



自动控制原理 Automatic Control Theory

西南交通大学
电气工程学院





第七章 非线性控制系统的分析

7.1 描述函数法

7.2 非线性系统的描述函数分析



本章基本要求

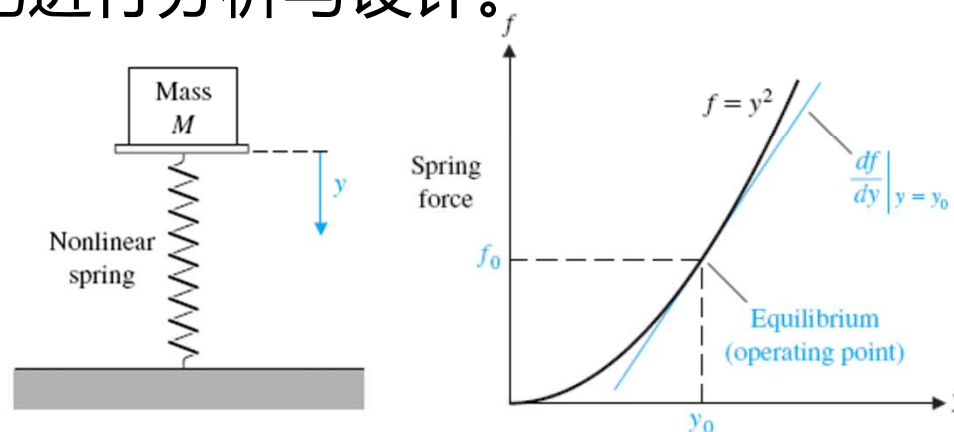
- 了解非线性控制系统与线性控制系统最重要的区别；
- 掌握自动控制系统中常见的典型非线性特性；
- 掌握分析非线性控制系统的方法—描述函数法；
- 熟练掌握应用描述函数分析法分析系统的稳定性；
- 掌握应用描述函数分析法，分析系统自振荡产生的条件及振幅和频率的确定。



非线性控制系统特性

非线性系统与非线性控制：

- 在实际物理系统中，完全的线性系统是不存在的，因为系统的元件其输入输出之间往往存在不同程度非线性。
- 在非线程度不太严重时，在系统的工作点附近用小偏差法将非线性特性线性化，然后，将线性化后的系统用线性系统的理论进行分析与设计。





非线性控制系统特性

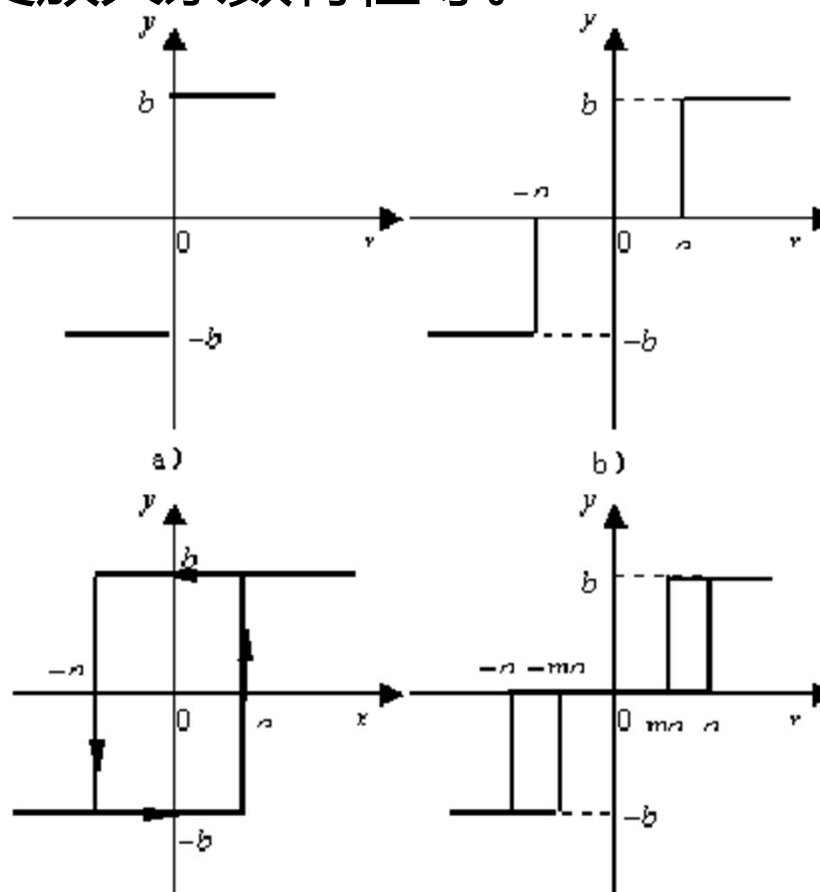
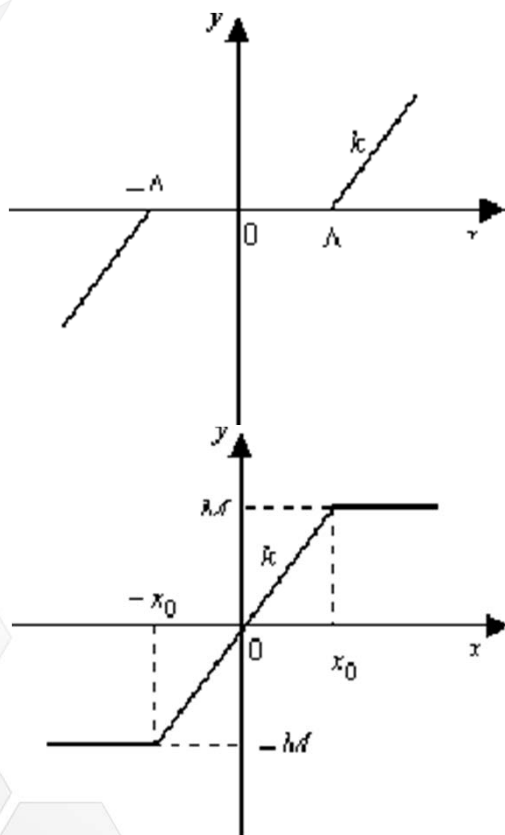
非线性系统与非线性控制：

- 对于非线性程度比较严重、输入信号变化较大的系统，某些元件将明显地工作在非线性范围，其输出出现许多用线性理论无法解释的怪异现象，必须要用非线性理论进行研究才能得出较为正确的结论。
- 此外，在实际系统中，除了存在不可避免的非线性因素外，有时为了改善系统的性能或简化系统的结构，还人为地采用非线性部件或复杂的非线性控制器。



非线性控制系统特性

1. 常见的**典型非线性特性**：饱和特性、死区特性、滞环特性、继电器特性、变放大系数特性等。



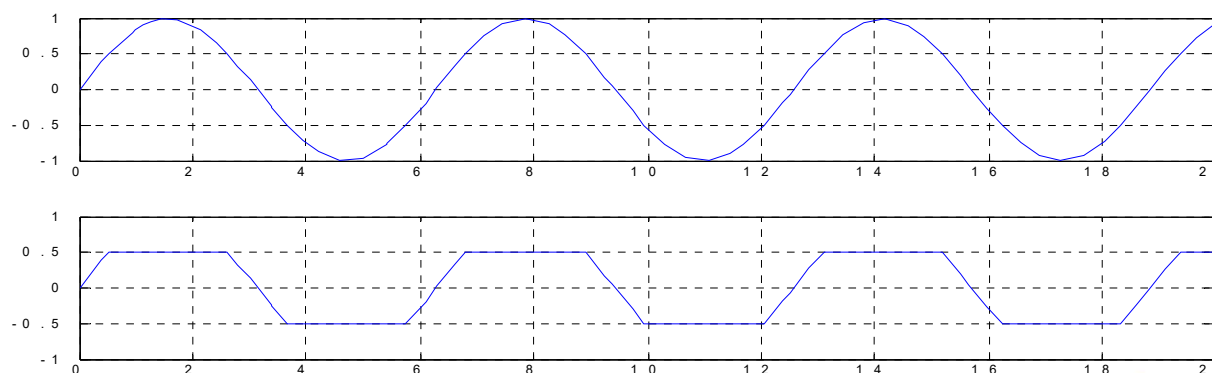


非线性控制系统特性

2. 非线性系统的特性：(与线性控制系统相比)

(1) 非线性控制系统的稳定性，不仅取决于系统的结构和参数，而且与输入信号的**幅值**和**初始条件**有关。

(2) 在非线性的控制系统中，如果输入是正弦信号，输出就不一定是正弦信号，而是一个畸变的波形，它可以分解为正弦波和无穷多谐波的叠加。





非线性控制系统特性

2. 非线性系统的特性：(与线性控制系统相比)

(3) 叠加原理不适用于非线性控制系统。

(4) 非线性控制系统常常产生自振荡。在非线性的控制系统中，即使没有外加的输入信号，系统自身产生一个有一定频率和幅值的稳定振荡，称为自振荡（自持振荡）。自振荡是非线性控制系统的特有运动模式，它的振幅和频率由系统本身的特性所决定。



