自动控制原理第 2 章作业解答

1. 某非线性系统的输入、输出关系为：$y=f(x)=x^{1/2}$。平衡点处 x_0=1/2。试确定该系统近似的线性数学模型。

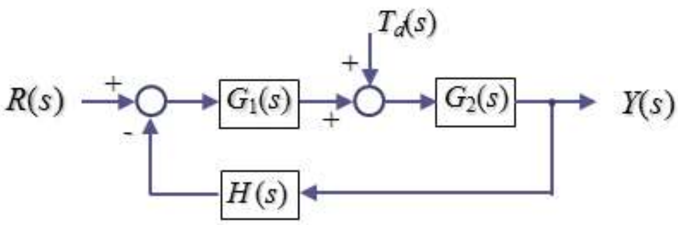
解：

假设系统在平衡点附近工作，则在平衡点附近，得到系统的线性近似：

$$y-y_0=y'\big|_{x_0=\frac{1}{2}}(x-x_0)$$

$$\Delta y=0.707\Delta x$$

2．计算下图所示系统的传递函数 $Y(s)/T_d(s)$，其中 $G_1(s)=5$，$G_2(s)=\dfrac{1}{s(s+2)}$，$H(s)=3+2s$。



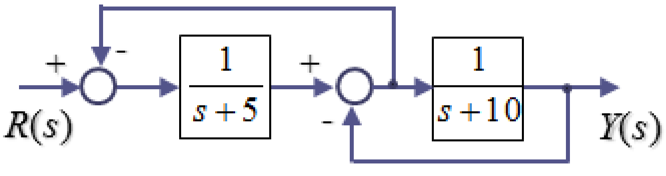
解：令输入 $R(s)$为 0，则反馈通道的传递函数为：

$$H'(s)=-G_1(s)H(s)$$

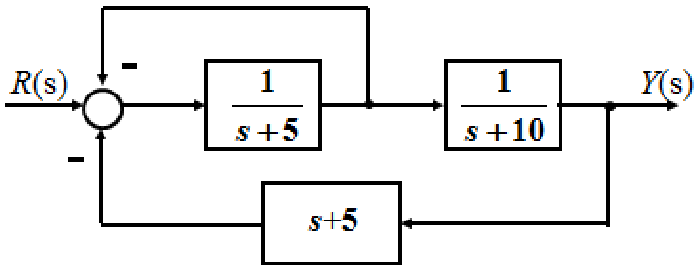
扰动输入作用下系统的传递函数为：

$$\frac{Y(s)}{T_d(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{1}{s^2+12s+15}$$

