《大学物理 I》作业　　No.03 角动量 角动量守恒定律 （A 卷）

班级 ________ 学号 ________ 姓名 _________ 成绩 _______

一、选择题

[　　]1、一质点沿直线做匀速率运动时，

(A) 其动量一定守恒，角动量一定为零。

(B) 其动量一定守恒，角动量不一定为零。

(C) 其动量不一定守恒，角动量一定为零。

(D) 其动量不一定守恒，角动量不一定为零。

答案：B

答案解析：质点作匀速直线运动，很显然运动过程中其速度不变，动量不变，即动量守恒；根据角动量的定义 $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$，质点的角动量因参考点（轴）而异。本题中，只要参考点（轴）位于质点运动轨迹上，质点对其的角动量即为零，其余位置均不会为零。故(B)是正确答案。

[　　]2. 两个均质圆盘 A 和 B 密度分别为 ρ_A 和 ρ_B，若 $\rho_A>\rho_B$，两圆盘质量与厚度相同，如两盘对通过盘心且垂直于盘面的轴的转动惯量各为 J_A 和 J_B，则

(A) $J_A>J_B$　　　　(B) $J_B>J_A$

(C) $J_A=J_B$　　　　(D) J_A、J_B 哪个大，不能确定

答案：B

答案解析：设 A、B 联盘厚度为 d，半径分别为 R_A 和 R_B，由题意，二者质量相等，即

$$\pi R_A{}^2 d\rho_A=\pi R_B{}^2 d\rho_B$$

因为 $\rho_A>\rho_B$，所以 $R_A{}^2<R_B{}^2$，由转动惯量 $J=\frac{1}{2}mR^2$，则 $J_A<J_B$。

[　　]3．对于绕定轴转动的刚体，如果它的角速度很大，则

(A) 作用在刚体上的力一定很大　　(B) 作用在刚体上的外力矩一定很大

(C) 作用在刚体上的力和力矩都很大　　(D) 难以判断外力和力矩的大小

答案：D

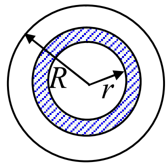
答案解析：由刚体质心运动定律和刚体定轴转动定律知：物体所受的合外力和合外力矩只影响物体运动的加速度和角加速度，因此无法通过刚体运动的角速度来判断外力矩的大小，正如无法通过速度来判断物体所受外力的大小一样。

[　　]4．一半径为 R 质量为 m 的圆形平板放在粗糙的水平桌面上，绕通过其中心且垂直板面的固定轴 OO' 转动，则摩擦力对 OO' 轴之力矩为

[　　　　] （A） $\frac{2}{3}\mu mgR$　　　　（B） μmgR

（C）$\frac{1}{2}\mu mgR$　　　　　　　　　　（D）0

答案：**A**



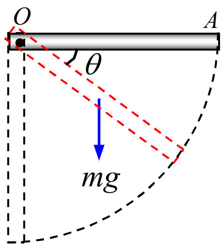
答案解析：设圆板面密度为$\sigma\left(\sigma=\frac{m}{\pi R^2}\right)$，圆盘上取一细圆环如图，该细圆环所受摩擦阻力矩大小为$\mathrm{d}M=\mu r\mathrm{d}mg=\mu r\cdot\sigma 2\pi r\mathrm{d}r\cdot g$

则圆形平板转动时受到的总摩擦阻力矩大小为

$$M=\int\mathrm{d}M=\int_0^R\mu\sigma g\cdot 2\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi\mu\sigma gR^3$$

$$M=\frac{2}{3}\mu mgR$$

[　　]5. 均匀细棒 OA 可绕通过其一端 O 而与棒垂直的水平固定光滑轴转动，如图所示。今使棒从水平位置由静止开始自由下落，在棒摆动到竖直位置的过程中，下述说法哪一种是正确的？



(A) 角速度从小到大，角加速度从大到小 ；
(B) 角速度从小到大，角加速度从小到大 ；
(C) 角速度从大到小，角加速度从大到小 ；
(D) 角速度从大到小，角加速度从小到大 。

