University Physics

大学物理

主讲：林月霞

§3.4 运动学的两类基本问题

一. 已知质点运动方程，求任一时刻的速度、加速度（微分法）；

$$\vec{r}(t) \to \vec{v}, \quad \vec{a} \quad ; \quad \theta(t) \to \omega, \quad \beta$$

二. 已知加速度(或速度)及初始条件，求质点任一时刻的速度和运动方程(积分法）。

$$\vec{a}(t), (t=0\text{时}\ \vec{r}_0, \vec{v}_0) \to \vec{v}(t), \vec{r}(t)$$

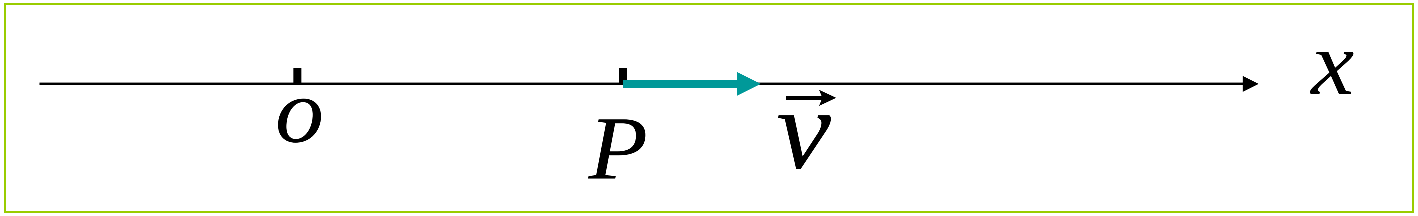
第一类问题

例题1： 已知粒子运动方程 $x = t^3 - 3t^2 - 9t + 5\ (\mathrm{SI})$

分析粒子的运动情况

1. 其轨迹为一条直线

注意——凡直线运动，可将坐标原点选在轨道直线上，建立一维坐标，将各矢量按代数量处理。



$$\vec{r}, \Delta\vec{r}, \vec{v}, \vec{a} \quad \rightarrow \quad x, \Delta x, v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

