# 第五节　波的叠加原理　干涉

一、波的叠加原理

二、波的干涉

三、驻波

# 一、波的叠加原理

原理内容：几列波在传播过程中相遇时，相遇区域每一点的振动等于各列波单独传播时在该点引起的振动的矢量和。通过相遇区域以后，波保持各自特征继续传播，就和未相遇过一样。

实质：振动的叠加

条件：波源：线性振动

波：线性波

介质中各质点均呈线性振动

比较：

粒子相遇：碰撞，各自运动状态改变。

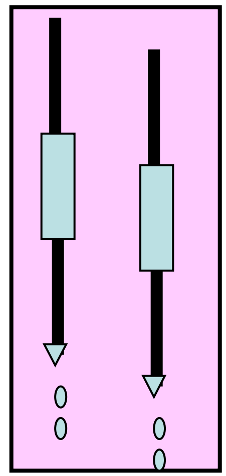
波相遇：相遇区域合成，然后保持各自特征继续传播。

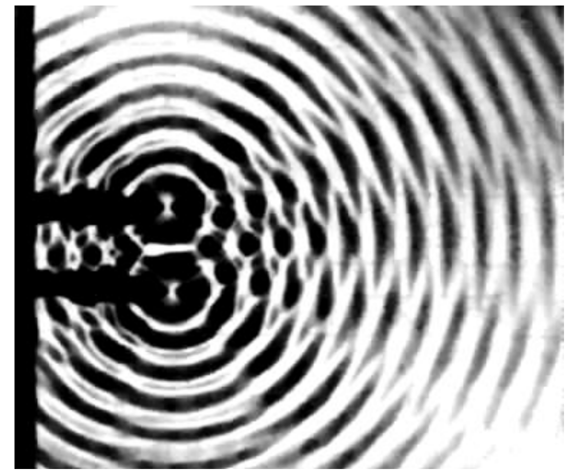
## 二、波的干涉——波叠加中最简单、重要的特例

### 1.干涉现象和相干条件

发波水槽实验

（演示实验室）





干涉条件：

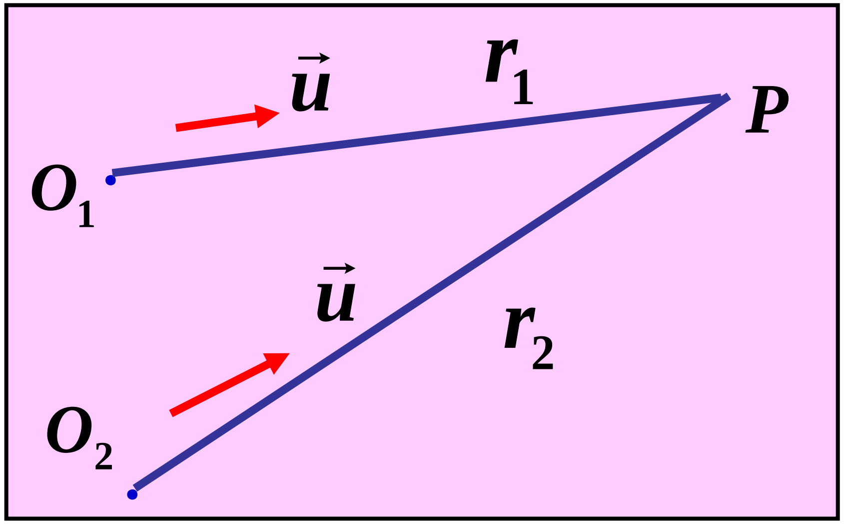
干涉的波为相干波，即：

频率相同，振动方向相同，相位差恒定的两列或多列波。

相干条件

相干波源：产生相干波的两个或多个波源。

## 2.干涉现象的本质




设相干波源

$o_1$：　$\Psi_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$

$o_2$：　$\Psi_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

（频率相等）

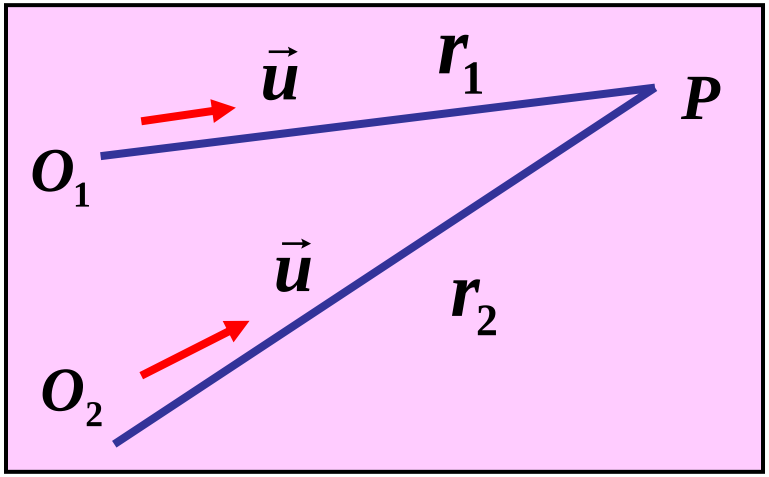
在 $P$ 点引起的振动：

$$\Psi_{p1} = A_1\cos[\omega t + \varphi_1 - 2\pi\frac{r_1}{\lambda}]$$

$$\Psi_{p2} = A_2\cos[\omega t + \varphi_2 - 2\pi\frac{r_2}{\lambda}]$$

$$\Psi_{p1} = A_1 \cos[\omega t + \varphi_1 - 2\pi \frac{r_1}{\lambda}]$$

$$\Psi_{p2} = A_2 \cos[\omega t + \varphi_2 - 2\pi \frac{r_2}{\lambda}]$$




*P* 点的合振动:

$$\Psi_p = \Psi_{p1} + \Psi_{p2} = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[\varphi_2 - \varphi_1 - \dfrac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)]} \\[2ex] \varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{A_1\sin(\varphi_1 - \dfrac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2\sin(\varphi_2 - 2\pi\dfrac{r_2}{\lambda})}{A_1\cos(\varphi_1 - \dfrac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2\cos(\varphi_2 - \dfrac{2\pi r_2}{\lambda})} \end{cases}$$

令 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\dfrac{2\pi(r_2-r_1)}{\lambda}$

即：相位差=波源初相差+由波程差引起的相位差

得 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$

由 $I\propto A^2$，$P$点合振动强度：

$$I=I_1+I_2+2\underbrace{\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi}_{\text{干涉项}}$$

令波程差 $\delta=r_1-r_2$，则：$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1+\dfrac{2\pi\delta}{\lambda}$

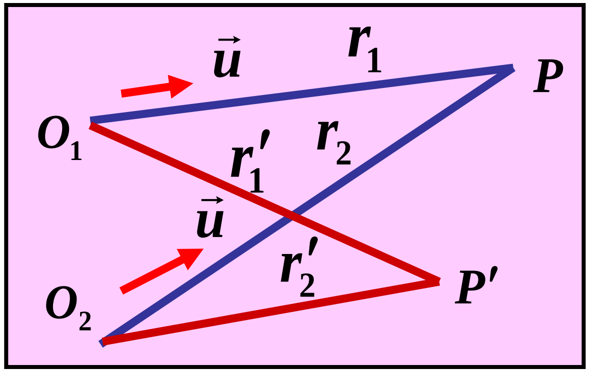
注意：(1)由于$\varphi_2-\varphi_1$恒定，$\Delta\varphi$取决于两波传至相遇点的波程差 $\delta=r_1-r_2$

