第十一章　变化中的磁场和电场

结构框图

法拉第电磁感应定律

感应电动势的计算

磁场能量

麦克斯韦的两条假设

涡旋电场

位移电流

经典电磁理论的基本方程

学时：5

第一节　电磁感应

一、法拉第电磁感应定律

二、动生电动势

三、感生电动势

四、自感

五、互感

一、法拉第电磁感应定律

1820年：奥斯特实验：电 — 磁

对称性

1821—1831年:法拉第实验：磁 — 电

电磁感应现象:闭合回路的磁通量发生变化时，回路中出现电流的现象。

感应电流

感应电动势：闭合回路中磁通量变化产生的电动势。

电磁感应定律：闭合回路中感应电动势的大小与通过回路的磁通量的变化率成正比。 楞次定律

$$\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(N\phi_m)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\psi_m}{\mathrm{d}t}$$

其中：$\psi_m = N\phi_m$:通过线圈的磁通链数（全磁通）

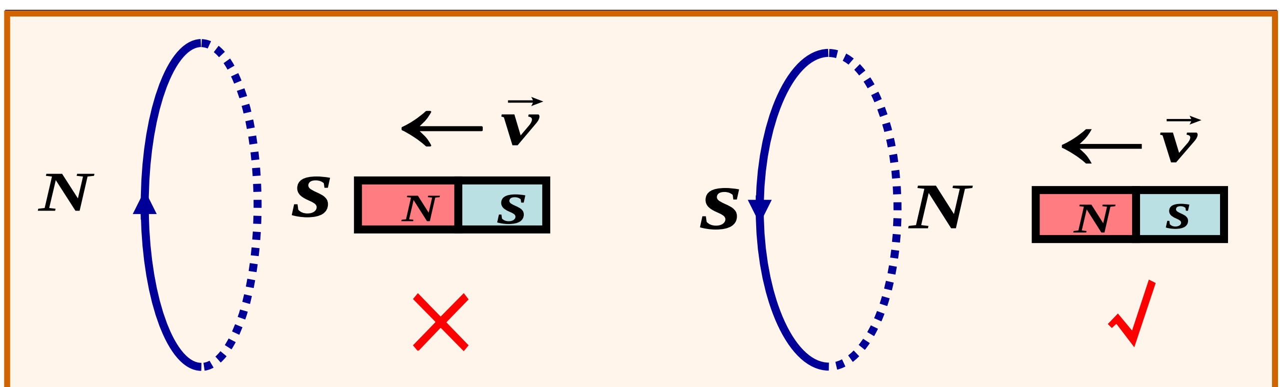
讨论： $$\boxed{\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(N\phi_m)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\psi_m}{\mathrm{d}t}}$$

(1) ϕ_m为通过回路的磁感应强度$\vec{B}$的通量。

$$\phi_m = \int_s \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_s B\cos\theta\mathrm{d}S$$

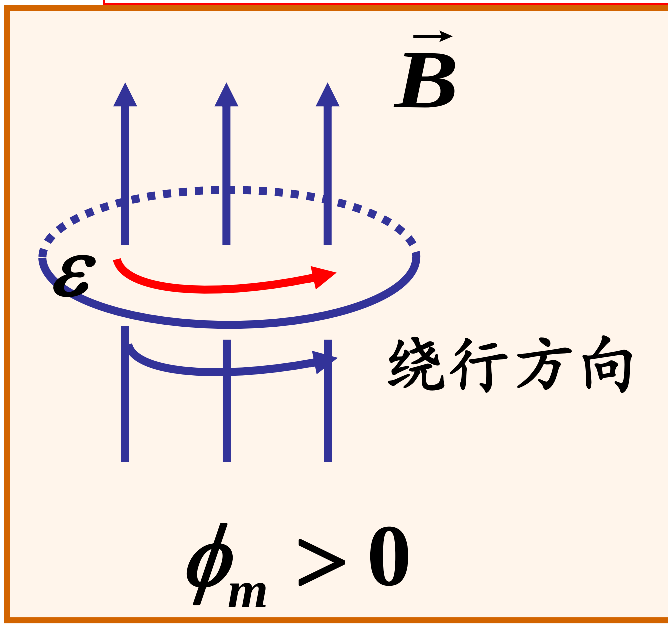
$\mathrm{d}\phi_m$为$\vec{B}$通量的变化，变化的原因为：B、θ、S变化。

