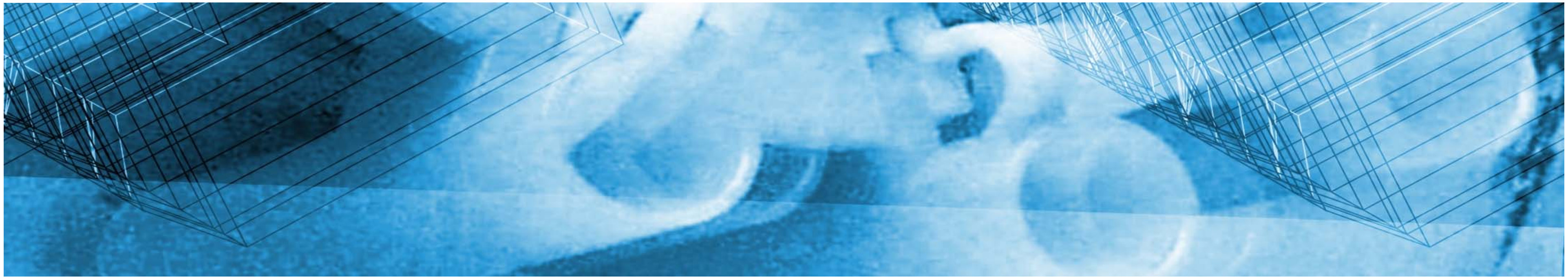
西南交通大学



信号与系统

韩志伟

上节课复习：

- ◆ 卷积积分
- ◆ 周期信号-傅立叶级数
- ◆ 周期信号的频谱
- ◆ 非周期信号-傅立叶变换

周期信号傅里叶级数变换对：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\ e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{T} f(t)\ e^{-jn\omega_1 t}dt$$

非周期信号傅里叶变换对：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\ e^{-j\omega t}dt$$

典型信号傅立叶变换

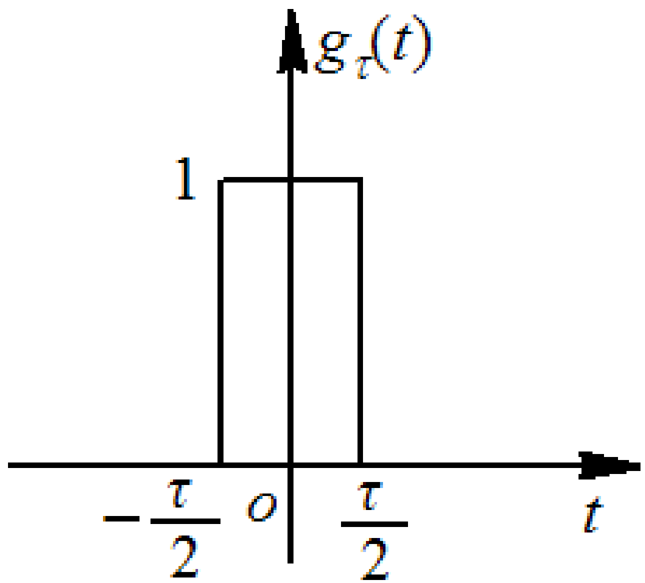
典型信号傅立叶变换

❖门函数

矩形脉冲一般称为门函数。

其宽度为τ， 高度为1，通常用符号$g_\tau(t)$来表示。

$$g_\tau(t)=\begin{cases}1 & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$



典型信号傅立叶变换

门函数$g_\tau(t)$的傅里叶变换为：

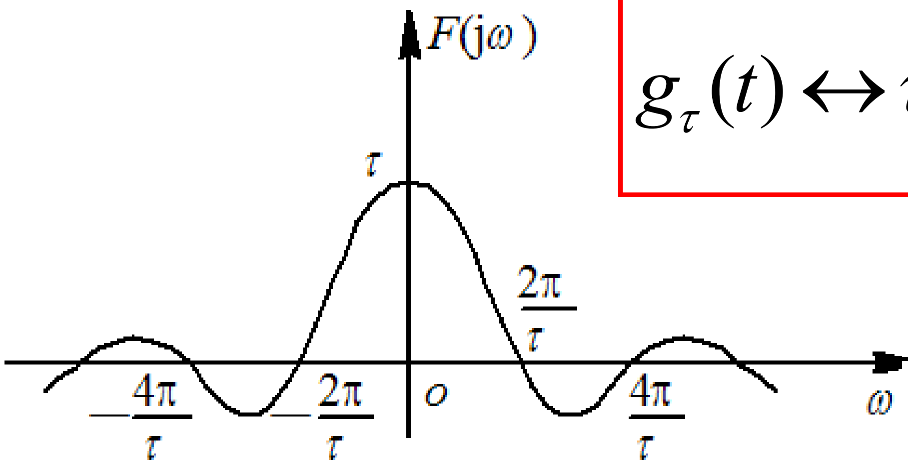
$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g_\tau(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t}dt=\frac{e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}-e^{j\frac{\omega\tau}{2}}}{-j\omega}$$

$$=\frac{2\sin(\omega\tau/2)}{\omega}=\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}=\tau\, Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

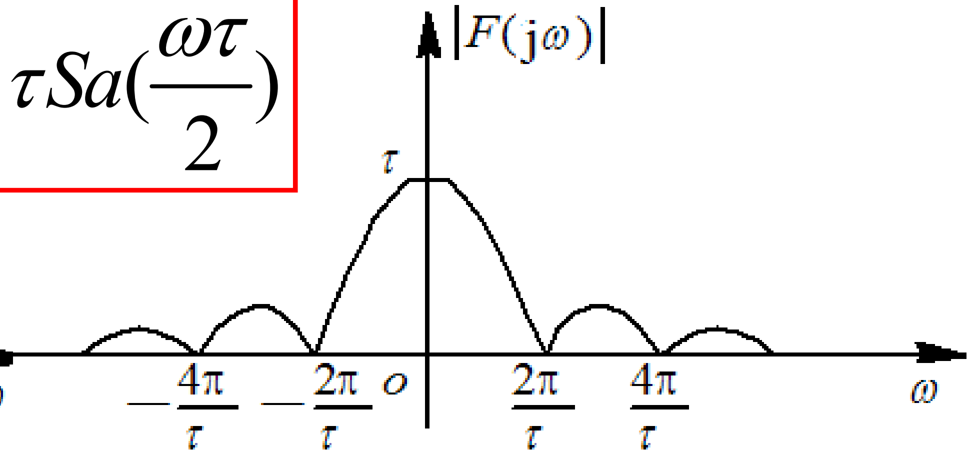
幅度频谱：$|F(j\omega)|=\begin{cases}\tau & \omega=0\\ 0 & \omega=\dfrac{2k\pi}{\tau}\end{cases}\quad (k=\pm1,\pm2,\cdots)$

相位频谱：$\varphi_n=\begin{cases}0 & F(j\omega)>0\\ \pm\pi & F(j\omega)<0\end{cases}$

典型信号傅立叶变换



$$\boxed{g_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})}$$

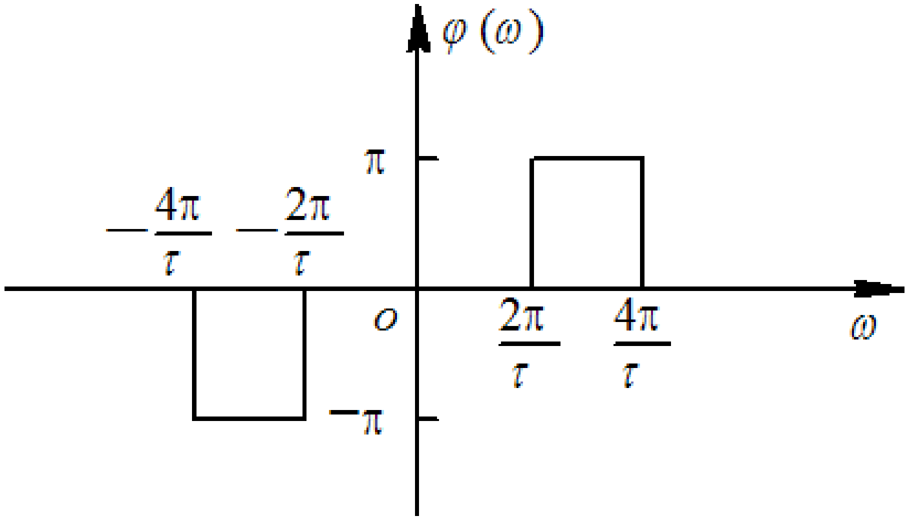


频带宽度：

$$\omega = 0 \sim \frac{2\pi}{\tau}$$

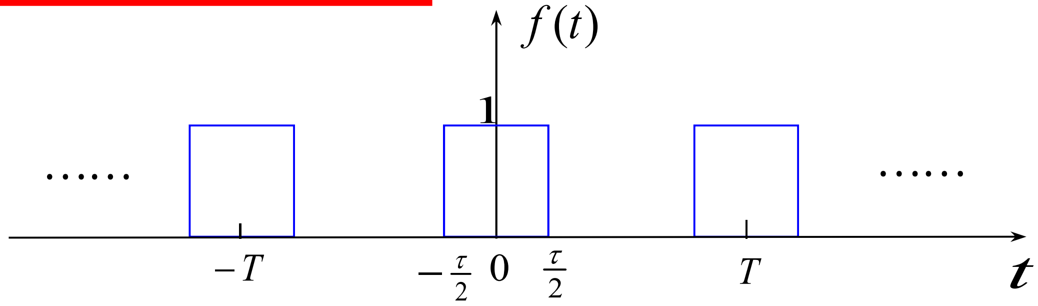
$$\omega_B = \frac{2\pi}{\tau}(rad/s)$$

$$f_{\mathbf{B}} = \frac{1}{\tau}(Hz)$$



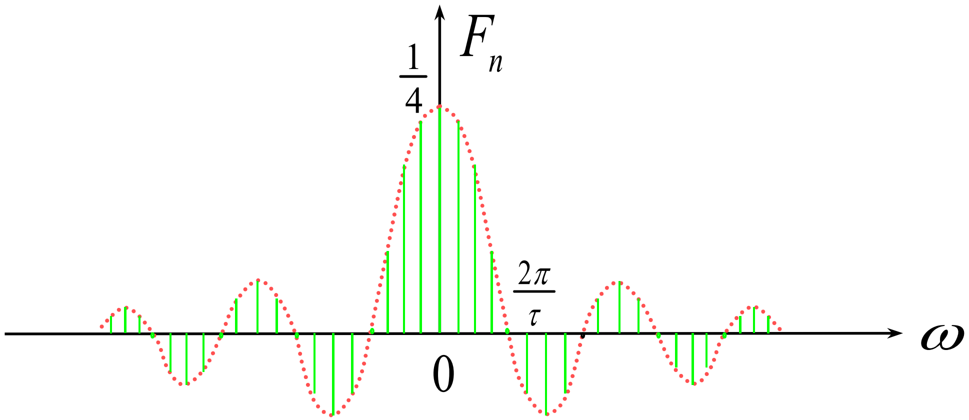
典型信号傅立叶变换

周期矩形脉冲的频谱



频谱为:

$$F_n = \frac{\tau}{T} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \qquad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \cdots$$



典型信号傅立叶变换

周期和非周期矩形脉冲信号频谱的对比

1) 非周期矩形脉冲信号的频谱是连续频谱，其形状与周期矩形脉冲信号离散频谱的包络线相似，它们都具有抽样函数 $Sa(x)$ 的形式。

2) $F_n = \frac{\tau}{T} Sa(\frac{n\omega_1 \tau}{2})$ 和 $F(j\omega) = \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$ 。

a. F_n 值较 $F(j\omega)$ 值多乘了 $\frac{1}{T}$，这是由于两者的定义规定的。

b.对于由非周期脉冲按一定的周期T重复后构成的周期信号，$F(j\omega)$ 和 F_n 之间可以互求。

※ F_n 可以通过对 $F(j\omega)$ 等间隔取样求得，

※ $F(j\omega)$ 可以通过将 F_n 中 $n\omega_1$ 换成连续变量 ω 得

典型信号傅立叶变换

3) 非周期信号的频谱和周期信号的频谱一样也具有收敛性。

4) 非周期信号带宽的定义方法与周期信号相同。

5) 非周期信号的频谱分量主要集中在零频到第一个过零点之间，即有效带宽内。

6) （周期或非周期）信号在时域有限，则在频域将无限延续。

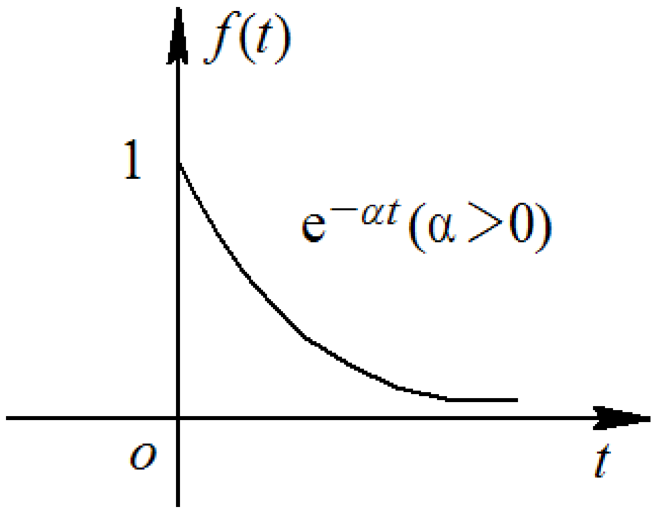
7) （周期或非周期信号）脉冲宽度τ越窄，有效带宽越宽，高频分量越多，即信号信息量大，传送信号所占用的频带越宽。

典型信号傅立叶变换

❖ 单边指数信号一

$$f(t)=\begin{cases} e^{-at} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \qquad (\alpha>0)$$

$$= e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$$



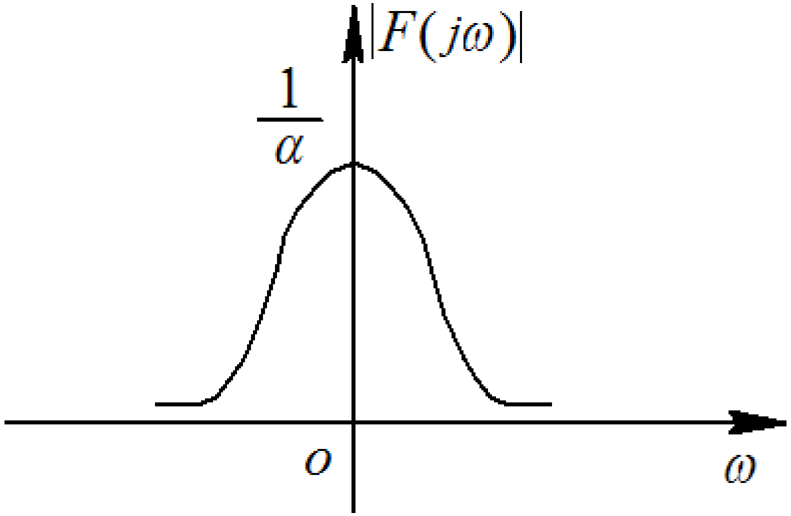
其傅立叶变换：　　　　$(\alpha<0)$ 傅立叶变换不存在

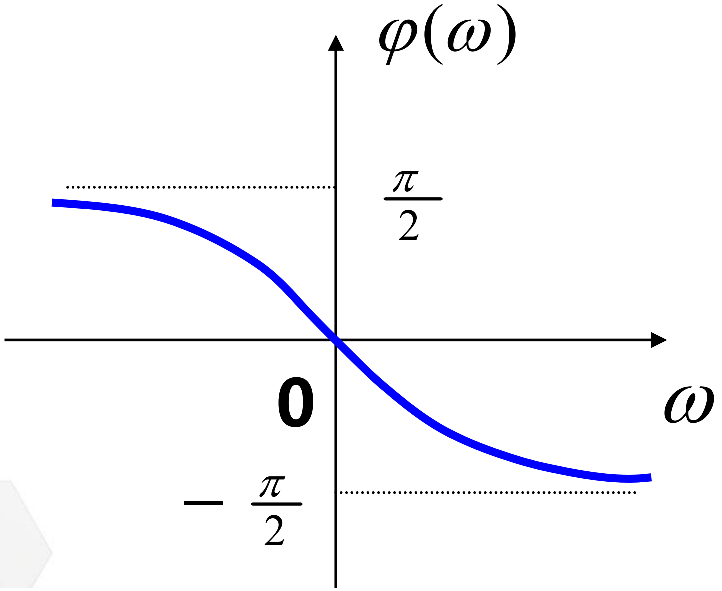
$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\cdot e^{-j\omega t}dt=\left.\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)}\right|_{0}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\alpha+j\omega}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\cdot e^{-j\arctan\frac{\omega}{\alpha}}$$

