第一章作业

1. 试判断下列信号是否是周期信号。若是，确定其周期。

(1) $x(t)=\sin(2t)+\cos(3\pi t)$　　(2) $x(t)=e^{-2t}\sin(2t+\pi/6)$

(3) $x[k]=\sin(\frac{3}{4}k)$　　(4) $x[k]=\sin(\frac{\pi}{6}k)+\cos(\frac{2\pi}{5}k)$

解：(1) 由于$\sin(2t)$是周期为π(s)的周期信号，$\cos(3\pi t)$是周期为 2/3(s)的周期信号，两者没有最小公倍数，因此信号$x(t)$不是周期信号。

(2) 不满足$x(t)=x(t+T)$，所以此信号为非周期信号。

(3) 由于$\Omega_0=\frac{3}{4}$，$\frac{\Omega_0}{2\pi}=\frac{3}{8\pi}$，不是有理数，所以此信号是非周期信号。

(4) 由于$\sin(\frac{\pi}{6}k)$是周期为$N_1=12$的周期序列，$\cos(\frac{2\pi}{5}k)$是周期为$N_2=5$的周期序列，两者没有最小公倍数为 60，因此信号$x[k]$是周期信号，周期$N=60$。

2. 试判断下列信号中哪些为能量信号，哪那些为功率信号，或者都不是。

(1) $x(t)=A\sin(\omega_0 t+\theta)$　　(2) $x(t)=e^{-t}\cos t,\ t\geq 0$

(3) $x[k]=(\frac{4}{5})^k,\ k\geq 0$　　(4) $x[k]=e^{j\Omega_0 k}$

解：(1) $x(t)=A\sin(\omega_0 t+\theta)$是基本周期$T_0=2\pi/\omega_0$的周期信号。其在一个基本周期内的能量为

$$E_0=\int_0^{T_0}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\int_0^{T_0}A^2\sin^2(\omega_0 t+\theta)\mathrm{d}t$$

$$=A^2\int_0^{T_0}\frac{1}{2}[1-\cos(2\omega_0 t+\theta)]\mathrm{d}t=\frac{A^2T_0}{2}$$

由于周期信号有无限个周期，所以$x(t)$的归一化能量为无限值，即

$$E=\lim_{k\to\infty}kE_0=\infty$$

但其归一化功率

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{kT_0}kE_0=\frac{E_0}{T_0}=\frac{A^2}{2}$$

是非零的有限值，因此$x(t)$是功率信号。

(2) 信号$x(t)$的归一化能量为

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_0^T|x(t)|^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\int_0^T(e^{-t}\cos t)^2\mathrm{d}t<\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

因此信号$x(t)=e^{-t}\cos t,\ t\geq 0$是能量信号。

(3) 信号$x[k]$的归一化能量为

$$E=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[k]|^2=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{4}{5})^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}(0.64)^k=\frac{1}{1-0.64}=2.78$$

因此信号$x[k]=(\frac{4}{5})^k,\ k\geq 0$是能量信号。

(4) 信号$x[k]$的归一化能量和功率分别为

$$E=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[k]|^2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{j}\Omega_0 k}e^{-\mathrm{j}\Omega_0 k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}1=\infty$$

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}|x[k]|^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}1=1$$

因此信号$x[k]=e^{\mathrm{j}\Omega_0 k}$为功率信号。

3. 已知系统的输入输出关系如下，其中$x(t)$、$y(t)$分别为连续时间系统的输入和输出，$y(0)$为初始状态；$x[k]$、$y[k]$分别为离散时间系统的输入和输出，$y[0]$为初始状态。判断这些系统是否为线性系统？

(1) $y(t)=4y(0)+2\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ (2) $y(t)=y(0)\sin 2t+\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$

(3) $y[k]=4y[0]\times x[k]+3x[k]$ (4) $y[k]=ky[0]+\sum_{n=0}^{k}x[n]$

解：(1) 具有可分解性，零输入响应$y_{zi}(t)=4y(0)$具有线性特性。

对零状态响应$y_{zs}(t)=2\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$，设输入$x(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$

$$y_{zs}(t)=T\{\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\}=2\frac{\mathrm{d}[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]}{\mathrm{d}t}$$

$$=2\alpha\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}+2\beta\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}=\alpha y_{zs1}(t)+\beta y_{zs2}(t)$$

也具有线性特性。故系统为线性系统。一般，若系统的零状态响应$y(t)$是输入$x(t)$的微分，则该微分系统是线性系统。

(2) $y(t)$具有可分解性，零输入响应$y(0)\sin 2t$具有线性特性，对零状态响应$\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$，

设输入$x(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$

$$y_{zs}(t)=T\{\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\}=\int_0^t [\alpha x_1(t)+\beta x_2(\tau)]\mathrm{d}t$$

$$=\alpha\int_0^t x_1(\tau)\mathrm{d}t+\beta\int_0^t x_2(\tau)\mathrm{d}\tau=\alpha y_{zs1}(t)+\beta y_{zs2}(t)$$

也具有线性特性，所以系统是线性系统。一般，若系统的零状态响应$y(t)$是输入$x(t)$的积分，则该积分系统是线性系统。

(3) 不具有可分解性，即$y[k]\neq y_{zi}[k]+y_{zs}[k]$，故系统为非线性系统。

(4) $y[k]$ 具有可分解性，零输入响应 $y_{zi}[k]=ky[0]$ 具有线性特性，零状态响应 $y_{zs}[k]=\sum_{n=0}^{k} x[n]$ 也具有线性特性，所以系统是线性系统。

