概率论与数理统计 B 习题六答案

A

第七章 置信区间：

1. 假定某商店中一种商品的月销售量服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$\sigma$ 未知。为了合理的确定对该商品的进货量，需对 μ 和 σ 作估计，为此随机抽取七个月，其销售量分别为：64，57，49，81，76，70，59，试求 μ 的双侧 0.95 置信区间和方差 σ^2 的双侧 0.9 置信区间。

解：由于 μ 和 σ 都未知，故 μ 的 $1-\alpha$ 双侧置信区间为

$$\left[\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right],$$

σ^2 的 $1-\alpha$ 双侧置信区间为

$$\left[\frac{nS^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right],$$

代入数据得

$$\bar{x}=65.14,s^2=108.41,s^*=11.25,t_{0.975}(6)=2.45,n=7,\chi^2_{0.95}(6)\chi^2_{0.05}(6)=1.635,$$

μ 的 0.95 双侧置信区间观测值为 $\left[65.14-2.45\times\frac{11.25}{\sqrt{7}},65.14+2.45\times\frac{11.25}{\sqrt{7}}\right]$，即为 $[54.74,75.54]$。

σ^2 的 0.9 双侧置信区间观测值为 $\left[\frac{7\times108.41}{12.592},\frac{7\times108.41}{1.635}\right]$，即为 $[60.3,464.14]$。

2. 随机地取某种子弹 9 发作试验，测得子弹速度的 $s^*=11$，设子弹速度服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，求这种子弹速度的标准差 σ 和方差 σ^2 的双侧 0.95 置信区间。

解：由于 μ 未知，故 σ^2 的双侧置信区间为 $\left[\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$，代入数据得

$$n=9,S^{*2}=121,\chi^2_{0.975}(8)=17.535,\chi^2_{0.025}(8)=2.18,$$

σ^2 的 0.95 双侧置信区间观测值为$\left[\frac{8\times121}{17.535},\frac{8\times121}{2.18}\right]$，即为$[55.204,444.037]$。故$\sigma$的 0.95 双侧置信区间观测值为$\left[\sqrt{55.204},\sqrt{444.037}\right]$，即为$[7.43,21.07]$。

第八章 假设检验：

3. 设检验某批矿砂中的含镍量，随机抽取 7 份样品，测得含镍量百分比分别为：

$$2.67 \quad 3.33 \quad 3.69 \quad 3.01 \quad 3.98 \quad 3.15 \quad 3.69$$

假设这批矿砂中的含镍量的百分比服从正态分布，试在$\alpha=0.05$下检验这批矿砂中的含镍量的百分比为3.25。（附表：t 分布的分位点表：$t_{0.05}(6)=1.9432$，$t_{0.025}(6)=2.4469$，$t_{0.05}(7)=1.8946$，$t_{0.025}(7)=2.3646$。）

解：设X表示这批矿砂中的含镍量的百分比，则$X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$。

$$H_0:\ \mu=3.25\quad(H_1:\ \mu\neq3.25)$$

由于总体方差未知，故用检验统计量：

$$T=\frac{\overline{X}-3.25}{S}\sqrt{n}$$

当H_0成立时，$T=\frac{\overline{X}-3.25}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$，

由于显著性水平$\alpha=0.05$，$n=7$，所以$t_{0.025}(6)=2.4469$．因此检验的拒绝域为

$$W_1=\left\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_7):\ \frac{|\overline{x}-3.25|}{s}\sqrt{n}\geq2.4469\right\}$$

由样本观测值，得

$$\overline{x}=3.36,\quad s=0.455668007$$

所以，

$$\frac{|\overline{x}-3.25|}{s}\sqrt{n}=\frac{|3.36-3.25|}{0.455668007}\sqrt{7}=0.638694486<2.4469$$

因此，不拒绝H_0，可以认为这批矿砂中的含镍量的百分比为3.25。

4. 设从正态总体$X\sim N(\mu,1)$中随机抽出一个容量$n=16$的样本，由观察值计算得$\overline{x}=5.2$，试求参数μ的置信水平为$1-\alpha=0.95$的置信区间，并借此判断能否在显著性水平$\alpha=0.05$下接受假设$H_0:\mu=5.5$。

解：在方差$\sigma^2=1$已知条件下参数μ的置信水平为$1-\alpha=0.95$的置信区间为：

$$\left(\bar{x}\pm\frac{1}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)=\left(5.2\pm\frac{1}{\sqrt{16}}z_{0.025}\right)=\left(5.2\pm\frac{1}{4}\times1.96\right)=\left(4.71,5.69\right)$$

