

电路分析基础

上官右黎 编著

北京邮电大学出版社
·北 京·

内 容 简 介

本教材是根据目前电子电路技术的发展和教学的需求而编写的。全书共分十三章,前十章为基本内容,介绍了基本定律,基本变量和基本元件,电路的等级变换,电路的瞬态分析,正弦稳态电路分析,互感元件与理想变压器,电路的频率特性和谐振电路等;后三章内容为有源元件简介,矩阵分析和简单非线性电阻电路,供选学。

本书内容系统完整,覆盖了教学大纲要求的全部内容,并讨论了现代电路理论中的一些重要概念,适度地引入了学习本课程的学生能接受的少量前沿内容,选材具有一定的前瞻性。书中例题丰富,且配有难易适度的习题,有助于开拓读者的思路。

本书可作为通信、电子、计算机、自控等专业大学电路基础课教材,也可供自学电路课程的读者作为自修读物。

图书在版编目(CIP)数据

电路分析基础/上官右黎编著. —北京:北京邮电大学出版社,2003

ISBN 7-5635-0670-5

电 ... 上电路分析—高等学校—教材 .TM133

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 045258 号

书 名: 电路分析基础

作 者: 上官右黎

责任编辑: 刘 洋

出 版 者: 北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)邮编:100876

发行部电话:(010)62282185 62283578(传真)

电子信箱: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 印刷厂

开 本: 787 mm × 1 092 mm 1/ 16

印 张: 22 25

字 数: 551 千字

印 数: 1—5 000 册

版 次: 2003 年 10 月第 1 版 2003 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-0670-5

定价:32.00 元

·如有印装质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系·

编者的话

电路分析基础是电子电路系列课程的第一门基础课,如何适应教学改革形势,是大家关心的事情。近几年笔者参加了有关电子电路系列课程的学术研讨会,同行们的意见基本一致,认为电路分析基础课程的基本内容和范围大体上已趋稳定。但是,科学技术的发展引起了新知识的急剧膨胀,我们的教学观念也要作相应的调整:学习者要由被动学习转化到更多的主动学习,教学者要做学习过程的引导者、促进者、支持者。“工欲善其事,必先利其器”,一本好的教材便是学习者最重要的工具之一,编写本教材的目的就是为了适应这一需求。

本教材覆盖了教学大纲要求的全部内容,并讨论了现代电路理论中的一些重要概念,适度地引入了学习本课程的学生能接受的少量前沿内容,选材具有一定的前瞻性。

本教材在结构上做了调整,基本内容放在前十章,后三章内容选用。每章的基本内容放在前面几节,后面节次内容可选用。例如“运算放大器”是否需要在本课程中讲以及怎么讲,一直是有争议的,这里将它与负转换器、回转器编在第十一章“有源元件简介”中,学生经过了前面内容的学习,再从有源元件的角度来学习运算放大器,一定可以避免许多理解上的困难。本书结构上的安排有利于适应不同专业对学时的要求。

1. 学习全部内容需要 72 ~ 80 学时;

2. 学习前十章内容需要 60 ~ 68 学时;

3. 学习前十章内容“适当略讲”可适用于 51 学时。(例如第六章二阶电路、第七章三相电路、第九章复杂谐振电路略讲,其中每章习题中最后 2 ~ 3 道习题可以不作要求。)

为了有利于读者自学,力求论述深入浅出,简明扼要地揭露事物的本质。引导读者理解在集总参数假设下,以基尔霍夫定律为依据引出的一系列分析方法,舍去一些不常用的等效方法和一些复杂的推导过程。但是为了有利于培养学生的抽象思维的能力、逻辑推理的能力,以及掌握一些特有的分析方法,保留一部分定理的证明过程,并引用比较现代的证明方法。

为了保持面向通信学科的特色,在编写第九章“电路的频率特性”时,特别注意与“电子电路基础”课程的关系,要求在内容选材和论述中与电子电路基础相关内容确保不矛盾、尽量不重复,并能够相辅相成。

为了每个重要的知识点都有练习,本书例题和习题丰富,由浅入深,便于选用。

本书从构思到完成经历了两年的时间。在此期间,霍锡真教授对全书的结构和内容提出了重要的意见,并参与了部分内容的编写,电子工程学院“信号、电路与系统”教研室的老师们对本书内容提出了宝贵的意见,部分老师参加了编写工作。另外我校教材委员会主任赵尔源教授,电信工程学院著名专家谢沅清教授、解月珍教授对本教材颇为关心,并提出了重要意见。在此一并向他们表示由衷的感谢。

此外,笔者已经编写了《电路分析基础解题指南》一书,于 2001 年初由北京邮电大学出版社出版,另有“电路分析辅导与自测”软件光盘也已出版(在 2002 年教育部组织的“全国多媒体课件大赛”中获三等奖),可以配套使用。

我的学生杜蓬勃、温季睿和上官思楠参加了教材电子版的录入工作和习题的校对工作,在此向他们表示衷心的感谢。

限于编者的水平,书中难免有不妥或错误之处,敬请读者批评指正。

编者
2003 年 5 月于北京

目 录

第一章 电路模型和基尔霍夫定律..... 1

1.1 电路和电路模型 1

1.2 电路分析的基本变量 3

1.3 基尔霍夫定律 7

1.4 图的概念和定律方程的独立性 12

习题一 17

第二章 电路元件与电路的等效变换 21

2.1 电阻元件 21

2.2 电容元件 23

2.3 电感元件 25

2.4 电阻网络的等效变换 28

2.5 独立电源及其等效变换 33

2.6 受控源及含受控源电路的等效变换 39

2.7 对偶特性 42

习题二 43

第三章 线性电路的一般分析方法 49

3.1 支路电流法 49

3.2 节点分析法 50

3.3 网孔分析法 54

3.4 割集分析法与回路分析法 59

习题三 62

第四章 电路定理 65

4.1 叠加定理 65

4.2 替代定理 68

4.3 戴维南定理和诺顿定理 69

4.4 特勒根定理 76

4.5 互易定理 80

习题四 83

第五章 一阶电路的瞬态分析 87

5.1 动态电路及其方程 87

5.2 一阶电路的零输入响应 92

5.3 一阶电路的零状态响应和全响应 96

5.4 三要素法求一阶电路的响应 101

5.5 微分电路与积分电路 106

5.6	指数信号与正弦信号作用于一阶电路	111
5.7	突变现象简介	113
	习题五	118
第六章	二阶电路与状态变量方程	126
6.1	RLC 电路的零输入响应	126
6.2	RLC 电路的零状态响应和全响应	134
6.3	状态变量和状态方程	138
	习题六	143
第七章	正弦稳态电路的分析	147
7.1	正弦信号	147
7.2	电路与电路定律的相量模型	152
7.3	阻抗和导纳	157
7.4	正弦稳态电路的分析计算	161
7.5	正弦稳态电路的功率	164
7.6	最大功率传输	168
7.7	三相电路的基本概念	173
7.8	多频率正弦稳态电路分析	180
	习题七	183
第八章	耦合电感与理想变压器	191
8.1	耦合电感及其伏安关系	191
8.2	耦合电感的等效电路	196
8.3	含耦合电感的电路分析	202
8.4	理想变压器及其特性	205
8.5	含理想变压器的电路分析	209
8.6	全耦合变压器	212
8.7	实际变压器的电路模型	214
	习题八	216
第九章	电路的频率特性	222
9.1	RC 电路的频率特性	223
9.2	串联谐振电路	227
9.3	并联谐振电路	235
9.4	复杂并联谐振电路	239
	习题九	246
第十章	双口网络	251
10.1	双口网络方程和参数	251
10.2	双口网络参数间的相互换算	256
10.3	双口网络的等效电路	257
10.4	双口网络的特性阻抗和传输常数	259
10.5	双口网络的联接	262

习题十	264
第十一章 有源元件简介	269
11.1 理想运算放大器	269
11.2 负转换器	273
11.3 回转器	276
习题十一	281
第十二章 电路的矩阵分析	284
12.1 基尔霍夫定律的矩阵形式	284
12.2 节点分析	286
12.3 改进的节点分析	290
12.4 回路分析	293
习题十二	297
第十三章 简单非线性电阻电路	300
13.1 非线性电阻电路的基本概念	300
13.2 非线性电阻串联、并联与混联	302
13.3 图解法	304
13.4 小信号分析	308
习题十三	310
附录 A 复数的表示与运算	314
附录 B 复变函数的几个定理	316
附录 C 实际元件模型的构成	317
附录 D 磁路的概念	320
附录 E 线性时变电路的概念	325
部分习题答案	333
参考文献	346

第一章 电路模型和基尔霍夫定律

电路理论是研究电路中所存在的普遍规律的理论。它在现代通信技术、电子学、自动控制技术等学科中是一门基础学科,占有重要地位。

电路理论可分为两大主干内容:一是电路分析,主要内容是在给定电路结构、元件参数的条件下,寻求电路输入信号与输出信号之间的关系;二是电路综合,主要研究在给定输入信号和输出信号即电路传输特性的条件下,寻求电路的结构和参数。很明显,必须首先学习电路分析,也可以说电路分析是电路理论的基础。

1.1 电路和电路模型

实际电路总是为了实现某种功能而设计和制作的。电路的一种重要功能就是伴随电流在电路中流动,实现电能的传输、分配和储存,并进行能量的转换。所以,电路可看成由电源、负载、联接导线和控制四个部分组成。其中电源将化学能、机械能等非电能转换成电能为电路提供能量,负载吸收电能并储存起来或者转换成非电能,联接导线起着传输和分配能量的作用,控制部分则对电路的各个部分按人们的设计进行控制。例如最简单的手电筒电路,如图 1-1(a)中各部分是按实际元件画出的,图(b)则是按电路符号画出,称为电路模型。在这里电池作为电压源为电路提供能量,灯泡作为负载可以用电阻来表示,开关控制着电路工作与否,导线起着传输能量的作用。

在通信、自动控制以及计算机等电子设备中,为了对电信号进行处理,需要采用不同类型的电路来完成各种任务。在这些设备中,电路的一个重要功能就是将输入信号(也称为激励)经过变换,处理成为所需要的输出信号(也称为响应)。

例如,图 1-2 画出的是收音机的功能框图,由图可见,一台简单的收音机是由输入电路(包括天线及调谐电路)、检波电路、放大电路、扬声器以及电源电路组成。输入电路的功能

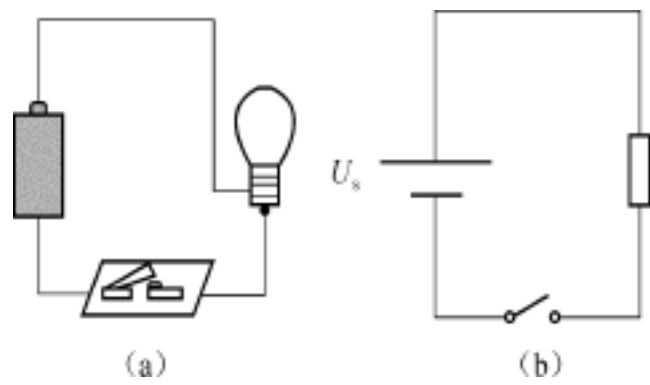


图 1-1 手电筒电路

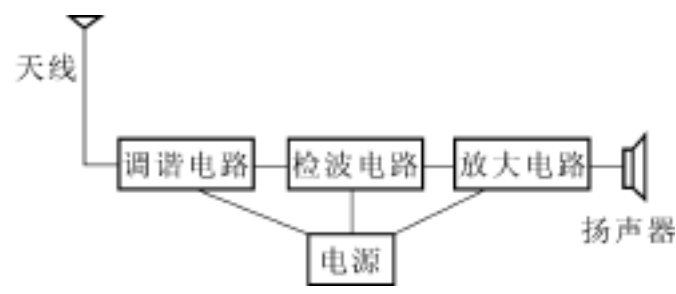


图 1-2 收音机功能框图

是接收由各个广播发射台发出的不同信号,并从中选择出所需要的信号;检波电路的功能是

将调谐电路选择出来的高频信号做适当的处理,从中取出广播台所传送的音频信号和除去其他不需要的信号;由于音频信号很微弱,因此在送入扬声器之前,还需要经过放大电路加以放大;扬声器则是将电能转换成声能;电源电路的功能是为各部分电路的工作提供能量。

从以上两个例子,可以对电路的功能有所了解。

图 1-1 (b) 是手电筒电路的电路模型。在电路分析课程中一般都是用电路模型来表示电路:在一定的条件下,对实际元件加以近似、理想化,即用一个表征其主要物理特性的理想元件模型来代替它。例如用电阻元件 (R) 表示某些部件将电能转化成其他形式的能量(如光能、热能、机械能等)的特征,并统一表示为吸收电能的特征;用电感元件 (L) 表示某些部件储存磁场能量的特征,称为理想电感;用电容元件 (C) 表示某些部件储存电场能量的特征,称为理想电容;用电压源 (u_s) 表示电池、发电机等为电路提供稳定电压的特性;用电流源 (i_s) 表示光电池等为电路提供稳定电流的特性。这几个理想元件的电路符号如图 1-3 所示。用理想元件构成的电路称电路模型。今后所提到的电路,除特别指明外,均指电路模型。

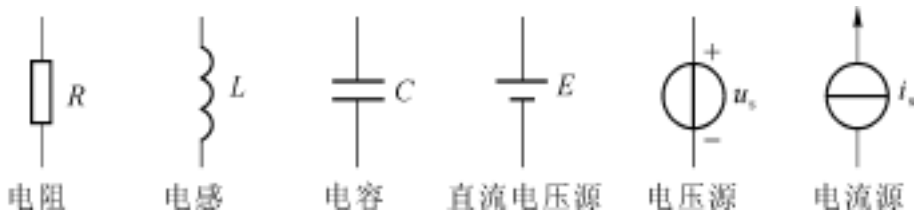


图 1-3 几个理想元件的电路符号

实际器件与理想电路模型是有区别的,例如在电路模型中,元件之间的连接线被认为是没有电阻的,而实际上导线总有一点电阻;在工作时两根导线之间还可能产生分布电容;一个实际电感除了储存磁场能量的特性外,它的消耗能量的特性也是不可忽略的。因此在必要时,也可以用几个理想元件的组合来表示一个实际元件。这些知识以后将逐步介绍。

这里假设的理想元件是抽象的模型,它们没有体积的大小,其特性集中在空间一点上,称为集总参数元件。由集总参数元件构成的电路称为集总参数电路。这种集总参数的假设是有条件的,即电路的尺寸 l 远小于外加激励信号的波长,即

$$l \ll \lambda$$

而波长与频率的关系为

$$\lambda = C / f$$

其中 $C = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ (光速)。

例如日常供电系统输出交流电的正弦波频率 f 为 50 Hz, 其波长 λ 为 6000 km, 对于普通实验室的设备来说是符合集总参数条件的,而对于远距离的电力输电线则不满足集总参数的条件。又如若微波信号频率 f 为 2000 MHz, 其波长 λ 为 0.15 m, 显然对于普通实验设备也不满足集总参数的条件;这时就不能用集总参数的概念,而应当采用分布参数或电磁场理论等其他领域的理论来分析电路。

当满足集总参数假设的条件时,在外加信号发生变化瞬间,激励产生的效应已经到达整个电路。可以认为,电效应在电路的所有部分同时发生,因此集总参数假设又被称为同时性假设。集总参数电路的概念意味着电效应的传播速度为无限大。

电路分析是在集总假设前提下,讨论电路中的基本定律、定理及求解电路的分析方法。

在实际电路的分析中用到这些定律与分析方法时一定要注意它的工作条件。

在集总参数电路的前提下,还需要将电路加以分类。

当元件的参数与工作条件无关,即元件参数是常数时,称为线性元件。非线性元件的元件参数则随工作条件的变化而不同。例如电阻元件的电阻值不随其工作电压或电流的变化而改变,称为线性电阻。而晶体二极管是非线性电阻,它的电阻随着工作电压的变化而变化,称为非线性电阻。由线性元件组成的电路称为线性电路。电路中只要含有一个非线性元件,电路就属于非线性电路,对它的分析方法与线性电路有很大的区别,第十三章将简单介绍非线性电阻电路的基础知识。

当元件参数与时间无关时(电源除外),称为时不变元件,否则称为时变元件。由时不变元件组成的电路称为时不变电路。电路中只要含有一个时变元件,电路就属于时变电路。附录 E 将简单介绍由时变元件组成的时变电路。

电路分析基础研究的主要是集总参数假设下的线性时不变电路。

此外,在电路理论中经常用到网络这个名称,在电路分析中,网络的含义与电路相同,都是指一些元件的相互联接。

1 2 电路分析的基本变量

电路由支路和节点构成。在电源激励下,支路中有电荷移动形成电流,节点之间有确定的电压。电路分析就是在给定电路结构、元件参数和激励的情况下计算电路中的电流、电压与功率,所以把支路电流和支路电压等称为电路分析的变量。

1 2 .1 电流

电子和质子都是带电的粒子,电子带负电荷,质子带正电荷。电荷量(也称电量)的单位是库仑(简称库,用字母 C 表示), 6.24×10^{18} 个电子所具有的电量等于 1 库仑,用 q (或 Q)表示电量。带电粒子有规则的移动便形成电流。如图 1-4 所示。

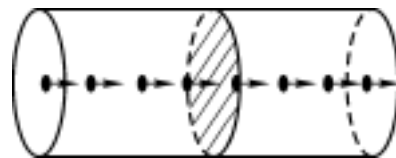


图 1-4 电荷的流动

1 . 电流的定义

单位时间内通过导体横截面的电荷量定义为电流强度,简称为电流。用字母 i 表示,即

$$i = \frac{dq}{dt}$$

也可以说电流反映了电荷对于时间的变化率。

2 . 电流的方向

正电荷移动的方向定义为电流的方向。实际上支路的电流是带有负电荷的电子流,但习惯上把正电荷移动的方向定义为电流的方向。

如果电流的大小和方向不随时间变化,则这种电流称为直流电流,可以用 I (或 i)表示,这时电流与电荷的关系表示为 $I = Q/T$ 。如果电流的大小和方向都随时间变化,则这种电流称为交变电流(简称交流),用 $i(t)$ 表示,或简写为 i 。

3 . 电流的参考方向

在单个电源作用于电路时,可以直接判断出电流的方向,但是当多个电源同时作用于较复杂的电路时,未经计算就难以直接判断出各电流的方向。如图 1-5 中,无法直接判断 R_2

支路电流的方向。所以在分析电路时首先假设支路电流的一个方向,这个任意假设的方向称为电流的参考方向,在支路中用箭头表示如图 1-6 所示。或用双下标表示,如 a、b 端之间的电流可表示为 i_{ab} ,表示从 a 端流向 b 端的电流,并有 $i_{ba} = - i_{ab}$ 。

利用电流的参考方向来计算电路,计算结果若是正的,说明电流的参考方向与真实方向一致。计算结果若是负的,说明电流的参考方向与真实方向相反,但并不需要改变电流的参考方向,而是以标出的参考方向与电流的正负号结合起来表示电流的真实方向。所以参考方向一经设定,在计算过程中不再改变。这种表示方法对于交变电流同样是非常重要和有效的。交变电流 $i(t)$ 是时间的函数,它的大小与方向随时间而变化,它的正值或负值都是相对于参考方向而言的。换言之,如果某支路电流未标明参考方向,则电流的正负值失去了参照方向,也就失去了实际意义。

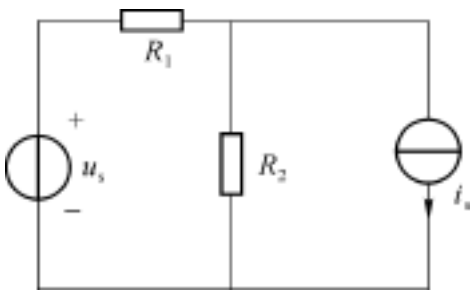


图 1-5 两个电源作用于电路



图 1-6 电流的参考方向

4 . 电流的单位

电流的单位为安培(简称安,用字母 A 表示),常用单位还有毫安(mA),微安(μA)等。这时电荷的单位为库仑;时间的单位为秒(用字母 s 表示)。

$$1 \text{ 安培} = \frac{1 \text{ 库仑}}{1 \text{ 秒}}$$

1 2 2 电压

如果电荷通过某支路,支路两端存在电位差,电荷与支路之间会发生电能的交换,若支路的 a 端电位高于 b 端电位,单位正电荷从 a 端移到 b 端,电场力作功,电荷失去电位能,这部分能量被支路所吸收(例如图 1-7 所示右侧电阻支路);当单位正电荷从 b 端移到 a 端即从低电位端移到高电位端,必然要由外力做功,而电荷获得电位能(例如图 1-7 所示左侧电源支路)。

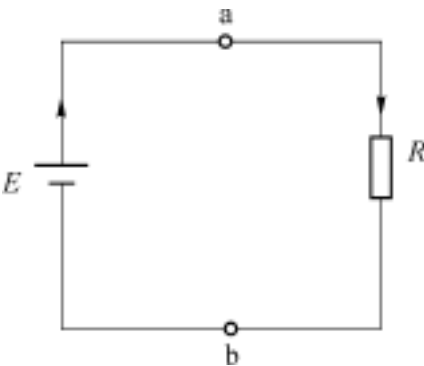


图 1-7 电压的概念

1 . 电压的定义

电路中两点间的电压就是两点间的电位差,数值上等于单位正电荷从高电位点移动到低电位点时,电场力所做的功,用符号 u 表示:

$$u = \frac{dw}{dq}$$

上式表明,单位正电荷从 a 端移到 b 端由电场力作功时电压 u 为正值;若由外力做功则电压 u 为负值。由此可见,电压也是一个代数量。

2 . 电压的极性

电压的极性是高电位端到低电位端。如果电压的大小和方向不随时间变化,则这种电

压称为直流电压,可以用 U 或 u 表示。如果电压的大小和方向都随时间变化,则这种电压称为交变电压,用 $u(t)$ 表示,或简写为 u 。

3 . 电压的参考极性

与支路电流需要设定其参考方向一样,对于支路电压,也需要设定其参考极性。在电路



图中“ + ”表示高电位端,“ - ”表示低电位端;也可以用箭头表示,箭头指向电压(电位降)的方向,如图 1 -8 所示;或用双下标表示,如 a,b 端之间的电压可表示为 u_{ab} ,表示从 a 端至 b 端的电压,并有 $u_{ba} = - u_{ab}$ 。

用设定的参考极性去计算电压,计算结果若是正的,说明电压的参考极性与真实极性一致。计算结果若是负的,说明电压的参考极性与真实极性相反。若没有设定参考极性,则电压的正负值毫无意义。

图 1 -8 电压的极性

4 . 电压的单位

电压的单位为伏特(简称伏,用字母 V 表示);常用单位还有毫伏(mV),千伏(kV) 等。这时能量的单位为焦耳(用字母 J 表示),电荷的单位为库仑。

$$1 \text{ 伏特} = \frac{1 \text{ 焦耳}}{1 \text{ 库仑}}$$

5 . 参考点、电位与电压

在分析电路时,为了方便,可以任意设置电路的参考点,参考点即电路的零电位点,但一个电路只能设置一个参考点。当设定电路中某一点为参考点,则电路中各点的电压也就是该点到参考点的电位差。参考点、电位与电压有以下关系:

- (1) 各点的电位随参考点设定的不同而不同;
- (2) 两点间的电压与参考点的设置无关。

通过后面例 1 -6 的学习将有助于进一步理解这些概念。

1 2 3 电流与电压的关联参考方向

前面谈到,支路电流的参考方向与支路电压的参考极性是可以任意选定的,元件上电压、电流参考方向设定的不同,会影响到计算公式的正负号。但为了分析上的便利,常常将同一支路的电流与电压的参考方向选为一致,即电流的参考方向由电压参考极性的“ + ”端指向“ - ”端,如图 1 -9(a)所示,这种方式称为电流与电压在关联参考方向下。这个概念非常重要,在大多数情况下,支路的电流与电压是否是关联参考方向将影响到支路的伏安特性,这一点以后会逐步介绍。当电压与电流为关联参考方向时,可以只标出一个变量的参考方向如图 1 -9(b)所示,非关联参考方向时必须全部标出,如图 1 -9(c)所示。

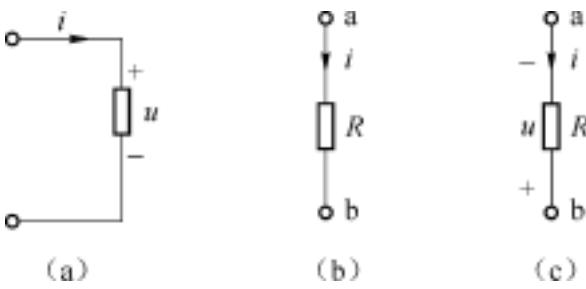


图 1 -9 电压与电流的关系参考方向

例 1 -1 请写出图1 -9(b)、(c)所示电阻的电压与电流的关系(简称伏安关系)。

解 图(b) $u = Ri$ (电压与电流在关联方向下、欧姆定律);

图(c) $u = - Ri$ (电压与电流在非关联方向下)。

1 2 4 功率与能量

在电路的分析与计算中,研究能量的分配和交换是重要内容之一,特别是功率可直接反映出支路的能量变化情况。用 w 表示能量,用 p 表示功率。

1 . 功率的定义

单位时间内电路所吸收的电能,称作这部分电路吸收的功率。

$$p = \frac{dw}{dt}$$

上式可理解为功率是能量对时间的变化率,若随着时间的变化能量是增加的,则功率是正的,表示电路吸收(或消耗)能量,例如电阻支路;若随着时间的变化能量是减少的,则功率是负的,表示电路供出(或产生)能量,例如电源支路。

2 . 功率的计算

由定义式可知

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = u \cdot i$$

从上式的结果我们发现,功率可以用电流与电压的乘积来计算,即当支路的电流与电压在关联参考方向下,电流与电压的乘积就是此支路吸收的功率。计算结果为正时,说明支路吸收功率;计算结果为负时,说明支路供出功率。这种讨论方式完全符合功率的定义,并且便于理解和记忆。需要说明的是,有的书上有不同的讨论方式,但其实质是一样的。当支路的电流与电压在非关联参考方向时,计算公式要加负号。

$$p = - ui$$

3 . 功率的单位

功率的单位为瓦特(简称瓦,用字母 W 表示),常用单位还有毫瓦(mW),千瓦(kW) 等。这时能量的单位为焦耳,时间的单位为秒,电压的单位为伏特,电流单位为安培。

$$1 \text{ 瓦特} = \frac{1 \text{ 焦耳}}{1 \text{ 秒}}$$

例 1 -2 已知图1 -10中支路电流 $i = 1 \text{ A}$,电压 $u = 3 \text{ V}$,求吸收功率 p 。



图 1 -10 例 1 -2 图

解 电压与电流在非关联参考方向下

$$p = - ui = - 3 \text{ W}$$

吸收功率 (- 3 W),或供出功率 3 W。

例 1 -3 已知图1 -11中电压源支路,电流 $i = - 2 \text{ A}$,电压 $u = 3 \text{ V}$,求功率 p ,并说明支路是否吸收功率。

解 电压电流在关联参考方向下,支路的吸收功率为

$$p = ui = 3 \times (- 2) = - 6 \text{ W}$$

所以支路不是吸收功率而是供出功率 6 W。

例 1 -4 已知支路电压电流参考方向如图1 -12所示。若 $u = - 200 \text{ V}$,元件吸收功率 $p = 12 \text{ kW}$,求支路电流 i 。

解 电压电流在关联参考方向下,已知元件吸收功率,利用公式

$$i = \frac{p}{u} = \frac{12 \times 10^3}{-200} = -60 \text{ A}$$

即支路电流 i 为 -60 A 。

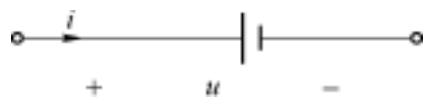


图 1-11 例 1-3 图

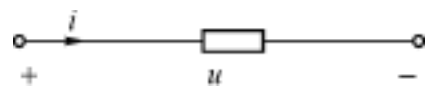


图 1-12 例 1-4 图

1 3 基尔霍夫定律

基尔霍夫(或译为克希荷夫)提出了集总参数电路的基本定律,称之为基尔霍夫电流定律和基尔霍夫电压定律,即基尔霍夫定律是集中参数假设下电路基本定律。

先介绍几个名词和术语。

1 . 支路和节点

一般情况下电路中一个二端元件称为一条支路,元件的汇接点称为节点,如图 1-13 中点 a、b、c、d,这里共有 5 条支路,4 个节点。

为了方便,也可以把支路定义为多个元件串联而成的一段电路,如图 1-13 中 1 和 3 元件的串联作为一条支路,2 和 5 元件的串联也作为一条支路,节点定义为 3 条或 3 条以上支路的汇接点,如 b 点和 d 点,而 a 点和 c 点就不再是节点。这样定义支路和节点,显然比前面的定义在支路和节点的数量上要减少,对分析电路和解题是方便的。

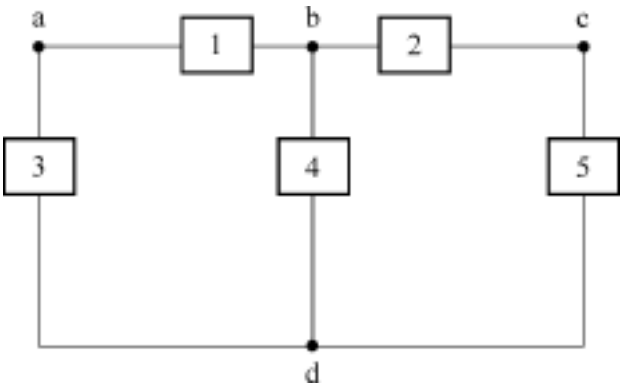


图 1-13 支路与节点

2 . 回路

电路中任一闭合的路径称为回路,如图 1-13 中由 a-b-d 回到点 a,由 b-c-d 回到 b,由 a-b-c-d 回到 a,都是回路。

3 . 网孔

网孔的定义是对平面电路而言的,图 1-13 是平面电路,其中内部不含支路的回路称为网孔。上面 3 个回路中前两个符合网孔定义,显然第 3 个不符合网孔定义,因为内部含有元件 4 的支路。

在集总参数电路中,任何时刻通过元件的电流和元件两端的电压都是可确定的物理量。通常把通过元件的电流称支路电流,元件的端电压称支路电压,它们是电路分析的对象,集总参数电路的基本规律也用它们来表示。

1 3 . 1 基尔霍夫电流定律(KCL)

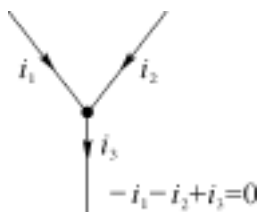
电流定律也叫基尔霍夫第一定律,它反映了电路的节点上各支路电流之间必须遵循的规律。

定律内容:在任一时刻,电路的任一节点,流出某节点的所有支路电流代数和为零。其数学表示式为

$$\sum_{k=1}^{m_0} i_k = 0$$

式中, i_k 为流出(或流入)节点的第 k 条支路电流, m_0 为与节点相联的支路数。
图 1-14 中画出的是电路中的某一节点, 连接了 3 条支路, 并标出了电流的参考方向。若以流出节点电流为正, 则写出 KCL 方程

$$-i_1 - i_2 + i_3 = 0$$



将上式写为
$$i_3 = i_1 + i_2$$

上式左边是流出节点的电流, 右边是流入节点的电流。
电流定律也可表示为: 在任一时刻, 电路的任一节点, 流入该节点的支路电流之和等于流出该节点的电流之和。

图 1-14 电流定律

$$i_{\text{入}} = i_{\text{出}}$$

电流定律的理论依据是电荷守恒原理, 即电荷既不能创造也不能消灭, 流进节点的电荷一定等于流出节点的电荷, 因为在集总参数假设中, 节点只是支路的汇接点, 不可能积累电荷。KCL 说明了电流的连续性。

在以上的讨论中, 并没有涉及到支路的元件, 这就是说, 不论支路中是什么元件, 只要联接在同一个节点上, 其支路电流就按 KCL 互相制约。换言之, KCL 与支路元件性质无关而与电路结构有关。

KCL 原是运用于节点的, 也可以把它推广运用于电路中的任一假设的封闭曲面。例如, 在图 1-15 中虚线所示封闭面, 流入或流出封闭面的电流有 i_1 、 i_2 、 i_3 , 根据标出的参考方向, 以流出封闭面的电流为正, 可列出 KCL 方程式

$$-i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

例 1-5 求图1-16所示电路中电流 i_1 和 i_3 的值。

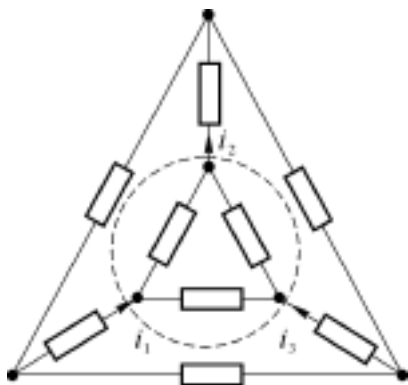


图 1-15 封闭面的 KCL

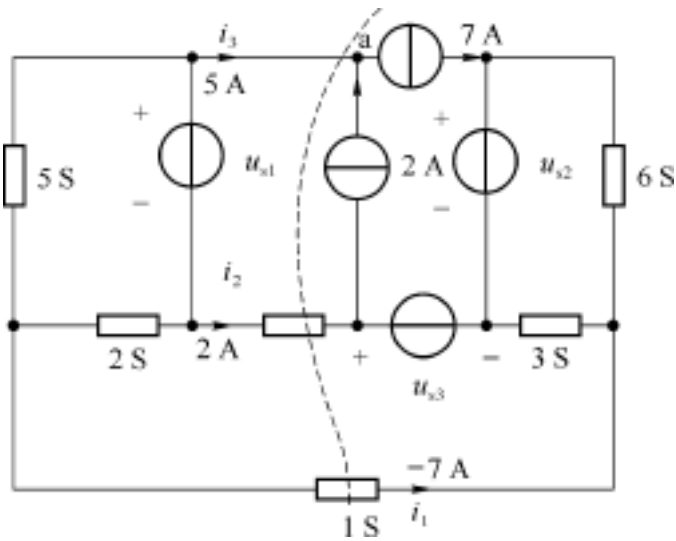


图 1-16 例 1-5 电路

解 (1) 由 a 节点的 KCL 列出方程

$$\begin{aligned} i_3 + 2 &= 7 \\ i_3 &= 5\text{A} \end{aligned}$$

(2) 作封闭面如图中虚线,可列出

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ i_1 &= -7\text{ A} \end{aligned}$$

1 3 2 基尔霍夫电压定律(KVL)

电压定律也叫基尔霍夫第二定律,它表明电路的闭合回路中,各支路电压之间的制约关系。

定律内容:在任一时刻,电路的任一回路,沿该回路的所有支路电压的代数和为零。

$$\sum_{k=1}^{n_0} u_k = 0$$

式中, u_k 为该回路中第 k 条支路电压, n_0 为回路包含的支路数。

这一定律也可以表述为:在任一时刻,电路的任一回路,沿该回路的支路的电位升等于电位降。

$$U_{\text{升}} = U_{\text{降}}$$

图 1-17 中画出的是电路中的某一回路,连接了 5 条支路,并标出了各支路电压的参考极性。任意选定回路的绕行方向,例如图中画出的顺时针方向,支路电压的参考极性与回路绕行方向一致的取正号,支路电压参考极性与回路绕行方向相反的取负号。可列写 KVL 方程

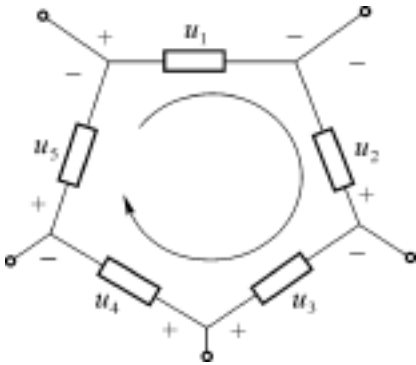


图 1-17 电压定律

或

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 - u_3 + u_4 + u_5 &= 0 \\ u_1 + u_4 + u_5 &= u_2 + u_3 \end{aligned}$$

上式左端为回路中电位降之和,右端为回路中电位升之和。

基尔霍夫电压定律是能量守恒的体现。按照能量守恒定律,单位正电荷沿回路绕行一周,所获得的能量必须等于所失去的能量,单位正电荷在从高电位向低电位移动过程中失去能量,在从低电位向高电位移动过程中获得能量,所以在闭合回路中电位升必然等于电位降,即一个闭合回路中各支路电压的代数和为零。

在以上的讨论中,并没有涉及到支路的元件,这就是说,不论支路中是什么元件,只要连接在同一个回路中,其支路电压就按 KVL 互相制约。换言之,KVL 与支路元件性质无关而与电路结构有关。

总之,KCL、KVL 是电荷守恒原理和能量守恒原理在集总参数电路中的体现,KCL、KVL 只与电路的拓扑(结构)有关,而与各支路连接的元件的性质无关。无论是电阻、电容、电感还是电源,甚至是非线性元件或时变元件等。

例 1-6 电路如图 1-18 所示,选 d 点为参考点,求 u_a , u_{ac} 的值。若选 b 点为参考点,求 u_a , u_{ac} , 比较结果,可得出什么结论?

解 (1) 选 d 点为参考点,即 $u_d = 0$,因 cd 支路电流 $i_1 = 0$,1 Ω 电阻上没有电压,所以 $u_c = 20\text{ V}$ 。

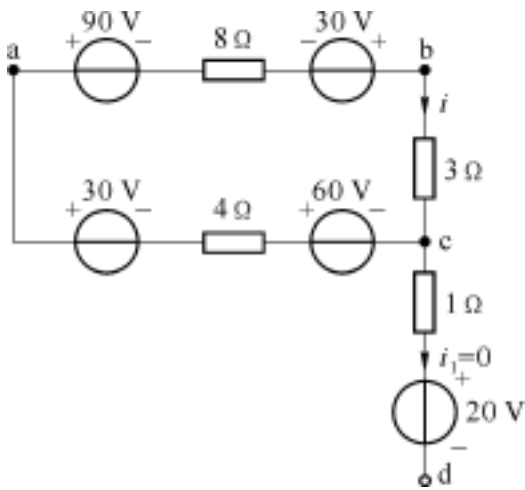


图 1-18 例 1-6 电路

设 a-b-c-a 回路电流 i 按顺时针方向流动,由 KVL 可求出电流 i :

$$i = \frac{30 + 60 + 30 - 90}{8 + 4 + 3} = 2 \text{ A}$$

此时电路中各支路电压都可以用欧姆定律求出。再计算 a 点的电压即 a 点至 d 点的电压。可任意选择一条路径,例如 a-b-c-d, 求各支路电压代数和:

$$u_a = 90 + 8 \times 2 - 30 + 3 \times 2 + 20 = 102 \text{ V}$$

计算 u_{ac} 即 a 点至 c 点的电压

$$u_{ac} = 90 + 8 \times 2 - 30 + 3 \times 2 = 82 \text{ V}$$

(或 $u_{ac} = u_a - u_c = 102 - 20 = 82 \text{ V}$)

(2) 选 b 点为参考点, $u_b = 0$, 电流 i 不变。再计算 a 点的电压即 a 点至 b 点的电压, 以及求 u_{ac} 如下

$$u_a = 90 + 8 \times 2 - 30 = 76 \text{ V}$$

$$u_{ac} = u_a - u_c = 76 - (-6) = 82 \text{ V}$$

从本例题可验证一个结论,当选择的参考点不同,电路中各点电位不同,但是两点之间的电压是不变的。

例 1-7 图1-19所示为某电路的部分电路,各已知的电流及元件值已标示在图中,分别求支路电流 I 、电阻 R 和电压源电压 u_s 的值。

解 在电路上设节点 a,b,c,d,封闭曲面 S 及 I_1, I_2, I_R 的参考方向。首先,对封闭曲面 S (图 1-19 中虚线所示)列写 KCL 方程。选取流出封闭曲面 S 的电流取正号,所以有

$$-6 + 5 + I = 0$$

则有

$$I = 6 - 5 = 1 \text{ A}$$

对图 1-20 节点 b 有 KCL 方程

$$-I_1 + I_2 + 15 = 0$$

所以

$$I_2 = I_1 - 15 = 18 - 15 = 3 \text{ A}$$

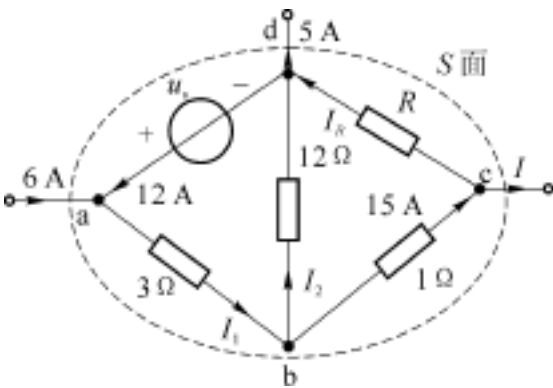


图 1-19 例 1-7 图 1

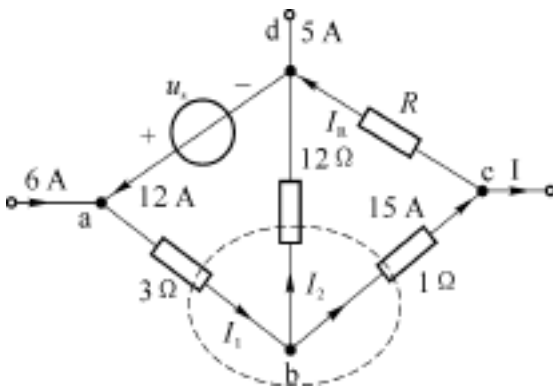


图 1-20 例 1-7 图 2

对图 1-21 中节点 c 有 KCL 方程

$$I + I_R - 15 = 0$$

所以

$$I_R = 15 - I = 14 \text{ A}$$

图 1-22 由 b-c-d-b 回路的 KVL 方程

$$15 \times 1 + u_{cd} - 12 I_2 = 0$$

可得

$$u_{cd} = 12 \times 3 - 15 = 21 \text{ V}$$

应用欧姆定律,求得电阻 $R = u_{cd} / I_R = 21 \div 14 = 1.5$

由 a-b-d-a 回路的 KVL 方程 $3 I_1 + 12 I_2 - u_s = 0$

所以 $u_s = 3 I_1 + 12 I_2 = 3 \times 18 + 12 \times 3 = 90\text{V}$

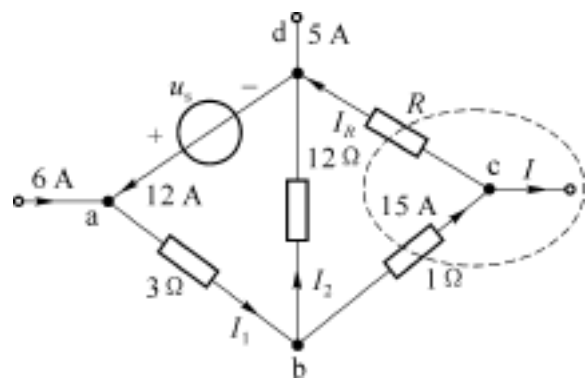


图 1-21 例 1-7 图 3

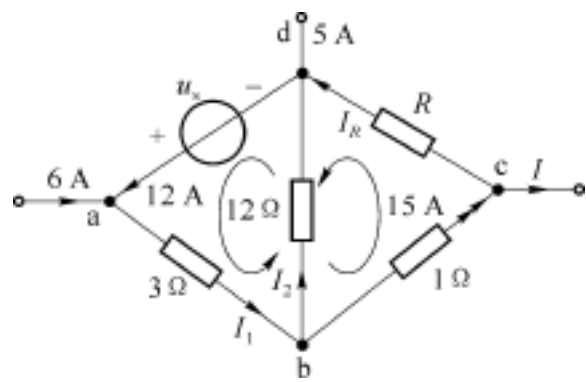


图 1-22 例 1-7 图 4

1.3.3 关于基尔霍夫定律的独立性

1. KCL 方程的独立性

如图 1-23 所示电路,设流出节点电流为正。列出全部节点的 KCL 方程

节点 a: $i_1 + i_2 + i_3 = 0$

节点 b: $-i_1 - i_6 + i_4 = 0$

节点 c: $-i_2 - i_4 + i_5 = 0$

节点 d: $-i_3 - i_5 + i_6 = 0$

将 4 个方程相加,结果是 $0 = 0$ 说明方程组不独立,实际上任意舍去一个方程,余下的方程组就是独立的。例如舍去第四个方程,节点 a 方程的 i_3 、节点 b 方程的 i_6 、节点 c 方程的 i_5 都是其他方程所没有的,说明方程组是独立的了。

2. KVL 方程的独立性

再如图 1-24 所示,设内网孔各按顺时针方向。外回路按逆时针方向列出 KVL 方程

回路 $u_1 + u_3 - u_s = 0$

回路 $u_2 + u_5 - u_3 = 0$

回路 $u_4 - u_2 - u_1 = 0$

外回路 $u_s - u_5 - u_4 = 0$

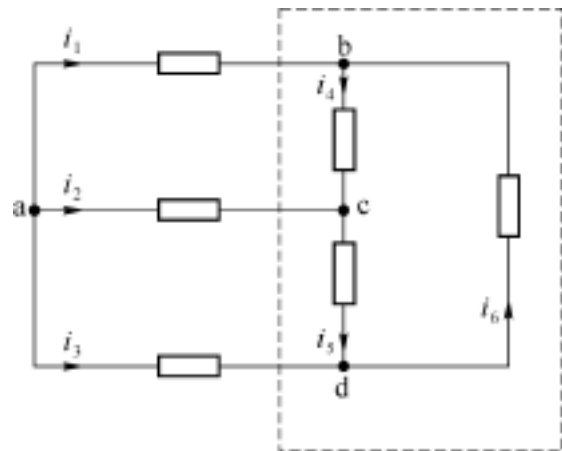


图 1-23 KCL 方程的独立性

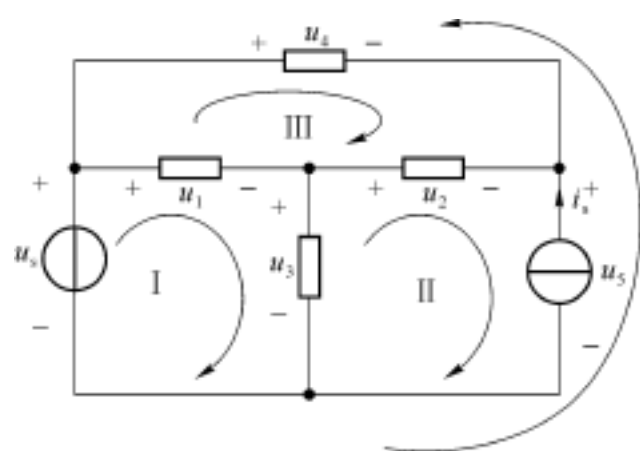


图 1-24 KVL 方程的独立性

将 4 个方程相加,结果也是 $0 = 0$, 说明方程组不独立, 实际上任意舍去一个方程, 余下的方程组就是独立的。一般舍去外回路方程, 余下的 3 个方程, 每个都含有一个别的方程所没有的变量, 如回路 方程的 u_s 、回路 方程的 u_5 、回路 方程的 u_4 。这时各方程不能互相推出, 说明方程组是独立的。

实际上, 若电路的支路数是 b , 节点数是 n , 则独立节点数是 $(n - 1)$, 即可列出 $(n - 1)$ 个独立的 KCL 方程。设

$$L = b - (n - 1) = b - n + 1$$

则可列出 L 个独立的 KVL 方程, 这个规律是符合实际情况的, 可用数学归纳法证明, 也可用图论来证明。图论的基础知识将在下一节介绍。

1.4 图的概念和定律方程的独立性

线图理论(简称图论)是一个数学分支, 应用图论来讨论电路方程的独立性是很有效的, 本节将介绍它的一些基础知识, 并用来讨论基尔霍夫方程的独立性。称之为“网络图论”或“网络拓扑”, “拓扑”在这里泛指电路的结构或连接方式。

前面讲到基尔霍夫定律仅与元件的连接方式即电路的结构有关, 而与元件性质无关。这里暂不考虑元件性质, 将各支路用线段代替, 而支路两端的节点仍然保留。

1.4.1 电路的图

图是一组节点和一组支路(也可称边)的集合, 其中支路只在节点处相交, 这种图叫线图, 简称图。图 1-25(a)表示的电路, 画出对应的图就如图(b)所示, 称它为图 G 。图 G 的支路和节点与图(a)一一对应, 将图(a)电路的结构完全表达出来了, 所以又称其为拓扑图(即结构图)。

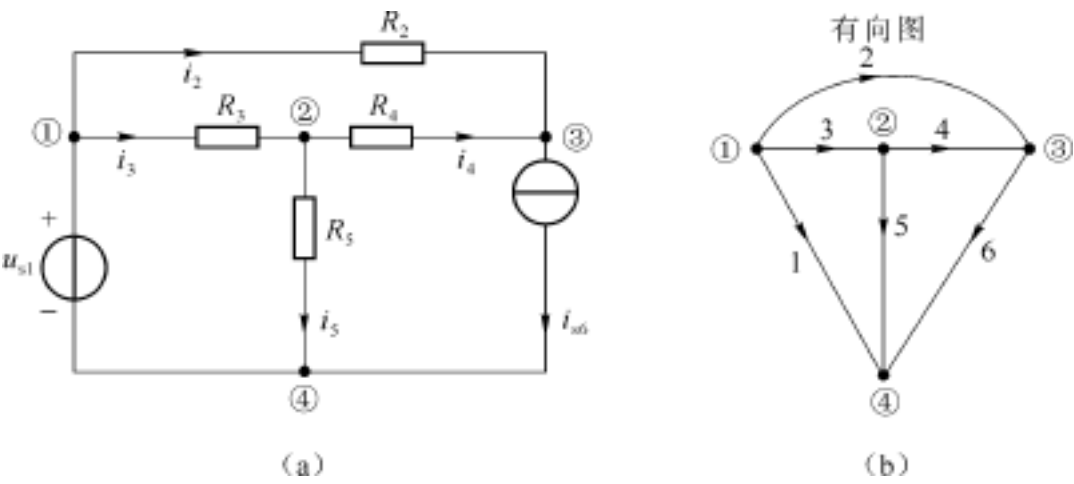


图 1-25 电路的图

1. 有向图和无向图

标明支路参考方向的图称有向图, 不标出参考方向的图称无向图。图 1-25(b)为有向图, 而图 1-26(a)为无向图。有向图每条支路所标的方向与原电路一致, 箭头既表示电流的参考方向, 又表示电压的参考极性, 两者为关联参考方向。

2. 子图

如果图 G_1 的每个节点和支路也是图 G 的节点和支路, 则 G_1 为 G 的子图, 或者说从图 G

中删去某些节点或支路而得到子图 G_1 , 如图 1-26(b) 所示。

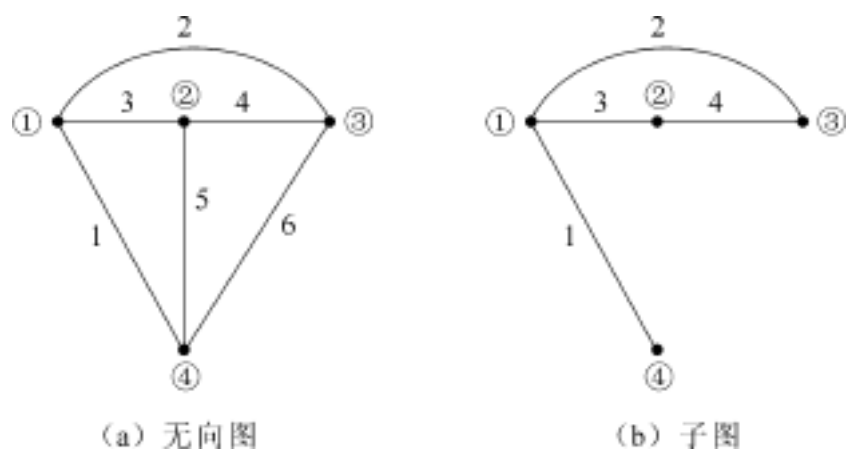


图 1-26 无向图和子图

3 . 连通图和非连通图

在线图中任意节点间至少有一条由支路构成的路径相连通时, 这个图就称连通图, 否则称分离图或非连通图。如图 1-27(a) 为连通图, 而图 1-27(b) 为非连通图, 图 (b) 与图 (a) 相比少了一条支路, 变成了两个分离的部分。非连通图可能有两个或多个分离部分。

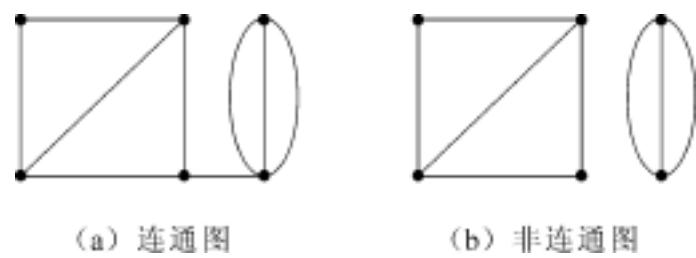


图 1-27 连通图和非连通图

4 . 平面图和非平面图

如果图 G 能画在一个平面上, 而任意两支路除端点外均不相交, 则称图 G 为平面图, 否则称 G 为非平面图。图 1-28(a) 为平面图, 图中看似有交叉支路, 实际上可以将中间交叉的两条支路之一画到外围如图 (b)。而图 1-28(c) 为非平面图。

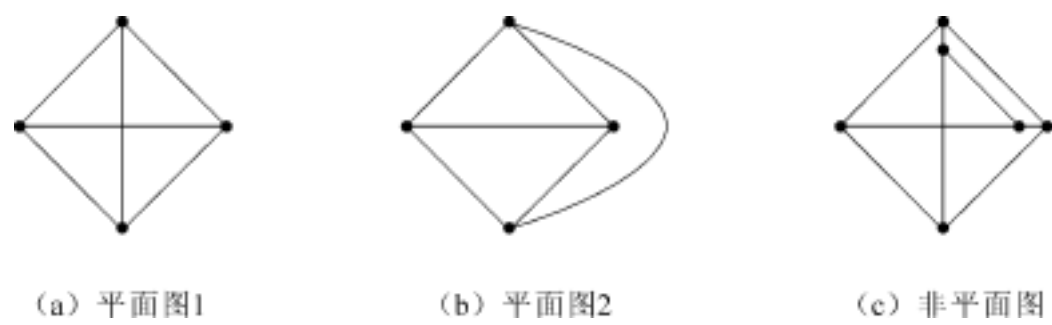


图 1-28 平面图和非平面图

5 . 完全图

如果图中任意两点间有且仅有一条支路, 则称该图为完全图。图 1-25(b) 和 1-26(a) 就是完全图。

电路分析课程主要研究的是连通的有向图。

1 4 2 树和余树

树和余树是图论中一个重要的概念。

1 树和树支

一个包含图 G 的所有节点而没有回路的连通子图,称为连通图的树。如图 1-29(b)和(c),它们都符合树的定义,它们是联接了图(a)所有的节点而没有形成回路的连通图。一个线图可以有多种树,图(a)所示的完全图总共有 16 种树。

构成树的各条支路称为树支,树支支路的集合称为树。如图 1-29(b)中的 {3,4,5}和图(c)中的{1,5,6},都包含 3 条树支。即:在不同的树中,树支数目是相同的。在这里,若设节点数为 n ,树支数目是 $n - 1$ 。

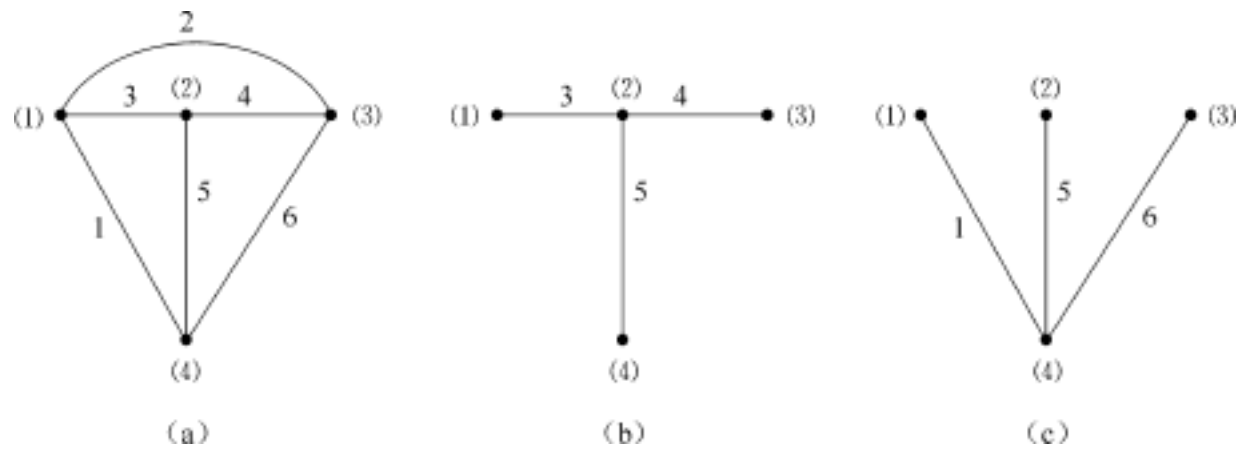


图 1-29 图 G 的树

可以这样来证明这个关系的存在,先画出图 G 的全部节点,然后用逐步添加支路的办法来生成图 G 的一棵树。第一个添加的支路必然连接两个节点,以这条支路为基础,以后每添加一条支路就多连接一个新节点,这样逐步添加支路,直至连接全部节点但不形成回路为止,这些所有添加的支路的集合就生成图 G 的一棵树。但支路数始终比节点数少 1,如图(b)中的 {3,4,5},按数字顺序将节点连接起来就能说明这个结论。所以具有 n 个节点的连通图,树支的数目为 $n - 1$,正好与独立节点数相同。

2 余树和连支

对图 G 选定一种树,除了树以外的支路集合称为余树,余树的各支路称为连支,或曰连支的集合称为余树(或补树)。设图 G 的支路数为 b ,节点数为 n ,则连支数 $L = b - (n - 1) = b - n + 1$,这是显而易见的。图 1-30(a)和(b)中实线支路为树支,虚线支路为连支。图(a)中选树{3,4,5},余树为{1,2,6};图(b)中选树{1,5,6},余树为{2,3,4}。

1 4 3 割集和基本割集、基本回路

割集也是图论中的一个重要概念。割集一般用 C 表示,C 是连通图 G 中的一个支路集合。

1 . 割集

用一个封闭面去切割连通图,被切割的支路的集合在符合以下两个条件时,称为割集。

- (1) 从连通图 G 中移去被切割的全部支路,则图 G 正好分成两个分离部分。
- (2) 只要少移去被切割的任一条支路,图 G 仍是连通的。

可见,割集是把图 G 分成两个分离部分的最少边集。

一个连通图有多少种树(T)呢? 作为一个完全图可以按下面的公式计算,式中 n 为完全图的节点数。
 $Num[T] = n^{n-2}$ 。

在图 1-31(a)所示的图 G 中,选定了三个切割,如图中虚线所示。

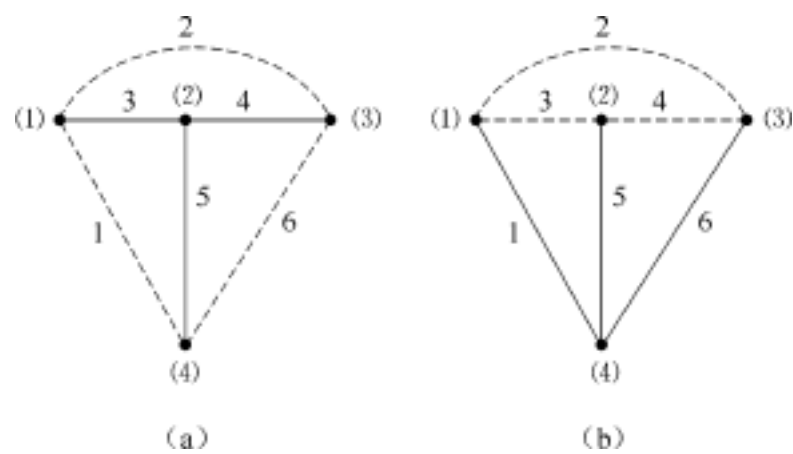


图 1-30 树和余树

割集 $C_1: \{2, 3, 5, 6\}$, 将割集支路移去后留下的子图分为两部分, 见图(b)。

割集 $C_2: \{1, 5, 6\}$, 将割集支路移去后留下的子图分为两部分, 见图(c)。其中节点(4)也是图 G 的一部分。

显然其中支路集合 $C_1(2, 3, 5, 6)$ 和 $C_2(1, 5, 6)$ 都满足割集的条件, 所以 C_1 和 C_2 都是图 G 的割集。但支路集合(1, 5)则不是图 G 的割集, 因为从连通图 G 中移去被切割的(1, 5)支路, 图 G 仍是连通的, 不符合判断割集的条件(1)。

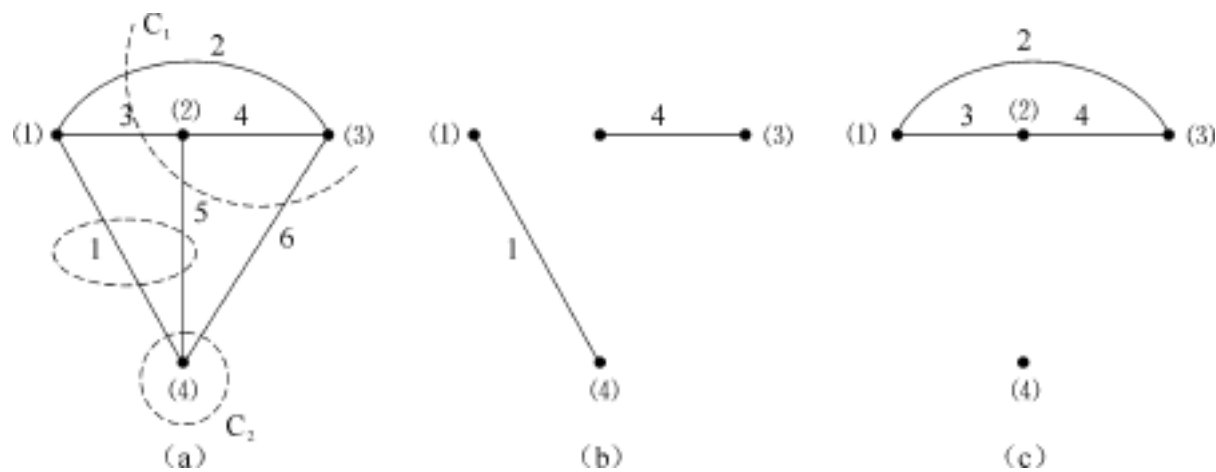


图 1-31 图的割集

2 . 基本割集

在每一个割集中, 包含且仅包含一条树支的割集, 称基本割集, 基本割集数与树支数相同, 即同独立节点数相同, 也即同独立的 KCL 方程数相同。

在图 1-32(a)所示的图 G 中, 首先选定一种树 $\{3, 4, 5\}$, 画出了 3 个割集如图中虚线所示, C_1 为 $\{3, 1, 2\}$, C_2 为 $\{4, 2, 6\}$, C_3 为 $\{5, 6, 1\}$ 。图 1-32(b)所示的图 G 中, 选定的树 $\{1, 2, 3\}$, 画出了 3 个割集如图中虚线所示, C_1 为 $\{3, 4, 5\}$, C_2 为 $\{2, 4, 6\}$, C_3 为 $\{1, 5, 6\}$ 。

以上两个图中所作的割集都符合基本割集的定义, 即每个割集中有且仅有一条树支支路。可见, 基本割集数与树支数相同。通常选择基本割集中树支的方向作为基本割集的方向, 或者说是基本割集与封闭面的方向关系。对于一个封闭面, 其方向不外乎向里或向外, 用箭头标在切割弧线的端子上, 如图 1-32(a)所示。

基本割集与树密切相关, 尽管一个图可以选取许多种树, 但一种树只能有唯一的一组基本割集。

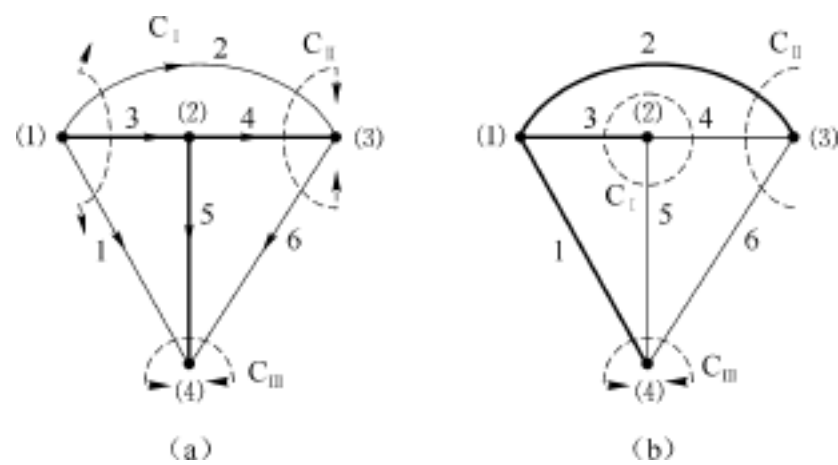


图 1 -32 基本割集

3 基本回路

在每一个回路中只包含一条连支的回路。在图 1 -33(a)中,若选树{3,4,5},则有

基本回路 {1,3,5},基本回路 {2,3,4},基本回路 {6,5,4};

图 1 -33(b)中,若选树 {3,4,1},则有

基本回路 {5,1,3},基本回路 {2,3,4},基本回路 {6,1,3,4}。

需特别注意回路 的画法,回路中只有一条连支支路,所以属基本回路。这是由所选树唯一地决定了余树,同时决定了基本回路的画法,所以说对于一种树有一组唯一的基本回路。选择连支的方向作为基本回路的方向,如图 1 -33(b)中标出的基本回路的方向与连支的方向一致。

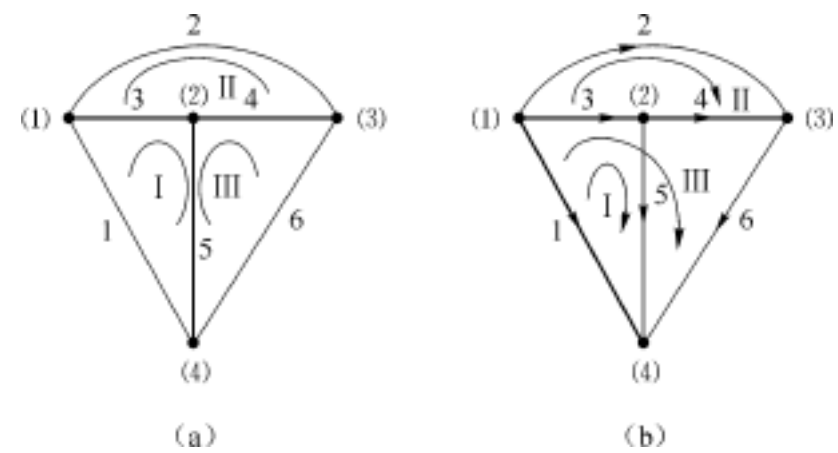


图 1 -33 基本回路

1 4 4 基尔霍夫方程的独立性

1 . KCL 方程的独立性

再看图 1 -32(a)中有向图,有 6 条支路 ($b = 6$), 4 个节点 ($n = 4$), 所以树支是 $n - 1 = 3$ 。选定树{3,4,5}, 并已画出基本割集如图, 以树支方向作为基本割集的方向(方向向里或者向外)。列出每个基本割集的 KCL 方程如下

$$\begin{aligned} C \quad i_1 + i_3 + i_2 &= 0 \\ C \quad i_2 + i_4 - i_6 &= 0 \\ C \quad i_1 + i_5 + i_6 &= 0 \end{aligned}$$

每个方程有一个树支支路电流是其他方程所没有的, 各方程互相不能推出, 可以保证是独立的。所以说按基本割集列出的 KCL 方程组是独立的, 独立方程数是 $n - 1$ 。

2 . KVL 方程的独立性

再看图 1 -33(b), 选定树 {1, 3, 4}, 余树为{2, 5, 6}, 连支数为 $L = b - n + 1 = 3$ 。图中画出了基本回路, 并以连支方向作为回路绕行方向。写出各基本回路的 KVL 方程如下

基本回路

$$u_5 - u_1 + u_3 = 0$$

基本回路

$$u_2 - u_4 - u_3 = 0$$

基本回路

$$u_6 - u_1 + u_3 + u_4 = 0$$

三个方程各含有一个连支电压是其他方程所没有的, 互相不能推出, 保证是独立的。所以按基本回路列出的 KVL 方程互相是独立的, 独立的 KVL 方程数等于连支数 $L = b - n + 1$, 这就证明了上一节的有关结论。

基尔霍夫定律是集总参数电路的基本定律, 要保证列出的方程是互相独立的, 这样才能有效地用方程组分析计算电路, 这一点是至关重要的。

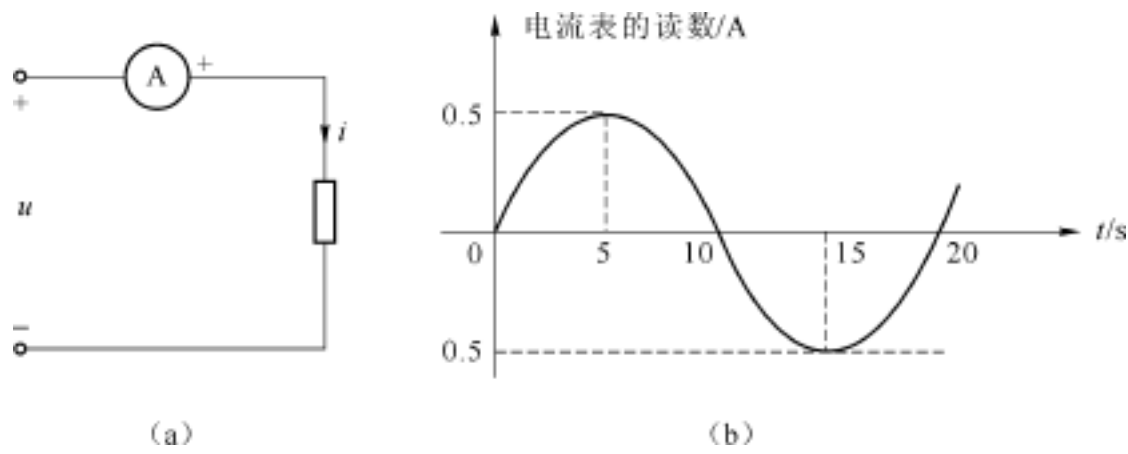
1 4 5 独立的变量与完备的变量

上面解决了如何列出全部独立的 KCL 方程和 KVL 方程, 但是并不是在任何情况下都需要列出全部的定律方程, 分析电路时选取变量的方式决定了所需定律方程的数量。图论介绍的树支电压就是一组独立完备的变量, 根据它的定义, 树支电压不能形成回路, 因此树支电压是互相独立的; 同时树支连接了全部的节点, 一旦求出了树支电压, 则可以求出所有支路电压, 所以树支电压作为变量是完备的。同理, 连支电流也是一组独立完备的变量。如何选取变量的问题将在第三章中详细介绍。

习题一

1-1 物理尺寸 1 2m 的电路 , 对于广播频率 500MHz 是什么电路 ? 而对市电 50Hz 又是什么电路 ?

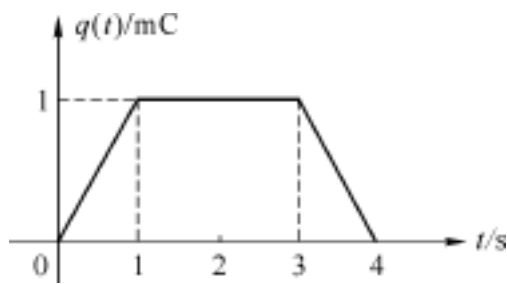
1-2 题图 1 -2(a)中, 若电流从电流表 A 的“ + ”端流入, 表针正偏; 从“ + ”端流出, 表针反偏。同图(b)是表 A 的读数随时间变化的曲线。设电流 i 的参考方向如图(a)中箭头所示, 试确定 $t = 5\text{s}, 10\text{s}$ 和 15s 时 i 的数值。



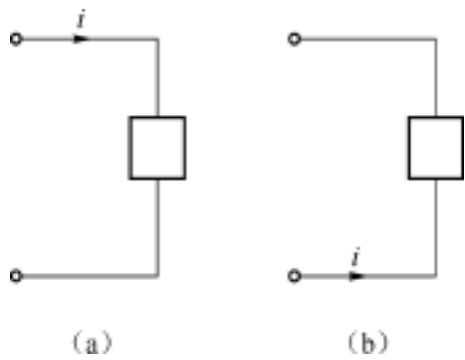
题图 1 -2

1-3 题图 1 -3 系存储于某二端元件中的电荷量 $q(t)$ 的波形图, 试画出流过此二端元件的电流 $i(t)$ 的波形图。

1-4 已知题图 1-4 中各支路吸收功率 $p = 100\text{ W}$, 电流 $i = 5\text{ A}$, 求各支路电压 u , 并标明其真实极性。



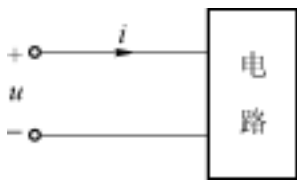
题图 1-3



题图 1-4

1-5 支路电压 $u = 10\cos 314 t\text{ V}$, 若从电压参考极性“+”端进入支路的正电荷量 $q = 6\sin 314 t\text{ mC}$, 求支路在 $t = \pi / 314\text{ s}$ 时吸收的功率。

1-6 如题图 1-6 所示的二端网络电路, 其中电压 u 和电流 i 的参考方向给定, 在 $0 \leq t \leq 3\text{ ms}$ 期间内, 电压 $u(t) = (300 t + 1)\text{ V}$, 电流 $i(t) = 2 t\text{ A}$, 求:

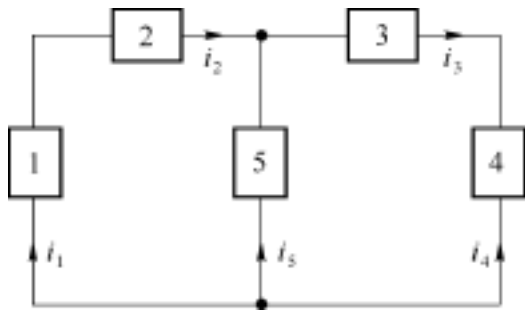


题图 1-6

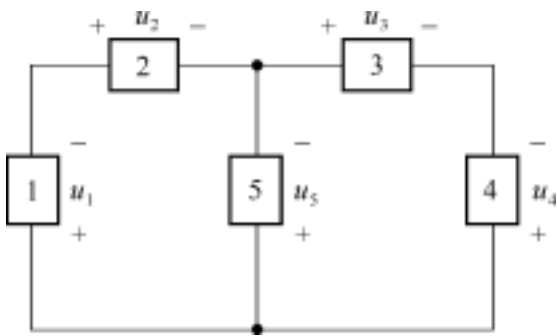
- (1) 电路的瞬时功率 $p(t)$;
- (2) 电路的瞬时电能 $w(t)$;
- (3) $t = 3\text{ ms}$ 时电路中总能量。

1-7 题图 1-7 电路中, 已知 $i_2 = (3 + 2 t)\text{ A}$, $i_3 = (-3 + \sin t)\text{ A}$, 求电流 i_1 , i_4 和 i_5 。

1-8 已知题图 1-8 电路中, $u_1 = (2 + 7 t)\text{ V}$, $u_4 = (-4 + \sin t)\text{ V}$ 和 $u_5 = (3 + e^{-t})\text{ V}$, 求 u_2 和 u_3 。



题图 1-7



题图 1-8

1-9 计算题图 1-9 电路中所有支路的电流和电压。

1-10 电路如题图 1-10 所示, 已知 $U_{s1} = 10\text{ V}$, $U_{s2} = 5\text{ V}$, $R_1 = R_2 = 3\text{ k}\Omega$, 求: (1) 开关 K 闭合时的电压 u_{ab} , u_{ac} ;

(2) 开关 K 断开时的电压 u_d , u_{dc} 。

1-11 求题图 1-11 所示电路中电压源和电流源发出的功率。

1-12 求题图 1-12 所示电路中 5 V 电压源的功率。

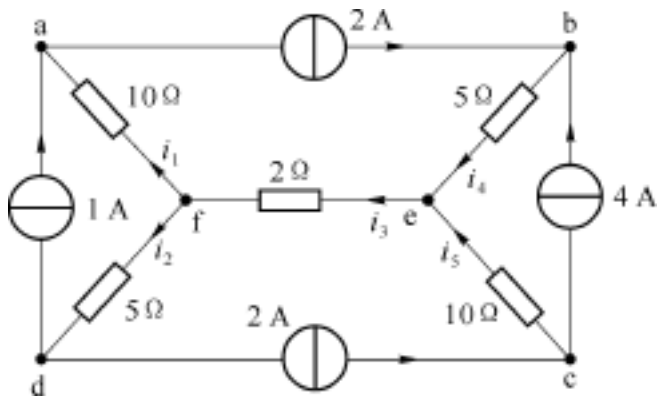
1-13 下列基尔霍夫定律方程组哪组是独立的? 哪组是不独立的?

(1) $\begin{cases} -i_1 - i_2 + i_4 = 0 \\ -i_3 + i_4 - i_5 = 0 \\ -i_1 - i_2 + i_3 + i_5 = 0 \end{cases}$

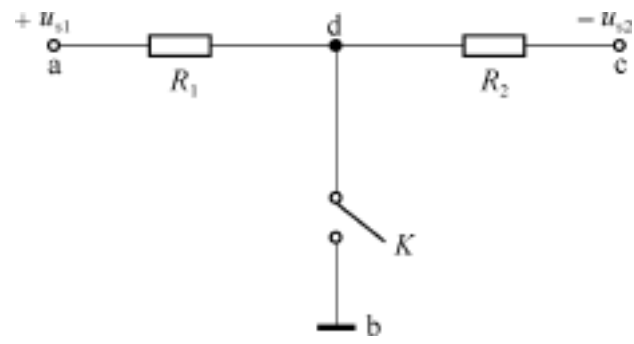
(2) $\begin{cases} i_1 - i_4 + i_5 = 0 \\ i_2 - i_5 + i_6 = 0 \\ i_3 - i_6 + i_7 = 0 \end{cases}$

$$(3) \begin{cases} -u_2 - u_4 + u_5 = 0 \\ u_1 + u_4 = 0 \\ -u_3 - u_5 - u_6 = 0 \end{cases}$$

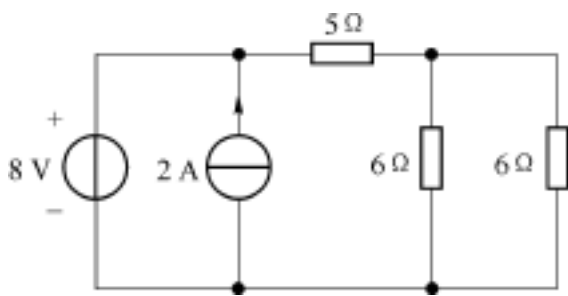
$$(4) \begin{cases} -u_1 - u_2 + u_3 = 0 \\ u_2 + u_4 = 0 \\ u_1 - u_3 - u_4 = 0 \end{cases}$$



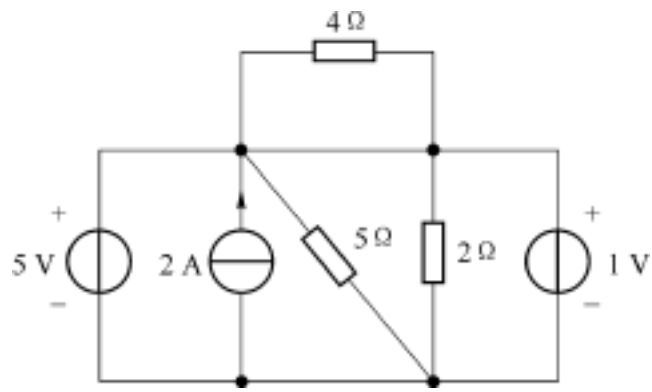
题图 1-9



题图 1-10

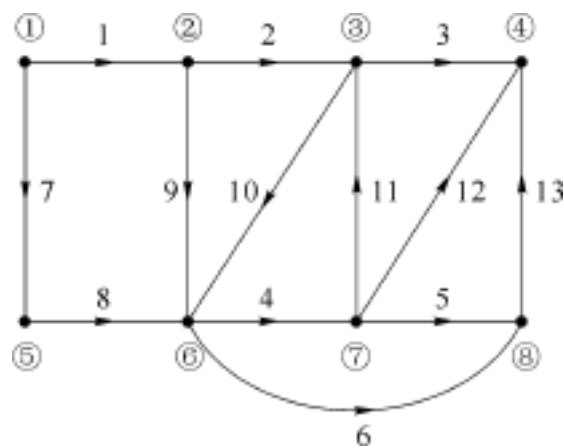


题图 1-11



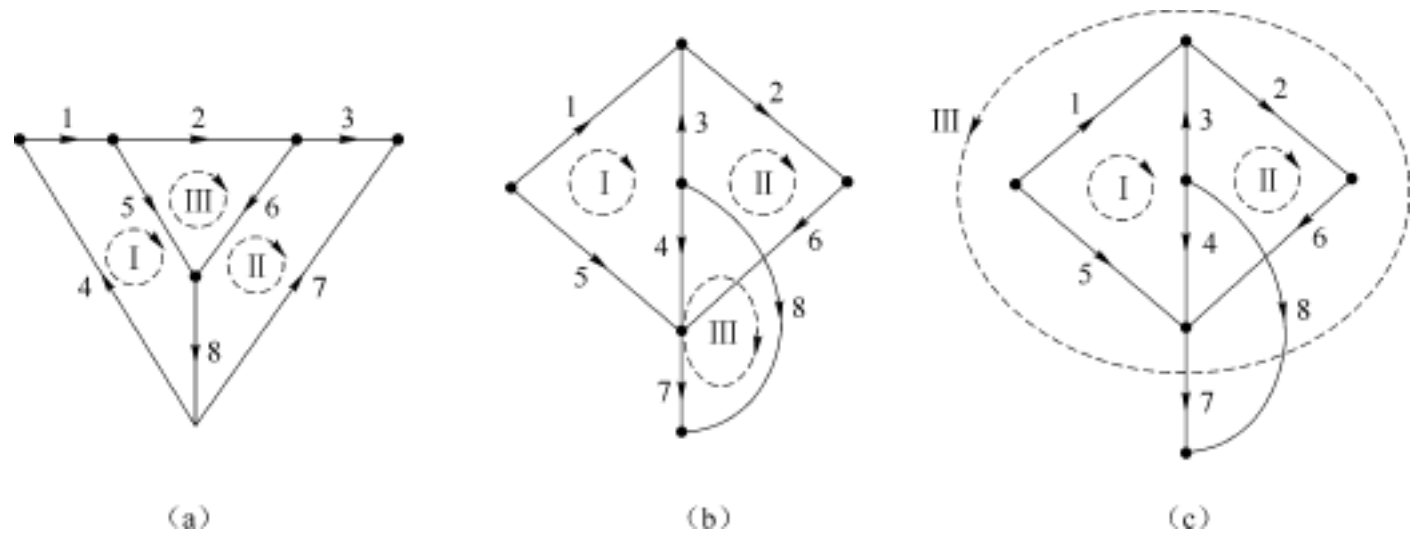
题图 1-12

1-14 写出题图 1-14 所示有向图中每一节点的 KCL 方程,并确定一组独立的 KCL 方程。



题图 1-14

1-15 按照题图 1-15 中标出的回路参考方向,写出每个回路的 KVL 方程,并判定列出的各个网络回路方程组的独立性。



题图 1-15

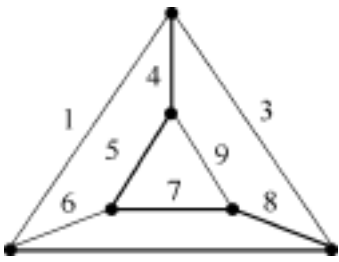
1-16 某电路的线图如题图 1-16 所示,若选 4,5,7,8,2 支路为树,写出电路的基本割集、基本回路。

1-17 连通图如题图 1-16 所示,

(1) 指出下列各个支路集合中,哪些集合中是电路的割集,哪些是树?

(1,4,8,2), (1,3,5,7), (1,3,5,7,8), (1,6,2), (4,9,5,8,2), (5,7,9)

(2) 确定网络的一组独立电流变量,并用这组电流变量表示各支路电流。

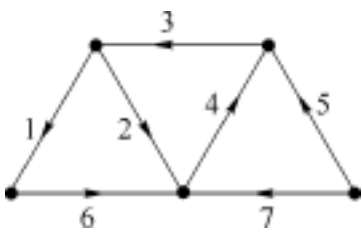


题图 1-16

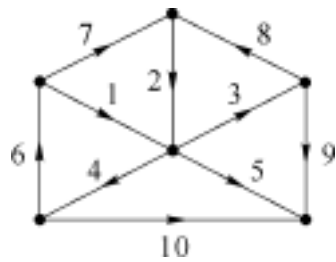
1-18 题图 1-18 为一电路的有向图,若选支路 1、4、6、7 为树枝,试画出对应于该树的一组基本割集,列出基本割集电流方程。

1-19 某电路的线图如题图 1-19 所示,若选 2,4,5,7,8 支路为树,写出电路的基本割集。

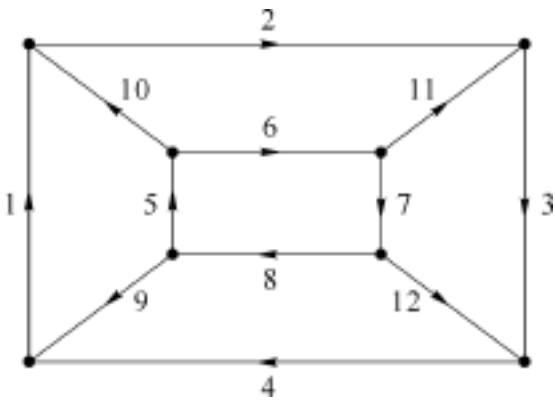
1-20 选定题图 1-20 中有向图的两种树(分别由支路 6,7,8,9,10,11,12;支路 1,2,9,11,6,8,4 组成),对于每一种树,确定一组基本割集,列出基本割集方程 KCL 组;确定一组基本回路,列出基本回路 KVL 方程组。



题图 1-18



题图 1-19



题图 1-20

第二章 电路元件与电路的等效变换

电路分析问题,大体可有两类基本方法:电路方程方法和等效变换方法。这里开始学习最基本的等效变换方法,即运用“等效”的概念,将结构比较复杂的电路,变换为结构简单的电路,用以分析计算电路或某部分电路的电流、电压和功率。等效的概念是电路理论中一个十分重要的概念,它贯穿电路分析课程的始终。利用电路的等效变换来分析电路,是电路分析中常用的方法。

2.1 电阻元件

2.1.1 电阻的伏安特性

电阻元件(简称电阻)是从实际电阻器抽象出来的模型。线性电阻的电路符号如图 2-1(a)所示,在电阻中的电流与其两端的电压的真实方向总是一致的,在电压、电流为关联参考方向条件下,其伏安关系用欧姆定律来描述,即

$$R = u / i \text{ 或 } u = R \cdot i \tag{2-1}$$

其中电阻值 $R = u / i$ 为一正常数,与流经本身的电流及两端电压无关。伏安关系可由图 2-1(b)表示,在伏安平面上是通过坐标原点的一条直线,并位于第一、三象限。或者说满足式(2-1)欧姆定律关系的电阻元件称为线性电阻。

线性电阻也可以用另一个电路参数——电导——来表示,其符号为 G 。 G 与 R 成倒数关系,如式(2-2)所示,线性电导也是一常数。

$$G = \frac{i}{u} = \frac{1}{R} \tag{2-2}$$

2.1.2 电阻的单位

在国际单位制中,电压的单位为伏(V),电流的单位为安(A),电阻的单位为欧姆(简称欧,用符号 Ω 表示)。

$$1 \text{ 欧} = 1 \text{ 伏/安}$$

电导 G 的单位为西门子,用符号 S 表示。

2.1.3 电阻的功率

电阻是消耗能量的,式(2-1)说明:当电压一定时,电阻越大电流越小,电阻体现了对电流的阻力。电阻对电流既有阻力,电流通过电阻时就要消耗能量,线性电阻的功率

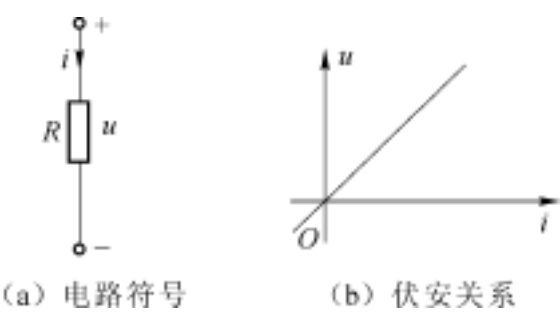


图 2-1 线性电阻的电路符号和伏安关系

$$p = u \cdot i = R \cdot i^2 = \frac{u^2}{R} \tag{2-3}$$

在式(2-3)中, i^2 (或 u^2) 总为正, 电阻元件的阻值是正的常量, 所以电阻吸收的功率总为正值, 说明电阻总是消耗电能, 电阻是一种耗能元件, 这是电阻的重要特性。利用电阻消耗电能并转化成热能的性能可以用其制作成各种电热器。换句话说, 电阻表征电路部件消耗电能的特性, 除了实际电阻以外, 可以是电灯、烙铁、电动机等部件的理想电路模型。

2.1.4 电阻的即时性

电阻元件的另一个重要特性, 是在任一时刻, 电阻两端的电压是由此时电阻中的电流所决定的, 而与过去的电流值无关; 反之, 电阻中的电流是由此时电阻两端电压所决定的, 而与过去的电压值无关。从这个意义上讲, 电阻是一种无记忆元件, 就是说电阻不能记忆过去的电流(或电压)在历史上所起的作用。

2.1.5 非线性电阻

实际上电阻元件也是某些电子器件的理想电路模型, 例如半导体二极管, 它的电路模型和伏安关系分别如图 2-2(a)、(b) 所示, 它的伏安关系不再是通过坐标原点的直线, 而是曲线, 称此器件为非线性电阻。非线性电阻的阻值不是常量, 而是随着电压或电流的大小、方向而改变, 所以不能再用一个常数来表示, 也不能用式(2-1)的欧姆定律来定义它。

观察图 2-2(b) 所示半导体二极管伏安特性曲线, 以及图 2-3 所示的隧道二极管和充气二极管伏安特性曲线。表示出它们的伏安特性曲线, 对坐标原点来说是不对称的。我们知道, 所有线性电阻的伏安特性都是直线, 对坐标原点都是对称的, 说明它们都具有双向性, 与电流的方向和电压的极性无关。而大部分非线性电阻的伏安特性曲线对坐标原点不对称, 说明二极管的正向联接和反向联接, 其伏安关系不同。例如图 2-2(b) 所示半导体二极管, 当其电压与电流都为正时, 即正向特性的电阻值比较小, 如坐标第 一象限电流以毫安为单位; 当其电压与电流都为负时, 即反向特性的电阻值很大, 如坐标第 二象限电流以微安为单位。因此, 在使用非线性电阻如半导体二极管时, 必须注意它的两个端钮的连接方式。

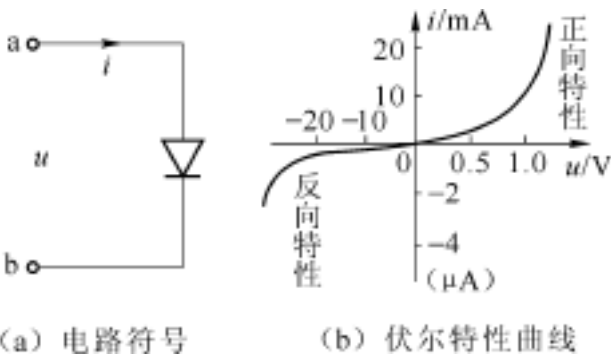


图 2-2 非线性电阻的电路符号和伏安关系

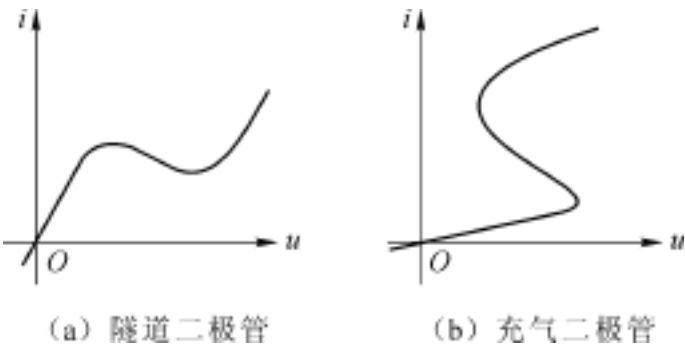


图 2-3 非线性电阻的伏安特性曲线

从图 2-3 所示的隧道二极管和充气二极管的伏安特性曲线, 不难发现非线性电阻还可能出现多值的问题, 即在同一个电流值下, 有多个电压与之对应, 或同一个电压值下, 有多个电流与之对应。因此电路的解答有可能出现多值性, 所以含有非线性电阻电路分析, 要比线性电路复杂。本书主要介绍线性电路的知识, 非线性电阻电路的内容将在第十三章作简单介绍。

2.1.6 电阻的一般性定义

基于电阻的以上特性,给电阻元件定义如下:如果一个二端元件在任一瞬间 t ,其电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 两者之间的关系,由 $u-i$ 平面(或 $i-u$ 平面)上一条曲线所决定,则此二端元件称为电阻元件。此曲线就是以上提到的伏安特性曲线。

2.1.7 其他

在一般的电阻定义下,某些电子设备的伏安特性可以等效为电阻,甚至实现负电阻的功能,负电阻 r 的电压与电流在关联参考方向下,它们的关系为 $u = ir$,式中 r 为常量,且 $r < 0$ 。它所吸收的功率 $p = ui = i^2 r$,所以, p 总为负值。功率为负说明这个元件实际上是供出功率,即负电阻元件可以对外提供能量。这是这些电子设备在特定的条件下,所反映出来的外部特性。具体的电路将在后续课程中研究。

另外,由于电子设备的电阻特性,即电流流过电阻时不可避免地要产生热量,因此在电子设备的设计中,有时必须考虑散热问题,研究额定功率问题。同时,只有在允许的电压、电流范围内才能用线性电阻模拟实际部件。

2.2 电容元件

两块金属极板中间放入介质就构成一个简单的电容器。当接通电源后两块极板上聚集了数量相等、符号相反的电荷,在极板之间就形成了电场。所以电容器是一种能储存电荷的器件,它具有储存电场能量的性能。这是它的主要物理特性。如果不考虑电容器的热效应和磁场效应,则它就抽象为电容元件。电容元件是实际电容的理想电路模型,或者说电容元件是用来表征储存电场能量的电路模型。

2.2.1 电容元件的定义

一个电容元件,其电路符号如图2-4(a)所示,如果其特性曲线为 $q-u$ 平面上经过坐标原点且在 一、三 象限的一条直线,其斜率不随电荷或电压而变,如图2-4(b)所示,则称该电容元件为线性电容,即

$$C = \frac{q}{u} \text{ 或 } q = Cu \quad (2-4)$$

式中 C 为正常数,称电容量(简称电容),习惯上常把电容元件也简称为电容。

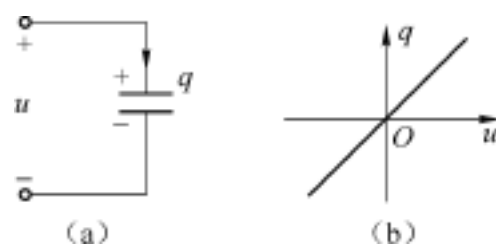


图2-4 线性电容的电路符号及特性曲线

2.2.2 电容的单位

在国际单位制中,电容 C 的单位为法拉(简称法,用符号 F 表示)。此时电荷的单位为库仑(C),电压的单位为伏特(V),即

$$1 \text{ 法拉(F)} = \frac{1 \text{ 库仑(C)}}{1 \text{ 伏特(V)}}$$

但法拉这个单位对于实际电容是太大了,常用单位是微法(μF)和皮法(pF), $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$; $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ 。

2.2.3 电容的伏安特性

虽然电容是根据 $q-u$ 关系定义的,但在电路中常用的变量是电压和电流,即我们感兴趣

的是电容元件的伏安关系。由电流的定义 $i = \frac{dq}{dt}$ 和电容的定义 $C = \frac{q}{u}$ 可推出电容元件的伏安关系。

$$i_c = \frac{dq}{dt} = \frac{dCu_c}{dt} = C \frac{du_c}{dt} \tag{2-5}$$

图 2-4(a) 中, 因为当 $i_c > 0$ 时, 正电荷被输送到上面极板, 称为电容被充电, 电压是增加的, 所以当电压与电流为关联参考方向时, 电容的伏安关系如式 (2-5)。若电压与电流为非关联方向时如图 2-5 所示, 电容的伏安关系要加一个负号, 即

$$i_c = - C \frac{du_c}{dt}$$

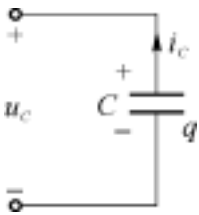


图 2-5 非关联方向的伏安关系

电容的伏安关系表明通过电容的电流与其两端电压的变化率成正比, 若电压稳定不变, 其电流必为零。例如当电容充电结束后, 电容电压虽然达到某定值 U_0 , 但其电流却为零。这和电阻元件有本质的不同, 电阻两端只要有电压存在, 电阻中的电流就一定不为零。

电容的伏安关系还表明, 在任何时刻如果通过电容的电流为有限值, 那么电容上电压就不能突变; 反之, 如果电容上电压发生突变, 则通过电容的电流将为无限大。电容的这一重要性质和其他特性将在第五章的瞬态分析中进一步讨论。

2 2 4 电容的功率和储能

一个电容当其电压 u 和电流 i 在关联参考方向下, 它吸收的功率

$$p = u_c i_c$$

电容吸收的能量:

$$\begin{aligned} w_c &= \int_{-\infty}^t p_c(\) d\ = \int_{-\infty}^t u_c i_c d\ \\ &= \int_{-\infty}^t u_c C \frac{du_c}{dt} dt = C \int_{u_c(-\infty)}^{u_c(t)} u_c(\) du_c(\) \\ &= \frac{1}{2} C u_c^2(\) \Big|_{u_c(-\infty)}^{u_c(t)} = \frac{1}{2} C [u_c^2(t) - u_c^2(-\infty)] \\ w_c &= \frac{1}{2} C u_c^2 \end{aligned} \tag{2-6}$$

积分式的下限是负无穷大, 它的含义是“ 从头开始 ”, 此时电容还未被充电, 即 $u_c(-\infty) = 0$; 上限 t 是观察时间。式 (2-6) 说明电容在某一时刻的储能取决于该时刻电容上的电压值, 当电压随时间变化时, 电容储能也随时间变化。但能量总是正值。

例 2-1 已知图 2-6(a) 电容电压波形如图 (b) 所示, 设 $C = 1\text{ F}$, 求电容电流 $i_c(t)$ 并画出它的波形。

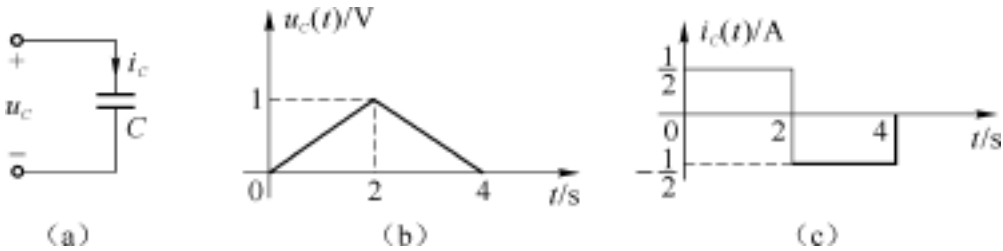


图 2-6 例 2-1 图

解 由电容的波形写出电容电压的数学表达式

$$u_C(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & (0 < t < 2) \\ -\frac{1}{2}t + 2 & (2 < t < 4) \end{cases}$$

由图 2-6(a) 可知电流与电压在关联参考方向下

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

可以计算出电流的表达式

$$i_C(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ A} & (0 < t < 2) \\ -\frac{1}{2} \text{ A} & (2 < t < 4) \end{cases}$$

画出波形如图 2-6(c) 所示。

由图可知, 电容电流 i_C 有时为正有时为负。当 $0 < t < 2$ 时, i_C 为正, 表明对电容充电, 电荷增加能量也增加; 当 $2 < t < 4$ 时, 电流 i_C 为负, 表明电容放电, 即释放能量; 当 $t = 4$ 时能量释放完毕, 电压为零。在整个充电与放电过程中电容本身不消耗能量。

2 2 5 非线性电容与时变电容

凡是不满足线性定义的电容元件, 就称为非线性电容。一个电容元件, 如果电容量是时间 t 的函数 $C(t)$, 那么 $C(t)$ 将表示不同时刻 $q-u$ 特性曲线的斜率, 这个电容就称为时变电容。图 2-7(a)、(b)、(c) 分别画出了线性非时变电容、非线性非时变电容和线性时变电容 $q-u$ 特性曲线。

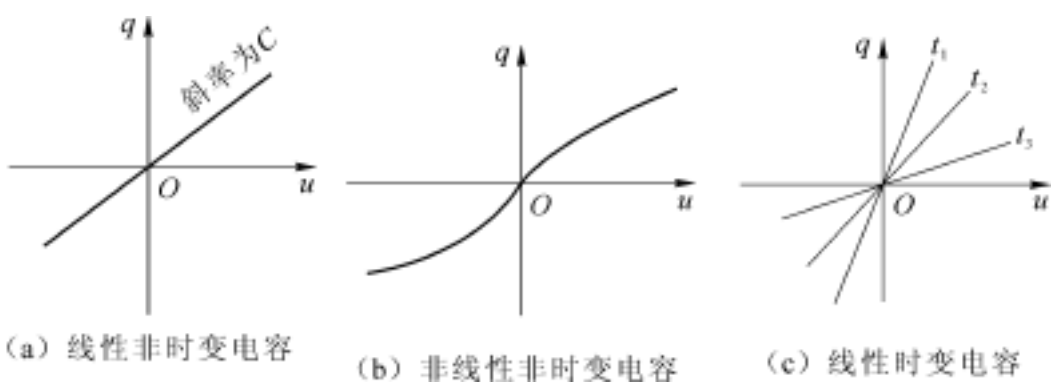


图 2-7 电容的 $q-u$ 特性曲线

因此可以将电容定义为: 一个二端元件, 在任一时刻 t , 它的电荷 q 与端电压 u 之间的关系可以用 $u-q$ 平面上的一条曲线来确定, 则称该二端元件为电容元件。

2 3 电感元件

绕在螺线管或铁心上的一个线圈, 当线圈中有电流通过时, 在线圈周围就形成一个磁场, 磁场中储存着磁场能量, 这种器件称为电感器。如果不考虑电感器的热效应和电场效应, 即抽象为电感元件, 它是实际电感器的理想化模型, 表征了电感器的主要物理特性, 即电感元件具有储存磁场能量的性能。

2 3 .1 电感元件的定义

一个二端元件,如果在任一时刻 t , 它的磁链 ψ 和通过它的电流 i 之间的关系可以用 $i-\psi$ 平面上的一条曲线来确定, 则此二端元件称为电感元件。电感元件的符号如图 2-8(a) 所示, 图中磁链的方向与电流的方向一致, “+”、“-”号表示电压的参考方向。

如果在 $i-\psi$ 平面上, 电感元件的特性曲线是通过坐标原点并处在第 I、III 象限的一条直线, 且不随磁链或电流而变化, 如图 2-8(b) 所示, 则称其为线性时不变电感元件, 即

$$L = \frac{\psi}{i}, \text{ 或 } \psi = Li \tag{2-7}$$

式中 L 为一个与 ψ 、 i 无关的正常数, 称为电感量, 简称电感。式中 ψ 为磁链, 磁链与电流的大小及方向有关。

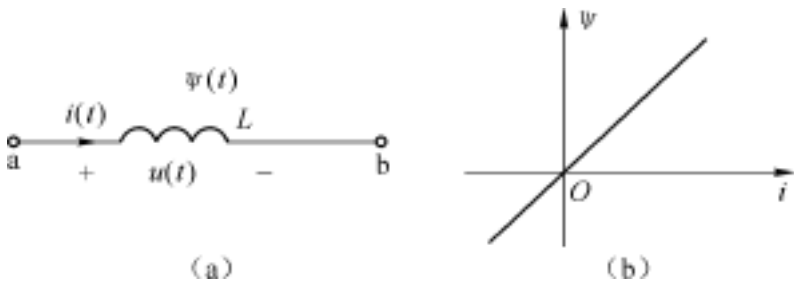


图 2-8 线性时不变电感元件

2 2 .2 电感的单位

在国际单位制中, 电感 L 的单位为亨利(简称亨, 用符号 H 表示), 此时磁链的单位为韦伯(Wb), 电流的单位为安培(A), 即

$$1 \text{ 亨利(H)} = \frac{1 \text{ 韦伯(Wb)}}{1 \text{ 安培(A)}}$$

常用单位是毫亨(mH)或微亨(μ H)。

2 2 .3 电感的伏安特性

与电容元件类似, 虽然电感是根据 $i-\psi$ 关系定义的, 但在电路中常用的变量是电压和电流, 即我们感兴趣的是电感元件的伏安关系。在电感中变化的电流产生变化的磁链, 变化的磁链会在电感两端产生感应电压。这个电压是由法拉第的电磁感应定律给定的

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} \tag{2-8}$$

再加上电感的定义 $\psi = Li$ 可推出电感元件的伏安关系

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L \frac{di}{dt} \tag{2-9}$$

式中磁链单位是韦伯, 电压的单位是伏特, 电流单位是安培。需要强调的是这里的电压与电流是在关联参考方向下, 如图 2-8(a) 所示。公式(2-9)符合楞次定律。楞次定律指出, 当电感中的电流变化时电感两端会产生感应电压, 而感应电压的极性是對抗这个电流的变化的。若电流增加, 即造成了磁场的增强, 因而磁链增大, 由公式(2-8), 得 $u(t) > 0$, 它意味着 a 点电位高于 b 点电位, 这一极性正是對抗电流进一步增加的。

当电流与电感在非关联方向时, 其伏安关系应为

$$u_L = - L \frac{d i_L}{d t}$$

电感的伏安关系表明通过电感的两端电压与其中电流的变化率成正比,若电流稳定不变,其电压必为零。例如当直流电流通过电感,电感两端电压为零,电感犹如短路线。电感的伏安关系还表明,在一般条件下电感电流不会发生突变,电感电压是有限值,反之,如果电感电流发生突变,则电感两端的电压将为无限大。电感的这一重要性质和其他特性将在第五章瞬态分析中详细讨论。

2 3 4 电感的功率和储能

一个电感当其电压 u 和电流 i 在关联参考方向下,它吸收的功率

$$p = u i$$

电感吸收的能量:

$$\begin{aligned} w_m &= \int_{-\infty}^t p_L(\cdot) d\cdot = \int_{-\infty}^t u_L(\cdot) i_L(\cdot) d\cdot = \int_{-\infty}^t L \frac{d i_L(\cdot)}{d\cdot} i_L(\cdot) d\cdot \\ &= \int_{i_L(-\infty)}^{i_L(t)} L i_L(\cdot) d i_L(\cdot) = \frac{1}{2} L [i_L^2(t) - i_L^2(-\infty)] \end{aligned}$$

设 $i_L(-\infty) = 0$,则电感储能

$$w_m = \frac{1}{2} L i_L^2 \tag{2-10}$$

积分式的下限是负无穷大,此时电感还没有电流通过,即 $i_L(-\infty) = 0$;上限 t 是观察时间。式(2-10)说明电感在某一时刻的储能取决于该时刻电感上的电流值,当电流随时间变化时,电感储能也随时间变化。电感储存的磁场能量与 $i_L(t)$ 有关,也与电感量 L 有关。

电感元件与电容元件的特性存在可类比性,称之为对偶性。在理解和记忆的过程中利用这种对偶性,将是非常有益的。关于对偶性将在后面的内容中进一步介绍。

例 2-2 如图2-9(a)所示电感上,电流与电压为关联参考方向,若已知电流的波形如图 2-9(b)所示,试画出电压的波形,功率和能量波形,设 $L = 1\text{H}$ 。

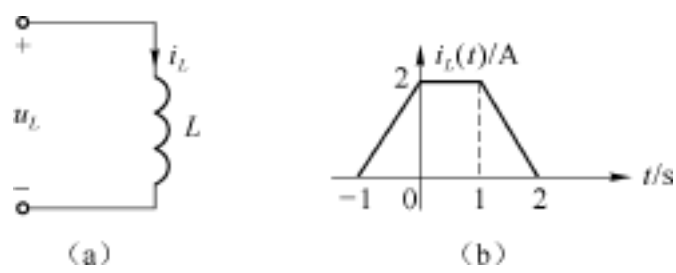


图 2-9 例 2-2 图

解 根据公式(2-9)和公式(2-10)直接画出电压、功率和能量波形,分别如图 2-10(c)、(d)、(e)所示。

由图(d)、(e)可知,电感瞬时功率有时为正有时为负。当 $-1 < t < 0$ 时, p 为正,表明对电感充电,能量增加; $t = 0$ 时能量增加到 2 J;当 $0 < t < 2$ 时,电流保持稳定值 2 A,所以电压等于零,而能量保持在 2 J,表明电感既不增加能量又不释放能量;当 $2 < t < 3$ 时, p 为负,电压为负,表明电感放电,即释放能量;当 $t = 3$ 时能量释放完毕。在整个过程中电感本身不消耗能量。

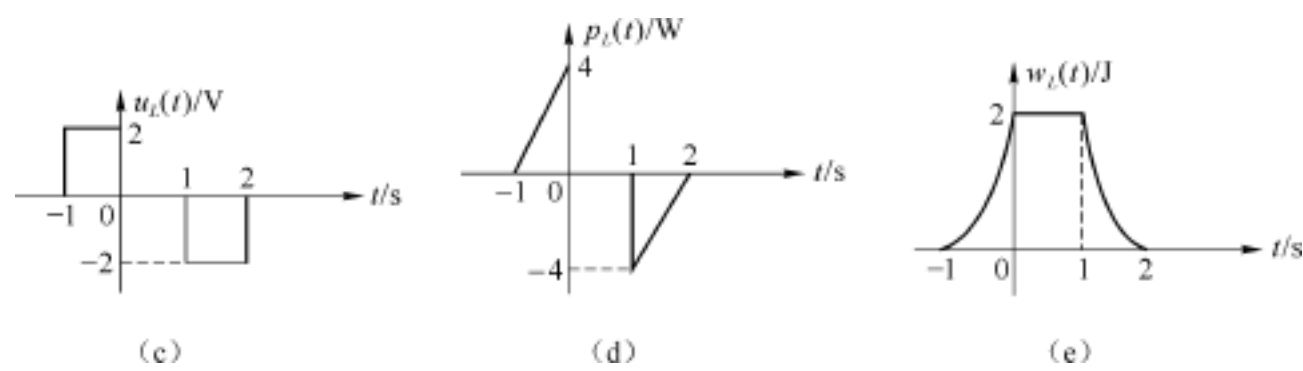


图 2-10 例 2-2 解图

2.4 电阻网络的等效变换

首先介绍等效二端网络的概念,一个二端网络只有两个端钮和外电路相联接,如果两个二端网络 N_1 和 N_2 如图 2-11(a)、(b)所示,如果它们端口上的外特性即伏安关系完全相同,那么这两个二端网络 N_1 和 N_2 等效。尽管这两个网络可以具有不同的内部结构,但对外电路来说它们具有完全相同的作用。本节介绍的二端网络可称为无源二端网络,因为网络中不含有电源元件。

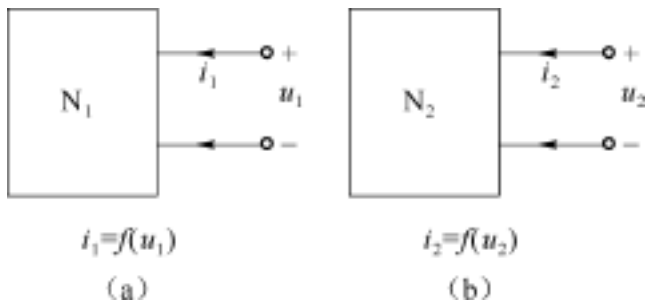


图 2-11 等效二端网络

2.4.1 电阻的串联及分压关系

首先用两个电阻的串联来说明,流过两电阻的是同一个电流。假设电压 u 、 u_1 、 u_2 如图 2-12(a)所示,各个电压均与电流在关联方向下。根据 KVL 和欧姆定律可写出

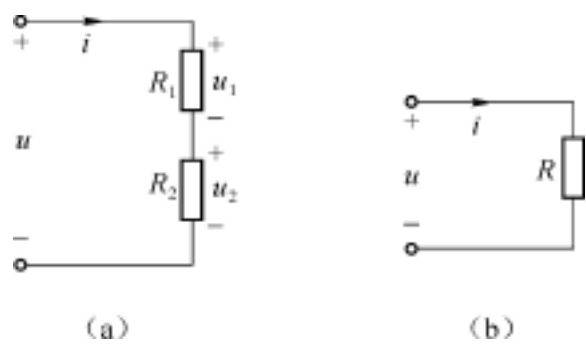


图 2-12 电阻的串联等效电阻

$$u = u_1 + u_2 = R_1 i + R_2 i$$

$$u = (R_1 + R_2) i = Ri$$

其中 $R = R_1 + R_2$,即用图 2-12(b)中的 R 等效代替图(a)中的 R_1 与 R_2 的串联电阻。

研究串联电阻上的电压关系,则有:

$$u_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u$$

$$u_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$

并有

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{R_1}{R_2} \tag{2-11}$$

式(2-11)表示各电阻上电压与电阻成正比分配。推广到 R_1 , R_2, \dots, R_n 串联在一起如图 2-13 所示,流过各电阻的是同一个电流, n 个电阻的串联,若用一个电阻 R 来等效表示,则有

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

其总电压与分电压的关系

$$u_k = \frac{R_k}{R} u \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{2-12}$$

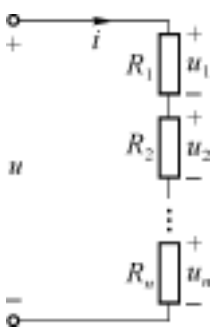


图 2-13 n 个电阻的串联

式(2-11)和式(2-12)就是串联电路的分压公式,表明电阻串

联电路中电压按电阻大小成正比分配,电阻值越大,分配的电压也越大。比如 $R_1 > R_2$, 则 $u_1 > u_2$ 。

2 4 2 电阻的并联及分流关系

图 2-14(a)中 R_1 与 R_2 并联在一起,即两个电阻处在同一个电压下,其中各支路电流均与电压为关联参考方向,若用一个电阻 R 来等效表示,如图 2-14(b)所示。由 KCL 与欧姆定律可得

$$i = i_1 + i_2 = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} = \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] u = \frac{1}{R} u$$

其中
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

或表示为
$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2-13}$$

研究并联电阻上的电流关系,则有:

$$i_1 = \frac{u}{R_1} = \frac{R}{R_1} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

$$i_2 = \frac{u}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

并可推出
$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1} \tag{2-14}$$

式(2-14)是并联电路的分流公式,电流与电阻成反比分配,电阻值越大,分流越小,如 $R_1 > R_2$,则 $i_1 < i_2$ 。若有 n 个电阻并联,则用电导表示比较方便。如图 2-15 所示,各电导处在同一个电压下。若用一个电导 G 来等效表示

$$G = \frac{i}{u} = G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

研究并联电导的分流关系,则有

$$i_k = \frac{G_k}{G} i \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{2-15}$$

式(2-15)也是并联电路的分流公式,它表明电导并联电路中,总电流 i 按各个并联电导值成正比分配,电导值越大,分配到的电流值也越大。

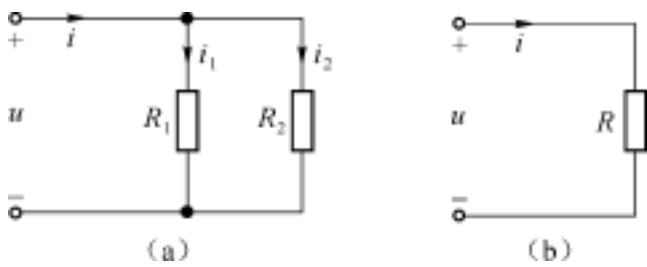


图 2-14 电阻的并联等效电阻

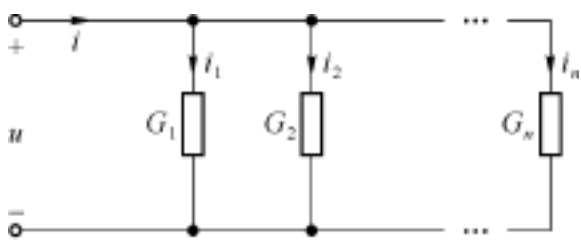


图 2-15 n 个电导并联

2 4 3 电阻混联电路举例

例 2-3 已知电阻网络如图2-16(a)所示,若用一个等效电阻代替它,求等效电阻 R_{AB} 。

解 将电阻网络整理成图 2-16(b)的形式,再用串并联等效关系可求出

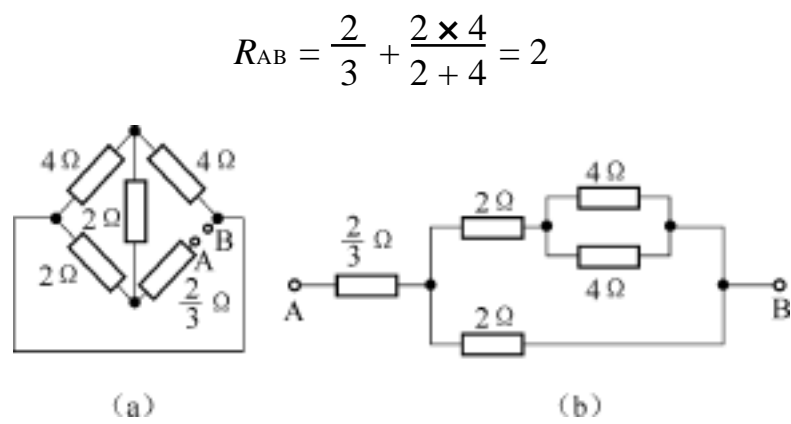


图 2-16 例 2-3 电路

例 2-4 求图2-17(a)电路中各支路电流和电压。

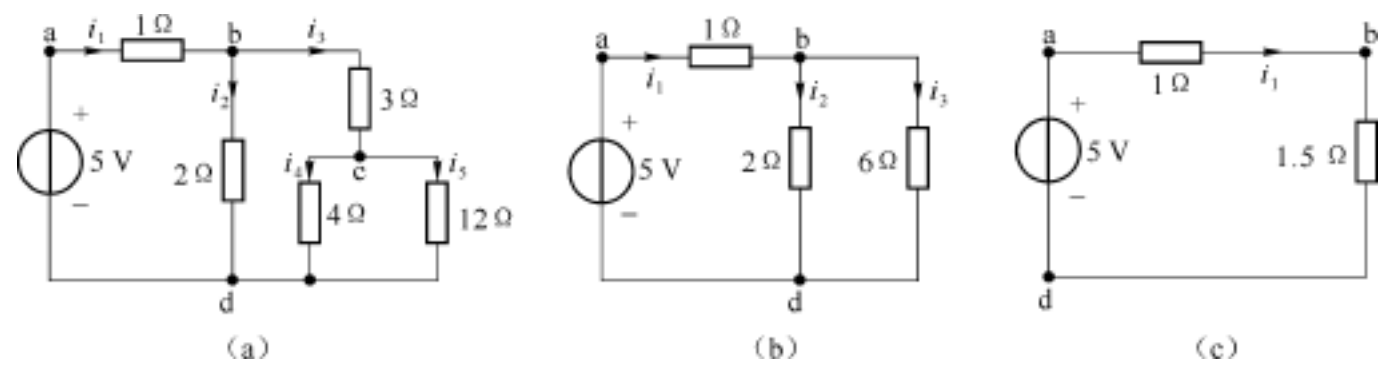


图 2-17 例 2-4 电路

解 我们可以从图 2-17(a)右端支路开始,向左逐步向电源支路化简电路。先求 c、d 之间等效电阻

$$R_{cd} = \frac{4 \times 12}{4 + 12} = 3$$

得到图 2-17(b),再求 b、d 之间等效电阻

$$R_{bd} = \frac{2 \times 6}{2 + 6} = 1.5$$

最后化简成图 2-17(c),故电流

$$i_1 = \frac{5}{1 + 1.5} = 2\text{ A}$$

电压

$$u_{ab} = i_1 \times 1 = 2\text{ V} \quad u_{bd} = i_1 \times 1.5 = 3\text{ V}$$

由图(b)可求出

$$i_2 = u_{bd} / 2 = 1.5\text{ A}$$

或用并联电流分流公式同样可求出。

由 KCL 知

$$i_3 = i_1 - i_2 = 0.5\text{ A}$$

$$u_{bc} = i_3 \times 3 = 1.5\text{ V}$$

$$u_{cd} = u_{bd} - u_{bc} = 1.5\text{ V}$$

最后由图(a)求出

$$i_4 = u_{cd} / 4 = 0.375\text{ A}, i_5 = 0.125\text{ A}$$

例 2-5 图2-18所示分压器电路,利用分压器中滑动触头 C 的滑动,可向负载电阻输出 0 ~ U 的可变电压。已知直流电压源电压 $U = 18\text{ V}$,滑动触头 C 的位置使 $R_1 = 600\ \Omega$, $R_2 = 400\ \Omega$,求输出电压 U_2 ,若用内阻 $1200\ \Omega$ 的电压表去测量此电压,求电压表的读数。

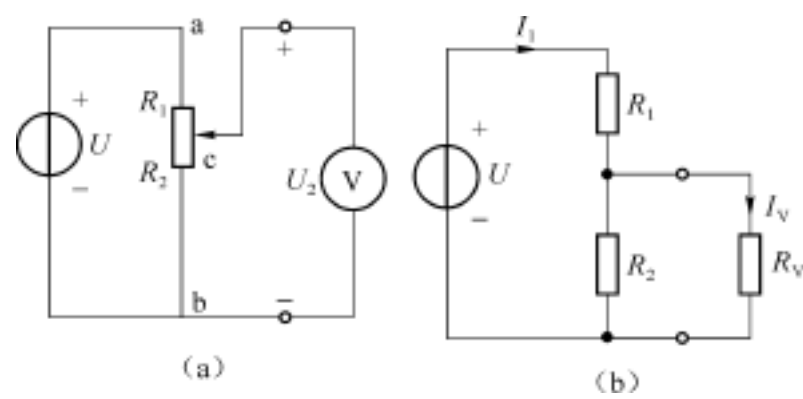


图 2-18 例 2-5 电路

解 未接电压表时,等效电阻

$$R = R_1 + R_2 = 1\,000$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R} U = \frac{400}{1\,000} \times 18 = 7.2\text{ V}$$

当接上电压表后,其中 R_V 表示电压表内阻。等效电阻为

$$R = R_1 + \frac{R_2 R_V}{R_2 + R_V} = 600 + \frac{400 \times 1\,200}{400 + 1\,200} = 900$$

$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{18}{900} = 20\text{ mA}$$

用电流分配公式得

$$I_V = \frac{R_2}{R_2 + R_V} I_1 = \frac{400}{400 + 1\,200} \times 20 = 5\text{ mA}$$

$$U_V = I_V R_V = 5 \times 10^{-3} \times 1\,200 = 6\text{ V}$$

电压表读数为 6 V,可见当电压表内阻不够高时,即当其内阻值与所测量的支路电阻值可比拟时,测得的电压误差比较大。

例 2-6 试计算图2-19所示电阻网络 a、b 间的等效电阻。

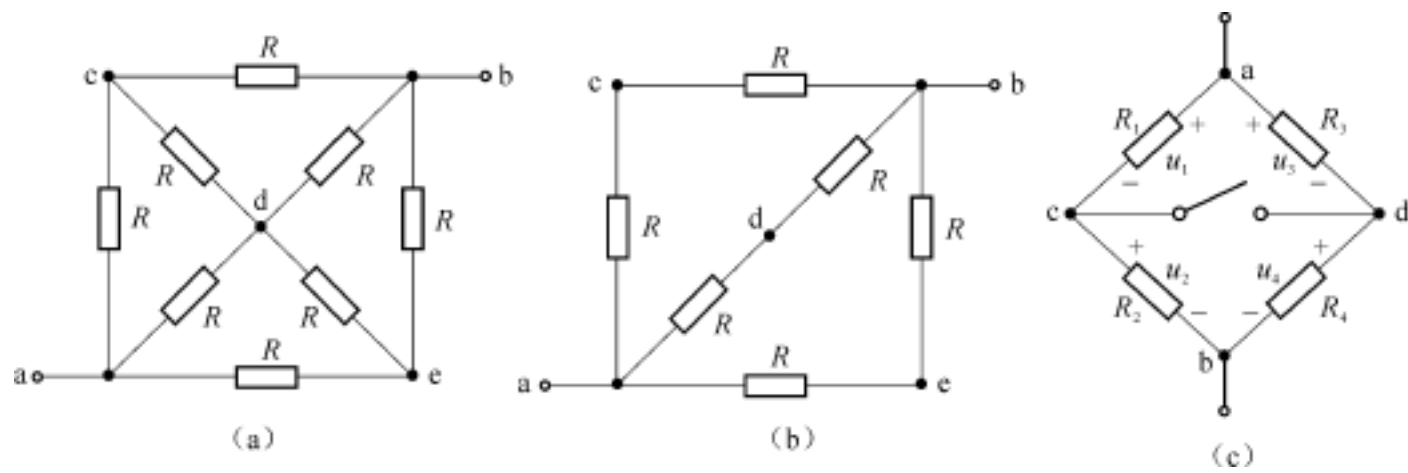


图 2-19 例 2-6 电路

解 先将 c、d 之间电阻和 d、e 之间电阻断开,如图(b)所示,由电桥平衡原理^{*}可知c、d、e 之间为自然等电位。因此,c、d、e 之间无论用短路线连接,还是接入一定的电阻,支路中均无电流通过,可按断开计算。所以可按图(b)求 R_{ab} 。

$$R_{ab} = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} = \frac{2}{3} R$$

注 关于电桥平衡:见图 2-19(c)所示电桥电路,在 c、d 之间短路线开关断开时,电桥电路若有

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

称为电桥平衡,则由各串联支路的电压关系可得

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_3}{u_4} \text{ 和 } u_1 = u_3, u_2 = u_4$$

即称 c 点和 d 点为自然等电位,那么即使在 c、d 之间连接短路线,短路线中也无电流通过。所以 c、d 之间短路线上开关无论是开或关,对于 a、b 间的等效电阻、电压或电流都没有影响。反之,若电桥不平衡,c、d 之间连接短路线中会有电流,此时 c 点和 d 点的电位也是相等的,但称之为强迫等电位。c、d 之间短路线上开关的开或关,电路的工作状态是不同的。

2 4 4 电阻 T 型网络和 型网络的等效变换

在需要对图 2-20(a)所示电阻网络进行简化时,无法直接用串并联电阻的规律等效变换,而图 2-20(b)的联接方式则完全可以用串并联电阻的规律进行简化,如果能将图(a)中节点 1、2、3 之间的三角形联接方式的三个电阻,等效变换为图(b)中节点 1、2、3 之间的星型联接方式,则是很有意义的。

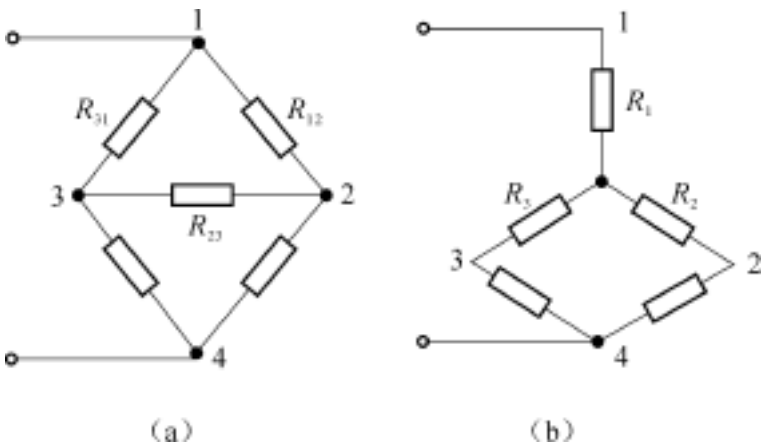


图 2-20 T 型网络和 型网络的等效变换

图 2-20(a)所示节点 1、2、3 之间电阻网络称为 型网络或三角型网络,图 2-21(b)所示节点 1、2、3 之间电阻网络称为 T 型网络,也称为 Y 型网络或星型网络。在进行等效变换时,要保持变换前后电路的外特性不变,即在两种电路与外电路相连的节点之间的伏安关系完全相同。或者说,当它们的对应端子间的电压相同时,流入对应端子的电流也必须分别相等。在此原则下,可以推出两种电路的等效电阻之间的计算公式如下

由 T 型连接方式转化成 型,即已知 R_1 、 R_2 、 R_3 ,求 R_{23} 、 R_{12} 、 R_{31} 。其等效转换的关系式为

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$
$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2} \tag{2-16}$$

由 π 型连接方式转化成 T 型, 即已知 R_{23} 、 R_{12} 、 R_{31} , 求 R_1 、 R_2 、 R_3 。其等效转换的关系式为

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}} \\ R_2 &= \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}} \\ R_3 &= \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}} \end{aligned} \tag{2-17}$$

如果电路对称, 即设
和
则有

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R_3 = R_T \\ R_{12} &= R_{23} = R_{31} = R \\ R &= 3 R_T \end{aligned} \tag{2-18}$$

以上结论, 是在保证对外电路等效的前提下推出的。即保证流出节点 1、2、3 端子上的电流, 和节点 1、2、3 之间的电压保持不变。推导过程从略。

接在复杂网络中的 T 型或 π 型网络部分, 在必要的时候可以运用式 (2-16)、(2-17) 或 (2-18) 作等效互换, 并不影响其他未经变换部分的工作状态。

2 5 独立电源及其等效变换

电路的工作必须要有能量的来源, 电源就是为电路提供能量的部件, 即电源是电路工作时不可缺少的, 常见的实际电源有干电池、市电电源和光电池等。良好的干电池向电路供出一个不随时间变化的恒定电压 (直流电压源); 市电电源则供出一个随时间按正弦规律变化的电压 (交流电压源); 光电池在一定条件下可以向电路供出一个恒定的电流 (直流电流源)。另外, 电路的信号源也是电路的一类重要电源, 在电路分析的范围内, 它们的基本特性是一样的。

电源元件是实际电源的理想化模型, 即理想电源, 它可分为理想电压源和理想电流源两种。

2 5 .1 理想电压源

1 . 理想电压源的伏安特性

图 2-21(a) 所示理想电压源, 是具有如图 2-21(b) 所示伏安特性的二端元件, 该特性在伏安平面上是一条与 i 轴平行的直线, u_s 表示电压源的电压。如果 u_s 是时间的函数, 即 u_s 随时间而变化, 但它并不随工作电流的不同而变化。在任一瞬间, 其伏安特性总是这样一条直线。

理想电压源的伏安特性可表示为

$$u = u_s \tag{2-19}$$

这个式子也表明电压 u 由 u_s 决定, 与流过电压源的电流的值无关, 同时也说明电压源所表示的只是两点间的电压, 不能确定流过电压源的电流的值, 这个电流要由外部电路来决定。

例 2-7 图 2-22 表示一个电阻和一个理想电压源接成一个回路, 理想电压源的电压是 10V, 画在电阻上的箭头表示电阻值是可变动的, 电阻值从 1 逐步增加到无穷大, 所以回路

中的电流值随着电阻的不同而不同,将它们数值的变化列在表格 2-1 中,可以看到电流随负载变化而变化,电压始终保持不变。

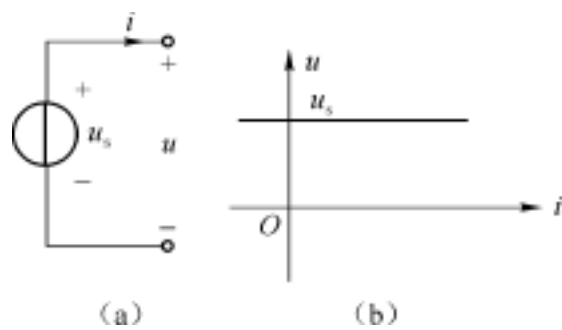


图 2-21 理想电压源的伏安特性

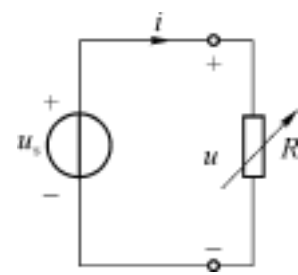


图 2-22 例 2-7

- 注意 (1) 当 $R = \infty$ 电压源开路, $u = u_s = u_{oc}$ 为开路电压;
(2) 当 $R = 0$ 电压源短路,与理想电压源特性相矛盾,电路无意义;
(3) 理想电压源的电流不受限制,但实际工作中,电源电流在规定范围内才能正常工作。

表 2-1

$u = u_s / \text{V}$	R / Ω	i / A
10	1	10
10	5	2
10	10	1
10	100	0.1
10	1000	0.01
10		0

2 . 理想电压源的联接特性

在电路中出现多个理想电压源串联时,如图 2-23(a),由 KVL 直接将电压源相加

$$u = u_{s1} + u_{s2} + u_{s3}$$

在电路中出现多个理想电压源并联时,如图 2-23(b)中两个电压源并联,只有在两个电压源电压相同时才允许并联,否则就会违背 KVL,不被允许 ;在电路中出现理想电压源与其他种类元件并联时,如图 2-23(c)和(d),则等效为图(e),因为若两之间接有理想电压源 u_s ,

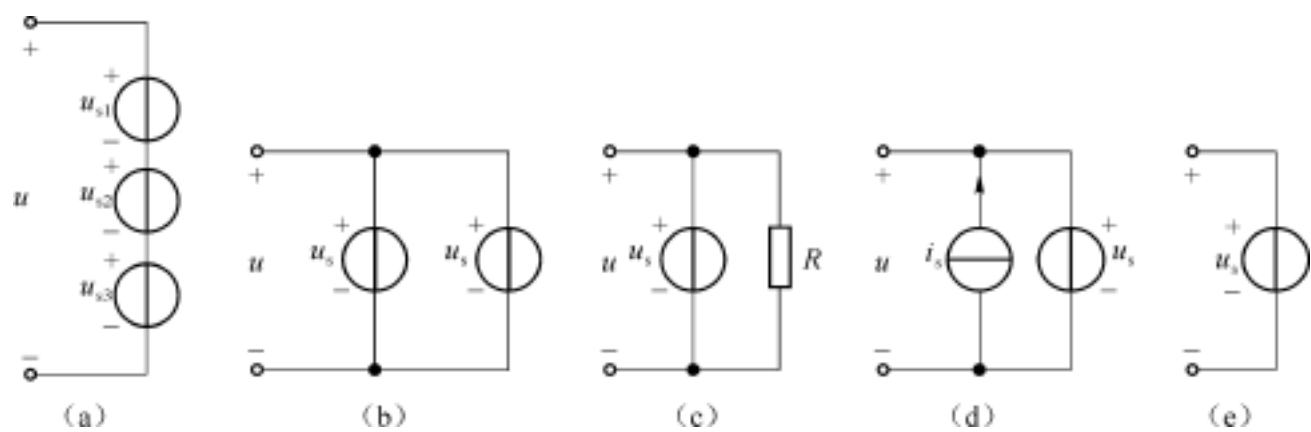


图 2-23 理想电压源的串并联

将两个电压不相等的实际电压源并联在一起,由于实际电压源总是有内阻的,但是一般内阻很小,则会出现很大回路电流而烧毁电源。

两点之间的电压就确定了,其他支路的存在不影响两点之间的电压,故可等效为 u_s 。同样,图(b)对于外电路而言,与图(e)是等效的。这里的等效是指对外电路等效。

2 5 2 理想电流源

1 .理想电流源的伏安特性

图 2 -24(a)所示理想电流源是具有伏安特性的二端元件。如图 2 -24(b)所示,该特性在伏安平面上是一条与 u 轴平行的直线, i_s 表示电流源的值。如果 i_s 是时间的函数,即 i_s 随时间而变,但它并不随工作电压的不同而变,在任一瞬间,其伏安特性总是这样一条直线。理想电流源的伏安特性的表达式为

$$i = i_s \tag{2-20}$$

表明电流 i 由 i_s 决定,与电流源两端的电压值无关,同时也说明电流源所表示的只是支路的电流,不能确定两端的电压值,这个电压是要由外部电路来决定的。

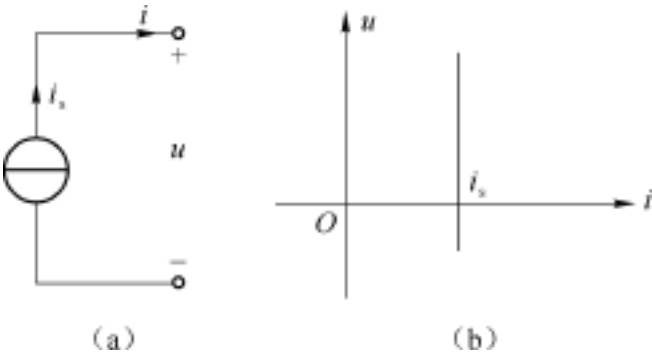
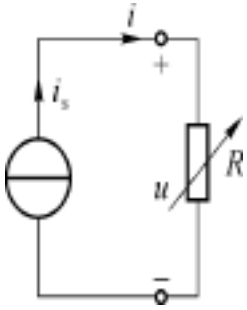


图 2 -24 理想电流源的伏安特性

例 2 -8 图2 -25表示一个电阻和一个理想电流源接成一个回路,理想电流源的电流是 1 A,画在电阻上的箭头表示电阻值是可变动的,电阻值从 1 变为不同的值,电流源两端的电压值随着电阻的不同而不同,将它们数值的变化列在表 2 -2 中,可以看到电压随负载变化而变化,电流始终保持不变。



- 注意 (1) 当 $R = 0$ 电流源短路, $i = i_s = i_{sc}$ 为短路电流;
(2) 当 $R = \infty$ 电流源开路,与理想电流源特性相矛盾,电路无意义;
(3) 理想电源作为一种电路模型的运算特点,与实际电源的特性是有差别的。

图 2 -25 例 2 -8

表 2 -2

i_s / A	R / Ω	u / V
1	1	1
1	2	2
1	0.5	0.5
·	·	·
·	·	·
1	0	0

2 .理想电流源的联接特性

在电路中出现多个电流源并联时,如图 2 -26(a),由 KCL 直接将电流源相加

$$i = i_{s1} + i_{s2}$$

在电路中出现多个电流源串联时,如图(b)中两个电流源串联,只有当两个电流源的电流相同时才允许串联,否则就会违背 KCL;在电路中出现电流源与其他种类元件串联时,如图(c)和(d),则等效为图(e),因为若支路含有理想电流源 i_s ,支路电流就确定为 i_s ,支路中其他元件的存在不影响支路的电流,故可等效为图(e)。同样图(b)对于外电路而言,与图(e)是等效的。这里的等效也是指对外电路等效。但这几个电路的电流源本身的输出功率是不同的。

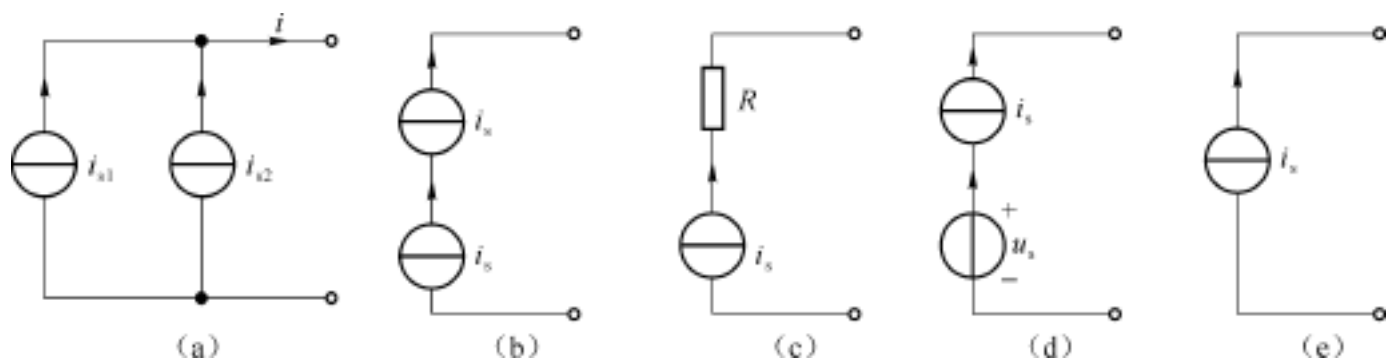


图 2-26 理想电流源的串并联

2 5 3 实际电源两种形式的等效转换(含源支路的等效变换)

1 实际电压源的伏安特性

我们知道实际电源在工作时,本身是要消耗能量的;而且当工作电流增加时,电压源的工作电压会随之下下降。因此可以用图 2-27(a)来表示一个实际电压源,即用一个理想电压源和一个电阻 R_s 的串联来表示,称 R_s 为电源的内电阻。写出支路的伏安特性表达式

$$u = u_s - R_s i \tag{2-21}$$

或者表示为

$$i = \frac{u_s}{R_s} - \frac{u}{R_s} \tag{2-22}$$

画在伏安平面上如图 2-27(b)所示,图中虚线表示出原理想电压源的特性,几个特殊点如下:

- (1) $R_s = 0$, 理想电压源 $u = u_s$;
- (2) 外电路开路 $i = 0$, 开路电压 $u_{oc} = u_s$;
- (3) 外电路短路 $u = 0$, 短路电流 $i_{sc} = u_s / R_s$ 。

工作电流越大,内阻上电压增加,工作电压 u 随着电流的增加而下降,这个特性是比较符合实际电源的外特性的,所以称图 2-27(a)所示支路为实际电压源的电路模型。一个实际电压源的内阻越小,越接近理想电压源的特性。

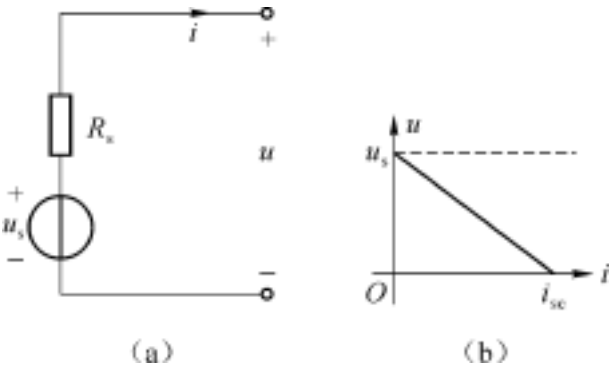


图 2-27 实际电压源及其伏安特性

对于一个品质优良的实际电压源来说,其内阻是很小的,若将其正负极短路,回路电流将会很大,电源会被损坏。所以上面第三种情况只能用作理论分析,实际操作是不允许的。

2 实际电流源的伏安特性

用图 2-28(a)来表示一个实际电流源,即用一个理想电流源和一个内电导 G_s (或内电阻 R_s) 的并联来表示。写出支路的伏安特性表达式

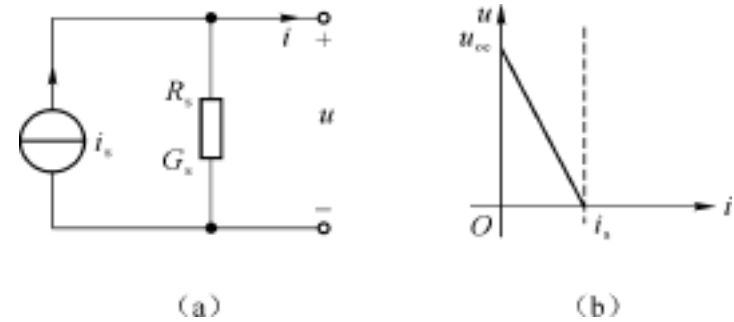


图 2-28 实际电流源的伏安特性

$$i = i_s - G_s u \tag{2-23}$$

或

$$u = R_s (i_s - i) \tag{2-24}$$

伏安关系在伏安平面上如图 2-28(b)所示,图中虚线表示出原理想电流源的特性,几个特殊点如下:

- (1) $R_s = \infty$, 理想电流源 $i = i_s$;
- (2) 外电路短路 $u = 0$, 短路电流 $i_{sc} = i_s$;

(3) 外电路开路 $i = 0$, 开路电压 $u_{oc} = R_s i_s$ 。

由于内阻的分流作用, 当工作电压增加时电流源的工作电流 i 会随之下降。这也是比较符合实际电流源的外特性的。电流源的内电导越小 (即内电阻越大), 电源工作时它的分流就越小, 其特性越接近理想电流源。

3. 两种电源形式的互相转换

电压源与电流源作为两种不同形式的电路模型, 是可以相互转换的。比较一下图 2-27 (b) 所示电压源的伏安特性曲线, 和图 2-28 (b) 所示电流源的伏安特性曲线, 发现它们形状相似。这说明只要参数之间满足一定的关系, 两个曲线是可能重合的, 即两种电源的电路模型是可以等效的。比较两种电源的伏安关系式 (2-21) 和 (2-24), 不难找出等效关系。图 2-29 (a)、(b) 重新画出两个电源模型, 当它们的内阻相等, 电压与电流符合关系式 (2-25) 时, 两者即是等效的。

$$\begin{cases} R_s = R_s \\ u_s = R_s i_s \end{cases} \tag{2-25}$$

若已知电流源参数, 欲求电压源形式的参数, 可直接用式 (2-25)。由电压源参数求电流源形式参数可用式 (2-26)。

$$\begin{cases} R_s = R_s \\ i_{sc} = \frac{u_s}{R_s} \end{cases} \tag{2-26}$$

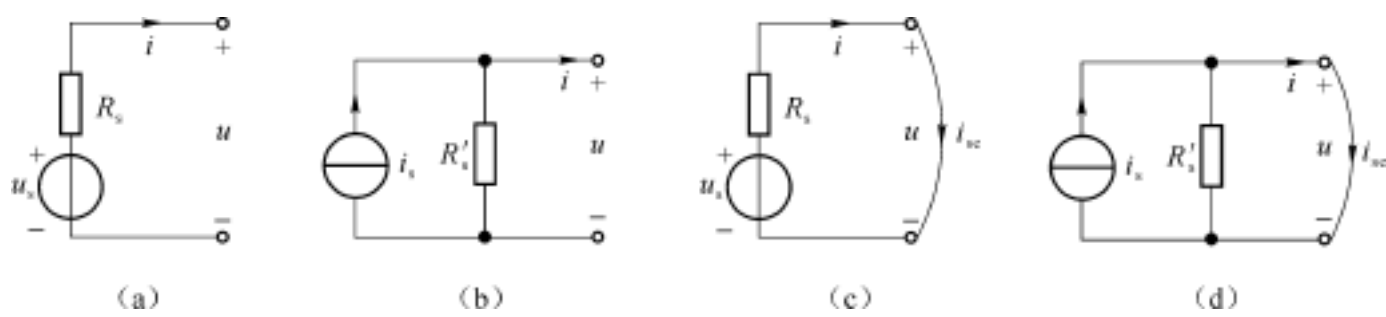


图 2-29 两种电源形式的互相转换

因此从电路模型的角度而言, 一个实际电源既可以用电压源电路模型表示, 又可以用电流源电路模型表示; 而且在电路分析的过程中, 常常利用两种电源模型的等效转换来简化某些电路的分析。归纳两种电源模型的等效转换, 要注意以下要点:

- (1) 以上关系包含数值的相等关系和方向与极性的一致关系, 例如假设外电路开路如图 2-29 (a)、(b) 所示, 图 (a) 开路电压与图 (b) 开路电压数值与极性是一致的, 再假设外电路短路如图 2-29 (c)、(d) 所示, 图 (c) 短路电流与图 (d) 短路电流数值与方向也是一致的。
- (2) 理想电压源与理想电流源之间不能等效转换, 因为不存在等效关系。比较它们各自的伏安特性曲线图 2-21 (b)、图 2-24 (b), 发现它们确实不可能重合。
- (3) 理想电压源可以借助与之串联的外电路电阻, 作为电源内电阻来进行等效转换; 理想电流源可以借助与之并联的外电路电阻, 作为电源内电阻来进行等效转换。因此这种转

换也可称为含源支路的等效变换。

例 2 -9 将图2 -30(a)所示电路简化为最简单形式。

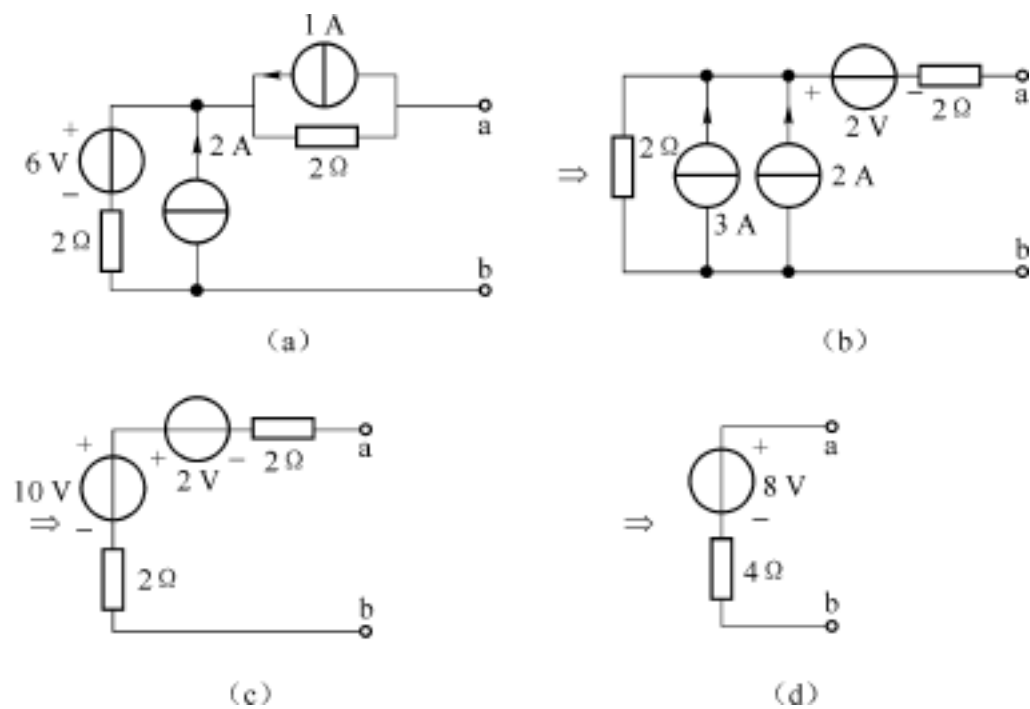


图 2 -30 例 2 -9 电路及解答

解 图 2 -30(a)所示电路可以称为有源二端网络,其中含有电阻元件和电源元件。用电源等效转换简化电路由图(a) (b) (c) (d),简化过程中多次使用了电源等效转换,在转换过程中要注意电压源极性与电流源方向的关系,图(b)含电流源并联相加,图(c)含电压源串联相减,最后简化为图(d)最简单支路。

例 2 -10 将图2 -31所示电路简化为最简单的电流源电路。

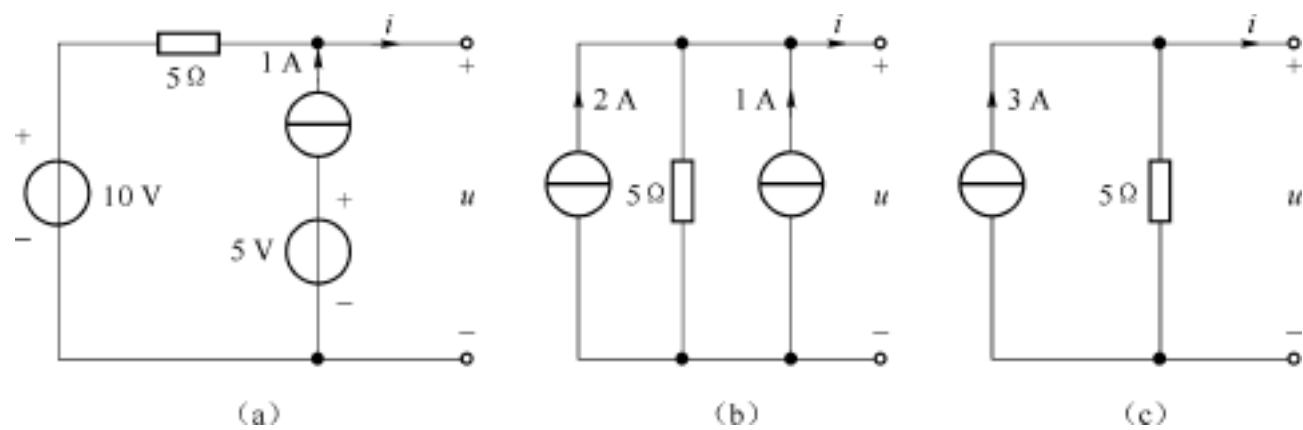


图 2 -31 例 2 -10 电路及解答

解 将图(a)中电压源转换为电流源,5V 电压源与 1A 电流源串联电路等效为 1A 电流源,得到图(b)。其中电流源相加合并,得到图(c),即为所求结果。

例 2 -11 将图2 -32(a)所示电路简化为最简单的电压源电路。

解 图(a)中 4V 电压源与 1A 电流源并联,可以将电流源断开而不会影响网络端口的伏安关系,得到图(b)所示等效电路,进一步的等效转换,最后得到的图(d)是最简单的电压源电路。

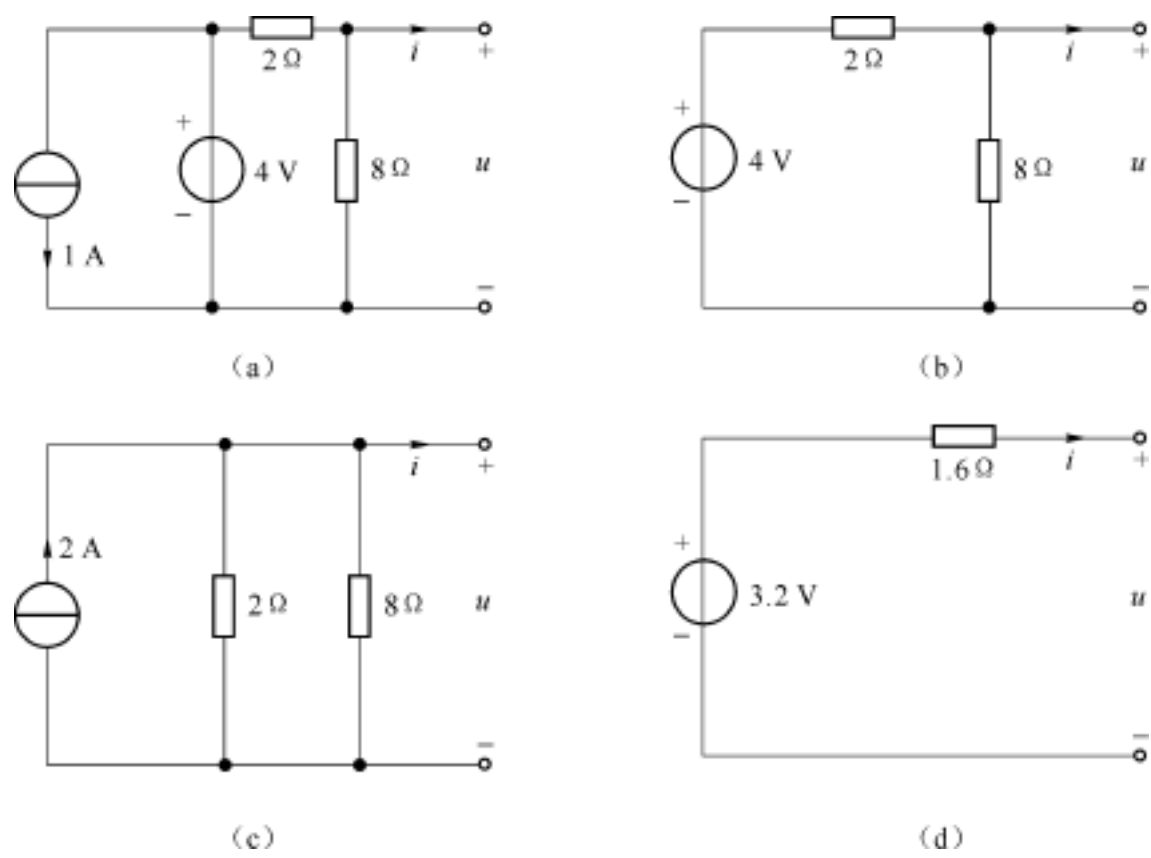


图 2-32 例 2-11 电路及解答

2.6 受控源及含受控源电路的等效变换

前面讨论的电压源和电流源都是独立电源,这类电源通常作为电路的输入或者激励,代表外界对电路的作用。其电压源的电压或电流源的电流,都是由电源本身决定的,而与电源之外的其他支路无关。这里将介绍受控电源,受控电源是与独立电源不同性质的电路模型。

2.6.1 受控电源

受控电源是由电子器件抽象出来的一种电路模型,简称受控源,又称非独立源。受控电压源的电压受其他支路电压或电流的控制;受控电流源的电流也受其他支路的电压或电流的控制。为了与独立电源区别,受控源的符号用菱形表示,如图 2-33(a)所示,它们和独立电源一样,除了有数值的大小外,还有方向或极性。晶体管、运算放大器、回转器等电子器件都可以用受控源来模拟。

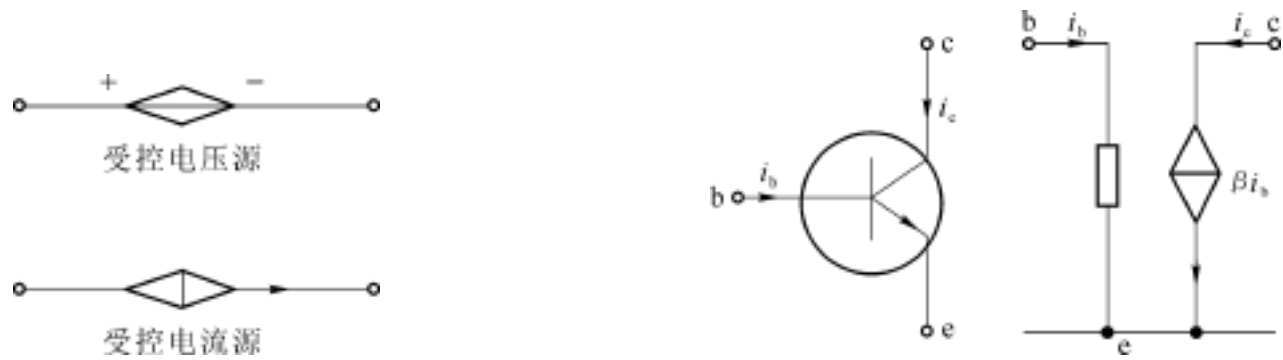


图 2-33 受控源的电路符号

图 2-34 三极管及受控源模型

图 2-34 画出了晶体三极管以及用受控源表示的电路模型。由于晶体三极管在一定的工作条件下,流入 c 节点的电流 $i_c = \beta i_b$, i_b 是流入 b 节点的电流,称 i_b 为输入电流, i_c 为输

出电流,若 $\beta > 1$,即三极管有电流放大作用。这里可以说电流 i_c 受电流 i_b 的控制,称电流 i_b 为控制量。图 2-35(a)所示放大器电路中,已知 $u_1 = 0.2\text{ V}$ 时,测出 $u_2 = 10\text{ V}$,可见放大器把输入电压放大了 50 倍。放大器的放大作用可用如图 2-35(b)所示受控源表示,其中 $\mu = 50$ 为电压放大系数。

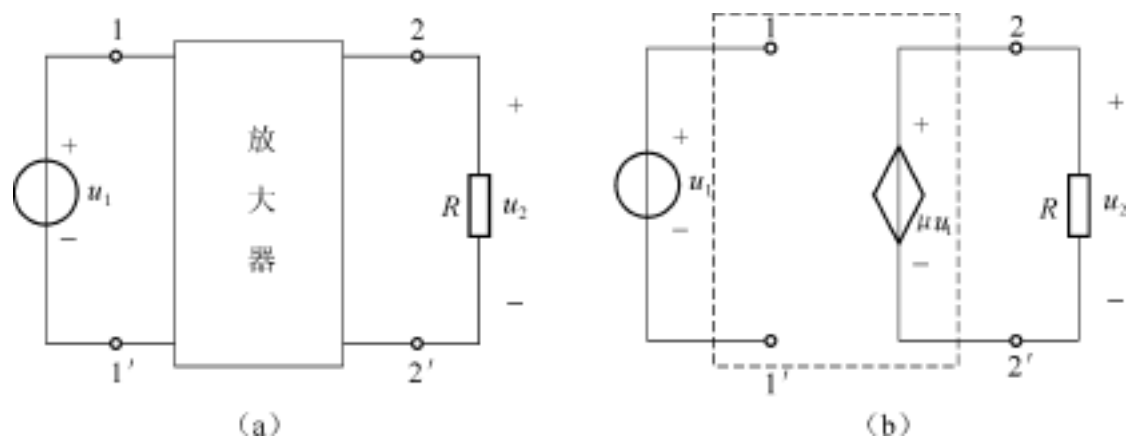


图 2-35 放大器及受控源电路模型

通过上面的例子可以看出,受控源是一种多端元件,一对是输入端,一对是输出端,输出电量受输入电量的控制。在图 2-35 中,1-1' 端为输入端,2-2' 端为输出端,输出电压 u_2 受输入电压 u_1 的控制,因此 u_1 称控制量, u_2 称被控量或受控量。一般而论,控制量可以是电压,也可以是电流;受控量可以是电压,也可以是电流。因此,理想受控电源有四种基本形式:

1 电压控制电压源(VCVS)

如果一个四端元件在任意时刻 t ,其端口电压满足下列关系: $u_2(t) = \mu u_1(t)$,则此四端元件称为电压控制电压源,简称 VCVS。如图 2-36(a)所示,其中 μ 为电压放大系数,它是一个没有量纲的常量。电压放大器(如图 2-35)就是一个电压控制电压源。

2 电压控制电流源(VCCS)

一个四端元件在任意时刻 t ,其端口电压和端口电流之间满足下列关系 $i_2(t) = g_m u_1(t)$,则此四端元件称为电压控制电流源,简称 VCCS。如图 2-36(b)所示,其中 $g_m = i_2 / u_1$ 是具有电导量纲的常量,称为转移电导。

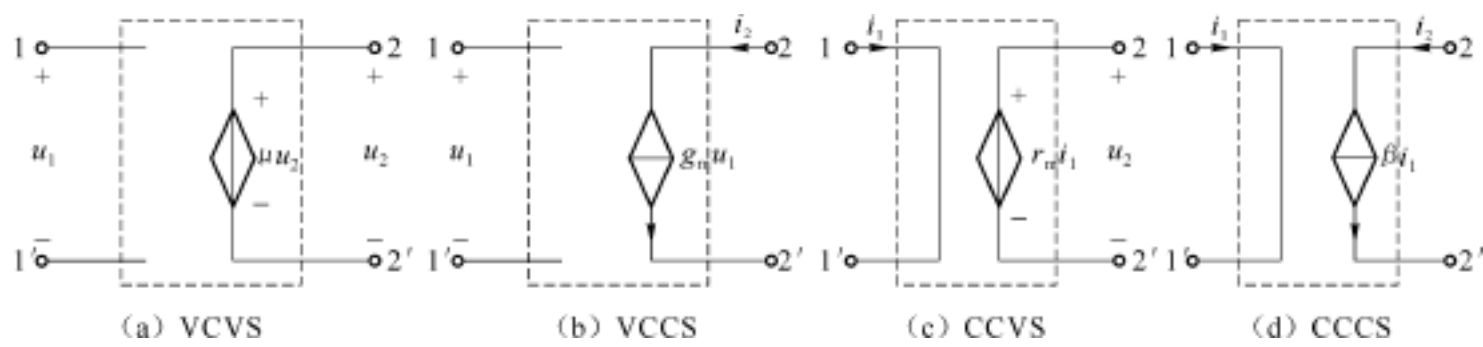


图 2-36 四种受控源电路模型

3 电流控制电压源(CCVS)

一个四端元件在任意时刻 t ,其端口电压和端口电流之间满足下列关系: $u_2(t) = r_m i_1(t)$,则此四端元件称为电流控制电压源,简称 CCVS。如图 2-36(c)所示,其中 $r_m = u_2 / i_1$ 是一个具有电阻量纲的常量,称为转移电阻。

4 电流控制电流源(CCCS)

一个四端元件在任意时刻 t , 其端口电流满足下列关系 $i_2(t) = \beta i_1(t)$, 则此四端元件称为电流控制电流源, 简称 CCCS, 如图 2-36(d) 所示。其中 β 称为电流放大系数, 它是一个无量纲的常量。

上述四种受控电源都是理想受控源, 与独立理想电源一样, 理想受控电压源的内电阻为零, 理想受控电流源的内电阻为无穷大。

必须指出, 受控源与独立电源有着本质的差别。独立电源是电路的真正输入, 它是产生电信号和电能量的理想化模型, 是代表外界对电路的物理作用。受控源用来描述电子器件中所发生的物理现象, 它只是反映了电路工作时控制支路与被控制支路之间的一种特定关系。例如图 2-34 所示三极管, 当它在一定的工作条件下, 其电路模型就是一个电流控制电流源。当它的工作条件变化了, 原电路模型可能就不适用了, 若将它从电路中取出, 它就不再是电源。电子器件在什么条件下应等效为何种电路模型, 是电子电路课程研究的内容, 本书不作讨论。

当电流放大系数 β 、电压放大系数 μ , 转移电导 g_m 和转移电阻 r_m 是常量时, 控制量与受控量成正比, 则受控源是线性元件。其伏安关系以代数方程形式出现。线性电路的分析方法, 包括以后要讲的方法、原理, 都可用来分析含受控源的电路。

2.6.2 含受控源支路的计算方法

在分析含受控源电路时, 受控电压源与受控电流源可以像独立电源一样等效转换, 在分析计算时受控源可先按独立电源处理, 最后设法把控制量求出, 则问题得解。因此在作电路等效变换时, 要注意保留受控电源的控制量, 这是至关重要的。另外受控源与独立源不能互相转换, 因为它们的性质是完全不同的。

例 2-12 试将图2-37(a)所示电路转化为最简电压源模型。

解 将图 2-37(a) 电路中 2V 电压源与 2Ω 电阻的串联组合转换为电流源模型, 如图(b)所示。再将图(b)中独立电流源和受控电流源模型分别等效为电压源模型, 如图(c)所示。图(c)中独立源和受控源不能直接合并化简, 但可从 1 至 2 写出其伏安关系方程式。

$$u = -6u + 3i + 1$$

将与电压 u 有关的项移到等式左边再整理方程式, 得

$$u = \frac{3}{7}i + \frac{1}{7}$$

再由上式画出对应的电路, 如图(d)所示。

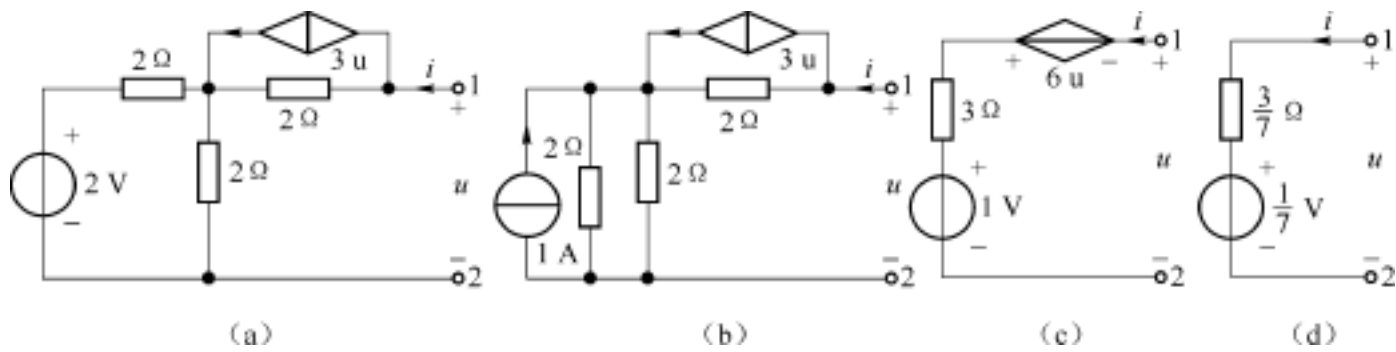


图 2-37 例 2-12 电路与答案

从这个例子注意到伏安关系式与等效电路的对应关系,即可以由某一支路或一个二端网络写出它的伏安关系式,也可以由一个伏安关系式画出它的等效电路。本例就是用这个方法将图(c)中受控电压源化除,受控源的作用反映在图(d)的等效电路中。

例 2 -13 试将图2 -38(a)所示电路转换成 a、b 端的最简等效电路。

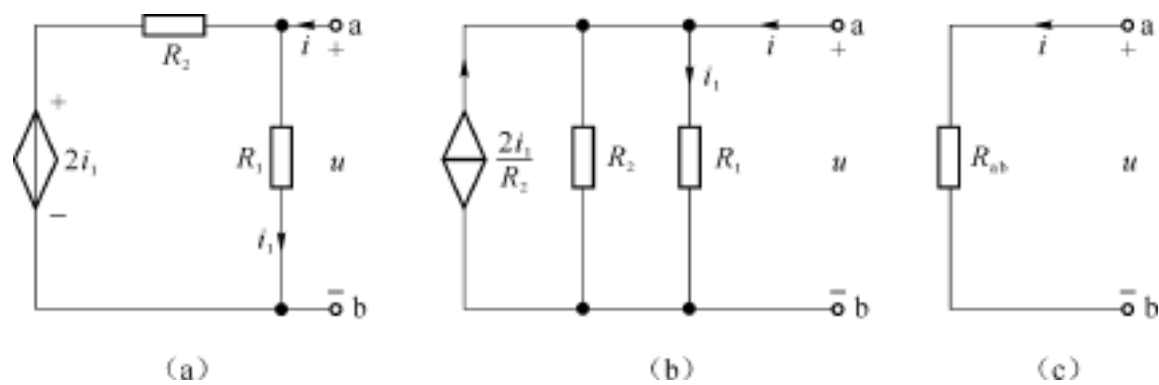


图 2 -38 例 2 -13 电路与答案

解 将图 2 -38(a)中电压源模型等效为电流源模型,如图(b)所示。在图(b)中 R_1 与 R_2 虽是并联,但不能用一个等效电阻代替,否则控制量 i_1 将由于等效变换而消失,丢失了控制量,受控源也将无法求解。但是图 2 -38(b)还可以化简,为此,运用 KCL 写出图(b)的伏安关系方程式

$$i + \frac{2 i_1}{R_2} = i_1 + \frac{u}{R_2}$$

因为 $i_1 = u / R_1$,代入上式得

$$i = \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2}{R_1 R_2} \right] u = \frac{R_1 + R_2 - 2}{R_1 R_2} u$$

可用电压 u 与电流 i 之比求出等效电阻

$$R_{ab} = \frac{u}{i} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 - 2}$$

假设 $R_1 = 0.5$, $R_2 = 1$,则

$$R_{ab} = \frac{1 \times 0.5}{1 + 0.5 - 2} = -1$$

上述结果表明,一个含受控源和电阻的二端网络,可以用一个等效电阻代替。含受控源的二端网络,其等效电阻可能为负,负电阻表明受控源此时为电路提供能量,那么受控源的能量是从哪里来的呢?在实际电路中它总是从某个独立电源处获得的,只是在图 2 -38(a)所示的电路中没有画出,此电路可能是某实际电路的等效电路,这些等效电路是如何得到的,是电子电路课程研究的内容。本书讨论的范围是获得电路模型后的电路分析方法。

2 .7 对偶特性

回顾前面讨论的一些内容,就会发现在一些电路结构、电路元件、变量及公式之间都具有明显的类比性质,这种类比性质称为对偶特性。例如基尔霍夫电流定律和电压定律是两个对偶的定律,它们反映的规律相似,电流定律反映了节点上各支路电流的约束关系,而电压定律反映了一个回路中各支路电压之间的约束关系,把前者的节点用回路代替,电流用电

压代替,就由电流定律推出电压定律,即由 KCL, $i = 0$, 得到 KVL, $u = 0$, 电流 i 和电压 u 称为对偶量。

这里将第 1 章和第 2 章中有对偶性的一部分内容归纳如表 2-3 所示。

表 2-3 有关对偶特性的归纳

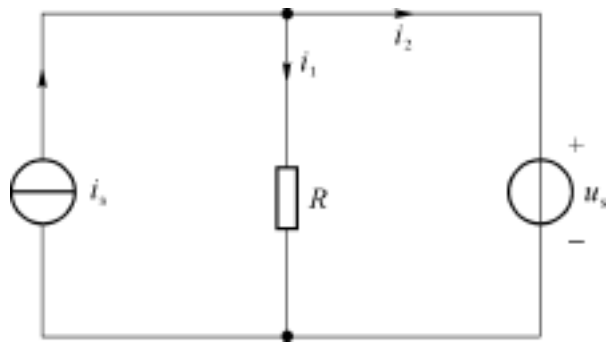
1	电阻 R	电导 G	10	欧姆定律 $U = RI$	欧姆定律 $I = GU$
2	电感 L	电容 C	11	树枝	连支
3	电压 u	电流 i	12	割集	回路
4	电压源	电流源	13	基本割集	基本回路
5	开路	短路	14	树枝电压	连支电流
6	节点	网孔	15	电荷 q	磁链
7	电阻串联	电导并联	16	$q = Cu$	$= Li$
8	串联分压关系	并联分流关系	17	$i_C = C \frac{d u_C}{d t}$	$u_L = L \frac{d i_L}{d t}$
9	KCL	KVL

对偶特性是自然界客观存在的现象,在电路理论中具有明显的对偶特性。掌握对偶特性有助于推广已学的知识,探索新的规律,收到事半功倍的效果。特别对于初学者,可以利用对偶特性去理解和记忆一些抽象的概念和分析方法。电路中还存在许多其他对偶关系,读者可以在后面的学习中不断地总结。

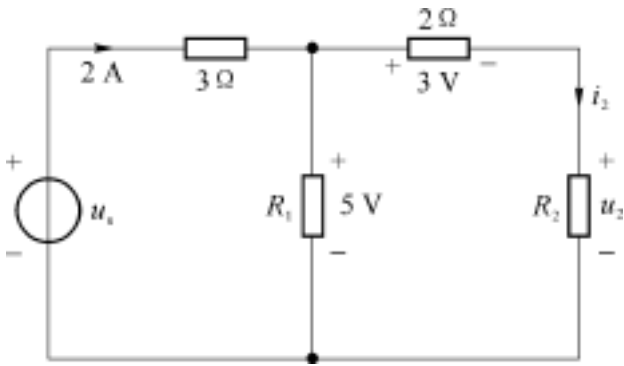
习 题 二

2-1 已知题图 2-1 电路中 $u_s = 5\text{ V}$, $i_s = 5\text{ A}$, $R = 5\text{ }\Omega$, 试求 i_1 , i_2 和每个元件的功率。说明每个元件是吸收功率还是供出功率,并验证电路的功率平衡关系。

2-2 试求题图 2-2 电路的 u_2 , i_2 , R_2 和 R_1 。



题图 2-1



题图 2-2

2-3 元件端电压 u 及电流 i 的参考方向如题图 2-3(a)所示,其伏安特性如图(b)所示,问此元件是何种元件?其参数值是多少?