4. 判断下列系统是否为非时变系统，为什么？其中 $x(t)$ 、$x[k]$ 为输入信号，$y(t)$ 、$y[k]$ 为零状态响应。

(1) $y(t)=tx(t)+\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ (2) $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)e^{t-\tau}\mathrm{d}\tau$

(3) $y[k]=x[k]-2x[k-1]$ (4) $y[k]=x[2k]$

解：(1) 因为 $y_1(t)=T\{x(t-t_0)\}=tx(t-t_0)+\dfrac{\mathrm{d}x(t-t_0)}{\mathrm{d}t}$

而 $y(t-t_0)=(t-t_0)x(t-t_0)+\dfrac{\mathrm{d}x(t-t_0)}{\mathrm{d}t}\neq y_1(t)$

所以该系统为时变系统。

(2) 因为

$$y_1(t)=T\{x(t-t_0)\}=\int_{-\infty}^{t} x(\tau-t_0)e^{t-\tau}\mathrm{d}\tau \overset{\lambda=\tau-t_0}{=} \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\lambda)e^{t-t_0-\lambda}\mathrm{d}\lambda$$

而 $y(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)e^{t-t_0-\tau}\mathrm{d}\tau=y_1(t)$

所以该系统为非时变系统。

(3) 因为

$$y_1[k]=T\{x[k-k_0]\}=x[k-k_0]-2x[k-k_0-1]=y[k-k_0]$$

所以该系统为非时变系统。

(4) 因为

$$y_1[k]=T\{x[k-k_0]\}=x[2k-k_0]$$

而 $y[k-k_0]=x[2(k-k_0)] \neq y_1[k]$

所以该系统为时变系统。

5. 已知某线性非时变连续系统，当其初始状态$y(0^-)=2$时，系统的零输入响应$y_{zi}(t)=6e^{-4t}, t>0$。而在初始状态$y(0^-)=8$，以及输入激励$x(t)$共同作用下产生的系统完全响应$y_1(t)=3e^{-4t}+5e^{-t}, t>0$。试求：

(1) 系统的零状态响应$y_{zs}(t)$；

(2) 系统在初始状态$y(0^-)=1$以及输入激励为$3x(t-1)$共同作用下产生的系统完全响应$y_2(t)$。

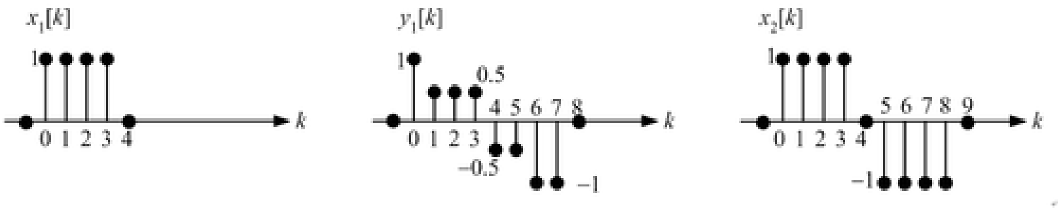
解：(1) 由于已知系统在初始状态$y(0^-)=2$时，系统的零输入响应$y_{zi}(t)=6e^{-4t}, t>0$。根据线性系统的特性，则系统在初始状态$y(0^-)=8$，系统的零输入响应应为$4y_{zi}(t)$，即为$24e^{-4t}, t>0$。而且已知系统在初始状态$y(0^-)=8$以及输入激励$x(t)$共同作用下产生的系统完全响应为$y_1(t)=3e^{-4t}+5e^{-t}, t>0$。故系统仅在输入激励$x(t)$作用下产生的零状态响应$y_{zs}(t)$为

$$y_{zs}(t)=y_1(t)-4y_{zi}(t)=3e^{-4t}+5e^{-t}-24e^{-4t}=5e^{-t}-21e^{-4t}, t>0$$

(2) 同理，根据线性系统的特性，可以求得系统在初始状态$y(0^-)=1$以及输入激励为$3x(t-1)$共同作用下产生的系统完全响应为

$$y_2(t)=\frac{1}{2}y_{zi}+3y_{zs}(t-1)=3e^{-4t}+3(5e^{-(t-1)}-21e^{-4(t-1)}, t>1$$

6. 已知某线性非时变离散时间系统在输入$x_1[k]$的作用下，其零状态响应$y_1[k]$，试求在$x_2[k]$作用下系统的零状态响应$y_2[k]$。$x_1[k]$, $y_1[k]$和$x_2[k]$分别如下图所示。



题 6 图

解：由$x_1[k]$和$x_2[k]$的波形可看出，$x_2[k]$与$x_1[k]$之间存在以下关系

$$x_2[k]=x_1[k]-x_1[k-5]$$

利用线性非时变特性，零状态响应 $y_2[k]$ 与$y_1[k]$ 之间存在同样的关系，即

$$y_2[k]=y_1[k]-y_1[k-5]=\{\overset{\downarrow}{1},0.5,0.5,0.5,-0.5,-1.5,-1.5,-1.5,-0.5,0.5,0.5,1,1\}$$

第二章作业

1. 利用冲激信号的性质计算下列各式。

(1) $\sin t\cdot\delta(t-\dfrac{\pi}{2})$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2)\mathrm{e}^{-2t}u(t)\mathrm{d}t$

(3) $\displaystyle\int_{-4}^{+3}\mathrm{e}^{-t}\cdot\delta(t-6)\mathrm{d}t$ (4) $(t+2)\delta(2-2t)$

解：(1) 利用冲激信号的筛选特性可得 (1 分):

$$\sin t\cdot\delta(t-\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\delta(t-\frac{\pi}{2})=\delta(t-\frac{\pi}{2})$$ (3 分)

