运动的描述（第三章）

运动的度量

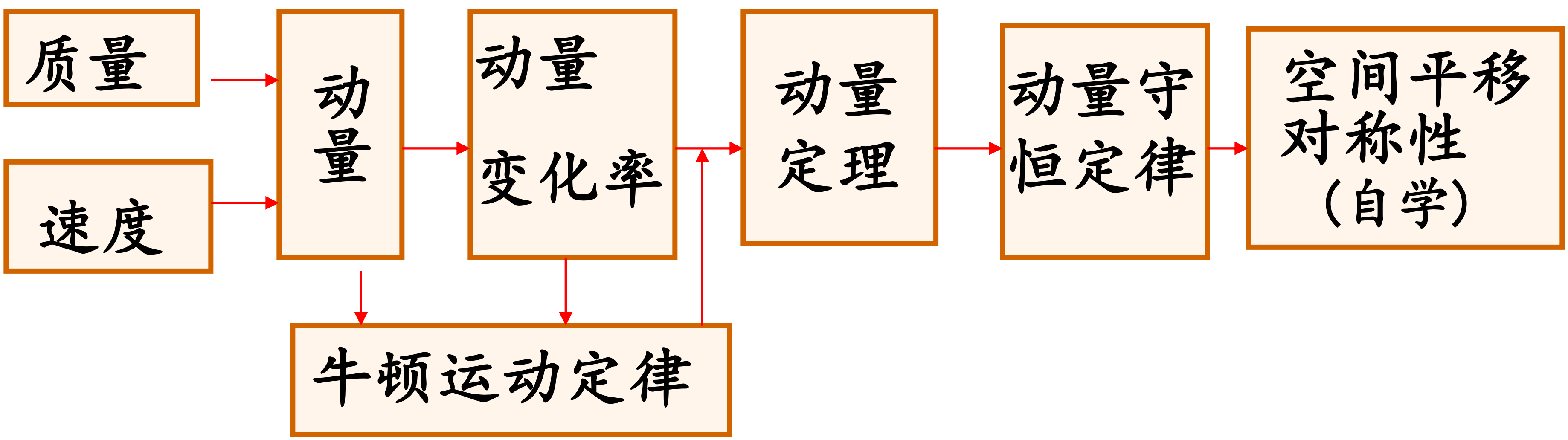
第四章： 动量 动量守恒定律

第五章： 角动量 角动量守恒定律

第六章： 能量 能量守恒定律

第四章 动量 动量守恒定律

结构框图



重点：

概念：质点、质点系的动量；

力的冲量；

规律：牛顿运动定律；

动量定理的微分形式和积分形式；

动量守恒定律。

难点：变力作用的动力学问题；

惯性力，非惯性系中的力学定律。

学时：4

第一节 动量 动量的时间变化率

一、质点的动量和动量的时间变化率

二、质点系的动量和动量的时间变化率

一、质点的动量和动量的时间变化率

1. 质点的动量 $\vec{p}=m\vec{v}$

$\vec{p}$为量度质点机械运动强度的量，为矢量。

2. 质点动量的时间变化率

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}\overset{(v<<c)}{=}m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}=\vec{F}$$

质点动量的时间变化率是质点所受的合力

牛顿第二定律的一般形式：

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\xrightarrow{\text{特例}}\vec{F}=m\vec{a}\quad(v<<c)$$

