# 目　录

# 2015年西南交通大学924信号与系统一考研真题

# 西南交通大学2015年全日制硕士研究生招生入学考试试卷

试题代码：924

试题名称：信号与系统一

注请注意：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　考试时间：201[illegible]年12月

本试题共八题，共4页，满分150分，请认真检查；

答题时，直接将答题内容写在考场提供的答题纸上，答在试卷上的内容无效；

请在答题纸上按要求填写试题代码和试题名称；

试卷不得拆开，否则遗失后果自负。

一、选择题：（20分，共10小题）（答在试卷上的内容无效）

每题回答正确得2分，否则得零分。每小题所给答案中只有一个是正确的。

1. $x[n]=e^{j(\frac{2\pi}{3})n}+e^{j(\frac{4\pi}{3})n}$，该序列是（　　　）。

（A）非周期序列　（B）周期 $N=3$　（C）周期 $N=3/8$　（D）周期 $N=24$

2. 信号 $f(-2t+4)$ 的波形是由（　　　）。

（A）$f(-2t)$ 左移4构成　　（B）$f(-2t)$ 左移2构成

（C）$f(-2t)$ 右移4构成　　（D）$f(-2t)$ 右移2构成

3. 微分方程 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t+10)$ 所描述的系统是（　　　）。

（A）时不变因果系统　　（B）时不变非因果系统

（C）时变因果系统　　（D）时变非因果系统

4. 若矩形脉冲信号的宽度加宽，则它的频谱带宽（　　　）。

（A）不变　　（B）变窄

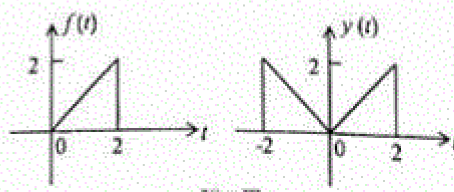
（C）变宽　　（D）与脉冲宽度无关

5. 已知 $f(t)$ 是周期为 $T$ 的函数，$f(t)-f(t+\frac{5}{2}T)$ 的傅里叶级数中，只可能有（　　　）。

（A）正弦分量　　（B）余弦分量

（C）奇次谐波分量　　（D）偶次谐波分量

6. 若如题6图所示信号 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(j\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$，则信号 $y(t)$ 的傅里叶变换 $Y(j\omega)$ 为（　　　）。




题6图

7. 信号 $f(t)=u(t)-u(t-1)$ 的拉氏变换为（　　　）。

（A） $\frac{1}{s}(1-e^{-s})$　　　　（B） $\frac{1}{s}(1-e^{s})$

（C） $s(1-e^{-s})$　　　　（D） $s(1-e^{s})$

8. $\int_{1}^{2}(t^2+t+1)\delta(2t-1)dt=$ （　　　）。

（A） $\frac{7}{2}$　　（B） $\frac{7}{4}$　　（C） $\frac{7}{8}$　　（D） 0

9. 已知某线性时不变系统的系统函数为 $H(z)=\frac{1-z^{-1}}{(1-0.2z^{-1})(1-2z^{-1})}$，若系统为因果的，则系统函数 H(z) 的收敛域 ROC 应为（　　　）。

（A） $|z|<0.2$　　（B） $|z|>2$　　（C） $|z|<2$　　（D） $0.2<|z|<2$

10. 理想不失真传输系统的传输函数 $H(j\omega)$ 是　（　　　）。

（A） $Ke^{-j\omega_0 t}$　　　　（B） $Ke^{-j\omega t_0}$

（C） $Ke^{-j\omega t_0}\left[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)\right]$　　（D） $Ke^{-j\omega_0 t_0}$

二、（20 分）如图 A 所示系统，已知 $x(t)=\sin(\frac{\pi}{4}t)$，$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2n)$，且 $h(t)$，$H_1(j\omega)$ 如图 B 图 C 所示。

（1）画出 $r(t)$ 的频谱图；

（2）求出 $y_1(t)$ 表达式；

（3）画出 $y_2(t)$ 波形。

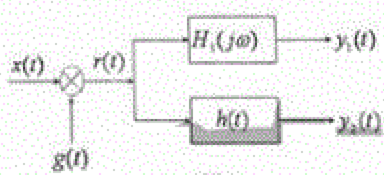
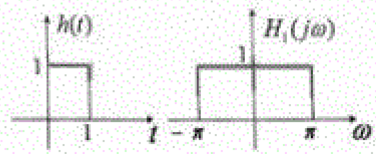


图 A



图B　　图C

三、（15 分）已知某连续时间 LTI 系统，满足以下条件：系统是因果的；系统有理的，且仅有两个极点 $s=-2, s=-3$；当输入信号 $f(t)=1, (-\infty<t<+\infty)$ 时，系统输出 $y(t)=0$；系统的单位冲激响应 $h(t)$ 在 $t=0^{+}$ 时的值为 2。试确定系统函数 $H(s)$ 及其收敛域。

四、（25 分）某稳定离散时间 LTI 系统的单位阶跃响应为：

$$s(n)=\left[3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u(n),$$

(1) 试求该系统的系统函数 $H(z)$，画出零极点图并注明收敛域；

(2) 试求该系统的单位脉冲响应 $h(n)$，判断该系统是否是因果系统；

(3) 写出描述该系统的差分方程；

(4) 画出该系统的模拟框图；

(5) 若输入序列 $f(n)=\cos(\pi n)\quad -\infty<n<+\infty$，确定系统的输出 $y(n)$。

五、（20 分）已知一个连续 LTI 系统的单位冲激响应为：

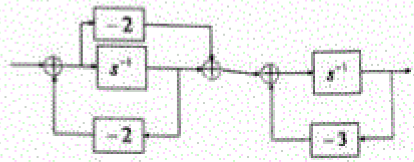
$$h(t)=\delta(t)-2\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)\cdot\cos 5\pi t。求：$$

(1) 系统的频响 $H(j\omega)$，并画出频谱图；

(2) 系统属于什么类型的滤波器（低通，高通，带通，带阻）；

(3) 如果输入信号为 $f(t)=1+\cos(10\pi t)+\cos(5\pi t)\quad(-\infty<t<+\infty)$，求系统输出 $y(t)$。

六、（25 分）某因果 LTI 系统，其模拟框图如图所示，试求解以下问题：




（1）求系统的系统函数 $H(s)$；

（2）画出零极点图，判断系统是否稳定

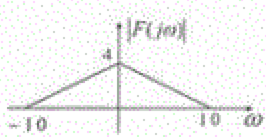
（3）求系统的单位冲激响应 $h(t)$；

（4）写出系统的微分方程；

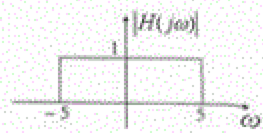
（5）若初始状态为：$y(0^-)=1, y'(0^-)=1$，当输入 $f(t)=2e^{-3t}u(t)$ 时，求零输入响应 $y_{zi}(t)$、零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和系统的全响应 $y(t)$。

七、（10 分）已知某系统的结构如图 A 所示，其频响特性及激励信号的频谱分别如图 B 和 C 所示，


图A




图B




图C

（1）画出 $y(t)$ 的频谱 $Y(j\omega)$。

（2）若 $p(t)=\cos(1000t)$, 画出 $ys(t)$ 的频谱 $Ys(j\omega)$，并写出 $Ys(j\omega)$ 与 $Y(j\omega)$ 的关系式

八、（15 分）假设 LTI 系统单位脉冲响应 $h(n)$ 和输入信号 $x(n)$ 分别用下式表示：

$x(n)=3\delta(n)+3\delta(n-1)+3\delta(n-2)+3\delta(n-3)$，

$h(n)=3\delta(n)+3\delta(n-1)+3\delta(n-2)+3\delta(n-3)$，

系统的输出为 $y(n)$。

（1）求系统函数 $H(z)$

（2）求系统的输出 $y(n)$。要求写出 $y(n)$ 的表达式，并画出 $y(n)$ 的波形。

# 2014年西南交通大学924信号与系统一考研真题及详解

## 一、选择题

1．$y(t)=5\cos(3t+\frac{\pi}{2})+3\cos(2t+\frac{\pi}{3})$的周期是（　　）。[西南交通大学2014研]

A．$\frac{\pi}{6}$

B．$\frac{\pi}{3}$

C．$2\pi$

D．$\infty$

【答案】C

【解析】$T_1=\frac{2\pi}{3}$，$T_2=\frac{2\pi}{2}=\pi$，两者公倍数是$2\pi$。

2．若$f(t)$是已录制声音的磁带，则下列表述错误的是（　　）。[西南交通大学2014研]

A．$f(-t)$表示将磁带倒带转播放生的信号

B．$f(t+2)$表示将磁带以超前2个单位播放

C．$f(\frac{t}{2})$表示原磁带放音速度以二倍速度加快播放

D．$2f(t)$将磁带的音量放大一倍播放

【答案】C

【解析】表示原磁带放音速度降低一半播放（利用傅里叶变换）。

3．一LTI系统的单位冲激响应$h(t)=(0.5)^{-1}u(-1-t)$，该系统是（　　）。[西南交通大学2014研]

A．因果稳定

B．因果不稳定

C．非因果稳定

D．非因果不稳定

【答案】D

【解析】由$h(t)$的形式看，令$t=0$有$h(0)=0.5^{-1}u(-1)$，响应超前于激励，因此系统是非因果的，收敛于$\mathrm{Re}[s]<0.5$，不包含单位圆，系统不稳定。

4．若$f(t)$为系统的输入激励，$y(t)$为系统的输出响应，$y(0)$为系统的初始状态，下列哪个输出响应所对应的系统是线性系统（　　）。[西南交通大学2014研]

A．$y(t)=5y^2(0)+3f(t)$

B．$y(t)=3y(0)+2f(t)+\frac{df(t)}{dt}$

C．$y(t)=2y(0)f(t)+2f(t)$

D．$y(t)=4y(0)+2f^2(t)$

【答案】B

【解析】线性系统中不会出现输入、输出的乘积形式。

5．信号$t\frac{df(t)}{dt}$的傅里叶变换为（　　）。[西南交通大学2014研]

A．$F(\omega)+\omega\frac{dF(\omega)}{d\omega}$

B. $-F(\omega)-\omega\frac{dF(\omega)}{d\omega}$

C. $F(\omega)-\omega\frac{dF(\omega)}{d\omega}$

D. $-F(\omega)-\omega\frac{dF(\omega)}{d\omega}$

【答案】D

【解析】根据傅里叶变换的时域微分性质$\frac{df(t)}{dt}\xleftrightarrow{FT}j\omega F(\omega)$及频域微分性质$tf(t)\xleftrightarrow{FT}j\frac{dF(\omega)}{d\omega}$，所以$t\frac{df(t)}{dt}\xleftrightarrow{FT}j\frac{d[j\omega F(\omega)]}{d\omega}=-F(\omega)-\omega\frac{dF(\omega)}{d\omega}$。

6．信号$x(t)$的傅里叶变换为$X(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<2\\ 0, & |\omega|>2\end{cases}$，则$x(t)$为（　　）。[西南交通大学2014研]

A. $\frac{\sin 2t}{2t}$

B. $\frac{\sin 2t}{\pi t}$

C. $\frac{\sin 4t}{4t}$

D. $\frac{\sin 4t}{\pi t}$

【答案】B

【解析】$Sa(\omega t)=\frac{\sin\omega t}{\omega t}\xleftrightarrow{FT}\frac{\pi}{\omega}G_{2\omega}(t)$，

则$\frac{\sin 2t}{\pi t}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin 2t}{2t}\xleftrightarrow{FT}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}G_4(t)=G_4(t)$。

7．信号$x(t)$的有理拉普拉斯变换共有两个极点$s=-3$和$s=-5$，若$g(t)=e^{4t}x(t)$，其傅里叶变换$G(j\omega)$收敛，则$x(t)$是（　　）信号。[西南交通大学2014研]

A．左边

B．右边

C．双边

D．不确定

【答案】B

【解析】根据拉斯变换能转换为傅里叶变换的条件，要使$x(t)$的拉斯变换和傅里叶变换同时存在，收敛域必须包含$j\omega$轴。因此收敛域$\mathrm{Re}s>-3$，所以为右边序列。

8．以下说法错误的是（　　）。[西南交通大学2014研]

A．右边信号的收敛域位于S平面内一条平行于$j\omega$轴的直线的右边

B．右边序列的收敛域是某个圆的外部，但可能不包括$|z|=\infty$

C．时限信号的收敛域是整个S平面

D．有限长序列的收敛域是整个Z平面

【答案】D

【解析】有限长序列的收敛域是除0及∞两个点以外的整个Z平面：$0<z<\infty$。

9．若周期信号$x(n)$是实信号和奇信号，则其傅里叶级数系数$a_k$是（　　）。[西南交通大学2014研]

A．实且偶

B．实且为奇

C．纯虚且偶

D．纯虚且奇

【答案】D

【解析】结论：$x(n)$是实信号和奇信号，则其傅里叶级数系数纯虚且奇，$x(n)$是实信号和偶信号，则其傅里叶级数系数实且偶。

10．欲使信号通过线性系统不产生失真，则该系统应具有（　　）。[西南交通大学2014研]

A．幅频特性为线性，相频特性也为线性

B．幅频特性为线性，相频特性为常数

C．幅频特性为常数，相频特性为线性

D．系统的冲激响应为$h(t)=ku(t-t_0)$

【答案】C

【解析】无失真传输的条件是：$y(t)=Kf(t-t_0)$，满足无失真传输系统的频谱函数为：$H(j\omega)=Ke^{-j\omega t_0}=\left|H(j\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}$，$\begin{cases}\left|H(j\omega)\right|=K\\ \varphi(\omega)=-\omega\cdot t_0\end{cases}$，可见，要使信号通过线性系统时不产生失真，则要求在信号的全部频带内，系统频响的幅频特性为一常数，相频特性是一过原点的直线。

二、某LTI系统的输入$x_1(t)$与零状态相应$y_{zs1}(t)$分别如图1中（a）与（b）所示：

（1）求系统的冲激响应$h(t)$、并画出$h(t)$的波形。

（2）当输入为如图1中图（c）所示的信号$x_2(t)$时，画出系统的零状态响应$y_{zs2}(t)$的波形。[西南交通大学2014研]