2-4 一电容的电压 $u_C(t)$ 和电流 $i_C(t)$ 的波形如题图 2-4 所示。试求:

第三章 线性电路的一般分析方法

本章将介绍线性电路的一般分析方法。所谓一般分析方法,就是说本章所讲的分析方法适用于任何线性电路。这里研究的对象是复杂电路,即包含许多元件的电路。电路分析是指给定电路的结构和支路特性(即支路的伏安特性),计算电路中所有支路电流和支路电压。一旦求得支路电流和电压,电路的性能就完全清楚了。本章列出的几种电路方程的分析方法,是适用于一般线性电路、以基尔霍夫定律为依据导出的分析方法。

3.1 支路电流法

支路电流法是以支路电流为变量,直接列出独立的 KCL 和 KVL 方程组,解方程以求得全部支路的电流,再根据支路特性就可求得全部支路电压,是分析电路最基本的方法之一。

如果电路有 b 个支路,在电路分析中,如果选定全部支路电流和支路电压为变量,将有 $2b$ 个变量。但是,支路电流和支路电压是由支路特性联系着的。例如电阻支路特性是用欧姆定律描述的,电容及电感的伏安特性是用微分关系表示的,等等。知道了支路电流,根据支路特性就可求得支路电压,反过来也是一样。因此,可单独采用支路电流或支路电压来表征电路的状态。可选 b 个支路电流或 b 个支路电压作为变量。这样,变量数就减少了一半。在第一章中已经讨论到,一般情况下,电路可列出的独立的 KCL 方程数和独立的 KVL 方程数之和,正好等于支路总数 b ,因此支路电流法总可以获得一组唯一的解答。

下面用具体的例子来说明支路电流法。

例 3-1 如图3-1所示电路,为了计算各支路电流,试用支路电流法列出方程。

解 设 3 个支路电流 i_1 、 i_2 、 i_3 ,并标出它们的参考方向如图。电路有两个节点,所以可列出一个独立的 KCL 方程,从上面节点,以流入电流为正列出方程(A);可列出两个独立的 KVL 方程,按图中所选回路列出方程(B)、(C),列写时将各支路的伏安特性结合进去考虑,即各电压用支路电流和电阻的乘积表示

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \tag{A}$$

$$R_1 i_1 + R_3 i_3 = u_{s1} \tag{B}$$

$$R_2 i_2 + u_{s2} - R_3 i_3 = 0 \tag{C}$$

每个方程含有一个其他方程所没有的新变量,所以方程组是互相独立的。将方程(A)、(B)、(C)联立求解,可求出各支路电流。

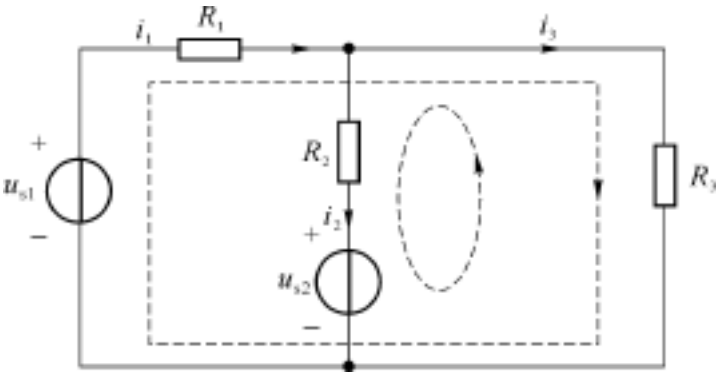


图 3-1 例 3-1 支路电流法

例 3-2 用支路电流法计算图3-2中所示电路的各支路电流,并用功率平衡校验。已知

$R_1 = 10 \quad , R_2 = 3 \quad , R_3 = 12 \quad , R_s = 2 \quad , u_{s1} = 12\text{V} , u_{s2} = 5\text{V} .$

解 列出上面节点 KCL 方程

$$i_1 = i_2 + i_3 \tag{D}$$

按网孔列出两个独立 KVL 方程

$$R_1 i_1 + R_3 i_3 - u_{s1} + R_s i_1 = 0 \tag{E}$$

$$R_2 i_2 + u_{s2} - R_3 i_3 = 0 \tag{F}$$

以方程(D)代入方程(F), 整理两个方程得:

$$\begin{cases} (R_1 + R_s) i_1 + R_3 i_3 = u_{s1} \\ R_2 (i_1 - i_3) - R_3 i_3 = -u_{s2} \end{cases}$$

代入参数

$$\begin{cases} 12 i_1 + 12 i_3 = 12 \\ 3 i_1 - 15 i_3 = -5 \end{cases}$$

解得

$$i_1 = \frac{5}{9} \text{A}, i_2 = \frac{1}{9} \text{A}, i_3 = \frac{4}{9} \text{A}$$

用功率平衡校验

$$\begin{aligned} & (R_1 + R_s) i_1 \times i_1 + R_3 i_3 \times i_3 + R_2 i_2 \times i_2 - u_{s1} i_1 + i_2 u_{s2} \\ &= (10 + 2) \times \left[\frac{5}{9} \right]^2 + 12 \times \left[\frac{4}{9} \right]^2 + 3 \times \left[\frac{1}{9} \right]^2 - 12 \times \frac{5}{9} + 5 \times \frac{1}{9} = 0 \end{aligned}$$

例 3 -3 计算图3 -3中电路中各支路电流, 并求电流源两端电压 u_{ab} 。

解 电路由 6 条支路 4 个节点, 首先列出 a、b、c 节点的 KCL 方程, 以流出节点为正

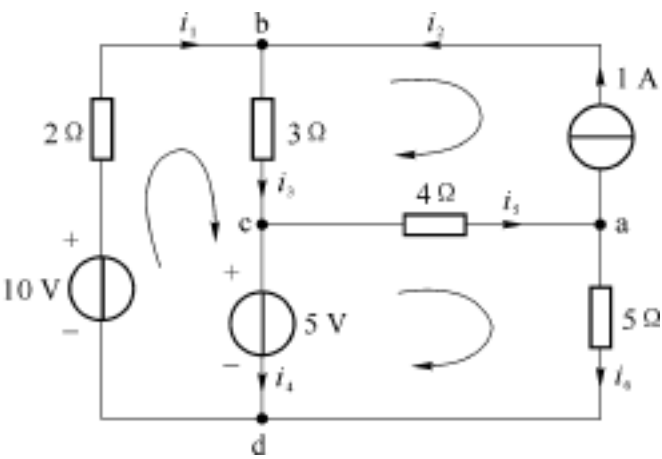


图 3-3 例 3-3 电路

$$\begin{cases} i_2 - i_5 + i_6 = 0 \\ -i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ -i_3 + i_4 + i_5 = 0 \end{cases}$$

各网孔按顺时针列出 3 个 KVL 方程

$$\begin{cases} 2 i_1 + 3 i_3 + 5 - 10 = 0 \\ -3 i_3 - u_{ab} - 4 i_5 = 0 \\ 4 i_5 + 5 i_6 - 5 = 0 \end{cases}$$

以上 6 个方程联立求解, 得到

$$\begin{aligned} i_1 &= 0.4\text{A}; i_3 = 1.4\text{A}; i_4 = 0.289\text{A}; \\ i_5 &= 1.111\text{A}; i_6 = 0.111\text{A}; u_{ab} = -8.644\text{V} \end{aligned}$$

可以用功率平衡校核, 也可以用未用过的回路的 KVL 来校核, 例如外回路。

$$2 i_1 - u_{ab} + 5 i_6 - 10 = 0$$

代入电流与电压值

$$2 \times 0.4 - (-8.644) + 5 \times 0.111 - 10 = 0$$

3 2 节点分析法

节点分析法(又称节点电压法), 是选择独立节点对参考节点的电压作为未知变量, 列出独立的 KCL 方程以分析计算电路的方法, 是目前最流行的方法之一。具体来说, 将电路的

KCL 方程与支路的伏安特性相结合,导出以节点电压为未知量的一组方程。解方程求出所有节点电压,就能求出所有支路电压,再用支路特性求支路电流,电路的工作状态就清楚了。所以这里的节点电压是一组独立完备的变量。

节点电压法与支路电流法相比,减少了变量的个数,即减少了方程的个数,从而简化了计算。此时自动满足 KVL。节点电压法不仅适用于平面电路,也适用于非平面电路。下面从一个具体的电路来推出这个分析方法。

已知一个电路如图 3-4(a)所示,其中各支路电导参数和电流源参数均为已知,并标出各支路电流的参考方向。选定一个节点 为参考点,令其电压为零,即 $u_4 = 0$ 。 u_1 、 u_2 、 u_3 即为独立电压变量。也可以作出线图并选树{6,2,4}如图(b)所示,则节点电压正好是树支电压,

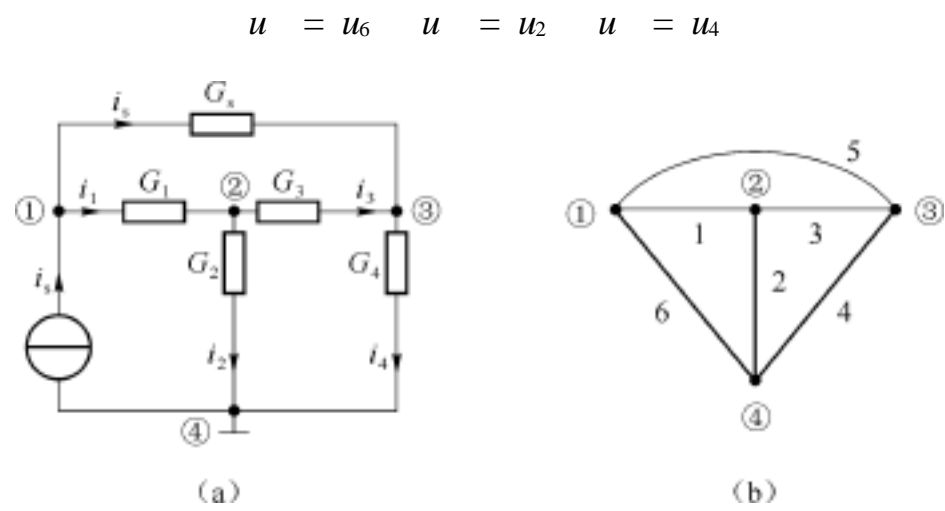


图 3-4 节点电压法

因为树支电压是独立的,即说明节点电压变量是独立的。
首先列出节点 1、2、3 的 KCL 方程

$$\begin{cases} i_1 + i_5 = i_s \\ - i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ - i_3 + i_4 - i_5 = 0 \end{cases}$$

方程组(1)

用节点电压将各支路电流表示出来

$$\begin{cases} i_1 = G_1 (u_1 - u_4) \\ i_2 = G_2 u_2 \\ i_3 = G_3 (u_2 - u_3) \\ i_4 = G_4 u_3 \\ i_5 = G_5 (u_1 - u_3) \end{cases}$$

方程组(2)

以方程组(2)代入方程组(1),整理合并,把 u_1 、 u_2 、 u_3 按规律排齐,得到以节点电压为变量的方程组

$$\begin{cases} (G_1 + G_5) u_1 - G_1 u_2 - G_5 u_3 = i_s \\ - G_1 u_1 + (G_1 + G_2 + G_3) u_2 - G_3 u_3 = 0 \\ - G_5 u_1 - G_3 u_2 + (G_3 + G_4 + G_5) u_3 = 0 \end{cases}$$

(3-1)

写成一般形式

$$\begin{cases} G_{11} u & + G_{12} u & + G_{13} u & = i_s \\ G_{21} u & + G_{22} u & + G_{23} u & = i_s \\ G_{31} u & + G_{32} u & + G_{33} u & = i_s \end{cases}$$

(3-2)

其中

$$\begin{cases} G_{11} = G_1 + G_5 \\ G_{22} = G_1 + G_2 + G_3 \\ G_{33} = G_3 + G_4 + G_5 \\ G_{12} = G_{21} = - G_1 \\ G_{13} = G_{31} = - G_5 \\ G_{23} = G_{32} = - G_3 \\ i_s = i_s \\ i_s = i_s \end{cases}$$

G_{11}, G_{22}, G_{33} 分别为节点 、 、 所连接的支路的自电导,它是连接到每个相关节点上支路电导之和, G_{12} 和 G_{21} 是连接到节点 和节点 之间公共支路电导之和的负值,称为节点 、 之间的互电导。 G_{13} 和 G_{31} 是连接到节点 和节点 之间公共支路电导之和的负值,称为节点 、 之间的互电导。 G_{23} 和 G_{32} 是连接到节点 和节点 之间公共支路电导之和的负值,称为节点 、 之间的互电导。方程右端 i_s 、 i_s 和 i_s 为各相应节点上所有电流源电流的代数和,流入节点的为正,流出节点的为负。

式(3-2)称为图 3-4 电路的节点电压方程。对具有 n_t 个节点的线性网络,当它只含有电阻和独立电源时,其 $n = n_t - 1$ 个独立节点的电压方程,可由式(3-2)推广而来:

$$\begin{cases} G_{11} u & + G_{12} u & + \dots + G_{1n} u_n = i_s \\ G_{21} u & + G_{22} u & + \dots + G_{2n} u_n = i_s \\ & \dots & \\ G_{k1} u & + G_{k2} u & + \dots + G_{kn} u_n = i_{s\ k} \\ & \dots & \\ G_{n1} u & + G_{n2} u & + \dots + G_{nn} u_n = i_{s\ n} \end{cases}$$

(3-3)

式(3-3)中,左端系数构成的行列式的主对角线上各电导 G_{kk} 为节点 k 的自电导,非主对角线上各电导 G_{kj} ,为节点 k 和节点 j 之间的互电导;而方程左端 $i_{s\ k}$ 为流入节点 k 的所有电流源电流的代数和。(其中 $i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n$)

式(3-3)为 n 元一次方程组,可用克莱默法则求解出各个节点电压,其中 k 节点电压为:

$$u_k = \frac{1\ k}{i_s} i_s + \frac{2\ k}{i_s} i_s + \dots + \frac{kk}{i_s} i_{s\ k} + \dots + \frac{nk}{i_s} i_{s\ n}$$

(3-4)

式中 是式(3-3)左端的系数行列式

$$= \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1\ k} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2\ k} \\ \dots & \dots & & \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nk} \end{vmatrix}$$

而 a_{jk} 为 a_{ij} 的 j 行 k 列的代数余子式。

当网络只含有电阻和独立电源,即不含受控源时,系数行列式是关于主对角线对称的,这一点从式(3-1)可以清楚地看出,理由也是显而易见的。例如节点 i 和节点 j 之间公共支路的互电导是 $-G_5$,对于节点 i 或节点 j 应该是一样的。

回顾一下节点分析法的推导过程,可以确定:

(1) 式(3-3)包含 n 个独立节点电压变量与 n 个独立节点的 KCL 方程,所以方程组有确定的唯一解。

(2) 式(3-3)是以节点电压为变量的 KCL 方程的变形,其每一项的量纲是电流。

当用节点电压法分析计算电路时不必从头来推出,可从电路直接列写节点电压方程组,总结列方程规则如下:

(1) 方程左边:连接本节点的各支路电导(自电导)之和同本节点电压的乘积,设为正;加上各相邻节点与本节点之间公共支路电导(互电导)同相邻节点电压的乘积,自电导为正,互电导为负。

(2) 方程右边:流入本节点的电流源电流的代数和,即流入为正,流出为负;当网络中包含电压源与电阻串联支路时,应先将该支路等效为电流源与电阻并联支路。

例 3-4 已知电路如图3-5所示,用节点电压法求各节点电压及 i_{bd} 。

解 设 d 点为参考点, $u_d = 0\text{ V}$,则可直接得到 $u_a = 10\text{ V}$,不必再列 a 点的方程,但 1 V 理想电压源无法转换为电流源,需设电流 I_0 如图中所标。

列出的节点电压方程为

$$\left[1 + \frac{1}{0.5}\right] \times u_b - \frac{1}{0.5} \times u_a = -I_0 \quad (\text{A})$$

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] \times u_c - \frac{1}{2} \times u_a = I_0 \quad (\text{B})$$

$$u_b - u_c = -1\text{ V} (\text{称为辅助方程})$$

$$u_a = 10\text{ V}$$

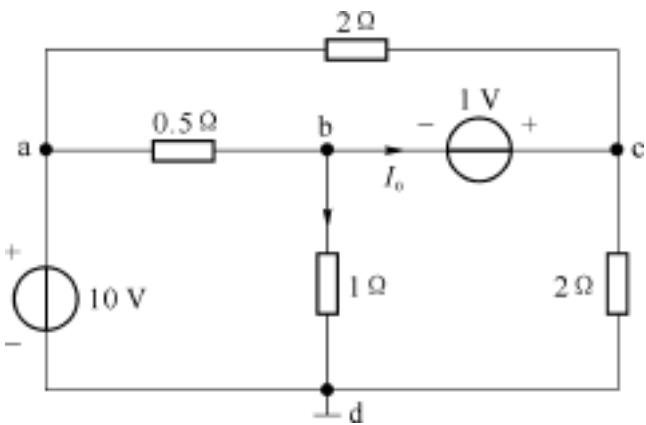


图 3-5 例 3-4 电路

解方程得到 $u_b = 6\text{ V}$, $u_c = 7\text{ V}$, $i_{bd} = 6\text{ A}$

本例中节点之间含有理想电压源,尽可能将参考点选择在它的一端,可以减少一个变量,当含有多个理想电压源时,则只能给其他理想电压源支路设电流变量列入方程,这时方程中的变量除了节点电压 u_b 和 u_c ,还有电流 I_0 ,变量多了需加列辅助方程,解方程的时候可以先将方程(A)和方程(B)相加,将 I_0 消掉,再求解节点电压。从这里还可以推广到,当网络中含有一些支路无法直接写出电导时,可设其电流变量列入方程,此时方程属于混合型变量方程,又称为“改进节点法”。

例 3-5 已知电路如图3-6(a)所示,列出节点电压方程。

解 选参考节点为 d 点,即 $u_d = 0$,将 u_{s1} 与 R_1 串联支路转换为电流源并联支路;与 i_{s6} 串联之电导不应计入,因为节点电压方程实质是 KCL 方程,节点 b 、 c 间支路以 i_{s6} 计入,则不能再计入 R_6 ,可直接将 R_6 短路如图(b)所示。还要注意到节点 c 、 d 之间的支路电导是 $R_5 + R_7$ 的倒数。列出的节点电压方程为:

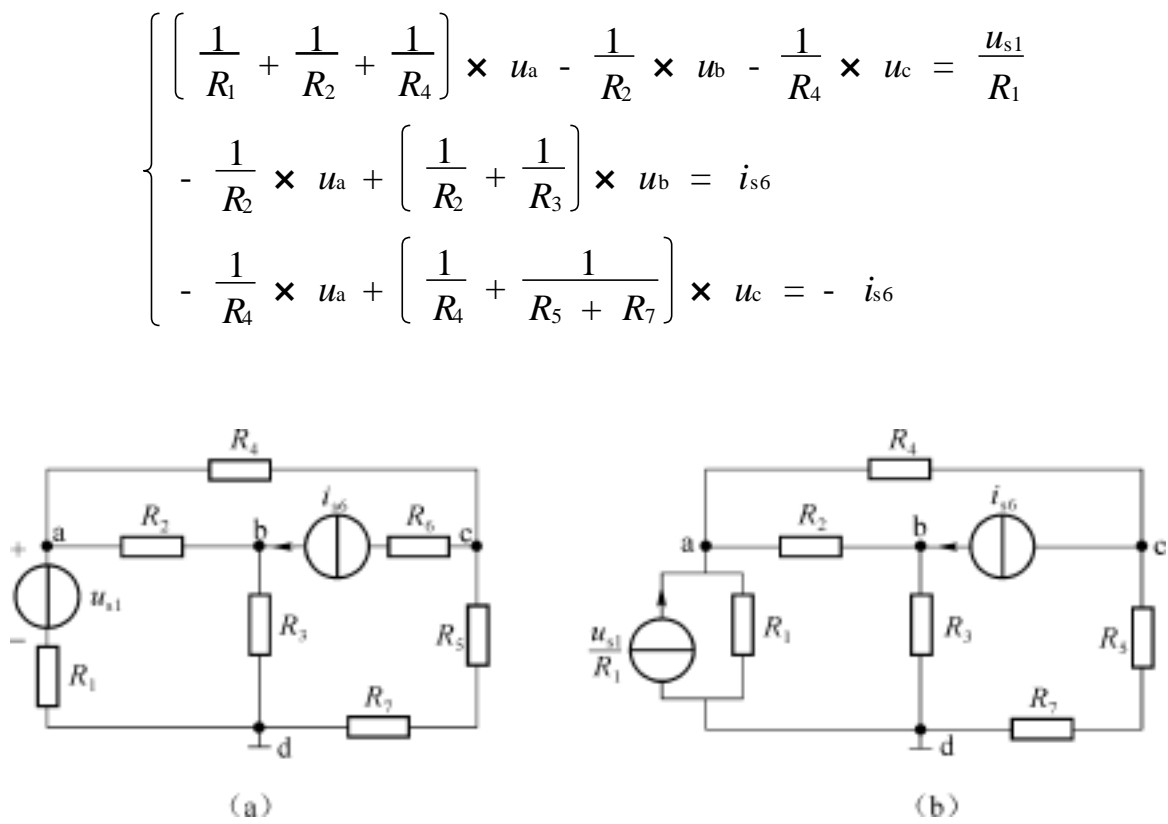


图 3-6 例 3-5 电路

例 3-6 已知电路如图3 -7所示,列出节点电压方程。

解 设 c 为参考点, $u_c = 0$ 。电路含受控电压源,先按独立电压源列入方程,再设法用节点电压将控制量 i_2 表示出来;左侧支路中与电流源串联的电阻 R_1 不应计入支路电导;可列出方程

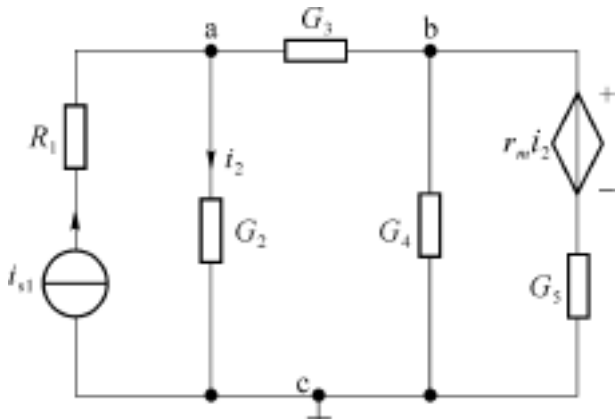


图 3-7 例 3-6 电路

$$(G_2 + G_3) u_a - G_3 u_b = i_{s1} \tag{A}$$

$$- G_3 u_a + (G_3 + G_4 + G_5) u_b = G_5 r_m i_2 \tag{B}$$

$$i_2 = G_2 u_a \tag{C}$$

将方程(C)代入方程(B)整理得:

$$- (G_3 + G_5 G_2 r_m) u_a + (G_3 + G_4 + G_5) u_b = 0 \tag{D}$$

这里对受控源的处理方法是:先按独立电压源列入方程,再用节点电压把控制量表示出来如方程(C),代入方程(B)可整理出方程(D),此时对于由方程(A)、(D)组成的方程组而言,系数行列式已不是关于主对角线对称的了。这是由于受控源的存在破坏了系数行列式的对称性。

3 3 网孔分析法

网孔电流法是以网孔电流为变量,按网孔列出独立的 KVL 方程,以分析计算电路,是笔算最方便的方法之一。其特点是选择假想的网孔电流作为未知量,从而自动满足网络的 KCL 方程。将网络的 KVL 方程与支路伏安特性相结合,导出以网孔电流为变量的一组网孔方程,解得网孔电流后,就可确定各支路的电流和电压。本方法仅适用于平面电路。

网孔电流是一种沿着网孔边界流动的假想电流,如图 3 -8(a)标出的 i_{m1} 、 i_{m2} 、 i_{m3} ,假设这

3 个网孔电流独立地在各网孔内流动(这是符合电流连续性的规律的)。由于网孔电流不是以 KCL 的关系互相联系的,所以是互相独立的。图中标出的网孔电流与外沿支路电流是一致的。

$$i_{m1} = i_1, i_{m2} = i_3, i_{m3} = i_4$$

网孔之间公共支路的电流是由网孔电流的代数和来决定的。

$$i_5 = i_{m1} - i_{m2}, i_2 = i_{m2} - i_{m3}, i_6 = i_{m1} - i_{m3}$$

以上各式即符合节点(1)、节点(4)和节点(3)的 KCL。由此可以说明网孔电流是一组完备的变量。

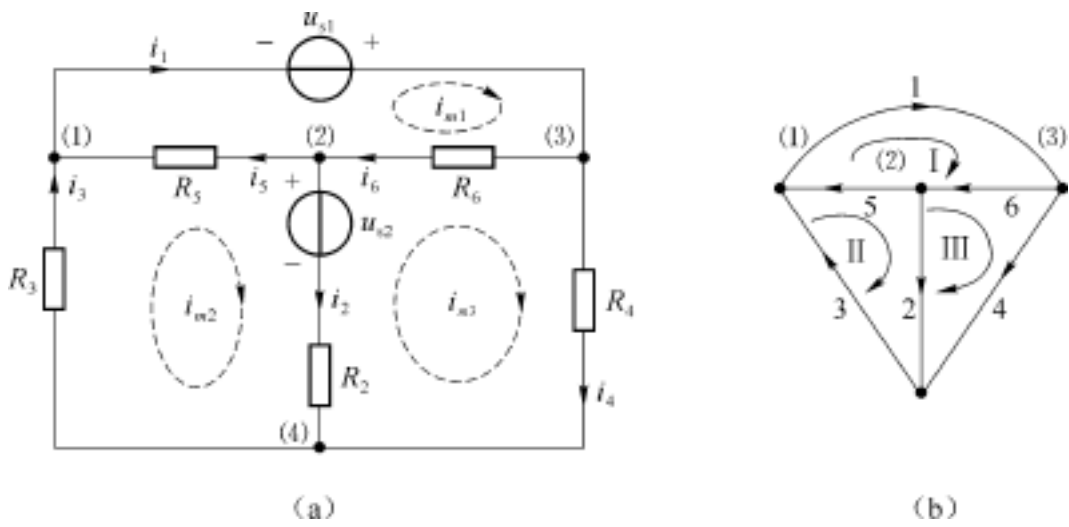


图 3-8 网孔电流法

作出电路的线图如图 3 -8(b)所示,选树{5,6,2},余树{1,3,4},图中标出了基本回路,它们的方向同图(a)中网孔电流方向是一致的,这样,网孔电流与连支电流是一致的。若列出基本回路的 KVL 方程,则保证方程是独立的。这样可以说明网孔电流是一组独立完备的变量。

下面来导出网孔分析法,首先看图(b),按网孔列出 KVL 方程

$$\begin{cases} u_6 + u_5 + u_1 = 0 \\ - u_5 + u_2 + u_3 = 0 \\ - u_6 + u_4 - u_2 = 0 \end{cases}$$

方程组(A)

由图(a)将所有支路电压用网孔电流表示出来

$$\begin{cases} u_1 = - u_{s1} \\ u_4 = R_4 i_{m3} \\ u_2 = u_{s2} + R_2 i_2 = u_{s2} + R_2 (i_{m2} - i_{m3}) \\ u_5 = R_5 (i_{m1} - i_{m2}) \\ u_3 = R_3 i_{m2} \\ u_6 = R_6 (i_{m1} - i_{m3}) \end{cases}$$

方程组(B)

将方程组(B)代入方程组(A)并整理合并,把 i_{m1} 、 i_{m2} 、 i_{m3} 按规律排齐,得到以网孔电流为变量的方程组

$$\begin{cases} (R_5 + R_6) i_{m1} - R_5 i_{m2} - R_6 i_{m3} = u_{s1} \\ - R_5 i_{m1} + (R_2 + R_3 + R_5) i_{m2} - R_2 i_{m3} = - u_{s2} \\ - R_6 i_{m1} - R_2 i_{m2} + (R_2 + R_4 + R_6) i_{m3} = u_{s2} \end{cases} \quad (3-5)$$

写成一般形式

$$\begin{cases} R_{11} i_{m1} + R_{12} i_{m2} + R_{13} i_{m3} = u_{s\ m1} \\ R_{21} i_{m1} + R_{22} i_{m2} + R_{23} i_{m3} = u_{s\ m2} \\ R_{31} i_{m1} + R_{32} i_{m2} + R_{33} i_{m3} = u_{s\ m3} \end{cases} \quad (3-6)$$

其中：

$$\begin{cases} R_{11} = (R_5 + R_6) \\ R_{22} = (R_2 + R_3 + R_5) \\ R_{33} = (R_2 + R_4 + R_6) \\ R_{12} = R_{21} = - R_5 \\ R_{13} = R_{31} = - R_6 \\ R_{23} = R_{32} = - R_2 \\ u_{s\ m1} = u_{s1} \\ u_{s\ m2} = - u_{s2} \\ u_{s\ m3} = u_{s2} \end{cases}$$

式(3-6)称为图 3-8(a)的网孔方程组,其中 R_{11} 、 R_{22} 、 R_{33} 分别为网孔 1、2、3 的自电阻,它是每个网孔各支路电阻之和, R_{12} 和 R_{21} 是在网孔 1 和网孔 2 之间公共支路电阻的负值,称为网孔 1、2 之间的互电阻。 R_{13} 和 R_{31} 是网孔 1、3 之间的互电阻。 R_{23} 和 R_{32} 是网孔 2、3 之间的互电阻。方程右端 $u_{s\ m1}$ 、 $u_{s\ m2}$ 和 $u_{s\ m3}$ 为各相应网孔上所有电压源的代数和,其电位升的方向与网孔电流方向相同的为正,相反的为负。

对具有 b 条支路、 n 个节点的线性网络,可列写出 $m = b - n + 1$ 个独立的网孔方程,即可设 m 个网孔电流变量,当电路只含有电阻和独立电源时,可由式(3-6)推广而来:

$$\begin{aligned} R_{11} i_{m1} + R_{12} i_{m2} + \dots + R_{1\ m} i_{mm} &= u_{s\ m1} \\ R_{21} i_{m1} + R_{22} i_{m2} + \dots + R_{2\ m} i_{mm} &= u_{s\ m2} \\ &\dots \\ R_{m1} i_{m1} + R_{m2} i_{m2} + \dots + R_{mm} i_{mm} &= u_{s\ mm} \end{aligned} \quad (3-7)$$

式(3-7)为 m 元一次方程组,可用克莱默法则求解出各个网孔电流,其中第 k 个网孔电流为:

$$i_{mk} = \frac{1\ k}{\Delta} u_{s\ m1} + \frac{2\ k}{\Delta} u_{s\ m2} + \dots + \frac{kk}{\Delta} u_{s\ mk} + \dots + \frac{mk}{\Delta} u_{s\ mm} \quad (3-8)$$

式中 Δ 是式(3-7)左端的系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1\ m} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2\ m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{m1} & R_{m2} & \dots & R_{mm} \end{vmatrix}$$

而 $a_{jk} (j = 1, 2, \dots, m)$ 为 a_{ij} 的 j 行 k 列的代数余子式。

当网络只含有电阻和独立电源,即不含受控源时,网孔电流方程组的系数行列式是关于主对角线对称的,这一点从式(3-5)可以清楚地看出,理由也是显而易见的。例如网孔 1 和网孔 2 之间公共支路的互电导是 G_5 ,对于网孔 1 的方程或网孔 2 的方程应该是一样的。当网络含受控源时,方程组的系数行列式就不对称了。

可以确定:

(1) 式(3-7)包含 m 个独立网孔电流变量与 m 个网孔独立的 KVL 方程,所以方程组有确定的唯一解。

(2) 式(3-7)是以网孔电流为变量的 KVL 方程的变形,其每一项的量纲是电压。

与节点电压法类似,当用网孔分析法分析独立时,可以直接从电路列出网孔方程,总结列方程规则如下:

(1) 方程左边:当所有网孔电流都按顺时针方向(或都按逆时针方向)设定时,本网孔电流流经的电阻(自电阻)之和,与本网孔电流的乘积;加上各相邻网孔电流,与本网孔电流间公共支路的电阻(互电阻)的乘积。自电阻为正,互电阻为负。

(2) 方程右边:本网孔所包含的电压源的代数和,按网孔电流方向,电位升为正,电位降为负。

例 3-7 列出图3-9(a)、(b)所示网络的网孔电流方程组。

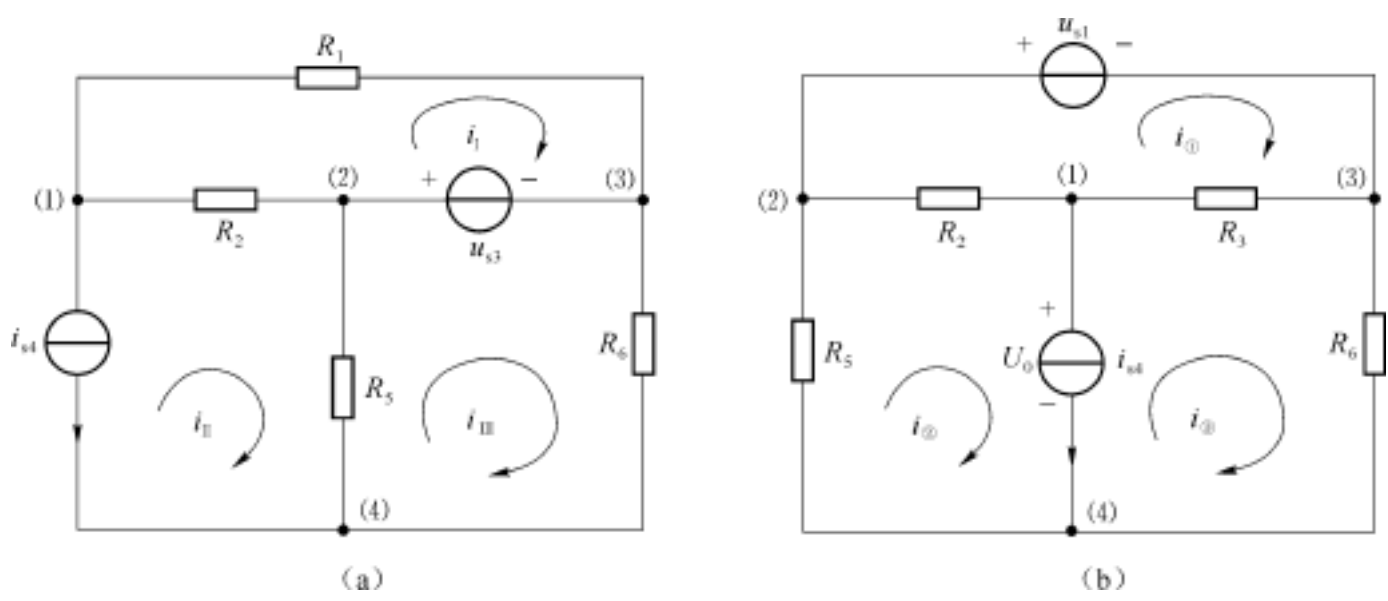


图 3-9 例 3-7 电路

解 首先讨论图(a),按网孔设定网孔电流如图 3-9(a)所示,全部按顺时针方向。其中

$$i_{s4} = -i_{II} \tag{A}$$

所以不必再列出网孔 2 的方程,列出网孔 1、3 的方程

$$(R_1 + R_2) i_I - R_2 i_{III} = u_{s3} \tag{B}$$

$$- R_5 i_I + (R_5 + R_6) i_{III} = -u_{s3} \tag{C}$$

本例网络中含有理想电流源,且位于外沿支路,直接将理想电流源当作网孔电流可减少变量。

再看图 3-9(b)所示电路,网络中含有理想电流源,但位于中间支路,无法直接当作网孔电流,此时又该如何处理呢?如图中标出的,可以在电流源两端设一电压 U_0 ,因为网孔方程

是 KVL 方程,列方程时 U_0 按电压源处理就可以了。

方法一 标出 U_0 及各网孔电流 i_1 、 i_2 、 i_3 ,列出网孔电流方程

$$(R_2 + R_3) i_1 - R_2 i_2 - R_3 i_3 = - u_{s1} \tag{D}$$

$$- R_2 i_1 + (R_2 + R_5) i_2 = - U_0 \tag{E}$$

$$- R_3 i_1 + (R_3 + R_6) i_3 = U_0 \tag{F}$$

由于增设了变量 U_0 ,所以要加列辅助方程

$$i_1 - i_3 = i_{s4} \tag{H}$$

解方程时可将式(E)和式(F)相加,将 U_0 消去,再求解。这种处理方法同节点分析法中例 3-4 的方法是对偶的。这里要特别强调的是电流源在输出功率时,两端必有工作电压。列方程时不要忽略了电流源两端的电压。

方法二 不难发现图 3-9(a)、(b)所示的网络其实是同一个网络,在不改变结构的情况下,将图(b)改画成图(a)并不困难。当网络变成图(a)即把理想电流源移到了外沿支路,可以直接将理想电流源当作网孔电流,这也是一种有效的方法。不过第一种方法属于基本方法,适合一般平面网络。

应用网孔电流法分析含受控电源的网络时,列写网孔方程的方法,与节点电压法思路相同。现用例子说明。

例 3-8 用网孔电流法求图3-10(a)网络的电流 i 。

解 电路含有受控源。为了减少变量,可先将受控电流源,变换成等效受控电压源如图(b)所示。设定两网孔电流 i_{m1} 和 i_{m2} 如图示,先把受控源看作独立源列入方程

$$\begin{cases} (2 + 4) i_{m1} - 4 i_{m2} = 12 \\ - 4 i_{m1} + (1 + 4 + 5) i_{m2} = 2 i_1 \end{cases}$$

下一步要用网孔电流来表示控制量,由图可知, $i_1 = i_{m1}$,代入上式并加以整理得

$$\begin{cases} 6 i_{m1} - 4 i_{m2} = 12 \\ - 6 i_{m1} + 10 i_{m2} = 0 \end{cases}$$

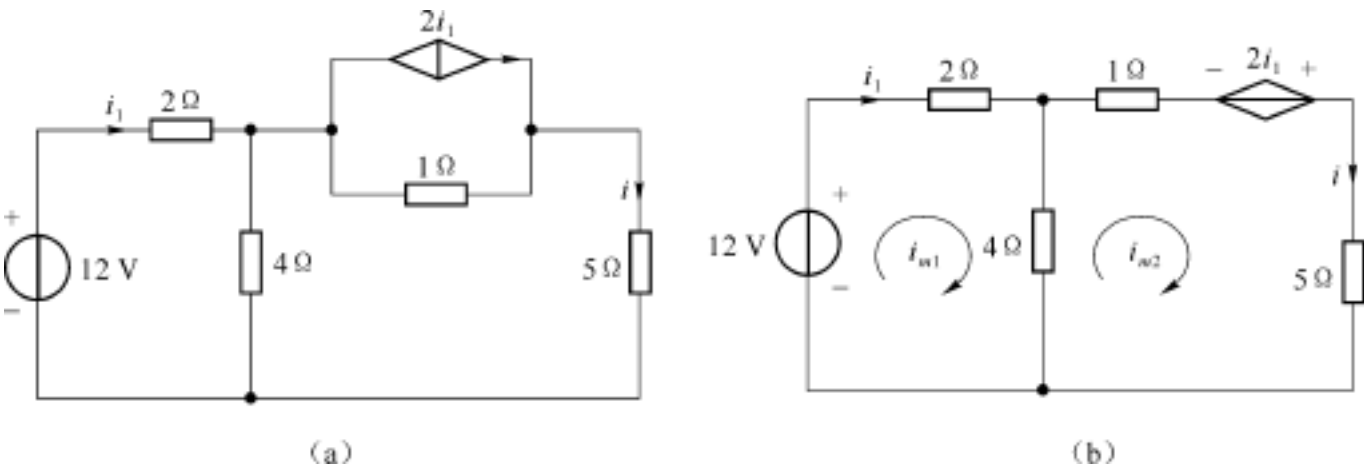


图 3-10 例 3-8 电路

这里注意到,由于电路含有受控源,列出的方程组的系数行列式,已经失去了对称性。下面解方程,将两式相加得

$$6 i_{m2} = 12, i_{m2} = 2A$$

所以

$$i = i_{m2} = 2A$$

以上两个例子反映出电路含有特殊支路时,网孔电流法的特殊处理方法,其他特殊问题的解决方法,也是与节点电压法对偶的。所以不再举例。

3 4 割集分析法与回路分析法

第一章用图论的概念,研究了基尔霍夫定律方程的独立性。本节专门介绍以图论为理论基础的割集分析法和回路分析法。

3 4 .1 割集分析法

割集分析法是以树支电压为变量,列写基本割集的 KCL 方程以分析计算电路的方法。首先树支电压是一组独立的完备的变量,根据树的定义,它连接了图中所有的节点但不形成回路。因为不形成回路,所以树支电压是互相独立的;又因为连接了所有的节点,一旦求出了全部树支电压,即可计算电路各节点间的电压,所以它们是完备的。

下面通过一个简单的电路推出割集分析法。已知电路如图 3 -11(a)所示,

- (1) 画出电路的线图,并选定树(3,6,7,8)。
- (2) 作基本割集如图(b),把被切割的树方向作为割集的切割方向。由于电路有 5 个节点,所以有 4 条树枝,即有 4 个基本割集。

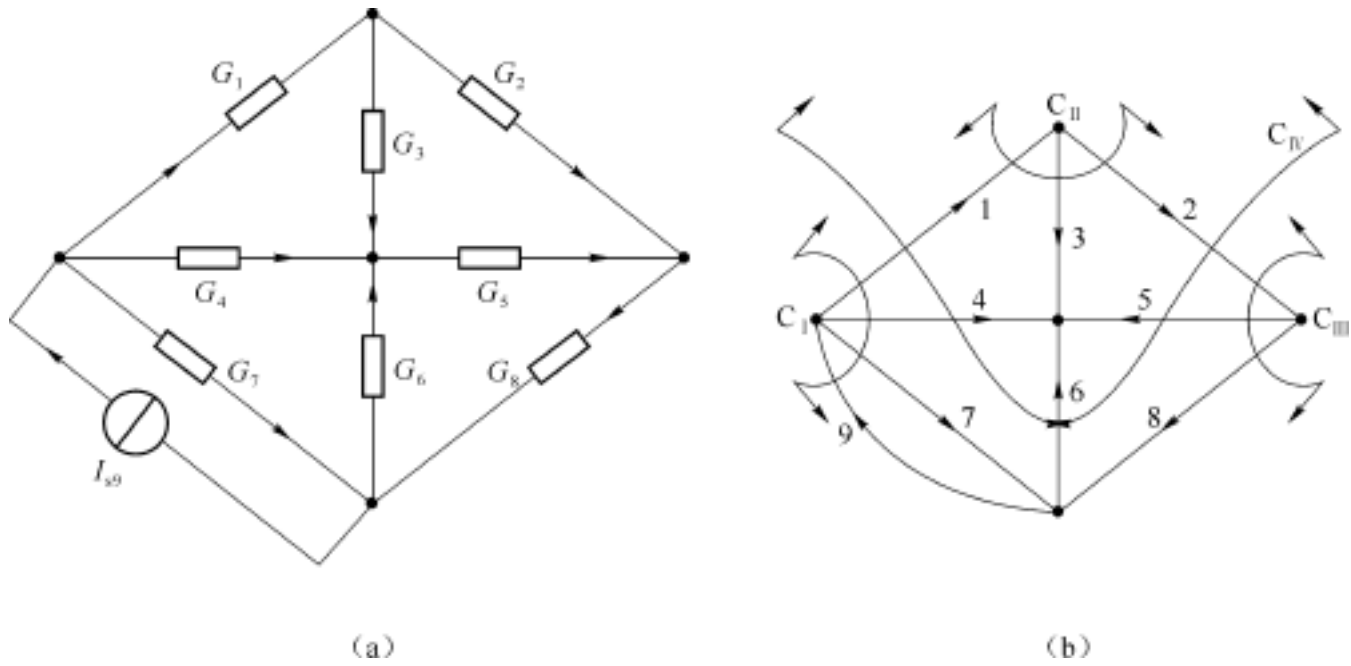


图 3-11 割集分析法

- (3) 根据 KCL 写出基本割集电流方程式,各支路电流方向与切割方向一致的取正,反之取负,由于电路中是直流电流源,这里可以用大写 I 表示电流:

$$\left\{ \begin{array}{l} C : I_1 + I_4 + I_7 - I_9 = 0 \\ C : - I_1 + I_3 + I_2 = 0 \\ C : - I_2 + I_5 + I_8 = 0 \\ C : I_1 + I_4 + I_6 + I_5 - I_2 = 0 \end{array} \right.$$

每个方程中有一个树支电流是独立的,方程是相互独立的。

- (4) 将各支路电流用树支电压来表示

$$\begin{cases} G_1(U_7 + U_6 - U_3) + G_4(U_7 + U_6) + G_7 U_7 = I_s \\ -G_1(U_7 + U_6 - U_3) + G_2(U_3 - U_6 - U_8) + G_3 U_3 = 0 \\ -G_2(U_3 - U_6 - U_8) + G_5(U_6 + U_8) + G_8 U_8 = 0 \\ G_1(U_7 + U_6 - U_3) - G_2(U_3 - U_6 - U_8) + G_4(U_7 + U_6) + G_5(U_6 + U_8) + G_6 U_6 = 0 \end{cases} \quad (3-9)$$

(5) 将各项乘开,并以树支电压 U_7 、 U_3 、 U_8 、 U_6 为变量整理出

$$\begin{cases} (G_1 + G_4 + G_7) U_7 - G_1 U_3 + (G_1 + G_4) U_6 = I_s \\ -G_1 U_7 + (G_1 + G_2 + G_3) U_3 - G_2 U_8 - (G_1 + G_2) U_6 = 0 \\ -G_2 U_3 + (G_2 + G_5 + G_8) U_8 + (G_2 + G_5) U_6 = 0 \\ (G_1 + G_4) U_7 - (G_1 + G_2) U_3 + (G_2 + G_5) U_8 + (G_1 + G_2 + G_4 + G_5 + G_6) U_6 = 0 \end{cases} \quad (3-10)$$

式(3-10)即是所要的割集分析法方程组,方程组以树支电压为变量,方程式的数目等于树支电压数,所以方程组有确定的唯一解。归纳割集分析法的解题步骤为:

- (1) 画出电路的有向图,选定一种树,尽量把电压源选作树支,电流源选作连支,以减少变量数。
- (2) 作基本割集,以树支方向作为割集的方向。
- (3) 以树支电压为变量,按规律列出割集分析方程组。
- (4) 解方程,求出全部树支电压,再求其他变量。
- (5) 用功率平衡校验。

当用割集分析法分析计算电路时也不必从头来推导,可从电路直接列写割集分析方程组,归纳列写割集方程式的规律如下:

(1) 方程左边:本基本割集各支路电导(自电导)之和同本割集树支电压的乘积,设为正;加上各相邻割集与本割集之间公共支路电导(互电导)同相邻割集树支电压的乘积,乘积有正有负,当在公共支路上两切割方向相同时取为正,反之取负。

(2) 方程右边:本割集电流源的代数和,电流方向与割集方向相同时取负,反之取正。

割集分析法与节点电压法有密切的关系,当选树为星树时,再选星树的中点为电压参考节点,则节点电压与树支电压就一致了,所以可认为节点电压法是割集分析法的特例,见图 3-4(a)、(b)所示。割集分析法的方程实质是 KCL 方程,每一项量纲是电流,当电路含有理想电压源、受控源等特殊支路时,处理方式与节点电压法一样。这里不再重复。另外当用矩阵来表示电路结构时,割集分析法较适合计算机运算。详见第十二章。

3 4 2 回路电流法

回路电流法是和割集分析法对偶的一种分析方法。可用对偶的思路得出回路电流法的规律。回路电流法是以连支电流为变量,列写基本回路的 KVL 方程,从而分析计算电路的方法。连支电流和树支电压一样,作为变量是独立的、完备的。根据连支的定义,它是余树的支路,如果将全部树支支路抽出,余树中每个节点的支路均是不完整的。所以连支电流是互相独立的;一旦求出了全部连支电流,即可计算出所有树支电流,所以它们又是完备的。

上节用网孔电流法分析例 3-7(b)图电路。但这不是唯一的思路,重画于图 3-12(a)。若按图中标出的回路,列出的 KVL 方程也是独立的,因为它的每个方程都包含一个新的支路,实际这就是适合一般网络的回路电流法。用图论的方法,画出线图并选树{2,3,5}如图 3-12(b)所示,{1,4,6}为连支支路,确定基本回路。以连支电流作为回路电流,三个回路电

流独立地在图中画出的回路中流动,此时在树支支路中往往有多个回路电流流过,例如 2 支路中同时有 3 个电流流过,其中 i_2 和 i_3 都是从(2)节点流向(1)节点,而 i_1 则与它们方向相反,说明 2 支路的电压等于 3 个电流的代数和与支路电阻 R_2 的乘积,可以想象,此时方程中的互电阻将会有正有负。将网络的 KVL 方程与支路伏安特性相结合,导出以回路电流为变量的一组回路方程。这里特别将理想电流源支路选作连支,可直接将理想电流源当作回路电流,从而减少变量。列出方程如下

$$\begin{cases} i_2 = i_{s4} \\ (R_2 + R_3) i_1 - R_2 i_2 - (R_2 + R_3) i_3 = -u_{s1} \\ (R_2 + R_3 + R_6 + R_5) i_3 - (R_2 + R_3) i_1 + (R_2 + R_5) i_2 = 0 \end{cases}$$

(3-11)

式(3-11)即是回路分析法方程。这里对于回路电流法不再作一般的推导,而直接归纳出此方法的解题步骤和列方程规则。

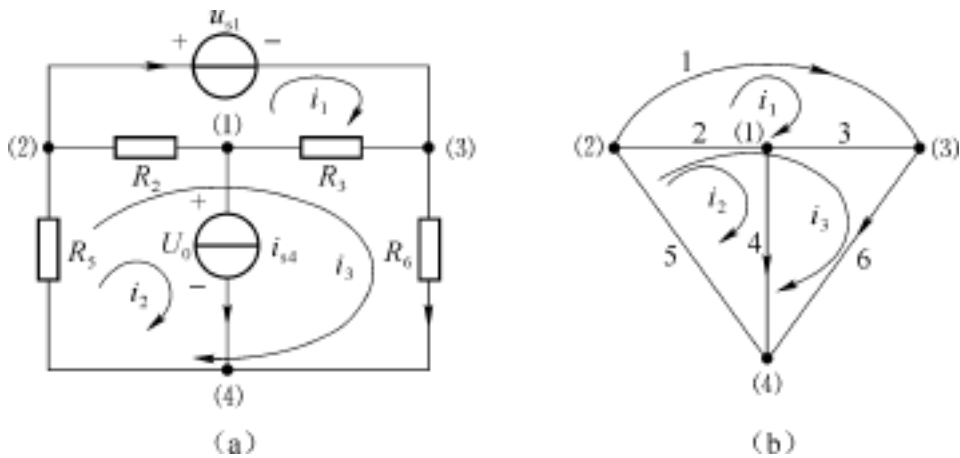


图 3-12 回路电流法

1 步骤

- (1) 画出电路的有向图,选定一种树,为了减少变量数,尽量把电流源选为连支,电压源选为树支。
- (2) 作基本回路,以连支电流方向为基本回路的方向。
- (3) 以连支电流为变量,按规律列出回路分析法方程组。
- (4) 解方程,求出全部连支电流,再求出树支电流等变量。
- (5) 用功率平衡校验。

2 列方程的规则

- (1) 方程左边:本回路电流流经的电阻(自电阻)之和与本回路电流的乘积,设为正。各相邻回路电流,与本回路电流流经的公共支路的电阻(互电阻),与相邻回路电流的乘积有正有负,当本回路同相邻回路电流在公共支路上的方向一致时,互电阻项为正,反之为负。
- (2) 方程右边:本基本回路所包含的电压源的代数和,按连支电流方向,电位升为正,电位降为负。

网孔电流法仅适用于平面电路,但其列方程的规律容易记忆。而回路电流法不拘泥于平面电路,即适用于一般电路。不妨将回路电流法看成网孔电流法的推广,也可以说网孔电流法是回路电流法的特例。

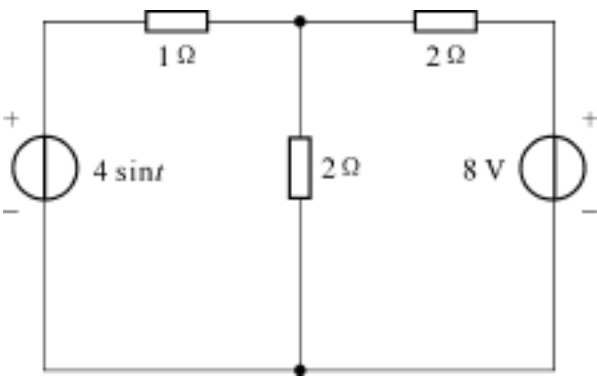
前文曾用图(3-8)中的基本回路,说明网孔电流方程组的独立性。实际上对于某些平面网络,其网孔与基本回路是无法统一的。例如图 1-15 所示网络,读者可以尝试画出线图,思

考是否存在一种树,使得网孔与基本回路一致,并研究怎样说明网孔电流方程组的独立性。

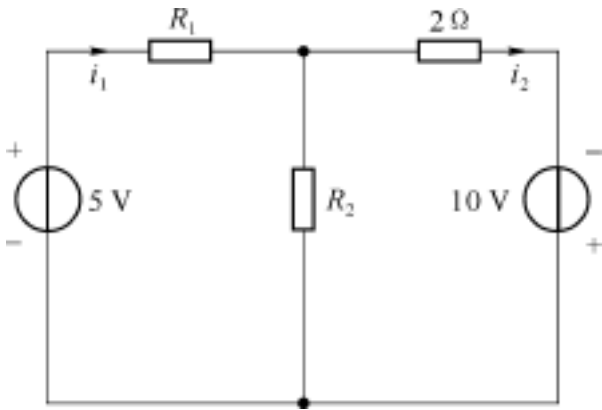
习 题 三

3-1 已知题图 3-1 网络,试用支路电流法求各支路电流。

3-2 已知题图 3-2 网络中, $i_1 = 1\text{ A}$, $i_2 = 2\text{ A}$,求 R_1 和 R_2 的值。



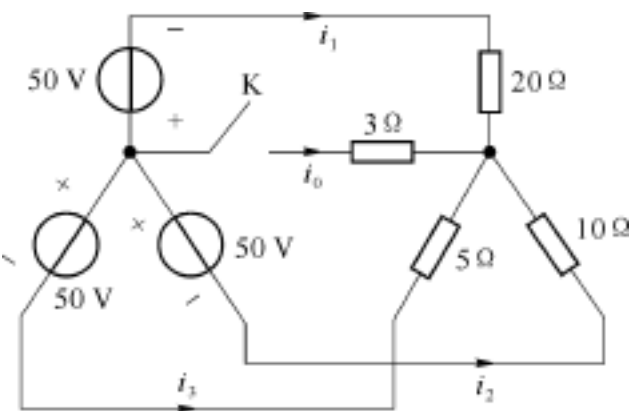
题图 3-1



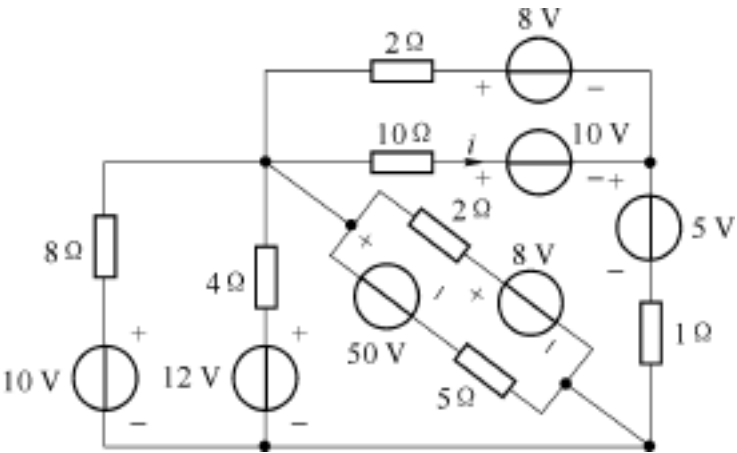
题图 3-2

3-3 求题图 3-3 网络中,K 打开及闭合时各支路电流。

3-4 求题图3-4网络的支路电流 i_o 。



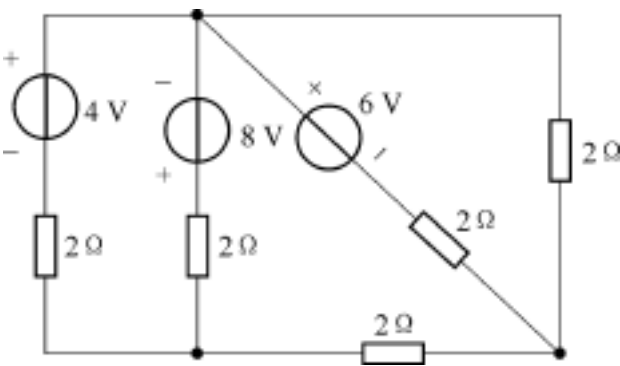
题图 3-3



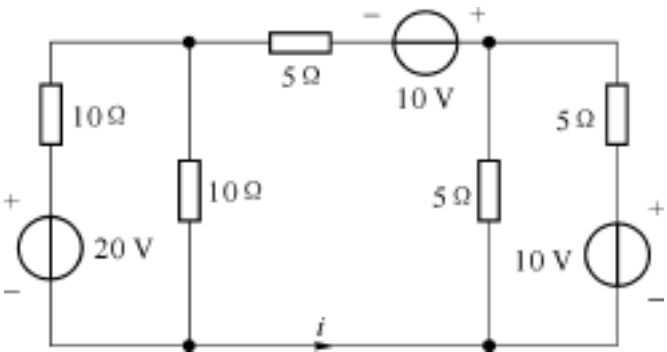
题图 3-4

3-5 试求题图 3-5网络中各支路电流以及每个电源供出的功率。

3-6 求题图 3-6网络中的电流 i_o 。



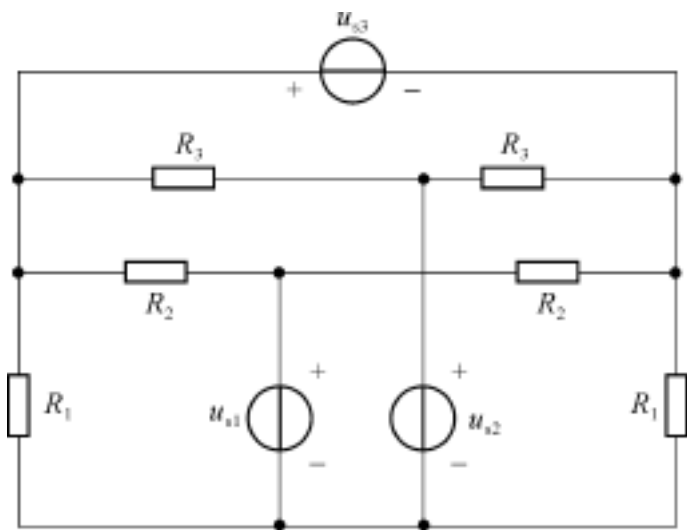
题图 3-5



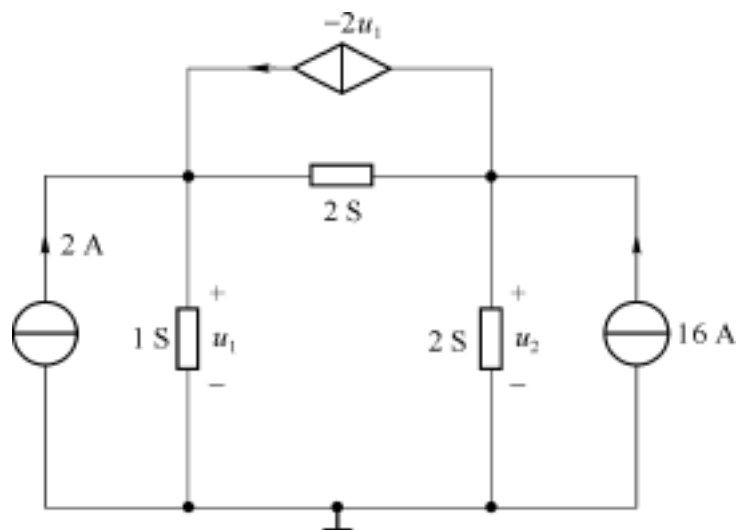
题图 3-6

3-7 题图 3-7 中, 已知 $u_{s1} = 10\text{ V}$, $u_{s2} = 20\text{ V}$, $u_{s3} = 5\text{ V}$, $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$, 求各支路电流。

3-8 求题图 3-8 网络的节点电压。



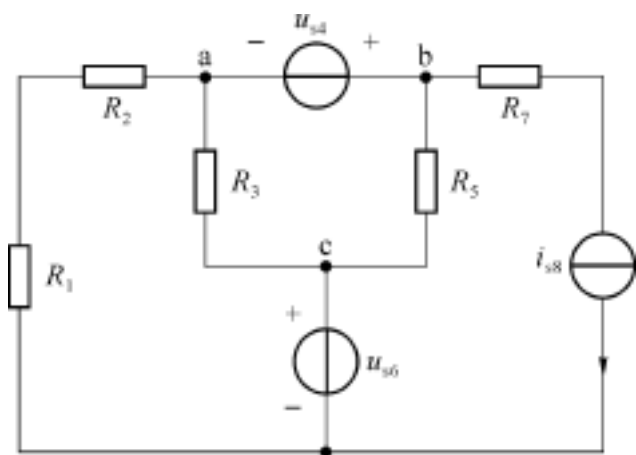
题图 3-7



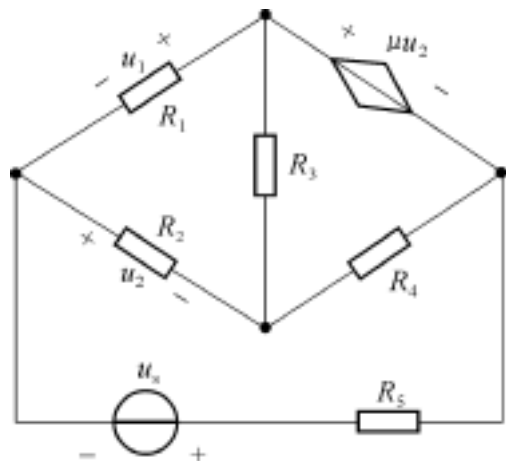
题图 3-8

3-9 按照图 3-9 中所标出的节点列写题图 3-9 网络中的节点电压方程, 以及网孔电流方程。

3-10 已知题图 3-10 中, $u_s = 50\text{ V}$, $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 1\text{ k}\Omega$, $R_3 = 2\text{ k}\Omega$, $\mu = 2$, 求 u_1 。



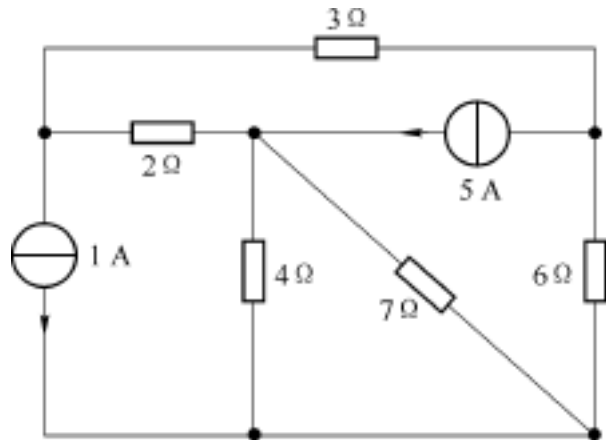
题图 3-9



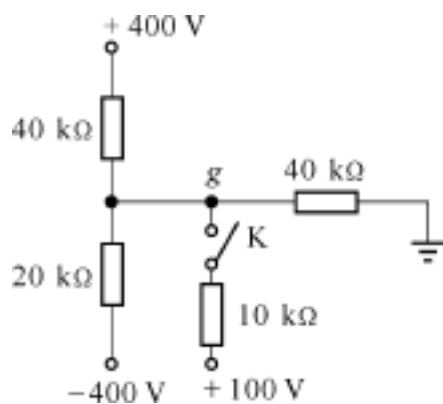
题图 3-10

3-11 试用网孔电流法求题图 3-11 网络中各支路电流。

3-12 求题图 3-12 所示电路中开关打开或闭合时 g 点电位的变化。

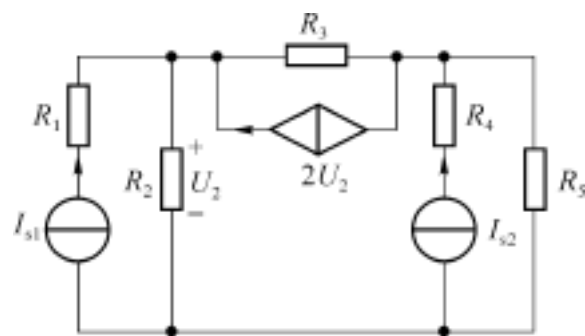


题图 3-11



题图 3-12

3-13 试列出题图 3-13 电路的网孔电流方程。



题图 3-13

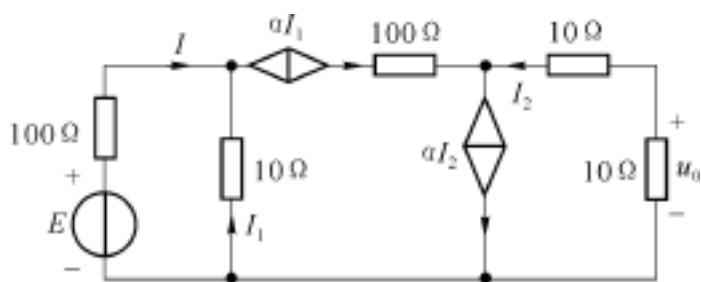
3-14 已知网孔方程

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) i_{m1} - R_2 i_{m2} = u_s \\ -R_2 i_{m1} + (R_2 + R_3 + R_4) i_{m2} - R_4 i_{m3} = 0 \\ -R_4 i_{m2} + (R_4 + R_5) i_{m3} = 0 \end{cases}$$

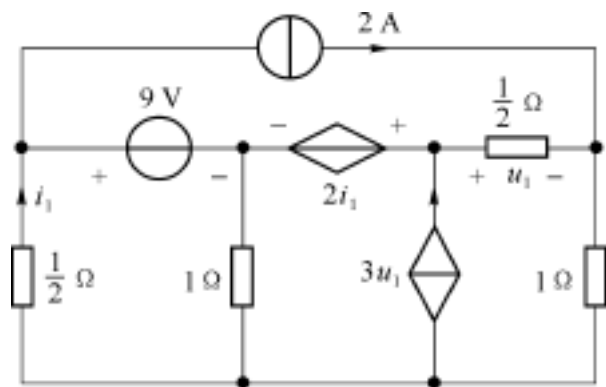
试画出相应的网络。

3-15 晶体管放大器电路如题图 3-15, 已知 $\beta = 0.98$, 求功率增益 $-u_o I_o / E I_o$ 。

3-16 求题图 3-16 网络中电压 u_1 。



题图 3-15



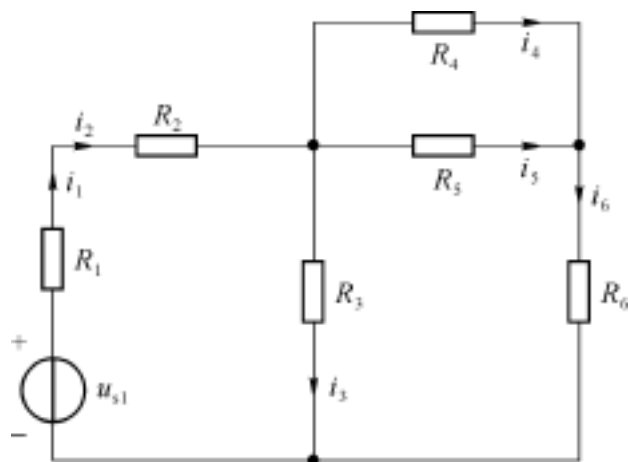
题图 3-16

3-17 已知题图 3-17 中, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$, $R_4 = 2 \Omega$, $R_5 = 2 \Omega$, $R_6 = 1 \Omega$, $u_{s1} = 4V$ 。试用割集分析法求各支路电压及支路电流。

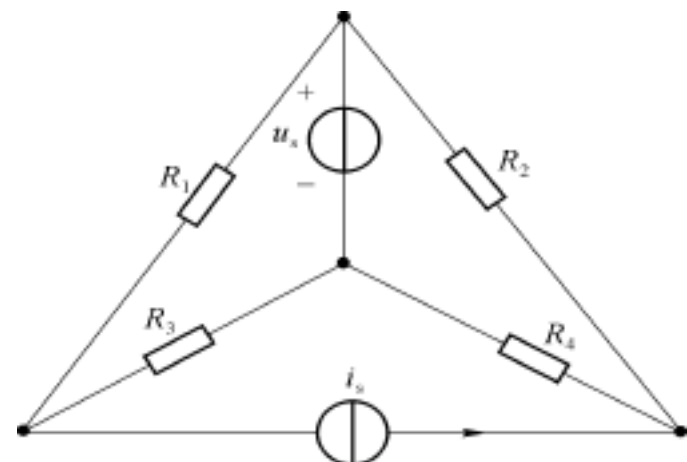
3-18 已知题图 3-18 网络中 $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 8 \Omega$, $R_4 = 5 \Omega$, $u_s = 4V$, $i_s = -2A$ 。用割集分析法求各支路电压和支路电流。

3-19 试以 R_3, R_5, u_{s6} 支路电压为割集电压, 列写题图 3-9 电路的割集方程。

3-20 对题图 3-9 所示电路试用一个方程求解 R_3 支路的电压。



题图 3-17



题图 3-18

第四章 电路定理

本章讨论几个常用的电路定理(或称网络定理),这些定理在电路理论的研究和分析计算中十分有用。叠加定理反映出线性电路的基本性质;替代定理适用于具有唯一解的任何网络,并反映出电路分析的一种思路;由此推出的戴维南定理和诺顿定理,不仅具有重要的理论意义,也是分析计算线性复杂电路的重要方法,是本章的学习重点;最后介绍互易定理和特勒根定理。电路定理不仅为电路分析提供了等效变换的分析方法,而且为电路理论问题的证明提供了基本的理论根据。

4.1 叠加定理

叠加定理体现了线性电路的一种基本性质,而这种性质在线性电路中表现为电路的激励与响应之间具有线性关系。叠加方法作为电路分析的一类基本方法,可使复杂激励问题简化为单一激励问题。叠加方法将贯通全书,要理解其在理论上、概念上的指导作用。

1. 定理内容

叠加定理可表述为:在任何由线性元件、线性受控源和独立源组成的电路中,所有独立电源共同作用在某一支路上产生的电流(或电压),等于电路中每个独立电源单独作用在该支路产生电流(或电压)的代数和。当某一独立电源作用时,其他独立电源应为零值,即独立电压源短路;独立电流源开路,电源内阻保留。

电路如图 4-1(a) 所示,含有两个独立电压源,按叠加定理的描述,独立电压源单独作用时可用图(b)、(c)来表示。

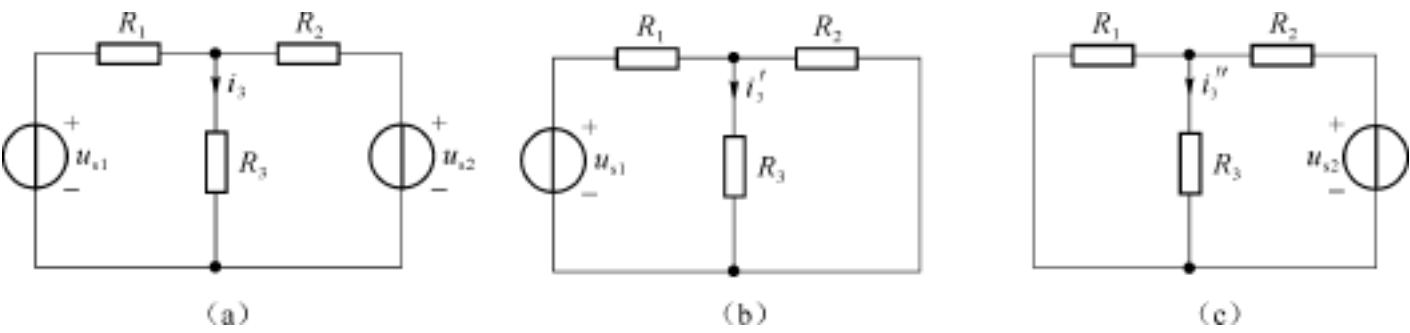


图 4-1 验证叠加定理

若要求电流 i_3 , 由图(b)可写出计算公式

$$i_3 = \frac{u_{s1}}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{u_{s1} \cdot R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

由图(c) 可写出计算公式

$$i_3 = \frac{u_{s2}}{R_2 + R_1} \cdot \frac{R_1}{R_3} = \frac{u_{s2} \cdot R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

这里图(a)支路电流 i_3 , 等于图(b)支路电流 i_3 和图(c)支路电流 i_3 的代数和。因为它们在支路中的参考极性是一致的, 直接相加即可。即

$$i_3 = i_3 + i_3 = \frac{u_{s1} R_2 + u_{s2} R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

若直接由图(a)求出 R_3 支路电流 i_3 , 用节点分析法得到的计算公式与其完全一致。这就验证了叠加定理。

2. 叠加定理的证明

叠加定理可以用节点分析法或网孔分析法来证明。若用节点分析法证明, 可参见式(3-3)的节点电压方程, 各方程等号右侧是各节点的电流源电流, 再参见式(3-4)的节点电压方程的解答, 可以看到各节点电压与各独立电源的线性关系, 每个节点电压是其中每个独立电源单独作用时, 所产生的分量的代数和, 此即证明了叠加定理。若用网孔分析法证明, 可参见式(3-7)和式(3-8), 用类似的思路也可证明叠加定理。

对受控源电路运用叠加定理时必须注意: 叠加定理中说的只是独立电源的单独作用, 受控源的电压或电流不是电路的输入, 在运用此定理时, 受控源与电阻一样, 始终保留在电路中。

例 4-1 如图4-2(a)所示的电路中, 已知 $u_s = 9\text{ V}$, $i_s = 3\text{ A}$, $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, 用叠加定理来求 i_1 、 i_2 、 u_1 、 u_2 ; 并求出 R_1 消耗的功率, 讨论是否可用叠加定理求。

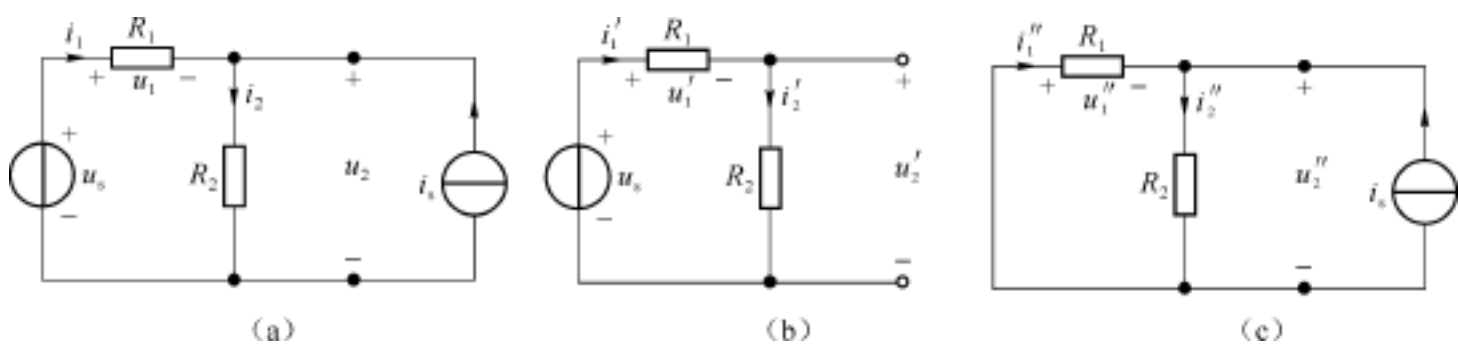


图 4-2 例 4-1 电路

解 求电流、电压:

(1) 当 u_s 单独作用时, 令 i_s 为零即将 i_s 断开, 如图(b), 可得

$$i_1 = i_2 = u_s / (R_1 + R_2) = 1\text{ A}$$

$$u_1 = R_1 i_1 = 3\text{ V}; u_2 = R_2 i_2 = 6\text{ V}$$

(2) 当 i_s 单独作用时, 令 u_s 为零, 即将 u_s 短路, 如图(c), 可得

$$i_1 = -i_s R_2 / (R_1 + R_2) = -2\text{ A}; i_2 = 3 - 2 = 1\text{ A}$$

$$u_1 = R_1 i_1 = -6\text{ V} u_2 = R_2 i_2 = 6\text{ V}$$

(3) 当两个电源共同作用时

$$i_1 = i_1 + i_1 = 1 + (-2) = -1\text{ A}$$

$$i_2 = i_2 + i_2 = 1 + 1 = 2\text{ A}$$

$$u_1 = u_1 + u_1 = 3 + (-6) = -3\text{ V}$$

$$u_2 = u_2 + u_2 = 6 + 6 = 12 \text{ V}$$

(4) 功率是否符合叠加定理呢？先来计算图(a)中 R_1 消耗的功率 P_1 ：

$$P_1 = i_1^2 R_1 = (-1)^2 \times 3 = 3 \text{ W}$$

再分别计算图(b)中 R_1 消耗的功率 P_1 ，图(c)中 R_1 消耗的功率 P_1 ：

$$P_1 = i_1^2 R_1 = 1^2 \times 3 = 3 \text{ W}$$

$$P_1 = i_1^2 R_1 = (-2)^2 \times 3 = 12 \text{ W}$$

很显然

$$P_1 \neq P_1 + P_1$$

由公式 $P_1 = i^2 R$ 也可知功率与电流是非线性关系，所以功率不符合叠加定理。

应用叠加定理注意：

- (1) 叠加定理只适用于线性电路。
- (2) 不作用的电源置零。电压源 $u_s = 0$ ，支路等效为短路；电流源 $i_s = 0$ ，支路等效为开路。
- (3) 功率不能用叠加定理计算，因为功率和支路电流或支路电压是平方关系，不是线性关系。
- (4) 受控源不是电路的激励，不能按叠加定理单独作用于电路。

例 4-2 图4-3所示是线性电阻网络 N。

(1) 当两个电流源 $i_{s1} = 1 \text{ A}$ 、 $i_{s2} = 14 \text{ A}$ 时， $u_x = 100 \text{ V}$ ；当 $i_{s1} = -10 \text{ A}$ 、 $i_{s2} = 10 \text{ A}$ 时， $u_x = 20 \text{ V}$ ，求当 $i_{s1} = 8 \text{ A}$ 、 $i_{s2} = 12 \text{ A}$ 时的 u_x 。

(2) 若所示网络含有一电压源 u_s ，且知 u_s 单独作用时 $u_x = 20 \text{ V}$ ，其他数据有效。求当 $i_{s1} = 8 \text{ A}$ 、 $i_{s2} = 12 \text{ A}$ 时的 u_x 。

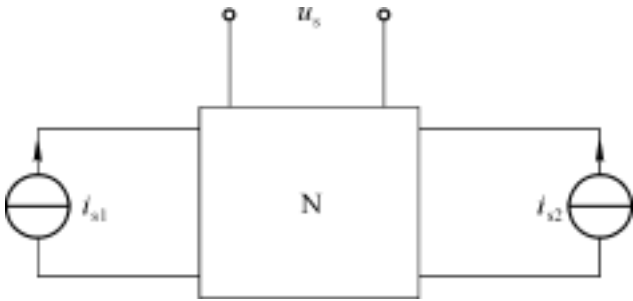


图 4-3 例 4-2 电路

解 (1) 网络 N 仅含有电阻，由叠加定理可设

$$K_1 i_{s1} + K_2 i_{s2} = u_x$$

其中用参数 K_1 、 K_2 描述电流源与响应之间的线性关系，由已知条件得

$$10 K_1 + 14 K_2 = 100 \tag{A}$$

$$-10 K_1 + 10 K_2 = 20 \tag{B}$$

解式(A)、(B)得

$$K_2 = \frac{120}{24} = 5$$

$$K_1 = \frac{10 \times 5 - 20}{10} = 3$$

所以当 $i_{s1} = 8 \text{ A}$ 、 $i_{s2} = 12 \text{ A}$ 时

$$u_x = K_1 i_{s1} + K_2 i_{s2} = 3 \times 8 + 5 \times 12 = 84 \text{ V}$$

(2) 网络含电阻和一个电压源时，由叠加定理设

$$u_x = K_1 i_{s1} + K_2 i_{s2} + K_3 u_s \tag{C}$$

由已知条件可知电压源单独作用，即 $i_{s1} = i_{s2} = 0$ 时， $u_x = 20 \text{ V}$ ，所以 $K_3 u_s = 20 \text{ V}$ 。由此写出

$$10 K_1 + 14 K_2 = 100 - 20 \tag{D}$$

$$-10K_1 + 10K_2 = 20 - 20$$

(E)

解式(D)、(E)得

$$K_1 = K_2 = 3.33$$

所以当 $i_{s1} = 8\text{ A}$, $i_{s2} = 12\text{ A}$ 时

$$u_x = K_1 i_{s1} + K_2 i_{s2} + K_3 u_s = (8 + 12) \times 3.33 + 20 = 86.67\text{ V}$$

此例再一次说明,叠加定理与网络的线性特性密切相关,运用叠加定理要牢牢把握响应和激励之间必须是线性关系这一前提。叠加原理简化了电路激励与响应的关系。本例中的N可能是一个含有许多电阻元件、结构复杂的电路,但只需用 K_1 和 K_2 等网络参数,即能描述指定的响应与激励之间的关系。而且每一激励对响应的作用也可一目了然,只要电路的结构和参数不变动,网络参数就始终有效;在研究响应与激励的关系时,就不必考虑电路的原结构和参数了。

线性网络的重要特性是可加性和比例性。叠加定理即是可加性的表现。在叠加定理的证明中提到的式(3-4)和式(3-8),两个式子反映出响应与每个激励的线性性质,除了验证了叠加定理外,若某个激励增加 k 倍,则响应中有关部分也增加 k 倍,这就是线性网络的比例性。这些性质在后面的内容中还会出现。

4.2 替代定理

1. 定理内容

有唯一解的任意线性或非线性电路中,若已知某支路的电压 u_k 或 i_k ,则可用一个独立电压源 $u_s = u_k$,或一个独立电流源 $i_s = i_k$ 替代这个支路,而对整个电路的各电压、电流不产生影响。这就是替代定理,也称置换定理。

由替代定理所述,电路如图 4-4(a)所示,可求出 $i_1 = -0.1\text{ A}$, $i_2 = 0.2\text{ A}$, $i_3 = 0.1\text{ A}$, $u = 12\text{ V}$ 。若中间支路用一个大小为 0.1 A ,方向与原支路电流 i_3 方向相同的电流源代替,如图(b)所示,或者用 12 V 的电压源代替中间支路,如图(c)所示,则替代后电路各支路电压、电流大小不变。即对网络各响应无任何影响。这是容易计算验证的。

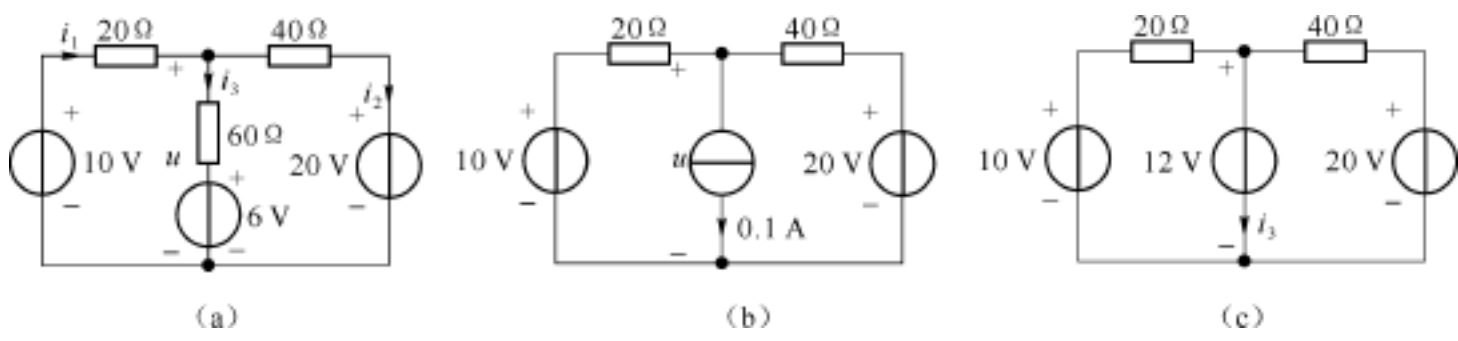


图 4-4 验证替代定理

2. 替代定理的证明

证明一

某电路有 n 条支路,如图 4-5(a)所示,支路电流为 i_1, i_2, \dots, i_n ,支路电压为 u_1, u_2, \dots, u_n ,其中第 k 条支路电流为 i_k 。用电流源 i_k 来替代,即第 k 条支路电流值不变,则由 KCL 可知,其他支路电流 $i_1, i_2, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_n$ 均不变。而且除了 k 支路,其他支路伏安特性没有

变。所以 $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n$ 不变, 由 KVL 可知, u_k 也不变。

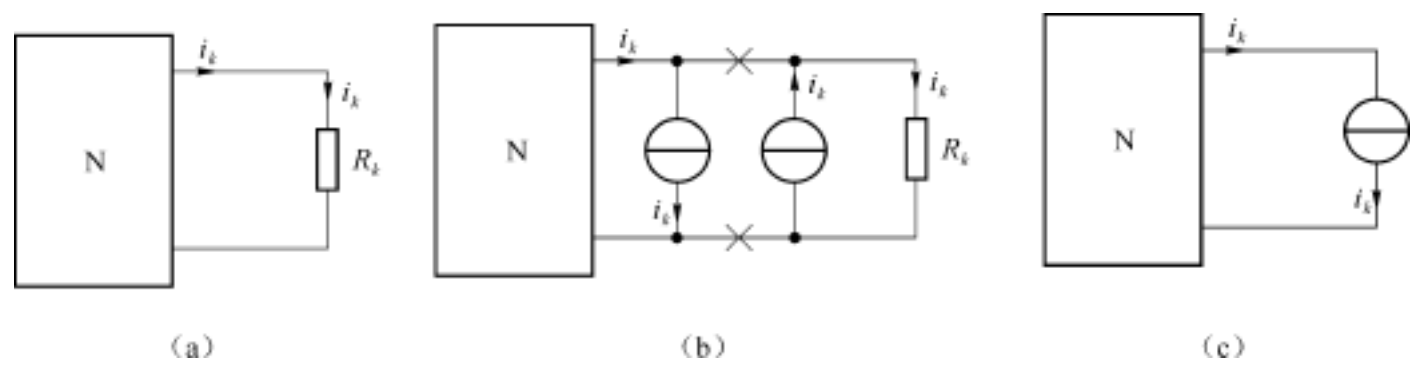


图 4-5 替代定理的证明

证明二

某电路如图 4-5(a)所示, 其中第 k 条支路电流为 i_k , 将两电流源 i_k 以图(b)方式接入 k 支路, 对于原电路的各支路的工作状态没有影响。将打叉处断开, 第 k 条支路电流仍为 i_k 。即用电流源 i_k 替代了电阻支路 R_k , 如图(c)所示。用对偶的方式可导出用电压源替代的电路, 具体推导留给读者思考。

其实在学习第三章节点分析法和网孔分析法时, 已经用到了替代定理的思路, 如例 3-4 中设电压源支路电流 I_0 并列入节点电压方程, 实际上假设支路电流是 I_0 , 并替代为电流等于 I_0 的电流源。例 3-7 中设电流源支路两端电压为 U_0 并列入网孔电流方程, 即将电流源支路替代为电压等于 U_0 的电压源。

用替代定理来证明某些定理或引出其他分析方法是很有效的。

4 3 戴维南定理和诺顿定理

第二章介绍了有源二端网络的简化问题, 其主要思路是按电源的两种形式等效互换的原则逐步将网络简化。这里介绍的由戴维南定理或诺顿定理得到的等效电路, 仍然是针对有源二端网络的简化问题, 但其思路是由叠加定理和替代定理推出一种抽象的等效电路, 它们可适用于解决复杂线性网络的分析计算, 应用十分广泛。本节是本章的重点内容。

4 3 .1 戴维南定理

定理内容可表述为: 任何线性有源二端网络, 就其外部特性而言, 都可以用一个电压源和一个电阻串联支路代替。其中电压源电压为二端网络输出端开路电压, 电阻为二端网络内所有独立源为零时的输出端等效电阻。

图 4-6(a)和(b)所表示的网络中, 图(a)就是一个线性有源二端网络, 根据戴维南定理,

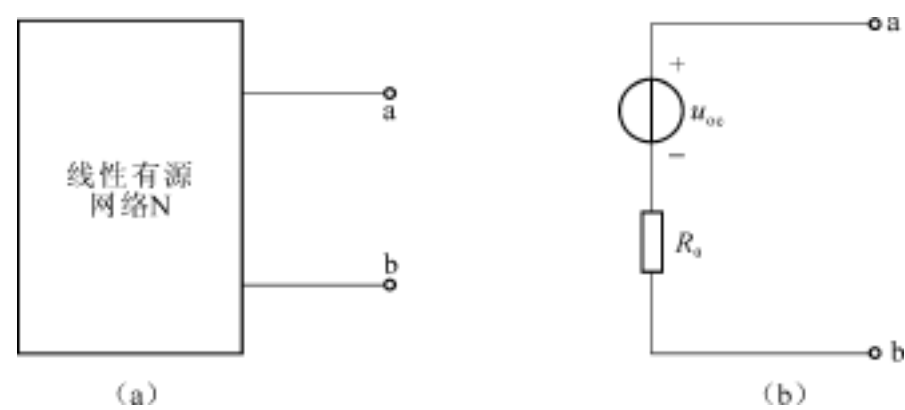


图 4-6 线性有源二端网络

它可以等效为图(b)的简单等效电路,其中电路参数 u_{oc} 和 R_0 都是可求的。下面先从一个例子来说明戴维南定理的含意。

例 4-3 求图4-7(a)所示电路的戴维南等效电路。

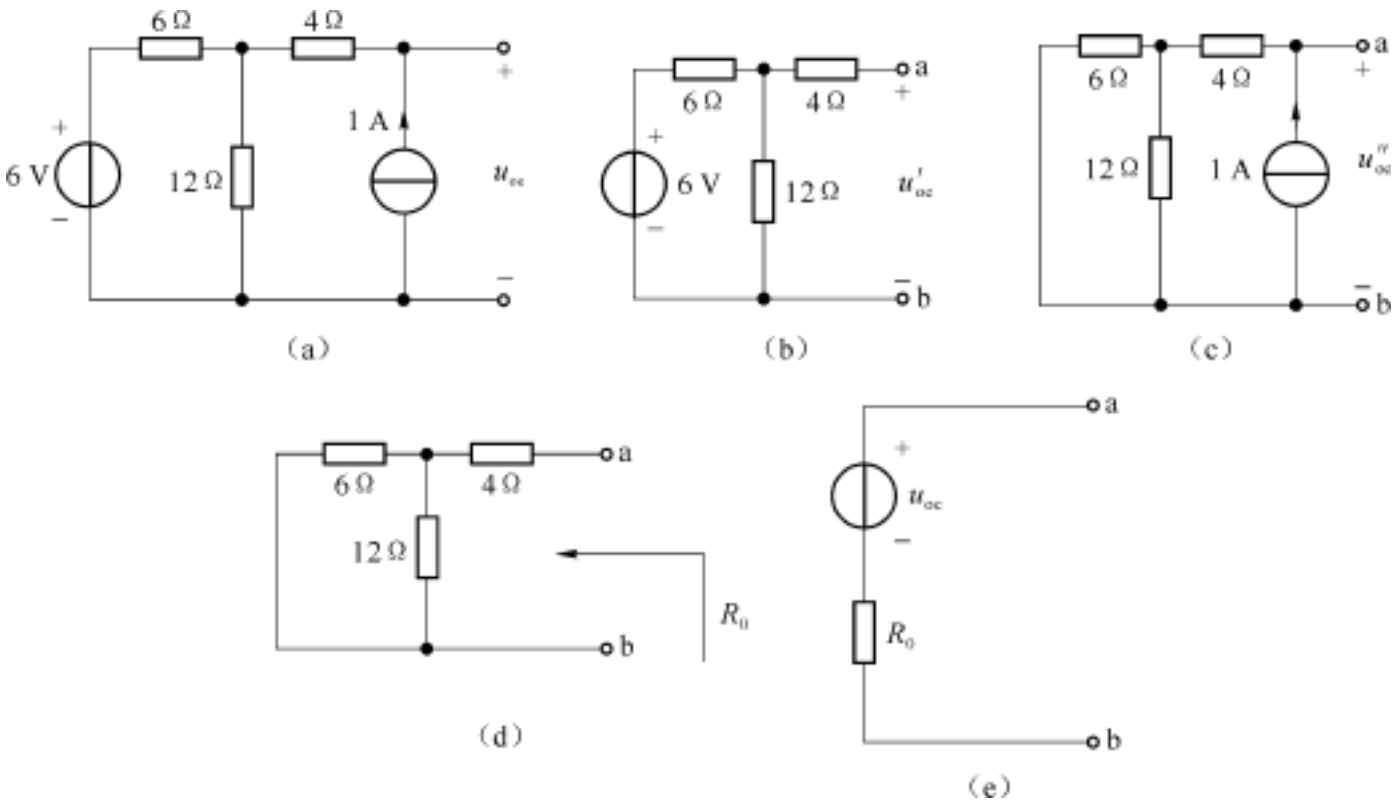


图 4-7 例 4-3 电路及其等效电路

解 (1) 求 a、b 端开路电压 u_{oc} 。如图 4-7(a)中所设上正下负的极性,可以用叠加定理求 u_{oc} 。当 6V 电压源单独作用时,1A 电流源断开如图(b)所示,4 Ω 电阻中没有电流,左边单回路工作,12 Ω 电阻电压与电压源仅是分压关系,所以 a、b 间电压

$$u_{oc} = 6 \times \frac{12}{12 + 6} = 4 \text{ V}$$

当 1 A 电流源单独作用时,6V 电压源短路如图(c)所示,a、b 间电压

$$u_{oc} = 1 \times (4 + 12 - 6) = 8 \text{ V}$$

所以对图(a)有

$$u_{oc} = u_{oc} + u_{oc} = 4 + 8 = 12 \text{ V}$$

(2) 求等效电阻 R_0 。将图(a)中所有独立源设为零,即将电压源短路、电流源开路如图(d)所示,这是一个简单的电阻网络,很容易求出等效电阻

$$R_0 = 4 + 12 / 6 = 8$$

得到戴维南等效电路如图(e)所示,其中开路电压 $u_{oc} = 12 \text{ V}$,等效电阻 $R_0 = 8 \text{ } \Omega$ 。

4 3 2 戴维南定理的证明

图 4-8(a)所示网络 a、b 端以左是有源二端网络, R_L 是负载电阻,已知其中电流 i ,现在用一个电流源 i 来代替电阻 R_L 如图(b)所示。欲求 a、b 之间的电压 u ,可将独立电源分成两组,一组是有源二端网络 N 内部所包含的全部独立电源,另一组是外部独立电流源,再用叠加定理让两组电源分别工作如图(c)和图(d)所示。图(c)是网络 N 内部电源工作,外电路电流源开路, u 正好等于有源二端网络 N 的开路电压

$$u = u_{oc}$$

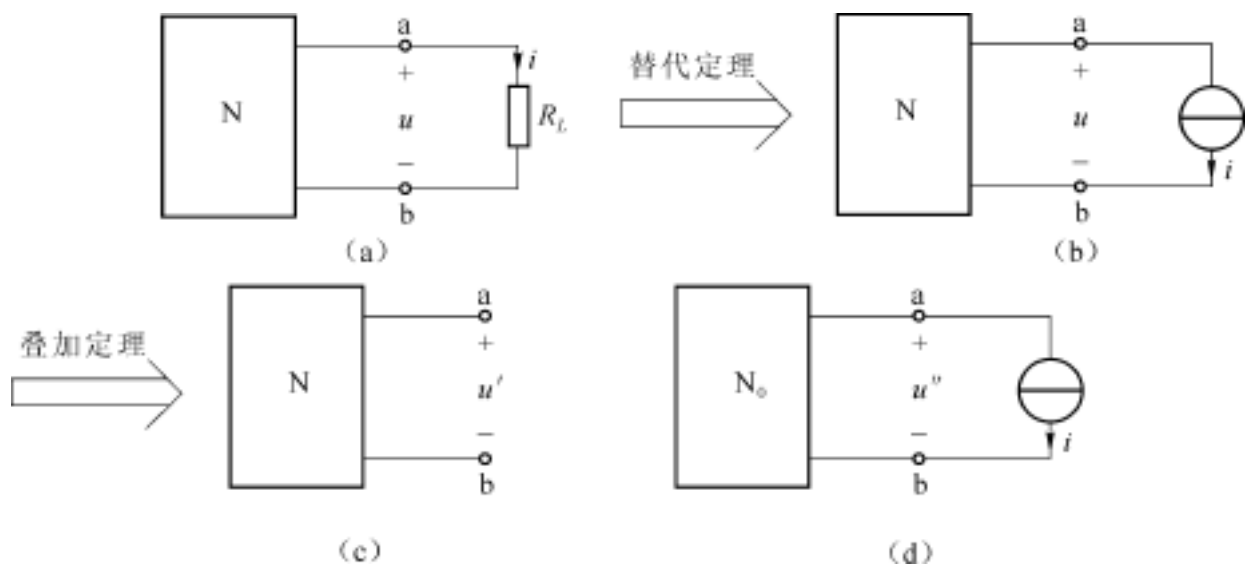


图 4-8 戴维南定理的证明

图(d)是外部电流源单独作用,设有源二端网络 N 内部独立电源全部为零,表示为 N_0 , N_0 的等效电阻为 R_0 ,在电流源 i 的作用下

$$u = - iR_0$$

图(a)的电压

$$u = u + u = u_{oc} - iR_0 \tag{4-1}$$

由式(4-1)并结合图(a)可画出等效电路如图 4-9 所示。即证明了对于图 4-8(a)所示电路中 a、b 端以左的有源二端网络,可以用图 4-9 的左侧支路等效代替。此即证明了戴维南定理。

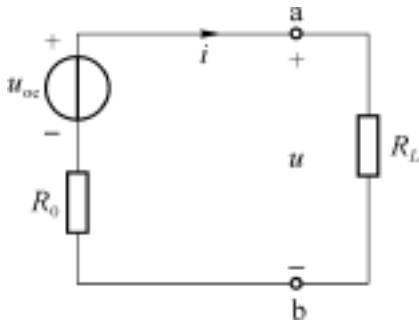


图 4-9 戴维南等效电路

4 3 3 诺顿定理及其证明

诺顿定理的内容可表述为:任何线性有源二端网络,就其外部特性而言,都可以用一个电流源和一个电阻(或电导)并联的支路代替。其中电流源电流为二端网络输出端短路电流,电阻为二端网络内所有独立源为零时的输出端等效电阻。

显然诺顿定理与戴维南定理是对偶的两个定理,它们的证明方法也是对偶的。图 4-10 (a)所示网络 a、b 端以左是有源二端网络, N_L 是负载电阻网络,已知其上电压 u ,根据替代定理,用电压源 u 替代负载电阻网络 N_L ,如图(b)所示。再根据叠加定理,图(b)可等效为图(c)和图(d)之和。图(c)为有源二端网络 N 内部独立电源单独作用时产生的电流 i ,此时外电路电压源短路,称为短路电流 i_{sc} ,且有

$$i = i_{sc}$$

图(d)是外部电压源单独作用, N 内部电压不作用,故 N 变成 N_0 ,其等效电阻就是 R_0 ,与戴维南定理等效电阻的求法完全一样。且有

$$i = - u' R_0$$

图(a)的电流

$$i = i + i = i_{sc} - u' R_0 \tag{4-2}$$

由式(4-2)并结合图(a)可画出等效电路如图 4-10(e)所示。

因为在戴维南定理和诺顿定理证明过程中使用了叠加定理,有源二端网络必须是线性的,而外部电路即负载 N_L 可以是任意的,线性、非线性、非时变、时变都适用。戴维南等效电路是一个电压源模型,诺顿等效电路是一个电流源模型,根据电源两种形式的等效转换方式,诺顿等效电路与戴维南等效电路也可互相等效转换。

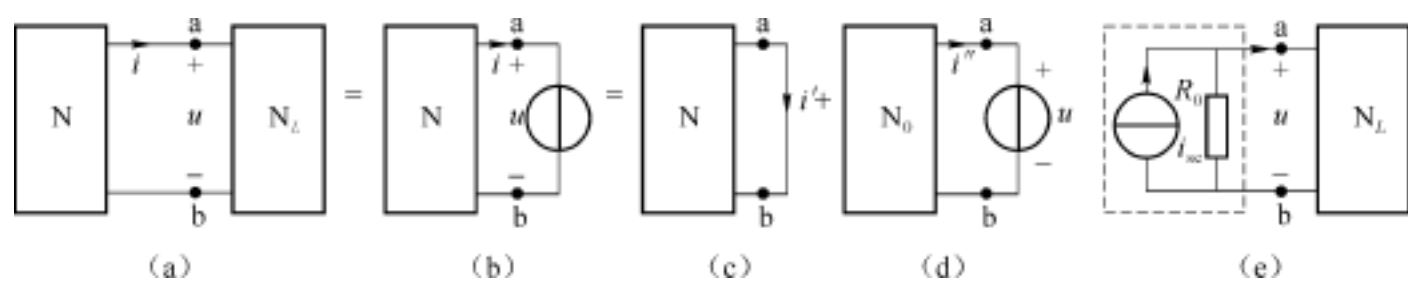


图 4-10 诺顿定理的证明

求戴维南等效电路与诺顿等效电路时,有源二端网络的开路电压或短路电流可以用各种方法求解;其等效内阻 R_0 的求法有以下三种:

(1) 直接法:当有源二端网络 N 内独立源为零时,所得到的无源网络 N_0 是简单的电阻网络(即不含受控源),此时可直接求等效电阻。

(2) 外加电压法:对无源二端网络 N_0 外加独立电压源或独立电流源,端口上电压与电流之比即为等效内阻 R_0 。其原理可参见图 4-11。

$$R_0 = U_0 / I_0$$

(3) 开路电压短路电流法:有源二端网络 N 的开路电压 u_{oc} 与短路电流 i_{sc} 之比即为等效内阻 R_0 ,其原理可参见图 4-12。

$$R_0 = u_{oc} / i_{sc}$$

为什么要分成三种方法呢?在许多情况下,有源二端网络含有受控源和其他性质的元件,用方法(1)求不出等效内阻 R_0 ,可以使用方法(2)或(3)来求。实际上这两种方法也有各自的使用范围。例如当有源二端网络的开路电压为零时,其短路电流也一定为零,那么开路电压短路电流法就会失效。而当有源二端网络的等效内阻为零时,外加电压法就会失效。下面的例子会帮助读者更好地理解戴维南定理和诺顿定理。

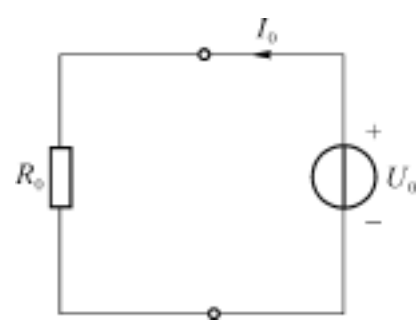


图 4-11 外加电压法

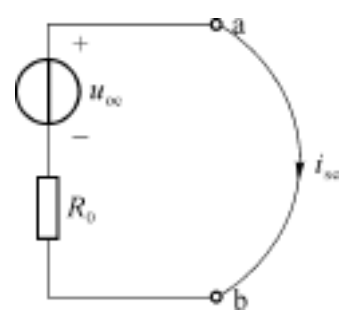


图 4-12 开路电压短路电流法

4 3 4 举例

例 4-4 求如图4-13所示电路中的电压 u_{ab} 。

解 用戴维南定理求解。

(1) 求开路电压 u_{oc} 。从 a, b 处断开电路,设开路电压 u_{oc} 如图 4-14(a) 上所标,这里可以确定电流源小回路与电压源回路分别独立工作,所以

$$u_{oc} = 4 \times 4 + \frac{3}{3 + 6} \times 24 = 24 \text{ V}$$

(2) 求 R_0 。将图(a)中电流源断开、电压源短路变为图(b),应用电阻串并联等效求得

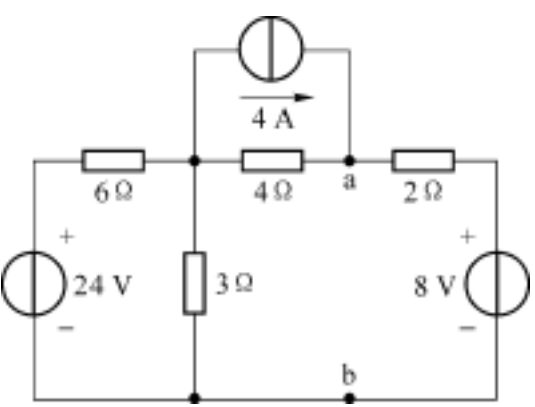


图 4-13 例 4-4 电路

$$R_0 = 6 + 3 + 4 = 6$$

(3) 画出戴维南等效电源, 接上待求支路, 如图(c), 应用 KVL 易求得

$$i = \frac{24 - 8}{6 + 2} = 2\text{ A}$$

$$u_{ab} = 2i + 8 = 2 \times 2 + 8 = 12\text{ V}$$

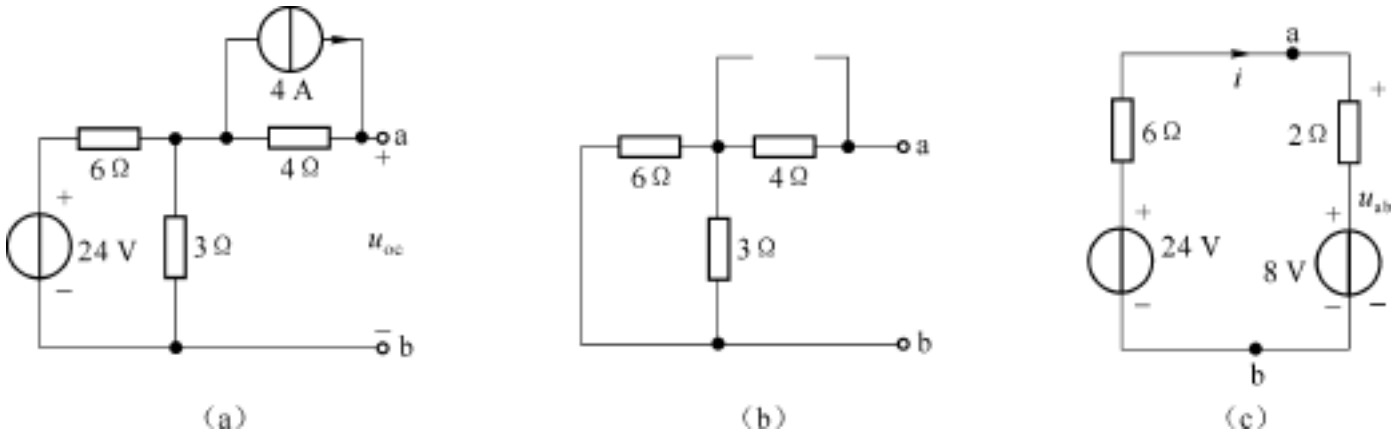


图 4-14 例 4-4 解图

例 4-5 在图4-15(a)所示电路中, N_A 为线性含源网络, 电流表、电压表均是理想的, 已知当开关 S 置“1”位时电流表读数为 2A, S 置“2”位时的电压表读数为 4V, 求当 S 置于“3”位时图中的电压 U 。

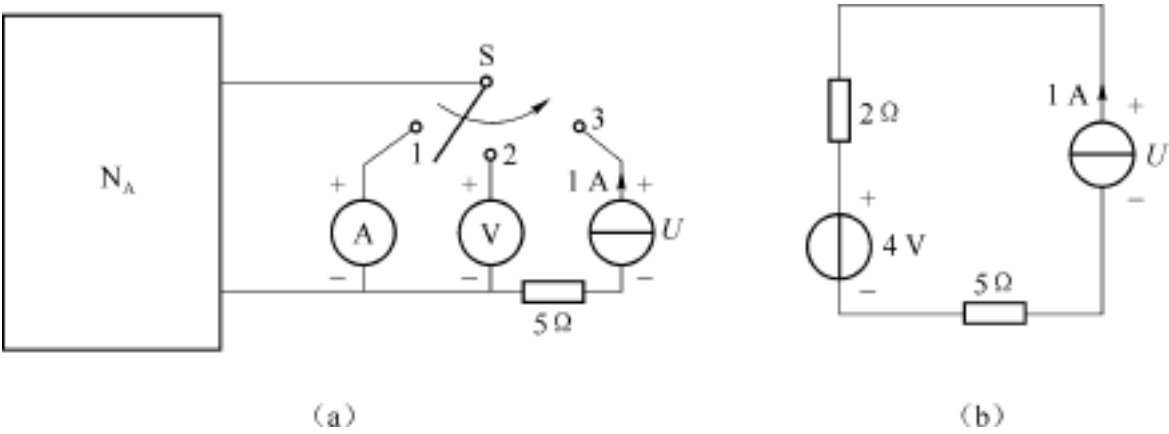


图 4-15 例 4-5 电路

解 S 置“1”位时, 因电流表是理想的, 此时 N_A 两端间相当于短路, 所以电流表的读数即是短路电流。设短路电流用 I_{sc} 表示, 则

$$I_{sc} = 2\text{ A}$$

S 置“2”位时, 因电压表是理想的, 此时 N_A 两端间相当于开路, 所以电压表的读数即是端间开路电压。设开路电压用 U_{oc} 表示, 则

$$U_{oc} = 4\text{ V}$$

据开路电压、短路电流值可求得网络 N_A 的戴维南等效内阻

$$R_0 = \frac{U_{oc}}{I_{sc}} = \frac{4}{2} = 2$$

画出 N_A 网络的戴维南等效电路, 并将开关 S 置于“3”位, 电路如图 4-15(b)所示, 由此容易求得

$$U = 1 \times 2 + 4 + 1 \times 5 = 11 \text{ V}$$

这个例子可以体现基于戴维南定理的近似测量方法。在实验室中,对于线性二端有源网络 N_A ,如果只关心它的外部特性,可以用本例的方法近似测出其伏安特性,用戴维南等效电路表示,再进一步分析计算电路。

例 4-6 应用戴维南定理和诺顿定理求图4-16(a)所示电路中的电压 u_2 。

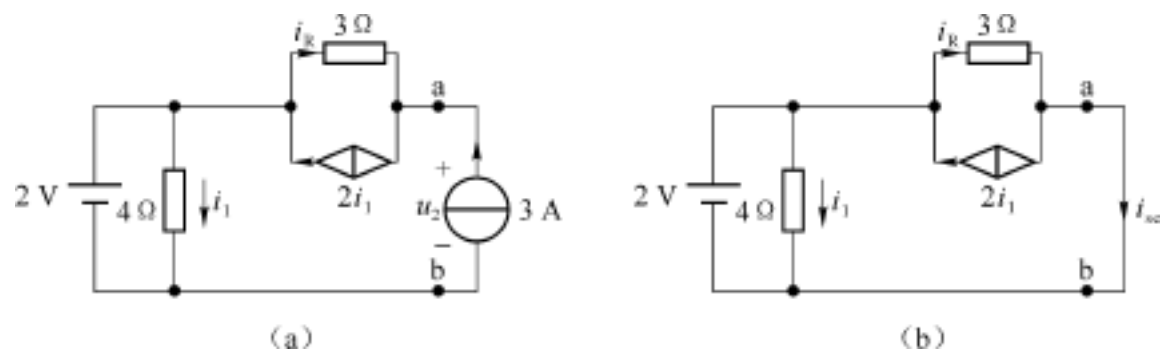


图 4-16 例 4-6 电路及解图 1

解 二端网络中含有一个电流控制电流源,由 a、b 处断开,二端网络即成为两个独立的简单回路,从左侧小回路可直接求出

$$i_1 = 2 / 4 = 0.5 \text{ A}$$

受控电流源 $2 i_1 = 1 \text{ A}$,可得开路电压 $u_{oc} = u_{ab} = -3 + 2 = -1 \text{ V}$,为了求等效内阻,先求短路电流 i_{sc} ,由图(b)外沿回路的 KVL 可得

$$2 = i_R \times 3$$

所以

$$i_R = 2 / 3 \text{ A}$$

左侧回路

$$i_1 = 2 / 4 = 0.5 \text{ A}$$

从 a 节点

$$i_{sc} = i_R - 2 i_1 = 2 / 3 - 1 = -1 / 3 \text{ A}$$

由此

$$R_0 = u_{oc} / i_{sc} = -1 / (-1 / 3) = 3$$

所以原电路等效为戴维南等效电路,如图 4-17(c)所示,由单回路 KVL 可得

$$u_2 = 3 \times 3 - 1 = 8 \text{ V}$$

若原电路等效为诺顿等效电路,则如图(d)所示。由图(d)得

$$u_2 = [3 - (1 / 3)] \times 3 = 8 \text{ V}$$

本例中,受控源的控制量是 4 Ω 电阻上的电流 i_1 ,此支路是与 2 V 电压源并联的,在受控源被求出来之前,不能将 4 Ω 电阻支路去掉,否则受控源就无法求解。

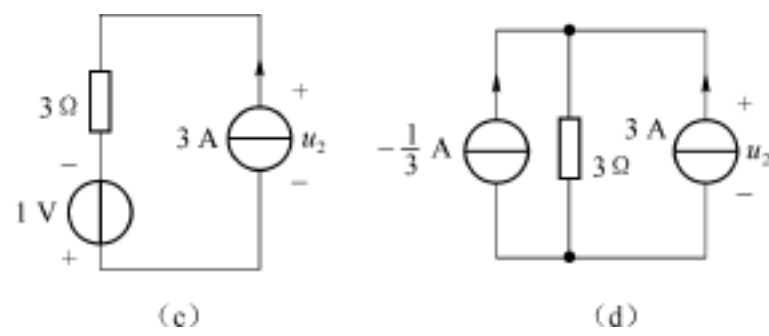


图 4-17 例 4-6 解图 2

例 4-7 求图4-18(a)所示电路中的电流 i_L 。

解 本题可以利用戴维南定理逐次将电路化简成图 4-18(d) 所示电路。首先求图 (a) 中 a、d 以左的戴维南等效电路。

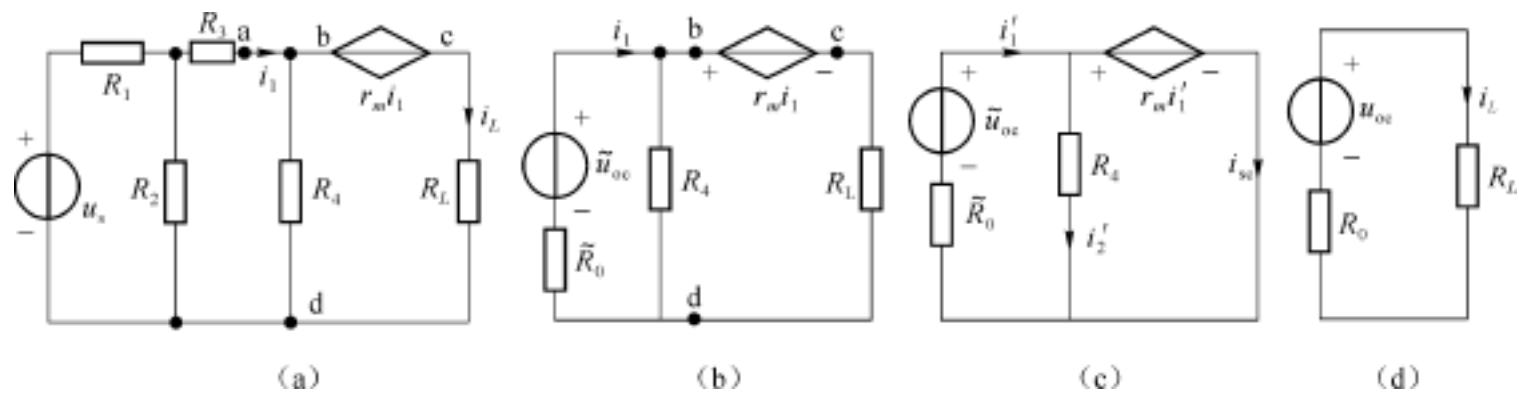


图 4-18 例 4-7 电路

$$U_{oc} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_s$$

$$R_0 = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

得到等效电路如图 4-18(b) 所示, 在图 (b) 中再利用戴维南定理进一步化简电路。如果求 b、d 以左的戴维南等效电路, 会把控制量 i_1 化简掉, 而受控电压源 $r_m i_1$ 无法求解, 因此直接求 c、d 以左的戴维南等效电路。在图 (b) 中 c、d 开路时, 电流

$$i_1 = \frac{U_{oc}}{R_4 + R_0}$$

此时 c、d 端的开路电压

$$u_{oc} = -r_m i_1 + R_4 i_1 = \frac{R_4 - r_m}{R_4 + R_0} U_{oc}$$

在图 (c) 电路中表示出负载短路的情况, 对于新的电路, 控制电流用 i_1 表示, 由 KVL 得

$$r_m i_1 + R_0 i_1 = U_{oc}$$

所以

$$i_1 = \frac{U_{oc}}{r_m + R_0}$$

再由图 (c) 右边网孔得

$$r_m i_1 = R_4 i_2 = R_4 (i_1 - i_{sc})$$

所以短路电流

$$i_{sc} = \frac{R_4 - r_m}{R_4} i_1 = \frac{R_4 - r_m}{R_4 (R_0 + r_m)} U_{oc}$$

等效内阻

$$R_0 = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} = \frac{R_4 (R_0 + r_m)}{R_0 + R_4}$$

戴维南等效电路如图 4-18(d) 所示, 由图 (d) 可求得电流

$$i_L = \frac{u_{oc}}{R_0 + R_L} = \frac{(R_4 - r_m) U_{oc}}{R_4 (R_0 + r_m) + R_L (R_0 + R_4)}$$

此例说明可以多次运用戴维南定理,把复杂的电路化简,在化简过程中注意不要把控制量与受控源分隔开,以免受控源无解。

例 4-8 图4-19(a)所示电路中 N_0 是无源线性电阻网络。(1) 当 $U_s = U_1, I_s = 0$ 时, $U = 5V$ 。(2) 当 $U_s = 0, I_s = 1A$ 时, $U = 5V$ 。(3) 当 $U_s = U_1$,而电流源被换成电阻 $R = 5\Omega$ 时, U 为多少?

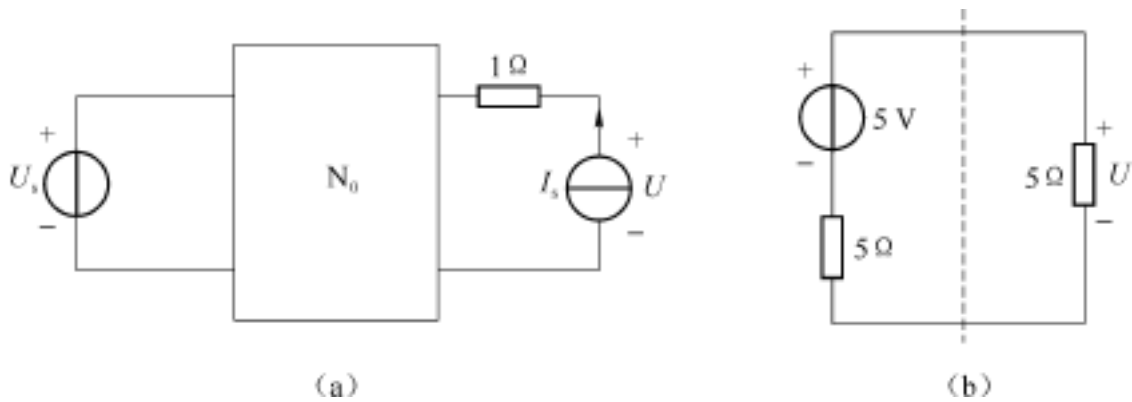


图 4-19 例 4-8 电路

解 由条件(1) $I_s = 0$, 电流源开路, 可知从电流源两端向左看的开路电压 $U_{oc} = 5V$

由条件(2)可知, 当 $U_s = 0$ 即从电流源两端向左看是无源二端电阻网络 R_0 , 此时 $I_s = 1A$ 时, $U = 5V$, 即

$$R_0 = U / I_s = 5$$

由此可得戴维南等效电路如图 4-19(b)中虚线左边所示。虚线右边即为代替电流源的电阻, 可以求出

$$U = 2.5V$$

本例说明可以将戴维南定理和其他网络定理结合分析问题。

4.4 特勒根定理

特勒根定理自 20 世纪 50 年代初问世以来, 科学家对它的应用进行了多方面的研究, 目前正在发展之中。特勒根定理是电路理论中一个重要的定理, 它适用于任何集总参数电路, 它只与电路的结构有关而与支路性质无关。即特勒根定理适用的范围与基尔霍夫定律相同。虽然特勒根定理的提出比 KCL 和 KVL 迟了很多年, 但已越来越显示出其重要作用。

先考察一个例子, 在图 4-20(a)所示电路中, 已知 4 条支路电流 $i_1 = i_2 = 3A, i_3 = 1A, i_4 = 2A$; 各支路电压和电流为关联参考方向, 其电压为 $u_1 = -30V, u_2 = 24V, u_3 = u_4 = 6V$ 。各支路电流和各支路电压分别满足 KCL 和 KVL。如果把各支路电流与其相应的支路电压相乘再求和, 根据功率守恒, 其结果等于零, 可计算验证。

$$\sum_{k=1}^4 u_k i_k = -30 \times 3 + 24 \times 3 + 6 \times 1 + 6 \times 2 = 0$$

再看图 4-20(b)所示电路, 并与图(a)电路作比较, 它们由不同的元件构成, 但具有相同的拓扑图如图(c)所示。可以求出图(b)的各支路电压与电流为

$$i_1 = 2A, i_2 = 2A, i_3 = 1A, i_4 = 1A$$

$$\hat{u}_1 = -10\text{ V}, \hat{u}_2 = 6\text{ V}, \hat{u}_3 = 4\text{ V}, \hat{u}_4 = 4\text{ V}$$

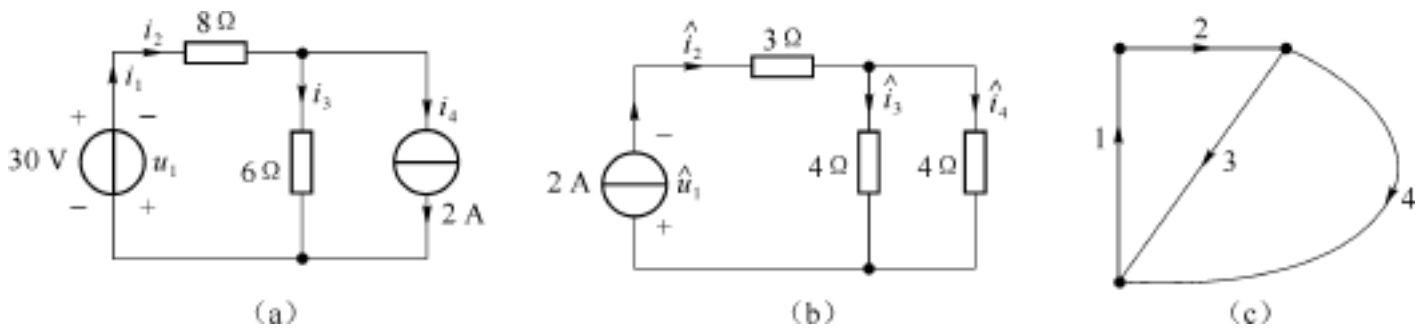


图 4-20 特勒根的验证

把图(c)电路各支路电流与其相应的支路电压相乘再求和,其结果也等于零。这个结果说明电路中各支路功率的代数和等于零,即功率守恒。

注意:现在将图(a)的各支路电流与图(b)各相应支路的电压相乘并求和

$$\sum_{k=1}^4 \hat{u}_k \cdot i_k = -10 \times 3 + 6 \times 3 + 4 \times 1 + 4 \times 2 = 0$$

其结果也等于零;反之将图(b)的各支路电流与图(a)各相应支路的电压相乘并求和

$$\sum_{k=1}^4 u_k \cdot \hat{i}_k = -30 \times 2 + 24 \times 2 + 6 \times 1 + 6 \times 1 = 0$$

其结果也等于零。这个结果看似不好理解,但恰恰是特勒根定理所描述的一种拓扑性质。本例是特勒根定理的一个验证。

4 4 1 定理内容

特勒根定理：具有 b 条支路 n 个节点的任意集总参数电路 N , N 的电压和电流分别表示为 $u_1, u_2, \dots, u_b; i_1, i_2, \dots, i_b$; 在任何瞬间 t , 各支路电压与其支路电流乘积的代数和恒等于零, 如式(4-3)所示。它说明各支路吸收功率的代数和等于零, 是功率平衡关系式, 也是功率守恒的具体体现, 所以此定理也称为功率守恒定理。

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0 \tag{4-3}$$

特勒根定理：具有 b 条支路 n 个节点的两个任意集总参数电路 N 和 N , 它们具有相同的拓扑图。 N 的电压和电流分别表示为 $u_1, u_2, \dots, u_b; i_1, i_2, \dots, i_b$; N 的电压和电流分别表示为 $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_b; \hat{i}_1, \hat{i}_2, \dots, \hat{i}_b$ 。在任何瞬间 t , 网络 N 的电压(或电流)与网络 N 的电流(或电压)乘积的代数和恒等于零, 可表示为式(4-4)、式(4-5)两种形式:

$$\sum_{k=1}^b u_k \hat{i}_k = 0 \tag{4-4}$$

$$\sum_{k=1}^b \hat{u}_k i_k = 0 \tag{4-5}$$

显然, 式中各项都具有功率的量纲, 但并不表示某支路实际的功率, 故称“似功率”, 所以特勒根定理 又称似功率守恒定理。

4 4 2 定理的证明

证明一

假设完全图图 G 有 n 个节点, 即每一对节点间, 有一条且仅有一条支路。

以 u 表示第 j 节点的节点电压,从节点 j 流向节点 k 的电流表为 i 。若第 k 条支路连接节点 j 与节点 k , 则

$$u_k = u_j - u_k$$

即把支路电压与节点电压联系起来。再把支路电流与从节点 j 流向节点 k 的电流联系起来

$$i_k = i$$

而由此可得

$$u_k i_k = (u_j - u_k) i = (u_j - u_k) i = \frac{1}{2} [(u_j - u_k) i + (u_k - u_j) i]$$

对每一对节点 j, k 存在一条而且仅有一条支路 k ,使上述方程成立。反之,对于每一条支路 k ,存在而且仅有一对节点 j, k ,使此方程成立。这就意味:如将方程左边的所有支路的各项相加,就应把右边的所有可能的‘节点对’的各项也相加。即

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^b u_k i_k &= \sum_{\text{原有节点对}} \frac{1}{2} [(u_j - u_k) i + (u_k - u_j) i] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [(u_j - u_k) i] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n u_j \left[\sum_{k=1}^n i \right] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n u_k \left[\sum_{j=1}^n i \right] \end{aligned} \tag{4-6}$$

对于节点 j ,由 KCL 有 $\sum_{k=1}^n i = 0$, 因为 $\sum_{k=1}^n i$ 即为离开节点 j 电流之和。同理 $\sum_{k=1}^n i = 0$, 因此式(4-6)右侧为零,左侧也为零,即 $\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0$ 。此即证明了定理一。

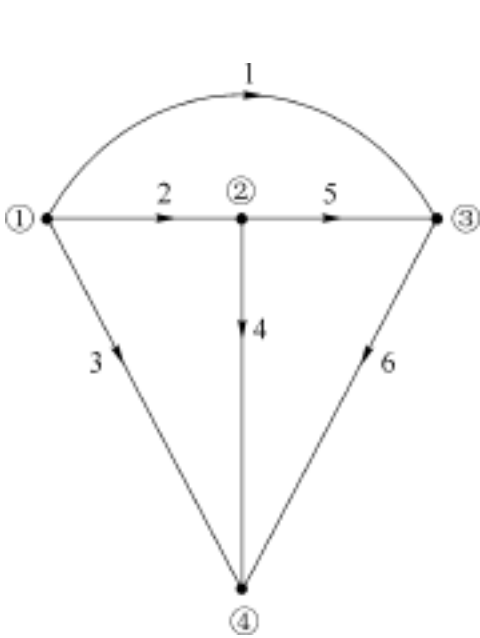
证明二 用矩阵方法证明是比较方便的,这里提前引用在第十二章中介绍的矩阵分析方法中,基尔霍夫电流定律的矩阵形式(参见式(12-4))

$$A i_b = 0 \tag{A}$$

基尔霍夫电压定律的矩阵形式(参见式(12-5))

$$u_b = A^T u_n \tag{B}$$

以图 4-21 所示的有向图为例,其中 A 是有向图的降阶关联矩阵(参见式(12-3))



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A^T 是 A 的转置。

定理一的证明:

对式(B)两边转置

$$u_b^T = u_n^T A \tag{C}$$

对式(C)两边各右乘 i_b

$$u_b^T i_b = u_n^T A i_b$$

以式(A)代入,上式为

$$u_b^T i_b = 0 \tag{D}$$

图 4-21 特勒根的证明二

式(D)也可写成

$$[u_1, u_2, \dots, u_b] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_1 \\ \vdots \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

即

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0$$

定理 的证明:

设有 \mathbb{N} 与 \mathbb{N} 有完全相同的有向图, A 也是 \mathbb{N} 的降阶关联矩阵。对式(c)两边各右乘 \hat{t}_b

$$u_b^T \hat{t}_b = u_n^T A \hat{t}_b$$

因为对 \mathbb{N} , 应有 KCL

$$A \hat{t}_b = 0$$

所以

$$u_b^T \hat{t}_b = 0$$

即

$$\sum_{k=1}^b u_k \hat{t}_k = 0$$

同理

$$\sum_{k=1}^b \hat{u}_k i_k = 0$$

这就证明了特勒根定理 。

特勒根定理 比定理 更引人关注,因为定理 把看上去没有直接联系的一个网络的电流(或电压),同另一个网络的电压(或电流)用数学形式联系起来,这种联系导致了 20 世纪 60 年代网络理论上的某些突破。在互易定理的证明和以后的章节中将进一步讨论与应用特勒根定理。

例 4 -9 图4 -22所示网络的 \mathbb{N}_0 是由线性电阻构成,对不同的输入直流电压 u_1 及不同的负载 R_2 进行两次测量,其数据为 $R_2 = 2\text{k}$, $u_1 = 4\text{V}$, $i_1 = 2\text{mA}$, $u_2 = 2\text{V}$; $R_2 = 1\text{k}$, $\hat{u}_1 = 6\text{V}$, $\hat{i}_1 = 4\text{mA}$ 。试用特勒根定理求 \hat{u}_2 。

解 假设图 4 -22 所示网络中共有 b 条支路,只有在第 1、2 支路中,电流与电压不符合关联参考方向。根据特勒根定理 写出方程如下:

$$- u_1 \hat{t}_1 - u_2 \hat{t}_2 + \sum_{k=3}^b u_k \hat{t}_k = 0 \tag{A}$$

$$- \hat{u}_1 i_1 - \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^b \hat{u}_k i_k = 0 \tag{B}$$

因为在 \mathbb{N}_0 内部的各支路中有

$$u_k \cdot \hat{t}_k = R_k i_k \cdot \hat{t}_k = R_k \hat{t}_k \cdot i_k = \hat{u}_k \cdot i_k$$

所以在式(A)和(B)中

$$\sum_{k=3}^b u_k \hat{t}_k = \sum_{k=3}^b \hat{u}_k i_k$$

两式相减可得

$$- u_1 \hat{t}_1 - u_2 \hat{t}_2 = - \hat{u}_1 i_1 - \hat{u}_2 i_2$$

代入已知数据得

$$- 4 \times 4 + 2 \times \frac{\hat{u}_2}{1} = - 6 \times 2 + \hat{u}_2 \times \frac{2}{2}$$

可得

$$\hat{u}_2 = 4\text{V}$$

本例用特勒根定理求解简单又明了。实际上许多用网络定理的求解问题可以用特勒根定理来分析求解。

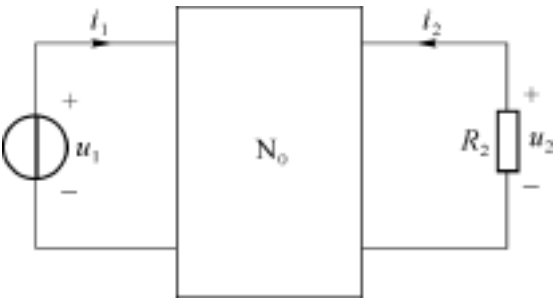


图 4 -22 例 4 -9 电路

4.5 互易定理

互易特性是网络具有的重要性质之一。一个具有互易性质的网络,当输入(激励)端与输出(响应)端位置对调后,只要激励不变,则响应不变。互易定理是对网络的这种性质的概括。并非任意网络都具有互易性,一般只有那些不含受控源、独立电源的线性非时变网络才具有这种性质,因此,互易定理的适用范围比较窄。互易定理有两种形式,称为定理 和 。

1. 互易定理

如图 4-23(a)所示方框中,是不含独立电源和受控电源的线性电阻网络 N_R ,在左侧 1 支路接入理想电压源 u_{s1} ,则在右侧 2 支路产生电流 i_2 ;若在支路 2 中接入相同的电压源,即图(b)中的 $\hat{u}_{s2} = u_{s1}$,则在支路 1 中产生相同的电流。即图(b)中的 $\hat{i}_1 = i_2$ 。此即为互易定理 。

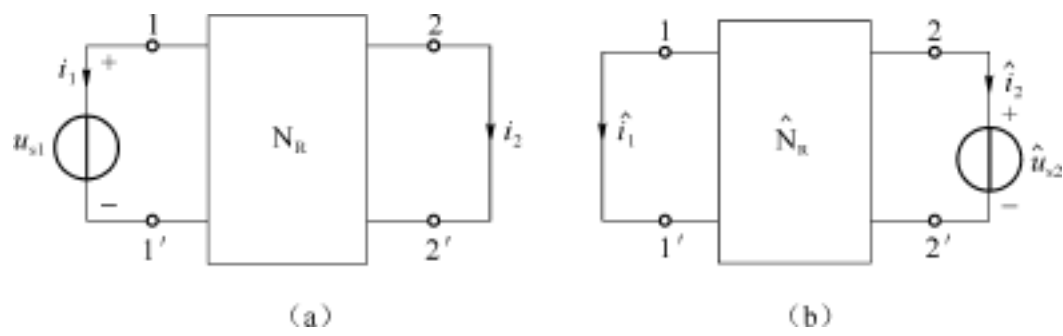


图 4-23 互易定理 的证明

证明一 对于 m 个网孔的网络,其网孔方程为

$$\begin{cases} R_{11} i_{m1} + R_{12} i_{m2} + \dots + R_{1m} i_{mm} = u_{s\ m1} \\ R_{21} i_{m1} + R_{22} i_{m2} + \dots + R_{2m} i_{mm} = u_{s\ m2} \\ \dots \\ R_{m1} i_{m1} + R_{m2} i_{m2} + \dots + R_{mm} i_{mm} = u_{s\ mm} \end{cases} \quad (4-7)$$

根据克拉默法则,第 k 个网孔的电流为

$$i_{mk} = \frac{1\ k}{u_{s\ m1}} u_{s\ m1} + \frac{2\ k}{u_{s\ m2}} u_{s\ m2} + \dots + \frac{kk}{u_{s\ mk}} u_{s\ mk} + \dots + \frac{mk}{u_{s\ mm}} u_{s\ mm} \quad (4-8)$$

对于图 4-23(a)所示网络,只有 $u_{s\ m1} = u_{s1}$ 存在,其余电源均为零,则支路 2 中电流

$$i_2 = i_{m2} = \frac{12}{u_{s1}} u_{s1} \quad (A)$$

同样,对于图 4-23(b)所示网络,只有 $\hat{u}_{s\ m2} = \hat{u}_{s2}$ 存在,所以

$$\hat{i}_1 = \hat{i}_{m1} = \frac{21}{\hat{u}_{s2}} \hat{u}_{s2} \quad (B)$$

式中

$$= \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2m} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \dots & R_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{m1} & R_{m2} & R_{m3} & \dots & R_{mm} \end{vmatrix}$$

(C)

从网孔电流法的讨论中,可以知道在不含受控源的网络中,各相应互电阻相等,即 $R_{12} = R_{21}$, $R_{13} = R_{31}$, \dots , $R_{1m} = R_{m1}$, 因此,式(C)中的第一行与第一列相同,依此类推,第 m 行与第 m 列相同,将 i_{s1} 的行与列对换,显然与 i_{s2} 相等。所以在式(A)和式(B)中,若

$$u_{s1} = \hat{u}_{s2}$$

则有

$$\hat{i}_1 = i_2$$

这就证明了互易定理。简而言之,是将理想电压源和某支路电流进行互易,也可以将理想电流源和某两点电压进行互易,这就是互易定理。

2 . 互易定理

如图 4 -24(a)所示方框中,是不含独立电源和受控电源的线性电阻网络 N_R 。在左侧 1 支路接入电流源 i_{s1} ,则在右侧 2 支路 2、2' 间有电压 u_2 ;若在支路 2 中接入相同的电流源,即图(b)中的 $\hat{i}_{s2} = i_{s1}$,则在 1 支路中 1、1' 间有相同的电压,即图(b)中的 $\hat{u}_1 = u_2$ 。此即互易定理。

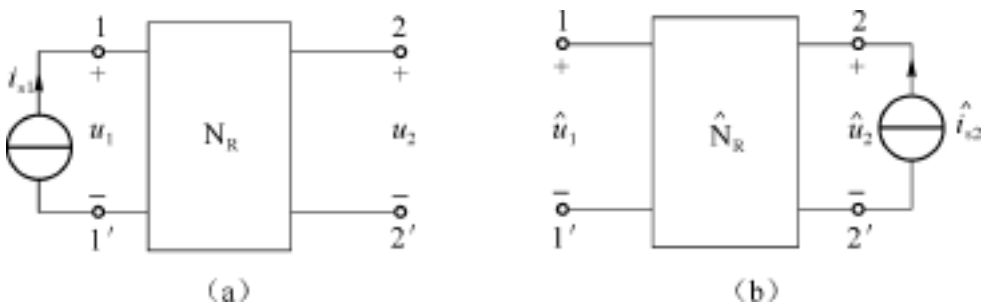


图 4-24 互易定理 的证明

证明二 根据特勒根定理可以同时写出

$$- u_1 \hat{i}_1 - u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^b u_k \hat{i}_k = 0$$

(D)

$$- \hat{u}_1 i_1 - \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=1}^b \hat{u}_k i_k = 0$$

(E)

其中只有 1 支路、2 支路的电压与电流在非关联方向下。又因为其余各支路有

$$u_k \hat{i}_k = \sum_{k=3}^b R_k i_k \hat{i}_k = \sum_{k=3}^b \hat{u}_k i_k$$

(F)

所以利用式(F),将式(D) - 式(E)得

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

(G)

由图 4 -24 知

$$i_2 = \hat{i}_1 = 0, i_1 = i_{s1}, \hat{i}_2 = \hat{i}_{s2}$$

将其代入式(G),得

$$\hat{u}_1 i_{s1} = u_2 \hat{i}_{s2}$$

当

$$\hat{i}_{s2} = i_{s1}$$

则有

$$\hat{u}_1 = u_2$$

这就证明了互易定理。用特勒根定理也可以方便地证明互易定理。

3. 应用互易定理应注意的问题

(1) 互易是在理想情况下进行的,即理想电压源(或电流源),与某支路响应电流(或电压)进行互易。或者说:互易时实际电源内阻和电表内阻应保留在原电路中,以保持电路结构不变,否则,支路电阻和网孔电阻都将发生变化,就得不到互易定理的结论。若在实验室中验证互易定理,误差是不可避免的。

(2) 互易定理不适用于含受控源的网络,因为含受控源情况下互电阻不相等,网孔方程系数构成的行列式不是对称的,其代数余子式 $A_{jk} \neq A_{kj}$,“证明二”中式(F)也不成立,所以互易定理不成立。

(3) 互易时要注意激励和响应的参考方向,用特勒根定理来判别很方便。各相应支路的电压与电流,在关联方向下乘积为正,反之乘积为负。例如“证明二”中式(D)和式(E)。

(4) 对含多个独立电源、但不含受控源的线性网络,可将叠加定理和互易定理联合运用,即独立电源单独作用,利用互易定理分别求响应,然后再叠加,以求出总响应。

例 4-10 试用叠加定理和互易定理求图4-25(a)所示电路中的电流 i_2 。

解 (1) 4V 电压源单独作用时,如图 4-25(b)所示,由图(b)可求出

$$i_2 = \frac{4}{200 + 400} = 6.67 \text{ mA}$$
$$i_1 = \left[\frac{1}{2} \right]^3 i_2 = 0.834 \text{ mA}$$

(2) 12V 电压源单独作用时,如图 4-25(c)所示,为了求图(c)中 i_2 ,应用互易定理,采用图 4-25(d)所示电路,即将左侧支路 12V 电压源移到右侧支路。比较图(d)和图(b)可知,图(d)中电压源电压比图(b)中电压源电压增加 3 倍,因此,利用线性电路的线性性质——比例性,响应 i_2 比 i_1 也应增加 3 倍,即

$$i_2 = 3 i_1 = 3 \times 0.834 = 2.5 \text{ mA}$$

(3) 4V 和 12V 两电压源共同作用时,即图 4-25(a)所示电路中的电流 i_2 为

$$i_2 = i_2' - i_1 = 2.5 - 6.67 = -4.17 \text{ mA}$$

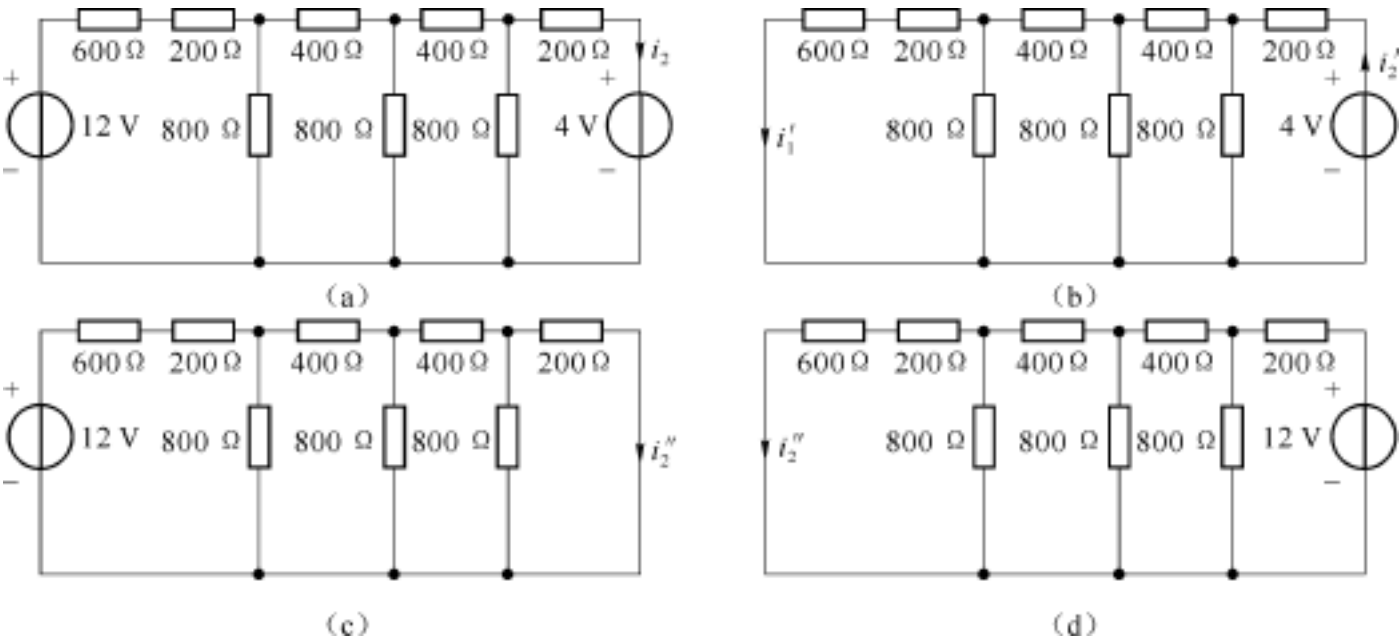
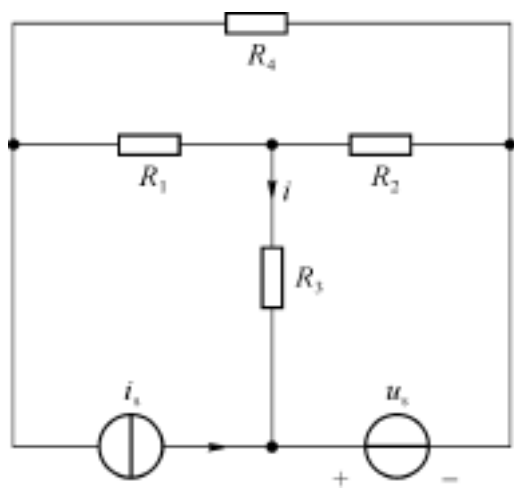


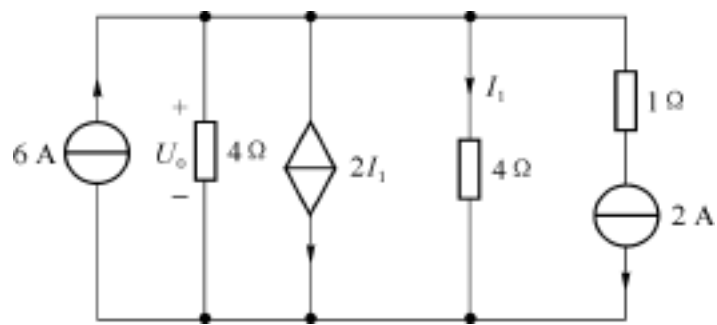
图 4-25 例 4-10 电路

习题四

- 4-1 应用叠加定理求题图 4-1 网络中电流 i 。
- 4-2 电路如题图 4-2 所示,用叠加定理求 I_1 和 U_0 。

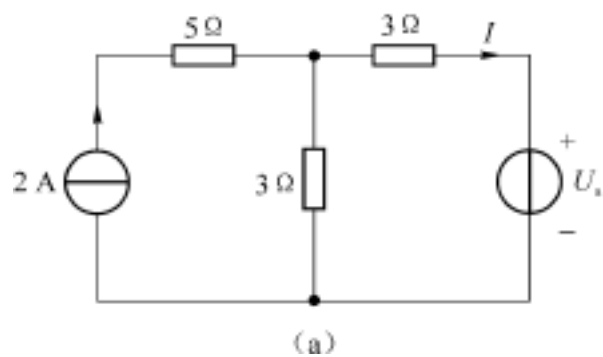


题图 4-1

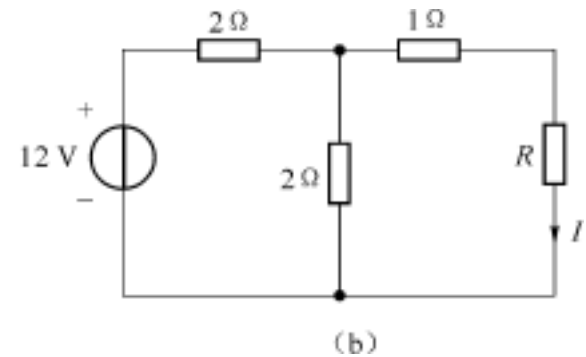


题图 4-2

- 4-3 题图 4-3 所示电路中,已知 $I=1\text{ A}$,试用替代定理求图(a)中 U_s 的值和图(b)中 R 的值。



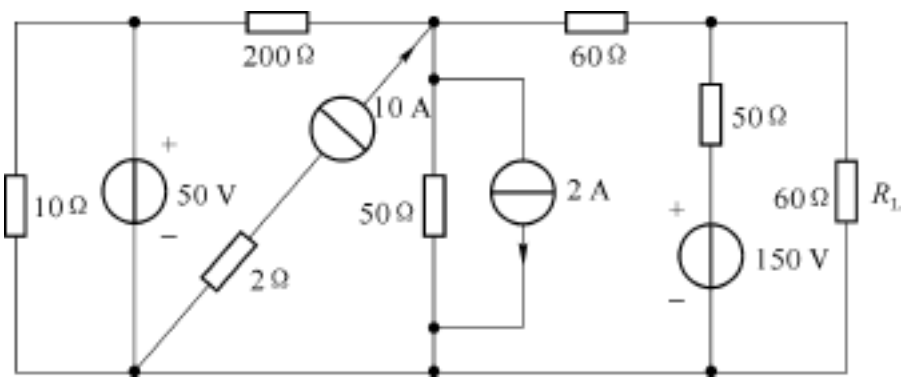
(a)



(b)

题图 4-3

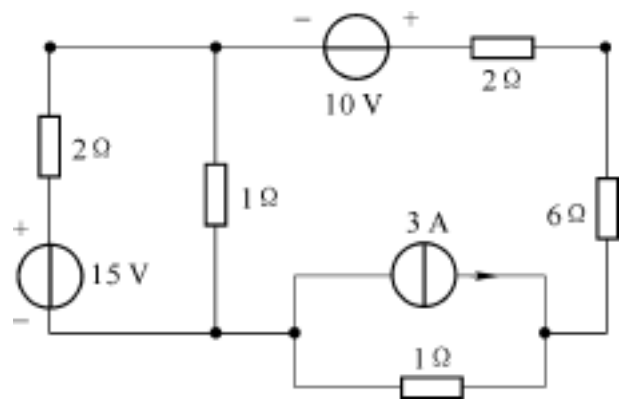
- 4-4 试求题图 4-4 网络中流过 $R_L = 60\ \Omega$ 的电流是多少？



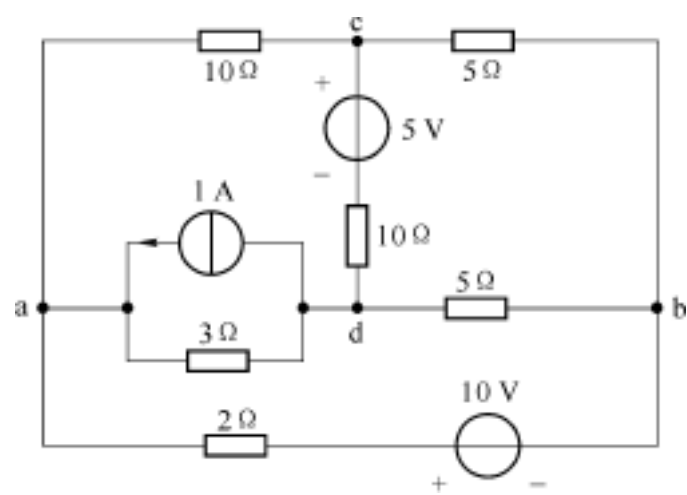
题图 4-4

- 4-5 试用戴维南定理求题图 4-5 网络中 $6\ \Omega$ 电阻支路中的电流。
- 4-6 试分别应用戴维南定理和诺顿定理求题图 4-6 网络中 cd 支路的电流。
- 4-7 试分别应用戴维南定理和诺顿定理求题图 4-7 网络中 $12\ \Omega$ 电阻支路的电流。
- 4-8 题图 4-8 网络中,若将开关 K 放在位置 1,电压表读数为 20 V ; K 放在位置 2,电流表读数为 50 mA ,求 K 放在位置 3 时, $300\ \Omega$ 电阻支路的电流(电压表内阻看成无限大,电流表

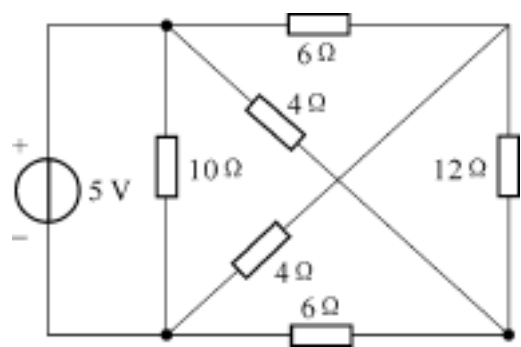
内阻忽略不计)。



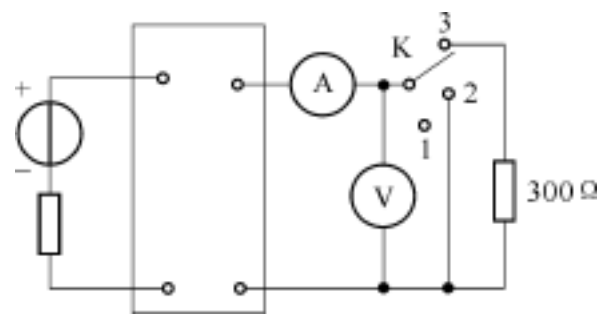
题图 4-5



题图 4-6



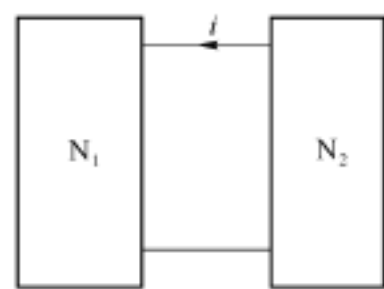
题图 4-7



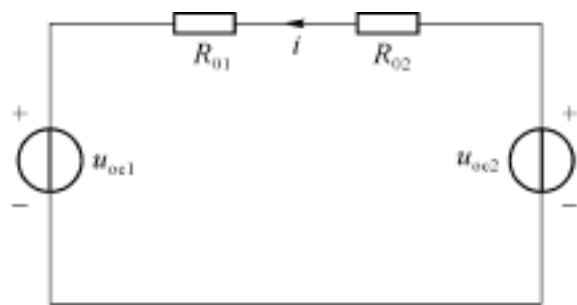
题图 4-8

4-9 在题图 4-9(a)中两部分网络 N_1 和 N_2 都含有电源的情况下,若要求这两个有源网络中某一支路的电流或电压,仍可应用等效电源定理。解题方法是先求出每部分网络的戴维南等效电路,再将二者联在一起求出 i ,如图(b)所示。然后将两部分网络分开,另一部分网络的影响可用电流源 i 等效替代,如图(c)所示。分别计算两部分网络,即可求出结果。应当注意,两部分网络之间不应包含受控电源等耦合元件。

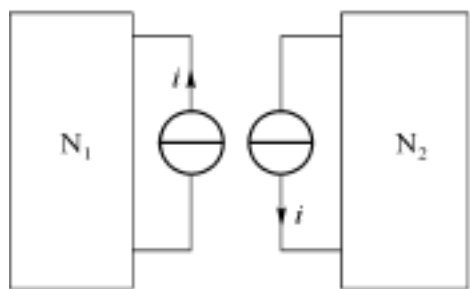
利用上述方法将图(d)的网络从虚线处断开,求 u_{s1} 和 u_{s2} 中流过的电流。



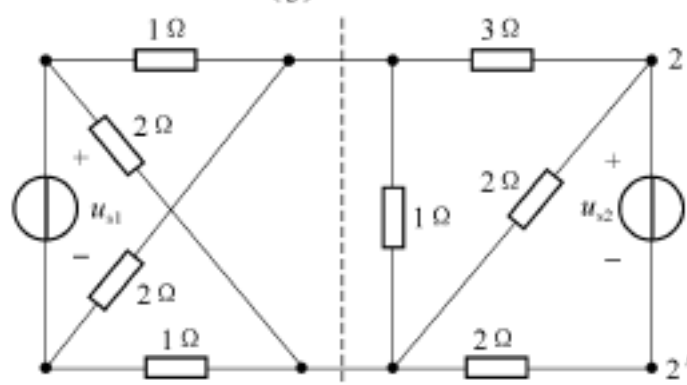
(a)



(b)



(c)

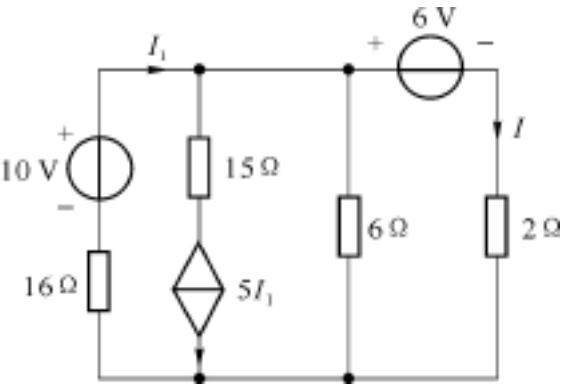


(d)

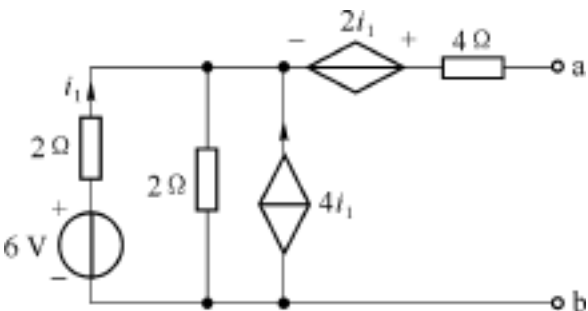
题图 4-9

4-10 电路如题图 4-10 所示,用戴维南定理求 $20\ \Omega$ 电阻中的电流 I 。

4-11 电路如题图 4-11 所示,求其戴维南等效电路。



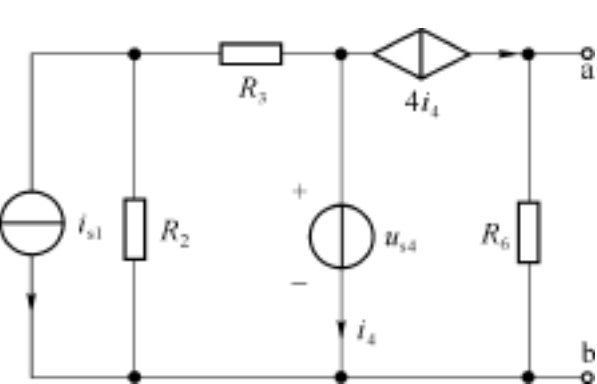
题图 4-10



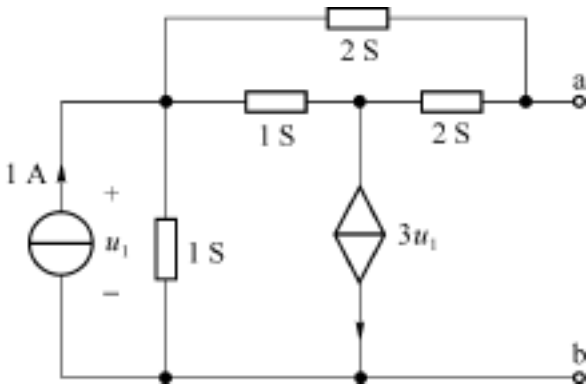
题图 4-11

4-12 求题图 4-12 网络以 a,b 为输出端的戴维南等效电路及诺顿等效电路。

4-13 求题图 4-13 网络的戴维南等效电路和诺顿等效电路。



题图 4-12

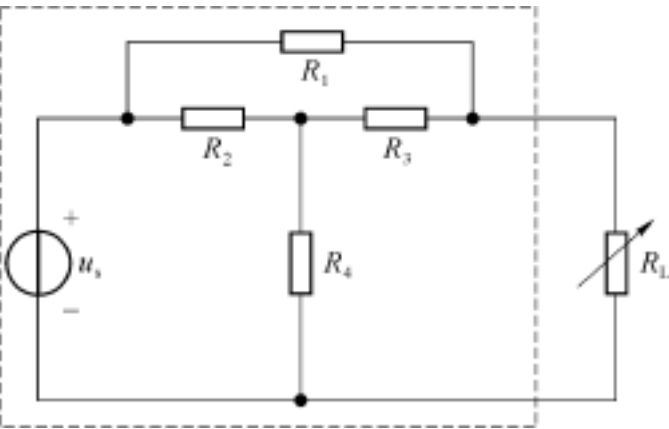


题图 4-13

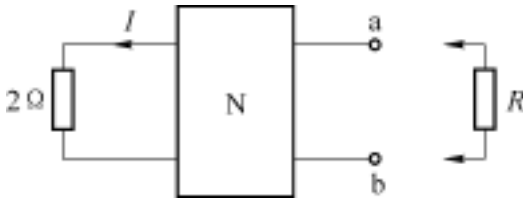
4-14 题图 4-14 是一稳压电源通过 T 型网络向负载电阻 R_L 供电的等效网络。已知 $u_s = 30\text{V}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 300\ \Omega$, $R_4 = 100\ \Omega$, 求虚线方框内有源二端网络的戴维南等效电路和诺顿等效电路。

4-15 题图 4-15 的电路中,已知网络 N 中含有独立源、受控源和电阻。当 ab 两端接入电阻 $R = 4\ \Omega$ 时,测得 $U_{ab} = 4\text{V}$, $2\ \Omega$ 电阻中电流 $I = 1.5\text{A}$;当 ab 两端接入电阻 $R = 12\ \Omega$ 时,测得 $U_{ab} = 6\text{V}$, $2\ \Omega$ 电阻中电流 $I = 1.75\text{A}$ 。

- (1) 求 ab 两端戴维南等效电路
- (2) ab 两端接入电阻 R 为何值时, $2\ \Omega$ 电阻中电流 $I = 1.9\text{A}$ 。

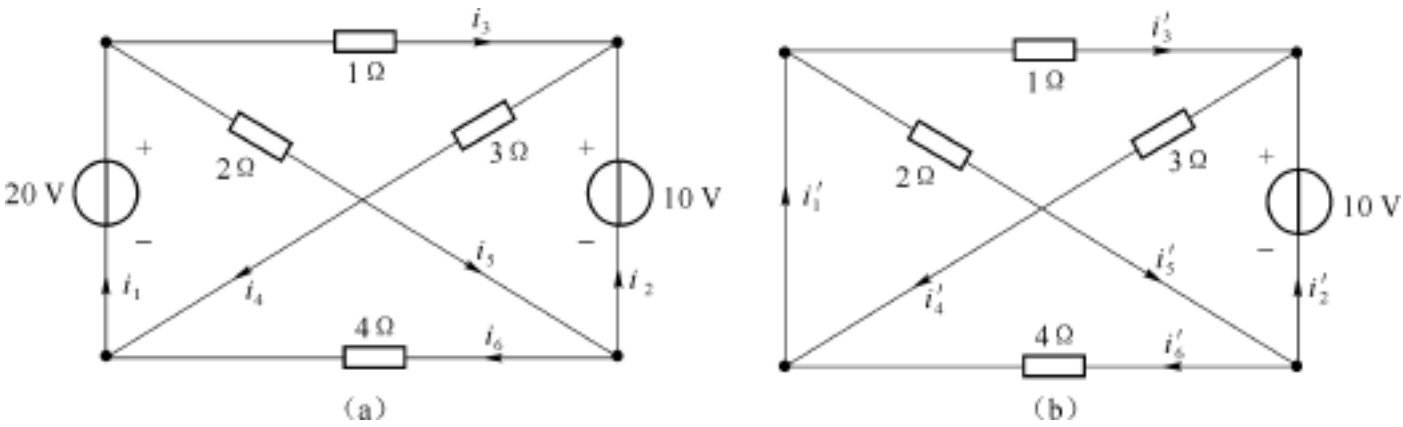


题图 4-14



题图 4-15

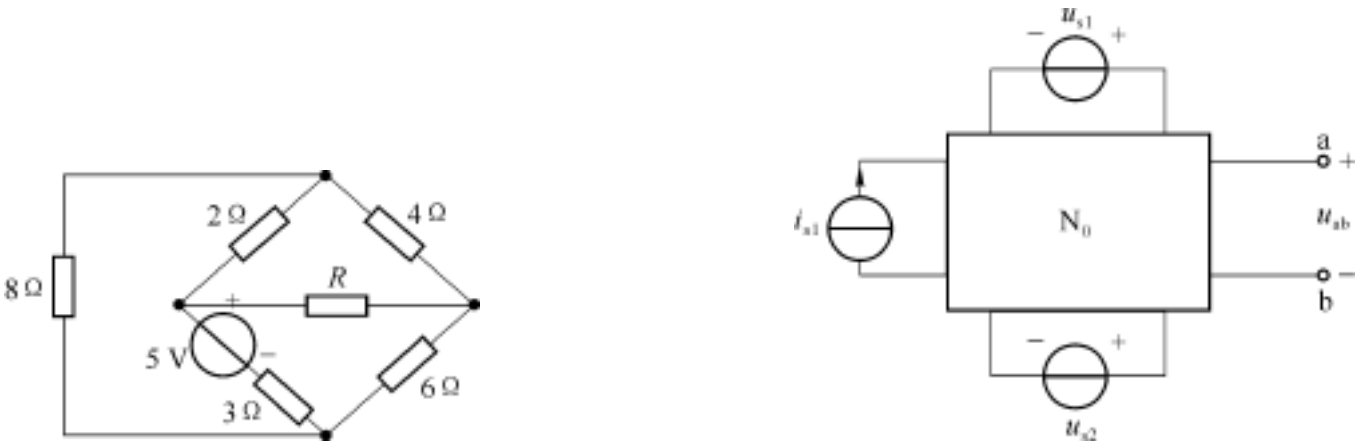
4-16 求题图 4-16 中每一网络的所有支路电压和支路电流,并验证特勒根定理。



题图 4-16

4-17 桥型电路如题图 4-17 所示,除 R 未知外,其余元件参数已给定,求流经 $8\ \Omega$ 电阻支路的电流。

4-18 在题图 4-18 所示的线性网络,电流源 i_{s1} 和电压源 u_{s1} 反向时 (u_{s2} 不变),电压 u_{ab} 是原来的 0.5 倍;当电流源 i_{s1} 和电压源 u_{s2} 反向时 (u_{s1} 不变),电压 u_{ab} 是原来的 0.3 倍;问仅 i_{s1} 反向时 (u_{s1}, u_{s2} 均不变),电压 u_{ab} 是原来的多少倍?

