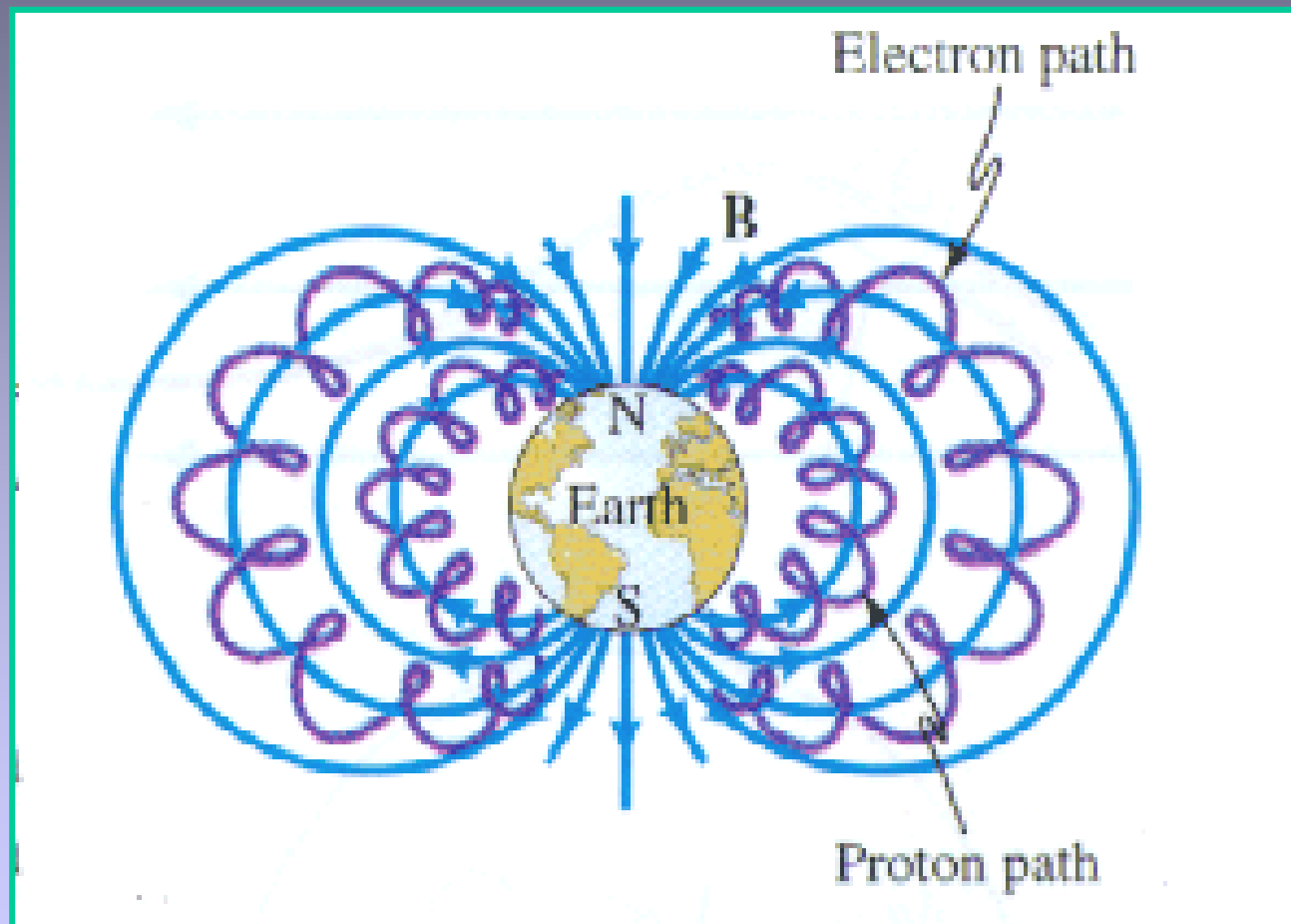


同学们好！



§ 10.1 运动电荷间相互作用*

本节讨论的“运动”电荷间相互作用



不是指场源电荷与检验电荷间相对运动。
而是指对观察者而言，场源电荷是运动的。

受力与检
验电荷运
动状态无
关

场源电荷相对
于观察者静止
(静电场) \longrightarrow 其电场分
布 E ? \longrightarrow 场中检验电荷
受力: $F = q E$

场源电荷相对
于观察者运动
(非静电场) \longrightarrow 其电场分
布 ? \longrightarrow 场中检验电荷
受力如何?

一. 运动电荷周围的电场

预备知识:

1. 电荷的相对论不变性:

在不同参考系中观察，同一带电粒子的电荷量保持不变

2. 在运动电荷产生的电场中，高斯定理仍然成立。

$$\Phi_e = \oint_{s,t} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum_{\text{int}} q / \epsilon_0$$

3. 狭义相对性原理

先在电荷相对其静止的参考系中求出场强分布，然后用相对论变换得到电荷相对其运动的参考系中的场强分布

求运动电荷电场分布的一般方法：

在电荷相对其静止参考系中：

$$E'_x \cdot E'_y \cdot E'_z \quad (\text{静电场})$$

利用满足狭义相对性原理要求的洛仑兹变换求出运动电荷电场

$$E_x \cdot E_y \cdot E_z \quad (\text{运动电荷电场})$$

下面通过一特例来说明电场在不同参考系之间的转换问题

研究对象：正方形平行板电容器之间均匀电场
(P240-247)

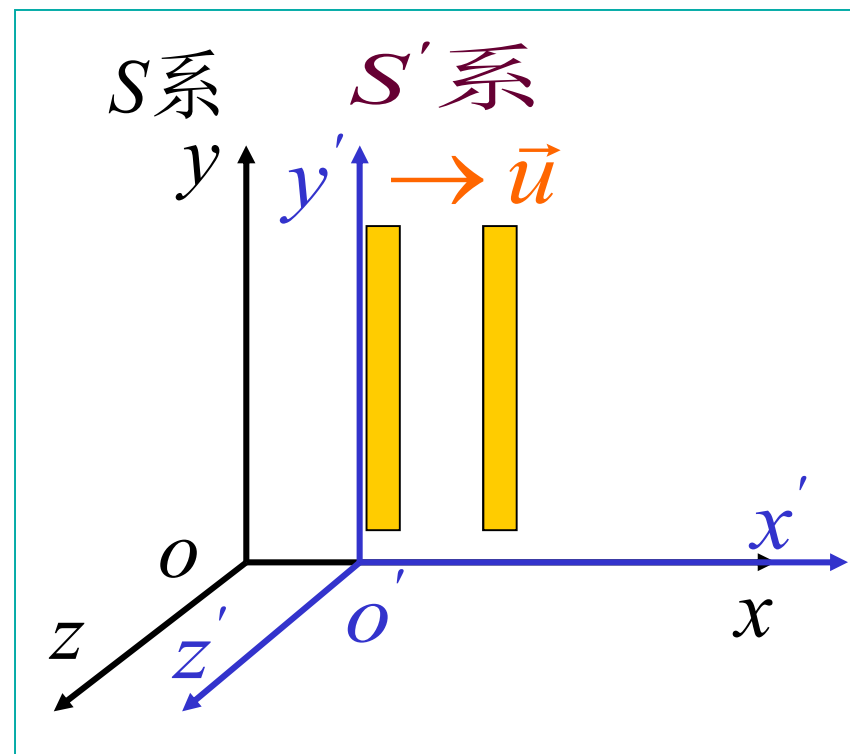
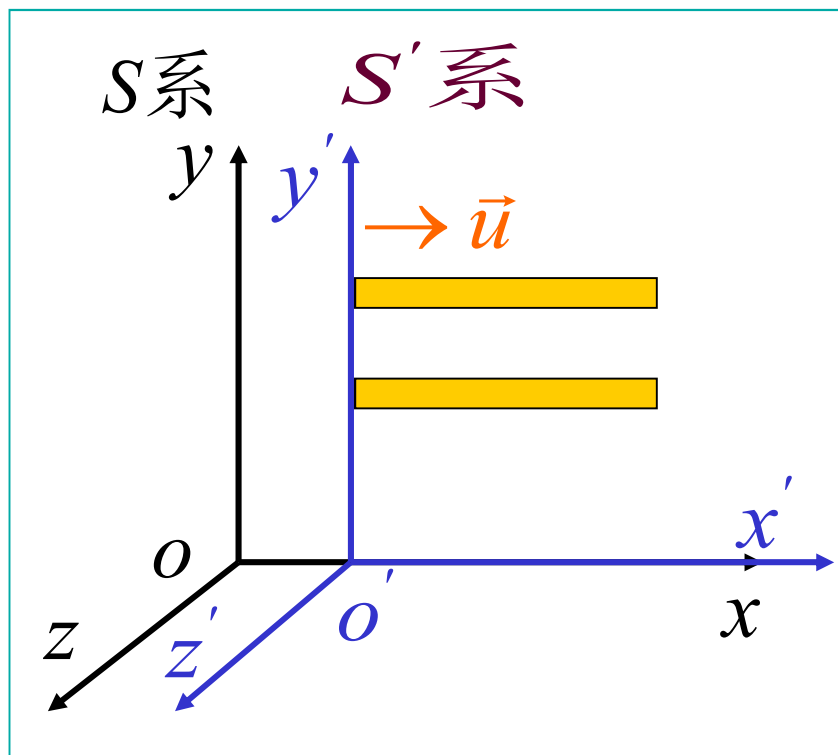
研究对象：正方形平行板电容器之间均匀电场

