密封装订线 姓名______ 密封装订线 学号______ 密封装订线 班级______

西南交通大学 2018 —2019 学年第（ 一 ）学半期考试

课程代码 6010400 课程名称 线性代数 A 考试时间 90 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：______

一、选填题（每空 5 分，共 25 分）

1. 设$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0&3\\2&2&0&0\\0&0&0&2\\3&3&3&0\end{vmatrix}$，$A_{ij}$是$a_{ij}$的代数余子式， 则$A_{31}+A_{32}+A_{33}+2A_{34}=$ $\underline{-12\qquad}$.

2．设$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$均为四维列向量，记$A=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4),B=(\gamma_1+2\gamma_2,3\gamma_1+4\gamma_3,\gamma_2,\gamma_4)$,如果 $|A|=4$，则$|B|=$ $\underline{-16\qquad}$.

3. 已知$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&7&9\\6&5&4\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$则$P^{2018}AP^{2019}=$ $\underline{\begin{pmatrix}1&3&2\\-2&9&7\\6&4&5\end{pmatrix}}$.

4. 设A,B均为三阶方阵，且$|A|=2,|B|=3$，则$\left|-(A^{\mathrm{T}}B^{-1})^3\right|=$ $\underline{-\frac{8}{27}}$.

5. 已知 n 阶方阵 A，B，C 的行列式分别为 3， 4， 6，计算行列式

$\begin{vmatrix}O&A\\B&C\end{vmatrix}=(-1)^n\times 12$ 或 $(-1)^{n^2}\times 12$.

二、选择题（每空 5 分，共 15 分）

1. 设A,B为三阶方阵，则下述结论正确的是（ C ）

A. A或B可逆，则AB可逆　　B. A且B可逆，则$A+B$可逆

C. A或B不可逆，则AB不可逆　　D. A与B不可逆，则$A+B$不可逆

2. 已知$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$（ D ）

A. $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&2&-1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$

3. 已知$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&\lambda&4\\2&3&4&5\\3&5&7&9\end{pmatrix}$，当$A$的秩为 2 时，$\lambda=$（ C ）

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

三、计算题（每题 11 分，共 44 分）

1. 计算行列式$D_n=\begin{vmatrix}a+b&b&0&\cdots&0&0\\a&a+b&b&\cdots&0&0\\0&a&a+b&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a+b&b\\0&0&0&\cdots&a&a+b\end{vmatrix}$

解：按第一行展开得

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2},$$

故 $D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)=b^n$ (1)

由a,b的对称性知

$D_n-bD_{n-1}=a^n$ (2)

由 (1)与 (2)得

当$a\neq b$时 $D_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n.$

当$a=b$时 $D_n=aD_{n-1}+a^n=a^n+a(aD_{n-2}+a^{n-1})=2a^n+a^2D_{n-2}=\cdots=(n+1)a^n.$

综上：$D_n=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n.$

法二，由 (1)得

$$\begin{aligned}D_n&=aD_{n-1}+b^n=a(aD_{n-2}+b^{n-1})+b^n=a^2D_{n-2}+ab^{n-1}+b^n=\cdots\\&=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n.\end{aligned}$$

2. 设$f(x)=x^2-x+1$，$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$，求$[f(A)]^T$.

解：依定义得：

$$\boldsymbol{f(A)=A^2-A+E}=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7&1&3\\8&2&3\\-2&1&0\end{pmatrix}.$$

故

$$[f(A)]^T=\begin{pmatrix}7&1&3\\8&2&3\\-2&1&0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}7&8&-2\\1&2&1\\3&3&0\end{pmatrix}$$

3. 已知$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$,求解方程$AX+B=X$.

解： 因为$AX+B=X$,，所以$(E-A)X=B,$

又 $E-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$，且$|E-A|\neq 0$

则$E-A$可逆且$X=(E-A)^{-1}B$

因此，$$X=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}。$$

4. 判定非齐次线性方程组$\begin{cases}-2\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=-2\\\boldsymbol{x}_1-2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=1\\\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2-2\boldsymbol{x}_3=1\end{cases}$ 是否有解．有解时，求出其所有解.

解：$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

令 $\boldsymbol{x}_3=1$，得导出组的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{x}_3=0$，得原方程组的一个特解为$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，

所以，方程组解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

四、证明题（每题 8 分，共 16 分）

1. 设三阶方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$,证明 A 及 $A+2E$ 都可逆,并求 A^{-1} 及 $(A+2E)^{-1}$.

证明: 由 $A^2-A-2E=O$ 得 $A^2-A=2E$,两端同时取行列式: $|A^2-A|=8$

即 $|A||A-E|=8$,故 $|A|\neq 0$ 所以 A 可逆.

而 $A+2E=A^2$，$|A+2E|=|A^2|=|A|^2\neq 0$ 故 $A+2E$ 也可逆.

由 $A^2-A-2E=O\Rightarrow A(A-E)=2E\Rightarrow A^{-1}A(A-E)=2A^{-1}E\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$

又由 $A^2-A-2E=O\Rightarrow(A+2E)A-3(A+2E)=-4E\Rightarrow(A+2E)(A-3E)=-4E$

$\therefore(A+2E)^{-1}(A+2E)(A-3E)=-4(A+2E)^{-1}$

$$\therefore (A+2E)^{-1} = \frac{1}{4}(3E-A)$$

2．设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，证明：

(1)　若 $|A|=0$,则 $|A^*|=0$；

(2)　$|A^*|=|A|^{n-1}$.

证明　(1)　用反证法证明．假设 $|A^*|\neq 0$ 则有 $A^*(A^*)^{-1}=E$

由此得 $A=AA^*(A^*)^{-1}=|A|E(A^*)^{-1}=O$ $\therefore A^*=O$

这与 $|A^*|\neq 0$ 矛盾，故当 $|A|=0$ 时有 $|A^*|=0$.

(2)　由于 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，则 $AA^*=|A|E$ 取行列式得到：$|A||A^*|=|A|^n$

若 $|A|\neq 0$　则 $|A^*|=|A|^{n-1}$

若 $|A|=0$ 由(1)知 $|A^*|=0$ 此时命题也成立------10 故有 $|A^*|=|A|^{n-1}$.