7.1 描述函数法(Describing Function)

描述函数法的基本思想：

在一定条件下，非线性环节在正弦信号作用下的输出，可用**其一次谐波分量**来近似，从而将非线性系统**等效为**线性系统；于是可将线性系统的频域法，推广用来分析研究非线性系统的**稳定性和自持振荡问题**。

描述函数也是非线性特性的一种线性化处理，称为**谐波线性化**。

第二章中讨论的非线性模型的线性化方法，是基于平衡态附近的小信号分析的线性化，仅适用于非本质非线性系统。



7.1.1 描述函数

设非线性环节的输入信号为正弦函数：

$$x(t) = A \sin \omega t \quad (7.1)$$

非线性环节的输出信号通常是非正弦周期函数，其周期与输入信号的周期相同。于是，可将输出 $y(t)$ 展开成傅立叶级数：

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)] \\ &= y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin(n\omega t + \phi_n) \end{aligned} \quad (7.2)$$

式中：

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos(n\omega t) dt, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \phi_n = \operatorname{tg}^{-1} \frac{A_n}{B_n}, n = 1, 2, \dots$$



7.1.1 描述函数

假定：

- a) 非线性环节的输入输出特性是奇对称的，即 $y(-x) = -y(x)$ ，于是直流分量 $y_0 = 0$ ；
- b) 线性部分 $G(j\omega)$ 具有良好的低通滤波特性，于是 $y(t)$ 中的高次谐波分量通过 $G(j\omega)$ 后将被大幅削弱。

输出 $y(t)$ 的一次谐波分量(基波分量)

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \\ &= y_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \end{aligned}$$



7.1.1 描述函数

非线性环节的描述函数定义为，在正弦输入时该环节输出的基波分量与输入信号的复数符号之比，即：

$$\begin{aligned} N &= \frac{y_1}{A} e^{j\varphi_1} \\ &= \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \angle \operatorname{tg}^{-1} \frac{A_1}{B_1} \\ &= \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} \end{aligned} \quad (7.3)$$

式中：
 N 为非线性环节的**描述函数**；
 A 为正弦输入信号的幅值；
 y_1 为输出信号基波分量的幅值；
 φ_1 为输出信号基波分量的相移角。



7.1.1 描述函数

非线性环节的描述函数定义为，在正弦输入时该环节输出的基波分量与输入信号的复数符号之比，即：

$$\begin{aligned} N &= \frac{y_1}{A} e^{j\varphi_1} \\ &= \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \angle \operatorname{tg}^{-1} \frac{A_1}{B_1} \\ &= \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} \end{aligned} \quad (7.3)$$

若非线性环节中不含储能元件： $N = N(A)$

若非线性环节中含有储能元件： $N = N(A, \omega)$



7.1.2 典型非线性特性的描述函数

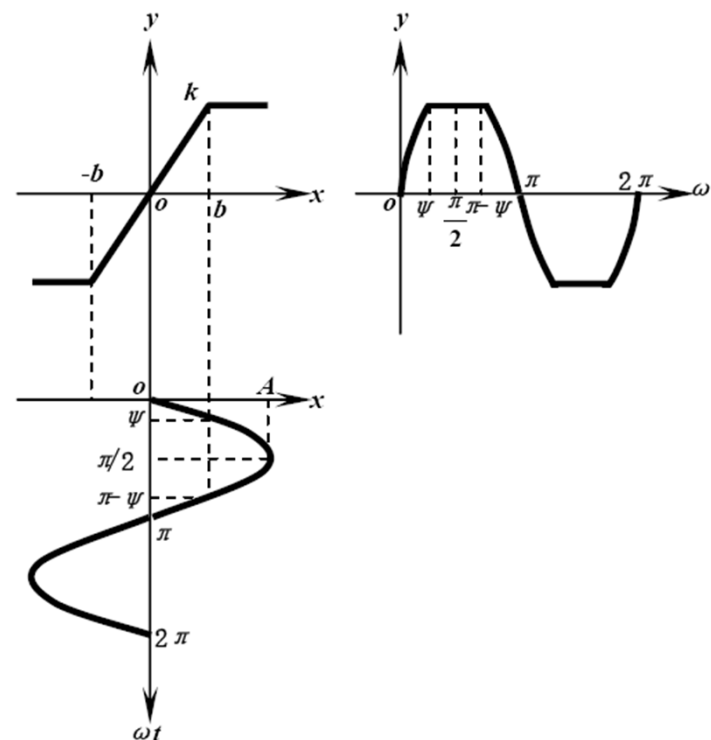


<例7.1> 饱和非线性特性的描述函数

饱和非线性特性是一种单值非线性函数，其输出函数为：

$$y(t) = \begin{cases} kA \sin \omega t & 0 \leq \omega t \leq \psi \\ kb & \psi \leq \omega t \leq \pi / 2 \end{cases}$$

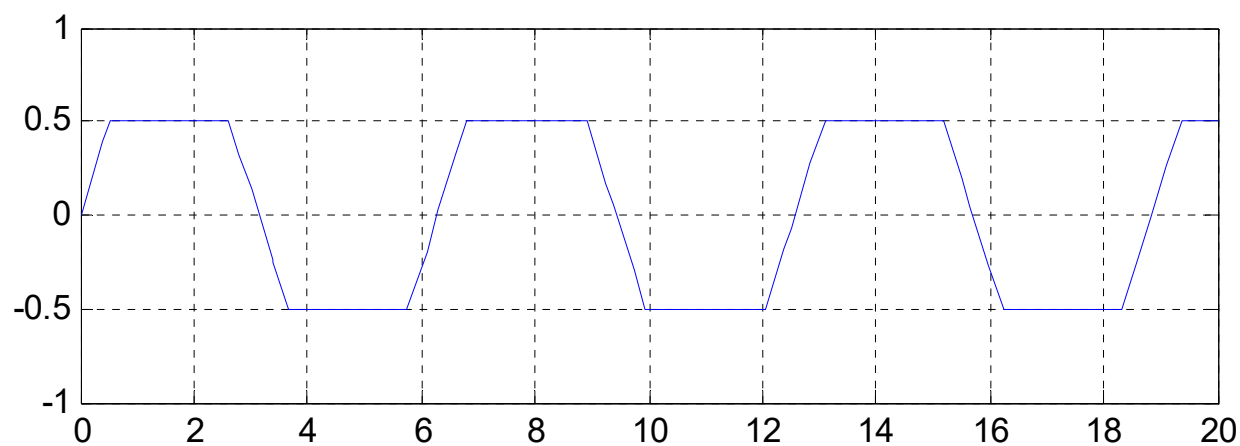
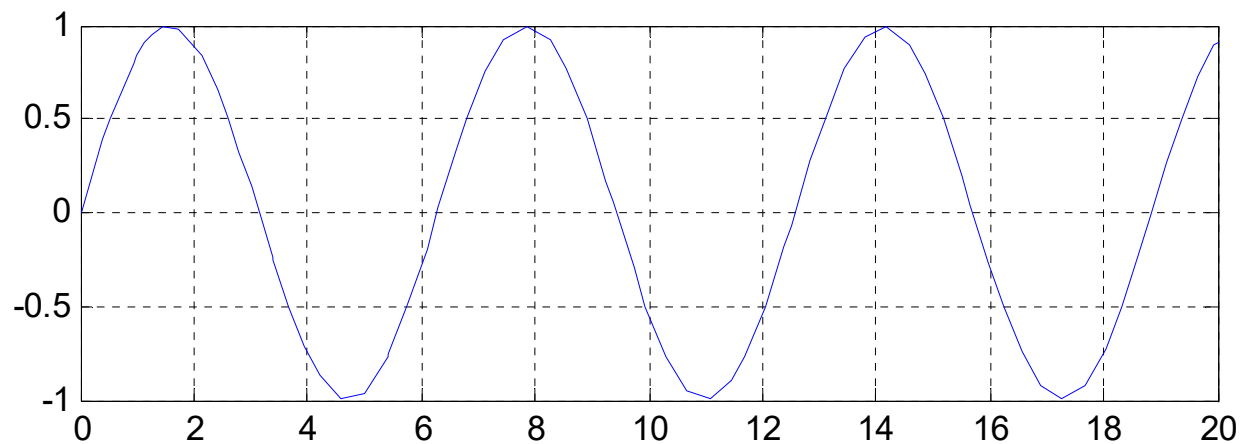
$$b = A \sin \psi, \psi = \sin^{-1} \frac{b}{A}$$



