作业

1. No.5（希望在作业题纸中选择、填空、判断各题的相应位置处写出其关键步骤）；
2. 自学本章各例题并完成书上的习题(对照书后的参考答案自己订正)。
3. 自学：第六节:狭义相对论的意义和局限

第九周星期三交作业

第四节　狭义相对论动力学基础

一、改造经典力学的两条原则

二、质速关系

三、质能关系

四、能量与动量的关系

五、相对论动力学基本方程

一、改造经典力学的两条原则

1. 满足狭义相对性原理（对称性思想）的要求

改造后的力学定律必须是洛仑兹变换的不变式

2. 满足对应原理的要求

对应原理：新理论应该包容那些在一定范围内已被证明是正确的旧理论，并在极限条件下过渡到旧理论。

即：相对论力学量 $\xrightarrow{u<<c}$ 经典力学量

相对论力学定律 $\xrightarrow{u<<c}$ 经典力学定律

改造经典力学的思路：

重新定义质量、动量、能量，使相应的守恒定律在相对论力学中仍然成立。

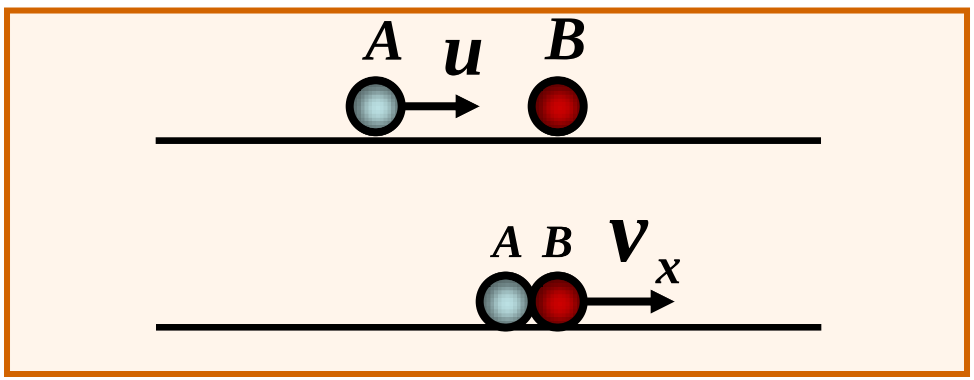
二、质速关系（质量概念的修正）

物体的静止质量(m_0):物体相对于参考系静止时的质量。

设物体相对于参考系以速率u运动时的质量为$m(u)$

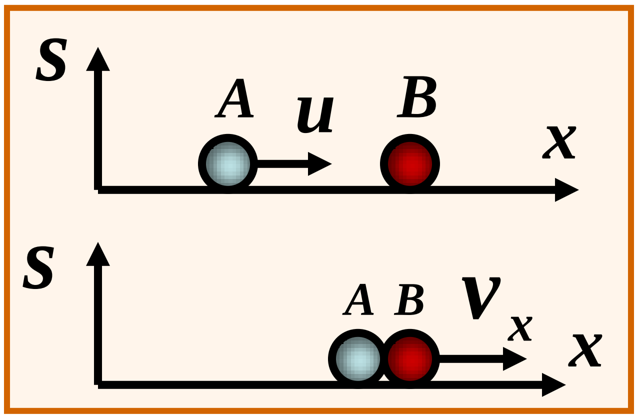
静系中：m_0　　　　动系中：$m(u)$

