西南交通大學
Southwest Jiaotong University

自 动 控 制 原 理

第 七 章

非线性控制系统分析

任课教师： 马磊
电气工程学院
2020

第七章 非线性控制系统的分析

7.0 非线性系统及其线性化

7.1 描述函数法

7.2 非线性系统的描述函数分析

7.3 相平面法

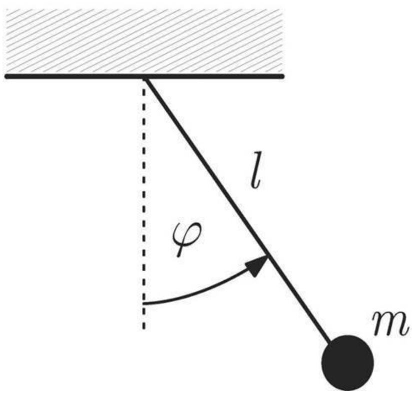
7.2 非线性系统的相平面分析

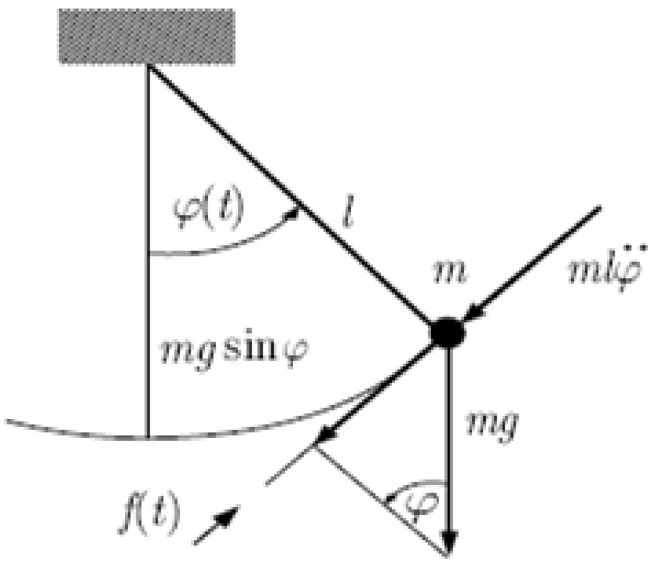
7.0 非线性系统及其线性化

- 非线性微分方程及其线性化
- 增益调度控制 （Gain scheduling control）

非线性微分方程

- 单摆的非线性微分方程





非线性微分方程的线性化

- 设激励$x(t)$与响应$y(t)$之间为非线性关系

$$y(t)=g(x(t)) \qquad (2.2)$$

可在工作点x_0处展开成泰勒级数

$$y=g(x)=g(x_0)+\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}\frac{(x-x_0)}{1!}+\left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=x_0}\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots$$

$$(2.3)$$

非线性微分方程的线性化

取一次项可得到

$$\Delta y = K\Delta x, \qquad (2.4)$$

其中

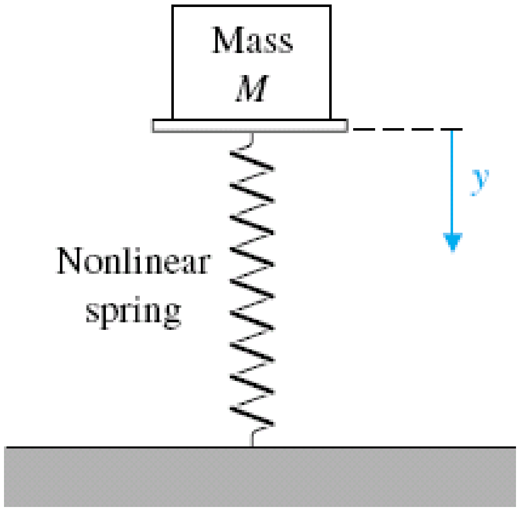
$$\Delta y = y - y_0 = y - g(x_0)$$

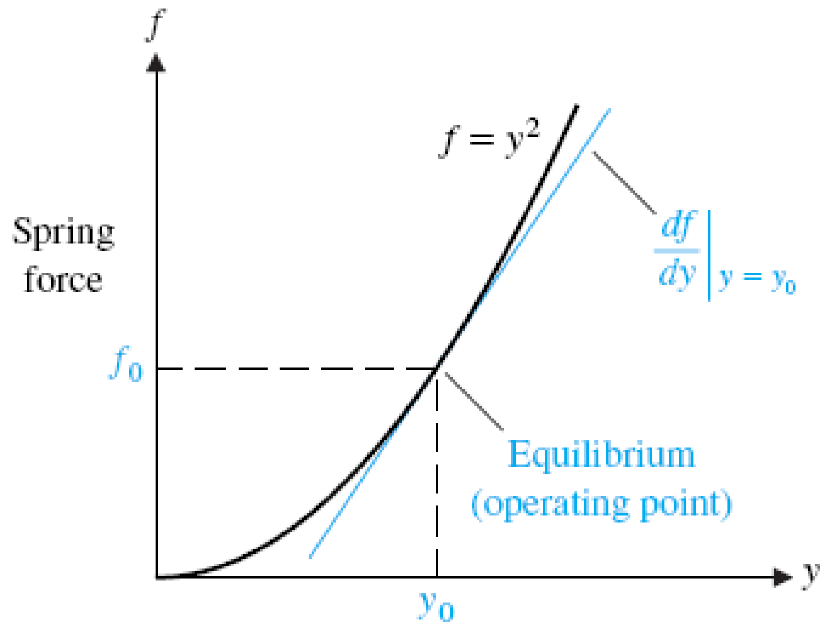
$$\Delta x = x - x_0$$

$$K = \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}$$

这种线性化是针对的“非本质”非线性数学模型，在工作点附近的小信号分析。

非线性微分方程的线性化





非线性弹簧的弹力与位移的关系为

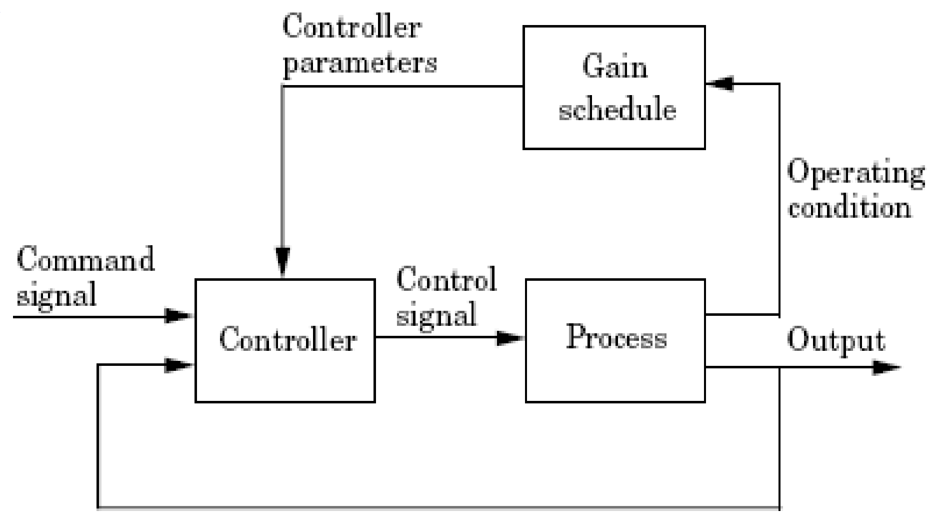
$$\Delta f = m\Delta y$$

非线性系统线性化及其控制

- 许多非线性系统可以在工作点附近用上述方法线性化，然后用经典控制理论的方法进行控制器设计
- 问题：
  - 不适用于“本质非线性系统”
  - 对有多个工作点的系统需要进行扩展

增益调度控制

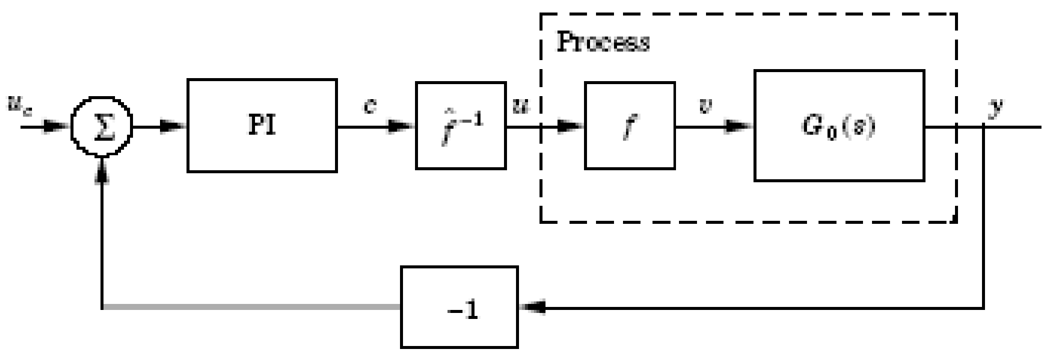
- 原则：根据调度参数变化调整控制器参数
- 对控制器参数的调节在开环中完成
- 调度参数举例
  - 生产率
  - 机器速度
  - （飞机）马赫数
  - …



Aström & Wittenmark

增益调度：非线性执行机构

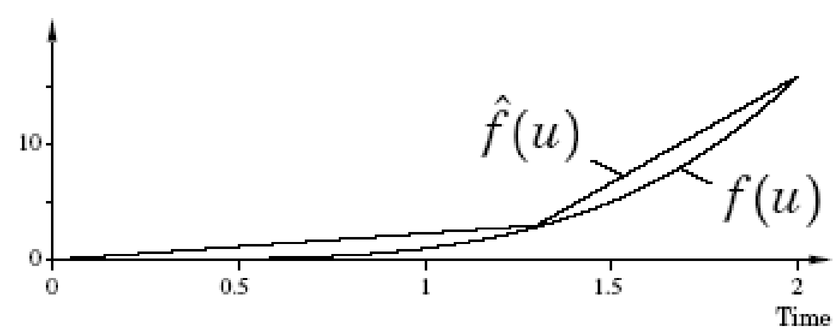
- 用分段线性函数近似非线性环节，并求其逆函数
- 用以上逆函数（部分抵消）非线性环节的影响，使闭环回路总体上呈线性特性



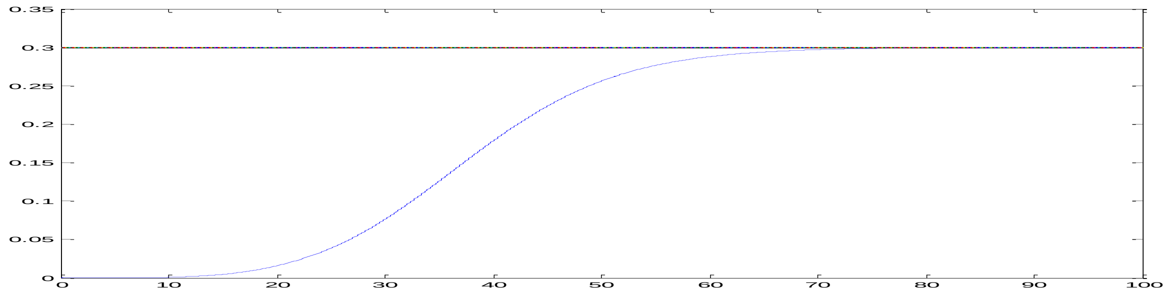
$$v = f(u) = u^4$$

$$v = f(u) = f(\hat{f}^{-1}(c))$$

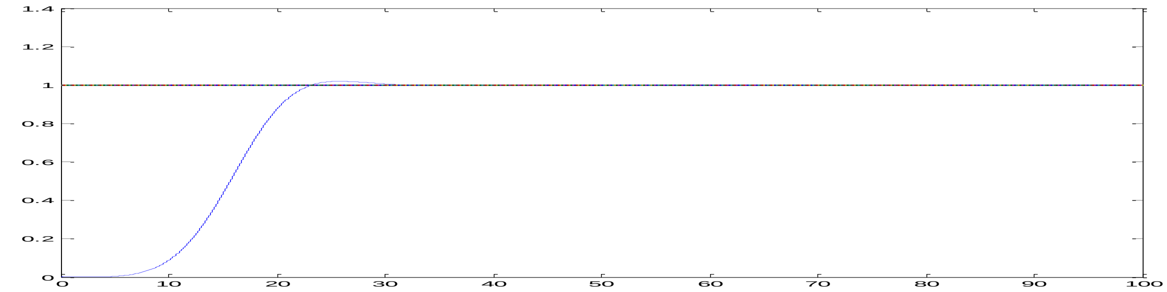
$$\hat{f}^{-1}(c) = \begin{cases} 0.433c & 0 \le c \le 3 \\ 0.0583c + 1.139 & 3 \le c \le 16 \end{cases}$$



