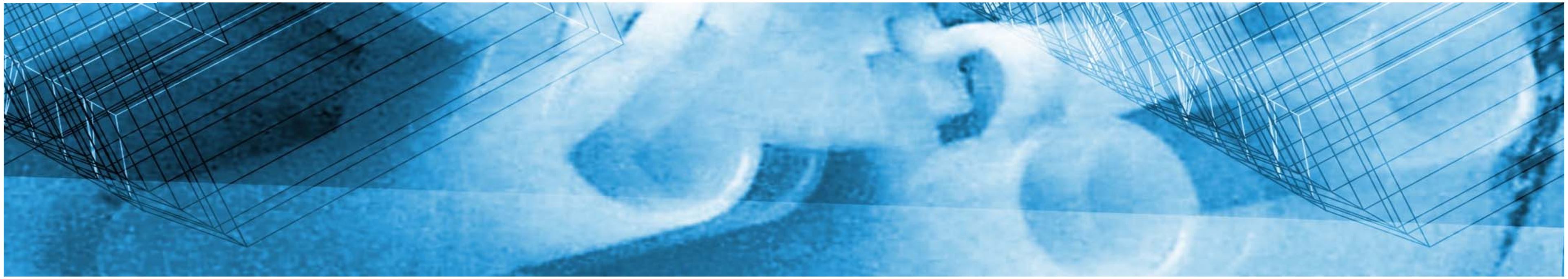
西南交通大学



信号与系统

韩志伟

上节课复习：

- 系统分析方法
- 算子及其性质
- 微分方程经典解法
- 线性系统时域响应

卷积积分

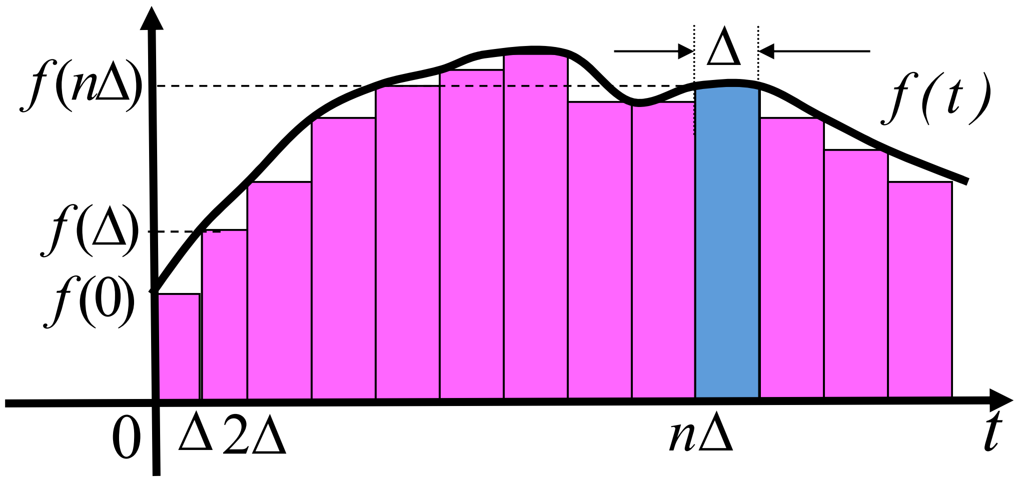
-卷积积分性质

-卷积积分

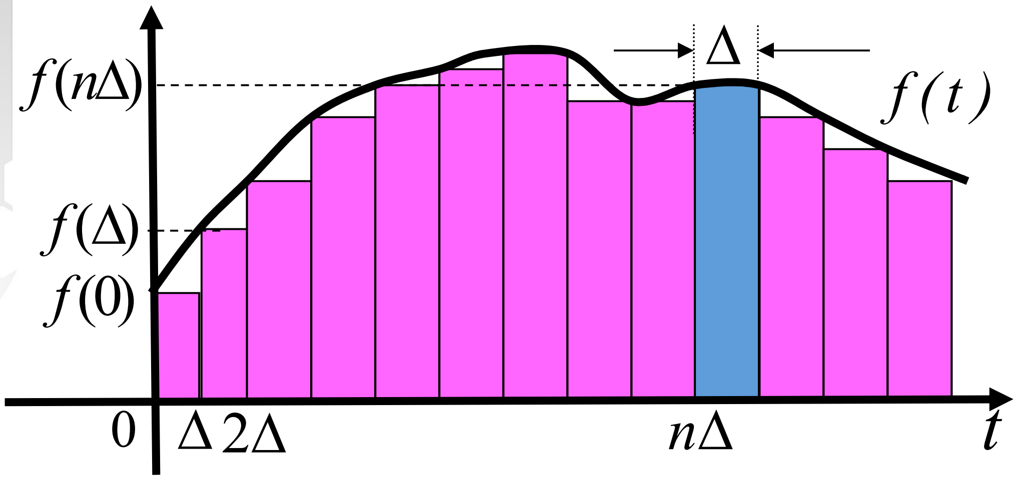
-卷积积分图解法

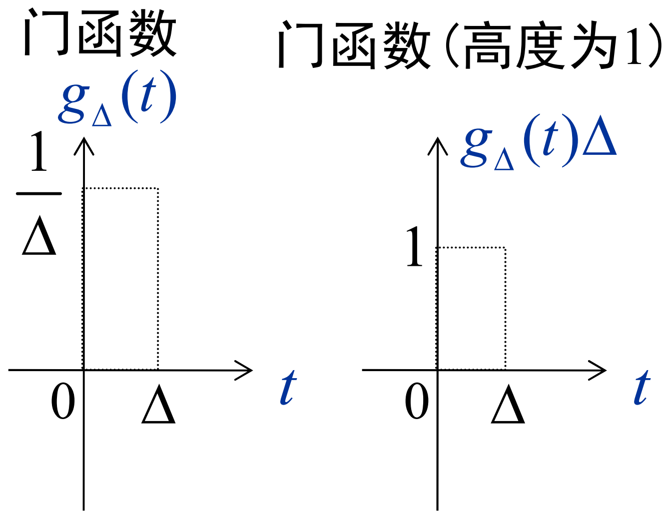
线性系统时域分析

1、连续信号的 $\delta(t)$分解



对一般信号$f(t)$，可以将其分成很多Δ宽度的区段，用一个阶梯信号$f_\Delta(t)$近似表示$f(t)$。当Δ→0时，有$f_\Delta(t) \to f(t)$





第零个矩形脉冲 $f(0)g_\Delta(t)\Delta$

第1个矩形脉冲 $f(\Delta)g_\Delta(t-\Delta)\Delta$

第n个矩形脉冲 $f(n\Delta)g_\Delta(t-n\Delta)\Delta$

$$f(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)g_\Delta(t-n\Delta)\Delta$$ 因为 $\lim_{\Delta\to 0} g_\Delta(t) = \delta(t)$

$$f(t) = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\Delta$$ 分解成冲激脉冲分量和

线性系统时域分析

$$f(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\Delta$$

当 $\Delta\to 0$ 时，即$\Delta\to d\tau, n\Delta$成为新变量 τ，求和变成对连续新变量 τ 的积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \qquad \text{抽样特性}$$

表明任意波形的信号可以表示为无限多个强度为

$f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的冲激信号 $\left[f(\tau)d\tau\right]\delta(t-\tau)$ 的积分，也就是说，

<u>**任意波形的信号可以分解为连续的加权冲激信号之和**</u>

线性系统时域分析

一般信号 $f(t)$ 激励下的零状态响应 $y_f(t)$

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

$$\delta(t-n\Delta) \rightarrow h(t-n\Delta)$$

$$f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\Delta \rightarrow f(n\Delta)h(t-n\Delta)\Delta$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\Delta \rightarrow \lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)h(t-n\Delta)\Delta$$

将 $y_f(t)$ 写成积分的形式，即得任意波形信号 $f(t)$ 作用于线性系统引起的零状态响应

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$f(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分

记为 $y_f(t) = f(t) * h(t)$

•卷积积分（Convolution）的定义

给定两个函数 $f_1(t)$和$f_2(t)$，由这两个函数构成积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

这个积分就定义为函数 $f_1(t)$和$f_2(t)$ 的卷积积分

简记为： $f_1(t) * f_2(t)$

1、卷积代数

(1) 交换律

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$$

例：$y_f(t)=f(t)*h(t)=h(t)*f(t)$

$$=\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

(2) 分配律

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

(3) 结合律

$$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$$

线性系统时域分析

2、卷积的微分和积分

(1) 微分

$$\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)] = f_1(t)*\frac{df_2(t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt}*f_2(t)$$

(2) 积分

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]d\tau = f_1(t)*\int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)d\tau * f_2(t)$$

(3) 微积分

$$\frac{df_1(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)d\tau = f_1(t)*f_2(\tau)$$

线性系统时域分析

2、卷积的微分和积分

(1) 微分

$$\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)] = f_1(t)*\frac{df_2(t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt}*f_2(t)$$

(2) 积分

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]d\tau = f_1(t)*\int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)d\tau * f_2(t)$$

(3) 微积分

$$\frac{df_1(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)d\tau = f_1(t)*f_2(\tau)$$

3、 $f(t)$ 与奇异信号的卷积

(1) $f(t)$ 与 $\delta(t)$ 的卷积

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

证明：$$f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)\delta(\tau)d\tau$$
$$=f(t)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)d\tau=f(t)$$

例： $$\delta(t)*\delta(t)=\delta(t)$$

推论 $$f(t)*\delta(t-T)=f(t-T)$$
$$f(t-T_1)*\delta(t-T_2)=f(t-T_1-T_2)$$
$$\delta(t-T_1)*\delta(t-T_2)=\delta(t-T_1-T_2)$$

