第十二章　非正弦周期电流电路和信号的频谱

第一部分　要点、考点归纳

§12-1　非正弦周期信号

前面几章中介绍的交流电路，所涉及到的电源都是正弦电源，产生的响应也是同频率的正弦信号，如正弦电压、正弦电流。实际中更多的是按非正弦规律变化的电源或信号，见图12-1。本章讨论非正弦周期信号（电流）电路的分析和计算问题。电路仍为线性电路，所有的方法称为**谐波分析法**。

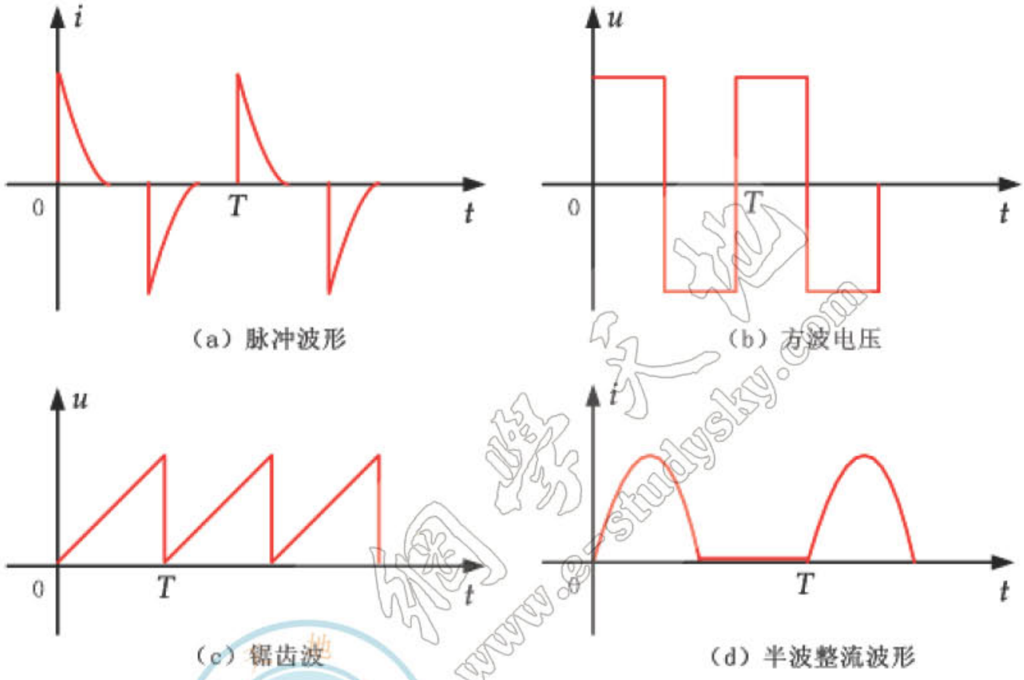

图12-1　非正弦周期电流、电压波形

谐波分析法包括 3 个方面的内容：

（1）首先应用数学中傅里叶级数展开法，将非正弦周期激励的电压、电流或信号分解为一系列不同频率的正弦量之和；

（2）根据线性电路的叠加定理，分别计算各正弦量单独作用下在电路中产生的同频率正弦电流分量和电压分量；

（3）最后，把所得分量按时域形式进行叠加，就得到电路在非正弦周期激励下的稳态电流和电压。

谐波分析法实质上是把非正弦周期电流电路化为一系列正弦电流电路的计算。

§12-2　周期函数分解为傅里叶级数

一个周期量可用一个周期函数表示，即

$$f(t)=f(t+kT) \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

式中 T 为周期函数 $f(t)$ 的周期。如果函数 $f(t)$ 满足狄里赫利条件，它就能展开成一个收敛的傅氏级数，即

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega_1 t)+b_k\sin(k\omega_1 t)] \qquad (k=0,1,2,\dots) \qquad (12\text{-}1)$$

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}[A_{km}\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)]$$

或　　　　（k=0,1,2,…）　　　（12-2）

上两式系数之间的关系：

$$A_0=a_0$$
$$A_{km}=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$$
$$a_k=A_{km}\cos\varphi_k$$
$$b_k=-A_{km}\sin\varphi_k$$
$$\varphi_k=\arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$$

由式（12-2）可看出展式的物理意义：

A_0--周期函数 $f(t)$ 的恒定分量，即直流分量；

$A_{km}\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)$--$f(t)$ 的 k 次谐波，k=1 为一次谐波，也称基波分量。