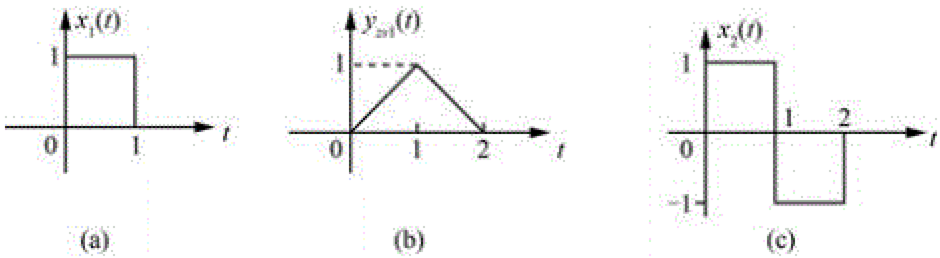



图1

$$\begin{aligned} y_{zs1} &= t\left[u(t)-u(t-1)\right]+(2-t)\left[u(t-1)-u(t-2)\right] \\ &= tu(t)*\left[\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)\right] \end{aligned}$$

解：（1）$x_1(t)=u(t)-u(t-1)=u(t)*\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]$

在零状态下有卷积性质得$y_{zs1}(t)=x_1(t)*h(t)$。

利用公式：$u(t)*u(t)=tu(t)$

得：$h(t)=u(t)*\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]=u(t)-u(t-1)$

图形如图2所示：

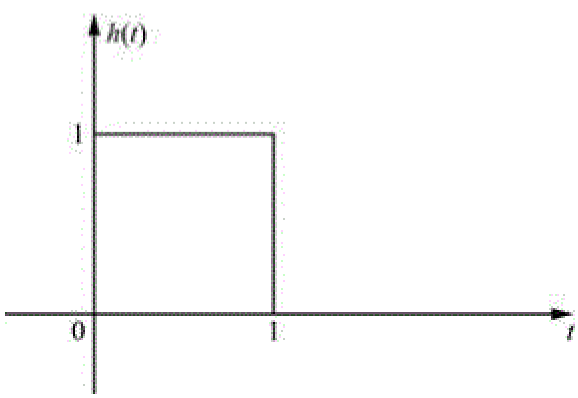



图2

（2）根据LTI系统特性

$x_2(t)=x_1(t)-x_1(t-1)$

$y_{zs2}(t)=y_{zs1}(t)-y_{zs1}(t-1)$

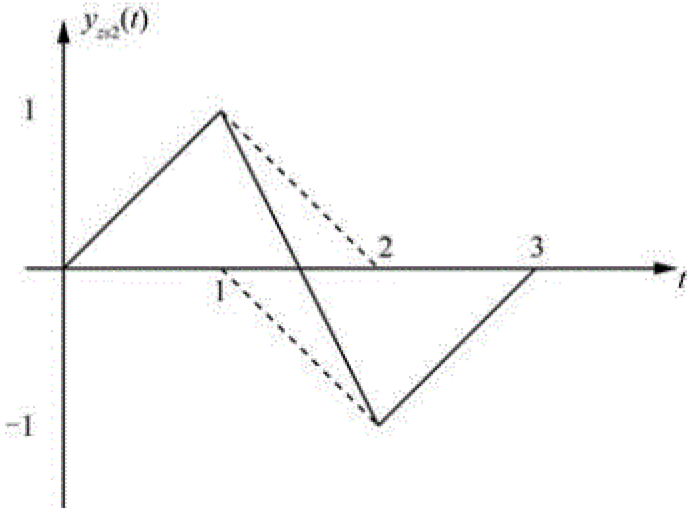



图3

三、有一离散线性时不变系统，差分方程为

$y(n)-0.6y(n-1)-2.8y(n-2)=x(n-1)$

（1）求该系统的系统函数$H(z)$，并画出零、极点图；

（2）限定系统是因果的，写出$H(z)$的收敛域，并求单位冲激响应$h(n)$；

（3）限定系统是稳定的，写出$H(z)$的收敛域，并求单位冲激响应$h(n)$；

（4）分别画出系统的直接形式、并联形式的模拟框图。[西南交通大学2014研]

解：（1）差分方程两边同时进行z变换，有

$Y(z)-0.6z^{-1}Y(z)-2.8z^{-2}Y(z)=z^{-1}X(z)$

也即

$$Y(z)\left(1-0.6z^{-1}-2.8z^{-2}\right)=X(z)\cdot z^{-1}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}}{\left(1-0.6z^{-1}-2.8z^{-2}\right)}$$

$$=\frac{z}{z^2-0.6z-2.8}$$

$$=\frac{z}{(z-2)(z+1.4)}$$

极点：$p_1=2$，$p_2=-1.4$，零点 $z_1=0$。

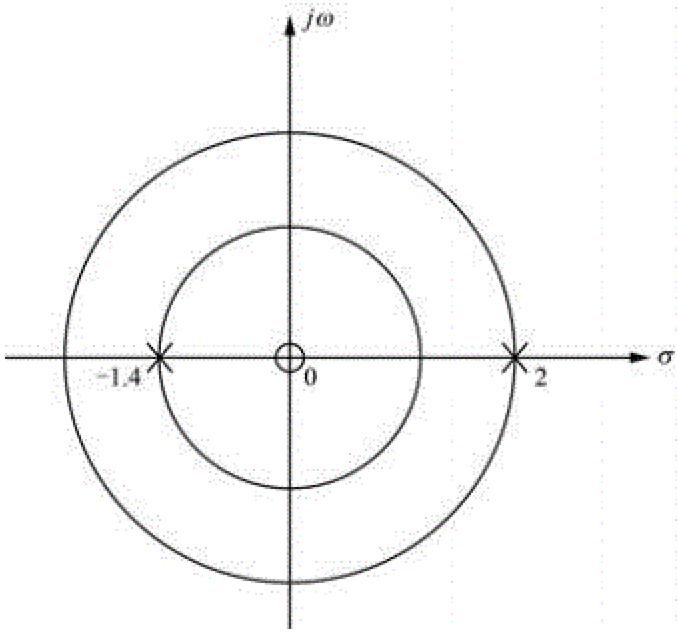



图4

（2）因果系统，收敛域在圆外：$|z|>2$

$$H(z)=\frac{\frac{5}{17}z}{(z-2)}-\frac{\frac{5}{17}z}{(z+1.4)}$$

$$h(n)=\frac{5}{17}2^n u(n)-\frac{5}{17}(-1.4)^n u(n)$$

（3）系统稳定，收敛域包含单位圆，$\mathrm{Re}(z):1.4<z<2$

$$h(n)=-\frac{5}{17}2^{n}u(-n)-\frac{5}{17}(-1.4)^{n}u(n)$$

（4）直接式：$H(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-0.6z^{-1}-2.8z^{-2}}$

直接形式的模拟框图如图5所示：

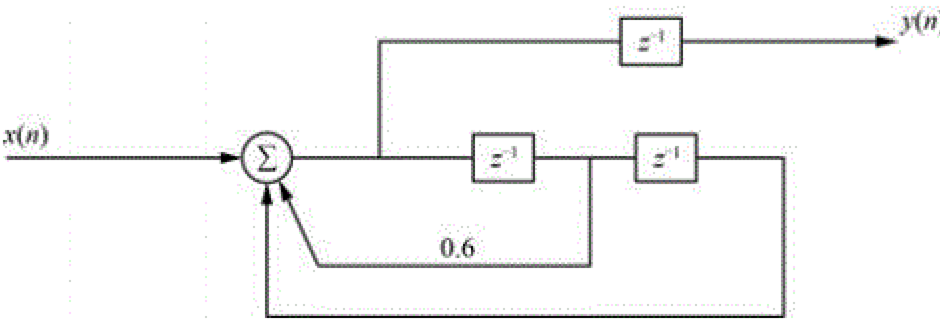



图5

并联式：$H(z)=\dfrac{\frac{5}{17}z}{(z-2)}-\dfrac{\frac{5}{17}z}{(z+1.4)}$

并联形式的模拟框图如图6所示：

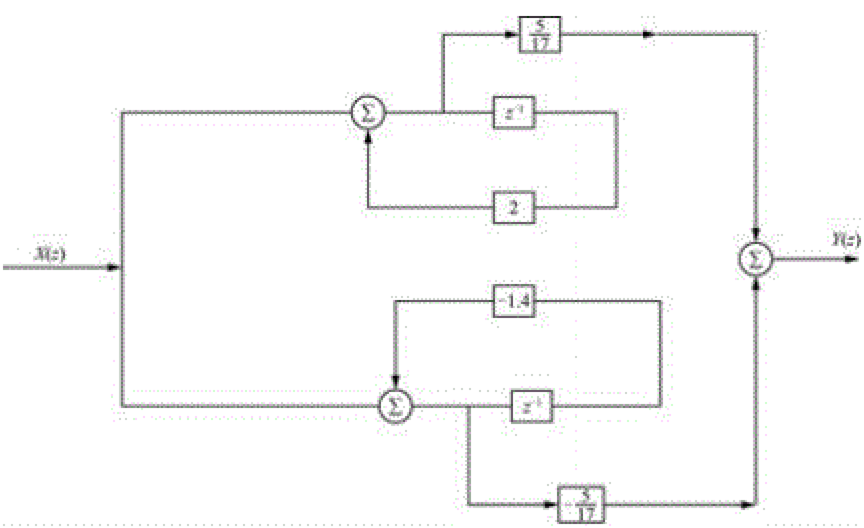


图6

四、设$f(t)$为频带有限信号，频带宽度为$\omega_m = 8rad/s$，其频率$F(\omega)$如图7所示。

（1）求$f(t)$的奈奎斯特抽样频率$\omega_s$和$f_s$、奈奎斯特抽样间隔$T_s$；

（2）设用抽样序列$\delta_T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)$对信号$f(t)$进行抽样，得抽样信号$f_s(t)$，画出$f_s(t)$的频谱$F_s(\omega)$的示意图。

（3）若用同一个$\delta_T(t)$对$f(2t)$进行抽样，试画出抽样信号$f_s(2t)$的频谱图。[西南交通大学2014研]

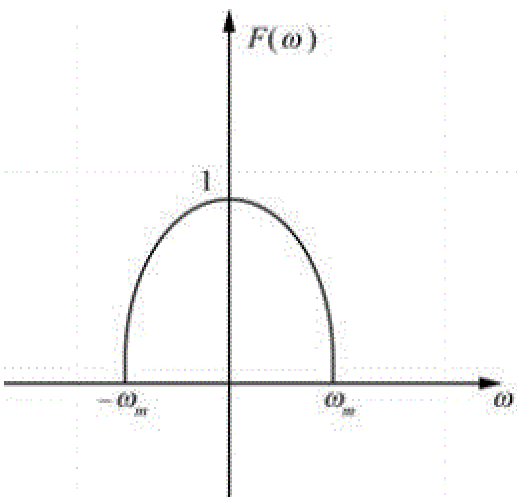



图7

解：（1）∵$\omega_s \geq 2\omega_m = 16\ rad/s$

∴奈奎斯特抽样频率$\omega_s$为16$rad/s$

$$f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = \frac{8}{\pi}$$

又∵ $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T_s}$

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{2\omega_m} = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{8}\pi$$

（2）
$$\delta_T(\omega) = \frac{2\pi}{T_s}\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T_s}n\right)$$
$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi}\delta_T(\omega) * F(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{-\infty}^{+\infty}F\left(\omega - \frac{2\pi}{T_s}n\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}F(\omega - 8n)$$

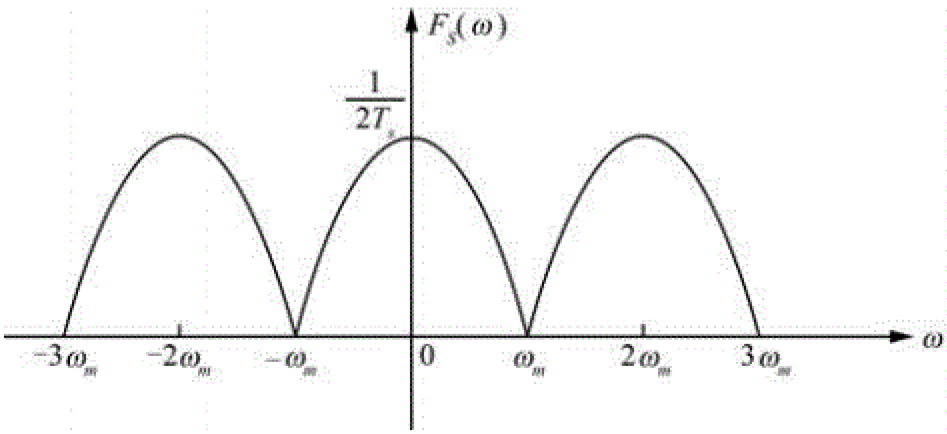



图8

（3）设

$$f_s(2t) \leftrightarrow F_1(\omega)$$
$$F_1(\omega) = \frac{1}{2}F_s\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2T_s}\sum_{-\infty}^{+\infty}F\left(\frac{\omega}{2} - \frac{2\pi}{T_s}n\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}F\left(\frac{\omega - 16n}{2}\right)$$

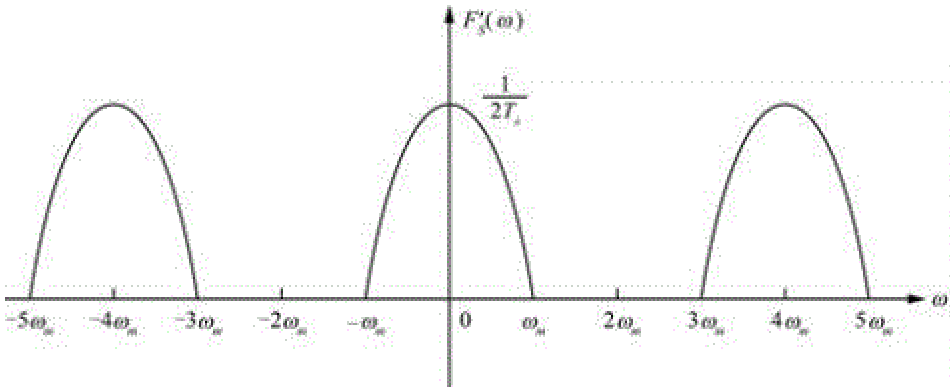



图9

五、正交幅度调制（QAM）可以在一个公共信道中同时传送两个信号，有效地提高信道的宽度。QAM系统的基本原理如图10所示，假设输入信号$f_1(t)$和$f_2(t)$的带宽为$\omega_0$且满足$\omega_0 \ll \omega_c$，$\omega_c$为载波频率。低通滤波器LPF的截止频率为$3\omega_0$，幅度为1。求：

（1）假设$f_1(t)$和$f_2(t)$的频谱分别为$F_1(j\omega)$和$F_2(j\omega)$，写出$g_1(t)$和$g_2(t)$的频域表达式；

（2）计算输出信号$e_1(t)$和$e_2(t)$。[西南交通大学2014研]