由于饱和非线性特性是单值奇对称的， $y(t)$ 为奇函数，故 $A_0 = 0$ ； $A_1 = 0$ ， $\varphi_1 = 0$



7.1.2 典型非线性特性的描述函数





7.1.2 典型非线性特性的描述函数

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(\omega t) d\omega t = \frac{4}{\pi} \left[\int_0^\psi kA \sin^2(\omega t) d\omega t + \int_\psi^{\frac{\pi}{2}} kb \sin(\omega t) d\omega t \right] \\
 &= \frac{4}{\pi} \left[\int_0^\psi \frac{kA}{2} (1 - \cos 2\omega t) d\omega t + \int_\psi^{\frac{\pi}{2}} kb \sin \omega t d\omega t \right] \\
 &= \frac{4kA}{\pi} \left\{ \left[\frac{1}{2} \omega t - \frac{1}{4} \sin 2\omega t \right]_0^\psi + \frac{b}{A} \left[-\cos \omega t \right]_\psi^{\frac{\pi}{2}} \right\} \\
 &= \frac{4kA}{\pi} \left[\frac{1}{2} \psi - \frac{1}{4} \sin 2\psi + \frac{b}{A} \cos \psi \right] \\
 &= \frac{4kA}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{b}{A} - \frac{2}{4} \sin \psi \cos \psi + \frac{b}{A} \cos \psi \right] \\
 &= \frac{4kA}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{b}{A} + \frac{1}{2} \frac{b}{A} \cos \psi \right] = \frac{2kA}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A} \right)^2} \right], (A \geq b)
 \end{aligned}$$



7.1.2 典型非线性特性的描述函数

于是可得到**饱和非线性特性**的描述函数为：

$$N(A) = \frac{B_1}{A} = \frac{2k}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A} \right)^2} \right], (A \geq b) \quad (7.4)$$

为输入信号幅值 A 的实函数.



7.1.2 典型非线性特性的描述函数



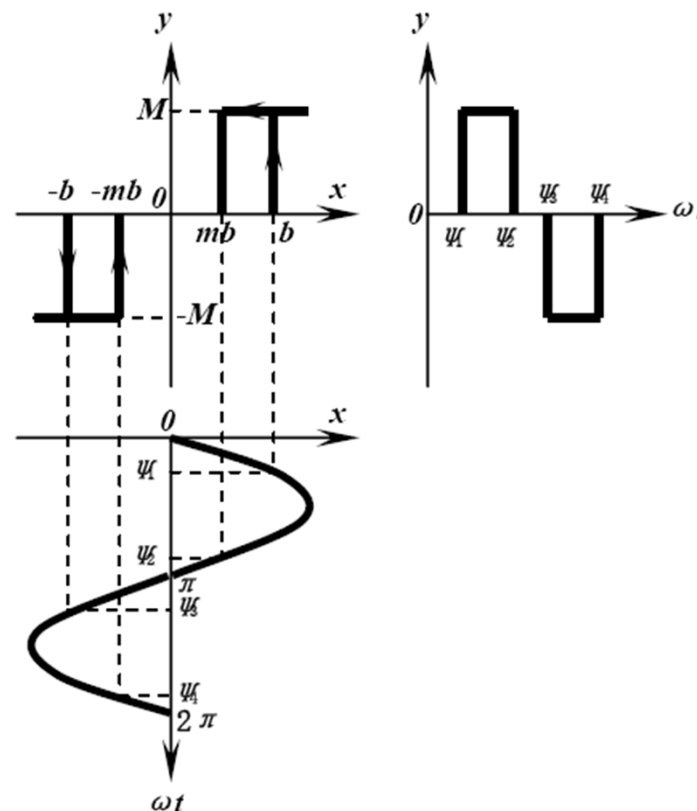
<例7.2> 具有滞环和死区的继电型非线性特性的描述函数；

具有滞环和死区的继电型非线性特性是非单值的，其输出函数为：

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega t \leq \psi_1 \\ M & \psi_1 \leq \omega t \leq \psi_2 \\ 0 & \psi_2 \leq \omega t \leq \pi \end{cases}$$

其中， $b = A \sin \psi_1, \psi_1 = \sin^{-1} \frac{b}{A}$

$$mb = A \sin(\pi - \psi_2), \psi_2 = \pi - \sin^{-1} \frac{mb}{A}$$





7.1.2 典型非线性特性的描述函数

$y(t)$ 既非奇函数也非偶函数,

$A_1 \neq 0, B_1 \neq 0$ 但是 $A_0 = 0$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(t) \cos \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\psi_1}^{\psi_2} M \cos \omega t d(\omega t) = \frac{2M}{\pi} [\sin \psi_2 - \sin \psi_1] \\ &= \frac{2Mb}{\pi A} (m - 1), \quad (A \geq b) \end{aligned}$$



7.1.2 典型非线性特性的描述函数

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_{\psi_1}^{\psi_2} M \sin \omega t d(\omega t) \\ &= -\frac{2M}{\pi} [\cos \psi_2 - \cos \psi_1] \\ &= \frac{2M}{\pi} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{mb}{A}\right)^2} \right], \quad (A \geq b) \\ &\left(\cos \psi_2 = -\cos \left(\sin^{-1} \frac{mb}{A} \right) = \sqrt{1 - \left(\frac{mb}{A}\right)^2} \right) \end{aligned}$$



7.1.2 典型非线性特性的描述函数

于是可得具有滞环和死区的继电型非线性特性的描述函数为：

$$\begin{aligned} N(A) &= \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} \\ &= \frac{2M}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{mb}{A}\right)^2} \right] + j \frac{2Mb}{\pi A^2} (m-1), (A \geq b) \end{aligned} \quad (7.5)$$

为与输入振幅 A 有关的复函数，输出的基波分量的相角滞后于输入信号的相角。

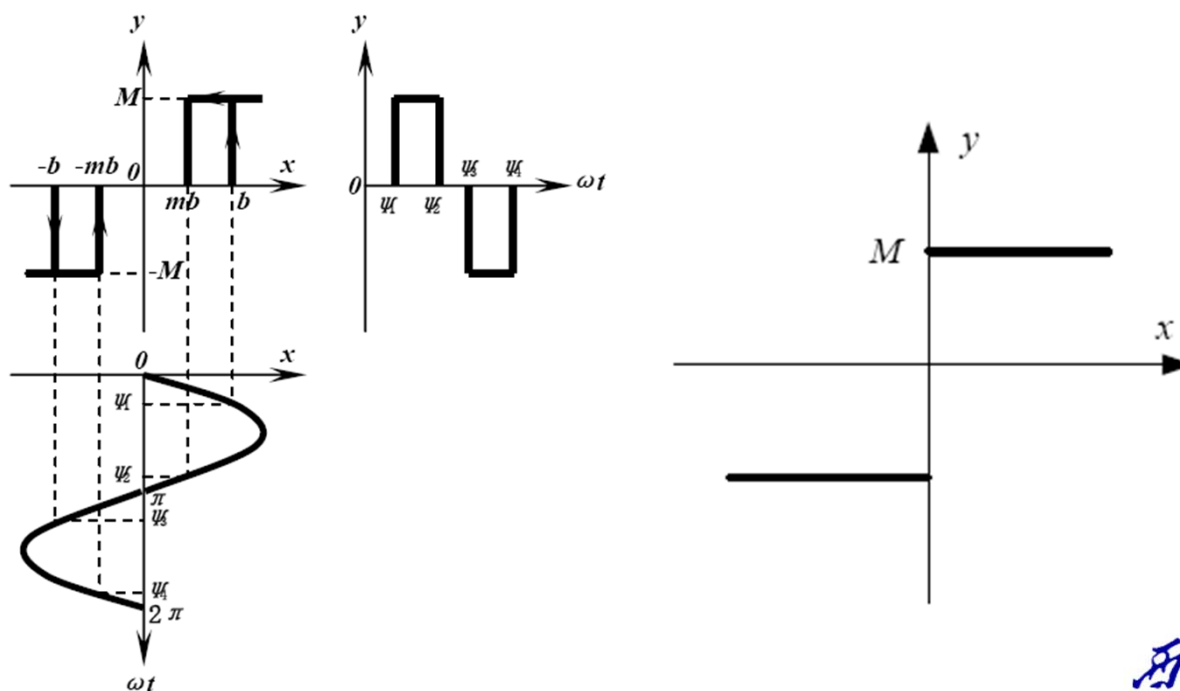


7.1.2 典型非线性特性的描述函数

$$N(A) = \frac{2M}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{mb}{A} \right)^2} \right] + j \frac{2Mb}{\pi A^2} (m-1), (A \geq b) \quad (7.5)$$

(7.5)式中, $b=0$, 为理想继电型特性的描述函数:

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \quad (7.6)$$

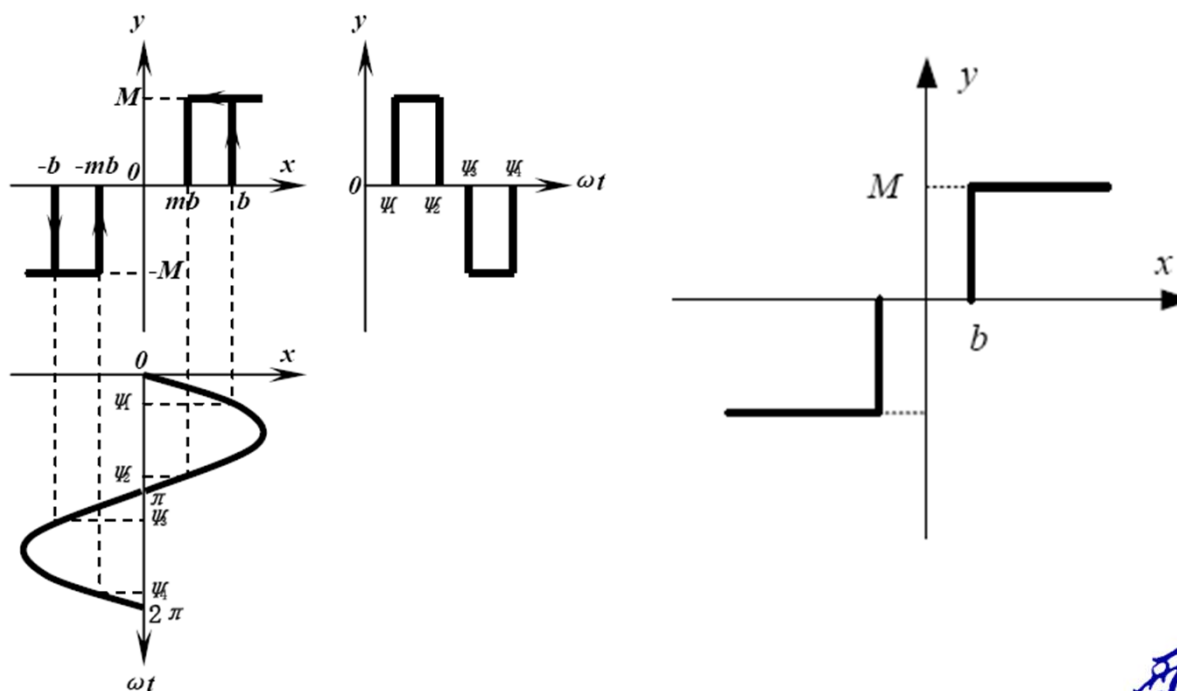




7.1.2 典型非线性特性的描述函数

(7.5)式中, $m = 1$, 为具有死区的三位置继电器型特性的描述函数:

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2}, \quad (A \geq b) \quad (7.7)$$

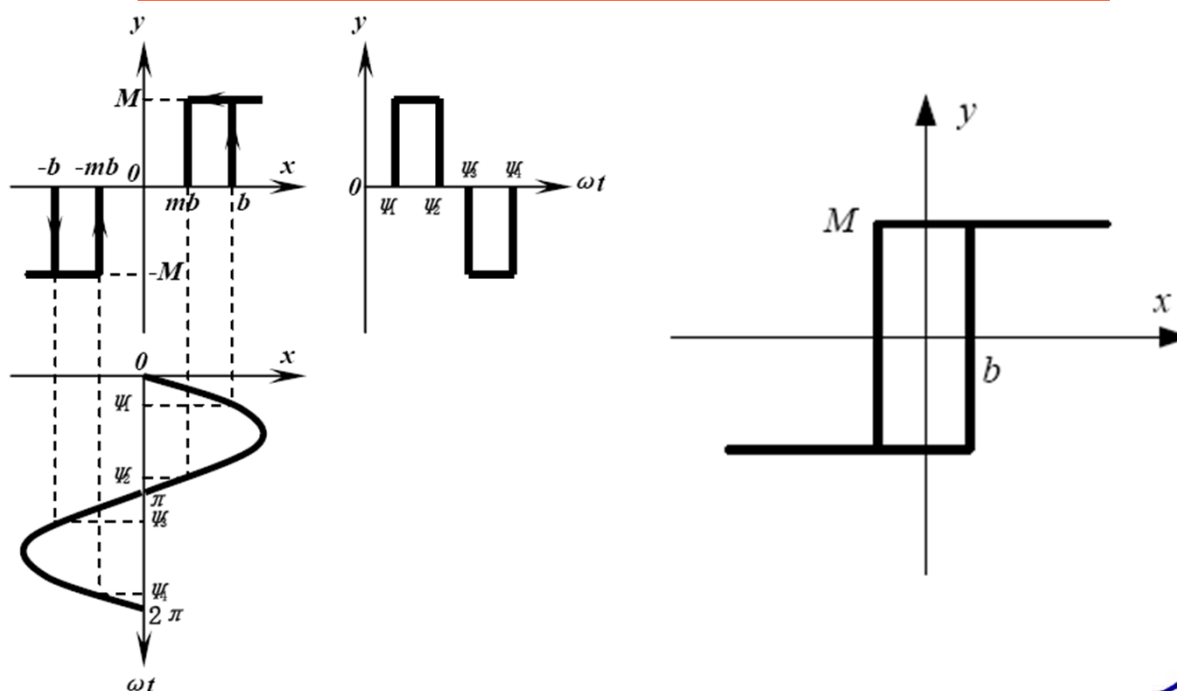




7.1.2 典型非线性特性的描述函数

(7.5)式中, $m = -1$, 为具有滞环的继电器型特性的描述函数:

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} - j \frac{4Mb}{\pi A^2}, \quad (A \geq b) \quad (7.8)$$





7.2 非线性控制系统的描述函数分析

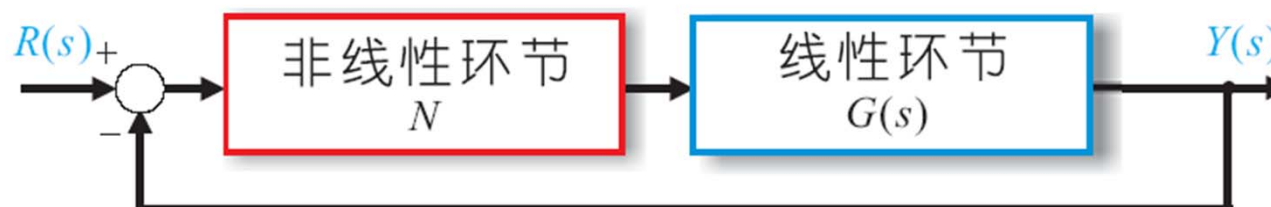
基本思路：

满足假定条件下，通过描述函数进行非线性环节的谐波线性化；因此，在非线性和控制系统的典型结构中，以描述函数视为非线性环节的非线性增益，从而将线性系统的频域法，推广用于研究非线性系统，主要用于分析在无输入信号作用时非线性系统的稳定性和自持振荡问题。



7.2 非线性控制系统的描述函数分析

非线性控制系统的典型结构如下：



假定：线性部分具有良好的低通滤波特性，且非线性环节输出的高次谐波分量较小。

若非线性环节是增益为 k 的线性放大器，该系统便是线性系统，该线性系统的特征方程为：

$$kG(s) + 1 = 0$$

其频域形式为：

$$G(j\omega) = -1/k \quad (7.9)$$



7.2 非线性控制系统的描述函数分析

将非线性环节描述函数 N 作为一个非线性增益处理，于是，非线性系统的闭环传函为：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(A)G(s)}{1 + N(A)G(s)}$$

非线性系统的
特征方程为：

$$N(A)G(s) + 1 = 0 \quad (7.10)$$

非线性系统的
频域形式为：

$$G(j\omega) = -N^{-1}(A) \quad (7.11)$$

$$-N^{-1}(A) = -\frac{1}{N(A)} \quad \text{称为非线性特性的负倒描述函数}$$



7.2 非线性控制系统的描述函数分析

应用Nyquist判据, (7.11)式成立, 相当于线性系统中的
 $G(j\omega) = -1$ 条件成立。

系统稳定的“临界点”：

线性系统: “-1”

非线性系统: “ $-N^{-1}(A)$ ”曲线

由

线性化闭环系
统在 s 右半平面
的极点数

$$Z = N + P$$

$G(s)$ 在 s 右半平面的
极点数

$G(j\omega)$ 的Nyquist轨迹
顺时针包围 “ $-N^{-1}(A)$ ”
曲线的周数



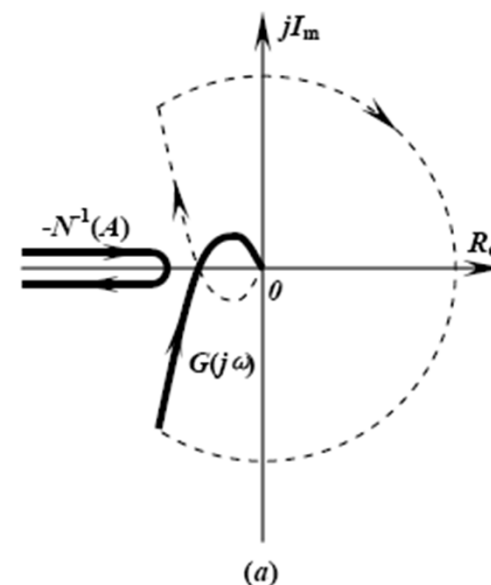
7.2 非线性控制系统的描述函数分析

推广的Nyquist判据：

设非线性系统的线性部分 $G(s)$ 是最小相位的，于是，闭环系统稳定的条件为 $N = 0$ 。

当 s 在 s 平面上顺时针方向沿D型围线变化一周时：

- 1) 若 $G(j\omega)$ 曲线不包围 “ $-N^{-1}(A)$ ” 曲线（图a所示）
则非线性系统是稳定的





7.2 非线性控制系统的描述函数分析

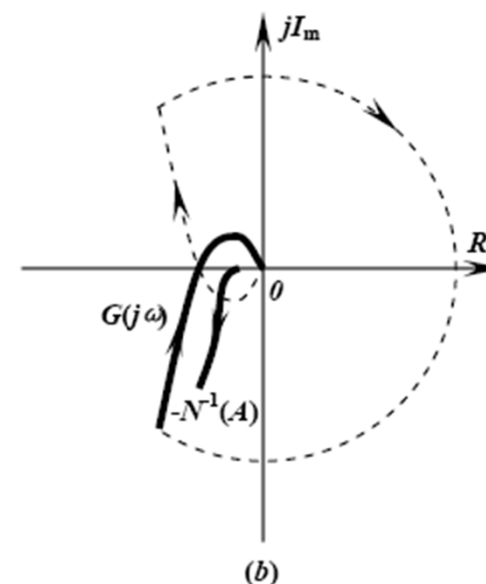
推广的Nyquist判据:

设非线性系统的线性部分 $G(s)$ 是最小相位的, 于是, 闭环系统稳定的条件为 $N = 0$.

当 s 在 s 平面上顺时针方向沿D型围线变化一周时:

- 2) 若 $G(j\omega)$ 曲线包围 “ $-N^{-1}(A)$ ” 曲线 (图b所示)

则非线性系统是不稳定的





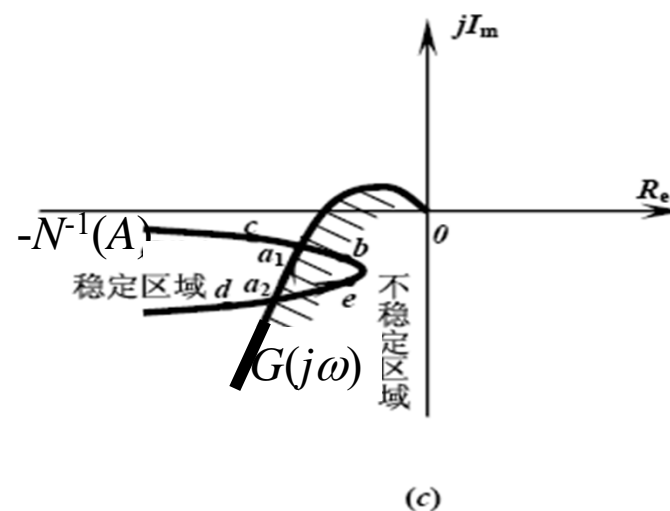
7.2 非线性控制系统的描述函数分析

推广的Nyquist判据:

设非线性系统的线性部分 $G(s)$ 是最小相位的, 于是, 闭环系统稳定的条件为 $N = 0$.

当 s 在 s 平面上顺时针方向沿D型围线变化一周时:

- 3) 若 $G(j\omega)$ 曲线与 “ $-N^{-1}(A)$ ” 曲线相交 (图c所示)
 则非线性系统可能出现
 自持振荡





7.2 非线性控制系统的描述函数分析

(若非线性系统的线性部分 $G(s)$ 是非最小相位系统, 则系统闭环稳定的条件为 $N = -P$.)

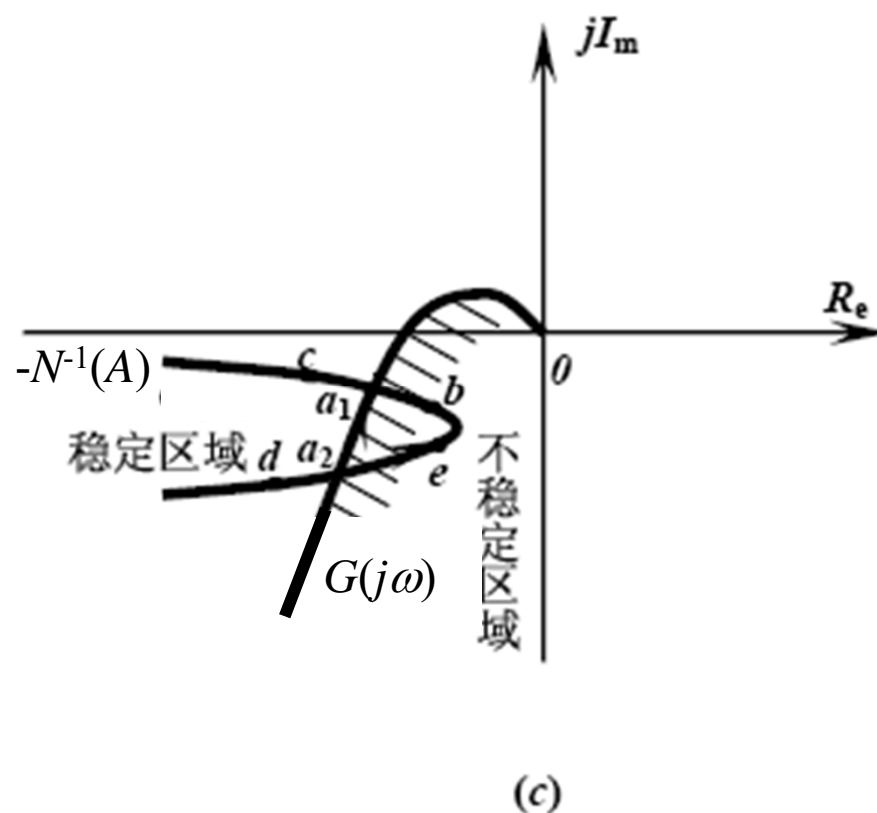
自持振荡可用一个正弦振荡来近似, 振荡的频率和振幅, 分别由交点处的 $G(j\omega)$ 曲线上的 ω 值和 “ $-N^{-1}(A)$ ” 曲线上的 A 值来确定。

正弦振荡存在表明非线性系统存在周期解, 可用 Nyquist 判据分析其稳定性。只有稳定的正弦振荡才能近似表示非线性系统实际存在的自持振荡: **稳定的自持振荡(极限环)**可通过试验观察到, 而**不稳定的自持振荡**却观察不到。



7.2 非线性控制系统的描述函数分析

如图c所示： $-N^{-1}(A)$ 曲线上， a_1 和 a_2 点对应的 A_1 和 A_2 ，振幅增大方向为 $a_2 \rightarrow a_1$ 即 $A_2 < A_1$ 。





7.2 非线性控制系统的描述函数分析

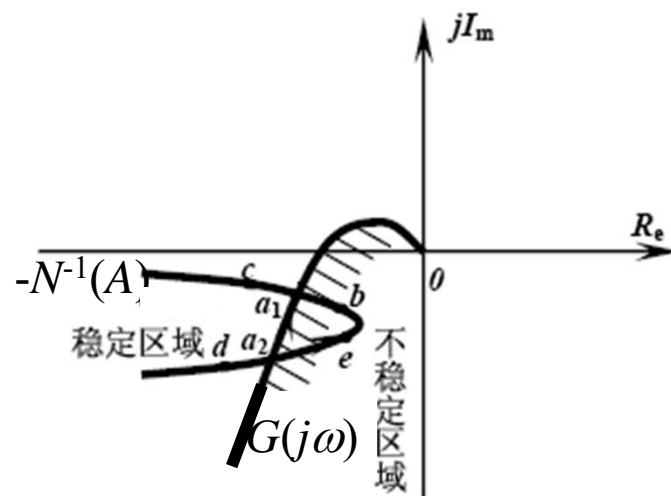
在 a_1 点：

扰动，使 $A \downarrow$ ： a_1 点 \rightarrow b 点， b 点被 $G(j\omega)$ 轨迹包围，不稳定 \rightarrow 振幅 $A \uparrow$ ，工作点 b 点回到 a_1 点；

扰动，使 $A \uparrow$ ： a_1 点 \rightarrow c 点， c 点不被 $G(j\omega)$ 轨迹包围，稳定 \rightarrow 振幅 $A \downarrow$ ，工作点 c 点回到 a_1 点；

—— a_1 点具有收敛性。工作点在 a_1 点时系统是稳定的，呈现稳定的自持振荡：振幅 A_1 ，频率 ω_1 ，该自振可近似表示为：

$$A_1 \sin \omega_1 t$$



(c)



