《大学物理 I》作业　　No.10 变化的电场和磁场　（A 卷）

班级 ________ 学号 ________ 姓名 _________ 成绩 _______

一、选择题：

1．在法拉第电磁感应定律公式 $\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ 中，符号 ϕ 的含义是：【　　】

(A) $\phi = \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$　　　　(B) $\phi = \int_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

(C) $\phi = \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$　　　　(D) $\phi = \int_S \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

解： 由法拉第电磁感应定律定义内容知：

符号 ϕ 的含义是穿过回路为曲面边界的曲面的磁感应强度 $\vec{B}$ 矢量的通量。　　**故选填：C**

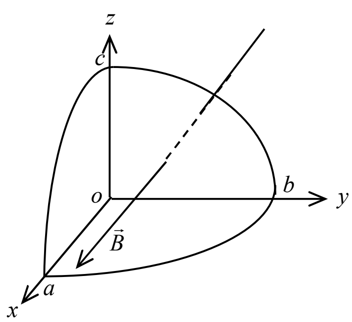
2．一段导线被弯成圆心都在 O 点，半径均为 R 的三段圆弧 $\overset{\frown}{ab}$，$\overset{\frown}{bc}$，$\overset{\frown}{ca}$，它们构成一个闭合回路。圆弧 $\overset{\frown}{ab}$，$\overset{\frown}{bc}$，$\overset{\frown}{ca}$ 分别位于三个坐标平面内，如图所示。均匀磁场 $\vec{B}$ 沿 x 轴正向穿过圆弧 $\overset{\frown}{bc}$ 与坐标轴 ob、oc 所围成的平面。设磁感应强度的变化率为常数 k（$k>0$），则【　　】

(A) 闭合回路中感应电动势的大小为 $\dfrac{\pi R^2 k}{2}$，圆弧中电流由 $b \to c$

(B) 闭合回路中感应电动势的大小为 $\dfrac{\pi R^2 k}{2}$，圆弧中电流由 $c \to b$

(C) 闭合回路中感应电动势的大小为 $\dfrac{\pi R^2 k}{4}$，圆弧中电流由 $b \to c$

(D) 闭合回路中感应电动势的大小为 $\dfrac{\pi R^2 k}{4}$，圆弧中电流由 $c \to b$



选择题 2 图

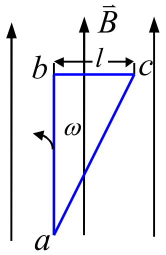
解： 因穿过闭合回路 $abca$ 为边界的曲面和回路 $ObcO$ 为边界的曲面的磁通量相等，所以闭合回路的感应电动势大小为：

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{abca}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{ObcO}}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi R^2}{4}\cdot\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi R^2 k}{4}$$

又因常数 $k>0$，回路磁通量随时间增加，则

由愣次定律知圆弧 $\overset{\frown}{bc}$ 的感应电流方向由 $c \to b$。　　**故选填：D**

3．如图所示，直角三角形金属框架 abc 放在均匀磁场中，磁场 $\vec{B}$ 平行于 ab 边，bc 的边长为 l。当金属框架绕 ab 边以匀角速度 ω 转动时，abc 回路中的感应电动势 ε 和 a、c 两点的电势差 $U_a - U_c$ 分别为：【　　】



选择题 3 图

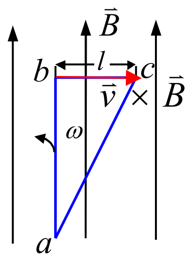
(A) $\varepsilon = 0,\quad U_a - U_c = \dfrac{1}{2}B\omega l^2$

(B) $\varepsilon = B\omega l^2,\quad U_a - U_c = -\dfrac{1}{2}B\omega l^2$

(C) $\varepsilon = 0,\quad U_a - U_c = -\dfrac{1}{2}B\omega l^2$

(D) $\varepsilon = B\omega l^2,\quad U_a - U_c = \dfrac{1}{2}B\omega l^2$

解：直角三角形金属框架 abc 绕直线 ab 轴旋转时，回路中磁通量随时间的变化率 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = 0$，所以 $abca$ 回路中感应电动势 ε=0，



