University Physics

大学物理

数学准备

主讲：林月霞

一、矢量和标量的定义

1.**标量：** 只有大小，没有方向的物理量。

如：温度 T、长度 L 等

2.**矢量：** 不仅有大小，而且有方向的物理量。

如:力 $\vec{F}$、速度 $\vec{v}$、电场 $\vec{E}$ 等

矢量表示为： $\vec{A}=|\vec{A}|\hat{a}$

其中：$|\vec{A}|$ 为矢量的模，表示该矢量的大小。

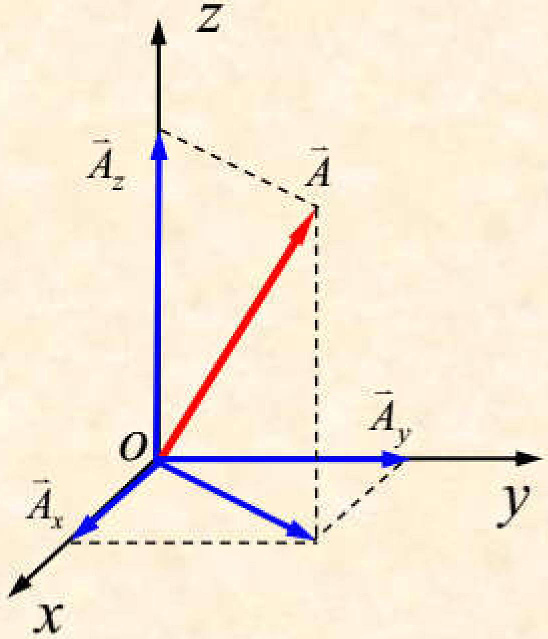
$\hat{a}$ 为单位矢量，表示矢量的方向，其大小为1。

所以：一个矢量就表示成矢量的模与单位矢量的乘积。

矢量表示法

在直角坐标系下的矢量表示:

三个方向的单位矢量用 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 表示。



根据矢量加法运算:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

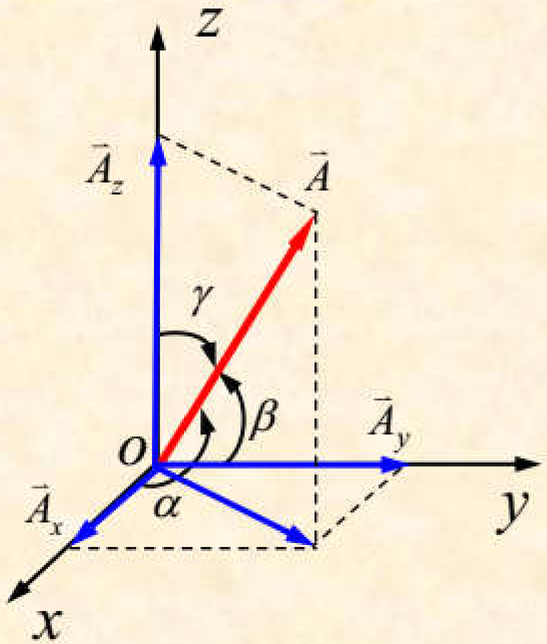
其中:

$$\vec{A}_x = A_x\hat{x}, \quad \vec{A}_y = A_y\hat{y}, \quad \vec{A}_z = A_z\hat{z}$$

所以: $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$

矢量表示法

矢量： $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$



✧模的计算： $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

✧单位矢量：

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x}{|\vec{A}|}\hat{x} + \frac{A_y}{|\vec{A}|}\hat{y} + \frac{A_z}{|\vec{A}|}\hat{z}$$

$$= \cos\alpha\,\hat{x} + \cos\beta\,\hat{y} + \cos\gamma\,\hat{z}$$

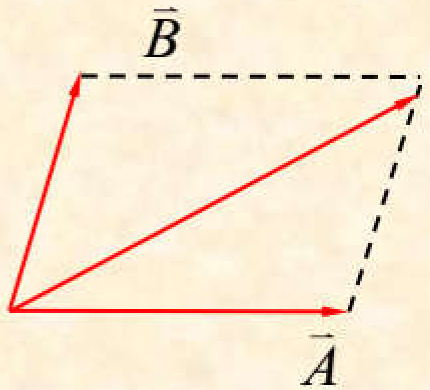
✧方向角与方向余弦： $\alpha,\ \beta,\ \gamma$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|},\quad \cos\beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|},\quad \cos\gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$$