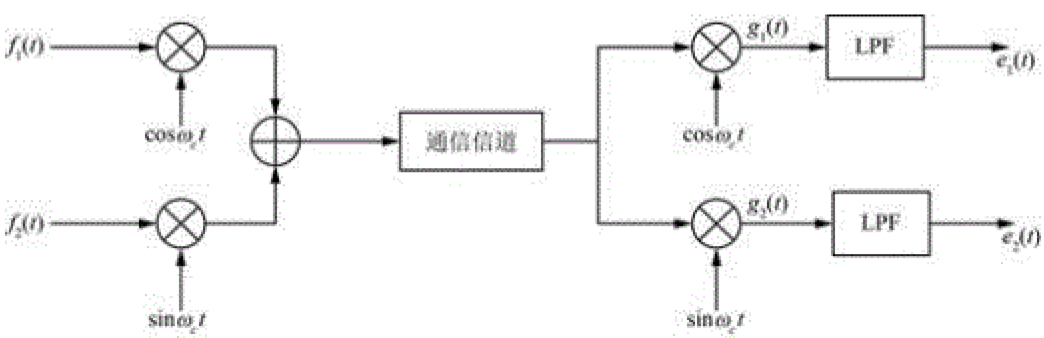



图10

解：（1）由系统的框图可知

$$g_1(t)=\left[f_1(t)\cos(\omega_c t)+f_2(t)\sin(\omega_c t)\right]\cos(\omega_c t)$$

$$g_1(t)=\left[f_1(t)\cos(\omega_c t)+f_2(t)\sin(\omega_c t)\right]\sin(\omega_c t)$$

又已知

$$\cos(\omega_c t) \leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)\right]$$
$$\sin(\omega_c t) \leftrightarrow j\pi\left[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)\right]$$

所以，根据傅里叶变换的频域卷积定理，可得

$$f_1(t)\cos(\omega_c t)+f_2(t)\sin(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[F_1(\omega+\omega_c)+F_1(\omega-\omega_c)+jF_2(\omega+\omega_c)-jF_2(\omega-\omega_c)\right]$$

进而有

$$g_1(t) \leftrightarrow \frac{1}{4}\left[F_1(\omega+2\omega_c)+2F_1(\omega)+F_1(\omega-2\omega_c)+jF_2(\omega+2\omega_c)-jF_2(\omega-2\omega_c)\right]$$
$$g_2(t) \leftrightarrow \frac{j}{4}\left[F_1(\omega+2\omega_c)-F_1(\omega-2\omega_c)+jF_2(\omega+2\omega_c)-2jF_2(\omega)+jF_2(\omega-2\omega_c)\right]$$

（2）通过低通滤波器后，频率大于$3\omega_0$的频率分量都被虑去，

$$E_1(\omega)=\frac{1}{2}F_1(\omega)\ ,\quad e_1(t)=\frac{1}{2}f_1(t)$$

$$E_2(\omega)=\frac{1}{2}F_2(\omega)\ ,\quad e_2(t)=\frac{1}{2}f_2(t)$$

六、已知某因果系统的系统函数为$H(s)=\dfrac{s+3}{s^2+8s+12}$，输入信号$x(t)=e^{-3t}u(t)$，初始条件为$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=3$。求系统的零输入响应、零状态响应、自由响应和强迫响应。[西南交通大学2014研]

解：

$$H(s)=\frac{s+3}{(s+6)(s+2)}$$
$$x(s)=\frac{1}{s+3}$$

设零输入响应为$y_{zi}(t)$，根据系统函数$H(s)$的极点：$s_1=-6$，$s_2=-2$，设

$y_{zi}=c_1e^{-6t}+c_2e^{-2t}$，带入初始条件 $y(0_-)=1$，$y'(0_-)=3$

$$\begin{cases}c_1+c_2=1\\-6c_1-2c_2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=-\dfrac{5}{4}\\c_2=\dfrac{9}{4}\end{cases}$$

$$y_{zi}(t)=\left(-\frac{5}{4}e^{-6t}+\frac{9}{4}e^{-2t}\right)u(t)$$

设零状态响应为 $y_{zs}(t)$，则

$$Y_{zs}(s)=X(s)H(s)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+6}\right)$$

$$y_{zs}(t)=\frac{1}{4}\left(e^{-2t}-e^{-6t}\right)u(t)$$

因此，系统的全响应为

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\left(\frac{5}{2}e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-6t}\right)u(t)$$

其中，自由响应分量为

$$\left(\frac{5}{2}e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-6t}\right)u(t)$$

强迫响应分量为：0 。

七、已知傅里叶变换的时域积分性质为 $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\xleftrightarrow{F}\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$，试利用时频对偶性质证明频域积分性质：$\frac{x(t)}{-jt}+\pi x(0)\delta(t)\xleftrightarrow{F}\int_{-\infty}^{\omega}X(j\Omega)d\Omega$。[西南交通大学2014研]

证明：因为

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

所以有 $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)]e^{j\omega t}\,d\omega$

显然 $\int_{-\infty}^{-t} x(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)]e^{-j\omega t}\,d\omega$

将变量$t$与$\omega$互换，又因为$\Omega = \frac{2\pi}{T}$，可以得到

$$\int_{-\infty}^{-\omega} X(j\Omega)\,d\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{jt} x(t) + \pi x(0)\delta(t)]e^{-j\omega t}\,dt$$

也即

$$\int_{-\infty}^{\omega} X(j\Omega)\,d\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{-jt} x(t) + \pi x(0)\delta(t)]e^{-j\omega t}\,dt$$

即证

$$\frac{x(t)}{-jt} + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\Omega)\,d\Omega$$

2013年西南交通大学924信号与系统一考研真题及详解

## 一、选择题

1．某系统的系统函数为$H(s)$，若同时存在频响函数$H(j\omega)$，则该系统必须满足条件（　　）。[西南交通大学2013研]

A．时不变系统

B．因果系统

C．稳定系统

D．线性系统

【答案】C

【解析】一个信号的傅里叶变换是拉普拉斯变换沿$j\omega$轴求值，因此系统函数的收敛域包含$j\omega$轴，即系统稳定。

2．理想不失真传输系统的传输函数$H(j\omega)$（$t_0$, $\omega_0$, $\omega_c$, $k$为常数）是（　　）。[西南交通大学2013研]

A．$Ke^{-j\omega_0 t}$

B．$Ke^{-j\omega t_0}$

C．$Ke^{-j\omega t_0}\left[u(\omega+\omega_c)-(\omega-\omega_0)\right]$

D．$Ke^{-j\omega_0 t_0}$

【答案】B

【解析】理想不失真的频域条件是：$|H(j\omega)|=K$（K为常数），$\phi(\omega)=-\omega t_0$，一条过原点的直线。

3．若对$f(t)$进行理想取样，其奈奎斯特取样频率为$f_s$，则对进行取样$f\left(\frac{1}{3}t-2\right)$，其奈奎斯特取样频率为（　　）。[西南交通大学2013研]

A．$3f_s$

B．$\frac{1}{3}f_s$

C．$3\left(f_s-2\right)$

D．$\frac{1}{3}\left(f_s-2\right)$

【答案】B

【解析】$f(t):\omega_1=\omega$，则$f\left(\frac{1}{3}t-2\right):\omega_2=\frac{\omega}{3}, f_s=\frac{2\omega_1}{2\pi}=\frac{\omega}{\pi}, f_s'=\frac{2\omega_2}{2\pi}=\frac{\omega}{3\pi}=\frac{f_s}{3}$。

4．连续周期信号$f(t)$的频谱$F(j\omega)$的特点是（　　）。[西南交通大学2013研]

A．周期、连续频谱

B．周期、离散频谱

C．连续、非周期频谱

D．离散、非周期频谱

【答案】D

【解析】基本结论：周期信号对应的频谱是离散的，连续信号对应的频谱是非周期的，逆命题也成立。

5．以下说法错误的是（　　）。[西南交通大学2013研]

A．右边信号的收敛域位于S平面内一条平行于$j\omega$轴的直线的右边

B．右边序号的收敛域是某个圆的外部，但可能不包括$|z|=\infty$

C．时限信号的收敛域是整个S平面

D．有限长序列的收敛域是整个Z平面

【答案】A

【解析】右边信号的收敛域是一条平行于$j\omega$轴直线的右侧，但不限制于$j\omega$轴右侧。

6．已知$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$，则信号$y(t)=f(t)\delta(t-5)$的频谱函数$Y(j\omega)$为（　　）。[西南交通大学2013研]

A．$f(5)e^{-j5\omega}$

B．$F(j\omega)e^{-j5\omega}$

C．$f(5)$

D．$F(j\omega)$

【答案】A

【解析】$y(t)=f(5)\delta(t-5)\overset{\omega}{\leftrightarrow}Y(j\omega)=f(5)e^{-j5\omega}$。

7．周期矩形脉冲的谱线间隔与（　　）。[西南交通大学2013研]

A．脉冲幅度有关

B．脉冲宽度有关

C．脉冲周期有关

D．周期和脉冲宽度有关

【答案】C

【解析】由$\Omega=2\pi/T$可知。

8．已知Z变换$Z\left[x(n)\right]=\frac{1}{1-3z^{-1}}$，收敛域$|z|<3$，求逆变换为（　　）。[西南交通大学2013研]

A．$3^{n}u(n)$

B．$3^{-n}u(-n)$

C．$-3^{n}u(-n)$

D．$-3^{n}u(-n-1)$

【答案】D

【解析】Z变换与收敛域关系：ROC为$|z|<3$，说明序列$x(n)$为左边序列，因此，$Z\left[x(n)\right]=\frac{z}{z-3}\overset{z}{\leftrightarrow}x(n)=-3^{n}u(-n-1)$。

9．系统函数$H(s)$与激励信号$X(s)$之间（　　）。[西南交通大学2013研]

A．是反比例关系

B．无关系

C．线性关系

D．不确定

【答案】B

【解析】系统函数只与系统本身的状态有关，与输入无关。

10. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-2t-1)(t+\frac{3}{2})dt=$（　　）。[西南交通大学2013研]

A．1

B．$-\frac{5}{2}$

C．$\frac{5}{2}$

D．$\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】根据冲激函数的尺度变换性质$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$，及其取样特性$\delta(t-t_0)f(t)=\delta(t-t_0)f(t_0)$，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-2t-1)(t+\frac{3}{2})dt&=\int_{-\infty}^{\infty}\delta[-2(t+\frac{1}{2})](t+\frac{3}{2})dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|-2|}\delta(t+\frac{1}{2})(t+\frac{3}{2})dt\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t+\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2})dt\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

。

二、某LTI系统的输入$x_1(t)$与零状态相应$y_{z1}(t)$分别如图1（a）与（b）所示：

（1）求系统的冲激响应$h(t)$，并画出$h(t)$的波形。

（2）当输入为如图（c）所示的信号$x_2(t)$时，画出系统的零状态响应

$y_{zs2}(t)$的波形。[西南交通大学2013研]

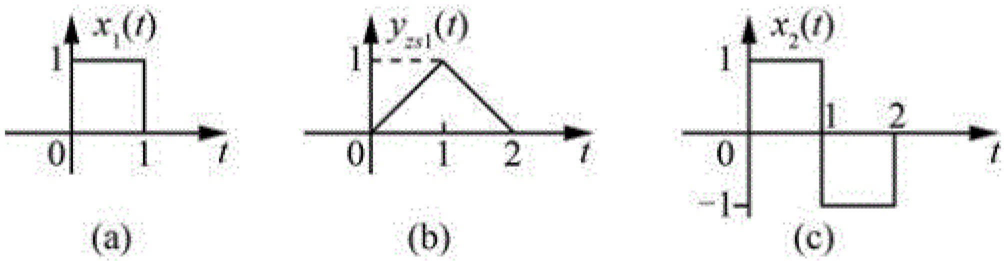



图1

$$\begin{aligned} y_{zs1} &= t\left[u(t)-u(t-1)\right]+(2-t)\left[u(t-1)-u(t-2)\right] \\ &= tu(t)*\left[\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)\right] \end{aligned}$$

解：（1）$x_1(t)=u(t)-u(t-1)=u(t)*\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]$

在零状态下由卷积性质得

$y_{zs1}=x_1*h(t)$

利用公式$u(t)*u(t)=tu(t)$，得

$h(t)=u(t)*\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]=u(t)-u(t-1)$

图形如图2所示：

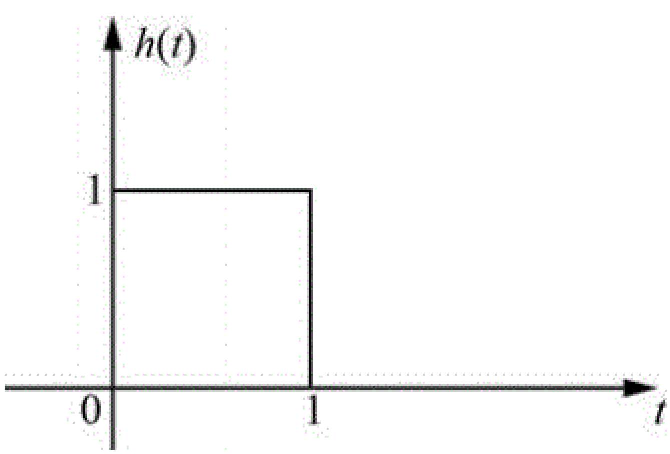



图2

（2）根据LTI系统的线性特性

$$x_2(t)=x_1(t)-x_1(t-1)$$

$$y_{zs2}(t)=y_{zs1}(t)-y_{zs1}(t-1)$$

图形如图3所示：

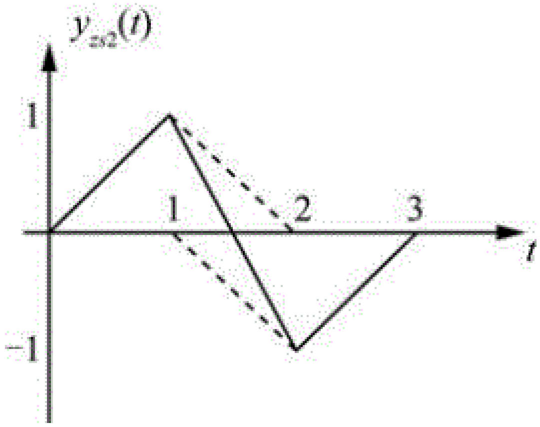



图3

三、考虑一连续时间LTI系统S，其频率响应是 $H(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\geq 250\\ 0, & otherwise\end{cases}$，当输入信号 $x(t)$ 是一个基波周期 $T=\pi/7$，傅里叶级数系数为 $a_k$ 的信号时，发现输出 $y(t)=x(t)$。试问k满足什么条件时，$a_k=0$？[西南交通大学2013研]

