概率论与数理统计 B 习题一答案

A

1. 袋中有 10 个球，分别编有号码 1～10，从中任取 1 球，设 A＝{取得球的号码是偶数}，B＝{取得球的号码是奇数}，C={取得球的号码小于 5}，问：下列运算表示什么事件：

（1）$A\bigcup B$；（2）AB；（3）AC；（4）$\overline{AC}$；（5）$\overline{A}\,\overline{C}$；（6）$\overline{B\bigcup C}$；（7）$A-C$。

解：(1) $A\bigcup B=\Omega$ 是必然事件；(2) $AB=\phi$ 是不可能事件；

(3) $AC=${取得球的号码是 2，4}；

(4) $\overline{AC}=${取得球的号码是 1，3，5，6，7，8，9，10}；

(5) $\overline{A}\,\overline{C}=${取得球的号码为奇数，且不小于 5}＝{取得球的号码为 5，7，9}；

(6) $\overline{B\bigcup C}=\overline{B}\bigcap\overline{C}=${取得球的号码是不小于 5 的偶数}＝{取得球的号码为 6，8，10}；

(7) $A-C=A\overline{C}=${取得球的号码是不小于 5 的偶数}={取得球的号码为 6，8，10}。

2. 在区间 $[0,2]$ 上任取一数，记 $A=\left\{x\left|\frac{1}{2}<x\le 1\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{2}\right.\right\}$，求下列事件的表达式：（1）$A\bigcup B$；（2）$\overline{A}B$；（3）$A\overline{B}$，（4）$A\bigcup\overline{B}$。

解：(1) $A\bigcup B=\left\{x\left|\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{2}\right.\right\}$；

(2) $\overline{A}B=\left\{x\left|0\le x\le\frac{1}{2}\text{或}1<x\le 2\right.\right\}\bigcap B=\left\{x\left|\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\right.\right\}\bigcup\left\{x\left|1<x\le\frac{3}{2}\right.\right\}$；

(3) 因为 $A\subset B$，所以 $A\overline{B}=\phi$；

(4) $A\bigcup\overline{B}=A\bigcup\left\{x\left|0\le x<\frac{1}{4}\text{或}\frac{3}{2}<x\le 2\right.\right\}=$

$$\left\{x\left|0\le x<\frac{1}{4}\text{或}\frac{1}{2}<x\le 1\text{或}\frac{3}{2}<x\le 2\right.\right\}。$$

3. 用事件 A，B，C 的运算关系式表示下列事件：

（1）A 出现，B，C 都不出现；

（2）A，B 都出现，C 不出现；

（3）所有三个事件都出现；
（4）三个事件中至少有一个出现；
（5）三个事件都不出现；
（6）不多于一个事件出现；
（7）不多于二个事件出现；
（8）三个事件中至少有二个出现。

解：$(1)\,E_1 = A\overline{B}\overline{C}$； $(2)\,E_2 = AB\overline{C}$； $(3)\,E_3 = ABC$； $(4)\,E_4 = A \cup B \cup C$；

$(5)\,E_5 = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$； $(6)\,E_6 = \overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$；

$(7)\,E_7 = \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$；$(8)\,E_8 = AB \cup AC \cup BC$。

4. 一批产品中有合格品和废品，从中有放回地抽取三个产品，设 A_i 表示事件“第 i 次抽到废品”，试用 A_i 的运算表示下列各个事件：
（1）第一次、第二次中至少有一次抽到废品；
（2）只有第一次抽到废品；
（3）三次都抽到废品；
（4）至少有一次抽到合格品；
（5）只有两次抽到废品。

解：$(1)\,A_1 \cup A_2$； $(2)\,A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$； $(3)\,A_1A_2A_3$；

$(4)\,\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$； $(5)\,A_1A_2\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3$。

