

同学们好!



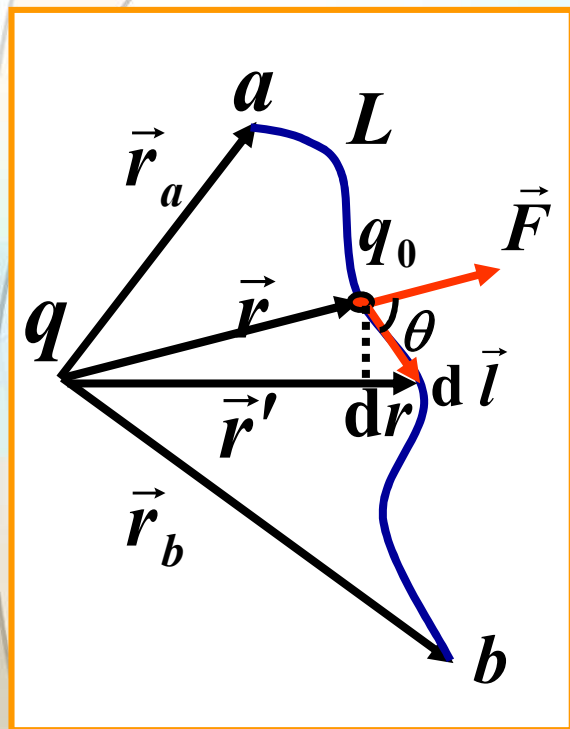
Richard P. Feynman

大自然整体的每一片断或部分，始终只是对完整的真理（或迄今我们所认识的完整真理）的逼近。事实上，我们知道的每件事物都只是某种近似，因为我们知道：我们至今还不知道所有的定律。因此，我们之所以要学习一些东西，正是为了以后再放弃它，或者，更恰当地说，再改正它。

—— R.P. 费曼 (1918—1988)

§ 9.4 环路定理 电势 § 9.5 电场强度与电势的关系

一. 静电力的功 环路定理



场源电荷: q
检验电荷: q_0

$\left. \begin{array}{l} q \\ q_0 \end{array} \right\} \vec{F} = q_0 \vec{E}$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0 q \vec{r} \cdot d\vec{l}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q_0 q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$A = \int_L dA = \int_{r_a}^{r_b} \frac{q_0 q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

可见静电力做功只与检验电荷起点，终点的位置有关，与所通过的路径无关。

此结论可通过叠加原理推广到任意点电荷系的电场。

由静电力做功只与检验电荷起点、终点的位置有关，
与所通过的路径无关 —— 静电力是保守力

$$A = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_L q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

静电场中任意闭合路径

静电场环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

路径上各点的总场强

静电场强沿任意闭合路径的线积分为零. 反映了
静电场是保守力场.

凡保守力都有与其相关的势能， 静电场是有势场.

二. 电势能 W

由 $A_{\text{保}} = -\Delta E_p = -\Delta W$

$$A_{\text{静电力}} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -(W_b - W_a) = W_a - W_b$$

令 $W_b = 0$

得: $W_a = q_0 \overset{\text{零势点}}{\int_a} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

q_0 在场中某点的电势能等于将 q_0 由该点沿任意路径移到零势能点过程中电场力做的功.

$$W_a = q_0 \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

W_a : 静电场与场中电荷 q_0 共同拥有.

W_a / q_0 : 取决于电场分布、场点位置和零势点选取, 与场中检验电荷 q_0 无关. 可用以描述静电场自身的特性。

三. 电势 电势差

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

静电场中某点电势等于单位正电荷在该点具有的电势能, 或将单位正电荷由该点移至零势能点过程中静电力所做的功.

电势:

$$U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电势差:

$$\begin{aligned} U_{ab} &= U_a - U_b = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_b^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \left(\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right) - \int_b^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

静电场中 a 、 b 两点的电势差等于将单位正电荷由 a 沿任意路径移至 b 过程中静电力做的功.

注意：

1. U 为空间标量函数

2. U 具有相对意义，其值与零势点选取有关，
但 U_{ab} 与零势点选取无关.

3. 遵从叠加原理：

$$U = \sum U_i \quad (\text{零势点相同})$$

即点电荷系场中任一点的电势等于各点电荷单独存在时在该点产生的电势的代数和.

四. 电场强度与电势的关系

1. 由保守力与其相关势能的关系:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} = -\nabla W$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = -\nabla\left(\frac{W}{q_0}\right) = -\nabla U = -\text{grad } U$$

静电场中某点的场强等于该点电势梯度的负值。

即: \vec{E} 是 U 沿电场线方向的空间变化率 . 指向 U 降低的方向.

给出又一种求 \vec{E} 的方法:

$$\vec{E} = -\text{grad}U$$

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

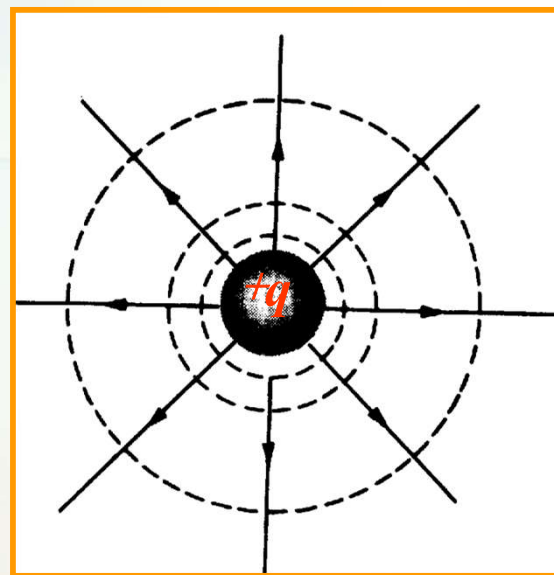
2. 电场线与等势面的关系

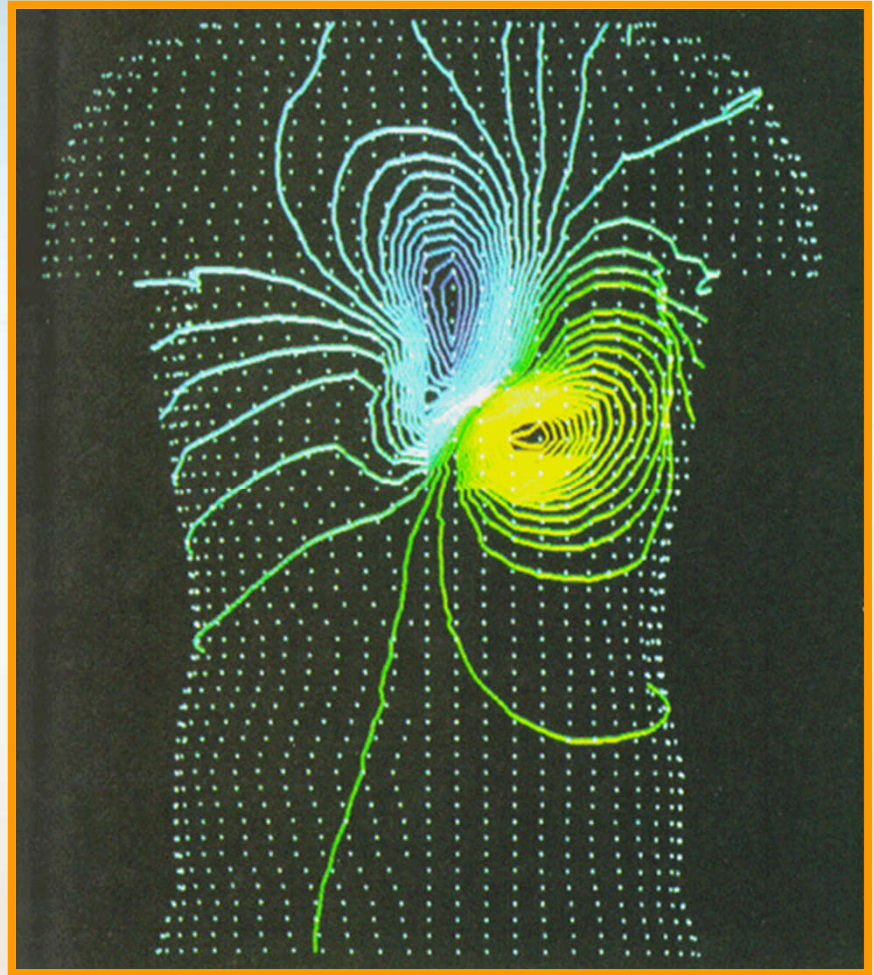
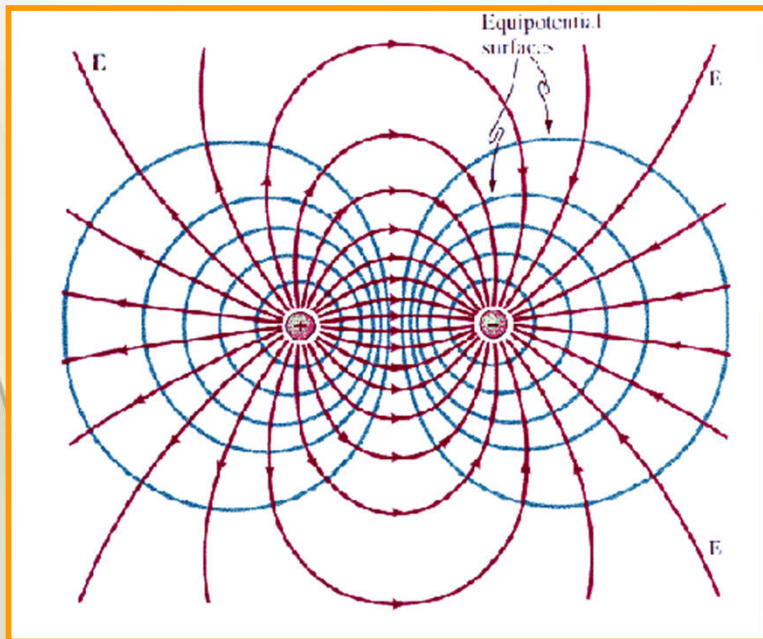
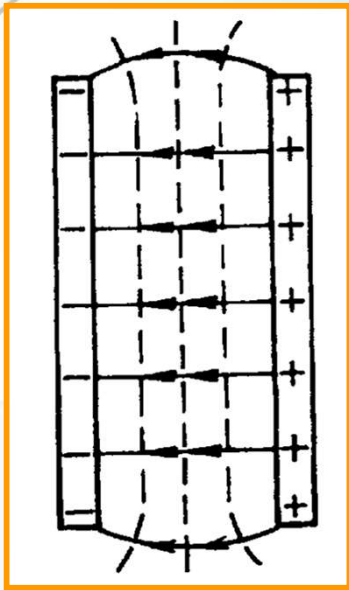
等势面：电场中电势相等的点的集合，两两相邻的等势面之间的电势差相等。

电场线与等势面垂直，指向电势降低的方向。

电场强处等势面较密，电场弱处等势面较稀。

实际问题中常常先由实验测得等势面分布，再得出电场线分布。





作心电图时人体的等势面分布

五. 电势的计算（两种基本方法）

1. 场强积分法（由定义求）

- 〈1〉 确定 \vec{E} 分布
- 〈2〉 选零势点和便于计算的积分路径
- 〈3〉 由电势定义

$$U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{\text{零势点}} E \cos \theta dl \quad \text{计算 } U_a$$

注意：

- \vec{E} 为所选积分路径上各点的总场强，
若路径上各段 \vec{E} 的表达式不同，应分段积分。

$$U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{\text{零势点}} E \cos \theta dl$$