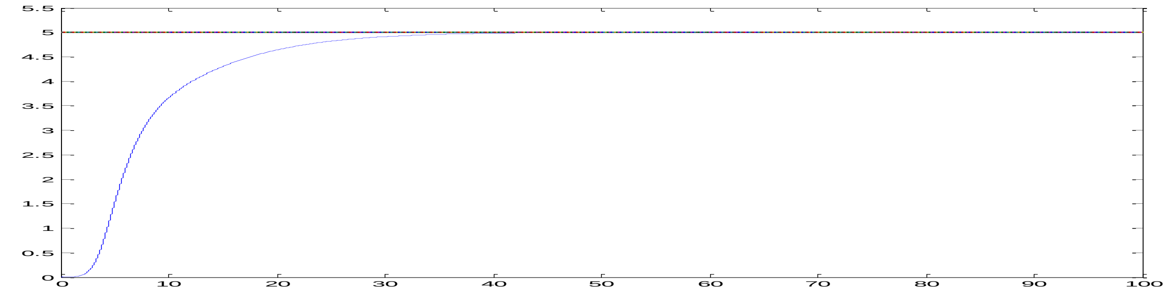
$u_c=0.3$


0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

$u_c=1$


1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

$u_c=5$


5.5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

增益调度：航向控制

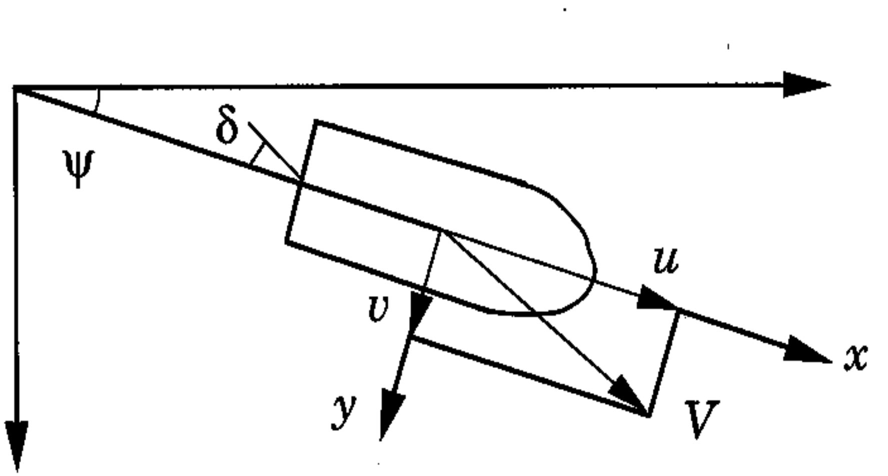
- 用尾舵转向δ控制轮船航向ψ .
- 动态模型与标准航速u_{nom}有关

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \delta$$

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$with:$$

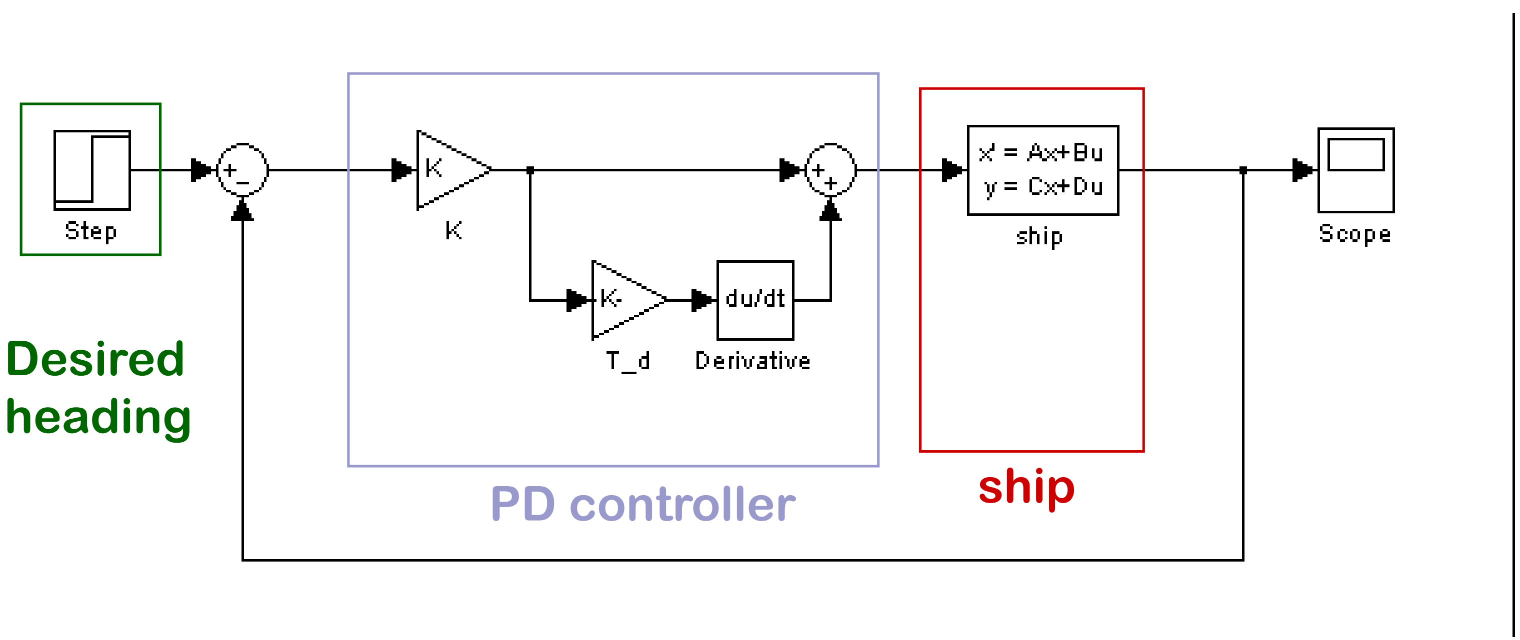
$$a = a_{nom} \frac{u_{actual}}{u_{nom}}, \qquad b = b_{nom} \left(\frac{u_{actual}}{u_{nom}}\right)^2$$



Aström & Wittenmark

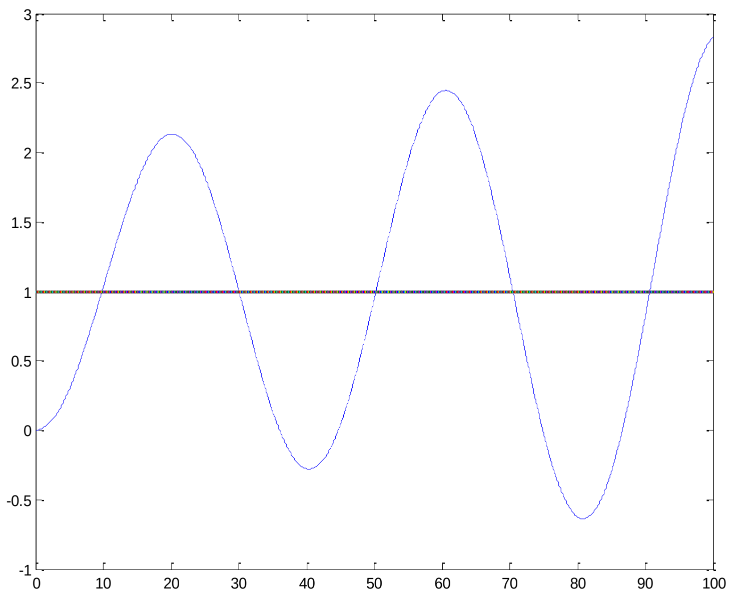
增益调度：航向控制

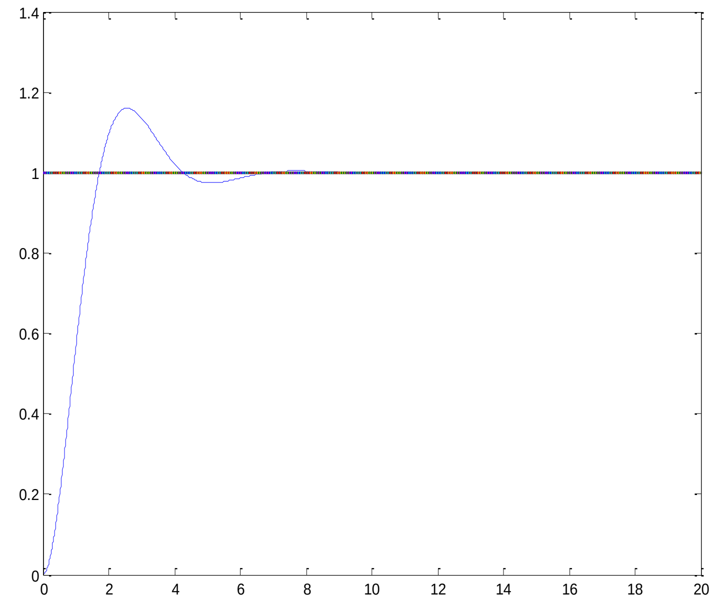
- PD 控制器， $K=2.5$ ， $T_d=0.86$.