(2) $f(t)$ 与 $u(t)$ 的卷积

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$

证明：

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$

推论

$$f(t)*u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0}f(\tau)d\tau$$

4、卷积时移

若 $f_1(t) * f_2(t) = y(t)$

则 $f_1(t-t_0) * f_2(t) = f_1(t) * f_2(t-t_0) = y(t-t_0)$

式中 t_0 为实常数

推论 $f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = y(t-t_1-t_2)$

式中 t_1和 t_2为实常数

例： $f(t) * \delta(t) = f(t) \quad f(t) * \delta(t-t_1) = f(t-t_1)$

二．卷积的计算

卷积积分的计算有解析法、图解法和数值解法。

1、卷积积分的解析法

例1：已知 $f(t)=u(t)$ $h(t)=[-2e^{-2t}+3e^{-3t}]u(t)$ 求 $y_f(t)$。

解： $y_f(t)=f(t)*h(t)=(-2e^{-2t}+3e^{-3t})u(t)*u(t)$

由性质 $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$

则 $y_f(t)=\int_{-\infty}^{t}(-2e^{-2\tau}+3e^{-3\tau})u(\tau)d\tau$

$$=\int_{0}^{t}(-2e^{-2\tau}+3e^{-3\tau})d\tau$$

$$=(e^{-2\tau}-e^{-3\tau})\Big|_0^t$$

$$=e^{-2t}-e^{-3t}\qquad t\geq 0$$

线性系统时域分析

2、卷积积分的图解法

两个信号的卷积积分可以利用定义式计算，也可以用图解的方法计算。

通过卷积积分的图形解释，很容易理解卷积运算。

用图解法直观，尤其是函数式复杂时，用解析式法作容易出错，通过图形帮助确定积分区间和积分上下限更为方便准确。

最好将图解法、解析法两种方法结合起来

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau$ 图解法步骤如下：

第1步： 变量替换。画出$f_1(t)$与$f_2(t)$波形，将图中t轴改换成τ轴，分别得到$f_1(\tau)$与$f_2(\tau)$的波形。

第2步： 翻转。将$f_2(\tau)$波形以纵轴为中心翻转180°，得到$f_2(-\tau)$的波形。

$-(\tau - t) = t - \tau$

第3步： 平移。将$f_2(-\tau)$沿时间轴τ平移t，变为$f_2(t-\tau)$。

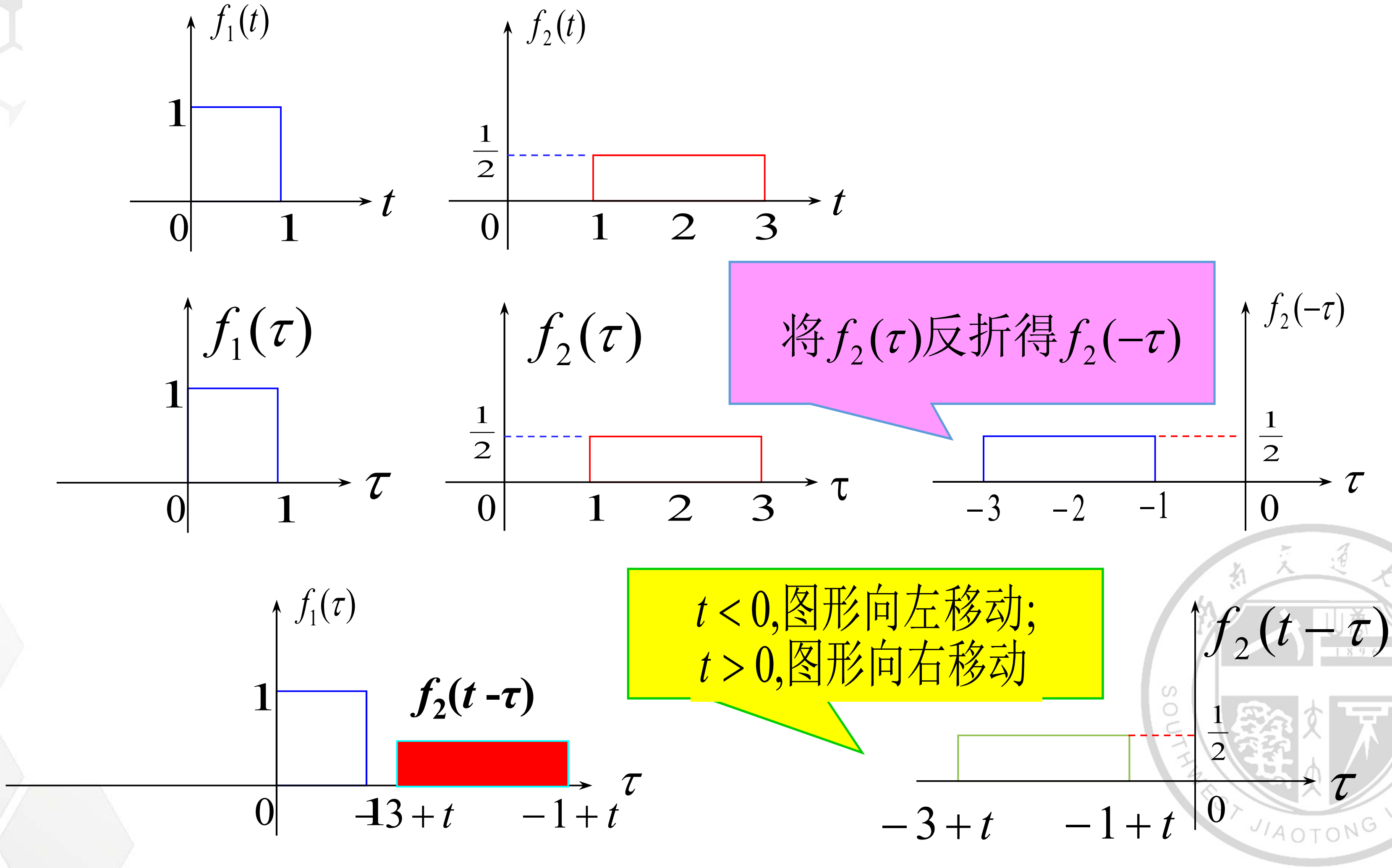
第4步： 相乘。将$f_1(\tau)$与$f_2(t-\tau)$相乘得卷积积分式中的被积函数$f_1(\tau) f_2(t-\tau)$。

第5步： 计算乘积信号$f_1(\tau) f_2(t-\tau)$波形与τ轴之间的面积，即卷积在t时刻的值。

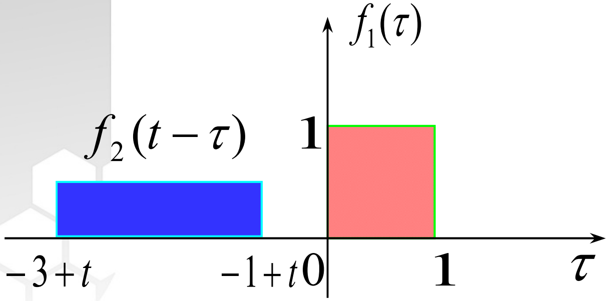
第6步： 令变量t在$(-\infty, \infty)$范围内变化，重复第3、4、5步，最终得到卷积信号$f_1(t) * f_2(t)$的值。

线性系统时域分析

例2：计算 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$



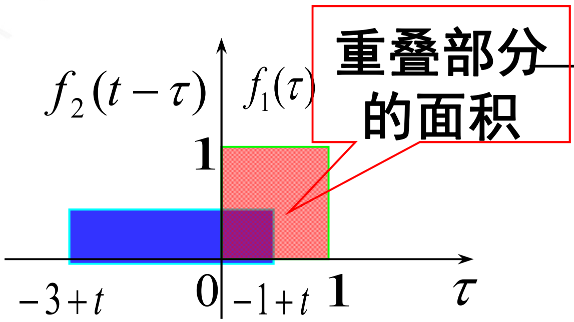
线性系统时域分析



当 $-1+t<0$ 即 $t<1$ 时：

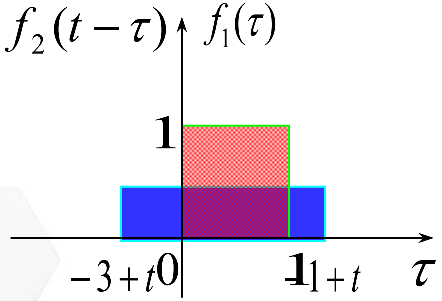
$f_2(t-\tau)$ 和 $f_1(\tau)$ 没有公共的重叠部分，

故卷积 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)=0$



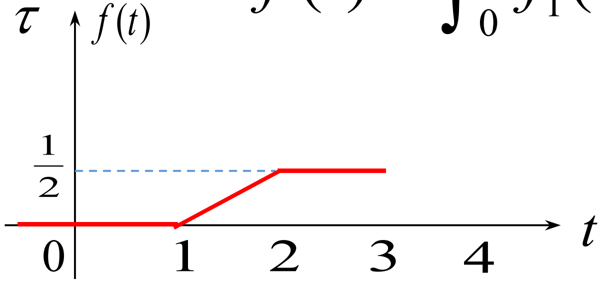
当 $0\le -1+t<1$ 即 $1\le t<2$ 时：

$$f(t)=\int_0^{-1+t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^{-1+t}1\times\frac{1}{2}d\tau=\frac{1}{2}(t-1)$$

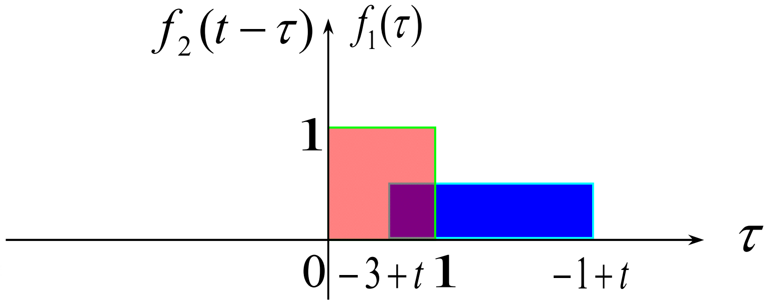


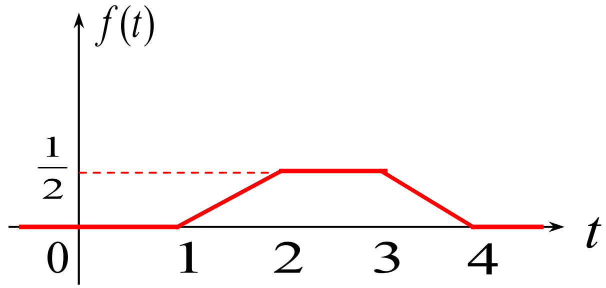
当 $1\le -1+t$ 且 $-3+t<0$ 即 $2\le t<3$ 时：

$$f(t)=\int_0^{1} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^{1}1\times\frac{1}{2}d\tau=\frac{1}{2}$$



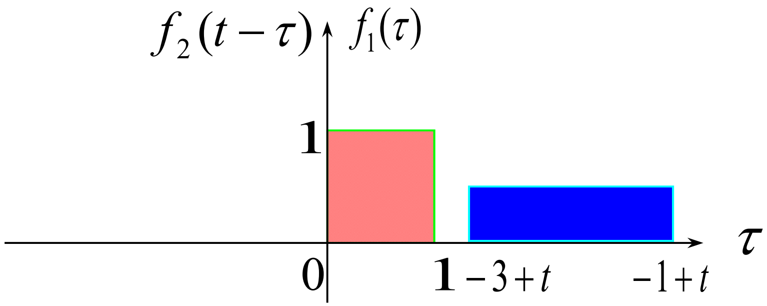
线性系统时域分析





当 $0 \le -3+t < 1$ 即 $3 \le t < 4$ 时：

$$f(t)=\int_{-3+t}^{1} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau=\int_{-3+t}^{1} 1\times\frac{1}{2} d\tau=\frac{1}{2}(4-t)$$