(2) 利用冲激信号的取样特性可得 (1 分)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2)\mathrm{e}^{-2t}u(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\delta(t-2)\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-2t}|_{t=2}=\mathrm{e}^{-4}$$ (3 分)

(3) 利用冲激信号的筛选特性可得 (1 分)

$$\int_{-4}^{+3}\mathrm{e}^{-t}\cdot\delta(t-6)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-6}\int_{-4}^{+3}\delta(t-6)\mathrm{d}t$$ (1 分)

由于冲激信号$\delta(t-6)$在$t\neq6$时为零，故其在区间 [4, 3] 上的积分为零，由此可得

$$\int_{-4}^{+3}e^{-t}\,\delta(t-6)dt=0$$ (2 分)

(4) 利用冲激信号的展缩特性可得 (1 分)

$$(t+2)\delta(2-2t)=\frac{1}{|-2|}(t+2)\delta(t-1)$$ (1 分)

再利用冲激信号的筛选特性可得 (1 分)

$$(t+2)\delta(2-2t)=\frac{1}{|-2|}(t+2)\delta(t-1)=\frac{3}{2}\delta(t-1)$$ (1 分)

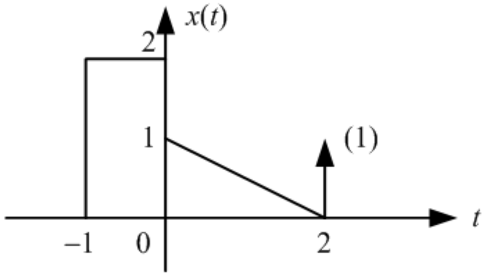
2. 已知信号 *x* (*t*) 的波形如图题 2 图所示，绘出下列信号的波形。

(1) $x(-2t-5)$

(2) $x(t)+u(t)$

(3) $x(t)+u(1-t)$

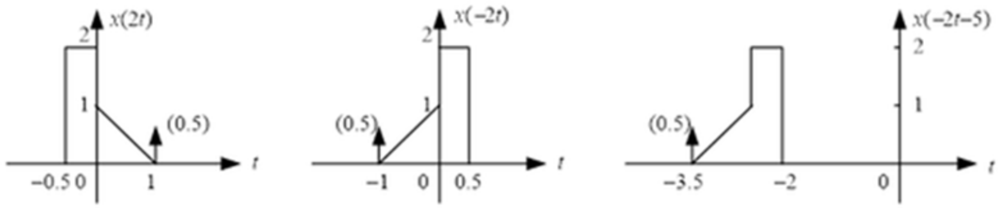
(4) $x'(t)$



题 2 图

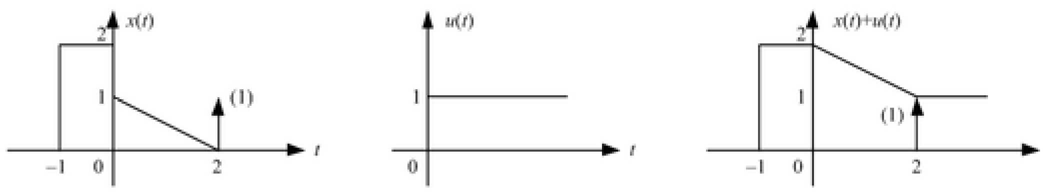
解：(1) $x(-2t-5)$包含翻转、压缩和时移运算，$x(-2t-5)$改写为 $x[-2(t+5/2)]$，可以按先压缩再翻转，最后时移的顺序处理，即

$$x(t)\xrightarrow{t\to 2t}x(2t)\rightarrow x(-2t)\xrightarrow{5/2}x(-2t-5)$$



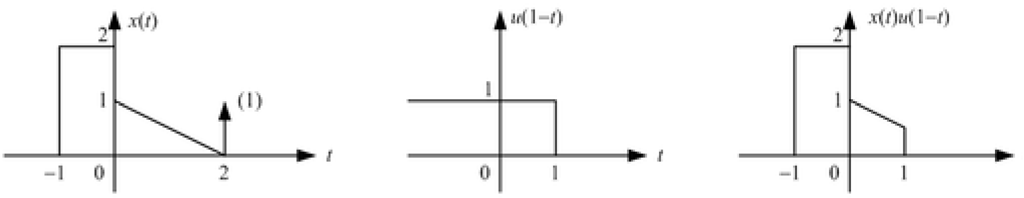
分别为 2 分，2 分和 1 分。

(2)



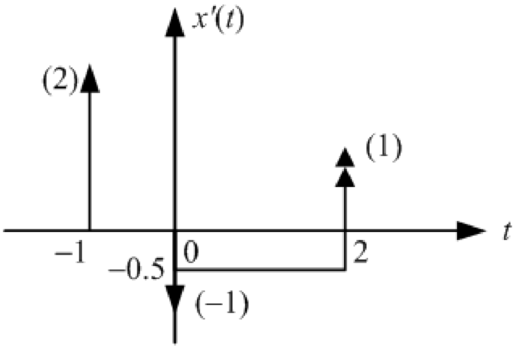
分别获得 2 分和 3 分。

(3)



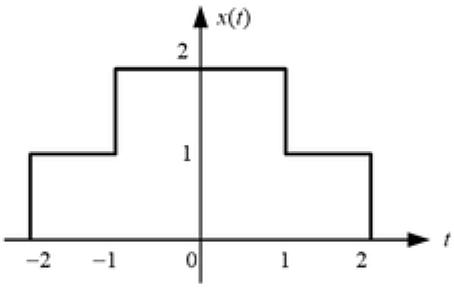
分别获得 2 分和 3 分。

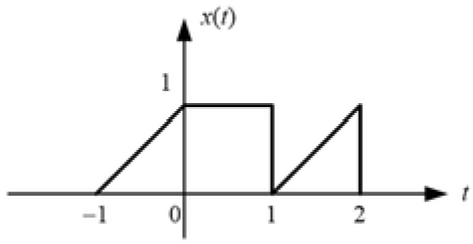
(4)



