第三节　高斯定理

一、电场线

二、电通量

三、例题

四、高斯定理

五、高斯定理的应用

一、电场线

定量研究电场:对给定场源电荷求出其分布函数 $\vec{E}(\vec{r})$

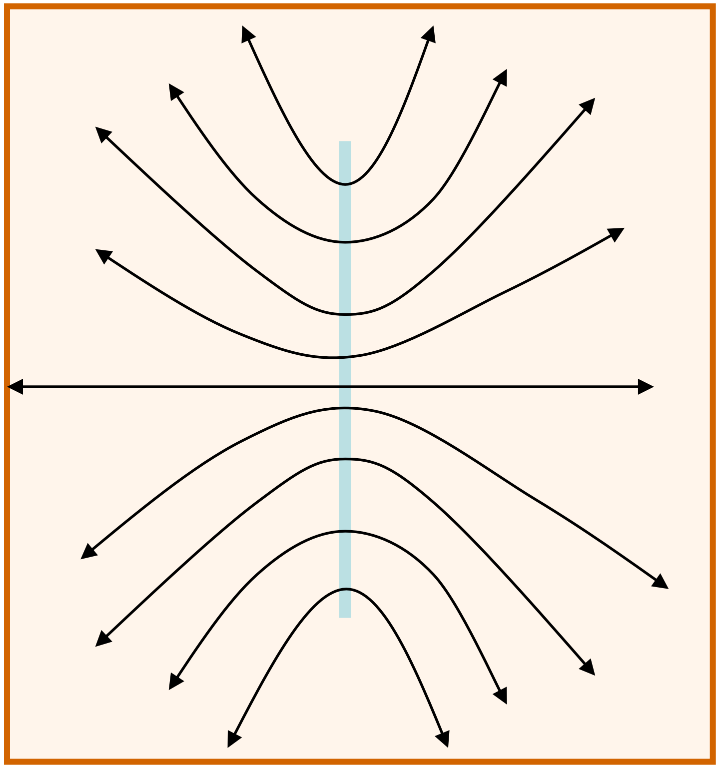
定性描述电场整体分布：电场线方法

电场线
- 其上每点切向：该点 $\vec{E}$ 方向
- 通过垂直 $\vec{E}$ 的单位面积的条数等于场强的大小
- 即：其疏密与场强的大小成正比

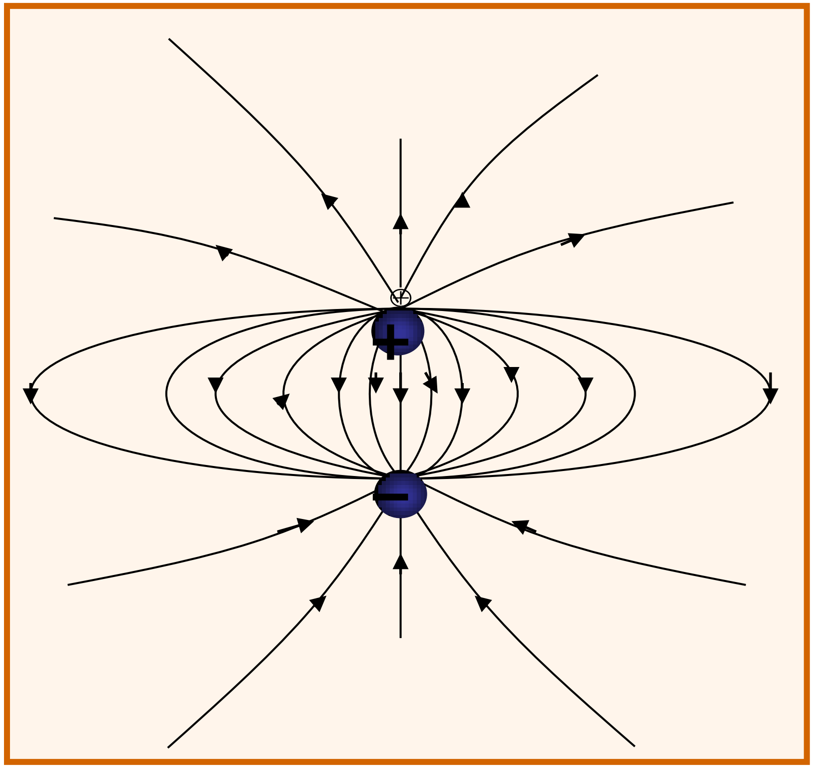
“在法拉第的许多贡献中，最伟大的一个就是力线的概念了。借助于它可以把电场和磁场的许多性质最简单而又极富启发性的表示出来。”

——W. Thomson

实例：



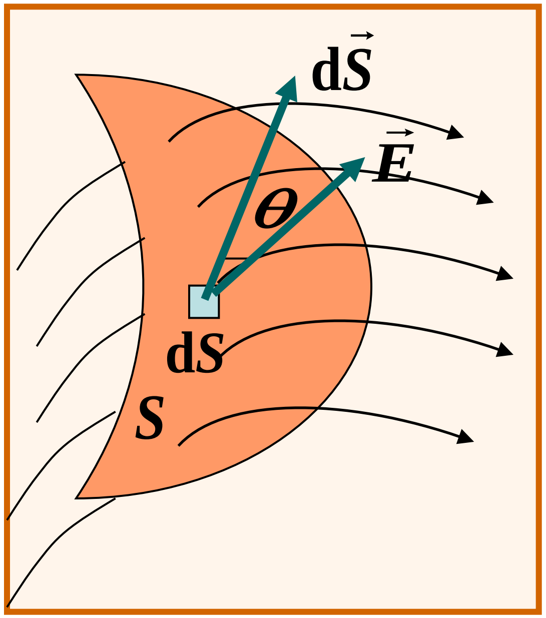
均匀带电直
导线的电场线



电偶极子的电场线

二、电通量 ϕ_e

定义:通过电场中某一给定面的电场线的总条数。



面积元矢量: $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$

微元分析法:

以平代曲: $\mathrm{d}S$为平面

以不变代变:面积元范围内$\vec{E}$视为均匀

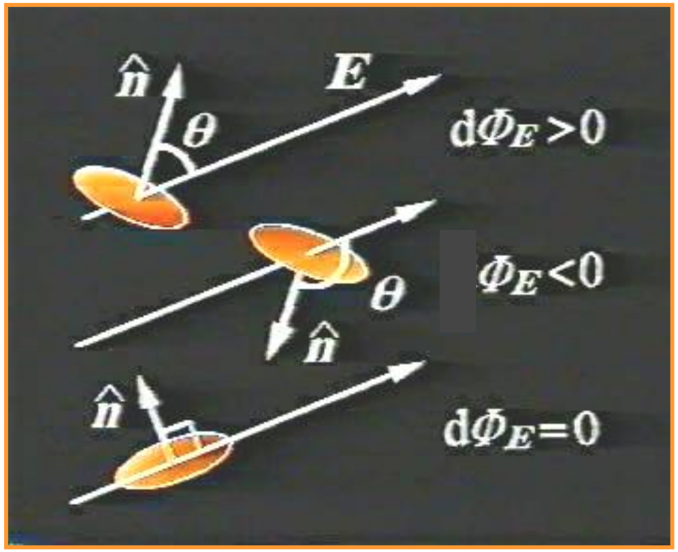
1. 通过面元的电通量:

$\mathrm{d}\phi_e =$ 通过$\mathrm{d}S$的电场线条数 =通过$\mathrm{d}S_{\perp}$的电场线条数

=通过垂直$\vec{E}$的单位面积的电场线条数×$\mathrm{d}S_{\perp} = E\mathrm{d}S_{\perp}$

$$\therefore \mathrm{d}\phi_e = E\mathrm{d}S_{\perp} = E(\mathrm{d}S\cos\theta) = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

通过面元的电通量： $\mathrm{d}\phi_e = E(\mathrm{d}S\cos\theta) = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$



$$\begin{cases} \theta > \dfrac{\pi}{2} & \mathrm{d}\phi_e < 0 \\ \theta < \dfrac{\pi}{2} & \mathrm{d}\phi_e > 0 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} & \mathrm{d}\phi_e = 0 \end{cases}$$

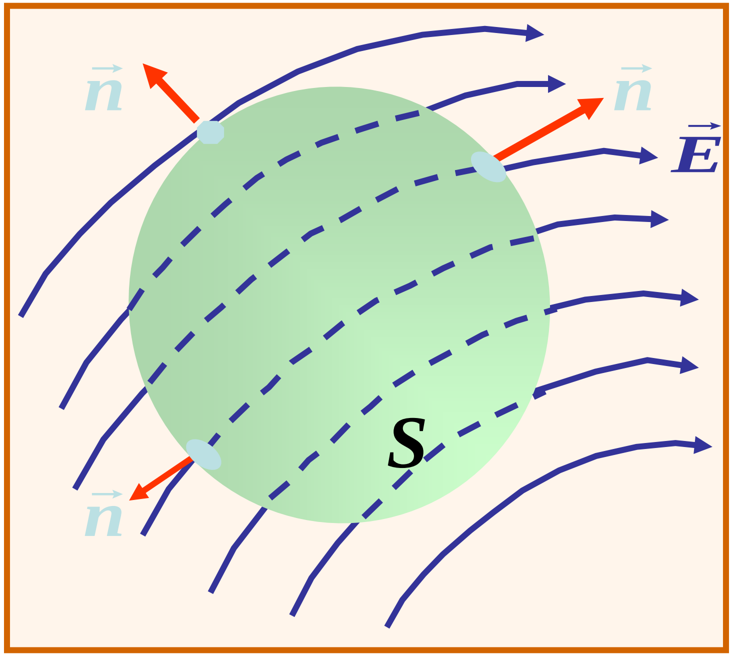
2. 通过曲面S的电通量

$$\phi_e = \int_s \mathrm{d}\phi_e = \int_s \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

特例： 若S为平面，$\vec{E}$为均匀电场则：

$$\phi_e = \int_s \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_s E\cos\theta\mathrm{d}S = ES\cos\theta$$

其中：θ为$\vec{E}$与$\vec{S}$ 的夹角



3.通过封闭曲面的电通量

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

规定：封闭曲面外法向为正

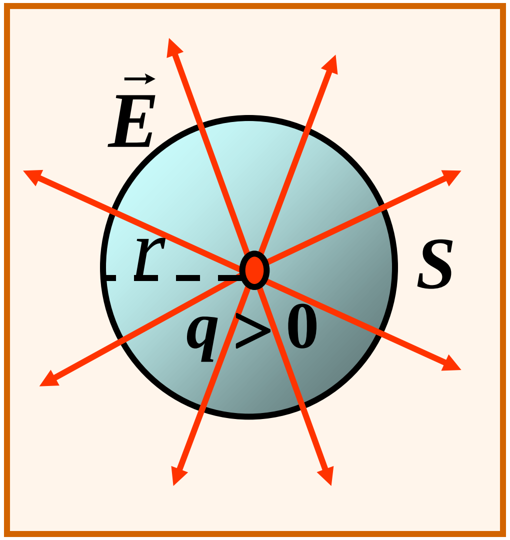
穿入的电场线 $\phi_e < 0$

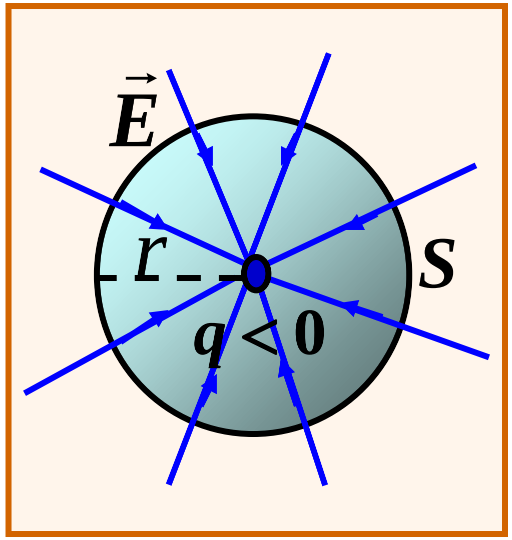
穿出的电场线 $\phi_e > 0$

三、例题

例1 (P_{196}例1)：真空中有点电荷q，求下列情况下穿过曲面的电通量：1) 曲面为以电荷为中心的球面；2) 曲面为包围电荷的任意封闭曲面；3) 曲面为不包围电荷的任意封闭曲面。