S' 系：固接于电容器

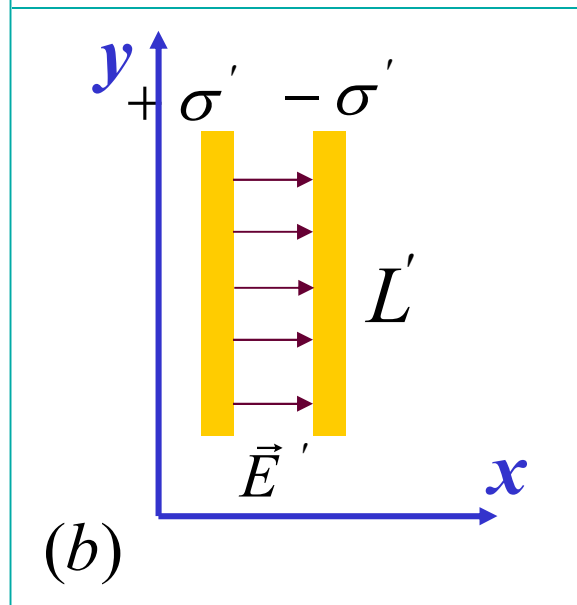
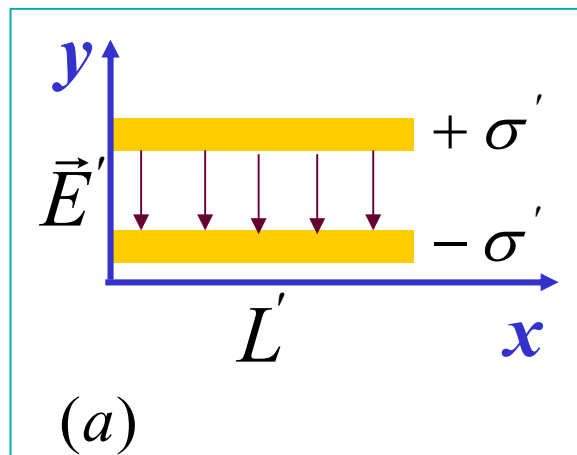
S 系：固接于观察者

(a) 讨论 $\perp \vec{u}$ 电场

(b) 讨论 $// \vec{u}$ 电场



S' 系中电容器静止(a 、 b 情况相同)



带电量:

$$Q'$$

边长(原长):

$$L'$$

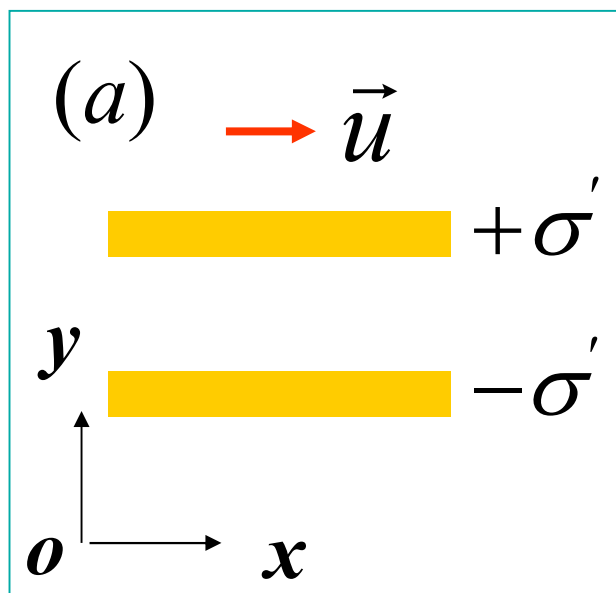
电荷密度:

$$\sigma' = \frac{Q'}{L'^2}$$

电场分布:

$$E' = \begin{cases} 0 & \text{板外} \\ \frac{\sigma'}{\epsilon_0} & \text{板间} \end{cases}$$

S 系中: 电容器以速率 u 沿 x 轴运动.



带电量: $Q = Q'$

边长:

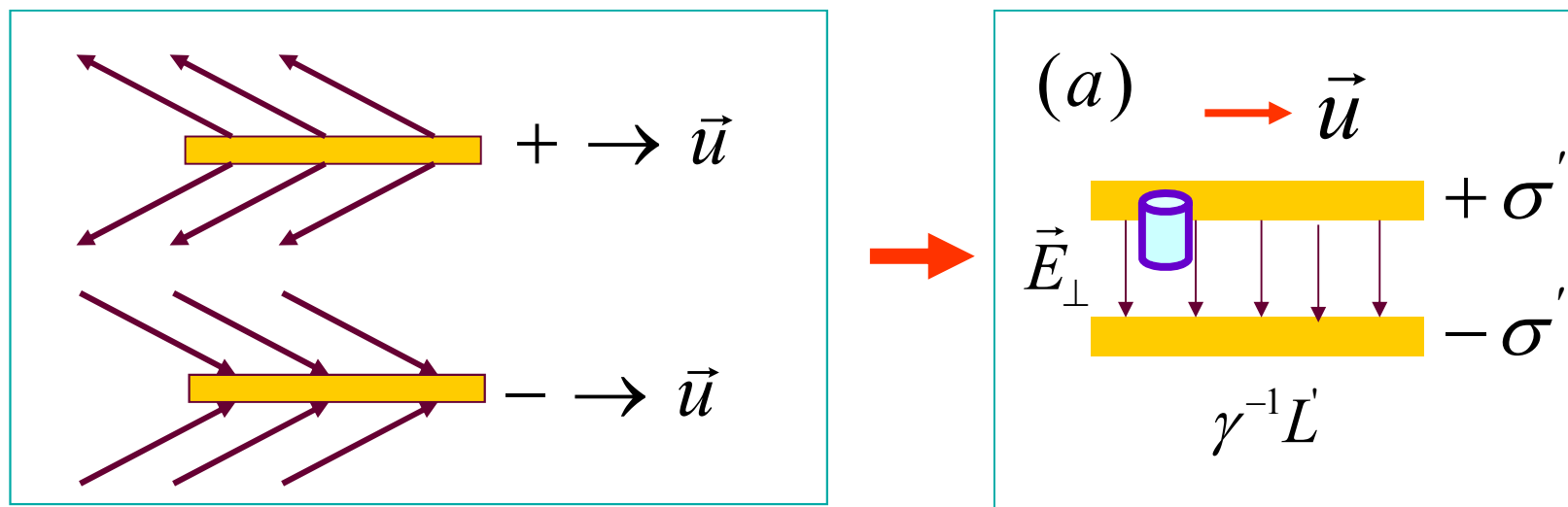
$$L_x = \gamma^{-1} L' = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} L'$$

$$L_z = L'$$

电荷密度:

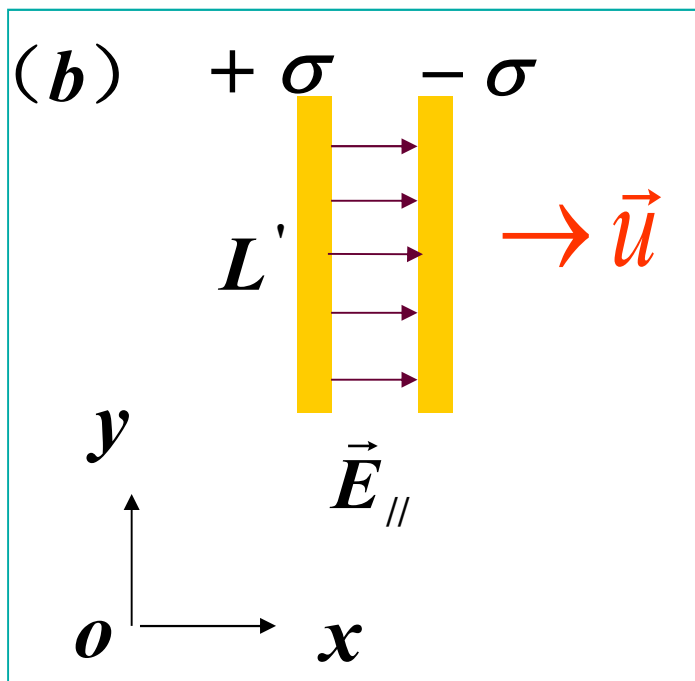
$$\sigma = \frac{Q'}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} L'^2} = \gamma \sigma'$$