理想实验：两个全同粒子的完全非弹性碰撞



粒子系统质量守恒、动量守恒。

参考系S固接于粒子B

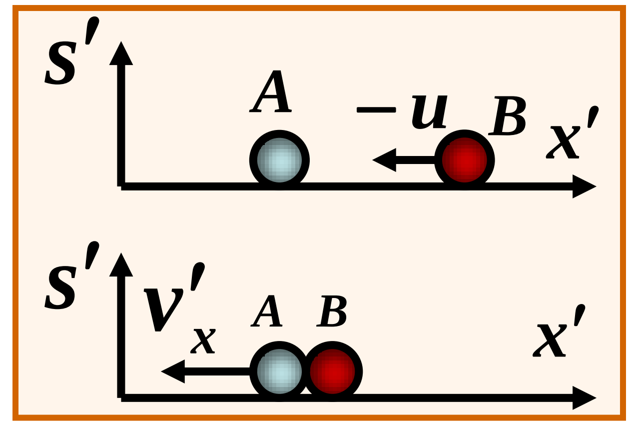


质量守恒：$m_0 + m(u) = M(v_x)$

动量守恒：$m(u)u = M(v_x)v_x$

解得：$v_x = \dfrac{m(u)u}{m_0 + m(u)}$

参考系S'固接于粒子A



质量守恒：$m_0 + m(u) = M(v'_x)$

动量守恒：$-m(u)u = M(v'_x)v'_x$

解得：$v'_x = -\dfrac{m(u)u}{m_0 + m(u)}$

将 $v_x = \dfrac{m(u)u}{m_0 + m(u)}$； $v'_x = -\dfrac{m(u)u}{m_0 + m(u)}$

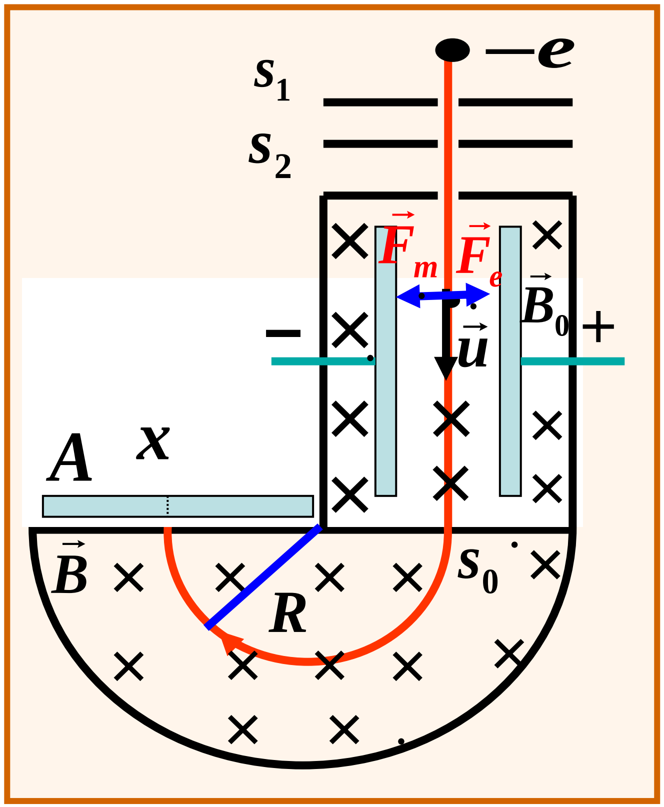
代入洛仑兹速度变换：$v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}$

得 $$\boxed{m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} = \gamma m_0}$$ $\longrightarrow$ 质速关系

