第一章作业题

1. 试说明信息、消息和信号三者的联系与区别.

A. 区别：(1).概念：信息是事物运动状态或存在方式的不确定性描述；消息是指能被人的感觉器官所感知的事物运动状态或存在方式的表现形式；信号是消息的物理表现形式；

(2). 信息是抽象的概念，消息是具体的概念，而信号则是物理性的概念

B. 联系：消息中包含信息，是信息的载体，信息是消息中隐含的本质内容；信号是消息的表现形式，消息是信号的具体内容；信号是信息的物理载体，消息是信号中携带的内容

•

2. 从你的实际生活中列举出三种不同类型的通信系统模型，并说明它们各自包括的主要功能模块及其作用.

答案很多。

第二章作业题

1. 一副充分洗乱了的牌（含 52 张牌），试问

(1) 任一特定排列所给出的信息量是多少？

(2) 若从中抽取 13 张牌，所给出的点数都不相同能得到多少信息量？

解： (1) 52 张牌共有 52！种排列方式，假设每种排列方式出现是等概率的，则任一特定排列所给出的信息量是：

$$p(x_i)=\frac{1}{52!};\quad I(x_i)=-\log p(x_i)=\log 52!=225.581\ bit$$

(2) 52 张牌共有 4 种花色、13 种点数，抽取 13 张点数不同的牌的概率如下：

$$p(x_i)=\frac{4^{13}}{C_{52}^{13}}$$

$$I(x_i)=-\log p(x_i)=-\log\frac{4^{13}}{C_{52}^{13}}=13.208\ \ bit$$

2. 从大量统计资料知道，男性中红绿色盲的发病率为 7%，女性发病率为 0.5%，如果你问一位男士："你是否是色盲？"他的回答可能是"是"，可能是"否"，问这两个回答中各含多少信息量，平均每个回答中含有多少信息量？如果问一位女士，则答案中含有的平均自信息量是多少？

解： 男士：

$$p(x_Y)=7\%$$

$$I(x_Y)=-\log p(x_Y)=-\log 0.07=3.837\ \ bit$$

$$p(x_N)=93\%$$

$$I(x_N)=-\log p(x_N)=-\log 0.93=0.105\ \ bit$$

$$\begin{aligned}H(X)&=-\sum_{i}^{2}p(x_i)\log p(x_i)\\&=-(0.07\log 0.07+0.93\log 0.93)\\&=0.366\ \ bit/symbol\end{aligned}$$

女士：

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i}^{2} p(x_i)\log p(x_i) \\ &= -(0.005\log 0.005 + 0.995\log 0.995) \\ &= 0.045 \ \ bit/symbol \end{aligned}$$

3. 居住某地区的女孩子有 25%是大学生，在女大学生中有 75%是身高 160 厘米以上的，而女孩子中身高 160 厘米以上的占总数的一半。假如我们得知“身高 160 厘米以上的某女孩是大学生”的消息，问获得多少信息量？

解：

设随机变量 X 代表女孩子学历

X	x_1（是大学生）	x_2（不是大学生）
$P(X)$	0.25	0.75

设随机变量 Y 代表女孩子身高

Y	y_1（身高>160cm）	y_2（身高<160cm）
$P(Y)$	0.5	0.5

已知：在女大学生中有 75%是身高 160 厘米以上的

即：$p(y_1/x_1) = 0.75$

求：身高 160 厘米以上的某女孩是大学生的信息量

即：

$$\begin{aligned} I(x_1/y_1) &= -\log p(x_1/y_1) \\ &= -\log \frac{p(x_1)p(y_1/x_1)}{p(y_1)} \\ &= -\log \frac{0.25\times 0.75}{0.5} = 1.415 \ \ bit \end{aligned}$$

4. 设有一个信源，它产生 0，1 序列的信息。它在任意时间而且不论以前发生过什么符号，均按 P(0) = 0.4，P(1) = 0.6 的概率发出符号。

(1) 试问这个信源是否是平稳的？

(2) 试计算 $H(X^2)$, $H(X_3/X_1X_2)$及 H_∞；

(3) 试计算 $H(X^4)$并写出 X^4 信源中可能有的所有符号。

解：

(1) 这个信源是平稳无记忆信源。因为有这些词语：“它在任意时间而且不论以前发生过什么符号……”