电场分布： 仍有面对称性, 高斯定理仍成立



$$E = \begin{cases} 0 & \text{板外} \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \gamma \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \gamma E' & \text{板间} \end{cases}$$

即在 $\perp \vec{u}$ 方向上 $E_{\perp} = \gamma E'_{\perp}$



帶电量: $Q = Q'$

边长: $L_y = L' \quad L_z = L'$

板间距离缩短

电荷密度: $\sigma = \frac{Q'}{L'^2} = \sigma'$

电场分布: $E_{\text{外}} = 0$

$$E_{\text{内}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = E'$$

即在 $// \vec{u}$ 方向上 $E_{//} = E'_{//}$

结论：求运动电荷电场分布的一般方法：

在电荷相对其静止参考系中：

$$E'_x \cdot E'_y \cdot E'_z \quad (\text{静电场})$$

在电荷相对其运动参考系中：

$$E_x \cdot E_y \cdot E_z \quad (\text{运动电荷电场})$$

平行于相对速度 \vec{u} 方向场强不变。

垂直于相对速度 \vec{u} 方向场强扩大 γ 倍。

即：当电荷相对于观察者沿 x 方向以 \vec{u} 匀速运动时：

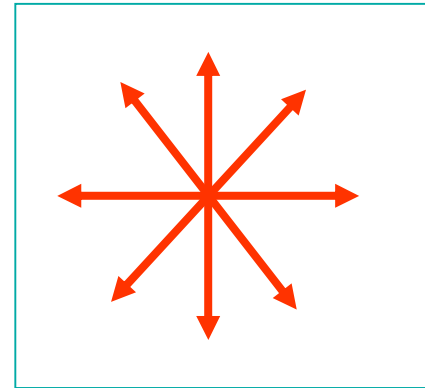
$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma E'_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \\ E_z = \gamma E'_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = E_x \\ E'_y = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} E_y \\ E'_z = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} E_z \end{array} \right.$$

比较:

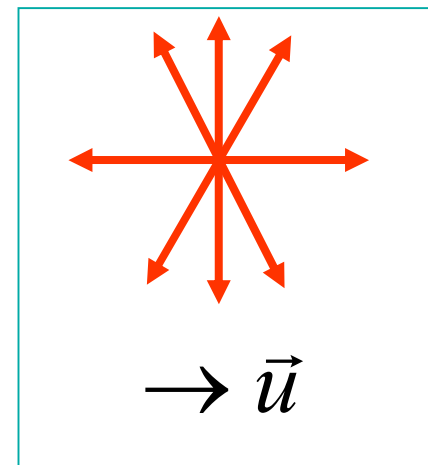
在 S' 系中 (静电场, \vec{E}' 球对称分布)

$$\vec{E}' = \frac{q\vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}$$



在 S 系中 (运动电荷的电场, \vec{E} 无球对称性)

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$



二. 运动电荷间的相互作用

S 系（观察者）中

场源电荷以 \vec{u} 运动 $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$

检验电荷以 \vec{v} 运动 $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

求场源电荷与检验电荷的相互作用

静电场中无论检验电荷运动与否，受力不变： $F=q E$

思路：总可以找到一参考系 S' ，场源电荷相对其静止，利用场的转换定律，求出 S' 中的电场 E' ，及检验电荷在其中的受力： $F' = q E'$ 。再利用不同参考系中力的变换公式，求出 S 系中检验电荷受力 F 。

$$\vec{E}' \leftrightarrow \vec{E} \quad \vec{F}' \leftrightarrow \vec{F}$$

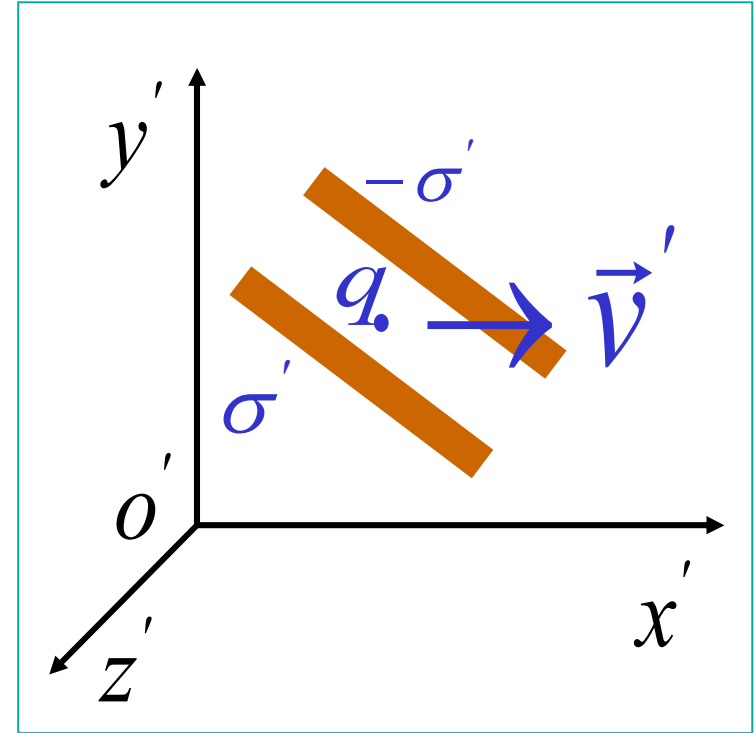
设 S' 系中: $\vec{E}' = E'_x \vec{i} + E'_y \vec{j} + E'_z \vec{k}$

如图所示:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \sqrt{1 - (u/c)^2} E_y \\ E'_z = \sqrt{1 - (u/c)^2} E_z \end{cases}$$

由 $\vec{F}' = q\vec{E}'$ 得:

$$\begin{cases} F'_x = qE'_x = qE_x \\ F'_y = qE'_y = q\sqrt{1 - (u/c)^2} E_y \\ F'_z = qE'_z = q\sqrt{1 - (u/c)^2} E_z \end{cases}$$



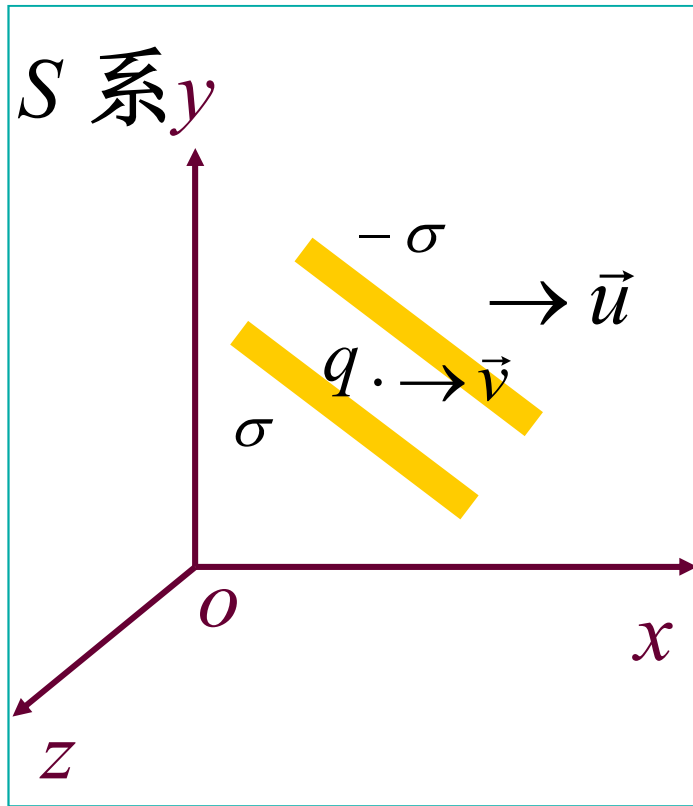
将 \vec{F}' 变换回 S 系:

相对论力的变换式:
(教材173页8.4.13式)

$$\left\{ \begin{aligned} F_x &= \frac{F'_x + \frac{u}{c^2} \vec{F}' \cdot \vec{v}'}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \\ F_y &= \frac{F'_y}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} v'_x\right)} \\ F_z &= \frac{F'_z}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} v'_x\right)} \end{aligned} \right.$$

v' 为 S' 中检验电荷运动速度, 由洛仑兹速度变换公式求出。

S系中运动电荷受力:



$$F_x = \frac{F'_x + \frac{u}{c^2} \vec{F}' \cdot \vec{v}'}{1 - \frac{u}{c^2} v'_x}$$

$$= qE_x + q(E_y v_y + E_z v_z) \frac{u}{c^2}$$

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma(1 - \frac{u}{c^2} v'_x)} = qE_y - q \frac{u v_x}{c^2} E_y$$

$$F_z = \frac{F'_z}{\gamma(1 - \frac{u}{c^2} v'_x)} = qE_z - q \frac{u v_x}{c^2} E_z$$

