概率论与数理统计 B 习题二答案

A

1. 下列给出的数列，哪些可作为随机变量的分布律，并说明理由。

（1）$p_i = \dfrac{i}{15}\ (i = 0,1,2,3,4,5)$；

（2）$p_i = \dfrac{(5-i^2)}{6}\ (i = 0,1,2,3)$；

（3）$p_i = \dfrac{i+1}{25}\ (i = 1,2,3,4,5)$。

解：要说明题中给出的数列，是否是随机变量的分布律，只要验证 p_i 是否满足下列二个条件：其一条件为 $p_i \ge 0, i = 1,2,\cdots$，其二条件为 $\sum_i p_i = 1$。

依据上面的说明可得（1）中的数列为随机变量的分布律；（2）中的数列不是随机变量的分布律，因为 $p_3 = \dfrac{5-9}{6} = -\dfrac{4}{6} < 0$；（3）中的数列不是随机变量的分布律，这是因为 $\sum_{i=1}^{5} p_i = \dfrac{20}{25} \ne 1$。

2. 一袋中有 5 个乒乓球，编号分别为 1，2，3，4，5.从中随机地取 3 个，以 X 表示取出的 3 个球中最大号码，写出 X 的分布律和分布函数。

解：依题意 X 可能取到的值为 3，4，5，事件 $\{X = 3\}$ 表示随机取出的 3 个球的最大号码为 3，则另两个球的只能为 1 号，2 号，即 $P(X = 3) = \dfrac{1}{\binom{5}{3}} = \dfrac{1}{10}$；事件 $\{X = 4\}$ 表示随机取出的 3 个球的最大号码为 4，因此另外 2 个球可在 1、2、3 号球中任选，此时 $P(X = 4) = \dfrac{1\times\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \dfrac{3}{10}$；同理可得 $P(X = 5) = \dfrac{1\times\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}} = \dfrac{6}{10}$。

X 的分布律为

X	3	4	5
概率	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{6}{10}$

X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<3 \\ \dfrac{1}{10} & 3\le x<4 \\ \dfrac{4}{10} & 4\le x<5 \\ 1 & x\ge 5 \end{cases}$$

3. 从一批含有 10 件正品及 3 件次品的产品中一件一件地抽取产品.设每次抽取时，所面对的各件产品被抽到的可能性相等.在下列三种情形下，分别求出直到取得正品为止所需次数 X 的分布律：

（1）每次取出的产品立即放回这批产品中再取下一件产品；

（2）每次取出的产品都不放回这批产品中；

（3）每次取出一件产品后总以一件正品放回这批产品中。

解：（1）设事件 $A_i,i=1,2,\cdots$ 表示第 i 次抽到的产品为正品，依题意，$A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 相互独立，且 $P(A_i)=\dfrac{10}{13},i=1,2,\cdots$ 而

$$P(X=k)=P(\bar{A}_1\cdots\bar{A}_{k-1}A_k)=P(\bar{A}_1)\cdots P(\bar{A}_{k-1})P(A_k)=\left(\frac{3}{13}\right)^{k-1}\frac{10}{13},k=1,2,\cdots$$

即 X 服从参数 $p=\dfrac{10}{13}$ 的几何分布。

（2）由于每次取出的产品不再放回，因此，X 可能取到的值为 1，2，3，4，

$$P(X=1)=\frac{10}{13},P(X=2)=\frac{3\times 10}{13\times 12}=\frac{5}{26},$$
$$P(X=3)=\frac{3\times 2\times 10}{13\times 12\times 11}=\frac{5}{143},P(X=4)=\frac{3\times 2\times 1\times 10}{13\times 12\times 11\times 10}=\frac{1}{286}$$
。

X 的分布律为

X	1	2	3	4
概率	$\frac{10}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{5}{143}$	$\frac{1}{286}$

（3）X 可能取到的值为 1，2，3，4，

$$P(X=1)=\frac{10}{13},P(X=2)=\frac{3\times 11}{13\times 13}=\frac{33}{169},$$
$$P(X=3)=\frac{3\times 2\times 12}{13\times 13\times 13}=\frac{72}{2197},P(X=4)=\frac{3\times 2\times 1}{13\times 13\times 13}=\frac{6}{2197}$$
。

