第七章补充题

1.已知连续时间系统的单位冲激响应,求系统的系统函数、表述系统的微分方程、系统的模拟框图，并判断系统是否稳定：

$$h(t)=te^{-t}u(t)$$

解：

$$H(s)=\frac{1}{(s+1)^2}=\frac{1}{s^2+2s+1},y''(t)+2y'(t)+y(t)=f(t)$$

，稳定，系统框图略

2.已知连续因果 LTI 系统的微分方程，求系统的单位冲激响应，系统函数、系统的模拟框图，并判断系统是否稳定：

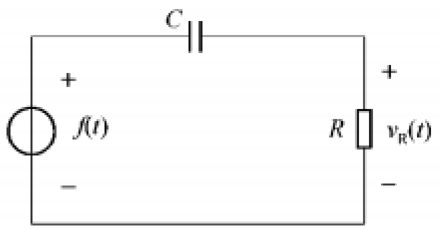
$$y''(t)-5y'(t)+4y(t)=f''(t)+2f(t)$$

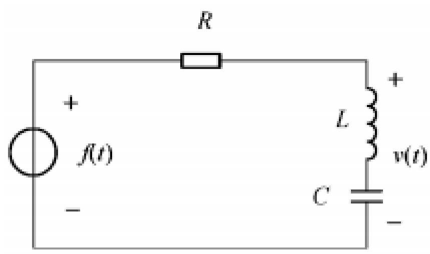
解：

$$H(s)=\frac{s+2}{s^2-5s+4}=\frac{-1}{s-1}+\frac{2}{s-4},h(t)=(2e^{4t}-e^{t})u(t)$$

,不稳定，模拟方框图略

3.如图所示各系统分别为简单的高通和带阻系统，试分别求出各系统的系统函数，并绘出系统的频响特性 H(jw)。已知 $R=1\Omega,C=1F,L=1H$

(1) 

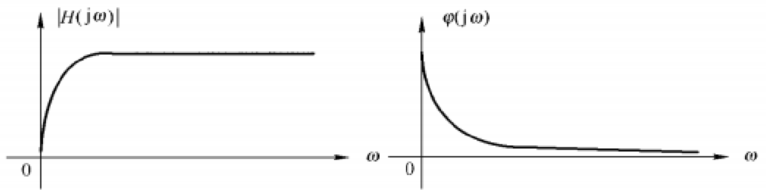
(2) 

解：

(1)

（2） $$H(s)=\frac{V_R(s)}{F(s)}=\frac{R}{R+1/sC}=\frac{s}{s+1}$$

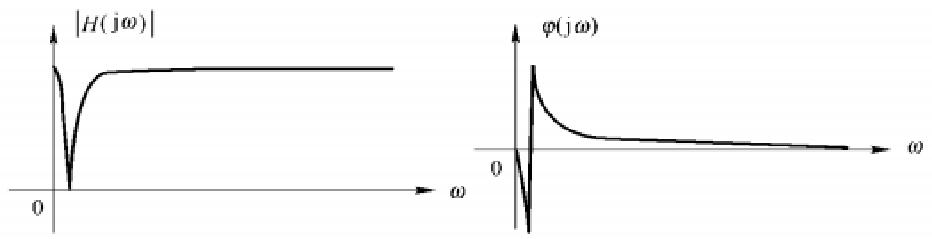
系统的幅频特性和相频特性如图 7 -11 所示。



(2)

（4） $$H(s)=\frac{V(s)}{F(s)}=\frac{sL+1/sC}{R+sL+1/sC}=\frac{s^2+1}{s^2+s+1}$$

系统的幅频特性和相频特性如图 7 -13 所示。



4.根据定义求一下序列的单边 z 变换及其收敛域。

(1) {1，2，3，4，5}

(2) $a^k\{u[k]-u[k-N]\}$

(3) $(\frac{1}{2})^k cos(\Omega_0 k)u[k]$

解:

【解】根据序列单边 z 变换的定义 $F(z)=\sum_{k=0} f[k]z^{-k}$ 即可求出上述信号的 z 变换及收敛域。

（1） $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k}=1+2z^{-1}+3z^{-2}+4z^{-3}+5z^{-4}$，$|z|>0$

(2) $$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k}=\sum_{k=0}^{N-1} a^k z^{-k}=\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}},\ |z|>0$$

(3) $$\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos(\Omega_0 k)u[k]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k(e^{j\Omega_0 k}+e^{-j\Omega_0 k})u[k]$$

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f[k]\, z^{-k}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} e^{j\Omega_0 k}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} e^{-j\Omega_0 k}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega_0}z^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega_0}z^{-1}}=\frac{1}{2}\frac{2-z^{-1}\cos\Omega_0 k}{1-z^{-1}\cos\Omega_0 k+\frac{1}{4}z^{-2}},\ |z|>\frac{1}{2}$$

5.根据单边 z 变换的位移性质，求以下序列的 z 变换及其收敛域。

(1) $a^{k-N}u[k-N]$

(2) $a^{k-N}u[k]$

解：(1)

利用因果序列的位移特性，有 $F(z)=\frac{z^{-N}}{1-az^{-1}}$，$|z|>|a|$

(2)

由于 $a^{k-N}u[k]=a^{-N}a^{k}u[k]$，直接应用指数信号的 z变换，可得

$$F(z)=\frac{a^{-N}}{1-az^{-1}},\ |z|>|a|$$

6.根据 z 变换的性质，求以下序列的单边 z 变换及其收敛域：

(1) $ka^{k}u[k]$

(2) $k\{u[k]-u[k-N]\}$

(3) $a^{k}\sum_{0}^{k}b^{i}$

解：

【解】利用 z变换的性质求信号 z变换的关键是根据待分析信号的构成，确定合适的信号作为基本信号，采用相应的 z变换性质。

(1) 由 $a^{k}u[k]\stackrel{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-az^{-1}}$，以及 z域微分特性，有

$$\mathscr{Z}\{ka^{k}u[k]\}=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^{2}},\ |z|>|a|$$

(2)

将 $k\{u[k]-u[k-N]\}$改写为

$$k\{u[k]-u[k-N]\}=ku[k]-(k-N)u[k-N]-Nu[k-N]$$

$$F(z)=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}-\frac{z^{-1}z^{-N}}{(1-z^{-1})^2}-\frac{Nz^{-N}}{1-z^{-1}}=\frac{z^{-1}(1-z^{-N})-Nz^{-N}(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2},\ |z|>0$$

(3)

$$\mathscr{Z}\left\{a^k\sum_{i=0}^{k}b^i\right\}=\frac{1}{(1-az^{-1})(1-abz^{-1})},\ |z|>\max(|a|,|ab|)$$

7. 已知 f[k]的 z 变化 $F(z)=\dfrac{z}{(1+z^2)^2},|z|>1$ ，利用 z 变换的性质，求下列各式的单边 z 变换及其收敛域：

(1) $f_3[k]=(\frac{1}{2})^k f[k-2]$

(2) $f_5[k]=(k-2)f[k]$

(3) $f_7(k)=\sum_{0}^{k}f[k-i]$

解：

(1)

$$F_3(z)=\frac{(2z)^{-1}}{[1+(2z)^2]^2},\ |z|>1$$

(2)

$$F_5(z)=F_4(z)-2F(z)=\frac{3z^3-z}{(1+z^2)^3}-\frac{2z}{(1+z^2)^2}=\frac{z^3-3z}{(1+z^2)^3},\ |z|>1$$

(3)