5. 接连进行三次射击，设 A_i ={第 i 次射击命中}（i=1，2，3），试用 A_1, A_2, A_3 表示下述事件：
（1）A={前两次至少有一次击中目标}；
（2）B={三次射击恰好命中两次}；
（3）C={三次射击至少命中两次}；
（4）D={三次射击都未命中}。

解：$A = A_1 \cup A_2$，$B = A_1A_2\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3$，

$C = A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3$，$D = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$。

6. 一个口袋中装有 6 只球，分别编上号码 1～6，随机地从这个口袋中取 2 只球，试求：
（1）最小号码是 3 的概率；（2）最大号码是 3 的概率。

解：本题是无放回模式，样本点总数 $n = 6\times 5$：

（ⅰ）最小号码为 3，只能从编号为 3，4，5，6 这四个球中取 2 只，且有一次抽到 3，因而有利样本点数为 2×3，所求概率为 $\dfrac{2\times 3}{6\times 5} = \dfrac{1}{5}$；

（ⅱ）最大号码为 3，只能从 1，2，3 号球中取，且有一次取到 3，于是有利样本点数为 2×2，所求概率为 $\dfrac{2\times 2}{6\times 5} = \dfrac{2}{15}$。

7. 掷两颗骰子，求下列事件的概率：

（1）点数之和为 7；（2）点数之和不超过 5；（3）点数之和为偶数。

解：分别记题(1)、(2)、(3)的事件为A,B,C,样本点总数$n=6^2$：

(ⅰ) A含样本点$(2,5),(5,2),(1,6),(6,1),(3,4),(4,3)$

$$\therefore\quad P(A)=\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6};$$

(ⅱ) B含样本点$(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(2,2),(2,3),(3,2)$

$$\therefore\quad P(B)=\frac{10}{6^2}=\frac{5}{18};$$

(ⅲ) C 含样本点 $(1,1),(1,3),(3,1),(1,5),(5,1);(2,2),(2,4),(4,2),(2,6),(6,2),(3,3),(3,5),(5,3);(4,4),(4,6),(6,4);(5,5);(6,6)$, 一共 18 个样本点，

$$\therefore\quad P(C)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}。$$

8. 总经理的五位秘书中有两位精通英语，今偶遇其中的三位秘书，求下列事件的概率：
（1）事件 A={其中恰有一位精通英语}；
（2）事件 B={其中恰有两位精通英语}；
（3）事件 C={其中有人精通英语}。

解：样本点总数为$\binom{5}{3}$：

$$(1)\quad P(A)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}}=\frac{2\times3\times3!}{5\times4\times3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5};$$

$$(2)\quad P(B)=\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}}=\frac{3\times3!}{5\times4\times3}=\frac{3}{10};$$

(3) 因$C=A\cup B$，且A与B互斥，因而$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{3}{5}+\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$。

9. 已知$A\subset B$，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$，求：

（1）$P(\bar{A}),P(\bar{B})$；（2）$P(A\cup B)$；（3）$P(AB)$；（4）$P(\bar{B}A),P(\bar{A}\bar{B})$；（5）$P(\bar{A}B)$。

解：(1) $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0.4=0.6$， $P(\bar{B})=1-P(B)=1-0.6=0.4$；

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)=P(B)=0.6$；

(3) $P(AB)=P(A)=0.4$；(4) $P(\bar{B}A)=P(A-B)=P(\phi)=0$,

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.6=0.4;$$

(5) $P(\bar{A}B)=P(B-A)=0.6-0.4=0.2$。

10. 设一质点一定落在 xOy 平面内由 x 轴，y 轴及直线 $x+y=1$ 所围成的三角形内，而落在这三角形内各点处的可能性相等，即落在这三角形内任何区域上的可能性与这区域的面积成正比，计算这质点落在直线 $x=\dfrac{1}{3}$ 的左边的概率。