所求 X 的分布律为

X	1	2	3	4
概率	$\frac{10}{13}$	$\frac{33}{169}$	$\frac{72}{2197}$	$\frac{6}{2197}$

4. 设随机变量 $X\sim B(6,p)$，已知 $P(X=1)=P(X=5)$，求 p 与 $P(X=2)$ 的值。

解：由于 $X \sim B(6,p)$，因此 $P(X=6)=\binom{6}{k}p^k(1-p)^{6-k}, k=0,1,\cdots,6$。

由此可算得 $P(X=1)=6p(1-p)^5, P(X=5)=6p^5(1-p),$

即 $6p(1-p)^5=6p^5(1-p),$ 解得 $p=\frac{1}{2}$；

此时，$P(X=2)=\binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2}=\frac{6\times5}{2!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{15}{64}$。

5. 某商店出售某种物品，根据以往的经验，每月销售量 X 服从参数 $\lambda=4$ 的泊松分布，问在月初进货时，要进多少才能以 99％的概率充分满足顾客的需要？

解：设至少要进 n 件物品，由题意 n 应满足 $P(X\le n-1)<0.99, P(X\le n)\ge 0.99,$

即 $P(X\le n-1)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{4^k}{k!}e^{-4}<0.99$，则 $P(X\le n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}e^{-4}\ge 0.99$，

查泊松分布表可求得 $n=9$。

6. 有一汽车站有大量汽车通过，每辆汽车在一天某段时间出事故的概率为 0.000 1.在某天该段时间内有 1 000 辆汽车通过，求事故次数不少于 2 的概率。

解：设 X 为 1000 辆汽车中出事故的次数，依题意，X 服从 $n=1000, p=0.0001$ 的二项分布，即 $X \sim B(1000,0.0001)$，由于 n 较大，p 较小，因此也可以近似地认为 X 服从 $\lambda=np=1000\times0.0001=0.1$ 的泊松分布，即 $X\sim P(0.1)$，所求概率为

$$\begin{aligned}P(X\ge 2)&=1-P(X=0)-P(X=1)\\&\approx 1-\frac{0.1^0}{0!}e^{-0.1}-\frac{0.1^1}{1!}e^{-0.1}\\&=1-0.904837-0.090484=0.004679\end{aligned}$$ 。

7. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<A,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 试求：(1)常数 A;(2) $P(0<X<0.5)$。

解：(1) $f(x)$ 成为某个随机变量的密度函数必须满足二个条件，其一为 $f(x)\ge 0$；其二为 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，因此有 $\int_0^A 2xdx=1$，解得 $A=\pm1$，其中 $A=-1$ 舍去，即取 $A=1$。

(2) 分布函数 $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$

$$=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0dx & x<0\\ \int_{-\infty}^{0}0dx+\int_0^x 2xdx & 0\le x<1\\ \int_{-\infty}^{0}0dx+\int_0^1 2xdx+\int_1^x 0dx & x\ge 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$

8. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=A\mathrm{e}^{-|x|}\ (-\infty<x<+\infty)$，求：（1）系数 A；（2）$P(0<X<1)$；（3）X 的分布函数。

解：（1）系数 A 必须满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=1$，由于 $e^{-|x|}$ 为偶函数，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=2\int_{0}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=2\int_{0}^{+\infty}Ae^{-x}dx=1$$

解得 $A=\dfrac{1}{2}$；

（2）$P(0<X<1)=\int_0^1\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_0^1\frac{1}{2}e^{-x}dx=\frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)$；

（3）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$

$$=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx & x<0 \\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx & x\ge 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{x}dx & x<0 \\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-x}dx & x\ge 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & x<0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-e^{-x}\right) & x\ge 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & x<0 \\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & x\ge 0 \end{cases}$$

9. 证明：函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{c}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2c}}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0,\end{cases}$（$c$ 为正的常数）可作为一个密度函数。

证明：由于 $f(x)\ge 0$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{c}e^{-\frac{x^2}{2c}}dx=-\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2c}}d\left(-\frac{x^2}{2c}\right)=-e^{-\frac{x^2}{2c}}\Big|_0^{+\infty}=1$，

