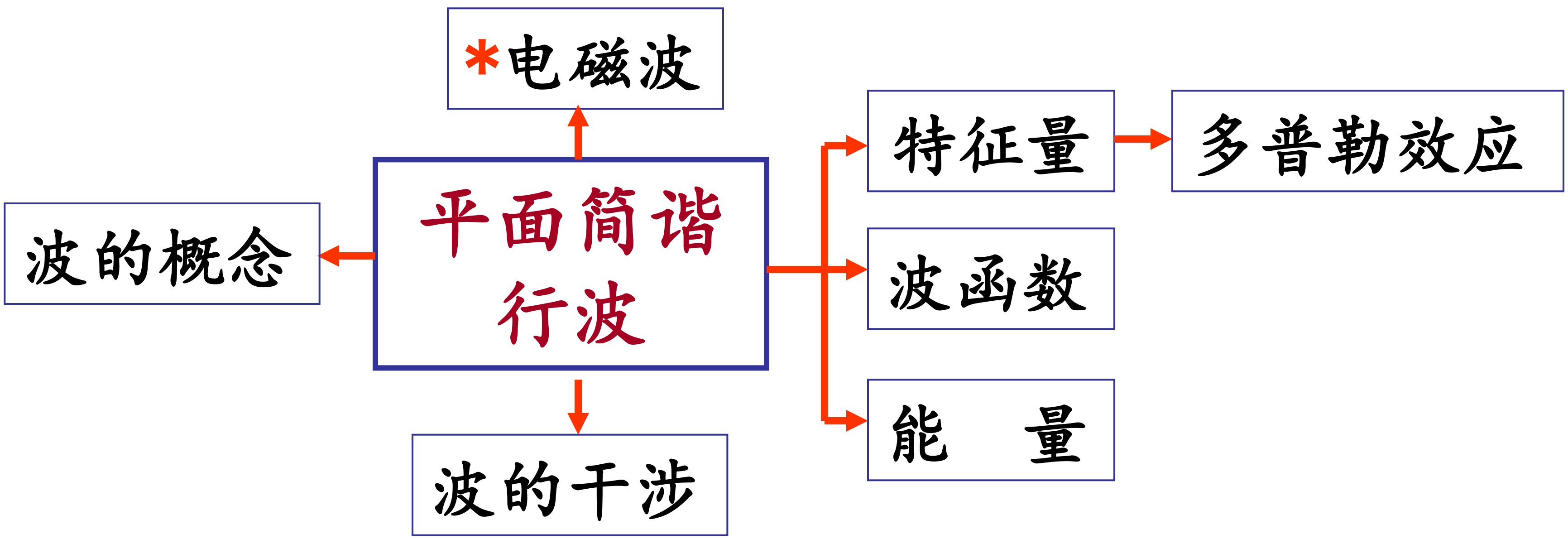
第十三章　　波动

结构框图：



学时：　6

第一节　波动的一般概念

一、波的概念

二、波的特征量

三、波形曲线

一、波的概念

波动:振动在空间的传播(振动的集体效应)。

机械波:机械振动在空间的传播
电磁波:电磁振荡在介质或真空中的传播

按波源分类

1.机械波的产生

原因:振动质点引起邻近质点的振动。

条件:

(1)有作机械振动的质点作为波源。

波源
- 自由振动（无能量补充）—— 波动不能长期维持
- 受迫振动（有能量补充）—— 波动才能长期维持

简谐振动

(2)有能够传播机械振动的弹性介质。

波动：振动在空间传播

波源　介质　振动
相位（状态）
能量

简谐波：波源及介质中各质点均作简谐振动的波。

2.概念：

波线：由波源出发，沿波传播方向的线。

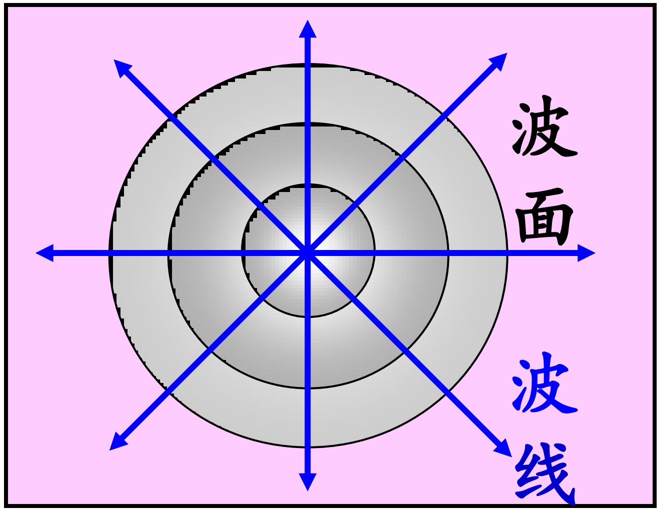
特点：波线上任一点切线方向为该点波传播方向。

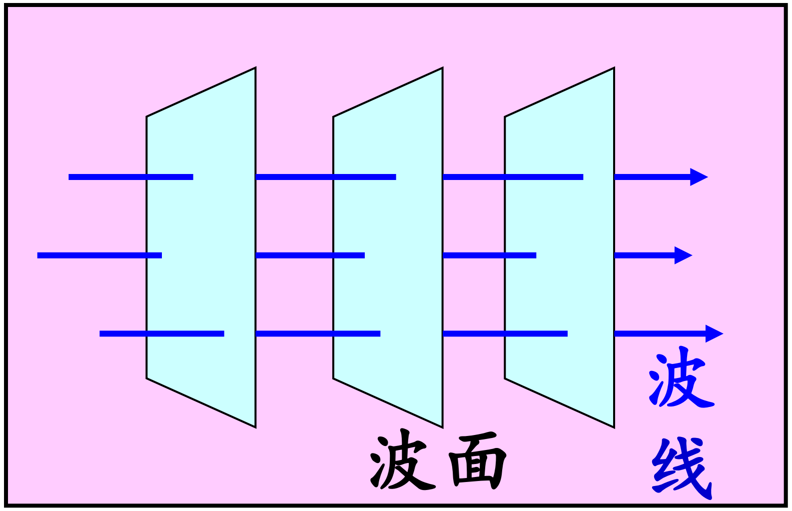
波面：某时刻介质中同相点的集合。

（球面波，柱面波，平面波　.......）

按波面分类

波前：传在最前面的波面。





在各向同性均匀介质中，波线为直线，波线与波面垂直。

平面简谐行波:在各向同性均匀介质中传播的波面为平面的简谐行波。

特点：波面为平面，波在传播(相对于“驻波”而言)。

(一维)　　(见第五节)

二、波的特征量

波的特征： 空间、时间上的周期性。

1.周期T、频率ν

T、ν 为介质中各质元振动的周期和频率，也为波源的振动周期和频率。由波源振动情况决定。

描述波动的时间周期性 $\boxed{\nu = \dfrac{1}{T}}$ 时间频率

2.波长λ、波数$\overline{\nu}$

波长:同一波线上，相位差为2π的两点间的距离。

描述波的空间周期性 $\boxed{\overline{\nu} = \dfrac{1}{\lambda}}$ 空间频率

3. 波速 u

时间周期性
空间周期性 } 在一个周期内，某一个确定的振动状态（相位）在空间正好传播一个波长。

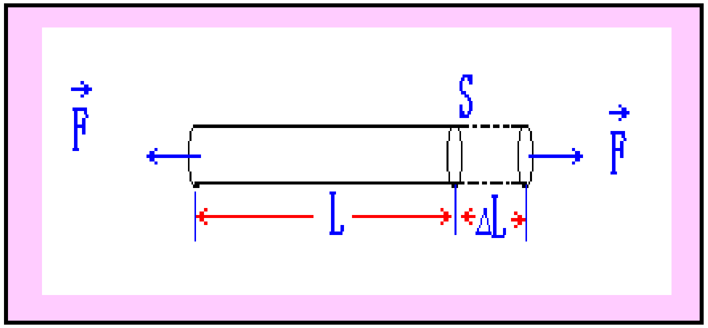
波速：振动状态在单位时间内传播的距离。

波速: $\boxed{u = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu}$ —— 相速

注意：
u 相位传播速度：在各向同性介质中为常数
v 质点振动速度: $v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$

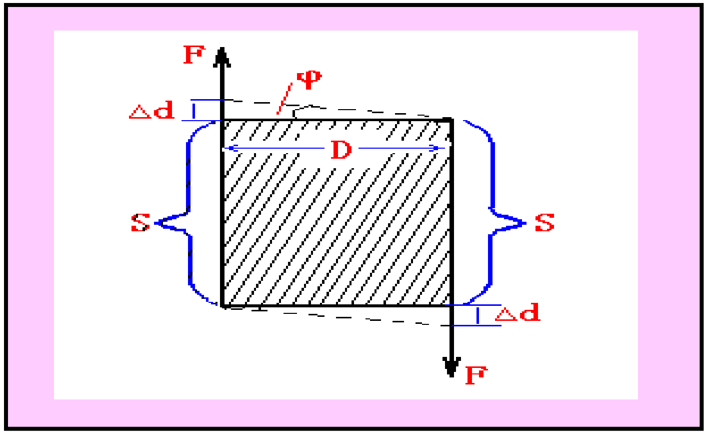
波速由介质的性质决定：$u = \sqrt{\dfrac{\text{弹性模量}}{\text{介质密度}}}$