二、质点系的动量和动量的时间变化率

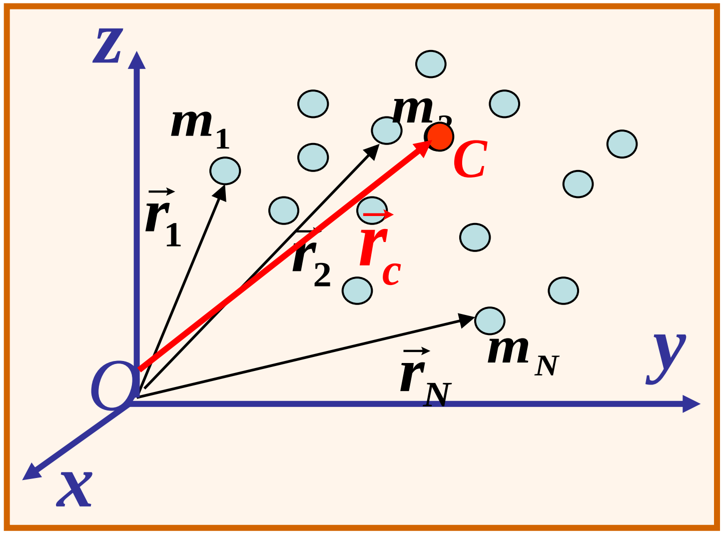
1. 质心

设质点系内有N个质点，质量分别为：$m_1, m_2, \cdots, m_N$，

在所选定参考系中，位矢分别为：$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_N$,

则质点系的质心位矢为：

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}$$



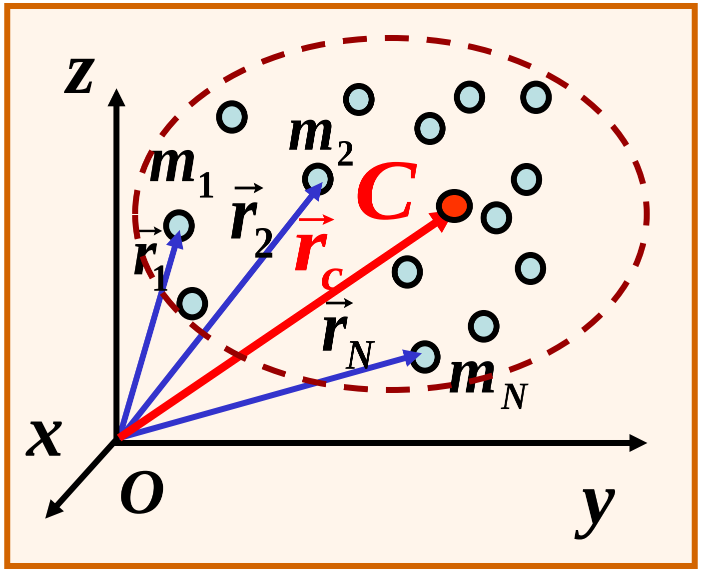
令 $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N = \sum_i m_i$ 则：

$$\vec{r}_c = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 + \cdots + \frac{m_N}{M}\vec{r}_N = \sum_i \frac{m_i \vec{r}_i}{M}$$

权重

质心位矢是各质点位矢的加权平均

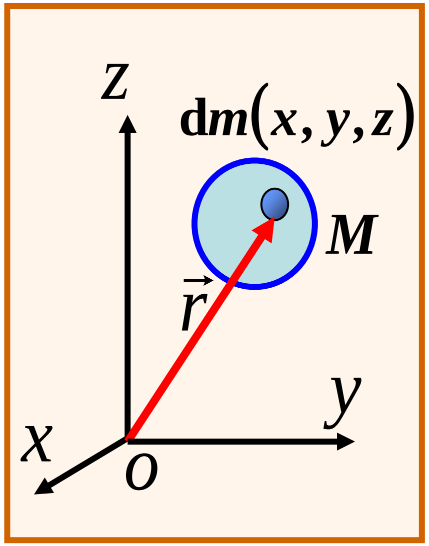
直角坐标系中，质心的位置：



$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M} \\ y_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M} \\ z_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M} \end{cases}$$

质量连续分布的质点系



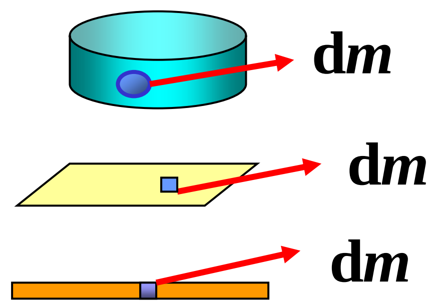
$$\vec{r}_c=\frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{M}$$

dm：宏观小，微观大。

直角坐标系中：

$$\begin{cases} x_c=\dfrac{\int x\mathrm{d}m}{M} \\ y_c=\dfrac{\int y\mathrm{d}m}{M} \\ z_c=\dfrac{\int z\mathrm{d}m}{M} \end{cases}$$

$$\mathrm{d}m=\begin{cases} \rho\,\mathrm{d}V \\ \sigma\,\mathrm{d}S \\ \lambda\,\mathrm{d}l \end{cases}$$



注意：形状对称、质量均匀分布的物体质心在其几何中心，两个质量相等的质点的质心在其连线的中点处。

质心的速度：

$$\vec{v}_c=\frac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i\frac{m_i\vec{r}_i}{M}=\sum_i\frac{m_i}{M}\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{M} \quad \text{或} \quad \frac{\int\vec{v}\mathrm{d}m}{M}$$