解：根据傅里叶级数的定义，得

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}\Bigg|_{T=\frac{\pi}{7}}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{j14kt}$$

利用特征函数的性质

$$y(t)=e^{-jk\omega_0 t}H(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_0}$$

显然当 $|14k|<250$ 时，$a_k=0$，即

$|k| < \frac{250}{14} = 17.8$

故当$k = 0, k = \pm 1, k = \pm 2, \cdots, k = \pm 17$时，$a_k = 0$。

四、如图4（a）所示系统中$e(t) = \frac{\sin 1000\pi t}{\pi t}$，$s_1 = \sin(1000\pi t)$，$s_2 = \cos(1000\pi t)$，$-\infty < t < \infty$。理想低通滤波器的传输函数如图（b）所示。

（1）画出A、B、C处的频谱图。

（2）求输出信号$r(t)$。[西南交通大学2013研]

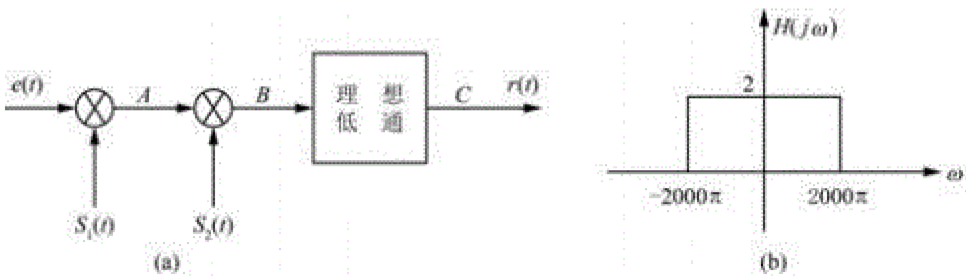



图4

解：（1）设A处输入为$r_A(t)$，B处为$r_B(t)$，由图知C处为$r(t)$，且有$e(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} E(j\omega)$，

$s_1(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} S_1(j\omega)$，$r_A(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} R_A(j\omega)$，$s_2(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} S_2(j\omega)$，$r_B(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} R_B(j\omega)$，$r(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} R(j\omega)$，则

$$e(t) = \frac{\sin(1000\pi t)}{\pi t} = 1000Sa(1000\pi t) \overset{FT}{\leftrightarrow} E(j\omega) = 1000\frac{\pi}{1000\pi} G_{2000\pi}(\omega) = G_{2000\pi}(\omega)$$
$$s_1(t) = \sin(1000\pi t) \overset{FT}{\leftrightarrow} S_1(j\omega) = j\pi[\delta(\omega + 1000\pi) - \delta(\omega - 1000\pi)]$$
$$s_2(t) = \cos(1000\pi t) \overset{FT}{\leftrightarrow} S_2(j\omega) = \pi[\delta(\omega + 1000\pi) + \delta(\omega - 1000\pi)]$$

则A、B、C处的频谱图如图5、6、7所示：

$$r_A(t)=e(t)\cdot s_1(t)\leftrightarrow R_A(j\omega)=\frac{1}{2\pi}E(j\omega)*S_1(j\omega)$$

$$=\frac{j}{2}\left[G_{2000\pi}(\omega+1000\pi)-G_{2000\pi}(\omega-1000\pi)\right]$$

$$r_B(t)=r_A(t)\cdot s_2(t)\leftrightarrow R_B(j\omega)=\frac{1}{2\pi}R_A(j\omega)*S_2(j\omega)$$

$$=\frac{j}{4}\left[G_{2000\pi}(\omega+2000\pi)-G_{2000\pi}(\omega-2000\pi)\right]$$

$$r(t)=r_B(t)*h(t)\leftrightarrow R(j\omega)=R_B(j\omega)H(j\omega)$$

$$=\frac{j}{2}\left[G_{1000\pi}(\omega+1500\pi)-G_{1000\pi}(\omega-1500\pi)\right]$$

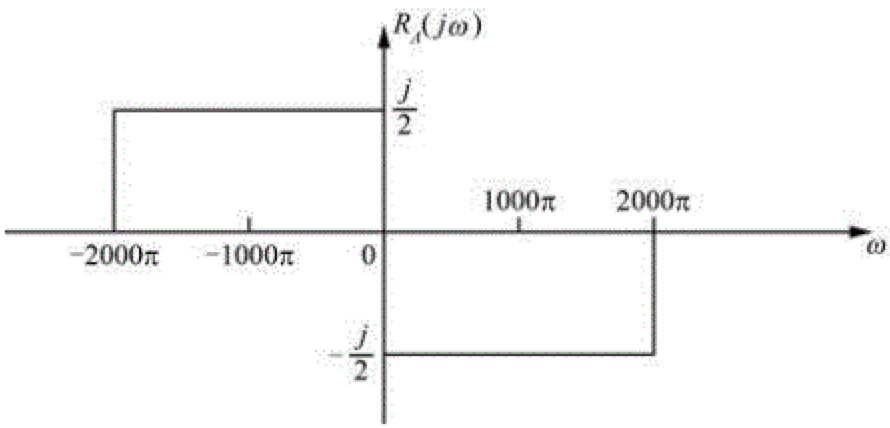



图5

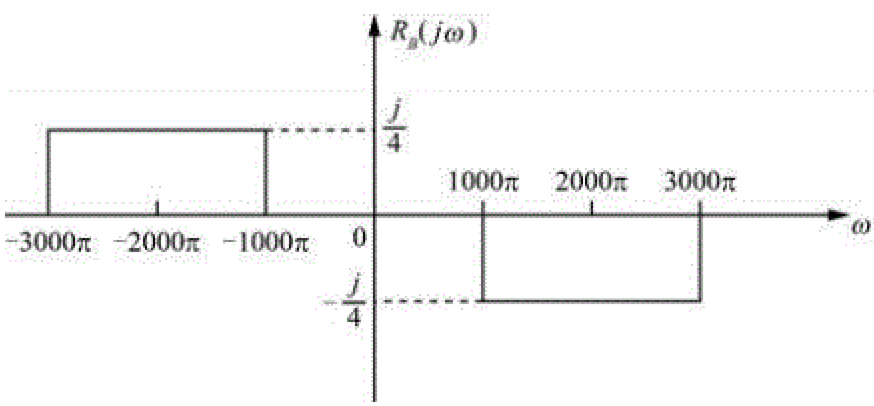



图6

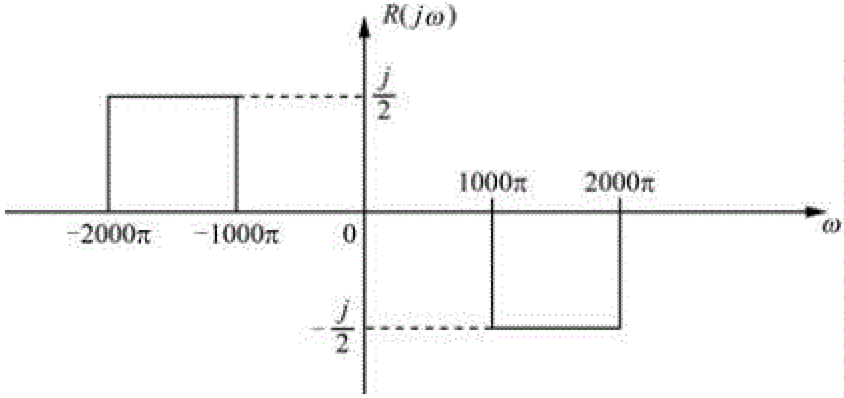



图7

（2）$W(j\omega)=G_{1000\pi}(\omega)\leftrightarrow \omega(t)=\dfrac{\sin(500\pi t)}{\pi t}$

又由$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$，则$f(t)e^{-j\omega_0 t}\leftrightarrow F\left[j(\omega+\omega_0)\right]$，得

$$R(j\omega)=\frac{j}{2}\left[G_{1000\pi}(\omega+1500\pi)-G_{1000\pi}(\omega-1500\pi)\right]$$

$$\leftrightarrow r(t)=\frac{e^{j1500\pi t}-e^{-j1500\pi t}}{2j}\cdot\frac{\sin 500\pi t}{\pi t}=\frac{\sin 1500\pi t\cdot\sin 500\pi t}{\pi t}$$

五、已知某因果系统的系统函数为$H(s)=\dfrac{s+1}{s^2+7s+10}$，输入信号$x(t)=e^{-t}u(t)$，初始条件为$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=1$。求系统的零输入响应、零状态响应、自由响应和强迫响应。[西南交通大学2013研]

解：由题意得，设$x(t)=X(s)$，$y_{zs}(t)\leftrightarrow Y_{zs}(s)$，且$x(t)=e^{-t}u(t)\leftrightarrow X(s)=\dfrac{1}{s+1}$

由$y_{zs}(t)=x(t)*h(t)$，得

$$Y_{zs}(s)=X(s)H(s)$$

$$Y_{zs}(s)=X(s)H(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s+5)(s+1)}=\frac{\frac{1}{3}}{s+2}-\frac{\frac{1}{3}}{s+5}\quad \mathrm{Re}[s]>-2$$

则

$$y_{zs}(t)=\frac{1}{3}e^{-2t}u(t)-\frac{1}{3}e^{-5t}u(t)=\frac{1}{3}\left(e^{-2t}-e^{-5t}\right)u(t)$$

由 $H(s)=\dfrac{s+1}{s^2+7s+10}$，得极点 $P_1=-2, P_2=-5$。

设零输入响应 $y_{zi}(t)=\left(c_1e^{-2t}+c_2e^{-5t}\right)u(t)$，又由 $y(0_-)=2$ ，$y'(0_-)=1$，得

$$\begin{cases} c_1+c_2=2 \\ -2c_1-5c_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=\dfrac{11}{3} \\ c_2=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

可得

$$y_{zi}(t)=\left(\frac{11}{3}e^{-2t}-\frac{5}{3}e^{-5t}\right)u(t)$$

则自由响应分量为 $\left(4e^{-2t}-2e^{-5t}\right)u(t)$。

强迫响应分量为0。

六、某因果LTI系统框图如图8所示，试求：

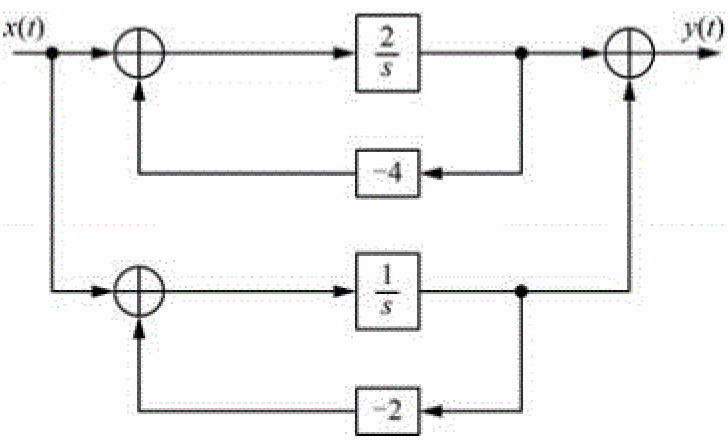



图8

（1）求系统的系统函数$H(s)$；

（2）求系统的单位冲激响应$h(t)$；

（3）写出描述系统输入输出关系的微分方程；

（4）判断系统是否稳定，并解释原因。[西南交通大学2013研]

解：（1）由梅森公式可知

$$H_1(s)=\frac{\frac{2}{s}}{1+\frac{8}{s}}=\frac{2}{s+8}$$

$$H_2(s)=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{2}{s}}=\frac{1}{s+2}$$

所以

$$H(s)=H_1(S)+H_2(S)=\frac{3s+12}{(s+2)(s+8)}$$

（2）由$H(s)=\frac{3s+12}{(s+2)(s+8)}$，且系统是因果系统，得$\mathrm{Re}[s]>-2$。

所以

$$h(t)=\left(2e^{-8t}+e^{-2t}\right)u(t)$$

（3）由$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{3s+12}{s^2+10s+16}$，则系统的微分方程为

$$y''(t)+10y'(t)+16y(t)=3x'(t)+12x(t)$$

（4）极点：$P_1=-2, P_2=-8, z_0=-4$，且此系统为因果系统，则收敛域

ROC：$\sigma>-2$。

极点全在S平面的的左半平面，收敛域包括$j\omega$轴，所以系统稳定。

七、考查如图9所示的离散时间LTI 稳定系统。

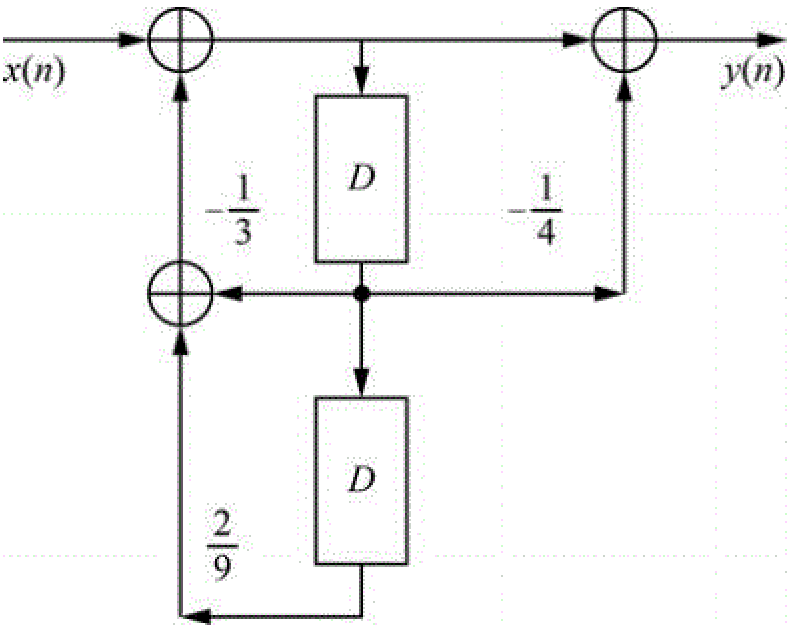



图9

求解下列问题：

（1）确定该系统的系统函数$H(z)$及收敛域；

（2）求联系$y(n)$和$x(n)$的差分方程；

（3）求系统的单位脉冲响应$h(n)$；

（4）当系统响应$y(n)=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]u(n)$，求系统的输入信号$x(n)$。[西南交通大学2013研]

解：（1）由题意得$x(n)\overset{z}{\leftrightarrow}X(z)$，$y(n)\overset{z}{\leftrightarrow}Y(z)$，设$x(n)$后的第一个加号后信

号为 $m(n)$，则

$$\begin{cases}\frac{2}{9}m(n-2)-\frac{1}{3}m(n-1)+x(n)=m(n)\\ m(n)-\frac{1}{4}m(n-1)=y(n)\end{cases}$$