实际上可以看出数值 $5.5\in\left(4.71,5.69\right)$，落在参数 μ 的置信水平为0.95的置信区间内，所以应接受 H_0。另一方面，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下假设 $H_0:\mu=5.5$ 的拒绝域为：

$$W=(-\infty,-1.96]\cup[1.96,+\infty)=\left\{\bar{x}\ \middle|\ \left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{1/\sqrt{16}}\right|\ge 1.96\right\}$$

又因 $\bar{x}=5.2$， $\mu_0=5.5$， $n=16$， $\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{1/\sqrt{16}}\right|=\left|\frac{5.2-5.5}{1/\sqrt{16}}\right|=1.2<1.96$，落在接受域内，所以也应接受 H_0。

5. 某种电器零件的平均电阻为 2.64Ω，改变工艺后，测得 100 个零件的平均电阻为 2.62Ω。设改变工艺后的电阻的方差保持在 0.06^2，问：新工艺对此零件的电阻有无显著性的影响（$\alpha=0.01$）？

解 是 $\sigma^2=0.06^2$ 已知、单总体下均值 μ 的双侧检验. 待检假设 $H_0:\mu=\mu_0=2.64,\alpha=0.01.$

因为 $\bar{x}=2.62,\quad n=100,$

所以用检验统计量 U，得

$$|u|=\frac{|\bar{x}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{|2.62-2.64|}{0.06/10}=3.333.$$

而 $Z_{\alpha/2}=Z_{0.005}=2.576$，经比较知 $|u|=3.333>Z_{0.005}=2.576$，故拒绝 H_0，认为改变工艺后，电阻零件有显著变化.

6. 设某次考试的成绩服从正态分布，随机抽取了 36 位考生的成绩，算得平均分为 66.5 分，标准差 $S=15$。问：在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，是否可以认为这次考试的平均成绩为 70 分？

解：假设这次考生的成绩为 X，则 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，把从中抽取的容量为 n 的样本均值记为 $\overline{X}$，样本标准差为 S。本题中是在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设：

$$H_0:\mu=70,\qquad H_1:\mu\neq70$$

检验的拒绝域为；$|t|=\frac{|\bar{x}-70|}{s}\sqrt{n}\ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，

由 $n=36,\quad \bar{x}=66.5,\quad s=15,\quad t_{0.975}(36-1)=2.0301$ 算的：$|t|=\frac{|66.5-70|}{15}\sqrt{36}=1.4<2.0301$

所以接受 H_0，即在显著性水平 0.05 下，可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分。

B

第七章 置信区间：

1. 设总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$，且 $x_1, x_2 \cdots x_{10}$ 是样本观察值，样本方差 $s^2 = 2$，（1）求 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间；（2）已知 $Y = \dfrac{X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$，求 $D\left(\dfrac{X^2}{\sigma^3}\right)$ 的置信水平为 0.95 的置信区间；（$\chi^2_{0.975}(9) = 2.70$， $\chi^2_{0.025}(9) = 19.023$）。

解：（1）σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间为 $\left(\dfrac{18}{\chi^2_{0.025}(9)}, \dfrac{18}{\chi^2_{0.975}(9)}\right)$，即为（0.9462，6.6667）；

（2）$D\left(\dfrac{X^2}{\sigma^3}\right) = \dfrac{1}{\sigma^2} D\left(\dfrac{X^2}{\sigma^2}\right) = \dfrac{1}{\sigma^2} D[\chi^2(1)] = \dfrac{2}{\sigma^2}$；

由于 $D\left(\dfrac{X^2}{\sigma^3}\right) = \dfrac{2}{\sigma^2}$ 是 σ^2 的单调减少函数，置信区间为 $\left(\dfrac{2}{\overline{\sigma}^2}, \dfrac{2}{\underline{\sigma}^2}\right)$，

即为（0.3000，2.1137）。

2. 从自动车床加工的一批零件中随机抽取 10 个，测得其尺寸与规定尺寸的偏差(单位：微米)分别为：

2　1　−2　3　2　4　−2　5　3　4

记零件的尺寸偏差为 X，假定 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，试求未知参数 μ 和 σ^2 的置信度为 0.95 的区间估计。（$t_{0.05/2}(9) = 2.2622$， $\chi^2_{0.025}(9) = 19.023$， $\chi^2_{0.975}(9) = 2.7$）