解：记求概率的事件为 A，则 S_A 为图中阴影部分，而 $|\Omega|=1/2$，

$$|S_A|=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{18}$$

最后由几何概型的概率计算公式可得

$$P(A)=\frac{|S_A|}{|\Omega|}=\frac{5/18}{1/2}=\frac{5}{9}。$$

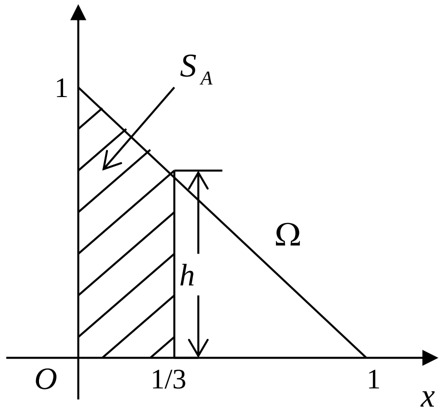


图 1

11. 设 A，B 是两个事件，已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.7$，$P(A\cup B)=0.8$，试求：$P(A-B)$ 与 $P(B-A)$。

解：注意到 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，因而 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.5+0.7-0.8=0.4$．于是，$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.5-0.4=0.1$；$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=0.7-0.4=0.3$。

12. 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$，随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B|A)=0.8$，试求 $P(AB)$ 及 $P(\bar{A}\bar{B})$。

解：$P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)=0.5\times0.8=0.4$；

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$
$$=1-0.5-0.6+0.4=0.3。$$

13. 某人有一笔资金，他投入基金的概率为 0.58，购买股票的概率为 0.28，两项投资都做的概率为 0.19。

（1）已知他已投入基金，再购买股票的概率是多少？

（2）已知他已购买股票，再投入基金的概率是多少？

解：记 $A=\{$基金$\}$，$B=\{$股票$\}$，则 $P(A)=0.58, P(B)=0.28, P(AB)=0.19$，

(1) $P(B\,|\,A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.19}{0.58}=0.3$;

(2) $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.19}{0.28}=0.678$。

14. 已知在甲袋中，装有 6 只红球，4 只白球，在乙袋中，装有 8 只红球，6 只白球.求下列事件的概率：（1）随机地取一只袋，再从该袋中随机地取一只球，该球是红球；（2）合并两只口袋，从中随机地取 1 只球，该球是红球。

解:(1) 记 $B=\{$该球是红球$\}$，$A_1=\{$取自甲袋$\}$，$A_2=\{$取自乙袋$\}$，已知 $P(B|A_1)=6/10$，

$P(B|A_2)=8/14$，所以

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{8}{14}=\frac{41}{70};$$

(2) $P(B)=\dfrac{14}{24}=\dfrac{7}{12}$。

15. 发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号“*”和“—”.由于通信系统受到干扰，当发出信号“*”时，收报台未必收到信号“*”，而是分别以概率 0.8 和 0.2 收到信号“*”和“—”.同样，当发出信号“—”时，收报台分别以概率 0.9 和 0.1 收到信号“—”和“*”.求：（1）收报台收到信号“*”的概率；（2）当收报台收到信号“*”时，发报台确是发出信号“*”的概率。

解：记 $B=\{$收到信号“*”$\}$， $A=\{$发出信号“*”$\}$

(1) $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$

$$=0.6\times0.8+0.4\times0.1=0.48+0.04=0.52;$$

(2) $P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{0.6\times0.8}{0.52}=\dfrac{12}{13}$。

16. 设事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)=p$， $P(B)=q$.求下列事件的概率：

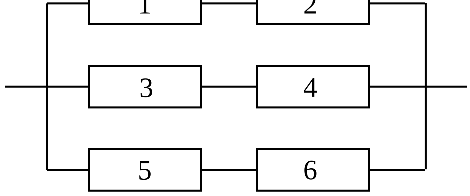
$$P(A\cup B),P(A\cup\bar{B}),P(\bar{A}\cup\bar{B})\text{。}$$

解：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=p+q-pq$；

$$P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A)P(\bar{B})=p+1-q-p(1-q)=1-q+pq;$$

