第十四章 状态变量法

§14-1 状态、状态变量及状态方程

一、状态

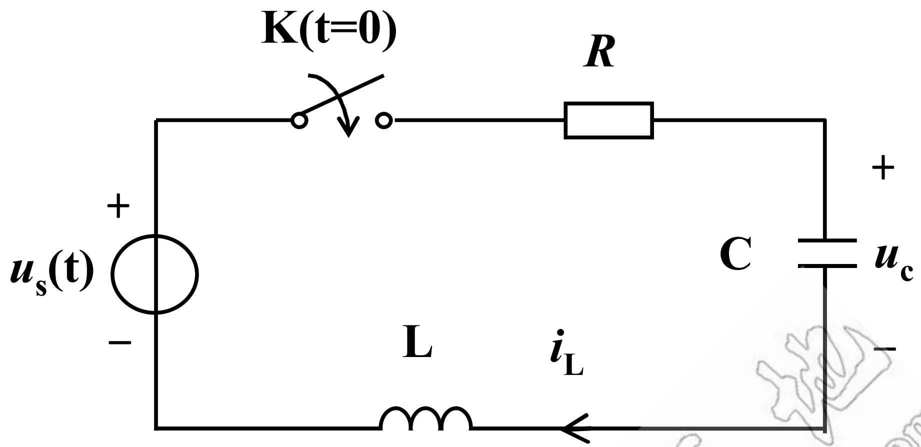
在某给定时刻，电路所必须具备的最少量的信息。

二、状态变量

如电容电压 u_C ，电感电流 i_L

三、状态方程

状态方程：以状态变量为未知量而建立的一阶微分方程组。



二阶方程：$LC\dfrac{d^2u_c}{dt^2}+RC\dfrac{du_c}{dt}+u_c=u_s$

用状态变量 u_c、i_L 列方程：

$$\begin{cases} C\dfrac{du_c}{dt}=i_L \\ L\dfrac{di_L}{dt}+u_c+Ri_L=u_s \end{cases}$$

整理

$$\begin{cases} \dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{1}{C} i_L \\ \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{1}{L} u_c - \dfrac{R}{L} i_L + \dfrac{1}{L} u_s \end{cases}$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_c}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} [u_s]$$

若令 $x_1 = u_c \qquad x_2 = i_L$

则 $\dot{x}_1 = \dfrac{du_c}{dt} \qquad \dot{x}_2 = \dfrac{di_L}{dt}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{B}\left[u_s\right]$$