增益调度：航向控制

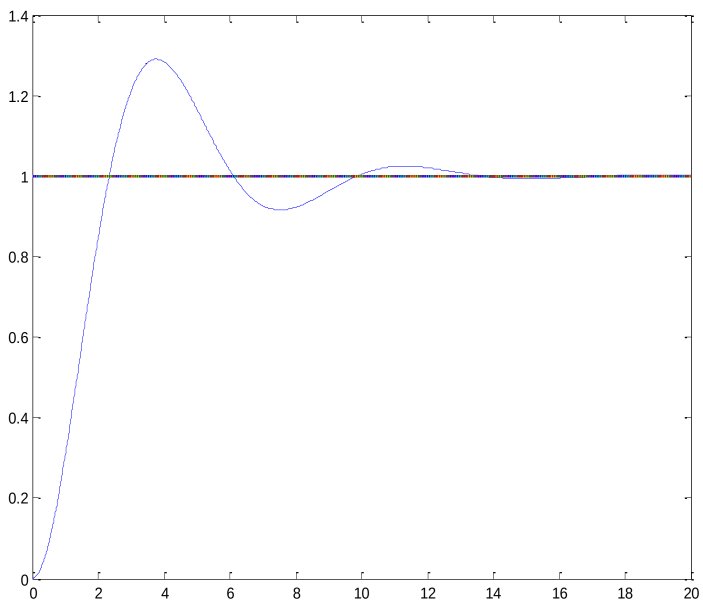
- 当 $u_{actual}<0.17*u_{nom}$ 时系统不稳定
- 右图: $u=u_{nom}=10m/s$
- 左图: $u=0.11_{unom}=1.1m/s$

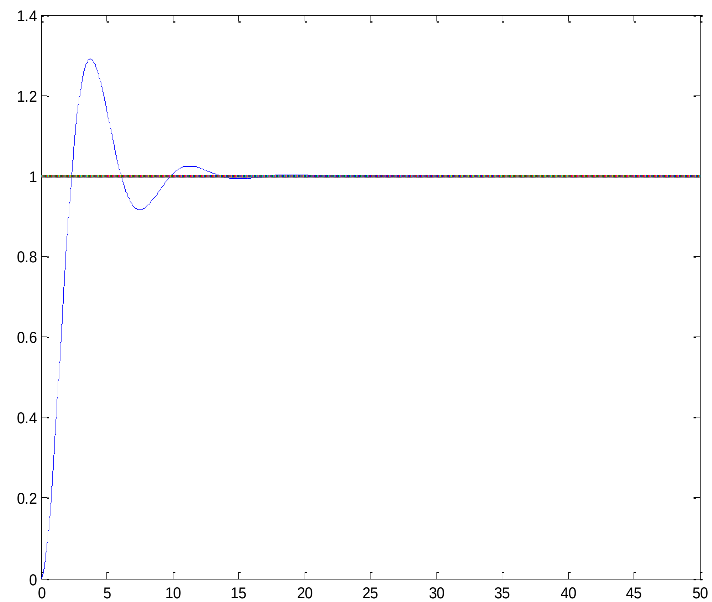




增益调度：航向控制

- 采用增益调度，令 K 与 u^2 成反比，系统对 u敏感度降低，在 $u=0.11u_{nom}$时仍稳定
- 右图:$u=u_{nom}=10m/s$
- 左图: $u=0.11_{unom}=1.1m/s$





增益调度总结

- 应用广泛
- 需要较精确模型
- 需要较好的操作经验
- 应考虑的问题：
  - 调度参数的选择
  - 调度表细化
  - 插值
  - 避免参数跳变 → 控制量跳变
  - 操作界面

7.1 描述函数法

描述函数法的基本思想：

在一定条件下，非线性环节在正弦信号作用下的输出，可用其一次谐波分量来近似，从而将**非线性系统**等效为**线性系统**；于是可将线性系统的频域法，推广用来分析研究非线性系统的稳定性和自持振荡问题。

描述函数也是非线性特性的一种线性化处理，称为**谐波线性化**。

第二章中讨论的非线性模型的线性化方法，是基于平衡态附近的小信号分析的线性化，仅适用于**非本质非线性系统**。

7.1.1 描述函数

设非线性环节的**输入信号**为正弦函数：

$$x(t) = A\sin\omega t \tag{7.1}$$

非线性环节的**输出信号**通常是非正弦周期函数，其周期与输入信号的周期相同。于是，可将输出 $y(t)$ 展开成傅立叶级数：

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t + B_n\sin n\omega t) \\ &= y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n\sin(n\omega t + \varphi_n) \end{aligned}} \tag{7.2}$$

式中： $A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\cos n\omega t d(\omega t),\quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\sin n\omega t d(\omega t)$

$$y_n = \sqrt{A_n^{\ 2} + B_n^{\ 2}}, \varphi_n = tg^{-1}\frac{A_n}{B_n}, n = 1,2,\cdots$$

7.1.1 描述函数

假定：

a) **非线性环节**的输入输出特性是**奇对称**的，即 $y(-x)= -y(x)$, 于是直流分量 $y_0 = 0$；

b) **线性部分** $G(j\omega)$ 具有良好的**低通滤波特性**，于是 $y(t)$ 中的高次谐波分量通过 $G(j\omega)$ 后将被大幅削弱。

输出 $y(t)$ 的一次谐波分量(基波分量)

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \\
&= y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)
\end{aligned}
$$

7.1.1 描述函数

非线性环节的描述函数定义为，在正弦输入时该环节输出的基波分量与输入信号的复数符号之比，即：

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{y_1}{A} e^{j\varphi_1} \\
&= \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \angle tg^{-1} \frac{A_1}{B_1} \qquad (7.3) \\
&= \frac{B_1}{A} + j\frac{A_1}{A}
\end{aligned}
$$

式中：

N 为非线性环节的**描述函数**；

A 为正弦输入信号的幅值；

y_1 为输出信号基波分量的幅值；

φ_1 为输出信号基波分量的相移角。

7.1.1 描述函数

若非线性环节中不含储能元件

$$N = N(A)$$

若非线性环节中含有储能元件

$$N = N(A, \omega)$$

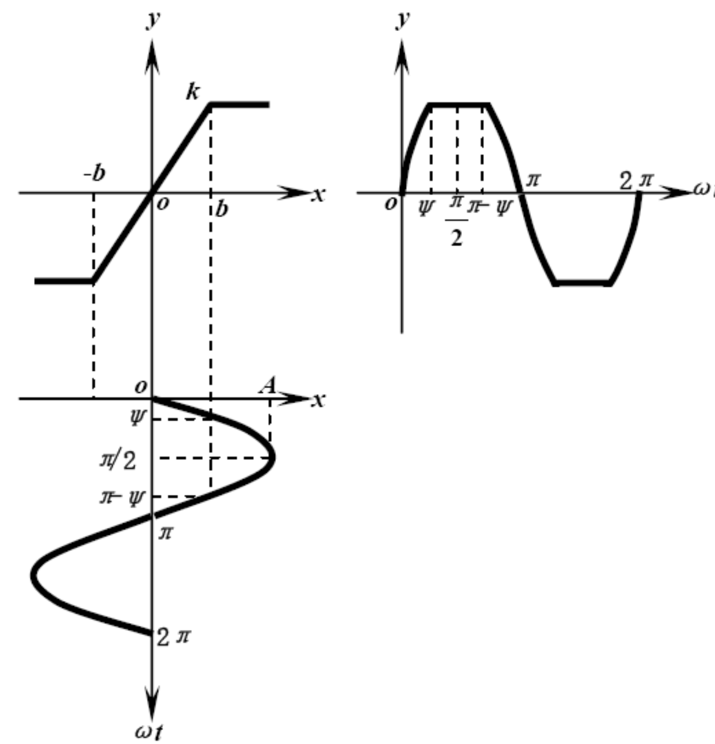
7.1.2 典型非线性特性的描述函数

<例7.1> 饱和非线性特性的描述函数

饱和非线性特性是一种单值非线性函数，其输出函数为：

$$y(t)=\begin{cases} kA\sin\omega t & 0\le\omega t\le\psi \\ kb & \psi\le\omega t\le\pi/2 \end{cases}$$

$$b=A\sin\psi,\psi=\sin^{-1}\frac{b}{A}$$



由于饱和非线性特性是单值奇对称的， $y(t)$为奇函数，故

A0= 0; A1= 0, j 1= 0

7.1.2 典型非线性特性的描述函数

$$B_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}y(t)\sin\omega t d(\omega t)=\frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\psi}kA\sin^2\omega t d(\omega t)+\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}kb\sin\omega t d(\omega t)\right]$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\psi}\frac{kA}{2}(1-\cos 2\omega t)d(\omega t)+\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}kb\sin\omega t d(\omega t)\right]$$

$$=\frac{4kA}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{2}\omega t-\frac{1}{4}\sin 2\omega t\right]_0^{\psi}+\frac{b}{A}\left[-\cos\omega t\right]_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$=\frac{4kA}{\pi}\left[\frac{1}{2}\psi-\frac{1}{4}\sin 2\psi+\frac{b}{A}\cos\psi\right]$$

$$=\frac{4kA}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{b}{A}-\frac{2}{4}\sin\psi\cos\psi+\frac{b}{A}\cos\psi\right]$$

$$=\frac{4kA}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{b}{A}+\frac{1}{2}\cos\psi\right]=\frac{2kA}{\pi}\left[\sin^{-1}\frac{b}{A}+\frac{b}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}\right],(A\geq b)$$

7.1.2 典型非线性特性的描述函数

于是可得到饱和非线性特性的描述函数为：

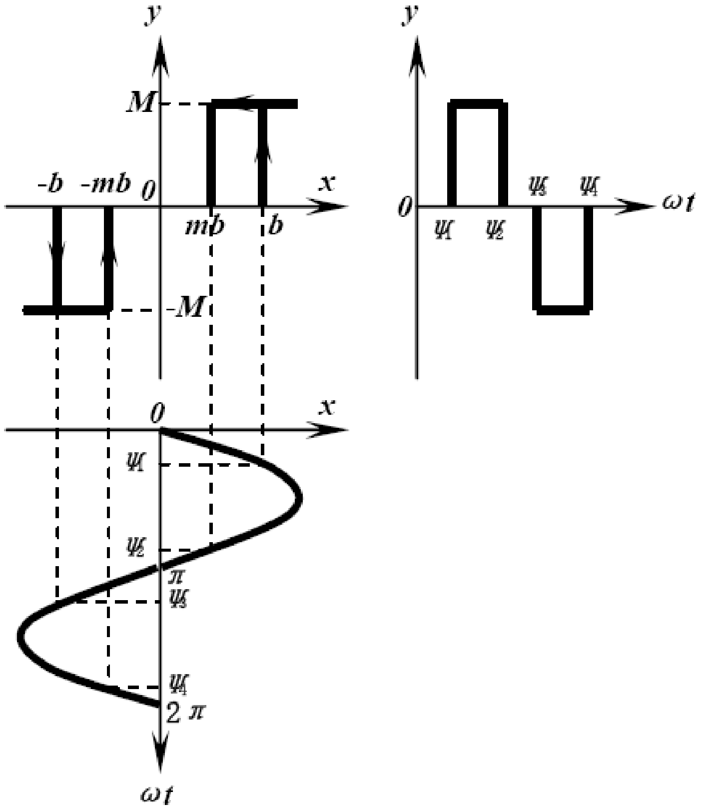
$$\boxed{N(A)=\frac{B_1}{A}=\frac{2k}{\pi}\left[\sin^{-1}\frac{b}{A}+\frac{b}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}\right],(A\geq b)} \qquad (7.4)$$

为输入信号幅值A的实函数.