得在 S 系中看来，以 \vec{u} 运动的场源电荷和以 \vec{v} 运动的检验电荷间相互作用：

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{E} + q\frac{u}{c^2}[(E_y v_y + E_z v_z)\vec{i} - v_x E_y \vec{j} - v_x E_z \vec{k}] \\ &= q\vec{E} + q\vec{v} \times (\frac{\vec{u}}{c^2} \times \vec{E})\end{aligned}$$

只与场源电荷有关

令



$$\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c^2} \times \vec{E}$$

磁感应强度

与受力电荷的运动速度有关的这一部分称为**磁力**

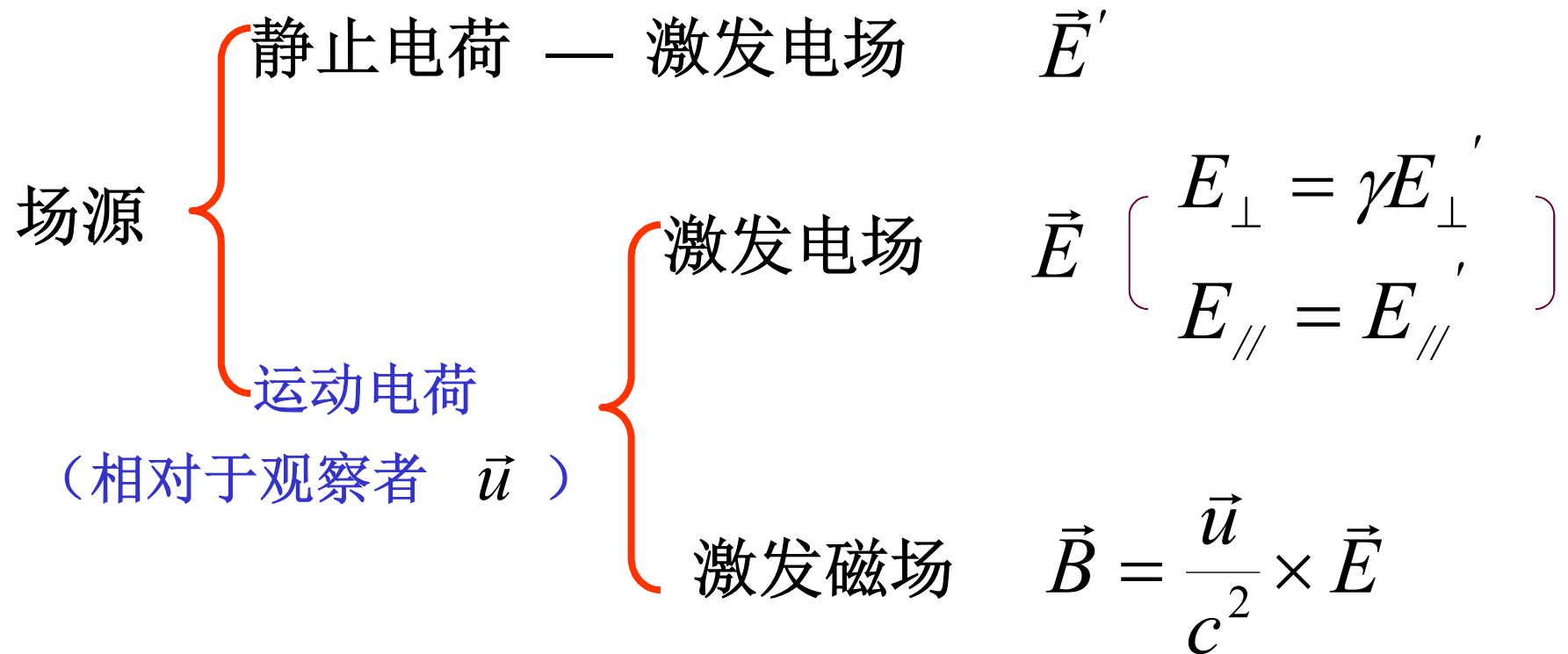
对于磁力引入**磁场**来加引描述

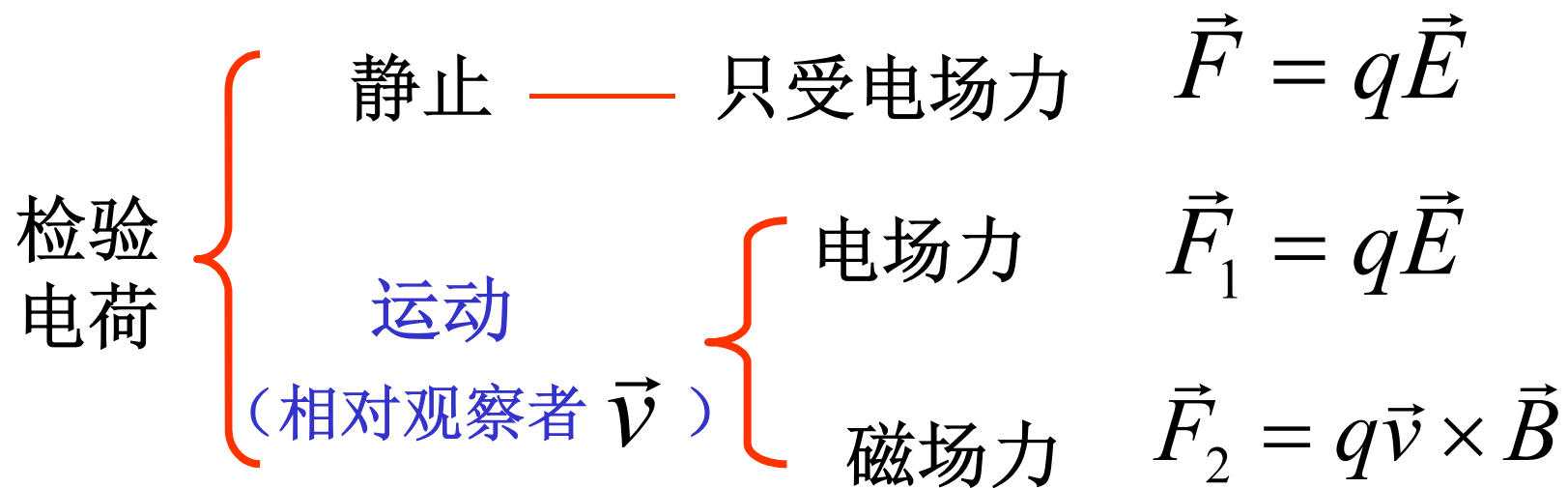
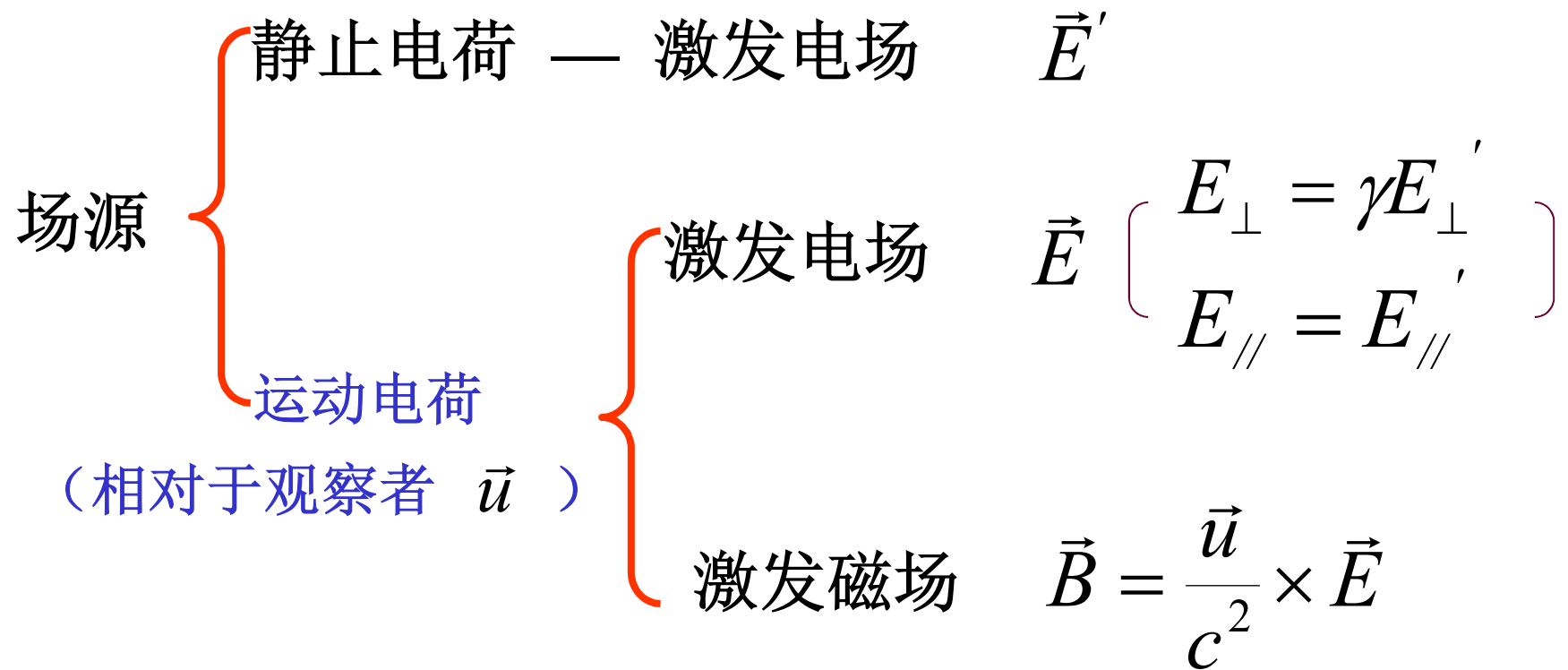
得: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$