(2) $H(X^2) = 2H(X) = -2\times(0.4\log 0.4 + 0.6\log 0.6) = 1.942 \ \ bit/symbol$

$$\begin{aligned} H_\infty &= \lim_{N->\infty} H(X_N/X_1X_2\ldots X_{N-1}) \\ &= H(X_N) = 0.971 \ \ bit/symbol \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H(X_3/X_1X_2) &= H(X_3) = -\sum_i p(x_i)\log p(x_i) \\
&= -(0.4\log 0.4 + 0.6\log 0.6) \\
&= 0.971 \ \ bit/symbol
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
H(X^4) &= 4H(X) \\
&= -4\times(0.4\log 0.4 + 0.6\log 0.6) \\
&= 3.884 \ \ bit/symbol
\end{aligned}
$$

X^4 中所有可能符号：

0000　0001　0010　0011

0100　0101　0110　0111

1000　1001　1010　1011

1100　1101　1110　1111

5. 为了使电视图像获得良好的清晰度和规定的适当的对比度，需要用 5×10^5 个象素和 8 个不同亮度电平，并设每秒要传送 30 帧图像，所有象素是独立变化的，且所有亮度电平等概率出现。(1)求传递此图像所需的信息率（比特/秒）。(2) 设某彩色电视系统，除了满足对于黑白电视系统的上述要求外，还必须有 30 个不同的色彩度，试计算传输该彩色系统的信息率为传输黑白系统的信息率的多少倍？

第五题(1)问答案

电视机的每个像素亮度作为信源，则信源空间为：

$$
\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_8 \\ 1/8 & 1/8 & \cdots & 1/8 \end{bmatrix} \text{其中} \sum_{i=1}^{8} p(a_i) = 1
$$

每个像素亮度含有的信息量为

$$
H(X) = \log 8 = 3bit/pixel
$$

每帧图像数就是每一个离散亮度信源的无记忆N次扩展信源

因此每帧图像含有的信息量为

$$
H(X^N) = NH(X) = 5\times10^5 \times \log 8 = 1.5\times10^6 bit/frame
$$

电视机每秒30帧图像，因此每秒传递的信息率为

$$
R = 30 frame/s \times 1.5\times10^6 bit/frame = 4.5\times10^7 bit/s
$$

（2）问答案

H(X) = log8*30=log240bit/pixel

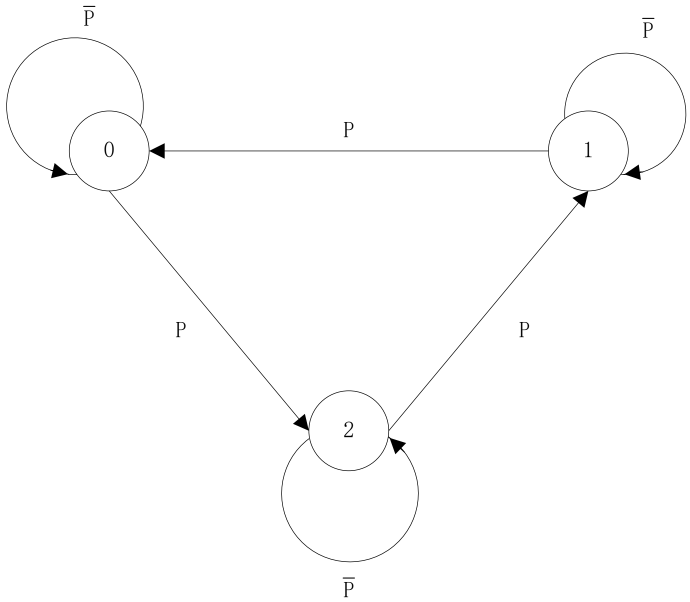
因此传输该彩色系统的信息率为传输黑白系统的信息率的：log(240)/log(8) = 2.636 倍

6.设有 12 个体积、颜色均相同的小球，其中一个与其它球不同（或者轻或者重），现采用一个无砝码的天平来测量，为了在天平上称出哪一个球与其它球不同，且判断其重量是比其它球轻还是重，请问至少必须称多少次？

第一问：从信息论来看，12 个球一个重量异常，出现概率 1/12；该球质量可能轻

也可能重，那么出现概率为 1/2。
那么要得到结果所需信息量为（log2(2)+log2(12)）bit。
称一次可能有轻、重、相等三种结果，可以得到信息量为 log2(3)bit。
log2(24)/log2(3)<3，因此三次应该能称出来。
第二问：这样的话，可以直接给出 120 个球问题的称量次数为 log240/log3<5, 5 次应该得到。

7. 一阶马尔可夫信源的状态图如下图所示。信源 X 的符号集为{0, 1, 2}。
(1) 求平稳后信源的概率分布；
(2) 求信源的熵 H_∞。



解：(1) 设信源的稳态分布概率为 W_0, W_1, W_2，
由题意可知信源的状态转移矩阵 P 为:

$$P = \begin{bmatrix} \overline{p} & 0 & p \\ p & \overline{p} & 0 \\ 0 & p & \overline{p} \end{bmatrix}$$

