第十三章　拉普拉斯变换

13.1 拉普拉斯变换的定义

13.2 一些常用函数的拉普拉斯变换

13.3 拉普拉斯变换的基本性质

13.4 拉普拉斯反变换

13.5 应用拉普拉斯变换分析线性电路

用运算法计算线性电路，要将电路方程以复频域函数表达。

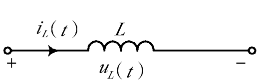
把元件伏安特性的时域函数转换成复频域函数关系，将时域电路模型转变成复频域电路模型，按复频域电路模型列出复频域电路方程。求出复频域解，再反变换为时域解。

13.5.1 电路元件的复频域模型

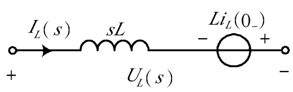
电阻：$U(s) = RI(s)$

电感：$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-)$

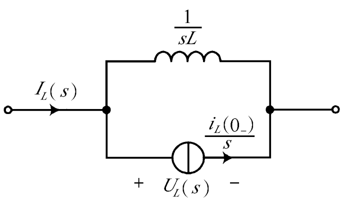
复频域电路模型：



(a)



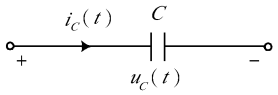
(b)



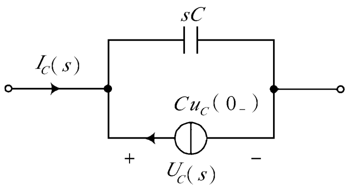
(c)

电容：$U_C(s) = \frac{U_C(0_-)}{s} + \frac{1}{sC} I_C(s)$

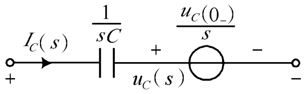
复频域电路模型：



(a)



(b)



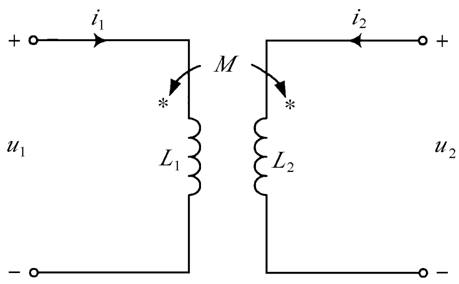
(c)

耦合电感：

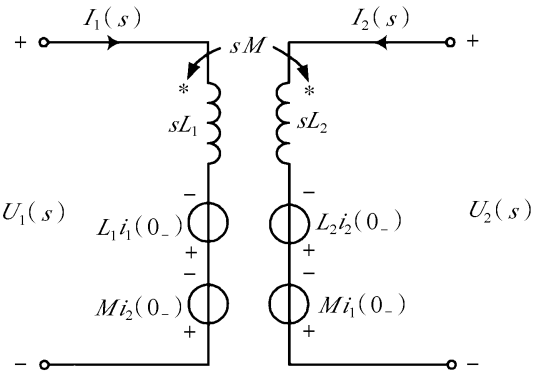
$$U_1(s) = sL_1I_1(s) - L_1i_1(0_-) + sMI_2(s) - Mi_2(0_-)$$

$$U_2(s) = sL_2I_2(s) - L_2i_2(0_-) + sMI_1(s) - Mi_1(0_-)$$

运算电路为：



(a)



(b)

13.5.2 电路基本定律

在直流电路及相量法中所学到的各种定理及计算方法，如叠加定理，戴维南定理、节点法、回路法等，均可用于复频域电路的分析计算。

13.5.3 运算法分析动态电路

应用运算法分析动态电路的步骤：

① 确定动态元件$t = 0_-$时刻的初始值。

② 将时域电路变换为复频域电路，动态元件的初始状态作为附加电源处理。

③ 列出复频域变量的代数方程

④ 求解出复频域解，再由拉氏反变换得时域解。

13.6 网络函数的定义及其性质

13.6.1 复频域中网络函数的定义

网络函数$H(s)$：线性非时变网络在单一激励$f(t)$作用下，零状态响应$y(t)$的象函数$Y(s)$与激励的象函数$F(s)$之比。

$$H(s) \overset{\text{def}}{=} \frac{Y(s)}{F(s)}$$

响应与激励可以同属于一个端口，也可以不属于同一个端口。

当激励与响应同属于一个端口时，$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{U(s)}{I(s)}$ 称为驱动点阻抗，$H(s)=\frac{I(s)}{U(s)}$ 称为驱动点导纳；若不属于同一端口，则网络函数称为**传递函数**，$H(s)=\frac{U_2(s)}{I_1(s)}$ 称为传递阻抗（转移阻抗），$H(s)=\frac{I_2(s)}{U_1(s)}$ 称为传递导纳（转移导纳），$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}$ 称为转移（传递）电压比，$H(s)=\frac{I_2(s)}{I_1(s)}$ 称为转移（传递）电流比。