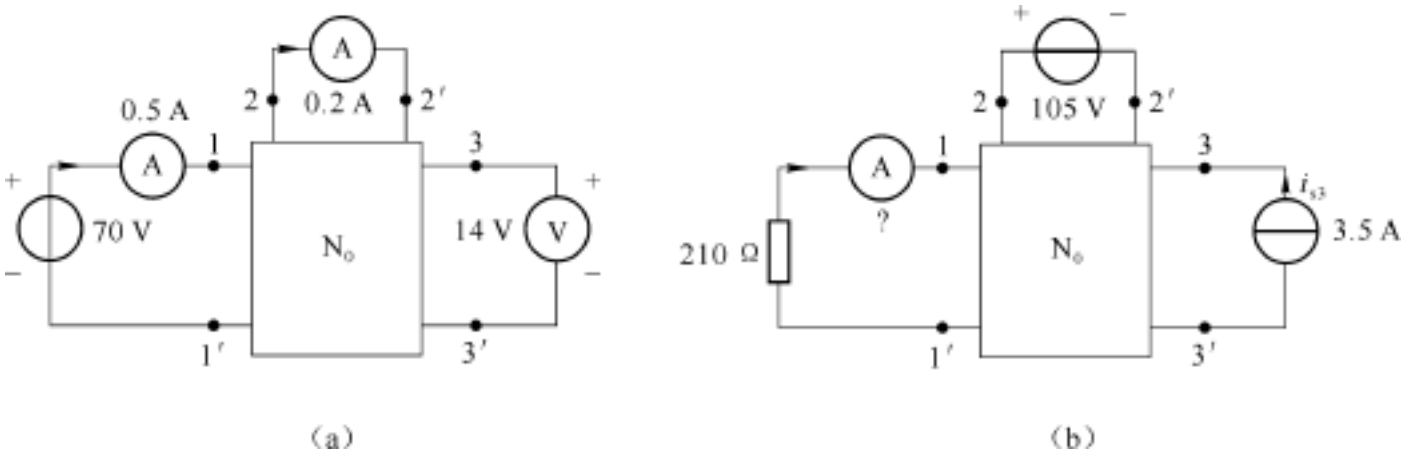


题图 4-17

题图 4-18

4-19 网络 N_R 有一对输入端和输出端。当输入电压为 9 V,输入端电流为 4.5 A,而输出端的短路电流为 1 A,如把电压源移到输出端,同时在输入端跨接 $2\ \Omega$ 电阻,求 $2\ \Omega$ 电阻的电压。(提示:应用互易定理和诺顿定理)

4-20 已知题图 4-20(a)电路中,各电压、电流如图所示, N_0 为电阻网络。求图(b)电路中电流表的读数是多少?



题图 4-20

第五章 一阶电路的瞬态分析

在某时刻电路的结构或元件参数发生变化,称之为电路发生了换路。由于电路中含有电感与电容这类动态元件,电路会从一种稳定状态过渡到另一种稳定状态,电路的瞬态分析研究的就是这个过渡过程。通常将含有动态元件的电路称为动态电路。本章主要介绍一阶电路。

5.1 动态电路及其方程

5.1.1 动态元件的特性

首先回忆一下电容元件和电感元件的特性。

1. 电容元件

若电容两端有电压,则可在电容内部建立起电场,即电容有储存电场能的能力,有储能特性。当电压与电流为关联参考方向时,电容的伏安关系是:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

(5-1)

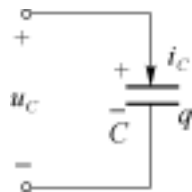


图 5-1 电容特性

对式(5-1)两边积分,得到伏安关系的另一表达方式。

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

上式表示在某一时刻 t 的电容电压的数值不只取决于这时的电流值,而且取决于从 $-\infty$ 到 t 所有时刻的电流值,也就是说与电流全部过去历史有关,这说明电容有记忆作用。从积分形式也可看出, $i_C(t)$ 为有限值时, $u_C(t)$ 不可能发生突变,因为有界函数的积分是连续的。称之为电容电压有惯性。

当从 t_0 时刻开始观察,把积分式表示为

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i_C(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau$$

可把 0 到 t_0 积累的电荷用 $q(t_0)$ 来表示,或用电压 $u_C(t_0)$ 来表示,即

$$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau$$

(5-2)

其中

$$u_C(t_0) = \frac{q(t_0)}{C} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i_C(\tau) d\tau$$

上式说明 $t = t_0$ 时电容电压已经达到一定值 $u_C(t_0)$, 在 t_0 时刻以后的电容电流, 将在 $u_C(t) = u_C(t_0)$ 的值上继续对电容充电。如果将观察时间确定为 $t = 0$ 开始, 则可表示为

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau$$

2. 电感元件

若在电感中流过一个电流, 即在电感附近建立起磁场, 即电感内储存了磁场能量。当电压与电流为关联参考方向时, 电感的伏安关系是:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \tag{5-3}$$

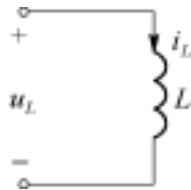


图 5-2 电感特性

对式(5-3)关系两边积分, 得到伏安关系的另一表达方式

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau$$

上式表示在某一时刻 t 的电感电流的数值不只取决于这时的电压值, 而且取决于从 $-\infty$ 到 t 所有时刻的电压值, 也就是说与电压全部过去历史有关, 这说明电感有记忆作用。从积分形式也可看出, $u_L(t)$ 为有限值时, $i_L(t)$ 不可能发生突变, 因为有界函数的积分是连续的。称之为电感电流也有惯性。

当从 t_0 时刻开始观察, 把积分式表示为两个部分, 可把 t_0 以前的电流用 $i_L(t_0)$ 来表示

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau \tag{5-4}$$

如果将观察时间确定为 $t = 0$ 开始, 则可表示为

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau$$

总结电容元件与电感元件的特性, 可知它们都具有储能性、记忆性和惯性。电路中含有这两个元件, 就可能出现动态特性, 所以又称它们为动态元件。电容元件与电感元件是对偶的元件, 它们的伏安关系也是对偶的, 归纳它们的对偶性将有利于学习本章的内容。

5.1.2 动态电路的方程

列写动态电路方程的理论根据仍为 KCL 和 KVL。由于电容和电感的伏安关系是微积分关系, 所以列出的是微分方程。一般情况下, 含有一个动态元件, 可列出一阶微分方程, 称为一阶电路; 含有两个动态元件, 如果列出二阶微分方程, 称为二阶电路; 含 n 个动态元件, 若列出 n 阶方程, 称为 n 阶电路。

下面从例子中学习列写微分方程。

例 5-1 电路如图 5-3 所示, 若将电感电流作为电路变量, 列写该电路的微分方程。

解 图中已标出各电压变量和电流变量的参考方向, 它们处在关联参考方向下, 首先列出回路 KVL 方程

$$u_R + u_L = U_s \tag{A}$$

由于 $u_R = Ri_L$, $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, 将 u_R, u_L 代入式(A)

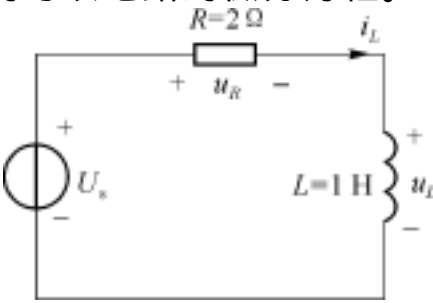


图 5-3 例 5-1 电路

有时由于电路的特殊结构, 有可能列出的微分方程的阶数低于所含动态元件的数量。

得
$$Ri_L + L \frac{d i_L}{d t} = U_s$$

整理为

$$\frac{d i_L}{d t} + \frac{Ri_L}{L} = \frac{U_s}{L}$$

代入元件参数得

$$\frac{d i_L}{d t} + 2 i_L = U_s$$

这就是以电感电流作为电路变量,列出的一阶微分方程。

例 5-2 电路如图 5-4 所示,若以电容电压为电路变量,列写该电路的微分方程。

解 设 i, i_C, u_C 和 u_R 如图 5-4 所示。由 KCL 写出

$$i_C + i = i_s \tag{B}$$

i_C 和 u_C 处在关联参考方向下,

$$i_C = C \frac{d u_C}{d t} \tag{C}$$

写出右边网孔的 KVL 并结合式(C)得

$$i = \frac{u_R + u_C}{R_1} = \frac{R_2 i_C + u_C}{R_1} = \frac{1}{R_1} \left[R_2 C \frac{d u_C}{d t} + u_C \right] \tag{D}$$

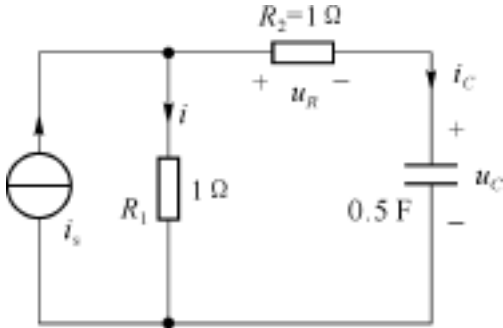


图 5-4 例 5-2 电路

整理式(B)、式(D)得

$$(R_2 C + C) \frac{d u_C}{d t} + \frac{1}{R_1} u_C = i_s$$

代入元件参数得一阶微分方程

$$\frac{d u_C}{d t} + u_C = i_s$$

这就是以电容电压作为电路变量,列出的一阶微分方程。

与电阻电路相比较,动态电路作为电路结构的约束,仍是基尔霍夫电压定律和电流定律,支路约束即支路特性是微分关系,所以列写电路结构方程的规律与电阻电路是一样的。当电路中只含有一个动态元件时,可以将动态元件以外的二端网络简化成戴维南等效电路或诺顿等效电路,即将电路等效为简单电路,从而大大简化列方程的过程。

5.1.3 换路定则及初始值计算

1. 换路与换路定则

当电路的结构发生变化时,例社开关的动作如图 5-5(a)所示,在某时刻开关 K 闭合,电路发生了换路;或电源信号的变化特性而产生的换路,如图 5-5(b)所示 $u_s(t)$ 的波形,表示出电源电压 $u_s(t)$ 在不同的时间段有不同的值,在 0 到 t_0 的时间范围内,电源相当于直流电压源 U_s ,在其他时间范围内,电源电压为零,可以认为在 0 和 t_0 时刻电路都发生了换路。

一般情况下,当电路发生换路时,由于电场、磁场能量的变化是连续渐变的,电容电压(或电荷)、电感电流(或磁链)一般是不能突变的。或者说由于电容电压和电感电流有惯性,当电路发生换路时,会出现特定的电路现象。若换路发生在 t_0 时刻,将换路前瞬间表示

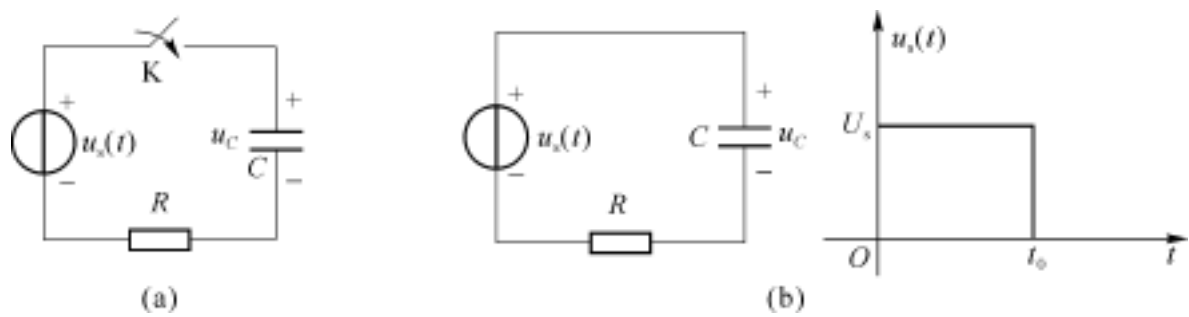


图 5-5 电路的换路

为 t_0^- , 换路后瞬间表示为 t_0^+ 。则有

$$u_C(t_0^+) = u_C(t_0^-) \tag{5-5a}$$

$$i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-) \tag{5-5b}$$

即电容电压和电感电流在换路瞬间保持不变。若换路发生在 $t=0$ 时刻, 换路前瞬间表示为 0^- , 换路后瞬间表示为 0^+ , 则有

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) \tag{5-6a}$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) \tag{5-6b}$$

也可用电荷关系及磁链关系来表示

$$q_C(0^+) = q_C(0^-) \tag{5-7a}$$

$$\psi_L(0^+) = \psi_L(0^-) \tag{5-7b}$$

式(5-7)反映了瞬时电荷守恒和瞬时磁链守恒。称式(5-5)、(5-6)和(5-7)为换路定则。为了方便分析计算, 一般设换路发生在 $t=0$ 时刻, 而常用电路变量是电压和电流, 所以式(5-6)是常用的换路定则形式。

从动态元件的伏安关系也可说明换路定则。电容电压在换路瞬间可以用从 0^- 到 0^+ 的电容电流的积分计算, 如果电流 i_C 是有限值, 在无穷小区间上的积分应为零。

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_C dt = 0$$

上式计算结果即是式(5-6a), 将 $1/C$ 去掉, 即是式(5-7a)。用对偶的方式可推出电感电流和电感磁链的换路定则。

2. 电路的初始值

在 $t=0$ 时发生换路, 换路前储能元件的 $u_C(0^-)$ 、 $i_L(0^-)$ 称为初始状态。换路后的瞬间, 各电量的值如 $u_C(0^+)$ 、 $i_L(0^+)$ 、 $i_C(0^+)$ 称为初始条件或初始值。在分析计算换路后的电路响应之前, 必须了解电路的初始状态, 因为它将影响电路的响应。再利用换路定则求出初始值, 最终求出微分方程的确定解。下面用例子说明初始状态和初始值的计算方法。

例 5-3 已知电路如图 5-6(a)所示, $t < 0$ 时电路稳定, $t=0$ 时开关 S 闭合。画出 $t=0^+$ 时等效电路并求初始值电流 $i_L(0^+)$, 电压 $u_L(0^+)$ 。

解 $t < 0$ 时电路稳定, 对于直流电源, 电感相当于短路线, $i_L(0^-) = I_s$ 。 $t=0$ 开关闭合, 电流源电流流过短路线, $t=0^+$ 时 R_2 上没有电流, 由换路定则

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_s$$

所以画出等效电路如图 5-6(b)所示。此时电感相当于电流源, 其方向与大小均与 $i_L(0^-)$ 相

同。可求出

$$u_L(0^+) = - R_1 i_L(0^+) = - R_1 I_s$$

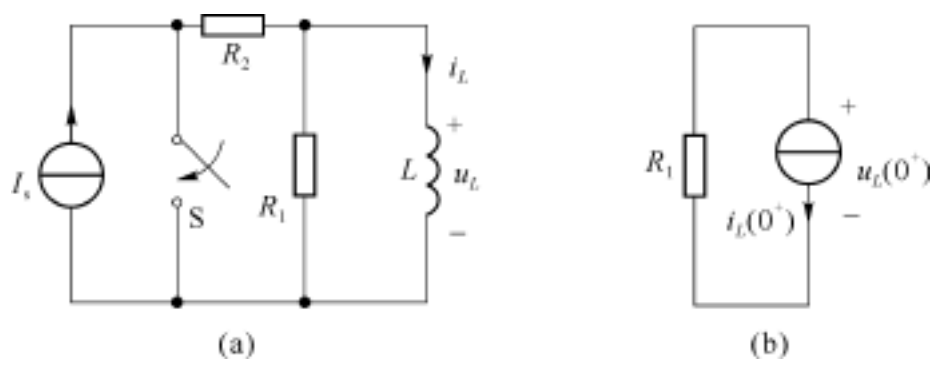


图 5-6 例 5-3 电路

例 5-4 图 5-7 电路中 $u_C(0^-) = 5\text{ V}$, $i_L(0^-) = 0\text{ A}$, 求 $i(0^+)$, $\frac{di(0^+)}{dt}$, $u_C(0^+)$ 。

解 在图 5-7 所示电路中, $t = 0$ 开关闭合, 应用换路定则有

$$\begin{aligned} u_C(0^+) &= u_C(0^-) = 5\text{ V} \\ i_L(0^+) &= i_L(0^-) = 0\text{ A} \end{aligned}$$

只要画出初始值等效电路, 就能方便地求出所需的初始值, 其中电容等效为 5 V 理想电压源, 电感等效为零值理想电流源, 应为开路, 如图 5-8 所示。但电感电压仍在原来的位置上, 并有

$$u_L(0^+) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+}$$

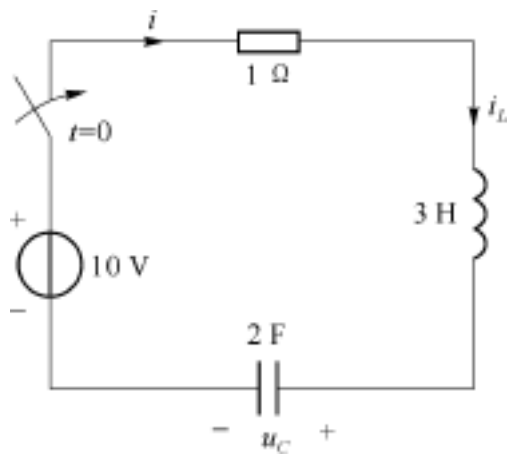


图 5-7 例 5-4 电路

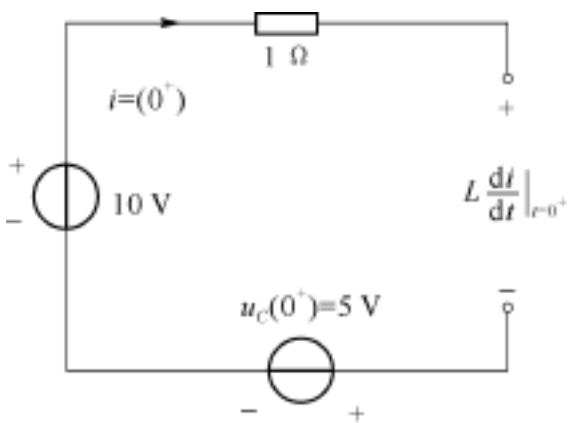


图 5-8 例 5-4 的初始值电路

此时 $i(0^+) = 0$, 但是它的变化率并不是 0, 为了求 $\frac{di(0^+)}{dt}$, 可先求 $u_L(0^+)$ 。

由 KVL 得到

$$i(0^+) R + L \frac{di(0^+)}{dt} + u_C(0^+) = 10$$

可推出

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{1}{L} [10 - i(0^+) R - u_C(0^+)] = \frac{5}{3} \text{ A/s}$$

从这两个例题可以看出, 初始值的求解, 包括根据电路求初始状态, 即求出 $u_C(0^-)$ 、 $i_L(0^-)$ 值, 然后使用换路定则确定 $u_C(0^+)$ 、 $i_L(0^+)$ 值, 最后画出初始值等效电路, 其中电容

等效为理想电压源,电感等效为理想电流源。因此初始值等效电路总是电阻电路,可直接使用前面所学方法求解。这种方法不仅适用于一阶电路,同时适用于二阶以上的高阶电路,如例 5-4。

5 2 一阶电路的零输入响应

在电阻电路中如果没有外部电源的作用,电路不会出现响应。而动态元件则不同,电路中虽然没有外部电源,但由于电路中动态元件上储存有能量,在能量释放时会引起电路的响应。这类响应称为零输入响应。

5 2 .1 RC 电路的零输入响应

当从 t_0 时刻开始观察一个电容,可把 t_0 以前电容上积累的电荷用 $q(t_0)$ 来表示,或用电压 $u_C(t_0)$ 来表示

$$u_C(t_0) = \frac{q(t_0)}{C} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i_C(\tau) d\tau$$

从物理意义上来说, $u_C(t_0)$ 是 $t < t_0$ 时电流对电容充电的结果,因为此时研究的只是 $t < t_0$ 电路的工作情况,只需知道 $u_C(t_0)$ 的值,而并不关心它是如何得到的。如果将观察时间确定为 $t = 0$ 开始,可把 $t = 0$ 以前积累的电荷用 $q(0)$ 来表示或用电压 $u_C(0)$ 来表示,即知道 $u_C(0)$ 的值就足够了。

将已经充电到电压为一定值的电容 C ,与一个电阻 R 及一个开关连接成一个回路如图 5-9 所示。当开关合上后的瞬间,电容电压保持不变,然后电容储存的电荷会通过电阻放电,

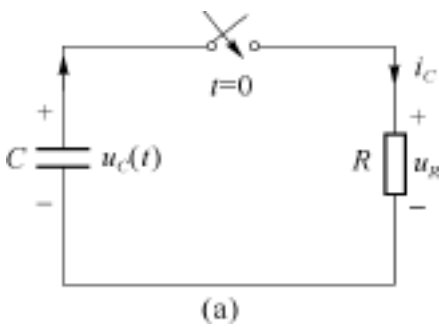


图 5-9 RC 零输入响应

随着时间的增加电压逐步下降,最后放电结束,电容电压为零。在放电的过程中电阻会消耗能量,其消耗的能量等于电容的原始储能。下面对图 5-9 所示电路作进一步的分析。

若已知 $u_C(0^-) = U_0$, $t = 0$ 时开关闭合, $t = 0^+$ 时根据换路定则 $u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$, 根据回路 KVL, $u_R(0^+) = U_0$ 。电容在 $t = 0^+$ 时通过电阻支路放电,放电过程中电阻 R 消耗能量,当 $t \rightarrow \infty$ 时放电结束,放电电流为零,各电压也为零。现将几个电量在时间的起始点和最终点的值列在表 5-1 中。

要了解中间的变化过程则必须进行数学分析,列出微分方程并求解方程。

表 5-1 图 5-9 中各电量的初始值和最终值

t	0^+	
u_C	U_0	0
i_C	U_0/R	0
u_R	U_0	0

在图 5-9 中已标出各电量的参考方向,其中回路电流按电容放电电流方向标出,所以电阻的电压与电流处在关联参考方向,而电容的电压与电流处在非关联参考方向下,这是列方程时要注意的。首先列出回路 KVL

$$-u_R + u_C = 0$$

再列出各支路特性

$$i_C = -C \frac{du_C}{dt}$$
$$u_R = Ri_C$$

代入后整理得到微分方程,为一阶齐次微分方程

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \tag{5-8}$$

方程式(5-8)适用于 $t \geq 0$ 的时间范围。为了得到微分方程的确定解,需要一个初始值 $u_C(0^+) = U_0$ 。下面开始解方程。

设

$$u_C(t) = Ke^{st} \tag{5-9}$$

代入原方程式(5-8)

$$RCSKe^{st} + Ke^{st} = 0$$

得到特征方程及其根

$$RCs + 1 = 0, s = -\frac{1}{RC}$$

代入式(5-9)得方程通解

$$u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

再利用初始值 $u_C(0^+) = U_0$ 确定系数 K

$$u_C(0^+) = Ke^0 = U_0$$

解出

$$K = U_0$$
$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = u_C(0^+) e^{-\frac{t}{RC}} \tag{5-10}$$

上式中 $\tau = RC$ 称为时间常数。可由电容支路特性求出电容电流

$$i_C(t) = -C \frac{du_C}{dt} = -CU_0 \left[-\frac{1}{RC} \right] e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = i_C(0^+) e^{-\frac{t}{RC}}$$

电阻电压

$$u_R(t) = Ri_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

这就是微分方程的解,也就是电路的一组响应。各个电量按指数规律变化,它们的初始值、最终值与表 5-1 列出的值完全吻合。 $u_C(t)$ 和 $i_C(t)$ 的波形如图 5-10 所示,它们按指数规律下降的速度与时间常数有关, τ 越小放电越快; τ 越大放电越慢。而且各电量具有同样的时间常数,事实上一个确定的一阶电路,它的时间常数是唯一的。

没有外加输入而电路中仍有电流响应、电压响应,这是动态元件储存的能量的释放过程,称为电路的零输入响应。由于动态元件储存的能量是有限的,所以当电路存在着耗能元件电阻 R 时,零输入响应最终将为零。

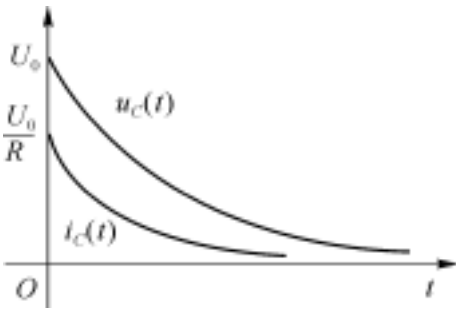


图 5-10 RC 零输入响应的波形

5 2 2 RL 电路的零输入响应

当动态元件电感含有初始储能时,也会像电容一样引起电路的零输入响应,图 5-11(a) 所示的电路中 $t < 0$ 时电路稳定,直流电压源作用于电路,此时由于在稳定电路中电感对于

直流电源相当于短路线,所以

$$i_L(0^-) = U_0 / R_0$$

在 $t = 0$ 时,开关断开,此时电压源不再作用于电感,含有初始储能电感 L 与电阻 R 组成回路如图 5-11 (b), $t > 0$ 后电感会通过电阻放电。在开关断开后的瞬间,电感电流保持不变,但随着时间的增加电流逐步减少,直至放电完毕,电感电流为零,能量全部消耗在电阻上,这就是 RL 电路的零输入响应。

下面我们对图 5-11 (b) 所示电路作进一步的分析。求 $t = 0$ 的电流和各电压。已知 $i_L(0^-) = U_0 / R_0$,为了书写方便写为 $I_0 = U_0 / R_0$,并有换路定则

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$$

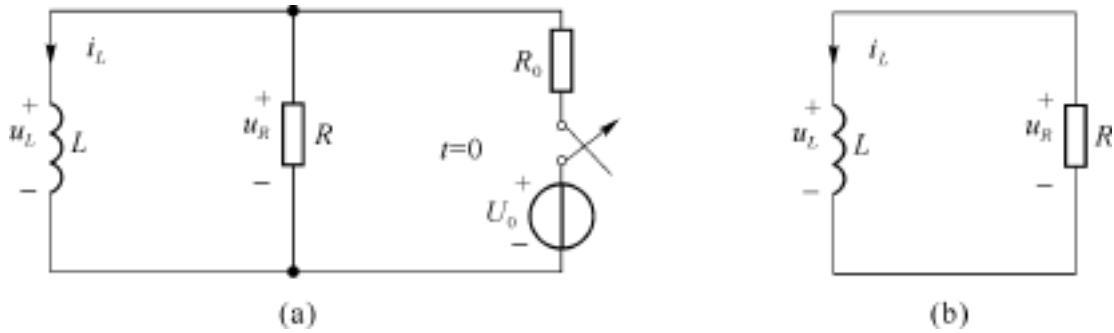


图 5-11 RL 电路的零输入响应

列写微分方程,由回路 KVL 得

$$u_L - u_R = 0$$

由于支路特性
可以推出

$$u_R = - Ri_L \text{ 和 } u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0$$

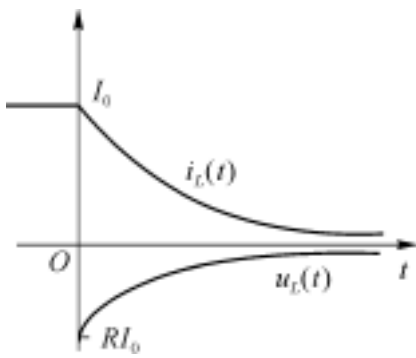
写成规范形式

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} + \frac{Ri_L}{L} = 0 \\ i_L(0^+) = I_0 \end{cases} \tag{5-11}$$

下面解方程,直接写出特征方程并求其根

$$S + \frac{R}{L} = 0, \text{ 即 } S = - \frac{R}{L}$$

得到方程的通解



再利用初始值确定系数 K

$$i_L(0^+) = Ke^0 = I_0$$

因而 $K = I_0$ 。从而得到方程的特解

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = i_L(0^+) e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{5-12}$$

其中

$$\tau = \frac{L}{R}$$

图 5-12 RL 零输入响应的波形

再求电感电压

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = I_0 L \left[-\frac{R}{L} \right] e^{-\frac{R}{L}t} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

画出电路波形如图 5-12 所示,这里画出了全时域的波形,可以看到 $t < 0$ 时 $i_L(t)$ 保持为 I_0 ,而 $u_L(t)$ 则为零值,在换路瞬间电感电流 $i_L(t)$ 是连续的,而电感电压 $u_L(t)$ 则是从零值突变到 $-RI_0$ 。

这是 RL 电路的零输入响应,从物理分析到数学分析,与 RC 电路都是对偶的。

5 2 3 一阶电路的时间常数

在 RC 单回路电路中时间常数 $= RC$,在 RL 单回路电路中时间常数 $= L/R$,为什么称时间常数呢?来看一下它的量纲,当 C 用法拉、 R 用欧姆为单位时, RC 的单位为秒,欧·法 = 欧·库/伏 = 欧·安·秒/伏 = 秒;同样当 L 用亨利、 R 用欧姆为单位时,时间常数的单位也为秒,读者可自己整理。

时间常数的大小直接影响到各电量衰减的速度,越大,各电量衰减越慢;越小,衰减越快。 $t = \tau$ 时各电量下降到初始值的 36.8%,当 $t = 4\tau$ 时各电量衰减到零。当 $t = 4.6\tau$ 时,各电量已经下降到初始值的 1.01%,在实际应用中可以认为放电已完毕。因此常取 $t = (4 \sim 5)\tau$ 作为放电完毕所需时间。图 5-13 中画出的是式 (5-10) 的电容电压的波形,并作出了 $t = 0$ 时曲线的切线,切线与 t 轴的交点在 $t = \tau$ 。由电路响应的波形可以用作图方法求出时间常数 τ 。

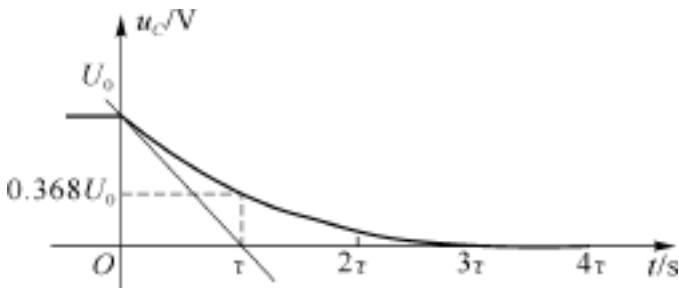


图 5-13 波形与时间常数

在单回路中时间常数是直观非常直观的。如果电路非单回路,可以将动态元件以外的网络等效为戴维南或诺顿等效电路。当电路是单回路时可直接得到 τ ,还可以直接套用式 (5-10)、(5-12) 等公式,求出电路的零输入响应。

特征方程的根 $s = -1/\tau$,称为网络的自然频率或固有频率,时间常数和自然频率都反映出网络本身的特性,对于二阶以上的高阶电路,自然频率和固有频率的意义更加形象。

5 2 4 总结和举例

归纳一阶电路零输入响应的特点如下:

- (1) 零输入响应是由动态元件储存的能量的释放而引起的,与外部电源无关。
- (2) 零输入响应从初始值开始并按指数规律下降,其变化速度与时间常数有关。在 RC 单回路电路中时间常数 $= RC$,在 RL 单回路电路中时间常数 $= L/R$ 。
- (3) 能量守恒:放电过程中电阻消耗的能量等于动态元件的初始储能。由于动态元件储存的能量是有限的,所以当电路中存在着耗能元件电阻 R 时,各电量最终将衰减为零。
- (4) 线性性质:当初始值增加 n 倍时,响应也增加 n 倍。

(5) 零输入响应的求解不一定要列写微分方程,可以直接代用单回路 RC 、 RL 电路的响应形式。下面用例 5-5 来说明。

例 5-5 图 5-14(a)所示电路, $t < 0$ 时电路稳定, $t = 0$ 时开关 S 断开, 求 $t > 0$ 时的电压 u_C , u_R 和电流 i 。

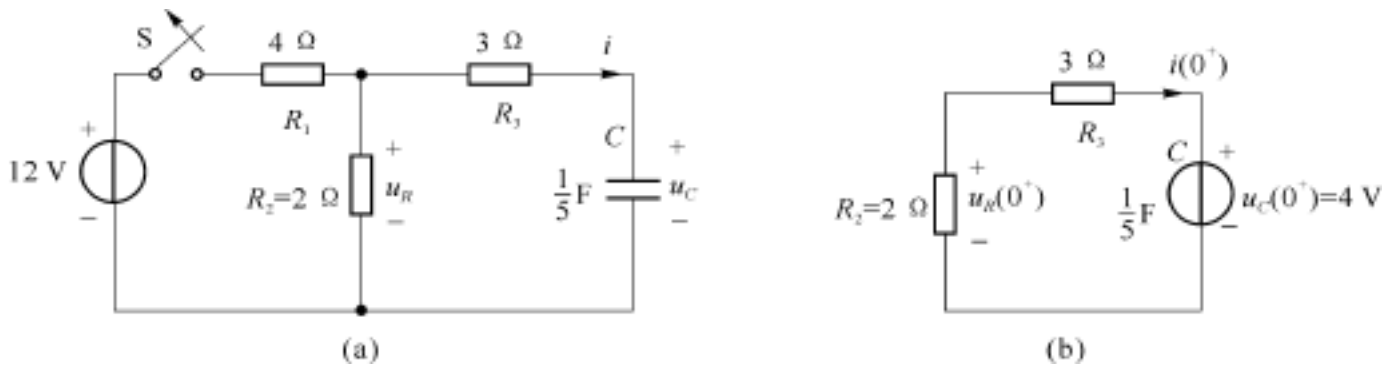


图 5-14 例 5-5 电路

解 先求初始值 $u_C(0^+)$, $u_R(0^+)$ 和 $i(0^+)$ 。在 $t = 0^-$ 时电路稳定, 电容 C 相当于开路, 电流 i 为零, 电容电压为

$$u_C(0^-) = u_R(0^-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_s = \frac{2 \times 12}{4 + 2} = 4V$$

根据换路定则

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 4V$$

画出 0^+ 等效电路如图 5-14(b)所示, 计算得到各初始值

$$i(0^+) = - \frac{u_C(0^+)}{R_3 + R_2} = - \frac{4}{3 + 2} = - 0.8V$$

$$u_R(0^+) = - R_2 i(0^+) = - 2 \times (- 0.8) = 1.6V$$

电路为单回路, 时间常数

$$= (R_3 + R_2) C = (3 + 2) \times \frac{1}{5} = 1S$$

直接套用公式得到零输入响应为

$$u_C(t) = 4e^{-t} V, u_R(t) = 1.6e^{-t} V, i(t) = - 0.8e^{-t} A$$

5 3 一阶电路的零状态响应和全响应

零状态响应是由外加独立电源工作, 作用于无初始储能的动态电路时, 产生的电路响应。即是电路储能从无到有的建立过程, 由于动态元件上初始状态为零, 所以称为零状态响应。

5 3 . 1 RC 电路的零状态响应

图 5-15 电路中电容初始储能为零, 在 $t = 0$ 时开关闭合, 电源将对电容 C 充电, 但是由于电容电压的惯性, $t = 0^+$ 时

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$

即在此刻电容 C 相当于短路, 随着时间的增加电容电压逐

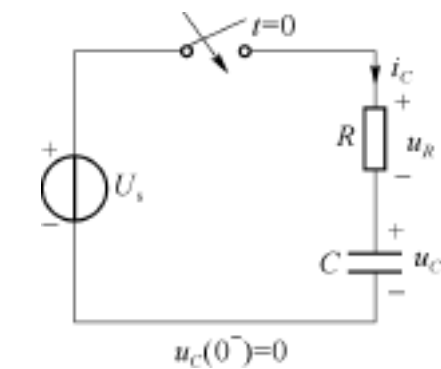


图 5-15 RC 电路的零状态响应

步上升,当电容电压等于电源电压时充电完毕。在充电的过程中电阻会消耗能量,所以电源不仅要提供电容的储能还要提供电阻消耗的能量。下面对图 5-15 所示电路作进一步的分析。

将图 5-15 中标出的各电量的初始值和最终值列在表 5-2 中,下面列出图 5-15 电路的微分方程。

表 5-2 图 5-15 中各电量的初始值和最终值

t	0^+	
u_C	0	U_s
i_C	$\frac{U_s}{R}$	0
u_R	U_s	0

回路 KVL

$$u_R + u_C = U_s$$

用支路特性代入得到微分方程

$$RC \frac{d u_C}{d t} + u_C = U_s$$

两边同除以 RC (即整理成首项系数为 1 的规范形式)

$$\frac{d u_C}{d t} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{U_s}{RC} \tag{5-13}$$

这是一阶非齐次微分方程。其解答包含齐次方程的通解 $u_{Ch}(t)$ 与非齐次方程的特解 $u_{Cp}(t)$ 两部分,即

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t)$$

与原方程式(5-13)相应的齐次方程为

$$\frac{d u_C}{d t} + \frac{1}{RC}u_C = 0$$

可知齐次方程通解为

$$u_{Ch}(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

此时还不能确定系数 A ,而应先求特解。因为特解与激励同形式,设 u_{Cp} 为常数 B ,代入原方程式(5-13)可得

$$u_{Cp} = B = U_s$$

可写出原方程式(5-13)的通解

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) \\ &= Ae^{-\frac{t}{RC}} + U_s \end{aligned}$$

此时再用初始值确定系数

$$\begin{aligned} u_C(0^+) &= Ae^0 + U_s = 0 \\ A &= -U_s \end{aligned}$$

得到方程的解

$$u_C(t) = -U_s e^{-\frac{t}{RC}} + U_s = U_s(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{5-14}$$

再求电容电流

$$i_c(t) = C \frac{du_c}{dt} = - U_s C \left[- \frac{1}{RC} \right] e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

各响应与本节开头的物理分析即表 5-2 中各项完全吻合。画出波形如图 5-16 所示。

5 3 2 RL 电路的零状态响应

含电感电路的零状态响应表示出类似的特性。图 5-17 所示电路, $t < 0$ 时电感电流为零,此时电感中无初始储能; $t = 0$ 时开关 S 合上,换路瞬间电感电流有惯性,即 $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$,电感相当于断开。从 $t = 0^+$ 开始由外加电源 U_s 对电感充电,随着时间的增加,电感电流 $i_L(t)$ 不断增加,直至电路再次稳定下来。此时电感相当于短路线,可表示为 $i_L(\infty) = U_s / R = I_s$ 。此间的过渡过程,就是电路的零状态响应。

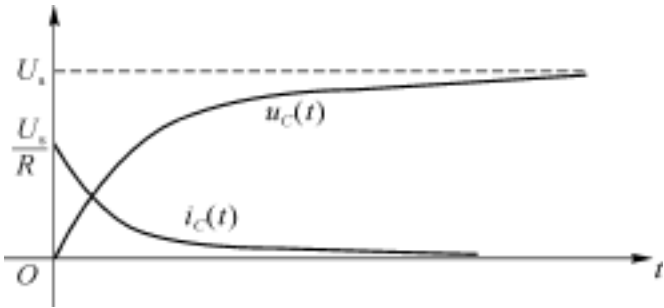


图 5-16 RC 零状态响应的波形

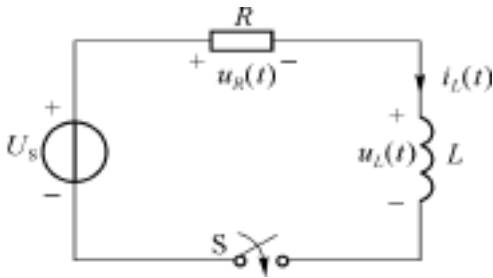


图 5-17 RL 电路的零状态响应

将图 5-17 中标出的各电量的初始值和稳定值列在表 5-3 中。

表 5-3 图 5-17 中各电量的初始值和稳定值

t	0^+	
i_L	0	I_s
u_L	U_s	0
u_R	0	U_s

下面对图 5-17 电路作数学分析。列出 KVL

$$u_L + u_R = U_s$$

以 $i_L(t)$ 为变量并代入支路特性,可得微分方程

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = U_s$$

或

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = \frac{U_s}{L} \tag{5-15}$$

相应齐次方程为

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = 0$$

得到齐次方程的通解

$$i_{Lh} = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

求原方程式(5-15)的特解,因激励是常数,设 i_{Lp} 为常数 B ,代入原方程

$$i_{Lp} = B = I_s = U_s / R$$

得到原方程的通解

$$i_L(t) = i_{Lh}(t) + i_{Lp}(t)$$

即

$$i_L(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + I_s$$

用初始值确定系数

$$i_L(0^+) = A + I_s = 0, A = -I_s$$

$$i_L(t) = -I_s e^{-\frac{R}{L}t} + I_s$$

或写成

$$i_L(t) = I_s(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = I_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{5-16}$$

其中时间常数

$$\tau = \frac{L}{R}$$

再求电感电压

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = L(-I_s) \left[-\frac{R}{L} \right] e^{-\frac{R}{L}t} = I_s R e^{-\frac{R}{L}t}$$

画出波形如图 5-18 所示。

各电量的初始值和最终值与表 5-3 中各项完全吻合。

归纳一阶电路零状态响应的特点如下：

(1) 零状态响应是在动态元件无初始储能的情况下,由外部电源作用引起的电路响应。它反映出电路由零状态到另一种稳定状态之间的过渡过程。零状态响应也指假设电路初始状态为零时的电路响应。

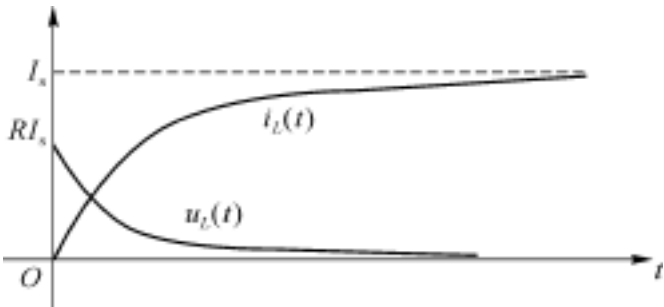


图 5-18 RL 零状态响应的波形

(2) 各电量按指数规律变化,有的上升有的下降,其变化速度与时间常数有关。电路的时间常数与零输入响应的时间常数一致,在 RC 单回路电路中时间常数 $= RC$,在 RL 单回路电路中时间常数 $= L / R$ 。

(3) 能量守恒:电源提供的能量等于动态元件最终的储能和充电过程中电阻消耗的能量, $W_s = W_C + W_R$ 。(可以用计算验证,注意理论上 $t \rightarrow \infty$ 过渡过程才消失)

(4) 线性性质:当外加电源增加 n 倍时,响应也增加 n 倍。

(5) 零状态响应的求解也不一定要列写微分方程,可以直接代用单回路 RC 、 RL 电路的响应形式。这里不再专门举例,但在以后的例子中会见到。

5 3 3 一阶电路的全响应

若动态电路中既有外部电源的作用,又有初始储能,则换路后电路的响应称为全响应。图 5-19 所示电路中,电容原有储能 $u_C(0^+) = U_0$, $t = 0$ 时开关 S 闭合,在外部电源的作用下,电容电压会发生

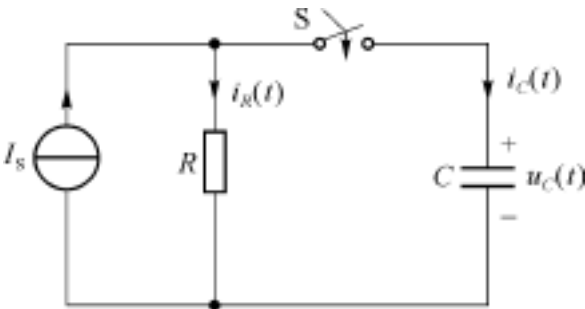


图 5-19 RC 电路的全响应

变化,最后进入另一种稳定状态。下面进行数学分析,列出节点的 KCL 方程

$$i_C + i_R = I_s$$

可推出以电容电压为变量的微分方程

$$\frac{d u_C}{d t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{I_s}{C} \quad (5-17)$$

从形式上看方程式(5-17)与求零状态响应的方程式(5-13)相同,解方程的过程也是一样的,但是它们的初始值是不同的。相应齐次方程为

$$\frac{d u_C}{d t} + \frac{u_C}{RC} = 0$$

可知齐次方程通解为

$$u_{Ch}(t) = A e^{-\frac{1}{RC}t}$$

此时还不能确定系数,而应先求特解。特解与激励同形式,设 u_{Cp} 为常数 B ,代入原方程式(5-17)得到

$$u_{Cp} = B = RI_s$$

写出原方程的通解

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) = A e^{-\frac{1}{RC}t} + RI_s$$

用初始值确定系数,与零状态响应求解的不同之处,仅仅是使用的初始值不同。根据电容电压的初始值可以求出

$$\begin{aligned} u_C(0^+) &= A e^0 + RI_s = U_0 \\ A &= U_0 - RI_s \end{aligned}$$

得到方程的解

$$u_C(t) = (U_0 - RI_s) e^{-\frac{t}{RC}} + RI_s \quad (5-18)$$

若把解答重新组合,可得

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} + RI_s (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (5-19)$$

对于式(5-18)可总结为:“全响应 = 瞬态响应 + 稳态响应”,瞬态响应也可称为自由分量,它描述了电路的动态过程。各电量从一个稳态达到另一个稳态,按指数规律变化,变化速度与 τ 值有关。稳态响应可称为强制分量,因为它与外加信号(外部电源)同形式。

式(5-19)中,解答的第一部分是电路的零输入响应,而第二部分是电路的零状态响应。可总结为:“全响应 = 零输入响应 + 零状态响应”。从电路中能量的来源可以推论:电路的全响应必然是零输入响应与零状态响应的叠加,电容原有储能 $u_C(0^+) = U_0$, $t = 0$ 时开关 S 闭合,所以 $t = 0$ 时的电路响应是由外加电源与动态元件上的初始储能共同产生的。

这两种分解方式也符合电路中任何支路的电压和电流。在这里电容电流为

$$i_C(t) = C \frac{d u_C}{d t} = \left[I_s - \frac{U_0}{R} \right] e^{-\frac{t}{RC}}$$

电阻电流为

$$i_R(t) = \left[\frac{U_0}{R} - I_s \right] e^{-\frac{t}{RC}} + I_s$$

这里都是按瞬态响应加稳态响应分项的,读者可自行将它们按零输入响应加零状态响应

归项。

下面画出电容电流的波形。由于初始值和外部电源的参数的相对关系不同,可能画出不同的波形。设 $U_0 > RI_s$ 时应为图 5-20(a),在这里电容的初始电压高于最终稳定电压,所以电容电压从 U_0 下降到 RI_s ;若 $U_0 < RI_s$ 时应为图 5-20(b),这里电容将在初始电压 U_0 的基础上继续被充电,直至电容电压达到 RI_s ,电路进入稳定状态。

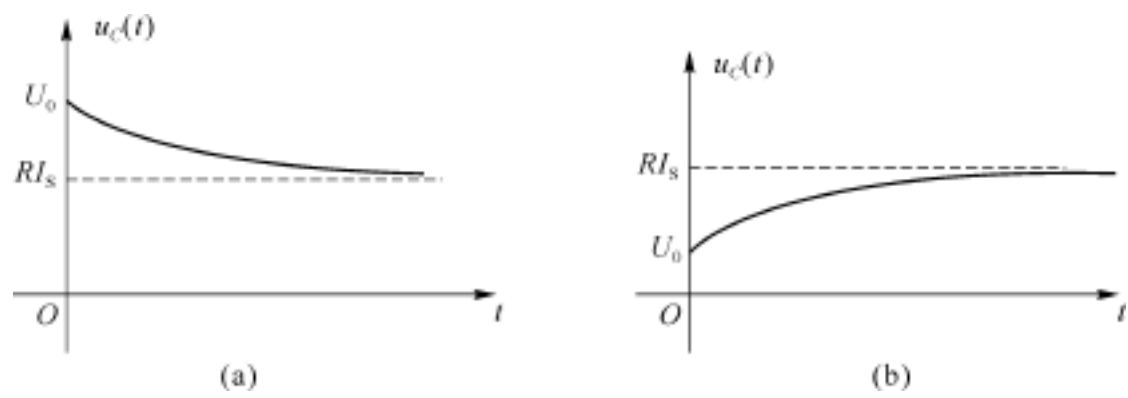


图 5-20 全响应的波形

电路从一种稳定状态过渡到另一种稳定状态,电路响应的变化速度与时间常数有关,从数学分析的过程可以知道,全响应的时间常数与零状态响应和零输入的时间常数是完全相同的。另外,请读者思考一个问题,全响应具有线性特性吗?零输入响应和零状态响应的线性特性在这里是否仍然有效呢?

5.4 三要素法求一阶电路的响应

考察前面讨论过的所有一阶微分方程及其解答的规律,发现不论是齐次微分方程的解,还是非齐次微分方程的解的形式,都可以用一个统一的公式来表示。

设一阶微分方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + S_1 y = f(t) & t \geq 0 \\ y(0^+) \end{cases}$$

其解答形式为

$$y(t) = y_p(t) + [y(0^+) - y_p(0^+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{5-20}$$

式中 $y(t)$ 表示一阶电路的响应(即电路任一支路的电压或电流), τ 是电路的时间常数, $y(0^+)$ 是响应的初始值, $y_p(t)$ 是与输入同形式的强制分量, $y_p(0^+)$ 是强制分量的初始值。当求电路的零输入响应时,外加电源为零即强制分量 $y_p(t) = y_p(0^+) = 0$;当求电路的零状态响应时,响应的初始值 $y(0^+) = 0$ 。

既然式(5-20)是一阶微分方程解答的标准形式,如果由电路能够直接求出其中各项,即不必列写微分方程而可得到电路的响应,则可大大简化计算分析过程。这真是个绝妙的构思。

在外部激励是直流电源而电路又处在稳定情况时,电感相当于短路线而电容相当于开路,此时电路呈现出电阻特性,可以用电阻电路的方法计算稳态值。所以这个方法主要用在外部激励是直流电源(恒定激励)的一阶电路中,此时式(5-20)可以简单地表示为

$$y(t) = y(\infty) + (y(0^+) - y(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{5-21}$$

其中 $y(\infty)$ 是恒定激励下电路的稳态响应(即强制分量),也称为终值。当 $t \rightarrow \infty$ 时电路进入稳定状态,响应的自由分量已经消失,只余下稳态响应,所以可以用稳定后的等效电路计算稳态响应,此时 $y_p(t) = y_p(0^+) = y(\infty)$ 。称式(5-21)为恒定激励下一阶电路的三要素公式。

在 5-1 节中介绍了电路中任一支路电压或电流的初始值,都可以通过初始值等效电路来求得。关于时间常数,可以求出电路的电容或电感以外的戴维南(或诺顿)电路的等效电阻,从而计算出电路的时间常数。下面例子可用三要素公式求解。

例 5-6 电路如图 5-21(a)所示, $t < 0$ 时电路稳定, $t = 0$ 时开关 S 闭合,求 $t > 0$ 时的 $u_C(t)$ 、 $i_C(t)$ 、 $i_1(t)$,并画出 $u_C(t)$ 与 $i_C(t)$ 的波形。

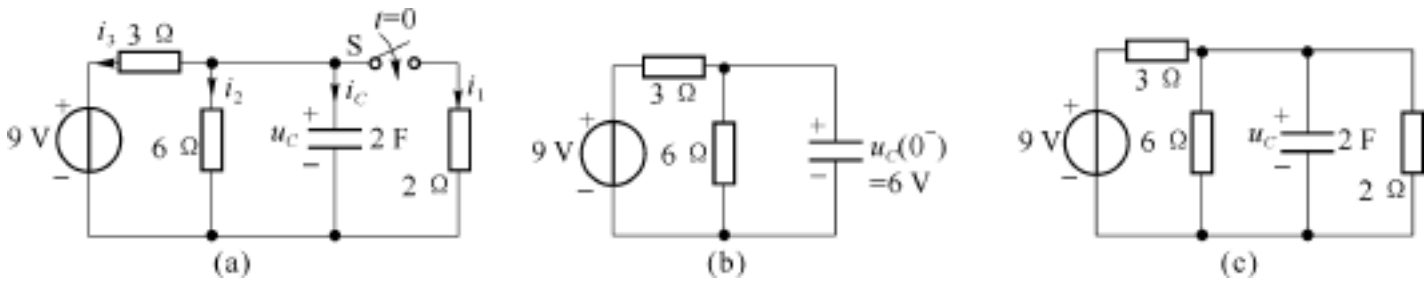


图 5-21 例 5-6 电路 1

解 $t = 0^-$ 时开关 S 断开,电路稳定,电容相当于开路状态,电路如图 5-21(b)所示,实际只有左侧小回路有工作电流, $i_2 = 9 / (3 + 6) = 1\text{ A}$,电容电压

$$u_C(0^-) = 6 \times i_2 = 6\text{ V}$$

或直接用分压关系

$$u_C(0^-) = \frac{6}{6 + 3} \times 9 = 6\text{ V}$$

求初始值: $t = 0$ 时开关 S 闭合,右侧 $2\ \Omega$ 电阻支路接到电路中,电路发生了换路, $t = 0^+$ 时由换路定则知

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 6\text{ V}$$

求终值: $t \rightarrow \infty$ 时电路到达另一个稳定状态,电路如图 5-21(c)所示,此时电容又相当于开路状态,计算出电容电压的终值

$$u_C(\infty) = \frac{9}{3 + \frac{6 \times 2}{6 + 2}} \times \frac{6}{6 + 2} \times 2 = 3\text{ V}$$

用图 5-22(d)计算等效电阻 R_0 ,将电压源短路,从电容两端对外求等效电阻,网络中 3 个电阻是并联关系, $R_0 = 1\ \Omega$,所以时间常数 $\tau = RC = 2\text{ s}$ 。现在三个要素都具备了,代入公式得到电容电压

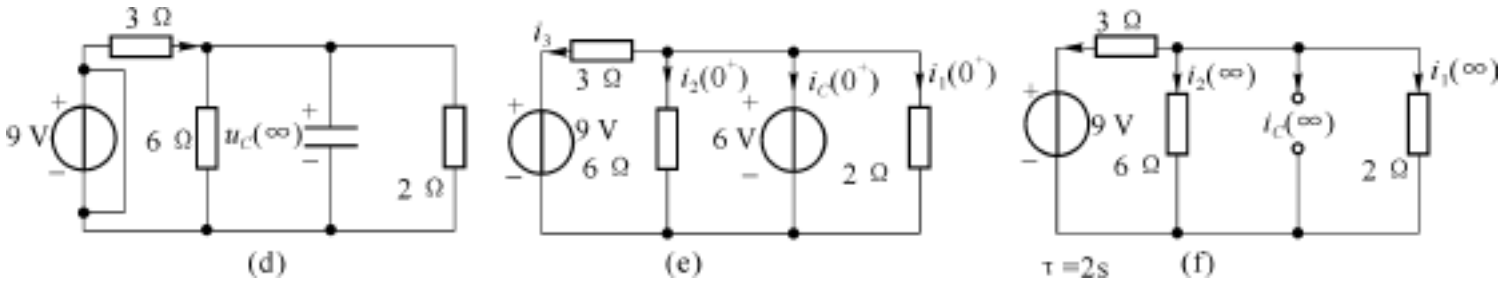


图 5-22 例 5-6 电路 2

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_C(\infty) + [u_C(0^+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 3 + (6 - 3)e^{-\frac{t}{2}} = (3 + 3e^{-\frac{t}{2}}) \text{ V} \end{aligned}$$

再求其他电量

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \frac{du_C}{dt} = 2 \times 3 \times \left[-\frac{1}{2}\right]e^{-\frac{t}{2}} = -3e^{-\frac{t}{2}} \text{ A} \\ i_1(t) &= \frac{u_C}{2} = (1.5 + 1.5e^{-\frac{t}{2}}) \text{ A} \end{aligned}$$

也可以直接用三要素公式求各个电量, 首先由 $t = 0^+$ 的等效电路如图 5-22(e) 所示, 图中电容用 6 V 电压源代替, 求 $i_C(0^+)$, $i_1(0^+)$

$$\begin{aligned} i_1(0^+) &= 3 \text{ A}; i_2(0^+) = 1 \text{ A}; i_3(0^+) = (6 - 9)/3 = -1 \text{ A} \\ i_C(0^+) &= -[i_1(0^+) + i_2(0^+) + i_3(0^+)] = -3 \text{ A} \end{aligned}$$

由 $t = \infty$ 的等效电路如图 5-22(f), 图中电容用开路代替, 求 $i_C(\infty)$, $i_1(\infty)$, 很明显

$$\begin{aligned} i_C(\infty) &= 0 \\ i_1(\infty) &= \frac{9}{\frac{6 \times 2}{6 + 2} + 3} \times \frac{6}{6 + 2} = 1.5 \text{ A} \end{aligned}$$

时间常数的求法与结果和上面是一样的, $\tau = RC = 2 \text{ s}$, 代入三要素公式

$$\begin{aligned} i_1 &= 1.5 + (3 - 1.5)e^{-\frac{t}{2}} = (1.5 + 1.5e^{-\frac{t}{2}}) \text{ A} \\ i_C &= -3e^{-\frac{t}{2}} \text{ A} \end{aligned}$$

得到同样的结果, 画出电容电压和电流的波形如图 5-23 所示。

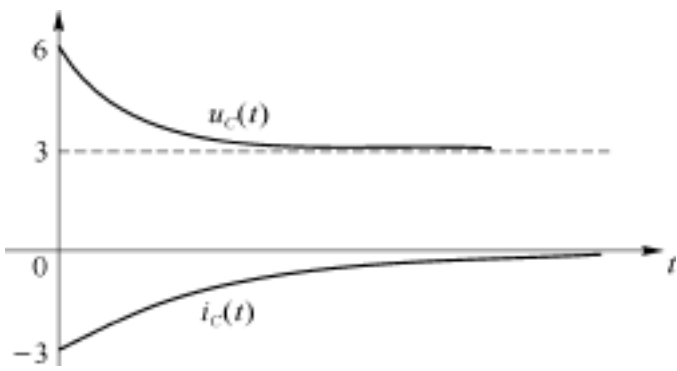


图 5-23 例 5-6 响应的波形

例 5-7 电路如图 5-24(a) 所示, $t < 0$ 时电路稳定, $t = 0$ 时 S_1 闭合、 S_2 打开, 求 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 和 $u_L(t)$ 。

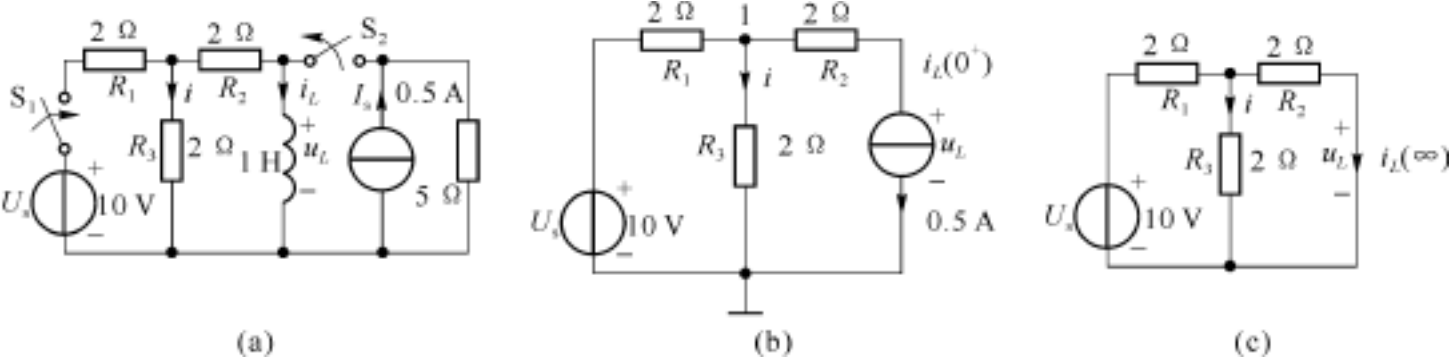


图 5-24 例 5-7 电路

解 $t < 0$ 时电路稳定,如图 5-24(a)中电流源作用于电路,此时电感相当于短路线。电流源电流全部流经电感, $i_L(0^-) = I_s = 0.5\text{ A}$,由换路定则得

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0.5\text{ A}$$

(1) 求初始值 $i(0^+)$ 和 $u_L(0^+)$

画出 $t = 0^+$ 时的等效电路并设参考点和节点 1 如图 5-24(b)所示,列出节点电压方程

$$\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right] u_1(0^+) = \frac{U_s}{R_1} - i_L(0^+)$$

将各元件参数代入上式,得

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] u_1(0^+) = 5 - 0.5$$

解出

$$u_1(0^+) = 4.5\text{ V}$$

$$i(0^+) = u_1(0^+) / R_3 = 2.25\text{ A}$$

$$u_L(0^+) = u_1(0^+) - R_2 i_L(0^+) = 4.5 - 2 \times 0.5 = 3.5\text{ V}$$

(2) 求终值,电路如图 5-24 (c),电路又进入稳定状态,电感仍相当于短路线,所以

$$i(\infty) = i_L(\infty) = \frac{U_s}{R_1 + R_2} \times \frac{1}{R_3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{3}\text{ A}$$

$$u_L(\infty) = 0$$

(3) 求时间常数,先求 R_0 ,将电压源 U_s 短路,从电感两端向左求等效电阻

$$R_0 = R_2 + R_1 \parallel R_3 = 3$$

时间常数

$$\tau = L / R_0 = 1/3\text{ s}$$

(4) 代入三要素公式

$$\begin{aligned} i(t) &= i(\infty) + [i(0^+) - i(\infty)]e^{-t/\tau} \\ &= \frac{5}{3} + \left[2.25 - \frac{5}{3} \right]e^{-3t} = (1.67 + 0.583e^{-3t})\text{ A} \end{aligned}$$

$$u_L(t) = 3.5e^{-3t}\text{ V}$$

例 5-8 求图 5-25(a)所示密勒积分电路的 $u(t)$, $t > 0$ 。

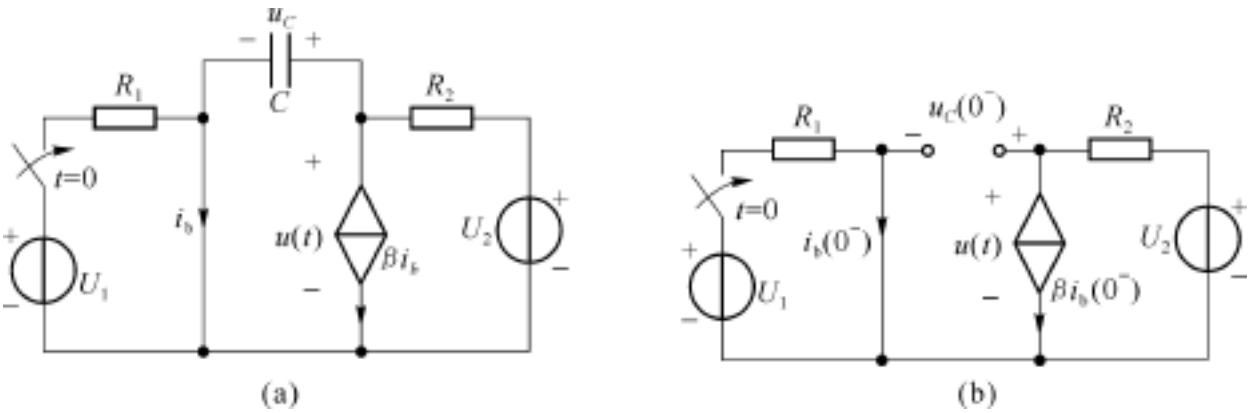


图 5-25 例 5-8 电路 1

解 这是一个含受控源的电路,也是恒定激励下的一阶电路,可以用三要素公式求解,

密勒积分电路是电子电路课程的一个典型的等效电路。

由于含受控源的电路在列写微分方程时一般比较繁琐,用三要素公式求解将更加体现出它的优越性。在瞬态分析中对受控源的处理方法与前面介绍的方法相同。

为求解 $u(t)$ 的初始值,必须先找出这个电路的初始状态 $u_C(0^-)$,首先画出 $t=0^-$ 时刻等效电路如图 5-25(b) 所示,此时电路处于稳定状态,电容等效为开路,电容电压的参考极性如图示,因为 $i_b(0^-)=0$,所以

$$u_C(0^-) = U_2$$

根据换路定则 $u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_2$

第二步可以从初始值等效电路中求 $u(0^+)$,但是从电路中知,在任何时刻 $u(t) = u_C(t)$,所以有

$$u(0^+) = u_C(0^+) = U_2$$

第三步画出终值电路,如图 5-26(c) 所示。由于电路进入新的稳定状态,电容又相当于开路,可知

$$i_b(\infty) = \frac{U_1}{R_1}$$

所以

$$u(\infty) = U_2 - i_b(\infty) R_2 = U_2 - \frac{R_2}{R_1} U_1$$

第四步为了求电路的时间常数,先求电容以外的等效电阻如图 5-26(d) 所示,图中电容的位置换接了外加电流源 i_0 ,原来的两个电压源已分别被短路。外加电流源电流全部从短路线通过, $i_b = i_0$,所以电阻 R_2 支路的电流为

$$i_2 = i_b + \beta i_b = (1 + \beta) i_b = (1 + \beta) i_0$$

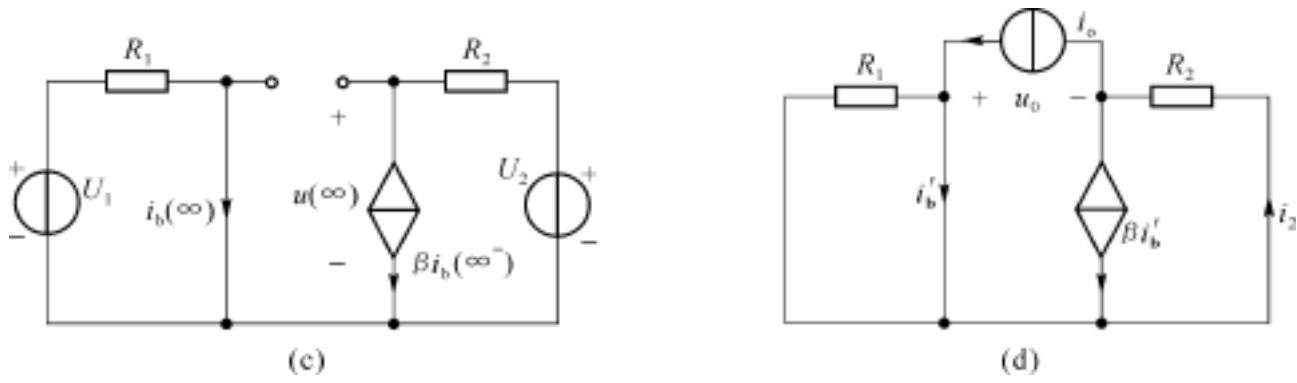


图 5-26 例 5-8 电路 2

电流源的端电压 $u_0 = i_2 R_2 = (1 + \beta) i_0 R_2$

等效电阻 $R_0 = \frac{u_0}{i_0} = (1 + \beta) R_2$

电路的时间常数 $\tau = R_0 C = (1 + \beta) R_2 C$

代入三要素公式,求得电压

$$\begin{aligned} u(t) &= \left[U_2 - \frac{R_2}{R_1} U_1 \right] + \left[U_2 - U_2 + \frac{R_2}{R_1} U_1 \right] e^{-\frac{t}{(1+\beta) R_2 C}} \\ &= U_2 - \frac{R_2}{R_1} U_1 + \frac{R_2}{R_1} U_1 e^{-\frac{t}{(1+\beta) R_2 C}} \quad t \geq 0^+ \end{aligned}$$

5 5 微分电路与积分电路

微分电路与积分电路是以电路的工作特性而命名的。简单地说,输入波形通过微分电路和积分电路可输出一个新的波形。它们在电子技术、数字脉冲技术中经常使用。本章介绍的一阶电路可以组成最简单的微分电路和积分电路,在了解两个电路的基本特性的过程中,读者将进一步理解一阶电路的知识。

5 5 .1 一个矩形脉冲作用于 RC 电路

首先讨论一个矩形脉冲作用于 RC 电路时,其电路响应的特性。

例 5-9 图 5-27 所示 RC 一阶电路,激励 $u_1(t)$ 是一个矩形脉冲,在电阻 R 两端获得响应 $u_2(t)$ 。试求零状态响应 $u_2(t)$ 并分析作为微分电路的条件。

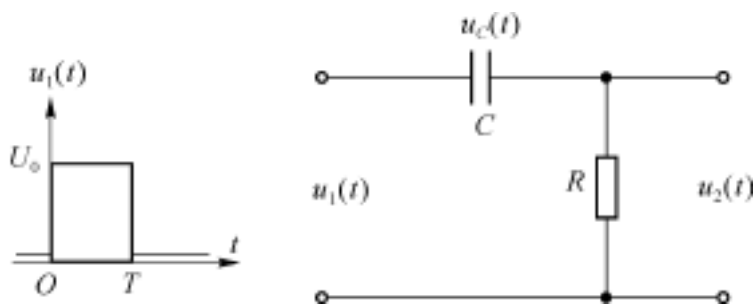


图 5-27 例 5-9 电路

解 已知电路为零状态,所以有

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$

在 $0 < t < T$ 的时间段内, $u_1(t)$ 的作用犹如一个恒定电压 U_0 ,它将对电容 C 充电,注意这时要想象电容电压变化的最终目标是稳态值 U_0 。由三要素公式可直接写出零状态响应

$$\begin{cases} u_2(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \\ u_C(t) = U_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \end{cases} \quad 0 < t < T \quad (5-22)$$

在 $t = T^+$ 时激励 $u_1(t)$ 突然下降到 0,即电路发生换路,电容电压仍遵循换路定则有

$$u_C(T^+) = u_C(T^-) = U_0 (1 - e^{-\frac{T}{RC}})$$

在 $t > T$ 的时间段内 $u_1(t) = 0$,输入端犹如短路,电容将通过电阻 R 放电。电容电压的终值将为 0。仍然可以用三要素公式得到零输入响应

$$\begin{cases} u_C(t) = U_0 [1 - e^{-\frac{T}{RC}}] e^{-\frac{t-T}{RC}} \\ u_2(t) = -u_C(t) \end{cases} \quad T < t \quad (5-23)$$

注意到式中变量 t 有时移,这是由于换路发生在 $t = T$,其三要素公式要作相应的调整。从时不变电路的特性可以理解这个变化;解微分方程直接推出三要素公式,也可得到同样结论,请读者自行推导。

在这个电路中,当电路的时间常数比较大时(例如大于输入脉冲的持续时间 T),在脉冲的持续时间内,充电不会结束。式(5-22)、(5-23)的波形如图(5-28)所示。图中矩形脉冲是激励 $u_1(t)$,电容电压 $u_C(t)$ 是连续变化的,电阻电压 $u_2(t)$ 则在 $t=0$ 处从 0 跳到 U_0 ,在

$t = T$ 处从正值跳到负值。

若 $RC = T/4$, 充电速度较快, 则可认为在 T 时刻充电刚结束, 如图 5-29 所示。如果设 $RC \ll T$, 则电容电压很快达到 U_0 。即电容电压波形近似为 $u_1(t)$, 而输出电压 $u_2(t)$ 成为在 $t = 0$ 及在 $t = T$ 出现的正负两个尖顶的指数脉冲, 如图 5-29 中虚线所示。可以想象时间常数更小时, 输出波形的形状将是幅度下降更快的尖脉冲序列。

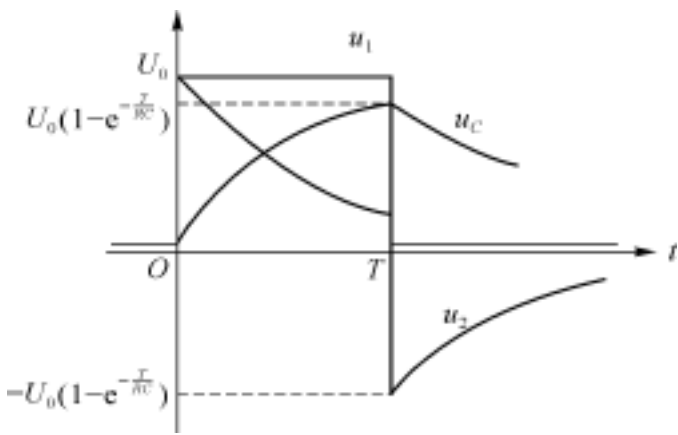


图 5-28 例 5-9 电路波形 1

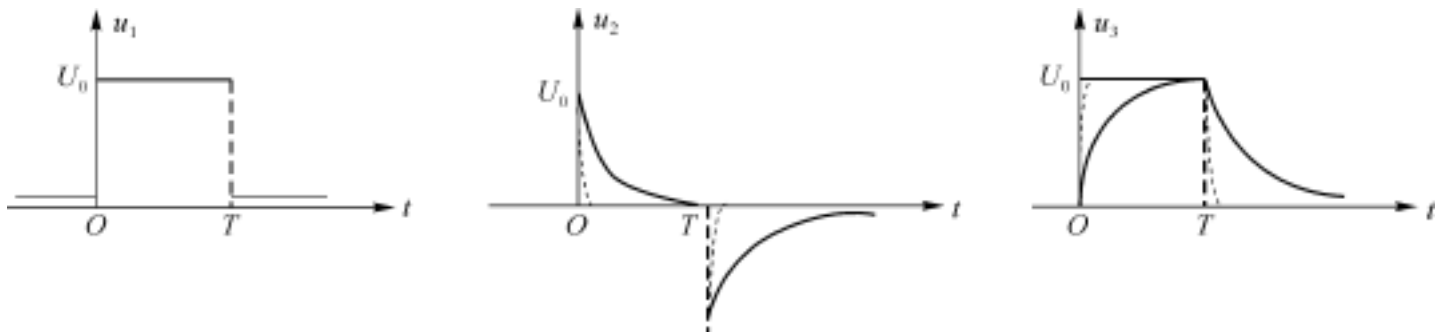


图 5-29 例 5-9 电路波形 2

5 5.2 矩形脉冲序列作用于 RC 电路

在应用中经常遇到脉冲序列作用于电路的情形。仍然以 5-27 电路为例, 输入波形 $u_1(t)$ 为一脉冲序列如图 5-30(a) 所示。下面来分析电容电压 $u_C(t)$ 波形和电阻电压 $u_2(t)$

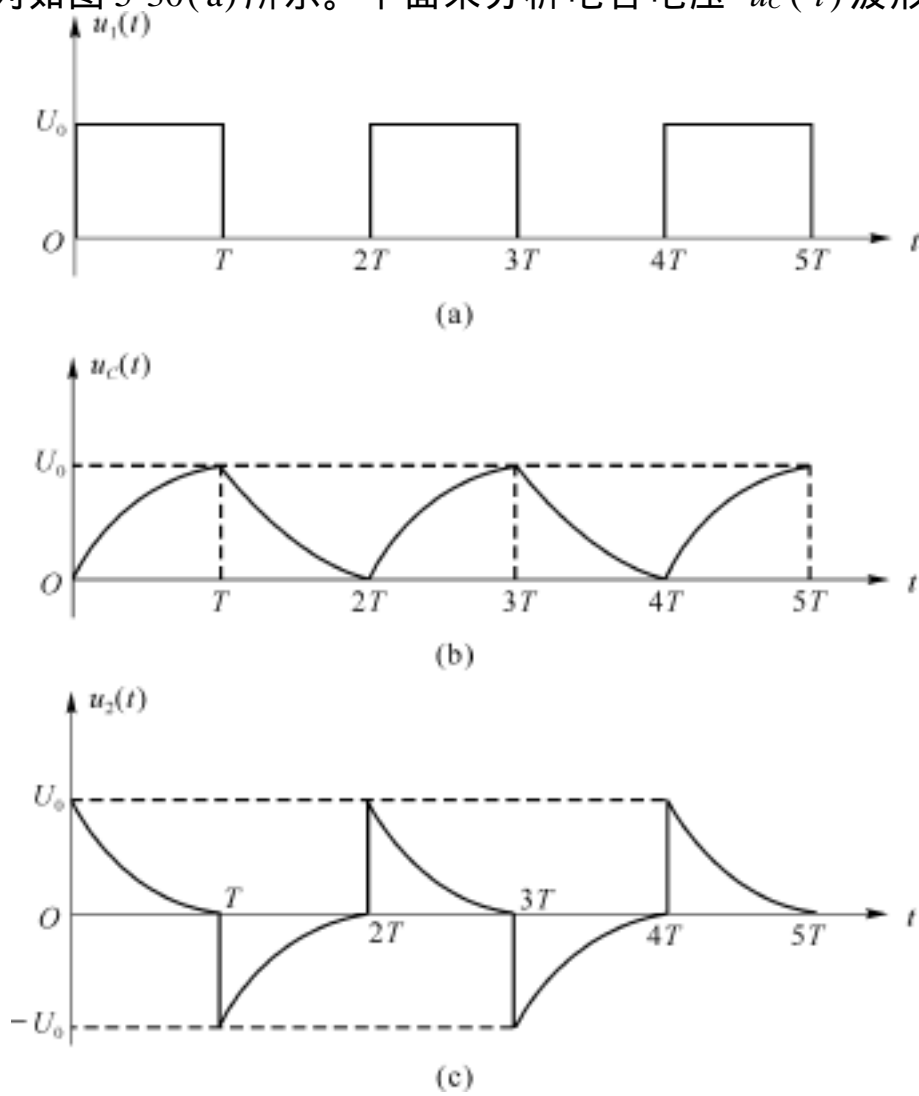


图 5-30 脉冲序列作用于 RC 电路

波形的特性。分两种情况来讨论:首先设时间常数 $RC \ll T$, 在第一个脉冲周期内各电压波形特点与图 5-29 相同。在第二个脉冲到来之前, 电容电压已经达到零, 因此第二个脉冲周期内各电压波形将是第一个周期的重复, 依此类推波形如图 5-30(b)、(c)所示。其第一个脉冲周期内各电压的表达式如下

$$u_C(t) = \begin{cases} U_s(1 - e^{-t/\tau}) & 0 \leq t < T \\ U_s e^{-(t-T)/\tau} & T \leq t < 2T \end{cases}$$
$$u_2(t) = \begin{cases} U_s e^{-t/\tau} & 0 \leq t < T \\ -U_s e^{-(t-T)/\tau} & T \leq t < 2T \end{cases}$$

当时间常数 $RC > T$ 时情况就较复杂些。在 $t = 0$ 时电容从零值开始充电, 这时要想象其充电的最终目标是 U_0 , 由于时间常数太大, $t = T$ 时充电还未达到稳态值 U_0 又转为放电。同理, 当 $t = 2T$ 时, 电容电压未能下降到零, 而此时第二个脉冲到来, 电容又开始充电, 这时为非零状态充电, 如此反复充放电。在最初的几个充放电周期内, 每一次充电过程中初始值与稳态值 U_0 之间的差值, 比起随后放电过程中初始值与稳态值 0 之间的差值要大些。由于充放电的时间常数是相同的, 因此在同样的时间 T 内, 充电时电压的上升值就要比放电时电压的下降值大, 也就是说, 在每一轮充放电过程中, 总是“充得多放得少”。这样就形成了如图 5-31 所示的电容电压的变化情况。

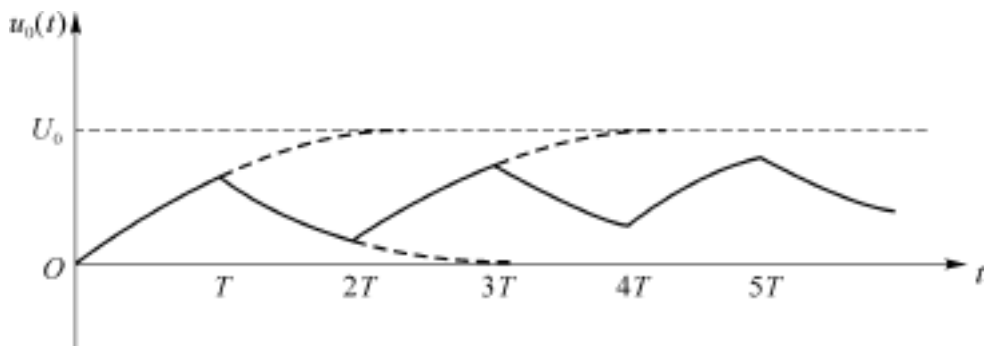


图 5-31 脉冲序列作用的最初几个周期

随着每次充电的初始值不断提高, 充电幅度逐次减少; 随着每次放电的初始值不断提高, 放电幅度逐次增大。因而在若干个周期后, 充电幅度和放电幅度趋于接近, 最终是充电时电压的上升值等于放电时电压的下降值, 这样在每一次充放电过程中, 就成为“充多少放多少”。充电的初始值 U_1 和放电的初始值 U_2 就都稳定在一定的数值上, 如图 5-32 所示, 这时电路进入了稳态过程。这里所谓的稳态过程是相对于变化过程的总体来说的, 而图 5-31 所示的最初几个周期属于过渡阶段。不论是在脉冲序列作用的最初几个周期, 还是达到稳定状态中, 就其每一个周期而言, 电容电压都处在充电或放电过程之中。

现在来推算充放电电压的两个初始值 U_1 和 U_2 。在电路稳定后选择一个时间起点如图 5-32 所示, 则可以写出两个电压响应表达式

$$\begin{aligned} u_{C1}(t) &= U_0 + (U_1 - U_0)e^{-t/\tau} & 0 \leq t < T \\ u_{C2}(t) &= U_2 e^{-(t-T)/\tau} & T \leq t < 2T \end{aligned} \tag{5-24}$$

在 $t = T$ 时 $u_{C1}(T) = U_2 = U_0 + (U_1 - U_0)e^{-T/\tau}$

在 $t = 2T$ 时 $u_{C2}(2T) = U_1 = U_2 e^{-T/\tau}$

由以上两式可得
$$U_2 = U_0 \frac{1 - e^{-T/\tau}}{1 - e^{-2T/\tau}} \tag{5-25}$$

并可推出
$$U_0 - U_2 = U_1$$

由此可以确定波形在坐标中的位置了,这就是电路在脉冲序列作用下的输出波形。

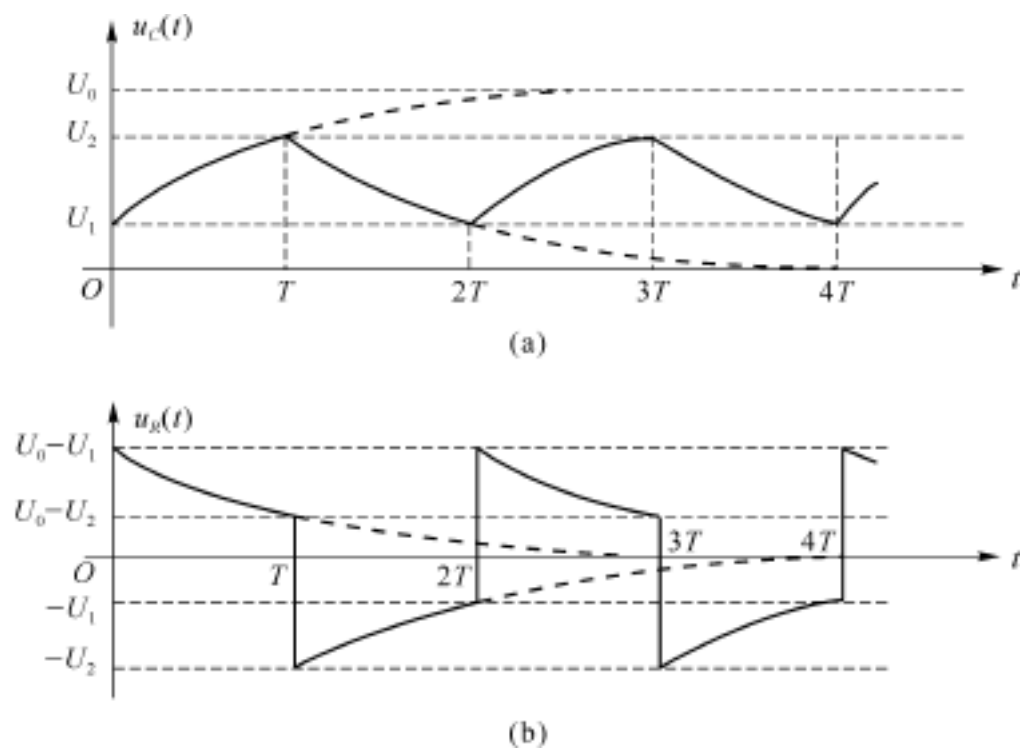
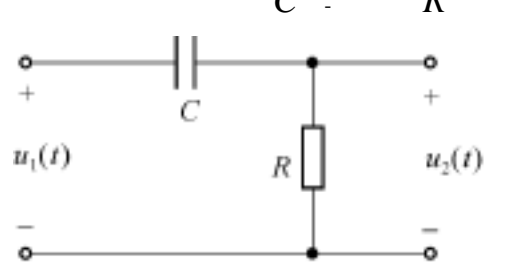


图 5-32 脉冲序列作用的稳定状态波形

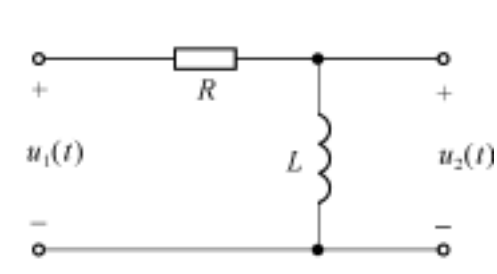
5 5 3 微分电路

图 5-33(a)所示电路中,以电阻电压作为输出电压,表示为 $u_2(t)$,由于输出端口开路,根据 KVL 可得到输出电压与输入电压的关系为

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t u_2(t) dt + u_2(t) = u_1(t)$$



(a)



(b)

图 5-33 最基本的微分电路

设时间常数非常小,使得方程左边第二项相对于第一项小得可以忽略时,方程式为

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t u_2(t) dt = u_1(t)$$

将上式两边对 t 求导,整理得到输出电压与输入电压的导数成比例的关系式

$$u_2(t) = CR \frac{du_1(t)}{dt} \tag{5-26}$$

这样的电路称为微分电路,此时输出波形可定性地画为图 5-34 所示的尖脉冲序列。这是数字电路中有用的波形。

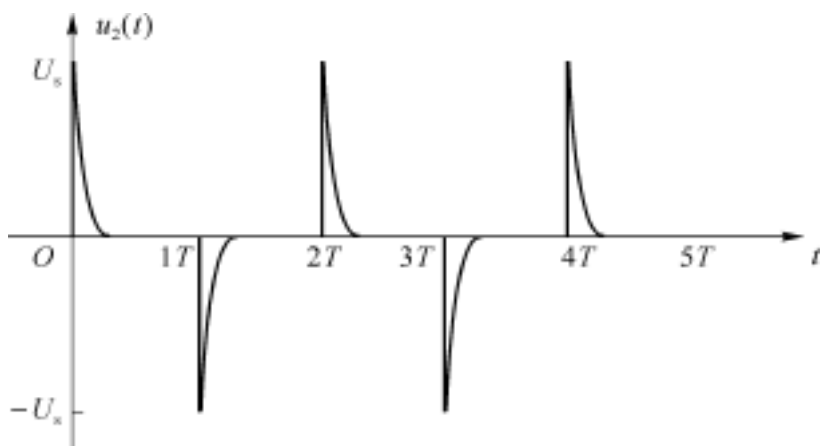


图 5-34 微分电路的输出波形

因此,微分电路的条件是电路的时间常数非常小。这个条件同样适用于 RL 组成的微分电路,如图 5-33(b)所示,从电感两端获得输出电压 $u_2(t)$ 时,只要电路的时间常数足够小,也是微分电路。

5 5 . 4 积分电路

观察图 5-32(a) 的波形近似为三角形脉冲,如果时间常数 $\gg T$, 波形中每个线段的线性将更好,如图 5-35 所示。结果是矩形脉冲通过此电路可变换成三角形脉冲。

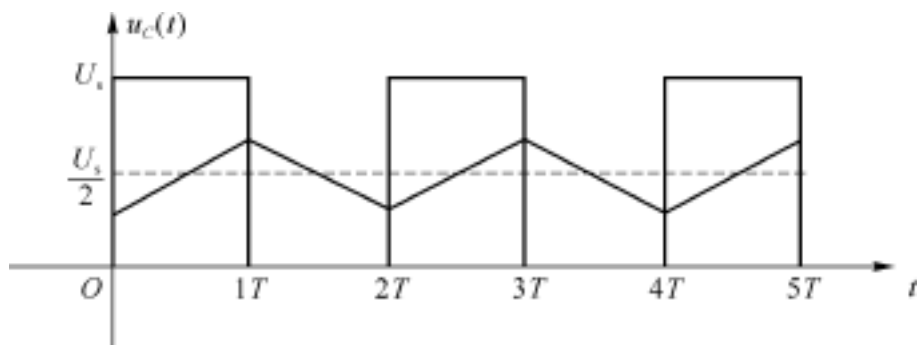


图 5-35 三角形脉冲

图 5-36(a) 的 RC 电路,以电容电压为输出电压,表示为 $u_2(t)$ 。写出回路的 KVL 方程

$$RC \frac{d u_2(t)}{d t} + u_2(t) = u_1(t)$$

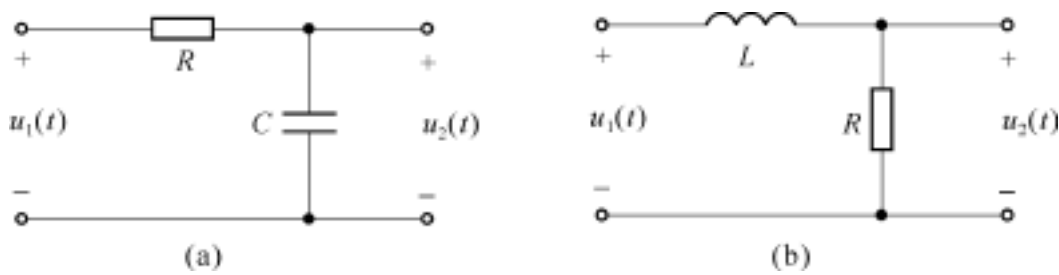


图 5-36 最基本的积分电路

若电路的时间常数很大,上式第二项与第一项相比可以忽略,则有

$$RC \frac{d u_2(t)}{d t} \approx u_1(t)$$

两边对 t 积分并整理,得到电容电压与输入电压的积分成比例的关系式

$$u_2(t) = \frac{1}{RC} \int u_1(t) dt \quad (5-27)$$

因此,实现了对输入波形积分的目的。积分电路的条件是电路的时间常数足够大。图 5-36(b)所示 RL 电路,在电阻两端获得输出电压也可实现积分电路。

微分电路与积分电路可以由 RC 或 RL 一阶电路组成,也可以同时包含有源元件,见第十一章。

5.6 指数信号与正弦信号作用于一阶电路

当一阶电路的激励是直流电源时,三要素公式提供了求解电路响应的捷径,然而在电路理论中,复指数信号和正弦信号都是典型的基本信号,本节要分析这类信号作用下一阶电路的响应。回到微分方程中进行分析。

5.6.1 指数信号激励的一阶电路

以图 5-37 所示电路为例,左侧支路电压源电压 $u_s(t)$ 是复指数函数 Ue^{pt} , $t < 0$ 时 $u_s(t) = 0$,即相当于短路。当右侧直流电压源单独作用时,电感相当于短路线, $i_L(0^-) = U_0/R_0$ 。 $t = 0$ 时开关 S 断开,初始值 $i_L(0^+) = i_L(0^-) = U_0/R_0$ 。 $t > 0$ 时,由 R 、 L 和 $u_s(t)$ 组成的单回路电路。以电流 i_L 为变量可列出微分方程

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = \frac{U}{L}e^{pt} \quad t > 0^+$$

由特征方程求出 $S = -R/L$,所以相应齐次方程的解

$$i_{Lh}(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

设原方程的特解和激励同形式为 $i_{Lp}(t) = Be^{pt}$,代入原方程

$$\frac{d}{dt}(Be^{pt}) + \frac{R}{L}(Be^{pt}) = \frac{U}{L}e^{pt}$$

运算得到
$$Bpe^{pt} + \frac{R}{L}Be^{pt} = \frac{U}{L}e^{pt}$$

比较系数得到
$$B = \frac{U}{pL + R}$$

原方程的特解为 $i_{Lp}(t) = \frac{U}{pL + R}e^{pt}$,假设参数 $p = -\frac{R}{L}$,得到原方程的通解

$$i_L(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{pL + R}e^{pt} \quad (5-28)$$

代入初始条件确定系数 A

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{U_0}{R_0} = A + \frac{U}{pL + R}$$

计算得到
$$A = \frac{U_0}{R_0} - \frac{U}{pL + R}$$

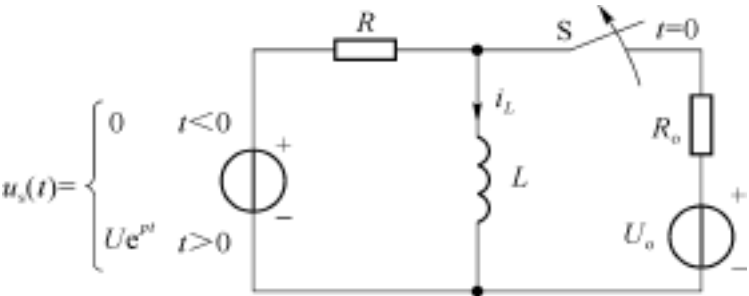


图 5-37 指数信号激励的一阶电路

式(5-27) 用不定积分且不加常数的形式,表明积分电路的工作状态是稳态。

所以

$$i_L(t) = \left[\frac{U_0}{R_0} - \frac{U}{pL + R} \right] e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{pL + R} e^{pt} \quad (5-29)$$

式中第一项是电感电流的自由分量,即瞬态分量;第二项是强制分量,即特解与激励同形式。将它们重新组合

$$i_L(t) = \frac{U_0}{R_0} e^{-\frac{R}{L}t} + \left[\frac{U}{pL + R} (e^{pt} - e^{-\frac{R}{L}t}) \right] \quad (5-30)$$

则第一项为零输入响应,第二项为零状态响应。如果电路元件的参数关系使得 $p = -\frac{R}{L}$, 则要重新设特解为 $i_{Lp}(t) = Bte^{-\frac{R}{L}t}$, 代入原方程, 重复以上的运算步骤, 即可得到 $B = \frac{U}{L}$ 。所以

$$i_L(t) = \frac{U_0}{R_0} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{L} te^{-\frac{R}{L}t} \quad (5-31)$$

也可以由式(5-30)求 $p = -\frac{R}{L}$ 时的极限, 同样可得到上式。

5.6.2 正弦信号激励的一阶电路

正弦电源是最常见的一种电源, 因此, 正弦信号激励电路的瞬态分析是很有实际意义的。这里以图 5-38 电路为例, 分析换路后电路的电流响应 $i(t)$ 。

在这里由于换路后的图 5-38 与图 5-37 的电路结构是相同的, 不同的仅仅电源的形式。完全可以仿照上面的过程, 即列出以 $i_L(t)$ 为变量的微分方程, 直接求解。但是欧拉公式可以将复指数函数和正弦函数联系在一起

$$U_m \cos t = \operatorname{Re}[U_m e^{j t}]$$

其中 Re 是取实部的运算符号。

所以对图 5-38 的电路来说, 可以利用图 5-37 的结果, 只要将式(5-26)中 $i_L(t)$ 的零状

态响应代入 $p = j$ 的条件, 并将结果取实部, 就可方便地得到图 5-38 所示电路的电流。即

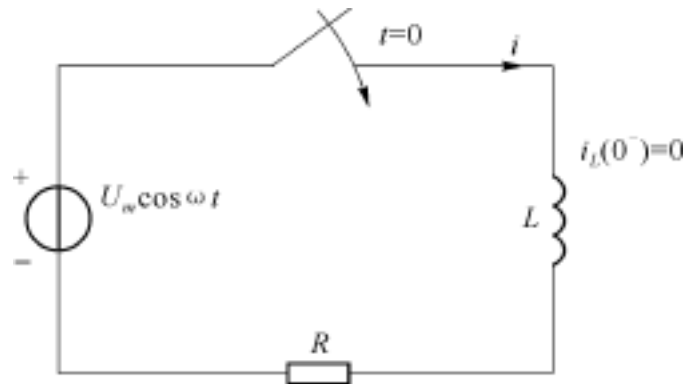


图 5-38 正弦信号激励的一阶电路

$$\begin{aligned} i(t) &= \operatorname{Re} \left[\left[\frac{U_m}{pL + R} e^{pt} - \frac{U_m}{pL + R} e^{-\frac{R}{L}t} \right] \right]_{p=j} \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{U_m}{R + j L} e^{j t} - \frac{U_m}{R + j L} e^{-\frac{R}{L}t} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{U_m}{\sqrt{R^2 + L^2}} e^{j t} e^{-j \arctan \frac{L}{R}} - \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + L^2}} e^{-j \arctan \frac{L}{R}} e^{-\frac{R}{L}t} \right] \\ &= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + L^2}} \cos(t - \arctan \frac{L}{R}) - \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + L^2}} \cos \left(\arctan \frac{L}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \quad t \geq 0^+ \end{aligned} \quad (5-32)$$

式中, $\theta = \arctan \frac{L}{R}$ 。

把式(5-32)的波形绘于图 5-39 中,将 $u_s(t)$ 的波形同时绘出,并结合式(5-32)进行分析与讨论。

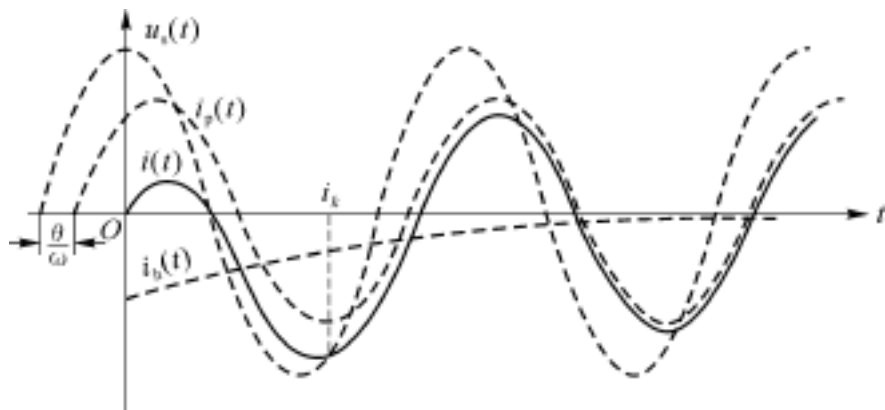


图 5-39 式 5-28 的波形

电路电流 $i(t)$ 从 $i(0^+) = 0$ 开始,经过一段过渡过程最终达到稳定,式中第二项自由分量 $i_h(t)$ 已经消失,其稳态响应为

$$i_p(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \theta)$$

图 5-39 中电流波形在过渡过程中,出现电路电流超过稳态电流最大值的现象,称为过电流现象。如在 $t = t_k$ 时明显地出现了这种现象。出现过电流的原因是自由分量的作用,在一段时间内电流 $i(t)$ 的瞬态和稳态分量电流均为负值,相加后幅度超过稳态电流最大值。不过由于瞬态分量本身按照指数规律衰减的趋势,决定了所出现的过电流数值将逐渐减小。可以计算证明,最大过电流值不会超出稳态电流最大值的两倍。在实际应用中过电流的存在是应该予以注意的,尤其在大电流的工作系统(如动力系统)中,过电流的数值有时相当可观。过电流将导致电路工作状态的不正常,甚至会产生很大危害。

图 5-38 所示电路中电源为周期信号, $u_s(t) = U_m \cos \omega t$ 存在于 $-\infty < t < \infty$ 的全时间域。在换路瞬间,由于 $i(0^+) = 0$,零状态电流 $i(t)$ 的自由分量与强制分量在数值上大小相等而符号相反。当然如果换路发生在 $i(t)$ 的强制分量等于零的瞬间,那么 $i(t)$ 的自由分量的初始值为零,则自由分量为零,从而避免了电路中出现过电流,且换路后电路无瞬变过程,立刻进入新的稳定工作状态。

从以上两种不同的电源作用于一阶电路响应的特点,可以进一步了解,电路全响应由自由分量和强制分量组成,其中换路引起的自由分量都是按指数规律变化的,而强制分量则与激励同形式。正弦激励作用下的强制分量即稳态响应,可以用相量法求解,具体方法将在第七章介绍。

5.7 突变现象简介

前面的内容强调电路的换路定则,即电路发生换路时电容电压和电感电流不会发生突变,但是在实际应用中突变是客观存在的。例如图 5-40 所示电路中,开关断开前电感中有稳定电流,开关断开使得电感电流在瞬间消失,即电感电流发生了突变。根据电感的伏安关系,电感两端会出现高电压,理论上电感电压将达到无穷大。按图中所示的参考极性,电感

电压应为负无穷大。

由于实际元件的理想模型化的结果,在电路模型中,就可能出现完全由电容或同时包含电压源组成的回路(简称纯容回路);也可能有与某节点或某割集相关的支路,全部是含电感的支路或同时含有电流源的支路(简称纯感割集)出现。这时虽然电路中,在换路瞬间仍存在着瞬时电荷守恒或瞬时磁链守恒的规律,但是电容电压不再符合换路定则,或电感电流也会出现突变情况。这一节将从几个例子,讨论在突变情况下,电容电压或电感电流初始值的确定方法,并分析这类电路的瞬态过程。

例 5-10 已知图 5-41 所示电路中 $u_{C1}(0^-) = U$, $u_{C2}(0^-) = 0$, 求开关闭合后两电容的电压 $u_{C1}(t)$ 及 $u_{C2}(t)$ 。

解 开关闭合后,这是一个完全由电容元件组成回路的电路。已知电容 C_1 、 C_2 的初始状态不同。在开关闭合后的瞬间,由于回路 KVL 的约束,必然要求

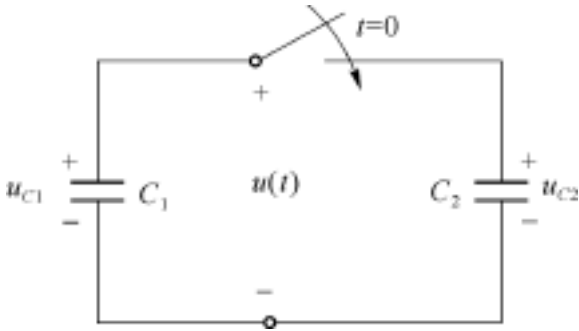


图 5-41 例 5-10 电路

换路后 KVL 约束,即可求得电容电压的初始值。

设 $t = 0^+$ 后 $u(t) = u_{C1}(t) = u_{C2}(t)$ 。由于对每个电容来说,一块极板上有多少正电荷就会在另一块极板上感应等值的负电荷。所以,只需从两个电容上面极板统计所具有的电荷量。在图 5-41 电路中,换路时刻前的总电荷量

$$q_C(0^-) = C_1 u_{C1}(0^-) + C_2 u_{C2}(0^-) = C_1 U$$

换路后 $q_C(0^+) = C_1 u_{C1}(0^+) + C_2 u_{C2}(0^+) = (C_1 + C_2) u(0^+)$

因为换路瞬间电荷总量不变

$$q_C(0^+) = q_C(0^-)$$

可解出

$$u(0^+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U = u_{C1}(0^+) = u_{C2}(0^+)$$

这两个电容电压在换路时都出现了突变,从物理特性上是很容易理解的。由于换路后电路的 KVL 的约束,强迫两个电容具有相同的电压,所以电容 C_1 必须将一部分电荷在换路过程中一下子倾注给电容 C_2 ,以保证换路后 $t = 0^+$ 开始时两个电容有相同的电压值。另外,应该注意到,不论从充电电流与电荷的关系还是从电容的伏安关系考虑,都可以想象在换路时电路中会出现瞬间的强电流,理论上电流值是无穷大。以上的结果也可以从电路的电流关系 $i_{C1} = -i_{C2}$ 直接求得。即从

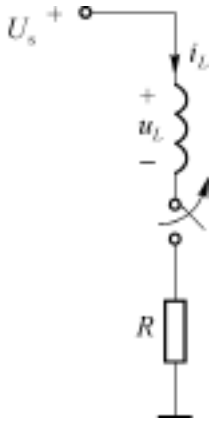


图 5-40 电感支路断开

$u_{C1}(0^+) = u_{C2}(0^+)$ 。显然 $u_C(0^+) = u_C(0^-)$ 的换路定则在这里不再成立。电容电压发生了突变。那么电容电压的初始值又该怎样去求呢?观察这个电路,在换路过程中,原已储存的电荷不会中和也没有新的电荷可以补充,所以 $q_C(0^+) = q_C(0^-)$ 仍成立。或者说,两个电容上面极板储存的正电荷总量是不变的,但在换路瞬间进行了重新分配。因此,只要从换路瞬间电荷守恒这一点出发,并注意

$$C_1 \frac{d u_{C1}}{d t} = - C_2 \frac{d u_{C2}}{d t}$$

求出在换路过程中电容电荷的变化量,也就是对上式求从 $t=0^-$ 至 $t=0^+$ 的定积分

$$\int_{0^-}^{0^+} C_1 \frac{d u_{C1}}{d t} d t = - \int_{0^-}^{0^+} C_2 \frac{d u_{C2}}{d t} d t$$

积分结果为

$$C_1 u_{C1}(0^+) - C_1 u_{C1}(0^-) = - [C_2 u_{C2}(0^+) - C_2 u_{C2}(0^-)] \quad (5-33)$$

式 5-33 说明,电容 C_1 在换路过程中减少的电荷量,数量上等于电容 C_2 增加的电荷量,也就是瞬时电荷守恒,即

$$C_1 u_{C1}(0^+) + C_2 u_{C2}(0^+) = C_1 u_{C1}(0^-) + C_2 u_{C2}(0^-)$$

代入换路后瞬间的 KVL 约束,同样可得

$$u(0^+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U$$

经过分析可以知道,在此电路中,开关一旦闭合,电容电压立即调整为 $[C_1 / (C_1 + C_2)] U$,此后再不会改变。电路中无瞬变过程发生而马上进入新的稳定状态。所以

$$u_{C1}(t) = u_{C2}(t) = u(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U$$

例 5-11 图 5-42 的电路中,在开关动作前处于稳态,求开关动作后电感 L_1 及 L_2 中的电流 $i_1(t)$ 及 $i_2(t)$ 。

解 开关动作前电感 L_1, L_2 中的稳态电流,是开关动作前电路的初始状态电流,即

$$\begin{aligned} i_1(0^-) &= 0 \\ i_2(0^-) &= \frac{U_s}{R_2} \end{aligned}$$

开关断开后,电路成为单回路。根据 KCL,两个电感将具有相同的电流,即当 $t=0^+$ 后,设为 $i(t) = i_1(t) = i_2(t)$ 。因此,电流 i_1, i_2 在 $t=0^-$ 至 $t=0^+$ 的换路瞬间必然发生突变。那就是,换路瞬间电感电流的初始值 $i(0^+)$ 不等于其初始状态 $i(0^-)$ 的换路定则不再成立。但由于在此瞬间,电路中的总磁链数并没有改变,所以只要根据磁链守恒的规律,同时考虑开关动作后的 KCL 约束,就可以确定电流的初始值。

已知 $t=0^-$ 时,按 i_1, i_2 的参考方向统计磁链,电路的总磁链为

$$\Psi(0^-) = L_1 i_1(0^-) + L_2 i_2(0^-) = L_1 \times 0 + L_2 \frac{U_s}{R_2}$$

$t=0^+$ 瞬时,电路的总磁链为

$$\Psi(0^+) = L_1 i_1(0^+) + L_2 i_2(0^+) = (L_1 + L_2) i(0^+)$$

由于

$$\Psi(0^+) = \Psi(0^-)$$

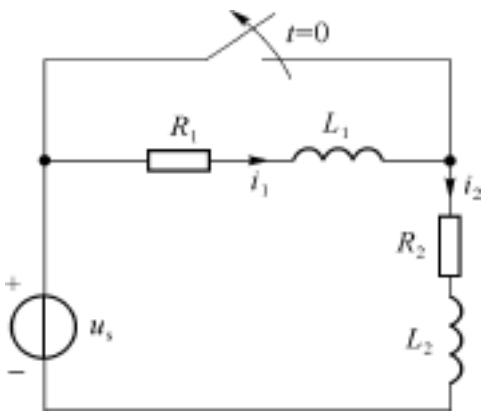


图 5-42 例 5-11 电路

所以
$$i(0^+) = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{U_s}{R_2} = i_1(0^+) = i_2(0^+)$$

在换路瞬间电感 L_1 中的电流从 0 突增至 $\frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{U_s}{R_2}$, 而 L_2 中的电流从 $\frac{U_s}{R_2}$ 突减至 $\frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{U_s}{R_2}$ 。这主要是由于换路以后 L_1 与 L_2 实质上串联成为一个电感, 所以原来在 L_2 中环链的磁链, 在 $t = 0^+$ 瞬间必然将一部分调整至 L_1 环链, 以保证 L_1 、 L_2 作为一个整体, 与其环链的磁链也是一个整体。

也可以通过 KVL 揭示独立系统瞬时磁链守恒的规律。对 KVL 式

$$iR_1 + iR_2 + L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = U_s \tag{5-34}$$

两边求从 $t = 0^-$ 至 $t = 0^+$ 的定积分, 求得换路过程中磁链的变化量

$$\int_{0^-}^{0^+} iR_1 dt + \int_{0^-}^{0^+} iR_2 dt + L_1 \int_{0^-}^{0^+} \frac{di}{dt} dt + L_2 \int_{0^-}^{0^+} \frac{di}{dt} dt = \int_{0^-}^{0^+} U_s dt$$

上式左侧的前两项和右侧项的积分结果是零。因为有限值在无穷小区间上的积分应为零。所以

$$0 + 0 + L_1 i(0^+) - L_1 i(0^-) + L_2 i(0^+) - L_2 i(0^-) = 0$$

从而求得

$$i(0^+) = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{U_s}{R_2}$$

这个电路在开关动作后为一阶电路, 其等效电感是 $L = L_1 + L_2$, 因此, 可用三要素公式求 $i(t)$ 。电路的时间常数可以通过式 (5-34) 整理得到, 也可以通过求等效电感 L 以外的戴维南或诺顿等效电阻, 然后求得时间常数

$$= \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2}$$

当电路再一次稳定下来

$$i(\infty) = \frac{U_s}{R_1 + R_2}$$

所以

$$i(t) = i_1(t) = i_2(t) = \frac{U_s}{R_1 + R_2} + \left[\frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{U_s}{R_2} - \frac{U_s}{R_1 + R_2} \right] e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} t} \quad t \geq 0^+$$

应该指出, 根据电感的伏安特性可知, 由于换路时电感电流出现了突变, 因而此时电感的电压必然是无穷大。

例 5-12 图 5-43 电路中, 电容的初始状态皆为零。若

$$u_s(t) = \begin{cases} U & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

求 $u_2(t)$ 。如果电容 C_1 可以调节, 是否可以靠调节 C_1 值使这个电路实现无瞬态过程的工作情况?

解 在电路中电容 C_1 、 C_2 和电压源 $u_s(t)$ 组成了

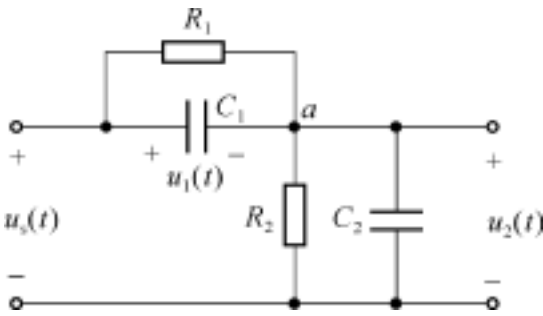


图 5-43 例 5-12 电路

纯容回路,电容电压有可能出现突变。由于电路处于零状态,根据电源的特点可知,在 $t < 0$ 时, $u_1(t) = u_2(t) = 0$ 。在 $t > 0$ 时,可以 $u_2(t)$ 为变量列出电路的微分方程并求解。

对节点 a 列出以 $u_2(t)$ 为未知量的 KCL 方程,注意同时代入 $u_1(t) = u_s(t) - u_2(t) = U - u_2(t)$ 的 KVL 约束。即得

$$\frac{U - u_2(t)}{R_1} + C_1 \frac{d}{dt}(U - u_2(t)) = \frac{u_2(t)}{R_2} + C_2 \frac{d}{dt}u_2(t) \quad t \geq 0^+$$

整理为

$$\frac{du_2}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} u_2(t) = \frac{U}{R_1 (C_1 + C_2)} \quad t \geq 0^+ \tag{5-35}$$

式(5-35)表明这个电路虽然包含两个电容,但实际上仍为一阶电路(请读者思考为什么)。作为换路后的恒定激励的一阶电路,尽管已经列出了求解的微分方程,仍可直接用三要素公式求得响应。

这个电路的时间常数,现在可以由特征方程直接得到

$$= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时,电容 C_1 及 C_2 都已经结束了充电,电路进入新的稳定状态,电容处于开路状态,通过 R_1 、 R_2 对 $u_s(t) = U$ 的分压关系求得

$$u_2(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

在这里,比较复杂的是求 $u_2(0^+)$ 。这个电路含有 C_1 、 C_2 由及组成的纯容回路,由于 $t = 0^+$ 时的 KVL 约束,使得 $u_1(0^+) = u_1(0^-)$ 和 $u_2(0^+) = u_2(0^-)$ 。已知在 $t = 0^-$ 时刻,观察与节点 a 相连的电容, C_1 负极板上没有负电荷, C_2 正极板上也没有正电荷。因此,在 $t = 0^-$ 时刻,节点 a 所相连的两个电容极板上总电荷量为零。这个电路在 $t = 0$ 的换路过程中不可能有电荷补充给电容,所以,在 $t = 0^+$ 时刻这两块板上的总电荷还应维持为零,即

$$- C_1 u_1(0^-) + C_2 u_2(0^-) = - C_1 u_1(0^+) + C_2 u_2(0^+) = 0$$

考虑到 $t = 0^+$ 时 $u_1(0^+) + u_2(0^+) = U$,代入上式则有

$$- C_1 U + C_1 u_2(0^+) + C_2 u_2(0^+) = 0$$

得到

$$u_2(0^+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U$$

因此,按三要素公式得到输出电压

$$u_2(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U + \left[\frac{C_1}{C_1 + C_2} U - \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \right] e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t} \quad t \geq 0^+$$

由于元件参数的相对值未知,所以 $u_2(t)$ 有三种可能的形式,如图 5-44 所示。

综上所述,这个电路的过渡过程表现为从 $t = 0^+$ 时的电容分压电路向稳定工作状态下的电阻分压电路的调整过程。如果选择元件参数满足

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2} \tag{5-36}$$

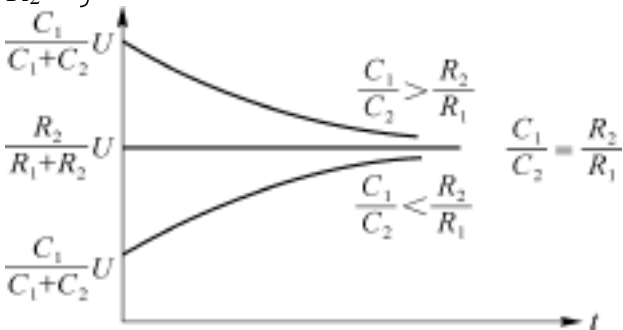


图 5-44 例 5-12 电路的几种情况

则此时电路将不出现瞬变过程, $u_2(t)$ 直接达到稳定值, 与 $u_s(t)$ 的波形完全相似。

作为实际应用的例子如图 5-45 (a) 所示的分压电路, 电路的设计功能要求输出电压与输入电压仅有幅度改变而波形相似, 但是电路的分布电容的作用, 使得输出电压发生了畸变, 如图 5-45 (b) 所示。这里将分布电容等效为与电阻 R_2 并联的 C_2 , 由例 5-12 的结论, 在电阻 R_1 两端并联电容 C_1 , 即为图 5-43 电路, 并按式 (5-36) 调整参数, 可以改善输出电压的波形。因此, 也称图 5-43 的电路为补偿分压器。

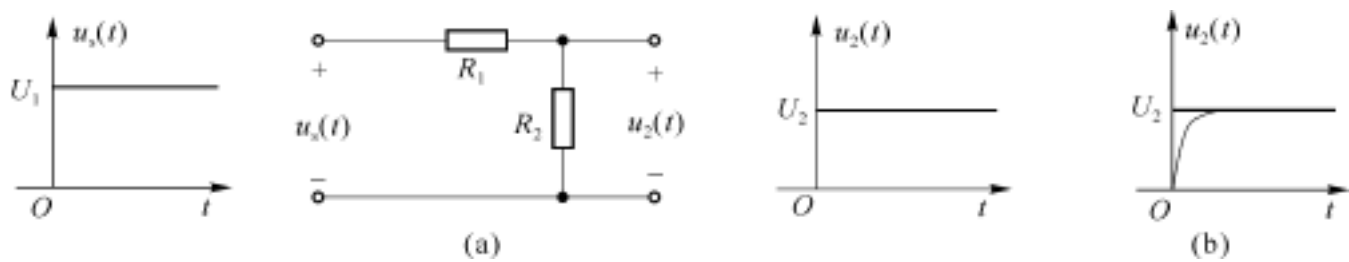


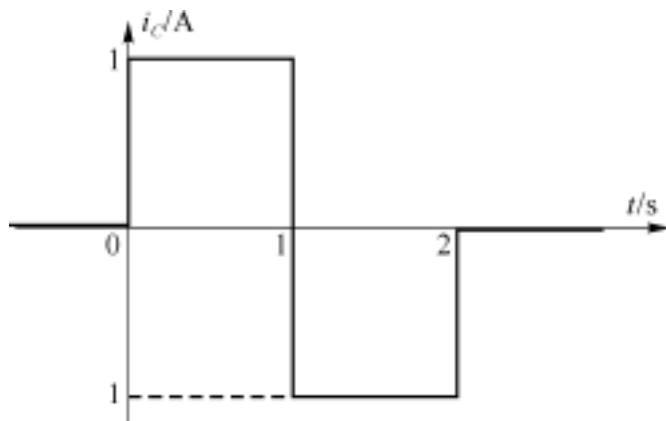
图 5-45 分压器的波形畸变

从以上几个例子的分析, 可以知道突变现象是客观存在的, 在分析计算中会出现一些特殊问题, 必须对它进行特殊处理。在后续课程《信号与系统》中将会应用新的数学方法进一步研究电路的全响应, 从而更加方便地讨论突变现象。

这里需要注意, 突变现象发生时出现的高电压或强电流, 有可能在实验室测量中造成破坏。然而突变现象也是可以利用的, 例如日常使用的日光灯电路, 就是利用电感电流的突变现象而设计的, 从电路结构上很容易分析, 这里不再赘述。

习 题 五

5-1 题图 5-1 的电流流过无储能的 1F 电容, 求 u_C , 并画出波形。



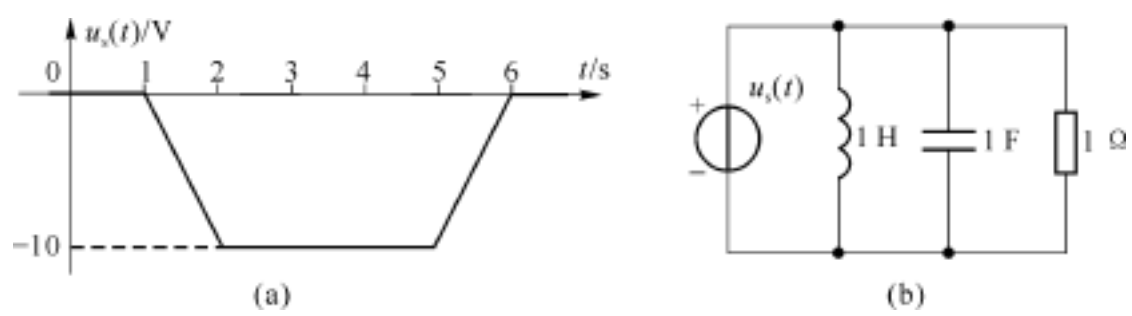
题图 5-1

5-2 题图 5-2 (a) 的电压作用于题图 5-2 (b) 的电路中, 若各动态元件都无原始储能,

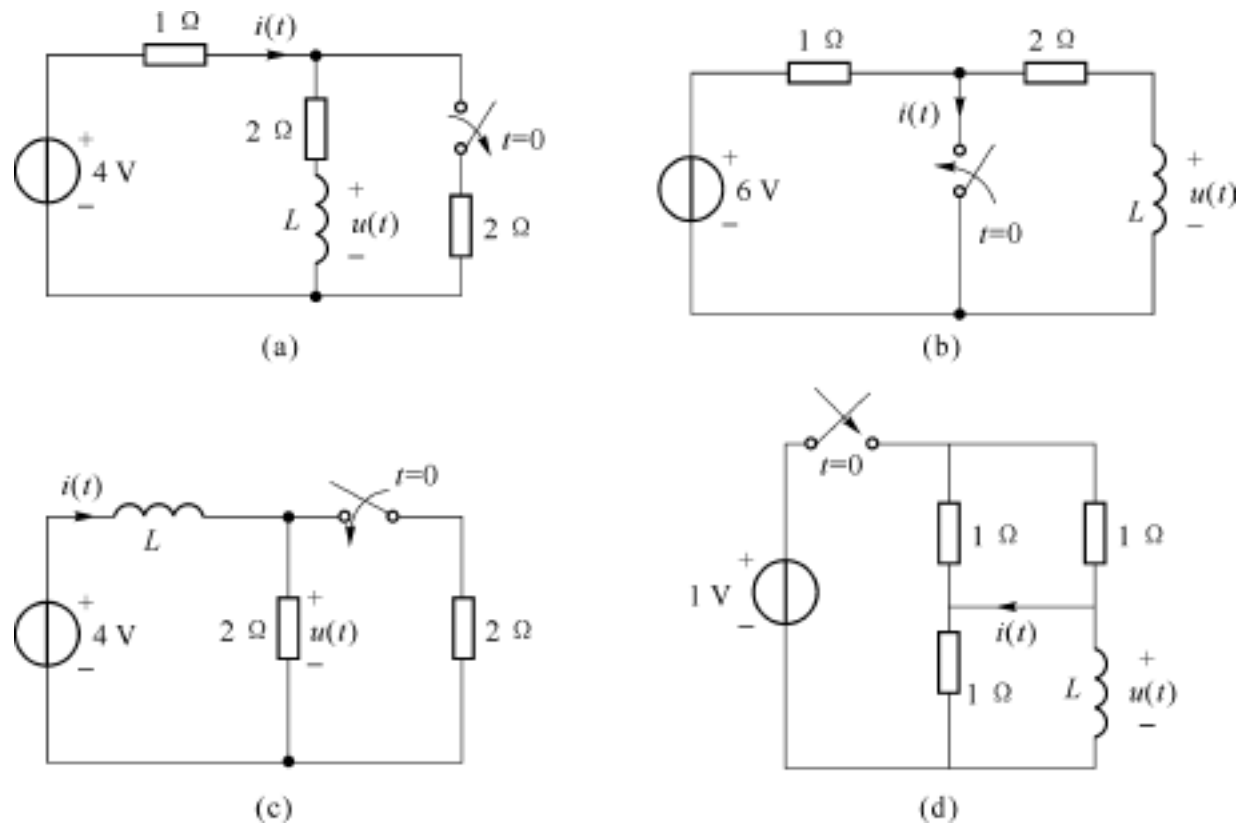
- (1) 求各分支电流;
- (2) 计算 $t = 3\text{ s}$ 时电容、电感中储存的能量。

5-3 在题图 5-3 所示电路中, $t = 0$ 时换路。求换路后瞬间电路中所标出电流 $i(t)$ 、电压 $u(t)$ 的初始值。

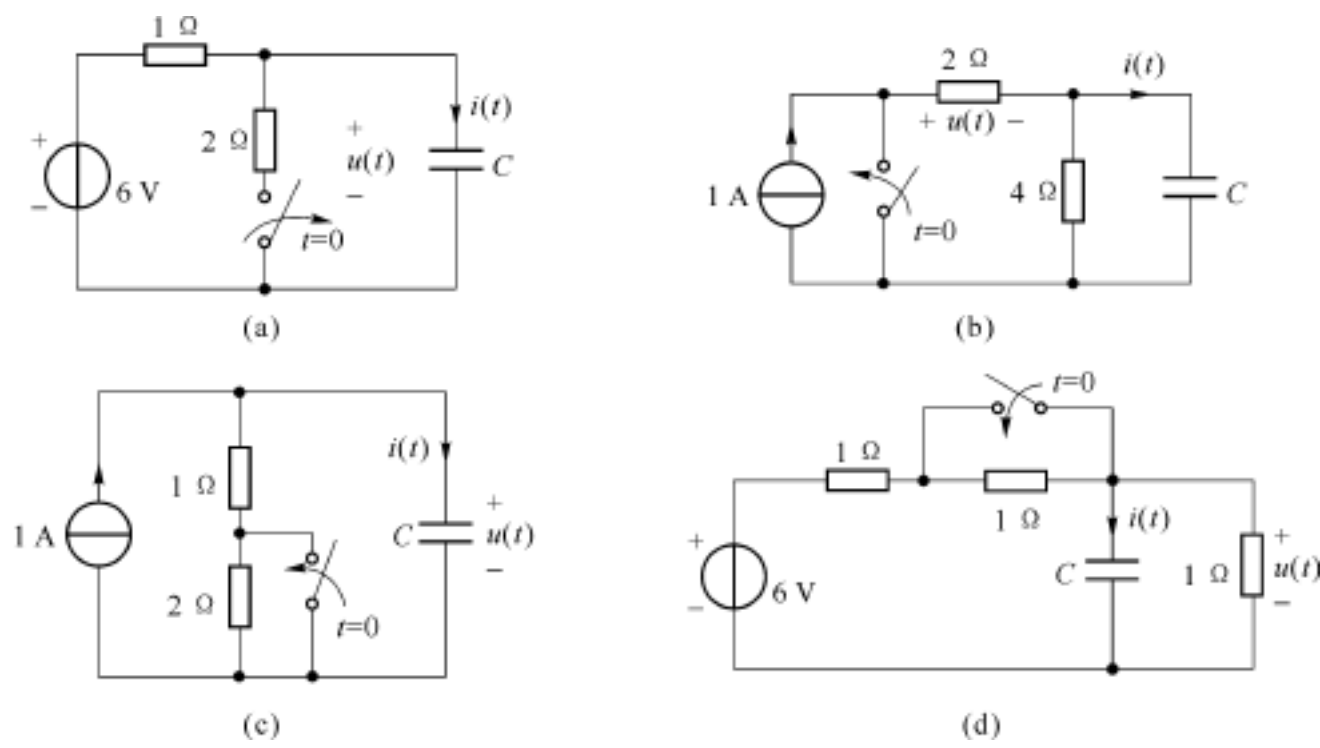
5-4 在题图 5-4 所示电路中, $t = 0$ 时换路。求换路后瞬间电路中所标出电流 $i(t)$ 、电压 $u(t)$ 的初始值。



题图 5-2



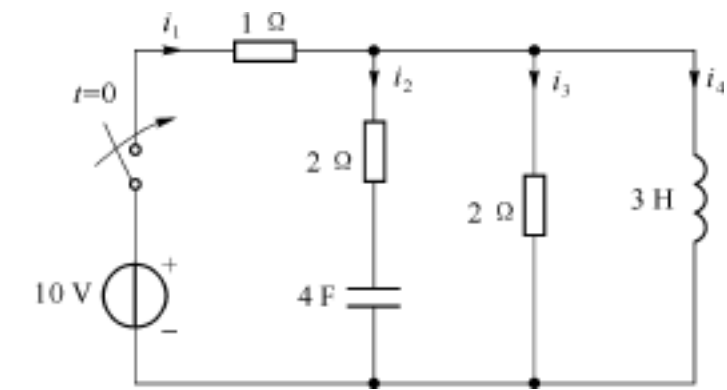
题图 5-3



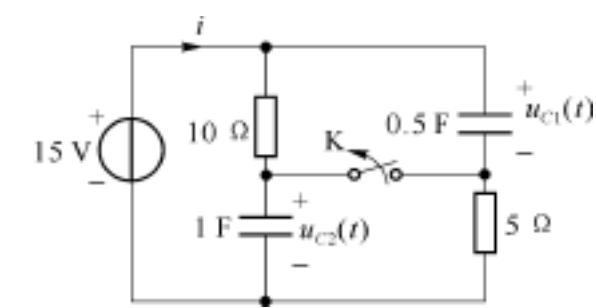
题图 5-4

5-5 题图 5-5 电路中开关于 $t=0$ 时闭合。已知电容、电感的初始状态皆为零,求各支路电流初始值。

5-6 电路如题图 5-6 所示。 $t=0$ 时打开开关 K,换路前电路已达到稳态。求 $i(t)|_{t=0^+}$ 和 $\frac{du_{C1}(t)}{dt}|_{t=0^+}$ 。

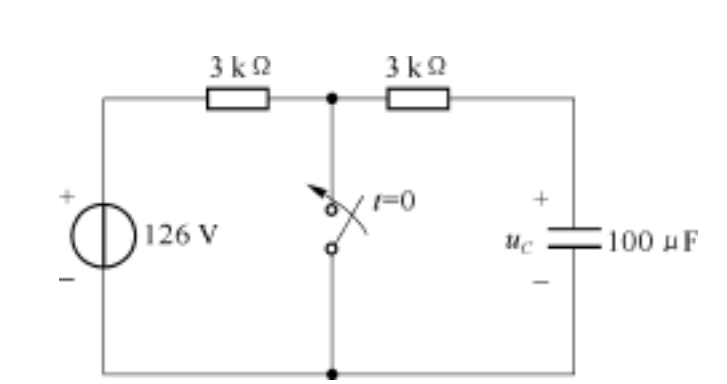


题图 5-5

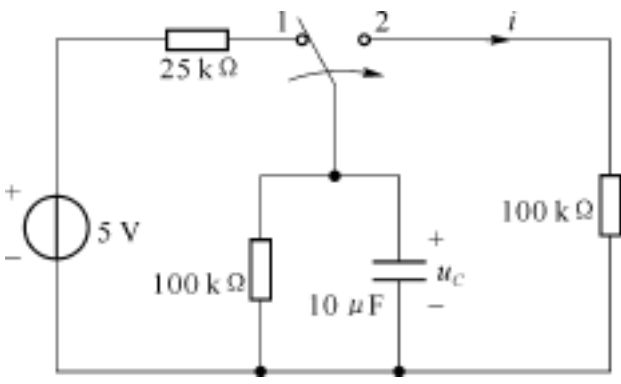


题图 5-6

5-7 题图 5-7 电路,开关动作前已处于稳态,若 $t=0$ 时合上开关,求 $u_C(t), t \geq 0$ 。
5-8 题图 5-8 电路,开关动作前已处于稳态,于 $t=0$ 时突然合向位置 2,求 $u_C(t)、i(t) (t \geq 0)$ 。

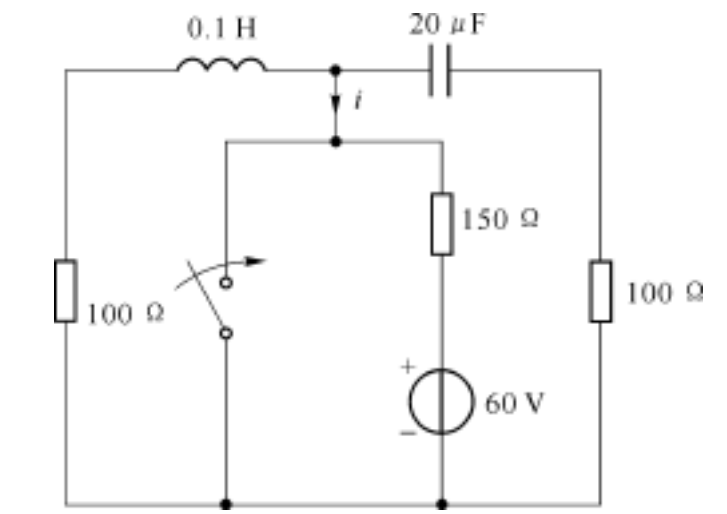


题图 5-7

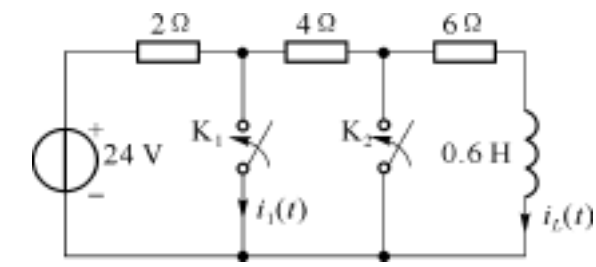


题图 5-8

5-9 题图 5-9 电路,开关动作前已处于稳态,于 $t=0$ 时闭合开关,求 $i(t), t \geq 0$ 。
5-10 题图 5-10 所示,电路换路前处于稳态, $t=0$ 时开关 K_1 闭合,在 $t=0.1s$ 时开关 K_2 闭合,求电流 $i_1(t)$ 和 $i_L(t)$ 。

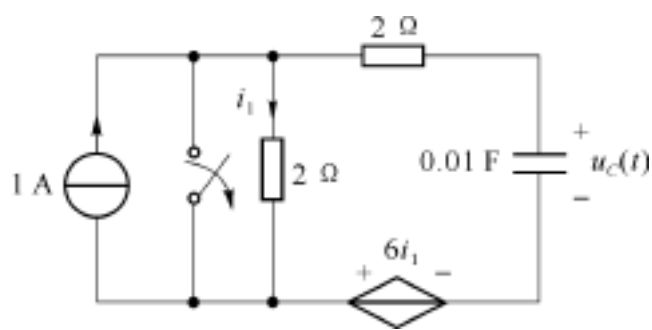


题图 5-9



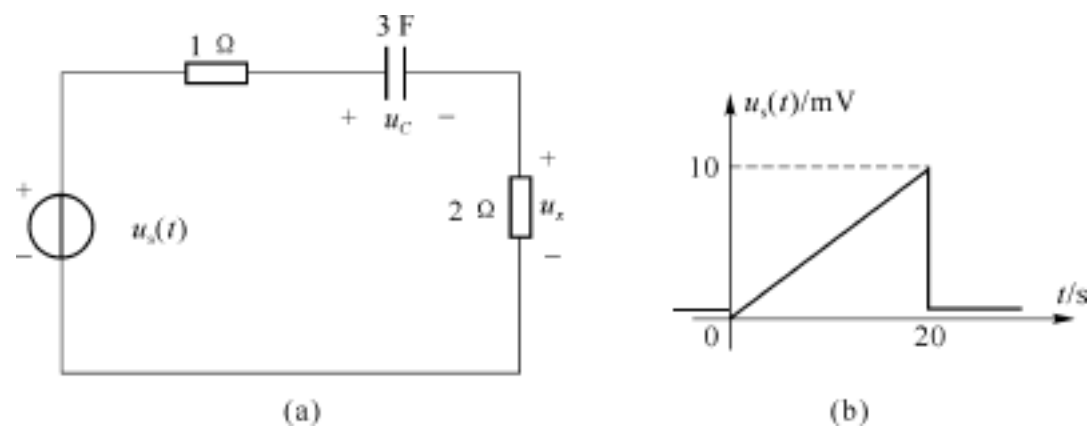
题图 5-10

5-11 题图 5-11 所示电路 $t < 0$ 处于稳态, $t = 0$ 时开关打开, 求电容电压 $u_C(t)$, $t \geq 0$ 。



题图 5-11

5-12 题图 5-12(a) 中 $u_C(0^-) = 0 \text{ V}$, $u_s(t)$ 如图(b)所示, 求 $u_x(t)$, $t \geq 0$ 。

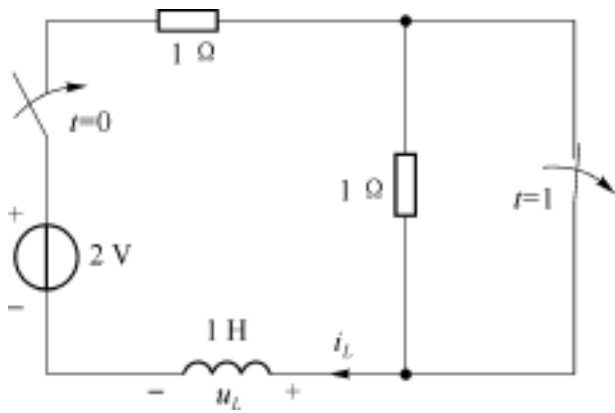


题图 5-12

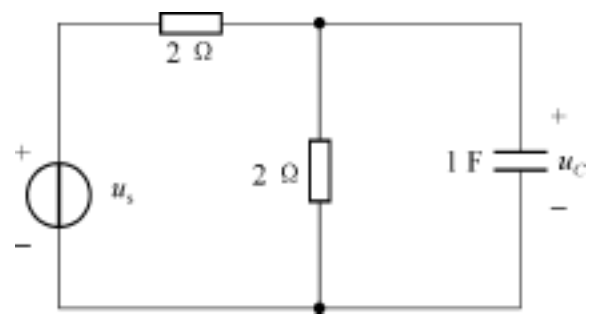
5-13 求题图 5-13 中的 $i_L(t)$ 、 $u_L(t)$, $t \geq 0$ 。

5-14 求题图 5-14 电路中的 $u_C(t)$ 。

$$u_s(t) = \begin{cases} 0 \text{ V} & (t < 1 \text{ s}, t > 2 \text{ s}) \\ 10 \text{ V} & (1 \text{ s} < t < 2 \text{ s}) \end{cases}$$



题图 5-13



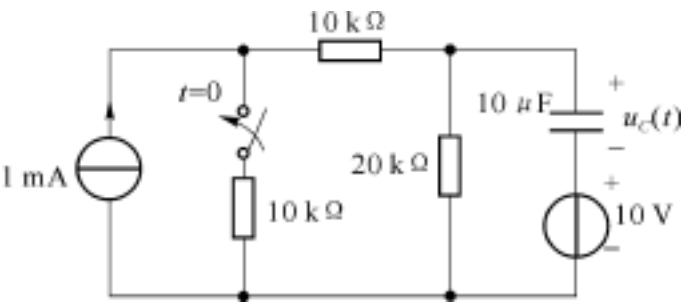
题图 5-14

5-15 题图 5-15 所示电路 $t < 0$ 处于稳态, $t = 0$ 时开关闭合, 求电容电压 $u_C(t)$, 并指出它的零状态响应和零输入响应。

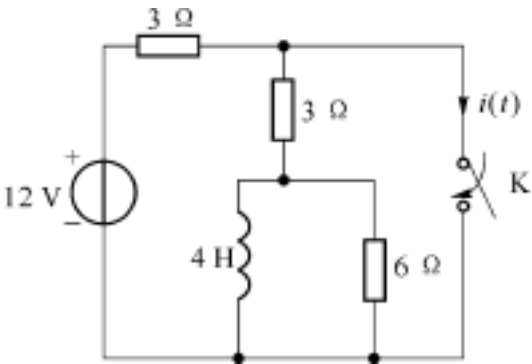
5-16 在题图 5-16 所示电路中, 开关 K 动作前电路处于稳定状态, 在 $t = 0$ 时开关 K 闭合, 求开关闭合后其中流过的电流 $i(t)$ 。

5-17 题图 5-17 电路在 $t < 0$ 时已达稳态, 于 $t = 0$ 时突然打开开关, 求开关动作后的 $u_x(t)$ 、 $i_x(t)$, $t \geq 0$ 。

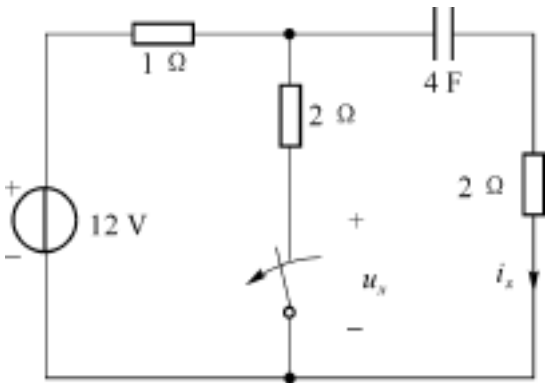
5-18 题图 5-18 电路在开关动作前已进入稳态,求开关动作后开关两端的电压 $u_K(t)$ 。



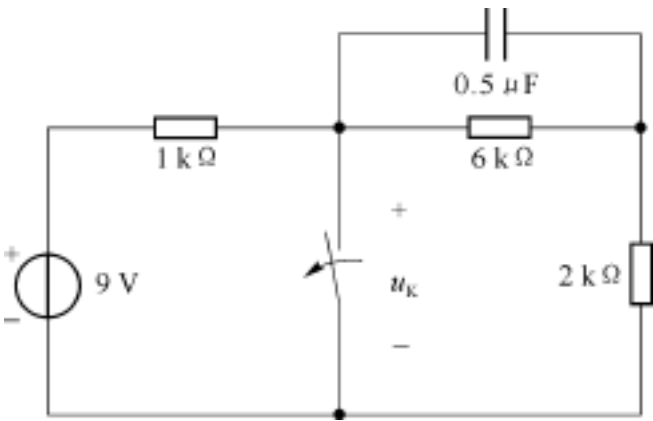
题图 5-15



题图 5-16

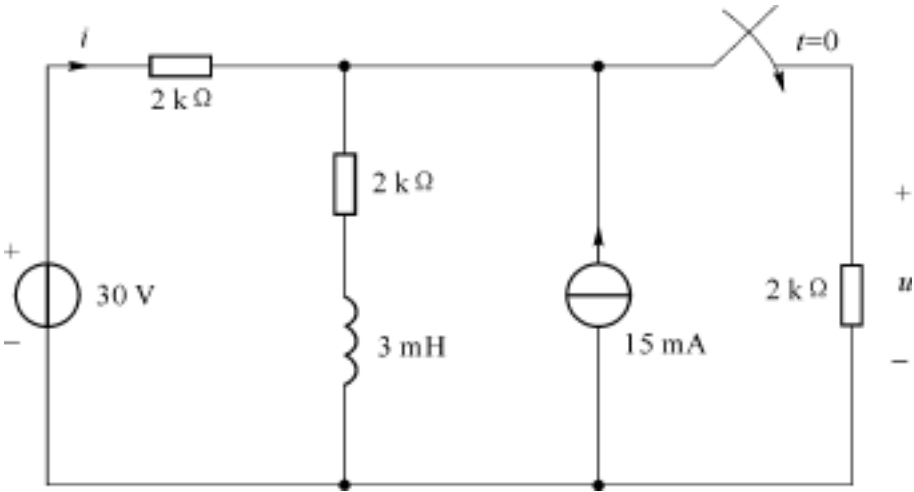


题图 5-17



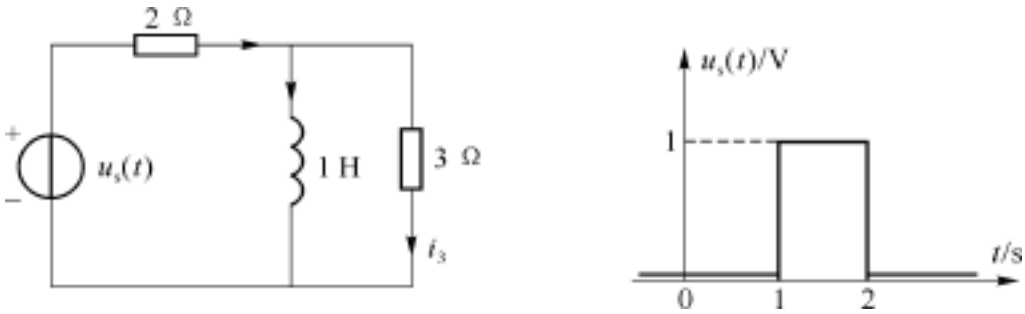
题图 5-18

5-19 题图 5-19 电路在开关动作前已处于稳态,求开关动作后的 $i(t)$ 、 $u(t)$ 。



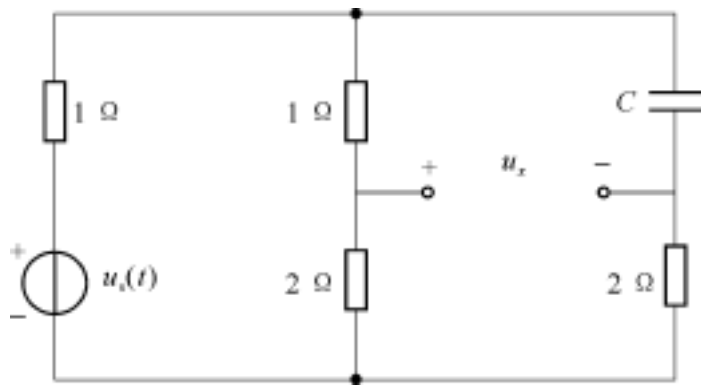
题图 5-19

5-20 题图 5-20 电路中, $i_L(0^-) = 0$, 求 $i_3(t)$ 。



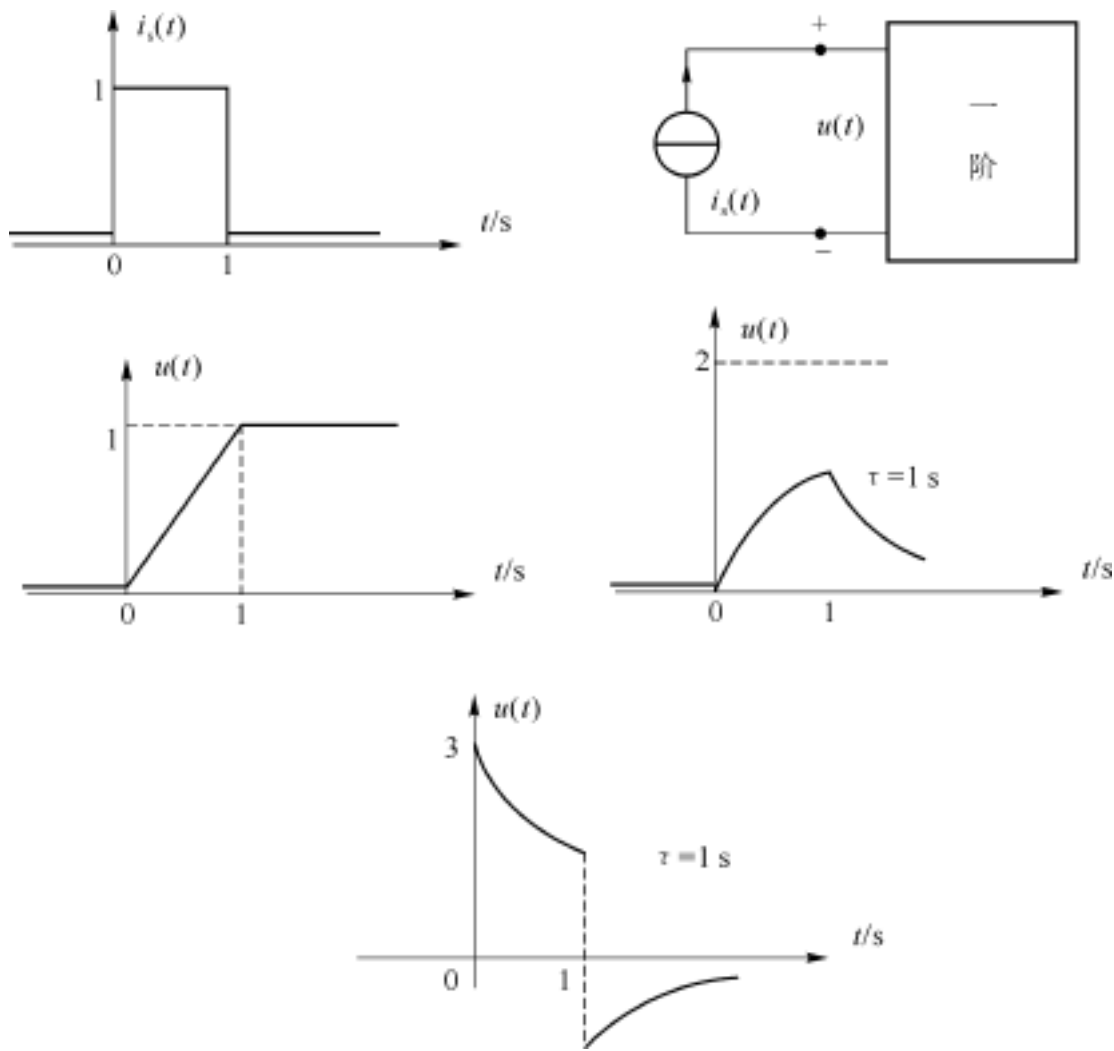
题图 5-20

5-21 题图 5-21 电路中,已知 $u_s(t) = \begin{cases} 10\text{ V} & t < 0 \\ -10\text{ V} & t > 0 \end{cases}$
当 $t = 1\text{ s}$ 时, $u_x(t)$ 达其稳态解的 90%, 求 $C = ?$



题图 5-21

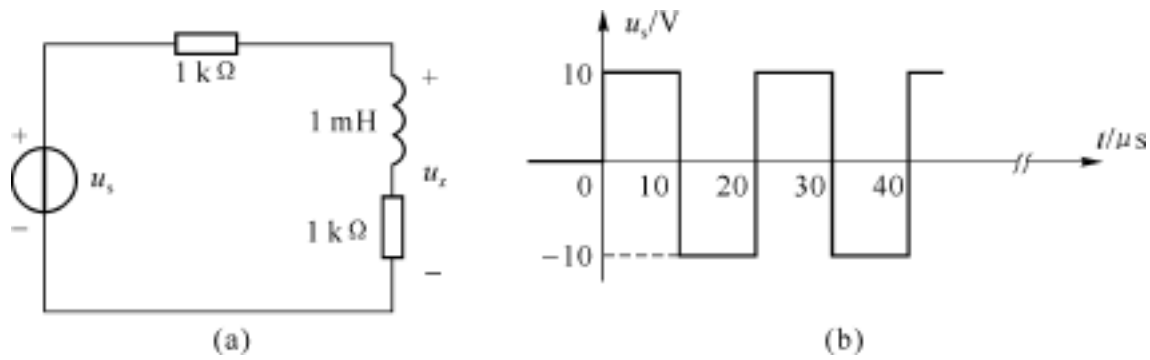
5-22 题图 5-22 中,如图(a)的电流源 $i_s(t)$ 分别作用于三个一阶电路,得到三个不同的电压 $u(t)$,如图(b),(c),(d)所示,分别求相应的电路的结构。



题图 5-22

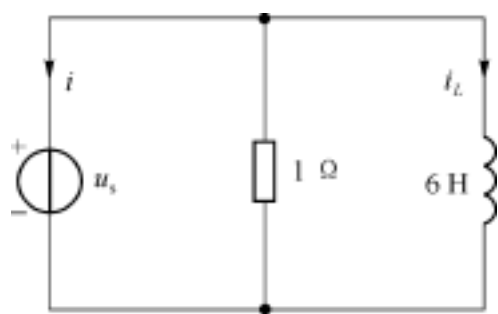
5-23 在题图 5-23(a)电路中施加一峰值为 20V,重复周期为 20μs 的方波,如图(b)所示,求 $u_x(t)$, $t > 0$ 。
说明当电感量增加时 $u_x(t)$ 的变化。

5-24 已知题图 5-24 中 $u_s(t) = \begin{cases} e^{-3t}\text{ V} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, $i_L(0^-) = 0$, 求 $i(t)$ 。

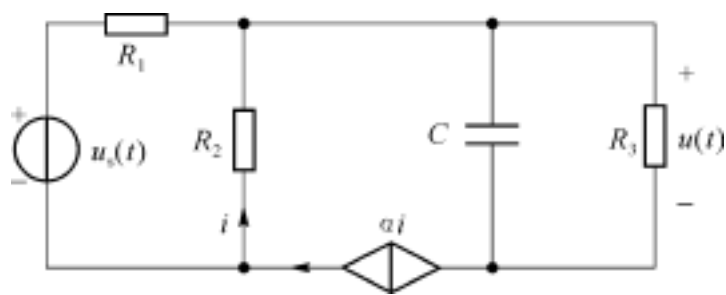


题图 5-23

5-25 题图 5-25 中,已知 $u_s(t) = \begin{cases} 1\text{ V} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, $u_C(0) = 0$, $(-1) R_1 - R_2$, 求 $u(t)$ 。