则有:

$$\begin{cases} W_0\overline{p} + W_1 p = W_0 \\ W_1\overline{p} + W_2 p = W_1 \\ W_0 p + W_2\overline{p} = W_2 \\ W_0 + W_1 + W_2 = 1 \\ p + \overline{p} = 1 \end{cases}$$

解得: $W_0 = W_1 = W_2 = \frac{1}{3}$

(2) 根据题中给出的状态转移图，可判断该马尔可夫信源具有不可约性和非周期性，因此，该马尔可夫信源具有遍历性，存在极限熵。

信源在 $S_i(i=0,1,2)$ 状态下信源的平均信息量:

$$H(X/S_0) = -(p\log p + \bar{p}\ \mathrm{lc}$$

$$H(X/S_1) = -(p\log p + \bar{p}\ \mathrm{lo}$$

$$H(X/S_2) = -(p\log p + \bar{p}\ \mathrm{lc}$$

$$H_\infty = \sum_{i=0}^{2} W_i H(X/S_i)$$

$$= -3\cdot\frac{1}{3}(p\log p + \bar{p}\log\bar{p})$$

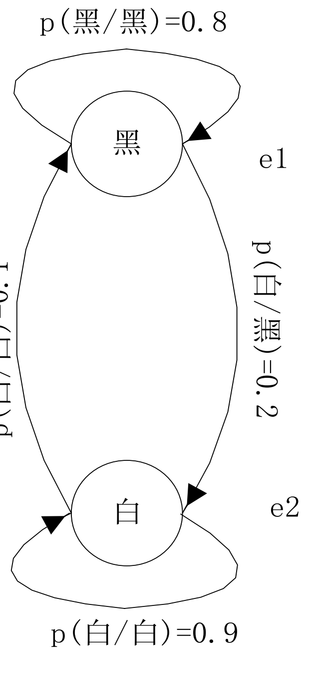
$$= -(p\log p + \bar{p}\log\bar{p})\ \ bit/symbol$$

8. 黑白气象传真图的消息只有黑色和白色两种，即信源 X={黑，白}。设黑色出现的概率为 *P(黑)* = 0.3，白色出现的概率为 *P(白)* = 0.7。

(1) 假设图上黑白消息出现前后没有关联，求熵 *H(X)*；

(2) 假设消息前后有关联，其依赖关系为 *P(白/白)* = 0.9，*P(黑/白)* = 0.1，*P(白/黑)* = 0.2，*P(黑/黑)* = 0.8，求此一阶马尔可夫信源的熵 $H_2(X)$;

(3) 分别求上述两种信源的剩余度，比较 *H(X)*和 $H_2(X)$的大小，并说明其物理含义。



解：(1) 黑白消息出现前后没有关联时的信源熵:

$$H(X) = -\sum_i p(x_i)\log p(x_i)$$

$$= -(0.3\log 0.3 + 0.7\log 0.7)$$

$$= 0.881\ \ bit/symbol$$

(2) 根据题中给出的状态转移图，可判断该马尔可夫信源具有不可约性和非周期性，因此，该马尔可夫信源具有遍历性，存在极限熵。设信源的稳态分布概率 W_1, W_2

分别对应黑和白两种状态，由题意可知信源的状态转移矩阵 P 为:

$$P=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.1 & 0.9\end{bmatrix}$$

则有:

$$\begin{cases}0.8W_1+0.1W_2=W_1\\ 0.2W_1+0.9W_2=W_2\\ W_1+W_2=1\end{cases}$$

解得

$$W_1=\frac{1}{3},\quad W_2=\frac{2}{3}$$

(2) 信源在 $S_i(i=1,2)$ 状态下信源的平均信息量:

$$H(X/S_1)=-(0.8\log 0.8+0.$$
$$=0.7219\ bit/symbol$$
$$H(X/S_2)=-(0.9\log 0.9+0.$$
$$=0.469\ bit/symbol$$

$$H_2(X)=\sum_{i=1}^{2}W_iH(X/S_i)$$
$$=0.5533\ \ bit/symbol$$

(3)

$$\eta_1=\frac{H_0-H(X)}{H_0}=\frac{\log 2-0.881}{\log 2}=11.9\%$$

$$\eta_2=\frac{H_0-H_2(X)}{H_0}=\frac{\log 2-0.553}{\log 2}=44.7\%$$

$H(X) > H_2(X)$

物理含义：无记忆信源的不确定度大于有记忆信源的不确定度，有记忆信源的结构化信息较多，能够进行较大程度的压缩。