第一章作业题

1. 设二元对称信道的传递矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(1) 若 P(0) = 3/4, P(1) = 1/4，求 $H(X)$, $H(X/Y)$, $H(Y/X)$和 $I(X;Y)$；

(2) 求该信道的信道容量及其达到信道容量时的输入概率分布；

解：(1)

$$H(X) = -\sum_i p(x_i) = -(\frac{3}{4}\times\log_2\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\times\log_2\frac{1}{4}) = 0.811 \quad bit/symbol$$

$$H(Y/X) = -\sum_i\sum_j p(x_i)p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)$$

$$= -(\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\lg\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\lg\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\lg\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\lg\frac{2}{3})\times\log_2 10$$

$$= 0.918 \quad bit/symbol$$

$$p(y_1) = p(x_1y_1) + p(x_2y_1) = p(x_1)p(y_1/x_1) + p(x_2)p(y_1/x_2) = \frac{3}{4}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = 0.5833$$

$$p(y_2) = p(x_1y_2) + p(x_2y_2) = p(x_1)p(y_2/x_1) + p(x_2)p(y_2/x_2) = \frac{3}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\times\frac{2}{3} = 0.4167$$

$$H(Y) = -\sum_j p(y_j) = -(0.5833\times\log_2 0.5833 + 0.4167\times\log_2 0.4167) = 0.980 \quad bit/symbol$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

$$H(X/Y) = H(X) - H(Y) + H(Y/X) = 0.811 - 0.980 + 0.918 = 0.749 \quad bit/symbol$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) == 0.811 - 0.749 = 0.062 \quad bit/symbol$$

2)

$$C = \max I(X;Y) = \log_2 m - H_{mi} = \log_2 2 + (\frac{1}{3}\lg\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lg\frac{2}{3})\times\log_2 10 = 0.082 \quad bit/symbol$$

$$p(x_i) = \frac{1}{2}$$

2. 设有一批电阻，按阻值分 70%是 2KΩ，30%是 5 KΩ；按瓦分 64%是 0.125W，其余是 0.25W。现已知 2 KΩ阻值的电阻中 80%是 0.125W，问通过测量阻值可以得到的关于瓦数的平均信息量是多少？

解：

对本题建立数学模型如下：

$$\begin{bmatrix} X\text{阻值} \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 = 2\text{K}\Omega & x_2 = 5\text{K}\Omega \\ 0.7 & 0.3 \end{Bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} Y\text{瓦数} \\ P(Y) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 = 1/8 & y_2 = 1/4 \\ 0.64 & 0.36 \end{Bmatrix}$$

$$p(y_1/x_1) = 0.8, p(y_2/x_1) = 0.2$$

求：$I(X;Y)$

以下是求解过程：

$$p(x_1y_1) = p(x_1)p(y_1/x_1) = 0.7\times 0.8 = 0.56$$

$$p(x_1y_2) = p(x_1)p(y_2/x_1) = 0.7\times 0.2 = 0.14$$

$$\because\ p(y_1) = p(x_1y_1) + p(x_2y_1)$$

$$\therefore\ p(x_2y_1) = p(y_1) - p(x_1y_1) = 0.64 - 0.56 = 0.08$$

$$\because\ p(y_2) = p(x_1y_2) + p(x_2y_2)$$

$$\therefore\ p(x_2y_2) = p(y_2) - p(x_1y_2) = 0.36 - 0.14 = 0.22$$

$$H(X) = -\sum_i p(x_i) = -\left(0.7\times\log_2 0.7 + 0.3\times\log_2 0.3\right) = 0.881 \quad bit/symbol$$

$$H(Y) = -\sum_j p(y_j) = -\left(0.64\times\log_2 0.64 + 0.36\times\log_2 0.36\right) = 0.943 \quad bit/symbol$$

$$H(XY) = -\sum_i\sum_j p(x_iy_j)\log p(x_iy_j)$$

$$= -\left(0.56\times\log_2 0.56 + 0.14\times\log_2 0.14 + 0.08\times\log_2 0.08 + 0.22\times\log_2 0.22\right)$$

$$= 1.638 \quad bit/symbol$$

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(XY) = 0.881 + 0.943 - 1.638 = 0.186 \quad bit/symbol$$

3. 试求以下各信道矩阵代表的信道的容量：

(1) $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

(4) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

解：(1) 这个信道是无噪无损信道：

$$C = \log_2 n = \log_2 4 = 2 \quad bit/symbol$$

(2) 这个信道是无噪有损信道

$$C = \log_2 m = \log_2 3 = 1.585 \quad bit/symbol$$

(3) 这个信道是对称的离散信道

$$C = \log 4 - H(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = 0.0817(bit/symbol)$$

(4) 这个信道是对称的离散信道

$$C = \log 3 - H(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}) = 0.126(bit/symbol)$$

4. 有一个二元对称信道，其信道矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0.98 & 0.02 \\ 0.02 & 0.98 \end{bmatrix}$$

设该信源以1500二元符号/秒的速度传输输入符号。现有一消息序列共有14000个二元符号，并设 $P(0) = P(1) = 1/2$，问从消息传输的角度来考虑，10 秒钟内能否将这消息序列无失真的传递完？

解：信道容量计算如下：

$$C = \max I(X;Y) = \max\left[H(Y) - H(Y/X)\right] = H_{\max}(Y) - H_{mi}$$
$$= \log_2 2 + (0.98 \times \log_2 0.98 + 0.02 \times \log_2 0.02)$$
$$= 0.859 \quad bit/symbol$$

也就是说每输入一个信道符号，接收到的信息量是 0.859 比特。已知信源输入 1500 二元符号/秒，那么每秒钟接收到的信息量是：

$$I_1 = 1500 symbol/s \times 0.859 bit/symbol = 1288 \quad bit/s$$

现在需要传送的符号序列有 140000 个二元符号，并设 $P(0) = P(1) = 1/2$，可以计算出这个符号序列的信息量是

$$I = 14000 \times (0.5 \times \log_2 0.5 + 0.5 \times \log_2 0.5)$$
$$= 14000 \quad bit$$

要求 10 秒钟传完，也就是说每秒钟传输的信息量是 1400bit/s，超过了信道每秒钟传输的能力（1288 bit/s）。所以 10 秒内不能将消息序列无失真的传递完。