2019-2020 第 1 学期 高等数学上册

期末复习参考资料

主编：西南交通大学基础数学协会

指导：教务处、数学学院

扫码关注西南交大基础数协微信公众号

2019 级数学交流 QQ 群：897982254

前言

高等数学上册主要包含函数与极限、导数与微分、定积分与不定积分以及微分方程这几大方面，而本资料也是从这五个方面分别进行总结概括，为同学们提供一个复习参考。

本资料内容围绕这几大方面展开，大多为课本教材上的知识总结与概览，包括定义、概念、定理、性质和公式等内容，同时挑选了部分例题供大家巩固知识。最后，我们还编写了一套期末模拟卷，其题型和期末试题题型类似，难度适中，大家在复习完后可以做一下这套题目，检验复习成果。

对大家复习的一些建议：就经验来看，每年的期末试题都相对简单，考点和解题方法和技巧大都来自平时课本例题和习题集，所以希望大家复习的时候主要配合教材和习题集来复习。首先复习基础知识比如定理、概念和公式等。然后根据掌握的知识去做课本例题和习题集，但题太多，也不大可能每题都去做，重点挑易错题或者习题集每章的自测题来看，只要合理规划时间，按照进度将所有知识都复习一遍，相信期末考试对大家来说一定不是问题，在此，也希望大家都能取得一个好成绩。

特别鸣谢基础数学协会学术部提供的支持！

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，敬请各位同学批评指出，可反馈在数学交流群里。

基础数学协会

二〇一九年十二月

目录

第一章 函数与极限

1.1 映射与函数

1.1.1 定义：

设X, Y是两个给定的集合，若按照某种规则f, 使得对集合X中的每个元素x， 都可以找到集合Y中唯一确定的元素y与之对应，则称这个对应规则f是集合X到 集合Y的一个映射，记为

$$f: X \rightarrow Y$$

1.1.2 单射,满射和双射：

单射：设f是由集合A到集合B的映射，如果所有$x, y \in A$, 且$x \neq y$，都有 $f(x) \neq f(y)$, 则称f为由 A 到B的单射。

满射：如果每个可能的像至少有一个变量映射其上(即像集合B中的每个元素在A中都有一个或一个以上的原像)，或者说值域任何元素都有至少有一个变量与之对应，那这个映射就叫做满射。

双射：既是单射又是满射的映射称为双射，亦称“一一映射”。

1.1.3 基本初等函数：

（1）常数函数$y = c$（c为常数）

（2）幂函数$y = xa$（a为常数）

（3）指数函数$y = ax$（$a > 0, a \neq 1$）

（4）对数函数$y = \log a\ x$（$a > 0, a \neq 1$, 真数$x > 0$）

（5）三角函数和反三角函数(例：正弦函数:$y=sinx$,反正弦函数: $y=arcsinx$）

1.1.4 函数的性质

（一）奇偶性

常用结论：

（1）常函数为偶函数

（2）有限个奇函数的代数和为奇函数，有限个偶函数的代数和为偶函数

（3）奇函数与偶函数的乘积为奇函数

（4）奇数个奇函数乘积为奇函数，偶数个奇函数乘积为偶函数

（二）单调性

（三）周期性

常用结论：

（1） 若$f(x)$的周期为 T，则$f(ax+b)$的周期为$\frac{T}{|a|}$

（2） 若f（x）和g（x）的周期均为 T，则f（x）$\pm g$（x）也是周期为 T 的周期函数

（四）有界性

1.2 数列极限

1.2.1 定义：

设$\{x_n\}$为一数列. 如果存在常数a，对于任意给定的正数 ε，总存在正整数N， 使得当$n > N$时，不等式$|x_n - a| < \varepsilon$ 都成立，则称数列$\{x_n\}$收敛于a，如果不存 在常数a, 则称数列$\{x_n\}$发散。

1.2.2 数列极限的性质：

1. 收敛数列极限必唯一
2. 收敛数列必有界
3. 保序性
4. 夹逼性

例1.　求下列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\times3\times5\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\ldots\times(2n)}$。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\log n}$

答案：（1）应用不等式$2k>\sqrt{(2k-1)(2k+1)}$得到

$0<\frac{1\times3\times5\ldots(2n-1)}{2\times4\times6\ldots(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，因此所求极限为 0

（2）利用不等式$1<\sqrt[n]{n\log n}<\sqrt[n]{n^2}$由夹逼性的所求极限为 1

1.3 函数的极限

1.3.1 定义：

设函数$f(x)$在x_0 的某一邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε(无论它多么小)，总存在正数δ，使得当x满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ ，那么 A 就叫做函数$f(x)$在x 处的极限。

1.3.2 函数极限的性质：

1. 唯一性
2. 局部保序性
3. 局部有界性
4. 夹逼性

例 2. 求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-\tan^{-1}x}{3x+\tan^{-1}x}$

（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

答案：（1）分子分母同时除以 x，利用极限的四则运算求得为$\frac{2}{3}$

（3）可知$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，利用极限的四则运算代入得左右极限相等且为 0

1.4 无穷小与无穷大

1.4.1 定义：

对于任意给定的$G>0$，可以找到正整数 N，使得当$n>N$时成立$|x_n|>G$，则称数列$\{x_n\}$是无穷大量。在收敛数列中，我们称极限为 0 的数列为无穷小量

常用结论：

（1） $\lim Y=A\leftrightarrow Y=A+\alpha$, 其中$\alpha$为无穷小量

（2） 在同一变化趋势中，若变量 Y 为无穷小（大）量，则$\frac{1}{Y}$为无穷大（小）量

（3） 设α，β，γ是同一变化中的无穷小量，若$\alpha\sim\beta$，则$\beta\sim\alpha$；若$\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则$\alpha\sim\gamma$

（4） 设α'，α，β，β'是同一变化过程中无穷小量，且$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，$\lim\frac{\alpha}{\beta}$存在，则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta'}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$$

1.5 极限运算法则

1.5.1 内容：设 极限$\lim X$, $\lim Y$均存在，则

（1）$\lim(X\pm Y)$存在，$\lim(X\pm Y)=\lim X\pm\lim Y$

（2）$\lim X*Y$存在，且$\lim(X*Y)=\lim X*\lim Y$

（3）若$\lim Y\neq 0$, 则$\lim\frac{X}{Y}$存在，且$\lim\frac{X}{Y}=\frac{\lim X}{\lim Y}$

例 3. 求下列极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n+1}{2n^3+(-1)^n}$

（2） $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(4x+5)^{10}(3x-1)^5}{(2x+3)^{15}}$

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$

（4） $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{x-4}{x^3-1}\right)$

（5） $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{6-x}}{x^2-3x+2}$

答案：$\frac{3}{2}$，6^5，$\frac{1}{3}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{1}{2}$

1.6 极限存在准则　两个重要极限

1.6.1 极限存在准则：

准则 1：夹逼准则

准则 2：单调有界数列必有界

准则 3：柯西极限存在准则

1.6.2 两个重要极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　$\left(\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\right)$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$　　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$　　$\left[\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e\right]$

例 4. 求下列极限

（1）　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{2x+\sin 2x}$

（2）　$\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}$

答案：（1）原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{2+2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{1}{2}$

(2) 原式=$\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln 1+x}\cdot\frac{2\ln(1+x)}{x}}=e^{2}$

1.7 无穷小量（无穷大量）的比较

1.7.1 无穷小定义：

设函数$f(x)$在a的某个去心邻域U°（a,δ)上有定义，如果$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ 我们 就说$f(x)$是$x\ \to\ a$时的无穷小量.

记为

$$f(x)\ =\ o(g(x))\qquad (x\ \to\ a)$$

例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{2}}{x}=0$$

可表示为

$$1-\cos x=o\ (x)$$

1.7.2 无穷大定义：

设函数$f(x)$在a的某个去心邻域U°（a,δ)上有定义，如果$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ 我们就说$f(x)$是$x\ \to\ a$时的无穷大量.

这里$x\ \to\ a$中的还可以是单侧极限，无穷大，正负无穷大.

设$f(x)$和$g(x)$都是$x\ \to\ a$时的无穷大量，$g(x)\ \neq\ 0$ 考察比值

$$\hbar(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

的极限，如果$\lim\limits_{x\to a}\hbar(x)=\infty$，则表示 x→ a时，$f(x)$趋于无穷的速度比$g(x)$

快，我们称为当$x \to a$时，$f(x)$关于$g(x)$是高阶无穷大量.
例如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\infty$$

1.7.3 等价无穷小（大）定义：

设函数$f(x)$和$g(x)$ 在a的某个去心邻域U°（a,δ)上有定义，如果存在$A>0$ 使得

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<A$$

就称 $\frac{f(x)}{g(x)}$是当$x \to a$ 的有界量。记为$f(x)=O(g(x))$　$(x \to a)$
若又存在$a>0$ 使得

$$a<\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<A$$

就称 $f(x)$与$g(x)$是同阶无穷大（小）量。
如果

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

就称$f(x)$和$g(x)$是等价无穷大（小）量。记为 $f(x)\sim g(x)$　$((x \to a))$

1.7.4 常用等价量

（1）$\sin x\sim x$
（2）$\sin^{-1}x\sim x$
（3）$\tan x\sim x$
（4）$\tan^{-1}x\sim x$
（5）$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$
（6）$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$
（7）$\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$，$a>0$，$a\neq 1$
（8）$a^x-1\sim x\ln a$，$a>0$，$a\neq 1$
（9）$(1+x)^a-1\sim ax$

例 5. 求下列极限

（1）　$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^n}{(\sin x)^m}$，其中 m，n 为自然数

（2）　$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\tan(2x)}$

（3）　$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\sqrt[n]{2}\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{1+n^2}-n}$

（4） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{(1-e^x)\sin(x)^2}$

（5） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{\ln(1+\sin x)}$

答案：

（1）$\begin{cases}\infty，n<m\\ 1，n=m\\ 0，n>m\end{cases}$

（2）$\frac{1}{2}$

（3）1

（4）$-\frac{1}{2}$

（5）1

1.8 连续函数的性质

1.8.1 定义

设函数$f(x)$在a的某个邻域$U(a,\eta)$上有定义，如果

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

就称$f(x)$在a点连续。

按照极限的定义，连续性的定义可以表述为以下两种形式：

A. 设函数$f(x)$在a的某个邻域$U(a,\eta)$上有定义，如果对于任意$\varepsilon>0$存在

$\delta>0$ 只要$|x-a|<\delta$ ，就有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

