

## 第十四章 状态方程

### 14.1 电路的状态、状态变量及状态方程

#### 14.1.1 状态和状态变量

经典法分析一阶、二阶电路时，求响应除了要知道电路结构及参数和外加激励之外，还必须知道电路中电容电压， $u_C$ 和电感电流 $i_L$ 的初始值。有了这些初始值才能确定积分常数，才能确定唯一解，即电路在换路后任意时刻的情况。

$u_C$ 及 $i_L$ 的初始值称为电路的**初始状态**。只要知道了一个已知电路在换路时的初始状态和换路后作用于电路的外加激励。就可以确定在换路后任何时刻的电路的响应。

**一般意义上的定义：**

一个电路在 $t = t_0$ 时的**状态**，是指能**完全描述**在这一时刻电路性能的**最小变量组**。这个变量组中的每一个变量，称为**状态变量**。

**完全描述电路性能：**如果给定 $t = t_0$ 时这组变量的值和 $t \geq t_0$ 时的外加激励，就能完全确定电路在 $t \geq t_0$ 的任何时刻的任一响应。

**变量**是各元件电流、电压等。**最小**是指这些变量组中每一个变量都是独立的，不可能用其它变量的线性组合来表示。

若一个电路中有几个状态变量 $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $\dots$ ,  $x_n(t)$ ，这几个状态变量就构成了一个 $\mathbf{X}(t)$ 称为**电路的状态矢量**。

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

状态变量一般选取各独立电容的 $u_C(t)$ ，各独立电感的 $i_L(t)$ 。

#### 14.1.2 电路的状态方程和输出方程

从关于电路初始值问题的讨论中知道，如果已知 $t = t_0$ 时的状态和输入，就可以确定电路中任一电流、电压在这一时刻的响应值。也就是说， $t = t_0$ 时每一个可能的电路响应，都能用该时刻的状态变量和激励来表示。

所以，如果我们确定了状态变量的时间特性（即与时间的函数关系），就能确定在给定输入下每一个响应的的时间特性。先求得状态变量，再求其余响应。

用状态变量分析法求解动态电路有两个步骤，需要建立与求解两组方程：

##### 14.1.2.1 关于状态变量与时间关系的状态方程

以 $u_C$ ,  $i_L$ 为状态变量, 建立将各 $i_C$ ,  $u_L$ 用状态变量与激励表达的方程, 其中 $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ ,  $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ 。经整理后, 可得一组将 $\frac{du_C}{dt}$ 或 $\frac{di_L}{dt}$ 以状态变量和激励表示的方程, 即电路的**状态方程组**。其中每一个方程中只含有一个状态变量的一阶微分。

对于一个具有  $n$  个状态变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $m$  个激励 $f_1, f_2, \dots, f_m$ 的电路, 状态方程的一般形式为:

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}f_1 + \dots + b_{nm}f_m$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{F}$$

其中:  $\mathbf{X}$ 为状态向量,  $\dot{\mathbf{X}}$ 为状态变量的一阶微分矢量,  $\mathbf{F}$ 为输入向量,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ 为系数矩阵。

状态方程是一个一阶线性微分方程组, 求解状态方程便可得到状态变量的时间函数形式。

#### 14.1.2.2 关于响应与状态变量及激励之间关系的输出方程

将输出变量以状态变量及激励的线性组合表示即为输出方程。若有 $k$ 个输出变量, 输出方程表示为:

$$y_k = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n + d_{k1}f_1 + \dots + d_{km}f_m$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \cdots & d_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{F}$$

其中:  $\mathbf{Y}$ 是输出向量;  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ 是系数矩阵。

状态变量法阐明了电路的外加激励、状态变量、输出变量之间的关系, 也称“内部描述法”。

## 14.2 状态方程的建立

建立状态方程是状态变量分析法的关键步骤, 有不少方法。本节介绍其中三种常用基本方法。

### 14.2.1 电容节点—电感回路法 (直观法)

取 $u_C$ ,  $i_L$ 为状态变量, 则 $i_C$ 、 $u_L$ 可以用 $u_C$ 、 $i_L$ 及输入来表达。而 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ ,  $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ , 含有 $u_C$ 及 $i_L$ 的一阶微分。对连接电容的节点建立 KCL 方程; 对电感回路建立 KVL 方程。