电场力磁场力

电场和磁场的描述都有赖于电荷的速度，速度和参考系的选择有关，所以电场和磁场的描述只有相对意义，它们本身是统一的一个整体，在不同条件下存在形式不同：





§ 10.2 磁感应强度 毕 — 萨定律及其应用

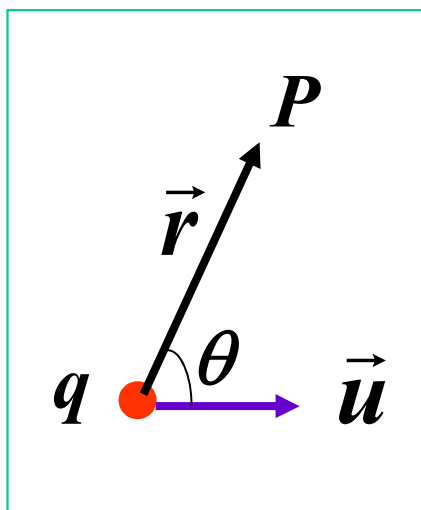
一. 磁感应强度

1. 定义: $\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{u} \times \vec{E}$ 单位: 特斯拉 (SI)

1特=10⁴高斯

磁场是电场的相对论效应

[例] 相对于观察者以 \vec{u} 匀速直线运动的点电荷的磁场



解: 将 $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$

代入 $\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{u} \times \vec{E}$

得:
$$\vec{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \vec{u} \times \vec{r}$$

定义真空磁导率:

$$\mu_0 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} = \frac{4\pi \times 9 \times 10^9}{(3 \times 10^8)^2} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N s}^2 \text{ C}^{-2}$$

在 $u \ll c$ 条件下 $\beta = \frac{u}{c} \rightarrow 0$

得:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{u} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

\vec{B} 的大小, 方向?

2. 磁场叠加原理

如果空间不止一个运动电荷，则空间某点总磁感应强度等于各场源电荷单独在该点激发的磁感应强度的矢量和：

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i$$

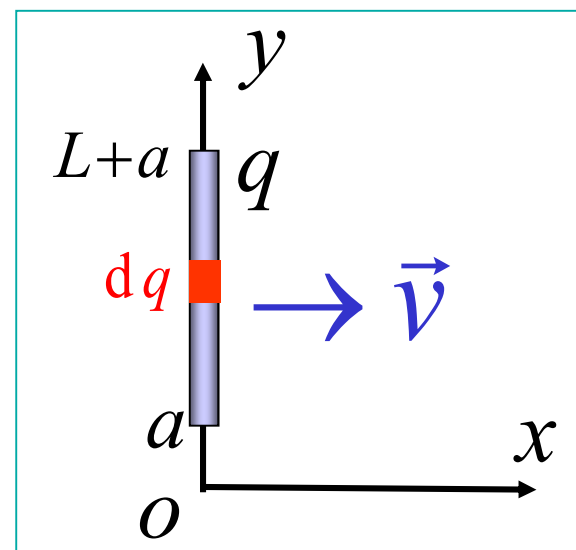
练习

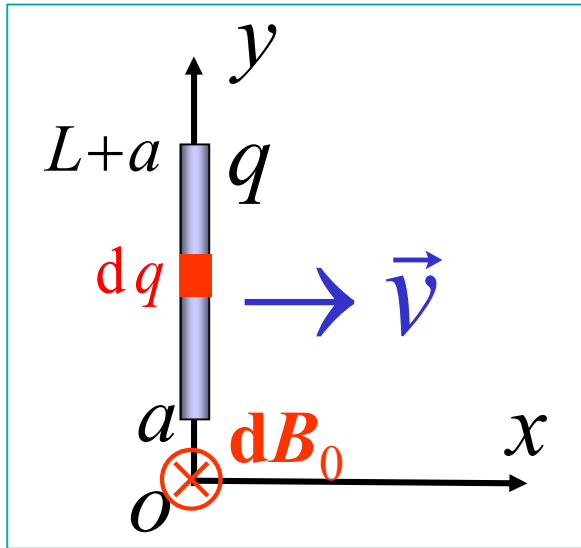
已知： $L = 0.1 \text{ m}$, $q = 10^{-10} \text{ C}$, $v = 1 \text{ ms}^{-1}$, $a = 0.1 \text{ m}$

求： $B_0 = ?$

解： 在 L 上取 $dq = \frac{q}{L} dy$

$d\vec{B}$ 的大小，方向？





dq 以 \vec{v} 沿 $+x$ 运动

$$dB_0 = \frac{\mu_0 dq v y \sin 90^\circ}{4\pi y^3}$$

$$= \frac{\mu_0 q v dy}{4\pi L y^2} \quad \text{方向 } \otimes$$

各 dq 在 O 点处 $d\vec{B}$ 同向:

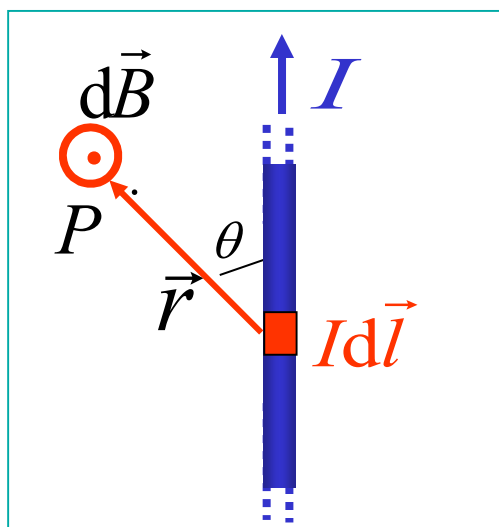
$$B = \int dB = \int_a^{L+a} \frac{\mu_0 q v dy}{4\pi L y^2} = \frac{\mu_0 q v}{4\pi L} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L} \right) = 5 \times 10^{-6} (\text{T})$$

方向垂直于纸面向里。

二. 毕 — 萨定律

1820年： 奥斯特发现电流的磁效应

毕 — 萨定律： 电流元产生磁场的规律, 与点电荷电场公式作用地位等价



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

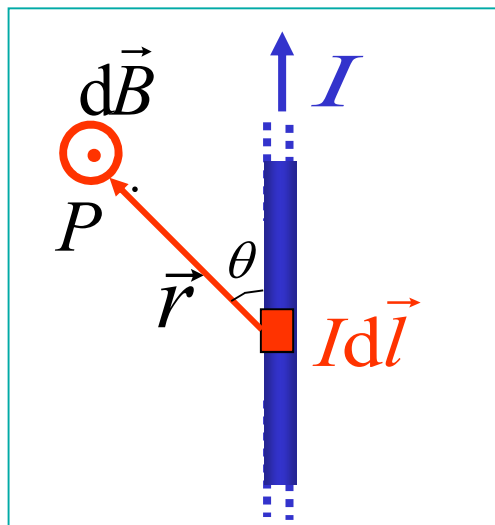
推证：出发点

运动点电荷磁场

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{u} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

磁场叠加原理

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i$$



设：电流元 $I d\vec{l}$ ，截面积 S

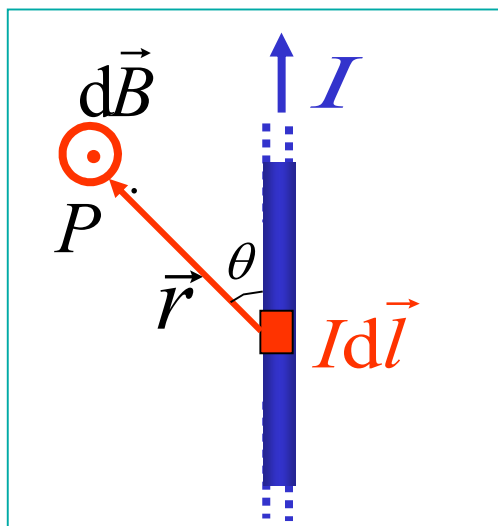
载流子电量 q ，密度 n ，漂移速度 \vec{u}

则：电流元中载流子数 $N = nSdl$

每个载流子在场点 P 处磁场

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 q \vec{u} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

$$\text{电流元在场点 } P \text{ 处磁场 } d\vec{B} = N\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 nSq dl \vec{u} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$



$$d\vec{B} = N\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 nSq \, dl\vec{u} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

$$\because I = nqSu$$

$$\therefore d\vec{B} = \frac{\mu_0 Id\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

