《大学物理 I》作业　No.6 静电场（I）（A 卷）

班级 ________ 学号 ________ 姓名 _________ 成绩 _______

一、选择题

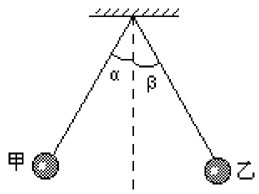
1. [C] 如图所示，用两根同样的细绳，把两个质量相等的小球悬挂在同一点上。两球带同种电荷，但甲球的电荷量大于乙球的电荷量。下列关系式哪个正确？

（A） $\alpha > \beta$

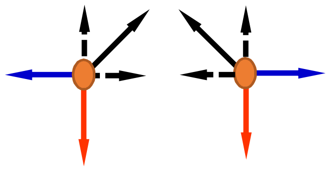
（B） $\alpha < \beta$

（C） $\alpha = \beta$

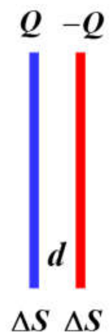
（D） 以上都不对



解析：由库仑定律可知， 两个球之间的静电力满足牛顿第三定律；质量相同，重力相同，对两个球的受力分析可知，两根绳子的拉力和竖直方向的夹角相等。



2. [C] 两靠得很近的平行薄平板，相距为 d，带等量异号电荷 $\pm \boldsymbol{Q}$，面积均为 $\boldsymbol{\Delta S}$，带负电的平板受力大小为



（A） $\dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$

（B） $\dfrac{Q^2}{\varepsilon_0 \Delta S}$

（C） $\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 \Delta S}$

（D） 以上都不正确

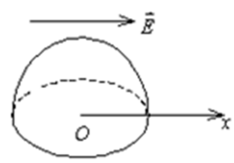
解析：(A)把两个平行板视为点电荷处理而直接用库仑定律计算因而不对；(B)把两板之间的总场强当成一个板在另一个板产生的场强来处理当然也不对；

正确的做法是：两带电平行薄平板靠得很近，对于附近场点来说，可视为无限大均匀带电平面，均产生均匀电场 $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 \Delta S}$

带负电的平板处于带正电的平板的激发的电场中，受电场力

$$F = E_+ \left| -Q \right| = \frac{Q}{2\varepsilon_0 \Delta S} \cdot Q = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \Delta S}$$，故选 C

3. [D]一电场强度为 $\vec{E}$ 的均匀电场，$\vec{E}$ 的方向沿 x 轴正向，如图所示。则通过图中一半径为 R 的半球面的电场强度通量为



（A）$\pi R^2 E$　　（B）$\pi R^2 E/2$　　（C）$2\pi R^2 E$　　（D）0

解析：半径为 R 的半球面和半径为 R 的圆平面构成闭合曲面，由静电场的高斯定理，通过闭合的电通量为零。$\phi_E = \phi_{半球面} + \phi_{圆平面} = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$，均匀电场 $\vec{E}$ 的方向和圆平面的法向垂直，电场线不通过圆平面，即 $\phi_{圆平面} = 0$，所以 $\phi_{半球面} = 0$

4. [D]关于高斯定理有下面几种说法, 哪种说法是正确的

（A）　如果高斯面上各点的电场强度都为零，则高斯面内必无电荷

（B）　如果高斯面上各点的电场强度都不为零，则高斯面内必有电荷

（C）　如果高斯面内无电荷，则高斯面上各点的电场强度必为零

（D）　如果高斯面内有净电荷，则通过高斯面的电通量必不为零

（E）　高斯定理仅适用于具有高度对称性的电场

答案解析： (A)错。由高斯定理 $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$ 可知，高斯面上各点的电场强度都为零，只能说明该高斯面的电场强度通量为零，即 $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$，进而得到 $\sum q_{内} = 0$，但并不能说高斯面内必无电荷。

(B)错。由高斯面上各点的电场强度都不为零，并不能肯定 $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} \neq 0$，因此，也不能肯定 $\sum q_{内} \neq 0$。例如，在均匀电场中任意作一个闭合曲面，该闭合曲面上各点的电场强度都不为零，但该闭合曲面内并没有电荷。所以，高斯面上各点的电场强度都不为零时，高斯面内不一定有电荷。