2. 该粒子作一般变速直线运动

$$x = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$$

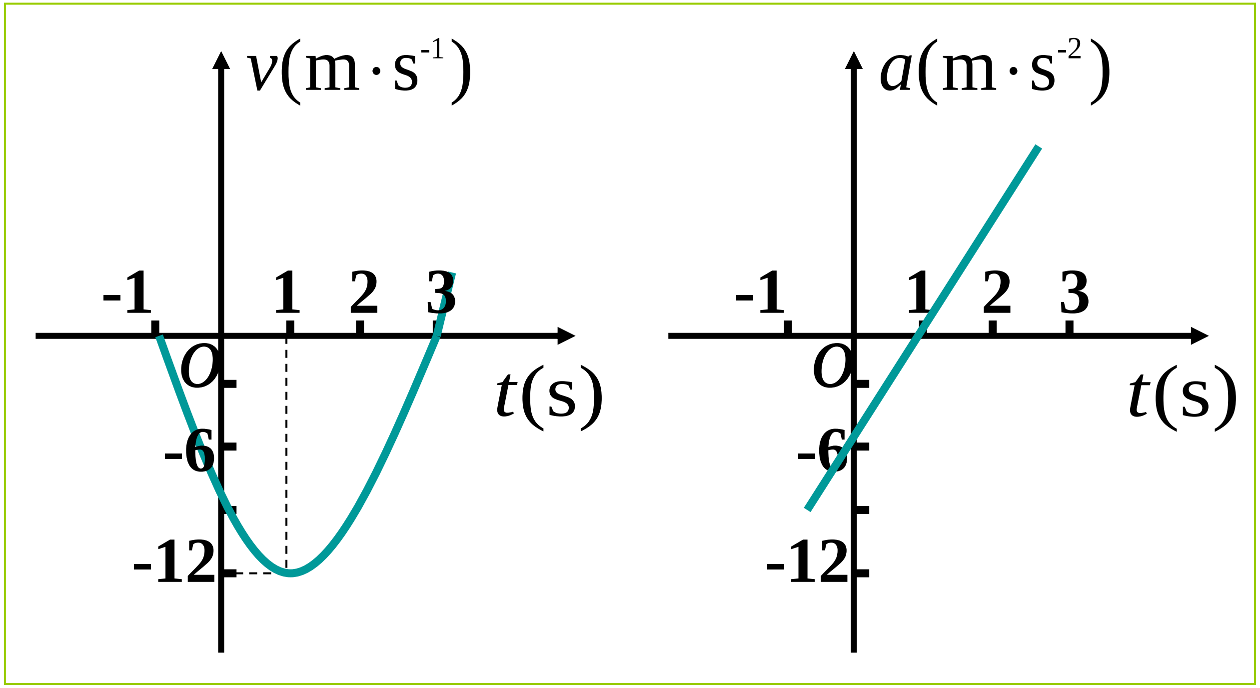
$$v = 3t^2 - 6t - 9$$

$$a = 6t - 6$$

向+x运动？

$v > 0:$

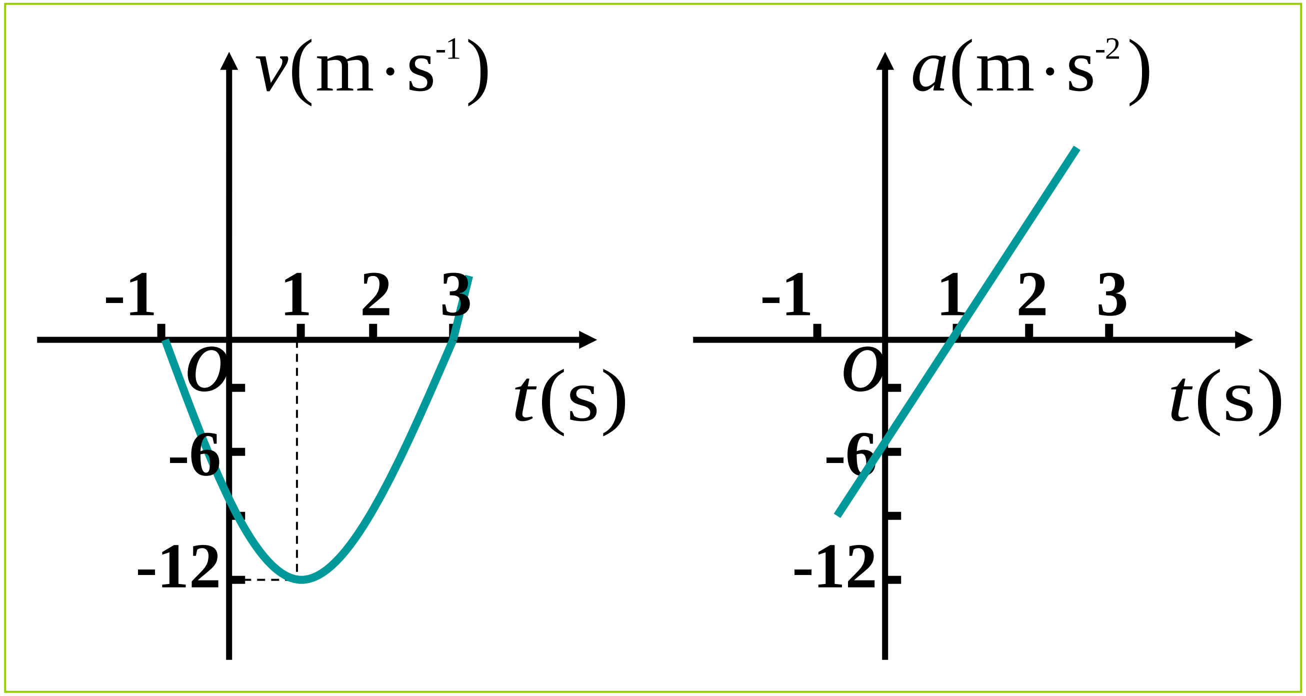
$t > 3; t < -1$



向-x运动？

$v < 0:$

$0 \le t < 3$



何时加速？

a，v同号

何时减速？

a，v异号

$0 < t < 3$：粒子向 $-x$ 运动；

$0<t<1$： 加速，

$1<t<3$： 减速

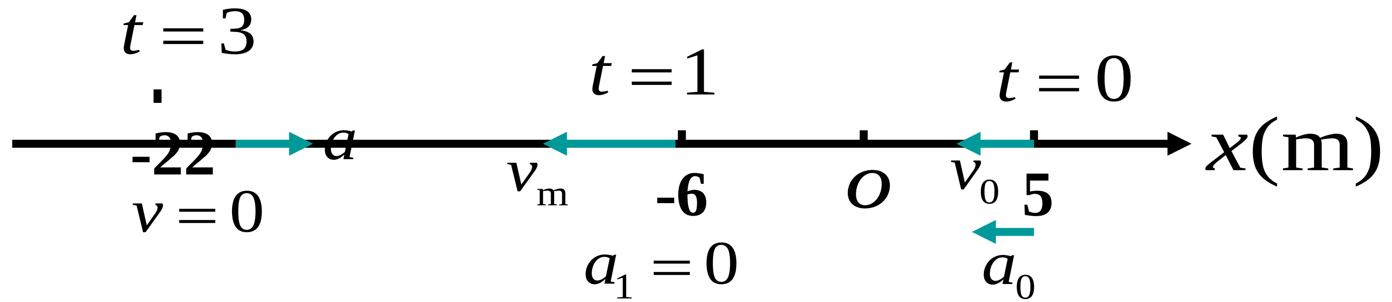
$t>3$：粒子向 $+x$ 加速运动

$$x = t^3 - 3t^2 - 9t + 5,\quad v = 3t^2 - 6t - 9,\quad a = 6t - 6$$

转折性时刻：$t = 0$：$x_0 = 5$　$v_0 = -9$　$a_0 = -6$

$t = 1$：$x_1 = -6$　$v_1 = -12$　$a_1 = 0$

$t = 3$：$x_3 = -22$　$v_3 = 0$　$a_3 = 12$

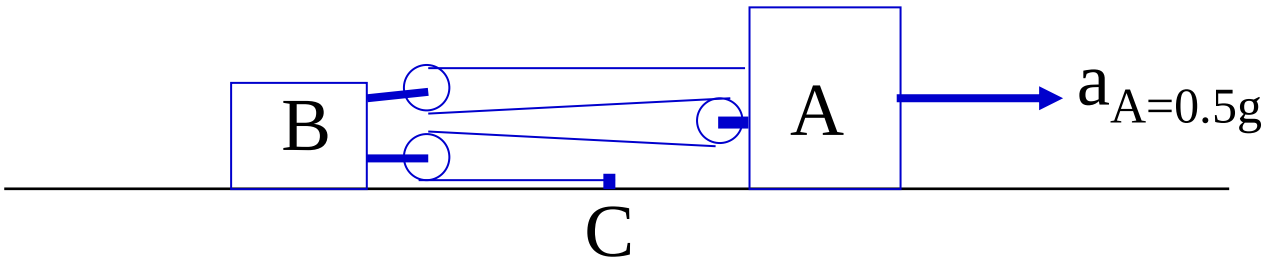


$t > 3$　返回加速运动

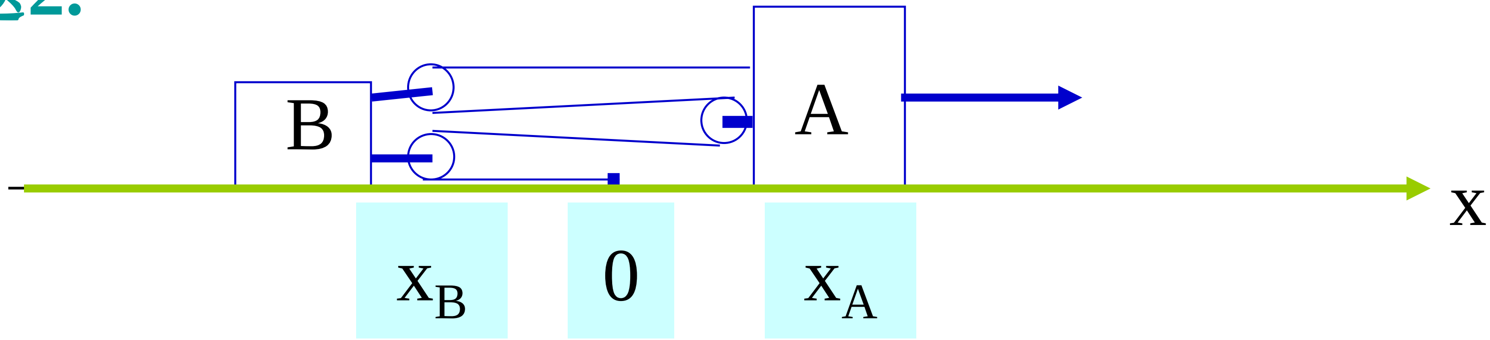
注意：由运动叠加原理，质点的一般曲线运动可以归结为直线运动处理。

例题2.

水平桌面上放置A、B两物体，用一根不可伸长的绳索按图所示联结，C点固定。已知A加速度为0.5g，求B的加速度。

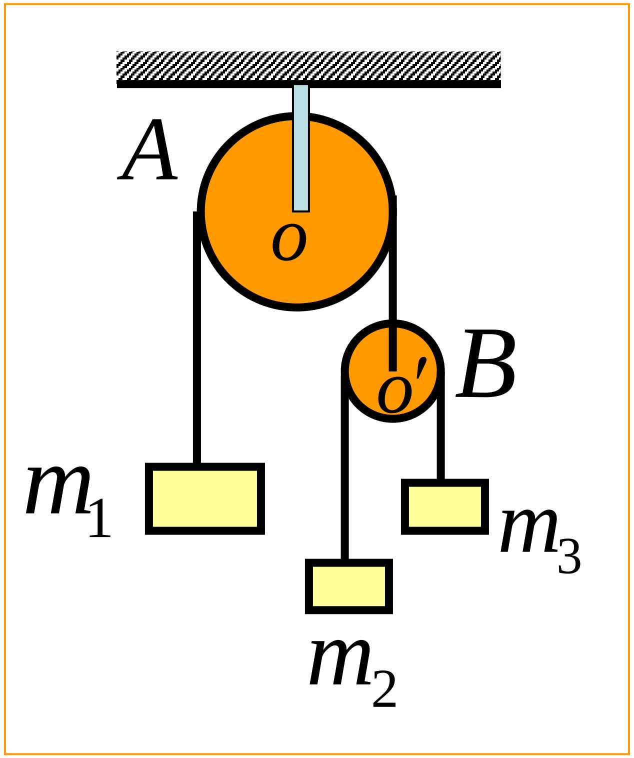


例题2.



$$L = 3x_A - 4x_B \longrightarrow a_B = \frac{3}{4}a_A = \frac{3}{8}g$$

已知m_1的加速度a_1,m_2的加速度a_2,求m_3加速度。绳子不可伸长。



$$|a_1| = |a_B| \quad |a_2| = |a_3| \quad ?$$

$$x_1 + x_B = L_1$$

$$x_2 - x_B + x_3 - x_B = L_2$$

$$a_3 = -2a_1 - a_2$$

$$|a_2 - a_B| = |a_3 - a_B|$$

$$|a_2'| = |a_3'|$$

同一根绳子上，物体相对加速度相等！

例题3.　已知：$\vec{r}=5t\vec{i}+(15t-5t^2)\vec{j}$　(SI)

1. 质点做什么运动?

平面曲线运动

2. 找一个实例

$$\vec{v}=5\vec{i}+(15-10t)\vec{j} \qquad \vec{a}=-10\vec{j}$$

$$t=0:\quad \vec{r}_0=0,\quad \vec{v}_0=5\vec{i}+15\vec{j}$$

质点从原点出发，初速度为 $\vec{v}_0$

x:　$v_x=5,\ a_x=0$　匀速直线运动

y:　$v_y=15-10t$　$a_y=-10\approx -g$　为竖直上抛运动

合运动：斜抛运动

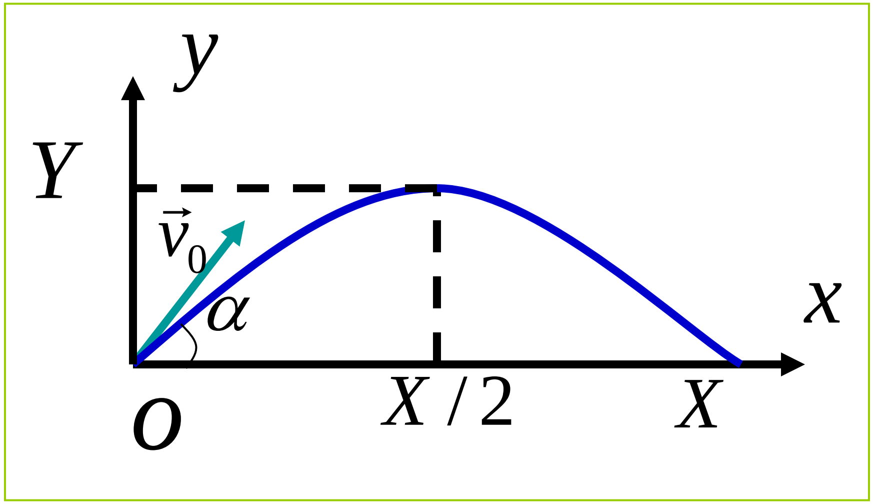
3. 求抛射角、轨道方程、射程、射高

抛射角：

$$\vec{v}_0 = 5\vec{i} + 15\vec{j}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \operatorname{arctg}3 = 72^\circ$$

