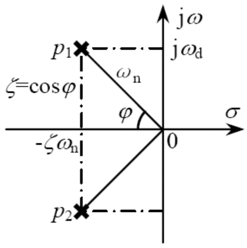
第 1 题：



$$T(s)=\frac{4}{s^2+s+4}\Rightarrow\begin{cases}2\zeta\omega_n=1\\ {\omega_n}^2=4\end{cases}\Rightarrow\omega_n=2rad/s;\quad \zeta=1/4=0.25$$

系统闭环极点位置：$s_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-16}}{2}=-\dfrac{1}{2}\pm j\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=2\sqrt{1-1/16}=1.9365rad/s$$

$$\varphi=\cos^{-1}(\zeta)=1.3181\Rightarrow\varphi=75.52°$$

$$\sigma\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=e^{-\frac{\pi/4}{\sqrt{1-1/16}}}=44.43\%$$

$$T_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{\pi}{\omega_d}=1.62s$$

$$T_r=\frac{\pi-\varphi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{\pi-\varphi}{\omega_d}=\frac{\pi-\cos^{-1}(\zeta)}{\omega_d}=0.94s$$

$$T_s=\frac{4}{\zeta\omega_n}=8s(\Delta=2\%);T_s=\frac{3}{\zeta\omega_n}=6s(\Delta=5\%)$$

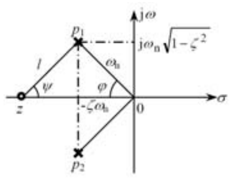
$$N=\frac{T_s}{\tau_d}=\frac{T_s}{\frac{2\pi}{\omega_d}}=\frac{T_s\omega_d}{2\pi}=\frac{(3\sim4)\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi\zeta}$$

加入闭环零点后：

$$T(s)=\frac{4(0.25s+1)}{s^2+s+4}=\frac{4(s+4)}{4(s^2+s+4)}\Rightarrow\begin{cases}2\zeta\omega_n=1\\ {\omega_n}^2=4\\ z=4\end{cases}\Rightarrow\omega_n=2rad/s;\quad \zeta=1/4=0.25$$

$$l=\sqrt{(z-\zeta\omega_n)^2+{\omega_d}^2}=\sqrt{3.5^2+15/4}=4$$

$$\psi=tg^{-1}\frac{\omega_d}{z-\zeta\omega_n}=0.5054rad/s\Rightarrow\psi=28.96°$$



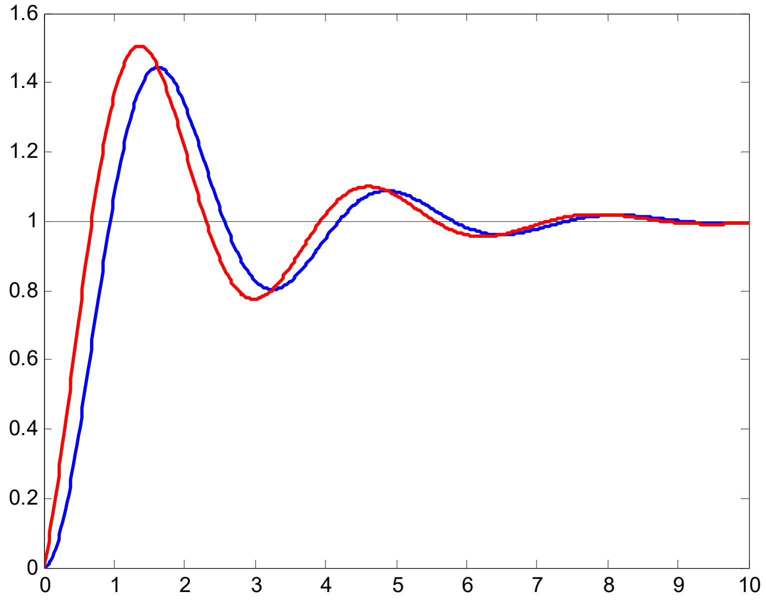
$$\sigma\%_z=\sigma\%\frac{l}{z}e^{\frac{\zeta\psi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=44.43\%e^{\frac{0.25\times0.5054}{\sqrt{1-1/16}}}=50.623\%$$