因此 $f(x)$ 满足密度函数的二个条件，由此可得 $f(x)$ 为某个随机变量的密度函数。

10. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 0,\\ 1-(1+x)\mathrm{e}^{-x} & ,x>0,\end{cases}$ 求 X 的密度函数，并计算 $P(X\le 1)$ 和 $P(X>2)$。

解：由分布函数 $F(x)$ 与密度函数 $f(x)$ 的关系，可得在 $f(x)$ 的一切连续点处有 $f(x)=F'(x)$，因此

$$f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

所求概率 $P(X\le 1)=F(1)=1-(1+1)e^{-1}=1-2e^{-1}$；

$$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-F(2)=1-\left(1-(1+2)e^{-2}\right)=3e^{-2}。$$

11. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（单位：min）是一随机变量，它服从 $\lambda=\dfrac{1}{5}$ 的指数分布，其密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} & ,x>0,\\ 0 & ,其它.\end{cases}$ 某顾客在窗口等待服务，若超过 10 min，他就离开。

（1）设某顾客某天去银行，求他未等到服务就离开的概率；

（2）设某顾客一个月要去银行五次，求他五次中至多有一次未等到服务而离开的概率。

解：（1）设随机变量 X 表示某顾客在银行的窗口等待服务的时间，依题意 X 服从 $\lambda=\dfrac{1}{5}$ 的指数分布，且顾客等待时间超过 10min 就离开，因此，顾客未等到服务就离开的概率为

$$P(X\ge 10)=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx=e^{-2}\ ;$$

（2）设 Y 表示某顾客五次去银行未等到服务的次数，则 Y 服从 $n=5,p=e^{-2}$ 的二项分布，所求概率为

$$\begin{aligned}P(Y\le 1)&=P(Y=0)+P(Y=1)\\&=\binom{5}{0}\left(e^{-2}\right)^0\left(1-e^{-2}\right)^5+\binom{5}{1}e^{-2}\left(1-e^{-2}\right)^4\\&=\left(1+4e^{-2}\right)\left(1-e^{-2}\right)^4\end{aligned}$$

12. 设随机变量 X 服从 $N(0,1)$，借助于标准正态分布的分布函数表计算：（1）$P(X<2.2)$；（2）$P(X>1.76)$；（3）$P(X<-0.78)$；（4）$P(|X|<1.55)$；（5）$P(|X|>2.5)$。

解：查正态分布表可得

（1）$P(X<2.2)=\Phi(2.2)=0.9861$；

（2）$P(X>1.76)=1-P(X\le 1.76)=1-\Phi(1.76)=1-0.9608=0.0392$；

（3）$P(X<-0.78)=\Phi(-0.78)=1-\Phi(0.78)=1-0.7823=0.2177$；

（4）$P(|X|<1.55)=P(-1.55<X<1.55)=\Phi(1.55)-\Phi(-1.55)$

$$=\Phi(1.55)-(1-\Phi(1.55))=2\Phi(1.55)-1=2\times 0.9394-1=0.8788$$

（5）$P(|X|>2.5)=1-P(|X|\le 2.5)=1-[2\Phi(2.5)-1]$

$$=2-2\Phi(2.5)=2(1-0.9938)=0.0124\text{。}$$

13. 设随机变量 X 服从 $N(-1,16)$，借助于标准正态分布的分布函数表计算：（1）$P(X<2.44)$；（2）$P(X>-1.5)$；（3）$P(X<-2.8)$；（4）$P(|X|<4)$；（5）$P(-5<X<2)$；（6）$P(|X-1|>1)$；（7）确定 a，使得 $P(X>a)=P(X<a)$。

解：当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$时，$P(a\le X\le b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$，借助于该性质，再查标准正态分布函数表可求得：