$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{2}{9}z^{-2}M(z)-\frac{1}{3}z^{-1}M(z)+X(z)=M(z) & (1)\\ M(z)-\frac{1}{4}z^{-1}M(z)=Y(z) & (2)\end{cases}$$

由（1）得

$$\left(1-\frac{2}{9}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-1}\right)M(z)=X(z)$$



由（2）得

$$\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)M(z)=Y(z)$$

所以

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{2}{9}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z\left(z-\frac{1}{4}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{2}{3}\right)}$$



由其稳定性知系统的收敛域 $ROC:|z|>\frac{2}{3}$。

（2）由 $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{2}{9}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-1}}$，得

$$y(n)-\frac{2}{9}y(n-2)+\frac{1}{3}y(n-1)=x(n)-\frac{1}{4}x(n-1)$$



即

$$y(n)-\frac{1}{3}y(n-1)-\frac{2}{9}y(n-2)=x(n)-\frac{1}{4}x(n-1)$$

（3）
$$H(z)=\frac{z\left(z-\frac{1}{4}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{2}{3}\right)}=\frac{\frac{1}{12}z}{z-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{11}{12}z}{z+\frac{2}{3}}$$

$$h(n)=\left[\frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{11}{12}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]u(n)$$

（4）由 $y(n)=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]u(n)$，得

$$Y(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}+\frac{z}{z+\frac{2}{3}}=\frac{2z^2+\frac{1}{3}z}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{2}{3}\right)}$$

由 $X(z)H(z)=Y(z)$，得

$$X(z)=\frac{Y(z)}{H(z)}=\frac{2z^2+\frac{1}{3}z}{z\left(z-\frac{1}{4}\right)}=\frac{2z+\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{4}}=\frac{2z}{z-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{4}}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z+\frac{1}{3}}{z\left(z-\frac{1}{4}\right)}=\frac{-\frac{4}{3}}{z}+\frac{\frac{10}{3}}{z-\frac{1}{4}}$$

$$X(z)=-\frac{4}{3}+\frac{\frac{10}{3}z}{z-\frac{1}{4}}$$

$$x(n)=\frac{10}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)-\frac{4}{3}\delta(n)$$

2012年西南交通大学924信号与系统一考研真题及详解

一、选择题

1．下列信号中，只有（）是非周期的。[西南交通大学2012研]

A．$x(t)=2\cos(3t+\pi/4)$

B．$x(t)=e^{j(\pi t-1)}$

C．$x(t)=\left[\sin(t-\pi/6)\right]^{2}$

D．$x(n)=e^{j(n/8-\pi)}$

【答案】D

【解析】$x(n)=e^{j(n/8-\pi)}=e^{j\frac{n}{8}}\cdot e^{j\pi}$，其中$j\pi$为常数。又$n/8=2k\pi$，所以$n=16k\pi$，这与$n$为整数矛盾，故选D。

2．已知一个系统的输入$x(t)$和输出$y(t)$之间的关系为：

$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t-nt)$则这个系统是（）。[西南交通大学2012研]

A．线性时不变的B．线性时变的

C．时不变非线性的D．时变非线性的

【答案】B

【解析】$x(t-t_0)\rightarrow y(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(t-t_0)\delta(t-nt)$，

$$y(t-t_0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(t-t_0)\delta\left((t-t_0)-n(t-t_0)\right)\neq T\left[x(t-t_0)\right]$$

，由线性时变系统的性质可知，选B。

3．若$x(t)$和$h(t)$是奇函数，则$y(t)=x(t)*h(t)$是（）。[西南交通大学2012研]

A．偶函数

B．奇函数

C．非奇、非偶函数

D．不确定

【答案】A

【解析】$y(t)=x(t)*h(t)$，所以—

$$y(-t)=x(-t)*h(-t)=-x(t)*\left[-h(t)\right]=x(t)*h(t)=y(t)$$

即$y(t)=y(-t)$，所以$y(t)$是偶函数。

4．信号$e^{2t}u(t)$的傅里叶变换为（）。[西南交通大学2012研]

A．$\frac{1}{2+j\omega}$

B．$\frac{1}{j\omega-2}$

C．$\frac{1}{1-j\omega}$

D．$\frac{1}{1+j\omega}$

【答案】B

【解析】由傅里叶变换的公式$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$可知，选B。

5．下列输入——输出关系的系统中，（）是因果LTI系统。[西南交通大学2012研]

A．$y(t)=\cos(t)x(t)$

B．$y(n-1)+3y(n)x(n)=0$

C．$y(n+1)+2y(n)=x(n+2)$

D．$7y(n-1)+8y(n)=x(n-1)$

【答案】D

【解析】AB两项，都不是LTI系统；C项，不是因果系统。

6．已知某线性非时变系统的单位冲激响应为：$h(t)=7e^{-3t}u(t)$，则其系统函数$H(j\omega)=$（）。[西南交通大学2012研]

A．$\frac{7}{j\omega+3}$

B．$\frac{7}{j\omega}$

C．$\frac{7}{j\omega-3}$

D．$\frac{7}{j\omega-7}$

【答案】A

【解析】由傅里叶变换的公式$e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{a+j\omega}$知。

7．若一个连续系统的系统函数有1个极点在坐标原点上，则该系统的单位冲激响应中包含有（）。[西南交通大学2012研]

A．衰减的正弦振荡分量

B．等幅的正弦振荡分量

C．阶跃函数分量

D．衰减的指数分量

【答案】C

【解析】有一个极点在坐标原点说明$H(s)$中含有$\frac{1}{s}$，故$h(t)$中含有$u(t)$。

8．$\delta(2t+3)$的拉氏变换表达式为（）。[西南交通大学2012研]

A．$\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}s}$，整个s平面

B．$\frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}s}$，整个s平面

C．$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}s}$，整个s平面

D．$\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}s}$，整个s平面

【答案】A

【解析】由拉普拉斯变换的时移性质$x(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}X(s)$，及尺度变换特性

$x(at)\leftrightarrow\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$知，选A。

9. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(-n)$（）傅里叶变换。[西南交通大学2012研]

A．存在

B．可能存在也可能不存在

C．不存在

D．不能确定

【答案】C

【解析】由$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(-n)$知$n$的取值为$(-\infty,0)$内的整数，此时$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right|$无界，不收敛，因此选C。

10．信号$\cos(200\pi t)$的Nyquist采样间隔为（）秒。[西南交通大学2012研]

A．$\pi$B．1

C．400$\pi$D．0.05

【答案】D

【解析】由$\cos(200\pi t)$知，其最高频率为100HZ，故奈奎斯特采样频率为：$2\times100=200Hz$，所以，奈奎斯特采样间隔为：$\frac{1}{200\ Hz}=0.05\ s$。

二、假定一个LTI系统$H(s)$的零极点图如图1所示，求：

（1）该零、极点图对应的所有可能的收敛域；

（2）每种收敛域对应的系统单位冲激响应为$h(t)$；

（3）说明每种收敛域对应的系统稳定性和因果性。[西南交通大学2012研]

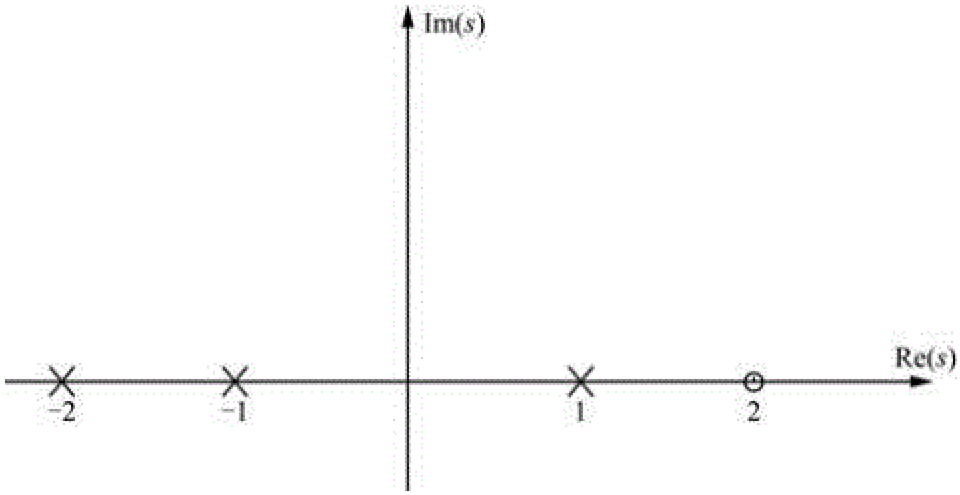



图1

解：（1）由零极点图可知所有可能的收敛域为：

①$\mathrm{Re}\{s\}<-2$ ②$\mathrm{Re}\{s\}>1$

③$-2<\mathrm{Re}\{s\}<-1$ ④$-1<\mathrm{Re}\{s\}<1$

（2）①当$\mathrm{Re}\{s\}<-2$时，$H(s)=\dfrac{s-2}{(s+2)(s+1)(s-1)}$

设：$H(s)=\dfrac{A}{s+2}+\dfrac{B}{s+1}+\dfrac{C}{s-1}$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B+C=0\\B+3C=1\\A-2B+2C=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-4/3\\B=3/2\\C=-1/6\end{cases}$$

故$H(s)=\dfrac{-4/3}{s+2}+\dfrac{3/2}{s+1}+\dfrac{-1/6}{s-1}$

由拉普拉斯反变换知

$$h_1(t)=\frac{4}{3}e^{-2t}u(-t)-\frac{3}{2}e^{-t}u(-t)+\frac{1}{6}e^{t}u(-t)$$

②当$\mathrm{Re}\{s\}>1$时，由拉普拉斯反变换知

$$h_2(t)=-\frac{4}{3}e^{-2t}u(t)+\frac{3}{2}e^{-t}u(t)-\frac{1}{6}e^{t}u(t)$$

③当$-2<\mathrm{Re}\{s\}<-1$时，由拉普拉斯反变换知

$$h_3(t)=-\frac{4}{3}e^{-2t}u(t)-\frac{3}{2}e^{-t}u(-t)+\frac{1}{6}e^{t}u(-t)$$

④当$-1<\mathrm{Re}\{s\}<1$时，由拉普拉斯反变换知

$$h_4(t)=-\frac{4}{3}e^{-2t}u(t)+\frac{3}{2}e^{-t}u(t)+\frac{1}{6}e^{t}u(-t)$$

（3）①当$\mathrm{Re}\{s\}<-2$时，系统是非因果的、不稳定的；

②当$\mathrm{Re}\{s\}>1$时，系统是因果的、不稳定的；

③当$-2<\mathrm{Re}\{s\}<-1$时，系统是非因果的、不稳定的；

④当$-1<\mathrm{Re}\{s\}<1$时，系统是非因果的、稳定的。

三、已知因果离散LTI系统的差分方程为$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)-\frac{3}{16}y(n-2)=x(n)$，求：

（1）系统函数$H(z)$，画出极、零图，并标明收敛域；

（2）系统单位脉冲响应$h(n)$；

（3）证明系统稳定性。[西南交通大学2012研]

解：（1）∵差分方程为：$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)-\frac{3}{16}y(n-2)=x(n)$

∴$Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)-\frac{3}{16}z^{-2}Y(z)=X(z)$

∴$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{3}{16}z^{-2}}=\frac{16z^2}{16z^2-8z-3}=\frac{16z^2}{(4z-3)(4z+1)}$

极零图如图2所示：

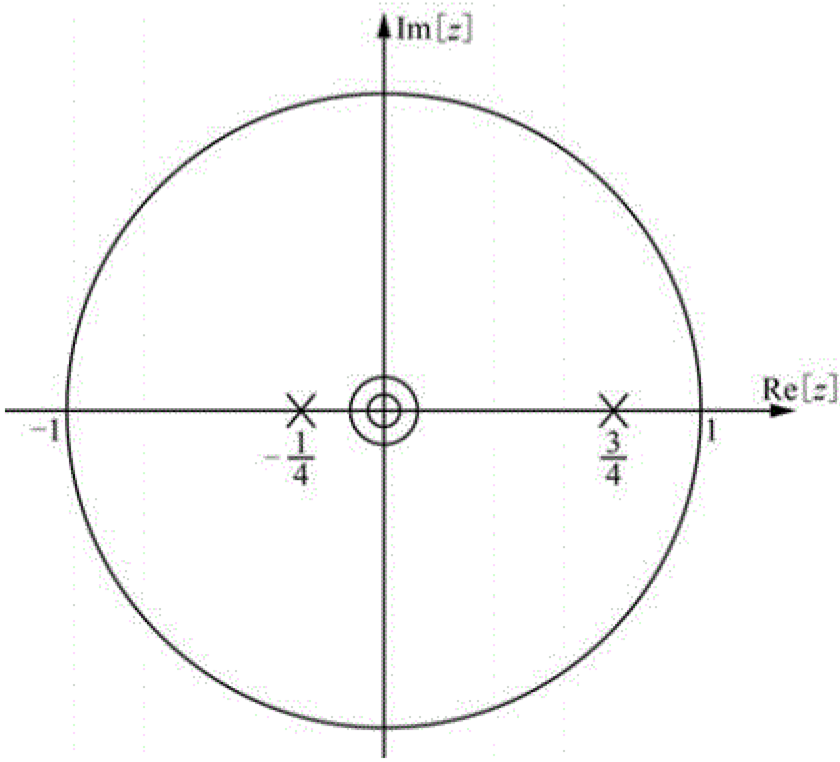



图2

又∵系统为因果系统

∴ROC为：$\mathrm{Re}[z]>\frac{3}{4}$。

（2）由（1）知

$$H(z)=\frac{16z^{2}}{(4z-3)(4z+1)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

对其进行Z反变换得

$$h(n)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n}u(n)+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}u(n)=\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}u(n)-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}u(n)$$

（3）因为系统为因果系统且收敛域ROC：$|z|>\frac{3}{4}$，因此收敛域包括单位圆，系统稳定。

四、已知因果系统框图如图3所示，求

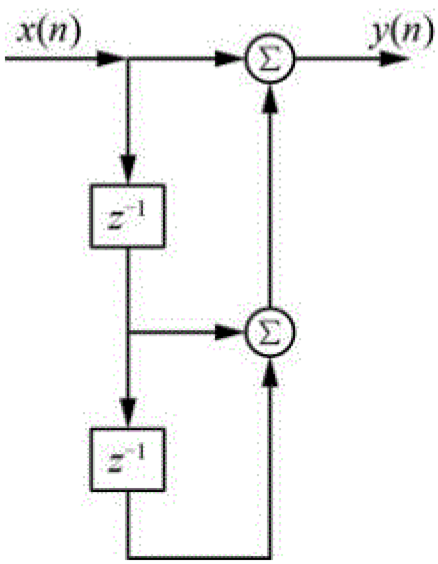



图3

（1）求系统函数$H(z)$；

（2）写出系统的差分方程；

（3）说明系统的功能。[西南交通大学2012研]