(2)干涉项使得 $I\neq I_1+I_2$

讨论：

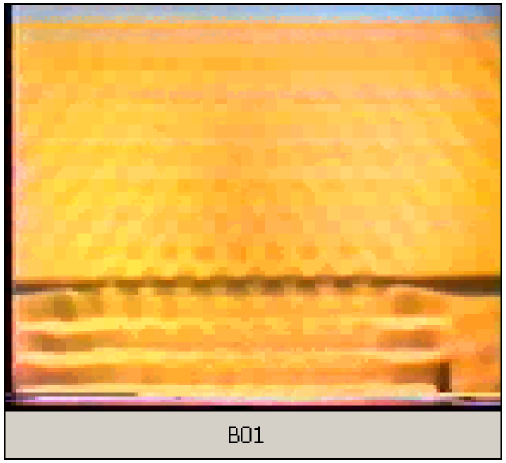
(1) 对空间确定点，$\delta$有确定值，$I$有确定值，振动稳定。

(2) 对空间不同点，$\delta$一般不等，$I$彼此不等，振动强度不同。




干涉现象：能量在空间呈稳定的非均匀分布。

例：点波源$O_1$,$O_2$：$\delta$ 相同的点，相位差相同，振动强度相同，其集合为双曲面，即等相位差面为双曲面。




干涉图样：双曲面族。

问题：哪些位置合振动最强？哪些位置合振动最弱？

▲3.干涉相长和干涉相消的条件

合振动最强 合振动最弱

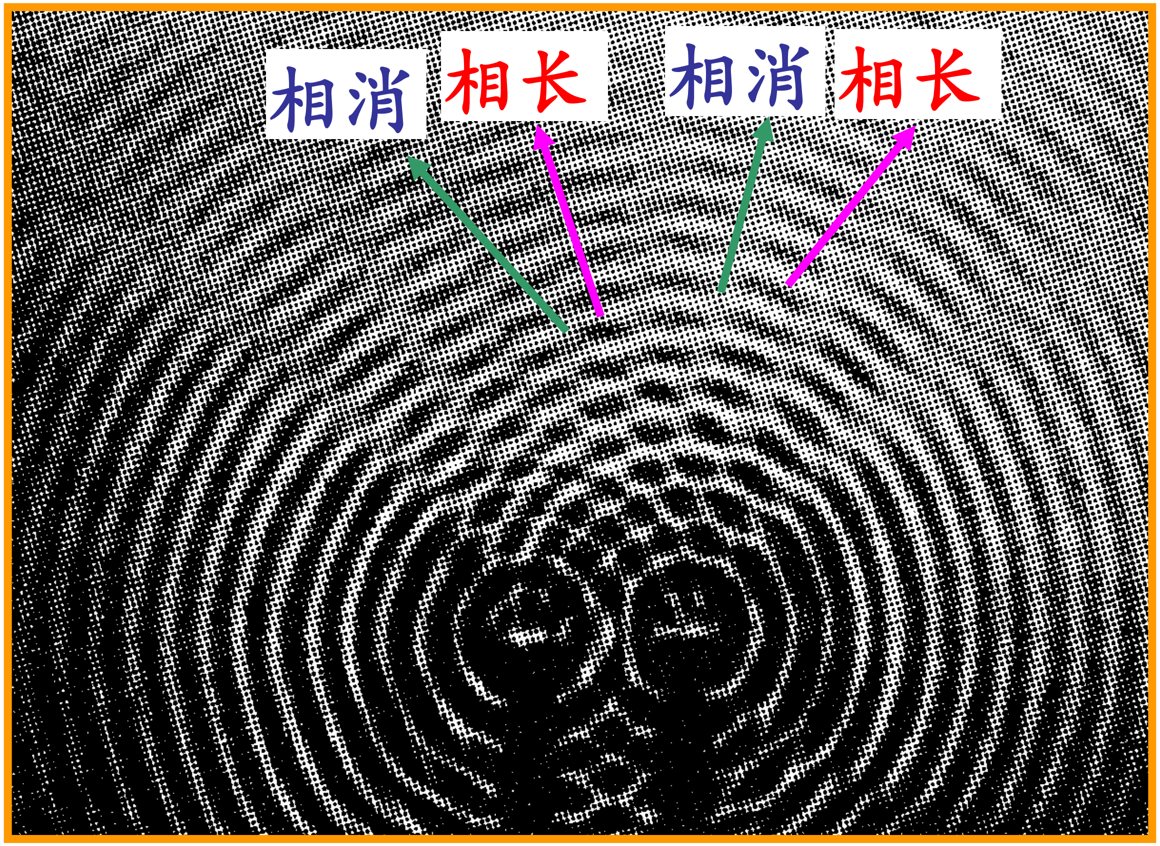
在 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$

$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi$ 中：

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1+\frac{2\pi\delta}{\lambda}=\begin{cases}2k\pi\text{（同相）} & A=A_1+A_2 \text{ 相长} \\ & I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2} \\ (2k+1)\pi\text{（反相）} & A=|A_1-A_2| \text{相消} \\ & I=I_1+I_2-2\sqrt{I_1I_2}\end{cases}$$

$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

相间排列




波的干涉：两列满足相干条件的波相遇时，波的能量在空间重新分布，且分布是稳定的，其强弱相间，呈周期性排列的现象。

特例： （1） $\varphi_1 = \varphi_2$ $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi\delta}{\lambda}$

$$若\ \delta = r_1 - r_2 = \begin{cases} k\lambda & 相长 \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & 相消 \end{cases}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

（2） $A_1 = A_2$ $I_1 = I_2$

相长处： $A = 2A_1$ $I = 4I_1$

相消处： $A = 0$ $I = 0$

练习1. 是非题

(1) 两列不满足相干条件的波不能叠加。

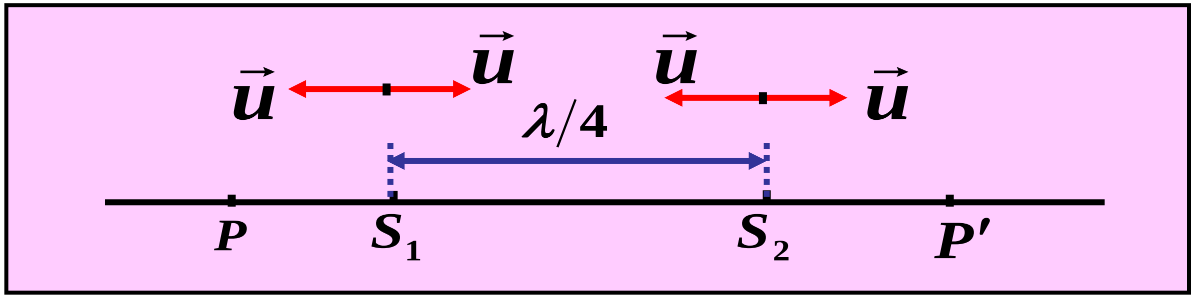
(2) 两列波相遇区域中P点，某时刻位移值恰好等于两波振幅之和。这两列波为相干波。

