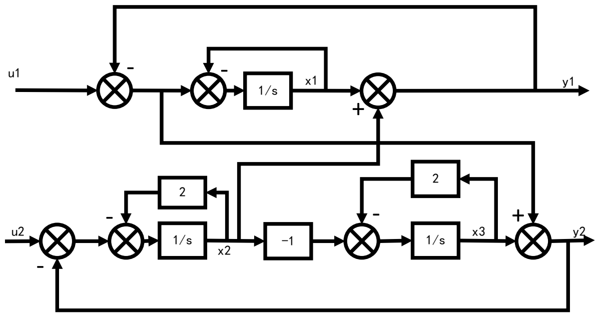
第二章作业参考答案

第一题： 系统的传递函数：$T(s)=\dfrac{KG_1G_2}{KG_1G_2+s(1+G_1G_2H_1+G_1G_2H_2+G_1H_3)}$

第二题： $\dfrac{V_2(s)}{V_1(s)}=-\dfrac{(R_2C_2s+1)(R_1C_1s+1)}{R_1C_2s}=-\dfrac{(0.02s+1)(0.1s+1)}{0.01s}$

第三题：

方法1、化简上图环节，如下图所示。



$\dot{x}_1=-2x_1-x_2+u_1$

$\dot{x}_2=x_1-x_2-x_3-u_1+u_2$

$\dot{x}_3=-x_2-2x_3$

$y_1=x_1+x_2$

$y_2=-x_1-x_2+x_3+u_1$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1&0\\1&-1&-1\\0&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

代入公式$C(sI-A)^{-1}B+D$

有传递函数矩阵$\frac{1}{(s+2)^2(s+1)}\begin{bmatrix}s+1&(s+2)(s+1)\\0&-(s+2)^2\end{bmatrix}+D=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+2)^2}&\frac{1}{s+2}\\1&-\frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$

方法二、

极点为-2、-1.

$$x_1=(u_1-y_1)\frac{1}{s+1}$$
$$x_2=(u_2-y_2)\frac{1}{s+2}$$
$$x_3=x_2\cdot\frac{-1}{s+2}$$
$$y_1=x_1+x_2$$
$$y_2=x_3+u_1-y_1=x_3+u_1-x_1-x_2$$

$$\Rightarrow\quad sx_1=-x_1+u_1-y_1=-2x_1-x_2+u_1$$
$$sx_2=-2x_2+u_2-y_2=x_1-x_2-x_3-u_1+u_2$$
$$sx_3=-x_2-2x_3$$
$$y_1=x_1+x_2$$
$$y_2=-x_1-x_2+x_3+u_1$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1&0\\1&-1&-1\\0&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\qquad sI-A=\begin{bmatrix}s+2&1&0\\-1&s+1&+1\\0&1&s+2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1&1\\1&s+2\end{bmatrix}&-\begin{bmatrix}1&0\\1&s+2\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1&0\\s+1&1\end{bmatrix}\\-\begin{bmatrix}-1&1\\0&s+2\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}s+2&0\\0&s+2\end{bmatrix}&-\begin{bmatrix}s+2&0\\-1&1\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}-1&s+1\\0&1\end{bmatrix}&-\begin{bmatrix}s+2&1\\0&1\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}s+2&1\\-1&s+1\end{bmatrix}\end{bmatrix}}{(s+2)^2(s+1)}\Rightarrow\frac{\begin{bmatrix}s^2+3s+1&-s-2&1\\s+2&(s+2)^2&-s-2\\-1&-s-2&s^2+3s+3\end{bmatrix}}{(s+2)^2(s+1)}$$

$$G(s)=\frac{\begin{bmatrix}s^2+4s+3&s^2+3s+2&-s+1\\-s^2-4s-4&-s^2-4s-4&s^2+4s+4\end{bmatrix}}{(s+2)^2(s+1)}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\0&0\end{bmatrix}+D=\frac{\begin{bmatrix}s+1&s^2+3s+2\\0&-s^2-4s-4\end{bmatrix}}{(s+2)^2(s+1)}+D$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+2)^2}&\frac{1}{(s+2)}\\1&\frac{-1}{s+1}\end{bmatrix}$$

