

🌸 1 复数的概念

🍉 1.1 复数的概念

$z = x + iy$, x, y 是实数, $x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z), i^2 = -1$.

注: 一般两个复数不比较大小, 但其模 (为实数) 有大小.

🍉 1.2 复数的表示

1) 模: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2) 幅角: 在 $z \neq 0$ 时, 矢量与 x 轴正向的夹角, 记为 $\operatorname{Arg}(z)$ (多值函数); 主值 $\arg(z)$ 是位于 $(-\pi, \pi]$ 中的幅角.

3) $\arg(z)$ 与 $\arctan \frac{y}{x}$ 之间的关系如下:

当 $x > 0$, $\arg z = \arctan \frac{y}{x}$;

当 $x < 0$, $\begin{cases} y \geq 0, \arg z = \arctan \frac{y}{x} + \pi \\ y < 0, \arg z = \arctan \frac{y}{x} - \pi \end{cases}$.

4) 三角表示: $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, 其中 $\theta = \arg z$.

5) 指数表示: $z = |z|e^{i\theta}$, 其中 $\theta = \arg z$.

🌸 2 复数的运算

🍉 2.1 加减法

若 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, 则 $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.

🍉 2.2 乘除法

1) 若 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, 则

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}.$$

2) 若 $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}, z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$, 则

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

2.3 乘幂与方根

若 $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z| e^{i\theta}$, 则 $z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = |z|^n e^{in\theta}$.

若 $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z| e^{i\theta}$, 则 $\sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

3 复变函数

3.1 复变函数

$w = f(z)$, 在几何上可以看作把 z 平面上的一个点集 D 变到 w 平面上的一个点集 G 的映射.

3.2 复初等函数

3.2.1 指数函数

$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$, 在 z 平面处处可导, 处处解析; 且 $(e^z)' = e^z$.

注: e^z 是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数. (注意与实函数不同)

3.2.2 对数函数

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$ (多值函数).

主值: $\ln z = \ln|z| + i \arg z$. (单值函数)

$\operatorname{Ln} z$ 的每一个主值分支 $\ln z$ 在除去原点及负实轴的 z 平面内处处解析, 且 $(\ln z)' = \frac{1}{z}$.

注: 负复数也有对数存在. (与实函数不同)

3.2.3 乘幂与幂函数

$a^b = e^{b \operatorname{Ln} a}, a \neq 0, \quad z^b = e^{b \operatorname{Ln} z}, z \neq 0$.

注: 在除去原点及负实轴的 z 平面内处处解析, 且 $(z^b)' = bz^{b-1}$.

3.2.4 三角函数

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$.

$\sin z, \cos z$ 在 z 平面内解析, 且 $(\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z$.

注: 有界性 $|\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1$ 不再成立. (与实函数不同)

3.2.5 双曲函数

$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$.

$\operatorname{sh} z$ 奇函数, $\operatorname{ch} z$ 是偶函数. $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ 在 z 平面内解析, 且 $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.

4 解析函数的概念

4.1 复变函数的导数

1) 点可导: $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$.

2) 区域可导: $f(z)$ 在区域内点点可导.

4.2 解析函数的概念

1) 点解析: $f(z)$ 在 z_0 及其 z_0 的邻域内可导, 称 $f(z)$ 在 z_0 点解析.

2) 区域解析: $f(z)$ 在区域内每一点解析, 称 $f(z)$ 在区域内解析.

3) 若 $f(z)$ 在 z_0 点不解析, 称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点.

4.3 解析函数的运算法则

解析函数的和、差、积、商 (除分母为零的点) 仍为解析函数; 解析函数的复合函数仍为解析函数.

5 函数可导与解析的充要条件

5.1 函数可导的充要条件

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z = x + iy$ 可导 $\Leftrightarrow u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x, y) 可微, 且在 (x, y) 处满足

C-R 条件: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. 此时 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

5.2 函数解析的充要条件

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域内解析 $\Leftrightarrow u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内可微, 且满足 C-R 条件:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. 此时 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

注意: 若 $u(x, y), v(x, y)$ 在区域 D 具有一阶连续偏导数, 则 $u(x, y), v(x, y)$ 在区域 D 内是可微的. 因

此在使用充要条件证明时, 只要能说明 u, v 具有一阶连续偏导且满足 C-R 条件时, 函数 $f(z) = u + iv$ 一定是可导或解析的.

5.3 函数可导与解析的判别方法

- 1) 利用定义.
- 2) 利用充要条件. (函数以 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 形式给出)
- 3) 利用可导或解析函数的四则运算定理. (函数 $f(z)$ 是以 z 的形式给出)

6 复变函数积分的概念与性质

6.1 复变函数积分的概念

$$\int_c f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k, \quad c \text{ 是光滑曲线.}$$

注：复变函数的积分实际是复平面上的线积分.