而感应电动势又为：$\varepsilon_{总} = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc} + \varepsilon_{ca} = 0$

因为 ab 边始终没运动，其感应电动势 $\varepsilon_{ab} = 0$

则有：$\varepsilon_{bc} + \varepsilon_{ca} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{ca} = \text{-}\varepsilon_{ac} = \text{-}\varepsilon_{bc}$

再由动生电动势计算式有直线 bc 动生电动势为：

$$\varepsilon_{bc} = \int_b^c \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^l \omega l B \mathrm{d}l = \frac{1}{2}B\omega l^2, b \to c$$

即知 c 端电势高，所以 $U_{bc} = U_b - U_c = -\dfrac{1}{2}B\omega l^2$

故有：$U_{ac} = U_a - U_c = U_{bc} = U_b - U_c = -\dfrac{1}{2}B\omega l^2$　　　　故选填：**C**

4．半径为 a 的圆线圈置于磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中，线圈平面与磁场方向垂直，线圈电阻为 R；当把线圈转动使其法向与 $\vec{B}$ 的夹角 α=60°时，线圈中通过的电荷与线圈面积及转动所用的时间的关系是【　　】

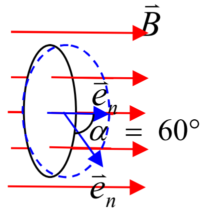
(A) 与线圈面积成正比，与时间无关　　(B) 与线圈面积成正比，与时间成正比

(C) 与线圈面积成反比，与时间成正比　　(D) 与线圈面积成反比，与时间无关

解：根据电流强度的定义有线圈中通过的电荷为：

$$q = \int I\mathrm{d}t = \int \frac{\varepsilon}{R}\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{d}\Phi}{R\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{d}\Phi}{R} = -\frac{1}{R}(\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$= -\frac{1}{R}(BS\cos 60^\circ - BS\cos 0^\circ) = \frac{1}{2R}BS$$

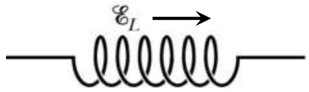


故选填：**A**

5．若产生如图所示的自感电动势方向，则通过线圈的电流是：【　　】

(A) 恒定向右　　　　　　(B) 恒定向左

(C) 增大向左　　　　　　(D) 增大向右



选择题 5 图

解：根据楞次定律：感应电流产生的磁场将阻碍原磁场（原磁通）的变化，而本题自感电动势方向向右，则感应电流产生的磁场向右，因此原磁向左，原电流也向左。　**故选填：C**

6．有两个线圈，线圈 1 对线圈 2 的互感系数为 M_{21}，而线圈 2 对线圈 1 的互感系数为 M_{12}。若它们分别流过 i_1 和 i_2 的变化电流且 $\left|\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right| > \left|\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right|$，并设由 i_2 变化在线圈 1 中产生的互感电动势为 ε_{12}，由 i_1 变化在线圈 2 中产生的互感电动势为 ε_{21}，判断下述哪个论断正确。【　　】

(A) $M_{12} = M_{21}$，$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}$　　　　(B) $M_{12} \neq M_{21}$，$\varepsilon_{21} \neq \varepsilon_{12}$

(C) $M_{12} = M_{21}$，$\varepsilon_{21} > \varepsilon_{12}$　　　　(D) $M_{12} = M_{21}$，$\varepsilon_{21} < \varepsilon_{12}$

解：由于两个线圈的相对位置固定且周围磁介质的磁导率为常数，故互感系数 $M_{12} = M_{21}$，又因变化电流 $\left|\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right| > \left|\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right|$，故两个线圈互感电动势满足：

$$\varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} > \varepsilon_{12} = -M_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

