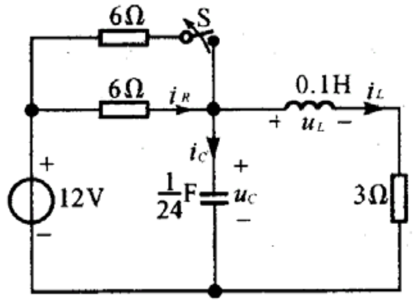
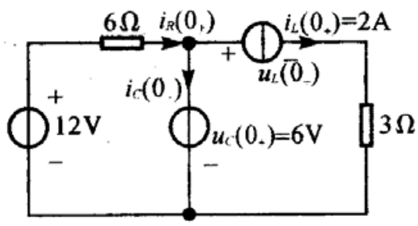
7-1 电路如图所示，开关未动作前电路已达稳态，$t=0$ 时开关 S 打开. 求 $u_C(0_+)$，$i_2(0_+)$，$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}$，$\left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}$，$\left.\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}$.



题 7-1 图



题解 7-1 图

解 在 $t<0$ 时，电路处于稳态，电容相当于开路，电感相当于短路，因此有

$$u_C(0_-) = \frac{12 \times 3}{(6 \mathbin{/\!/} 6) + 3}\text{V} = 6\text{V}$$

$$i_L(0_-) = \frac{12}{(6 \mathbin{/\!/} 6) + 3}\text{A} = 2\text{A}$$

根据换路定律有

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 6\text{V}, \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2\text{A}$$

画出 0_+ 时等效电路如题解 7－1 图所示，由此图可得到

$$i_R(0_+) = \frac{12 - u_C(0_+)}{6} = \frac{12-6}{6}\text{A} = 1\text{A}$$

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{0_+} = i_C(0_+) = i_R(0_+) - i_L(0_+) = 1\text{A} - 2\text{A} = -1\text{A}$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{0_+} = \frac{i_C(0_+)}{C} = -24\text{V/s}$$

因为 $$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\Big|_{0_+} = u_L(0_+) = u_C(0_+) - 3i_L(0_+) = 6\text{V} - 3 \times 2\text{V} = 0\text{V}$$

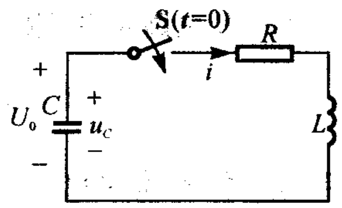
所以 $$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\Big|_{0_+} = \frac{u_L(0_+)}{L} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}\Big|_{0_+} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{12 - u_C}{6}\right)\Bigg|_{0_+} = -\frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Bigg|_{0_+} = -\frac{1}{6} \times (-24) = 4(\text{A/s})$$

7－2 图示电路中，电容原先已充电，$u_C(0_-) = U_o = 6\text{V}$，$R = 2.5\Omega$，$L = 0.25\text{H}$，$C = 0.25\text{F}$. 试求：

（1）开关闭合后的 $u_C(t)$，$i(t)$；

（2）使电路在临界阻尼下放电，当 L 和 C 不变时，电阻 R 应为何值？



题 7－2 图

解 （1）开关闭合后，电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

初始条件为 $$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 6\text{V}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

对应二阶齐次微分方程的特征方程为

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0$$

特征方程的特征根为

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$= -\frac{2.5}{2 \times 0.25} \pm \sqrt{(\frac{2.5}{2 \times 0.25})^2 - \frac{1}{0.25 \times 0.25}} = -5 \pm 3$$

即 $\qquad p_1 = -5 + 3 = -2, \qquad p_2 = -5 - 3 = -8$

由于 p_1，p_2 为两个不相等的负实根，电路处于过阻尼状态. 微分方程的通解为

$$u_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-8t}$$

$$\frac{du_C}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 8A_2 e^{-8t}$$

将 $u_C(0_+) = 6V, -\frac{i_C(0_+)}{C} = \frac{du_C}{dt}\Big|_{0_+} = 0$ 代入上面两个方程中，

得
$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 6 \\ -2A_1 - 8A_2 = 0 \end{cases}$$

