# 第九章　非正弦周期电流电路

## 9.1 非正弦周期信号

非正弦周期激励 $\xrightarrow{\text{傅里叶级数}}$ 一系列不同频率的正弦量及恒定分量之和 $\xrightarrow{\text{线性电路叠加定理}}$ 各个正弦量及恒定分量单独作用下在电路中产生的同频正弦电流分量和电压分量 $\xrightarrow{\text{时域叠加}}$ 电路在非正弦周期激励下的稳态电流和电压。

**谐波分析法的实质**：把非正弦周期电流电路的计算化为一系列正弦电流电路的计算和直流电流电路的计算。

### 9.1.1 周期函数分解为傅里叶级数

任一周期性函数 $f(t)=f(t+kT)$，只要满足狄里赫利条件，都可以分解为一个收敛的傅里叶级数。

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega_1 t)+b_k\sin(k\omega_1 t)] \\ &= A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_{km}\cos(k\omega_1 t+\varphi_k) \end{aligned}$$

其中：$A_0=a_0, A_{km}=\sqrt{a_k^2+b_k^2}, a_k=A_{km}\cos\varphi_k, b_k=-A_{km}\sin\varphi_k, \varphi_k=\arctan\left(\dfrac{-b_k}{a_k}\right).$

上式中的每一项，称为**正弦谐波分量**，简称**谐波**。常数 $A_0$ 称为**零次谐波**（直流分量），$A_{1m}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$ 称为**一次谐波**，或**基波**。

上式中的系数，可按下列公式计算：

$$a_o=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{d}t$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t)$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t)$$

### 9.1.2 非正弦周期量的频谱

傅里叶级数中各次谐波的振幅与初相可以用图形直观地显示，称为**频谱图**。

**幅值频谱**：表示振幅的图形。横轴表示角频率，纵轴表示谐波振幅。

**初相频谱**：表示初相的图形。用直线段分别表示各次谐波的初相。

**周期性非正弦量的频谱是离散的。**

## 9.2 波形对称性与傅里叶级数的关系

根据波形对称性可知傅里叶级数的某些分量为 0，可简化计算。

**偶函数**不含有正弦分量；**奇函数**不含有余弦分量。

**奇谐波函数** $f(t)=-f(t\pm\dfrac{T}{2})$：前半周平移半个周期与后半周成镜像对称。

不含有偶次谐波分量，$a_{2k}=b_{2k}=0$.

## 9.3 有效值、平均值和平均功率

### 9.3.1 有效值

一个周期内积分时，直流量乘正弦量以及不同频率正弦量乘积的积分结果都为零。

$$I=\sqrt{I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2}\text{，其中 }I_k=\frac{I_{km}}{\sqrt{2}}\text{ 为 }k\text{ 次谐波有效值。}$$

即：**周期性非正弦量的有效值等于直流分量及各次谐波有效值的均方根值**。

同理

$$U=\sqrt{U_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}U_k^2}$$

### 9.3.2 绝对平均值

$$I_{\mathrm{av}}=\frac{1}{T}\int_0^T\left|i(t)\right|\mathrm{d}t,U_{\mathrm{av}}=\frac{1}{T}\int_0^T\left|u(t)\right|\mathrm{d}t$$

### 9.3.3 周期性非正弦电路的功率

**有功功率**：

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t=U_0I_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_kI_k\cos\varphi_k$$

有功功率等于直流分量功率和各谐波分量功率之和。

**容量/视在功率：**

$$S = UI = \sqrt{U_0^{\ 2} + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{\ 2}} \cdot \sqrt{I_0^{\ 2} + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^{\ 2}}$$

**功率因数：** $\lambda = \cos\varphi = \dfrac{P}{S}$ 。

## 9.4 非正弦周期电流电路的计算

① 将激励源分解为傅里叶级数形式。

② 分别计算由直流分量和各次谐波分量单独作用产生的响应。

基本思路：分别做出直流电路、基波阻抗电路、谐波阻抗电路。

直流电路：电感短路、电容开路；

基波： $X_{L1} = \omega L, X_{C1} = \dfrac{1}{\omega C}$ ；

$k$ 次谐波： $X_{Lk} = k\omega L = kX_{L1}, X_{Ck} = \dfrac{1}{k\omega C} = \dfrac{X_{C1}}{k}$ 。

③ 将所求得的直流及各次谐波响应以时域表达形式合成为最后结果。

**注意：** 不同频率正弦量所对应的相量不能相加。