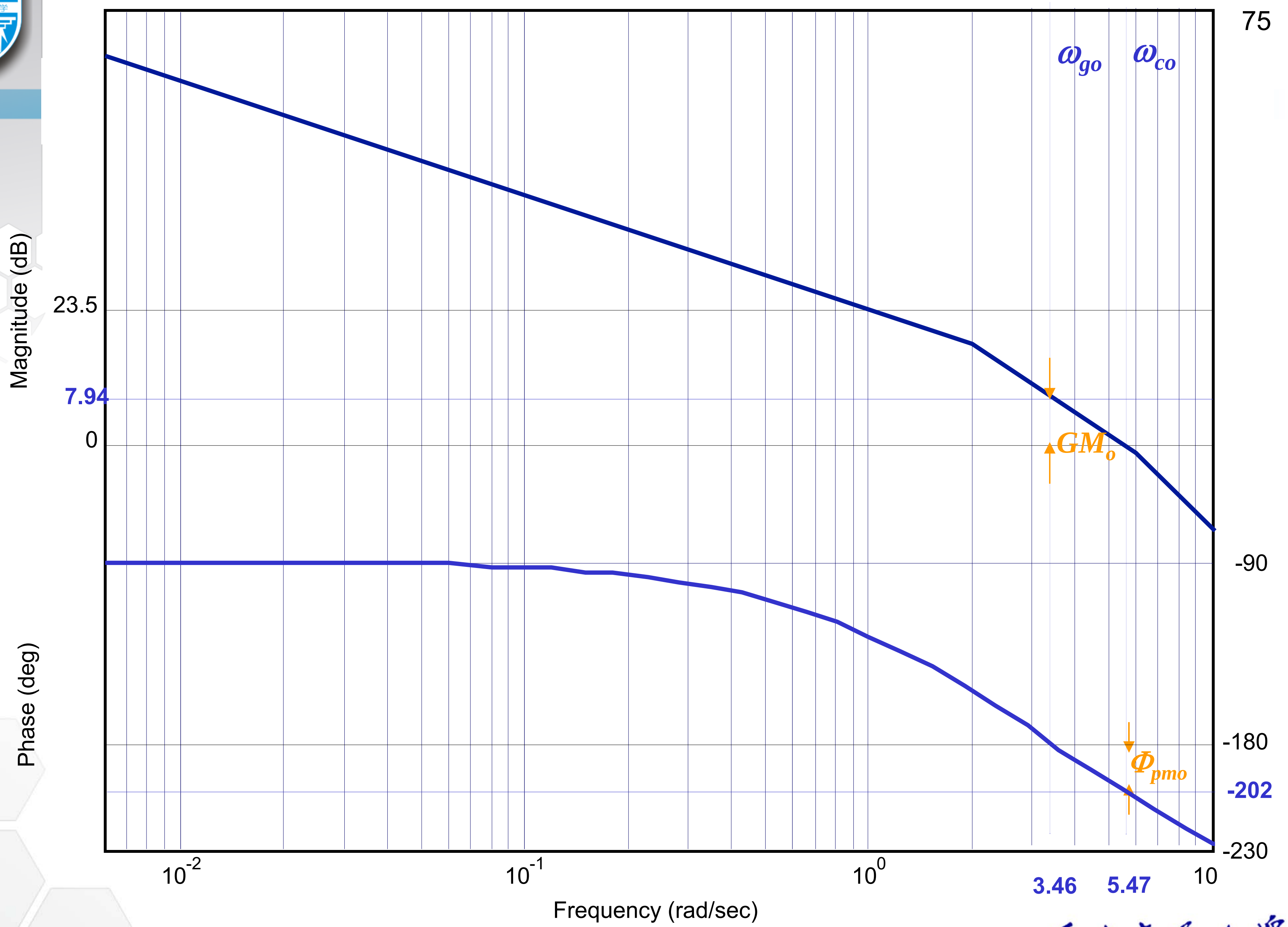


2) 画出$K_{c1}G_o(j\omega)$的Bode图：

$$K_{c1}G_o(j\omega)=\frac{180}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+6)}$$

$$=\frac{15}{j\omega(\frac{j\omega}{2}+1)(\frac{j\omega}{6}+1)}$$

$$20\lg 15\approx 23.5dB$$



E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

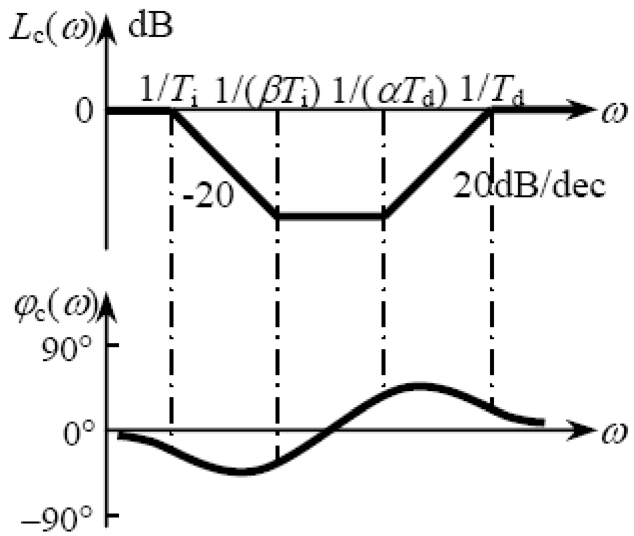
6.3.3 串联滞后—超前校正

3) 由$K_{c1}G_o(j\omega)$的Bode图读出：

$$\omega_{co}=5.47rad/s,\phi_{pm0}=-22.3°;\quad \omega_{go}=3.46rad/s,GM_0=-7.94dB$$

原系统不稳定，在ω_{co}附近，$\varphi_o(\omega)$下降太快，过$-180°$太多，且要求$\omega_c\geq 3.5$ rad/sec，单独采用超前校正或滞后校正均无效。

