第十五章 电路方程的矩阵形式

第一部分 要点、考点归纳

§15-1 电路的图

图——电路的图是结点和支路的集合，它是电路拓扑结构的抽象描述。图中支路画成直线或曲线，每条支路的两端都连到相应的结点上，移去一条支路并不意味着同时把它连接的结点也移去，但移去一个结点，则应把与该结点连接的全部支路同时移去。

若图中每一支路都赋予一个参考方向，它成为有向图。

树——个连通图 G 的树包含 G 的全部结点和部分支路，而树本身是连通的且不包含回路。一个连通图可按不同的方式选取树，树中包含的支路称为该树的树支，当选定一个树后，图中其它支路则成为对应该树的连支。任何一条支路可以或成为树支或成为连支。

割集——连通图 G 的一个割集是 G 的一个支路集合，把这些支路移去将使 G 分成两个部分，但是如果少移去其中一条支路，图仍将是连通的。一个连通图含有多个割集。

有向图的拓扑性质可以用关联矩阵、回路矩阵和割集矩阵描述。

关联矩阵是用结点与支路的关系描述有向图的拓扑性质。

回路矩阵是用回路与支路的关系描述有向图的拓扑性质。

割集矩阵是用割集与支路的关系描述有向图的拓扑性质。

§15-2 关联矩阵及其 KCL、KVL 的表示

1．关联矩阵

一条支路连接两个结点，称该支路与这两个结点相关联。支路与结点的关联性质可以用关联矩阵描述。设有向图的结点数为 n，支路数为 b，且所有结点与支路均加以编号。于是，该有向图的关联矩阵为一个 $n\times b$ 阶的矩阵，用 A_a 表示。它的每一行对应一个结点，每一列对应一条支路，它的任一元素 a_{kj} 定义如下：

$a_{kj}=+1$，表示支路 k 与结点 j 关联并且它的方向背离结点；

$a_{kj}=-1$，表示支路 k 与结点 j 关联并且它指向结点；

$a_{kj}=0$，表示支路 k 与结点 j 无关联。

对于图 15.1 所示的有向图，它的关联矩阵是

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
A_a = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

** 矩阵上方数字 1～7 代表支路编号；左侧数字(1)～(4)代表结点编号。

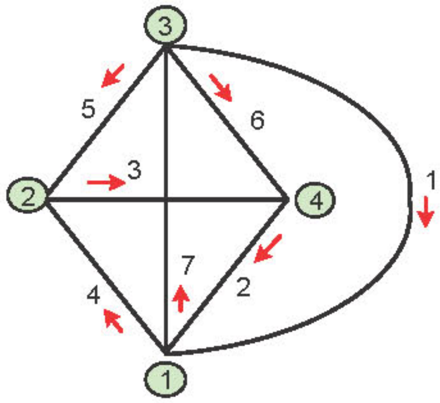


图 15.1 电路的有向图

关联矩阵 A_a 的特点：

① 每一列只有两个非零元素，一个是+1，一个是-1，A_a 的每一列元素之和为零。

② 矩阵中任一行可以从其它 $n-1$ 行中导出，即只有 $n-1$ 行是独立的。

如果把 A_a 的任一行划去，剩下的 $(n-1)\times b$ 矩阵用 A 表示，并称为降阶关联矩阵（今后主要用这种降阶关联矩阵，所以往往略去"降阶"二字），被划去的行对应的结点可以当作参考结点。

例如，若以结点 4 为参考结点，把上式中 A_a 的第 4 行划去，得 A

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \end{bmatrix}$$

若以结点 3 为参考结点，把上式中 A_a 的第 3 行划去，得 A

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 的某些列将只具有一个+1 或一个－1，每一个这样的列必对应于与参考结点相关联的一条支路。

