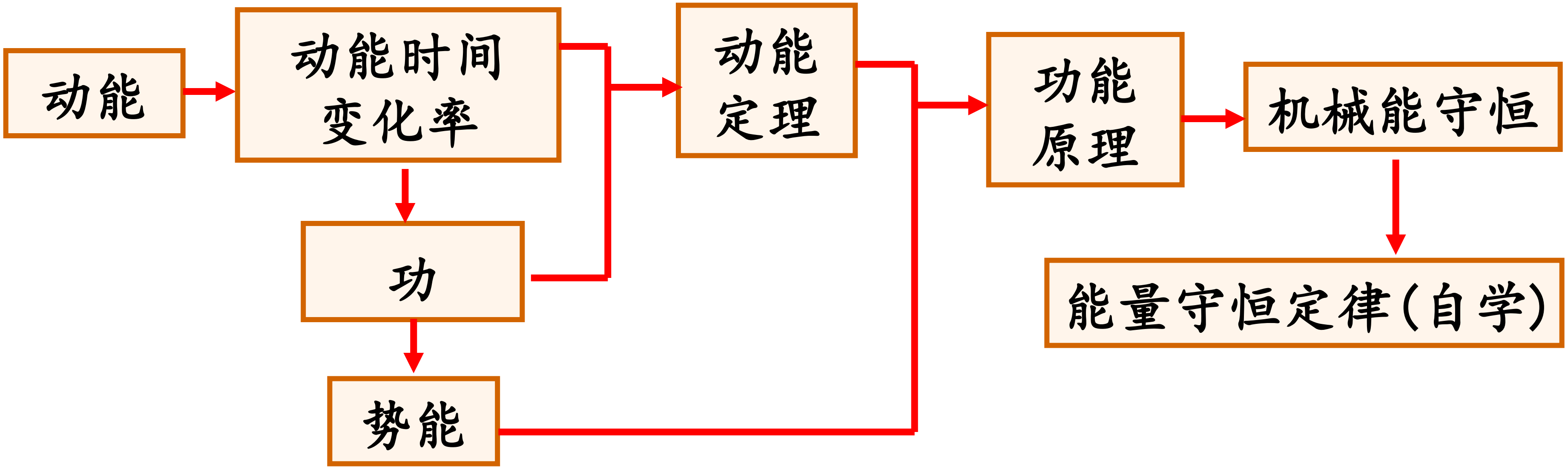
第六章 能量 能量守恒定律

结构框图



重点：

概念：动能，功，保守力，势能。

规律：动能定理，功能原理，机械能守恒定律。

难点：

转动动能，变力的功，一对力的功，势能曲线，

复杂问题的分阶段求解，三个守恒定律的综合应用。

课时：3

本章讲解顺序：

一、功

二、保守力　势能

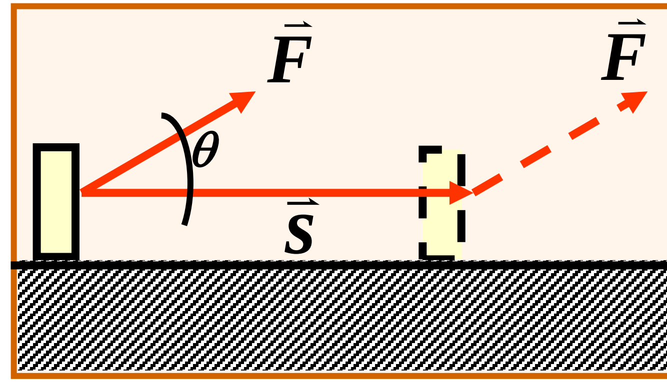
三、动能定理

四、机械能守恒定律

一、功——力对空间累积

中学：恒力作功

$$A = F \cdot S \cdot \cos\theta = \vec{F} \cdot \vec{S}$$



扩展：1.功的概念；2.变力的功；3.保守力的功

1. 功的概念

(1) 功是标量（代数量）

$-90^\circ < \theta < 90^\circ$　　$A > 0$　力对物体做功

$90^\circ < \theta < 270^\circ$　　$A < 0$　物体反抗阻力做功

$\left.\begin{matrix} \theta = 90^\circ、270^\circ \\ \text{(力与位移相互垂直)} \\ \text{或 } \vec{s} = 0 \\ \text{(力作用点无位移)} \end{matrix}\right\}$　$A = 0$

记住特例：

$$\vec{F} \perp \vec{S} \text{或} \vec{S} = 0, \quad A = 0$$

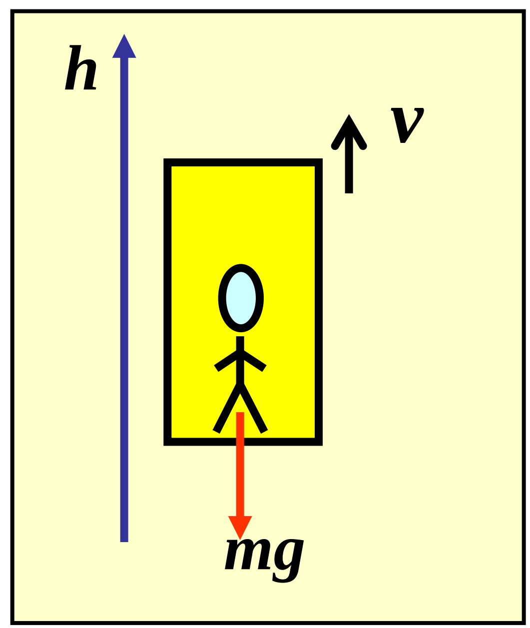
$$\vec{F} \,//\, \vec{S} \text{ 且同方向时}, \; A = FS$$

$$\vec{F} \,//\, \vec{S} \text{ 且反方向时}, \; A = -FS$$

$$A_{总} = A_1 + A_2 + \ldots\ldots$$

(2) 功是过程量

(3) 功是相对量



地面系

$A_G \neq 0$

电梯系

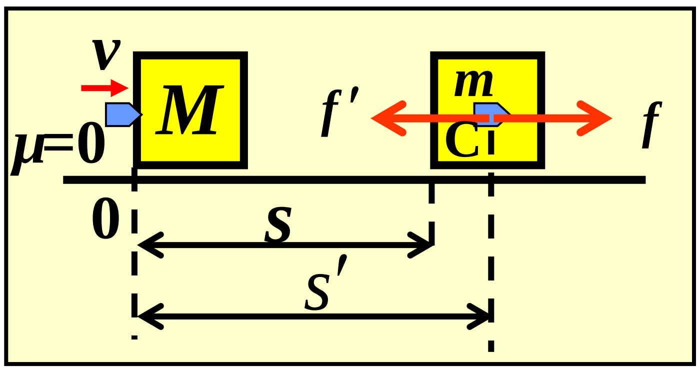
$A_G = 0$

(4) 一对作用力与反作用力做功的代数和不一定为零

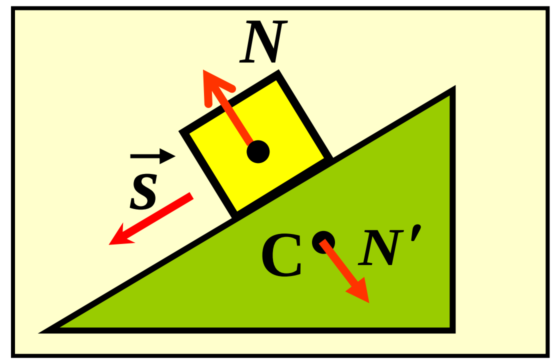
$$A_1 + A_2 = \vec{F}_1 \cdot \vec{S}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{S}_2 = \vec{F}_1 \cdot \vec{S}_1 - \vec{F}_1 \cdot \vec{S}_2$$