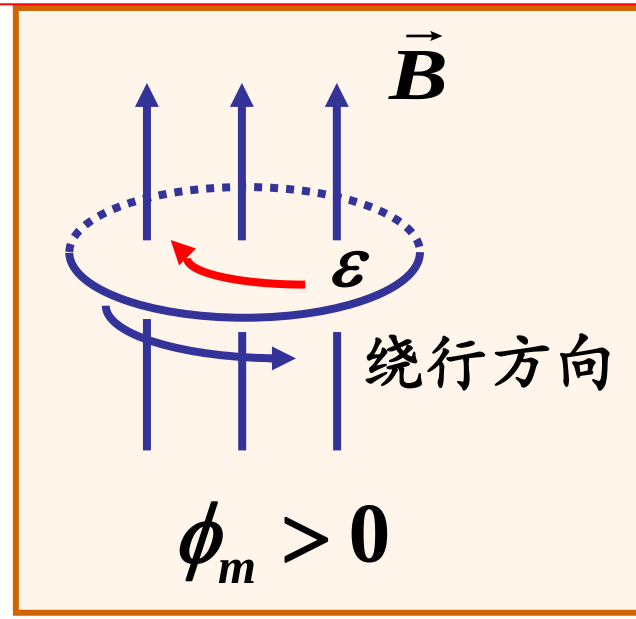
(2) 负号由楞次定律决定，它确定了闭合回路中感应电动势的方向。



楞次定律的本质是**能量守恒**

(3) 选择绕行方向与 $\vec{B}$ 成右旋关系，若感应电动势为正其沿绕行方向，反之逆着绕行方向。



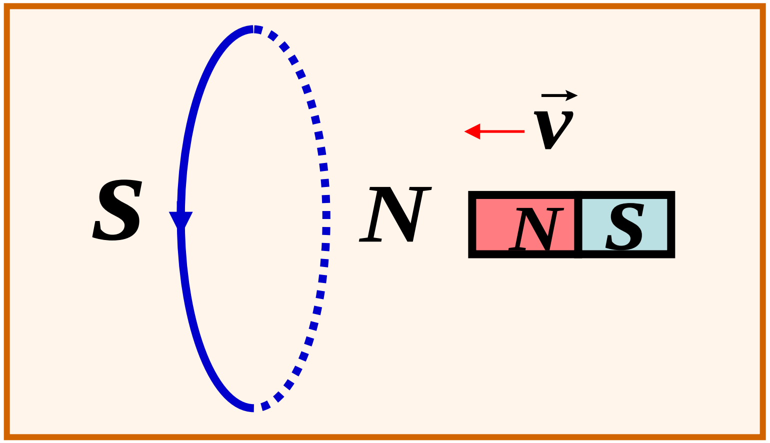


若 $\dfrac{d\phi_m}{dt} < 0$，则 $\varepsilon > 0$

若 $\dfrac{d\phi_m}{dt} > 0$，则 $\varepsilon < 0$

注意： 利用法拉第电磁感应定律求 ε 时，选取绕行方向与 $\vec{B}$ 呈右旋关系，那么 $\vec{B}$ 与 $d\vec{S}$ 同向，则 $\phi_m > 0$。

(4) 不同惯性系中的ε很难概括为一个简单公式。



分两种情况处理：

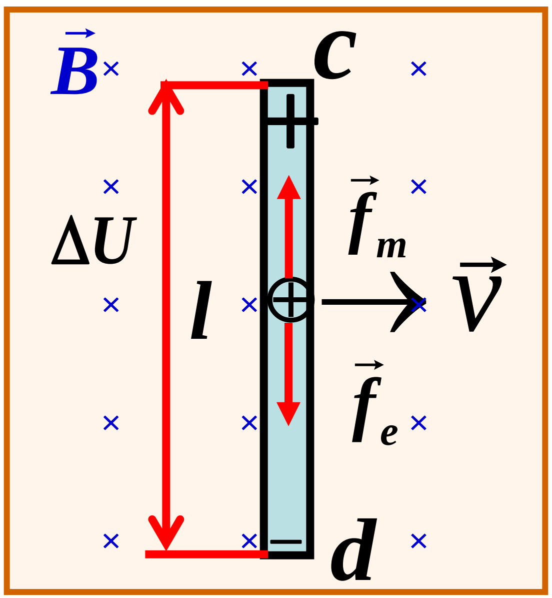
对**磁铁**参考系：线圈及其中的电荷在磁场中运动，受洛仑兹力的作用，电荷运动，在线圈中形成感应电流。

对**线圈**参考系：线圈中电荷静止，磁铁运动，电荷不受磁场力，运动的磁铁在空间产生电场，驱动电荷运动形成感应电流。

二、动生电动势

1. 定义： 磁场不变，导体运动引起穿过回路的磁通量变化所产生的感应电动势。

2. 产生机理

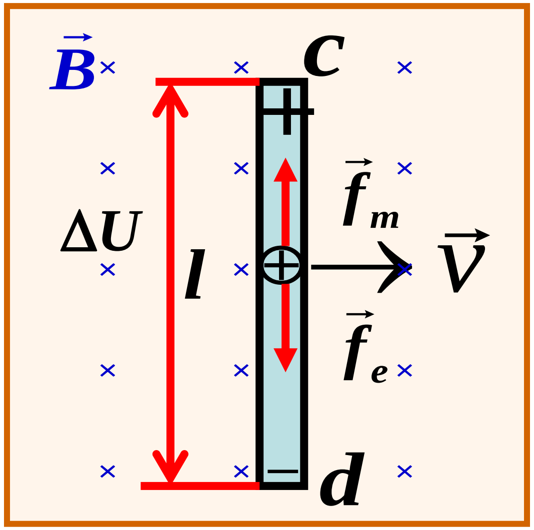


平衡时 $f_m = f_e$

$$qvB = qE = q\frac{\Delta U}{l}$$

$$\Delta U = Blv$$

cd～电源，反抗 $\vec{f}_e$ 做功，将 $+q$ 由负极 $\longrightarrow$ 正极，维持 ΔU 的非静电力，为洛仑兹力 $\vec{f}_m$



产生 $\varepsilon_{动}$ 的非静电力

$$\vec{F}_K = \vec{f}_m = q\vec{v}\times\vec{B}$$

非静电场强 $\vec{E}_K = \dfrac{\vec{f}_m}{q} = \vec{v}\times\vec{B}$

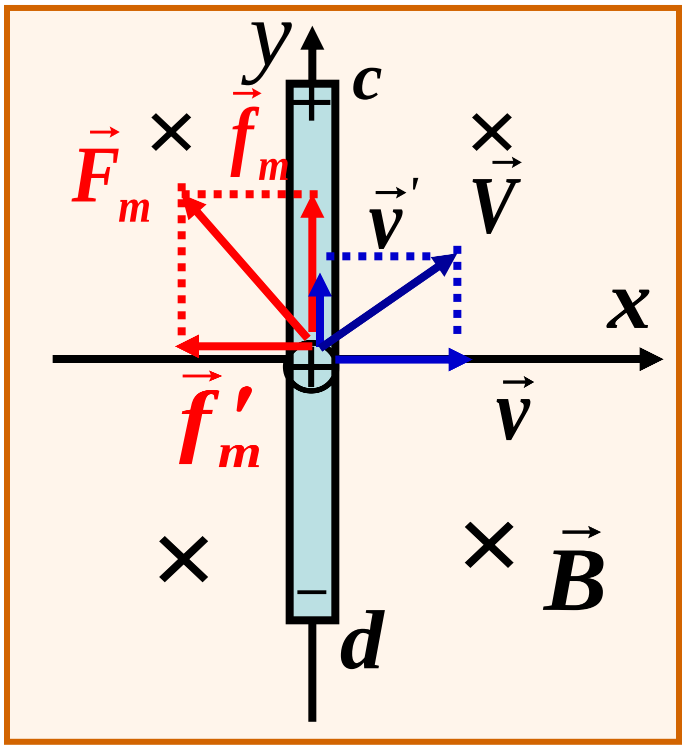
由电动势定义 $\varepsilon_{动} = \int_{-\,(\text{经内电路})}^{+} \vec{E}_K\cdot d\vec{l} = \int_{-\,(\text{经内电路})}^{+} (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

（$d\vec{l}$ 沿积分方向）

或： $\varepsilon_{动} = \oint_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$（沿绕行方向积分）

3. 能量转换关系

思考: $\left.\begin{array}{l}\text{洛仑兹力充当非静电力做功}\\\text{洛仑兹力不对运动电荷做功}\end{array}\right\}$ 矛盾?