解得 $\qquad A_1 = 8, \quad A_2 = -2$

所以 $\qquad u_C(t) = (8e^{-2t} - 2e^{-8t})\text{V}$

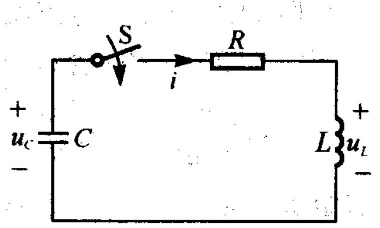
$$i(t) = -C\frac{du_C}{dt} = 0.25(2 \times 8e^{-2t} + 8 \times (-2)e^{-8t})\text{A}$$

$$= 4(e^{-2t} - e^{-8t})\text{A}$$

（2）使电路在临界阻尼下放电，电阻 R 应满足

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{0.25}{0.25}}\Omega = 2\Omega$$

7-3 已知图示电路中 $R = 1\text{k}\Omega$，$C = 2\mu\text{F}, L = 2.5\text{H}$. 设电容原先已充电且 $u_C(0_-) = 10\text{V}$. 在 $t = 0$ 时开关 S 闭合. 试求 $u_C(t)$、$i(t)$、$u_L(t)$ 以及 S 闭合后的 i_{max}.



题 7-3 图

解　$t>0$ 后，电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

特征方程为

$$LCp^2+RCp+1=0$$

特征根为

$$p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{(\frac{R}{2L})^2\ \frac{1}{LC}}$$

$$=\frac{-10^3}{2\times2.5}\pm\sqrt{(\frac{10^3}{2\times2.5})^2-\frac{1}{2.5\times2\times10^{-6}}}$$

$$=-200\pm\mathrm{j}400$$

即　$p_1=-200+\mathrm{j}400$，　$p_2=-200-\mathrm{j}400$.

由于 p_1 和 p_2 为一对共轭复根，故电路处于欠阻尼或衰减振荡放电过程. 微分方程的通解为

$$u_C(t)=Ae^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)\mathrm{V}$$

其中　$\delta=200$，　$\omega=400$

由题可知初始值

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=10\mathrm{V}$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0\mathrm{A}$$

而　$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\bigg|_{0_+}=-i_L(0_+)=0$$

因此有　$$\begin{cases}A\sin\theta=u_C(0_+)=10\mathrm{V}\\ -\delta A\sin\theta+\omega A\cos\theta=\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\bigg|_{0_+}=0\end{cases}$$

解得　$$\begin{cases}\theta=\arctan\frac{\omega}{\delta}=\arctan\frac{400}{200}=63.435^\circ\\ A=\frac{10}{\sin\theta}=\frac{10}{\sin63.435^\circ}=11.18\end{cases}$$

故　$$u_C(t)=11.18e^{-200t}\sin(400t+63.435^\circ)\mathrm{V}$$

$$i(t)=-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{u_C(0_+)}{\omega L}e^{-\delta t}\sin(\omega t)$$

$$=10e^{-200t}\sin400t\ \mathrm{mA}$$

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -Ae^{-\delta t}\sin(\omega t - \theta)$$
$$= -11.18e^{-200t}\sin(400t - 63.435°)\,\mathrm{V}$$

当$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u_L(t)}{L} = 0$时，即$\omega t - \theta = 0$时，电流达到最大值，这时有

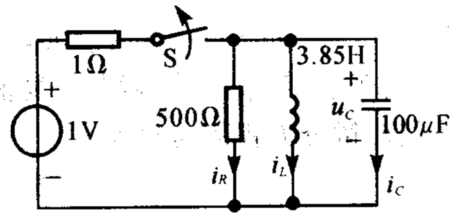
$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{63.435 \times \pi}{400 \times 180}\mathrm{s} \doteq 2.768 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$$

所以 $$i_{\max} = 10e^{-200\times 2.768\times 10^{-3}}\sin(400 \times 2.768 \times 10^{-3})\,\mathrm{mA}$$
$$= 5.142\ \mathrm{mA}$$

7-4 图示电路中开关S闭合已久，$t=0$时S打开．求u_C，i_L．

解 $t<0$时，稳态电路有

$$u_C(0_-) = 0\mathrm{V}$$
$$i_L(0_-) = \frac{1}{1} = 1\mathrm{A}$$



题7-4图

$t>0$后，电路的微分方程可根据对结点列KCL方程得到，即

$$i_R + i_L + i_C = 0$$
$$\frac{u_C}{R} + i_L + C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$$

