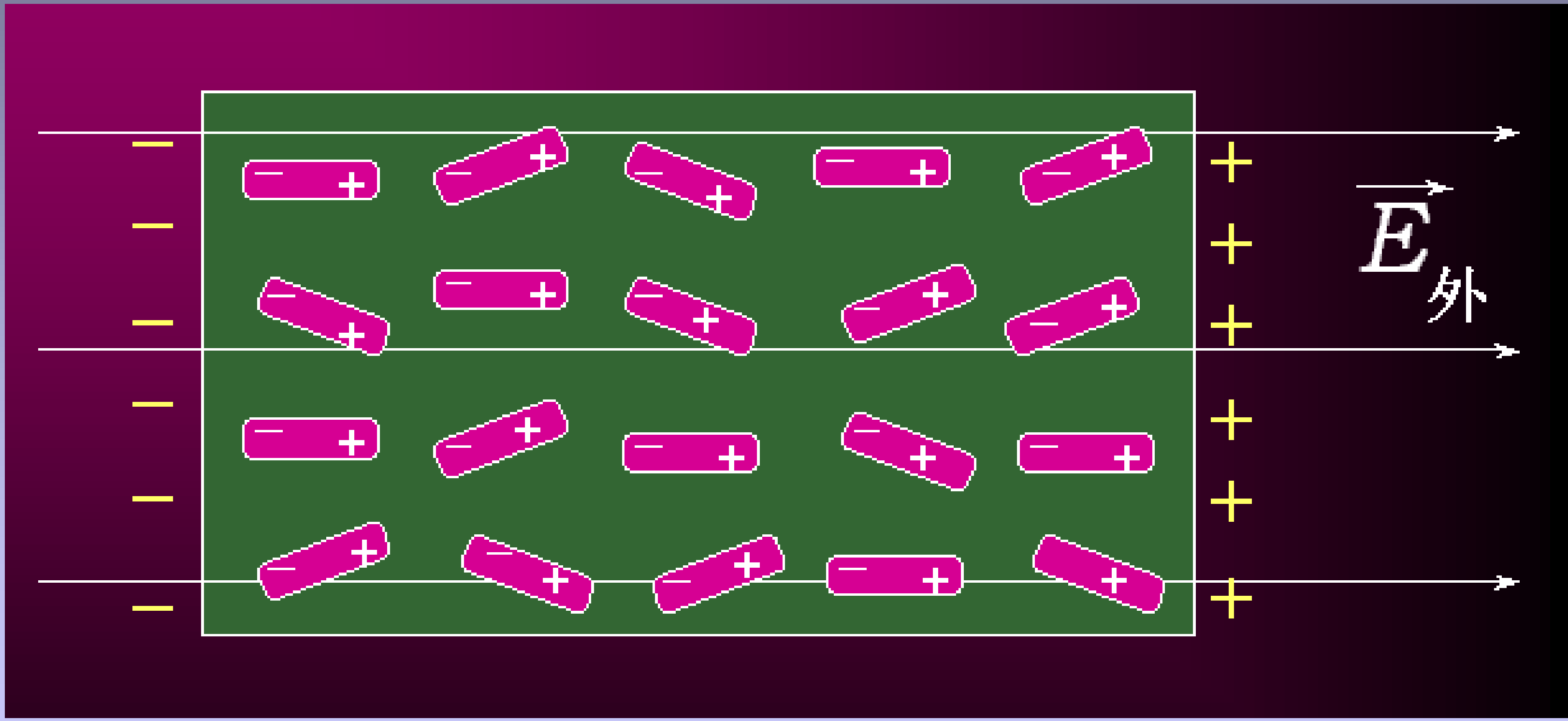
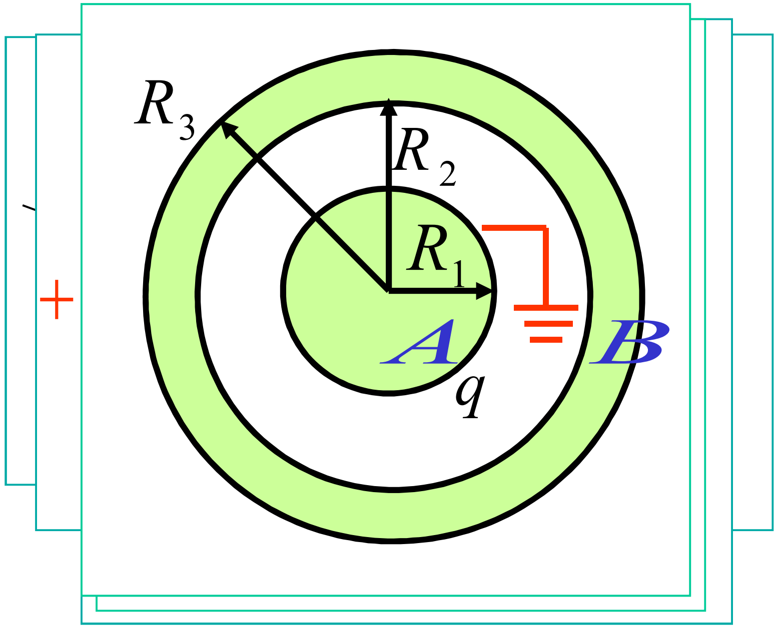
同学们好！



复习：静电场中的导体

金属导体与电场的相互作用 → 静电感应 → 静电平衡



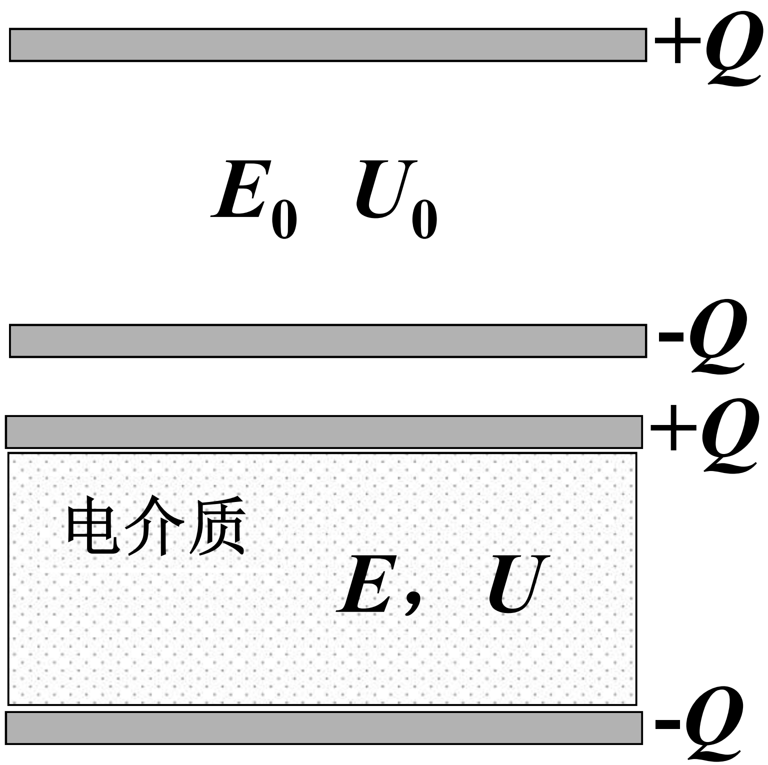
1. 导体内无净电荷，电荷只分布于导体表面。

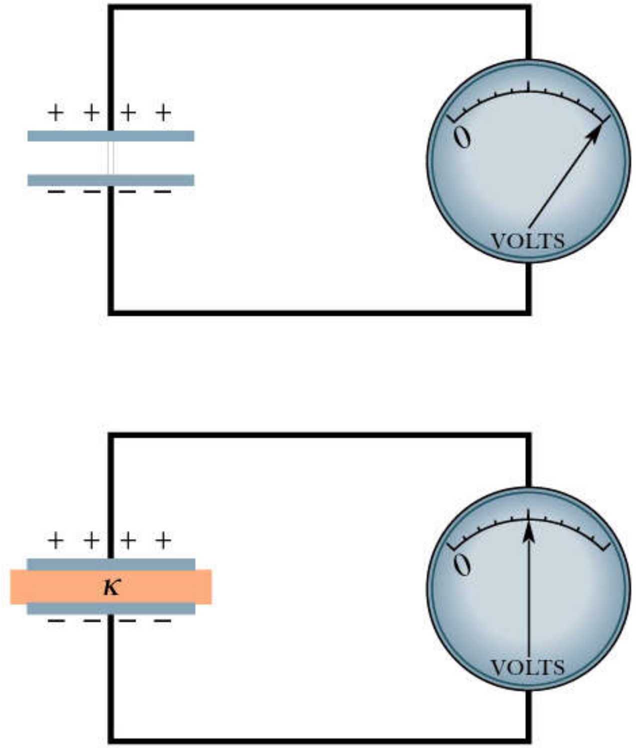
2. 静电平衡时导体表面电荷面密度与表面紧邻处场强成正比.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