典型信号傅立叶变换

❖ 单边指数信号一





$$\boxed{e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}}$$

幅度频谱：

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

相位频谱：

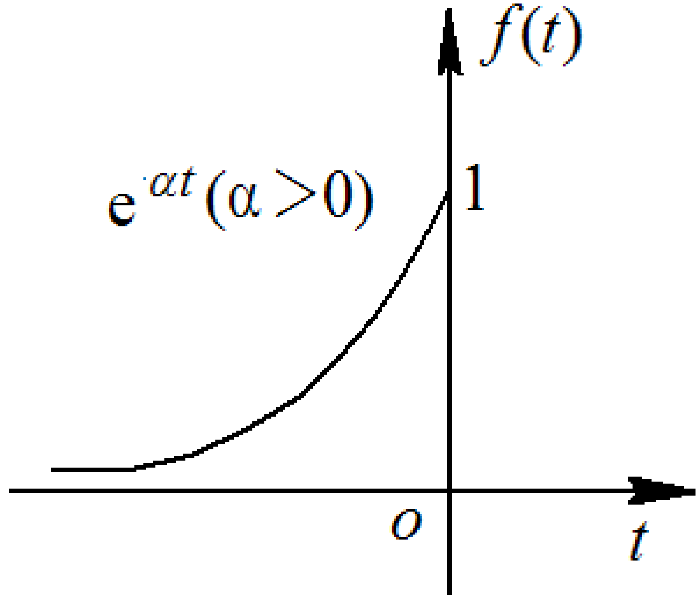
$$\varphi(\omega) = -\arctan(\frac{\omega}{\alpha})$$

典型信号傅立叶变换

❖ 单边指数信号二

$$f(t)=\begin{cases} e^{at} & t<0 \\ 0 & t>0 \end{cases} \quad (\alpha>0)$$

$$=e^{\alpha t}\varepsilon(-t)$$



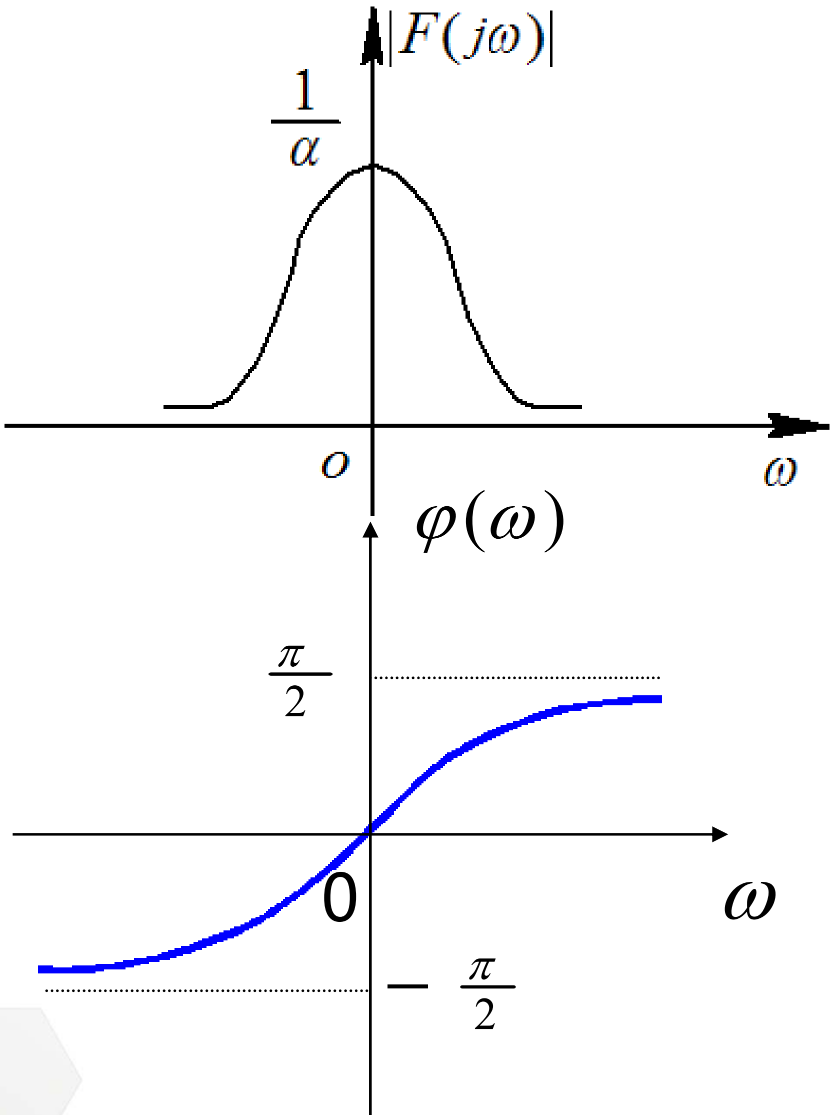
其傅立叶变换：

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha t}\cdot e^{-j\omega t}dt=\left.\frac{e^{(\alpha-j\omega)t}}{\alpha-j\omega}\right|_{-\infty}^{0}$$

$$=\frac{1}{\alpha-j\omega}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\cdot e^{j\arctan\frac{\omega}{\alpha}}$$

典型信号傅立叶变换

❖单边指数信号二



$$\boxed{e^{\alpha t}\varepsilon(-t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha - j\omega}}$$

幅度频谱：

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

相位频谱：

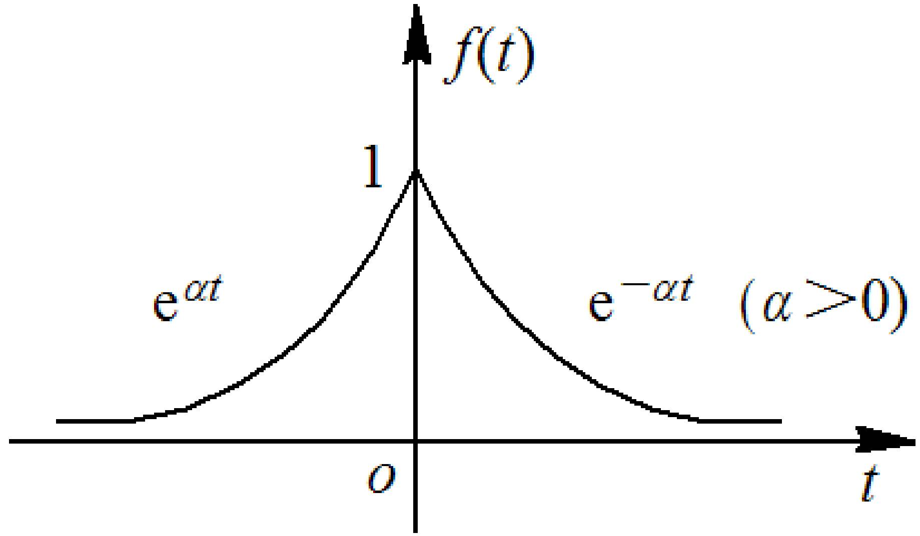
$$\varphi(\omega) = \arctan(\frac{\omega}{\alpha})$$

典型信号傅立叶变换

❖ 双边指数信号一

$$f(t)=\begin{cases} e^{-at} & t>0 \\ e^{at} & t<0 \end{cases}$$

$$=e^{-\alpha|t|}$$



其傅立叶变换：

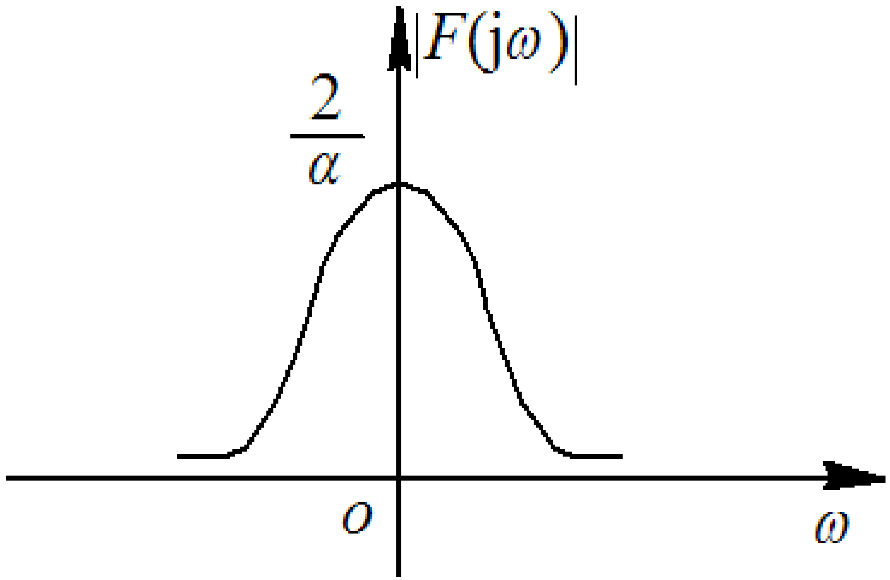
$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\cdot e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{\alpha-j\omega}+\frac{1}{\alpha+j\omega}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

典型信号傅立叶变换

❖ 双边指数信号—

$$\boxed{e^{-\alpha|t|}(\alpha>0)\leftrightarrow\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}}$$



幅度频谱：

$$|F(j\omega)|=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

相位频谱：

$$\varphi(\omega)=0$$

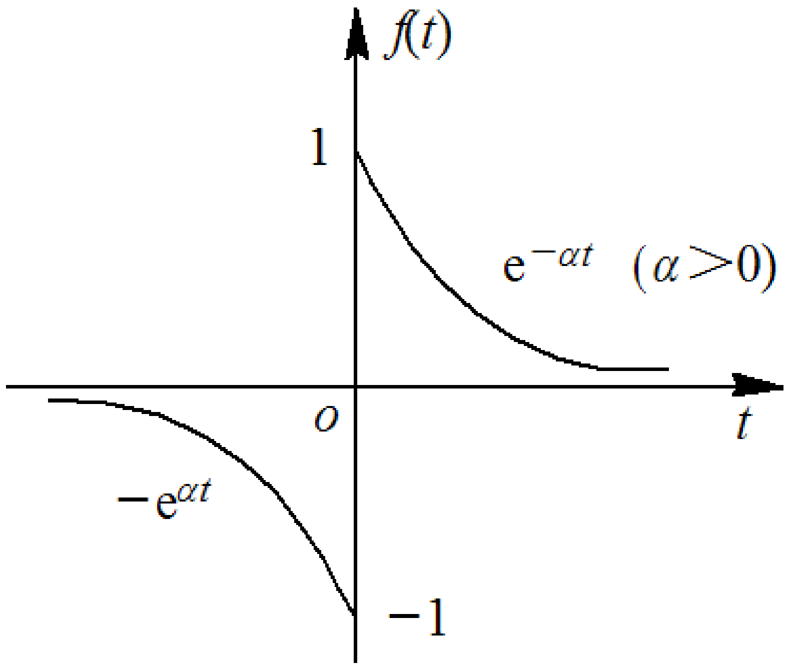
由于$f(t)$ 为偶函数，所以 $F(j\omega)$ 为 ω的实函数，且为ω 的偶函数。

典型信号傅立叶变换

❖ 双边指数信号二

$$f(t)=\begin{cases} e^{-at} & t>0 \\ -e^{at} & t<0 \end{cases}$$

$$=e^{-\alpha t}\varepsilon(t)-e^{\alpha t}\varepsilon(-t)$$



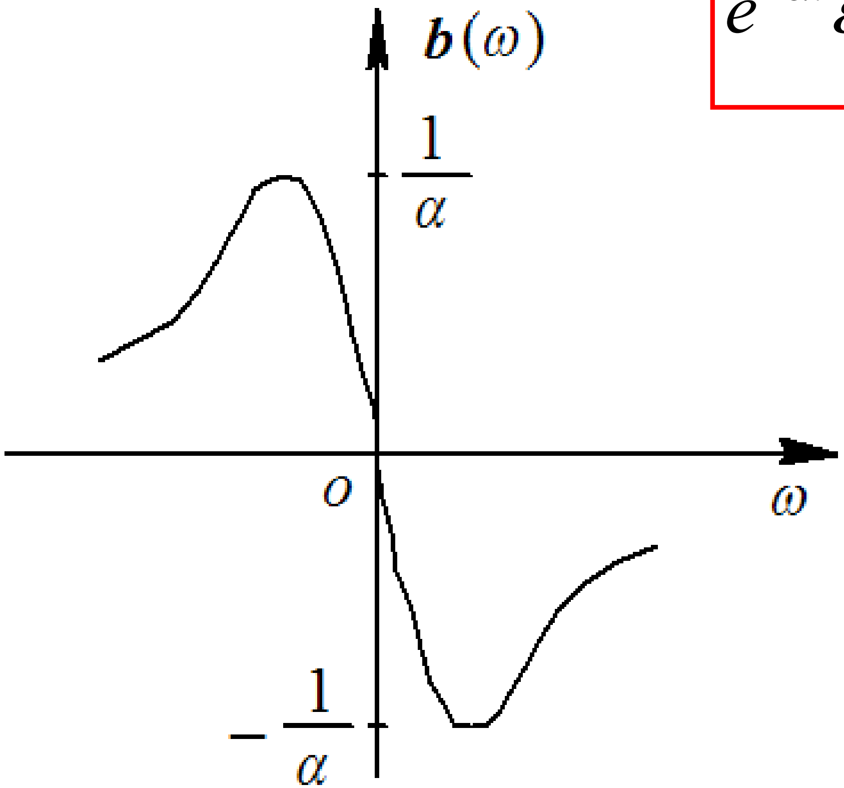
其傅立叶变换：

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=-\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha t}\cdot e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$=-\frac{1}{\alpha-j\omega}+\frac{1}{\alpha+j\omega}=j\frac{-2\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

典型信号傅立叶变换

❖双边指数信号二



$$\boxed{e^{-\alpha t}\varepsilon(t)-e^{\alpha t}\varepsilon(-t)\leftrightarrow j\frac{-2\omega}{\alpha^2+\omega^2}}$$

$$=jb(\omega)$$

幅度频谱:

$$|F(j\omega)|=\frac{2\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

相位频谱：

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2} & \omega>0\\ +\frac{\pi}{2} & \omega<0\end{cases}$$

由于 $f(t)$ 为奇函数，所以 $F(j\omega)$为 ω 的纯虚函数，且为 ω的奇函数。

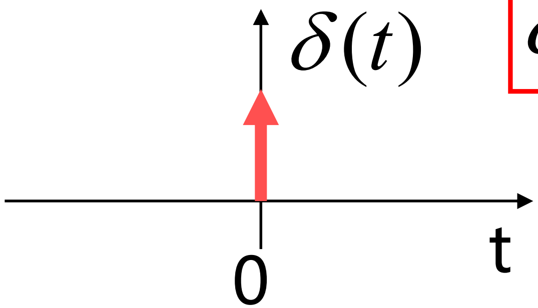
典型信号傅立叶变换

❖ 冲激函数

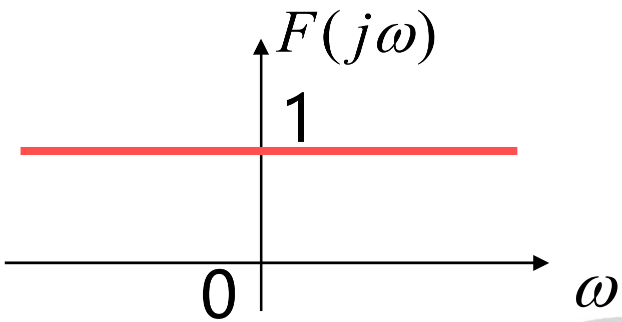
由傅立叶变换的定义式有：

取样性质

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$$



$$\boxed{\delta(t)\leftrightarrow 1}$$



物理意义：在时域中变化异常剧烈的冲激函数包含幅度相等的所有频率分量，这种频谱常称为“均匀谱”或“白色谱”。

典型信号傅立叶变换

直流信号1

直流信号1可表示为：$f(t)=1 \quad -\infty<t<\infty$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{-j\omega t}dt$$ （不满足绝对可积条件）

因为$\delta(t)\leftrightarrow 1$，由傅立叶逆变换的定义式有：

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{j\omega t}d\omega$$

令 $t=\omega$，则$\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{jt\omega}dt$

