第六章作业题

1. 试求下列信号的单边 Laplace 变换及其收敛域。

(1) $\mathrm{e}^{-3t}u(t-1)$　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-2t}u(t)]$

(3) $t\mathrm{e}^{\lambda t}\cos(\omega_0 t)u(t)$　　(4) $\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\cos(\omega_0\tau)\mathrm{d}\tau, t\geq 0$

解：求信号的 Laplace 变换可以采用如下两种方法：直接利用定义计算或利用常用信号的 Laplace 变换及 Laplace 变换的性质计算。

(1)　在使用单边 Laplace 时移特性 $x(t-t_0)u(t-t_0) \xleftrightarrow{L} \mathrm{e}^{-st_0}X(s)$ 时，只有右移信号 $x(t-t_0)u(t-t_0)(t_0>0)$ 才能利用。

$$L\{\mathrm{e}^{-3t}u(t-1)\} = L\{\mathrm{e}^{-3}\mathrm{e}^{-3(t-1)}u(t-1)\} = \frac{\mathrm{e}^{-(s+3)}}{s+3}, Re\{s\} > -3$$

(2 分)

(2) 以 $\mathrm{e}^{-t}u(t)$ 作为基本信号 $x(t)$，并利用 Laplace 变换的微分特性，可得

$$L\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-2t}u(t)] = s[\frac{1}{s+2}] - x(0^-) = \frac{s}{s+2}, Re\{s\} > -2$$ (2 分)

(3) 以 $\mathrm{e}^{\lambda t}\cos(\omega_0 t)u(t)$ 作为基本信号，并利用 Laplace 变换的线性加权特性，可得

$$L\{t\mathrm{e}^{\lambda t}\cos(\omega_0 t)u(t)\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega_0^2}$$

$$= \frac{(s-\lambda)^2-\omega_0^2}{[(s-\lambda)^2+\omega_0^2]^2}, Re\{s\} > -\lambda$$ (2 分)

(4) $\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\cos(\omega_0\tau)\mathrm{d}\tau$ 可以看成是 e^{-lt} u(t) 与 $\cos(w_0 t)$u(t) 的卷积(1 分)

2. 已知 $L\{x(t)\} = X(s) = \dfrac{1}{s+1}, Re\{s\} > -1$。利用 Laplace 变换的性质求下列信号的单边 Laplace 变换。

(1) $x_1(t)=x(t-1)$

(2) $x_2(t)=x(2t-2)$

(3) $x_3(t)=\mathrm{e}^{-t}x(t)$

(4) $x_4(t)=x'(t)$

(5) $x_5(t)=tx(t)$

(6) $x_6(t)=x(t)*x(2t)$

解：(1)由 Laplace 变换的时移特性，可得

$X_1(s)=X(s)\mathrm{e}^{-s}=\dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{s+1},Re\{s\}>-1$ (2 分)

$x(2t-2)=x[2(t-1)]$，即将$x(t)$压缩 2，再右移 1 可得$x(2t-2)$，故

(2)由 Laplace 变换的展缩特性和时移特性，可得

$X_2(s)=\dfrac{1}{2}X(\dfrac{s}{2})\mathrm{e}^{-s}=\dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{s+2},Re\{s\}>-2$ (2 分)

(3)由 Laplace 变换的指数加权特性，可得

$X_3(s)=X(s+1)=\dfrac{1}{s+2},Re\{s\}>-2$ (2 分)

(4)由 Laplace 变换的微分特性，可得

$X_4(s)=sX(s)=\dfrac{s}{s+1},Re\{s\}>-1$ (2 分)

(5)由 Laplace 变换的线性加权特性，可得

$X_5(s)=-\dfrac{\mathrm{d}X(s)}{\mathrm{d}s}=\dfrac{1}{(s+1)^2},Re\{s\}>-1$ (2 分)

3.试求下列$X(s)$的初值$x(0^+)$和终值$x(\infty)$。

(1) $X(s)=\dfrac{s^2+2s+3}{s(s+2)(s^2+4)},Re\{s\}>0$

(2) $X(s)=\dfrac{2s^2+1}{s(s+2)},Re\{s\}>0$

解：(1) $x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)=\lim_{s\to\infty}s\frac{s^2+2s+3}{s(s+2)(s^2+4)}=0$ (2 分)

$$sX(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+2)(s^2+4)},Re\{s\}>0$$