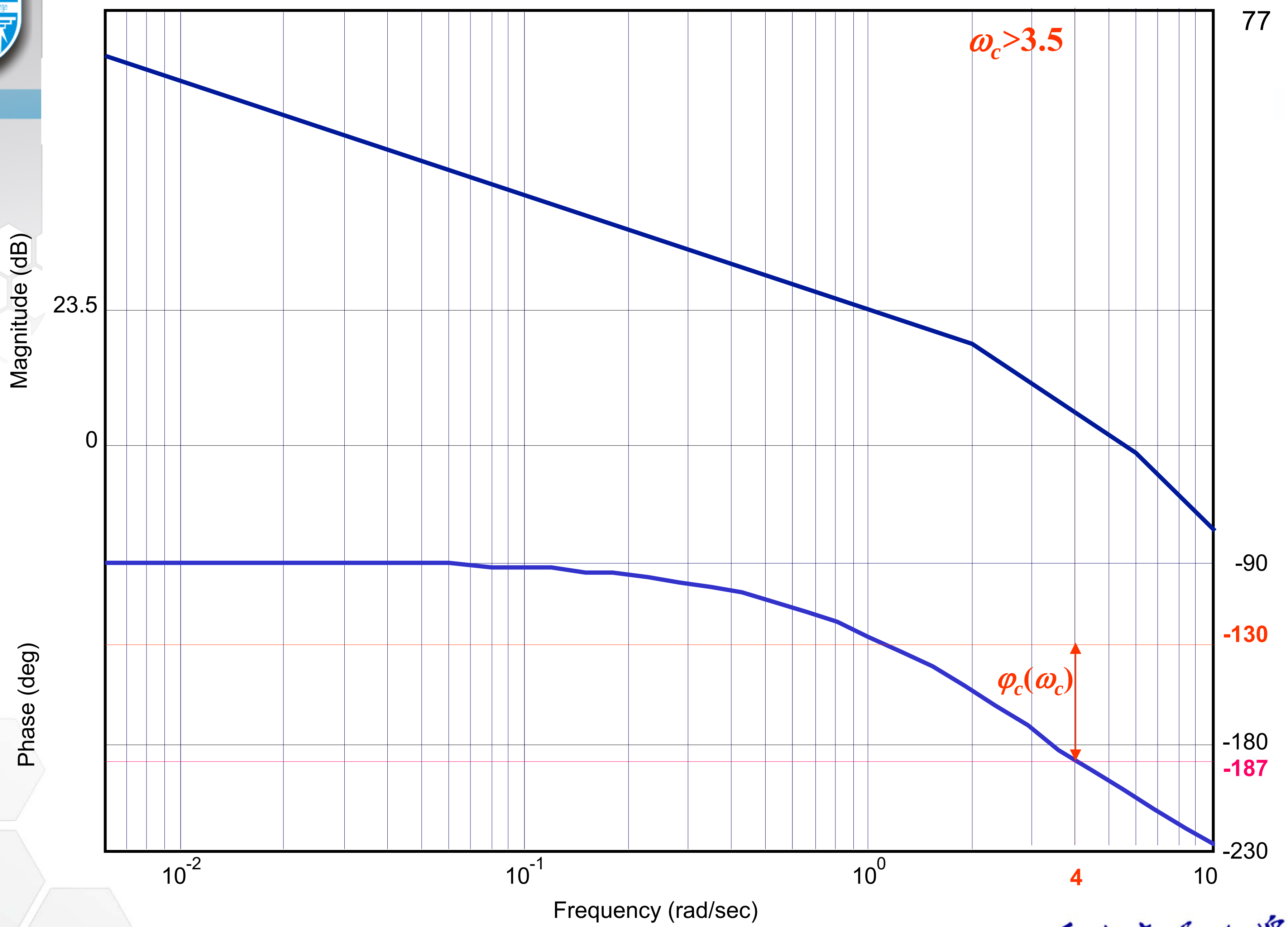
选用滞后—超前校正：



$$G_c(s)=K_c\frac{\beta T_is+1}{T_is+1}\frac{\alpha T_ds+1}{T_ds+1}$$

$$=K_cG_{c1}(s)$$

$$\alpha=\frac{1}{\beta}>1,T_i>T_d(\beta T_i>\alpha T_d)$$



E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.3.3 串联滞后—超前校正

4) 确定超前部分：

根据动态性能指标

$\omega_c \geq 3.5$ rad/sec， $\Phi_{pm} \geq 50°$ ， 取$\omega_c = 4$ rad/sec；

由 $\phi_{pm} - 180° - \varphi_o(\omega_c) = 50° - 180° + 187° = 57°$

应有： $\varphi_c(\omega_c) = \angle G_c(j\omega_c) \geq 57°$

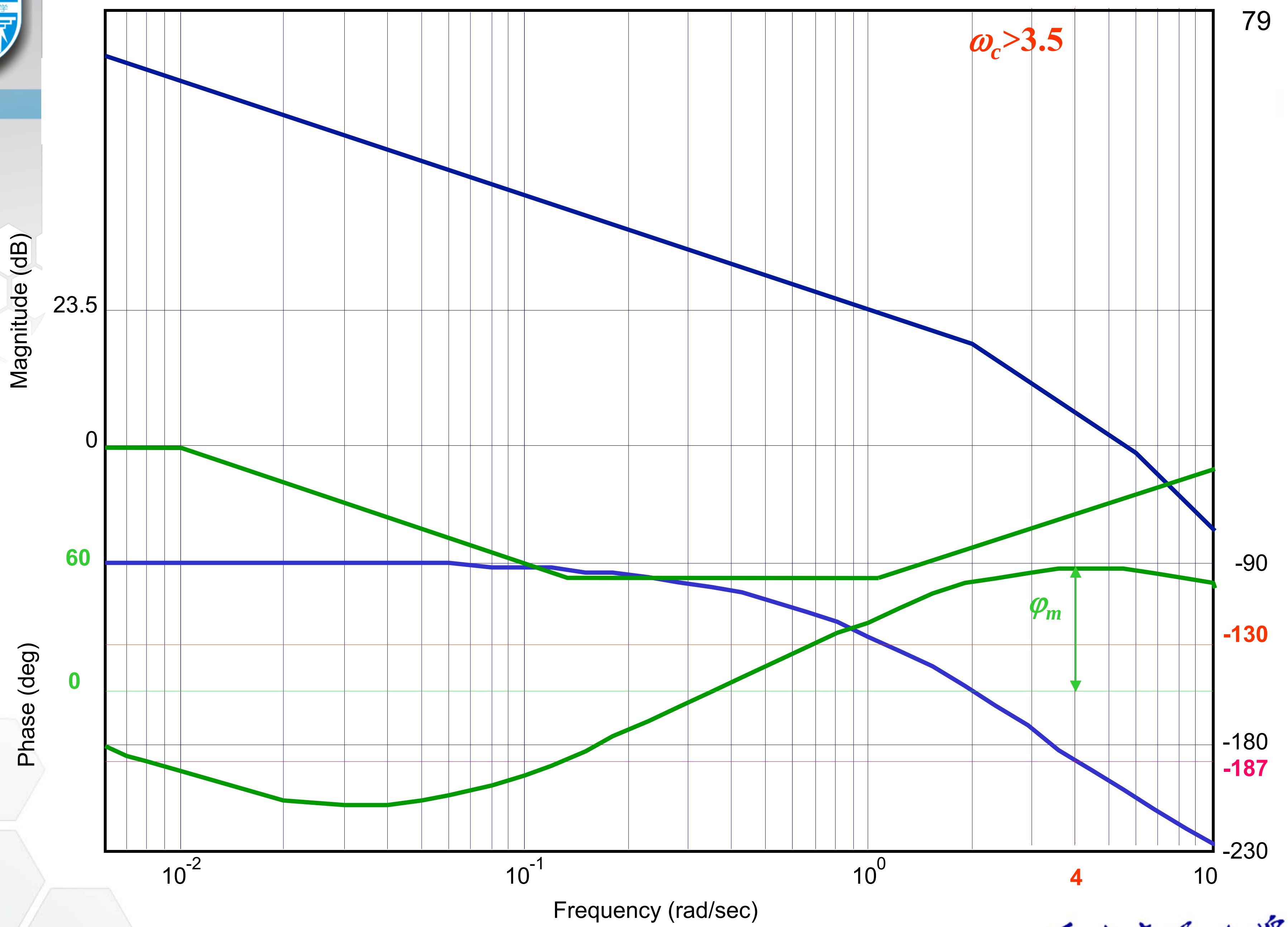
取超前环节的 $\varphi_m = 60°$

得到： $\alpha = \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} = \dfrac{1+\sqrt{3}/2}{1-\sqrt{3}/2} = 13.928$

令对应φ_m的$\omega_m = \omega_c = 4\ rad/sec$，由超前环节 $\omega_m = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}T_d}$

$$\frac{1}{T_d} = \sqrt{\alpha}\omega_m = 14.928, T_d = 0.067; \quad \frac{1}{\alpha T_d} = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}} = 1.072, \alpha T_d = 0.933$$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn



E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.3.3 串联滞后—超前校正

5) 为使校正后幅穿频率 $\omega_c = 4\text{rad/s}$，加入K_{c2}

方法1：

考虑直线方程: $y_c = k\,(x_c - x_0) = 20(\lg\omega_c - \lg\omega_0) = 20\lg(\omega_c/\omega_0)$

令
$$20\lg\frac{\omega_c}{\omega_o} + 20\lg\left|K_{c1}G_o(j\omega_c)\right| = 0$$

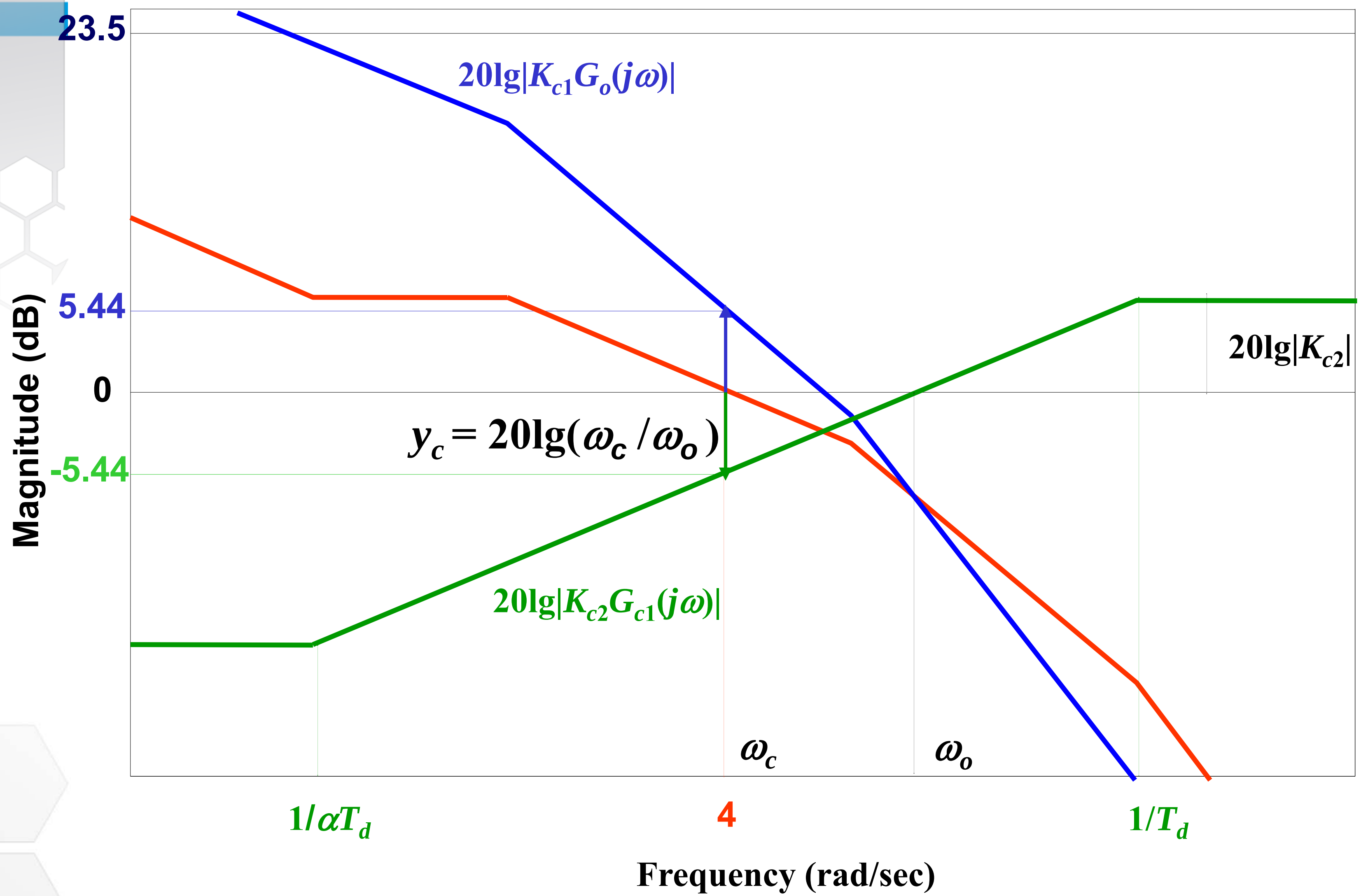
由图中读出
$$20\lg\left|K_{c1}G_o(j\omega_c)\right| = 5.44dB$$

$$20\lg\omega_o = 20\lg\left|K_{c1}G_o(j\omega_c)\right| + 20\lg\omega_c = 5.44 + 12.04 = 17.48dB$$

$$\omega_o = 10^{\frac{17.48}{20}} = 7.48$$

$$20\lg K_{c2} = 20(\lg\frac{1}{T_d} - \lg\omega_o) = 20\lg\frac{1/T_d}{\omega_o} \qquad K_{c2} = \frac{1/T_d}{\omega_o} \approx 2.00$$

于是，$K_c = K_{c1}K_{c2} = 18\times 2 = 36$


23.5
$20\lg|K_{c1}G_o(j\omega)|$
5.44
0
-5.44
Magnitude (dB)
$20\lg|K_{c2}|$
$y_c = 20\lg(\omega_c/\omega_o)$
$20\lg|K_{c2}G_{c1}(j\omega)|$
ω_c
ω_o
$1/\alpha T_d$
4
$1/T_d$
Frequency (rad/sec)

6.3.3 串联滞后—超前校正

方法2：

图中读出 $20\lg\left|K_{c1}G_o(j\omega_c)\right| = 5.44dB$

$$20\lg\left|K_{c1}G_o(j\omega_c)\right| + 20\lg K_{c2} = 10\lg\alpha = 10\lg(1/\beta)$$

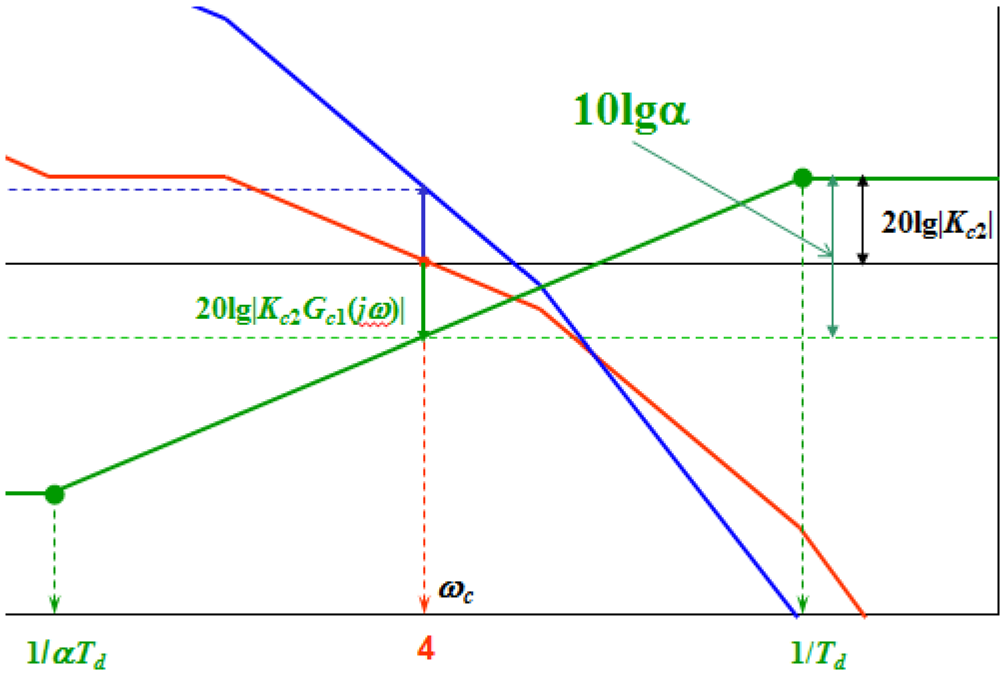
$$5.44 + 20\lg K_{c2} = 10\lg 14$$

$$20\lg K_{c2} = 6.02dB$$

$$K_{c2} = 10^{\frac{6.02}{20}} \approx 2$$

于是，

$$K_c = K_{c1}K_{c2} = 18\times 2 = 36$$



6.3.3 串联滞后—超前校正

6) 确定滞后部分:

由 $\varphi_m = 60°$ $\varphi_c(\omega_c) \geq 57°$

知滞后部分在ω_c=4rad/sec 处的滞后相角$\varphi_{ci}(\omega_c)$ 应有：

$$|\varphi_{ci}(\omega_c)| \leq 3°$$

取 $\beta T_i = 8\alpha T_d = 7.464$ 或 $\dfrac{1}{\beta T_i} = \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{\alpha T_d} = 0.134$

$$\frac{1}{T_i} = \frac{\beta}{\beta T_i} = \frac{1/\alpha}{\beta T_i} = 0.0096 \approx 0.01, \quad T_i = 103.96$$