二、矢量运算规则

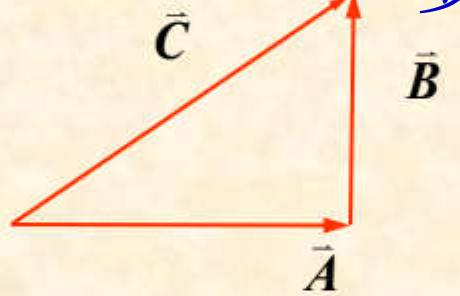
1.加法: 矢量加法是矢量的几何和,服从平行四边形规则。

三角形法则
多边形法则



$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$$

$\Rightarrow$



a.满足交换律: $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

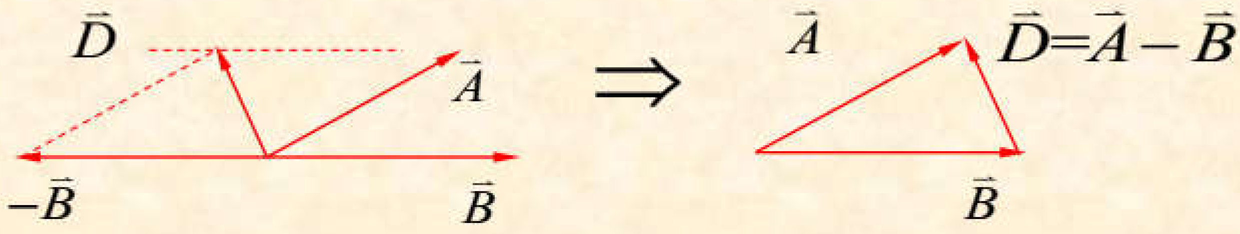
b.满足结合律: $(\vec{A}+\vec{B})+(\vec{C}+\vec{D})=(\vec{A}+\vec{C})+(\vec{B}+\vec{D})$

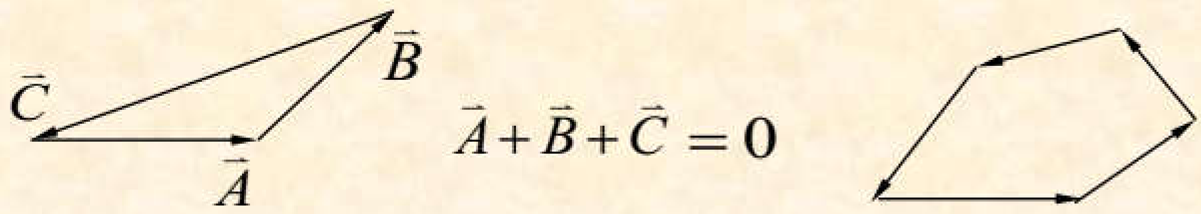
在直角坐标系中两个矢量加法运算:

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{x}+(A_y+B_y)\hat{y}+(A_z+B_z)\hat{z}$$

2.减法：换成加法运算 $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$

逆矢量：$\vec{B}$ 和 $(-\vec{B})$ 的模相等，方向相反，互为逆矢量。





$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$

推论：

任意多个矢量首尾相连组成闭合多边形，其矢量和必为零。

在直角坐标系中两矢量的减法运算：

$$\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\hat{x}+(A_y-B_y)\hat{y}+(A_z-B_z)\hat{z}$$

3.乘法:

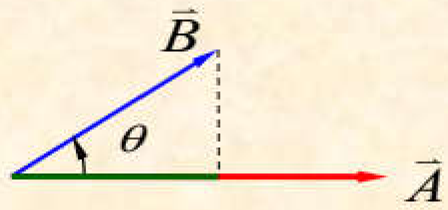
（1）标量与矢量的乘积（数乘）：

$$k\vec{A} = k\,|\vec{A}|\,\hat{a}$$

（2）矢量与矢量乘积分两种定义

a. 标量积（点积）：

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos\theta$$



✦两矢量的点积含义：

一矢量在另一矢量方向上的投影与另一矢量模的乘积，其结果是一标量。

矢量运算规则

推论1：满足交换律 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

推论2：满足分配律 $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

推论3：当两个非零矢量点积为零,则这两个矢量必正交。

• 在直角坐标系中，已知三个坐标轴是相互正交的，即

$$\hat{x}\cdot\hat{y}= \qquad \hat{x}\cdot\hat{z}= \qquad \hat{y}\cdot\hat{z}=$$

$$\hat{x}\cdot\hat{x}= \qquad \hat{y}\cdot\hat{y}= \qquad \hat{z}\cdot\hat{z}=$$

有两矢量点积:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\cdot(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})$$