那么$f(x)$就在$x=a$处连续。

B.（Heine 定理）设函数$f(x)$在a的某个邻域$U(a,\eta)$上有定义，如果对于任何满足条件$x_n\to a$的序列$\{x_n\}\subset U(a,\eta)$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$$

那么$f(x)$就在$x=a$处连续。

由极限的运算法则，容易得到下面的定理

1.8.2 定理:

1. 设函数$f(x)$和$g(x)$在$x=a$处连续，则：

（1）$f(x)\pm g(x)$在$x=a$处连续

（2）$f(x).g(x)$在$x=a$处连续

（3）$\frac{f(x)}{g(x)}$在使得$g(a)\neq 0$的$x=a$ 处连续

2. 设函数$f(x)$在$x=a$处连续，则存在$\delta>0$ 使得函数$f(x)$在邻域$U(a,\delta)$上有界。

3. 设函数$f(x)$在$x=a$处连续，则函数$|f(x)|$也在$x=a$处连续。

4. 设函数$f(x)$和$g(x)$在$x = a$处连续。如果$f(a) < g(a)$，则存在$\delta > 0$使得对于任意$x \in U(a, \delta)$有 $f(x)<g(x)$

5. （复合函数的连续性）设函数$f(x)$在$x=a$处连续 函数$g(y)$在$y = f(a)$处续，那么复合函数$g(f(x))$在$x = a$处连续。

6. （反函数连续性定理）设函数$y=f(x)$在区间$[a, b]$上连续且严格单调增加（减少），则存在它的反函数$x = f^{-1}(y)$，且该函数也连续且严格单调增加（减少）的。

即：若$f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$，则它的反函数$x = f^{-1}(y)$在$[\alpha, \beta]$连续且严格单调增加（减少）。

7. 所有初等函数在其定义区间上连续。

8. 设函数$f(x)$在$(a-\rho, \alpha)$上有定义，如果

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

那么我们就说函数$f(x)$在a点左侧连续。类似的可以定义右侧连续。

9. 设函数$f(x)$在a的某个邻域$U(a, \eta)$上有定义，则$f(x)$在a处连续的充分必要条件是它在这点左侧连续且右侧连续。

按照连续性定义，函数$f(x)$在a处连续必须满足：

（1）函数$f(x)$在a处有定义，即$f(a)$为有限值

（2）函数$f(x)$在a处有左极限，且$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

（3）函数$f(x)$在a处有右极限，且$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

否则，函数$f(x)$在a处不连续，亦称函数$f(x)$在a处间断；这时a是函数$f(x)$的不连续点，亦称间断点。

通常将不连续点分成三类

(1)若函数$f(x)$在点a处的左、右极限都存在但不相等，即

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

就称a是函数$f(x)$的第一类间断点或跳跃点。

(2)若函数$f(x)$在点a处的左、右极限至少有一个不存在，就称a是函数$f(x)$的第二类间断点。

(3)若函数$f(x)$在点a处的左、右极限都存在而且相等，但不等于$f(a)$或者$f(x)$在a处无定义，就称a是函数$f(x)$的第三类间断点或可去间断点。

练习题：

（1）设$f(x)$和$g(x)$在，$[a, b]$上连续，证明$max\{f(x), g(x)\}$也在$[a, b]$上连续。

（2）指出函数$f(x) = \frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$的间断点，并确定其类型

（3）设$f(x)$在$(0,\ \infty)$上连续，且满足$f(x)=f(x^2)$，$\forall x\in(0,\ \infty)$．证明$f(x)$在$(0,\ \infty)$上为常数函数。（

4）Riemann 函数被定义为

$$R(x)=\begin{cases}1,\ x=0\\ 0,\ x\text{为无理数}\\ \frac{1}{p},\ x=\frac{q}{p},\ x\text{为既约分数且}p>0\end{cases}$$

证明：$\forall x\in\mathbb{R}$，$R(x)$的极限存在，且极限值为 0.(换言之，一切无理点是$R(x)$的连续点，一切有理点是 $R(x)$的第三类间断点)

答案：

(1)提示：$max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\right)$

(2)0 第一类，1 第三类，-1 第二类

(3)提示：任取 x∈（0，∞），有$f(x)=f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)$，$\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}}=1$

(4)提示：只需考虑$[0,1]$，注意以下事实：在$[0,1]$上分母不超过整数 k 的有理点个数只有有限个

1.9 闭区间连续函数的性质

1.9.1 有界性定理： 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上有界。

1.9.2 介值定理： 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且

$$f(a).f(b)<0$$

那么必存在一点 c ∈ (a,b)使得

$$f(c)=0$$

1.9.3 最值定理： 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.则存在 ξ，η ∈ $[a,b]$使得对一切$x\in[a,b]$都有

$$f(\xi)\leqslant f(x)\leqslant f(\eta)$$

1.9.4 中间值定理： 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则它一定能取到最大值和最小值之间的任何一个值。

1.9.5 一致连续：

一致连续的常用判定条件：Lipschitz 条件：若 f（x）在区间 I 上满足：

$$|f(x')-f(x'')|\le L|x'-x''|$$

特别地，该条件等价于该函数的导函数在该区间内有界（用拉格朗日中值定理证明）

练习题：

（1）设f(x)在$[a，b]$上连续，且取值为整数。求证f(x)是常数函数。

（2）证明：若闭区间$[a，b]$上的单调有界函数f(x)能取到$f(a)$到$f(b)$之间的一切值，则f(x)是$[a，b]$上的连续函数。

（3）设函数f(x)在$[a，b]$连续，且f(x) $\neq 0$，$x \in [a，b]$，证明f(x)在$[a，b]$恒正或恒负。

答案:

(1)提示：用反证法与零点存在定理。

(2)提示：不妨设f(x)单增。若存在$t \in [a，b]$不连续。则$f（t^-）< f（t）$和$f（t）< f（t^+）$至少有一个不成立,不妨设$f（t^-）< f（t）$，则不存在函数值$\frac{f(t^-)+f（t）}{2}$对应的点。

(3)提示：零点存在定理

第二章 一元函数微分学

2.1 导数概念

2.1.1 导数定义式

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

亦可记为 y’$|_{x=x_0}$,$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$,或者$\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$。

2.1.2 注意事项

①导数的意义：即在该点增量比的极限。

几何意义：函数在该点切线的斜率。

②可导和连续的关系。

可导一定连续，而连续不一定可导。例如:f(x)=$\sqrt{x}$(x = 0)。

③判断可导条件。

首先看是否连续，若不连续则一定不可导。

之后可用导数定义或看左右导数是否存在且相等。

④初等函数在定义域内一定可导，如果式分段函数需对其分段点进行验证是否可

导。

例 1：1.已知 f’(0)=2,则$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(3sinx)-f(2arctanx)}{x}$=_____。

2 设 f(x)可导，F(x)=f(x)(1+|sinx|).若使 F(x)在 x=0 处可导，则必有_____.

解：1.原式=$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(3sinx)-f(0)}{3sinx}\times\frac{3sinx}{x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2arctanx)-f(0)}{2arctanx}\times\frac{2arctanx}{x}$

=$3f'(0)-2f'(0)=f'(0)=2$（利用导数定义求极限）

2.

$$F(x)=\begin{cases} f(x)(1-sinx),-\frac{\pi}{2}<x<0 \\ f(0),x=0 \\ f(x)(1+sinx),0<x<\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$F'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)(1-sinx)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}-\lim_{x\to0^-}f(x)\times\frac{sinx}{x}$$
$$=f'(0)-f(0)$$

同理可得 F’$_+(0)=f’(0)+f(0)$

若使 F(x)在 x=0 处可导，则必须 $f'_-(0)=f'_+(0)$，则 f(0)=F(0)=0.

2.2 函数的求导法则

2.2.1 常用公式

(1) (tanx)’ =sec^2x　　(2) (cotx)’ =-csc^2x

(3) (secx)’ =secxtanx　　(4) (cscx)’ =-cscxtanx

(5)(a^x)’ =a^xlna(a>0，$a\neq1$)　(6)(log_ax)’ =$\frac{1}{xlna}$ (a>0 且 a≠ 1)　(12)(lnx)’ =$\frac{1}{x}$

(7)(arcsinx)’ =$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　(8)(arccosx)’ =-$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(9)(arctanx)’ =$\frac{1}{1+x^2}$　　(10)(arccotx)’ =-$\frac{1}{1+x^2}$

2.2.2 函数的和，差，积，商法则

(1) (u±v)’ $=u’+v’$

(2) (Cu)’ $=Cu’$

(3) (uv)’ $=uv’+vu’$

(4) $\left(\frac{u}{v}\right)’=\frac{u’v-v’u}{v^2}$ (v≠ 0)

2.2.3 反函数求导

如果 x=f(y)在区间I_y内单调，可导且 f’$(y)\neq0$，那么它的反函数 y=$f^{-1}(x)$

在区间$I_x=\{x|x=f(y),y\in I_y\}$内也可导，且$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}$，或$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$。

亦可称反函数的导数等于直接函数导数的倒数。

2.2.4 复合函数求导链式法则

定义式的导函数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\times g'(x)或\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形，以两个中间变量为例，$y=f(u),u=\varphi(v),v=\omega(x)$，则复合函数$f\{\varphi[\omega(x)]\}$的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dv}\times\frac{dv}{dx}$$

复合函数求导遵循链式法则，由外向内，层层递进。

例 2:1.已知$y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right),f'(x)=arctanx^2$,则$\frac{dy}{dx}|_{x=0}=$ _____。

2.设$y=e^{tan\frac{1}{x}}\times sin\frac{1}{x}$，则$y'=$ ____

解：1.令$u=\frac{3x-2}{3x+2}$，则$y=f[u(x)]$，由链式法则，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=arctanu^2\times\frac{12}{(3x+2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}|_{x=0}=\frac{12}{(0+2)^2}\times arctan1=\frac{3\pi}{4}$$

