概率论与数理统计 B 习题三答案

A

1. 二维随机变量(X,Y)只能取下列数组中的值：（0，0），（−1，1），$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$，（2，0），且取这些组值的概率依次为$\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{12},\frac{5}{12}$.求这二维随机变量的分布律，并写出关于$X$及关于$Y$的边缘分布律。

解：由题意可得(X,Y)的联合分布律为

$X\backslash Y$	0	$\frac{1}{3}$	1
-1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{6}$	0	0
2	$\frac{5}{12}$	0	0

2. 一口袋中有四个球，它们依次标有数字 1，2，2，3.从这袋中任取一球后，不放回袋中，再从袋中任取一球.设每次取球时，袋中每个球被取到的可能性相同.以X,Y分别记第一、二次取得的球上标有的数字，求(X,Y)的分布律及$P(X=Y)$。

解：X可能的取值为$1,2,3$，Y可能的取值为$1,2,3$，相应的，其概率为

$$
\begin{aligned}
&P(X=1,Y=1)=0,P(X=1,Y=2)=\frac{1\times2}{4\times3}=\frac{1}{6},P(X=1,Y=3)=\frac{1\times1}{4\times3}=\frac{1}{12},\\
&P(X=2,Y=1)=\frac{2\times1}{4\times3}=\frac{1}{6},P(X=2,Y=2)=\frac{2\times1}{4\times3}=\frac{1}{6},P(X=2,Y=3)=\frac{2\times1}{4\times3}=\frac{1}{6},\\
&P(X=3,Y=1)=\frac{1}{12},P(X=3,Y=2)=\frac{1\times2}{4\times3}=\frac{1}{6},P(X=3,Y=3)=0
\end{aligned}
$$

或写成

$X\backslash Y$	1	2	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0

$P(X=Y)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=3)=\frac{1}{6}$。

3. 箱子中装有 10 件产品，其中 2 件是次品，每次从箱子中任取一件产品，共取 2 次. 定义随机变量 X,Y 如下：$X=\begin{cases}0, & \text{若第一次取出正品},\\ 1, & \text{若第一次取出次品},\end{cases}$ $Y=\begin{cases}0, & \text{若第二次取出正品},\\ 1, & \text{若第二次取出次品},\end{cases}$ 分别就下面两种情况（1）放回抽样，（2）不放回抽样。

求：（1）二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律；

（2）关于 X 及关于 Y 的边缘分布律；

（3）X 与 Y 是否独立，为什么？

解：（1）在放回抽样时，X 可能取的值为 $0,1$，Y 可能取的值也为 $0,1$，且

$$P(X=0,Y=0)=\frac{8\times 8}{10\times 10}=\frac{16}{25},P(X=0,Y=1)=\frac{8\times 2}{10\times 10}=\frac{4}{25},$$
$$P(X=1,Y=0)=\frac{2\times 8}{10\times 10}=\frac{4}{25},P(X=1,Y=1)=\frac{2\times 2}{10\times 10}=\frac{1}{25},$$

或写成

$X\backslash Y$	0	1
0	$\frac{16}{25}$	$\frac{4}{25}$
1	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$

在无放回情形下，X、Y 可能取的值也为 0 或 1，但取相应值的概率与有放回情形下不一样，具体为

$$P(X=0,Y=0)=\frac{8\times 7}{10\times 9}=\frac{28}{45},P(X=0,Y=1)=\frac{8\times 2}{10\times 9}=\frac{8}{45},$$
$$P(X=1,Y=0)=\frac{2\times 8}{10\times 9}=\frac{8}{45},P(X=1,Y=1)=\frac{2\times 1}{10\times 9}=\frac{1}{45},$$

或写成

$X\backslash Y$	0	1
0	$\frac{28}{45}$	$\frac{8}{45}$
1	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

（2）在有放回情况下 X 的边缘分布律为

X	0	1
概率	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

Y 的边缘分布律为

Y	0	1
概率	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

在无放回情况下 X 的边缘分布律为

X	0	1
概率	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

Y 的边缘分布律为

Y	0	1
概率	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

（3）在有放回情况下，由于 $P(X=0,Y=0)=\frac{16}{25}$，而 $P(X=0)P(Y=0)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$，即 $P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)$；容易验证 $P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1)$, $P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0)$, $P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)$，由独立性定义知 X 与 Y 相互独立。

在无放回情况下，由于 $P(X=0,Y=0)=\frac{28}{45}$，而 $P(X=0)P(Y=0)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$，易见 $P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)P(Y=0)$，所以 X 与 Y 不相互独立。