$$= \vec{F}_1 \cdot (\vec{S}_1 - \vec{S}_2) = \vec{F}_1 \cdot \vec{S}_{12}$$

相对位移



$$A_f + A_{f'} < 0$$



$$A_N + A_{N'} = 0$$

➤只有相互作用力与相对位移垂直或作用点无相对位移时，一对相互作用力做的总功为零。

一对作用力与反作用力做功的代数和：

$$A_1 + A_2 = \vec{F}_1 \cdot \vec{S}_{12}$$

相对位移

➢一对作用力与反作用力做功的代数和与参考系的选择无关。

➢质点系内力做功的代数和不一定为零。

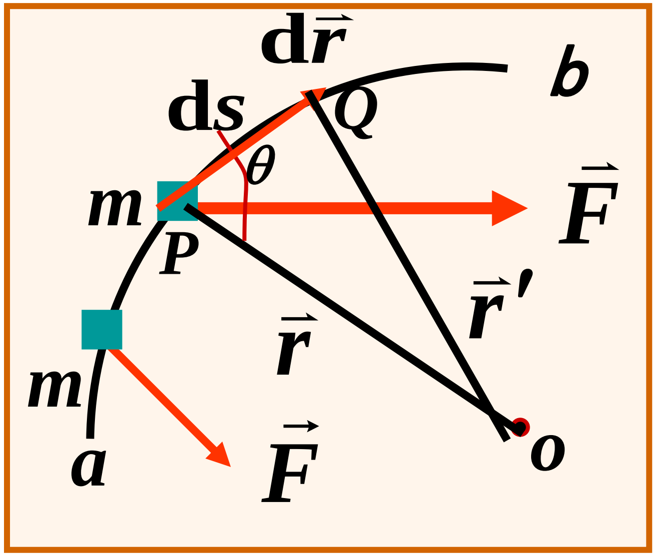
对刚体：$A_{内}=0$

比较

$$\sum_i \vec{F}_{i内} \equiv 0 \qquad \sum_i \vec{I}_{i内} \equiv 0$$

$$\sum_i \vec{M}_{i内} \equiv 0 \qquad \sum_i A_{i内} \not\equiv 0$$

2. 变力的功



如何求变力的功?

▲ **微元分析法:**

取微元过程
以直代曲
以不变代变

} → 元功 → 再求和

元功：$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = F\cdot\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cdot\cos\theta = F\cos\theta\,\mathrm{d}s$

直角坐标系：

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\theta\,\mathrm{d}s = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$$

总功：
$$A = \int_a^b \mathrm{d}A = \int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b F\cos\theta\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_a^b \left(F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z\right)$$

注意：

(1) F_x、F_y、F_z为F在x、y、z轴的分量，为代数量。

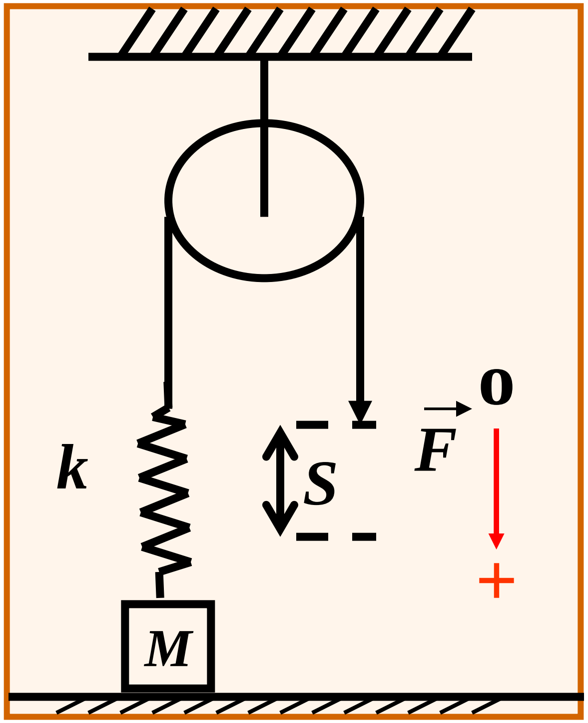
若与坐标轴的正方向同方向,为正；反方向,为负。

(2)积分下限为运动的起点，积分上限为运动的终点。

例1 (P_{127} 6. 5)：

如图M=2kg，k=200Nm^{-1}，S=0.2m，g≈10m·s^{-2}。不计轮、绳质量和摩擦,弹簧最初为自然长度,缓慢下拉,则A_F=？

解:以向下为正，弹簧未拉伸时绳右端为坐标原点，设用F 将绳端下拉0.2m时弹簧伸长x_0，M将上升x_1=0.2-x_0，则：



$$kx_0 = Mg \rightarrow x_0 = 0.1\text{m}$$

$$x_1 = 0.2 - 0.1 = 0.1\text{m}$$

得 $\begin{cases} \text{弹簧伸长 } 0.1\text{m} \\ \text{物体上升 } 0.1\text{m} \end{cases}$

缓慢下拉：每时刻物体处于平衡态

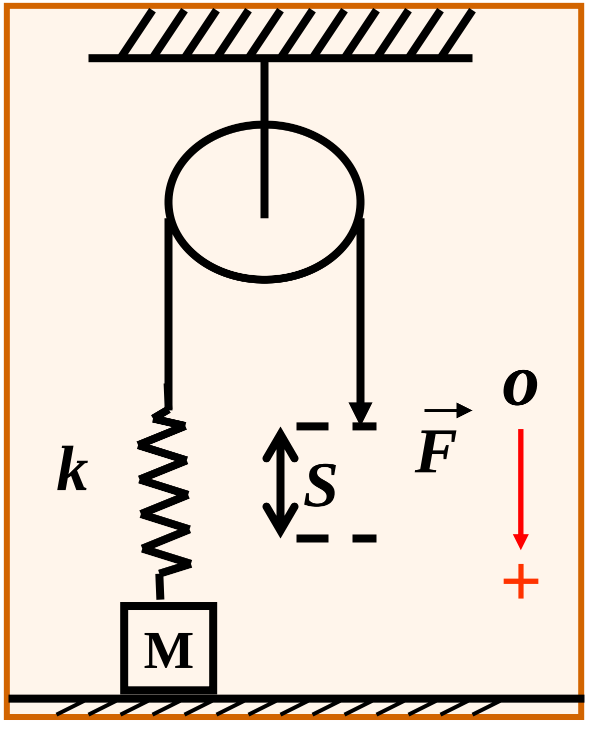
$$F=\begin{cases} kx & (0< x \le 0.1\text{m}) \text{ 前0.1m为变力} \\ kx_0 = Mg & (0.1< x \le 0.2\text{m}) \text{ 后0.1m为恒力} \end{cases}$$