(利用求导公式和求导法则求抽象复合函数的导数)

$$2.y'=e^{tan\frac{1}{x}}\times cos\frac{1}{x}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)+sin\frac{1}{x}\times e^{tan\frac{1}{x}}\times sec^2\frac{1}{x}\times(-\frac{1}{x^2})$$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{tan\frac{1}{x}}(cos\frac{!}{x}+tan\frac{1}{x}\times sec\frac{1}{x})$$

2.3 高阶导数

2.3.1 基本公式

（1）$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$

（2） $(Cu)^{(u)}=Cu^{(n)}$

（3） $(u+v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}u^{(k)}v^{(n-k)}$

2.3.2 部分函数的高阶导数

(1) $(e^x)^{(n)}=e^x$

(2) $(\text{sinx})^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

(3) $(\text{cosx})^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$

(4) $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

(5)$(x^u)^{(n)}=u(u-1)(u-2)\cdots(u-n+1)x^{u-n}$

2.3.3 求高阶导的方法

（1）逐层求导法

（2）合理归纳法

（3）复杂函数化简变形为常用函数。（函数加减比函数乘积简单许多）

（4）利用莱布尼茨公式，有时需建立递推公式。

（5）注：奇函数的导数是偶函数，偶函数的导数奇函数。

（偶函数的奇数阶导数一定是奇函数，奇函数的偶数阶导数一定是奇函数）

例 3：1.求$y=arcsinx$在$x=0$的 n 阶导。

2.求$y=sinxsin2xsin3x$的 n 阶导数。

解答:1.由$y=arcsinx$是奇函数,由于奇偶函数的导数性质可知 n 为偶数时$y^{(n)}=0$.对函数$y=arcsinx$求导可推出$\sqrt{1-x^2}y'=1$,再对 x 求导得到$\sqrt{1-x^2}y''-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y'=0$，化简得到$(1-x^2)y''-xy'=0$

同时求 n 阶导可得$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$

将 x=0 带入可得$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$。又因$y'(0)=1$，当 n 为奇数时，

$y^{(n)}(0)=(n-2)^2(n-4)^2\times\cdots\times3^2\times1^2y'(0)=[(n-2)!!]^2$

2.由积化和差公式可得$y=\frac{1}{4}(sin2x+sin4x-sin6x)$

则$y^{(n)}=\frac{1}{4}[2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+4^n\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)-6^n\sin\left(6x+\frac{n\pi}{2}\right)]$

2.4 隐函数/参数方程的导数

2.4.1 隐函数的导数

法一：先将方程 $F(x,y)=0$ 显化，然后运用一般函数的求导法则求导

法二：假设方程 $F(x,y)=0$ 确定一个函数 $y=f(x)$，把 $y=f(x)$ 带入方程便得恒

等式 $F[x, f(x)] \equiv 0$。应用复合函数求导法则，在方程两边同时对 x 求导数，

便可得到 y' 或 $\frac{dy}{dx}$。

2.4.2 相关变化率

根据题中所给的信息求出一个方程，两边同时对一个相关的变量求导。

2.4.3 参数方程求导法则

对于 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，（$\alpha \le t \le \beta$）皆可导，且 $\psi'(t) \ne 0$，则 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$。

若 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，（$\alpha \le t \le \beta$）二阶可导，则其二阶导等于

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} . \varphi'(t)$$

即 $y'' = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'(t)}$

2.5 函数的微分

2.5.1 微分的定义

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 可表示为 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$，其中 A 不依赖于 Δx 的常数，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是可微的，而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 dy，即 $dy = A\Delta x$

2.5.2 微分的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的微分是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的纵坐标的改变量。

2.5.3 性质

（1）函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导

（2）若函数 $y=f(x)$ 为可微函数，则无论 x 为中间变量还是自变量，均有 $dy = f'(x)dx$，称为一阶微分形式不变性

2.5.4 运算法则

设 $u=u(x), v=v(x)$ 都可导，则

$(1) d(u \pm v) = du \pm dv$

$(2) d(Cu) = Cdu$

$(3) d(uv) = vdu + udv$

$(4) d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2} (v \neq 0)$

例题

(1) 设$y = \frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$，求$y'$

(2) 求由方程$x - y + \frac{1}{2}\sin y = 0$所确定的隐函数$y$的二阶导数

(3) 设由方程$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases} (0 < \varepsilon < 1)$确定函数$y = y(x)$,求$\frac{dy}{dx}$.

(4) 已知$y = \arcsin(\sin^2 \frac{1}{x})$,求$dy$.

(5) 设$y = e^{ax+bx^2}$,求dy.

参考答案：

（1）等式两边同时取对数得

$$\ln y = \ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(x-1) - 2\ln(x+4) - x$$

上式两边同时对 x 求导得

$$\frac{1}{y}.y' = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{x+4} - 1$$

$$\therefore y' = \frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{x+4} - 1\right]$$

（2）方程两边同时对 x 求导，得

$$1 - \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\cos y.\frac{dy}{dx} = 0, \text{于是} \frac{dy}{dx} = \frac{2}{2 - \cos y},$$

上式两边再对 x 求导，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2\sin y\dfrac{dy}{dx}}{(2-\cos y)^2}=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}.$$

（3）方程组两边对 t 求导，得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2t+2\\ 2t-\dfrac{dy}{dt}+\varepsilon\cos y.\dfrac{dy}{dt}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2(t+1)\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t}{1-\varepsilon\cos y}\end{cases}$$

$$故\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{t}{(t+1)(1-\varepsilon\cos y)}$$

（4）因为$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sin^2\frac{1}{x})^2}}.2\sin\dfrac{1}{x}.\cos\dfrac{1}{x}.(-\dfrac{1}{x^2})$

所以$dy=y'dx=-\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-(\sin^2\frac{1}{x})^2}}\sin\dfrac{2}{x}dx$

（5）法一：用复合函数求导公式

$dy=(e^{ax+bx^2})'dx=e^{ax+bx^2}(a+2bx)dx$

法二：用微分形式不变性

$y=e^u,u=ax+bx^2.$

$dy=(e^u)'du=e^udu=e^{ax+bx^2}d(ax+bx^2)=e^{ax+bx^2}(a+2bx)dx$

在计算中也可以不写中间变量，直接利用微分形式不变性。

第三章 微分中值定理与导数的应用

3.1 微分中值定理

（1）罗尔定理

设函数 $f(x)$ 1. 在 $[a,b]$ 上连续；2. 在 (a,b) 内可导. 3 $f(a)=f(b)$. 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=0$$

（2）拉格朗日中值定理

设函数 $f(x)$ 1. 在 $[a,b]$ 上连续；2. 在 (a,b) 内可导. 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

（3）柯西中值

设函数 $f(x),g(x)$ 1. 在 $[a,b]$ 上连续；2. 在 (a,b) 内可导；3. g′（x）在 (a,b) 内每一点处均不为零. 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

3.2 洛必达法则

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

（1）在点 x_0 某一去心邻域内有定义，且有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0(或\infty)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0(或\infty)$；

（2）在该去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为 ∞）

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$（或为 ∞）

注：该法则对于 $x\to\infty$ 时的未定式 "$\dfrac{0}{0}$","$\dfrac{\infty}{\infty}$" 同样适用

3.3 泰勒公式

（1）泰勒定理

若 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个邻域内均有直到 $n+1$ 阶的导数，则对于该邻域内任意点 x，有泰勒公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

（2）麦克劳林公式

在 $x_0=0$ 展开的泰勒公式，也称为麦克劳林公式，即

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{\mathrm{k}!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间

（3）常用的六个泰勒展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\bullet\cdots\bullet(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

3.4 可导函数单调性的判别法

设 f(x)在[a,b]上连续，并在（a,b）上可导，则

（1） f(x)在[a,b]上单调增加⇔ f'(x)≥0, x∈(a,b).

（2） f(x)在[a,b]上单调减少⇔ f'(x)≤0, x∈(a,b)

3.5 利用导数求极值

A.极值存在的第一充分条件：

设函数 f(x)在x_0处连续，且在x_0的某去心邻域$U^0(x_0,\delta)$内可导.

（1）若 x∈$(x_0-\delta,x_0)$时，f'(x)>0, 而 x∈$(x_0,x_0-\delta)$时，f'(x)<0, 则 f(x)在x_0处取得极大值；

（2）若 x∈$(x_0-\delta,x_0)$时，f'(x)<0, 而 x∈$(x_0,x_0-\delta)$时，f'(x)>0, 则 f(x)在x_0处取得极小值；

（3）若 x∈ $U^0(x_0,\delta)$时，f'(x)的符号保持不变，则 f(x)在x_0处没有极值.

B.极值存在的第二充分条件：

设函数 f(x)在x_0处具有二阶导数且$f'(x_0)$=0，$f''(x_0)\neq 0$，则

（1） 当$f''(x_0)$<0 时，函数 f(x)在x_0处取得极大值；

（2） 当$f''(x_0)$>0 时，函数 f(x)在x_0处取得极小值.