求出感应电荷的分布按照我们前面的方法就可以求出空间任间一点的电场强度电势。

§9.7　静电场中的电介质





q = a constant

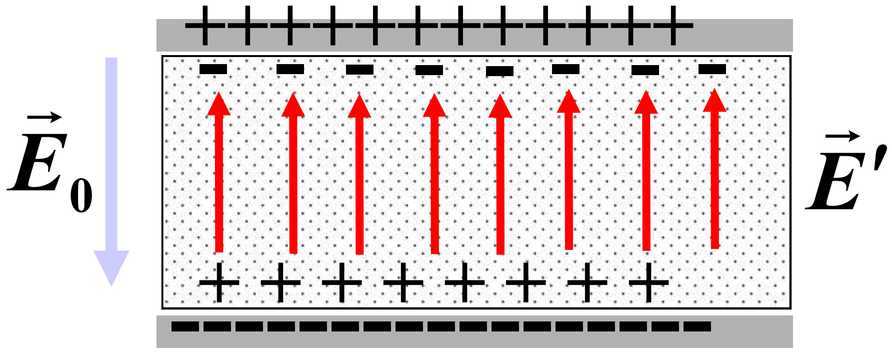
实验结果

电场被削弱：$E=\dfrac{E_0}{\varepsilon_r}$，$U=\dfrac{U_0}{\varepsilon_r}$

$\varepsilon_r>1$—介质的相对电容率

如何解释上述实验结果？

电介质情况：



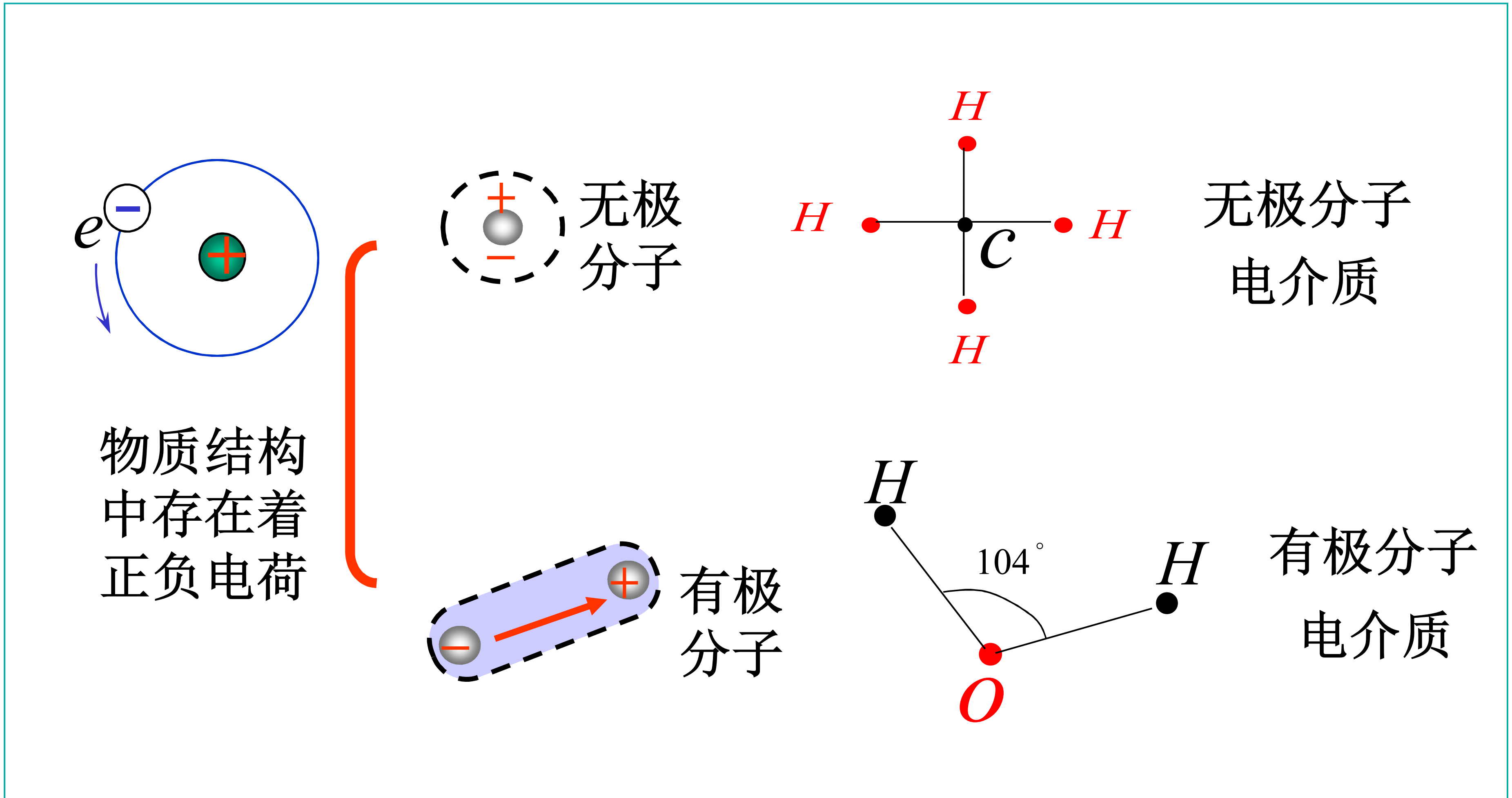
端面出现电荷—“束缚电荷”（**bound charge**）或“极化电荷”。

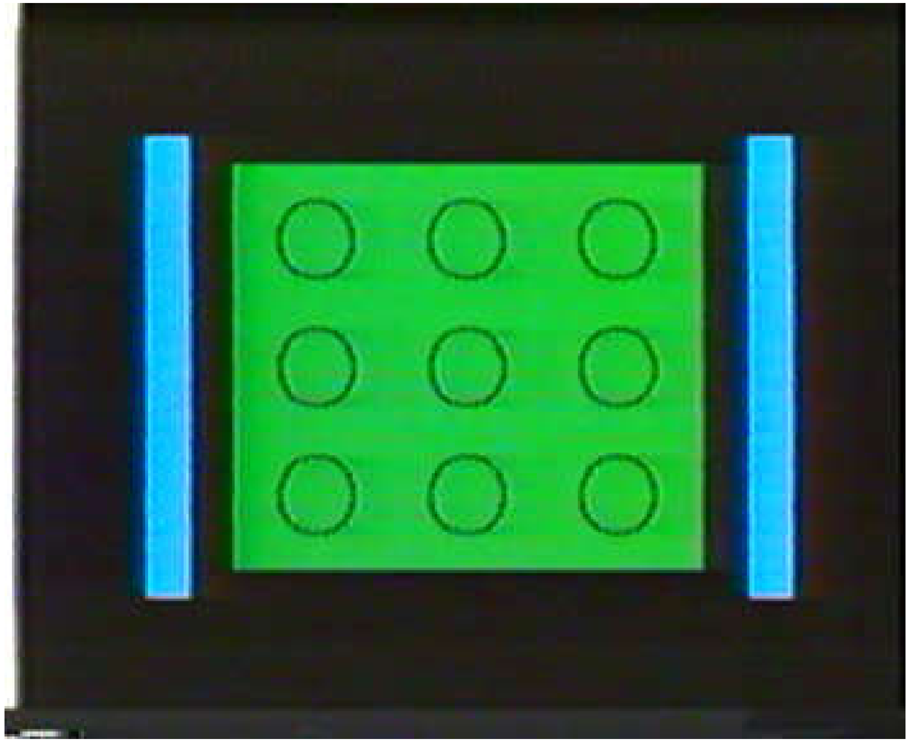
束缚电荷的电场E'不能全部抵消E_0，只能削弱总场E.