由于冲激信号是偶函数，所以

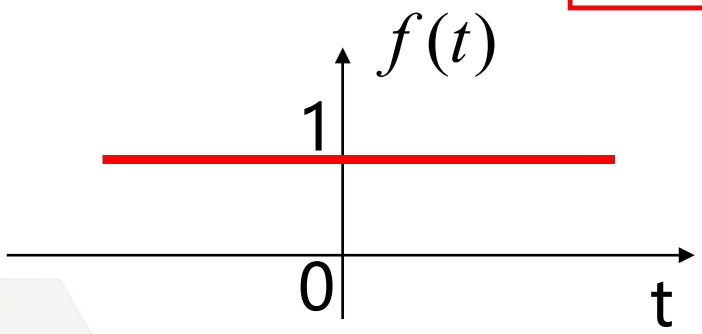
典型信号傅立叶变换

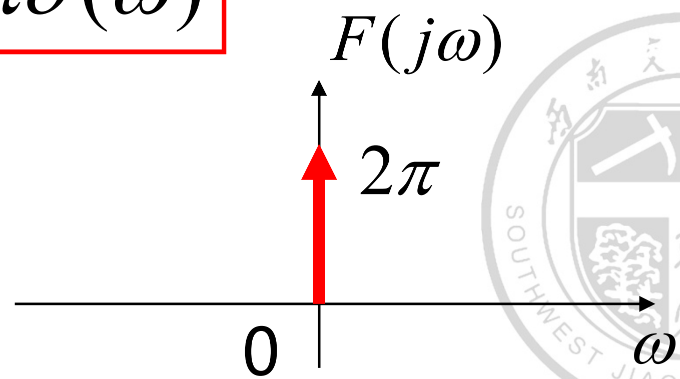
$$\delta(\omega)=\delta(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{-j\omega t}dt$$

即 $$\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(\omega)$$

故 $$F(j\omega)=2\pi\delta(\omega)$$

$$\boxed{1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$$





典型信号傅立叶变换

编　号	$f(t)$	$F(\mathrm{j}\omega)$
1	$g_\tau(t)$	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
2	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau t}{2}\right)$	$2\pi g_\tau(\omega)$
3	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)$，$\alpha>0$	$\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$
4	$t\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)$，$\alpha>0$	$\frac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2}$
5	$\mathrm{e}^{-\alpha\|t\|}$，$\alpha>0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
6	$\delta(t)$	1
7	1	$2\pi\delta(\omega)$
8	$\delta(t-t_0)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$
9	$\cos\omega_0 t$	$\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$
10	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{\mathrm{j}}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$

典型信号傅立叶变换

编　号	$f(t)$	$F(\mathrm{j}\omega)$
11	$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$
12	$\mathrm{Sgn}(t)$	$\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$, $F(0)=0$
13	$\dfrac{1}{\pi t}$	$-\mathrm{j}\,\mathrm{Sgn}(\omega)$
14	$\delta_T(t)$	$\Omega\delta_\Omega(\omega)$
15	$\sum\limits_{n=\infty}^{\infty} F_n e^{\mathrm{j}n\Omega t}$	$2\pi\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} F_n\delta(\omega-n\Omega)$
16	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\varepsilon(t)$, $a>0$	$\dfrac{1}{(a+\mathrm{j}\omega)^n}$

傅立叶变换的性质

傅立叶变换的性质

一．线性性质

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$，$f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$ ，

且设 a_1, a_2 **为常数 ，则有**

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$$

例.利用傅里叶变换的性质求单位阶跃信号的频谱函数。

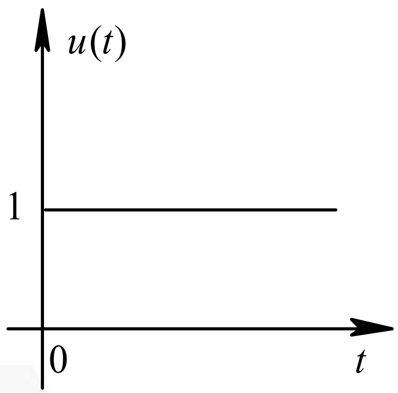
解：因为 $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$ **由线性性质**

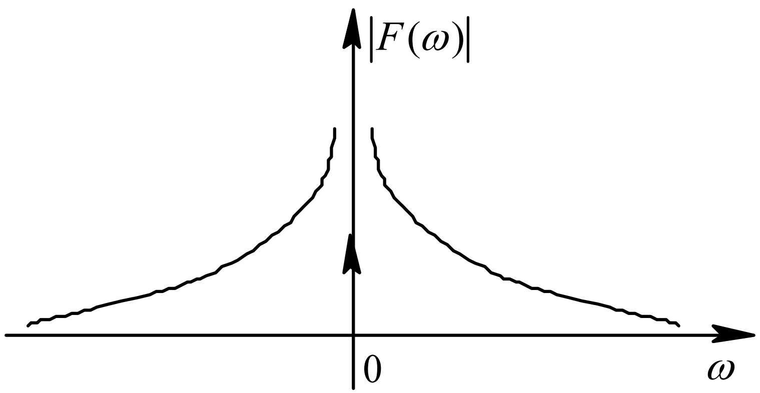
$$F(j\omega) = \frac{1}{2}F[1] + \frac{1}{2}F[\operatorname{sgn}(t)] = \frac{1}{2}2\pi\delta(\omega) + \frac{1}{2}\frac{2}{j\omega}$$

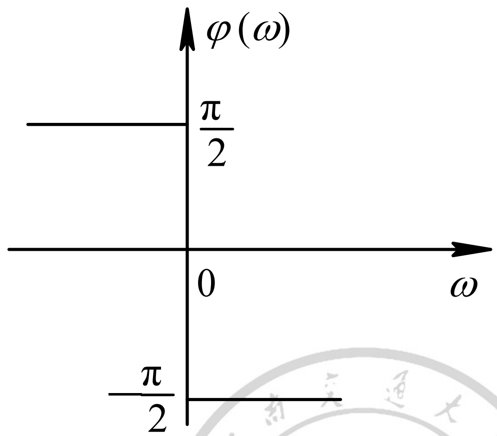
$$= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

傅立叶变换的性质

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$







傅立叶变换的性质

二．时移特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，**则** $f(t - t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

式中 t_0为实常数(可正可负)

若 $F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$ **则** $f(t - t_0) \leftrightarrow |F(j\omega)|e^{j[\phi(\omega) - \omega t_0]}$

幅度频谱无变化，只影响相位频谱

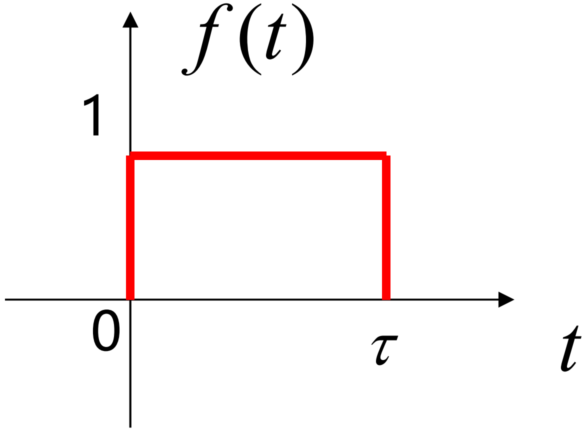
证明： $F[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t}dt$

令 $x = t - t_0$ $\quad = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-j\omega(x+t_0)}dx$

$$= e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-j\omega x}dx \ = F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

傅立叶变换的性质

例：求图示函数的频谱。



解： $f(t) = g_\tau(t - \frac{\tau}{2})$

$$g_\tau(t) \Longleftrightarrow \tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

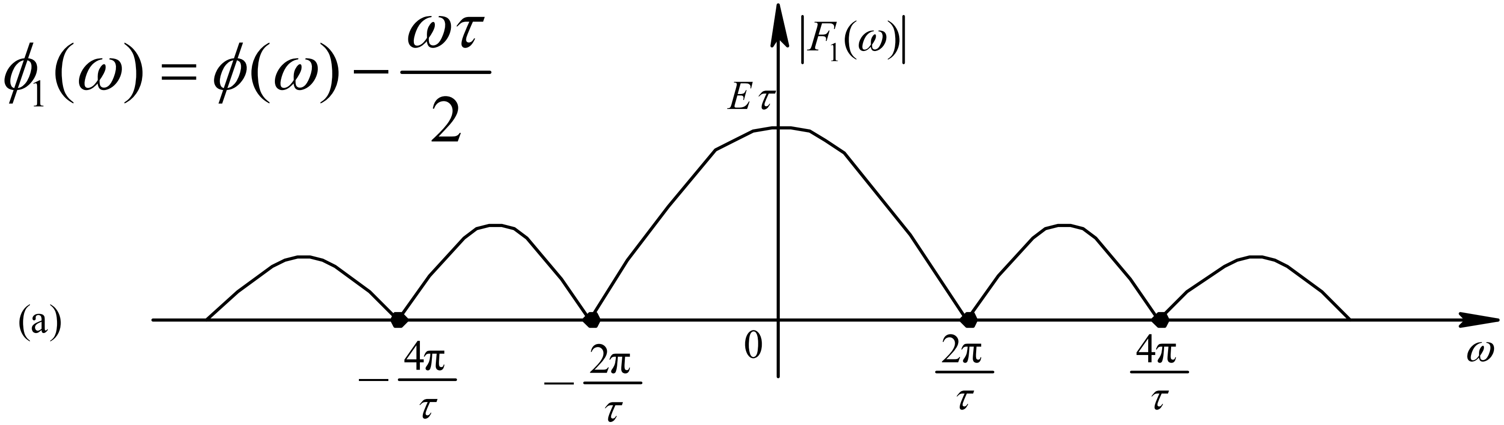
由时移特性 $f(t - t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

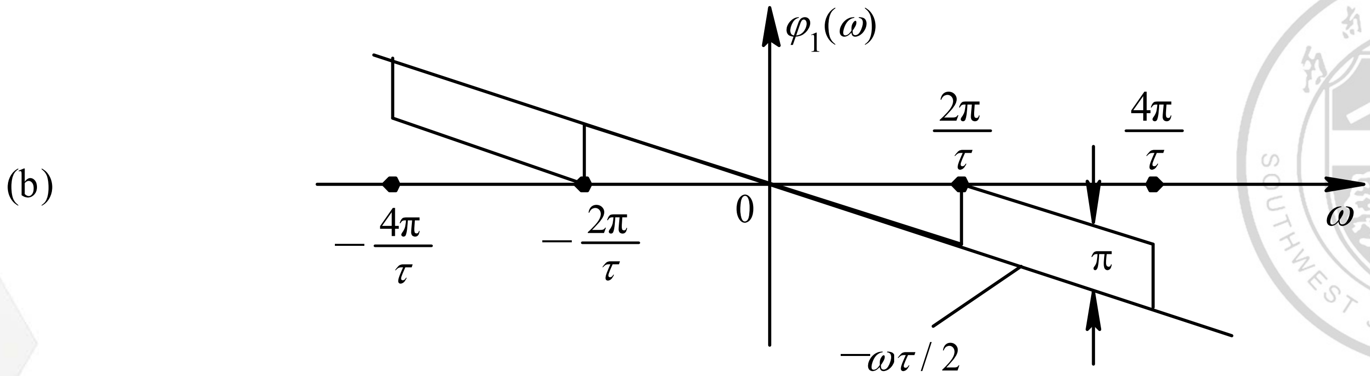
$$\therefore \quad f(t) = g_\tau(t - \frac{\tau}{2}) \Longleftrightarrow \tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$

$$f(t) = g_\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \iff \tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$

$$|F_1(\omega)| = |F(\omega)| = \tau \left| Sa\frac{\omega\tau}{2} \right|$$

$$\phi_1(\omega) = \phi(\omega) - \frac{\omega\tau}{2}$$





傅立叶变换的性质

三．频移特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$， **且 ω_0 为实常数，则**

$$\left.\begin{aligned} f(t)e^{j\omega_0 t} &\leftrightarrow F[j(\omega-\omega_0)] \\ f(t)e^{-j\omega_0 t} &\leftrightarrow F[j(\omega+\omega_0)] \end{aligned}\right\}$$

注意 ω_0 的 $\pm$号

证明： $\mathcal{F}\left[f(t)e^{j\omega_0 t}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)e^{j\omega_0 t}\right]e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}\,\mathrm{d}t$$

$$= F[j(\omega-\omega_0)]$$

傅立叶变换的性质

频移特性表明信号在时域中与复因子相乘， 则在频域中将使整个频谱搬移 ω_0。

应用： 通信中调制与解调，频分复用

实际调制解调的载波(本振)信号是正、 余弦信号， 借助欧拉公式正、 余弦信号可以分别表示为

推论： 调制定理

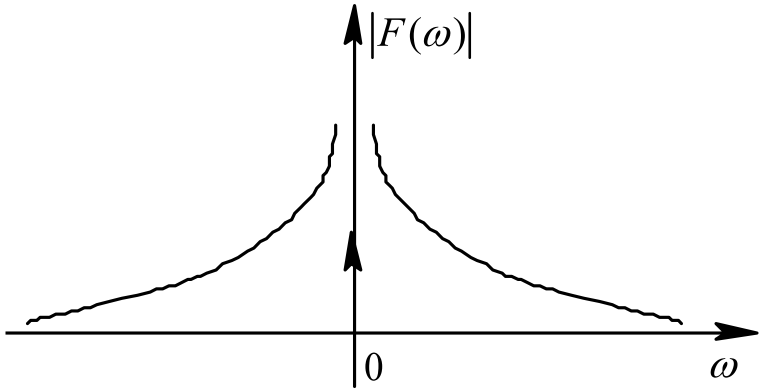
$$\left.\begin{aligned} f(t)\cos\omega_0 t &\leftrightarrow \frac{1}{2}\{F[j(\omega-\omega_0)]+F[j(\omega+\omega_0)]\} \\ f(t)\sin\omega_0 t &\leftrightarrow \frac{1}{2j}\{F[j(\omega-\omega_0)]-F[j(\omega+\omega_0)]\} \end{aligned}\right\}$$

傅立叶变换的性质

例: 求$f(t)=\cos\omega_0 t u(t)$的频谱函数。

解 已知

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$



利用调频性

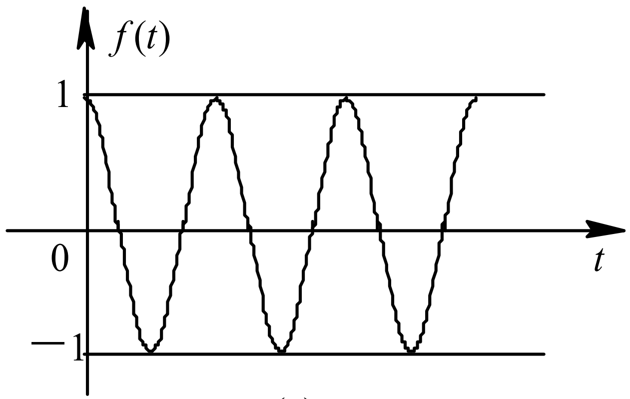
$$\cos\omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$+\frac{1}{2j(\omega+\omega_0)}+\frac{1}{2j(\omega-\omega_0)}$$

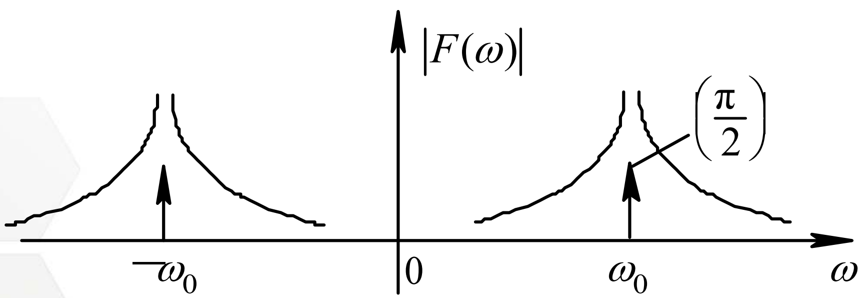
$$=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

傅立叶变换的性质

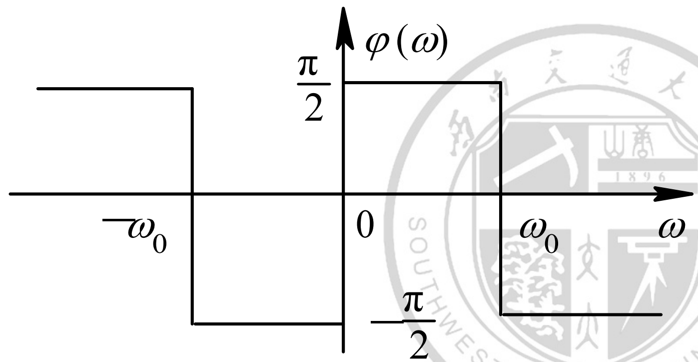
$$\cos\omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$



(a)