(3) 两振幅相等的相干波在空间某点相遇时，某时刻该点合振动位移既不是两波振幅之和，又不是零，则该点既不是振动最强点，又不是振动最弱点。

(4) 在点波源的干涉现象中，波动相长各点或波动相消各点的集合的形状为双曲面族。

# 练习2：教材P71 13.16

已知：




$S_1$、$S_2$为相干波源，相距$\lambda/4$，$I_1 = I_2 = I_0$，$\varphi_{10} - \varphi_{20} = \dfrac{\pi}{2}$

求：$S_1$、$S_2$连线上，$S_1$外侧，$S_2$外侧合成波强度 。

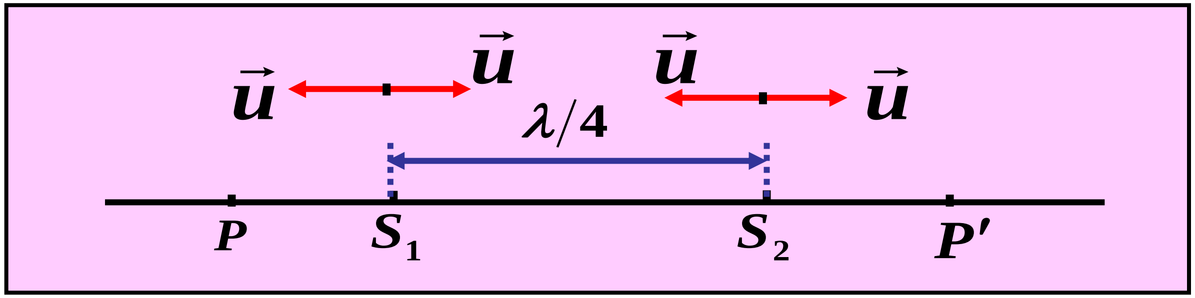
解： 1）对$S_1$外侧$P$点

$$\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi\frac{\lambda/4}{\lambda} = -\pi$$

干涉相消，合成波

$A' = 0$, $\quad I' = 0$

即$S_1$外侧不振动




2）对$S_2$外侧$P'$点

$$\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi\frac{-\lambda/4}{\lambda} = 0$$

干涉相长，合成波

$$A'' = 2A_1, I'' = 4I_0$$

即$S_2$外侧各点振动最强。

思考：$S_1, S_2$之间如何？

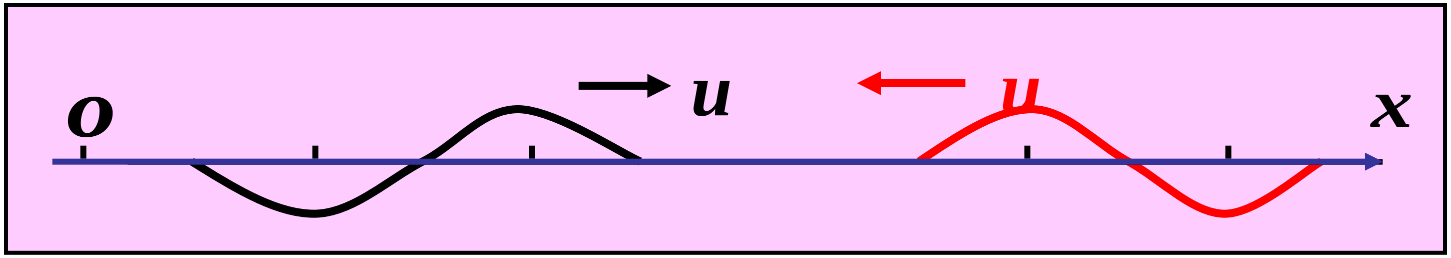
两相干波，振幅相同，沿同一直线向相反方向传播。

# 三、驻波

驻波:两列振幅相同，在同一直线上沿相反方向传播的相干波形成的干涉现象。

## 1.驻波的形成:

条件:相干波，振幅相等，在同一直线上反向传播.




以坐标原点为参考点，向右为正方向。

右行波: $\Psi_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - 2\pi \frac{x}{\lambda})$

左行波: $\Psi_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_2 + 2\pi \frac{x}{\lambda})$

右行波： $\Psi_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1 - 2\pi\frac{x}{\lambda})$

左行波： $\Psi_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_2 + 2\pi\frac{x}{\lambda})$

左行波和右行波波函数比较：

1： $\Psi_1$和$\Psi_2$为相同方向（$x$或$y$方向）的振动位移。

2：振幅相同，均为$A_1$。

3：$t$的系数相同，均为$\omega$。

4：$x$的系数相同，符号相反，负号为右行波，正号为左行波，大小为$2\pi/\lambda$。

5：$\varphi_1$和$\varphi_2$不一定相同。

作用：由一个分波的波函数求另一个分波的波函数

右行波： $\Psi_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1 - 2\pi\frac{x}{\lambda})$