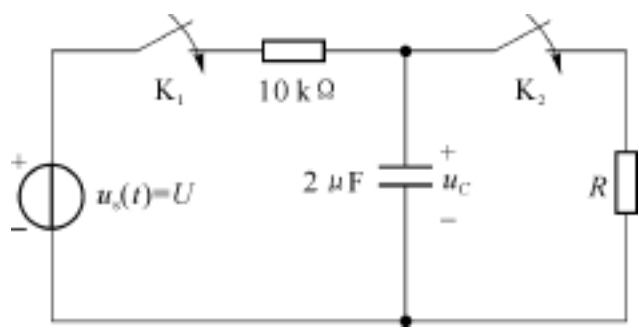
题图 5-24



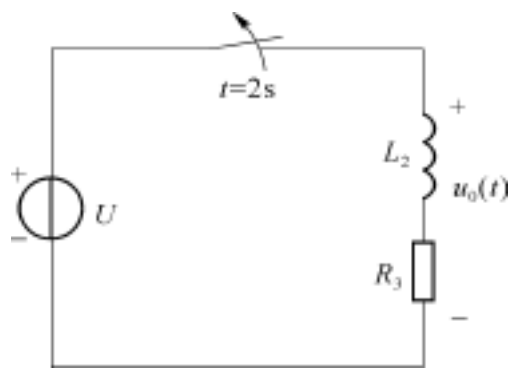
题图 5-25

5-26 题图 5-26 中 K_1 闭合 2 ms 后电容电压为 12 V,此后靠接入电阻 R 维持电容电压一直是 12 V,求 R 及 $u_s(t)$ 。

5-27 题图 5-27 中的开关已闭合很久,于 $t = 2\text{ s}$ 时打开开关,求 $u_0(t)$ 。



题图 5-26

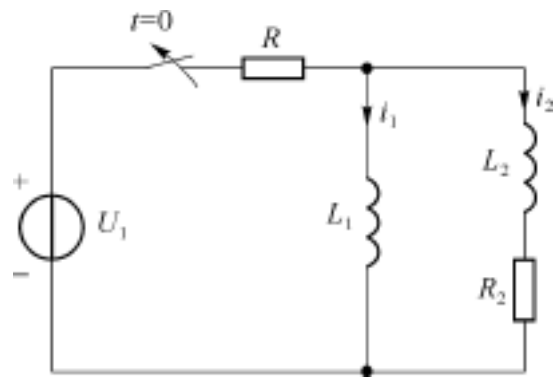


题图 5-27

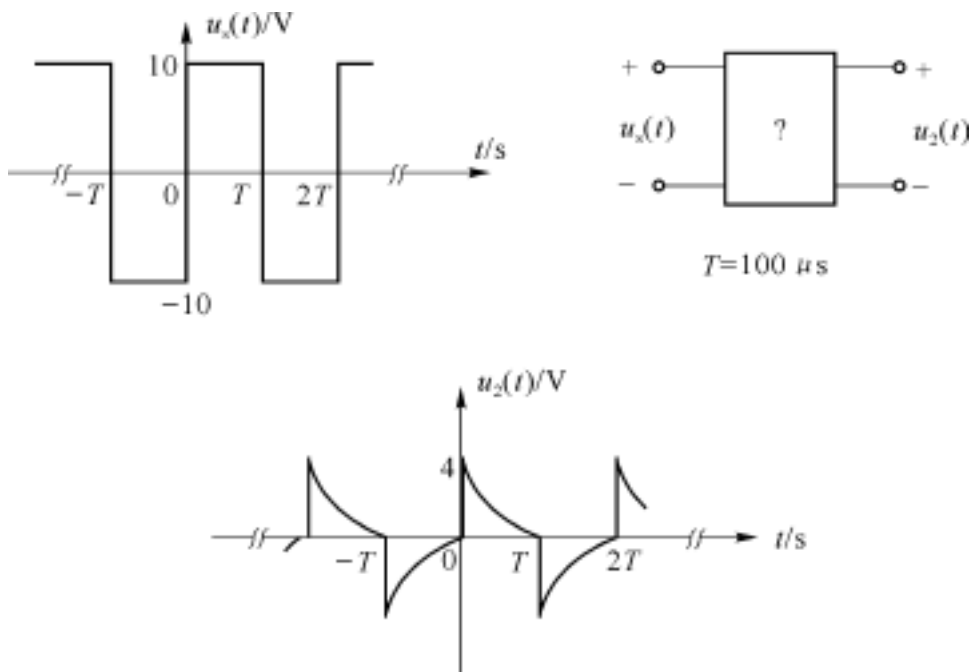
5-28 题图 5-28 电路,开关动作前已处于稳态,于 $t = 0$ 时突然打开开关,求 $i_1(0^+)$ 。

5-29 定性设计一个满足题图 5-29 所示输出特性的简单无源电路,并说明元件值选取的原则。

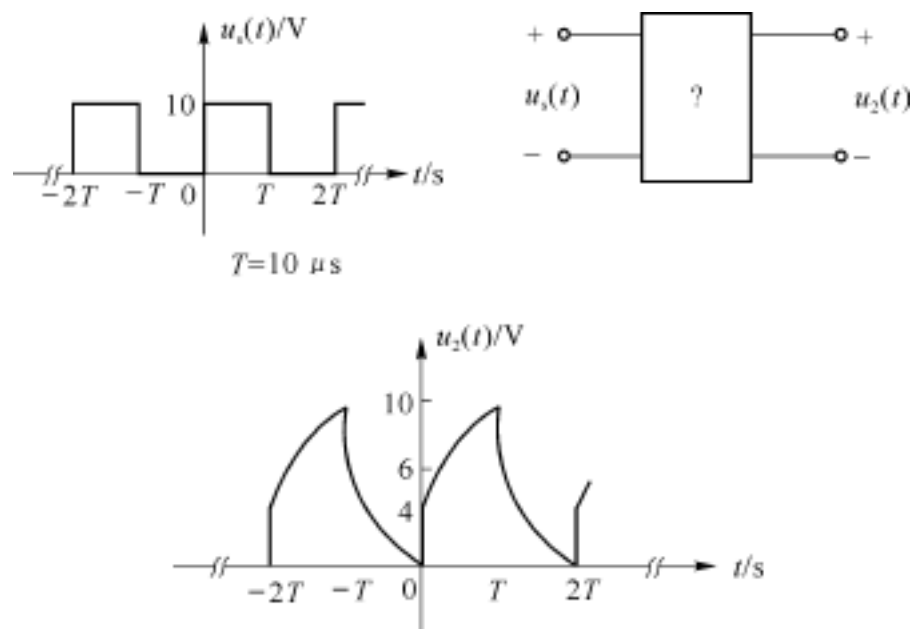
5-30 定性设计一个满足题图 5-30 所示输出特性的简单无源电路,并说明元件值选取原则。图中 $u_s(t)$ 是高度为 10 V 的矩形脉冲,脉冲持续时间与间隔时间皆为 T 。



题图 5-28



题图 5-29



题图 5-30

第六章 二阶电路与状态变量方程

一般情况下,随着电路中动态元件数目的增加,微分方程的阶数也将增加,电路的复杂程度也会提高。凡高于一阶的微分方程,称为高阶微分方程,相应电路称为高阶电路。本章主要讨论二阶电路的零输入响应,当电路含有两个不同类型的动态元件时,电路有可能出现振荡现象。这里通过基本 RLC 电路的零输入响应来研究电路的特性。对于二阶电路的零状态响应和全响应则作简单介绍。由于直接用高阶微分方程去分析大型网络是非常困难的,因而,本章还介绍了有关状态变量方程的基本概念。

6.1 RLC 电路的零输入响应

图 6-1(a)、(b)分别是 RLC 串联电路和并联电路,均属于零输入的情况。根据基尔霍夫定律及元件的伏安特性可列出这两种电路的方程。它们都是二阶常系数线性齐次微分方程,具有如下的标准形式:

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{6-1}$$

其中 $y(t)$ 是电路中的任意一个响应。

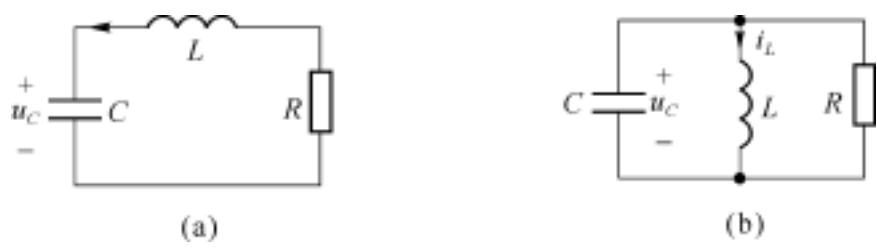


图 6-1 RLC 电路的零输入响应

现在以图 6-1(a)为例,讨论二阶电路的零输入响应。设 $u_C(0^-) = U_0$, $i_L(0^-) = 0$, 当以支路电流 $i(t)$ 为变量时,电路的微分方程是

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = 0$$

整理为

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \quad t \geq 0^+$$

根据电路结构特点,微分方程也适用于 $t=0^+$, 可用 $t \geq 0^+$ 时间系统来讨论。相应的特征方程为

$$LS^2 + RS + \frac{1}{C} = 0$$

设特征方程的根为 s_1 、 s_2 , 即

$$(s - s_1)(s - s_2) = 0$$

其中

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (6-2)$$

与一阶电路一样,也称为电路的自然频率。所以响应形式应为

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (6-3)$$

式(6-3)是方程式(6-1)中电流的通解。

二阶电路有两个自然频率 s_1 、 s_2 。因此二阶电路的零输入响应包含两项按指数规律变化的分量,需要两个条件来确定两个常数 A_1 、 A_2 。对电流 $i(t)$ 来说,可直接使用的条件只有 $i_L(0^-)$,还需要一个电流的一阶导数的初始值,通过 $t=0^-$ 时刻的 KVL 关系

$$L \frac{di(0^-)}{dt} = -Ri(0^-) - u_C(0^-)$$

得到 $\frac{di(0^-)}{dt} = -\frac{U_0}{L}$ 作为另一个条件。由式(6-3)的一阶导数推出

$$\frac{di(t)}{dt} = s_1 A_1 e^{s_1 t} + s_2 A_2 e^{s_2 t} \quad (6-4)$$

由式(6-3)和(6-4)可知,当 $t=0^-$ 时

$$\begin{cases} i(0^-) = A_1 + A_2 = 0 \\ \frac{di(0^-)}{dt} = s_1 A_1 + s_2 A_2 = -\frac{U_0}{L} \end{cases}$$

求解得到

$$A_1 = -A_2 = \frac{U_0}{L(s_2 - s_1)}$$

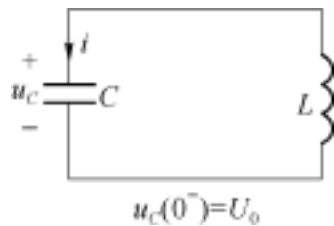
因此

$$\begin{cases} i(t) = \frac{U_0}{L(s_2 - s_1)}(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \\ u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{U_0}{s_2 - s_1}(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) \\ u_C = -Ri - u_L = \frac{U_0}{s_2 - s_1}(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) \end{cases} \quad (t \geq 0^-) \quad (6-5)$$

从式(6-5)一组解答结合式(6-2)特征方程的根的特点可以看出,当参数 RLC 的相对数值不同时,电路的零输入响应将具有不同的形式,下面将一一介绍。

为了深入了解 RLC 电路的特性,先来讨论不含电阻 R 的 LC 电路,如图 6-2 所示。

当具有初始储能的电容与无初始储能的电感接通后的瞬间,虽然电流等于零,但是由回路 KVL,可判断电感电压不是零,即电流的变化率不为零, $\frac{di(0^-)}{dt} = -\frac{U_0}{L}$ 。而且电流将开始增长(电流为负值),电容 C 必将通过电感 L 放电。电容 C 中储存的电场能量逐步转化为磁场能量储存于电感 L 中,直至全部电能转成磁能,



电流达到最大值。此瞬间电容电压下降到零,但是它的变化率却不为零,电容电流等于电感

电流,随后电感 L 又将对电容 C 反向充电,磁能又逐步转化成电能储存在电容中。当然电容 C 必将再通过电感 L 放电。上述过程将不断地重复进行。随着能量在电场和磁场之间地往返转移,电路中的电流和电压将不断地改变大小和方向,形成电磁振荡。由于电感 L 和电容 C 在电磁振荡中不消耗能量,振荡一旦开始将永远按一定规律无衰减地持续下去。所以由 LC 组成的电路常称为 LC 自由振荡电路。这种由电路中原有的储能引起的没有能量消耗的振荡,称为自由振荡。它是一种理想情况。因为 $R=0$,由式(6-2)可知

$$s_{1,2} = \pm j \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{6-6}$$

将其代入式(6-5),整理后可得 LC 自由震荡电路的电流

$$\begin{aligned} i(t) &= -U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{e^{j\frac{1}{\sqrt{LC}}t} - e^{-j\frac{1}{\sqrt{LC}}t}}{2j} \\ &= -U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \frac{1}{\sqrt{LC}}t = -U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega_0 t \end{aligned} \tag{6-7}$$

式(6-7)表明:电流按正弦函数规律变化,其中 $1/\sqrt{LC}$ 称为电路的自由振荡角频率,记作

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

继而求出电感 L 和电容 C 的电压

$$u_C = -u_L = -L \frac{di}{dt} = U_0 \cos \frac{1}{\sqrt{LC}}t = U_0 \cos \omega_0 t$$

将电路中的电流、电容电压及电感电压的波形绘于图 6-3 中。由图中可以清楚地看出 LC 自由振荡电路中能量反复转换的关系。

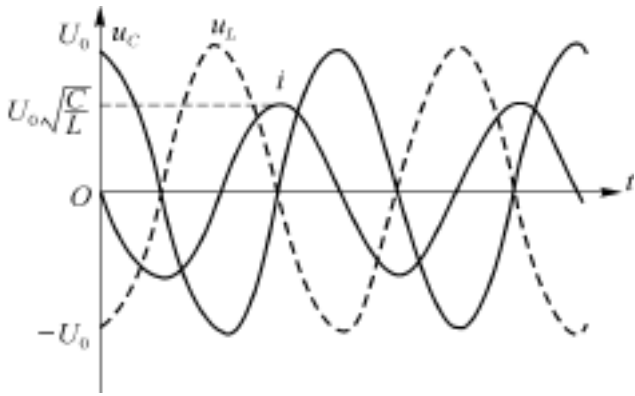


图 6-3 LC 自由振荡电路的电流和电压

储存着电能的实际电容器与电感线圈接通后,由于电感线圈存在电阻以及电容器介质不理想等原因,在电路中工作时总要消耗一定的能量,所以它们的电路模型可用 6-1(a)表示,其中 R 表示电路总电阻,它不仅包括动态元件的等效损耗电阻,而且还包括出于技术上的需要外加的电阻。根据对 LC 自由振荡电路的分析可以推论,由于电阻 R 有电流时必然要消耗能量,电路的自由振荡将逐渐衰减,直至电路原来存有的能量全部耗尽,振荡终止。实际情况还可以再分类。

从式(6-2)可知,当 R 、 L 、 C 的相对数值不同时, $s_{1,2}$ 出现三种情况,这三种情况将导致 RLC 零输入电路的三种不同状态。现分述如下:

1. 当 $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$, 即 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left[\frac{R}{2L}\right]^2 - \frac{1}{LC}} \text{ 为复数}$$

若设

$$= \frac{R}{2L}, \quad = \sqrt{\frac{2}{0} - }^2$$

则有

$$s_{1,2} = - \pm j \tag{6-8}$$

特征方程的根为一对共轭复根,将式(6-8)代入式(6-5)得到的电路电流,可得

$$i(t) = \frac{U_0}{2jL}(e^{-t}e^{j t} - e^{-t}e^{-j t}) = - \frac{U_0}{L}e^{-t}\sin t \tag{6-9}$$

在这种情况下, $u_C(t)$ 和 $u_L(t)$ 分别为

$$u_L = - \frac{0}{U_0}e^{-t}\cos(t +)$$

$$u_C = \frac{0}{U_0}e^{-t}\cos(t -)$$

其中 $= \arctan \frac{}{} = \arcsin \frac{}{0} = \arccos \frac{}{0}$, 因为参数 $、$ 和上面所设 0 之间符合直角三角形边长的关系。

图 6-4 中画出了 $R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ 时的一组响应。因为电容与电感交换能量过程中,电阻上消耗能量,所以各电量表现为衰减振荡的趋势。

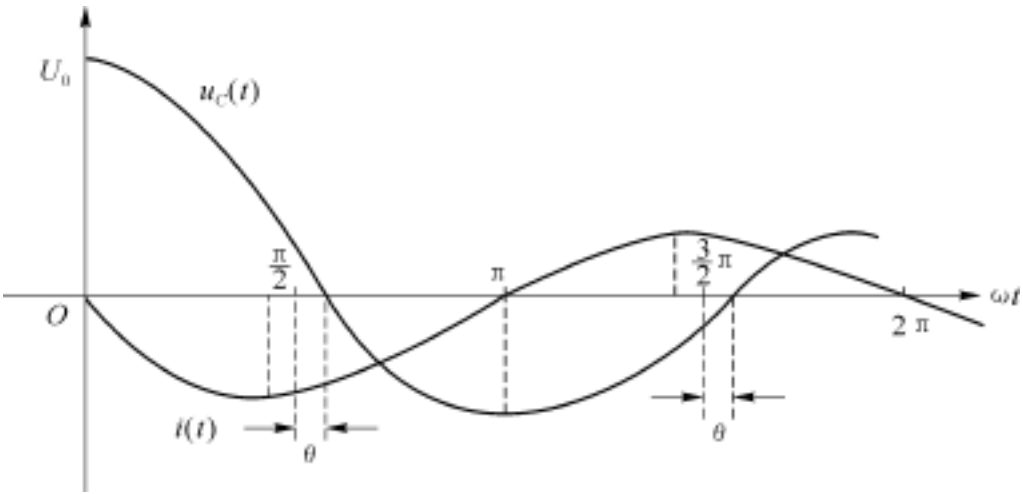


图 6-4 欠阻尼的零输入响应

2. 当 $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 即 $R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ 时
设

$$^2 - \frac{2}{0} = ^2$$

则有

$$s_{1,2} = - \pm \tag{6-10}$$

特征方程的根为两个不等负实根。此情况下电路的电流由式(6-5)可知

$$i(t) = - \frac{U_0}{2L}[e^{(- +)t} - e^{(- -)t}] = - \frac{U_0}{2L}e^{-t}[e^t - e^{-t}] = - \frac{U_0}{L}e^{-t}\text{sh } t \tag{6-11}$$

而电感与电容电压分别为

$$u_L = \frac{U_0}{2}[(-)e^{(- -)t} - (+)e^{(- +)t}]$$

$$u_C = -\frac{U_0}{2}[(\quad - \quad)e^{-(\quad - \quad)t} - (\quad + \quad)e^{-(\quad + \quad)t}] + \frac{U_0 R}{2L}[e^{-(\quad - \quad)t} - e^{-(\quad + \quad)t}]$$

这组响应的曲线如图 6-5 所示。

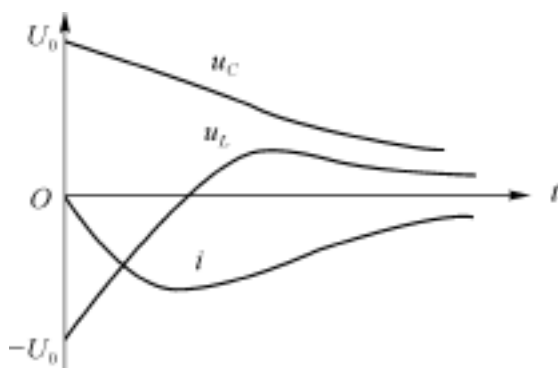


图 6-5 过阻尼的响应

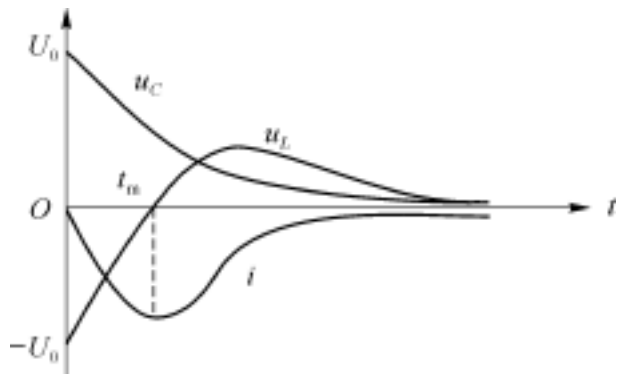


图 6-6 临界阻尼时的响应

3. 当 $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, 即 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时

特征方程的根 $s_{1,2} = -\frac{R}{2L}$, 是一对负实重根。微分方程解的形式应设为

$$i(t) = B_1 e^{-t/\tau} + B_2 t e^{-t/\tau} \tag{6-12}$$

使用已知的初始条件可确定 B_1 及 B_2 , 即

$$\begin{aligned} i(0^+) &= 0 = B_1 \\ \frac{di(0^+)}{dt} &= -\frac{U_0}{L} = B_1(-\frac{1}{\tau}) + B_2 \end{aligned}$$

解出

$$\begin{aligned} B_2 &= -\frac{U_0}{L} \\ i(t) &= -\frac{U_0}{L} t e^{-t/\tau} \end{aligned} \tag{6-13}$$

此时的电感、电容电压分别为

$$\begin{aligned} u_L &= U_0(1 - t/\tau) e^{-t/\tau} \\ u_C &= U_0(1 + t/\tau) e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

各响应的曲线绘于图 6-6 中。比较图 6-5 及图 6-6 的两组曲线, 发现各对应电量的变化趋势是很相像的, 在这两种情况下, 电容电压始终呈下降趋势, 说明电容一直处于放电状态, 电感电流值首先上升, 然后下降, 说明电感首先吸收能量, 然后与电容一起释放能量, 而电阻则一直在消耗能量。以图 6-6 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时为例, 设电流出现最大值的时间为 t_m , 则以上能量变化关系可分为几个时间段具体分析。

当 $t < t_m$ 时, 由图可以看出, u_C 与 i 符号相反, u_L 与 i 符号相同。所以电容释放所储存的电场能量, 电感吸收能量而电阻则消耗能量。 u_L 的大小与放电电流的变化率成正比。

当 $t = t_m$ 时, 电流最大, 电感储能也达到最大。在这一瞬间, 电感电压 $u_L = 0$ 。

当 $t > t_m$ 时, u_L 、 u_C 均与 i 符号相反, 所以电感与电容同时通过电阻 R 释放能量, 由 R 最终消耗尽全部能量, 各电压、电流皆趋于零, 成为“松弛”电路。

上述 RLC 零输入电路中的电阻 R 也可以称为是对 LC 自由振荡电路引进的阻尼。 $R =$

0 时就是无阻尼的自由振荡电路,随着电阻值 R 的逐渐增加,电阻 R 对电路的阻尼也逐渐增加,阻尼增加的结果使电路从振荡状态转化为非振荡状态。转化的转折点是 $R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$, 因此这种状态常称之为临界阻尼状态;而 $R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ 称为欠阻尼状态; $R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ 则称为过阻尼状态。

图 6-7 以电路电流 $i(t)$ 为例,形象地给出了在 L 、 C 确定值下阻尼改变对电路响应的影响。其中阻值从 $R_1 = 0$ 至 R_4 依次为无阻尼至过阻尼状态,即 $R_1 < R_2 < R_3 < R_4$ 。

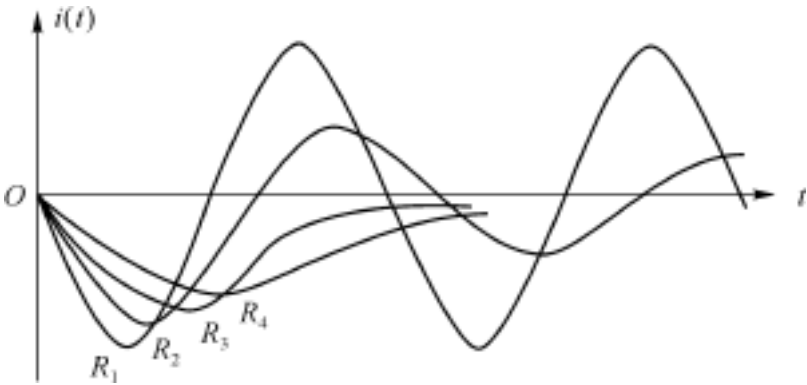


图 6-7 阻尼改变的影响

图 6-1(b) 所示 RLC 并联电路的响应,可以用对偶性去分析,其响应特性,特别是响应与电路参数之间的关系,与 6-1(a) 电路是一致的,所以这里不再赘述。

从分析 RLC 电路的零输入响应中可以看到,直接决定特性的是电路的自然频率。电路的自然频率 s_k 是特征方程的根,因此,自然频率的个数与方程阶数是一致的。电路的自然频率是一种与电路的元件值相关的参数,元件值常称为电路的一次参数,因而自然频率常称为电路的二次参数。在电路理论的研究中二次参数是一类重要的参数。自然频率 s_k 一般是复数,其实部直接反映响应按一个怎样的指数趋势变化;其虚部则反映响应波动速度的快慢。因而,当 s_k 为负实数时将不出现振荡现象。以上零输入响应的分析,反映出 RLC 电路的固有特性。

例 6-1 图 6-8 中,已知 $L = 1/4 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$, $i_L(0^-) = 2 \text{ A}$, $u_C(0^-) = 0 \text{ V}$, 求电导 G 在下列数值时电路的零输入响应 $i_L(t)$, 并画出波形。

- (1) $G = 8 \text{ S}$; (2) $G = 4 \text{ S}$; (3) $G = 1/2 \text{ S}$; (4) $G = 0 \text{ S}$

解 根据电路的换路定则有

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2 \text{ A}$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$

电路的 KCL

$$i_C + i_R + i_L = 0$$

代入支路伏安关系 $C \frac{du_C}{dt} + Gu_R + i_L = 0$

因为 $u_C = u_R = u_L$, 微分方程为

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL \frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

整理为标准形式 $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0$

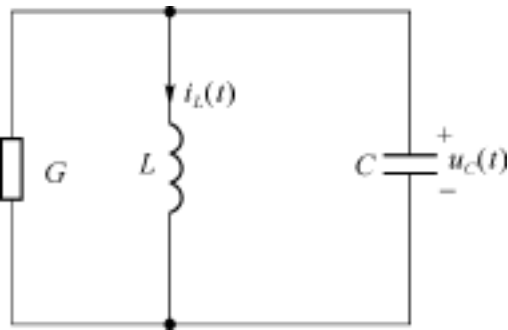


图 6-8 例 6-1 电路

其特征方程为

$$s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} = 0$$

特征方程的根为

$$s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left[\frac{G}{2C}\right]^2 - \frac{1}{LC}}$$

(1) $G=8\text{S}$ 时, 因为 $\left[\frac{G}{2C}\right]^2 > \frac{1}{LC}$, 所以为过阻尼情况。电路的固有频率为 $s_1 = -0.54$, $s_2 = -7.46$, 所以微分方程的通解为

$$i_L(t) = A_1 e^{-0.54t} + A_2 e^{-7.46t}$$

确定系数 A_1 、 A_2

$$i_L(0^+) = 2 = A_1 + A_2 \tag{A}$$

$$u_C(0^+) = u_L(0^+) = L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+}$$

$$-0.54A_1 - 7.46A_2 = \frac{u_L(0^+)}{L} = 0 \tag{B}$$

由式(A)、(B)解出 $A_1 = 2.156$, $A_2 = -0.156$, 从而得到方程的解为

$$i_L(t) = (2.156e^{-0.54t} - 0.156e^{-7.46t}) \text{ A} \quad t \geq 0$$

(2) $G=4\text{S}$ 时, 因为 $\left[\frac{G}{2C}\right]^2 = \frac{1}{LC}$, 所以是临界阻尼情况, 电路的固有频率

$$s_{1,2} = -\frac{G}{2C} = -2$$

$$i_L(t) = (B_1 + B_2 t) e^{-2t}$$

$$i_L(0^+) = 2 = B_1$$

另一个初始条件

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{u_L(0^+)}{L} = \frac{u_C(0^+)}{L} = 0$$

可求出

$$B_2 = 4$$

所以

$$i_L(t) = (2 + 4t) e^{-2t} \text{ A} \quad t \geq 0$$

(3) $G=1/2\text{S}$ 时, 因为 $\left[\frac{G}{2C}\right]^2 < \frac{1}{LC}$, 所以为欠阻尼情况, 电路的固有频率

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -0.25 \pm j1.98 \\ &= -0.25, \quad \omega = 1.98 \end{aligned}$$

设

$$i_L(t) = K e^{-t} \cos(\omega t + \varphi) = K e^{-0.25t} \cos(1.98t + \varphi) \tag{C}$$

下面要确定系数 K 和角度 φ 。

$$t = 0^+ \text{ 时} \quad i_L(0^+) = 2, \quad \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+} = 0$$

代入式(C)得

$$K \cos \varphi = 2$$

和

$$-0.25 K \cos \varphi - 1.98 K \sin \varphi = 0$$

即有

$$-0.25 \times 2 - 1.98 \times 2 \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = 0$$

推出

$$\text{tg } \varphi = -\frac{0.5}{2 \times 1.98} = -0.126$$

= - 7.18°

所以

K = \frac{2}{\cos(-7.18^\circ)} = 2.02

i_L(t) = 2.02e^{-0.25t} \cos(1.98t - 7.18^\circ) \text{ A} \quad t \geq 0

(4) G=0 时,无阻尼情况,电路的固有频率

s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left[\frac{G}{2C}\right]^2 - \frac{1}{LC}} = \pm j \sqrt{\frac{1}{LC}} = \pm j2

= 0, \quad \omega = 2, \quad \phi = 0^\circ

i_L(t) = K \cos t = K \cos 2t

已知初始条件 i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2, 则 K=2, 所以

i_L(t) = 2 \cos 2t \text{ A} \quad t \geq 0

画出四种情况下 i_L(t) 的波形如图 6-9 所示。

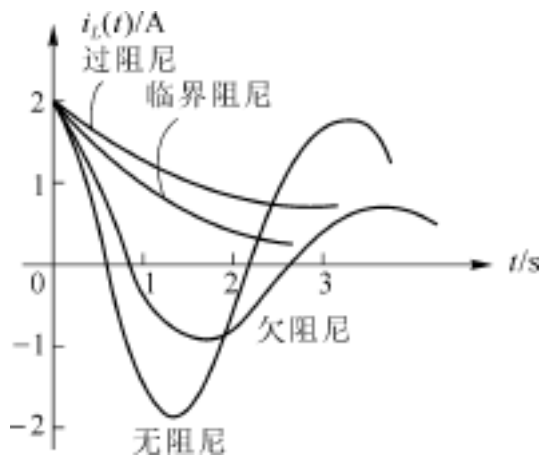


图 6-9 例 6-1 响应波形

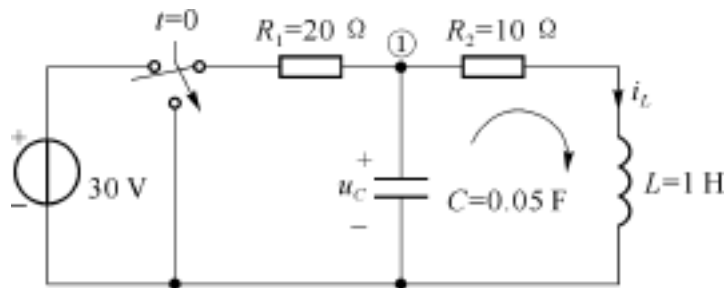


图 6-10 例 6-2 电路

例 6-2 已知电路如图 6-10 所示,求开关动作后的电路响应 u_C(t)、i_L(t)。

解 首先找出有关的初始条件,从图 6-10 电路可知,在 t=0^- 时电路处于稳定状态,可求出 i_L(0^-) = 1A, u_C(0^-) = 10V。根据换路定则, u_C(0^+) = u_C(0^-) = 10V, i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1A。可以从初始值等效电路求得 u_L(0^+) = 0V, i_C(0^+) = -1.5A,继而求出 \frac{di_L(0^+)}{dt} = 0A/s 及 \frac{du_C(0^+)}{dt} = -30V/s。这个电路含有两个动态元件,有两个独立变量 u_C、i_L,以它们为独立变量,列写两个独立方程,整理出二阶微分方程。

下面以 u_C 及 i_L 为未知函数对开关动作后的电路列出两个独立方程求解。对节点(1)列写 KCL 方程

C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R_1} + i_L = 0 \tag{D}

对右侧网孔列写 KVL 方程

u_C = R_2 i_L + L \frac{di_L}{dt} \tag{E}

对式(D)两边求导,得

\frac{di_L}{dt} = -C \frac{d^2 u_C}{dt^2} - \frac{1}{R_1} \frac{du_C}{dt}

将结果代入式(E), 经过整理得到

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \left[\frac{L}{R_1} + R_2 C \right] \frac{d u_C}{dt} + \left[1 + \frac{R_2}{R_1} \right] u_C = 0$$

代入元件参数值, 并整理成标准形式

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 11 \frac{d u_C}{dt} + 30 u_C = 0$$

利用 $u_C(0^+) = 10 \text{ V}$ 及 $\frac{d u_C(0^+)}{dt} = -30 \text{ V/s}$ 的初始条件, 求得

$$u_C = (30e^{-5t} - 20e^{-6t}) \text{ V}$$

根据 KCL, 则

$$i_L = -C \frac{d u_C}{dt} - \frac{u_C}{R_1} = (6e^{-5t} - 5e^{-6t}) \text{ A}$$

这个例子中, 由于电路的自然频率为两个不同的负实数, 所以电路中不会出现振荡现象。

认真归纳此例的求解思路可以看出, 在高阶电路中, 响应的求解实际上包括两个步骤: 使用联立方程求解的概念, 找出待求响应为未知函数的高阶微分方程; 用微分方程求解理论求得高阶微分方程的解答。

6 2 RLC 电路的零状态响应和全响应

二阶电路的零状态响应与全响应, 其响应产生的原因, 与一阶电路的零状态响应与全响应是完全相同的。这里从一个具体的电路来分析其特性。

当外加电源作用于图 6-11 所示 RLC 串联电路, 图中电压源

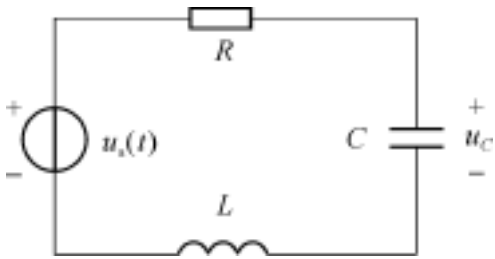


图 6-11 二阶零状态电路

$$u_C(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

根据电源特点, $t < 0$ 时电路处于松弛状态, 各电量均为零, 各动态元件处于零状态。而 $t = 0$ 时电源的变化, 可认为电路发生了换路。 $t = 0$ 时电路有零状态响应, 并有 $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$ 。电路看成是电压源从 $t = 0$ 开始, 通过 R 、 L 元件向电容 C 充电的电路。

由于电感元件本身的储能性质, 使得电路的充电过程比一阶 RC 电路复杂。下面进一步对图 6-11 电路作数学分析。

以电容电压 u_C 为分析对象, 列出以 u_C 为变量的电路微分方程即可讨论分析计算。

回路 KVL:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{d u_C}{dt} + u_C = u_s(t)$$

整理成标准形式

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d u_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{1}{LC} u_s(t) \quad t > 0 \tag{6-14}$$

这是一个二阶线性常系数非齐次微分方程。方程右端的输入项与电源相关。式(6-14)是非齐次方程,解答包含自由分量与强制分量。由电路的特征方程

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

可知

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

s_1 、 s_2 是电路的自然频率,同时可得到自由分量

$$u_{Ch} = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

强制分量用待定系数法求解。因为式(6-14)右边为常数,所以强制分量应与之同形式。设 $u_{Cp} = B$, 将其代入式(6-14),比较系数得到 $B = 1$, 所以电容电压为

$$u_C = u_{Ch} + u_{Cp} = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + 1 \quad (6-15)$$

根据两个初始条件可以确定常数 A_1 、 A_2 。由换路定则已知

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0, i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

由电路的 KCL 可知

$$C \frac{d u_C(0^+)}{d t} = i_L(0^+) = 0$$

因而

$$\frac{d u_C(0^+)}{d t} = 0$$

由初始条件和式(6-15)得到关系式

$$\begin{cases} u_C(0^+) = 0 = A_1 + A_2 + 1 \\ \frac{d u_C(0^+)}{d t} = 0 = s_1 A_1 + s_2 A_2 \end{cases} \quad (6-16)$$

解式(6-16)得到

$$A_1 = \frac{-s_2}{s_2 - s_1}, A_2 = \frac{s_1}{s_2 - s_1}$$

所以

$$u_C = 1 - \frac{1}{s_2 - s_1} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t})$$

电路中的其他响应分别为

$$\begin{cases} i = C \frac{d u_C}{d t} = \frac{1}{L(s_1 - s_2)} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \\ u_R = R i = \frac{R}{L(s_1 - s_2)} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \\ u_L = L \frac{d i}{d t} = \frac{1}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) \end{cases} \quad (6-17)$$

式(6-17)即是一组响应表达式。与二阶电路的零输入响应一样,当参数 RLC 的相对数值不同时,电路的响应将具有不同的形式。 RLC 元件既可以组成振荡电路亦可以组成非振

荡电路。这里以非振荡情况为例进行分析。设 $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ，则式(6-17)的一组响应中的自然频率 s_1 、 s_2 都是负实数，响应随时间变化的曲线绘于图 6-12 中，其中电流响应的波形与电阻电压波形相似，这里用同一条曲线表示。

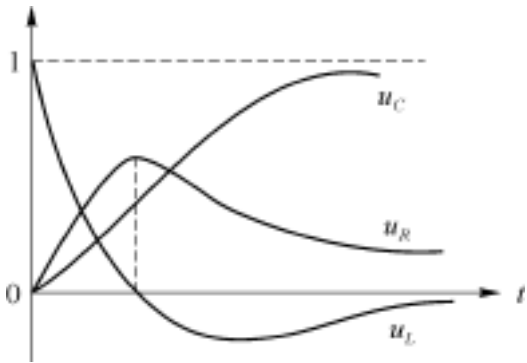


图 6-12 图 6-11 电路的响应

从各响应的波形变化显示出，在这种情况下，随着电流的持续，电阻不断地消耗能量，而电容被充电， u_C 逐渐增加，电感出现先储存、后供出磁能的特点。当电容电压等于电源电压时，电路进入新的稳态。

$u_C(\infty) = 1\text{ V}, u_L(\infty) = 0, i_L(\infty) = 0$ 及 $u_R(\infty) = 0$

如果二阶电路中 $i_L(0^-)$ 及 $u_C(0^-)$ 其中之一或二者都不为零，那么二阶电路中的响应就是全响应，求解的方法与零状态响应的求解方法完全一样，仅仅是用来确定常数的初始条件有所不同。若从线性电路响应特征来理解，全响应将包括零输入响应与零状态响应。

例 6-3 电路如图 6-13(a) 所示，已知电源波形如图(b)所示，求(1) $R = 5\,000\ \Omega$ ，(2) $R = 2000\ \Omega$ 时的 $t > 0$ 的 $u_C(t)$ 。并说明电路是否振荡。

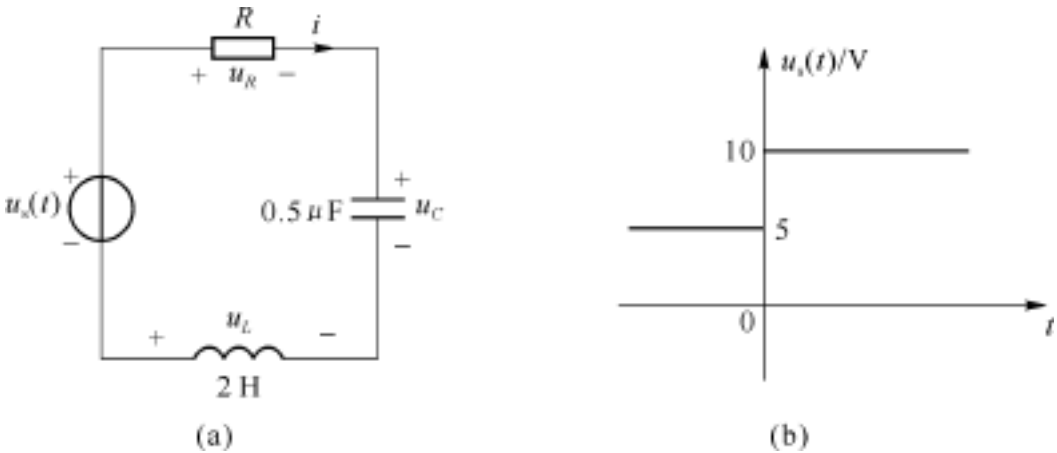


图 6-13 例 6-3 图

解 $t < 0$ 时电路稳定，电容相当于开路，电感相当于短路，因此

$u_C(0^-) = 5\text{ V}, i_L(0^-) = 0$

由换路定则知

$u_C(0^+) = 5\text{ V}, i_L(0^+) = 0$

列出 $t > 0$ 时的 KVL 方程

$u_L + u_R + u_C = 10$

整理出微分方程

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{10}{LC}$$

特征方程

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

则电路的自然频率为

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left[\frac{R}{2L}\right]^2 - \frac{1}{LC}}$$

方程通解为

$$u_{Ch} = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

设特解为 $u_{Cp} = B$, 代入原方程可得 $B = 10$, 所以原方程通解为

$$u_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + 10$$

(1) $R = 5000$ 时

$$\begin{cases} s_1 = 500 \\ s_2 = -2000 \end{cases}$$
$$\begin{cases} u_C(t) = A_1 e^{-500 t} - A_2 e^{-2000 t} + 10 \\ i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = -250 A_1 e^{-500 t} - 1000 A_2 e^{-2000 t} \end{cases}$$

代入初始值 $u_C(0^+) = 5\text{ V}$, $i_C(0^+) = 0$, 得

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + 10 = 5 \\ -250 A_1 - 1000 A_2 = 0 \end{cases}$$

解出

$$A_1 = \frac{20}{3}, A_2 = \frac{5}{3}$$

所以

$$u_C(t) = \left[10 - \frac{20}{3} e^{-500 t} - \frac{5}{3} e^{-2000 t} \right] \text{ V} \quad t > 0$$

此时, 电路为过阻尼情况, 其响应为非振荡放电。

(2) $R = 2000$ 时

$$\begin{cases} s_1 = -500 + j866 \\ s_2 = -500 - j866 \end{cases}$$

求响应的推导过程与例 6-1(3)类似, 这里直接写出结果如下

$$u_C(t) = [-11.5 e^{-500 t} \cos(866 t - 30^\circ) + 10] \text{ V}$$

此时, 电路为欠阻尼情况, 其响应为衰减振荡。画出响应波形如图 6-14 所示。电容电

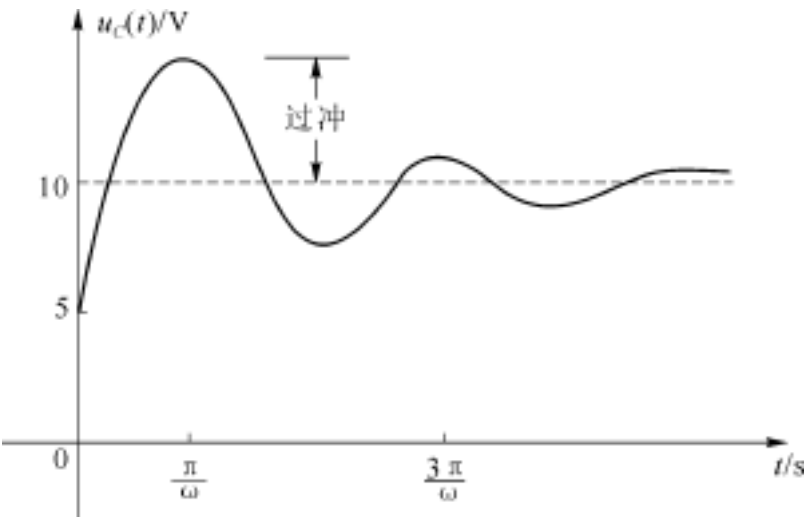


图 6-14 例 6-3(2)的响应波形

压从初始值 5 V 向稳定值 10 V 过渡的过程中, 由于电路在欠阻尼状态, 电容电压在振荡的瞬间值会大于稳定值, 称之为过冲现象。这是由于电感中开始吸收了部分能量, 在释放过程中造成的电路现象。这种现象的特性和对电路工作状态的影响与图 (5-39) 中的过电流相似, 这里不再重复。

对于较复杂的二阶电路和高阶电路, 用以上介绍的经典方法求解比较困难, 可以用拉普拉斯变换方法、算符法等分析计算, 下一节介绍的状态变量法也是一种较常用的方法。

6 3 状态变量和状态方程

在瞬态分析中已经建立了电路状态的概念, 如 $u_C(0^-)$, $i_L(0^-)$ 称为电路初始状态, $u_C(t_0)$, $i_L(t_0)$ 称为电路在 t_0 时状态。可见描述电路状态的一组变量称为电路的状态变量。它们要满足下列条件:

- (1) 只要给定这组变量在某一时刻 t_0 的值及 $t > t_0$ 时刻的激励, 则这组变量在 $t > t_0$ 的任意时刻的值就能唯一地确定;
- (2) 这组变量在 t 时刻的值和 t 时刻的激励可以唯一地确定电路中 t 时刻所有变量的值。

如独立的电容电压 $u_C(t)$ 或电荷 $q_C(t)$ 、独立的电感电流 $i_L(t)$ 或磁链 $\psi_L(t)$ 磁链就是电路的状态变量。

关于状态变量的选择: 只有独立的 $u_C(t)$ 或 $q_C(t)$ 和 $i_L(t)$ 或 $\psi_L(t)$ 才能作状态变量, 所谓独立是指电容电压不能由其他电容电压表示, 电感上的电流不能由其他电感电流表示。

在图 6-15 所示电路中, 由电压源与电容或纯电容构成的回路称为 C-E 回路, 显然不是所有的电容电压都是独立的, 在 u_{C1} 、 u_{C2} 中只能选一个为状态变量, 而 u_{C3} 、 u_{C4} 、 u_{C5} 中只能选两个为状态变量。在该电路中还有纯电感或电感与电流源构成的割集, 此割集称 L-J 割集, 其电感电流显然不全是独立的。只能在 i_{L2} 、 i_{L3} 、 i_{L4} 中选两个为状态变量。

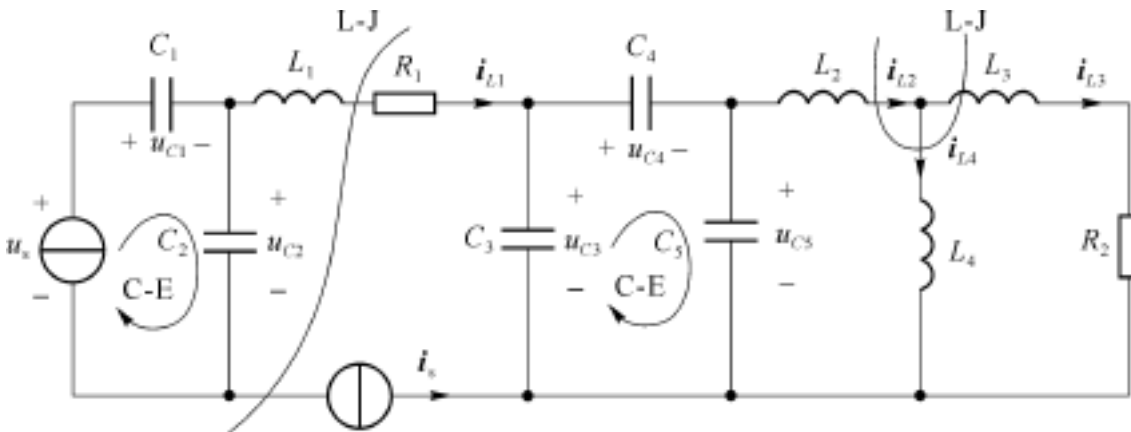


图 6-15 状态变量选择

包括 C-E 回路和 L-J 割集的电路称非常态电路。在含 R 、 L 、 C 的常态电路中, 状态变量的数目等于电路中储能元件的数目。在非常态电路中状态变量的数目等于储能元件数减去 C-E 回路数和 L-J 割集数。图 6-15 电路中状态变量数目为 5。

6 3 .1 状态方程

状态方程是以状态变量为变量的特定形式的一阶微分方程组, 其左端是状态变量的一

阶导数,右端是状态变量和激励的组合。

列写图 6-16 所示电路的状态方程。

选 u_C 和 i_L 为状态变量

A 点 KCL: $i = C \frac{d u_C}{d t} + i_L$ (A)

I、回路 KVL: $R_1 i + u_C = u_s$ (B)

$R_2 i_L + L \frac{d i_L}{d t} - u_C = 0$ (C)

(A)代入(B)整理得:

$\frac{d u_C}{d t} = - \frac{1}{R_1 C} u_C - \frac{1}{C} i_L + \frac{1}{R_1 C} u_s$ (D)

由(C)得: $\frac{d i_L}{d t} = \frac{1}{L} u_C - \frac{R_2}{L} i_L$ (E)

(D)和(E)就是图 6-16 电路的状态方程。写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \frac{d u_C}{d t} \\ \frac{d i_L}{d t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \frac{1}{R_1 C} & - \frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & - \frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{bmatrix} u_s$$

令 $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{d u_C}{d t} & \frac{d i_L}{d t} \end{bmatrix}^T$, $x(t) = \begin{bmatrix} u_C & i_L \end{bmatrix}^T$

$A = \begin{bmatrix} - \frac{1}{R_1 C} & - \frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & - \frac{R_2}{L} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{bmatrix}$, $x(t) = \begin{bmatrix} u_s \end{bmatrix}$

则 $\dot{x}(t) = A x(t) + Bx(t)$ (6-18)

式(6-18)即为状态方程的标准形式。上面列写状态方程的方法称状态方程的直观法。状态方程的建立方法有多种,大体上分为两类:直接编写法与间接编写法,前者多用于计算机辅助分析和设计;后者多用于控制系统分析中。此处只介绍直接编写法中的直观法。

直观法建立状态方程的步骤如下:

- (1) 选独立电容电压和独立电感上电流为状态变量;
- (2) 对电容相关联的结点列写 KCL 方程,对含电感回路列写 KVL 方程;
- (3) 列写支路方程;
- (4) 将支路方程代入第(2)步消除非状态变量,

整理成状态方程标准形式。

例 6-4 试列写图 6-17 所示电路的状态方程。

解 (1) 选 u_{C1} 、 u_{C2} 、 i_{L3} 为状态变量,显然它们都是独立的。

(2) 列 A 点 KCL 方程

$i_{C1} = i_{C2} + i_{L3}$ (A)

列两个回路的 KVL 方程

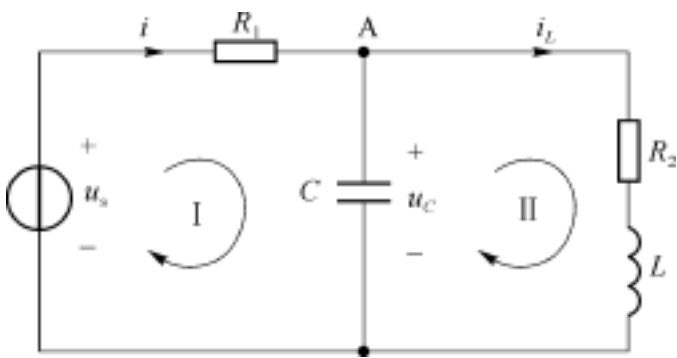


图 6-16 动态电路

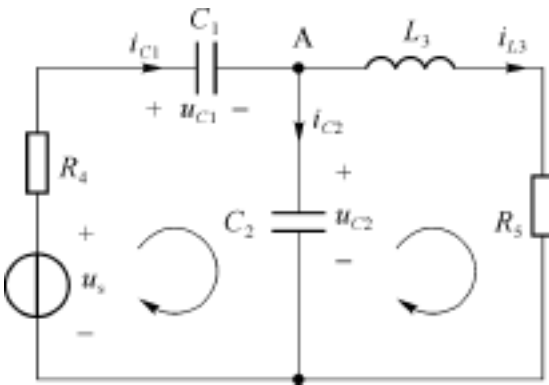


图 6-17 例 6-4 图

$$u_{C1} + u_{C2} + R_4 i_{C1} = u_s \quad (B)$$

$$L_3 \frac{d i_{L3}}{d t} + R_5 i_{L3} - u_{C2} = 0 \quad (C)$$

(3) 支路方程
$$i_{C1} = C_1 \frac{d u_{C1}}{d t}, i_{C2} = C_2 \frac{d u_{C2}}{d t} \quad (D)$$

将(D)代入(B)并整理得

$$\frac{d u_{C1}}{d t} = - \frac{u_{C1}}{C_1 R_4} - \frac{u_{C2}}{C_1 R_4} + \frac{u_s}{C_1 R_4} \quad (E)$$

将(D)和由(E)解出的 i_{C1} 代入(A)并整理得:

$$\frac{d u_{C2}}{d t} = - \frac{u_{C1}}{C_2 R_4} - \frac{u_{C2}}{C_2 R_4} - \frac{i_{L3}}{C_2} + \frac{u_s}{C_2 R_4} \quad (F)$$

由(C)得
$$\frac{d i_{L3}}{d t} = \frac{u_{C2}}{L_3} - \frac{R_5}{L_3} i_{L3} \quad (G)$$

将(E), (F), (G)写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{d u_{C1}}{d t} \\ \frac{d u_{C2}}{d t} \\ \frac{d i_{L3}}{d t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_4} & -\frac{1}{C_1 R_4} & 0 \\ -\frac{1}{C_2 R_4} & -\frac{1}{C_2 R_4} & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L_3} & -\frac{R_5}{L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ i_{L3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_4} \\ \frac{1}{C_2 R_4} \\ 0 \end{bmatrix} u_s$$

简写成
$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u_s$$

若电路具有 n 个状态变量 x_1, x_2, \dots, x_n 和 m 个输入信号 u_1, u_2, \dots, u_m , 则该电路的状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

简写成
$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

矩阵 A 为 n 阶方阵, 矩阵 B 为 $n \times m$ 阶矩阵。上式是 n 阶电路状态方程的标准形式。按照瞬态分析的方法, n 阶电路其方程是 n 阶的, 即

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b f(t)$$

解 n 阶方程相当困难, 而用状态变量分析法, 只需联立求解 n 个一阶微分方程。求解一阶方程组有现成的方法, 而且方程的解有标准形式, 所以状态变量分析法有它一定的优点。

例 6-5 试列写图 6-18 所示电路的状态方程。

解 因为电路含 C-E 回路、L-J 割集, 两个电容电压只有一个是独立的, 两个电感电流只有一个是独立的, 当然 $i_{L1} = i_{L2} = i_L$ 。选 u_{C1}, i_L 为状态变量。

A 点 KCL 方程为
$$i_{C1} = i_{C2} + i_L \quad (A)$$

C-E 回路和两个电源、两个电感及 C_1 构成回路的 KVL 方程分别为

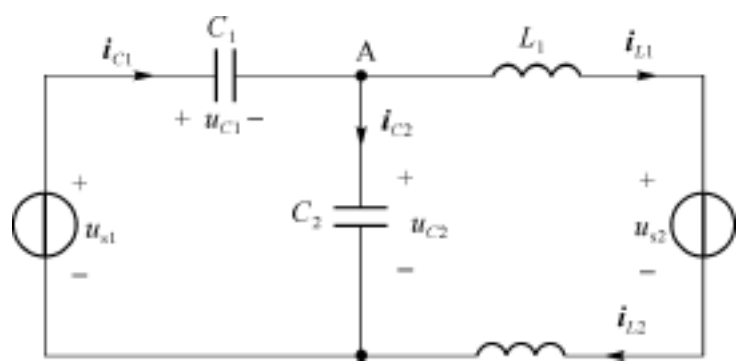


图 6-18 例 6-5 图

$$u_{C2} = u_{s1} - u_{C1} \tag{B}$$

$$u_{C1} + (L_1 + L_2) \frac{d i_L}{d t} = u_{s1} - u_{s2} \tag{C}$$

支路方程
$$i_{C1} = C_1 \frac{d u_{C1}}{d t}, i_{C2} = C_2 \frac{d u_{C2}}{d t} \tag{D}$$

将(B)、(D)代入(A)整理得

$$\frac{d u_{C1}}{d t} = \frac{i_L}{C_1 + C_2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \frac{d u_{s1}}{d t}$$

由(C)得
$$\frac{d i_L}{d t} = - \frac{u_{C1}}{L_1 + L_2} + \frac{u_{s1}}{L_1 + L_2} - \frac{u_{s2}}{L_1 + L_2}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{d i_L}{d t} \\ \frac{d u_{C1}}{d t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & - \frac{1}{L_1 + L_2} \\ \frac{1}{C_1 + C_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1 + L_2} & - \frac{1}{L_1 + L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{C_2}{C_1 + C_2} \end{bmatrix} \dot{u}_{s1}$$

此方程不是状态方程的标准形式,但是对某些时间函数的电源 $\dot{u}_s(t) = A u_s(t)$, 则仍为标准形式。

6 3 2 输出方程

在线性电路中,每个输出量都可表示为状态变量和输入信号的线性组合,这种将输出量和状态变量联系起来的方程称为输出方程,输出方程中不能含状态变量的导数。

例 6-6 已知电路如图 6-19。试以 R 上电压 $y(t)$ 为输出列输出方程。

解 在图中右侧网孔列 KVL 方程

$$y(t) = u_C(t) + u_2(t)$$

这就是以 $y(t)$ 为输出的输出方程。若以左侧的网孔列 KVL 方程

$$y(t) = - L \frac{d i_L}{d t} + u_1(t)$$

显然这不是输出方程。因为它含状态变量 $i_L(t)$ 的导数。

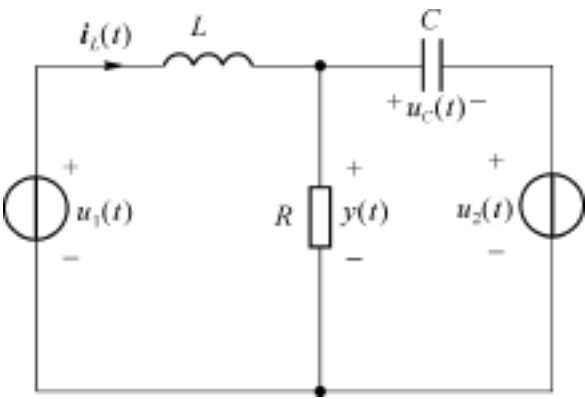


图 6-19 例 6-6 图

若网络有 k 个输出量 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)$, n 个状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 和 m 个输入量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$, 则该网络输出

方程的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1(t) \\ 2(t) \\ \dots \\ n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_m(t) \end{bmatrix}$$

简写成

$$y(t) = C(t) + Dx(t)$$

其中：C 为 $(k \times n)$ 阶矩阵， $C = \{ C_{ij} \}$ ， $i = 1, 2, \dots, k$ ； $j = 1, 2, \dots, n$ ；

D 为 $(k \times m)$ 阶矩阵， $D = \{ d_{ij} \}$ ， $i = 1, 2, \dots, k$ ； $j = 1, 2, \dots, m$ 。

例 6-7 在图 6-20 所示电路中，

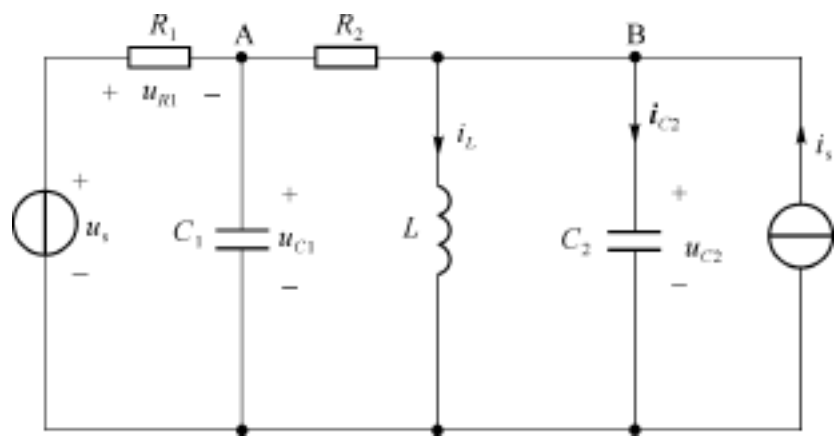


图 6-20 例 6-7 图

- (1) 列写状态方程。
- (2) 以 $u_{R1}(t)$ 、 $i_{C2}(t)$ 为输出，列写输出方程。

解 选 u_{C1} 、 u_{C2} 和 i_L 为状态变量。

对电容相关的节点 A 和 B 分别列 KCL 方程：

$$C_1 \frac{d u_{C1}}{d t} = \frac{u_s - u_{C1}}{R_1} - \frac{u_{C1} - u_{C2}}{R_2}$$

整理得

$$\frac{d u_{C1}}{d t} = - \left[\frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} \right] u_{C1} + \frac{1}{C_1 R_2} u_{C2} + \frac{1}{C_1 R_1} u_s \tag{A}$$

$$C_2 \frac{d u_{C2}}{d t} = \frac{u_{C1} - u_{C2}}{R_2} - i_L + i_s$$

整理得

$$\frac{d u_{C2}}{d t} = \frac{1}{C_2 R_2} u_{C1} - \frac{1}{C_2 R_2} u_{C2} - \frac{1}{C_2} i_L + \frac{1}{C_2} i_s \tag{B}$$

在电感所在回路列 KVL 方程

$$u_{C2} = L \frac{d i_L}{d t} \text{ 即 } \frac{d i_L}{d t} = \frac{1}{L} u_{C2} \tag{C}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{d u_{C1}}{d t} \\ \frac{d u_{C2}}{d t} \\ \frac{d i_L}{d t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} - \frac{1}{C_1 R_2} & \frac{1}{C_1 R_2} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} - \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1}(t) \\ u_{C2}(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

由电路图可知输出方程：

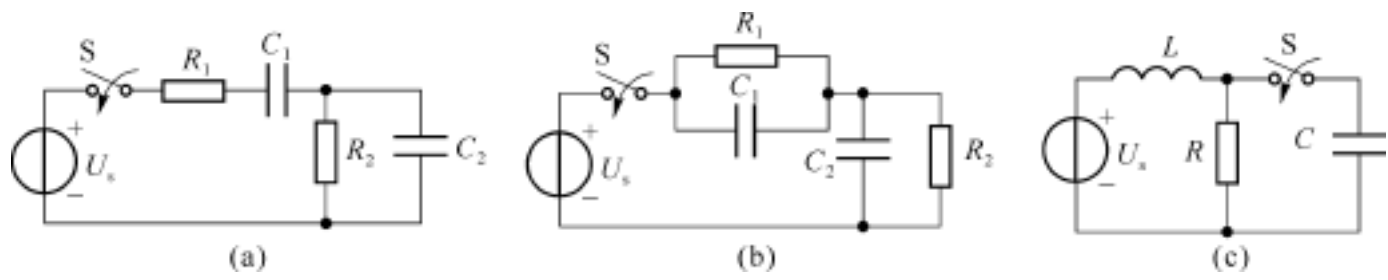
$$u_{R1} = u_s - u_{C1}, i_{C2} = \frac{u_{C1}}{R_2} - \frac{u_{C2}}{R_2} - i_L + i_s$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} u_{R1}(t) \\ i_{C2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1}(t) \\ u_{C2}(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s(t) \\ i_s(t) \end{bmatrix}$$

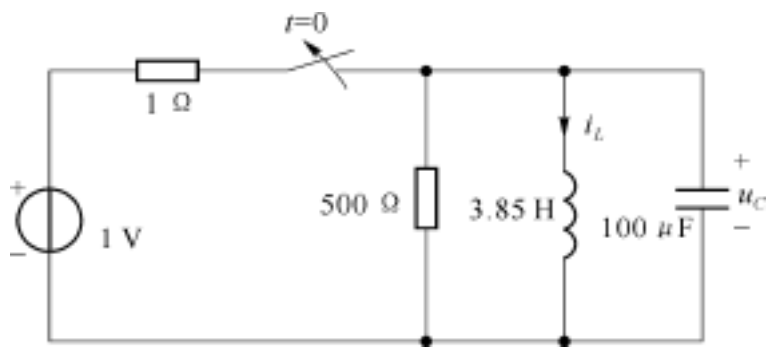
习 题 六

6-1 在题图 6-1 所示电路中,判断哪些电路是二阶电路,并指出其中哪些电路的零输入响应可能出现振荡。

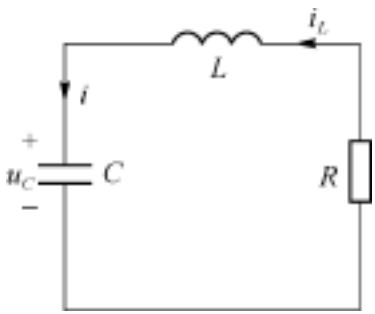


题图 6-1

- 6-2 题图 6-2 电路开关已闭合很久,于 $t=0$ 时突然打开,求 u_C, i_L 。
- 6-3 已知题图 6-3 电路中, $R=7\ \Omega, L=1\text{ H}, C=1/10\text{ F}, u_C(0^-)=0, i_L(0^-)=10\text{ A}$,求电路电流 $i(t)$ 。

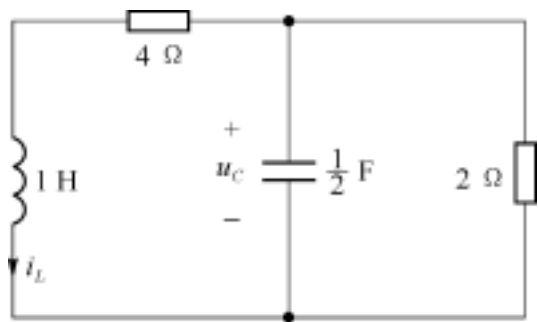


题图 6-2

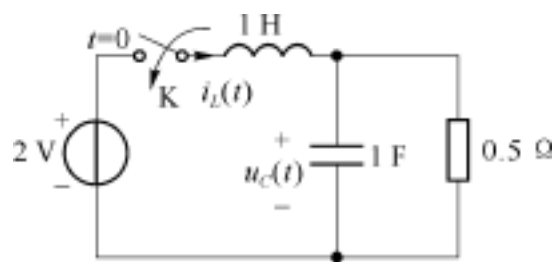


题图 6-3

- 6-4 题图 6-4 中, $i_L(0^-) = -2\text{ A}, u_C(0^-) = 2\text{ V}$,求 u_C 。
- 6-5 题图 6-5 所示电路中,开关 K 在 $t=0$ 时闭合,试求零状态响应 $u_C(t)$ 。



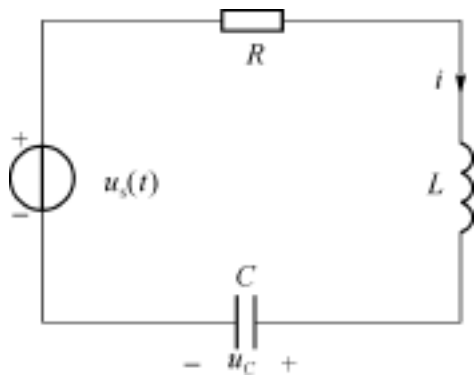
题图 6-4



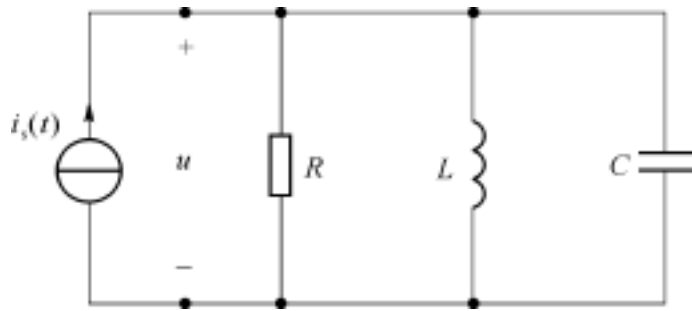
题图 6-5

6-6 题图 6-6 中, 已知 $R = 7 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1/10 \text{ F}$, $u_s(t) = \begin{cases} 10 \text{ V} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, 求 i , u_c 。

6-7 题图 6-7 中, 已知 $i_s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 \text{ A} & t > 0 \end{cases}$, $R = 1/8 \Omega$, $L = 1/8 \text{ H}$, $C = 2 \text{ F}$, 求电流源两端的电压 $u(t)$ 。

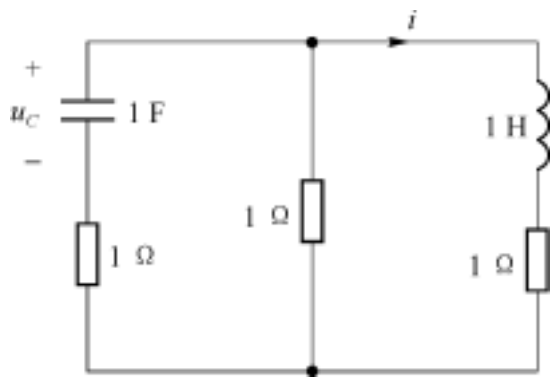


题图 6-6



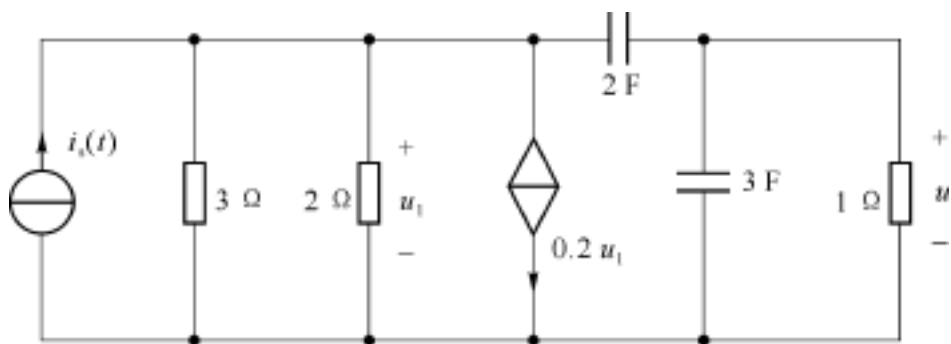
题图 6-7

6-8 已知题图 6-8 中, $i(0^-) = 0$, $u_c(0^-) = 5 \text{ V}$, 求 $i(t)$ 。



题图 6-8

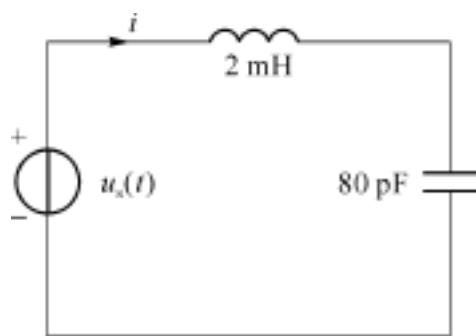
6-9 已知题图 6-9 中的各个电容都无初始电压, 且 $i_s(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ A} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, 求 $u(t)$ 。



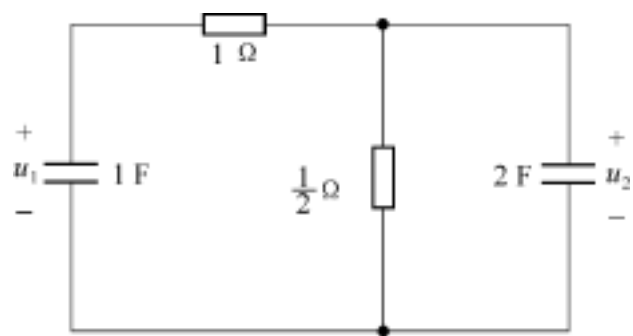
题图 6-9

6-10 已知 $u_s(t) = \begin{cases} 1\text{V} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, 求题图 6-10 电路中的电流 $i(t)$, 并画出波形。

6-11 已知题图 6-11 中, $u_1(0^-) = 1\text{V}$, $u_2(0^-) = -2\text{V}$, 求 $u_1(t)$ 。



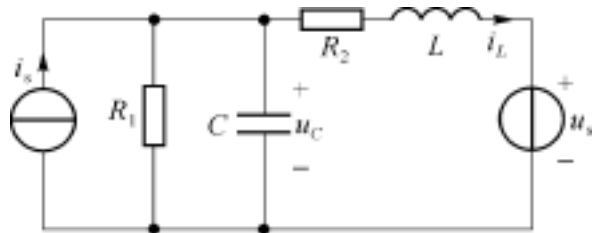
题图 6-10



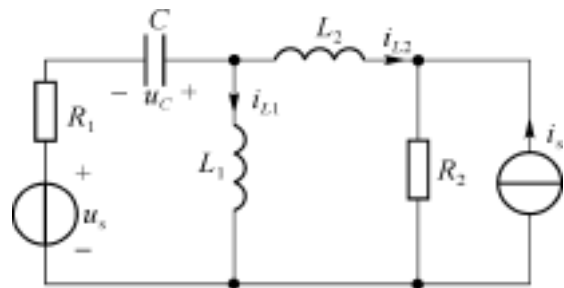
题图 6-11

6-12 列写题图 6-12 所示电路的状态方程。

6-13 列写题图 6-13 状态方程。

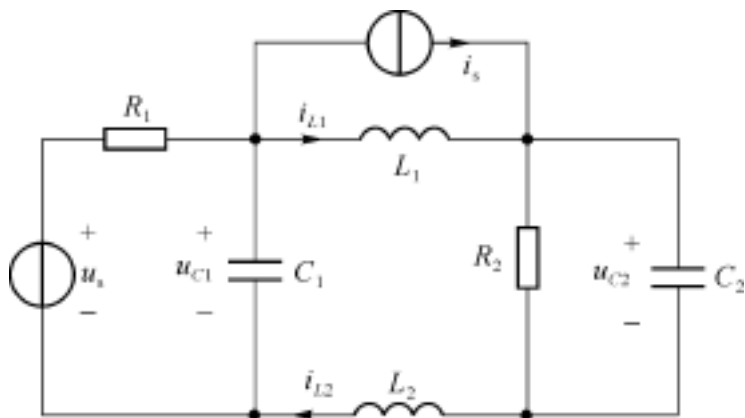


题图 6-12



题图 6-13

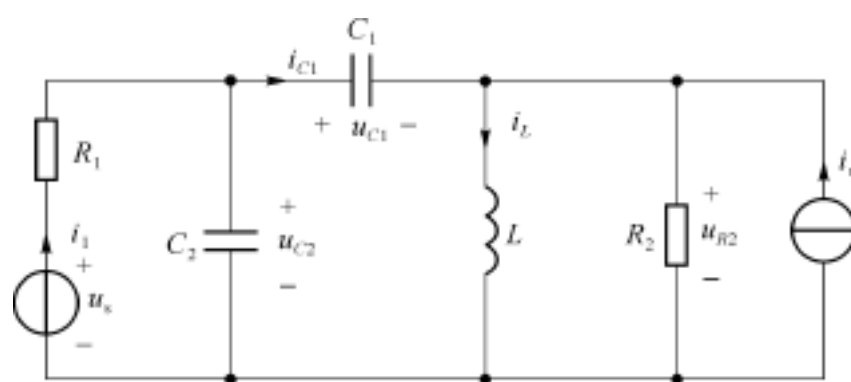
6-14 列写题图 6-14 状态方程。



题图 6-14

6-15 在题图 6-15 所示电路中

- (1) 列写状态方程。
- (2) 写出以 i_L 、 u_{C1} 和 u_{R2} 为输出量的输出方程。



题图 6-15

第七章 正弦稳态电路的分析

本章研究电路在正弦激励下的稳态响应,即正弦稳态分析。正弦稳态交流电路(简称正弦电路或交流电路)分析,无论是在实际应用方面,还是在理论分析方面,都是非常重要的。在供电系统中,全世界几乎采用单一频率(50Hz 或 60Hz)的正弦交流电压、电流,其广泛应用于各种电气设备。在信号分析理论中,正弦信号是用于分析信号的一类基本信号。因此,正弦电路的分析方法是一种基本的分析方法。这里将借助相量分析法计算电路。相量分析法即运用数学变换,将同频率的正弦函数用相量(复数)表示,即将微分方程转化为复数代数方程;这样,正弦交流电路的分析,实际上是处理复数代数方程,并把电路的基本定律和原理、基本分析方法、基本概念、等效变换推广应用于正弦交流电路。学习时要注意掌握电阻电路与正弦电路的共性与个性。

7.1 正弦信号

正弦信号是一种常见的周期信号,具有周期信号的特点。下面首先简单介绍周期信号的基本概念。

7.1.1 周期信号

周期信号是时间的函数,所以也称为周期函数。如图 7-1(a)所示的矩形脉冲和图(b)的正弦信号,它们在全时域上存在且周期性的出现,其特性可归纳为无始无终和周而复始两点。对周期信号的分析及今后一些问题的讨论,并不只是研究它们的瞬时特性。因此还要介绍它们的平均值、有效值等概念。

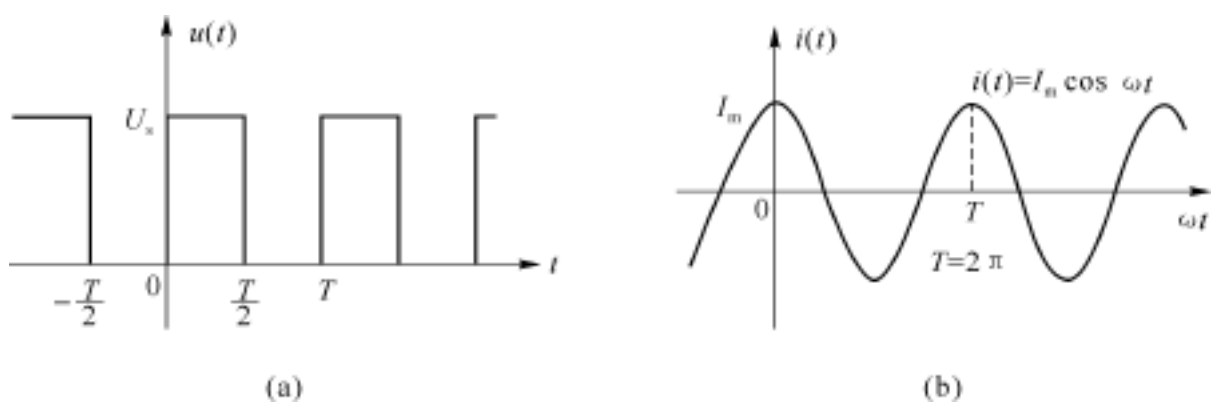


图 7-1 周期信号

周期信号可用函数式表示为

$$f(t) = f(t + nT) \quad - \infty < t < +\infty, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

式中 T 表示周期,周期是重复一次所需的时间,以秒(s)为基本单位。每单位时间重复出现

的次数称为频率,用符号 f 表示,即 $f = 1/T$,以赫兹(Hz)为基本单位。例如,我国工业用正弦交流电的频率为 50 Hz(简称工频),周期是 0.02 s。当频率值较高是可用千赫(kHz)或兆赫(MHz)为单位,相应的周期则以毫秒(ms)、微秒(μ s)等单位。

周期信号的平均值,指周期信号瞬时值的平均量,只需计算一个周期的平均值。若用周期信号 $f(t)$ 的平均值表示为

$$\overline{F} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \tag{7-1}$$

其中 T 为信号的周期, t_1 是任意常量。

例如图 7-1 (a)所示矩形脉冲序列的平均值为 $\overline{F} = \frac{1}{2} U_s$,图 7-1 (b)的正弦信号平均值 $\overline{F} = 0$ 。

周期信号的有效值是一个常用的概念,设一个周期性交流电流 $i(t)$,流过一个电阻所消耗的能量,与一个直流电流 I 流过同一个电阻消耗的能量相同时,该直流电流 I 的值,就定义为周期电流 $i(t)$ 的有效值。若在一个周期内写出它们的能量计算公式

$$\int_0^T i^2(t) R dt = I^2 RT$$

可从中导出有效值的计算公式

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

一般周期信号 $f(t)$ 的有效值为

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \tag{7-2}$$

式(7-2)表示出周期信号有效值与瞬时式的关系,对周期信号瞬时式的平方求平均值,再进行开方运算,即得到有效值。简而言之,周期信号有效值是瞬时值的方均根值。通常用大写 F 表示周期信号 $f(t)$ 的有效值,用大写 I 表示周期电流 $i(t)$ 的有效值,用大写 U 表示周期电压 $u(t)$ 的有效值。

图 7-1 (b)所示正弦交流信号的有效值可由式(7-2)推出:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2 t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m \tag{7-3}$$

式(7-3)反映出正弦电流 $i(t) = I_m \cos t$ 的有效值与最大值之间的关系。供电系统交流电压 220V 是有效值,而不是最大值,最大值是 $\sqrt{2} \times 220 \text{ V} = 311 \text{ V}$ 。一般仪表也按正弦信号的有效值来指示。所以有效值的概念非常重要。

7.1.2 正弦信号的基本概念

实际应用的正弦信号可以用正弦函数 \sin 表示,也可以用余弦函数 \cos 表示,但统称正弦信号。本书用 \cos 表示,现有正弦信号

$$f(t) = F_m \cos(t + \varphi) = \sqrt{2} F \cos(t + \varphi)$$

确定以上表达式的是三个参数,可称为正弦信号的三个特征量。

1. 正弦信号的三个特征量

表达式中振幅 F_m 是指正弦信号可达到的最大值(正峰值),它与相应的有效值 F 是 $\sqrt{2}$

倍的关系。

ωt 是一个随时间变化的角度,若设正弦信号的周期为 T ,而正弦函数的周期是 2π 弧度,即 $T=2\pi/\omega$ 或 $\omega=2\pi/T=2\pi f$ 。 ω 是角速度,又称为角频率,单位为弧度/秒(或 rad/s),表示每秒变化的弧度数。在画波形图时,常把横坐标定为 t 更为方便,因为不论 ω 是多少, $\cos \omega t$ 的周期总是 T 。 ω 与频率 f 相差 2π 倍,有时直接称 ω 为频率,可以从它的单位来与频率 f 相区别。

在一般情况下,时间的起点不一定恰好选在 $\cos \omega t$ 为正最大值的瞬间。如图 7-2 所示正弦信号 $f(t)$ (横坐标若定为时间 t 则周期为 T ,横坐标定为 ωt 则周期为 2π ,图中均有标出), $f(t)$ 的最大值 A 点所对应的的时间是 $-T/8$ 或角度(弧度)为 $-\pi/4$,也就是说,当 $t = -T/8$ 时才有 $f(t) = F_m$ 。因此此正弦信号应表示为

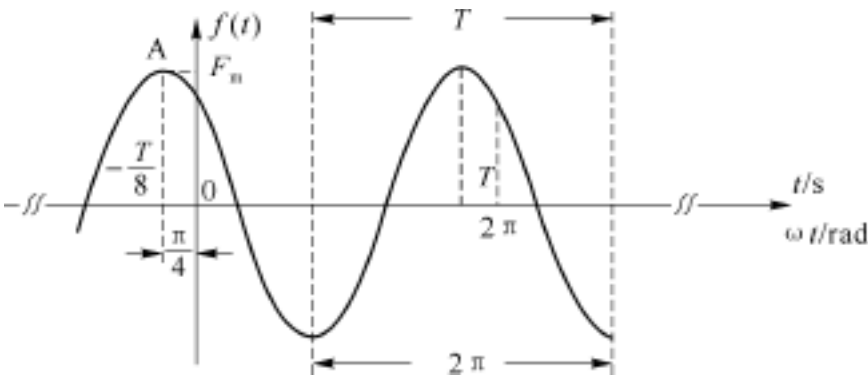


图 7-2 正弦信号的波形和三个特征量

$$f(t) = F_m \cos \frac{2\pi}{T} \left[t + \frac{T}{8} \right] \text{ 或 } f(t) = F_m \cos \left[\omega t + \frac{\pi}{4} \right]$$

也可以表示为

$$f(t) = F_m \cos(\omega t + 45^\circ)$$

一般正弦信号表示为

$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi)$$

式中 φ 称为初相角或初相,对 \cos 形式定义为:离时间起点最近的最大值(正峰值)所对应的角度称为正弦信号的初相角,这样就保持了它的唯一性,因此 φ 的绝对值总是小于等于 π 。如果正峰值发生在时间起点之前,则 φ 是正值;若正峰值发生在时间起点之后,则 φ 是负值。

所谓正弦信号的三个特征量就是振幅 F_m 、角频率 ω 和初相角 φ 。若用 \sin 形式表示正弦信号,振幅 F_m 和角频率 ω 的定义是相同的,初相角 φ 的计算方法有所不同。实际上 \sin 形式与 \cos 形式就相差一个初相角,读者可以自己推导。

2. 同频率正弦信号的相位差

正因为各正弦信号有不同的初相角如图 7-3 所示,也就出现了信号之间的相位差,需要研究的是同频率正弦信号的相位差。

图 7-3 中正弦电压与电流同频率但初相角不同,按定义电流的初相角 $\varphi_i = 45^\circ$,电压的初相角 $\varphi_u = -30^\circ$ 。它们的函数表达式为

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ V} \\ i(t) &= I_m \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ A} \end{aligned}$$

从波形的位置可以看出电流超前于电压或者说电压滞后于电流。这里可以用相位差来定量地描述这种关系。相位差就是初相角之差,用 φ 表示则有

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -75^\circ < 0^\circ$$

$\varphi < 0$ 说明电压滞后于电流 75° 。

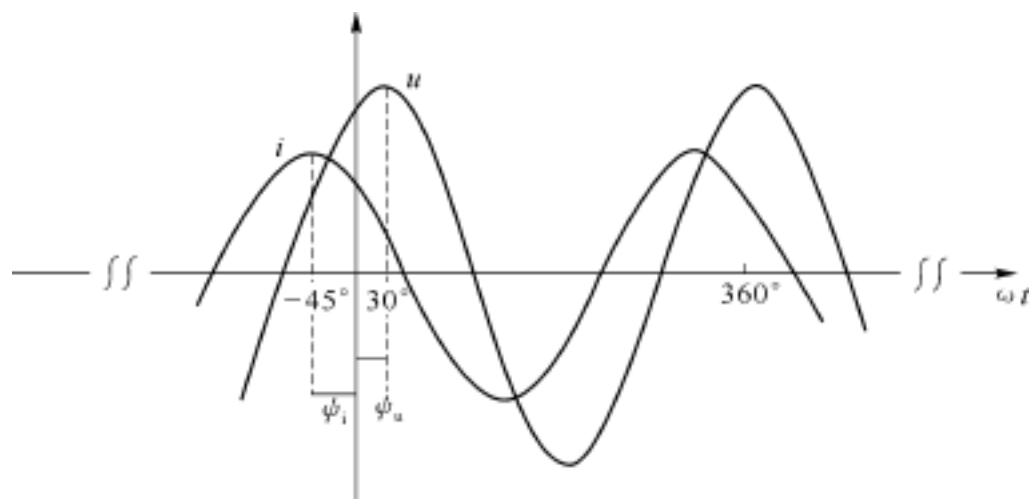


图 7-3 同频率正弦信号之间的相位差

- 相位之间的关系可分为以下几种关系：
- (1) 同相位:相位差 $\varphi = 0$;例如:设 $i_1 = 100\cos(2t - 90^\circ)\text{mA}$, $i_2 = 50\cos(2t - 90^\circ)\text{mA}$, 则 i_1 与 i_2 是同相关系,它们在随时间变化过程中同时达到最大值、零值和最小值。
 - (2) 反相位:相位差 $\varphi = \pm 180^\circ$;设 $i_3 = 100\cos(2t + 90^\circ)\text{mA}$, i_3 与 i_1 相比, $\varphi_1 = -90^\circ$, $\varphi_3 = 90^\circ$,所以 $\varphi = \varphi_3 - \varphi_1 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ 。所以 i_3 与 i_1 是反相,自然 i_3 与 i_2 一定也是反相,当 i_3 达到最大值时 i_1 和 i_2 达到最小,但它们的过零点是相同的。
 - (3) 正交:相位差 $\varphi = \pm 90^\circ$;设 $i_4 = 50\cos 2t\text{mA}$,则 i_4 与以上三个电流均为正交关系。
 - (4) 超前与滞后;如图 7-3 中相位差 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i < 0$,电压滞后于电流或者说电流超前于电压,若 $\varphi > 0$,则该电压超前于电流或者说电流滞后于电压。

例 7-1 画出下列正弦电压或电流的波形,并指出其振幅,角频率 ω ,频率 f 和初相角。

(1) $u(t) = 10\cos(10^3 t + 15^\circ)\text{V}$

(2) $i(t) = 5\sqrt{2}\cos(100 t + 90^\circ)\text{A}$

解 (1) 振幅 $U_m = 10\text{V}$, $\omega = 10^3\text{rad/s}$, $f = \omega / 2\pi = 159\text{Hz}$, 初相角 $\varphi_u = 15^\circ$, 波形如图 7-4(a)所示。

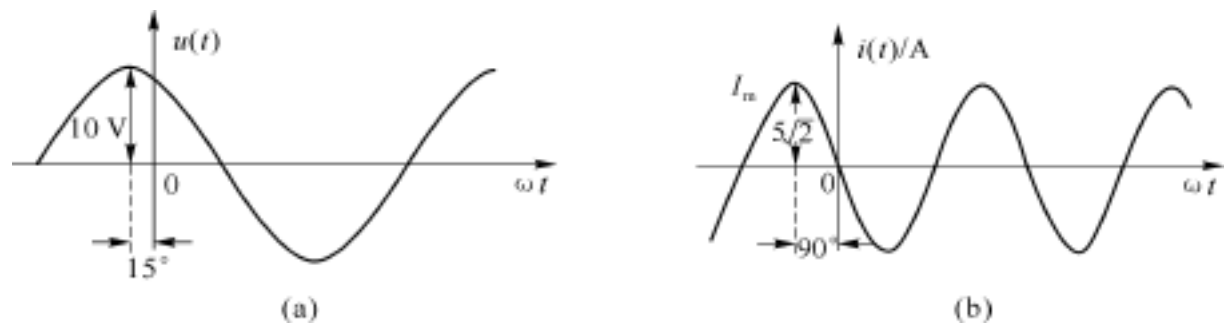


图 7-4 例 7-1 答案图

(2) 振幅 $5\sqrt{2}\text{A}$, $\omega = 100\text{rad/s}$, $f = \omega / 2\pi = 50\text{Hz}$, 初相角 $\varphi_i = 90^\circ$, 波形如图 7-4 (b) 所示。这里的横坐标均以 t 标记,不管 ω 为何值,正弦信号的周期都是 2π ,画波形很

方便。

7.1.3 正弦函数的相量表示法

在一个电阻支路上施加一个正弦电压,其中的电流仍是角频率为 ω 的正弦量,与电压不同的只是振幅。将同样电压施加到一个电容上,那么其电流 $i(t)$ 仍是角频率为 ω 的正弦量,改变的只是振幅和初相角。在电感支路上也一样。因为对一个正弦量进行微分、积分、相加、乘以或除以常数都不会改变其角频率,改变的只有振幅和初相角。这是正弦函数在时域中运算的特点。可参见式(7-14)和式(7-18)。

同时,从欧拉公式知道正弦函数与复指数函数的关系,设复指数函数 $F_m e^{j(\omega t + \varphi)}$,则可以写出它的代数形式

$$F_m e^{j(\omega t + \varphi)} = F_m \cos(\omega t + \varphi) + j F_m \sin(\omega t + \varphi)$$

即复指数函数的实部是正弦函数的 \cos 表示式,虚部是正弦函数的 \sin 表示式,所以也可以表示为

$$F_m \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}[F_m e^{j(\omega t + \varphi)}] \tag{7-4}$$

以及
$$F_m \sin(\omega t + \varphi) = \operatorname{Im}[F_m e^{j(\omega t + \varphi)}] \tag{7-5}$$

我们知道对指数函数的求导、积分、求和等运算要比直接对正弦函数运算要方便些。根据复变函数的运算规律,可以先对复指数函数进行数学运算,再对运算结果求实部或虚部,就可以得到正弦函数的运算结果了。如果再对复指数函数 $F_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ 进行拆分,可以表示为

$$F_m e^{j(\omega t + \varphi)} = F_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \dot{F}_m e^{j\omega t}$$

式中 $\dot{F}_m = F_m e^{j\varphi}$ 是个复常数,不难发现它的幅度 F_m 与正弦函数的振幅对应,它的幅角 φ 与正弦函数的初相角对应,因而称这个复常数为相量。联想到正弦函数在时域中运算的特点,设想能否只对相量进行运算以代替对正弦函数的运算呢?答案是肯定的。因为如果对复指数函数 $F_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ 进行微分、积分、相加、乘以或除以常数也都不会改变其角频率,改变的只有相量的幅度和幅角。

正弦量与相量之间有对应的关系

$$F_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \dot{F}_m = F_m e^{j\varphi} = \sqrt{2} F e^{j\varphi} = \sqrt{2} \dot{F} \tag{7-6}$$

我们称 \dot{F}_m 为振幅相量,也可以表示成有效值相量 \dot{F} ,它们的幅度差 $\sqrt{2}$ 倍。这里要提醒读者注意的是双箭头的左边是正弦函数的时间函数,右边是相量即复常数,它们是对应关系而非相等的关系。若已知正弦函数表达式可以得出相应的相量,反之,若已知相量和原正弦函数的角频率 ω 也可以得出原正弦函数表达式。

下面再对复指数函数作一个几何解释。将相量(复常数) $\dot{F}_m = F_m e^{j\varphi}$ 画在复平面上如图 7-5 所示,图中相量是带有箭头线的线段,线段的长度是 F_m ,与实轴的夹角是 φ 。复常数 \dot{F}_m 是与时间无关的量。若乘以 $e^{j\omega t}$ 即为复指数函数

$$\dot{F}_m e^{j\omega t} = F_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

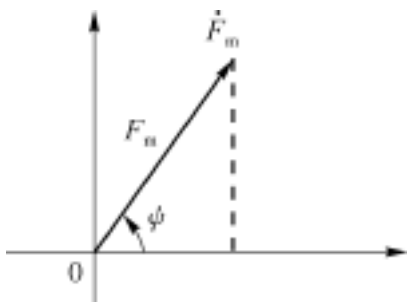


图 7-5 相量在复平面上

随着 t 的增加其幅角 ($t + \phi$) 在增加, 而幅度则保持不变, 即图形围绕原点旋转。所以称 $e^{j\omega t}$ 为旋转因子, 称 $F_m e^{j(\omega t + \phi)}$ 为旋转相量。或者说它实际上以相量 $\dot{F}_m = F_m e^{j\phi}$ 为基础, 随着时间的增长按 ω 的角频率作周期性的旋转。如果两个同频率正弦信号的相量画在同一复平面上, 两个相量以同一速度在旋转, 在旋转过程中两个相量的幅度比和相位差是不变的。所以可以在某个时刻让两个相量定格, 在静止状态下研究两个相量之间的关系。其实最简单的方法是设 $t = 0$, 即旋转因子为常数 1。所以实际上是用相量代替正弦函数去进行运算。

相量在数学上的运算规律就是复数的运算规律(复数的表示和运算规律可参见附录 A)。同时相量图符合矢量运算的几何规则, 用矢量加(减)的平行四边形法则求相量和。所以可采用如图 7-6 所示的方式引出相量图。图中相量是带有箭头的矢量, 其长度取决于相量的幅度, 不必画出坐标轴而只画出正向基线如图中虚线所示, 相量与基线的夹角就是幅角。

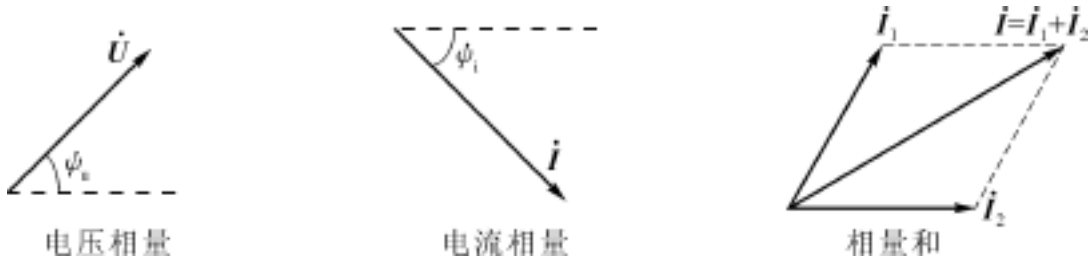


图 7-6 相量图

7 2 电路与电路定律的相量模型

当电路的电压与电流用相量表示时, 电路元件特性是否会发生变化? 电路基本定律又是怎样的形式呢? 这就是本节要介绍的内容。

7 2 . 1 基尔霍夫定律的相量形式

已知电路 KCL 的一般形式为

$$\sum_{k=1}^{m_0} i = 0 \tag{7-7}$$

这里的电流可以是任意的时间函数, 如果它们是同一频率的正弦函数, 则可以写出 KCL 的相量形式

$$\sum_{k=1}^{m_0} \dot{I}_m = 0 \quad (\sum_{k=1}^{m_0} \dot{I} = 0) \tag{7-8}$$

式(7-8)中各电流相量是式(7-7)中各正弦电流对应的相量。即在任一时刻, 电路的任一节点, 流出某节点的所有支路电流相量代数和为零。各电流可以是振幅相量, 也可以是有效值相量。

学习本节之前请先阅读附录 B 有关复变函数的几个定理。

电路 KVL 的一般形式为

$$\sum_{k=1}^{n_0} u_k = 0 \tag{7-9}$$

同样这里的电压可以是任意的时间函数,如果它们是同一频率的正弦函数,则可以写出 KVL 的相量形式

$$\sum_{k=1}^{n_0} \dot{U}_k = 0 \quad \left(\sum_{k=1}^{n_0} U_k = 0 \right) \tag{7-10}$$

式(7-10)中各电压相量是式(7-9)中各正弦电压对应的相量。即在任一时刻,电路的任一回路,沿该回路的所有支路电压相量代数和为零。各电压可以是振幅相量,也可以是有效值相量。

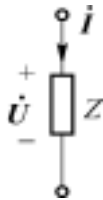
式(7-7)和式(7-9)称为基尔霍夫定律的时域形式;式(7-8)和式(7-10)称为基尔霍夫定律的相量形式,这是运用相量法分析正弦电路的基本依据。

特别要注意基尔霍夫定律的相量形式中各项必须是相量,各电流振幅之间或有效值之间不存在 KCL,同样各电压振幅之间或有效值之间不存在 KVL,即 $\sum I \neq 0$, $\sum U \neq 0$ 。

7 2 2 欧姆定律的相量形式

当流过一条支路的电流用电流相量表示,则支路电压也用电压相量表示,当电流相量与电压相量在关联方向下如图 7-7 所示,支路电流与支路电压符合欧姆定律

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} \text{ 或 } Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} \tag{7-11}$$



这里的 Z 和 Y 是复数,它们是电压相量与电流相量运算的结果。 Z 的量纲与电阻相同,都是欧姆(Ω), Y 的量纲与电导相同,都是西门子(S)。式(7-11)称为欧姆定律的相量形式或复数形式。实际上 Z 和 Y 是支路元件的相量模型,后面将详细介绍它们。

图 7-7 欧姆定律的相量形式

7 2 3 基本元件的正弦稳态特性

1 . 电阻元件的相量模型

电阻支路的电流和电压在关联参考方向下,如图 7-8(a)所示,流过电阻 R 的电流设为 $i_R = I_{Rm} \cos(\omega t + \varphi_i)$,则电阻两端的电压

$$u_R = RI_{Rm} \cos(\omega t + \varphi_i) = U_{Rm} \cos(\omega t + \varphi_u)$$

其中 $U_{Rm} = RI_{Rm}$ (有效值 $U_R = RI_R$), $\varphi_u = \varphi_i$,电阻 R 是时域的形式。

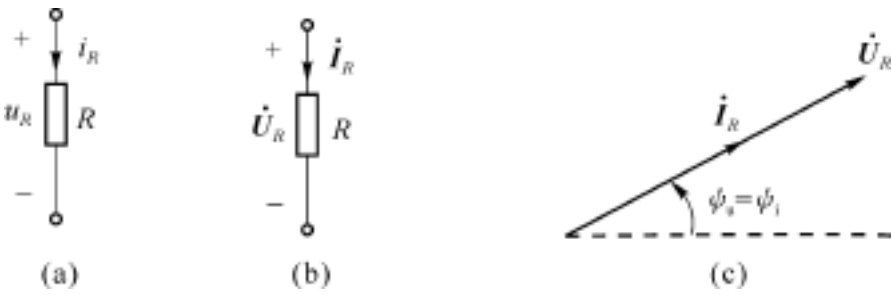


图 7-8 电阻的相量模型

当电流以相量形式表示时,电阻电压也是相量形式

$$\dot{U}_{Rm} = R \dot{I}_{Rm} \tag{7-12}$$

即
$$U_{Rm} \angle \varphi_u = R I_{Rm} \angle \varphi_i$$

其中 $U_{Rm} = R I_{Rm}$, $\varphi_u = \varphi_i$, 与时域的形式相同, 用有效值表示为 $U_R = R I_R$ 。

不论电流与电压以何种形式表示, 电阻 R 均为一个实常数, 形式上比较简单。从电压与电流的初相角关系也可以看到电阻性支路的特性, 即流过电阻的支路电流与其两端电压是同相的。图 7-8(b) 是电阻的相量模型, 图 (c) 是电压相量与电流相量的相量图, 图 7-9 是电阻支路电压与电流的时域波形。

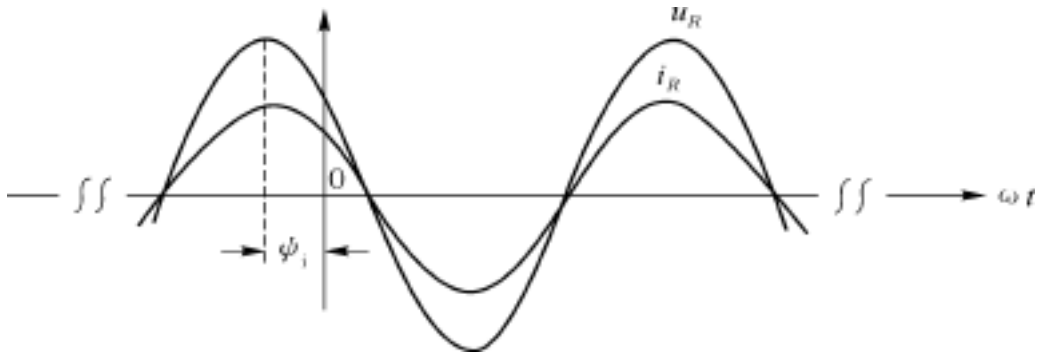


图 7-9 电阻支路电流与电压同相

2 . 电容元件的相量模型

电容支路的时域模型如图 7-10(a) 所示, 设电容电压为

$$u_C = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi_u)$$

当电流与电压在关联方向下, 电流 i_C 为

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = - U_{Cm} C \sin(\omega t + \varphi_u)$$

求导后电流出现了 \sin 函数形式, 必须推导成 \cos 函数形式才能与原电压作相位的比较。

$$i_C = - C U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi_u + 90^\circ) = I_{Cm} \cos(\omega t + \varphi_i)$$

其中 $I_{Cm} = C U_{Cm}$ (有效值 $I_C = C U_C$), $\varphi_i = \varphi_u + 90^\circ$ 。

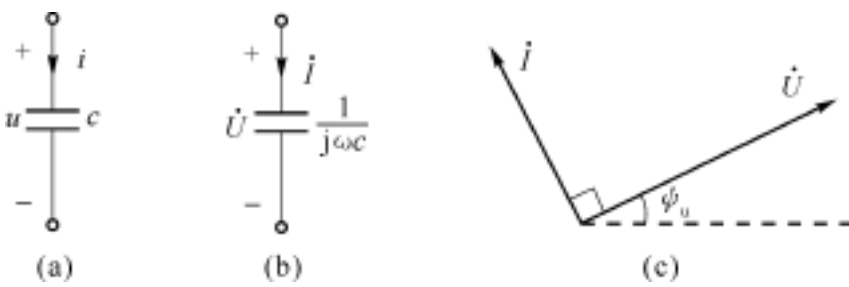


图 7-10 电容的相量模型

当电容电压以相量表示时, 电流也是相量。由正弦电压的时域表达式与复变函数的关系, 可知正弦电压可以表示为

$$u_C = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi_u) = \text{Re}[\dot{U}_{Cm} e^{j\omega t}]$$

设电容电流的形式为

$$i_C = I_{Cm} \cos(\omega t + \varphi_i) = \text{Re}[\dot{I}_{Cm} e^{j\omega t}]$$

由电容的伏安关系知

$$\operatorname{Re}\left[\dot{I}_{Cm} e^{j \omega t}\right]=C \frac{d}{d t} \operatorname{Re}\left[\dot{U}_{Cm} e^{j \omega t}\right]=\operatorname{Re}\left[C j \dot{U}_{Cm} e^{j \omega t}\right]$$

由附录 B 定理 4 可得出

$$\dot{I}_{Cm}=C j \dot{U}_{Cm} \tag{7-13}$$

即

$$\frac{\dot{U}_{Cm}}{\dot{I}_{Cm}}=\frac{1}{j C}$$

式(7-13)是相量关系式,其中完全包含了电容电压与电流时域关系的特征。由此可知电容的电路模型应为复数

$$\frac{1}{j C}=-j \frac{1}{C}$$

如图 7-10(b)所示,图中标电压电流均为有效值相量,图(c)是电压相量与电流相量的相量图。式(7-13)可写为

$$I \angle \varphi_i=C U \angle \varphi_u+90^{\circ}$$

上式表明,电压与电流有效值之间的关系为

$$I=C U \tag{7-14}$$

而电压与电流的相位关系则为

$$\varphi_i=\varphi_u+90^{\circ} \tag{7-15}$$

式(7-14)表明电压与电流振幅(或有效值)的关系不仅与 C 有关而且与频率 ω 有关。当 C 值一定时,对一定的电压 U 来说,频率越高则 I 越大,也就是说电流越容易通过;频率越低则 I 越小,电流越难通过。当 $\omega=0$ 时电容相当于开路,这正好符合电容隔直流的特性。式(7-15)表明电压滞后电流的角度是 90° ,它表现出与电阻不同的性质。电压与电流的波形关系如图(7-11)所示。

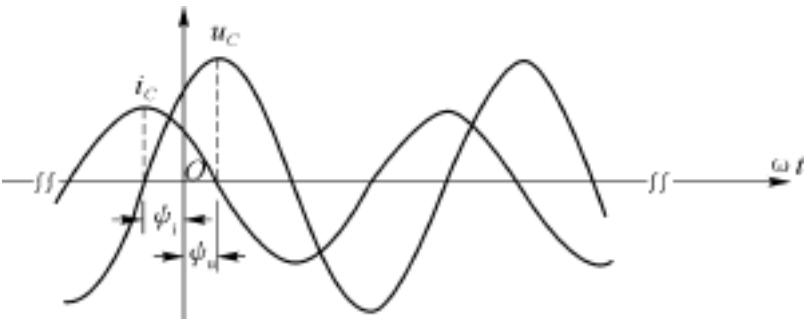


图 7-11 电容支路电流与电压关系

3 . 电感元件的相量模型

电感支路的时域模型如图 7-12(a)所示,为了表达的方便设电感电流为

$$i_L=I_{Lm} \cos (\omega t+\varphi_i)$$

当电流与电压在关联方向下,电压 u_L 为

$$\begin{aligned} u_L &=L \frac{d i_L}{d t}=-I_{Lm} L \sin (\omega t+\varphi_i) \\ &=L I_{Lm} \cos (\omega t+\varphi_i+90^{\circ})=U_{Lm} \cos (\omega t+\varphi_u) \end{aligned} \tag{7-16}$$

其中 $U_{Lm} = \sqrt{2} U_L$ ($U_L = U/\sqrt{2}$), $u = i + 90^\circ$ 。

用同样的思路可获得电感元件的相量模型。这里用对偶的方法推出其相量模型, 因为电感与电容是对偶的, 由式(7-13)中将电流 I 换成电压 U , 将电压 U 换成电流 I , 再将电容 C 换成电感 L 就得到

$$\dot{U}_{Lm} = j \omega L \dot{I}_{Lm} \tag{7-17}$$

即

$$\frac{\dot{U}_{Lm}}{\dot{I}_{Lm}} = j \omega L = L \angle 90^\circ$$

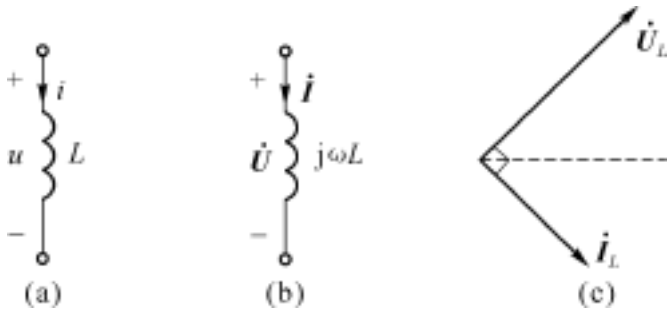


图 7-12 电感的相量模型

显然电感的相量模型应为 $j \omega L$, 如图 7-12(b)所示, 其相量图如图(c)所示。式(7-17)的相量关系式, 包含了电感电压与电流时域关系的特征。电压与电流有效值之间的关系为

$$U = \omega L I \tag{7-18}$$

而电压与电流的相位关系则为

$$u = i + 90^\circ \tag{7-19}$$

式(7-18)表明电压与电流振幅的关系不仅与 L 有关而且与角频率 ω 有关, 当 $\omega = 0$ 时电感相当于短路线。式(7-19)表明电流滞后于电压的角度是 90° 。电压与电流的波形关系如图(7-13)所示。

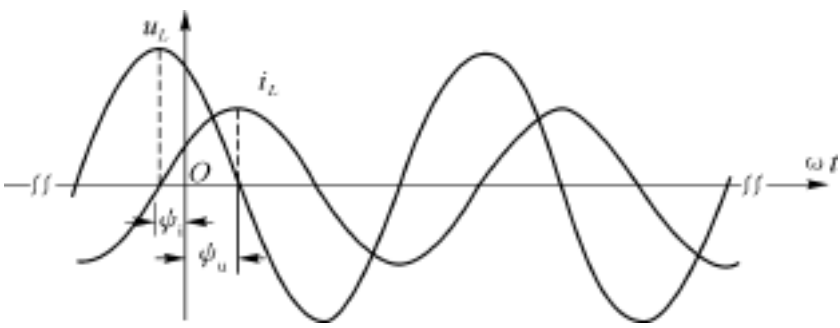


图 7-13 电感支路电流与电压关系

这里介绍了三个基本元件的相量模型, 特别注意到电容与电感的相量模型反映出与角频率的关系, 在不同的工作频率时它们对于电流的阻碍作用是不同的。

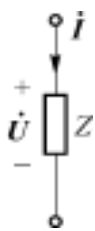
7 2 4 相量法

正弦稳态电路的分析计算要借助相量法, 将相量形式的欧姆定律和基尔霍夫定律应用于电路的相量模型, 建立相量形式的电路方程求解, 即可得到电路的正弦稳态响应。这一方法称为相量法。相量法是分析正弦稳态电路的重要方法, 其主要步骤如下:

- (1) 由原电路导出电路的相量模型,包括将正弦激励用相量表示;
 - (2) 用基本定律的相量形式列写电路方程;
 - (3) 分析计算出响应的相量;
 - (4) 将求得的响应相量复原为响应的正弦函数。
- 第(2)、(3)步也就是利用电阻电路的各种分析方法求出响应的相量。

7 3 阻抗与导纳

在图 7-14 所示支路写出欧姆定律的相量形式



$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} \quad \text{或} \quad Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{Z}$$

把元件两端的电压相量与流过元件的电流相量之比 Z 定义为复数阻抗,把阻抗 Z 的倒数 Y 定义为复数导纳。这是用相量法分析正弦稳态电路的重要概念。上节也介绍了电阻、电容与电感的相量模型,这里将它们归纳到阻抗和导纳复数阻抗 的概念中来研究其运算规律。

7 3 .1 基本元件的阻抗与导纳

- (1) 电阻支路阻抗 $Z_R = R$;导纳 $Y_R = 1/ R = G$,均为实数,所以其上电压与电流同相,所有电阻性支路都有这个特点。
- (2) 电容支路阻抗

$$Z_c = \frac{1}{j C} = - j \frac{1}{C}$$

导纳 $Y_c = j C$,为复数。阻抗还可以表示为 $Z_c = - j X_c$,其中 $X_c = 1/ C$,称为容抗,电容上的电压滞后于电流 90° 。

- (3) 电感支路阻抗 $Z_L = j L$;导纳 $Y_L = 1/ j L$ 。阻抗还可以表示为 $Z_L = j X_L$,其中 $X_L = L$,称为感抗,电感上的电流滞后于电压 90° 。
- 称电容和电感为电抗性元件。

7 3 .2 阻抗与导纳的串并联

电路元件以复数阻抗或导纳出现时,电阻电路的等效规律可以应用到相量法中。下面用例子说明阻抗与导纳的串并联特性。

例 7-1 图 7-15 所示 RL 串联支路的电压与电流均按关联参考方向设置,研究它们的关系。

解 由 KVL 电压关系得

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L$$

串联支路流过同一电流

$$\dot{U} = RI + j LI = (R + j L) I$$

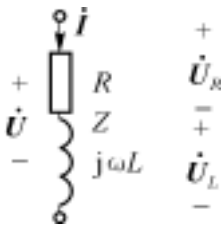


图 7-15 例 7-1 电路

显然

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = (R + j L) = Z \tag{7-20}$$

由此可以看到阻抗串联与电阻串连的规律是相同的,因此它的分压规律也是相同的

$$\dot{U}_R = \frac{R}{R + j L} \dot{U}$$
$$\dot{U}_L = \frac{j L}{R + j L} \dot{U}$$

但是所包含的内容和数学运算比电阻电路复杂得多,式(7-20)包含着两部分内容,先将阻抗写成极坐标形式

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = (R + j L) = \sqrt{R^2 + (L)^2} \angle \arctan \frac{L}{R}$$

等式两边的模数关系为:电压有效值和电流有效值的比值即阻抗模

$$\frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (L)^2}$$

等式两边的幅角关系为:电压与电流的相位差即阻抗角

$$\varphi_{ui} = \arctan \frac{L}{R}$$

画出支路的相量图如图 7-16 所示,假设电流初相角为零,将它画在基准线上。电阻电压 \dot{U}_R 与电流 \dot{I} 同相,电感电压 \dot{U}_L 与电流 \dot{I} 垂直即电压超前 90° ,总电压是电阻电压与电感电压的相量和。最终得到的总电压 \dot{U} 与电流 \dot{I} 的相位差仍是正的,说明感性支路电流总是滞后于电压的,元件参数或正弦信号的频率的变化使得这个相位差在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 范围内变化。

例 7-2 图 7-17 所示是一个简单的 RC 移相电路,其中 $R = 9.2\text{k}$, $C = 0.01\mu\text{F}$ 。问此电路对 $f = 1\text{kHz}$ 的正弦电源能产生多大的相移?

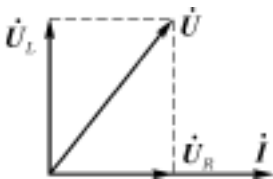


图 7-16 例 7-1 相量图

解 电路产生的相移是指输出电压 \dot{U}_2 与输入电压 \dot{U}_1 的相位差 φ_{u1} ,这里可用两种方法求解。

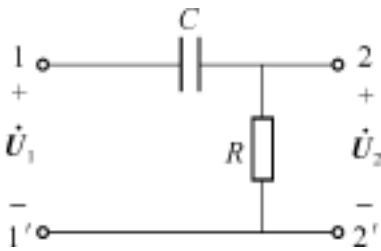


图 7-17 例 7-2 电路

方法一 由电路可知,因为 \dot{U}_2 是电阻两端的电压,所以 \dot{U}_2 与 \dot{U}_1 实际上是分压关系

$$\dot{U}_2 = \frac{R}{R + \frac{1}{j C}} \dot{U}_1$$

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j C}} = \frac{R \angle 0^\circ}{\sqrt{R^2 + \left[\frac{1}{C} \right]^2} \angle -\arctan \frac{1}{CR}} = \frac{U_2}{U_1} \angle \varphi_{21}$$

所以

$$\varphi_{21} = 0^\circ + \arctan \frac{1}{CR} = \arctan \frac{1}{CR}$$
$$= \arctan \frac{1}{2 \times 10^3 \times 0.01 \times 10^{-6} \times 9.2 \times 10^3} = 60^\circ$$

在图示参考方向下,输出电压超前于输入电压 60° 。

方法二 相量图法。电路中两个元件是串联的,设电流相量 I 的初相角为零,其他相量依次画出如图 7-18 所示。其中电阻电压 U_2 与电流同相,电容电压 U_C 应滞后于电流 90° ,总电压 U_1 是电阻电压与电容电压的相量和。

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_C + \dot{U}_2$$

从图 7-18 中可以看出 U_2 与 U_1 的夹角 即是电路造成的相位差。由于 U_C, U_2 及 U_1 都与 I 成正比例,所以由比例系数 $\frac{1}{C}, R$ 及 $\sqrt{R^2 + \left[\frac{1}{C}\right]^2}$ 构成的直角三角形与 U_C, U_2 及 U_1 构成的直角三角形相似,所以 $\varphi = \arctan \frac{1}{CR}$ 。从图中也可以看出总电压滞后于电流,这是电容性支路的特性。

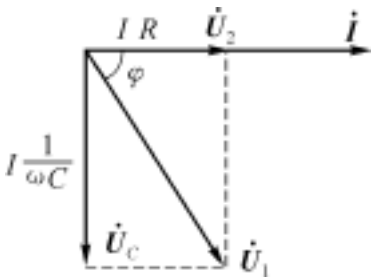


图 7-18 例 7-2 相量图

以上例子都是串联电路,更多元件的串联电路其分析方法都是相同的。下面看一个并联电路的例子。

例 7-3 已知 $R=2 \quad L=\frac{1}{C}$, 讨论图 7-19 所示 RLC 并联电路的电流关系,分析电路性质。

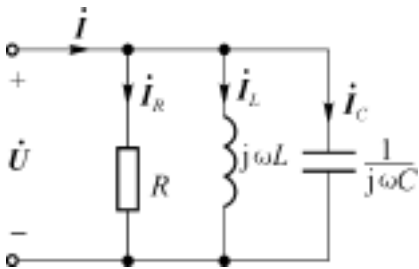


图 7-19 例 7-3 电路

解 由 KCL 得出电流相量关系如下

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$$

并联支路的导纳等于各支路导纳之和

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL} + jC = \frac{1}{R} + j\left[C - \frac{1}{L}\right]$$

各支路处在同一电压下,各电流

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R}, \quad \dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{jL} = \frac{2\dot{U}}{jR}, \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{\frac{1}{jC}} = -\frac{\dot{U}}{jR}$$

可以知道它们有效值的关系为

$$I_R = I_C = \frac{1}{2} I_L$$

画出相量图如图 7-20 所示,并联电路设电压初相角为零比较方便。电阻电流 I_R 与电压 U 同相,电感电流 I_L 滞后于电压 90° ,电容电流 I_C 超前于电压 90° ,三个电流的幅度关系是确定的。先将反相关系的 I_C 和 I_L 求和,再与 I_R 求和,总电流 I 滞后于电压 U ,最终电路呈感性支路性质。

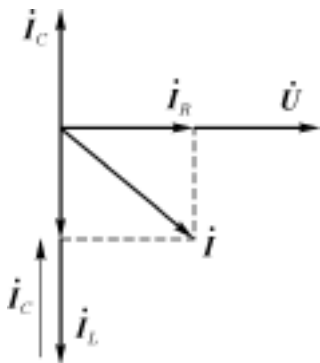


图 7-20 例 7-3 相量图

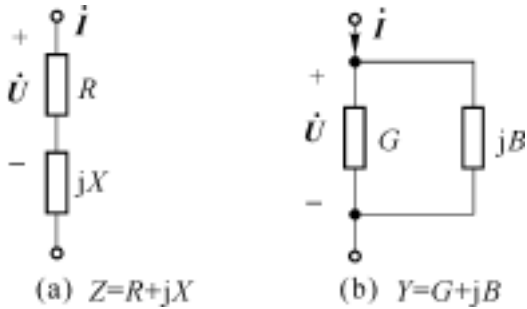
7 3 3 阻抗与导纳的等效电路

支路阻抗的一般表达式设为 $Z = R + jX$ (这里的 X 可正可负),那么可以画出它的等效电路如图 7-21(a)所示。同理,导纳 $Y = G + jB$ (B 可正可负),其等效电路如图 7-21(b)所示。阻抗与导纳的关系为

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)}$$
$$= \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G + jB$$

(7-21)

这里 $G = \frac{R}{R^2 + X^2}$, $B = - \frac{X}{R^2 + X^2}$ 。



阻抗 Z 的极坐标形式为 $Z = R + jX = z\angle$,小写 z 表示阻抗模, 表示阻抗角也即电压与电流的相位差。导纳 Y 的极坐标形式为 $Y = G + jB = y\angle$, 为导纳角。这里有 $y = 1/z$ 和 $= -$ 。

复数阻抗、复数导纳是电压相量与电流相量运算产生的复数,与电压相量、电流相量在概念上是不同的,不称为相量,所以在 Z 和 Y 的字母上没有加点,以示区别,但它们的数学运算规律是相同的。

例 7-4 分析 7-22 电路中输入等效电路的性质,并定性画出相量图。

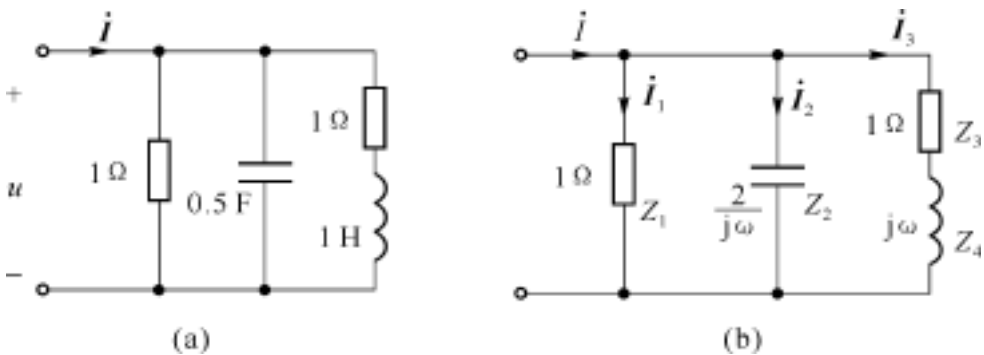


图 7-22 例 7-4 电路

解 设电源频率为 ,画出相应电路模型如图(b)所示,电路导纳

$$Y = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3 + Z_4}$$
$$= 1 + j \frac{2}{2} + \frac{1}{1 + j}$$
$$= \frac{2 + \frac{2}{2}}{1 + \frac{2}{2}} + j \frac{3 - \frac{1}{2}}{2(1 + \frac{2}{2})} = G + j$$

导纳是频率的函数,分析其虚部的分子 $^3 - = (^2 - 1)$, $0 < < 1$ 时 $B < 0$ 电路呈感性; $= 1$ 时 $B = 0$ 电路呈电阻性; > 1 时 $B > 0$ 电路呈容性。定性画出各电量的相量图,如图 7-23 所示。请读者分析,相量图中所表示的输入等效电路是什么性质?

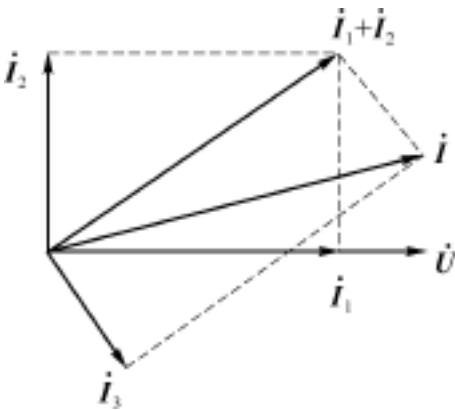


图 7-23 例 7-4 的相量图

这里要提醒读者注意一点,由于复数阻抗和导纳均与

电源的工作频率有关,在运算中对电路的相量模型作等效变换常常是对某一频率而言,此时所得到的结论不一定满足其他工作频率,这个特性称为单频率等效。

7 4 正弦稳态电路的分析计算

正弦稳态电路的分析计算要借助相量法。将相量形式的欧姆定律和基尔霍夫定律应用于电路的相量模型,建立相量形式的电路方程求解,即可得到电路的正弦稳态响应。这一方法称为相量法。和电阻电路的电路方程一样,相量形式的电路方程也是线性代数方程,只是方程式的系数一般是复数,因此分析电阻电路的各种公式、方法和定理乃至技巧都适用于正弦电路的相量分析法。下面用例子说明。

例 7-5 正弦稳态电路如图 7-24(a) 所示,其中 $\dot{U}_1 = 16\sqrt{2}/45^\circ\text{V}$, $\dot{U}_2 = 20/-20^\circ\text{V}$, $\dot{U}_3 = 8/90^\circ\text{V}$,其他元件均标明了阻抗模值,试用戴维南定理求 A、B 间支路电流 I 。

解 断开 A、B 间支路,包括电压源 \dot{U}_3 和阻抗模值为 8 的电容均断开,并将 10 电阻画在右边电路上,如图 7-24(b) 所示。可以判断 C、D 间电流 $I_1 = 0$, 因此左右两部分电路各自独立工作。左侧回路电流

$$I_2 = \frac{\dot{U}_1}{7 + 9 + j16} = \frac{16\sqrt{2}/45^\circ}{16\sqrt{2}/45^\circ} = 1/0^\circ\text{A}$$

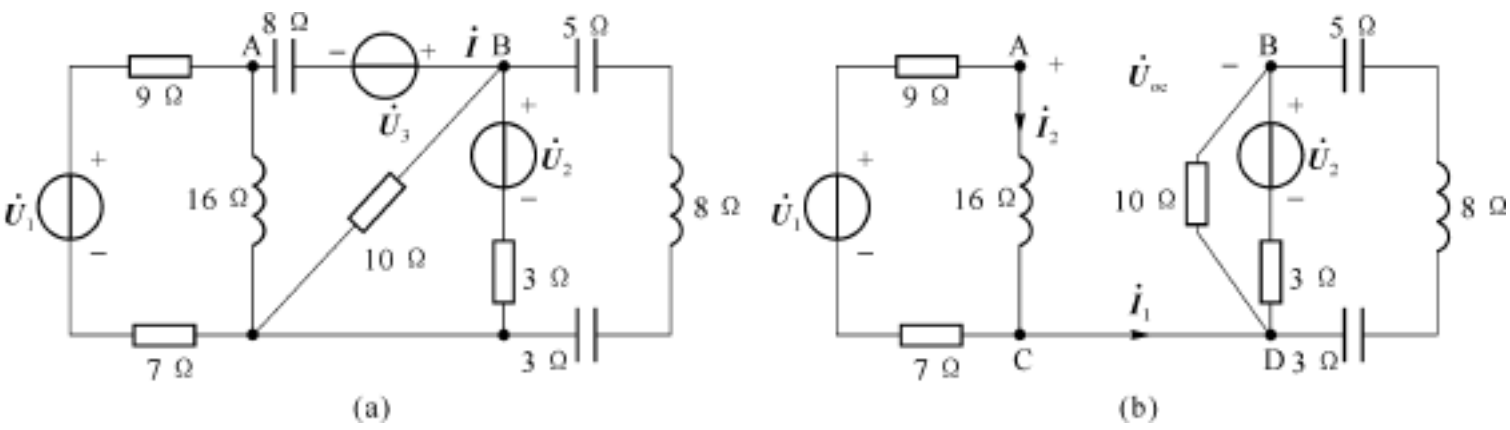


图 7-24 例 7-5 电路图

再看右侧回路,因为 D、B 间阻抗为

$$Z = j8 - j5 - j3 = 0$$

所以 A、B 间开路电压

$$U_{oc} = I_2 \times j16 = j16 = 16/90^\circ\text{V}$$

等效内阻抗

$$Z_0 = (9 + 7) \parallel j16 = \frac{16 \times j16}{16 + j16} = \frac{j16}{1 + j} = 8\sqrt{2}/45^\circ$$

由此得到戴维南等效电路如图 7-25 所示,连接原 A、B 间支路,计算电流

$$I = \frac{16/90^\circ + 8/90^\circ}{8\sqrt{2}/45^\circ - j8} = \frac{16j + 8j}{8 + j8 - j8} = 3j = 3/90^\circ\text{A}$$

例 7-6 列出如图 7-26 所示电路的节点电压方程,各元件参数均为已知。

解 原电路已经是相量模型,其中部分支路以复数阻抗表示,部分支路以复数导纳表示,还要注意到与电流源串联的支路电导不应计入。即可以仿照电阻电路的方法直接列出节点电压方程,设节点 a、b、c 的电压为变量,列出方程如下:

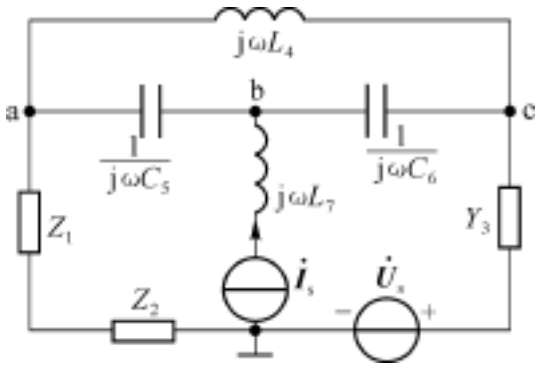


图 7-26 例 7-6 电路

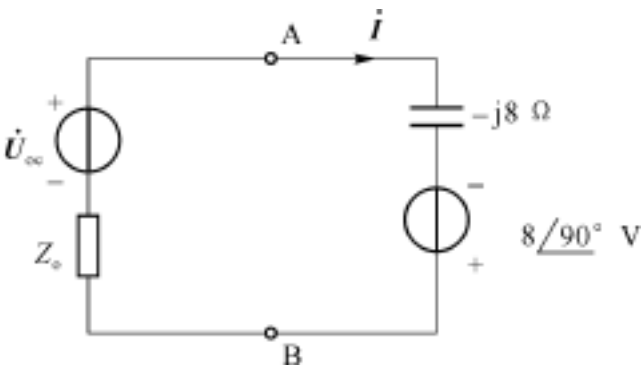


图 7-25 例 7-5 解图

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{Z_1 + Z_2} + j C_5 + \frac{1}{j L_4} \right] \dot{U}_a - j C_5 \dot{U}_b - \frac{1}{j L_4} \dot{U}_c = 0 \\ [j C_5 + j C_6] \dot{U}_b - j C_5 \dot{U}_a - j C_6 \dot{U}_c = \dot{I}_s \\ \left[\frac{1}{j L_4} + j C_6 + Y_3 \right] \dot{U}_c - \frac{1}{j L_4} \dot{U}_a - j C_6 \dot{U}_b = \dot{U}_s Y_3 \end{cases}$$

从本例可知,电阻电路的节点分析法乃至一般分析方法可以直接推广到相量法中。

例 7-7 已知电路如图 7-27(a)所示,已知元件参数和电压源角频率 $\omega = 3 \text{ rad/s}$, 求 $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_s}$ (即求电压比 $\frac{U_2}{U_s}$ 和 U_2 对 U_s 的相移)。

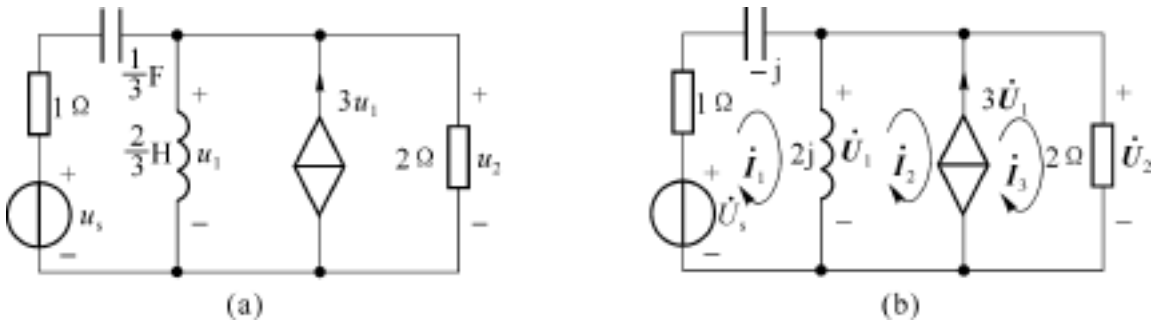


图 7-27 例 7-7 电路及相量模型

解 方法一 用网孔电流法

先画出相应的相量模型并设定网孔电流如图 7-27(b)所示,设控制量为 \dot{U}_1 ,也是受控电流源两端电压,且有 $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$,列出网孔电流方程组

$$\begin{cases} (1 - j + 2j) \dot{I}_1 - 2j \dot{I}_2 = \dot{U}_s \\ - 2j \dot{I}_1 + 2j \dot{I}_2 = - \dot{U}_1 \\ 2 \dot{I}_3 = \dot{U}_1 \end{cases}$$

辅助方程

$$\dot{I}_3 - \dot{I}_2 = 3 \dot{U}_1$$

整理可得

$$\begin{cases} (1 + j) \dot{I}_1 - 2j \dot{I}_2 = \dot{U}_s \\ - 2j \dot{I}_1 + 2j \dot{I}_2 + 2 \dot{I}_3 = 0 \\ \dot{I}_2 + 5 \dot{I}_3 = 0 \end{cases}$$

用克莱默法则解方程得

$$\dot{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + j & - 2j & \dot{U}_s \\ - 2j & 2j & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + j & - 2j & 0 \\ - 2j & 2j & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{- j \dot{U}_s}{4j + 4}$$

则有

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_s} = \frac{2 \dot{I}_3}{\dot{U}_s} = \frac{- j}{2 + j2} = 0.353 \angle - 135^\circ$$

电压比是复数,其幅角说明两个电压的相位差,可以看出 \dot{U}_2 对 \dot{U}_s 的相移是 $- 135^\circ$ 。

方法二 用节点分析法

对图(b), 设 \dot{U}_2 为节点电压变量, 且有 $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$, 只须列出一个节点电压方程

$$\left[\frac{1}{1 - j} + \frac{1}{2j} + \frac{1}{2} \right] \dot{U}_2 = 3 \dot{U}_2 + \frac{\dot{U}_s}{1 - j}$$

解方程得

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_s}{(1 - j) \left[\frac{1}{1 - j} + \frac{1}{2j} + \frac{1}{2} - 3 \right]}$$

同样可以得到

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_s} = 0.353 \angle - 135^\circ$$

例 7-8 试找出图 7-28 交流电桥的平衡条件。

解 根据电桥平衡原理可知, 当 a、b 间的指示仪表两端等电位或通过的电流为零时电桥平衡。

可以推出 a、b 等电位的条件是

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$$

或 $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$ (7-22)

这里应注意, 式(7-22)是一个复数方程, 所以实际上包含两个实数方程:

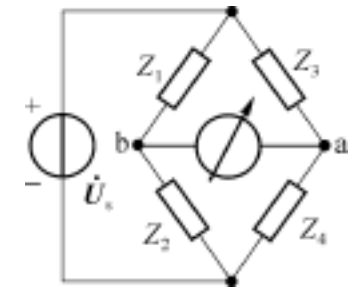


图 7-28 例 7-8 交流电桥

阻抗模关系

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$$

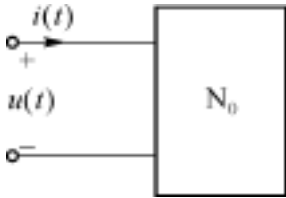
幅角关系

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$$

当两个关系都满足时,交流电桥平衡。由于交流电桥的平衡受制于两个因素,在实验室中实际交流电桥的平衡调节是比较复杂的。

7 5 正弦稳态电路的功率

正弦稳态电路的分析与电阻电路的分析有相似之处,也有许多不同之处。正弦稳态电路



的功率比电阻电路的功率要复杂得多。这里研究无源二端网络的功率,图 7-29 所示二端网络 N_0 可以是一个元件组成,也可以是多个元件组合的结果。设图示正弦电压、电流分别为

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

图 7-29 无源二端网络

在关联参考方向下,按功率的计算公式并用三角公式整理为

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\varphi_u - \varphi_i) + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \\ &= UI \cos \varphi_{ui} + UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \end{aligned} \tag{7-23}$$

其中 $\varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i$,即 φ_{ui} 是电压与电流的相位差。

从式(7-23)中看到功率也是时间的函数,因此称为瞬时功率,其波形如图 7-30 所示。式(7-23)中第一项是确定值(如图中与 t 轴平行的虚线所示),第二项则是时间的函数,两项相加的结果形如图中 p 曲线。它是以 $UI \cos \varphi_{ui}$ 为中心线,以 UI 为振幅的频率为 2ω 的正弦波。由于电压与电流存在相位差 φ_{ui} ,所以曲线有一部分在 t 轴的下方(如 p 曲线中阴影部分),说明瞬时值有正有负。因而反映出无源二端网络 N_0 在正弦稳态电路中的物理现象:在一段时间内二端网络 N_0 从外电路吸收功率,而另一段时间内又向外电路释放功率。若 $\varphi_{ui} = 0$,二端网络 N_0 呈纯电阻性, $UI \cos \varphi_{ui} = UI$, p 曲线上升至阴影部分消失,表现出电阻总是吸收功率的特征;若 $\varphi_{ui} = \pm 90^\circ$, $UI \cos \varphi_{ui} = 0$,二端网络 N_0 呈纯电抗性(纯感抗或纯容抗), p 曲线下降为以 t 轴为中心线的正弦波,表现出纯电抗网络从外电路吸收功率后,又全部释放给外电路的特征;而当 $0 < \varphi_{ui} < 90^\circ$ 时,从外电路吸收的功率大于向外电路释放的功率,曲线即如图 7-30 中所画。

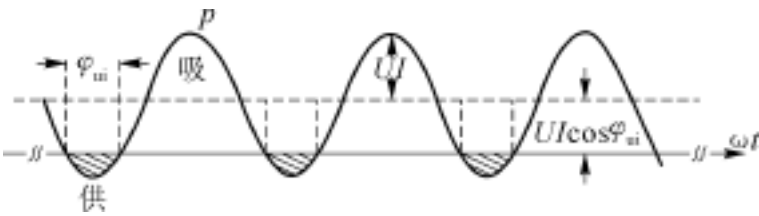


图 7-30 无源二端网络的瞬时功率

7 5 .1 无源二端网络的平均功率

平均功率指瞬时功率的平均值。瞬时功率具有周期性,所以平均功率用瞬时功率一周

期的平均值定义,可用大写字母 P 表示为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt$$

将式(7-23)代入,很容易计算出

$$P = UI \cos \varphi_{ui} \tag{7-24}$$

这就是无源二端网络的平均功率。平均功率实质上是电阻热效应的描述,所以平均功率也称为有功功率。平均功率的单位为瓦特(W)。由式(7-24)可见,无源二端网络的平均功率不仅与支路的电压、电流有效值有关,而且和电压与电流的相位差有关。因此网络为纯电阻性时 $P = UI$,而为纯电抗性时 $P = 0$ 。

若将无源二端网络等效为复数阻抗 $Z = R + jX$,画出串联等效电路如图 7-31(a)所示,其上电压相量与电流相量均按关联参考方向设置。画出相量图如图(b)所示,图中假设阻抗 Z 为感性,所以电压相量 \dot{U} 超前于电流相量 \dot{I} ,它们的夹角是 φ_{ui} 。 \dot{U} 可以分解为两个分量,一个是与电流同相的电压 \dot{U}_R ,另一个是与电流垂直的 \dot{U}_X ,分别是等效阻抗实部和虚部的电压,从图中直接可看出 \dot{U}_R 等于 \dot{U} 在电流方向的投影,即 $\dot{U}_R = \dot{U} \cos \varphi_{ui}$ 。与有功功率 $P = UI \cos \varphi_{ui}$ 相比较,也可以表示为

$$P = P_R = U_R I = I^2 R = \frac{U_R^2}{R} \tag{7-25}$$

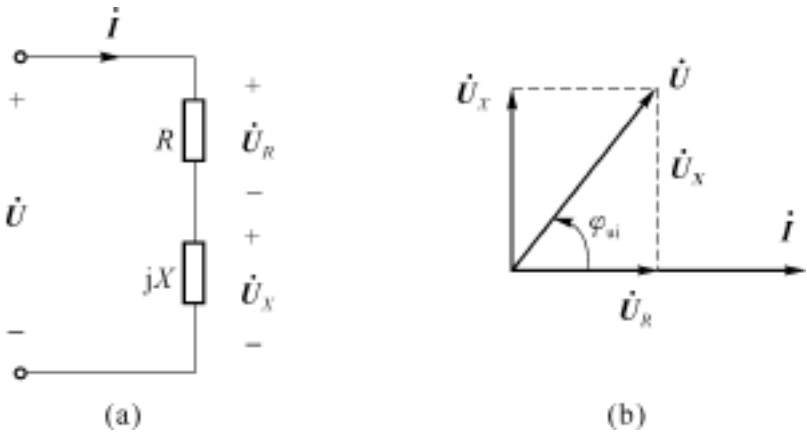


图 7-31 无源二端网络的平均功率

式(7-25)说明二端网络的平均功率,就是支路中电阻部分吸收的功率。从能量守恒的规律可以推论,二端网络吸收的总平均功率等于各个电阻所吸收的功率之和,即 $P = P_R$ 。

式(7-25)的含义是丰富的,它给出了计算平均功率的多个公式,结合周期信号有效值的定义是容易理解的,这里不作详细解释。

7 5 2 无功功率

电压 U 在电流 I 方向的分量 U_R 与 I 产生有功功率,而电压 U 的另一个分量 U_X 不能与电流 I 产生有功功率,因为它们互相垂直。将其定义为无功功率,用大写字母 Q 表示为

$$Q = UI \sin \varphi_{ui} \tag{7-26}$$

这是描述由于无源二端网络中电抗分量的存在而引起网络与外电路之间能量的可逆特性,其中电压分量 $U_X = U \sin \varphi_{ui}$ 。

当无源二端网络是纯电抗性时,无功功率 $Q = UI$ 达到最大。此时瞬时功率的波形如前面所述“ p 曲线下降,以 t 轴为中心的正弦波,表现出纯电抗网络从外电路吸收功率后,又全部释放给外电路的特征”。从瞬时功率的计算公式也可以推出

$$\begin{aligned} p &= u \cdot i = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= UI \cos \varphi_{ui} [1 + \cos 2(\omega t + \varphi_u)] + UI \sin \varphi_{ui} \sin 2(\omega t + \varphi_u) \end{aligned} \tag{7-27}$$

式中第一项始终为正即是从外电路吸收功率,第二项反映出二端网络与外电路交换能量的特性,其振幅就是无功功率 $Q = UI \sin \varphi_{ui}$,由此可以理解无功功率的含意:无功功率 Q 是瞬时功率中可逆分量的最大值(幅值),反映了网络与电源往返交换能量的情况。

无功功率也具有功率的量纲,但为了区别于有功功率,基本单位是乏(Var)。纯电感支路无功功率 $Q = UI$,纯电容支路无功功率 $Q = -UI$;而纯电阻支路无功功率 $Q = 0$ 。

7 5 3 视在功率与功率因数

视在功率 S 是支路电压有效值与电流有效值的乘积, $S = UI$ 。视在功率用来标志二端网络可能达到的最大功率。在实际应用中用它来表示设备的容量。例如一台发电机是按照一定的额定电压和额定电流值来设计和使用的,在使用时,如果电压或电流超过额定值,发电机就可能遭到损坏。一般电器设备都是以额定视在功率来表示它的容量。视在功率不是设备工作时消耗的真正功率,为了区别于平均功率,其单位用伏安(VA)表示。

一般情况下平均功率小于视在功率,即视在功率要打一个折扣才是平均功率。定义平均功率与视在功率的比值为功率因数,用 $\cos \varphi_{ui}$ 表示,即

$$\cos \varphi_{ui} = \frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi_{ui}}{UI} \tag{7-28}$$

从功率因数就可以知道设备容量的使用情况。在动力系统中为了充分利用电力,发电机提供的功率要尽可能地转化为负载的有功功率,这样功率因数就成为重要的参考指标。不同性质负载的电路,有不同的功率因数值。只有功率因数为 1 时,电源提供的视在功率才全部转为负载的有功功率。为了充分利用设备容量,应当尽量提高功率因数。因为大多数设备是感性支路,可在系统中配以适当的电容来提高功率因数。

例 7-9 图 7-32(a)所示的电路是日光灯工作电路的简化模型, L 为镇流器的理想模型,电阻 R 是 40W 日光灯管的理想模型,电源是 220V、50Hz 的正弦电源。试求电路中的电流,问保证日光灯管正常工作的前提下,为使电路的功率因数为 1,应配以多大容量的电容器。

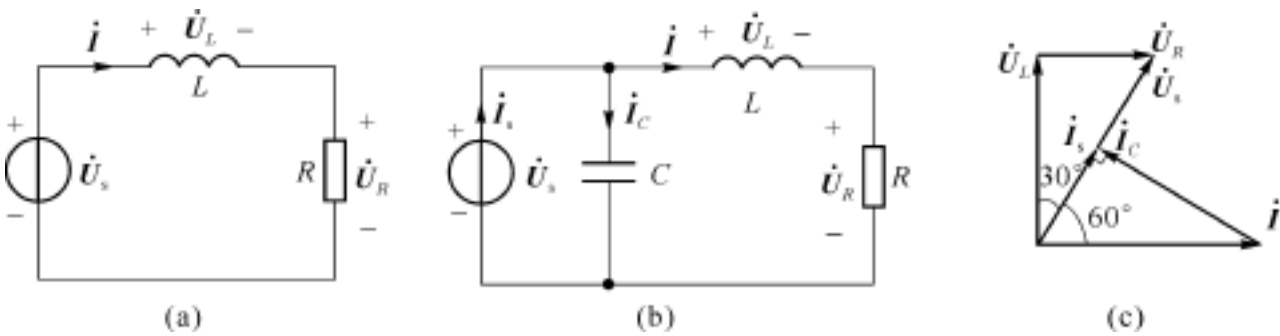


图 7-32 例 7-9 电路和相量图

解 根据日光灯的瓦数及工作电压,可以方便地求出电路的工作电流

$$I = \frac{P}{U_R} = \frac{40}{110} = 0.364 \text{ A}$$

这个电路的负载是 R 与 L 串联的感性负载,可以算出其功率因数

$$\cos \varphi_{ui} = \frac{P}{S} = \frac{P}{U_s I} = \frac{40}{220 \times 0.364} = 0.5$$

在电源电压一定时,功率因数取决于作为负载的日光灯电路(RL 串联电路)。因此,需设法使此电路的功率因数提高到 1,即在不改变日光灯正常工作的前提下,设法使电源供出的视在功率等于有功功率。要做到这点,必须设法使电源的负载具有纯电阻性。因而需要配上合适的电容。为了不影响日光灯的正常工作电压,这个电容必须跨接在日光灯工作电路上,如图 7-32(b)所示。

当电路的功率因数为 1 时,电源电压和电源电流必定同相位。根据这个特点画出其相量图,如图(c)所示。从图中直角三角形关系可知

$$I_C = I \sin 60^\circ = 0.315 \text{ A}$$

所以,由
$$\frac{1}{C} = \frac{U_s}{I_C}$$

可得
$$C = \frac{I_C}{U_s} = \frac{0.315}{2 \times 50 \times 220} = 4.56 \mu\text{F}$$

即:只要配以 $4.56 \mu\text{F}$ 的电容器,则图 7-32(b)的电路功率因数即为 1,电源供出的视在功率全部为有功功率。

将本例提高功率因数的方式应用于长距离供电线路,其经济效益将更加明显。实际输电线路含有不可忽略的阻抗,所以有以下结论:

- (1) 以同样高的电压输送同样大的功率所需的电流可以减少,可减少线路损耗。因为 $P = UI \cos \varphi$,当 $\cos \varphi$ 增加时 I 下降。
- (2) $\cos \varphi$ 增加则 $\sin \varphi$ 下降,无功功率 $Q = UI \sin \varphi$ 减少,减少负载与电源之间的能量交换,也可以减少交换过程中的无谓的能量损失。

以上介绍了正弦交流电路的多个功率的名称,在使用中若不加说明地提到功率,一般是指平均功率。

7.5.4 复功率

复功率是通过电压相量和电流相量来研究正弦稳态电路功率的一种方法。复功率用 S 来表示。若在关联参考方向下,支路电压相量为 $\dot{U} = U \angle \varphi_u$,支路电流向量为 $\dot{I} = I \angle \varphi_i$,那么,此电流相量的共轭相量为 $\dot{I}^* = I \angle -\varphi_i$,定义复功率

$$S = \dot{U} \dot{I}^* = UI \angle \varphi_{ui} = UI \cos \varphi_{ui} + j UI \sin \varphi_{ui} = P + jQ \tag{7-29}$$

式(7-29)中表示的复功率把有关功率的概念一起表示出来了。它的极坐标形式中,幅度是视在功率 S ,幅角是电压与电流的相位差,也可以说幅角的余弦是功率因数;它的代数形式中,实部是有功功率,虚部是无功功率。复功率无论是用来计算功率还是作为记忆都比较方便。这里再推荐一种记忆方法——功率三角形,其优点是各量之间的关系一目了然,如图 7-33 所示。

应该指出,复功率是利用电压相量与电流相量的共轭量相乘来计算功率的,它本身既不是相量,也不是功率。引进了复功率

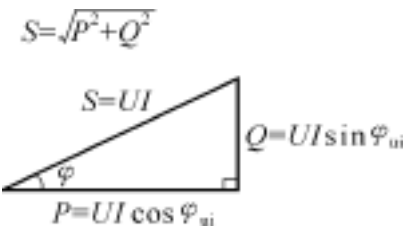


图 7-33 功率三角形

的概念,则正弦电路的相量分析法不仅可以研究正弦电路的电流、电压,也可以研究功率。
这里还可以用复功率来讨论功率守恒的概念。对一个有 b 条支路的完整电路,根据特勒根定理^{*},两个具有相同有向图的电路 N 和 N^* ,设电路 N 的支路电压为 U ,电路 N^* 的支路电流为 I^* ,可写出

$$\sum_{k=1}^b U_k I_k^* = 0 \tag{7-30}$$

式(7-30)可称为复功率守恒,进一步表示为

$$\sum_{k=1}^b (P_k + j Q_k) = 0$$

则有

$$\sum_{k=1}^b P_k = 0, \quad \sum_{k=1}^b Q_k = 0$$

即可说明电路的有功功率守恒,无功功率也守恒。

7.6 最大功率传输

最大功率传输是弱电系统关注的重要问题之一。本节首先从电阻网络的最大功率传输讨论一些基本概念,然后再研究正弦稳态电路的最大功率传输。

7.6.1 电阻网络的最大功率传输

一个线性含源二端网络,其两端接有负载如图 7-34(a)所示。假若电压源 U_s 和 R_s 固定不变而 R_L 可调,问负载 R_L 为何值时能够从电源获得最大功率。

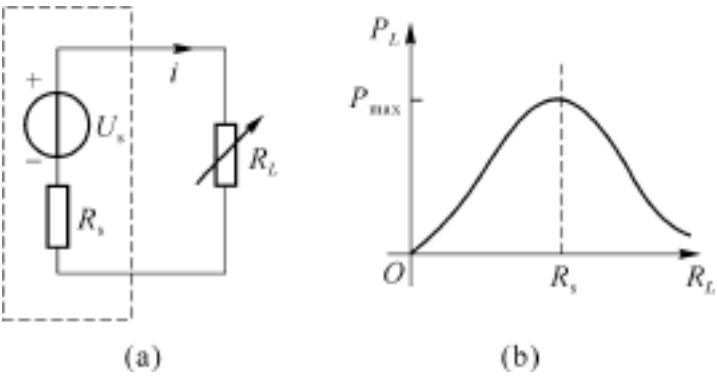


图 7-34 最大功率传输

当负载电阻 R_L 很大时,流过 R_L 的电流很小,因此 R_L 上所获得的最大功率 $i^2 R_L$ 很小;当 R_L 很小时,功率 $i^2 R_L$ 也不大。为了研究这个问题写出 R_L 上功率的计算公式为

$$p_L = i^2 R_L = \left[\frac{U_s}{R_s + R_L} \right]^2 R_L$$

上式所表示的曲线如图 7-34(b)所示,可知在 R_L 从零到无穷大之间,一定有一个值可使负载获得最大功率。可以用求极值的方法求出 p_L 最大时的 R_L 值。

$$\begin{aligned} \frac{dp_L}{dR_L} &= \frac{d}{dR_L} \left[\frac{U_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2} \right] = U_s^2 \left[\frac{(R_s + R_L)^2 - 2R_L(R_s + R_L)}{(R_s + R_L)^4} \right] \\ &= U_s^2 \frac{R_s - R_L}{(R_s + R_L)^3} = 0 \end{aligned}$$

因为 $U_s \neq 0$, 所以必须有

$$R_s = R_L \tag{7-31}$$

式(7-31)为最大功率传输条件, 即当负载电阻 R_L 等于电源内电阻 R_s 时, 电源传输给负载的功率最大, 这就是最大功率传输定理。在满足式(7-31)时电源与负载的联接称“匹配”。此时获得最大功率为

$$p_{L\max} = \left[\frac{U_s}{R_s + R_L} \right]^2 R_L \bigg|_{R_s = R_L} = \frac{U_s^2}{4 R_s} \tag{7-32}$$

式(7-32)为负载上获得最大功率的计算公式。

这里讨论最大功率传输定理的前提条件是电源的参数固定不变而负载可调。相反, 如果内阻 R_s 可调, 而负载 R_L 不变, 则 R_s 应尽量减小, 才能使负载获得较大的功率。当 R_s 等于零时, R_L 上获得最大功率。

例 7-10 电路如图 7-35(a)所示, 求负载获得最大功率时 R_L 的值和最大功率 $p_{L\max}$ 。

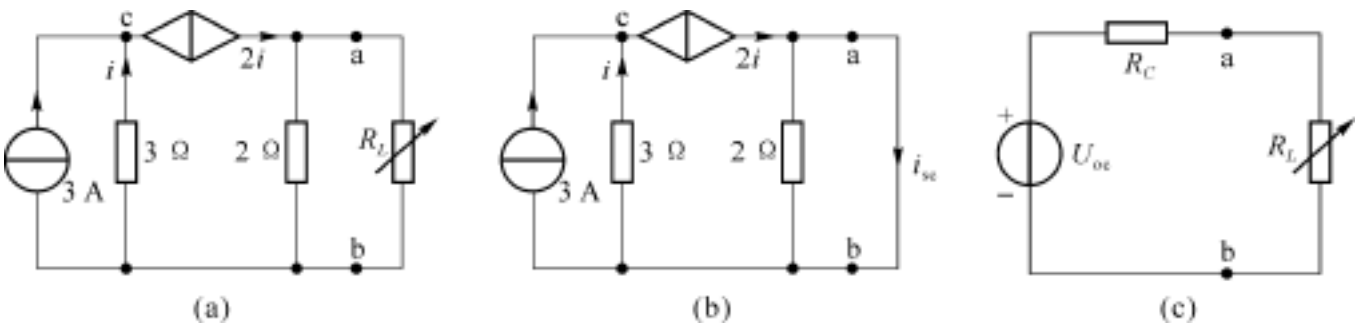


图 7-35 例 7-10 电路

解 先求图(a)中 a、b 以左的戴维南等效电路。a、b 端开路时, 由 c 点的 KCL 知:

$$\begin{aligned} 3 + i &= 2i \\ i &= 3\text{ A} \end{aligned}$$

故

所以开路电压 $U_{oc} = 2 \times 2i = 2 \times 2 \times 3 = 12\text{ V}$

再求短路电流 i_{sc} 和等效内阻 R_0 , 将 a、b 端短路如图(b)所示, 由 c 点的 KCL 得

$$\begin{aligned} 3 + i &= 2i \\ i &= 3\text{ A} \end{aligned}$$

所以

短路电流 $i_{sc} = 2i = 6\text{ A}$

等效内阻 $R_0 = U_{oc} / i_{sc} = 12 / 6 = 2$

戴维南等效电路如图 7-35(c)所示。可确定 $R_L = R_0 = 2$ 时, R_L 上可获得最大功率。最大功率为

$$p_{L\max} = \frac{U_{oc}^2}{4 R_0} = \frac{12^2}{4 \times 2} = 18\text{ W}$$

假设图 7-34 所示电路虚线框内是一个实际电源的电路模型, 当负载电阻 R_L 和电源内阻 R_s 相等时, 负载获得最大功率。此时电源内阻 R_s 上消耗的功率与 R_L 上吸收的功率相等, 所以最大功率传输时的效率 为

$$= \frac{\text{负载吸收功率}}{\text{电压源供出功率}} = \frac{i^2 R_L}{i^2 (R_s + R_L)} = 0.5 = 50\%$$

众所周知, 通信信号比较微弱, 功率很小, 因此在通信系统中所关注的不是系统的效率,

而是如何使接收端获得最大的信号功率。在匹配情况下,传输效率只有 50%,对于通信系统的功率容量来说是无紧要的,但在供电系统则不然,由于供电系统本身的功率很大,因而能有效地利用能量就十分重要,发电厂决不能容忍此类匹配造成的巨大损失,因而在供电系统中不是争取获得最大功率,而是争取获得最高效率。

对于一般的线性含源二端网络与负载之间的最大功率传输情况,有关传输效率的问题具有不同的结论。下面举例说明。

例 7-11 在图 7-36(a)所示电路中,

- (1) 求 R_L 获得最大功率时的电阻值。
- (2) 求戴维南等效电路中, R_L 获得最大功率时, R_L 上消耗的功率及其传输效率。
- (3) 求原电路中 R_L 获得最大功率时,各电阻消耗的功率及传输效率。

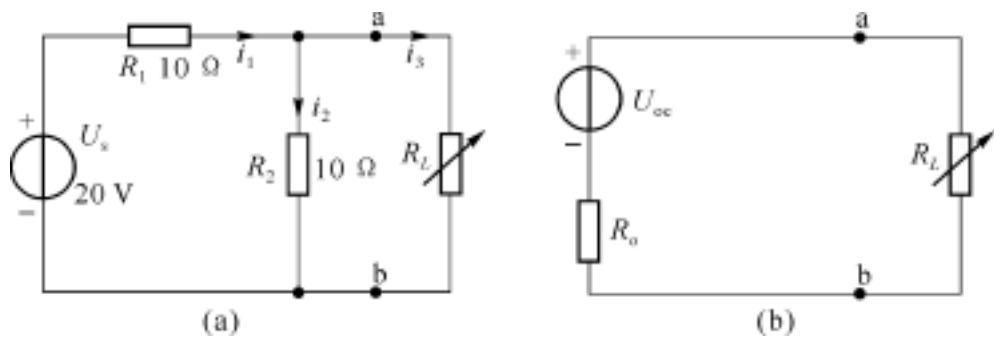


图 7-36 例 7-11 电路

解 图 7-36(a)中 a、b 以左的戴维南等效电路如图(b)所示,其中

$$U_{oc} = \frac{1}{2} \times 20 = 10\text{ V} \quad R_0 = 5$$

- (1) 当 $R_L = R_0 = 5$ 时, R_L 上可获得最大功率。
- (2) 图 7-36(b)所示戴维南等效电路中当 $R_L = R_0$ 时, R_L 上消耗的功率

$$p_{L\max} = \frac{U_{oc}^2}{4 R_0} = \frac{100}{20} = 5\text{ W}$$

传输效率 = 50%。

- (3) 在图 7-36(a)中,当 $R_L = 5$ 时,各支路电流为

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{U_s}{R_1 + \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}} = \frac{20}{10 + \frac{10 \times 5}{10 + 5}} = 1.5\text{ A} \\ i_2 &= \frac{R_L}{R_2 + R_L} i_1 = \frac{5}{10 + 5} \times 1.5 = 0.5\text{ A} \\ i_3 &= 1\text{ A} \end{aligned}$$

各电阻上消耗的功率:

$$\begin{aligned} p_{R1} &= i_1^2 R_1 = 1.5^2 \times 10 = 22.5\text{ W} \\ p_{R2} &= i_2^2 R_2 = 0.5^2 \times 10 = 2.5\text{ W} \\ p_{RL} &= i_3^2 \times R_L = 1^2 \times 5 = 5\text{ W} \end{aligned}$$

传输效率:

$$= \frac{R_L \text{ 上功率}}{\text{电源供出功率}} = \frac{p_{RL}}{p_{R1} + p_{R2} + p_{RL}} = \frac{5}{22.5 + 2.5 + 5} = \frac{5}{30} = 16.67\%$$

比较(2)、(3)两小题可知,当 R_L 上获得最大功率时,戴维南等效电阻 R_0 上消耗功率不等于原电路各电阻上消耗的功率,所以戴维南等效电路和原有二端网络的传输效率当然也不相等。前者 $= 50\%$,后者 只有 16.67% ,这再一次说明等效只是对外电路而言,对内并不等效。

7.6.2 正弦稳态电路的共轭匹配

在正弦交流稳态电路中,功率的匹配比较复杂,这里介绍两种基本的匹配方式。一个线性无源二端网络的相量模型如图 7-37 左侧支路,已知电源的内阻抗 $Z_s = R_s + jX_s$,负载阻抗 $Z_L = R_L + jX_L$ 。现在以负载阻抗的实部 R_L 及虚部 X_L 均允许可调的一种情况为例,找出这种情况下负载 Z_L 获得最大平均功率的条件。写出电路负载的平均功率

$$P_L = I^2 R_L$$

代入回路电流的有效值

$$I = \frac{U_s}{\sqrt{(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2}}$$

则

$$P_L = \frac{U_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2} \tag{7-33}$$

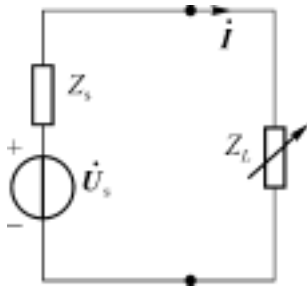


图 7-37 共轭匹配

功率与二参数 R_L 、 X_L 均有关,由于 X_L 只在 P_L 计算式的分母上,并注意到 X_L 的正负号是可以调节的,所以很容易看出只要调节 X_L ,使得

$$X_s + X_L = 0$$

即根据电源内阻抗的虚部特性来选择负载的特性以满足上式。此时电路呈电阻性,再进一步调节负载阻抗的实部 R_L 使之等于电源内阻抗 R_s 的实部,此时负载就能获得最大功率。

综合这两步的结果可知,当负载实部及虚部分别可调时,只要做到负载阻抗是电源内阻抗的共轭

$$Z_L = Z_s^* \text{ 即 } X_L = -X_s \text{ 和 } R_L = R_s \tag{7-34}$$

则负载 Z_L 可得到最大平均功率,其值为

$$P_{L\max} = \frac{U_s^2}{4R_s}$$

这种匹配方式称为共轭匹配。

例 7-12 图 7-38 电路中,左侧虚线框内是电源,参数不可调;右侧虚线框内是负载,参数也不可调。在电源与负载之间介入电感元件的目的是使负载获得最大功率,试求此电感量 L 。

解 首先找出负载的平均功率。由电路可知负载电流

$$I = \frac{U_s}{(R_s + j\omega L) + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}}$$

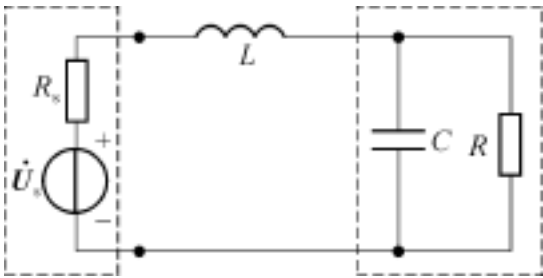


图 7-38 例 7-12 电路

负载的平均功率即是将负载等效为串联电路时,阻抗实

部的平均功率

$$P_L = \frac{U_s^2}{\left[R_s + \frac{1}{\frac{1}{R} + (\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{C})^2)} \right]^2 + \left[L - \frac{C}{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{C})^2} \right]^2} \cdot \frac{1}{R} \tag{7-35}$$

根据最大功率传输的含义,从式(7-35)可以看出,为使负载获最大功率,应从分母中

$$L - \frac{C}{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{C})^2} = 0$$