$$A = \int_0^{0.2} kx\mathrm{d}x$$

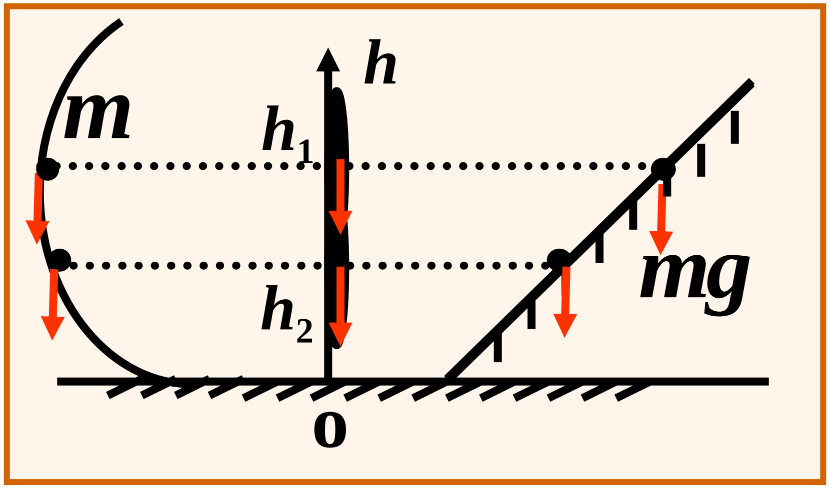
$$= \int_0^{0.1} kx\mathrm{d}x + \int_{0.1}^{0.2} Mg\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 \Big|_0^{0.1} + Mgx \Big|_{0.1}^{0.2}$$

$$= 3(\mathrm{J})$$



3. 重力、弹力、引力的功

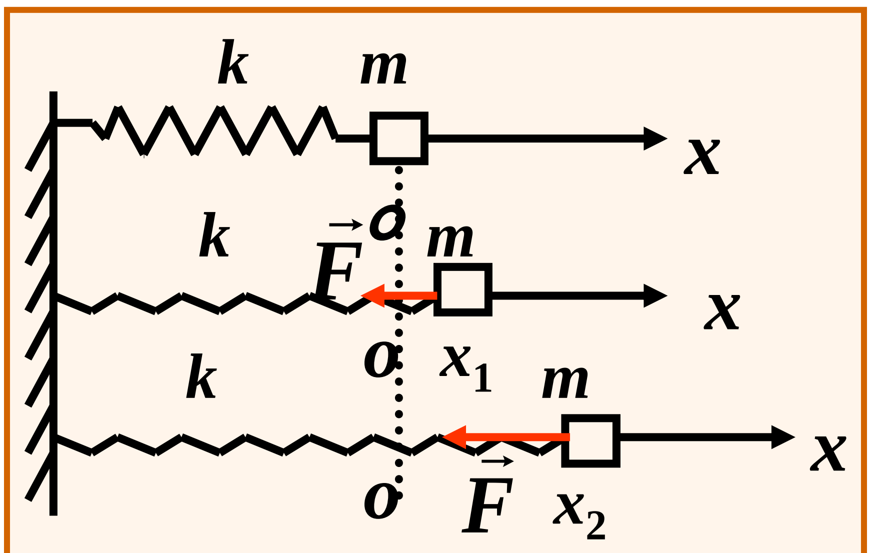


重力：$F=-mg$

重力的功：

$$A=\int_{h_1}^{h_2}-mg\,dh=mg(h_1-h_2)$$

$$=-\left(mgh_2-mgh_1\right)$$



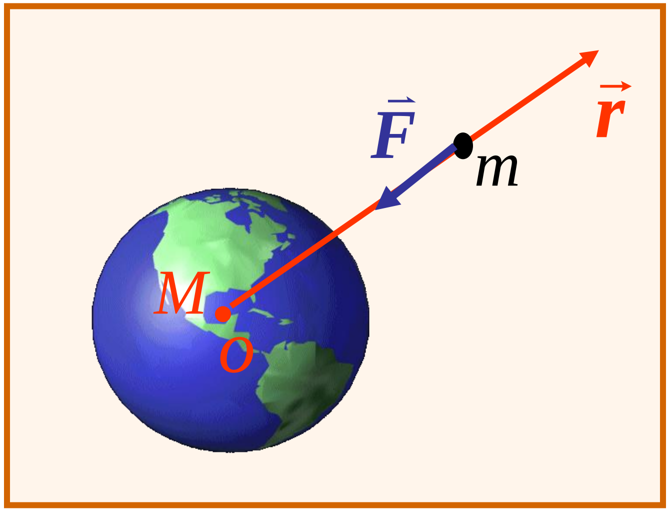
弹力：$F=-kx$

弹力的功：

$$A=\int_{x_1}^{x_2}-kx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}kx_1^{\;2}-\frac{1}{2}kx_2^{\;2}$$

$$=-\left(\frac{1}{2}kx_2^{\;2}-\frac{1}{2}kx_1^{\;2}\right)$$

引力：$F=-G\dfrac{mM}{r^2}$



引力的功：

$$A=\int_{r_1}^{r_2}-G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r=\left(-G\frac{mM}{r_1}\right)-\left(-G\frac{mM}{r_2}\right)$$

$$=-\left[\left(-G\frac{mM}{r_2}\right)-\left(-G\frac{mM}{r_1}\right)\right]$$

共同特点：

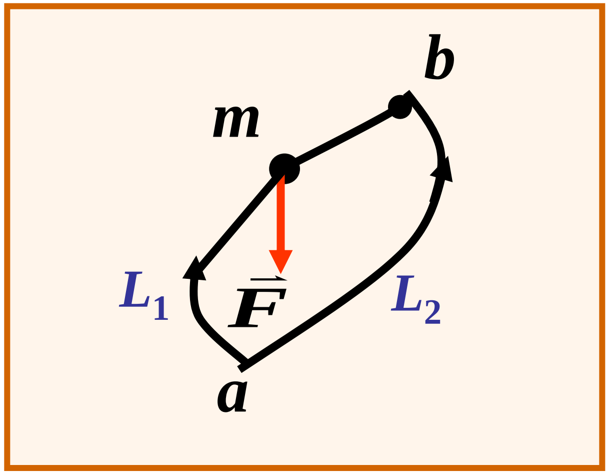
(1) 做功与路径无关，只与始、末点位置有关。

(2) 做功等于与相互作用物体的相对位置有关的某函数在始末位置的值之差（增量的负值）。

二、保守力　势能

1. 保守力：具有下面两个特征的力：

(1) 做功与路径无关，只与起点、终点位置有关。



$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

(路径L_1)　(路径L_2)

