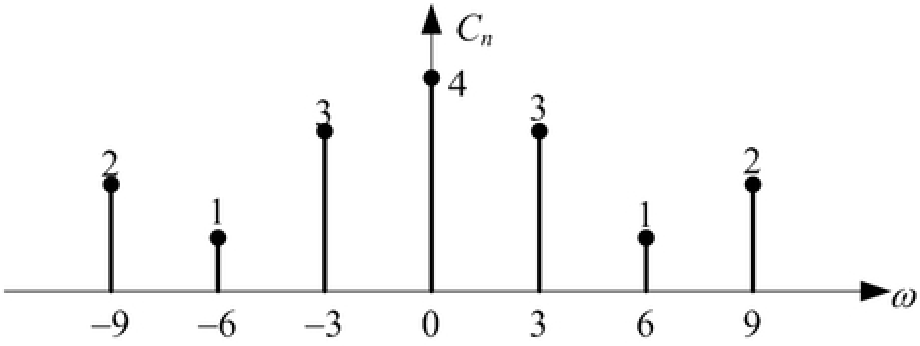
第四章作业题及答案

1. 已知连续周期信号的频谱如题 1 图所示，试写出其对应的周期信号



题 1 图

$\widetilde{x}(t)(w_0=3)$

解：由题图可知$C_0=4, C_{\pm1}=3, C_{\pm2}=1, C_{\pm3}=2$，其他项为 0。（2 分）

所以 $\widetilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}=C_n e^{jnw_0t}$

$=4+3(e^{jw_0t}+e^{-jw_0t})+(e^{j2w_0t}+e^{-j2w_0t})+2(e^{j3w_0t}+e^{-j3w_0t})$(2 分)

$=4+6\cos(\omega_0 t)+2\cos(2\omega_0 t)+4\cos(3\omega_0 t)$（1 分）

2. 已知周期为T_0的周期信号$\widetilde{x}(t)$的频谱为C_n，试求下列周期信号的频谱。

(1) $\widetilde{y}(t)=\widetilde{x}(t-1)$　　　　(2) $\widetilde{y}(t)=\frac{d\widetilde{x}(t)}{dt}$

解：(1)$\widetilde{y}(t)=\widetilde{x}(t-1)$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jnw_0(t-1)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{-jnw_0}e^{jnw_0t}$

所以 $C_{n,1}=e^{-jnw_0}C_n$ (3 分)

(2) $\widetilde{y}(t)=\frac{d\widetilde{x}(t)}{dt}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}jnw_0 C_n e^{jnw_0t}$

所以 $C_{n,2} = \mathrm{j}nw_0C_n$ (3 分)

3. 已知周期信号 $\tilde{x}(t) = 2\cos(2\pi t - 3) + \sin(6\pi t)$，计算其频谱 Cn 和平均功率 P。

解：$w_0 = 2\pi$。由 Euler 公式可得

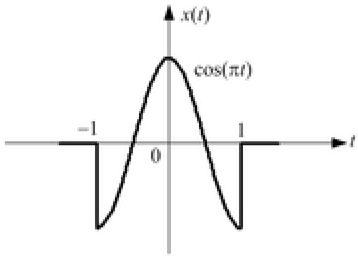
$$\widetilde{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(w_0 t - 3)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(w_0 t - 3)} - 0.5\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}3w_0 t} + 0.5\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3w_0 t}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}w_0 t} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w_0 t} + 0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}3w_0 t} + 0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3w_0 t}$$

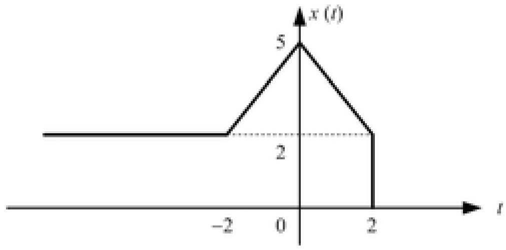
$C_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3}$, $C_{-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}3}$, $C_3 = 0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}$, $C_{-3} = 0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}$ (2 分)

信号的平均功率 $P = \sum_n |C_n|^2 = 0.5^2 + 1^2 + 1^2 + 0.5^2 = 2.5$ (3 分)

4. 利用 Fourier 变换的性质，求题 5 图所示信号的频谱。



a.



b.