状态方程的一般形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

简写为 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}$

其中 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 称为状态向量、状态矢量

x_i 称为状态分量。

采用状态变量分析电路暂态的优越性

① 容易给出初始条件

② 所有状态变量一次得到求解

③ 适宜于机辅分析

四、输出方程

输出方程：一组输出变量与状态变量、输入之间的关系式。

输出方程是一组代数方程。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

简写为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{f}$

§14-2 状态方程的建立

一、方法1

1、特有树又称特树、专树、常态树

它的树支包含了所有的电压源支路和电容支路，它的连支包含了电路中所有的电流源支路和电感支路。

2、利用特有树编写状态方程

步骤：

① 选状态变量：选 u_c 与 i_L 作为状态变量。

② 画出拓扑图，并选出特有树。每个元件作为一条支路。

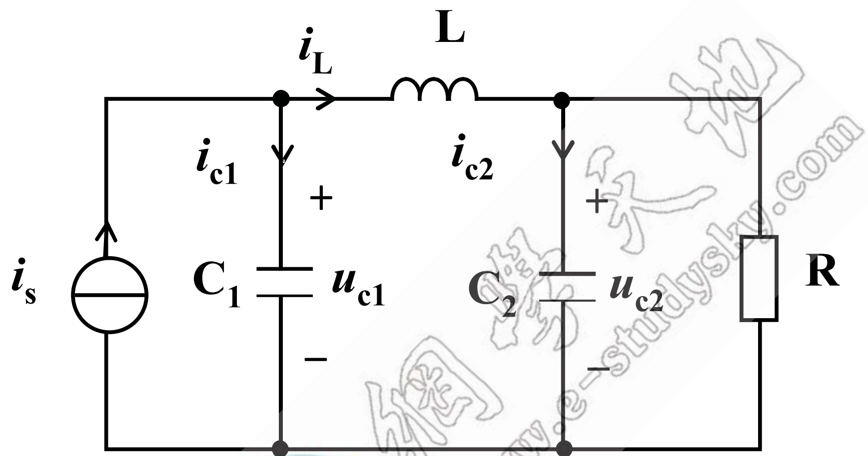
③ 给支路编号并定向。支路电流与电压方向取关联参考方向。

④ 画出电容所在树支的基本割集，并写出KCL方程。画出电感所在连支的基本回路，并写出KVL方程。

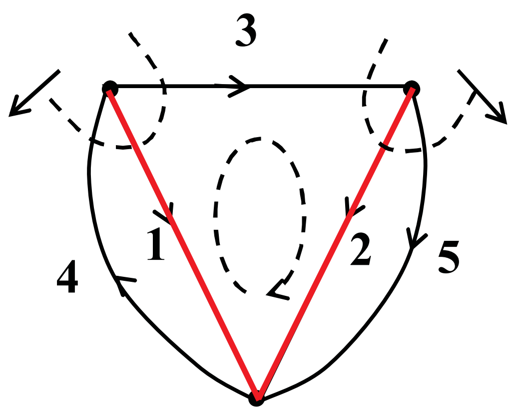
⑤ 消去非状态变量，并整理成标准形式（矩阵形式）。

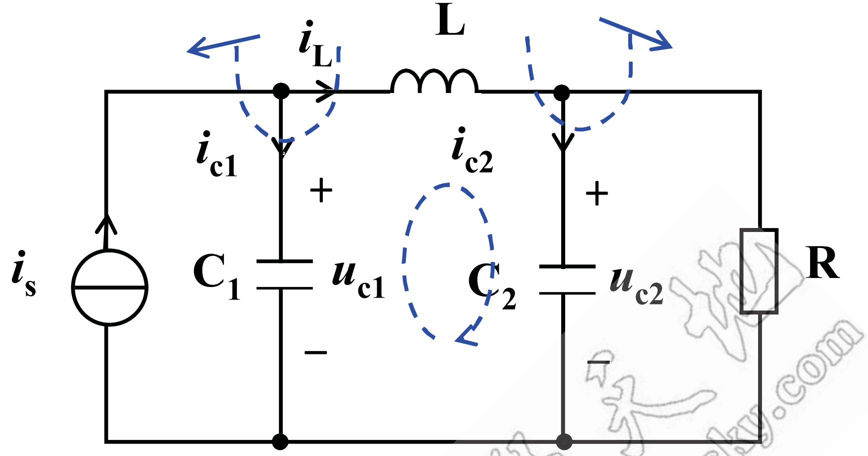
⑥ 写出输出方程，并整理成标准的矩阵形式。

例1：写出图示电路的状态方程和输出方程（输出为i_{c1}、i_{c2}）



解：选u_{c1}、u_{c2}、i_L为状态变量，拓扑图及特有树如图





$$C_1\frac{du_{c1}}{dt}+i_L-i_s=0$$

$$C_2\frac{du_{c2}}{dt}-i_L+\frac{u_{c2}}{R}=0$$

$$L\frac{di_L}{dt}+u_{c2}-u_{c1}=0$$

整理矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_{c1}}{dt} \\ \dfrac{du_{c2}}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{1}{C_1} \\ 0 & -\dfrac{1}{RC_2} & \dfrac{1}{C_2} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [i_s]$$