由于 $$u_C(t) = u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

所以上述方程可写为 $$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L = 0$$

特征方程为 $$LCp^2 + \frac{L}{R}p + 1 = 0$$

特征根为

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$
$$= -\frac{1}{2\times 500\times 100\times 10^{-6}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\times 500\times 10^{-4}}\right)^2 - \frac{1}{3.85\times 10^{-4}}}$$
$$= -10 \pm \mathrm{j}49.97$$

即 $p_1 = -10 + \mathrm{j}49.97$， $p_2 = -10 - \mathrm{j}49.97$

由于 p_1 和 p_2 为一对其轭复根，故电路处于欠阻尼或衰减振荡放电过程，微分方程的通解为

$$\begin{aligned} i_L(t) &= Ae^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta) \\ &= Ae^{-10t}\sin(49.97t+\theta) \end{aligned}$$

根据初始条件

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{A}, \qquad u_C(0_+) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\Big|_{0_+} = 0$$

可得 $$\begin{cases} A\sin\theta = 1 \\ -10A\sin\theta + 49.97A\cos\theta = 0 \end{cases}$$

从中解出 $$\begin{cases} \theta = \arctan\dfrac{49.97}{10} = 78.68^\circ \\ A = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin 78.68^\circ} = 1.02 \end{cases}$$

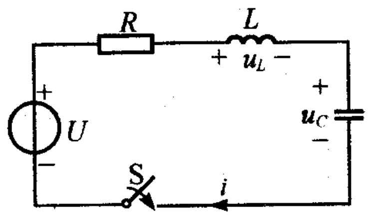
故电感电流

$$i_L = 1.02e^{-10t}\sin(49.97t+78.68^\circ)\text{A}$$

电容电压

$$u_C = u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -200.14e^{-10t}\sin(49.97t)\text{V}$$

7-5 电路如图所示，$t=0$ 时开关S闭合，设 $u_C(0_-)=0$，$i(0_-)=0$，$L=1\text{H}$，$C=1\mu\text{F}$，$U=100\text{V}$. 若：(1) 电阻 $R=3\text{k}\Omega$；(2) $R=2\text{k}\Omega$；(3) $R=200\Omega$. 试分别求在上述电阻值时电路中的电流 i 和电压 u_C.



题 7-5 图

解 $t>0$ 后，电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U$$

由题意可知电路的初始条件为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\text{V}$$
$$i(0_+) = i(0_-) = 0\text{A}$$

此题是一个求二阶电路零状态响应的问题.

设 $u_C(t)$ 的解为

$$u_C(t) = u_C' + u_C''$$

其中 u_C' 为方程的特解，满足 $u_C' = U = 100\text{V}$；u_C'' 为对应的齐次方程的通解，其函数形式与特征根的值有关，其特征方程为

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0$$

可得特征根 $$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

（1）当 $R = 3\text{k}\Omega$ 时，特征根为

$$p_{1,2} = -\frac{3000}{2\times 1} \pm \sqrt{\left(\frac{3000}{2\times 1}\right)^2 - \frac{1}{1\times 10^{-6}}}$$
$$= (-1.5 \pm 1.118) \times 10^3$$

即 $$p_1 = -381.97,\qquad p_2 = -2618.03$$

由于特征根为两个不相等的负实根，电路处于过阻尼状态，即非振荡充电过程，u_C'' 的形式为

$$u_C'' = A_1 e^{-382t} + A_2 e^{-2618t}$$

电容电压 $u_C(t)$ 的解为

$$u_C(t) = u_C' + u_C''$$
$$= 100 + A_1 e^{-382t} + A_2 e^{-2618t}$$

根据初始值确定待定常数 A_1, A_2，即

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C'(0_+) + u_C''(0_+) = 100 + A_1 + A_2 = 0 \\ i(0_+) = C\dfrac{du_C}{dt}\Big|_{0_+} = C\times(-382A_1 - 2618A_2) = 0 \end{cases}$$

从中解得 $$A_1 = -117,\quad A_2 = 17$$

所以电容电压

$$u_C(t) = (100 - 117e^{-382t} + 17e^{-2618t})\quad \text{V}$$

电流 i 为

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = (44.69e^{-382t} - 44.51e^{-2618t})\quad \text{mA}$$

（2）当 $R = 2\text{k}\Omega$ 时，特征根为

$$p_{1,2} = -\frac{2000}{2\times 1} \pm \sqrt{\left(\frac{2000}{2\times 1}\right)^2 - \frac{1}{1\times 10^{-6}}} = -1000$$