左行波： $\Psi_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_2 + 2\pi\frac{x}{\lambda})$

令： $\alpha = \omega t + \frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}$； $\beta = \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}$

则： $\psi_1 = A_1\cos(\alpha-\beta)$； $\psi_2 = A_1\cos(\alpha+\beta)$

合成波： $\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A_1\cos\beta\cos\alpha$

$$= 2A_1\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right)$$

驻波波函数

振幅随 $x$ 变化

波线上各点振幅不等，不是后一质点重复前一质点的振动，即：不是行波，称为驻波。

特例： $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$， $\psi = 2A_1\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos(\omega t + \varphi)$

## 2.驻波的特征：

(1)波线上各点作振幅不等的谐振动，不是后一质点重复前 一质点的振动。

o、b、d、f ...振动最强：

$A=2A_1$，$I=4I_1$，称为**波腹**。

左、右行波在该点同向。

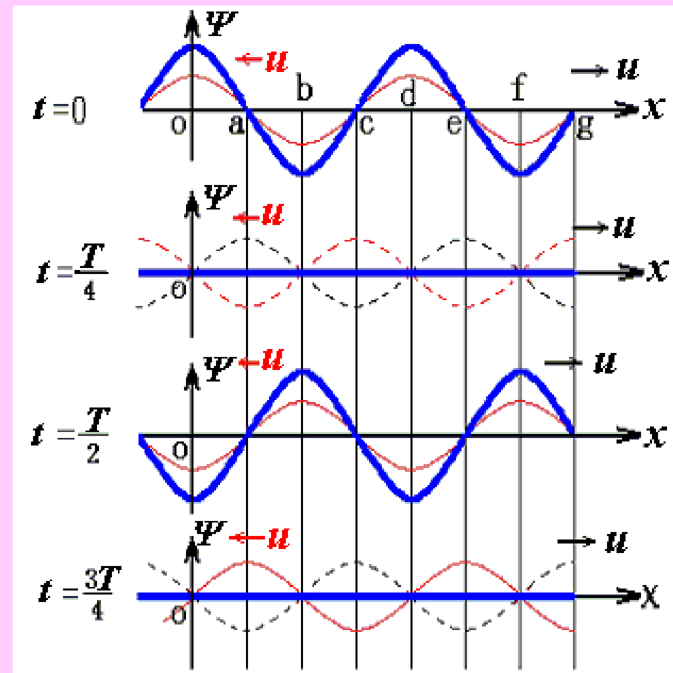
a、c、e、g...

始终不振动(振动相消)：

$A=0$， $I=0$， 称为**波节**。

左、右行波在该点反向。

其余点：$0<A<2A_1$ ，$0<I<4I_1$




(2)两相邻波腹（或波节）相距$\lambda/2$

(3) 相邻波节之间各点振动同相

同一波节两侧各点振动反相

稳定的分段振动

(4) 能流密度

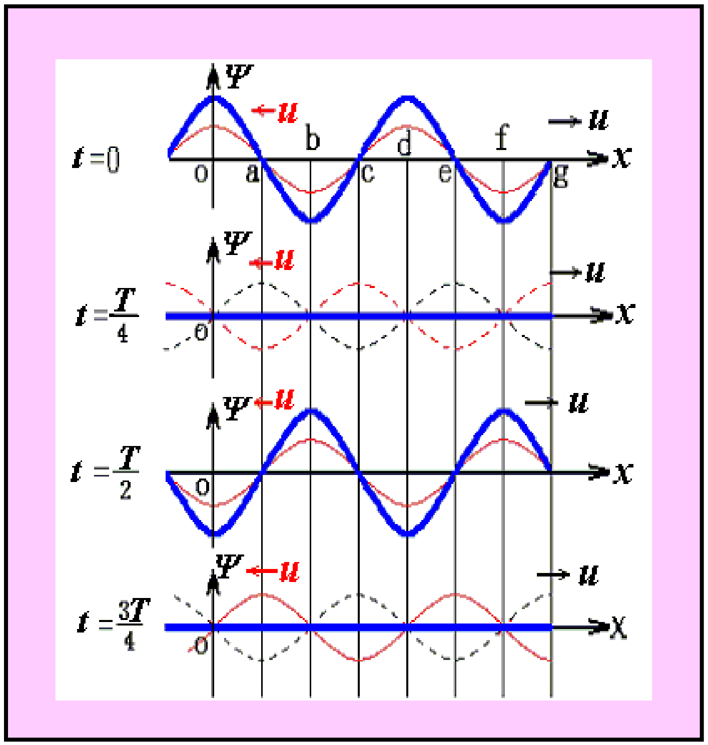
$$\vec{I}=\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2\vec{u}_1+\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2\vec{u}_2$$

$$=\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2\vec{u}_1-\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2\vec{u}_1=0$$