网络函数是**一个**电源激励与由它产生的零状态响应之比，若网络中有多个电源，则每个电源将通过其各自的网络函数产生相应的响应分量，由叠加定理可得总的响应。

13.6.2 网络函数与冲激响应

单位冲激函数$\delta(t)$ 的象函数为$F(s)=1$，当激励$f(t)=\delta(t)$为单位冲激函数时，网络函数为：

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=Y(s)$$

其中$Y(s)$是冲激响应的象函数，即：

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]|_{F(s)=1}=y(t)|_{f(t)=\delta(t)}$$

$H(s)$是网络冲激响应的象函数，网络函数$H(s)$的原函数$h(t)$就是电路的冲激响应。

网络函数由网络结构和元件参数决定，线性时不变电路由线性 RLC 及独立电流，受控源（控制系数为常数）等元件组成。因此，网络函数是一个关于 s 的实系数有理式。

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{P(s)}{Q(s)}=H_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

假设电路（网络）中某一个变量（支路电流、两点间电压等）在给定初始条件下的零输入响应为$x(t)$，且 $x(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i\,\mathrm{e}^{P_it}$。

式中A_i仅取决于初始状态，P_i仅取决于电路结构及元件参数。显然，$P_i(i=1,2,3,\cdots,n)$决定着零输入响应的变化规律，所以把P_i称为该电路变量$x(t)$的固有频率（自然频率）。

网络函数$H(s)$的分母多项式$Q(s)$的根就是对应电路变量的固有频率。但不一定包括了所有对应电路变量的全部固有频率。

13.6.3 网络函数的性质

网络函数$H(s)$的性质归纳如下：

① $H(s)$是一个实系数有理分式，其分子、分母多项式的根为实数或共轭复数。

② $H(s)$的原函数$h(t)$即为对应变量的冲激响应。

③ 一般情况下，$H(s)$分母多项式的根即为对应电路变量的固有频率。

所以：

① 已知$H(s)$，以及电路初始状态，可以求得零输入响应。（从$H(s)$分母多项式可解得固有频率P_i）。

② 已知$H(s)$、$f(t) \to Y(s)$，可求得零状态响应。

③ 已知$H(s)$、$F(s)$及初始状态，可求完全响应。

13.7 复频域网络函数的极点与零点

由于网络函数$H(s)$分子、分母都是多项式，可以用因式乘积表示：

$$H(s) = H_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = H_0 \frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

式中$Z_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$为$P(s)=0$的根，当$s=z_j$时，$H(s)=0$，所以$z_j$称为网络函数$H(s)$的**零点**；$P_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$为$Q(s)=0$的根，当$s \to p_i$时，$H(s) \to \infty$。所以$p_i$称为$H(s)$的**极点**。

$H(s)$的极点与零点为实数或共轭复数，且$H(s)$的极点即为对应变量的固有频率。

以s的实部σ为横轴，虚部$j\omega$为纵轴的坐标平面称为复频率平面，简称**复平面**或**s平面**。在s平面上标出$H(s)$的零点、极点位置（习惯上用•表示零点，×表示极点），就得到$H(s)$的极、零点图。极、零点的在s平面上的分布与网络的时域动态响应和正弦稳态响应有着密切关系。

13.8 极点、零点与冲激响应

若网络函数$H(s)$的分母具有单根且为真分式，则对应变量的冲激响应为：

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathrm{e}^{p_i t}$$

其中，p_i为$H(s)$的极点。只要全部极点位于s平面的左半平面，则$h(t)$必随时间增长而衰减，电路是稳定的。有极点位于右平面，电路将不稳定。一般一个实际的线性电路（无负电阻），其网络函数的极点一定位于s平面的左半边，也就是稳定的。