$f_7[k]$可以表示为 $f[k]*u[k]$，利用卷积特性可得

$$F_7(z)=\frac{z^2}{(1+z^2)^2(z-1)},\ |z|>1$$

8. 利用留数法求单边 z 反变换

$$F(z)=\frac{2z+1}{z^2+3z+2}$$

解：

$$f[k]=\frac{1}{2}\delta[k]+\left[(-1)^k-\frac{3}{2}(-2)^k\right]u[k]$$

9. 根据 z 变换的性质求一下序列的 z 变换及其收敛域：

$$f[k]=a^k u[-k]$$

解：

利用 $a^k u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \dfrac{1}{1-az^{-1}}$，以及时域翻转特性，可得

$$\mathscr{Z}\{a^k u[-k]\}=\frac{-az^{-1}}{1-az^{-1}},\ |z|<|a|$$

10. 试求出下列 F(z) 全部可能的收敛域及其对应的 z 反变化 f[K]:

$$F(z)=\frac{z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}$$

解：

【解】根据 $F(z)$ 的极点，确定出信号的收敛域及信号类型（右边、左边或双边）。再将 $F(z)$ 用部分分式展开，利用时域和 z 域的一一对应关系即可求出 $F(z)$ 的 z 反变换。

(1) $F(z)$ 的极点为 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{4}$，其全部可能的收敛域 $|z|>\frac{1}{2}$，$|z|<\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{2}$。

根据收敛域，并利用常用序列的 z 变换，可得

$|z|>\frac{1}{2}$ 对应右边序列，即有 $\quad f[k]=\frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k-\left(-\frac{1}{4}\right)^k\right]u[k]$

$|z|<\frac{1}{4}$ 对应左边序列，即有 $\quad f[k]=\frac{4}{3}\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^k+\left(-\frac{1}{4}\right)^k\right]u[-k-1]$

$\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{2}$ 对应双边序列，其中极点 $-1/4$ 对应右边序列，极点 $1/2$ 对应左边序列，故有

$$f[k]=-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k u[-k-1]-\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^k u[k]$$

11.求下列各离散时间 LTI 系统的零输入响应、零状态响应和完全响应：

$$y[k]-\frac{1}{3}y[k-1]=f[k]+f[k-1],f[k]=(\frac{1}{2})^k u[k],y[-1]=1$$

解：

$$y_x[k]=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k,\quad k\geqslant 0,\quad y_f[k]=\left[-8\left(\frac{1}{3}\right)^k+9\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]u[k]$$

$$y[k]=y_x[k]+y_f[k]=-\frac{23}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k+9\left(\frac{1}{2}\right)^k,\quad k\geqslant 0$$

12.已知描述离散时间系统的差分方程为：

$y[k]-3y[k-1]+2y[k-2]=f[k-1]-2f[k-2]$系统的初始状态为

$y[-1]=-\frac{1}{2},y[-2]=-\frac{3}{4}$,当输入信号序列为 f[k]时，系统的完全响应为

$y[k]=2(2^k-1),k>=0$,试求 f[k]

解：

【解】先根据系统的初始状态求出系统的零输入响应(从时域或 z域求)，再从完全响应中分解出零状态响应，求出零状态响应的 z域表达式及系统函数 $H(z)$，利用 $F(z)=Y_f(z)/H(z)$即可求出输入序列。

由 z域求解。令 $f[k]=0$，对齐次差分方程进行单边 z变换，可得

$$Y_x(z)-3z^{-1}Y_x(z)-3y[-1]+2z^{-2}Y_x(z)+2z^{-1}y[-1]+2y[-2]=0$$

故零输入响应的 z域表达式为

$$Y_x(z)=\frac{3y[-1]-2z^{-1}y[-1]-2y[-2]}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{1}{1-2z^{-1}}+\frac{-1}{1-z^{-1}}$$

进行 z反变换，可得

$$y_x[k]=(2^k-1)u[k]$$

因为完全响应等于零输入响应与零状态响应之和，所以

$$y_f[k]=y[k]-y_x[k]=(2^k-1)u[k]$$

对其进行 z变换，可得

$$Y_f(z)=\frac{z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

根据系统函数的定义，有

$$H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{z^{-1}-2z^{-2}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