不向前传播能量。$E_k$、$E_p$ 在波腹、波节附近周期性转移。

$t=0,\ \frac{T}{2}$:各质点在各自振动的最大位移处: $v=0, E_k=0$。

$E=E_p$,集中于波节附近（形变最大）。




$t=\frac{T}{4},\frac{3}{4}T$：各质点到达平衡位置，形变为零，$E_p=0$。

$E=E_k$,集中于波腹附近(速率最大)。

$E_k$、$E_p$在波腹、波节附近周期性转移。能量不向前传播。

振动、行波、驻波能量分布比较：

谐振动：质点在最大位移处：$E_K = 0$  $E_p = \frac{1}{2}kA^2$

质点在平衡位置处：$E_p = 0$  $E_k = \frac{1}{2}kA^2$

行波：介质元在最大位移处：$\mathrm{d}E_K = \mathrm{d}E_p = \mathrm{d}E = 0$

能量传播

介质元在平衡位置处：$\mathrm{d}E_K$、$\mathrm{d}E_p$、$E$ 最大。

驻波：各质点最大位移 $E_\mathrm{k} = 0$,

$E = E_\mathrm{p}$集中于波节附近。

能量不传播

各质点达平衡位置，$E_\mathrm{p} = 0$,

$E = E_\mathrm{k}$集中于波腹附近。

(5) 驻波系统可以有许多固有频率。

设两端固定的弦长为$L$，波长为$\lambda_n$，则：

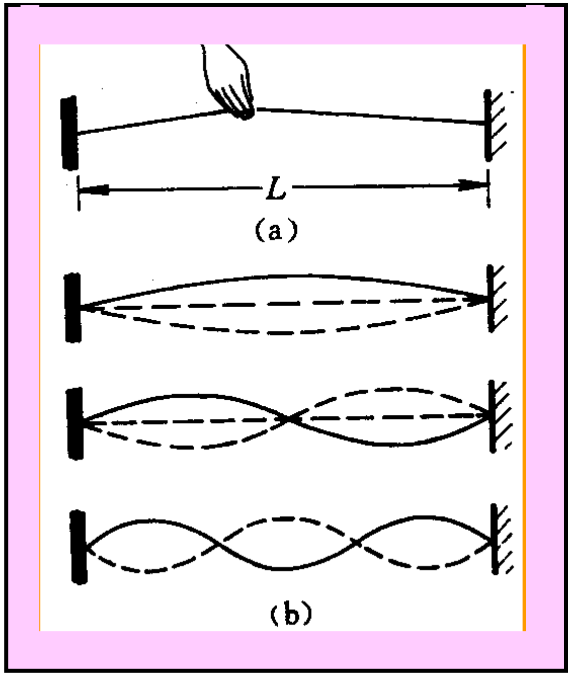
弦上驻波条件：$L = n \cdot \dfrac{\lambda_n}{2}$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad \nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{nu}{2L}$$

$(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$

基频　谐频

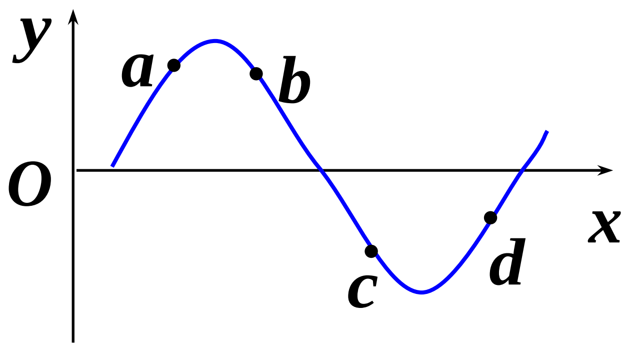
弦振动的固有频率




简正模式：所有可能的振动方式。

总之：“驻”波
- 外形象波，具有空间、时间周期性；
- 波形、能量不向前传播、无滞后效应。

**练习：**某时刻的驻波波形如图所示，其中$a$、$b$ 两点的相位差是 ___0___ ，$b$、$c$两点的相位差是 ___$\pi$___ 。



例：由合成波波函数：

$$\psi = 2A_1\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\cos\left(\omega t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right)$$

求波腹和波节的位置。

解：由$A_{max}=2A_1$ 得： $\dfrac{2\pi x}{\lambda}+\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{2}=\pm k\pi$

波腹位置： $x=\pm k\cdot\dfrac{\lambda}{2}-\dfrac{\lambda}{4\pi}(\varphi_2-\varphi_1)\quad (k=0,1,2,\cdots)$

由 $A_{min}=0$ 得：$\dfrac{2\pi x}{\lambda}+\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{2}=\pm(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

波节位置：$x=\pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{4}-\dfrac{\lambda}{4\pi}(\varphi_2-\varphi_1)\quad (k=0,1,2,\cdots)$