注意:

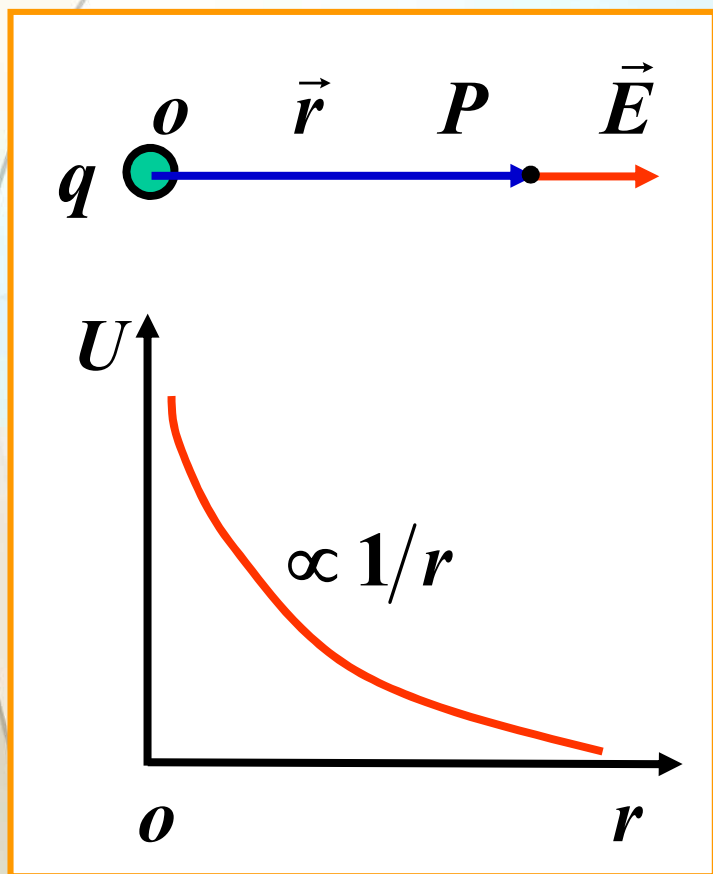
- 选取零势点的原则: 使场中电势分布有确定值

一般, 场源电荷有限分布: 选 $U_{\infty} = 0$

场源电荷无限分布: 不选 $U_{\infty} = 0$

许多实际问题中选 $U_{\text{地球}} = 0$

[例一] 点电荷 q 场中的电势分布



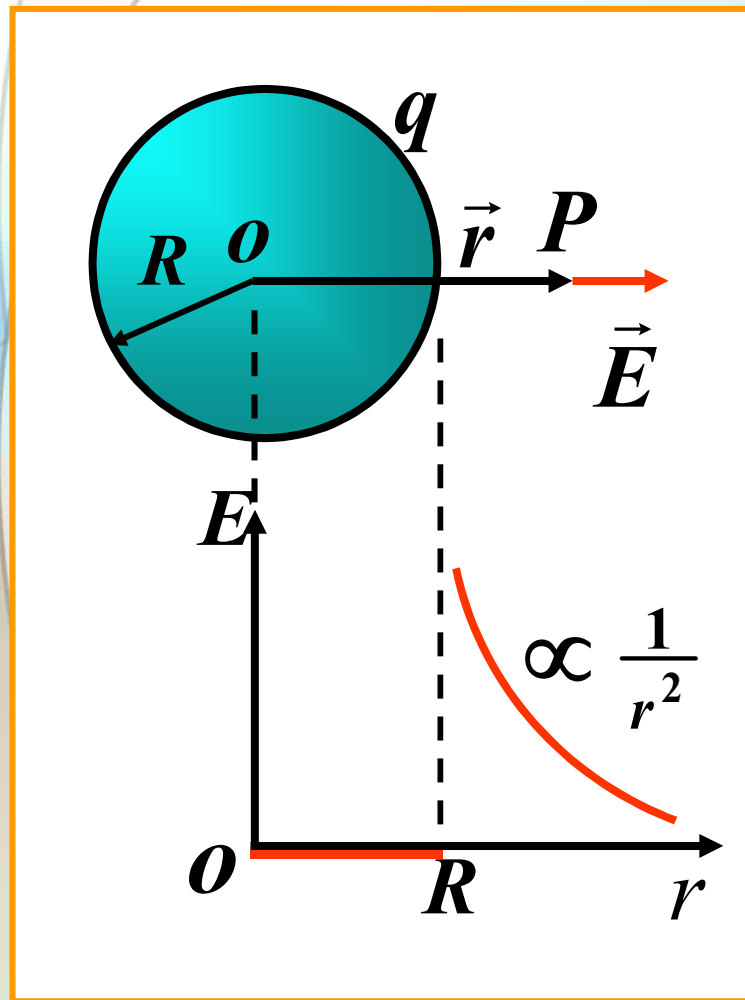
解:
$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

令 $U_\infty = 0$

沿径向积分

$$\begin{aligned} U &= \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{q\vec{r} \cdot d\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ &= \int_r^\infty \frac{qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

[例二] 均匀带电球面场中电势分布 (q, R)