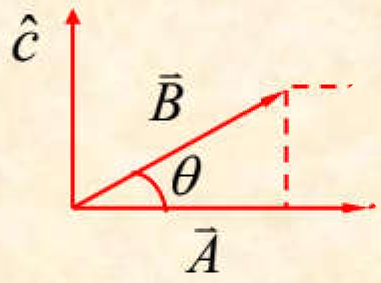
$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

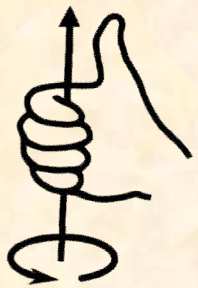
• 结论: 两矢量点积等于对应分量的乘积之和。

矢量运算规则

b.矢量积（叉积）：

$$\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\sin\theta\,\hat{c}$$





•含义:

两矢量叉积，结果得一新矢量，其大小为这两个矢量组成的平行四边形的面积，方向为该面的法线方向，且三者符合右手螺旋法则。

推论1：不服从交换律：$\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}$, $\quad \vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

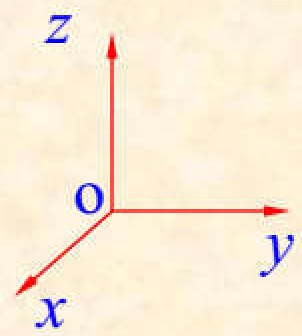
推论2：服从分配律：$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

推论3：不服从结合律：$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

推论4：当两个非零矢量叉积为零，则这两个矢量必平行。

矢量运算规则

在直角坐标系中，两矢量的叉积运算如下：



$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{x}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{y}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{z}$$

两矢量的叉积又可表示为：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

例题：1. $\vec{i}\bullet\vec{i}=1$ $\vec{i}\bullet\vec{j}=0$

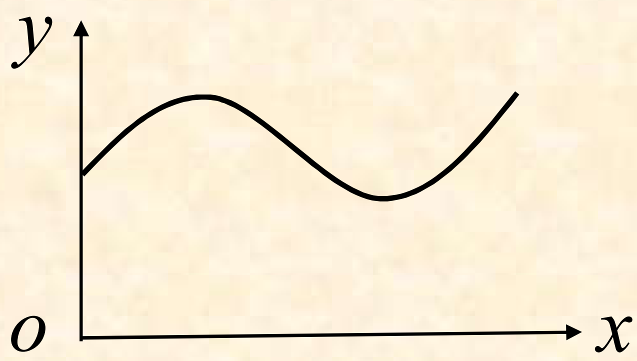
2. $\vec{i}\times\vec{i}=0$ $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$

3. $\left(2\vec{i}+8\vec{j}-2\vec{k}\right)\pm/\bullet/\times\left(3\vec{i}-3\vec{j}+7\vec{k}\right)=$