弹性模量



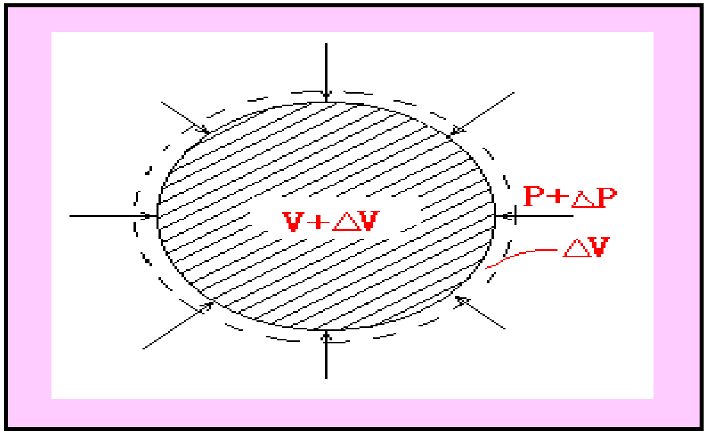
杨氏弹性模量：

$$Y=\frac{应力}{应变}=\frac{F/S}{\Delta L/L}=\frac{FL}{S\Delta L}$$



切变弹性模量：

$$G=\frac{应力}{应变}=\frac{F/S}{\Delta d/D}=\frac{FD}{S\Delta d}$$



体变弹性模量：

$$B=\frac{应力}{应变}=-\frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}}$$

横波：波的传播方向与质点的振动方向垂直的波。

——介质切向变形

纵波：波的传播方向与质点的振动方向平行的波。

——介质拉伸、压缩变形

按振动方向分类

固体：

纵波 $u=\sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$

横波 $u=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$

弦上波 $u=\sqrt{\dfrac{T}{\eta}}$

理想流体（液体和气体）：

纵波 $u=\sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$

（T：张力，η：质量线密度）

注意：水面波有表面张力参与，情况复杂，非单纯的横波或纵波。

注意：

(1)

周期T：由波源决定；

波速u：由介质决定；

波长λ：与波源和介质均有关。

(2)