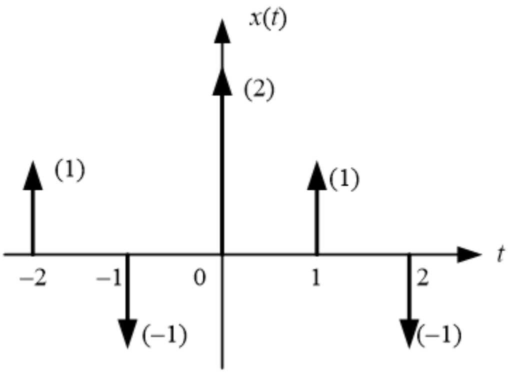
(5 分)

3. 用基本信号表示题 3 图中各信号





(1) (2)



(3)

解：(1) $x(t)=u(t+2)+u(t+1)-u(t-1)-u(t-2)$ (4 分)

(2) $x(t)=r(t+1)-r(t)-u(t-1)+r(t-1)-r(t-2)-u(t-2)$ (4 分)

(3) $x(t)=\delta(t+2)-\delta(t+1)+2\delta(t)+\delta(t-1)-\delta(t-2)$ (4 分)

4. 已知序列 $x[k]=\begin{cases} 0.8^k \text{-}2 \le \mathrm{k} \le 3 \\ 0 \quad \mathrm{k} < 2, \mathrm{k} > 3 \end{cases}$

(1) 用阶跃序列的截取特性表示 $x[k]$；
(2) 用加权单位脉冲序列表示 $x[k]$。

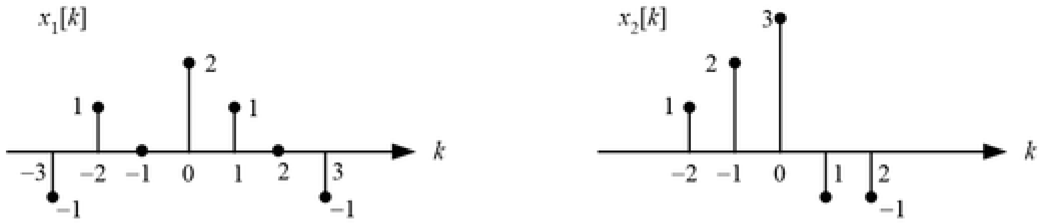
解：(1)当序列 $x[k]$仅在$N_1 \le k \le N_2$时取值，可以利用 $u[k-N_1]-u[k-N_2-1]$将其表示为$x[k]\{u[k-N_1]-u[k-N_2-1]\}$(2 分)因此本题序列$x[k]=0.8^k\{u[k+2]-u[k-4]\}$(2 分)
(2) 任意离散序列 $x[k]$都可以由单位脉冲序列的线性组合表示为 $x[k]=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[k-n]$，因此本题序列 $x[k]=\sum\limits_{n=-2}^{3} 0.8^n\delta[k-n]$ (4 分)

5. 已知序列$x_1[k]=\{-1,1,0,\dot{2},1,0,-1\}$, $x_2[k]=\{1,2,\dot{3},-1,-1\}$,画出下列信号的波形。

(1)$y_1[k]=x_1[2k]+x_2[3k+1]$ (2)$y_2[k]=x_1[k+1]+x_2[-k]$

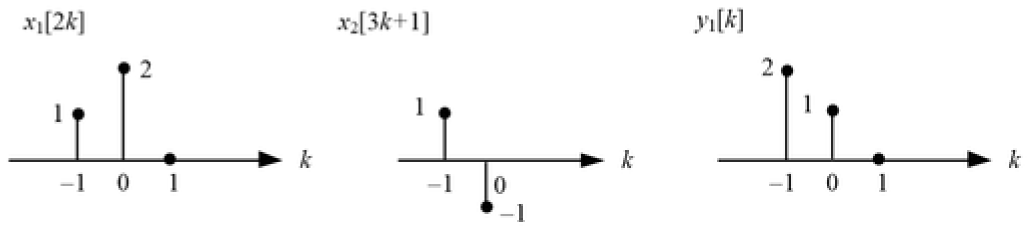
(3) $y_3[k]=\sum\limits_{n=-\infty}^{k} x_1[n]$ (4)$y_4[k]=x_2[k]-x_2[k-1]$

解：由已知可画出序列 $x1[k]$和 $x2[k]$的波形如题 5 图所示。



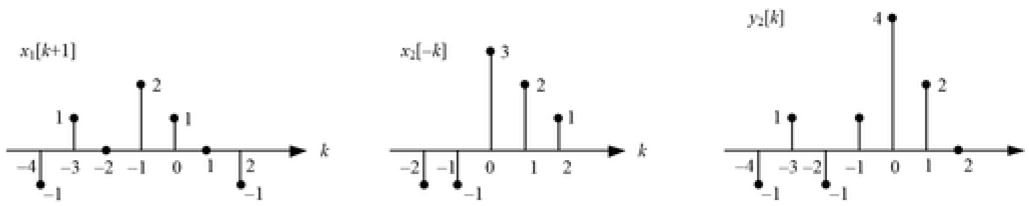
题 5 图

(1)