（1）$P(X<2.44)=\Phi\left(\frac{2.44+1}{4}\right)=\Phi(0.86)=0.8051$；

（2）$P(X>-1.5)=1-\Phi\left(\frac{-1.5+1}{4}\right)=1-\Phi(-0.125)$

$$=1-(1-\Phi(0.125))=\Phi(0.125)=0.5498\text{；}$$

（3）$P(X<-2.8)=\Phi\left(\frac{-2.8+1}{4}\right)=\Phi(-0.45)=1-\Phi(0.45)=1-0.6736=0.3264$；

（4）$P(|X|<4)=\Phi\left(\frac{4+1}{4}\right)-\Phi\left(\frac{-4+1}{4}\right)=\Phi(1.25)-\Phi(-0.75)$

$$=\Phi(1.25)-1+\Phi(0.75)=0.8944-1+0.7734=0.6678\text{；}$$

（5）$P(-5<X<2)=\Phi\left(\frac{2+1}{4}\right)-\Phi\left(\frac{-5+1}{4}\right)=\Phi(0.75)-\Phi(-1)$

$$=\Phi(0.75)-\Phi(1)+1=0.7734-0.8413+1=0.9321\text{；}$$

（6）$P(|X-1|>1)=1-P(|X-1|\le 1)=1-P(0\le X\le 2)=1-\left[\Phi\left(\frac{2+1}{4}\right)-\Phi\left(\frac{0+1}{4}\right)\right]$

$$=1-\Phi(0.75)+\Phi(0.25)=1-0.7724+0.5987=0.8253；$$

（7）$P(X>a)=P(X<a)\Rightarrow 1-P(X\le a)=P(X<a)\Rightarrow P(X<a)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\Phi(\frac{a+1}{4})=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{a+1}{4}=0\Rightarrow a=-1$。

14. 某厂生产的滚珠直径 X 服从正态分布 $N(2.05,0.01)$，合格品的规格规定直径为 2 ± 0.2，求滚珠的合格率。

解：所求得概率为

$$P(2-0.2\le X\le 2+0.2)=\Phi\left(\frac{2.2-2.05}{0.1}\right)-\Phi\left(\frac{1.8-2.05}{0.1}\right)$$

$$=\Phi(1.5)-\Phi(-2.5)=\Phi(1.5)-1+\Phi(2.5)$$

$$=0.9332-1+0.9938=0.927$$

15. 某人上班路上所需的时间 $X\sim N(30,100)$（单位：min)，已知上班时间是 8：30. 他每天 7：50 分出门，求:（1）某天迟到的概率;（2）一周（以 5 天计）最多迟到一次的概率。

解：（1）由题意知某人路上所花时间超过 40 分钟，他就迟到了，因此所求概率为

$$P(X>40)=1-\Phi\left(\frac{40-30}{10}\right)=1-\Phi(1)=1-0.8413=0.1587；$$

（2）记 Y 为 5 天中某人迟到的次数，则 Y 服从 $n=5, p=0.1587$ 的二项分布，5 天中最多迟到一次的概率为

$$P(Y\le 1)=\binom{5}{1}(0.1587)^0\times(0.8413)^5+\binom{5}{1}0.1587\times(0.8413)^4=0.8192。$$

16. 设随机变量 X 在 $(1,6)$ 上服从均匀分布，求方程 $t^2+Xt+1=0$ 有实根的概率。

解：X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 1<x<6；\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

方程 $t^2+Xt+1=0$ 有实根的充分必要条件为 $X^2-4\ge 0$，即 $X^2\ge 4$，因此所求得概率为

$$P(X^2\ge 4)=P(X\le -2或X\ge 2)=P(X\le -2)+P(X\ge 2)=0+\int_2^6\frac{1}{5}dx=\frac{4}{5}。$$

17. 设随机变量 $X\sim N(10,2^2)$，令 $Y=3X+2$，试求：（1）Y 的概率密度函数；（2）概率 $P\{26<Y<38\}$（$\Phi(0.5)=0.6915$，$\Phi(1)=0.8413$）。

解：因为 $X \sim N(10, 2^2)$，故 $Y = 3X + 2 \sim N(32, 6^2)$

（1）Y 的概率密度函数为：

$$f_Y(y) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-32)^2}{72}} \quad -\infty < y < +\infty$$

（2）$P\{26 < Y < 38\} = \Phi\left(\frac{38-32}{6}\right) - \Phi\left(\frac{26-32}{6}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) =$