质心速度是各质点速度的加权平均

质心的加速度：

$$\vec{a}_c=\frac{\mathrm{d}\vec{v}_c}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_c}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\sum_i m_i\vec{a}_i}{M} \quad \text{或} \quad \frac{\int\vec{a}\mathrm{d}m}{M}$$

质心加速度是各质点加速度的加权平均

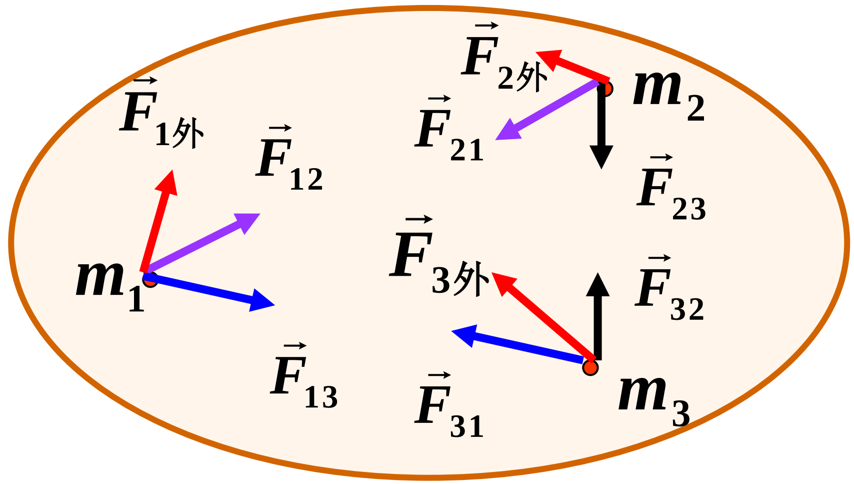
$\vec{v}_c$，$\vec{a}_c$也可以写成分量式。

2. 质点系的外力和内力

外力：质点系外的物体对系内任一质点的作用力

内力：质点系内质点间的相互作用力

$$\vec{F}_{外} = \sum_i \vec{F}_{i外}$$



质点系内质点间的内力总是成对出现，因此必有

$$\vec{F}_{内} = \sum_i \vec{F}_{i内} \equiv 0$$

同一力对某一系统为外力，而对另一系统则可能为内力。

3. 质点系的动量

设N个质量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_N$，动量分别为 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \cdots, \vec{p}_N$ 的质点组成质点系，其总动量：

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N$$

$$= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_N\vec{v}_N$$

$$= \sum_i m_i\vec{v}_i = \frac{M\sum_i m_i\vec{v}_i}{M} \quad (M = \sum_1^N m_i)$$

$$= M\vec{v}_c = M\frac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t}$$

4. 质点系动量的时间变化率

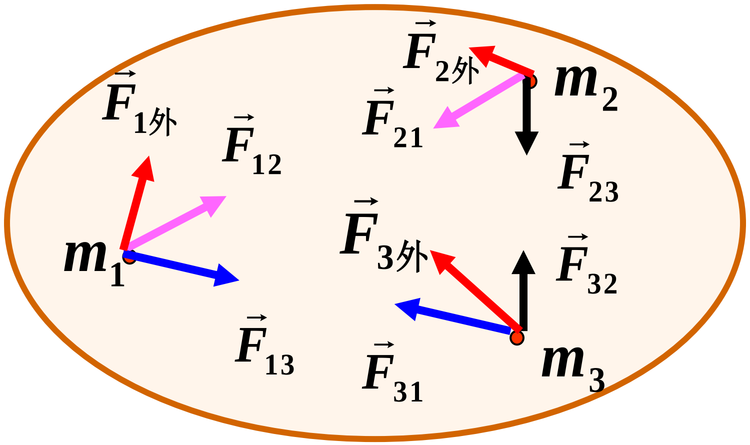
设质点系内各质点所受的合力分别为:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1外} + \vec{F}_{1内} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{dt}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{2外} + \vec{F}_{2内} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{dt}$$

....

$$\vec{F}_N = \vec{F}_{N外} + \vec{F}_{N内} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_N}{dt}$$



将以上各式相加，并考虑到 $\vec{F}_{内} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i内} = 0$ 得:

$$\vec{F}_{1外} + \vec{F}_{2外} + \cdots + \vec{F}_{N外} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N)$$

即 $$\vec{F}_{外}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

结论：质点系所受外力的矢量和等于质点系的总动量的时间变化率。

将 $\vec{p}=M\vec{v}_c$ 代入上式得

$$\vec{F}_{外}=\frac{\mathrm{d}\left(M\vec{v}_c\right)}{\mathrm{d}t}=M\frac{\mathrm{d}\vec{v}_c}{\mathrm{d}t}=M\vec{a}_c$$ —— 质心运动定理 $(v \ll c)$