故选填：C

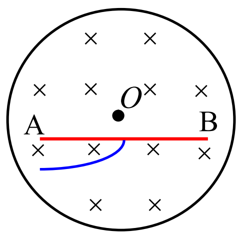
7．在圆柱形空间内有一磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场，如图所示。$\vec{B}$ 的大小以速率 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ 变化。在磁场中有 A、B 两点，其中可放置直导线 $\overline{AB}$ 和弯曲的导线 $\overset{\frown}{AB}$，则：【　　】

(A) 电动势只在 $\overline{AB}$ 导线中产生

(B) 电动势只在 $\overset{\frown}{AB}$ 导线中产生

(C) $\overline{AB}$ 导线中的电动势小于 $\overset{\frown}{AB}$ 导线中的电动势

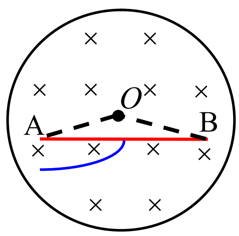
(D) 电动势在 $\overline{AB}$ 和 $\overset{\frown}{AB}$ 中都产生，且两者大小相等



选择题 7 图

解：连接 OA 和 OB，如图所示，则 ΔOAB 的面积小于扇形 OAB 的面积。

根据法拉第电磁感应定律电动势大小：$|\varepsilon| = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right| = S\left|\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right|$



和 $\varepsilon_{\overline{OA}} = \varepsilon_{\overline{OB}} = 0$（皆因感生电场方向沿切向，与径向 OA 和 OB 导线垂直）

可知直导线 $\overline{AB}$ 和弯曲的导线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 电动势大小满足：$\varepsilon_{\overline{AB}} < \varepsilon_{\overset{\frown}{AB}}$ **故选填：C**

8．对位移电流，有下述四种说法，请指出哪一种说法是正确的。【 】

(A) 位移电流是由变化电场产生的 (B) 位移电流是由变化磁场产生的

(C) 位移电流的热效应服从焦耳－楞次定律 (D) 位移电流的磁效应不服从安培环路定理

解：由麦克斯韦假设之一位移电流强度定义：$I_d = \dfrac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \int_s \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ 可得 A 对。 **故选填：A**

9．一块铜板垂直于磁场方向放在磁感强度正在增大的磁场中时，铜板中出现的涡流(感应电流)将产生的效果为【 】

(A) 加速铜板中磁场的增加 (B) 减缓铜板中磁场的增加

(C) 对磁场不起作用 (D) 使铜板中磁场反向

解：根据楞次定律：感应电流产生的磁场将阻碍原磁场（原磁通）的变化，因此(B)对。**故选填：B**

10. 在下列反映电磁场基本性质和规律的方程中，可以描述变化的电场一定伴随有磁场的是：【 】

(A) $\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_0 \mathrm{d}V$ (B) $\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

(C) $\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ (D) $\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{j}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

解：由麦克斯韦假设的位移电流强度定义：$I_d = \dfrac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \int_s \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ 和电流的磁效应知描述变化的电场一定伴随有磁场的是方程（D）。 **故选填：D**

二、 判断题：

1. 动生电动势中搬运电荷做功的非静电力是洛仑兹力，但这与洛仑兹力不做功的性质不矛盾。【 】

解：动生电动势中搬运电荷作功的非静电力实际上只是洛仑兹力的一个分量，该分量是把负电荷从负极搬运到正极做正功；而洛仑兹力的另一个分量是与导体（电荷）整体运动的方向相反，做负功，这两部分对电荷的整体运动做功之和为零，即总的洛仑兹力不做功。 **故选填：T**

2．感应电流产生的磁场总是与原磁场反向。【 】

解：根据法拉第电磁感应定律知：感应电流的磁场总是阻碍原磁场的变化，因此当原磁场减少时，感应电流激发的磁场将与原磁场相同。 **故选填：F**

3．感生电场的非静电力是感生电场力。【 】

解：根据麦克斯韦的感生电场假设的意义可知。 故选填：**T**

4．涡旋电流是由感生电场驱动的。【 】

解：感生电场驱动导体中的电荷，就能形成涡旋电流。 **故选填：T**

5．感生电场线与静电场线都是有头有尾的。【 】

解：由 $\oint_S \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ 可知，感生电场线是无头无尾的闭合线。 **故选填：F**