由于$sX(s)$的 ROC 不包含虚轴，所以其终值不存在。(2 分)

（2）$X(s)$不是真分式，将其表示为$X(s)=2+\frac{1-4s}{s(s+2)}=2+X_1(s)$

$x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX_1(s)=\lim_{s\to\infty}s\frac{1-4s}{s(s+2)}=-4$ (2 分)

$x(\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)=\lim_{s\to 0}\frac{2s^2+1}{s+2}=0.5$ (2 分)

4.试用部分分式法求，试求下列$X(s)$的单边 Laplace 反变换。

(1) $X(s)=\frac{s^2+7s}{s^2+6s+8},Re\{s\}>-2$

(2) $X(s)=\frac{1+2e^{-4s}}{(s+1)(s+2)}$, $Re\{s\}>-1$

解：(1) $X(s)$为有理假分式，将其展开为

$X(s)=\frac{s^2+7s}{s^2+6s+8}=1+\frac{-5}{s+2}+\frac{6}{s+4}$ (2 分)

反变换为$x(t)=\delta(t)-5e^{-2t}u(t)+6e^{-4t}u(t)$ (2 分)

(2) $X(s)$中含有指数e^{-2s}，不是有理分式，故不能直接进行部分分式展开。

由 Laplace 变换的性质可知，s 域的指数e^{-2s}对应时域的时移，因此可以将

$X(s)$表示为

$X(s)=X_1(s)+2X_1(s)e^{-4s}$ (2 分)其中$X_1(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$

对$X_1(s)$做部分分式展开可得$X_1(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$(1 分)

所以$x_1(t)=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$(1 分)利用时移特性，可得

$x(t)=x_1(t)+2x_1(t-4)=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)+2[\mathrm{e}^{-(t-4)}-\mathrm{e}^{-2(t-4)}]u(t-4)$

(2 分)

5.根据下列$X(s)$收敛域，分别求解其对应的时域信号$x(t)$,其中

$$X(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

(1)$Re\{s\}>-2$ (2)$-3<Re\{s\}<-2$ (3)$Re\{s\}<-3$

解：利用部分分式展开法$X(s)=\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+3}$(1 分)

(1) 两部分均为右边函数，(1 分)

因此$x(t)=-\mathrm{e}^{-2t}u(t)+2\mathrm{e}^{-3t}u(t)$(2 分)

(2) 第一项对应左边函数，第二项对应右边函数，(1 分)因此

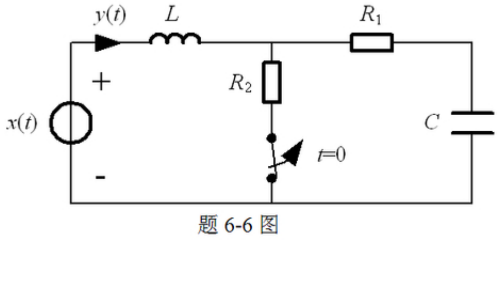
$x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(-t)+2\mathrm{e}^{-3t}u(t)$(2 分)

(3) 两部分均为左边函数，(1 分)

$x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(-t)-2\mathrm{e}^{-3t}u(-t)$ (2 分)

6. 如题 6-6 图所示电路在$t=0$前开关一直处于闭合状态,画出电路的 s 域模型，

并求开关打开后流经电感的电流$y(t)$。已知$x(t)=10V$，$L=1H$，

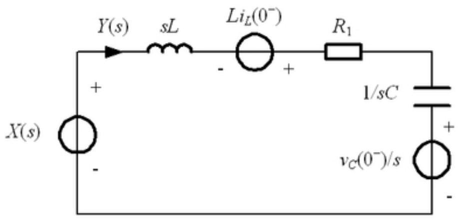


题 6-6 图

$R_1=2\Omega$，$R_2=5\Omega$，$C=1/5F$。

解：t=0 前开关一直处于闭合状态，电路处于稳态，由此可求出 iL(0-)=2A，vC(0-)=10V。

$t^3 0$ 后开关打开，电路的 s 域模型如图所示。



(3 分)