7.1.2 典型非线性特性的描述函数

<例7.2> 具有**滞环和死区的继电型非线性特性**的描述函数；

具有滞环和死区的继电型 非线性特性是非单值的，其输出函数为：



$$y(t)=\begin{cases}0 & 0\le \omega t\le \psi_1\\ M & \psi_1\le \omega t\le \psi_2\\ 0 & \psi_2\le \omega t\le \pi\end{cases}$$

其中，

$$b=A\sin\psi_1,\psi_1=\sin^{-1}\frac{b}{A}$$

$$mb=A\sin(\pi-\psi_2),\psi_2=\pi-\sin^{-1}\frac{mb}{A}$$

7.1.2 典型非线性特性的描述函数

$y(t)$ 既非奇函数也非偶函数，

$A_1 \neq 0$, $B_1 \neq 0$ 但是 $A_0 = 0$

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\cos\omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y(t)\cos\omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\psi_1}^{\psi_2} M\cos\omega t d(\omega t) = \frac{2M}{\pi}\left[\sin\psi_2 - \sin\psi_1\right]$$

$$= \frac{2Mb}{\pi A}(m-1), \quad (A \geq b)$$

7.1.2 典型非线性特性的描述函数

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\sin\omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi}\int_{\psi_1}^{\psi_2} M \sin\omega t d(\omega t)$$

$$= -\frac{2M}{\pi}\left[\cos\psi_2 - \cos\psi_1\right]$$

$$= \frac{2M}{\pi}\left[\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{mb}{A}\right)^2}\right], \quad (A \geq b)$$

$$\left(\cos\psi_2 = -\cos\left(\sin^{-1}\frac{mb}{A}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{mb}{A}\right)^2}\right)$$

7.1.2 典型非线性特性的描述函数

于是可得具有滞环和死区的继电型非线性特性的描述函数为：

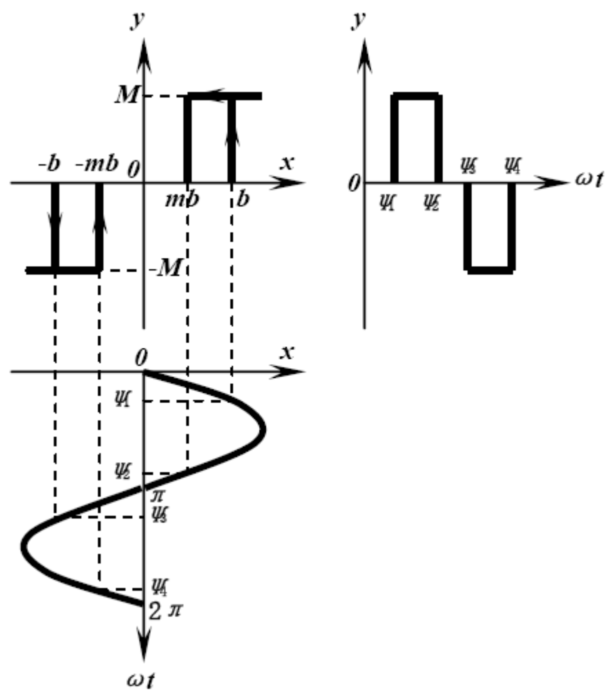
$$\boxed{\begin{aligned} N(A) &= \frac{B_1}{A} + j\frac{A_1}{A} \\ &= \frac{2M}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{mb}{A}\right)^2}\right] + j\frac{2Mb}{\pi A^2}(m-1), (A \geq b) \end{aligned}} \tag{7.5}$$

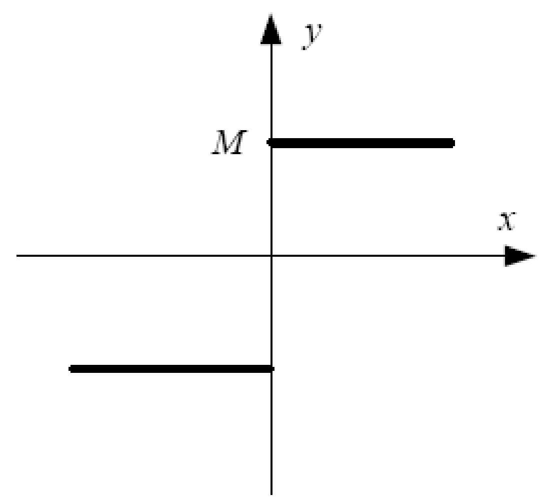
为与输入振幅*A*有关的复函数，输出的基波分量的相角滞后于输入信号的相角。

7.1.2 典型非线性特性的描述函数

(7.5)式中, b=0, 为**理想继电型特性**的描述函数：

$$\boxed{N(A)=\frac{4M}{\pi A}} \qquad (7.6)$$

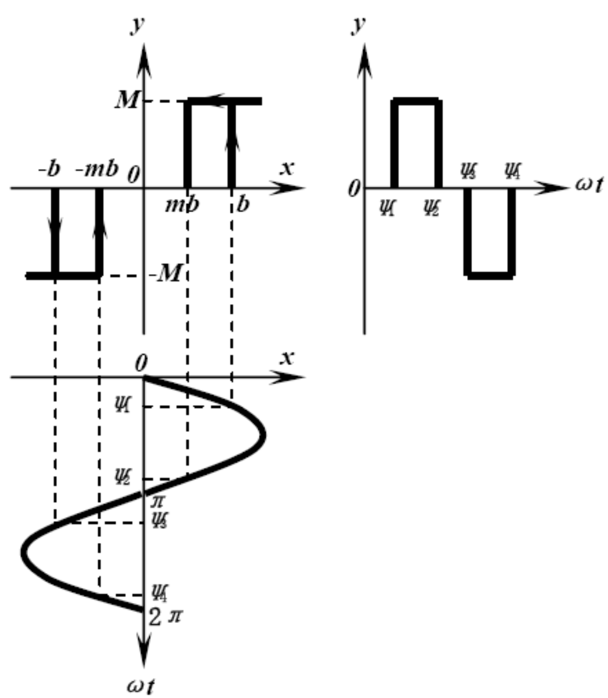


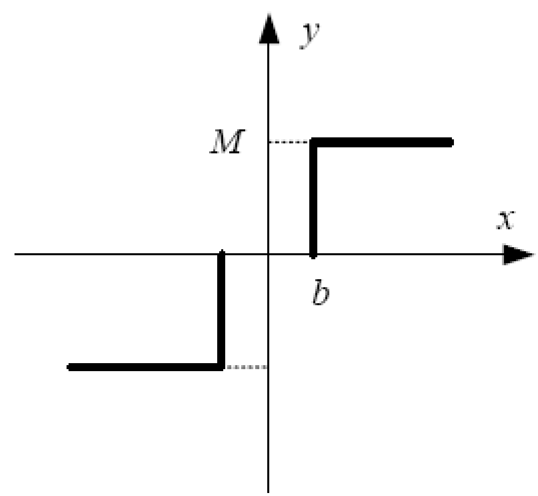


7.1.2 典型非线性特性的描述函数

(7.5)式中, $m = 1$, 为**具有死区的三位置继电型特性**的描述函数：

$$\boxed{N(A)=\frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2},\quad (A\geq b)} \qquad (7.7)$$

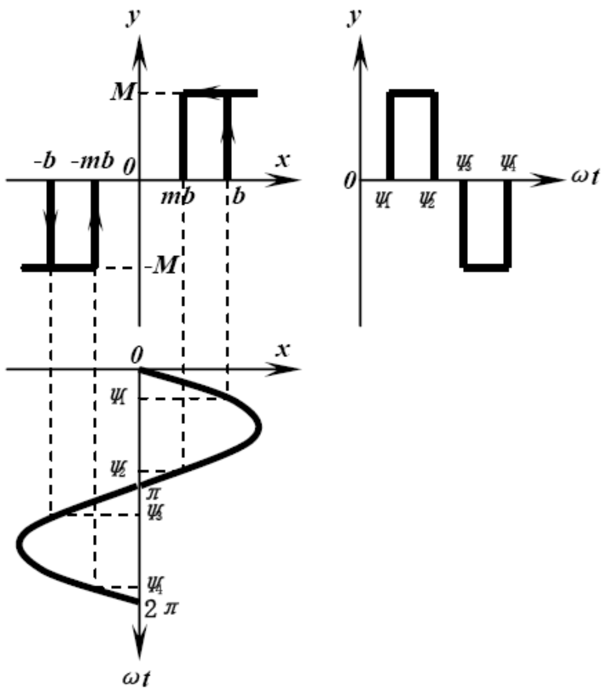


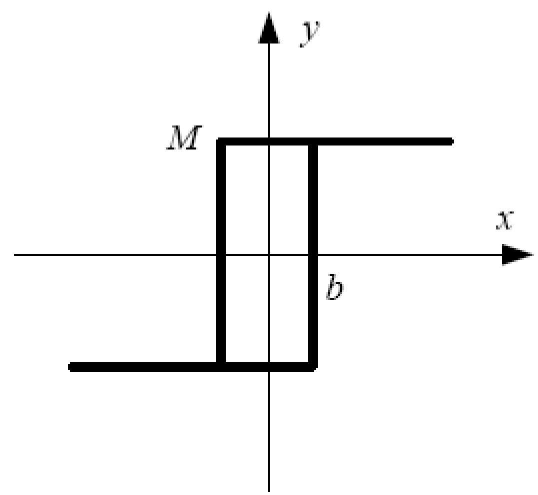


7.1.2 典型非线性特性的描述函数

(7.5)式中, m = -1, 为**具有滞环的继电型特性**的描述函数：

$$N(A)=\frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}-j\frac{4Mb}{\pi A^2},\quad (A\geq b) \qquad (7.8)$$





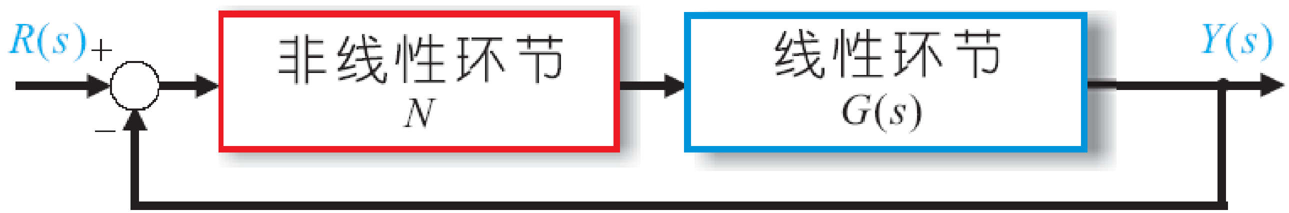
7.2 非线性控制系统的描述函数分析

基本思路：

满足假定条件下，通过**描述函数**进行非线性环节的谐波线性化；因此，在非线性控制系统的典型结构中，以描述函数视为非线性环节的非线性增益，从而将线性系统的频域法，推广用于研究非线性系统，主要用于分析在无输入信号作用时非线性系统的稳定性和自持振荡问题。

7.2 非线性控制系统的描述函数分析

非线性控制系统的典型结构如下：



假定： 线性部分具有良好的低通滤波特性，且非线性环节输出的高次谐波分量较小。

若非线性环节是增益为 k 的线性放大器，该系统便是线性系统，该线性系统的**特征方程**为：

$$kG(s)+1=0$$

其频域形式为：

$$\boxed{G(j\omega)=-1/k} \tag{7.9}$$

7.2 非线性控制系统的描述函数分析

将非线性环节描述函数*N*作为一个非线性增益处理， 于是，非线性系统的**闭环传函**为：

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{N(A)G(s)}{1+N(A)G(s)}}$$

非线性系统的**特征方程**为：

$$\boxed{N(A)G(s)+1=0} \tag{7.10}$$

非线性系统的**频域形式**为：

$$\boxed{G(j\omega)=-N^{-1}(A)} \tag{7.11}$$

$$-N^{-1}(A)=-\frac{1}{N(A)}$$

称为**非线性特性的负倒描述函数**

7.2 非线性控制系统的描述函数分析

应用Nyquist判据，(7.11)式成立，相当于线性系统中的 $G(j\omega) = -1$ 条件成立。

系统稳定的“临界点”：

线性系统: “-1”

非线性系统: “$-N^{-1}(A)$”曲线

由 $Z = N + P$

Z：线性化闭环系统在 s 右半平面的极点数

N：$G(j\omega)$的Nyquist轨迹顺时针包围“$-N^{-1}(A)$”曲线的周数

P：$G(s)$在s右半平面的极点数

7.2 非线性控制系统的描述函数分析

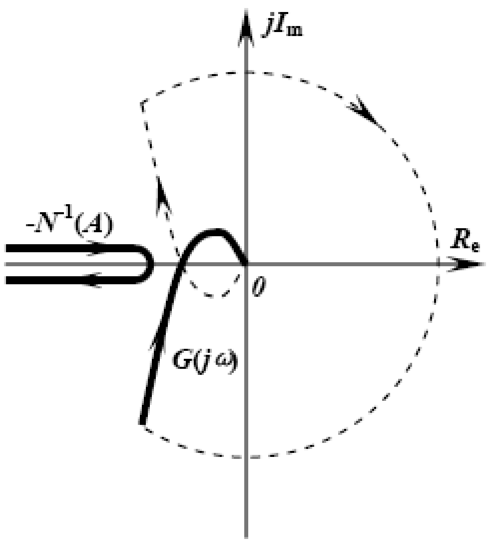
推广的Nyquist判据：

设非线性系统的线性部分 $G(s)$ 是最小相位的，于是, 闭环系统稳定的条件为 $\boldsymbol{N = 0}$.