根据特点①，不难从 A 得到 A_a，从而画出有向图。

2．用 A 表示矩阵形式的 KCL

电路中的 b 个支路电流用一个 b 阶列向量表示，即

$$i=[i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_b]^T$$

若用矩阵 A 左乘电流列向量，则乘积是一个 $n-1$ 阶列向量，由所得结果可以看出，它的

每一元素即为对应结点上各支路电流的代数和，即

$$Ai=\begin{bmatrix}\text{结点1上的}\sum \mathrm{i}\\ \text{结点2上的}\sum \mathrm{i}\\ \vdots\\ \text{结点}(n-1)\text{上的}\sum \mathrm{i}\end{bmatrix}$$

因此，有

$$Ai=0$$

上式是用矩阵 A 表示的 KCL 的矩阵形式。例如对图 15.1，以结点 4 为参考结点，有：

$$Ai=\begin{bmatrix}-i_1-i_2+i_4+i_7\\ i_3-i_4-i_5\\ i_1+i_5+i_6-i_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

上式为 n-1 个独立方程。

3. 用 *A* 表示矩阵形式的 KVL

电路中 b 个支路电压可以用一个 b 阶列向量表示，即

$$u=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & \cdots & u_b\end{bmatrix}^T$$

$n-1$ 个结点电压可以用一个 $n-1$ 阶列向量表示，即

$$u_n=\begin{bmatrix}u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{n(n-1)}\end{bmatrix}^T$$

例如，对图 15.1 以节点④为参考点，存在

$$A^Tu_n=\begin{bmatrix}-1&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\\1&-1&0\\0&-1&1\\0&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{n1}\\u_{n2}\\u_{n3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-u_{n1}+u_{n3}\\-u_{n1}\\u_{n2}\\u_{n1}-u_{n2}\\-u_{n2}+u_{n3}\\u_{n3}\\u_{n1}-u_{n3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\\u_7\end{bmatrix}=u$$

这一结论不难推到具有 n 个结点、b 条支路的情况，即存在

$$u=A^Tu_n$$

这是因为矩阵 A 的每一列，也就是矩阵 A^T 的每一行，表示每一对应支路与结点的关联情况。

可见上式表明电路中的各支路电压可以用与该支路关联的两个结点的结点电压（参考结点的结点电压为零）表示，这正是结点电压法的基本思想。同时，可以认为该式是用矩阵表示的 KVL 的矩阵形式。

综上：① 矩阵 A 表示有向图结点与支路的关联性质。

② 用 A 表示的 KCL 的矩阵形式为 $Ai=0$

③ 用 A 表示的 KVL 的矩阵形式为 $u=A^T u_n$

§15-3 回路电流法的矩阵形式

在列矩阵形式电路方程时，必须有一组支路约束方程。因此需要规定一条支路的结构和内容。可以采用所谓“复合支路”。

1. 复合支路

用相量表示的复合支路如图 15.2 所示，其中下标 k 表示第 k 条支路，$\dot{U}_{sk}$ 和 $\dot{I}_{sk}$ 分别表示独立电压源和独立电流源，Z_k （或 Y_k ）表示阻抗（或导纳），且规定它只可能是单一电阻、电感或电容，而不能是它们的组合，

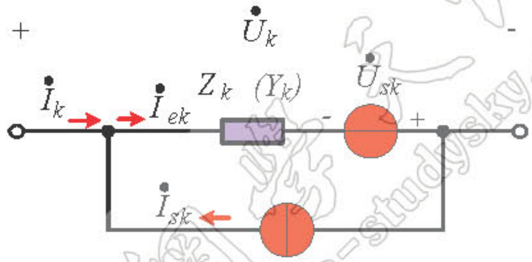


图 15.2 复合支路

$$Z_k=\begin{cases} R_k \\ j\omega L_k \\ \dfrac{1}{j\omega C_k} \end{cases}$$

注意：复合支路只是定义了一条支路最多可以包含的不同元件数及连接方式，但允许缺少某些元件。另外，为了写出复合支路的支路方程，还应规定电压和电流的参考方向。本章采用的电压和电流的参考方向如图 15.2 所示。