滞后—超前校正环节：

$$G_c(s) = K_c G_{c1}(s) = 36\frac{7.46s+1}{103.96s+1}\frac{0.933s+1}{0.067s+1}$$

$$= 36\frac{s+0.13}{s+0.01}\frac{s+1.07}{s+14.93}$$

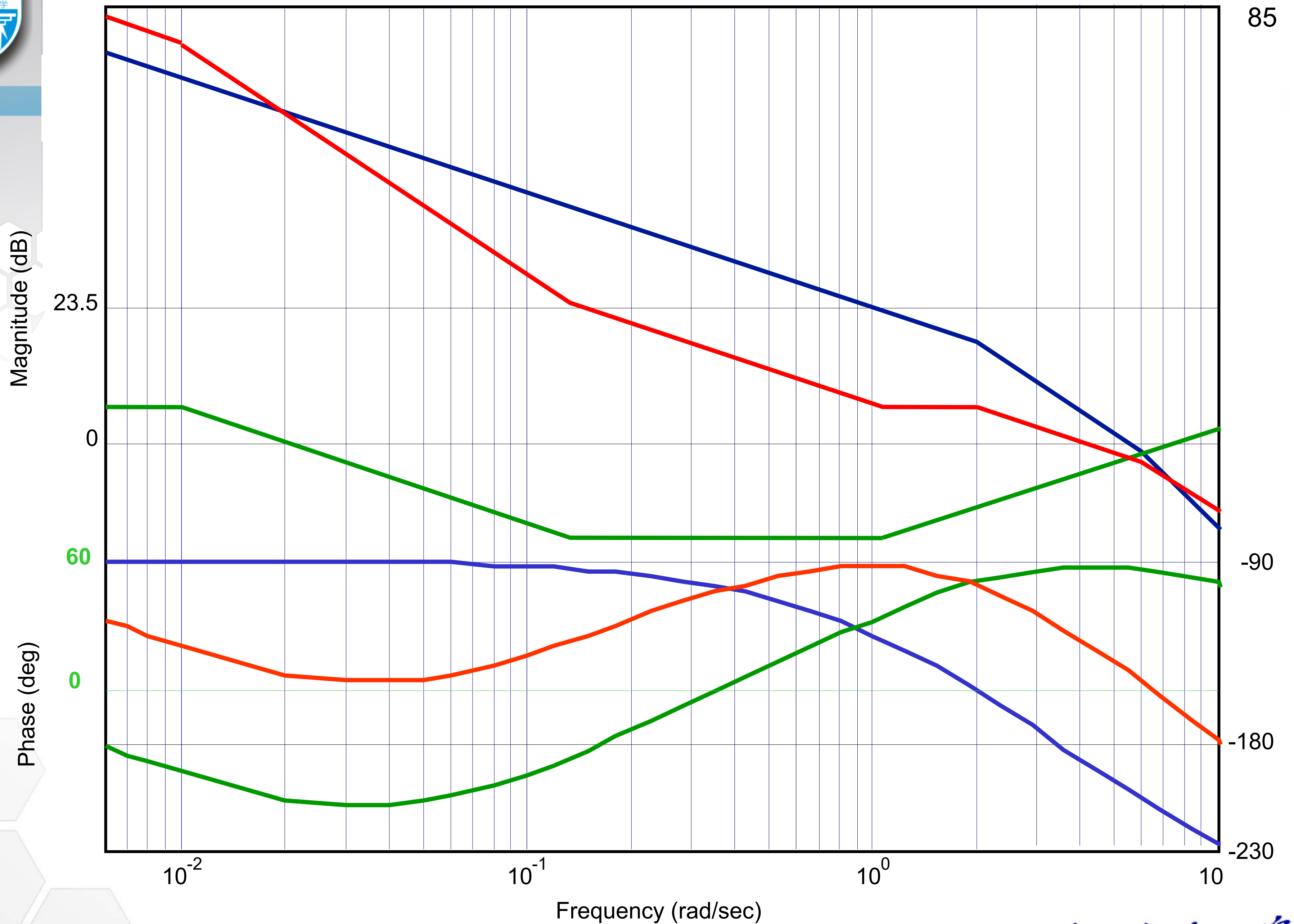
E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.3.3 串联滞后—超前校正

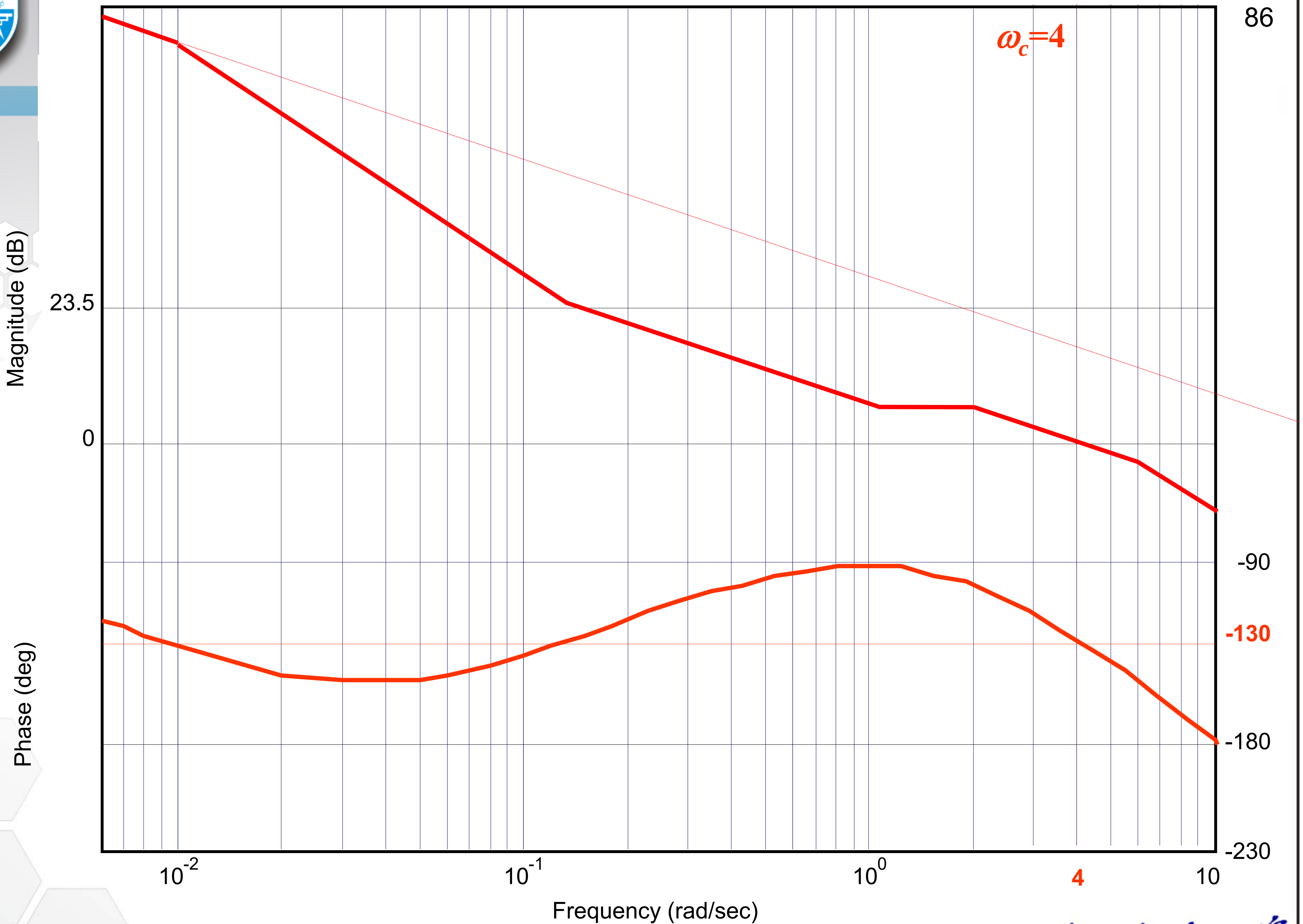
7) 画出校正后系统的Bode图，检验性能指标:

$$K_v = 15 \times 2 = 30\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega_c = 4rad/\sec, \quad \phi_{pm} \approx 51^\circ, \quad GM = 13dB$$



85
23.5
0
60
0
-90
-180
-230
Magnitude (dB)
Phase (deg)
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10
Frequency (rad/sec)



E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.3.3 串联滞后—超前校正

频率法串联滞后—超前校正参考步骤：

1) 根据稳态指标，确定附加增益K_c；

2) 绘制$K_{c1}G_o(j\omega)$的Bode图，得Φ_{pm0}和GM_0；

3) 由该Bode图和指标要求，确定新的幅穿频率ω_c;并参考超前校正环节的设计，确定超前部分的α和T_d；

4) 根据幅频特性，加$K_{c2}(K_{c2}\geq 1)$, 以使校正后系统的幅穿频率为ω_c，即:

$$20\lg|G_c(j\omega_c)G_o(j\omega_c)|=0dB$$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.3.3 串联滞后—超前校正

频率法串联滞后—超前校正参考步骤：

5) 由于$\beta=1/\alpha$，确定滞后部分的参数T_i，使得在ω_c处的滞后相角不大于超前部分在ω_c处预留的相角滞后量；

6) 绘制校正后系统 $G_c(j\omega)G_o(j\omega)$ 的Bode图，检验系统的性能指标是否满足要求。

返回

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn
西南交通大學

6.4 基于根轨迹法的串联校正

性能指标以时域指标给出，如超调量、调整时间、上升时间等，以及希望的闭环主导极点的阻尼比、无阻尼自然振荡频率等，常采用**根轨迹法**校正。

根轨迹法校正的特点：

根据性能指标，通过在s平面上恰当安置校正环节的零点和极点位置，使系统根轨迹朝着要求的性能指标的方向变化。根据s平面上闭环极点和零点的位置，直接估算性能指标。往往通过选择一对闭环主导极点，使校正后的系统满足性能指标。

6.4 基于根轨迹法的串联校正

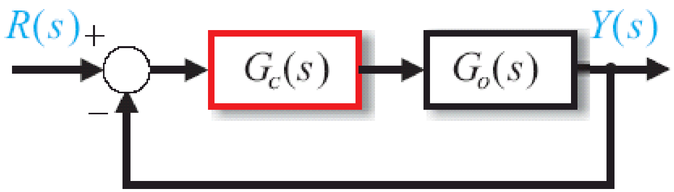
6.4.1 串联超前校正

根轨迹法串联超前校正的要点：

通过合理配置超前校正环节的一对零、极点，改变根轨迹的形状，以获得希望的系统根轨迹。主要用于改善动态指标。

6.4.1 串联超前校正

<例6.4> 控制系统如图所示:



被控对象 $G_o(s)=\dfrac{4}{s(s+2)}$

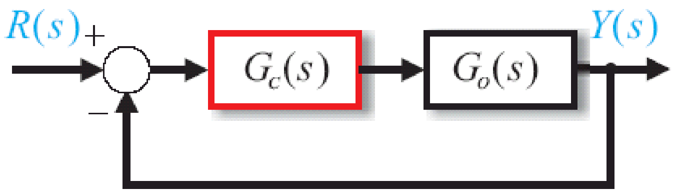
设计校正环节 $G_c(s)$ 使系统

满足：

1. 超调量 $\sigma\% \le 17\%$,
2. 调整时间 $T_s \le 2$ s,
3. 静态速度误差系数 $K_v \ge 5\text{s}^{-1}$ 。

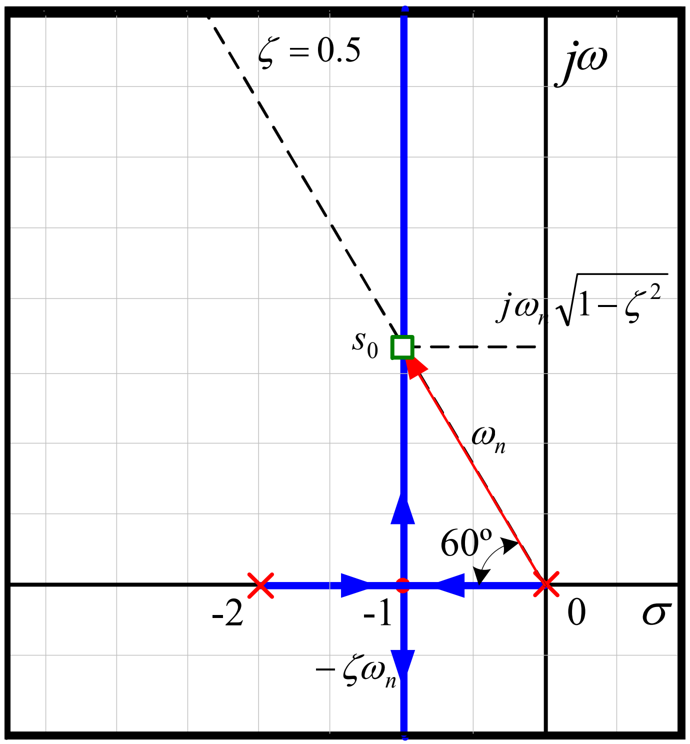
6.4.1 串联超前校正

解：



1. 分析：校正前原系统

$$G_o(s)=\frac{K}{s(s+2)}$$ 的根轨迹



K=4时,原系统特征方程

$$s(s+2)+4=0\Rightarrow s_0=-1\pm j\sqrt{3}$$

$$\varphi_0=60°,\quad \zeta_0=0.5,\quad \omega_{n0}=2$$

$$\sigma\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=16.3\%<17\%$$

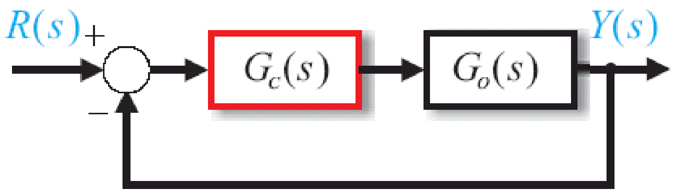
$$T_{s0}=4/\zeta\omega_n=4>2$$

$$K_{v0}=\lim_{s\to0}sG_0(s)=2<5$$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.4.1 串联超前校正