当 s 在 s平面上顺时针方向沿D型围线变化一周时:

1) 若 $G(j\omega)$ 曲线**不包围** “$-N^{-1}(A)$” 曲线　(图a所示)

则非线性系统是**稳定**的



(a)

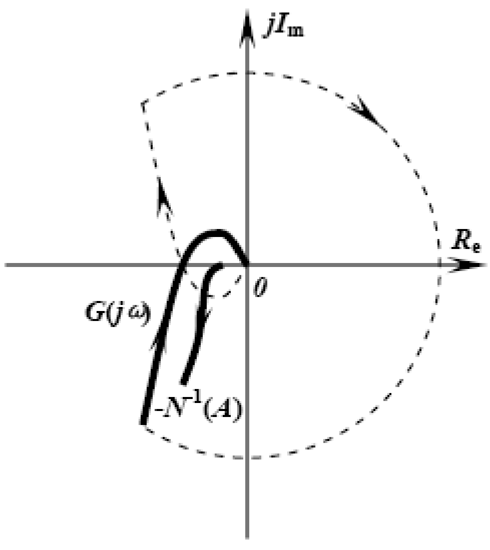
推广的Nyquist判据：

设非线性系统的线性部分 $G(s)$ 是最小相位的，于是, 闭环系统稳定的条件为 ***N* = 0.**

当 s 在 s平面上顺时针方向沿D型围线变化一周时:

2) 若 $G(j\omega)$ 曲线**包围** “$-N^{-1}(A)$” 曲线 (图b所示)

则非线性系统是不稳定的



(b)

7.2 非线性控制系统的描述函数分析

推广的Nyquist判据：

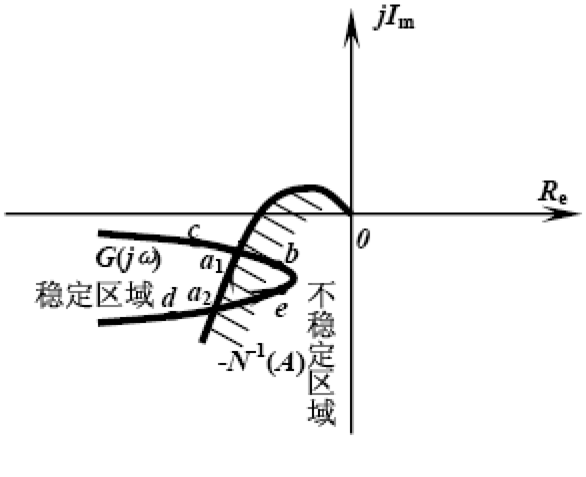
设非线性系统的线性部分 $G(s)$ 是最小相位的，于是, 闭环系统稳定的条件为 $\boldsymbol{N = 0}$.

当 s 在 s平面上顺时针方向沿D型围线变化一周时:

3) 若 $G(j\omega)$ 曲线与 “$-N^{-1}(A)$” 曲线**相交** (图c所示)

则非线性系统可能出现

自持振荡



(c)

7.2 非线性控制系统的描述函数分析

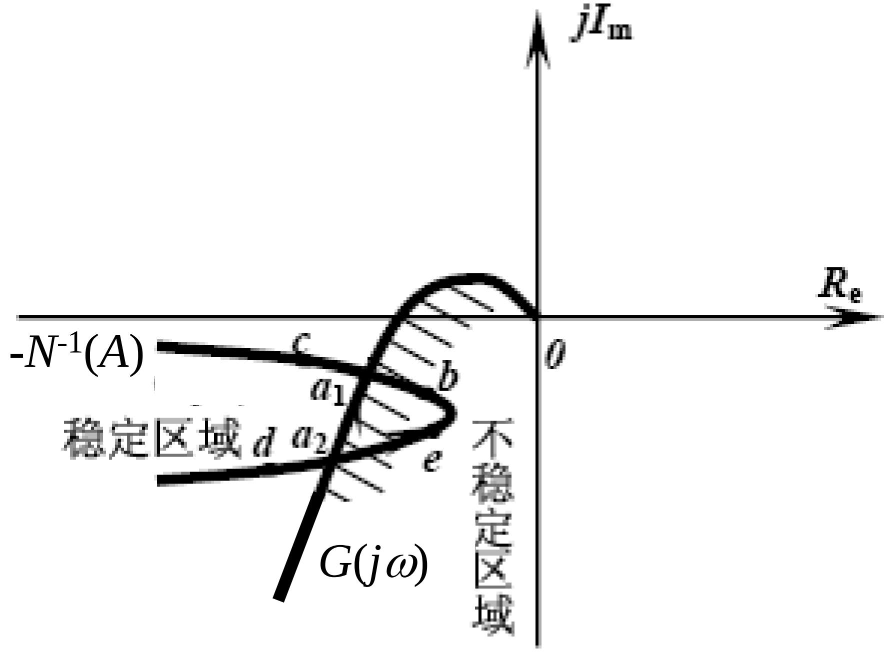
(若非线性系统的线性部分$G(s)$ 是非最小相位系统，则系统闭环稳定的条件为$N = -P$.)

自持振荡可用一个正弦振荡来近似，振荡的频率和振幅，分别由交点处的 $G(j\omega)$ 曲线上的 ω 值和 “$-N^{-1}(A)$” 曲线上的 A 值来确定。

正弦振荡存在表明非线性系统存在周期解，可用Nyquist判据分析其稳定性。只有稳定的正弦振荡才能近似表示非线性系统实际存在的自持振荡：**稳定的自持振荡(极限环)**可通过试验观察到，而**不稳定的自持振荡**却观察不到。

7.2 非线性控制系统的描述函数分析

如图c所示： $-N^{-1}(A)$曲线上， a_1 和a_2 点对应的A_1 和 A_2，振幅增大方向为 $a_2 \rightarrow a_1$ 即$A_2 < A_1$.

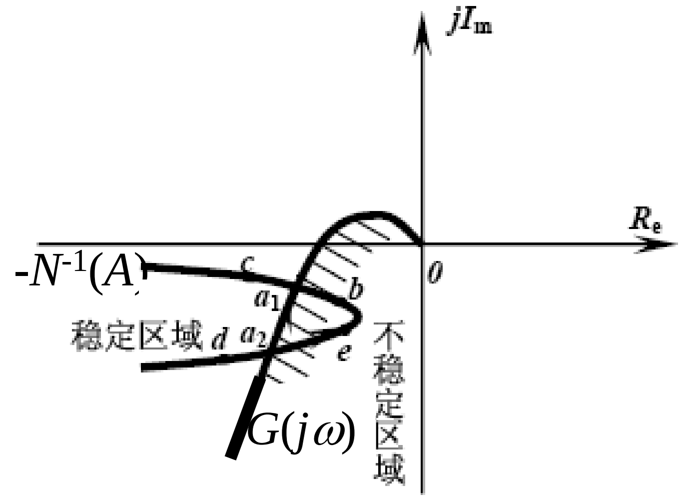


(c)

在a_1点：

扰动，使$A\downarrow$： a_1点$\rightarrow b$点， b点被$G(j\omega)$轨迹包围，不稳定→振幅$A\uparrow$，工作点b点回到a_1点；

扰动，使$A\uparrow$： a_1点$\rightarrow c$点， c点不被$G(j\omega)$轨迹包围，稳定→振幅$A\downarrow$，工作点c点回到a_1点；



(c)

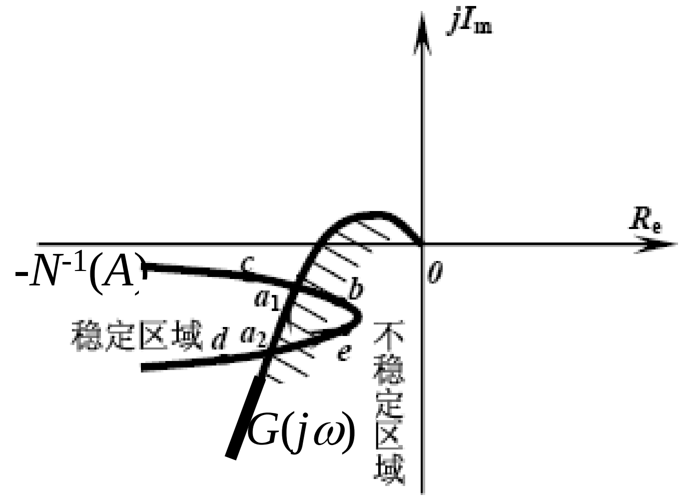
——a_1点具有**收敛性**。工作点在a_1点时系统是稳定的，呈现稳定的自持振荡：振幅A_1，频率ω_1，该自振可近似表示为:

$$A_1\sin\omega_1 t$$

7.2 非线性控制系统的描述函数分析

在a_2点：

扰动，使$A\downarrow$: a_2点$\rightarrow$ d点, d点不被$G(j\omega)$轨迹包围, 稳定→振幅继续减小, 工作点继续左移，偏离a_2点越来越远；



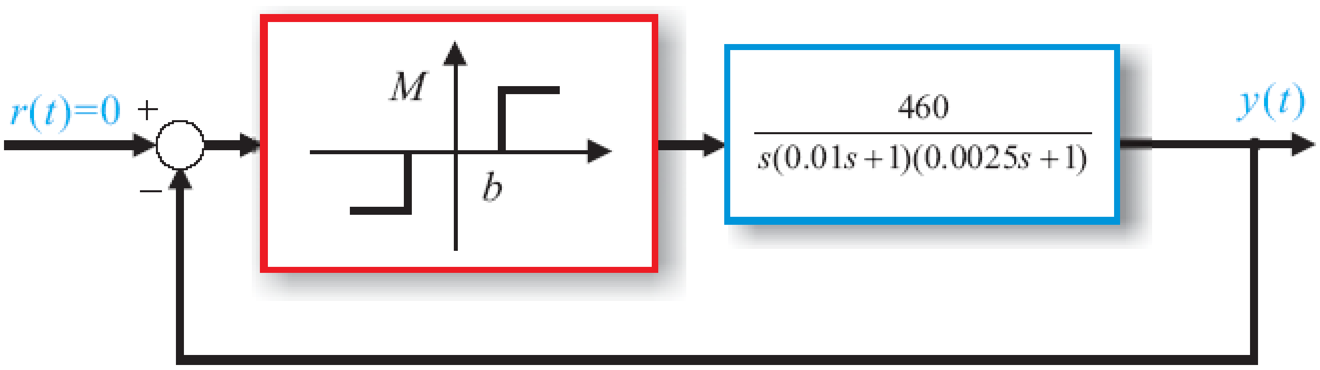
(c)

扰动，使$A\uparrow$: a_2点$\rightarrow$$e$点, e点被$G(j\omega)$轨迹包围, 不稳定→振幅继续增大, 工作点继续偏离a_2点向a_1点运动。

——a_2点具有**发散性**。即a_2点周期运动是**不稳定的**，是无法维持的。

7.2 非线性控制系统的描述函数分析

<例7.3> 非线性系统如图所示，其中具有死区的继电器特性的参数为M=1.7,b=0.7, 试着分析该系统是否存在自振，若存在，求出自振的振幅和频率.