分析上式,找到此电路所介入的电感量

$$L = \frac{C}{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{C})^2}$$

但是由上式可见 L 值与电源的工作频率 有关,所以根据某个 算出的 L 值并不适合用于其他频率的正弦电源。这也正是前面提到的单频率等效概念的又一示例。

此例也说明了要使负载获得最大功率,其方法不是唯一的,要从实际条件出发来考虑。下面介绍另一种常用的方式。

7 6 3 正弦稳态电路的模匹配

对于图 7-37 的电源,如果负载 Z_L 不是任意可调,而是只能成倍地增加或减少,即其模值可以调整而幅角不可调。那么如何能使负载获得尽可能大的功率呢? 将负载表示为

$$Z_L = z_L \angle \varphi_L = z_L \cos \varphi_L + j z_L \sin \varphi_L$$

其中模值 z_L 可以调整,幅角 φ_L 不可调,由式(7-33)负载上功率可表示为

$$P = I^2 z_L \cos \varphi_L = \frac{U_s^2 z_L \cos \varphi_L}{(R_s + z_L \cos \varphi_L)^2 + (X_s + z_L \sin \varphi_L)^2}$$

用求极值的方法,此时变量是模值 z_L

$$\frac{dP}{dz_L} = 0$$

可求出 $z_L^2 = R_s^2 + X_s^2$,或 $z_L = \sqrt{R_s^2 + X_s^2}$ 时负载上可获得最大功率,即负载阻抗模值与电源内阻抗模值相等。此方法可称为模匹配。当然一般情况下此时获得的最大功率小于共轭匹配

时获得的功率。但这类匹配具有实用意义。在固定参数的电源和无法调整参数的负载之间接入一个理想变压器如图 7-39 所示,由于理想变压器可以成倍地改变负载阻抗,所以可实现模匹配。第 8 .4 和 8 .5 节中将详细介绍此类电路。由此可知最大功率传输问题的结论不是唯一的,而要根据实际条件去研究。下面例子介绍利用电抗元件组成匹配网络。因为电抗元件本身不消耗能量,所以此方法也具有实用意义。



图 7-39 模匹配

例 7-13 图 7-40 所示电路中电源电压相量的角频率 $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$, 电源内阻抗 $Z_0 = R_0 + jX_0 = (50 + j100)$, 负载为电阻 $R_L = 100$, 试设计一个匹配网络使负载获得最大功率。

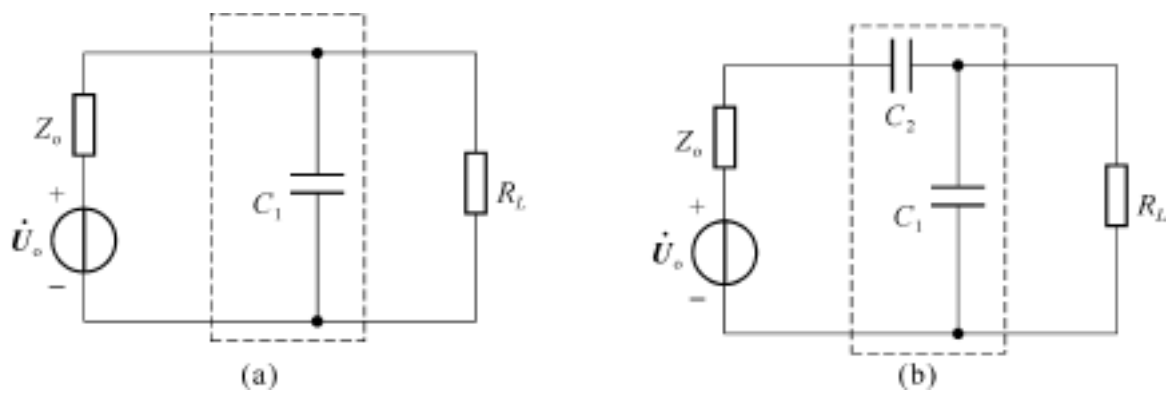


图 7-40 例 7-13 电路

解 为了使负载获得最大功率,考虑在电源与负载之间接入匹配网络,由于电源内阻抗是电感性的,首先接入电容与 R_L 并联,如图(a)中 C_1 , RC 并联支路阻抗

$$Z_1 = \frac{\frac{R_L}{jC_1}}{R_L + \frac{1}{jC_1}} = \frac{\frac{R_L}{C_1^2}}{R_L^2 + \left[\frac{1}{C_1}\right]^2} - j \frac{\frac{R_L^2}{C_1}}{R_L^2 + \left[\frac{1}{C_1}\right]^2}$$

表示为 $Z_1 = R_1 + jX_1$ 。令 Z_1 的实部等于内阻抗 Z_0 的实部,即

$$R_1 = \frac{\frac{R_L}{C_1^2}}{R_L^2 + \left[\frac{1}{C_1}\right]^2} = R_0 = 50 \tag{7-36}$$

可算出 $C_1 = 10 \mu\text{F}$ 。再计算出 Z_1 的虚部 $X_1 = 50$ 。

因仍不足以达到共轭匹配,再加上串联电容 C_2 如图 7-41(b)所示。要使

$$x_2 = \frac{1}{C_2} = 50$$

则需 $C_2 = 20 \mu\text{F}$, 此时便可在负载上获得最大功率,读者可自行验算。本例由于 $R_0 < R_L$, 所以首先采用了并联电容的方式,由式(7-36)才可有效地求出电容 C_1 。继而再求第二个串联电容。匹配网络的结构与参数要根据电路的具体情况而设计。这里既有电路理论的约束,也有经验的引导。

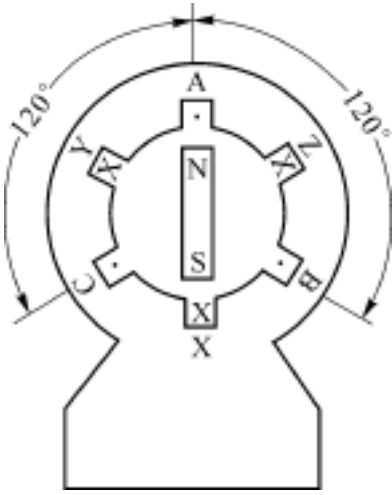
7.7 三相电路的基本概念

由于三相制在发电、输电和用电方面的优点,三相制是目前世界上通用的供电制式。这里要介绍它的基本知识。三相电路是一种特殊的正弦电路,因此关于正弦电路的分析方法完全适用于三相电路。

7.7.1 三相电源简介

三相电路是指由三相发电机向三相负载供电的系统。图 7-41 给出了三相发电机的示

意图。图中 AX、BY、CZ 是结构上相距 120° 的三个定子绕组, 分别称为三相电源的 A 相、B 相和 C 相。A、B、C 引出端称为始端, X、Y、Z 引出端称为末端。转子是一个电磁铁, 当在外力的作用下它以角速度 旋转时, 定子绕组将感应出三个相位依次相差 120° 的同频率的正弦电压, 自然它们的幅度也是相同的。它们的瞬时式及相应的有效值相量为



$$\begin{cases} u_A(t) = U_{pm} \cos t & \dot{U}_A = U_p \angle 0^\circ \\ u_B(t) = U_{pm} \cos(t - 120^\circ) & \dot{U}_B = U_p \angle -120^\circ \\ u_C(t) = U_{pm} \cos(t + 120^\circ) & \dot{U}_C = U_p \angle +120^\circ \end{cases}$$

(7-37)

式(7-37)中下标 p 表示的电压称为三相电源的三个相电压。其对应的对称三相电压的时域波形图和相量图分别如图 7-42 图 7-41 三相发电机结构示意图 (a)、(b) 所示。由波形图可以看出, 各相电压达到最大值的次序是不同的, 通常把相电压先后达到正的最大值的次序称为相序, 三相电源的相序是 A B C, 作为整体对外供电时相序不能任意颠倒。相序接错了电机就不能正常工作。

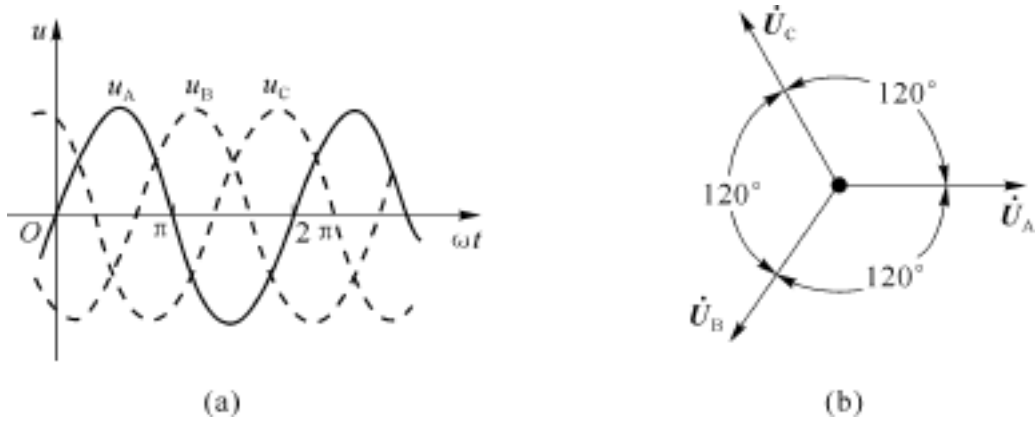


图 7-42 对称三相电压

从图 7-42(a) 的波形可以看出, 对称三相电压三个电压的瞬时值之和为零, 即:

$$u_A + u_B + u_C = 0$$

三个电压相量之和亦为零, 即:

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$$

这是对称三相电源的重要特点。

将三个末端联在一起, 称为中点, 而从三个始端向外电路供电, 如图 7-43(a) 所示, 称为星形三相电源。由于三个相的电压大小相等、频率相同、相位依次相差 120°, 这种关系称为对称, 所以构成的三相电源称为对称三相电源。

图 7-43 中的三个电源向外电路供电的引线称为火线或端线。从中点引出的连线称为中线或零线。火线之间的电压称为线电压, 按 A、B、C 的顺序依次观察线电压用相电压表示线电压为

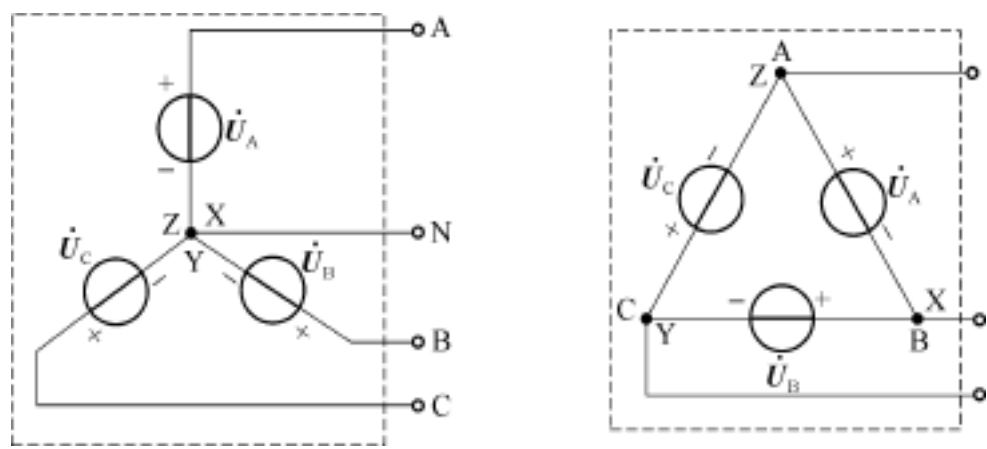


图 7-43 三相电源

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= \dot{U}_A - \dot{U}_B \\ \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_B - \dot{U}_C \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_C - \dot{U}_A \end{aligned}$$

画出相量关系如图 7-44 所示, 很容易得到线电压

$$\begin{cases} \dot{U}_{AB} = \sqrt{3} U_p \angle 30^\circ = U_l \angle 30^\circ \\ \dot{U}_{BC} = \sqrt{3} U_p \angle -90^\circ = U_l \angle -90^\circ \\ \dot{U}_{CA} = \sqrt{3} U_p \angle +150^\circ = U_l \angle +150^\circ \end{cases} \quad (7-38)$$

式 (7-38) 说明, 对称星形三相电源的线电压, 在数值上总为相电压的 $\sqrt{3}$ 倍, 而相位上依次相差 120° , 所以同样具有对称特征。如果将三相电源按图 7-43 (b) 所示构成三角形连接, 则称为三相三角形电源。三角形电源的线电压就等于相电压。应当指出, 由于三个相电压的对称性, 电源环路内不会出现电流, 然而一旦对称性被打破, 则将形成极大的环流, 这是绝对不允许的。

具有火线和中线的三相电路称为三相四线制, 没有中线的三相电路称为三相三线制。三相电路的负载统称三相负载, 有星形与三角形两种连接形式, 如图 7-45 所示。在配电系统中, 星形负载往往为四线制。图 7-45 中的各个阻抗都表示一个相的负载, 三个相的负载

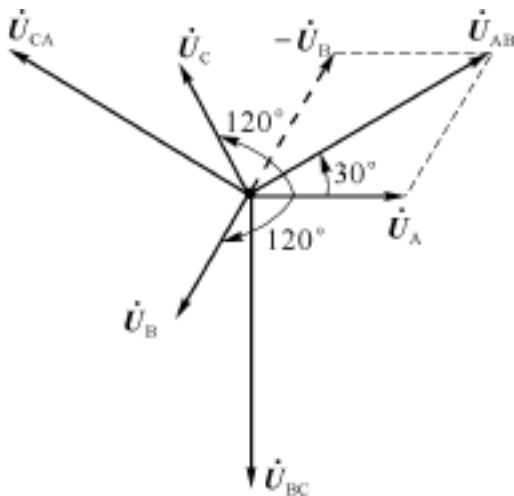


图 7-44 线电压与相电压

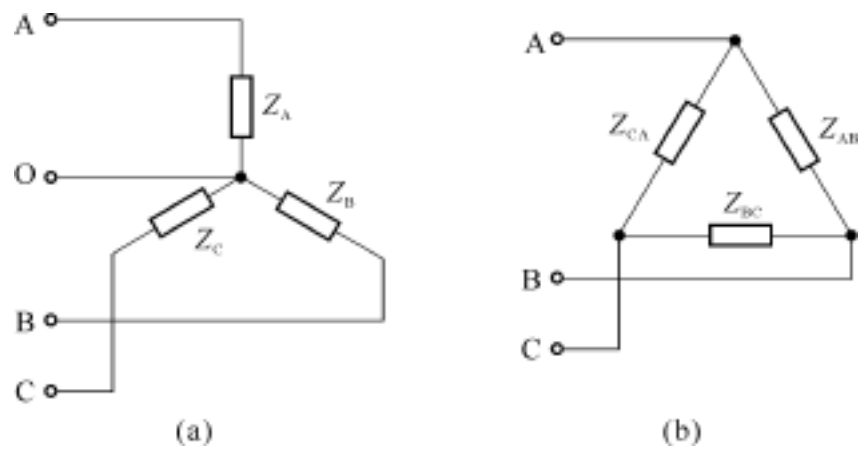


图 7-45 星形与三角形负载

可以是一个整体,(例如三相电动机),也可以是分别独立的负载(例如灯泡)。一个相的负载是独立负载时,称为单相负载,也就是说,有些三相负载是由许多单相负载组合而成的。

7.7.2 对称三相电路的分析

由对称三相电源向三相负载供电的电路,称为三相电路。根据供电、用电的要求,三相电源通过输电线与三相负载构成三相电路时,可以有多种连接方式。不论在哪种连接方式下,当三相的负载阻抗值相同,即 $Z_A = Z_B = Z_C = Z$ 时,称为对称三相负载。在对称三相电路中,三条火线上的电流及三相的相电流将分别具有大小相同,相位依次相差 120° 的对称特点。对于星形负载来说,线电流等于相电流;而对于三角负载,则线电流将为相电流的 $\sqrt{3}$ 倍。

这里以图 7-46 中的 Y-Y 对称三相电路为例,了解对称三相电路的运算特征。图中, Z_L 是输电线火线的等效阻抗(设三条火线阻抗也相等), Z_N 是中线的等效阻抗。

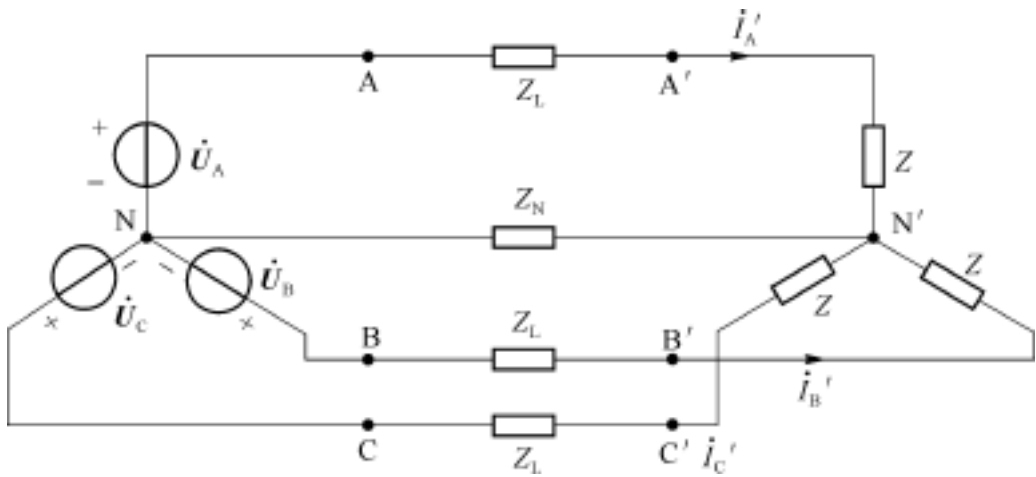


图 7-46 Y-Y 对称三相电路及例 7-14 的 Y-Y 等效电路

观察电源中点与负载中点间的电压。根据节点电压法：

$$U_{N\ N'} = [\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C] \frac{1}{Z_L + Z} \Big/ \left[\frac{3}{Z_L + Z} + \frac{1}{Z_N} \right]$$

由于在对称三相电路中 $\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$, 所以 $U_{N\ N'} = 0$ 。因此可以将 Z_N 用短接线替代, 则可将对称三相电路的分析, 分解为由三个互相独立的回路分析, 且由于对称三相电源 120° 的相位对称特点, 实际上只要通过一相独立回路分析就可以得到全部解答。

例 7-14 已知对称三相电源供电, 输电线阻抗 $Z_L = (3 + j4)$, 负载阻抗 $Z = (19.2 + j14.4)$, 构成三角形负载, 电源的对称线电压有效值为 380 V。求负载端的线电压与线电流。

解 根据对称 Y-Y 电路计算的特点, 可以将本问题构成图 7-47 所示的 Y-Y 对称三相电路求解。其中电源的相电压应为线电压的 $1/\sqrt{3}$ 倍, 根据对称性, 设其相位依次差 120° 。由 Y 转换公式, 将负载转为对称星形, 其每项阻抗为 $Z = (Z / 3) = (6.4 + j4.8)$ 。由 A 相回路可知, 负载端线电流

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z_L + Z} = \frac{220 \angle 0^\circ}{3 + j4 + 6.4 + j4.8} = 17.09 \angle -43.11^\circ \text{ A}$$

利用对称特征可直接写出

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A \angle -120^\circ = 17.09 \angle -163.11^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A \angle +120^\circ = 17.09 \angle 76.89^\circ \text{ A}$$

负载端线电压、相电压间仍服从图 7-44 的相量图关系,所以可知负载端的线电压为

$$\dot{U}_{AB} = \sqrt{3} \dot{U}_{AN} \angle +30^\circ = \sqrt{3} \dot{I}_A Z \angle 30^\circ = 236 \angle 23.79^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{BC} = 236 \angle 23.79^\circ - 120^\circ = 236 \angle -96.21^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{CA} = 236 \angle 23.79^\circ + 120^\circ = 236 \angle 143.79^\circ \text{ V}$$

7.7.3 不对称三相电路的分析

在三相电路中,只要有一部分负载不对称,就变成不对称三相电路,这时上述的各种对称特点将不再存在。这里仍以 Y-Y 来观察不对称情况。图 7-47 给出了不对称三相三线 Y-Y 结构的简单模型,由节点电压法可知

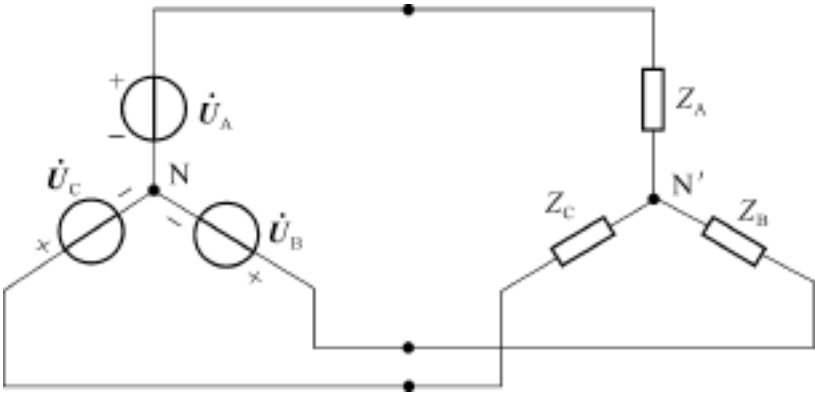


图 7-47 简单的不对称三相 Y-Y 电路

$$\dot{U}_{NN} = \frac{\frac{\dot{U}_A}{Z_A} + \frac{\dot{U}_B}{Z_B} + \frac{\dot{U}_C}{Z_C}}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C}}$$

因为负载不对称,所以 $\dot{U}_{NN} \neq 0$,那么负载各相的电压将不再对称,且其不对称程度受负载不对称程度的影响,负载相电压的不对称可能导致各相负载工作的不正常。然而,如果在 N、N 之间接上一条 $Z_N = 0$ 的中线,强迫 $\dot{U}_{NN} = 0$,那么,尽管负载不对称,但是各相是分别独立的,无互相影响,不会出现不正常的工作状态。所以在星形负载的配电系统中,往往使用中线。为使 $Z_N = 0$,中线应该选择高导电率,且比火线有更粗线径的材料。另外中线上不容许接入保险或开关。

例 7-15 三相四线制电路如图 7-48 所示,对称电源相电压为 220 V,接有电阻性不对称负载,均为白炽灯。A 相 1 500 W,B 相为 1 000 W,C 相为 600 W。试求:

- (1) 中线存在时的线电流;
- (2) 中线断开时,各相电灯电压多大。

解 (1) 各相电流就是线电流

$$I_A = \frac{P_A}{U_A} = \frac{1500}{220} = 6.82 \text{ A}$$

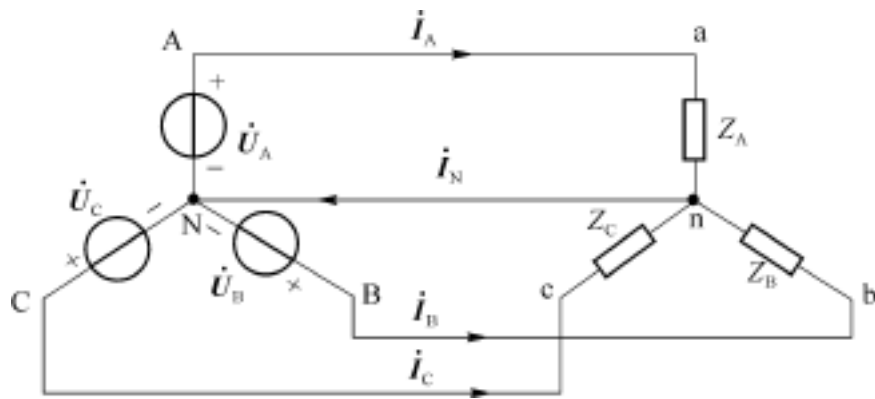


图 7-48 例 7-15 电路

电压与电流同相,所以 $I_A = 6.28 \angle 0^\circ \text{A}$ 。同理可得

$$I_B = \frac{P_B}{U_B} = \frac{1000}{220} = 4.55 \text{A}, \quad I_B = 4.55 \angle -120^\circ \text{A}$$
$$I_C = \frac{P_C}{U_C} = \frac{600}{220} = 2.73 \text{A}, \quad I_C = 2.73 \angle 120^\circ \text{A}$$

中线电流 $I_N = I_A + I_B + I_C = 3.55 \angle -26.4^\circ \text{A}$

(2) 中线断开后,以 N 为参考点,列出节点电压方程

$$U_{NN} = \frac{U_A Y_A + U_B Y_B + U_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = \frac{U_A G_A + U_B G_B + U_C G_C}{G_A + G_B + G_C}$$

上式中 A 相电导 $G_A = \frac{P_A}{U_A^2} = \frac{1500}{220^2} = 0.031 \text{S}$

同理可得各相电导 $G_B = 0.0207 \text{S}, G_C = 0.0124 \text{S}$

代入节点电压方程可求出 $U_{NN} = 55.5 \angle -26.4^\circ \text{V}$

各负载电压分别为 $U_{ZA} = U_A - U_{NN} = 172 \angle 82.7^\circ \text{V}$

$$U_{ZB} = 230 \angle -134^\circ \text{V}, \quad U_{ZC} = 268 \angle 127^\circ \text{V}$$

由于三相负载上电压不等,必出现 A 相电灯暗, C 相电灯很亮,或者烧坏,因此为了保证不对称负载每相电压保持 220 V,中线是不可缺少的。

7.7.4 三相电路的功率

三相电路是一种特殊的正弦电路。三相电路功率的分析也有它的特殊点,三相电路中的瞬时功率、有功功率与无功功率分别都存在平衡关系。这里讨论对称三相电路中功率的特征。

在三相电路中,三相负载吸收的有功功率 P 、无功功率 Q 分别等于各相负载吸收的有功功率、无功功率之和,即

$$P = P_A + P_B + P_C$$
$$Q = Q_A + Q_B + Q_C$$

若负载是对称三相负载,各相负载吸收的功率相同,三相负载吸收的总功率可表示为

$$\begin{cases} P = 3 P_A = 3 U_p I_p \cos \varphi \\ Q = 3 Q_A = 3 U_p I_p \sin \varphi \end{cases} \quad (7-39)$$

式(7-39)中 U_p 、 I_p 分别是每相负载上的相电压和相电流的有效值； φ 是每相负载的阻抗角（ φ 也等于每相负载上的相电压与相电流之间的相位差）。

当对称三相负载是星形联接时，有

$$U_l = \sqrt{3} U_p, \quad I_l = I_p$$

式(7-39)可改写成：

$$\begin{cases} P = 3 U_p I_p \cos \varphi = 3 \frac{U_l}{\sqrt{3}} I_l \cos \varphi = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi \\ Q = 3 U_p I_p \sin \varphi = 3 \frac{U_p}{\sqrt{3}} I_p \sin \varphi = \sqrt{3} U_l I_l \sin \varphi \end{cases}$$

当对称三相负载是三角形联接时，有

$$U_l = U_p, \quad I_l = \sqrt{3} I_p$$

式(7-39)也可以改写成

$$\begin{cases} P = 3 U_p I_p \cos \varphi = 3 U_l \frac{I_l}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi \\ Q = 3 U_p I_p \sin \varphi = 3 U_l \frac{I_l}{\sqrt{3}} \sin \varphi = \sqrt{3} U_l I_l \sin \varphi \end{cases}$$

由此可见，星形联接和三角形联接的对称三相负载的有功功率、无功功率均可以线电压、线电流表示为

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi \\ Q &= \sqrt{3} U_l I_l \sin \varphi \end{aligned} \tag{7-40}$$

式(7-40)中， U_l 、 I_l 分别是负载的线电压、线电流的有效值； φ 仍是每相负载的阻抗角。对称三相电路的视在功率和功率因数分别定义如下：

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ (或 } S^2 = P^2 + Q^2 \text{)}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

并将对称三相负载每相的功率因数 $\cos \varphi$ 定义为对称三相负载的功率因数。在不对称负载时作为整体不定义功率因数。

对称三相电路的功率有其特殊性，三相负载吸收的瞬时功率应等于各相吸收的瞬时功率之和，即：

$$p = p_A + p_B + p_C$$

对称时，设各相阻抗为 $Z = z \angle \varphi$ ，取 A 相电压为 $u_A = U_{pm} \cos \omega t$ ，则

$$\begin{aligned} p &= U_{pm} I_{pm} \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) + U_{pm} I_{pm} \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\omega t - 120^\circ + \varphi) \\ &\quad + U_{pm} I_{pm} \cos(\omega t + 120^\circ) \cos(\omega t + 120^\circ + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} U_{pm} I_{pm} \cos \varphi + \frac{1}{2} U_{pm} I_{pm} \cos(2\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} U_{pm} I_{pm} \cos \varphi + \frac{1}{2} U_{pm} I_{pm} \cos(2\omega t + \varphi - 240^\circ) \\ &\quad + \frac{1}{2} U_{pm} I_{pm} \cos \varphi + \frac{1}{2} U_{pm} I_{pm} \cos(2\omega t + \varphi + 240^\circ) \\ &= 3 U_p I_p \cos \varphi \end{aligned} \tag{7-41}$$

式(7-41)指出,对称三相负载吸收的瞬时功率为一常数。它恰等于平均功率 P 。这种功率平衡的特点说明发电机每瞬时供出的功率为一常数,也就是说任何瞬间发电机的机械转矩为一常数,表明电机在运转中无振动。这是对称三相电路的一个优点。

三相电路功率的测量有多种方式,在三相四线制电路中,因为有中线,可以方便地用功率表分别测量各相负载的功率,将测得的结果相加就可以得到三相负载的功率。若负载对称,只需测出一相负载的功率乘 3 即可得三相负载的功率。

在三相三线制电路中,由于没有中线,直接测量各相负载的功率不方便,可以采用二功率表法测量三相负载的功率。二功率表法所用的测量电路如图 7-49 所示。下面证明,这两个功率表指示的功率之和等于三相负载的功率。电路的电源是图 7-49 中所示的星形联接的三个电压源,电源电压分别是 u_A, u_B, u_C ,三相负载所吸收的总的瞬时功率等于这三个电源发出的瞬时功率之和,所以有

$$p = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C$$

(7-42)

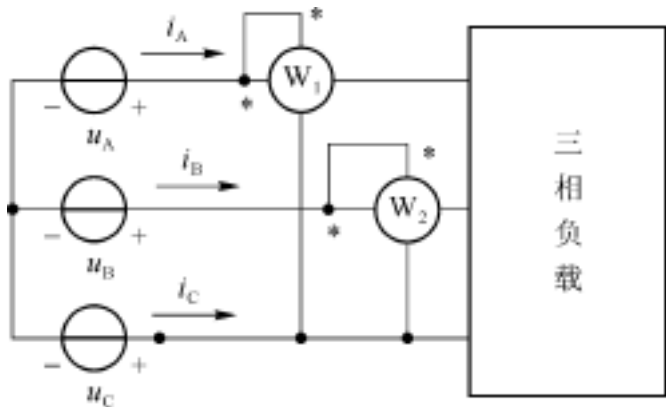


图 7-49 二功率表法测量三相负载功率

在三相三线制电路中 $i_A + i_B + i_C = 0$, 所以有 $i_C = -i_A - i_B$, 代入式(7-42), 得

$$p = (u_A - u_C) i_A + (u_B - u_C) i_B = u_{AC} i_A + u_{BC} i_B$$

对上式各项取其在一周期内的平均值,在正弦稳态下即有平均功率

$$P = U_{AC} I_A \cos \varphi_1 + U_{BC} I_B \cos \varphi_2$$

(7-43)

式中: φ_1 是 u_{AC} 和 i_A 之间的相位差; φ_2 是 u_{BC} 和 i_B 之间的相位差。

式(7-43)右端的两项分别是图 7-49 中功率表 W_1 、 W_2 的指示值,功率表 W_1 指示的是流过的电流 i_A 和两端电压 u_{AC} 产生的平均功率,功率表 W_2 指示的是流过的电流 i_B 和两端电压 u_{BC} 产生的平均功率。这就证明了这两个功率表指示的功率值之和等于三相负载吸收的总功率。

需要指出,在用二功率法测量三相负载功率时,每一功率表指示的功率值没有确定的意义,而两个功率表指示的功率值之和恰好是三相负载吸收的总功率。

7.8 多频率正弦稳态电路分析

前文强调了相量模型的单一频率等效的概念。当电路中出现多个不同频率的电源或含有多个频率分量的电源时,仍然可以用相量法分析,但要注意不同频率的正弦信号在时域中

可以相加,而它们各自的相量则不能相加。因为相加是无意义的。

7 8 .1 非正弦周期电路的近似计算

在实际应用中除了正弦波形外,非正弦周期电压或电流也是经常遇到的波形。按照傅立叶级数理论,如果周期函数满足一定的连续性和有界性条件即所谓的狄里赫利条件,则任意一个以 T 为周期的周期函数 $f(t)$ 均可展开为傅立叶级数即分解为不同频率正弦函数的线性组合,其一般形式为

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

换句话说周期信号是由直流分量和无穷多项不同频率的正弦分量相加而成。这些正弦分量的角频率是原周期信号角频率的整数倍,称为周期信号的谐波。而且谐波振幅随着频率的增高而趋于递减。

这里主要目的是解决电路对周期信号的响应计算问题。根据叠加定理,电路对周期信号的响应,应等于直流与各谐波分量单独作用时的响应之和。在实际应用中不可能也不必要计算无穷多谐波分量产生的响应,根据谐波分量的收敛性,一般只要计算到前三项或前四项,从工程观点来看即可认为满意了。因此这种计算方法使得非正弦周期信号的响应计算只能是近似结果。例 7-16 中的电源电压即可看成是某周期电压的傅立叶级数前四项的近似表达式。

例 7-16 已知 $u_s(t) = (10 + 100\cos t + 10\cos 2t + \cos 3t) \text{ V}$ 作用于图 7-50 所示电路,试求电压 $u_R(t)$ 。

解 设 $u_s(t)$ 的四个分量依次为 u_0 、 u_1 、 u_2 及 u_3 ,则

$$u_s(t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$$

用叠加定理计算每个电压分量单独作用时, $1\ \Omega$ 电阻上的电压。

当直流分量 $u_0 = 10 \text{ V}$ 作用时,电感相当于短路而电容相当于开路,因而

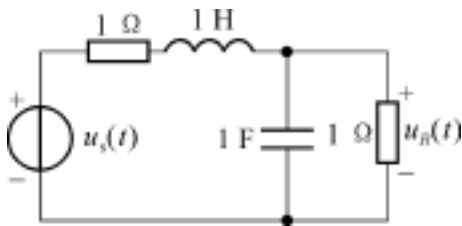


图 7-50 例 7-16 电路

$$u_{R0}(t) = 10 \times \frac{1}{1 + 1} = 5 \text{ V}$$

当各正弦信号项作用时,利用正弦电路的相量分析法,得电压关系式

$$\dot{U}_{Rm} = \dot{U}_{sm} \times \frac{\frac{1}{1 + j}}{1 + j + \frac{1}{1 + j}}$$

当 $u_1 = 100\cos t$ 作用时, $\omega = 1$

$$\dot{U}_{Rm1} = 100 \times \frac{\frac{1}{1 + j}}{1 + j + \frac{1}{1 + j}} = 44.7 \angle -63.4^\circ \text{ V}$$

求得

$$u_{R1}(t) = 44.7\cos(t - 63.4^\circ) \text{ V}$$

当 $u_2 = 10\cos 2t$ 作用时, $\omega = 2$

$$\dot{U}_{Rm2} = 10 \times \frac{\frac{1}{1+j2}}{1+j2+\frac{1}{1+j2}} = 2.24\angle -116.6^\circ \text{V}$$

求得 $u_{R2}(t) = 2.24\cos(2t - 116.6^\circ) \text{V}$

当 $u_3 = \cos 3t$ 作用时, $\beta = 3$

$$\dot{U}_{Rm3} = 1 \times \frac{\frac{1}{1+j3}}{1+j3+\frac{1}{1+j3}} = 0.108\angle -139.4^\circ \text{V}$$

求得 $u_{R3}(t) = 0.108\cos(3t - 139.4^\circ) \text{V}$

因而 $u_R(t) = u_{R0} + u_{R1} + u_{R2} + u_{R3}$
 $= [5 + 44.7\cos(t - 63.4^\circ) + 2.24\cos(2t - 116.6^\circ) + 0.108\cos(3t - 139.4^\circ)] \text{V}$

7.8.2 非正弦周期信号的有效值和平均功率

已知周期信号的有效值即其瞬时式的方均根值,将周期信号展开为傅立叶级数,很容易找到其有效值与各次谐波有效值的关系。设周期电压

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1} U_{mn}\cos(n\omega_1 t + \varphi_u)$$

则其有效值

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

式中

$$\begin{aligned} u^2(t) = & U_0^2 + 2 \sum_{n=1} U_{mn}\cos(n\omega_1 t + \varphi_u) + \sum_{n=1} U_{mn}^2\cos^2(n\omega_1 t + \varphi_u) \\ & + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}} \sum_{n=1} U_{mk}\cos(k\omega_1 t + \varphi_u) U_{mn}\cos(n\omega_1 t + \varphi_u) \end{aligned}$$

由于三角函数的正交性,所有交叉项乘积在一周期内的积分为零,容易得到

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1} U_{mn}^2} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{n=1} U_n^2} \tag{7-44}$$

式(7-44)说明周期信号的有效值等于各次谐波有效值平方和的平方根。

下面来观察非正弦周期电路中平均功率的计算。若无源二端网络在非正弦周期信号的作用下,在关联参考方向下端口电压和电流为

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1} U_{mn}\cos(n\omega_1 t + \varphi_{un})$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1} I_{mk}\cos(k\omega_1 t + \varphi_{ik})$$

则其吸收的平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt$$

代入 $u(t)$ 、 $i(t)$ 的傅立叶级数展开式,根据三角函数的正交性后只剩下 $k = n$ 时的各项,即

$$P = U_0 I_0 + \sum_{n=1} U_n I_n \cos \varphi_n = P_0 + \sum_{n=1} P_n \tag{7-45}$$

式(7-45)说明非正弦支路吸收的平均功率,等于各次谐波单独作用时支路吸收的平均功率之和。而交叉项的积分为零说明不同频率的电压与电流之间不产生平均功率。以上结论是三角函数正交性的运算结果,与线性时不变电路的叠加定理并不矛盾。

应该注意叠加定理不适用于瞬时功率,即不能用各次谐波单独作用时支路吸收的瞬时功率之和来表示支路吸收的瞬时功率,而只能根据支路的瞬时电压、瞬时电流表示瞬时功率。同时叠加定理也不适用于同频率正弦信号的功率计算,即当某一信号为两直流信号之和或两同频率正弦信号之和时,叠加定理对于计算功率是不成立的。

例 7-17 若无源二端网络端口电压和电流在关联参考方向下为

$$u(t) = (10 + 50\cos t + 5\cos 2t + \cos 3t) \text{ V}$$
$$i(t) = [1 + 6\cos(2t - 30^\circ) + 0.5\cos(3t + 45^\circ)] \text{ A}$$

求其电压有效值、电流有效值和平均功率。

解 由式(7-44)可以计算电压有效值和电流有效值分别为

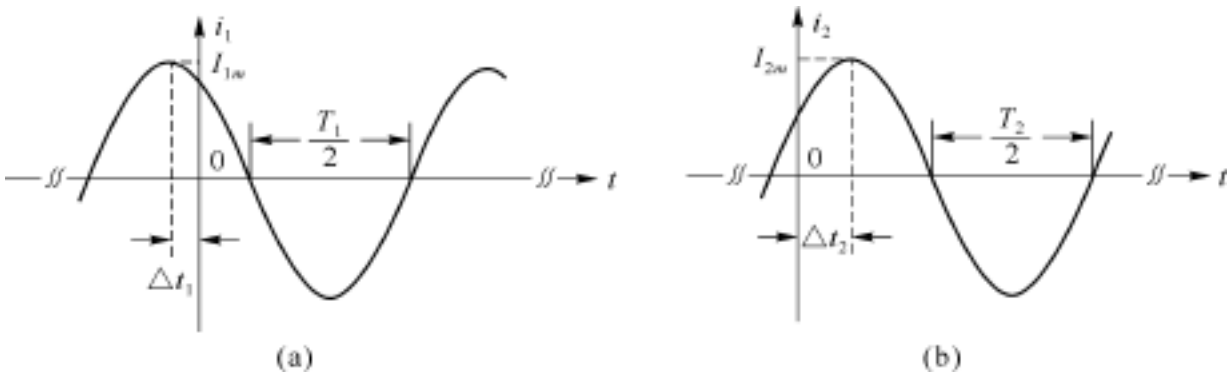
$$U = \sqrt{10^2 + 1/2(50)^2 + 1/2(5)^2 + 1/2(1)^2} = 36.9 \text{ V}$$
$$I = \sqrt{1^2 + 1/2(6)^2 + 1/2(0.5)^2} = 4.37 \text{ A}$$

根据不同频率的电压与电流之间不产生平均功率的结论和式(7-45)可知:

$$P = 10 \times 1 + 1/2(5 \times 6\cos 30^\circ) + 1/2(1 \times 0.5\cos 45^\circ) = 23.2 \text{ W}$$

习 题 七

7-1 题图 7-1(a)中, $I_{1m} = 100 \text{ mA}$, $T_1/2 = 0.0012 \text{ s}$, $t_1 = 0.0002 \text{ s}$, 图(b)中, $I_{2m} = 50 \text{ mA}$, $T_2/2 = 0.0006 \text{ s}$, $t_2 = 0.0002 \text{ s}$, 写出 i_1 及 i_2 的表达式。



题图 7-1

7-2 某电流有效值为 100 mA , 频率为 10^6 Hz , 作余弦变化, 求此电流经过最大值后, 多少时间才能达到 25 mA ?

7-3 已知 $u_1 = 10\cos 4t \text{ V}$, $u_2 = 20[\cos 4t + \sqrt{3}\sin 4t] \text{ V}$, 试确定 u_1 是超前还是滞后于 u_2 , 相位差是多少 ?

7-4 写出下列正弦量的相量, 分别画出各自的相量图。

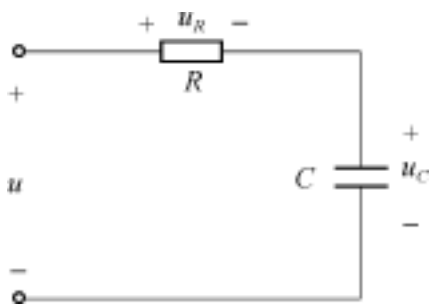
- (1) $i = -10\cos(t - 60^\circ) \text{ A}$
- (2) $u = -10\sin 2 \times 10^6(t - 0.2 \times 10^{-6}) \text{ V}$

- (3) $u = \cos 2 \pi f(t + 0.15 T) \text{ mV}$
(4) $u = 7.5 \cos 2 \pi f(t - 0.15 T) \text{ V}$

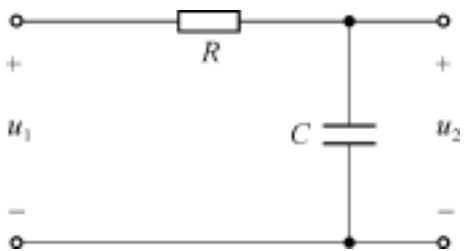
7-5 某正弦电路计算出的响应如下,已知电源为 $u_{s1}(t) = U_{s1} \cos \omega t \text{ V}$,试分别写出这些响应的瞬时式。若这些响应相量是在 $u_{s2}(t) = U_{s2m} \sin \omega t \text{ V}$ 作用下产生,这些响应的瞬时式又该是怎样的?

- (1) $\dot{U}_{1m} = \sqrt{2} \angle -240^\circ \text{ V}$ (2) $\dot{U}_{2m} = j5 \angle 30^\circ \text{ V}$ (3) $\dot{I}_{3m} = -j5 \text{ A}$
(4) $\dot{I}_{4m} = 5 \text{ A}$ (5) $\dot{U}_{5m} = 6e^{j45^\circ} \text{ V}$

7-6 题图 7-6 中, $u_R = 6 \cos \omega t \text{ V}$, $u_C = 8 \cos(\omega t - 90^\circ) \text{ V}$,求外加电压 u ,并画出电路的电压相量图。



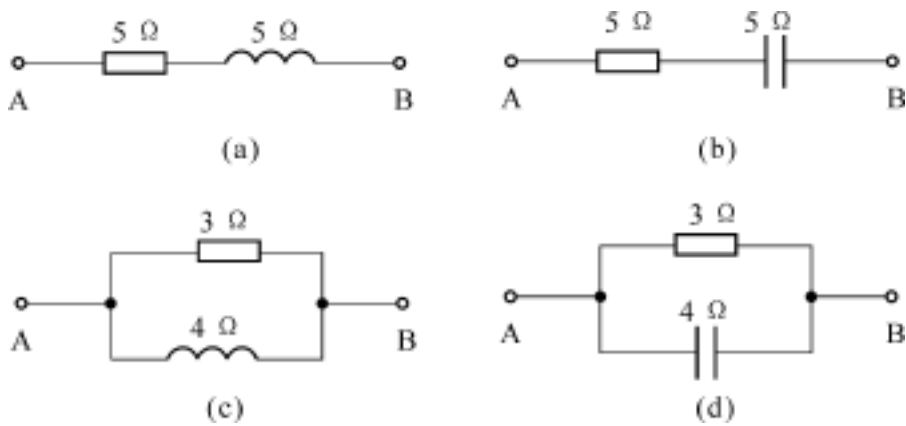
题图 7-6



题图 7-7

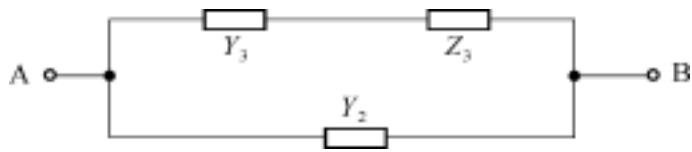
7-7 在题图 7-7 RC 电路中, $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 0.01 \mu\text{F}$,若 u_1 的有效值 $U_1 = 1 \text{ V}$,求在下列两种频率下的输出电压有效值 U_2 : (1) $f = 0.5 \text{ kHz}$; (2) $f = 10 \text{ kHz}$ 。

7-8 求题图 7-8 中各电路的阻抗 Z_{AB} 及导纳 Y_{AB} 。图中已给出各元件的阻抗模数。



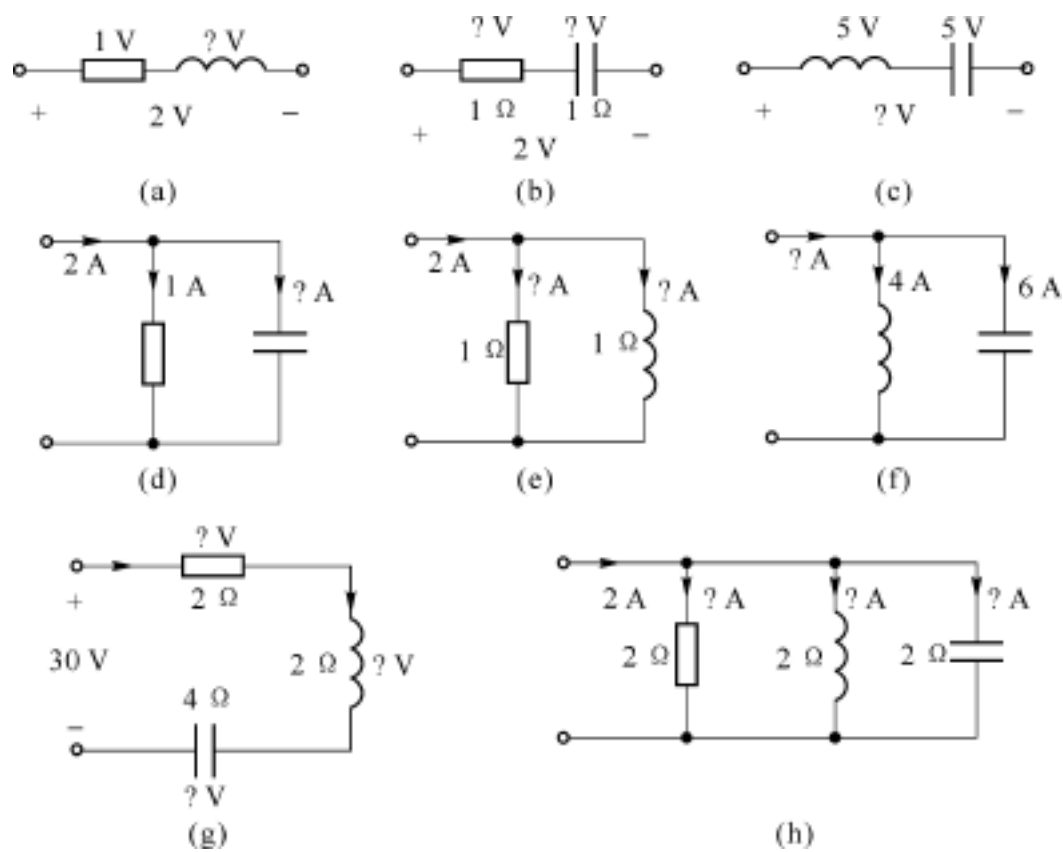
题图 7-8

7-9 求题图 7-9 的 Z_{AB} 及 Y_{AB} 。已知 $Y_3 = (0.9 - j1.2) \text{ S}$, $Y_2 = (0.5 - j0.5) \text{ S}$, $Z_3 = (2 - j5) \Omega$ 。



题图 7-9

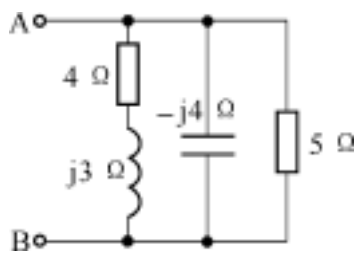
7-10 试对题图 7-10 中各个电路的问题作出解答(可借助于相量图),图中给出的电压、电流皆为有效值,待求的也是相应的有效值。



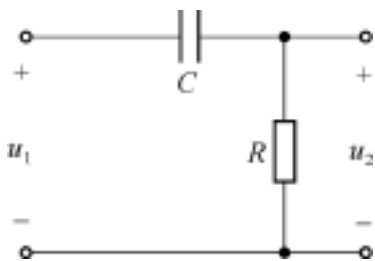
题图 7-10

7-11 题图 7-11 所示电路中,求复阻抗 Z_{AB} 和复导纳 Y_{AB} 。

7-12 题图 7-12 中, $R=1\text{k}\Omega$, 电源频率 $f=50\text{Hz}$, 要使 U_2 不小于 U_1 的 70.7%, C 值至少应取多大? 此时 U_2 对 U_1 的相移是多少?



题图 7-11



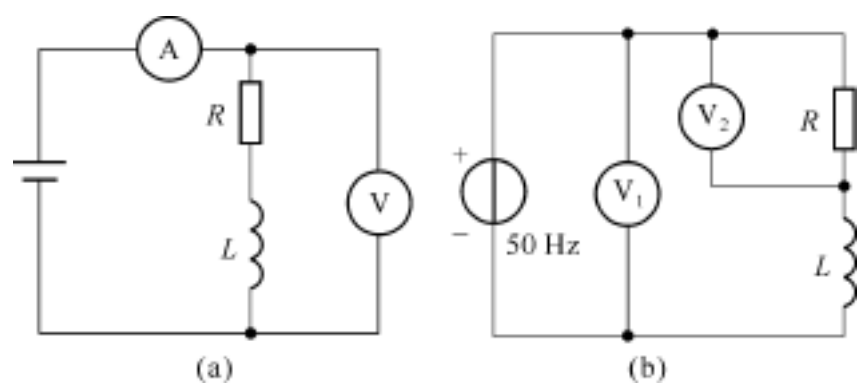
题图 7-12

7-13 60Ω 的电阻与 5mH 电感串联后,应并联多大容量的电容才能在使电路在 $\omega=24\times 10^3\text{rad/s}$ 时呈纯电阻性?

7-14 对 R, C 并联电路施加电流源 $i_0(t)=2\cos 5000t\text{mA}$, 电流源两端获电压 $u(t)=4\cos(5000t-45^\circ)\text{V}$, 求 R, C 值。

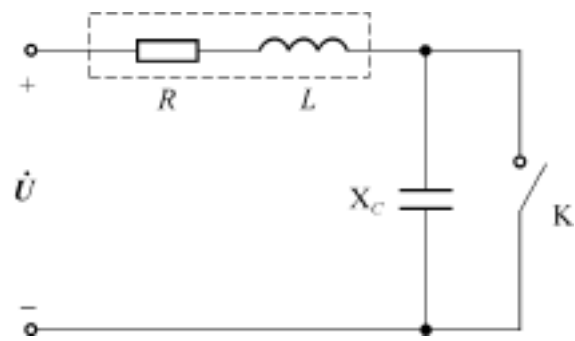
7-15 题图 7-15 中指示仪表皆为理想设备(只获取电流,电压数据不呈现降压、分流作用),对同一个 R, L 串联电路来说,在图(a)中直流电流表读数为 5A , 直流电压表读数为 20V ;在图(b)中交流电压表 V_1 读数是 50V , V_2 读数是 30V , 求 R 及 L 的值。

7-16 为确定线圈的参数(R, L), 将其与电容器串联构成题图 7-16 的电路, 施加有效值为 $U=120\text{V}$ 的正弦电压时, $X_C=48\Omega$, 若开关 K 闭合与打开时电路中电流有效值皆为 4A , 求 R 及 X_L 值; 并画出两种情况下的相量图。

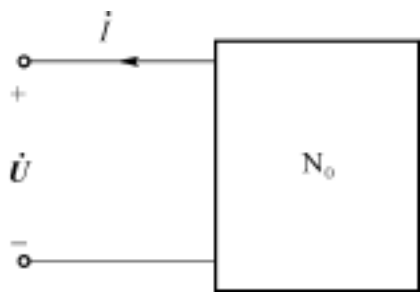


题图 7-15

7-17 题图 7-17 中 N_0 为无源二端网络, 已知其端口电压、电流相量分别为 $\dot{U}_1 = 1 \text{ V}$, $\dot{I} = 0.707 \angle 135^\circ \text{ mA}$ 。



题图 7-16



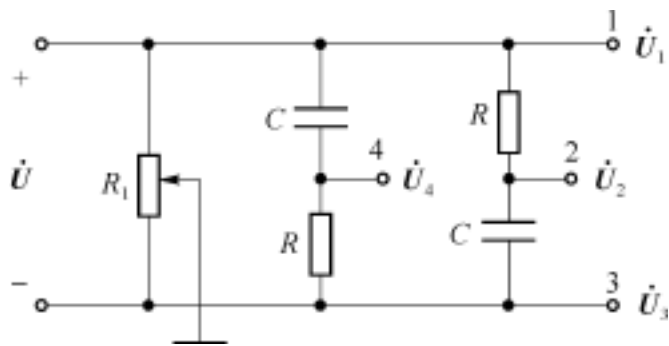
题图 7-17

(1) 画出 N_0 的串联等效电路和并联等效电路, 并给出 $f = 50 \text{ kHz}$ 的正弦电源工作时等效电路呈现的参数值;

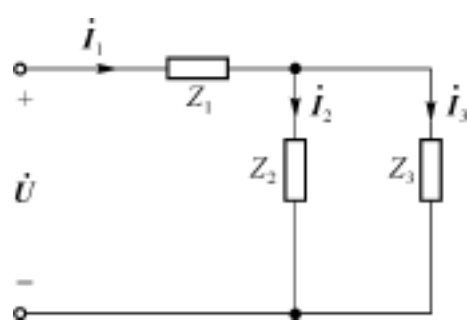
(2) 当电源的有效值不变, 频率改变时, 等效电路呈现的参数值是否改变?

7-18 电路如题图 7-18 所示, 输入电压为 \dot{U} , 试证当满足 $R = 1/\omega C$ 时, 则 1, 2, 3, 4 端子对 R_1 中点的电压 $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3$ 及 \dot{U}_4 彼此数值相等, 相应依次相差 90° 。

7-19 电路如题图 7-19 所示, 其中 $Z_2 = (6 + j6\sqrt{3}) \text{ k}\Omega$, $Z_3 = 12 \text{ k}\Omega$, 有效值 $I_2 = 10 \text{ mA}$, $U = 60\sqrt{3} \text{ V}$, I_2 的相位滞后 \dot{U} 的相位为 $\pi/6$, 求 $Z_1 = ?$



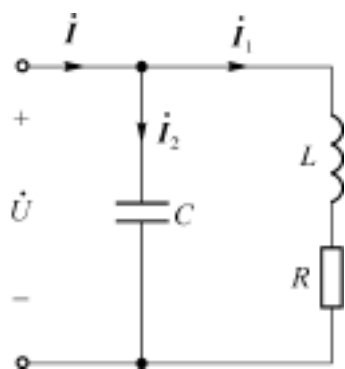
题图 7-18



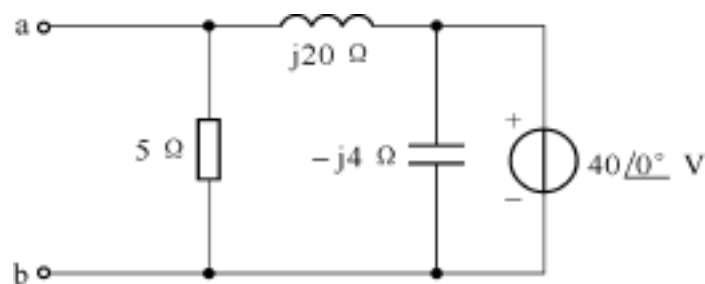
题图 7-19

7-20 题图 7-20 电路中, 正弦电流有效值 $I = I_1 = I_2$, 电路消耗的平均功率 $P = 866 \text{ mW}$, 电源电压有效值 $U = 100 \text{ V}$, 频率 $f = 50 \text{ Hz}$, 求各支路参数 R, L 及 C 。

7-21 求题图 7-21 电路以 a、b 为输出端的戴维南及诺顿等效电路。



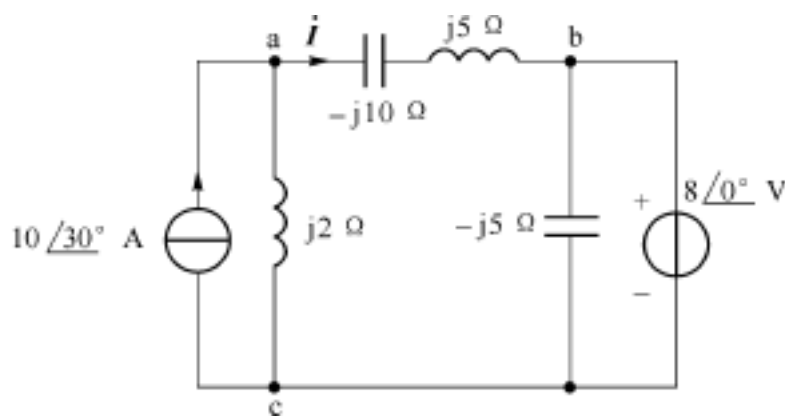
题图 7-20



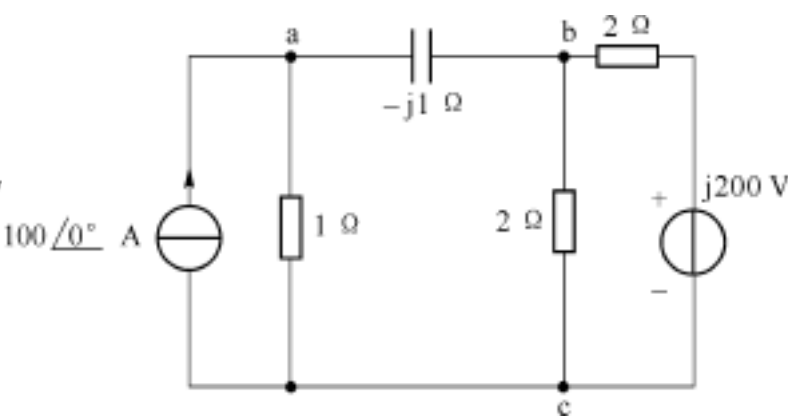
题图 7-21

7-22 试用叠加定理求题图 7-22 中 ab 支路上的电流 I 。

7-23 电路如题图 7-23 所示。用节点分析法求节点电压及流过电容的电流 I_{ab} 。

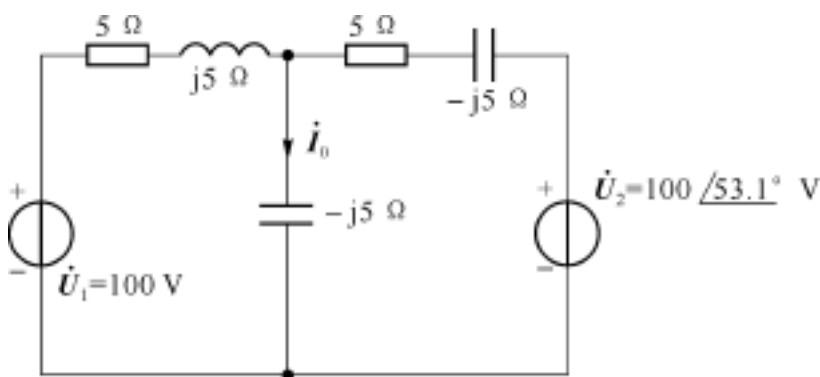


题图 7-22



题图 7-23

7-24 电路如题图 7-24 所示。试用：(1)网孔法，(2)节点法，(3)戴维南定理，求 I_0 。



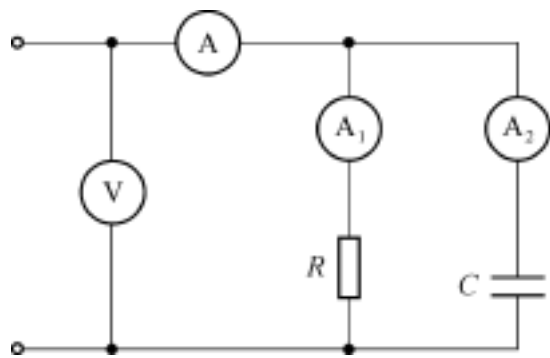
题图 7-24

7-25 已知题图 7-25 中，各理想表的读数分别为 $(A_1)3A$ ， $(A_2)4A$ ， $(V)100V$ ，求(1) (A) 的读数，(2) 电路的阻抗及导纳，(3) 电路消耗的功率。

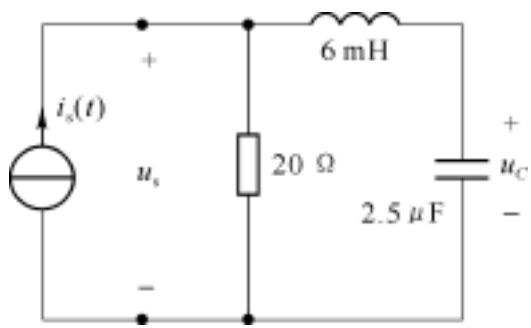
7-26 电路如题图 7-26 所示，已知 $i_s(t) = 5\sin(10^4 t - 20^\circ) A$ ，试求(1) 电路的输入阻抗 Z_{ab} 并说明电路的性质，(2) \dot{U}_s 及 $u_s(t)$ ，(3) \dot{U}_C 及 $u_C(t)$ ，(4) 电路吸收的平均功率 P 。

7-27 题图 7-27 电路的电源是频率为 $10^3 Hz$ 的正弦电源， $L = 0.1H$ ，当 R 从 0 调至无穷大时，电路总电源有效值 I 不变，问 C 值应等于多少？

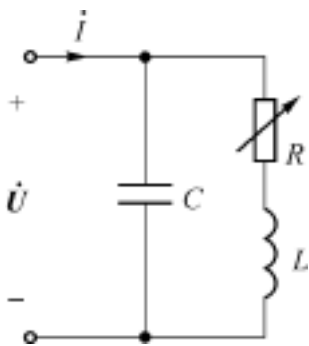
7-28 题图 7-28 电路输入电压为 \dot{U}_1 ，负载两端电压为 \dot{U}_2 ，试求 $\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}$ 与 Z 无关的条件及在此条件下的 $\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}$ 值。



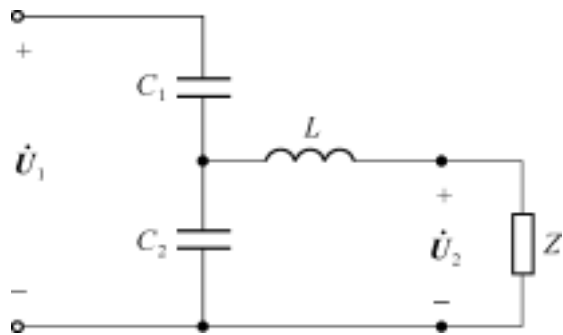
题图 7-25



题图 7-26

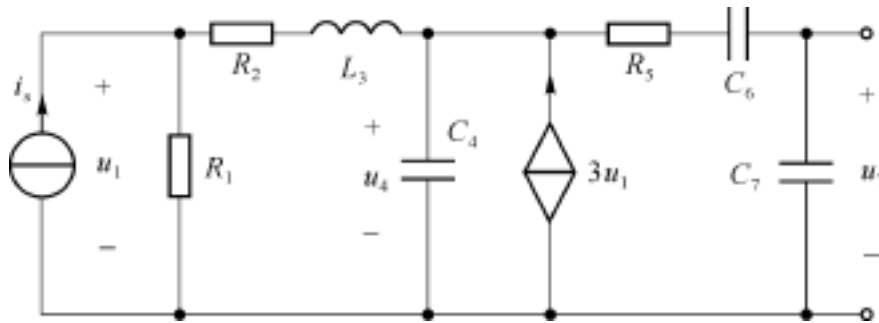


题图 7-27



题图 7-28

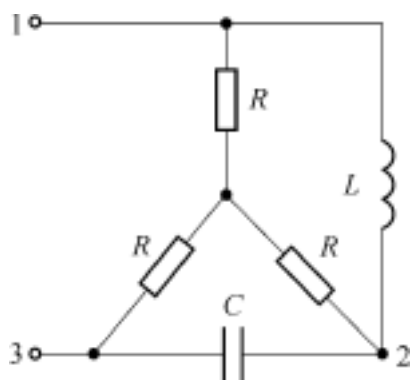
7-29 题图 7-29 中, $i_s = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$, 试列出相量形式的节点电压法方程。



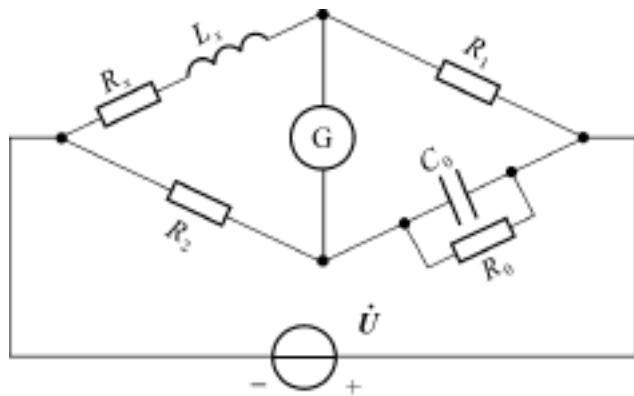
题图 7-29

7-30 题图 7-30 中 \dot{U}_{12} , \dot{U}_{23} , \dot{U}_{31} 大小相等, 相位依次相差 120° , 工作频率 $f = 50 \text{ Hz}$, $R = 20 \Omega$, 求 L, C 的值。

7-31 试求题图 7-31 交流电桥的平衡条件; 并证明被测线圈的 $L_x = C_0 R_1 R_2$, $R_x = \frac{R_1 R_2}{R_0}$ 。



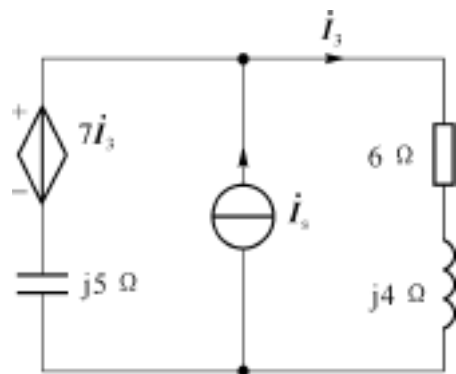
题图 7-30



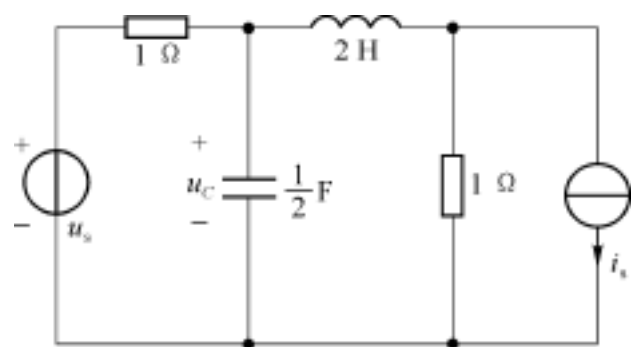
题图 7-31

7-32 已知 $I_s = 10\angle 0^\circ$, 求题图 7-32 电路中各支路吸收的复功率, 并用特勒根定理检验结果的正确性。

7-33 求题图 7-33 所示电路的电容电压 $u_C(t)$ 。已知 $u_s(t) = 5\sin 3t \text{ V}$, $i_s(t) = 3\cos(4t + 30^\circ) \text{ A}$ 。

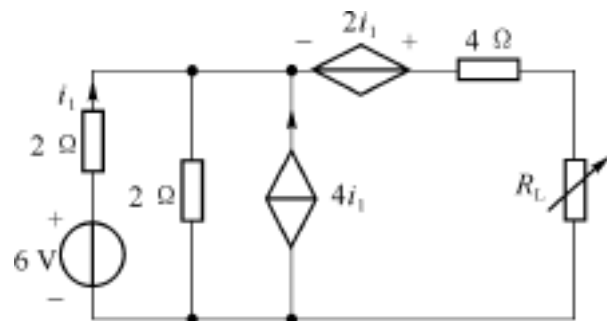


题图 7-32



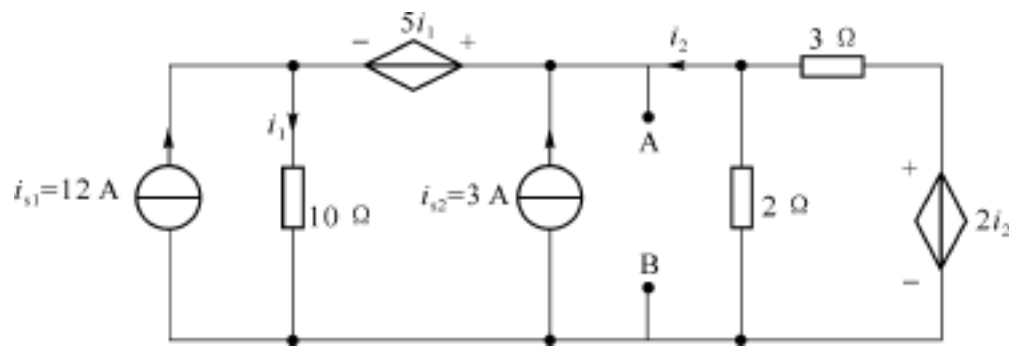
题图 7-33

7-34 电路如题图 7-34 所示, 负载电阻 R_L 可变, 试问 R_L 等于何值时, 它吸收的功率最大? 此最大功率是多少?



题图 7-34

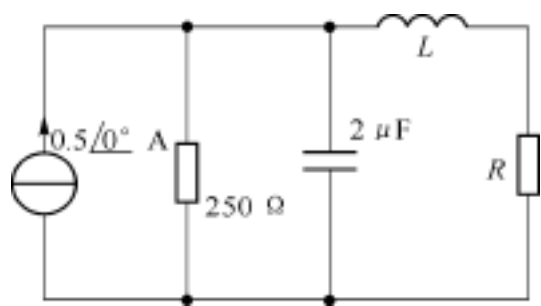
7-35 题图 7-35 中, 在 A, B 端接入一个什么性质的元件, 其参数为多大, 就可获得最大功率? 此最大功率值 $p_{\max} = ?$



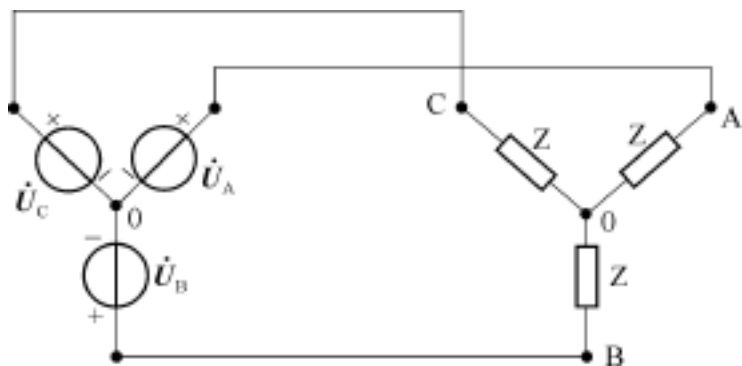
题图 7-35

7-36 选择适当的 R 及 L 值, 以使得题图 7-36 电路中 R 获最大功率 P_{\max} 并求此最大功率值。已知电源工作角频率 $\omega = 2000 \text{ rad/s}$ 。

7-37 对称三相三线制星形连接电路如题图 7-37 所示, 已知 $U_A = 200\angle 0^\circ \text{ V}$, $Z = 100\angle 60^\circ$ 。试求线电压、相电流、中点电压 U_0 及三相负载吸收的总功率。

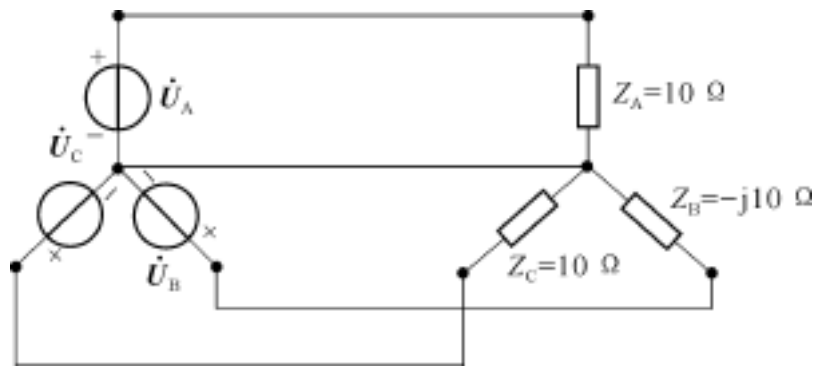


题图 7-36



题图 7-37

7-38 三相不对称负载星形连接电路如题图 7-38 所示,对称三相电源 $U_A = 200\angle 0^\circ \text{V}$, 试求各相的电流及中线电流。



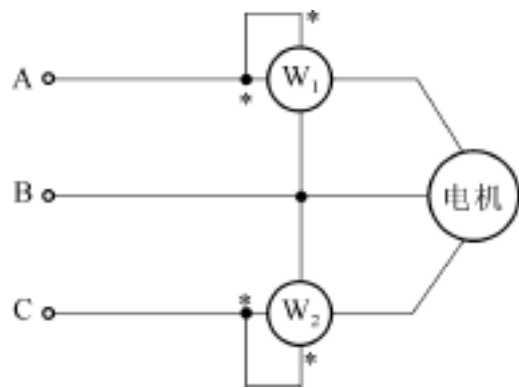
题图 7-38

7-39 题图 7-39 中电动机功率为 2.5 kW, 功率因数 $\cos \phi = 0.866$, 对称线电压有效值 380 V, 求图中两个功率表的读数。

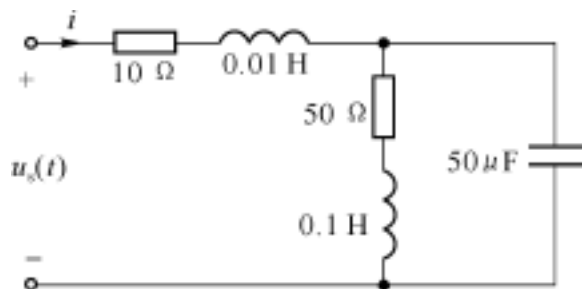
7-40 已知题图 7-40 中

$$u_s(t) = [50 + 100\sin 314t - 40\cos 628t + 10\sin(942t + 20^\circ)] \text{ V}$$

试求 $i(t)$ 及电源供出的功率 p 及电源电压、电流有效值。



题图 7-39



题图 7-40

第八章 耦合电感与理想变压器

当电流通过一线圈时,就在线圈周围产生磁场。如果有两个线圈相互靠近,那么其中一个线圈中的电流所产生的磁通有一部分穿过另一线圈,在两个线圈间形成磁的耦合。这两个线圈称为一对耦合线圈,这是一类多端元件。特别当其满足某些条件时,其特性可用理想变压器模型来表示。这类元件具有实用价值,是各类电气设备不可缺少的器件。本章将研究耦合电感的磁耦合特性。

8.1 耦合电感及其伏安关系

首先回忆一个独立电感线圈的磁感应特性。线圈 1 的匝数设为 N_1 ,而且绕得很紧密,各匝都与相同的磁通 Φ_1 相交链,则磁链 $\Psi_1 = N_1 \Phi_1$ 。当线圈周围的媒质为非铁磁物质时, Ψ_1 与 i_1 成线性关系,表示为 $\Psi_1 = L_1 i_1$ 。其中电感 L_1 是一个与电流、时间无关的常量。在理想情况下,即线圈无损耗也无电场的作用时,就用线性非时变的电感 L_1 作为线圈的电路模型。

当电感中的电流随时间变化时,在其两端会出现感应电压,称为自感电压。由于电感中的电流 i_1 与磁通 Φ_1 符合右手螺旋法则,如图 8-1 所示,当电压与电流处在关联参考方向下时,感应电压的参考方向和磁通的参考方向也符合右手螺旋法则。根据电磁感应定律,感应电压等于磁链的变化率,由此可导出感应电压与电流的关系

$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

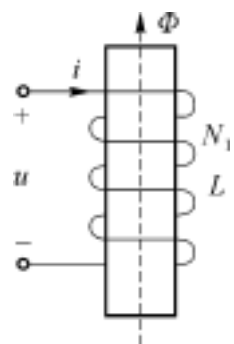


图 8-1 自感线圈

8.1.1 耦合电感

当另一个匝数为 N_2 线圈 2 向线圈 1 靠拢时,在线圈 2 两端也可能出现感应电压。如图 8-2 所示,线圈 1 接电压源 $u_s(t)$,线圈 2 接电压表,则电压表有指示。这是因为此时线圈 1 中电流 $i_1(t)$ 在线圈及其周围建立起磁场,电流 $i_1(t)$ 所产生的磁通 $\Phi_1(t)$,除了通过(或称交链)本线圈 1 以外,一部分磁通也通过相邻的线圈 2。当电流 $i_1(t)$ 变化时引起磁通 $\Phi_1(t)$ 的变化,便在线圈 2 两端产生感应电压,使电压表指针发生偏转。这时就说两个线圈间产生了磁的耦合。若将电压源与电压表互换位置,电压表仍有指示,两线圈相互感应的现象称为互感现象。这对线圈称为互感线圈或耦合电感。在图 8-2 中的线圈 1 与 2 相互靠得越近,线圈 1 所产生的磁通通过线圈 2 的部分就越多,这时两个线圈相互耦合得越紧。而两个线圈的距离越远,则耦合的程度越松。为了说明两个线圈间的耦合及其耦合程度,需要介绍互感线圈的参数。

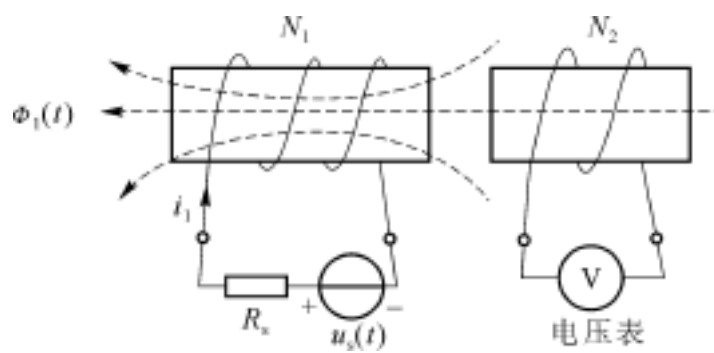


图 8-2 两个线圈的磁耦合

8.1.2 互感线圈参数介绍

在图 8-3 中,由于外接电路的作用,两个线圈中分别有电流 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$, 通过此图可引出互感系数和耦合系数的概念。首先研究磁通和磁链的特点。用右手螺旋法则判断磁通的方向并分别用不同粗细的虚线标出。

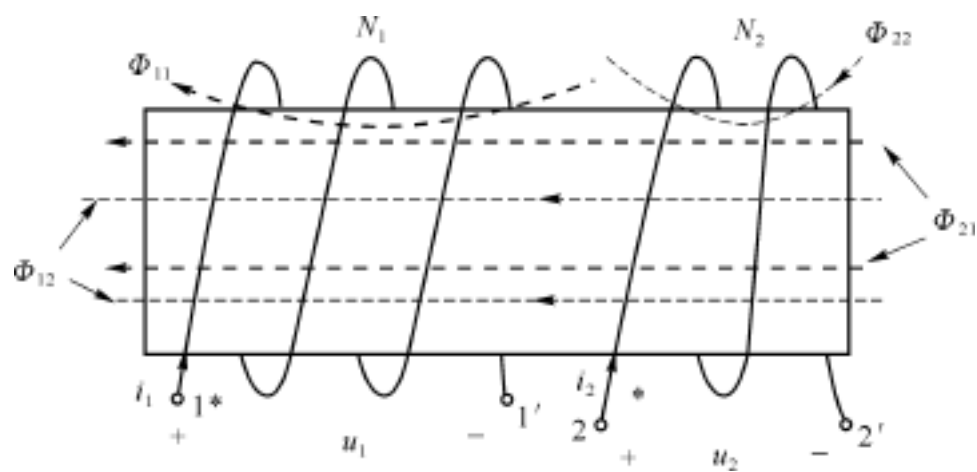


图 8-3 互感线圈的参数

1. 磁通的分布

用 Φ_{11} 表示通过线圈 1 中由 i_1 产生的自磁通,如图中粗虚线所示; Φ_{22} 表示通过线圈 2 的自磁通,由 i_2 产生,如图中细虚线所示。 Φ_{21} 表示由 i_1 产生的而通过线圈 2 的互磁通, Φ_{12} 表示由 i_2 产生的通过线圈 1 的互磁通。

2. 磁链的分布

两线圈的磁通都是自磁通和互磁通之和,磁链分别为

$$\begin{cases} \Psi_1 = (\Phi_{11} + \Phi_{12}) N_1 = \Phi_{11} N_1 + \Phi_{12} N_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12} \\ \Psi_2 = (\Phi_{22} + \Phi_{21}) N_2 = \Phi_{22} N_2 + \Phi_{21} N_2 = \Psi_{22} + \Psi_{21} \end{cases}$$

(8-1)

可见磁链也分成两部分:自磁链 Ψ_{11} 和 Ψ_{22} , 互磁链 Ψ_{12} 和 Ψ_{21} 。

3. 互感系数

Ψ_{11} 和 Ψ_{22} 与各自的电流之比是它们的自感系数(即电感量),即

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1}, \quad L_2 = \frac{\Psi_{22}}{i_2} = \frac{N_2 \Phi_{22}}{i_2}$$

(8-2)

而 Ψ_{12} 与线圈 2 的电流 i_2 的比值用 M_{12} 表示,称为互感系数,反映出电流 i_2 对线圈 1 的影响。同理, Ψ_{21} 与线圈 1 的电流 i_1 的比值用 M_{21} 表示,也称为互感系数,反映出 i_1 对线圈 2 的影响。

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2} = \frac{N_1 \psi_{12}}{i_2}, \quad M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} = \frac{N_2 \psi_{21}}{i_1} \tag{8-3}$$

由于两个线圈处在相同的环境下,两个互感系数近似相等,即

$$M_{12} = M_{21} = M$$

统一用 M 表示,互感系数 M 与自感系数 L 有同样的量纲,代入式(8-2)和式(8-3)后,式(8-1)可表示为

$$\begin{cases} \psi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \psi_2 = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases} \tag{8-4}$$

互感系数 M 说明了一个线圈中的电流在另一个线圈中建立磁场的能力, M 越大说明这种能力越强。

4. 耦合系数 K

为了表明两个线圈之间耦合的程度,引用耦合系数的概念,用 K 表示,见式(8-5),其中磁通比值 $\frac{\psi_{21}}{\psi_{11}}$ 说明线圈 1 中电流所产生的磁通有多少通过了线圈 2,比值越大说明线圈 1 和 2 耦合越紧。同理,比值 $\frac{\psi_{12}}{\psi_{22}}$ 说明了线圈 2 和 1 的耦合程度。用两个比值的几何平均值来描述两个线圈相互耦合的程度:

$$K = \sqrt{\frac{\psi_{21}}{\psi_{11}} \cdot \frac{\psi_{12}}{\psi_{22}}} \tag{8-5}$$

将式(8-2)、(8-3)代入上式可得到耦合系数 K 与自感系数、互感系数的关系式

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_2 L_1}} \tag{8-6}$$

由于一般情况下 $\psi_{21} < \psi_{11}$, $\psi_{12} < \psi_{22}$, 所以 $K < 1$ 。

当 $K = 1$ 时两个线圈处于耦合最紧的情况,无漏磁,这种耦合称为全耦合。此时互感系数也最大

$$M = \sqrt{L_2 L_1} \tag{8-7}$$

再联系式(8-2)、(8-3),还可以推出线圈匝数与自感系数的关系

$$\frac{L_1}{L_2} = \left[\frac{N_1}{N_2} \right]^2 = n^2, \quad \text{即} \quad \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = n \tag{8-8}$$

当 $K = 1$ 时,属于强耦合(紧耦合),如图 8-4(a)所示;当 $K < 1$ 时,属于弱耦合(松耦合),如图(b)所示;当两个线圈的轴线相互垂直时,两线圈耦合最弱, $K = 0$,如图(c)所示。与互感 M 相同,耦合系数 K 也只取决于两线圈的结构与相互的位置,而与线圈电流的大小无关。在实际应用中可按技术指标选择不同的互感元件。

8.1.3 耦合电感的同名端及互感电压的正负号

1. 同名端(又称对应端)

耦合电感作为多端元件,其伏安关系比二端元件复杂,对于图 8-3 所示的两个线圈,它们的磁链分为两部分由式(8-4)表示,由此写出感应电压也分为两部分,即自感电压和互感电压

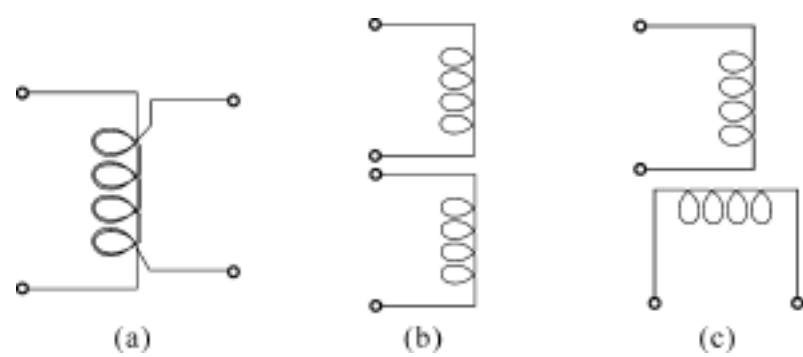


图 8-4 互感线圈的耦合程度示意图

$$\begin{cases} u_1 = \frac{d \psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = \frac{d \psi_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (8-9)$$

可以确定各项都是正的,实际上各项的正负号应该分别判断。其中 u_1 和 u_2 中的自感电压分别为 $L_1 \frac{di_1}{dt}$ 、 $L_2 \frac{di_2}{dt}$,它们与本线圈的电流有关,其正负号取决于各线圈的本身的电压与电流是否关联参考方向。而互感电压 $M \frac{di_2}{dt}$ 、 $M \frac{di_1}{dt}$ 与另一个线圈的电流有关,其正负号与互感线圈的同名端有关。

在图 8-3 所示电流 i_1 从线圈 1 的 1 端流入,电流 i_2 从线圈 2 的 2 端流入,在两个线圈中产生的磁通方向是一致的,换句话说磁场是互相加强的,称 1 端和 2 端是一对同名端,用“*”标出,1 端和 2 端也必然是一对同名端。图中都没有画标记,也说明是同名端。

如果改变线圈 2 的绕向如图 8-5 所示,可以判断线圈 1 的 1 端和线圈 2 的 2 端是一对同名端,也用“*”标出;线圈 1 的 1 端和线圈 2 的 2 端必然也是一对同名端。

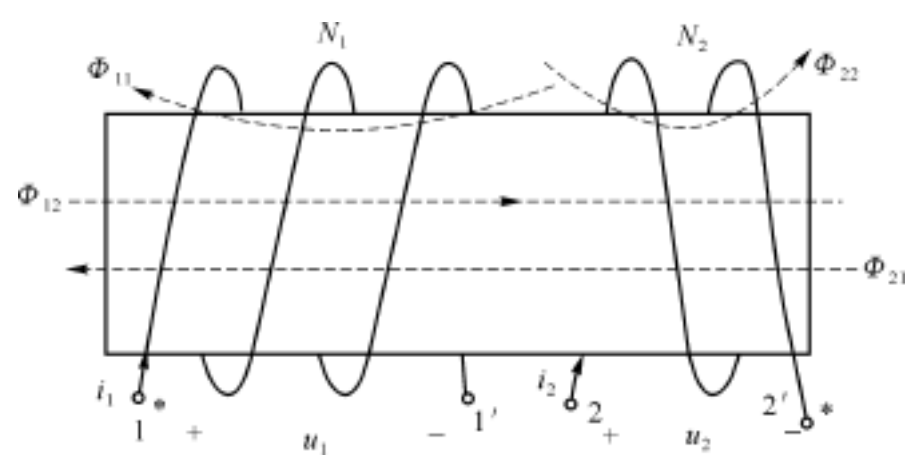


图 8-5 互感线圈的同名端

若两个电流分别从 1 端和 2 端流入,则它们产生的磁通方向是相反的,如图中虚线所示。写出两个线圈的磁链

$$\begin{cases} \psi_1 = (\Phi_{11} - \Phi_{12}) N_1 = \Phi_{11} N_1 - \Phi_{12} N_1 = L_1 i_1 - M i_2 \\ \psi_2 = (\Phi_{22} - \Phi_{21}) N_2 = \Phi_{22} N_2 - \Phi_{21} N_2 = L_2 i_2 - M i_1 \end{cases}$$

得到感应电压

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = - M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (8-10)$$

其中互感电压项都是负的。由此可以看到同名端对于互感电压正负号的影响,这也体现出同名端的重要意义。同名端反映出各线圈绕向的关系,因此在耦合线圈制成后就确定了。成为产品时必须标明它们的同名端,从而决定外电路的连接方式。万一标记丢失,也可根据其工作原理用实验方法判断。

根据以上两图的例子,可以得出由同名端写出互感电压的规律:若电流从一个线圈标记“*”的端子流入,在另一个线圈产生的互感电压标记“*”的端子(即其同名端)应为高电位端。此时若所设电压参考方向与之相同,则互感电压为正,反之为负。

2 . 电路模型及伏安关系

图 8-6(a)表示的电路模型中, L_1 、 L_2 是自感系数, M 是它们之间的互感系数。“*”表示 1、2 是一对同名端。没有标记的 1'、2' 端也是一对同名端。根据标出的电压和电流的参考方向,写出感应电压与电流的关系如下

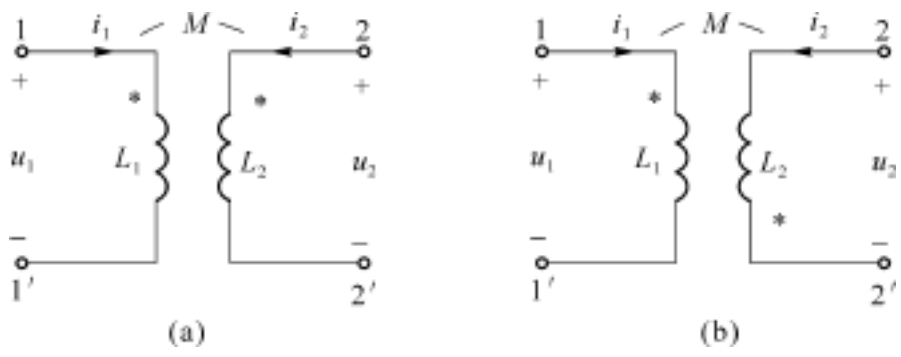


图 8-6 互感元件的电路模型

$$u_1(t) = \frac{d\psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$
$$u_2(t) = \frac{d\psi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

其实图 8-6(a)正是图(8-3)所示耦合电感的电路模型。

图 8-6 (b)表示的是图(8-5)所示耦合电感的电路模型,图中 1、2 端是一对同名端,1'、2' 也是一对同名端,其伏安关系是

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$
$$u_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

因为电流 i_2 从 2 端流入,在 L_1 两端产生的互感电压应以 1 为高电位端,但是这里所标电压 u_1 参考方向与之相反,所以 u_1 的互感电压部分是负的,同理 u_2 的互感电压部分也是负的。

3 . 相量模型

耦合电感主要工作在正弦稳态电路中,所以画出电路的相量模型如图 8-7(a)、(b)所示。其中自感系数和互感系数都用复数阻抗表示,其伏安关系相应变成了复系数的代数方程,如式(8-11)和(8-12)。

注意：(1)电压电流微分关系等效为 j ；(2)自感电压部分的正负号，仍与本线圈电压与电流是否关联参考方向有关；(3)互感电压的正负号仍用同名端来判断。

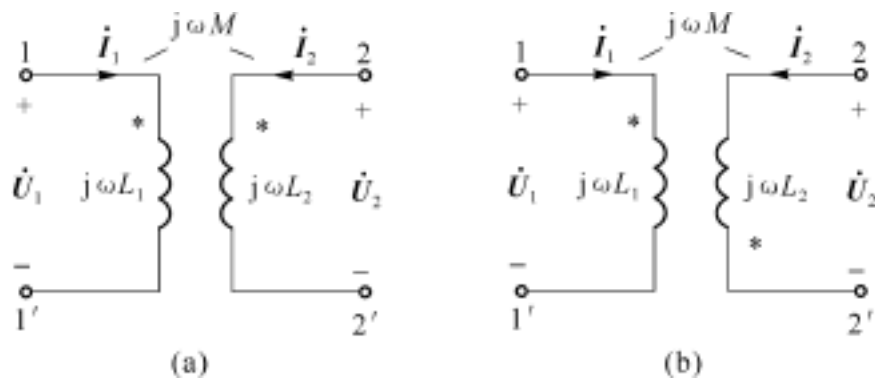


图 8-7 互感元件的相量模型

图 8-7(a)的方程

$$\begin{aligned} U_1 &= j \omega L_1 I_1 + j \omega M I_2 \\ U_2 &= j \omega M I_1 + j \omega L_2 I_2 \end{aligned} \tag{8-11}$$

图 8-7(b)的方程

$$\begin{aligned} U_1 &= j \omega L_1 I_1 - j \omega M I_2 \\ U_2 &= -j \omega M I_1 + j \omega L_2 I_2 \end{aligned} \tag{8-12}$$

从感应电压表达式(8-9)和(8-11)还可以得到图 8-8(a)、(b)所示电路模型。这里用受控源来表示互感电压,而图中的电感 L_1 之间 L_2 已经没有磁耦合关系了。

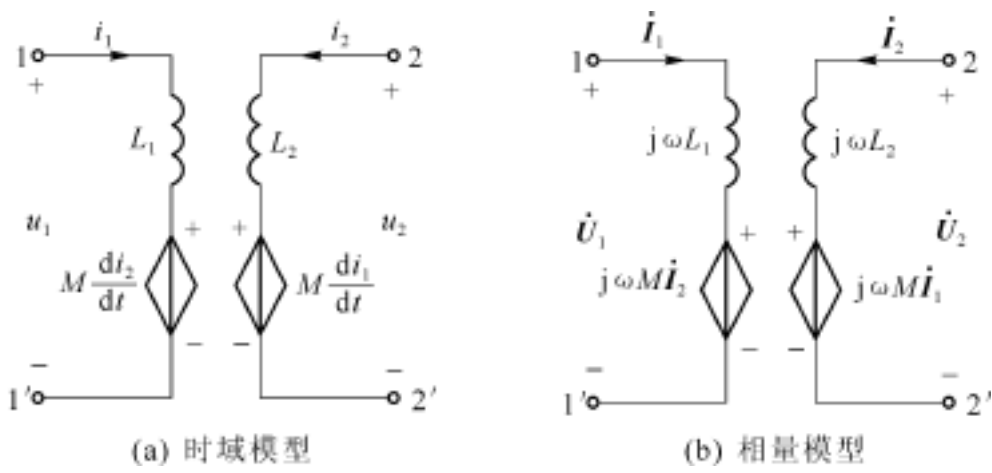


图 8-8 受控源表示互感电压

8 2 耦合电感的等效电路

上节得到了耦合电感的电路模型,本节介绍由电路模型及伏安关系引出耦合电感等效电路,以便于电路的分析与计算。

8 2 .1 耦合电感的串并联

1 . 串联

由于同名端的存在,所以耦合电感的串联有顺串与反串两种情况,图 8-9(a)表示的是顺

串 的 电 路 , 即 同 一 电 流 依 次 从 两 个 线 圈 的 带 “ * ” 端 流 入 。 或 者 说 是 将 非 同 名 端 相 接 的 串 联 称 为 顺 串 。 写 出 它 们 的 伏 安 关 系 :

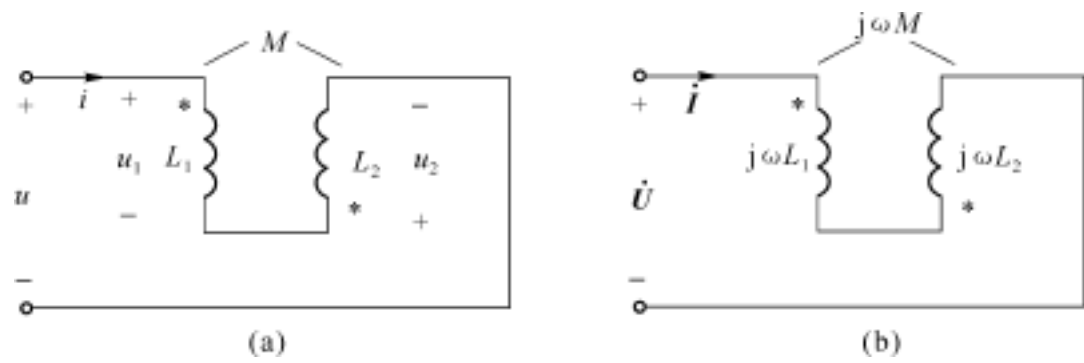


图 8-9 互感线圈的顺串

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

其中 $L = L_1 + L_2 + 2M$ 是耦合电感顺串后的等效电感。可以看出顺串使等效电感加大。图 8-9(b)所示的是图(a)的相量模型,相应的伏安关系如下

$$\begin{aligned} \dot{U} &= (j \omega L_1 + j \omega L_2 + 2j \omega M) \dot{I} \\ Z &= j \omega L_1 + j \omega L_2 + 2j \omega M \end{aligned} \tag{8-13}$$

可见顺串使等效复数阻抗加大。

图 8-10(a)、(b)表示的是耦合电感反串的电 路和相量模型,将同名端相接的串联称为反串。写出它们的伏安关系分别为:

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

及相量模型方程

$$\begin{aligned} \dot{U} &= (j \omega L_1 + j \omega L_2 - 2j \omega M) \dot{I} \\ Z &= j \omega L_1 + j \omega L_2 - 2j \omega M \end{aligned} \tag{8-14}$$

其中 $L = L_1 + L_2 - 2M$,反串使等效电感以及复数阻抗减小。这是在使用中特别要注意的。

2 . 并 联

具有互感的线圈也可以并联,图 8-11(a)、(b)分别画出两种不同的连接方式的相量模型,图(a)为同名端相联,图(b)为非同名端相联。

由 KCL 和 KVL 列出方程

$$\begin{aligned} \dot{U} &= j \omega L_1 \dot{I}_1 \pm j \omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U} &= j \omega L_2 \dot{I}_2 \pm j \omega M \dot{I}_1 \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{aligned}$$

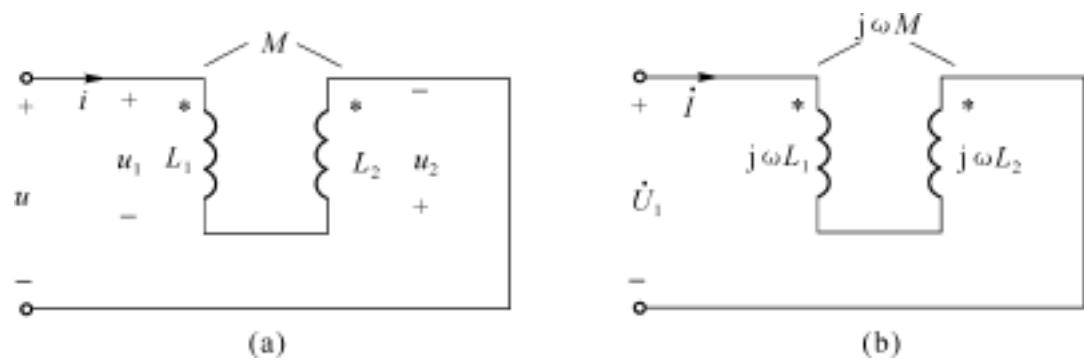


图 8-10 互感线圈的反串

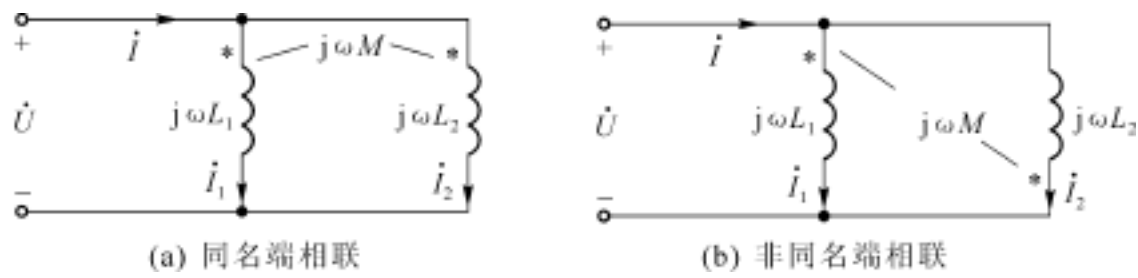


图 8-11 互感线圈的并联

由上式若先将电流 I_1 和 I_2 解出,可以由此推出

$$Z = \frac{U}{I} = j \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M}$$

即对图 8-11(a)同名端相联的等效电感

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \tag{8-15}$$

对图 8-11(b)非同名端相联的等效电感

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \tag{8-16}$$

并联等效电感的公式较少用于计算电路。

8 2 2 耦合电感的去耦等效电路(互感化除法)

这里再介绍一种等效电路,它是用来计算含耦合电感电路的一种有效方法。若互感元件如图 8-12(a)所示,其中有一对同名端“1”和“2”连在一起,标为“3”端。

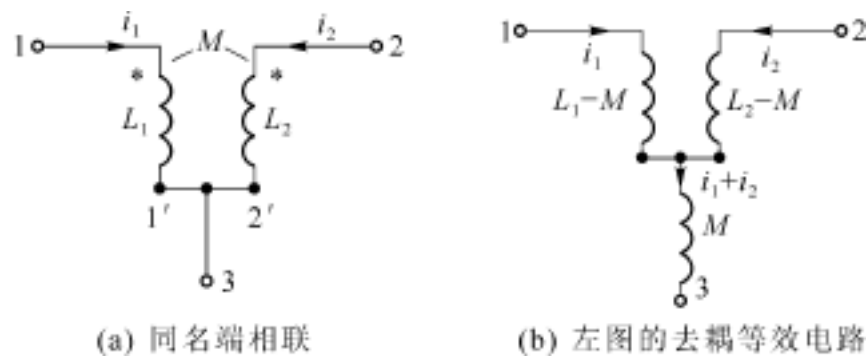


图 8-12 耦合电感的去耦等效电路 1

根据互感电压与同名端的关系,端点间电压

$$u_{13} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad u_{23} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

对上式作一些变化:

$$u_{13} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \left[\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right] \tag{A}$$

$$u_{23} = M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} + M \left[\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right] \tag{B}$$

由式(A), (B)可画出图 8-12 (b) 等效电路,即在 1、2、3 端点之间可以用图(b)所示等效电路代替图(a)的互感元件,而保持端点上的电压与电流不变,图(b)等效为 3 个相互独立的电感,此时不再含有互感,可用正弦稳态电路的一般方法分析计算。

同样的方法可获得图 8-13(a)的等效电路如图(b)所示,图(a)属于有一对非同名端相连的端子,标为“3”端。即在 1、2、3 端点之间可以用图(b)所示等效电路代替图(a)的互感元件。

比较图 8-12 和图 8-13,由于原互感元件连接方式的不同,其对应等效电路的参数不同。这种互感化除的方法用于理论计算是非常有效的。实际上图 8-13(b)与“3”端相连的负电感并不真正存在。

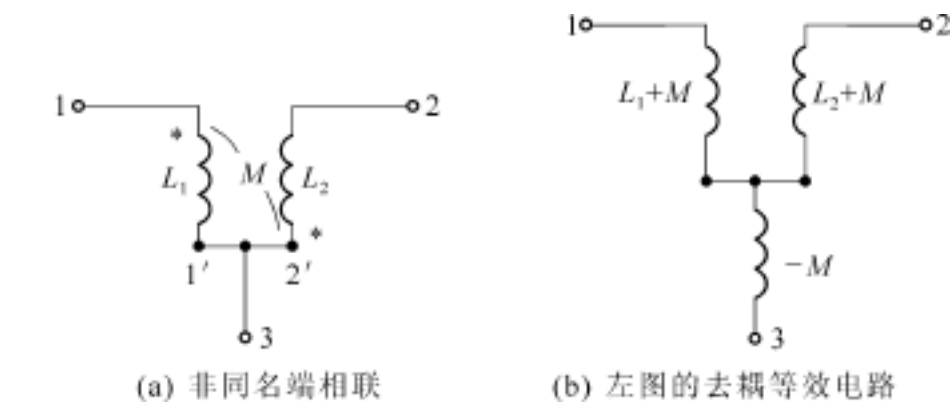


图 8-13 耦合电感的去耦等效电路 2

例 8-1 如图 8-14(a)所示电路工作在正弦稳态,设角频率为 ω ,求 a, b 端的输入阻抗 Z_{in} 。

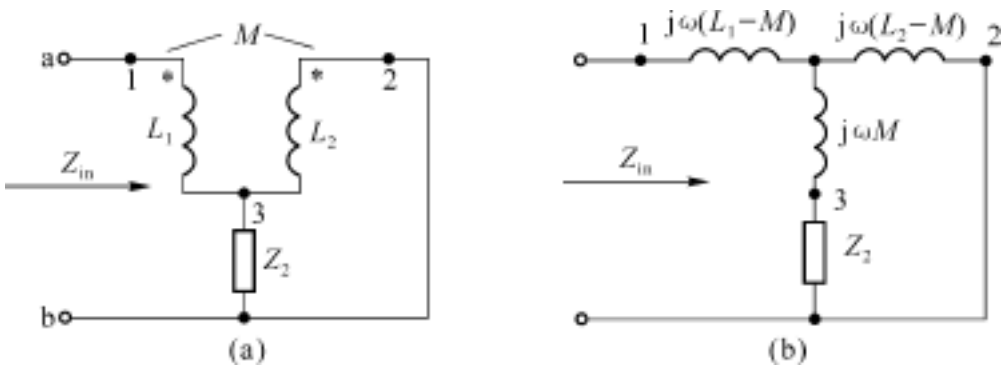


图 8-14 例 8-1 电路

解 图 8-14(a)中互感用去耦等效电路,并画出相量模型电路如图 8-14(b)所示,由图(b)按阻抗串并联等效求得:

$$\begin{aligned} Z_{in} &= j(L_1 - M) + (jM + Z_2) - j(L_2 - M) \\ &= \frac{j(L_1 + L_2 - 2M)Z_2 - (L_1L_2 - M^2)}{Z_2 + jL_2} \end{aligned}$$

例 8-2 已知含空心变压器电路如图 8-15 所示,参数已知,求初级电流 I_1 。

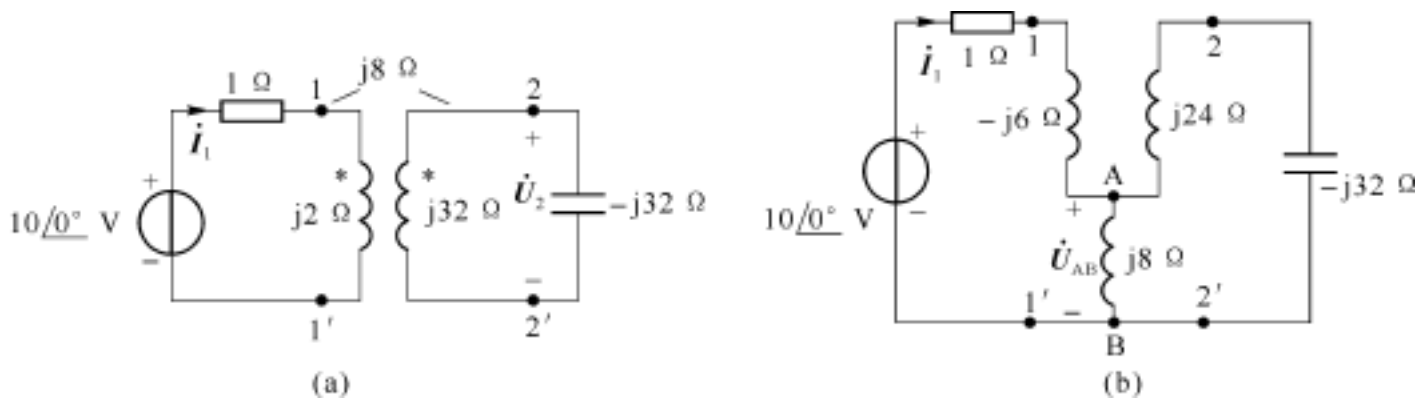


图 8-15 例 8-2 电路

解 这里的空心变压器即是互感元件,由于初次级回路之间只有磁耦合,可将 1、2 连接起来而不会改变工作状态,因此可以用互感化除法。本题属于同名端相连,等效电路如图 8-15(b)所示,图中 A、B 之间两支路并联,阻抗无穷大相当于断开,所以电流 $I_1 = 0$ 。

8 2 3 引入阻抗分析法

某些含互感元件的电路,例如图 8-16 所示的含空心变压器电路,可以用引入阻抗的概念分析计算电流 I_1 和 I_2 。此电路左右两网孔仅有磁耦合联系,只要对左右网孔分别列出 KVL 方程,即可解出 I_1, I_2 。

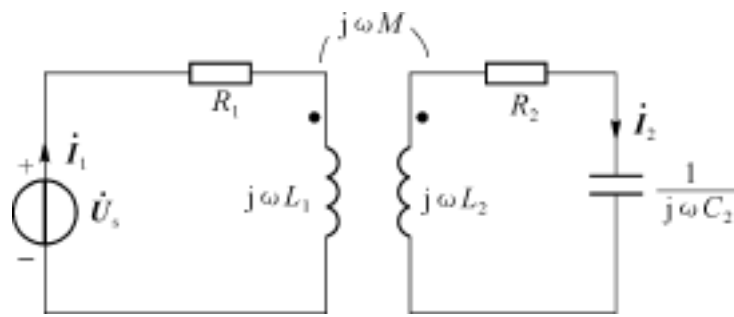


图 8-16 例 8-2 电路

左网孔: $(R_1 + jL_1) I_1 - jMI_2 = U_s$

右网孔: $-jMI_1 + \left[R_2 + jL_2 + \frac{1}{jC_2} \right] I_2 = 0$

将上面网孔方程组写成一般形式,即

$$\begin{cases} Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 = U_s \\ Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 = 0 \end{cases}$$

其中 $Z_{12} = Z_{21} = -jM$,由克来默法则得

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} U_s & Z_{12} \\ 0 & Z_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{U_s Z_{22}}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2} \tag{A}$$

$$I_2 = \frac{-U_s Z_{21}}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2} \tag{B}$$

利用本题的结果作进一步观察,可推出引入阻抗分析的概念。由于 I_1, I_2 分别只存于图8-16的左右两回路中,两回路之间只有磁耦合,而无电支路的直接联系。所以,如果将式(A)及式(B)整理为如下形式

$$I_1 = \frac{U_s}{Z_{11} + \left[\frac{-Z_{12}^2}{Z_{22}} \right]}, \quad I_2 = \frac{-U_s \frac{Z_{21}}{Z_{22}}}{Z_{22} + \left[\frac{-Z_{21}^2}{Z_{11}} \right]}$$

则可以分别画出两个等效电路如图 8-17(a)、(b)所示。图(a)称为初级等效回路,图(b)称为次级等效回路。注意每个等效电路都是由一个电源与两个阻抗串连组成。这两个阻抗中, $Z_{11}、Z_{22}$ 是原电路图 8-16 中初级与次级回路各自的自阻抗;而另一项 $-\frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}、-\frac{Z_{21}^2}{Z_{11}}$ 具有欧姆的单位。但是 $-\frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}$ 既非从 L_1 两端向次级方向可以得到的等效阻抗, $-\frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}$ 亦非从 L_2 两端向初级方向可以得到的等效阻抗。可以将它们解释为当构成等效的单回路图 8-17(a)、(b)时,另一回路对此回路影响的描述,取名为引入阻抗(或反射阻抗)。初级等效电路中的电源就是原电路中的电源 U_s ,而次级等效电路中的电源 $-U_s \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$ 则恰是从 L_2 两端向初级方向得到的开路电压。

由图 8-16 的参数,可以直接画出图 8-17 的初、次级等效回路,用以计算分析电路。这种处理方法称为引入阻抗分析法。正确理解和运用公式是很重要的。特别是要注意电源 $-U_s \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$ 的正负号与耦合电感的同名端有关。

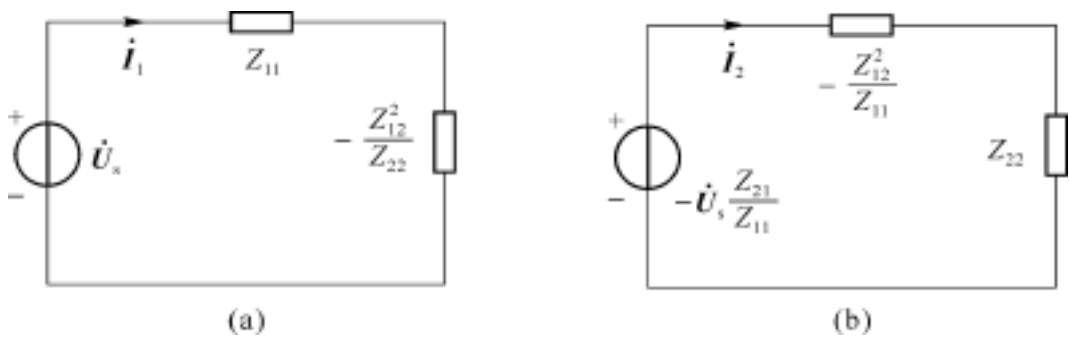


图 8-17 引入阻抗等效电路

8 3 含耦合电感的电路分析

耦合电感的电路模型与特性在电路分析中是如何体现的呢？这里通过几个例题的分析来描述。

例 8-3 已知图 8-18(a)电路中 $R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $L_1 = 5 \text{ H}$, $L_2 = 2 \text{ H}$, $M = 3 \text{ H}$, 电流 $i(t)$ 为图 (b) 所示的三角脉冲。试对照 $i(t)$ 画出 $u(t)$ 及开路端口的电压 $u_2(t)$ 的波形。

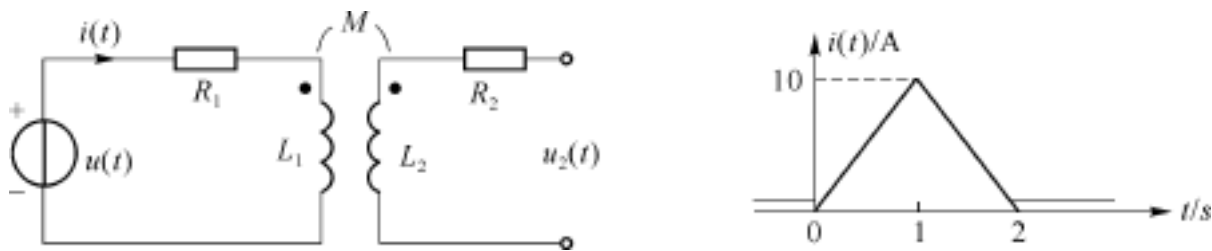


图 8-18(a) 例 8-3 电路 图 8-18(b) 例 8-3 电流波形

解 由 KVL 可得到

$$u(t) = R_1 i(t) + L_1 \frac{di(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = M \frac{di}{dt}$$

按以上两个等式,代入具体数据可画出图 8-19 的两个电压波形。

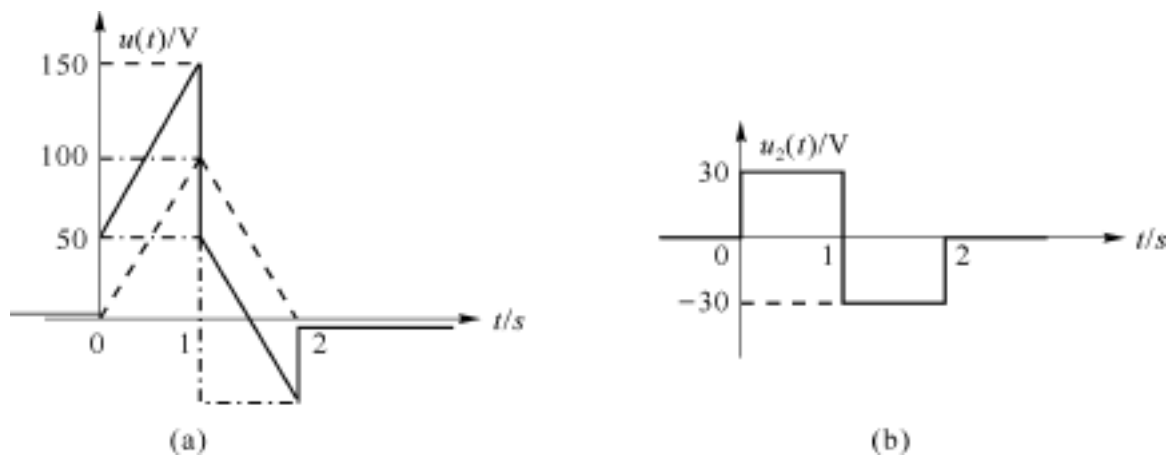


图 8-19 例 8-3 两个电压波形

例 8-4 有自耦变压器如图 8-20(a)所示,已知 $\dot{U}_s = 10\angle 0^\circ \text{ V}$, $M = 2 \Omega$, $L_1 = L_2 = 4 \Omega$, 求 a、b 端简化电路。

解 图 8-20(a)两电感之间公共端属非同名端相联,可用互感化除法得到去耦等效电路如图 8-20(b)所示,图中 3 个电感之间已无耦合,所以 a、b 端开路电压为

$$\dot{U}_{oc} = \frac{j(L_2 + M) \cdot \dot{U}_s}{j(L_2 + M) + j(-M)} = \frac{j6 \times 10\angle 0^\circ}{j4} = 15\angle 0^\circ \text{ V}$$

a、b 端等效内阻抗为

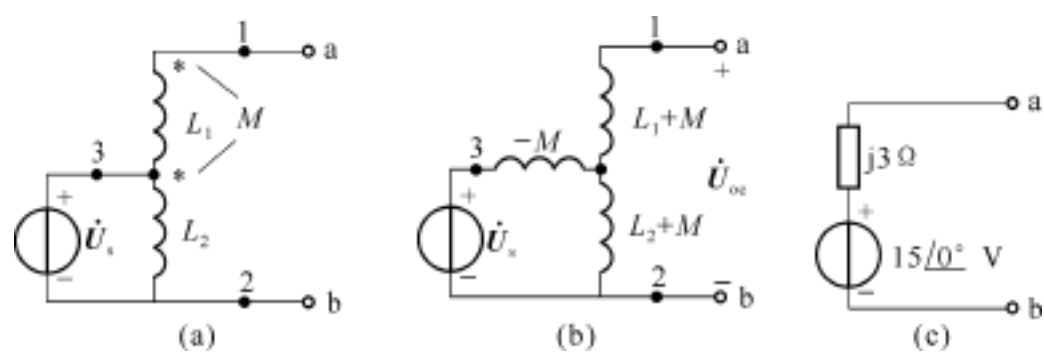


图 8-20 例 8-4 电路

$$\begin{aligned} Z_0 &= j(L_1 + M) + \frac{j(L_2 + M) \cdot j(-M)}{j(L_2 + M) + j(-M)} \\ &= j6 + \frac{j6 \times (-j2)}{j4} = j3 \end{aligned}$$

由此可画出戴维南等效电路如图(c)所示。

本例也可以直接从图 8-20(a) 求戴维南等效电路,此时 a, b 之间开路电压是 L_2 上的自感电压和 L_1 的互感电压之和

$$U_{oc} = j L_2 I_1 + j M I_1$$

其中电流

$$I_1 = \frac{U_s}{j L_2}$$

等效内阻抗的计算要按含受控源电路的方法求解。例如图 8-21 所示用外加电源法,设内部独立电压源为零,外加电压源。此时电路要按两个网孔列出方程,可以求出

$$Z_0 = \frac{U_0}{I_0}$$

显然比互感化除法运算量大,不再详述。

例 8-5 已知电路及参数如图 8-22(a) 所示,试列出网孔电流方程组。

解 图中含有耦合电感和受控源,图(a)两电感属于非同名端相连接,为了方便列出网孔电流方程,用互感化除法得到去耦等效电路图(b),按图中所示网孔电流列出网孔电流方程

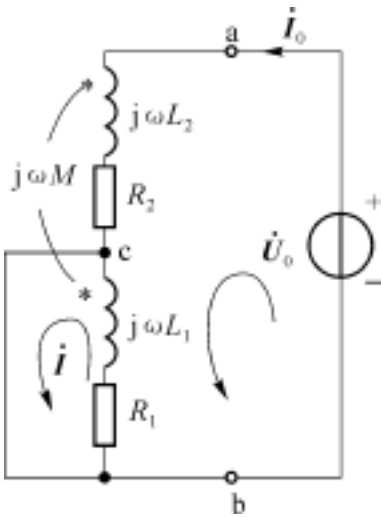


图 8-21 例 8-4 外加电源法

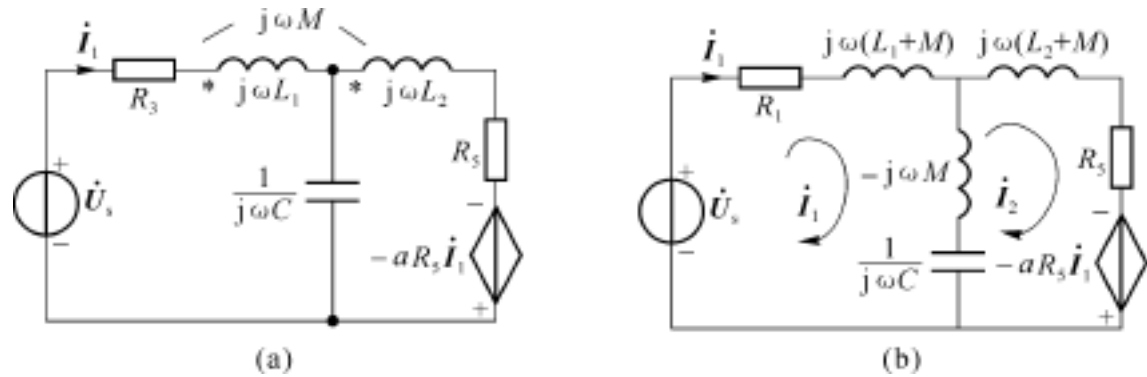


图 8-22 例 8-5 电路

$$\begin{aligned} \left[R_3 + j(L_1 + M) - jM + \frac{1}{jC} \right] \dot{I}_1 + \left[-\frac{1}{jC} + jM \right] \dot{I}_2 &= \dot{U}_s \\ \left[R_5 + j(L_2 + M) - jM + \frac{1}{jC} \right] \dot{I}_2 + \left[-\frac{1}{jC} + jM \right] \dot{I}_1 &= -aR_5 \dot{I}_1 \end{aligned}$$

由于受控源的控制量就是网孔电流,所以直接解方程即可求得网孔电流。

例 8-6 列写图 8-23(a)所示电路的网孔电流方程。

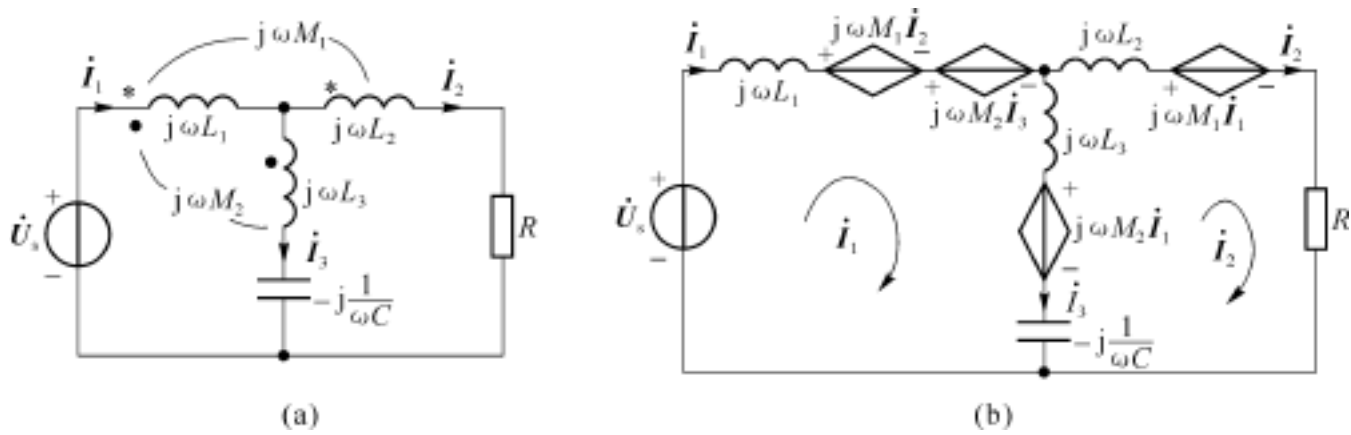


图 8-23 例 8-6 电路

解 从图中 3 个电感的同名端标记可以判断 L_1 和 L_2 有磁耦合, L_1 和 L_3 也有磁耦合, 所以互感电压情况比较复杂。可选择用受控电压源表示互感电压的方法, 得到图(b)所示等效电路。要注意各电流与同名端以及所产生的互感电压的极性的关系。

其中 L_1 支路中有两个受控电压源, 因为 L_2 和 L_3 中的电流均会在此产生互感电压。图 (b)所示等效电路中各电感已是互相独立的了, 可直接按所设网孔电流列出方程, 其中

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= \dot{I}_1 - \dot{I}_2 \\ \left[jL_1 + jL_3 - j\frac{1}{C} \right] \dot{I}_1 - \left[jL_3 - j\frac{1}{C} \right] \dot{I}_2 &= \dot{U}_s - jM_1 \dot{I}_2 - jM_2 \dot{I}_3 - jM_1 \dot{I}_1 \\ - \left[jL_3 - j\frac{1}{C} \right] \dot{I}_1 - \left[R + jL_2 + jL_3 - j\frac{1}{C} \right] \dot{I}_2 &= jM_2 \dot{I}_1 - jM_1 \dot{I}_1 \end{aligned}$$

经整理可得

$$\begin{aligned} \left[jL_1 + jL_3 - j\frac{1}{C} + 2jM_2 \right] \dot{I}_1 - \left[jL_3 - j\frac{1}{C} - jM_1 + jM_2 \right] \dot{I}_2 &= \dot{U}_s \\ - \left[jL_3 - j\frac{1}{C} + jM_2 - jM_1 \right] \dot{I}_1 + \left[R + jL_2 + jL_3 - j\frac{1}{C} \right] \dot{I}_2 &= 0 \end{aligned}$$

本例虽然互感电压情况比较复杂, 只要能由互感电压的基本概念正确画出等效电路, 问题就得解了。

以上几个例子我们都引导读者用网孔电流法求解, 那么直接用节点电压法求解是否可以呢? 应该说原则上是可以的, 但是如果直接对图 8-22(a) 或图 8-23(a) 列写节点电压方程则比较繁琐, 因为不能直接写出互感元件的支路电导, 须先设其支路电流列入 KCL 方程, 再用节点电压将支路电流表示出来。而对于图 8-22(b) 或图 8-23(b) 所示的去耦等效电路, 则可以选择节点电压法方便地求解。

8.4 理想变压器及其特性

铁心变压器是常见的实用变压器,也是电子设备中的重要器材。它不仅可以变换电压、变换电流,还可以变换阻抗,故变压器又称变量器。

变压器的基本结构是将初、次级绕组(线圈)装在同一个由铁磁质制成的铁心上。由于铁磁质(如硅钢片,坡莫合金等)的相对磁导率为几千至几万,故绕组通过电流后,一方面磁场大为增加,这将大大提高线圈的电感量;另一方面磁场主要集中在铁心内,绝大部分磁通是经过铁心而闭合的,很少一部分磁通经过空气而闭合,这称为漏磁通。可见,变压器在实质上是耦合系数接近 1 的磁耦合电路。变压器初级绕组从电源吸收电能并转换为磁场能,然后再转换为次级绕组回路负载中所需要的电能,完成能量的传输作用。

对于变压器,从电路分析的角度需首先将其模型化、理想化。理想变压器就是变压器的理想化模型。一个理想变压器必须具备三个条件:(1)理想变压器不消耗能量。虽然这在实际中是做不到的,但是,只要导线电阻的能量损失(铜损),和磁芯的磁滞、涡流引起的能量损失(铁损)远小于变压器所传输功率,这些损耗即可忽略不计。(2)理想变压器无漏磁通,即耦合系数 $k=1$ 。这一假定的实际背景是:用以制成铁心的磁性材料具有高导磁率,漏磁通可忽略不计。(3)每一绕组的自感系数均为无限大。这意味着需要假定每一绕组的匝数为无限多。显然,这也是难以实现的,不过只要变压器的匝数足够多,自感系数是很大的。这一假定有实际意义。

同时,以下讨论限于线性变压器的范围内,即磁通与电流是线性关系。故理想变压器是线性非时变元件。

8.4.1 理想变压器的电路模型

理想变压器的磁耦合示意图如图 8-24 所示。图中两个线圈绕在铁心上,一般情况下左侧连接电源的线圈 N_1 称为初级线圈,右侧连接负载的线圈 N_2 称为次级线圈。初级线圈 N_1 的电流 i_1 生成的磁通 Φ_{11} 全部通过次级线圈 N_2 可称为 Φ_{21} ,次级线圈 N_2 的电流 i_2 生成的磁通 Φ_{22} 全部通过初级线圈 N_1 可称为 Φ_{12} ,按图示参考方向可以看出 Φ_{21} 与 Φ_{12} 方向相反,所以铁心中存在的磁通称为合成磁通 Φ ,并有

$$\Phi = \Phi_{21} - \Phi_{12}$$

由于合成磁通耦合(交链)着初、次级两个绕组的每一匝线圈,相应的磁链分别为 $\Psi_1 = N_1 \Phi$ 和 $\Psi_2 = N_2 \Phi$ 。若初、次级端子上感应电压 u_1 和 u_2 的参考方向与 Φ 符合右手螺旋关系,则有

$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \text{ 和 } u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

由此可推出初、次级电压关系

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

为了研究变压器的电流关系,先回忆耦合电感的伏安关系,若设图 8-24 的线圈 N_1 的自感系数为 L_1 ,线圈 N_2 的自感系数为 L_2 ,并有全耦合 $K=1$,结合同名端可写出初级线圈感应电压

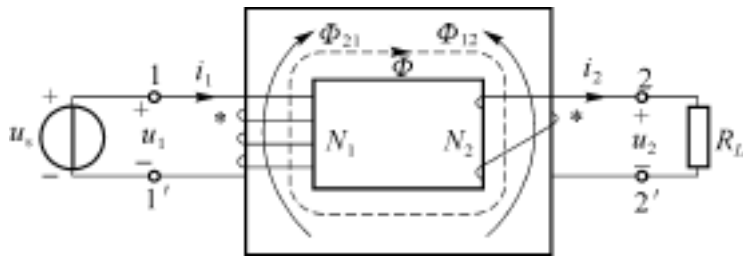


图 8-24 理想变压器的磁耦合

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \tag{8-17}$$

将上式改写为

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{u_1}{L_1} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt}$$

两边积分并代入式(8-7)和式(8-8) (即匝比与电感的关系), 可得

$$i_1 = \frac{1}{L_1} \int u_1 dt + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} i_2 = \frac{1}{L_1} \int u_1 dt + \frac{N_2}{N_1} i_2 \tag{8-18}$$

当自感系数 L_1 为无限大时, $i_1 = \frac{1}{L_1} \int u_1 dt \rightarrow 0$, 由此可推出初、次级电流关系

$$i_1 = \frac{N_2}{N_1} i_2 \quad \text{或} \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

将理想变压器的电路符号表示为图 8-25(a), 其形状与耦合电感相似, 同名端“*”仍然表示出两个线圈磁耦合的关系。但理想化使得它有了本质的变化, 它们不具有通常的互感的含意, 也不再用自感系数 L_1 、 L_2 和互感系数 M 表示, 唯一的参数是 N_1 与 N_2 之比, 称为匝比或变比。由于变压器主要工作在正弦稳态电路中, 画出其相量模型如图 8-25(b) 所示, 两个电路模型的电压和电流的参考方向是可以任意设定的。

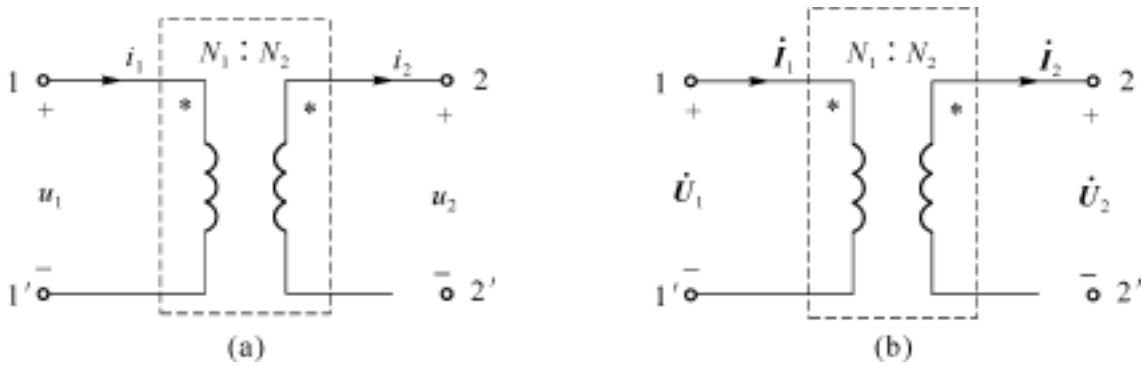


图 8-25 理想变压器的电路模型

8 4 2 理想变压器的特性

理想变压器是一种理想化的电路模型, 它的特性可归纳如下:

1 . 变电压

理想变压器的一个重要特性是变电压, 在图 8-25(a) 中所设电压 u_1 、 u_2 的参考极性均以带“*”端为高电位端, 则有

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{或} \quad \frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{N_2} \tag{8-19}$$

同理,在图 8-24(b)中有

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{N}_1}{\dot{N}_2} \tag{8-20}$$

电压比等于匝比,若线圈匝数 $N_1 > N_2$,则有 $u_1 > u_2$,此时理想变压器是降压变压器;若线圈匝数 $N_1 < N_2$,则有 $u_1 < u_2$,此时理想变压器是升压变压器。若改变其中任何一个电压的参考极性,电压比将是负的匝比。

2. 变电流

理想变压器的另一个重要特性是变电流,在图 8-25(a)中所设电流的参考方向与同名端之间具有这样的关系:一个电流从带“ \bullet ”端流入,另一个电流从带“ \bullet ”端流出,则有

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \tag{8-21}$$

同理,在图 8-24(b)中有

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{N}_2}{\dot{N}_1} \quad \text{或} \quad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{N}_2}{\dot{N}_1} \tag{8-22}$$

电流比等于匝比的倒数,若改变其中任何一个电流的参考方向,电流比将是负的匝比倒数。

若设匝比为

$$n = \frac{N_1}{N_2}$$

图 8-25(a)所示理想变压器变电压和变电流的特性表示为

$$u_1 = nu_2 \tag{8-23}$$

$$i_1 = \frac{1}{n}i_2 \tag{8-24}$$

理想变压器的变电压和变电流特性是互相独立的。

3. 传输能量

上面提到理想变压器不再具有一般电感的性质,即它不能储存磁场能量,那么它是否消耗能量呢?这里计算图 8-26(a)所示理想变压器初级瞬时功率

$$p_1 = u_1 i_1 = nu_2 \frac{i_2}{n} = u_2 i_2 = R_L i_2^2$$

代入变电压和变电流的关系,发现初级瞬时功率等于次级所接负载电阻的瞬时功率,说明理想变压器将电源提供的功率全部传输到负载上,即理想变压器本身不消耗功率。这个特性正好符合从实际变压器抽象到理想变压器的三个条件之一——“无损耗”。

4. 变阻抗

在实际电路中,理想变压器的阻抗变换特性得到广泛的应用。从图 8-26 和式 (8-23)、(8-24)可知,当负载为纯电阻 R_L 时,初级 1,1 两端的输入电阻为

有的著作中定义 $n = \frac{N_2}{N_1}$ 。

$$R_i = \frac{u_1}{i_1} = \frac{nu_2}{\frac{i_2}{n}} = n^2 \frac{u_2}{i_2} = n^2 R_L \tag{8-25}$$

这就是说,理想变压器初级的输入电阻等于次级电阻 R_L 乘以匝比 n 的平方。从理想变压器的初级来看次级电阻,比原来大了 n^2 倍,因而理想变压器起着改变电阻大小的作用。至于电阻是增加还是减少要视 $n > 1$ 还是 $n < 1$ 而定。把次级电阻乘 n^2 则意味着把次级电阻搬到初级中来,如图 8-26(b) 所示;或者说 $n^2 R_L$ 是次级电阻 R_L 折合到初级中的折合值。反过来,初级电阻折合到次级则应该将初级电阻除以 n^2 。

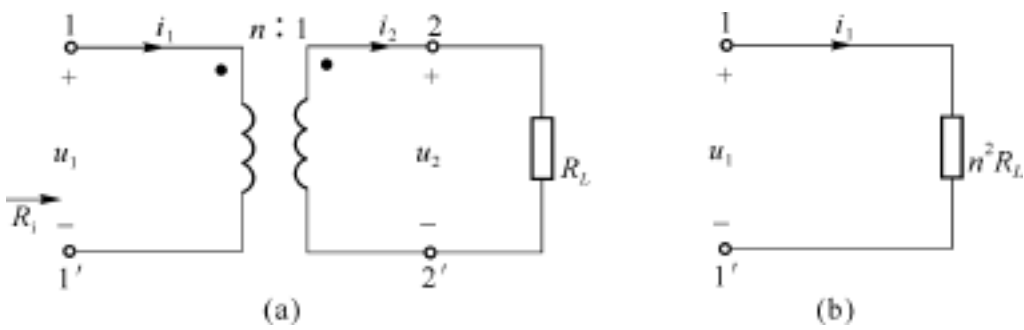


图 8-26 理想变压器的变电阻特性

在正弦稳态电路中,次级所接负载为复数阻抗,理想变压器的相量模型如图 8-27(a) 所示,则初级输入阻抗为

$$Z_i = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{\frac{\dot{I}_2}{n}} = n^2 Z_L \tag{8-26}$$

次级阻抗 Z_L 折合到初级的等效电路如图 8-27(b) 所示。注意到理想变压器变阻抗的公式与其同名端无关,读者可以自行证明。

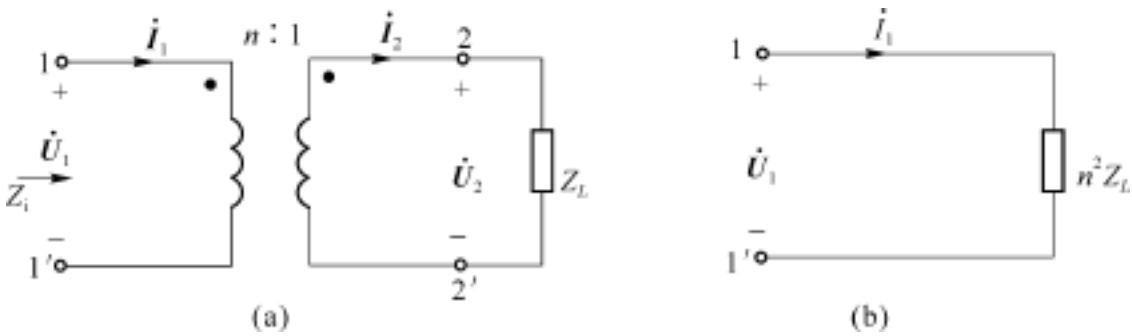


图 8-27 理想变压器的变阻抗特性

在晶体管收音机中把输出变压器接入扬声器和功率放大器之间,使放大器得到最佳负载,从而使负载获得最大功率就是利用了变压器具有阻抗变换这一特性。

这里要提醒读者注意的是:当理想变压器的初级回路和次级回路之间只有磁耦合时(如图 8-27 所示),才符合变阻抗的条件。此时也可以称理想变压器的初级回路和次级回路是独立的。

综上所述,理想变压器是一个线性非时变无损耗元件。它的唯一作用是按匝比 n 变换电压、变换电流和变换阻抗,这就是说,表征变压器的参数仅仅是匝比 n 。而且理想变压器是一种即时元件,它并不储存能量。在实际应用中,铁心变压器可近似地当作理想变压器来分析和计算。

8 5 含理想变压器的电路分析

本节通过几个不同例子说明理想变压器在电路中的功能,介绍含理想变压器电路的分析方法。

例 8-7 若纯电阻负载 R_L 阻值为 1 k ,内阻 R_0 为 8 k 。为使负载获得最大功率,在信号源与负载之间接入理想变压器如图 8-28 所示,计算理想变压器的匝比。

解 由变电阻公式 $R_i = n^2 R_L$,由初级等效电路可知当 $R_0 = R_i = n^2 R_L$ 时,负载获得最大功率。即

$$8\text{ k} = n^2 1\text{ k}$$

因而
$$n = \sqrt{8} = 2.83$$

即:只要接入一变比为 2.83 的理想变压器即可。

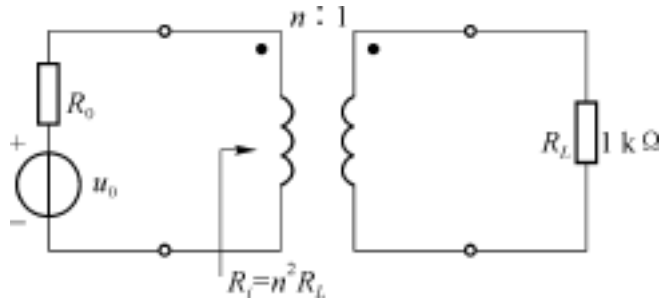


图 8-28 例 8-7 电路

由于理想变压器在传递能量的过程中本身不消耗能量,所以当等效电阻 R_i 上获得最大功率时,负载阻抗 R_L 上也获得最大功率。

如果负载为阻抗 $Z_L = z_L/\underline{\hspace{1cm}}$,信号源内阻为 Z_0 ,怎样选择理想变压器的匝比使负载获得最大功率呢?在图 8-29(a)电路中,初级等效电路如图(b)所示。次级负载阻抗等效到初级为 $n^2 Z_L$,理想变压器改变的是负载阻抗的模数,而改变不了其幅角。只能采用模匹配方式

$$|Z_0| = n^2 |Z_L|$$

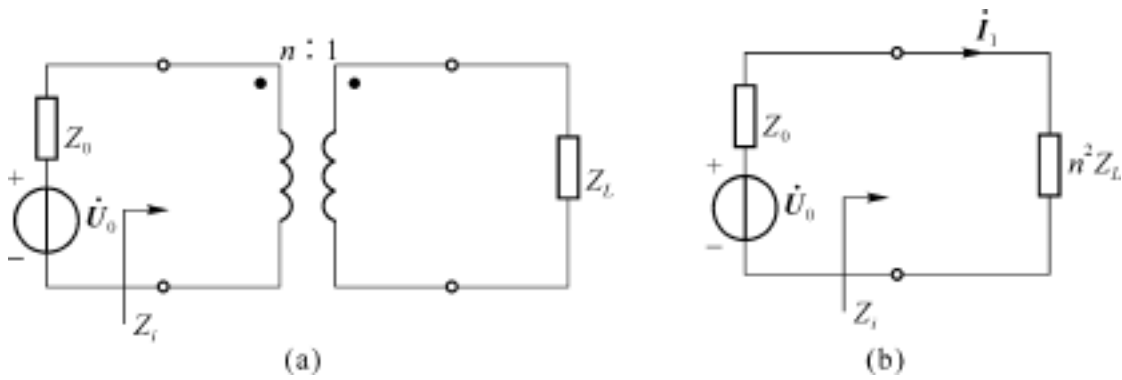


图 8-29 理想变压器实现功率匹配

由此选择理想变压器的匝比 n ,负载阻抗可以获得最大功率传输。这时所获得的最大功率并不是可能得到的最大功率。在信号源及内阻抗确定的条件下,负载若能以共轭匹配方式获得的最大功率是真正的最大功率,而以模匹配方式获得的最大功率则小于它。但它具有实用价值。

例 8-8 如图 8-30 所示含理想变压器电路,匝比为 $1/2$, $R_1 = R_2 = 10\text{ }\Omega$, $(1/\text{ }C) = 50\text{ }\Omega$, $U = 50\angle 0^\circ\text{ V}$,求流过 R_2 的电流 I 。

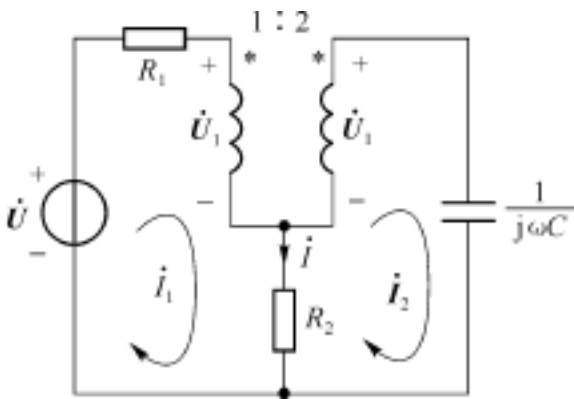


图 8-30 例 8-8 电路

解 按所示网孔电流列出网孔电流方程,因为

方程每一项是电压,所以其中理想变压器的初次级电压可以直接列入方程

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) \dot{I}_1 - R_2 \dot{I}_2 = \dot{U} - \dot{U}_1 \\ -R_2 \dot{I}_1 + \left[R_2 - \frac{j}{C} \right] \dot{I}_2 = \dot{U}_2 \end{cases} \quad (A)$$

代入元件参数

$$\begin{cases} 20 \dot{I}_1 - 10 \dot{I}_2 = 50 - \dot{U}_1 \\ -10 \dot{I}_1 + (10 - j50) \dot{I}_2 = \dot{U}_2 \end{cases} \quad (B)$$

再列出理想变压器的特性方程

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{2}{1} \quad (C)$$

将式(C)代入式(B)并整理得

$$\begin{cases} 40 \dot{I}_2 - 10 \dot{I}_2 = 50 - \dot{U}_1 \\ -20 \dot{I}_2 + (10 - j50) \dot{I}_2 = 2 \dot{U}_1 \end{cases} \quad (D)$$

此时方程组的变量不全是网孔电流,应属于混合型方程。由于电路含有理想变压器这样的特殊元件,因而此电路方程属于非常规的了。

解方程组(D)并代入特性方程可得

$$\dot{I}_2 = 1.414 \angle 45^\circ \text{A}, \quad \dot{I}_1 = 2.83 \angle 45^\circ \text{A}, \quad \dot{I} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 1.414 \angle 45^\circ \text{A}$$

注意: 本例不属初、次级独立回路,不能用阻抗变换法。

例 8-9 如图 8-31 (a)含理想变压器电路中, $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $C = 1\text{F}$, $\dot{U}_s = 10 \angle 0^\circ \text{V}$, 匝比 $1/2$, 求电压 \dot{U}_1 。

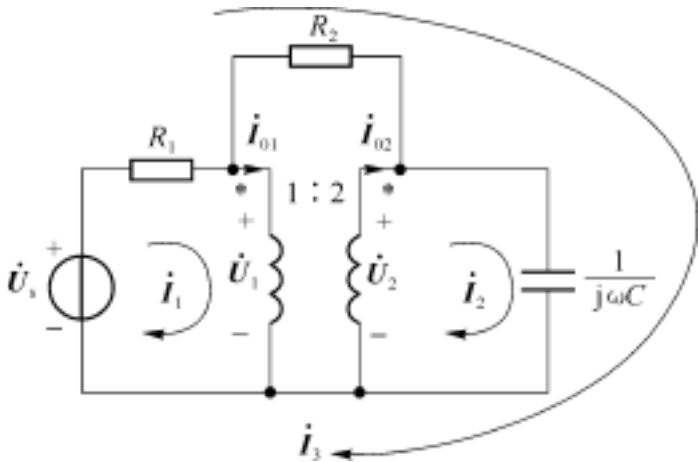


图 8-31 例 8-9 电路 1

解 先写出理想变压器的特性方程

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\dot{I}_{01}}{\dot{I}_{02}} = \frac{2}{1}$$

这里用 \dot{I}_{01} 和 \dot{I}_{02} 表示理想变压器的初、次级电流。为了使变量网孔电流与之相同,按图中表示的回路列出三个闭合回路的 KVL 方程:

$$R_1 (\dot{I}_1 + \dot{I}_3) = \dot{U}_s - \dot{U}_1$$

$$\frac{1}{jC} (\dot{I}_2 + \dot{I}_3) = \dot{U}_2$$

$$(R_1 + R_2 + \frac{1}{jC}) \dot{I}_3 + R_1 \dot{I}_1 + \left[\frac{1}{jC} \right] \dot{I}_2 = \dot{U}_s$$

其中

$$\dot{I}_{01} = \dot{I}_1, \quad \dot{I}_{02} = \dot{I}_2$$

可解出 $\dot{U}_1 = 2\ 24\angle -63.4^\circ\text{V}$

若按图 8-32 所示按网孔列出网孔电流方程也是可以的,但特别注意到网孔电流不等于理想变压器初、次级电流,它们的关系是

$$\dot{I}_{01} = \dot{I}_1 - \dot{I}_3, \quad \dot{I}_{02} = \dot{I}_2 - \dot{I}_3$$

例 8-10 已知电路图 8-33 所示,若 $R=2\ \Omega$, $Z_L=1\ \Omega$, $n=2$, 求等效输入阻抗。

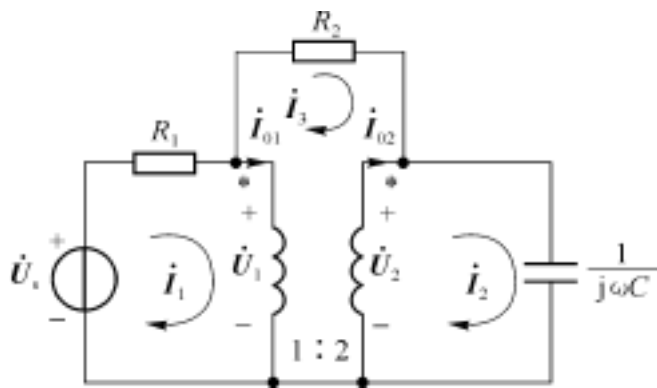


图 8-32 例 8-10 电路 2

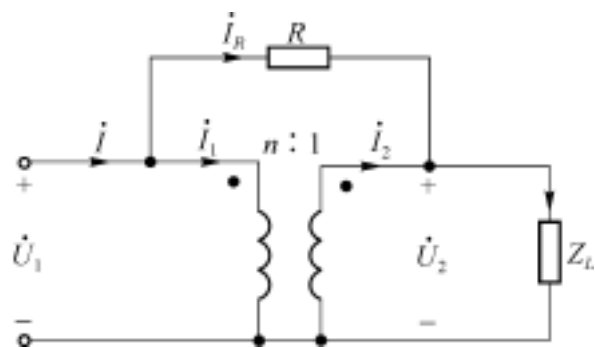


图 8-33 例 8-10 电路

解 根据理想变压器的特性及 KCL、KVL 分析,由于

$$\dot{U}_R = \dot{I}_R R = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = \dot{U}_1 - \frac{\dot{U}_1}{n}$$

写为

$$\frac{\dot{I}_R}{\dot{U}_1} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{R} \tag{A}$$

又因 $Z_L(\dot{I}_2 + \dot{I}_n) = \dot{U}_2$, 将式 (A) 代入, 即

$$Z_L \left[n\dot{I}_1 + \frac{\dot{U}_1 \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{R} \right] = \frac{1}{n} \dot{U}_1$$

可推出

$$n\dot{I}_1 = \frac{1}{nZ_L} \dot{U}_1 + \frac{1}{R} \left[\frac{1}{n} - 1 \right] \dot{U}_1$$

所以有

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{1}{n^2 Z_L} + \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \right] \frac{1}{R} = \frac{1}{n^2 Z_L} + \frac{1}{n^2 \frac{R}{1-n}} \tag{B}$$

而 $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_R$ 并以式 (A)、(B) 代入可得

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} + \frac{\dot{I}_R}{\dot{U}_1} = \frac{1}{n^2 Z_L} + \frac{1}{n^2 \frac{R}{1-n}} + \frac{1}{R \frac{1 - \frac{1}{n}}{1}}$$

上式分母是三个等效阻抗,可以画出三个等效阻抗并联等效电路如图 8-34 所示。

代入给定数据,则有

$$R_i = \frac{2 \times (-8)}{2 + (-8)} = \frac{-16}{-6} = \frac{8}{3}$$

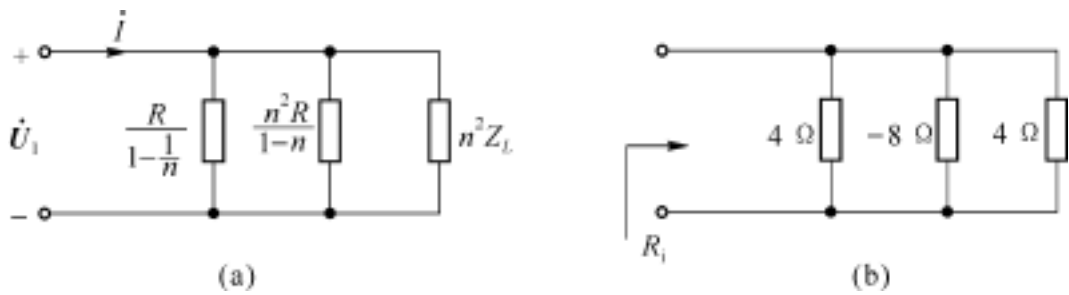


图 8-34 例 8-10 输入电阻

图中 R 是个反馈电阻。若 $R =$, 由图(a)可回到最基本的情况, 即

$$R_i = n^2 Z_L$$

8.6 全耦合变压器

假定变压器的损耗和漏磁通可忽略不计, 即耦合系数 $K=1$, 但其初、次级线圈的自感系数不再是无穷大而是有限值, 那么互感系数也是有限值。称之为全耦合变压器。这是在理想变压器的基础上降低了一个条件, 很明显全耦合变压器比理想变压器更接近变压器的实际情况。

为了更清楚地分析全耦合变压器的工作原理, 首先讨论次级开路, 即空载情况。在图 8-35(a)中, 次级电流 $i_2=0$, 故次级对初级没有影响。由于线圈自感系数为有限值, 在电压源作用下初级回路将产生电流 i_0 , 称 i_0 为激磁电流, 其产生的磁通 Φ_0 称为激磁磁通, 它是铁心内唯一磁通, 也称为主磁通。

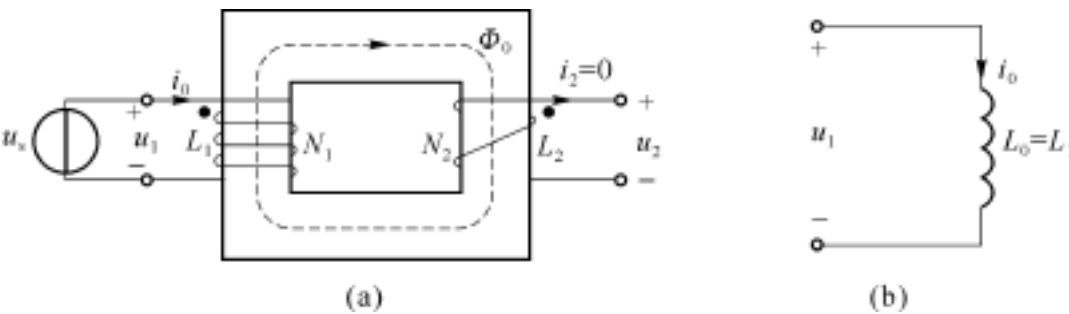


图 8-35 全耦合变压器次级开路

空载时的变压器对信号源来说相当于一个电感, 其电感称为激磁电感, 以 L_0 表示。在全耦合情况下, 激磁电感 L_0 就是初级电感 L_1 , 等效电路如图(b)所示, 所以有

$$L_0 = \frac{N_1^2}{L_0}$$

初、次级感应电压分别为

$$u_1 = N_1 \frac{d\Phi_0}{dt}, u_2 = N_2 \frac{d\Phi_0}{dt}$$

故有 $u_2 = \frac{u_1}{n}$ 。

下面接着讨论全耦合变压器有负载的工作特性。

如图 8-36 所示, 在次级感应电压作用下, 负载 R_L 中将有电流 i_2 。从变压器传送能量的角度看, 与空载时比较, 初级电流必将随着 i_2 的存在而相应的增大。此时 i_1 比次级开路时

的初级电流 i_0 大多少是我们关心的问题。

可以写出图 8-36 电路的初级线圈感应电压：

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

上式与 8 4 节中的式(8-17)完全相同，由此重新写出式(8-18)

$$i_1 = \frac{1}{L_1} \int u_1 dt + \frac{N_2}{N_1} i_2$$

在这里自感系数 L_1 是有限值，上式右边第一项正好等于次级开路时初级线圈的电流——激磁电流

$$i_0 = \frac{1}{L_1} \int u_1 dt$$

所以

$$i_1 = i_0 + \frac{N_2}{N_1} i_2 = i_0 + \frac{i_2}{n}$$

上式描述了全耦合变压器初级电流 i_1 、次级电流 i_2 和激磁电流 i_0 三者之间的关系。它表明 i_1 有两个分量：一是激磁电流 i_0 ，另一为 $\frac{i_2}{n}$ 。这是由于次级电流的存在使得初级增加一部分电流，反映了次级电流的影响。也就是说，为了平衡次级电流的去磁作用，初级必须多供出一部分电流。若 i_2 增加， i_1 就自动增加以达到新的平衡；若 $i_2 = 0$ ，则 $i_1 = i_0$ 即全耦合变压器空载时的情况。

电压关系为

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

与理想变压器的变电压关系完全一致。其实在推导理想变压器电压关系时并没有用到条件(3)，即与电感系数是否无限大无关。

综上所述，全耦合变压器的特性方程可归纳为

$$u_1 = nu_2 \tag{8-27}$$

$$i_1 = i_0 + \frac{1}{n} i_2 \tag{8-28}$$

现在知道，全耦合变压器与理想变压器只相差一个激磁电流。所以可在理想变压器电路模型的基础上得到全耦合变压器的电路模型。式(8-28)表明，初级有一个由三条支路汇合的独立节点，其中一条支路中电流为 i_0 ，它流过激磁电感 L_0 (如果 $L_0 \rightarrow \infty$ ，则此支路相当于开路，即为理想变压器情况)，另一分支为理想变压

器的初级电流 $\frac{i_2}{n}$ ，式(8-27)所表明的初、次级电压关系与理想变压器完全相同；而且， L_0 的端电压与理想变压器的初级的感应电压也是同一电压，故 L_0 应与理想变压器初级并联，电路模型如图 8-37 所示。以上导

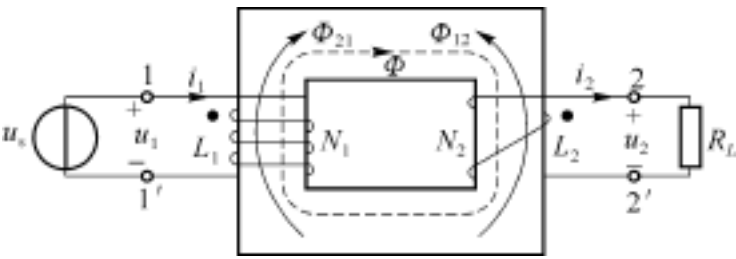


图 8-36 全耦合变压器次级接有负载

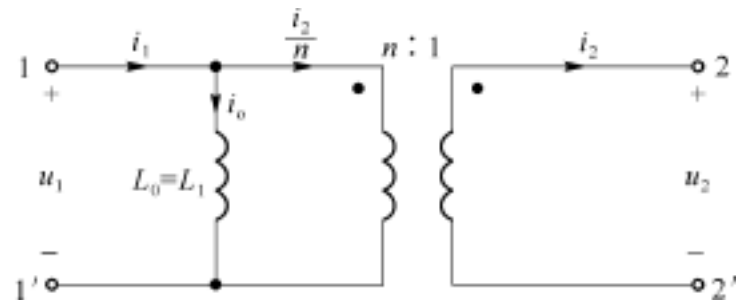


图 8-37 全耦合变压器电路模型

出全耦合变压器与理想变压器的关系,由此得到全耦合变压器的电路模型。含有全耦合变压器的电路分析与含理想变压器电路的分析基本相同。

如果全耦合变压器次级接负载 R_L ,如图 8-38(a)所示,把 R_L 折合到初级中的等效电路则如图(b)所示。可见全耦合变压器除用于变化电压、电流外,变阻抗功能也是很有用的。

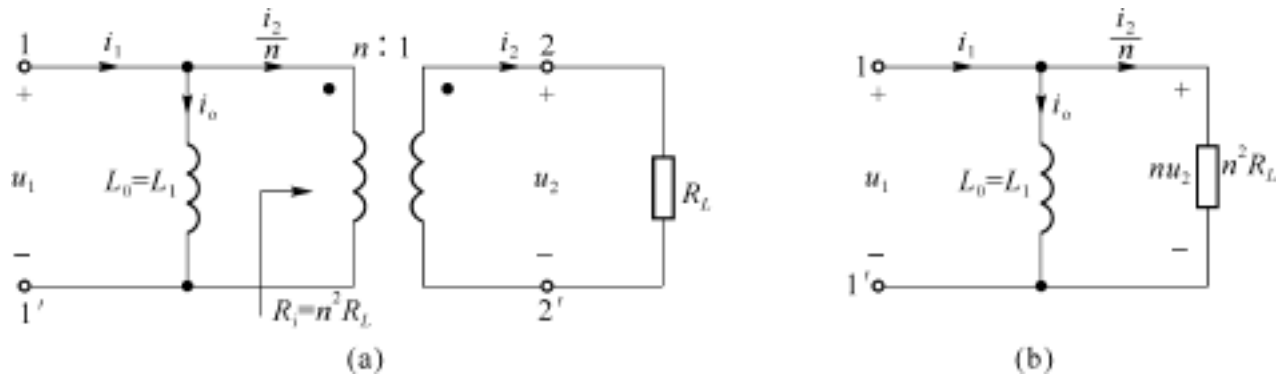


图 8-38 全耦合变压器的变阻抗特性

全耦合变压器作为耦合电感来分析也完全是可以的,如图 8-39 所示。因此两种电路模型是可以等效的。即式(8-7)、(8-8)所表示的两组参数的互换关系:

(1) $M = \sqrt{L_2 L_1}$

(2) $\frac{L_1}{L_2} = \left[\frac{N_1}{N_2} \right]^2 = n^2$, 即 $\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = n$

所以已知 L_1 、 L_2 和 M ,可求匝比 n ; 激磁电感 $L_0 = L_1$ 。已知匝比 n 和激磁电感 L_0 ,可求 L_1 、 L_2 和 M 。

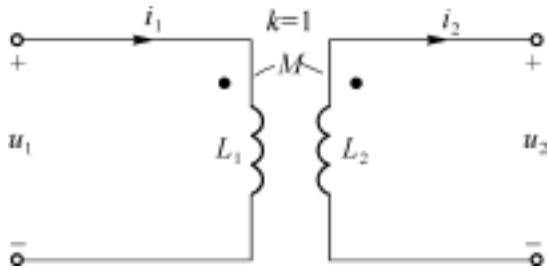


图 8-39 全耦合变压器作为互感元件

8.7 实际变压器的电路模型

对于任何一个实际变压器,要求它无损耗是办不到的;初、次级绕组耦合的再紧,其耦合系数也是小于 1 的。所以全耦合变压器的分析仍是一种理想化情况,为了更全面的反映变压器的实际特性,下面将在理想变压器和全耦合变压器模型的基础上,从变压器的电压、电流方程式出发,综合考虑线圈电阻,漏感及激磁电感等因素的影响,增添相应的电路元件以组成实际变压器的电路模型。这样当研究实际变压器在工作中发生的物理现象时,只要根据其电路模型进行分析即可。

图 8-40 为实际变压器磁场分布示意图。铁心中除有耦合线圈的合成磁通 以外,还有

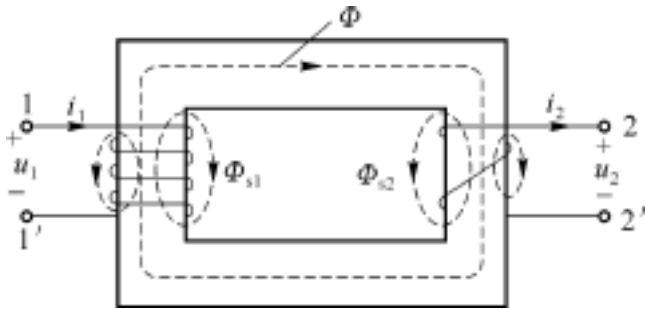


图 8-40 铁心变压器

经空气而闭合的漏磁通。设初次级线圈各匝漏磁通的总和即漏磁通分别为 Φ_{s1} 和 Φ_{s2} ,由于漏磁通是通过空气介质与本线圈环链的,故漏磁链与电流成正比。漏电感量是线性参数

$\Phi_{s1} = L_{s1} i_1, \quad \Phi_{s2} = L_{s2} i_2 \quad (8-29)$

式中比例系数 L_{s1} 、 L_{s2} 分别称为初次级的漏电感,简称初级漏电感和次级漏电感。

$$L_{s1} = \frac{s1}{i_1}, L_{s2} = \frac{s2}{i_2}$$

由于漏电感 L_{s1} 的存在,使得合成磁通 变小,即次级感应电压变小,所以应将漏电感 L_{s1} 串联在初级;同理,漏电感 L_{s2} 应串联在次级。设初、次级线圈等效电阻为 R_1 和 R_2 ,也应分别以串联方式出现,如图 8-41 所示。

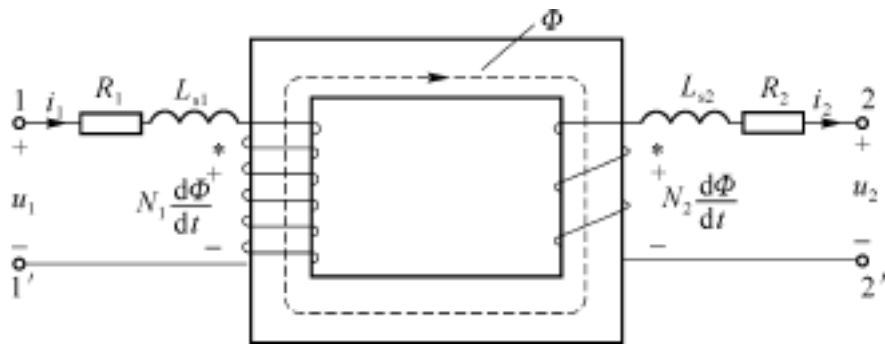


图 8-41 实际变压器模型示意图

根据图 8-41 和式(8-29),则电压方程可以写成

$$u_1 = R_1 i_1 + \frac{d s1}{d t} + N_1 \frac{d \Phi}{d t} = R_1 i_1 + L_{s1} \frac{d i_1}{d t} + N_1 \frac{d \Phi}{d t}$$
$$N_2 \frac{d \Phi}{d t} = R_2 i_2 + \frac{d s2}{d t} + u_2 = R_2 i_2 + L_{s2} \frac{d i_2}{d t} + u_2$$

则图中铁心部分即等效为一全耦合变压器。故其电流方程为

$$i_1 = i_0 + \frac{N_2}{N_1} i_2$$

考虑到激磁电流的影响,依照全耦合变压器的电路模型即可画出图 8-42。

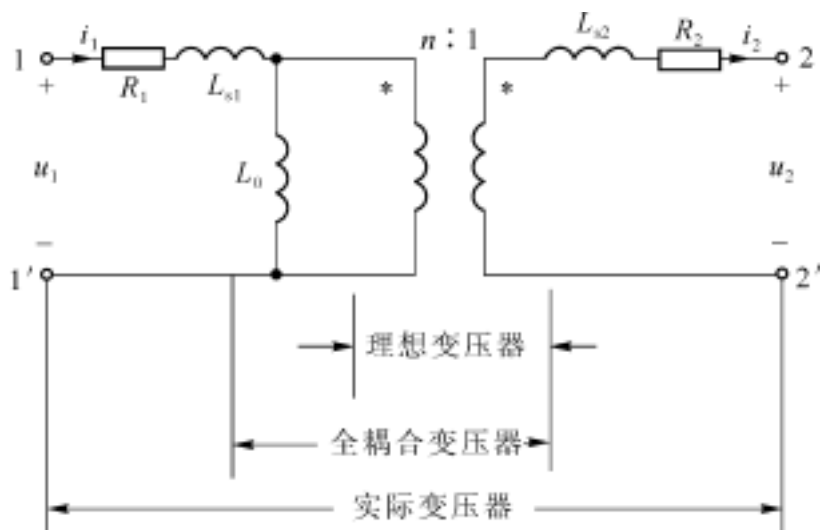


图 8-42 实际变压器电路模型

应该说明两点:第一,不论哪种模型的建立都不能离开使用条件。所以在实际中并非每一个实际变压器都需要用如此复杂的模型来模拟。例如电感元件在电路中常以阻抗的形式出现,所以从图 8-42 中可以看出,对于低频电路中的变压器主要应考虑其激磁电感,在模型中可以不考虑漏感;对于高频电路中使用的变压器,由于漏感抗的增大,漏感反而成为其主要影响的元件。第二,实际变压器的模型,绝非仅仅图 8-42 一种形式。尽管可以用元件模拟的物理现象不外乎上述几类,然而由于具体问题分析的需要,以及测算这些等效参数的

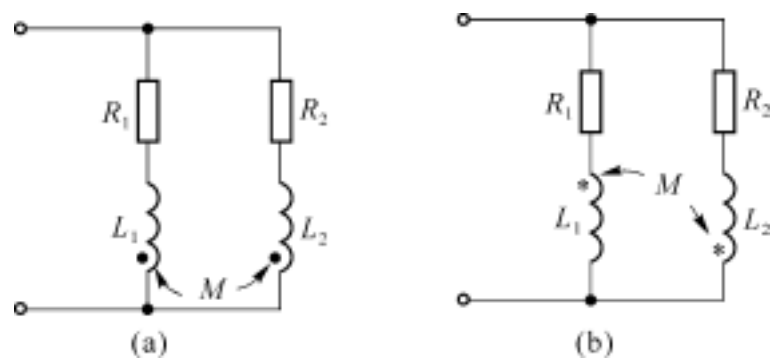
考虑思路及方法不同,可以构成多种形式的模型。

另外在研究铁心变压器的工作原理时,假设变压器是线性元件,即忽略铁磁物质的非线性性质,认为铁心中磁通与电流是线性关系。否则变压器的自感,互感等都将是非线性参数(见参考附录 D)。

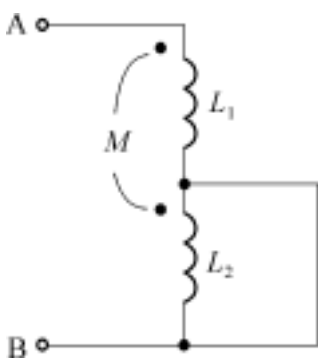
习 题 八

8-1 导出题图 8-1(a)、(b)两种线圈连接方式的等效阻抗公式,并求当 $R_1 = R_2 = R$ 及 $L_1 = L_2 = M$ 时的等效阻抗。

8-2 含耦合电感的电路如题图 8-2 所示,若 $L_1 = 10\text{mH}$, $L_2 = 2\text{mH}$, $M = 4\text{mH}$, 求 AB 两端的等效电感 L_{AB} 。

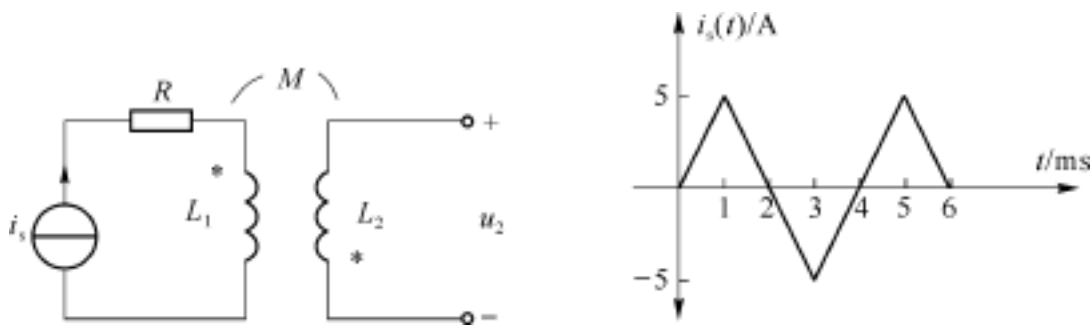


题图 8-1



题图 8-2

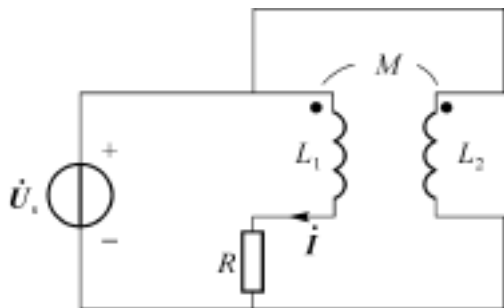
8-3 在题图 8-3 所示电路中, $R_1 = 5 \Omega$, $L_1 = 2\text{H}$, $L_2 = 3\text{H}$, $M = 2\text{H}$, 电流源 $i_s(t)$ 的波形如题图所示, 试绘出 $u_2(t)$ 的波形。



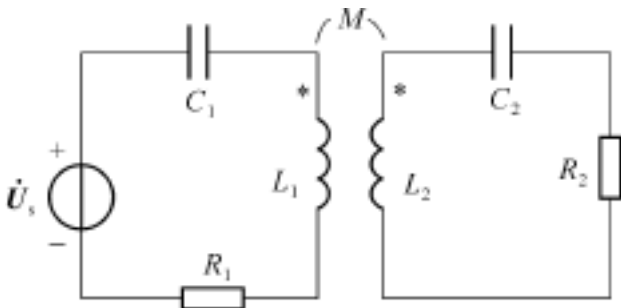
题图 8-3

8-4 电路如题图 8-4 所示, 求 I 与 U 相位差为 45° 的条件。

8-5 用网孔电流法列写题图 8-5 的电路方程。



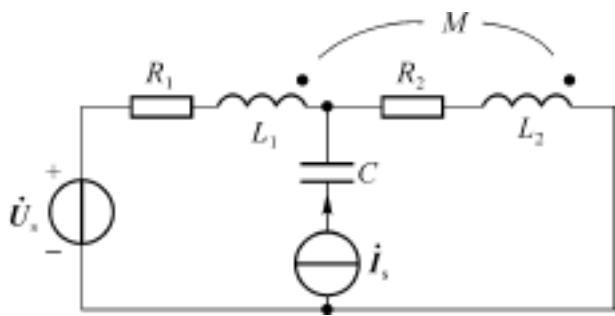
题图 8-4



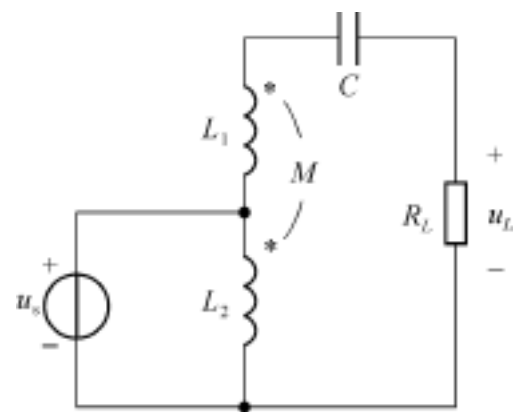
题图 8-5

8-6 对题图 8-6 所示的电路列写网孔电流方程。

8-7 题图 8-7 电路中 $L_1 = L_2 = 8$, $M = 4$, $u_s = 10 \sqrt{2} \cos t$, $f = 10^3$ Hz, 若要求负载电压 u_L 与输入电压 u_s 同相位, 问(1)电容 C 值是多少 ? (2) U_L 值为多少 ?