仅增大增益K:
$$K\uparrow \Rightarrow \begin{cases} K_v\uparrow \\ \zeta\omega_n\text{不变} \rightarrow T_s\text{不变} \\ \omega_n\uparrow,\zeta\downarrow \rightarrow \sigma\%\uparrow \end{cases}$$

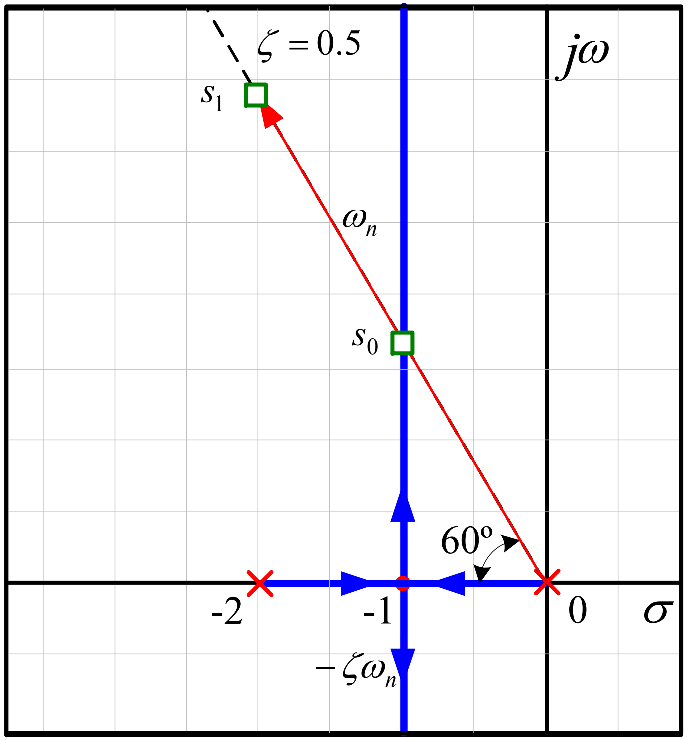


$\sigma\%$ 已经接近指标,因此

保持 ζ=0.5 不变;

由 $\zeta=0.5,\quad T_s \approx \dfrac{4}{\zeta\omega_n} \le 2,$

考虑 $\omega_n \ge 4$



将闭环极点s_0沿射线ζ=0.5 移动到s_1, ζ不变, ω_n 增大:

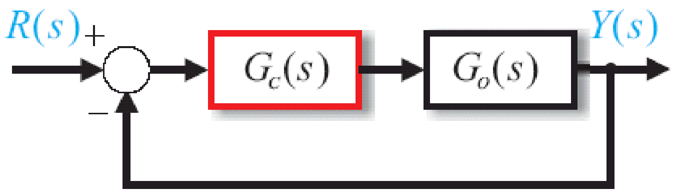
$$\zeta=0.5\ ,\ \omega_n=4$$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

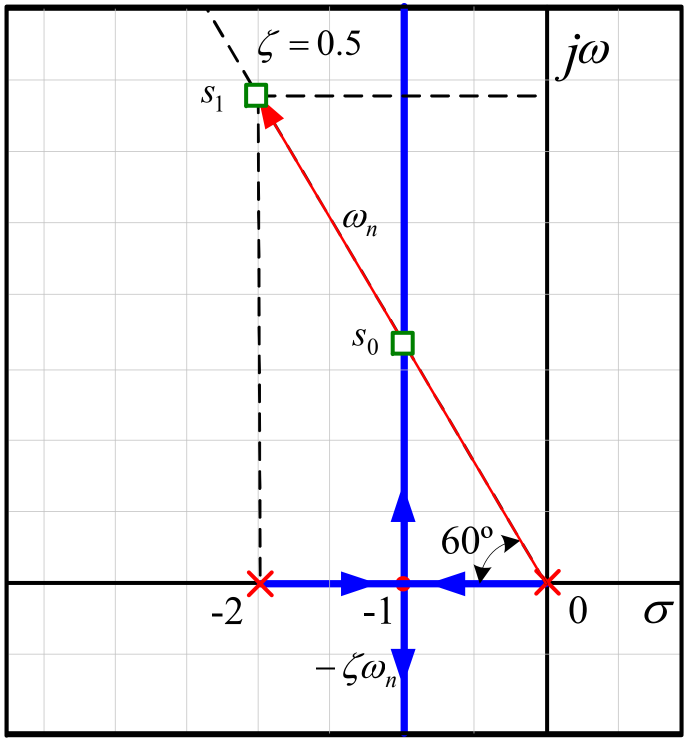
6.4.1 串联超前校正

$$s_1 = -\omega_n \cos\varphi + j\omega_n \sin\varphi$$

$$= -2 + j2\sqrt{3} = -2 + j3.46$$



串联校正环节在 s_1 点应有的相角，由：



$$\angle G_0(s_1) + \angle G_c(s_1) = -180^\circ(2k+1)$$

$$\phi_c = \angle G_c(s_1) = -180^\circ - \angle G_0(s_1)$$

$$\angle G_0(s_1) = \left[-\angle s - \angle(s+2)\right]_{s=s_1}$$

$$= -\angle(-2 + j2\sqrt{3}) - \angle j2\sqrt{3}$$

$$= -120^\circ - 90^\circ = -210^\circ$$

$$\phi_c = -180^\circ - \angle G_0(s_1)$$

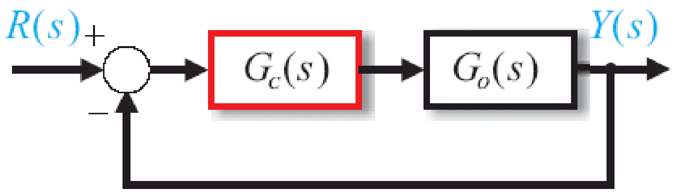
$$= -180^\circ + 210^\circ = 30^\circ$$ (超前相角)

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.4.1 串联超前校正

2. 校正方法：

串联一个超前校正环节



$$\boxed{G_c(s) = K_c \frac{s+z_d}{s+p_d} = \frac{K_c}{\alpha}\frac{\alpha T_d s+1}{T_d s+1}}$$

$$\phi_c = \angle G_c(s_1) = 30°$$

1) 确定T_d和 α

- 作图法
- 计算法

6.4.1 串联超前校正

- 作图法

a) 过s_1点，作$\overline{s_1A}$平行于负实轴；

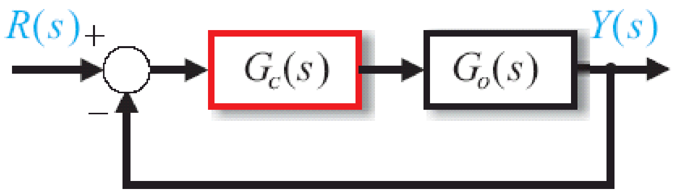
b) 作$\angle Os_1A$的角平分线$\overline{s_1B}$；

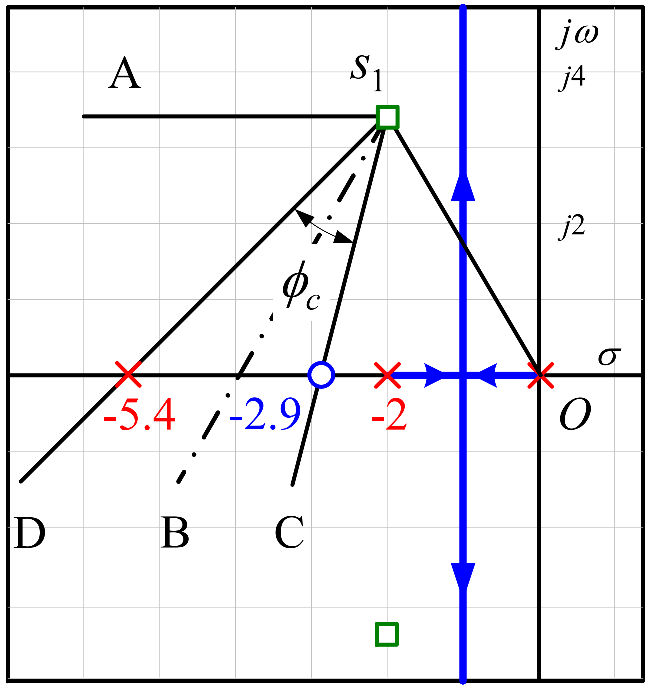
c) 用$\pm\dfrac{\varphi_c}{2}$分别做出$\overline{s_1C}$和$\overline{s_1D}$；

d) $\overline{s_1C}$和$\overline{s_1D}$与负实轴的交点即为$G_c(s)$的零点$-z_d$和极点$-p_d$；由图上读出：

$$-z_d = -2.9 \qquad \frac{1}{\alpha T_d} = z_d = 2.9$$

$$-p_d = -5.4 \qquad \frac{1}{T_d} = p_d = 5.4$$





6.4.1 串联超前校正

- 作图法

a) 过s_1点，作$\overline{s_1A}$ 平行于负实轴；

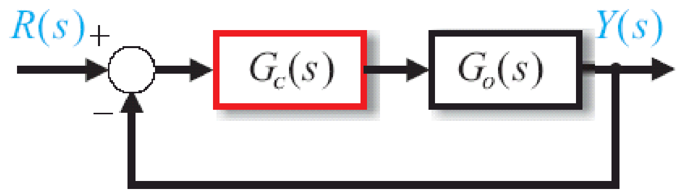
b) 作$\angle Os_1A$的角平分线$\overline{s_1B}$；

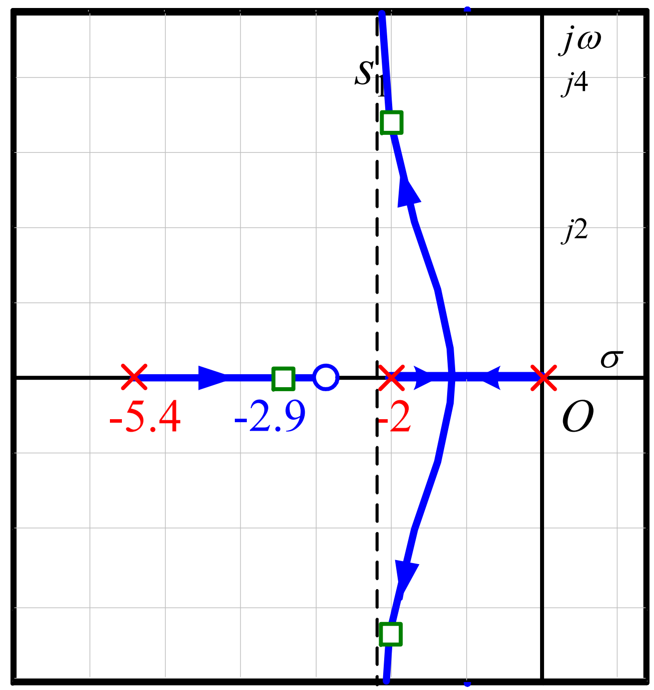
c) 用$\pm\dfrac{\varphi_c}{2}$分别做出$\overline{s_1C}$ 和$\overline{s_1D}$；

d) $\overline{s_1C}$和$\overline{s_1D}$与负实轴的交点即为 $G_c(s)$ 的零点$-z_d$和极点$-p_d$；由图上读出：