轨道方程： $\left.\begin{aligned} x &= 5t \\ y &= 15t - 5t^2 \end{aligned}\right\}$ $y = 3x - \dfrac{x^2}{5}$



射程：

$y = 0 \quad X = 15\ \mathrm{m}$

射高：

$x = 7.5 \qquad Y = 11.25\ \mathrm{m}$

4. 求 $t=1\text{s}$ 时：$a_n=?\quad a_\tau=?\quad \rho=?$

$$\vec{v}=5\vec{i}+(15-10t)\vec{j}\qquad \vec{a}=-10\vec{j}$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{5^2+(15-10t)^2}$$

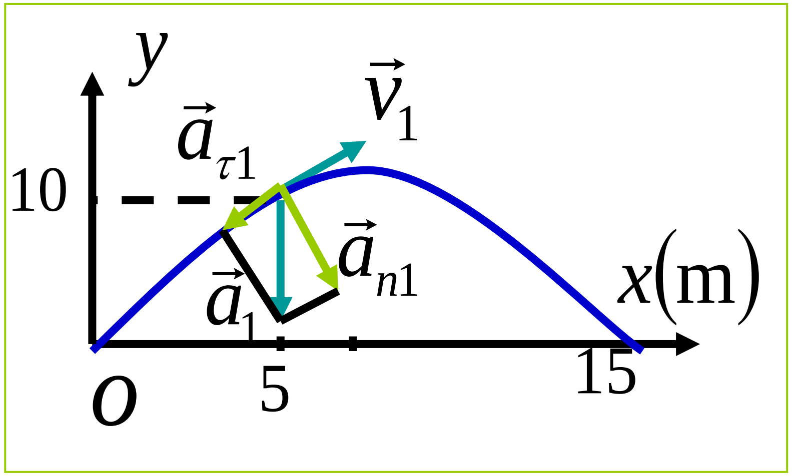
$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{10(2t-3)}{\sqrt{4t^2-12t+10}}$$

$$t=1:a_{\tau 1}=-5\sqrt{2}\approx-7.1\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$v_1=5\sqrt{2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$t=1:\quad a_{\tau 1}=-5\sqrt{2}\approx -7.1\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\qquad v_1=5\sqrt{2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

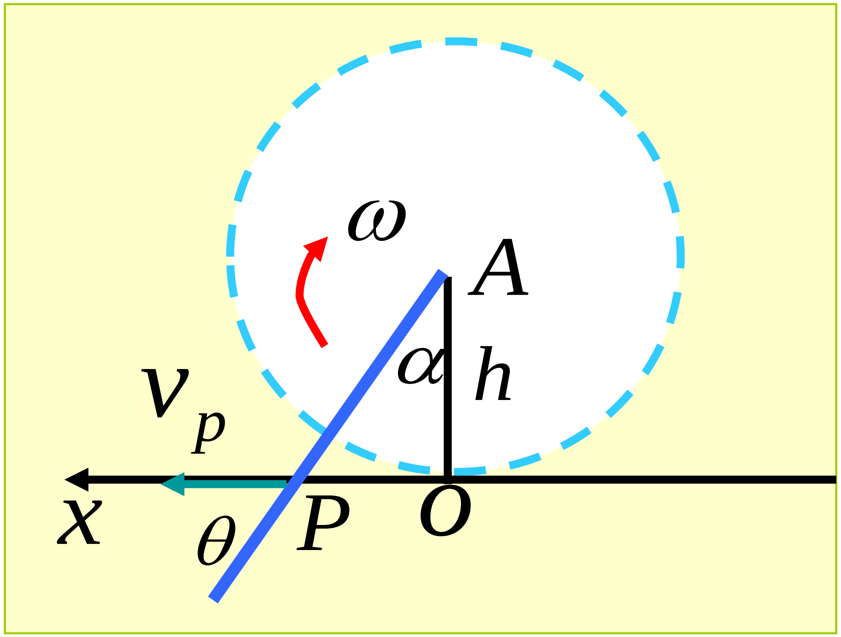
$$a_1=-10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$



$$a_{n1}=\sqrt{a_1^2-a_{\tau 1}^2}=5\sqrt{2}\approx 7.1\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$\rho_1=\frac{v_1^2}{a_{n1}}=5\sqrt{2}\approx 7.1\,\mathrm{m}$$

例题4： 距海岸（视为直线）500米处有一艘静止的船，船上的探照灯以每分钟1转的转速旋转，当光束与岸边成60度角时，光束沿岸边移动速度多大?



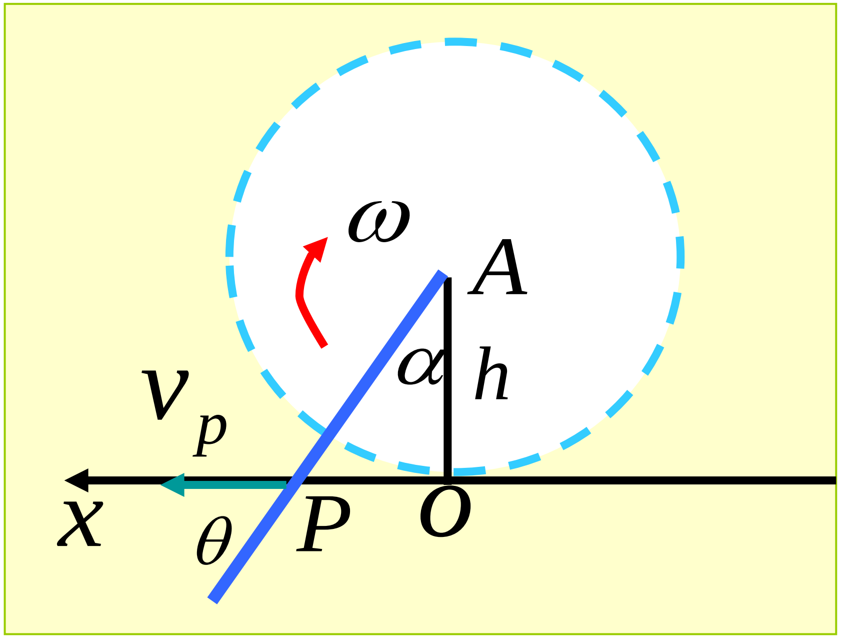
解： 首先建立 p 的运动方程 $x(t)$

$$x = h \cdot \mathrm{tg}\alpha$$

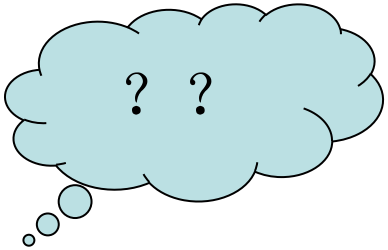
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{\cos^2\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{h\omega}{\cos^2\alpha}$$

$$\theta = 60^\circ \qquad \alpha = 30^\circ$$

$$v = \frac{500 \times \dfrac{2\pi}{60}}{\cos^2 30^\circ} = 69.8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