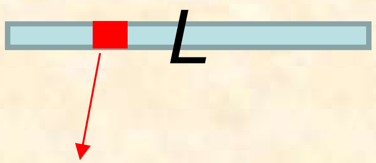
三、微积分运算

1. 函数 $f(x)$

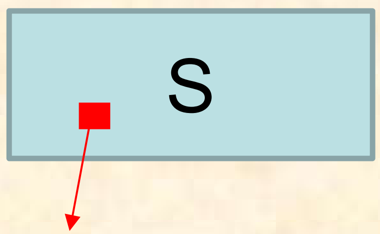
$$y = f(x)$$



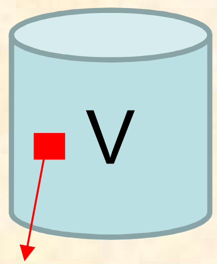
2. 微分 d:微分算符



$\Delta L \to \mathrm{d}L$



$\Delta S \to \mathrm{d}S$

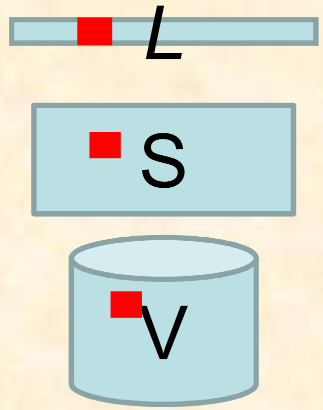


$\Delta V \to \mathrm{d}V$

宏观小量　微观无穷小量

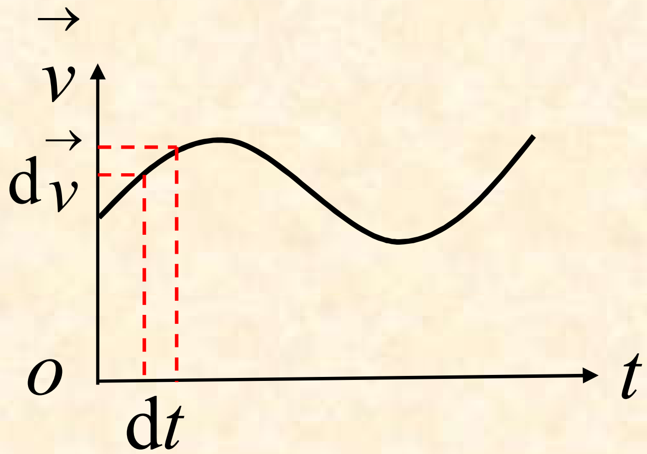
2. 微分

函数也可以微分 $\mathrm{d}m=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{d}l\\ \sigma\,\mathrm{d}S\\ \rho\,\mathrm{d}V\end{cases}$



矢量也可以微分

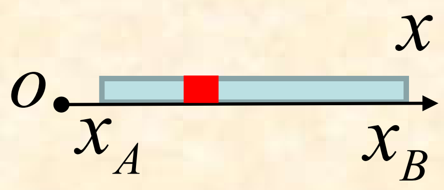
$\mathrm{d}\vec{v}$: $\mathrm{d}t$时间内 $\vec{v}$ 的变化量



3. 积分：微小量求和

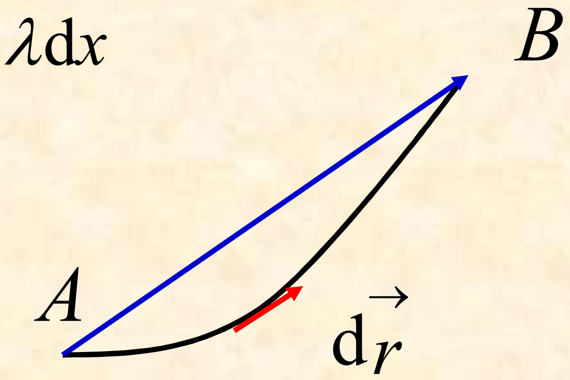
不连续量 $l=\sum \Delta l$

连续量 $l=\int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x$



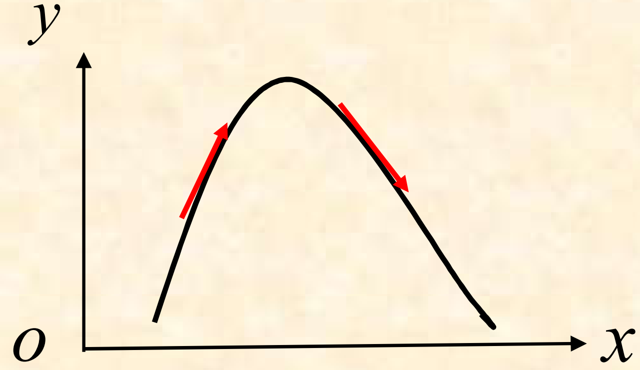
函数也可以积分 $m=\int \mathrm{d}m=\int_{x_A}^{x_B} \lambda \mathrm{d}x$

矢量也可以积分 $\int_A^B \mathrm{d}\vec{r}=\vec{AB}$



4. 导数： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：$y$ 随 x 变化快慢

几何图像



意义：切线斜率；负表示随着**x**的增大，**y**减小

例（1）匀速圆周运动 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$ $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\neq 0$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}(\vec{A}\bullet\vec{B})}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\bullet\vec{B}+\vec{A}\bullet\dfrac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$ $\dfrac{\mathrm{d}(\vec{A}\times\vec{B})}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B}+\vec{A}\times\dfrac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$

微积分算符

1. 熟悉的算符： $+$、$-$、$\times$、$\div$、$\sqrt{}$

微积分算符： Δ　d　$\sum$　$\int$

2. 微分算符 $\begin{cases} \Delta\text{：宏观过程增量} \\ \mathbf{d}\text{：微观过程增量。} \end{cases}$

例：$\Delta\boldsymbol{l}$、$\Delta\boldsymbol{r}$

例：$\mathbf{d}(\boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t})$

3. 积分算符 $\begin{cases} \sum\text{：对离散的量求和} \\ \int\text{：对连续的无穷多个量求和，} \\ \quad\text{其中每一项都是无穷小。} \end{cases}$