力学内容总结

三大定理、三大守恒

三大定理

1.动量定理

2.角动量定理

3.动能定理

三大守恒

1.动量守恒

2.角动量守恒

3.机械能守恒

平动	转动	关系
位移 $\Delta \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ 速度 $\boldsymbol{v}=d\boldsymbol{r}/dt$ 加速度 $\boldsymbol{a}=d\boldsymbol{v}/dt$ 切向加速度 $a_\tau=dv/dt$ 法向加速度 $a_n=v^2/r$	角位移 $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$ 角速度 $\omega=d\theta/dt$ 角加速度 $\beta=d\omega/dt$	$\Delta r=r\Delta\theta$ $v=r\omega$ $a_\tau=r\beta$ $a_n=r\omega^2$ $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$ $a=r\sqrt{\beta^2+\omega^4}$
匀变速直线运动 $v=v_0+at$ $\Delta x=v_0t+at^2/2$ $v^2=v_0{}^2+2a\Delta x$	匀变速转动 $\omega=\omega_0+\beta t$ $\Delta\theta=\omega_0t+\beta t^2/2$ $\omega^2=\omega_0{}^2+2\beta\Delta\theta$	

	平动	转动
动量	冲量 $\boldsymbol{I}=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}dt$ 动量 $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$	冲量矩 $\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{M}dt$ 角动量 $\begin{cases}\text{刚体} & \boldsymbol{L}=J\boldsymbol{\omega}\\ \text{质点} & \boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}\end{cases}$
	质点动量定理 $\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}dt=m\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{v}_0$ 质点系动量定理 $\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}dt=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0$ 其中 $\boldsymbol{P}=\sum m\boldsymbol{v}$	角动量定理 $\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{M}dt=\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}_0$
	动量守恒定律 当合外力为0时 $\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{P}$	角动量守恒定律 当合外力矩为0时 $\boldsymbol{L}_0=\boldsymbol{L}$

	平动	转动
动力学	平动惯性　质量m	转动惯性　转动惯量J 质点系　$J=\sum \Delta m_i r_i^2$ 质量连续分布　$J=\int r^2 dm$
	牛顿第二定律　$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$	转动定律　$\boldsymbol{M}=J\beta$
功和能	变力的功　$A=\int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 功率　$P=dA/dt=Fv\cos\theta$ 动能　$E_k=mv^2/2$	力矩的功　$A=\int_{\theta_0}^{\theta} Md\theta$ 力矩的功率　$P=M\omega$ 转动动能　$E_k=J\omega^2/2$
	质点动能定理 $A=mv^2/2-mv_0^2/2$	刚体定轴转动动能定理 $A=J\omega^2/2-J\omega_0^2/2$
	质点系动能定理 $A_{外}+A_{内}=E_k-E_{k0}$	物体系动能定理 $A_{外}+A_{内}=E_k-E_{k0}$

	平动	转动
功和能	$E_k = \sum mv^2/2$	$E_k = \sum mv^2/2 + \sum J\omega^2/2$
	质点系功能原理 $A_{外} + A_{非保内} = E - E_0 = \Delta E$ 其中 $E = \sum mv^2/2 + \sum mgh + \sum kx^2/2$	物体系功能原理 $A_{外} + A_{非保内} = E - E_0 = \Delta E$ 其中 $E = \sum mv^2/2 + \sum mgh + \sum kx^2/2 + \sum J\omega^2/2$
	机械能守恒定律 除保守力外其它力不作功 $E_0 = E$	物体系机械能守恒 除保守力外其它力不作功 $E_0 = E$