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(A)P(B)=1-pq\text{。}$$

17. 设六个相同的元件，如下图所示那样安置在线路中.设每个元件不通达的概率为 p，求这个装置通达的概率.假定各个元件通达、不通达是相互独立的。



解：记 $A=\{$通达$\}$， $A_i=\{$元件 i 通达$\}$， $i=1,2,3,4,5,6$

则 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4 \cup A_5A_6$， 所以

$$P(A) = P(A_1A_2) + P(A_3A_4) + P(A_5A_6)$$

$$- P(A_1A_2A_3A_4) - P(A_3A_4A_5A_6) - P(A_1A_2A_5A_6) + P(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$$

$$= 3(1-p)^2 - 3(1-p)^4 + (1-p)^6 。$$

18. 某宾馆大楼有 4 部电梯，通过调查，知道在某时刻 T，各电梯正在运行的概率均为 0.75，求：（1）在此时刻所有电梯都在运行的概率；

（2）在此时刻恰好有一半电梯在运行的概率；

（3）在此时刻至少有 1 台电梯在运行的概率。

解：(1) $1-(1-0.75)^4 = 1-(0.25)^4 = \dfrac{255}{256}$；

(2) $\dbinom{4}{2}(0.75)^2(0.25)^2 = 6\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{27}{128}$；

(3) $(0.75)^4 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^4 = \dfrac{81}{256}$。

19. 已知事件 A 与 B 相互独立，且 $P(\overline{A}\overline{B}) = \dfrac{1}{9}$，$P(A\overline{B}) = P(\overline{A}B)$.求：$P(A), P(B)$。

解：因 $P(A\overline{B}) = P(\overline{A}B)$，由独立性有 $P(A)P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(B)$；

从而 $P(A) - P(A)P(B) = P(B) - P(A)P(B)$ 导致 $P(A) = P(B)$；

再由 $P(\overline{A}\overline{B}) = 1/9$，有 $1/9 = P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1-P(A))(1-P(B)) = (1-P(A))^2$；

所以 $1-P(A) = 1/3$，最后得到 $P(B) = P(A) = 2/3$。

20. 三个人独立破译一密码，他们能独立译出的概率分别为 0.25，0.35，0.4，求此密码被译出的概率。

解：记 $A = \{$译出密码$\}$， $A_i = \{$第 i 人译出$\}$，$i = 1,2,3$， 则

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

$$= 1 - 0.75\times0.65\times0.6 = 1 - 0.2925 = 0.7075。$$

21. 设在三次独立试验中，事件 A 在每次试验中出现的概率相同.若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\dfrac{19}{27}$，求事件 A 在每次试验中出现的概率 $P(A)$。

解：记 $A_i = \{A$ 在第 i 次试验中出现$\}$，$i = 1,2,3$， $p = P(A)$，

依假设 $\dfrac{19}{27}=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}A_i\right)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=1-(1-p)^3$，

所以 $(1-p)^3=\dfrac{8}{27}$，此即 $p=1/3$。

B

1. 玻璃杯成箱出售，每箱 20 只。假设各箱含 0，1，2 只次品的概率分别为 0.8，0.1，0.1。一位顾客欲购买一箱玻璃杯，在购买时售货员随意取一箱，顾客开箱随机查看四只，若无次品则买下该箱玻璃杯，否则退回。试求：（1）顾客买下这箱玻璃杯的概率；（2）顾客买下的这一箱中，确实没有次品的概率。

解：设 A={顾客买下这箱玻璃杯}，B_i={箱子中恰好有 i 件次品 } $(i=0,1,2)$，于是：

（1）$P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{C_{20}^4}{C_{20}^4}+\frac{1}{10}\times\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}+\frac{1}{10}\times\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5}\times1+\frac{1}{10}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{10}\times\frac{12}{19}\approx0.94;$$