当 $-3+t \ge 1$ 即 $t \ge 4$ 时：

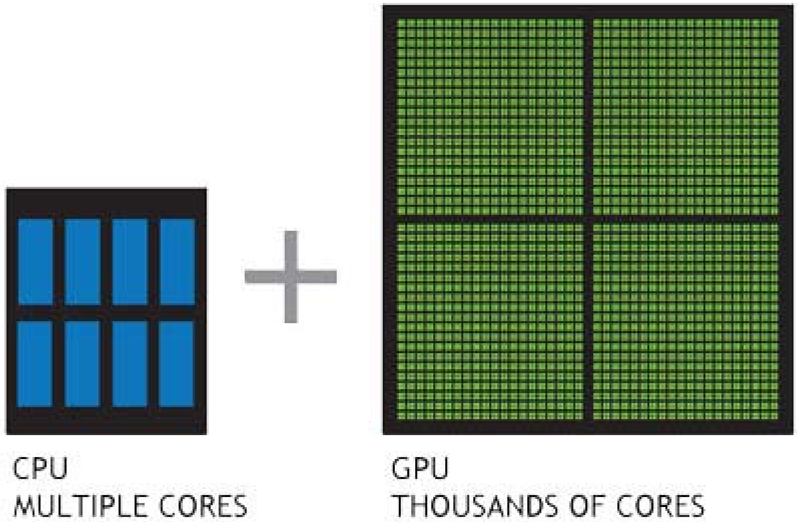
$f_2(t-\tau)$ 和 $f_1(\tau)$ 没有公共的重叠部分，

故卷积 $f(t)=f_1(t) * f_2(t)=0$

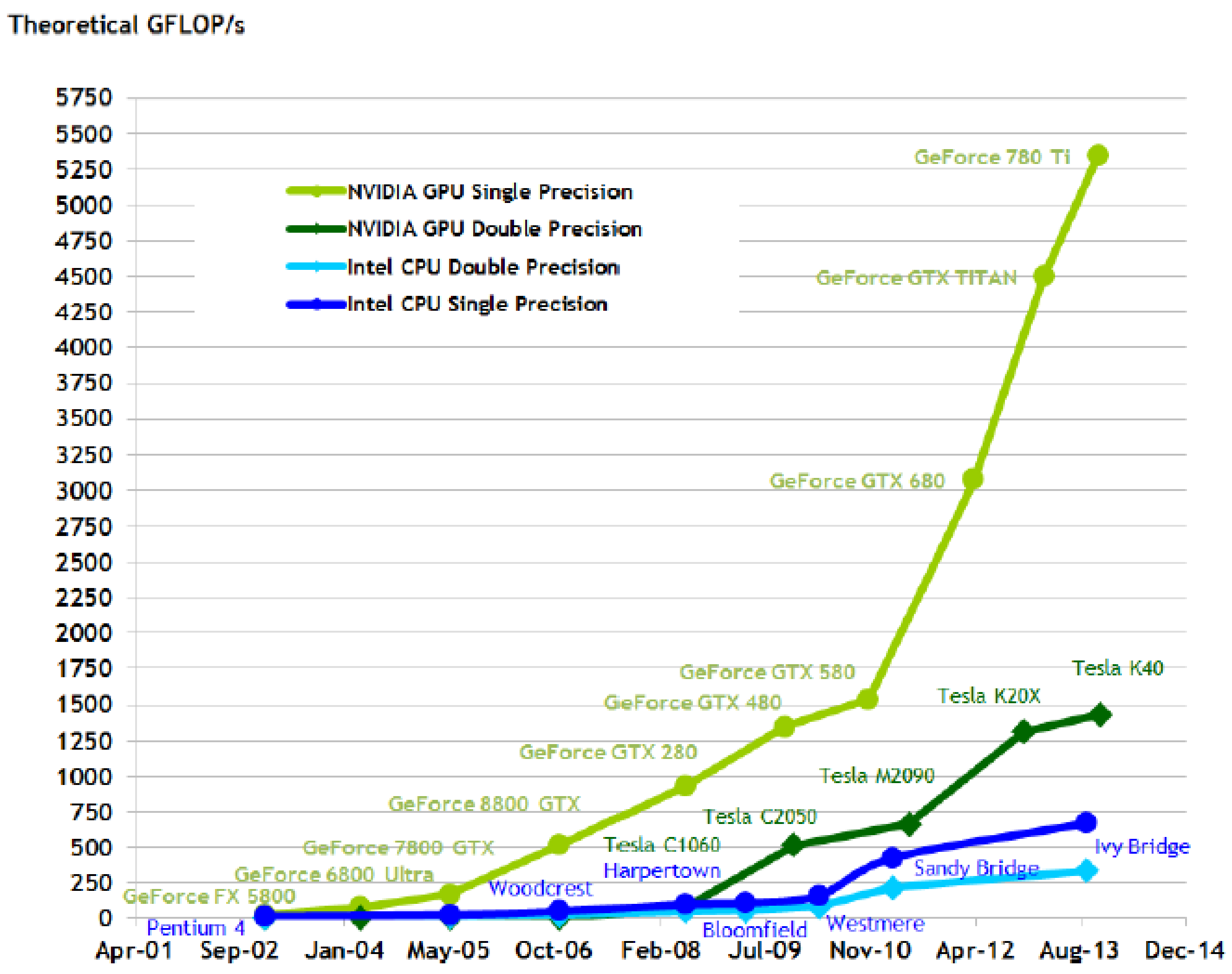
线性系统时域分析


中国超级计算机再夺世界第一

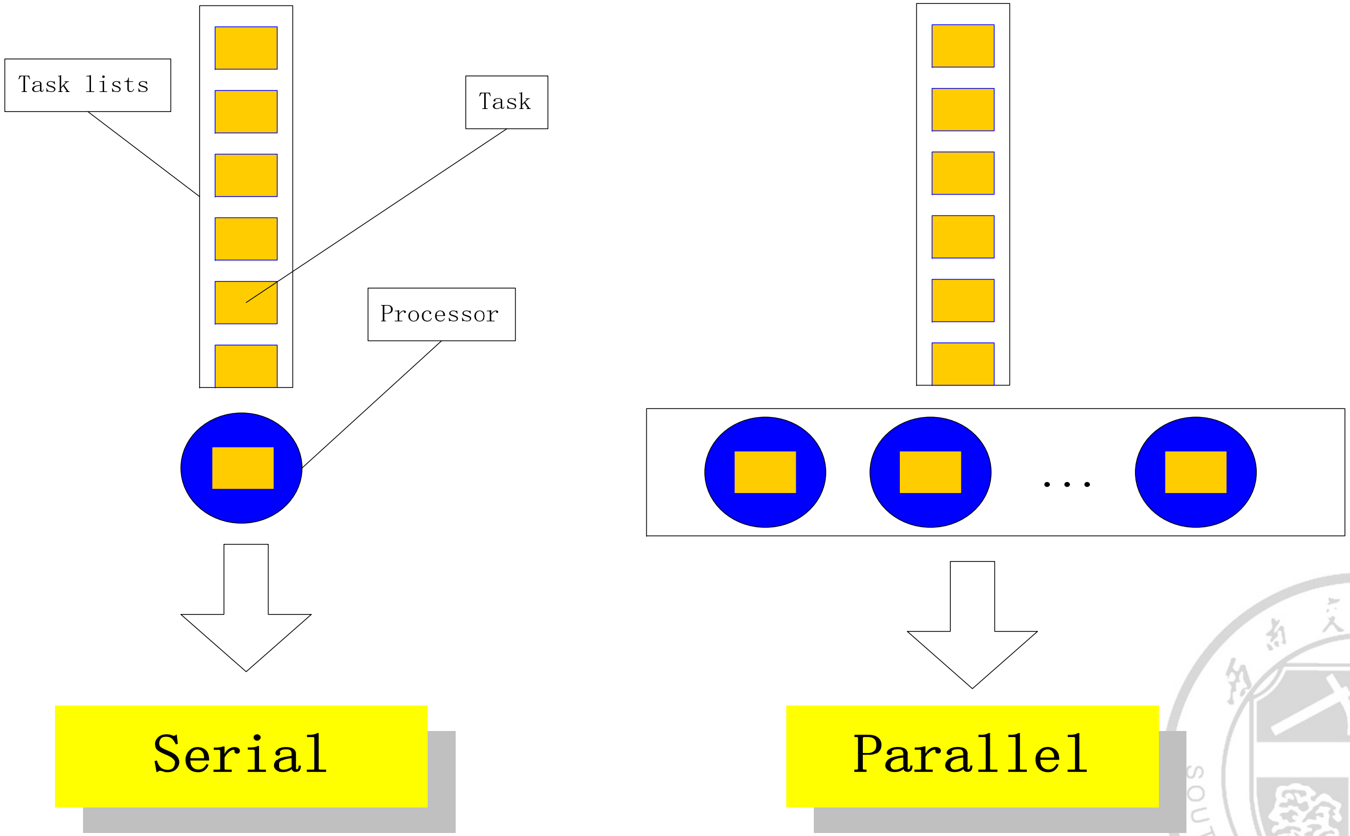
天河二号 运算1小时 相当于 13亿人用计算器 算1000年



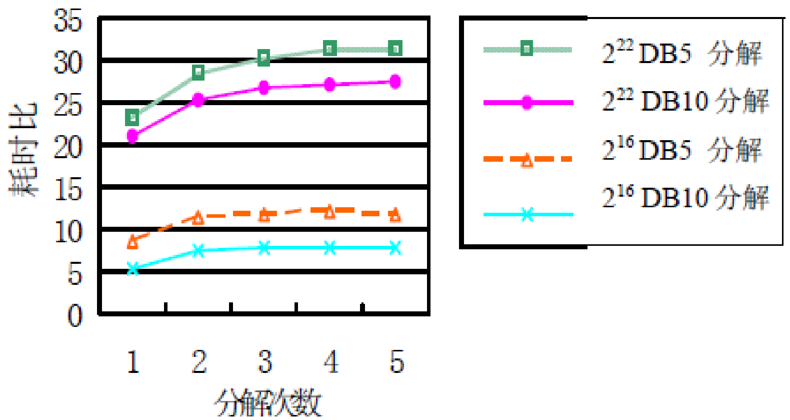
线性系统时域分析


Theoretical GFLOP/s
5750
5500
5250
5000
4750
4500
4250
4000
3750
3500
3250
3000
2750
2500
2250
2000
1750
1500
1250
1000
750
500
250
0
NVIDIA GPU Single Precision
NVIDIA GPU Double Precision
Intel CPU Double Precision
Intel CPU Single Precision
GeForce 780 Ti
GeForce GTX TITAN
GeForce GTX 680
GeForce GTX 580
GeForce GTX 480
GeForce GTX 280
GeForce 8800 GTX
GeForce 7800 GTX
GeForce 6800 Ultra
GeForce FX 5800
Tesla K40
Tesla K20X
Tesla M2090
Tesla C2050
Tesla C1060
Harpertown
Woodcrest
Pentium 4
Bloomfield
Westmere
Sandy Bridge
Ivy Bridge
Apr-01
Sep-02
Jan-04
May-05
Oct-06
Feb-08
Jul-09
Nov-10
Apr-12
Aug-13
Dec-14

- What is the parallel compute?
-



线性系统时域分析



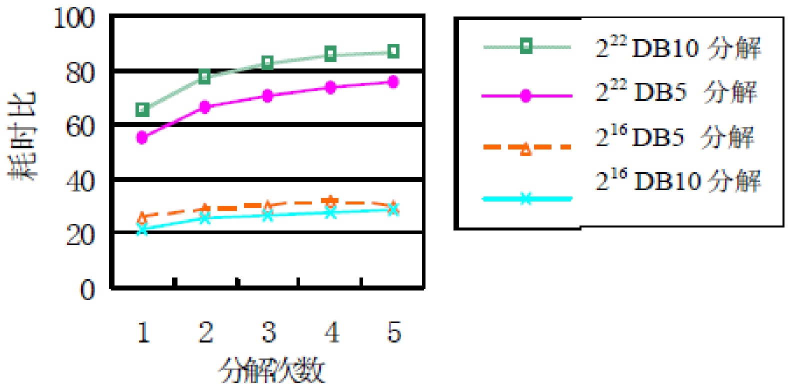


表 1 2^{16} 数据 DB5 小波分解耗时

Tab 1 2^{16}data DB5 wavelet decomposition time

算法	分解次数	1	2	3	4	5
并行	CUDA 并行算法	0.81	0.92	1.05	1.08	1.15
串行	CPU 串行算法	6.9	10.5	12.2	13	13.4
	Matlab engine 计算	20.8	26.6	30.9	33.9	34.1

表 2 2^{16} 数据 DB10 小波分解耗时

Tab 2 2^{16}data DB10 wavelet decomposition time

算法	分解次数	1	2	3	4	5
并行	CUDA 并行算法	1.26	1.42	1.57	1.65	1.71
串行	CPU 串行算法	6.9	10.5	12.1	13.1	13.5
	Matlab engine 计算	27.1	36.7	41.2	45.7	48.3

表 3 2^{22} 数据 DB5 小波分解耗时

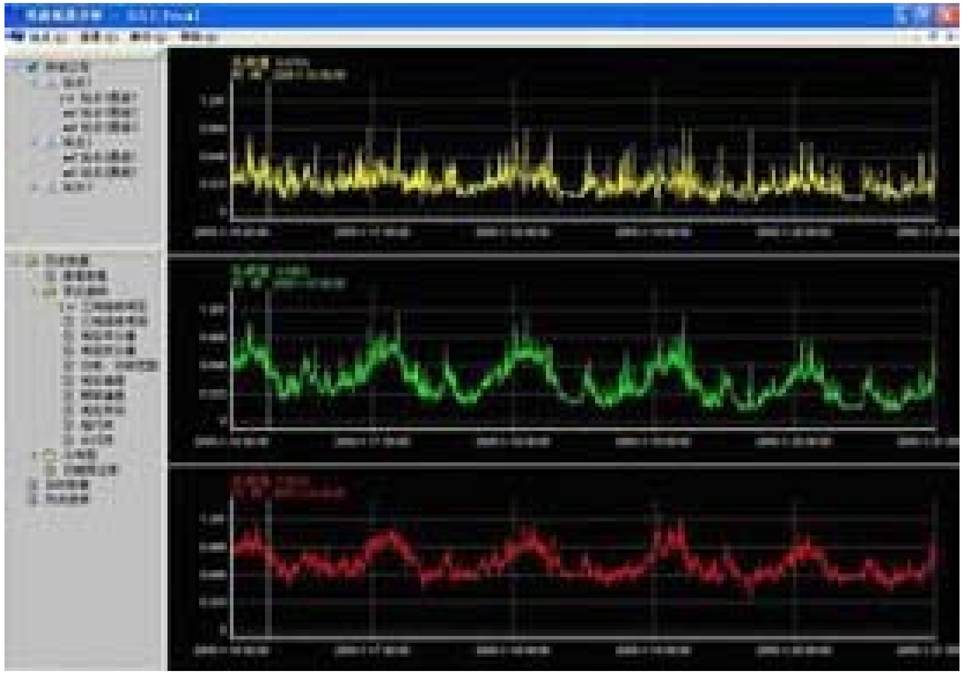
Tab 3 2^{22}data DB5 wavelet decomposition time

算法	分解次数	1	2	3	4	5
并行	CUDA 并行算法	21.2	25.8	28.4	29.5	30.4
串行	CPU 串行算法	492.3	740.1	866.4	925.2	956.6
	Matlab engine 计算	11733	17052	1997	21743	22804

表 4 2^{22} 数据 DB10 小波分解耗时

Tab 4 2^{22}data DB10 wavelet decomposition time

算法	分解次数	1	2	3	4	5
并行	CUDA 并行算法	23.2	28.9	31.8	33.5	34.6
串行	CPU 串行算法	486.2	733.2	856.3	913.9	947.5
	Matlab engine 计算	15209	22446	26335	28552	29942



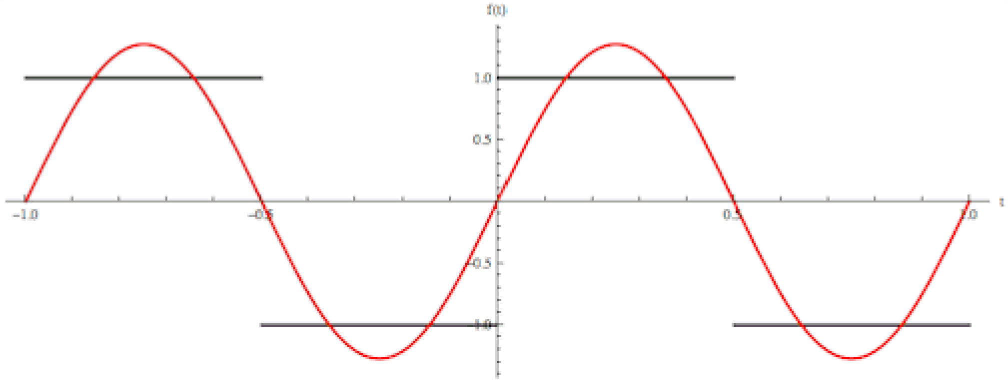

Agilent Technologies
CXA Signal Analyzer
CXA
Occupied Bandwidth
4.1334 MHz
Total Power

第3章

线性系统频域分析

线性系统频域分析

线性系统频域分析



$f(t) = \frac{4\,Sin[2\pi t]}{\pi}$

§3.1 周期信号的频谱分析
——傅里叶级数

- 三角形式的傅里叶级数
- 指数形式的傅里叶级数

一．三角形式的傅里叶级数形式

周期信号 $f(t)$，周期为 T，基波角频率为 $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$

在满足狄里赫利条件时，可展成

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t\right) \qquad (1)$$

称为三角形式的傅里叶级数，其系数

直流分量 $$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

余弦分量的幅度 $$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_1 t\,\mathrm{d}t$$

正弦分量的幅度 $$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega_1 t\,\mathrm{d}t$$