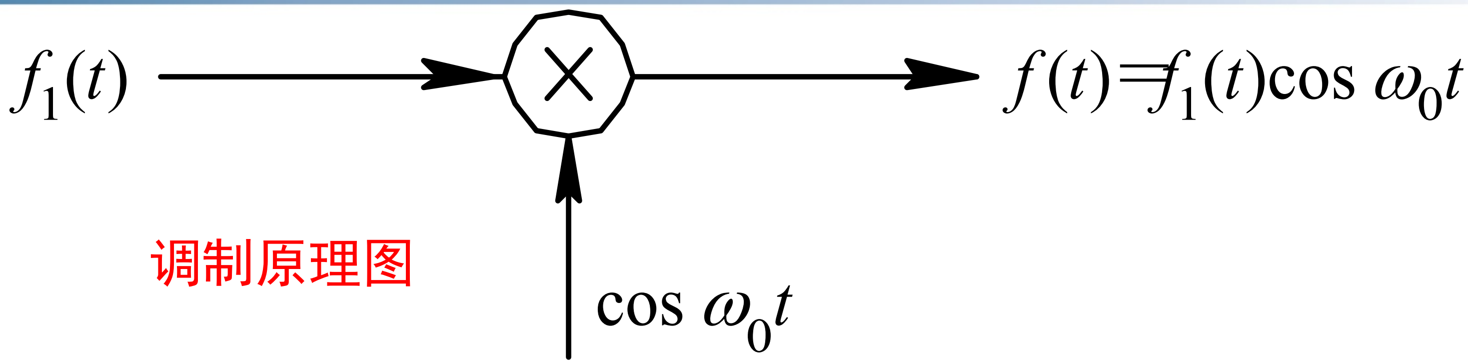


(b)



(c)

傅立叶变换的性质



调制原理图

在接收端将已调信号$f(t)$恢复为原信号$f_1(t)$的过程为解调。 一种同步解调的原理:

$$f_0(t)=[f_1(t)\cos(\omega_0 t)]\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}[f_1(t)+f_1(t)\cos(2\omega_0 t)]$$

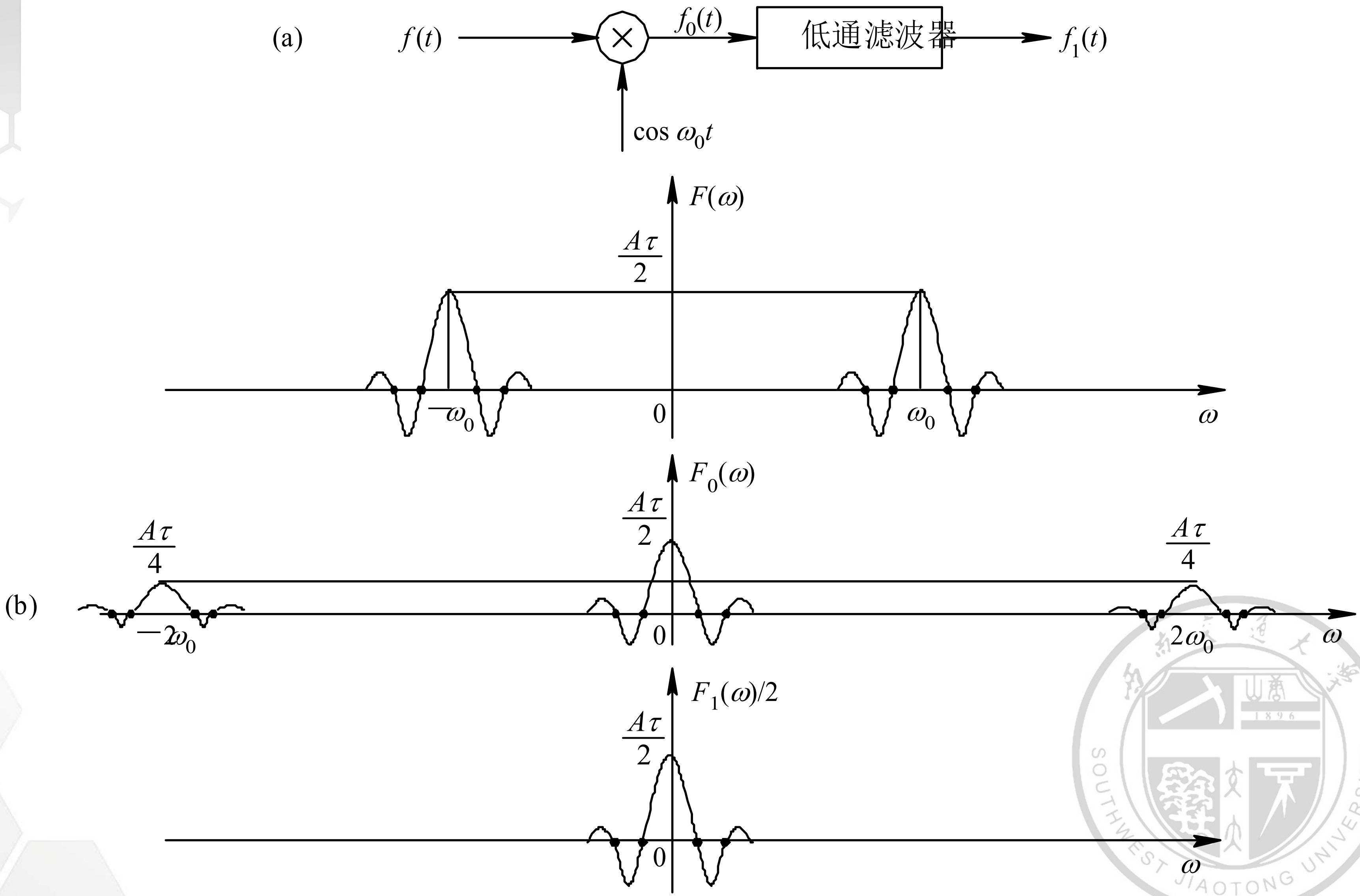
利用线性与频移特性， 对应的频谱函数为

$$F(\omega_0)=\frac{1}{2}F_1(\omega)+\frac{1}{4}F_1(\omega-2\omega_0)+\frac{1}{4}F_1(\omega+2\omega_0)$$

利用一个低通滤波器，滤除$2\omega_0$附近的频率分量,即可提取$f_1(t)$， 实现解调

$\cos\omega_0 t$为接收端的本地载波信号（通常称本振信号）， 与发送端的载波信号同频同相。

傅立叶变换的性质


(a)
f(t)
f0(t)
低通滤波器
f1(t)
cos ω0t
F(ω)
Aτ/2
−ω0
0
ω0
ω
F0(ω)
Aτ/2
Aτ/4
Aτ/4
(b)
−2ω0
0
2ω0
ω
F1(ω)/2
Aτ/2
0
ω

傅立叶变换的性质

四．尺度变换性质

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$， **a**为非零实常数，

则 $f(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{|a|}F(j\dfrac{\omega}{a})$

证明： 当a>0时， 令at=x, 则 $dt = \dfrac{1}{a}dx, t = \dfrac{x}{a}$,代入上式

$$F[f(at)] = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\frac{\omega}{a}x}dx = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

当a<0时, 令at=x, 则dt=- 1/a dx，代入上式

$$F[f(at)] = \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} f(x)e^{-j\frac{\omega}{a}x}dx$$ (再令x=t且积分上、下限互换)

$$= \frac{-1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\frac{\omega}{a}t}dt = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

傅立叶变换的性质

综合$a>0$、 $a<0$两种情况，尺度变换特性表示为

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

意义：

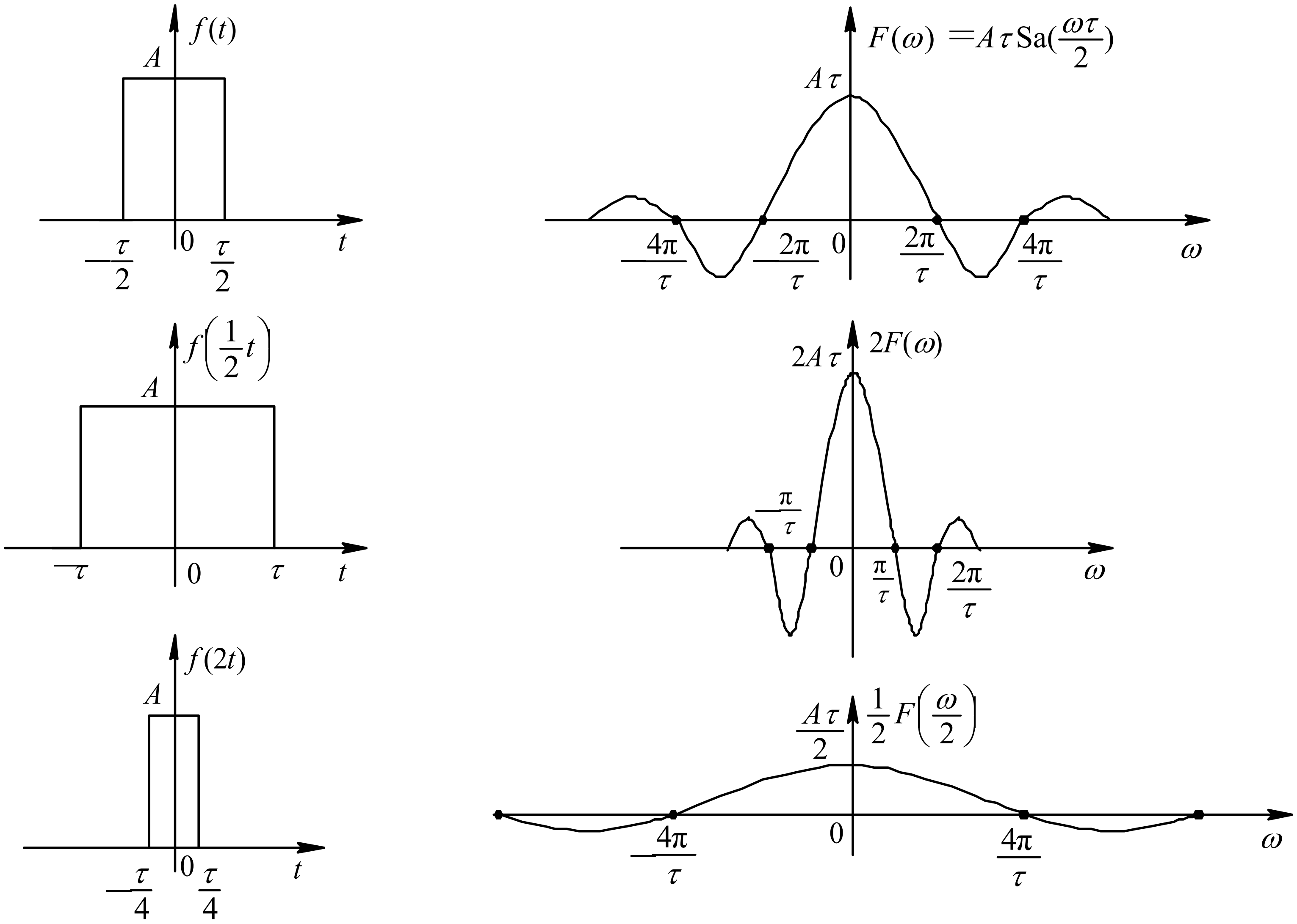
(1) $0 < a < 1$ 时域扩展，频域压缩，频谱幅度增大；

(2) $a > 1$ 时域压缩，频域扩展 a 倍，频谱幅度减小；

(3) $a=-1 \quad f(t) \to f(-t),\ F(j\omega) \to F(-j\omega)$

信号的脉宽与频宽成反比

傅立叶变换的性质



f(t)
A
−τ/2
0
τ/2
t
F(ω) =AτSa(ωτ/2)
Aτ
−4π/τ
−2π/τ
0
2π/τ
4π/τ
ω
f(1/2 t)
A
−τ
0
τ
t
2F(ω)
2Aτ
−π/τ
0
π/τ
2π/τ
ω
f(2t)
A
−τ/4
0
τ/4
t
1/2 F(ω/2)
Aτ/2
−4π/τ
0
4π/τ
ω

傅立叶变换的性质

例：已知 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega) = E\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$，求 $f(2t-5)$ 的频谱密度函数

方法一：先尺度变换，再时延

$\because a=2,\quad \therefore f(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(j\frac{\omega}{2}\right) = \frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$

$\because b=-5$，对t时移$\frac{5}{2}$（向右）$\therefore f(2t-5) \leftrightarrow \frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)e^{-j\frac{5}{2}\omega}$

方法二：先时延再尺度变换

对t时移5（向右）：$f(t-5) \leftrightarrow E\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega 5}$

对所有的 t 压缩2：$f(2t-5) \leftrightarrow \frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)e^{-j\frac{5}{2}\omega}$

傅立叶变换的性质

五．对称性 时域与频域的对称性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$， 则 $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

证明： 因为 $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$$f(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{-j\omega x}d\omega$$

将上式中 x 换成 ω， ω 换成 t ，得：

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(jt)e^{-jt\omega}dt$$

$$\therefore \quad 2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jt)e^{-j\omega t}dt = F[F(jt)]$$

$$F(jt) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

傅立叶变换的性质

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则 $F(jt) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

若f(t)为偶函数，即 $f(-t) = f(t)$，则 $f(-\omega) = f(\omega)$

$$F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$$

意义：

若 $F(jt)$ 形状与 $F(j\omega)$ 相同 $(\omega \to t)$，

则 $F(jt)$ 的频谱函数形状与 $f(t)$ 形状相同 $(t \to \omega)$

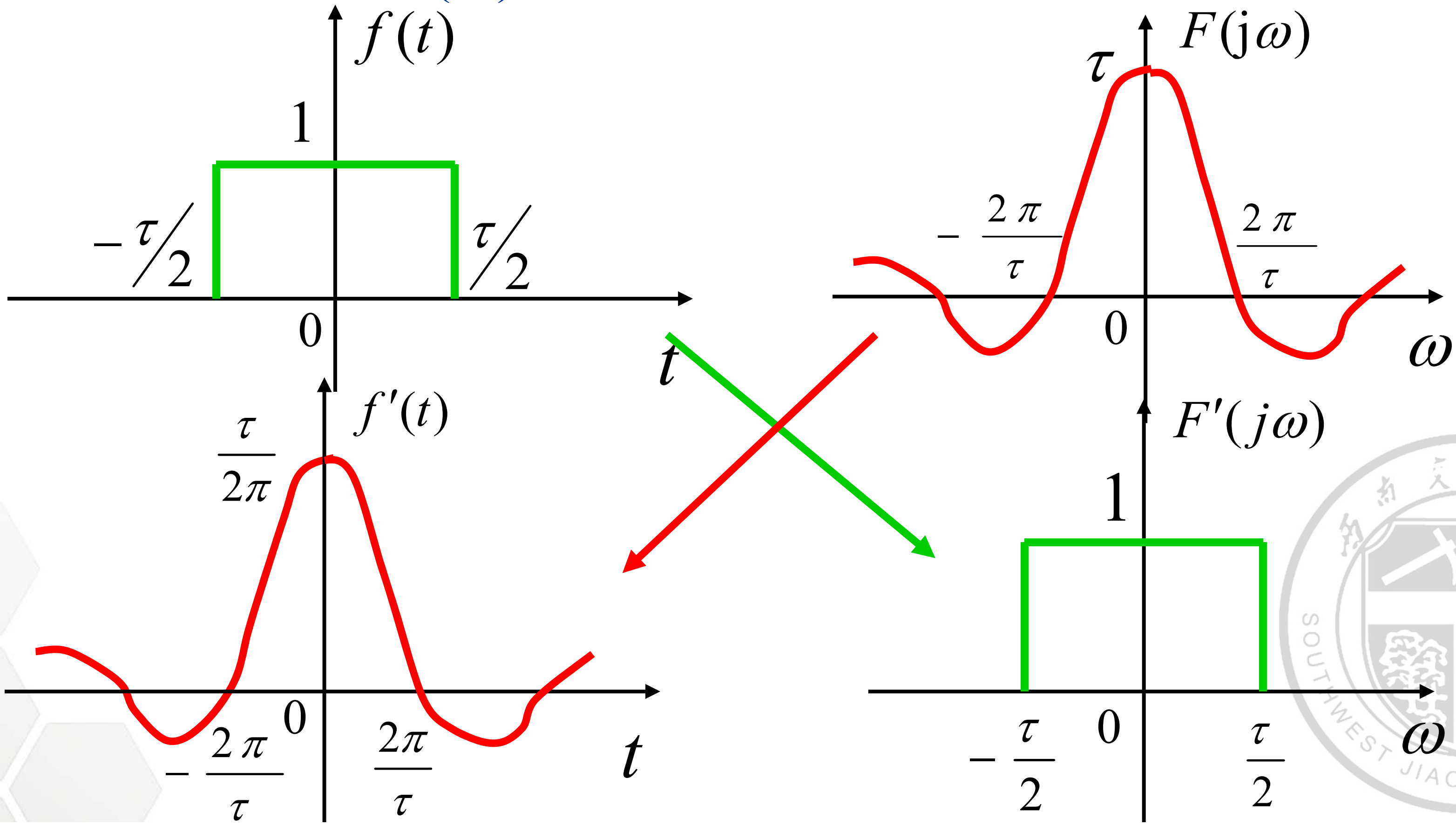
幅度差 2π。

傅立叶变换的性质

例： 由 $f(t)=g_\tau(t) \Leftrightarrow F(j\omega)=\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 求 $f'(t)=\tau Sa\left(\frac{\omega t}{2}\right)$