（2）$P(B_0|A)=\dfrac{P(AB_0)}{P(A)}=\dfrac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}=\dfrac{0.80}{0.94}\approx0.85$。

2. 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份。随机地取一个地区的报名表，从中先后抽取两份。

（1）求先抽到的一份是女生表的概率；

（2）已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率。

解：设 A={先抽的一份为女生}，B={后抽的一份为男生}，

C_i={从第 i 个地区考生报名表中抽取} $(i=1,2,3)$，于是：

（1）$P(A)=P(C_1)P(A|C_1)+P(C_2)P(A|C_2)+P(C_3)P(A|C_3)$

$$=\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{7}{15}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{25}\times\frac{1}{3}=\frac{29}{90}。$$

（2）$P(AB)=P(C_1)P(AB|C_1)+P(C_2)P(AB|C_2)+P(C_3)P(AB|C_3)$

$$=\frac{3\times7}{10\times9}\times\frac{1}{3}+\frac{7\times8}{15\times14}\times\frac{1}{3}+\frac{5\times20}{25\times24}\times\frac{1}{3}=\frac{20}{90},$$

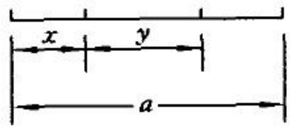
$$P(B)=P(C_1)P(B|C_1)+P(C_2)P(B|C_2)+P(C_3)P(B|C_3)$$

$$=\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{8}{15}\times\frac{1}{3}+\frac{20}{25}\times\frac{1}{3}=\frac{61}{90},$$

$$P\left(A|B\right)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{20}{90}}{\frac{61}{90}}=\frac{20}{61}\text{。}$$

3. 将长度为a的线段任意分为三段，求此三线段能构成三角形的概率。

解：设三线段长为x，y，$a-x-y$，有两个因素x，y变化，所以用几何量面积来测度。

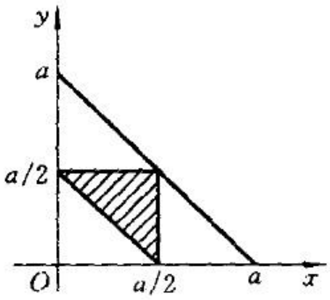


由题意，有$0<x<a$，$0<y<a$，$0<x+y<a$，满足此条件的点充满三角形AOB内，而满足构成三角形的点可这样求得：由边的关系，得

$$\begin{cases}x+y>a-x-y,\\(a-x-y)+y>x,\\(a-x-y)+x>y\end{cases}\quad \text{即} \quad \begin{cases}x+y>a/2,\\x<a/2,\\y<a/2.\end{cases}$$

满足上述条件的点充满下图中的阴影域内，所以

$$p=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{\text{阴影域的面积}}{\text{大三角形的面积}}=\frac{1}{4}$$



4. 三个箱子，第一个箱子中有 4 个黑球 1 个白球，第二个箱子有 3 个黑球 3 个白球，第三个箱子有 3 个黑球 5 个白球，现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取出一个球，问

（1）这个球是白球的概率；

（2）已知取出的球为白球，此球属于第二个箱子的概率。

解：设A_1，A_2，A_3分别表示第一个箱子、第二个箱子和第三个箱子，B表示取到白球。

（1）这个球是白球的概率为

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{53}{120}\text{；}$$

（2）$P(A_2 \mid B)=\dfrac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(B)} = \dfrac{\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1}{3}}{\dfrac{53}{120}}=\dfrac{20}{53}$。

5. 某制帽厂生产的帽子合格率为 0.8，一盒中装有帽子 4 顶，一个采购员从每一盒中随机地取出两顶帽子进行检验，若两顶帽子都合格，就买下这盒帽子，求每盒帽子被买下的概率。