6.2 复变函数积分的性质

$$\int_{c^-} f(z) dz = - \int_c f(z) dz. \quad (c^- \text{ 与 } c \text{ 的方向相反})$$

$$\int_c [\alpha f(z) + \beta g(z)] dz = \alpha \int_c f(z) dz + \beta \int_c g(z) dz, \quad \alpha, \beta \text{ 是常数.}$$

$$\text{若曲线 } c \text{ 由 } c_1 \text{ 与 } c_2 \text{ 连接而成, 则 } \int_c f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz.$$

6.3 复变函数积分的一般算法

$$1) \text{ 化为线积分: } \int_c f(z) dz = \int_c u dx - v dy + i \int_c v dx + u dy. \quad (\text{常用于理论证明})$$

2) 参数方法: 设曲线 $c: z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$, 其中 α 对应曲线 c 的起点, β 对应曲线 c 的终点, 则

$$\int_c f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt.$$

7 复变函数积分重要定理与结论

7.1 柯西-古萨基本定理

设 $f(z)$ 在单连域 B 内解析, c 为 B 内任一闭曲线, 则 $\oint_c f(z) dz = 0$.

7.2 复合闭路定理

设 $f(z)$ 在多连域 D 内解析, c 为 D 内任意一条简单闭曲线, c_1, c_2, \dots, c_n 是 c 内的简单闭曲线, 它们互不包含互不相交, 并且以 c_1, c_2, \dots, c_n 为边界的区域全含于 D 内, 则:

$$\textcircled{1} \quad \oint_c f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{c_k} f(z) dz, \text{ 其中 } c \text{ 与 } c_k \text{ 均取正向};$$

$$\textcircled{2} \quad \oint_{\Gamma} f(z) dz = 0, \text{ 其中 } \Gamma \text{ 由 } c \text{ 及 } c_k^-, k=1, 2, \dots, n \text{ 所组成的复合闭路}.$$

7.3 闭路变形原理

一个在区域 D 内的解析函数 $f(z)$ 沿闭曲线 c 的积分, 不因 c 在 D 内作连续变形而改变它的值, 只要在变形过程中 c 不经过使 $f(z)$ 不解析的奇点.

7.4 解析函数沿非闭曲线的积分

设 $f(z)$ 在单连域 B 内解析, $G(z)$ 为 $f(z)$ 在 B 内的一个原函数, 则 $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = G(z_2) - G(z_1)$, $z_1, z_2 \in B$.

说明: 解析函数 $f(z)$ 沿非闭曲线的积分与积分路径无关, 计算时只要求出原函数即可.

7.5 柯西积分公式

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, c 为 D 内任一正向简单闭曲线, c 的内部完全属于 D , z_0 为 c 内任意一点,

$$\text{则 } \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

7.6 高阶导数公式

解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数, 它的 n 阶导数为 $\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0), n=1, 2, \dots$, 其中

c 为 $f(z)$ 的解析区域 D 内围绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线, 而且它的内部完全属于 D .

7.7 重要结论

$$\oint_c \frac{1}{(z-a)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}. \quad (c \text{ 是包含 } a \text{ 的任意正向简单闭曲线})$$

7.8 复变函数积分的计算

1) $f(z)$ 在区域 D 内处处不解析, 用一般积分法 $\int_c f(z) dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t) dt$.

2) $f(z)$ 在区域 D 内解析:

① c 是 D 内一条正向简单闭曲线, 则由柯西—古萨定理, $\oint_c f(z) dz = 0$.

② c 是 D 内的一条非闭曲线, z_1, z_2 对应曲线 c 的起点和终点, 则有 $\int_c f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$.

3) $f(z)$ 在区域 D 内不解析:

$$\text{① 曲线 } c \text{ 内仅有一个奇点: } \begin{cases} \oint_c \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \\ \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \end{cases}. \quad (f(z) \text{ 在 } c \text{ 内解析})$$

$$\text{② 曲线 } c \text{ 内有多于一个奇点: } \oint_c f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{c_k} f(z) dz \quad (c_i \text{ 内只有一个奇点 } z_k).$$

8 解析函数与调和函数

8.1 调和函数的概念

若二元实函数 $\varphi(x, y)$ 在 D 内有二阶连续偏导数且满足 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$, $\varphi(x, y)$ 为 D 内的调和函数.

8.2 解析函数与调和函数的关系

1) 解析函数 $f(z) = u + iv$ 的实部 u 与虚部 v 都是调和函数, 并称虚部 v 为实部 u 的共轭调和函数.

