第六章补充题

1.试求下列信号的单边 Laplace 变换及其收敛条件：

(1) $t^5e^{-2t}u(t)$

(2) $cost[u(t)-u(t-\pi)]$

解：

(1)利用单边指数信号的 Laplace 变化及 Laplace 变换的线性加权特性，可得

$$\mathscr{L}[t^5e^{-2t}u(t)]=\frac{5!}{(s+2)^6}，\mathrm{Re}(s)>-2$$

(2)

(8) 将 $\cos tu(t-\pi)$ 表示为 $f(t-t_0)u(t-t_0)$ 的形式，由于 $\cos t=-\cos(t-\pi)$，故可得

$$\cos t[u(t)-u(t-\pi)]=\cos tu(t)+\cos(t-\pi)u(t-\pi)$$

利用正弦型信号的 Laplace 变换及 Laplace 变换的时移特性，有

$$\mathscr{L}\{\cos t[u(t)-u(t-\pi)]\}=\frac{s(1+e^{-s\pi})}{s^2+1}，\mathrm{Re}(s)>-\infty$$

2.试求下列信号的 Laplace 变换

(1) $e^{-2t}u(t-1)$

(2) $e^{-2t}u(t+1)$

解：(1)

$$\mathscr{L}[e^{-2t}u(t-1)]=\mathscr{L}[e^{-2}e^{-2(t-1)}u(t-1)]=\frac{e^{-(s+2)}}{s+2}，\mathrm{Re}(s)>-2$$

(2)

$$\mathscr{L}[e^{-2t}u(t+1)]=\mathscr{L}[e^{-2t}u(t)]=\frac{1}{s+2}，\mathrm{Re}(s)>-2$$

3.已知 f(t)的 Laplace 变换 $F(s)=\dfrac{s}{(s+4)^2},Re(s)>-4$,利用 Laplace 变换的性质求下列式子的 Laplace 变换：$f_1t=tf(t)$

解：

由 Laplace 变换的线性加权特性，可得

$$F_1(s)=\frac{dF(s)}{ds}=\frac{s-4}{(s-3)^3}, Re(s)>-4$$

4.利用 Laplace 变换的性质求下列函数的 Laplace 变换：$te^{\lambda t}cos(\omega_0 t)u(t)$

解：

以 $e^{\lambda t}\cos\omega_0 tu(t)$ 作为基本信号，并利用 Laplace 变换的线性加权特性，可得

$$\mathscr{L}[te^{\lambda t}\cos\omega_0 tu(t)]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{(s-\lambda)^2-\omega_0^2}{[(s-\lambda)^2+\omega_0^2]^2}\right), \mathrm{Re}(s)>-\lambda$$

5.试用部分分式法，求下列 F(s)的单边 Laplace 反变换。

$$F(s)=\frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)}$$

解：

（3） $F(s)$有一个单实数极点和一对共轭复数极点。在展开时，共轭复数极点对应的分式可以不必展开，写成如下形式

$$F(s)=\frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2s+k_3}{(s+2)^2+3^2}$$

应用留数法求出 $k_1=sF(s)|_{s=0}=\left.\frac{5s+13}{s^2+4s+13}\right|_{s=0}=1$

因此，有 $\frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)}=\frac{1}{s}+\frac{k_2s+k_3}{(s+2)^2+3^2}$

k_2，k_3 可用待定系数法求出，将上式两端均乘以 $s(s^2+4s+13)$，得

$$5s+13=(s^2+4s+13)+s(k_2s+k_3)=(1+k_2)s^2+(4+k_3)s+13$$

为了使方程两边相等，有

$$1+k_2=0, 4+k_3=5$$

即 $k_2=-1$，$k_3=1$

故 $F(s)=\frac{1}{s}+\frac{-s+1}{(s+2)^2+3^2}=\frac{1}{s}-\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}+\frac{3}{(s+2)^2+3^2}$

反变换为 $f(t)=(1-e^{-2t}\cos3t+e^{-2t}\sin3t)u(t)$

6.试用部分分式展开法求 F(s) 的单边 Laplace 反变换：

$$F(s)=\frac{1+2e^{-4s}}{(s+1)((s+2)^2)}$$

解：F(s)中含有指数e^{-2s}，不是有理分式，故不能直接用部分分式展开，由

Laplace 变换的性质可知，s 域的指数e^{-2s}对应时域的时域，因此可以将 F(s)表示为$F(s)=F_1(s)+F_2(s)$, 其中$F_1(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$,

$F_2(s)=\frac{2e^{-4s}}{(s+1)(s+2)^2}$, 先对$F_1(s)$做部分分式展开，求出相应反变换，再利用时移特性求出$F_2(s)$对应的时间信号，最后利用线性特性求出整体反变换，所以$F_1(s)$对应的反变换$f_1(t)=(e^{-t}-e^{-2t}-te^{-2t})u(t)$，利用时移特性可得