输出方程：

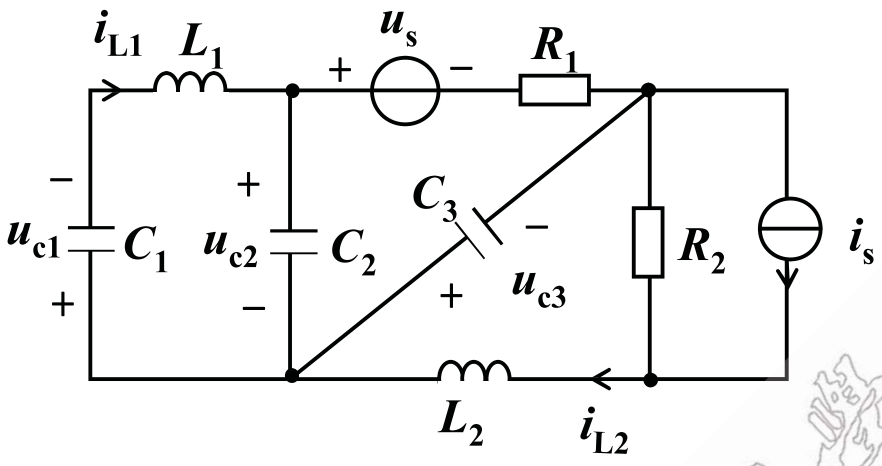
$$i_{c1} = i_s - i_L$$

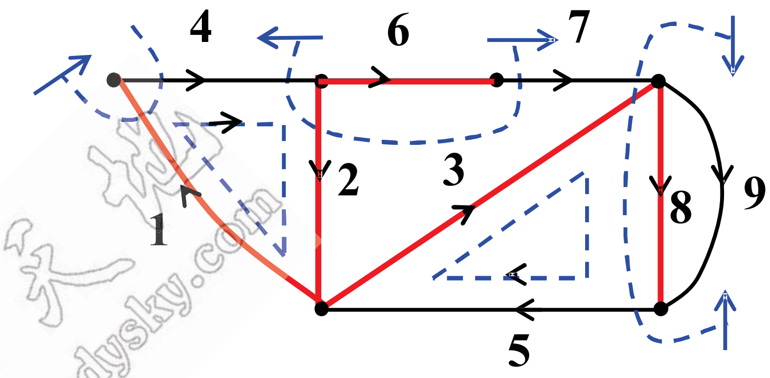
$$i_{c2} = i_L - \frac{u_{c2}}{R}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} i_{c1} \\ i_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\dfrac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [i_s]$$

例2 写出图示电路的状态方程



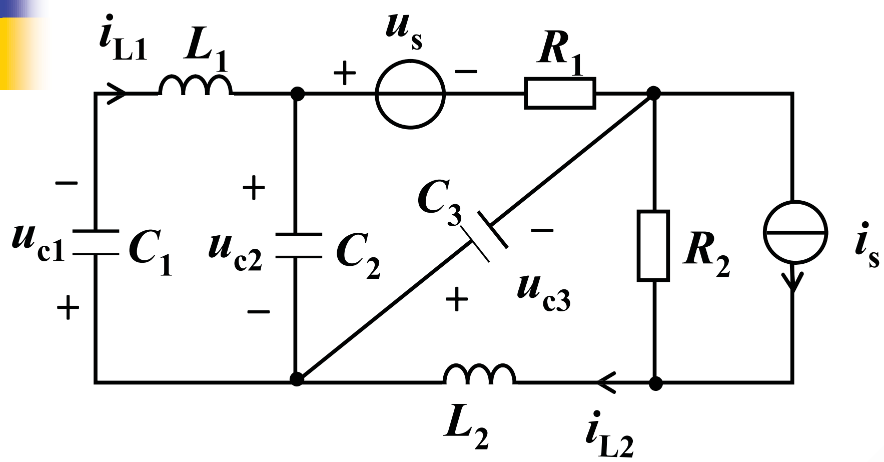


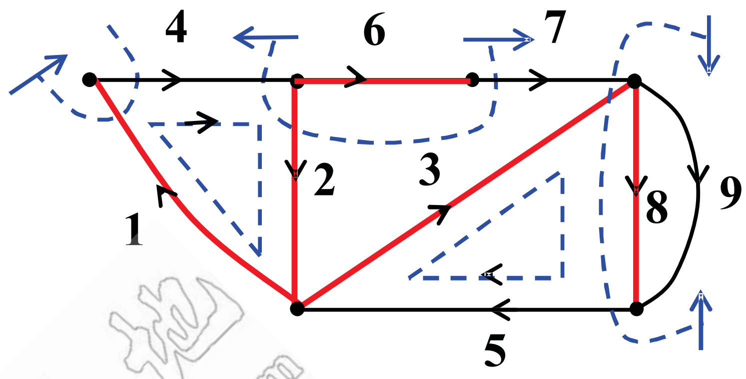
解：① 选 $u_{c1}, u_{c2}, u_{c3}, i_{L1}, i_{L2}$ 为状态变量