解决力学问题的方法

1.确定研究对象（如果是系统要分别进行研究）。

2.受力分析，

牛顿定律
动量定理 考虑所有的力

动能定理 —— 考虑作功的力

功能原理 —— 除保守力和不作功的力以外其它所有的力

转动定律
角动量定理 } 考虑产生力矩的力

3.建立坐标系或规定正向，或选择0势点。

重力0势点一般选最低位置，弹性0势点一般选弹簧平衡位置处。

4.确定始末两态的状态量。

①.动能定理----确定E_{k0}，E_k

②.功能原理----确定E_0，E

③.动量定理----确定$\boldsymbol{P}_0$，$\boldsymbol{P}$

④.角动量定理----确定$\boldsymbol{L}_0$，$\boldsymbol{L}$

5.应用定理、定律列方程求解。

6.有必要时进行讨论。

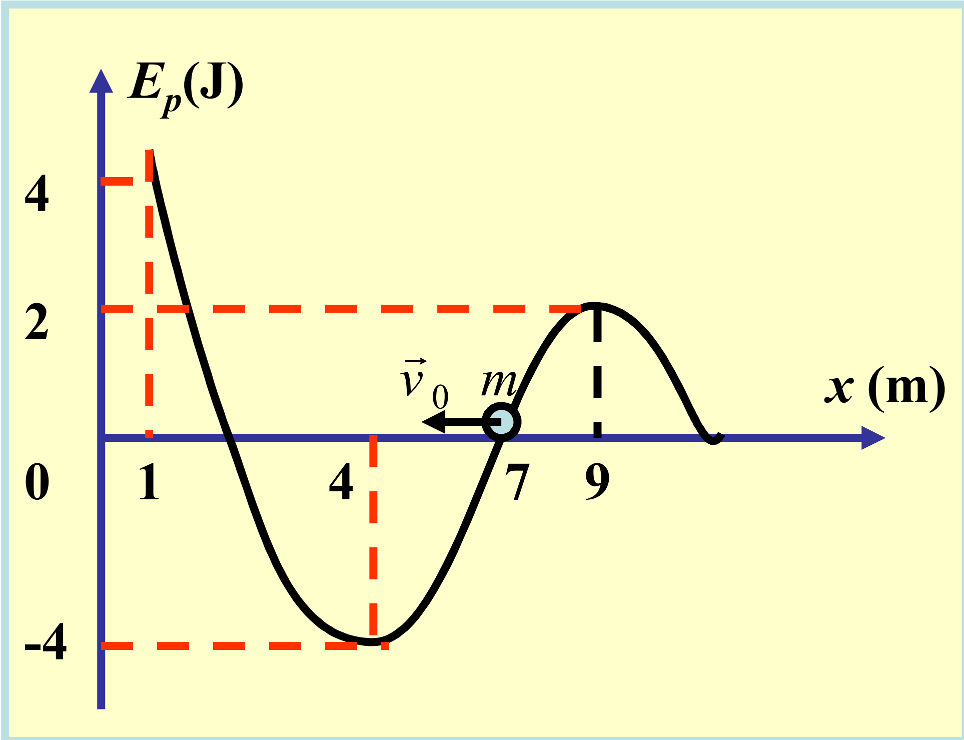
练习： 质量为 **2kg** 的质点位于一维势场中（如图）

已知：

$$m = 2\text{kg}$$

$$v_0 = -2\vec{i}\ \text{ms}^{-1}$$

$$x_0 = 7\text{m}$$

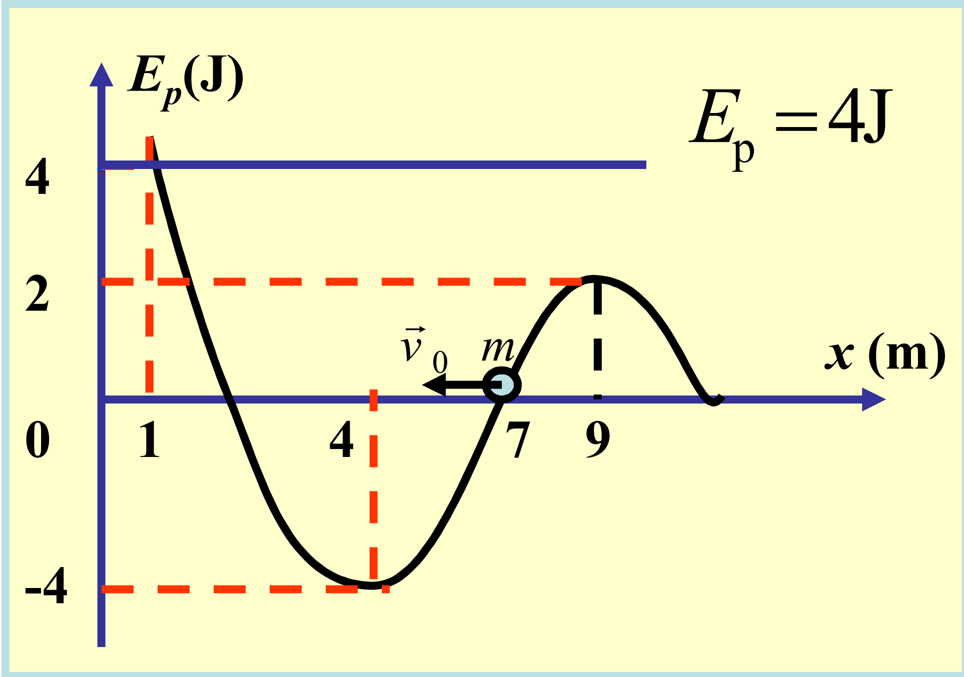


求：① ***m*** 运动范围

②何处 $F>0$

③何处 $v_{max}=?$

解：① 初态



$$E_0 = E_{k0} + E_{p0}$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 = 4(\text{J})$$

E 守恒,当 $E_k=0$时

$$\left(E_p\right)_{max} = E_0 = 4\text{J}$$

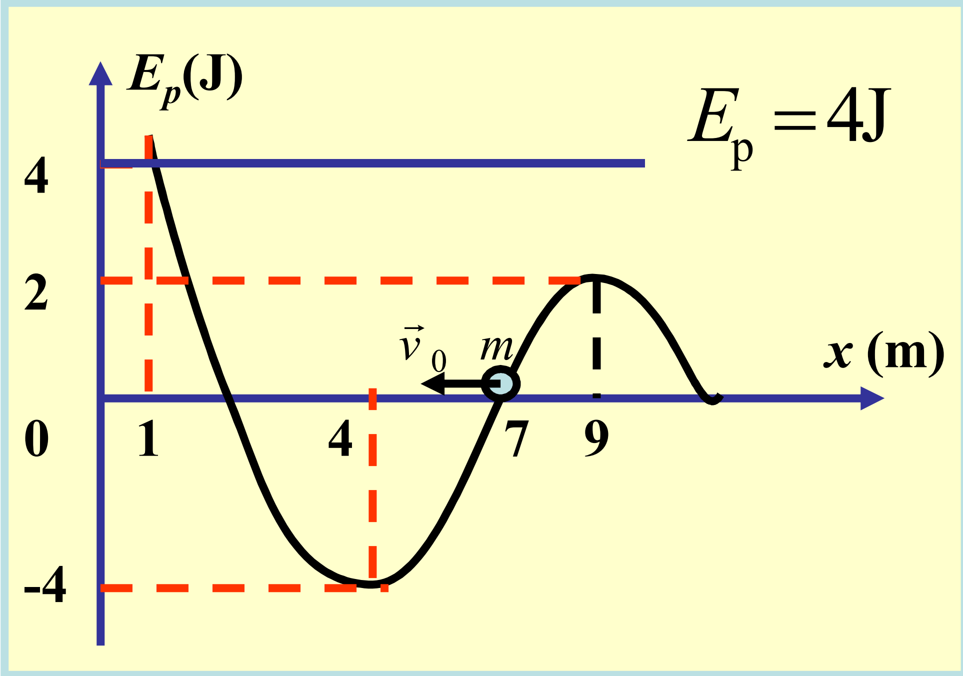
作曲线 $E_p = 4\text{J}$ 知运动范围 $x \geq 1$

②要 $F = -\frac{dE_p}{dx} > 0$ $\frac{dE_p}{dx} < 0$

势能曲线斜率为负： $1 < x < 4$ $x > 9$

③ $x=4\text{m}$ 处,势能最小

动能最大, v 最大



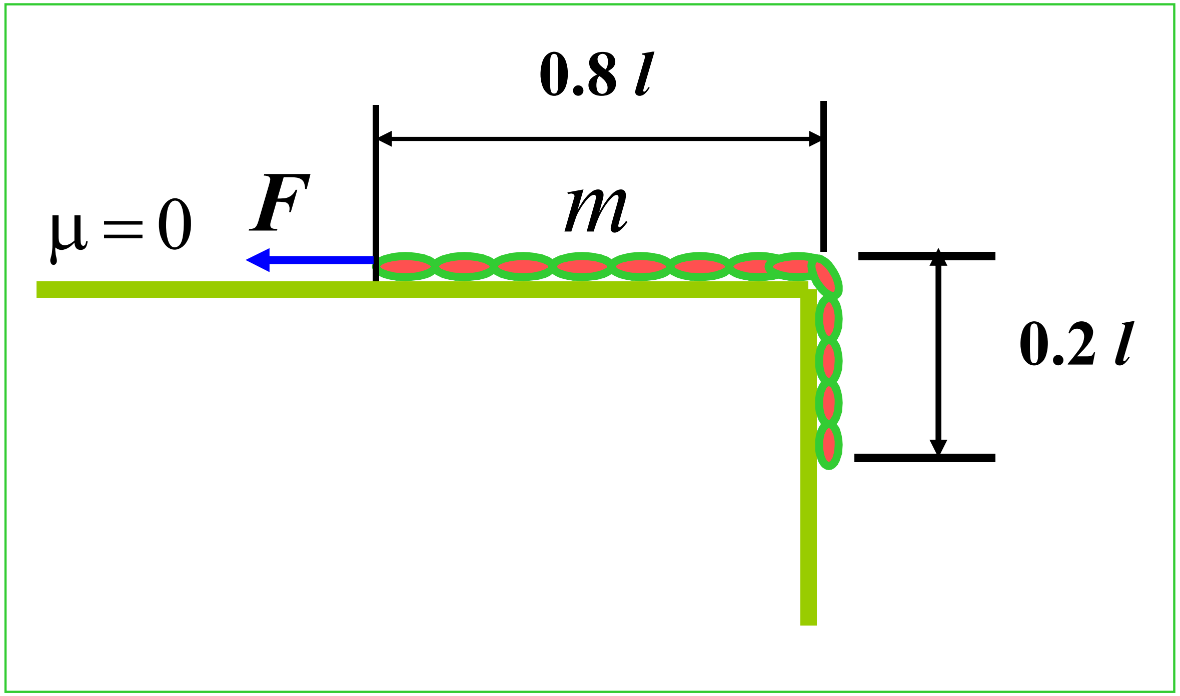
$$\left(E_p\right)_{\min} + \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = E$$

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = E - \left(E_p\right)_{\min} = 4 - (-4) = 8(\text{J})$$

$$v_{\max} = 2\sqrt{2} \approx 2.82\left(\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\right)$$

