第七节　静电场中的电介质

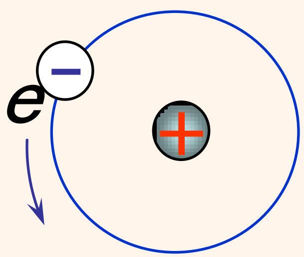
一、电介质的描述

二、电介质的极化及其描述

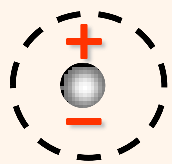
三、电介质中的电场

一、电介质的描述

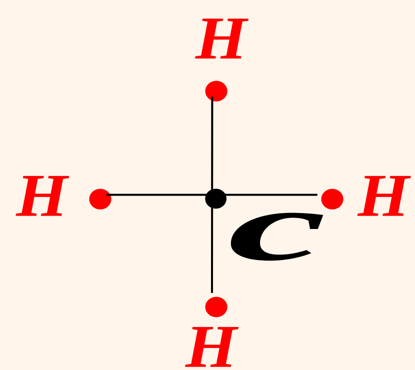
无极分子电介质:电介质分子中正、负电荷对称分布,无外电场时其正电荷中心与负电荷中心重合,分子的电偶极矩为零的电介质。



物质结构中存在着正负电荷

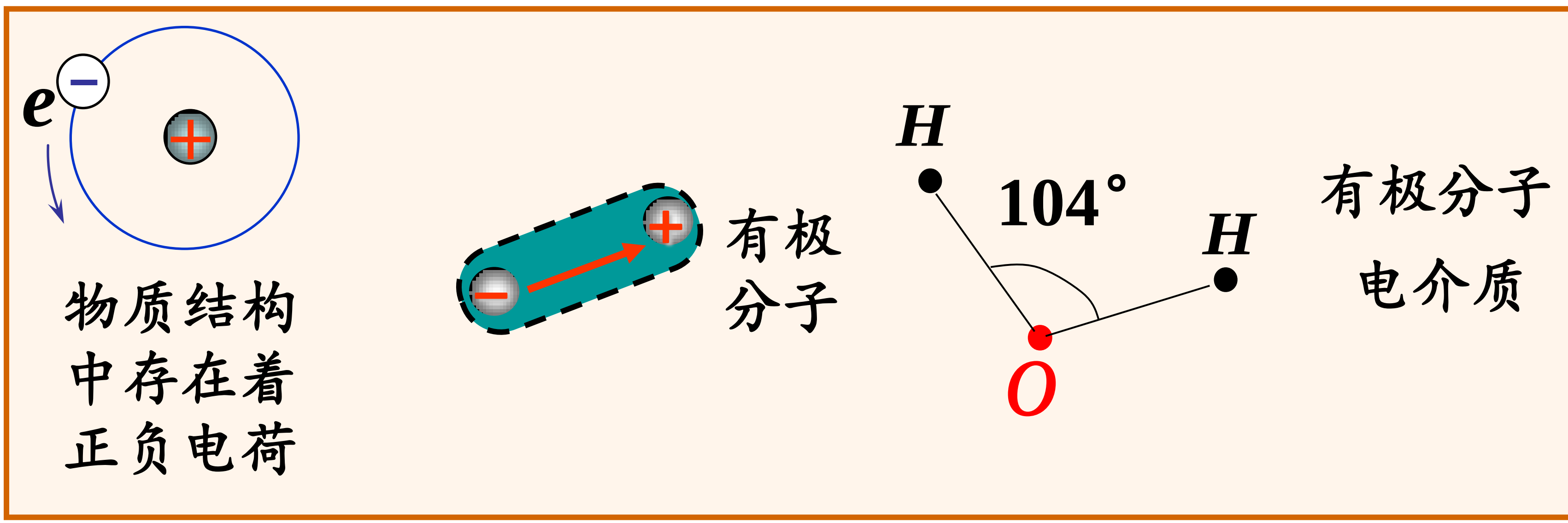


无极分子



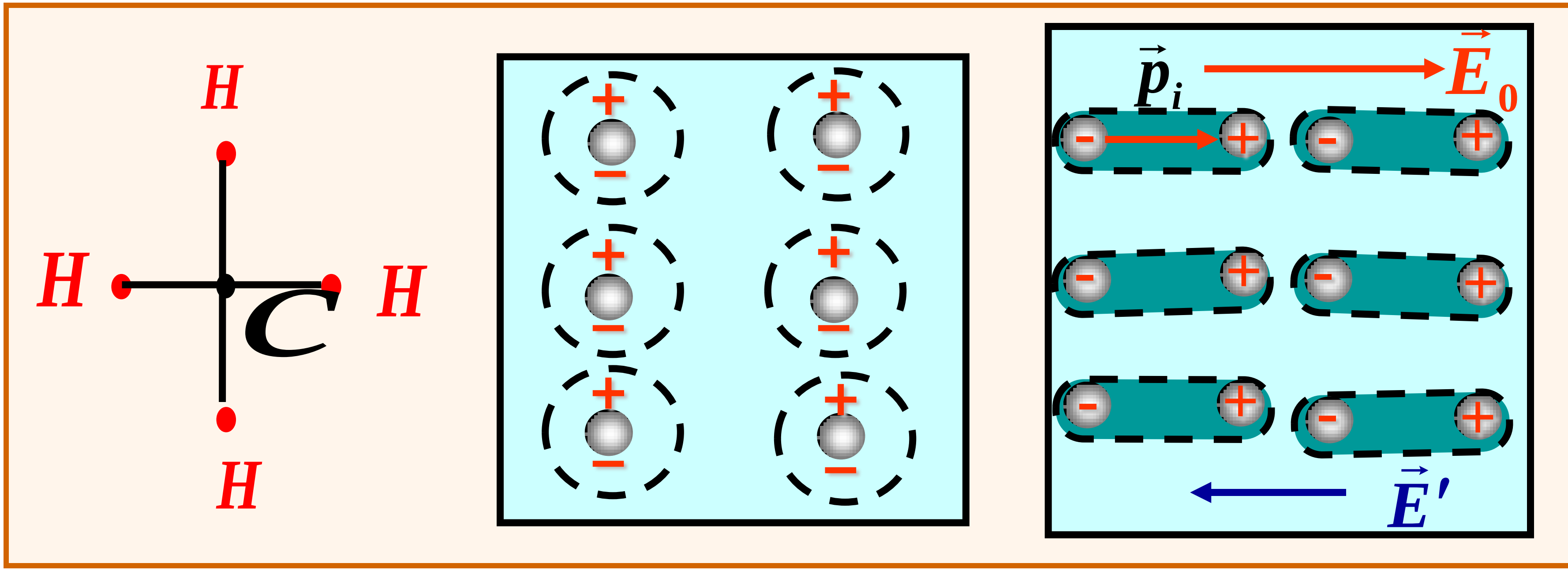
无极分子电介质

有极分子电介质:电介质分子中正、负电荷分布不对称,无外电场时其正电荷中心与负电荷中心不重合，分子具有电偶极矩的电介质。



二、电介质的极化及其描述

1. 极化现象



无极分子

电介质

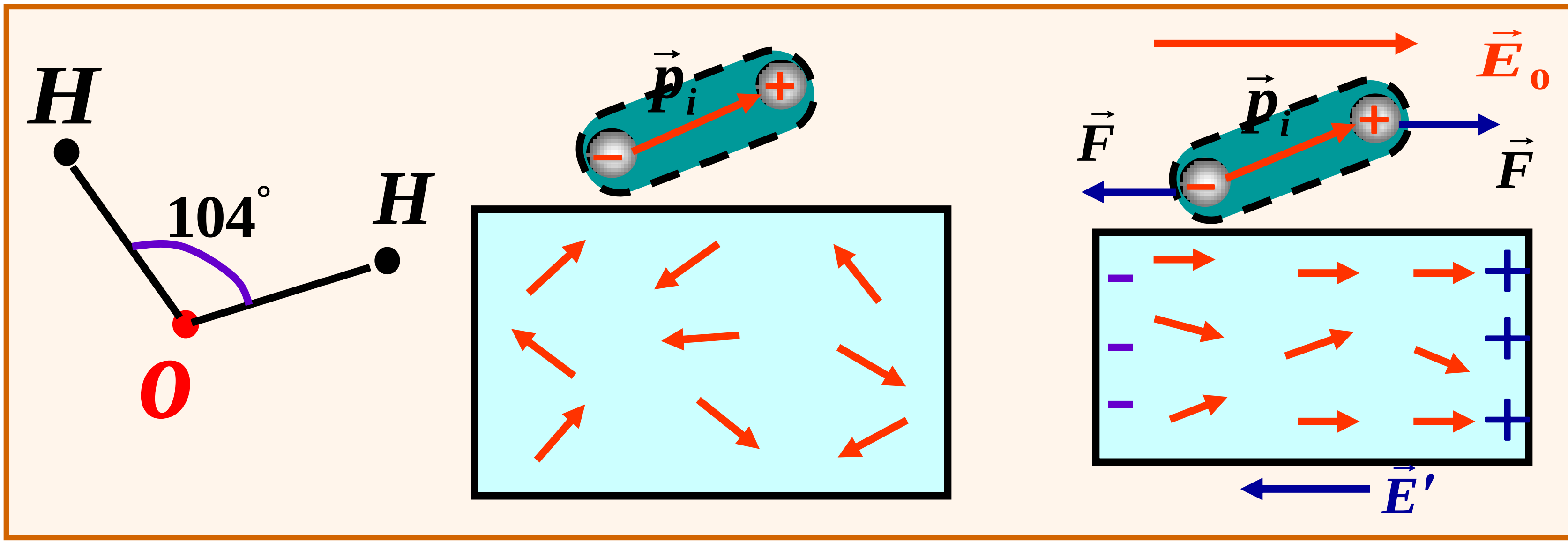
无外场：$\vec{p}_i = 0$

$$\sum_i \vec{p}_i = 0$$

外场中：位移极化

$\vec{p}_i \neq 0 \quad \sum_i \vec{p}_i \neq 0$

出现束缚电荷和附加电场



有极分子电介质

无外场: $\vec{p}_i \neq 0$