2) 两个调和函数 u 与 v 构成的函数 $f(z) = u + iv$ 不一定是解析函数; 但是若 u, v 如果满足柯西-黎曼方程, 则 $u + iv$ 一定是解析函数.

8.3 求解析函数的方法

1) 偏微分法: 若已知实部 $u = u(x, y)$, 利用 C-R 条件, 得 $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

$$\text{对 } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ 两边积分, 得 } v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + g(x) \quad (*)$$

$$\text{再对 } (*) \text{ 式两边对 } x \text{ 求偏导, 得 } \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + g'(x) \quad (**)$$

由 C-R 条件, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, 得 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\int \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + g'(x)$, 可求出 $g(x)$.

代入 $(*)$ 式, 可求得虚部 $v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + g(x)$.

2) 线积分法: 若已知实部 $u = u(x, y)$, 利用 C-R 条件可得 $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$,

$$\text{故虚部为 } v = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C;$$

由于该积分与路径无关, 可选取简单路径 (如折线) 计算它, 其中 (x_0, y_0) 与 (x, y) 是解析区域中的两点.

3) 不定积分法: 若已知实部 $u = u(x, y)$, 根据解析函数的导数公式和 C-R 条件得知, $f'(z) =$

$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ ，将此式右端表示成 z 的函数 $U(z)$ ，由于 $f'(z)$ 仍为解析函数，故

$$f(z) = \int U(z) dz + C.$$

注：若已知虚部 v 也可用类似方法求出实部 u 。

9 复变函数项级数

9.1 复数列的极限

1) 复数列 $\{\alpha_n\} = \{a_n + ib_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) 收敛于复数 $\alpha = a + bi$ 的充要条件为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

2) 复数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛 \Leftrightarrow 实数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 同时收敛。

9.2 复数项级数

1) 复数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ ($\alpha_n = a_n + ib_n$) 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 同时收敛；

2) 级数收敛的必要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ 。

注：复数项级数的敛散性可以归纳为两个实数项级数的敛散性问题的讨论。

10 幂级数及其敛散性

10.1 幂级数

表达式 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 为幂级数。

10.2 幂级数的敛散性

10.2.1 幂级数的收敛定理：阿贝尔(Abel)定理

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛, 那么对满足 $|z| < |z_0|$ 的一切 z , 该级数绝对收敛; 如果在 z_0 处发散, 那么对满足 $|z| > |z_0|$ 的一切 z , 级数必发散.

10.2.2 幂级数的收敛域

幂级数在收敛圆域内, 绝对收敛; 在圆域外, 发散; 在收敛圆的圆周上可能收敛, 也可能发散.

10.2.3 收敛半径

收敛圆的半径称收敛半径.

1) 比值法: 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lambda \neq 0$, 则收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$;

2) 根值法: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda \neq 0$, 则收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$;

如果 $\lambda = 0$, 则 $R = \infty$; 说明在整个复平面上处处收敛;

如果 $\lambda = \infty$, 则 $R = 0$; 说明仅在 $z = z_0$ 或 $z = 0$ 点收敛;

注: 若幂级数有缺项时, 不能直接套用公式求收敛半径. (如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$)

10.3 幂级数的性质

10.3.1 代数性质

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛半径分别为 R_1 与 R_2 , 记 $R = \min\{R_1, R_2\}$.

则当 $|z| < R$ 时, 有:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (\text{线性运算})$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n) z^n \quad (\text{乘积运算})$$

10.3.2 复合性质

设当 $|\xi| < r$ 时, $f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$, 当 $|z| < R$ 时, $\xi = g(z)$ 解析且 $|g(z)| < r$, 则当 $|z| < R$ 时,

$$f[g(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [g(z)]^n.$$

10.3.3 分析运算性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 $R \neq 0$, 则其和函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是收敛圆内的解析函数:

1) 在收敛圆内可逐项求导, 收敛半径不变; 且 $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, $|z| < R$;

2) 在收敛圆内可逐项求积, 收敛半径不变; $\int_0^z f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$, $|z| < R$.

11 泰勒级数

11.1 泰勒展开

设函数 $f(z)$ 在圆域 $|z - z_0| < R$ 内解析, 则在此圆域内 $f(z)$ 可以展开成幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n; \text{ 并且此展开式是唯一的.}$$

注: 若 $f(z)$ 在 z_0 解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式成立的圆域的收敛半径 $R = |z_0 - a|$;

其中 R 为从 z_0 到 $f(z)$ 的距 z_0 最近一个奇点 a 之间的距离.