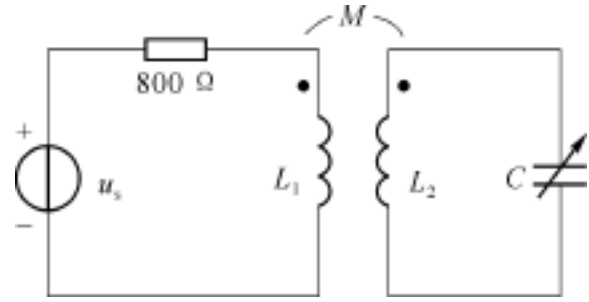


题图 8-6



题图 8-7

8-8 已知题图 8-8 中 $L_1 = L_2 = 4$ H, $M = 2$ H, $u_s = 10 \cos 1000 t$ V, 调节电容 C 使初级电流等于零, 问(1)此时次级回路中有无电流 ? 为什么 ? (2)此时 C 的数值应为多少 ?

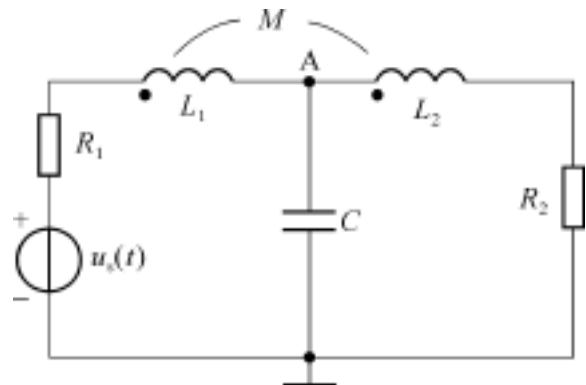


题图 8-8

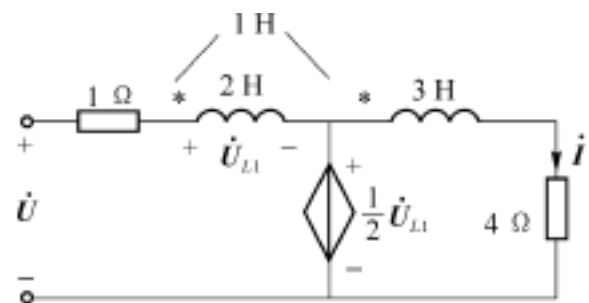
8-9 当耦合电感次级开路及短路时, 由初级得到的电感量分别为 L_{oc} 和 L_{sc} , 试证明耦合系数 $K = \sqrt{1 - \frac{L_{sc}}{L_{oc}}}$; 并说明此关系式是否与同名端有关。

8-10 已知题图 8-10 中 $L_1 = L_2 = 2$ H, $M = 1$ H, $C = 1$ F, $R_1 = R_2 = 1$, $u_s(t) = 100 \cos(t + 15^\circ)$ V, 试求(1)A 点的电压 $u_A(t)$; (2)电路吸收的功率 P 。

8-11 求题图 8-11 所示电路中流过 4 电阻的电流 I 。



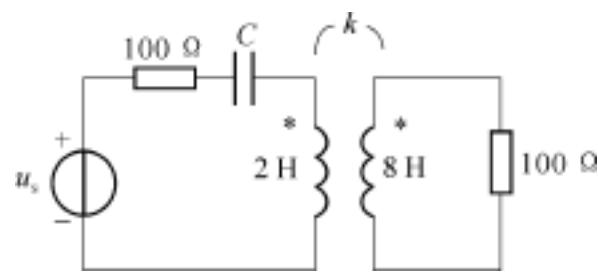
题图 8-10



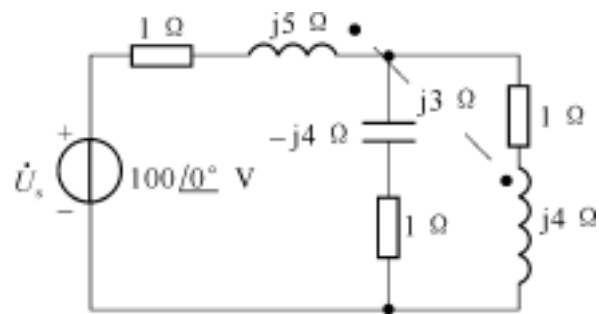
题图 8-11

8-12 题图 8-12 所示的电路， $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ ，已知耦合系数 $K = 0.5$ ，欲使电源电流与电压同相，求电容 C 。

8-13 求题图 8-13 所示电路的功率因数和电源供出的有功功率。



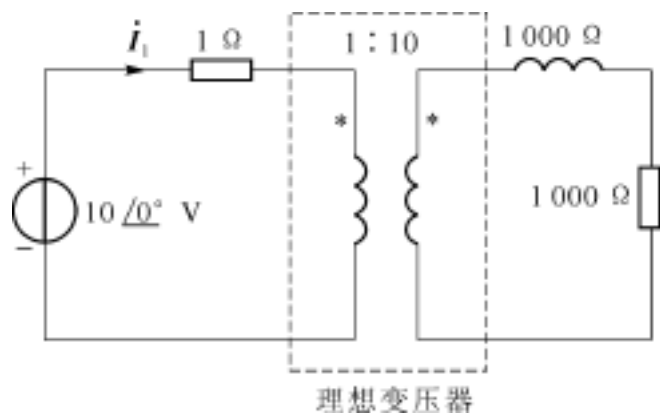
题图 8-12



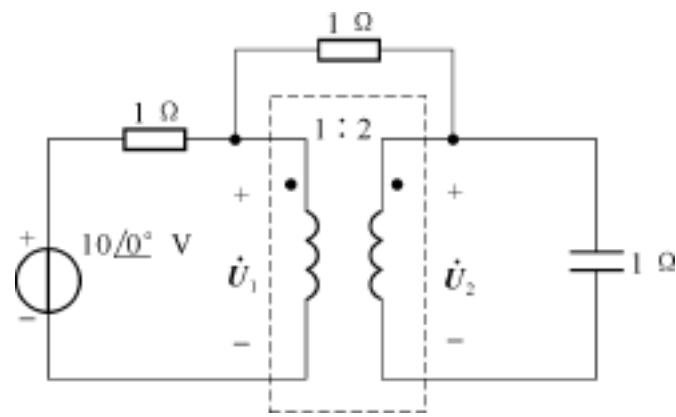
题图 8-13

8-14 试求题图 8-14 电路中的 I_1 。

8-15 试求题图 8-15 电路中理想变压器初级的电压 U_1 。



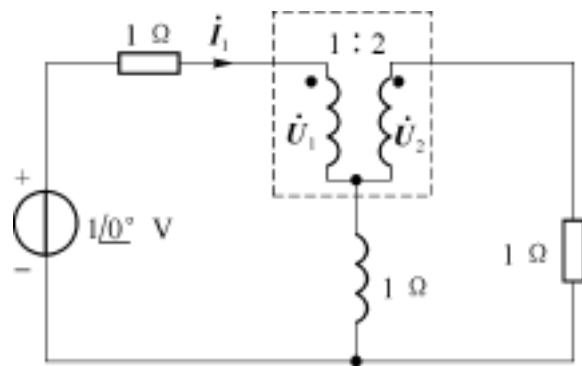
题图 8-14



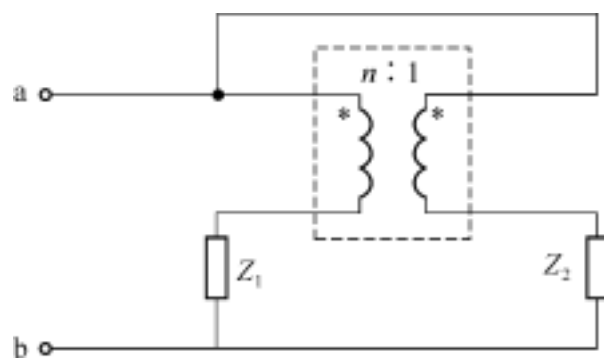
题图 8-15

8-16 试求题图 8-16 电路中理想变压器初级的电流 I_1 。

8-17 试求题图 8-17 电路 ab 两端的输入阻抗 Z_{ab} 。



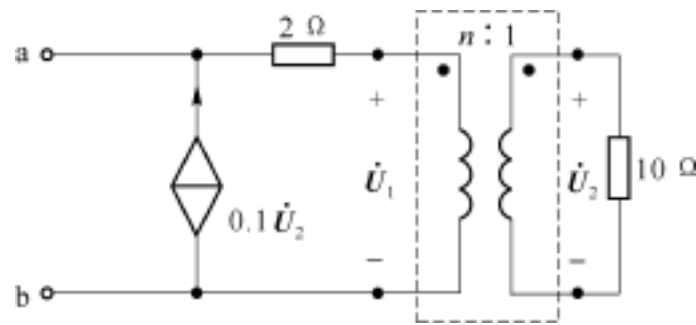
题图 8-16



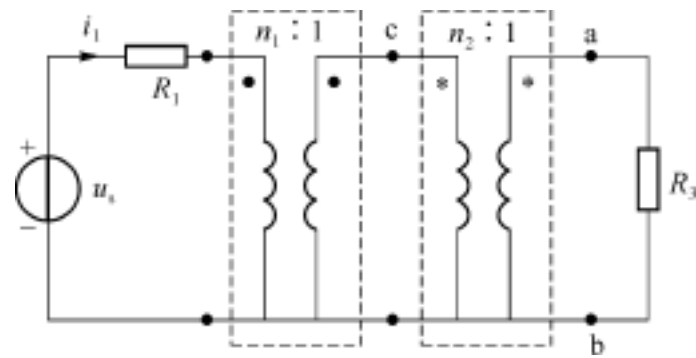
题图 8-17

8-18 确定题图 8-18 电路中理想变压器的匝比，已知 ab 端的输入阻抗 $Z_{ab} = 8$ 。

8-19 (1) 试求题图 8-19 电路中的电流 i_1 ，电压 u_{ab} 及 u_{cb} ；(2) 找出 ab 以左的戴维南等效电路。

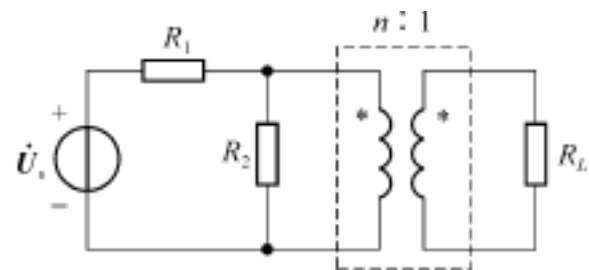


题图 8-18



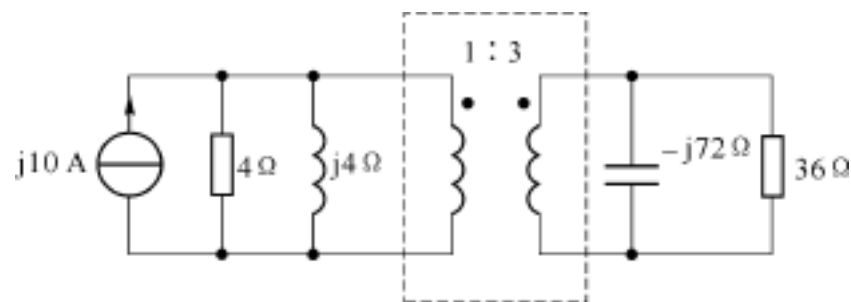
题图 8-19

8-20 已知题图 8-20 电路中电源的内阻 $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, 负载 $R_L = 10 \Omega$, $u_s(t) = 10 \sqrt{2} \cos 10 t \text{ V}$, 求使负载 R_L 从电源获得最大功率的匝比和最大功率。



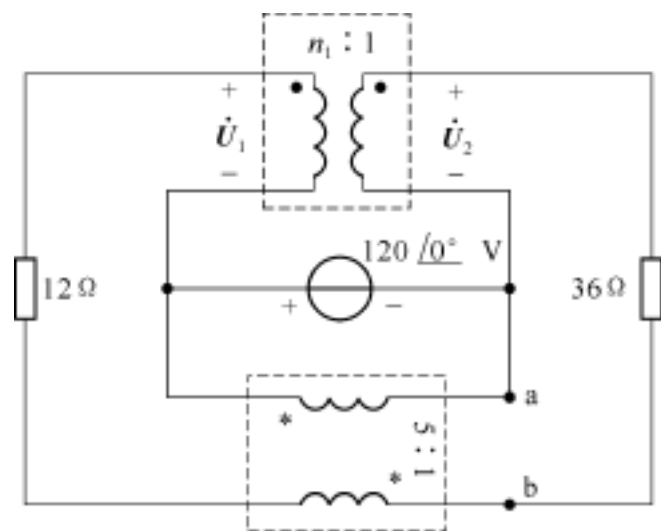
题图 8-20

8-21 题图 8-21 所示电路为理想变压器, 求电路所消耗的总功率 P 。



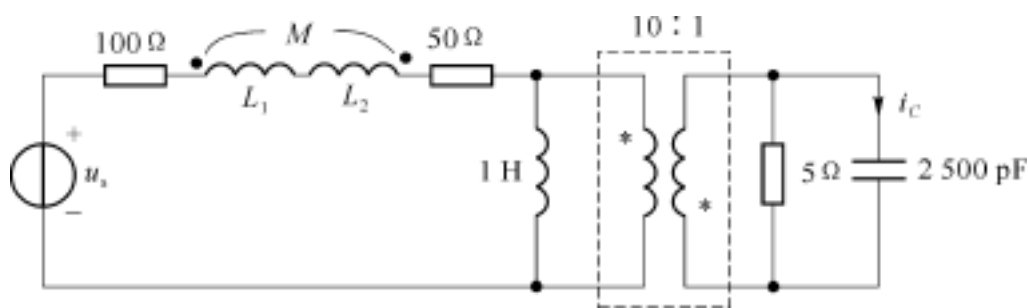
题图 8-21

8-22 电路如题图 8-22 所示, (1) 试求匝比 n_1 和每一电阻消耗的功率; (2) 若将 ab 短接, 试求 U_1 和 U_2 。



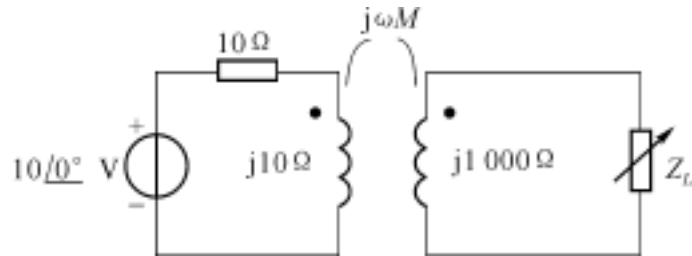
题图 8-22

8-23 电路如题图 8-23 所示, 已知 $u_s(t) = 200 \sqrt{2} \cos 200 t \text{ V}$, $L_1 = 1 \text{ H}$, $L_2 = 0.5 \text{ H}$, $M = 0.25 \text{ H}$ 。求 i_C 。



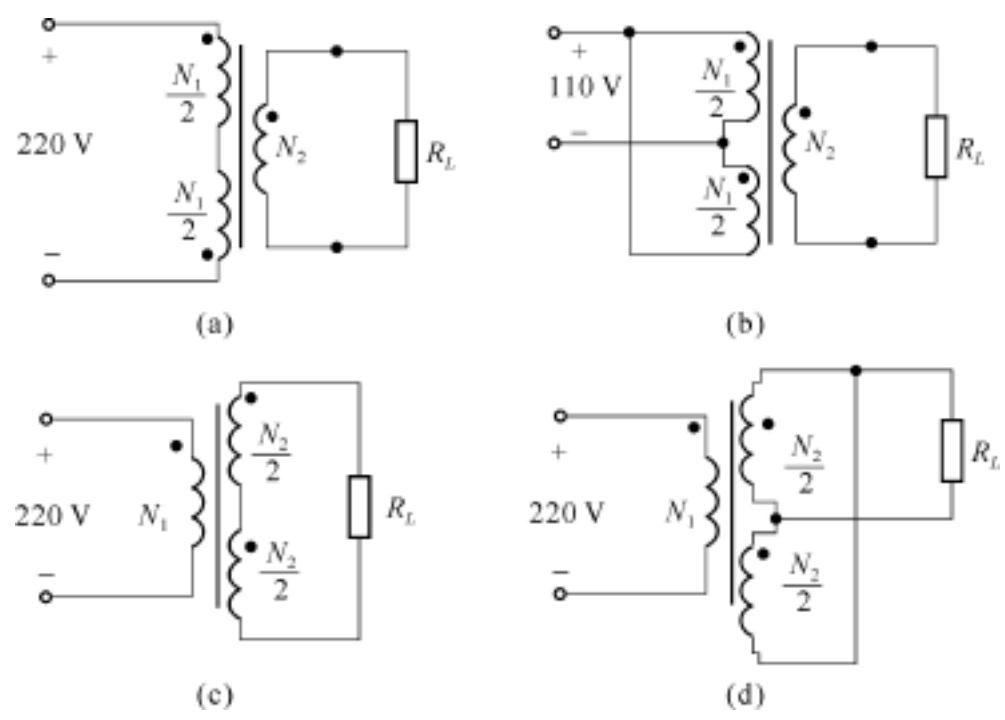
题图 8-23

8-24 全耦合变压器如题图 8-24 所示, 求负载为何值时获得最大功率, 获得的最大功率是多少 ?



题图 8-24

8-25 多绕组的铁芯变压器, 其激磁电感很大, 以致其激磁电流可近似为零, 且认为损耗与漏磁皆可忽略。在这种情况下, 当初级或次级连接方式如题图 8-24 所示时, 试分析同名端连接是否正确 ? 若不正确, 将会出现什么后果 ? 为什么 ? 应怎样正确地连接 (图中 N_1 , N_2 指绕组的匝数) ?



题图 8-25

第九章 电路的频率特性

当电路中包含储能元件时,由于其阻抗是频率的函数,将导致同一电路对不同频率的信号有不同的反应,这种现象用电路的频率特性来描述。电路的频率特性是通过网络函数(或叫系统函数)来讨论的。网络函数是指响应相量与激励相量之比,记作 $H(j\omega)$,即

$$H(j\omega) = \frac{\text{响应相量}}{\text{激励相量}} \tag{9-1}$$

由于电路的功能不同,网络函数有多种不同的含义。当响应与激励在电路的同一端口上(如图 9-1(a)所示)时,其网络函数称为策动点函数。策动点函数包括策动点阻抗

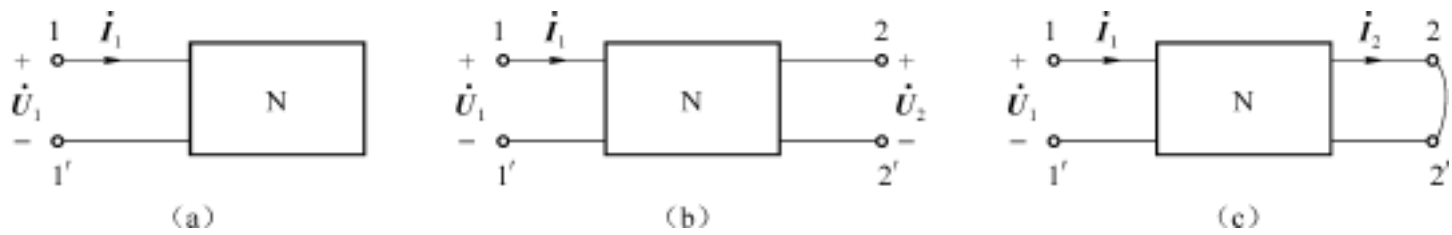


图 9-1 网络函数

$$H(j\omega) = Z_{11}(j\omega) = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$$

及策动点导纳

$$H(j\omega) = Y_{11}(j\omega) = \dot{I}_1 / \dot{U}_1$$

当响应与激励在电路的不同端口(如图 9-1(b)、(c)所示)时,则网络函数称为转移函数或传输函数,包括转移电压比(或叫电压传输系数)

$$H(j\omega) = K_u(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$$

转移电流比(或叫电流传输系数)

$$H(j\omega) = K_i(j\omega) = \dot{I}_2 / \dot{I}_1$$

转移阻抗

$$H(j\omega) = Z_t(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{I}_1$$

转移导纳

$$H(j\omega) = Y_t(j\omega) = \dot{I}_2 / \dot{U}_1$$

由式(9-1)可知,当激励的幅度确定而频率可变时,网络函数的频率特性就表示响应的频率特性。从理论上说,频率特性的研究,是指 从零至无穷大的整个频率域内,网络函数随频率改变所呈现的规律。一般情况下网络函数 $H(j\omega)$ 是个复数,可以表示为

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle \varphi$$

其幅度和幅角都是频率的函数,称幅度与频率的关系为幅频特性,称幅角与频率的关系为相

频特性。

9.1 RC 电路的频率特性

9.1.1 RC 低通电路

仅由一个电阻一个电容构成的简单 RC 低通电路如图 9-2(a)、(b)所示,图(b)电路是图(a)电路的相量模型。下面分析这类电路的频率特性。设其输入端为 1、1',输出端为 2、2',即以 \dot{U}_1 为输入,以 \dot{U}_2 为输出。分析其电压传输系数(即输出电压与输入电压之比)。可以看出 \dot{U}_2 与 \dot{U}_1 的关系是阻抗的分压关系,即网络函数为

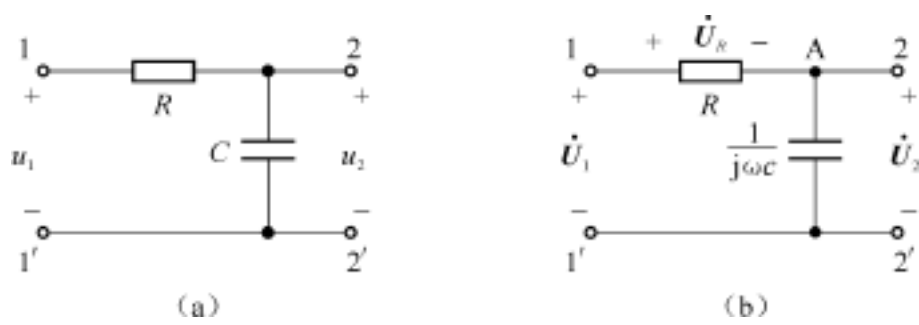


图 9-2 RC 低通电路

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{-j\arctan \omega RC} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

其幅频特性

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \tag{9-2}$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = -\arctan \omega RC \tag{9-3}$$

当 ω 从 0 向 ∞ 变化时,幅频特性从 1 逐渐减小至 0,而输出电压与输入电压的相位差从 0° 逐渐变至 -90°。这组特性绘于图 9-3(a)、(b)中。图(a)中若将输入电压视为幅值相同、频率可变的一组正弦电压时,则输出电压与输入电压比较起来,其中高频成分幅值大大削弱,而主要保留低频成分。削弱一部分频率成分而保留另一部分频率成分的特性称为滤波特性。由于图 9-2 所示 RC 电路允许低频率的成分通过,就是低通滤波电路,简称低通电路。

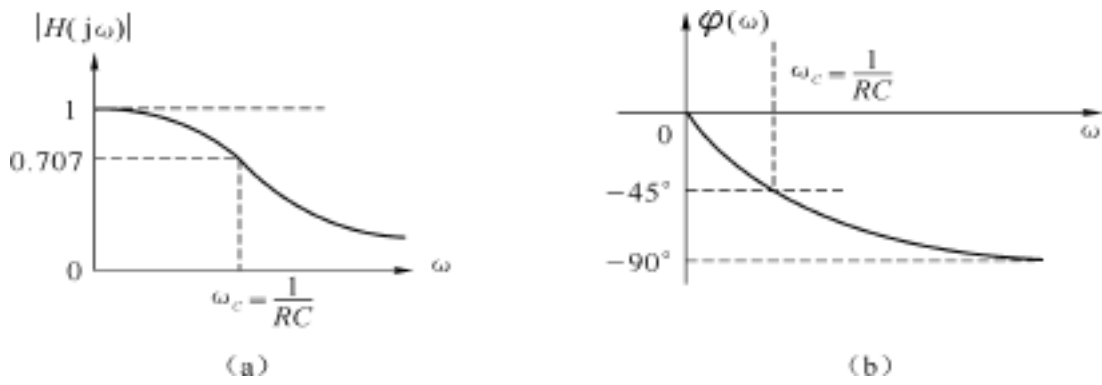


图 9-3 RC 低通电路的频率特性

图 9-3(a) 中 ω_c 称为半功率点频率, 当 $\omega_c = 1/RC$ 时, $|H(j\omega)|$ 下降到最大值的 $1/\sqrt{2}$ (0.707) 倍。由于信号功率与其电压有效值的平方成比例, 所以当电压减小为最大值的 0.707 倍时其功率减小一半。因而曲线上相应的点称为半功率点。 ω_c 也称为截止频率, $0 \sim \omega_c$ 之间频率范围为通频带, 简称通带。此频率范围以外称为阻带。

这里可以用相量图来分析输出电压 U_2 与输入电压 U_1 的关系, 根据 KVL 画出相量图如图 9-4 所示。若 U_1 的幅度不变, 无论正弦电压 U_1 的频率作何变化, 则随 ω 的改变仅仅改变

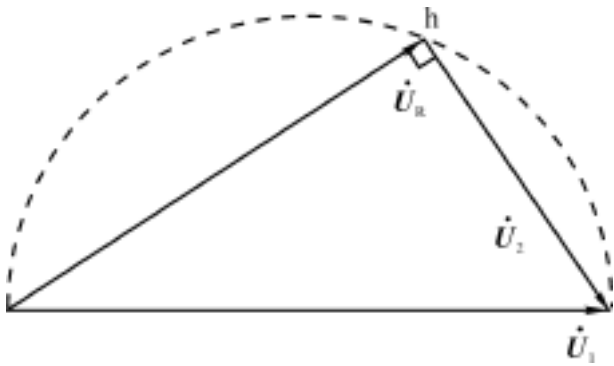


图 9-4 RC 低通电路相量图

两条直角边长度的比例, 这个 KVL 关系总保持直角三角形特点。那么随着 ω 从 0 增大, 相量图中的直角顶将从 U_1 的箭尾位置出发, 沿以 U_1 为直径的上半圆周向 U_1 的箭头方向移动, 至 ω 为无穷大时直角顶落于箭头上。那么, 从这个过程就可以定性地找出图 9-2 所示 RC 电路的一组特性:

在相同幅值的输入电压下, 零频率的输出电压 U_2 幅值等于输入电压 U_1 幅值, 随着频率的增加, 输出电压 U_2 的幅值逐渐减小至零; 而 U_2 与 U_1 的相位差随频率的增加, 具有从 0° 至 90° 的变化规律。所以电路有移相特性。

9.1.2 RC 高通电路

只要将图 9-2 的 RC 电路的输出端设置在电阻两端, 如图 9-5(a) 所示, 电路的频率特性即发生变化, 系统函数

$$H(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}$$

其幅频特性

$$|H(j\omega)| = \frac{CR}{\sqrt{1 + (CR)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(CR)^2} + 1}} \tag{9-4}$$

其相频特性

$$\phi(\omega) = 90^\circ - \arctan CR \tag{9-5}$$

当 ω 从 0 向 ∞ 增加时, 幅频特性从 0 逐渐增加至 1, 而输出电压与输入电压的相位差从 90° 逐渐变至 0° 。如图 9-5(b)、(c) 所示。其中低频成分幅值大大削弱, 而主要保留高频成分。称为高通滤波电路。高通电路能使 $\omega > \omega_c$ 的信号通过, 而抑制 $\omega < \omega_c$ 的信号。

当 $\omega = \omega_c = \frac{1}{RC}$ 时, 幅频特性为

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

而相频特性为

$$\phi(\omega) = 45^\circ$$

ω_c 也称为截止频率, 通频带为 $\omega_c \sim \infty$ 。

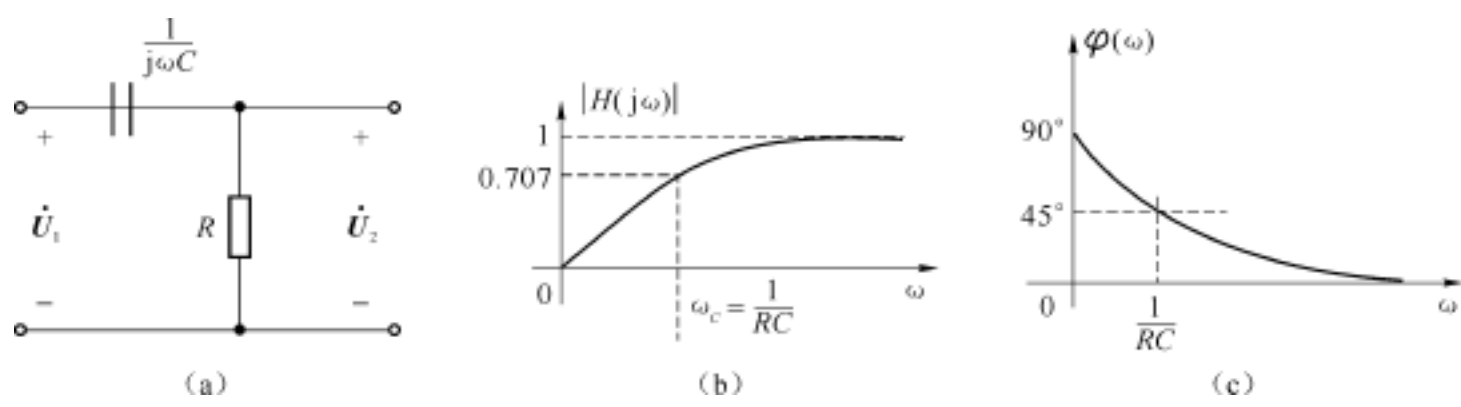


图 9-5 RC 高通电路

9.1.3 RC 带通电路

下面来研究图 9-6 电路的电压传输系数。图中 RC 串联部分阻抗为

$$Z_1 = R + \frac{1}{jC}$$

RC 并联部分阻抗为

$$Z_2 = \frac{R \cdot \frac{1}{jC}}{R + \frac{1}{jC}} = \frac{R}{1 + jCR}$$

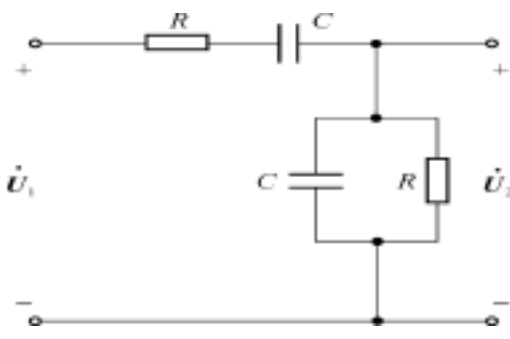


图 9-6 RC 串并联电路

可写出电压传输系数

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{R}{1 + jCR}}{R + \frac{1}{jC} + \frac{R}{1 + jCR}} = \frac{1}{3 + j\left[CR - \frac{1}{CR}\right]} \quad (9-6)$$

显然,上式中分母的虚部若为零,即

$$CR - \frac{1}{CR} = 0$$

设此时频率为 ω_0 ,则有

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (9-7)$$

此时 \dot{U}_2 与 \dot{U}_1 同相。式(9-6)还可以写成

$$H(j\omega) = \frac{1}{3 + j\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]} \quad (9-8)$$

其幅频特性为

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{3^2 - \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]^2}} \quad (9-9)$$

相频特性为

$$\angle H(j\omega) = -\arctan \frac{1}{3} \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right] \quad (9-10)$$

根据式(9-9)画出幅频特性如图 9-7(a),当 $\omega = \omega_0$ 时,幅模达到最大值

$$|H(j\omega)| = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{3}$$

随着 ω 的增加或减少,幅模都将下降直至零。表现出带通特性。

从 0 增加至 ω_0 时,相频特性从正相移 90° 减小至 0,然后变成负相移直至 -90° 。如图 9-7(b)所示。

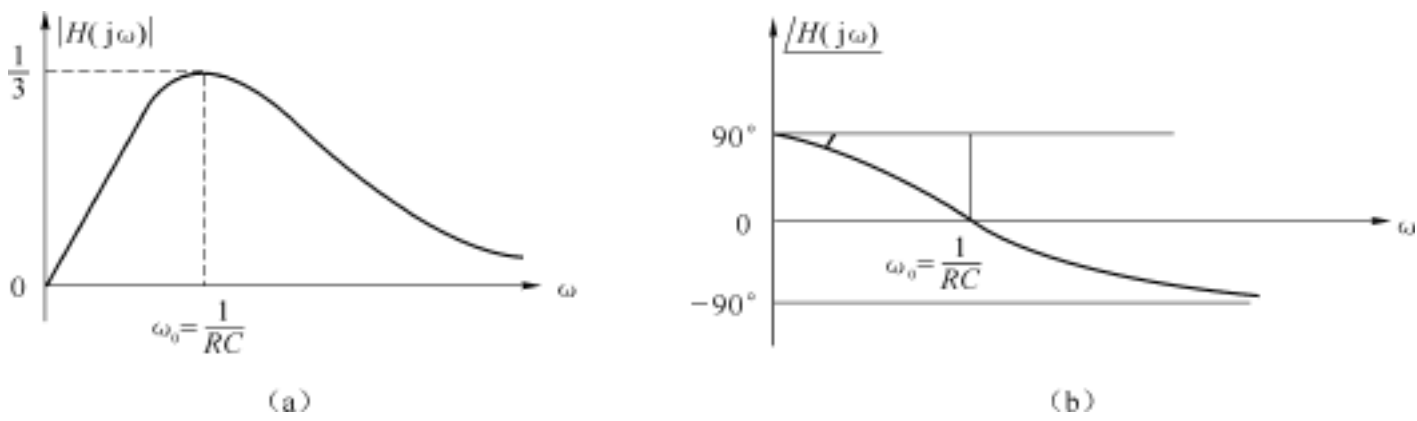


图 9-7 RC 串并联电路的频率特性

图 9-6 电路可以作为 RC 振荡器的选频电路,若电压 U_1 包含许多频率分量,要选出其中频率为 ω_0 的分量,在此频率下使 U_2 和 U_1 同相位,以满足振荡器的工作条件。因为 RC 的数值不同, ω_0 也不同,满足同相位的信号频率也不同。所以可通过调整电阻 R 或电容 C 的值来实现选频功能。自然在实际应用中还要涉及其他技术指标,这里不再深入讨论。

9.1.4 RC 移相电路

前面已经提到电路除了有滤波、选频功能以外还有移相功能,下面再举个移相电桥的例子。图 9-8(a)为移相电桥电路。

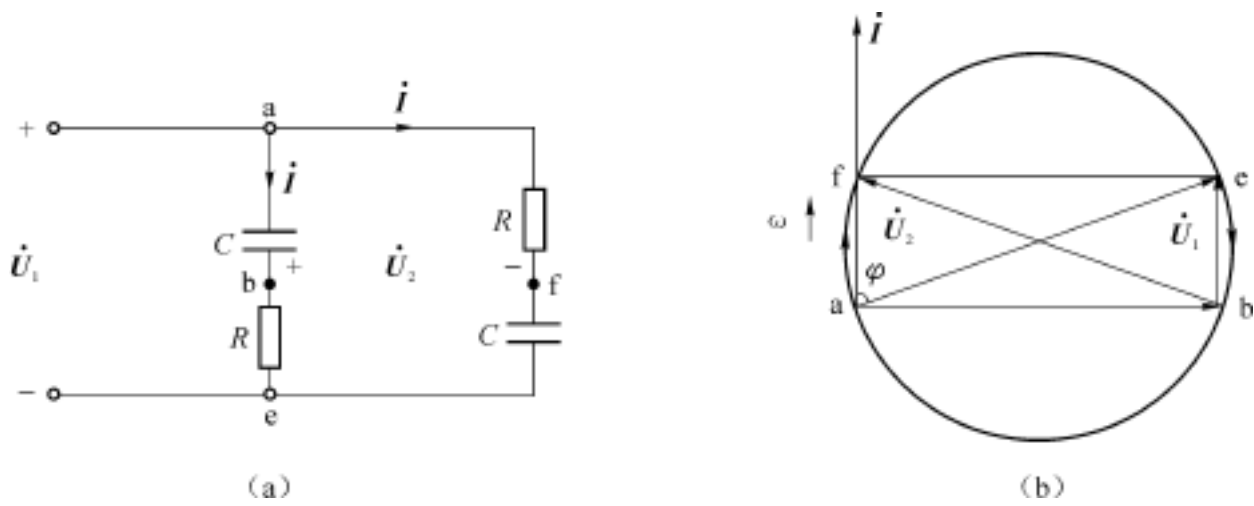


图 9-8 RC 移相电桥电路及相量图

左侧 U_1 为输入信号,其幅度不变而频率可调,为了找出输出电压 U_2 随频率变化的规律,首先用图 9-8(b)相量图分析。节点 a, e 间的电压为 U_1 ,由于两条支路阻抗相同,所以电流也相同,均表示为 I ,在相量图中重合在一起;依次分别画出两支路电压所构成的直角三角形。右边支路为电压三角形 afe;左边支路为电压三角形 abe。当 ω 从 0 到 ∞ 变化时,端点

f 的轨迹在以 U_1 为直径的上半圆上移动,而端点 b 的轨迹在下半圆上移动。由电路图可知, U_2 即是 U_{bf} ,在相量图中就是从 b 联到 f 的相量, f 和 b 随 ω 而变化的情况如箭头所示,随着 ω 的增加 f 离开 a 而向 e 移动、b 离开 e 而向 a 移动,两者移动速度是相同的,所以 U_2 是经过原点的直径。 U_2 与 U_1 的相位关系从反相到同相。由此可见,移相电桥电路的输出电压 U_2 幅度恒等于输入电压 U_1 的幅度,同时具有从 180° 到 0° 变化的相移。

电路的电压传输特性为

$$H(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_{be} - U_{ef}}{U_{ab} + U_{be}} = \frac{RI - \left[-j\frac{1}{C}I \right]}{RI - j\frac{1}{C}I} = \frac{R + j\frac{1}{C}}{R - j\frac{1}{C}} = 1 \angle 2\theta$$

式中, $\theta = \arctan \frac{1}{R} = \arctan \frac{1}{CR}$ 为 RC 串联支路的阻抗角,在 90° 至 0° 之间变化,所以 $H(j\omega)$ 的相角在 180° 到 0° 范围内变化。 $|H(j\omega)| = 1$ 正说明输出幅度 U_2 恒等于 U_1 而与 ω 无关。

读者不妨思考一下,能否直接从图 9-8(a) 电路分析出 $\omega = 0$ 时 $U_2 = -U_1$; $\omega \rightarrow \infty$ 时 $U_2 = U_1$ 。

9 2 串联谐振电路

谐振电路是电路分析和通信技术中的基本电路,它在无线电技术等方面得到广泛的应用。在通信技术中,往往需要电路对多频率信号进行选频,即具有带通滤波电路的特性。由电感元件与电容元件组成的谐振回路可以满足这一要求。但另一方面在普通电路中,意外发生谐振时又有可能破坏系统的正常工作。所以要研究谐振电路。

谐振现象是正弦稳态电路的一种特定的工作状态,可以用正弦稳态电路分析方法研究谐振电路,同时要注意它的特性。

首先讨论由一个电感和一个电容组成的简单谐振回路,有两种等效电路:串联谐振回路和并联谐振回路。但仅有两个元件相连接时,是无法判定其为串联还是并联的。因此不能单看电感和电容的连接,还要根据电感、电容和信号源三者的连接关系,方可确定谐振回路的形式。本节讨论串联谐振回路。

9 2 .1 RLC 串联谐振电路及其特性

设电感线圈与电容器与信号源的串联联接方式如图 9-9 所示,其中电阻 R 可以是电感线圈的等效电阻和电源内阻之和。

首先分析 RCL 串联电路阻抗

$$Z = R + jX = R + j(X_L - X_C) = R + j\left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]$$

阻抗 Z 是频率 ω 的函数。阻抗模

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

其中电抗 $X = L - \frac{1}{C}$

阻抗模与频率的关系, 即其频率特性如图 9-10 所示, 由图示曲线可知, 低频时 $\frac{1}{C} > L$,

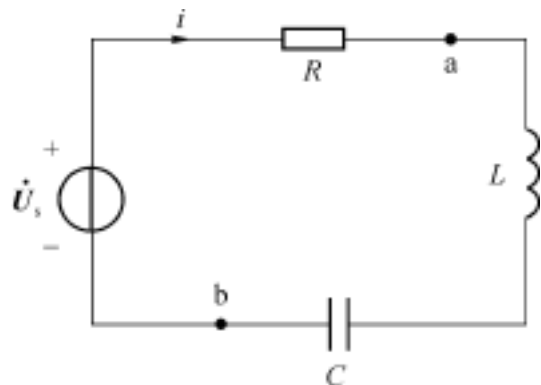


图 9-9 RLC 串联谐振电路

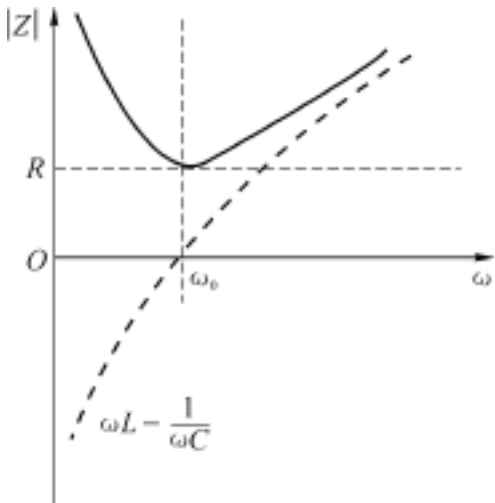


图 9-10 阻抗频率特性

$X < 0$, 电路呈电容性; 高频时 $L > \frac{1}{C}$, $X > 0$, 电路呈电感性。由于低频端和高端的电抗绝对值都较高, 所以阻抗模 z 的值也较高, 阻抗模 z 恒为正且其最小值为电阻 R 。此时回路电抗即阻抗虚部为零, 设此时的频率为 ω_0 , 则有

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{9-11}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{9-12}$$

这里 ω_0 和 f_0 是电路的固有参数, 与外部条件无关, 分别称为电路的固有角频率和固有频率(以下统称频率)。当调节信号源的频率等于电路的固有频率 ω_0 时, 回路电抗等于零, 电流与电压同相, 电路进入谐振状态。这时电源的 ω_0 或 f_0 称为谐振频率。

由此可见, 串联谐振回路的谐振条件是回路的电抗等于零。可以看出, 除了调节电源频率外, 若改变电容或电感参数的值, 即通常所说的“调谐”, 同样可以满足谐振条件, 使回路发生谐振。

下面讨论串联谐振时回路的特性。谐振时回路的感抗等于容抗, 即

$$X_L = X_C = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{\sqrt{LC}}L = \sqrt{\frac{L}{C}} =$$

特性阻抗 表示谐振时回路的感抗或容抗, 它也是电路的固有参数, 单位为 Ω 。这个定义也适合于并联谐振电路。

谐振时由于电抗为零, 阻抗 $Z = R$, 电路呈电阻性, 电压源电压全部降到电阻上。此时回路中电流最大并与电源电压同相, 表示为

$$I_0 = \frac{U_s}{R}$$

用正弦稳态电路的知识,就可以直观地理解上面串联谐振时回路的特性。下面对谐振电路特性作进一步讨论,在谐振回路的品质因数、能量分配、谐振曲线及频率特性中研究。

9.2.2 串联谐振电路的品质因数

谐振时,电感和电容上的电压相等但相位相反,所以它们的相量和为零,如图 9-11 所示,电阻电压等于电源电压。从电路模型的角度来看,这意味着图 9-9 中 a、b 两点间的电压为零,即 a、b 如同短路一样。此时电感和电容上的电压分别为

$$\begin{aligned} \dot{U}_{L0} &= j \omega_0 L I_0 = j \frac{\omega_0 L}{R} \dot{U}_s = j Q \dot{U}_s \\ \dot{U}_{C0} &= -j \frac{1}{\omega_0 C} I_0 = -j \frac{1}{\omega_0 CR} \dot{U}_s = -j Q \dot{U}_s \end{aligned} \quad (9-13)$$

式中

$$Q = \frac{U_{L0}}{U_s} = \frac{U_{C0}}{U_s} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{R} \quad (9-14)$$

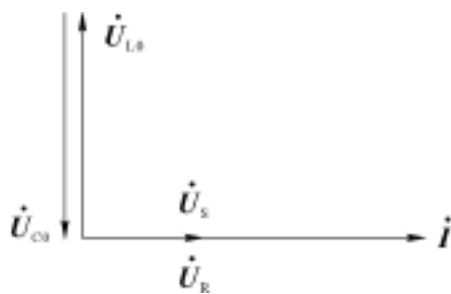


图 9-11 串联谐振电路相量图

上式说明谐振时电感电压或电容电压的有效值与电压源电压的有效值之比等于回路的特性阻抗与回路电阻之比,称之为回路的品质因数,用符号 Q 表示,简称回路 Q 值。品质因数是描述谐振回路性能的重要参数,由式(9-14)可知,回路的品质因数是仅与回路参数有关的无量纲的量。

由(9-13)可以看出,谐振时电感电压或电容电压是电压源电压的 Q 倍。一般来说 $Q > 10$,因此谐振时电感或电容上呈现较高的电压,所以串联谐振也称为电压谐振。在电力系统中由于电源电压很高,谐振时在线圈和电容器上将产生高电压,足以导致设备损坏的严重后果。所以必须采取措施避免谐振现象的发生。然而,在通信技术中恰恰需要利用这一特性。接收机的输入回路就是典型的例子,它之所以能够从许多不同频率的信号中把所需要的信号选择出来,正是依靠从电容或电感上能获得比输入信号大 Q 倍的电压来实现的。

再来讨论当谐振电路稳定后回路中的能量关系。设信号源电压 $u_s = U_m \cos \omega_0 t$, 则

$$i_0 = \frac{U_m}{R} \cos \omega_0 t = I_{0m} \cos \omega_0 t$$

电感储存的磁场能量为

$$w_m = \frac{1}{2} L i_0^2 = \frac{1}{2} L I_{0m}^2 \cos^2 \omega_0 t$$

电容储存的电场能量为

$$w_e = \frac{1}{2} C u_{C0}^2 = \frac{1}{2} C \left[\frac{1}{\omega_0 C} I_{0m} \cos(\omega_0 t - 90^\circ) \right]^2 = \frac{1}{2} L I_{0m}^2 \sin^2 \omega_0 t$$

总储能为

$$w = w_m + w_e = \frac{1}{2} L I_{0m}^2 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{1}{2} L I_{0m}^2 = L I_0^2 \quad (9-15)$$

总储能是一个与时间 t 无关的常量。电感中储存的磁能和电容中储存的电能之和保持为一常数,可见谐振时回路的总储能在任何瞬间都是恒定的,即信号源和回路电抗元件之间不交换能量。电感储存的磁场能与电容储存的电场能互相转移,它们在电压与电流的变化中不断交换能量。电容的无功功率与电感的无功功率大小相等符号相反,即回路的无功功

率为零。电源只供给电阻吸收的能量。若信号源偏离谐振频率即失谐时,回路总储能不再是常数而是时间的函数了,此时电源不仅提供电阻所吸收的能量,还与电抗元件发生能量交换,即无功功率存在。

谐振时,回路一周期吸收的能量为

$$W_{RT} = PT = I_0^2 RT = \frac{1}{2} I_{0m}^2 RT$$

通常,谐振时回路总储能往往比每周期损耗在回路电阻上的能量要大很多倍,因此可以推出比值与品质因数 Q 值的关系

$$\frac{W}{W_{RT}} = \frac{\frac{1}{2} LI_{0m}^2}{\frac{1}{2} I_{0m}^2 RT} = \frac{L}{RT} = \frac{Q}{2}$$

上式说明也可以从能量的角度定义 Q 值,即

$$Q = 2 \frac{W}{W_{RT}} = 2 \frac{\text{回路储存的能量}}{\text{一周期内回路损耗的能量}} \quad (9-16)$$

由此可见,谐振时回路总储能与一周期内损耗在回路电阻上能量之比再乘以 2 就是回路的品质因数。式(9-16)所给出的 Q 值定义,不仅适用于串联谐振回路,也适用于其他复杂的谐振回路。

9 2 3 谐振曲线及 Q 值的影响

串联谐振曲线指串联谐振电路中电流的频率特性,此处研究回路电流 I 与谐振状态下特定电流 I_0 的比值。由图 9-9 可写出回路电流

$$I = U_s Y = \frac{U_s}{R + j\left[L - \frac{1}{C}\right]} = \frac{U_s / R}{1 + j\left[\frac{L}{R} - \frac{1}{CR}\right]}$$

这里用导纳表示回路特性,谐振时回路阻抗最小即导纳最大。式中 $U_s / R = I_0$, 可得回路电流 I 与谐振时电流 I_0 的比值

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{1 + j\left[\frac{L}{R} - \frac{1}{CR}\right]}$$

式中分母乘以 $\frac{1}{I_0 R}$ 得

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \frac{1}{1 + j\left[\frac{L}{R} - \frac{1}{CR}\right]} = \frac{1}{1 + jQ\left[\frac{L}{R} - \frac{1}{CR}\right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left[\frac{L}{R} - \frac{1}{CR}\right]^2}} \angle -\arctan Q\left[\frac{L}{R} - \frac{1}{CR}\right] \end{aligned}$$

其幅频特性和相频特性分别为

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right]^2}} \tag{9-17}$$

$$\varphi(\omega) = - \arctan Q \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right] \tag{9-18}$$

它们均是频率 ω 的函数, 它们与频率的关系分别如图 9-12(a)、(b) 所示, 为了便于表达图中用 ω/ω_0 作为自变量。若设电源电压大小不变, 频率 ω 从 0 变化到 ∞ , 对于 $\omega = \omega_0$ 的输入电压, 电流将呈现最大电流; 相移为零。电源频率偏离谐振频率, 则电流比减少; 电源频率偏离越远, 电流比减少得越多。所以其幅频特性表现出带通特性。

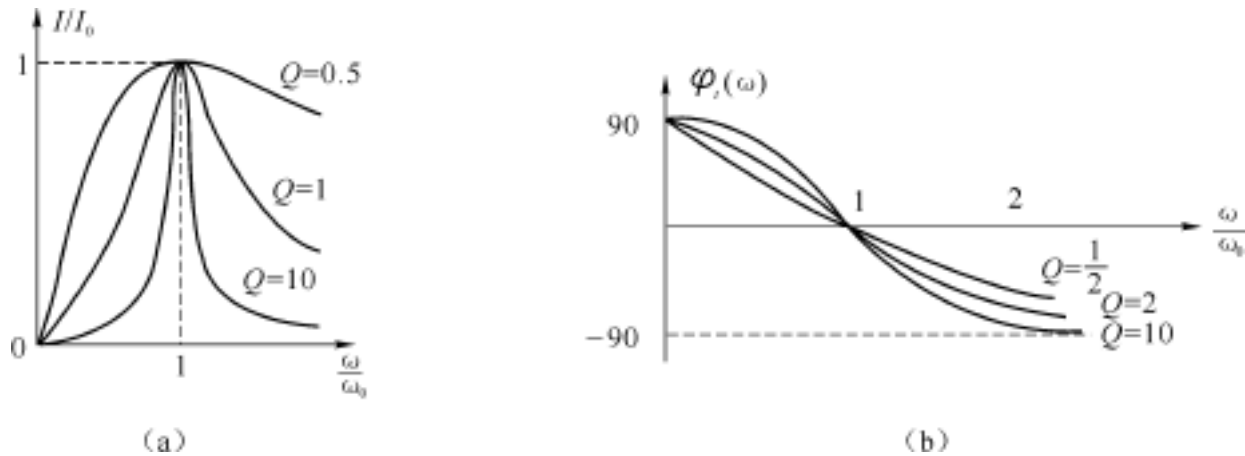


图 9-12 串联谐振电路的谐振曲线

曲线的形状取决于品质因数 Q 的大小, 图中给出了三种 Q 值下的曲线。 Q 值越高, 曲线越尖锐, 选择性越好; Q 值越低, 曲线越平坦, 选择性越差。因为频率偏离 ω_0 时, Q 值愈高, 幅频特性衰减愈快, 相移的变化也越快。但无论 Q 为何值, 当 ω 远离 ω_0 时, 幅模值的最终值均衰减至零。相移的变化, 在 ω 小于 ω_0 远离 ω_0 时, 以 $+90^\circ$ 为极限; 在 ω 大于 ω_0 远离 ω_0 时, 以 -90° 为极限。

影响品质因数大小的重要因素之一是电感线圈的损耗电阻 R , 如果 R 非常大, 则串联谐振电路将失去选频能力。因而在实际应用中串联谐振电路应选择小损耗电感线圈, 并应在小内阻的电源下工作, 才会具有良好的选频能力。

9 2 4 串联谐振电路的通频带

为了说明回路对不同频率信号的选择性, 通常将 $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 所对应的频率范围定义为回路的绝对通频带, 这也就是对应两个半功率点频率之间的频率范围, 如图 9-13 所示。 ω_1 称为下截止频率, ω_2 称为上截止频率。在 ω_1 和 ω_2 这两个边界频率上, 回路损耗功率为谐振时的一半。根据通频带的概念, 由式(9-17)可写出

$$\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

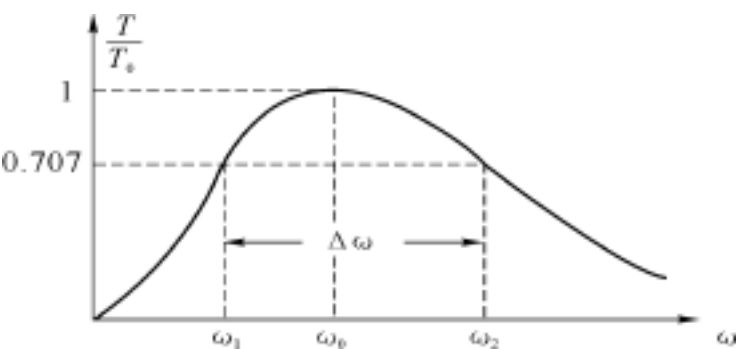


图 9-13 串联谐振电路通频带

$$Q^2 \left[\frac{1}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]^2 = 1$$

可以解得

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \pm \frac{1}{2Q}$$

当 Q 值较高,可近似得到

$$\frac{1}{\omega_0^2} \approx 1 \pm \frac{1}{2Q}$$

因此绝对通频带的两个边界频率分别为

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \left[1 - \frac{1}{2Q} \right] \\ \omega_2 = \omega_0 \left[1 + \frac{1}{2Q} \right] \end{cases}$$

绝对通频带带宽为

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \text{ (或 } \Delta f = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q} \text{)} \tag{9-19}$$

相对通频带

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \left[\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_1}{\omega_0} \right] = \frac{1}{Q} \tag{9-20}$$

由此可见,回路通频带与回路品质因数成反比。 Q 值越高谐振曲线越尖锐,回路选择性越好,但同时通频带的带宽也越窄。所以式(9-20)揭示了回路选择性与通频带之间的矛盾。由于实际接收的信号不是单一频率的,因此要求回路有一定的频带宽度并要求回路通频带范围内特性曲线均匀些,以减少信号的失真,为此希望回路的 Q 值低些。但从提高回路选择性、抑制不需要的信号的角度出发,又希望 Q 值越高越好。因此实际选择回路 Q 值时要依据电路的功能和技术指标,并兼顾带宽和选择性这两方面的要求。

应当指出,通信技术中谐振回路的 Q 值一般在 $10 \sim 500$ 之间。由式(9-19)可以看出,绝对通频带是谐振频率的十分之一到五百分之一,所以谐振回路是一种通频带比较窄的适于选择高频信号的带通滤波电路。

收音机的输入回路可以看作串联谐振回路的简单应用。在图 9-14(a)中信号源是天线接收到的各个电台的信号,画出天线的等效电路如图(b)所示,再用戴维南定理得到等效电路如图(c)所示,即为 RLC 与理想电压源串联回路。例如要选择频率为 640kHz 的电台广播节目,可以通过调节回路电容,改变回路的固有频率使之达到谐振;由于回路的选择性,回路电流达到最大,从而把 640kHz 的电台广播节目从许多信号中鉴别和选择出来。下面举例说明。

例 9-1 已知电路如图 9-14(c)所示, $L = 100\mu\text{H}$, $Q = 100$, $f_0 = 1.6\text{MHz}$, 若信号源电压为 $u_s = (30.8 + 50\sin \omega_0 t + 21.2\sin 2\omega_0 t)\text{mV}$, 试求电容电压 u_C 。

解 由谐振频率

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

可求出电容

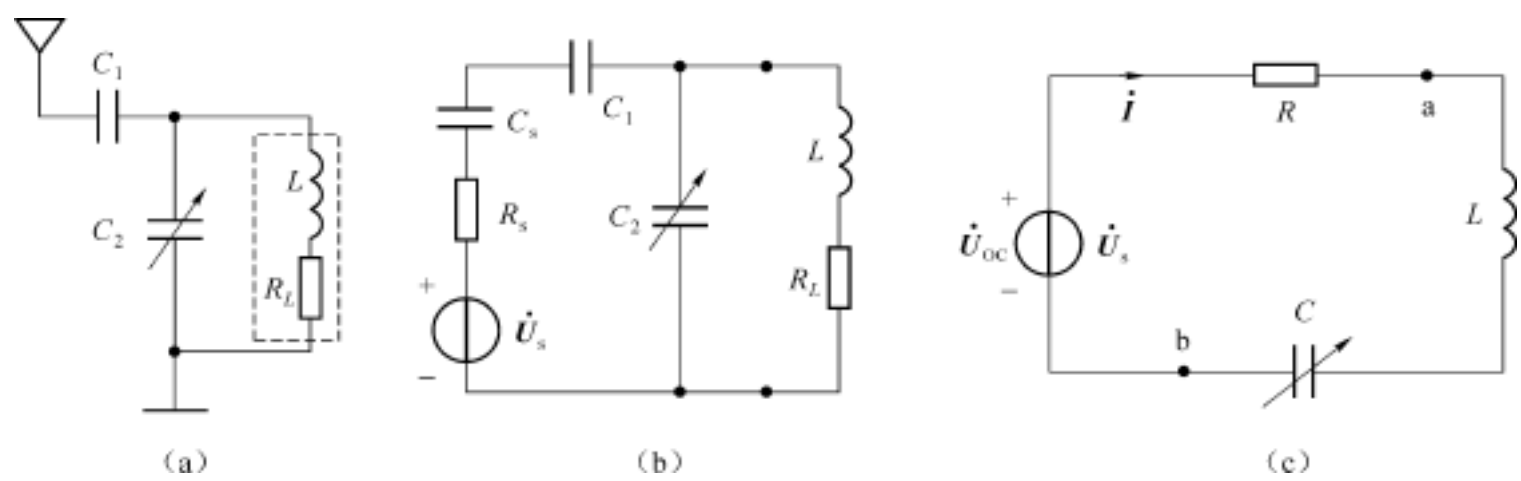


图 9-14 收音机的输入回路

$$C = \frac{1}{4^2 f_0^2 L} = \frac{1}{4^2 \times 1.6^2 \times 10^{12} \times 100 \times 10^{-6}} \quad 100\text{pF}$$

再求出电阻

$$R = \frac{\omega_0 L}{Q} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{100 \times 10^{-6}}{100 \times 10^{-12}}} = 10$$

u_s 的各个频率分量可按叠加定理分别作用于电路,在直流分量 30.8mV 作用时,电容犹如断开, $u_{C0} = 30.8\text{mV}$; u_s 的第二项为基波分量,此时电路发生谐振

$$U_{C1m} = Q \times 50 = 100 \times 50 = 5000\text{mV}$$

其相量为
$$\dot{U}_{C1m} = U_{C1m} \angle -90^\circ = 5000 \angle -90^\circ \text{mV}$$

对于 u_s 的二次谐波来说,只能用相量法计算如下

$$\begin{aligned} \dot{U}_{C2m} &= \frac{-j \frac{1}{2\omega_0 C} \dot{U}_{C2m}}{R + j\left[2\omega_0 L - \frac{1}{2\omega_0 C}\right]} = \frac{-j24.2 \times 500}{10 + j(2000 - 500)} \\ &= \frac{-j24.2 \times 500}{j1500} = -8.07 = 8.07 \angle -180^\circ \text{mV} \end{aligned}$$

求和时应将各次谐波的时间函数相加,由于原信号源的各项为 \sin 形式,电容电压为

$$u_C = (30.8 - 5000\cos \omega_0 t - 8.07\sin 2\omega_0 t) \text{mV}$$

不难看出,电容电压中二次谐波分量的振幅相对于基波的振幅可以忽略不计,事实上,因为回路的绝对通频带宽度为

$$= \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2\pi \times 1.6 \times 10^6}{100} = 2\pi \times 16000 \text{rad/s}$$

可知上下截止频率分别为 $f_2 = (1.6 \times 10^6 + 8000) \text{Hz}$ 和 $f_1 = (1.6 \times 10^6 - 8000) \text{Hz}$ 。而二次谐波为 $2 \times 1.6 \times 10^6 \text{Hz}$,已远在通频带之外,即二次谐波已被滤除掉。

9.2.5 谐振电路的频率特性

串联谐振电路的谐振曲线是以电流比来描述的,上例中以电容电压作为输出电压,由于负载的不同特性,也可能以电感电压作为输出电压,所以这里研究谐振电路电压比的频率特性。仍以图 9-14(c)所示电路为例,可以写出两种电压传输系数:

$$H_C(j\omega) = \frac{\dot{U}_C}{\dot{U}} = \frac{j\frac{1}{C}}{R + j\left[L - \frac{1}{C}\right]} = \frac{\frac{1}{C}}{\sqrt{R^2 + \left[L - \frac{1}{C}\right]^2}} \angle -90^\circ - \arctan \frac{L - \frac{1}{C}}{R}$$
$$= |H_C(j\omega)| \frac{1}{C} \angle -90^\circ + \varphi_C(j\omega)$$

$$H_L(j\omega) = \frac{\dot{U}_L}{\dot{U}} = \frac{jC}{R + j\left[L - \frac{1}{C}\right]} = \frac{L}{\sqrt{R^2 + \left[L - \frac{1}{C}\right]^2}} \angle 90^\circ - \arctan \frac{L - \frac{1}{C}}{R}$$
$$= |H_L(j\omega)| L \angle 90^\circ + \varphi_L(j\omega)$$

画出它们的幅频特性如图 9-15 所示,与谐振曲线比较形状大致相同,即有带通特性,但是它们的最大值却不在谐振点上,两曲线的交叉点对应于谐振频率 ω_0 。可以用求极值的方法求出它们最大值所对应的频率

$$\omega_{Cm} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$
$$\omega_{Lm} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

对于实际电路来说回路品质因数 Q 较大, $\frac{1}{2Q^2}$ 非常小,可以认为 $\omega_{Cm} \approx \omega_{Lm} \approx \omega_0$,此时图中两个曲线的最大值与交叉点汇聚成一个点。所以实际上谐振曲线可基本反映电压传输系数的频率特性。

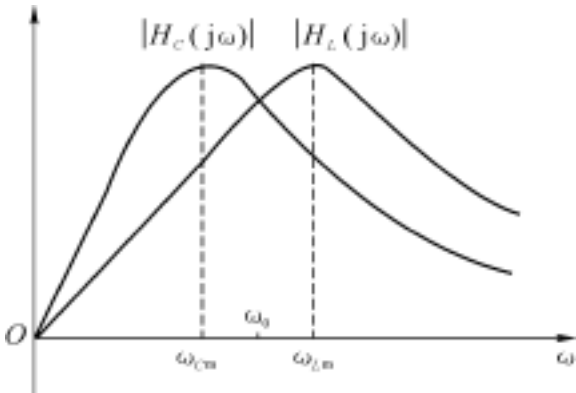


图 9-15 电压传输幅频特性

例 9-2 电路如图 9-16 所示,已知 $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 1000\ \Omega$, $C = 10\ \mu\text{F}$,电路发生谐振时的角频率 $\omega_0 = 1000\ \text{rad/s}$, $U_s = 100\ \text{V}$ 。试求电感 L 和 a, b 间电压 U_{ab} 。

解 根据谐振条件 $\text{Im}[Z] = 0$

$$Z = R_1 + j\omega_0 L + \frac{-j\frac{R_2}{\omega_0 C}}{R_2 - j\frac{1}{\omega_0 C}}$$
$$= R_1 + j\omega_0 L + Z_2$$

其中 Z_2 为 R_2 、 C 并联的等效阻抗,代入参数可得

$$Z_2 = \frac{-j10^3}{10 - j1} = (9.9 - j99)\ \Omega$$

谐振时有 $\omega_0 L - 99 = 0$;解得 $L = 99\ \text{mH}$ 发生谐振,此时的电流

$$I = \frac{\dot{U}_s}{Z} = \frac{100\angle 0^\circ}{(9.9 + 10.1)} = 5\angle 0^\circ\ \text{A}$$

a、b 间电压为

$$U_{ab} = I Z_2 = 49.5 - j495 = 497.5\angle -84.29^\circ\ \text{V}$$

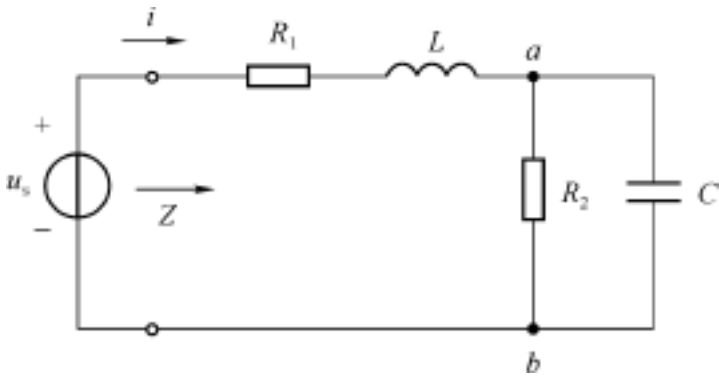


图 9-16 例 9-2 电路

9 3 并联谐振电路

9 3 .1 理想元件 R 、 L 、 C 并联谐振电路

图 9-17 所示的是由理想元件 R 、 L 、 C 并联谐振电路,它与 9.2 节研究的串联谐振电路是对偶的。分析 RCL 并联电路导纳

$$Y = G + jB = \frac{1}{R} + j(\frac{1}{C} - \frac{1}{L})$$

导纳 Y 是频率 ω 的函数,当导纳 Y 的虚部为零时,即当 $\frac{1}{C} = \frac{1}{L}$ 时 $Y = G$,此时的角频率用 ω_0 表示,则由 $\omega_0 C = 1/\omega_0 L$ 可求得电路的固有频率(谐振频率)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \left[f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \right]$$

当信号源的频率 ω 等于并联电路的固有频率 ω_0 时,电路的感抗和容抗相等,回路工作于谐振状态,电路导纳 $Y = G$ 达到最小值,电路阻抗 $Z_P = 1/G = R$ 达到最大值,回路端电压也达最大值,其值为 $U_0 = I_s R$,电压与电流同相。当电源频率 ω 偏离 ω_0 时,回路端电压不断减小。

并联谐振时电流的相量关系如图 9-18(a)所示,电容电流和电感电流大小相等但相位相反,两者的相量和为零,所以从图 9-17 电路模型中 a、b 处如同断开一样,电流源电流全部流入电阻支路。当谐振电路稳定后,实质上是电感和电容相互交换能量,而不和信号源交换能量,即信号源提供的能量全部消耗于负载电阻之中。

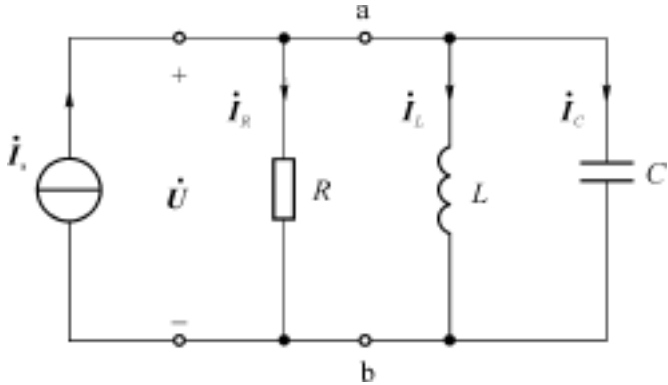


图 9-17 RLC 并联谐振电路

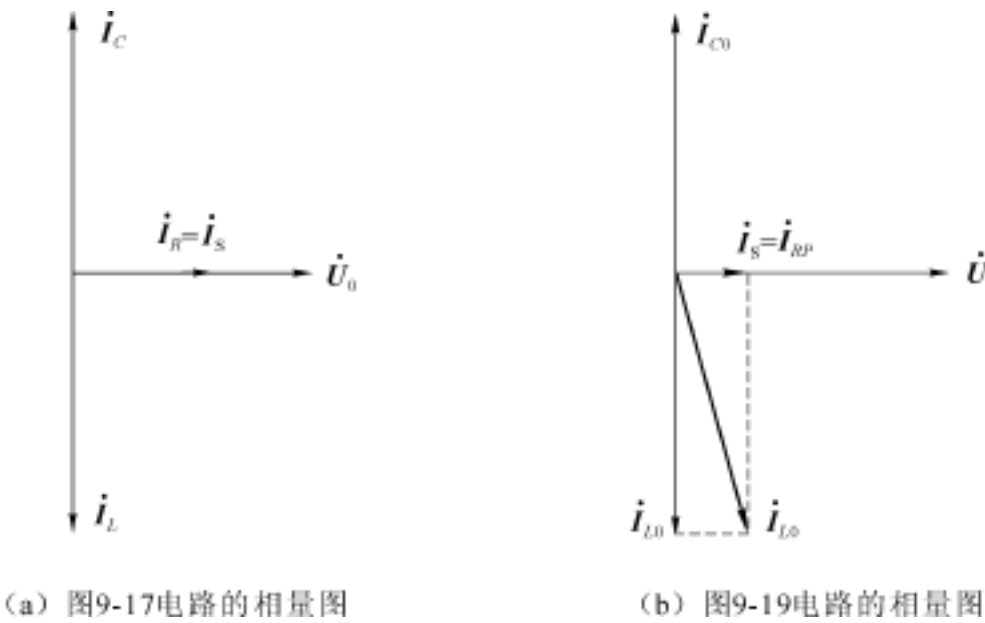


图 9-18 并联谐振电路相量图

此时电容与电感中的电流分别为

$$I_{C0} = I_s R j \omega_0 C = j Q I_s$$
$$I_{L0} = I_s R \frac{1}{j \omega_0 L} = - j Q I_s$$

其中 Q 是并联谐振回路的品质因数

$$Q = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{R}{\omega_0 L} \tag{9-21}$$

并联谐振时电容与电感中的电流值是电源电流的 Q 倍,因此也称为电流谐振。并联谐振回路的品质因数同样也是电路固有的参数,并且与谐振时回路储能与耗能的比值成正比。

并联谐振曲线描述的是并联谐振电路中电压的频率特性。为研究电压比 U/U_0 的特性,写出回路端电压

$$U = ZI_s = \frac{I_s}{\frac{1}{R} + j\left[\omega C - \frac{1}{\omega L}\right]} = \frac{RI_s}{1 + j\left[\omega CR - \frac{R}{\omega L}\right]} = \frac{U_0}{1 + j\left[\omega CR - \frac{R}{\omega L}\right]}$$

可以推出

$$\frac{U}{U_0} = \frac{1}{1 + j\left[\omega CR - \frac{R}{\omega L}\right]}$$

式中分母乘以 $\frac{1}{\omega_0 CR}$ 得

$$\frac{U}{U_0} = \frac{1}{1 + jQ\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]}$$

幅频特性及相频特性分别为

$$\frac{U}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]^2}} \tag{9-22}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan Q\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right] \tag{9-23}$$

把式(9-22)、(9-23)与式(9-17)、(9-18)相对照,这两套公式在形式上相似,因而可以想象由此画出的曲线应该是相似的,只需将纵坐标 $\frac{I}{I_0}$ 相应地改为 $\frac{U}{U_0}$ 即可。对于并联谐振回路,式(9-22)表示在电流源作用下,并联回路端电压的频率特性。而式(9-23)则表示电压超前电流的相位的频率特性。在谐振时并联谐振回路呈现为高阻抗和相应的高电压,而失谐时回路阻抗和端电压急剧减少。因此当由许多不同频率的正弦分量所组成的信号通过回路时,并联谐振回路能够选择出以回路谐振频率为中心,及其附近很窄的频率范围内的信号。通频带的定义及其计算公式也与串联谐振回路相同。对于并联谐振电路的特性可用对偶的方法去理解和研究,这里不再赘述。

9 3 2 实际元件的并联谐振电路

由电感线圈与电容器组成的并联谐振电路如图 9-19(a)所示,在实际电感器件中其串联等效电阻是不可忽略的,而电容器件则与理想模型接近,可以表示为理想电容。图中电源为理想电流源。

首先写出图 9-19(a)所示电路的导纳

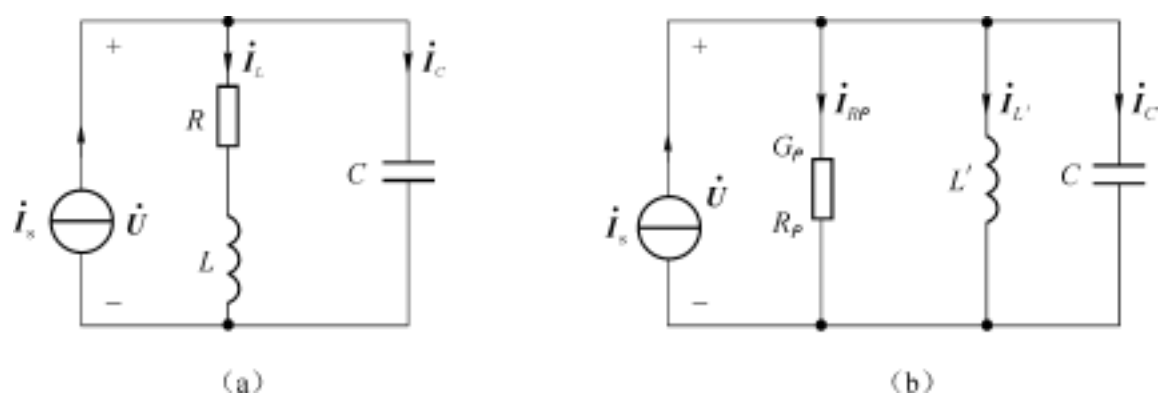


图 9-19 实际元件并联谐振电路(例 9-3 电路)

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left[\omega C - \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right] \quad (9-24)$$

也可表示为

$$Y = G + j\left[\omega C - \frac{1}{\omega L}\right] \quad (9-25)$$

其中

$$G = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \omega L = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega L} \quad (9-26)$$

或表示为

$$R = \frac{1}{G} = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R} \quad (9-27)$$

由式(9-25)画出等效电路如图 9-19(b)所示,与图 9-17 所示电路完全一样,所以实际元件并联谐振电路的主要特性都已经了然。

下面分析图 9-19(a)电路的一些特殊问题。当信号源的工作频率使得式(9-25)中 $\text{Im}[Y] = 0$, 即

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

即式(9-24)中

$$\omega C - \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 0 \quad (9-28)$$

并联电路处于谐振状态。可以推出并联谐振频率

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}} \quad (9-29)$$

从上式知,欲使回路达到谐振,必须满足 $\frac{R^2 C}{L} < 1$ 即 $R < \sqrt{\frac{L}{C}}$ 的条件。否则 ω_0 将为虚数,这意味着并联回路端电压与总电流不会同相,因此电路也就不可能出现谐振现象。

在并联谐振时,可知谐振阻抗

$$Z = R = \frac{R^2 + \omega_0^2 L^2}{R}$$

将式(9-29)代入整理得到

$$Z = R = \frac{L}{CR}$$

可以看出,谐振阻抗仍是电路固有参数。谐振时各支路的电流相量关系如图 9-18(b)所

示,比图(a)所示理想并联谐振电流相量关系要复杂些,但是谐振时电源电压同样与电流同相;电压达到最大值;电路呈现纯电导、高阻抗特性。根据式(9-21)、(9-26)、(9-27)可以推出回路品质因数

$$Q = \frac{I_C}{I_R} = R \cdot I_C = \frac{1}{\frac{1}{R}} = \frac{R}{\frac{1}{I_C}} = \frac{R}{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega L}} = \frac{\omega L}{R} \quad (9-30)$$

式(9-30)与串联谐振电路品质因数在形式上完全一样,但式中元件参数 L 、 R 均为图 9-19 (a)中电感线圈的参数。

式(9-29)为并联谐振频率的精确公式。在实际应用中由于选用的电感损耗电阻 R 较小,在谐振频率附近,一般能满足 $R \ll \omega L$ 。因此式(9-28)可近似写成

$$I_C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad I_C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

则式(9-29)简化为 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9-31)$

由此可见,当损耗较小时,并联谐振回路的谐振频率公式在形式上与串联谐振频率完全一样。此时谐振阻抗简化为

$$Z_0 = R \cdot \frac{\omega^2 L^2}{R} = Q^2 R = \frac{L}{CR} = \frac{\omega^2}{R} = Q \quad (9-32)$$

式中

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{R} \quad (9-33)$$

由此可见,图 9-19(a)所示并联谐振回路的品质因数在形式上与串联谐振频率完全相同。

例 9-3 等效为 $16.5 \text{ k}\Omega$ 与 $540\mu\text{H}$ 电感相串联的电感线圈,与电容量为 200 pF 的电容器并联组成并联谐振回路如图 9-19 (a)所示,电流源 $I_s = 0.2 \text{ mA}$ 。求谐振时两支路电流有效值、谐振阻抗、回路消耗的功率、绝对通频带、相对通频带 $BW(\%)$ 。

解 用公式(9-33)求回路 Q 值,得

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{16.5} \sqrt{\frac{540 \times 10^{-6}}{200 \times 10^{-12}}} = 99.6$$

由于 $Q > 50$,可按小损耗处理

$$I_L = I_C = QI_s = 99.6 \times 0.2 = 19.92 \text{ mA}$$

$$R = \frac{L}{CR} = \frac{540 \times 10^{-6}}{200 \times 10^{-12} \times 16.5} = 164 \text{ k}\Omega$$

$$P = I_s^2 R = (0.2 \times 10^{-3})^2 \times 164 \times 10^3 = 6.56 \text{ mW}$$

绝对通频带 $\Delta\omega = \omega/Q = R/L = 30.6 \times 10^3 \text{ rad/s};$

相对通频带 $BW = 1/Q = 1\%。$

学习了本章谐振回路的基础知识,有利于在《电子电路基础》课程中进一步学习谐振放大器的知识。在实际应用中,更多用到的是图 9-19(a)所示并联谐振的电路模型,式(9-32)中反映的并联谐振的高阻抗特性,更符合目前通信设备的接收机中应用的谐振放大器的实

际功能。而且谐振放大器的性能指标在很大程度上取决于 LC 谐振回路。

9.4 复杂并联谐振电路

谐振电路作为双口网络连接在电源和负载之间,电源内阻和负载都会影响谐振电路的特性,为了减小其影响常采用复杂并联谐振电路。

9.4.1 电源内阻和负载对谐振电路的影响

在上一节分析并联谐振电路时,认为电流源是理想的,即内阻为无穷大。而实际应用中应该考虑电源内阻和负载的影响,在这种情况下电路模型如图 9-20 所示。其中 $R = \frac{L}{RC}$ 为并联谐振未考虑加载时的谐振阻抗;加载后即考虑电源内阻和负载的影响时,谐振阻抗 R 显然为 R 、 R_s 和 R_L 的并联,若电源内阻 R_s 和负载 R_L 并联用 R_{sL} 表示,即

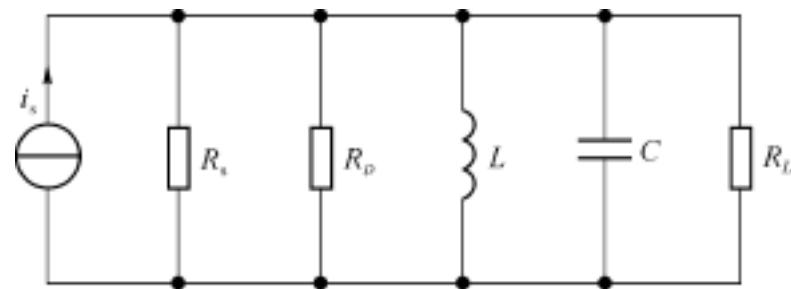


图 9-20 电源内阻与负载的影响

$$R_{sL} = R_s \cdot R_L / (R_s + R_L) \quad \text{则} \quad R = \frac{R_{sL} \cdot R}{R_{sL} + R} = \frac{R}{1 + \frac{R}{R_{sL}}}$$

加载后的品质因数为 $Q = \omega_0 CR$ 。

可见,电源内阻 R_s 和负载 R_L 越小,则谐振阻抗 R 越小,品质因数 Q 越低,回路选择性越差。为了减小电源内阻或负载的影响常采用双电感或双电容并联谐振电路,即复杂并联谐振电路。

9.4.2 谐振条件

双电感并联谐振电路如图 9-21(a)所示,其中 R_1 和 R_2 分别表示两支路的损耗。电路的阻抗为

$$Z = \frac{(R_1 + j\omega L_1) \left[R_2 + j\omega \left(L_2 - \frac{1}{\omega^2 C} \right) \right]}{R_1 + R_2 + j\omega \left[L_1 + L_2 - \frac{1}{\omega^2 C} \right]} \tag{9-34}$$

在工作频率下若能满足下列条件

$$R_1 \ll \omega L_1; R_2 \ll \left| \omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right|$$

即 R_1 和 R_2 相对各自支路的电抗可以忽略;但是在式(9-34)的分母中,由于在谐振频率附近 $\omega L_1 + \omega L_2 - \frac{1}{\omega C}$ 很小,所以 $R_1 + R_2$ 不能忽略。于是由式(9-34)可得

$$Z = \frac{-L_1 \left[L_2 - \frac{1}{C} \right]}{R + j \left[L_1 + L_2 - \frac{1}{C} \right]}$$

式中 $R = R_1 + R_2$ 。

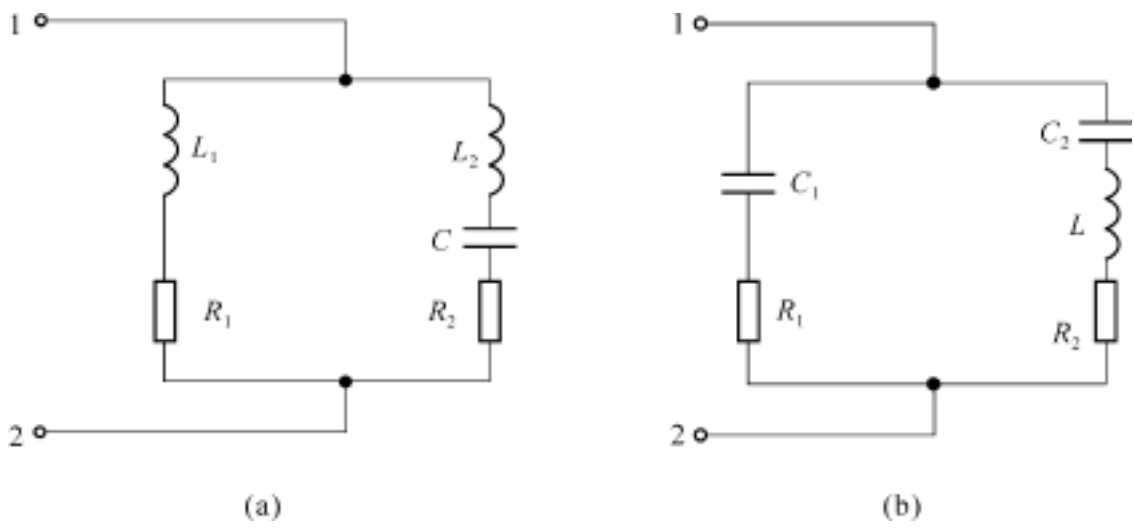


图 9-21 双电感和双电容谐振电路

谐振回路导纳为

$$Y = \frac{R}{-L_1 \left[L_2 - \frac{1}{C} \right]} + j \frac{L_1 + L_2 - \frac{1}{C}}{-L_1 \left(L_2 - \frac{1}{C} \right)} \tag{9-35}$$

谐振时导纳的虚部 $B = 0$, 即

$$L_1 + L_2 - \frac{1}{C} = 0$$

谐振角频率 ω_0 为 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, 式中 $L = L_1 + L_2$ 。

由上式可知, 在谐振情况下回路总电抗等于零, 即一支路为感性另一支路必为容性; 谐振角频率 ω_0 取决于谐振回路总电感 L 和总电容 C , 而与 L_1 、 L_2 的分配比例无关。

双电容并联谐振电路如图 9-21 (b) 所示。在满足小损耗即 $R_1 \ll \frac{1}{C_1}$; $R_2 \ll \left| L - \frac{1}{C_2} \right|$ 的情况下谐振电路的阻抗

$$Z = \frac{-\frac{1}{C_1} \left[L - \frac{1}{C_2} \right]}{R_1 + R_2 + j \left[L - \frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2} \right]} \tag{9-36}$$

当并联谐振时, 导纳的虚部 $B = 0$, 由式(9-36)知

$$L - \frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2} = 0$$

所以谐振角频率

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

可见双电容和双电感电路一样,在谐振时回路总电抗等于零。谐振角频率取决于回路总电容和总电感而与电容 C_1 、 C_2 的分配比例无关。

9.4.3 谐振特点

双电感和双电容谐振电路在参数不变的情况下具有改变谐振阻抗而不改变谐振角频率和品质因数的特点,下面进行分析。

在双电感电路中由式(9-35)知谐振阻抗为

$$R = \frac{-j\omega L_1 \left[j\omega L_2 - \frac{1}{j\omega C} \right]}{R}$$

谐振时总电抗等于零,所以 $j\omega L_2 - \frac{1}{j\omega C} = -j\omega L_1$ 。则 $R = \frac{-j\omega L_1 (-j\omega L_1)}{R} = \frac{(j\omega L_1)^2}{R}$ 。分子、分母同乘以 $(j\omega L)^2$, 则

$$R = \frac{(j\omega L_1)^2}{R} \cdot \frac{(j\omega L)^2}{(j\omega L)^2} = \left[\frac{j\omega L_1}{j\omega L} \right]^2 \cdot \frac{j^2 \omega^2 L^2}{R} = m^2 Q \omega L = m^2 \cdot \frac{L}{RC} \quad (9-37)$$

式中 $m = \frac{L_1}{L}$ 称分配系数;品质因数 $Q = \frac{\omega L}{R}$ 。

可见调整 L_1 的大小,即调整分配系数 m 就可以改变谐振阻抗 R ,以达到匹配连接。但只要保持总电感量不变,那么谐振角频率就不变,品质因数 Q 也不变。

在双电容电路中由式(9-36)知谐振阻抗

$$R = \frac{\frac{1}{j\omega C_1} \left[j\omega L - \frac{1}{j\omega C_2} \right]}{R}$$

谐振时总电抗等于零,所以 $j\omega L - \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{1}{j\omega C_1}$, 则 $R = \frac{\left[\frac{1}{j\omega C_1} \right]^2}{R}$, 分子分母同乘以 $\left[\frac{1}{j\omega C} \right]^2$, 即

$$R = \left[\frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{\frac{1}{j\omega C}} \right]^2 \cdot \frac{\left[\frac{1}{j\omega C} \right]^2}{R} = \left[\frac{C}{C_1} \right]^2 \cdot \frac{1}{j\omega C R} \cdot \frac{1}{j\omega C} = m^2 \cdot Q \cdot \frac{1}{j\omega C} = m^2 \cdot \frac{L}{RC} \quad (9-38)$$

式中 $m = \frac{C}{C_1}$ 称分配系数,而 $C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$ 。

可见调整 C_1 的大小而不改变总电容量,同样可以达到调整阻抗而不改变谐振角频率和品质因数的目的。

下面分析谐振时支路电流和总电流的关系。

在图 9-21(a)的双电感电路中,若满足小损耗 R_1 和 R_2 可以忽略,谐振时则谐振电压 $U_0 = I_0 R$, 若 L_1 支路电流为 I_1 , L_2 支路电流为 I_2 则

$$U_0 = j\omega L_1 I_1, U_0 = j \left[\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right] I_2$$

已知谐振阻抗 $R = m^2 \cdot Q \cdot \omega L$, 而

$$L_1 = \frac{L_1}{L} \cdot L = m L$$

谐振时

$$L_2 - \frac{1}{C} = - L = - m L$$

所以

$$I_1 = \frac{I_0 R}{j L_1} = -j \frac{m^2 Q L}{m L} I_0 = -j m Q I_0$$

$$I_2 = \frac{I_0 R}{j \left[L_2 - \frac{1}{C} \right]} = -j \frac{m^2 Q L}{m L} I_0 = j m Q I_0$$

在谐振时, $I_1 = I_2 = m Q I_0$, 两支路电流均为总电流的 $m Q$ 倍。在双电容电路中经过分析同样可以得到支路电流为总电流的 $m Q$ 倍。

9 4 4 复杂并联谐振电路的频率特性

双电感或双电容并联谐振电路的一般电路模型如图 9-22 所示。其阻抗为

$$Z = \frac{(R_1 + j X_1)(R_2 + j X_2)}{R_1 + R_2 + j X_1 + j X_2}$$

从前面双电感或双电容并联谐振电路分析可知, 在谐振情况下无论双电感电路还是双电容电路, 一个支路为感性另一个支路必为容性, 因此设 $X_1 = L$, 则 $X_2 = -\frac{1}{C}$ 。在小损耗即 $R_1 \ll X_1$, $R_2 \ll X_2$ 情况下, 阻抗 Z 可简化成下式

$$\begin{aligned} Z &= \frac{-X_1 \cdot X_2}{R + j \left[L - \frac{1}{C} \right]} = \frac{L C}{R + j \left[L - \frac{1}{C} \right]} \\ &= \frac{L C R}{1 + j \frac{L}{R} \left[-\frac{1}{C} - \frac{1}{L C} \right]} = \frac{R}{1 + j Q \left[-\frac{1}{C} - \frac{1}{L C} \right]} \end{aligned}$$

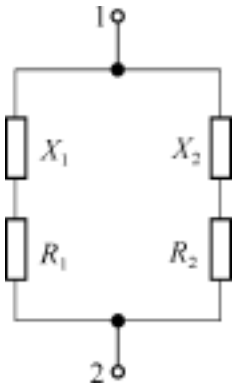


图 9-22 双电感或双电容谐振电路模型

所以

$$H(\omega) = \frac{Z}{R} = \frac{1}{1 + j Q \left[-\frac{1}{C} - \frac{1}{L C} \right]} \tag{9-39}$$

由式(9-39)可知复杂并联谐振电路的频率特性和简单并联谐振电路频率特性完全相同。

9 4 5 复杂并联谐振电路分析

在实际应用中负载往往接在双电感的抽头上或双电容的一部分电容 C_1 上, 如图 9-23 (a)、(b)所示, 图中 r 表示电源内阻或负载电阻。在这种情况下, 可以用它们的等效电路图 9-23(c)来分析。图(c)中 L 和 C 分别为谐振回路的总电感和总电容。

为了证明图(c)是图(a)、(b)的等效电路, 先推导分配系数 m 的另一种表示法。在双电感电路中分配系数

$$m = \frac{L_1}{L} = \frac{L_1}{L} = \frac{L_1 \times I}{L \times I} = \frac{U_1}{U} \tag{9-40}$$

由图(9-21)(a)在小损耗谐振条件下不难看出式(9-40)的正确性。若把双电感中电感线圈

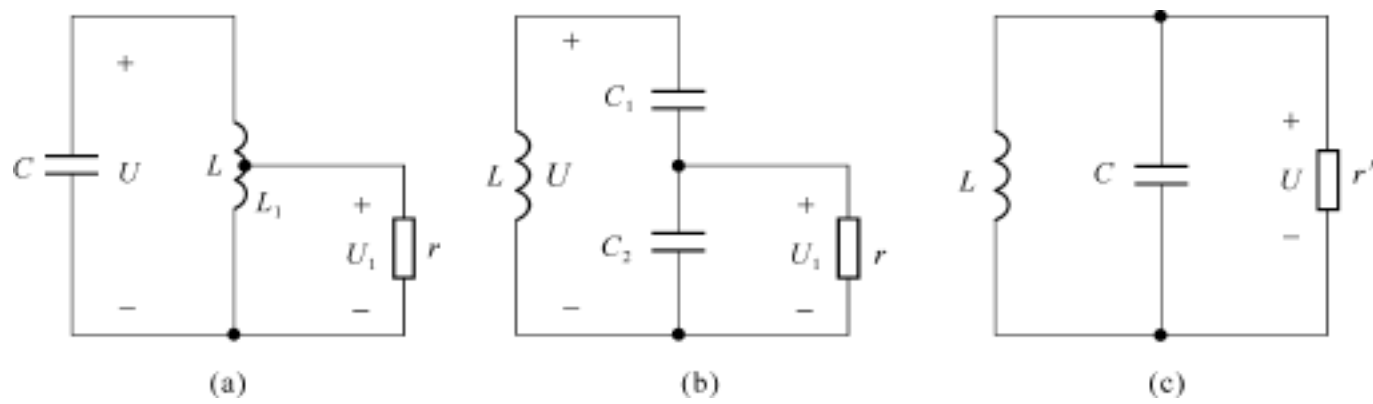


图 9-23 复杂并联谐振负载的接法

看成理想变量器,总电感的匝数为 N , L_1 的匝数为 N_1 ,则根据变压特性由式(9-40)可得

$$m = \frac{U_1}{U} = \frac{N_1}{N} \quad (9-41)$$

同样双电容电路中分配系数

$$m = \frac{C}{C_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{\frac{1}{C_1} I}{\frac{1}{C} I} = \frac{U_1}{U} \quad (9-42)$$

式(9-42)是从图(9-21)(b)在小损耗谐振条件下推出的。

现在证明图 9-23(a)、(b)、(c)中 r 与 r 的关系。由图(9-23)(a)、(b)中 r 上的功率 $P_r = U_1^2 / r$,而图 9-23(c)中 r 上的功率 $P_r = U^2 / r$,在谐振条件下它们等效,则功率必须相等。

即 $\frac{U_1^2}{r} = \frac{U^2}{r}$ 所以

$$r = \frac{U^2}{U_1^2} r$$

由式(9-40)和(9-42)知
$$r = \frac{1}{m^2} r \quad (9-43)$$

由上式可见当电源或负载采用图 9-23(a)、(b)双电感或双电容的接法时,比直接将负载接到总电容或总电感两端,也就是说不采用双电感或双电容,其电阻值升高了 $\left[\frac{U}{U_1} \right]^2$ 倍,这样可以大大减小加载的影响。

电流源在实际应用中常常采用图 9-24(a)、(b)的接法。在谐振时其等效电路如图 9-24(c)所示。图(a)、(b)中电流源产生的功率 $P_s = U_1 I_s$,图(c)中电流源产生的功率 $P_s = UI_s$,若它们等效,则功率必然相等即

$$UI_s = U_1 I_s$$

所以

$$I_s = \frac{U_1}{U} I_s = m I_s \quad (9-44)$$

若把双电感电路中的电感线圈看成理想变压器,总电感的匝数为 N , L_1 的匝数为 N_1 ,根据变压特性 $U_1 / U = N_1 / N$,则式(9-44)变为

$$I_s = \frac{N_1}{N} I_s \quad (9-45)$$

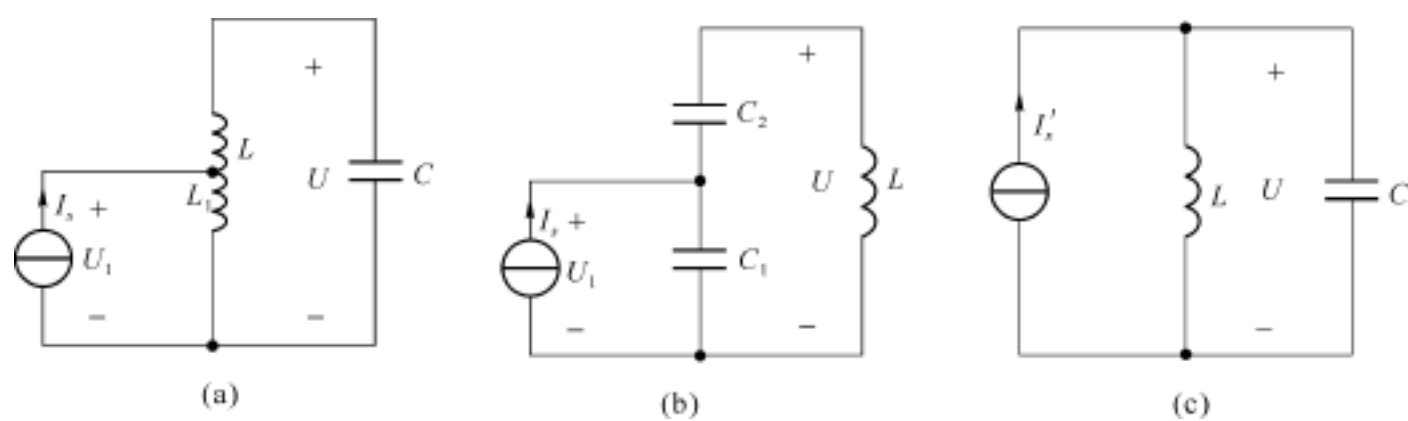


图 9-24 复杂并联谐振电流源的接法

例 9-4 图 9-25 所示电路中已知 $L = 125\text{ mH}$, $C = 80\text{ pF}$, $R = 10\text{ }\Omega$, 且知图 (b) 中 $N = 50$ 匝, $N_1 = 10$ 匝, 图 (c) 中 $C_1 = 100\text{ pF}$, $C_2 = 400\text{ pF}$, 试求各电路的并联谐振频率 f_0 , 品质因数 Q 和谐振阻抗。

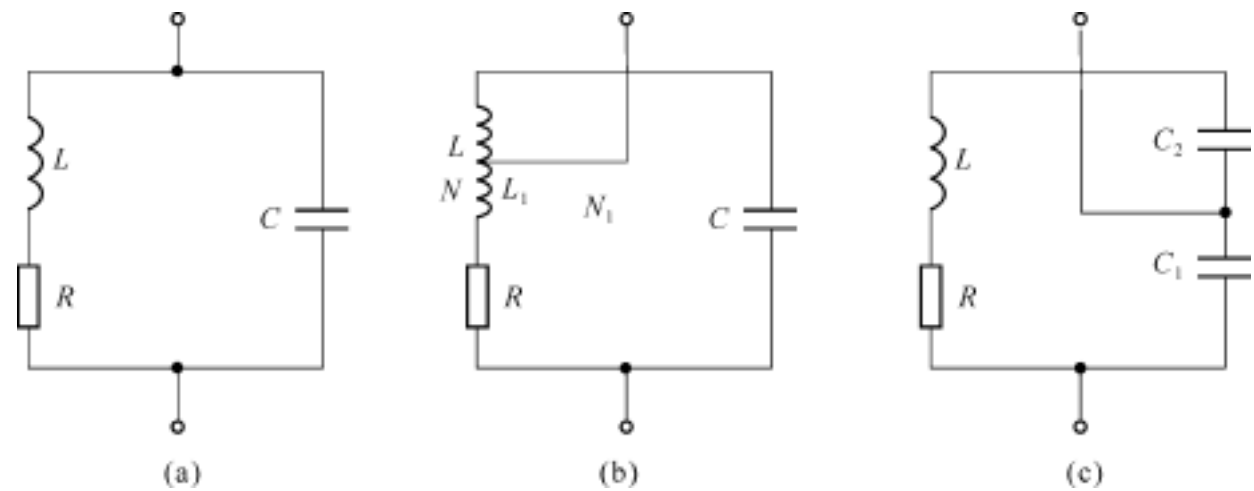


图 9-25 例 9-4 电路

解 谐振频率

$$f_0 = \frac{1}{2\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\sqrt{125 \times 10^{-6} \times 80 \times 10^{-12}}} = 1.59\text{ MHz}$$

品质因数

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi \times 1.59 \times 10^6 \times 125 \times 10^{-6}}{10} = 124.9$$

三种电路的谐振频率相同, 品质因数也相同, 因为它们的 R 、 L 、 C 相同, 而谐振阻抗分别为: 图 (a) 的谐振阻抗

$$R = Q \cdot \omega_0 L = 124.9 \times 2\pi \times 1.59 \times 10^6 \times 125 \times 10^{-6} = 155.97\text{ k}\Omega$$

图 (b) 的谐振阻抗由式 (9-37) 和式 (9-41) 得

$$R = \left[\frac{N_1}{N} \right]^2 \frac{L}{RC} = \left[\frac{10}{50} \right]^2 \cdot \frac{125 \times 10^{-6}}{10 \times 80 \times 10^{-12}} = 6.25\text{ k}\Omega$$

图 (c) 的谐振阻抗由式 (9-38) 得

$$R = m^2 \frac{L}{RC} = \frac{C}{C^2} \cdot \frac{L}{R} = \frac{80 \times 10^{-12} \times 125 \times 10^{-6}}{(100 \times 10^{-12})^2 \times 10} = 100\text{ k}\Omega$$

例 9-5 晶体管收音机中频放大器的等效电路如图 9-26 (a) 所示, 已知谐振频率 $f_0 = 465\text{ kHz}$, 谐振回路无载时品质因数 $Q = 100$, 电源内阻 $R_s = 16\text{ k}\Omega$, 负载电阻 $R_L = 1\text{ k}\Omega$, 图中电感和电容均表示实际元件即有损耗, 电容量 $C = 200\text{ pF}$ 。电感线圈 L , L_1 和 L_2 的匝数分别

为 $N = 160$ 匝, $N_1 = 40$ 匝, $N_2 = 10$ 匝, 试求电感量 L , 回路有负载时 Q 值和回路通频带 f_0 .

解 谐振频率 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

$$L = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 \times 465^2 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-10}} = 0.586 \text{ mH}$$

将谐振回路等效为并联型, 负载电阻 R_L 和电源内阻 R_s 及电流源分别等效为图 9-23(c) 和图 9-24(c), 则图(a)的并联等效电路如图(b)所示。由式(9-41)和式(9-43)知:

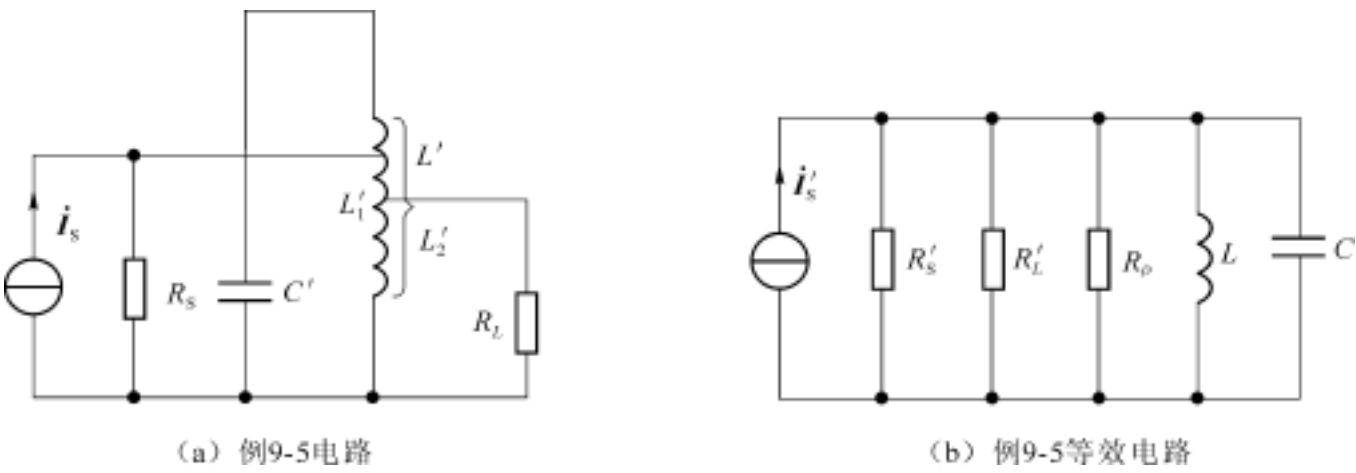


图 9-26 例 9-5 电路及其等效电路

$$R_L = \frac{1}{m_2^2} R_L = \left[\frac{N}{N_2} \right]^2 R_L = \left[\frac{160}{10} \right]^2 \times 1000 = 256 \text{ k}$$
$$R_s = \frac{1}{m_1^2} R_s = \left[\frac{N}{N_1} \right]^2 R_s = \left[\frac{160}{40} \right]^2 \times 16000 = 256 \text{ k}$$

无负载时谐振阻抗

$$R_0 = \omega L Q = 2\pi \times 465 \times 10^3 \times 0.586 \times 10^{-3} \times 100 = 171 \text{ k}$$

有负载时谐振阻抗 R 为 R_L 、 R_s 和 R_0 三个阻抗的并联, 已知 $R_L = R_s = 256 \text{ k}$, 所以

$$R = \frac{256/2 \times 171}{256/2 + 171} = 73.2 \text{ k}$$

有负载时

$$Q = \frac{R}{\omega L} = \frac{73.2 \times 10^3}{\sqrt{\frac{586 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-10}}}} = 42.76 \approx 43$$

通频带

$$f = \frac{f_0}{Q} = \frac{465}{43} = 10.8 \text{ kHz}$$

上述结果表明, 由于采用了双电感电路, 负载电阻由 $R_L = 1 \text{ k}$, 提高到 $R_L = 256 \text{ k}$, 电源内阻 $R_s = 16 \text{ k}$ 提高到 $R_s = 256 \text{ k}$, 使加载时谐振阻抗 R 向无载时谐振阻抗 R_0 靠近。如果不采用双电感谐振电路, 把 R_L 和 R_s 直接接到总电感两端则加载时谐振阻抗 R 等于 R_0 、 R_L 和 R_s 三个阻抗并联, 即

$$R = \frac{\frac{1 \times 16}{1 + 16} \times 171}{\frac{1 \times 16}{1 + 16} + 171} = 0.94 \text{ k}$$

可见双电感谐振电路对减小加载的影响非常明显。

如果进一步减小加载的影响, 可继续调整分配系数。若调整 $N_1 = 4$ 匝, $N_2 = 2$ 匝, 则经

过同样的计算 $R_s = 25\,600\,\text{k}$, $R_L = 6\,400\,\text{k}$, 谐振阻抗 $R = 166.5\,\text{k}$, 几乎等于无载时谐振阻抗 R 。此时品质因数 $Q = 97.24$, 也非常接近无载时品质因数。

双电感双电容谐振电路可以减小负载和电源内阻的影响, 但是简单谐振电路的弊端回路的选择性和通频带仍未得到改善。

解决选择性和通频带的矛盾可采用互感耦合谐振或电容耦合谐振, 如图 9-27(a)、(b) 所示。

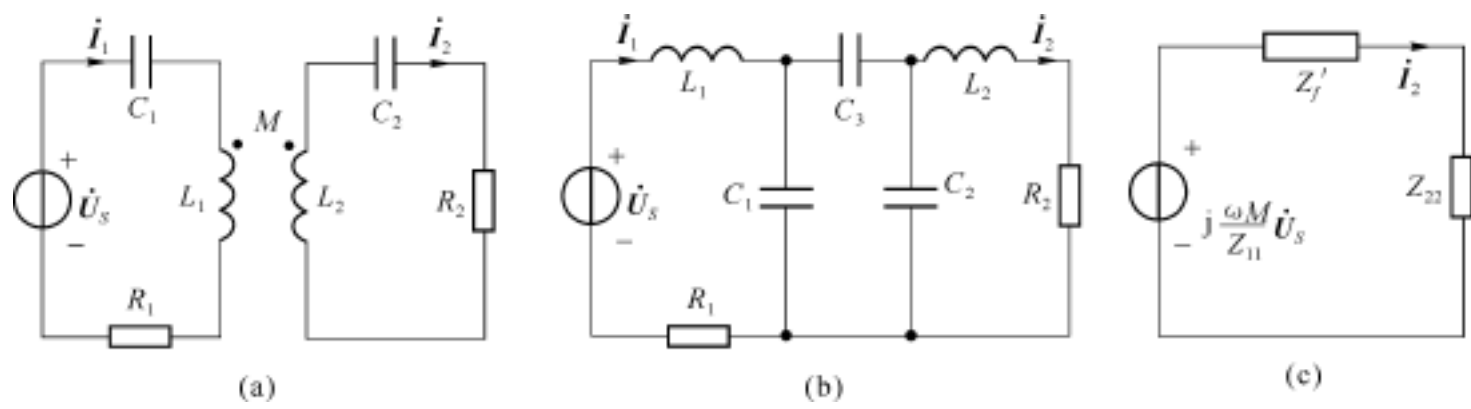


图 9-27 耦合谐振

根据互感电路引入阻抗的概念可得到图 9-27(a) 的次级等效电路, 如图 9-27(c) 所示, 图中 $Z_f = \omega^2 M^2 / Z_{11}$, 为次级引入阻抗, Z_{11} 为初级阻抗。

前面讲的单谐振回路的通频带 $B = \omega / Q$, 在谐振频率一定的情况下, 通频带仅取决于回路品质因数, 因而选择性与通频带的矛盾无法解决。而耦合谐振电路的通频带不仅与回路品质因数有关, 而且还与初级、次级耦合程度有关。图 9-28 所示为耦合双调谐幅频特性曲线, I_2 为次级回路电流, I_{20} 为谐振时次级回路电流。从曲线可知, 当 $KQ = 1$ 时, 幅频特性曲线为单峰, 与单调谐回路特性曲线(图 9-28 中虚线所示)相比, 其顶部比较平坦; 当 $KQ > 1$ 时谐振曲线出现双峰, 极大值都等于 1, 即次级电流 I_2 达到最大值。从曲线还可看出, 在上、下截止频率之外谐振曲线比较陡峭, 所以耦合双调谐谐振回路能够满足通频带宽、选择性好的要求。

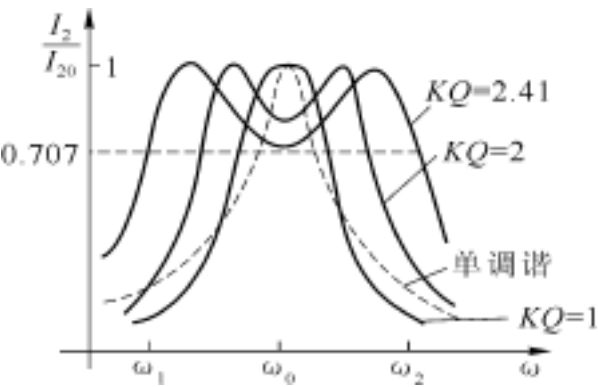


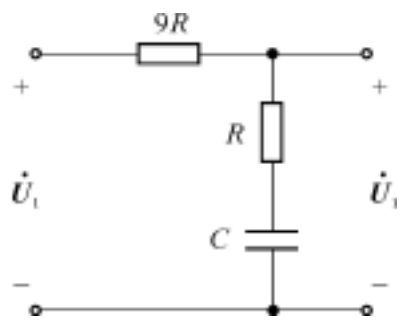
图 9-28 耦合谐振曲线

习 题 九

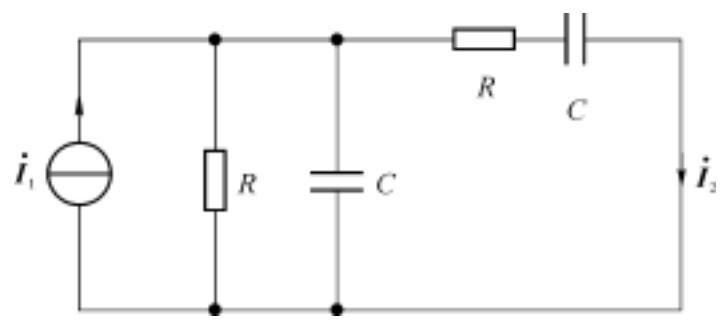
9-1 求题图 9-1 电路的电压传输系数, 并定性画出幅频特性; 说明它是哪种滤波电路, 其截止频率为多大?

9-2 试证题图 9-2 电路的电流比为 $\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{3 + j\left[CR - \frac{1}{CR}\right]}$, 并说明满足什么条件时 I_2 与 I_1 同相位, 此时比值为多少?

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}。$$



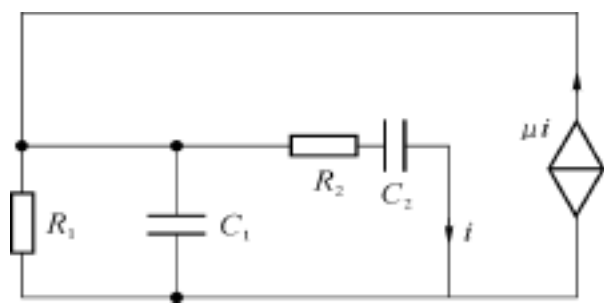
题图 9-1



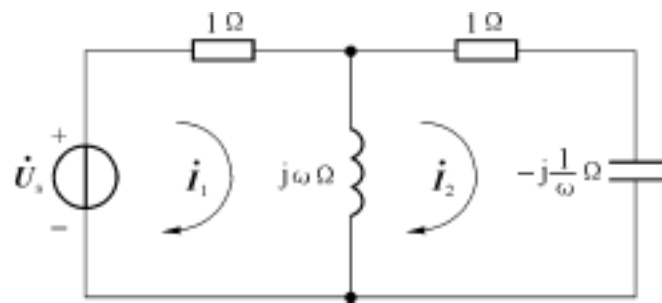
题图 9-2

9-3 题图 9-3 为 RC 正弦振荡器的交流等效电路, 其中 $C_2 = kC_1$, $R_2 = \frac{R_1}{k}$ (k 为常数), 当 i 与 μ 同相位时电路发生等幅正弦振荡, 求出相应的 μ 值及振荡频率。

9-4 试求题图 9-4 所示电路的转移导纳 $Y(j\omega) = I_2 / U_s$ 。



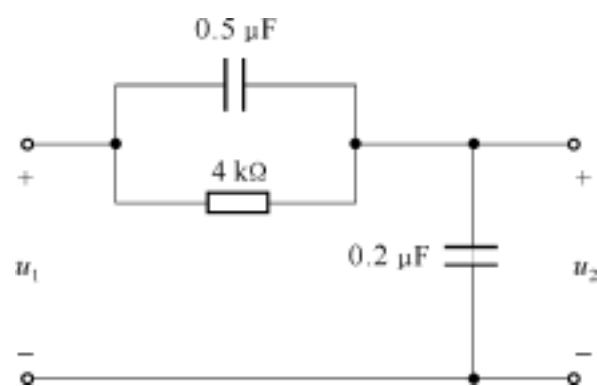
题图 9-3



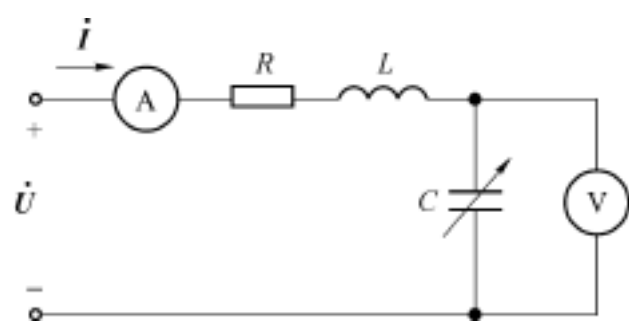
题图 9-4

9-5 试求题图 9-5 示相移网络在频率 $f = 50\text{Hz}$ 时, u_2 对 u_1 的相移。

9-6 在题图 9-6 所示的电路中, 电源电压 $U = 10\text{V}$, 角频率 $\omega = 5000\text{rad/s}$ 。调节电容 C 使电路中的电流达到最大, 这时电流为 200mA , 电容电压为 600V 。试求 R 、 L 、 C 的值及回路的品质因数。



题图 9-5



题图 9-6

9-7 RLC 串联电路的谐振频率为 $1000\sqrt{2}\text{Hz}$, 通频带为 $100\sqrt{2}\text{Hz}$ 。谐振时阻抗为 100Ω 。求 R 、 L 、 C 。

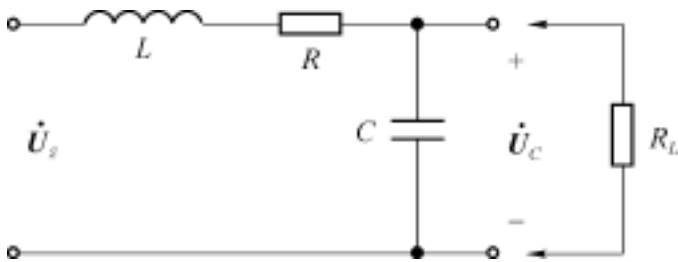
9-8 (1) 要求题图 9-8 的线圈与电容器串联电路谐振于 3.5MHz , 具有特性阻抗为 $1\text{k}\Omega$, 问怎样选择 C 及 L 的值;

(2) 当线圈的品质因数为 50 , 输入电压为 U_s 时, 求回路的通频率带宽和电容的输出电压 U_c 。

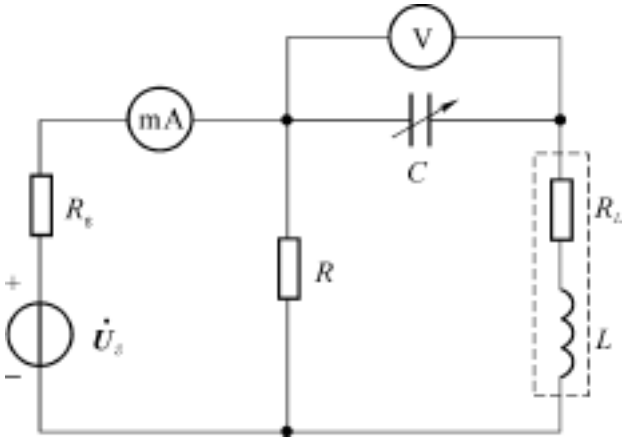
(3) 若电容两端接上数值等于特性阻抗 10 倍的负载电阻 R_L 时, 重新计算这时的谐振频率、有载品质因数及电容电压与输入电压之比和通频带, 从而归纳加载对串联电路的影响。

9-9 题图 9-9 是测量元件品质因数的高频 Q 表原理电路, L, R_L 为被测线圈, C 为可调电容, 线圈与电容 C 的串联电路可看作在电压源下工作, 所以 C 两端的变阻抗电压表可以准确表征电路的谐振状态, 又由于 $R \ll R_L$, 所以毫安电流可认为就是 R 中的电流。

- (1) 试说明 Q 表怎样根据电压表与毫安表的指示表示线圈的 Q 值;
- (2) 若已知 $R_s = 100 \Omega$, $R = 0.04 \Omega$, 电容器调至 $C = 155 \text{ pF}$ 时电路发生谐振, 毫安表指示 50 mA , 电压表指示 100 mV , 已知电源频率为 1.59 MHz , 试求线圈的电感量 L 及品质因数 Q 。



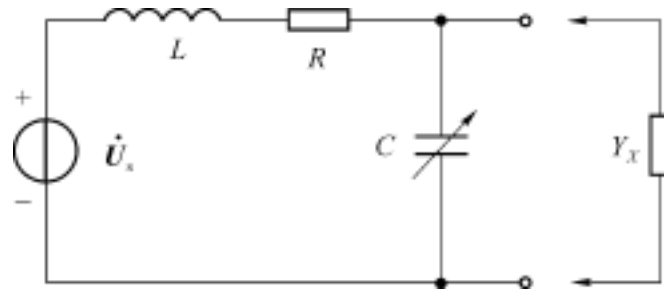
题图 9-8



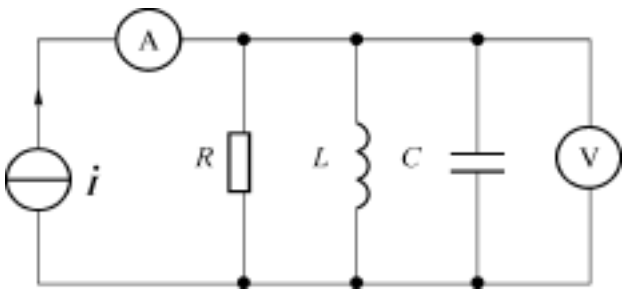
题图 9-9

9-10 题图 9-10 中电源频率为 1 MHz , 有效值为 0.1 V , 当电容 C 调至 80 pF 时电路发生谐振, 电容两端电压为 10 V ; 然后在电容两端接入一未知导纳 Y_X , 重新调节电容至 $C = 60 \text{ pF}$ 时电路才对 1 MHz 电源呈现谐振状态, 此时电容两端有 8 V 的电压。试求 L, Y_X 及整个电路的品质因数。

9-11 已知题图 9-11 中理想电压表读数为 5 V , $X_C = X_L = 100 \Omega$, $R = 10 \text{ k}\Omega$, 问理想电流表的读数为多少?

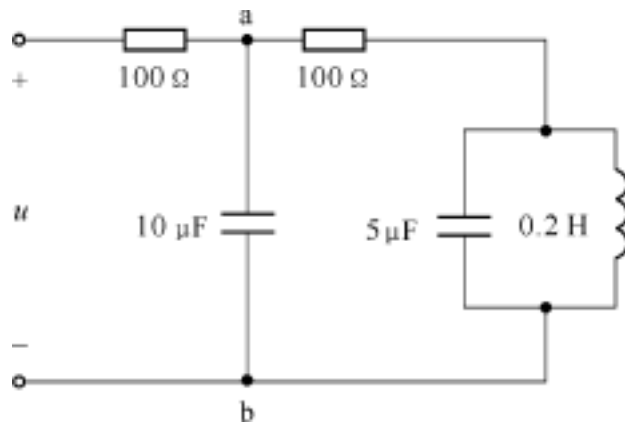


题图 9-10

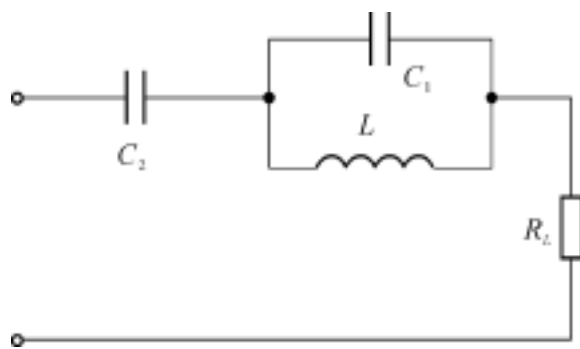


题图 9-11

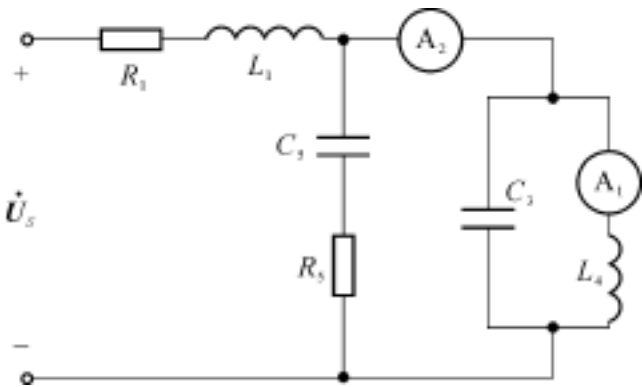
- 9-12 已知题图 9-12 中 $u_{ab} = 50 \cos 1000 t \text{ V}$, 试求 u 值。
- 9-13 已知题图 9-13 中 $L = 10 \text{ mH}$, $R_L = 20 \Omega$, 问 C_1 及 C_2 为何值时才能使电源频率为 100 kHz 的电流通不过 R_L , 而 50 kHz 电流通过 R_L 最大?
- 9-14 已知题图 9-14 中理想电流表 A_2 的指示为零, 电路中 $U_s = 220 \text{ V}$, $R_1 = R_s = 50 \Omega$, $L_1 = 0.2 \text{ H}$, $L_4 = 0.1 \text{ H}$, $C_3 = 10 \text{ }\mu\text{F}$, $C_5 = 5 \text{ }\mu\text{F}$, 试求理想电流表 A_4 的读数。
- 9-15 在题图 9-15 所示电路中, 已知电压 $U = 200 \text{ V}$, $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$, $R = 100 \Omega$, $L_1 = 30 \text{ mH}$, $L_2 = M = 10 \text{ mH}$, 求使电路发生谐振时的电容值及各电流表读数。



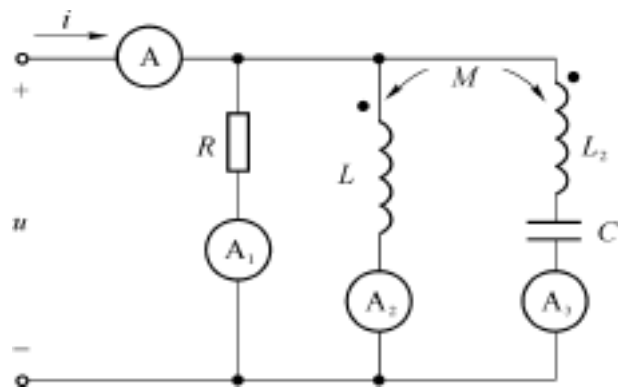
题图 9-12



题图 9-13

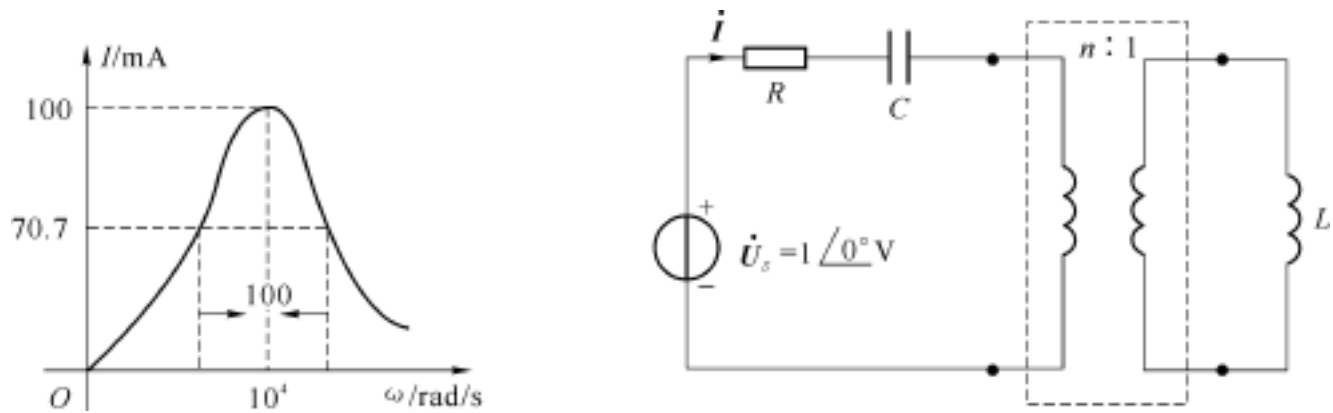


题图 9-14



题图 9-15

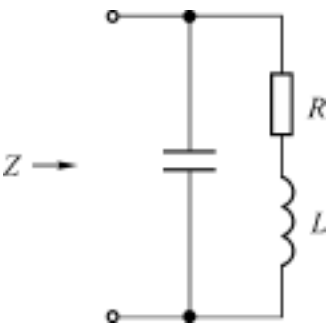
9-16 电路及谐振曲线如题图 9-16 所示, 求符合要求的电阻 R 、电容 C 和理想变压器的匝数比 n , 图中 U_s 和 I 均为有效值相量, 电感 $L = 4 \text{ mH}$ 。



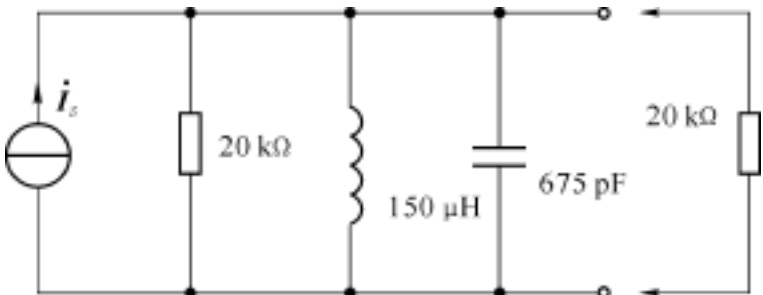
题图 9-16

9-17 题图 9-17 中, $R = 100 \Omega$, 当电源工作频率 $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$ 时, 电路的输入阻抗 $Z = 500 \angle 0^\circ \Omega$, 试求 L 及 C 的值。

- 9-18 (1) 试求题图 9-18 并联谐振电路无载时的谐振频率 f_0 、品质因数 Q 及通频带 f ;
(2) 若终接 $20 \text{ k}\Omega$ 的负载, 重新计算整个电路的谐振频率、品质因数及通频带;
(3) 在终接 $20 \text{ k}\Omega$ 负载后, 想将电路的品质数维持为 25, 而不改变谐振频率值, 应如何选择电感及电容量。



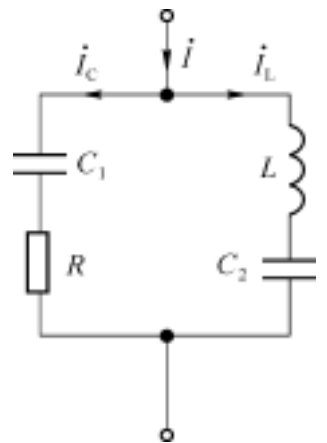
题图 9-17



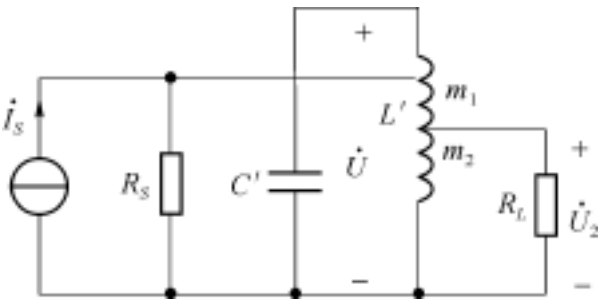
题图 9-18

9-19 在题图 9-19 所示双电容并联谐振电路中, 已知 $L = 80 \mu\text{H}$, $C_1 = 400 \text{ pF}$, $C_2 = 100 \text{ pF}$, $R = 20 \Omega$ 。流经并联谐振电路的电流 I 为 100 mA , 其角频率 $\omega = 12.5 \times 10^6 \text{ rad/s}$ 。试求支路电流 I_C 、 I_L , 各元件上电压 U_{C1} 、 U_{C2} 、 U_L 和回路吸收的功率 P 。

9-20 晶体管收音机中频放大器的等效电路如题图 9-20 所示, 已知电流源 $I_s = 60 \angle 0^\circ \mu\text{A}$, 内阻 $R_s = 32 \text{ k}\Omega$, 负载电阻 $R_L = 320 \Omega$, 谐振回路无载时品质因数 $Q = 117$, 图中电感和电容均表示实际元件, 即有损耗。 $L = 586 \mu\text{H}$, $C = 200 \text{ pF}$, 变换系数 $m_1 = 0.4$, $m_2 = 0.04$, 若电路对电源频率 $f_0 = 465 \text{ kHz}$ 谐振, 试求回路电压 U 、输出电压 U_2 , 有载时品质因数 Q 和通频带。



题图 9-19



题图 9-20

第十章 双口网络

许多实际电路都可以归结为图 10-1 所示的这种电路形式,左侧是信号源,右侧是负载,中间方框表示任意线性网络。为了研究中间网络的特性,将它从图 10-1 中分离出来如图 10-2 所示。这种具有两个端口的网络称双口网络。

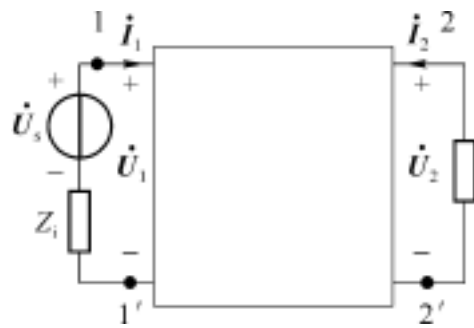


图 10-1 电源通过传输网络与负载相连

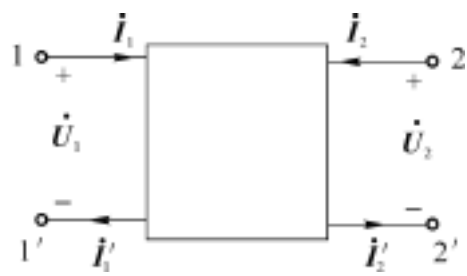


图 10-2 双口网络

所谓端口是一对端钮,它必须满足以下条件:在任何瞬时从一个端钮流入网络的电流等于从另一个端钮流出网络的电流。在图 10-2 双口网络中, $I_1 = I_1, I_2 = I_2$ 。应该注意双口网络和四端网络的区别。作为四端网络它的四个端钮可以有各自的电流,如图 10-3 中四端网络 N,显然 $I_1 \neq I_1, I_2 \neq I_2$ 。

在图 10-1 的电路中,信号源侧有 $U_s - Z_i I_1 = U_1$,负载侧有 $U_2 = Z_L I_2$,其中 U_1, I_1 说明信号源的工作情况, U_2, I_2 说明负载的工作情况。而 U_1, I_1, U_2, I_2 这四个量是通过传输网络互相联系的,因此为了知道信号源和负载的工作情况,还必须知道双口网络的特性。所以本章将介绍双口网络的概念,网络方程和参数,以及网络的联接等内容。

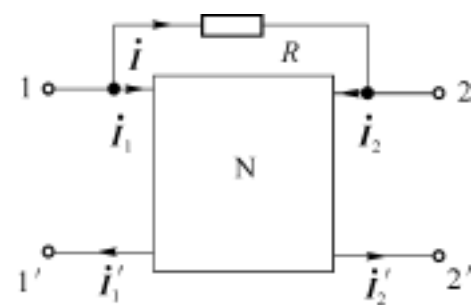


图 10-3 四端网络

10.1 双口网络方程和参数

为了建立在正弦稳态时端口变量 u_1, i_1, u_2, i_2 之间的关系,将端口变量用向量表示,端口电流电压符合关联方向如图 10-2 所示。假设双口网络是由线性非时变元件构成,且不含独立源,但可含受控源。

双口网络 4 个端口变量中,可以取其中任意两个为自变量,其余两个为因变量,4 个变量中任取两个为自变量有 6 种取法。因此可以有 6 组方程表征双口网络端口变量之间的关系。

首先讨论以 I_1 和 I_2 为自变量的方程组。含有 n 个独立节点的正弦稳态电路,用节点

法可以列出 n 个独立的多元一次方程组,再用克拉默法则解出 n 个节点电压,其中第 k 个节点电压为

$$U_k = \frac{1}{k} I_{s1} + \frac{2}{k} I_{s2} + \dots + \frac{n}{k} I_{sn}$$

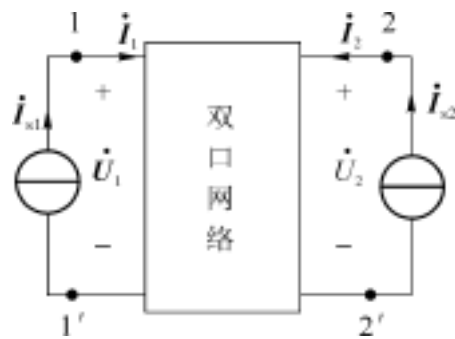


图 10-4 Z 参数方程用图

对于图 10-4 所示电路,只有两个独立电流源,所以

$$U_1 = \frac{11}{I_{s1}} + \frac{21}{I_{s2}}$$

$$U_2 = \frac{12}{I_{s1}} + \frac{22}{I_{s2}}$$

其中 Δ_{ij} 为节点导纳行列式, Δ_{ij} 为 i 行 j 列的余子式,所以电流的系数为阻抗的量纲,因此上式可写成

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ U_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned} \tag{10-1}$$

式(10-1)中 $Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}$ 与双口网络内部结构、元件参数及激励的频率有关,是一组表征网络特性的参数,称双口网络 Z 参数,而式(10-1)称双口网络 Z 参数方程。写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{10-2}$$

其中 $Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$ 称 Z 参数矩阵。

对于不含独立源的线性时不变双口网络,一般都可以写出 Z 参数方程,只是不同的网络具有不同的 Z 参数而已。也可以用叠加定理证明,观察式(10-1) U_1 和 U_2 正是电流源 $I_{s1} (I_1)$ 和 $I_{s2} (I_2)$ 单独作用的结果。

对于一个给定的双口网络,它的 Z 参数可由式(10-1)确定:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} && \text{2 端口开路时 1 端口输入阻抗;} \\ Z_{12} &= \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} && \text{1 端口开路时从 2 端口到 1 端口的转移阻抗;} \\ Z_{21} &= \frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} && \text{2 端口开路时从 1 端口到 2 端口的转移阻抗;} \\ Z_{22} &= \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} && \text{1 端口开路时 2 端口输入阻抗。} \end{aligned}$$

可见在确定 Z 参数时,必须有一个端口电流为零,也就是说必须有一个端口开路,所以 Z 参数又称开路阻抗参数。

由互易定理可知,当双口网络内部仅由 R, L, C 无源元件组成时, $Z_{12} = Z_{21}$,这类双口网络称互易双口网络。当双口网络内部含有受控源时,它不再具有互易性, $Z_{12} \neq Z_{21}$,当然也就不是互易网络。

如果双口网络满足 $Z_{12} = Z_{21}, Z_{11} = Z_{22}$,则从双口网络两端口看进去的电特性完全相

同,那么这种网络称为对称双口网络,显然对称双口网络的 Z 参数只有两个是独立的。

表征双口网络端口变量 U_1, U_2, I_1, I_2 关系的还有五组方程,其向量形式如下:

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} U_1 + y_{12} U_2 \\ I_2 = y_{21} U_1 + y_{22} U_2 \end{cases} \quad (10-3)$$

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} I_1 + h_{12} U_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} U_2 \end{cases} \quad (10-4)$$

$$\begin{cases} I_1 = g_{11} U_1 + g_{12} I_2 \\ U_2 = g_{21} U_1 + g_{22} I_2 \end{cases} \quad (10-5)$$

$$\begin{cases} U_1 = a_{11} U_2 + a_{12} (-I_2) \\ I_1 = a_{21} U_2 + a_{22} (-I_2) \end{cases} \quad (10-6)$$

$$\begin{cases} U_2 = b_{11} U_1 + b_{12} (-I_1) \\ I_2 = b_{21} U_1 + b_{22} (-I_1) \end{cases} \quad (10-7)$$

最初式(10-6)所示的方程组是在负载上电流 I_2 电压 U_2 符合关联参考方向的情况下得出的,当时的方程为 $U_1 = a_{11} U_2 + a_{12} I_2$ 和 $I_1 = a_{21} U_2 + a_{22} I_2$ 。现在按图(10-4)所示端口变量统一规定,电流 I_2 改变了方向,所以在式(10-6)中 I_2 前冠以负号。式(10-7)也有类似问题。

式(10-3)至式(10-7)系数依次分别称为 Y 参数、H 参数、G 参数、A 参数(也称传输参数)、B 参数(也称反传输参数)。相应的各独立方程,分别称为 Y 参数方程、H 参数方程、G 参数方程、传输参数方程和反传输参数方程。

上述五种方程也可用矩阵形式表示如下:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (10-8)$$

其中 $Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$ 称 Y 参数矩阵。

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (10-9)$$

其中 $H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$ 称 H 参数矩阵。

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (10-10)$$

其中 $G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$ 称 G 参数矩阵。

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (10-11)$$

其中 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 称 A 参数矩阵也称传输参数矩阵。

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \tag{10-12}$$

其中 $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ 称 B 参数矩阵也称反传输参数矩阵。

下面讨论 Y 参数、H 参数和 A 参数的计算。Y 参数可由式(10-3)确定如下：

$y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0}$

2 端口短路时 1 端口输入导纳；

$y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0}$

1 端口短路时, 从 2 端口到 1 端口的转移导纳；

$y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0}$

2 端口短路时, 从 1 端口到 2 端口的转移导纳；

$y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0}$

1 端口短路时 2 端口输入导纳。

在确定 Y 参数时必须有一个端口短路, 因此, Y 参数又称短路导纳参数。在线性无源网络中应遵守互易特性, 即 $y_{12} = y_{21}$, 四个 Y 参数中只有三个是独立的, 这种网络称互易双口网络, 如果满足 $y_{12} = y_{21}$, $y_{11} = y_{22}$, 这时只需用两个独立的导纳参数就可以说明双口网络外部电流电压之间的关系, 这种网络称对称双口网络。

H 参数由式(10-4)确定如下：

$h_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0}$

2 端口短路时 1 端口输入阻抗；

$h_{12} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_1=0}$

代表反向开路电压增益；

$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{U_2=0}$

代表正向开路电压增益；

$h_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{I_1=0}$

1 端口短路时 2 端口输入阻抗。

可见 h_{11} 具有阻抗的量纲, h_{22} 具有导纳的量纲, 而 h_{12} , h_{21} 无量纲, 所以 H 参数称混合参数。

同样由式(10-6)A 参数确定如下：

$a_{11} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0}$

2 端口开路时, 电压比；

$a_{12} = \left. \frac{U_1}{-I_2} \right|_{U_2=0}$

2 端口短路时转移阻抗；

$a_{21} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0}$

2 端口短路时转移导纳；

$a_{22} = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{U_2=0}$

2 端口开路时, 电流比。

由式(10-5)和(11-7)可以确定 G 参数和 B 参数, 这里不一一讨论。在六种参数中, Z 参数和 Y 参数是最基本的, 常用于理论分析证明中, H 参数应用于晶体管电路, A 参数应用于

传输理论中。

例 10-1 求图10-5所示有源双口网络的 Z 参数和 A 参数。

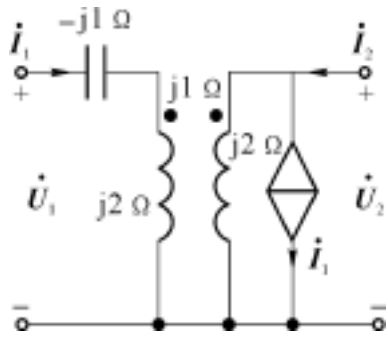


图 10-5 例 10-1 图

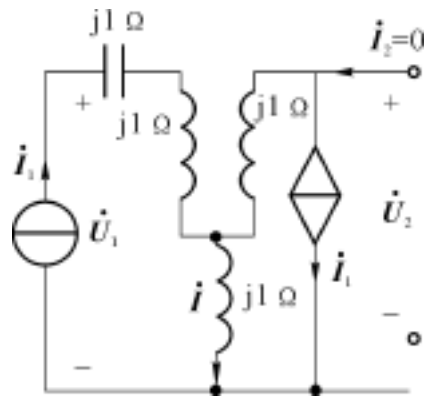


图 10-5 图(a)

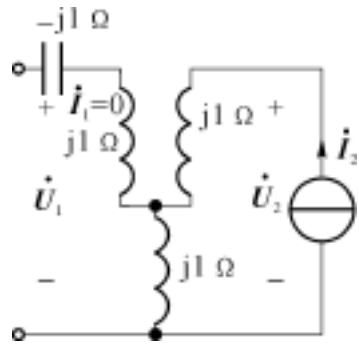


图 10-5 图(b)

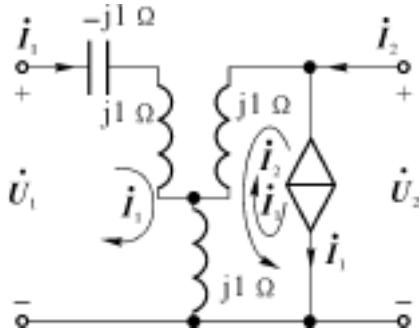


图 10-5 图(c)

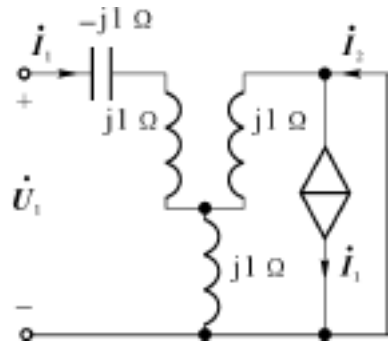


图 10-5 图(d)

解 将图 10-5 互感化除并在输入端口加电流源如图(a)所示,由图(a)知电流 $I = 0$, 则 $U_1 = I_1(-j + j) + j_1 I = 0$, $U_2 = -j_1 I_1$, 所以

$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = 0$$

$$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{-jI_1}{I_1} = -j$$

图 10-5 互感化除后在输出端口加电流源 I_2 如图(b)所示。由图知

$$U_1 = j_1 I_2, U_2 = (j + j) I_2 = j_2 I_2$$

所以

$$Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{jI_2}{I_2} = j \quad Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{j_2 I_2}{I_2} = j_2$$

Z_{22} 为 1 端口开路时 2 端口的输入阻抗。也可用回路电流法求 Z 参数。将图 10-5 互感化除得图(c), 列回路方程:

$$(-j_1 + j_1 + j_1) I_1 + j_1 I_2 - j_1 I_1 = U_1$$

即 $j_1 I_2 = U_1$ (A)

$$j_1 I_1 + j_2 I_2 - j_2 I_1 = U_2$$

即 $-j_1 I_1 + j_2 I_2 = U_2$ (B)

由式(A)、(B)得 Z 参数 $Z_{11} = 0, Z_{12} = j_1, Z_{21} = -j_1, Z_{22} = j_2$ 。

由图(a)可求 a_{11} 和 a_{21} :

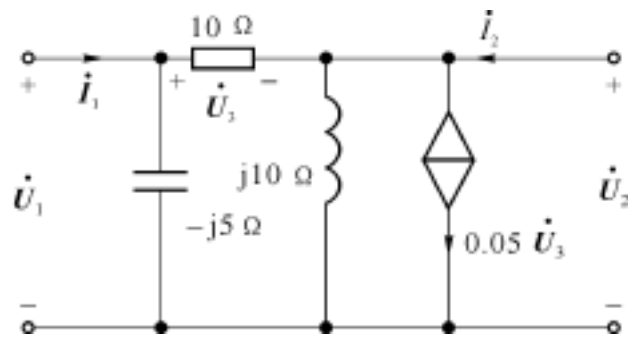
$$a_{11} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{I_2=0} = 0 \qquad a_{21} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{I_1}{-j I_1} = j \text{ S}$$

由图(d)知 $I_2 = I_1 - 0.5 I_1 = 0.5 I_1$, $U_1 = 0.5 j I_1$, 所以

$$a_{12} = \frac{U_1}{-I_2} \Big|_{U_2=0} = \frac{0.5 j I_1}{0.5 I_1} = j$$

$$a_{22} = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{U_2=0} = \frac{I_1}{-0.5 I_1} = -2$$

例 10-2 求图10-6双口网络的短路导纳参数矩阵。



例 10-6 例 10-2 图

解 用导纳参数的定义式确定导纳参数矩阵
请读者自行计算。这里用节点电压法求 Y 参数。

列图 10-6 节点方程:

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{10} + j \frac{1}{5} \right] U_1 - \frac{1}{10} U_2 = I_1 \\ -\frac{1}{10} U_1 + \left[\frac{1}{10} - j \frac{1}{10} \right] U_2 = I_2 - 0.05 U_3 \\ U_3 = U_1 - U_2 \end{cases}$$

整理后得: $I_1 = (0.1 + j0.2) U_1 - 0.1 U_2$, $I_2 = -0.05 U_1 + (0.05 - j0.1) U_2$

所以

$$Y = \begin{bmatrix} 0.1 + j0.2 & -0.1 \\ -0.05 & 0.05 - j0.1 \end{bmatrix}$$

10 2 双口网络参数间的相互换算

前面讨论了双口网络的六种方程及其参数的确定和性质,现在讨论各参数间的关系。
如果知道双口网络的任一参数矩阵,通过运算便可求得其余各参数矩阵,当然这一矩阵必须是存在的。

若已知 Y 参数求 H 参数,推证的思路是由 Y 参数求出与 H 参数方程相似的方程式,即用 Y 参数表示的 H 参数方程式,然后比较即可求出用 Y 参数表示的 H 参数。

由式(10-3)解出

$$U_1 = \frac{1}{y_{11}} I_1 - \frac{y_{12}}{y_{11}} U_2 \tag{A}$$

再将式(A)代入式(10-3)解出

$$I_2 = \frac{y_{21}}{y_{11}} I_1 - \frac{y_{12} y_{21}}{y_{11}} U_2 + y_{22} U_2 = \frac{y_{21}}{y_{11}} I_1 - \frac{y_{12} y_{21} - y_{11} y_{22}}{y_{11}} U_2 = \frac{y_{21}}{y_{11}} I_1 - \frac{y}{y_{11}} U_2 \tag{B}$$

将式(A)和(B)与式(10-4)比较得

$$h_{11} = \frac{1}{y_{11}}, h_{12} = -\frac{y_{12}}{y_{11}}, h_{21} = \frac{y_{21}}{y_{11}}, h_{22} = \frac{y}{y_{11}}$$

其中 Y 参数的行列式 $y = y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21}$

按照上述方法可以求出各组参数间的互换关系如表 10 -1 所示。

表 10 -1 各参数间关系

<div>自 至</div>	Z	Y	H	G	A	B
Z	z_{11}	$\frac{y_{22}}{y}$	$\frac{h}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$\frac{a_{11}}{a_{21}}$	$\frac{b_{22}}{b_{21}}$
	z_{21}	$-\frac{y_{12}}{y}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$-\frac{g_{12}}{g_{11}}$	$-\frac{a}{a_{21}}$	$-\frac{1}{b_{21}}$
Y	$\frac{z_{22}}{z}$	y_{11}	$\frac{1}{h_{11}}$	$-\frac{g}{g_{22}}$	$\frac{a_{22}}{a_{12}}$	$\frac{b_{11}}{b_{12}}$
	$-\frac{z_{21}}{z}$	y_{21}	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$-\frac{a}{a_{12}}$	$-\frac{1}{b_{12}}$
H	$\frac{z}{z_{22}}$	$\frac{1}{y_{11}}$	h_{11}	$\frac{g_{22}}{g}$	$-\frac{a_{12}}{a_{22}}$	$\frac{b_{12}}{b_{11}}$
	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	$-\frac{y_{12}}{y_{11}}$	h_{12}	$-\frac{g_{12}}{g}$	$\frac{a}{a_{22}}$	$-\frac{1}{b_{11}}$
G	$\frac{1}{z_{11}}$	$-\frac{y}{y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{h}$	g_{11}	$\frac{a_{21}}{a_{11}}$	$\frac{b_{21}}{b_{22}}$
	$-\frac{z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{y_{12}}{y_{22}}$	$-\frac{h_{12}}{h}$	g_{12}	$-\frac{a}{a_{11}}$	$-\frac{1}{b_{22}}$
A	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{21}}$	$-\frac{h}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	a_{11}	$\frac{b_{22}}{b}$
	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$-\frac{y}{y_{21}}$	$-\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$	a_{12}	$\frac{b_{12}}{b}$
B	$\frac{z_{22}}{z_{12}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{12}}$	$\frac{1}{h_{12}}$	$-\frac{g}{g_{12}}$	$\frac{a_{22}}{a}$	b_{11}
	$\frac{z_{11}}{z_{12}}$	$\frac{y_{22}}{y_{12}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$	$\frac{g_{12}}{g_{12}}$	$\frac{a_{12}}{a}$	b_{12}
互易条件	$z_{12} = z_{21}$	$y_{12} = y_{21}$	$h_{12} = -h_{21}$	$g_{12} = -g_{21}$	$a = 1$	$b = 1$

$z = z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}, \quad h = h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}, \dots$

10 .3 双口网络的等效电路

对于一个网络来说,无论其内部结构如何复杂,只要知道它的方程,就可以确定它的等效电路,当然等效电路不止一种。

若已知双口网络的 Z 参数方程如式(10-1),则不难得到用 Z 参数表示的双口网络的等效电路,如图 10 -7 所示。如果双口网络是互易的,则 $Z_{12} = Z_{21}$,Z 参数方程可以写成

$$U_1 = (Z_{11} - Z_{12}) I_1 + Z_{12} (I_1 + I_2)$$
$$U_2 = Z_{21} (I_1 + I_2) + (Z_{22} - Z_{21}) I_2 = Z_{12} (I_1 + I_2) + (Z_{22} - Z_{12}) I_2$$