解：设 $B=\{$一盒帽子被买下$\}$，$A_i=\{$一盒帽子中有i顶帽子合格$\}(i=0,1,2,3,4)$。A_0,A_1,A_2,A_3,A_4 构成完备事件组，由题设可知：

$$P(A_i)=C_4^i(0.8)^i(0.2)^{4-i}\quad(\quad 0,$$

$$P(B \mid A_i)=0\,(i=0$$

$$P(B \mid A_i)=\frac{C_j^2}{C_4^2}\quad(j=2,3$$

所以，由全概率公式得：

$$P(B)=\sum_{i=0}^{4}P(B \mid A_i)P(A_i)=\sum_{i=2}^{4}P(B \mid A_i)P(A_i)$$
$$=\sum_{i=2}^{4}C_4^i(0.8)^i(0.2)^{4-i}\,\frac{C_i^2}{C_4^2}=0.64$$

6. 甲、乙、丙三车间加工同一产品，加工量分别占总量的 25%、35%、40%，次品率分别为 0.03、0.02、0.01。现从所有的产品中抽取一个产品，试求（1）该产品是次品的概率；（2）若检查结果显示该产品是次品，则该产品是乙车间生产的概率是多少？

解：设 A_1，A_2，A_3 表示甲乙丙三车间加工的产品，B 表示此产品是次品。

（1）所求事件的概率为

$$P(B)=P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2)+P(A_3)P(B \mid A_3)$$

$$=0.25\times0.03+0.35\times0.02+0.4\times0.01=0.0185;$$

（2）$P(A_2 \mid B)=\dfrac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.35\times0.02}{0.0185}\approx0.38$。

7. 设 18 支枪中有 5 支未经校正，13 支经过校正. 某射手用校正过的枪射击时，中靶概率为 0.85；二用未经校正的枪射击时，中靶概率为 0.25. 求：（1）射手随意取一支进行射击能中靶的概率；（2）射手随意取一支进行射击，已经中靶，求所用枪支是校验过的概率。

解：（1）A={ 他射击中靶}，B={ 所取枪支是校正过的}

事件 B 和 B 的对立事件构成样本空间的划分，由全概率公式

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=\frac{13}{18}\times0.85+\frac{5}{18}\times0.25=\frac{123}{180};$$

（2）$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{\dfrac{13}{18}\times0.85}{123/180}\approx0.898$。

8. 考卷中一道选择题有 4 个答案，仅有一个是正确的，设一个学生知道正确答案或不知道而乱猜是等可能的。如果这个学生答对了，求它确实知道正确答案的概率。

解：样本空间可以划分为事件 A：知道正确答案，$\bar{A}$：不知道。以 B 表示学生答对事件， 则 $A\subset B$，$P(B/A)=1$， $P(B|\bar{A})=1/4$。由全概率公式

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})＝1/2\times1+1/2\times1/4=5/8，$$

故 $P(A|B)＝P(AB)/P(B)＝4/5$。

9. 两台车床加工同样的零件，第一台出现废品的概率是 0.03，第二台出现废品的概率是 0.02。加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工零件比第二台加工的零件多一倍，求任意取出的零件是合格品的概率。

解：设 A_1={取到的零件是第 1 台车床加工的}， A_2={取到的零件是第 2 台车床加工的}，
B={取到的零件是合格品}，

已知 $P(A_1)=\dfrac{2}{3}$， $P(A_2)=\dfrac{1}{3}$，

第 1 台车床的合格品率 $P(B|A_1)=1-0.03=0.97$,

第 2 台车床的合格品率 $P(B|A_2)=1-0.02=0.98$,

从而 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

$$=\frac{2}{3}\times0.97+\frac{1}{3}\times0.98=0.9733。$$

10. 某人共买了 11 只水果，其中有 3 只是二级品，8 只是一级品。随机地将水果分给 A、B、C 三人，各人分别得到 4 只、6 只、1 只，试求：（1）C 未拿到二级品的概率；（2）已知 C 未拿到二级品，求 B、A 均拿到二级品的概率；（3）求 A、B 均拿到二级品而 C 未拿到二级品的概率。