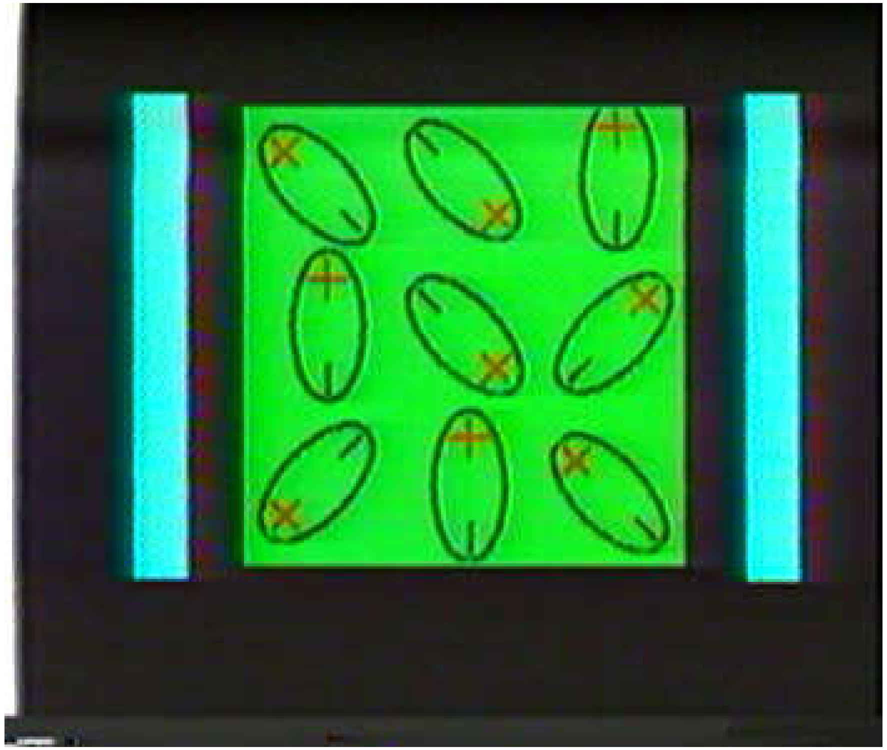
机制与导体有何不同？

§ 9.7　静电场中的电介质

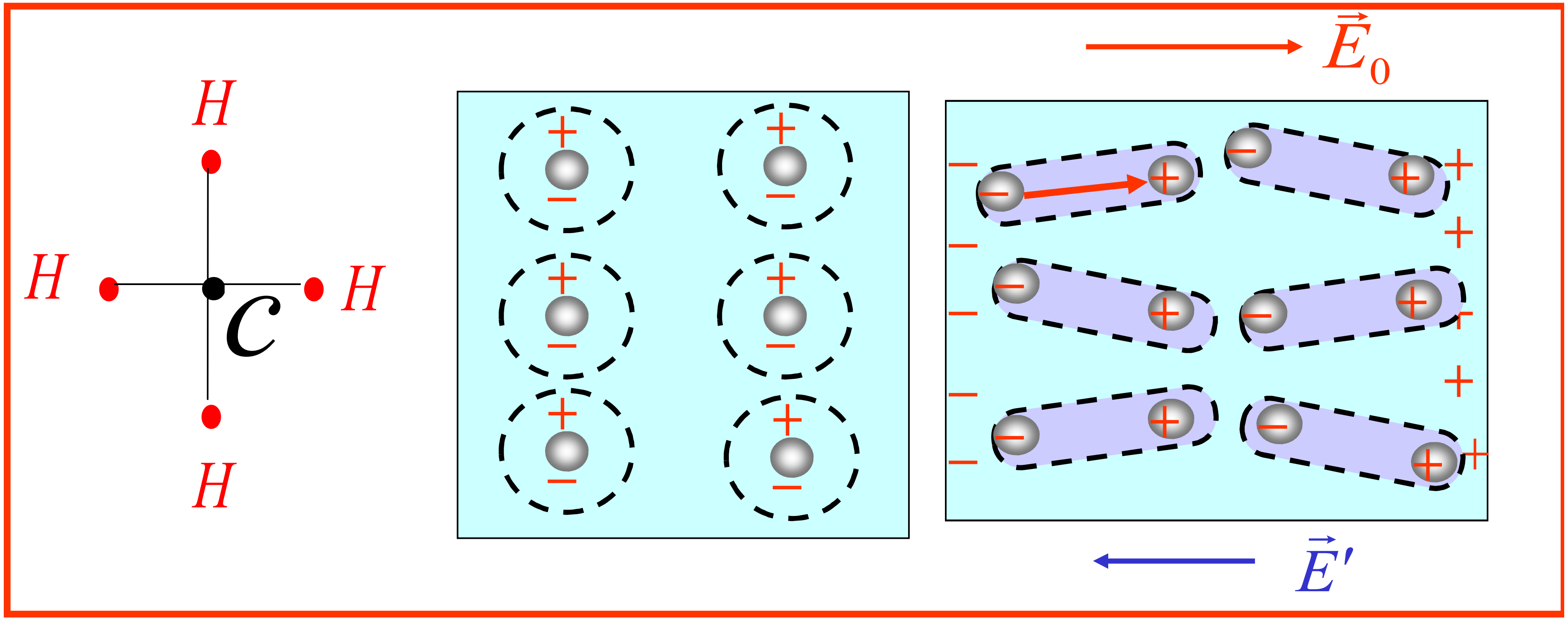
一.　电介质（有极分子，无极分子）的极化及其描述







1. 极化现象



无极分子

电介质

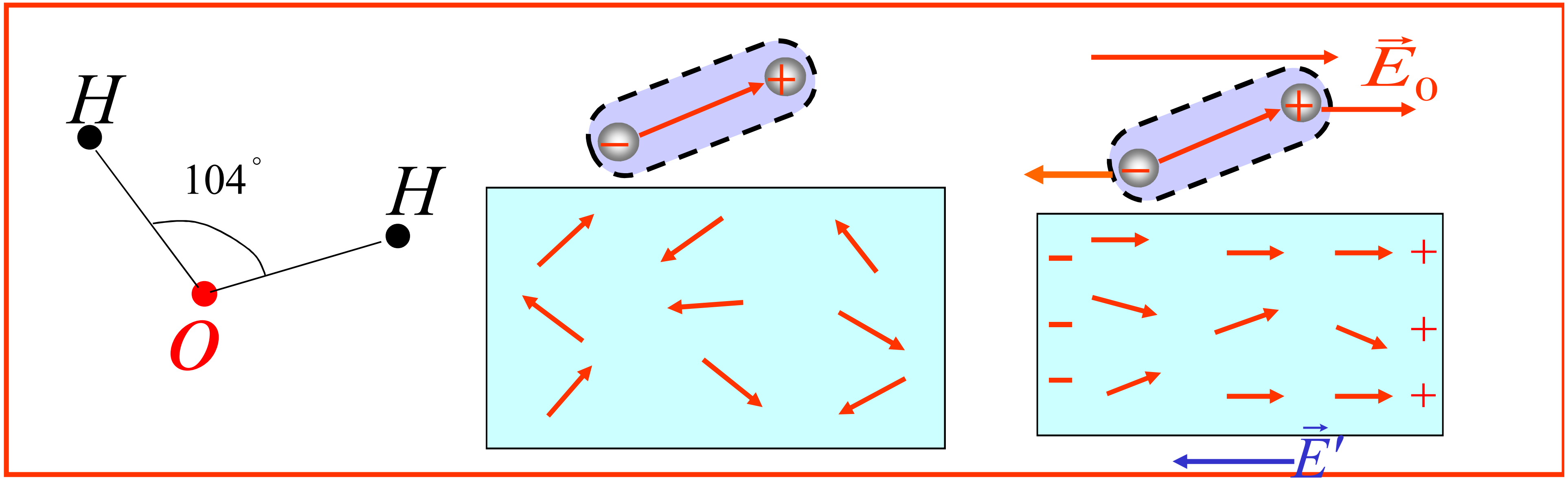
无外场 $\vec{p}_i = 0$

$$\sum_i \vec{p}_i = 0$$

外场中(位移极化)

$$\vec{p}_i \neq 0 \quad \sum_i \vec{p}_i \neq 0$$

出现束缚电荷和附加电场



有极分子电介质

无外场 $\vec{p}_i \neq 0$

$$\sum_i \vec{p}_i = 0$$

外场中(转向极化)

$$\vec{p}_i \neq 0 \quad \sum_i \vec{p}_i \neq 0$$

出现束缚电荷和附加电场

位移极化和转向极化微观机制不同，宏观效果相同。

统一描述 $\begin{cases} \sum_i \vec{p}_i \neq 0 \\ \text{出现束缚电荷} \end{cases}$

2. 金属导体和电介质比较

	金属导体	电介质（绝缘体）
特征	有大量的 自由电子	基本无自由电子，正负电荷 只能在分子范围内相对运动
模型	“电子气”	电偶极子
与电场的 相互作用	静电感应	无极分子电介质：　位移极化 有极分子电介质：　转向极化
宏观 效果	静电平衡 导体内 $\vec{E}=0,\rho=0$ 导体表面 $\vec{E}\perp$表面 感应电荷 $\sigma=\varepsilon_0 E$	内部：分子偶极矩矢量和 不为零　$\sum \vec{p}_i \neq 0$ 表面：出现束缚电荷 （极化电荷）