题 5 图

解：(a)根据 Fourier 变换的调制特性

由于 $x(t) = p_2(t)\cos(\pi t)$, $F\{p_2(t)\} = 2\mathrm{Sa}(\omega)$ (3 分)

根据 Fourier 变换的调制特性 $x(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{Sa}(\omega+\pi) + \mathrm{Sa}(\omega-\pi)$ (3 分)

(b)由于 $x'(t) = 1.5p_2(t+1) - 1.5p_2(t-1) - 2\delta(t-2)$

$F\{x'(t)\} = 3\mathrm{Sa}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 3\mathrm{Sa}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$ (3 分)

利用修正微分特性，可得

$$X(\mathrm{j}\omega)_{=}2\pi\delta(\omega)-\frac{3\mathrm{Sa}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-3\mathrm{Sa}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}-2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{\mathrm{j}\omega}$$

$$=2\pi\delta(w)+6Sa^2(w)-\frac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2w}}{\mathrm{j}w}$$ （3 分）

5. 已知 $F\{x(t)\}=X(\mathrm{j}w)$，试计算下列信号的频谱函数。

(1) $\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}x(bt)$ (2) $x(t)*\delta(t/a-b)$

解：(1) 由$Fourier$变换的展缩和频移特性可得 $F\{x(bt)\}=\frac{1}{|b|}X(j\frac{w}{b})$，

$$F\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}x(bt)\}=\frac{1}{|b|}X(j\frac{w-a}{b})$$ （3 分）

(2)由冲激信号的特性可知

$\delta(t/a-b)=|a|\delta(t-ab)$ 由于

$F\{|a|\delta(t-ab)\}=|a|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}abw}$，

所以 $F\{x(t)*\delta(t/a-b)\}=|a|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}abw}X(jw)$ (3 分)

6. 试求下列频谱函数所对应的信号$x(t)$。

(1) $X(\mathrm{j}w)=\frac{3}{\mathrm{j}w+2}+\frac{4}{\mathrm{j}w-2}$ (2) $X(\mathrm{j}w)=\frac{1}{\mathrm{j}w(\mathrm{j}w+1)}+2\pi\delta(w)$

(3) $X(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{Sa}^2(\omega\tau)$ (4) $X(\mathrm{j}w)=-\frac{2}{w^2}$

解：

(1)由于 $\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)\xleftrightarrow{F}\dfrac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$， $\mathrm{e}^{\alpha t}u(-t)\xleftrightarrow{F}\dfrac{1}{\alpha-\mathrm{j}\omega}$

所以 $x(t)=3\mathrm{e}^{-2t}u(t)-4\mathrm{e}^{2t}u(-t)$ （3 分）

(2)由于 $X(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}-\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega+1}+2\pi\delta(\omega)$

所以 $x(t)=0.5\,\mathrm{sgn}(t)-\mathrm{e}^{-t}u(t)+1$ （3 分）

(3)由于 $p_1(t)\xleftrightarrow{F}\mathrm{Sa}(\omega/2)$

由 Fourier 变换的卷积特性

$$x_1(t)=p_1(t)*p_1(t)\xleftrightarrow{F}\mathrm{Sa}^2(\omega/2)$$ （3 分）

由 Fourier 变换的展缩特性

$$x_1(\frac{t}{2\tau})\xleftrightarrow{F}2\tau\mathrm{Sa}^2(\tau\omega)$$

所以 $x(t)=\dfrac{1}{2\tau}x_1(\dfrac{t}{2\tau})=\begin{cases}\dfrac{2\tau-|t|}{4\tau^2} & |t|<2\tau\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ （3 分）

(4)由于 $\mathrm{sgn}(t)\xleftrightarrow{F}\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$

由 Fourier 变换的频域微分特性

$$t\,\mathrm{sgn}(t)\longleftrightarrow \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{2}{\mathrm{j}\omega}=-\frac{2}{\omega^2}$$

所以 $x(t)=t\,\mathrm{sgn}(t)=|t|$ （3 分）

每问各三分。

7. 已知周期 N=8 的周期序列$\tilde{x}[k]$的频谱为$\tilde{X}[m]$， 试确定周期序列$\tilde{x}[k]$。

(1) $\tilde{X}[m]=1+\dfrac{1}{2}cos(\dfrac{\pi m}{2})+2cos(\dfrac{\pi m}{4})$ (2) $\tilde{X}[m]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi m/4}$

解：(1)利用 Euler 公式可得$\tilde{X}[m]=1+\dfrac{1}{2}\cos(\dfrac{\pi m}{2})+2\cos(\dfrac{\pi m}{4})$

$$=1+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi m}{2}}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi m}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi m}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi m}{4}}$$

$$=1+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi m}{8}\times(-8+2)}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi m}{8}2}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi m}{8}\times(-8+1)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi m}{8}\times 1}$$ (1 分)

与 DFS 的定义 $\tilde{X}[m]=\sum_{k=0}^{7}\tilde{x}[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi m}{8}\times k}$ 比较，可得$\tilde{x}[k]$的值为

$\tilde{x}[k]=\{1,1,1/4,0,0,0,1/4,1;k=0,1,...,7\}$。 (2 分)