结论：在相对论中，质量与时间、长度一样，与惯性系的选择有关，为相对量。

当 $u \ll c$ 时： $m(u) \to m_0$ 满足对应原理的要求

实验验证（质谱仪）：　测高速电子的荷质比



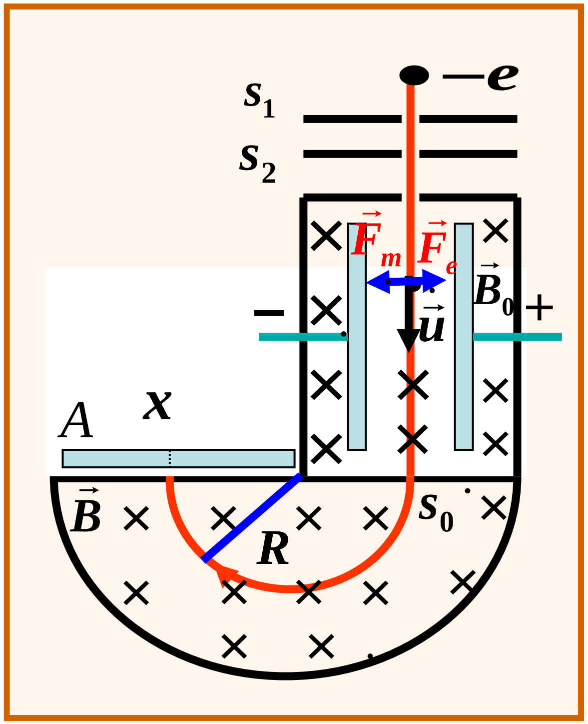
经典情况（质谱仪）：

$$euB = \frac{mu^2}{R}$$

$$\frac{e}{m} = \frac{u}{BR} = \text{常数}$$

实验验证（质谱仪）：

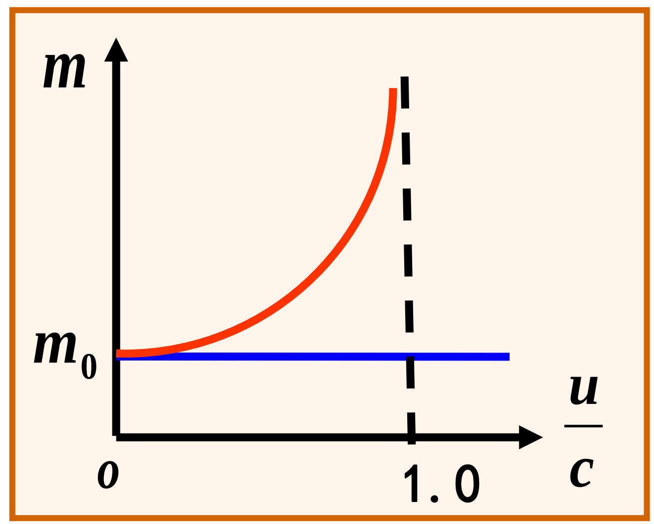
测高速电子的荷质比



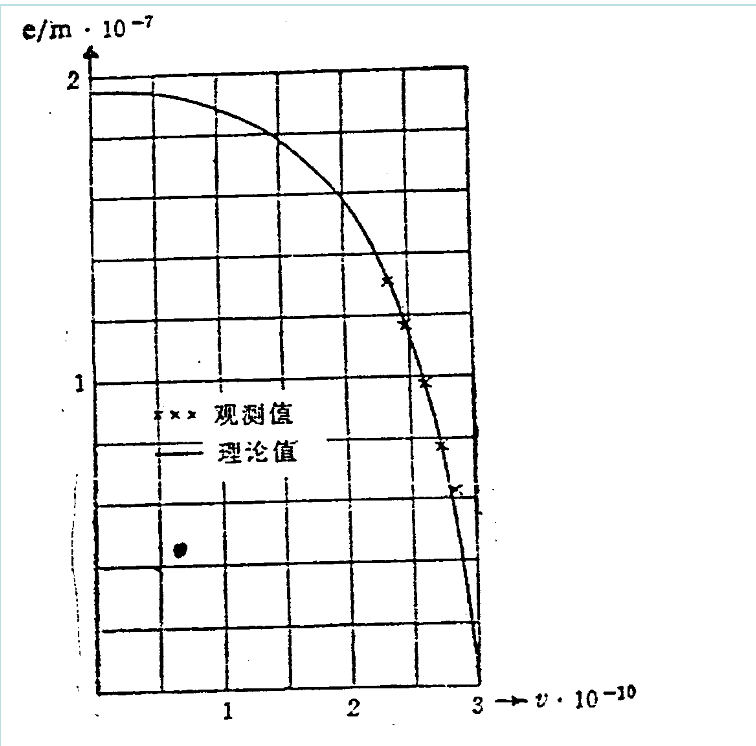
相对论情况：

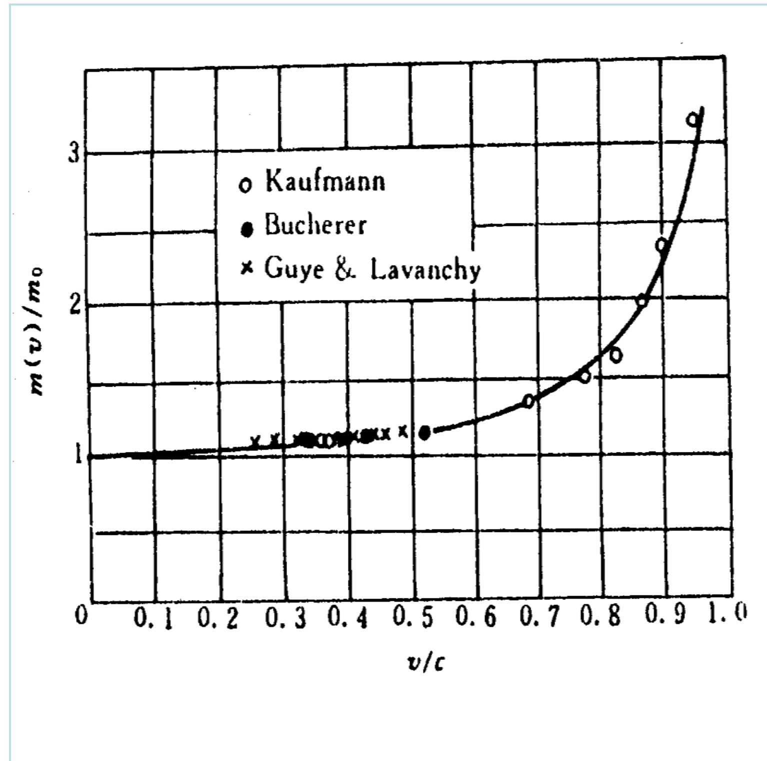
$$\frac{e}{m}=\frac{e}{\gamma m_0}=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\frac{e}{m_0}\quad ;$$

