第三章作业题

1．设二元对称信道的传递矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(1) 若 P(0) = 3/4，P(1) = 1/4，求 $H(X)$，$H(X/Y)$，$H(Y/X)$和 $I(X;Y)$；

(2) 求该信道的信道容量及其达到信道容量时的输入概率分布；

解：(1)

$$H(X) = -\sum_i p(x_i) = -(\frac{3}{4}\times\log_2\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\log_2\frac{1}{4}) = 0.811 \;\; bit/symbol$$

$$H(Y/X) = -\sum_i\sum_j p(x_i)p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)$$

$$= -(\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\lg\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\lg\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\lg\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\lg\frac{2}{3})\times\log_2 10$$

$$= 0.918 \;\; bit/symbol$$

$$p(y_1) = p(x_1y_1)+p(x_2y_1) = p(x_1)p(y_1/x_1)+p(x_2)p(y_1/x_2) = \frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = 0.5833$$

$$p(y_2) = p(x_1y_2)+p(x_2y_2) = p(x_1)p(y_2/x_1)+p(x_2)p(y_2/x_2) = \frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3} = 0.4167$$

$$H(Y) = -\sum_j p(y_j) = -(0.5833\times\log_2 0.5833+0.4167\times\log_2 0.4167) = 0.980 \;\; bit/symbol$$

$$I(X;Y) = H(X)-H(X/Y) = H(Y)-H(Y/X)$$

$$H(X/Y) = H(X)-H(Y)+H(Y/X) = 0.811-0.980+0.918 = 0.749 \;\; bit/symbol$$

$$I(X;Y) = H(X)-H(X/Y) == 0.811-0.749 = 0.062 \;\; bit/symbol$$

2)

$$C = \max I(X;Y) = \log_2 m - H_{mi} = \log_2 2+(\frac{1}{3}\lg\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\lg\frac{2}{3})\times\log_2 10 = 0.082 \;\; bit/symbol$$

$$p(x_i) = \frac{1}{2}$$

2．设有一批电阻，按阻值分 70%是 2KΩ，30%是 5KΩ；按瓦分 64%是 0.125W，其余是 0.25W。现已知 2KΩ阻值的电阻中 80%是 0.125W，问通过测量阻值可以得到的关于瓦数的平均信息量是多少？

解：

对本题建立数学模型如下：

$$\begin{bmatrix} X\text{阻值} \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 = 2K\Omega & x_2 = 5K\Omega \\ 0.7 & 0.3 \end{Bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} Y\text{瓦数} \\ P(Y) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 = 1/8 & y_2 = 1/4 \\ 0.64 & 0.36 \end{Bmatrix}$$

$$p(y_1/x_1) = 0.8, p(y_2/x_1) = 0.2$$

求：$I(X;Y)$

以下是求解过程：

$$p(x_1y_1) = p(x_1)p(y_1/x_1) = 0.7\times 0.8 = 0.56$$
$$p(x_1y_2) = p(x_1)p(y_2/x_1) = 0.7\times 0.2 = 0.14$$
$$\because\ p(y_1) = p(x_1y_1) + p(x_2y_1)$$
$$\therefore\ p(x_2y_1) = p(y_1) - p(x_1y_1) = 0.64 - 0.56 = 0.08$$
$$\because\ p(y_2) = p(x_1y_2) + p(x_2y_2)$$
$$\therefore\ p(x_2y_2) = p(y_2) - p(x_1y_2) = 0.36 - 0.14 = 0.22$$
$$H(X) = -\sum_i p(x_i) = -(0.7\times\log_2 0.7 + 0.3\times\log_2 0.3) = 0.881\ \ bit/symbol$$
$$H(Y) = -\sum_j p(y_j) = -(0.64\times\log_2 0.64 + 0.36\times\log_2 0.36) = 0.943\ \ bit/symbol$$
$$\begin{aligned}H(XY) &= -\sum_i\sum_j p(x_iy_j)\log p(x_iy_j)\\ &= -(0.56\times\log_2 0.56 + 0.14\times\log_2 0.14 + 0.08\times\log_2 0.08 + 0.22\times\log_2 0.22)\\ &= 1.638\ \ bit/symbol\end{aligned}$$
$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(XY) = 0.881 + 0.943 - 1.638 = 0.186\ \ bit/symbol$$

3. XY 为二元随机变量，已知 P(XY)的概率 P(00)=P(11)=P(01)=1/3，随机变量 Z=X⊕Y (其中⊕为模二和运算，即 0⊕0=0；1⊕0=1；0⊕1=1；1⊕1=0)。计算：
(1) H(X); H(Y); H(X|Y); I(X;Y);
(2) H(X|Z); H(XYZ).