二. 电介质极化状态的描述

1. 从分子偶极矩角度

单位体积内分子偶极矩矢量和 —— 极化强度。

$$\vec{P}=\frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$$

设 分子数密度：n

每个分子的偶极矩：$q_1\vec{L}$

$$\left.\begin{array}{l} n \\ q_1\vec{L} \end{array}\right\} \vec{P}=nq_1\vec{L}$$

实验规律：

$$\underbrace{\vec{P}=\chi}_{\text{介质极化率}}\varepsilon_0\vec{E}$$

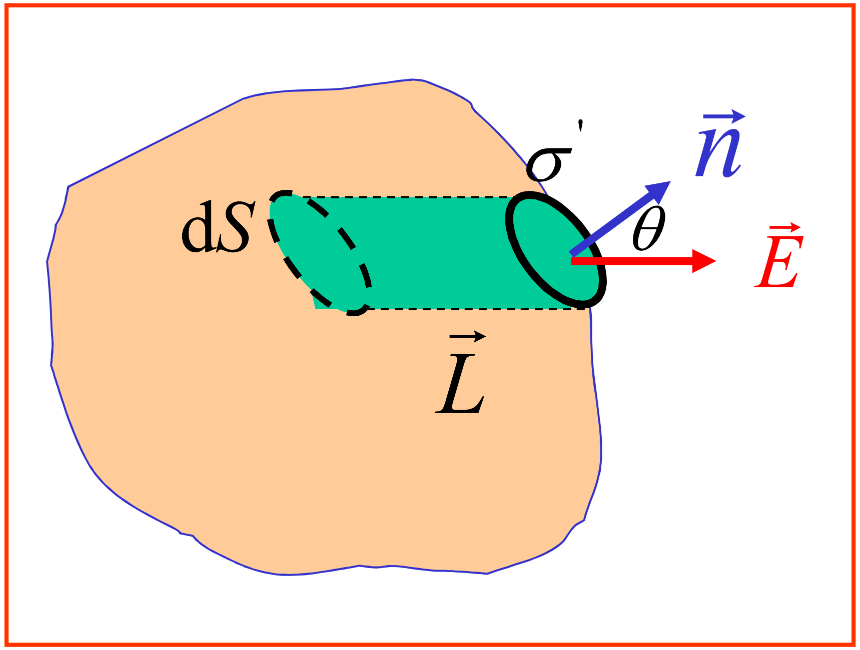
χ：介质极化率

$\vec{E}$：总场 $\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$

极化强度：　$\vec{P} = nq_1\vec{L}$　　n：分子数密度

2. 从束缚电荷角度

作如图斜圆柱



$$\mathrm{d}q' = nq_1\mathrm{d}V$$

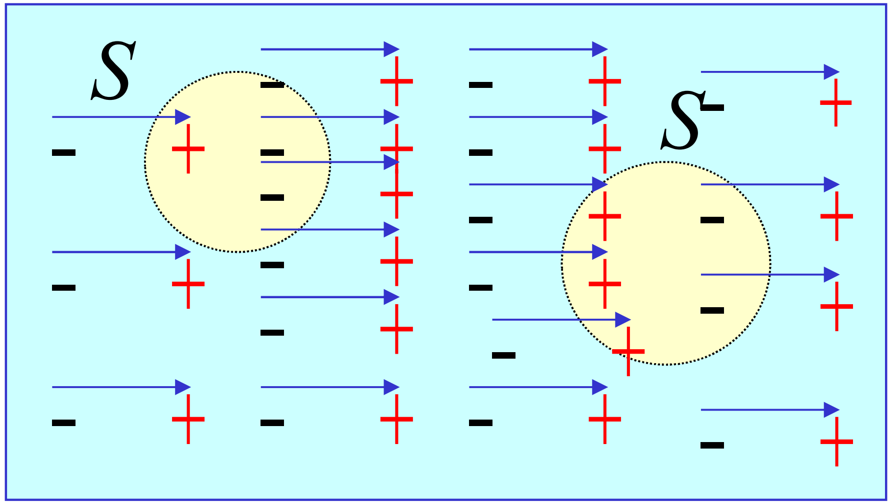
$$= nq_1\mathrm{d}SL\cos\theta$$

$$\sigma' = \frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}S} = P\cos\theta = P_n$$

$$\boxed{\sigma' = P_n}$$

极化面电荷密度等于极化强度的外法线分量

介质非均匀极化时，出现极化体电荷



由 $\sigma' = \dfrac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}S} = P\cos\theta = P_n$

$$\mathrm{d}q' = \sigma'\mathrm{d}S$$

$$= P\cos\theta\,\mathrm{d}S = \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_s \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \sum \mathrm{d}q' = -\sum q'_{内}$$

$$\boxed{\oint_s \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\sum_s q'_{内}}$$

极化强度通过某封闭曲面的通量等于曲面内极化电荷代数和的负值

三. 电介质中的高斯定理

外电场有电介质存在时，空间电荷分别包含自由电荷，高斯定理可写为：

$$\oint_{(S)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum\limits_{S内}(q_0+q')}{\varepsilon_0} \quad 即 \quad \oint_{(S)} \varepsilon_0 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{S内}(q_0+q')$$

结合 $\oint_s \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\sum_s q'_{内}$

得 $$\oint_{(S)} \underline{(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{S内} q_0$$

令：$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ 电位移

可得电介质中的高斯定理：

$$\boxed{\oint_{(S)} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{S内} q_0}$$

穿过电场中任一封闭曲面的电位移通量等于封闭曲面所包围的自由电荷的代数和

讨论

- 电位移矢量 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ 与 q_0, q' 均有关
- $\oint_A \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 穿过闭合曲面的 $\boldsymbol{D}$ 通量仅与 $\sum_{S内} q_0$ 有关

● 各向同性、线性介质 **D**、**E**、**P** 的关系

各向同性电介质：

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$$ χ 为常数

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \chi\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E}$$

令 $1+\chi = \varepsilon_r$ 介质的相对电容率

得 $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\,\vec{E}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}$$

式中 ε_0：真空电容率

$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$：介质电容率

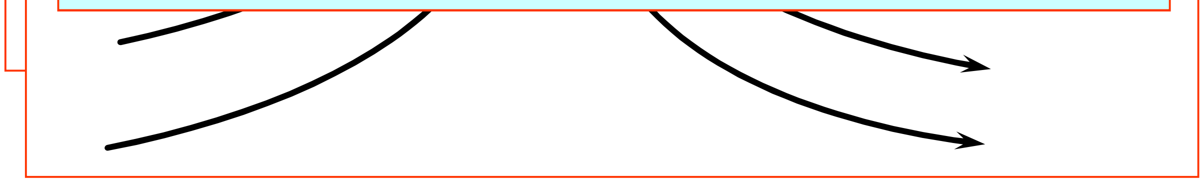
四. 电介质中的电场

1. 总场= 外场+ 极化电荷附加电场： $\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$

$$\vec{E}_0 \rightarrow \vec{P} \rightarrow q'(\sigma',\rho')$$

$$\uparrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\vec{E} \leftarrow \vec{E}_0+\vec{E}'$$



如何求解介质中电场?

本课程只要求特殊情况 $\begin{cases} \text{各向同性电介质} \\ q_0, q' \text{分布具有某些对称性} \end{cases}$

才能选取到恰当高斯面使 $\oint_s \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 积分能求出.