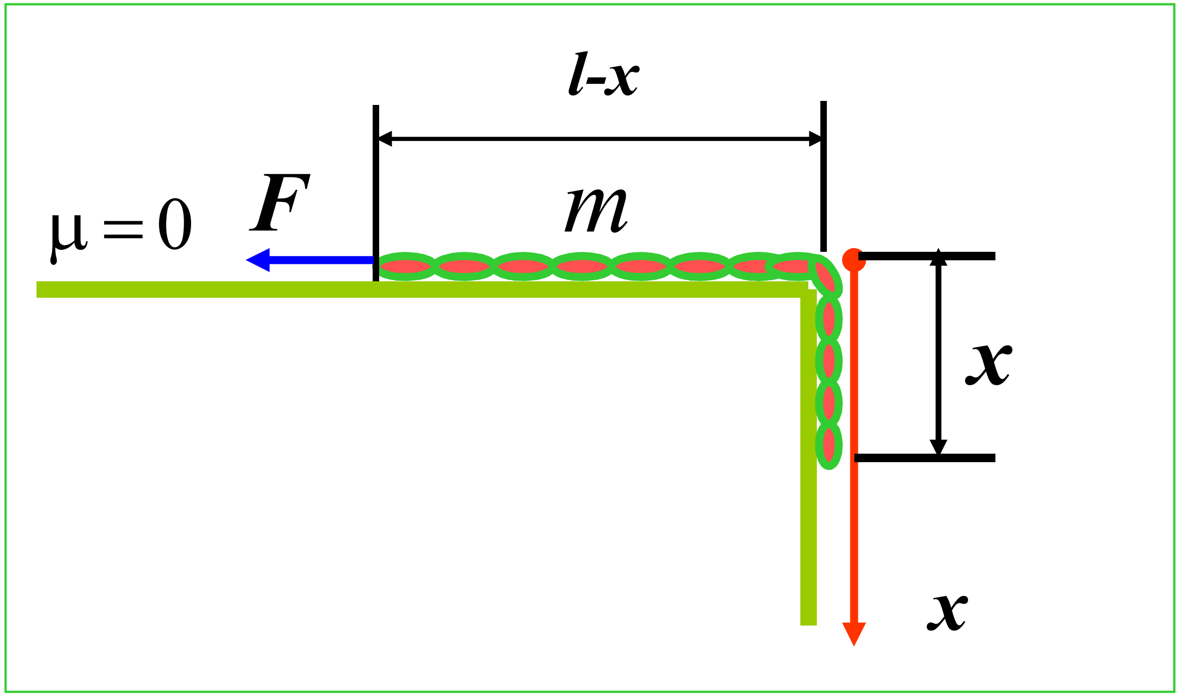
练习1:

一个长度为l，质量m均匀分布的长链被置于光滑无摩擦的水平桌面上。有$0.2\,l$的部分沿桌面边沿垂下，如图所示。如果要将该链缓慢拉回桌面，求拉力F所做的功。



[解1]

F为一变力，其大小等于垂下部分的重力。



垂下部分的质量

$$\frac{m}{l}x$$

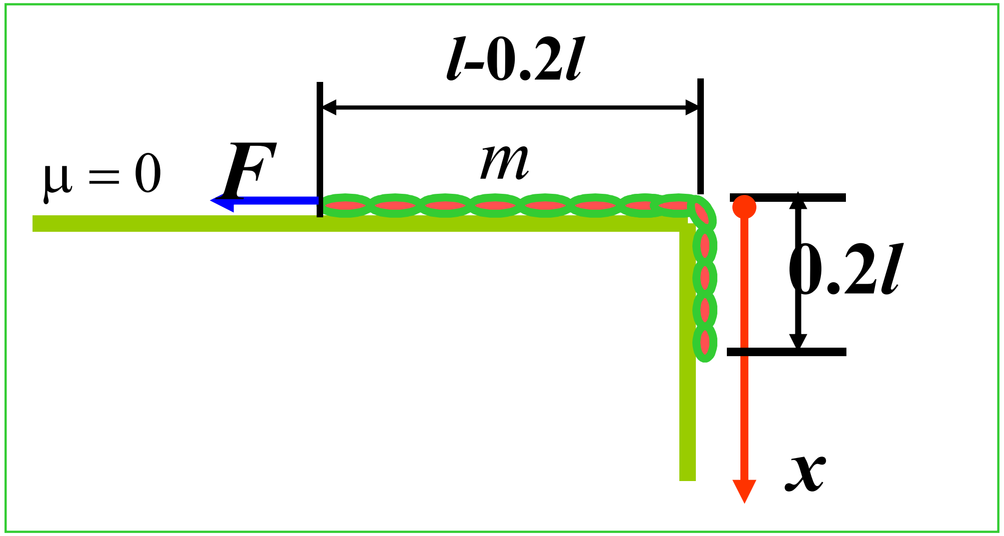
所以 $G = \dfrac{mx}{l}g$

$$W_G = \int \vec{G}\cdot d\vec{r} = \int \frac{mg}{l} x\hat{i}\cdot dx\hat{i} = \frac{mg}{l}\int_{0.2l}^{0} x dx = -\frac{mgl}{50}$$

拉力F的功　$W_F = -W_G = \dfrac{mgl}{50}$

[解2]

重力是保守力。



选择桌面为势能零点：

$$E_P = 0$$

初态势能： $E_{P1} = \frac{mg}{5} h_c = \frac{mg}{5}\left(-\frac{l}{10}\right) = -\frac{mgl}{50}$

末态势能： $E_{P2} = 0$

重力G的功： $W_G = -\Delta E_P = -\left(E_{P2} - E_{P1}\right) = -\frac{mgl}{50}$

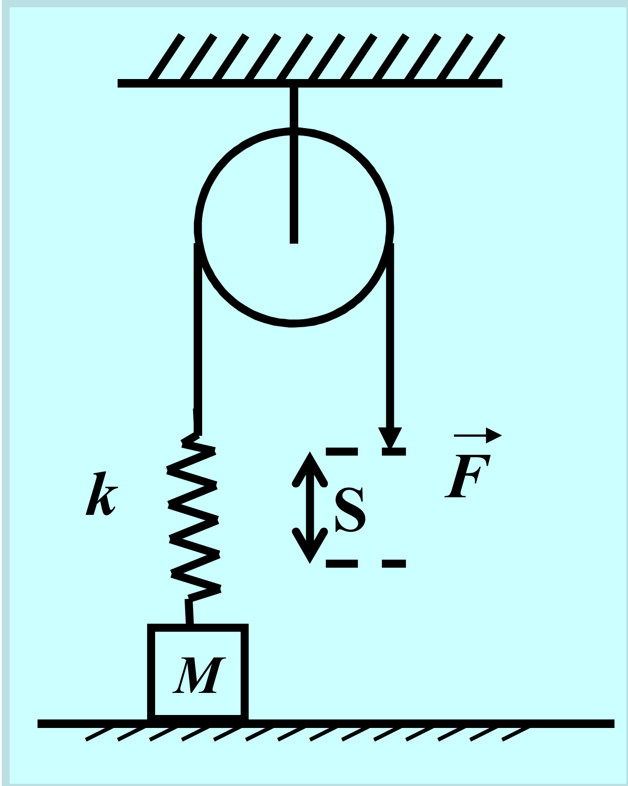
拉力F的功： $W_F = -W_G = \frac{mgl}{50}$

练习2:

如图 M=2kg , k =200Nm^{-1} , S=0.2m , $g \approx$ 10m·s^{-2}

不计轮、绳质量和摩擦,弹簧最初为自然长度,

缓慢下拉, 则 $A_F = ?$



解: 用 F 将绳端下拉0. 2 m , 物体 M将上升多高?

$$\because \quad kx_0 = Mg \rightarrow x_0 = 0.1\text{m}$$

$$S = 0.2\text{m}$$

得 $\begin{cases} \text{弹簧伸长 } 0.1\text{ m} \\ \text{物体上升 } 0.1\text{ m} \end{cases}$