② 拓扑图、特有树（粗线）、支路编号及定向

③ 画电容所在树支的基本割集，KCL

$$C_1\frac{du_{c1}}{dt} = i_{L1}$$





$$C_2\frac{du_{c2}}{dt}=i_{L1}-i_7$$

$$C_3\frac{du_{c3}}{dt}=i_{L2}-i_7$$

画电感所在连支的基本回路，满足KVL：

$$L_1\frac{di_{L1}}{dt}=-u_{c1}-u_{c2}$$

$$L_2\frac{di_{L2}}{dt}=-u_{c3}-u_8$$

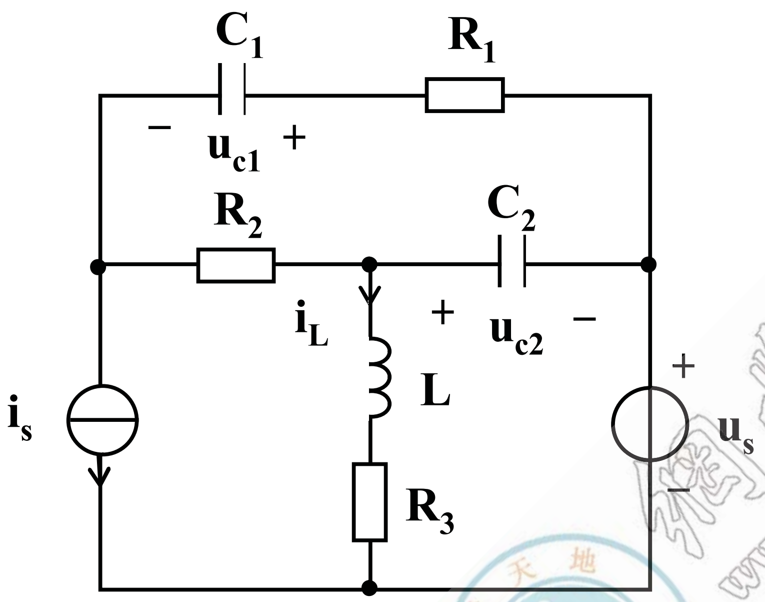
④ 消去非态变量 i_7 和 u_8 ：

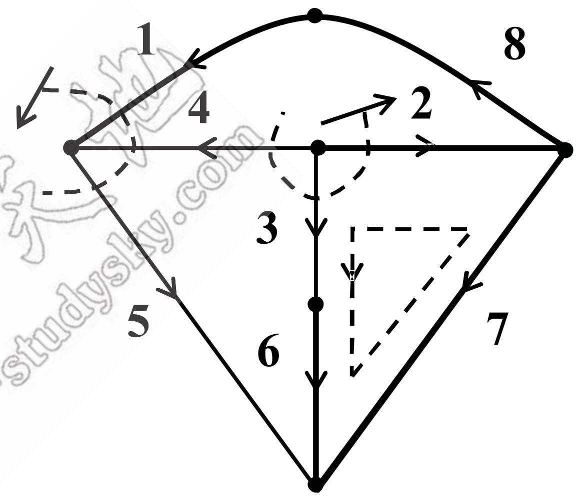
$$i_7=\frac{1}{R_1}[-u_s+u_{c2}+u_{c3}] \qquad u_8=i_8R_2=(i_{L2}-i_s)R_2$$

代入上述式子写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\frac{du_{c1}}{dt}\\ \frac{du_{c2}}{dt}\\ \frac{du_{c3}}{dt}\\ \frac{di_{L1}}{dt}\\ \frac{di_{L2}}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0\\ 0 & -\frac{1}{R_1C_2} & -\frac{1}{R_1C_2} & \frac{1}{C_2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{R_1C_3} & -\frac{1}{R_1C_3} & 0 & \frac{1}{C_3}\\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{c1}\\ u_{c2}\\ u_{c3}\\ i_{L1}\\ i_{L2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{R_1C_2} & 0\\ \frac{1}{R_1C_3} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & \frac{R_2}{L_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_s\\ i_s\end{bmatrix}$$

