西南交通大学 2022－2023 学年第(1)学期考试试卷

课程代码 MATH000212 课程名称 线性代数 A（A 卷） 考试时间 120 **分钟**

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设A，B均为n阶可逆方阵，则下列等式成立的是（ ）

(A) $|(AB)^{-1}|=|A|^{-1}|B|^{-1}$；　　(B) $|-AB|=|AB|$；

(C) $|A^2-B^2|=|A+B||A-B|$；　　(D) $|2A|=2|A|$.

2、设$A=\begin{pmatrix} 9 & x & 1 \\ x & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$A^*$为方阵$A$的伴随矩阵，且$A^*x=0$只有零解，则（ ）.

(A) $x=-4$；(B) $x=6$；(C) $x=-4$或$x=6$；(D) $x\neq-4$且$x\neq 6$.

3、下列命题中正确的是（ ）.

(A) 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$（$m>1$）线性相关，则任一向量$\alpha_i(1\le i\le m)$可由其余向量线性表出.

(B) 若有不全为 0 的数$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$（$m>1$），使$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_m\beta_m=o$成立，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性相关，向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$亦线性相关.

(C) 若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$（$m>1$）中任意两个向量线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关.

(D) 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$（$m>1$）中任意一个向量都不能用其余向量线性表出，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关.

姓 名　学 号　班 级　密封装订线

4、设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$，

向量 $b=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，$c_1,c_2$ 表示任意常数，则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解为（　）.

(A) $c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$；(B) $c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$；(C) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$；(D) $c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

5、已知 A 为三阶矩阵，三阶可逆矩阵 P 按列分块为 $P=(p_1,p_2,p_3)$，且

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，设 $Q=(2p_3,p_1,p_1+p_2)$，则 $Q^{-1}AQ=$（　）.

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；(B) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；(C) $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；(D) $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

6、已知四阶行列式 D 的第三行元素分别为：$-1,0,2,4$；第四行元素对应的代数余子式依次是 $2,10,x,4$，则 $x=$__________.

7、设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $(A-3E)^{-1}(A^2-9E)=$________________.

8、已知 R^3 的两组基分别为 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T$，$\alpha_3=(1,0,1)^T$ 和 $\beta_1=(1,2,1)^T$，$\beta_2=(2,3,4)^T$，$\beta_3=(3,4,3)^T$，则基 α_1，α_2，α_3 到基 β_1，β_2，β_3 的过渡矩阵 $P=$__________.

9、设 n（$n>2$）阶方阵 A 的特征值分别为整数 $-(n-1),-(n-2),\dots,-2,-1,0$，且方阵 B 与方阵 A 相似，E 为 n 阶单位矩阵，则 $|B+nE|=$___________.

10、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2$ 为正定二次型，则参数 t 的取值范围为________________.

三、计算题（5 小题，共 52 分）

11、(10 分) 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\6\end{pmatrix}$ 的秩和一个极大线性无关组，并把其余向量用极大线性无关组线性表出.

12、(10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&-4&-2\end{pmatrix}$，计算：(1) $|A|$；(2) A^2；(3) A^{2023}.

13、(12 分) 问 t 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}tx_1-x_2+x_3=2,\\2x_1+tx_2-x_3=1,\\-2x_1+x_2-x_3=1\end{cases}$ 无解，有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时求出方程组的通解。

14、(10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&x&1\\1&1&y\end{pmatrix}$ 有特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

(1) 计算 $A\alpha_1$，指出 α_1 对应的特征值，并确定 x，y 的值；

(2) 求 A 的所有特征值；

15、(10 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$，其中 $A=\begin{pmatrix}5&-4&2\\-4&5&-2\\2&-2&2\end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，

(1) 求方阵 A 的特征值与特征向量；

(2) 求一个正交变换 $x=Py$ 把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形，并写出标准形.

四、证明题（8 分）

16、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维向量空间 R^3 的一组基，$\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+s\alpha_3$，其中 t,s 为参数，证明：当 $t+s\neq 0$ 时，β_1,β_2,β_3 也是三维向量空间 R^3 的一组基.