利用三角函数的边角关系，还可以将一般三角形式化为标准的三角形式

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos n\omega_0 t-\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin n\omega_0 t\right]$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(\cos\phi_n\cos n\omega_0 t-\sin\phi_n\sin n\omega_0 t)$$

$$=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n)$$

线性系统频域分析

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t\right) \qquad (1)$$

余弦形式

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(n\omega_1 t + \varphi_n\right) \qquad (2)$$

$$c_0 = a_0 \qquad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \phi_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

$$a_n = c_n \cos\varphi_n \qquad b_n = -c_n \sin\varphi_n$$

正弦形式

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(n\omega_1 t + \theta_n\right) \qquad (3)$$

$$d_0 = a_0 \qquad d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \theta_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$a_n = d_n \sin\theta_n \qquad b_n = d_n \cos\theta_n$$

已知周期信号$f(t)$如下，画出其频谱图。

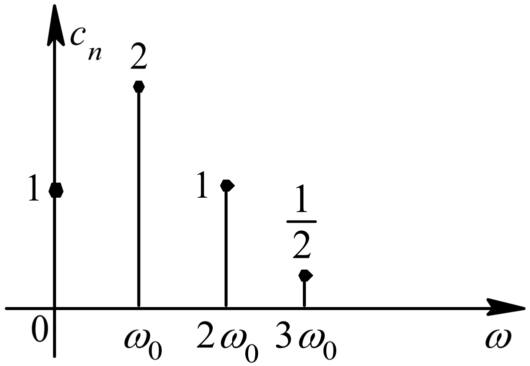
$$f(t)=1+\sqrt{2}\cos\omega_0 t-\cos(2\omega_0 t+\frac{5\pi}{4})+\sqrt{2}\sin\omega_0 t+\frac{1}{2}\sin 3\omega_0 t$$

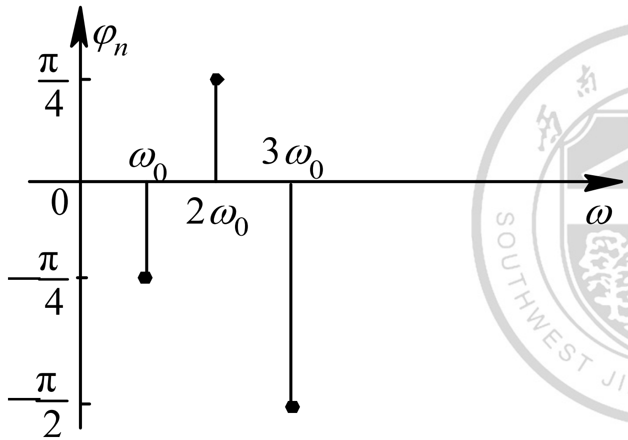
解 将$f(t)$整理为标准形式

$$f(t)=1+2\cos(\omega_0 t-\frac{\pi}{4})+\cos(2\omega_0 t-\frac{5\pi}{4}-\pi)+\frac{1}{2}\cos(3\omega_0 t-\frac{\pi}{2})$$

$$=1+2\cos(\omega_0 t-\frac{\pi}{4})+\cos(2\omega_0 t-\frac{5\pi}{4})+\frac{1}{2}\cos(3\omega_0 t-\frac{\pi}{2})$$

振幅谱与相位谱如图3.1-1所示。





二．指数形式的傅里叶级数

1、指数形式的级数

$$\cos n\omega_0 = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0})$$

$$\sin n\omega_0 = \frac{1}{j2}(e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0})$$

$$e^{\pm jn\omega_0} = \cos n\omega_0 \pm j\sin n\omega_0$$

$$a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t$$

$$= a_n \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{2j}$$

$$= \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \qquad -\infty < t < \infty$$

令 $a_0 = F_0 \qquad F_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2} \qquad F_{-n} = \dfrac{a_n + jb_n}{2}$

则 $a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = F_n e^{jn\omega_1 t} + F_{-n} e^{-jn\omega_1 t}$

$$a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = F_n e^{jn\omega_1 t} + F_{-n} e^{-jn\omega_1 t}$$

$$\therefore f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t\right)$$

$$= F_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[F_n e^{jn\omega_1 t} + F_{-n} e^{-jn\omega_1 t}]$$

$$= F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \qquad -\infty < t < \infty$$

傅里叶级数的复指数形式

F_n为傅里叶级数系数，通过F_n，周期函数$f(t)$被表示成不同频率虚指数信号之和。

三角傅里叶级数和指数傅里叶级数虽形式不同，但实际上都属于同一性质的级数，即都是将一信号表示为直流分量和各次谐波分量之和。

连续时间傅里叶级数变换对：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \, e^{jn\omega_1 t} \qquad (4)$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{T} f(t) \, e^{-jn\omega_1 t} dt \qquad (5)$$

指数形式与三角形式系数之间的关系为

$$F_0 = a_0 = c_0$$

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{2}c_n e^{j\phi_n}$$

$$F_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{2}c_n e^{-j\phi_n}$$

$$|F_n| = \frac{1}{2}c_n = |F_{-n}|$$

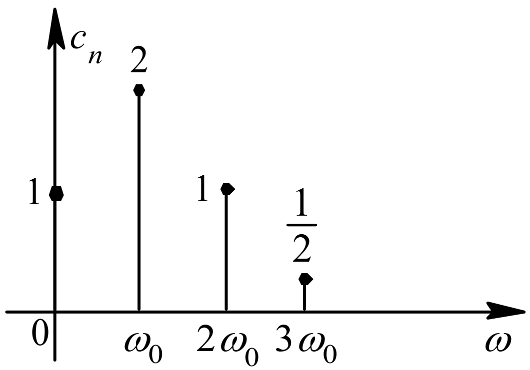
$$\phi_n = -\arctan\frac{b_n}{a_n}$$

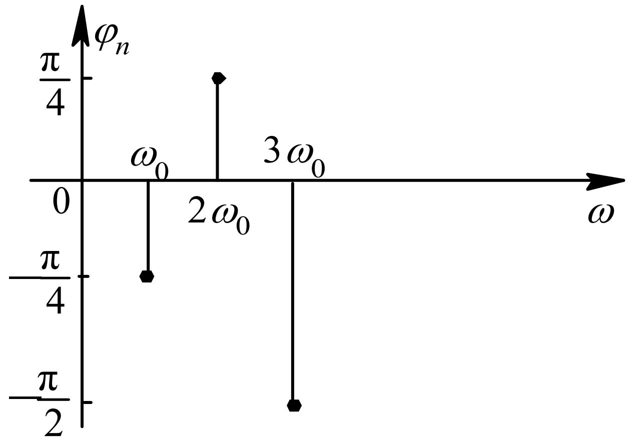
$$F_n + F_{-n} = 2\,\mathrm{Re}[F_n] = a_n$$

$$j(F_n - F_{-n}) = j2\,\mathrm{Im}[F_n] = b_n$$

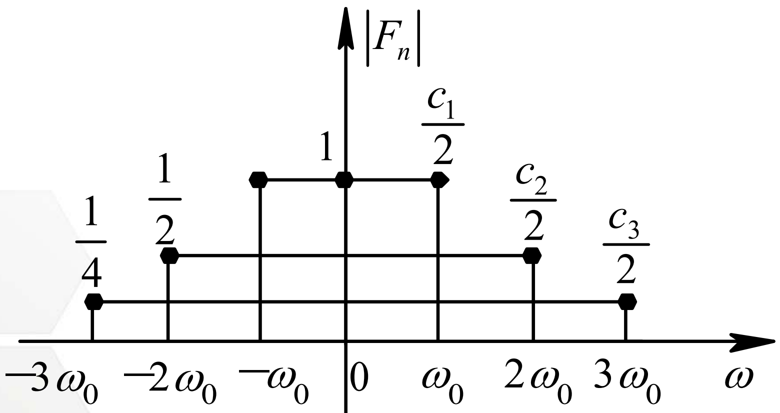
线性系统频域分析

三角形式频谱　　单边谱

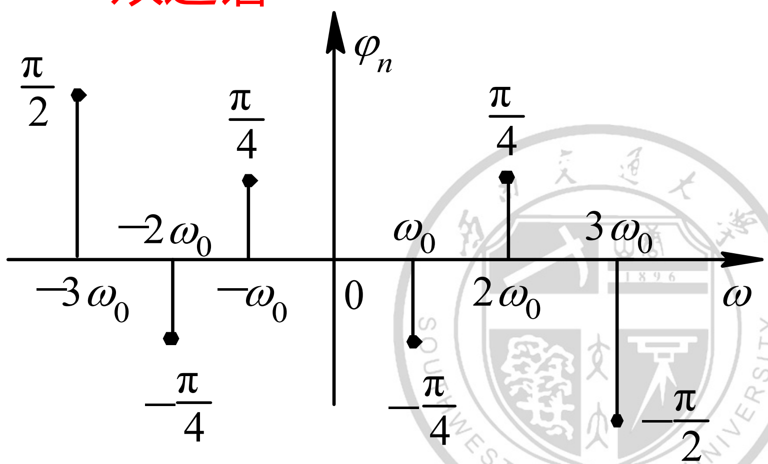




指数形式频谱　　双边谱



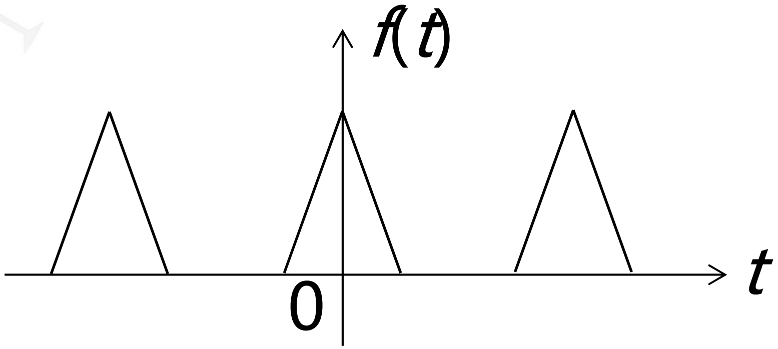
(a)

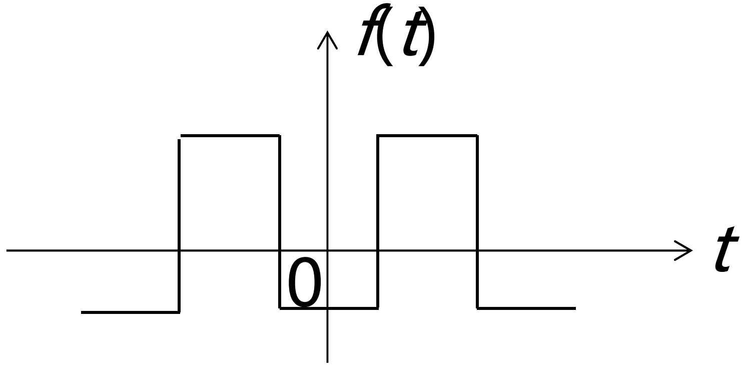


(b)

三、波形的对称性与傅里叶级数系数的关系

1．偶函数：$f(t)=f(-t)$ 纵轴对称



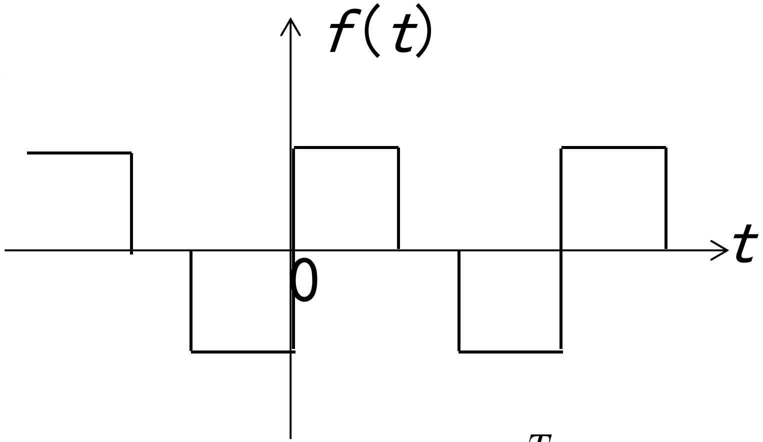


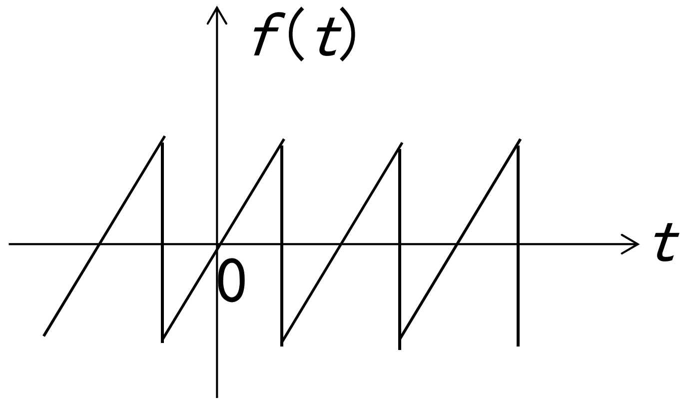
$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t dt=0$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t dt=\frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t dt$$