$$-z_d=-2.9 \qquad \frac{1}{\alpha T_d}=z_d=2.9$$

$$-p_d=-5.4 \qquad \frac{1}{T_d}=p_d=5.4$$

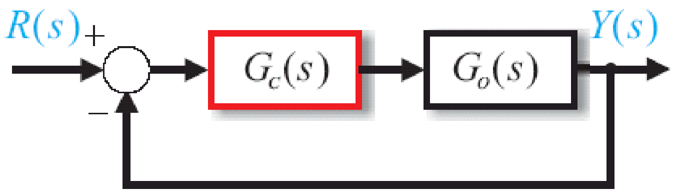




E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

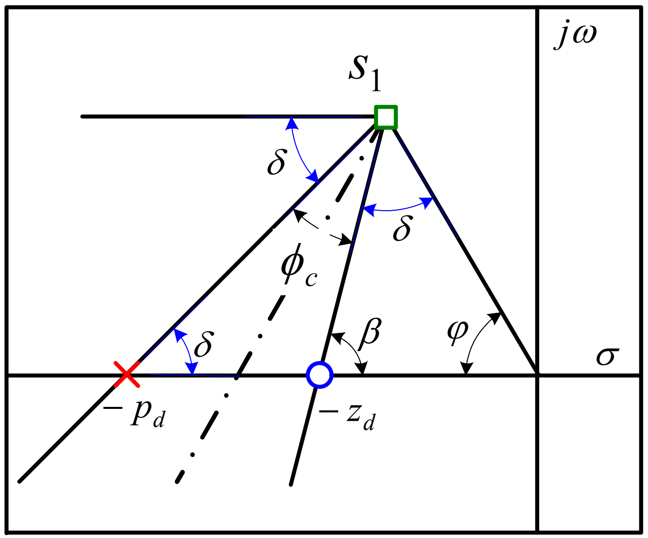
6.4.1 串联超前校正

- 计算法(根据作图法)



$$\frac{z_d}{\sin\delta}=\frac{\omega_n}{\sin\beta},$$

$$\frac{p_d}{\sin(\phi_c+\delta)}=\frac{\omega_n}{\sin\delta},$$



于是,可得计算公式:

$$\delta=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\varphi-\phi_c\right) \qquad (6.17)$$

$$z_d=\frac{\sin\delta}{\sin\beta}\omega_n=\frac{\sin\delta}{\sin(\phi_c+\delta)}\omega_n \qquad (6.18)$$

$$p_d=\frac{\sin(\phi_c+\delta)}{\sin\delta}\omega_n \qquad (6.19)$$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

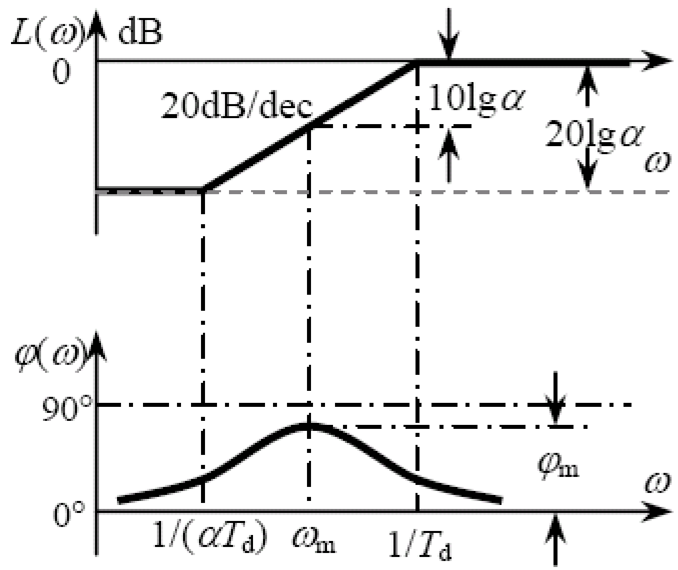
6.4.1 串联超前校正

容易证明，

当 $\delta = \frac{1}{2}(180° - \varphi - \phi_c)$ 时，

$$\frac{z_d}{p_d} = \frac{\frac{1}{\alpha T_d}}{\frac{1}{T_d}} = \frac{1}{\alpha}$$ 为最大 (即α最小)，

相当于利用了最大超前相角。



实际上，超前环节只要提供 ϕ_c=30° 的超前相角即可，给出的作图法及计算法，是以$1/\alpha$为最大(α为最小)为条件给出的。

6.4.1 串联超前校正

本例中，
$$\delta=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\varphi-\phi_c\right)=\frac{1}{2}\left(180^\circ-60^\circ-30^\circ\right)=45^\circ$$

由计算法:
$$z_d=\frac{\sin\delta}{\sin(\phi_c+\delta)}\omega_n=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}\times 4=2.928$$

$$p_d=\frac{\sin(\phi_c+\delta)}{\sin\delta}\omega_n=\frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}\times 4=5.464$$

2) 确定 $s_1=-2+j2\sqrt{3}$ 时的K值(即K_c):

$$G_c(s)G_o(s)=K_c\frac{s+2.9}{s+5.4}\frac{4}{s(s+2)}$$

根据幅值条件 $\left|G_c(s_1)G_o(s_1)\right|=1$

$$K_c=\frac{\left|3.4+j2\sqrt{3}\right|\left|-2+j2\sqrt{3}\right|\left|j2\sqrt{3}\right|}{4\left|0.9+j2\sqrt{3}\right|}=\frac{18.79}{4}=4.698$$

6.4.1 串联超前校正

3) 检验性能指标:

a) 检查s_1是否为主导极点

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{18.79(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)+18.79(s+2.9)}$$

特征多项式:

$$d(s)=s^3+7.4s^2+29.59s+54.49$$
$$=(s+2+j2\sqrt{3})(s+2-j2\sqrt{3})(s+3.4)$$

第三个闭环极点 $-p_3=-3.4$, 与闭环零点 $-z=-2.9$

很靠近, 作用相消, 对瞬态响应影响很小

—可以认为 $-p_{1,2}=2\pm j2\sqrt{3}$ 为主导极点。

6.4.1 串联超前校正

3) 检验性能指标:

b) 只考虑主导极点, 按二阶无零点系统近似估算:

$$\sigma\% = 16.3\%$$

$$T_s \approx 4/\zeta\omega_n = 2$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{18.79(s+2.9)}{(s+2)(s+5.4)} = 5.045$$

满足性能指标要求。

6.4.1 串联超前校正

根轨迹法串联超前校正参考步骤：

1) 根据**动态性能指标**，确定希望的**闭环主导极点**的预期位置；

2) 绘制原系统的**根轨迹图**，验证未校正系统能否具有预期主导极点。如有，则只需调整增益值；若无，则计算要通过预期闭环极点未校正系统所需的相角缺额，即为超前校正环节应提供的超前相角ϕ_c；

6.4.1 串联超前校正

根轨迹法串联超前校正参考步骤：

3) 根据ϕ_c，确定超前校正环节的零点和极点；

4) 根据幅值条件，确定校正环节附加**增益K_c**；

5) 检验校正后系统的性能指标：检查预期的闭环极点是否为主导极点；如是，按无零点二阶系统估算性能指标。如不能满足性能指标，则需要修正参数，直到满足要求。(最好辅以计算机仿真)。

Review

Common expression of transfer function ：

- **Rational function expression有理分式函数表示形式**

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{M(s)}{N(s)} \qquad (2.6)$$

•$M(s)$ — Numerator Polynomial 分子多项式

•$N(s)$ — Denominator Polynomial 分母多项式

•$N(s)$ — *Characteristic Polynomial 特征多项式*

Review

Common expression of transfer function ：

- **Time Constant Expression** 时间常数表示形式

$$G(s)=\frac{b_0}{a_0}\frac{d_m s^m + d_{m-1}s^{m-1}+\cdots+d_1 s+1}{c_n s^n + c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_1 s+1}=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(T_i s+1)}{\prod_{j=1}^{n}(\tau_j s+1)} \qquad (2.7)$$

•where, K—System Gain 系统增益或传递系数

• T_i, τ_j— Time Constant 时间常数

•When s=0, thus $G(s)= b_0/a_0= K$

•从微分方程的角度看，此时相当于所有的导数项都为零。
K —系统处于静态时，输出与输入的比值

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

Review

Common expression of transfer function ：

- **Zeros Poles Expression 零极点表示形式**

$$G(s)=\frac{b_m}{a_n}\frac{s^m+h_{m-1}s^{m-1}+\cdots+h_1s+h_0}{s^n+l_{n-1}s^{n-1}+\cdots+l_1s+l_0}=K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} \qquad (2.8)$$

•where, $-z_i$—Zeros 系统零点 $-p_j$—Poles系统极点

• K_g— Root locus Gain 根轨迹增益

•系统传递函数的极点就是系统的特征根。

•零点和极点的数值完全取决于系统的结构参数。

6.4 基于根轨迹法的串联校正

6.4.2 串联滞后校正

当动态性能指标满足要求，稳态误差不满足要求时，考虑采用串联滞后校正。

加滞后校正环节：

$$G_c(s) = K_c \frac{\beta T_i s + 1}{T_i s + 1} = K_c \beta \frac{s + \dfrac{1}{\beta T_i}}{s + \dfrac{1}{T_i}}$$

保持动态性能→闭环主导极点附近的根轨迹不应有明显的变化→滞后环节在闭环主导极点处产生的相移角尽量小→滞后校正环节的零、极点尽量靠近原点(“偶极子”)。

6.4.2 串联滞后校正

设原系统开环传函$G_o(s)$为“1”型系统，静态速度误差系数为：$$K_{vo}=\lim_{s\to 0} sG_o(s)$$

加串联滞后校正后，$$K_v=\lim_{s\to 0} sG_c(s)G_o(s)=K_cK_{vo}$$

——静态速度误差系数提高了K_c倍。

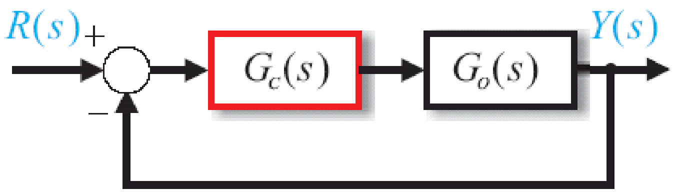
而在主导极点s_1处，使得

$$G_c(s)\big|_{s=s_1}=K_c\beta\left.\frac{s+\dfrac{1}{\beta T_i}}{s+\dfrac{1}{T_i}}\right|_{s=s_1}\approx K_c\beta\overset{K_c=\frac{1}{\beta}}{=}1$$

——对s_1附近的根轨迹影响较小(滞后校正环节为“偶极子”)。

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.4.2 串联滞后校正



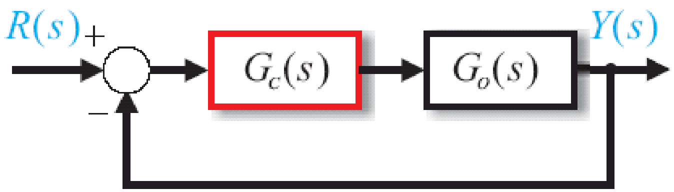
<例6.4> 控制系统如图所示:

被控对象 $G_o(s)=\dfrac{1.05}{s(s+1)(s+2)}$

设计校正环节 $G_c(s)$ 使系统满足:

1. $K_v \geq 5\sec^{-1}$;
2. 动态性能指标基本不变。

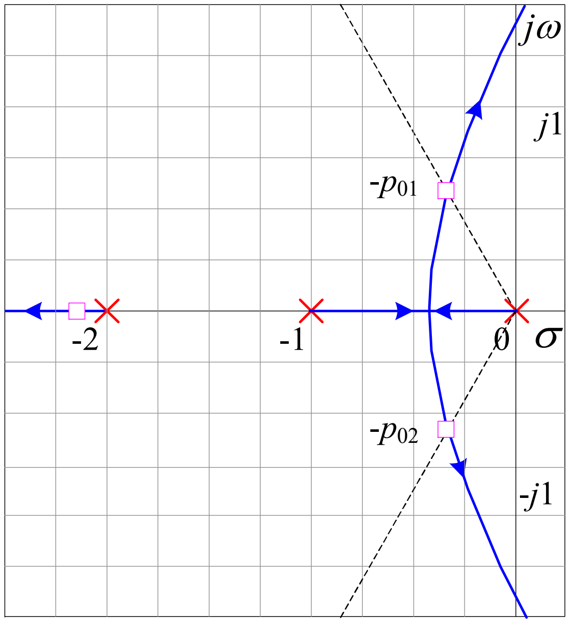
6.4.2 串联滞后校正



解：

1. 分析：校正前原系统

$$G_o(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$ 的根轨迹

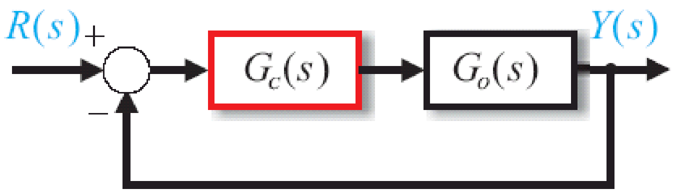


K=1.05时,原系统特征多项式

$$D_0(s)=s(s+1)(s+2)+1.05$$
$$=(s^2+0.66s+0.445)\times(s+2.34)$$
$$=(s+0.33-j0.58)$$
$$\times(s+0.33+j0.58)\times(s+2.34)$$