质点系的整体的平动用质心的运动描述，

质心的运动等同于一个质点的运动，质点 $\begin{cases}\text{位于 } \vec{r}_c \\ \text{质量 } M \\ \text{受力 } \vec{F}_{外}\end{cases}$

质心的运动与系统内质点相互作用无关

小结：

质点 $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

质点系 $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = M\vec{v}_c$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{外}$$

$v << c$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{F}_{外} &= M\vec{a}_c\end{aligned}}$$

基本方法：用质心作为物体（质点系）的代表，描述质点系整体的平动。

刚体或柔体

第二节　运动定律的应用

一、惯性系和非惯性系

二、惯性系中的力学定律

三、非惯性系中的力学定律

一、惯性系和非惯性系

惯性系：惯性定律在其中成立的参考系，即其中不受外力作用的物体（自由粒子）永远保持静止或匀速直线运动的状态。

如何判断一个参考系是否惯性系？

理论上:分别考察受力和运动，检验其是否遵守惯性定律。

具体判断方法:

相对已知惯性系静止或匀速直线运动的参考系是惯性系；相对已知惯性系加速运动的参考系是非惯性系。

实际处理方法：选择对所研究问题适宜的近似惯性系。

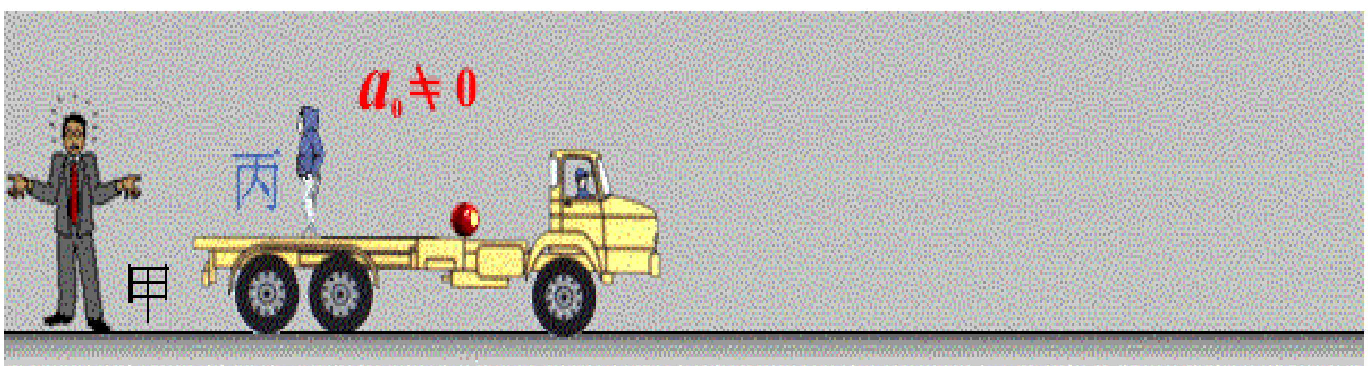
对于日常运动的研究和实验：地面可作为近似程度相当好的惯性系；相对地面静止或匀速直线运动的参考系是惯性系，而相对地面加速运动的参考系是非惯性系。

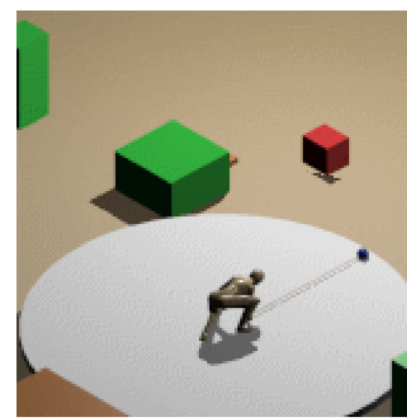
实际生活中存在大量非惯性系，分为两类：

加速平动参考系

转动参考系

其中牛顿运动定律不成立





二、惯性系中的力学定律

1. 求解问题的步骤

隔离物体——明确研究对象

具体分析——研究对象的运动情况和受力情况

选定坐标——参考系、坐标系、正方向

建立方程——分量式

例如：牛顿第二定律：

直角坐标系：

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = ma_x \\ F_y = \dfrac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = ma_y \\ F_z = \dfrac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = ma_z \end{cases}$$

自然坐标系：

$$\begin{cases} F_\tau = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma_\tau \\ F_n = m\dfrac{v^2}{R} = ma_n \end{cases}$$