7.2 非线性控制系统的描述函数分析

解: 线性部分为最小相位系统, 频率特性为:

$$G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{460}{\omega\sqrt{1+(0.01\omega)^2}\sqrt{1+(0.0025\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-90^\circ-tg^{-1}0.01\omega-tg^{-1}0.0025\omega$$

具有死区的继电器特性的描述函数为:

$$N(A)=\frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2},\quad (A\geq b)$$

7.2 非线性控制系统的描述函数分析

其中M=1.7, b=0.7 可得到**负倒描述函数**为:

$$\boxed{-N^{-1}(A)=-\frac{\pi A}{6.8}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}},\quad (A\geq b)}$$

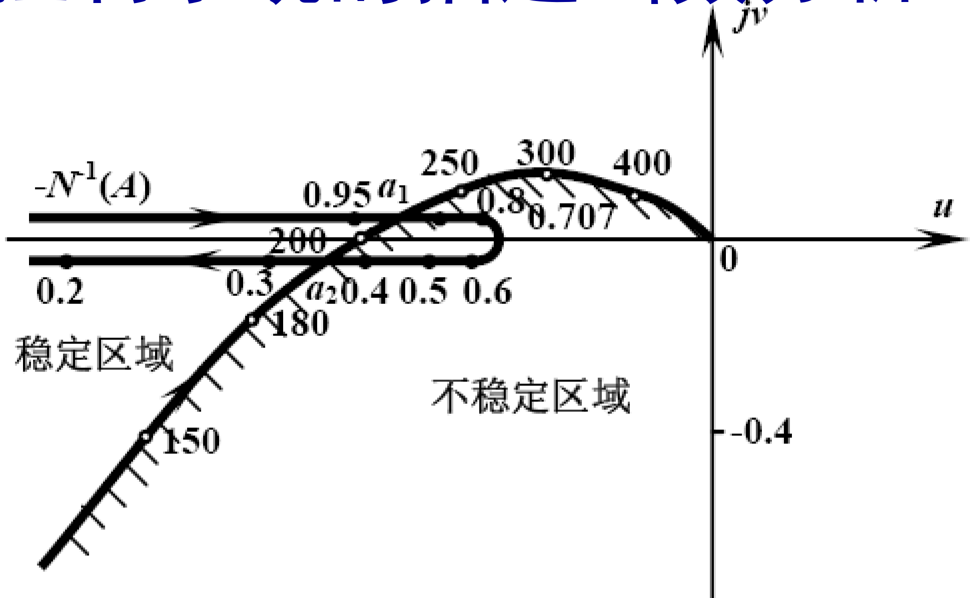
$$A\to b:-N^{-1}(b)=-\infty$$

$$A\to \infty:-N^{-1}(\infty)=-\infty$$

$$\frac{d\left(-N^{-1}(A)\right)}{dA}=\frac{d}{dA}\left[-\frac{\pi}{6.8}\frac{A^2}{\sqrt{A^2-b^2}}\right]=-\frac{\pi A}{6.8}\frac{A^2-2b^2}{\left(A^2-b^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

令 $\frac{d\left(-N^{-1}(A)\right)}{dA}=0$ ，得：$A=\sqrt{2}b,(A\geq b)$

7.2 非线性控制系统的描述函数分析



$$A \quad : b \quad \to \quad \sqrt{2}b \quad \to \quad \infty$$

$$-N^{-1}(A) : -\infty \quad \to \quad \text{极大值} \quad \to \quad -\infty$$

$b = 0.7, A = \sqrt{2}b = 0.99$时

$$-N^{-1}(A) = -N^{-1}(\sqrt{2}b) = -\frac{\pi\sqrt{2}b}{6.8}\frac{1}{\sqrt{1-1/2}} = -0.647$$

7.2 非线性控制系统的描述函数分析

计算 $G(j\omega)$ 与 $-N^{-1}(A)$ 的交点:

a) 由$\varphi(\omega)$ 计算: $\varphi(\omega)=-180°$ 时,

$\omega=200\text{rad/s}$, $|G(j\omega)|_{\omega=200}=0.92$

b) 计算 $-N^{-1}(A)=-0.92$ 时的A值:

本例中有两个交点(a_1,a_2), 对应于两个A值:

b/A	0.9	0.93	0.92	0.925
$-N^{-1}(A)$	-0.824	-0.946	-0.897	-0.920

$b/A=0.925$ $A=0.7/0.925=0.757$ (a_1 处)

b/A	0.3	0.4	0.38
$-N^{-1}(A)$	-1.13	-0.88	-0.920

$b/A=0.38$ $A=0.7/0.38=1.842$ (a_2 处)

7.2 非线性控制系统的描述函数分析

因此 $G(j\omega)$ 与 $-N^{-1}(A)$ 有两个交点:

$$a_1\text{处}: \omega=200\text{rad/s},\ A_1=0.757$$

$$a_2\text{处}: \omega=200\text{rad/s},\ A_2=1.842$$

线性化系统有两个等效正弦振荡:

(1) $1.842\sin 200t$ 为稳定的自持振荡(极限环);

(2) $0.757\sin 200t$ 为不稳定的振荡.

由例题分析可以知道,在进行非线性系统描述函数法分析时,掌握非线性特性的负倒描述函数

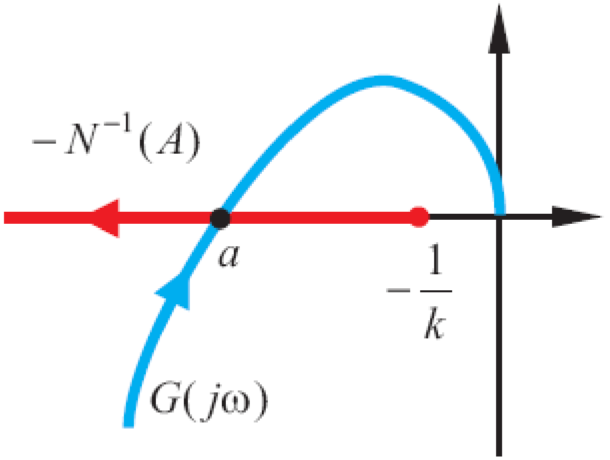
$-N^{-1}(A)$及其与线性部分$G(j\omega)$的交点是分析计算中的关键。

7.2 非线性控制系统的描述函数分析

例如，设$G(j\omega)$为最小相位系统，

1) 饱和非线性特性

$$-N^{-1}(A)=\frac{-\pi}{2k\left[\sin^{-1}\frac{b}{A}+\frac{b}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}\right]},(A\geq b)$$



$A=b$ 时， $-N^{-1}(A)=-1/k$

$A\to\infty$ 时， $-N^{-1}(A)\to-\infty$

交点a为稳定的自持振荡.

例如，设$G(j\omega)$为最小相位系统，

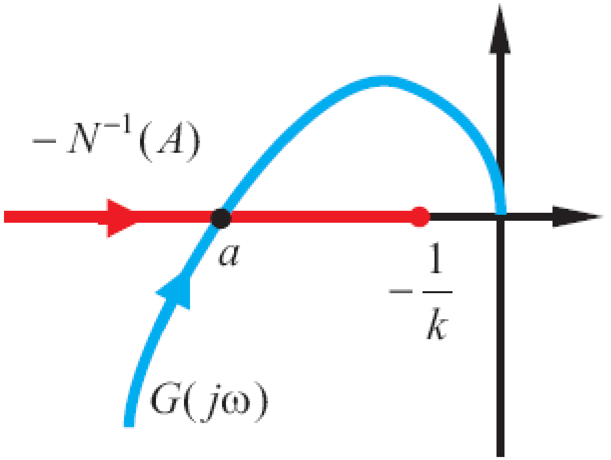
2) 死区非线性特性

$$-N^{-1}(A)=\frac{-\pi}{2k\left[\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{\Delta}{A}+\frac{\Delta}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{A}\right)^2}\right]},(A\geq\Delta)$$

$A=\Delta$ 时， $-N^{-1}(A)\to-\infty$

$A\to\infty$ 时， $-N^{-1}(A)=-1/k$

交点a为**不稳定的振荡**.



7.3 相平面法

相平面法由波恩凯若(Poincare)于1885年提出。

相平面法的**基本思想：**

将系统运动过程转化为在状态空间中系统状态转移的轨迹，通过绘制和研究从不同的初始状态出发的状态轨迹，获知系统运动的有关信息。

相平面法通常只用于分析二阶系统。

7.3.1 相平面法的基本概念

设二阶自治系统

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \tag{7.12}$$

令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$, 于是可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} & (7.13) \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = f(x, \dot{x}) & (7.14) \end{cases}$$

由(7.13), (7.14)式可得：

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}} \tag{7.15}$$

7.3.1 相平面法的基本概念

取 x 为横坐标，$\dot{x}$ 为纵坐标，构成的二维状态空间称为**相平面**，对应的状态轨迹称为**相轨迹**，而 $\dfrac{d\dot{x}}{dx}$ 是相轨迹的斜率。

当 $\dot{x}=0$ 且 $\ddot{x}=f(x,\dot{x})=0$ 的点称为**奇点**，奇点处的相轨迹斜率 $\dfrac{d\dot{x}}{dx}=\dfrac{0}{0}$ 为不定的。其他的点称为**普通点**。

系统的平衡状态(平衡点)是奇点。

7.3.2 二阶线性系统的自由运动

通过分析二阶线性系统的自由运动，说明相平面分析的基本特点和奇点的意义。

二阶系统的齐次方程(自治系统)

$$\ddot{x}+2\zeta\omega\dot{x}+\omega^2 x=0 \qquad (7.16)$$

取 $x_1=x, x_2=\dot{x}_1=\dot{x},$ 则

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \ddot{x}_2=-\omega^2 x_1-2\zeta\omega x_2\end{cases} \qquad (7.17)$$

(7.18)

系统的相轨迹方程

$$\frac{d\dot{x}}{dx}=-\frac{2\zeta\omega\dot{x}+\omega^2 x}{\dot{x}} \qquad (7.19)$$

7.3.2 二阶线性系统的自由运动

令 $\frac{dx}{dt}=0$ 和 $\frac{d\dot{x}}{dt}=0$，

可得到其解为：$x=0, \dot{x}=0$

即系统的奇点(平衡状态)位于相平面的原点(0, 0)

分别讨论奇点类型：

1)

$$\zeta=0$$

$$\frac{d\dot{x}}{dx}=-\omega^2\frac{x}{\dot{x}}$$

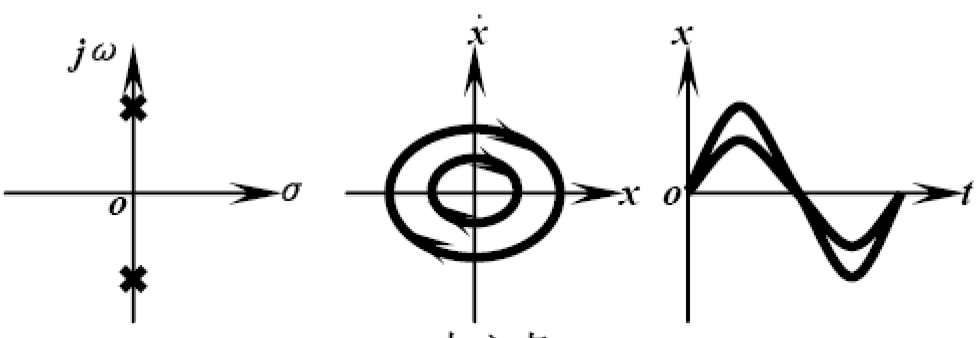
$$\dot{x}d\dot{x}=-\omega^2 x dx$$

7.3.2 二阶线性系统的自由运动

积分后可得系统相轨迹方程:

$$\left(\frac{x}{C}\right)^2+\left(\frac{\dot{x}}{C\omega}\right)^2=1 \qquad (7.20)$$

式中 $C=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/\omega)^2}$ 为由初始状态 $x_0,\dot{x}_0$ 决定的积分常数。这是一个椭圆方程。相轨迹为一簇围绕奇点的椭圆形封闭曲线，系统的自由运动为等幅正弦振荡这种类型的奇点称为中心点。