各次谐波的频率为 $k\omega_1$，幅度为 A_{km}，初相位为 φ_k，基波分量的频率与周期函数 $f(t)$ 的频率相同（即为 ω_1）。这种将周期函数 $f(t)$ 分解为一系列谐波之和傅氏级数称为谐波分析。在谐波分析中，主要任务之一是确定傅氏级数中各分量的系数。根据三角函数的正交性可求得

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)dt$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega_1 t)dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(k\omega_1 t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(k\omega_1 t)d(\omega_1 t)$$

$$b_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega_1 t)dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(k\omega_1 t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(k\omega_1 t)d(\omega_1 t)$$

（12-3）

一个周期函数 $f(t)$ 被分解成各种幅度不同、频率不同和初相位不同的正弦分量，为反映各分量所占的“比重”，将不同频率分量的幅度按频率的高低顺序作图，即得所谓的频谱图，见图 12-2。频谱图反映了不同频率分量的幅度分布情况，故又称为幅度频谱。因各分量的频率是基波频率 ω_1 的整数倍，所以这种频谱是离散的，故又称为线频谱。

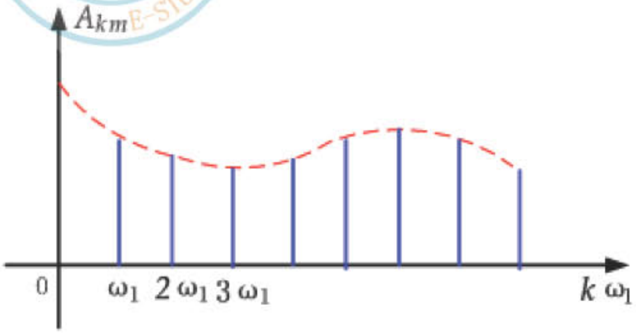

图12-2　幅度频谱

在求傅氏级数中各分量的系数时，可利用函数 $f(t)$ 的奇偶性简化计算：

（1）$f(t)$ 为偶函数时，$f(t)\cos(k\omega_1 t)$ 为偶函数，而 $f(t)\sin(k\omega_1 t)$ 为奇函数，故

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos(k\omega_1 t)d(\omega_1 t)$$

$$b_k = 0$$

（2）$f(t)$ 为奇函数时，$f(t)\cos(k\omega_1 t)$ 为奇函数，而 $f(t)\sin(k\omega_1 t)$ 为偶函数，故

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(k\omega_1 t)d(\omega_1 t)$$

（3）$f(t)$ 为奇谐波函数，即有 $f(t) = -f(t+T/2)$，则

$$a_{2k} = b_{2k} = 0$$

谐波分量中只含奇数次谐波。

§12-3　有效值、平均值和平均功率

1．周期量的有效值

在第八章曾定义有周期电流的有效值

$$I \overset{def}{=\!=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$$

这是计算周期量的有效值的一般式。如果将一非正弦周期电流分解为傅氏级数

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$$

则该电流的有效值可用下式计算

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\cos(k\omega_1 t + \varphi_k)]^2 dt}$$

上式的平方项展开后将含有下列各项：

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 dt = I_0^2$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_{km}^2\cos(k\omega_1 t + \varphi_k)^2 dt = I_k^2$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_0\cos(k\omega_1 t + \varphi_k)dt = 0$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_{km}\cos(k\omega_1 t + \varphi_k)\times I_{qm}\cos(q\omega_1 t + \varphi_q)dt = 0 \qquad (k \neq q)$$

上式中 $I_k = \dfrac{I_{km}}{\sqrt{2}}$，为 k 次谐波的有效值，所以

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \cdots} = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$$