解：（1）方差未知时，均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha = 0.95$ 的置信区间为：

$$\left(\overline{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

由本题中数据得：$\alpha = 0.05$， $n = 10$， $t_{0.05/2}(9) = 2.2622$， $\overline{x} = 2$， $s = 2.4037$

故所求置信区间为：

$$\left(2 - \frac{2.4037}{\sqrt{10}} \times 2.2622, 6 + \frac{2.4037}{\sqrt{10}} \times 2.2622\right) = (0.2805, 3.7195)$$

（2）方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha = 0.95$ 的置信区间为：

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

由本题中数据得：$\alpha = 0.05$， $n = 10$， $\chi^2_{0.025}(9) = 19.023$， $\chi^2_{0.975}(9) = 2.7$， $s^2 = 5.7778$

故所求置信区间为：$\left(\frac{9\times 5.7778}{19.023},\frac{9\times 5.7778}{2.7}\right)=(2.7335,19.2593)$。

第八章 假设检验：

3. 设某机床加工的零件长度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， 今抽查 16 个零件，测得长度(单位: mm)为: 12.15, 12.12, 12.01, 12.08, 12.09, 12.16, 12.03, 12.01, 12.06, 12.13, 12.07, 12.11, 12.08, 12.01, 12.03, 12.06, 试求: (1) σ^2 的置信度为 95% 的置信区间; (2) 在 5%的显著性水平下，能否认为该机床加工的零件长度为 12.10mm。

解：由数据计算得: $\overline{x}=12.075$, $s^2=0.00244$，$s=0.049396$，

置信水平 $1-\alpha=0.95$, $n=16$, $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(15)=27.488$, $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(15)=6.262$,

则 σ^2 的置信水平为 0.95 的区间估计为

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$$
$$=\left[\frac{15\times 0.00244}{27.488},\frac{15\times 0.00244}{6.262}\right]=[0.0013,\ 0.0058]$$

本问题是方差未知的条件下，$\mu=12.10$ 的假设检验，故

a) H_0: $\mu=12.10$, H_1: $\mu\neq 12.10$

b) $\alpha=0.05$, $n=16$

c) $T=\frac{\overline{X}-12.1}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

d) H_0 的拒绝域为

$$|T|=\left|\frac{\overline{X}-12.1}{S/\sqrt{16}}\right|\geq t_{0.025}(15)=2.1314$$

e) 故

$$|t|=\left|\frac{\overline{x}-12.1}{s/\sqrt{16}}\right|=\left|\frac{12.075-12.1}{0.049396/4}\right|=2.02444<2.1314$$

所以接受H_0，即认为该机床加工的零件长度为 12.10mm。

4. 食品厂用自动装罐机装罐头食品，每罐标准重量为 500 克，每隔一定时间需要检验机器的工作情况，现抽 10 罐，测得其重量（单位：克）：

495，510，505，498，503，492，502，512，497，506，

假设重量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，试求在显著性水平 $\alpha=0.02$ 时，机器工作是否正常？

解：① $H_0:\mu=500$，② 因σ^2未知，所以选取统计量，在H_0成立的条件下

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-500}{S/\sqrt{10}}\sim t(9),$$

由样本数据，得$\bar{x}=502$，$s=6.5$，$T_0=\dfrac{502-500}{6.5/\sqrt{10}}=9.7$，

查t分布表，得$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.01}(9)=2.8214$。

因为$|T_0|=0.97<2.8214$，故可认为自动装罐机工作正常。

5. 已知一批零件的长度X（单位：cm）服从正态分布$N\left(4.53,0.108^2\right)$，某日从中随机地抽取 9 个零件，测到长度的平均值为 4.49cm，样本方差为0.0676^2，（1）假定总体方差无变化，能否认为该日零件的平均长度仍为 4.53；（2）如果不能确定总体方差是否发生变化，能否认为该日零件的平均长度仍为 4.53。（α=0.05）

解：（1）$H_0:\mu=4.53\qquad H_1:\mu\neq 4.53$

当H_0成立时，$\dfrac{\bar{X}-4.53}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$，拒绝域为$\left|\dfrac{\bar{X}-4.53}{\sigma}\sqrt{n}\right|>Z_{\frac{\alpha}{2}}$，