电流元在场点 P 处磁场

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{大小:} & dB = \frac{\mu_0 Idl \sin \theta}{4\pi r^2} \\ \text{方向:} & \text{右手法则} \end{array} \right.$$

毕 — 萨定律应用

求解电流磁场分布基本思路：

将电流视为电流元
(或典型电流) 的
集合

电流元 (或典型
电流) 磁场公式
和磁场叠加原理

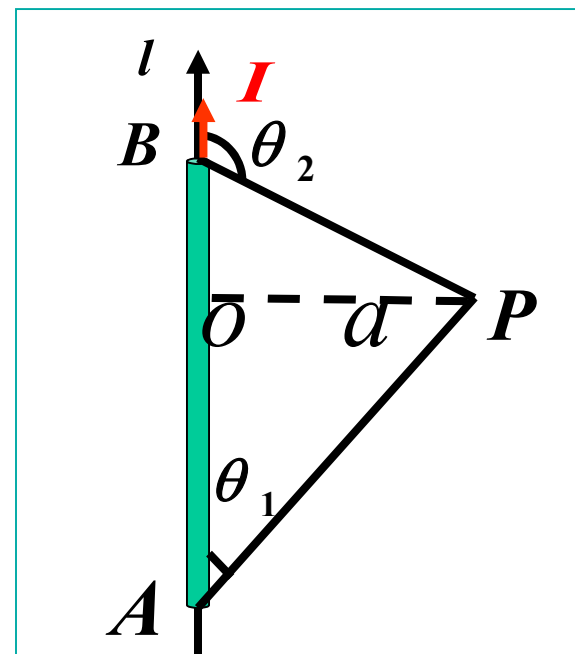
电流磁
场分布

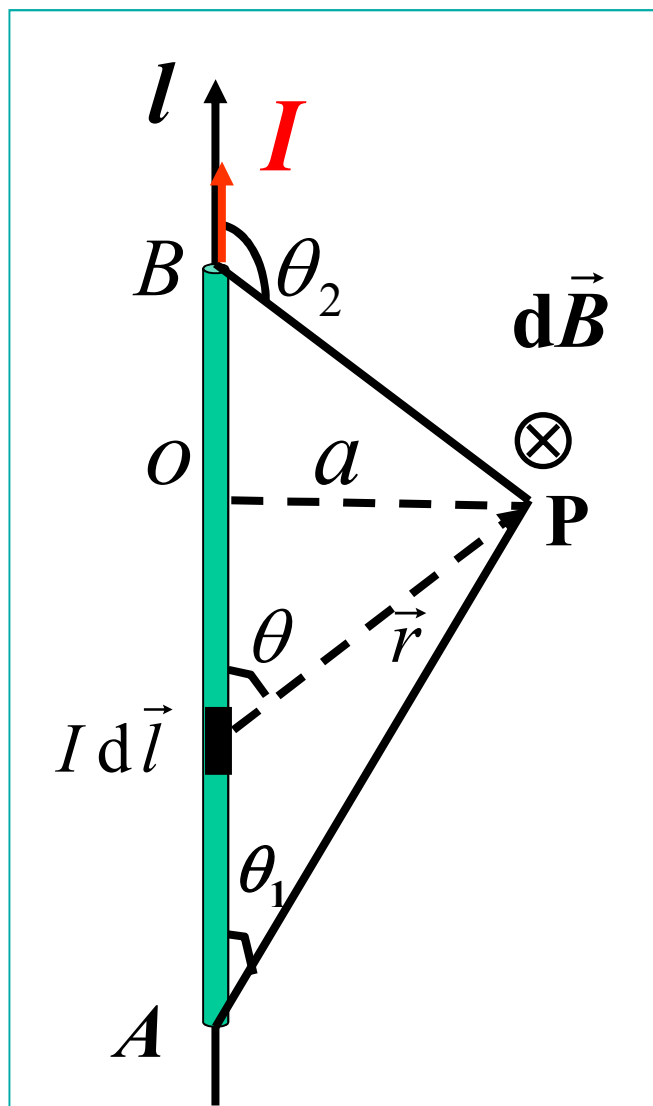
应用举例： 讨论一些典型电流的磁场分布

[例一] 直线电流的磁场

已知： I . a . θ_1 . θ_2

求： \vec{B} 分布





解：在直电流（ AB ）上取电流元 $I d\vec{l}$

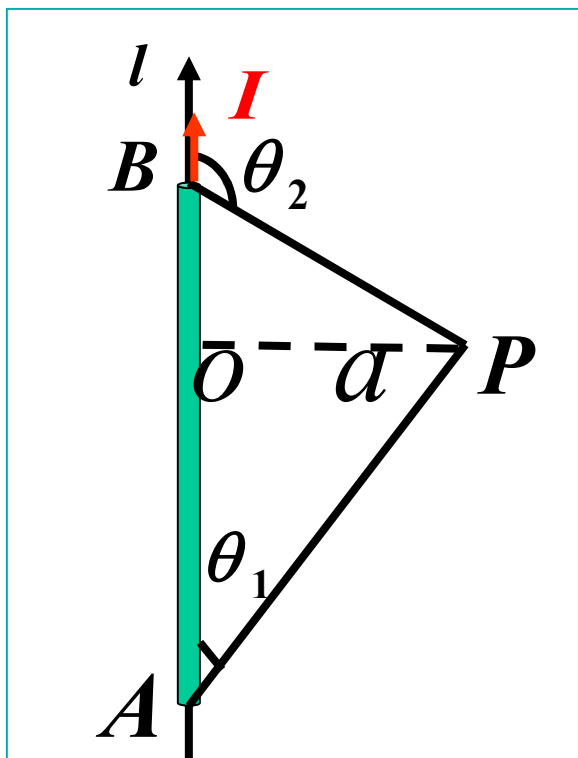
$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4 \pi r^2} ; \text{方向 } \otimes$$

各电流元在 P 点 $d\vec{B}$ 同向

$$B = \int dB = \int_A^B \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4 \pi r^2}$$

统一变量：

$$l = -a \cot \theta \quad dl = \frac{a d\theta}{\sin^2 \theta} \quad r = \frac{a}{\sin \theta}$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad \text{方向 } \otimes$$