$$\sum_i \vec{p}_i = 0$$

外场中: 转向极化

$\vec{p}_i \neq 0$ $\quad \sum_i \vec{p}_i \neq 0$

出现束缚电荷和附加电场

电介质的极化：在外电场作用下，电介质内部或表面上出现束缚电荷的现象。

微观机制：

无极分子电介质 ⟶ 位移极化

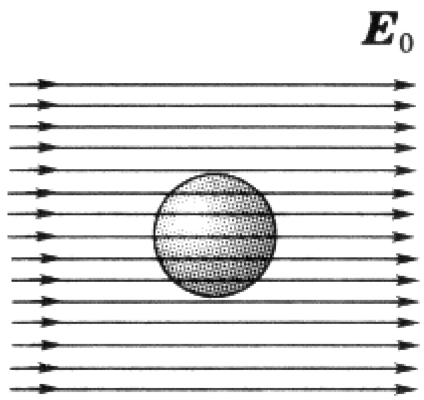
有极分子电介质 ⟶ 转向极化

宏观效果：

无极分子电介质和
有极分子电介质均：
$$\left\{\begin{array}{l}\sum_i \vec{p}_i \neq 0 \\ \text{出现束缚电荷和附加电场}\end{array}\right.$$

电介质极化的特点：无极、有极分子电介质受外电场作用的微观机制不同，但宏观效果相同。

实例：均匀介质球在均匀外场中的极化



a 外电场 E_0

非均匀场，
在介质球内
与外场反向。

在介质球外可能
与外场同向或反
向。在介质球内
削弱外场。

2. 金属导体和电介质比较

	金属导体	电介质（绝缘体）
特征	有大量的自由电子	基本无自由电子，正负电荷只能在分子范围内相对运动
模型	“电子气”	电偶极子
与电场的相互作用	静电感应	无极分子电介质： 位移极化 有极分子电介质： 转向极化
宏观效果	静电平衡 导体内 $\vec{E}=0, \rho=0$ 导体表面 $\vec{E}\perp$表面 感应电荷 $\sigma=\varepsilon_0 E$	内部：分子偶极矩矢量和不为零 $\sum_i \vec{p}_i \neq 0$ 出现束缚电荷（极化电荷）