解:1) 曲面为以电荷为中心的球面





$$q>0 \quad : \quad \phi_e > 0$$

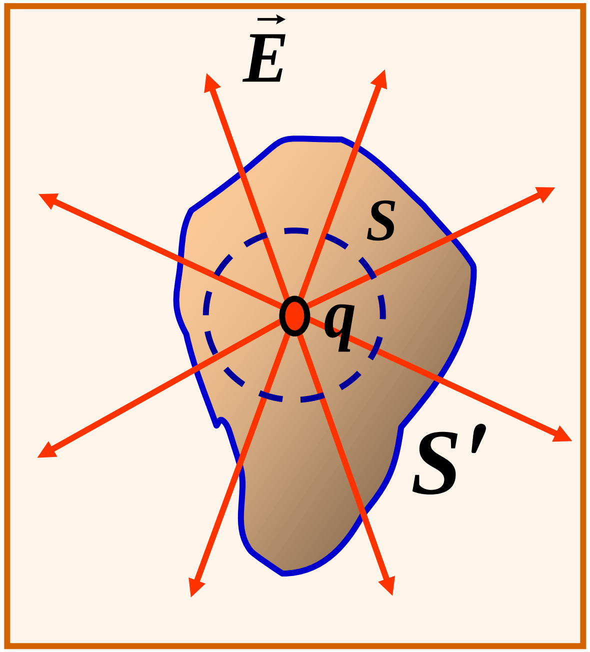
$$q<0 \quad : \quad \phi_e < 0$$

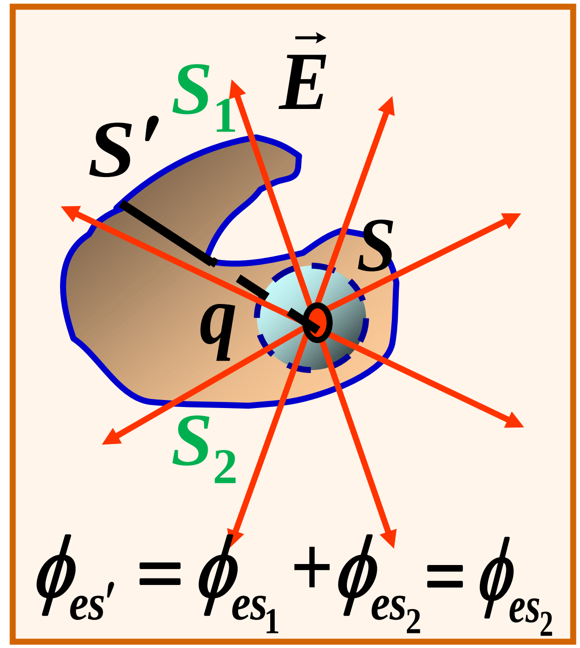
$$\phi_e = \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint \frac{q\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

与 r 无关

单个点电荷场中，由 $+q$ 发出的电场线延伸到∞，由 ∞ 而来的电场线到 $-q$ 终止。在无电荷处, 电场线不终止、不增加。

2) 曲面为包围电荷的任意封闭曲面

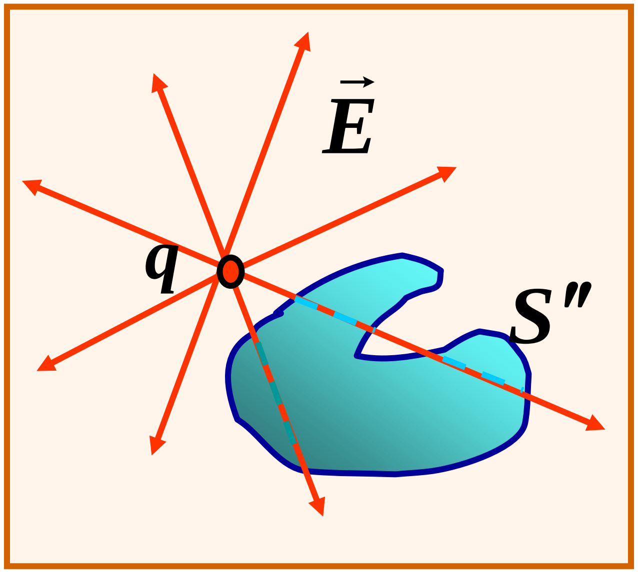




$$\phi_{es'} = \phi_{es} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{cases} q > 0 \quad : \quad \phi_e > 0 \\ q < 0 \quad : \quad \phi_e < 0 \end{cases}$$

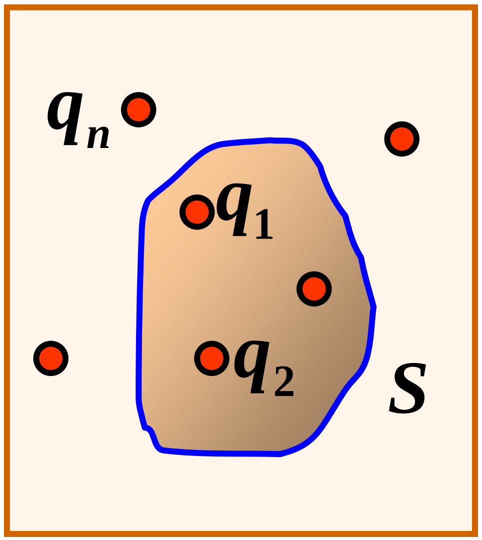
3）曲面为不包围电荷的任意封闭曲面



$$\phi_{es''} = 0$$

结论：
$$\phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \begin{cases} q/\varepsilon_0 & (q\text{在}S\text{内}) \\ 0 & (q\text{在}S\text{外}) \end{cases}$$

例2(P$_{197}$例2)：空间有点电荷系 $q_1, q_2 \cdots q_n$ 求穿过空间任意封闭曲面S的电通量。



解：曲面上各点处电场强度：

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n$$

包括S内、S外，所有电荷的贡献。

穿过S的电通量：

$$\phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \oint \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \cdots + \oint \vec{E}_n \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \phi_{e1} + \phi_{e2} + \cdots + \phi_{en} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$$

只有S内的电荷对穿过S的电通量有贡献

四、高斯定理

静电场中，通过任意封闭曲面（高斯面）的电通量等于该封闭曲面所包围的电量代数和的 $1/\varepsilon_0$ 倍：

$$\boxed{\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}}$$

关于高斯定理的讨论：

$$\oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

1. 式中各项的含义

S：高斯面，封闭曲面

$\vec{E}$：S上各点的电场强度，S内外所有电荷均有贡献。

ε_0：真空电容率

$\sum q_{内}$：S内的净电荷

ϕ_{es}：通过S的电通量，只有S内电荷有贡献。

关于高斯定理的讨论：

$$\boxed{\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}}$$

2. 揭示了静电场中“场”和“源”的关系

$+q$：发出 q/ε_0 条电场线。

$-q$：吸收 q/ε_0 条电场线。

静电场的电场线是有头有尾的：

$+q$ 是电场线的“源头”；$-q$ 是电场线的“尾闾”。

“头”、“尾” ➡ “源” —— 静电场是有源场

关于高斯定理的讨论：

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}}$$

3. 反映了库仑定律的平方反比关系

4. 利用高斯定理可方便求解具有某些对称分布的静电场

成立条件：静电场

求解条件：电场分布具有某些对称性，这样才能找到恰当的高斯面，使 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$ 中的 $\vec{E}$ 能够以标量形式提到积分号外，从而简便地求出 $\vec{E}$ 分布。

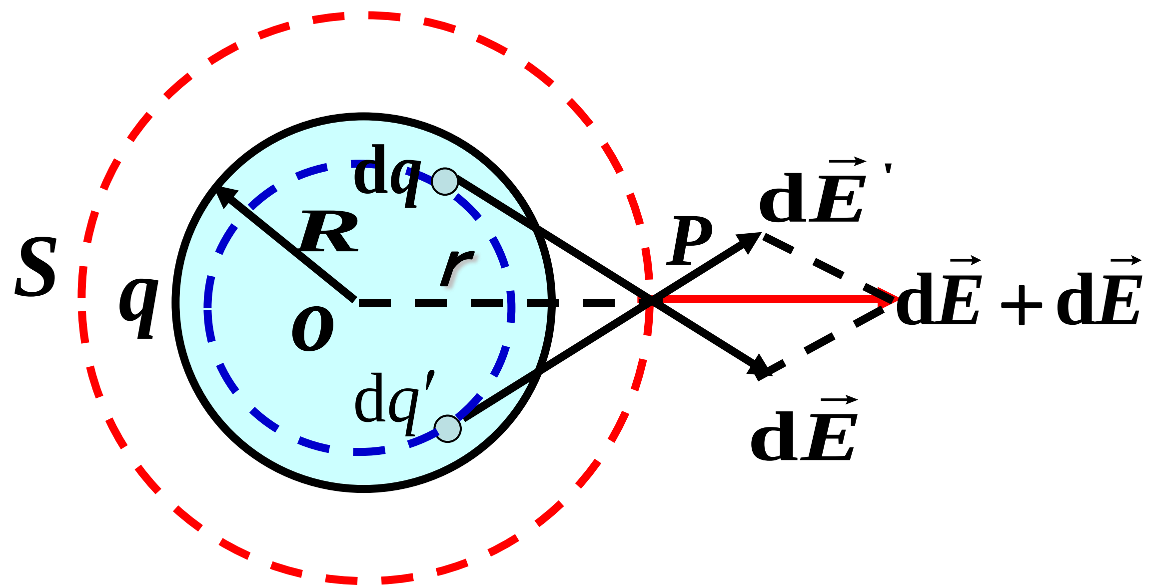
常见类型：场源电荷分布 $\begin{cases}\text{球对称性}\\ \text{轴对称性}\\ \text{面对称性}\end{cases}$