(C)错。高斯面内无电荷，即 $\sum q_{内} = 0$，只能说明 $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$，但高斯面上各点的电场强度由空间所有的电荷产生，所以高斯面上各点的电场强度不一定为零。

（D）正确。高斯面内有净电荷，即 $\sum q_{内} \neq 0$，则通过高斯面的电通量中 $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} \neq 0$。

（E）错。高斯定理是静电场的基本规律，适用于任意的静电场。

5. [D]两个同心均匀带电球面，半径分别为 R_a 和 R_b ($R_a < R_b$)，所带电量分别为 Q_a 和 Q_b，设某点与球心相距 r，当 $R_a < r < R_b$ 时， 该点的电场强度的大小为

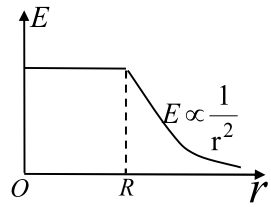
(A) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_a + Q_b}{r^2}$　　(B) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_a - Q_b}{r^2}$

(C) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot (\frac{Q_a}{r^2} + \frac{Q_b}{R_b^2})$　　(D) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_a}{r^2}$

解：作半径为 r 的同心球面为高斯面，由高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E = \dfrac{Q_a}{\varepsilon_0}$

得该点场强大小为：$E = \dfrac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$。

6. [D]图示为一具有球对称性分布的静电场的 $E \sim r$ 关系曲线，请指出该静电场 E 可能是由下列哪种带电体产生的



(A) 半径为 R 的均匀带电球面

(B) 半径为 R 的均匀带电球体

(C) 半径为 R 的、电荷体密度为 ρ=Ar (A 为常数)的非均匀带电球体

(D) 半径为 R 的、电荷体密度为 ρ=A/r (A 为常数)的非均匀带电球体

解：对于球对称的电荷分布，由高斯定理场强大小可表示为

$$E = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ $q_{内}$ 为以 r 为半径球面内的电荷

对于均匀带电球面，$r < R$ 时，$q_{内}=0$，$E_{内}=0$，故不是（A）.

对于均匀带电球体，$q_{内} = \frac{4}{3}\pi r^3 q$，$E_{内} = \dfrac{qr}{3\varepsilon_0} \propto r$，所以不是(B).

对于 $\rho = Ar$ 的球体，$q_{内} = \int_0^r \rho dV = \int_0^r Ar\cdot 4\pi r^2 dr = \pi A r^4$，$E_{内} = \dfrac{\pi A r^4}{4\pi r^2\varepsilon_0} = \dfrac{Ar^2}{4\varepsilon_0} \propto r^2$，

不是(C).

对于 $\rho = A/r$ 的球体，$q_{内} = \int_0^r \rho dV = \int_0^r \frac{A}{r} 4\pi r^2 dr = 2\pi A r^2$，$E_{内} = \dfrac{2\pi A r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{A}{2\varepsilon_0}$ 为常量，

所以选（D)。(对于四种情况都有 $E_{外} \propto \dfrac{1}{r^2}$).

二、判断题

1. 【 F 】根据库仑定律，两个点电荷之间的相互作用力与两点电荷的距离的平方成反比，因此当两点电荷靠得非常近时（间距近似于零），它们之间的相互作用力将趋近无穷大。

解析：当电荷距离很近时，电荷已不能再看做点电荷，或者说间距趋于零的情况下点电荷模型不再成立。

2. 【 T 】在带电体系的电荷分布具有对称性的情况下，通常可以利用高斯定理方便地计算电场分布。

解析：在电荷分布具有某种对称性，通常可以选取恰当的闭合面作为高斯面，使电场强度以标量的形式从$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{i,内}$提取出来，由此利用高斯定理可以求出电场强度。

但带电体系的电荷分布具有对称性不是应用高斯定理求电场分布的充分条件，如：有限长的均匀带电直线、均匀带电圆环等带电体，电荷分布具有对称性，不管高斯面如何选取，均不能由高斯定理求解电场。

带电体系的电荷分布具有对称性也不是应用高斯定理求电场分布的必要条件，如：处于静电平衡时导体表面外附近的场点的电场，可由高斯定理求解（将在第 9 章第 5 小节《静电场中的导体》学习）