3. 通过方框图的等效简化求取下图所示系统的闭环传递函数 $Y(s)/R(s)$。



解法 1：比较点前移



$$G_1(s)=\frac{1}{s+6}$$

前向传递函数：

$$G(s)=G_1(s)\times\frac{1}{s+10}=\frac{1}{(s+6)(s+10)}$$

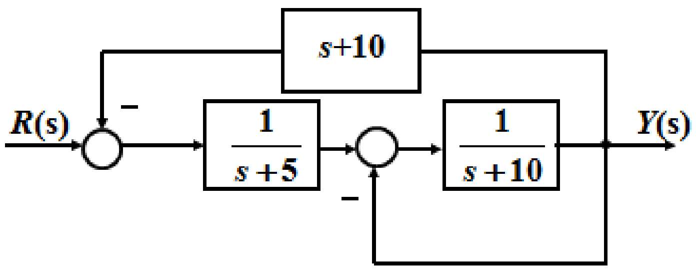
反馈通道传递函数：

$$H(s)=s+5$$

系统的闭环传递函数：

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{1}{s^2+17s+65}$$

解法 2：分支点后移



$$G_1(s)=\frac{1}{s+11}$$

前向传递函数：

$$G(s)=G_1(s)\times\frac{1}{s+5}=\frac{1}{(s+5)(s+11)}$$

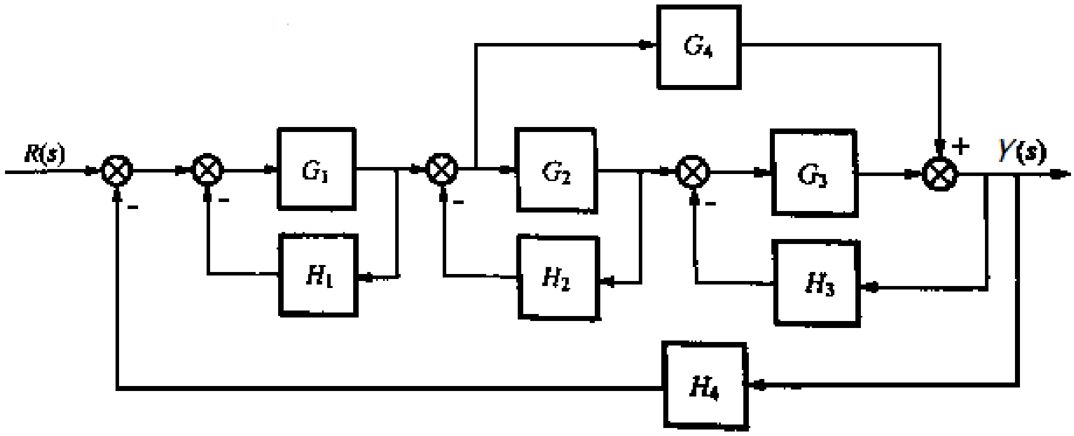
反馈通道传递函数：

$$H(s)=s+10$$

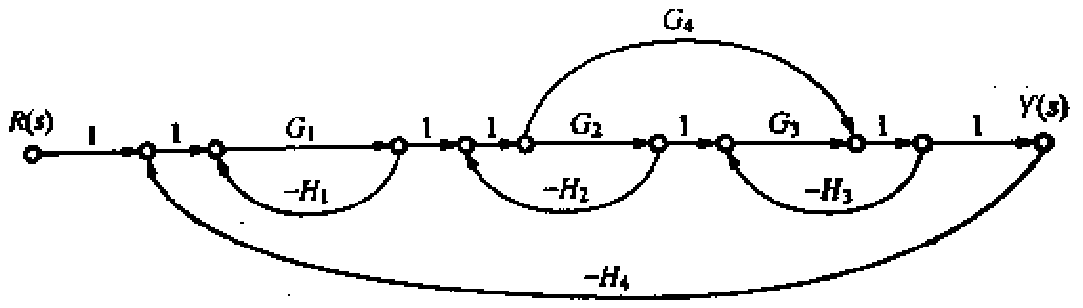
系统的闭环传递函数：

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{1}{s^2+17s+65}$$

4. 画出下图所示系统的信号流图，并利用梅森公式求系统的闭环传递函数 $Y(s)/R(s)$。



解：系统的信号流图：



信号流图有 5 个回路

$L_1=-G_1H_1$，$L_2=-G_2H_2$，$L_3=-G_3H_3$，$L_4=-G_1G_4H_4$，$L_5=-G_1G_2G_3H_4$

其中，L_1 和 L_2，L_2 和 L_3，L_1 和 L_3 为两两互不接触，L_1、L_2 和 L_3 三个为互不接触回路。

两个前向通路：

$P_1=G_1G_2G_3$，$\Delta_1=1$；　$P_2=G_1G$，$\Delta_2=1$

系统的闭环传递函数：

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{2}P_k\Delta_k$$

$$=\frac{G_1G_2G_3+G_1G_4}{1+G_1H_1+G_2H_2+G_3H_3+G_1G_4H_4+G_1G_2G_3H_4+G_1H_1G_2H_2+G_2H_2G_3H_3+G_1H_1G_3H_3+G_1H_1G_2H_2G_3H_3}$$