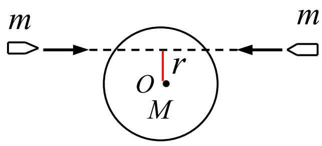
答案：**A**

答案解析：设棒长为 l，质量为 m，在向下摆到角θ时，由转动定律

$$mg\cdot\frac{l}{2}\cos\theta=J\beta\,(J\text{ 为转动惯量})$$

在棒下摆过程中，θ增大，β减小。棒由静止开始下摆，ω与β转向一致，所以由小变大。

[　　]6. 一圆盘正绕垂直于盘面的水平光滑固定轴 O 转动，如图射来两个质量相同、速度大小相同，方向相反并在一条直线上的子弹，子弹射入圆盘并且留在盘内，则子弹射入后的瞬间，圆盘的角速度ω



(A) 增大　　(B) 不变　　(C) 减小　　(D) 不能确定。

答案：**C**

答案解析：以两个子弹和圆盘为研究对象，外力矩为零，系统角动量守恒。

设圆盘转动惯量为 J，则有　$mvr-mvr+J\omega_0=\left(J+2mr^2\right)\omega$

$$\omega=\frac{J}{J+2mr^2}\omega_0$$　可见圆盘的角速度减小了。

二、判断题

[　　]1．刚体的转动惯量反映了刚体转动的惯性大小，对确定的刚体，其转动惯量是一定值。

答案：**F**

答案解析：因刚体转动惯量还与转轴的位置有关系，该题目只说了刚体确定，但没有说出转轴位置和方向。

[　　]2．质量平面分布的刚体，绕垂直于平面轴的转动惯量等于平面内两正交轴的转动惯量之和。

答案：**F**

答案解析：正交轴定理要求三条转轴有相同的交点，题目中没有给出。

[　　]3．有两个力作用在一个有固定转轴的刚体上，当这两个力的合力为零时，它们对轴的合力矩也一定是零;

答案：**F**

答案解析：两个力的合力为零，如果是一对力偶，则对轴的合力矩不一定为零。即合力为零，合力矩不一定为零。反之亦然。两个力对轴的力矩只要大小相等，符号相反，合力矩就为零，但这两个力不一定大小相等，方向相反，即合力不一定为零。

[　　]4. 两根均匀棒，长均为 l，质量分别为 m 和 2m，可绕通过其一端且与其垂直的固定轴在竖直面内自由转动。开始时棒静止在水平位置，当它们开始自由下摆时，它们的角加速度相等。

答案：**T**

答案解析：通过受力分析和定轴转动定理可知，两者角加速度相等。

[　　]5．一个系统的角动量守恒，动量一定守恒。

答案：**F**

答案解析：角动量守恒的条件是合外力矩为零，动量守恒的条件是合外力为零。

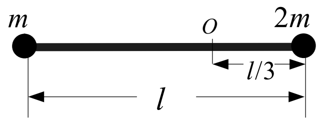
[　　]6．作单摆运动的小球，若不计空气阻力和摩擦阻力，摆球对悬挂点的角动量守恒。

答案：**F**

答案解析：即使不计空气阻力和摩擦阻力，作单摆运动的质点对悬挂点的角动量也不守恒。因为摆动过程中质点所受重力对悬挂点的力矩不为零，不满足角动量守恒的条件。在摆动过程中，质点对悬挂点的转动惯量不变，但角速度的大小、方向会周期性变化，所以角动量也随之周期性变化。

三、填空题

1．质量分别为 m 和 2 m 的两物体(都可视为质点)，用一长为 l 的轻质刚体细杆相连，系统绕通过杆且与杆垂直的竖直固定轴 O 转动，已知 O 轴离质量为 2 m 的质点的距离为 $\frac{1}{3}l$，质量为 m 的质点的线速度为 v 且与杆垂直，则该系统对转轴的角动量(动量矩)大小为______________________________。



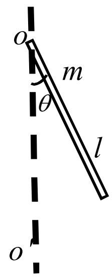
答案：mvl

答案解析：质量为 m 的质点的线速度为 v，则根据线量和角量关系有：

系统的角速度为 $$\omega = \frac{v}{2l/3} = \frac{3v}{2l}$$

系统对转轴的角动量为 $$L = J\omega = \left[m\left(\frac{2l}{3}\right)^2 + 2m\cdot\left(\frac{l}{3}\right)^2\right]\cdot\frac{3v}{2l} = mvl$$