4. 设二维随机变量 (X,Y) 服从在区域 D 上的均匀分布，其中区域 D 为 x 轴，y 轴及直线 y=2x+1 围成的三角形区域.求：（1）(X,Y) 的联合密度函数；（2）$P\left(-\frac{1}{4}<X<0,0<Y<\frac{1}{4}\right)$；（3）关于 X 及关于 Y 的边缘密度函数；（4）X 与 Y 是否独立，为什么？

解：（1）区域 D 见图 1：

易算得 D 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，所以 (X,Y) 的密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}4, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(X,Y) 的分布函数：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dxdy$$

当 $x<-\frac{1}{2}$ 或 $y<0$ 时，$F(x,y)=0$；

当 $-\frac{1}{2}\le x<0,0\le y<2x+1$ 时，

$F(x,y)=\int_{0}^{y}dy\int_{\frac{y-1}{2}}^{x}4dx=4xy+2y-y^{2}$；

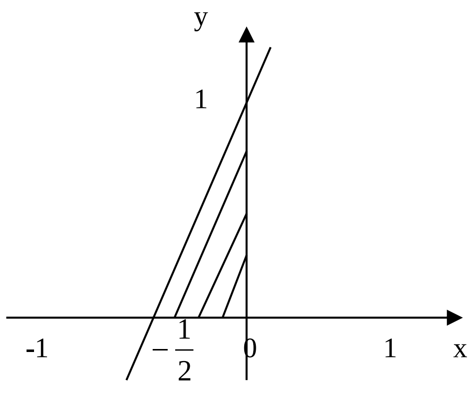


图 1

当 $-\frac{1}{2}\le x<0, y\ge 2x+1$ 时，$F(x,y)=\int_{-\frac{1}{2}}^{x}dx\int_{0}^{2x+1}4dy=4x^{2}+4x+1$；

当 $x\ge0,0\le y<1$ 时，$F(x,y)=\int_{0}^{y}dy\int_{\frac{y-1}{2}}^{0}4dx=2y-y^{2}$；

当 $x\ge0, y\ge1$ 时，$F(x,y)=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}dx\int_{0}^{2x+1}4dy=1$

（2）X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{2x+1}4dy, & -\frac{1}{2}<x<0\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}4(2x+1), & -\frac{1}{2}<x<0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_{\frac{y-1}{2}}^{0}4dx, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（3）$f\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)=4$，而 $f_X\left(-\frac{1}{4}\right)=2,\ f_Y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$，易见 $f\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)\neq f_X\left(-\frac{1}{4}\right)f_Y\left(\frac{1}{3}\right)$，

所以 X 与 Y 不相互独立。

5. 设随机变量 X，Y 是相互独立且分别具有下列分布律：

X	-2	-1	0	0.5
概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

Y	-0.5	1	3
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

写出表示 (X,Y) 的联合分布律。

解：由于 X 与 Y 相互独立，因此

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j),\ i=1,2,3,4,\ j=1,2,3,$$

例如 $P(X=-2,Y=-0.5)=P(X=-2)P(Y=-0.5)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

其余的联合概率可同样算得，具体结果为

$X\backslash Y$	-0.5	1	3
-2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$
0.5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

6. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}ke^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0,\\ 0 & 其他,\end{cases}$ 求：（1）系数 k;（2）$P(0\le X\le 1,0\le Y\le 2)$；（3）证明 X 与 Y 相互独立。

解：（1）k 必须满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，即 $\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}ke^{-(3x+4y)}dx=1$，经计算得 $k=12$；

（2）$P(0\le X\le 1,0\le Y\le 2)=\int_0^2 dy\int_0^1 12e^{-(3x+4y)}dx=(1-e^{-3})(1-e^{-8})$；

（3）关于 X 的边缘密度函数：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}12e^{-(3x+4y)}dy, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

同理可求得 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

易见 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$，因此 X 与 Y 相互独立。

7. 设 X 与 Y 是相互独立的随机变量，X 服从 $[0,0.2]$ 上的均匀分布，Y 服从参数为 5 的指数分布，求：(X,Y) 的联合密度函数及 $P(X\ge Y)$。

解：由均匀分布的定义知

$$f_X(x)=\begin{cases}5, & 0<x<0.2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

由指数分布的定义知

$$f_Y(y)=\begin{cases}5e^{-5y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

因为 X 与 Y 独立，易得 (X,Y) 的联合密度函数

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}25e^{-5y}, & 0<x<0.2, y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