求解方程，得出问题的结果。

2. 应用举例

例1： 一艘质量为 m 的潜水艇，全部浸没水中，并由静止开始下沉。设浮力为 F，水的阻力 $f=kAv$，式中 A 为潜水艇水平投影面积，k 为常数。求潜水艇下沉速度与时间的关系。

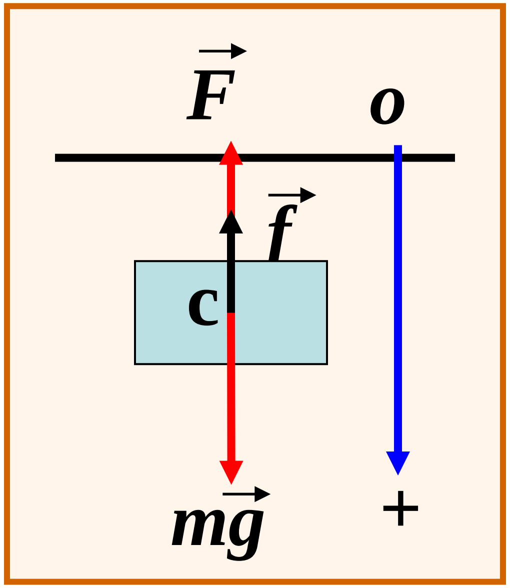
解： 以潜艇为研究对象，受力如图（哪些是恒力？哪些是变力？）

在地面系中建立如图坐标系

由牛顿第二定律：

$$mg-F-kAv=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

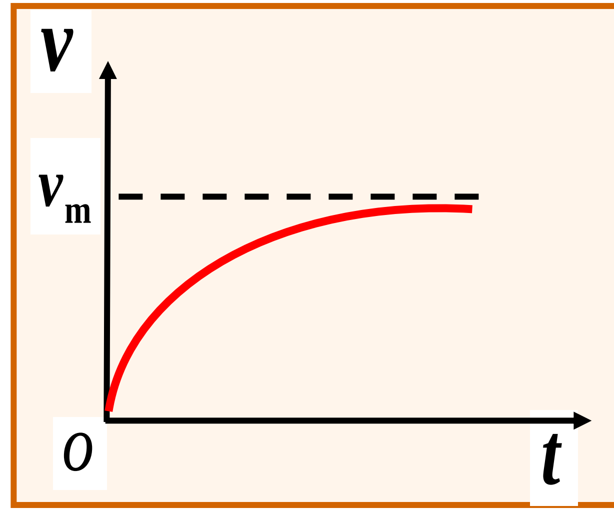
$$\int_0^v \frac{m\mathrm{d}v}{mg-F-kAv}=\int_0^t \mathrm{d}t$$



$$-\frac{m}{kA}\ln\frac{mg\text{-}F\text{-}kAv}{mg-F}=t$$

$$\frac{mg-F-kAv}{mg-F}=e^{-\frac{kA}{m}t}$$

$$v=\frac{mg-F}{kA}\left(1-e^{-\frac{kA}{m}t}\right)$$



讨论潜艇　　$t=0\quad v=0,\qquad t\uparrow\quad v\uparrow\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\downarrow$

运动情况：

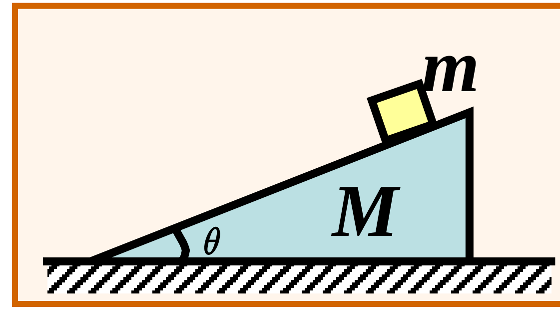
$t\to\infty\quad v=v_{\max}=\frac{mg-F}{kA}=$恒量 → 极限速率（收尾速率）