$f_2(t)=2f_1(t-4)$, 故

$$f(t)=f_1(t)+2f_1(t-4)=(e^{-t}-e^{-2t}-te^{-2t})u(t)+2[e^{-(t-4)}-e^{-2(t-4)}-(t-4)e^{-2(t-4)}]u(t-4)$$

7. 试用留数法重做第五题和第六题

解：留数法要求 F(s)是真分式，第五题和第六题均为真分式可以直接采用留数法，答案略。

8. 试求下列函数的双边 Laplace 变换及收敛域：$f(t)=-e^{t}u(-t)-2e^{-2t}u(t)$

解：

$$F(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{2}{s+2}=\frac{-s+4}{(s-1)(s+2)},-2<Re(s)<1$$

9. 试 求 出 下 列 F(s) 全 部 可 能 的 收 敛 域 及 其 相 应 的 Laplace 反 变 换 ：

$$F(s)=\frac{2s+4}{s^2+4s+3}$$

解：

$$F(s)=\frac{2s+4}{s^2+4s+3}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}$$

$\mathrm{Re}(s)>-1$，$f(t)=e^{-t}u(t)+e^{-3t}u(t)$

$\mathrm{Re}(s)<-3$，$f(t)=-e^{-t}u(-t)-e^{-3t}u(-t)$

$-3<\mathrm{Re}(s)<-1$，$f(t)=-e^{-t}u(-t)+e^{-3t}u(t)$

10. 已知系统函数$H(s)=\dfrac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}$, 求下列系统的零输入响应$y_x(t)$、零状态响应$y_f(t)$和完全响应$y(t)$。

(1) $f(t)=e^{-3t}u(t), y(0^-)=1, y'(0^-)=1$

(2) $f(t)=e^{-t}u(t), y(0^-)=y'(0^-)=0$

解:

【解】由系统函数的定义

$$H(s)=\frac{Y_f(s)}{F(s)}=\frac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}$$

可得 $(s^2+3s+2)Y_f(s)=(s^2+4s+5)F(s)$

进行 Laplace 反变换可得

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f''(t)+4f'(t)+5f(t)$$

显然，系统函数的分母可看成微分方程的特征多项式。因此，系统的极点即是微分方程的特征根，由此可以写出零输入响应的一般形式，代入初始状态即可求出零输入响应。由$Y_f(s)=H(s)F(s)$可求出零状态响应的 s域表达式，对其进行 Laplace 反变换即得零状态响应。

(1) 系统的极点为 $s_1=-1$，$s_2=-2$，零输入响应的形式为

$$y_x(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}$$

代入初始状态 $y(0^-)=A+B=1$，$y'(0^-)=-A-2B=1$ 可解出 $A=3$，$B=-2$

$$y_x(t)=3e^{-t}-2e^{-2t},\quad t\geqslant 0$$

零状态响应的 s域表达式

$$Y_f(s)=H(s)F(s)=\frac{s^2+4s+5}{(s^2+3s+2)(s+3)}=\frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

对其进行 Laplace 反变换可得

$$y_f(t)=(e^{-t}-e^{-2t}+e^{-3t})u(t)$$

故 $$y(t)=y_x(t)+y_f(t)=4e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t},\quad t\geqslant 0$$

(2) 初始状态为零，故 $y_x(t)=0$，$t\geqslant 0$

$$Y_f(s)=\frac{s^2+4s+5}{(s^2+3s+2)(s+1)}=\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+2}$$

$$y_f(t)=(2te^{-t}+e^{-2t})u(t)$$

$$y(t)=y_x(t)+y_f(t)=(2te^{-t}+e^{-2t})u(t)$$

11. 试用直接形式、级联形式和并联形式模拟下列系统，并判断系统是否稳定：

$$H(s)=\frac{2s-4}{(s^2-s+1)(s^2+2s+1)}$$

解：

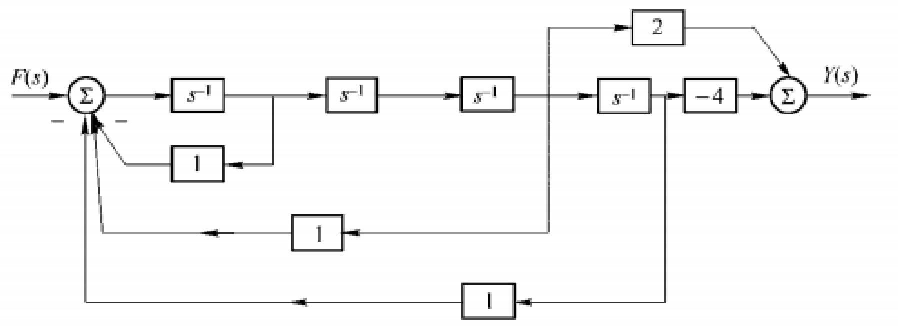
【解】将 $H(s)$的分子和分母表示成多项式的形式，即可画出其直接型结构。将 $H(s)$表示为实系数一阶和二阶子系统之积的形式，画出各子系统的直接型结构，再将其级联即得级联型结构。将 $H(s)$表示为实系数一阶和二阶子系统之和的形式，画出各子系统的直接型结构，再将其并联即得并联型结构。一般，实数极点对应一阶子系统，共轭复数极点对应二阶子系统。