概率 $P(X\ge Y)=\iint\limits_G f(x,y)dxdy$，

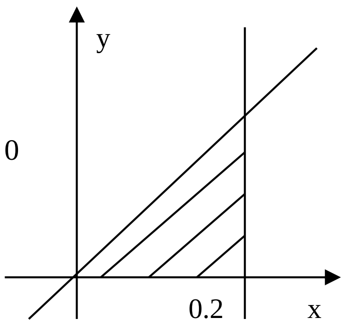


图 2

其中区域 $G=\{(x,y)\,|\,x\ge y\}$ 见图 2，经计算有

$$P(X\ge Y)=\int_0^{0.2}dx\int_0^x 25e^{-5y}dy=\int_0^{0.2}5(1-e^{-5x})dx=e^{-1}。$$

8. 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}k(1-x)y, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0 & 其他,\end{cases}$，

（1）求常数 k;（2）分别求关于 X 及关于 Y 的边缘密度函数;（3）X 与 Y 是否独立，为什么？

解：（1）k 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，即 $\int_0^1 dx\int_0^x k(1-x)ydy=1$ 解得 $k=24$；

（2）X 的边缘密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 24(1-x)ydy, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 12x^2(1-x), & 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} \int_y^1 24(1-x)ydx, & 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 12y(1-y)^2, & 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

（3）$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=24\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$，而 $f_X(x)=12\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, f_Y(y)=12\times\frac{1}{4}\times\frac{9}{16}=\frac{27}{16}$，

易见 $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\neq f_X\left(\frac{1}{2}\right)f_Y\left(\frac{1}{4}\right)$，因此 X 与 Y 不相互独立。

9. 设随机变量 X 与 Y 的联合分布律为

$X\backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{25}$	b
1	a	$\frac{3}{25}$
2	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$

且 $P(Y=1\mid X=0)=\frac{3}{5}$，（1）求常数 a,b 的值；（2）当 a,b 取（1）中的值时，X 与 Y 是否独立，为什么？

解：（1）a,b 必须满足 $\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}p_{ij}=1$，即 $\frac{2}{25}+b+a+\frac{3}{25}+\frac{1}{25}+\frac{2}{25}=1$，可推出 $a+b=\frac{17}{25}$，

另外由条件概率定义及已知的条件得

$$P(Y=1\mid X=0)=\frac{P(X=0,Y=1)}{P(X=0)}=\frac{b}{\frac{2}{25}+b}=\frac{3}{5}$$

由此解得 $b=\frac{3}{25}$，结合 $a+b=\frac{17}{25}$ 可得到 $a=\frac{14}{25}$，

即 $\begin{cases} a=\frac{14}{25} \\ b=\frac{3}{25} \end{cases}$

（2）当 $a=\frac{14}{25},b=\frac{3}{25}$ 时，可求得 $P(X=0)=\frac{5}{25}, P(Y=0)=\frac{17}{25}$，易见

$$P(X=0,Y=0)=\frac{2}{25}\neq P(X=0)P(Y=0)$$

因此，X 与 Y 不独立。

10. 一口袋中有四个球，它们依次标有数字$1,2,2,3$。从这袋中任取一球后，不放回袋中，再从袋中任取一球。设每次取球时，袋中每个球被取到的可能性相同。以 X、Y 分别记第一、二次取到的球上标有的数字，求当$Y=2$时 X 的条件分布律。

解：易知 $p_{\cdot 2}=P(Y=2)=\dfrac{1}{2}$，因此$Y=2$时 X 的条件分布律为

$X\|Y=2$	1	2	3
概率	$\dfrac{p_{12}}{p_{\cdot 2}}=\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{p_{22}}{p_{\cdot 2}}=\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{p_{32}}{p_{\cdot 2}}=\dfrac{1}{3}$

11. 随机变量(X,Y)在 D 上服从均匀分布，其中 D 为 x 轴、y 轴及直线 $y=2x+1$

围成的三角形区域，求当 $X=x,\left(-\dfrac{1}{2}<x<0\right)$时 Y 的条件密度函数。

解：X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} 4(2x+1), & -\dfrac{1}{2}<x<0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由条件密度函数的定义知当 $X=x,\left(-\dfrac{1}{2}<x<0\right)$时 Y 的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} \dfrac{4}{4(2x+1)}, & 0<y<2x+1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{2x+1}, & 0<y<2x+1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

12. 设二维随机变量(X,Y)的分布律

$X\backslash Y$	1	2	3
1	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{8}$
2	$\dfrac{1}{8}$	0	0
3	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{8}$	0

求以下随机变量的分布律：（1）$X+Y$；（2）$X-Y$；（3）$2X$；（4）XY。

解：

概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$
$X+Y$	2	3	4	3	4	5	4	5	6
$X-Y$	0	-1	-2	1	0	-1	2	1	0
XY	1	2	3	2	4	6	3	6	9