主导极点： $-p_{01,02}=-0.33\pm j0.58$

6.4.2 串联滞后校正



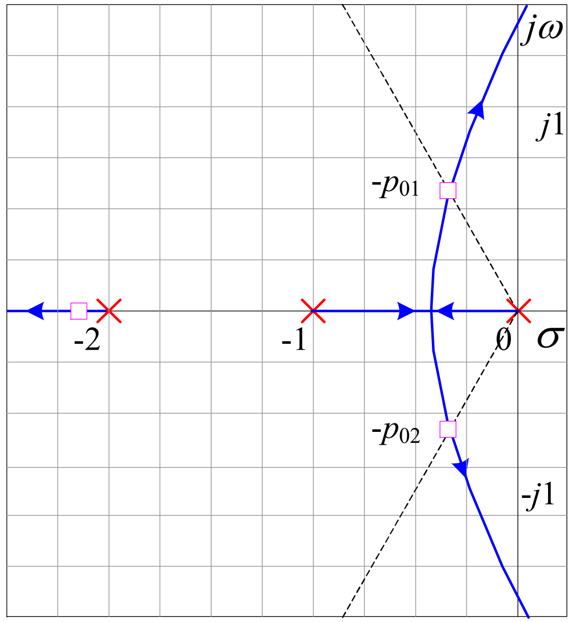
$$\zeta_o = 0.5$$

$$\omega_{no} = \sqrt{0.445} = 0.667$$

$$K_{vo} = \lim_{s\to 0} \frac{1.05s}{s(s+1)(s+2)} = 0.525\sec^{-1}$$

根据要求： $K_{vo} = 0.525 \to K_v = 5$

动态性能保持不变



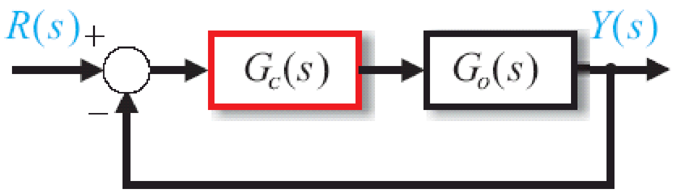
方法：

a) 加K_c， 使$K\uparrow$;

b) 在中频段要用滞后环节将K_c衰减，使$K_c\beta\approx 1$,以保持原动态性能;

6.4.2 串联滞后校正

2. 加滞后校正环节：



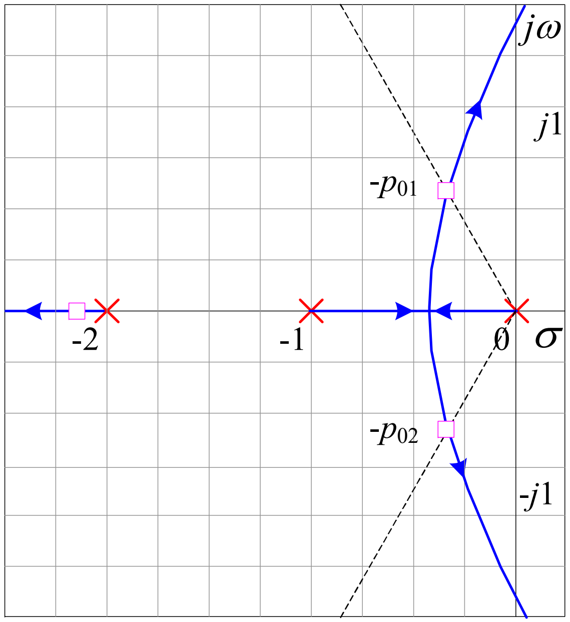
$$G_c(s) = K_c \beta \frac{s + 1/\beta T_i}{s + 1/T_i}$$

选取参数 T_i，β，要求：

$K_c \approx 10$，取 $1/\beta = 10$，$\beta = 0.1$

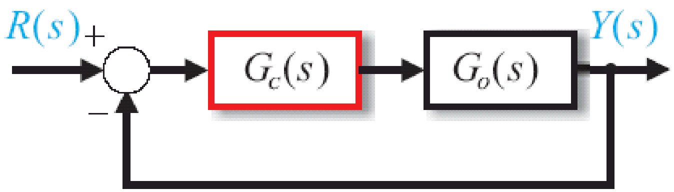
$G_o(s)$的最大时间常数为1秒，

取$\beta T_i = 20$，$T_i = 200$则：

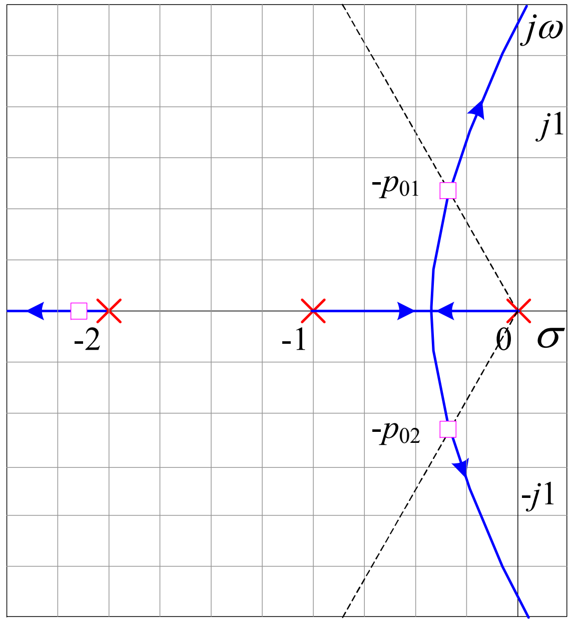


$$G_c(s) = K_c \frac{20s + 1}{200s + 1} = \frac{K_c}{10} \frac{s + 0.05}{s + 0.005}$$

6.4.2 串联滞后校正



在 $-p_{01}=-0.33+j0.58$ 点处的相移角:



$$\varphi_c=\angle G_c(s)\big|_{s=-p_{01}}$$

$$=\left[\angle(s+0.05)-\angle(s+0.005)\right]_{s=-0.33+j0.58}$$

$$=\angle(-0.33+j0.58+0.05)$$

$$-\angle(-0.33+j0.58+0.005)$$

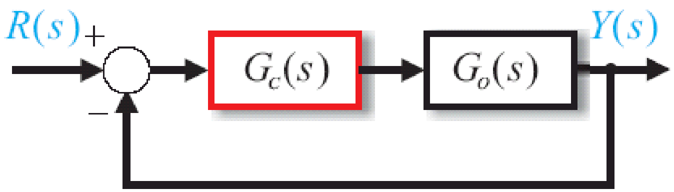
$$=115.77°-119.25°=-3.49°$$

—— 在 $-p_{01}$处, 根轨迹变化不太大

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.4.2 串联滞后校正

3. 校正后系统的根轨迹：

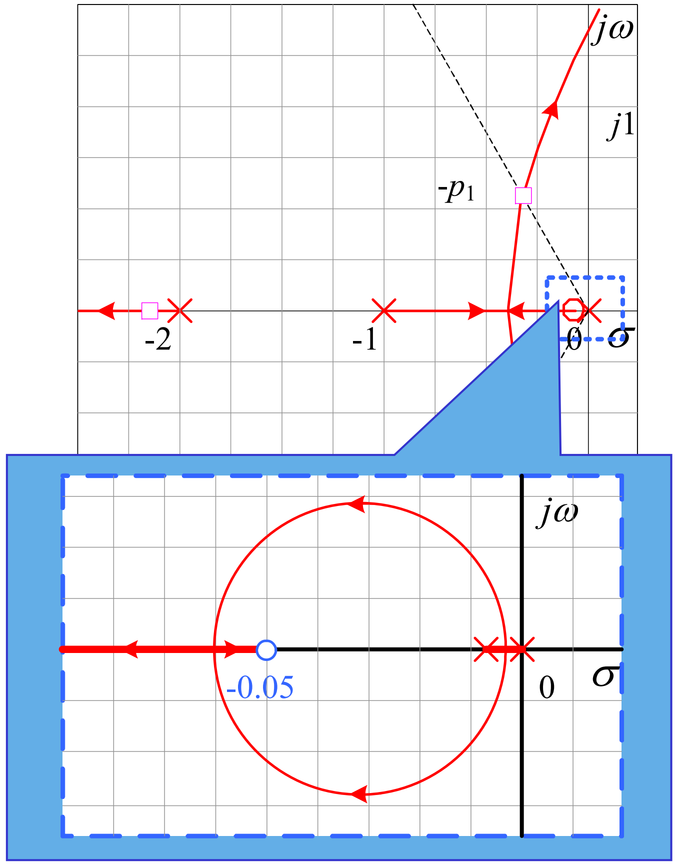


$$G(s)=G_c(s)G_o(s)$$

$$=\frac{K_c}{10}\frac{s+0.05}{s+0.005}\frac{1.05}{s(s+1)(s+2)}$$

$$=\frac{K(s+0.05)}{s(s+1)(s+2)(s+0.005)}$$

$$K=\frac{1.05K_c}{10}$$



取该根轨迹与 ζ=0.5 的射线的交点为新的闭环极点：

$$-p_{1,2}=-0.31\pm j0.54$$

6.4.2 串联滞后校正

4. 确定 K_c：

由$s = -p_1 = -0.31+j0.54$, 确定K_c

根据幅值条件

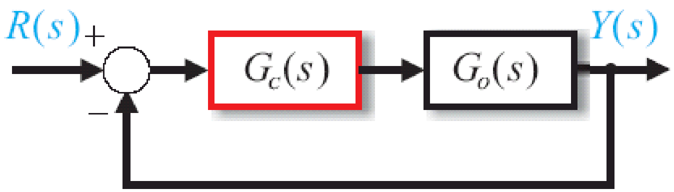
$$\left|G_c(s)G_o(s)\right|_{s=-p_1} = 1$$

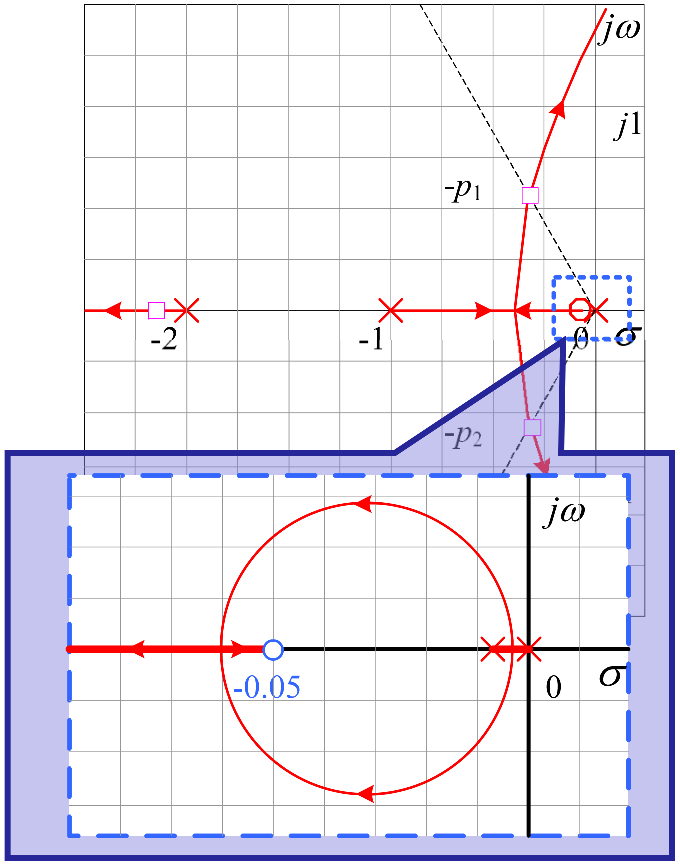
$$K = \frac{1.05K_c}{10}$$

$$= \left|\frac{s(s+1)(s+2)(s+0.005)}{(s+0.05)}\right|_{s=-0.31+j0.54}$$

$$= 1.01$$

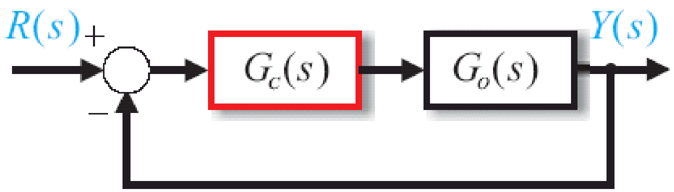
$$K_c = \frac{10K}{1.05} = 9.62$$





6.4.2 串联滞后校正

5. 检验 $-p_{1,2}$ 是否为主导极点：



$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{1.01(s+0.05)}{s(s+1)(s+2)(s+0.005)+1.01(s+0.05)}$$

$$=\frac{1.01(s+0.05)}{s^4+3.005s^3+2.015s^2+1.02s+0.0505}$$

$$=\frac{s+0.05}{(s+0.31-j0.54)(s+0.31+j0.54)(s+0.055)(s+2.32)}$$

极点-0.055与零点-0.05很靠近，作用相消；

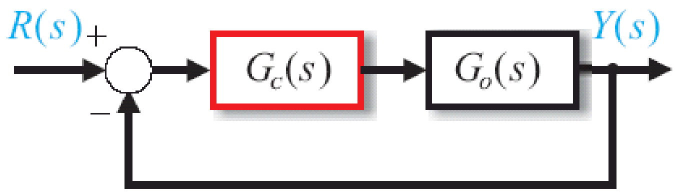
极点-2.32距共轭极点$-p_{1,2}=-0.31\pm j0.54$ 很远(>7倍)，