即非正弦周期电流的有效值等于直流分量的平方与各次谐波有效值的平方之和的平方根。此结论可推广到任意非正弦周期量。

2．周期量的有效值

以周期电流 i 为例，平均值的定义为

$$I_{av} \overset{def}{=\!=} \frac{1}{T}\int_0^T |i| dt$$

即周期电流的平均值等于该电流绝对值的的平均值。

由上式可求得正弦电流的平均值为

$$I_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T|I_m\cos(\omega t)|dt=\frac{4I_m}{T}[\sin(\omega t)]_0^{T/4}$$

$$=0.637I_m=0.898I$$

它相当于正弦电流经全波整流后的平均值（见图 12-9）。

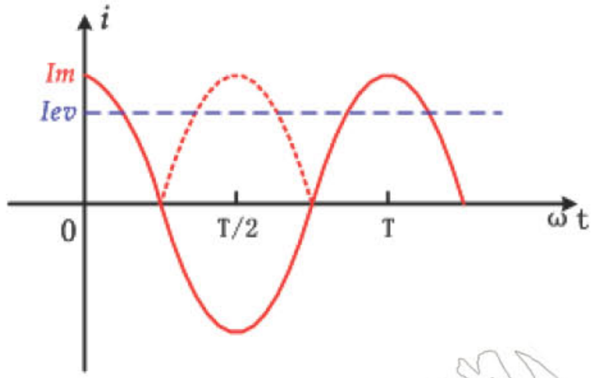

图12-9　正弦电流的平均值

3．平均功率（有功功率）

设一端口的电压和电流为 u 和 i，u 和 i 为非正弦周期量，其傅氏级数展式为

$$u=U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{km}\cos(k\omega_1 t+\varphi_{uk})$$

$$i=I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{km}\cos(k\omega_1 t+\varphi_{ik})$$

若 u 与 i 为关联参考方向，则端口吸收的瞬时功率为

$$p=ui=[U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{km}\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)]\times[I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{km}\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)]$$

则平均功率（有功功率）为

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T pdt$$

将瞬时功率 p 代入上式，并注意到不同频率的正弦电压与电流的乘积的上述积分为零；同频率的正弦电压与电流的乘积的上述积分为

$$\frac{1}{T}\int_0^T U_k k_k[\cos\varphi_k+\cos(2k\omega_1 t+\varphi_{uk}+\varphi_{ik})]dt$$

$$=U_kI_k\cos\varphi_k$$

式中 $U_k=\dfrac{U_{km}}{\sqrt{2}}$，$I_k=\dfrac{I_{km}}{\sqrt{2}}$，分别为电压、电流的 k 次谐波的有效值，

$\varphi_k=\varphi_{uk}-\varphi_{ik}$，为 k 次谐波的电压与电流的相位差，所以平均功率（有功功率）为

$$P=U_0I_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_kI_k\cos(\varphi_k)$$

即平均功率等于直流分量的功率与得次谐波平均功率的代数和。

§12-4　非正弦周期电流电路的计算

非正弦周期电流电路的计算方法为谐波分析法，具体步骤如下：

（1）首先将非正弦周期激励的电压或电流分解为傅里叶级数，高次谐波取到哪一项，应根据计算精度要求来定；

（2）分别求出激励电压或电流的直流分量和各次谐波分量单独作用时的响应。对直流分量，求解时电容视为开路、电感视为短路。对各次谐波分量可以用相量法求解，但要注意感抗和容抗与频率有关,并把计算结果转换成时域形式。

（3）最后，根据线性电路的叠加定理，把步骤（2）所得的各响应分量（电压分量或电流分量）按时域形式进行叠加，就得到电路在非正弦周期激励下的稳态响应。应注意的是，不能将步骤（2）中用相量法求得的各响应分量的相量形式进行叠加，因为各响应分量的相量是不同频率的正弦量的相量，直接相加是没有意义的。

第二部分　例题

例 1　如图 12-3 所示的矩形信号，求 $f(t)$ 的傅氏级数展式及其频谱。

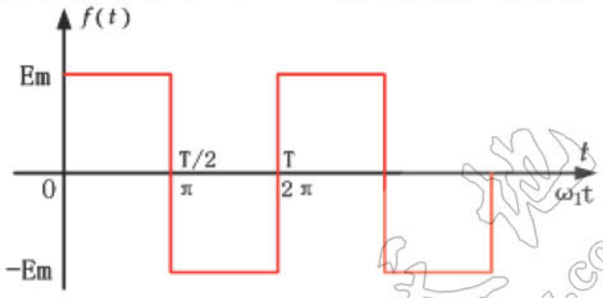

图12-3　矩形波

解： $f(t)$ 在第一个周期内的表达式为

$$\begin{cases} f(t)=E_m & (0\le t\le T/2) \\ f(t)=-E_m & (T/2\le t\le T) \end{cases}$$