3. 【 F 】电荷之间的相互作用是通过电磁场来传递的，该相互作用可通过真空中两个静止的点电荷之间的相互作用力来验证。

解析：静止电荷间的作用力只能表示静电力，若电荷是运动的，则还有其他非静电力。

4. 【 F 】一根有限长的均匀带电直线，其电荷分布及所激发的电场有一定的对称性，所以，可以利用高斯定理计算其电场强度。

解析：找不到合适的高斯面。

5. 【 T 】如果带电粒子被放置在均匀带电球壳内部，则球壳对带电粒子的静电力为零。

解析：均匀带电球壳内部的电场强度为零。

6. 【 T 】在静电场中，带电粒子所受的电场力与它的运动状态无关。

解析：静电场中，带电粒子受力都是静电力，与其运动状态无关。

7. 【 F 】如果空间某个区域电场强度处处为零，则表明该区域附近没有带电体或者带电体位于无穷远处。

解析：比如均匀带电球壳内部的电场强度为零。

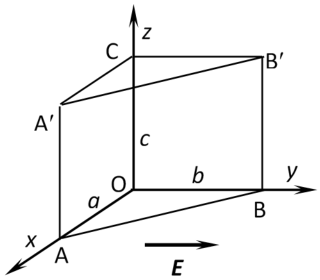
三、填空题

1. 两个完全相同、带等量同号电荷的导体球间隔 1m，相互作用力为 F_0，若将其中一个导体球上的一半电量移到另个导体球上，则两个球之间的相互作用力将变为________。

解：由库仑定律可知，$\boldsymbol{F \propto q_1 q_2}$

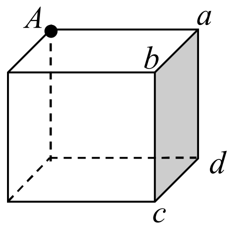
$$\frac{F}{F_0}=\frac{\frac{3}{2}q\cdot\frac{1}{2}q}{q\cdot q}=\frac{3}{4}，\quad F=\frac{3}{4}F_0$$

2. 在电场强度为 $\vec{E}=E\vec{j}$ 的匀强电场中，有一如图所示的三棱柱，其中 $\overline{OA}=a$，$\overline{OB}=b$，$\overline{OC}=c$，取表面的法线向外，设过面AA'CO的电通量为 ϕ_1=__________，面B'BOC的电通量为 ϕ_2=__________，面ABB'A'的电通量 ϕ_3=__________ 。



解：$\phi_1=-Eac \quad \phi_2=0 \quad \phi_3=Eac$；

3. 如果将电荷量为 q 的点电荷置于立方体的一个顶角上，则通过与它不相邻的每个侧面的电场强度的通量为__________。

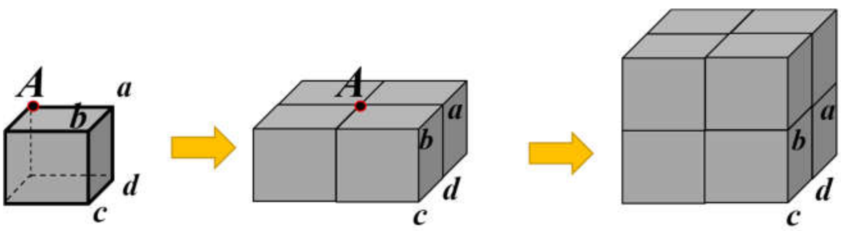


答案解析：在q周围再连接7个大小相同的立方体，组成一个大立方体，使q在大立方体的中心，如图所示。

根据高斯定理，通过该大立方体每一侧面的电通量为

$$\frac{1}{6}\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{6}\frac{q}{\varepsilon_0}$$

通过该大立方体每一侧面的电通量为等于通过小立方体每一侧面的电通量的4倍

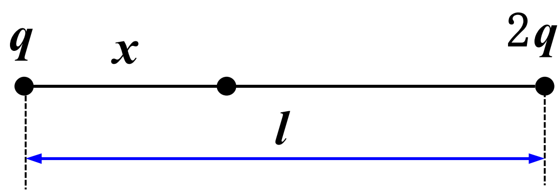


所以，通过小立方体中与 $\boldsymbol{q}$ 不相邻的每个侧面的电通量为

$$\frac{1}{6}\frac{q}{\varepsilon_0}\times\frac{1}{4}=\frac{q}{24\varepsilon_0}$$