即 $$p_1 = p_2 = -1000$$

由于特征根为两个相等的负实根，电路处于临界阻尼状态，u''_C 的形式为

$$u''_C = (A_1 + A_2 t)\mathrm{e}^{-1000t}$$

电容电压 $u_C(t)$ 的解为

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u'_c + u''_c \\ &= 100 + (A_1 + A_2 t)\mathrm{e}^{-1000t} \end{aligned}$$

根据初始条件确定 A_1、A_2 待定常数，即

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u'_C(0_+) + u''_C(0_+) = 100 + A_1 = 0 \\ i(0_+) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{0_+} = C \times (A_2 - 1000A_1) = 0 \end{cases}$$

从中解得 $A_1 = -100,\quad A_2 = -10^5$

所以电容电压

$$u_C(t) = [100 - 100(1 + 1000t)\mathrm{e}^{-1000t}]\mathrm{V}$$

电流 i 为

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 100t\mathrm{e}^{-1000t}\mathrm{A}$$

(3) 当 $R = 200\Omega$ 时，特征根为

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\frac{200}{2 \times 1} \pm \sqrt{\left(\frac{200}{2 \times 1}\right)^2 - \frac{1}{1 \times 10^6}} \\ &= -100 \pm \mathrm{j}995 \end{aligned}$$

即 $p_1 = -100 + \mathrm{j}995,\qquad p_2 = -100 - \mathrm{j}995$

由于特征根为一对共轭复根，电路处于欠阻尼状态，u''_C 的形式为

$$u''_C = A\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t + \theta) = A\mathrm{e}^{-100t}\sin(995t + \theta)$$

根据初始条件确定待定常数 A,θ，即

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u'_C(0_+) + u''_C(0_+) = 100 + A\sin\theta = 0 \\ i(0_+) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{0_+} = C \times (-100A\sin\theta + 995A\cos\theta) = 0 \end{cases}$$

从中解得

$$\begin{cases} \theta = \arctan\dfrac{995}{100} = 84.26^\circ \\ A = -\dfrac{100}{\sin\theta} = -\dfrac{100}{\sin 84.26^\circ} = -100.5 \end{cases}$$

故电容电压

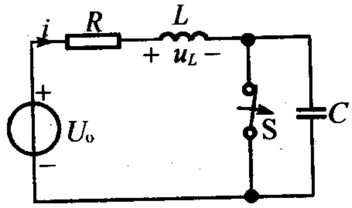
$$u_C(t) = u'_C + u''_C = [100 - 100.5e^{-100t}\sin(995t + 84.26°)]\ \text{V}$$

电流 i 为

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = CA\ \sqrt{\delta^2 + \omega^2}e^{-\delta t}\sin\omega t\,\text{A}$$

$$= 0.1e^{-100t}\sin 995t\ \text{A}$$

7-6 图示电路中 $R = 3\Omega, L = 6\text{mH}, C = 1\mu\text{F}, U_o = 12\text{V}$，电路已处稳态. 设开关 S 在 $t = 0$ 时打开，试求 $u_L(t)$.



题 7-6 图

解 在 $t < 0$ 时，稳态电路中

$$u_C(0_-) = 0\text{V}$$

$$i(0_-) = \frac{U_o}{R} = \frac{12}{3} = 4\text{A}$$

在 $t > 0$ 后，电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U_o$$

电容电压的解为 $\qquad u_C(t) = u'_C + u''_C$

根据输入电压可知，特解 u'_C 为

$$u'_C = U_o = 12\text{V}$$

对应电路微分方程的特征根为

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$= -\frac{3}{2\times 6\times 10^{-3}} \pm \sqrt{(\frac{3}{2\times 6\times 10^{-3}})^2 - \frac{1}{6\times 10^{-3}\times 10^{-6}}}$$

$$= -250 \pm \text{j}12.91\times 10^3$$

即 $\quad p_1 = -250 + \text{j}12.91\times 10^3, \qquad p_2 = -250 - \text{j}12.91\times 10^3$