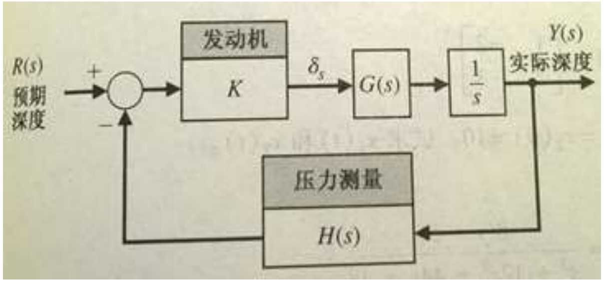
5. 某遥控潜艇的深度自动控制系统如下图所示，系统利用压力传感器测量深度。当上浮或者下潜速度为 25m/s 时，尾部发动机的增益为 K=1，潜艇的近似传递函数为

$$G(s)=\frac{(s+1)^2}{s^2+1}$$

反馈回路上压力感器的传递函数为

$$H(s)=2s+1$$

试推导建立系统的状态空间模型。



解：

前向传递函数：

$$G'(s)=K\times G(s)\times\frac{1}{s}=\frac{(s+1)^2}{s(s^2+1)}$$

反馈通道传递函数：

$$H(s)=2s+1$$

闭环传递函数：

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G'(s)}{1+G'(s)H(s)}=\frac{s^2+2s+1}{3s^3+5s^2+5s+1}$$

闭环传递函数变形：

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{X(s)}{R(s)}\ \frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{3s^3+5s^2+5s+1}\ (s^2+2s+1)$$

得：

$$\begin{cases}\dfrac{X(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{3s^3+5s^2+5s+1}\\[2ex]\dfrac{Y(s)}{X(s)}=s^2+2s+1\end{cases}$$

零初始条件下，取拉普拉斯反变换，得：

$$\begin{cases}3\dfrac{d^3x(t)}{dt^3}+5\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+5\dfrac{dx(t)}{dt}+x(t)=r(t)\\[2ex]y(t)=\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+2\dfrac{dx(t)}{dt}+x(t)\end{cases}$$

选取状态变量：

$$x_1=x(t),\quad x_2=\frac{dx(t)}{dt},\quad x_3=\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

状态空间模型：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} r \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

6. 某系统的状态空间模型为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} x$$

试确定其传递函数。

解：状态转移矩阵：

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s^2 - 13s + 30 & 4s - 40 & -2s + 10 \\ s - 11 & s^2 - 11s + 8 & s - 3 \\ -s + 3 & -4 & s^2 - 4s - 1 \end{bmatrix}^T}{s^3 - 14s^2 + 37s + 20}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} s^2 - 13s + 30 & s - 11 & -s + 3 \\ 4s - 40 & s^2 - 11s + 8 & -4 \\ -2s + 10 & s - 3 & s^2 - 4s - 1 \end{bmatrix}}{s^3 - 14s^2 + 37s + 20}$$

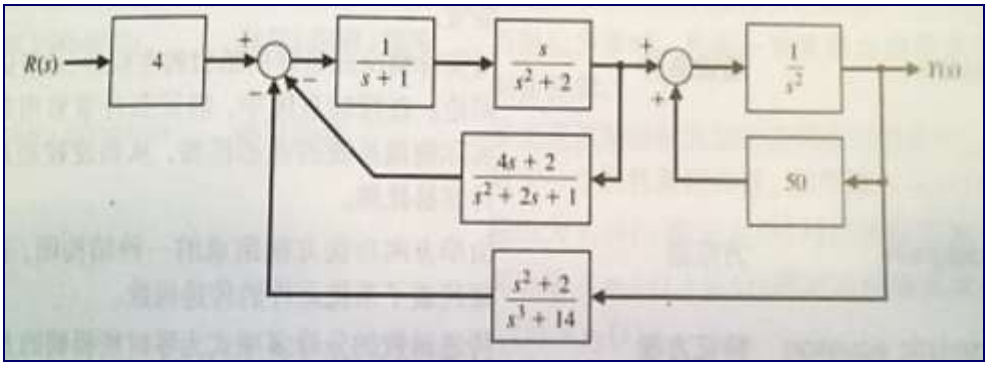
传递函数：

$$G(s) = C\Phi(s)B + D$$

$$= \frac{[-s^2 + 21s - 110 \quad 2s^2 - 23s + 27 \quad s - 11]}{s^3 - 14s^2 + 37s + 20} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4s - 44}{s^3 - 14s^2 + 37s + 20}$$