解：

已知二维随机变量联合概率分布

P(XY)		Y		P(X)
		0	1	
X	0	1/3	1/3	P(X)=P(0)=2/3
	1	0	1/3	P(X)=P(1)=1/3
P(Y)		P(Y)=P(0)=1/3	P(Y)=P(1)=2/3	

可知 XYZ 的关系为

P(XYZ)		XY				P(Z)
		00	01	10	11	
Z	0	1/3	0	0	1/3	P(Z)=P(0)=2/3
	1	0	1/3	0	0	P(Z)=P(1)=1/3

还可以知道

P(XZ)		X		P(Z)
		0	1	
Z	0	1/3	1/3	P(Z)=P(0)=2/3
	1	1/3	0	P(Z)=P(1)=1/3
P(X)		P(X)=P(0)=2/3	P(X)=P(1)=1/3	

因此

$$H(\mathrm{X}) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i)\log p(x_i) = 0.918 bit/sym$$

$$H(Y)=-\sum_{i=1}^{2}p(x_i)\log p(x_i)=0.918bit/sym$$

$$\mathrm{I}(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(XY)$$

=0.918+0.918-H(1/3,1/3,1/3)=1.836-1.585=0.251bit/sym

H(X|Z)

$$\mathrm{H}(X/\mathrm{Z})=H(X\mathrm{Z})-H(\mathrm{Z})$$

=H(1/3,1/3,1/3)-H(1/3)=1.585-0.918=0.667bit/sym

H(XYZ)=H(1/3,1/3,1/3)=1.585bit/sym

4. 试求以下各信道矩阵代表的信道的容量：

(1) $$P=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

(2) $$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(3) $$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

(4) $$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

解：(1) 这个信道是无噪无损信道：

$$C=\log_2 n=\log_2 4=2\quad bit/symbol$$

(2) 这个信道是无噪有损信道

$$C=\log_2 m=\log_2 3=1.585\quad bit/symbol$$

(3) 这个信道是对称的离散信道

$$C=\log 4-H(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{6})=0.0817(bit/symbol)$$

(4) 这个信道是对称的离散信道

$$C=\log 3-H(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6})=0.126(bit/symbol)$$

5. 有一个二元对称信道，其信道矩阵为

$$\begin{bmatrix}0.98&0.02\\0.02&0.98\end{bmatrix}$$

设该信源以1500二元符号/秒的速度传输输入符号。现有一消息序列共有14000个二元符号，并设 *P(0) = P(1)* = 1/2，问从消息传输的角度来考虑，10 秒钟内能否将这消息序列无失真的传递完？

解：信道容量计算如下：

$$C=\max I(X;Y)=\max\left[H(Y)-H(Y/X)\right]=H_{\max}(Y)-H_{mi}$$
$$=\log_2 2+(0.98\times\log_2 0.98+0.02\times\log_2 0.02)$$
$$=0.859\quad bit/symbol$$

也就是说每输入一个信道符号，接收到的信息量是 0.859 比特。已知信源输入 1500 二元符号/秒，那么每秒钟接收到的信息量是：

$$I_1=1500symbol/s\times 0.859bit/symbol=1288\quad bit/s$$

现在需要传送的符号序列有 14000 个二元符号，并设 $P(0)=P(1)=1/2$，可以计算出这个符号序列的信息量是

$$I=14000\times(0.5\times\log_2 0.5+0.5\times\log_2 0.5)$$
$$=14000\quad bit$$

要求 10 秒钟传完，也就是说每秒钟传输的信息量是 1400bit/s，超过了信道每秒钟传输的能力（1288 bit/s）。所以 10 秒内不能将消息序列无失真的传递完。

6. 证明：对称信道输入符号等概分布时，信道输出符号也是等概分布。

7. Z 信道的信道传递矩阵为 $P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \varepsilon & 1\text{-}\varepsilon\end{bmatrix}$，计算：