2.一根均匀细杆，质量为 m，长度为 l。此杆对通过其端点且与杆成 θ 角的轴 oo'（如图所示）的转动惯量为________。



答案：$\frac{1}{3}m(l\sin\theta)^2$

答案解析：o 点作为原点，沿细杆建立 x 轴，则

$$J = \int r^2 dm = \int_0^l (x\sin\theta)^2 \frac{m}{l}dx = \frac{1}{3}m(l\sin\theta)^2$$

3．转动着的飞轮的转动惯量为 J，在 t=0 时角速度为 ω_0。此后飞轮经历制动过程。阻力矩 M 的大小与角速度 ω 的平方成正比，比例系数为 k (k 为大于 0 的常量)。当 $\omega = \omega_0/3$ 时，飞轮的角加速度 β= ________________________ 。从开始制动到 $\omega = \omega_0/3$ 所经过的时间 t=________________________。

答案：$\beta = -\frac{k\omega_0^2}{9J}$ ；$\frac{2J}{k\omega_0}$

答案解析：由题意得阻力矩：$M = -k\omega^2$，

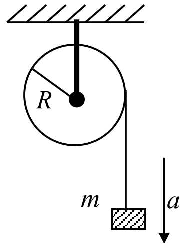
由刚体绕定轴转动的转动定律得角加速度：$\beta = \frac{M}{J} = \frac{-k\omega^2}{J}$，

当 $\omega = \omega_0/3$ 时，代入上式得飞轮的角加速度：$\beta = -\frac{k\omega_0^2}{9J}$

由 $\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{-k\omega^2}{J}$ 分离变量得：$\dfrac{d\omega}{\omega^2} = \dfrac{-k}{J}dt$，两边积分得：$\int_{\omega_0}^{\omega_0/3} \dfrac{d\omega}{\omega^2} = \int_0^t \dfrac{-k}{J}dt$

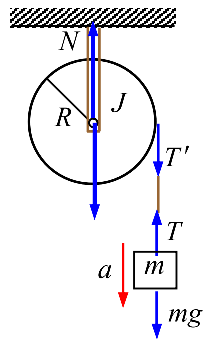
所以从开始制动到 $\omega = \omega_0/3$ 所经过的时间 $t = \dfrac{2J}{k\omega_0}$

4. 半径为 *R*、具有光滑轴的定滑轮边缘绕一细绳，绳的下端挂一质量为 *m* 的物体，绳的质量可以忽略，绳与定滑轮之间无相对滑动，若物体下落的加速度为 *a*，则定滑轮对轴的转动惯量 *J*=________________ 。



答案：$m(g-a)R^2/a$

答案解析：分别以滑轮和物体为研究对象，对物体应用牛顿运动定律，对滑轮应用转动定律列方程：



$$mg - T = ma \quad (1)$$

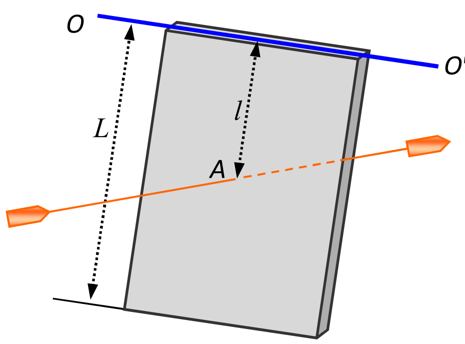
$$T'R = J\beta \quad (2)$$

牛顿第三定律 $T' = T$ (3)

角量和线量的关系 $a = R\beta$ (4)

由以上四式联立求解可得 $J = m(g-a)R^2/a$

5、如图所示一块长 *L*＝0.60 m、质量为 *m′*=1 kg 的均匀薄木板，可绕水平轴 OO′无摩擦的自由转动。当木板静止在平衡位置时，有一质量为 *m*=10×10⁻³ kg 的子弹垂直击中木板 *A* 点，*A* 离转轴 OO′的距离为 *l*=0.36 m，子弹击中木板前的速度为 500 m/s，穿出木板后的速度为 200 m/s，木板在 A 处所受的冲量为______；木板获得的角速度为______。