从而得到

（1）

$X+Y$	2	3	4	5
概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

（2）

$X-Y$	-2	-1	0	1	2
概率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

（3）从联合分布律可求得 X 的边缘分布律为

X	1	2	3
概率	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

由此得 $2X$ 的分布律为

X	2	4	6
概率	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

（4）

XY	1	2	3	6
概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

13. 设随机变量 X、 Y 相互独立，$X \sim B\left(1,\frac{1}{4}\right), Y \sim B\left(1,\frac{1}{4}\right)$,

（1） 记随机变量 $Z = X + Y$，求 Z 的分布律;

（2） 记随机变量 $U = 2X$，求 U 的分布律。

从而证实：即使 X、Y 服从同样的分布，$X+Y$ 与 $2X$ 的分布并不一定相同，直观地解释这一结论。

解：（1）由于 $X \sim B\left(1,\frac{1}{4}\right), Y \sim B\left(1,\frac{1}{4}\right)$，且 X 与 Y 独立，由分布可加性知 $X+Y \sim B\left(2,\frac{1}{4}\right)$，即 $P(Z=k) = P(X+Y=k) = \binom{2}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{2-k}, k = 0,1,2$,经计算有

Z	0	1	2
概率	$\dfrac{9}{16}$	$\dfrac{6}{16}$	$\dfrac{1}{16}$

（2）由于

X	0	1
概率	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{4}$

因此

$U=2X$	0	2
概率	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{4}$

易见 $X+Y$ 与 $2X$ 的分布并不相同。直观的解释是的 $X+Y$ 与 $2X$ 的取值并不相同，这是因为 X 与 Y 并不一定同时取同一值，因而导致它们的分布也不同。

14. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$X\backslash Y$	1	2	3
1	$\dfrac{1}{9}$	0	0
2	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{9}$	0
3	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{9}$

（1）求 $U=\max(X,Y)$ 的分布律；（2）求 $V=\min(X,Y)$ 的分布律。

解：（1）随机变量 U 可能取到的值为 1，2，3 中的一个，且

$$P(U=1)=P(\max(X,Y)=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{9};$$

$$P(U=2)=P(\max(X,Y)=2)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2)$$
$$=0+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3};$$

$$P(U=3)=P(\max(X,Y)=3)$$
$$=P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=3)+P(X=3,Y=1)+P(X=3,Y=2)$$
$$+P(X=3,Y=3)$$
$$=0+0+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9};$$

综合有

U	1	2	3
概率	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{5}{9}$

（2）随机变量 V 可能取到的值为 1，2，3 中的一个，且

$$P(V=1)=P(\min(X,Y)=1)$$
$$=P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=1)$$
$$=\frac{1}{9}+0+0+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9};$$

同理可求得 $P(V=2)=\dfrac{1}{3}, P(V=3)=\dfrac{1}{9}$，综合有

V	1	2	3
概率	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

15. 设二维随机变量 (X,Y) 服从在 D 上的均匀分布，其中 D 为直线 $x=0, y=0$，$x=2, y=2$ 所围成的区域，求 $X-Y$ 的分布函数及密度函数。

解：(X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 0<x<2, 0<y<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 $Z=X-Y$，则 Z 的分布函数

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\le z)\\&=P(X-Y\le z)\\&=\iint\limits_{D_{zz}} f(x,y)dxdy\end{aligned}$$

其中区域 $D_z=\{(x,y): x-y\le z\}$，

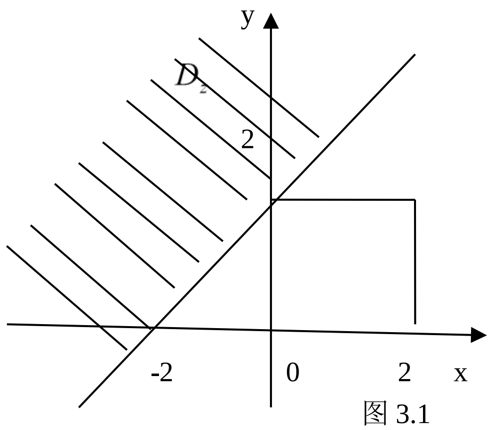


图 3.1

当 $z<-2$ 时，积分区域见图 3.1，此时

$$F_Z(z)=\iint\limits_{D_z} 0dxdy=0$$

当 $-2\le z<0$ 时，积分区域见 D_z 图 3.2，此时

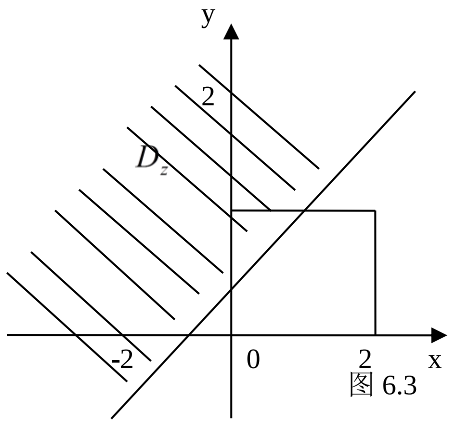


图 6.3

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=\iint\limits_{D_z} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_{z'}}\frac{1}{4}dxdy\\&=\frac{1}{4}\times\text{区域}D_{z'}\text{的面积}\\&=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}(2-z)^2=\frac{1}{8}(2+z)^2\end{aligned}$$