3.6 函数的驻点

函数的一阶导数为 0 的点的 x 的值，驻点可以划分函数的单调区间。(驻点也称为稳定点,临界点。)

3.7 求最大值最小值

由闭区间上的连续函数性质可知 f(x)在[a,b]上的最大值最小值必定存在

（1）求出 f(x)在[a,b]内的驻点及不可导点；

（2）计算 f(x)在上述驻点，不可导点处的函数值以及 f(a)和 f(b)；

（3）比较（2）中各值大小，最大的就是 f(x)在[a,b]内的最大值，最小的就是 f(x)在[a,b]内的最小值。

注：f(x)在开区间时不一定存在最大值和最小值，如果存在必为驻点或者不可导点，故而当最大值最小值存在时，只需将第（2）步中 f(a)和 f(b)略去不求即可。

3.8 函数的凹凸性与拐点

①凹凸性的定义

凹凸性的定义根据图像很容易理解与判断课本上的数学描述过于复杂

②凹凸性的判断

设 f(x)在区间(a,b)上连续且具有一阶和二阶导数

（1）若f''(x)在(a,b)上恒大于 0,则 f(x)在区间(a,b)上的图像是凹的

（2）若f''(x)在(a,b)上恒小于 0，则 f(x)在区间(a,b)上的图像是凸的

③拐点的定义

函数的拐点即函数凹曲线和凸曲线的连接点，从另一个角度看就是函数一阶导函数的极值点，所以与极值点类似，设 f(x) 在 (a,b) 内二阶可导,x_0∈(a,b),$f''(x_0)$=0， 若x_0两侧异号，则点（x_0,f(x_0)）为曲线的拐点，否则不是拐点。(或者$f''(x_0)$=0 且$f'''(x_0)$≠0 时也为曲线的拐点。)

3.9 渐近线

对于曲线 y=f(x)：

（1）水平渐近线：若存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$=A，则 y=A 是曲线当 x→+∞时的水平渐近线；如果上面的极限改为 x→－∞就得到当 x→－∞时的水平渐近线。

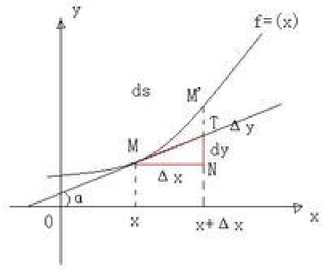
（2） 斜渐近线：若存在着极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$=k，$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$=b，则 y=kx+b 是曲线当 x→+∞时的斜渐近线；如果上面的极限改为 x→－∞就得到当 x→－∞时的斜渐近线。

（3） 垂直渐近线：如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$=∞或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$= ∞,则 x=$x_0$是函数的垂直渐近线。

3.10 曲率

①弧微分

弧微分的几何意义是用一条线段的长度来近似代表一段弧的长度。图中 MT 的长度即为弧 MM’的微分，由此联系勾股定理可得弧微分公式 ds=$\sqrt{1+y'^2}$dx



特别地，若对于参数方程$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$

则 ds=$\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$=$\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$dt

②曲率和计算公式

曲线的曲率就是针对曲线上某个点的切线方向角对弧长的转动率，通过微分来定义，表明曲线偏离直线的程度。曲率是几何体不平坦程度的一种衡量。曲率越大表示曲线的弯曲程度越大。

曲率的计算公式:

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$$

③曲率半径

曲率的倒数就是曲率半径,计算公式为

$$\rho=\frac{1}{k}$$

习题

1、下列连续函数 f(x)在 x=a 处一定取到极值的是（　　）

（A）函数 f(x)在 x=a 处f'(a)=0

(B)x=a 是函数 f(x)的不可导点

(C)f(x)满足$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}$ =0

(D)f(x)满足$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}$ =-1

2、函数 y=e^{-x^2}描述的曲线图形为凹曲线的区间为______________,图形为凸曲线的区间为____________,拐点坐标为_________________.

3、星行线 C:x=$acos^3$t,y=$asin^3$t(a>0)在参数 t=$\frac{\pi}{4}$对应的点处的曲率为__________.

4、如果 f(x)在[0,a]上连续，在(0,a)内可导，f(a)-f(0)=$f'(\theta$a)a,其中 0<θ<1,则当 f(x)=arctanx 时，$\lim\limits_{a\to 0}\theta^2$=__________.

5、设 f(x)具有连续二阶导数，且

$$\lim_{x\to 0}[1+x+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=e^3$$

试求 f(0),f'(0),f''(0)以及$\lim\limits_{x\to 0}[1+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}$.

6、设函数 f(x)有二阶连续导数，f(0)=0.

证明：函数 g(x)=$\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, x \neq 0 \\ f'(0), x=0\end{cases}$ 具有一阶连续导数.

、设函数 f(x)在[0,1]上二次可微，且 f(0)=f(1)，|f''(x)|≤2.
证明:|f'(x)|≤1，x∈[0,1].

第四章 不定积分

4.1 不定积分的概念与性质和基本求解方法

4.1.1 不定积分的概念

设$f(x)$在区间I上有定义，如果区间上可导函数$F(x)$满足$F'(x)=f(x)$ $(x \in I)$，则称$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数，称集合{$F(x)$+C|C∈R}为$F(x)$的不定积分，记为

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

4.1.2 不定积分的线性性质

$$\int [af(x)+bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

4.1.3 求不定积分方法

凑微分法(第一换元法)

$$\int f[\phi(x)]\phi'(x)dx = \int f[\phi(x)]d\phi(x) = F[\phi(x)] + C$$

积分换元法(第二换元法)

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt \qquad (x = g(t)\text{或}g^{-1}(x) = t)$$

分部积分法(当$f(x)$易凑微分时)

$$\int f(x)g(x)dx = \int g(x)dF(x)$$
$$= F(x)g(x) - \int F(x)dg(x) = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

递推法：对于含有 n 次方的被积式，常用分部积分法并配凑成递推式求解。

4.2 有理函数积分

4.2.1 有理函数的定义

两个多项式的商$\frac{P(x)}{Q(x)}$称为有理函数（$P(x)$和$Q(x)$之间没有公因式）

当$P(x)$的次数小于$Q(x)$的次数时，称这有理函数为真分式，否则为假分式。

4.2.2 有理函数的解法

任何一个假分式总可以化成一个多项式与一个真分式之和。

根据代数学基本定理推论，对于多项式$P(x)$，一定可以分解成若干不同的$(x^2+px+q)^l$和$(x-a)^k$相乘，$(p^2<4q)$，而真分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$，一定可以分解成

$$\frac{A_1}{(x-a)^1} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^1} + \cdots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l} + \cdots$$

后面的⋯代表把a,p,q不同的类似项再叠加。例如：$\frac{1}{x^4(x^2+1)^3(x+2)^2}$可以分解为

$$\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{A_4}{x^4}+\frac{B_1}{(x+2)}+\frac{B_2}{(x+2)^2}+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+1)}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+1)^2}+\frac{C_3x+D_3}{(x^2+1)^3}$$

对于$\int\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx$可化为积分表 20 求解，因此有理函数必有初等原函数。

4.2.3 有理函数的综合运用

注意利用三角公式及常见换元与分部积分，许多非有理函数可以通过换元来化为有理函数，从而解出不定积分。但要注意不同的换元可导致计算量不同。

4.3 常用公式及代换表

4.3.1 常用三角公式(过于基本的公式不在此给出)

$sin\alpha \pm sin\beta = 2sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$	$sin\alpha cos\beta = \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)]$
$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$sin\alpha sin\beta = -\frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta)-cos(\alpha-\beta)]$
$cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	$cos\alpha cos\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)]$
$sin\alpha = \frac{2\,tan\frac{\alpha}{2}}{1+tan^2\frac{\alpha}{2}}$	$cos\alpha = \frac{1-tan\frac{\alpha}{2}}{1+tan^2\frac{\alpha}{2}}$
$1\pm sin\alpha = \left(sin\frac{\alpha}{2}\pm cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$	$1+\cos\alpha = 2cos^2\frac{\alpha}{2},\quad 1-\cos\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$
$tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}$	$asin\theta \pm bcos = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\pm\arctan\frac{b}{a}\right)$
$sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$	$cos3\alpha = -3cos\alpha + 4cos^3\alpha$
$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$	$sec^2\alpha = tan^2\alpha + 1$
$csc^2\alpha = cot^2\alpha + 1$	$\arctan\frac{a}{b} = \text{arccot}\frac{b}{a}$
$cos^2\alpha - cos^2\beta = sin^2\alpha - sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$	

4.3.2 常用凑微分公式

$kdx = d(kx+b)$	$sinxdx = -dcosx$	$cosxdx = dsinx$
$sec^2xdx = dtanx$	$csc^2xdx = -dcotx$	$e^xdx = de^x$
$\frac{1}{ax+b} = \frac{1}{a}dln(ax+b)$	$x^ndx = \frac{1}{n+1}dx^{n+1}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\sqrt{x}$
$\frac{1}{x}dx = dlnx, \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}dx$	$1\pm\frac{1}{x^2}dx = d(x\mp\frac{1}{x})$	$\frac{1}{1+x^2}dx = darctanx$

$\int \frac{f(x)}{g^n(x)}dx = -\frac{1}{n-1}\int \frac{f(x)}{g'(x)}d\frac{1}{g^{n-1}(x)}$(n=2 时常用，再分部，n 时可用作递推)

4.3.3 常用积分表(推荐记忆，部分需翻同济书查阅)

188 页基本积分表	205 页 16-24，积分表 67
$f(x) = ax^2 + bx + c$ ，$\Delta = b^2 - 4ac < 0$,则 29. $\int \frac{dx}{f(x)} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}arctan\frac{f'(x)}{\sqrt{-\Delta}} + C$	
39 和 53. $\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}ln\left\|x+\sqrt{x^2+a}\right\| + C(a \in R)$	
20. $\int \frac{dx}{(x^2+a)^n} = \frac{x}{2(n-1)a(x^2+a)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a}\int \frac{dx}{(x^2+a)^{n-1}}(a \neq 0)$	

4.3.4 常见变量代换形式

被积式中含有的因式	变量代换形式
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = asint$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = atant$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = asect$
$\sqrt[n]{ax+b}$	$\sqrt[n]{ax+b} = t$
$\sqrt{ae^{bx}+c}$	$\sqrt{ae^{bx}+c} = t$
$\sqrt{(ax+b)(cx+d)} = (cx+d)\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$	$\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$
$\sqrt[p]{x}$、$\sqrt[q]{x}$(多项同理)	$x = t^n$(n 是 p, q 最小公倍数)
$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$(多项同上处理)	$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$
$\frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{(x+a)^k(原有x前的系数需提出)}$	$x + a = t$(分子展开后逐项积分)
有理或无理分式分母次数-分子次数>1	$\frac{1}{x} = t$(倒代换，非万能)
三角函数有理式$R(sinx,cosx)$	$tan\frac{x}{2} = t$(通法但不一定简单)
若$R(-sinx,cosx) = -R(sinx,cosx)$	$cosx = t$（比万能公式简便）
若$R(sinx,-cosx) = -R(sinx,cosx)$	$sinx = t$（比万能公式简便）

若$R(-sinx,-cosx)=R(sinx,cosx)$	$tanx=t$（比万能公式简便）
$f(lnx)$	$lnx=t$　　详见注①
$arctang(x)$、$arcsing(x)$、$arccosg(x)$	令其为t　　详见注②

注①：有关对数的积分

(1)当$f(x)$恒为 1 或可凑微分时，$\int f(x)lng(x)dx=\int lng(x)dF(x)$再分部积分；

(2)$\int\frac{f(lnx)}{x}dx=\int f(lnx)dlnx$, 凑微分（或换元）后再积分；

(3)$\int f(lnx)dx$, 令$lnx=t$，换元后再积分，$f(x)$中可含x的多项式($\because x=e^{lnx}$).