由高斯定理

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} & (r > R) \end{cases}$$

令 $U_\infty = 0$ ，沿径向积分

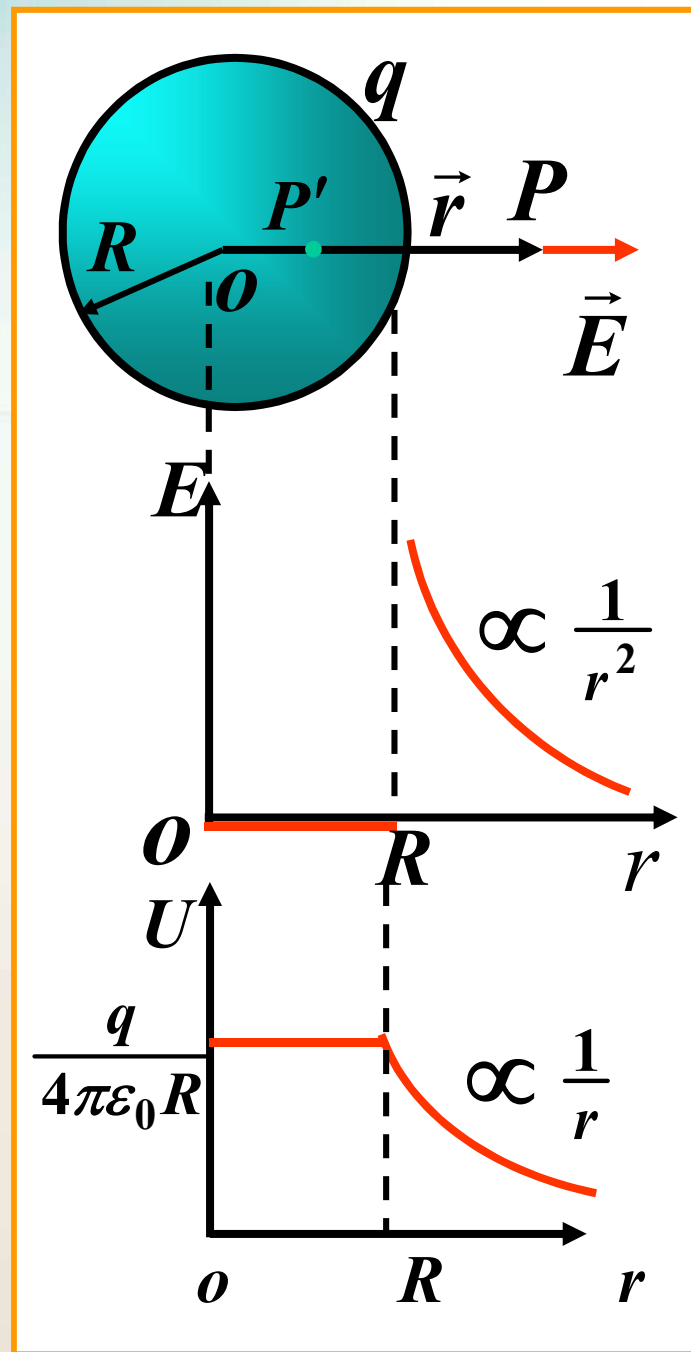
$$\begin{aligned} U_{\text{外}} &= \int_P^\infty \vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{q\vec{r} \cdot d\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \propto \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$U_{\text{外}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \propto \frac{1}{r}$$

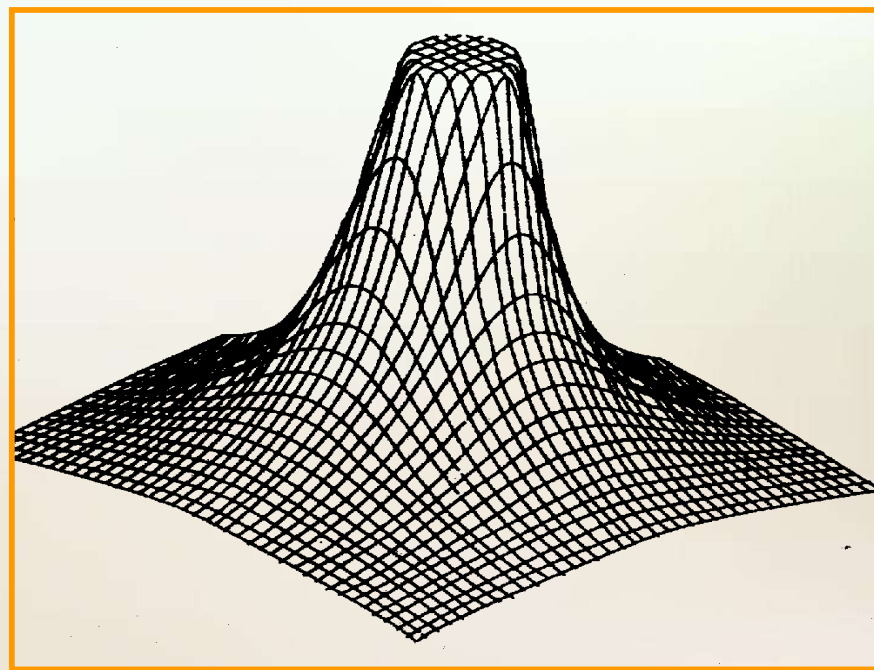
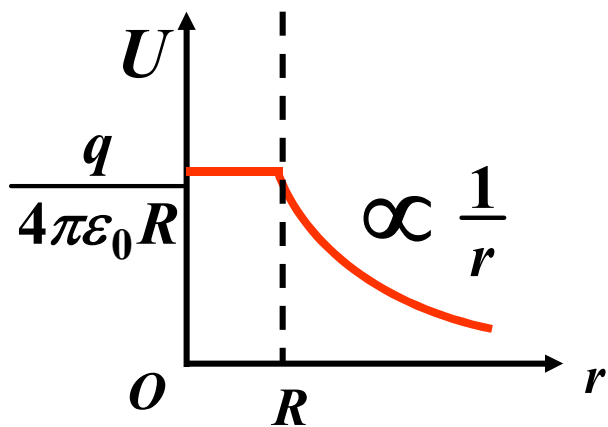
$$\begin{aligned} U_{\text{内}} &= \int_{P'}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{P'}^R \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{r} + \int_R^{\infty} \vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_R^{\infty} \frac{q\vec{r} \cdot d\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \text{恒量} \end{aligned}$$