当 $u\uparrow$ 时：$\frac{e}{m}\downarrow$，$m\uparrow$

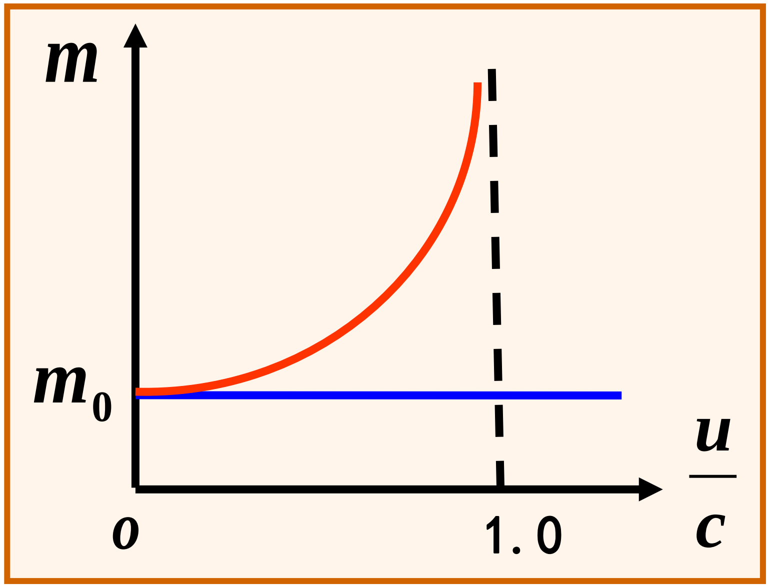


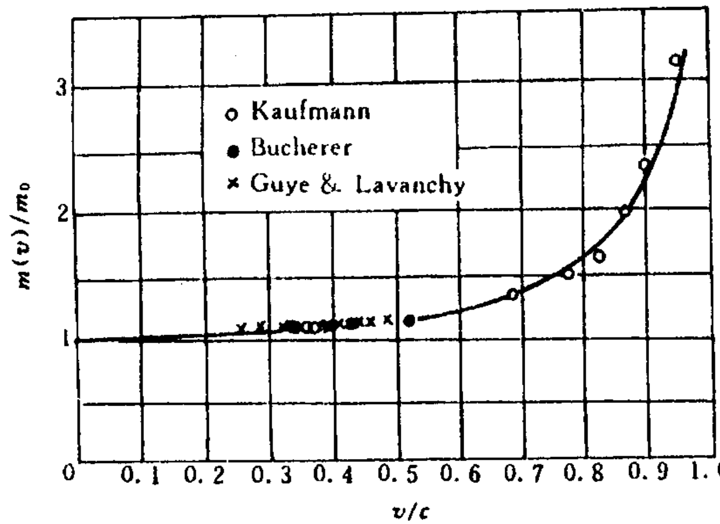
考夫曼实验结果：电子质量随速度变化





质速关系理论与实验曲线比较：





现代实验中，电子可以被加速到与光速之差只有300亿分之一，相应 $m_e = 4\times10^4 m_0$，质速关系仍与实验相符。

三、质能关系

1. 质能关系

将质速关系按幂级数展开，得

$$m(u)=\gamma m_0=(1-\frac{u^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}m_0=m_0(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{u^4}{c^4}+\cdots)$$