第四题:

$$(1)\ \frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{k_1k_2k_3}{s(Ts+1)}}{1+\frac{k_1k_2k_3}{s(Ts+1)}}=\frac{k_1k_2k_3}{Ts^2+s+k_1k_2k_3}$$

$$\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{G_c(s)\frac{k_1k_2k_3}{s(Ts+1)}-\frac{k_3k_4}{Ts+1}}{1+\frac{k_1k_2k_3}{s(Ts+1)}}=\frac{k_1k_2k_3G_c(s)-k_3k_4s}{Ts^2+s+k_1k_2k_3}$$

（2）根据题意 $\frac{C(s)}{N(s)}=0\quad\Rightarrow\quad k_1k_2k_3G_c(s)-k_3k_4s=0\quad\Rightarrow\quad G_c(s)=\frac{k_4s}{k_1k_2}$

第五题:

第六题:

根据 KVL 得到$LC\dfrac{d^2v_c}{dt^2}+RC\dfrac{dv_c}{dt}+v_c=v_i$； $i=C\dfrac{dv_c}{dt}$

（1） 选择储能原件特征变量为系统的状态变量

可得到 $\dot{x}_1=\dfrac{1}{C}i=\dfrac{1}{C}x_2$， $\dot{x}_2=-\dfrac{1}{L}x_1-\dfrac{R}{L}x_2+\dfrac{1}{L}v_i$

$y=x_1$

列写成标准形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1/C\\ -1/L & -R/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1/L\end{bmatrix}v_i$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

（2） 选择上述特征变量的线性组合

$$\dot{x}_2^*=\frac{1}{C}i=\frac{1}{RC}({x^*}_1-{x^*}_2)$$

$$\dot{x}_1^*=\dot{x}_2^*+R\frac{di}{dt}=\frac{1}{RC}({x^*}_1-{x^*}_2)+\frac{R}{L}(v_i-{x^*}_1)$$

$$y={x^*}_2$$

列写成标准形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1^*\\ \dot{x}_2^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{R}{C}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{RC}\\ \dfrac{1}{RC} & -\dfrac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{x^*}_1\\ {x^*}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{R}{L}\\ 0\end{bmatrix}v_i$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{x^*}_1\\ {x^*}_2\end{bmatrix}$$

第七题：

(1) $$G_1(s)=\frac{3}{s^3+7s^2+14s+8} \qquad (2)$$

$$G_2(s)=C(sI-A)^{-1}B$$

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} s-1 & -1 & 1 \\ -4 & s-3 & 0 \\ 2 & -1 & s-10 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s-3 & 0 \\ -1 & s-10 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & s-10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ s-3 & 0 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & s-10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 2 & s-10 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -4 & s-3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ -4 & s-3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}}{s^3-14s^2+37s+20}$$

$$G_2(s)=[20\quad 30\quad 10]\frac{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s-3 & 0 \\ -1 & s-10 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & s-10 \end{bmatrix} & 3-s \\ -\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & s-10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 2 & s-10 \end{bmatrix} & -4 \\ \begin{bmatrix} -4 & s-3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} & s^2-4s-1 \end{bmatrix}}{s^3-14s^2+37s+20}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{10s^2-60s-70}{s^3-14s^2+37s+20}$$

第八题:

(1)
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(2)
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

第九题

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\; sI-A=\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}\; \left(sI-A\right)^{-1}=\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\Phi\left(t\right)=e^{At}=L^{-1}\left[\left(sI-A\right)^{-1}\right]=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因为$B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$u(t)=I(t)$

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}1 & t\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}1 & t-\tau\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}t+1\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}t-\tau\\1\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}t+1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}t^2\\t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}t^2+t+1\\t+1\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x=\frac{1}{2}t^2+t+1$$

第十题

$$\dot{x}=-(10+10K)x+10Kr$$
$$y=x$$