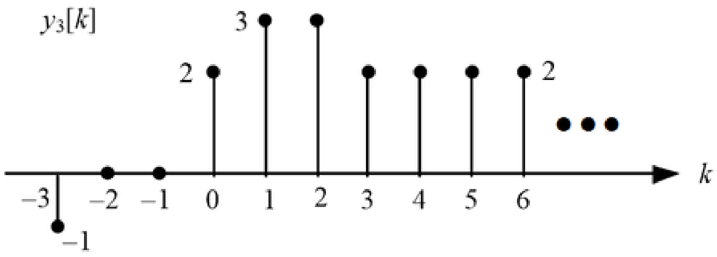
分别是 2 分，2 分和 1 分。

（2）



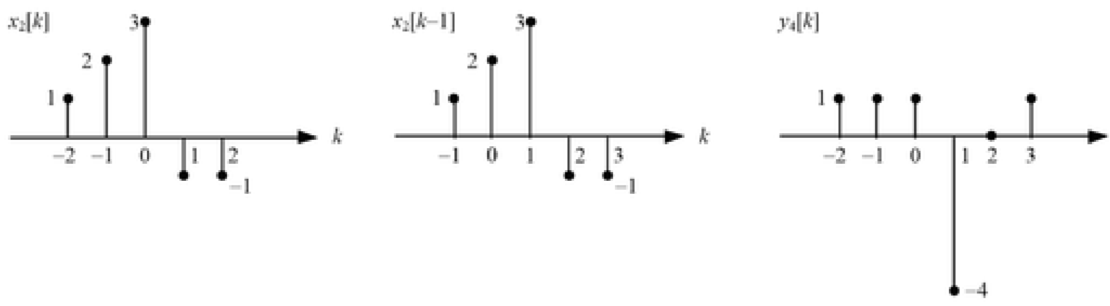
分别是 2 分，2 分和 1 分

（3）



（5 分）

（4）



分别是 3 分和 2 分

6. 试写出下列基本信号之间的关系

(1)$\delta(t)$,$u(t)$,$r(t)$的关系；

(2)$\delta[k]$,$u[k]$,$r[k]$的关系。

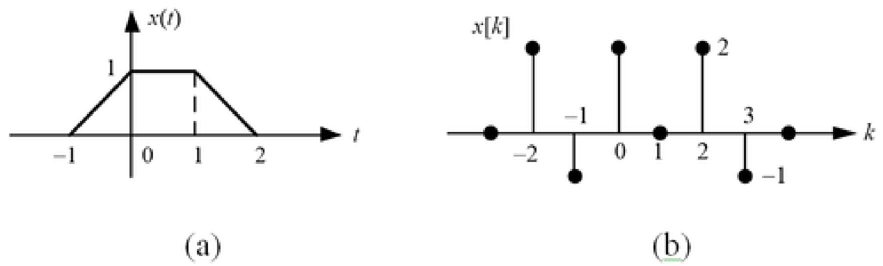
解：（1） $\delta(t)=\dfrac{du(t)}{dt}$ （1.5 分）， $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$ (1.5 分)， $u(t)=\dfrac{dr(t)}{dt}$ (1.5 分)，

$r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau$ (1.5 分)

（2） $\delta[k]=u[k]-u[k-1]$ （1.5 分）， $u[k]=\sum_{n=-\infty}^{k}\delta[n]$ (1.5 分)，

$u[k]=r[k+1]-r[k]$ (1.5 分)， $r[k+1]=\sum_{n=-\infty}^{k}u[n]$ (1.5 分)

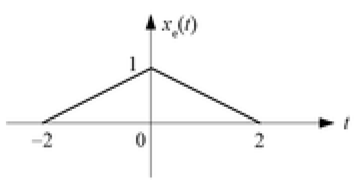
7. 画出题 7 图所示信号的奇分量和偶分量。

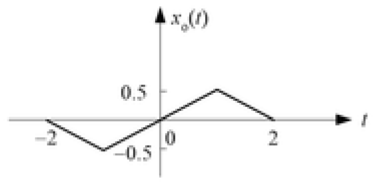


题 7 图

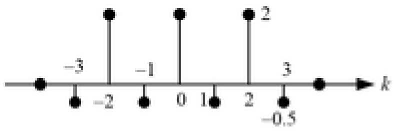
解：根据奇、偶分量的定义可画出题 7 图中各信号的奇分量和偶分量波形，

(*a*) $x_e(t)=\dfrac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$ (1 分)， $x_o(t)=\dfrac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$ (1 分)

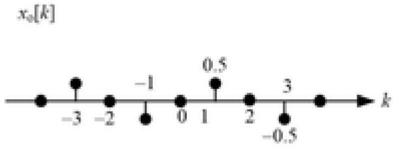




$(b)x_e[k]=\dfrac{1}{2}\{x[k]+x[-k]\}$ (1 分)， $x_o[k]=\dfrac{1}{2}\{x[k]-x[-k]\}$,(1 分)



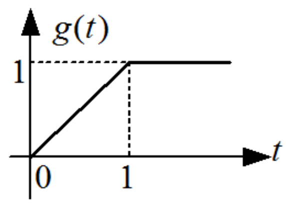
(2 分)



(2 分)

第三章作业

1. 已知信号$x(t)=u(t)-u(t-1)$通过某连续时间 LTI 系统的零状态响应为$y(t)=\delta(t+1)+\delta(t-1)$，试求题 1 图所示信号 $g(t)$通过该系统的响应$y_g(t)$并画出其波形