由 s 域模型可写出电路的 KVL 方程为

$$(sL + R_1 + \frac{1}{sC})Y(s) = X(s) + Li_L(0^-) - \frac{v_c(0^-)}{s}$$ (2 分)

输入信号的 s 域表示式为 $X(s) = L\{10u(t)\} = 10/s$ (1 分)

代入 X(s)，以及元件和初始状态值，并化简得

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2+2s+5} = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - \frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$ (2 分)

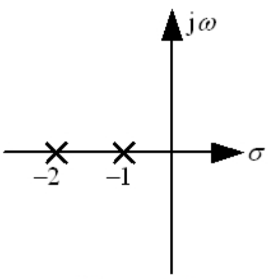
对上式进行 Laplace 反变换即得

$$y(t) = 2\mathrm{e}^{-t}\cos(2t)u(t) - \mathrm{e}^{-t}\sin(2t)u(t) = \sqrt{5}\mathrm{e}^{-t}\cos(2t + 26.6^o)u(t)$$

(2 分)

7. 某连续时间 LTI 因果系统的零极点如题 6-7 图所示，假设系统特性的 $K=1$。

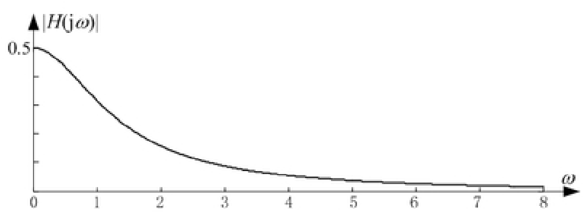
（1）试定性画出其幅度响应曲线，（2）求系统函数 $H(s)$ 和冲激响应 $h(t)$，



（3）判断系统稳定性。

题 6-7 图

解：（1）系统在 ω 从 0~∞的幅度响应如图所示



（4 分）

（2）系统函数 $H(s)=K\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ （2 分）

冲激响应 $h(t)=L\{H(s)\}=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$ （2 分）

（3）由于该系统为因果系统，且极点均在 s 左半平面，故系统稳定。（2 分）

8. 已知某因果连续时间 LTI 系统的系统函数 $H(s)=\frac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}$，

(1) 写出描述系统的微分方程；

(2) 若 $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)$，试求系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

解：(1) $H(s)=\frac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}$

由此可得微分方程的 s 域形式为

$(s^2+3s+2)Y_{zs}(s)=(s^2+4s+5)X(s)$ (2 分)

对其进行 Laplace 反变换即得描述系统的微分方程

$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x''(t)+4x'(t)+5x(t)$ (2 分)

(2)零状态响应的 s 域表达式

$$Y_{zs}(s)=H(s)X(s)=\frac{s^2+4s+5}{(s^2+3s+2)(s+3)}=\frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

(2 分)

对其进行 Laplace 反变换可得

$y_{zs}(t)=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t})u(t)$

9. 描述某因果连续 LTI 系统的微分方程为：

$$y''(t)+5y'(t)+4y(t)=2x'(t)+5x(t)$$

已知 $x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t),y(0^-)=1,y'(0^-)=2$，由复频域(s 域)求解：

(1)系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ 零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和全响应 $y(t)$。

(2)系统函数 H(s)和单位冲激响应 h(t)，并判断系统是否稳定。

(3)若 $x(t)=2\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1)$，重求（1）（2）。

解：(1)对微分方程两边进行单边 Laplace 变换，可得

$$s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+5[sY(s)-y(0^-)]+4Y(s)=(2s+5)X(s)$$

(2 分) $$Y_{zi}(s)=\frac{sy(0^-)-+y'(0^-)+5y(0^-)}{s^2+5s+4}$$ (1 分)

$$Y_{zs}(s)=\frac{2s+5}{s^2+5s+4}\frac{1}{s+2}$$ (1 分)

进行 Laplace 反变换，可得系统的零输入响应 $y_{zi}(t)=-\mathrm{e}^{-4t}+2\mathrm{e}^{-t},t\geq 0$ (1 分)

零状态响应为

$y_{zs}(t)=[-0.5\mathrm{e}^{-4t}-0.5\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}]u(t)$ (1 分)