6．由自感系数的定义 $L = \dfrac{\Phi_m}{I}$ 可知，自感线圈中的电流大小会影响自感系数的大小。【 】

解：虽然自感系数的大小公式 $L = \dfrac{\Phi_m}{I}$，但因磁通量 Φ_m 中必有电流 I，且必可约去，从而自感系数只由线圈自身决定，与其电流无关。 **故选填：F**

7．传导电流与位移电流效果相同，都能产生磁场和热量。【 】

解：传导电流与位移电流都能产生磁场。

但传导电流因是电荷在导线中运动形成，能产生热量，而是位移电流是由磁效就取的名，其实质是电场随时间的变化率，在真空中都可存在，没有热量产生。 **故选填：F**

8．将条形磁铁插入与冲击电流计串联的金属环中时，通过电流计的电荷 q 正比于穿过环的磁通变化 。【 】

解：根据法拉第电磁定律和欧姆定律有回路中感应电荷为：

$$q = \int I\mathrm{d}t = \int \frac{\varepsilon}{R}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{R}\int -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\int \mathrm{d}\Phi = -\frac{1}{R}\,\Delta\Phi$$

故选填：T

9．两个自感系数相同的线圈，相互垂直放置时，它们的互感系数最小。【 】

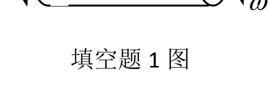
解：两个自感系数相同的线圈，相互垂直放置时，相互间耦合系数 k=0，则由互感系数 $M = k\sqrt{L_1L_2}$ 知此时互感系数最小。 **故选填：F**

10．麦克斯韦提出了两个具有创新性的物理概念，它们是感生（涡旋）电场和位移电流。【 】

解：麦克斯韦的两假设正是：感生（涡旋）电场和位移电流。 **故选填：T**

三、 填空题：

1. 如图所示，电量 Q 均匀分布在一半径为 R、长为 L($L >> R$)的绝缘长圆筒上。一单匝矩形线圈的一个边与圆筒的轴线重合。若筒以角速度 $\omega = \omega_0(1 - t/t_0)$ 线性减速旋转，则线圈中的感应电流为 ________。



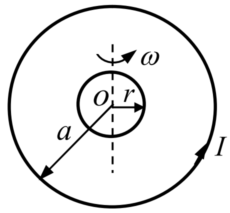
填空题 1 图

解：因圆筒旋转在圆筒内产生的磁感应强度方向（向右）平行于单匝线圈平面（方向向左或右），则单匝线圈平面的磁通量为

$$\Phi=\int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int B\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}S=0$$

所以电动势大小和感应电流分别为： $\varepsilon_i=\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=0 \quad I=\dfrac{\varepsilon_i}{R}=0$ **故填：0 或零**

2. 如图所示，一半径为 r 的很小的金属圆环，在初始时刻与一半径为 $a\,(a>>r)$ 的大金属圆环共面且同心。在大圆环中通以恒定的电流 I，方向如图，如果小圆环以角速度 ω 绕其任一方向的直径转动，并设小圆环的电阻为 R，则任一时刻 t 通过小圆环的磁通量 Φ = ________________；小圆环中的感应电流 i = ___________________。



填空题 2 图

解： 因大金属圆环半径 $a>>r$，故小圆环区域内可视为均匀磁场，则通过小圆环的磁通量为：

$$\Phi\approx B_0 S\cos\omega t=\frac{\mu_0 I}{2a}\cdot\pi r^2\cdot\cos\omega t$$

小圆环中的感应电流 $i=\dfrac{\varepsilon}{R}=-\dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mu_0 I\omega}{2Ra}\cdot\pi r^2\cdot\sin\omega t$