注②：有关反三角函数积分，例如$arctang(x)$

(1)当$f(x)$能凑微分，则$\int f(x)arctang(x)dx=\int arctang(x)dF(x)$再分部积分；

(2)当$f(x)$不能凑微分，则令$t=arctang(x)$，换元后化简被积函数再积分.

4.4 求解思路与技巧

4.4.1 换元积分法

(1)选择合适的因式凑微分，考虑凑后的可算性，优先考虑凑微分法(简便)；

(2)可以分子分母同乘一个式子，微分符号后面加常数，使得更容易凑，例如

$$\int\frac{dx}{sinx\sqrt{1+cosx}}=\int\frac{sinxdx}{sin^2x\sqrt{1+cosx}}=-\int\frac{d(1+cosx)}{sin^2\sqrt{1+cosx}}=-2\int\frac{d\sqrt{1+cosx}}{1-cos^2x}$$

此时被积式只含$cosx$形式，同上表中的原理换元，去掉根号化为有理函数即可

令$u=\sqrt{1+cosx}$，原式$=-2\int\frac{du}{1-(u^2-1)^2}\overset{化简裂项}{=\!=\!=}\int\left[\frac{1}{u^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+u}+\frac{1}{\sqrt{2}-u}\right)\right]du$后略

还有$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^8}}=\int\frac{x^7dx}{x^8\sqrt{1+x^8}}\overset{u=x^8}{=\!=}\frac{1}{8}\int\frac{du}{u\sqrt{1+u}}$, 也可倒代换为$-\int\frac{t^3dt}{\sqrt{t^8+1}}\overset{u=t^4}{=\!=}-\frac{1}{4}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$.

4.4.2 分部积分法

(1)若需多次使用分部积分，每次应将同类函数凑到微分符号后；

(2)若$\int f(x)dx$难处理，可直接分部积分化为$xf(x)-\int xf'(x)dx$处理；

(3)注意利用接连几次部分积分后产生的循环或与原被积式相同；

(4)分开分部积分得出的某些难计算的部分可能在合并时被消掉；

(5)对于(3)(4)，通常会出现$e^x,sinx,cosx$重复、轮换导致，例如出现(3)的情况：

$$\int\cos(lnx)dx\overset{lnx=t}{=\!=\!=}\int e^t\,costdt=e^tsint-\int e^t\,sintdt$$
$$=e^tsint+e^tcost-\int e^tcostdt$$

此时两边都出现了$\int e^tcostdt$，移项合并即可求出$\int e^tcostdt=\frac{e^t}{2}(sint+cost)+C$

再例如出现(4)的情况：(第一步由表 4.3.2 最后一行和法②(2)可得)

$$\int\left(\frac{1}{ln^2x}+ln(lnx)\right)dx=-\int xd\frac{1}{lnx}+xln(lnx)-\int\frac{1}{lnx}dx=-\frac{x}{lnx}+\int\frac{1}{lnx}dx+xln(lnx)-\int\frac{1}{lnx}dx$$

可见$\int\frac{1}{lnx}dx$被消去，从而$\int\left(\frac{1}{ln^2x}+ln(lnx)\right)dx=-\frac{x}{lnx}+xln(lnx)+C$（也可令$lnx=t$）.

4.4.3 有理函数积分法

(1)用多项式除法或分子增项化被积函数为整式与真分式之和逐项积分，例如：$\frac{x^5+x^4+1}{x^2+1}=\frac{(x^5+x^3)-(x^3+x)+x+(x^4+x^2)-(x^2+1)+2}{x^2+1}$ 和 $\frac{x^4+1}{x^6+1}=\frac{(x^4-x^2+1)}{(x^4-x^2+1)(x^2+1)}+\frac{x^2}{x^6+1}$；

(2)当$\frac{ex+f}{ax^2+bx+c}(b^2<4ac)$分母不可拆时，可拆成$\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}$，前式用凑微分法，后式配方成$\frac{B}{a(x-k)^2+h}$再积分，也可直接积分表 29，待定系数 A, B 易求；

(3)求分解式的系数有对比系数法(对比最高或低次系数较易)，赋值法(实根、复根、极限均可，也可两边同乘分母赋值，使其出现 0 项消去)，求导法，综合法；

(4)分解有理函数可强拆，例如：设$x^4+1=(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)$，易解得$a=\sqrt{2},b=-\sqrt{2}$，因此$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$，利用赋值复根法代入$x=i$得$\frac{1}{2}=\frac{A-C}{\sqrt{2}}+\frac{B-D}{\sqrt{2}i}\Rightarrow A-C=\frac{\sqrt{2}}{2},B=D$对比最高，低次系数得$A=-C,B+D=1$(也可倒代换，分母配方后平方差拆开)解得$A=\frac{\sqrt{2}}{4},C=-\frac{\sqrt{2}}{4},B=D=\frac{1}{2}$，最后利用法③(2)积分.

4.5 习题与解答及评注

1.求$\int \cos x\cos^2 3x\,dx$

2.求$\int \frac{\cos x-\sin x}{2+\sin x+\cos x}dx$

3.求$\int \frac{1}{\sin^3 x(1-\cos x)}dx$

4.求$\int \frac{\operatorname{arccot}(\log_x 2)}{x}dx$

5.求$\int (x^2+2x-1)e^{x+\frac{1}{x}}dx$

6.求$\int \frac{1}{x^8(x^2+1)}dx$

7.求$\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$

8.求$\int \frac{x^2+1}{x^6+1}dx$

答案：

1. 由两次积化和差得 $\cos x\cos^2 3x=\frac{2\cos x+\cos 5x+\cos 7x}{4}$

∴原式$=\int \frac{2\cos x+\cos 5x+\cos 7x}{4}dx=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{28}\sin 7x+C$

评注：运用三角公式拆项，也可运用平方关系再$cosx$凑微分加三倍角公式解决。

2. 原式$=\int \frac{1}{2+\sin x+\cos x}d(2+\sin x+\cos x)\,dx=\ln|2+\sin x+\cos x|+C$

评注：尽管可以用万能公式，但观察是否能凑微分，可大大减少计算量。

3. $\frac{3}{16}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\cos x+1}+\frac{2}{\cos x-1}-\frac{1}{(\cos x-1)^2}\right)+C$

评注：第一步换元实际上是凑微分，由 4.2.2 的知识裂项，本题难在计算，灵活运用赋值法(复根可以不是纯虚数)，尽可能地减少计算量。

4. 原式=$\int \arctan(log_2 x)\,(ln2)dlog_2 x \xlongequal{log_2 x=t} (ln2)tarctant-(ln2)\int\frac{tdt}{t^2+1}$

=$(ln2)tarctant-+\frac{ln2}{2}ln(t^2+1)+C$　　后略，代回即可($\frac{1}{log_a b}=log_b a$)

评注：利用反三角、对数公式化简，再凑微分、分部常规处理。

5. 原式=$\int(x^2-1)e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int 2xe^{x+\frac{1}{x}}dx=\int x^2e^{x+\frac{1}{x}}d\left(x+\frac{1}{x}\right)+\int 2xe^{x+\frac{1}{x}}dx$

$=x^2e^{x+\frac{1}{x}}-\int e^{x+\frac{1}{x}}d(x^2)+\int 2xe^{x+\frac{1}{x}}dx=x^2e^{x+\frac{1}{x}}+C$

评注：对于多项式乘指数、三角函数，往往用分部积分，且容易产生循环和抵消的情况，此题灵活运用 4.3.2 中$1\pm\frac{1}{x^2}dx=d\left(x\mp\frac{1}{x}\right)$并将$\int 2xe^{x+\frac{1}{x}}dx$被消去。

6. 令$x=\frac{1}{t}$ 原式=$\int\frac{-t^8}{t^2+1}dt=\int\left(-t^6+t^4-t^2+1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$

$$=-\frac{1}{7x^7}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}+C$$

评注：由于分母次数-分子次数>1，考虑倒代换(不行再尝试其他方法)，再用 4.4 法③(1)拆项，即可求出原函数。

7. 法一：原式=$\int x\sqrt{x^2+x}\,dx=\frac{1}{2}\int\left[(2x+1)\sqrt{x^2+x}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right]dx$

$=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+x}\,d(x^2+x)-\frac{1}{2}\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\,d(x+\frac{1}{2})$

$$=\frac{1}{3}(x^2+x)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\right)\sqrt{x^2+x}+\frac{1}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$$

法二：原式=$\int x^2\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$，令$t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$，则$x=\frac{1}{t^2-1}$，$dx=d\frac{1}{t^2-1}$

则原式=$\int\frac{t}{(t^2-1)^2}d\frac{1}{t^2-1}=\frac{1}{3}\int td\frac{1}{(t^2-1)^3}=\frac{t}{3(t^2-1)^3}-\frac{1}{3}\int\frac{1}{(t^2-1)^3}dt$

评注：法二再利用积分表 20 递推可得答案，可求$\sqrt{x^{n+1}+x^n}$的原函数，法一不适用。法一利用拆项，根号中含有二次多项式可考虑配方，再用积分表 53 解决。

8. 由立方和与平方差公式，$x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1+3x^2-3x^2)$

$=(x^2+1)[(x^2+1)^2-(\sqrt{3}x)^2]=(x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$

所以$\frac{x^2+1}{x^6+1}=\frac{1}{x^4-x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1}$，通分对比最高、低次系数得

$A+C=0$,$B+D=1$，代入$x=i$得$\frac{1}{3}=\frac{A-C}{\sqrt{3}}+\frac{B-D}{\sqrt{3}i}\Rightarrow A-C=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$B-D=0$

解得$A=\frac{\sqrt{3}}{6}$,$C=-\frac{\sqrt{3}}{6}$,$B=D=\frac{1}{2}$.