3. 极化现象的描述

(1) 从分子偶极矩角度描述

极化强度：单位体积内分子偶极矩矢量和。

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$$

设 分子数密度：n

每个分子的等效偶极矩：$q_1\vec{L}$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \vec{P} = nq_1\vec{L}$$

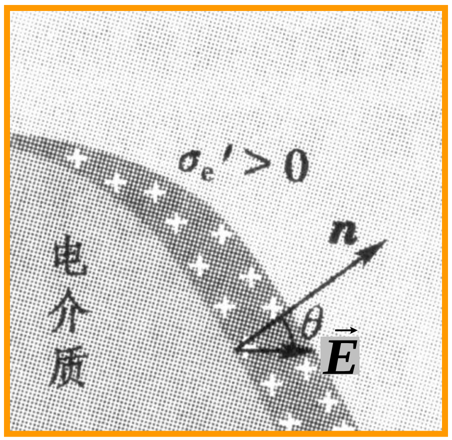
实验表明：当 $\vec{E}$ 不太大时：$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$

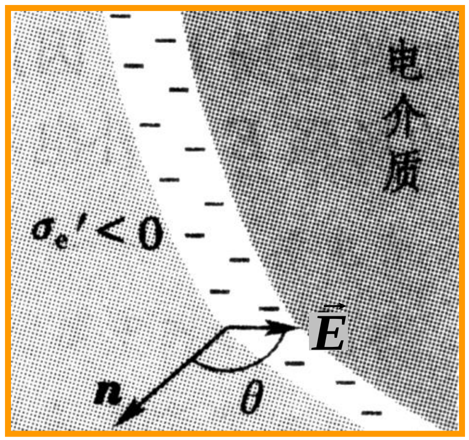
介质极化率　总场 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

χ：由介质的性质决定，与E无关。在各向同性均匀介质中为常数。

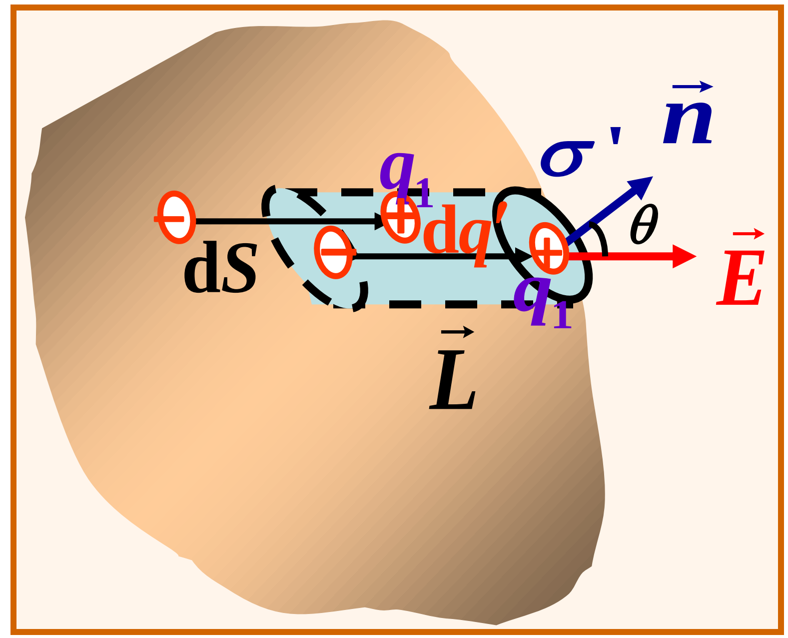
(2) 从束缚电荷角度描述

电介质表面出现的
束缚电荷层





作如图斜圆柱



求移过面元dS的电量，即如图斜圆柱内的束缚电荷电量dq'