$= 2\Phi(1) - 1 = 0.8413 \quad 0$。

18. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} A\cos x & |x| \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & 其它 \end{cases}$，试求：（1）常数 $\boldsymbol{A}$；（2）$Y = \sin X$ 的概率密度。

解：（1）因为 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} A\cos x dx = A\sin x |_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 2A$，故 $A = \dfrac{1}{2}$；

（2）因为 $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cos x & |x| \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & 其它 \end{cases}$，$y = \sin x$，$y' = \cos x > 0(|x| < \pi/2)$，

$$x = h(y) = \arcsin y, \quad h'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad -1 < y < 1$$

所以由公式可得：

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)| = \dfrac{1}{2}\cos(\arcsin y)\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{1}{2} & -1 < y < 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

19. 设 X 的分布律为

X	-2	-0.5	0	2	4
概率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

求出：以下随机变量的分布律。（1）$X + 2$；（2）$-X + 1$；（3）X^2。

解：由 X 的分布律可列出下表

概率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
X	-2	-0.5	0	2	4
$X+2$	0	1.5	2	4	6
$-X+1$	3	1.5	1	-1	-3
X^2	4	0.25	0	4	16

由此表可定出

（1）$X+2$ 的分布律为

$X+2$	0	$\frac{3}{2}$	2	4	6
概率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

（2）$-X+1$的分布律为

$-X+1$	-3	-1	1	$\frac{3}{2}$	3
概率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

（3）X^2 的分布律为

X^2	0	$\frac{1}{4}$	4	16
概率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3}$

其中 $P(X^2=4)=P(X=2)+P(X=-2)=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{7}{24}$。

20. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，求随机变量的函数 $Y=e^X$ 的密度函数 $f_Y(y)$。

解：$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0; \\ 0, & 其他 \end{cases}$

$y=e^x$ 的反函数 $h(y)=\ln y, h'(y)=\frac{1}{y}$，因此所求的 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|=\begin{cases} e^{-\ln y}\frac{1}{y}, & \ln y>0; \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{y^2}, & y>1; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

B

1. 有 2500 名小学生独立参加了保险公司举办的平安保险，每个参加保险的小学生一年交付保险费 12 元，若在一年内出现意外伤害事故，保险公司一次性赔付 10000 元，设在一年内每名小学生出事故的概率为 0.002，求：（1）保险公司亏本的概率；（2）保险公司获利不少于 10000 元的概率。

解：设 $A=\{公司出现亏本\}$，$B=\{公司获利不少于10000元\}$，X 为一年内出现意外事故的学生人数，则 $X\sim B(2500,0.002)$。

（1）若一年内有 X 名学生出事故，则保险公司应赔付$10000X$ 元，则该事件发生的概率为：

$$P(A)=P\{10000X>2500\times 12\}=P\{X>3\}=\sum_{k=4}^{2500}P(X=k)=1-\sum_{k=0}^{3}P(X=k)$$

$$=1-\sum_{k=0}^{3}C_{2500}^{k}(0.002)^k(0.998)^{2500-k}=1-\sum_{k=0}^{3}\frac{5^k}{k!}e^{-5}=1-\frac{236}{6}e^{-5}=0.73\ ,$$

（2）保险公司获利不少于 10000 元的概率为：

$$P(B)=P\{30000-10000X\ge 10000\}=P\{X\le 2\}=\sum_{k=0}^{2}P(X=k)=\sum_{k=0}^{2}\frac{5^k}{k!}e^{-5}=18.5e^{-5}=0.12\ 。$$

2. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0,x<0\\ Ax^2,0\le x<1\\ 1,x\ge 1\end{cases}$，试求：（1）系数 A；（2）X 落在 $(-1,\frac{1}{2})$ 及 $(\frac{1}{3},2)$ 内的概率；（3）X 的概率密度。