步骤: 对称性分析，选高斯面.

$$\oint_s \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{(S内)} q_0 \rightarrow \vec{D}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \rightarrow \vec{E}$$

注意: q_0的对称性 —— 球对称、轴对称、面对称.

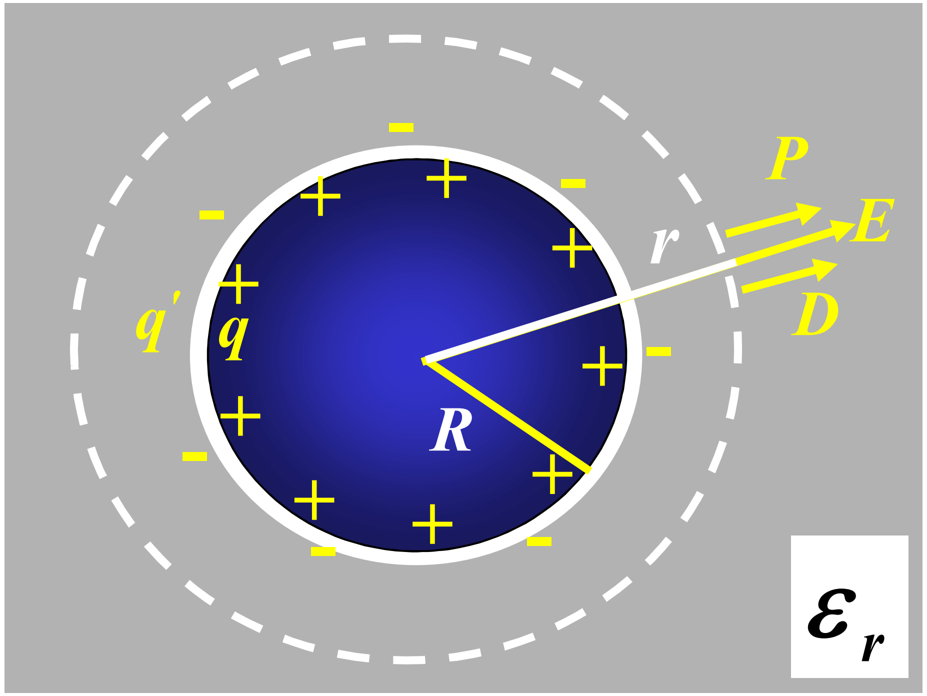
【例1】一带正电的金属球浸在油中。求球外的电场分布和贴近金属球表面的油面上的束缚电荷。

解： D 的高斯定理

$$D\cdot 4\pi r^2 = q$$

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{r}_0$$



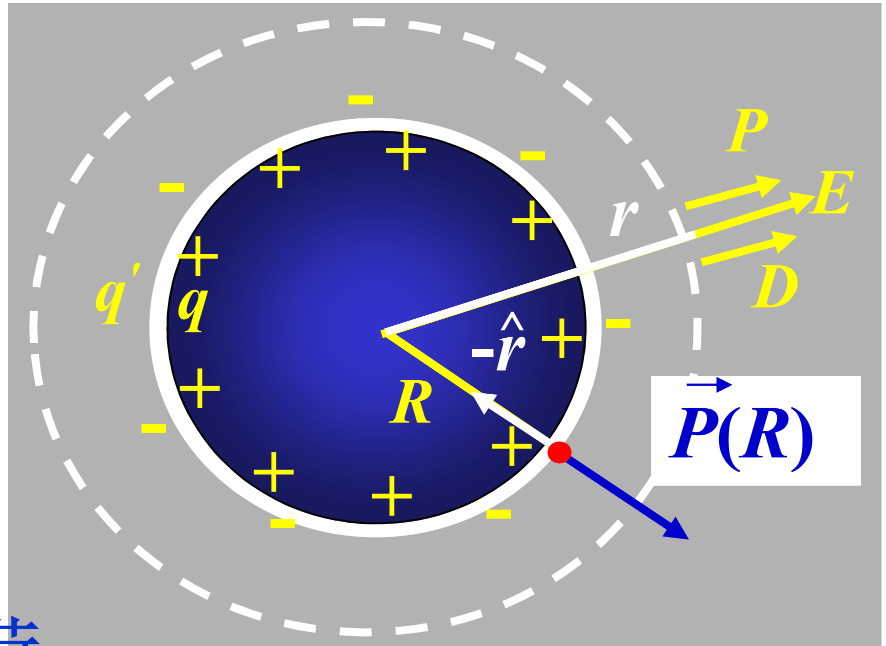
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} < E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ 为什么？

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$$

$$= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{r}_0$$

$$= (1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\frac{q}{4\pi r^2}\vec{r}_0$$



球表面的油面上的束缚电荷：

$$\sigma' = \vec{P}(R)\cdot(-\vec{r}_0) = -(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\frac{q}{4\pi R^2}$$

$$\boldsymbol{q' = 4\pi R^2 \cdot \sigma' = -(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})q}$$

$\boldsymbol{q'}$总与 $\boldsymbol{q}$ 反号，数值小于 $\boldsymbol{q}$ 。

【例2】教材P222 例2 平行板电容器D、E、U

▲ 有电介质存在时的电场 求解思路：

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{(S内)} q_0 \rightarrow \vec{D} \xrightarrow{\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} \vec{E} \xrightarrow{U=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}} U$$

$$\vec{E} \xrightarrow{\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}} \vec{P} \xrightarrow{\oint \vec{P}\cdot d\vec{S} = -\sum q'_{内}} q'$$

$$\vec{P} \xrightarrow{\sigma' = P_n} \sigma' \rightarrow q'$$

§ 9.7　静电场中的电介质小结

一、电介质的极化现象

$$\left.\begin{array}{l}\text{无极分子}\rightarrow\text{位移极化}\\ \text{有极分子}\rightarrow\text{转向极化}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_i \vec{p}_i \neq 0\\ \text{出现束缚电荷}\end{array}\right.$$

二、极化强度

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\sigma' = P_n\\ \oint_s \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\sum\limits_s q'_{\text{内}}\end{array}\right.$$

三、电介质中高斯定理

$$\oint_s \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{(S\text{内})} q_0$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

§ 9.8　电容器　电容

一、孤立导体的电容

1.孤立导体：导体周围无其它带电体或导体。

2.孤立导体电容　$Q \propto U$

定义：

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

注意：导体电容只与导体的大小、形状有关，与电量、电势无关。

单位：法拉，F　　1微法（μF）=10^{-6}F

1皮法（pF）= 10^{-6} μ F　= 10^{-12} F

例1：如果地球当成电容，其电容为多大？（地球半径为 6.4×10^{6} m）

解：

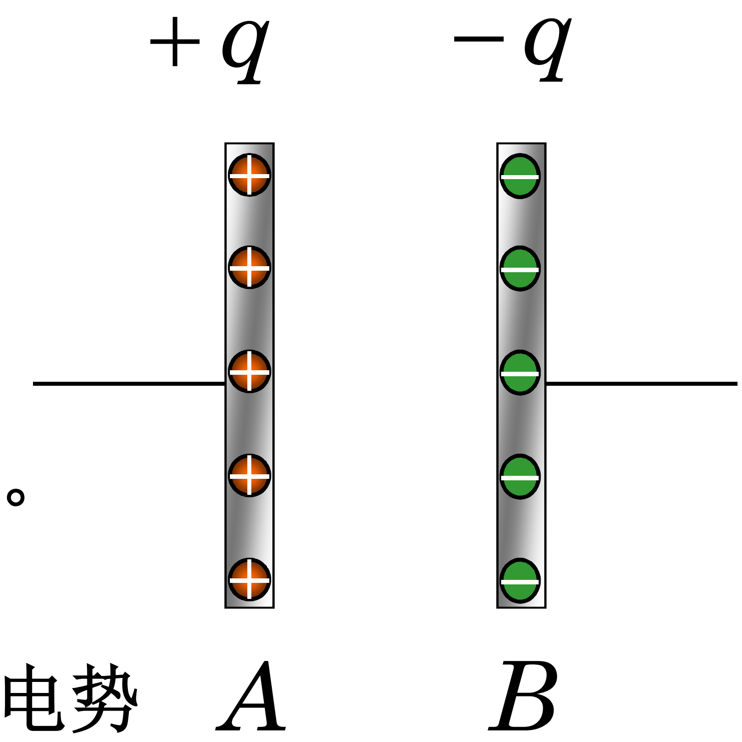
$$C=\frac{Q}{U}=\frac{q}{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}}=4\pi\varepsilon_0 R$$

$$=4\pi\times8.85\times10^{-12}\times6.4\times10^{6}\approx\frac{1}{1400}(\mathrm{F})$$

