姓名______ 学号______ 班级______

密封装订线

西南交通大学2022—2023学年第2学期期末试卷

课程代码 MATH011512 课程名称 高等数学Ⅱ 考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

一、选择题（每小题4分，共24分）

1. 过原点且与直线$l_1: \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$和$l_2: \begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$都平行的平面方程为（ B ）.

(A) $x-z=0$ (B) $x-y+z=0$ (C) $x-y+z=1$ (D) $5x-y-3z=0$

2. 设函数$f(x)$和$g(y)$均有二阶连续导数，满足$f(0)>0$，$g(0)<0$，且$f'(0)=g'(0)=0$，则函数$z=f(x)g(y)$在点$(0,0)$处取得极小值的一个充分条件是（ C ）.

(A) $f''(0)>0, g''(0)>0$ (B) $f''(0)<0, g''(0)<0$

(C) $f''(0)<0, g''(0)>0$ (D) $f''(0)>0, g''(0)<0$

3. 二次积分$\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx=$（ A ）.

(A) $-\ln\cos 1$ (B) $\ln\cos 1$ (C) $-\ln\sin 1$ (D) 0

4. 设L为圆周$x^2+y^2=1$的正向，则$\oint_L xydx+x^2(1+y^2)dy=$（ B ）.

(A) π (B) 0 (C) $-\pi$ (D) 2π

5. 下列级数发散的是（ C ）.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\sqrt{n}}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

6. 设$f(x)$是周期为2π的函数，在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi\le x<0 \\ 1+x^2, & 0\le x<\pi \end{cases}$，则其傅里叶级数在$x=\pi$收敛于（ D ）.

(A) -1 (B) $1+\pi^2$ (C) $-\frac{\pi^2}{2}$ (D) $\frac{\pi^2}{2}$

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

7. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $\ln z+e^{z-1}=xy$ 确定的函数，则 $dz|_{(1,1)}=$ $\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy$.

8. 曲线 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 上点 M 处的切线平行于平面 $x+2y+z=4$，则点 M 的坐标为 $(-1,1,-1)$ 或 $(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27})$

9. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=4$，则 $\oint_L\left(x^2+y^2\right)^2 ds=$ 64π.

10. 将 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-x)^n}{3^{n+1}}$，$x\in(0,6)$.（需注明收敛域）

三、计算题（11、12、13 题每题 8 分，14 题 10 分，共 34 分）

11. 计算二重积分 $\iint\limits_D\left|x^2+y^2-4\right|dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 9\}$.

12. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 所围成的闭区域（包含 z 轴）.

13. 计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma(x+y+z)z\,dS$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

14. 设曲面 Σ 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所截得部分的下侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_\Sigma xy^2dydz+x^2ydzdx+zdxdy$.

四、解答题（15 题 8 分，16 题、17 题每题 9 分，共 26 分）

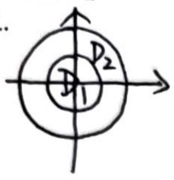
15. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 上点 $(1,1,1)$ 处沿球面在该点的内法线方向的方向导数.

16. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域与和函数.

17. 证明曲线积分 $I=\int_L\left(2xy^3-y^2\sin x\right)dx+(1+2y\cos x+3x^2y^2)dy$ 与路径无关，并计算当 L 为 $x=\dfrac{\pi}{2}y^2$ 上从点 $O(0,0)$ 到 $A(\dfrac{\pi}{2},1)$ 的一段弧时的曲线积分 I.

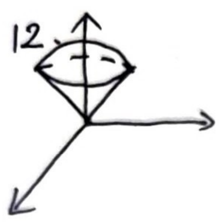
三.计算题

11.



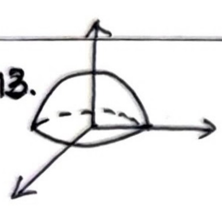
$$I=\iint_{D_1}(4-x^2-y^2)dxdy+\iint_{D_2}(x^2+y^2-4)dxdy$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4-r^2)rdr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^3(r^2-4)rdr$$
$$=\frac{41}{2}\pi$$

12.



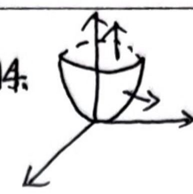
$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^1 r^3dr$$
$$=2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}$$

13.



$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\qquad z_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$
$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$
$$\iint_\Sigma(x+y+z)zdS=\iint_\Sigma xzdS+\iint_\Sigma yzdS+\iint_\Sigma z^2dS$$
$$=0+0+\iint_{x^2+y^2\le R^2}(R^2-x^2-y^2)\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$
$$=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\cdot rdr$$
$$=2\pi R\cdot(-\frac{1}{3})(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R$$
$$=\frac{2}{3}\pi R^4$$

14.



添加辅助面 Σ_1：$z=1$，$x^2+y^2\le1$，上侧

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$
$$=\iiint_\Omega(y^2+x^2+1)dxdydz-\iint_{\Sigma_1}xy^2dydz+x^2ydzdx+zdxdy$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1d\rho\int_{\rho^2}^1(\rho^2+1)\rho dz-\iint_{x^2+y^2\le1}dxdy$$
$$=2\pi\int_0^1(\rho-\rho^5)d\rho-\pi$$
$$=-\frac{\pi}{3}$$

15. 球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 上点 $(1,1,1)$ 处的法线方向为 $(2,2,2)$，内法线方向为 $(-1,-1,-1)$.

函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处的梯度为 $(2,2,2)$.

因此 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\nabla f\cdot\vec{e_l}=(2,2,2)\cdot(-\frac{\sqrt3}{3},-\frac{\sqrt3}{3},-\frac{\sqrt3}{3})=-2\sqrt3$

16. 令 $t=\frac{x}{3}$，则级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot t^n$

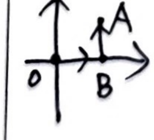
收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，$t=1$ 时发散，$t=-1$ 时收敛，收敛域为 $[-1,1)$。当 $t\in(-1,1)$ 时，

$$S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot t^n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t t^{n-1}dt=\int_0^t(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1})dt$$
$$=\int_0^t\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-t)$$，由 $S(t)$ 的连续性知 $t=-1$ 时也成立。

因此，原级数的收敛域为 $[-3,3)$，和函数 $S(x)=-\ln(1-\frac{x}{3})$，$x\in[-3,3)$.

17. $\frac{\partial P}{\partial y}=6xy^2-2y\sin x\qquad\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\sin x+6xy^2$

$P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 R^2 上有一阶连续偏导数且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，因此该曲线积分与路径无关。



$$I=\int_{OB}+\int_{BA}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0dx+\int_0^1(1+2y\cos\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}\pi^2y^2)dy$$
$$=1+\frac{3}{4}\pi^2\cdot\frac{1}{3}=1+\frac{\pi^2}{4}$$

请在各题目的答题区域内作答，超出黑色矩形边框限定区域的答案无效