只有恒定分量和余弦项

2．奇函数 $f(t)=-f(-t)$ 原点对称





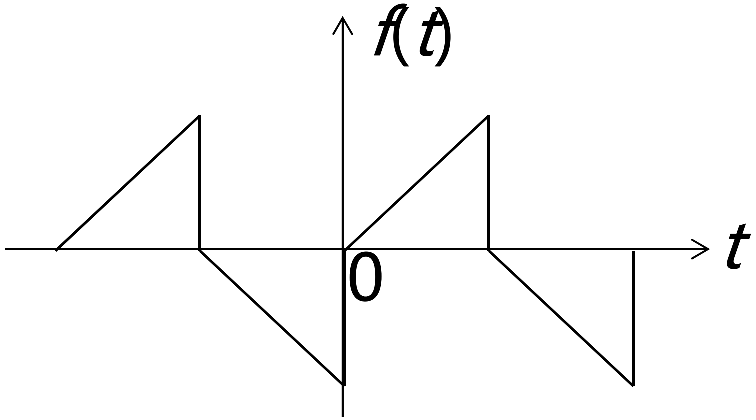
$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t dt=0$$

$$b_n=\frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t dt$$

只有正弦项

3．奇谐波函数

$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$$ 镜像对称



k=0、2、4…时，a_k=0，b_k=0

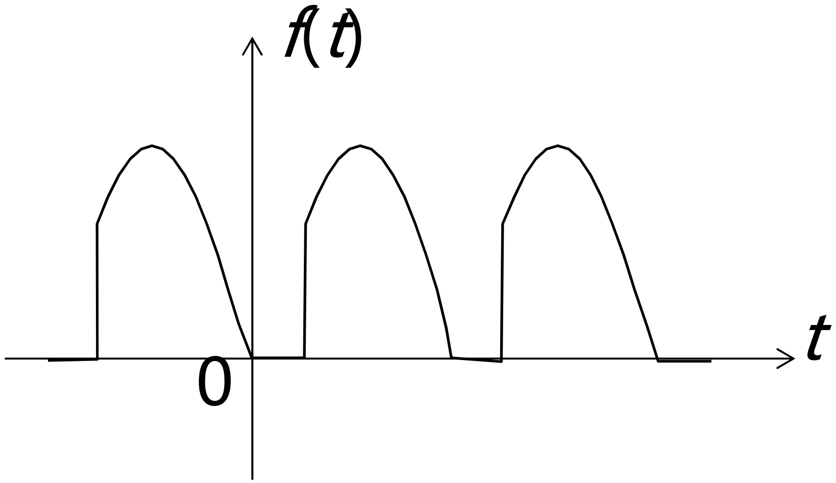
k=1、3、5…时，a_k、b_k有值

- 电力系统中，一般地讲，奇次谐波引起的危害比偶次谐波更多更大。
- 在平衡的三相系统中，由于对称关系，偶次谐波已经被消除了，只有奇次谐波存在
- 对于三相整流负载，谐波电流是6n±1次谐波，例如5、7、11、13、17、19等
- 变频器主要产生5、7次谐波

线性系统频域分析

4．偶谐波函数

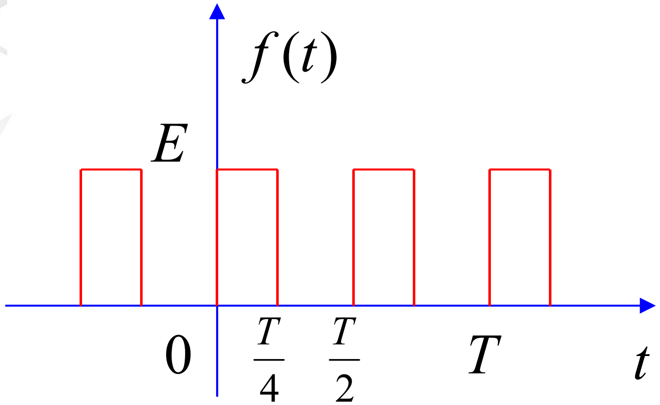
$$f(t)=f\left(t\pm\frac{T}{2}\right)$$ 前后半周波形重合



***k*=1、3、5…a_k=0，b_k=0**

***k*=2、4、6…a_k、b_k有值**

例：已知波形如图，求傅里叶级数展开式。



解:

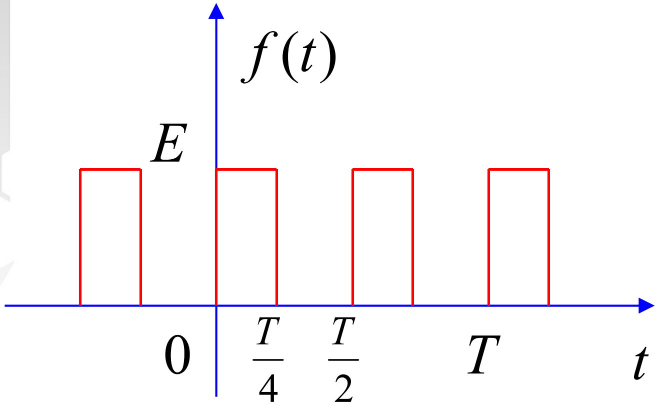
$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}}Edt+\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}}Edt\right)$$

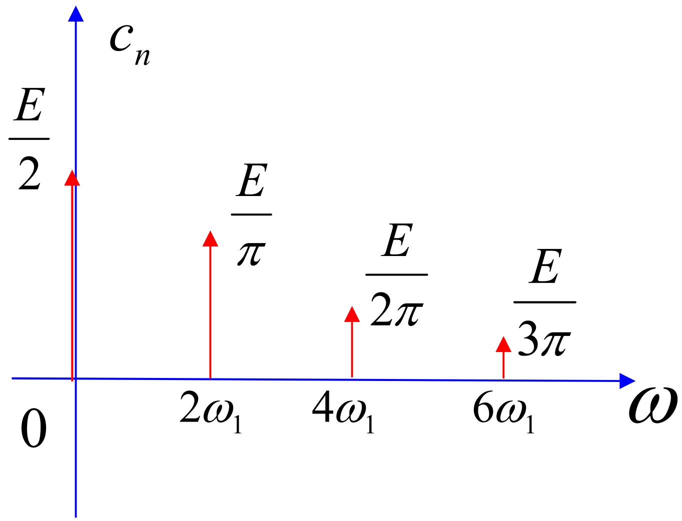
$$=\frac{E}{T}\left(\frac{T}{4}+\frac{3T}{4}-\frac{T}{2}\right)=\frac{E}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}}E\cos n\omega_1 tdt+\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}}E\cos n\omega_1 tdt\right)$$

$$=\frac{2E}{T}\left(\frac{1}{n\omega_1}\sin n\omega_1\cdot\frac{T}{4}+\frac{1}{n\omega_1}\sin n\omega_1\cdot\frac{3T}{4}-\frac{1}{n\omega_1}\sin n\omega_1\cdot\frac{T}{2}\right)$$

$$=\frac{E}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{3n\pi}{2}\right)=0$$





$$a_0 = \frac{E}{2} \qquad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} E\sin n\omega_1 t dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} E\sin n\omega_1 t dt\right)$$

$$= -\frac{E}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1 + \cos\frac{3n\pi}{2} - \cos n\pi\right)$$

$$= \frac{E}{n\pi}(1+\cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} 0 & n\text{为奇数} \\ \dfrac{2E}{n\pi} & n\text{为偶数} \end{cases}$$

$$\therefore \quad f(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi}\sum_{n=2j}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{T}t \qquad j = 1、2、\cdots$$

线性系统频域分析

序号	对称条件	傅氏系数(仅有不为零的系数)
1	偶函数	$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$
2	奇函数	$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$
3	奇谐函数	$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$ n 为奇数 $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$ n 为奇数
4	偶谐函数	$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$ n 为偶数 $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$ n 为偶数
5	奇函数、奇谐函数	$b_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$ n 为奇数
6	奇函数、偶谐函数	$b_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$ n 为偶数
7	偶函数、奇谐函数	$a_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$ n 为奇数
8	偶函数、偶谐函数	$a_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$ n 为偶数

§3.2 周期信号的频谱

1. 频谱的概念

三角形式 $$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\left(n\omega_1 t+\varphi_n\right)$$

指数形式 $$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$$

周期信号的频率分量总体称为信号的频谱，或周期信号所有谐波分量随频率的分布。

不同的时域信号，只是傅里叶级数的系数c_n、φ_n和F_n不同，因此通过研究傅里叶级数的系数来研究信号的特性。

系数c_n、φ_n和F_n反映了组成信号各次谐波的幅度和相位随频率变化的规律。

2. 频谱的表示

直接画出信号各次谐波对应的振幅c_n($|F_n|$)及相位φ_n随ω变化的曲线，这种线状分布图形称为信号的频谱图。

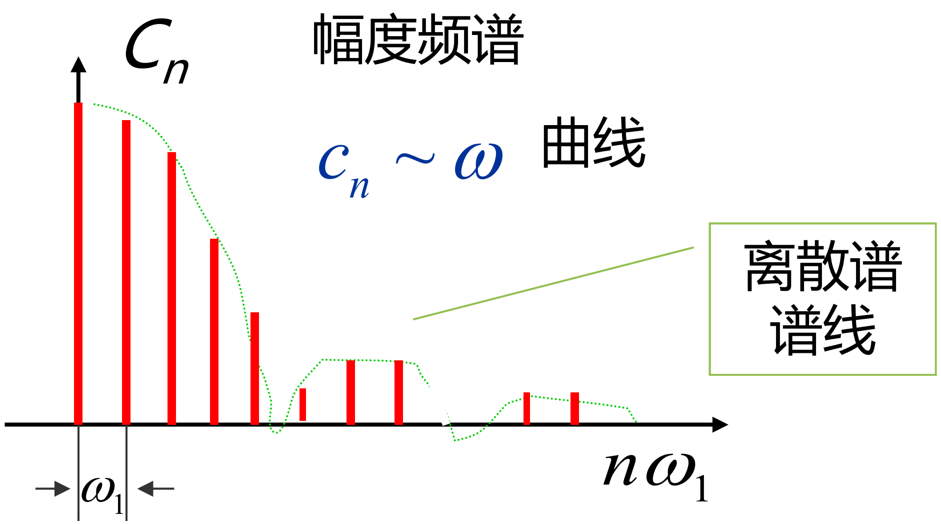
- 三角函数形式频谱
- 指数函数形式频谱

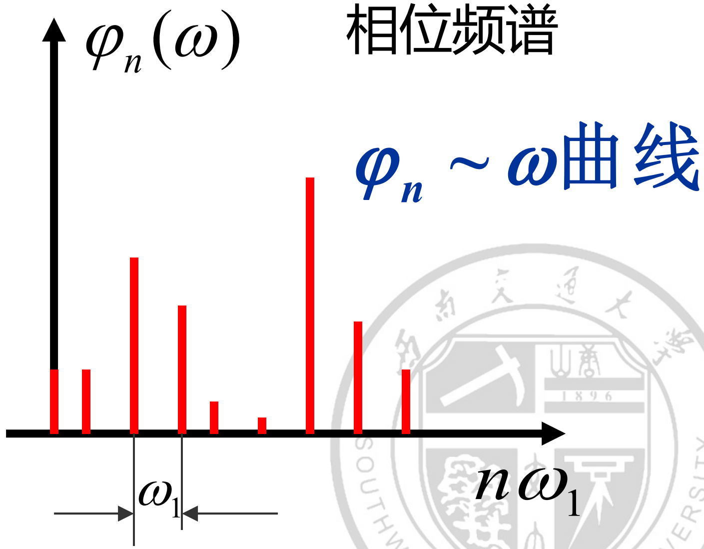
（1）三角函数形式频谱

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(n\omega_1 t + \varphi_n\right)$$

$C_n \sim \omega$ 关系曲线称为幅度频谱图

$\varphi_n \sim \omega$ 关系曲线称为相位频谱图





单边频谱：频谱图总在ω≥0的半平面上。

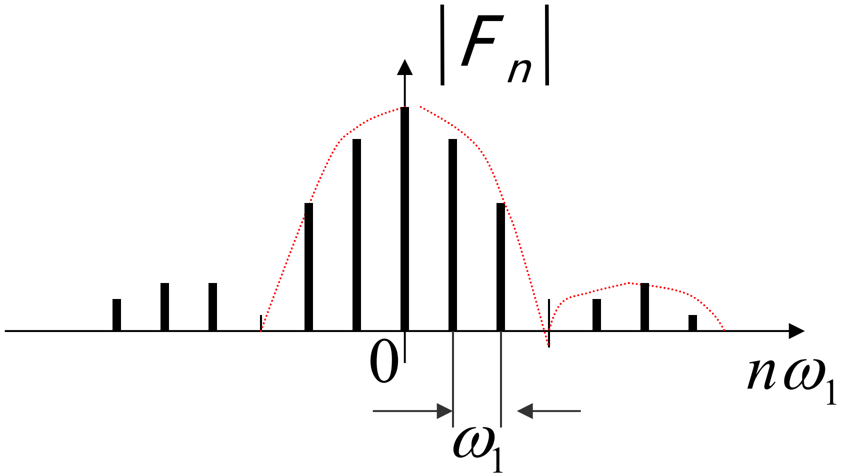
(2) 指数函数形式频谱

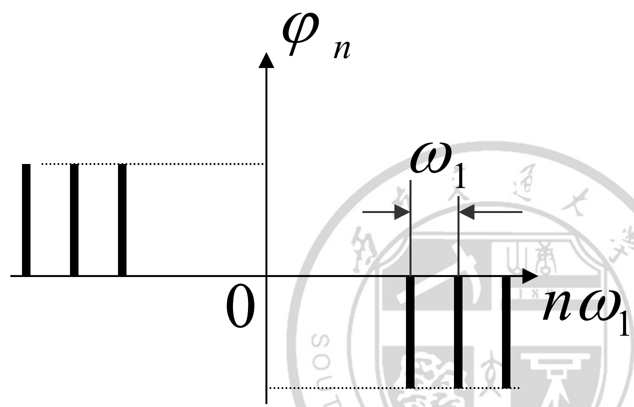
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n=|F_n|e^{j\varphi_n}$$