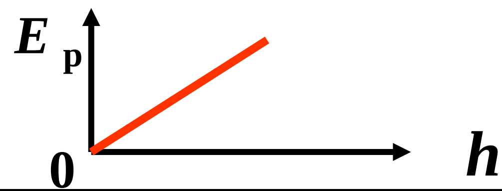
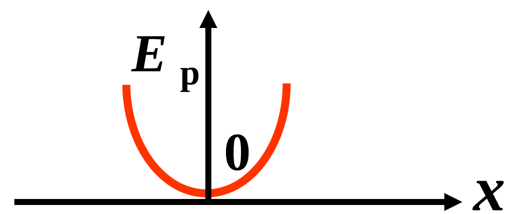
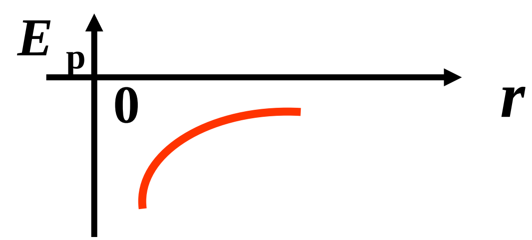
(2) 对沿闭合路径运动一周的物体做功为零：$\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$

重力、弹力、万有引力、静电力均为保守力！

不满足上面两个特征的力为非保守力（耗散力）

2. 势能

凡保守力的功均可表示为与相互作用物体相对位置有关的某函数在始末位置的值之差(增量的负值)，我们将该函数定义为此物体系的势能。

保守力	势能（E_p）	势能零点	势能曲线
重　力	mgh	$h=0$	
弹　力	$\frac{1}{2}kx^2$	$x=0$	
引　力	$-G\frac{mM}{r}$	$r=\infty$	

3. 保守力与相关势能的关系：

(1) 凡保守力都有其相关势能,势能属于物体系,保守力为该势能系统的内力。

(2) 保守力的功等于其相关势能增量的负值

$$A_{保} = -\Delta E_p$$

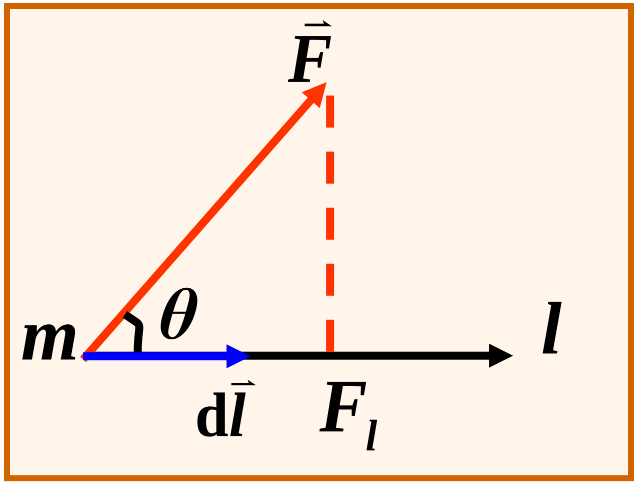
则:物体从场点P到零势能点的势能增量为：$\Delta E_p=0-E_p=-E_p$

$$A_{保} =-\Delta E_p=E_p$$

$$E_p = A_{保} = \int_{场点P}^{零势点} \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r}$$

物体在场中某点的势能等于将物体从该点移到零势点过程中保守力做的功。

(3) 保守力为其相关势能梯度的负值:



$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = F_l\mathrm{d}l = -\mathrm{d}E_p$$

$$F_l = -\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}l}\right)$$

保守力在 l 方向投影

E_p 在 l 方向空间变化率

$$\vec{F}_{保} = -\left(\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= -\mathrm{grad}E_\mathrm{p} = -\nabla E_\mathrm{p}$$

指向势能降低的方向

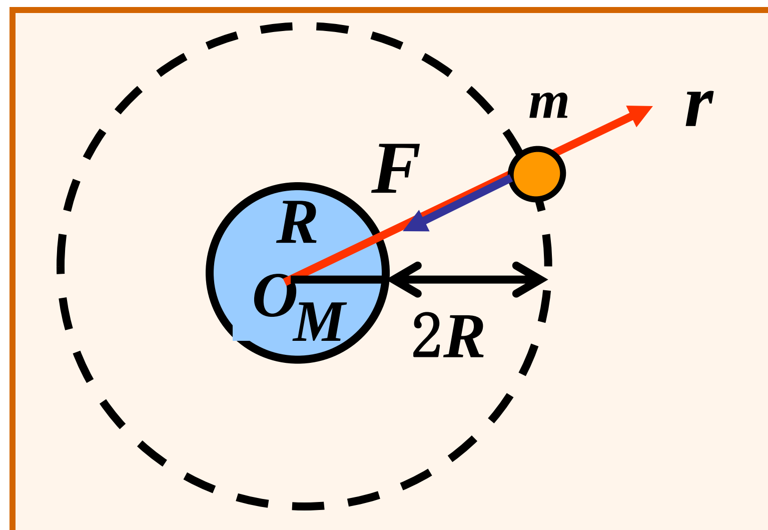
例2 (P_{127} 6.9)：

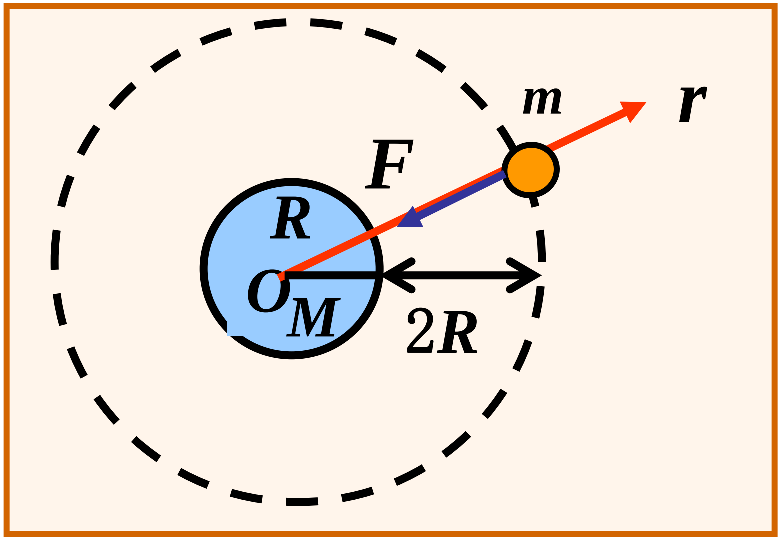
一质量为 m 的人造地球卫星沿一圆形轨道运动，($v \ll c$)离开地面的高度等于地球半径的二倍(即$2R$)。试以 m、R、引力恒量 G、地球质量M表示出：

(1) 卫星的动能；

(2) 卫星在地球引力场中的引力势能；

(3) 卫星的总机械能。





解： $v << c$，非相对论问题

(1) $$G\frac{mM}{(3R)^2}=m\frac{v^2}{3R}$$

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{GmM}{6R}$$

(2) $$E_p=\int_{3R}^{\infty}-G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r=-G\frac{mM}{3R}$$