解： $F(jt)=\tau Sa\left(\frac{t\tau}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)=2\pi g_\tau(\omega)$

$$\therefore \quad \frac{\tau}{2\pi} Sa\left(\frac{t\tau}{2}\right) \Leftrightarrow g_\tau(\omega)$$

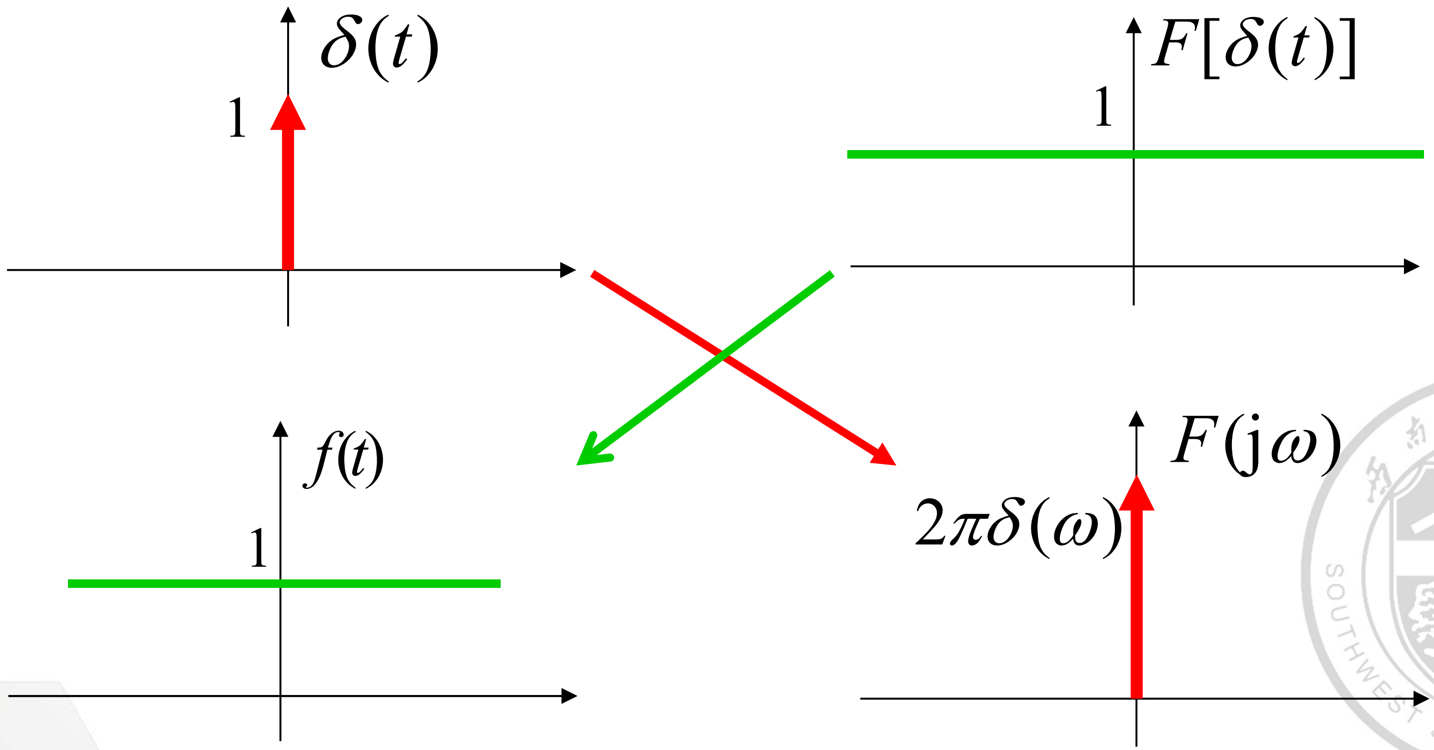


傅立叶变换的性质

若 $f(t)$ 为偶函数，则时域和频域完全对称

例：$f(t)=\delta(t) \quad \leftrightarrow \quad F(j\omega)=1$

则 $F(jt)=1 \quad \leftrightarrow \quad 2\pi f(\omega)=2\pi\delta(\omega)$



傅立叶变换的性质

六．时域微分性质

$$\boxed{\text{若}\quad f(t) \leftrightarrow F(j\omega)\text{，则}\quad f'(t) \leftrightarrow j\omega F(j\omega)}$$

证明：　因为 $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}\cdot j\omega d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [j\omega F(j\omega)]e^{j\omega t}d\omega$$

$$\therefore \quad f'(t) \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$$

推论：若对$f(t)$求导**n**次 $\dfrac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$

傅立叶变换的性质

七．频域微分性质

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则 $tf(t) \leftrightarrow j\dfrac{dF(j\omega)}{d\omega}$

或 $-jtf(t) \leftrightarrow \dfrac{dF(j\omega)}{d\omega} = F'(j\omega)$

证明：因为 $F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-j\omega t}dt$

$$F'(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\cdot(-jt)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(-jt)f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\therefore \quad -jtf(\mathrm{t}) \leftrightarrow F'(\mathrm{j}\omega)$$

推论：$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(j\omega)$

傅立叶变换的性质

例： 求$f(t)=te^{-at}u(t)$的频谱函数$F(\omega)$。

解： 利用

$$e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{a+j\omega},\text{则}$$

$$te^{-at}u(t)\leftrightarrow F(\omega)=j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{a+j\omega}\right)$$

$$=j\frac{-j}{(a+j\omega)^2}=\frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

傅立叶变换的性质

八. 时域卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$，$f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$，则

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

时域的卷积对应于频域频谱密度函数的乘积

本性质是把时域分析方法与频域分析方法联系起来的重要桥梁

若已知输入 $f(t)$ 及系统的单位冲激响应 $h(t)$，则由输入 $f(t)$ 引起的零状态响应为：

时域分析 $$y_f(t) = h(t) * f(t)$$

频域分析 $$F[y_f(t)] = H(j\omega) \cdot F(j\omega)$$

傅立叶变换的性质

例： **(1)** $f(\mathrm{t}) = \delta(\mathrm{t}) \quad \leftrightarrow \quad F(\mathrm{j}\omega) = 1$

则 $f'(\mathrm{t}) * \delta(\mathrm{t}) \quad \leftrightarrow \quad F'(\mathrm{j}\omega) \cdot 1 = F'(\mathrm{j}\omega)$

$\therefore \quad f'(\mathrm{t}) * \delta(\mathrm{t}) = f'(\mathrm{t})$

(2) $f(\mathrm{t}) * \delta(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0) \quad \leftrightarrow \quad F(\mathrm{j}\omega) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega \mathrm{t}_0}$ 时移特性

而 $F^{-1}[F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega \mathrm{t}_0}] = f(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0)$ 时移特性

$\therefore \quad f(\mathrm{t}) * \delta(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0) = f(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0)$

(3) $f(\mathrm{t} - \mathrm{t}_1) * \delta(\mathrm{t} - \mathrm{t}_2) \leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega \mathrm{t}_1} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega \mathrm{t}_2} = F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(\mathrm{t}_1 + \mathrm{t}_2)}$

而 $F^{-1}[F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(\mathrm{t}_1 + \mathrm{t}_2)}] = f(\mathrm{t} - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2)$

$\therefore \quad f(\mathrm{t} - \mathrm{t}_1) * \delta(\mathrm{t} - \mathrm{t}_2) = f(\mathrm{t} - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2)$

傅立叶变换的性质

九. 频域卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$，$f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$，则

$$f_1(\mathrm{t}) \cdot f_2(\mathrm{t}) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\mathrm{j}\omega) * F_2(\mathrm{j}\omega)$$

时间函数的乘积 $\leftrightarrow$ 各频谱函数卷积的 $\mathbf{1/2}\pi$ 倍。

傅立叶变换的性质

十. 时域积分

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，　则

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \leftrightarrow \frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

证明：

因为 $f(\mathrm{t}) * u(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(\mathrm{t}-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = f(\mathrm{t}) * u(\mathrm{t}) \leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)\cdot[\frac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega)]$$

$$= \frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

傅立叶变换的性质

例：利用时域积分性质求：

求单位阶跃函数的傅里叶变换

解：已知 $\boldsymbol{u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,\mathrm{d}\,t}$

根据时域积分

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \leftrightarrow \frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$$

$$\boldsymbol{\delta(t)\leftrightarrow 1}$$

则$\boldsymbol{u(t)\leftrightarrow \frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\cdot 1=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)}$

傅立叶变换的性质

十一. 频域积分

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$， 则

$$\frac{f(\mathrm{t})}{-\mathrm{jt}} + \pi f(0)\delta(\mathrm{t}) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{d}\Omega$$

十二. 帕塞瓦定理（ **Paseval** 定理）

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

傅立叶变换的性质

序号	名称	时域	频域
1	线性	$af_1(t)+bf_2(t)$	$aF_1(j\omega)+bF_2(j\omega)$
2	延时	$f(t-t_0)$	$F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
3	尺度	$f(at)$	$\frac{1}{\|a\|}F(\omega/a)$
4	频移性	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(j\omega-j\omega_0)$
5	时域微分	$\frac{df(t)}{dt}$ $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$j\omega F(j\omega)$ $(j\omega)^n F(j\omega)$
6	时域积分	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(j\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$
7	频域微分	$tf(t)$ $t^n f(t)$	$j\frac{dF(\omega)}{d\omega}$ $j^n\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
8	对称性	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
9	时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(j\omega)F_2(j\omega)$
10	频域卷积	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_2(j\omega)$

系统响应的频域分析法

系统响应的频域分析法

系统的频响函数

设激励是$f(t)$，系统的单位冲激响应为$h(t)$，若系统的初始状态为零， 则系统的响应为

$$y(t)=f(t)*h(t)$$

两边取傅里叶变换， 由卷积定理可得

$$Y(j\omega)=F(j\omega)H(j\omega)$$

- $H(j\omega)$是系统单位冲激响应$h(t)$的傅里叶变换。
- 系统单位冲激响应$h(t)$表征的是系统时域特性，
- $H(j\omega)$表征的是系统频域特性。称做系统频率响应函数， 简称频响函数或系统函数。

系统响应的频域分析法

在一般n阶系统情况下，数学模型为

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t)$$

$$= b_m \frac{\mathrm{d}^m f(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} f(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}\, f(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 f(t)$$

令初始条件为零，两端取傅立叶变换，得

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k F(j\omega)$$

$$\therefore \quad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k}$$

$H(j\omega)$只与系统本身有关，与激励无关。

系统响应的频域分析法

例：已知系统方程为：$\frac{dy}{dt}+y(t)=f(t)$ 求传递函数 $H(j\omega)$

解：　令系统初始条件为零，两端取傅立叶变换，得

$$j\omega Y(j\omega)+Y(j\omega)=F(j\omega)$$

$$(j\omega+1)Y(j\omega)=F(j\omega)$$

$$\therefore\quad H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}=\frac{1}{j\omega+1}$$

系统响应的频域分析法

例：求二阶系统的传递函数，数学模型为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y(t)=\frac{df}{dt}+f(t)$$

解：　令初始条件为零，上式两端取傅立叶变换，得

$$[(j\omega)^2+3j\omega+2]Y(j\omega)=(j\omega+1)F(j\omega)$$

$$\therefore\quad H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}=\frac{j\omega+1}{(j\omega)^2+3j\omega+2}$$

系统响应的频域分析法

系统频域分析过程如下：

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega)$$

$$\downarrow$$

$$y_f(t) = F^{-1}[Y(j\omega)]$$

注意：

上述求得的系统响应是零状态响应，零输入响应要按时域方法求出。由 $H(p)$ 或 $H(j\omega)$ 求得极点，对应 $y_x(t)$ 的基本形式，再代入初始条件确定积分常数，求得 $y_x(t)$ 。

一般 $H(j\omega) = H(p)\big|_{p=j\omega}$

系统响应的频域分析法

例：已知输入 $f(t)=e^{-2t}u(t)$，系统传递函数为

$$H(j\omega)=\frac{j\omega}{(j\omega)^2+4j\omega+3}$$

，初始条件为零，求系统响应。

解： 因初始条件为零，系统只有零状态响应

$$F(j\omega)=F[f(t)]=\frac{1}{j\omega+2} \qquad H(j\omega)=\frac{j\omega}{(j\omega+3)(j\omega+1)}$$

$$Y(j\omega)=H(j\omega)F(j\omega)=\frac{j\omega}{(j\omega+3)(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

$$=\frac{-3/2}{j\omega+3}+\frac{2}{j\omega+2}+\frac{-1/2}{j\omega+1}$$

$$\therefore\ y_f(t)=F^{-1}[Y(j\omega)]=(-\frac{3}{2}e^{-3t}+2e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-t})u(t)$$

系统响应的频域分析法

四、系统分析频域方法的限制条件

1.输入 $f(t)$ 的傅立叶变换必须存在

2.系统频域传递函数 $H(j\omega)$ 必须存在

$$H(j\omega)=F[h(t)]$$

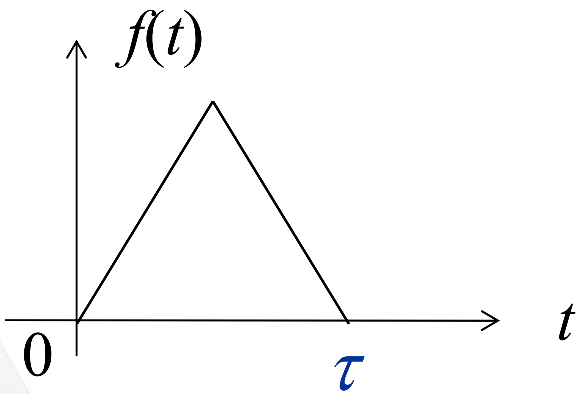
无失真传输

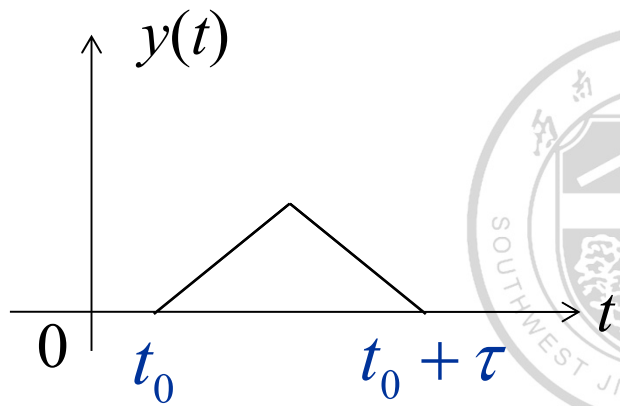
无失真传输

一．失真的概念

信号经系统传输，要受到系统函数 $H(j\omega)$ 的加权，输出波形发生了变化，与输入波形不同，则产生失真。

反之，若系统输出响应的波形与输入激励信号的波形完全相同，而只有幅度大小的不同和出现时间的延迟不同，则称不失真。





失真的分类：1）线性失真

◆**振幅失真：** 系统对信号中各频率分量的幅度产生不同程度的衰减（放大），使各频率分量之间的相对振幅关系发生了变化。

◆**相位失真：** 系统对信号中各频率分量产生的相移与频率不成正比，使各频率分量在时间轴上的相对位置发生了变化。这两种失真都不会使信号产生新的频率分量。

失真的分类：2）非线性失真

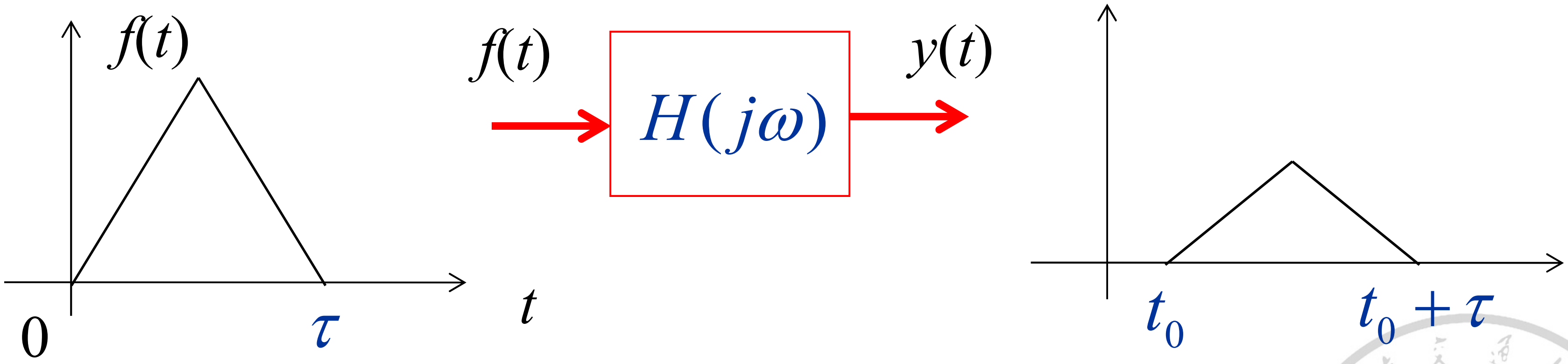
是由信号通过非线性系统产生的， 特点是信号通过系统后产生了新的频率分量。

- 对传输系统一般要求不失真
- 但在对信号处理时失真往往是必要的。
- 在通信、电子技术中失真的应用也十分广泛，如各类调制技术就是利用非线性系统， 产生所需要的频率分量；
- 滤波是提取所需要的频率分量， 衰减其余部分。