解：（1）由系统框图可知

$H(z)=1+z^{-1}+z^{-2}$

（2）∵ $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=1+z^{-1}+z^{-2}$

∴ $X(z)+X(z)z^{-1}+X(z)z^{-2}=Y(z)$

由Z反变换得

$x(n)+x(n-1)+x(n-2)=y(n)$

即系统差分方程为

$y(n)=x(n)+x(n-1)+x(n-2)$

（3）系统的功能为求该时刻输入以及前一时刻和前两时刻输入的总和。

五、已知某因果线性非时变系统的微分方程为$y''(t)-2y'(t)-3y(t)=4f(t)$。若输入信号$f(t)=e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$, $y(0_-)=1$, $y'(0_-)=2$，求：

（1）系统的单位冲激响应$h(t)$；

（2）求系统的零输入响应为$y_{zi}(t)$，零状态响应$y_{zs}(t)$，全响应$y(t)$；

（3）请指出受迫响应分量和自然响应分量。[西南交通大学2012研]

解：（1）∵ $y''(t)-2y'(t)-3y(t)=4f(t)$

两边进行拉普拉斯变换得

$s^2Y(s)-2sY(s)-3Y(s)=4F(s)$

∴ $H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{4}{s^2-2s-3}=\frac{1}{s-3}+\frac{-1}{s+1}$

由拉式反变换得

$h(t)=e^{3t}u(t)-e^{-t}u(t)$

（2）①零输入响应：

有特征方程：$s^2-2s-3=0\Rightarrow s_1=3,s_2=-1$

可设 $y_{zi}(t)=c_1e^{3t}u(t)+c_2e^{-t}u(t)$

又∵ $\begin{cases}y_{zi}(0_-)=1\\y_{zi}'(0_-)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1+c_2=1\\3c_1-c_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=\frac{3}{4}\\c_2=\frac{1}{4}\end{cases}$

∴ $y_{zi}(t)=\frac{3}{4}e^{3t}u(t)+\frac{1}{4}e^{-t}u(t)$

②零状态响应

$Y_{zs}(s)=H(s)\cdot F(s)$

又∵ $F(s)=\frac{1}{s+\frac{1}{2}}$

∴ $Y_{zs}(s)=\frac{4}{(s-3)(s+1)\left(s+\frac{1}{2}\right)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B+C=0\\ \frac{3}{2}A-\frac{5}{2}B-2C=0\\ \frac{1}{2}A-\frac{3}{2}B-3C=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{2}{7}\\ B=2\\ C=-\frac{16}{7}\end{cases}$$

$$\therefore Y_{zs}(s)=\frac{\frac{2}{7}}{s-3}+\frac{2}{s+1}+\frac{-\frac{16}{7}}{s+\frac{1}{2}}$$

$$\therefore y_{zs}(t)=\frac{2}{7}e^{3t}u(t)+2e^{-t}u(t)-\frac{16}{7}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

③全响应

$$y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=\frac{29}{28}e^{3t}u(t)+\frac{9}{4}e^{-t}u(t)-\frac{16}{7}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

（3）受迫响应分量

$$-\frac{16}{7}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

自然响应分量

$$\frac{29}{28}e^{3t}u(t)+\frac{9}{4}e^{-t}u(t)$$

六、如图4所示波振幅调制的接收系统

$$e(t)=\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)^2 \quad -\infty<t<\infty$$

$$s(t)=\cos(1000t) \quad -\infty<t<\infty$$

低通滤波器的传输函数如图5所示，$\varphi(\omega)=0$。

（1）画出A、B、C点的频谱图，并写出频谱表达式；

（2）求输出信号r（t）。[西南交通大学2012研]

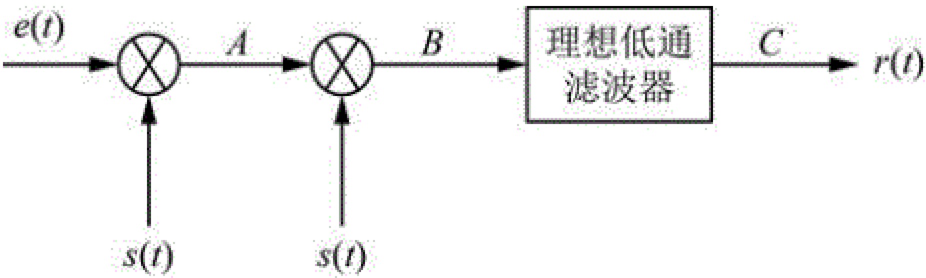



图4

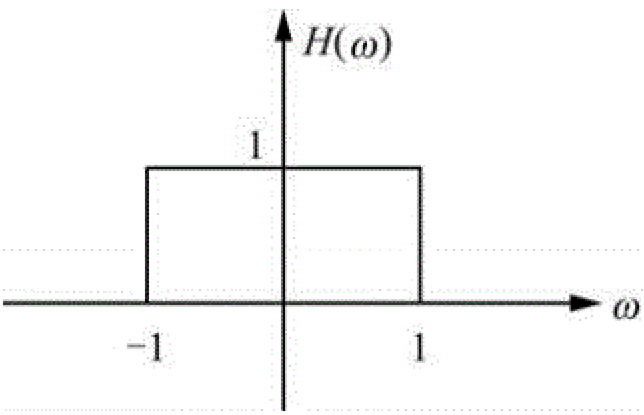



图5

解：$e(t)=Sa^2(\pi t) \leftrightarrow E(f)=\wedge\left(\frac{f}{2}\right)$

其中∧表示三角波。

$$s(t)=\cos(1000t) \leftrightarrow S(f)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{500}{\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{500}{\pi}\right)\right]$$

（1）

$$r_A(t)=e(t)\cdot s(t)$$

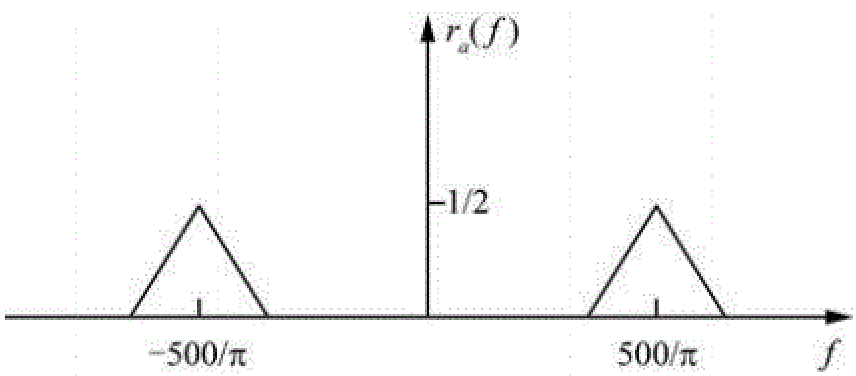
$$\begin{aligned}R_A(f)&=E(f)*S(f)\\&=\wedge\left(\frac{f}{2}\right)*\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{500}{\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{500}{\pi}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\wedge\left(\frac{f}{2}-\frac{500}{\pi}\right)+\wedge\left(\frac{f}{2}+\frac{500}{\pi}\right)\right]\end{aligned}$$

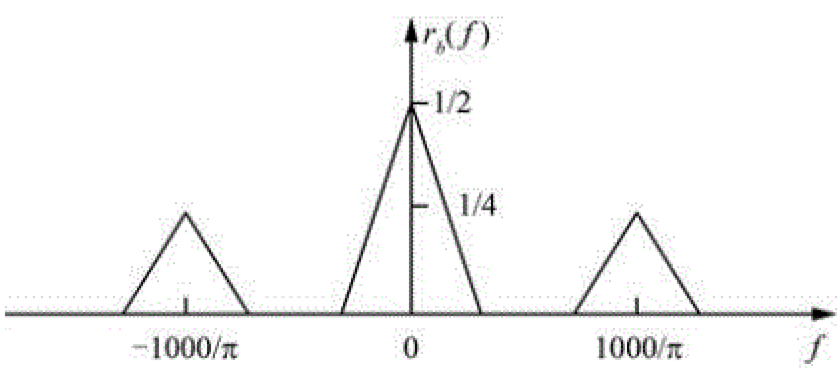
$$r_B(t)=r_A(t)\cdot s(t)$$

$$\begin{aligned}R_B(f)&=R_A(f)*S(f)\\&=\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{500}{\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{500}{\pi}\right)\right]*\frac{1}{2}\left[\wedge\left(\frac{f}{2}-\frac{500}{\pi}\right)+\wedge\left(\frac{f}{2}+\frac{500}{\pi}\right)\right]\\&=\frac{1}{4}\left[\wedge\left(\frac{f}{2}-\frac{1000}{\pi}\right)+\wedge\left(\frac{f}{2}+\frac{1000}{\pi}\right)\right]+\frac{1}{2}\wedge\left(\frac{f}{2}\right)\end{aligned}$$

$$R_C(f)=\frac{1}{2}\wedge\left(\frac{f}{2}\right)$$

频谱图如图6所示：



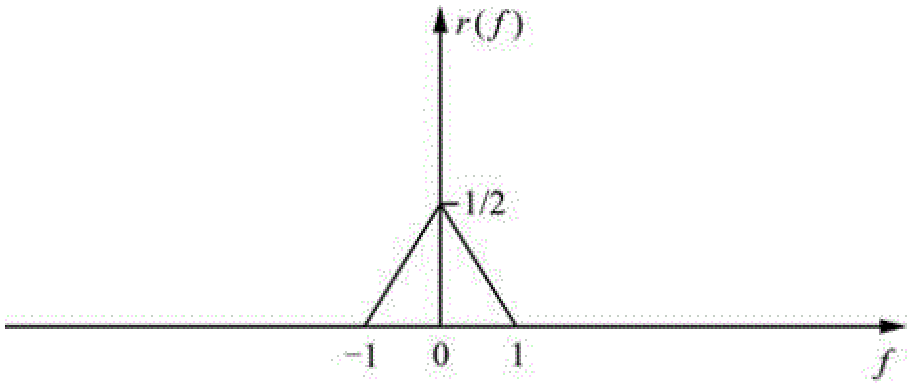



图6

（2）由（1）知$R(f)=\frac{1}{2}\wedge\left(\frac{f}{2}\right)$，由傅里叶反变换得

$r(t)=\frac{1}{2}Sa^2(\pi t)=\frac{1}{2}e(t)$

七、考虑信号$x(t)=\left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)\left(\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\right)$，如果对其用$\omega_s=5\pi$的冲激串采样，求：

（1）采样信号的频谱；

（2）画出采样信号频谱的幅度谱图；

（3）指出采样信号相对于原信号的不失真的频率成分。[西南交通大学2012研]

解：（1）∵$\omega_s=5\pi$ ∴$f_s=\frac{5\pi}{2\pi}=\frac{5}{2}$ ∴$T_s=\frac{1}{f_s}=\frac{2}{5}$

$f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_S)$

由傅里叶变换得

$F_S(f)=f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_S)$

（2）采样信号频谱的幅度谱图如图7所示：

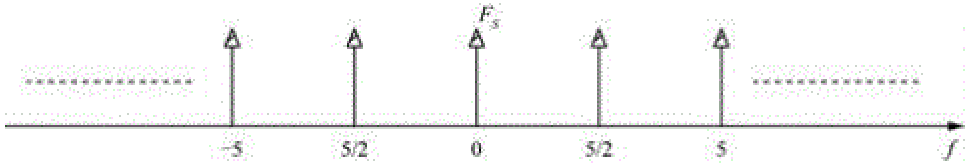



图7

（3）令 $x_1(t)=\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$， $x_2(t)=\dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$，则 $x(t)=x_1(t)\cdot x_2(t)$，且

$x_1(t)=Sa(\pi t)$， $x_2(t)=2Sa(2\pi t)$

由 $Sa(\omega_0 t)\leftrightarrow \dfrac{\pi}{\omega_0}G_{2\omega_0}(\omega)$，得

$X_1(f)=G_1(f)$， $X_2(f)=G_2(f)$

则 $X(f)=X_1(f)*X_2(f)=G_1(f)*G_2(f)$

频谱图如图8所示：

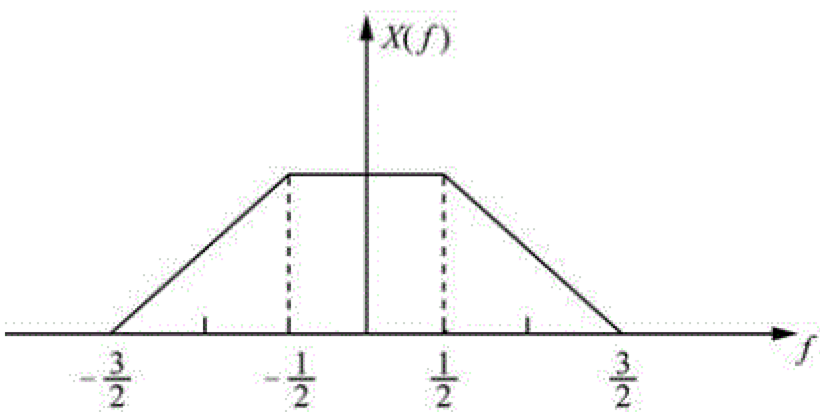



图8

采样信号相对于原始信号不失真的频率成分 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$。

2011年西南交通大学924信号与系统一考研真题及详解

一、选择题

1．已知$u(t)$拉式变换为$\frac{1}{s}$，则$[u(t)-u(t-2)]$视为拉式变换为（　　）。[西南交通大学2011研]

A．$\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{\frac{s}{2}}$

B．$\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{\frac{s}{2}}$

C．$\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-2s}$

D．$\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{2s}$

【答案】C

【解析】根据拉式变换的时移性质可知$f(t-t_0)\leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$。

2．下列输入一输出关系的系统中，（　　）是因果LTI系统。[西南交通大学2011研]

A．$y(n)=nx(n)$

B．$y(n-1)+y(n)x(n)=0$

C．$y(n+1)+2y(n)=x(n+2)$

D．$y(n-2)+y(n)=x(n-1)$

【答案】D

【解析】根据因果LTI的定义：因果LTI系统的响应不会出现在激励信号的以前时刻，故选D。

3．已知某线性非时变系统的单位冲激响应$h(t)=5e^{-2t}u(t)$，则其系统函数$H(j\omega)=$（　　）。[西南交通大学2011研]