解：（1）由 $F(x)$ 的连续性，有 $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=F(1)$，即 $\lim\limits_{x\to 1^+}Ax^2=1$，得 $A=1$，于是：

$$F(x)=\begin{cases}0,x<0\\ x^2,0\le x<1\\ 1,x\ge 1\end{cases};$$

（2）$P\{-1<X<\frac{1}{2}\}=F(\frac{1}{2})-F(-1)=(\frac{1}{2})^2-0=\frac{1}{4}$，

$P\{\frac{1}{3}<X<2\}=F(2)-F(\frac{1}{3})=1-(\frac{1}{3})^2$；

（3）$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x,0\le x<1\\ 0,其他\end{cases}$。

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}bx, & 0<x<1\\ \frac{1}{x^2}, & 1\le x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，试确定常数 b，并求其分布函数。

解：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 bxdx+\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=\frac{b}{2}+\frac{1}{2}=0\Rightarrow b=1$；

当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=0$；

当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}f(t)dt+\int_0^x tdt=\frac{x^2}{2}$；

当$1\le x<2$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{1}tdt+\int_{1}^{x}\frac{1}{t^2}dt=\frac{3}{2}-\frac{1}{x}$；

当$x\ge 2$时，$F(x)=1$；

X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ \frac{3}{2}-\frac{1}{x}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$ 。

4. 设随机变量 X 的分布函数为$\boldsymbol{F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ A\ln x & 1\le x\le e\\ 1 & x>e\end{cases}}$，试求:（1）常数$\boldsymbol{A}$;（2）$\boldsymbol{P\{|X|<2\}}$，$\boldsymbol{P\{X=e\}}$。

解：（1）根据分布函数的右连续性可知：

$$\lim_{x\to e+0}F(x)=1=F(e)=A\ln e=A\Rightarrow A=1;$$

（2）$P\{|X|<2\}=P\{-2<X<2\}=F(2)-F(-2)=\ln 2-0=\ln 2$；

$P\{X=e\}=0$。

5. 随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{c}{\sqrt{1-x^2}},|x|<1\\ 0,其他\end{cases}$，求：（1）$c$ 的值；（2）X 落在$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$内的概率。

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{c}{\sqrt{1-x^2}}dx=2c\arcsin x\Big|_0^1=2c\frac{\pi}{2}=c\pi$，得$c=\frac{1}{\pi}$；

（2）$P\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\pi}\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi}\bullet\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}$。

6. 随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}A\cos x,|\mathrm{x}|\le\pi/2,\\ 0,其他,\end{cases}$$

求：（1）A的值；（2）$F(x)$；（3）$P\{0<X\le\pi/4\}$。

解：（1）由$1=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}A\cos xdx=2A\int_0^{\pi/2}\cos xdx=2A$，得 $A=1/2$。

（2）当$x<-\pi/2$时，$F(x)=0$；当$x\geq\pi/2$时，$F(x)=1$；

当$-\pi/2\leq x<\pi/2$时，$F(x)=\int_{-\pi/2}^{x}\frac{1}{2}\cos xdx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin x$；所以

$$f(x)=\begin{cases}0, x<-\pi/2,\\ 1/2+\sin x/2, -\pi/2\leq x<\pi/2,\\ 1, x\geq\pi/2.\end{cases}$$

（3）$P\{0<X\leq\pi/4\}=F(\pi/4)-F(0)=\sqrt{2}/4$。

7. 公共汽车门的高度是按男子与车门碰头的机会在 0.01 以下设计的，设男子身高（单位：cm）$X\sim N(170,36)$，求应如何选择车门的高度。

解：设男子身高为X，选择的车门高度x应满足：

$$P\{X>x\}=0.01，且 X\sim N(170,36)，$$

所以

$$P\{X>x\}=P\{\frac{X-170}{6}>\frac{x-170}{6}\}=0.01$$

$$\Phi(\frac{x-170}{6})=0.99，\quad \frac{x-170}{6}=2.33$$

$x=183.9$，故选择的车门高度应为 183.98cm，即可取 1.84 米。

8. 设随机变量X的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}Kx^3e^{-\frac{x^2}{2}}, x>0,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

(1)求常数K；(2)求X的分布函数$F(X)$；(3) 求概率$P(-2<X\leq 4)$；(4) 求$Z=X^2+1$的概率密度。

解：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}Kx^3e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$，所以$K=\frac{1}{2}$；