如图所示，两个电荷量分别为 q 和 $2q$ 的点电荷

4. 如图所示，两个电荷量分别为 q 和 $2q$ 的点电荷，相距 l，第三个点电荷放在 x=____________处所受的合力为零。



解：两点电荷在场点 x 处产生的电场强度大小相等方向相反。

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0\left(l-x\right)^2}$$

解得 $x=\left(\sqrt{2}-1\right)l$

5.　有一个球形的橡皮膜气球，电荷 q 均匀地分布在球面上，在此气球被吹大的过程中，其电场强度的大小变化情况

（1）始终在气球内部的点（该点与球中心距离为 r）：__________________________。

（2）始终在气球外部的点（该点与球中心距离为 r）：__________________________。

（3）被气球表面掠过的点（该点与球中心距离为 r）：__________________________。

答：由高斯定理，易得均匀带电球面的电场分布，

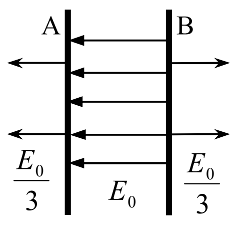
$$\vec{E}=\begin{cases}0 & (r<R)\\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r>R)\end{cases}$$

由此可知：（1）始终在气球内部的点，$E=0$，且不变。

（2）始终在气球外部的点：$\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，且不变

（3）被气球掠过的点都从球外变为球内，因此其场强大小由 $q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ 变为零。

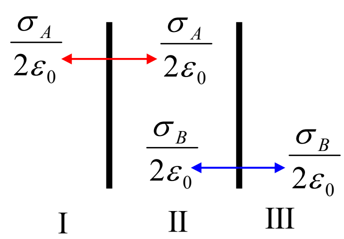
6.　A、B 为真空中两个平行的“无限大”均匀带电平面，已知两平面间的电场强度大小为 E_0，两平面外侧电场强度大小都为 $E_0/3$，方向如图。则 A、B 两平面上的电荷面密度分别为 $\sigma_A=$ $\underline{-2\varepsilon_0 E_0/3}$，$\sigma_B$ = $\underline{4\varepsilon_0 E_0/3}$ 。



解：设 A、B 两板的电荷面密度 σ_A、σ_B 均为正，各自在两侧产生的场强大小和方向如图所示。由场强叠加原理及题设条件可知：

$$\frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0}=\frac{1}{3}E_0 \quad (1)$$

$$\frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0}=E_0 \quad (2)$$



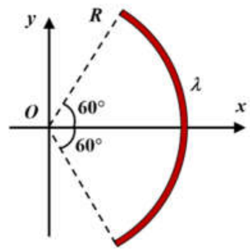
由上两式联解可得：

$\sigma_A = -2\varepsilon_0 E_0 / 3$，（负号说明与题设相反，即 $\sigma_A < 0$）

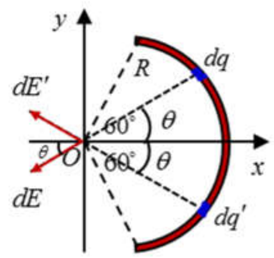
$\sigma_B = 4\varepsilon_0 E_0 / 3$

四、计算题

1. 一个均匀带电的塑料细杆被弯成半径为 R 的 120°圆环，如图所示。若塑料细杆电荷线密度为 λ，求环心 O 处的电场强度。



【解】电荷元 $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$



电荷元在 O 点的元场强

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$，方向：如图所示

场强分解：$dE_x = -dE\cos\theta, dE_y = -dE\sin\theta$

由对称性 $E_y = \int \mathrm{d}E_y = 0$

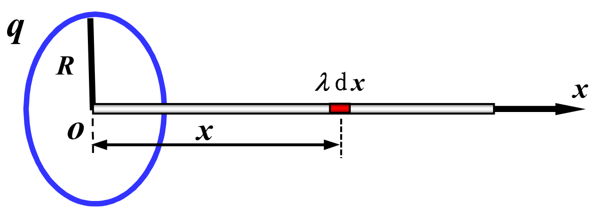
$$E = E_x = \int \mathrm{d}E_x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{\lambda\cos\theta \,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{\sqrt{3}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\vec{E} = -\frac{\sqrt{3}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\hat{i}$$