式中：

a ：场点到直电流距离

θ_1 ：起点到场点矢径与 I 方向夹角

θ_2 ：终点到场点矢径与 I 方向夹角

讨论：

1. 无限长直电流 $\vec{B} = ?$

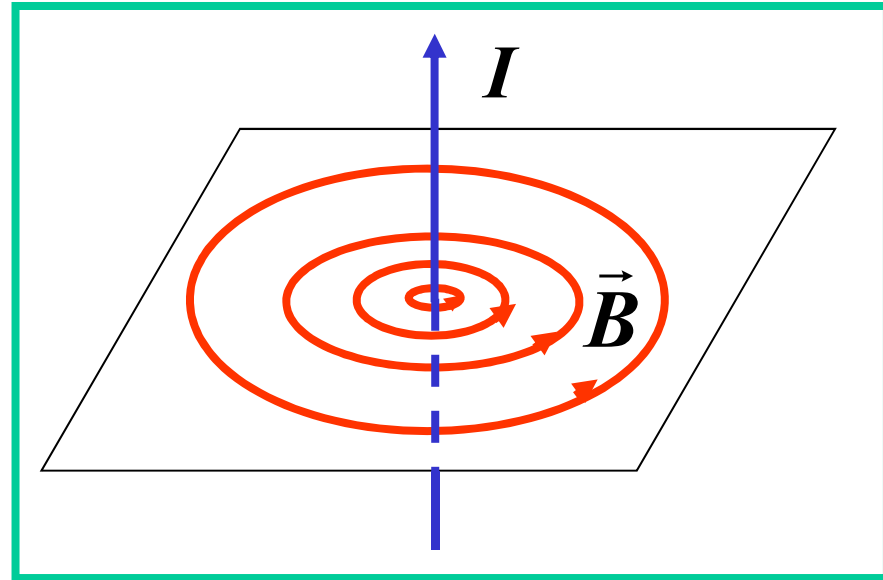
2. 直导线及其延长线上点 $\vec{B} = ?$

讨论: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$

1. 无限长直电流

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$



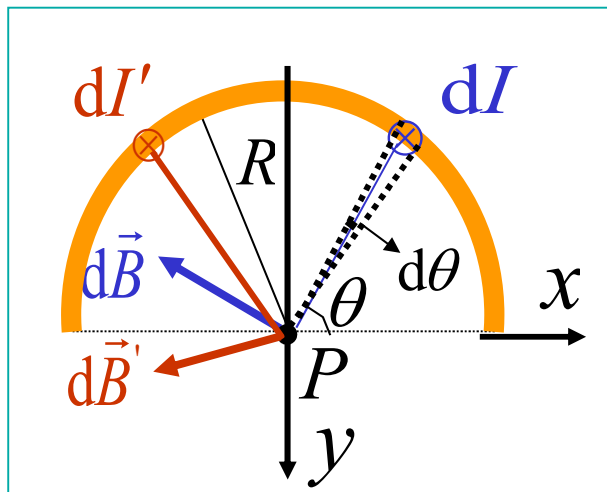
2. 直导线及其延长线上点

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2}$$

$$\theta = 0 \text{ 或 } \pi, \quad dB = 0 \quad \vec{B} = 0$$

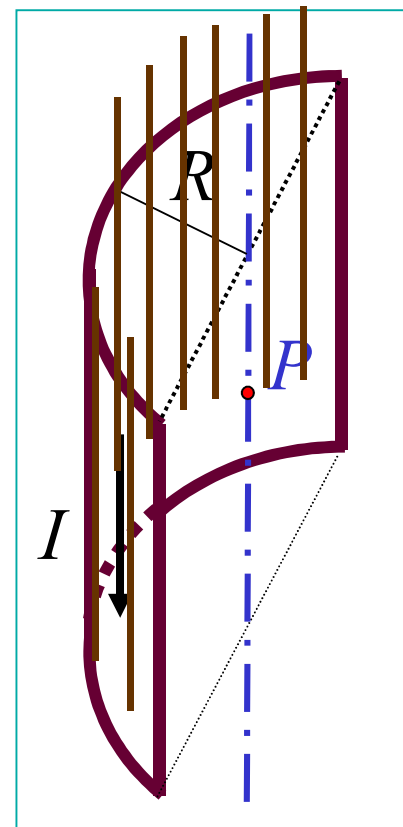
练习：半径 R , 无限长半圆柱金属面通电流 I , 求轴线上 \vec{B}

解：通电半圆柱面 \Rightarrow
电流线(无限长直电流)集合



$$dI = \frac{I}{\pi R} \cdot R d\theta = \frac{I d\theta}{\pi}$$

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I d\theta}{2\pi^2 R}$$



由对称性： $B_y = \int dB_y = 0$

$$B = B_x = \int dB \sin \theta = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I \sin \theta d\theta}{2\pi^2 R} = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

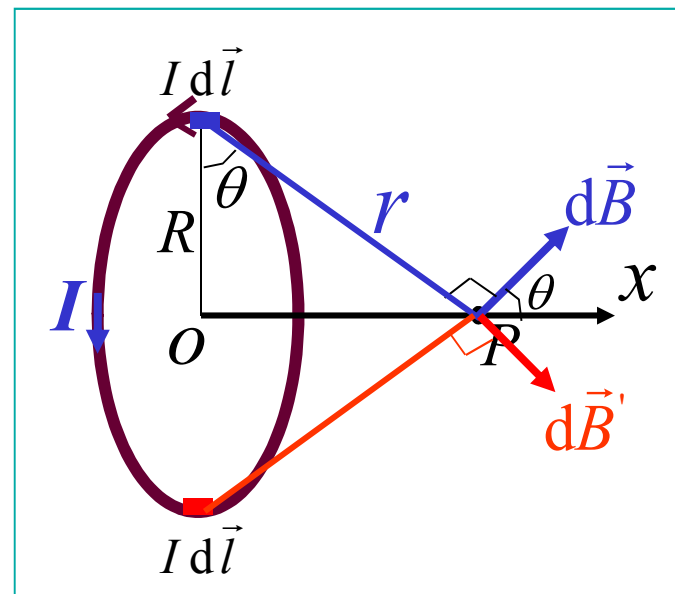
沿 $-x$ 方向

例2. 求圆电流轴线上的磁场(I, R)

解: 在圆电流上取电流元 $I d\vec{l}$

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin 90^\circ}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}$$

方向如图

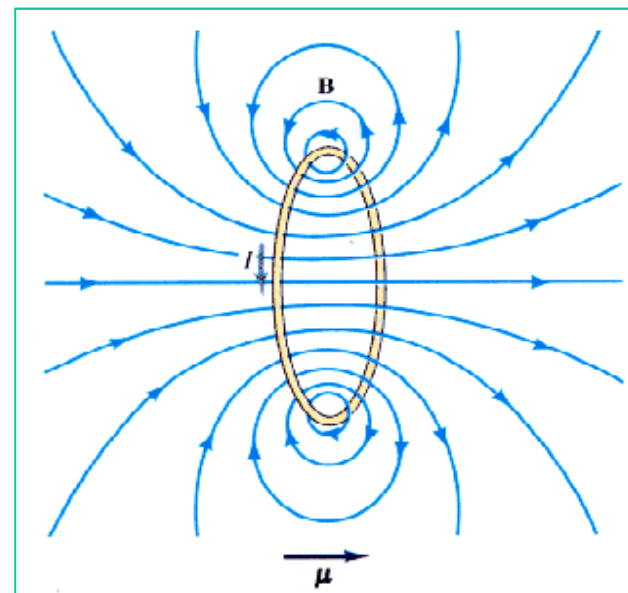


各电流元在 P 点 $d\vec{B}$ 大小相等，方向不同，由对称性：

$$B_{\perp} = \int dB_{\perp} = 0$$

$$B = B_{\parallel} = \int dB \cos \theta = \int \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \frac{R}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$



讨论:

1. 定义电流的磁矩

$$\vec{P}_m = I \cdot S \vec{n}$$

S : 电流所包围的面积

规定正法线方向: \vec{n} 与 I 指向成右旋关系

圆电流磁矩: $\vec{P}_m = I \cdot \pi R^2 \vec{n}$

圆电流轴线上磁场:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2 \vec{i}}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \vec{P}_m}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

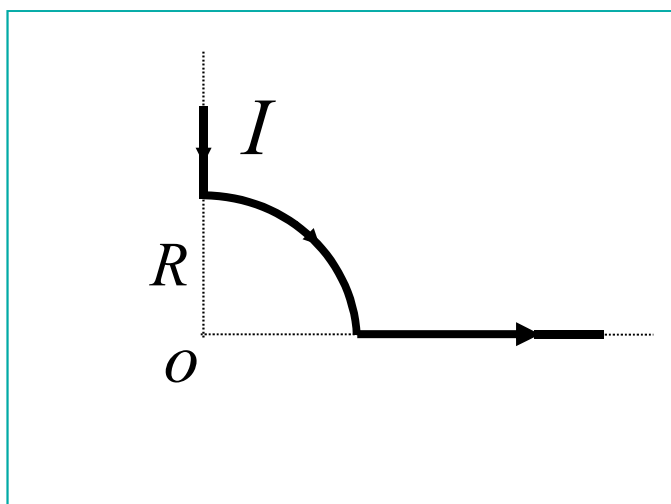
2. 圆心处磁场

$$x = 0 \quad B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} ; \quad N \text{匝}: B_0 = \frac{N \mu_0 I}{2R}$$