(2) 由于 $\widetilde{x}[m] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi m}{4}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi m}{8}\times 1}$ （1 分）所以

$\widetilde{x}[k] = 0,1,0,0,0,0,0,0,;k=0,1,\ldots,7\}$ （2 分）

8. 试求出下列离散非周期序列的频谱。

(1) $x_1[k] = \alpha^k u[k]\ |\alpha|<1$ (2) $x_2[k] = \alpha^k u[k-1]\ |\alpha|<1$

(3) $x_3[k] = \sum_{n=0}^{\infty}(1/4)^k\delta[k-3n]$ (4) $x_4[k] = \begin{cases} 1 & |k|\le N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

解：(1) $X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\Omega} = \dfrac{1}{1-\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$

(2) $x_2[k] = \alpha\cdot\alpha^{k-1}u[k-1]$ $X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \dfrac{\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}{1-\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}}$

(3) $x_3[k] = \sum_{n=0}^{\infty}(1/4)^{3n}\delta[k-3n]$ 由 DTFT 的线性特性可得

$$X_3(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1/4)^{3n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3n\Omega} = \frac{1}{1-(1/4)^3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\Omega}}$$

(4)由 DTFT 得定义可得 $X_4(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \sum_{k=-N}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega N}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega(N+1)}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}} = \dfrac{sin[(N+0.5)\Omega]}{sin(0.5\Omega)}$

每问 3 分，共 12 分

9. 已知有限长序列 $x[k] = \{2,1,\dot{-1},0,3,2,0,-3,-4\}$,不计算 $x[k]$ 的 DTFT，试确定下列表达式的值。

(1) $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0})$ (2) $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi})$ (3) $\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\mathrm{d}\Omega$ (4) $\int_{-\pi}^{\pi}|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|^2\mathrm{d}\Omega$

解：由 DTFT 的定义可得

(1) $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}) = \sum_{k=-2}^{6} x[k] = 0$ (3 分)

(2) $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}) = \sum_{k=-2}^{6} (-1)^k x[k] = 0$ (3 分)

(3)由 IDTFT 的定义可得 $\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\mathrm{d}\Omega = 2\pi x[0] = -2\pi$ (3 分)

(4)由 Parseval 定理可得 $\int_{-\pi}^{\pi} |X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|^2\mathrm{d}\Omega = 2\pi \sum_{k=-2}^{6} |x[k]|^2 = 88\pi$ (3 分)

10. 已知信号 $x(t)$ 的最高角频率为 ω_m rad/s，若对下列信号进行时域抽样，试求其频谱不混叠的最大抽样间隔。

(1) $x(t/4)$ (2) $x^2(t)$ (3) $x(t) * x(t)$ (4) $x(t) + x(t/4)$

解：(1)由于 $x(t/4) \longleftrightarrow 4X(\mathrm{j}4w)$

所以信号最高角频率为 $\omega_m/4$ rad/s，频谱不混叠的最大抽样间隔

$T_{max} = \frac{\pi}{w_m/4} = \frac{4\pi}{w_m}$ (3 分)

(2)由于 $x^2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\mathrm{j}w) * X(\mathrm{j}w)$

所以信号最高角频率为 $2\omega_m$ rad/s，频谱不混叠的最大抽样间隔

$T_{max} = \frac{\pi}{2w_m}$ (3 分)

（3）由于 $x(t) * x(t) \longleftrightarrow X^2(\mathrm{j}w)$

所以信号最高角频率为 ω_m rad/s，频谱不混叠的最大抽样间

隔 $T_{max} = \frac{\pi}{\omega_m}$ (3 分)

(4)由于 $x(t) + x(t/4) \longleftrightarrow X(\mathrm{j}w) + 4X(\mathrm{j}4w)$

所以信号最高角频率为$\omega_m$rad/s，频谱不混叠的最大抽样间隔

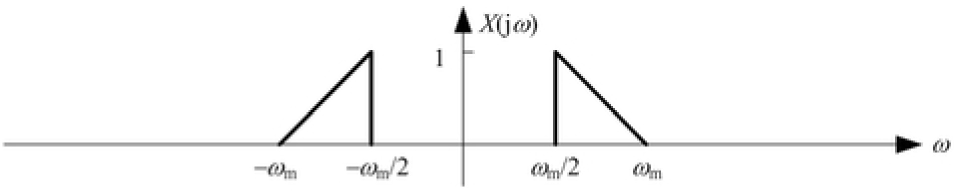
$$T_{max}=\frac{\pi}{w_m}$$ (3 分)