类似处理：跳伞运动员下落，有阻力的抛体运动，小球在粘滞流体中下落……

例2 (P_{66}例2)：已知 m， M， θ， $\mu=0$

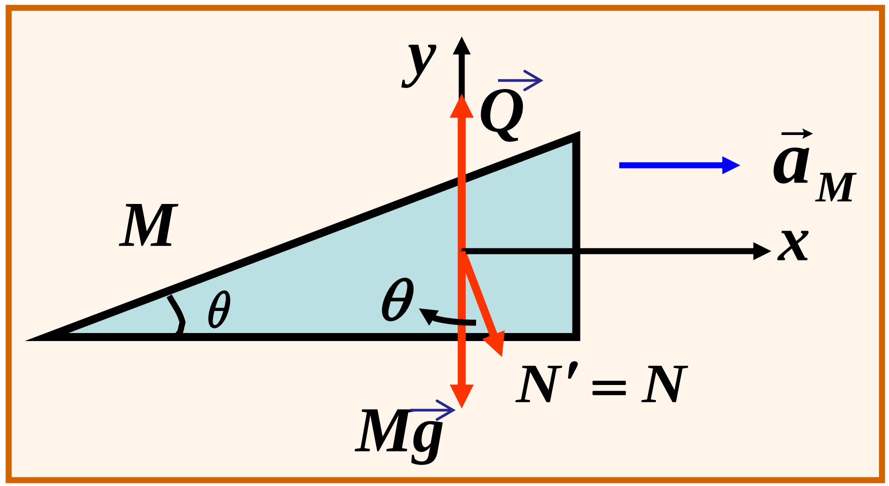
求：m对M的正压力N

m 对M的加速度 a'



解：以地面为参考系，列 M 的运动方程：

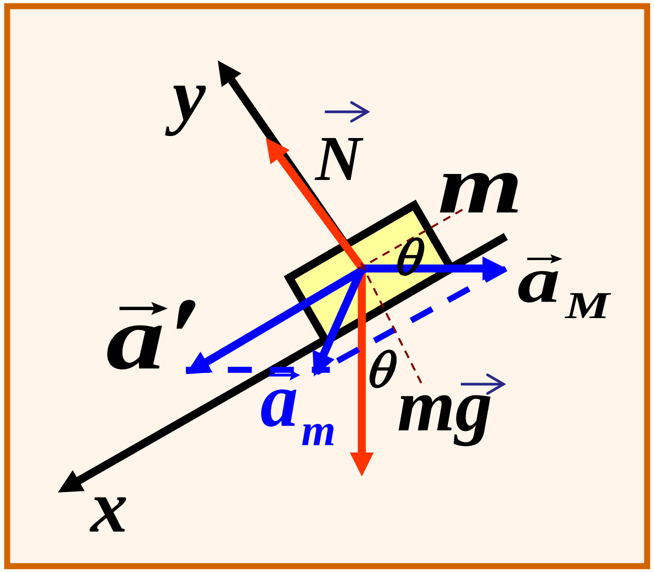
受力情况如图：



$$\begin{cases} F_{Mx} = N\sin\theta = Ma_M & (1) \\ F_{My} = Q - Mg - N\cos\theta = 0 & (2) \end{cases}$$

$a_M \neq 0$， M不是惯性系。

以地面为参考系，列 m 的运动方程：



$$\vec{a}_{m地} = \vec{a}_{mM} + \vec{a}_{M地}$$

$$\vec{a}_m = \vec{a}' + \vec{a}_M$$

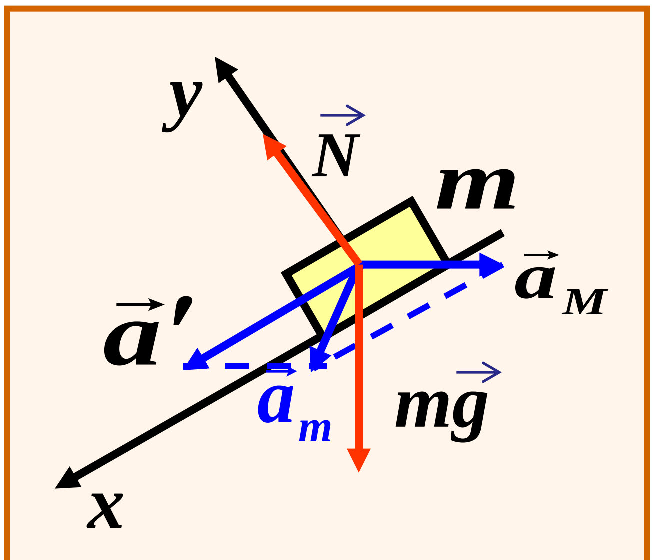
$$\begin{cases} a_{mx} = a' - a_M \cos\theta \\ -a_{my} = -a_M \sin\theta \end{cases}$$