故填： $\dfrac{\mu_0 I}{2a}\cdot\pi r^2\cdot\cos\omega t$ **；** $\dfrac{\mu_0 I\omega}{2Ra}\cdot\pi r^2\cdot\sin\omega t$

3．对于一个自感系数为 L，通以电流 I 的线圈来说，其存储的自感磁能为_________________；数学表达式 $w=\dfrac{1}{2}BH$ 代表单位体积的磁场能量，称为___________________。

解： 由磁能和磁能密度的定义可填。 **故填：** $W_{ml}=\dfrac{1}{2}LI^2$ **；** 磁能密度

4．一自感线圈中，电流强度在 0.002 s 内均匀地由 10 A 增加到 12 A，此过程中线圈内自感电动势为 400 V，则线圈的自感系数为 L =___________H。

解： 由自感电动势的计算式 $\varepsilon_L=-L\left(\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right)$ 得线圈的自感系数为：

$$L=-\varepsilon_L\div\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right)=-(-400)\div\left(\frac{12-10}{0.002}\right)=0.4\ (\mathrm{H})$$

故填： 0.4

5．半径为 R 的无限长圆柱形导体上均匀流有电流 I，该导体材料的相对磁导率 μ_r =1，则在导体轴线上一点的磁场能量密度为 W_{mo} =__________________，在与导体轴线相距 r 处($r<R$)的磁场能量密度 W_{mr} =__________________。

解： 通过磁场叠加原理可以求出无限长圆柱形导体轴线上任一点的磁感应强度 B＝0

所以磁场能量密度为： $w_{mo}=\dfrac{1}{2}BH=0$

通过安培环路定理可以求出与导体轴线相距 r 处($r<R$)的磁感应强度大小为： $B=\dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$，

则该位置处磁场能量密度为： $w_{mr}=\dfrac{1}{2}BH=\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2})^2\cdot\dfrac{1}{\mu_0\mu_r}=\mu_0 I^2 r^2 \Big/ 8\pi^2 R^4$

故填：0； $\mu_0 I^2 r^2 \Big/ 8\pi^2 R^4$

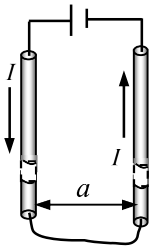
6．半径为 r 的两块圆板组成的平行板电容器充了电，在放电时两板间的电场强度的大小为 $E=E_0e^{-t/RC}$，式中 E_0、R、C 均为常数，则两极板间的位移电流的大小为__________________，其方向与场强方向_______。

解： 由位移电流强度定义有：

$$I_d=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_s \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ \varepsilon_0 E_0 e^{-t/RC}\cdot\pi r^2)=-\frac{\varepsilon_0 E_0 e^{-t/RC}\cdot\pi r^2}{RC}$$

式中负号表明其方向与电场方向相反。或因电场随时间减少，电容器是放电过程，板间位移电流方向与板外传导电流方向相同，与板间电场方向相反 **故填：** $\dfrac{\varepsilon_0 E_0 e^{-t/RC}\cdot\pi r^2}{RC}$；相反

7．两根很长的平行直导线，其间距离为 a，与电源组成闭合回路如图。已知导线上的电流强度为 I，在保持 I 不变的情况下，若将导线间距离增大，则两导线间的总磁能将___________。（选填：增大、减小、不变）



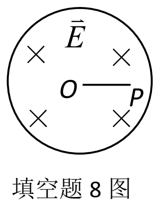
填空题 7 图

解： 两导线间距离 a 增大，则两导线围成的曲面磁通量 Φ 增大，闭合回路的自感系数 L 增大，总磁能 $W_m=\dfrac{1}{2}LI^2$ **也增大。** **故填：增大**

8．图示为一圆柱体的横截面，圆柱体内有一均匀电场 $\vec{E}$，其方向垂直纸面向内，$\vec{E}$ 的大小随时间 t 线性增加，P 为柱体内与轴线相距为 r 的一点，若 $\overline{OP}$ 水平向右，则