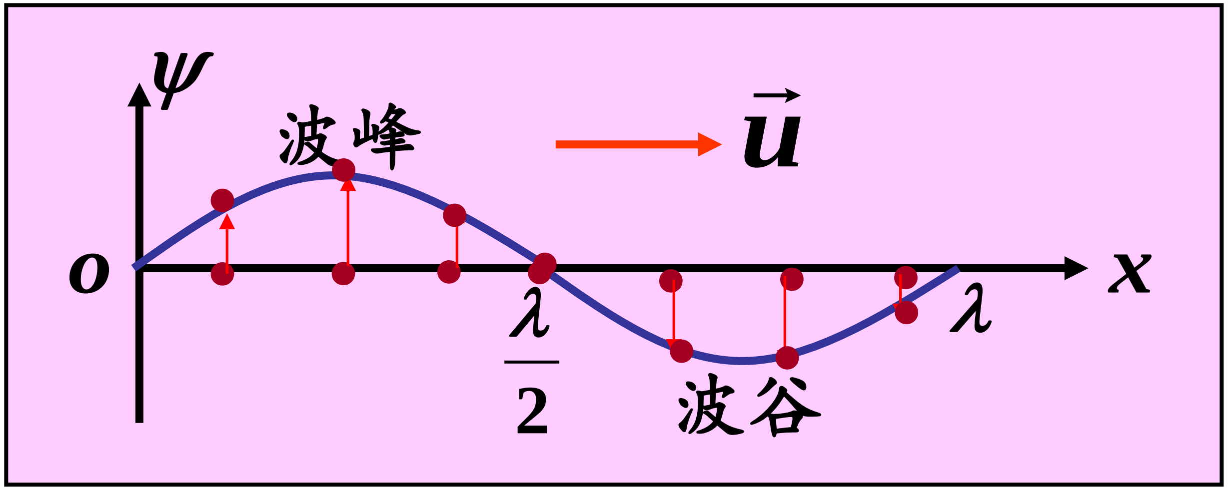
纵波的u和v在同一直线上；

横波的u和v互相垂直。

三、波形曲线

定义：描述某时刻，波线上各质点的振动位移随其离波源距离x变化的曲线。（广义）

对横波:某时刻波形曲线为：

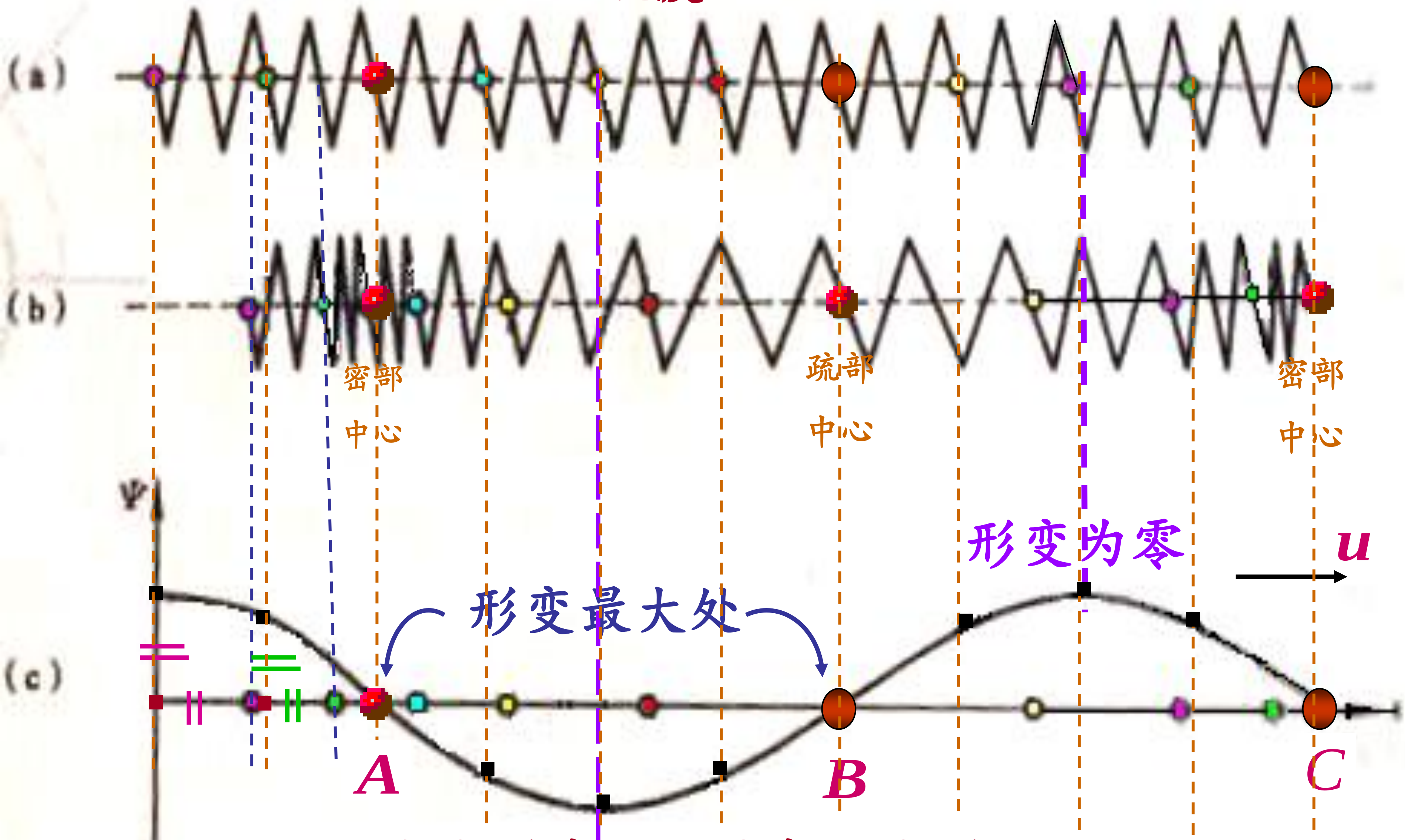