$\Phi(Z_{\frac{0.05}{2}})=1-0.025=0.975$，所以$Z_{\frac{0.05}{2}}=1.96$，$\left|\dfrac{4.49-4.53}{0.108}\sqrt{9}\right|=1.11<1.96$，

H_0成立，可以认为该日零件的平均长度仍为 4.53。

（2）$H_0:\mu=4.53\qquad H_1:\mu\neq 4.53$

当H_0成立时，$\dfrac{\bar{X}-4.53}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$，拒绝域为$\left|\dfrac{\bar{X}-4.53}{S}\sqrt{n}\right|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，

因为$t_{\frac{0.05}{2}}(8)=2.306$，$\left|\dfrac{4.49-4.53}{0.0676}\sqrt{9}\right|=1.775<2.306$，$H_0$成立，可以认为该日零件的平均长度仍为 4.53。

6. 设某厂生产一种钢索，其断裂强度$X(\mathrm{kg/cm^2})$服从正态分布$N(\mu,40^2)$。从中随机选取一个容量为 9 的样本，由观测值计算得平均值$\bar{x}=780(\mathrm{kg/cm^2})$。能否据此认为这批钢索的平均断裂强度为$800(\mathrm{kg/cm^2})$ $(\alpha=0.05)$？（$z_{0.05/2}=1.96$）

解：这是正态总体$N(\mu,\sigma^2)$方差$\sigma^2=40^2$已知时，关于均值μ的双边检验问题。检验过程如下：

（1）根据实际问题提出假设：$H_0:\mu=800;\ H_1:\mu\neq 800$；

（2）选定显著性水平$\alpha=0.05$，确定样本容量$n=9$；

（3）选择恰当的统计量：$U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$，在$H_0$为真时，检验统计量：

$$U=\frac{\overline{X}-800}{40/\sqrt{9}}\sim N(0,1)$$

（4）查标准正态分布表可得 $z_{0.05/2}=1.96$ 的值，确定 H_0 的拒绝域为：

$$|u|=\left|\frac{\overline{x}-800}{40/\sqrt{9}}\right|\geq 1.96$$

（5）根据样本值计算 $\overline{x}=780$，及检验统计量的观测值

$$|u|=\left|\frac{\overline{x}-800}{40/\sqrt{9}}\right|=\left|\frac{780-800}{40/\sqrt{9}}\right|=1.5<1.96$$

落在接受域内，所以应接受 H_0，即在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下可以认为这批钢索的平均断裂强度为 $800(\text{kg/cm}^2)$。

7. 某纯净水生产厂用自动灌装机灌装纯净水，该自动灌装机正常灌装量 $X\sim N(18,\sigma^2)$，（1）若 $X_1,\cdots,X_n$ 为其样本，$\overline{X}$ 为样本均值，计算 $P(\frac{\overline{X}-EX}{n\sigma}>0)$；

（2）现测量了某天 9 个灌装样品的灌装量（单位：L），数据如下：

18.0　17.6　17.3　18.2　18.1　18.5　17.9　18.1　18.3

在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，试问该天灌装量是否正常？($t_{0.025}(8)=2.306$)

解：(1) 由于 $\overline{X}\sim N(18,\frac{\sigma^2}{9})$，则 $P(\frac{\overline{X}-EX}{n\sigma}>0)=P(\overline{X}-EX>0)=P(\overline{X}>18)=0.5$，

（2）这是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 方差 σ^2 未知时，关于均值 μ 的双边检验问题：

1）根据实际问题提出假设：$H_0:\mu=18;\ H_1:\mu\neq 18$

2）选定显著性水平 $\alpha=0.05$，确定样本容量 $n=9$；

3）选择恰当的统计量：$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$，在 H_0 为真时，检验统计量

$$T=\frac{\overline{X}-18}{S/\sqrt{9}}\sim t(8)$$

4）由 $t_{0.05/2}(8)=2.306$，确定 H_0 的拒绝域：$|t|=\left|\frac{\overline{x}-18}{s/\sqrt{9}}\right|\geq 2.306$

5）根据样本值计算 $\overline{x}=18$，$s=0.364$，及检验统计量的观测值 $|t|=\left|\frac{\overline{x}-18}{s/\sqrt{9}}\right|=\left|\frac{18-18}{0.364/\sqrt{9}}\right|=0<2.306$

落在接受域内，所以应接受H_0，即在显著性水平$\alpha = 0.05$下，可以认为该天平均灌装量是 18L，为正常的。