西南交通大学 2022－2023 学年第(1)学期考试试卷

课程代码 MATH000212 课程名称 线性代数 A（A 卷） 考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：

密封装订线 姓名 学号 密封装订线 班级 密封装订线

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 A，B 均为 n 阶可逆方阵，则下列等式成立的是（ A ）

（A）$|(AB)^{-1}|=|A|^{-1}|B|^{-1}$；　　（B）$|-AB|=|AB|$；

（C）$|A^2-B^2|=|A+B||A-B|$；　　（D）$|2A|=2|A|$.

2、设 $A=\begin{pmatrix}9 & x & 1\\ x & 4 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$，$A^*$ 为方阵 A 的伴随矩阵，且 $A^*x=0$ 只有零解，则（ D ）.

（A）$x=-4$；（B）$x=6$；（C）$x=-4$ 或 $x=6$；（D）$x\neq -4$ 且 $x\neq 6$.

3、下列命题中正确的是（ D ）.

（A）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$（$m>1$）线性相关，则任一向量 $\alpha_i (1\le i\le m)$ 可由其余向量线性表出.

（B）若有不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$（$m>1$），使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_m\beta_m=o$ 成立，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性相关，向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$ 亦线性相关.

（C）若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$（$m>1$）中任意两个向量线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性无关.

（D）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$（$m>1$）中任意一个向量都不能用其余向量线性表出，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性无关.

4、设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$，向量

$b=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，$c_1,c_2$表示任意常数，则非齐次线性方程组$Ax=b$的通解为（ A ）.

(A) $c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$；(B) $c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$；(C) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$；(D) $c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

5、已知 3 阶矩阵A与对角阵相似，相似变换矩阵为P，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，$P$按列分块为$P=(p_1,p_2,p_3)$，设$Q=(2p_3,p_1,p_1+p_2)$，则$Q^{-1}AQ=$（ B ）.

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；(B) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；(C) $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；(D) $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

6、已知四阶行列式D的第三行元素分别为：$-1,0,2,4$；第四行元素对应的代数余子式依次是$2,10,x,4$，则$x=$___-7______.

7、设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$(A-3E)^{-1}(A^2-9E)=$______$\begin{pmatrix}4&0&1\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$________.

8、已知R^3的两组基分别为$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T$，$\alpha_3=(1,0,1)^T$和$\beta_1=(1,2,1)^T$，$\beta_2=(2,3,4)^T$，$\beta_3=(3,4,3)^T$，则基$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$到基$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$的过渡矩阵

$P=$___$\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$______..

9、设n（$n>2$）阶方阵A的特征值分别为整数$-(n-1),-(n-2),\dots,-2,-1,0$，且方阵$B$与方阵$A$相似，$E$为$n$阶单位矩阵，则$|B+nE|=$____$n!$______.

10、已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2$为正定二次型，则参数$t$的取值范围为：_____$t>1$__________.

三、解答题（5 小题，共 52 分）

11、(10 分) 求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\6\end{pmatrix}$的秩和一个极大线性无关组，并把其余向量用极大线性无关组线性表出.

解：$A=\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\ =\begin{pmatrix}1&1&1&4\\1&-1&3&-2\\2&1&3&5\\3&1&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

所以向量组的秩为 2；一个极大线性无关组可取为α_1,α_2；

$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$， $\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2$.

12、(10 分) 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&-4&-2\end{pmatrix}$，计算：(1) $|A|$；(2) A^2；(3) A^{2023}.

解：设$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&-4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$，

(1) $|A|=|A_1|\times|A_2|=0$； …………3 分

(2) $A_1^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},A_2^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，所以$A^2=\begin{pmatrix}A_1^2&\\&A_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&&\\0&1&&\\&&0&0\\&&0&0\end{pmatrix}$；

…………6 分

(3) $A_1^3=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix},A_2^3=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$， $A_1^{2023}=\begin{pmatrix}1&2023\\0&1\end{pmatrix},A_2^{2023}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，

…………9 分

所以$A^{2023}=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}^{2023}=\begin{pmatrix}A_1^{2023}&\\&A_2^{2023}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2023&&\\0&1&&\\&&0&0\\&&0&0\end{pmatrix}$.…………10 分

13、（12 分）问 t 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} tx_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + tx_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ 无解，有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时求出方程组的通解。