(a)中心点

7.3.2 二阶线性系统的自由运动

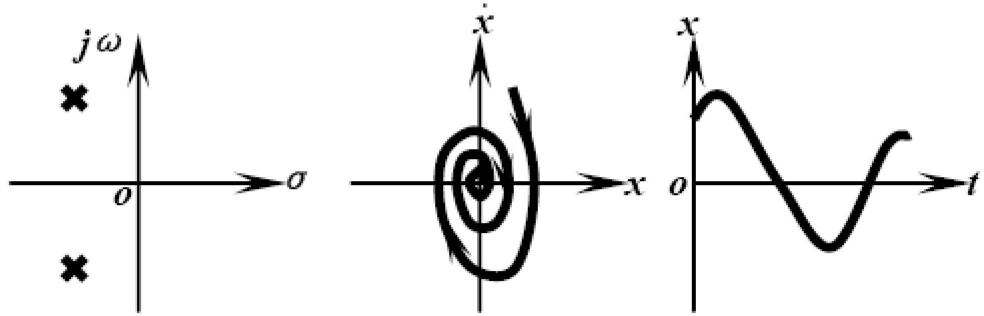
2) $0<\zeta<1$

方程(7.16)的解为：

$$x(t)=ce^{-\zeta\omega t}\cos(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t+\varphi) \qquad (7.21)$$

式中 c, φ 是由初始状态 $x_0,\dot{x}_0$ 决定的常数。

系统相轨迹是由外向奇点趋近的一簇向心的对数螺旋线，系统的自由运动为衰减振荡。这种类型的奇点称为稳定焦点。

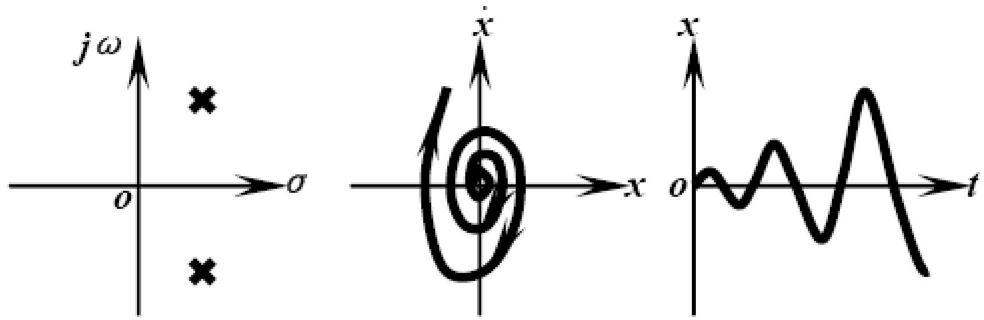


(b)稳定焦点

7.3.2 二阶线性系统的自由运动

3) $-1 < \zeta < 0$

相轨迹是背离奇点向外发散的一簇对数螺旋线，系统的自由运动规律是发散振荡的。这种类型的奇点称为不稳定焦点。



(c)不稳定焦点

7.3.2 二阶线性系统的自由运动

4) $\zeta > 1$

方程(7.16)的解为：

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (7.22)$$

式中：

$\lambda_1, \lambda_2 = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$ 为系统的两个负实根；

c_1, c_2 为由初始状态决定的常数：

$$c_1 = \frac{x_0 \lambda_2 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad c_2 = \frac{\dot{x}_0 - x_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

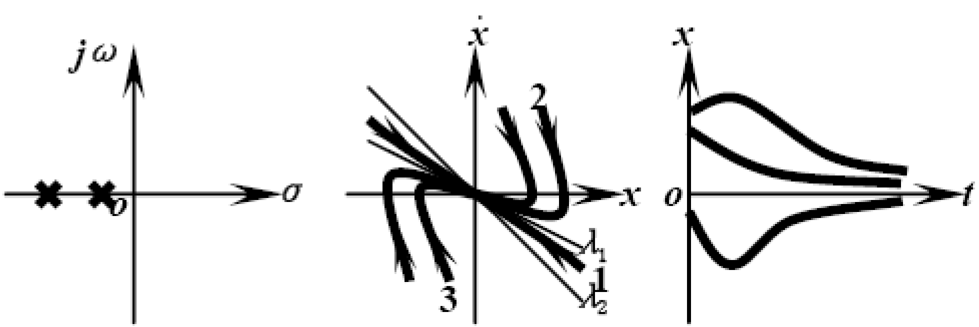
7.3.2 二阶线性系统的自由运动

相轨迹为通过奇点的一簇抛物线。这种类型的奇点称为稳定结点。

初始状态不同时，出现两簇相轨迹1和2：

相轨迹簇1： $x, \dot{x}$ 不变号

相轨迹簇2： $\dot{x}$ 变号一次，x 可能变号也可能不变号。

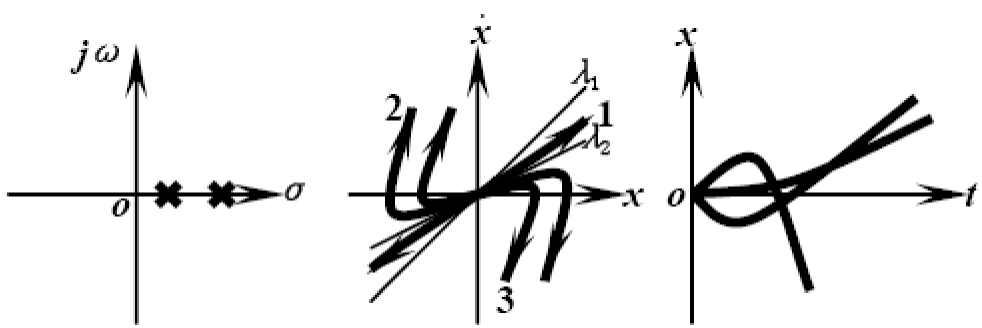


(d)稳定结点

7.3.2 二阶线性系统的自由运动

5) $\zeta < -1$

此时系统的极点为两个正实根，相轨迹的走向是背离奇点向外发散的，系统的自由运动规律是非周期发散的。此类型的奇点称为不稳定结点。



(e)不稳定结点

7.3.2 二阶线性系统的自由运动

6) 正反馈系统

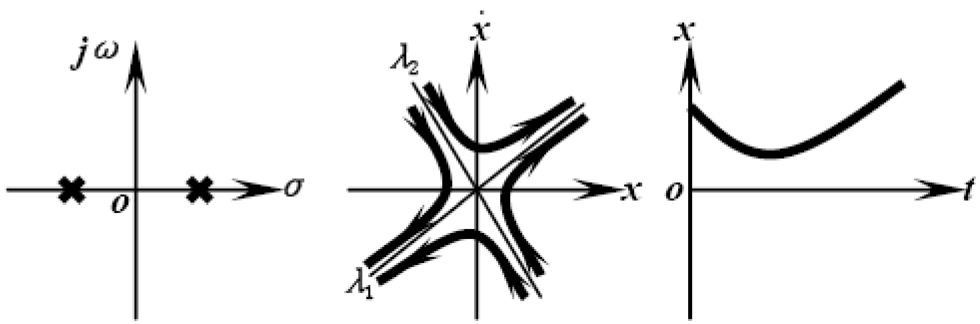
此时，二阶系统自由运动方程为：

$$\ddot{x}+2\zeta\omega\dot{x}-\omega^{2}x=0 \qquad (7.23)$$

系统极点为两个异号的实根

$$x_{1,2}=-\zeta\omega\pm\omega\sqrt{\zeta^{2}+1}$$

系统的自由运动的规律为非周期发散的。这种类型的奇点称为**鞍点**。



(f)鞍点

7.3.2 二阶线性系统的自由运动

奇点的类型，决定了系统在奇点附近运动的性质。

线性二阶系统只有一个奇点(即一个平衡状态)，因而奇点的类型完全决定了系统自由运动的基本特性。

7.3.3 由相图求系统的时间响应特性

相轨迹图表示出系统状态变量之间的关系，时间信息隐含其中，可由相轨迹图获取时间信息。

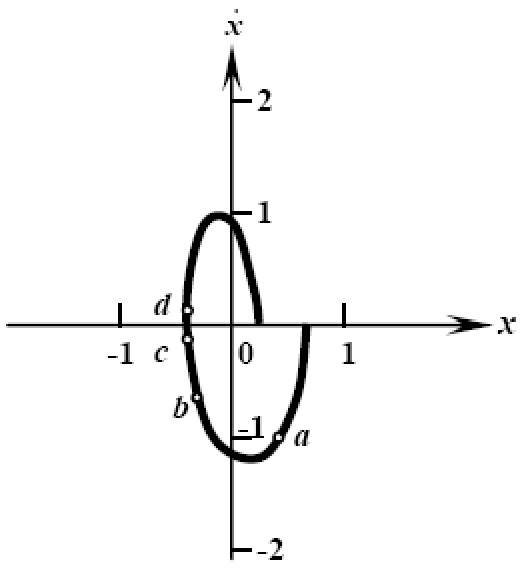
$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad dt = \frac{1}{\dot{x}} dx$$

$$t_{ab} = t_b - t_a = \int_{x_a}^{x_b} \frac{1}{\dot{x}} dx \tag{7.24}$$

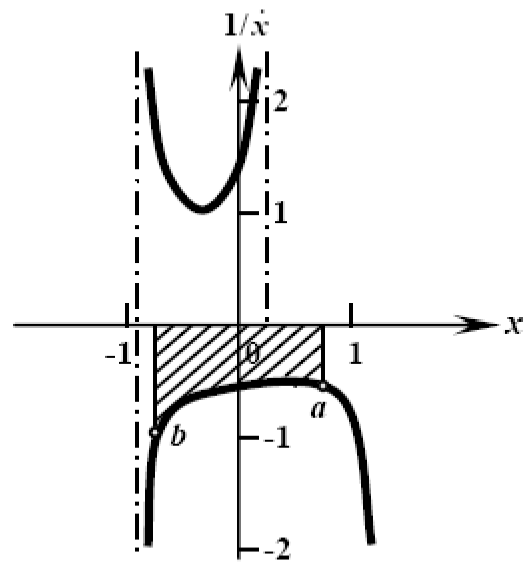
7.3.3 由相图求系统的时间响应特性

1) 积分法——利用 $\frac{1}{\dot{x}}$ 曲线计算时间

设系统相轨迹如图(a)所示，则可给出 $\frac{1}{\dot{x}} \sim x$ 的关系曲线如图(b)所示。*b*点至*a*点曲线的积分即为t_{ab} .



(a)



(b)

7.3.3 由相图求系统的时间响应特性

在 Δx 区间内 $\dot{x}$ 的值变化不大时，以增量作为近似计算，即为“增量法”。

$$\Delta t = \frac{1}{\dot{x}_{av}} \Delta x \qquad (7.25)$$

其中 $\dot{x}_{av}$ 为该区间内 $\dot{x}$ 的平均值.