无失真传输

二、无失真传输条件

从时域来讲，系统输出的波形与输入激励信号的波形完全相同，而只有幅度大小可以不同，出现时间的延迟不同。



即要求信号 $f(t)$ 无失真传输，在时域上 $y(t)$ 与 $f(t)$ 之间应满足

$$y(t)=kf(t-t_0)$$

无失真传输

即要求信号 $f(t)$ 无失真传输，在时域上 $y(t)$ 与 $f(t)$ 之间应满足

$$y(t) = kf(t - t_0)$$

- 幅度乘以*k*倍
- 波形滞后 *t*0

式中k 和 t_0均为常数，与 t 无关

k为幅度增量，t_0为延迟时间

即输出是输入的k倍，时间上延迟了t_0时间

上式为系统无失真传输在时域中的条件

无失真传输

$$y(t) = kf(t - t_0)$$

从频域分析，对上式两边取傅立叶变换

$$Y(j\omega) = kF(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

由于 $$Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega)$$

$\therefore$ 无失真传输的系统函数为： $H(j\omega) = ke^{-j\omega t_0}$

上式为系统无失真传输在频域中的条件

即 $$|H(j\omega)| = k$$

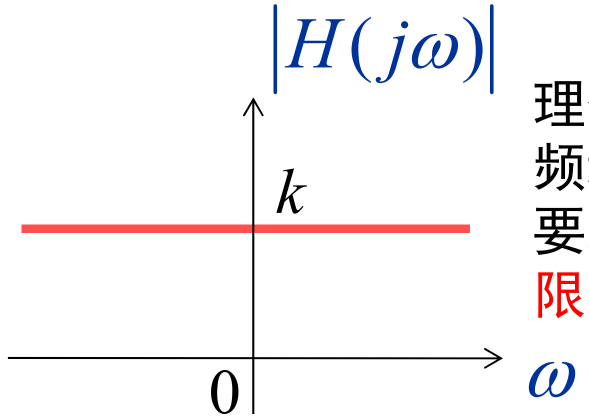
$$\theta(\omega) = -\omega t_0$$

无失真传输

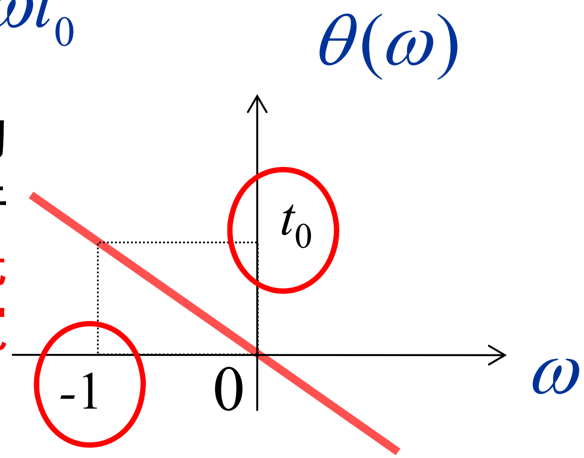
$$H(j\omega) = ke^{-j\omega t_0}$$

$$|H(j\omega)| = k$$

$$\theta(\omega) = -\omega t_0$$



理想传输系统的频域不失真条件要求系统具有无限宽的均匀带宽



因此无失真传输系统在频域应满足两个条件：

（1）对所有频率ω，系统传递函数的幅频特性应为常数k，即系统的通频带为无穷大；

（2）对所有频率ω，系统传递函数的相频特性应为过原点的直线。

无失真传输

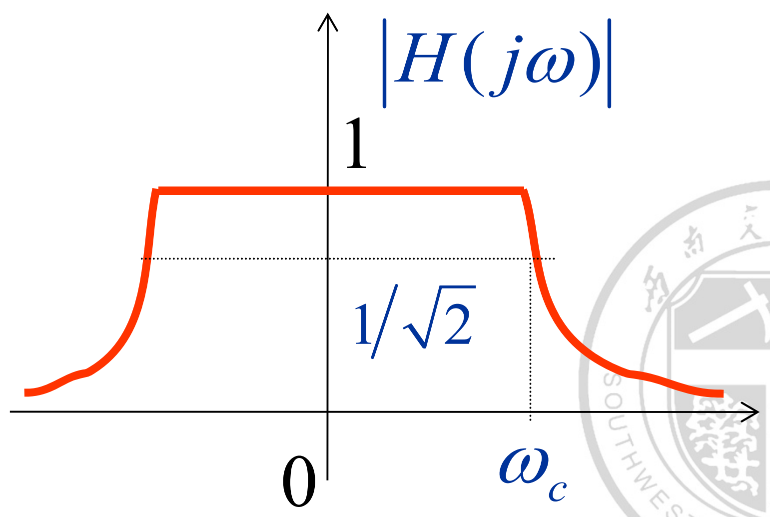
对 $H(j\omega)=ke^{-j\omega t_0}$ 两边取傅立叶反变换，

得系统的冲激响应

$$h(t)=k\delta(t-t_0)$$ --无失真传输时域条件

实际中的幅频特性

ω_c --截止频率



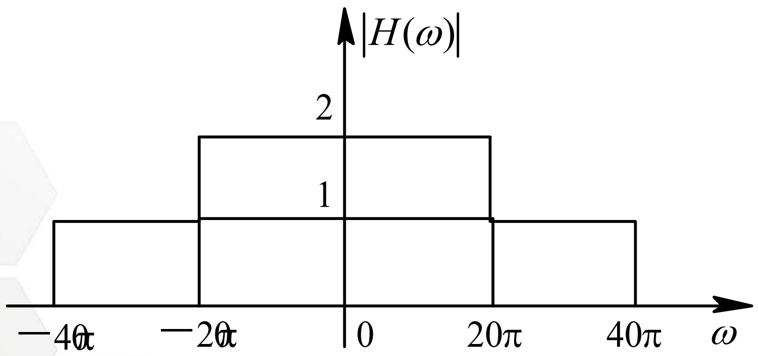
无失真传输

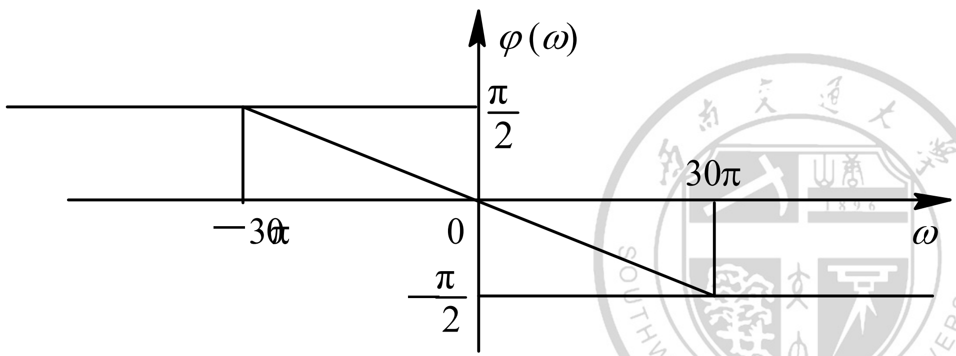
例：已知某系统的振幅、 相位特性如图所示，输入为$x(t)$， 输出为$y(t)$。 求：

(1) 给定输入 $x_1(t)=2\cos 10\pi t+\sin 12\pi t$ 及

$x_2(t)=2\cos 10\pi t+\sin 26\pi t$ 时的输出$y1(t)$、 $y2(t)$；

(2) $y_1(t)$、 $y_2(t)$有无失真？若有指出为何种失真。

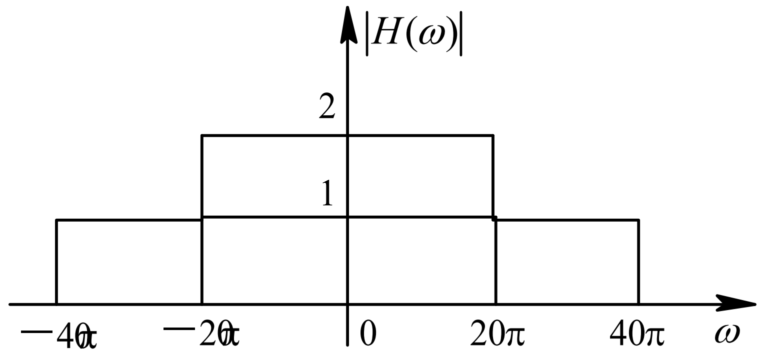




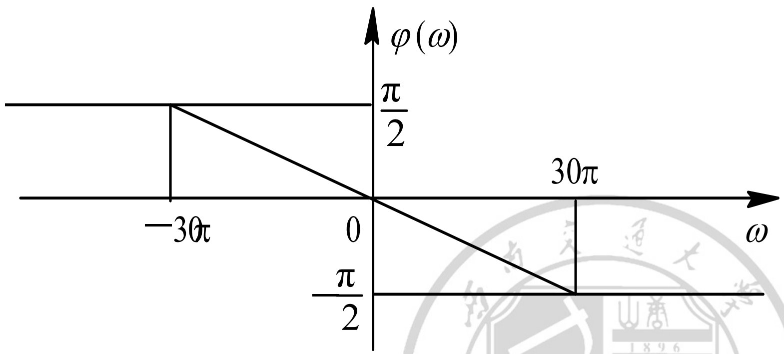
无失真传输

解：由图3.6-4可知该系统的振幅、 相位函数为

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 2 & |\omega| < 20\pi \\ 1 & 20\pi < |\omega| < 40\pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \omega > 20\pi \\ -\dfrac{\omega}{60} & |\omega| < 30\pi \\ \dfrac{\pi}{2} & \omega < -30\pi \end{cases}$$



由无失真传输条件， 可得输入信号在0≤ω≤20π或20≤ω≤30π范围内， 输出信号无失真。

无失真传输

利用频域分析方法可得激励为$x_1(t)$、 $x_2(t)$时的响应为

$$y_1(t) = 2[2\cos 10\pi(t-t_0) + \sin 12\pi(t-t_0)]$$

$$= 2\left[2\cos\left(10\pi t - \frac{10\pi}{60}\right) + \sin\left(12\pi t - \frac{12\pi}{60}\right)\right]$$

$$= 4\cos\left(10\pi t - \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin\left(12\pi t - \frac{\pi}{5}\right)$$

输入信号在$0 \le \omega \le 20\pi$范围内，输出信号无失真。

无失真传输

$$y_2(t)=4\cos\left(10\pi t-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(26\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\neq kx(t-t_0)$$

输入信号在$0\leq\omega\leq30\pi$范围内， 输出有振幅失真。

在实际应用时，虽然系统不满足全频域无失真传输要求， 但在一定的条件及范围内可以近似无失真传输或线性。 这表明系统可以具有分段无失真或线性， 这种方法在工程中经常用到。

理想低通滤波器

理想低通滤波器

理想低通滤波器：

让低于某频率的信号无失真通过，让高于某频率的信号截止的系统。

应用：

从电视机天线上所有的信号中， 选出所需要频道信号

- 经典滤波的概念往往与选频有关
- 现代滤波的概念更加广泛， 凡是信号频谱经过系统后发生了改变， 都认为是滤波。

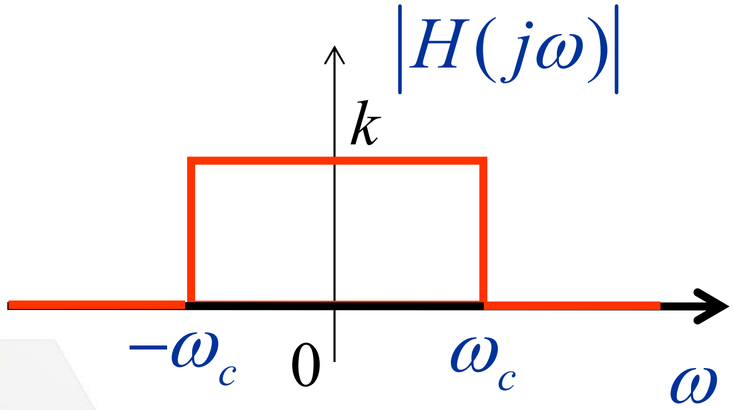
理想低通滤波器

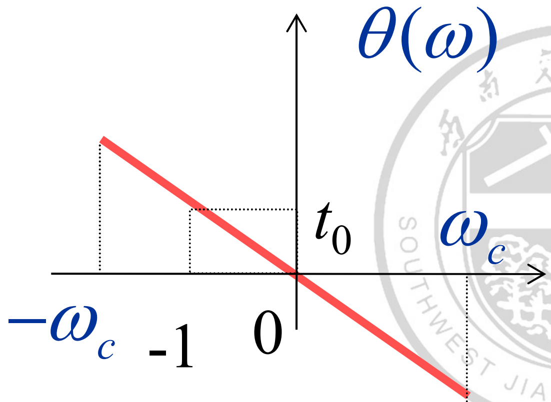
一. 理想低通的频率特性

系统函数为：

$$H(j\omega)=\begin{cases} ke^{-j\omega t_0} & |\omega|\le\omega_c \quad \text{通带} \\ 0 & |\omega|>\omega_c \quad \text{阻带} \end{cases}$$

ω_c -截止频率　　　　t_0 -延迟时间





理想低通滤波器

二．理想低通的冲激响应

$$H(j\omega)=\begin{cases}ke^{-j\omega t_0} & |\omega|\le\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

单位冲激响应为：

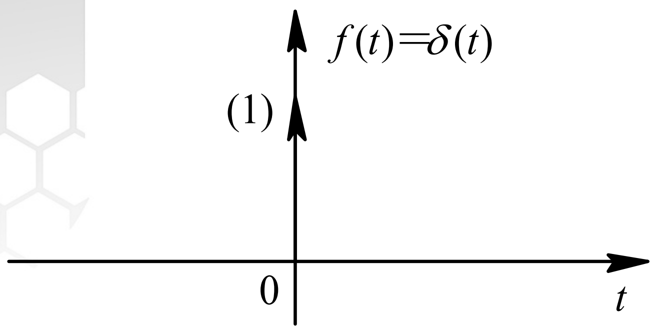
$$h(t)=F^{-1}[H(j\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

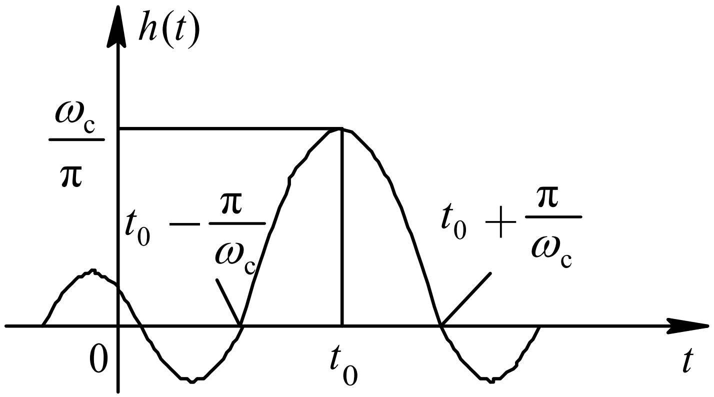
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}ke^{-j\omega t_0}\cdot e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}ke^{j\omega(t-t_0)}d\omega$$

$$=\frac{k}{2\pi}\frac{1}{j(t-t_0)}e^{j\omega(t-t_0)}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$=\frac{\omega_c k}{\pi}S_a[\omega_c(t-t_0)]$$