$|F_n|\sim\omega$ 关系曲线称为幅频图

$\varphi_n\sim\omega$ 关系曲线称为相频图





双边频谱：$n\omega_1$ 由-∞到+∞在整个ω轴变化

(3) 两种频谱图的关系

三角函数形式： $c_n \sim \omega, \quad \varphi_n \sim \omega$ 单边频谱

指数函数形式： $|F_n| \sim \omega, \quad \varphi_n \sim \omega$ 双边频谱

- 幅频特性 $|F_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2}c_n \ (n \neq 0) \quad F_0 = a_0 = c_0$

幅度谱为偶函数 $|F_n| = |F_{-n}|$

- 相频特性 $\varphi_n = tg^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$

相位频谱为奇函数 $\varphi(n\omega_1) = -\varphi(-n\omega_1)$

3、 周期信号频谱的特点

离散性：频谱由不连续的谱线组成，每一条谱线代表一个正弦分量

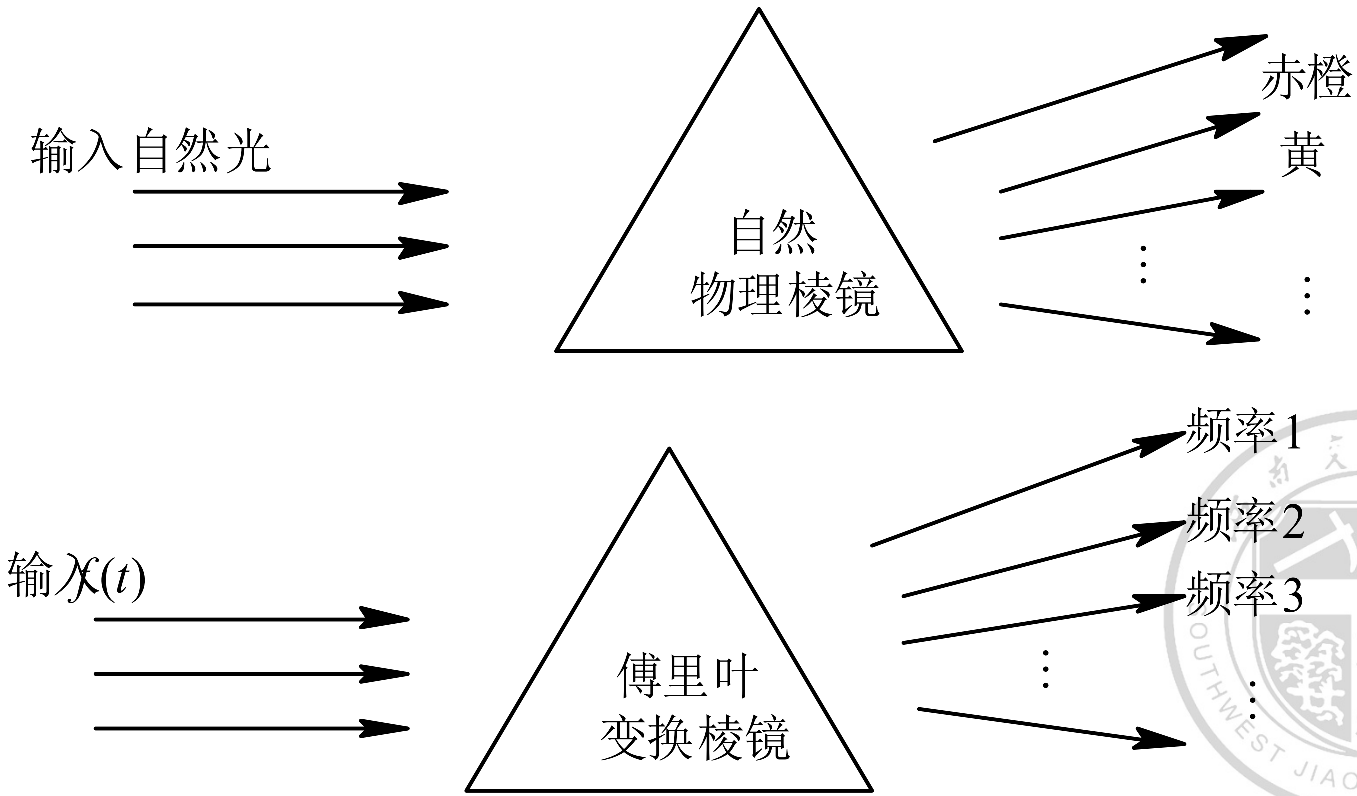
谐波性：每一条谱线只能出现在基波频率的整数倍频率上，即只有基波频率的各次谐波分量

收敛性：即各次谐波分量的振幅随着谐波次数的增大而逐渐减小。

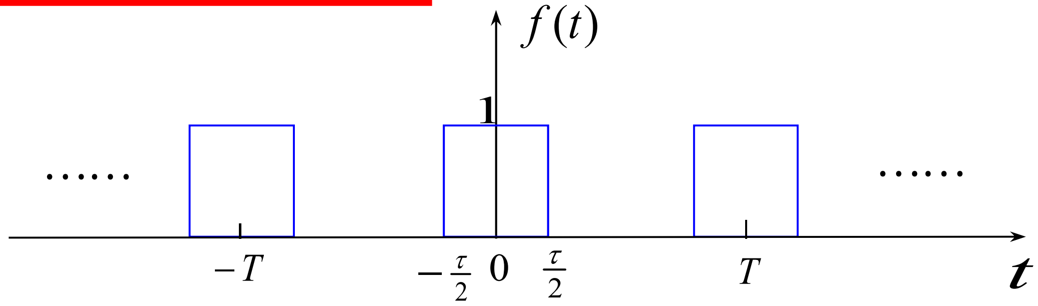
注意：冲激函数序列的频谱不满足收敛性。

线性系统频域分析

一个棱镜,它把一个信号函数分解为众多的频率分量。 这些频率分量又可以重构原来的信号函数。 这种变换是可逆的且保持能量不变。



周期矩形脉冲的频谱



$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-jn\omega_1 t}dt=\frac{1}{T}\cdot\left.\frac{e^{-jn\omega_1 t}}{-jn\omega_1}\right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{2}{T}\cdot\frac{\sin\frac{n\omega_1\tau}{2}}{n\omega_1}=\frac{\tau}{T}\cdot\frac{\sin\frac{n\omega_1\tau}{2}}{\frac{n\omega_1\tau}{2}}$$

$$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$Sa(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 为抽样函数信号，当 $x\to0$ 时 $Sa(0)=1$，

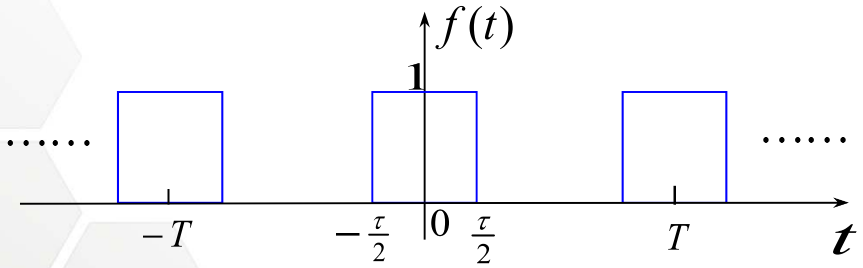
频谱为：$$F_n=\frac{\tau}{T}Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\qquad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$$

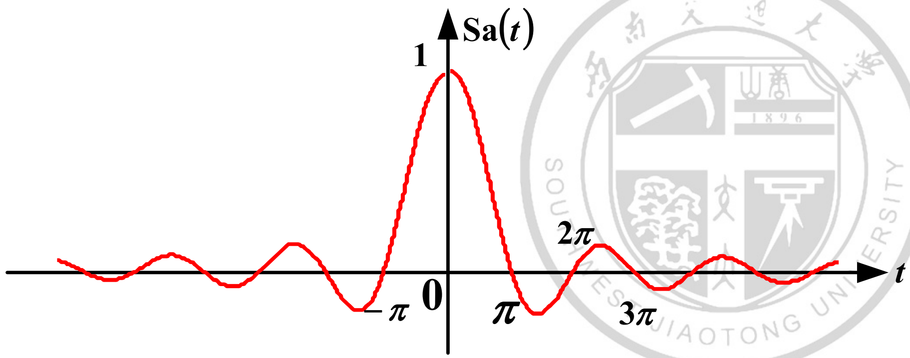
$$F_n = \frac{\tau}{T} Sa(\frac{n\omega_1\tau}{2})$$

其中：$\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$ 为基波频率

F_n 在 $\omega = n\omega_1$ 有值

$Sa(\dfrac{\omega\tau}{2})$ 为包络线，$\dfrac{\omega\tau}{2} = m\pi$ 即 $\omega = \dfrac{2m\pi}{\tau}$ 处为零

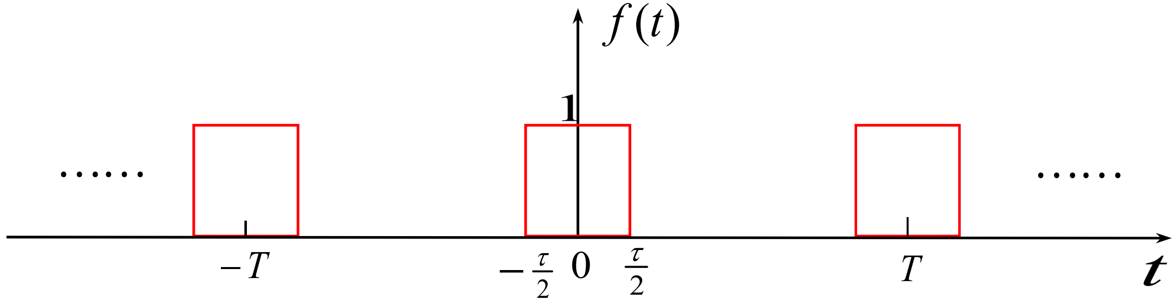




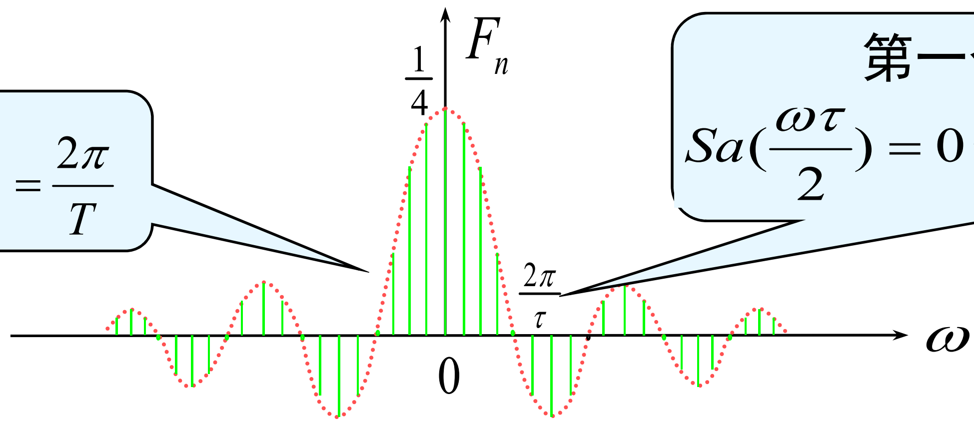
周期T不变，脉冲宽度τ变化 ①

情况 1：$\tau = \dfrac{T}{4},\ F_n = \dfrac{\tau}{T} Sa(\dfrac{n\pi\tau}{T}) = \dfrac{1}{4} Sa(\dfrac{n\pi}{4})$