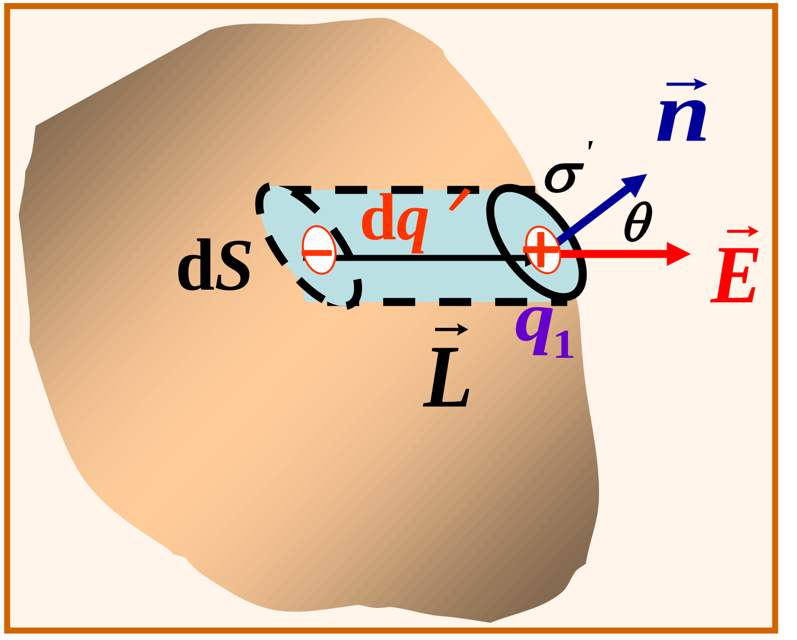
$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}SL\cos\theta$$

束缚电荷层中总电荷：

$$\mathrm{d}q' = q_1 n \mathrm{d}V$$

$$= \underline{nq_1} L\mathrm{d}S\cos\theta$$

$$= P\mathrm{d}S\cos\theta$$



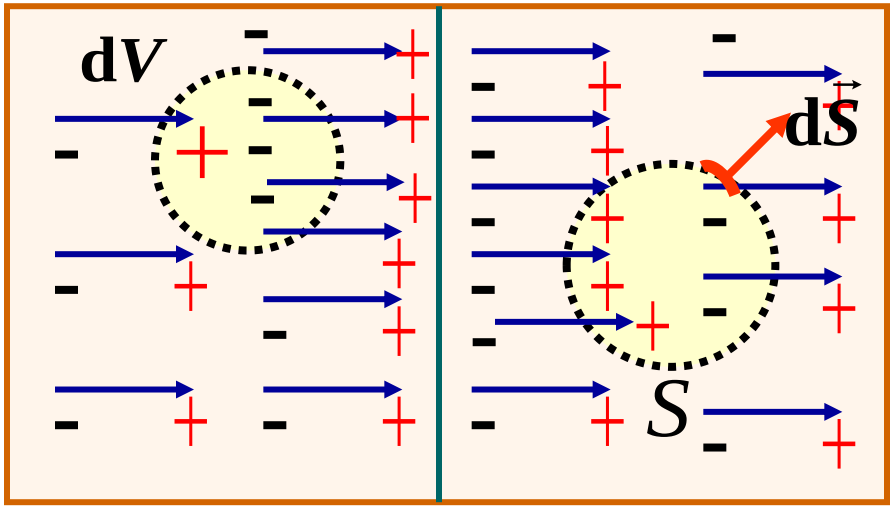
束缚电荷面密度：

$$\sigma' = \frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}S} = P\cos\theta = P_n$$

$$\therefore \sigma' = P_n$$

束缚电荷面密度等于极化强度的外法线分量

介质的非均匀极化，出现极化体电荷



移过面元dS的电量

$$dq' = P\cos\theta\, dS$$

$$= \underbrace{\vec{P}\cdot d\vec{S}}_{\text{元通量}}$$

移出封闭曲面S的电量：$\oint_s \vec{P}\cdot d\vec{S} = \sum dq' = -\sum q'_{内}$

$$\therefore \oint_s \vec{P}\cdot d\vec{S} = -\sum q'_{内}$$

极化强度通过某封闭曲面的通量等于曲面内极化电荷代数和的负值

三、电介质中的电场

1. 总场=外场+极化电荷附加电场：$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$

2. 介质中的高斯定理

静电场高斯定理： 自由电荷 极化电荷

$$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{s内}(q_0+q')=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum_{s内}q_0-\oint_s \vec{P}\cdot d\vec{S}\right)$$

$$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum_{s内}q_0-\oint_s \vec{P}\cdot d\vec{S}\right) \qquad \therefore \oint_s(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})\cdot d\vec{S}=\sum_{s内}q_0$$

自由电荷

令$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$为电位移矢量，得：

$$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_{s内}q_0$$ ⟶ 电介质中的高斯定理

电位移矢量通过静电场中任意封闭曲面的通量等于曲面内自由电荷的代数和

电介质中的高斯定理: $\boxed{\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{s内} q_0}$

注意:

(1) 电位移矢量 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$: 与 q_0 , q' 均有关

(2) $\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S}$: 穿过闭合曲面的 $\vec{D}$ 通量仅与 $\sum_{s内} q_0$ 有关.