因$\vec{v}$受洛仑兹力$\vec{f}_m = qvB\vec{j}$ $\quad A_{fm} > 0$

因$\vec{v}'$受洛仑兹力$\vec{f}_m' = -qv'B\vec{i}$ $\quad A_{fm'} < 0$

电荷总速度 $\vec{V} = \vec{v} + \vec{v}' = v\vec{i} + v'\vec{j}$

电荷受的总力:

$$\vec{F}_m = \vec{f}_m + \vec{f}'_m = qvB\vec{j} - qv'B\vec{i}$$

总功: $A_{Fm} = (\vec{F}_m \cdot \vec{V})\Delta t = 0$

充当非静电力的只是载流子所受总磁场力的一个分力,

做功: $\quad A_{fm} > 0 \quad$ 不矛盾!

4. 计算（两种方法）

（1） 由电动势定义求

$$\varepsilon_{动} = \int_{-\,(经内电路)}^{+} (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

（ $\mathrm{d}\vec{l}$ 沿积分方向）

或

$$\varepsilon_{动} = \oint_L \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

（沿绕行方向积分）

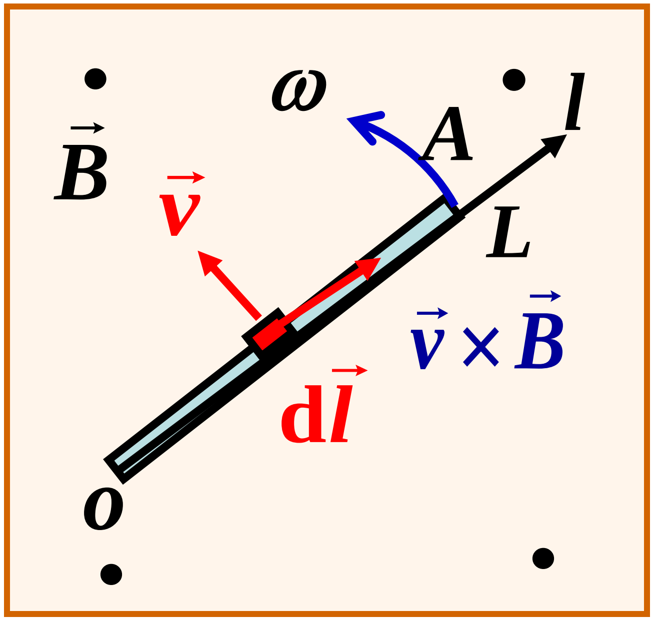
注意：动生电动势只存在于运动导体内，$\mathrm{d}\vec{l}$ 沿积分方向（或沿绕行方向），若 $\varepsilon_{动} > 0$，$\varepsilon_{动}$ 与积分方向（或绕行方向）同向；若 $\varepsilon_{动} < 0$，与积分方向（或绕行方向）反向。

（2） 由法拉第定律求 $\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\psi_m}{\mathrm{d}t}$

如果回路不闭合，需加辅助线使其闭合。

ε 大小和方向可分别确定。

例1: 长L 的铜棒OA，绕其固定端O 在均匀磁场$\vec{B}$中以 ω 逆时针转动，铜棒与$\vec{B}$ 垂直，求$\varepsilon_{动}=?$



解: 取线元$\mathrm{d}\vec{l}$(沿l轴正方向)

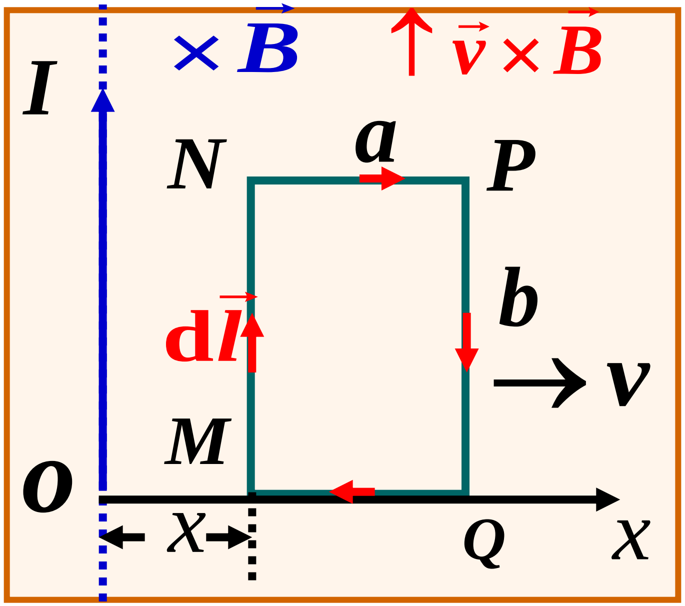
$$v=\omega l$$

$\vec{v}\times\vec{B}$与$\mathrm{d}\vec{l}$同向，并且$\left|\vec{v}\times\vec{B}\right|=vB$

$$\mathrm{d}\varepsilon=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=vB\mathrm{d}l$$
$$=B\omega l\mathrm{d}l$$

$$\varepsilon=\int\mathrm{d}\varepsilon=\int_{o}^{L}B\omega l\mathrm{d}l=\frac{1}{2}B\omega L^{2}\quad A+,\ o-$$

例2 (P_{309}11. 6)：如图所示，一矩形导线框在无限长载流导线I 的场中向右运动，求其动生电动势。



解：$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x'}$ 方向$\otimes$

$$\left|\vec{v}\times\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I v}{2\pi x'} \quad 方向\uparrow$$

绕行方向：顺时针方向（与$\vec{B}$呈右旋）

$$\varepsilon_{动} = \oint_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

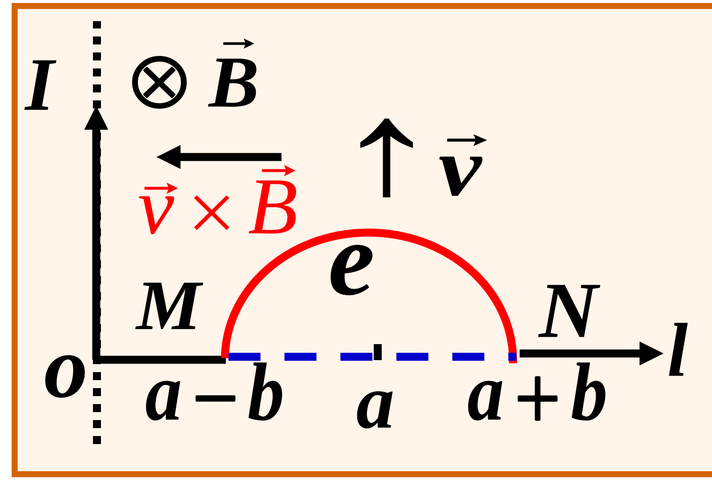
$$= \int_M^N (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_N^P (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_P^Q (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_Q^M (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_M^N \frac{\mu_0 I v \mathrm{d}l}{2\pi x} + 0 + \int_P^Q \left[-\frac{\mu_0 I v \mathrm{d}l}{2\pi(x+a)}\right] + 0 = \frac{\mu_0 I v a b}{2\pi x(x+a)}$$ 方向：