理想低通滤波器





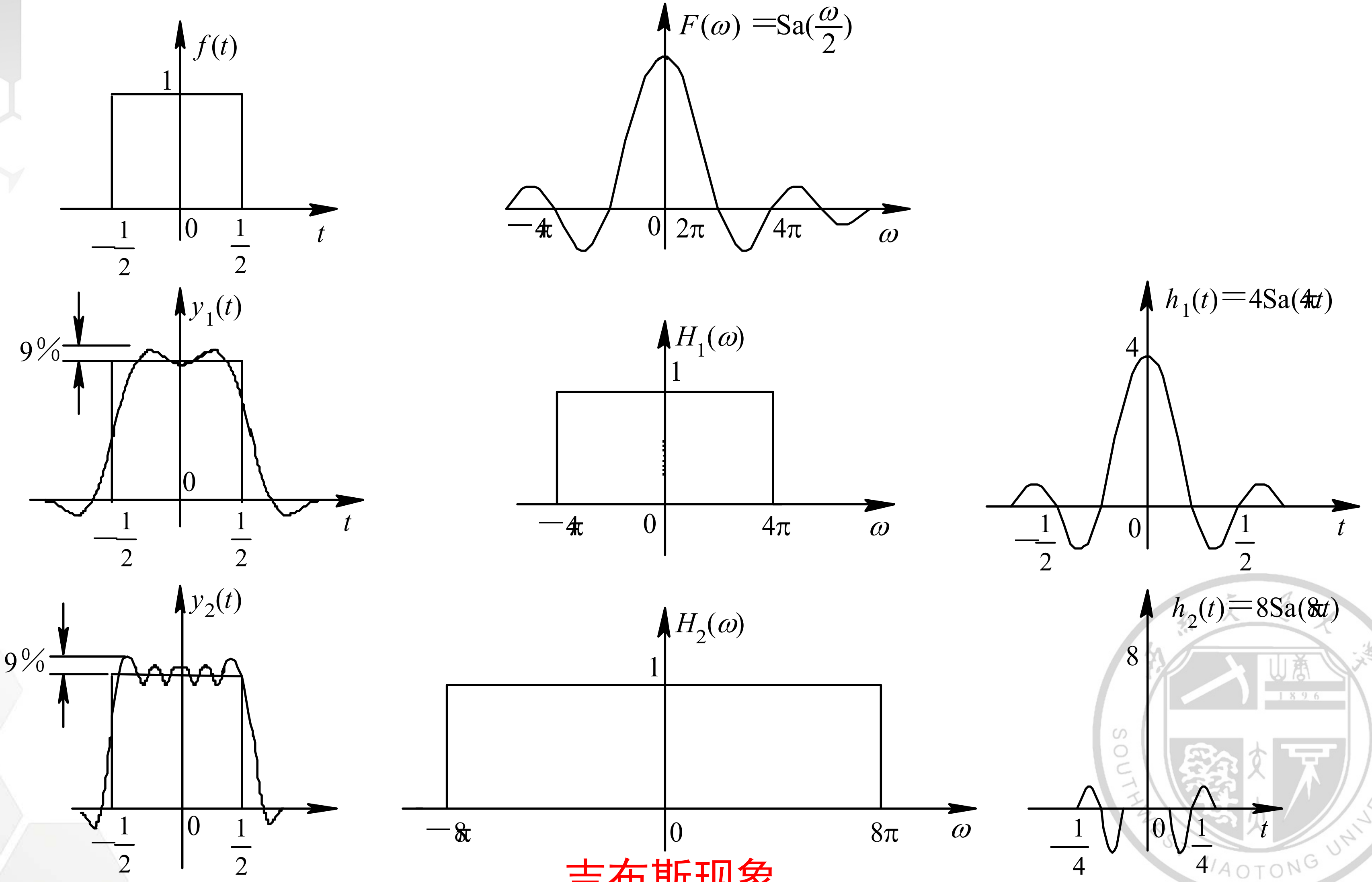
◆ 对在 t=0时刻加入的激励， 其响应的最大值出现在 t0处，说明响应建立需要时间。

◆ 在响应脉冲建立的前后出现了起伏振荡，因为相当一部分的高频分量被完全抑制了，产生严重失真。

◆ t<0时有响应出现表明系统是非因果的， 而违背了因果律的系统是物理不可实现的。

理想低通滤波器

不同带宽的理想低通对矩形脉冲的响应



吉布斯现象

理想低通滤波器

三．系统物理可实现性和佩利－维纳准则

理想低通滤波器是物理不可实现的系统

系统物理可实现的准则

时域准则　　$t<0$时，$h(t)=0$

频域准则

系统物理可实现的必要条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\ln\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|\right|}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega < \infty$$

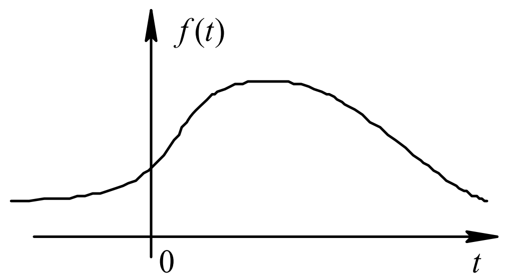
佩利－维纳准则

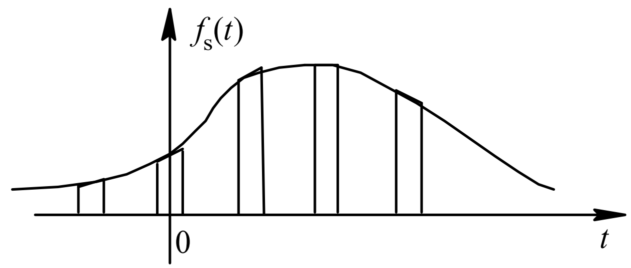
抽样定理

抽样定理

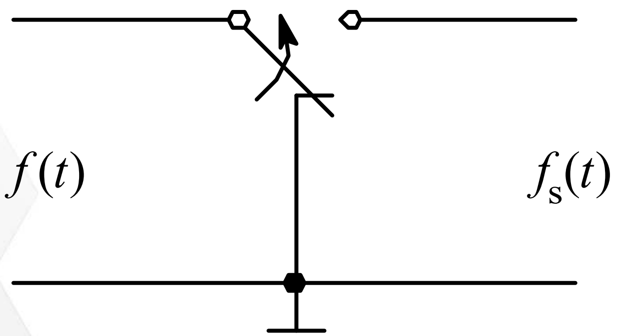
一. 抽样

抽样是从连续信号到离散信号的桥梁，也是对信号进行数字处理的第一个环节。

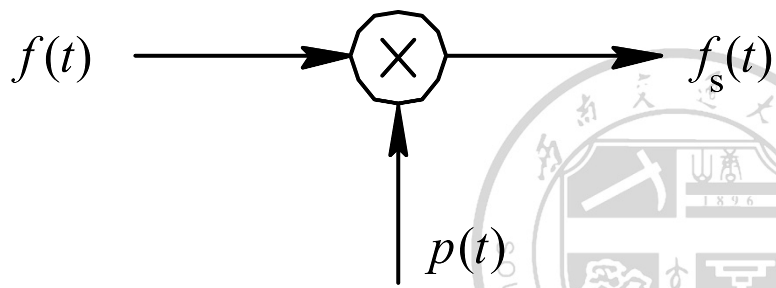




信号的抽样



(a)

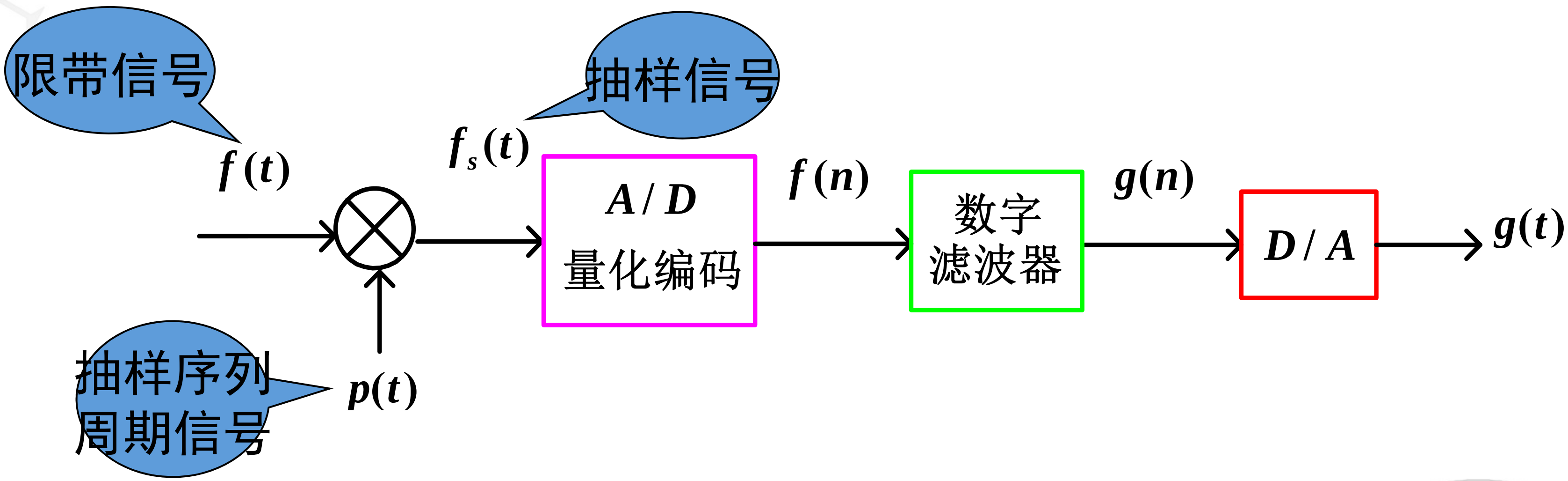


(b)

采样器与等效模型

抽样定理

信号处理流图：



需要解决的问题：
$$\begin{cases} f_s(t) \leftrightarrow F_s(\mathrm{j}\omega) \text{ 与 } F(\mathrm{j}\omega) \text{ 的关系} \\ \text{由 } f_s(t) \text{ 能否恢复 } f(t) \end{cases}$$

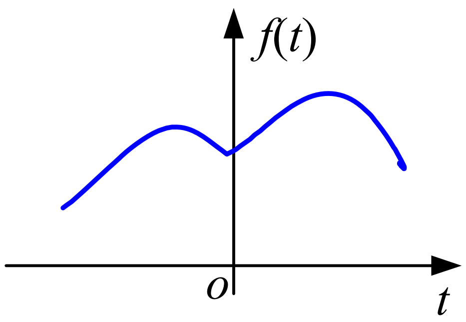
抽样定理

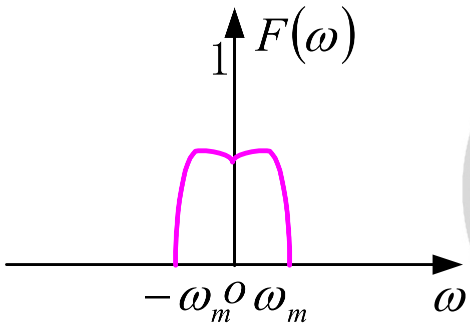
1、限带信号

指连续时间信号 $f(t)$ 的频谱宽度有限，即频谱函数 $F(j\omega)$ 满足

$$F(j\omega)=0 \quad \text{当} \ |\omega|>\omega_m \ \text{时}$$

式中 ω_m 称为信号 $f(t)$ 的最高频率





抽样定理

2、抽样信号

是指利用抽样序列 $p(t)$ 从连续信号 $f(t)$ 中抽取一系列离散样值而得的离散信号，或称取样信号。用 $f_s(t)$ 表示。

$$f_s(t) = f(t)p(t)$$

式中抽样序列 $p(t)$ 也称开关函数

若采用均匀抽样，抽样周期为 T_s

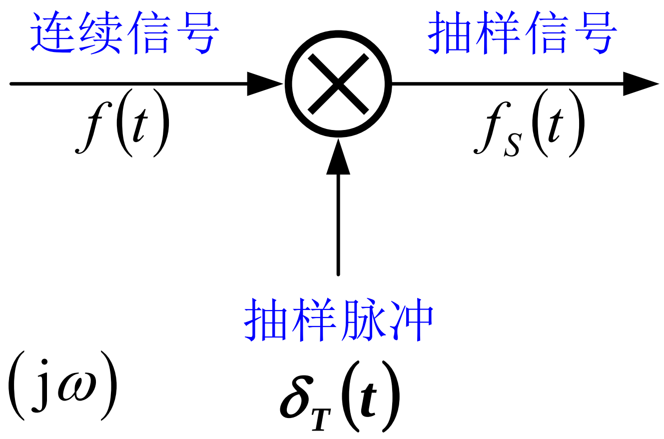
抽样频率为 $\omega_s = 2\pi f_s = \dfrac{2\pi}{T_s}$

抽样定理

二. 理想抽样

抽样序列是周期单位冲激序列

1. 抽样信号



限带信号

连续信号： $f(t) \leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$

$(-\omega_m < \omega < \omega_m)$

抽样脉冲序列： $p(t) \leftrightarrow P(\mathrm{j}\omega)$ ，

抽样信号： $f_s(t) \leftrightarrow F_s(\mathrm{j}\omega)$ $\quad f_s(t) = f(t)p(t)$

抽样定理

频谱结构的数学表示

抽样脉冲序列：$p(t)=\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)$

$$\Leftrightarrow \omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s) = \omega_s\delta_{\omega_s}(\omega)$$

$$f_s(t)=f(t)\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

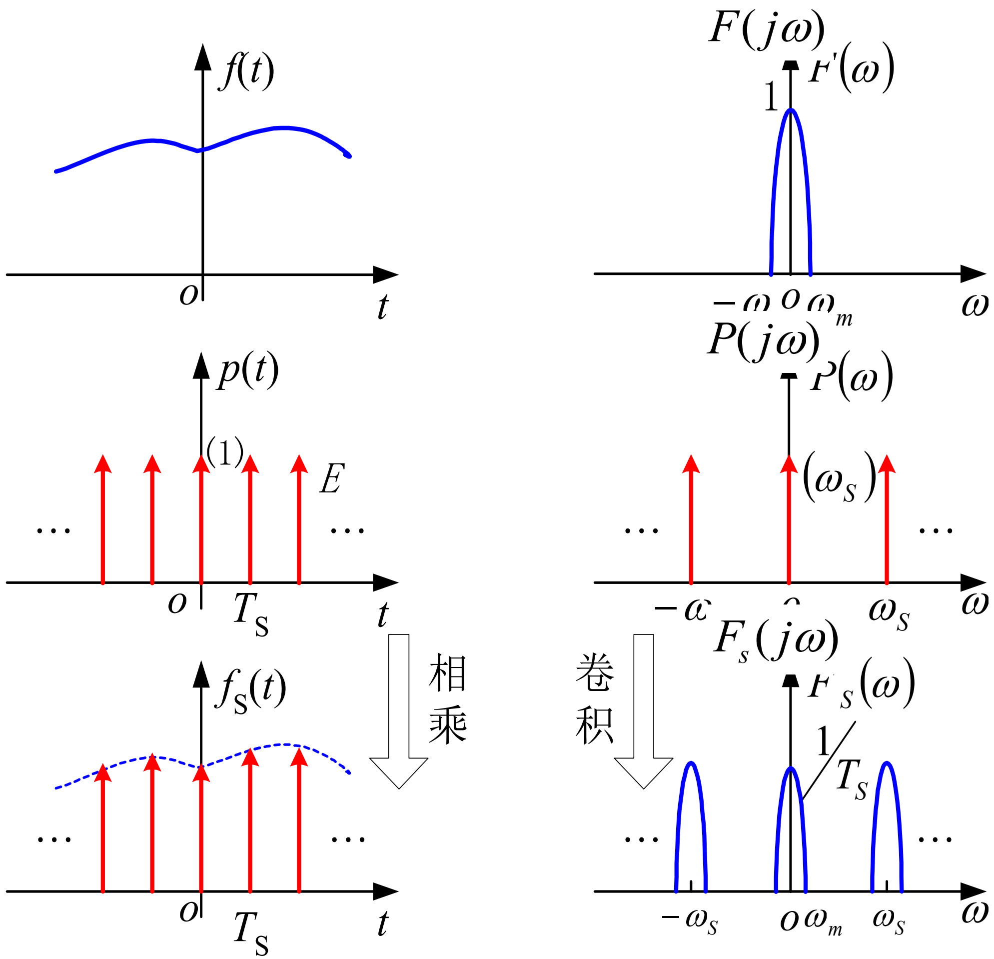
频域卷积

$$\Leftrightarrow F_s(\mathrm{j}\omega)=F\left[f(t)\delta_T(t)\right]=\frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)*[\omega_s\delta_{\omega_s}(\omega)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*[\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)]=\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[\mathrm{j}(\omega-n\omega_s)]$$

抽样定理

$$f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s) \qquad F_s(j\omega)=\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega-n\omega_s)]$$