## ▲3.半波损失

全波反射：反射波与入射波在反射点同相的反射。

全波反射条件：
- 自由端反射
- 或
- 波密 → 波疏界面反射

反射波与入射波在反射点同相 → 波腹

半波反射：反射波与入射波在反射点反相的反射。

半波反射条件：
- 固定端反射
- 或
- 波疏 → 波密界面反射

反射波与入射波在反射点反相 → 波节；相位突变$\pi$

半波损失：反射波与入射波在反射点反相，波程有$\lambda/2$突变的现象。

4.例题

教材 $P_{72}$ 13.20

已知：平面简谐行波 $A$、$\nu$、$u$ 沿 $+x$ 传播

$t=0$ 时 原点处 $\psi_0=0, v_0>0$, $P$为反射点

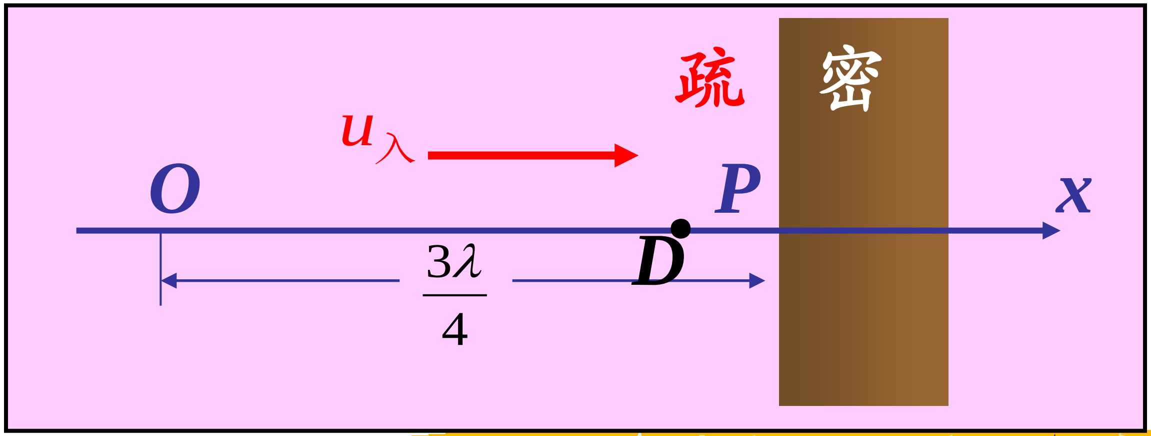
求：

(1)入射波函数；

(2)反射波函数；

(3)$D(DP=\lambda/6)$处入射波和反射波合振动方程。（补充）

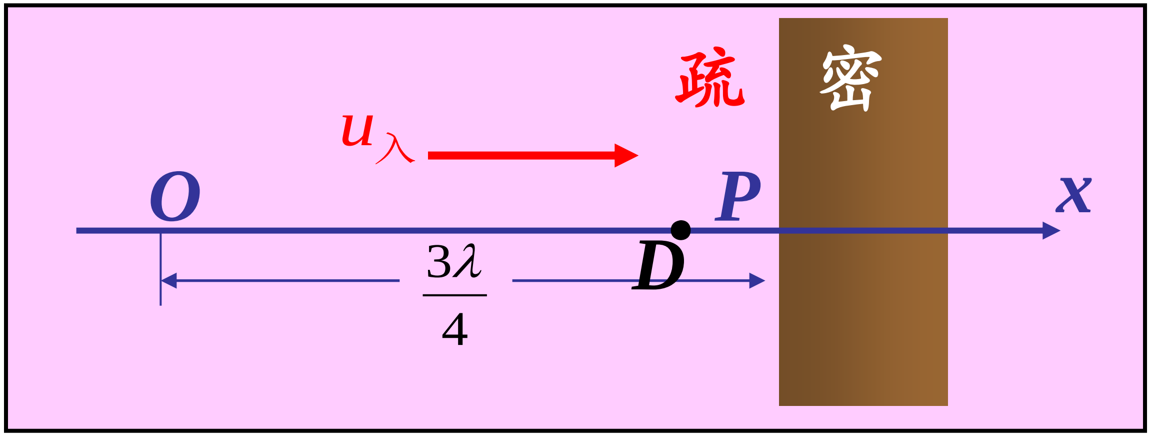
(4)$x$轴上干涉静止点（驻波波节）位置。



解:(1):原点为参考点

$t = 0$ 时原点处

$$\psi_0 = 0, \quad v_0 > 0$$

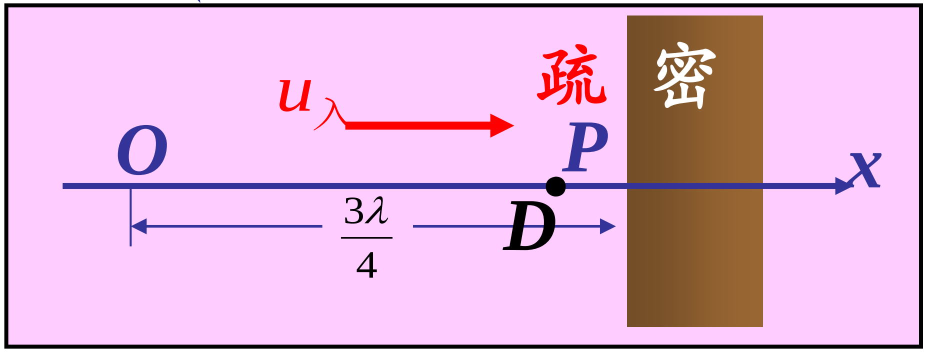



原点初相 $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$

$$\psi_0 = A\cos(2\pi\nu t - \frac{\pi}{2})$$

$$\Psi_\lambda = A\cos[2\pi\nu(t - \frac{x}{u}) - \frac{\pi}{2}]$$

$$\Psi_{\lambda} = A\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}]$$




(2):入射波在反射点P引起的振动：

$$\Psi_{入P} = A\cos[2\pi\nu(t-\frac{3/4\,\lambda}{u})-\frac{\pi}{2}] = A\cos 2\pi\nu t$$

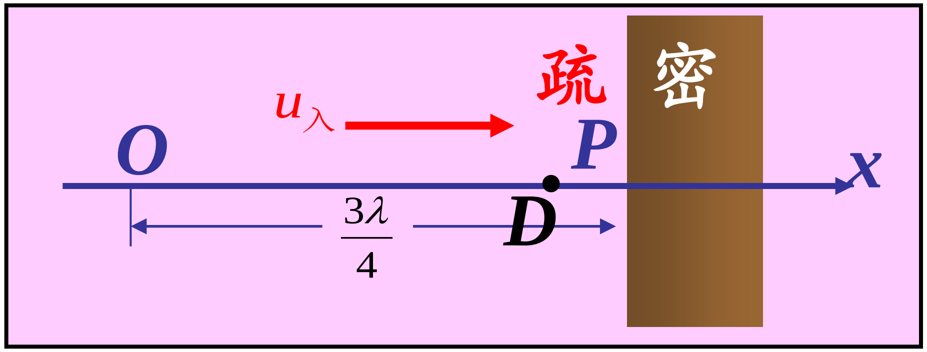
反射波在P点振动： $\Psi_{反P} = A\cos(2\pi\nu t+\pi)$

实际上P为波节： $\Psi_{p} = \Psi_{P入}+\Psi_{P反} = 0$ 半波损失

以P为参考点，反射波波函数：

$$\Psi_{反} = A\cos[2\pi\nu(t+\frac{x-\frac{3}{4}\lambda}{u})+\pi] = A\cos[2\pi\nu(t+\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}]$$