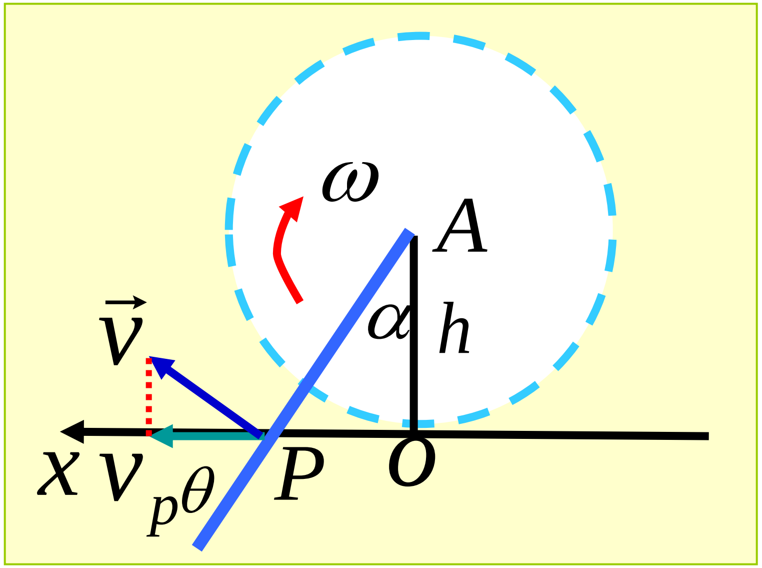


思考：*当h或α很大时，光斑速度怎样？*

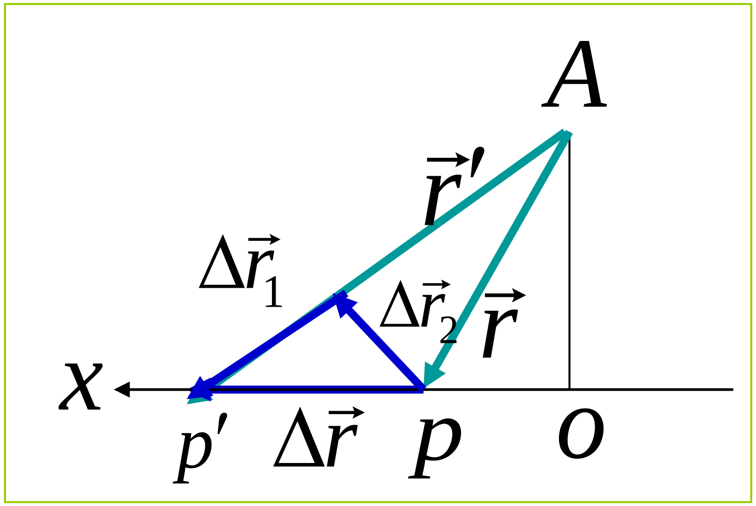


讨论

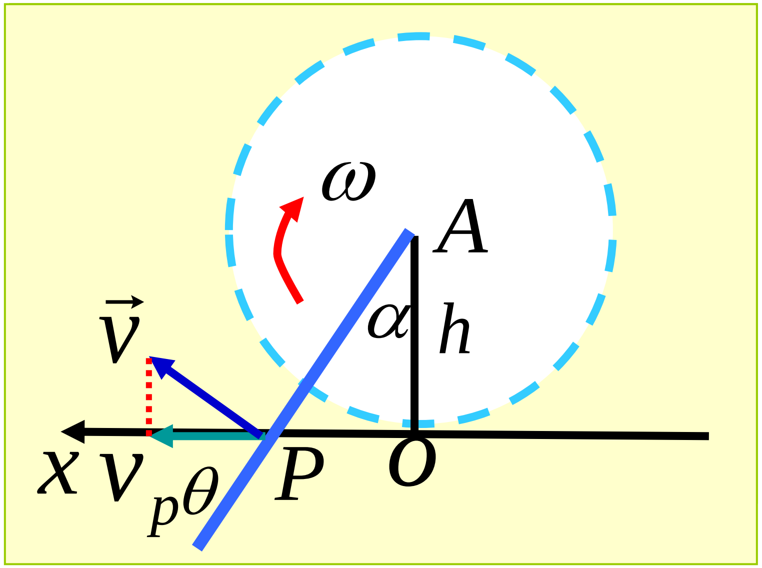
$$v = \frac{\omega h}{\cos\alpha} \qquad v_p = v\cos\alpha = \omega h$$

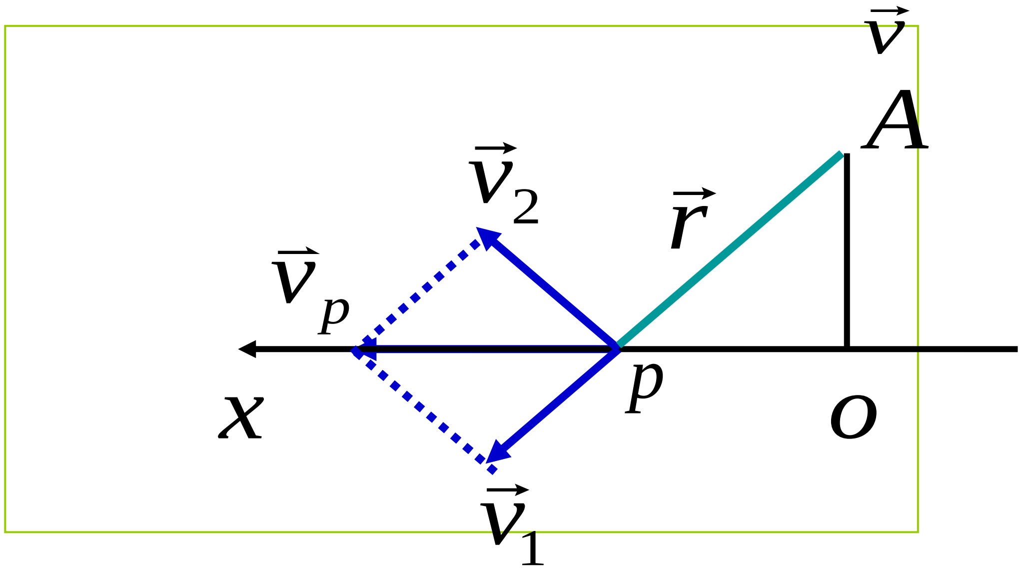


错在哪里？



$$\vec{v}_p = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}_2}{\Delta t} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$





若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$?

第二类问题

例题1：已知： 质点沿直线运动，

$$a=a(t)\,;\quad t=0:\ x=x_0\ \ v=v_0$$

求： $v(t)$， $x(t)$

解：

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t$$

$$v-v_0=\int_0^t a\mathrm{d}t$$

$$v=v_0+\int_0^t a\mathrm{d}t \quad *$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$$

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t v\mathrm{d}t$$

$$x-x_0=\int_0^t v\mathrm{d}t$$

$$x=x_0+\int_0^t v\mathrm{d}t \quad *$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x} a\mathrm{d}x$$

微积分“链式规则”

$$v^2-v_0^2=2\int_{x_0}^{x} a\mathrm{d}x \quad *$$

思考　若加速度a =恒量，上面三个*式成为什么形式?

$$v=v_0+\int_0^t a\mathrm{d}t \quad *$$

$$x=x_0+\int_0^t v\mathrm{d}t \quad *$$

$$v^2-v_0^2=2\int_{x_0}^{x} a\mathrm{d}x \quad *$$

$$v=v_0+at$$

$$x-x_0=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$$

思考 用类比方法写出用角量表示的圆周运动公式和 β = 恒量 时的形式　　若 $\beta = \beta(\theta)$?

$$v = v_0 + \int_0^t a\mathrm{d}t \qquad \omega = \omega_0 + \int_0^t \beta\mathrm{d}t$$

$$x = x_0 + \int_0^t v\mathrm{d}t \qquad \theta = \theta_0 + \int_0^t \omega\mathrm{d}t$$

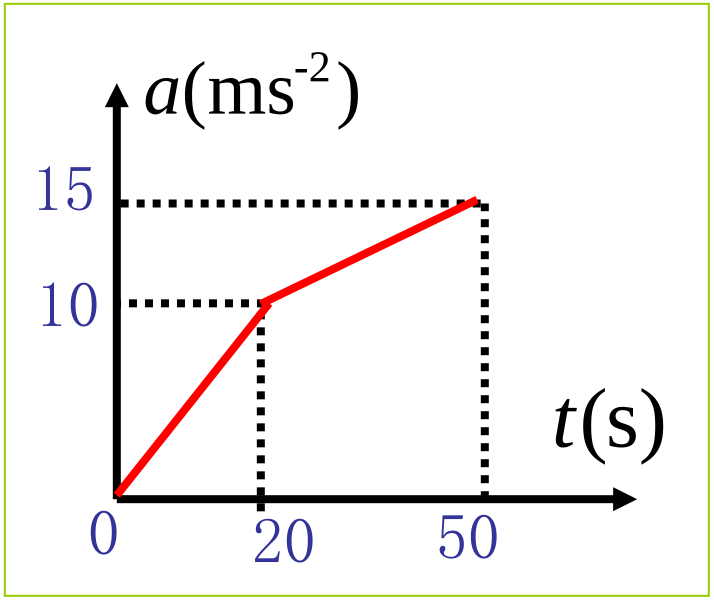
$$v^2 - v_0^2 = 2\int_{x_0}^{x} a\mathrm{d}x \qquad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\int_{\theta_0}^{\theta} \beta\,\mathrm{d}\theta$$

$$v = v_0 + at \qquad \omega = \omega_0 + \beta t$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \qquad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0)$$

例题2. 火箭竖直向上发射，加速度随时间变化规律如图所示。求火箭在$t = 50\text{s}$时燃料用完瞬间的速度和高度。



解： 写出 $a(t)$ 表达式

$$a = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t & (0 \le t \le 20) \\ 10 + \dfrac{1}{6}(t-20) & (20 \le t \le 50) \end{cases}$$

初始条件：$v_0 = 0$

$$v = v_0 + \int_0^{20} \frac{1}{2} t \mathrm{d}t + \int_{20}^{50} \left[10 + \frac{1}{6}(t-20) \right] \mathrm{d}t = 475\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

或曲线下的面积 $v - v_0 = \int_0^t a \mathrm{d}t$

高度分两段算：

$$0 \to 20\text{s}:$$

$$a_1 = \frac{1}{2}t$$

初始条件：$v_0 = 0;\quad h_0 = 0$

$$v_1 = v_0 + \int_0^t \frac{1}{2}t\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^2$$

$$h_1 = h_0 + \int_0^t v_1\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{1}{4}t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{12}t^3$$

$$t = 20\text{s}:\qquad v = 100\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\qquad h = 666.7\ \text{m}$$

$$20 \to 50\text{s}:$$

$$a_2 = 10 + \frac{1}{6}(t - 20) = \frac{t}{6} + \frac{20}{3}$$

初始条件：$v = 100\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ； $h = 666.7\,\text{m}$