二、电容器的电容

孤立导体的电容很小，用它作电容器不适合。用两个导体组成的电容器可实现较大的电容。

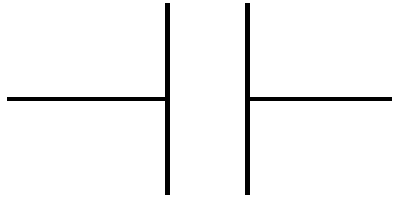
$$\boxed{C = \frac{q}{U_{AB}}}$$



q为一个极板带电量的绝对值。

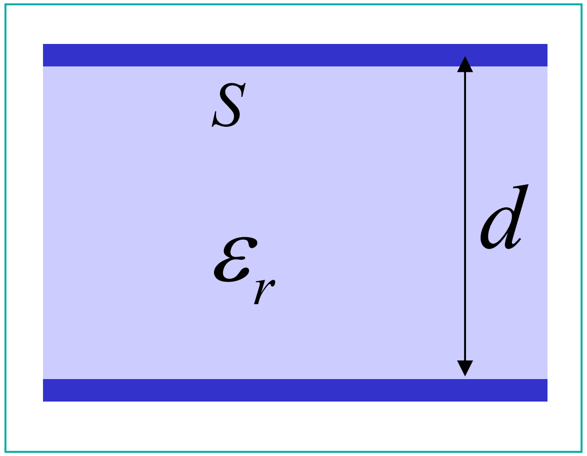
C的数值等于电容器两极板间的电势差为一个单位时电容器所带的电荷量。

符号：



电容器的电容只与电容器的大小、形状、电介质有关，而与电量、电压无关。

［例1］推求平行板电容器的电容



$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

$$\Delta U=Ed=\frac{Qd}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

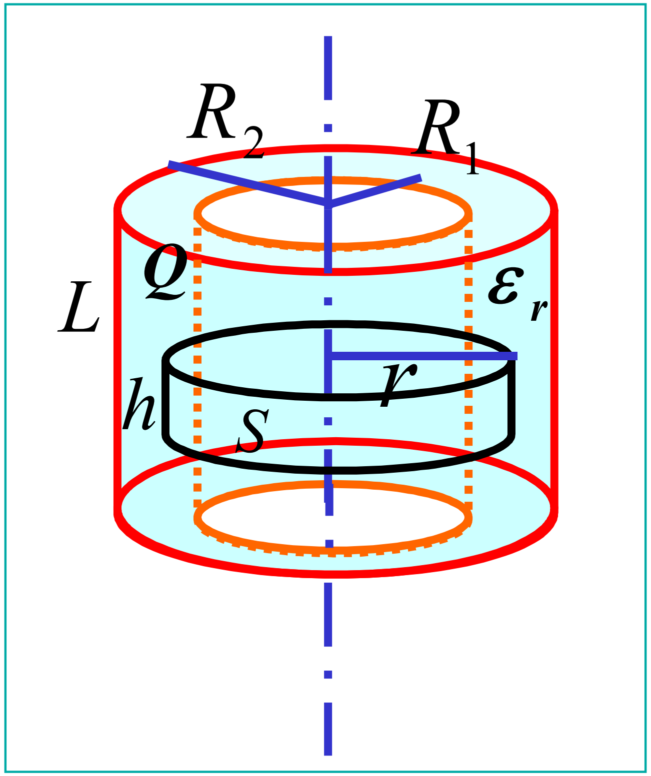
$$\boxed{C=\frac{Q}{\Delta U}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}}$$

➢ 思考：
C与什么相关？

$$\text{提高}C\left\{\begin{array}{l}\varepsilon_r\uparrow\\ S\uparrow\\ d\downarrow\end{array}\right.$$

0

[例2] 推求圆柱型电容器，平行板电容器，球形电容器公式，并总结求电容器电容的一般方法。



已知：L , R_1 , R_2 , ε_r . 求：C

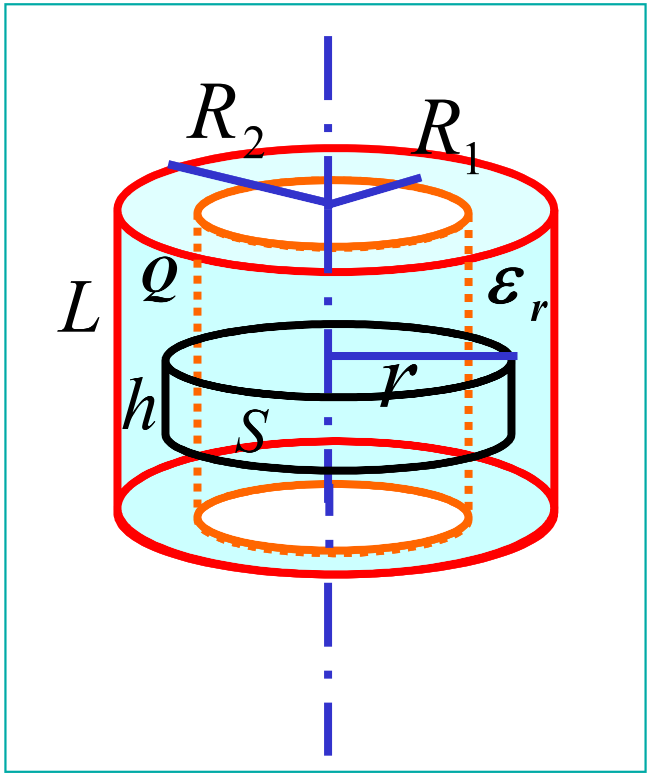
解： 设极板带电量 Q

作半径 r （$R_1 < r < R_2$），高 h 的同轴圆柱面为高斯面.

$$\oint_s \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = D \cdot 2\pi r h = \frac{Q}{L} h$$

得：

$$D = \frac{Q}{2\pi L r} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L r}$$



电容器两极板间电势差：

$$\Delta U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

由电容定义：

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}}$$

▲ 总结：求电容器电容的一般方法

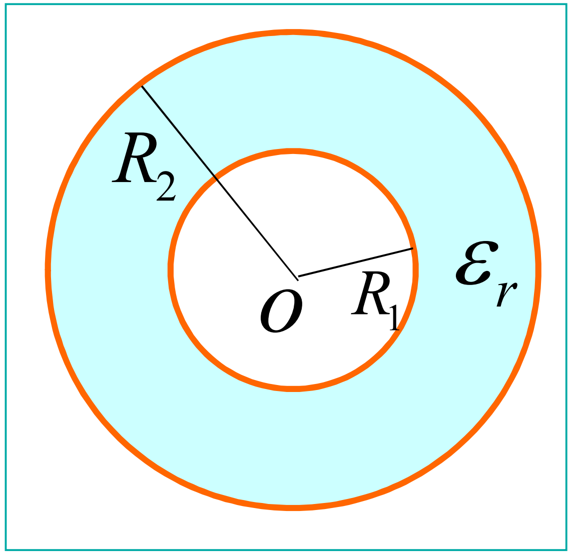
1) 设极板带电 Q

2) 选高斯面，求 $D = ?$ $E = ?$

3) 求电容器两极板间电势差 $\Delta U = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

4) 由电容定义 $C = \dfrac{Q}{\Delta U}$

自学：



球形电容器

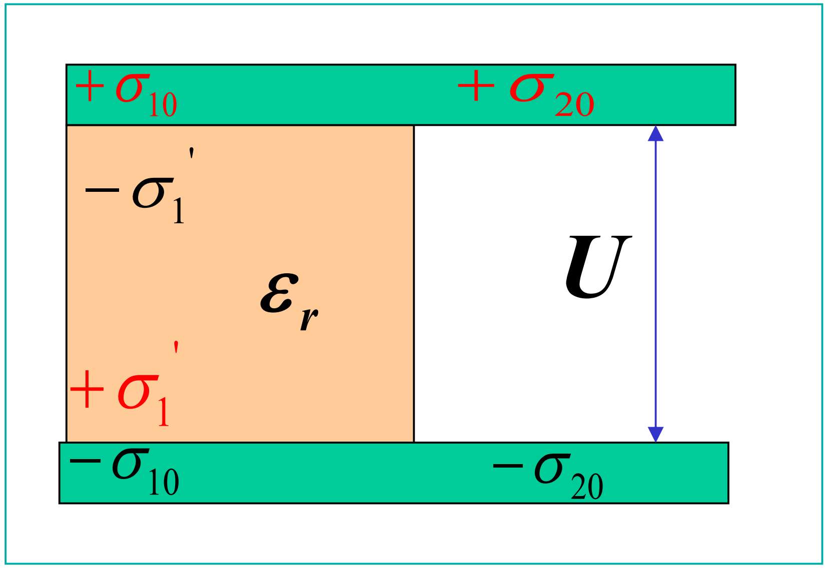
$$\boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