五、高斯定理的应用

例1 (P$_{199}$例4)：求均匀带电球体(q、R)的电场分布。

解：

对称性分析



以O为中心，r 为半径的球面S上各点(包括场点P点)：

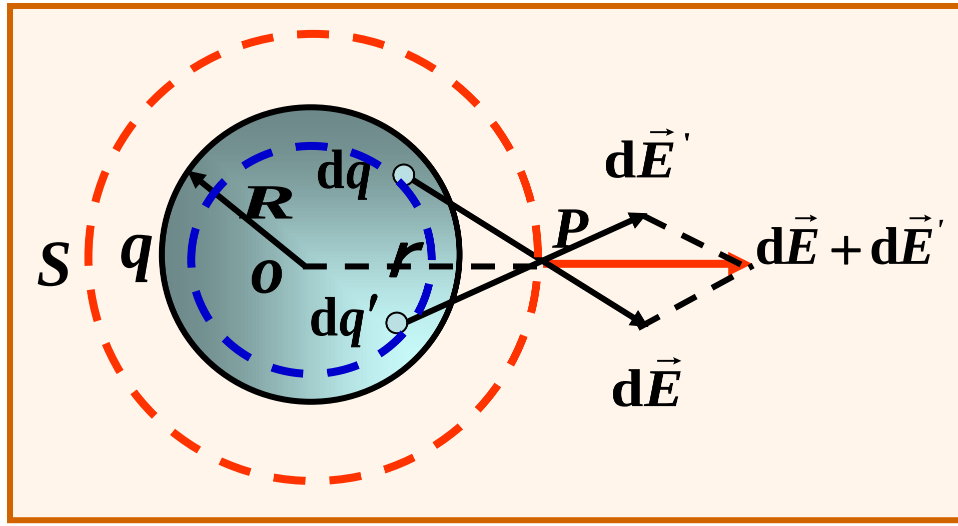
$\vec{E}$ 大小：相等

$\vec{E}$ 方向：沿径向

彼此等价

确定高斯面：

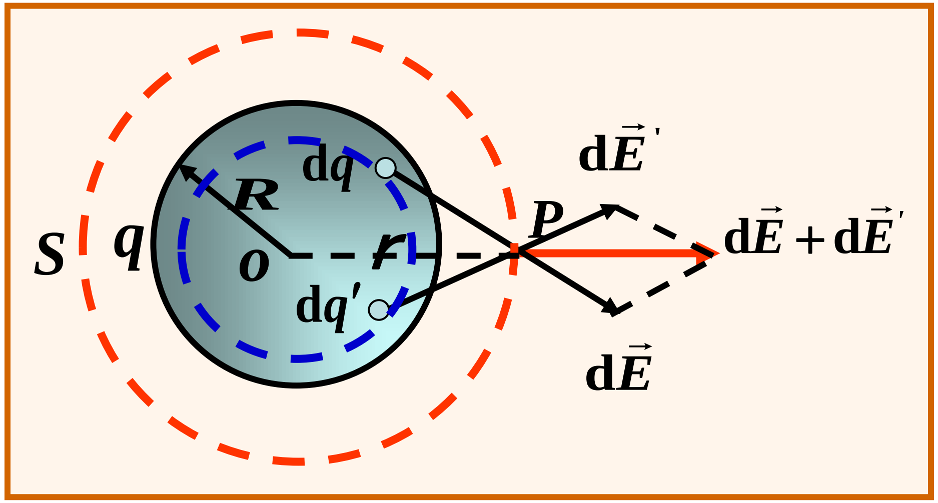
以半径 r 的同心球面S为高斯面



通过 S 的电通量：$\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_s E\cos 0^\circ \mathrm{d}S = E\cdot 4\pi r^2$

由高斯定理：$\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{\text{内}}$

$$E = \left(\sum q_{\text{内}}\right)\Big/\left(4\pi\varepsilon_0 r^2\right)$$



$$E = \left(\sum q_{内}\right) \Big/ (4\pi\varepsilon_0 r^2)$$

$$r \geq R: \quad \sum q_{内} = q \qquad E_{外} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

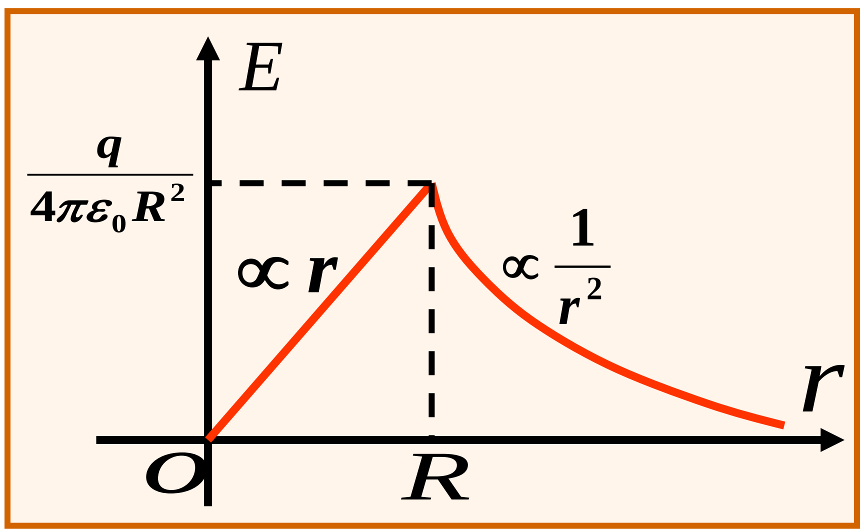
$$r \leq R: \quad \sum q_{内} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad E_{内} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

即：

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r\le R) \\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r\ge R)\end{cases}$$