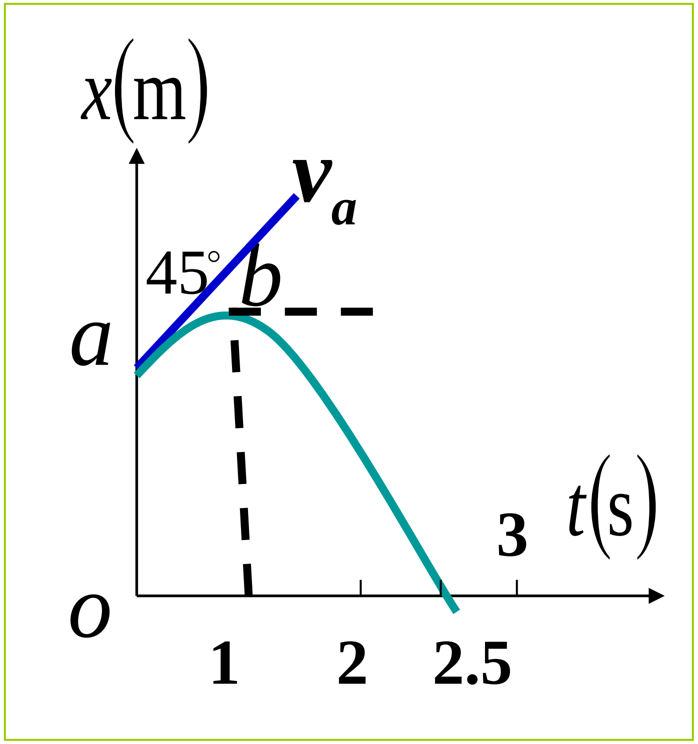
$$v_2 = v + \int_{20}^{t} a_2 \text{d}t = 100 + \int_{20}^{t}\left(\frac{t}{6} + \frac{20}{3}\right)\text{d}t = \frac{t^2}{12} + \frac{20t}{3} - \frac{200}{3}$$

$$h_2 = h + \int_{20}^{50} v_2 \text{d}t = 666.7 + \int_{20}^{50}\left(\frac{t^2}{12} + \frac{20t}{3} - \frac{200}{3}\right)\text{d}t = 8916.7\,\text{m}$$

例3.已知：*x-t* 曲线为如图所示抛物线

求：　*a-t*，*v-t* 图，运动方程

解：1) 质点作何种运动？ *x-t* 曲线为抛物线（二次曲线）



$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 常数$$

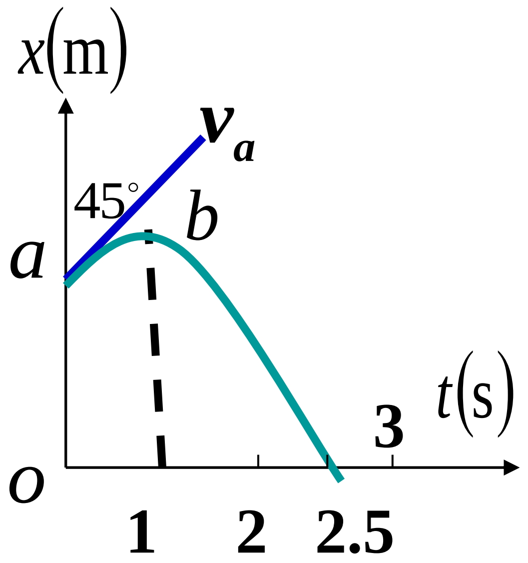
匀变速直线运动

2) $a = ?$

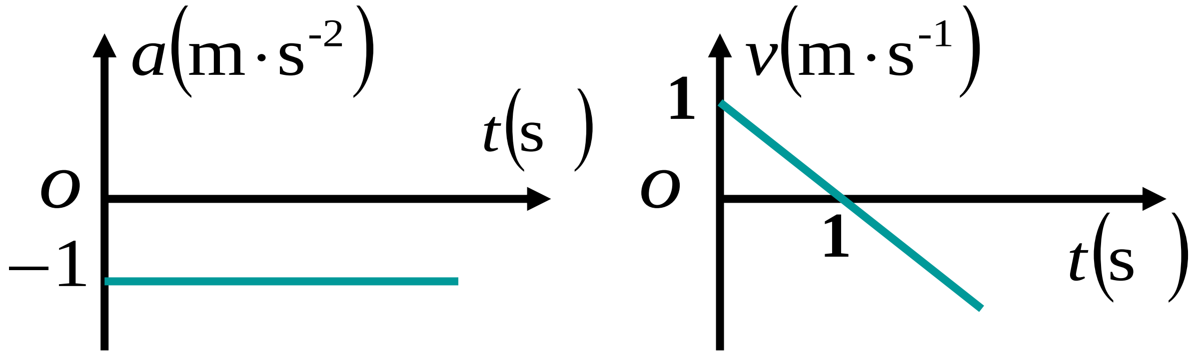
$$t = 0: v_a = \mathrm{tg}45^\circ = 1$$

$$t = 1: \ v_b = \mathrm{tg}0^\circ = 0$$

$$a = \frac{v_b - v_a}{\Delta t} = -1$$



3) $v=?$ $\qquad v=v_a+at=1-t$



4) $x-x_0=v_a t+\frac{1}{2}at^2=t-\frac{t^2}{2}$ ； $x_0=?$

由 $t=2.5$ 时 $x=0$ 得：$x_0=0.625$

$$\therefore\quad x=\frac{5}{8}+t-\frac{1}{2}t^2\quad(\mathrm{SI})$$

例题4. 一艘快艇在速率为 v_0 时关闭发动机，其加速度 $a=-kv^2$，式中 k 为常数，求关闭发动机后又行驶 x 距离时，快艇速率。

解:

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kv^2$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\mathrm{d}x$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^x-k\mathrm{d}x$$

$$\ln\frac{v}{v_0}=-kx$$

$$v=v_0e^{-kx}$$

§ 3.5 相对运动

一. 运动的绝对性和描述运动的相对性

只有相对确定的参考系才能具体描述物体的运动，选择的参考系不同，对同一物体运动的描述不相同。

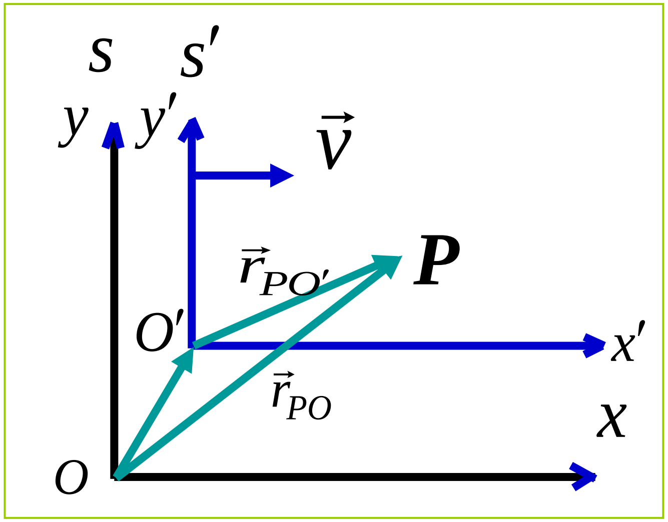
一个参考系中的描述 $\xleftrightarrow{\text{变换}}$ 另一个参考系中的描述

二. 低速 $(v \ll c)$ 下的变换

分别从 $S(o-xyz)$ 系和 $S'(o'-x'y'z')$ 系描述质点 p 的运动

位置矢量

$$\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{PO'} + \vec{r}_{O'O}$$



推广：

$$\vec{r}_{AO} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BC} + \vec{r}_{CD} + \vec{r}_{DO}$$

位移矢量: $\Delta\vec{r}_{PO} = \Delta\vec{r}_{PO'} + \Delta\vec{r}_{O'O}$

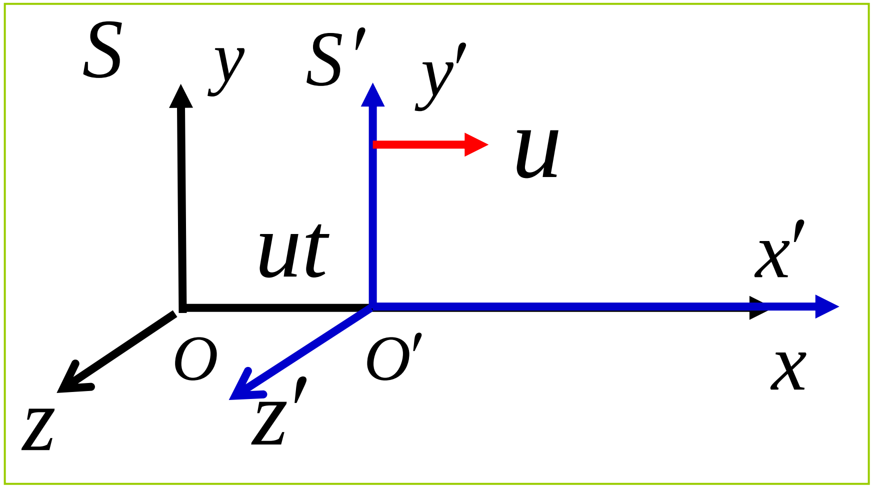
速度矢量: $\vec{v}_{PO} = \vec{v}_{PO'} + \vec{v}_{O'O}$

$$\vec{v}_{AO} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC} + \vec{v}_{CD} + \vec{v}_{DO}$$