例：已知：平行板电容器 $\pm\sigma_0$ ， $U_0 = 300\,\text{V}$

充一半电介质： $\varepsilon_r = 5$

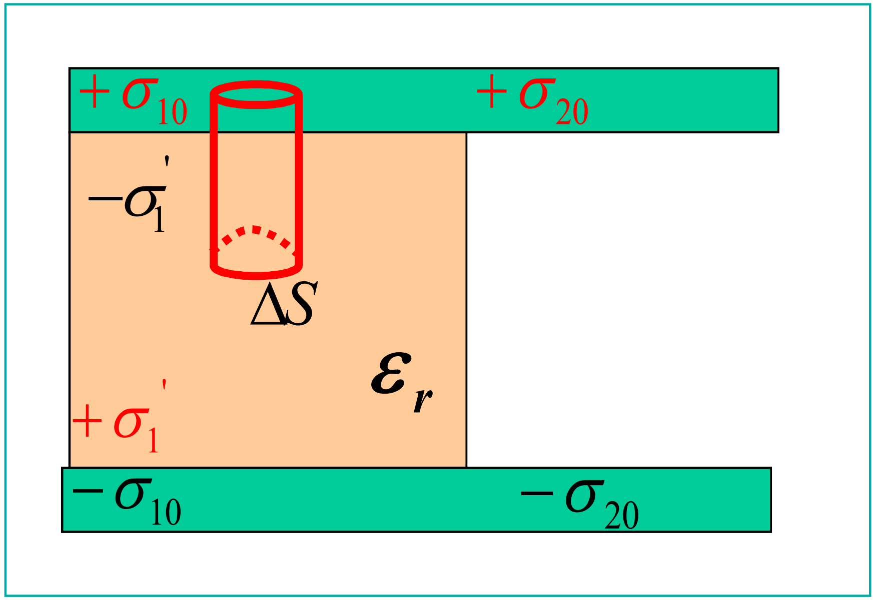
求： D_1 ， E_1 ， σ_{10} ， σ_1'

D_2 ， E_2 ， σ_{20} ， U



解：介质分界面 ⊥等势面，
未破坏各部分的面对称性，

选底面与带电平板平行的圆柱面为高斯面。



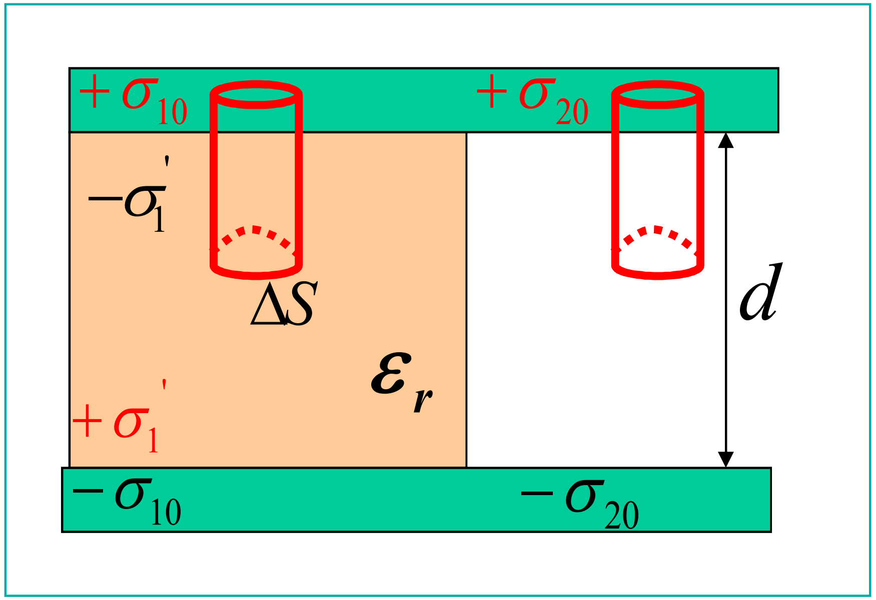
$$\sum_{(S内)} q_0 = \sigma_{10} \cdot \Delta S$$

$$\oint_s \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{上} \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{下} \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \oint_{侧} \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = D_1 \Delta S$$

导体内$E = 0$ $\cos\theta = 0$

由高斯定理 $\oint_s \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{(S内)} q_0 \rightarrow D_1 \Delta S = \sigma_{10} \Delta S$

$$\therefore \quad D_1 = \sigma_{10} \qquad E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$



$$D_1=\sigma_{10}\qquad E_1=\frac{D_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

同理：

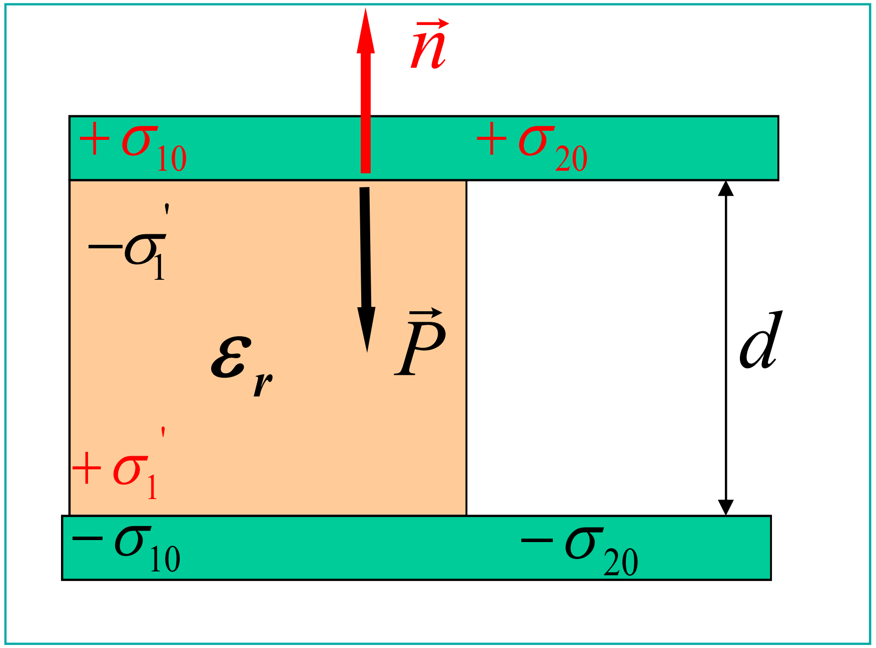
$$D_2=\sigma_{20}\qquad E_2=\frac{D_2}{\varepsilon_0}$$

电量不变： $$\sigma_{10}\cdot\frac{S}{2}+\sigma_{20}\cdot\frac{S}{2}=\sigma_0\cdot S$$

又： $$E_1 d=E_2 d=U$$

解得： $$\sigma_{10}=D_1=\frac{5}{3}\sigma_0\qquad E_1=E_2=\frac{1}{3\varepsilon_0}\sigma_0$$

$$\sigma_{20}=D_2=\frac{1}{3}\sigma_0$$



$$U_0 = E_0 d = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} d = 300\mathrm{V}$$