其中 $D_{z'}$ 是区域 D_z 限在 $0<x<2, 0<y<2$ 中的那部分。

当 $0\le z<2$ 时，积分区域 D_z 见图 3.3，此时

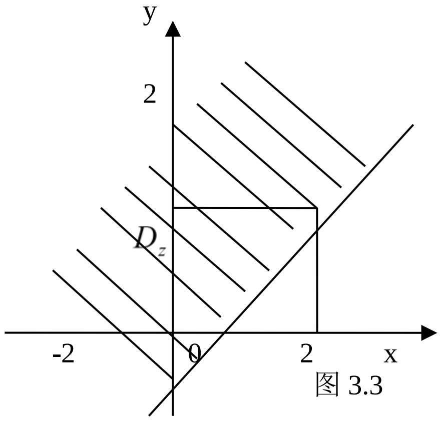


图 3.3

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \iint_{D_z} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{z'}} \frac{1}{4}dxdy \\
&= \frac{1}{4} \times \text{区域}D_{z'}\text{的面积} \\
&= \frac{1}{4} \times \left(4 - \frac{1}{2} \times (2-z)\right)^2 \\
&= 1 - \frac{1}{8}(2-z)^2
\end{aligned}
$$

其中 $D_{z'}$ 是区域 D_z 限在 $0<x<2, 0<y<2$ 中的那部分。

当 $z \geq 2$ 时，积分区域 D_z 见图 3.4，此时

$F_Z(z) = \iint_{D_z} f(x,y)dxdy = 1$。

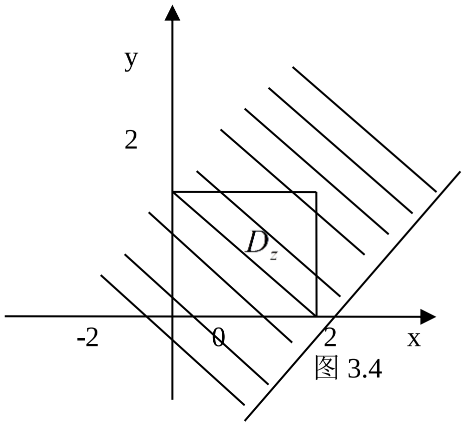


图 3.4

综合有

$$
F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < -2; \\ \frac{1}{8}(2+z)^2, & -2 \leq z < 0; \\ 1 - \frac{1}{8}(2-z)^2, & 0 \leq z < 2; \\ 1, & z \geq 2, \end{cases}
$$

Z 的密度函数

$$
f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2+z), & -2 < z \leq 0 \\ \frac{1}{4}(2-z), & 0 \leq z < 2; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
$$

B

1. 设二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度 $f(x,y) = \begin{cases} Ce^{-2(x+y)} & x, y \in (0,+\infty) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，试求：

（1）常数 C；（2）(X,Y) 落在区域 $D = \{(x,y) \mid x>0, y>0, x+y \leq 1\}$ 内的概率。

解：由概率密度的性质可知：

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} Ce^{-2(x+y)}dxdy \\
&= C\left(\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-2y}dy\right) = \frac{C}{4}
\end{aligned}
$$

即$C=4$；

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}4e^{-2(x+y)}dy$$
$$=4\int_0^1 e^{-2x}dx\int_0^{1-x}e^{-2y}dy=\int_0^1 2e^{-2x}(1-e^{-2(1-x)})dx$$
$$=1-3e^{-2}$$

2. 设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases} ax^2+2xy^2, & 0\le x<1, 0\le y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，试求：（1）常数$a$；（2）边缘概率密度$f_X(x)$，$f_Y(y)$；（3）$(X,Y)$落在区域$G=\{(x,y)\,|\,x+y<1\}$内的概率。

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1(ax^2+2xy^2)dxdy=\frac{a}{3}+\frac{1}{3}$，得$a=2$；

（2）当$0\le x<1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1 2(x^2+xy^2)dy=2x^2+\frac{2}{3}x$，