11.2 几个初等函数的幂级数展开式

在 $z_0 = 0$ 处:

$$1) \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad |z| < \infty;$$

$$2) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots, \quad |z| < 1;$$

$$3) \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \cdots, \quad |z| < \infty;$$

$$4) \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \cdots, \quad |z| < \infty.$$

11.3 解析函数展开成泰勒级数的方法

11.3.1 直接法

直接求出 $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ ，于是 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 。

11.3.2 间接法

利用已知函数的泰勒展开式及幂级数的代数运算、复合运算和逐项求导、逐项求积等方法将函数展开。

12 洛朗级数

12.1 洛朗级数

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ ，含正幂项和负幂项。

12.2 洛朗展开定理

设函数 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内处处解析， c 为圆环域内绕 z_0 的任意一条正向简单闭曲线，则在此在圆环域内，有 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ ，且展开式唯一。

12.3 解析函数的洛朗展开法

洛朗级数一般只能用间接法展开.

12.4 利用洛朗级数求围线积分

设 $f(z)$ 在 $r < |z - z_0| < R$ 内解析, c 为 $r < |z - z_0| < R$ 内的任何一条正向简单闭曲线, 则 $\oint_c f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$. 其中 c_{-1} 为 $f(z)$ 在 $r < |z - z_0| < R$ 内洛朗展开式中 $(z - z_0)^{-1}$ 的系数.

即: 围线积分可转化为求被积函数的洛朗展开式中 $(z - z_0)^{-1}$ 的系数.

13 孤立奇点

13.1 孤立奇点分类

13.1.1 孤立奇点的定义

$f(z)$ 在 z_0 点不解析, 但在 z_0 的 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析.

13.1.2 孤立奇点的类型

- 1) 可去奇点: 展开式中不含 $z - z_0$ 的负幂项, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$ 常数;
- 2) 极点: 展开式中含有限项 $z - z_0$ 的负幂项, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$;
- 3) 本性奇点: 展开式中含无穷多项 $z - z_0$ 的负幂项, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在且不为 ∞ .

13.2 零点与极点的关系

13.2.1 零点

不恒为零的解析函数 $f(z)$, 如果能表示成 $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析, $\varphi(z_0) \neq 0$, m 为正整数, 称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点.

13.2.2 零点的级数判别的充要条件

$$z_0 \text{ 是 } f(z) \text{ 的 } m \text{ 级零点} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{(n)}(z_0) = 0 \\ f^{(m)}(z_0) \neq 0 \end{cases}, \quad (n=1, 2, \dots, m-1).$$

13.2.3 零点与极点的关系

$$z_0 \text{ 是 } f(z) \text{ 的 } m \text{ 级零点} \Leftrightarrow z_0 \text{ 是 } \frac{1}{f(z)} \text{ 的 } m \text{ 级极点}.$$

13.2.4 重要结论

若 $z=a$ 分别是 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 的 m 级与 n 级零点, 则:

1) $z=a$ 是 $\varphi(z) \cdot \psi(z)$ 的 $m+n$ 级零点.

2) 当 $m > n$ 时, $z=a$ 是 $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的 $m-n$ 级零点; 当 $m < n$ 时, $z=a$ 是 $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的 $n-m$ 级极点; 当

$m=n$ 时, $z=a$ 是 $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的可去奇点.

3) 当 $m \neq n$ 时, $z=a$ 是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 l 级零点, $l = \min\{m, n\}$; 当 $m=n$ 时, $z=a$ 是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 l 级零点, 其中 $l \geq m(n)$.

14 留数的概念

14.1 留数的定义

设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点, $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析, c 为该域内包含 z_0 的任

一正向简单闭曲线, 则称积分 $\frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z) dz$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的留数, 记作:

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z) dz$$

14.2 留数的计算方法

若 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 $\text{Res}[f(z), z_0] = c_{-1}$, 其中 c_{-1} 为 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内洛朗展开式中 $(z - z_0)^{-1}$ 的系数.

1) 可去奇点处的留数: 若 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $\text{Res}[f(z), z_0] = 0$

2) m 级极点处的留数:

① 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点, 则:

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

特别地, 若 z_0 是 $f(z)$ 的一级极点, 则:

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

注: 如果极点的实际级数比 m 低, 上述规则仍然有效.

② 设 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z), Q(z)$ 在 z_0 解析, $P(z_0) \neq 0, Q(z_0) = 0, Q'(z_0) \neq 0$, 则:

$$\text{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

14.3 留数基本定理

设 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 z_1, z_2, \dots, z_n 外处处解析, c 为 D 内包围诸奇点的一条正向

简单闭曲线, 则 $\oint_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}[f(z), z_n]$.

说明: 留数定理把求沿简单闭曲线积分的整体问题转化为求被积函数 $f(z)$ 在 c 内各孤立奇点处留数的局部问题.