第一个过零点为 n =4



谱线间隔 $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$



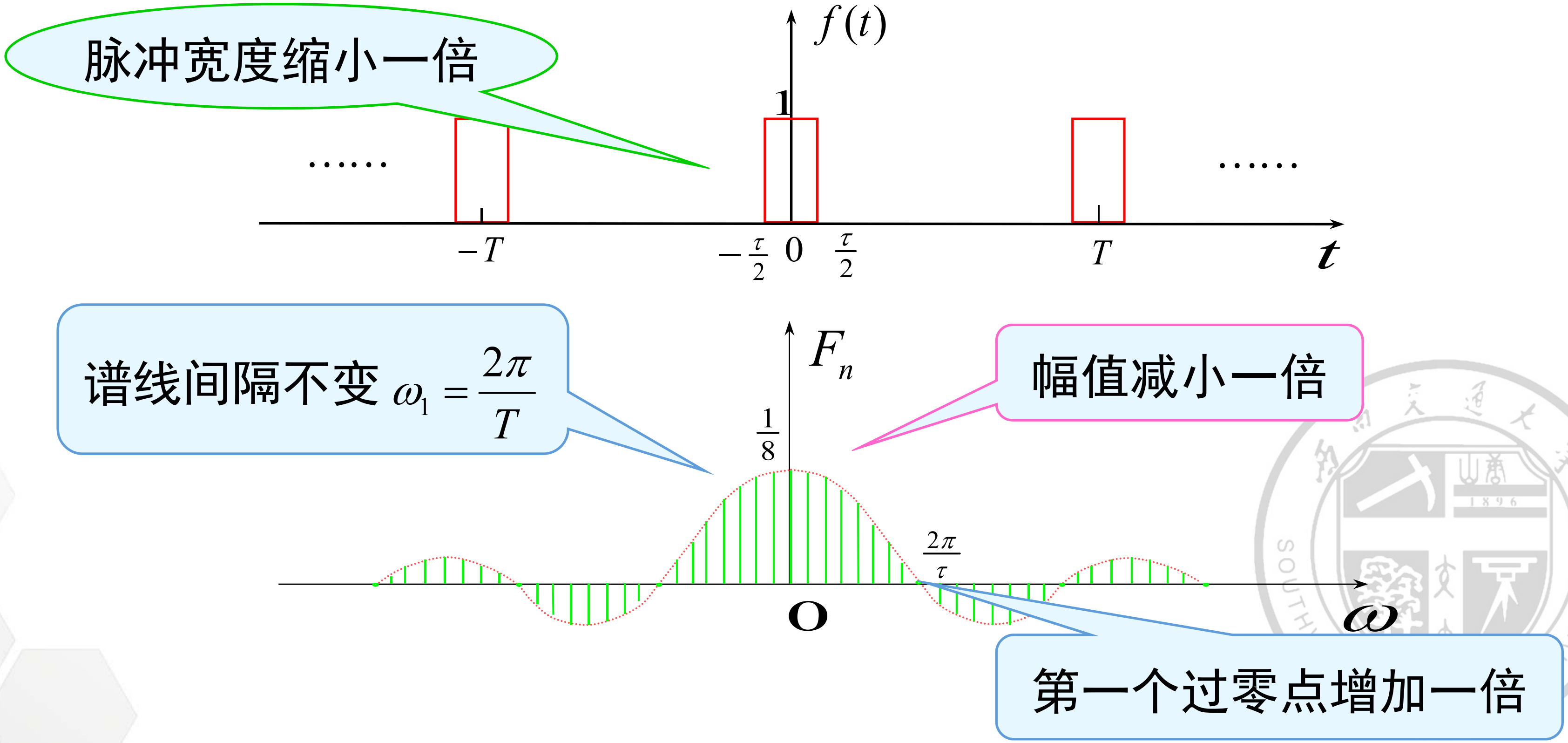
第一个过零点：

$Sa(\dfrac{\omega\tau}{2}) = 0 \quad \dfrac{\omega\tau}{2} = \pi \quad \omega = \dfrac{2\pi}{\tau} = 4\omega_1$

周期T不变，脉冲宽度τ变化 ②

情况 2： $\tau=\dfrac{T}{8}$, $F_n=\dfrac{\tau}{T}Sa(\dfrac{n\pi\tau}{T})=\dfrac{1}{8}Sa(\dfrac{n\pi}{8})$

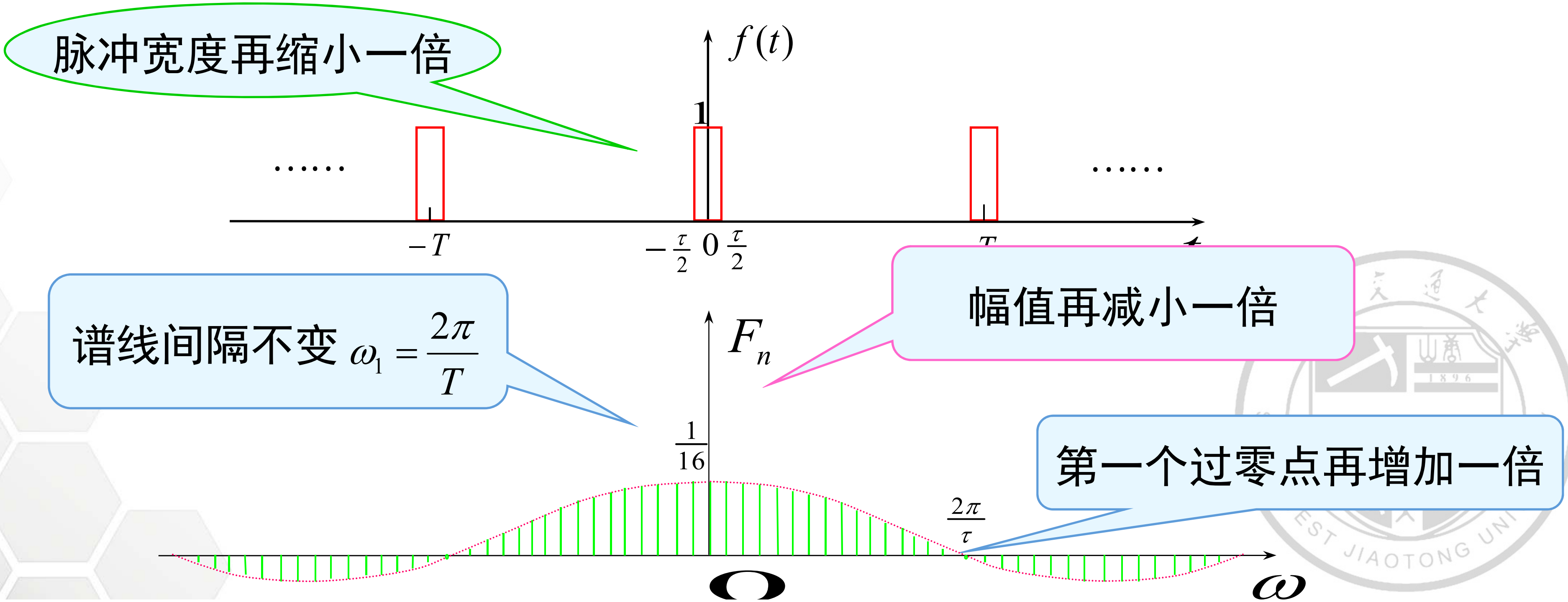
第一个过零点为 n =8



周期T不变，脉冲宽度τ变化　　③

情况 3： $\tau = \frac{T}{16},\ F_n = \frac{\tau}{T} Sa(\frac{n\pi\tau}{T}) = \frac{1}{16} Sa(\frac{n\pi}{16})$

第一个过零点为 n =16



结　论

τ 由大变小，F_n 的第一个过零点频率增大

$$Sa(\frac{\omega\tau}{2})=0 \qquad \frac{\omega\tau}{2}=\pi \qquad \omega=\frac{2\pi}{\tau}$$

通常将 $\omega=0\sim\frac{2\pi}{\tau}$ 这段频率范围称为矩形脉冲信号的频带宽度

记为 $B_\omega=\frac{2\pi}{\tau}$ 或 $B_f=\frac{1}{\tau}$

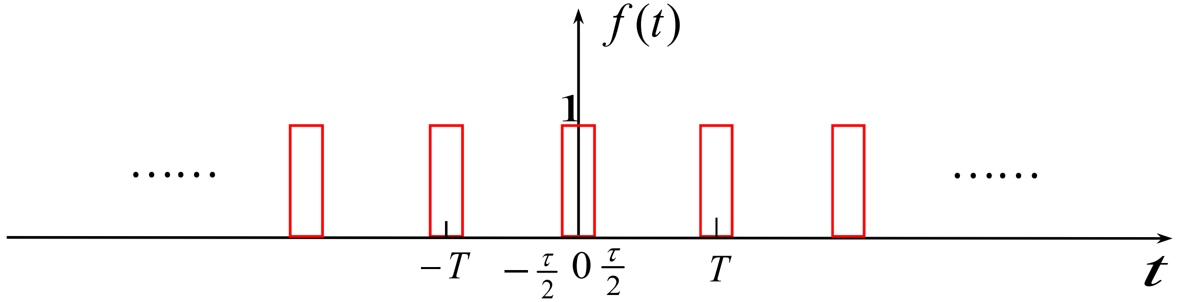
τ 确定了带宽，τ 由大变小，频谱的幅度变小。

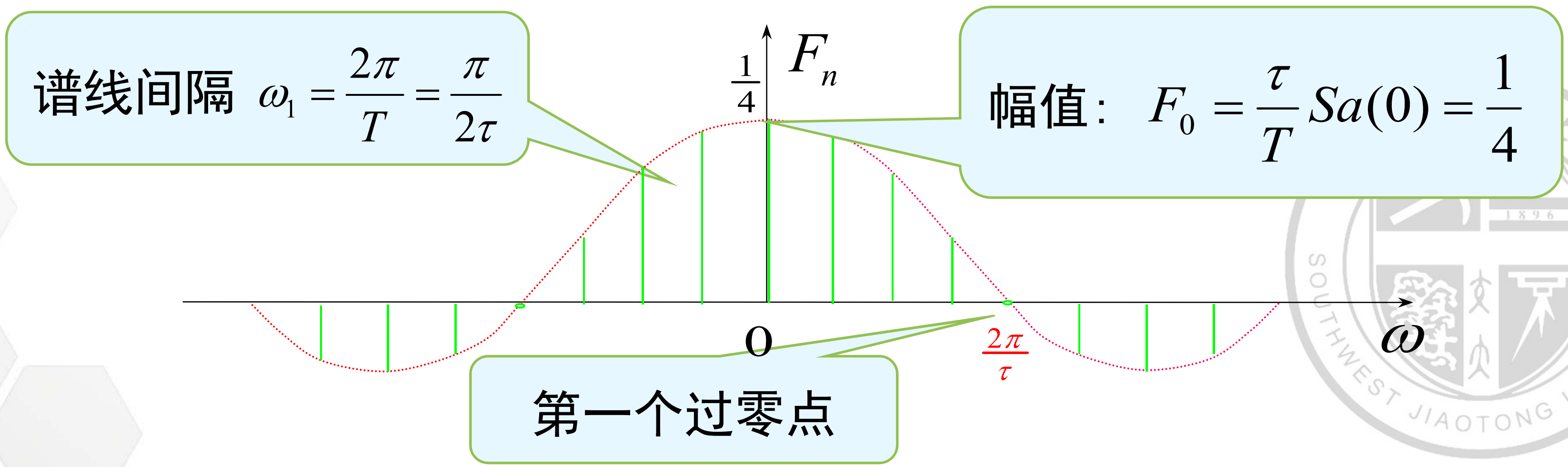
由于 T 不变，谱线间隔不变，即 $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$ 不变。

脉冲宽度τ不变，周期T变化 ①

情况 1： $T=4\tau$ 时，谱线间隔 $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{2\tau}$

第一个过零点 $\omega=\dfrac{2\pi}{\tau}$

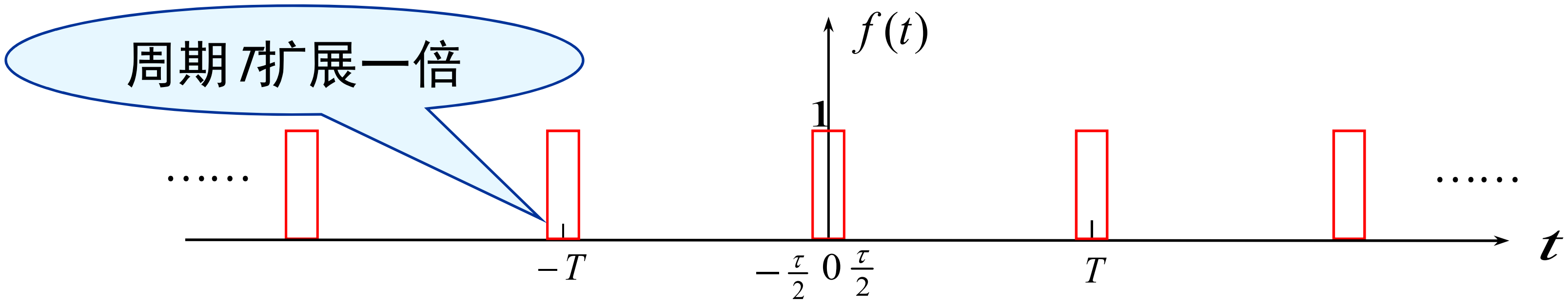


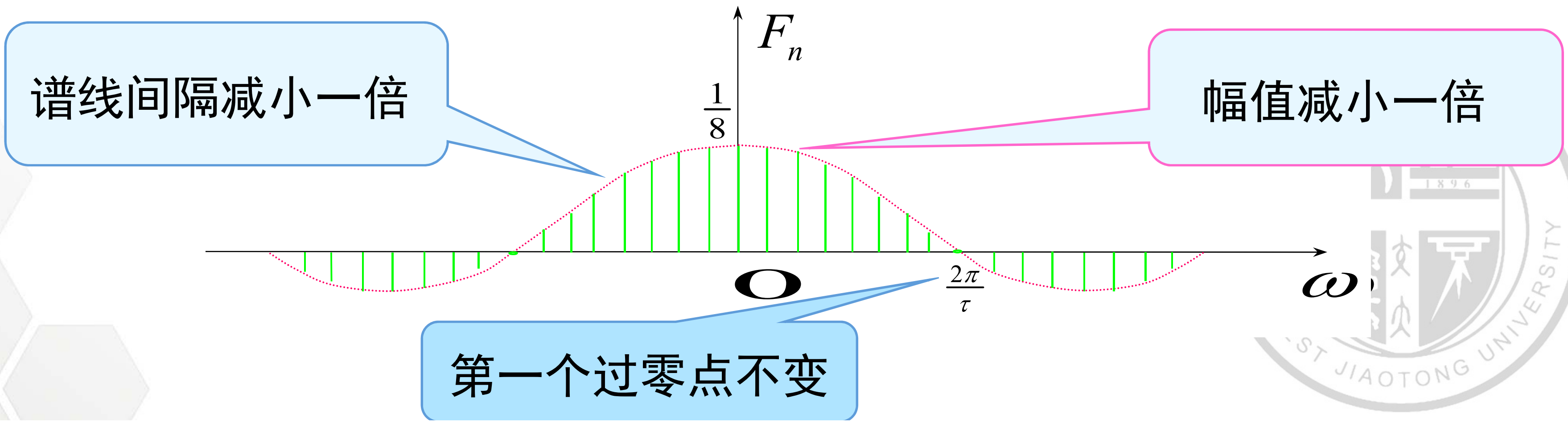


脉冲宽度τ不变, 周期T变化 ②

情况 2： $T=8\tau$ 时，谱线间隔 $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{4\tau}$