特例: 真空——特别介质

$q'=0$ $\quad$ $\vec{P}=0$ $\quad$ $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\vec{E}$

回到 $\quad \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)} q_0$

3. 介质中电场的求解方法

本课程讨论的电介质为：

(1) 各向同性电介质

$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$ 中χ为常数

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \chi\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E}$$

令$1+\chi = \varepsilon_r$为介质的相对电容率

得：$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$

令$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$为介质电容率，得:$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}$

$$\therefore \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

(2) q_0, q' 分别具有某些对称性

才能选取到恰当高斯面使 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$ 积分能求出.

q_0, q' 的对称性包括：球对称、轴对称、面对称

(3) 电介质的分布具有某些对称性

电介质满足：

均匀无限大电介质充满全场

或：电解质分界面为等势面

或：电解质分界面与等势面垂直

求解电介质中电场强度的步骤：

(1) 对称性分析，选高斯面。

(2) 由 $\oint_s \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{(S内)} q_0$ 求 $\vec{D}$

(3) 由 $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$ 求 $\vec{E}$

例 (P_{238} 9.28)：

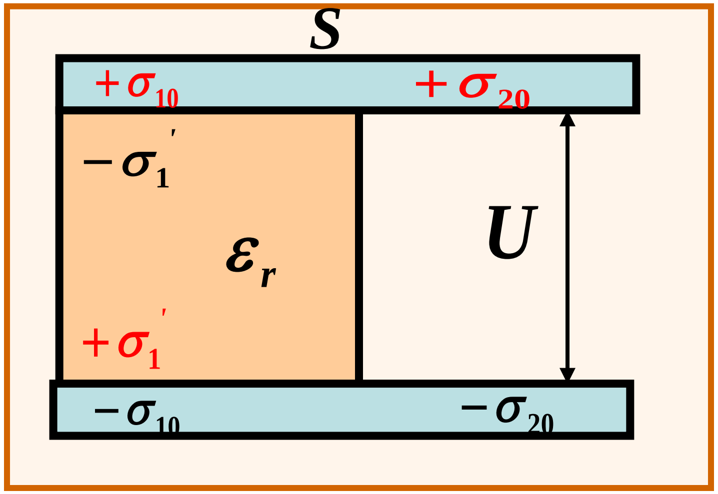
已知：平行板电容器

$\pm\sigma_0$ ， $U_0 = 300\text{V}$

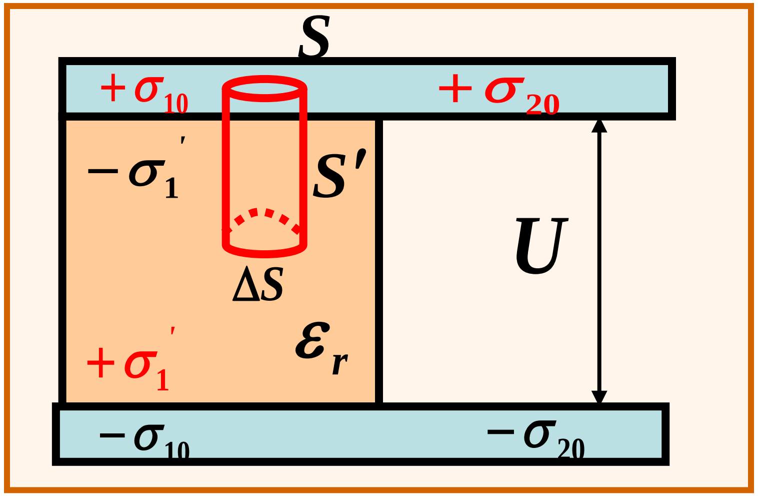
充一半电介质： $\varepsilon_r = 5$

求： D_1 ， E_1 ， σ_{10} ， σ_1'