故输入序列的 z 域表达式为

$$F(z)=\frac{Y_f(z)}{H(z)}=\frac{z^{-1}}{z^{-1}-2z^{-2}}=\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

进行 z 反变换，即得 $f[k]=2^k u[k]$

13.试画出下列离散时间系统的直接形式，级联和并联形式模拟方框图：

$$H(z)=\frac{2z+1}{z(z-1)(z-0.5)^2}$$

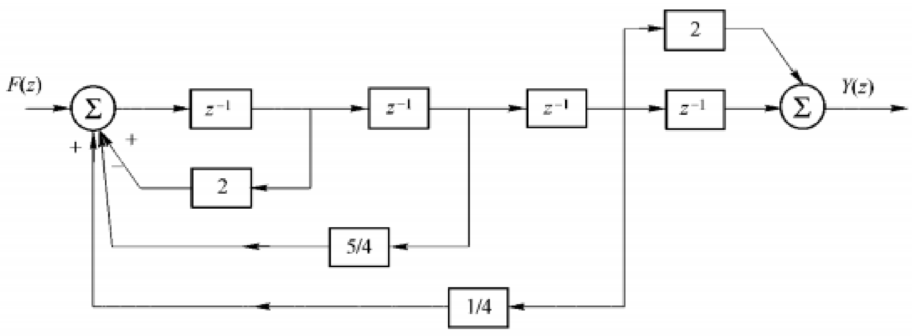
解：

将 $H(z)$ 改写为

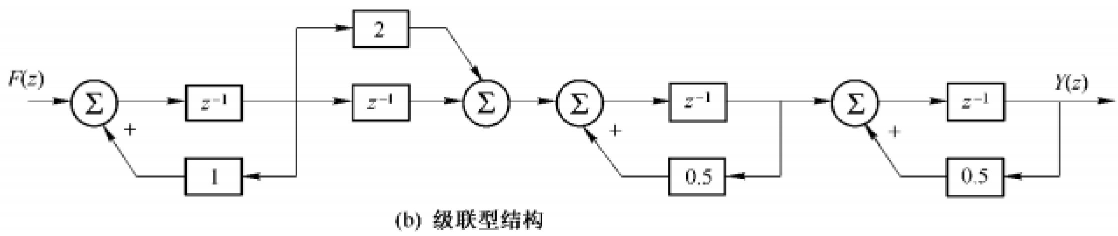
$$H(z)=\frac{2z^{-3}+z^{-4}}{1-2z^{-1}+\frac{5}{4}z^{-2}-\frac{1}{4}z^{-3}}$$

$$H(z)=\frac{2z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}}\ \frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\ \frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

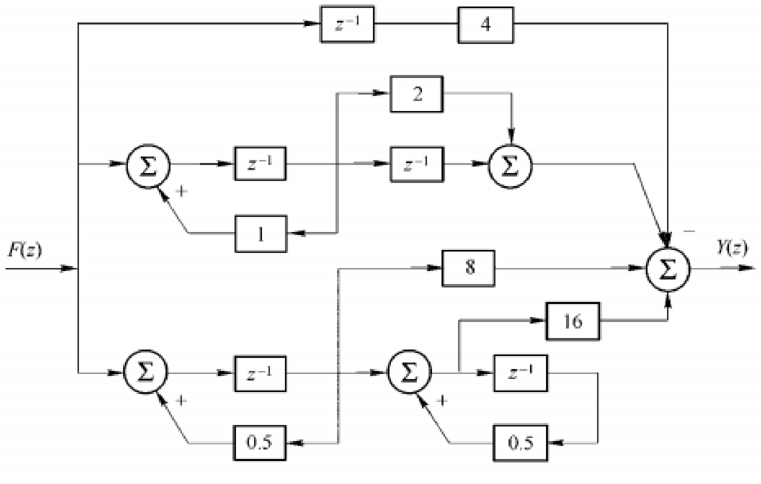
$$H(z)=-4z^{-1}+\frac{12z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}+\frac{16z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})^2}$$