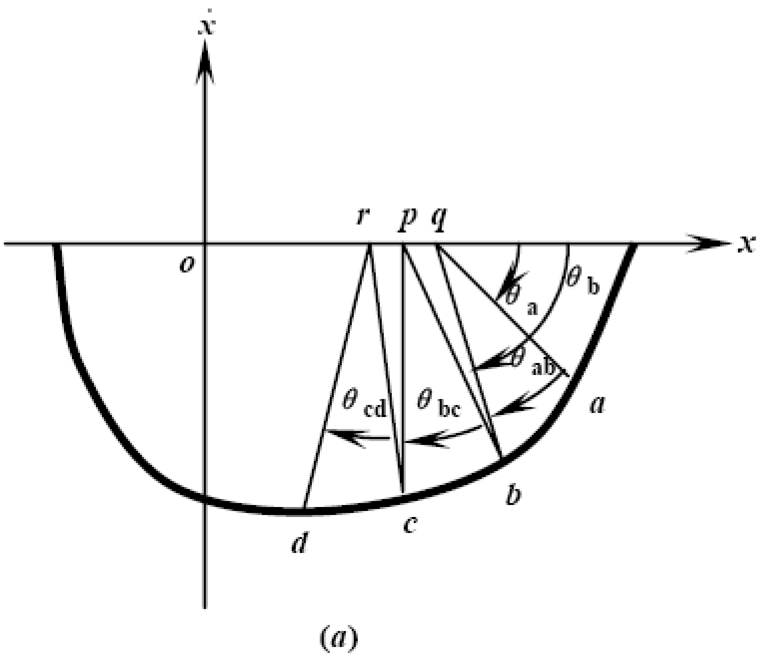
当 $\dot{x}$ 的值很小时(图(a)中，c,d 段)，$\dfrac{1}{\dot{x}}$ 的值将变得很大，积分法难以应用。

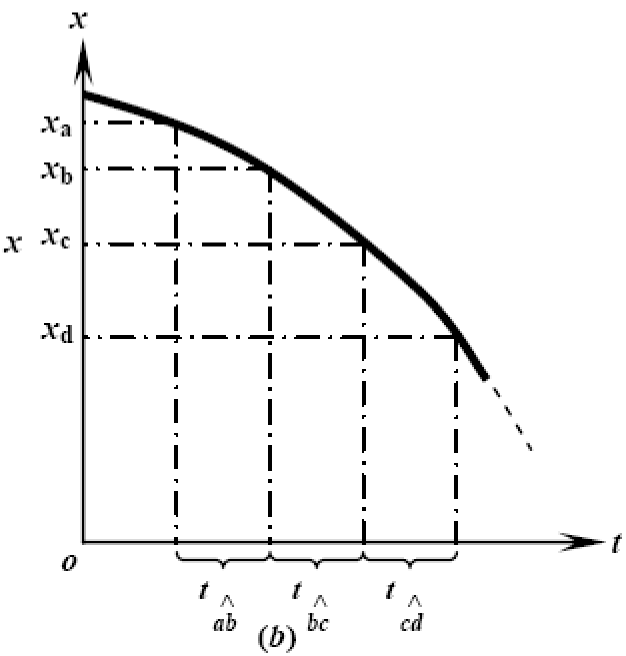
7.3.3 由相图求系统的时间响应特性

2) 圆弧法

设系统相轨迹图如图(a)所示:

用圆心位于x 轴上的一系列小圆弧来近似表示所研究的相轨迹段。





7.3.3 由相图求系统的时间响应特性

从*a*点运动到*d*点所需的时间t_{ad}

$$t_{ad}=t_{ab}+t_{bc}+t_{cd}\approx t_{\overset{\frown}{ab}}+t_{\overset{\frown}{bc}}+t_{\overset{\frown}{cd}}$$

而 $t_{\overset{\frown}{ab}}$ 等比较容易计算。如 $t_{\overset{\frown}{ab}}$ ：

$$\dot{x}=\overline{qa}\sin\theta_a,\qquad x=\overline{oq}+\overline{qa}\cos\theta_a,$$

代入(7.24)式，可得

$$t_{ab}=\int_{x_a}^{x_b}\frac{1}{\dot{x}}dx=\int_{\theta_a}^{\theta_b}\frac{-\overline{qa}\sin\theta}{\overline{qa}\sin\theta}d\theta=\theta_a-\theta_b=\theta_{\overset{\frown}{ab}}\qquad(7.26)$$

7.3.3 由相图求系统的时间响应特性

上式表明，若角度以弧度为单位，时间以秒为单位，则在数值上等于小圆弧 $t_{\overset{\frown}{ab}}$ 所对应的中心角 $\overset{\frown}{ab}$

测量 $\theta_{\overset{\frown}{ab}}$ 及对应的 x 值，可绘制出系统的时间响应曲线，如图(b)所示。

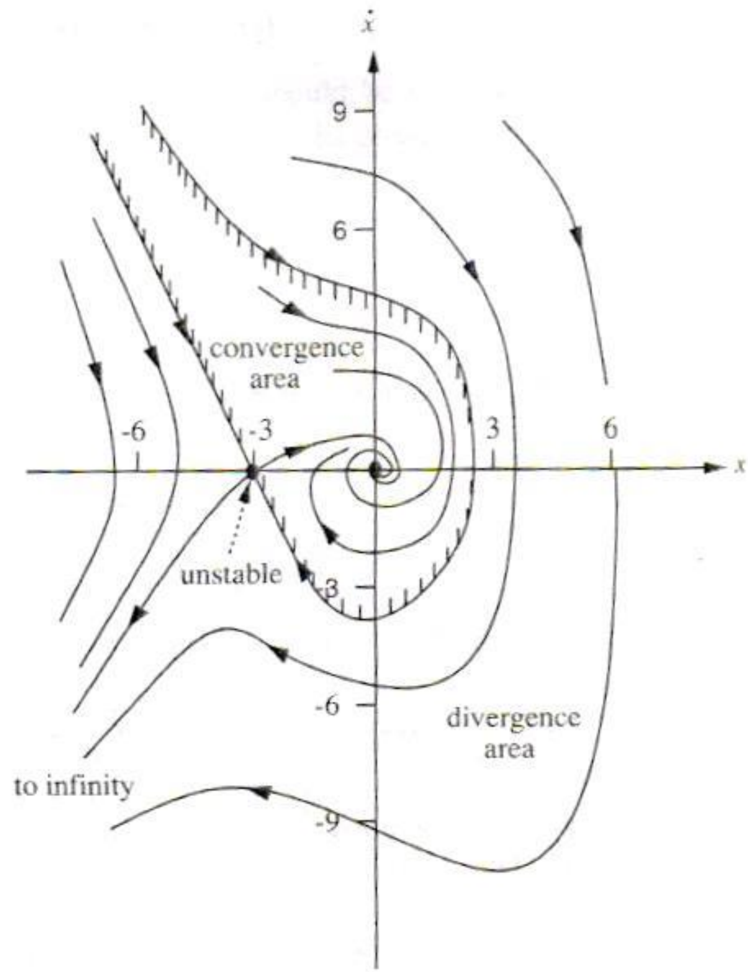
$$\theta_{\overset{\frown}{ab}},\theta_{\overset{\frown}{bc}},\theta_{\overset{\frown}{cd}}$$

非线性系统的相平面图

- 下列系统有两个奇点，即稳定的平衡点（0，0）和不稳定平衡点（-3，0）

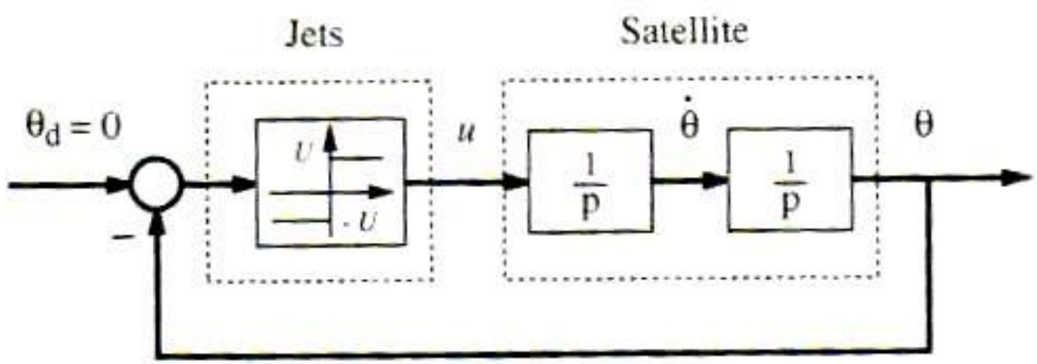
$$\ddot{x}+0.6\dot{x}+3x+x^2=0$$

- 在奇点处，多条相轨迹相交，无法确定系统轨迹之斜率，故名为“奇点”



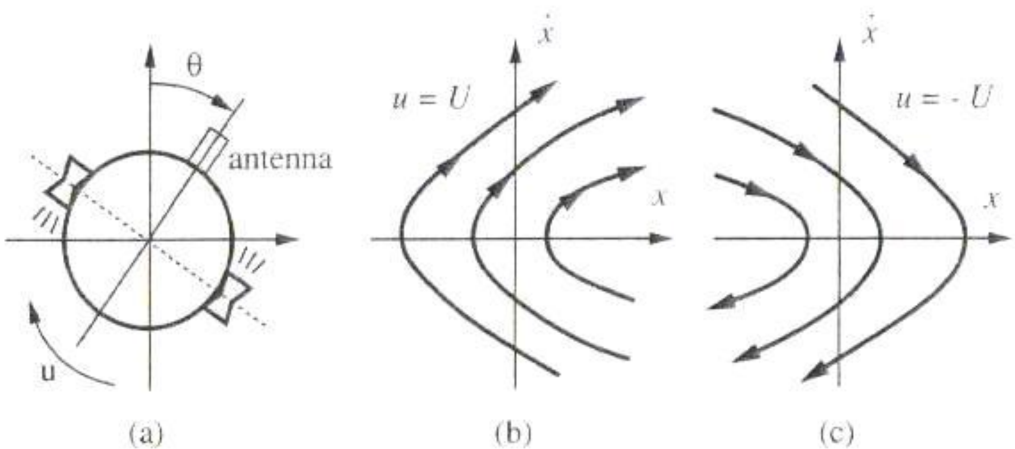
卫星姿态控制系统

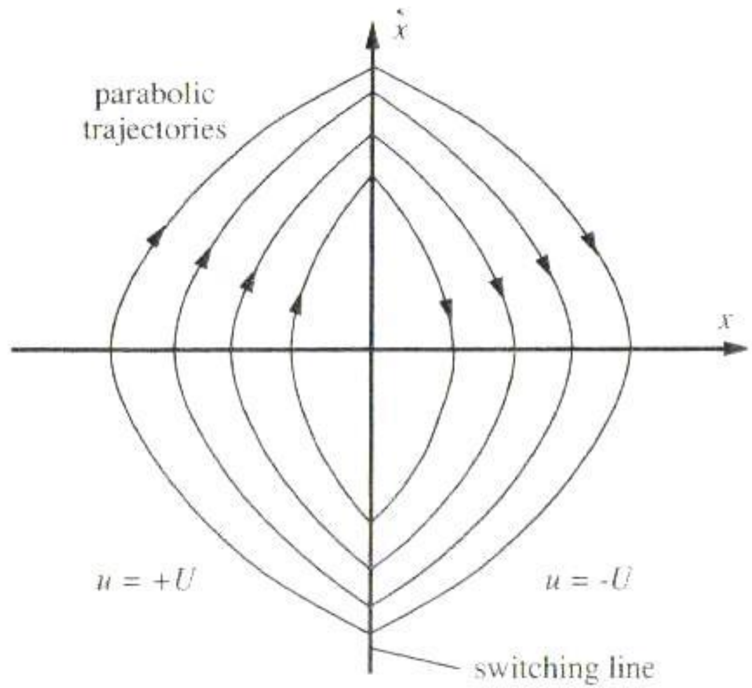
- 卫星姿态的动态为双积分器
- 可采用响应轮、陀螺仪、磁铁、喷射推进器等控制
- 喷射推进器通过喷射气体（流量恒定）来改变卫星星体转动状态 → 执行机构呈现理想继电特性



卫星姿态控制系统

- 当角位置符号发生变化，即dx/dt=0时，喷气推进器输出切换，切换线为相平面图中的dx/dt轴
- 若角位置初始状态不为零，则卫星姿态将呈周期性振动





卫星姿态控制系统

- 引入速度反馈，可实现姿态稳定