加速度矢量(当o, o'间只有相对平动时)

$$\vec{a}_{PO} = \vec{a}_{PO'} + \vec{a}_{O'O}$$

设 S系相对于 S系沿 x方向以速率 u运动，以 o和 o' 重合时为计时起点 $y // y'$ $z // z'$



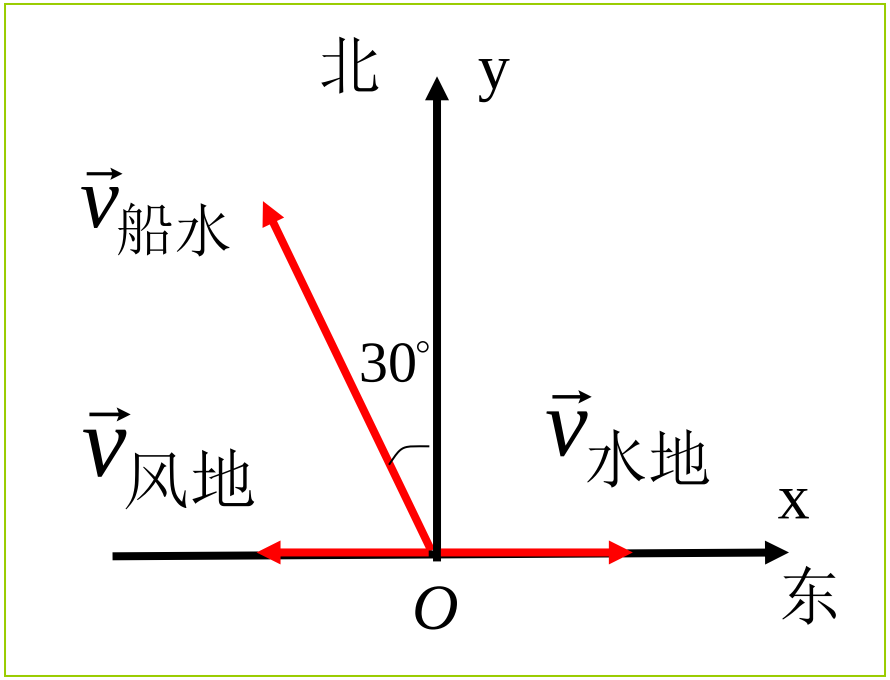
伽利略坐标变换

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

伽利略速度变换

$$\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

例题 1：河水自西向东流动，速度为$10\,km\cdot h^{-1}$ 。一轮船在水中航行，船相对于河水的航向为北偏西30°，相对于河水的航速为$20\,km\cdot h^{-1}$ 。此时风向为由东向西，风速为$10\,km\cdot h^{-1}$。试求在船上观察到的烟囱冒出的烟缕的飘向(设烟离开烟囱后很快就获得与风相同的速度)。

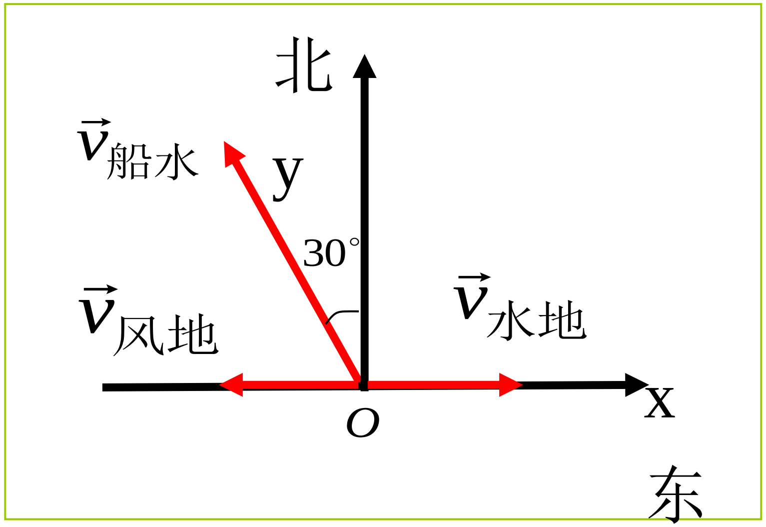


解析法：

建立如图所示坐标系，

由题意可知

例题 1：河水自西向东流动，速度为$10\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ 。一轮船在水中航行，船相对于河水的航向为北偏西**30°**，相对于河水的航速为$20\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ 。此时风向为由东向西，风速为$10\mathrm{km\cdot h^{-1}}$。试求在船上观察到的烟囱冒出的烟缕的飘向(设烟离开烟囱后很快就获得与风相同的速度)。



$$\vec{v}_{水地}=10\vec{i}\ (\mathrm{km\cdot h^{-1}})$$

$$\vec{v}_{风地}=-10\vec{i}\ (\mathrm{km\cdot h^{-1}})$$

$$\vec{v}_{船水}=-20\sin 30^\circ\vec{i}+20\cos 30^\circ\vec{j}\ (\mathrm{km\cdot h^{-1}})$$

根据相对速度公式,

$$\vec{v}_{烟船}=\vec{v}_{风船}=\vec{v}_{风地}+\vec{v}_{地水}+\vec{v}_{水船}$$

$$=\vec{v}_{风地}-(\vec{v}_{船水}+\vec{v}_{水地})$$

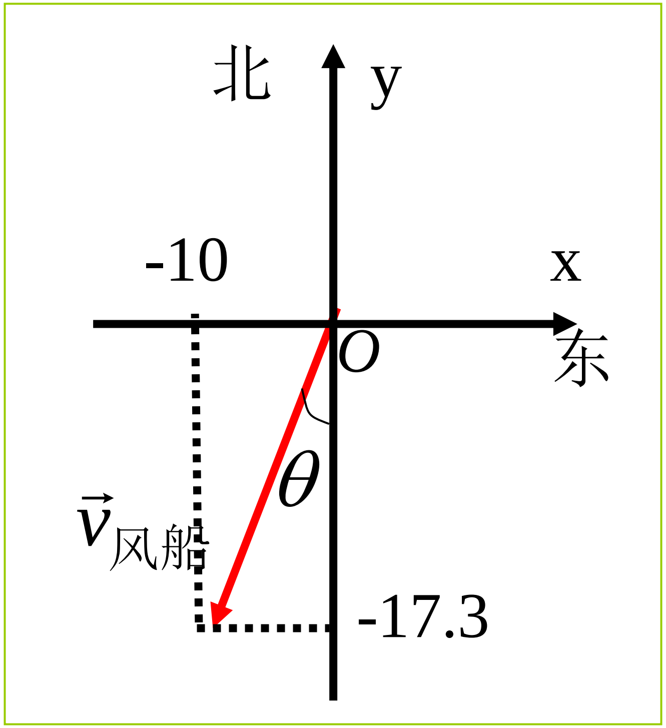
$$=(-10)\vec{i}-(-20\sin 30^\circ\vec{i}+20\cos 30^\circ\vec{j})-10\vec{i}$$

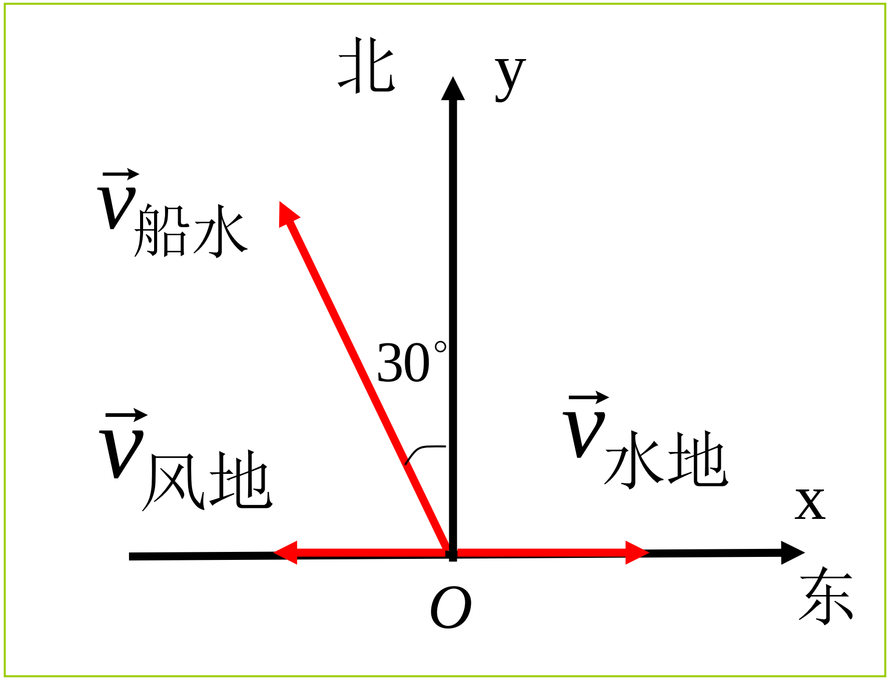
$$=-10\vec{i}-17.3\vec{j}\quad(\mathrm{km\cdot h^{-1}})$$

$$v_{烟船}=\sqrt{(-10)^2+(-17.3)^2}=20\quad(\mathrm{km\cdot h^{-1}})$$

$$\theta=\mathrm{arctg}\frac{10}{17.3}=30^\circ$$

即在船上观察，烟以 $20\mathrm{km\cdot h^{-1}}$的速率向南偏西 30°飘去.