D_2 ， E_2 ， σ_{20} ， U



解：介质分界面⊥等势面，未破坏各部分的面对称性，选底面与带电平板平行的圆柱面为高斯面。



选底面与带电平板平行的圆柱面为高斯面。

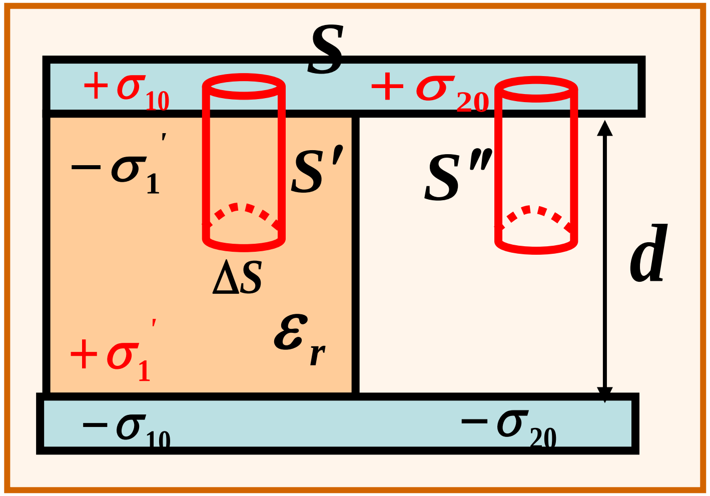
$$\sum_{(S内)} q_0 = \sigma_{10} \cdot \Delta S$$

$$\oint_s \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{上} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{下} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} + \oint_{侧} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = D_1 \Delta S$$

导体内$E = 0, D_1 = 0$ $\qquad$ $\cos 90^\circ = 0$

由高斯定理: $\oint_s \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \sum_{(S内)} q_0 \rightarrow D_1 \Delta S = \sigma_{10} \Delta S$

$$\therefore \quad D_1 = \sigma_{10} \qquad E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$



$$D_1 = \sigma_{10} \quad ; \quad E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

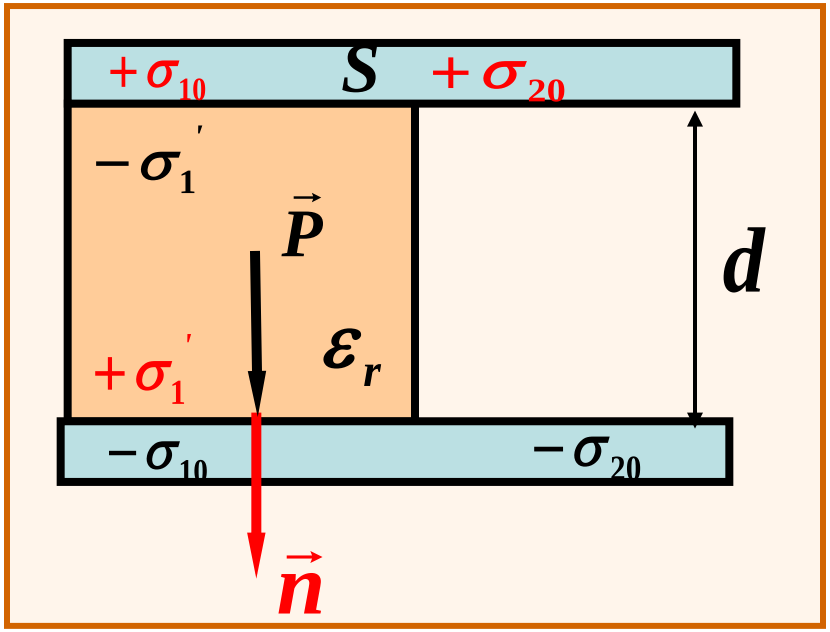
同理：$D_2 = \sigma_{20} \quad ; \quad E_2 = \dfrac{D_2}{\varepsilon_0}$

电量不变：$\sigma_{10} \cdot \dfrac{S}{2} + \sigma_{20} \cdot \dfrac{S}{2} = \sigma_0 \cdot S$

又：$E_1 d = E_2 d = U$

由上面的公式解得：

$$\sigma_{10} = D_1 = \frac{5}{3}\sigma_0 \qquad E_1 = E_2 = \frac{1}{3\varepsilon_0}\sigma_0 \qquad \sigma_{20} = D_2 = \frac{1}{3}\sigma_0$$



已知充介质前：

$$U_0 = E_0 d = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} d = 300\text{V}$$

充介质后：

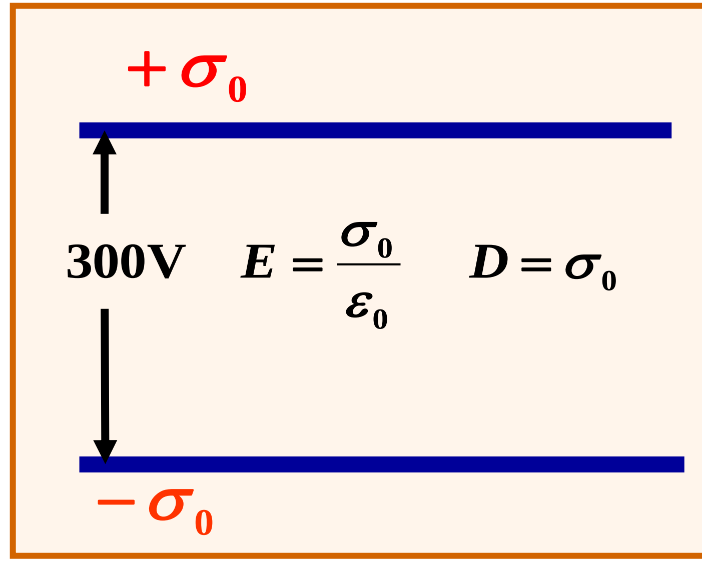
$$U = E_1 d = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} d = \frac{U_0}{3} = 100\text{V}$$