A．$\frac{5}{j\omega+2}$

B．$\frac{5}{j\omega}$

C．$\frac{2}{j\omega+2}$

D．$\frac{2}{j\omega}$

【答案】A

【解析】根据$f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，因为$e^{-2t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega+2}$，再根据傅里叶变换的线性性质，得$H(j\omega)=\frac{5}{j\omega+2}$。

4．周期信号$f(t)=-f\left(t\pm\frac{T}{2}\right)$，（T为周期），则其傅里叶级数展开式的结构特点是（　　）。[西南交通大学2011研]

A．只有正弦项

B．只有余弦项

C．只含偶次谐波

D．只含奇次谐波

【答案】D

【解析】满足$f(t)=-f\left(t\pm\frac{T}{2}\right)$的函数为奇谐函数，满足$f(t)=f\left(t\pm\frac{T}{2}\right)$的函数为偶谐函数，根据奇谐函数傅里叶级数的性质可得。

5．已知$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$，则$f(2t+4)$的傅里叶变换为（　　）。[西南交通大学2011研]

A．$\frac{1}{2}F\left(j\frac{\omega}{2}\right)e^{j2\omega}$

B．$\frac{1}{2}F\left(j\frac{\omega}{2}\right)e^{j\frac{\omega}{2}}$

C．$2F\left(j\frac{\omega}{2}\right)e^{j2\omega}$

D．$2F(j\omega)e^{j\frac{\omega}{2}}$

【答案】A

【解析】由$f(at+b)\leftrightarrow\frac{1}{a}F\left(\frac{1}{a}j\omega\right)e^{j\frac{b}{a}\omega}$可知。

6．某因果系统的系统函数$H(z)=\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}$，此系统属于（　　）。[西南交通大学2011研]

A．渐近稳定的

B．临界稳定的

C．不稳定的

D．不可物理实现的

【答案】C

【解析】由稳定系统的定义可知，收敛域不包含单位圆，故系统不稳定。

7．信号$y(t)=\cos 2t+\sin\left(5t+\frac{\pi}{6}\right)$的Nyquist采样间隔为（　　）秒。[西南交通大学2011研]

A．$2\pi$

B．$\pi$

C．$4\pi$

D．1

【答案】B

【解析】将信号$y(t)$分解为$y_1(t)=\cos 2t$和$y_2(t)=\sin\left(5t+\frac{\pi}{6}\right)$，$y_1(t)$的周期为$N_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=\frac{2\pi}{2}=\pi$，$y_2(t)$的周期为$N_2=\frac{2\pi}{\omega_2}=\frac{2\pi}{5}$，因此，奈奎斯特间隔为每个信号的采样间隔的最小公倍数，即为$\pi$。

8．已知$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$，$f(t)$的频带宽度为$\omega_m$，则信号$f(t-3)$的奈奎斯特间隔等于（　　）。[西南交通大学2011研]

A．$\frac{2\pi}{\omega_m}$

B．$\frac{\pi}{\omega_m}$

C．$\frac{\pi}{3\omega_m}$

D. $\frac{\pi}{\omega_m-3}$

【答案】B

【解析】$f(t-3)$只是对$f(t)$进行了简单的线性移位，因此$f(t-3)$与$f(t)$的频带宽度是没有变的，因此奈奎斯特间隔也相同。

9. $u(3-t)u(t)=$（　　）。[西南交通大学2011研]

A. $u(3-t)$ B. $u(t)$ C. $u(t)-u(t-3)$ D. $u(3-t)-u(t)$

【答案】C

【解析】利用图形求解。

10. 若系统函数有两个极点在虚轴上，则该系统的单位脉冲响应中含有（　　）。[西南交通大学2011研]

A. 衰减的正弦振荡分量

B. 等幅的正弦振荡分量

C. 阶跃函数分量

D. 衰减的指数分量

【答案】B

【解析】两个极点在虚轴上，则$H(s)=\frac{k}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)}=\frac{k}{s^2+\omega_0^2}$，这两个极点为共轭极点，对系统函数进行逆拉氏变换，即得系统的单位脉冲响应$h(t)=\frac{k}{\omega_0}\cdot\sin(\omega_0 t)$。

二、假定信号$x(t)=\cos 2\pi t+\sin 6\pi t$是冲激响应为$h(t)=\frac{[\sin 4\pi t][\sin 8\pi t]}{\pi t^2}$的系统

的输入，求系统的输出。[西南交通大学2011研]

解：由题意得，设分流的输出为$y(t)$，中间信号$g(t)$，且

$Y(t) \leftrightarrow Y(\omega), h(t) \leftrightarrow H(\omega), x(t) \leftrightarrow X(\omega)$，$g(t) \leftrightarrow G(\omega)$

，

$x(t) = \cos 2\pi t + \sin 6\pi t$

。

由$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$，得

$X(\omega) = \pi[\delta(t+2\pi) + \delta(t-2\pi)] + j\pi[\delta(t+6\pi) - \delta(t-6\pi)]$

$h(t) = \dfrac{[\sin 4\pi t][\sin 8\pi t]}{\pi t^2} = \pi \dfrac{\sin 4\pi t}{\pi t} \cdot \dfrac{\sin 8\pi t}{\pi t}$

令

$h_1(t) = \dfrac{\sin 4\pi t}{\pi t} \leftrightarrow H_1(\omega) = G_{8\pi}(\omega)$，$h_2(t) = \dfrac{\sin 8\pi t}{\pi t} \leftrightarrow H_2(\omega) = G_{16\pi}(\omega)$

$h(t) \leftrightarrow H(\omega) = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \pi \cdot H_1(\omega) * H_2(\omega) = \dfrac{1}{2} \cdot G_{8\pi}(\omega) * G_{16\pi}(\omega)$

由$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$，得$H(\omega)$图形如图1所示。

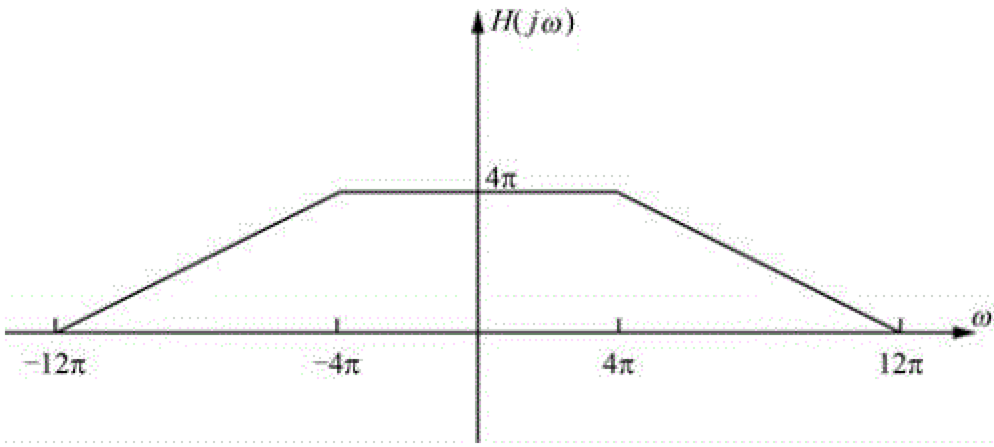



图1

设$g(t)=x(t)*h(t)$，则$G(j\omega)=X(j\omega)\cdot H(j\omega)$，图形如图2所示。

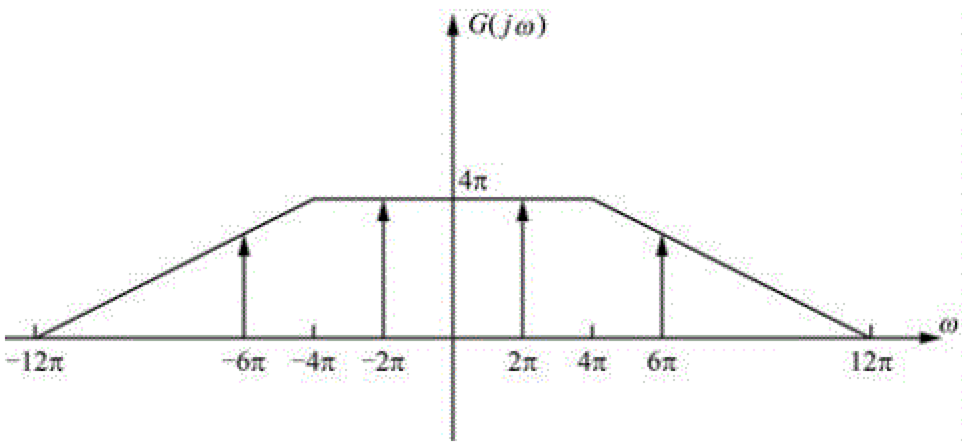



图2

由图知

$$G(\omega)=4\pi^2[\delta(t+2\pi)+\delta(t-2\pi)]+j3\pi^2[\delta(t+6\pi)-\delta(t-6\pi)]$$

由$G(\omega)\leftrightarrow g(t)$，得$g(t)=4\pi\cos 2\pi t+3\pi\sin 6\pi t$。

则系统输出为$4\pi\cos 2\pi t+3\pi\sin 6\pi t$。

三、已知因果系统离散LTI系统的差分方程为

$y(n)=y(n-1)+y(n-2)+x(n-1)$，

求：

（1）系统函数$H(z)$，画出极零图，并标明收敛域；

（2）系统单位脉冲响应$h(n)$；

（3）说明系统稳定性。[西南交通大学2011研]

解：由题意得

（1）在零状态条件下对差分方程两边取z变换得

$$Y(z)-z^{-1}Y(z)-z^{-2}Y(z)=z^{-1}X(z)$$

由

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}=\frac{z}{z^2-z-1}$$

由$H(z)$可知，系统的零点为$z_0=0$，极点为$p_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},p_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。

因系统为因果系统，所以收敛域ROC应包含无穷远点，则：$|z|>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。其极零图如图3所示。

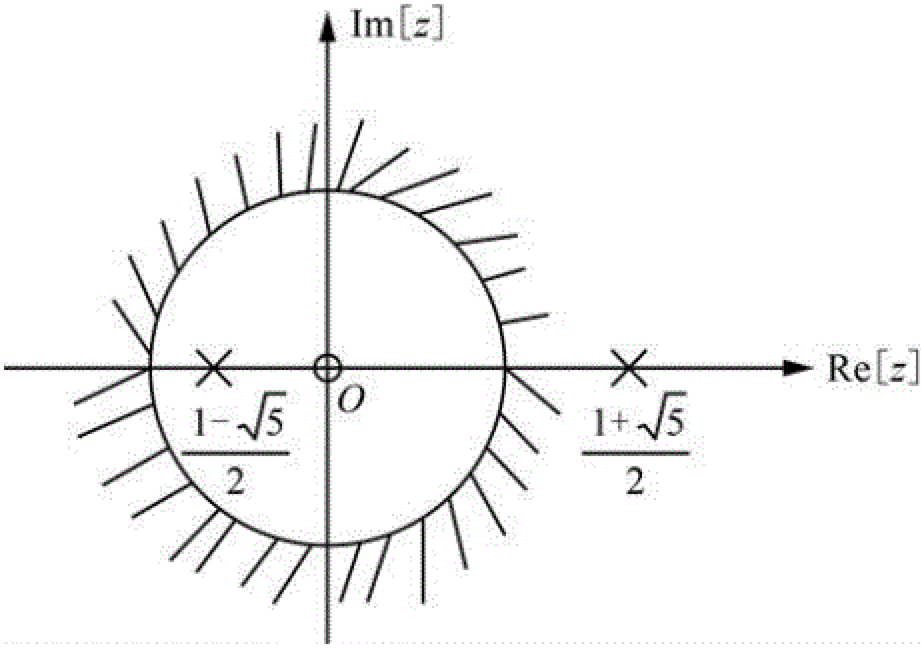



图3

（2）$H(z)=\dfrac{z}{\left(z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}=\dfrac{\frac{z}{\sqrt{5}}}{z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\dfrac{-\frac{z}{\sqrt{5}}}{z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

且系统为右边序列，故

$$h(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}u(n)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}u(n)$$

（3）因为此系统的收敛域ROC：$|z|>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，不包括单位圆，所以该系统不稳定。

四、已知因果系统框图如图4所示，求：

（1）求系统函数$H(z)$；

（2）写出系统的差分方程；

（3）求系统单位脉冲响应$h(n)$；

（4）当系统输入$x(n)$为单位阶跃序列时，求系统零状态响应$y(n)$。[西南交通大学2011研]

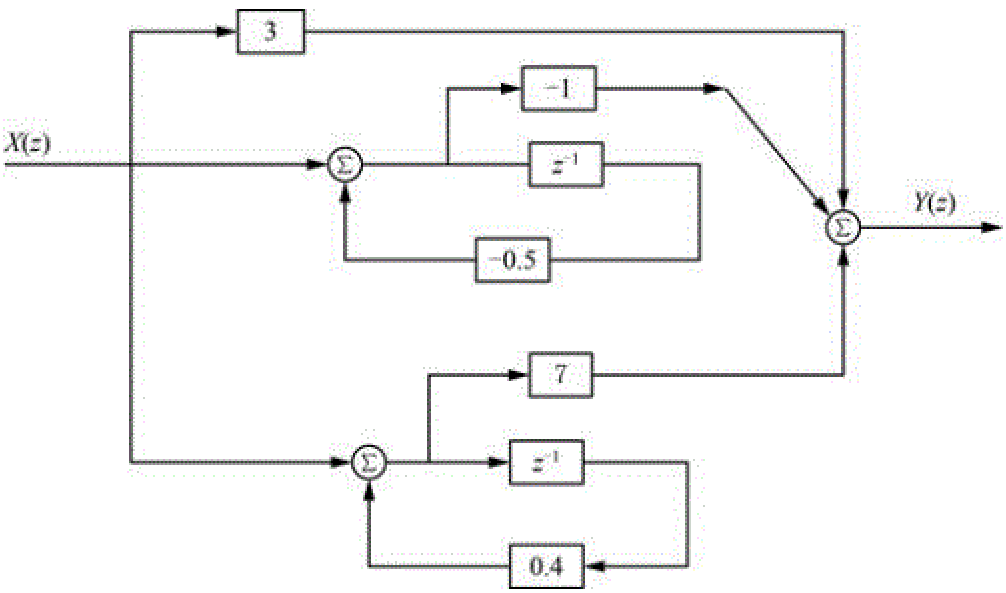



图4

解：由题意得

（1）由梅森公式可知，可把系统分成三个子系统的并联，则有

$H_1(z)=3$，$H_2(z)=\dfrac{-1}{1+0.5z^{-1}}$，$H_3(z)=\dfrac{7}{1-0.4z^{-1}}$

$$H(z)=H_1(z)+H_2(z)+H_3(z)=3+\frac{-1}{1+0.5z^{-1}}+\frac{7}{1-0.4z^{-1}}=\frac{9+4.2z^{-1}-0.6z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}$$

