

第五章作业

1. 计算码长 $n=5$ 的二元重复码的译码错误概率。假设无记忆二元对称信道中正确传递概率 \bar{p} ，错误传递概率 $p=1-\bar{p}$ 。此码能检测出多少错误？又能纠正多少错误？若 $p=0.01$ ，译码错误概率是多大？

2. 设一离散无记忆信道，其信道矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

- (1) 计算信道容量；

- (2) 找出一个码长为 2 的重复码，其信息传输率为 $\frac{1}{2}\log 5$ （即 5 个码字）。如果按最大似然译码准则设计译码器，求译码器输出端的平均错误概率 P_E （输入码字为等概率分布）；

3. 某系统(8,4)线性分组码，其后 4 位校验位 v_i 与信息位 $u_i, i=0, 1, 2, 3$ 的关系如下

$$v_0 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$v_1 = u_0 + u_1 + u_2$$

$$v_2 = u_0 + u_1 + u_3$$

$$v_3 = u_0 + u_2 + u_3$$

编码器的硬件逻辑连接图。

4. 某系统 (7, 4) 线性分组码，生成矩阵为：

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1) 列出其标准阵列译码表

- (2) 如果接收序列为 $R=0010100, R=0111000, R=1110010$ 通过标准阵列译码表译码

2. 计算码长 $n=5$ 的二元重复码的译码错误概率。假设无记忆二元对称信道中正确传递概率 \bar{p} ，错误传递概率 $p=1-\bar{p}$ 。此码能检测出多少错误？又能纠正多少错误？若 $p=0.01$ ，译码错误概率是多大？

解： 码长 $n=5$ 的二元重复码的码字是 (00000, 11111)。这码的最小距离 $d_{\min}=5$ 。

因为 $d_{\min}=5=4+1$

所以此码用于检测错误能检测出所有发生小于等于 4 位码元的随机错误。

又因为 $d_{\min}=5=2\times 2+1$

所以此码用于纠正错误能纠正所有发生小于等于 2 位码元的随机错误。

可以根据最大似然译码准则的译码规则或择多译码的译码规则来计算这 $n=5$ 的二元重复码的错误概率。这两种计算结果是一致的。所以，采用择多译码的译码规则来计算，得：

$$\begin{aligned} P_E &= C_5^3 P^3 \bar{P}^2 + C_5^4 P^4 \bar{P} + C_5^5 P^5 \\ &= 10P^3 \bar{P}^2 + 5P^4 \bar{P} + P^5 \end{aligned}$$

若 $p=0.01$, 则 $P_E \approx 9.8 \times 10^{-6} \approx 1.0 \times 10^{-5}$

2. 设一离散无记忆信道，其信道矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

- (1) 计算信道容量；

- (2) 找出一个码长为 2 的重复码，其信息传输率为 $\frac{1}{2} \log 5$ （即 5 个码字）。如果按最

大似然译码准则设计译码器，求译码器输出端的平均错误概率 P_E （输入码字为等概率分布）；

解：（1）根据信道矩阵 P ，可知其是一对称信道，所以信道容量为：

$$C = \log 5 - H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$$

$$= \log 5 - \log 2$$

$$\approx 1.322 \text{ 比特/符号}$$

(2) 设信道的输入符号集 $A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, 输出符号集 $B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, 其传递信道矩阵为 P , 任选码长为 2 的重复码:

$$C: W_1 = 00, \quad W_2 = 11, \quad W_3 = 22, \quad W_4 = 33, \quad W_5 = 44$$

因为输入码字等概率分布, 这重复码 $n=2, M=5$, 因此满足信息传输率

$$R = \frac{\log M}{n} = \frac{1}{2} \log 5$$

此信道是无记忆信道, 满足

$$P(\beta_j | W_i) = P(b_{j_1} | a_{i_1}) P(b_{j_2} | a_{i_2})$$

$$\beta_j = (b_{j_1}, b_{j_2}), \quad W_i = (a_{i_1}, a_{i_2}), \quad b_{j_1}, b_{j_2} \in B, \quad a_{i_1}, a_{i_2} \in A$$

$$j=1, 2, \dots, 25, \quad i=1, 2, \dots, 5$$

下面给出传递概率 $P(\beta_j | W_i)$ 的矩阵为:

| | 00 | 01 | 02 | 03 | 04 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 20 | 21 |
|------------|-----|-----|----|----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|-----|
| $W_1 = 00$ | 1/4 | 1/4 | 0 | 0 | 0 | 1/4 | 1/4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $W_2 = 11$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/4 | 1/4 | 0 | 0 | 0 | 1/4 |
| $W_3 = 22$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $W_4 = 33$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $W_5 = 44$ | 1/4 | 0 | 0 | 0 | 1/4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| 22 | 23 | 24 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 |
|-----|-----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|----|----|-----|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1/4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1/4 | 1/4 | 0 | 0 | 0 | 1/4 | 1/4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/4 | 1/4 | 0 | 0 | 0 | 1/4 | 1/4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/4 | 0 | 0 | 0 | 1/4 |

根据最大似然译码准则, 确定的译码规则是:

$$\beta_j = \begin{matrix} 00 \\ 01 \\ 10 \end{matrix} \} \text{译成 } 00, \quad \beta_j = \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 21 \end{matrix} \} \text{译成 } 11, \quad \beta_j = \begin{matrix} 22 \\ 23 \\ 32 \end{matrix} \} \text{译成 } 22$$

$$\beta_j = \begin{matrix} 33 \\ 34 \\ 43 \end{matrix} \} \text{译成 } 33, \quad \beta_j = \begin{matrix} 40 \\ 44 \\ 04 \end{matrix} \} \text{译成 } 44$$