解：系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} t & -1 & 1 \\ 2 & t & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 为方阵，右端向量 $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，可考虑克拉默法则。

$$|A| = \begin{vmatrix} t & -1 & 1 \\ 2 & t & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(t-1)(t-2).$$ …………2 分

（1）当 $|A| \neq 0$，即 $t \neq 1, 2$ 时，由克拉默法则知方程组有唯一解； …………4 分

（2）当 $t = 1$ 时，

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R(A) = 2 < R(A,b) = 3$，方程组无解； …………8 分

（3）当 $t = 2$ 时，

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R(A) = 2 < R(A,b) = 3$，方程组无解. …………12 分

注：方法不唯一，也可对增广矩阵进行初等变换，然后讨论参数情况。

若用初等变化，则化为梯形阵给 6 分，后边两种结论每一种情况 3 分。

14、（10 分）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & y \end{pmatrix}$ 有特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

（1）计算 $A\alpha_1$，指出 α_1 对应的特征值，并确定 x，y 的值；

（2）求 A 的所有特征值；

解：（1） $A\alpha_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&x&1\\1&1&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2+x\\2+y\end{pmatrix}$

设与 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 对应的特征值为 λ_1，则 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，即

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2+x\\2+y\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

解得 $\lambda_1=3,x=1,y=1$.

（2）由（1）的结论，知 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，解

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(3-\lambda)=0$$

得，方阵 A 的所有特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=0$.

15、（10 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$，其中 $A=\begin{pmatrix}5&-4&2\\-4&5&-2\\2&-2&2\end{pmatrix}$， $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，请：

（1）求方阵 A 的特征值与特征向量；

（2）求一个正交变换 $x=Py$ 把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形，并写出标准形.

解：（1） $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda&-4&2\\-4&5-\lambda&-2\\2&-2&2-\lambda\end{vmatrix}=-\left(\lambda-1\right)^2\left(\lambda-10\right)=0$，解得

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$.

对 $\lambda_1=\lambda_2=1$，其特征向量为方程组 $(A-E)x=0$ 的非零解，由

$$\begin{pmatrix}4&-4&2\\-4&4&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可得一个基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$，

（不唯一,一个更好的选择为正交组：$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$或$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$,，其后的正交阵会发生变化），对应的特征向量为$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix},c_1,c_2$不同时为零。

对$\lambda_3=10$，其特征向量为方程组$(A-10E)x=0$的非零解，由

$$\begin{pmatrix}-5&-4&2\\-4&-5&-2\\2&-2&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可得一个基础解系：$\xi_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$，对应的特征向量为$c_3\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},c_3\neq0$.

（2）选定A的3个线性无关的特征向量ξ_1,ξ_2,ξ_3，正交化得

$$\eta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \eta_2=\xi_2-\frac{[\xi_2,\xi_1]}{[\xi_1,\xi_1]}\xi_1=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix},\eta_3=\xi_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},$$

单位化得

$$p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},p_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix},p_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},$$

构造正交阵$P=(p_1,p_2,p_3)$，故所求正交变换为$x=Py$，标准形为

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2+10y_3^2.$$

注：选用正交的特征向量$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$时，正交阵$P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$

四、证明题（8分）

16、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三维向量空间$R^3$的一组基，$\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+s\alpha_3$，其中$t,s$为参数，证明：当$t+s\neq 0$时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也是三维向量空间$R^3$的一组基.

证明:（1）$A\beta_1=A\ \ \alpha_1+t\alpha_2\ \ =A\alpha_1+tA\alpha_2=\mathbf{0}$,同理$A\beta_2=\mathbf{0},A\beta_3=\mathbf{0}$，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是$Ax=\mathbf{0}$的解;

（2）$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1+t\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+s\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\t&1&0\\0&1&s\end{pmatrix}$，记

$T=\begin{pmatrix}1&0&1\\t&1&0\\0&1&s\end{pmatrix}$，计算得$|T|=s+t$，所以当$t+s\neq 0$时，T可逆，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为基础解系，故线性无关，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也线性无关。

综上，$t+s\neq 0$时，向量组β_1,β_2,β_3也是$Ax=\mathbf{0}$的基础解系.