（2）由（1）可知$H(z)=\dfrac{9+4.2z^{-1}-0.6z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}$，得

$$y(n)+0.1y(n-1)-0.2y(n-2)=9x(n)+4.2x(n-1)-0.6x(n-2)$$

（3）系统的单位脉冲响应即当$x(n)=\delta(n)$时的输出$y(n)=h(n)$，由

$$H(z)=3+\frac{-1}{1+0.5z^{-1}}+\frac{7}{1-0.4z^{-1}}=3+\frac{-z}{z+0.5}+\frac{7z}{z-0.4}$$

再由$H(z)\leftrightarrow h(n)$得

$$h(n)=3\delta(n)-(-0.5)^n u(n)+7(0.4)^n u(n)$$

（4）当$x(n)=u(n)$时，输出的$y(n)=h(n)*u(n)$，由$y(n)\leftrightarrow Y(z)$，得

$$x(n)=u(n)\leftrightarrow X(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$\begin{aligned}Y(z)=\mathrm{X}(z)\cdot H(z)&=3\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{-z}{z+0.5}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{7z}{z-0.4}\cdot\frac{z}{z-1}\\&=\frac{3z}{z-1}+\frac{-\frac{1}{3}z}{z+0.5}+\frac{-\frac{2}{3}z}{z-1}+\frac{-\frac{14}{3}z}{z-0.4}+\frac{\frac{35}{3}z}{z-1}\\&=\frac{14z}{z-1}+\frac{-\frac{1}{3}z}{z+0.5}+\frac{-\frac{14}{3}z}{z-0.4}\end{aligned}$$

所以

$$y(n)=14u(n)-\frac{1}{3}(-0.5)^n u(n)-\frac{14}{3}(0.4)^n u(n)$$

五、已知某因果线性非时变系统的微分方程为：$y''(t)-y'(t)-\frac{3}{4}y(t)=f(t)$。若输入信号$f(t)=e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=2$，求：

（1）系统的单位冲激响应$h(t)$；

（2）求系统的零输入响应$y_{zi}(t)$，零状态响应$y_{zs}(t)$，全响应$y(t)$；

（3）请指出受迫响应分量和自然响应分量。[西南交通大学2011研]

解：由题意得

（1）在零状态条件下对微分方程两边取拉式变换

$$s^2Y(s)-sY(s)-\frac{3}{4}Y(s)=F(s)$$

由$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}$，得

$$H(s)=\frac{1}{s^2-s-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\left(s-\frac{3}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{s-\frac{3}{2}}+\frac{-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}}$$

由$H(S)\leftrightarrow h(t)$，得

$$h(t)=\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}t}u(t)-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

（2）由微分方程得系统的特征方程为$\lambda^2-\lambda-\frac{3}{4}=0$，从而得$\lambda_1=\frac{3}{2},\lambda_2=-\frac{1}{2}$。

设$y_{zi}(t)=\left(c_1e^{\frac{3}{2}t}+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\right)\cdot u(t)$，因为$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=2$，故

$$\begin{cases}c_1+c_2=1\\ \frac{3}{2}c_1-\frac{1}{2}c_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=\frac{5}{4}\\ c_2=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

所以

$$y_{zi}(t)=\frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}t}u(t)-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

设$f(t)\leftrightarrow F(s)$，$y_{zs}(t)\leftrightarrow Y_{zs}(s)$，则

$$F(s)=\frac{1}{s+\frac{1}{2}}$$

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$$

$$Y_{zs}(s)=F(s)\cdot H(s)=\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{3}{2}\right)}=\frac{-\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^{2}}+\frac{-\frac{1}{4}}{s+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{4}}{s-\frac{3}{2}}$$

$$y_{zs}(t)=-\frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}u(t)-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)+\frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}t}u(t)$$

$$y(s)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=\left(-\frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}t}\right)u(t)$$

故全响应 $y(s)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=\left(-\frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}t}\right)u(t)$。

（3）受迫响应为

$$-\frac{t}{2}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

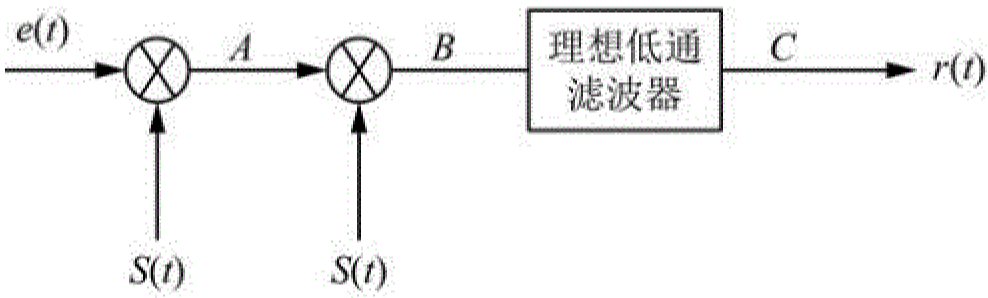
自然响应为

$$\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}t}\right)u(t)$$

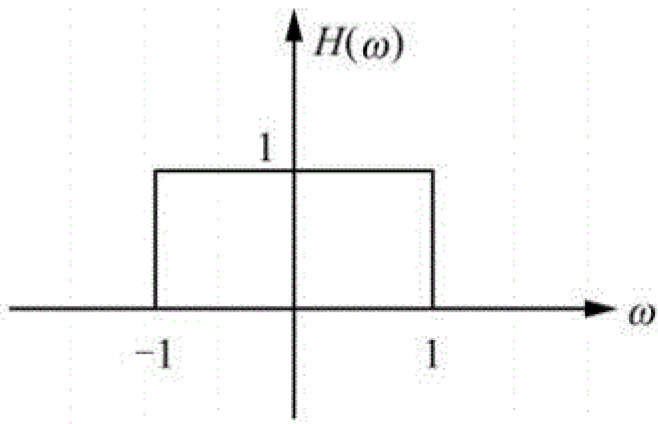
六、如图5（a）所示是抑制载波振幅调制的接收系统 $e(t)=\frac{\sin 4\pi t}{\pi t},-\infty<t<\infty$，$s(t)=\cos(1000t),-\infty<t<\infty$，低通滤波器的传输函数如图5（b）所示且 $\varphi(\omega)=0$

（1）画出A、B、C点的频谱图；

（2）求输出信号$r(t)$。[西南交通大学2011研]




(a)




(b)

图5

解：由题意得

（1）设A、B的输出为$y_A(t)$、$y_B(t)$， $y(t)\leftrightarrow R(\omega)$

$y_A(t)\leftrightarrow Y_A(\omega)$，$y_B(t)\leftrightarrow Y_B(\omega)$，$e(t)\leftrightarrow E(\omega)$，$s(t)\leftrightarrow S(\omega)$

，且

$$e(t)=\frac{\sin 4\pi t}{\pi t}=4\cdot\frac{\sin 4\pi t}{4\pi t}\leftrightarrow 4\cdot\frac{\pi}{4\pi}\cdot G_{8\pi}(\omega)=G_{8\pi}(\omega)$$

$$s(t)=\cos 1000t\leftrightarrow S(\omega)=\pi\left[\delta(\omega+1000)+\delta(\omega-1000)\right]$$

$$y_A(t) = e(t) \cdot s(t) = 4Sa(4\pi t)\cos 1000t$$

则

$$\begin{aligned} Y_A(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot E(\omega) * S(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} G_{8\pi}(\omega) * \pi\left[\delta(\omega+1000) + \delta(\omega-1000)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[G_{8\pi}(\omega+1000) + G_{8\pi}(\omega-1000)\right] \end{aligned}$$

$$y_B(t) = y_A(t) \cdot s(t) = e(t) \cdot \cos^2 1000t$$

则

$$\begin{aligned} Y_B(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot Y_A(\omega) * S(\omega) \\ &= \frac{1}{4}\left[G_{8\pi}(\omega+2000) + 2G_{8\pi}(\omega) + G_{8\pi}(\omega-2000)\right] \end{aligned}$$

由 $r(t) = y_B(t) * h(t)$，则

$$R(\omega) = Y_B(\omega) H(\omega) = \frac{1}{2} G_2(\omega)$$

A、B、C点的频谱图分别如图6所示。

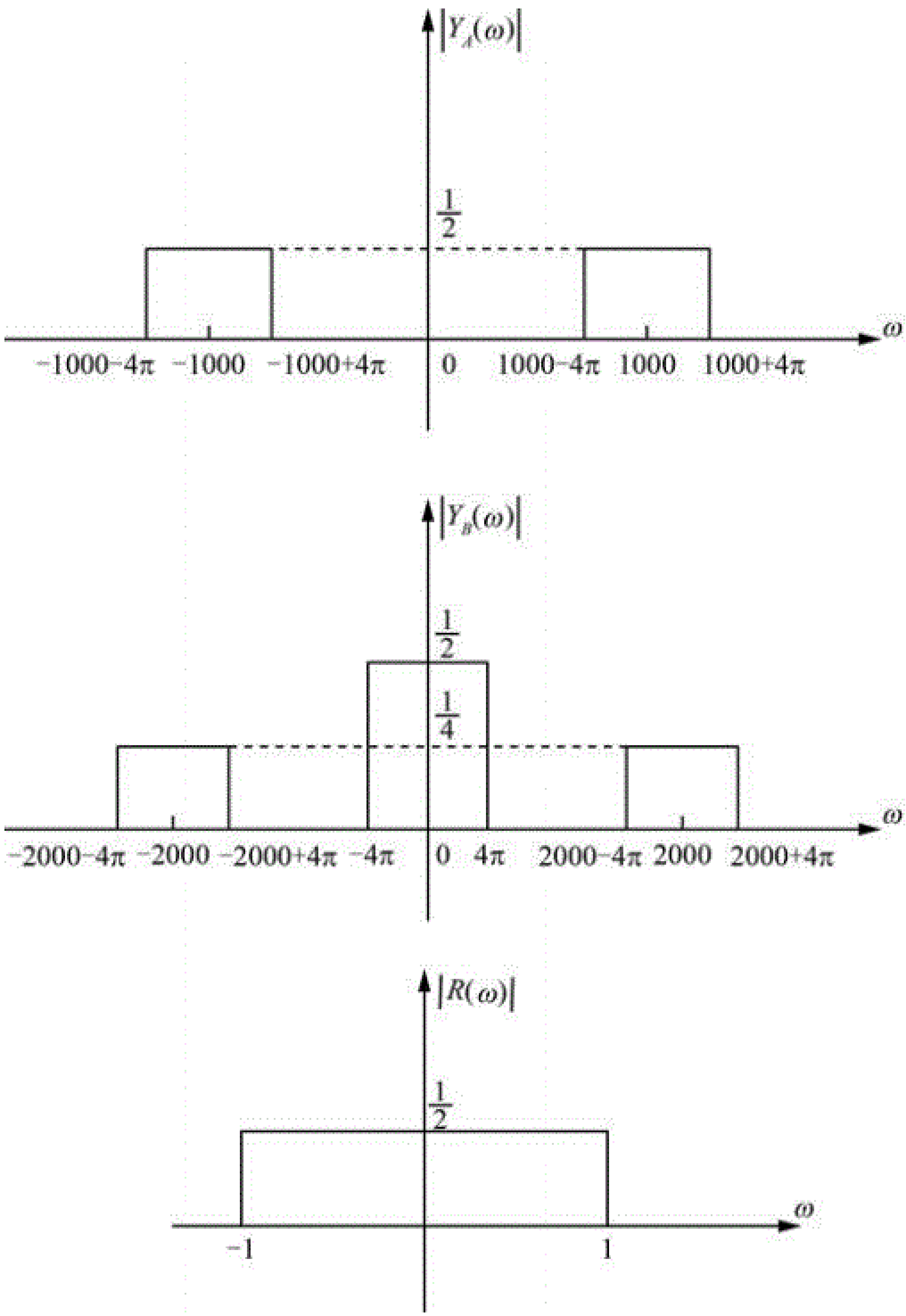



图6

（2）$R(\omega)=\frac{1}{2}G_2\omega$，则$r(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot Sa(t)$。

七、考虑信号$x(t)=\left(\frac{\sin(50\pi t)}{2\pi t}\right)^2$，如果对其用$\omega_s=150\pi$的冲激串采样，试计算采样过程不会丢失信息的$x(t)$频率范围。[西南交通大学2011研]

解：由题意，令$x_1(t)=\frac{\sin(50\pi t)}{2\pi t}$，则$x(t)=x_1^2(t)$，且

$$x_1(t)=25\cdot\frac{\sin(50\pi t)}{50\pi t}=25Sa(50\pi t)$$

由$Sa(\omega_0 t)\leftrightarrow\frac{\pi}{\omega_0}G_{2\omega_0}(\omega)$，得

$$x_1(\omega)=25\cdot\frac{\pi}{50\pi}\cdot G_{100\pi}(\omega)=\frac{1}{2}G_{100\pi}(\omega)$$

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_1(\omega)=\frac{1}{8\pi}G_{100\pi}(\omega)*G_{100\pi}(\omega)$$

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\leftrightarrow\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)=150\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-150\pi n)$$

$$y(t)=x(t)\delta_T(t)\leftrightarrow Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)=75\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)$$

为保证采样过程不会丢失信息$x(t)$的频率范围为：$-75\pi\le\omega_1\le75\pi$。

其频谱图如图7所示。

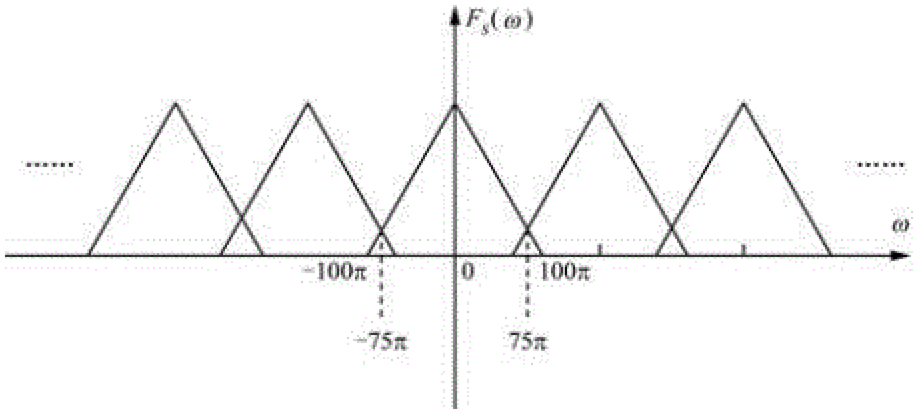



图7