由于 p_1 和 p_2 为一对共轭复根，电路处于欠阻尼状态，响应过程为衰减振荡，u''_C 的形式为

$$u''_C = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \theta)$$

$$= Ae^{-250t}\sin(1.291\times 10^4 t + \theta)$$

根据初始条件确定待定常数 A, θ，即

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C'(0_+) + u_C''(0_+) \\ \qquad = 12 + A\sin\theta = 0 \\ i(0_+) = i(0_-) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{0_+} \\ \qquad = C[-250A\sin\theta + 1.291\times 10^4 A\cos\theta] = 4 \end{cases}$$

从中解得

$$-250\times\left(-\frac{12}{\sin\theta}\right)\sin\theta + 1.291\times 10^4\times\left(-\frac{12}{\sin\theta}\right)\cos\theta = \frac{4}{C}$$

$$\frac{-1.291\times 10^4\times 12}{\tan\theta} = \frac{4}{C} - 250\times 12$$

$$\tan\theta = \frac{-1.291\times 10^4\times 12}{\dfrac{4}{C} - 250\times 12}$$

所以 $\theta = \arctan\left(\dfrac{-1.291\times 10^4\times 12}{\dfrac{4}{10^{-6}} - 250\times 12}\right) = \arctan(-0.039)$

$$= -2.22°$$

$$A = -\frac{12}{\sin\theta} = -\frac{12}{\sin(-2.22°)} = 309.84$$

故电容电压

$$u_C(t) = [12 + 309.84\mathrm{e}^{-250t}\sin(1.291\times 10^4 t - 2.22°)]\mathrm{V}$$

电流 $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -CA\sqrt{\delta^2+\omega^2}\mathrm{e}^{-\delta t}\sin\omega t\,\mathrm{A}$

$$= -4\mathrm{e}^{-250t}\sin(1.291\times 10^4 t)\mathrm{A}$$

电感电压 $u_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$

$$= L\times 4\times\sqrt{\delta^2+\omega^2}\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t - \theta)$$

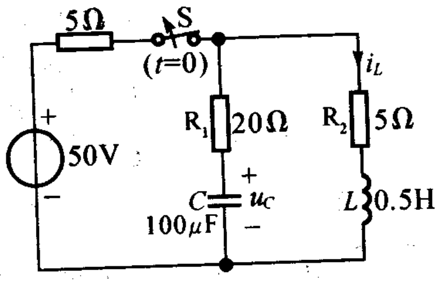
$$= 309.84\mathrm{e}^{-250t}\sin(1.291\times 10^4 t + 2.22°)\mathrm{V}$$

7-7 图示电路在开关S打开之前已知稳态；$t=0$时，开关S打开，求$t>0$时的u_C。

解 在$t<0$时，稳态电路有

$$u_C(0_-) = \frac{50}{5+5}\times 5 = 25(\mathrm{V})$$

$$i_L(0_-) = \frac{50}{5+5} = 5(\text{A})$$



题 7－7 图

因此，电路的初始值为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 25\text{V}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 5\text{A}$$

$t > 0$ 后，电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + (R_1 + R_2)C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

对应的特征方程为

$$LCp^2 + (R_1 + R_2)Cp + 1 = 0$$

其特征根为

$$p_{1,2} = -\left(\frac{R_1 + R_2}{2L}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$= -\frac{25}{2 \times 0.5} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{2 \times 0.5}\right)^2 - \frac{1}{0.5 \times 10^{-4}}}$$

$$= -25 \pm \mathrm{j}139.19$$

即 $\quad p_1 = -25 + \mathrm{j}139.19, \quad p_2 = -25 - \mathrm{j}139.19$

特征根 p_1 和 p_2 为一对共轭复根，电路处于欠阻尼状态，电容电压为

$$u_C(t) = A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t + \theta)$$

$$= A\mathrm{e}^{-25t}\sin(139.19t + \theta)$$

根据初始值，可得

$$\begin{cases} u_C(0_+) = A\sin\theta = 25 \\ i_L(0_+) = -C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{0_+} = -10^{-4}(-25A\sin\theta + 139.19A\cos\theta) = 5 \end{cases}$$