其等效电路如图 10 -8 所示,它是由三个阻抗构成的 T 型等效电路。如果双口网络是对称的则 $Z_{11} = Z_{22}$,其等效电路也是对称的。

如果把 Z 参数方程改写成下面形式

$$U_1 = (Z_{11} - Z_{12}) I_1 + Z_{12} (I_1 + I_2)$$

$$U_2 = Z_{12}(I_1 + I_2) + (Z_{22} - Z_{12})I_2 + (Z_{21} - Z_{12})I_1$$

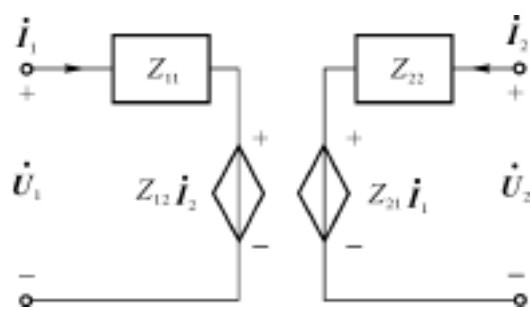


图 10-7 Z 参数等效电路

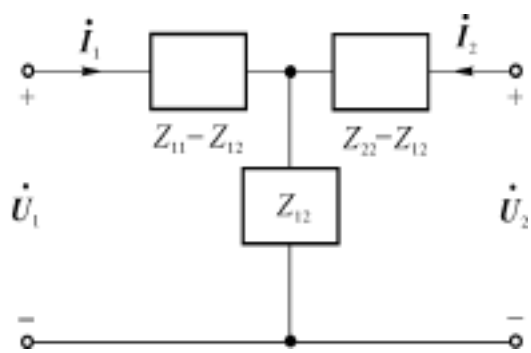


图 10-8 互易的 Z 参数 T 型等效电路

则得到用 Z 参数表征的含源双口网络的 T 型等效电路如图 10-9 所示。

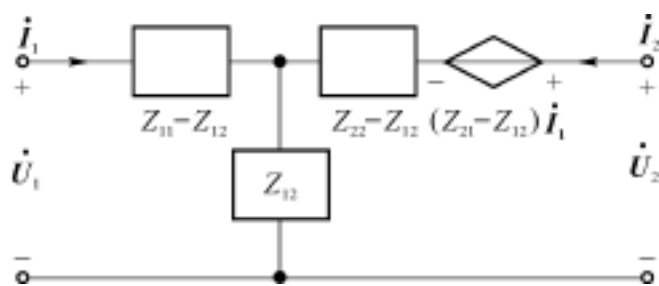


图 10-9 非互易参数等效电路

同样由双口网络 Y 参数方程式(10-3),可以得到用 Y 参数表征的双口网络的等效电路如图 10-10 所示。

若把 Y 参数方程写成

$$\begin{aligned} I_1 &= (y_{11} + y_{12})U_1 + (-y_{12})(U_1 - U_2) \\ I_2 &= (y_{21} - y_{12})U_1 + (y_{22} + y_{12})U_2 + (-y_{12})(U_2 - U_1) \end{aligned}$$

则得到双口网络用 Y 参数表征的 型等效电路如图 10-11 所示。如果 $y_{12} = y_{21}$, 则受控电流源消失, 此时 型无源电路为互易双口网络的等效电路。如果双口网络对称即 $y_{11} = y_{22}$, 则电路在结构上也是对称的。

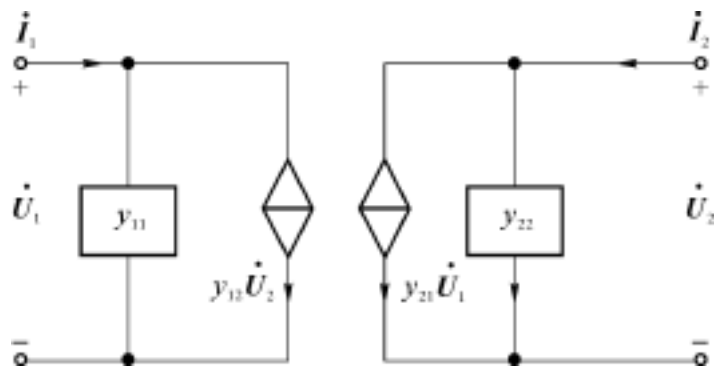


图 10-10 Y 参数等效电路

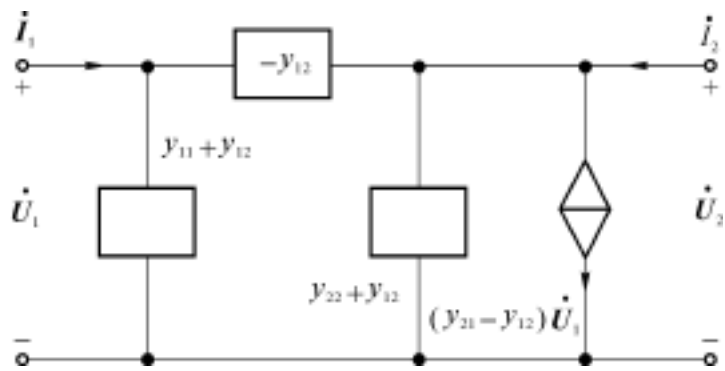


图 10-11 非互易 Y 参数等效电路

例 10-3 在图10-12所示网络中, 已知 $U_s = 500\angle 0^\circ \text{V}$, $Z_s = 500$ 双口网络 N 的 Z 参数为 $Z_{11} = 100$, $Z_{12} = -500$, $Z_{21} = 1\text{k}$, $Z_{22} = 10\text{k}$ 。

- (1) 求 $Z_L = 5\text{k}$ 时输出电压 U_2 。
- (2) 当 Z_L 为何值时负载上可获最大功率? 并求最大功率 P_{\max} 。

解 求输出电压。可用两种方法。

方法一 Z 参数方程和电源侧及负载的伏安关系即

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 & U_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \\ U_1 &= U_s - I_1 Z_s & U_2 &= - I_2 Z_L \end{aligned}$$

四个方程联立求解可解出 U_2 。

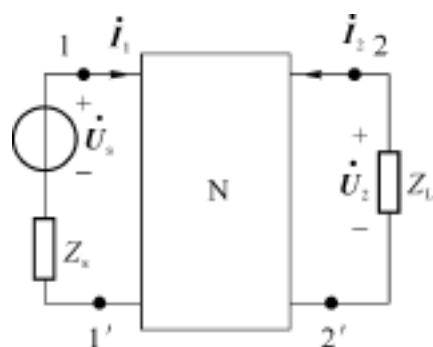


图 10-12 例 10-3 图

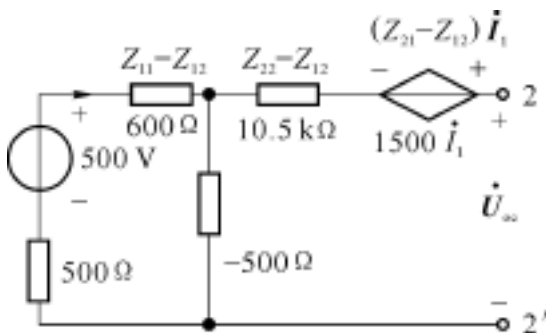


图 10-12 图(a)

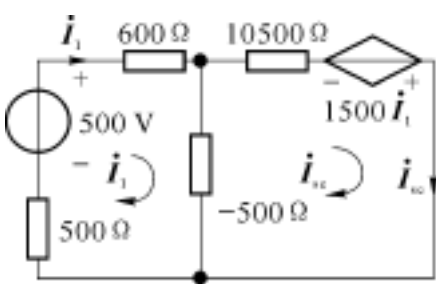


图 10-12 图(b)

方法二 用 Z 参数等效电路。

求最大功率条件和最大功率,只能用等效电路戴维南定理。以 Z 参数表示的等效电路如图 10-12 解图(a)所示,在图(a)求以 2-2 为输出的戴维南等效电路。

$$I_1 = \frac{500}{600} = \frac{5}{6} \text{ A}$$

$$U_{oc} = 1500 I_1 - 500 I_1 = 1000 \times \frac{5}{6} = 833.3 \text{ V}$$

在图(b)中用网孔法求短路电流 I_{sc}

$$600 I_1 + 500 I_{sc} = 500 \tag{A}$$

$$500 I_1 + 10000 I_{sc} = 1500 I_1$$

即 $-1000 I_1 + 10000 I_{sc} = 0$, 将 $I_1 = 10 I_{sc}$ 代入式 (A) 得

$$I_{sc} = \frac{5}{65} \text{ A}$$

戴维南等效内阻抗

$$Z_i = \frac{U_{oc}}{I_{sc}} = \frac{833.3}{5/65} = 10833.3$$

因此, (1) $Z_L = 5$ 时

$$U_2 = \frac{U_{oc}}{Z_L + Z_i} Z_L = \frac{5000}{15833.3} \times 833.3 = 263.15 \text{ V}$$

(2) $Z_L = 10833.3$ 时, 负载获得最大功率。且最大功率为

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4 R_i} = \frac{833.3^2}{4 \times 10833.3} = 16.02 \text{ W}$$

10.4 双口网络的特性阻抗和传输常数

为了进一步研究双口网络的性质,现引入特性阻抗和传输常数的概念。

先举一个简单例子。在图 10-13(a)中,当正向传输时,若在输入端口接负载为 3 ,如

图 10-13(b)所示,这时由输入端口向右看进去的输入阻抗为 $4\ \Omega$;当反向传输时,若在 1 端口接阻抗为 $4\ \Omega$ 如图 10-13(c),这时在 2 端口向左看进去阻抗为 $3\ \Omega$ 。此例说明 2 端口负载阻抗 $3\ \Omega$ 恰好等于该端口的输入阻抗 $3\ \Omega$,而 1 端口的负载阻抗 $4\ \Omega$ 也恰好等于该端口的输入阻抗 $4\ \Omega$ 。对于另外一个不同的双口网络也存在着具有上述性质的一对特定阻抗。具有上述性质的一对特定阻抗 Z_{C1} 、 Z_{C2} 称为双口网络的特性阻抗。因为负载阻抗和输入阻抗在端口两侧恰好形成镜像关系,所以特性阻抗又称影像阻抗。

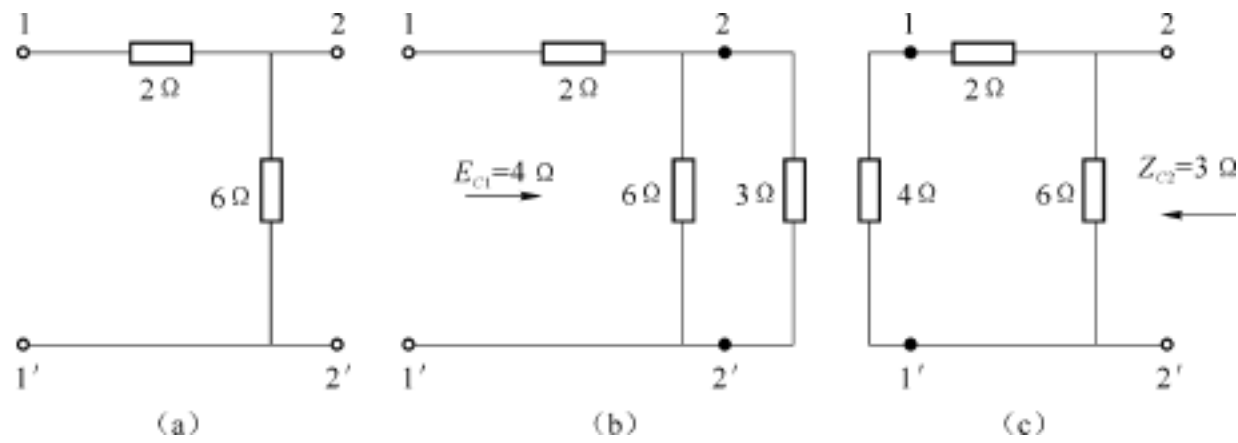


图 10-13

特性阻抗的一般定义如图 10-14 所示, Z_{C1} 称为输入端的特性阻抗, Z_{C2} 称为输出端的特性阻抗。

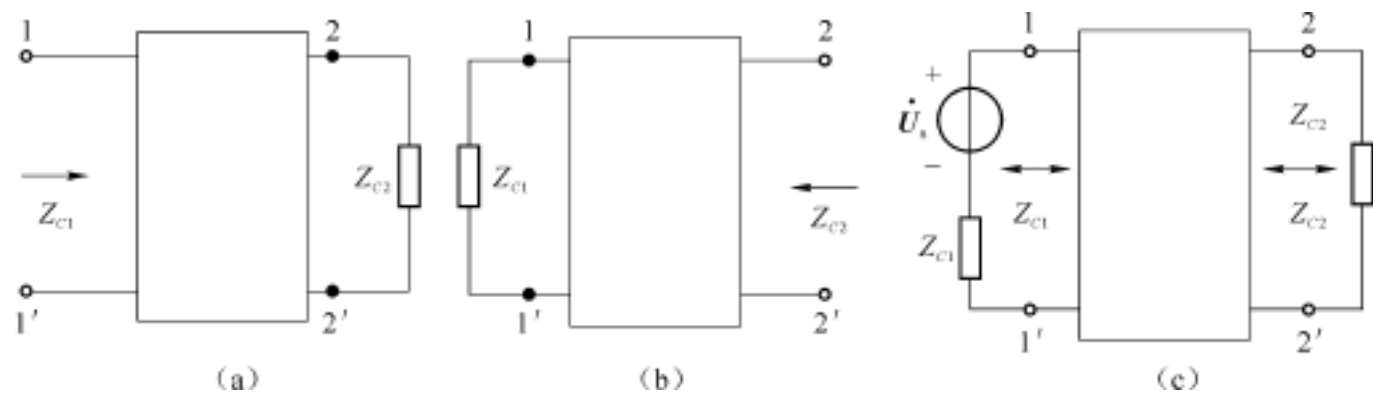


图 10-14

下面推证由传输参数表示的特性阻抗公式。设双口网络 A 参数为已知,则由 A 参数方程(10-6)和 $U_2 = - Z_L U_2$,可求 1 端口的输入阻抗

$$Z_i = \frac{U_1}{I_1} = \frac{a_{11} Z_L + a_{12}}{a_{21} Z_L + a_{22}} \tag{A}$$

同理反向传输时,由 2 端口向左看的输入阻抗

$$Z_0 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{a_{22} U_1 - a_{12} I_1}{a_{21} U_1 - a_{11} I_1} = \frac{a_{22} Z_s + a_{12}}{a_{21} Z_s + a_{11}} \tag{B}$$

式中 $Z_s = - U_1 / I_1$ 。根据特性阻抗的定义由式(A)和式(B)可求出 1 端口和 2 端口的特性阻抗分别为

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{a_{11} a_{12}}{a_{21} a_{22}}}, \quad Z_{C2} = \sqrt{\frac{a_{22} a_{12}}{a_{21} a_{11}}} \tag{10-13}$$

如果双口网络是对称的, $a_{11} = a_{22}$,则由式(10-13)可得

$$Z_{C1} = Z_{C2} = Z_C = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}} \tag{10-14}$$

可见特性阻抗是表征网络本身特性的参数,与外接电源和负载无关。

当 $Z_L = 0$ (2 端口短路)和 $Z_L = \infty$ (2 端口开路)时,1 端口的输入阻抗分别称 1 端口短路阻抗 Z_{01} 和开路阻抗 Z_{11} ,由式(A)知

$$Z_{01} = \frac{a_{12}}{a_{22}}, \quad Z_{11} = \frac{a_{11}}{a_{22}}$$

所以输入端口的特性阻抗为

$$Z_{C1} = \sqrt{Z_{01} Z_{11}} \tag{10-15}$$

同样当 $Z_s = 0$ 和 $Z_s = \infty$ 时 2 端口短路阻抗 Z_{02} 和开路阻抗 Z_{22} ,由式(B)知

$$Z_{02} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad Z_{22} = \frac{a_{22}}{a_{11}}$$

所以输出端口的特性阻抗为

$$Z_{C2} = \sqrt{Z_{02} Z_{22}} \tag{10-16}$$

如果双口网络是对称的,则 $Z_{01} = Z_{02} = Z_0, Z_{11} = Z_{22} = Z$, 所以

$$Z_{C1} = Z_{C2} = Z_C = \sqrt{Z_0 Z} \tag{10-17}$$

上面讨论特性阻抗,下面讨论传输常数。

对称双口网络当输出端接特性阻抗 Z_C 时,在图 10-15 电压电流方向下

$$U_1 = I_1 Z_C \quad U_2 = I_2 Z_C$$

所以
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2}$$

在实际中一般不直接用电压或电流的比值来表征网络的传输特性,而是取这个比值的自然对数,该对数称为双口网络的传输常数,用 γ 表示,即

$$\gamma = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2} \tag{10-18}$$

设
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = Ae^{j\theta} = e^{\gamma}$$

则
$$\gamma = \ln e^{\gamma} = \alpha + j\beta \tag{10-19}$$

可见传输常数为一复数,其实部为 α ,表明输入电压(或电流)经过双口网络大小的变化,因此 α 称为衰减常数, α 越大说明信号经过网络衰减越大;其虚部为 β ,表明输入电压(或电流)与输出电压(或电流)之间的相位差,说明信号经过网络后相位上的变化,故 β 称相移常数。

如果将图 10-15 改为非对称网络,则

$$U_1 = I_1 Z_{C1}, \quad U_2 = I_2 Z_{C2}$$

因此电压向量之比不等于电流向量之比。在非对称双口网络中,传输常数定义为:在其两端

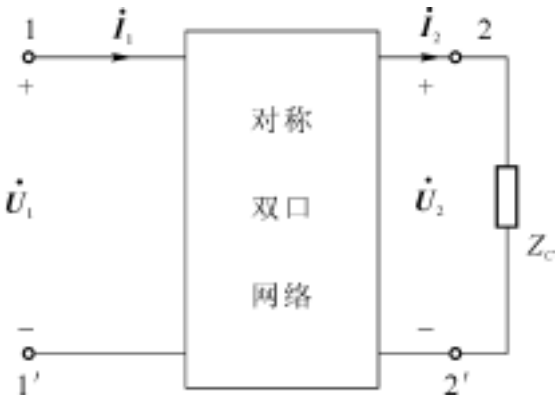


图 10-15 $Z_L = Z_C$ 的双口网络

分别接以相应的特性阻抗的情况下,传输常数 为输入端口和输出端口电压相量与电流相量乘积之比的自然对数的一半,即

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} e^{-j} \right] = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} - j \frac{1}{2} = +j \tag{10-20}$$

其中,衰减常数 $= \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}$,相移常数 $= - \frac{1}{2}$ 。传输常数的实部表明信号经过网络后能量的变化,虚部表明相位的变化。

传输常数也可以用 A 参数来计算。由传输常数定义式(10-20),特性阻抗 Z_{C1} 、 Z_{C2} 的 A 参数计算式(10-13)和传输方程不难证明

$$= \ln(\sqrt{a_{11} a_{22}} + \sqrt{a_{12} a_{21}}) \tag{10-21}$$

相移常数的计量单位为度或弧度。衰减常数用奈培(NP)或分贝(dB),换算关系为

$$1 \text{ dB} = 0.1151 \text{ NP} \qquad 1 \text{ NP} = 8.686 \text{ dB}$$

例 10-4 求图10-16双口网络的特性阻抗。

解 1 端口的短路阻抗和开路阻抗分别为

$$Z_{01} = -j445 + \frac{j135(-j155)}{j135 - j155} = j601$$

$$Z_{\text{ } 1} = -j445 - j155 = -j600$$

所以 1 端口特性阻抗为

$$Z_{C1} = \sqrt{Z_{01} Z_{\text{ } 1}} = \sqrt{j601(-j600)} = 600$$

2 端口的短路阻抗和开路阻抗分别为

$$Z_{02} = j135 + \frac{-j445(-j155)}{-j445 - j155} = j20$$

$$Z_{\text{ } 2} = j135 - j155 = -j20$$

所以 2 端口特性阻抗为

$$Z_{C2} = \sqrt{Z_{02} Z_{\text{ } 2}} = \sqrt{j20(-j20)} = 20$$

本例所示网络是由纯电感和纯电容组成的,称电抗网络,其元件阻抗为虚数,三个中一个阻抗的符号必须与另外两个的符号相反,而特性阻抗却为实数。

这种电抗网络可用作匹配网络。因为是电抗元件,所以网络只有相移而无衰减,即 $= j$,使负载获得最大功率。

例如已知电源内阻 $R_s = 600$,负载 $R_L = 20$,直接相联不满足最大功率条件。若把图 10-16 匹配网络联接在电源和负载之间,显然在电源侧和负载侧都可做到匹配联接。由于匹配网络本身不消耗功率,所以从电源处获得的最大功率,全部传送给负载。

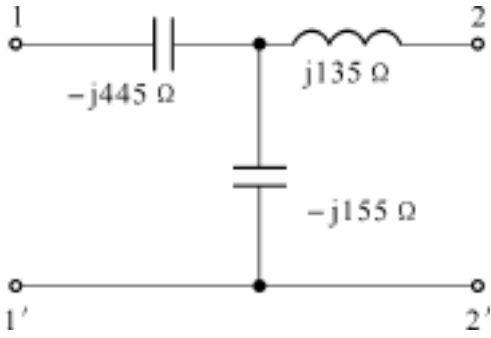


图 10-16 例 10-4 图

10 5 双口网络的联接

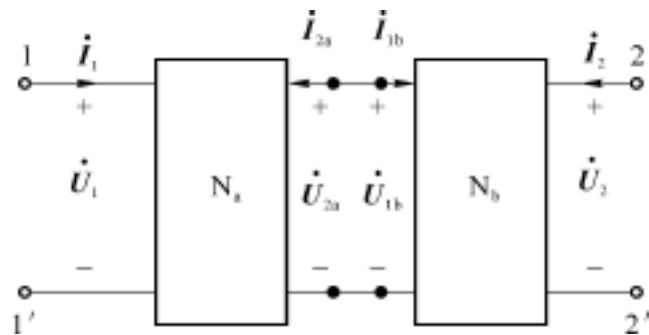
一个复杂的双口网络可以分解成若干个简单的双口网络,因此,在分析一个复杂双口网络时,可以先分析这些简单双口网络,然后按联接的方式由简单双口网络特性找出复杂网络特性。在设计一个复杂网络时,一般先设计简单网络,然后按一定方式联接起来,以满足所

需特性要求,这样做比直接设计一个整体复杂网络容易些。所以研究简单双口网络与联接后的复杂双口网络的数学模型十分重要。

10 5 .1 级联

一个双口网络的输出端口与另一个双口网络的输入端口相联,如图 10-17 所示,称双口网络的级联或链接。

对级联网络来说,用传输参数较方便。由图 10-17 可写出传输参数方程:



$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11a} & a_{12a} \\ a_{21a} & a_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11a} & a_{12a} \\ a_{21a} & a_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11b} & a_{12b} \\ a_{21b} & a_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

图 10-17 双口网络的级联

所以 N_a 、 N_b 级联后的传输参数矩阵

$$A = A_a \cdot A_b \tag{10-22}$$

上式表明级联后的传输参数矩阵等于构成级联的各双口网络传输参数矩阵依次相乘。

10 5 .2 串联

将两个网络分别在输入端口和输出端口串接起来,就称为双口网络的串联。如图 10-18 所示。串联中总端口电压等于各串联网络端口电压之和,即

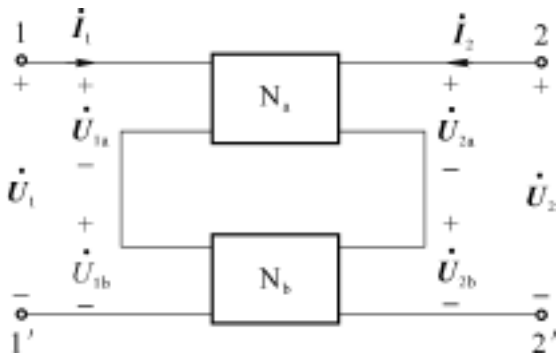


图 10-18 双口网络串联

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U_{1a} \\ U_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{1b} \\ U_{2b} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_{11a} & z_{12a} \\ z_{21a} & z_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{11b} & z_{12b} \\ z_{21b} & z_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{bmatrix} z_{11a} & z_{12a} \\ z_{21a} & z_{22a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{11b} & z_{12b} \\ z_{21b} & z_{22b} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以

$$Z = Z_a + Z_b \tag{10-23}$$

即:双口网络串联时,总网络的 Z 参数矩阵等于各串联网络 Z 参数矩阵之和。

10 5 .3 并联

两个双口网络如按图 10-19 的方式联接称并联。由图可见并联时,总端口电流等于并联网络端口电流之和。写出 Y 参数方程可以证明双口网络并联时,总网络的 Y 参数矩阵等于各网络 Y 参数矩阵之和,即

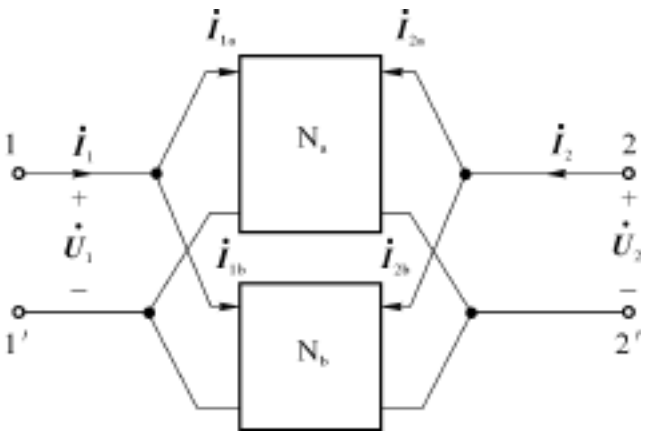


图 10-19 双口网络并联

$$Y = Y_a + Y_b \tag{10-24}$$

例 10-5 求图10-20(a)桥 T 型网络的 Y 参数矩阵。

解 将桥 T 型网络看成图 10-20(b) 中两个网络 N_1 和 N_2 的并联。其中 N_1 的 Y 矩阵不难求得

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{R}$$

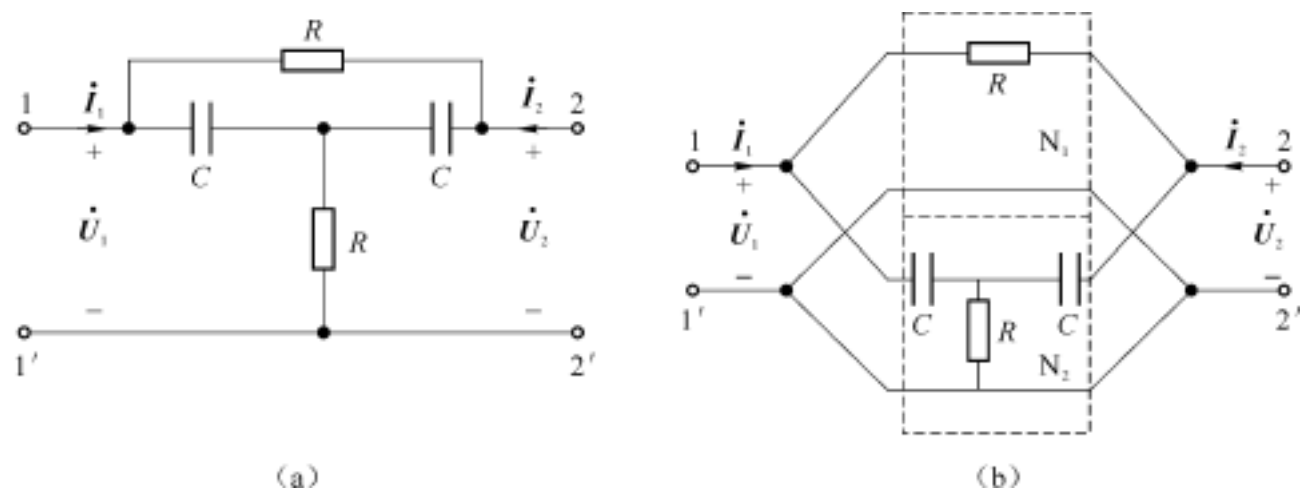


图 10-20 例 10-5 图

N_2 网络的 Y 参数为:

$$y_{11} = \frac{I_1}{U_1} \Big|_{U_2=0} = \frac{1}{\frac{1}{jC} + \frac{R \cdot 1/jC}{R + 1/jC}} = \frac{-^2 C^2 R + j C}{1 + 2j CR}$$
$$y_{21} = \frac{I_2}{U_1} \Big|_{U_2=0} = -y_{12} = \frac{R / \left[R + \frac{1}{jC} \right]}{U_1} = \frac{(-^2 C^2)(-R)}{1 + 2j CR}$$

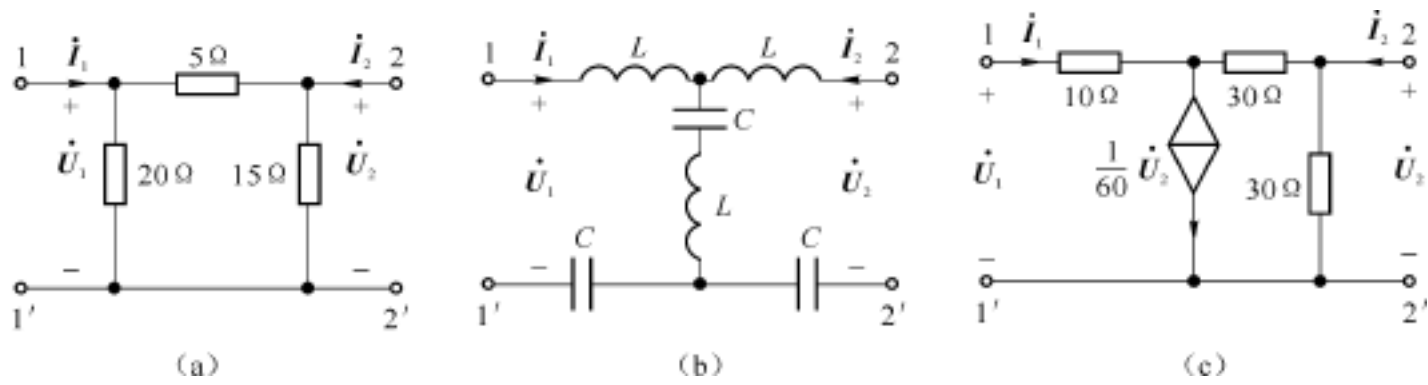
因为 N_2 为互易对称网络, 所以 $y_{12} = y_{21}$, $y_{11} = y_{22}$ 。

则桥 T 型网络的 Y 参数矩阵为

$$Y = \frac{1}{(1 + 2j CR) R} \begin{bmatrix} 1 - ^2 C^2 R^2 + 3j CR & - (1 - ^2 C^2 R^2 + 2j CR) \\ - (1 - ^2 C^2 R^2 + 2j CR) & 1 - ^2 C^2 R^2 + 3j CR \end{bmatrix}$$

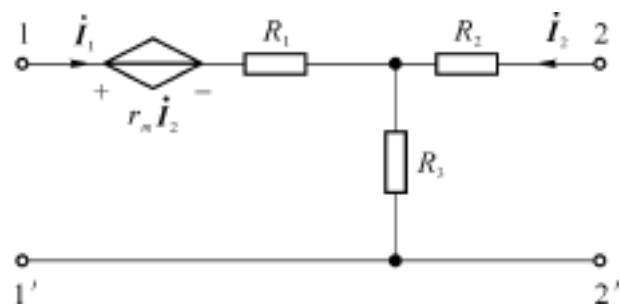
习题十

10-1 求题图 10-1(a)(b)(c)各双口网络的 Z 参数。



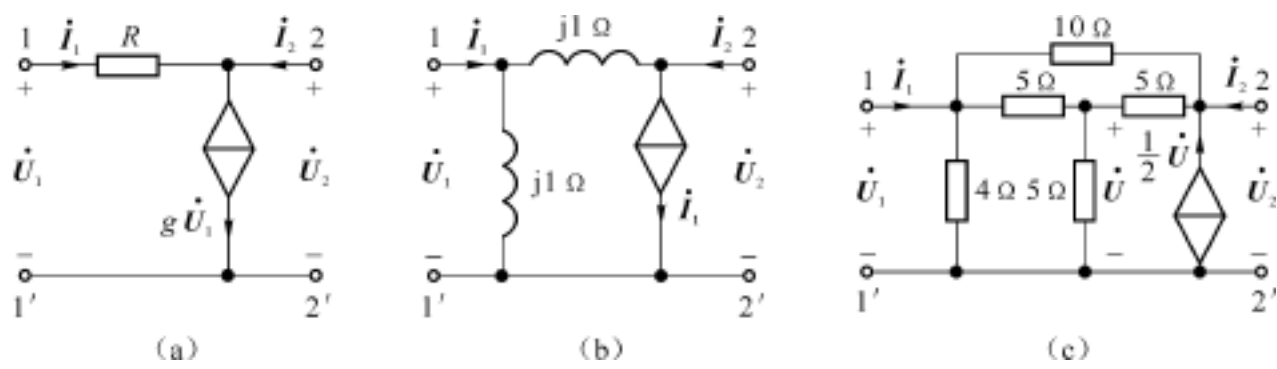
题图 10-1

10-2 在题图 10-2 中,已知 Z 参数矩阵 $Z = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$, 求 R_1, R_2, R_3 和 r_m 的值。



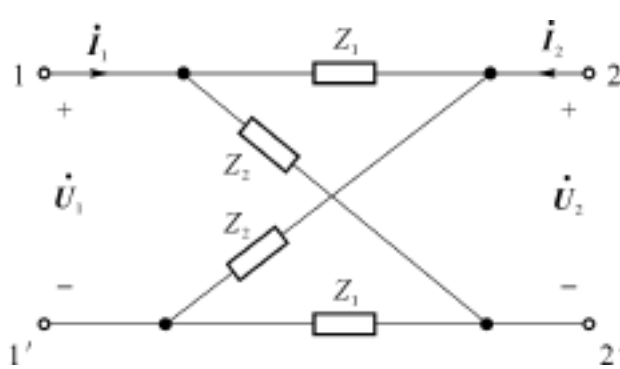
题图 10-2

10-3 用导纳参数定义和节点电压法两种方法分别求题图 10-3(a)(b)(c) 各网络的 Y 参数矩阵。



题图 10-3

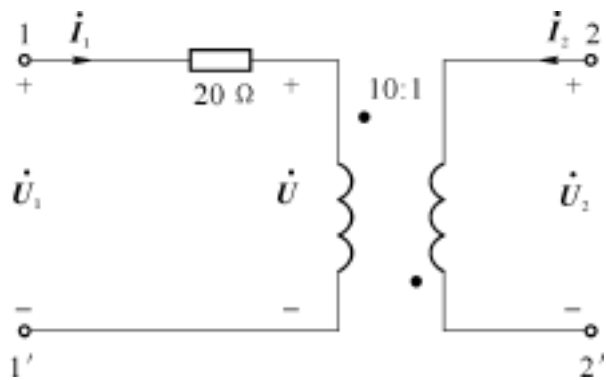
10-4 求题图 10-4 所示格型网络的传输参数。



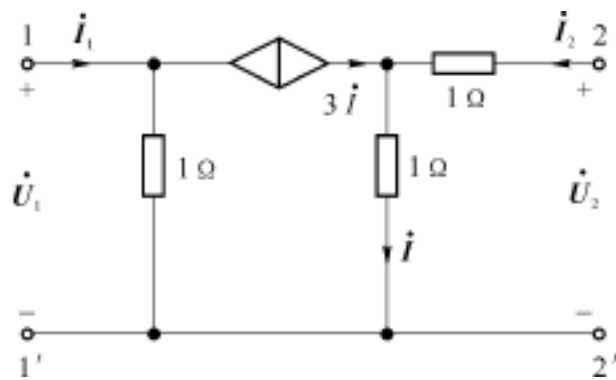
题图 10-4

10-5 含理想变压器网络如题图 10-5 所示, 求网络的 H 参数和 Z 参数矩阵。

10-6 对题图 10-6 所示网络:



题图 10-5

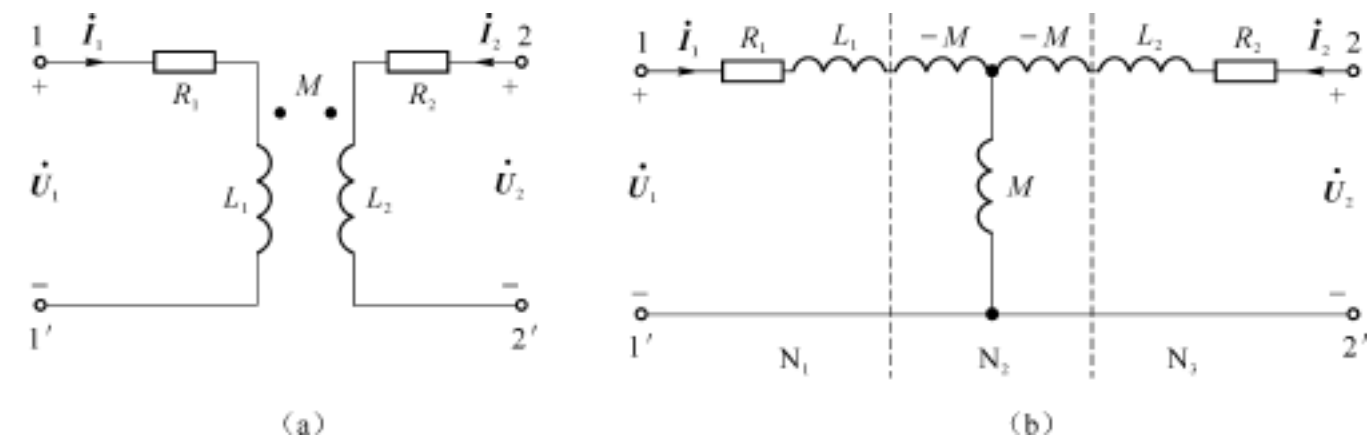


题图 10-6

- (1) 用 Z 参数定义式和网孔电流法求 Z 参数。
- (2) 求 Y 参数和 A 参数。

10-7 含互感的电路如题图 10-7(a) 所示：

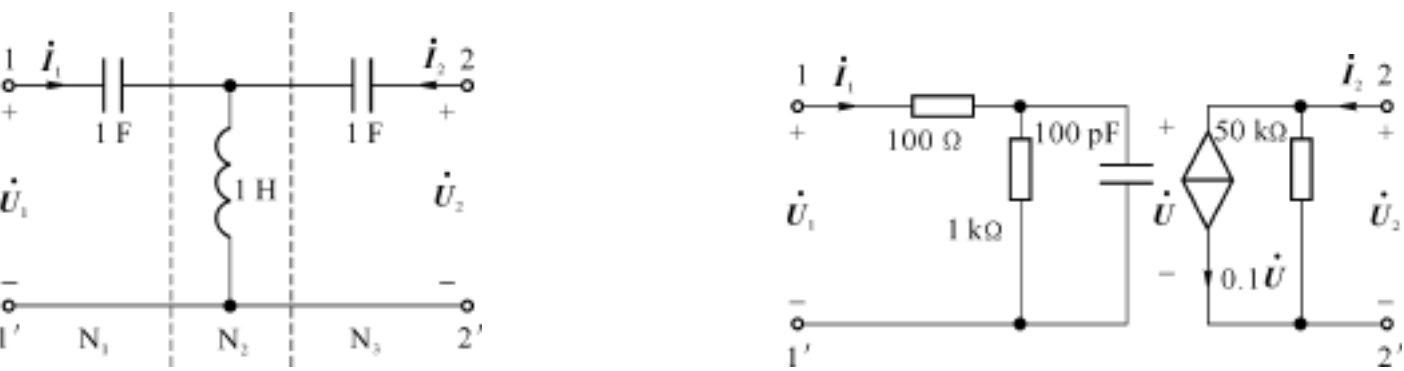
- (1) 用网孔电流法求 Z 参数。
- (2) 用参数互换表求 A 参数。
- (3) 将图(a)互感化除,并看成图(b)所示三个网络的级联再求 A 参数。



题图 10-7

10-8 根据定义求题图 10-8 网络的传输参数,然后将此网络看成三个网络的级联,再求传输参数。

10-9 对题图 10-9 所示网络,求频率为 1 MHz 时的 H 参数。

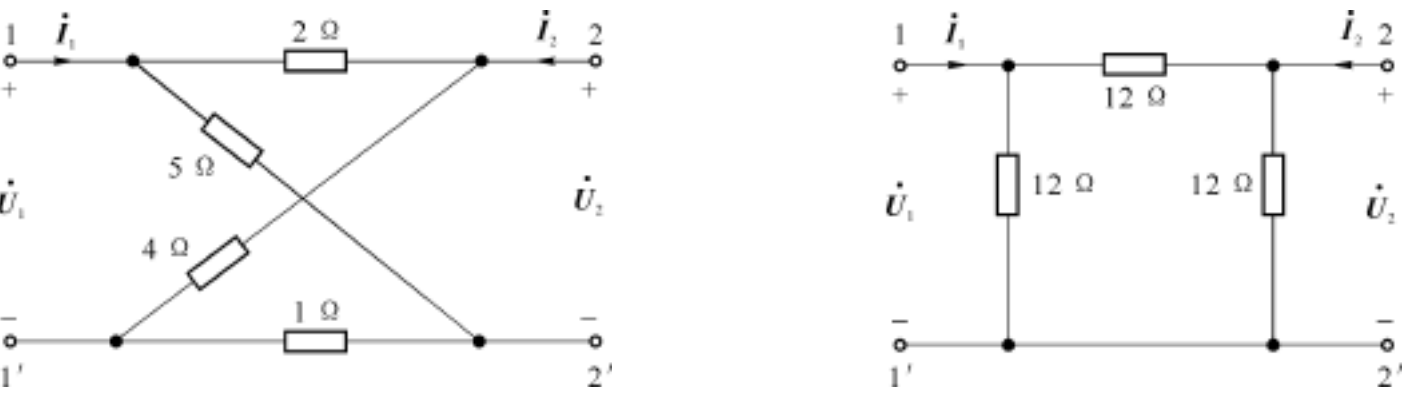


题图 10-8

题图 10-9

10-10 求题图 10-10 网络的 T 型和 型等效电路。

10-11 求题图 10-11 由电阻构成的网络的传输参数和特性阻抗。



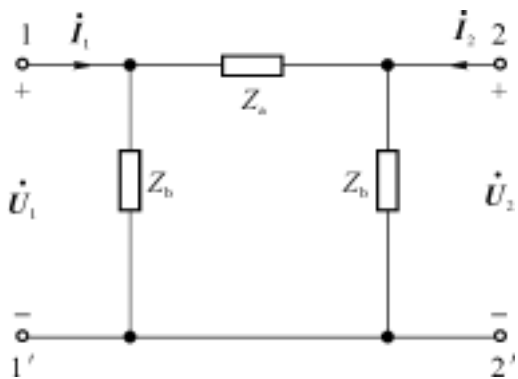
题图 10-10

题图 10-11

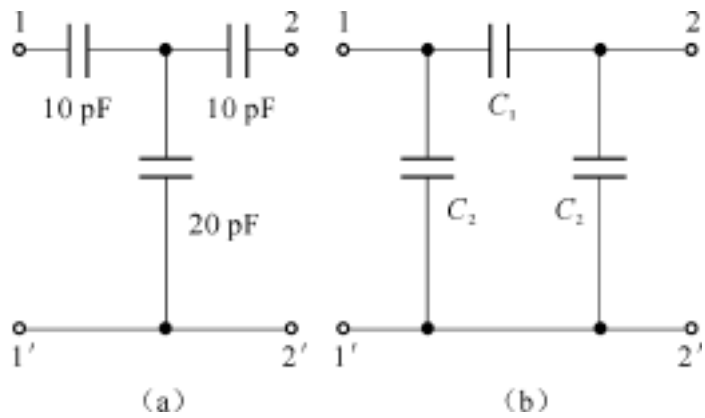
10-12 已知双口网络的 Z 参数 $Z_{11} = 350$, $Z_{12} = Z_{21} = 50$, $Z_{22} = 350$ 。用等效 型网络实现如题图 10-12 所示,试求 Z_a 和 Z_b 。

10-13 题图 10-13(a)所示 T 型网络的等效 型节如图 10-13(b)。求 C_1 和 C_2 。

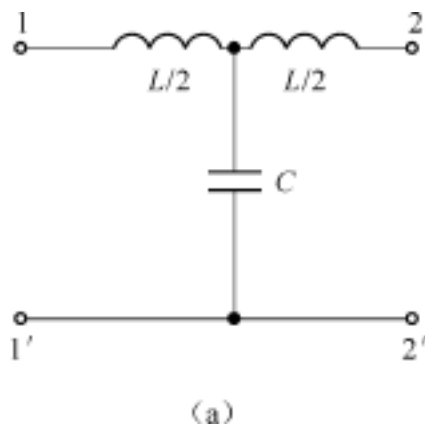
10-14 求题图 10-14 所示双口网络的特性阻抗。



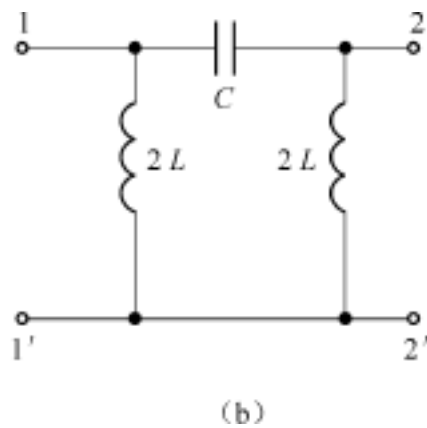
题图 10-12



题图 10-13



(a)

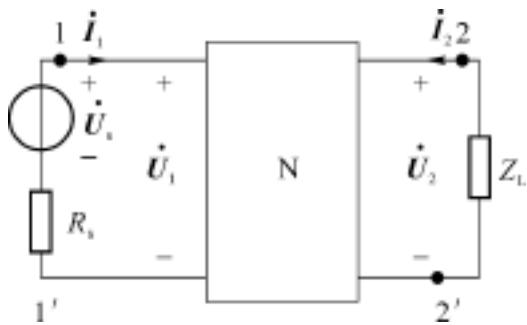


(b)

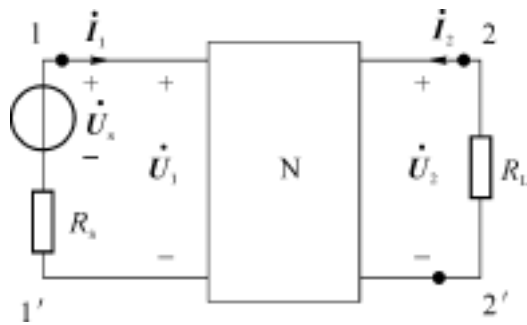
题图 10-14

10-15 题图 10-15 所示电路中,已知 $U_s = 400\angle -30^\circ\text{V}$, $R_s = 100$, $Z_L = 20\angle 30^\circ$,双口网络的 Y 参数为 $y_{11} = 0.01\text{S}$, $y_{12} = -0.02\text{S}$, $y_{21} = 0.03\text{S}$, $y_{22} = 0.02\text{S}$,求输出电压 U_2 。

10-16 题图 10-16 所示电路中,已知 $U_s = 3\angle 0^\circ\text{V}$, $R_s = 5$,双口网络的 Z 参数 $Z_{11} = 3$, $Z_{12} = 4$, $Z_{21} = j2$, $Z_{22} = -j3$, $R_L = 4$ 。求输出电压 U_2 。



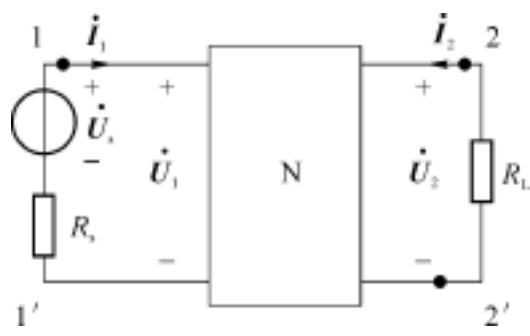
题图 10-15



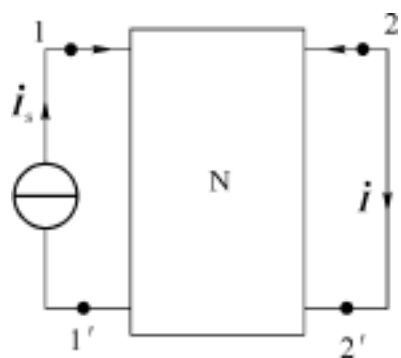
题图 10-16

10-17 题图 10-17 所示电路中,已知 $U_s = 100\angle 0^\circ\text{V}$, $R_s = 25$,双口网络的 Z 参数 $Z_{11} = 50$, $Z_{12} = 10$, $Z_{21} = 20$, $Z_{22} = 20$,求负载 R_L 的值以及负载上可获最大功率。并求最大功率。

10-18 题图 10-18 电路中,已知双口网络的 Y 参数矩阵 $Y = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 3 \\ -0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $I_s = 6\angle 30^\circ \text{A}$, 求当输出端口短路时电流 I 。



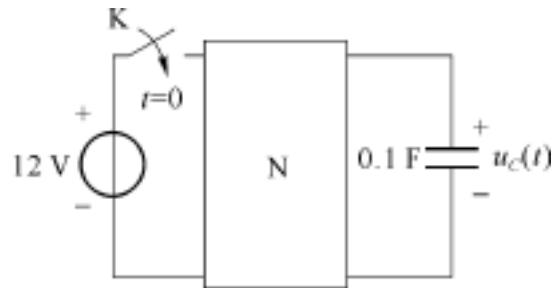
题图 10-17



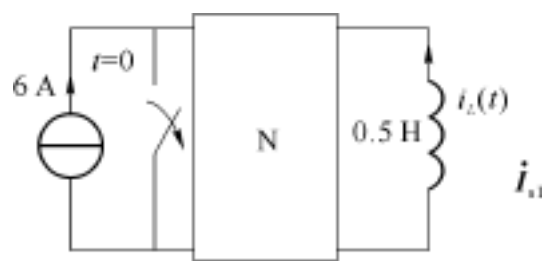
题图 10-18

10-19 题图 10-19 所示电路中,已知双口网络 N 中不含独立电源,其 Z 参数 $Z_{11} = 6 \Omega$, $Z_{12} = 4 \Omega$, $Z_{21} = 3 \Omega$, $Z_{22} = 7 \Omega$,且当 $t = 0$ 时开关闭合。求 $t > 0$ 零状态响应 $u_C(t)$ 。

10-20 题图 10-20 所示电路中,双口网络 N 中不含独立电源,其 Y 参数为 $y_{11} = 6 \text{S}$, $y_{12} = 3 \text{S}$, $y_{21} = 4 \text{S}$, $y_{22} = 8 \text{S}$,当 $t = 0$ 时开关闭合。求 $t > 0$ 零状态响应 $i_L(t)$ 。

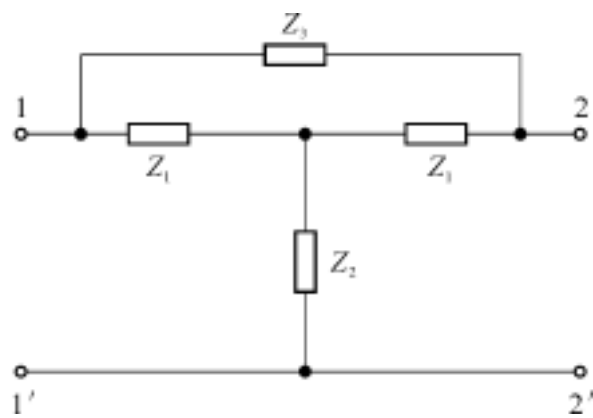


题图 10-19



题图 10-20

10-21 试证明题图 10-21 所示桥 T 型网络中,当满足 $Z_2 \cdot Z_3 = Z_1^2$ 时,其特性阻抗等于 Z_1 。



题图 10-21

第十一章 有源元件简介

将有源器件晶体管、无源元件电阻、电容,以及电路连接线等都集成在一小块半导体基片上,然后封装在一个外壳内,构成一个完整的电路和系统,称为集成电路。它和传统的分立元件电路相比,具有体积小、重量轻、耗电量少、可靠性高、性能好和成本低廉以及组装调试简单等一系列优点。前面各章介绍的电路元件都是分立元件,本章要介绍几种常见的集成有源元件。

11.1 理想运算放大器

运算放大器是用集成电路技术制作的一种多端元件。运算放大器的内部结构相当复杂,它是包含许多晶体管的集成电路块,具有体积小、性能稳定等优点。而且它的制作成本随着集成电路制造技术的迅速发展而大幅度降低,所以它是一种在电路中有着十分广泛用途的电路器件。

运算放大器具有很高的增益,配合外部反馈电路,在深度负反馈条件下,其输出电压与输入电压的关系,取决于外接反馈电路,可以实现加、减、微分及积分等运算功能,还可以实现信号的放大整形等。运算放大器由此得名。运算放大器还可以用于对电信号的处理,如信号幅度的比较和选择,信号的滤波、放大、整形等。它在电子计算机、自动控制系统及各种测量装置中有着广泛的应用。本节将介绍一些如何利用电路模型来分析含运算放大器的基本电路。

11.1.1 运算放大器的外部特性与电路模型

运算放大器虽然有各种各样的型号,其内部结构也各不相同,但从电路分析的角度,只是把它作为一种电路元件对待,需了解运算放大器的外部特性及其等效电路。

运算放大器基本上是高放大倍数的直接耦合的放大器。尽管它的内部结构比较复杂,但制成的运算放大器只有几个端点和外部电路联接。图 11-1 是运算放大器的电路符号,图中画出的是与其功能有关的端点。它有两个输入端,一个输出端。实际的运算放大器还有接至电源的端子、公共端(接地端)等,这些符号一般在图中都不画出,但应理解它们的存在和作用。图中左边的端点“ - ”是反相输入端(标为 a);端点“ + ”是同相输入端(标为 b);右边的端点是输出端(标为 c)。当输入信号由 a 端至公共端之间加入时,c 端上的输出信号与输入信号反相;当输入信号由 b 端至公共端之间加入时,c 端上的输出信号与输入信号同相;当输入信号从 a、b 端加入时,则输出

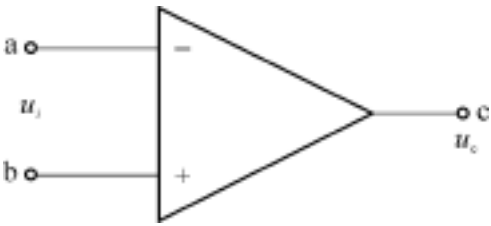


图 11-1 运算放大器的电路符号

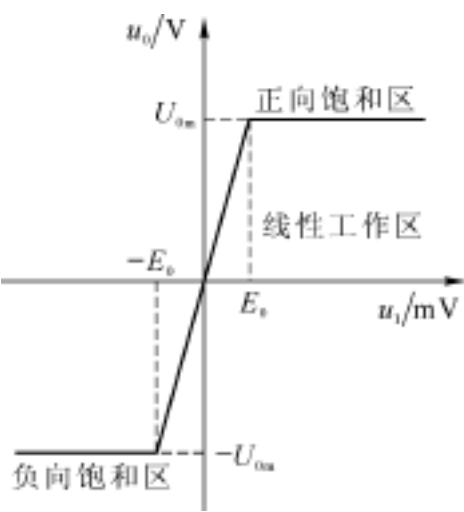


图 11-2 运放的电压传输特性

$$u_0 = u_c = A(u_b - u_a) = Au_i \tag{11-1}$$

其中 A 称为电压放大倍数,等于输出电压 u_0 与输入电压 u_i 之比。运算放大器的电压传输特性总体来说是非线性的,如图 11-2 所示。当输入电压的幅度小于 E_0 时,运算放大器的输出电压与之符合线性关系式(11-1)。否则运算放大器将工作在正向饱和区或负向饱和区。图中的 E_0 、 U_{0m} 取决于运算放大器的型号、参数及外部工作条件,例如负载、外接电源等等。在线性工作区时,图 11-2 所示运算放大器可以用受控源来模拟,若考虑运算放大器的输入电阻和输出电阻,则用电压控制电压源模拟的电路模型如图11-3(b)所示。可见运算放大器是一个电压放大器。

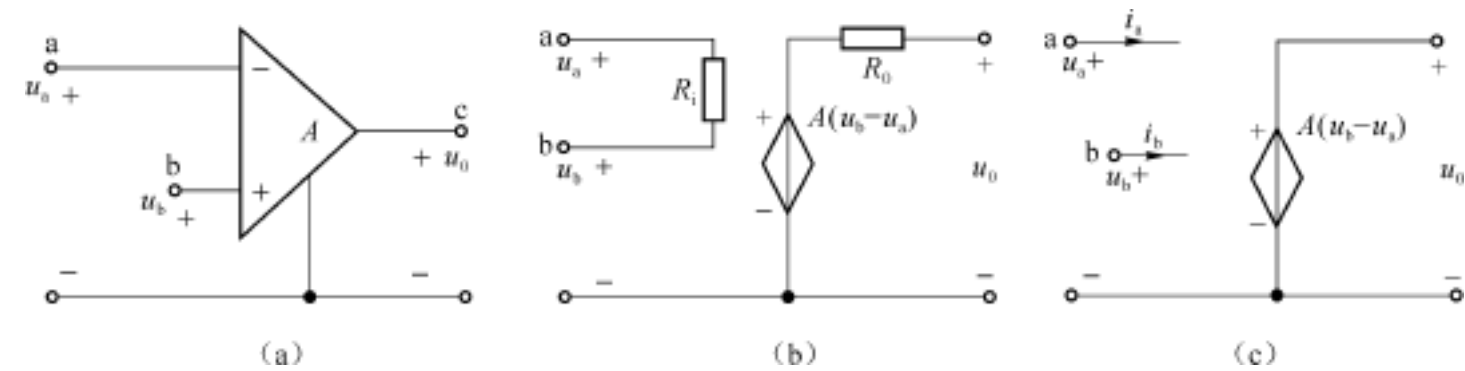


图 11-3 运算放大器的电路模型

在本课程中只介绍理想运算放大器的电路模型和电路的计算方法,但要注意在实际应用中总是在一定条件下才能作为理想模型处理。因为运算放大器的输入电阻很大,输出电阻很小,所以理想运算放大器电路模型如图 11-3(c)所示,输入电阻 R_i ,表示为开路;输出电阻 $R_0 = 0$,因此右侧支路是理想电压源。由于电压放大倍数 A 很大,输出电压 u_0 是有限值,所以输入电压可以很小。根据这些特点归纳理想运算放大器的特点为:

(1) 输出电阻 $R_0 = 0$,输入电阻 R_i ,输入端电流为零

$$i_a = i_b = 0 \tag{11-2}$$

(2) A , $u_i = u_a - u_b = 0$, 或

$$u_a = u_b \tag{11-3}$$

即 a 端和 b 端等电位。

这两点看上去是矛盾的,其实输入端既不是开路,也不是短路,常称为虚地,即虚开路或虚短路。以上两点是本节研究理想运算放大器的基本点。

11.1.2 含理想运算放大器电路的分析

以下用几个例子来说明含理想运算放大器电路的线性运算应用。

例 11-1 图11-4所示电路是一求和反相器。若各电阻 R_1, R_2, R_3, R_4 为已知,求输出电压 u_0 和输入电压 u_1, u_2, u_3 之间的关系。

运算放大器的典型数值: $A = 10^5, E_0 = 1\text{ mV}, R_i = 10^8, R_0 = 100$ 。

解 由于理想运算放大器两输入端同电位,所以

$$u_a = u_b = 0$$

又因为理想运算放大器输入电流为零,由 KCL 知

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_f$$

$$\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_3}{R_3} = - \frac{u_0}{R_f}$$

即
$$u_0 = - \left[\frac{R_f}{R_1} u_1 + \frac{R_f}{R_2} u_2 + \frac{R_f}{R_3} u_3 \right] = - (K_1 u_1 + K_2 u_2 + K_3 u_3) \tag{11-4}$$

式中 K 为电压增益。负号表明输出电压与输入电压反相,说明电路具有反相作用。当 $R_1 = R_2 = R_3 = R_f$ 时, $K_1 = K_2 = K_3 = 1$ 。

由式(11-4)知

$$u_0 = - (u_1 + u_2 + u_3) \tag{11-5}$$

可见图 11-4 所示电路具有加法的功能。求和反相器电路是很有用的,在模拟计算机中,它可用来精确地进行变量求和。

例 11-2 求图11-5所示电路的电压增益 u_0/u_i 。

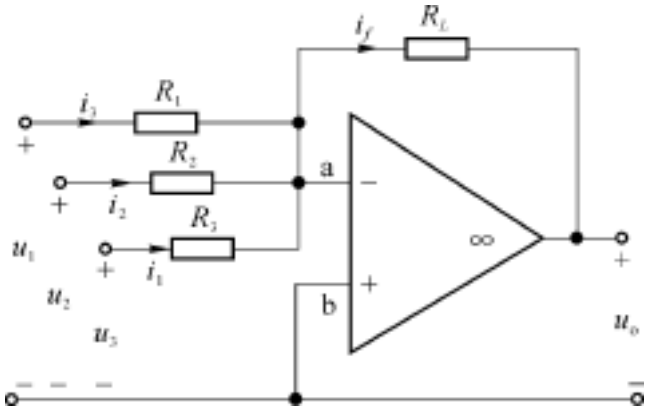


图 11-4 例 11-1 电路

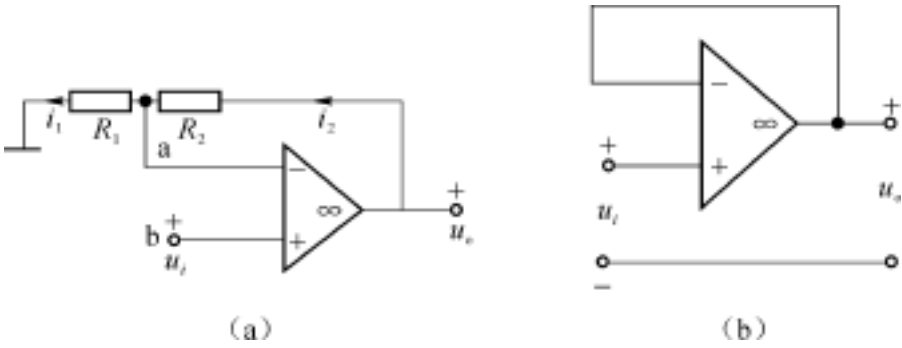


图 11-5 例 11-2 电路

解 图 11-4 所示反相放大器是把理想运算放大器的同相输入端接地,只运用反相输入端。然而大多数现代运算放大器,是把同相输入和反相输入都加以利用,这样运算放大器的用途就广泛多了。图 11-5 所示电路是一个同相电压增益跟随器,运算放大器的同相输入端和反相输入端都被利用起来了。

根据运算放大器两输入端同电位和输入电流等于零,可知

$$u_a = u_b = u_i, \quad i_1 = i_2$$

由上面两式和欧姆定律可得

$$\frac{u_i}{R_1} = \frac{u_0 - u_i}{R_2}$$

整理后得

$$\frac{u_0}{u_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

因为电阻 R_1, R_2 总为正值,所以电压增益 u_0/u_i 应该大于 1。 u_0 和 u_i 同相位,所以也称为同相放大器。

令 $R_2 = 0, R_1 =$,如图 11 -5(b)所示,其电压增益

$$\frac{u_0}{u_i} = 1$$

即

$$u_0 = u_i$$

可见,输出电压 u_0 等于输入电压 u_i ,所以图 11 -5(b)又称电压跟随器。若连接在两个电路之间,由于输入端电流为零,可以使一个电路与另一个电路隔离并使两对端钮的电压相等,而无电流之间的关系。

例 11 -3 通过图11-6所示电路讨论运算放大器所吸收的功率。

解 理想运算放大器的同相输入端接在独立电压源 u_s 上,输出接到负载电阻 R_L 上。根据运算放大器输入端电流为零知 $i_a = i_b = 0, i_1 = i_b = 0$,又因为运算放大器两输入端同电位,由图 11 -6 知

$$\frac{u_1}{R_1} = \frac{u_2}{R_1 + R_f} \text{ 且 } u_1 = u_s, u_2 = - R_L i_2$$

所以图 11 -6 虚框部分吸收的功率为电源供出功率减去负载 R_L 消耗功率

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = u_2 \left[- \frac{u_2}{R_L} \right] = - \frac{1}{R_L} \left[\frac{R_1 + R_f}{R_1} u_s \right]^2$$

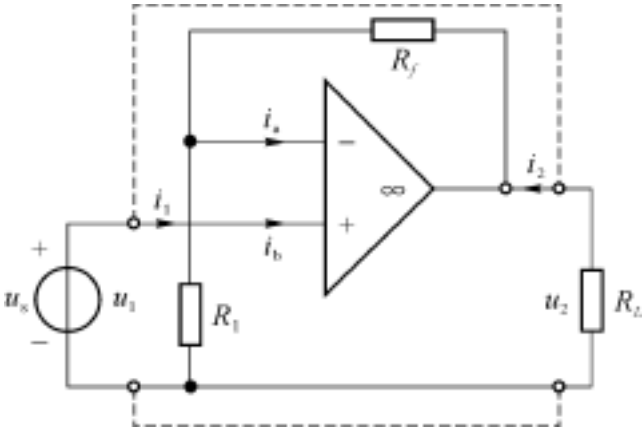


图 11 -6 例 11 -3 电路

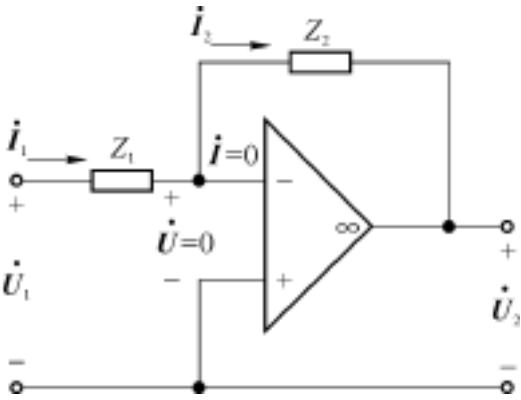


图 11 -7 例 11 -4 电路

例 11 -4 图11-7所示是含理想运算放大器电路的相量模型,试推出电路的系统函数,并说明系统功能。

解 由理想运算放大器的虚地特性,有 $I_1 = I_2$ 和 $U = 0$,于是

$$U_1 = Z_1 I_1, U_2 = - Z_2 I_2 = - Z_2 I_1$$

可得到网络函数

$$H(j \omega) = \frac{U_2}{U_1} = - \frac{Z_2}{Z_1}$$

其系统功能为反比例器。

例 11 -5 图11-8中给出了一个含有理想运算放大器的电路,试求 1、1 端口的输入阻抗 Z_i 。

解 由理想运算放大器的虚地特性,有 $U_1 = U_2$,从输入端回路可写出 $R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$,

即 $I_1 = \frac{R_2}{R_1} I_2$ 。

在 Z_0 上电压与电流非关联方向,有

$$Z_0 = - \frac{U_2}{I_2}$$

从 1、1' 端输入阻抗

$$Z_i = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{\frac{R_2}{R_1} I_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{U_2}{I_2}$$

即有

$$Z_i = - \frac{R_1}{R_2} \cdot Z_0$$

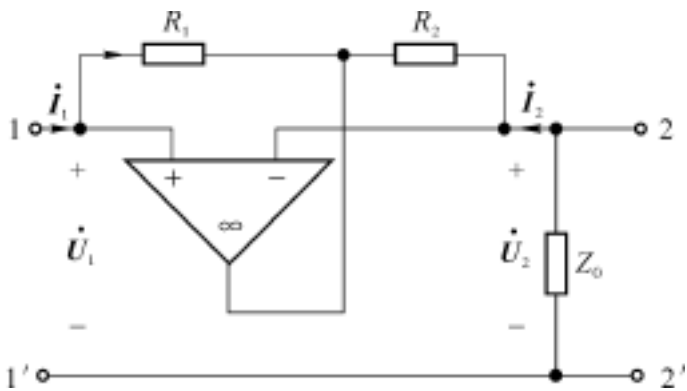


图 11-8 例 11-5 电路

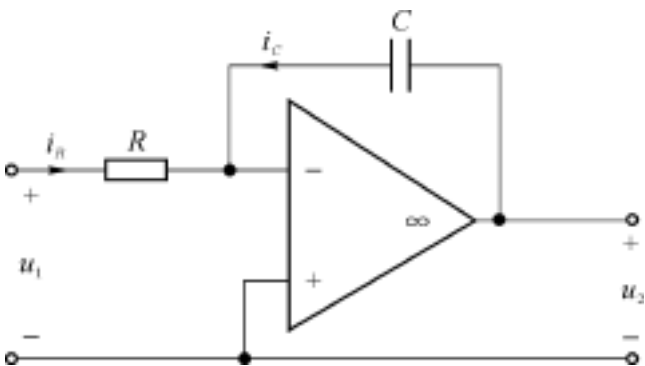


图 11-9 例 11-6 电路

例 11-6 图11-9所示电路中含有理想运算放大器,试求 u_1 和 u_2 的关系,并说明该电路的功能。

解 由理想运算放大器的虚地特性,有

$$i_R = - i_C, \quad i_C = - i_R, \quad u_1 = Ri_R, \quad i_R = \frac{u_1}{R}$$

又有电容的伏安关系

$$u_2 = \frac{1}{C} \int i_C dt = \frac{1}{C} \int (- i_R) dt = \frac{1}{C} \int - \frac{u_1}{R} dt$$

即

$$u_2(t) = - \frac{1}{RC} \int u_1(t) dt$$

本例为反相输入积分电路。

以上各例在计算方法上都是利用电路的基本定律和理想放大器的两个主要特点,即流入两输入端的各电流为零和两输入端同电位。这是含理想运算放大器的基本分析方法,应当熟练掌握。通过以上例题说明,运算放大器按不同的连接方式组成的电路具有不同的功能。以运算放大器为基础还可以构成负阻抗变换器和回转器等。

11 2 负转换器

负转换器是一种双口器件,它可分为两类,一类是电流反向负转换器(INC),如图 11-10 (a)所示。其电压、电流关系为

$$I_1 = I_2, \quad U_1 = U_2 \tag{11-6}$$

式(11-6)表明,流入、流出转换器的电流方向相反,输出电压与输入电压极性相同,所以它的

特点是转换电流方向,且保持电压极性不变。

由式(11 -6)知,负转换器也可以用受控源表示,如图 11-10(b) 所示。

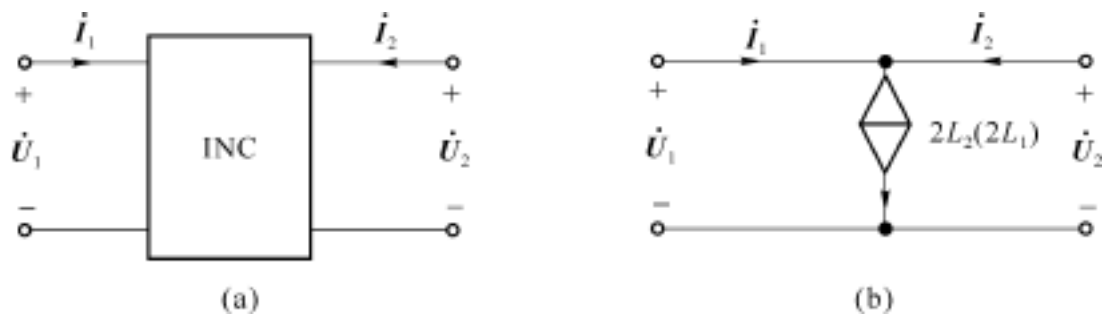


图 11 -10 电流反向负转换器

另一类是电压反向负转换器 (VNC),如图 11 -11(a)所示。其作用与电流反向负转换器正好相反,只转换电压的极性,而保持电流的方向不变。其电压、电流关系为

$$I_1 = - I_2, \quad U_1 = - U_2 \tag{11-7}$$

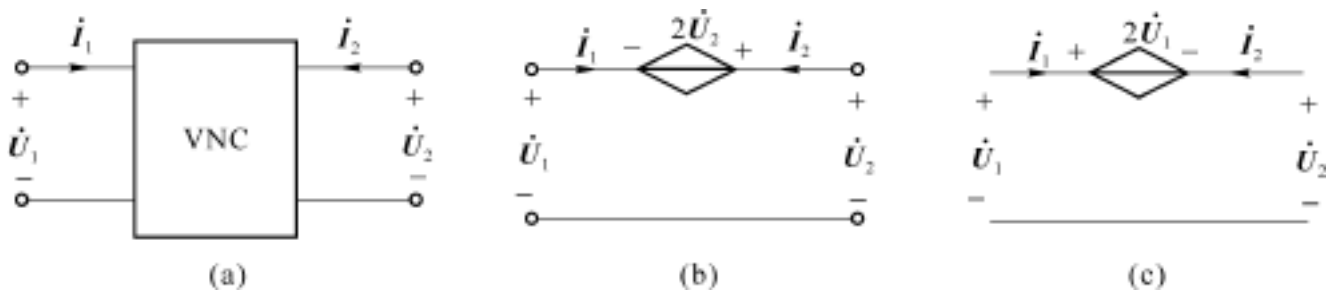


图 11-11 电压反向负转换器

由式(11-7)知,电压负转换器也可以用受控源表示,如图 11-11(b)和图 11-11(c)所示。

之所以称负转换器是因为它有一个很重要的功能,这可以通过图 11 -12 所示电路加以说明。图 11-12 表明一个电阻接到一个电流型负转换器的输出端口上,此时 U_2 和 I_2 的关系为

$$U_2 = - RI_2$$

把此式代入式(11-6),得 $U_1 = - RI_2$,所以

$$\frac{U_1}{I_1} = - R \tag{11-8}$$

式(11-8)表明 INC(或 VNC)可以将一个正电阻变换成负电阻。众所周知,具有正电阻的电阻器为无源元件,而具有负电阻的电阻器就是一个有源元件。所以负转换器是一种能够把无源元件转换成有源元件的有源器件。

当把一个电感或一个电容器接到 INC(或 VNC)的输出端口上时,也可得到类似的结论。因为在这种情况下,图 11-12 中 $U_2 = - ZI_2 = - j L I_2 = j (- L) I_2$,将此结果代入式(11-6)可以得到

$$\frac{U_1}{I_1} = j (- L) \tag{11-9}$$

该式表明用负转换器可得到负电感。同样,通过负转换器也可以获得负电容。即负转换器

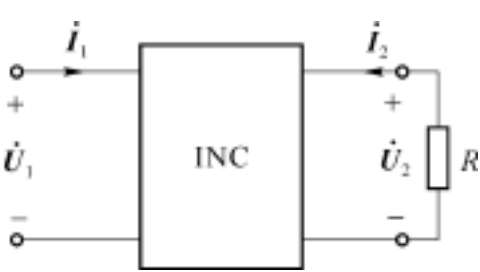


图 11-12 接负载的 NIC 电路

具有将正电感(或正电容)转换成负电感(或负电容)的功能。所以负转换器具有转换阻抗的作用,故称负阻抗转换器。

图 11-13 所示电路是用一个理想运算放大器实现的负阻抗变换器(NIC)。根据理想运算放大器输入端等电位和输入电流等于零的特性,由图 11-13不难得出

$$U_1 = U_2, \quad I_1 Z_1 = I_2 Z_2$$

由前两式得

$$\frac{U_1}{I_1 Z_1} = \frac{U_2}{I_2 Z_2}$$

即

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{U_2}{I_2} \tag{A}$$

设在输出端接一阻抗为 Z_L 的负载,如图11-13所示,则在负载上有

$$U_2 = - Z_L I_2 \tag{B}$$

将式(B)代入式(A),得 1-1 端口的输入阻抗

$$Z_{1i} = \frac{U_1}{I_1} = - \frac{Z_1}{Z_2} Z_L \tag{11-10}$$

如果令 $Z_1 = R_1, Z_2 = R_2$, 则

$$Z_{1i} = - \frac{R_1}{R_2} Z_L = - k Z_L \tag{11-11}$$

若 Z_L 分别为电阻、电感或电容,则利用图 11-13 所示的负阻抗转换器分别可获得负电阻、负电感或负电容。一个天然的负阻抗材料在现实的世界至今还难以找到,但是利用负阻抗变换器为网络设计中实现负 $R、L、C$ 创造了条件。

负阻抗变换器在电信技术中可以作为一种补偿网络。既然负阻抗变换器可以把一个正值电阻器变换成一个负值电阻器,所以可以把这样的负值电阻器连接在电信线路上,用来补偿原有的正值电阻,从而使整个线路成为零电阻。

负阻抗变换器更重要的用途是用来构成回转器,下一节将讨论这个问题。

例 11-7 图11-14所示为 RC 负阻抗振荡器的原理图,当在其输出端接阻抗 Z_2 时,由式

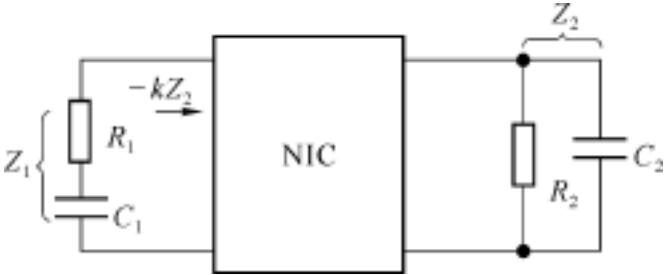


图 11-14 例 11-7

(11-11)知输入阻抗为 $- kZ_2$ (k 为正数), 适当选择 k , 可在特定频率 f_0 上满足方程式

$$Z_1 - kZ_2 = 0 \tag{A}$$

对图中所示 Z_1 和 Z_2 , 求满足上式的 k 和 f_0 。

解 由图 11-14 可知

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{j C_1}$$

$$Z_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j C_2} = \frac{\frac{1}{R_2} - j C_2}{\left[\frac{1}{R_2} + j C_2 \right] \left[\frac{1}{R_2} - j C_2 \right]} = \frac{\frac{1}{R_2}}{\left[\frac{1}{R_2} \right]^2 + C_2^2} - j \frac{C_2}{\left[\frac{1}{R_2} \right]^2 + C_2^2}$$

将 Z_1 和 Z_2 代入式(A)

$$R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} - k \left[\frac{\frac{1}{R_2}}{\left[\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C_2^2 \right]} - j \frac{\omega C_2}{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C_2^2} \right] = 0$$

即

$$R_1 - k \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C_2^2} = 0 \tag{B}$$

$$\frac{1}{\omega C_1} - k \frac{\omega C_2}{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C_2^2} = 0 \tag{C}$$

由式(B)得

$$R_1 \left[\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C_2^2 \right] - k \frac{1}{R_2} = 0 \tag{D}$$

由式(C)得

$$\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C_2^2 - k \omega C_1 C_2 = 0$$

即 $\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C_2^2 = k \omega C_1 C_2$ 代入式(D), $R_1 k \omega C_1 C_2 = k \frac{1}{R_2}$ 所以

$$f_0 = \frac{1}{2 \sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

将 $\omega = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}$ 代入式(B), 得

$$k = R_1 \left[\frac{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C_2^2}{1/R_2} \right] = R_1 \left[\frac{R_2}{R_2^2} + \frac{R_2 C_2^2}{C_1 C_2 R_1 R_2} \right] = \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}$$

11 3 回转器

回转器是一种新型的双口器件。如果在任一瞬间 t , 双口器件端口电压 $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$ 及端口电流 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 满足下列关系

$$i_1(t) = g u_2(t), \quad i_2(t) = -g u_1(t) \tag{11-12}$$

则此双口器件称为回转器。式中 g 称为回转电导, 单位为西门子。式(11-12)表明, 回转器将一个端口上的电压“回转”为另一个端口上的电流, 或将一个端口上的电流“回转”为另一个端口上的电压。

回转器可分为理想回转器和非理想回转器。在传输矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 中, 如果 $a_{11} = a_{22} = 0, a_{12} \cdot a_{21} = 1$, 则称理想回转器, 其数学模型为传输矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/g \\ g & 0 \end{bmatrix}$; 若 $a_{11} = a_{22} = 0$, 而 $a_{12} \cdot a_{21} \neq 1$, 则称非理想回转器, 它们在电路中的符号如图 11-15 所示。

对理想回转器, 在正弦稳态下其电路方程由式(11-12)得

$$I_1 = g U_2, \quad U_1 = \frac{1}{g} (-I_2)$$

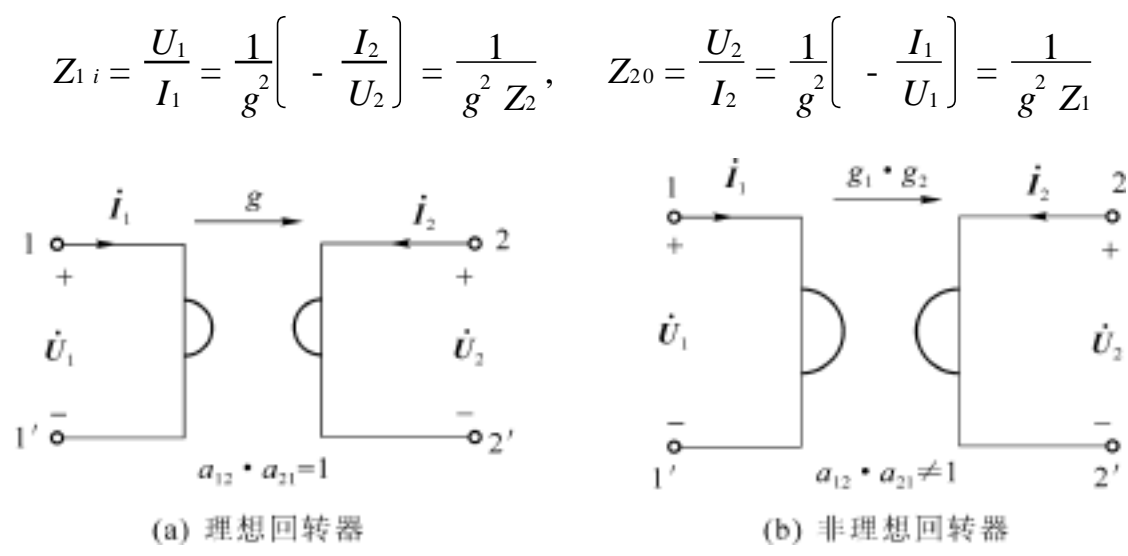


图 11-15 回转器

可见,如果在 2-2 端口接阻抗 Z_2 ,则从 1-1 端口看的输入阻抗为 $1/(g^2 Z_2)$,反之,在 1-1 端口接阻抗 Z_1 ,则从 2-2 端口看的输入阻抗为 $1/(g^2 Z_1)$,如图 11-16 所示。

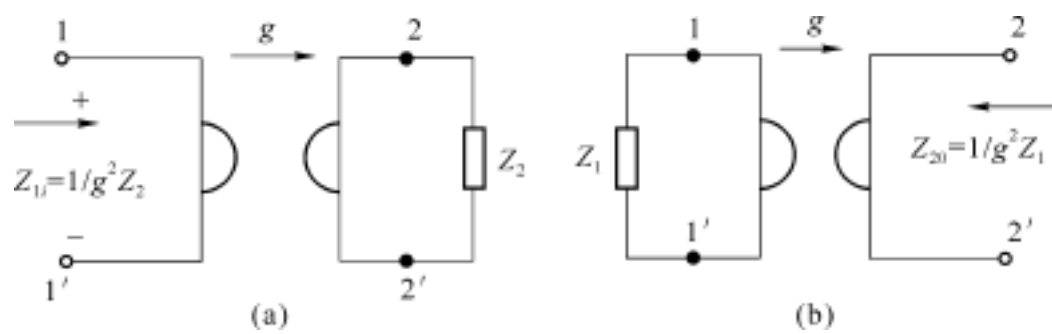


图 11-16 理想回转器的回转特性

若在回转器的输出端口接一个电容器 C ,如图 11-17 所示,则输入端口的阻抗为

$$Z_{1i} = \frac{1}{g^2 Z_c} = \frac{j C}{g^2}$$

即从输入端看进去相当于一个电感器,其电感为 $L = C/g^2$,这就是说回转器可以将电容器逆转为电感器,其作用称倒逆作用。图 11-17 表示了这种容感倒逆特性。

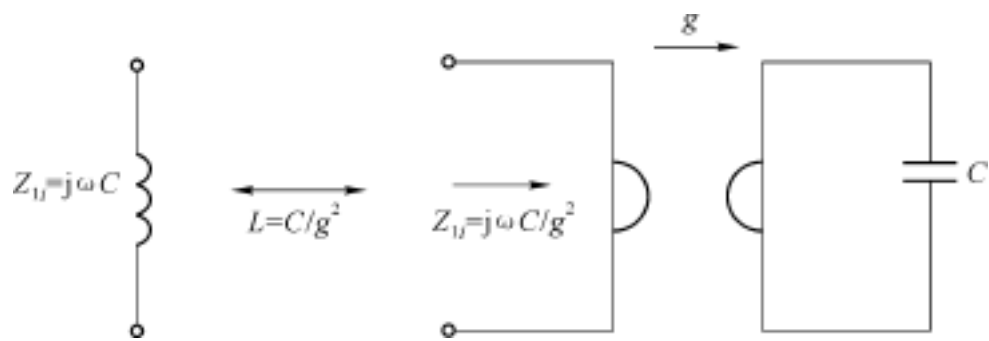


图 11-17 回转器的容感倒逆特性

利用回转器可以用电容实现电感,图 11-18 所示是用回转器和电容器构成的谐振回路。它表明含源 RC 网络原理上可以取代 LC 网络。容感倒逆特性对集成电路和滤波器的研制是极其重要的。

下面讨论回转器的功率。对所有时间由外界给予回转器的功率

$$p(t) = u_1 i_1 + u_2 i_2 = -\frac{1}{g} i_2 i_1 + \frac{1}{g} i_1 i_2 = 0$$

所以回转器既不消耗能量,也不储存能量,它是一种无损耗非储能元件。

而非理想回转器如图 11 -15(b)所示。其电路方程

$$u_1 = -\frac{1}{g_2} i_2, \quad i_1 = g_1 u_2 \tag{11 -13}$$

进入二端口的瞬时功率

$$p(t) = u_1 i_1 + u_2 i_2 = \left[1 - \frac{g_2}{g_1} \right] u_1 i_1$$

若 $g_1 < g_2$, 则 $p(t) < 0$, 此回转器为有源元件, 否则, $g_1 > g_2$, 则 $p(t) > 0$, 这时回转器为有损耗无源元件。

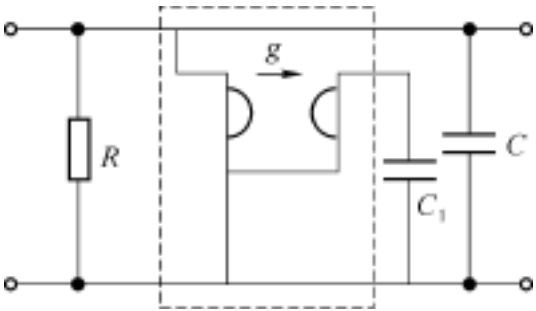


图 11 -18 用回转器和电容构成谐振回路

无源 RLC 滤波器的主要优点是敏感度低,主要缺点是需要应用电感元件,而电感元件是不受欢迎的元件。利用回转器的容感倒逆特性可以用电容取代电感,而且可以具有无源 RLC 滤波器敏感度低的优点。

例 11 -8 直接应用运算放大器实现的回转器电路方案如图11 -19所示。已知这个电路的 Y 参数矩阵为

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1/K_1}{(1 + 1/K_1) R_1} & \frac{-1}{(1 + 1/K_1) R_1} \\ \frac{R_3 + (1/K_1 - 1/K_2)(R_3 + R_4)}{(1 + 1/K_1)(R_4 + R_4/K_2 + R_3/K_2) R_2} & \frac{1/K_1}{(1 + 1/K_1) R_2} \end{bmatrix} \tag{A}$$

试证明图 11 -19 电路满足回转器的条件。

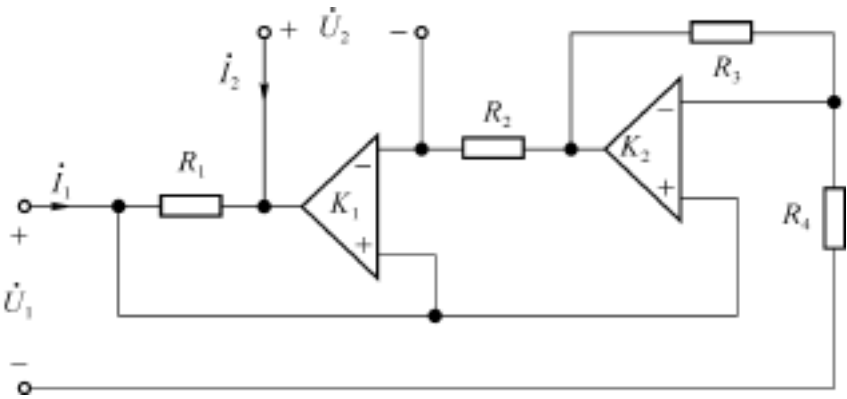
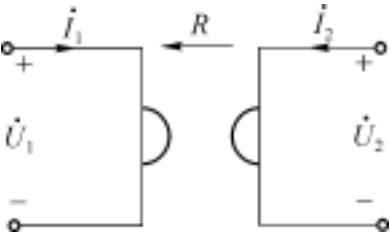


图 11 -19 用运放实现的回转器电路

解 先研究图 11 -20 所示回转器的 Y 参数矩阵。由式(11-12)并注意到图 11 -20 回转电阻 R 的方向,可得



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{11 -14}$$

在式(A)中, K_1, K_2 是运算放大器的开环增益,若 $K_1 = K_2 = K$, 各电阻 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, 则图 11 -3 -5 的 Y 参数矩阵为

图 11 -20 理想回转器

$$Y = \frac{1}{(1 + 1/K) R} \begin{bmatrix} \frac{1}{K} & -1 \\ \frac{1}{1 + 2/K} & \frac{1}{K} \end{bmatrix} \tag{B}$$

对于理想运算放大器, $K \rightarrow \infty$, 则式(B)可进一步简化为

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix}$$

所以图 11-19 所示电路满足回转器的条件, 它与式(11-14)Y 参数矩阵完全相同。

例 11-9 试求用回转器实现图11-21(a)所示三阶高通滤波器的等效电路。

解 由前述回转器容感倒逆特性知

$$Z_{Li} = j\omega L = \frac{j\omega C}{g}, \quad L = \frac{C}{g^2}$$

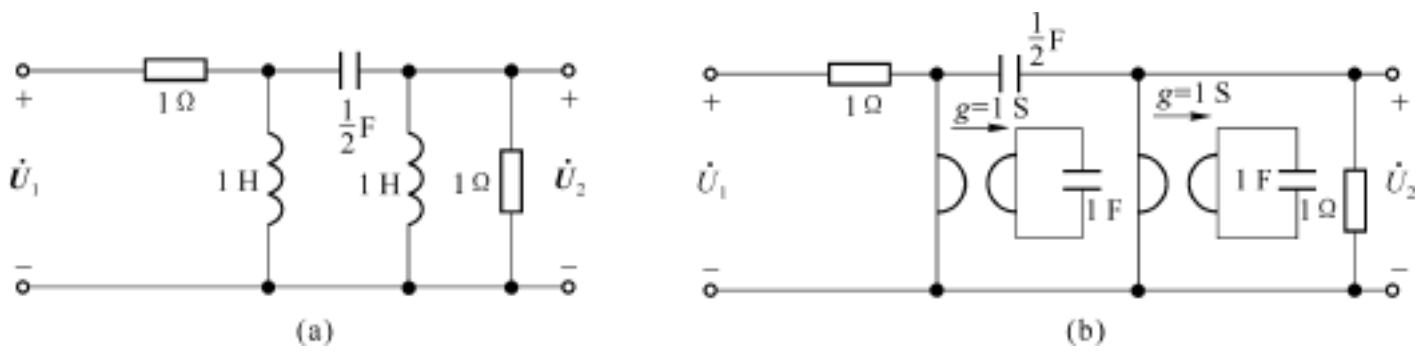


图 11-21 用回转器实现的三阶高通滤波器电路

已知图 11-21(a)所示滤波器中电感 L 为 1H, 所以可以取 $C = 1F$, 回转电导 $g = 1S$, 其等效电路如图 11-21(b)所示。

例 11-10 证明如图11-22(a)所示负阻抗变换器与电阻器的组合可构成回转器。

证 在负阻抗变换器图 11-13 中, 如果 $Z_1 = Z_2 = R$, 负载阻抗 Z_L 为一电阻, 如图 11-22(b)中虚框所示, 则这个负阻抗变换器可以把一个电导值为 G 的负载变换成一个电导为 $(-G)$ 的负载, 这样图 11-22(a)就变成图 11-22(c)。

由式(11-11)知, 当 $R_1 = R_2 = R, Z_L = R$ 时

$$Z_{Li} = \frac{U_1}{I_1} = -\frac{R}{R}R = -R$$

上式可改写成

$$\frac{U_1}{-I_1} = R$$

可见, 当 $R_1 = R_2$ 时, 负阻抗变换器的作用可以看成使负载电阻不变号, 而使电流 I_1 改变方向, 因此图 11-22(c)就变成图 11-22(d), 图 11-22(d) 的方程如下:

$$U_1 = -\frac{1}{G}I_1 - \frac{1}{G}(I_2 - I_1) = -\frac{1}{G}I_2, \quad U_2 = \frac{1}{G}I_2 - \frac{1}{G}(I_2 - I_1) = \frac{1}{G}I_1$$

上面两式正是回转器的电路方程。这就证明了负阻抗变换器与电阻器的组合可构成回转器。

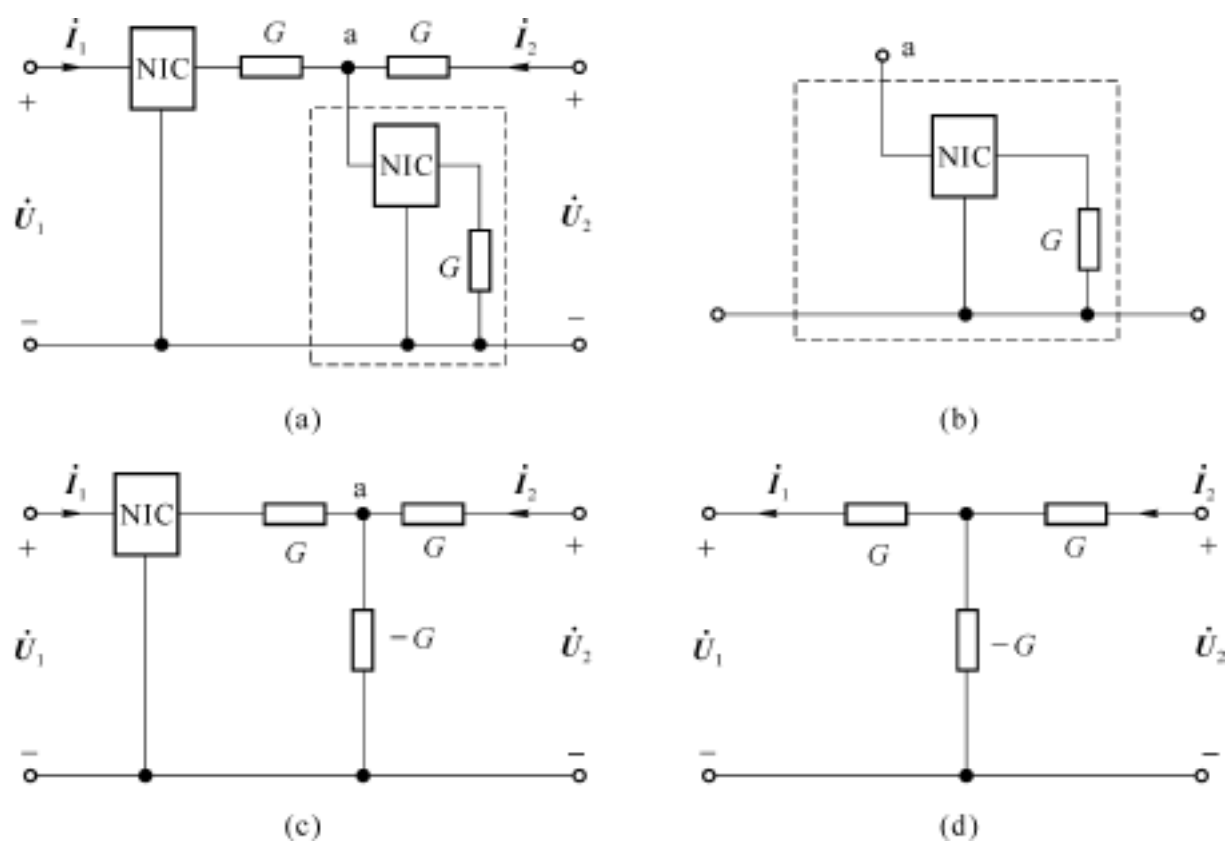


图 11-22 例 11-10 图

例 11-11 试证明图11-23所示两网络等效。

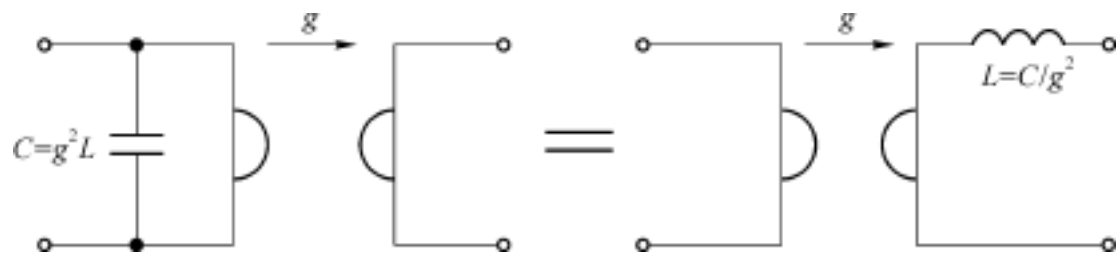


图 11-23 例 11-11 图

证 把左边网络看成两个双口网络(一个电容和一个回转器)的链接,其传输参数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/g \\ g & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/g \\ g & j C \end{bmatrix}$$

同样,把右边网络也看成两个双口网络(一个回转器和一个电感)的链接,其传输参数矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/g \\ g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/g \\ g & j L \end{bmatrix}$$

可见,当 $C = g^2 L$ 时,图 11-23 所示两网络等效。

例 11-12 已知图示网络回转器的回转电阻 $r=100$,试求双口网络的 Y 参数和 Z 参数。

解 因为 50 电阻中无电流,所以网络实际上就是一个回转器,由回转器的回转特性知

$$U_1 = -r i_2, \quad U_2 = r i_1 \tag{A}$$

或

$$i_1 = \frac{1}{r}U_2, \quad i_2 = -\frac{1}{r}U_1 \tag{B}$$

将式(A)与 Z 参数方程比较并把回转电阻 $r=100$ 代入得 Z 参数矩阵得

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 100 & 0 \end{bmatrix}$$

将式(B)与 Y 参数方程比较并把回转电阻 $r=100$ 代入得 Y 参数矩阵得

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \\ -0.01 & 0 \end{bmatrix}$$

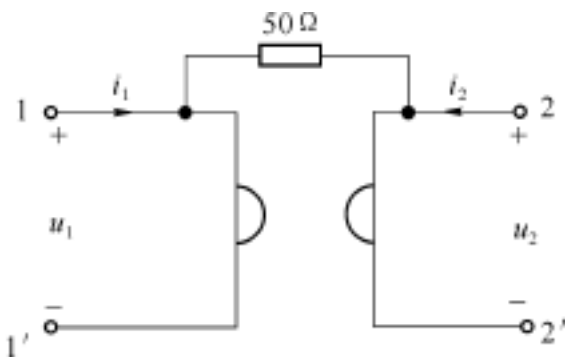
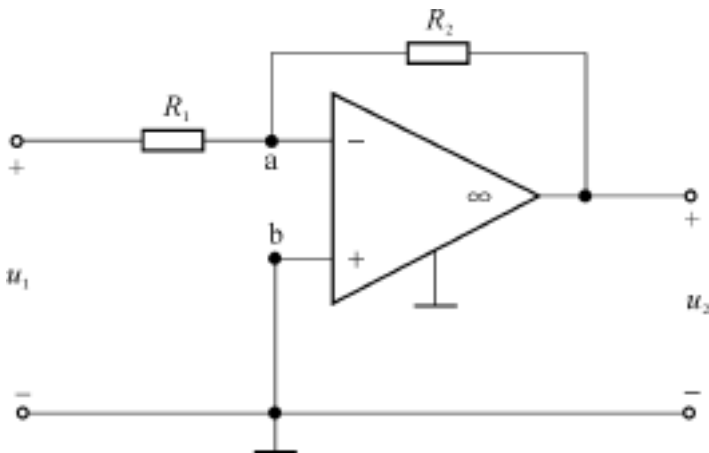


图 11 -24

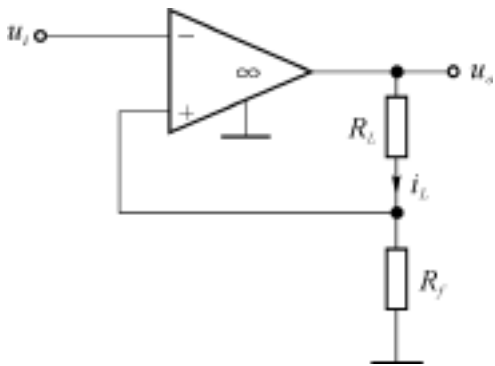
习 题 十 一

11-1 含理想运算放大器的电路如题图 11-1 所示,试分析输出和输入电压之间的关系,并画出等效的受控源电路模型。

11-2 题图 11-2 是一个简单的恒流源电路。证明:流过负载的电流 $i_L = \frac{u_i}{R_f}$ 与负载电阻 R_L 无关。

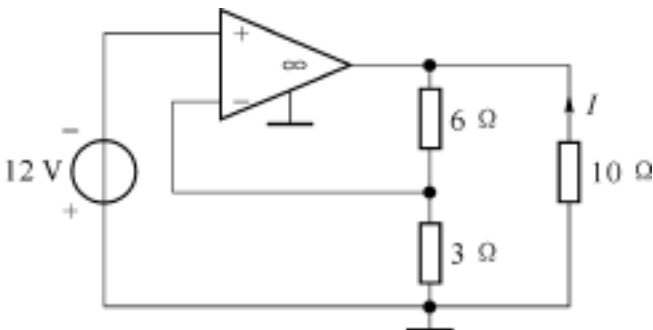


题图 11-1

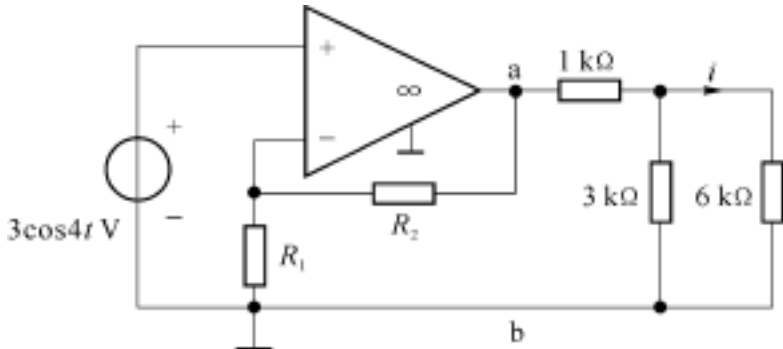


题图 11-2

- 11-3 求题图所示 11-3 电路中的电流 I 。
11-4 题图 11-4 所示电路中, $R_2 = 2 R_1 = 1\text{ k}$,求电流 i 。

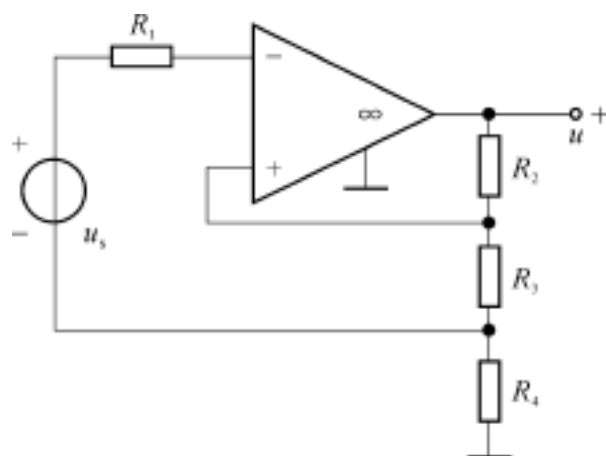


题图 11-3

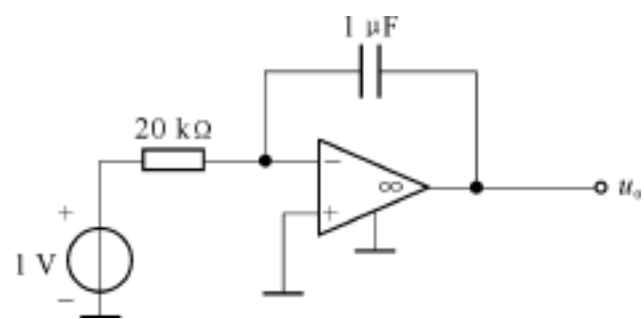


题图 11-4

- 11-5 在题图 11-5 所示电路中,求输出电压 u 和 u_s 的比值。
- 11-6 电路如题图 11-6 所示,求输出电压 u_0 由起始 0V 变化到 -10V 所需的时间是多少 ?

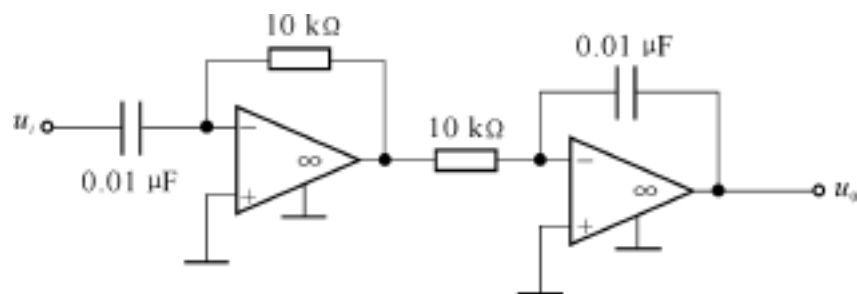


题图 11-5



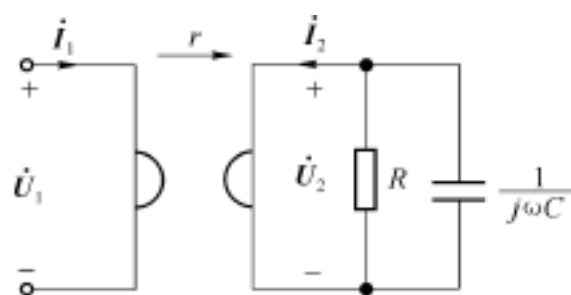
题图 11-6

- 11-7 写出题图 11-7 所示运放电路的运算关系式 $u_0 = f(u_i)$ 。



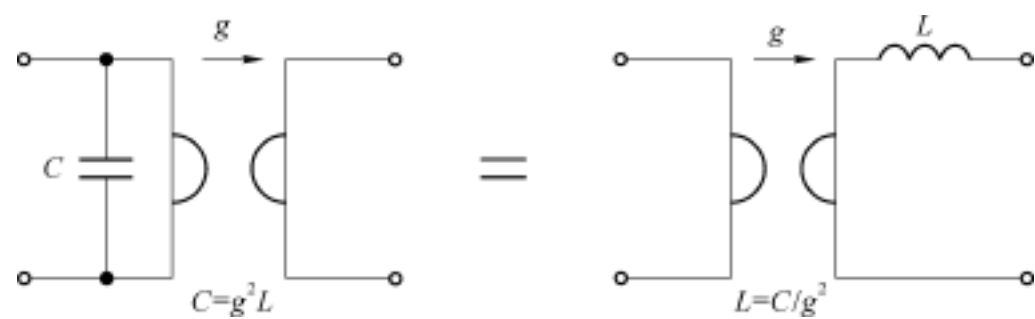
题图 11-7

- 11-8 求题图 11-8 所示回转器的输入阻抗 Z_i 。



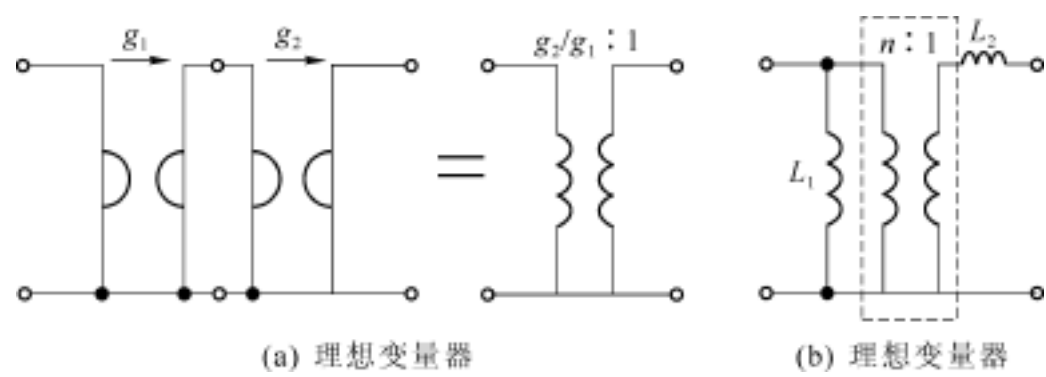
题图 11-8

- 11-9 试证明题图 11-9 所示两网络等效。



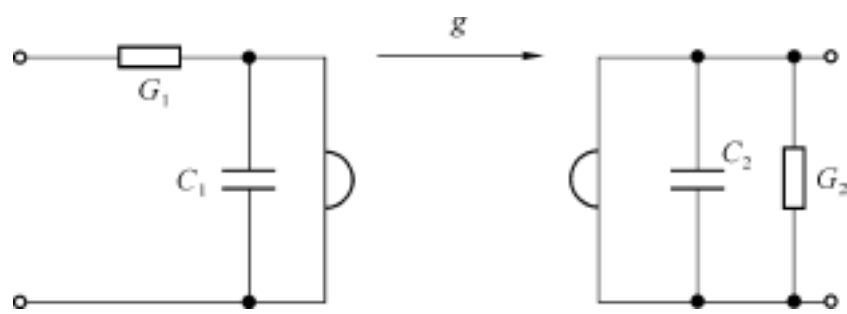
题图 11-9

- 11-10 (1)试证明题图 11-10(a)所示两回转器级联等效于一理想变压器。
- (2)利用所证关系找出题图 11-10(b)的双口网络的等效电路,其中只有回转器和电容。



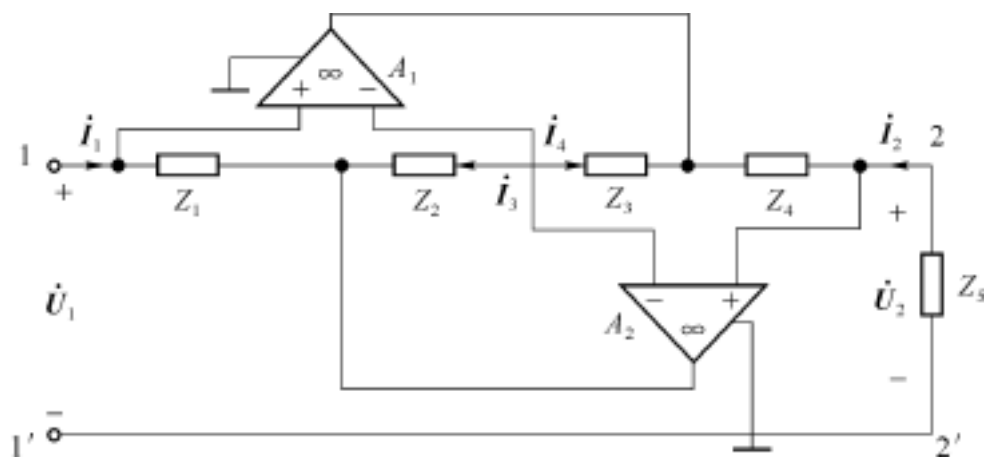
题图 11-10

11-11 求题图 11-11 所示回转器电路的输入阻抗 Z_i 。已知 $C_1 = C_2 = 1\text{F}$ $G_1 = G_2 = 1\text{S}$, 回转电导 $g = 2\text{S}$ 。



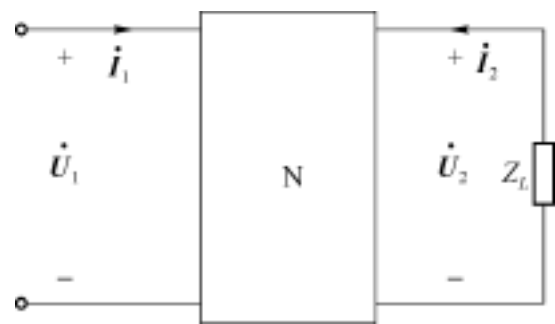
题图 11-11

11-12 由两个运放组成的导抗转换器电路如题图 11-12 所示,它可以实现仿真电感, 已知 $Z_1 = R_1$, $Z_2 = 1/j\omega C_2$, $Z_3 = R_3$, $Z_4 = R_4$, $Z_5 = R_5$,试确定仿真电感值 L_{eg} 。



题图 11-12

11-13 题图 11-13 为阻抗变换器,当输出端接 Z_L 时,对于正和负阻抗变换器,输入阻抗分别为 $n^2 Z_L$ 和 $-n^2 Z_L$,求其 A 参数矩阵并说明此种变换器可否用无源网络实现。



题图 11-13

第十二章 电路的矩阵分析

现代大规模网络分析是借助计算机进行的。本章将研究适合计算机进行计算的系统化步骤。网络的图可以直观地表达网络的结构,但是为了计算分析网络,还需寻求适合计算的数学方法来表示网络的图。最方便的方法是应用矩阵来表示图的几何结构,再用计算机把矩阵存储起来进行各种计算和交换。

本章首先介绍关联矩阵、基本回路矩阵,然后介绍以这两个矩阵为基础的节点分析法、回路分析法。矩阵运算可以给出列写大网络方程的系统步骤,使分析系统化。

12.1 基尔霍夫定律的矩阵形式

12.1.1 关联矩阵和基尔霍夫定律的矩阵形式

对图 12-1 所示有向图,设 i_k 为边 k 的电流,即电流下标与图中边的标号一致。图中各节点的电流定律方程如下:

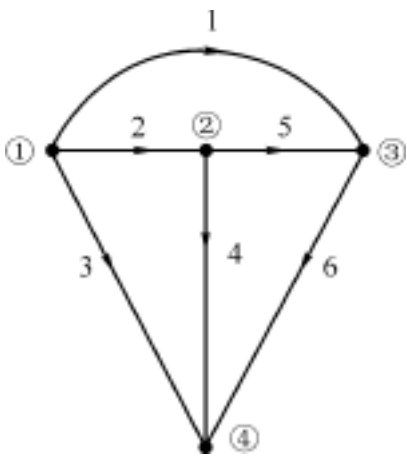


图 12-1 有向图

节点

$i_1 + i_2 + i_3 = 0$

节点

$- i_2 + i_4 + i_5 = 0$

节点

$- i_1 - i_5 + i_6 = 0$

节点

$- i_3 - i_4 - i_6 = 0$

写成矩阵形式:

支路

1

2

3

4

5

6

节点

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

简写成

$A_a i_b = 0$

(12-1)

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(12-2)

系数矩阵 A_a 称为有向图 G 的完全关联矩阵。如果该有向图具有 n_t 个节点, b 条支路,则 A_a 是一个 $n_t \times b$ 阶矩阵,它的第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 定义如下

$a_{ij} = 1$, 支路 j 与节点 i 相关联, 且支路 j 的方向离开节点 i ;

$a_{ij} = -1$, 支路 j 与节点 i 相关联, 且支路 j 的方向指向节点 i ;

$a_{ij} = 0$, 支路 j 与节点 i 无关联。

$i_b = (i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4 \ i_5 \ i_6)^T$ 称为支路电流列矢量。不难看出矩阵 A_a 中每列元素的和为零, 这是因为每一个支路关联两个节点, 从一个节点入必然从另一个节点出, 所以每一列恰好有两个非零元素, 一正一负, 这表明 A_a 的各行不是线性独立的, 也就是说方程 (12-1) 不是线性独立的, 其中任一个方程可由其他方程导出。如果去掉矩阵 A_a 中的任一行, 例如去掉式 (12-2) 中第四行, 得到关联矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{12-3}$$

关联矩阵 A 中各元素的定义与 A_a 中相同。因此线性独立的 KCL 方程的矩阵形式为

$$A i_b = 0 \tag{12-4}$$

现在讨论用关联矩阵 A 表示的独立的 KVL 方程矩阵形式。在图 12-1 中选节点 4 为参考节点, 用节点电压表示各支路电压, 写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u \\ u \end{bmatrix}$$

简写成
$$u_b = A^T u_n \tag{12-5}$$

式 (12-5) 为 KVL 的一种矩阵形式, 式中, u_b 为支路电压列矢量; u_n 为节点电压列矢量; A^T 为关联矩阵 A 的转置矩阵。

12.1.2 基本回路矩阵和基尔霍夫定律的矩阵形式

在图 12-2 所示有向图中, 选 4, 5, 6 支路为树支, 1, 2, 3 支路为连支, 分别构成三个基本回路, 其 KVL 方程为

- 基本回路 1: $u_1 - u_4 - u_5 = 0$;
- 基本回路 2: $u_2 + u_5 - u_6 = 0$;
- 基本回路 3: $u_3 - u_4 - u_6 = 0$ 。

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = 0$$

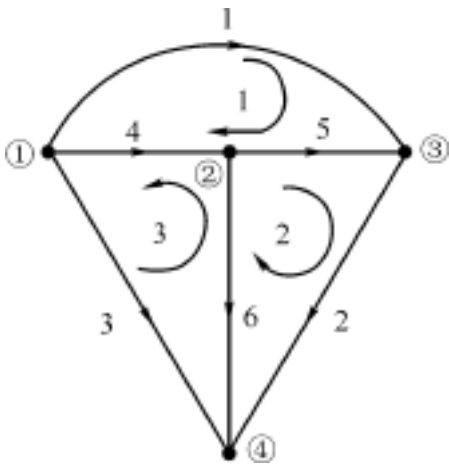


图 12-2 基本回路

简写成
$$B_f u_b = 0 \tag{12-6}$$

式(12-6)是用于回路分析的 KVL 的矩阵形式。

B_f 称为基本回路矩阵, 它的第 i 行第 j 列元素 b_{fij} 定义如下:

$b_{fij} = 1$ 表明支路 j 在基本回路 i 中, 且两者方向相同;

$b_{fij} = -1$ 表明支路 j 在基本回路 i 中, 且两者方向相反;

$b_{fij} = 0$ 表明支路 j 不在基本回路 i 中。

把 B_f 的列按先连支后树支的顺序用分块形式排列, 得

123456

$$B_f = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right] = (B_{fL} \dots B_{ft}) = (U \dots B_{ft})$$

(12-7)

由连支组成的矩阵 B_{fL} 是 $(b - n_t + 1)$ 阶单位矩阵, 用 U 表示。

对图 9-2 写出 KCL 方程, 注意树支电流用连支电流表示。

$$i_4 = -i_1 - i_3$$
$$i_5 = -i_1 + i_2$$
$$i_6 = -i_2 - i_3$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

简写成

$$i_b = B_f^T i_L$$

(12-8)

式中 i_b, i_L 分别为支路电流和连支电流。即用 $b - n_t + 1$ 个连支电流来表示 b 个支路电流。
上式是用于回路分析的 KCL 方程的矩阵形式。将它写成分块形式

$$\begin{bmatrix} i_L \\ \dots \\ i_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ \dots \\ B_{ft}^T \end{bmatrix} (i_L)$$

可见 $i_t = B_{ft}^T i_L$, 即树支电流 i_t 可用连支电流表示, 通过计算连支电流来求树支电流。

12 2 节点分析

本节讨论适合求解大型网络的节点分析法的系统步骤。因此, 首先导出节点方程的矩阵形式。

12 2 .1 支路方程

为了便于计算机分析, 支路都用一般支路。所谓一般支路就是由电压源、电流源和电阻组合起来的一个有代表性的支路。图 12-3(a) 就是具有 n_t 个节点、 b 条支路的网络的第 k

个一般支路。为了研究的方便将图(a)等效为图(b),该支路方程

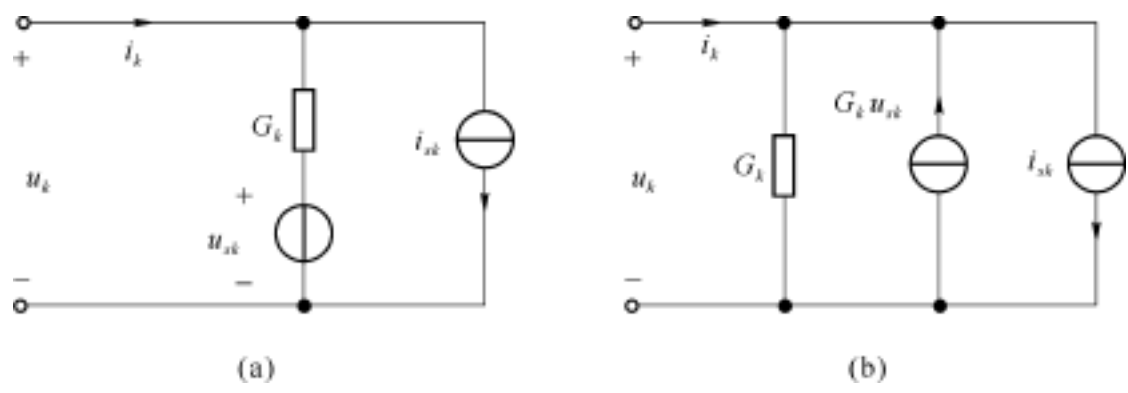


图 12-3 一般支路

$$i_k = i_{sk} + G_k u_k - G_k u_{sk}$$

每一条支路都用一般支路表示, b 个支路方程

$$\begin{aligned} i_1 &= i_{s1} + G_1 u_1 - G_1 u_{s1} \\ i_2 &= i_{s2} + G_2 u_2 - G_2 u_{s2} \\ &\dots \\ i_b &= i_{sb} + G_b u_b - G_b u_{sb} \end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & G_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \\ \dots \\ u_{sb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ \dots \\ i_{sb} \end{bmatrix}$$

简写成

$$i_b = G_b u_b - G_b u_s + i_s \text{ 或 } u_b = R_b i_b - R_b i_s + u_s \tag{12-9}$$

上式称为一般支路方程的矩阵形式。式中, $i_b = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_b)^T$ 是支路电流 b 阶列矢量; $u_b = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_b)^T$ 是支路电压 b 阶列矢量; $u_s = (u_{s1} \ u_{s2} \ \dots \ u_{sb})^T$ 是电压源列矢量; $i_s = (i_{s1} \ i_{s2} \ \dots \ i_{sb})^T$ 是电流源列矢量; $G_b = \text{diag}(G_1 \ G_2 \ \dots \ G_b)$ 称支路电导矩阵,是由 b 个支路电导组成的 b 阶对角线方阵,主对角线各元素是相应支路电导,非主对角线各元素均为零。

12 2 2 节点方程

将式(12-5)代入式(12-9),得

$$i_b = G_b A^T u_n - G_b u_s + i_s$$

再将上式代入式(12-4),得

$$A i_b = A G_b A^T u_n - A G_b u_s + A i_s = 0$$

令 $G_n = A G_b A^T$ 称为节点电导矩阵,是 n 阶方阵, n 为独立节点数。

$i_{ns} = A G_b u_s - A i_s$ 称为节点电流源矢量,如果将电压源等效为电流源,则 i_{ns} 为节点电流源代数和,流入节点电流取正,流出节点电流取负,则

$$G_n u_n = i_{ns} \tag{12-10}$$

上式称为网络的节点方程。由式(12-10)解出节点电压 u_n 后,可根据式(12-5)求出支路电

压 u_b 。然后再根据支路方程式(12-9)解出支路电流 i_b 。

12 2 3 含受控源电路节点分析的系统步骤

以图 12 -4(a)为例,首先研究含受控源时支路电导的特点。将受控电压源等效为电流源,且控制量均用电压表示,作出对应的有向图,分别如图 12 -4(b)、(c)所示。

列支路方程如下

$$i_1 = g_1 u_5 + G_1 u_1 - G_1 u_{s1}$$
$$i_2 = G_2 u_2 - \mu_2 G_2 u_3$$
$$i_3 = G_3 u_3 + {}_3 G_5 u_5$$
$$i_4 = G_4 u_4 - r_4 G_3 G_4 u_3$$
$$i_5 = G_5 u_5 + i_{s5}$$

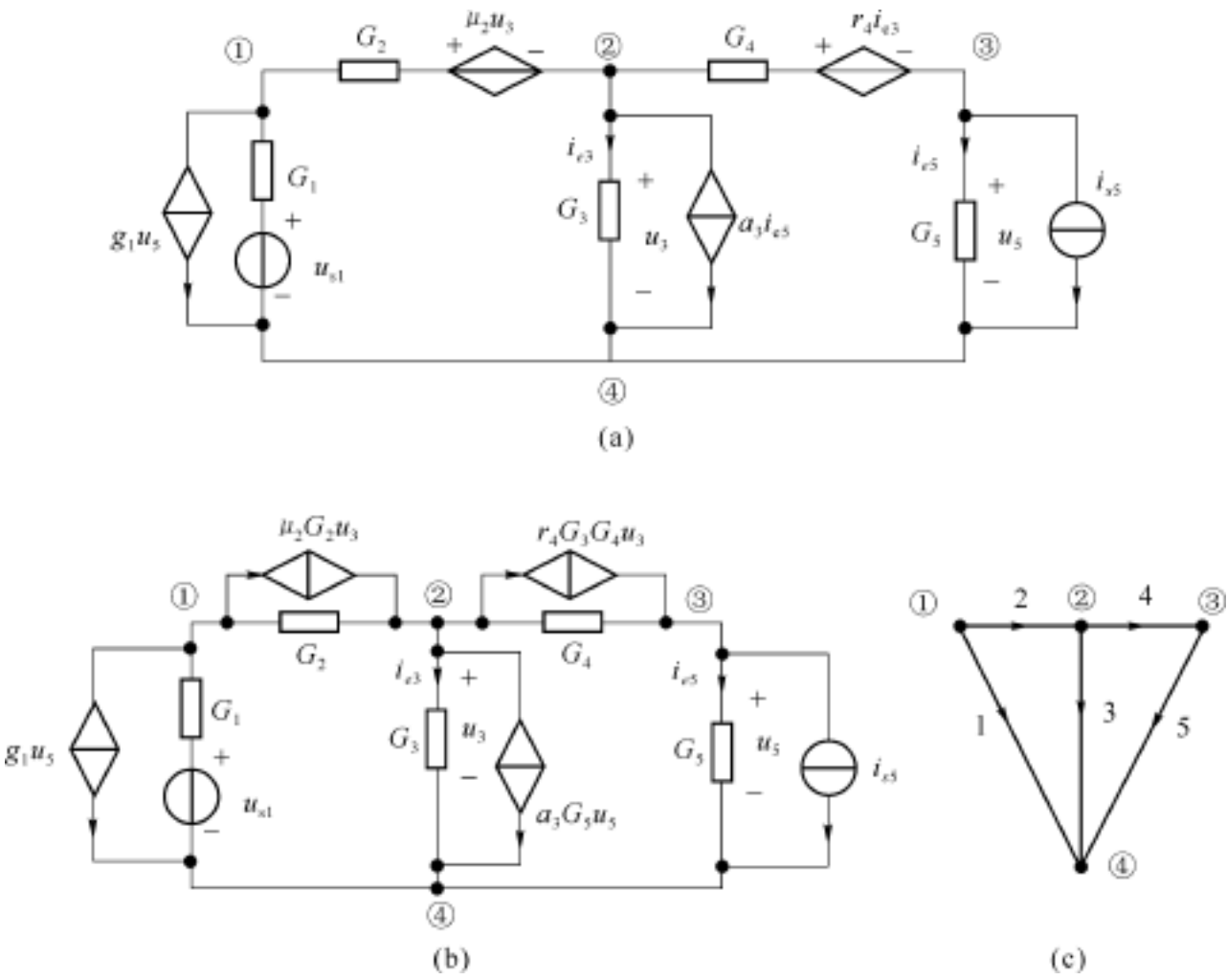


图 12-4 含四种受控源的电路

用矩阵表示

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & G_2 & -\mu_2 G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & {}_3 G_5 \\ 0 & 0 & -r_4 G_3 G_4 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{s1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ i_{s5} \end{bmatrix}$$

简写成

$$i_b = G_b u_b + G_b u_s + i_s$$

支路电导矩阵 G_b 可表示为

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & G_2 & -\mu_2 G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & {}_3 G_5 \\ 0 & 0 & -r_4 G_3 G_4 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & & & & \\ & G_2 & & & \\ & & G_3 & & \\ 0 & & & G_4 & \\ & & & & G_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & 0 & -\mu_2 G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}_3 G_5 \\ 0 & 0 & -r_4 G_3 G_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即

$$G_b = G_e + g \quad (12-11)$$

式中, G_e 为支路元件电导矩阵, 是对角阵, 与不含受控源时支路电导矩阵相同; g 为转移电导矩阵, 对角线元素均为零, 非对角线非零元素所在的行号与受控源被控量所在支路号相同, 所在列号与受控源控制量所在支路号相同, 这些非零元素的正负号视受控电流源的方向而定, 若与支路方向相同则取正, 反之取负。

其余步骤与不含受控源时相似。

例 12-1 用节点分析的系统步骤列写图12-4(a)所示电路的节点方程。

解 (1) 将受控电压源等效为电流源, 作出相应的有向图, 如图 12-4(b)、(c) 所示;
(2) 在有向图中选节点 为参考, 写关联矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 列元件电导矩阵 G_e 、转移电导矩阵 g 、电压源列矢量 u_s 、电流源列矢量 i_s 。

$$\begin{aligned} G_e &= \text{diag}(G_1 \ G_2 \ G_3 \ G_4 \ G_5) \\ g &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & 0 & -\mu_2 G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}_3 G_5 \\ 0 & 0 & -r_4 G_3 G_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ u_s &= (u_{s1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \\ i_s &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ i_{s5})^T \end{aligned}$$

(4) 求支路电导矩阵 $G_b = G_e + g$

$$G_b = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & G_2 & -\mu_2 G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & {}_3 G_5 \\ 0 & 0 & -r_4 G_3 G_4 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix}$$

(5) 求节点电导矩阵 $G_n = A G_b A^T$

$$G_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & G_2 & -\mu_2 G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & {}_3 G_5 \\ 0 & 0 & -r_4 G_3 G_4 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 - \mu_2 G_2 & g_1 \\ -G_2 & G_2 + \mu_2 G_2 + G_3 - r_4 G_3 G_4 + G_4 & -G_4 + {}_3 G_5 \\ 0 & r_4 G_3 G_4 - G_4 & G_4 + G_5 \end{bmatrix}$$

(6) 求节点电流源列矢量 $i_{s\ n} = AG_b u_s - Ai_s$

$$i_{s\ n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & G_2 & -\mu_2 G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & {}_3 G_5 \\ 0 & 0 & -r_4 G_3 G_4 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ i_{s5} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} G_1 u_{s1} \\ 0 \\ -i_{s5} \end{bmatrix}$$

(7) 求节点方程 $G_n u_n = i_{ns}$

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 - \mu_2 G_2 & g_1 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 + \mu_2 G_2 - r_4 G_3 G_4 & -G_4 + {}_3 G_5 \\ 0 & r_4 G_3 G_4 - G_4 & G_4 + G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 u_{s1} \\ 0 \\ -i_{s5} \end{bmatrix}$$

12 3 改进的节点分析

改进的节点分析法是分析具有电压源支路的电路的一种系统化方法,它的要点是以节点电压和电压源支路的电流为未知量来列写节点电流方程,因而需要在一般节点方程的基础上相应地增加电压源支路的电压方程,所以也称混合变量法。

在图 12 -5(a)所示的电路中,设节点 6 为参考,列写以节点电压和电压源支路电流表示的节点电流方程式

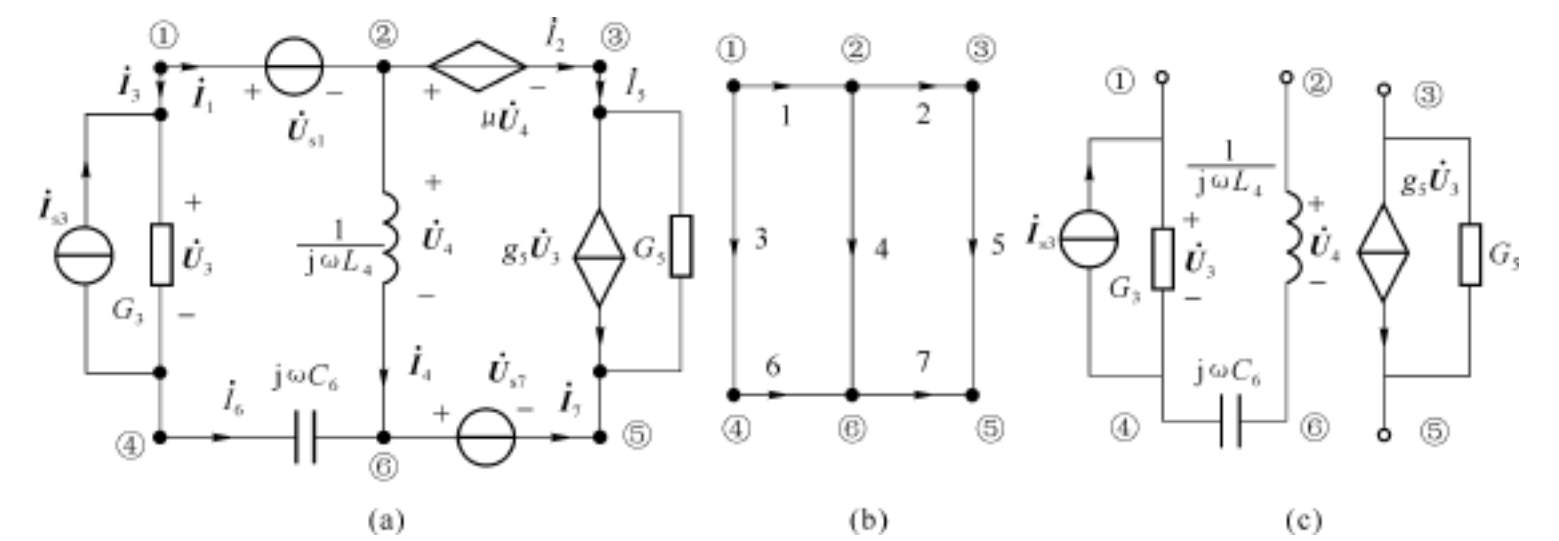


图 12-5 含电压源支路的电路

$$I_1 + G_3 (U_1 - U_4) - I_{s3} = 0$$

$$\begin{aligned} & -I_1 + I_2 + \frac{1}{jL_4}U = 0 \\ & -I_2 + G_5(U - U) + g_5(U - U) = 0 \\ & -G_3(U - U) + jC_6U + I_{s3} = 0 \\ & -G_5(U - U) - g_5(U - U) - I_7 = 0 \end{aligned}$$

电压源支路电压方程

$$\begin{aligned} U - U &= U_{s1} \\ U - U &= \mu U_4 = \mu U \quad \text{即} (1 - \mu)U - U = 0 \\ -U &= U_{s7} \end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} G_3 & 0 & 0 & -G_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{jL_4} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ g_5 & 0 & G_5 & -g_5 & -G_5 & 0 & -1 & 0 \\ -G_3 & 0 & 0 & G_3 + jC_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g_5 & 0 & -G_5 & g_5 & G_5 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \mu & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} U \\ U \\ U \\ U \\ U \\ I_1 \\ I_2 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{s3} \\ 0 \\ 0 \\ -I_{s3} \\ 0 \\ U_{s1} \\ 0 \\ U_{s7} \end{bmatrix}$$

简写成

$$W_m(j) X_m = K_m \tag{12-12}$$

式(12-12)称改进的节点方程。它具有求解 8 个未知量 U, U, U, U, U, I_1, I_2 和 I_7 所需的 8 个方程。

以图 12-5(a)的网络为例, 设 $U = 0$ 。改进节点法的系统步骤如下:

- (1) 画出移去电压源支路和理想受控电压源支路后的电路如图 12-5(c)所示。
- (2) 列写图 12-5(c)电路的支路导纳矩阵。由式 12-11 得

$$Y_b = Y_e + g$$
$$Y_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{jL_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_5 & 0 & G_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & jC_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (3) 列出图 12-5(b)有向图的关联矩阵。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(4) 求节点导纳矩阵。

$$Y_n = AY_bA^T$$
$$Y_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{jL_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_5 & 0 & G_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & jC_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_3 & 0 & 0 & -G_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{jL_4} & 0 & 0 & 0 \\ g_5 & 0 & G_5 & -g_5 & -G_5 \\ -G_3 & 0 & 0 & G_3 + jC_6 & 0 \\ -g_5 & 0 & -G_5 & g_5 & G_5 \end{bmatrix}$$

(5) 求 W_m 。

在 Y_n 上加上一些列, 这些列就是关联矩阵 A 中与移去支路相对应的列。在 Y_n 上再加上一些行, 加上的行数等于在第一步中移去的支路数, 且每行元素与移去支路相应的支路方程相对应, 附加的支路方程见本节电压源支路电压方程。这样就得到式(12-12)中的 W_m 。

$$W_m = \left[\begin{array}{ccccc|ccc} G_3 & 0 & 0 & -G_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{jL_4} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ g_5 & 0 & G_5 & -g_5 & -G_5 & 0 & -1 & 0 \\ -G_3 & 0 & 0 & G_3 + jC_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g_5 & 0 & -G_5 & g_5 & G_5 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \mu & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

(6) 列写 X_m 、 K_m 。

X_m 是由节点电压和移去支路的支路电流所构成。 K_m 是在节点电流列矢量的基础上再加上一些元素而得到, 加上的元素数等于移去的支路数, 增加的元素由移去支路的支路方

程所确定。

$$X_m = (U \quad U \quad U \quad U \quad U \quad I_1 \quad I_2 \quad I_7^T)$$
$$K_m = (I_{s3} \ 0 \ 0 \ -I_{s3} \ 0 \ U_{s1} \ 0 \ U_{s7}^T)$$

(7) 写出改进的节点方程。

$$W_m X_m = K_m$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} G_3 & 0 & 0 & -G_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{jL_4} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ g_5 & 0 & G_5 & -g_5 & -G_5 & 0 & -1 & 0 \\ -G_3 & 0 & 0 & G_3 + jC_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g_5 & 0 & -G_5 & g_5 & G_5 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \mu & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} U \\ U \\ U \\ U \\ U \\ I_1 \\ I_2 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{s3} \\ 0 \\ 0 \\ -I_{s3} \\ 0 \\ U_{s1} \\ 0 \\ U_{s7} \end{bmatrix}$$

在应用改进的节点法时,如果遇到含电流控制电压源支路,则可把它等效为电压控制电压源支路,然后按改进的节点法一般原则处理。

12 4 回路分析

回路分析法是借助于基本回路矩阵来分析电路的系统解法。

12 4 .1 回路方程

将式(12-8)代入式(12-9),得

$$u_b = R_b B_f^T i_L - R_b i_s + u_s \tag{A}$$

再将式(A)代入式(12-6),得

$$B_f R_b B_f^T i_L - B_f R_b i_s + B_f u_s = 0$$

令 $R_L = B_f R_b B_f^T$

$$u_{sL} = B_f R_b i_s - B_f u_s$$

则 $R_L i_L = u_{sL} \tag{12-13a}$

对正弦稳态电路,则

$$Z_L I_L = U_{sL} \tag{12-13b}$$

式(12-13)称回路方程。 R_L 、 Z_L 称回路电阻矩阵、回路阻抗矩阵, u_{sL} 、 U_{sL} 称回路电压源列矢量。 R_b 、 Z_b 称支路电阻矩阵、支路阻抗矩阵, 电路中不含互感和受控源时, 它们都是对角阵。

12 4 .2 回路分析的系统步骤

以图 12-6(a)所示电路为例加以说明。

(1) 画出与电路对应的有向图如图 12-6(b)所示。选树并按先连支后树支的次序对支路进行编号。本例选支路 1,2,3 为连支,4,5,6 为树支。

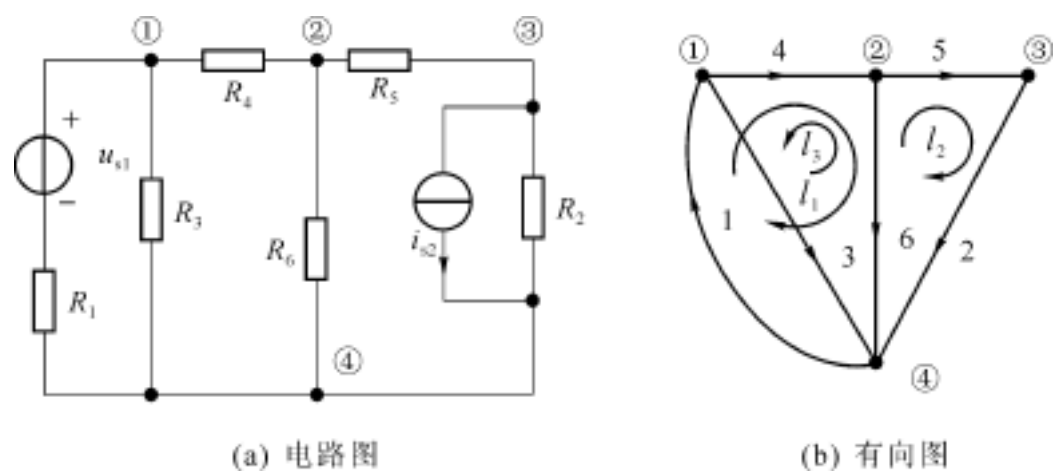


图 12-6 回路分析用图

(2) 作基本回路。

选回路方向与连支方向一致,如图 12-6(b)所示。列基本回路矩阵 B_f ,支路电阻矩阵 R_b ,电压源列矢量 u_s 和电流源列矢量 i_s

$$B_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_b = \text{diag}(R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad R_5 \quad R_6)$$

$$u_{s1} = (- \quad u_{s1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$$

$$i_s = (0 \quad i_{s2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$$

(3) 求回路电阻矩阵。

$$R_L = B_f R_b B_f^T$$
$$R_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & & & & & \\ & R_2 & & & & \\ & & R_3 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & 0 & & R_4 & \\ & & & & & R_5 \\ & & & & & & R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} R_1 + R_4 + R_6 & -R_6 & -R_4 - R_6 \\ -R_6 & R_2 + R_5 + R_6 & R_6 \\ -R_4 - R_6 & R_6 & R_3 + R_4 + R_6 \end{bmatrix}$$

(4) 求回路电压源列矢量。

$$u_{sL} = B_f R_b i_s - B_f u_s = \begin{bmatrix} u_{s1} \\ R_2 i_{s2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(5) 写出回路方程。

$$R_L i_L = u_{sL}$$

(6) 解回路方程,求出回路电流。

$$i_L = R_L^{-1} u_{sL}$$

(7) 求支路电流。

$$i_b = B_f^T i_L$$

(8) 求支路电压。

$$u_b = R_b i_b - R_b i_s + u_s$$

观察第三步回路电阻矩阵的结果知

$$R_L = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

推广为

$$R_L = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1l} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2l} \\ \dots & \dots & & \dots \\ R_{l1} & R_{l2} & \dots & R_{ll} \end{bmatrix} \tag{12-14}$$

回路电阻矩阵 R_L 是 $(l = b - n_t + 1)$ 阶对称方阵, 对角线元素是相应基本回路电阻之和, 非对角线元素是相关基本回路公共电阻之和, 其正负号取决于两基本回路在公共支路上的方向, 若二者方向相同则取正, 否则取负。

观察第四步回路电压源列矢量 u_{sL} 知, 若把独立电流源等效为电压源, 则回路电压源等于回路中每个支路电压源电压 u_s 之和, 若 u_s 位升方向与基本回路方向一致则 u_s 取正, 反之取负。

因此, 当网络只含电阻和独立源时, 通过观察网络, 按式 (12-15) 可直接列写回路方程

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1l} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2l} \\ \dots & \dots & & \dots \\ R_{l1} & R_{l2} & \dots & R_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \\ \dots \\ i_{ll} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \\ \dots \\ u_{sl} \end{bmatrix} \tag{12-15}$$

12-4-3 含受控源情况

回路法系统分析的关键是正确写出支路电阻矩阵, 为此, 先把图 12-7(a) 电路中受控电流源等效为电流控制电压源, 如图 12-7(b) 所示。

作图 12-7(b) 的拓扑图, 如图 12-7(c) 所示。选边 1, 2, 3, 4 为连支, 边 5, 6, 7 为树支。对图 12-7 写出各支路方程

$$\begin{aligned} u_1 &= i_1 R_1, & u_2 &= i_2 R_2, & u_3 &= i_3 R_3, & u_4 &= i_4 R_4 - R_4 i_2 \\ u_5 &= i_5 R_5 + u_{s5}, & u_6 &= i_6 R_6 + u_{s6}, & u_7 &= i_7 R_7 + \mu R_1 i_1 \end{aligned}$$

用矩阵表示

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_4 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & 0 \\ \mu R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{s5} \\ u_{s6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

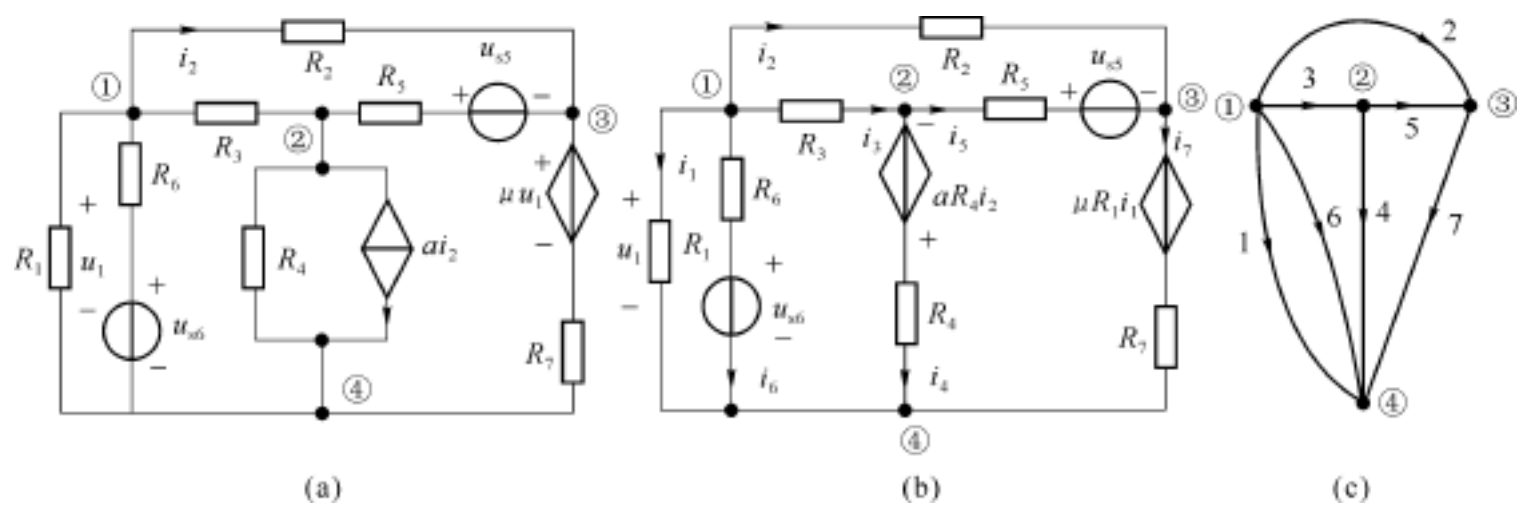


图 12-7 含受控源电路

简写成

$$u_b = R_b i_b + u_s$$

可见,在含受控源时支路电阻矩阵

$$R_b = R_e + r \tag{12-16}$$

R_e 为支路元件电阻矩阵,是对角阵,与不含受控源时支路电阻矩阵相同。 r 为转移电阻矩阵,若把受控源等效为电流控制电压源后,则 r 的写法与式(12-11)中 g 相同,即非零元素所在的行号同受控源所在支路号相同,所在的列号与控制量所在支路号相同。这些元素的正负号取决于受控电压源的方向,若电压降的方向与支路方向相同则取正,否则取负。

例 12-2 写出图12-8(a)所示电路支路电阻矩阵。

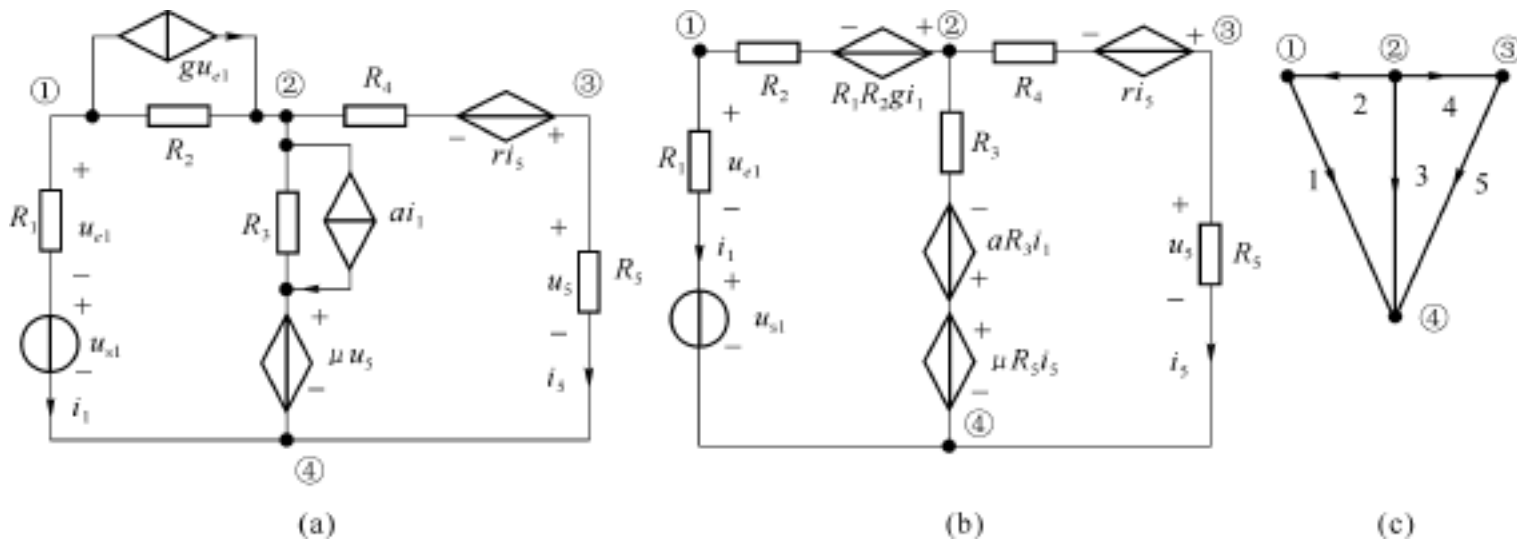


图 12-8 例 12-2 图

- 解 (1) 将图 12-8(a)所示电路中受控源都等效为电流控制电压源,如图 12-8(b)所示。
 (2) 作图 12-8(b)电路的拓扑图,如图 12-8(c)所示。
 (3) 写出支路元件电阻矩阵 R_e 和转移电阻矩阵 r 。

$$R_e = \begin{bmatrix} R_1 & & & & \\ & R_2 & & & \\ & & R_3 & & 0 \\ 0 & & & R_4 & \\ & & & & R_5 \end{bmatrix} \quad r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 R_2 g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_3 & 0 & 0 & 0 & \mu R_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4) 写出支路电阻矩阵 $R_b = R_e + r_o$ 。

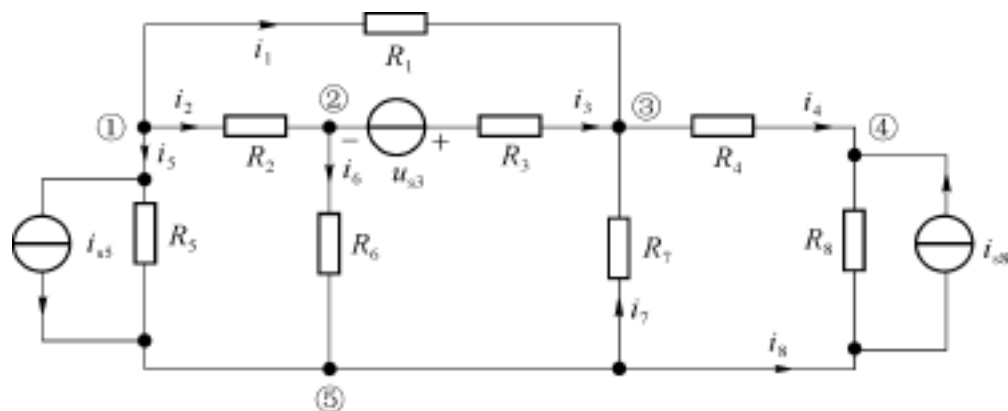
$$R_b = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 R_2 g & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ -R_3 & 0 & R_3 & 0 & R_5 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix}$$

含受控源时回路分析的其他系统步骤与不含受控源时的系统步骤相同。

习 题 十 二

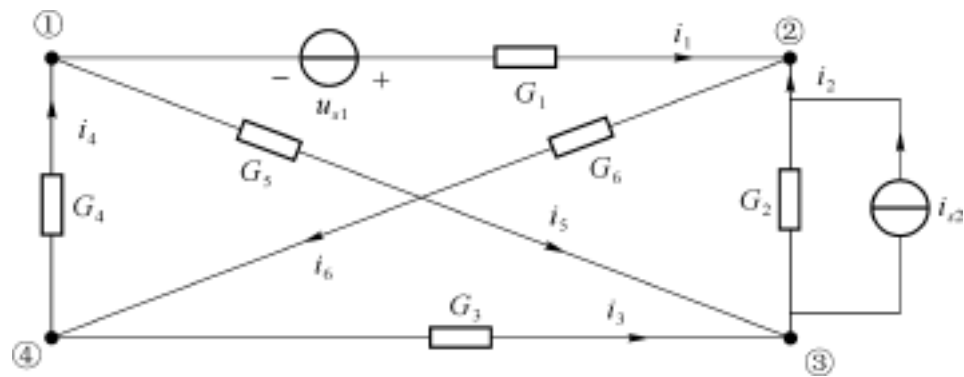
12-1 已知题图 12-1, 要求:

- (1) 画出电路有向图, 作关联矩阵 A ;
- (2) 写出电路的支路电导矩阵 G_b ;
- (3) 写出电路的节点方程。



题图 12-1

12-2 试用节点分析的系统步骤求题图 12-2 所示网络各支路电压和各支路电流。已知 $G_1 = 1\text{S}$, $G_2 = 2\text{S}$, $G_3 = 1\text{S}$, $G_4 = 1\text{S}$, $G_5 = 1\text{S}$, $G_6 = 2\text{S}$, $u_{s1} = 1\text{V}$, $i_{s2} = 1\text{A}$ 。



题图 12-2

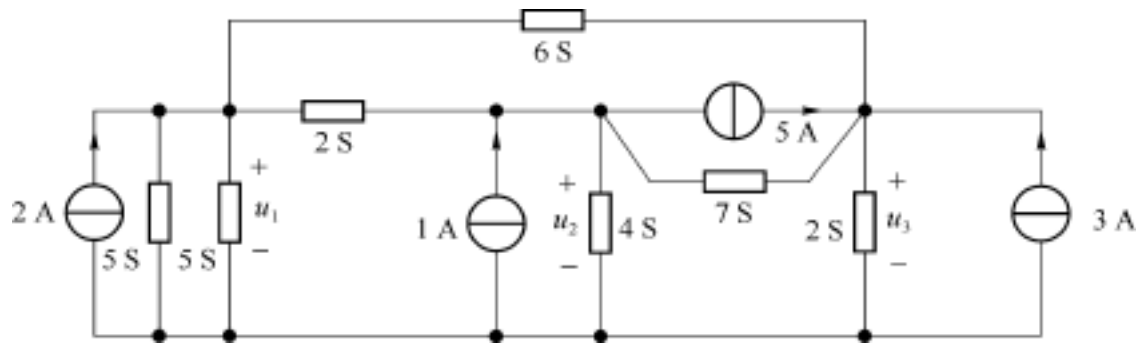
12-3 直接列写题图 12-3 所示电路的节点方程, 并求 u_1 , u_2 和 u_3 。

12-4 在题图 12-4 所示正弦稳态电路中,

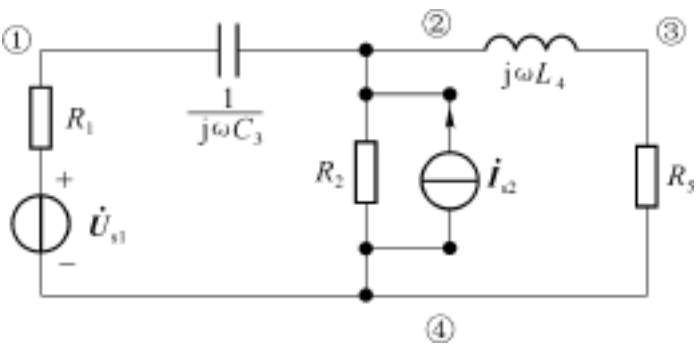
- (1) 求节点导纳矩阵 Y_n ;
- (2) 求节点电流源列矢量 i_{ns} ;

(3) 写节点方程。

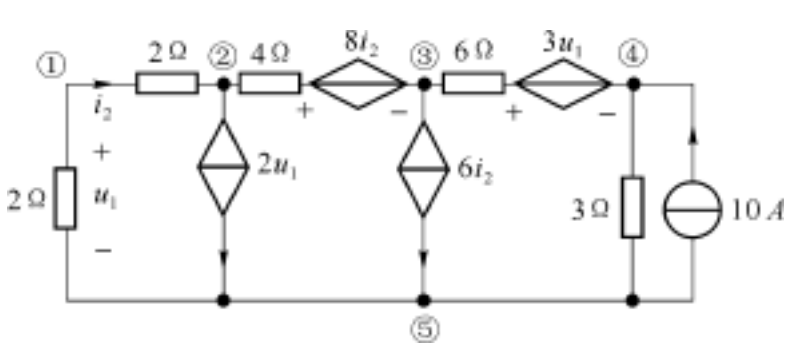
12-5 用节点分析的系统步骤列写题图 12-5 所示网络的节点方程。



题图 12-3



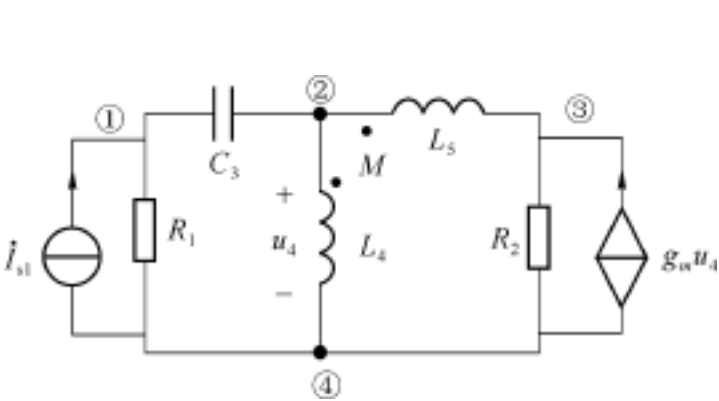
题图 12-4



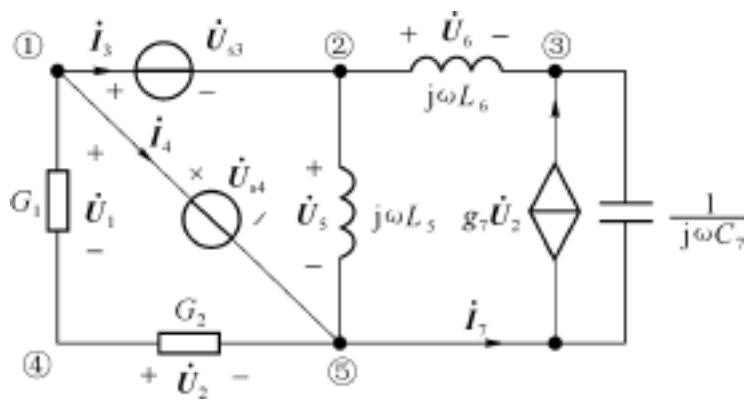
题图 12-5

12-6 题图 12-6 是具有受控源和互感的电路, 试以节点 4 为参考列写节点方程。

12-7 试列写题图 12-7 所示网络的改进节点方程。

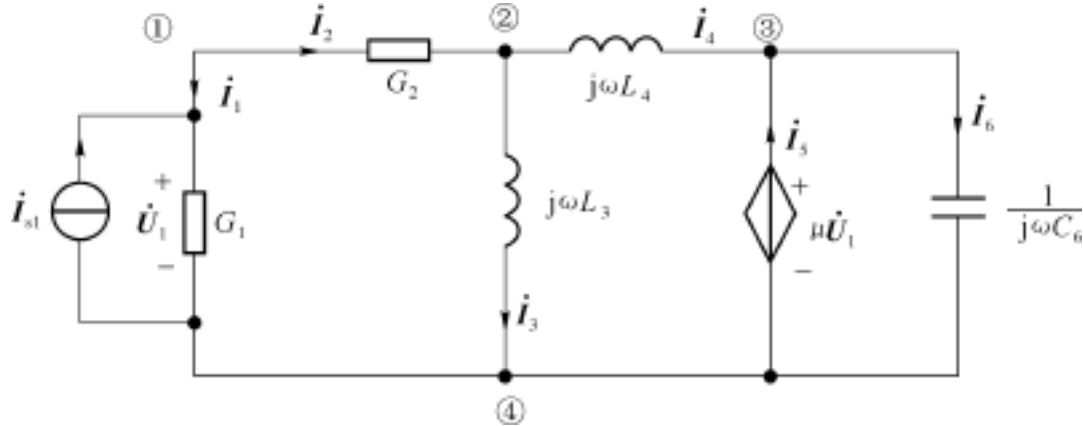


题图 12-6



题图 12-7

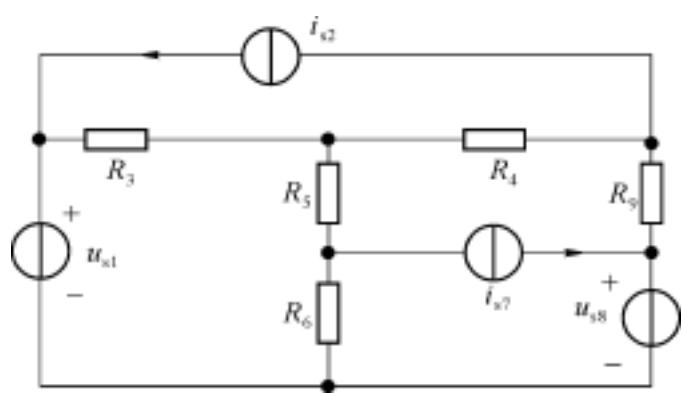
12-8 试列写题图 12-8 所示网络的改进节点方程。



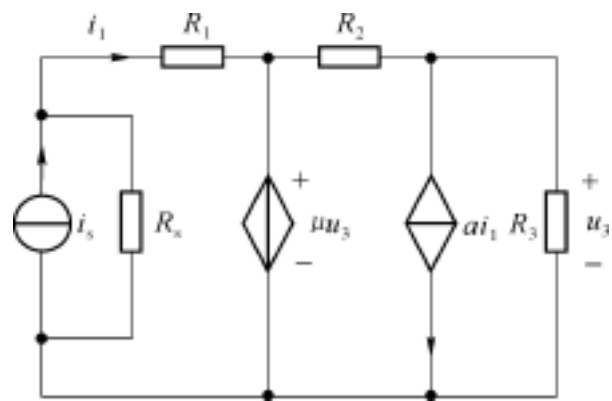
题图 12-8

12-9 试用基本回路分析的系统步骤列写题图 12-9 所示网络的回路方程。

12-10 $R_1, R_2, R_3, R_s, \mu, a, i_s$ 为已知, 试用基本回路分析求题图 12-10 所示网络中的电压 u_3 。



题图 12-9



题图 12-10

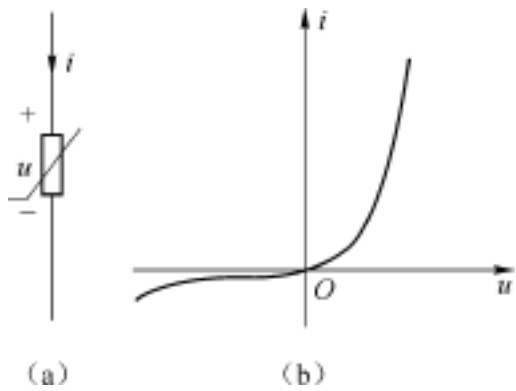
第十三章 简单非线性电阻电路

本书主要内容是线性电路分析,在这里加入简单非线性电阻电路分析一章,其主要目的是对非线性电路作初步介绍,提供两者之间的比较,以便更深刻地理解线性电路的性质及其分析方法。其次是因为目前非线性器件大量出现,非线性电路的研究日益受到重视。通过本章内容的学习,读者将初步了解非线性电阻电路的知识,以便于进一步学习有关知识。