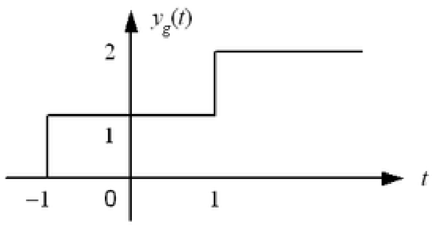


题 1 图

解：因为$g(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$(3 分)所以，利用线性时不变系统的积分特性，可得

$$y_g(t)=\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t} [\delta(\tau+1)+\delta(\tau-1)]\mathrm{d}\tau=u(t+1)+u(t-1)$$ (5 分)

其波形如题 1 答案图所示



（2 分）

题 1 答案图

2. 已知某线性时不变(LTI)离散时间系统，当输入为$\delta[k-1]$时，系统的零状态响应为$(\frac{1}{2})^k u[k-1]$，试计算输入为$x[k]=2\delta[k]+u[k]$时，系统的零状态响应$y[k]$。

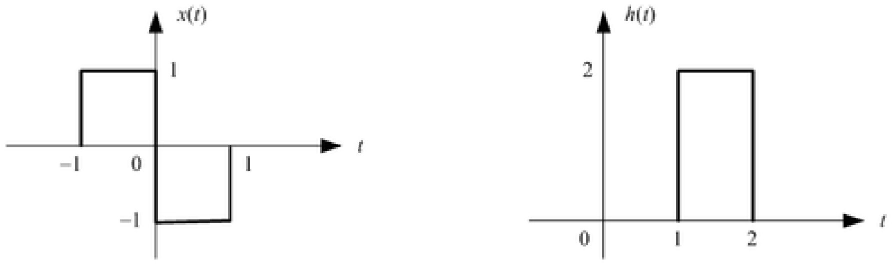
解：由已知，有 $T\{\delta[k-1]\}=(\frac{1}{2})^k u[k-1]$根据时不变特性，可得

$h[k]=T\{\delta[k]\}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^k u[k]$ (2 分)

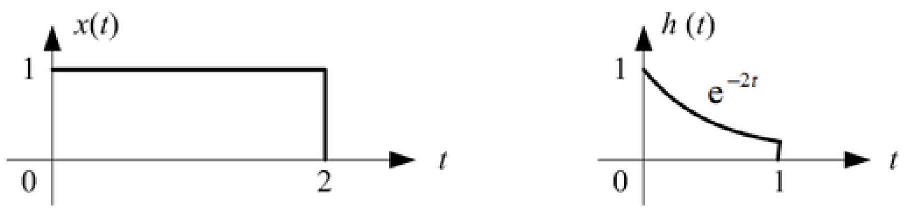
由于 $x[k]=2\delta[k]+u[k]=2\delta[k]+\sum_{n=-\infty}^{k}\delta[n]$ (3 分)根据线性和时不变特性，可

得 $y[k]=2h[k]+\sum_{n=-\infty}^{k}h[n]=[1+\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{k}]u[k]$ (5 分)

3. 已知某连续 LTI 系统的输入 $x(t)$和系统冲激响应 $h(t)$如题 3 图所示，试求系统的零状态响应 $y(t)$，并定性画出系统输出 $y(t)$的波形。



(a)



(b)

题 3 图

解：(*a*) 信号 $x(t)$和 $h(t)$可以用基本信号表示为

$x(t)=u(t+1)-2u(t)+u(t-1)$,

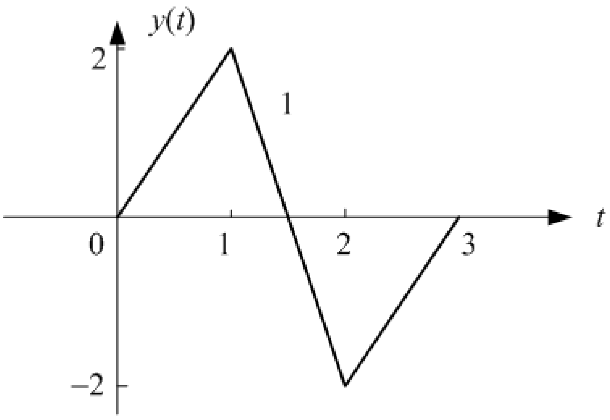
$h(x)=2u(t-1)-2u(t-2)$ (2 分)

利用 $u(t)*u(t)=r(t)$，以及卷积的分配律和平移特性，可得(1 分)

$y(t)=x(t)*h(t)=[u(t+1)-2u(t)+u(t-1)]*[2u(t-1)-2u(t-2)]$

$=2r(t)-6r(t-1)+6r(t-2)-2r(t-3)$ (3 分)

$y(t)$ 的波形如题 3 答案图(a)所示（需要修改）



（需要修改）

(b) 连续 LTI 系统的零状态响应为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

当$t<0$时， $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau=0$

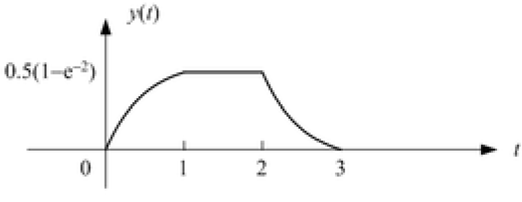
当$0\leq t\leq 1$时， $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{t} \mathrm{e}^{-2\tau}\mathrm{d}\tau=0.5(1-\mathrm{e}^{-2t})$ (2 分)

当$1\leq t\leq 2$时， $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-2\tau}\mathrm{d}\tau=0.5(1-\mathrm{e}^{-2})$ (2 分)

当$2\leq t\leq 3$时， $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{t-2}^{1} \mathrm{e}^{-2\tau}\mathrm{d}\tau=0.5(\mathrm{e}^{4-2t}-\mathrm{e}^{-2t})$ (2 分)