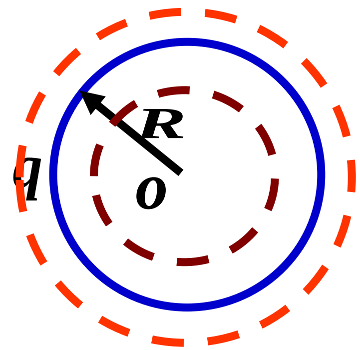
球体内区域 $E\propto r$

球体外区域~电量集中于球心的点电荷



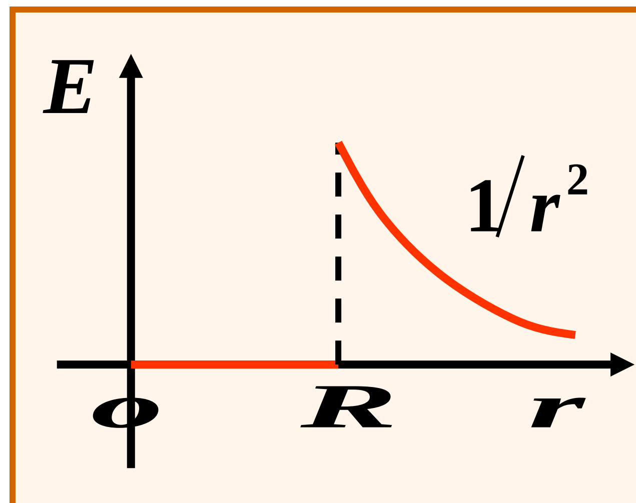
讨论：

1. 求均匀带电球面(R, q)的电场分布，并画出 $E \sim r$ 曲线.