$$T_{p_z}=T_p-\frac{\psi}{\omega_d}=T_p-\frac{\psi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=1.62-\frac{0.5054}{1.9365}=1.36s$$

$$T_{r_z}=T_r-\frac{\psi}{\omega_d}=T_r-\frac{\psi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=0.94-\frac{0.5054}{1.9365}=0.68s$$

$$T_{sz}=\frac{4}{\zeta\omega_n}+\frac{1}{\zeta\omega_n}\ln\frac{l}{z}=8s(\Delta=2\%);T_s=\frac{3}{\zeta\omega_n}+\frac{1}{\zeta\omega_n}\ln\frac{l}{z}=6s(\Delta=5\%)$$

闭环零点的微分作用使得：系统响应的峰值时间提前、超调量增大、振荡加剧，调节时间加长。
反映系统快速性的指标：调节时间 （峰值时间 上升时间）反映系统的初始时刻的快速性
反映系统平稳性的指标：超调量



第 2 题:

$$\sigma\% \le 5\% \Rightarrow e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \le 5\% \Rightarrow -\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \le \ln 0.05$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2 \ge (\ln 0.05)^2 \Rightarrow \zeta \ge \sqrt{\frac{(\ln 0.05)^2}{\pi^2+(\ln 0.05)^2}} = 0.6901$$

$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1}(\zeta) = 0.8092 rad/s \Rightarrow \varphi = 46.37°$$

$$T_s < 4s(\Delta = 2\%) \Rightarrow \frac{4}{\zeta\omega_n} < 4 \Rightarrow \zeta\omega_n > 1$$

$$T_p < 1s \Rightarrow T_p = \frac{\pi}{\omega_d} < 1 \Rightarrow \omega_d > \pi$$

第 3 题:

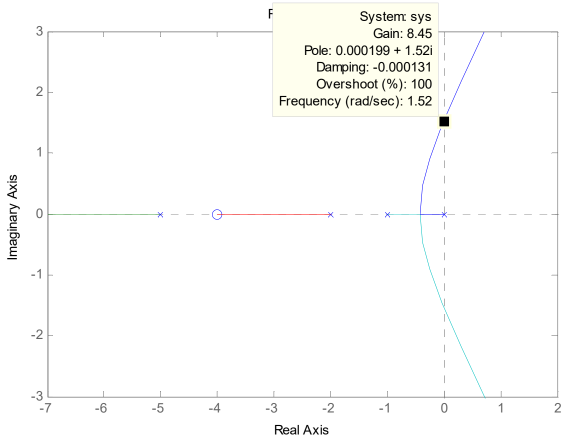
$$G(s) = \frac{10(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$$T(s) = \frac{10(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+5)+10(s+4)}$$

$$\Delta(s) = s^4 + 8s^3 + 17s^2 + 20s + 40$$

s^4	1	17	40
s^3	8	20	
s^2	116/8	40	
s^1	−2.069	0	
s^0	40		

Routh 阵列表的一列的符号变号两次，表明有两个闭环极点在 s 右边平面，系统不稳定，因此不存在稳态误差



第 4 题:

$$T(s)=\frac{K_1}{s^2+s+K_1(1+K_2 s)}=\frac{K_1}{s^2+(1+K_1K_2)s+K_1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

由 $\sigma\%=15\%$ $\Rightarrow$ $\xi=0.517$

$t_p=0.8$ $\quad t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\Rightarrow \omega_n=4.585\ rad/s$

$K_1=\omega_n^2=4.585^2=21$

$K_2=0.178$

$t_s=\frac{4}{\xi\omega_n}=1.687(s)$

$t_r=\frac{\pi-\varphi}{\omega d}=\frac{\pi-\cos^{-1}\xi}{\omega d}$

$=0.539(s)$

第 5 题:

$G(s)=\dfrac{10}{s^2+14s+50}$ 系统是0型系统

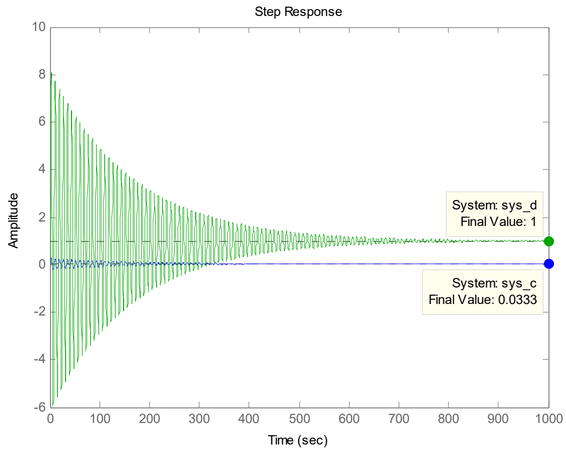
系统的静态位置误差系数: $K_p=\lim\limits_{s\to\infty}G(s)=1/5$

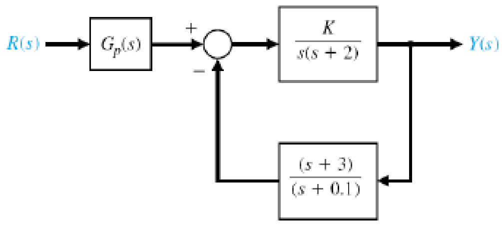
系统对于单位阶跃信号稳态误差: $e_{ss}=\dfrac{1}{1+K_p}=\dfrac{5}{6}$

0 型系统的静态速度误差系数和静态加速度误差系数均为 0,

系统对于单位斜坡和单位抛物线输入信号的稳态误差 为 无穷大

第 6 题:





图E3

解法 1：

当 $K = 0.4$，$G_p(s) = 1$ 时，根据 Routh 判据，闭环系统稳定，因此可以计算系统稳态误差。确定系统单位阶跃响应的稳态误差。

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+GH(s)}=\frac{\dfrac{0.4}{s(s+2)}}{1+\dfrac{0.4}{s(s+2)}\dfrac{(s+3)}{(s+0.1)}}=\frac{0.4s+0.04}{s^3+2.1s^2+0.6s+1.2}$$

$$E(s)=R(s)-Y(s)=R(s)[1-T(s)]=R(s)\left[1-\frac{0.4s+0.04}{s^3+2.1s^2+0.6s+1.2}\right]$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=s\frac{1}{s}\left[1-\frac{0.4s+0.04}{s^3+2.1s^2+0.6s+1.2}\right]=1-\frac{0.04}{1.2}=\frac{1.16}{1.2}=\frac{29}{30}=0.9667$$

$$G_p(s)=K$$

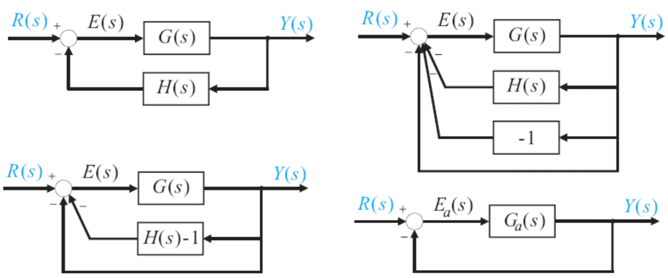
$$T'(s)=KT(s)$$

$$E(s)=R(s)-Y(s)=R(s)[1-T'(s)]=R(s)\left[1-\frac{K(0.4s+0.04)}{s^3+2.1s^2+0.6s+1.2}\right]$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=s\frac{1}{s}\left[1-\frac{K(0.4s+0.04)}{s^3+2.1s^2+0.6s+1.2}\right]=0$$