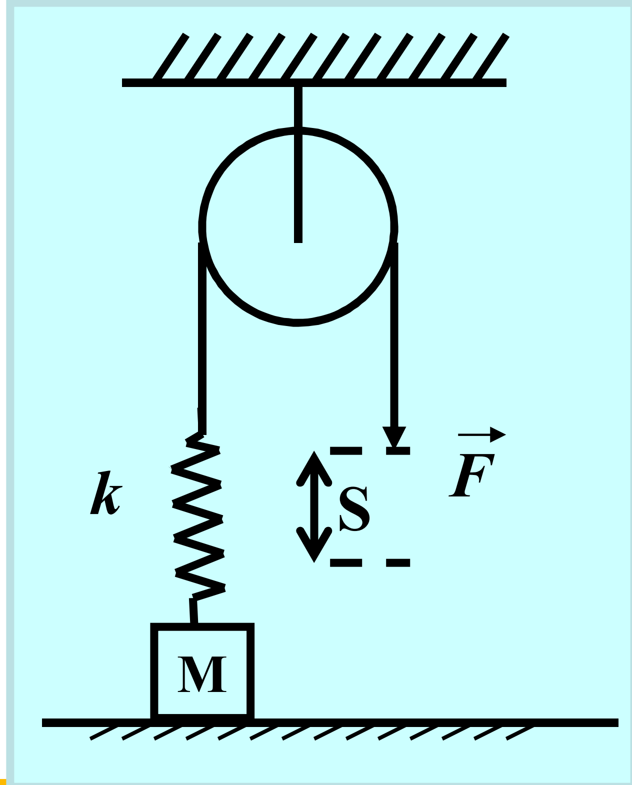
缓慢下拉:每时刻物体处于平衡态

$$F=\begin{cases} kx & (0<x\leq 0.1\text{m}) \quad \text{前0.1m为变力} \\ kx_0=Mg & (0.1<x\leq 0.2\text{m}) \quad \text{后0.1m为恒力} \end{cases}$$

$$A=\int_0^{0.1} kx\,\mathrm{d}x+\int_{0.1}^{0.2} Mg\,\mathrm{d}x$$

$$=\tfrac{1}{2}kx^2\Big|_0^{0.1}+Mgx\Big|_{0.1}^{0.2}$$

$$=3(\mathrm{J})$$



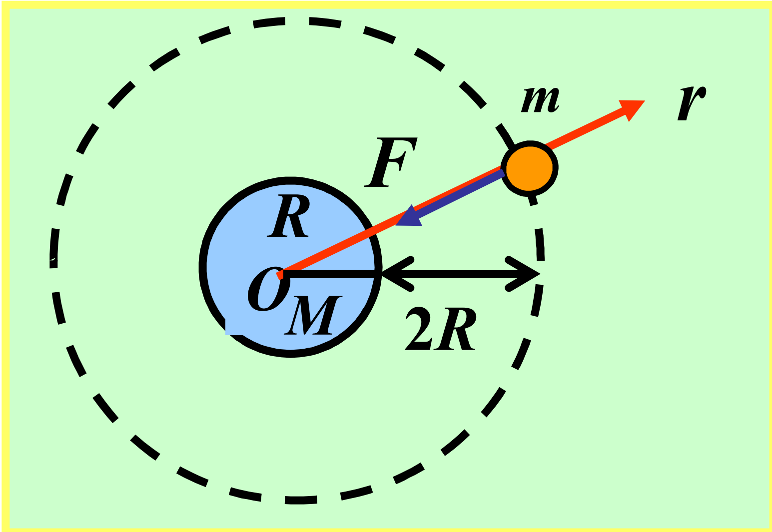
练习3:

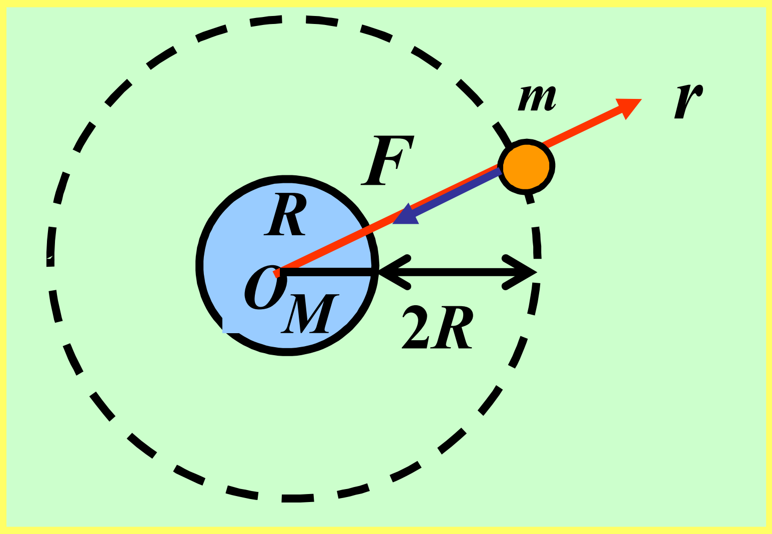
一质量为 m 的人造地球卫星沿一圆形轨道运动，（$v << c$）离开地面的高度等于地球半径的二倍（即$2R$）。试以 m、R、引力恒量 G、地球质量M 表示出:

(1) 卫星的动能;

(2) 卫星在地球引力场中的引力势能;

(3) 卫星的总机械能。





解： $v << c$，非相对论问题

① $G\dfrac{mM}{(3R)^2} = m\dfrac{v^2}{3R}$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{6R}$$

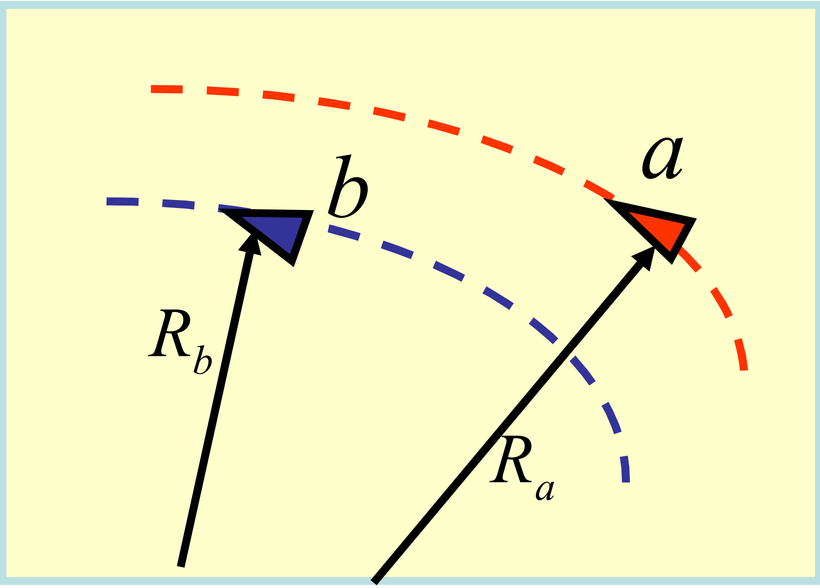
② $E_p = \displaystyle\int_{3R}^{\infty} -G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r = -G\frac{mM}{3R}$