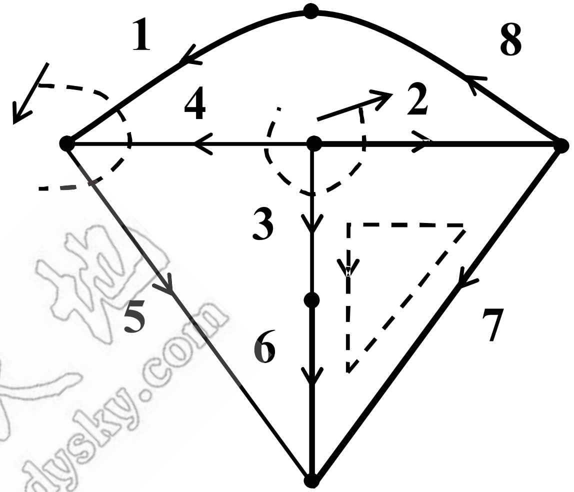
例3：写出图示电路的状态方程





解：选 u_{c1}, u_{c2}, i_L 为状态变量

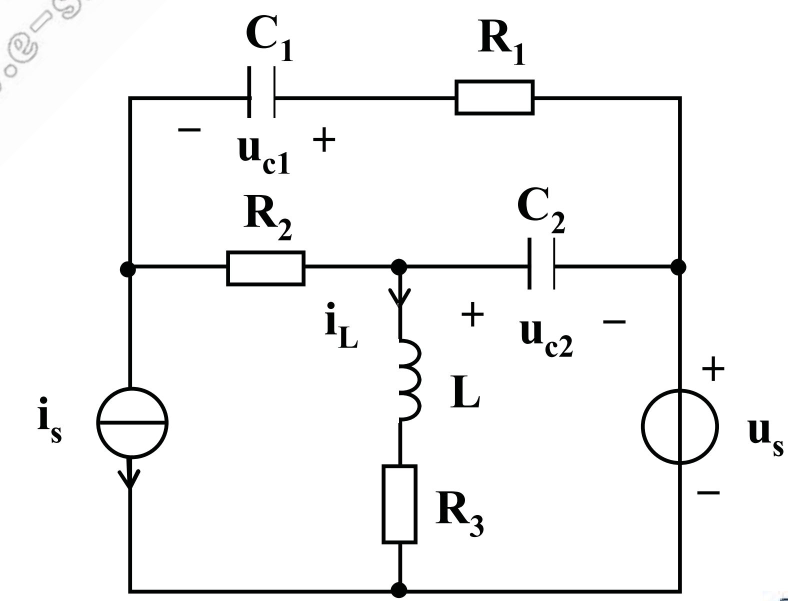
$$\begin{cases} C_1\dfrac{du_{c1}}{dt}+i_4-i_s=0 \\ C_2\dfrac{du_{c2}}{dt}+i_L+i_4=0 \\ L\dfrac{di_L}{dt}+u_6-u_s-u_{c2}=0 \end{cases}$$



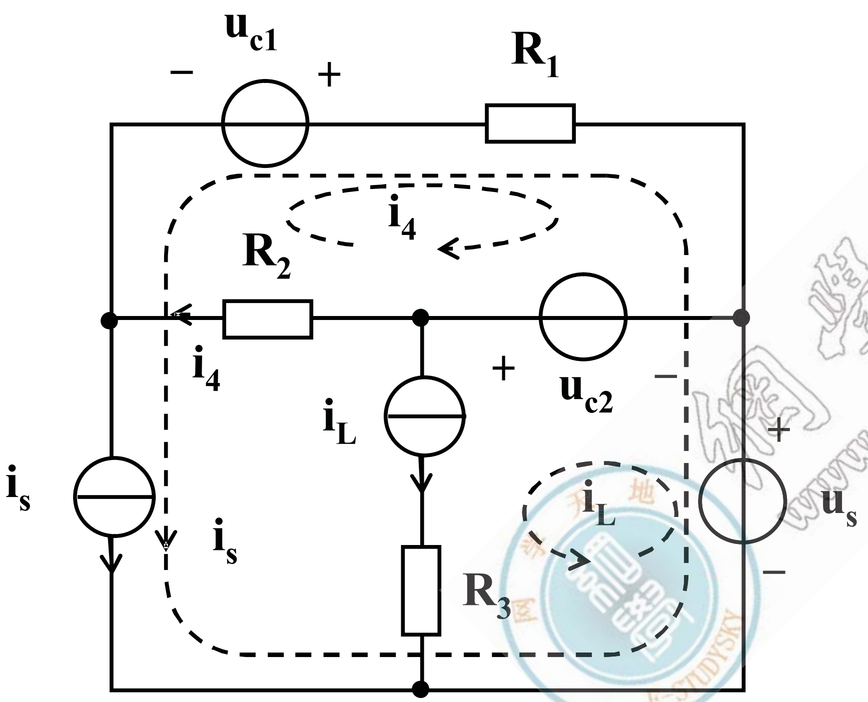
消去非状态变量i_4和u_6：

$$u_6=R_3i_L$$

但i_4的表达式不易求得。



方法：电容用电压源替代，电感用电流源替代，然后利用等效电路，求出i_4的代数表达式。



利用回路法求 i_4:

$$-u_{c1}+R_1(i_4-i_s)-u_{c2}+R_2 i_4=0$$

$$\therefore \quad i_4=\frac{1}{R_1+R_2}(u_{c1}+u_{c2}+R_1 i_s)$$

代入微分方程中

整理成矩阵形式：

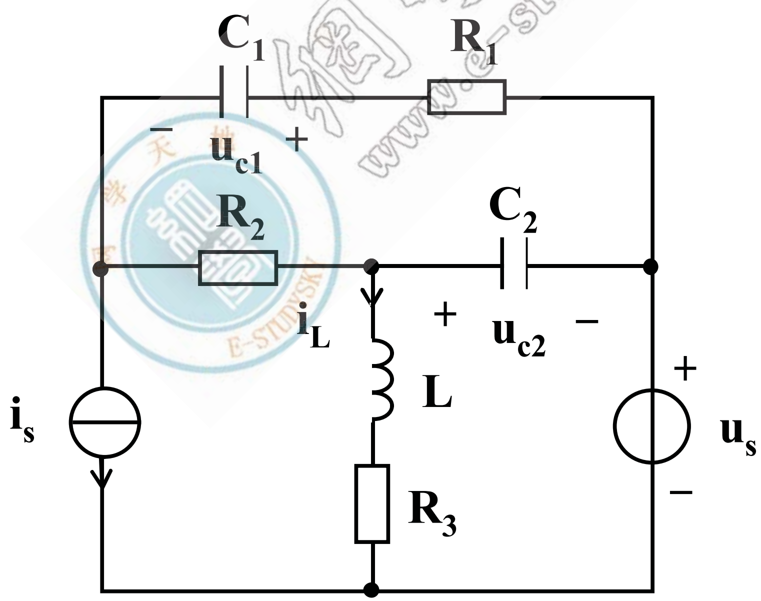
$$\begin{bmatrix} \frac{du_{c1}}{dt} \\ \frac{du_{c2}}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1(R_1+R_2)} & -\frac{1}{C_1(R_1+R_2)} & 0 \\ -\frac{1}{C_2(R_1+R_2)} & -\frac{1}{C_2(R_1+R_2)} & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{R_3}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_2}{C_1(R_1+R_2)} \\ 0 & \frac{-R_1}{C_2(R_1+R_2)} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