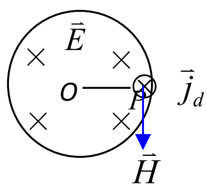
(1) P 点的位移电流密度的方向为__________________；

(2) P 点的感生磁场的方向为_________________ 。



填空题 8 图

解：（1）因电场强度矢量 $\vec{E}$ 垂直纸面向内，其大小随 t 线性增加，所以由位移电流密度矢量定



义 $\vec{j}_d = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 知 P 点的位移电流密度矢量方向为：垂直纸面向内（$\partial\vec{D}$ 方向与 $\vec{D}$ 方向相同），如图所示；

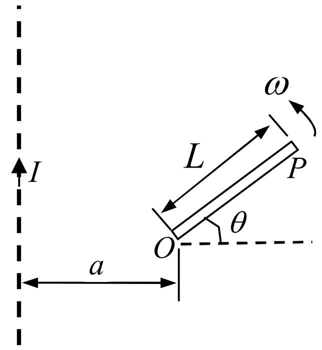
（2）由全电流安培环路定律 $\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}_c + \vec{j}_d\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 知：P 点的位移电流激发的感生磁场 $\vec{H}$ 的方向垂直 OP 连线向下，如图所示。　　　　　　**故填**：垂直纸面向内；垂直 OP 连线向下

四、计算题：

1.如图所示，导线 L，以角速度 ω 绕其端点 O 旋转。已知导线 L 与电流 I 在共同的平面内，O 点到长直电流 I 的距离为 a，且 $a>L$。求导线 L 在与水平方向成 θ 角时的动生电动势大小和方向，并说明 O 和 P 哪端电势高。

（要求：图中画出所用坐标系和相应微元）

（已知：$\int (\dfrac{x}{x+a})\mathrm{d}x = x - a\ln(x+a) + C$）



计算题 1 图

解：因无限长直电流 I 的磁场沿径向距离成反比非均匀分布，设径向坐标 $o'r$，则大小 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$，方向如下图⊗所示，故导线 L 绕其端点 O 旋转是在非均匀磁场中运动，且各段速度也不相同。则可由电源电动势定义 $\varepsilon = \int_L \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 和动生电动势的非静电场 $\vec{E}_K = \vec{v}\times\vec{B}$ 来求。

再以端点 O 为坐标原点，沿运动导线 L 建立一维坐标 l 轴，并在棒上 l 处取一导线微元 $\mathrm{d}\vec{l}$，如图所示，则该旋转导线微元中的动生电动势为：

$$\mathrm{d}\varepsilon_{动} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \omega l B\cdot\cos\pi\cdot\mathrm{d}l$$

$$= -\omega l\frac{\mu_0 I}{2\pi(a + l\cos\theta)}\mathrm{d}l = -\frac{\omega\mu_0 I}{2\pi}\frac{l}{a + l\cos\theta}\mathrm{d}l$$

故导线 L 绕其端点 O 旋转的总动生电动势为：

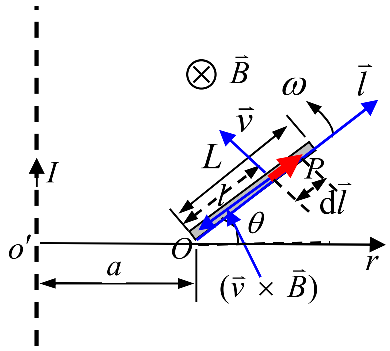
$$\varepsilon_{动} = \int_L \mathrm{d}\varepsilon_{动} = -\frac{\omega\mu_0 I}{2\pi}\int_0^L \frac{l}{a + l\cos\theta}\mathrm{d}l$$

$$= -\frac{\omega\mu_0 I}{2\pi\cos^2\theta}\int_0^L (1 - \frac{a}{a + l\cos\theta})\mathrm{d}(l\cos\theta)\quad（凑微分）$$

$$= -\frac{\omega\mu_0 I}{2\pi\cos^2\theta}[l\cos\theta - a\ln（a + l\cos\theta）]\Big|_0^L$$

$$= -\frac{\omega\mu_0 I}{2\pi\cos^2\theta}[L\cos\theta - 0 - a\ln（a + L\cos\theta）+ a\ln a]$$