因此原被积式=$\int\frac{x^2+1}{x^6+1}dx=\frac{\sqrt{3}}{12}\int\frac{2x+\sqrt{3}+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\frac{2x-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}dx$

$=\frac{\sqrt{3}}{12}\left[\int\frac{d(x^2+\sqrt{3}x+1)}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\int\frac{d(x^2-\sqrt{3}x+1)}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right]+\frac{1}{4}\left(\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right)$

由积分表 29 得原式=$\frac{\sqrt{3}}{12}ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{2}\left[\arctan\left(2x+\sqrt{3}\right)+\arctan\left(2x-\sqrt{3}\right)\right]+C$

评注：综合运用立方和，平方差公式拆项，利用赋值法，对比系数法求出分解式，再用 4.4 法③(2)求得原函数。

第五章 定积分

5.1 定积分的定义和概念

定义:设函数 f(x)在$[a,b]$上有界，在$[a,b]$中任意插入若干个分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

把区间$[a,b]$分为n个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n],$$

各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$$

在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\xi_i(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i)$，作函数值$f(\xi_i)$与小区间长度$\Delta x_i$的乘积$f(\xi_i)\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$，并作出和

$$s=\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$$

记$\lambda=max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果当$\lambda\to 0$时，这和的极限总存在，且与闭区间$[a,b]$的分法及点$\xi_i$的取法无关，那么称这个极限$I$为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分（简称积分），记作$\int_a^b f(x)\,dx$，即

$$\int_a^b f(x)\,dx=I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta X_i$$

其中$f(x)$叫做被积函数，$f(x)\,dx$叫做被积表达式，x叫做积分变量，a叫做积分下限，b叫做积分上限，$[a,b]$叫做积分区间.

可积的条件：① 若$f(x)$在$[a,b]$上有界，且$f(x)$在区间内除有限个点外是连续的，则为可积。

②若$f(x)$在$[a,b]$上单调，则$f(x)$可积。

③若$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$|f(x)|$在该区间也可积。

④若$f(x)$在$[a,b]$上无界，则$f(x)$不可积。

用一道题来理解定积分与面积的关系

例： 求$\int_0^a\sqrt{ax-x^2}\,dx\,(a>0)$

解： $\int_0^a\sqrt{ax-x^2}\,dx\,(a>0)$的值就是圆弧与$x=a,x=b,y=0$围成的图形，就是一个四分之一圆，所以得出$\int_0^a\sqrt{ax-x^2}\,dx\,(a>0)=\frac{\pi}{8}a^2$就是这个定积分的解

5.2 定积分的性质

基本性质：

1.上下限相同时值为 0

2.定积分的结果与积分变量无关

3.被积函数的常数因子k(k为常数)可提到积分号外，即

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

4.两个函数代数和的定积分，等于他们定积分的代数和，即

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

这一结论可以推广到有限个代数和上.

5.(积分区间的可加性) 设$c \in [a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

运算性质：

6.在$[a,b]$上，若$f(x) \geq g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

7.不等式：

设 M 和 m 分别是函数$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

又称为定积分的估值定理

定理 5.1（积分中值定理）.设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，则在(a,b)上最少存在一点ξ，

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi)$$

5.3 微积分基本定理

5.3.1 牛顿莱布尼茨公式

定义 5.3（Newton-Leibniz 公式）.设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)$是$f(x)$的原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

这个公式指出了定积分和不定积分的内在联系，也被称为微积分基本公式

5.3.2 微积分基本定理

5.3.2.1 变限积分

如果上限 x 在区间[a,b]上任意变动，则对于每一个取定的 x 值，定积分有一个对应值，所以它在[a,b]上定义了一个函数，这就是积分变限函数。

5.3.2.2 微分形式下的微积分基本定理

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$在$[a,b]$上可导，且有

$$\phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

即对变限积分求导.

5.4 定积分的换元法和分部积分法

5.4.1 定积分的换元法

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$\varphi(x)$在$[\alpha,\beta]$上具有连续导数，且满足：

$$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b,a\le\varphi(t)\le b(或a\ge\varphi(t)\ge b),\forall t\in[\alpha,\beta]$$

则有：

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$$

注意：换元规则和不定积分大致相同，特别要注意换元必换限

对于上下限的改变，就是求出原来x的范围推出对应t的范围

5.4.2 定积分的分部积分法

定积分的分部积分法与不定积分的分部积分法类似

设函数$u(x),v(x)$在$[a,b]$上有连续导数，则

$$\int_a^b uv'\,dx=uv|_a^b-\int_a^b vu'\,dx$$

5.4.3 特殊的定积分的性质或常用公式

性质：

（1）$\int_{-a}^a f(x)\,dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\,dx$

（2）$\int_{-a}^a f(x)\,dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)\,dx\ , & f(x)是偶函数\\ 0, & f(x)是奇函数\end{cases}$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$

（4） $\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

（5）$f(x+L)=f(x),(L>0)$,则$\int_0^L f(x)\,dx=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\,dx=\int_a^{a+L} f(x)\,dx$

（6）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n\,dx=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & 当\ n\ 为偶数时\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & 当\ n\ 为奇数时\end{cases}$

5.6 广义积分

5.6.1 无穷限的反常积分 定义： 设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，任取$t>a$，作定积分$\int_a^t f(x)\,dx$，再求极限：

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

这个对变上限定积分的算式称为函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的反常积分，记为$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

定义（1） 若$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$存在，则称该反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$收敛，并称此极限为该反常积分的值，若不存在，则称该反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$发散.

函数$f(x)$在无穷区间$(-\infty,b]$上的反常积分亦是如此.

函数$f(x)$在无穷区间$(-\infty,+\infty)$上的反常积分只需要利用积分的可加性，即：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

当反常积分$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$和$\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$均收敛时，反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$才收敛。并称反常积分$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$的值和反常积分$\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$的值之和称为反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$的值，否则就称反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$发散.

由上述反常积分及牛顿-莱布尼茨公式，可知：

若$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$不存在，则反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$发散.（$F(x)$为$f(x)$在$[a,+\infty)$上的一个原函数）

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=[F(x)]_a^{+\infty}$$

反常积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$和反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$和上述式子类似.

反常积分$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^P}(a>0)$当$p>1$时收敛，当$p\le 1$时发散.

5.6.2 无界函数的反常积分 定义： 设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续，点a为函数$f(x)$的瑕点（$f(x)$在该点的任一领域内都无界，也称为无界间断点），任取$t>a$，作定积分$\int_t^b f(x)\,dx$，再求极限

$$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

上式极限叫做$f(x)$再区间$(a,b]$上的反常积分，记作$\int_a^b f(x)\,dx$

无界函数的反常积分类似于无穷限反常积分.

第六章 定积分的应用

1 求$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx\ (a>0)$

2 已知$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}\,dx$，求$a$

3 求$\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx$

4 求$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx$

答案：

1. 原 式 $=\displaystyle\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln\frac{x}{a}+\ln a}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}d\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}dt+\frac{\ln a}{a}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1}=\frac{\pi}{2}\frac{\ln a}{a}+$

$\displaystyle\frac{1}{a}\int_0^{1}\frac{\ln t}{t^2+1}dt+\frac{1}{a}\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}dt=\frac{\pi\ln a}{2a}\qquad\left(\frac{x}{a}=t\right)$

其中$\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln t}{t^2+1}dt=\int_{+\infty}^{1}\frac{\ln\frac{1}{u}}{\frac{1}{u^2}+1}d\frac{1}{u}=-\int_1^{+\infty}\frac{\ln u}{u^2+1}du$

2. 左边=$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2a}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{-2a}\cdot\frac{-2ax}{x+a}}=e^{-2a}$

右边=$\displaystyle\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}4x^2\,de^{-2x}=-2x^2e^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+2\int_a^{+\infty}e^{-2x}\,dx^2$

$$=2a^2e^{-2a}-2\int_a^{+\infty}x\,de^{-2x}=2a^2e^{-2a}-2xe^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+2\int_a^{+\infty}e^{-2x}\,dx$$

$$=2a^2e^{-2a}+2ae^{-2a}-e^{-2x}\Big|_a^{+\infty}=(2a^2+2a+1)e^{-2a}$$

左边=右边⇒ $a=0$或$a=-1$

3. 原式=$\displaystyle\int_0^{\pi}|\cos x|\sqrt{\sin^3 x}\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin^3 x}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^3 x}\,dx=-\frac{2}{5}\sin^{-\frac{5}{2}}x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+$

$\displaystyle\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{5}$

4. 参照 5.4.3 性质（6）

第七章 微分方程

7.1 微分方程的基本概念

7.1.1 微分方程定义

一般的、凡是表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，即含有导数或微分的方程，叫做微分方程。有时候也简称方程。

一般的，一阶微分方程的形式$F(x,y,y')=0\ \ y'=f(x,y)$

n 阶微分方程的形式是$F\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}\right)=0$

未知函数的自变量只有一个的，叫常微分方程；未知函数的自变量有多个，叫做偏微分方程。

7.1.2 微分方程的阶

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数或微分的阶数，叫做微分方程的阶。

7.1.3 微分方程的解

在解决问题时，首先要建立微分方程，找出满足微分方程的函数（解微分方程），把这个函数代入微分方程能使该方程成为恒等式，这个函数就叫做微分方程的解。要记得加 C.