（2）$F(x)=\begin{cases}1-(\frac{x^2}{2}+1)e^{-\frac{x^2}{2}}, x\geq 0,\\ 0, \quad x<0.\end{cases}$；

（3）$P(-2<x\leq 4)=F(4)-F(-2)=F(4)=1-9e^{-8}$；

（4）

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\sqrt{z-1})^3e^{-\frac{z-1}{2}}\frac{1}{2\sqrt{z-1}}=\frac{1}{4}(z-1)e^{-\frac{z-1}{2}}, z>1\\ 0, 其他\end{cases}$$。

C

1. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 连续，且严格单调增加，求 $Y=F(X)$ 的概率密度。

解：设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}=P\{X\le F^{-1}(y)\}=F[F^{-1}(y)]=y$，

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$，当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=1$，故

$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y, & 0<y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$，于是 Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$。

2. 对圆片直径进行测量，其值在[5, 6]上均匀分布，试求圆片面积的概率分布。

解：直径 D 的分布密度为 $\varphi(d)=\begin{cases}1, 5\le d\le 6\\ 0, 其他\end{cases}$，假设 $X=\dfrac{\pi D^2}{4}$，X 分布函数为 $F(x)$

$F(x)=P\{X\le x\}=P\{\dfrac{\pi D^2}{4}\le x\}$，当 $x\le 0$ 时，$F(x)=0$；当 $x>0$ 时

$F(x)=P\{X\le x\}=P\{\dfrac{\pi D^2}{4}\le x\}=P\{-\sqrt{\dfrac{4x}{\pi}}\le x\le\sqrt{\dfrac{4x}{\pi}}\}$；当 $\sqrt{\dfrac{4x}{\pi}}<5$ 时，即 $x<\dfrac{25\pi}{4}$ 时，$F(x)=0$；

当 $5\le\sqrt{\dfrac{4x}{\pi}}\le 6$ 时，

即 $\dfrac{25}{\pi}\le x\le 9\pi$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{\dfrac{\pi D^2}{4}\le x\}=P\{-\sqrt{\dfrac{4x}{\pi}}\le x\le\sqrt{\dfrac{4x}{\pi}}\}=$

$\int_5^{\sqrt{\frac{4x}{\pi}}}1dt=\sqrt{\dfrac{4x}{\pi}}-5$；当 $x>9\pi$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\int_5^6 dt=1$；所以

$F(x)=\begin{cases}0, x<25\pi/4\\ \sqrt{4x/\pi}-5, 25\pi/4\le x\le 9\pi\\ 1, x>9\pi\end{cases}$，密度函数为 $\varphi(x)=F^{'}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}, \dfrac{25\pi}{4}\le x\le 9\pi\\ 0, 其他\end{cases}$。

3. 电源电压在不超过 $200\,\mathrm{V}$、$200\sim 240\,\mathrm{V}$ 和超过 $240\,\mathrm{V}$ 三种情况下，元件损坏的概率分别为 0.1，0.001 和 0.2。设电源电压服从正态分布，$X\sim N(220,25^2)$，求：（1）元件损坏的概率 α；（2）元件损坏时，电压在 $200\sim 240\,\mathrm{V}$ 间的概率 β。

解：（1）$P\{X \le 200\} = P\{\frac{X-220}{25} \le \frac{200-220}{25}\} = \Phi(-0.8) = 1-\Phi(0.8) = 0.2118$，

$P\{200 < X \le 240\} = P\{\frac{200-220}{25} < \frac{X-220}{25} \le \frac{240-220}{25}\} = 2\Phi(0.8) - 1$，

$P\{X > 240\} = 1 - P\{X \le 240\} = 1 - P\{\frac{X-220}{25} \le \frac{240-220}{25}\} = 1 - \Phi(0.8$，

由全概率公式知，元件损坏的概率为

$\alpha = 0.1 \times 0.2118 + 0.001 \times 0.5764 + 0.2 \times 0$。

（2）由贝叶斯公式知，元件损坏时，电压在 $200 \sim 240\,\mathrm{V}$ 的概率为

$\beta = 0.5764 \times 0.001 / 0 = 0.0641$。