两边同乘以 c^2 得：

$$mc^2=m_0c^2+\frac{1}{2}m_0u^2(1+\frac{3}{4}\frac{u^2}{c^2}+\cdots)$$

$$mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0u^2(1 + \frac{3}{4}\frac{u^2}{c^2} + \cdots)$$

定义：总能量 $\boxed{E = mc^2}$ ⟶ 质能关系

静能量 (u=0) $\boxed{E_0 = m_0c^2}$

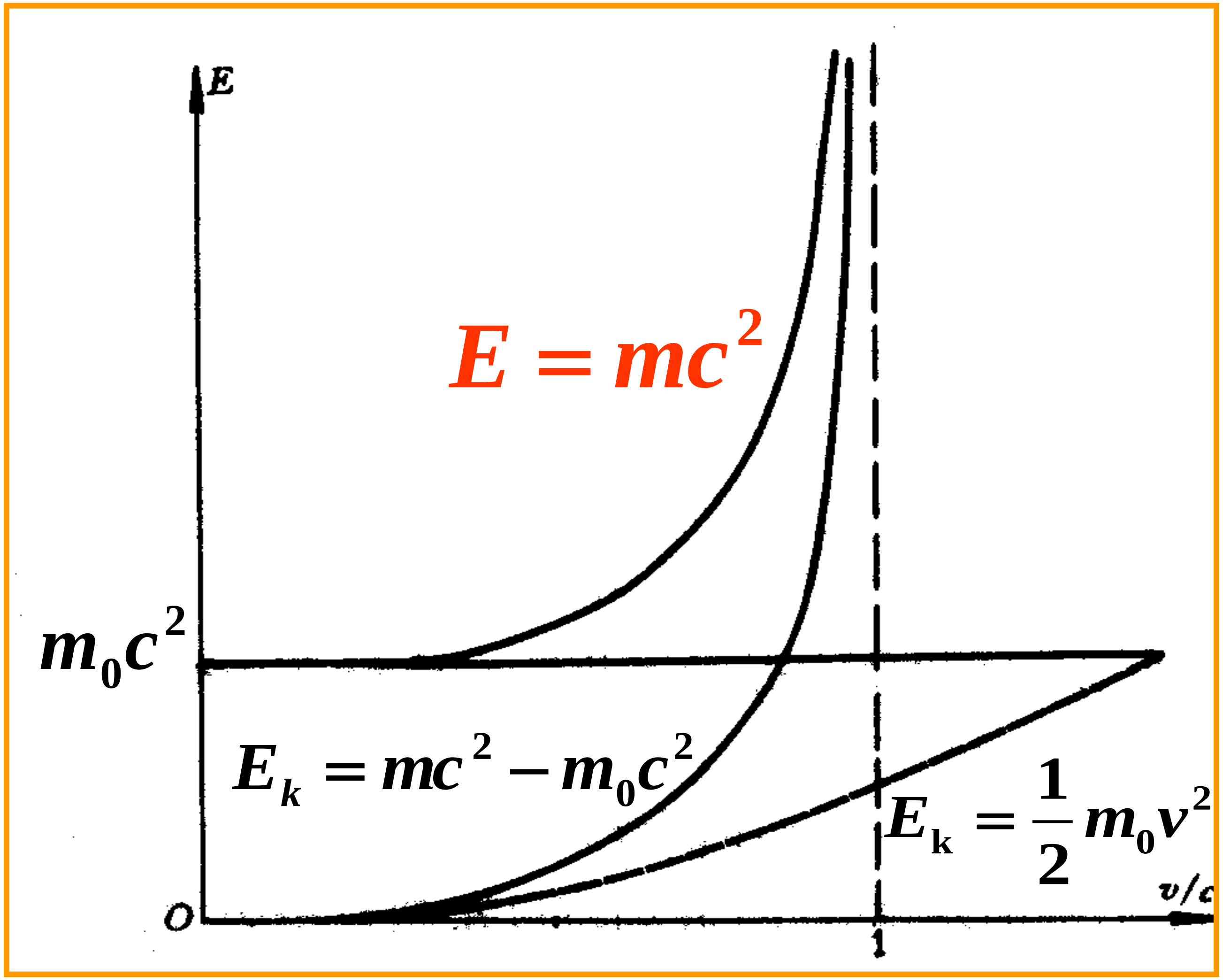
总能量与静能量的关系：$E = \gamma m_0c^2 = \gamma E_0$