均匀带电球面内电势与球面处电势相等，

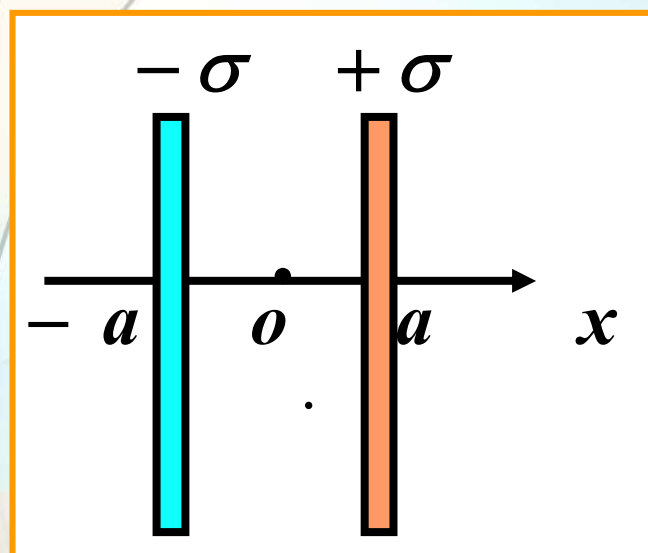
球面外电势与电量集中于球心的点电荷情况相同。



试设想等势面形状



[例三] 无限大均匀带电平面 $\pm\sigma$ 场中电势分布.



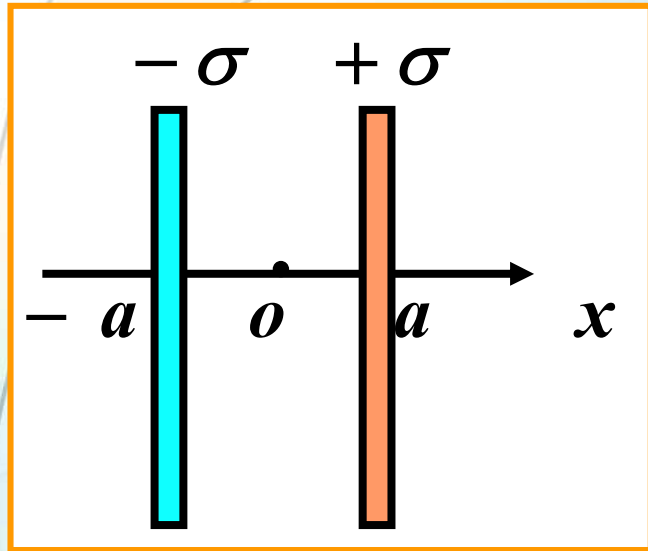
电场分布:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i} & (-a < x < a) \\ 0 & (x < -a, x > a) \end{cases}$$

思考: 先由电场强度和电势的关系, 定性分析电势变化规律, 再定量计算。

两极板之间: 电势沿 $-x$ 方向均匀降低。

两极板外侧: 电势为恒量。



电场分布:

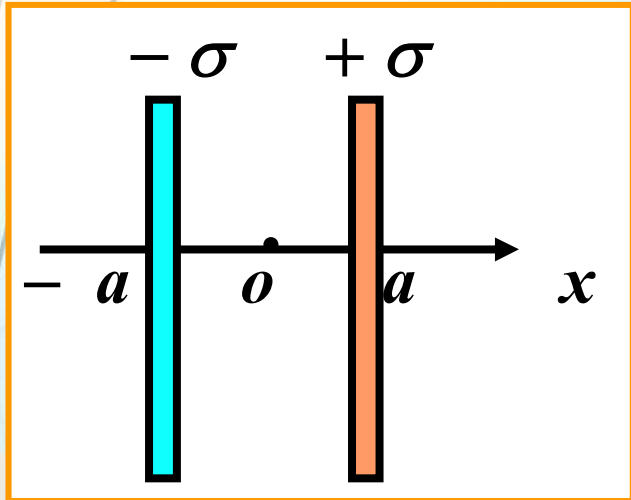
$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i} & (-a < x < a) \\ 0 & (x < -a, x > a) \end{cases}$$

电荷无限分布, 在有限远处选零势点. 令 $U_o = 0$, 沿 x 轴积分.

$x < -a$ 区域:

$$U = \int_x^{-a} E_x dx + \int_{-a}^0 E_x dx = 0 + \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)a = -\frac{\sigma a}{\epsilon_0}$$

$x < -a$ 区域:
$$U = \int_x^{-a} E_x dx + \int_{-a}^0 E_x dx = -\frac{\sigma a}{\epsilon_0}$$

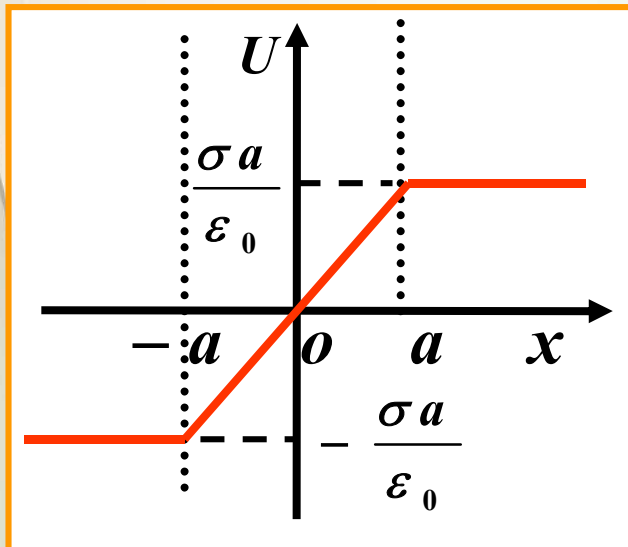


$-a \leq x \leq a$ 区域:

$$U = \int_x^0 E_x dx = \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)(-x) = \frac{\sigma x}{\epsilon_0}$$

$x > a$ 区域:

$$\begin{aligned} U &= \int_x^a E_x dx + \int_a^0 E_x dx \\ &= 0 + \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)(-a) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \end{aligned}$$