③ $E = E_k + E_p = -\dfrac{GMm}{6R}$

约束于引力场中，未摆脱地球影响

思考:飞船对接问题

设飞船 a 、b 圆轨道在同一平面内，飞船 a 要追上 b并与之对接，能否直接加速？



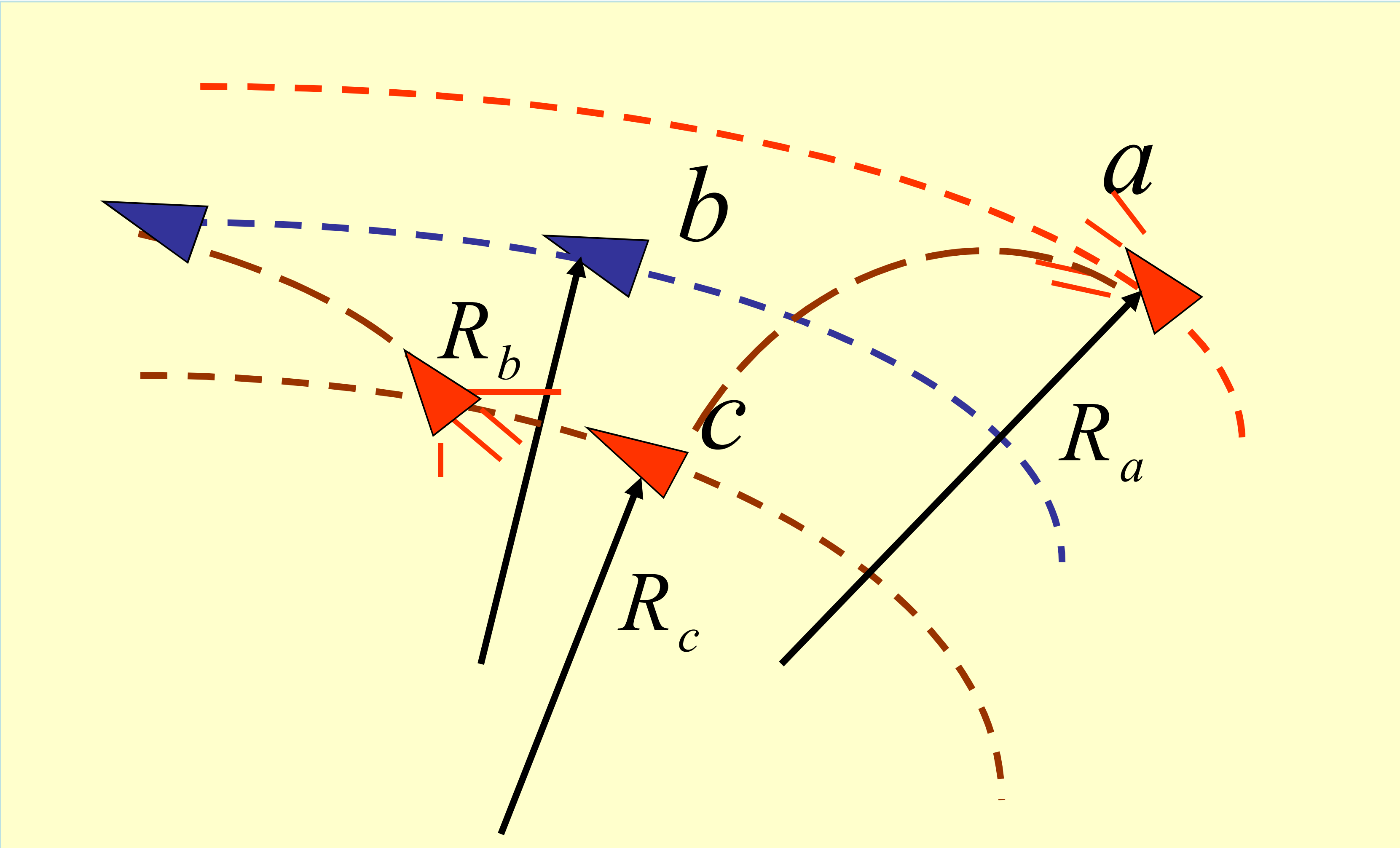
$$E = E_k + E_p = -\frac{GMm}{6R}$$

加速，发动机做功，$\Delta E > 0$,

轨道半径R增大,不能对接;

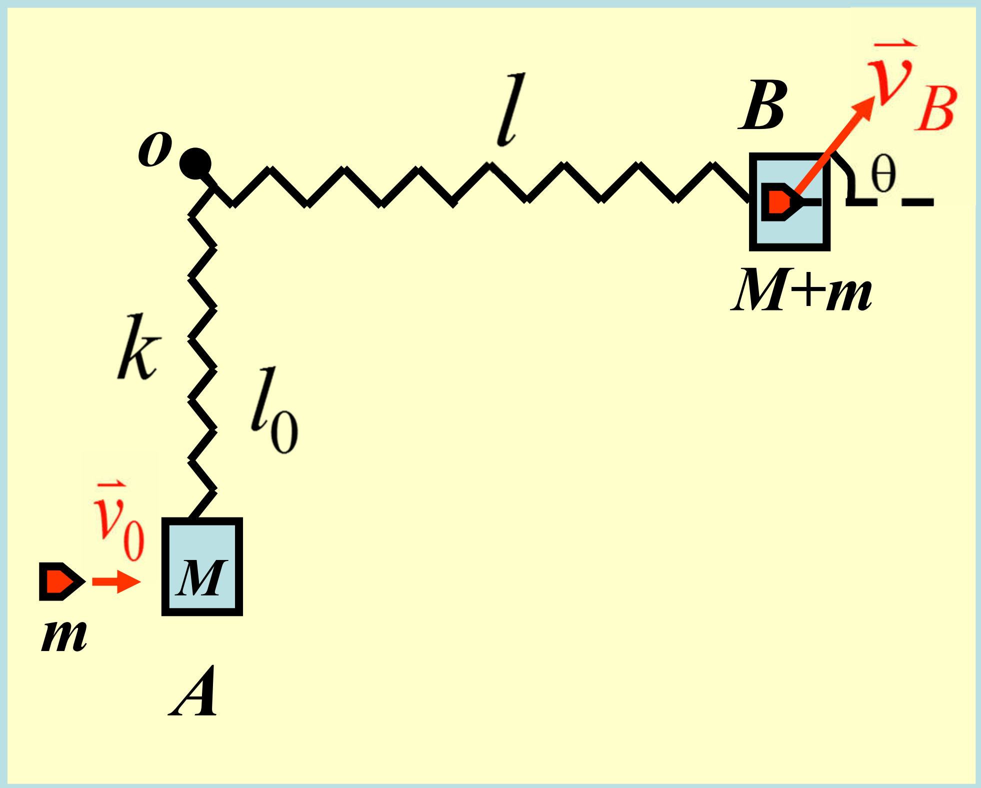
方法: $\left.\begin{array}{l} a \text{ 减速} \\ \Delta E<0 \end{array}\right\} \xrightarrow{R\text{减小}} R_C\text{轨道} \xrightarrow{\text{加速}} R_b\text{轨道}$

方法: $\left.\begin{matrix} a \text{ 减速} \\ \Delta E<0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{R\text{减小}} R_C$轨道 $\xrightarrow{\text{加速}} R_b$轨道



练习4：　如图所示：

已知：光滑桌面，m , M , k , l_0 , l , $\vec{v}_0$　求：$\vec{v}_B$



思考：

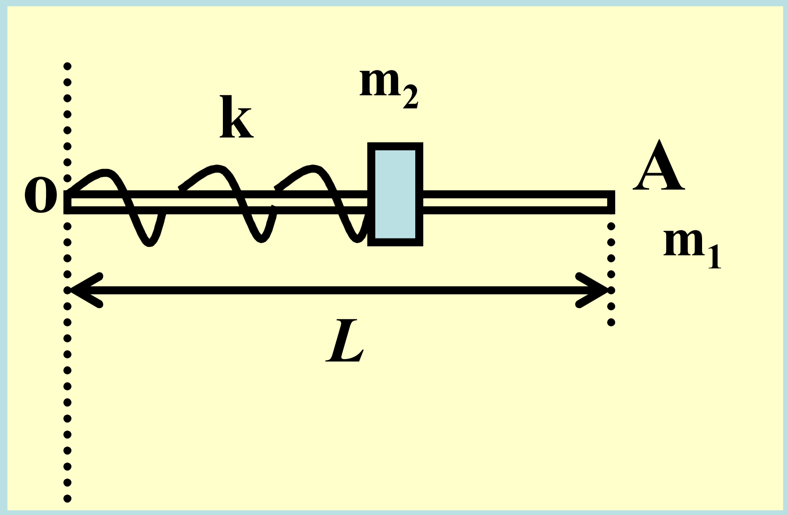
分几个阶段处理？

各阶段分别遵循什么规律？

过程	研究对象	条件	原理
A m与M相撞	$M+m$	mg与N平衡 弹簧为原长 $\vec{F}_{外}=0$	动量守恒 $mv_0=(m+M)v_A$
$A \rightarrow B$	$M+m$ +弹簧	只有弹力作功 $A_{外}+A_{非保内}=0$	机械能守恒 $\frac{1}{2}(m+M)v_A^2=\frac{1}{2}(m+M)v_B^2+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2$
$A \rightarrow B$	$M+m$	各力力矩 都为零 $\vec{M}_{外}=0$	角动量守恒 $(m+M)v_A l_0=(m+M)v_B l\sin\theta$