例3 (P$_{309}$ 11.5)已知：$I, a, b, \vec{v}$，求：$\varepsilon_{动}$， $U_M - U_N$

解：连接MN构成闭合回路，

穿过回路 ϕ_m 不变。



$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_{MeN} + \varepsilon_{NM} = 0$$

$$\varepsilon_{MeN} = -\varepsilon_{NM} = \varepsilon_{MN} = \int_M^N (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

M—N上l处：$\left|\vec{v}\times\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I v}{2\pi l}$， 方向 ←

$$\therefore \varepsilon_{MeN} = \int_{a-b}^{a+b} \frac{\mu_0 I v}{2\pi l}\cos\pi\,\mathrm{d}l = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}$$

$U_M > U_N$

$$\therefore U_M - U_N = -\varepsilon_{MeN} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}$$

三、感生电动势

1. 定义：

导体回路不动，由于磁场变化引起穿过回路的磁通量变化而产生的感应电动势。

2. 非静电力

麦克斯韦指出：无论是否存在导体回路，随时间变化的磁场总要在其周围空间激发感生电场，若空间有导体，导体内的自由电荷就会受感生电场产生的力的作用而定向运动，形成感应电动势。

非静电力：感生电场力(涡旋电场力)

电荷受力：$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

$$= q\vec{E}_{静} + q\vec{E}_{感} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

非静电力：$\vec{F}_K = \vec{F}_{感} = q\vec{E}_{感}$

非静电场强：$\vec{E}_K = \vec{E}_{感}$

3. 感生电场的基本性质

由电动势定义 $\varepsilon_{感} = \oint_L \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

由法拉第定律：

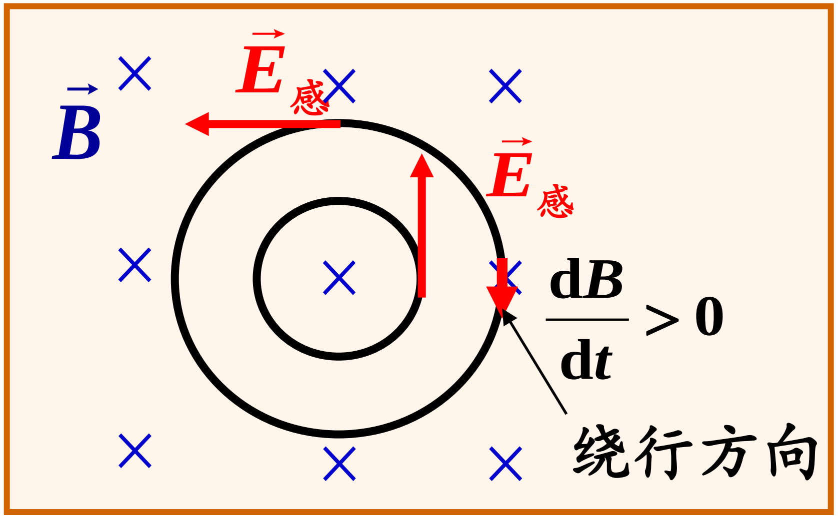
$$\varepsilon_{感} = -\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

得：$\oint_L \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ ⟶ 感生电场的环路定理

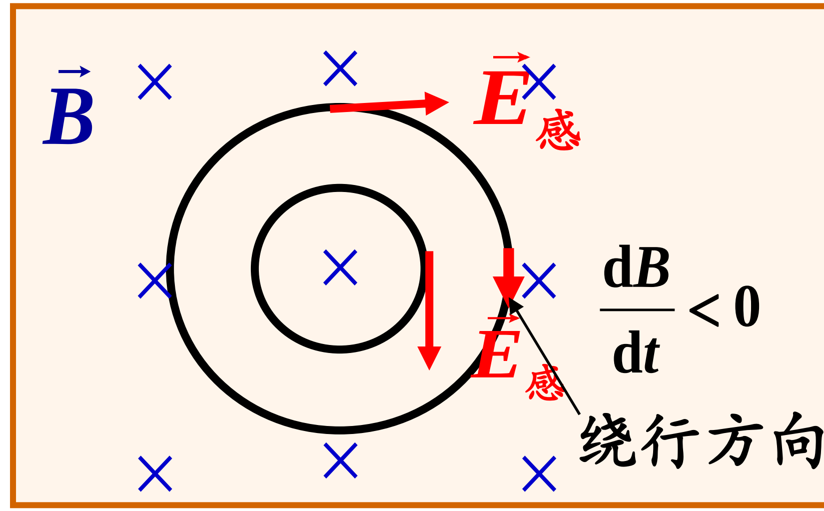
楞次定律表述

注意： 若 $\frac{\partial B}{\partial t} > 0$，则 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 与 $\vec{B}$ 同向；若 $\frac{\partial B}{\partial t} < 0$，则 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 与 $\vec{B}$ 反向。