从中解得

$$-10^{-4}\left(-25 \times \frac{25}{\sin\theta} \times \sin\theta + 139.19 \times \frac{25}{\sin\theta} \times \cos\theta\right) = 5$$

$$\tan\theta = \frac{139.19 \times 25}{\dfrac{-5}{-10^{-4}} + 25^2}$$

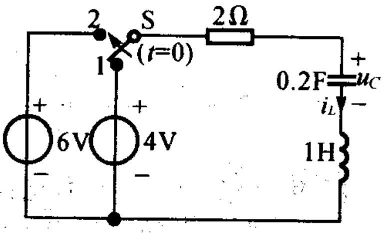
所以有 $\quad \theta = \arctan\left(\dfrac{139.19 \times 25}{\dfrac{-5}{10^{-4}} + 25^2}\right) = \arctan(-0.07) = -4.03^\circ$

$$A=\frac{25}{\sin\theta}=\frac{25}{\sin(-4.03°)}=-355.61$$

故 $t>0$ 时的电容电压

$$u_C(t)=-355.61e^{-25t}\sin(139.19t-4.03°)\text{V}$$

7－8 图示电路在开关 S 动作前已达稳态；$t=0$ 时 S 由 1 接至 2，求 $t>0$ 时的 i_L.



题 7－8 图

解 在 $t<0$ 时的稳态电路中

$$u_C(0_-)=4\text{V}$$
$$i_L(0_-)=0\text{A}$$

因此在 $t=0_+$ 时，电路的初始值为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=4\text{V}$$
$$i_L(0_+)=i_C(0_-)=0\text{A}$$

在 $t>0$ 后，电路的微分方程为

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=6$$

电容电压 $u_C(t)$ 的解为 $\quad u_C(t)=u_C'+u_C''$

式中 u_C' 为微分方程的特解，满足 $u_C'=6\text{V}$.

根据特征方程，可得到特征根为

$$p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$
$$=-\frac{2}{2\times1}\pm\sqrt{(\frac{2}{2\times1})^2-\frac{1}{1\times0.2}}$$
$$=-1\pm j2$$

即 $\qquad p_1=-1+j2,\qquad p_2=-1-j2$

由于特征根 p_1 和 p_2 为一对共轭复根，可知电路处于欠阻尼状态，因此对应齐次方程的通解 u_C'' 为

$$u_C''=Ae^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)=Ae^{-t}\sin(2t+\theta)$$

由初始值，可确定 A 和 θ，即

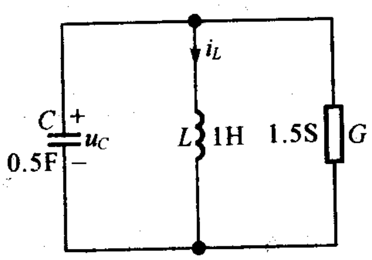
$$\begin{cases}u_C(0_+)=u_C'(0_+)+u_C''(0_+)=6+A\sin\theta=4\\ i_L(0_+)=C\dfrac{du_C}{dt}\Big|_{0_+}=C(-A\sin\theta+2A\cos\theta)=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}\theta = \arctan 2 = 63.43^\circ \\ A = \dfrac{4-6}{\sin\theta} = \dfrac{-2}{\sin 63.43^\circ} = -2.236\end{cases}$

故电容电压 $u_C(t) = u_C' + u_C'' = [6 - 2.236e^{-t}\sin(2t + 63.43^\circ)]\text{V}$

电流 $$i_L(t) = C\frac{du_C}{dt} = -CA\sqrt{\delta^2+\omega^2}e^{-\delta t}\sin\omega t$$
$$= -0.2\times(-2.236)\sqrt{1^2+2^2}e^{-t}\sin 2t \text{ A}$$
$$= e^{-t}\sin 2t \text{ A}$$

7-9 图示 GLC 并联电路中，已知 $u_C(0_+) = 1\text{V}, i_L(0_+) = 2\text{A}$. 求 $t > 0$ 时的 i_L.



题 7-9 图

解 电路的微分方程为

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

特征方程为

$$LCp^2 + GLp + 1 = 0$$

其特征根为

$$p_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$
$$= -\frac{1.5}{2\times 0.5} + \sqrt{\left(\frac{1.5}{2\times 0.5}\right)^2 - \frac{1}{1\times 0.5}} = -1.5 \pm 0.5$$