以地面为参考系列m的方程：

$$\begin{cases} F_{mx} = mg\sin\theta = ma_{mx} = m\left(a' - a_M\cos\theta\right) & (3) \\ F_{my} = N - mg\cos\theta = -ma_{my} = -ma_M\sin\theta & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = N\sin\theta = Ma_M & (1) \\ F_x = mg\sin\theta = ma_{mx} = m\left(a' - a_M\cos\theta\right) & (3) \\ F_y = N - mg\cos\theta = -ma_{my} = -ma_M\sin\theta & (4) \end{cases}$$

由（1）、（3）、（4）解得:



$$N = \frac{Mmg\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$$

$$a_M = \frac{mg\cos\theta\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}$$

$$a' = \frac{(M+m)g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}$$

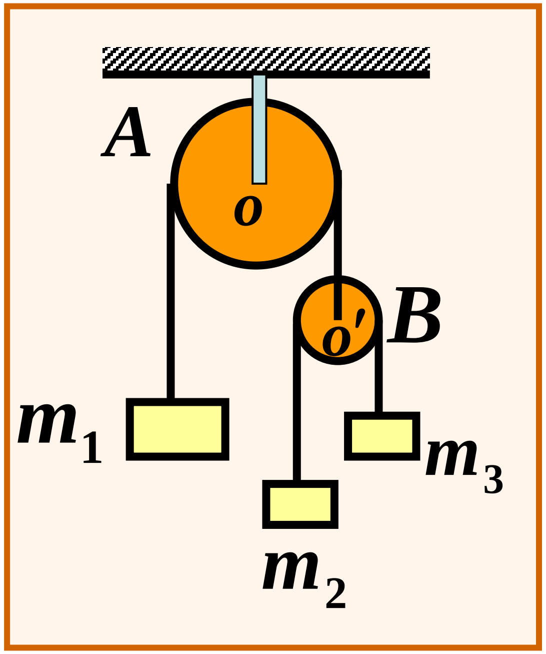
注意： 做题时先画受力图，初略判断加速度$\vec{a}$的方向。

讨论：* 涉及力、加速度，用牛顿第二定律。

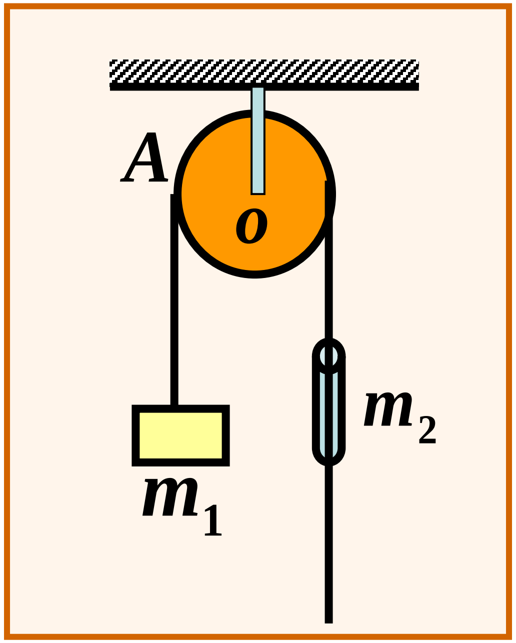
* 只能对惯性系建立牛顿运动方程。

* 会解决类似的关联体问题。

例如：



B不是惯性系



绳不是惯性系

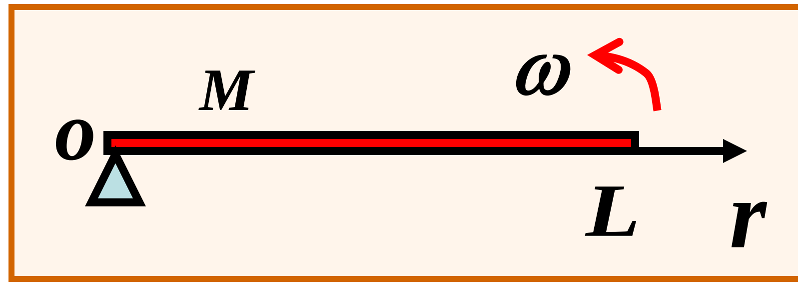
例3（P_{80} 4.5）：

已知：质量均匀的绳在水平面内转动；　M，L，ω

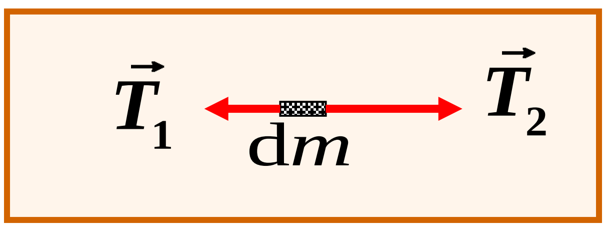