由此可解出：　v_A　v_B　θ

练习5:



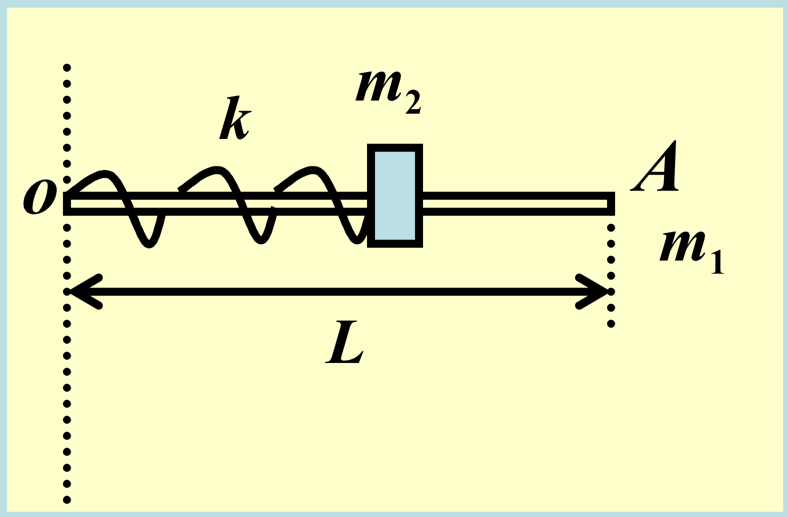
已知： 杆长 L，质量 m_1

环：m_2 , 轻弹簧 k

系统最初静止，在外力矩作用下绕竖直轴无摩擦转动。当 m_2 缓慢滑到端点A时，系统角速度为 ω

求：此过程中外力矩的功

请自行列式



解：$m_1 + m_2 + k$ 系统非刚体，缓慢滑动，不计 m_2 沿杆径向运动的动能。

$$A_{外} + A_{内} = \Delta E_k$$

$$A_{内} = A_{弹} = -\int_0^{\Delta x} kx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

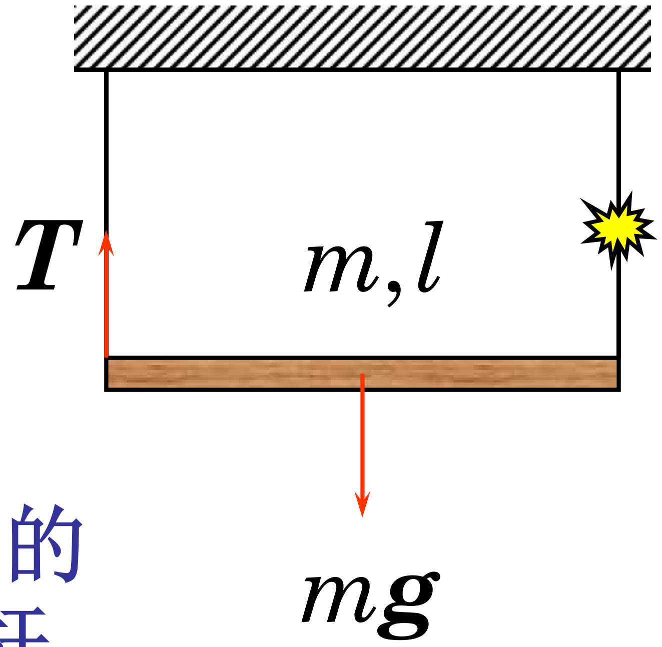
$$A_{外} - \tfrac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{3}m_1L^2 + m_2L^2\right]\omega^2$$

$$k\Delta x = m_2\omega^2 L$$

联立可解

例：质量为 m 、长为 l 的细杆两端用细线悬挂在天花板上，当其中一细线烧断的瞬间另一根细线中的张力为多大？

解：在线烧断瞬间，以杆为研究对象，细杆受重力和线的张力，



$$mg - T = ma \qquad (1)$$

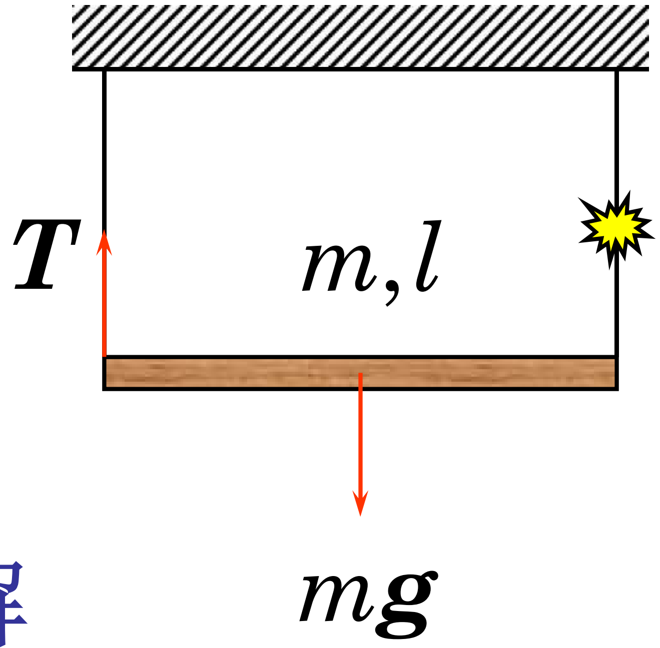
注意：在细杆转动时，各点的加速度不同，公式中a为细杆质心的加速度。

以悬挂一端为轴，重力产生力矩。

$$mg\frac{l}{2}=J\beta \qquad （2）$$

$$J=\frac{1}{3}ml^2$$

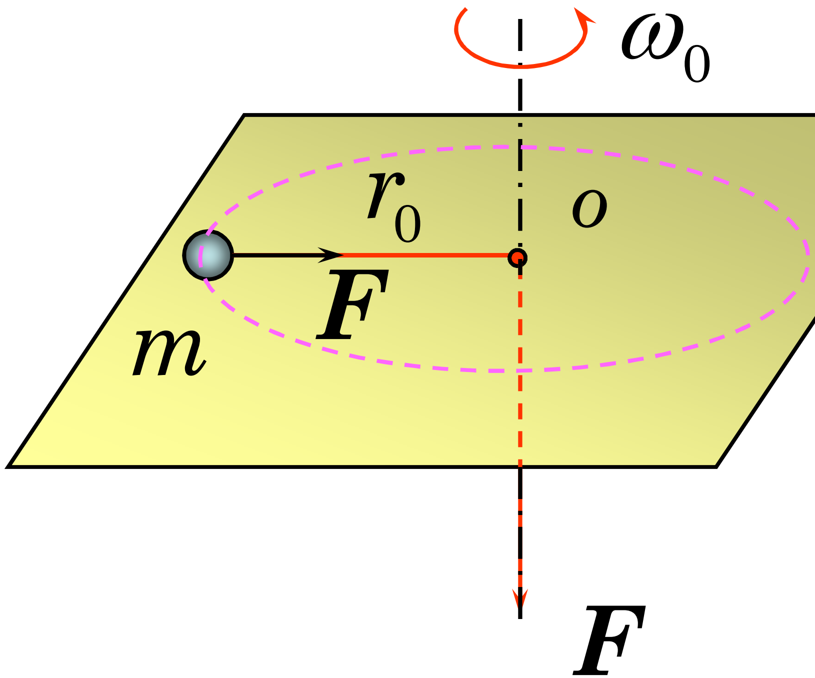
$$a=r\beta=\frac{l}{2}\beta \qquad （3）$$