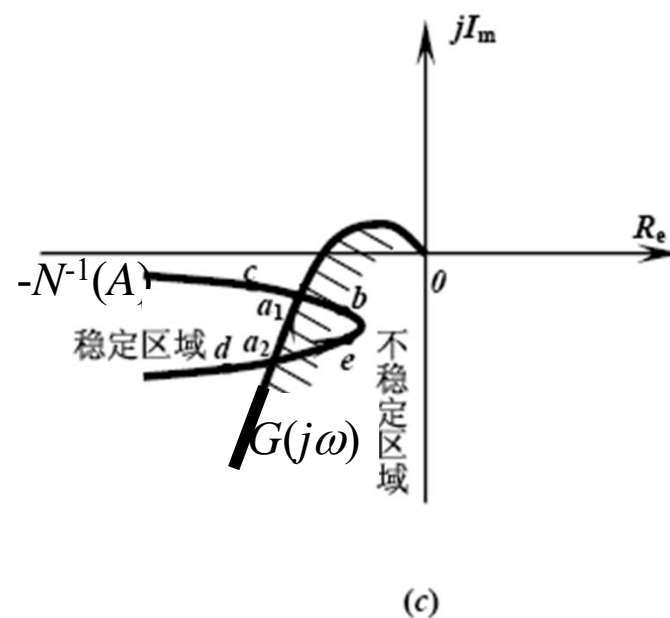
7.2 非线性控制系统的描述函数分析

在 a_2 点:

扰动, 使 $A \downarrow$: a_2 点 \rightarrow d 点, d 点不被 $G(j\omega)$ 轨迹包围, 稳定 \rightarrow 振幅继续减小, 工作点继续左移, 偏离 a_2 点越来越远;

扰动, 使 $A \uparrow$: a_2 点 \rightarrow e 点, e 点被 $G(j\omega)$ 轨迹包围, 不稳定 \rightarrow 振幅继续增大, 工作点继续偏离 a_2 点向 a_1 点运动。

—— a_2 点具有发散性。即 a_2 点周期运动是不稳定的, 是无法维持的。

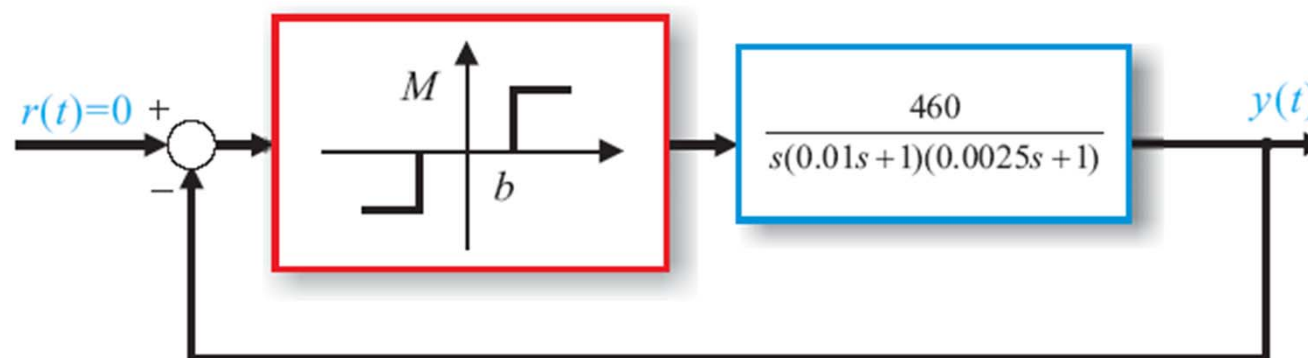




7.2 非线性控制系统的描述函数分析



<例7.3> 非线性系统如图所示，其中具有死区的继电器特性的参数为 $M=1.7, b=0.7$ ，试着分析该系统是否存在自振，若存在，求出自振的振幅和频率。





7.2 非线性控制系统的描述函数分析

解: 线性部分为最小相位系统, 频率特性为:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{460}{\omega \sqrt{1 + (0.01\omega)^2} \sqrt{1 + (0.0025\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} 0.01\omega - \operatorname{tg}^{-1} 0.0025\omega$$

具有死区的继电器特性的描述函数为:

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2}, \quad (A \geq b)$$



7.2 非线性控制系统的描述函数分析

其中 $M=1.7$, $b=0.7$ 可得到负倒描述函数为:

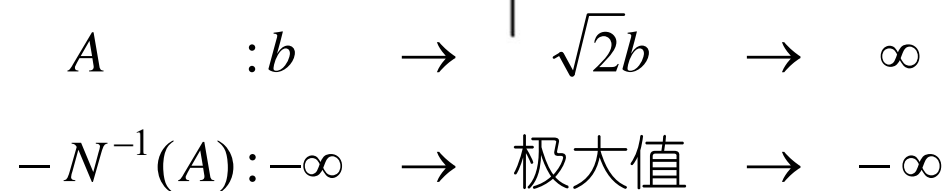
$$-N^{-1}(A) = -\frac{\pi A}{6.8} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2}}, \quad (A \geq b)$$

$$A \rightarrow b : -N^{-1}(b) = -\infty$$

$$A \rightarrow \infty : -N^{-1}(\infty) = -\infty$$

$$\frac{d(-N^{-1}(A))}{dA} = \frac{d}{dA} \left[-\frac{\pi}{6.8} \frac{A^2}{\sqrt{A^2 - b^2}} \right] = -\frac{\pi A}{6.8} \frac{A^2 - 2b^2}{(A^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{令 } \frac{d(-N^{-1}(A))}{dA} = 0, \text{ 得: } A = \sqrt{2}b, (A \geq b)$$


$$-N^{-1}(A) = -N^{-1}(\sqrt{2}b) = -\frac{\pi\sqrt{2}b}{6.8} \frac{1}{\sqrt{1-1/2}} = -0.647$$



7.2 非线性控制系统的描述函数分析

计算 $G(j\omega)$ 与 $-N^{-1}(A)$ 的交点:

a) 由 $\varphi(\omega)$ 计算: $\varphi(\omega)=-180^\circ$ 时,

$$\omega=200\text{rad/s}, \quad |G(j\omega)|_{\omega=200}=0.92$$

b) 计算 $-N^{-1}(A)=-0.92$ 时的A值:

本例中有两个交点 (a_1, a_2) , 对应于两个A值:

b/A	0.9	0.93	0.92	0.925
$-N^{-1}(A)$	-0.824	-0.946	-0.897	-0.920

$$b/A = 0.925 \quad A = 0.7/0.925 = 0.757 \text{ (} a_1 \text{ 处)}$$

b/A	0.3	0.4	0.38
$-N^{-1}(A)$	-1.13	-0.88	-0.920

$$b/A = 0.38 \quad A = 0.7/0.38 = 1.842 \text{ (} a_2 \text{ 处)}$$



7.2 非线性控制系统的描述函数分析

因此 $G(j\omega)$ 与 $-N^{-1}(A)$ 有两个交点:

a_1 处: $\omega=200\text{rad/s}$, $A_1=0.757$

a_2 处: $\omega=200\text{rad/s}$, $A_2=1.842$

线性化系统有**两个**等效正弦振荡:

(1) $1.842\sin 200t$ 为稳定的自持振荡(极限环);

(2) $0.757\sin 200t$ 为不稳定的振荡.

由例题分析可以知道,在进行**非线性系统描述函数法分析**时,掌握非线性特性的**负倒描述函数 $-N^{-1}(A)$** 及其与**线性部分 $G(j\omega)$** 的交点是分析计算中的关键。



7.2 非线性控制系统的描述函数分析

例如，设 $G(j\omega)$ 为最小相位系统，

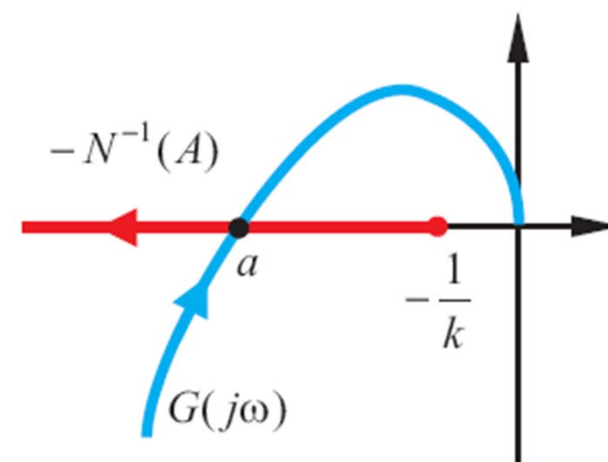
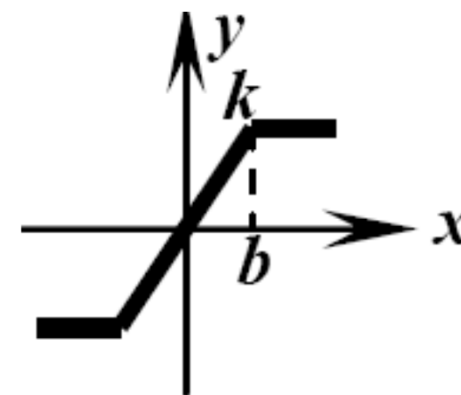
1) 饱和非线性特性

$$-N^{-1}(A) = \frac{-\pi}{2k \left[\sin^{-1} \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A} \right)^2} \right]}, (A \geq b)$$

$A = b$ 时, $-N^{-1}(A) = -1/k$

$A \rightarrow \infty$ 时, $-N^{-1}(A) \rightarrow -\infty$

交点 a 为稳定的自持振荡.