微分方程的解中含有任意常数的个数并且与方程的阶数数相同，这种解叫做微分方程的通解。确定了通解中任意常数后，就可以得到微分方程的特解。

普通方程的解是满足未知数的一组取值，而微分方程的解是一个函数，注意区分两者定义。

7.1.4 微分方程的积分曲线

微分方程的解$y=g(x)$所表示的曲线称为方程的积分曲线。

练习

1. 已知一曲线通过点（1, 0），且该曲线上任意一点（x，y）处的切线斜率为x^2，求该曲线方程。
2. 已知积分曲线族为$y=C_1x+C_2x^2$，求它们满足的微分方程。

7.2 可分离变量的微分方程

一般的，如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)dy=f(x)dx$$

那么原方程就称为可分离的微分方程。

设$y=\varphi(x)$是方程的解，代入上式，可得

$$\varphi(x)\varphi'dx=f(x)dx$$

等式两端求积分，得

$$\int \mathrm{dyg(y)} = \int \mathrm{f(x)dx} + \mathrm{C}$$

设 G(y)及 F(x)依次为$g(y)$及$f(x)$的原函数，于是有

$$G(y)=F(x)+C$$

为微分方程的隐式解，又由于关系式中含有任意常数，因此此式为微分方程的通解，叫隐式通解。

例 1　　$\frac{dy}{dx}=2xy$ 并满足初值条件 x=0,y=1 求其特解

,解: $\frac{dy}{y}=2xdx$　　两边同时积分$\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx$

可得 $\ln|y|=x^2+c$

$y=e^{x^2+c}=c_1e^{x^2}$代入 x=0,y=1

得特解为$y=e^{x^2}$

例 2 $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$

解：$(x-2y+1)dy=(2x-y+1)dx$

$xdy+ydx-(2y-1)dy-(2x+1)dx=0$

$dxy-d(y^2-y)-d(x^2+x)=0$两边同时积分

$xy-y^2+y-x^2-x=c$

练习

1. 曲线上任意一点处的切线垂直于原点到切点的连线，且曲线通过点（1, 0），求曲线方程。
2. 求方程$\frac{dy}{dx}=6xy$的通解。
3. 求方程$y'cosy+\sin(x-y)=\sin(x+y)$的通解。

7.3 齐次方程

7.3.1 概念

若一个一阶微分方程$\frac{dy}{dx}$=f（x，y），其f（x，y）可化为 g（$\frac{y}{x}$）的形式，那么就称这个一阶微分方程为齐次方程。

7.3.2 求通解

令 u=$\frac{y}{x}$，将原方程化为可分离变量的方程，分离变量后对等式两边积分，求出积分后再用$\frac{y}{x}$代替 u，便得所给齐次方程的解。

例 1 求$\frac{dy}{dx}$=2$\frac{y}{x}$−1 的通解。

解：令 $u=\frac{y}{x}$, 则有

$u+x\frac{dy}{dx}=2u-1 \rightarrow \frac{du}{u-1}=\frac{dx}{x} \rightarrow ln(u-1)=lnx+lnC$

即 $u=Cx+1$

则通解为$y=Cx^2+x$

注：关于第二步中加的任意常数，写成lnC是为了构成相同结构运用对数运算法则方便计算。

练习

1. 求$y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$的通解。

2. 求$x\frac{dy}{dx}=y(1+lny-lnx)$的通解。

3. 求$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}$，当$y$（0）=1 时的特解。

*4. 求微分方程$(2x+y-4)\,dx+(x+y-1)\,dy=0$的通解。

5. 求微分方程$(3x^2+2xy-y^2)\,dx+(x^2-2xy)\,dy=0$的通解。

7.4 一阶线性微分方程

7.4.1 回顾

在 2.5 的学习中，有$\frac{dy}{dx}=f'(x)=y'$。

7.4.2 一阶线性微分方程

方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$称为一阶线性微分方程。

7.4.4 一阶齐次线性微分方程

当 Q（x）恒等于 0 时，方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$称为一阶齐次线性微分方程。对方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$分离变量后再两端积分，可得齐次线性方程的通解。其通解为$y=Ce^{-\int P(x)\,dx}$（$C=\pm e^{C_1}$）。

7.4.5 一阶非齐次线性微分方程

当 Q（x）并不恒等于 0 时，方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$称为一阶非齐次线性微分方程。

求非齐次线性方程的通解，一般使用常数变易法。这种方法即是把一阶齐次线性微分方程的通解中的 C 换成x的未知函数 u（x），即$y=ue^{-\int P(x)\,dx}$，于是有$\frac{dy}{dx}=u'e^{-\int P(x)\,dx}-uP(x)e^{-\int P(x)\,dx}$。将以上两式带入原方程后两端积分，可得 $u=\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx+C$, 再将 u 代回$y=ue^{-\int P(x)\,dx}$，便得非齐次线性方程的通解。其通解为

$$y=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx+C\right)e^{-\int P(x)\,dx}。$$

此外，$e^{-\int P(x)\,dx}$与$e^{-\int P(x)\,dx}$为倒数关系，解题时若明确这一点可节省时

间。

练习

1. 求$y' + 2y = 0$的通解。
2. 求$y' + 2y = 4x$的通解。
3. 求$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x} - 1$的通解。
4. 求$y'cosx + ysinx = 1, y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$的特解。
5. 求过点（$\frac{1}{2}, 0$），且满足关系式$y'arcsinx + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 1$的曲线方程。

7.5 可降阶的高阶微分方程

$y^{(n)} = f(x)$型的微分方程

例一：$y^{(4)} = \sin x + x$.

解：积分一次得 $y^{(3)} = -cosx + \frac{x^2}{2} + C_1$.

再积分一次 $y'' = -sinx + \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$

$$y' = cosx + \frac{x^4}{24} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$

$$y = sinx + \frac{x^5}{120} + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

所以 $y = sinx + \frac{x^5}{5!} + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4$

$y'' = f(x, y')$型的微分方程

设$y' = p$，那么$y'' = \frac{dy}{dx} = p'$. 故方程可以看作关于变量x，p的一阶微分方程

设其通解为$p = \varphi(x, C\ )$，再求得$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$.

例三：

（1） 求方程$y'' = (y')^3 + y'$的通解

解：令$y' = P$,则$y'' = p\frac{dp}{dy} = p^3 + p$.当$p \neq 0$时，$\frac{dp}{dy} = 1 + p^2$, 即$\frac{dp}{1+p^2} = dy$,

积分得$arctanp = y - C_1$,即$y' = p = tan(y - C_1)$.

分离变量得$\frac{dy}{tan(y-C_1)} = dx$, 积分得$ln|sin(y - C_1) = x + ln|C_2|$,故$sin(y - C_1) = C_2e^x$,即$y = arcsinC_2e^x + C_1$.

（2）求方程$yy'' + y'^2 + 1 = 0$的通解

解：原方程化为$(yy')' + 1 = 0$,故$yy' + x = C_1$, 分离变量得$ydy = (C_1 - x)dx$, 积分得$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}(C_1 - x)^2 + \frac{1}{2}C_2$, 即$y^2 + (C_1 + x)^2 = C_2$.

求可降阶的高阶微分方程的特解

例四：求初值问题的特解$y^3y''-1=0, y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=0.$

令$y'=p$, 则$\frac{y''=dp}{\frac{dy,pdp=1}{y^3dy}}$，积分得$p^2=-\frac{1}{y^2}+C_1$,由初始条件知$C1=1$，故$y'=p=\pm\frac{1}{|y|}\sqrt{y^2-1}$，$\frac{|y|dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm dx$，积分得$sgn(y)\sqrt{y^2-1}=\pm(x+C_2)$，即$y^2-1=(x+C_2)^2$.

由$y|_{x=1}=1$知$C_2=-1$, 故特解为$y^2=(x-1)^2+1$.

7.6 高阶线性微分方程

已知二阶线性方程组相应的齐次方程的一个特解，利用常数变易法可求它的全部解。

首先对于齐次方程$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$, 若$y_1(x)$是它的特解，由解结构定理可知$Cy_1(x)$也是它的解。

令$C=C(x)$,对$C(x)y_1(x)$求导代入方程得到$y_1(x)C''+[2y'+a_1(x)y_1]C'=0$, 故$\frac{C''}{C'}=-\frac{2y_1}{y_1}-a_1(x)$,；两边积分得$lnC'=lny_1{}^{-2}-\int a_1(x)dx+lnC_1$.

解得

$$\boldsymbol{C'=C_1\times\frac{1}{y^2}e^{-\int a_1(x)dx}},$$

所以

$$y=y_1\left[C_2+C_1\int\frac{1}{y^2}e^{-\int a_1(x)dx}dx\right] \qquad (*)$$

取$C_2=0$，$C_1=1$得到齐次方程的另一个特解$y_2=y_1\cdot\int\frac{1}{y^2}e^{-\int a_1(x)dx}dx$.

它与$y_1(x)$线性无关，因此$(*)$给出了原齐次方程的通解。然后求齐次方程$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f$的特解。设$y=y_1(x)V_1+y_2(x)V_2$为其解，则$y'=y_1{}'V_1+y_2{}'V_2+y_1V_1{}'+y_2V_2{}'$, 为使$y''$式中不含$V_1{}''$与$V_2{}''$，设$y_1V_1{}'+y_2V_2{}'=0$，再求导有$y''=y_1{}'V_1{}'+y_2{}'V_2{}'+y_1{}''V_1+y_2{}''V_2$,把$y,y',y''$带入原方程，并注意$y_1,y_2$为相应齐次方程的解，整理可得$y_1{}'V_1{}'+y_2{}'V_2{}'=f$, 由$y_1,y_2$的线性无关性可知$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix}\neq 0$,故$V_1{}'=-\frac{y_2f}{W}, V_2{}'=-\frac{y_1f}{W}$.

积分上两式得$V_1=C_1+\int(-\frac{y_2f}{W})dx, V_2=C_2+\int(\frac{y_1f}{W})dx$,故非齐次方程的通解为

$y=C_1y_1+C_2y_2-y_1\int(\frac{y_2f}{W})dx+y_2\int(\frac{y_1f}{W})dx.$

例题

利用线性微分方程的解的结构求通解

例 1：设$y=e^x$是微分方程$xy'+p(x)y=x$的一个解，求此微分方程满足条件$y=|_{x=2}=0$的特解.

解：以$y=e^x$带入原方程，得$xe^x+p(x)y=x$，解出$p(x)=xe^{-x}-x$.

带入原方程，得$y'+(e^{-x}-1)y=1$. 解其对应的齐次方程$y'+(e^{-x}-1)y=0$得$\frac{dy}{y}=(-e^{-x}+1)dx, lny-lnC=e^{-x}+x$.

得齐次方程的通解$y=Ce^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}$.所以原方程的通解为$y=e^x+Ce^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}$.

由$y|_{x=ln2}=0$得

$2+2e^{\frac{1}{2}}C=0$, 即$C=-e^{-\frac{1}{2}}$.所以特解为 $y=e^x+e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}$

利用特解求微分方程

例 2：已知$y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$是某二阶线性非齐次微分方程的三个特解，求此微分方程.

解：由题设知e^{2x}与e^{-x}是相对应齐次方程两个线性无关的解，而xe^x是非齐次方程组的一个特解，故$y=xe^x+C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$是所求方程的解，由 $y''=e^x+xe^x+C_1e^{2x}-C_2e^{-x}, y''=2e^x+xe^x+4C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$.

消去C_1，C_2的所求方程为$y''-y'=e^x-2xe^x$.