2. 一个半径为 R 的均匀带电细圆环，带电量为 q，在圆环的轴线上有一个均匀带电的直线，电荷线密度为λ，直线的起点在圆心处，终点在无穷远处，求带电圆环受到的静电力。（可能用到的积分公式：$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$）

解：方法 1 带电直线处于非均匀电场中，采用微元分析法，

带电圆环的电荷线密度 $\lambda' = \frac{q}{2\pi R}$，均匀带电直线上取电荷元 $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$



电荷元 $\mathrm{d}q$ 处的场强

$$\vec{E}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}\vec{i}$$

电荷元 $\mathrm{d}q$ 所受电场力大小 $\mathrm{d}F=E\mathrm{d}q=\dfrac{qx\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$，

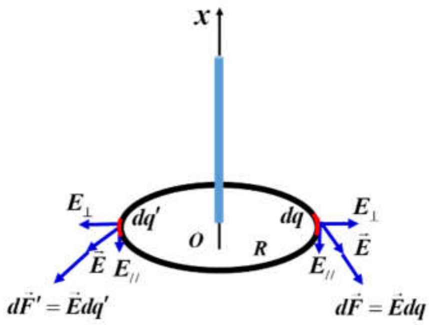
各个电荷受到的的电场力方向相同。

带电直线受到的总的电场力

$$F=\int\mathrm{d}F=\int_0^{\infty}\frac{q\lambda x}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}x=\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$，方向+x

根据牛顿第三定律，带电圆环受到的静电力 $F'=\dfrac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$，方向-x

方法 2：带电圆环在处于半无限长带电直线的电场中，该电场关于带电直线对称分布。$dq\sim dq'$ 是一对关于 O 点对称的电荷元。



将电荷元所受静电力分解为相互垂直的分量 $\mathrm{d}F_{//}$ 和 $\mathrm{d}F_{\perp}$

由对称性，$F_{\perp}=\int\mathrm{d}E_{\perp}=0$

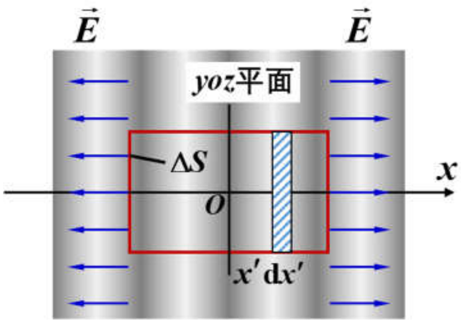
$$E_{//}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2})=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$F=F_{//}=\int\mathrm{d}F_{//}=\int E_{//}\mathrm{d}q=E_{//}\int\mathrm{d}q=E_{//}q=-\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

大小：$\dfrac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$，方向：$-x$

3. 设电荷体密度沿 x 轴按余弦规律 $\rho=\rho_0\cos x$ 分布在整个空间，式中 ρ 为电荷体密度，ρ_0 为其幅值，试求空间的电场强度分布（要求：作图、分析）

解：电荷分布虽不均匀，但具有面对称性，其激发的电场分布具有面对称性，到 x=0 的平面距离相等的点，地位等价，电场强度大小相等，方向垂直于 x=0 的平面。根据电场分布的对称性特点，作如下闭合面作为高斯面，



通过闭合面的电通量

$$\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\cdot 2\Delta S$$

闭合面内包围的电荷量

$$\sum q_{内} = \int_V \rho \mathrm{d}V = \int_{-x}^{x} \rho_0 \cos x' \cdot \Delta S \mathrm{d}x' = 2\rho_0 \Delta S \sin x$$

由高斯定理 $\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$，可得

$$E\cdot 2\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0} 2\rho_0 \Delta S \sin x$$

解得 $E\cdot = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 \sin x$

五、问答或者讨论题

类比万有引力和静电力，根据静电场的高斯定理，试写出引力场的高斯定理。

答：

静电力 $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$　　万有引力 $\vec{F} = G\frac{mm_0}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$

电场强度　$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$　　引力场强度 $\vec{a}_{引} = \frac{\vec{F}}{m_0} = G\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$

静电场高斯定理 $\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$　　引力场的高斯定理 $\oint_s \vec{a}_{引}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi G\sum m_{内}$