$$\sigma_1' = P_{1n} = P_1 \cos 0^\circ = P_1 = \chi \varepsilon_0 E_1$$

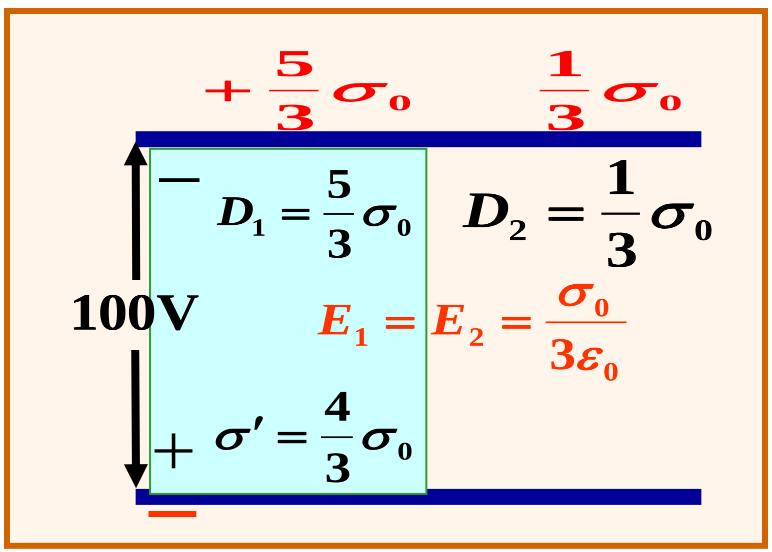
$$= (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \cdot \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} = \frac{4}{3}\sigma_0$$

比较：

充介质前：


$+\sigma_0$
300V
$E=\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$
$D=\sigma_0$
$-\sigma_0$

充介质后


$+\dfrac{5}{3}\sigma_0$
$\dfrac{1}{3}\sigma_0$
$-$
$D_1=\dfrac{5}{3}\sigma_0$
$D_2=\dfrac{1}{3}\sigma_0$
100V
$E_1=E_2=\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}$
$+$
$\sigma'=\dfrac{4}{3}\sigma_0$
$-$

第八节　电容　电容器

一、电容

二、电容的计算

三、电容器的串并联

一、电容

电容：孤立导体或电容器存储电荷的能力。

类比：

容器储水能力	导体储存电荷能力	电容器储电能力
提高单位水位所注入的水量	提高单位电势所增加的带电量 $C=\dfrac{Q}{U}$ 与周围导体，电介质，带电体分布有关	两极板间电势差为一个单位时，极板的带电量。 $C=\dfrac{Q}{\Delta U}$ 极板间距 <<线度由于静电屏蔽，C 值稳定。

二、电容的计算

求电容器电容的一般方法：

(1) 设极板带电 Q

(2) 选高斯面，求 $D=?\quad E=?$

(3) 求电容器两极板间电势差 $\Delta U=\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

孤立导体：求电势 U

(4) 由电容定义 $C=\dfrac{Q}{\Delta U}$

孤立导体：$C=\dfrac{Q}{U}$

例1 (P_{223} 例1)：半径R 的孤立金属球的电容

设其带电量为Q，令 $U_{\infty}=0$

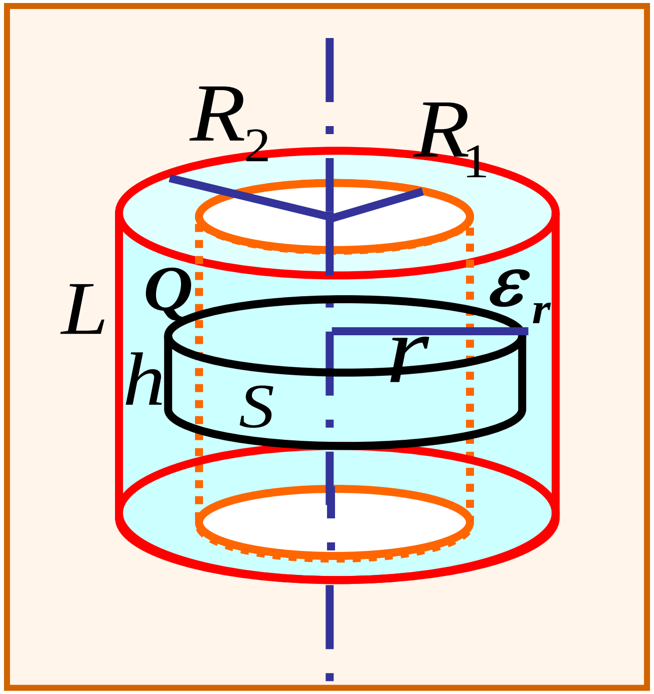
则金属球电势： $U=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