，

当$0\le y<1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^1 2(x^2+xy^2)dx=y^2+\frac{2}{3}$，得：

$$f_X(x)=\begin{cases} 2x^2+\frac{2}{3}x, & 0\le x< \\ 0，其他 \end{cases}，\quad f_Y(y)=\begin{cases} y^2+\frac{2}{3}, & 0\le y<1 \\ 0，其他 \end{cases}$$

（3）$P\{(x,y)\in G\}=\iint\limits_{x+y<1}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}2(x^2+xy^2)dy=\frac{1}{5}$。

3. 设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	1	2
1	0.4	0.3
2	0.2	0.1

试求（1）(X,Y)的分布函数$F(x,y)$；（2）X，Y的边缘分布律；（3）$Z=X-Y$的概率分布；（4）概率$P(X>1.2,Y>1.6)$。

解：（1）(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & x<1,或y<1 \\ 0.4 & 1<x<2,1<y<2 \\ 0.7 & 1<x<2,y\ge 2 \\ 0.6 & x\ge 2,1<y<2 \\ 1 & x\ge 2,y\ge 2 \end{cases}$$

（2）X，Y的边缘分布律分别为

X	1	2
P	0.7	0.3

Y	1	2
P	0.6	0.4

（3）$Z=X-Y$ 的概率分布为

$Z=X\text{-}Y$	-1	0	1
P	0.3	0.5	0.2

（4）概率 $P(X>1.2, Y>1.6)=0.1$

4. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为：

X \ Y	0	1	2
0	0.30	$\boldsymbol{a}$	0.05
1	$\boldsymbol{b}$	0.15	0.10

如果 $P\{X=1|Y=0\}=\dfrac{1}{3}$，试求：（1）常数 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的值；（2）$\boldsymbol{Y}$ 在 $\boldsymbol{X=1}$ 条件下的分布律；（3）X 与 Y 是否相互独立？

解：（1）由 $P\{X=1|Y=0\}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{Y=0\}}=\dfrac{b}{0.3+b}\Rightarrow b=0.15$

$$a=1-0.45-0.15-0.15=0.25$$

（2）$P\{X=1\}=0.15+0.15+0.1=0.4$

Y/X=1	0	1	2
P	3/8	3/8	2/8

（3）$P\{X=0,Y=2\}=0.30\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}=0.6\times0.45$

所以不满足独立性条件，故此 X 与 Y 不独立。

5. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ax(x+2y), & 0<x<1,\ 0<x<1 \\ 0, & 其\quad 它 \end{cases}$$

试求（1）常数 A;（2）条件概率密度 $f_{X|Y}(x\,|\,y)$ 和 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$；（3）$P\{Y-X\leq 0\}$。

解（1）$1=\int_0^1\int_0^1 Ax(x+2y)dxdy=A\left[\int_0^1\int_0^1 x^2dxdy+\int_0^1\int_0^1 2xydxdy\right]=A\times\dfrac{5}{6}$，得 $A=\dfrac{6}{5}$

（2）$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^1\dfrac{6}{5}x(x+2y)dy=\dfrac{6}{5}(x^2+x) & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1\dfrac{6}{5}x(x+2y)dx=\dfrac{2}{5}(1+3y) & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

条件概率密度

当 $0<y<1$ 时，$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{3x(x+2y)}{1+3y} & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

当 $0<x<1$ 时，$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{x+2y}{1+x} & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

（3） $P\{Y-X\le 0\}=P\{Y\le X\}=\int_0^1\int_0^x \frac{6}{5}x(x+2y)dxdy=\frac{6}{5}\int_0^1 2x^3dx=\frac{3}{5}$

6. 设二维随机变量(X，Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y) & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$，

试求条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$。

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^2 \frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{1}{4}(x+1), & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

故当$0<x<2$时，有 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{x+y}{2(x+1)}, & 0<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

7. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且具有下述概率密度：

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

试求：（1）$Z=X+Y$ 的概率密度；（2）$M=\max\{X,Y\}$ 的概率密度；（3）$N=\min\{X,Y\}$ 的概率密度。

解：（1） $Z=X+Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$

考虑当 $z\le 0$ 时，$f_Z(z)=0$， 当 $z>0$ 时，有

$$f_Z(z)=\int_0^z e^{-x}2e^{-2(z-x)}dx=2(e^{-z}-e^{-2z})$$

即 $$f_Z(z)=\begin{cases}2(e^{-z}-e^{-2z}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

（2） $M=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$$

而 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$

故 $F_M(z)=\begin{cases}(1-e^{-z})(1-e^{-2z}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$，

$$f_M(z)=\begin{cases}e^{-z}+e^{-2z}-3e^{-3z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

（3） $N=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_X(z)]=\begin{cases}1-e^{-3z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