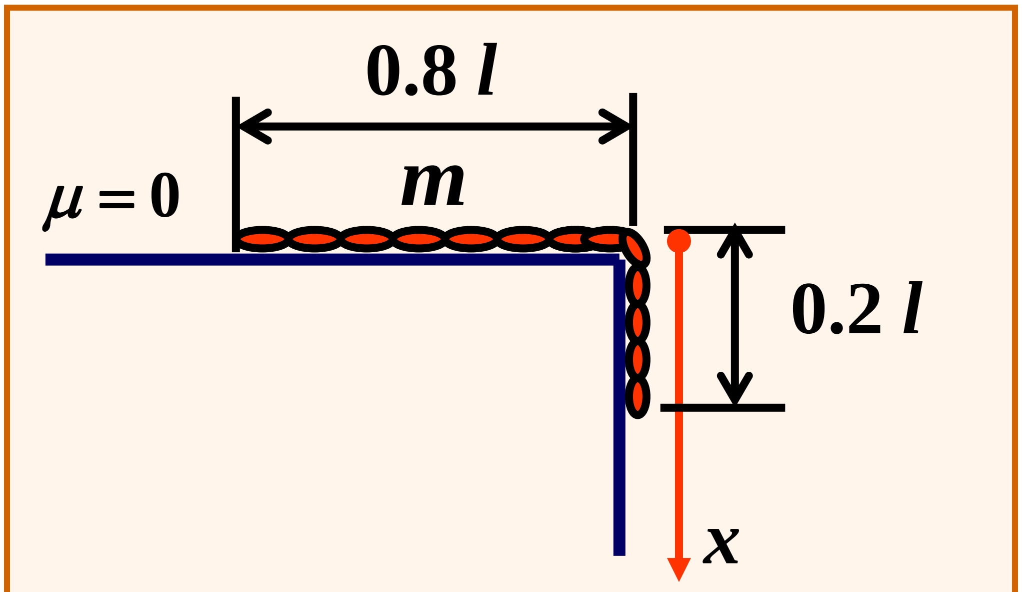
(3) $$E=E_k+E_p=-\frac{GMm}{6R}$$

约束于引力场中，未摆脱地球影响

例3:

均匀链 m，长 l 置于光滑桌面上,下垂部分长 $0.2\,l$,施力将其缓慢拉回桌面.

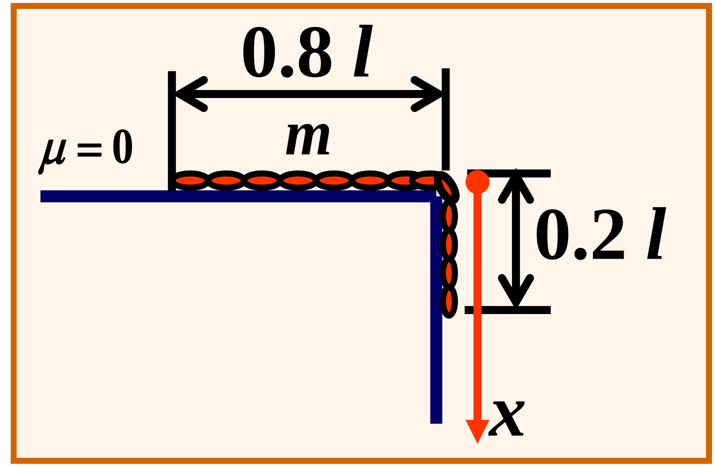
用两种方法求出此过程中外力所做的功.



解法1:用变力做功计算

光滑平面，缓慢拉回，则拉力与链下垂部分重力大小相等。

拉力做功为重力做功的相反数

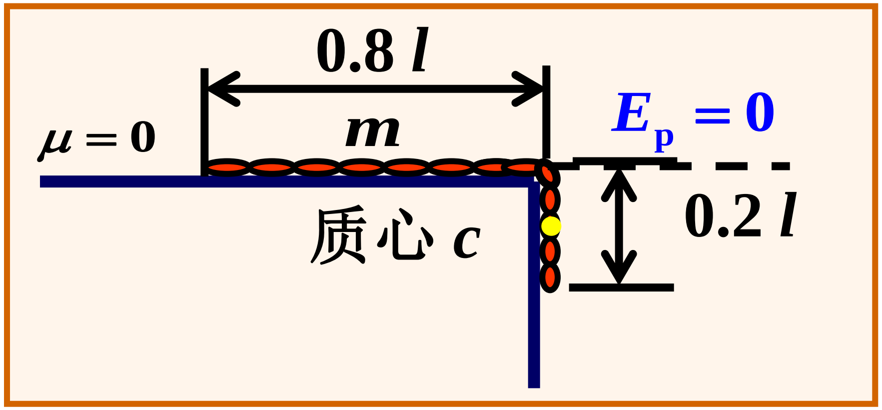


设桌面为坐标原点，以向下为正，则下垂部分长为x，质量为 $\dfrac{m\cdot x}{l}$

$$G=\frac{mx}{l}g$$

$$A_G=\int G\mathrm{d}x=\frac{mg}{l}\int_{0.2l}^{0}x\mathrm{d}x=-\frac{mgl}{50}$$