答案： 3 N·s ； 9 rad/s 。

答案解析：1)对子弹应用动量定理，有

$$I_{板\to弹} = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - v_1) = 10^{-2} \times (200-500) = -3\ (\mathrm{N\cdot s})$$

所以木板所受的冲量为 $I_{弹\to板} = -I_{板\to弹} = 3\ \mathrm{N\cdot s}$。

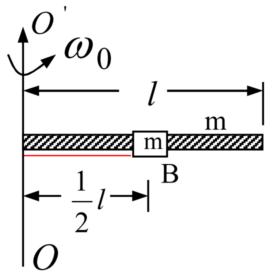
2) 对木板应用角动量定理，有 $\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = J\omega - J\omega_0$，

式中 $\omega_0 = 0$，$M = \overline{F}\cdot l$（$\overline{F}$ 为子弹对木板的平均冲力），$J = \dfrac{1}{3}m'L^2$。

将上式变形为 $\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot l\mathrm{d}t=l\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}m'L^2\omega$，可得 $\omega=\frac{3l\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t}{m'L^2}$

由 1)可知木板所受的冲量 $I_{弹\to板}=\int_{t_1}^{t_2}\overline{F}\mathrm{d}t=3\ \mathrm{N\cdot s}$， 代入已知数据，即可求出木板获得的角速度为 $\omega=\frac{3\times0.36\times3}{1\times0.6^2}=9\ \mathrm{rad/s}$ 。

6. 在一水平放置的质量为 m、长度为 l 的均匀细杆上，套着一质量也为 m 的套管 B（可看做质点），套管用细线拉住，它到竖直的光滑固定轴 OO'的距离为 $l/2$，杆和套管所组成的系统以角速度 ω_0 绕 OO'轴转动，如图所示。若在转动过程中细线被拉断，套管将沿着杆滑动。在套管滑动过程中，该系统转动的角速度 ω 与套管离轴的距离 x 的函数关系为________________。（已知杆本身对 OO'轴的转动惯量为 $\frac{1}{3}ml^2$）



答案： $\frac{7l^2\omega_0}{4l^2+12x^2}$

答案解析：以细杆和套管为研究对象，系统轴向所受合外力矩为零（重力矩垂直于转轴，轴承约束力通过转轴），系统在转动过程中角动量守恒有：

$$J_0\omega_0=J\omega$$

式中 $J_0=\frac{1}{3}ml^2+m\left(\frac{l}{2}\right)^2$ 为组合刚体初始时转动惯量。

$J=\frac{1}{3}ml^2+mx^2$ 为套管离轴距离为 x 时系统的转动惯量。

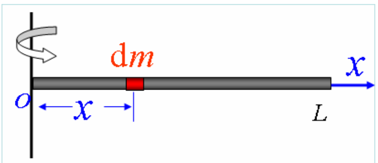
由以上各式可得角速度 ω 与套管离轴的距离 x 的函数关系：

$$\omega=\frac{J_0}{J}\omega_0=\frac{7l^2\omega_0}{4l^2+12x^2}$$

四、计算题

1、一质量 m、长为 L、质量**非均匀**分布的细杆，绕过一端端点并垂直于杆的轴转动，其杆上的质量密度与离轴的距离成正比，求该杆对转轴的转动惯量。（要求：用微元分析法）

解：以杆的端点为原点，沿杆长建立一维坐标 x



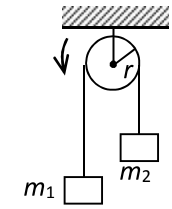
在杆上取质量元 $\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}x=kx\mathrm{d}x$ （1）

$$\because \int \mathrm{d}m = \int_0^L \lambda \mathrm{d}x = \int_0^L kx\mathrm{d}x = m \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^L = \frac{1}{2}kL^2 = m \Rightarrow k = \frac{2m}{L^2} \qquad (2)$$