解：以 A、B、C 以分别表示事件 A、B、C 取到二级品，则 $\bar{A}$、$\bar{B}$、$\bar{C}$ 表示事件 A、B、C 未取到二级品。

（1） $P(\bar{C})=8/11$；

（2）A、B 将 7 只一级品和 3 只二级品全部分掉，而 A、B 均取到二级品，只需 A 取到 1 只至 2 只二级品，其他的为一级品，则 $P(AB|\bar{C})=C_3^1C_7^3/C_{10}^4+C_3^2C_7^2/C_{10}^4=4/5$；

（3） $P(AB\bar{C})=P(AB|\bar{C})P(\bar{C})=32/55$。

11. 一打靶场备有 5 支某种型号的枪，其中 3 支已经校正，2 支未经校正。某人使用已校正的枪击中目标的概率为 p_1，使用未经校正的枪击中目标的概率为 p_2。他随机地取一支枪进行射击。求：（1）他连续射击了 5 次，恰好有 3 次击中目标的概率；（2）已知他射击了 5 次，都未击中，求他使用的是已校正的枪的概率（设各次射击的结果相互独立）。

解：（1）

$$(1)P(A)=\frac{3}{5}\times C_5^3\times P_1^3\times(1-P_1)^2+\frac{2}{5}\times C_5^3\times P_2^3\times(1-P_2)^2$$

（2）

解 以M表示事件“射击了 5 次均未击中”，以C表示事件“取得的枪是已经校正的”，则$P(C)=3/5$，

$P(\overline{C})=2/5$，又，按题设$P(M\mid C)=(1-p_1)^5$，$P(M\mid \overline{C})=(1-p_2)^5$，由贝叶斯公式

$$P(C\mid M)=\frac{P(MC)}{P(M)}$$

$$=\frac{P(M\mid C)P(C)}{P(M\mid C)P(C)+P(M\mid \overline{C})P(\overline{C})}$$

$$=\frac{(1-p_1)^5\times\frac{3}{5}}{(1-p_1)^5\times\frac{3}{5}+(1-p_2)^5\times\frac{2}{5}}$$

$$=\frac{3(1-P_1)^5}{3(1-P_1)^5+2(1-P_2)^5}$$

12. 设A、B为两个随机事件，且$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，$P(A\mid B)=1$，求$P(\overline{B}\mid\overline{A})$。

解：因为$P(A\mid B)=1$，$P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，所以$P(AB)=P(B)$，

$$P(\overline{B}\mid\overline{A})=\frac{P(\overline{B}\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\overline{A})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(A)}=\frac{1-P(A)}{1-P(A)}=1$$。

C

1. 甲乙两艘军舰驶向一个不能同时停泊两艘军舰的码头停泊,它们在一昼夜内到达的时刻是等可能的。如果甲的停泊时间为 2 小时，乙的停泊时间为 3 小时。求甲乙中的任意一艘都不需等待码头空出的概率。

解：设甲在一昼夜到达的时刻为：X， 乙在一昼夜到达的时刻为：Y 。

所求的概率为：$P\{X+2\le Y或Y+3\le X\}$，

设：$G=\{(x,y):0\le x,y\le 24\}$，则 (X,Y)在G上服从均匀分布，

$$P\{X+2\le Y \text{ 或 } Y+3\le X\}=P\{(X,Y)\in D\}=\frac{S(D)}{S(G)}=\frac{0.5\times 22^2+0.5\times 21^2}{24^2}\approx 0.8$$。

2. 为了防止意外，在矿内同时设有两种警报系统A与B，每种系统单独使用时，其有效概率A为 0.92，B为 0.93，在A失灵条件下，B有效的概率为 0.85，求：（1）发生意外时，这两个报警系统至少有一个有效的概率；（2）B失灵条件下，A有效的概率。