$$A_F=-A_G=\frac{mgl}{50}$$



解法2： 用保守力做功与势能变化的关系计算

令桌面 $E_p=0$

初态： $M=\frac{m}{l}\times 0.2l=\frac{m}{5}$

$$E_{p1}=-Mgh_c=-\frac{mg}{5}\times\left(\frac{l}{10}\right)=-\frac{mgl}{50}$$

末态： $h_c=0$ $\quad E_{p2}=0$

重力做功： $A_G=-\Delta E_p=-\left(E_{p2}-E_{p1}\right)=-\frac{mgl}{50}$

外力功： $A_F=-A_G=\frac{mgl}{50}$

三、动能定理

1. 动能（$v<<c$非相对论）

质点：$E_k = \frac{1}{2}mv^2$

质点系：$E_k = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$

$$= E_{kc} + E_k' \neq \frac{1}{2}Mv_c^2 \rightarrow$$ 柯尼希定理

定轴刚体：$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

2. 动能定理

质点系所有外力、内力做功的代数和等于质点系总动能的增量：

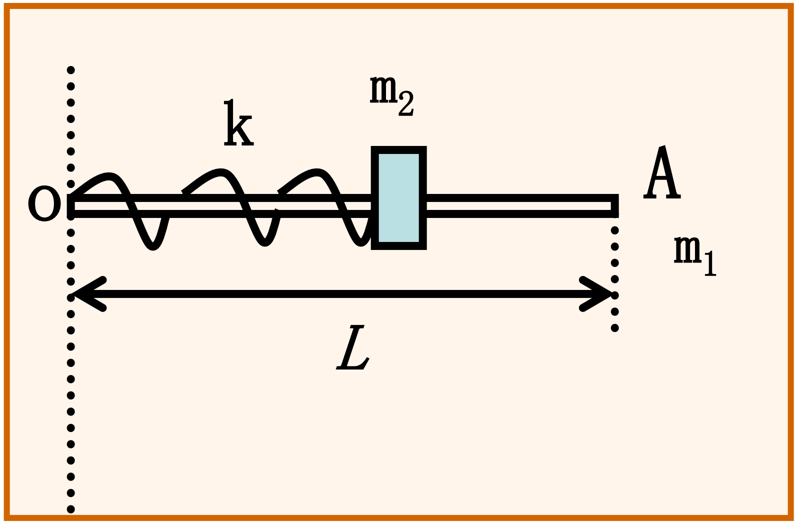
$$A_{外} + A_{内} = \Delta E_K$$

3. 功能原理

$$A_{外}+\underbrace{A_{保内}}_{-\Delta E_p}+A_{非保内}=\Delta E_{K}$$

$$A_{外}+A_{非保内}=\Delta\left(E_{K}+E_{p}\right)=\Delta E$$

质点系外力和非保守内力做功代数和等于质点系总机械能的增量。



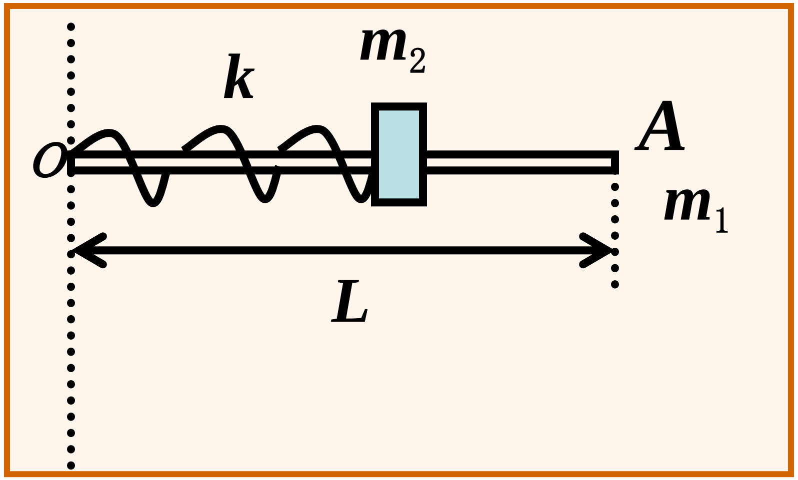
例4：

已知：杆长 L，质量 m_1

环：m_2，轻弹簧 k

系统最初静止，在外力矩作用下绕竖直轴无摩擦转动。当m_2缓慢滑到端点A时，系统角速度为 ω

求：此过程中外力矩的功？



解：m_1+m_2+k 系统非刚体，缓慢滑动，不计 m_2 沿杆径向运动的动能。

$$A_{外}+A_{内}=\Delta E_k$$

$$A_{内}=A_{弹}=-\int_0^{\Delta x}kx\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

$$A_{外}+A_{内}=A_{外力矩}-\frac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}m_1L^2+m_2L^2\right]\omega^2$$

$$k\Delta x=m_2\omega^2L$$

联立可解

四、机械能守恒定律

1. 当各微元过程都满 $\mathrm{d}A_{外}+\mathrm{d}A_{非保内}=0$ 时，

$\mathrm{d}E=0$ ， $E=$恒量，系统机械能守恒。

2. 当过程满足 $A_{外}+A_{非保内}=0$ 时， $E_1=E_2$

系统初、末态机械能相等。

普遍的能量守恒定律：

孤立系统内各种形式的能量的总和保持不变。

注意： 动量、角动量、能量守恒定律彼此独立

$\vec{F}_{外}=0$ $\vec{p}=\vec{c}$ —— 空间平移对称性

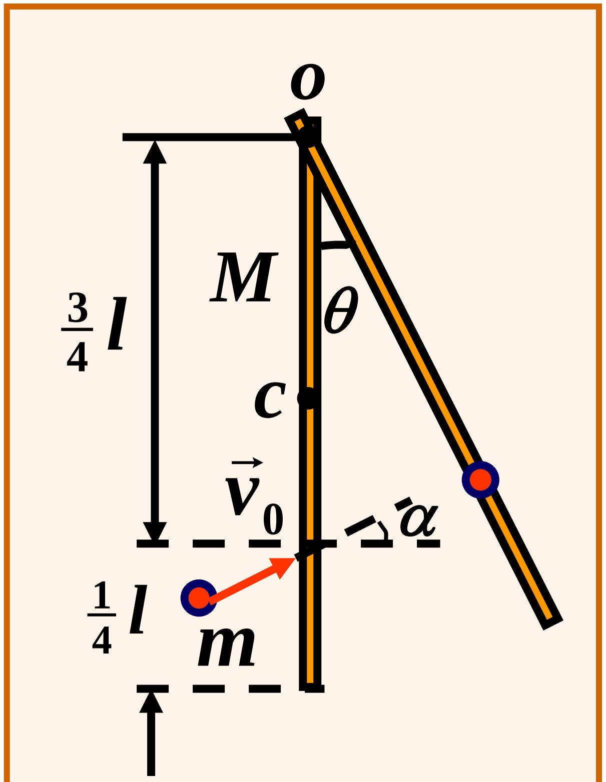
$\vec{M}_{外}=0$ $\vec{L}=\vec{c}$ —— 空间旋转对称性

$\mathrm{d}A_{外}+\mathrm{d}A_{非保内}=0$ $E=c$ —— 时间平移对称性

例5 (P_{128} 6.13)：

如图所示,已知: M , l , m , α, v_0 ;击中$(3/4)l$ 处

求: 击中时 ω ； $\theta_{\max}=?$ (只列方程)



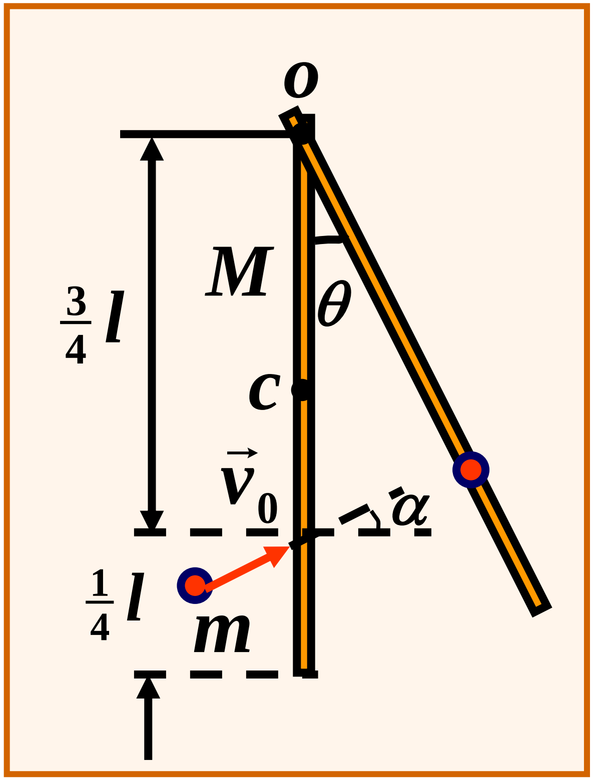
分几个阶段求解,各遵循什么规律?