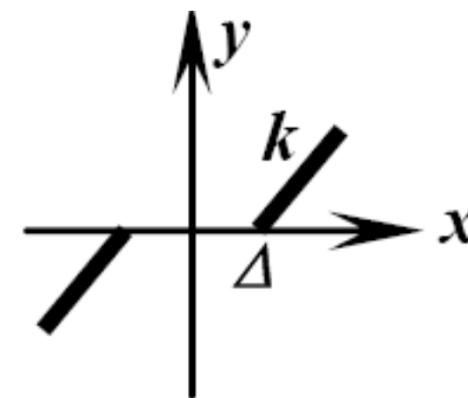


7.2 非线性控制系统的描述函数分析

例如，设 $G(j\omega)$ 为最小相位系统，

2) 死区非线性特性

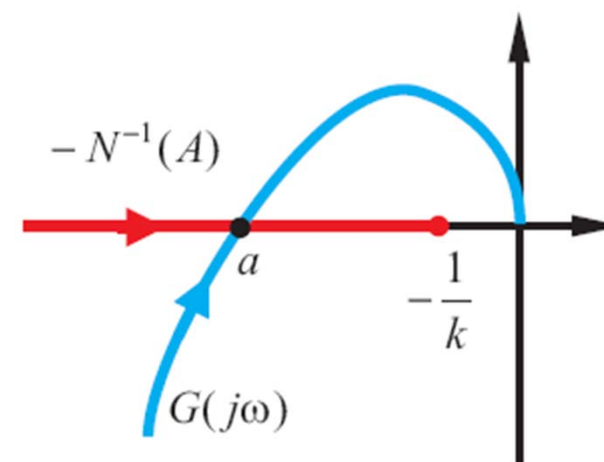
$$-N^{-1}(A) = \frac{-\pi}{2k \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{\Delta}{A} + \frac{\Delta}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{A} \right)^2} \right]}, (A \geq \Delta)$$



$A = \Delta$ 时, $-N^{-1}(A) \rightarrow -\infty$

$A \rightarrow \infty$ 时, $-N^{-1}(A) = -1/k$

交点 a 为不稳定的振荡.



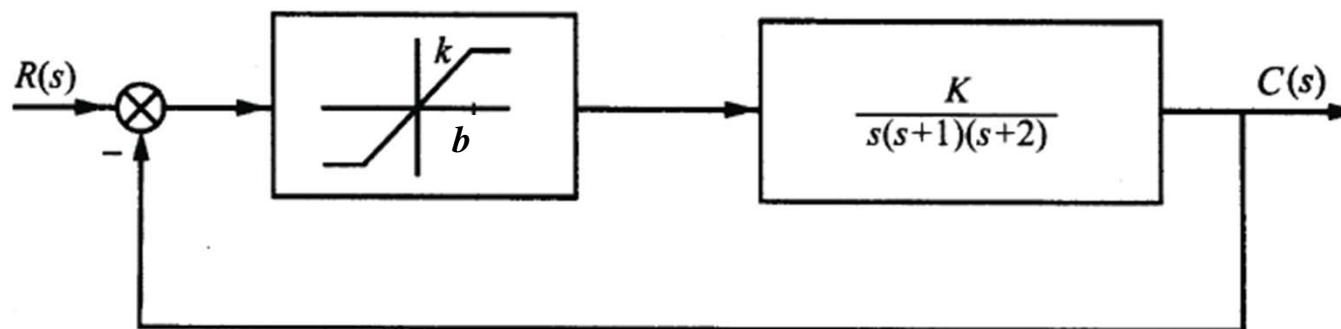


习题

1、非线性系统如图所示，其中非线性饱和特性参数为 $b=1$ ， $k=2$ ，试分析：

A、当 $K=10$ 时，该系统是否存在自持振荡，如果存在则求出自持振荡的振幅和频率；

B、当 K 为何值时，系统处于稳定边界状态。



$$N(A) = \frac{2k}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A} \right)^2} \right], (A \geq b)$$



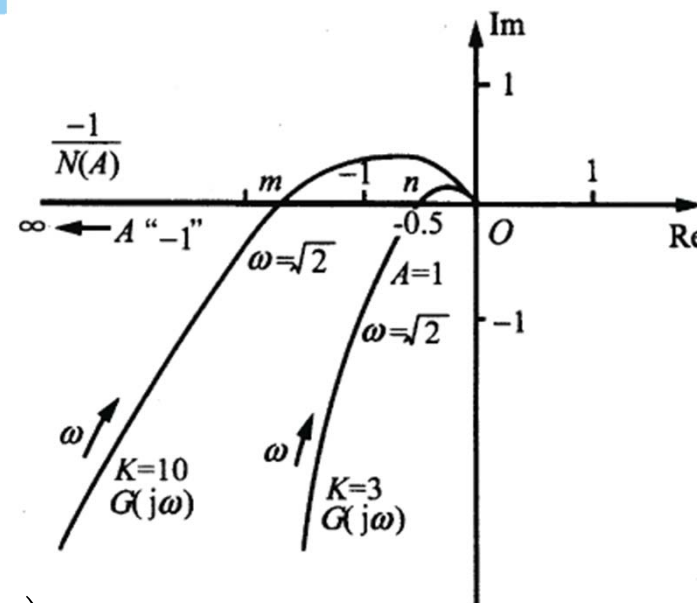
习题(参考答案)

第一题 解：A、负倒描述函数

$$\frac{-1}{N(A)} = \frac{-\pi}{2k[\sin^{-1} \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - (\frac{b}{A})^2}]} \quad (A \geq b)$$

$$A = b \text{ 时 } \frac{-1}{N(A)} = -\frac{1}{k} = -0.5$$

$$A \rightarrow \infty \text{ 时 } \frac{-1}{N(A)} \rightarrow -\infty$$



→负倒描述函数轨迹为实轴上 $(-0.5, -\infty)$ 。

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{K}{-3\omega^2 + j\omega(2-\omega^2)} = \frac{-3K}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4} - j \frac{K(2-\omega^2)}{\omega(\omega^4 + 5\omega^2 + 4)}$$

相交于稳定自振交点m

$$\text{Im } G(j\omega) = 0 \longrightarrow \omega = \sqrt{2}$$

$$\text{Re } G(j\omega)|_{\omega=\sqrt{2}} = \frac{-30}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}|_{\omega=\sqrt{2}} = -1.6667$$



习题(参考答案)

因此 $G(j\omega)$ 与 $-N^{-1}(A)$ 有交点:

$$\frac{-1}{N(A)} = \operatorname{Re} G(j\omega) \big|_{\omega=\sqrt{2}} = -1.6667$$

试探法:

b/A	$=$	0.22	0.23	0.235	0.238
$-N^{-1}(A)$	$=$	-1.7796	-1.7227	-1.6867	1.6659

因此当 $b/A=0.238$ 时, 即 $A=4.188$ 时,

有稳定自振交点

线性化系统等效正弦振荡:

$4.188 \sin \sqrt{2}t$ 为稳定的自持振荡(极限环)



习题(参考答案)

B、临界状态下，两条轨迹在负实轴上的交点n

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{K}{-3\omega^2 + j\omega(2-\omega^2)} = \frac{-3K}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4} - j \frac{K(2-\omega^2)}{\omega(\omega^4 + 5\omega^2 + 4)}$$

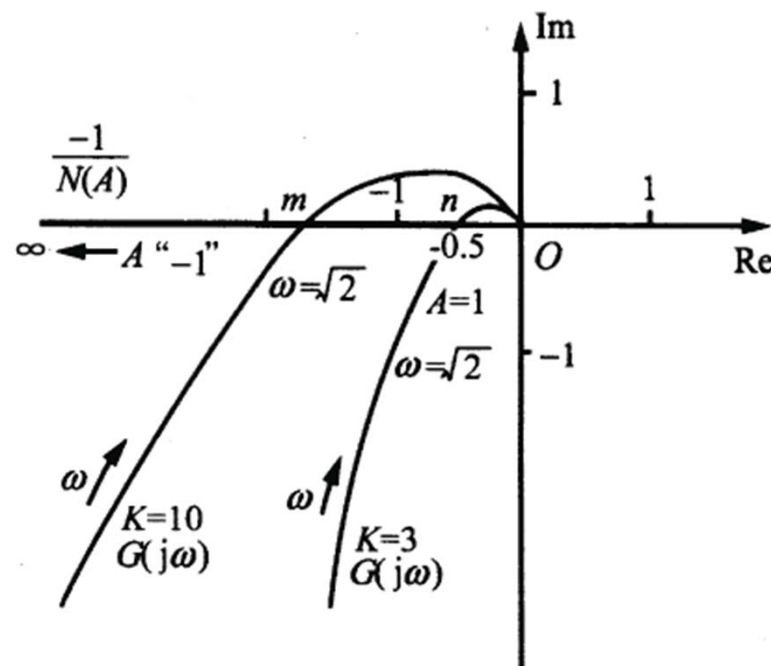
$$\text{Im } G(j\omega) = 0 \longrightarrow \omega = \sqrt{2}$$