——可以认为$-p_{1,2}$为主导极点

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

6.4.2 串联滞后校正

6. 检验性能指标：



按无零点二阶系统估算：

$$\zeta = 0.5, \quad \omega_d = 0.54, \quad \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.62 rad/\sec$$

(原 $\omega_{no} = 0.667$)

$\sigma\%$ 不变，T_s, T_r略有增大——动态性能基本不变

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G_o(s)$$

$$= \frac{1.01\times 0.05}{0.005\times 2} = 5.05\sec^{-1}$$

——静态指标符合要求

$$\frac{K_v}{K_{vo}} = \frac{5.05}{0.525} = 9.62 = K_c$$

6.4.2 串联滞后校正

根轨迹法串联滞后校正参考步骤：

1) 绘制未校正系统的根轨迹图。根据**动态性能指标**，在根轨迹上确定希望的**闭环主导极点**的位置；

2) 计算对应于闭环主导极点的开环增益；

3) 根据**静态性能指标**(稳态误差系数)的要求，计算应由校正环节提供的附加增益值K_c。按$K_c\beta=1$，考虑选取$\beta=1/K_c$；

6.4.2 串联滞后校正

根轨迹法串联滞后校正参考步骤：

4) 确定零、极点的值 $\dfrac{1}{\beta T_i}$，$\dfrac{1}{T_i}$，为使滞后网络对系统动态性能不产生明显的影响，一般选取 βT_i 为原系统最大时间常数10倍以上；

5) 做出校正后系统的根轨迹图，确定对应于闭环主导极点的开环增益值；

6) 检验原设计的闭环主导极点是否满足闭环主导极点的条件。若确为闭环主导极点，即可按无零点二阶系统估算性能指标。

返回

本章小节

本章讨论了基于频率法和基于根轨迹法的串联校正方法。注意串联校正环节对控制系统进行补偿的作用机理，掌握校正环节的设计方法：首先应该根据系统性能指标选择合适的校正环节，即确定采用超前校正、滞后校正还是滞后—超前校正；再者应该掌握校正环节的具体设计方法和步骤，即确定校正环节的参数。注意基于频率法和基于根轨迹法的串联校正环节设计方法的特点。

Homework

1、已知某单位反馈系统的开环传递函数为 $G_o(s)=\dfrac{12}{s(s+2)(s+6)}$，其结构图如图：

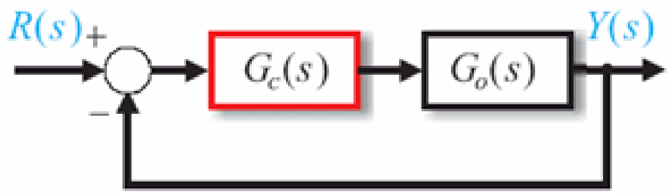


图 1

如果希望采用串联校正后，系统的指标为 $K_v \ge 15s^{-1}, \omega_c \ge 3.5rad/s, \gamma \ge 50°$

问：（1）如果 $G_c(s)$ 为超前校正环节，可否满足要求，为什么？

（2）如果 $G_c(s)$ 为滞后校正环节，可否满足要求，为什么？

（3）如果 $G_c(s)$ 为滞后-超前校正环节，可否满足要求，为什么？

Homework

2、已知某单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G_o(s)=\dfrac{1}{s^2}$，如果希望校正后，系统的幅频特性的大致形状如图 2 所示，即 $\omega_c=2rad/s$，中频段 $\omega=2rad/s$ 附近为-20dB/dec，高频段 $\omega>30rad/s$ 附近为-60dB/dec。要求相位裕量 $\gamma\geq 50°$。试选用下列某些校正环节构成串联校正装置 $G_c(s)$，并给出其传递函数 $G_c(s)$。

A) 超前校正环节 $$G_{c1}(s)=\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha T_d s+1}{T_d s+1},\alpha>1$$

B) 滞后校正环节 $$G_{c2}(s)=\frac{\beta T_i s+1}{T_i s+1},\beta<1$$

C) 滞后-超前校正环节 $$G_{c3}(s)=\frac{(\beta T_i s+1)}{(T_i s+1)}\frac{(\alpha T_d s+1)}{(T_d s+1)},\alpha=\frac{1}{\beta},T_i>T_d$$

D) 一阶滤波环节 $$G_{c4}(s)=\frac{1}{\tau s+1}$$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

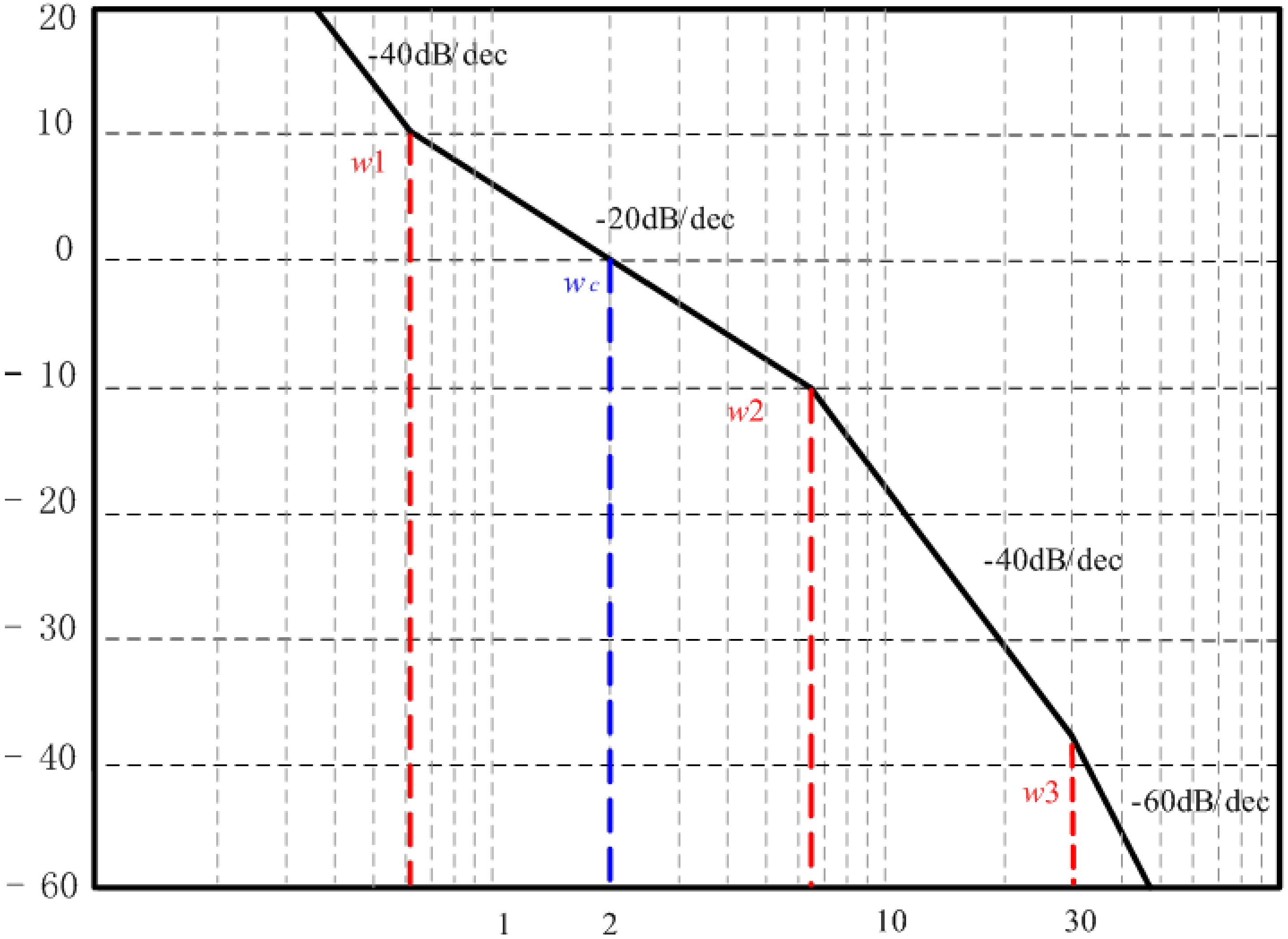


图 2

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

Homework

3、已知某单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G_o(s)=\dfrac{3}{s(s+3)}$，其结构图如图 3：

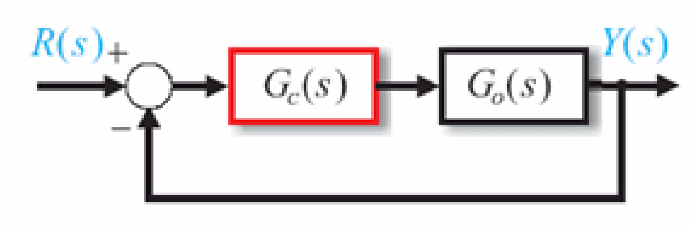


图 3

如果要求校正后系统起主导作用的复数极点 $\zeta=0.5,\omega_n=6,K_v\geq 15s^{-1}$。

试问下列三种校正装置中选用哪一种能够满足性能指标要求，说明理由。

问：（1）如果 $G_c(s)$ 为<u>超前校正</u>环节，可否满足要求，为什么？

（2）如果 $G_c(s)$ 为<u>滞后校正</u>环节，可否满足要求，为什么？

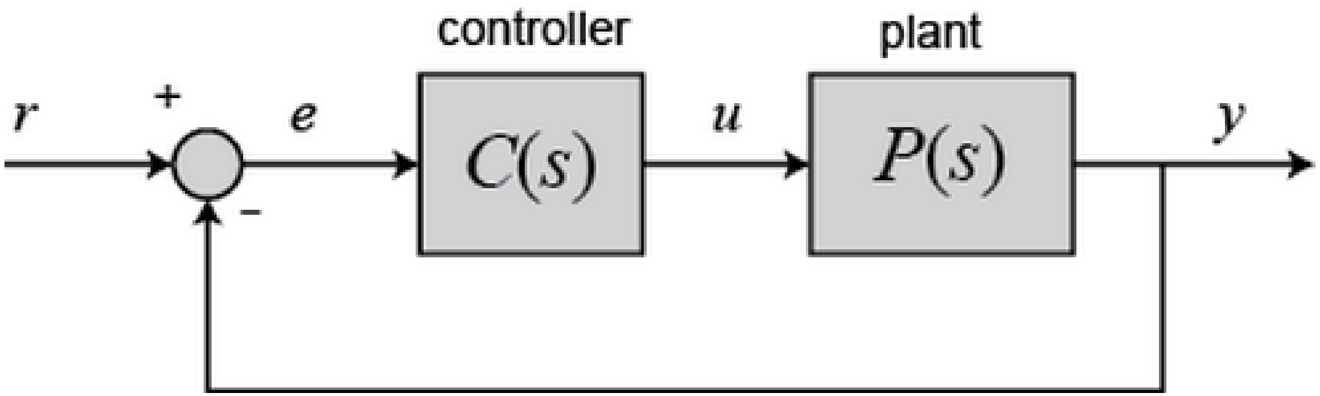
PID控制器

PID控制器

PID控制器是工业过程中广泛采用的一种控制器，也称为三项控制器

- **PID(比例-积分-微分)控制器传函**

PID (Proportional plus Integral plus Derivative)