当$t>3$时， $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau=0$

$y(t)$的波形如图题 3 答案图(b)所示。

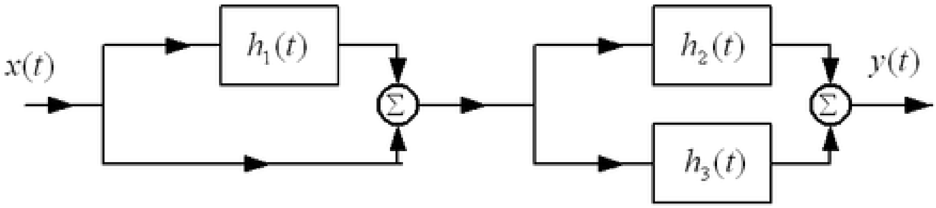


（2 分）

题 3 答案图(b)

4. 已知某连续时间 LTI 系统如题 4 图所示，求系统的单位冲激响应。其中

$h_1(t)=u(t-1), h_2(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t-2), h_3(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$



题 4 图

解：$h(t)=[h_1(t)+\delta(t)]*[h_2(t)+h_3(t)]$

$=[u(t-1)+\delta(t)]*[\mathrm{e}^{-3t}u(t-2)+\mathrm{e}^{-2t}u(t)]$

$u(t-1)*\mathrm{e}^{-3t}u(t-2)+u(t-1)*\mathrm{e}^{-2t}u(t)+\delta(t)*\mathrm{e}^{-3t}u(t-2)+\delta(t)*\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

$=$

$$\frac{\mathrm{e}^{-6}}{3}(1-\mathrm{e}^{-3(t-3)})u(t-3)+\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2(t-1)})u(t-1)+\mathrm{e}^{-3t}u(t-2)+\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

第一步 3 分，第二步和第三步各 1 分，第四步 3 分

5. 已知某因果连续时间 LTI 系统的微分方程为：

$y^{n}(t)+7y'(t)+10y(t)=2x'(t)+3x(t)$，$t>0$

激励信号 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，初始状态 $y(0^-)=1$，$y'(0^-)=1$ 试求

(1)系统的单位冲激响应 $h(t)$。

(2)系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$，零状态响应 $y_{zs}(t)$ 及完全响应 $y_1(t)$。

(3)若 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t-1)$，重求系统的完全响应 $y_2(t)$。

解：(1) 微分方程的特征根 $s_1=-2$，$s_2=-5$ 且方程左端含有二阶导数，而方程右端仅有一阶导数，故设 $h(t)=(K_1\mathrm{e}^{-2t}+K_2\mathrm{e}^{-5t})u(t)$。 (2 分)

将其代入微分方程 $h''(t)+7h'(t)+10h(t)=2\delta(t)+3\delta(t)$，，可求出待定系数

$K_1=\frac{-1}{3},K_2=\frac{7}{3}$。因此，系统的冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t)=(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{7}{3}\mathrm{e}^{-5t})u(t)$$ (2 分)

(2) 由微分方程的特征根 $s_1=-2,s_2=-5$ 可写出零输入响应的形式为

$y_{zi}(t)=K_3\mathrm{e}^{-2t}+K_4\mathrm{e}^{-5t}, t\geq 0$（2 分） 由系统的初始状态

$y(0^-)=1, y'(0^-)=1$可求出其中的待定系数$K_3=2, K_4=-1$。由此即得

零输入响应为$y_{zi}(t)=2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-5t}, t\geq 0$(1 分)

系统的零状态响应为$y_{zs}(t)=x(t)*h(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)*(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{7}{3}\mathrm{e}^{-5t})u(t)$

$=(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{7}{12}\mathrm{e}^{-5t})u(t)$(3 分)

系统的完全响应为

$y_1(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{7}{3}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{19}{12}\mathrm{e}^{-5t}, t>0$(1 分)

(3) 冲激响应只与描述系统的微分方程有关，由于描述系统的微分方程没变，故冲激响应 $h(t)$不变。(1 分) 零输入响应仅与系统的初始状态有关，由于系统的初始状态没变,故零输入响应$y_{zi}(t)$不变(1 分) 输入信号改变，系统的零状态响应也随之改变，$x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t-1)=\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-(t-1)}u(t-1)$利用线性非时变系统的特性可得$T(\mathrm{e}^{-t}u(t-1))=\mathrm{e}^{-1}(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-(t-1)}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2(t-1)}-\frac{7}{12}\mathrm{e}^{-5(t-1)})u(t-1)$(1 分)

系统的完全响应为

$y_2(t)=2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-5t}+\mathrm{e}^{-1}(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-(t-1)}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2(t-1)}-\frac{7}{12}\mathrm{e}^{-5(t-1)})u(t-1), t\geq 0$(1 分)

6. 已知离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应 $h[k]$，输入信号 $x[k]$，试求系统的零状态响应 $y[k]$

（1）$h(k)=0.5^k(u[k]-u[k-N]), x[k]=u[k]-u[k-N]$。

（2）$h(k)=(1,\dot{4},2,3)$，$x[k]=u[k+2]-u[k-3]$。

解：（1）利用卷积和的分配率，可得$y[k]=x[k]*h[k]$

$=o.5^k\{u[k]-u[k-N]\}*\{u[k]-u[k-N]\}$

$=0.5^k u[k]*u[k]-0.5^k u[k-N]*u[k]-0.5^k u[k]*u[k-N]+0.5^k u[k-N]*u[k-N]$(2 分)

利用解析法可求出
$$0.5^k u[k] * u[k]=(\sum_{n=0}^{k} 0.5^n)u[k]=(2-0.5^k)u[k]$$
(2 分)