$$\oint_L \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



$\vec{E}_{感}$与$\vec{B}$呈左旋关系



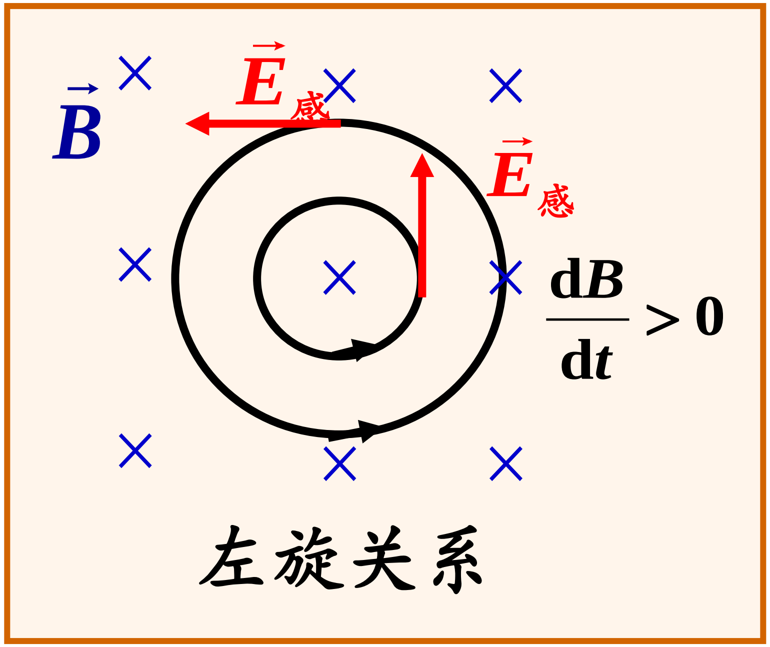
$\vec{E}_{感}$与$\vec{B}$呈右旋关系

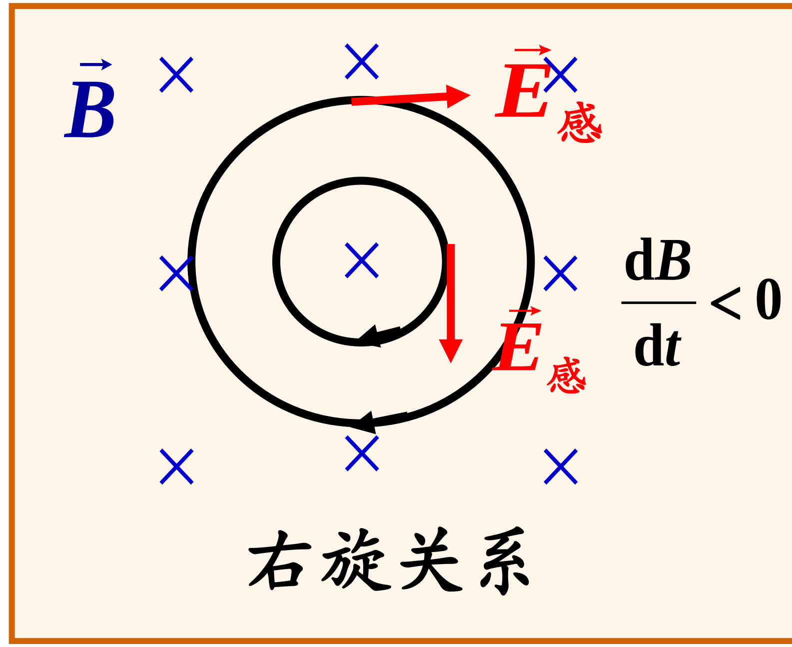
$\vec{E}_{感}$**方向：**若 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} > 0$，$\vec{E}_{感}$与$\vec{B}$呈左旋关系，与绕行方向反向；

反之，呈右旋关系，与绕行方向同向。

$\oint_L \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$ 感生电场是非保守场（无势场、涡旋场）

又：感生电场线闭合成环

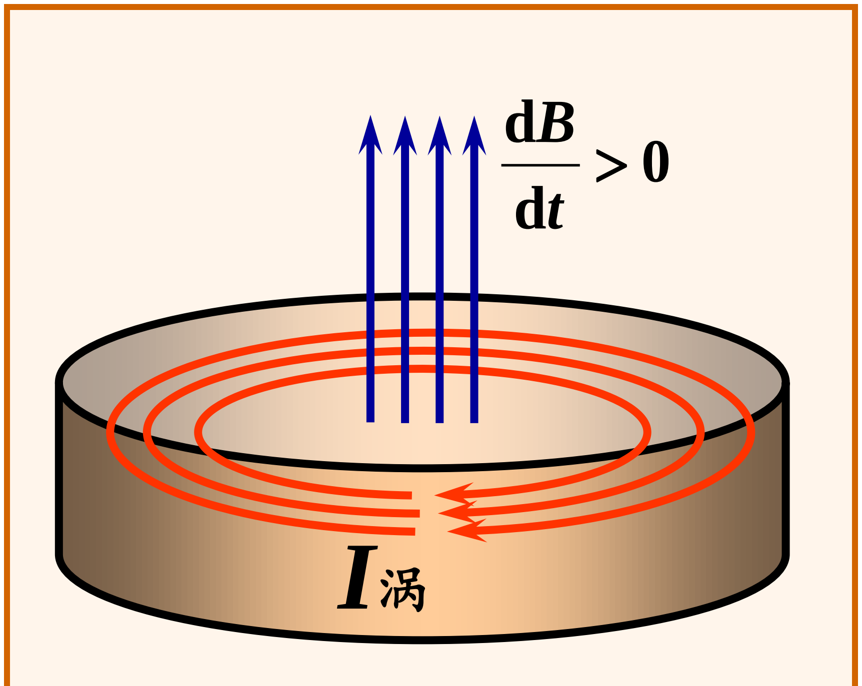




$\oint_s \vec{E}_{感} \cdot d\vec{S} = 0$　感生电场是无源场

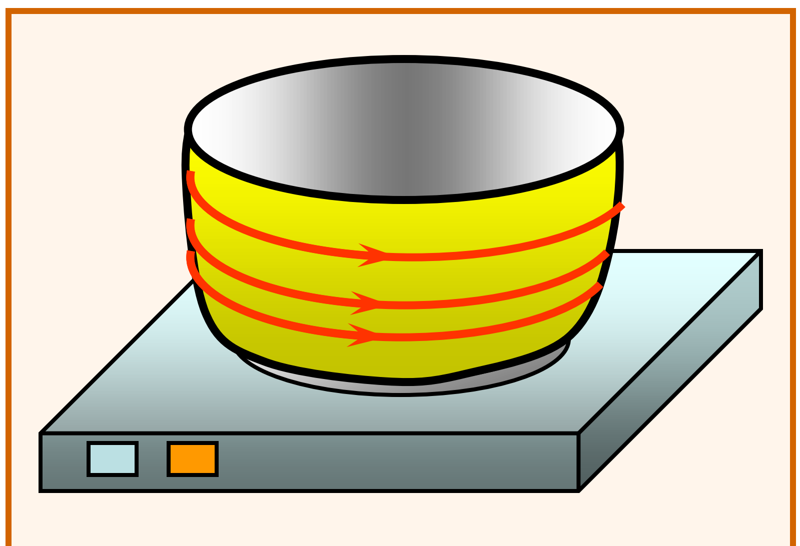
4. 感生电场存在的实验验证：涡电流

当导体置于变化的磁场中时，由于在变化的磁场周围存在着涡旋的感生电场，感生电场作用在导体内的自由电荷上，使电荷运动，形成涡电流。



应用举例:

　　电磁炉加热时炉体本身并不发热，在炉内有一线圈，当接通交流电时，在炉体周围产生交变的磁场当金属容器放在炉上时，在容器上产生涡电流，使容器发热，达到加热食物的目的。



5. 感生电动势的计算（两种方法）

(1). 由电动势定义求（$\vec{E}_{感}$ 已知或易求）

$$\varepsilon_{感}=\int_{-}^{+}\vec{E}_{感}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \quad 或 \quad \varepsilon_{感}=\oint_{L}\vec{E}_{感}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

（经内电路）

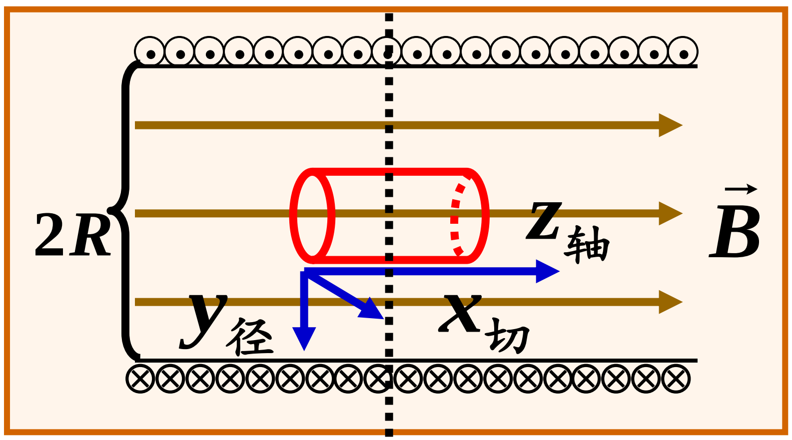
(2). 由法拉第定律

$$\varepsilon_{感}=-\frac{\mathrm{d}\psi_{m}}{\mathrm{d}t}=-N\int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

若导体不闭合，需加辅助线构成闭合回路。

例1 (P$_{290}$ 例4、例5)：已知半径R的长直螺线管中电流随时间线性变化，使管内磁感应强度随时间增大：$\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=$恒量$>0$

(1) 求感生电场分布；(2) 螺线管截面内放置长2R的金属棒，$ab=bc=R$。求：金属棒中的$\varepsilon_{感}$。



对称性分析（P$_{320}$ 证明）

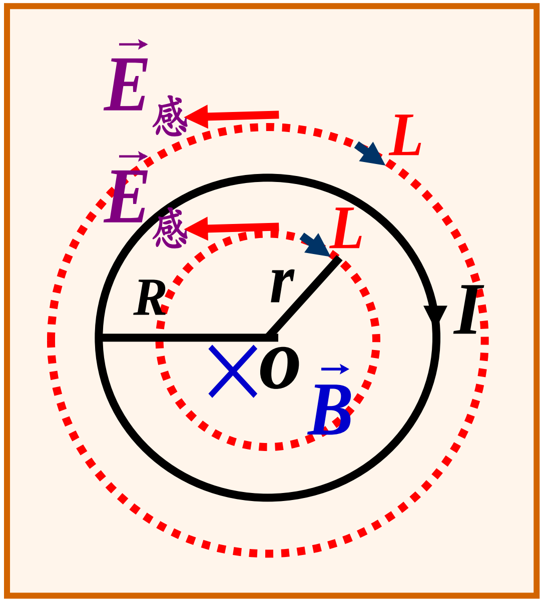
作同轴圆柱形高斯面

$$\vec{E}_{感径}=\vec{E}_{感轴}=0$$

$\vec{E}_{感}$只有以螺线管轴线为中心的圆周切向分量，且在圆周上其大小相等。

感生电场线是在垂直于轴线平面内，以轴线为中心的一系列同心圆。

$\vec{E}_{感}$与$\vec{B}$呈左旋关系

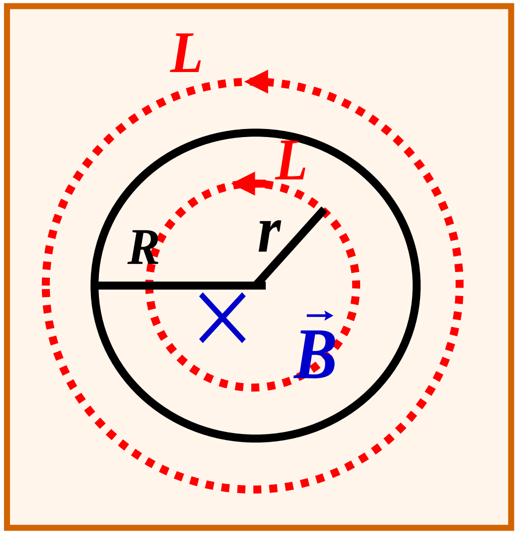


作如图环路L（绕行方向与$\vec{E}_{感}$反向）

$$\oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l} = -E_{感}\cdot 2\pi r$$

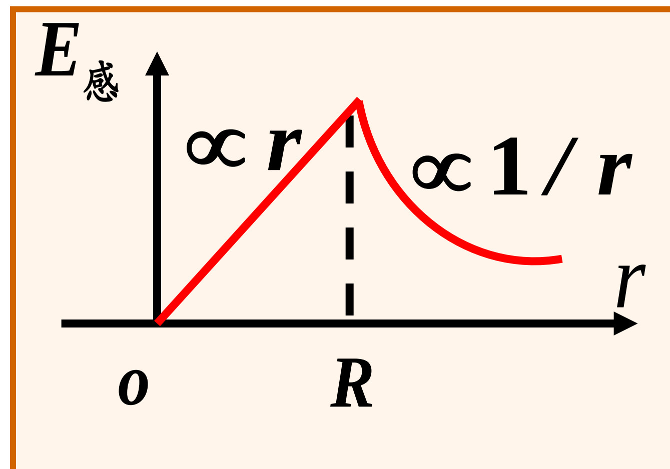
$$= -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = -\int_s \frac{dB}{dt} dS\cos 0^\circ = -\int_s \frac{dB}{dt} dS$$

$$r \le R: \quad \int_s \frac{dB}{dt} dS = \frac{dB}{dt}\pi r^2 \qquad E_{感} = \frac{\frac{dB}{dt}\cdot \pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \propto r$$



$$r \geq R:\ \int_s \frac{dB}{dt}dS = \frac{dB}{dt}\pi R^2$$

$$E_{感} = \frac{\frac{dB}{dt}\cdot \pi R^2}{2\pi r} = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt} \propto \frac{1}{r}$$