$U - x$ 曲线如图

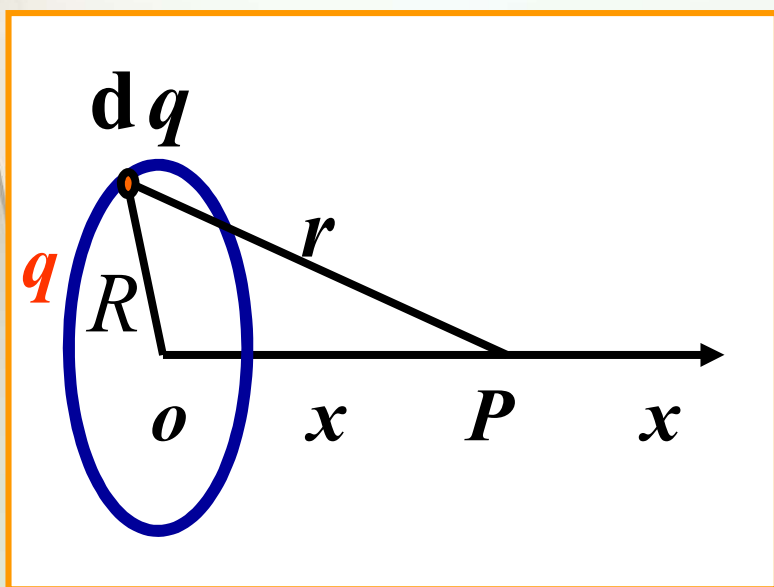
2. 叠加法

〈1〉 将带电体划分为电荷元 dq

〈2〉 选零势点，写出 dq 在场点的电势 dU

〈3〉 由叠加原理： $U = \sum dU$ 或 $U = \int dU$

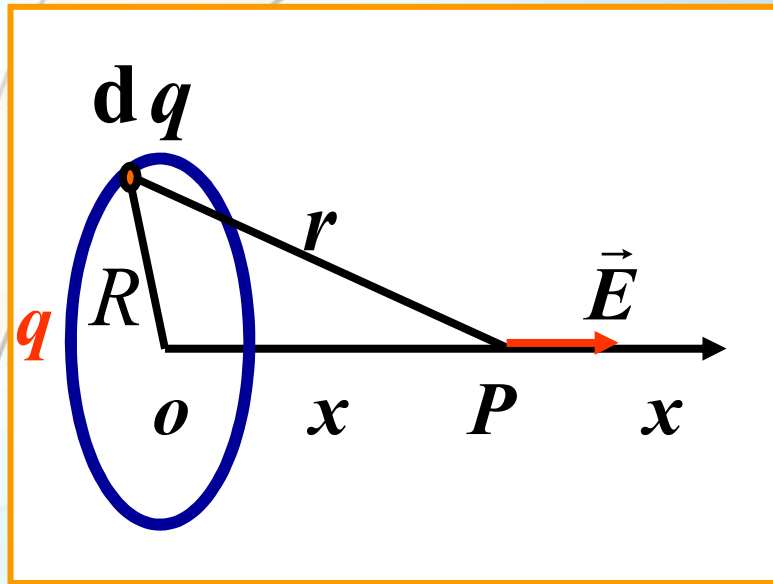
[例四] 求均匀带电圆环 (R, q) 轴线上的电势分布



解：在圆环上取点电荷 dq ，

$$\text{令 } U_{\infty} = 0$$

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$



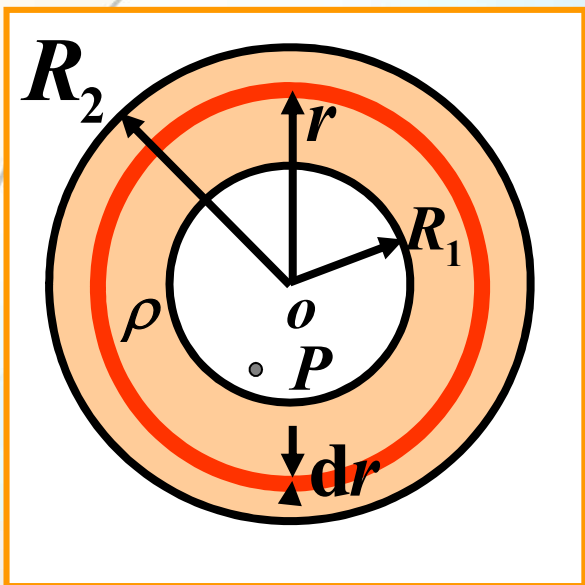
$$U = \int dU = \int_0^q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}$$

可进一步由电势分布求电场强度分布

$$\vec{E} = -\frac{dU}{dx} \vec{i} = \frac{qx\vec{i}}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

[例五] 求均匀带电球壳腔内任意点的电势.



已知: R_1 , R_2 , ρ

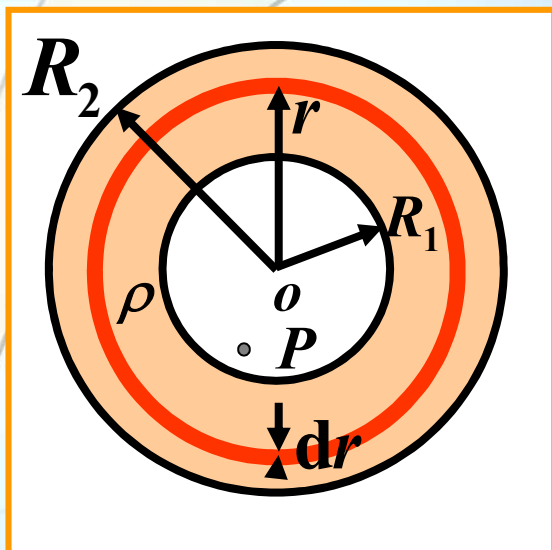
求: U_P

解: 将带电球壳视为许多
均匀带电球面的集合,

取半径 r , 厚 dr 的球壳为电荷元: $dq = \rho \cdot 4\pi r^2 \cdot dr$

令 $U_\infty = 0$, dq 在腔内产生的电势:

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho \cdot 4\pi r^2 dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho r dr}{\epsilon_0}$$

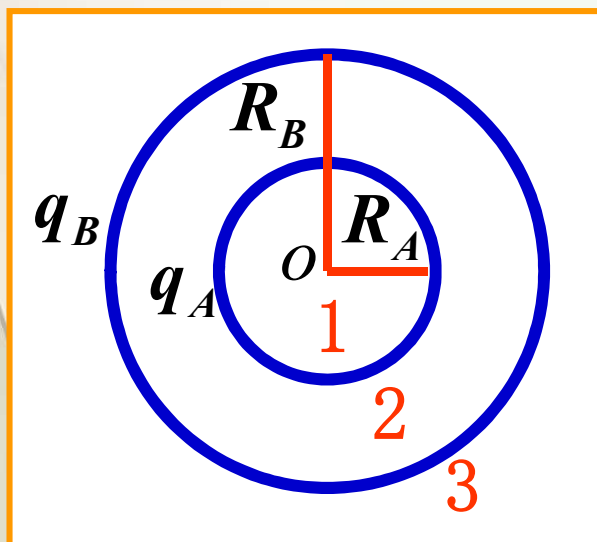


由叠加原理:

$$U = \int dU = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{\epsilon_0} r dr = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$$

即: 腔内各点等势

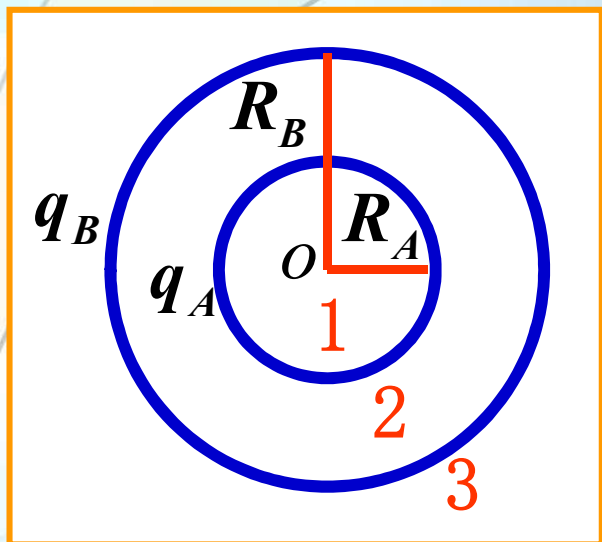
练习:



已知: 两个均匀带电同心球面

R_A, R_B, q_A, q_B

求: U_1, U_2, U_3



带电球面的电势分布:

球面内: $U = q / 4\pi\epsilon_0 R \quad (r \leq R)$

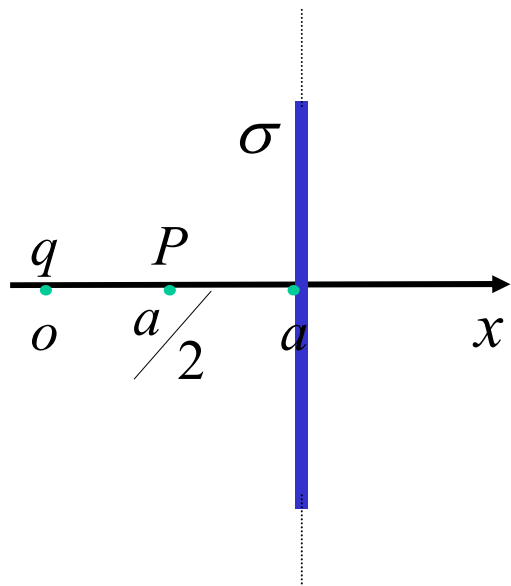
球面外: $U = q / 4\pi\epsilon_0 r \quad (r > R)$

由叠加原理: $r \leq R_A : U_1 = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 R_A} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 R_B}$

$$R_A < r \leq R_B : U_2 = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 R_B}$$

$$r > R_B : U_3 = \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 r_3}$$

[例六]在与面电荷密度 σ 的无限大均匀带电平板相距 a 处有一点电荷 q ，求点电荷至平板垂线中点处的电势 U_p



解一：点电荷 q 在 P 处电势：

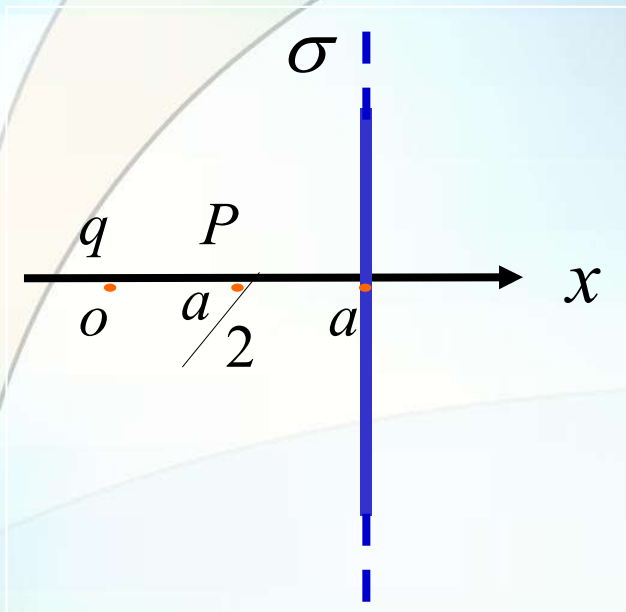
$$U_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{a}{2}}$$

无限大带电平板在 P 处电势：

$$U_2 = Ed = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{a}{2}$$

$$U_P = U_1 + U_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} - \frac{\sigma a}{4\epsilon_0}$$

对不对？



错在那里? $U_1 \Rightarrow U_\infty = 0$

$$U_2 \Rightarrow U_a = 0$$

零电势点不统一不能叠加.