7. 考虑下图所示的方框图模型，



（1） 编写 m 脚本程序，对方框图进行简化，并计算系统的闭环传递函数。

（2） 利用函数 pzmap，绘制闭环传递函数的零-极点分布图。

（3） 利用函数 pole 和 zero 分别计算闭环传递函数的零点和极点，并与（2）所得的结果进行对比。

解：（1）计算系统闭环传递函数

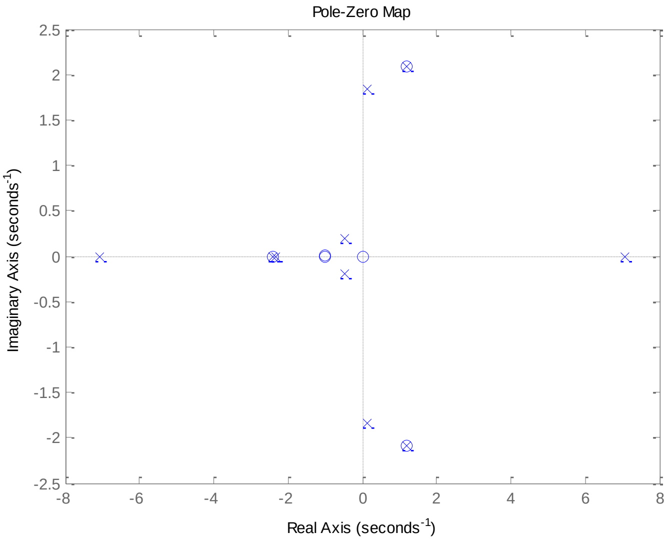
```
>> g1=tf([1],[1 1]);
>> g2=tf([1 0],[1 0 2]);
>> g3=series(g1,g2);
>> h1=tf([4 2],[1 2 1]);
>> g4=feedback(g3,h1,-1);
>> g5=tf([1],[1 0 0]);
>> h2=[50];
>> g6=feedback(g5,h2,+1);
>> g=series(g4,g6);
>> h3=tf([1 0 2],[1 0 0 14]);
>> sys1=feedback(g,h3,-1);
>> sys=series(4,sys1)

sys =

                        4 s^6 + 8 s^5 + 4 s^4 + 56 s^3 + 112 s^2 + 56 s
  -----------------------------------------------------------------------------------------------
  s^10 + 3 s^9 - 45 s^8 - 125 s^7 - 200 s^6 - 1177 s^5 - 2344 s^4 - 3485 s^3 - 7668 s^2 - 5598 s - 1400
```

（2）绘制闭环传递函数的零-极点分布图

```
>> pzmap(sys)
```



（3）计算闭环传递函数的零点和极点

```
>> p=pole(sys)

p =

   7.0709 + 0.0000i
  -7.0713 + 0.0000i
   1.2051 + 2.0863i
   1.2051 - 2.0863i
   0.1219 + 1.8374i
   0.1219 - 1.8374i
  -2.3933 + 0.0000i
  -2.3333 + 0.0000i
  -0.4635 + 0.1997i
  -0.4635 - 0.1997i

>> z=zero(sys)

z =

   0.0000 + 0.0000i
   1.2051 + 2.0872i
   1.2051 - 2.0872i
  -2.4101 + 0.0000i
  -1.0000 + 0.0000i
  -1.0000 - 0.0000i
```

利用函数 pole 和 zero 计算得出的极、零点和利用函数 pzmap 绘制出的极、零点完全相同。