即 $$p_1 = -1, \quad p_2 = -2$$

特征根为两个不相等的负实根，电路处于过阻尼状态，$i_L(t)$ 的解为

$$i(t) = A_1e^{p_1 t} + A_2e^{p_2 t} = A_1e^{-t} + A_2e^{-2t}$$

代入初始条件，有

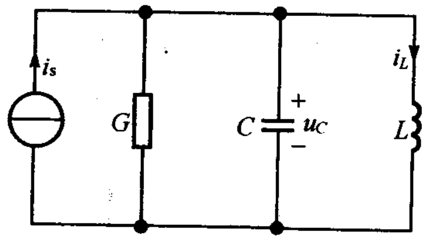
$$\begin{cases} i_L(0_+) = A_1 + A_2 = 2 \\ u_C(0_+) = u_L(0_+) = L\dfrac{di_L}{dt}\Big|_{0_+} = L(-A_1 - 2A_2) = 1\end{cases}$$

解得 $$A_1 = 5, A_2 = -3$$

故电感电流 $i_L(t) = (5e^{-t} - 3e^{-2t})\text{A}$

7-10 图示电路中 $G=5S, L=0.25H, C=1F$. 求：(1) $i_s(t)=\varepsilon(t)$A 时，电路的阶跃响应 $i_L(t)$；

(2) $i_s(t)=\delta(t)$A 时，电路的冲激响应 $u_C(t)$.



题 7-10 图

解 (1) 当 $i_s(t)=\varepsilon(t)$A 时，电路的初始值

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0\text{V}$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0\text{A}$$

$t>0$ 后，电路的微分方程为

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}+GL\frac{di_L}{dt}+i_L=i_s$$

这是二阶线性非齐次微分方程，它的解由特解和对应的齐次微分方程的通解组成，即 $i_L(t)=i_L'+i_L''$.

特解 $i_L'=i_s=\varepsilon(t)$

电路的特征方程为 $LCp^2+GLp+1=0$

其特征根为 $p_{1,2}=-\frac{G}{2C}\pm\sqrt{(\frac{G}{2C})^2-\frac{1}{LC}}=-2.5\pm1.5$

即 $p_1=-1,\quad p_2=-4$

由于 p_1, p_2 为两个不相等的负实根，可得对应的齐次微分方程的通解为

$$i_L''=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}=A_1e^{-t}+A_2e^{-4t}$$

所以 i_L 的解为

$$i_L(t)=i_L'+i_L''=\varepsilon(t)+A_1e^{-t}+A_2e^{-4t}$$

代入初始值，有

$$\begin{cases}i_L(0_+)=1+A_1+A_2=0\\ u_C(0_+)=u_L(0_+)=L\frac{di_L}{dt}|_{0_+}=0.25(-A_1-4A_2)=0\end{cases}$$

解得 $A_1=-\frac{4}{3},\quad A_2=\frac{1}{3}$

故电感电流为 $i_L(t)=(1-\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-4t})\varepsilon(t)$ A.

(2) 当 $i_s=\delta(t)$A 时，利用冲激响应为阶跃响应的一阶导数关系，可对(1)中的结果求导得到电路的冲激响应 $i_L(t)$ 以及 $u_C(t)$，即

$$i_L(t)=h(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)\right]$$

$$=\left[\left(\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)+\left(1-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\delta(t)\right]\mathrm{A}$$

$$=\left(\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)\ \mathrm{A}$$

$$u_C(t)=u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

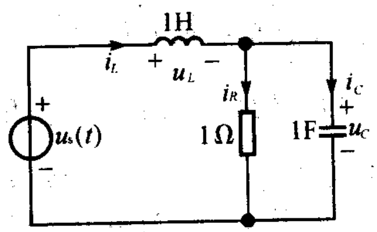
$$=0.25\left(-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{16}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)+0.25\left(\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\delta(t)$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)\ (\mathrm{V})$$

7-11 当 $u_s(t)$ 为下列情况时，求图示电路的响应 u_C：

(1) $u_s(t)=10\varepsilon(t)$V；

(2) $u_s(t)=10\delta(t)$V.