解二: 选共同的零势点

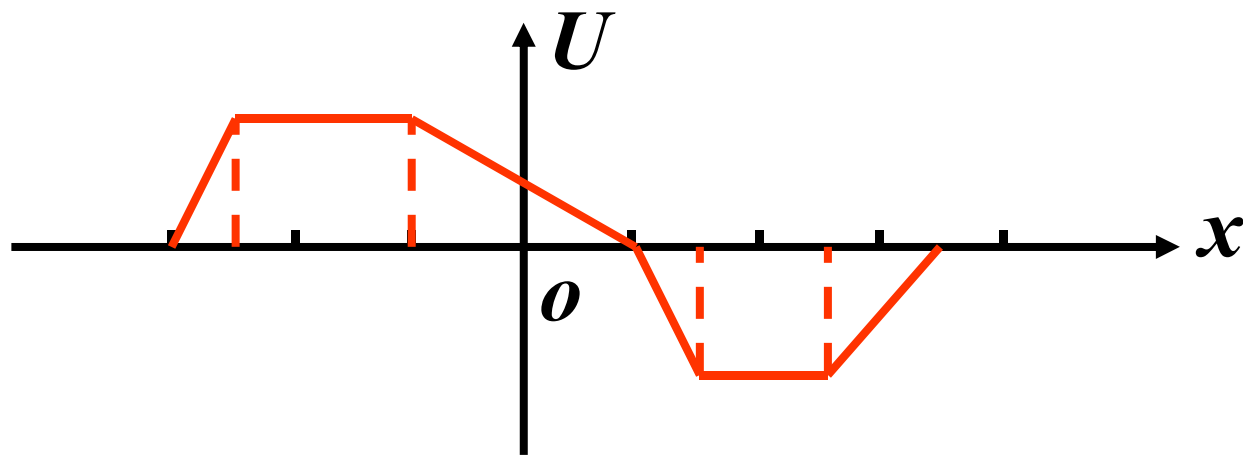
$$U_a = 0$$

场强积分法: $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

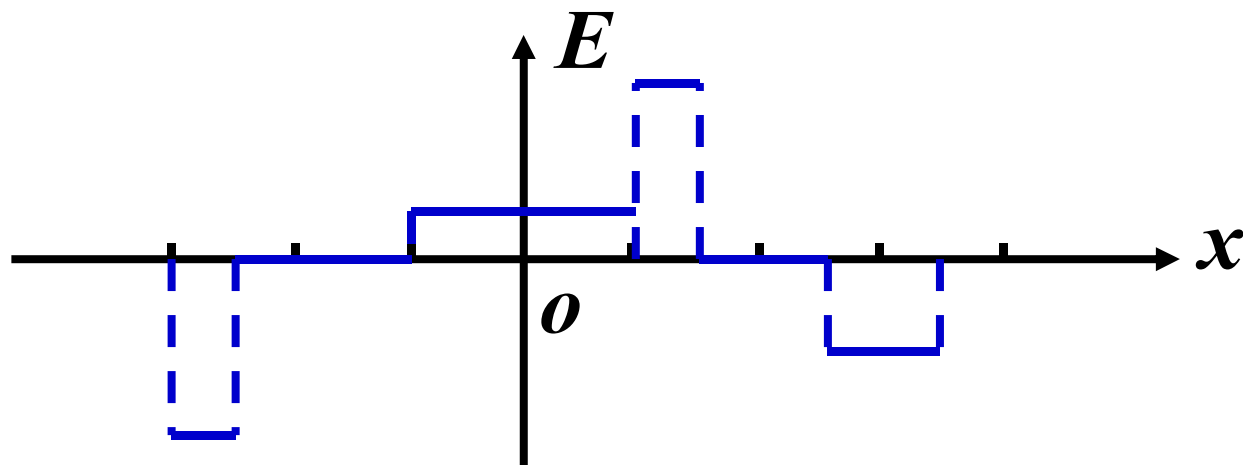
$$U_P = \int_P^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\frac{a}{2}}^a E_x dx$$

$$= \int_{\frac{a}{2}}^a \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) dx = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{\sigma a}{4\epsilon_0}$$

* [例七] 已知: U - x 曲线如图, 求: E - x 曲线



$$E = -\frac{\partial U}{\partial x}$$



小 结

一. 静电场环路定理: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

静电场强沿任意闭合路径的线积分为零. 反映了静电场是保守力场, 是有势场.

二. 电势、电势能、电势差

电势能

$$W_a = q_0 \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电 势

$$U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电势差

$$U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

三. 电势的计算（两种基本方法）

1. 场强积分法（由定义求）


〈1〉 确定 \vec{E} 分布

〈2〉 选零势点和便于计算的积分路径

选取零势点的原则：使场中电势分布有确定值

〈3〉 由电势定义

$$U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{\text{零势点}} E \cos \theta dl \quad \text{计算 } U_a$$



路径上各点的总场强，若路径上各段的表达式不同，应分段积分

2. 叠加法

〈1〉 将带电体划分为电荷元 dq

〈2〉 选零势点，写出 dq 在场点的电势 dU

〈3〉 由叠加原理 $U = \sum dU$ 或 $U = \int dU$

* 四. 电场强度与电势的关系

$$\vec{E} = -\text{grad } U$$

给出又一种求 \vec{E} 的方法：

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right)$$

五. 典型带电体的电势分布

1. 点电荷 q 场中的电势分布: $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

2. 均匀带电球面场中电势分布

$$U_{\text{内}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \text{恒量} \qquad U_{\text{外}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \propto \frac{1}{r}$$

3. 均匀带电圆环轴线上的电势分布:

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}$$