若输出方程不易直接写出，也可以通过上述等效电路来求。

二、方法2

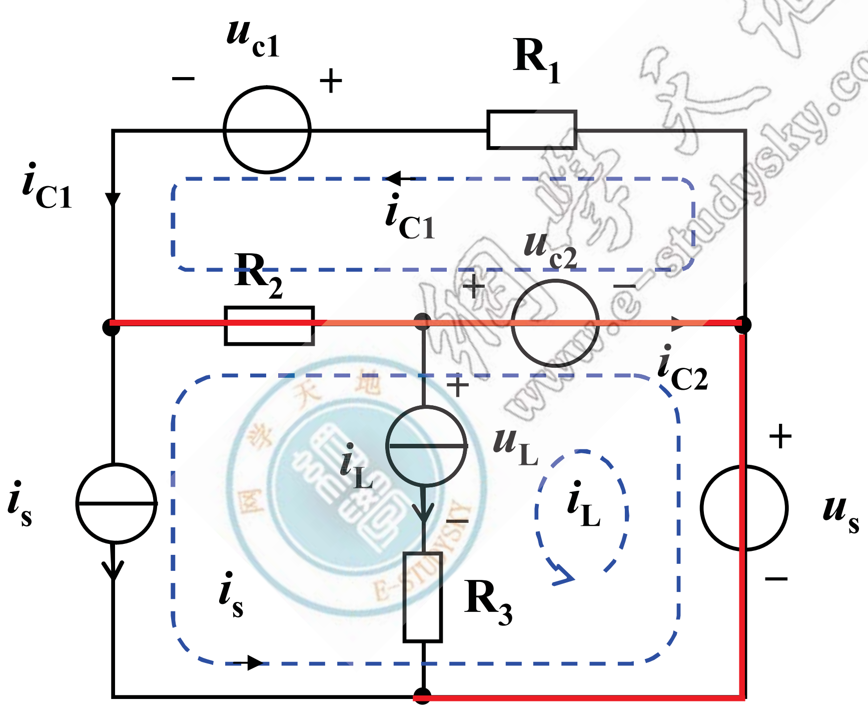
电容用电压源替代，电感用电流源替代，求出i_C、u_L。

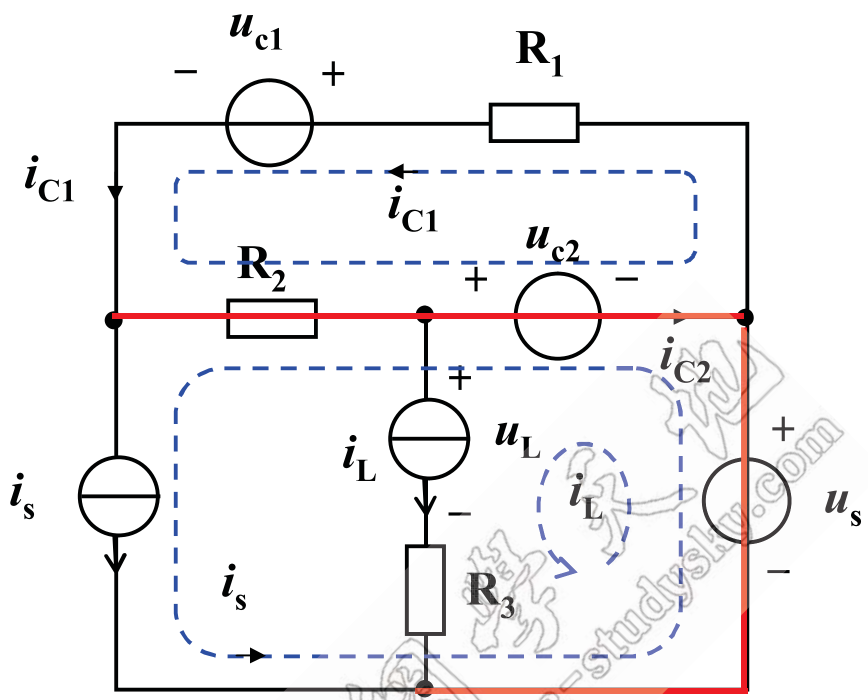
例4：写出图示电路的状态方程



解： 选 u_{c1}, u_{c2}, i_L 为状态变量

替代后的电路如图，求i_{C1}、i_{C2}、u_L





$$R_1 i_{c1} + u_{c1} + R_2(i_{c1} - i_s) + u_{c2} = 0$$

$$i_{c1} = -\frac{1}{R_1+R_2}u_{c1} - \frac{1}{R_1+R_2}u_{c2} + \frac{R_2}{R_1+R_2}i_s$$

$$i_{c2} = i_{c1} - i_L - i_s = -\frac{1}{R_1+R_2}u_{c1} - \frac{1}{R_1+R_2}u_{c2} - i_L + \frac{-R_1}{R_1+R_2}i_s$$

$$u_L = u_{c2} - R_3 i_L + u_s$$

$$C_1 \frac{du_{c1}}{dt} = -\frac{1}{R_1 + R_2} u_{c1} - \frac{1}{R_1 + R_2} u_{c2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s$$

$$C_2 \frac{du_{c2}}{dt} = -\frac{1}{R_1 + R_2} u_{c1} - \frac{1}{R_1 + R_2} u_{c2} - i_L + \frac{-R_1}{R_1 + R_2} i_s$$

$$L \frac{di_L}{dt} = u_{c2} - R_3 i_L + u_s$$

$$
\begin{bmatrix} \dfrac{du_{c1}}{dt} \\ \dfrac{du_{c2}}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{C_1(R_1+R_2)} & -\dfrac{1}{C_1(R_1+R_2)} & 0 \\ -\dfrac{1}{C_2(R_1+R_2)} & -\dfrac{1}{C_2(R_1+R_2)} & -\dfrac{1}{C_2} \\ 0 & -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_3}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{R_2}{C_1(R_1+R_2)} \\ 0 & \dfrac{-R_1}{C_2(R_1+R_2)} \\ \dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}
$$