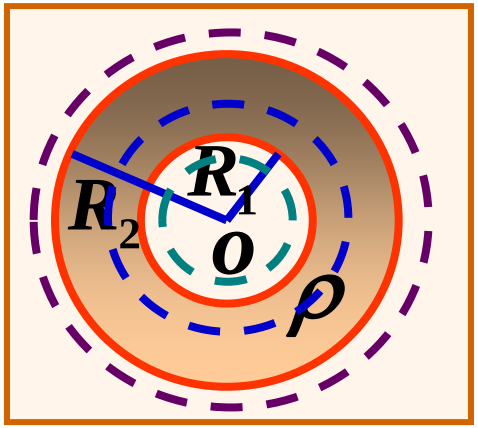


高斯面：半径 r 的同心球面

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r > R) \end{cases}$$



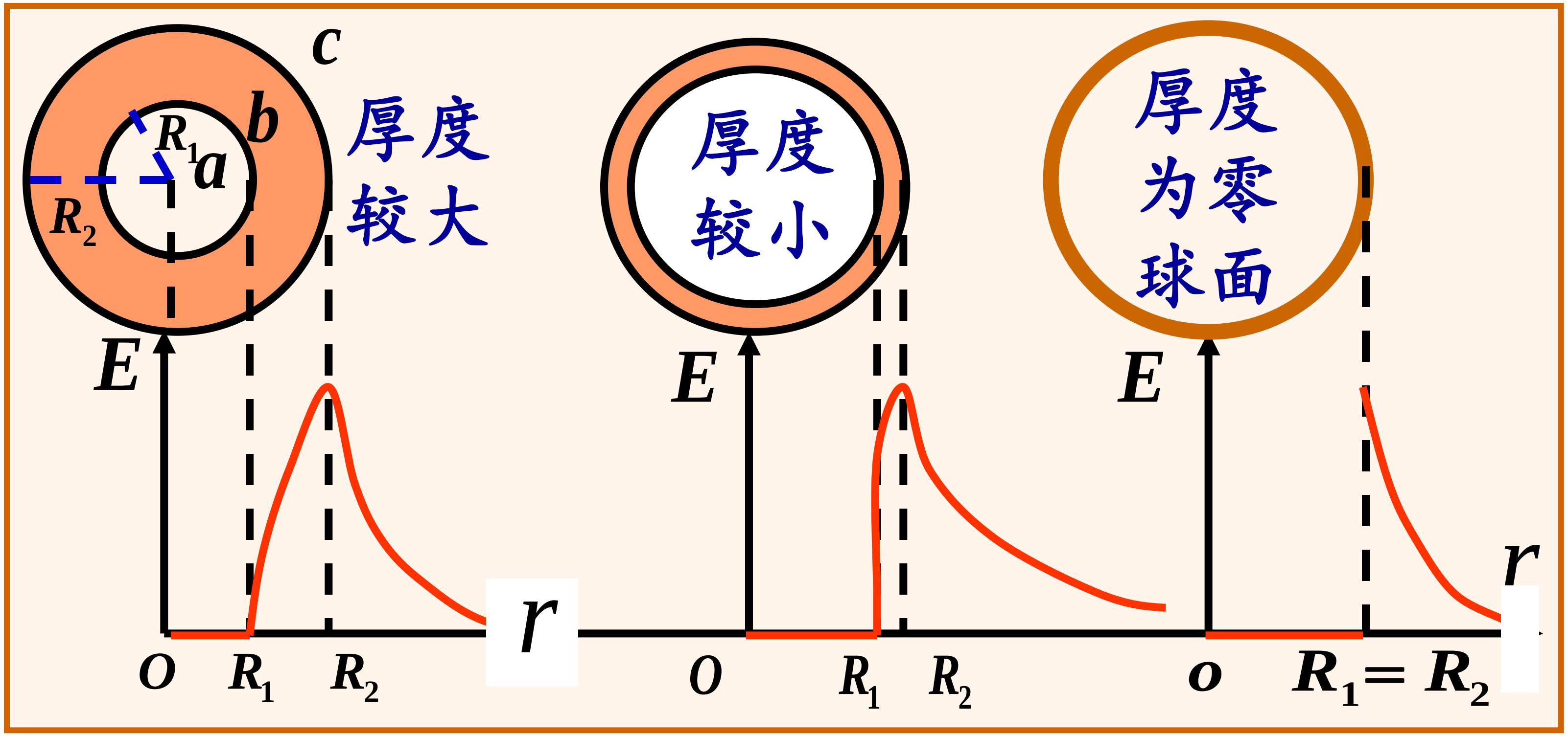
2. 如何理解带电球面 $r=R$ 处 E 值突变？



计算带电球层（R_1，R_2，ρ）的电场分布

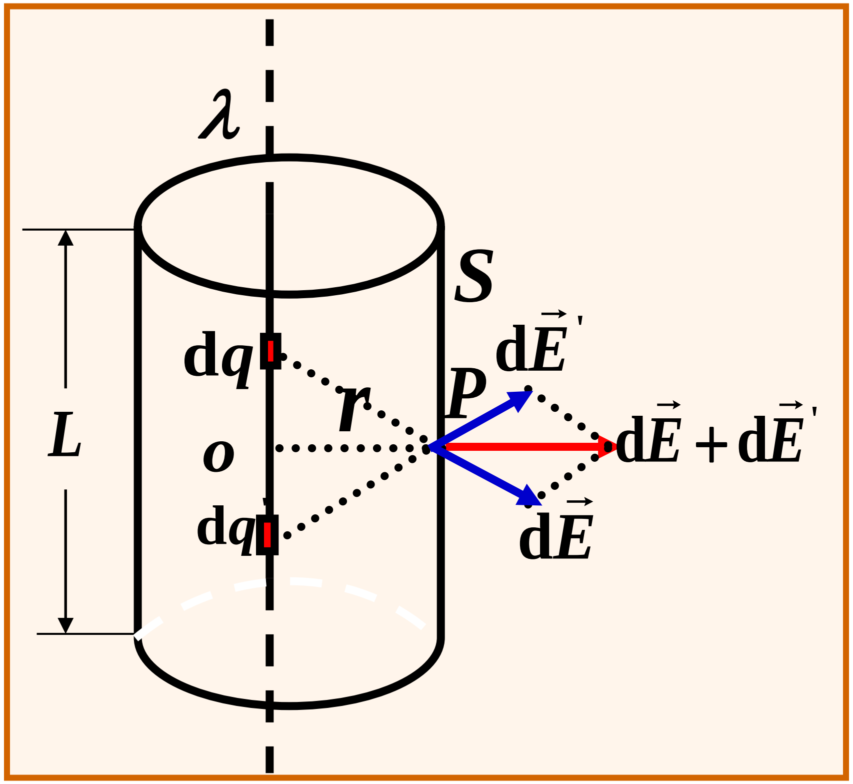
以半径为 r 的同心球面 S 为高斯面

$$E=\begin{cases} 0 & (r\le R_1) \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r-\dfrac{R_1^3}{r^2}\right) & (R_1\le r\le R_2) \\ \dfrac{\rho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r\ge R_2) \end{cases}$$



带电面上场强 E 突变是采用面模型的结果，实际问题中计算带电层内及其附近的准确场强时，应放弃面模型而还其体密度分布的本来面目.

例2 (P_{200}例5)：求无限长均匀带电直线(λ)的电场



解：对称性分析

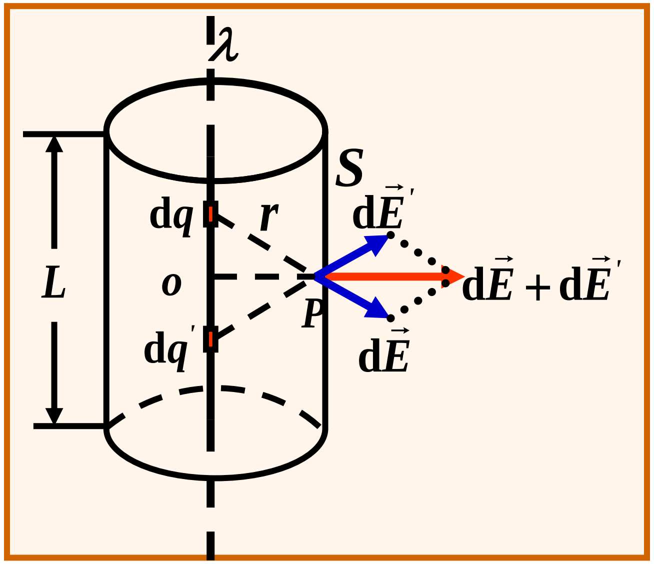
以带电直线为轴的圆柱面上各点：

- $\vec{E}$大小：相等
- $\vec{E}$方向：过且垂直于带电直线

→ 彼此等价

高斯面：

取长L的同轴圆柱面，加上底、下底构成高斯面S

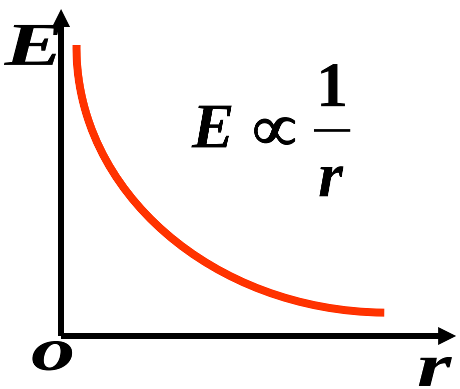


通过S的电通量：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_{上}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}+\int_{下}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}+\int_{侧}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\int_{上}E\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}S+\int_{下}E\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}S+\int_{侧}E\cos 0^\circ \mathrm{d}S$$

$$=E\cdot 2\pi rL$$

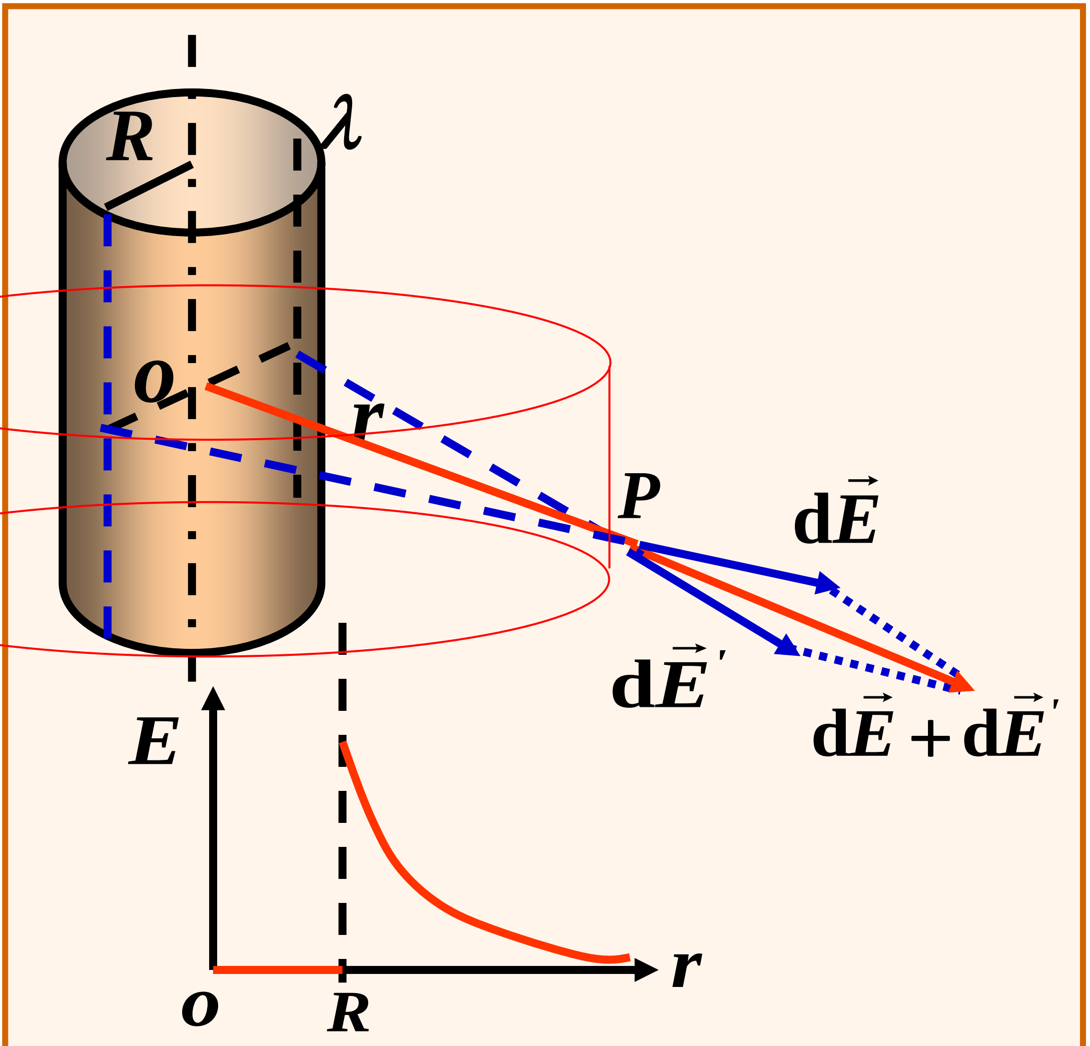


由高斯定理：$E\cdot 2\pi rL=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}=\dfrac{\lambda L}{\varepsilon_0}$