(a) 直接型结构

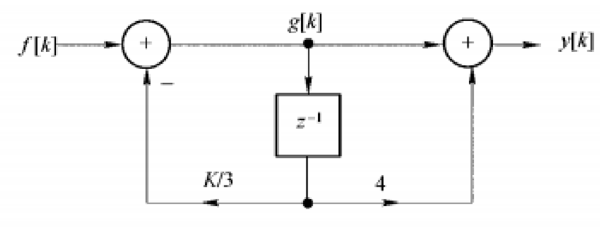


(b) 级联型结构

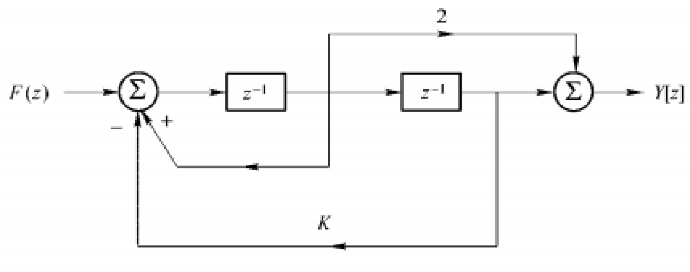


(c) 并联型结构

14. 已知离散因果系统的模拟方框图如图所示，求系统函数 H(z)并确定系统稳定时的 K 值范围：



(a)



(b)

解:

【解】根据模拟方框图的一般规律，可以求出系统函数 $H(z)$，再由系统稳定的充要条件即可确定使系统稳定的 K 值范围。

模拟方框图的一般规律为，若系统函数 $H(z)$为

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}}$$

则模拟方框图的各反馈回路的传输函数分别为$-a_1z^{-1}$，$-a_2z^{-2}$，…，$-a_{n-1}z^{-(n-1)}$，$-a_nz^{-n}$，对应 $H(z)$的分母；模拟方框图的各条前向通路的系统函数分别为 b_0，b_1z^{-1}，b_2z^{-2}，…，$b_{m-1}z^{-(m-1)}$，b_mz^{-m}，对应 $H(z)$的分子。

（1）根据模拟方框图的一般规律，其系统函数 $H(z)$为

$$H(z)=\frac{1+4z^{-1}}{1+\frac{K}{3}z^{-1}}$$

对因果系统，系统稳定的条件是极点在单位圆内，即 $\left|\frac{K}{3}\right|<1$，由此得 $|K|<3$。

(2) 根据模拟方框图的一般规律，其系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z)=\frac{2z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}+Kz^{-2}}$$

对因果系统，系统稳定的条件是极点在单位圆内，即 $|p_{1,2}|=\left|\frac{1\pm\sqrt{1-4K}}{2}\right|<1$，由此得 $0<K<1$。

15. 已知因果离散时间系统的系统函数，求系统的单位脉冲响应、描述系统的差分方程、系统的模拟方框图，并判断系统是否稳定：

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{6+5z^{-1}+z^{-2}}$$

解：

【解】(1) 将 $H(z)$ 展开为

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{6+5z^{-1}+z^{-2}}=\frac{3/2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-4/3}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

对其进行 z 反变换，可得单位脉冲响应为

$$h[k]=\left[\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k-\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right]u[k]$$

由系统函数的定义，有

$$H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{1-z^{-1}}{6+5z^{-1}+z^{-2}}$$

即 $$(6+5z^{-1}+z^{-2})Y_f(z)=(1-z^{-1})F(z)$$

进行 z 反变换，可得系统的差分方程为

$$6y[k]+5y[k-1]+y[k-2]=f[k]-f[k-1]$$

由于系统为因果系统，且系统函数的极点为 $-1/2$，$-1/3$，均在单位圆内，故系统稳定。结构框图略。