分两个阶段

1) 相撞: 质点 ⟷ 定轴刚体

对 O 轴角动量守恒

2) 摆动: $M+m+$ 地球系统E守恒



1）相撞: 质点 ⟷ 定轴刚体

对 O 轴角动量守恒

撞前:

$$L_m = \left|\vec{r}\times m\vec{v}_0\right| = \frac{3}{4}lmv_0\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

$$= \frac{3}{4}lmv_0\cos\alpha$$

$$L_M = 0 \quad \therefore L = L_m + L_M = \frac{3}{4}lmv_0\cos\alpha$$

撞后: $L' = J\omega = [m\left(\frac{3}{4}l\right)^2 + \frac{1}{3}Ml^2]\omega$

$$\therefore \quad \frac{3}{4}lmv_0\cos\alpha = \left(\frac{9}{16}m + \frac{1}{3}M\right)l^2\omega$$

2）摆动：$M+m+$ 地球系统 E 守恒

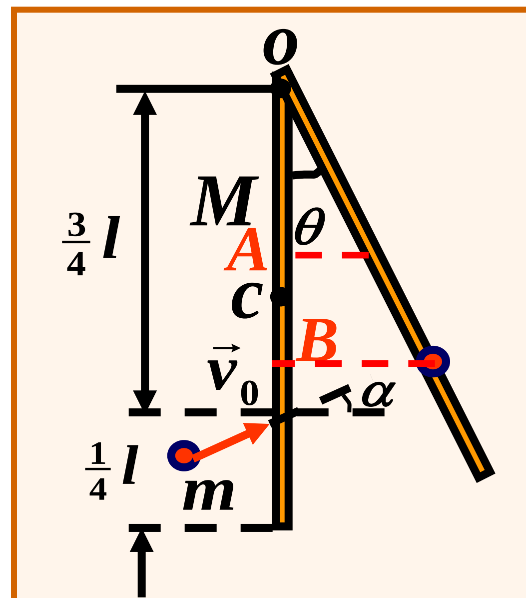
	动能 E_k	势能E_p
初态	$\frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}m+\frac{1}{3}M\right)l^2\omega^2$	m: $\frac{1}{4}mgl$　　M: $\frac{1}{2}Mgl$
末态	0	m: $mgl\left(1-\frac{3}{4}\cos\theta\right)$
		M: $Mgl\left(1-\frac{1}{2}\cos\theta\right)$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}m+\frac{1}{3}M\right)l^2\omega^2+\frac{1}{4}mgl+\frac{1}{2}Mgl$$

$$=0+mgl\left(1-\frac{3}{4}\cos\theta\right)+Mgl\left(1-\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

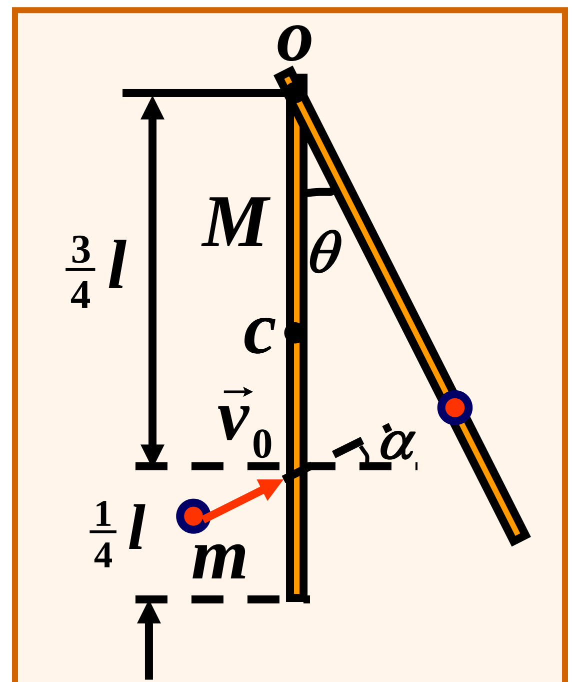
$$\therefore\frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}m+\frac{1}{3}M\right)l^2\omega^2$$

$$=\left(\frac{M}{2}+\frac{3}{4}m\right)gl\left(1-\cos\theta\right)$$



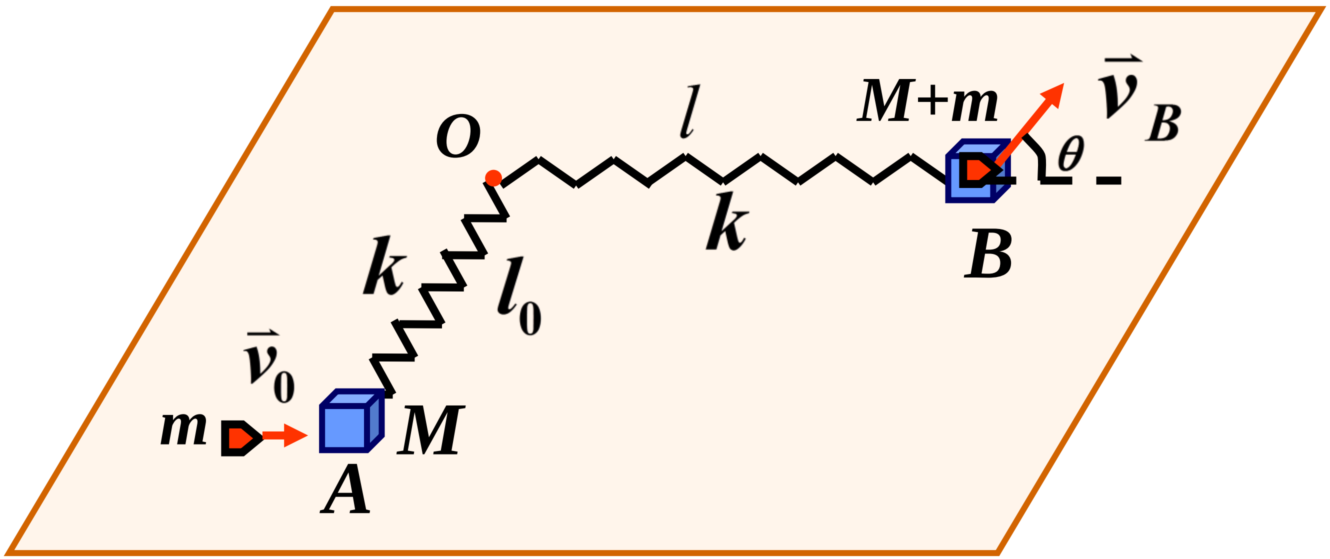
$$\begin{cases} \frac{3}{4} l m v_0 \cos\alpha = \left(\frac{9}{16} m + \frac{1}{3} M \right) l^2 \omega \\ \frac{1}{2} \left(\frac{9}{16} m + \frac{1}{3} M \right) l^2 \omega^2 = \left(\frac{M}{2} + \frac{3}{4} m \right) g l (1 - \cos\theta) \end{cases}$$

由此可解出所求值



例6(P$_{125}$ 例5)：如图所示：

已知：光滑桌面，m, M, k, l_0, l , $\vec{v}_0$ 。求：$\vec{v}_B$



思考：分几个阶段处理？

各阶段分别遵循什么规律？

过程	研究对象	条件	原理
A m与M相撞	$M+m$	mg与N平衡 弹簧为原长 $\vec{F}_{外}=0$	动量守恒 $mv_0=(m+M)v_A$
$A\to B$	$M+m$ + 弹簧	只有弹力作功 $A_{外}+A_{非保内}=0$	机械能守恒 $\frac{1}{2}(m+M)v_A^2=\frac{1}{2}(m+M)v_B^2+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2$
$A\to B$	$M+m$	各力力矩 都为零 $\vec{M}_{外}=0$	角动量守恒 $(m+M)v_A l_0=(m+M)v_B l\sin\theta$