$$\Rightarrow \frac{1.2-K0.04}{1.2}=0\Rightarrow K=\frac{1.2}{0.04}=30$$

解法 2：如果利用非单位反馈转化为等效单位反馈形式：



$$G_k(s)=\frac{0.4(s+0.1)}{s^3+2.1s^2+0.2s+1.16}$$

$$K_p=\lim_{s\to 0}G_k(s)=\frac{0.04}{1.16}=\frac{1}{29}$$

$$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}=\frac{29}{30}=0.9667$$

如果考虑在前端加入一个增益 K（抵消反馈回路的放大）

$$G_k(s)=\frac{K\frac{0.4(s+0.1)}{s^3+2.1s^2+0.2s+1.16}}{1+K\frac{0.4(s+0.1)}{s^3+2.1s^2+0.2s+1.16}\frac{1-K}{K}}=\frac{K0.4(s+0.1)}{s^3+2.1s^2+0.2s+1.16+0.4(s+0.1)(1-K)}$$

$$K_p=\lim_{s\to 0}G_k(s)=\frac{0.04K}{1.2-0.04K}=\infty\Rightarrow 1.2-0.04K=0$$

$$\Rightarrow K=30$$

第七题

解：1．控制系统的闭环传递函数为：

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\frac{k}{s^2+k_1ks}}{1+\frac{k}{s^2+k_1ks}}=\frac{k}{s^2+k_1ks+k}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

由闭环传递函数可知该系统为无零点的二阶系统。

要保证该系统单位阶跃响应的超调量为 16%，峰值时间为 2s，则该系统应为无零点的欠阻尼二阶系统。

由超调量 $\mathrm{P.O.}=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%=16.3\%$，得 $\zeta=0.5$

由峰值时间 $t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=2$，得 $\omega_n=1.81\ \mathrm{rad/s}$

则 $k=\omega_n^2=1.81^2=3.28$

$$k_1=\frac{2\zeta\omega_n}{k}=\frac{2\times 0.5\times 1.81}{3.28}=0.55$$

2. 由 $K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)=\lim_{s\to 0}s\times\dfrac{k}{s^2+k_1ks}=\dfrac{1}{k_1}$，（2 分）$e_{ss}=\dfrac{1}{K_v}=0.5$ 可得，要保证稳态误差为 0.5，则 $k_1=0.5$。

（另解：由 $e_{ss}=\lim_{s\to0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}=\lim_{s\to0}\frac{s\times\frac{1}{s^2}}{1+\frac{k}{s^2+k_1ks}}=\lim_{s\to0}\frac{1}{s+\frac{k}{s+k_1k}}=k_1=0.5$ 可得，要保证稳态误差为 0.5，　则 $k_1=0.5$。

给出关系 $e_{ss}=\lim_{s\to0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}$，正确求出 $k_1=0.5$；结果错误，但给出

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}=\lim_{s\to0}\frac{s\times\frac{1}{s^2}}{1+\frac{k}{s^2+k_1ks}}=\lim_{s\to0}\frac{1}{s+\frac{k}{s+k_1k}}$$

第八题

请根据题目完成

（1）系统闭环传递函数 $T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{21}{s^2+2s+21}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

可知 $\zeta=1/\sqrt{21}$，$\omega_n=\sqrt{21}rad/s$

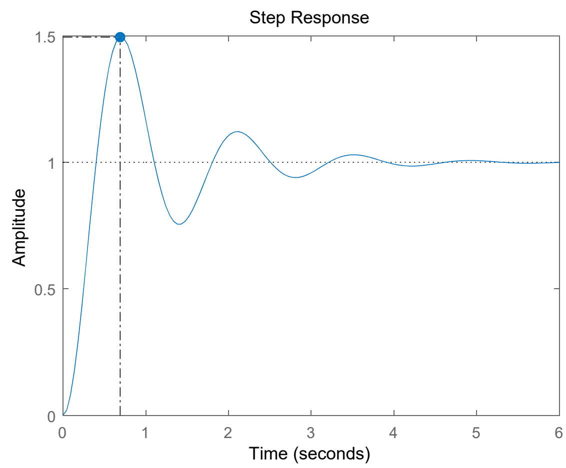
因此 $\text{P.O.}=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=49.54\%$

（2）

说明：M 脚本文件编写方式可以不一样，但是结果应该一致即可。

```
sys_Transfer_fun=tf([21],[1 2 21]);
step(sys_Transfer_fun)
```

由图可见系统超调量接近50%



（3）