7.7 第七节 常系数齐次线性微分方程

7.7.1 二阶常系数齐次线性微分方程

先讨论二阶常系数齐次线性微分方程的解法，再把二阶方程的解法推广到 n 阶方程。

对于二阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(2)}+py^{(1)}+qy=0$$

求其通解步骤如下：

1.写出二阶微分方程的特征方程：

$$r^2+pr+q=0$$

2.求出特征方程的两个根 r1,r2

3.根据求解出根的不同情况，按照下列表格写出二阶微分方程的通解

特征方程根的特点	微分方程的通解
r1,r2 为两个不相等的实根	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
r1,r2 为两个相等的实根	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
r1,r2 为一对共轭复根 r1,2=$\alpha\mp\beta i$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

7.7.2 n 阶常系数齐次线性微分方程

n 阶常系数齐次线性微分方程的一般形式是

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y^{(1)}+p_ny=0$$

1.还是写出特征方程，此时为

$$r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$$

2.求出该特征方程的根$r_i, i=1,2,\dots,n$

3.根据根的特征查询下表，得到通解

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 r	给出一项：Ce^{rx}
一对单复根 r1,2=$\alpha\mp\beta i$	给出两项：$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

k 重实根 r	给出 k 项：$e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
一对 k 重复根 r1,2=$\alpha\mp\beta i$	给出 2k 项：$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

例题：

1 求微分方程$y^{(2)}-4y^{(1)}+5y=0$的通解

2 求微分方程$y^{(4)}-y=0$的通解

3 求微分方程$y^{(4)}+5y^{(2)}-36y=0$的通解

解答：

1 解：特征方程为$r^2-4r+5=0$,解得$r1{,}2=2\mp i$
查表可得通解为$y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

2 解：特征方程为$r^4-1=0$,解得$r1{,}2=\mp1$，$r3{,}4=\mp i$
查表可得通解为$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$

3 解：特征方程为$r^4+5r^2-36=0$,解得$r1{,}2=\mp2$，$r3{,}4=\mp3i$
查表可得通解为$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$

7.8 常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程的一般形式是：

$$y^{(2)}+py^{(1)}+qy=f(x)$$

由第六节定理 3 可知，求二阶常系数非齐次线性微分方程的通解，归结为求对应齐次方程$y^{(2)}+py^{(1)}+qy=0$的通解和非齐次方程本身的一个特解，由于二阶常系数非齐次线性微分方程的通解的求法已经在第七节得到解决，下面只介绍 f（x）为两种特殊形式时特解y^*的求法

7.8.1 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型

考虑λ与特征方程$r^2+pr+q=0$的关系，运用待定系数法

λ与特征方程关系	y^*
λ不是$r^2+pr+q=0$的根	$e^{\lambda x}R_m(x)$
λ是$r^2+pr+q=0$的单根	$xe^{\lambda x}R_m(x)$
λ是$r^2+pr+q=0$的重根	$x^2e^{\lambda x}R_m(x)$

其中$R_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$，将$R_m(x)$代回等式两边比较系数，即可解出$b_i,i=0,1,2,\ldots,m$

7.8.2 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$型

考虑$\lambda+\omega i$与特征方程$r^2+pr+q=0$的关系，运用待定系数法

$\lambda+\omega i$与特征方程关系	y^*
$\lambda+\omega i$不是$r^2+pr+q=0$的根	$e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\,cos\,\omega x+R_m^{(2)}(x)\,sin\,\omega x]$
$\lambda+\omega i$是$r^2+pr+q=0$的单根	$xe^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\,cos\,\omega x+R_m^{(2)}(x)\,sin\,\omega x]$

其中$R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$是 m 次多项式，m=max{l,n}，同理将$R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$代回原式，比较系数，即可解出$R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$

例题：

1 求微分方程$y^{(2)}+3y^{(1)}+2y=3xe^{-x}$的通解

2 求微分方程$y^{(2)}+4y=x\cos x$的通解

解答：

1 解：特征方程为$r^2+3r+2=0$, 解得$r1=-1$，$r2=-2$

故对应的通解为$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$, 而$\lambda=-1$是特征方程的单根, 故查表可得特解可设为$y^*=xe^{-x}(ax+b)$, 代入方程比较系数可得$a=\frac{3}{2},b=-3$

故通解为$y=Y+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x)$

2 解：特征方程为$r^4+4=0$, 解得$r1{,}2=\mp 2i$

故对应的通解为$Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$, 而$\lambda+\omega i=i$不是特征方程的根

故查表可得特解可设为$y^*=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$, 代入方程比较系数可得$a=\frac{1}{3},b=0,c=0,d=\frac{2}{9}$

故通解为$y=Y+y^*=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{3}\cos x+\frac{2}{9}\sin x$

期末模拟卷

一．选择题（共 5 *6 = 30 分）

（1） $x=0$是函数 $f(x)=\dfrac{\arctan x}{x}$ 的（　　）.

A．连续点；　　B．可去间断点；　　C．跳跃间断点；　　D．无穷间断点．

（2）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内具有连续二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{e^x-1}=1$，

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　　）.

A. 有极值；　　B. 无极值；　　C. 无拐点；　　D. 有拐点.

（3）设函数 $f(x)=x^4+\left|x^3\right|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n=$（　　）.

A. 1；　　B. 2；　　C. 3；　　D. 4.

（4）设函数 $f'(x)$ 连续，则 $\int f'(2x)\,dx=$（　　）.

A. $f(2x)+c$；　B. $2f(x)+c$；　C. $\dfrac{1}{2}f(2x)+c$；　D. $xf(2x)+c$.

（5）设反常积分 $\int_1^{+\infty}x^{-k}dx$ 收敛，则（　　）.

A. $k>1$；　　B. $k\geqslant 1$；　　C. $k\leqslant 1$；　　D. $k<1$.

（6）

. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

A. 1；　　B. $\dfrac{2}{\pi}$　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. 0

二、填空题（每题 5 分）

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=$____________.

(2) 设函数 $f(x)$ 可导，且 $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$______________.

(3) $\int_0^{n\pi}|\sin x|\,dx=$____________.

(4) 设 $f(x)=x\sin x$，则 $f^{(6)}(0)=$____________.

(5) 曲线 $y=\ln\left(1-x^2\right)$　$0\le x\le\dfrac{1}{2}$ 的弧长为______.

(6) 当 $x\to 0$ 时求 $\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{e^x}\ln t\,dt$ 值为__________

三. 解答题（每题 8 分）

1. 计算

(1) $\int_0^{+\infty}x^{2010}\cdot e^{-x}dx$.

(2) 求正常数a,b，使得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2dt}{\sqrt{a+t^2}}=3$

2. 试确定常数 C 之值，使得曲线$y=x+Cx^2$与直线$x=1,x=2$及X 轴所围成的平面图形绕X轴旋转一周所得旋转体的体积最小。

四、证明题（每题 8 分）

1. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xf(x)dx=0$，

求证：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，$(\xi\neq\eta)$，使得$f(\xi)=0,f(\eta)=0$.

2. 设$f(x)=[\varphi(x)-\varphi(0)]\,ln(1+2x)$, $g(x)=\int_0^x\frac{t}{1+t^3}dt$,其中$\varphi(x)$在$x=0$处可导，且$\varphi'(0)=1$, 证明：$f(x)$与$g(x)$为$x\to 0$时的同阶无穷小。

参考答案

一、（1）B;　　（2）D;　　（3）B;　　（4）C;　　（5）A．(6)B

二、（1）1;　　（2）$\sin 2x\left[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)\right]$;　　（3）2n;

（4）6;　　（5）$\ln 3-\dfrac{1}{2}$.　　（6）. x($e^x-2\ln x^2$)

三 •

1.

（1）**解：**

令$I_{2010}=\int_0^{+\infty}x^{2010}\cdot e^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}x^{2010}de^{-x}$

则　$I_{2010}=-\dfrac{x^{2010}}{e^x}\Bigg|_0^{+\infty}+2010\int_0^{+\infty}x^{2009}\cdot e^{-x}dx$

即　$I_{2010}=2010I_{2009}=\cdots=2010!I_0$

又　$I_0=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$，

故$I_{2010}=2010!$.

（2）**解：**　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/\sqrt{a+x^2}}{b-\cos x}=3\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}(b-\cos x)=0\Rightarrow b=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2/\sqrt{a+x^2}}{1-\cos x}=3\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+x^2}}=3\Rightarrow a=\frac{4}{9}$$

2. **解：**

$$V(c)=\pi\int_1^2 (x+cx^2)^2 dt=\pi\left(\frac{31}{5}c^2+\frac{15}{2}c+\frac{7}{3}\right)$$

令 $V'(c)=\pi\left(\frac{62}{5}c+\frac{15}{2}\right)=0$，得 $c=-\frac{75}{124}$

又 $V''(c)=\frac{62}{5}\pi>0$

故 $c=-\frac{75}{124}$ 为唯一极小值点，亦即是最小点.

四.

1. **证明：**

令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow F(a)=F(b)=0$，

$$\int_a^b xf(x)dx=\left[xF(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b F(x)dx=0\Rightarrow \exists\theta\in(a,b),\ni F(\theta)=0$$

对 $F(x)$ 在区间 $[a,\theta],[\theta,b]$ 上分别应用 Rolle 定理，得

$\exists\xi\in(a,\theta),\eta\in(\theta,b)$，$(\xi\neq\eta)$，使得 $f(\xi)=0, f(\eta)=0$.

2. **证明：** $\varphi(x)$在$x=0$处可导，则$\varphi(x)$在$x=0$处连续。$g(x)=\int_0^x\frac{t}{1+t^3}\mathrm{d}t$在$x=0$处连续。$\lim\limits_{x\to 0}x\ln(1+2x)=0, \lim\limits_{x\to 0}\int_0^x\frac{t}{1+t^3}\mathrm{d}t=0.$

根据洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{[\varphi(x)-\varphi(0)]\ln(1+2x)}{\int_0^x\frac{t}{1+t^3}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\frac{x\ln(1+2x)}{\int_0^x\frac{t}{1+t^3}\mathrm{d}t}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+2x)}{\int_0^x\frac{t}{1+t^3}\mathrm{d}t}=\varphi'(0)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)+\frac{2x}{1+2x}}{\frac{x}{1+x^3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x^3)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{2(1+x^3)}{1+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}+2=4\neq 0$$

故$f(x)$与$g(x)$为$x\to 0$时的同阶无穷小。