2. 用支路阻抗表示的支路方程的矩阵形式

应用 KCL 和 KVL 可以写出用阻抗表示的 k 支路电压、电流关系方程：

$$\dot{U}_k=Z_k(\dot{I}_k+\dot{I}_{sk})-\dot{U}_{sk}$$

若设 $\dot{I}=\begin{bmatrix}\dot{I}_1 & \dot{I}_2 & \cdots & \dot{I}_b\end{bmatrix}^T$ 为支路电流列向量；

$\dot{U}=\begin{bmatrix}\dot{U}_1 & \dot{U}_2 & \cdots & \dot{U}_b\end{bmatrix}^T$ 为支路电压列向量；

$\dot{I}_s = \begin{bmatrix} \dot{I}_{s1} & \dot{I}_{s2} & \cdots & \dot{I}_{sb} \end{bmatrix}^T$ 为支路电流源的电流列向量；

$\dot{U}_s = \begin{bmatrix} \dot{U}_{s1} & \dot{U}_{s2} & \cdots & \dot{U}_{sb} \end{bmatrix}^T$ 为支路电压源的电压列向量。

对整个电路，支路方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_1 \\ \vdots \\ \dot{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & & & 0 \\ & Z_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Z_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 + \dot{I}_{s1} \\ \dot{I}_2 + \dot{I}_{s2} \\ \vdots \\ \dot{I}_b + \dot{I}_{sb} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{U}_{s1} \\ \dot{U}_{s1} \\ \vdots \\ \dot{U}_{sb} \end{bmatrix}$$

即

$$\dot{U} = Z(\dot{I} + \dot{I}_s) - \dot{U}_s$$

式中 Z 称为支路阻抗矩阵，它是一个 $b \times b$ 阶对角阵。当电路中存在耦合电感时，在记及互感作用后，Z 矩阵不再是对角阵，这里不再详述。

3. 用支路导纳表示的支路方程的矩阵形式

考虑受控源后的复合支路如图 15.3 所示。当电感间无耦合时，设第 k 支路中受控电流源受第 j 支路中无源元件上的电压 $\dot{U}_{ej}$ 或电流 $\dot{I}_{ej}$ 控制，即 $\dot{I}_{dk} = g_{kj}\dot{U}_{ej}$ 或 $\dot{I}_{dk} = \beta_{kj}\dot{I}_{ej}$，此时，对第 k 支路有 $\dot{I}_k = Y_k(\dot{U}_k + \dot{U}_{sk}) + \dot{I}_{dk} - \dot{I}_{sk}$

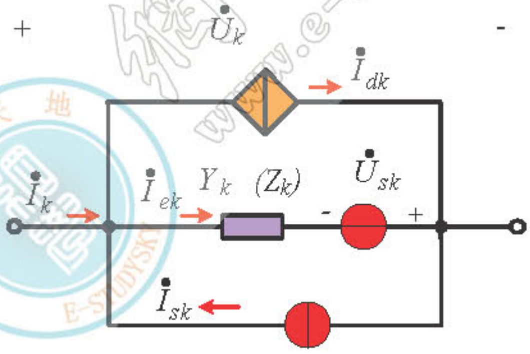


图 15.3 含受控源后的复合支路

在 VCCS 情况下，上式中的 $\dot{I}_{dk} = g_{kj}(\dot{U}_j + \dot{U}_{sj})$，而在 CCCS 的情况下，$\dot{I}_{dk} = g_{kj}Y_j(\dot{U}_j + \dot{U}_{sj})$。于是有

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_j \\ \vdots \\ \dot{I}_k \\ \vdots \\ \dot{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & & & & & & & \\ 0 & Y_2 & & & & 0 & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & Y_j & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & Y_{kj} & \cdots & Y_k & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & Y_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 + \dot{U}_{s1} \\ \dot{U}_2 + \dot{U}_{s2} \\ \vdots \\ \dot{U}_j + \dot{U}_{sj} \\ \vdots \\ \dot{U}_k + \dot{U}_{sk} \\ \vdots \\ \dot{U}_b + \dot{U}_{sb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{s1} \\ \dot{I}_{s2} \\ \vdots \\ \dot{I}_{sj} \\ \vdots \\ \dot{I}_{sk} \\ \vdots \\ \dot{I}_{sb} \end{bmatrix}$$