**基本步骤:**

① 选取电路中各独立电容的电压 $u_C$ 、各独立电感的电流 $i_L$ 为电路的状态变量。与理想电压源并联的电容、与理想电流源串联的电感、全部由电容及电压源构成的回路、全部由电感支路及电流源构成的节点或割

集中均含有非独立元件。

② 对每个独立电容，选取与它连接的并且只接有这一个电容的结点，建立 KCL 方程。将方程中所有非状态变量都代换为状态变量和激励，经整理可得到一个关于  $\frac{du_C}{dt}$  的方程。

③ 对每个独立电感，选取包含且只包含这一个电感的回路，建立 KVL 方程。将方程中所有非状态变量都代换为状态变量和激励，经整理可得到一个关于  $\frac{di_L}{dt}$  的方程。

④ 联立所得方程，将其表示为矩阵形式，即得到电路的状态方程。

### 14.2.2 电容割集—电感回路法（观察法）

如果一个电容的两端结点上都连接有其它电容，则无论取其中那一个结点建立 KCL 方程，方程中都含有两个电容电压的一阶微分。为避免出现这类问题，可对电容割集建立 KCL 方程，使方程中只含有一个电容电压的一阶微分。

**基本步骤：**

- ① 画电路拓扑图，选一个适当的树。
- ② 分别建立包含单个独立电容的基本割集的 KCL 方程、包含单个独立电感的基本回路的 KVL 方程。
- ③ 经代换、整理得到状态方程及输出方程。

选树的原则：

- ① 树支选择优先顺序为：独立电容支路、电压源支路、电阻支路。
- ② 连支选择优先顺序为：独立电感支路、电流源支路、电阻支路。

### 14.2.3 迭加法

迭加法是应用替代定理和叠加定理来列写状态方程的方法。只适用于线性电路。

**基本步骤：**

- ① 选独立的  $u_C$ ,  $i_L$  为状态变量。
- ② 应用替代定理，用电压为  $u_C$  的独立电压源替代电容；用电流为  $i_L$  的独立电流源替代电感。
- ③ 应用叠加定理，让激励电源、替代电压源  $u_C$ 、替代电流源  $i_L$  各自单独作用，分别求得相应产生的  $i_C$  和  $u_L$  分量，然后叠加求得总的  $i_C$ ,  $u_L$  的表达式。
- ④ 整理得状态方程。

## 14.3 状态方程的频域解法

对状态方程  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{F}$  等式两端取拉氏变换：

$$\mathcal{L}[\dot{\mathbf{X}}] = \mathcal{L}[\mathbf{A}\mathbf{X}] + \mathcal{L}[\mathbf{B}\mathbf{F}]$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0) + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{F}(s) = \boldsymbol{\Phi}(s)\mathbf{X}(0) + \boldsymbol{\Phi}(s)\mathbf{B}\mathbf{F}(s)$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ 为预解矩阵。

$\mathbf{X}(s)$ 是状态方程的频域解，即状态向量的复频域形式。对其求拉氏反变换即可得状态方程的时域解。

$$\mathbf{X}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\boldsymbol{\Phi}(s)\mathbf{X}(0)] + \mathcal{L}^{-1}[\boldsymbol{\Phi}(s)\mathbf{B}\mathbf{F}(s)]$$

$\mathcal{L}^{-1}[\boldsymbol{\Phi}(s)\mathbf{X}(0)]$ 仅与初始值有关，即为由初始状态引起的零输入响应。

$\mathcal{L}^{-1}[\boldsymbol{\Phi}(s)\mathbf{B}\mathbf{F}(s)]$ 仅与外加激励有关。是零状态响应。