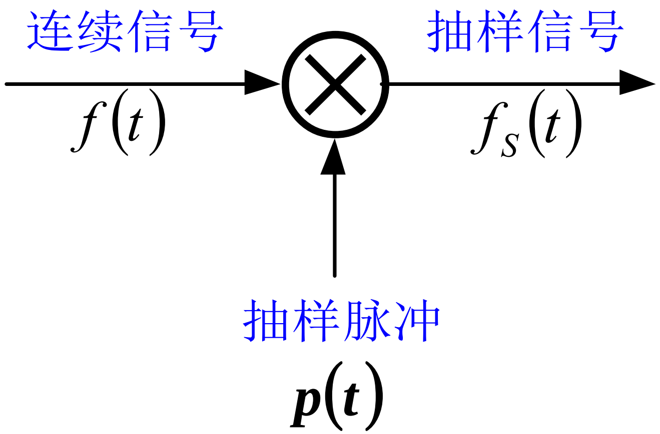


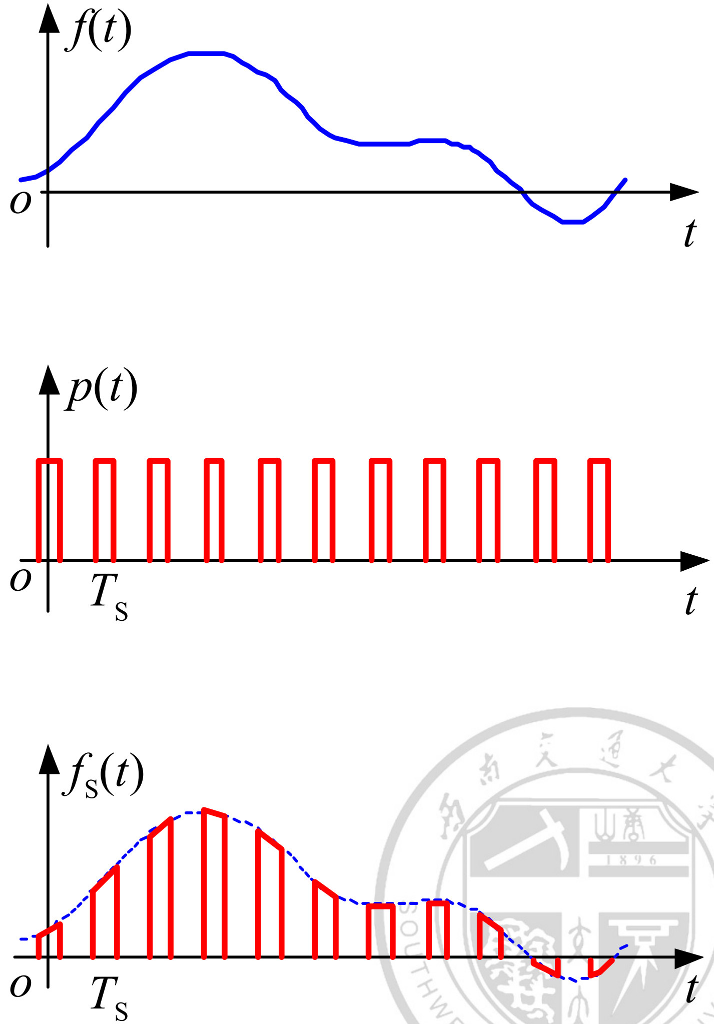
抽样信号的频谱是原信号频谱的周期重复

抽样定理

三．矩形脉冲抽样

1．抽样信号





连续信号：　$f(t)$

抽样脉冲序列：　$p(t)$

抽样信号：　$f_s(t) = f(t) \cdot p(t)$

抽样定理

矩形脉冲抽样信号频谱结构的数学表示

$$f_s(t) \leftrightarrow F_s(j\omega) = F[f(t)\cdot p(t)] = \frac{1}{2\pi}F(j\omega)*P(j\omega)$$

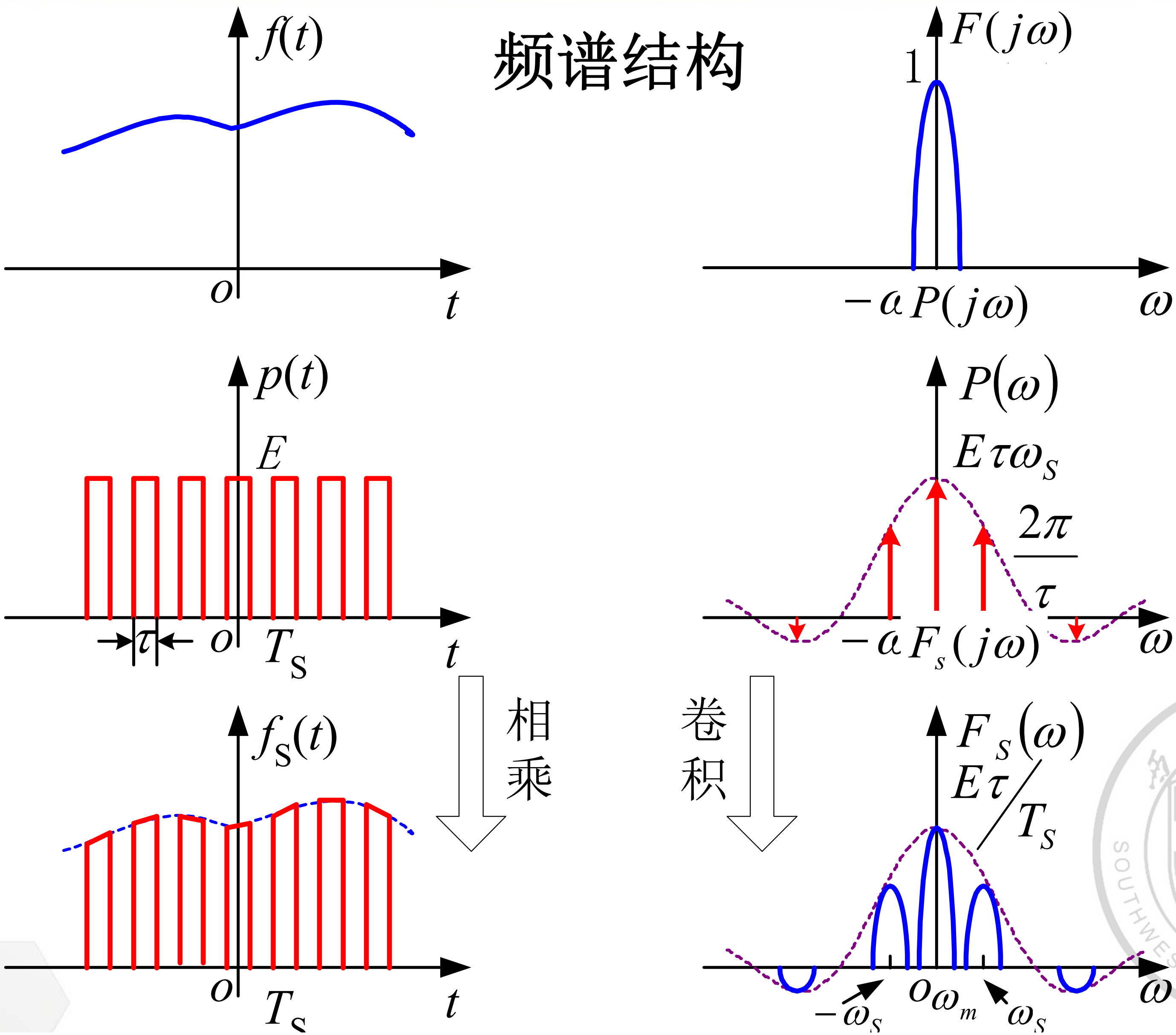
$p(t)$的傅里叶系数 $P_n = \dfrac{\tau}{T_s}Sa(\dfrac{n\omega_s\tau}{2})$

$$\therefore \quad P(j\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{T_s}Sa(\frac{n\omega_s\tau}{2})\delta(\omega - n\omega_s)$$

$$\therefore \quad F_s(j\omega) = \frac{\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa(\frac{n\omega_s\tau}{2})F(j\omega)*\delta(\omega - n\omega_s)$$

$$= \frac{\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa(\frac{n\omega_s\tau}{2})F(j(\omega - n\omega_s))$$

抽样定理



频谱结构
f(t)
o
t
F(jω)
1
−ω_m ω_m
ω
p(t)
E
τ
o
T_S
t
P(ω)
Eτω_S
2π/τ
−ω_S o ω_S
ω
相乘
卷积
f_S(t)
o
T_S
t
F_S(ω)
Eτ/T_S
−ω_S
o ω_m
ω_S
ω

抽样定理

3．讨论 τ 的影响

$$\because \omega_S = \frac{2\pi}{T_s}, \quad T_s\text{不变}, \quad \omega_S\text{不变}$$

脉冲宽度$\tau\downarrow$,第一个零点$\dfrac{2\pi}{\tau} = \dfrac{2\pi}{T_S}\dfrac{T_S}{\tau} = \omega_S\dfrac{T_S}{\tau}$

$\tau\downarrow$,离原点越远.

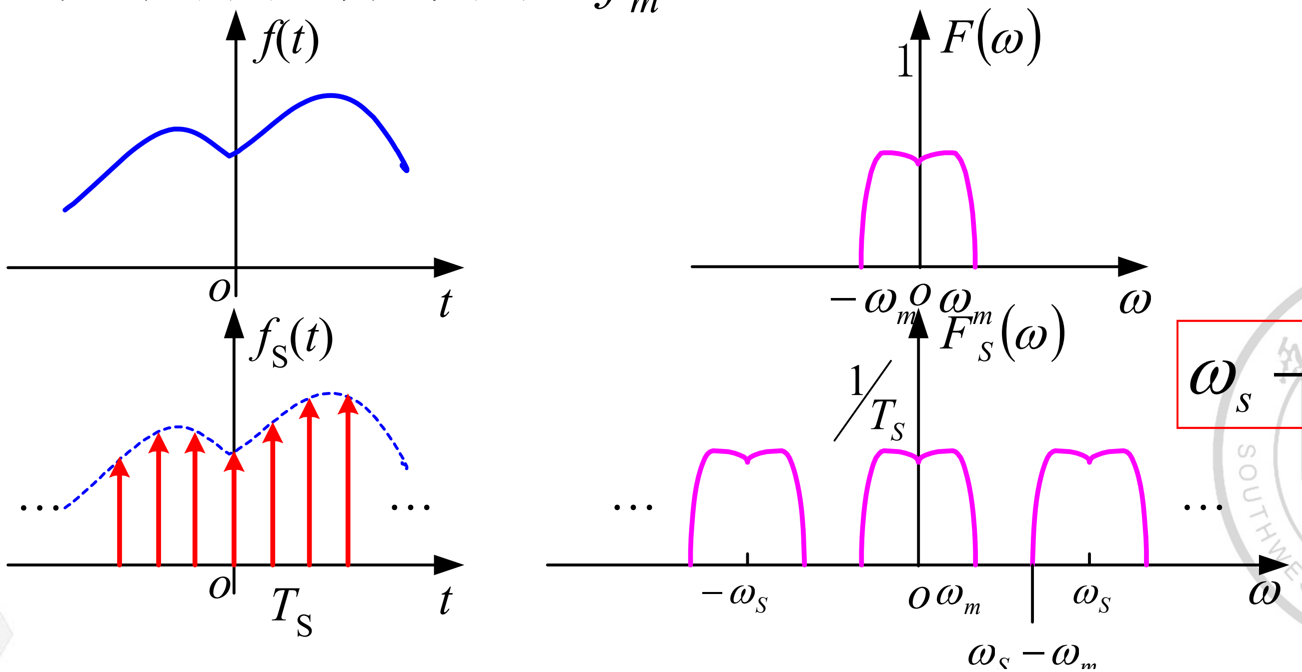
理想抽样$\tau\to 0$,矩形脉冲$\to\delta(t)$

抽样定理

一个频带受限的信号$f(t)$，若频谱只占据$-\omega_m \sim +\omega_m$，的范围，则信号$f(t)$可用等间隔的抽样值来唯一地表示。

其抽样间隔必须不大于$\dfrac{1}{2f_m}$，即$T_s \le \dfrac{1}{2f_m}\left(\omega_m = 2\pi f_m\right)$，

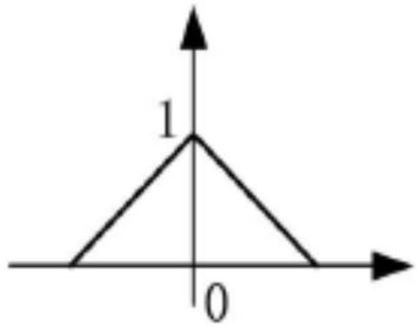
或者说最低抽样率为$2f_m$。



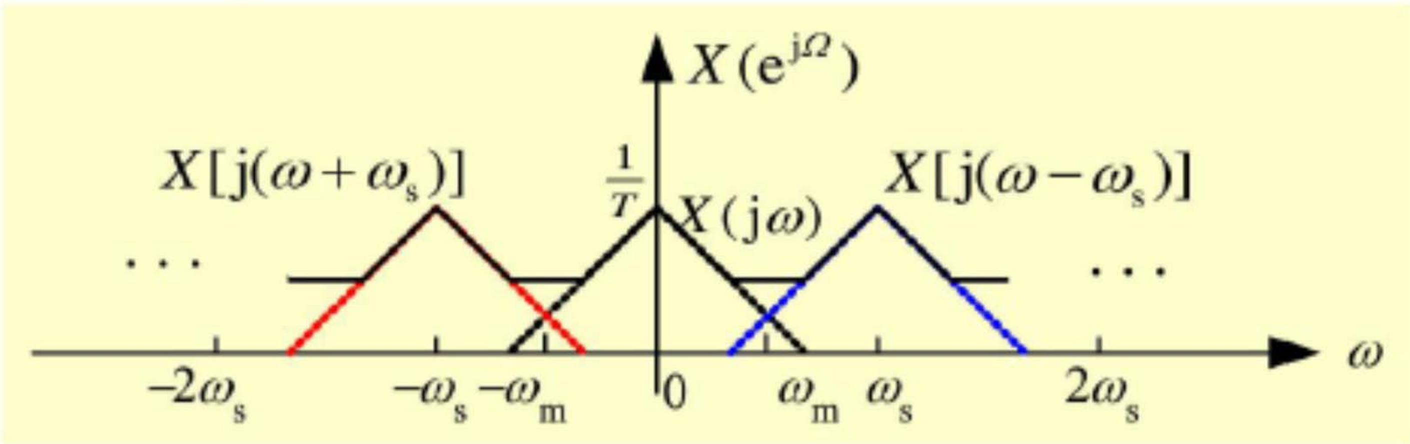
$$\boxed{\omega_s - \omega_m \ge \omega_m}$$

抽样定理

$\omega_s < 2\omega_m$



混叠
(aliasing)



抽样定理

奈奎斯特(*Nyquist*)抽样率和抽样间隔

重建原信号的必要条件：$\boxed{\omega_s - \omega_m \geq \omega_m}$

即

$$\omega_s \geq 2\omega_m$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi \cdot f_s \geq 2\omega_m = 2 \cdot 2\pi f_m$$

不满足此条件，就要发生频谱混叠现象

即 抽样频率$f_s \geq 2f_m$是必要条件,或抽样间隔$T_s \leq \dfrac{1}{2f_m}$

$$T_s = \frac{1}{2f_m}$$

是最大抽样间隔，称为“奈奎斯特抽样间隔”

$$f_s = 2f_m$$

是最低允许的抽样频率，称为“奈奎斯特抽样频率”

抽样定理

例:
$$f(t) = A_1\cos(100\pi t + \phi_1) + A_2\cos(200\pi t + \phi_2) + A_3\sin(1000\pi t + \phi_3)$$

信号 $f(t)$ 的最高角频率为 $\omega_m = 1000\pi$

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500Hz$$

$$T_m = \frac{1}{f_m} = 2\times10^{-3}s$$

奈奎斯特抽样间隔: $T_s = \dfrac{1}{2f_m} = \dfrac{T_m}{2} = 1\times10^{-3}s = 1ms$

采样间隔 $T < T_s = 1ms \qquad f > \dfrac{1}{T_s} = 1000Hz$

抽样定理

例：　音频信号：0～3.4KHz，

信号 $f(t)$ 的最高频率为　$f_m = 3400Hz$

$\boxed{\text{奈奎斯特抽样频率}}$　$f_s = 2f_m = 6800Hz$

抽样频率　$f \geq 2f_m = 6800Hz$

所以　$f_{s\min} = 6800\,\text{Hz}, T_{s\max} = \dfrac{1}{2f_m},$

若取 $f_s = 8000\,\text{Hz}$，则 $T_s = \dfrac{1}{8000} = 125\mu s$

西南交通大學

谢 谢 大 家！