相对论动能

$$\boxed{\begin{aligned} E_k &= E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 \\ &= (\gamma - 1)m_0c^2 = (\gamma - 1)E_0 \end{aligned}}$$

总能量、静能量和动能的关系：$E = E_0 + E_k$

当 $u << c$ 时：$E_k = \frac{1}{2}m_0u^2$ 满足对应原理的要求



E
$E = mc^2$
m_0c^2
$E_k = mc^2 - m_0c^2$
$E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$
O
v/c
1

质能关系的实验验证

核嬗变： $\Delta E = c^2 \Delta m \longrightarrow \bar{c} = 2.98 \times 10^8 \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

由参加反应各原子质量，反应前后能量损失计算出的光速与实验值相符。

正负电子对湮灭： $e^- + e^+ \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$

$$E = 2m_0c^2 + 2E_K = 2E_{光} \longrightarrow E_{光}$$

$$E_{光} = \frac{hc}{\lambda} \longrightarrow \lambda$$

由质能关系计算出的辐射波长与实验值相符。

2. 质能关系的意义

(1) 质量概念进一步深化

相对论总能 E 包含了物体的全部能量（机械能、电磁能、原子能等），解决了经典物理未能解决的物体总能问题。

质量是约束能量的形式，是能量的载体。

(2) 质能关系统一了质量守恒定律和能量守恒定律

孤立系统的能量：$\sum E_i =$ 恒量 $\longrightarrow$ 能量守恒定律

$\downarrow$

孤立系统的质量：$\sum m_i =$ 恒量 $\longrightarrow$ 质量守恒定律

(3) 质能关系是人类打开核能宝库的钥匙

$$\boxed{\Delta E = c^2 \Delta m}$$

裂变：重核分裂为中等质量的核

聚变：轻核聚合为中等质量的核

$\left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\}$ 质量亏损，释放结合能

应用：原子弹、氢弹、核电站 ……

四、能量与动量的关系

1. 相对论动量 $\vec{p}=m(v)\vec{v}=\gamma m_0\vec{v}$

$v<<c \quad \gamma\to 1 \quad \vec{p}=m_0\vec{v}$ 满足对应原理的要求

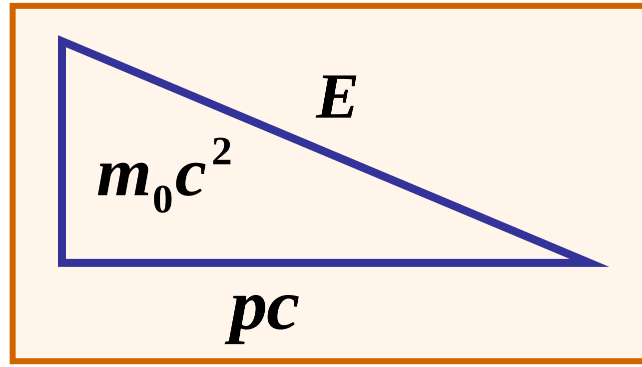
2. 能量与动量的关系

由 $\left.\begin{array}{l}\vec{p}=m\vec{v}\\ E=mc^2\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{消去 } m \text{ 得}} \vec{v}=\dfrac{c^2}{E}\vec{p} \longrightarrow v^2=\dfrac{c^4}{E^2}p^2$