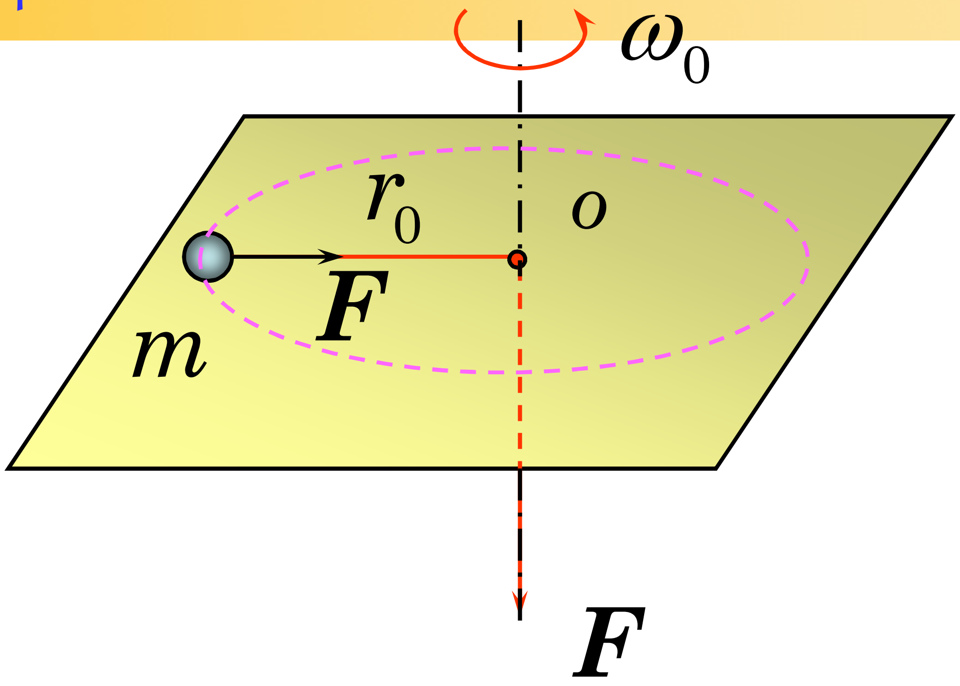
联立(1)、(2)、(3)式求解

$$T=\frac{1}{4}mg$$

例:细线一端连接一质量 m 小球，另一端穿过水平桌面上的光滑小孔，小球以角速度 ω_0 转动，用力 $\boldsymbol{F}$ 拉线，使转动半径从 r_0 减小到 $r_0/2$ 。 求：（1）小球的角速度；（2）拉力 $\boldsymbol{F}$ 做的功。