即
$$\dot{I} = Y(\dot{U} + \dot{U}_S) - \dot{I}_S \qquad (*)$$

式中
$$Y_{kj} = \begin{cases} g_{kj} & (\text{当}\dot{I}_{dk}\text{为}VCCS\text{时}) \\ \beta_{kj} Y_j & (\text{当}\dot{I}_{dk}\text{为}CCCS\text{时}) \end{cases}$$

注意此时 Y 不是对角阵。

当不含受控源时，$\dot{I}_{dk} = 0$，$Y_{kj} = 0$，此时，方程（*）的形式不变，但 Y 为对角阵。

§15-4　结点电压电流的矩阵形式

1．结点电压方程的矩阵形式

结点电压法以结点电压为电路的独立变量，并用 KCL 列出足够的独立方程。

根据前面分析，得到下述方程

KCL　$Ai = 0$

KVL　$u = A^T u_n$

支路方程　$\dot{I} = Y(\dot{U} + \dot{U}_S) - \dot{I}_S$

式中，$\dot{I} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 & \dot{I}_2 & \cdots & \dot{I}_b \end{bmatrix}^T$、$\dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 & \dot{U}_2 & \cdots & \dot{U}_b \end{bmatrix}^T$ 分别为支路的电流和电压列相量；$\dot{I}_s = \begin{bmatrix} \dot{I}_{s1} & \dot{I}_{s2} & \cdots & \dot{I}_{sb} \end{bmatrix}^T$、$\dot{U}_s = \begin{bmatrix} \dot{U}_{s1} & \dot{U}_{s2} & \cdots & \dot{U}_{sb} \end{bmatrix}^T$，分别为支路的独立电流源和独立电压源列相量；$\dot{U}_n = \begin{bmatrix} \dot{U}_{n1} & \dot{U}_{n2} & \cdots & \dot{U}_{n(n-1)} \end{bmatrix}^T$ 为结点电压相量；Y 为结点导纳矩阵。把支路方程代入 KCL 方程，可得：

$$A[Y(\dot{U} + \dot{U}_s) - \dot{I}_s] = 0 \quad \text{即} \quad AY\dot{U} + AY\dot{U}_s - A\dot{I}_s = 0$$

将 KVL 方程代入，得

$$AYA^T\dot{U}_n = A\dot{I}_S - AY\dot{U}_S \qquad (**)$$

上式即结点电压方程的矩阵形式。由于乘积 AY 为 $(n-1)\times b$ 阶矩阵，而 A^T 为 $b\times(n-1)$ 阶

矩阵，所以，乘积 AYA^T 是一个 $(n-1)$ 阶方阵。同理，乘积 $A\dot{I}_S$ 和 $AY\dot{U}_S$ 都是 $(n-1)$ 阶的列向量。如记

$$Y_n = AYA^T,\quad \dot{J}_n = A\dot{I}_s - AY\dot{U}_s,$$

则式(**)可写为

$$Y_n\dot{U}_n = \dot{J}_n$$

式中，Y_n 称为结点导纳矩阵，其元素为与相应结点连接的支路的导纳；$\dot{J}_n$ 为由独立电源引起的注入结点的电流列向量，其元素为与相应结点连接的支路中由独立电源引起的电流。

2．结点电压法的一般步骤

（1）画出电路图的有向图；

（2）写出有向图的关联矩阵 **A**；

（3）形成支路导纳矩阵 **Y**；

（4）写出支路电压源向量和电流源向量；

（5）用矩阵相乘形成结点电压方程

$$AYA^T\dot{U}_n = A\dot{I}_S - AY\dot{U}_S$$

即

$$Y_n\dot{U}_n = \dot{J}_n$$

§15-5　状态方程

1．网络的状态与状态变量

（1）网络状态

在网络理论中，“状态”是指在某一给定时刻网络必须具备的最少的一组信息量，它们和从该时刻开始的任意输入一起就足以完全确定今后该网络在任何时刻的性状。

（2）状态变量

在分析网络(或系统)时在网络内部选一组最少数量的特定变量 X，$X=[X_1, X_2 \ldots \ldots X_n]^T$，只要知道这组量在某一时刻值 $X(t_0)$，再知道输入 $e(t)$ 就可以确定 t_0 及 t_0 以后任何时刻网络的性状(响应)，称这一组最少数目的特定变量为状态变量。状态变量就是电路的一组独立的动态变量。