本章首先介绍非线性电阻电路的基本概念,然后讨论简单非线性电阻电路的分析方法,包括简单电路的图解法,求输出信号与输入信号的转移特性曲线,小信号分析等。在分析过程中,将会发现,非线性电阻电路的分析,很多时候是通过等效的线性电路的计算进行的,由此可以看出线性电路分析方法在电路理论中的基础意义。

13.1 非线性电阻电路的基本概念

在 2.1 节中给出了电阻元件的一般定义,这里重述如下:如果一个二端元件在任一瞬间 t 的电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 两者之间的关系由 $u-i$ 平面(或 $i-u$ 平面)上一条曲线所决定,则此二端元件称为电阻元件。



常用的非线性电阻的符号如图 13-1(a)所示,非线性电阻的伏安关系如图(b)所示,它的伏安曲线上每一点的斜率是不同的,即斜率不再是一个常数。所以非线性电阻元件的伏安特性已不能简单地用一个参数来描述,而要用完整的曲线或表格来表示,或者用数学表达式来近似表示。例如半导体结型二极管的伏安关系可近似表示为

$$i = I_s [e^{u/U_T} - 1]$$

图 13-1 非线性电阻的符号及伏安关系

其中 I_s 和 U_T 是依赖于二极管的物理参数。

13.1.1 非线性电阻的分类

在 2.1 节中介绍了几种有特点的非线性电阻,同时简单地介绍了它们的特点。其中典型的 3 种非线性电阻器(见图 2-2 和图 2-3)的伏安曲线会出现非单值性,在某一电压值上,有可能出现多个电流值与之对应,或反之。在不同的情况下,分析方法有所不同,要尽量避开多值问题。所以,根据其伏安曲线的形状来分类。

1. 单调电阻器

当电阻的伏安曲线的形状严格单调变化时,既可表示 $i = f(u)$,也可表示为反函数 $u = g(i)$ 。如图 2-2 中的半导体结型二极管、变阻管等。

2 . 压控电阻器

当电阻的伏安曲线的形状如图 2 -3 (a) 中的隧道二极管时, 为了保持函数的单值性, 设电压 u 为自变量, 此时, 电流 i 有唯一的值与之对应, 反之则不然。压控电阻器可以表示为 $i = f(u)$ 。

3 . 流控电阻器

当电阻的伏安曲线的形状如图 2 -3 (b) 中的充气二极管时, 为了保持函数的单值性, 设电流 i 为自变量, 此时, 电压 u 有唯一的值与之对应, 反之则不然。流控电阻器可以表示为 $u = f(i)$ 。

从伏安曲线的形状来看, 还可以分为有双向性和无双向性。线性电阻的伏安曲线具有双向性, 即是关于原点对称的。非线性电阻的伏安关系绝大部分无双向性, 无双向性的非线性电阻器在使用中要注意方向性, 反向联接时, 其伏安特性会有完全不同的特点。

13 . 1 . 2 非线性电阻电路方程的列写

在线性电路方程中, 可以将方程分为两个部分, 一部分是与电路结构有关的基尔霍夫定律方程, 另一部分是支路特性方程。这里, 基尔霍夫定律对非线性电路仍是适用的, 非线性电路方程与线性电路方程的区别, 是由于元件伏安特性的不同而引起的。对于非线性电阻电路, 所列出的方程是一组非线性的函数方程。从下面例子可以看出, 列写非线性电阻电路方程的方法与方程的特点。

例 13 -1 已知电路如图 13 -2 所示, 其中非线性电阻的伏安关系用 $u_3 = 20 i_3^{1/2}$ 表示, 试列出电路方程。

解 首先写出各元件的支路特性方程

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 \\ u_2 = R_2 i_2 \\ u_3 = 20 i_3^{1/2} \end{cases}$$

(A)

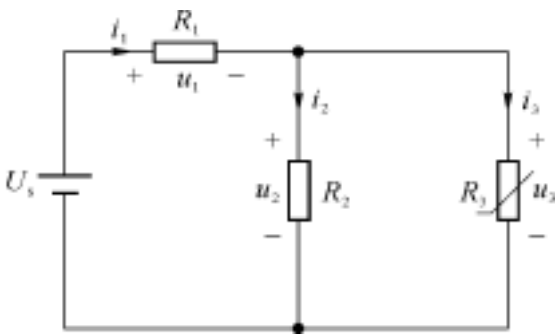


图 13 -2 例 13 -1 电路

然后, 根据 KCL 和 KVL, 可列出方程

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ u_1 + u_2 = U_s \\ u_2 = u_3 \end{cases}$$

(B)

将方程式(A)代入方程式(B), 合并整理, 可得电路方程

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) i_1 - R_2 i_3 = U_s \\ R_2 i_1 - R_2 i_3 - 20 i_3^{1/2} = 0 \end{cases}$$

所列出的非线性方程组, 只有某些简单的形式可以得到解析解。一般来说, 求非线性方程的解析解是比较困难的。因此, 用各种有效方法寻求方程的解是研究非线性电路的重要内容之一。

13 . 1 . 3 折线近似法与理想二极管

非线性电阻的伏安关系一般用曲线表示, 要写出它的数学表达式一般都很困难。即使写出, 还会遇到解非线性代数方程的困难。因此, 为了分析非线性电阻电路, 人们经常将非

线性电阻的伏安特性曲线用折线来近似，如图13 -3所示。由于直线方程易于写出，也易于

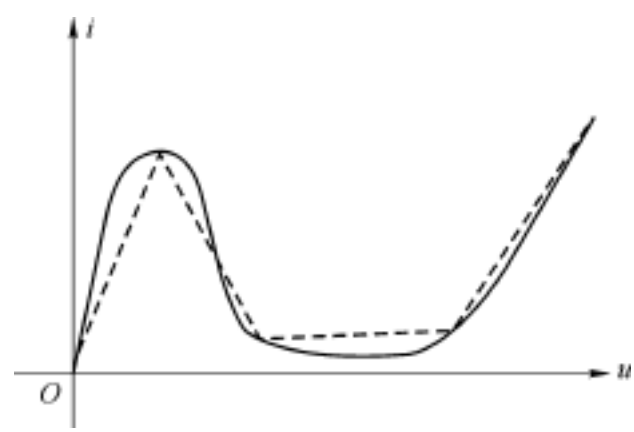


图 13-3 伏安特性曲线的折线近似

构造出一系列线性电阻模型，使其伏安关系与该曲线近似重合；这样就将非线性电阻电路的分析问题转变为线性电阻电路的分析问题，从而使计算大为简化。这种将非线性电阻的伏安关系用一条折线来近似的方法，叫作折线近似法。

对于图 13-4(a)所示 PN 结二极管的伏安特性曲线，可以用折线近似表示。一种方法是用 u 的负半轴和 i 的正半轴来近似，如图(c)所示。具有这种特性的元件叫作理想二极管，它的电路符号如图(b)所示。理想二极管的伏安特性可描述如下：

当 $u < 0$ 时， $i = 0$ ；当 $i > 0$ 时， $u = 0$

(13-1)

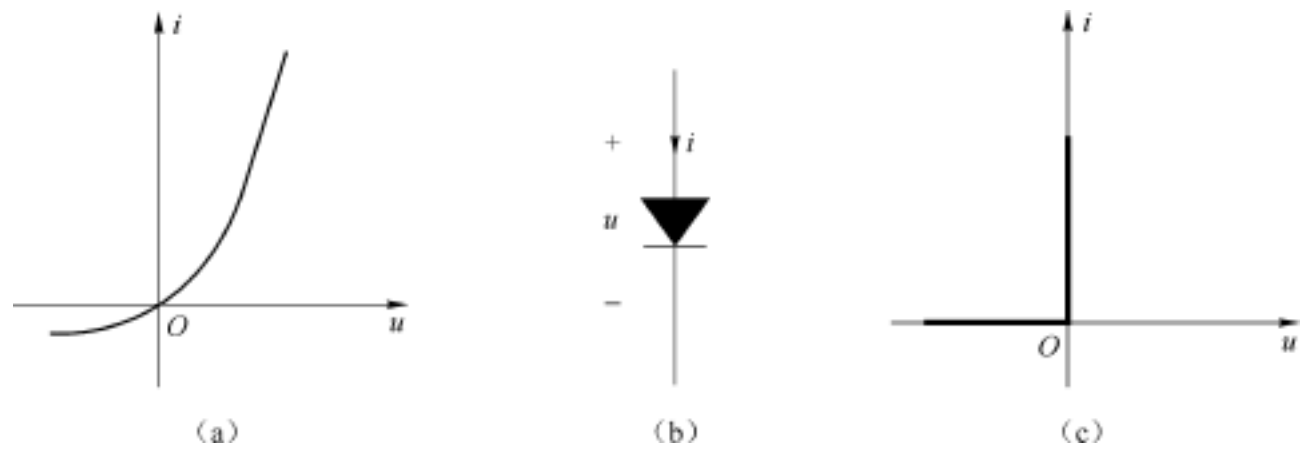


图 13-4 理想二极管的伏安特性

当理想二极管加上正向电压(又称正向偏置)时，电阻为零，二极管相当于短路，因而电压为零；加上反向电压(反向偏置)时，电阻为无限大，二极管相当于开路，因而电流为零。

理想二极管是一种电路模型，可以用它来近似表示电子器件的某些特性，或者再与其他理想元件连接后，共同作为某些电子器件的电路模型。

13 2 非线性电阻的串联、并联与混联

本节讨论非线性电阻的串联、并联与混联的分析方法。

设有两个非线性电阻串联，如图 13 -4(a)所示。它们的特性曲线分别如图(b)中曲线 R_1 、 R_2 所示(这里的 R_1 、 R_2 不是常数，只是电阻元件的标记)。现在来确定它们串联后的伏安特性曲线，亦即求出串联等效电阻的特性曲线。

首先应用 KVL 写出

$$u = u_1 + u_2$$

再根据串联电路的特点，可得

$$i = i_1 = i_2$$

因此，只要对每一个给定的电流值 i ，将它在 R_1 和 R_2 特性曲线上所对应的电压值 u_1 和

u_2 相加,便可得到 R_1 与 R_2 串联后的等效伏安特性曲线,如图 13-5(b)中虚曲线所示意的。

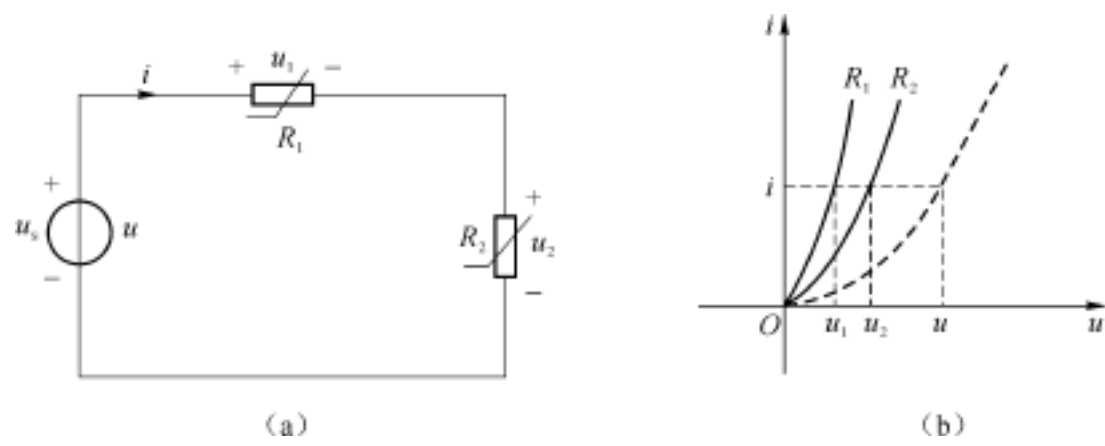


图 13-5 非线性电阻的串联

对非线性电阻并联的电路可作类似处理。设电路如图 13-6(a)所示,两非线性电阻的伏安特性曲线分别如图(b)中的 R_1 、 R_2 所示,由 KCL 和 KVL 可写出

$$i = i_1 + i_2, \quad u = u_1 = u_2$$

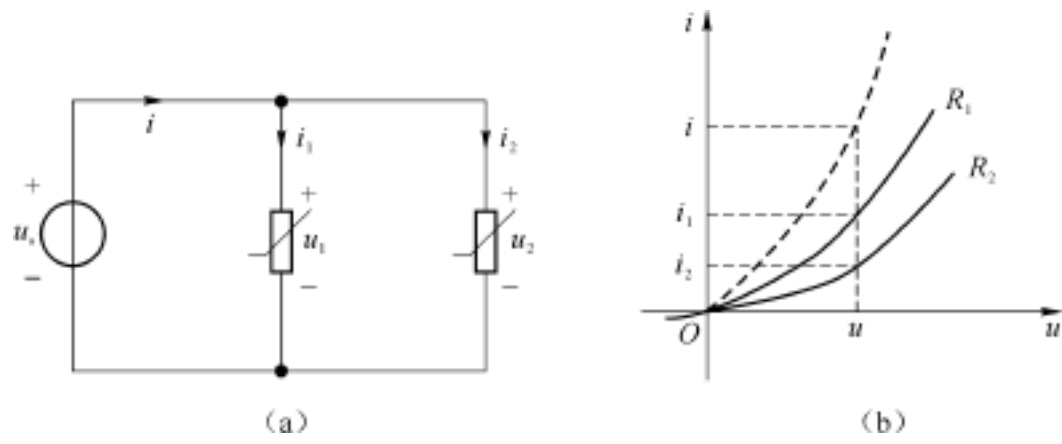


图 13-6 非线性电阻的并联

因此,对每一给定的电压值 u ,将两个电阻的伏安特性曲线上所对应的电流值 i_1 和 i_2 相加,便可得到并联后的伏安特性曲线,如图 13-6(b)中虚曲线所示意的。

将以上方法推广到 m 个电阻元件的串联或并联的情形,其中可包括非线性电阻、线性电阻。在同一坐标平面内,画出每个电阻的伏安特性曲线,对于串联电路,对每一给定的电流值 i ,将各电阻对应的电压值 u_1, u_2, \dots, u_m 相加,便可得到串联电路的等效特性曲线。对于并联电路,对每一给定的电压值 u ,将对应的电流值 i_1, i_2, \dots, i_m 相加,便可得到并联电路的等效特性曲线。

当电路中含有独立电源时,仍然可以应用图解法。只要画出独立电源的伏安特性曲线,并参与图解。

混联电路也可用图解法。如果混联电路由两个非线性电阻并联后再与另一个非线性电阻串联而成,可先求出并联部分的等效特性曲线,再按串联电路图解,求得混联等效电阻的等效特性曲线。

例 13-2 图13-7(a)表示一个理想电压源、一个线性电阻和一个理想二极管的串联电路,三个元件的伏安特性曲线如图(b)所示,试画出这一串联电路的特性曲线。

解 这三个元件的特性曲线分别如图(b)中曲线 R_1, D_2, U_0 所示。在 $i > 0$ 即伏安平面

的上半平面,用串联电路的图解规则便可求出等效伏安特性曲线。而下半平面因理想二极管的电流为零,串联支路电流一定为零,因而不符合串联图解规则。

这里可先求出 $u_1 + u_3$ 的等效特性曲线,只需要把 D_2 的伏安特性曲线向右移动 U_0 ,如图(c)所示;再求出 $u = u_1 + u_2 + u_3$ 的等效特性曲线,如图(d)所示。

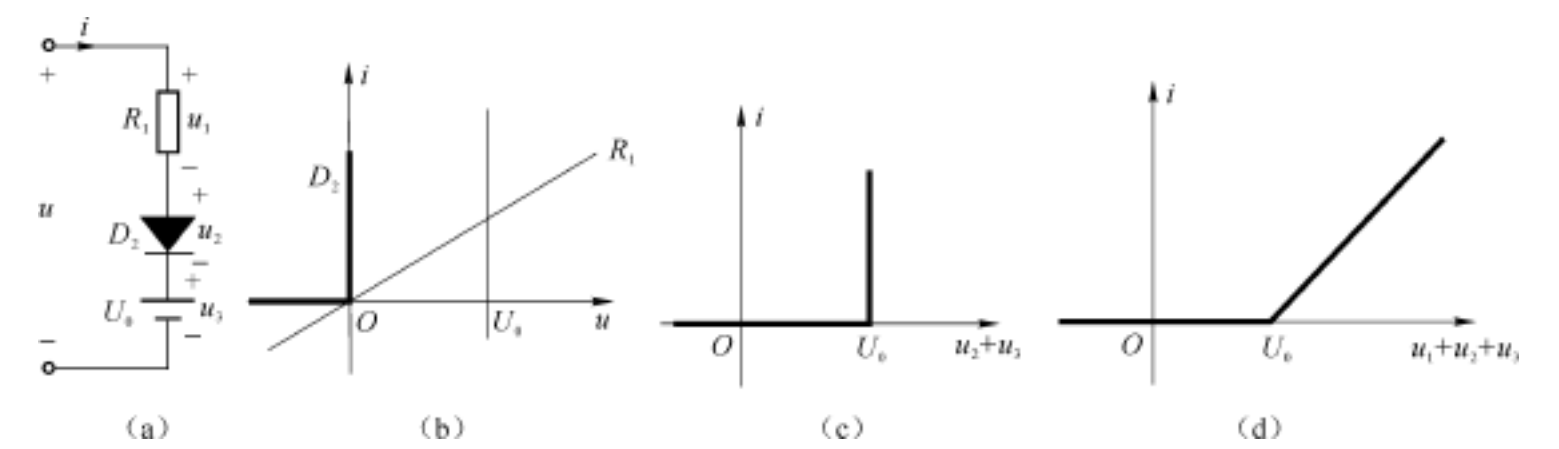


图 13-7 例 13-2

如图(c)所示伏安特性曲线,是用一个理想二极管和一个理想电压源 U_0 串联而成的。其中 U_0 是图 13-4(a)所示 PN 结二极管的一个“死区”电压。当其正向偏置大于 U_0 时,二极管才会导通。其特性可描述为:

当 $u < U_0$ 时, $i = 0$; 当 $i > 0$ 时, $u = U_0$ (13-2)

和理想二极管相比,图(c)所示的伏安特性曲线,更接近于实际的 PN 结二极管的伏安特性。

事实上,图(d)给出的特性曲线更接近于 PN 结二极管特性曲线。图(d)中画出的电路模型,不仅考虑到二极管的死区电压 U_0 ,而且考虑到在 $u > U_0$ 时,PN 结二极管上的电压还随电流的增大而增大,斜线段的斜率的倒数,就是串联的等效电阻 R_1 的电阻值,其等效伏安特性可描述为:

当 $u < U_0$ 时, $i = 0$; 当 $i > 0$ 时, $u = U_0 + R_1 i$ (13-3)

上面所举例子中,各非线性电阻元件的特性曲线都是单调变化的,用图解法很容易得到其等效特性曲线。当非线性电阻的伏安特性曲线是非单调变化时,情况较复杂。这里不作介绍。

13 3 图解法

上节所述求串并联电阻等效伏安特性的方法,即是图解法的一个简单应用。本节所介绍的图解法,是用作图的方式来得到非线性电阻电路的解,即用图解法来决定电路的工作点、转移特性曲线,用图解方式进行方程的消元和代入等运算。这是求解非线性方程组的重要方法之一。

13 3 .1 负载线法

对于只含一个非线性电阻的电路,如图 13-8(a)所示,根据戴维南定理,对非线性元件以外的线性有源二端网络,可以用一个电压源与电阻的串联电路代替。设非线性电阻的伏安关系为 $i = f(u)$,欲求非线性电阻两端的电压 u 和电流 i ,即决定电路的工作点。

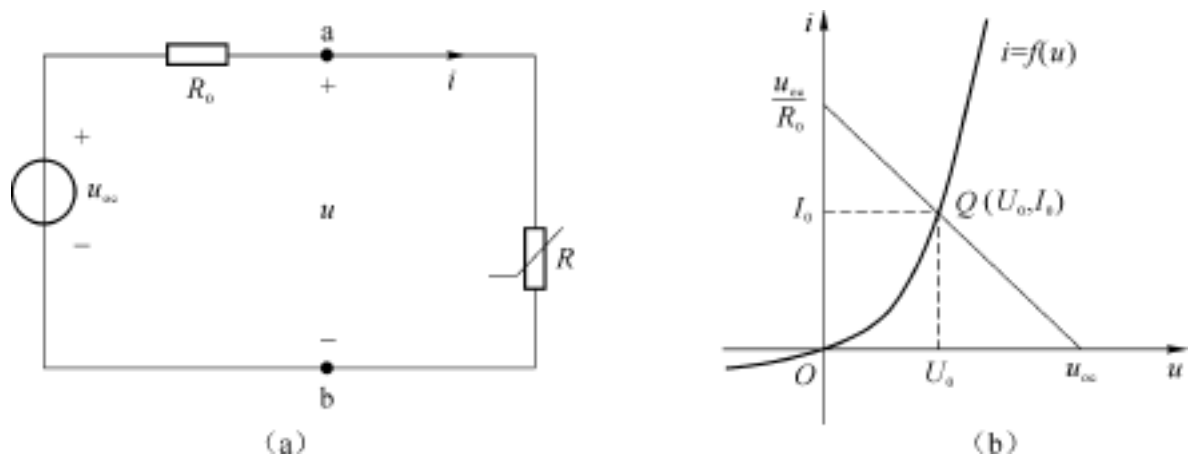


图 13-8 负载线法求工作点

写出图 13-8(a)所示电路的方程

$$i = f(u) \tag{A}$$

$$u_{oc} = R_0 i + u \tag{B}$$

u 、 i 两个未知量必须同时满足式(A)和式(B)。如果 i 能表示成 u 的显函数,消去 i , 则:

$$u_{oc} = R_0 f(u) + u$$

当 $f(u)$ 是简单函数式时,可用解析法求得 u 、 i 的值。

通常, $i = f(u)$ 用伏安平面上的曲线表示,如图 13-8(b)所示,可用图解法求解 u 和 i ,将式(B)写成:

$$i = -\frac{1}{R_0} u + \frac{1}{R_0} u_{oc} \tag{C}$$

式(C)是电路中 a、b 以左电路的伏安特性,画在图 13-8(b)中,是一条直线。与非线性电阻特性曲线的交点为 Q , Q 点的坐标是 (U_0, I_0) , U_0 、 I_0 的值同时满足式(A)和式(B),这就是方程的解答。交点 $Q(U_0, I_0)$ 通常称为非线性电阻电路的工作点,直线反映线性支路的伏安特性,称为负载线。所以这里称为负载线法。

13 3 2 双负载线法

当电路中含有一个三端非线性电阻元件时,可用双负载线法来确定其工作点。双负载线法应用最广泛的例子,即是晶体管放大电路工作点的确定。

图 13-9(a)所示为简单晶体管放大电路的直流通路,图(b)和图(c)分别为晶体管输入特性曲线和输出特性曲线。输入特性曲线描述了输入电流 i_B 与电压 u_{BE} 两个电量之间的关系。输出特性曲线描述了 i_C 、 u_{CE} 、 i_B 三个电量之间的关系,由于是三个变量的关系,所以用一族曲线来表示,在一个电流 i_B 下画出 i_C 和 u_{CE} 的关系,为其中一条曲线。 R_B 和 R_C 均为线性电阻,由图(a)可写出方程

$$u_{BE} = E_C - i_B R_B$$

此方程称为输入负载线方程。还可写出方程

$$u_{CE} = E_C - i_C R_C$$

称为输出负载线方程。由此画出输入负载线于图(b),画出输出负载线于图(c)。图(b)中输

在分析晶体管放大电路时,设交流信号源为零时的等效电路,称为直流等效电路或直流通路。

入负载线与输入特性曲线的交点决定了电流 I_{BQ} 和电压 U_{BEQ} , 由输出负载线与输出特性曲线族中 $i_B = I_{BQ}$ 的那条曲线的交点 Q 决定了电流 I_{CQ} 和电压 U_{CEQ} , 如图(c)所示。 Q 点即是电路的工作点。 一组电压电流参数 I_{BQ} 、 I_{CQ} 、 U_{CEQ} 称为工作点参数。

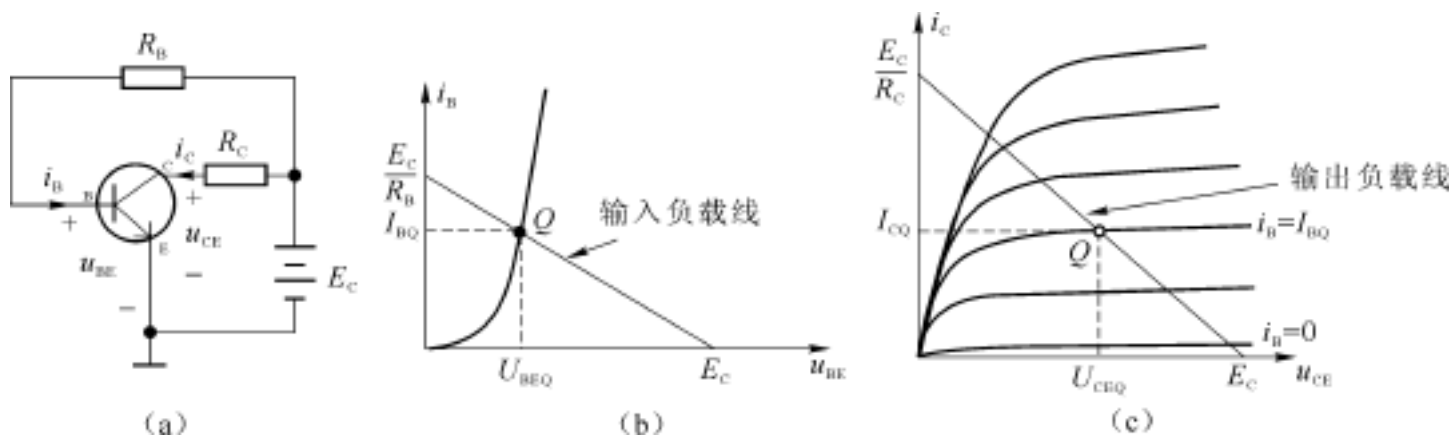


图 13-9 双负载线法决定工作点

13 3 3 求转移特性曲线

描述电路响应与激励之间关系的曲线称为转移特性曲线。在这里,激励是电压或电流,响应也可以是电压或电流。用图解法求出简单非线性电阻电路的转移特性曲线,并可由转移特性曲线和激励信号的波形图求出响应的波形图。

例 13-3 已知电路及参数如图13-10(a)所示,二极管伏安特性曲线如图(c)所示,输入电压 u_i 如图(d)所示。

- (1) 试求图示电路输出电压 u_0 对输入电压 u_i 的转移特性曲线。
- (2) 试求输出电压 u_0 的波形。

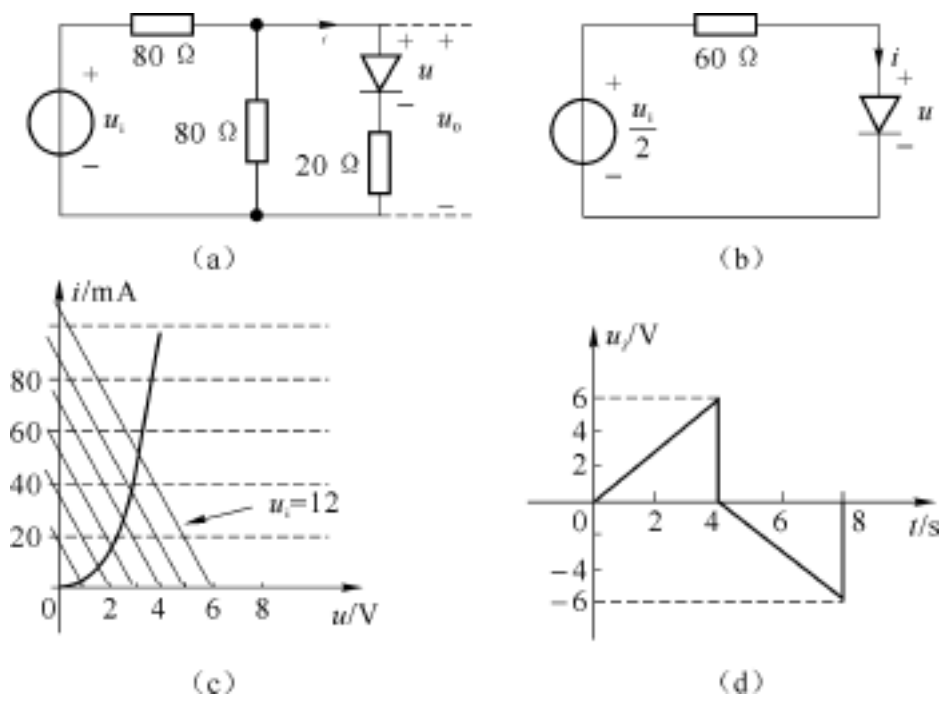


图 13-10 例 13-3 电路与工作点

解 电路中除二极管以外的线性电路部分,可用戴维南等效电路代替,如图 13-10(b)所示。由此可得负载线方程为:

$$i = -\frac{1}{60} u + \frac{u_i}{120}$$

其中 u_i 是时间的函数,如图 13 -10(d)。对于每一个 t 时刻的 u_i ,可画出一条负载线。由于负载线的斜率是不变的,可画出一簇平行负载线,即在不同的输入电压下,二极管伏安特性曲线是一簇平行线如图(c)所示。负载线与二极管伏安特性曲线的交点即为相应的一组工作点。

当 u_i 为正值时,由图(c)的工作点可得二极管的电压 u 与电流 i 值如表 13 -1 中所列。根据图(a)再写出输出电压 $u_0 = u + 20 i$;可算出输出电压 u_0 ,如表中最后一列所示。

表 13-1 例 13-3 中二极管的电压 u 与电流 i 值

u_i / V	u / V	i / mA	$20 i$ V	u_0 / V
0	0	0	0	0
2	0.7	4	0.08	1.78
4	1.3	11	0.22	1.52
6	1.7	20	0.40	2.10
8	2.1	31	0.62	2.72
10	2.4	42	0.84	3.24
12	2.6	56	1.12	3.72

当 u_i 为负值时,二极管电流为零,因此,无论 u_i 为何值,满足

$$u_0 = 0.5 u_i$$

由此可画出转移特性曲线,如图 13 -11(a)所示。

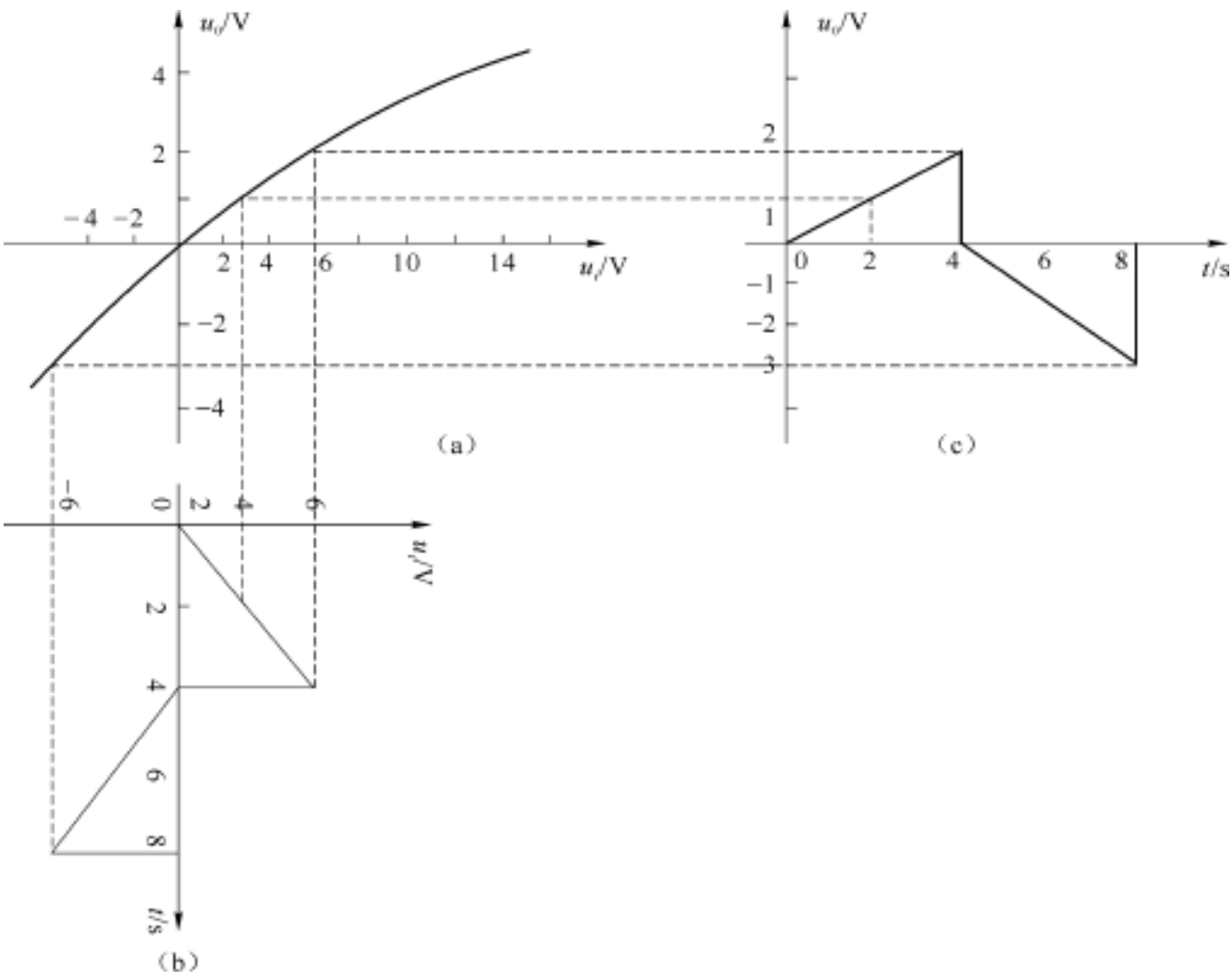


图 13 -11 例 13 -3 转移特性曲线与输出波形

得到了电路的转移特性曲线,就可用图解法求得在某一输入波形下的输出波形。本题要求输入为锯齿波如图 13-10(d)所示,用作图方式求出输出波形。为此,可把已知的输入波形重绘于图 13-11(b),为便于用图解法求得输出波形,输入波形的坐标由正常位置顺时针旋转了 90°;图(c)表示的是输出波形与时间的坐标关系。在图(b)中,设在某一时刻 t_1 电压为 u_{i1} ,作垂线相交于图(a)中的转移特性曲线。可知此时的输出电压为 u_{o1} 。再作水平线连到图(c),由此可确定图(c)中输出波形在 t_1 时的值。再设在某一时刻 t_2 电压为 u_{i2} ,……这样可逐点画出输出电压波形,如图(c)所示。

13.4 小信号分析

在某些电子电路中,交流信号的变化幅度很小,在这种情况下,可以围绕工作点建立一个局部线性模型。对小信号来说,可以根据这种线性模型,运用线性电路的分析方法来研究非线性电阻电路。

现以图 13-12(a)的电路为例来说明小信号分析的意义和思路。图中 R_s 为线性电阻,可理解为信号源内阻, E 为独立直流电压源, $u_s(t)$ 为交流信号源,通常,当 $|u_s(t)| \ll E$ 时,可按小信号分析。 R 为非线性电阻,可视为电路的负载电阻,其伏安特性如图 13-12(b)的曲线所示,函数表示为 $i = f(u)$ 。

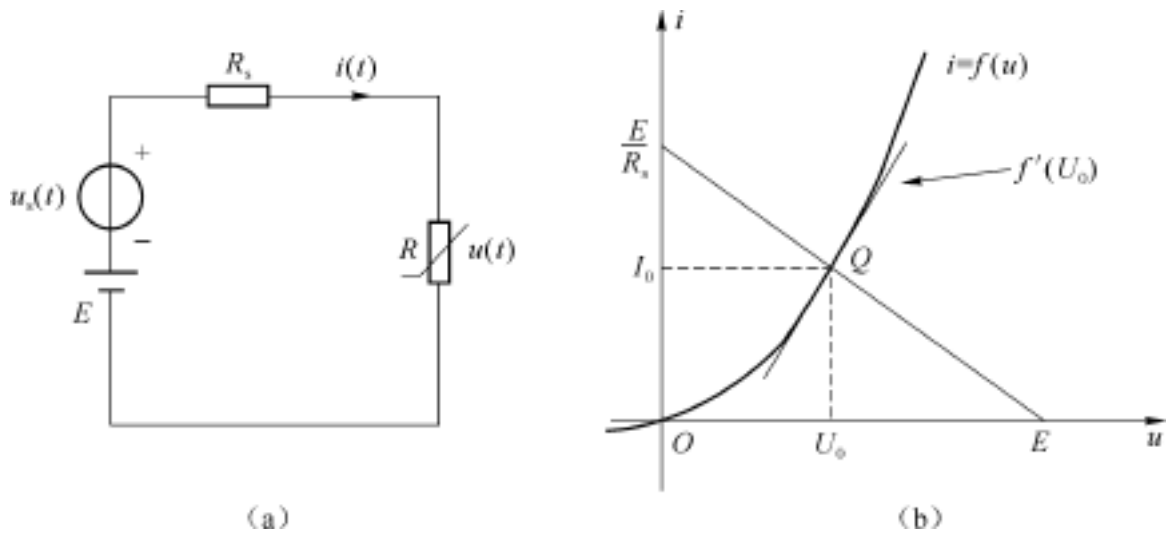


图 13-12 小信号分析

首先,根据 KVL 可列写电路的方程:

$$E + u_s(t) - R_s i(t) = u(t) \tag{13-4}$$

现在来确定电路的工作点,因为 $|u_s(t)| \ll E$,可以由直流电源来确定工作点。先令 $u_s(t) = 0$,电路方程为

$$E - R_s i(t) = u(t) \tag{13-5}$$

即是负载线方程。由 E 和 R_s 的值可画出负载线,如图 13-12(b)所示。负载线和曲线的交点即为工作点 $Q(U_0, I_0)$ 。

再将小信号作用于电路,由于 $u_s(t)$ 足够小,仅对直流电压 E 引起一很小的扰动,工作点沿曲线 $i = f(u)$ 也引起一很小的移动,相当于在恒定电压 U_0 的基础上附加一小信号电压 $u_1(t)$;在恒定电流 I_0 的基础上附加一小信号电流 $i_1(t)$,可写出方程。

$$u(t) = U_0 + u_1(t) \tag{13-6}$$

$$i(t) = I_0 + i_1(t) \tag{13-7}$$

其中 $u_1(t)$ 和 $i_1(t)$ 在所有时刻均为很小的数值。将伏安特性解析式 $i = f(u)$ 在工作点 $Q(U_0, I_0)$ 附近展开成泰勒级数并取前面两项, 得到

$$i(t) = f(u) = f(U_0) + f'(U_0)[u(t) - U_0] = I_0 + f'(U_0)u_1(t)$$

则有
$$i(t) - I_0 = f'(U_0)u_1(t)$$

即
$$i_1(t) = f'(U_0)u_1(t) \tag{13-8}$$

式中 $f'(U_0)$ 是非线性电阻 R_2 的伏安特性曲线在工作点 $Q(U_0, I_0)$ 处的斜率, 如图 13-12(b) 所示。令

$$f'(U_0) = G_d = 1/R_d$$

G_d 称为非线性电阻 R_2 在工作点 $Q(U_0, I_0)$ 处的小信号电导或动态电导, R_d 是工作点 $Q(U_0, I_0)$ 处的小信号电阻或动态电阻。对小信号电源 $u_s(t)$ 来说, 非线性电阻 R_2 相当于一线性电阻 R_d 而且有

$$i_1(t) = G_d u_1(t) \tag{13-9a}$$

$$u_1(t) = R_d i_1(t) \tag{13-9b}$$

即小信号电流 $i_1(t)$ 与小信号电压 $u_1(t)$ 间呈线性关系。

为了计算 $u_1(t)$ 和 $i_1(t)$, 现在回到原电路的 KVL 方程即式 (13-4), 并将式 (13-6)、(13-7) 代入, 则可得到

$$E + u_s(t) - R_s[I_0 + i_1(t)] = U_0 + u_1(t) \tag{13-10}$$

再把式 (13-5) 的关系代入上式, 则可得到联系 $i_1(t)$ 和 $u_1(t)$ 之间的关系方程

$$u_s(t) - R_s i_1(t) = u_1(t) \tag{13-11}$$

由式 (13-11) 和式 (13-9) 可以容易地得到

$$\begin{cases} i_1(t) = \frac{u_s(t)}{R_s + R_d} \\ u_1(t) = R_d i_1(t) = \frac{R_d u_s(t)}{R_s + R_d} \end{cases} \tag{13-12}$$

由式 (13-12) 可以画出等效电路如图 13-13 所示, 此电路称为小信号等效电路。不难看出, 这是一个线性电路, 因此说, 小信号条件下, 可将非线性分析转换成线性分析。

这个线性电路只保留了实际变量中的小信号分量 $u_1(t)$ 和 $i_1(t)$ 。这种小信号等效电路对含有非线性元件的电子电路的分析是很有意义的。下面再看一个具有实际意义的例子。

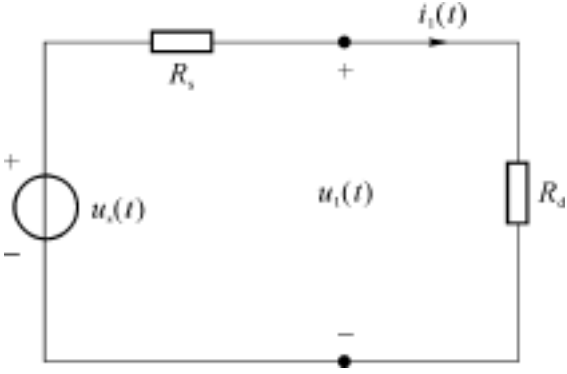


图 13-13 小信号等效电路

例 13-4 图13-14(a)所示为一个稳压电路, 当 12V 电源电压在一定范围内波动时, 负载电压 U_L 仍能近似稳定不变。图中与 12V 电压源串联的交变电压源 u_r , 即表示电压的波动部分, 称为纹波电压。稳压作用是靠一种特殊的二极管, 称为“齐纳二极管”来完成的, 因此,

这种二极管又叫稳压管。它的特性曲线 $i_z = f(u_z)$, 如图 13-14(b) 所示。在它的反向特性部分, 有一段曲线近似地具有电压源的特征, 亦即: 电流变化时, 电压几乎不变。这段曲线所对应的范围正是稳压管的工作区。因此, 如能使稳压管的工作点在此区域内, 那么与负载并联的这个稳压管, 犹如一个理想电压源, 起着稳定负载电压的作用。为此, 必须正确地选用稳压管的工作点。

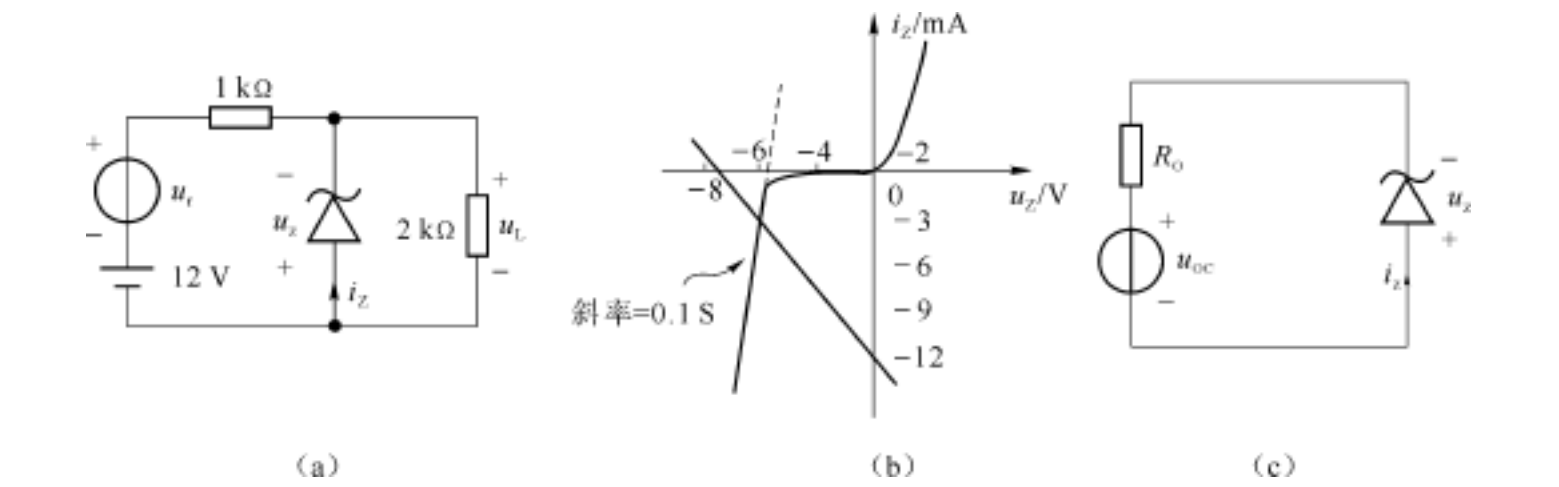


图 13-14 例 13-4

解 设 $u_r = 0$, 求稳压管以外电路的戴维南等效电路, 得 $u_{oc} = 8\text{ V}$, $R_0 = 2/3\text{ k}$, 如图(c)。由此可得负载线方程为

$$u_z = -8 - \frac{2}{3} \times 10^3 i_z$$

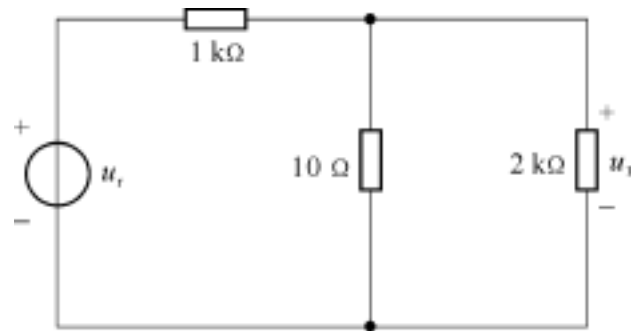


图 13-15 例 13-4 小信号等效电路

画出负载线如图 13-14(b) 中的直线, 与稳压管的伏安特性曲线交于 $(-6\text{ V}, -3\text{ mA})$, 此即稳压管的工作点, 可见工作点在稳压管的工作区内。求得工作点后, 可以用小信号分析法求 u_r 在输出端产生的电压 u_1 。首先要求出在工作点处稳压管的动态电阻。由工作点处的斜率可知 $R_d = 10$ 。所得小信号等效电路模型如图 13-15 所示, 可以方便地求出电压 u_1 与电压 u_r 的关系

$$u_1 = \frac{2000}{2000 + 10 + 1000} \cdot u_r = 10^{-2} u_r$$

由此可知, 电源电压的波动只能在输出端产生百分之一的影响。 u_r 若为 1 V , 则 u_1 仅为 0.01 V 。如果工作点不在稳压管的工作区内, 或是纹波电压幅度太大, 以致工作范围超出稳压管的工作区, 就不能使用小信号等效电路。本电路的稳压作用也就被破坏了。

求解非线性方程常用的方法, 还有分段线性迭代法, 牛顿—拉夫逊迭代法等。这些已超出本课程内容范围, 不再赘述。

习 题 十 三

13-1 已知某些电阻元件的特性曲线由下列方程描述, 试指出它们是线性的还是非线性。

性的,电压控制型的还是电流控制型的,双向的还是单向的。

- (1) $u - 10i = 0$

(2) $i = e^{-u}$

(3) $u = i^2$

(4) $i = \text{th } u$
- (5) $i = \ln(u + 2)$

(6) $u = 2i + 4$

(7) $\begin{cases} i = au^3 & u \geq 0 \\ i = 0 & u < 0 \end{cases}$

13-2 设有一个非线性电阻元件,其伏安特性可用下式表示:

$$u = f(i) = 30i + 0.3i^3$$

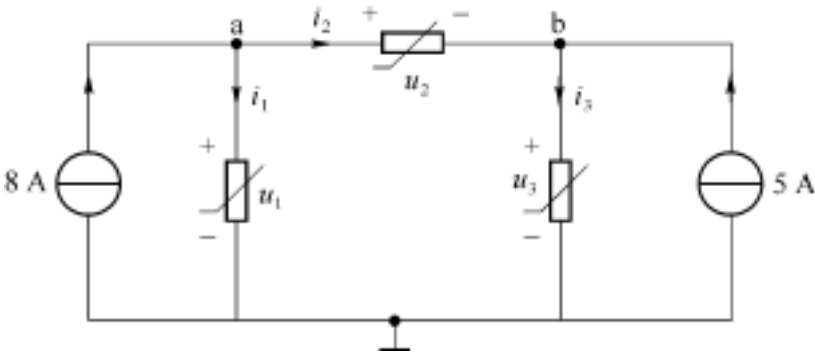
- (1) 试分别求出流过此电阻的电流为 $i_1 = 2\text{A}$, $i_2 = 2\sin 314t\text{A}$ 和 $i_3 = 10\text{A}$ 时,对应的电压 u_1 , u_2 和 u_3 。 u_2 的频率为多少? (提示:利用三角恒等式 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$)

(2) 若设电流 $(i_1 + i_2)$ 所对应的电压为 u_{12} ,试问 $u_{12} = u_1 + u_2$ 吗? 设 ki_2 (k 为常数) 所对应的电压为 u_2 ,试问 $u_2 = ku_2$ 吗?

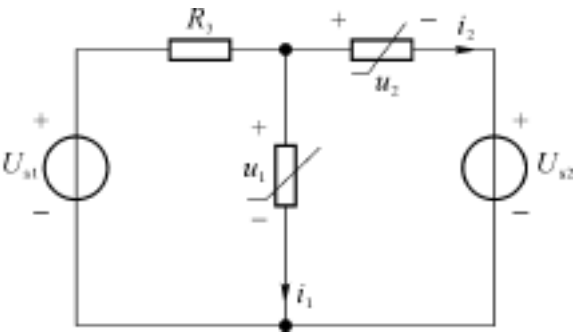
(3) 如果忽略式中的 i^3 项,即把电阻看作 30Ω 的线性电阻,当 $i = 10\text{mA}$ 时,计算电压时产生的误差是多少?

13-3 题图 13-3 所示电路中各非线性电阻的伏安关系为 $i_1 = u_1^3$, $i_2 = u_2^2$, $i_3 = u_3^{3/2}$,试列出电路的节点电压方程组。

13-4 题图 13-4 电路中各非线性电阻的伏安关系为 $i_1 = u_1^2$, $i_2 = u_2^2$,试列出电路方程。

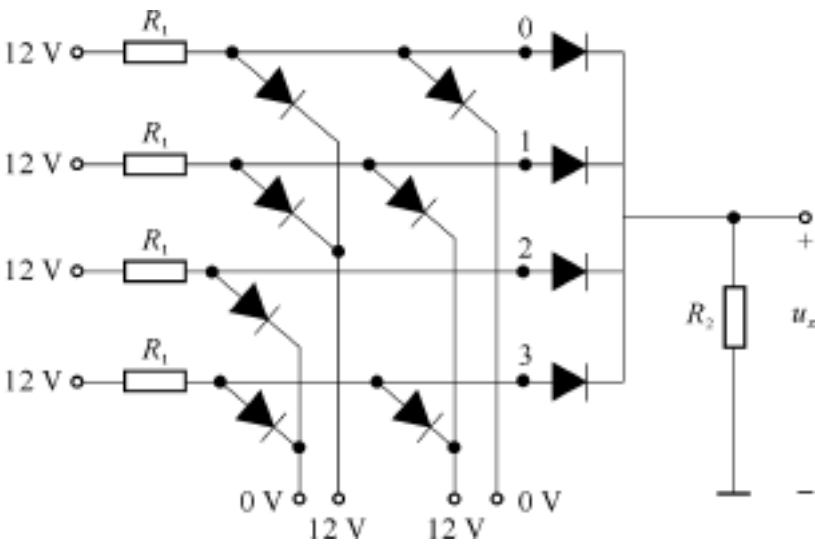


题图 13-3



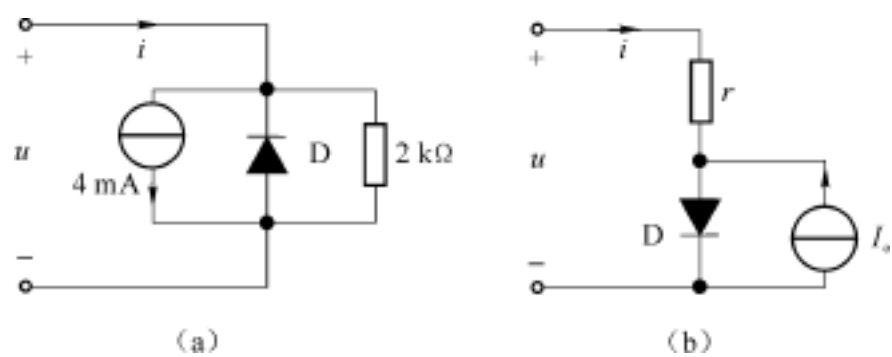
题图 13-4

13-5 在题图 13-5 中的二极管是理想的,求 0,1,2,3 点的对地电压和输出电压 u_x 。



题图 13-5

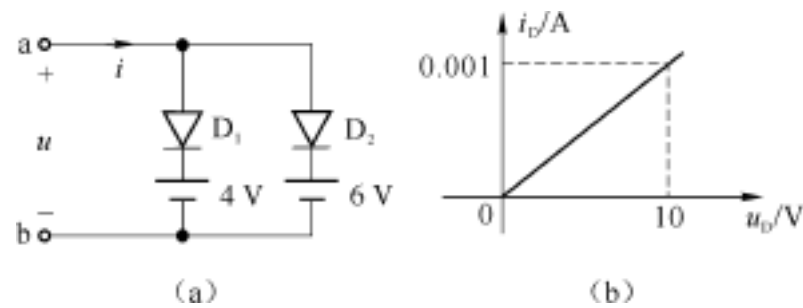
13-6 用图解法求题图 13-6 中两种理想二极管网络的等效伏安特性曲线。



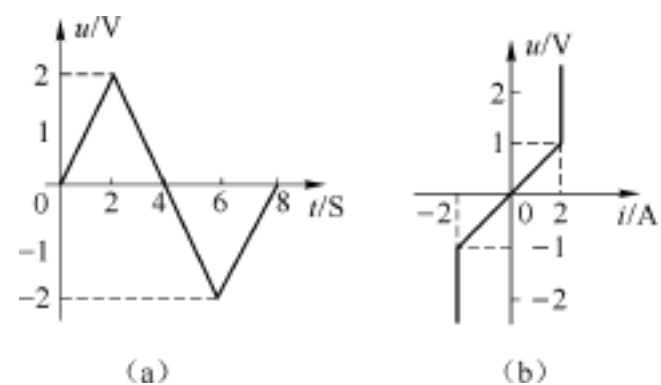
题图 13-6

13-7 题图 13-7(a)电路中 D_1 和 D_2 是二极管,其近似的伏安特性曲线如图(b)所示。求 a,b 两端等效的伏安特性曲线。

13-8 把题图 13-8(a)中所示波形的电压 $u(t)$ 施加于电阻上,电阻元件的伏安特性如图(b)所示。试求电流 $i(t)$ 的波形。



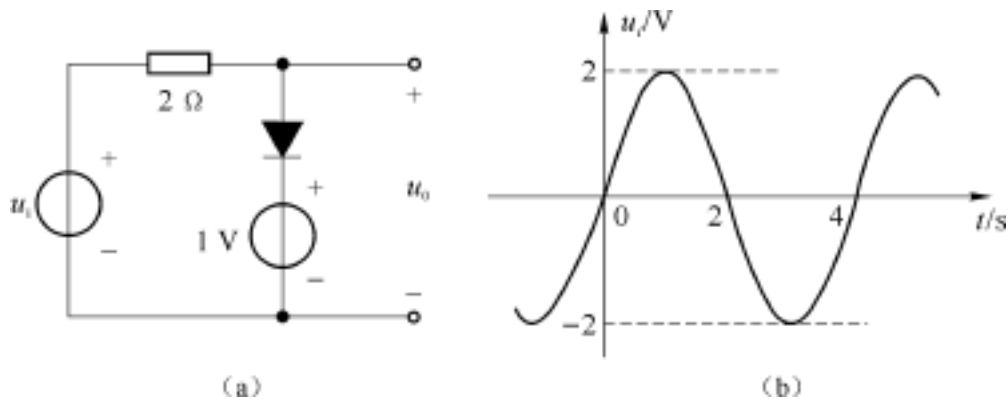
题图 13-7



题图 13-8

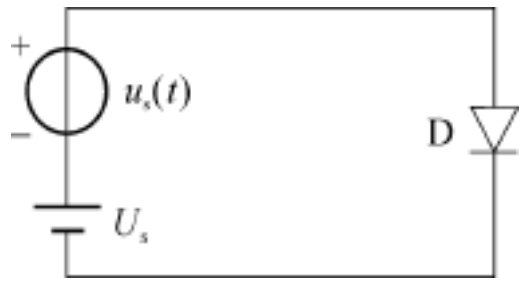
13-9 电路如题图 13-9(a)所示,输入电压随时间而变化,二极管是理想的。

- (1) 求输出电压 u_0 与输入电压 u_i 的转移特性曲线。
- (2) 当输入 u_i 为正弦波时,如图(b)所示,画出输出电压 u_0 的波形。



题图 13-9

13-10 题图 13-10 中晶体二极管的伏安特性为 $i = I_0 (e^{u/U_0} - 1)$, 其中 $I_0 = 0.05 \text{ mA}$, $U_0 = 0.026 \text{ V}$, 信号源 $u_s(t) = 10^{-3} \sin 2 \times 50 t \text{ V}$, 求当直流电压 U , 为 0.1 V 时的小信号等效电路。



题图 13-10

附录 A 复数的表示与运算

一、复数

在电路分析中虚数单位为 j, 即有 $j^2 = -1$, $\sqrt{-1} = j$ 。复数的代数形式为

$$F = a + j b$$

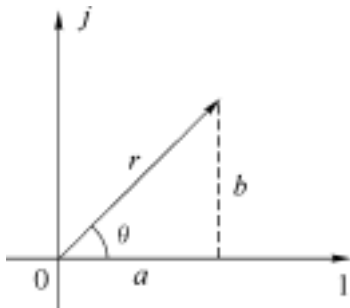
其中, $\text{Re}[F] = a$ 称为复数的实部 ($\text{Re}[\]$ 为取实部的记号);

$\text{Im}[F] = b$ 称为复数的虚部 ($\text{Im}[\]$ 为取虚部的记号)。

复数的指数形式和极坐标形式分别为

$$F = r e^{j \theta} = r \angle \theta$$

其中 r 称为复数的模数, θ 称为复数的幅角。将复数在复平面上表示如图 A-1 所示, 参数 r 、 θ 、 a 、 b 之间的关系在图中清楚地表示为



$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 + b^2, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta &= \arctan \frac{b}{a} \\ a &= r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta \end{aligned}$$

二、复数的运算

这里用到四则运算, 由运算特点要将复数用不同形式表示。

复数的不同形式的转换也是经常遇到的运算, 可用计算器完成。

图 A-1 复平面

1. 复数用代数形式表示

$$F_1 = a_1 + j b_1, \quad F_2 = a_2 + j b_2$$

用于加法:

$$F_1 + F_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

减法:

$$F_1 - F_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

即实部与实部相加(减), 虚部与虚部相加(减)。

2. 复数用指数或极坐标形式表示

$$F_1 = r_1 \angle \theta_1 = r_1 e^{j \theta_1}$$

$$F_2 = r_2 \angle \theta_2 = r_2 e^{j \theta_2}$$

用于乘法:

$$F_1 \cdot F_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 \cdot r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

除法:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2) = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

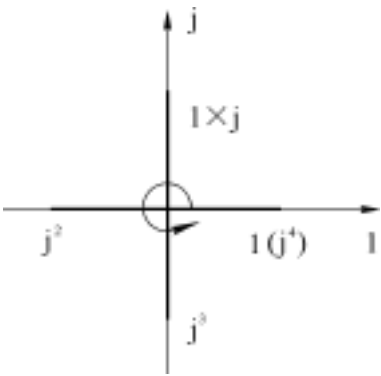
即模数相乘(除), 幅角相加(减)。

三、常用运算举例

$$\begin{aligned} 3 + j4 &= 5 \angle 53.1^\circ, & 4 + j3 &= 5 \angle 36.9^\circ \\ -4 + j3 &= 5 \angle 143.1^\circ, & -4 - j3 &= 5 \angle 216.9^\circ \\ 1 + j1 &= \sqrt{2} \angle 45^\circ, & 1 - j1 &= \sqrt{2} \angle -45^\circ \end{aligned}$$

表 A-1 中列出的运算式与图 A-2 是对应的。

表 A-1 运算式举例

<div>$1 \times j = 1\angle 90^\circ$$1 \times j \times j = -1 = 1\angle 180^\circ$$1 \times j \times j \times j = -j = 1\angle -90^\circ$$1 \times j \times j \times j \times j = 1\angle 0^\circ$$\frac{1}{j} = -j = 1\angle -90^\circ$</div>	<div></div> <div>图 A-2 表 A-1 的运算图示</div>
---	---

附录 B 复变函数的几个定理

定理 1 若 为实数, $A(t)$ 为复变函数, 则有

$$\operatorname{Re}[A(t)] = \operatorname{Re}[A(t)]$$

定理 2 若 $A(t)$ 和 $B(t)$ 为复变函数, 则有

$$\operatorname{Re}[A(t) + B(t)] = \operatorname{Re}[A(t)] + \operatorname{Re}[B(t)]$$

定理 3 设 A 为复常数, 表示为 $A = Ae^{j\theta}$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Re}[Ae^{j\omega t}] = \operatorname{Re}\left[\frac{d}{dt}Ae^{j\omega t}\right] \tag{1}$$

$$= \operatorname{Re}[j\omega Ae^{j\omega t}] \tag{2}$$

以上关系式(1)说明取实部和求导运算的次序可以交换。式(2)说明在时域对 t 求导反映在频域为复常数乘以 $j\omega$ 。

证明 因为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\operatorname{Re}[A \cdot e^{j(\omega t + \theta)}] &= \frac{d}{dt}A\cos(\omega t + \theta) = -A\sin(\omega t + \theta) \\ &= \operatorname{Re}[j\omega Ae^{j(\omega t + \theta)}] = \operatorname{Re}[j\omega Ae^{j\omega t}] \\ &= \operatorname{Re}\frac{d}{dt}[Ae^{j\omega t}] \end{aligned}$$

定理 4 设 A 、 B 为复常数, ω 为角频率, 若在所有时刻

$$\operatorname{Re}[Ae^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[Be^{j\omega t}]$$

则有

$$A = B$$

反之, 若

$$A = B$$

则在所有时刻

$$\operatorname{Re}[Ae^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[Be^{j\omega t}]$$

其含意为: 两个复常数以相同的速度旋转, 所有时刻在实轴上的投影都保持相等, 则这两个复常数相等。

如图 B-1 中, $A = B$, $A \neq C$, 但此刻它们在实轴上的投影相等, 若以相同的速度旋转, A 与 C 在实轴上的投影不会保持相等。反之若两个复常数相等, 则两个复常数以相同的速度旋转, 在所有时刻在实轴上的投影都保持相等。

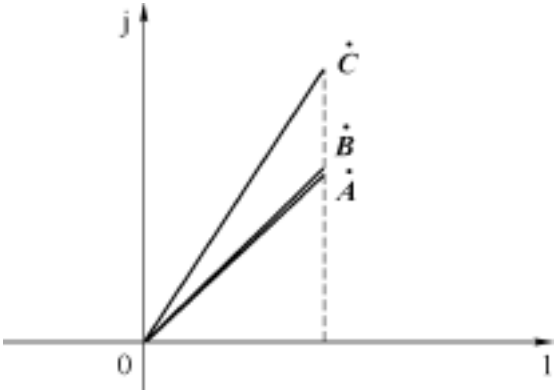


图 B-1 定理 4

附录 C 实际元件模型的构成

电阻、电感及电容元件是描述一类实际元件的主要物理特征的理想模型。从物理学观点,也可以认为它们分别用以呈现热效应、磁效应和电场效应的集总参数模型。

对于任何一个实际元件来说,在电路中工作时往往总是同时呈现上述三种基本物理效应,只是各种效应的表现程度不同。这种程度的差异,主要取决于这个元件的取材、制造及工作条件等。这里以线性电路模型的实际电容器与电感线圈为例,根据它们可能呈现的各种特性建立一个完整的模型,说明建立模型的基本方法。

一、电容器的模型及其损耗因数

电容器一般是由两片金属极板,中间介以绝缘材料卷绕构成,通常由其介质的名称命名,例如纸介电容、云母电容、聚酯电容等等。作为电容器的介质,一方面不论哪种绝缘材料,都不是绝对的绝缘体,总会有些导电能力,因此常说电容器在充放电的过程中同时在介质中呈现漏电现象;另一方面,当电容在交流电源作用时,介质分子的交变极化在介质内部会出现热损失,成为介质损耗,在高频交流电作用下,介质损耗会变大。由于这两方面的影响都与电容器的充放电作用同时存在,所以电容器的模型往往可以由图 C-1(a)的 RC 并联电路构成。其中, C 为电容器的电容量, R 为电容器的两种热损耗的模型。一般来说损耗电阻 R 与电容抗比较起来是个相当大的阻值。根据阻抗、导纳的等效转换,还可以得到与图(a)等效的串联模型图(b),在图(b)中

$$R = \frac{\frac{1}{R}}{\left[\frac{1}{R}\right]^2 + (C)^2} \qquad C = \frac{\left[\frac{1}{R}\right]^2 + (C)^2}{^2 C}$$

注意 R 与 C 的值都与电容器的工作频率有关,所以在不同的工作频率下一个电容器的串联等效电路的参数是不同的。 R 一般为很小的值;当电路工作频率很高时,满足 $\frac{1}{C} \ll R$ 的条件, $C = C$ 。在实际问题中常称为高额小损耗条件。即指此电容器本身损耗很小,又在很高频率下工作。

从图 C-1 所示的基本模型可以看出,电容在储存能量的同时,也伴随有耗能现象。因此,用元件的品质因数或损耗因数去描述电容器这类元件在工作条件下储能与耗能的比。

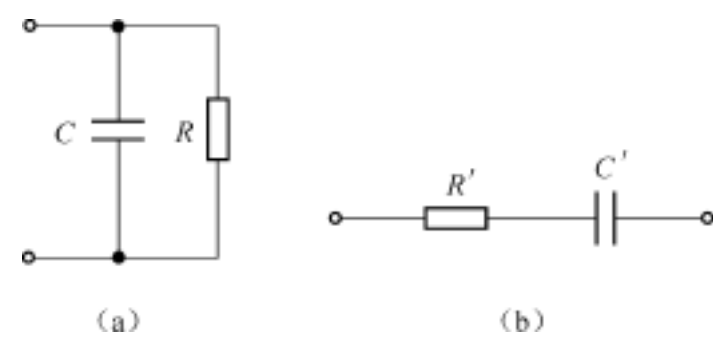


图 C-1 电容器的基本模型

元件的品质因数用符号 Q 表示,可以有多种定义形式,但实质不变,仅仅是用于不同问题的分析会显得更方便或更直观而已。在电路分析中常用储能元件储存的最大能量与其在一周期内消耗的能量的比来定义元件的品质因数。

$$Q = 2 \frac{W}{W_{RT}} = 2 \frac{\text{元件中储存的能量}}{\text{周期内元件中损耗的能量}} \tag{C-1}$$

那么,对于图 C-1(a) 电路形式,若设电容元件端口和与电压、电流有效值相量分别为 U 、 I ,则其品质因数

$$Q_C = 2 \frac{CU^2}{(U^2/R)T} = CR \tag{C-2}$$

对于 C-1(b) 电路形式,其品质因数表示为

$$Q_C = \frac{1}{CR} \tag{C-3}$$

对于电容器来说,习惯上用品质因数的倒数(称为损耗因数)来描述其储能与耗能的比,即损耗因数

$$\tan \delta = \frac{1}{Q_C} \tag{C-4}$$

从图 C-2(a) 的等效电路可以画出其相量图 C-2(b),其中 δ 称为损耗角。因此对一个电容器来说, R 愈小损耗愈大,即 I_R 愈大, δ 角愈大。

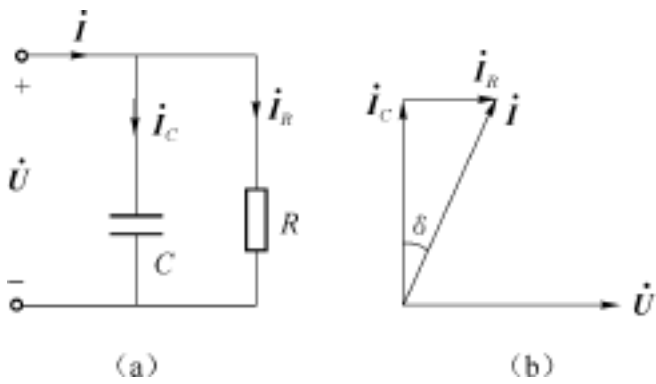


图 C-2 电容器模型及相量图

二、电感线圈的模型及其品质因数

电感线圈是由金属导线绕制而成,若不介入磁芯,这类线圈是线性元件。为了用较小的体积获得足够的电感量,往往在线圈中介入由磁性材料构成的芯子。由于磁性材料磁化曲线的非线性,所以严格地说,含磁芯的线圈都是非线性元件,但一般在根据设计要求选择磁性材料时,总是尽量选在磁化特性的线性段工作,所以往往仍将其作为线性元件对待。考虑一个电感线圈时,由于金属导线总还有一定的电阻,所以当线圈通电后,必定同时呈现磁效应和热损失,因而,其基本模型通常用图 C-3(a) 的 RL 串联电路表示。其中 L 是线圈的实际电感量, R 为表示热损失的极小电阻值。同样也可以利用阻抗导纳的等效转换运算,得到等效电路图(b),在图(b)中

$$L = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{\omega^2 L}, \quad R = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R}$$

这两个等效参数也都跟工作频率有关。 R 为很大值,当满足 $\omega L \gg R$ 时, $L = L$ 。这也是高额小损耗条件。

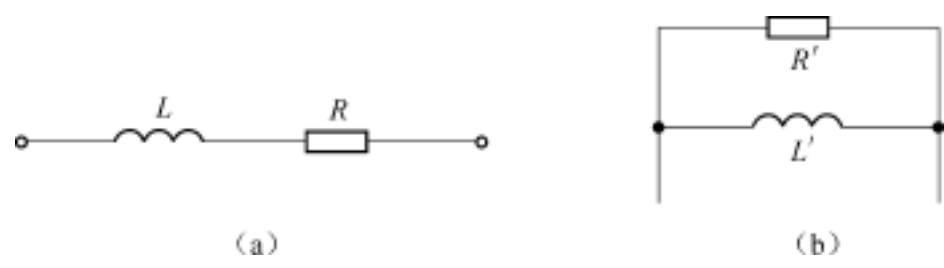


图 C-3 电感线圈的基本模型

一个电感线圈的品质因数由式(C-1)可推出两个形式不同而数值相同的计算公式,对图(a)有

$$Q_L = 2 \frac{I^2 L}{I^2 R T} = \frac{L}{R} \tag{C-5}$$

对图(b)有

$$Q_L = \frac{R}{L} \tag{C-6}$$

从以上例子知道,可以用图(C-1)和图(C-2)作为电容和电感的电路模型,特别对于电感线圈,它的串联等效电阻常常是不可忽略的。但是这里引出的电路模型仍然是在一定的工作条件下才适用。例如,由于电容器往往是卷绕而成,照理也将同时呈现电感效应,在高频工作时这种电感效应甚至淹没电容本身的电容作用,因而,实际上有些电容器在制造上就先考虑要保证无感,等等。又例如,实际电感线圈为达到一定的电感量,需要多匝多层绕制,因而电容效应又是客观存在的,随着工作频率的增高电容效应也愈明显。所以,在实际问题中,需要综合各种现象去分析,有时需要在实际元件值的基础上,根据实际情况,通过测量或估算等手段,找到更恰当的模式,以便对问题作出中肯的分析。

附录 D 磁路的概念

前面讨论的电感若是以空气作为介质的,则它具有线性的特点,但是由于空气导磁性能差,电感量不能做得很大,因此常常用高导磁性能的磁性材料做磁心来增大电感量,或增大互感元件的耦合程度。

当把载流导体制成的线圈绕在磁性材料制成的铁心上时,由于磁性材料的磁导率比周围空气中的磁场大得多,所以线圈中电流产生的磁场大部分集中在铁心,散布到铁心周围的磁通比铁心中的磁通少得多。工程上把这种由磁性材料组成的、具有某种形状和大小、能使磁力线集中通过的回路称为磁路。在电工技术中广泛利用磁路来获得强磁场。如电机、变压器、电磁铁和电磁仪表。图 D-1 就是变压器的原理图。

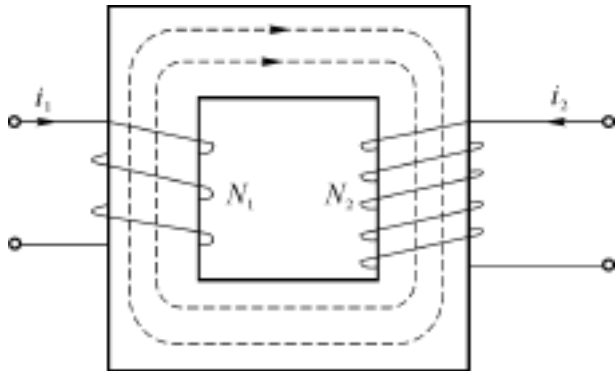


图 D-1 变压器

一、磁路和磁路的基本物理量

1. 磁感应强度 B

表征磁场的一个基本物理量就是磁感应强度,用向量 B (磁场空间每一点的磁感应强度有一定的大小和方向)来表示。在国际单位制中,磁感应强度的单位是 T(特斯拉)。

2. 磁通

磁感应强度 B 在某截面 S 上的面积分就是通过该截面的磁通。

$$\Phi = \int_S B \cdot dS = \int_S B \cos \alpha \cdot dS \tag{D-1}$$

是 dS 的法线方向与该截面上 B 的方向的夹角(如图 D-2(b))。

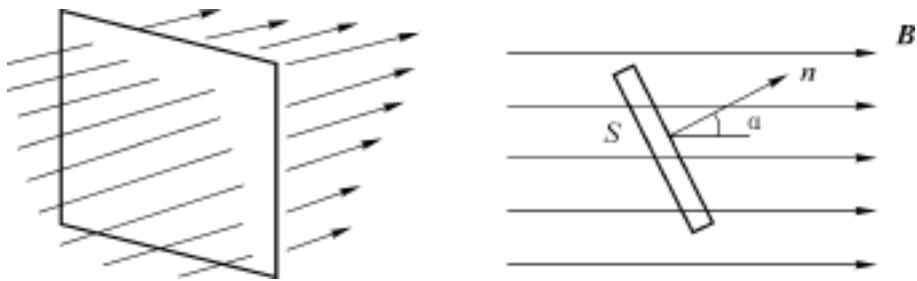


图 D-2 均匀磁场中通过某截面的磁通

如果平面 S 上的磁感应强度均匀,且其方向与 S 面垂直,则上式变成

$$\Phi = BS \tag{D-2}$$

磁感应强度又称为磁通密度,磁通是一个标量,它的单位是韦伯(Wb)。有时形象地采用磁感应线或磁力线来描述磁场,磁感应线在某点的切线方向与该点磁感应强度方向相同。如果用磁感应线的疏密反映磁通密度的量值,这样磁通就可用穿过该面积的磁感应线的总数来表示。磁通的参考方向与电流的参考方向符合右手螺旋定则。

3. 磁通连续性定理

在磁场中通过任一闭合面的磁通一定等于零,这就是磁通连续性定理。即

= \int_S B \cdot dS = 0 \tag{D-3}

上式表示若在闭合面 S 上有一定的磁通穿入，则必有等量的磁通从 S 面穿出。按照磁通连续性定理，可知磁感应线总是闭合的。

4 . 磁场强度 H

为了研究磁场中磁介质的作用，引入磁场强度 H ，单位是 A/m ，它是表征磁场的另一个基本物理量。磁场强度 H 与磁感应强度 B 、磁介质的磁导率 μ 之间有如下关系：

B = \mu H \tag{D-4}

由于磁性材料的 μ 不是常量，所以在磁路中上述关系是非线性关系。

5 . 安培环路定律

在磁场中，对 H 沿任意闭合路径（环路）的线积分，等于穿过该闭合路径所限定的面上的电流的代数和。该积分称为安培环路定律。

\oint_l H \cdot dl = N \cdot i \tag{D-5}

当电流的参考方向与环路的绕行方向符合右手螺旋定则，该电流取正号，否则取负号。 $N \cdot i$ 又称为磁通势，用 F_m 表示，即 $F_m = N \cdot i$ ，其单位为 A 。

二、铁磁物质的磁化曲线

工程上把各种物质按照其磁性区分为铁磁物质和非铁磁物质两大类，铁磁物质主要是铁、镍、钴及其合金，除此之外的物质都是非铁磁物质。非铁磁物质的磁导率与真空的磁导率 $\mu_0 = 4 \times 10^{-7} H/m$ 相差无几，一般把其磁导率当作 μ_0 计算。而铁磁物质的磁化特性不能用为常数的磁导率表示，常用 $B-H$ 曲线的形式表示，称为磁化曲线。它通常是通过实验的方法测得。

对一个磁中性（即 $B=0, H=0$ ）的铁磁物质，在受到一个方向不变，强度单调增大的磁场作用下测得的磁化曲线称为起始磁化曲线。如图 D-3 所示。从曲线上可以看出，开始 B 随 H 增长较慢（ oa 段），然后迅速增长（ ab 段），之后逐渐趋向于饱和（ bc 段）。 c 点称为曲线的饱和点，同时图中又画出磁导率 μ 随 H 的变化曲线。

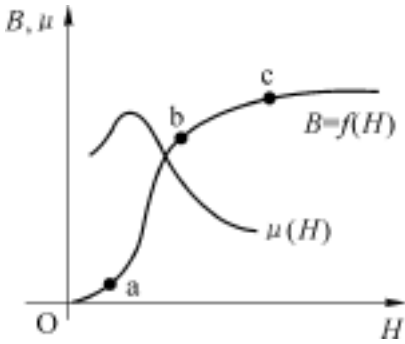


图 D-3 原始磁化曲线

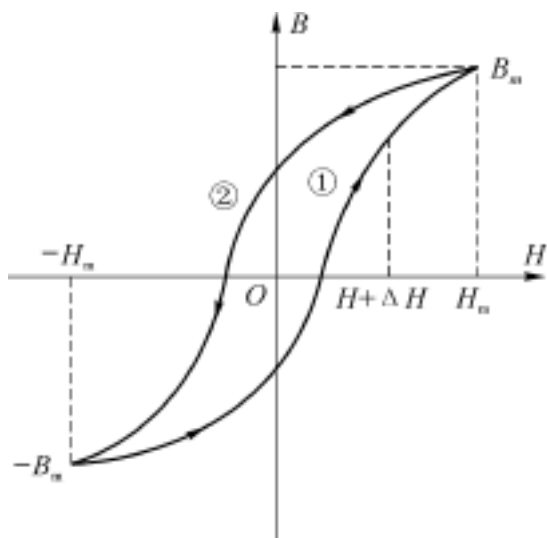
如果把磁场强度由零增加到某最大值 H_m （对应的工作点不超过饱和点），然后单调减小至 $-H_m$ ，再从 $-H_m$ 单调增大至 H_m ，如此反复多次，最终得到铁磁物质的磁化沿一关于原点对称的闭合回线进行，这就是磁滞回线。磁滞回线如图 D-4(a)所示，回线表明： B 和 H 之间是多值函数关系，回线的走向与 H 有关。当 $H > 0$ （上升）时，曲线沿着右侧的曲线段增加，当 $H < 0$ （下降）时，曲线沿着左侧的曲线段下降。

一种铁磁物质，对应于一个 H_m 值，就有一个对称的磁滞回线，在一系列不同的 H_m 值下，可测得一系列的磁滞回线如图 D-4(b)所示。把这些顶点连起来就得到基本磁化曲线，如图中虚线所示。从图 D-4(b)中可见，磁滞回线的形状与最大磁场强度 H_m 值有关。与饱和点磁场强度 H_{m1} 对应的那条磁滞回线称为饱和磁滞回线。

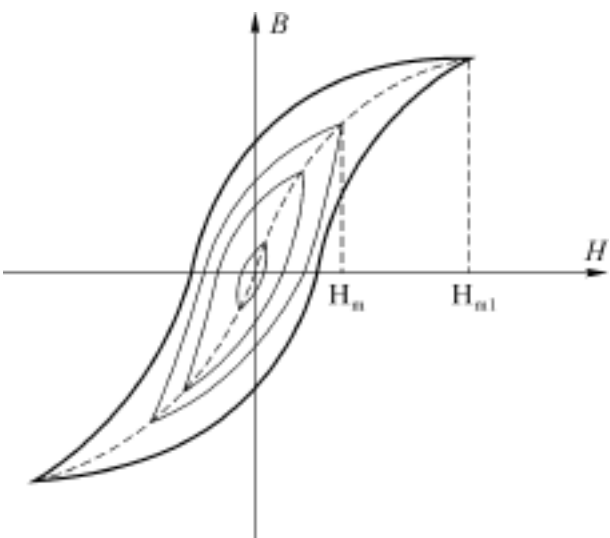
上述基本磁化曲线就是通常所说的 $B-H$ 曲线，当线圈的物理结构确定，即由 $B-H$ 曲线或磁滞回线，可以得到磁链和电流 i 的关系曲线。所以说在正弦激励时 $-i$ 关系也是曲

线和磁滞回线形式。

磁化曲线还与温度有关。磁导率 μ 一般随温度的升高而下降, 高于某一温度时可能完全失去磁性材料的磁性。



D-4(a) 磁滞回线



D-4(b) 磁滞回线族

三、磁路的基本定律

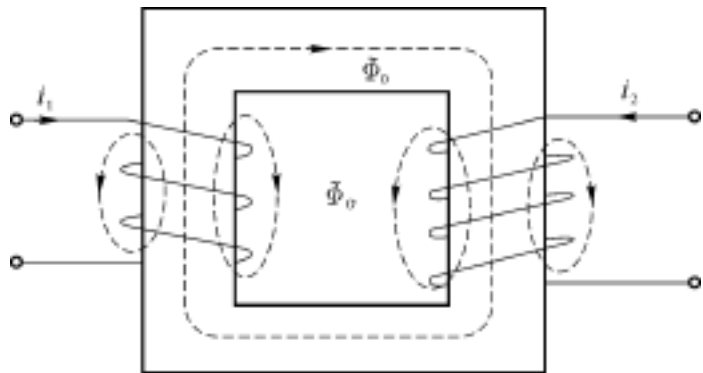


图 D-5 变压器的磁路

由于铁磁物质的磁导率比周围空气的磁导率大得多, 所以在磁路中, 绝大部分的磁通集中在铁心中。例如在图 D-5 的磁路中, 磁力线的分布图如图中虚线所示。大部分磁通 Φ_0 在铁心中, 称为主磁通。小部分磁通经空气形成闭合路径, 称为漏磁通 Φ_v 。由于漏磁通的计算则相当复杂。所以在磁路计算中, 一般只要求计算主磁通。

磁路定理是由磁场理论中的有关定理在以下假设下导出的, 这些假设是:

- (1) 磁路可进行分段, 每段具有相同的截面积和相同的磁介质, 并且在各段的磁场强度处处相同, 方向与磁路中心线平行。
 - (2) 在磁路中的每一段, 可取导磁体的沿磁力线方向的平均长度作为该段磁路的长度。
- 在以上假设下, 导出下述磁路定理。

1. 磁阻

设在磁路中有一段粗细均匀的磁导体, 其截面积为 S 。如图 D-6 所示, 根据上述假设, 磁通在沿此导磁体的横截面上的分布是均匀的, 在这一段磁导体中, 磁场强度 H 的分布也是均匀的。

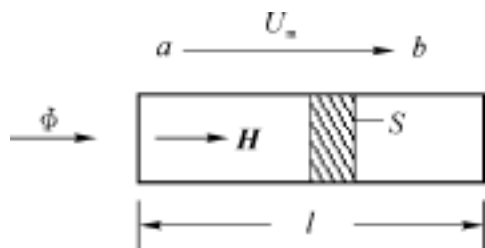


图 D-6 一段均匀磁化的导体

所以该磁路段的磁位差

$$= \int_a^b H \cdot dl = Hl = U_m \tag{D-6}$$

又考虑到 $B = \mu H$, 所以

$$U_m = Hl = \frac{B}{\mu} l = \frac{l}{\mu S} = R_m \tag{D-7}$$

上式在形式上与电路的欧姆定律相似。磁路中的磁通 对应于电路中的电流 i , 磁路中的 U_m 对应于电路中电压源的电压, 而 $R_m = \frac{l}{\mu S}$, 称为该段磁导体的磁阻。磁阻的倒数 $G_m = \frac{1}{R_m}$, 称为磁导。在国际单位制中磁位差 U_m 的单位是 A, 磁阻 R_m 的单位是 V/H , 磁导的单位是 H。

由于铁磁物质的 B 与 H 不成正比, 所以 R_m 是非线性的, 类似于电路中的非线性电阻。

2 . 磁路的基尔霍夫定律

对于有分支的磁路, 如图 D-7 所示, 任意取闭合面 S , 根据磁通连续性原理, 穿过闭合面的磁通的代数和等于零, 即进入闭合面的磁通等于离开闭合面的磁通, 故有

$$- \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \tag{D-8}$$

在一般情况下, 又

$$\sum \Phi = 0 \tag{D-9}$$

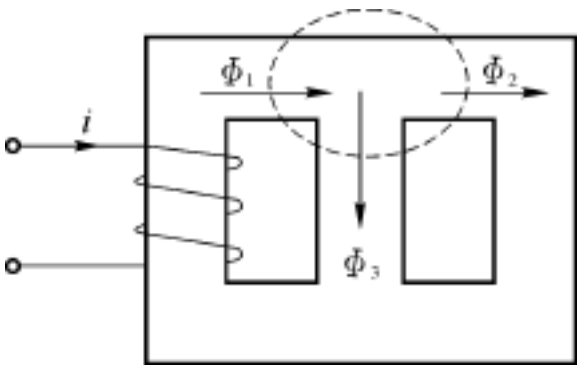


图 D-7 有分支的磁路的连通性定理

上式与电路的基尔霍夫电流定律在形式相似, 又称为磁路基尔霍夫的第一定律。可叙述为: 穿过磁路中不同截面结合处的磁通的代数和等于零。

如果一个磁路可分成若干段, 在每一段内磁化均匀, 且设各段的平均长度为 l_1, l_2, l_3, \dots 则按照安培环路定律, 沿任一由中心线构成的闭合路径且指定绕行方向, 可得

$$\oint_l H \cdot dl = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots + H_k l_k + \dots = N \cdot i \tag{D-10}$$

当 H 的方向与闭合路径的绕行方向一致时, Hl 取正号, 反之取负号; 右方的求和式中, 当 i 的方向与绕行方向符合右手螺旋定则时, 取正号, 反之取负号。此式与电路中的 KVL 相似, 称为磁路的基尔霍夫第二定律。可叙述为: 磁路中由磁路段的中心线组成的环路上各磁路段的 Hl 的代数和等于中心线(环路)交链的磁通势的代数和。

四、铁心中的功率损失

如果磁路中的磁通是交变的, 磁路的铁心中就有功率损耗, 这是由磁滞现象引起的磁滞损耗和由交变磁通穿过铁磁线圈引起的涡流损耗。通常把磁滞损耗和涡流损耗的总和称为铁心损耗。

1 . 磁滞损失

磁滞损失是铁磁物质在交变磁化时由于磁滞现象产生的功率损耗, 这种功率损耗使电能转化为热能。对于同一铁心, 磁滞回线的形状与磁感应强度的最大值 B_m 有关, 工程上采用下列经验公式计算磁滞损耗

$$P_h = k_h f B_m^n U \tag{D-11}$$

k_h 是与材料有关的系数; n 的值由 B_m 值决定。当 $B_m < 1.6T$ 时, 取 $n = 1.6$, 当 $B_m > 1.6T$ 时, 取 $n = 2$; f 是工作频率。

2 . 涡流损失

铁心中的交变磁通由于电磁感应作用而产生感应电动势, 从而在导体内部引起电流, 这样的电流称为涡电流, 简称涡流。由涡流流过铁心而引起的功率损耗称为涡流损耗。涡流损耗功率与铁心的几何尺寸和材料的电导率、交变磁通的频率 f 及磁感应强度的最大值 B_m 都有关系。

减少涡流损耗可采用叠片式铁心。由于叠片式铁心的厚度很薄, 使每片截面上的磁通

大大减少,其中的感应电压也就大大下降,从而有效地减少了涡流的损耗。在频率越高的场合,涡流损失越严重。在高频下采用电导率很小的磁介质,也可以显著地减少涡流损耗。

五、铁心线圈中电流与磁通、电压的波形

先考虑铁心中的磁饱和,而不考虑磁滞、涡流损失的影响。设有一单一回路的磁路,铁心截面积为 S , 绕有匝数为 N 的线圈。如图 D-8 所示。

设在铁心中有一正弦磁通 $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$, 则线圈两端的电压 u 为

$$u = N \frac{d\Phi}{dt} = N \omega \Phi_m \cos(\omega t) = 2 \pi f N \Phi_m \cos(\omega t) = U_m \cos(\omega t) \tag{D-12}$$

感应电压的有效值

$$U = \frac{2 \pi f N \Phi_m}{\sqrt{2}} = 4.44 f N B_m S \tag{D-13}$$

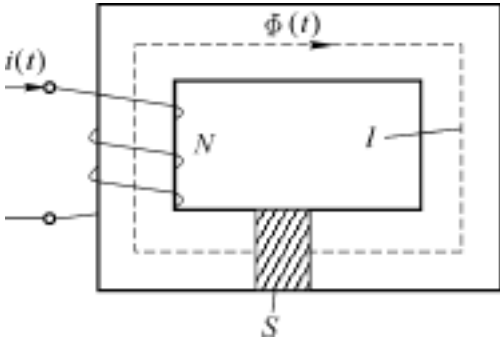


图 D-8 单回路的铁心线圈

可见感应电压的有效值与磁通的最大值成正比。这是电磁器件理论中的一个重要公式,是变压器设计的一个基本公式。

现在考虑铁心线圈中电流与磁通之间的波形。

铁心线圈的磁感应强度与磁场强度之间不成线性关系,所以磁路中的磁通与励磁电流之间也不成线性关系。当磁通是正弦形时,励磁电流则为非正弦形;反之,当励磁电流是正弦形时,磁通是非正弦形。

图 D-9 分别绘出了正弦磁通和正弦电流对应的电流和磁通的波形。当磁通做正弦变化时,电流曲线具有尖顶波形;如图 D-9(a) 所示。这是因为如果铁心工作在不饱和区域内,即在 (i) 曲线的近似直线内,则电流 i 与 Φ 近似成正比,所以 i 的波形接近正弦形;如果铁心工作在饱和区,即 (i) 曲线的饱和段内,由于此时 (i) 曲线的斜率很小,增加一定量的磁通就会引起电流较大的增加,所以此区域内电流 i 的波形呈现为一尖峰形。而当电流作正弦变化且工作到饱和区时,则磁通具有平顶波形。如图 D-9(b) 所示。这是因为电流 i 进入饱和区后,电流增加引起磁通增加越来越小的原因。

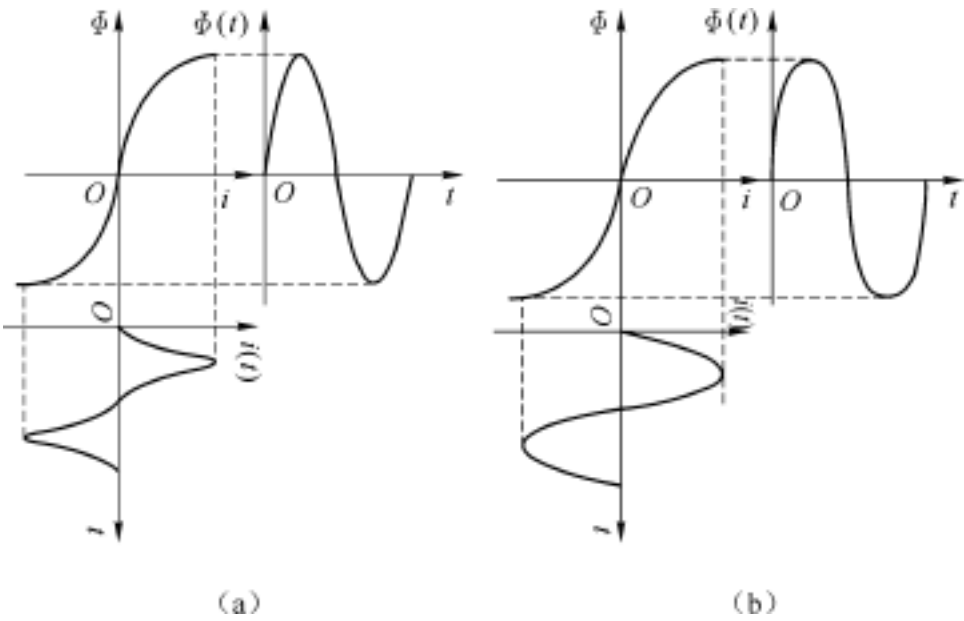


图 D-9 交变磁通电流和磁通的波形

如果考虑磁滞回线和涡流损耗,则它们都会影响电流的波形。

附录 E 线性时变电路的概念

元件特性或参数是时间 t 的函数的线性元件称线性时变元件,如时变电阻 $R(t)$,时变电感 $L(t)$ 、时变电容 $C(t)$ 等。含有线性时变元件的电路称为线性时变电路,简称时变电路。时变电路正处在发展阶段。这里只对时变电路的基本概念作简单介绍。

一、时变元件

1 . 时变电阻

如果电阻器的电阻是时间 t 的函数,那么这个电阻就称为时变电阻,用 $R(t)$ 表示,其电路模型如图 E-1(a)所示,在图示参考方向下电压电流约束关系为

$$u = R(t) i \tag{E-1}$$

或
$$i = G(t) u, \quad R(t) = \frac{1}{G(t)}$$

$G(t)$ 为时变电导。时变电阻的特性曲线如图 E-1(b)所示。

作为时变电阻的例子,有调整收音机音量的可变电阻,还有反复转动线性电位器的旋纽也可得到时变电阻。时变电阻和非时变(定常)电阻有着根本的区别。设正弦电流 $i = I_m \cos \omega_1 t$, 通过定常电阻 R , 则输出电压 $u = RI_m \cos \omega_1 t$, 输入电流和输出电压为同频率的正弦量。而通过时变电阻 $R(t) = R + R \cos \omega_2 t$, 其输出电压

$$u = R(t) i = RI_m \cos \omega_1 t + RI_m \cos \omega_2 t \cos \omega_1 t$$

可见,时变电阻可以产生或变换正弦信号。时变电阻的这种性质称为调制。这在通信技术中是很有用的。

图 E-2 所示电路也是一个时变电阻。通常 R_1 的值很小, R_2 的值很大,当周期性地开闭开关 K 时可以得到两个不同数量级的电阻。检波二极管的作用就是如此, R_1 和 R_2 为二极管正、反向电阻, K 是由载波信号控制的开关。

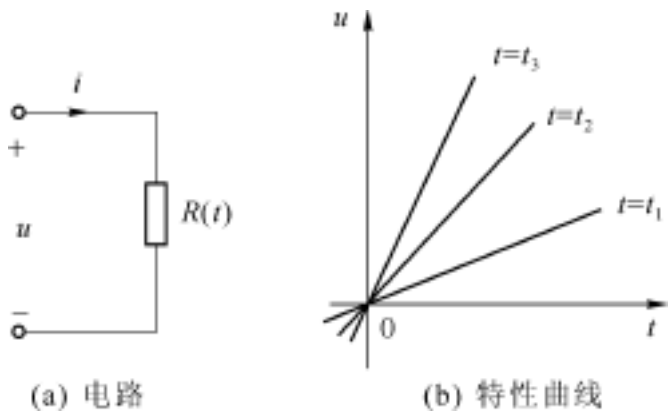


图 E-1 时变电阻

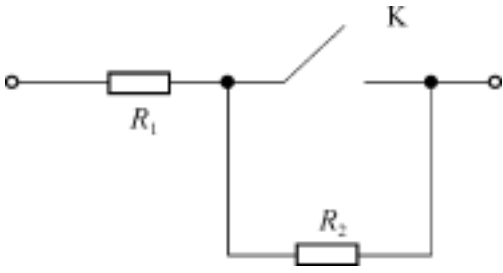


图 E-2 时变电阻的例子

2 . 时变电感

如果电感器的电感值是时间 t 的函数,那么这个元件就称时变电感 $L(t)$ 。反复上下移动电感线圈的铁心就可得到一个时变电感 $L(t)$,如图 E-3 所示。其电路模型如图 E-4 所示,在图示参考方向下元件约束关系为

$$u = L(t) i$$

$$u = \frac{d}{dt} [L(t) i] = L(t) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(t)}{dt}$$

或
$$i = \frac{1}{L(t)} \int_0^t u(x) dx + \frac{L(0) i(0)}{L(t)} \quad L(t) \neq 0 \tag{E-2}$$

时变耦合电感如图 E-5 所示。用矩阵表示时其元件约束关系为

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(t) & M(t) \\ M(t) & L_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = L(t) i \tag{E-3a}$$

$$u = \frac{d}{dt} [L(t) i] = (L(t)) \frac{d(i)}{dt} + \frac{d[L(t)]}{dt} [i] \tag{E-3b}$$

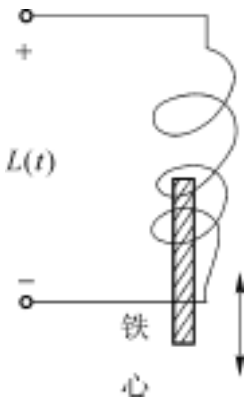


图 E-3 时变电感的例子

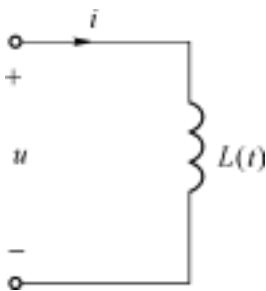


图 E-4 时变电感的电路模型图

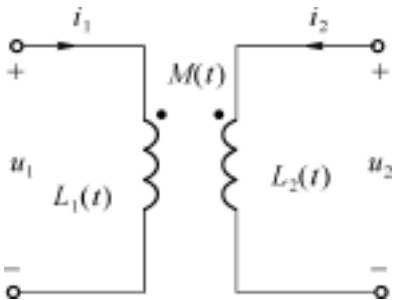


图 E-5 时变耦合电感

3 . 时变电容

如果电容器的电容是时间 t 的函数,那么这个电容 $C(t)$ 就称时变电容,其电路模型如图 E-6 所示。在图示参考方向下,元件的约束关系为

$$q = C(t) u$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [C(t) \cdot u] = C(t) \frac{du}{dt} + u \frac{dC(t)}{dt} \tag{E-4a}$$

$$u = \frac{1}{C(t)} \int_0^t i(x) dx + \frac{C(0) u(0)}{C(t)} \quad C(t) \neq 0 \tag{E-4b}$$

怎样获得时变电容呢？反复上下移动平板电容器的一块极板,如图 E-7 所示,就可得到一个时变电容 $C(t)$,它可用傅立叶级数表示成

$$C(t) = C_0 + \sum_{k=1} C_k \cos(2 f_k t + \varphi_k)$$

式中, f_k 表示极板移动的频率。在研究参量放大器时周期性变化的电容是很重要的。

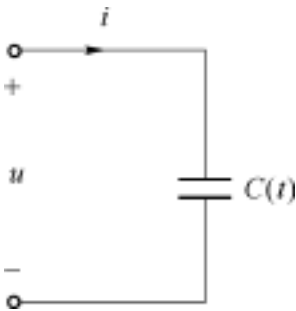


图 E-6 时变电容的电路模型

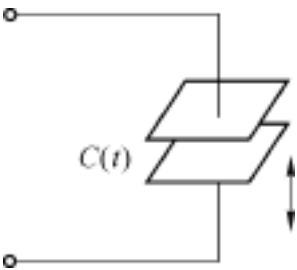


图 E-7 时变电容的例子

应强调指出的是,线性时变元件 $R(t)$ 、 $L(t)$ 和 $C(t)$ 是不依赖于电流、电压(磁链或电荷)的时间函数。

例 E-1 在图 E-8 所示电路中,电容 C 是定常的,电感 $L(t)$ 是时变的,已知 $L(t) = \frac{1}{a + b \cos t}$, a 和 b 为常数, $i_s = I_m \cos t$, 试列写以磁链 ψ 为变量的微分方程式。

解 因为电感 $L(t)$ 是时变的,所以磁链 $\psi(t)$ 也是时变的,故电感支路元件约束关系为

$$i_L = \frac{\psi(t)}{L(t)} \quad u = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

电容是定常的,其约束关系 $i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d^2\psi(t)}{dt^2}$,再由电路的 KCL 方程 $i_L + i_C = i_s$ 求出电路的微分方程式如下

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} + \frac{\psi(t)}{CL(t)} = \frac{1}{C} I_m \cos t$$

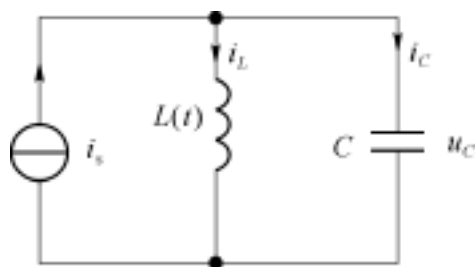


图 E-8

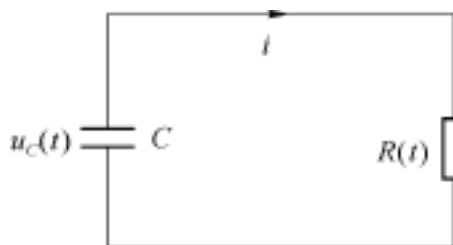


图 E-9

例 E-2 在图 E-9 中已知定常电容 $C = 1\text{F}$, 时变电阻 $R(t) = \frac{1}{1 + 2\cos t}$, $u_C(0) = 1\text{V}$, 求 $u_C(t)$ 的零输入响应。

解 由电路知

$$u_C - iR(t) = 0 \quad i = -C \frac{du_C}{dt}$$

所以

$$\frac{du_C}{dt} = -(1 + 2\cos t) u_C$$

即

$$\frac{du_C}{u_C} = -(1 + 2\cos t) dt$$

两边积分得

$$\int_0^t \frac{1}{u_C} du_C = - \int_0^t (1 + 2\cos t) dt = - (t + 2\sin t)$$

$$\ln u_C = - (t + 2\sin t)$$

$$\ln u_C = - (t + 2\sin t)$$

所以

$$u_C = e^{-t - 2\sin t}$$

4. 时变元件的一般定义

设二端元件的电压、电流分别为 $u(t)$ 、 $i(t)$, 将这二端元件接在电路中, 加上某个激励, 这元件就有某个特殊的电压 $u_1(t)$ 和电流 $i_1(t)$ 。若它们符合元件约束, 就把 $u_1(t)$ 、 $i_1(t)$ 称作元件的一个“电压、电流容许偶”。例如定常电阻值是 2Ω , 则 $(u_1, i_1) = (2, 1)$ 是容许偶,

因为 $u_1 = 2\text{ V}$, $i_1 = 1\text{ A}$ 符合元件约束。而 $(u_2, i_2) = (2, 5)$ 就不是这个元件的容许偶。

定义 设 $[u_1(t), i_1(t)]$ 是元件的任一容许偶, R 是任一实常数。如果 $[u_1(t - \tau), i_1(t - \tau)]$ 也是容许偶, 就把元件定义为时不变元件。如果对某个特殊的容许偶, 某个特殊的 τ , $[u_1(t - \tau), i_1(t - \tau)]$ 不是容许偶, 则元件是时变元件。

例如定常电阻 R , 它的任一容许偶是 $[u_1(t), i_1(t)] = [Ri_1(t), i_1(t)]$ 。作另一个平移偶 $[Ri_1(t - \tau), i_1(t - \tau)]$, 显然, 仍是一个容许偶, 所以这个元件是非时变的。

设电阻 $R(t)$ 是时间的函数, 它的容许偶是 $[u_1(t), i_1(t)] = [R(t)i_1(t), i_1(t)]$ 。作另一个平移偶 $[u_1(t - \tau), i_1(t - \tau)] = [R(t - \tau)i_1(t - \tau), i_1(t - \tau)]$, 因为电阻是 $R(t)$, 不是 $R(t - \tau)$, 当电流是 $i_1(t - \tau)$ 时, 电压应是 $R(t)i_1(t - \tau)$, 所以 $[R(t - \tau)i_1(t - \tau), i_1(t - \tau)]$ 不是容许偶, 元件是时变的。

又如定常电感器的电感 $L = \cos t > 0$, 它的任一容许偶是 $[u_1(t), i_1(t)] = \left[L \frac{di_1(t)}{dt}, i_1(t) \right]$, 显然, 它是非时变元件。设电感 $L(t)$ 为时间函数, 它的任一容许偶 $[u_1(t), i_1(t)] = \left\{ \frac{d}{dt} [L(t)i_1(t)], i_1(t) \right\}$, 当电流是 $i_1(t - \tau)$ 时, 容许的电感电压是 $\frac{d}{dt} [L(t)i_1(t - \tau)]$, 所以它的平移偶 $[u_1(t - \tau), i_1(t - \tau)] = \left\{ \frac{d}{dt} [L(t - \tau)i_1(t - \tau)], i_1(t - \tau) \right\}$ 不是容许偶, 元件是时变的。

二、时变电路的基本性质

1. 线性

时变元件在下列关系式

$$u = R(t)i; q = C(t) \cdot u; i = L(t) \frac{dq}{dt}$$

中的作用是作为比例式的系数导入的, 所以时变电路是线性的。

从前面讲的时变电阻、时变电感和时变电容的例子看出, 时变的原因是机械运动和电压、电流无关, 所以这种时变元件是线性的。

还可以用容许偶加以说明。设 $[u_1(t), i_1(t)], [u_2(t), i_2(t)]$ 是元件的任意两个容许偶, a, b 是任意两个常数, 如果 $[au_1(t) + bu_2(t), ai_1(t) + bi_2(t)]$ 也是容许偶, 则这个元件是线性的, 否则是非线性的。

例如时变电容 $C(t)$, 它的变化与电压 u 或电荷 q 无关。

$$i_1 = \frac{d}{dt} [C(t)u_1] \quad i_2 = \frac{d}{dt} [C(t)u_2]$$

用常数 a 乘前式, 用常数 b 乘后式, 然后相加得

$$ai_1 + bi_2 = a \frac{d}{dt} [C(t)u_1] + b \frac{d}{dt} [C(t)u_2] = \frac{d}{dt} [C(t)(au_1 + bu_2)]$$

上式表明 $(au_1 + bu_2, ai_1 + bi_2)$ 也是容许偶, 所以时变电容 $C(t)$ 是线性的。

对时变电路, 零状态响应仍然是激励的线性函数。

2. 时延特性

由于时变电路含有时变元件, 所以即使激励信号是同一个, 但作用时刻不同, 那么所得到的响应也不相同, 所以时延特性不适用于时变电路。举例如下:

设某时变电路其激励电流为单位阶跃函数 $i(t)$, 但在 $t = 0$, $t = t_1$ 和 $t = t_2$ 三个不同时刻

刻作用到电路,其零状态响应分别为 u_0 , u_{t1} 和 u_{t2} ,用曲线表示在图 E-10 中。由图可知,响应 u_{t1} 和 u_{t2} 不可能由 u_0 延迟一段时间来得到。

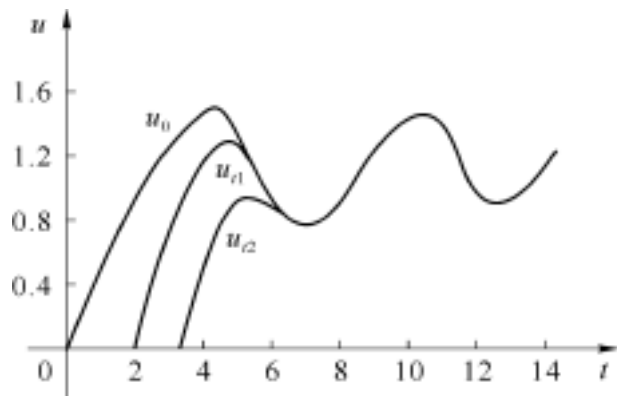


图 E-10 三种不同的阶跃响应

3 . 无源性和有源性

任何二端元件,在关联参考方向下,它的瞬时功率 $p(t)$ 和能量 $w(t)$ 为

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$
$$w(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) i(\tau) d\tau$$

如果在任何时刻 t 恒有 $w(t) \geq 0$,即二端元件吸收能量,则定义该元件为无源元件。反之,如果在任何时刻 t 恒有 $w(t) < 0$,即元件向外提供能量,则该二端元件为有源元件。

时变电阻吸收的瞬时功率

$$p(t) = u(t) i(t) = R(t) [i(t)]^2$$

设时变电阻 $R(t) \geq 0$,由上式可见,对任何容许的电流 $i(t)$,瞬时功率总为正,总吸收能量,即 $p(t) \geq 0$, $w(t) \geq 0$,所以时变电阻是无源元件。

再考察时变电感 $L(t)$ 。其瞬时功率

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = i \frac{d}{dt} [L(t) i]$$

展开 $\frac{d}{dt} [L(t) i]$ 和 $\frac{d}{dt} [L(t) i^2]$ 即可证明

$$i \frac{d}{dt} [L(t) i] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [L(t) i^2] + \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(t)}{dt}$$

所以

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \frac{L(t) i^2}{2} \Big|_{-\infty}^t + \int_{-\infty}^t \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau$$

设 $i(-\infty) = 0$, 则

$$w(t) = \frac{L(t) i^2}{2} + \int_{-\infty}^t \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau \tag{E-5}$$

上式说明,由外部电路输入的总能量 w ,一部分转化为磁场能量 $[L(t) i^2 / 2]$ 一部分(积分项)转化为机械能。在时变电感 $L(t) > 0$ 的情况下,磁场能量不为负,但机械能可正可负。

当 $i \neq 0$ 时,若 $\frac{dL(t)}{dt} > 0$,则式(E-5)中积分值大于零,代表有机机械能输出,此时,外部输入的总能量 $w(t) > 0$,电感元件吸收能量,所以此时时变电感为无源元件。可见,时变电感

为无源元件的充分必要条件是 $L(t) > 0, \frac{dL(t)}{dt} \geq 0$ 。

若 $\frac{dL(t)}{dt} < 0$, 则式 (E-5) 的积分值小于零, 即输出机械能是负的, 实际上有机械能输入, 它转化为电能送给外部电路, 即电感元件对外提供能量, 所以时变电感在这种情况下是有源的。

时变电容的瞬时功率 $p(t) = u_C(t) i_C(t) = u_C \frac{d}{dt} [C(t) \cdot u]$, 它和时变电感瞬时功率的数学形式相似, 因此与考察电感一样, 可以得到时变电容为无源元件充分必要条件是 $C(t) > 0$ 和 $\frac{d}{dt} C(t) \geq 0$, 否则, 时变电容也可以是有源元件。

时变电感和时变电容可以是有源元件, 这是时变元件区别于定常元件的一个重要特点。

例 E-3 在图 E-11(a) 中, 自感 L_1, L_2 是定常的, 互感 $M(t) = M_m \sin t$ 是时变的, 电流源是恒定的, 求从电流源输送给电感线圈的平均功率 P_1 。

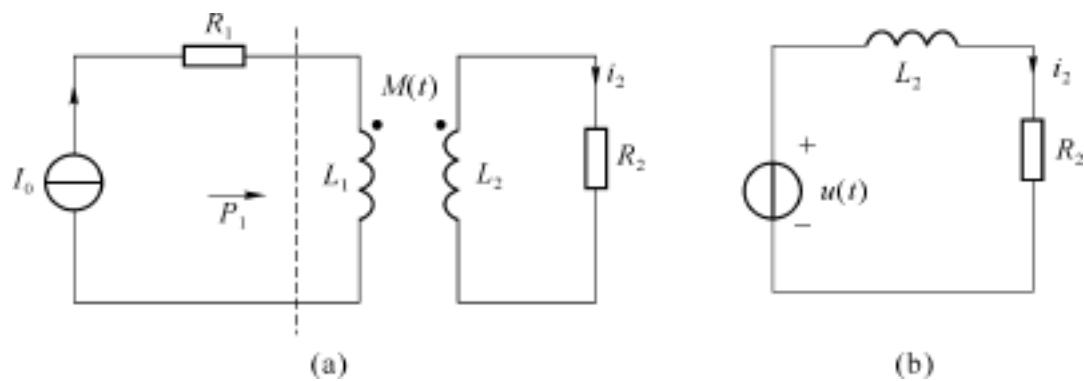


图 E-11 时变互感电路

解 对次级列微分方程式, 得

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = \frac{dM(t)}{dt} I_0 = M_m I_0 \cos t = u(t)$$

上式相当于正弦电压 $u(t)$ 作用于 R - L 串联电路, 如图 E-11(b) 所示。设稳态下次级电流 $i_2 = I_{2m} \cos(t + \varphi_2)$, 式中 I_{2m} 和 φ_2 可由相量法求得, 即 $I_{2m} = I_{2m} \angle_{-2} = M_m I_0 / (R_2 + j \omega L_2)$

初级 L_1 上的电压

$$\begin{aligned} u_1(t) &= L_1 \frac{dI_0}{dt} - \frac{d}{dt} [M(t) i_2] = - \frac{d}{dt} [M_m I_{2m} \sin t \cos(t + \varphi_2)] \\ &= - \frac{M_m I_{2m}}{2} \frac{d}{dt} [\sin(2t + \varphi_2) - \sin \varphi_2] = - M_m I_{2m} \cos(2t + \varphi_2) \end{aligned}$$

电压 $u_1(t)$ 是正弦的且频率加倍, 但 L_1 中的电流是恒定直流 I_0 , 它和正弦电压不能产生平均功率, 所以 $P_1 = 0$ 。由此可见, 负载电阻消耗的平均功率 $\left[\frac{I_{2m}}{\sqrt{2}} \right]^2 R_2$ 全部是由机械功率转变来的。恒流源只提供初级 R_1 上消耗的平均功率。此时时变耦合电感是一个有源元件。

三、时变阻抗、时变导纳及其串、并联

与研究非时变电路一样, 如果知道电路的输入(激励), 可以通过时变阻抗 $Z(s, t)$ 和时变导纳 $Y(s, t)$ 来研究它的输出(响应)。

1. 时变阻抗 $Z(s, t)$ 、时变导纳 $Y(s, t)$

首先看时变电阻, 从式 (E-1) 知

$$\begin{aligned} Z_R(s, t) &= \left. \frac{u}{i} \right|_{i=e^{st}} = R(t) \\ Y_R(s, t) &= \left. \frac{i}{u} \right|_{u=e^{st}} = \frac{1}{R(t)} \end{aligned} \quad (\text{E-6})$$

对时变电感, 设 $i_L(0) = 0$, 由式(E-2)知

$$\begin{aligned} Z_L(s, t) &= \left. \frac{u(t)}{i(t)} \right|_{i=e^{st}} = \frac{L(t)e^{st} \cdot s + \frac{d}{dt}L(t) \cdot e^{st}}{e^{st}} = L(t)s + \frac{d}{dt}L(t) \\ Y_L(s, t) &= \left. \frac{i(t)}{u(t)} \right|_{u=e^{st}} = \frac{\frac{1}{L(t)} \int_0^t u(x)dx}{e^{st}} = \frac{1/L(t) \cdot e^{st}/s}{e^{st}} = \frac{1}{L(t) \cdot s} \end{aligned} \quad (\text{E-7})$$

对时变电容, 设 $u_C(0) = 0$, 由式(E-4)知

$$\begin{aligned} Z_C(s, t) &= \left. \frac{u(t)}{i(t)} \right|_{i=e^{st}} = \frac{\frac{1}{C(t)} \int_0^t i(x)dx}{e^{st}} = \frac{1}{C(t) \cdot s} \\ Y_C(s, t) &= \left. \frac{i(t)}{u(t)} \right|_{u=e^{st}} = \frac{C(t)e^{st} \cdot s + \frac{d}{dt}C(t) \cdot e^{st}}{e^{st}} = C(t) \cdot s + \frac{d}{dt}C(t) \end{aligned} \quad (\text{E-8})$$

由式(E-7)和(E-8)知, 时变电感和时变电容的阻抗和导纳均不成倒数关系, 即

$$Z_L(s, t) \cdot Y_L(s, t) \neq 1, \quad Z_C(s, t) \cdot Y_C(s, t) \neq 1$$

那么, 如何由两者之一求另一个呢?

将电流 $i = e^{st}$ 加到时变阻抗 $Z(s, t)$ 上时, 则在其两端产生电压 $u = f(t)$, 再将电压 $f(t)$ 加到时变导纳 $Y(s, t)$ 上, 则输出电流 $i = e^{st}$ 如图 E-12 所示。由图可以看出时变元件的阻抗和导纳的作用。设 $p = d/dt$, 则 $f(t) = Z(p, t)e^{st} = e^{st}Z(s, t)$, 所以输出电流

$$i = e^{st} = Y(p, t) \cdot e^{st}Z(s, t) = e^{st}Y(p+s, t)Z(s, t)$$

可见

$$Y(p+s, t)Z(s, t) = 1 \quad (\text{E-9})$$

注意, $Y(p+s, t)$ 所含有的 p 作用于 $Z(s, t)$ 中的 t 。

同样可以用图 E-13 来证明时变阻抗与时变导纳存在着下列关系

$$Z(p+s, t) \cdot Y(s, t) = 1 \quad (\text{E-10})$$



图 E-12 $Z(s, t)$ 与 $Y(s, t)$ 的关系

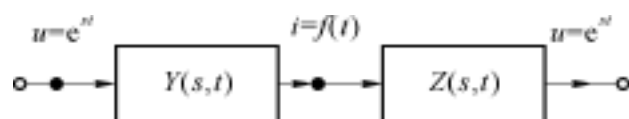


图 E-13 时变阻抗与时变导纳的关系

例 E-4 从时变电容器的时变阻抗

$$Z_C(s, t) = \frac{1}{C(t)s}$$

推导时变导纳 $Y_C(s, t)$ 。

解 将式(E-10)用于 $Z_C(s, t) = \frac{1}{C(t)s}$, 则

$$\frac{1}{C(t)(p+s)} \cdot Y_C(s, t) = 1$$

所以
$$Y_C(s, t) = (p + s) C(t) = C(t) s + \frac{d}{dt} C(t)$$

在上述推导中注意积的顺序规定了微分作用的影响,运算中不可把顺序搞乱。

例 E-5 从时变电感器的时变导纳

$$Y_L(s, t) = \frac{1}{L(t) s}$$

推导时变阻抗 $Z_L(s, t)$ 。

解 将式(E-9)用于 $Y_L(s, t) = \frac{1}{L(t) s}$, 则

$$\frac{1}{L(t)(p + s)} Z_L(s, t) = 1$$

所以
$$Z_L(s, t) = (p + s) L(t) = L(t) s + \frac{d}{dt} L(t)$$

可见,已知时变导纳利用式(E-9)可以推导时变阻抗,反之,已知时变阻抗利用式(E-10)可以推导时变导纳。

2. 时变元件的串并联连接

时变阻抗的串联如图 E-14 所示,由 KVL 得

$$u = u_1 + u_2 = Z_1(s, t) i + Z_2(s, t) i = [Z_1(s, t) + Z_2(s, t)] i$$

所以串联电路的等效阻抗

$$Z(s, t) = Z_1(s, t) + Z_2(s, t) \tag{E-11}$$

时变导纳的并联如图 E-15 所示,利用 KCL 可得并联电路等效导纳

$$Y(s, t) = Y_1(s, t) + Y_2(s, t) \tag{E-12}$$

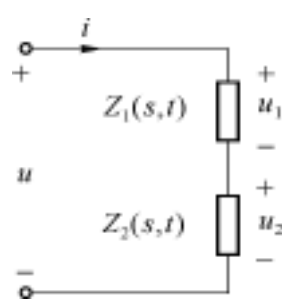


图 E-14 时变阻抗串联

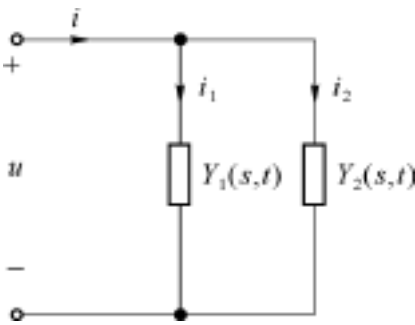


图 E-15 时变导纳并联

部分习题答案

习 题 一

1-1 非集总参数电路;集总参数电路

1-2 $i(5) = -0.5 \text{ A}$, $i(10) = 0 \text{ A}$, $i(15) = 0.5 \text{ A}$

1-4 $u = 20 \text{ V}$

1-5 $P\left[\frac{\quad}{314}\right] = 18840 \text{ mW}$

1-6 (1) $p(t) = (600t^2 + 2t) \text{ W}$; (2) $w(t) = (200t^3 + t^2) \text{ J}$; (3) $w(3) = 14.4 \times 10^{-6} \text{ J}$

1-7 $i_1 = (3 + 2t) \text{ A}$, $i_4 = (3 - \sin t) \text{ A}$, $i_5 = (\sin t - 6 - 2t) \text{ A}$

1-8 $u_2 = (1 - 7t + e^{-t}) \text{ V}$, $u_3 = (-7 - e^{-t} + \sin t) \text{ V}$

1-9 $i_1 = 1 \text{ A}$, $i_2 = 3 \text{ A}$, $i_3 = 4 \text{ A}$, $i_4 = 6 \text{ A}$, $i_5 = -2 \text{ A}$,

$u_{ab} = -48 \text{ V}$, $u_{cb} = -50 \text{ V}$, $u_{dc} = -3 \text{ V}$, $u_{da} = -5 \text{ V}$

1-10 (1) $u_{ab} = U_{s1}$, $u_{ac} = (U_{s1} + U_{s2})$

(2) $u_d = U_{s1} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}(U_{s1} + U_{s2})$, $u_{dc} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}(U_{s1} + U_{s2})$

1-11 电压源 $P_1 = 8 \text{ W}$, 电流源 $P_2 = -16 \text{ W}$

1-12 $P = 0 \text{ W}$

1-13 (1) 不独立; (2) 独立; (3) 独立; (4) 不独立

1-14 (略)

1-15 (a) 独立; (b) 独立; (c) 不独立

1-16 基本割集: $(4, 1, 3)$, $(5, 1, 9, 3)$, $(7, 6, 1, 9, 3)$, $(8, 3, 6, 1)$, $(2, 6, 1)$

基本回路: $(1, 4, 5, 7, 8, 2)$, $(3, 4, 5, 7, 8)$, $(9, 5, 7)$, $(6, 7, 8, 2)$

1-17 (1) 割集: $(1, 4, 8, 2)$, $(1, 3, 5, 7, 8)$, $(1, 6, 2)$; 树: $(1, 3, 5, 7, 8)$, $(4, 9, 5, 8, 2)$

1-18 $C_1(1, 2, 3)$, $C_2(3, 4, 5)$, $C_3(2, 3, 6)$, $C_4(5, 7)$

基本割集电流方程: $C_1: i_1 + i_2 - i_3 = 0$, $C_2: i_4 + i_5 - i_3 = 0$,

$C_3: i_2 - i_3 + i_6 = 0$, $C_4: i_7 + i_5 = 0$

1-19 $C_1: (2, 6, 1, 3, 9)$, $C_2: (6, 4, 10)$, $C_3: (5, 10, 9)$, $C_4: (7, 6, 1)$, $C_5: (8, 3, 9)$

1-20 割集方程 : $C_1: i_6 + i_2 - i_5 - i_1 = 0$, $C_2: i_7 + i_3 - i_5 - i_1 = 0$, $C_3: i_8 + i_4 - i_5 - i_1 = 0$,

$C_4: i_9 + i_4 - i_1 = 0$, $C_5: i_{10} + i_1 - i_2 = 0$, $C_6: i_{11} + i_2 - i_3 = 0$,

$C_7: i_{12} + i_3 - i_4 = 0$

回路方程 : $L_1: u_1 - u_{10} + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 = 0$, $L_2: u_2 - u_{11} - u_6 + u_{10} = 0$,

$L_3: u_4 - u_9 - u_8 + u_{12} = 0$, $L_4: u_3 - u_{12} - u_7 + u_{11} = 0$,

$L_5: u_5 + u_6 + u_7 + u_8 = 0$

割集方程 : $C_1: i_1 + i_5 - i_7 - i_3 = 0$, $C_2: i_2 - i_{10} + i_5 - i_7 - i_3 = 0$, $C_3: i_4 - i_{12} - i_3 = 0$,

$C_4: i_9 + i_5 - i_7 + i_{12} = 0, C_5: i_8 - i_7 + i_{12} = 0, C_6: i_{11} + i_7 - i_5 + i_{10} = 0,$
 $C_7: i_6 + i_{10} - i_5 = 0$

回路方程 : $L_1: u_{10} + u_2 - u_{11} - u_6 = 0, L_2: u_{12} + u_4 - u_9 - u_8 = 0, L_3: u_3 + u_4 + u_1 + u_2 = 0,$
 $L_4: u_5 + u_6 + u_{11} - u_2 - u_1 - u_9 = 0, L_5: u_7 + u_8 + u_9 + u_1 + u_2 - u_{11} = 0$

习 题 二

- 2-1 $i_1 = 1\text{ A}, i_2 = 4\text{ A}; P_R = 5\text{ W}$ 吸收; $P_{us} = 20\text{ W}$ 吸收; $P_{is} = -25\text{ W}$ 供出
- 2-2 $i_2 = 1.5\text{ A}, u_2 = 2\text{ V}, R_2 = 1.33\ \Omega, R_1 = 10\ \Omega$
- 2-3 电阻元件, $R = 2\ \Omega$
- 2-4 (1) $C = 500\ \mu\text{F};$ (2) $p(0.5\text{ s}) = 3.71\text{ mW};$ (3) $w(0.5\text{ s}) = 1.6 \times 10^{-3}\text{ J}$
- 2-5 $0 \leq t \leq 3\ \mu\text{s}, u_L(t) = 4\text{ V}, p_L(t) = 8t\text{ mW}, w(t) = 4t^2 \times 10^{-3}\text{ J};$
 $3 \leq t \leq 4\ \mu\text{s}, u_L(t) = -12\text{ V}, p_L(t) = 72t - 288\text{ mW}, w(t) = (36t^2 - 288t + 576) \times 10^{-3}\text{ J}$
- 2-6 $u_R(t) = -3e^{-2t}\text{ V}, u_L(t) = 3e^{-2t}\text{ V}, u(t) = 6e^{-2t}\text{ V}$
- 2-7 $R_{cd} = 80\ \Omega; u_d = -16\text{ V};$ 电压表 b 端为正“+”, c 端为“-”。
- 2-8 $R_{ab} = 10\text{ k}\Omega$
- 2-9 (a) $R_{ab} = \frac{8}{13}R, R_{cd} = \frac{7}{13}R$ (b) $R_{ab} = \frac{4}{7}R, R_{cd} = \frac{10}{21}R$
- 2-10 当 R_3 增大, 电流表电流增大; $R_1 = 0$ 时, R_3 改变对电流表电流无影响
- 2-11 电流表的读数为 0.6 A
- 2-12 $R_x = 1\text{ k}\Omega, u_s = 8.4\text{ V}$
- 2-13 $i_{us} = 0.75\text{ A}, i_{R1} = 0.25\text{ A}, i_{R2} = 0.5\text{ A}, i_{R3} = 0.2\text{ A},$
 $i_{R4} = 0.3\text{ A}, i_{R5} = 0.15\text{ A}, i_{R6} = i_{R7} = 0.15\text{ A}$
- 2-14 $i_{R4} = 1.2\text{ A}$
- 2-15 $i = 3\text{ A}$
- 2-16 $u_{ad} = 140\text{ V}, i_{R1} = 4\text{ mA}, i_{R2} = 5\text{ mA}, i_{R3} = 6\text{ mA}, i_{R4} = 1\text{ mA}, i_{R5} = 5\text{ mA}$
- 2-17 (a) $u = R_s i - u_s$ (b) $u = -u_s - R_s i$
(c) $u = u_{s1} - u_{s2} + (R_1 + R_2) i$ (d) $u = u_s + (i - i_s) R_s$
- 2-18 (a) $u_s = 20\text{ V}, R_s = 10\ \Omega$ (b) $u_s = 11\text{ V}, R_s = 5\ \Omega$
- 2-19 (a) $i_s = 9\text{ mA}, R_s = 0.667\text{ k}\Omega$ (b) $i_s = 6\text{ A}, R_s = 5\ \Omega$
- 2-20 $u_s = 1\text{ V}$ (极性为上正下负), $R_s = 4\ \Omega$
- 2-22 $u_s = u_s, R_s = (1 + \mu) R_1$
- 2-23 $i_3 = 3\text{ A}$
- 2-24 $i_2 = 0.175\text{ A}$
- 2-25 $\frac{u_0}{u_s} = 0.3$

习 题 三

- 3-1 $i_1 = (2\sin t - 2)\text{ A}, i_2 = (\sin t + 1)\text{ A}, i_3 = (-3 + \sin t)\text{ A}$

3-2 $R_1 = 11 \Omega, R_2 = 6 \Omega$

3-3 K 断开时 $i_1 = i_2 = i_3 = 0$

K 闭合时 $i_1 = -1.22 \text{ A}, i_2 = -2.44 \text{ A}, i_3 = -4.88 \text{ A}, i_0 = 8.54 \text{ A}$

3-4 $i = -0.386 \text{ A}$

3-5 $i_1 = -2.375 \text{ A}, i_2 = 3.625 \text{ A}, i_3 = -2.125 \text{ A}, i_4 = 1.25 \text{ A}, i_5 = 0.875 \text{ A},$
 $p_{4V} = 9.5 \text{ W}, p_{8V} = 29 \text{ W}, p_{6V} = 12.75 \text{ W}$

3-6 $i = -1.2 \text{ A}$

3-7 $i_{R1\text{左}} = 0.522 \text{ A}, i_{R2\text{左}} = 0.303 \text{ A}, i_{R3\text{左}} = -0.349 \text{ A}, i_{us1} = -0.106 \text{ A}, i_{us2} = 0.947 \text{ A},$
 $i_{us3} = -0.474 \text{ A}, i_{R1\text{右}} = 0.321 \text{ A}, i_{R2\text{右}} = -0.197 \text{ A}, i_{R3\text{右}} = -0.598 \text{ A}$

3-8 $u_1 = 3.33 \text{ V}, u_2 = 7.33 \text{ V}$

3-9 (略)

3-10 $u_1 = 4.545 \text{ V}$

3-11 $i_1 = 1 \text{ A}, i_2 = 3.82 \text{ A}, i_3 = -2.82 \text{ A}, i_4 = 0.756 \text{ A},$
 $i_5 = 0.5 \text{ A}, i_6 = 2.178 \text{ A}, i_7 = 0.431 \text{ A}$ (以元件参数为电流下标)

3-12 K 打开 $u_g = -100 \text{ V}$; K 闭合 $u_g = 0 \text{ V}$

3-13
$$\begin{cases} I_a = I_{s1} \\ I_b(R_2 + R_3 + R_4) - I_a R_2 - I_c R_4 = -2U_2 R_3 - U \text{ (受控电流源转换为电压源)} \\ I_c(R_5 + R_4) - I_b R_4 = U \\ I_c - I_b = I_{s2}; U_2 = R_2(I_a - I_b) \end{cases}$$

3-15 10^5

3-16 $u_1 = -4.5 \text{ V}$

3-17 $i_1 = 1 \text{ A}, i_2 = 1 \text{ A}, i_3 = 0.5 \text{ A}, i_4 = 0.25 \text{ A}, i_5 = 0.25 \text{ A}, i_6 = 0.5 \text{ A},$
 $u_1 = -3 \text{ V}, u_2 = 2 \text{ V}, u_3 = 1 \text{ V}, u_4 = 0.5 \text{ V}, u_5 = 0.5 \text{ V}, u_6 = 0.5 \text{ V}$

3-18 $i_1 = -1 \text{ A}, i_2 = 2 \text{ A}, i_3 = 1 \text{ A}, i_4 = 0 \text{ A}, i_5 = 1 \text{ A},$
 $u_1 = -4 \text{ V}, u_2 = 4 \text{ V}, u_3 = -8 \text{ V}, u_4 = 0 \text{ V}, u_5 = 8 \text{ V}$

3-19 设 u_{s4} 支路的电流 I 从 u_{s4} 的“+”到“-”。设 R_3 支路的树枝电压 u_{3T} , R_5 支路的树枝电压 u_{5T} 。

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} \right] u_{3T} + \frac{1}{R_1 + R_2} u_{s6} = I \\ \frac{1}{R_5} u_{5T} = -i_{s8} - I \\ u_{5T} - u_{3T} = u_{s4} \end{cases}$$

3-20 选 u_{s4} 、 R_3 、 u_{s6} 为树枝, 则只列 R_3 这个树枝的树枝电压 u_{3T} 割集方程即可。

$$\left[\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right] u_{3T} + \frac{1}{R_5} u_{s4} + \frac{1}{R_1 + R_2} u_{s6} = -i_{s8}$$

习 题 四

4-1 $i = -\frac{R_2 R_4 i_s + (R_1 + R_2 + R_4) u_s}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 R_3}$

- 4-2 $U_0 = 4\text{ V}$ $I_1 = 1\text{ A}$
- 4-3 (a) $U_s = 0\text{ V}$; (b) $R = 4$
- 4-4 $i = 2.25\text{ A}$
- 4-5 $i = 1.24\text{ A}$
- 4-6 $i_{cd} = -0.353\text{ A}$
- 4-7 $i = -59.5\text{ mA}$
- 4-8 $i = 28.6\text{ mA}$
- 4-9 $i = 0.156 u_{s1} - 0.0359 u_{s2}$; $i_1 = 0.72 u_{s1} - 0.012 u_{s2}$; $i_2 = 0.012 u_{s1} - 0.234 u_{s2}$
- 4-10 $I = 3\text{ A}$
- 4-11 $u_{oc} = 6\text{ V}$, $R_0 = 4$
- 4-12 $u_{oc} = -3.2\text{ V}$, $R_0 = 3$, $i_{sc} = -1.067\text{ A}$
- 4-13 $u_{oc} = 0.0625\text{ V}$, $R_0 = 0.4375$, $i_{sc} = 0.143\text{ A}$
- 4-14 $u_{oc} = 20\text{ V}$, $R_0 = 167$, $i_{sc} = 0.12\text{ A}$
- 4-15 (1) $U_{oc} = 8\text{ V}$; $R_0 = 4$; (2) $R = 36$
- 4-17 $i = 0.293\text{ A}$
- 4-18 1.8
- 4-19 $u = 1\text{ V}$
- 4-20 读数 $i = 0.4\text{ A}$

习 题 五

- 5-1
$$u_C = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{其他时刻 } t \end{cases}$$
- 5-2
$$i_L = \begin{cases} -5t^2 + 10t - 5 & 1 \leq t \leq 2 \\ 15 - 10t & 2 \leq t \leq 5 \\ 5t^2 - 60t + 140 & 5 \leq t \leq 6 \\ 40 & t \geq 6 \end{cases}$$
- $$i_C = \begin{cases} -10 & 1 < t < 2 \\ 0 & 2 < t < 5, t > 6 \\ 10 & 5 < t < 6 \end{cases}$$
- $$i_R = u_s(t), w_L(3) = 112.5\text{ J}, w_C(3) = 50\text{ J}$$
- 5-3 (a) $i(0^+) = 1\text{ A}$, $u(0^+) = 1\text{ V}$; (b) $i(0^+) = 4\text{ A}$, $u(0^+) = -4\text{ V}$;
(c) $i(0^+) = 2\text{ A}$, $u(0^+) = 2\text{ V}$; (d) $i(0^+) = \frac{1}{3}\text{ A}$, $u(0^+) = \frac{2}{3}\text{ V}$
- 5-4 (a) $i(0^+) = 2\text{ A}$, $u(0^+) = 4\text{ V}$; (b) $i(0^+) = -3\text{ A}$, $u(0^+) = -4\text{ V}$;
(c) $i(0^+) = -2\text{ A}$, $u(0^+) = 3\text{ V}$; (d) $i(0^+) = 2\text{ A}$, $u(0^+) = 2\text{ V}$
- 5-5 $i_1(0^+) = 5\text{ A}$, $i_2(0^+) = i_3(0^+) = 2.5\text{ A}$, $i_4(0^+) = 0\text{ A}$
- 5-6
$$i(t) \Big|_{t=0^+} = 2\text{ A}; \frac{du_{C1}(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} = 2\text{ A}$$

$$5-7 \quad u_C(t) = 126e^{-3.33t} \text{ V}$$

$$5-8 \quad u_C(t) = 4e^{-2t} \text{ V}; i(t) = 40e^{-2t} \mu\text{A}$$

$$5-9 \quad i(t) = 0.24(e^{-500t} - e^{-1000t}) \text{ A}$$

$$5-10 \quad i_L(t) = \begin{cases} 2e^{-t/0.06} & 0 < t < 0.1 \text{ s} \\ 0.378e^{-(t-1)/0.1} & t > 0.1 \text{ s} \end{cases}$$

$$i_1(t) = \begin{cases} 12 - 2e^{-t/0.06} & 0 < t < 0.1 \text{ s} \\ 12 & t > 0.1 \text{ s} \end{cases}$$

$$5-11 \quad u_C(t) = 8(1 - e^{-10t}) \text{ V}$$

$$5-12 \quad u_x(t) = \begin{cases} 3(1 - e^{-\frac{t}{9}}) \text{ V} & 0 < t < 20 \\ -4e^{\frac{t-20}{9}} \text{ V} & t > 20 \end{cases}$$

$$5-13 \quad i_L(t) = \begin{cases} 2(1 - e^{-t}) \text{ A} & 0 < t < 1 \\ 1 + 0.264e^{-2(t-1)} \text{ A} & t > 1 \end{cases}$$

$$u_L(t) = \begin{cases} 2e^{-t} \text{ V} & 0 < t < 1 \\ -0.528e^{-2(t-1)} \text{ V} & t > 1 \end{cases}$$

$$5-14 \quad u_C(t) = \begin{cases} 5(1 - e^{-(t-1)}) \text{ V} & 1 < t < 2 \\ 3.16e^{-(t-2)} \text{ V} & t > 2 \end{cases}$$

$$5-15 \quad u_C(t) = (-5 + 15e^{-10t}) \text{ V}$$

$$5-16 \quad i(t) = 4 + \left[\frac{8}{3} - 4 \right] e^{-\frac{1}{2}t} = \left[4 - \frac{4}{3}e^{-\frac{1}{2}t} \right] \text{ A} \quad t > 0$$

$$5-17 \quad i_x(t) = e^{-\frac{t}{16}} \text{ A}, u_x(t) = [12 - e^{-\frac{t}{16}}] \text{ V}$$

$$5-18 \quad u_K(t) = (8 - 2e^{-1000t}) \text{ V}$$

$$5-19 \quad i(t) = (5 + 2.5e^{-10^6t}) \text{ mA}, u(t) = (20 - 5e^{-10^6t}) \text{ V}$$

$$5-20 \quad i_3(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 0.2e^{-\frac{6}{5}(t-1)} & 1 < t < 2 \\ -0.1398e^{-\frac{6}{5}(t-2)} & t > 2 \end{cases}$$

$$5-21 \quad C = 0.11 \text{ F}$$

$$5-24 \quad i(t) = \left[-\frac{1}{18} - \frac{7}{18} \right] e^{-3t} \quad t > 0$$

$$5-25 \quad u(t) = \frac{R_3}{(R_1 - 1)R_1 - R_2} [1 - e^{-\frac{1}{R_3C}t}] \quad t > 0$$

$$5-26 \quad R = 1.05 \text{ k}\Omega, u_s(t) = 126.3 \text{ V}$$

$$5-27 \quad u_0(t) = \frac{-L_2}{R_3} U(t-2) + U(-t+2)$$

$$5-28 \quad i_1(0^+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \cdot \frac{U_s}{R}$$

习 题 六

6-1 (a)和(c)是二阶。(c)可能出现振荡

$$6-2 \quad u_C(t) = -200e^{-10t}\sin 49.97t \text{ V}$$

$$i_L(t) = 1.02e^{-10t}\sin(49.97t + 78.68^\circ) \text{ A}$$

$$6-3 \quad i = \left[\frac{50}{3}e^{-5t} - \frac{20}{3}e^{-2t} \right] \text{ A}$$

$$6-4 \quad u_C = (8e^{-2t} - 6e^{-3t}) \text{ V}$$

$$6-5 \quad [2 - 2(1 - t)e^{-t}] \text{ V}$$

$$6-6 \quad i = \frac{10}{3}(e^{-2t} - e^{-5t}) \text{ A}, u_C(t) = \frac{10}{3}(3 - 5e^{-2t} + 2e^{-5t}) \text{ V}$$

$$6-7 \quad u(t) = \frac{1}{2}te^{-2t} \text{ V}$$

$$6-8 \quad i(t) = \frac{5}{2}te^{-t} \text{ A}$$

$$6-9 \quad u(t) = 0.129(e^{-0.168t} - e^{-1.7027t}) \text{ V}$$

$$6-10 \quad i(t) = 2 \times 10^{-4}\sin(0.25 \times 10^7 t) \text{ A}$$

$$6-11 \quad u_1(t) = \left[\frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}} \right] \text{ V}$$

$$6-12 \quad \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR_1} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

$$6-13 \quad \begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} & -\frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1 + R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

$$6-14 \quad \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ i_{L1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L_1 + L_2} & -\frac{1}{L_1 + L_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L_2}{L_1 + L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

$$6-15 \quad \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_2} & \frac{1}{C_1 R_2} & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2 R_1} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

习 题 七

$$7-1 \quad i_1 = 100\cos\left[\frac{1}{0.0012}(t + 0.0002)\right] \text{ mA}$$

$$i_2 = 50\cos\left[\frac{1}{0.0006}(t - 0.0002)\right] \text{ mA}$$

$$7-2 \quad 0.222 \mu\text{s}$$

$$7-3 \quad \text{超前 } 60^\circ$$

$$7-4 \quad (1) I_m = 10\angle 120^\circ \text{ A} \quad (2) U_m = 10\angle 108^\circ \mu\text{V}$$

$$(3) U_m = 1\angle 54^\circ \text{ mV} \quad (4) U_m = 7.5\angle -54^\circ \text{ V}$$

7-5 当电流用余弦函数表示时:

$$u_1 = \sqrt{2}\cos(t - 240^\circ) \text{ V}, u_2 = 5\cos(t + 120^\circ) \text{ V}, i_3 = 5\cos(t - 90^\circ) \text{ A},$$

$$i_4 = 5\cos t \text{ A}, u_5 = 6\cos(t + 45^\circ) \text{ V}$$

若电源用正弦函数表示, 上述余弦符号(cos)全都换成正弦(sin)即可。

$$7-6 \quad U = 6 - j8 = 10\angle -53.10^\circ \text{ V}, u(t) = 10\cos(t - 53.10^\circ) \text{ V}$$

$$7-7 \quad U_2 = 0.954 \text{ V}, U_2 = 0.159 \text{ V}$$

$$7-8 \quad (a) Z_{AB} = 7.07\angle 45^\circ, Y_{AB} = 0.141\angle -45^\circ \text{ S}$$

$$(b) Z_{AB} = 7.07\angle -45^\circ, Y_{AB} = 0.141\angle 45^\circ \text{ S}$$

$$(c) Z_{AB} = 2.4\angle 36.9^\circ, Y_{AB} = 0.417\angle -36.9^\circ \text{ S}$$

$$(d) Z_{AB} = 2.4\angle -36.9^\circ, Y_{AB} = 0.417\angle 36.9^\circ \text{ S}$$

$$7-9 \quad Y_{AB} = 0.677\angle -28.3^\circ \text{ S}, Z_{AB} = 1.476\angle 28.3^\circ$$

$$7-10 \quad (a) 1.732 \text{ V} \quad (b) 1.414 \text{ V} \quad (c) 0 \text{ V} \quad (d) 1.732 \text{ A} \quad (e) 1.414 \text{ A} \quad (f) 2 \text{ A}$$

$$(g) U_R = U_L = 21.21 \text{ V}, U_C = 42.42 \text{ V} \quad (h) I_R = I_L = I_C = 2 \text{ A}$$

$$7-11 \quad 2.63\angle -19.8^\circ, 0.38\angle 19.8^\circ \text{ S}$$

$$7-12 \quad C = 3.18 \mu\text{F}, U_2 \text{ 超前 } U_1 45^\circ$$

$$7-13 \quad C = 0.277 \mu\text{F}$$

$$7-14 \quad R = 2.8328 \text{ k}\Omega, C = 0.0707 \mu\text{F}$$

$$7-15 \quad R = 4 \Omega, L = 16.9 \text{ mH}$$

$$7-16 \quad R = 18 \Omega, X_L = 24 \Omega$$

$$7-17 \quad (1) 1 \text{ k}\Omega \text{ 电阻 } 3.18 \text{ mH 电感串联及 } 2 \text{ k}\Omega \text{ 电阻与 } 6.36 \text{ mH 电感并联}$$

(2) 改变

$$7-19 \quad Z_1 = -j3.46 \text{ k}\Omega$$

$$7-20 \quad R = 8.66 \text{ k}\Omega, L = 15.9 \text{ H}, C = 0.318 \mu\text{F}$$

$$7-21 \quad U_{oc} = 9.7\angle -76^\circ \text{ V}, Z_0 = 4.83 \angle 14^\circ, I_{sc} = 2\angle -90^\circ \text{ A}$$

$$7-22 \quad I = 8.32\angle -133.9^\circ \text{ A}$$

$$7-23 \quad U_a = 44.7\angle 26.56^\circ \text{ V}, U_b = 100\angle 53.12^\circ \text{ V}, I_{ab} = 63.2\angle -18.44^\circ \text{ V}$$

$$7-24 \quad I_0 = 6.37\angle 71.6^\circ \text{ A}$$

$$7-25 \quad (1) (A) \text{ 为 } 5 \text{ A}; (2) Z = (12 - j16) \Omega, Y = (0.03 + j0.04) \text{ S}; (3) P = 300 \text{ W}$$

$$7-26 \quad (1) \quad Z_{ab} = 14.14 \angle 45^\circ; (2) \quad U_s = 70.7 \angle 25^\circ \text{V}; (3) \quad U_c = 141 \angle -155^\circ \text{V}; (4) \quad P = 125 \text{W}$$

$$7-27 \quad C = 0.127 \mu\text{F}$$

$$7-28 \quad = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}, \frac{U_1}{U_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1}$$

$$7-29 \quad \begin{cases} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L_3} \right] U_1 - \left[\frac{1}{R_2 + j\omega L_3} \right] U_4 = I_s \\ - \left[\frac{1}{R_2 + j\omega L_3} + 3 \right] U_1 + \left[\frac{1}{R_2 + j\omega L_3} + j\omega C_4 + \frac{1}{R_5 + j\omega C_6} \right] U_4 - \frac{1}{R_5 + j\omega C_6} U_7 = 0 \\ - \left[\frac{1}{R_5 + j\omega C_6} \right] U_4 + \left[\frac{1}{R_5 + j\omega C_6} + j\omega C_7 \right] U_7 = 0 \end{cases}$$

$$7-30 \quad L = 0.11 \text{H}, C = 92.2 \mu\text{F}$$

$$7-32 \quad \theta_{\text{左}} = 7430 \angle 199.6^\circ, \theta_{\text{中}} = 2549 \angle -101.31^\circ, \theta_{\text{右}} = 9010.72 \angle 33.69^\circ$$

$$7-33 \quad [2.97 \sin(3t - 52.5^\circ) + 0.17 \cos(4t + 65.5^\circ)] \text{V}$$

$$7-34 \quad \text{当 } R_L = R_{\text{eq}} = 4 \text{ 时, 吸收功率最大; } P_{\text{max}} = 2.25 \text{W}$$

$$7-35 \quad \text{电阻 } R_0 = 0.39 \text{ 时, } P_{L_{\text{max}}} = 21.9 \text{W}$$

$$7-36 \quad R = 125 \text{ , } L = 62.5 \text{mH 时, } P_{\text{max}} = 15.6 \text{W}$$

$$7-37 \quad U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 346.4 \text{V}, I_P = 2 \text{A}, U_{\text{oo}} = 0 \text{V}, P = 600 \text{W}$$

$$7-38 \quad I_{PA} = 22 \angle 0^\circ \text{A}, I_{PB} = 22 \angle -30^\circ \text{A}, I_{PC} = 22 \angle 120^\circ \text{A}$$

$$7-39 \quad P_1 = 834.1 \text{W}, P_2 = 1668.2 \text{W}$$

$$7-40 \quad i(t) = \frac{5}{6} + 1.403 \sin(314t - 19.32^\circ) - 0.941 \cos(628t - 54.55^\circ) + 0.487 \sin(942t + 71.19^\circ)$$

$$P = 122 \text{W}, U_s = 91.38 \text{V}, I = 1.497 \text{A}$$

习 题 八

$$8-1 \quad Z_a = \frac{R}{2} + j\omega M, Z_b = \frac{R}{2}$$

$$8-2 \quad 2 \text{mH}$$

$$8-4 \quad = \frac{RL_2}{L_1 L_2 - M^2}$$

$$8-5 \quad \begin{cases} \left[R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right] I_1 - j\omega M \cdot I_2 = U_s \\ - j\omega M \cdot I_1 + \left[R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right] I_2 = 0 \end{cases}$$

$$8-6 \quad \begin{cases} \left[R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} \right] I_{1m} - \left[-j\omega M + \frac{1}{j\omega C} \right] I_{2m} = U_s - U \\ - \left[-j\omega M + \frac{1}{j\omega C} \right] I_{1m} + \left[R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \right] I_{2m} = U \\ I_{2m} - I_{1m} = I_s \end{cases}$$

- 8-7 $C = 26.5 \mu\text{F}$, $U_L = 15 \text{ V}$
- 8-8 $I_2 = 5 \text{ mA}$, $C = 0.25 \mu\text{F}$
- 8-10 $u_A(t) = 70.7 \cos(t - 30^\circ) \text{ V}$, $P = 1500 \text{ W}$
- 8-11 0 A
- 8-12 $C = 667 \text{ nF}$
- 8-13 $\cos \varphi = 0.707$; $P = 2500 \text{ W}$
- 8-14 $I_1 = 0.672 \angle -42.3^\circ \text{ A}$
- 8-15 $U_1 = 2.24 \angle -63.4^\circ \text{ V}$
- 8-16 $I_1 = 0.784 \angle -113^\circ \text{ A}$
- 8-17 $Z_{ab} = \frac{Z_1}{(1-n)^2} + \frac{n^2 Z_2}{(1-n)^2}$
- 8-18 $n = 0.472$
- 8-19 $i_1 = \frac{u_s}{n_1^2 n_2^2 R_3 + R_1}$, $u_{ab} = \frac{n_1 n_2 R_3 u_s}{n_1^2 n_2^2 R_3 + R_1}$, $u_{cb} = \frac{n_1 n_2^2 R_3 u_s}{n_1^2 n_2^2 R_3 + R_1}$
 $u_{oc} = \frac{u_s}{n_1 n_2}$, $Z_0 = \frac{R_1}{n_1^2 n_2^2}$
- 8-20 $n = \sqrt{5} = 2.236$; $P_{\max} = 0.125 \text{ W}$
- 8-21 $P = 188 \text{ W}$
- 8-22 $n_1 = 1$, $P_{12} = 108 \text{ W}$, $P_{36} = 324 \text{ W}$; $U_1 = U_2 = -108 \text{ V}$
- 8-23 $i_C(t) = 7.34 \sqrt{2} \cos(200t - 107^\circ) \text{ A}$
- 8-24 $Z_L = (500 - j500) \Omega$; $P_{L\max} = 2.5 \text{ W}$

习 题 九

- 9-1 $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{10} \frac{\left[j + \frac{1}{RC} \right]}{\left[j + \frac{1}{10RC} \right]}$, $\varphi = \frac{1}{9.9RC}$
- 9-2 $R = \frac{1}{C}$, $\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{3}$
- 9-3 $\mu = 1 + \frac{2}{k}$, $\varphi_0 = \frac{1}{R_1 C_1}$
- 9-4 $Y(j\omega) = \frac{2}{\sqrt{(2\omega)^2 + (2\omega^2 - 1)^2}} \angle 90^\circ - \arctan\left[\frac{2\omega^2 - 1}{2}\right]$
- 9-5 -9.2°
- 9-6 50Ω , 0.6 H , $0.0667 \mu\text{F}$, $Q = 60$
- 9-7 100Ω , 1 H , 10^{-6} F
- 9-8 (1) $C = 45.5 \text{ pF}$, $L = 45.5 \mu\text{H}$; (2) $U_C = 50 U_s$, $f = 70 \text{ kHz}$;
 (3) $f_0 = 3.48 \text{ MHz}$, $Q = 8.36$, $\frac{U_C}{U_s} = 8.36$, $f = 416 \text{ kHz}$
- 9-9 (2) $L = 64.6 \mu\text{H}$, $Q = 50$

- 9-10 $L = 317 \mu\text{H}$, $Y_X = (1.26 \times 10^{-6} + j0.126 \times 10^{-3}) \text{S}$, $Q = 80$
9-11 0.5mA
9-12 $u = 70.7 \cos(1000t + 45^\circ) \text{V}$
9-13 $C_1 = 254 \text{pF}$, $C_2 = 760 \text{pF}$
9-14 4.535A
9-15 $0.5 \mu\text{F}$, $I_2 = I_3 = 1 \text{A}$, $I = I_1 = 2 \text{A}$
9-16 $R = 10 \Omega$, $C = 0.1 \mu\text{F}$, $n = 5$
9-17 $L = 2 \text{mH}$, $C = 0.04 \mu\text{F}$
9-18 (1) $f_0 = 500 \text{kHz}$, $Q = 42.5$, $f = 11.9 \text{kHz}$
(2) $f_0 = 500 \text{kHz}$, $Q = 21$, $f = 23.58 \text{kHz}$
(3) $C = 798 \text{pF}$, $L = 121 \mu\text{H}$
9-19 $I_L = I_C = 1 \text{A}$, $U_{C1} = 200 \text{V}$, $U_{C2} = 800 \text{V}$, $U_L = 1000 \text{V}$, $P = 20 \text{W}$
9-20 $U = 1.6 \text{V}$, $U_2 = 0.0644 \text{V}$, $Q = 38.98$, $f = 11.92 \text{kHz}$

习 题 十

- 10-1 $Z_n = 10 \Omega$, $Z_{12} = Z_{21} = 7.5 \Omega$, $Z_{22} = 9.38 \Omega$, $Z_{11} = Z_{22} = 2j\omega L + \frac{2}{j\omega C}$,
 $Z_{12} = Z_{21} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$, $Z_{11} = 50 \Omega$, $Z_{12} = 10 \Omega$, $Z_{21} = 20 \Omega$, $Z_{22} = 20 \Omega$
10-2 $R_1 = R_2 = R_3 = 5 \Omega$, $r_m = 3 \Omega$
10-3 (a) $y_{11} = \frac{1}{R}$, $y_{12} = -\frac{1}{R}$, $y_{21} = g - \frac{1}{R}$, $y_{22} = \frac{1}{R}$
(b) $y_{11} = -j2 \text{S}$, $y_{12} = j1 \text{S}$, $y_{21} = -j1 \text{S}$, $y_{22} = 0$
(c) $y_{11} = 0.48 \text{S}$, $y_{12} = 0.17 \text{S}$, $y_{21} = -0.33 \text{S}$, $y_{22} = 0.067 \text{S}$
10-4 $a_{11} = a_{22} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1}$, $a_{12} = \frac{2Z_1 \cdot Z_2}{Z_2 - Z_1}$, $a_{21} = \frac{2}{Z_2 - Z_1}$
10-5 $h_{11} = 20 \Omega$, $h_{12} = -10$, $h_{21} = 10$, $h_{22} = 0$
10-6 (1) $Z_{11} = 1 \Omega$, $Z_{12} = 1.5 \Omega$, $Z_{21} = 0$, $Z_{22} = 0.5 \Omega$
(2) $y_{11} = 1 \text{S}$, $y_{12} = -3 \text{S}$, $y_{21} = 0$, $y_{22} = 2 \text{S}$
A 参数不存在。
10-7 (1) $Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$, $Z_{12} = Z_{21} = j\omega M$, $Z_{22} = R_2 + j\omega L_2$
(2) $a_{11} = \frac{R_1 + j\omega L_1}{j\omega M}$, $a_{12} = \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) - (j\omega M)^2}{j\omega M}$
(3) $a_{21} = \frac{1}{j\omega M}$, $a_{22} = \frac{R_2 + j\omega L_2}{j\omega M}$
10-8 $a_{11} = a_{22} = \frac{2^2 - 1}{2}$, $a_{12} = \frac{2^2 - 1}{j^3}$, $a_{21} = \frac{1}{j}$
10-9 $h_{11} = 933 \angle -28.9^\circ \Omega$, $h_{12} = 0$, $h_{21} = 84.7 \angle -32.1^\circ \text{V/A}$, $h_{22} = 2 \times 10^{-5} \text{S}$
10-10 T型: 1.5Ω , 1.42Ω , 1.5Ω

型:0 .231 S,0 .218 S,0 .231 S

10-11 $a_{11} = 2, a_{12} = 12, a_{21} = 0.25 S, a_{22} = 2, Z_C = 6.93$

10-12 $Z_a = 2400, Z_b = 400$

10-13 $C_1 = 2.5 pF, C_2 = 5 pF$

10-14 $\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{L^2}{4}}, \sqrt{\frac{4 - L^2}{4LC} - 1}$

10-15 $U_2 = -62.3 \angle -15^\circ V$

10-16 $U_2 = 0.53 \angle 135^\circ V$

10-17 $R_L = 17.33, P_{max} = 10.25 W$

10-18 $I = 3 \angle 30^\circ A$

10-19 $u_C(t) = 6(1 - e^{-2t}) V, t \geq 0$

10-20 $i_L(t) = 4[1 - e^{-\frac{1}{3}t}] A, t \geq 0$

习 题 十 一

11-1 $u_2 = -\frac{R_2}{R_1} u_1$

11-3 $I = 3.6 A$

11-4 $i = \cos 4t mA$

11-5 $\frac{u}{u_s} = \frac{R_2 + R_3 + R_4}{R_3}$

11-6 $0.2 s$

11-7 $u_0 = u_i$

11-8 $Z_i = r^2 / R + j r^2 C$

11-11 $Z_i = \frac{-\frac{1}{s^2} + 2j + 5}{-\frac{1}{s^2} + j + 4}$

11-12 $L_{eg} = \frac{C_2 R_1 \cdot R_3 \cdot R_5}{R_4}$

11-13 正阻抗变换器, $a_{11} = n, a_{12} = a_{21} = 0$

$a_{22} = \frac{1}{n}$, 可用无源网络实现

负阻抗变换器, 不能用无源网络实现

习 题 十 二

12-1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$G_b = \text{diag} \left[\frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2} \frac{1}{R_3} \frac{1}{R_4} \frac{1}{R_5} \frac{1}{R_6} \frac{1}{R_7} \frac{1}{R_8} \right]$$

$$u_s = (0 \ 0 \ - \ u_{s3} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$i_s = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ - \ i_{s5} \ 0 \ 0 \ i_{s8})^T$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_2} & & -\frac{1}{R_1} & & 0 \\ & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_3} & & 0 \\ & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_4} & \\ & 0 & 0 & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_8} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u \\ u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s5} \\ -\frac{u_{s3}}{R_3} \\ \frac{u_{s3}}{R_3} \\ i_{s8} \end{bmatrix}$$

12-2 $u_1 = -0.57 \text{ V}, u_2 = -0.46 \text{ V}, u_3 = 0.2 \text{ V}, u_4 = 0.31 \text{ V}, u_5 = -0.11 \text{ V}, u_6 = 0.26 \text{ V}$
 $i_1 = 0.43 \text{ A}, i_2 = 0.086 \text{ A}, i_3 = 0.2 \text{ A}, i_4 = 0.31 \text{ A}, i_5 = -0.11 \text{ A}, i_6 = 0.51 \text{ A}$

12-3 $u_1 = 0.451 \text{ V}, u_2 = 0.195 \text{ V}, u_3 = 0.805 \text{ V}$

12-4
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + j C_3 & -j C_3 & 0 \\ -j C_3 & \frac{1}{R_2} + j C_3 + \frac{1}{j L_4} & -\frac{1}{j L_4} \\ 0 & -\frac{1}{j L_4} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{j L_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ U \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_{s1}}{R_1} \\ I_{s2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

12-5
$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 4 & -\frac{19}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u \\ u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

12-6
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R} + j C_3 & -j C_3 & 0 \\ -j C_3 & j C_3 + \frac{L_4 + L_5 - 2M}{j} & \frac{M - L_4}{j} \\ 0 & -g_m + \frac{M - L_4}{j} & \frac{1}{R_2} + \frac{L_4}{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ U \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{s1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

 $= L_4 L_5 - M^2$

12-7
$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & -G_1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{jL_5} + \frac{1}{jL_6} & -\frac{1}{jL_6} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{jL_6} & \frac{1}{jL_6} + jC_7 & -g_7 & 0 & 0 \\ -G_1 & 0 & 0 & G_1 + G_2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ U \\ U \\ U \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{s3} \\ U_{s4} \end{bmatrix}$$

12-8
$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 \\ -G_2 & G_2 + \frac{1}{jL_3} + \frac{1}{jL_4} & -\frac{1}{jL_4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{jL_4} & \frac{1}{jL_4} + jC_6 & -1 \\ -\mu_1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ U \\ U \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{s1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

12-9
$$\begin{bmatrix} R_3 + R_5 + R_6 & -R_5 - R_6 \\ -R_5 - R_6 & R_4 + R_5 + R_6 + R_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{s1} - R_3 i_{s2} - R_5 i_{s7} \\ R_5 i_{s7} - R_4 (i_{s2} - i_{s7}) + R_9 i_{s7} - u_{s8} \end{bmatrix}$$

12-10
$$u_3 = \frac{R_2 R_3 R_s i_s}{(\mu - 1) R_3 (R_1 + R_s) - R_2 (R_1 + R_s) + \mu R_2 R_3}$$

习 题 十 三

- 13-1
- (1) 线性

(2) 非线性, 单向, 单调

(3) 非线性, 单向, 流控

(4) 非线性, 双向, 单调

(5) 非线性, 单向, 单调

(6) 非线性, 单向, 单调

(7) 非线性, 单向, 单调

- 13-2
- (1) $u_1 = 62.4\text{ V}$, $u_2 = 60\sin 314t + 2.4\sin^3 314t = (61.8\sin 314t - 0.6\sin 942t)\text{ V}$, $u_3 = 600\text{ V}$

(2) $u_{12} = u_1 + u_2$, $u_2 = ku_2$

(3) 误差是 0.0003 V

13-3
$$\begin{cases} u_a^3 + (u_a - u_b)^2 = 8 \\ u_b^{3/2} + u_a^3 = 3 \end{cases}$$

13-4
$$\begin{cases} u_{s1} - R_3 (u_1^2 + i_2) - u_1 = 0 \\ \frac{2}{i_2} + u_{s2} - u_1 = 0 \\ \frac{2}{i_2} + R_3 i_2 + R_3 u_1^2 = u_{s1} - u_{s2} \\ \frac{2}{i_2} - u_1 = -u_{s2} \end{cases}$$

13-5
$$u_1 = u_x = \frac{12 R_2}{R_1 + R_2} \text{ V}$$

$$u_0 = u_2 = u_3 = 0 \text{ V}$$

13-10
$$R_d = 11.1$$

参 考 文 献

- [1] 霍锡真,侯自立 .电路分析 北京:北京邮电大学出版社,1994
- [2] 李瀚荪 .简明电路分析基础 .北京:高等教育出版社,2002
- [3] 谢沅清,解月珍 .电子电路基础 北京:人民邮电出版社,1999
- [4] 江辑光 .电路原理(上下册) .北京:清华大学出版社,1996
- [5] 邱关源 .电路(第四版) .北京:高等教育出版社,1999
- [6] 北京邮电学院电工教研室 .电路分析基础 .北京:人民邮电出版社,1984
- [7] 吴大正 .电路基础(第二版) .西安:西安电子科技大学出版社,2000
- [8] 战胜录 .电路系统的理论基础 .大连:大连工学院出版社,1988
- [9] 肖达川,陆文娟 .线性时变电路原理简介 北京:高等教育出版社,1989
- [10] L.O.Chua . Introduction to Nonlinear Network Theory . McGraw-Hill Book Company, New York, 1969