由图可知 $f(t)$ 为一奇函数，故有 $a_0=0$，$a_k=0$，而

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(k\omega_1 t)d(\omega_1 t)$$

$$=\frac{E_m}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(k\omega_1 t)d(\omega_1 t)$$

$$=\frac{2E_m}{k\pi}[1-\cos(k\pi)]$$

因为 $f(t)$ 为奇谐波函数，故

$$b_k=\frac{4E_m}{k\pi} \qquad (k=1,3,5\ldots)$$

由此求得

$$f(t)=\frac{4E_m}{\pi}\sin(\omega_1 t)+\frac{4E_m}{3\pi}\sin(3\omega_1 t)+\frac{4E_m}{5\pi}\sin(5\omega_1 t)+\cdots$$

图 12-4（a）为展式中前 3 项（取到 5 次谐波）的波形，虚线为合成后的波形。图 12-4（b）展式中前 6 项（取到 11 次谐波）的合成波形。可见谐波分量取得越多，合成波形越接近原函数 $f(t)$。

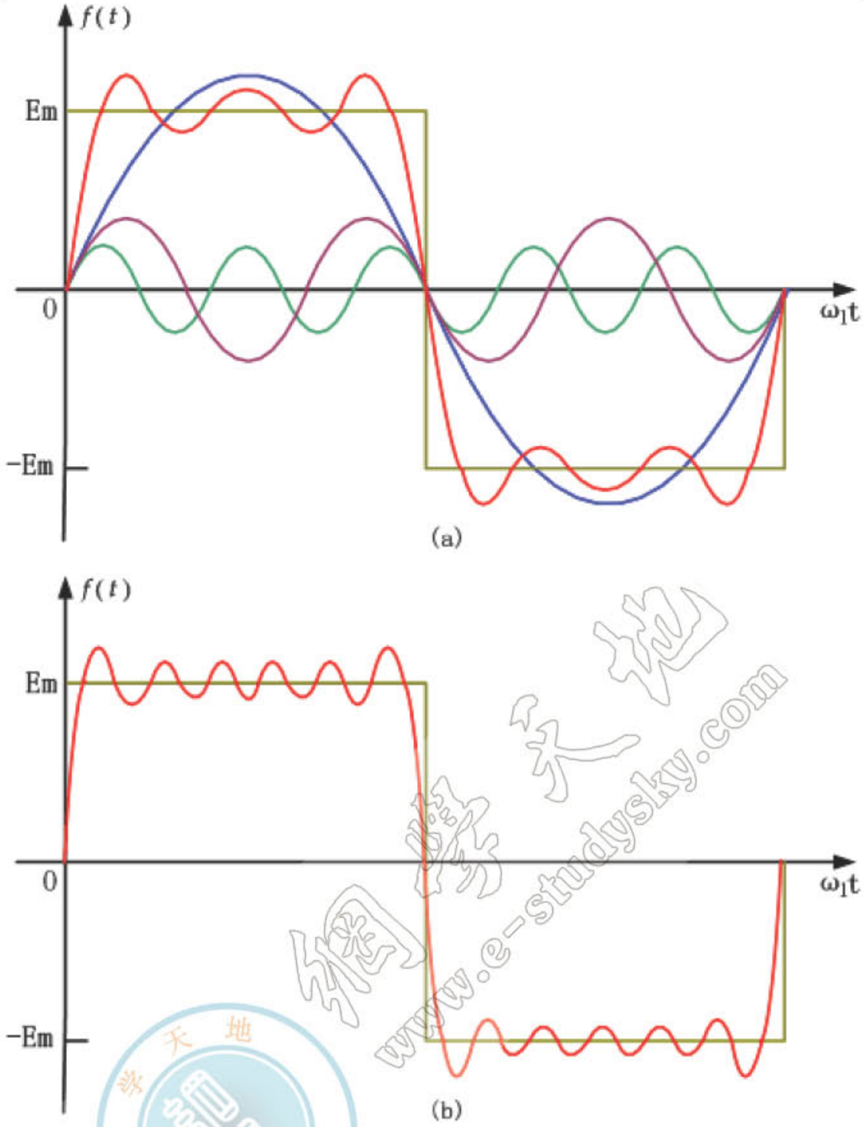

图12-4　谐波合成示意图

图 12-5 为 $f(t)$ 的频谱。

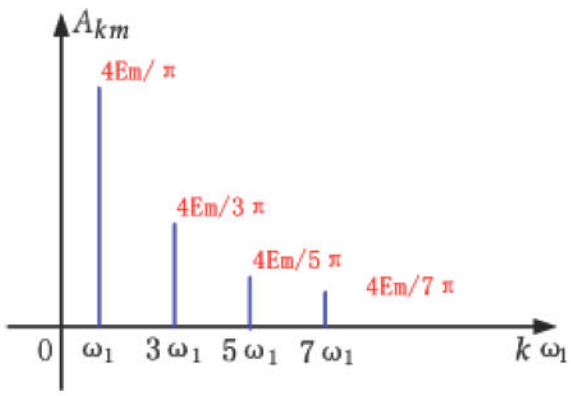

图12-5　矩形波幅度频谱

例 2 图 12-10 的电路，已知：$R=3\Omega$，$\frac{1}{\omega_1 C}R=9.45\Omega$；输入电源为 $u_S=10+141.40\cos(\omega_1 t)+47.13\cos(3\omega_1 t)+28.28\cos(5\omega_1 t)+20.20\cos(7\omega_1 t)+15.71\cos(9\omega_1 t)\cdots$ 求电流和电阻吸收的功率。

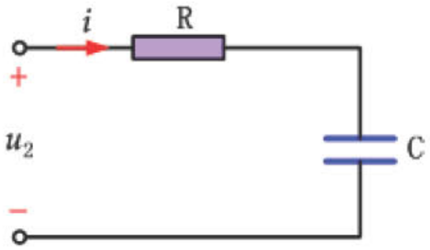

图12-10　RC串联电路

解：按上述分析步骤

（1） 题中已给出电压源的傅氏级数形式，不需再分解。由给出的傅氏级数可知，电压源的电压含有直流分量，并给出到 9 次谐波的正弦分量。

（2） 电流相量的表达式为

$$\dot{I}_{m(k)}=\frac{\dot{U}_{Sm(k)}}{R-jk\omega_1 C}\qquad (k=1,3,5,7,9\ldots)$$