网络中各独立的电容电压（或电荷），电感电流（或磁通链），可以选为状态变量。

（3）非独立的电容电压或电感电流情况

①当一个网络中存在纯电容回路，由 KVL 可知其中必有一个电容电压可由回路中其它元件的电压求出，此电容电压为非独立的电容电压。

②网络中与独立电压源并联的电容元件，其电压 u_c 由 u_s 决定。

③当网络中存在纯电感割集，由 KCL 可知其中必有一个电感电流可由其它元件的电流求出，此电感电流为非独立的。

④网络中与独立电流源串联的电感元件，其 i_L 由 i_s 决定。

以上四种情况中非独立的 u_c 和 i_L 不能作为状态变量，不含以上四种情况的网络称为常态网络。状态变量数等于 C、L 元件总数。含有以上四种情况的网络称为非常态网络，网络的状态变量数小于网络中 C、L 元件总数，下面着重讨论常态网络。

2．状态方程

求解状态变量的方程称为状态方程。每个状态方程中只含有一个状态变量的一阶导数。

状态方程的标准形式如下：

$$\dot{x}=Ax+Bv$$

其中， x 称为状态向量， v 称为输入向量。在一般情况下，设电路具有 n 个状态变量， m 个独立源，上式中的 $\dot{x}$ 和 x 为 n 阶向量， A 为 $n\times n$ 方阵， B 为 $n\times m$ 矩阵。上式有时称为向量微分方程。

可见状态方程有下述特点：

①联立的一阶微分方程组；

②左端为状态变量的一阶导数；

③右端含状态变量和输入量

3．状态方程的列写

（1）直观列写法

适用于简单的电路。要列出包含 $\frac{du_c}{dt}$ 项的方程，必须 对只接有一个电容的结点或割集写出 KCL 。要列出包含 $\frac{di_L}{dt}$ 项的方程，必须对只包含一个电感的回路列写 KVL。当列出全部这样的 KCL 和 KVL 方程后，通常可以整理成标准形式的状态方程。