故 N 的概率密度为

$$f_N(z)=\begin{cases}3e^{-3z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

8. 已知随机变量 X 和 Y 的联合分布律为

(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$P(X=x,Y=y)$	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.15

求：（1）$P(Y>0\vert X=0)$；（2）设 $F(x,y)$ 表示 X 和 Y 的联合分布函数，求 $F(1,1)$ 的值；（3）$X+\min(X,Y)$ 的分布律。

解：（1）$P(Y>0\vert X=0)=\dfrac{P(Y>0,X=0)}{P(X=0)}=\dfrac{P(Y=1,X=0)}{P(X=0)}=\dfrac{3}{5}$，

（2）$F(1,1)=P(X\le 1,Y\le 1)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+$

$P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)$

=0.7，

（3）$X+\min(X,Y)$ 的分布律为

$X+\min(X,Y)$	0	1	2
P	0.25	0.25	0.35

9. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}C, & x^2\le y\le x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（1）求常数 C；（2）试求边缘概率密度 $f_X(x)$；（3）试求条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$。

解：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}Cdy=1$

常数 C=6；

（2）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6dy=6(x-x^2) & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（3）

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

当 $0\le y\le 1$ 时

$$f_{X|Y}(y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(\sqrt{y}-y)} & y\le x\le\sqrt{y}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

10. 一射手进行射击，击中目标的概率为 $p\ (0<p<1)$，射击直至击中 2 次目标时为止。令 X 表示首次击中目标所需要的射击次数，Y 表示总共所需要的射击次数。（1）求二维随机变量(X,Y)的联合分布律；（2）求随机变量 Y 的边缘分布律；（3）求在 $Y=n$ 时，X

的条件分布律．并解释此分布律的意义。

解：（1）随机变量Y的取值为$2,\quad 3,\quad 4,\quad \cdots$；而随机变量$X$的取值为$1,\quad 2,\quad \cdots,\quad n-1$，并且

$$P(X=m,\quad Y=n)=P\{\text{第一次命中目标在第}m\text{次，第二次命中目标在第}n\text{次}\}$$

$=q^{m-1}p\cdot q^{n-m-1}p=q^{n-2}p^2$，（其中$q=1-p$），$(n=2,\quad 3,\quad 4,\quad \cdots;\quad m=1,\quad 2,\quad \cdots,\quad n-1)$；

（2）$P(Y=n)=\sum\limits_{m=1}^{n-1}P(X=m,\quad Y=n)=\sum\limits_{m=1}^{n-1}q^{n-2}p^2=(n-1)q^{n-2}p^2\ (n=2,\quad 3,\quad 4,\quad \cdots)$，

即随机变量Y的边缘分布律为$P(Y=n)=(n-1)q^{n-2}p^2\ (n=2,\quad 3,\quad 4,\quad \cdots)$；

（3）由于$P(X=m|Y=n)=\dfrac{P(X=m,\quad Y=n)}{P(Y=n)}=\dfrac{q^{n-2}p^2}{(n-1)q^{n-2}p^2}=\dfrac{1}{n-1}$，

因此在$Y=n$时，X的条件分布律为

$$P(X=m|Y=n)=\frac{1}{n-1}\ (m=1,\quad 2,\quad \cdots,\quad n-1),$$

这表明，在$Y=n$的条件下，X的条件分布是一个“均匀”分布．它等可能地取值$1,\quad 2,\quad \cdots,\quad n-1$。

C

1. 某班车起点站上车人数X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为$p(0<p<1)$，且中途下车与否相互独立。以Y表示中途下车的人数，求：

（1）在发车时有n个乘客的条件下，中途有m人下车的概率；

（2）二维随机变量(X,Y)的概率分布。

解：（1）因为每位乘客中途下车与否相互独立，中途下车的概率为p，在发车时有n个乘客的条件下，中途有m人下车的概率为条件概率，再根据n重贝努利概型可得：

$$P\{Y=m\mid X=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\qquad 0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots$$

（2）因为$X\sim\pi(\lambda)$，其概率分布为　$P\{X=n\}=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\qquad n=0,1,2,\cdots$，

于是二维随机变量(X,Y)的概率分布为：

$$P\{X=n,Y=m\}=P\{X=n\}P\{Y=m\mid X=n\}=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\bullet C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\quad 0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots$$

2. 设二维连续型随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y & x^2\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，

求条件概率密度 $P(Y \geq 0.75 \mid X = 0.5)$。

解：$f_x(\mathrm{x}) = \begin{cases} \int_{x^2}^{1} \dfrac{21}{4} x^2 y dy = \dfrac{21}{8} x^2 (1 - x^4) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