解：设$A=\{报警系统A有效\}$，$B=\{报警系统B有效\}$，所以

$$P(A)=0.92，\quad P(B)=0.93，\quad P(B\mid\overline{A})=0.85$$

$\because P(A\cup B)=P(A)+P(B)\quad P($，

$P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=P(B)-P(B\mid\overline{A})P(\overline{A})$，

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-[P(B)-P(B|\overline{A})P(\overline{A})]-P(\overline{A})P(B|A)$，

$\therefore P(A\cup B)=0.92+0.85-(1-0.92)$。

$\because P(\overline{A}|\overline{B})=\dfrac{P(\overline{B}|\overline{A})P(\overline{A})}{P(\overline{B})}=\dfrac{0.012}{0.07}=0.1$，

$\therefore P(A|\overline{B})=1-P(\overline{A}|\overline{B})=1-0.171=0.829$。

3. 已知某批产品的合格率为 0.9。检验员检验时，将合格品误认为次品的概率为 0.02，而一个次品被误认为合格的概率为 0.05。求：（1）检查任一产品被认为是合格品的概率；（2）被认为合格品的产品确实合格的概率。

解：以 B 记一个产品检查被认为合格的事件，以 A 记产品确实合格的事件，则 A，$\overline{A}$ 构成一个完备事件组，$P(A)=0.9$，$P(\overline{A})=0.1$，$P(B|A)=0.98$，$P(B|\overline{A})=0.05$。于是：

（1）由全概率公式，一个产品被认为合格的概率为

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.9\times0.98+0.1\times0.05=0.887\text{。}$$

（2）由贝叶斯公式，被认为合格的产品确实合格的概率为

$$P(A|B)=[P(A)P(B|A)]/P(B)=0.9\times0.98/0.887=0.994\text{。}$$

4. 设甲、乙两袋，甲袋中装有 n 个白球，m 个红球，乙袋中装有 N 个白球，M 个红球，今从甲袋中任取一只放入乙袋，再从乙袋中任取一个球，问取到白球的概率。

解：由题意得

球的情况	白球	红球
甲袋	n	m
乙袋	N	M

假设 $A=\{$先从甲袋中任取一球为白球$\}$，$B=\{$先从甲袋中任取一球为红球$\}$，

$C=\{$再从乙袋中任取一球为白球$\}$，

$$P(C)=P(C|A)P(A)+P(C|B)P(B)=\frac{N+1}{N+M+1}\cdot\frac{n}{n+m}+\frac{N}{N+M+1}\cdot\frac{m}{n+m}=\frac{(N+1)n+Nm}{(N+M+1)(n+m)}\text{。}$$

5. 甲袋中有 3 只黑球，7 只白球，乙袋中有 7 只黑球，13 只白球，丙袋中有 12 只黑球，8 只白球。先以 1:2:2 的概率选择甲、乙、丙中的一只袋子，再从选中的袋子中不放回的先后摸出 2 球，求：（1）先摸到的是黑球的概率；（2）已知后摸到的是白球，先摸到的是黑球的概率。

解：设 A_1、A_2、A_3 分别为选到甲袋、乙袋、丙袋的事件，$B_1=\{$先摸到的是黑球$\}$，

$B_2=\{$后摸到的是白球$\}$，

则（1）先摸到的是黑球的概率：

$$P(B_1)=\sum_{i=1}^{3}P(B_1|A_i)P(A_i)=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{20}+\frac{2}{5}\cdot\frac{12}{20}=0.44\text{，}$$

（2）首先，后摸到的是白球的概率：

$$P(B_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_2\mid A_i)P(A_i)=\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{13}{20}+\frac{2}{5}\cdot\frac{8}{20}=0.56，$$

$$P(B_1B_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_1B_2\mid A_i)P(A_i)=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{20}\cdot\frac{13}{19}+\frac{2}{5}\cdot\frac{12}{20}\cdot\frac{8}{19}=0.24，$$

$$P(B_1\mid B_2)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_2)}=\frac{0.24}{0.56}=0.43。$$