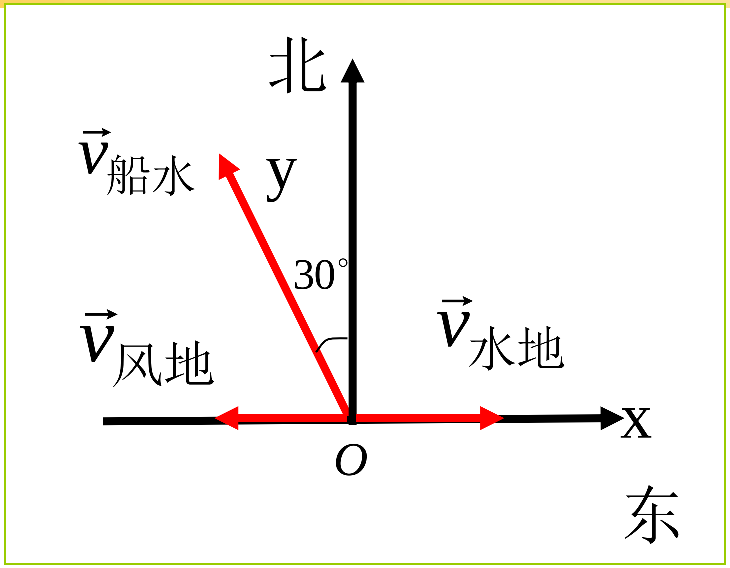


图解法：

根据相对速度公式，

$$\vec{v}_{烟船}=\vec{v}_{风船}=\vec{v}_{风地}+\vec{v}_{地水}+\vec{v}_{水船}$$

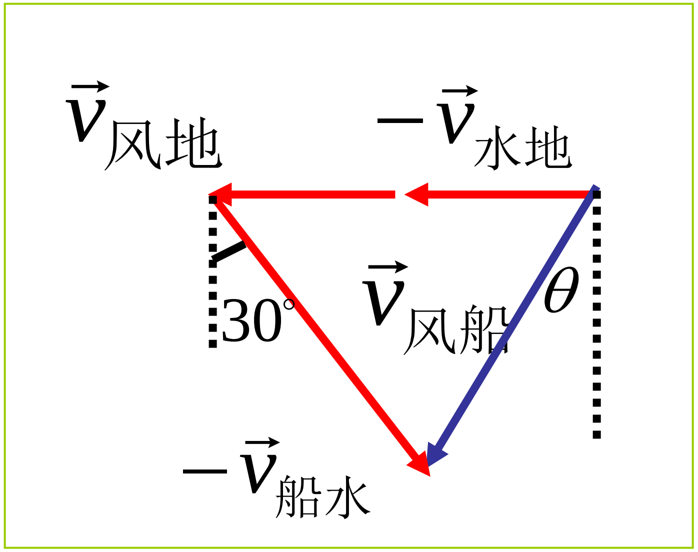
$$=\vec{v}_{风地}+(-\vec{v}_{水地})+(-\vec{v}_{船水})$$



$$v_{烟船}=20\quad(\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1})$$

$$\theta=30^\circ$$

即在船上观察，烟以 $20\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ 的速率向南偏西 30° 飘去.

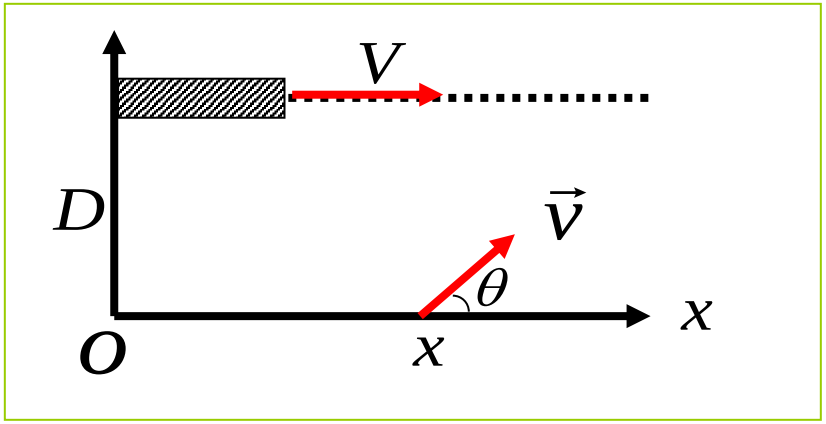


三. 变换参考系的运动学意义： 处理问题简便

三. 变换参考系的运动学意义：　处理问题简便

例题2：一条船平行于平直海岸航行，离岸距离为D，速率为V。一艘快艇从港口出发去拦截这条船，快艇速率 $v<V$，试证明快艇必须在船驶过海岸线上某点以前出发才行，该点离港口的距离为：

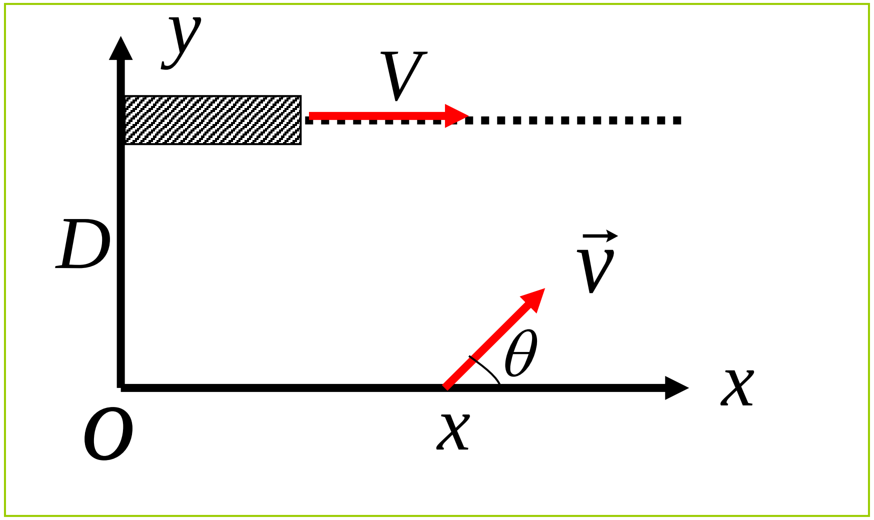
$$x=\frac{D}{v}\sqrt{V^2-v^2}$$



解1：　以岸为参考系，分别写出船和艇的运动方程，令其坐标相等，得相遇条件。

建立如图坐标系

船 $\begin{cases} x_1 = Vt \\ y_1 = D \end{cases}$



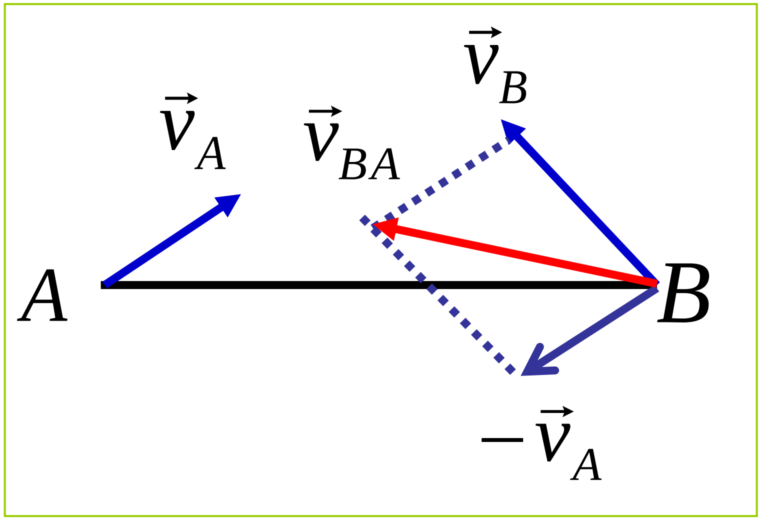
艇 $\begin{cases} x_2 = x + vt\cos\theta \\ y_2 = vt\sin\theta \end{cases}$