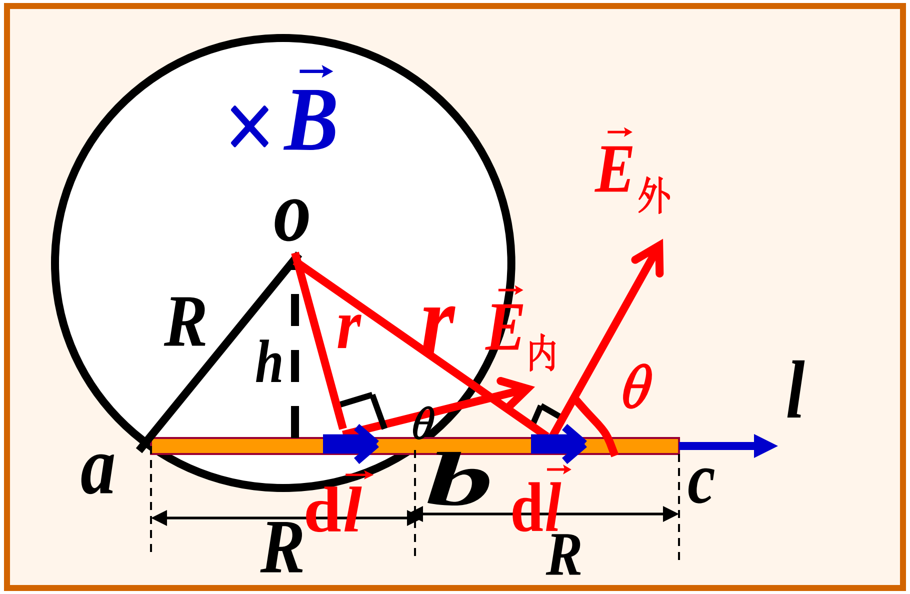


注意：

(1) 只要有变化磁场，整个空间就存在感生电场。

$r > R$ 处 $B \equiv 0$, $\frac{dB}{dt} = 0$ 但 $\vec{E}_{感} \neq 0$

(2) 求感生电场分布是一个复杂问题，只要求本题这种简单情况。



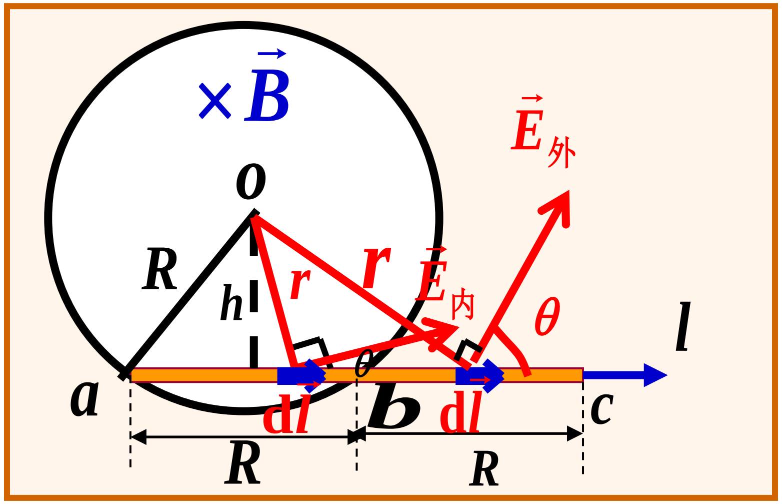
(2)：感应电场分布

$$\begin{cases} E_{内} = \dfrac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \\ E_{外} = \dfrac{R^2}{2r}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

由电动势定义：

$$\varepsilon_{感} = \varepsilon_{ac} = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc} = \int_a^b \vec{E}_{内} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_b^c \vec{E}_{外} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_a^b \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}l\cos\theta + \int_b^c \frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}l\cos\theta$$



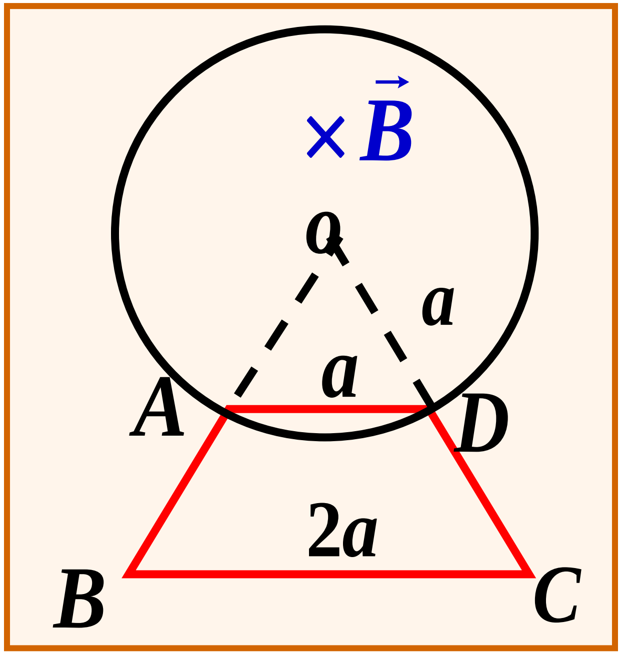
$$r^2 = h^2 + \left(l - \frac{R}{2}\right)^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}R \qquad \cos\theta = \frac{h}{r}$$

$$\varepsilon_{感} = \int_0^R \frac{h}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}l + \int_R^{2R} \frac{R^2 h}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}l}{h^2 + \left(l - \frac{R}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + \frac{\pi R^2}{12}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{3\sqrt{3}+\pi}{12}R^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