式中 $\dot{I}_{m(k)}$ 为电路中电流的 k 次谐波的振幅，$\dot{U}_{Sm(k)}$ 为电压源电压的 k 次谐波的振幅。下面计算电压源各分量单独作用时的电流值。

k=0，直流分量 $U_0=10V$，因电容视为开路，故

$I_0=0$，　$P_0=0$

k=1，1 次谐波，$\dot{U}_{Sm(1)}=141.4\angle 0°V$

$$\dot{I}_{m(1)}=\frac{141.4\angle 0°}{3-j\frac{9.45}{1}}=14.26\angle 72.39°A,\qquad P_{(1)}=\frac{1}{2}I_{m(1)}^2R=305.02W$$

k=3，3 次谐波，$\dot{U}_{Sm(3)}=47.13\angle 0°V$

$$\dot{I}_{m(3)}=\frac{47.13\angle 0°}{3-j\frac{9.45}{3}}=10.83\angle 46.4°A,\qquad P_{(3)}=\frac{1}{2}I_{m(3)}^2R=175.93W$$

同理求得：

$$\dot{I}_{m(5)}=\frac{28.28\angle 0°}{3-j\frac{9.45}{5}}=7.98\angle 32.21°A,\qquad P_{(5)}=\frac{1}{2}I_{m(5)}^2R=95.52W$$

$$\dot{I}_{m(7)}=\frac{20.2\angle 0°}{3-j\frac{9.45}{7}}=6.14\angle 24.23°A,\qquad P_{(7)}=\frac{1}{2}I_{m(7)}^2R=56.55W$$

$$\dot{I}_{m(9)}=\frac{15.71\angle 0^\circ}{3-j\dfrac{9.45}{9}}=4.94\angle 19.29^\circ A \quad , \qquad P_{(9)}=\frac{1}{2}I_{m(9)}^2R=36.30W$$

（3） 把各电流分量的相量形式转换为时域形式后，叠加得

$$i=[14.26\cos(\omega_1 t+72.39^\circ)+10.83\cos(3\omega_1 t+46.4^\circ)$$
$$+7.98\cos(5\omega_1 t+32.21^\circ)+6.14\cos(7\omega_1 t+24.23^\circ)+4.94\cos(9\omega_1 t+19.29^\circ)]A$$

$$P=P_{(0)}+P_{(1)}+P_{(3)}+P_{(5)}+P_{(7)}+P_{(9)}=669.80W$$