(1)达到信道容量时，输入符号概率分布；

(2)计算当 ε=0.5 时，信道的信道容量；

(3)当 ε 趋近 0 时和 ε 趋近 1 时，对应的最佳信道输入分布值。

$$\mathrm{P}(x=0)=1-p;P(\mathrm{x}=1)=\mathrm{p}$$
$$p(\mathrm{XY})=\begin{bmatrix}1-p & 0\\ p\varepsilon & p(1-\varepsilon)\end{bmatrix}$$
$$p(\mathrm{Y}=0)=1-p+p\varepsilon=1-p\bar{\varepsilon};p(\mathrm{Y}=1)=p\bar{\varepsilon}$$

$$I(\mathrm{X;Y})=\mathrm{H(Y)}-\mathrm{H(Y/X)}=\mathrm{H}(p\bar{\varepsilon})-\mathrm{H(Y/X)}$$
$$=\mathrm{H}(p\bar{\varepsilon})+[(1-\mathrm{p})\log 1+0\log 0+\mathrm{p}\,\varepsilon\log\varepsilon+\mathrm{p}\,\bar{\varepsilon}\log\bar{\varepsilon}]$$
$$令\frac{\partial I(\mathrm{X;Y})}{\partial p}=\frac{\partial\{\mathrm{H}(p\bar{\varepsilon})-\mathrm{pH}(\varepsilon)\}}{\partial p}$$
$$=\frac{\partial\{-p\bar{\varepsilon}\log(p\bar{\varepsilon})-(1-p\bar{\varepsilon})\log(1-p\bar{\varepsilon})-\mathrm{pH}(\varepsilon)\}}{\partial p}$$
$$=-\bar{\varepsilon}\log(p\bar{\varepsilon})-p\bar{\varepsilon}\frac{\bar{\varepsilon}}{p\bar{\varepsilon}}\log_2 e+\bar{\varepsilon}\log(1-p\bar{\varepsilon})+(1-p\bar{\varepsilon})\frac{\bar{\varepsilon}}{(1-p\bar{\varepsilon})}\log_2 e-\mathrm{H}(\varepsilon)$$
$$=-\bar{\varepsilon}\log(p\bar{\varepsilon})+\bar{\varepsilon}\log(1-p\bar{\varepsilon})-\mathrm{H}(\varepsilon)=0$$

$$-\bar{\varepsilon}\log(p\bar{\varepsilon})+\bar{\varepsilon}\log(1-p\bar{\varepsilon})=-\varepsilon\log\varepsilon-\bar{\varepsilon}\log\bar{\varepsilon}$$
$$\bar{\varepsilon}\log\frac{p\bar{\varepsilon}}{(1-p\bar{\varepsilon})}=\varepsilon\log\varepsilon+\bar{\varepsilon}\log\bar{\varepsilon}\Rightarrow\log\frac{p\bar{\varepsilon}}{(1-p\bar{\varepsilon})}=\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\log\varepsilon+\log\bar{\varepsilon}$$
$$\Rightarrow\log\frac{p\bar{\varepsilon}}{(1-p\bar{\varepsilon})}=\log\left(\bar{\varepsilon}\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}}\right)\Rightarrow\frac{p\bar{\varepsilon}}{(1-p\bar{\varepsilon})}=\bar{\varepsilon}\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}}$$
$$\Rightarrow p=\frac{\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}}}{1+\bar{\varepsilon}\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}}}$$

(2) 当 ε =0.5 时， $p=\dfrac{\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}}}{1+\bar{\varepsilon}\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}}}=2/5$，

$$C=\max I(\mathrm{X};\mathrm{Y})=\mathrm{H}(p\bar{\varepsilon})+\mathrm{p}\,\varepsilon\log\varepsilon+\mathrm{p}\,\bar{\varepsilon}\log\bar{\varepsilon}$$
$$=H(1/5)-2/5\,\mathrm{H}(0.5)=0.3219\,\mathrm{bit/sym}$$

(3) 当 $\varepsilon\to 0,\lim\limits_{\varepsilon\to 0}p=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\bar{\varepsilon}\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}}}{1+\bar{\varepsilon}\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}}}=1/2$，上述信道是一个无噪无损对称信道，因此输入等概达到信道容量；

当 $\varepsilon\to 1$，信道传递矩阵为 P= $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，信道容量 C=0，因此无论输入分布是什么形式，信道容量始终为 0.