系统的完全响应为

$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=-1.5\mathrm{e}^{-4t}-0.5\mathrm{e}^{-2t}+3\mathrm{e}^{-t},t\geq 0$ (1 分)

(2)根据系统函数的定义，可得

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{2s+5}{s^2+5s+4}=\frac{1}{s+4}+\frac{1}{s+1}$$ (2 分)

进行 Laplace 反变换即得 $h(t)=[\mathrm{e}^{-4t}+\mathrm{e}^{-t}]u(t)$ (2 分)

由于系统的极点为 $p_1=-1$， $p_2=-4$， 所以系统稳定。(2 分)

(3) $y_{zs}^1(t)=2y_{zs}(t-1)$， 其他都不变。(2 分)

10.试用直接形式，级联形式和并联形式画出该系统模拟框图。

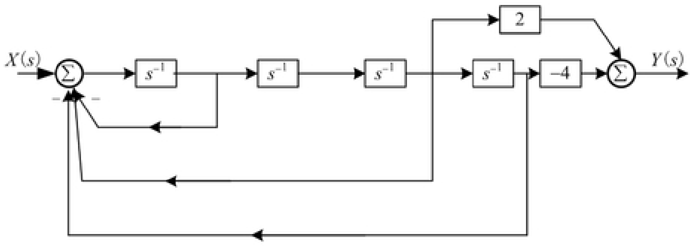
$$H(s)=\frac{2s-4}{(s^2-s+1)(s^2+2s+1)}$$

解：

将 H(s)改写为

$$H(s)=\frac{2s-4}{s^4+s^3+s+1}=\frac{2s^{-3}-4s^{-4}}{1+s^{-1}+s^{-3}+s^{-4}}$$ (1 分)

由此可画出其直接型结构，如图(a)所示。

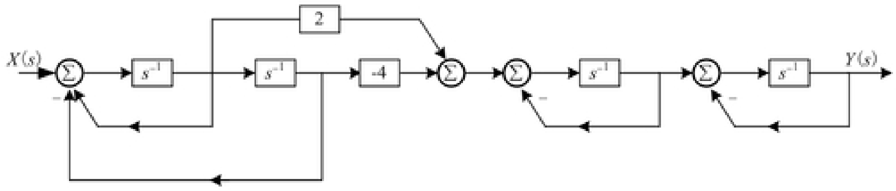


(a) 直接型结构（2 分）

H(s)有一对共轭复数极点，其对应实系数二阶子系统，故将 H(s)表示一阶和二阶子系统之积的形式，即

$$H(s)=\frac{2s-4}{s^2-s+1}\frac{1}{s+1}\frac{1}{s+1}=\frac{2s^{-1}-4s^{-2}}{1-s^{-1}+s^{2}}\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}$$

(1 分)由此可画出其级联型结构，如图(b)所示。



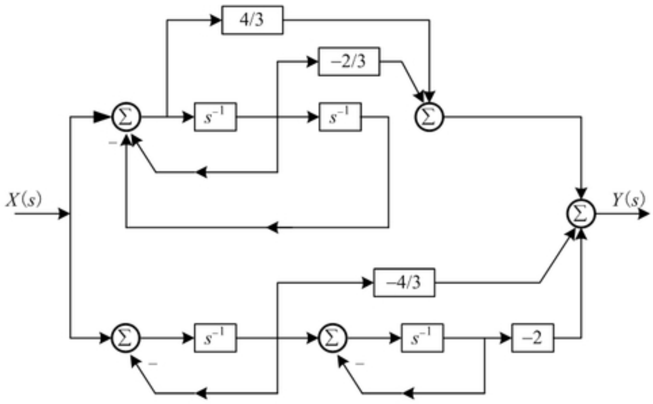
将 H(s)表示一阶和二阶子系统之和的形式，即

$$H(s)=\frac{\frac{4s}{3}-\frac{2}{3}}{s^2-s+1}+\frac{-2}{(s+1)^2}+\frac{-\frac{4}{3}}{s+1}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}s^{-1}}{1-s^{-1}+s^{-2}}+\frac{-2s^{-2}}{(1+s^{-1})^2}+\frac{-\frac{4}{3}s^{-1}}{1+s^{-1}}$$

(1 分)

由此可画出其并联型结构，如图(c)所示。



(c)并联型结构（2 分）