再利用位移特性即可求得:

$$y[k]=(2-0.5^k)u[k]-0.5^N(2-0.5^{k-N})u[k-N]-(2-0.5^{k-N})u[k-N]+0.5^N(2-0.5^{k-2N})u[k-2N]$$

（4 分）

(2) 利用卷积和的位移特性，可得

$$y[k]=x[k]*h[k]=x[k]*\{\delta[k+1]+4\delta[k]+2\delta[k-1]+3\delta[k-2]\}$$

$$=x[k+1]+4x[k]+2x[k-1]+3x[k-2]$$ (4 分)

由于$x[k]=u[k+2]-u[k-3]=\{1,1,\dot{1},1,1\}$，故

$$x[k]*h[k]=(1,5,7,\dot{1}0,10,9,5,3)$$ (4 分)

7. 已知某离散时间系统的输入输出关系为

$$y[k]=\sum_{n=-2}^{3} x[k+n]$$

（1）证明该系统是线性非时变系统;
（2）求该系统的单位脉冲响应 $h[k]$;
（3）判定系统的因果和稳定性.

解：（1）由于

$$T\{ax_1[k]+bx_2[k]\}=a\sum_{n=-2}^{3} x_1[k]+b\sum_{n=-2}^{3} x_2[k]=aT\{x_1[k]\}+bT\{x_2[k]\}$$

故该系统是线性系统。(2 分)

又由于
$$T\{ax[k-m]\}=\sum_{n=-2}^{3} x[k-m+n]=y[k-m]$$

故该系统是非时变系统 (2 分)
由此即证该系统是线性非时变系统.

(2) 根据单位脉冲响应的定义，由系统的输入输出关系可以直接得到

$$h[k]=\delta[k+3]+\delta[k+2]+\delta[k+1]+\delta[k]+\delta[k-1]+\delta[k-2]$$ (2 分)

（3）由于$h[k]$不满足$h[k]=0, k<0$，所以系统非因果 。(2 分)

由于$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|=\sum_{k=-2}^{3}1=6$ 所以系统稳定。 (2 分)

8. 已知某因果离散时间 LTI 系统的差分方程为

$y[k]-\frac{5}{6}y[k-1]+\frac{1}{6}y[k-2]=x[k], k\geq 0$ $y[-1]=0$，$y[-2]=1$，

$x[k]=u[k]$，试求：

(1) 系统的单位脉冲响应 $h[k]$；

(2) 系统的零输入响应$y_{zi}[k]$，零状态响应$y_{zs}[k]$及完全响应$y[k]$；

(3) 指出系统响应中的瞬态响应分量$y_t[k]$和稳态响应分量$y_s[k]$，及其固有响应分量$y_h[k]$和强制响应分量$y_p[k]$。

解：(1) 系统的单位脉冲响应$h[k]$为

根据单位脉冲响应 $h[k]$的定义，它应满足方程

$$h[k]-\frac{5}{6}h[k-1]+\frac{1}{6}h[k-2]=\delta[k]$$

该系统为二阶系统，需要二个等效初始条件。在上面差分方程中分别令$k=0$和$k=1$，可得等效初始条件为

$h[0]=\delta[0]+\frac{5}{6}h[-1]-\frac{1}{6}h[-2]=1$ (1 分)

$h[1]=\delta[1]+\frac{5}{6}h[0]-\frac{1}{6}h[-1]=\frac{5}{6}$ (1 分)

差分方程的特征根$r_1=\frac{1}{2}, r_2=\frac{1}{3}$，因此可设$h[k]=[C_1(\frac{1}{2})^k+C_2(\frac{1}{3})^k]u[k]$，(1 分)

将等效初始条件$h[0]=1, h[1]=5/6$代入其中，可求出待定系数

$C_1=3, C_2=-2$，所以$h[k]=[3(\frac{1}{2})^k-2(\frac{1}{3})^k]u[k]$ (1 分)

(2) 根据特征根可设零输入响应为$y_{zi}[k]=C_3(\frac{1}{2})^k+C_4(\frac{1}{3})^k, k\geq 0$，(2 分)代入初始状态$y[-1]=0, y[-2]=1$可求出待定系数$C_3=-1/2, C_4=1/3$，所以

$y_{zi}[k]=-\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^k+\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^k, k\geq 0$ (1 分)

系统的零状态响应为

$y_{zi}[k]=x[k]*h[k]=u[k]*[3(\frac{1}{2})^k-2(\frac{1}{3})^k]u[k]=[3-3(\frac{1}{2})^k+(\frac{1}{3})^k]u[k]$ (3 分)

系统的完全响应为$y[k]=y_{zi}[k]+y_{zs}[k]=3-\frac{7}{2}(\frac{1}{2})^k+\frac{4}{3}(\frac{1}{3})^k, k\geq 0$ (1 分)

(3) 系统的暂态响应$y_t[k]$是指完全响应中随时间增长而趋于零的项，而系统的稳态响应$y_s[k]$是指完全响应中随时间增长不趋于零的项。系统的固有响应$y_h[k]$是指完全响应 y[k$y[k]$]中那些与系统特征根相对应的响应，而系统强制响应$y_p[k]$是指完全响应$y[k]$中哪些与外部激励相同形式的响应。

$y_t[k]=-\frac{7}{2}(\frac{1}{2})^k+\frac{4}{3}(\frac{1}{3})^k, k\geq 0$, $y_s[k]=3, k\geq 0$ (2 分)

$y_h[k]=-\frac{7}{2}(\frac{1}{2})^k+\frac{4}{3}(\frac{1}{3})^k, k\geq 0$, $y_p[k]=3, k\geq 0$ (2 分)a