又 $E=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{c^2}{E^2}p^2}}$

$\therefore \boxed{E^2=p^2c^2+m_0^2c^4=p^2c^2+E_0^2}\longrightarrow$ 能量与动量的关系

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0{}^2c^4}$$



讨论： 当 $v << c$ 时

$$\begin{aligned}
c^2p^2 &= E^2 - E_0{}^2 \\
&= (E + E_0)(E - E_0) \\
&= E_k(E + E_0) \\
&= E_k \cdot E_0(\gamma + 1) \\
&= 2E_k m_0 c^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{E_k = \frac{p^2}{2m_0}}$$

满足对应原理的要求

例1 (P_{172}例4)：用相对论讨论光子的基本属性

1. 光子的能量 $E = h\nu = mc^2$

2. 光子的质量

由 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$ 可知：

当$u = c$时，只有$m_0 = 0$，m才能为有限值。

一切以光速运动的微观粒子，其静止质量必为零。

即：光子在任何参考系中均以光速运动，找不到与光子相对静止的参考系。不能以光子作参考系！

光子的质量： $$\boxed{m_{光子}=\frac{E}{c^2}=\frac{h\nu}{c^2}=\frac{h}{c\lambda}}$$

3. 光子的动量

又由 $E^2=p^2c^2+m_0{}^2c^4\,;m_0=0$ 可知

$$\boxed{p_{光子}=\frac{E}{c}=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}}$$

例如：

太阳辐射能流： $1.36\times10^3\quad \mathrm{W\cdot m^{-2}}$

产生光压： $4.5\times10^{-6}\ \mathrm{N\cdot m^{-2}}$

五、相对论动力学基本方程

从相对论角度审视经典力学的基本定律：

1. 惯性定律保持不变，在相对论中成立。

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x / c^2}$$

2. 牛顿第二定律

由 $\vec{p} = m\vec{v} = \gamma\, m_0 \vec{v}$ 得：

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$$

相对论动力学基本方程

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

讨论：

（1）力既可以改变物体的速度，也可以改变物体的质量。

（2）力与加速度 $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ 的方向一般不会相同。

（3）$v<<c \quad \gamma\to 1 \quad \vec{F}=m_0\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m_0\vec{a}$

满足对应原理的要求

相对论力的变换式：

（教材173页）

$$
\begin{cases}
F_x = \dfrac{F'_x + \dfrac{u}{c^2}\vec{F}'\cdot\vec{v}'}{1+\dfrac{u}{c^2}v'_x} \\[2ex]
F_y = \dfrac{F'_y}{\gamma\left(1+\dfrac{u}{c^2}v'_x\right)} \\[2ex]
F_z = \dfrac{F'_z}{\gamma\left(1+\dfrac{u}{c^2}v'_x\right)}
\end{cases}
$$

3. 确立“场”的实在地位，牛顿第三定律失去意义，

牛顿第三定律建立在超距作用和绝对时空观基础之上，而相对论认为场是传递相互作用的媒介，是物质存在的形式：粒子 $\longleftrightarrow$ 场 $\longleftrightarrow$ 粒子 ，牛顿第三定律被动量、角动量守恒定律取代。