**(3):** 入射波、反射波波函数：




$$\Psi_{入}=A\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}]$$

$$\Psi_{反}=A\cos[2\pi\nu(t+\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}]$$

$$\Psi_{合}=\psi_{入}+\psi_{反}=2A\cos(2\pi\nu\cdot\frac{x}{u})\cos(2\pi\nu t-\frac{\pi}{2})\longrightarrow 驻波$$

又 $x_D=\frac{3\lambda}{4}-\frac{\lambda}{6}=\frac{7}{12}\lambda$，故D点合振动方程

$$\psi_D=2A\cos(2\pi\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{7}{12}\lambda)\cos(2\pi\nu t-\frac{\pi}{2})$$

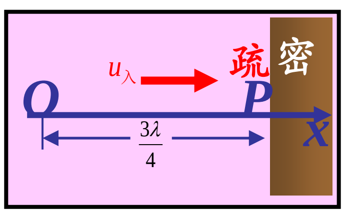
$$=-\sqrt{3}A\sin(2\pi\nu t)$$

**(4):** $$\Psi_{合} = \psi_{入} + \psi_{反} = 2A\cos(2\pi\nu\cdot\frac{x}{u})\cos(2\pi\nu t - \frac{\pi}{2})$$

静止：$$\cos(2\pi\nu\cdot\frac{x}{u}) = \cos(2\pi\cdot\frac{x}{\lambda}) = 0$$

$$\therefore 2\pi\cdot\frac{x}{\lambda} = (k+\frac{1}{2})\pi \quad (k = 0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$$

得：$$x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$$




又 $x \le \frac{3}{4}\lambda$ $\quad\therefore k = 1,0,-1,-2,\cdots\cdots$

即所求波节位置：$$x = \frac{3}{4}\lambda, \frac{\lambda}{4}, -\frac{\lambda}{4}, -\frac{3}{4}\lambda, -\frac{5}{4}\lambda, \cdots$$

# 作业

1.No.3;

2.自学本章各例题并完成书上的习题(对照书后的参考答案自己订正)。

## 第六周星期三交作业