由电容定义： $C=\dfrac{Q}{U}=4\pi\varepsilon_0 R$

孤立导体电容取决于本身形状大小，与其是否带电无关。

练习：估算地球的电容 $C_{地球}\approx 7\times10^{-4}\mathrm{F}$

例2 (P225 例题4)：推求圆柱型电容器，平行板电容器，球形电容器公式。



已知：L，R_1，R_2，ε_r . 求：C

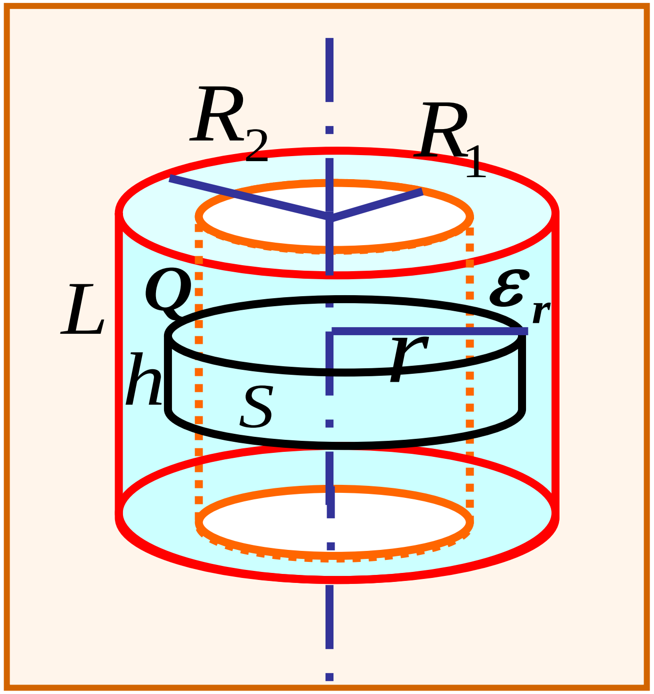
解：设极板带电量Q

作半径 r $(R_1 < r < R_2)$ 高 h 的同轴圆柱面为高斯面.

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot 2\pi rh = \frac{Q}{L} h$$

得：$D = \dfrac{Q}{2\pi Lr}$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r Lr}$$



电容器两极板间电势差：

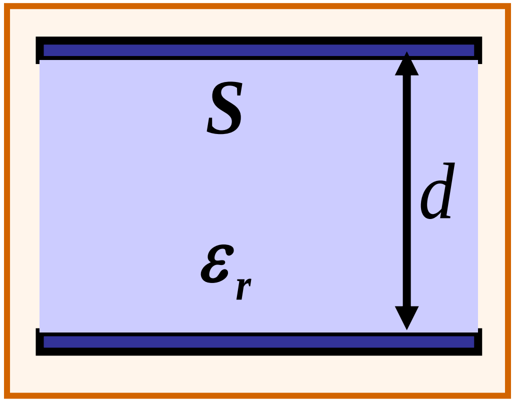
$$\Delta U = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

由电容定义：

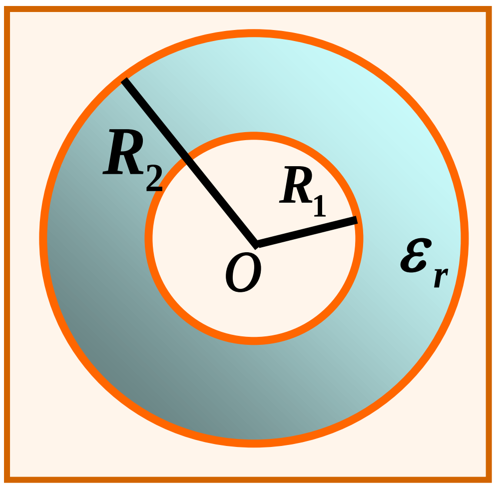
$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}}$$

采用相同的方法，得：



平行板电容器

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$$

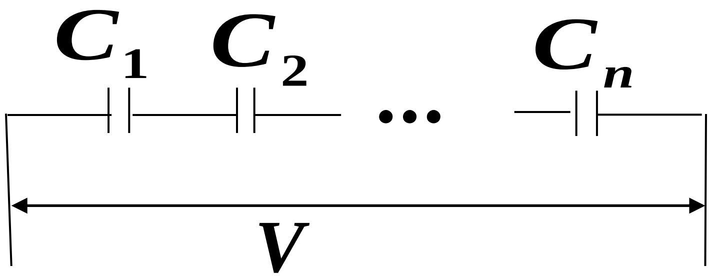


球形电容器

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1R_2}{R_2-R_1}$$

自学：P$_{245}$：例2、例3

三、电容器的串并联



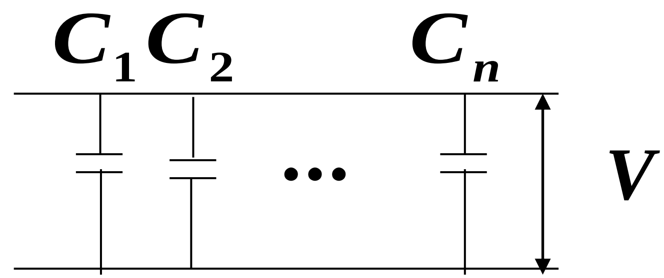
电容器的串联

总电荷：$Q = Q_i$

总电压：$V = \sum_i V_i$

总电容：

$$\boxed{\frac{1}{C_{串}} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$$



电容器的并联

总电荷：$Q = \sum_i Q_i$

总电压：$V = V_i$

总电容：

$$\boxed{C_{并} = \sum_i C_i}$$