由此可解出： v_A v_B θ

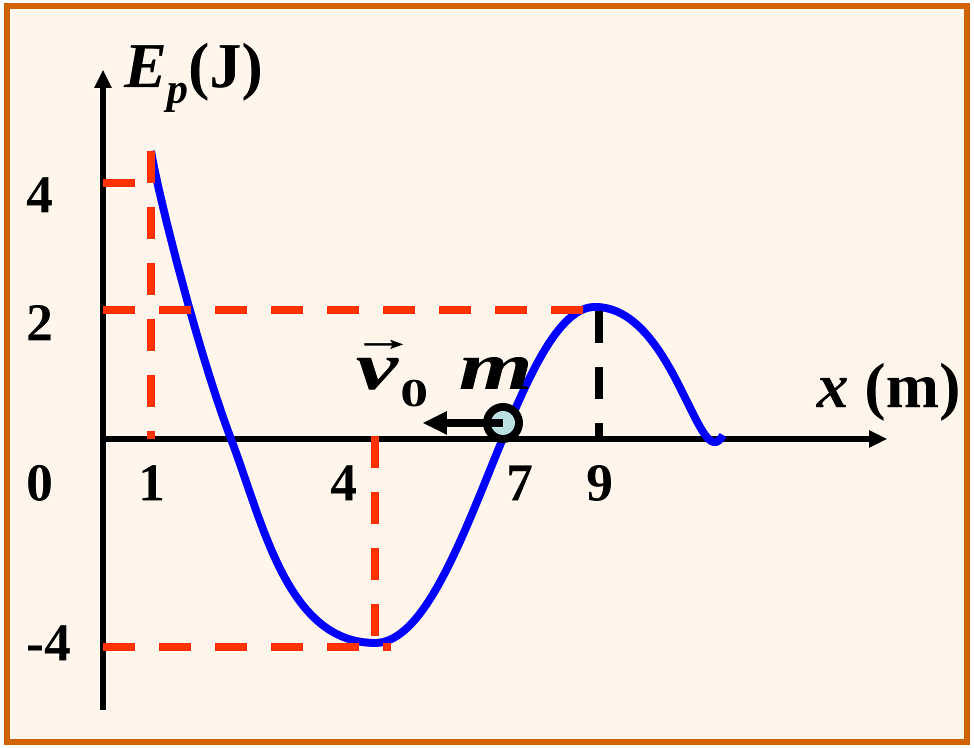
例7 (P$_{129}$ 6.18)

质量为 2kg 的质点位于一维势场中（如图）

已知 $m = 2\text{kg}$

$v_0 = -2\vec{i}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$x_0 = 7\text{m}$



求：1） m 运动范围

2）何处 $F>0$

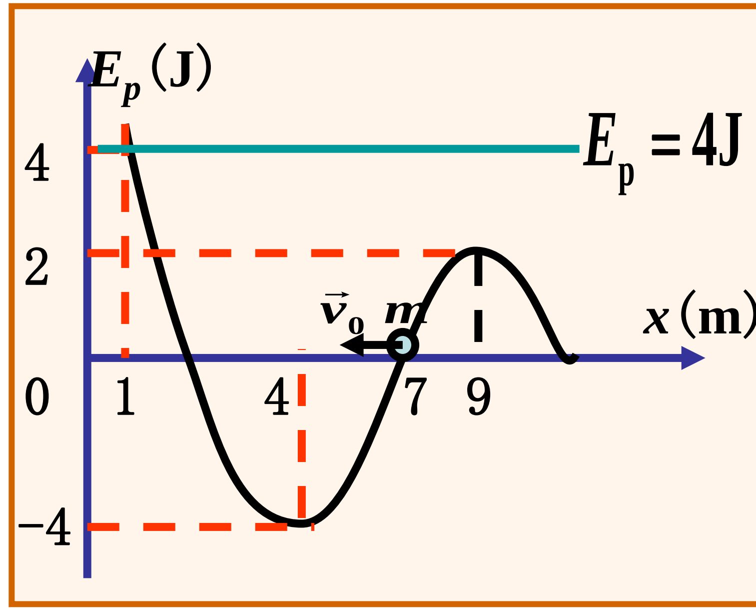
3）何处 v_{max}=?

解：1）初态：

$$E_0 = E_{k0} + E_{p0}$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 = 4(\mathrm{J})$$

能量E 守恒！



最大值

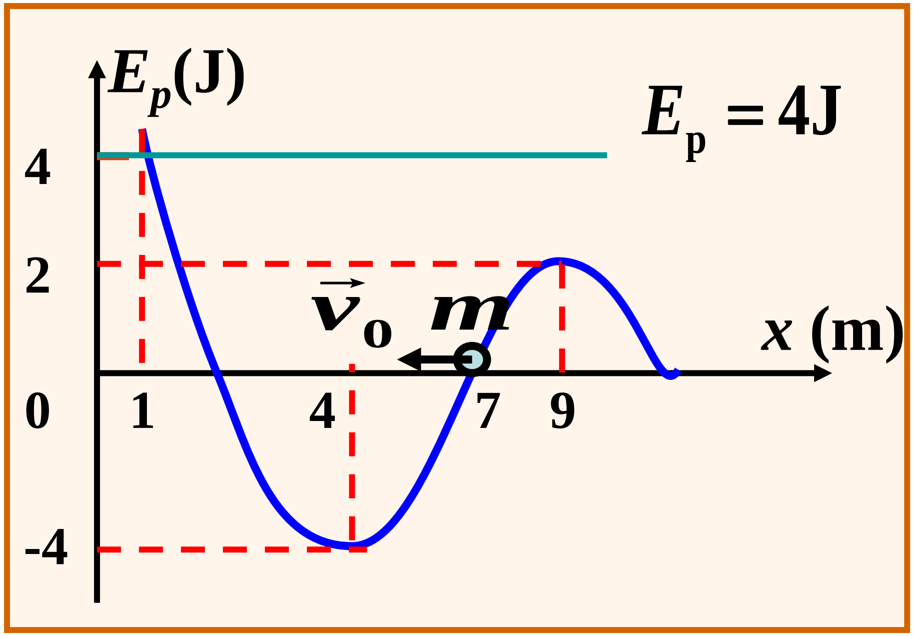
当$E_p = 4\mathrm{J}$时，$E_k = 4 - E_p = 0(\mathrm{J})$

作曲线$E_p = 4\mathrm{J}$，由曲线知：运动范围为$x \geq 1$

2）要使$F = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} > 0$，则：$\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} < 0$

即：势能曲线斜率为负　$\therefore 1(\mathrm{m}) < x < 4(\mathrm{m}) \quad x > 9(\mathrm{m})$

3） $x=4\text{m}$ 处，势能最小，为-4，动能最大， v 最大。



$$(E_p)_{\min}+\frac{1}{2}mv_{\max}^2=E_0$$

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2=E_0-(E_p)_{\min}=4-(-4)=8$$

$$v_{\max}=2\sqrt{2}\approx 2.82\left(\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\right)$$

作业

1. **No.4**（希望在作业题纸中选择、填空、判断各题的相应位置处写出其关键步骤）；
2. 自学本章各例题并完成书上的习题(对照书后的参考答案自己订正)。

第7周星期三交作业