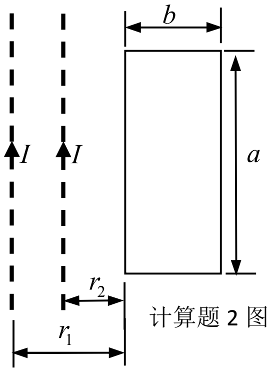
$$= -\frac{\omega\mu_0 I}{2\pi\cos^2\theta}[L\cos\theta - a\ln\frac{a}{a + L\cos\theta}] < 0$$



因 $\varepsilon < 0$，电动势方向由 P 端指向 O 端，即有 O 端电势高，是电源正极。

或由本题非静电场 $\vec{v} \times \vec{B}$ 方向也可判断出：电动势方向由 P 端指向 O 端，即有 O 端电势高，是电源正极。

2．如图所示，两条平行长直载流导线和一个矩形导线框共面，且导线框的一个边与长直导线平行，到两长直导线的距离分别为 r_1、r_2。已知两导线中电流都为 $I = I_0 \sin \omega t$，其中 I_0 和 ω 为常数，t 为时间。导线框长为 a，宽为 b，求导线框中的感应电动势大小和方向。

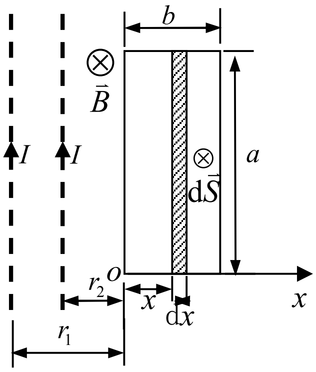


计算题 2 图

（**要求**：图中画出所用坐标系和相应微元）

解：因无限长直电流 I 的磁场沿径向距离成反比非均匀分布，取坐标 ox 垂直于直导线，坐标原点取在矩形导线框的左边框上，坐标正方向为水平向右，则由磁场的叠加原理可得 x 处的磁感应强度大小为：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(r_1 + x)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(r_2 + x)}$$



方向：垂直纸面向里，即图中 $\otimes$

再取回路的绕行正方向为顺时针，则矩形边框包围曲面方向垂直于纸面向里，即图中 $\otimes$。于是通过微元面积 $\mathrm{d}S = a\mathrm{d}x$ 的磁通量为：

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi(r_1 + x)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(r_2 + x)}\right]\cos 0° a\mathrm{d}x$$

通过矩形线圈的磁通量为：

$$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^b \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi(r_1 + x)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(r_2 + x)}\right]\cos 0° a\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\left(\ln\frac{r_1 + b}{r_1} + \ln\frac{r_2 + b}{r_2}\right) I_0 \sin\omega t$$

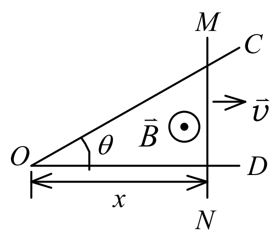
导线框中的感生电动势为：

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} == -\frac{\mu_0 \omega a}{2\pi}\left(\ln\frac{r_1 + b}{r_1} + \ln\frac{r_2 + b}{r_2}\right) I_0 \cos\omega t$$

$$= -\frac{\mu_0 \omega a I_0}{2\pi}\left[\ln\frac{(r_1 + b)(r_2 + b)}{r_1 r_2}\right]\cos\omega t$$

