密封装订线 密封装订线 密封装订线

姓名＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿＿

西南交通大学 2021—2022 学年第（ 一 ）学期考试试卷

课程代码 MATH000812 课程名称 高等数学 I（A 卷）考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	总成绩
得分						

阅卷教师签字：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}((0.2)^n+\sqrt[n]{0.5}+\sqrt[n]{n}+\frac{\sin n}{n})=$（ C ）． $0+1+1+0$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

2. 下列函数在 $x=0$ 处可导的是（ C ）．

(A) $f(x)=|x(x-1)|$ (B) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

(C) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ (D) $f(x)=\begin{cases}\frac{(x+1)^2}{2}, & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases}$

3. $x=0$ 是函数 $\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的（ 跳跃 ）间断点；$x=0$ 是函数 $\sin x\sin\frac{1}{x}$ 的（ 可去 ）间断点．

(A) 可去；可去 (B) 跳跃；无穷 (C) 可去；无穷 (D) 跳跃；可去

4. 函数 $y=\ln(1+x^2)$ 的单调递增且图形为凹的区间是（ B ）．

(A) $(1,+\infty)$ (B) $(0,1)$ (C) $(-1,0)$ (D) $(-1,1)$

5. 将极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$ 表示为定积分为（ D ）． 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})$

(A) $\int_0^1\ln^2(1+x)dx$ (B) $\int_0^1\ln^2 x dx$ (C) $\int_1^2 2\ln(1+x)dx$ (D) $\int_0^1 2\ln(1+x)dx$

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

6. 设函数 $F(x)$ 是 $\frac{e^x}{x}$ 的一个原函数，则 $dF(\ln x)=$ $\frac{1}{\ln x}dx$．

7. 曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$．

8. 反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx=$ $2e^{-1}$．

9. 曲线 $y=e^{x^2}$ 与直线 $x=1$、x 轴、y 轴所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体体积为 $\pi(e-1)$．

10. 微分方程 $ydx-(x^2-x)dy=0$ 的通解为 $y=C\cdot\frac{x-1}{x}$ 分离变量

三、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

11. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\tan 2x}\ln(1+t)dt}{\sqrt{1-x^2}-1}$．

12. 求曲线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 相应点处的切线方程和参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ 所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$．

13. 求不定积分 $I=\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$．

14. 计算定积分 $I=\int_{-1}^{1}x^2\left(\frac{\sin x}{1+x^4}+\sqrt{1-x^2}\right)dx$．

四、解答题（15 题 10 分，16 题 11 分，共 21 分）

15. 求微分方程 $y'-y^4\cos x-y\tan x=0$ 满足初值条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解．

16. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过原点和点 $(1,2)$，且 $a<0$，确定 a，b，c 的值使抛物线与 x 轴所围图形的面积最小．

五、证明题（7 分）

17. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．

(1) 证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=1-\xi$．

(2) 证明：存在两个不同的点 $x_1,x_2\in(0,1)$ 使得 $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$．

17. (1) 令 $g(x)=f(x)+x-1$. 于是 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 连续

$g(0)=f(0)+0-1=-1<0$. $g(1)=f(1)+1-1=1>0$.

据零点定理得. $\exists\xi\in(0,1)$.

s.t $g(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=1-\xi$

(2) 由(1)知 $\exists\xi\in(0,1)$ s.t $f(\xi)=1-\xi$.

在 $[0,\xi]$ 上运用 Lagrange 中值定理知 $\exists x_1\in(0,\xi)$. s.t $f'(x_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{1-\xi}{\xi}$

在 $[\xi,1]$ 上运用 Lagrange 中值定理知 $\exists x_2\in(\xi,1)$. s.t $f'(x_2)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}$

于是 $\exists x_1,x_2\in(0,1)$ 且 $x_1\neq x_2$, s.t $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$

三.计算题

11.

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\tan2x}\ln(1+t)dt}{\frac{1}{2}(-x^2)}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\tan2x)\cdot\sec^2 2x\cdot2}{-x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\tan2x\cdot\sec^2 2x}{-x}=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot2x}{-x}=-4$$

12. $\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

$t=\frac{\pi}{2}$时. $x=a(\frac{\pi}{2}-1)$, $y=a$

$\frac{dy}{dx}=1$

于是切线方程为 $y-a=x-a(\frac{\pi}{2}-1)$

即 $y=x+a(2-\frac{\pi}{2})$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

13. $原式=2\int\arctan\sqrt{x}\,d\sqrt{x}$

$$=2\sqrt{x}\cdot\arctan\sqrt{x}-\int2\sqrt{x}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}dx$$

$$=2\sqrt{x}\cdot\arctan\sqrt{x}-\int\frac{1}{1+x}dx$$

$$=2\sqrt{x}\cdot\arctan\sqrt{x}-\ln(1+x)+C$$

14. $原式=\int_{-1}^{1}x^2(\frac{\sin x}{1+x^4}+\sqrt{1-x^2})dx$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{x^2\sin x}{1+x^4}dx+\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=0+2\int_0^1x^2\sqrt{1-x^2}dx$$

$$\overset{x=\sin t}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos t\cdot\cos t\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t(1-\sin^2t)dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\,dt-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\,dt$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{8}$$

15.

$y'-y^4\cos x-y\tan x=0$

$\Rightarrow y'-\tan x\cdot y=\cos x\cdot y^4$ 伯努利方程

令 $z=y^{-3}$, 则 $z'=-3y^{-4}\cdot y'$

$\Rightarrow z'+3\tan x\cdot z=-3\cos x$ 一阶线性微分方程

于是 $z=e^{\int-3\tan x\,dx}(\int-3\cos x\,e^{\int3\tan x\,dx}dx+C)$

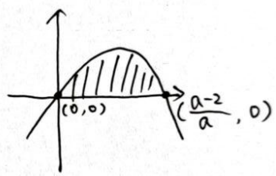
$=\cos^3x(-3\tan x+C)$

$y|_{x=0}=1$. 即 $z|_{x=0}=1$. 即 $C=1$

从而 $z=\cos^3x(-3\tan x+1)$.

得 $y=z^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{1-3\tan x}\cdot\cos x}$

16. 抛物线过原点和(1,2). 得 $y=ax^2+(2-a)x$ $(a<0)$



面积 $S=\int_0^{\frac{a-2}{a}}(ax^2+(2-a)x)dx$

$=[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}(2-a)x^2]_0^{\frac{a-2}{a}}$

$=\frac{1}{6}\cdot\frac{(2-a)^3}{a^2}$

$$S'=\frac{1}{6}\cdot\frac{3(2-a)^2\cdot(-1)\cdot a^2-(2-a)^3\cdot2a}{a^4}=\frac{1}{6}\cdot\frac{-(2-a)^2a(a+4)}{a^4}$$

$(a<0)$

因此在 $a<0$ 时有唯一驻点 $a=-4$.(当 $a<-4$ 时 $S'<0$. 当 $a>-4$ 时, $S'>0$)

从而S在 $a=-4$ 时取得最小值.

即当 $a=-4$, $b=6$, $c=0$ 时, 抛物线与x轴所围图形的面积最小.

请在各题目的答题区域内作答，超出黑色矩形边框限定区域的答案无效