高等数学公式

积分公式

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$

$$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\dots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, n\text{为正偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\dots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, n\text{为大于1的奇数} \end{cases}$$

三角函数

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\cdot\cos b}$$

$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(a+b\right)-\cos\left(a-b\right)\right]$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos\left(a+b\right)+\cos\left(a-b\right)\right]$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)+\sin\left(a-b\right)\right]$$

$$\cos a\sin b=\frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)-\sin\left(a-b\right)\right]$$

$$\sec^2 x-\tan^2 x=\csc^2 x-\cot^2 x=1$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

常用等价无穷小关系

$(x\to 0)$

$$x\sim\sin x\sim\tan x$$

$$x\sim\arcsin x\sim\arctan x$$

$$x\sim\ln\left(1+x\right)\sim e^x-1$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

$$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$$

$$\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3$$

$$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$$

$$a^x-1\sim x\ln a$$

$$\left(1+bx\right)^a-1\sim abx$$

凑微分公式

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)\quad(a\neq 0)$$

$$\int f(x^\mu)x^{\mu-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu}\int f(x^\mu)\mathrm{d}(x^\mu),(\mu\neq 0)$$

$$\int f(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$$

$$\int f(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$$

$$\int f(a^x)\cdot a^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\int f(a^x)\mathrm{d}(a^x)$$

$$\int f(\sin x)\cdot\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$$

$$\int f(\cos x)\cdot\sin x\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$$

$$\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$$

$$\int f(\cot x)\csc^2 x\mathrm{d}x=-\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$$

$$\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$$

$$\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$$

三角换元

$\sqrt{a^2-x^2} \to x=a\sin t$，$\sqrt{a^2+x^2} \to x=a\tan t$，$\sqrt{x^2-a^2} \to x=a\sec t$

$u=\tan\dfrac{x}{2}, x=2\arcsin u, \sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}, \cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}, \mathrm{d}x=\dfrac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$

重要极限

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$

中值定理

罗尔定理

$[a,b]$连续，(a,b)可导， $f(a)=f(b)$

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

拉格朗日中值定理

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

柯西中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

曲率

弧微分公式

$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$

平均曲率

$$\overline{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

$\Delta\alpha$：切线斜率的倾角变化量，Δs：弧长

曲率

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|y''|}{\sqrt{\left(1+y'^{2}\right)^{3}}}$$

直线：$K=0$

半径为a的圆：$K=\dfrac{1}{a}$

函数展开成幂级数

泰勒级数与麦克劳林公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$f(x)$可以展开成泰勒级数的充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$

令$x_0=0$，为麦克劳林公式：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$

常用泰勒展开

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

定积分的几何应用

平面图形的面积

直角坐标情况

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$A=\int_c^d \varphi(y)\mathrm{d}y$$

极坐标情况

$$A=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$$

体积

旋转体体积

圆盘法

绕 x 轴旋转：$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$

绕 y 轴旋转：$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2\,\mathrm{d}y$

柱壳法

绕 y 轴旋转：$V=\int_a^b 2\pi x f(x)\mathrm{d}x$

截面已知立体体积

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

平面曲线的弧长

参数方程情况

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

直角坐标方程情况

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

极坐标情况

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(t)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

微分方程

一阶微分方程

$$y'=f(x,y)\text{或}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

可分离变量的微分方程

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$$

$$G(y)=F(x)+C$$

齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)=\phi(x,y)$$

设$u=\frac{y}{x}$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，$u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\phi(u)$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}u}{\phi(u)-u}$$

分离变量，积分后将$\frac{y}{x}$代替u，即得齐次方程通解

一阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

当$Q(x)=0$时,为齐次方程，$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

当$Q(x)\neq 0$时，为非齐次方程，$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

伯努利方程:$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n,(n\neq 0,1)$

令$z=y^{n-1}$

可降阶的高阶微分方程

$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程

$$y^{(n-1)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1$$
$$y^{(n-2)}=\int[\int f(x)\mathrm{d}x+C_1]\mathrm{d}x+C_2$$
$$\cdots$$

$y''=f(x,y')$型的微分方程

设$y'=p$

$$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$$

$y''=f(y,y')$型的微分方程

设$y'=p$

$$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

二阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+P(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Q(x)y=f(x)，f(x)\equiv 0\text{时为齐次，}f(x)\neq 0\text{时为非齐次}$$

二阶常系数齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=0$$

求解步骤：

写出特征方程：$r^2+pr+q=0$

求出两根r_1,r_2

r_1，r_2的形式	通解
两不等实根$(p^2-4q>0)$	$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$
两相等实根$(p^2-4q=0)$	$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1x}$
两共轭复根$(p^2-4q<0)$ $r_1=\alpha+i\beta$，$r_2=\alpha-i\beta$ $\alpha=-\frac{p}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$	$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=f(x)$$

$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型

$$y^*=x^kR_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right]$$

k的取值

λ 不是特征方程的根 k=0 (第二种为 $\lambda\pm\omega$)

λ 是特征方程的单根 k=1 (第二种为 $\lambda\pm\omega$)

λ 是特征方程的重根 k=2

附 二阶非齐次线性微分方程解法示例

例

$$f(x)=e^x+\int_0^x(t-x)f(t)dt$$

解

$$f(x)=e^x+\int_0^x(t-x)f(t)dt=e^x-\ x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$$

$$f'(x)=e^x-xf(x)-\int_0^x f(t)dt+xf(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt$$

$$f''(x)=e^x-f(x)$$

$$f''(x)+f(x)=e^x$$

$$1y''+0y'+1y=e^{1x}$$

$$\text{特征方程为：}r^2+0r+1=0$$

$$\text{解得：}r=0\pm 1i$$

$$\text{因此齐次方程通解为：}y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

$$\text{等号右侧是 } e^{\lambda x}P_m(x) \text{ 形式}$$

$$\text{其中 } \lambda=1\text{，}P_m(x)=1$$

$$\lambda \text{ 不是特征方程的根，} k=0$$

$$\text{设方程特解为：}y^*=x^0(C_3)e^{1x}=C_3e^x$$

$$\text{代入微分方程得：}2C_3e^x=e^x$$

$$C_3=\frac{1}{2}$$

$$y^*=\frac{1}{2}e^x$$

$$\therefore f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x$$

$$\text{又可得 } f(0)=1\text{，}f'(0)=1$$

$$\text{代入得：}f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$$