$\varepsilon_i > 0$ 时，回路中感应电动势的实际方向为顺时针；$\varepsilon_i < 0$ 时，回路中感应电动势的实际方向为逆时针。

3．如图所示，有一成 θ 角的金属框架 COD 放在非均匀磁场中，磁感强度 $\vec{B}$ 的方向垂直于金属框架 COD 所在平面，大小为 $B = Kx\cos\omega t$。一导体杆 MN 垂直于 OD 边，并在金属框架上以恒定速度 $\vec{v}$ 向右滑动，$\vec{v}$ 与 MN 垂直。设 t =0 时，x = 0。求金属框架内的感应电动势。



计算题 3 图

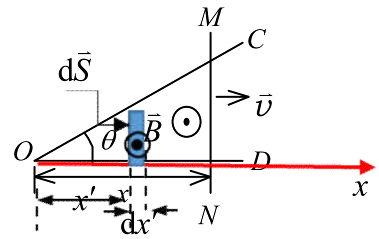
（要求：图中画出所用坐标系和相应微元）

解：由于磁场在空间非均匀分布，且与时间有关，故金属框架内的感应电动势既有导线 MN 运动产生的动生电动势，又有由于磁场随时间变化的感生电动势。建立坐标系，并取面积微元 $d\vec{S}$ 如下图。

由题意知任意 t 时刻，滑动导线 MN 到 O 端的垂直距离为 $x = vt$ 。

此时刻通过 $MONM$ 回路的磁通量为（规定 $\vec{S}$ 正方向向外 ⊙，则 $MONM$ 回路回路绕行方向为逆时针方向）：

$$
\begin{aligned}
\Phi_m(t) &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B\cos0° dS \\
&= \int_0^x Kx'\cos\omega t \times x'\tan\theta dx' \\
&= \frac{1}{3} K\tan\theta x^3 \cos\omega t \\
&= \frac{1}{3} K\tan\theta v^3 t^3 \cos\omega t
\end{aligned}
$$



再由法拉第电磁感应定律回路 MON 的感应电动势为：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= -\frac{d\Phi_m(t)}{dt} \\
&= -\frac{1}{3} K\tan\theta v^3 \left(\frac{dt^3}{dt}\cos\omega t + t^3 \frac{d\cos\omega t}{dt}\right) \\
&= -\frac{1}{3} K\tan\theta v^3 (3t^2\cos\omega t - \omega t^3 \sin\omega t)
\end{aligned}
$$

讨论：若感应电动势 $\varepsilon > 0$，则感应电流方向为逆时针方向，反之则为顺时针方向。

五、问答题：

1．有两个电感器，自感系数分别为 L_1 和 L_2，两者相距很远。则

（1）这两个电感器串联后的等效自感是多少；

（2）若 $L_1=L_2=L$，且电感器的电阻可忽略，这两个电感器并联后等效自感是多少；

（3）说明上述二结论为什么只在两电感器相距很远时才成立。

答：（1）在两个电感器串联时，两个电感器的电流及电流变化均相等。

由于距离相距很远，两个电感器间的互感可忽略不计，则当两个电感器上自感电动势分别为 ε_1 和 ε_2 时，串联电路总感应电动势为：

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -L_1\frac{dI}{dt} - L_2\frac{dI}{dt} = -(L_1 + L_2)\frac{dI}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad 3\text{ 分}$$

故此情形串联后的等效自感为：$L = -\varepsilon / (dI/dt) = L_1 + L_2$　　1 分

（2）并联后两电感器上电压相等。

又因为 $L_1=L_2=L$，且电感器的电阻可忽略，故两个电感器上自感电动势相等，都是：ε 。
而通过每个并联电感器的电流是总电流的一半，即 $I/2$，所以对每个电感器有自感电动势为：

$$\varepsilon = -L\frac{\mathrm{d}(I/2)}{\mathrm{d}t} = -\frac{L}{2}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

故并联后的等效自感为：$L = -\varepsilon/(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t) = \dfrac{L}{2}$ 4 分

（3）只有当两电感器相距很远时，才可忽略两线圈间的互感作用，否则还需要考虑互感的影响。
2 分