注意：对于上述 KCL 和 KVL 方程中出现的非状态变量，只有将它们表示为状态变量后，才能得到状态方程的标准形式。

直观编写法的主要缺点 ： 对复杂网络的非状态变量的消除很麻烦。

（2）系统列写法

状态方程系统列写法的步骤：

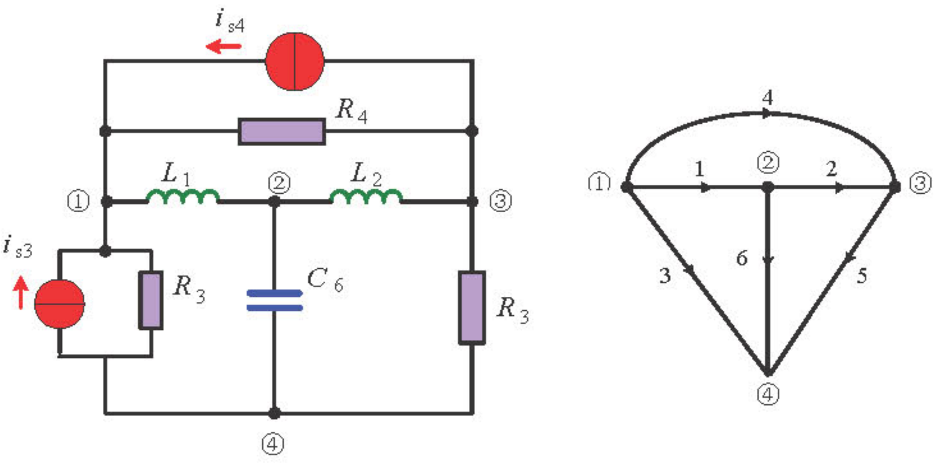
①每个元件为一支路，线性电路以 i_L，u_C 为状态变量。

②选一棵特有树，它的树支包含了电路中所有电容支路、电压源支路。而连支包含了电路中所有电流源支路和电感支路。

③对单电容树支割集列写 KCL 方程，对单电感连支回路列写 KVL 方程。然后消去非状态变量（如果有必要），最后整理并写成状态方程的标准形式。

第二部分　例题

例 1　如图 15-4（a）所示，图中元件的数字下表代表支路编号。列出电路的的结点电压方程（矩阵形式）。



（a）　　　　（b）

图 15-4

解： 作出图示电路的有向图如同图（b）所示，若选结点④为参考结点，关联矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\-1&1&0&0&0&1\\0&-1&0&-1&1&0\end{bmatrix}$$

电压源列向量 $\dot{U}_s=0$，电流源列向量 $\dot{I}_s=\begin{bmatrix}0&0&\dot{I}_{s3}&\dot{I}_{s4}&0&0\end{bmatrix}^T$

支路导纳矩阵

$$Y=diag\begin{bmatrix}\dfrac{1}{j\omega L_1}&\dfrac{1}{j\omega L_2}&\dfrac{1}{R_3}&\dfrac{1}{R_4}&\dfrac{1}{R_5}&j\omega C_6\end{bmatrix}^T$$

结点电压方程

$$AYA^T\dot{U}_n=A\dot{I}_s$$

即

$$\begin{bmatrix}\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{j\omega L_1}&-\dfrac{1}{j\omega L_1}&-\dfrac{1}{R_4}\\-\dfrac{1}{j\omega L_1}&\dfrac{1}{j\omega L_1}+\dfrac{1}{j\omega L_2}+j\omega C_6&-\dfrac{1}{j\omega L_2}\\-\dfrac{1}{R_4}&-\dfrac{1}{j\omega L_2}&\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}+\dfrac{1}{j\omega L_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_{n1}\\\dot{U}_{n2}\\\dot{U}_{n3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{I}_{s3}+\dot{I}_{s4}\\0\\-\dot{I}_{s4}\end{bmatrix}$$

例 2　求图示电路的状态方程。

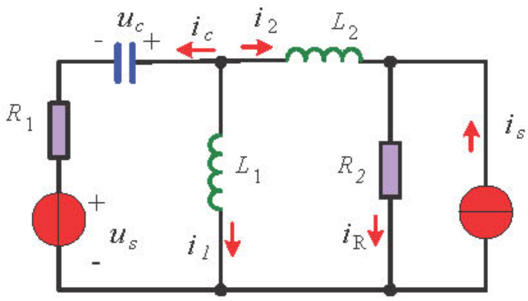


图 15.5

解：取 u_c, i_1 ，i_2 为状态变量

$$\begin{cases} -C\dfrac{du_c}{dt} = i_1 + i_2 \\ L_1\dfrac{di_1}{dt} = u_c + R_1 i_c + u_s \\ L_2\dfrac{di_2}{dt} = L_1\dfrac{di_1}{dt} - R_2 i_R \end{cases}$$

由图可知，$i_c = -(i_1 + i_2)$, $i_R = i_2 + i_s$ ，从以上方程中消去非状态量，得：

$$\begin{cases} C\dfrac{du_c}{dt} = -i_1 - i_2 \\ L_1\dfrac{di_1}{dt} = u_c - R_1 i_1 - R_1 i_2 + u_s \\ L_2\dfrac{di_2}{dt} = u_c - R_1 i_1 - (R_1 + R_2) i_2 + u_s - R_2 i_s \end{cases}$$

写成标准形式：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_c}{dt} \\ \dfrac{di_1}{dt} \\ \dfrac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L_1} & -\dfrac{R_1}{L_1} & -\dfrac{R_1}{L_1} \\ \dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{R_1}{L_2} & -\dfrac{R_1 + R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{L_1} & 0 \\ \dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$