解：（1）由于线的张力过轴，小球受的合外力矩为0，角动量守恒。



$$L_0 = L$$

$$J_0\omega_0 = J\omega$$

$$mr_0^2\omega_0 = mr^2\omega$$

$$r = r_0/2$$

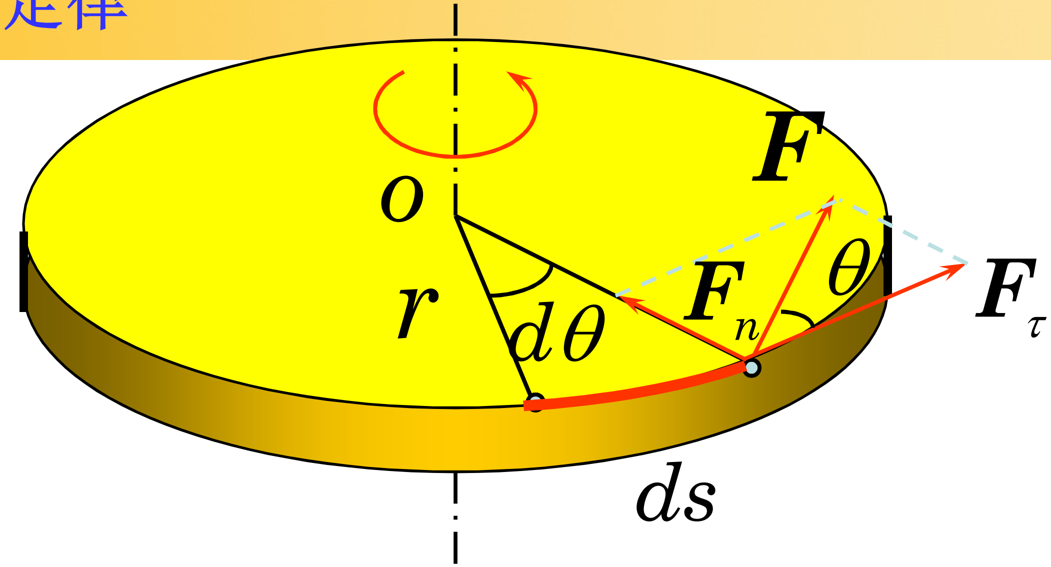
$$\therefore \omega = 4\omega_0$$

半径减小角速度增加。

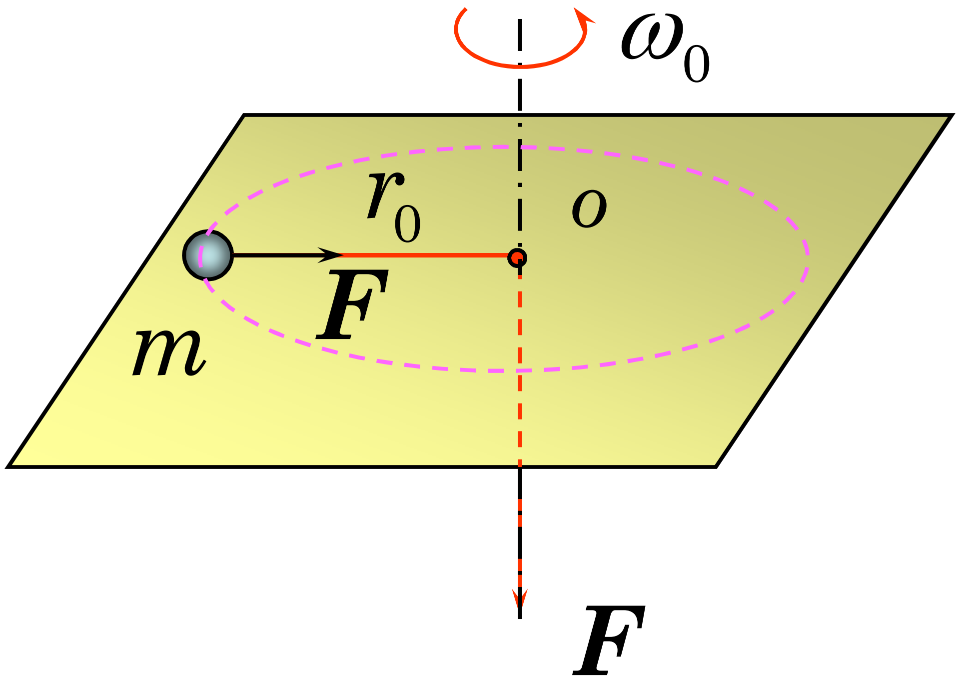
（2）拉力作功。请考虑合外力矩为0，为什么拉力还作功呢？

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta$$

在定义力矩作功时，我们认为只有切向力作功，而法向力与位移垂直不作功。



但在例题中，小球受的拉力与位移并不垂直，小球的运动轨迹为螺旋线，法向力要作功。



由动能定理： $W = E_k - E_{k0}$

$$W = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J_0\omega_0{}^2$$

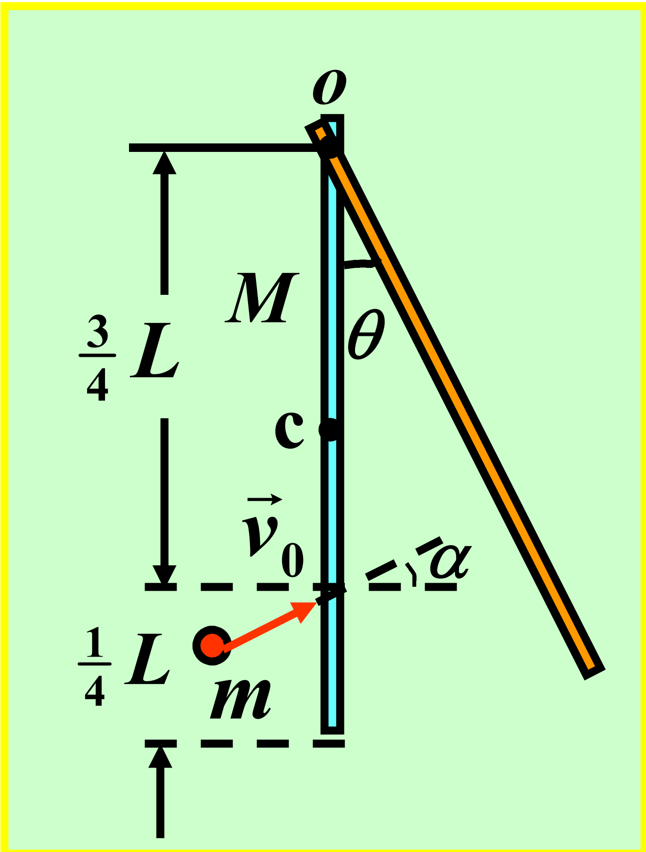
$$= \frac{1}{2}m(\frac{r_0}{2})^2(4\omega_0)^2 - \frac{1}{2}mr_0{}^2\omega_0{}^2$$

$$= \frac{3}{2}mr_0^2\omega_0^2 > 0$$

练习6:

如图所示，　已知: M , L , m , α, v_0 ;击中 $\frac{3}{4}L$ 处

求:击中时 ω ；　$\theta_{\max} = ?$　(只列方程)

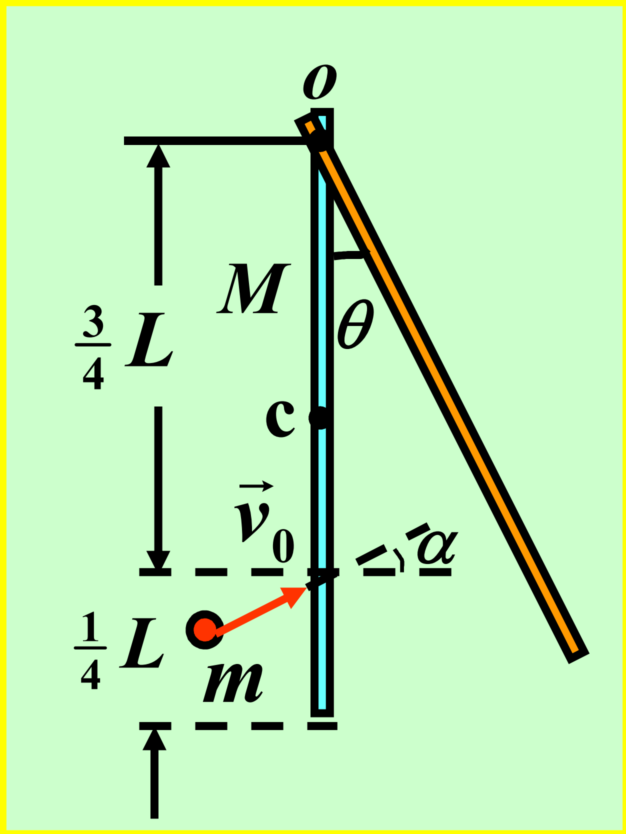


分两个阶段求解,各遵循什么规律?

①相撞: 质点 $\longleftrightarrow$ 定轴刚体

对 O 轴角动量守恒

②摆动: $M + m$ + 地球系统 E 守恒



①相撞: 质点 ⟷ 定轴刚体

对 O 轴角动量守恒

撞前

$$L_m = \left|\vec{r}\times m\vec{v}_0\right| = \tfrac{3}{4}Lmv_0\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

$$= \tfrac{3}{4}Lmv_0\cos\alpha$$

$$L_M = 0$$

撞后 $L'_m = m\left(\tfrac{3}{4}L\right)^2\omega$; $L'_M = \tfrac{1}{3}ML^2\omega$

$$\therefore \quad \tfrac{3}{4}Lmv_0\cos\alpha = \left(\tfrac{9}{16}m+\tfrac{1}{3}M\right)L^2\omega$$

②摆动: $M+m+$地球系统 E 守恒

	动能 E_k	势能E_p
初态:	$\frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}m+\frac{1}{3}M\right)L^2\omega^2$	$-(mg\cdot\frac{3}{4}L+Mg\cdot\frac{1}{2}L)$
末态:	0	$-(mg\cdot\frac{3}{4}L+Mg\cdot\frac{1}{2}L)\cdot\cos\theta$

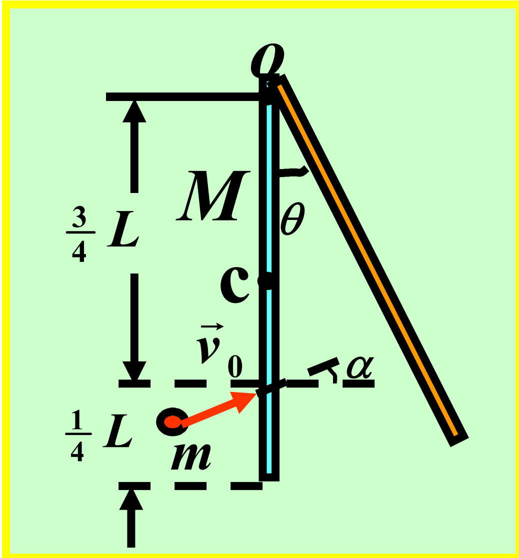
$$\because \quad E_{K1}+E_{p1}=E_{k2}+E_{p2}$$

$$\therefore \quad \Delta E_p=E_{p2}-E_{p1}$$

$$=E_{K1}-E_{k2}=-\Delta E_K$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}m+\frac{1}{3}M\right)L^2\omega^2$$

$$=\left(\frac{M}{2}+\frac{3}{4}m\right)gL(1-\cos\theta)$$



$$\begin{cases} \frac{3}{4}Lmv_0\cos\alpha = \left(\frac{9}{16}m + \frac{1}{3}M\right)L^2\omega \\ \frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}m + \frac{1}{3}M\right)L^2\omega^2 = \left(\frac{M}{2} + \frac{3}{4}m\right)gl\left(1-\cos\theta\right) \end{cases}$$

由此可解出所求值