相遇: $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} Vt = x + vt\cos\theta \\ D = vt\sin\theta \end{cases}$

消去t得: $$x = \frac{(V - v\cos\theta)D}{v\sin\theta} \quad *$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = 0$ 解出 θ 代入 * 得 $x_{\min}$

思考： 以船为参考系，相遇条件是什么？



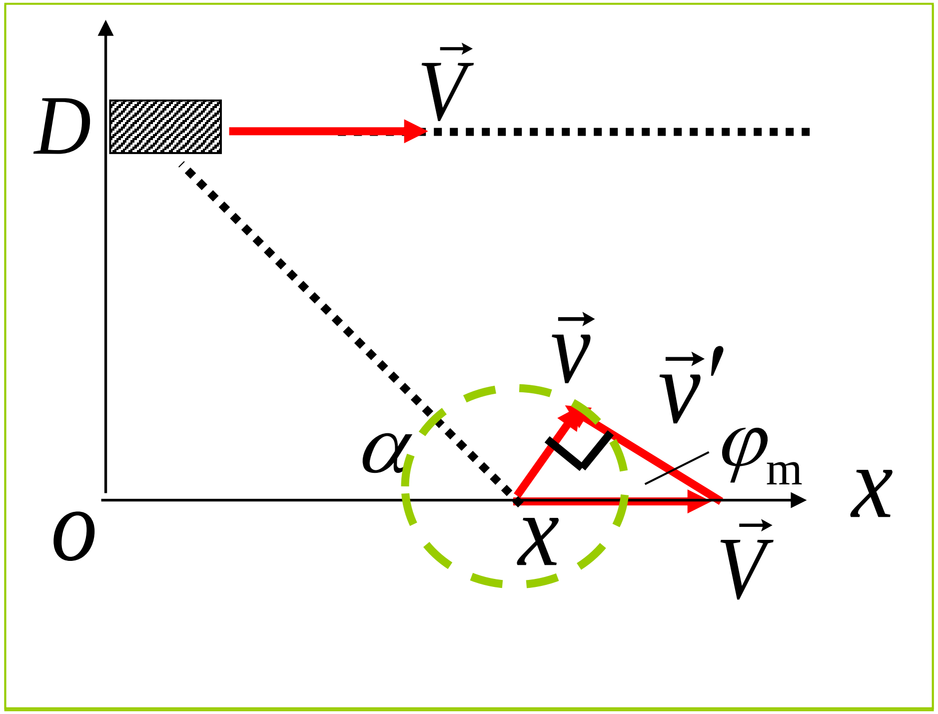
$$\vec{v}_{BA}=\vec{v}_{Bw}+\vec{v}_{wA}$$
$$=\vec{v}_B+\left[-\vec{v}_{Aw}\right]$$
$$=\vec{v}_B-\vec{v}_A$$

若 $\vec{v}_{BA}$的延长线过A，则A、B相撞。

解2:

以船为参考系，设艇对船的速度为

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$



艇出发时:

$$\sin\alpha = \frac{D}{\sqrt{D^2 + x^2}}$$

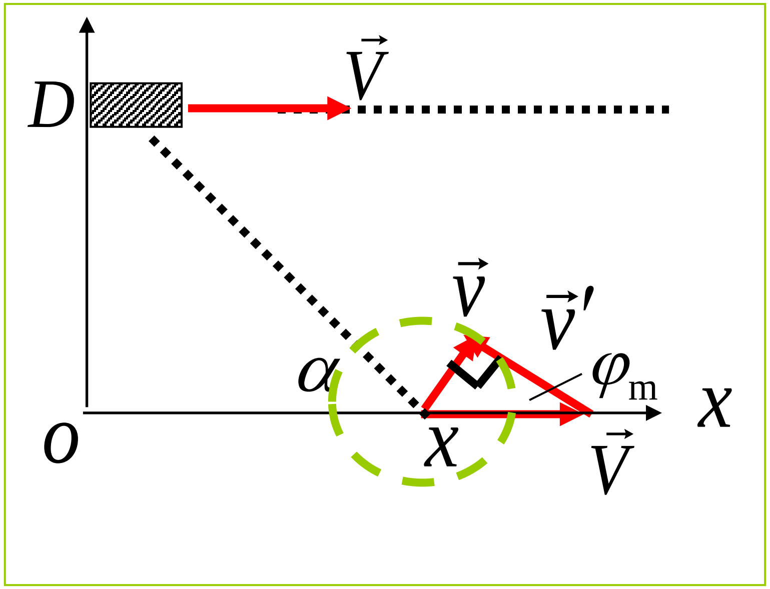
相遇条件: $\alpha = \varphi,$

当α最大时x最小

当$\alpha = \varphi_m$时x最小

$v < V$　φ有最大值：

$$\mathrm{sim}\varphi_m = \frac{v}{V}$$



由：$$\frac{D}{\sqrt{D^2 + x^2}} = \frac{v}{V}$$ 得：$$x_{\min} = \frac{D}{v}\sqrt{V^2 - v^2}$$ 证毕。

练习

1.以下五种运动中, a保持不变的运动是

(A) 单摆的运动。
(B) 匀速率圆周运动。
(C) 行星的椭圆轨道运动。
(D) 抛体运动。
(E) 圆锥摆运动。

[D]

2.一质点在平面上运动,已知质点位置矢量的表达式为 $\boldsymbol{r} = at^2\boldsymbol{i} + bt^2\boldsymbol{j}$,(其中a、b为常量.) 则该质点作

(A)匀速直线运动。
(B)变速直线运动。
(C) 抛物线运动。
(D)一般曲线运动。

[B]

3.质点沿 x 轴作直线运动,其 $v \sim t$ 曲线如图所示,如 $t = 0$ 时,质点位于坐标原点,则 $t =$ 4.5s时,质点在 x 轴上的位置为:

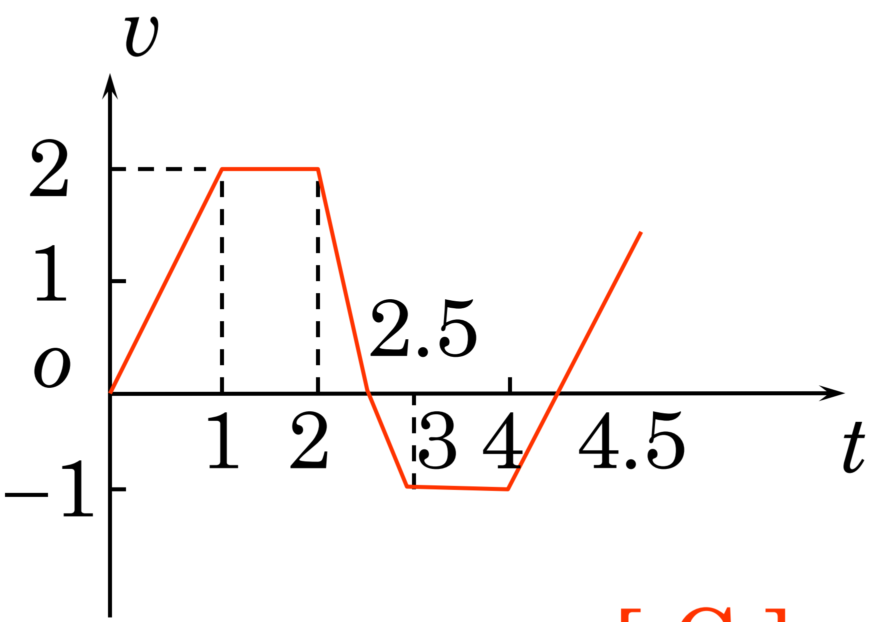
（A） 0.

（B） 5m.

（C） 2m.

（D） –2m.

（E） –5m.



[C]

4.某质点的运动方程为 $x = 2t - 7t^3 + 3$（SI），则该质点作

(A)匀加速直线运动,加速度沿 x 轴正方向;
(B)匀加速直线运动,加速度沿 x 轴负方向;
(C)变加速直线运动.加速度沿 x 轴正方向;
(D)变加速直线运动,加速度沿 x 轴负方向。

[D]

5.某物体的运动规律为 $dv/dt = -Av^2 t$,式中 A 为大于零的常数,当 $t = 0$ 时,初速为 v_0,则速度 v 与 t 时间的函数关系为

(A) $v = At^2 + v_0$;

(B) $v = -\frac{1}{2}At^2 + v_0$;

(C) $\frac{1}{v} = \frac{At^2}{2} + \frac{1}{v_0}$;

(D) $\frac{1}{v} = -\frac{At^2}{2} + \frac{1}{v_0}$;

[C]