$$\therefore\quad E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

方向：过且垂直于带电直线，指向由λ的符号决定。

讨论：1. 无限长均匀带电柱面(R,λ)的电场分布



对称性分析：视为无限长均匀带电直线的集合。

选高斯面：同轴圆柱面

由高斯定理计算，得：

$r < R:$

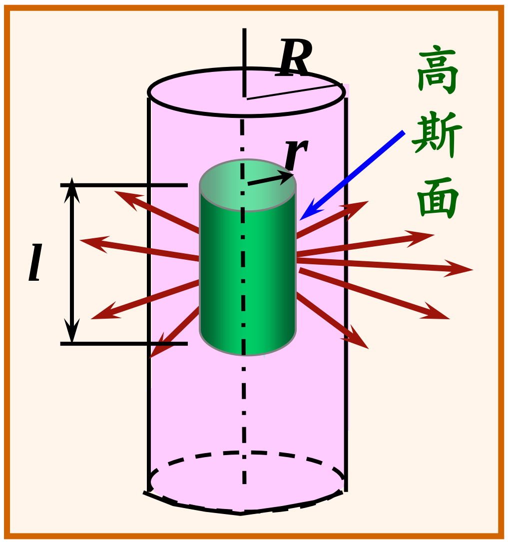
$$E = 0$$

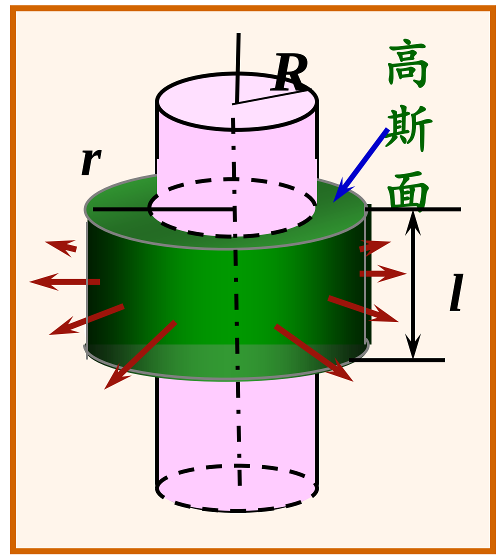
$r > R:$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

2. 求无限长、均匀带电柱体的电场分布时，高斯面如何选取？

高斯面：同轴圆柱面



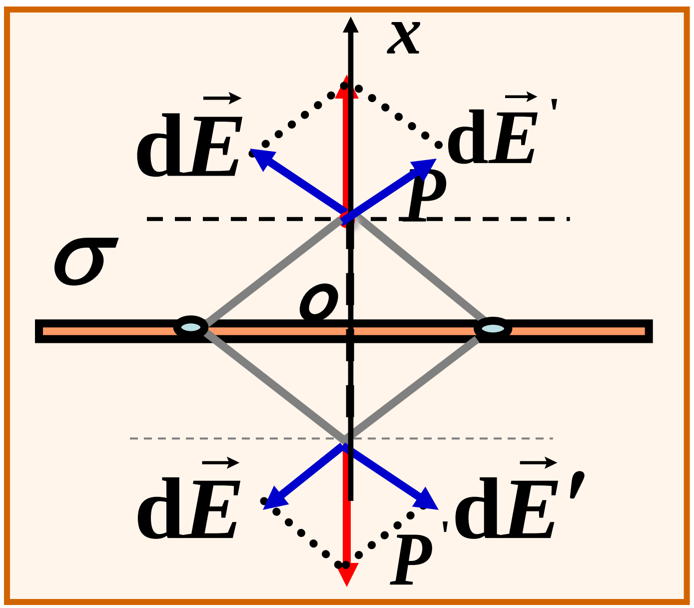


3. 当带电直线，柱面，柱体不能视为无限长时，能否用高斯定理求电场分布？ 不能！

如果不能，是否意味着高斯定理失效？不是！

例3: 求无限大均匀带电平面的电场（电荷面密度σ）

解： 对称性分析:视为无限长均匀带电直线的集合



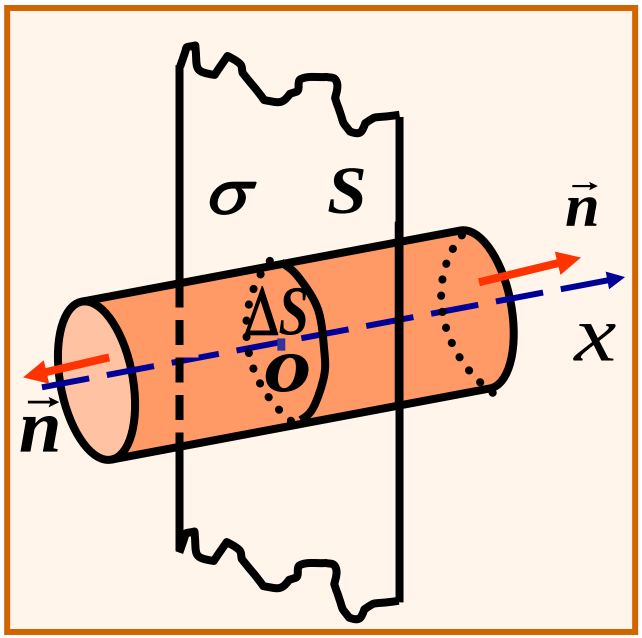
离带电平面距离相等的各场点:

$\vec{E}$ 大小:相等

$\vec{E}$ 方向:垂直于带电平面

彼此等价

高斯面：两底面与带电平面平行、离带电平面距离相等，轴线与带电平面垂直的柱面。



通过S的电通量：

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{左} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{右} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{侧} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