a: − ; c: +



练习(P$_{309}$ 11.8)：

已知：半径a，磁场 $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} > 0$

等腰梯形边长 $a, 2a$

求：各边$\varepsilon_{感}$，$\varepsilon_{总}$

解：连接 OA，OD

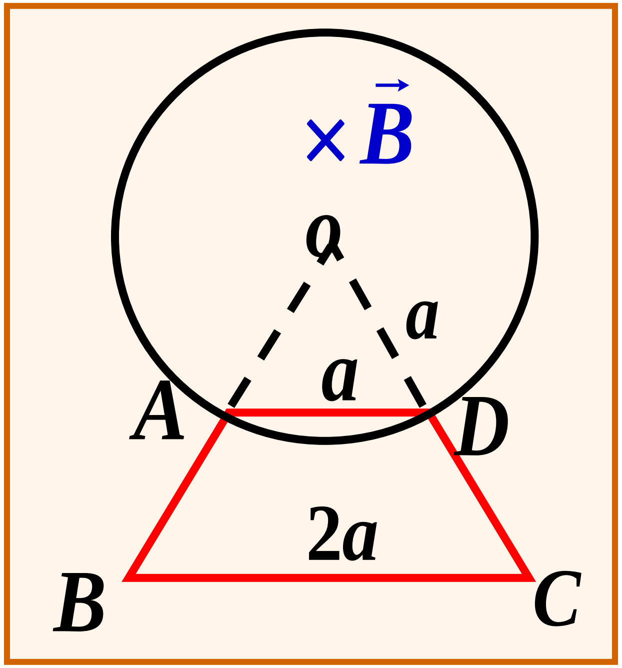
$\vec{E}_{感} \perp$半径，故：$\varepsilon_{OA} = \varepsilon_{OD} = \varepsilon_{OB} = \varepsilon_{OC} = \varepsilon_{AB} = \varepsilon_{CD} = 0$

取三角形回路 ODA，绕行方向：顺时针方向。

$$\phi_m = B \cdot S_{\Delta OAD} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 B$$

$$\varepsilon_{DA} = \varepsilon_{\Delta ODA} = -\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

方向：$A \rightarrow D$



取三角形回路 OCB，绕行方向：顺时针方向。

$$\phi_m = B\cdot S_{扇O\overset{\frown}{AD}} = \frac{\pi a^2}{6}B$$

$$\varepsilon_{CB} = \varepsilon_{\Delta OCB} = -\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi a^2}{6}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

方向：$B\rightarrow C$

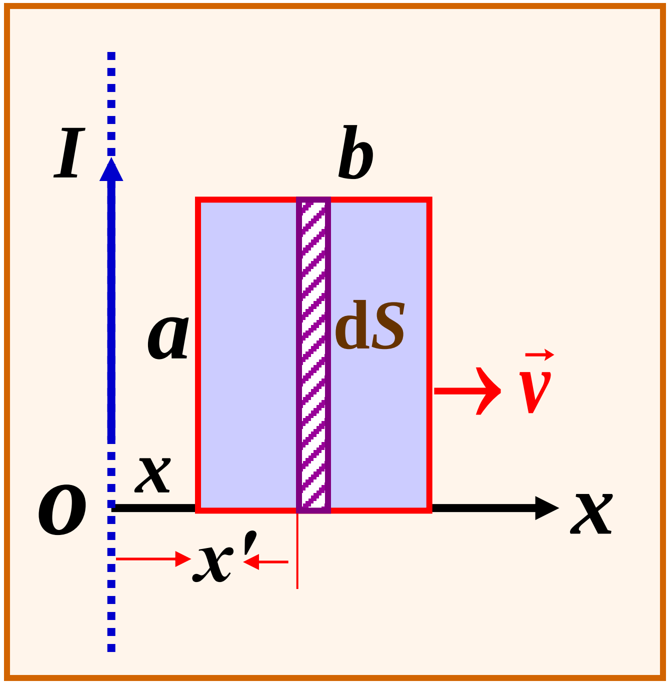
梯形回路 $ADCB$（绕行方向：顺时针方向）：

$$\varepsilon = \varepsilon_{CB} + \varepsilon_{BA} + \varepsilon_{AD} + \varepsilon_{DC} = \varepsilon_{CB} - \varepsilon_{DA}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} - \frac{\pi a^2}{6}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right)a^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$+$

例2（P_{309} 11.9）：已知：$I=I_0\cos\omega t, a, b, \vec{v}$，求：$\varepsilon=?$



解：同时存在$\varepsilon_{动}$，$\varepsilon_{感}$

直接由法拉第电磁感应定律求解

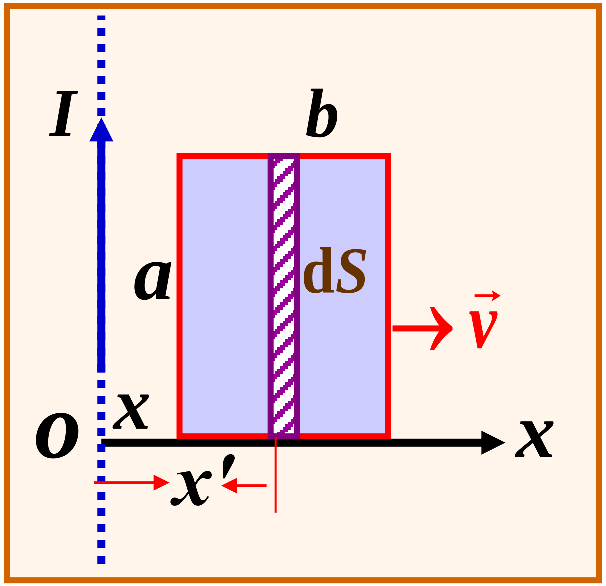
设t 时刻矩形线圈左边处于x处

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x'} \qquad \mathrm{d}S=a\mathrm{d}x'$$

$$\mathrm{d}\phi_m=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\frac{\mathrm{d}x'}{x'}$$

$$\phi_m=\int\mathrm{d}\phi_m=\int_x^{x+b}\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\frac{\mathrm{d}x'}{x'}=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\frac{x+b}{x}$$

$$=\frac{\mu_0 a}{2\pi}I_0\cos\omega t\cdot\ln\frac{x+b}{x}$$



$$\phi_m = \frac{\mu_0 a}{2\pi} I_0 \cos\omega t \cdot \ln\frac{x+b}{x}$$

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi}[\omega \sin\omega t \cdot \ln\frac{x+b}{x} + \cos\omega t \cdot \frac{b}{(x+b)x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}]$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi}[\omega \sin\omega t \cdot \ln\frac{x+b}{x} + \frac{bv}{(x+b)x}\cos\omega t]$$

第一项：$\varepsilon_{感}$

第二项：$\varepsilon_{动}$

作业

1. No. 11（希望在作业题纸中选择、填空各题的相应位置处写出其关键步骤）；
2. 自学本章各例题并完成书上的习题(对照书后的参考答案自己订正)。

第十七周星期二交作业