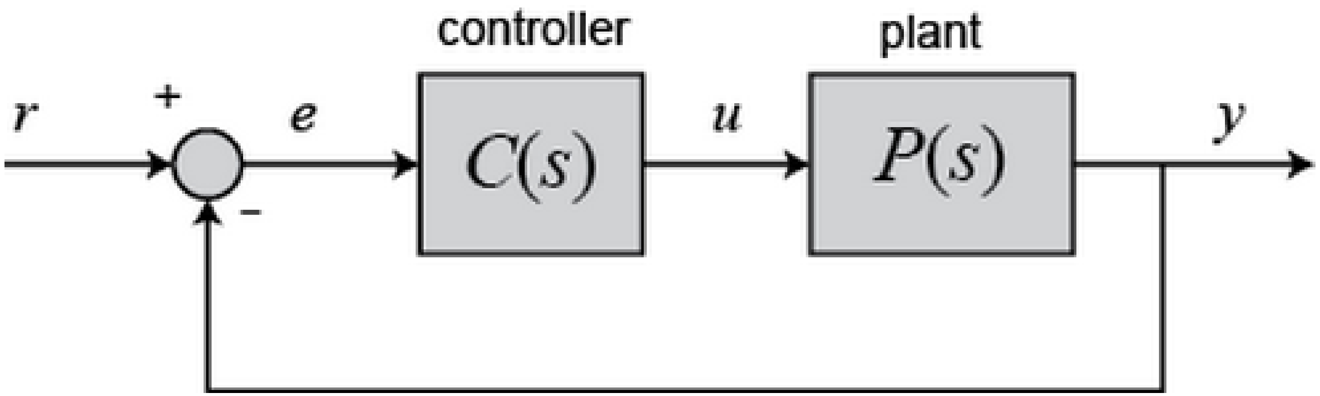
PID控制器

PID控制器

PID控制器是工业过程中广泛采用的一种控制器，也称为三项控制器

- **PID(比例-积分-微分)控制器传函**

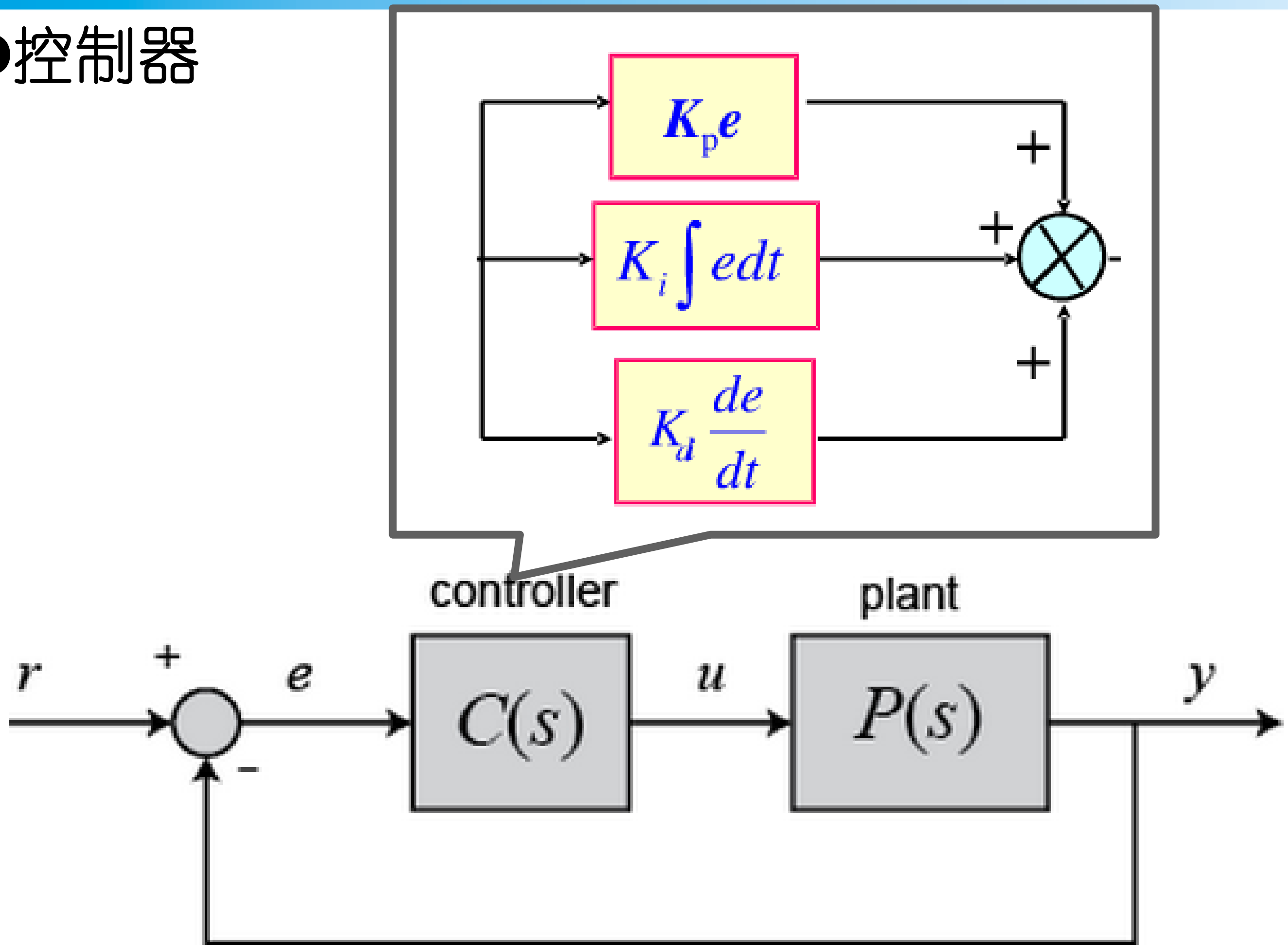
PID (Proportional plus Integral plus Derivative)



$$u(t)=K_p e(t)+K_i\int_0^t e(t)dt+K_d\frac{de}{dt}$$

PID控制器

PID控制器



$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t)dt + K_d \frac{de}{dt}$$

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn

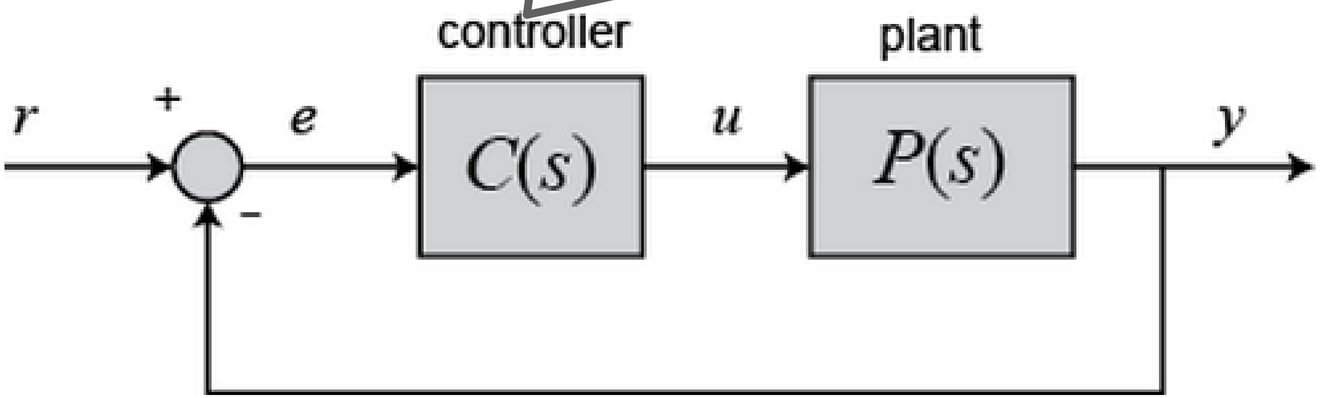
PID控制器

PID控制器

积分增益K_I

$$G_c(s)=K_P+\frac{K_I}{s}+K_D s$$

比例增益K_P 微分增益K_D

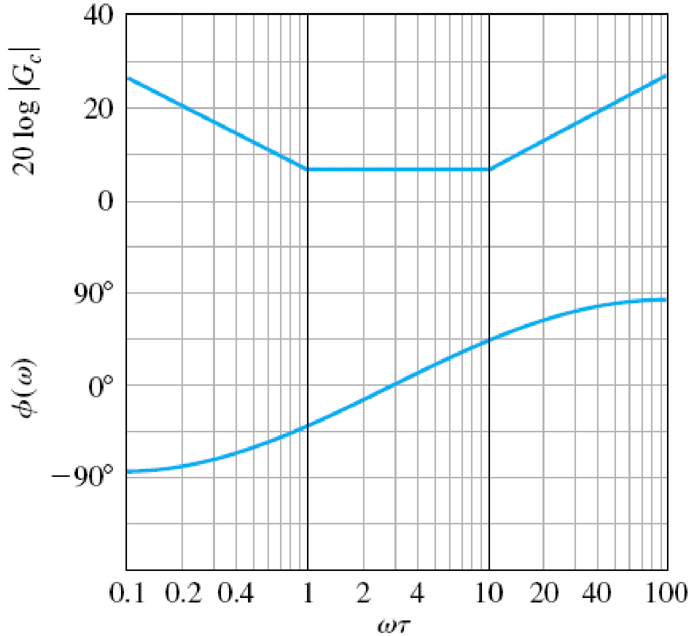


$$u(t)=K_p e(t)+K_i\int_0^t e(t)dt+K_d\frac{de}{dt}$$

PID控制器

$$G_c(s)=\frac{K_I\left(\frac{K_D}{K_I}s^2+\frac{K_P}{K_I}s+1\right)}{s}=\frac{K_I(\tau s+1)\left(\frac{\tau}{\alpha}s+1\right)}{s}$$

给出K_P=2, α=10时，以$\omega\tau$ 为自变量的Bode图(一类以K_i为可调变量的带阻滤波器)：



PID控制器

比例控制（Proportional Only）

$$u(t) = K_p \times e(t)$$

```
Error = Setpoint - ProcessValue;
Output = K x Error;
```

- **比例作用:**对当前时刻的偏差信号$e(t)$进行放大或衰减，控制作用的强弱取决于比例系数Kp;
- **比例特点：**Kp越大系统动态特性越好，但是过大的可能会引起系统振荡或者使得系统稳定性变差，也可能出现比例饱和现象;
- **比例缺点:**不能消除稳态误差；

PID控制器

- 比例+积分控制（Proportional and Integral）

$$u(t)=K_p\times e(t)+K_i\int e(t)dt$$

$$u(t)=K_p\times e(t)+K_i\sum e(t)$$

$$u(t)=K\times e(t)+\sum\frac{K}{\tau_i}e(t)$$

```
Error  := Setpoint - ProcessValue;
Reset  := Reset + K/tau_i * Error;
Output := K * Error + Reset;
```

- **积分作用:**累计偏差信号$e(t)$从而影响控制量，通过系统负反馈作用逐渐减小偏差$e(t)$;
- **积分特点**：只要$e(t)$存在，积分作用就影响输出，只要时间足够长，积分作用输出将能够**消除稳态误差**;
- **积分缺点:**不能及时克服扰动的影响；

PID控制器

- 比例+微分控制（Proportional and Derivative）

$$u(t)=K_p\times e(t)+K_d\frac{de(t)}{dt}$$

$$u(t)=K\times\left[e(t)+\frac{1}{\tau_d}\frac{de(t)}{dt}\right]$$

$$u(t)=K\times e(t)+\frac{K}{\tau_i}\Delta e(t)$$

```
Error := Setpoint - ProcessValue;
Output := K * Error
          + K/tau_i * (Error - LastError);
LastError := Error; // save for next scan
```

- **微分作用:**表明偏差信号$e(t)$变化的速度，在偏差$e(t)$刚出现时产生很大的控制作用，具有超前控制的作用；
- **微分特点**：只要$e(t)$ 存在，有助于减小超调和调整时间，改善系统的动态品质；
- **微分缺点:**不能消除系统的稳态误差；

E-mail:zhaoduo@swjtu.edu.cn