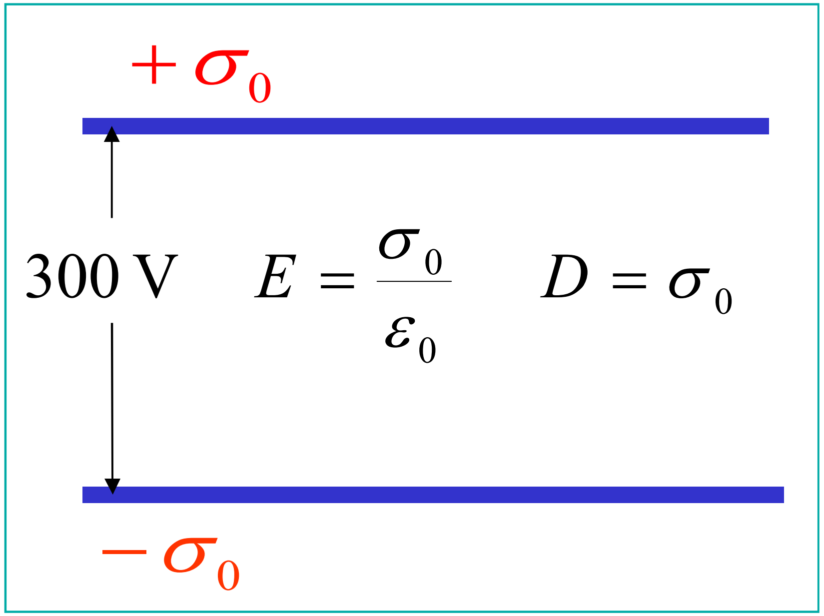
$$U = E_1 d = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} d = \frac{U_0}{3} = 100\mathrm{V}$$

$$\sigma_1' = P_{1n} = P_1 \cos\pi = -P_1 = -\chi\varepsilon_0 E_1$$

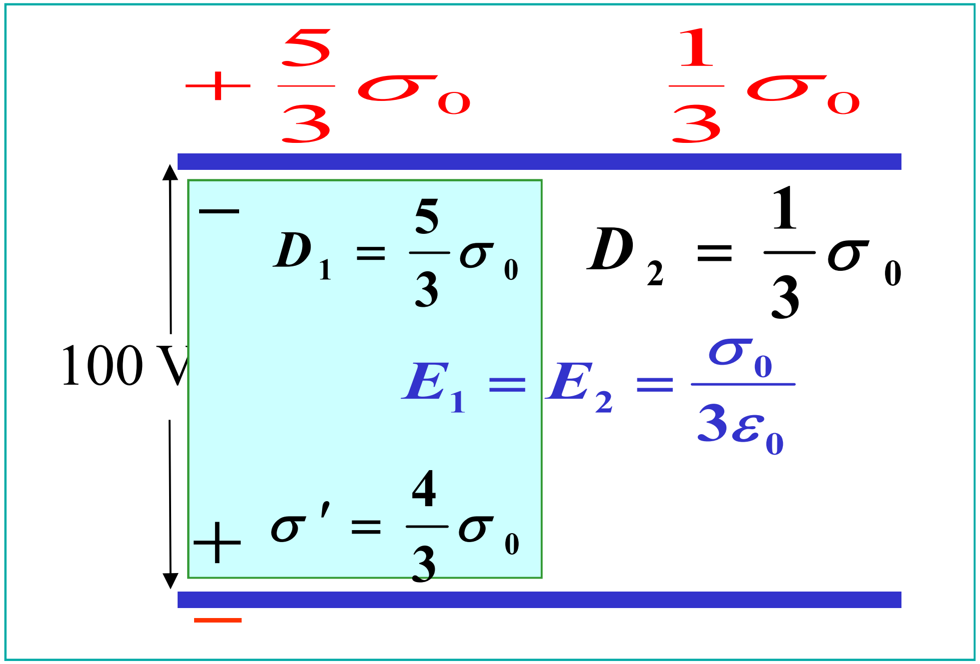
$$= -(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \cdot \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} = -\frac{4}{3}\sigma_0$$

比较：

充介质前



$+\sigma_0$
300 V
$E=\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$
$D=\sigma_0$
$-\sigma_0$

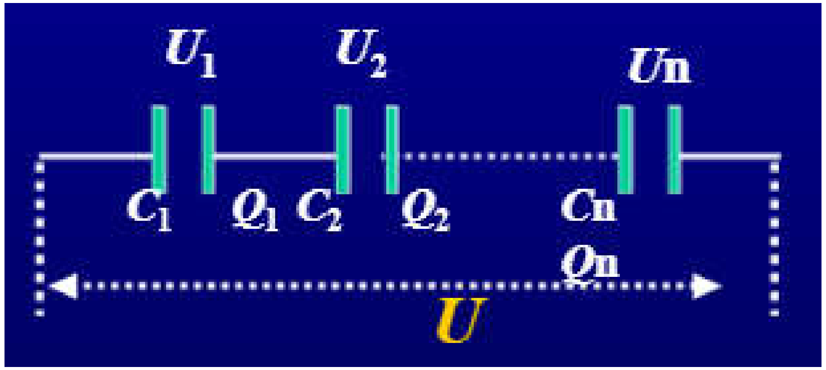


$+\dfrac{5}{3}\sigma_0$
$\dfrac{1}{3}\sigma_0$
−
$D_1=\dfrac{5}{3}\sigma_0$
$D_2=\dfrac{1}{3}\sigma_0$
100 V
$E_1=E_2=\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}$
+
$\sigma'=\dfrac{4}{3}\sigma_0$
−

充介质后

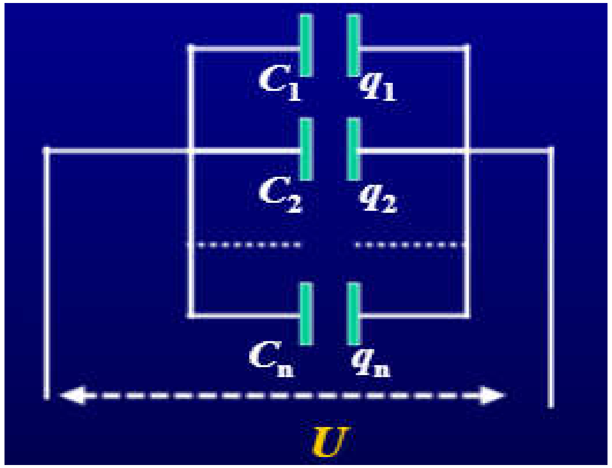
三. 电容器的串并联

电容器的主要性能指标：电容值和耐压值



$$\left.\begin{aligned} Q &= Q_i \\ U &= \sum U_i \\ C &= Q/U \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{C_{串}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

电容值减小，U增大，但U_i并未增大，不常用。



$$\left.\begin{aligned} U &= U_i \\ Q &= \sum Q_i \\ C &= Q/U \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_{并} = \sum_i C_i$$

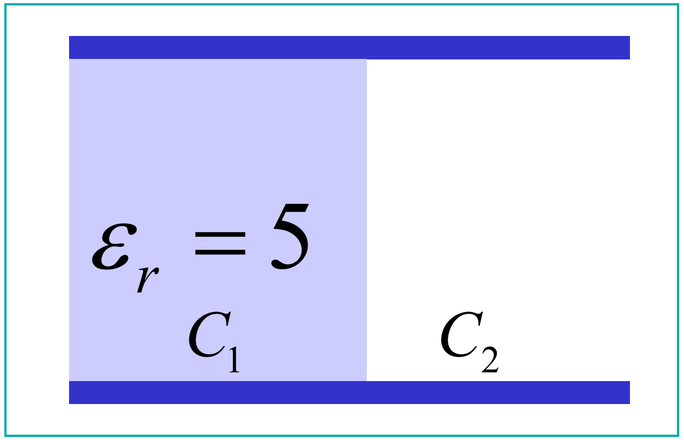
电容值增大

三. 电容器的串并联

$$\boxed{C_{并} = \sum_i C_i}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{串}} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$$

练习. 9-28(2)



$$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S/2}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{2d}$$

d

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{S/2}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}(\varepsilon_r + 1) = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} C_0 = 3C_0$$

Q 不变 $\quad U = \dfrac{U_0}{3} = 100\ \mathrm{V}$

§ 9.8 电容 电容器 小结

一、孤立导体电容 $C=\dfrac{Q}{U}$

二、电容器的电容 $C=\dfrac{Q}{\Delta U}$

▲ 求电容器电容的一般方法(1) (2) (3) (4)

三、电容器的串并联

$$C_{并}=\sum_i C_i \qquad \frac{1}{C_{串}}=\sum_i \frac{1}{C_i}$$