系统是否稳定可以通过 $H(s)$的极点判断，若因果系统 $H(s)$的全部极点位于 s平面的左半平面，则系统稳定。

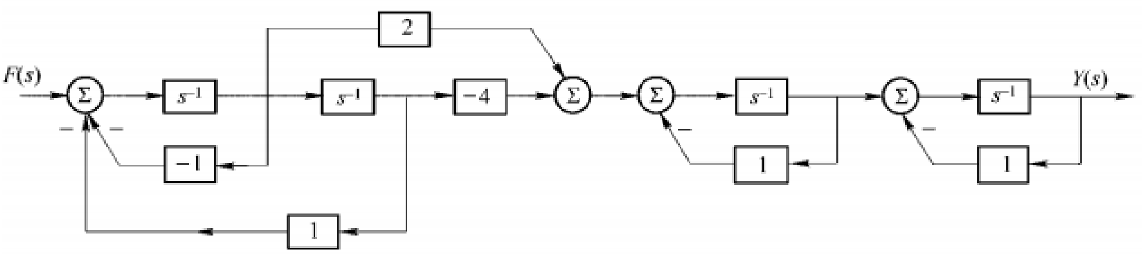
$$H(s)=\frac{2s-4}{s^2-s+1}\frac{1}{s+1}\frac{1}{s+1}=\frac{2s^{-1}-4s^{-2}}{1-s^{-1}+s^{-2}}\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}$$

$$H(s)=\frac{2s-4}{s^2-s+1}\frac{1}{s+1}\frac{1}{s+1}=\frac{2s^{-1}-4s^{-2}}{1-s^{-1}+s^{-2}}\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}$$

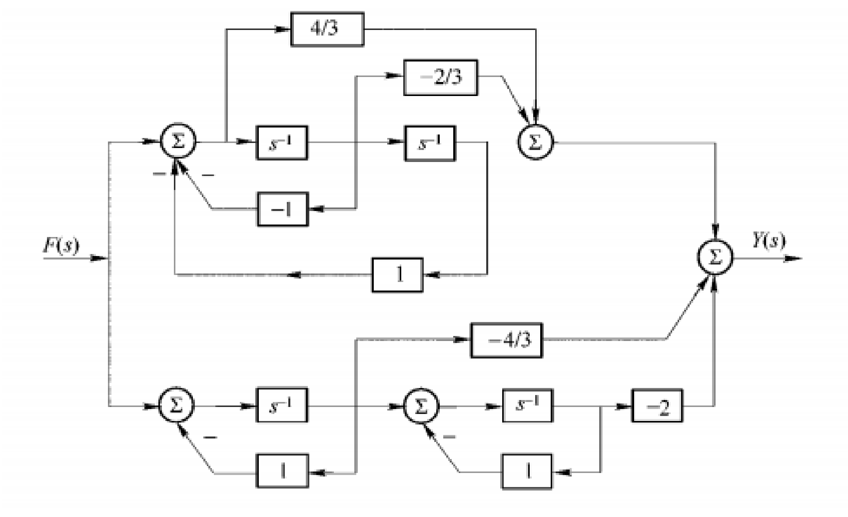
$$H(s)=\frac{\frac{4}{3}s-\frac{2}{3}}{s^2-s+1}+\frac{-2}{(s+1)^2}+\frac{-\frac{4}{3}}{s+1}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}s^{-1}}{1-s^{-1}+s^{-2}}+\frac{-2s^{-2}}{(1+s^{-1})^2}+\frac{-\frac{4}{3}s^{-1}}{1+s^{-1}}$$



(a) 直接型结构



(b) 级联型结构



(c) 并联型结构

12. 已知因果连续时间系统的系统函数，求系统的单位冲激响应、描述系统的微分方程、系统的模拟框图，并判断系统是否稳定 $H(s)=\dfrac{s^2+1}{s^2+2s+2}$

解：
$h(t)=[\delta(t)-2e^{-t}cost+e^{-t}sint]u(t), y''(t)+2y'(t)+2y(t)=f''(t)+f'(t)$，
稳定，模拟方框图略