题 7-11 图

解 (1) 当 $u_s(t)=10\varepsilon(t)$V 时，电路的初始条件为

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0\mathrm{A}$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0\mathrm{V}$$

在 $t>0$ 后，列电路的微分方程：以 u_C 为待求量，应用 KCL，KVL 列电路方程，即

KCL 有 $$i_L=i_R+i_C=\frac{u_C}{R}+C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

KVL 有 $$u_s=u_L+u_C=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+u_C$$

整理得 $$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_s$$

设 $u_C(t)$ 的解答为 $u_C(t)=u_C'+u_C''$，u_C' 为方程的特解，满足

$$u_C'=u_s=10\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

根据方程的特征根为

$$p_{1,2}=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{(\frac{1}{2RC})^2-\frac{1}{LC}}$$

$$=-\frac{1}{2\times1\times1}\pm\sqrt{(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{1\times1}}=-\frac{1}{2}\pm\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

即 $$p_1=-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad p_2=-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

由于 p_1 和 p_2 为一对共轭复根，可得对应的齐次微分方程的通解 u_C'' 为

$$u_C''=A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)=A\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\theta)$$

所以 $u_C(t)$ 的解为

$$u_C(t)=u_C'+u_C''=10\varepsilon(t)+A\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\theta)$$

代入初始值可确定 θ 和 A，有

$$\begin{cases}u_C(0_+)=10+A\sin\theta=0\\ i_L(0_+)=\dfrac{u_C(0_+)}{R}+C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{0_+}\\ \qquad\quad=0+C(-\dfrac{1}{2}A\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}A\cos\theta)=0\end{cases}$$

从中解得
$$\begin{cases}\theta=\arctan\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\arctan\sqrt{3}=60^\circ\\ A=-\dfrac{10}{\sin\theta}=-\dfrac{10}{\sin60^\circ}=-\dfrac{20}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

故电路的响应 $$u_C(t)=\left[10-\frac{20}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+60^\circ\right)\right]\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

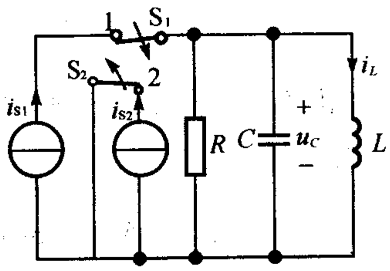
（2）当 $u_s(t)=10\delta(t)\mathrm{V}$ 时，利用冲激响应为阶跃响应的一阶导数关系，可得电路的冲激响应，即

$$h(t)=u_C(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[10-\frac{20}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+60^\circ\right)\right]\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

$$= \left[\frac{10}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+60^\circ\right)-10e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+60^\circ\right)\right]\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

$$= \frac{20}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

7-12 图示并联电路中，在 $t=0$ 时开关 S_1 由位置 1 接至位置 2，S_2 由位置 2 接到位置 1. 已知 $i_{s1}=1\mathrm{A}$，$i_{s2}=5\mathrm{A}$，$R=5\Omega$，$C=0.1\mathrm{F}$，$L=2\mathrm{H}$. 求 $t\geqslant 0$ 时的 $i_L(t)$.



题 7-12 图

解 由题意可解得初始值为

$i_L(0_+)=i_L(0_-)=i_{s1}=1\mathrm{A}$

$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0\mathrm{V}$

在 $t\geqslant 0$ 后，利用 KCL 可得电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=i_{s2}$$

设 i_L 的解为 $i_L(t)=i_L'+i_L''$，i_L' 为方程的特解，满足

$$i_L'=i_{s2}=5\mathrm{A}$$

根据方程，可得特征根为

$$p_{1,2}=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{(\frac{1}{2RC})^2-\frac{1}{LC}}$$

$$=-\frac{1}{2\times5\times0.1}\pm\sqrt{(\frac{1}{2\times5\times0.1})^2-\frac{1}{2\times0.1}}$$

即 $p_1=-1+\mathrm{j}2,\quad p_2=-1-\mathrm{j}2$

由于特征根 p_1,p_2 为一对共轭复根，所以对应齐次微分方程的通解 u_C'' 为

$$u_C''=Ae^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)=Ae^{-t}\sin(2t+\theta)$$

由初始条件可以确定 θ 和 A，即有

$$\begin{cases} i_L(0_+)=i_L'(0_+)+i''(0_+)=5+A\sin\theta=1 \\ u_C(0_+)=u_C(0_+)=L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\Big|_{0_+}=2(-A\sin\theta+2A\cos\theta)=0 \end{cases}$$

解上述方程有
$$\begin{cases} \theta=\arctan2=63.435^\circ \\ A=\dfrac{1-5}{\sin\theta}=-\dfrac{4}{\sin63.435^\circ}=-4.472 \end{cases}$$

故在 $t\geqslant 0$ 时的电感电流为

$$i_L(t)=5-4.472e^{-t}\sin(2t+63.435^\circ)\mathrm{A}$$