$$\text{Re } G(j\omega) \big|_{\omega=\sqrt{2}} = \frac{-3K}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4} \big|_{\omega=\sqrt{2}}$$

$$\frac{-1}{N(A)} = \text{Re } G(j\omega) \big|_{\omega=\sqrt{2}} = -0.5$$

$$\downarrow$$

$$K=3$$

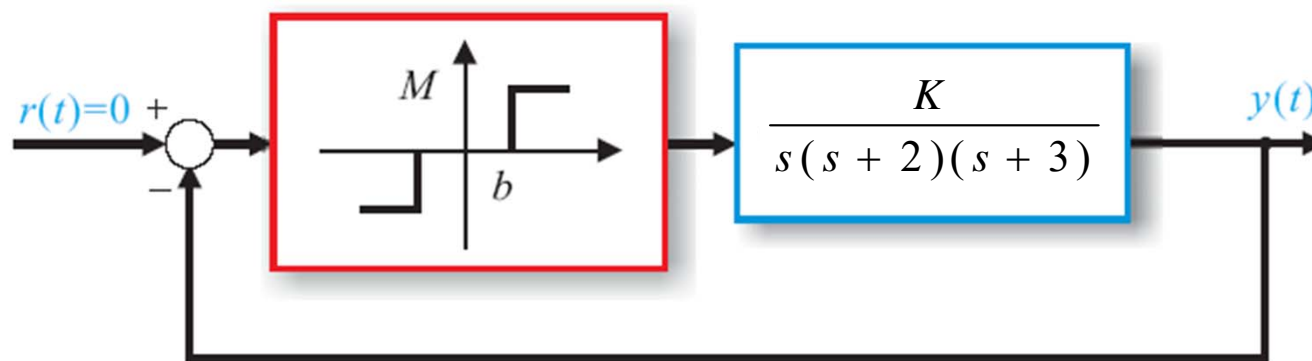




习题

2、非线性系统如图所示，其中具有死区的继电器特性的参数为 $M=3$, $b=1$ ，当 $K=20$ 时：

- A、试分析该系统稳定性；
- B、如果该系统出现自持振荡，如何消除？



$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2}, \quad (A \geq b)$$



习题(参考答案)

解: A 、 $-\frac{1}{N(A)} = \frac{-\pi A}{4M\sqrt{1-(\frac{b}{A})^2}} = \frac{-\pi A}{12\sqrt{1-(\frac{1}{A})^2}}$

$A = b = 1 \quad \frac{-1}{N(A)} \rightarrow -\infty$

$A \rightarrow \infty \quad \frac{-1}{N(A)} \rightarrow -\infty$

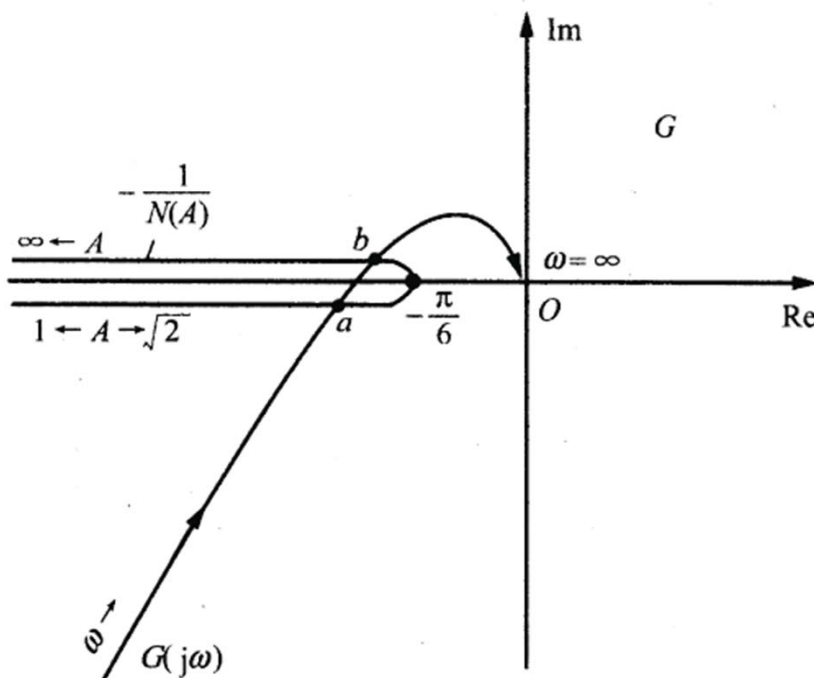
$A = \sqrt{2}b = \sqrt{2} \quad \frac{-1}{N(A)}|_{\max} = -\frac{\pi b}{2M} = \frac{-\pi}{6} = -0.524$

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + 2)(j\omega + 3)} = \frac{K[-5\omega - j(6 - \omega^2)]}{\omega(\omega^4 + 13\omega^2 + 36)}$$

$$\text{Im } G(j\omega) = \frac{-K(6 - \omega^2)}{\omega(\omega^4 + 13\omega^2 + 36)} = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega = \sqrt{6}$$

$$\text{Re } G(j\omega)|_{\omega=\sqrt{6}} = \frac{K(-5\omega)}{\omega(\omega^4 + 13\omega^2 + 36)}|_{\omega=\sqrt{6}} = -\frac{2}{3} = -0.667 < -0.524$$

$G(j\omega)$ 轨迹与负倒描述函数有两个交点:



$G(j\omega)$ 轨迹与负实轴交点频率值

$$\omega = \sqrt{6}$$

a——不稳定自振交点

b——稳定自振交点

西南交通大学

$$-\frac{1}{N(A)} = \frac{-\pi A}{12\sqrt{1-(\frac{1}{A})^2}} = -\frac{2}{3}$$

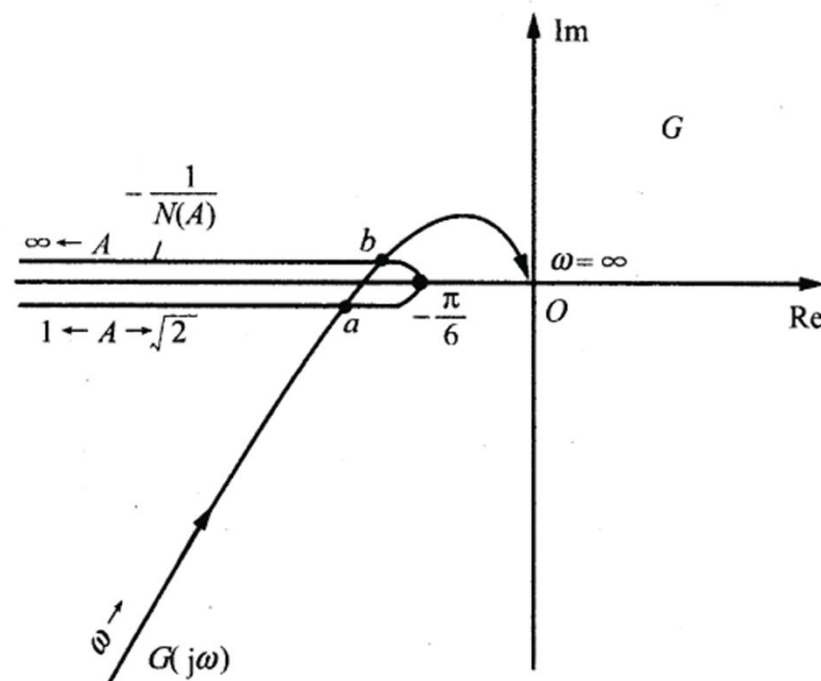
$A_1 = 1.11$ a——不稳定自振交点
 $\omega = \sqrt{6}$

$A_2 = 2.3$ b——稳定自振交点

$\omega = \sqrt{6}$

改变 $G(j\omega)$ ——调整 K

改变N(A):调整死区继电器特性的死区b或输出幅值M





习题(参考答案)

1) 改变 $G(j\omega)$ ——调整 K

$$\operatorname{Re} G(j\omega)|_{\omega=\sqrt{6}} = \frac{K(-5\omega)}{\omega(\omega^4 + 13\omega^2 + 36)}|_{\omega=\sqrt{6}} > -\frac{\pi}{6}$$

$$K < 15.72$$

2) 改变 $N(A)$:调整死区继电器特性的死区 b 或输出幅值 M

$$A = \sqrt{2}b \quad \frac{-1}{N(A)}|_{\max} = -\frac{\pi b}{2M}$$

$$\operatorname{Re} G(j\omega)|_{\omega=\sqrt{6}} = \frac{-2}{3} > \frac{-\pi b}{2M}$$

$$\frac{M}{b} < 2.36$$

$$\text{取 } b=1, M=2 \quad \frac{-1}{N(A)}|_{\max} = -\frac{\pi}{4} = -0.785$$