忽略重力

求：张力 $T(r)$

绳内部相邻两部分相互作用力



思考：1. 绳上张力是否处处相等？



$$T_2 - T_1 = \mathrm{d}m\cdot(-a)$$

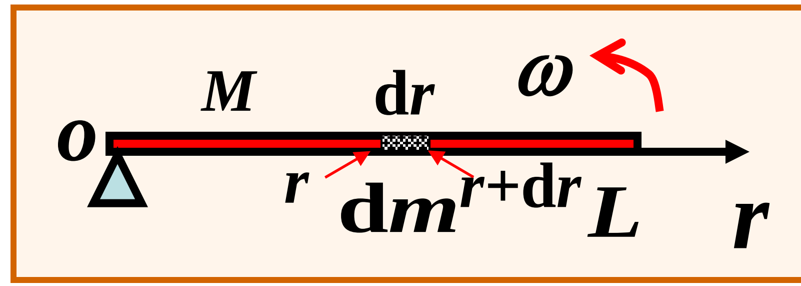
$T_2 = T_1$条件$\begin{cases} \mathrm{d}m = 0 & \text{不计绳质量} \\ a = 0 & \text{绳静止或匀速直线运动} \end{cases}$

均不满足,因此：$T_2 \neq T_1$

思考：2. 如何求系统内力？

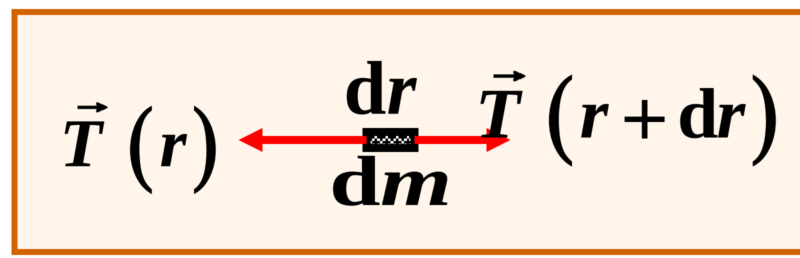
设法将 内力 ……暴露…… 外力

解：在绳上取微元dm



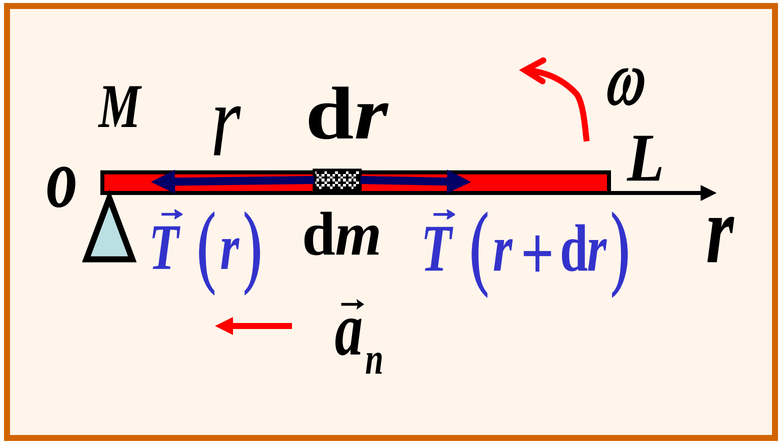
$$\mathrm{d}m = \frac{M}{L}\cdot \mathrm{d}r$$

受力分析：



水平面内法向运动方程：

$$T(r+\mathrm{d}r)-T(r) = -\mathrm{d}m\cdot a_n$$



$$T(r+\mathrm{d}r)-T(r)=-\mathrm{d}m\cdot a_n$$

$$\mathrm{d}T(r)=\frac{M\cdot\mathrm{d}r}{L}\cdot\left(-\omega^2 r\right)$$

如何确定积分限？

边界条件：$T=T(r)\begin{cases} r=L & T=T_{\min}=0 \\ r=0 & T=T_{\max} \end{cases}$

$$\int_{T(r)}^{0}\mathrm{d}T(r)=\int_{r}^{L}\frac{-M\omega^2 r\mathrm{d}r}{L} \longrightarrow T(r)=\frac{M\omega^2\left(L^2-r^2\right)}{2L}$$

小结

例题1:变力问题

例题2:关联体问题，系统内物体有相对运动。

例题3:求内力问题

注意：牛顿运动定律只对惯性系成立。

三、非惯性系中的力学定律（自学）