在选择码 C 重复码的情况下，因为对于其他 β_j ， $P(\beta_j|W_i)=0$ ，所以其他 β_j 在输出端不会出现。可计算得：

$$\begin{aligned} P_E &= \frac{1}{M} P_e^{(i)} = \frac{1}{M} \sum_{Y^2} \{P(\beta_j|W_i), F(\beta_j) \neq W_i\} \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{5}{4} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3. 某系统(8,4)线性分组码，其后 4 位校验位 v_i 与信息位 $u_i, i=0, 1, 2, 3$ 的关系如下

$$v_0 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$v_1 = u_0 + u_1 + u_2$$

$$v_2 = u_0 + u_1 + u_3$$

$$v_3 = u_0 + u_2 + u_3$$

件逻辑连接图。

解：

(1) 根据 4 位校验位 v_i 与信息位 $u_i, i=0, 1, 2, 3$ 的关系可以得到生成矩阵

$$G = [I_{4 \times 4} \mid P_{4 \times 4}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

根据生成矩阵可以得到系统的校验矩阵 H

$$H = [P^T \mid I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

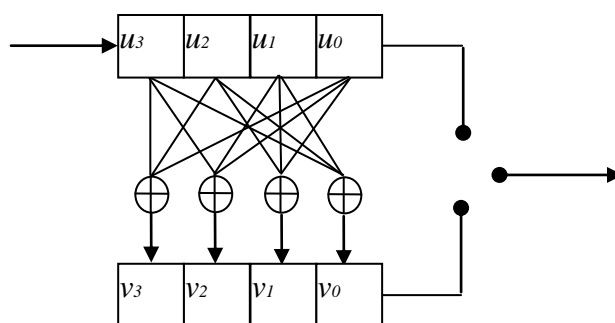
(2) 由于输入的 4 位信息组，
可以的到码字如下

码字的最小汉明距离 $d_{\min} = 4$

| | | |
|------|----------------------|-----------|
| 0000 | 根据 $C=mG$ 得到码字 | 0000 0000 |
| 0001 | | 0001 1011 |
| 0010 | | 0010 1101 |
| 0011 | | 0011 0110 |
| 0100 | | 0100 1110 |
| 0101 | | 0101 0101 |
| 0110 | | 0110 0011 |
| 0111 | | 0111 1000 |
| 1000 | | 1000 0111 |
| 1001 | | 1001 1100 |
| 1010 | | 1010 1010 |
| 1011 | | 1011 0001 |
| 1100 | | 1100 1001 |
| 1101 | | 1101 0010 |
| 1110 | | 1110 0100 |
| 1111 | | 1111 1111 |

图

(3) 该编码器的硬件逻辑连接



4. 某系统 (7, 4) 线性分组码，生成矩阵为：

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 列出其标准阵列译码表

(2) 如果接受序列为 R=0010100, R=0111000, R=1110010 通过标准阵列译码表译码.

解：

(3) (1) 由于输入的 4 位信息组，可以的到码字如下

| | | |
|------|-----------------|----------|
| 0000 | 根据 C=mG 得到码字 | 0000 000 |
| 0001 | | 0001 011 |
| 0010 | | 0010 110 |
| 0011 | | 0011 101 |
| 0100 | | 0100 111 |
| 0101 | | 0101 100 |
| 0110 | | 0110 001 |
| 0111 | | 0111 010 |
| 1000 | | 1000 101 |
| 1001 | | 1001 110 |
| 1010 | | 1010 011 |
| 1011 | | 1011 000 |
| 1100 | | 1100 010 |
| 1101 | | 1101 001 |
| 1110 | | 1110 100 |
| 1111 | | 1111 111 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 000 000 | 001 011 | 010 110 | 011 101 | 100 111 | 101 100 | 110 001 | 111 010 | 000 101 | 001 110 | 010 011 | 011 000 | 100 010 | 101 001 | 110 100 | 111 111 |
| 000 001 | 001 010 | 010 111 | 011 100 | 100 110 | 101 101 | 110 000 | 111 011 | 000 100 | 001 111 | 010 010 | 011 001 | 100 011 | 101 000 | 110 101 | 111 110 |
| 000 010 | 001 001 | 010 100 | 011 111 | 100 101 | 101 110 | 110 011 | 111 000 | 000 111 | 001 100 | 010 001 | 011 010 | 100 000 | 101 011 | 110 110 | 111 101 |
| 000 100 | 001 111 | 010 010 | 011 001 | 100 011 | 101 000 | 110 101 | 111 110 | 000 001 | 001 010 | 010 111 | 011 100 | 100 110 | 101 101 | 110 000 | 111 011 |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|----------------|
| 001 000 | 000 011 | 011 110 | 010 101 | 101 111 | 100 100 | 111 001 | 110 010 | 001 101 | 000 110 | 011 011 | 010 000 | 101 010 | 100 001 | 111 100 | 11 011 1 |
| 010 000 | 011 011 | 000 110 | 001 101 | 110 111 | 111 100 | 100 001 | 101 010 | 010 101 | 011 110 | 000 011 | 001 000 | 110 010 | 111 001 | 100 100 | 10 111 1 |
| 100 000 | 101 011 | 110 110 | 111 101 | 000 111 | 001 100 | 010 001 | 011 010 | 100 101 | 101 110 | 110 011 | 111 000 | 000 010 | 001 001 | 010 100 | 011 111 |
| 000 000 | 001 011 | 010 110 | 011 101 | 100 111 | 101 100 | 110 001 | 111 010 | 000 101 | 001 110 | 010 011 | 011 000 | 100 010 | 101 001 | 110 100 | 111 111 |