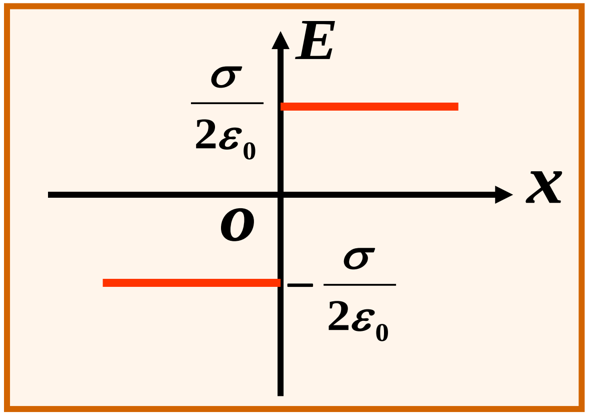
$$= \int_{左} E\cos 0^\circ dS + \int_{右} E\cos 0^\circ dS + \int_{侧} E\cos\frac{\pi}{2} dS$$

$$= E\cdot 2\Delta S$$

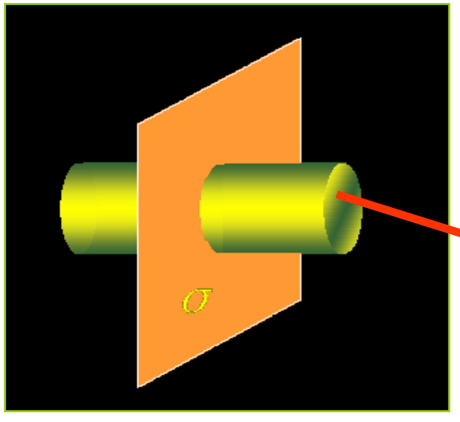
由高斯定理：$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 2\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内} = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

方向：垂直于带电平面，其指向由σ的符号决定。



讨论：1. 本题是否还有其它构成高斯面的方法？



底面与带电平面平行、轴线与带电平面垂直的柱面均可(不一定为圆柱面)。

可以为任意形状

2. 带电平面上电场强度突变的原因？

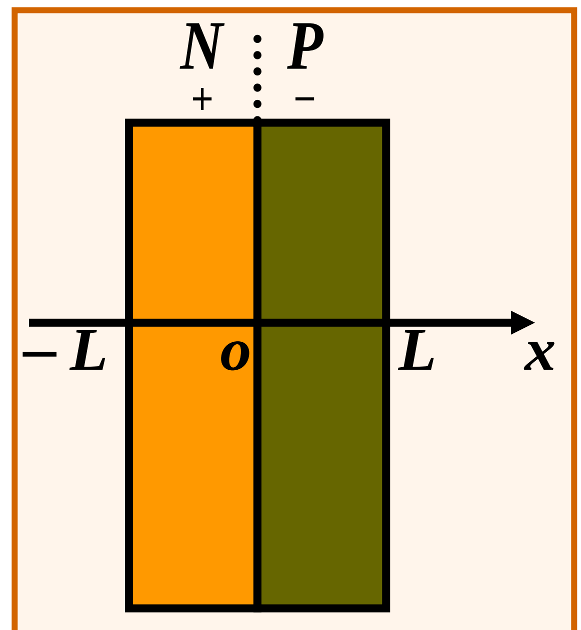
采用面模型，未计带电平面的厚度。

例4(P_{236}9.15)： 求半导体PN结阻挡层内外的电场。

已知：PN结阻挡层内电荷体密度分布

$$\rho(x)=\begin{cases}0 & (x>L,\ x<-L)\\ -ax & (-L\le x\le L)\end{cases}$$

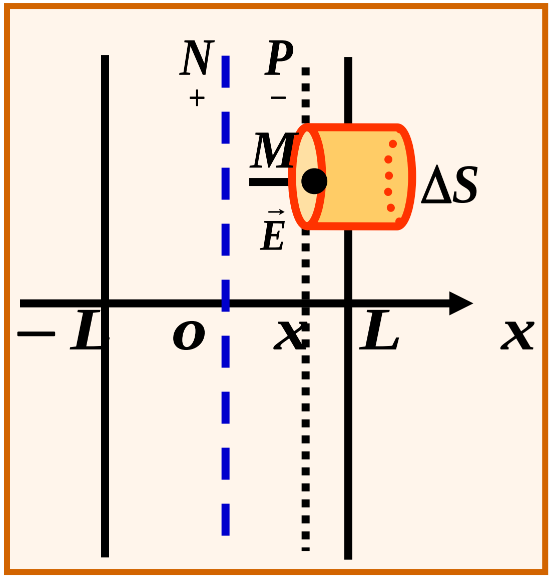
求：电场分布



解：对称性分析

虽然电荷非均匀分布，但ρ随x变化规律未破坏面对称性。

在$|x|\ge L$处，p区与n区电荷的电场相互抵消：$E=0$



$|x| \le L$:

在垂直于x轴的一个面上的各场点：

$\left\{\begin{array}{l}\vec{E}\text{大小：相等} \\ \vec{E}\text{方向：向右垂直于平面}\end{array}\right.$ ⟶ 彼此等价

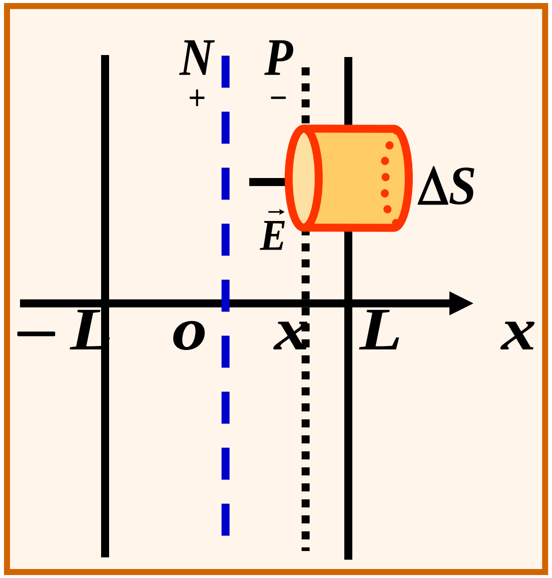
选如图高斯面

电通量：$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{左}\vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{右}\vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{侧}\vec{E}\cdot d\vec{S}$

$$= \int_{左} E\cos\theta dS + \int_{右} E\cos\theta dS + \int_{侧} E\cos\theta dS = \underset{\text{穿入}}{-E\cdot\Delta S}$$

$\cos 180° = -1$ $\quad \vec{E} = 0$ $\quad \cos 90° = 0$

$$\sum q_{内} = \int \rho dV = \int_x^L -ax\cdot\Delta S dx = -a\Delta S\frac{1}{2}(L^2 - x^2)$$



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{左} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{右} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{侧} \vec{E}\cdot d\vec{S} = -E\cdot\Delta S$$

$$\sum q_{内} = -a\Delta S\,\frac{1}{2}(L^2 - x^2)$$

由高斯定理：$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$

得：$E = \frac{a}{2\varepsilon_0}(L^2 - x^2)$　　方向沿 $+x$

总结:由高斯定理求电场分布的步骤

1. 由电荷分布的对称性分析电场分布的对称性。

2. 在对称性分析的基础上选取高斯面，目的是使通

   过高斯面的电通量$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$能够以乘积形式给出。

   （球对称、轴对称、面对称三种类型）

3. 由高斯定理$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$求出电场的大小，

   并说明其方向。

作业

1. No.6（希望在作业题纸中选择、填空各题的相应位置处写出其关键步骤）；
2. 自学本章各例题并完成书上的习题(对照书后的参考答案自己订正)。

第十周星期二交作业