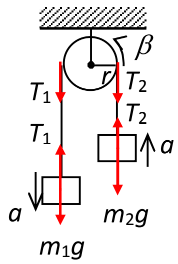
该质量元对转轴的转动惯量为：$\mathrm{d}J = x^2\mathrm{d}m$　（3）

$$J = \int_0^L x^2\mathrm{d}m = \int_0^L x^2\lambda\mathrm{d}x = \int_0^L x^2 \cdot kx\mathrm{d}x$$
$$= k\int_0^L x^3\mathrm{d}x = k\frac{1}{4}4x^4\Big|_0^L = \frac{2m}{L^2}\cdot\frac{1}{4}L^4 = \frac{1}{2}mL^2$$

2．如图所示，设两重物的质量分别为 m_1 和 m_2，且 $m_1 > m_2$，定滑轮的半径为 r，对转轴的转动惯量为 J，轻绳与滑轮间无滑动，滑轮轴上摩擦不计。设开始时系统静止，试求 t 时刻滑轮的角速度。



解：作示力图。设两重物加速度大小 a 相同，方向如图。



对 m_1 有：　$m_1g - T_1 = m_1a$

对 m_2 有：　$T_2 - m_2g = m_2a$

设滑轮的角加速度为　，则　$T_1r - T_2r = J\beta$

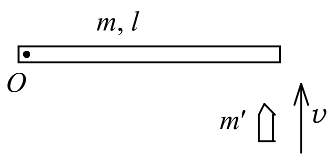
轻绳与滑轮间无滑动，有　$a = r\beta$

由以上四式可得滑轮的角加速度：　$\beta = \dfrac{(m_1 - m_2)gr}{(m_1 + m_2)r^2 + J}$

因 β 与时间无关，则为匀角加速运动，而开始时系统静止，故 t 时刻滑轮的角速度为：

$$\omega = \beta t = \frac{(m_1 - m_2)gr}{(m_1 + m_2)r^2 + J}t$$

3．一根放在水平光滑桌面上的匀质棒，可绕通过其一端的竖直固定光滑轴 O 转动．棒的质量为 $m = 1.5$ kg，长度为 $l = 1.0$ m，对轴的转动惯量为 $J = \dfrac{1}{3}ml^2$．初始时棒静止．今有一水平运动的子弹垂直地射入棒的另一端，并留在棒中，如图所示．子弹的质量为 $m' = 0.020$ kg，速率为 $v = 400\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$．试问：



(1) 棒开始和子弹一起转动时角速度 ω 有多大？

(2) 若棒转动时受到大小为 $M_r = 4.0\ \mathrm{N\cdot m}$ 的恒定阻力矩作用，棒能转过多大的角度　？

解：(1) 因棒和子弹组成的系统在转动轴方向上合外力矩为零，故系统角动量守恒有：

$$m'\upsilon l = \left(\frac{1}{3}ml^2 + m'l^2\right)\omega$$

∴ $$\omega = \frac{m'\upsilon}{\left(\frac{1}{3}m + m'\right)l} = \frac{0.020 \times 400}{\left(\frac{1}{3} \times 1.5 + 0.020\right) \times 1.0}$$

$$= 15.4\,\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 由刚体定轴转动定律有

$$-M_r = (\frac{1}{3}ml^2 + m'l^2)\beta$$

由运动学关系有： $0 - \omega^2 = 2\beta\theta$

∴ $$\theta = \frac{\left(\frac{1}{3}m + m'\right)l^2\omega^2}{2M_r} = \frac{\left(\frac{1}{3} \times 1.5 + 0.020\right) \times 1.0^2 \times 15.4^2}{2 \times 4.0}$$

$$= 15.4\,\text{rad}$$

五、问答或者讨论题

1. 据报导有只猫从 32 层楼掉下来也仅仅只有胸腔和一颗牙齿有轻微的损伤。实验中发现把猫四脚朝天提离地面，然后放开，猫在下落过程中可以在空中转体，使得四脚转向地面。(1) 猫是通过什么办法实现空中转体，总能保持四脚着地的？(2) 满足什么定律？

答：(1) **猫可以通过甩尾巴使得身体反方向旋转，从而实现空中转体，四脚转向地面。(2) 满足角动量守恒定律。**