当 $-1 < x < 1$ 时，$f_{\mathrm{y}|x}(y \mid \mathrm{x}) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{2y}{1 - x^4} & -1 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，

$$f_{\mathrm{y}|x}(y \mid \mathrm{x=0.5}) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{32y}{15} & -1 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

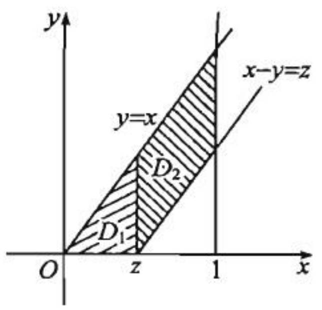
$$P(Y \geq 0.75 \mid X = 0.5) = \int_{0.75}^{1} \frac{32y}{15} dy = \frac{7}{15}$$

3. 设随机变量 (X,Y) 的分布密度为，$\varphi(x,y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$，试求 $Z = X - Y$ 的分布密度。

解：当 $z < 0$ 时，$F_Z(z) = 0$；当 $0 \leq z < 1$ 时，

$$F_Z(z) = \iint_{D_1} 3x dx dy + \iint_{D_2} 3x dx dy = \int_0^z dx \int_0^x 3x dy + \int_z^1 dx \int_{x-z}^x 3x dy = \frac{3}{2} z - \frac{1}{2} z^3;$$

当 $z \geq 1$ 时，$F_Z(z) = \int_0^1 dx \int_0^x 3x dy = 1$；故 $\varphi_Z(z) = F_z^{'}(z) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}(1 - z^2), & 0 \leq z < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$。



4. 设随机变量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 相互独立，其概率密度函数分别为：

$$f_X(x) = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{0 < x < 1} \\ \mathbf{0} & \text{其它} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \mathbf{2y} & \mathbf{< y0<} \\ \mathbf{0} & \text{其它} \end{cases}$$

试求：（1）$\boldsymbol{Z = X + Y}$；（2）$\boldsymbol{M = \max(X, Y)}$ 的概率密度函数。

解：（1）$$f_Z\ z\ =\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\ x\ f_Y\ z-x\ dx=\begin{cases}\int_0^z 2\ z-x\ dx=z^2, & 0<z<1\\ \int_{z-1}^1 2\ z-x\ dx=2z-z^2, & 1\le z<2\\ 0, & 其他\end{cases}，$$

（2）$$F_M\ z\ =F_X\ z\ F_Y\ z\ =\begin{cases}0, & z\le 0\\ z^3, & 0<z<1\\ 1, & z\ge 1\end{cases}\ \Rightarrow\ f_M\ z\ =\begin{cases}3z^2, & 0<z<1\\ 0, & 其他\end{cases}。$$

5. 设随机变量 X 和 Y 同分布，已知事件 $A=\{X>a\}$ 和事件 $B=\{Y>a\}$ 相互独立，而且 $P(A\cup B)=3/4$，随机变量 X 和 Z 相互独立，它们的概率密度函数分别如下：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2 & 0\le x\le 2\\ 0 & 其他\end{cases}\qquad f(z)=\begin{cases}2z & 0\le z\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

求：（1）确定常数 a 和 X 的分布函数；（2）确定 $M=X+2Z$ 的概率密度。

解：（1）$\dfrac{3}{4}=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2P(A)-P^2(A)\to P(A)=0.5$，

$P(A)=\int_a^2\dfrac{3}{8}x^2dx=1-\dfrac{1}{8}a^3=0.5\to a=\sqrt[3]{4}$，

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{1}{8}x^3 & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}；$$

（2）$F_M(m)=P(X+2Z\le m)$，

当$m<0$时, $F_M(m)=P(X+2Z\le m)=0$，

当$0\le m<2$时, $F_M(m)=P(X+2Z\le m)=\int_0^m dx\int_0^{\frac{m-x}{2}}\dfrac{3}{8}x^2\times 2zdz$，

当$2\le m<4$时, $F_M(m)=P(X+2Z\le m)=\int_0^{m-2}dx\int_0^1\dfrac{3}{8}x^2\times 2zdz+\int_{m-2}^2 dx\int_0^{\frac{m-x}{2}}\dfrac{3}{8}x^2\times 2zdz$

当$m\ge 4$时, $F_M(m)=P(X+2Z\le m)$,

$$f_M(m)=\frac{dF_M(m)}{dm}=\begin{cases}\dfrac{1}{64}m^4 & 0<m<2\\ \dfrac{3}{64}(m-2)^4-\dfrac{m}{16}(m-2)^3+\dfrac{m}{2}-\dfrac{3}{4} & 2<m<4\\ 0 & 其他\end{cases}。$$