11. 某实带通信号$x(t)$的频谱如题 12 图所示，其中$\omega_m=\pi$，试

(1) 画出以抽样角频率$w_s=2w_m$抽样后信号的频谱 X1 (ejW)。

(2)画出以抽样角频率$w_s=w_m$抽样后信号的频谱 X2 (ejW)。

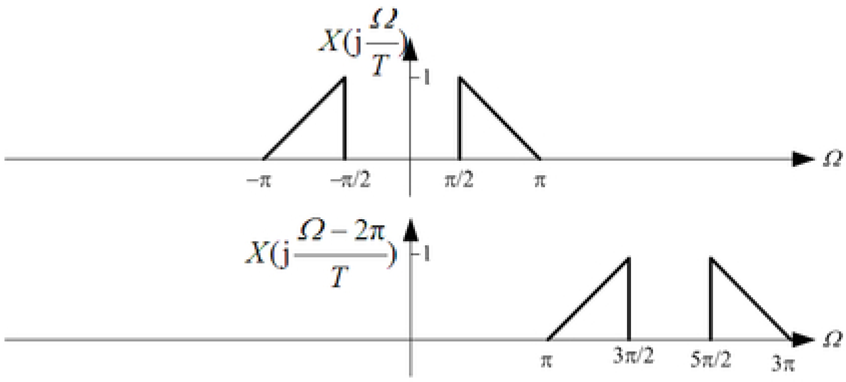
(3)比较 X1 (ejW)和 X2 (ejW)，有何结论。

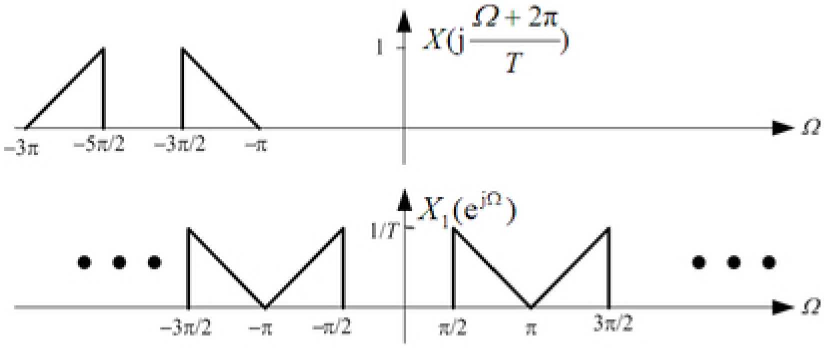


题 11 图

解：

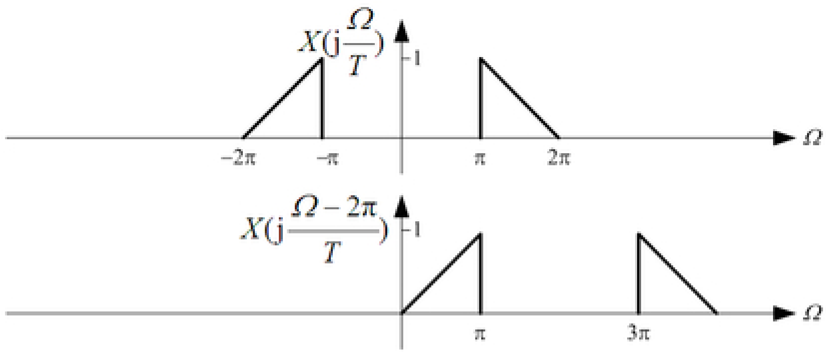
（1）

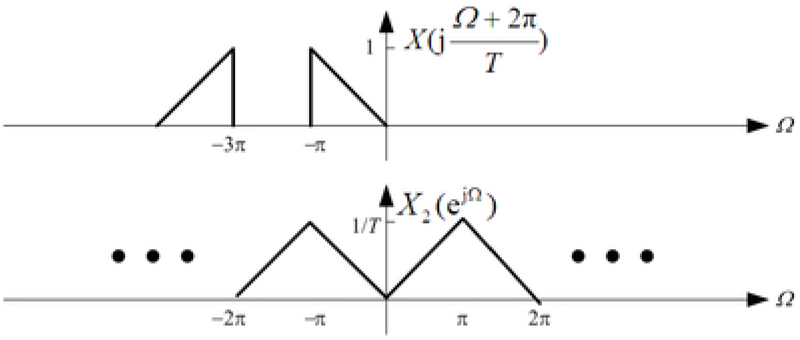




(5 分)

(2)





(5 分)

(3)$X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$是按照抽样频率等于最高频率的两倍进行抽样后得到的信号频谱，可以看到抽样后信号的频谱不混叠。而$X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$是按照抽样频率等于带宽的两倍进行抽样后得到的信号频谱，可以看到抽样后信号的频谱也不混叠。(2 分)