小结：相对论动力学的三个主要关系

质速关系：$m(u)=m_0\Big/\sqrt{1-u^2/c^2}=\gamma m_0$

质能关系：总能 $E=mc^2$ $\qquad \Delta E=c^2\Delta m$

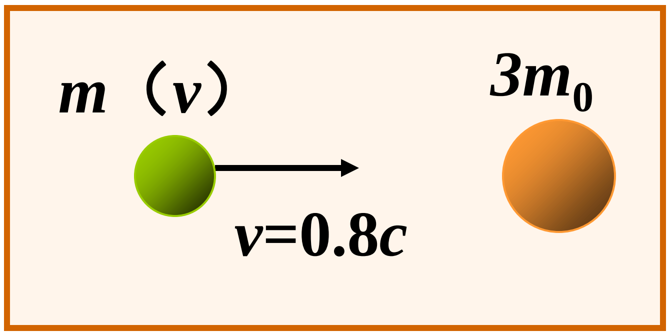
静能 $E_0=m_0c^2$

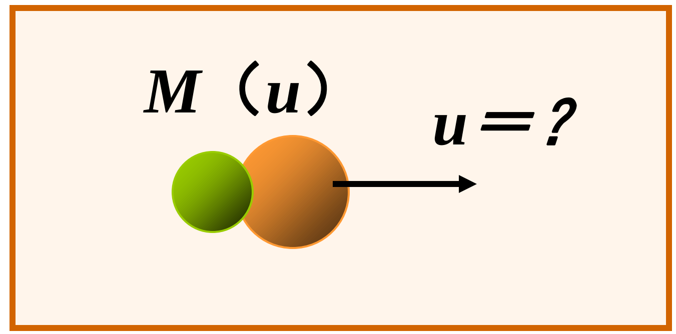
动能 $E_k=E-E_0=mc^2-m_0c^2$

能量与动量的关系：$E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$

例2（与P_{170}例2类似）：

一个静质量为 m_0 的粒子，以 $v=0.8c$ 的速率运动，并与静质量为 $3m_0$ 的静止粒子发生对心碰撞以后粘在一起，求合成粒子的静止质量。





问题： 合成粒子的静止质量是 $4m_0$ 吗？

思路：

$$\left.\begin{array}{l}\text{动量守恒}\\ \text{能量守恒}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}M(u)=?\\ u=?\end{array}\right\}\quad M_0=?$$

↓

非弹性碰撞，为什么能量守恒？——总能守恒

解：设合成粒子的运动质量为 M，速率为 u

由动量守恒和能量守恒得：

$$\begin{cases} mv = Mu & (1) \\ 3m_0c^2 + mc^2 = Mc^2 & (2) \end{cases}$$

由于 $m = \dfrac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-0.8^2}} = \dfrac{m_0}{0.6}$

代入(2) 式得： $M = 3m_0 + \dfrac{m_0}{0.6} = \dfrac{14}{3}m_0$

再代入(1) 式得： $u=\dfrac{mv}{M}=\dfrac{\dfrac{m_0}{0.6}\times 0.8c}{\dfrac{14}{3}m_0}=\dfrac{2}{7}c$

又由 $M=\dfrac{M_o}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$ 得

$$M_0=M\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{14}{3}m_0\sqrt{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2}\approx 4.47m_0$$

例3（P_{171} 例3）：

已知：一个电子的静能为 0.511MeV，经同步加速器加速后，能量增量为20.00MeV,

求：该电子质量与其静质量之比。

解：由题意：

$$mc^2 = m_0c^2 + \Delta E = 0.511 + 20 = 20.511$$

则：$$\frac{m}{m_0} = \frac{mc^2}{m_0c^2} = \frac{20.511}{0.511} = 40.1$$

比较相对论和非相对论的质量、动量和动能

	相对论	非相对论
质量	γm_0	m_0
动量	$\gamma m_0 v$	$m_0 v$
动能	$(\gamma-1)m_0 c^2$	$\frac{1}{2}m_0 v^2$

练习:在什么速度下，粒子的动量等于其非相对论动量的两倍？又在什么速度下，粒子的动能等于其非相对论动能的两倍？

解:（1）由题意:

$$\frac{p}{p_0}=\frac{\gamma m_0 v}{m_0 v}=\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}=2$$

可得: $v=\frac{\sqrt{3}}{2}c=0.866c$

（2）由题意：

$$\frac{E_k}{E_{k0}}=\frac{(\gamma-1)m_0c^2}{\frac{1}{2}m_0v^2}=2$$

于是 $$\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}-1=\frac{v^2}{c^2}$$

得 $$v=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}c=0.786c$$

例4(P_{179}8.16): 观察者甲以 0.8c速率相对于观察者乙运动，甲携带长 L，截面积 S，质量为 m 的棒，棒沿运动方向安放，求乙和甲测定的棒的密度之比。

解： 棒相对于甲静止，甲测定的密度为：$\rho = \dfrac{m}{LS}$

棒相对于乙运动，设乙测定的质量为 m'，长度为L'，截面积为S'，有：

$$m' = \gamma m \qquad L' = \gamma^{-1} \cdot L \qquad S' = S$$

乙测定的密度为：$\rho' = \dfrac{m'}{L'S'} = \dfrac{\gamma\, m}{\gamma^{-1} LS} = \gamma^2 \rho$

$$\therefore \frac{\rho'}{\rho} = \gamma^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}}\right)^2 = \frac{25}{9} \approx 2.78$$