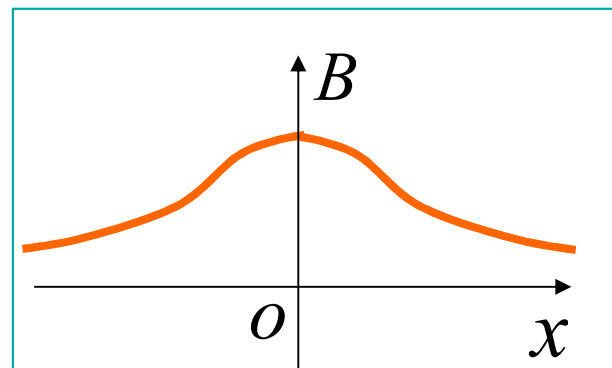
3. 画 $B-x$ 曲线

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{i}$$

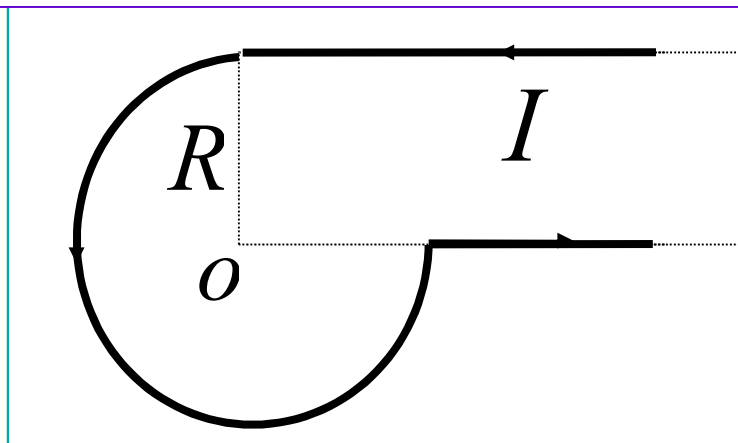
练习: $B_o = ?$



$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{8R} \quad \otimes$$



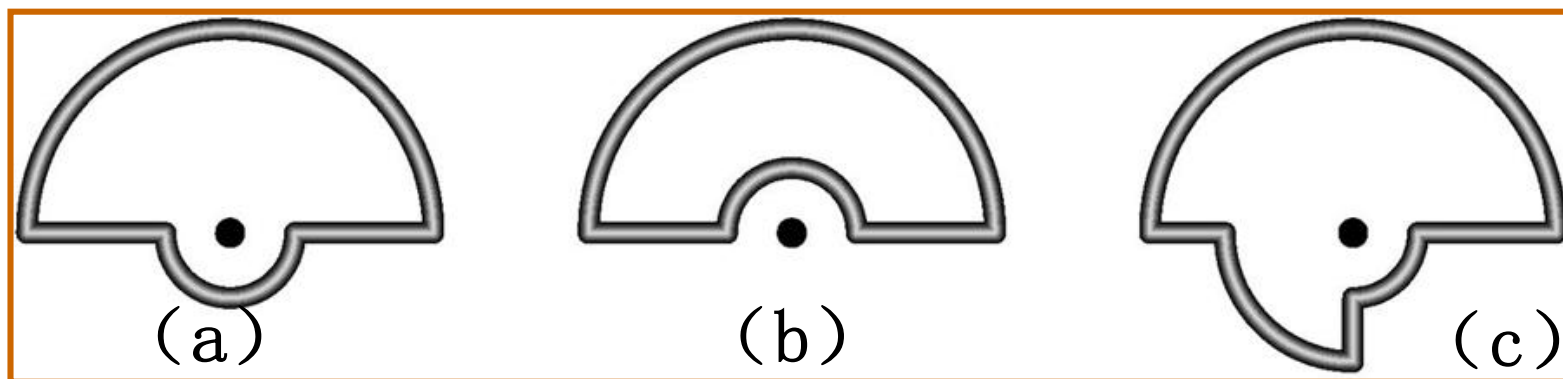
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$



$$B_0 = \frac{3\mu_0 I}{8R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \quad \odot$$

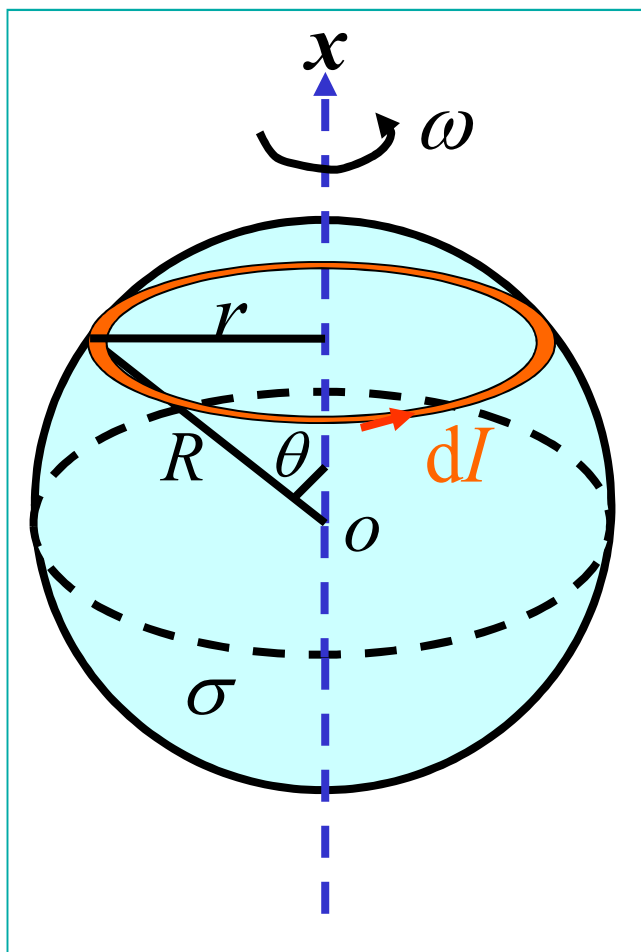
课堂练习

三个电流在曲率中心（图中小点）激发的 B 的大小关系？



$$a > c > b$$

[例三] 均匀带电球面 (R, σ), 绕直径以 ω 匀速旋转
求球心处 \vec{B}_0



解:

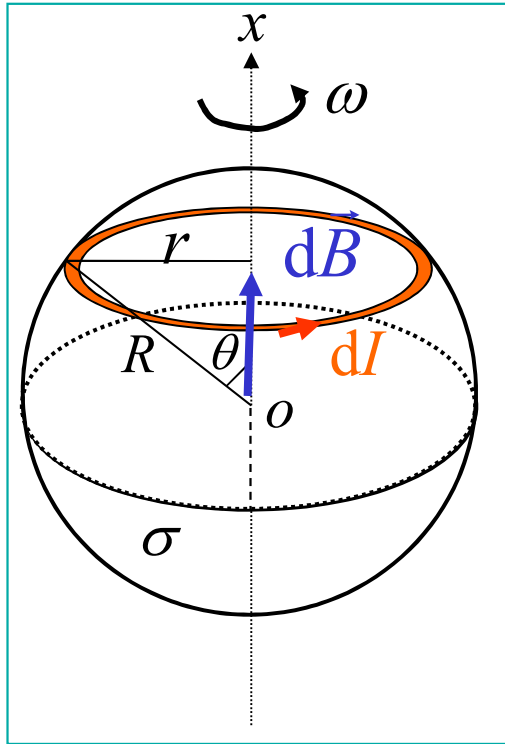
旋转带电球面 $\xrightarrow{\text{等效}}$ 许多环形电流

取半径 r 的环带

$$dq = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi r R d\theta$$

等效圆电流:

$$dI = \frac{\omega dq}{2\pi} = \sigma R^2 \omega \sin \theta d\theta$$



$$\begin{aligned}
 dB &= \frac{\mu_0 r^2 dI}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\mu_0 \sigma R^2 \omega \sin \theta d\theta \cdot R^2 \sin^2 \theta}{2R^3} \\
 &= \frac{R}{2} \mu_0 \sigma \omega \sin^3 \theta d\theta
 \end{aligned}$$

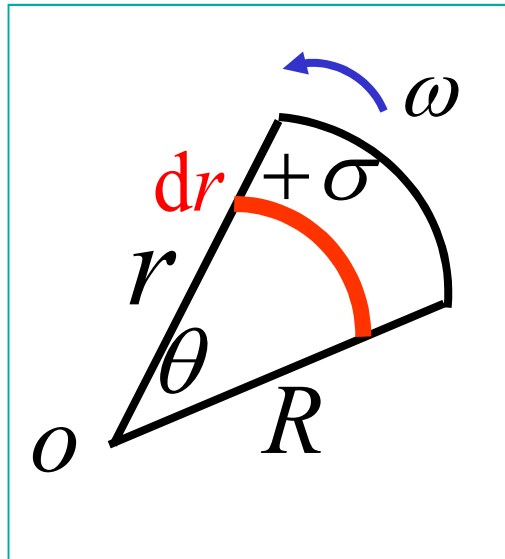
$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{2} R \sigma \omega \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \mu_0 R \sigma \omega$$

写成矢量式:

$$\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 R \sigma \vec{\omega}$$

练习： P.281 10-7 一扇形薄片，均匀分布正电荷

已知： R . θ . σ . ω 求： $B_0 = ?$



思考： $dq = ?$ $dI = ?$ $dB = ?$

$$dq = \sigma r \theta dr \quad dI = \frac{\omega dq}{2\pi}$$

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r}$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega \theta}{4\pi} \int_0^R dr = \frac{1}{4\pi} \mu_0 \sigma \omega \theta R$$

写成矢量式： $\vec{B}_0 = \frac{1}{4\pi} \mu_0 \sigma \theta R \vec{\omega}$

小结：用毕 — 沙定律求 \vec{B} 分布

- (1) 将电流视为电流元集合（或典型电流集合）
- (2) 由毕 — 沙定律（或典型电流磁场公式）得 $d\vec{B}$
- (3) 由叠加原理 $\vec{B} = \int d\vec{B}$ （分量积分）

自学

载流直螺线管轴线上磁场. 记住结果:

无限长载流直螺线管内的磁场:

$$B = \mu_0 n I$$

(下讲用安培环路定理求解)

典型电流磁场公式:

1. 无限长直电流: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

2. 圆电流轴线上磁场:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2 \vec{i}}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \vec{P}_m}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

圆电流圆心处磁场: $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$

3. 无限长载流直螺线管内的磁场: $B = \mu_0 n I$

电流的磁矩:

$$\vec{P}_m = I \cdot S \vec{n}$$