第一个过零点 $\omega=\dfrac{2\pi}{\tau}$



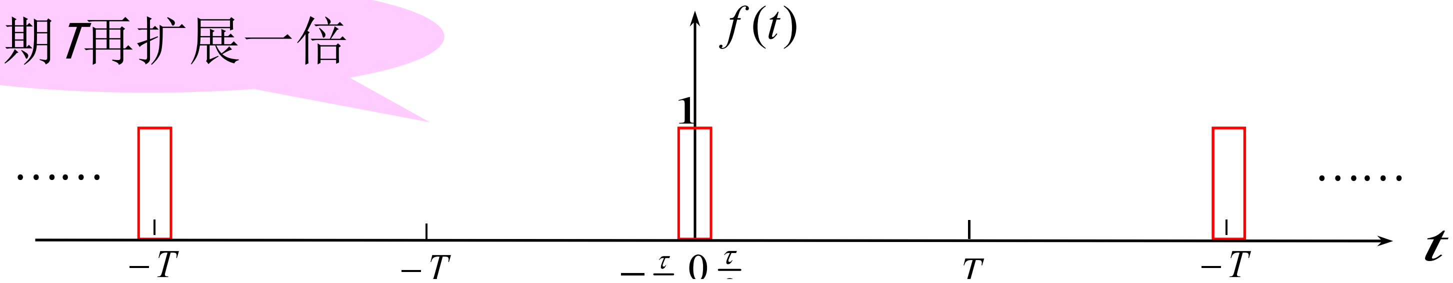


脉冲宽度τ不变, 周期T变化　　③

情况 3：　$T = 16\tau$　时，谱线间隔　$\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{8\tau}$

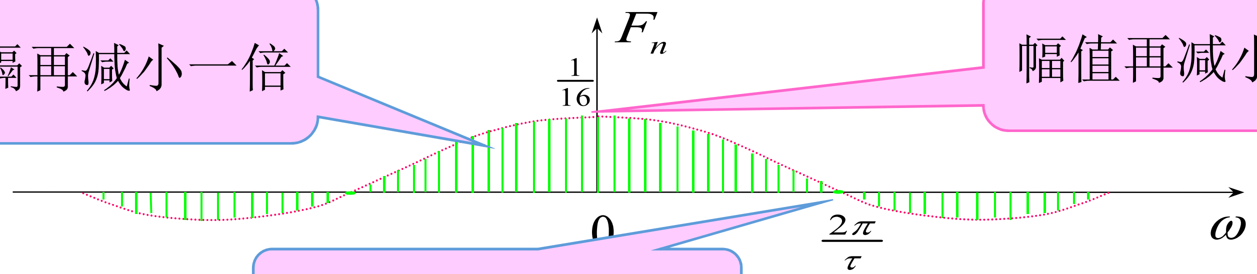
第一个过零点　$\omega = \dfrac{2\pi}{\tau}$

周期T再扩展一倍



谱线间隔再减小一倍

幅值再减小一倍



第一个过零点不变

结　论

- τ 不变，F_n 的第一个过零点频率不变

即 $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$　$\therefore$　$B_f = \frac{1}{\tau}$ 带宽不变。

- T 由小变大，谐波频率成分丰富，并且频谱的幅度变小。

❖ $T \to \infty$ 时，谱线间隔 $\to 0$ ，这时：

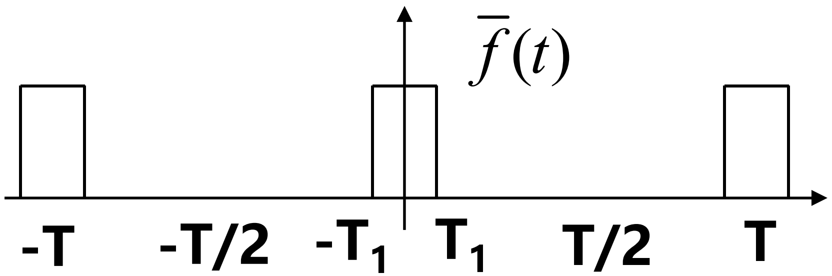
周期信号 $\to$ 非周期信号
离散频谱 $\to$ 连续频谱

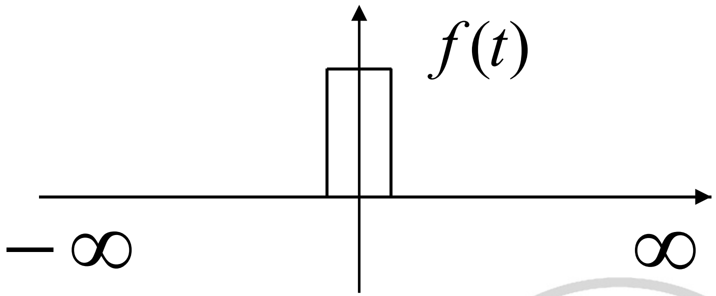
§3.3 非周期信号的连续时间傅里叶变换

线性系统频域分析

周期信号的傅里叶级数变换对：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,e^{jn\omega_1 t}\qquad F_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)\ e^{-jn\omega_1 t}dt$$





当周期矩形脉冲信号的周期 *T* 无限大时,就演变成了非周期信号的单脉冲信号

线性系统频域分析

$T \to \infty$

$\bar{f}(t)$周期信号 → 非周期信号$\boldsymbol{f(t)}$

谱线间隔 $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$ → 0

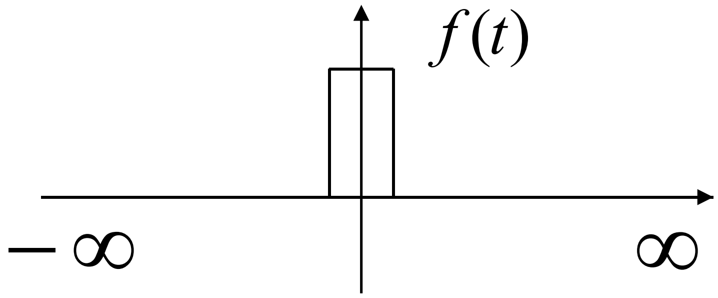
离散谱 → 连续谱

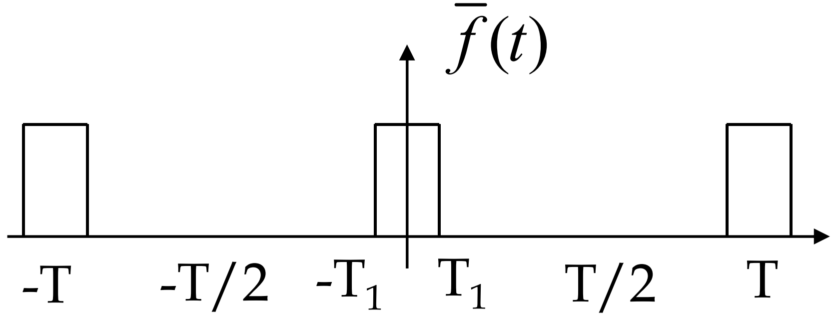
复振幅 $F_n = \dfrac{1}{T}\int_{T} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$ → 0

因此，对非周期信号不能再用F_n表示频谱，必须引入一个新的量----频谱密度函数。

一. 傅里叶变换

假定非周期信号 $f(t)$ 如图，由它构成的周期信号 $\bar{f}(t)$ 如图，周期为 T





周期信号 $\bar{f}(t)$ 的傅里叶级数：

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \, e^{jn\omega_1 t}$$

复振幅为

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \bar{f}(t) \; e^{-jn\omega_1 t} dt$$

线性系统频域分析

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \bar{f}(t)\ \ e^{-jn\omega_1 t}dt$$

两边乘以T，得 $TF_n = \dfrac{2\pi F_n}{\omega_1} = \dfrac{F_n}{f} = \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \bar{f}(t)\ \ e^{-jn\omega_1 t}dt$

当周期$T \to \infty$ 时，积分区间为$(-\infty,\infty)$，$\bar{f}(t) \to f(t)$

$\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T} \to 0$ 用$\Delta\omega$表示，

$$\lim_{T\to\infty} TF_n = \lim_{\omega_1\to 0}\frac{2\pi F_n}{\omega_1} = \lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \bar{f}(t)\ \ e^{-jn\omega_1 t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

记作 $$\boxed{F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt}$$

线性系统频域分析

$$\boxed{F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt}$$

$$=\lim_{T\to\infty} TF_n=\lim_{\omega_1\to 0}\frac{2\pi F_n}{\omega_1}=\lim_{f\to 0}\frac{F_n}{f}$$

$F(j\omega)$ 称为原函数 $f(t)$ 的频谱密度函数

则 $\lim_{T\to\infty} F_n=\lim_{T\to\infty}\frac{F(j\omega)}{T}=\lim_{\omega_1\to 0}\frac{F(j\omega)\omega_1}{2\pi}=\frac{F(j\omega)}{2\pi}\Delta\omega$

当周期 $T\to\infty$ 时

$$F_n\to\frac{F(j\omega)}{2\pi}\Delta\omega$$

线性系统频域分析

下面分析当周期$T\to\infty$时，傅里叶级数的变化

$$\boxed{\bar{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\, e^{jn\omega_1 t}}$$

$$F_n \;\to\; \frac{F(j\omega)}{2\pi}\Delta\omega$$

当周期 $T\to\infty$ 时

$$\bar{f}(t)\to f(t)$$

$$\omega_1=\frac{2\pi}{T}\to 0$$ 用 $\Delta\omega$表示

$$n\omega_1\to\omega \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\;\to\;\int_{-\infty}^{\infty}$$

$$f(t)=\lim_{T\to\infty}\bar{f}(t)=\lim_{\omega_1\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}=\lim_{\omega_1\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{F(j\omega)}{2\pi}\Delta\omega\right]e^{j\omega t}$$

所以

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

线性系统频域分析

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \\ F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\;e^{-j\omega t}\,dt \end{aligned}}$$

傅里叶变换对

由$f(t)$ 求 $F(j\omega)$ 称为傅里叶正变换

由 $F(j\omega)$ 求$f(t)$ 称为傅里叶逆变换

$F(j\omega)$ 称为$f(t)$的变换函数 $f(t)$ 称为 $F(j\omega)$ 原函数

简记为

$$F[f(t)] = F(j\omega)$$

$$F^{-1}[F(j\omega)] = f(t)$$

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

线性系统频域分析

二. 非周期信号的频谱函数

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

说明非周期信号$f(t)$表示成复指数 $e^{j\omega t}$的连续和

振幅为 $\frac{1}{2\pi}F(j\omega)d\omega$，

对任一ω，因$\mathrm{d}\omega$为无穷小，

所以$e^{j\omega t}$的绝对振幅 $\left|\frac{1}{2\pi}F(j\omega)d\omega\right|\to 0$ 也是无穷小

虽然各频谱幅度无限小，但相对大小仍有区别

$$F(j\omega)=\underset{T\to\infty}{Lim}\,TF_n=\underset{\omega_1\to 0}{Lim}\frac{2\pi F_n}{\omega_1}=\underset{f\to 0}{Lim}\frac{F_n}{f}$$

$F(j\omega)$称为非周期函数$f(t)$的频谱密度函数

或简称频谱函数、频谱

频谱密度函数的表示

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-j\omega t}dt \ =F[f(t)]$$

频谱密度函数 $F(j\omega)$ 一般是复函数，可记为

$$F(j\omega)=\left|F(j\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$\left|F(j\omega)\right|\sim\omega$ 幅度频谱

$\varphi(\omega)\sim\omega$ 相位频谱

傅里叶变换存在的充分条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

即 $f(t)$ 绝对可积 是傅里叶变换存在的充分条件

所有能量信号均满足此条件

但阶跃函数、正弦函数等不满足上述绝对可积条件，由于引入广义函数，这些函数在广义的意义上存在傅里叶变换

线性系统频域分析

西南交通大學

谢 谢 大 家！