波形曲线直观给出该时刻波形和波峰、波谷的位置。

对横波，波形曲线为实际波形

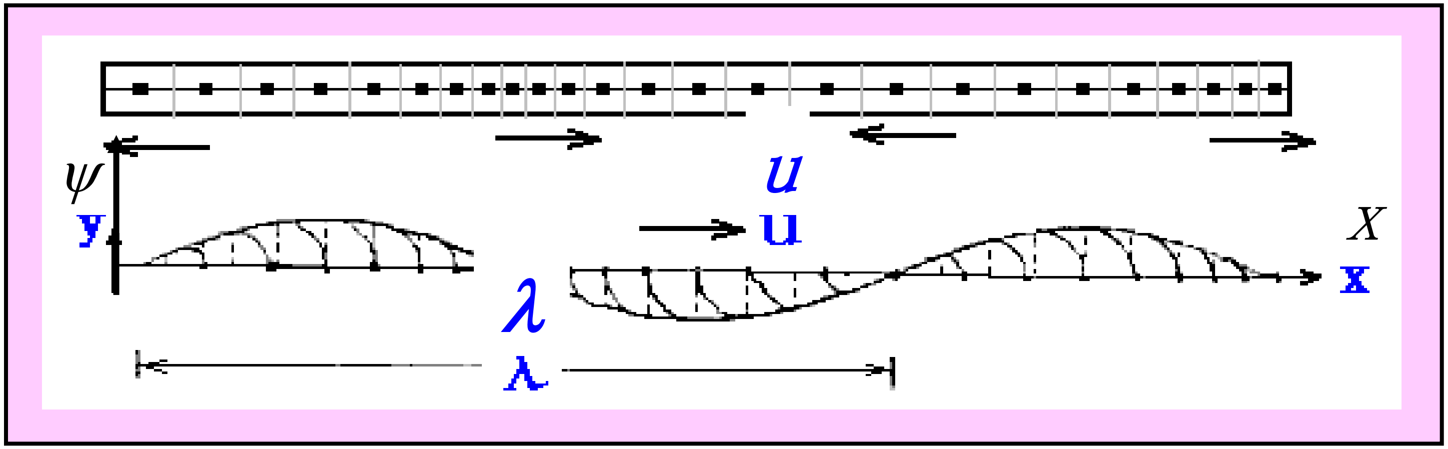
思考：对纵波，波形曲线是不是实际波形？

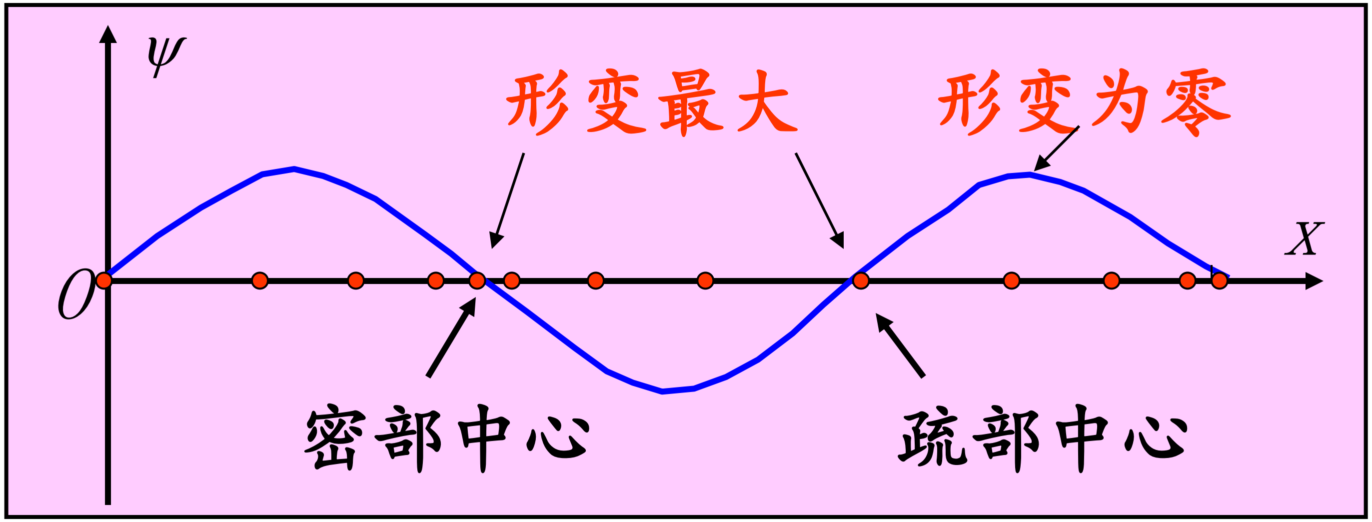
纵波



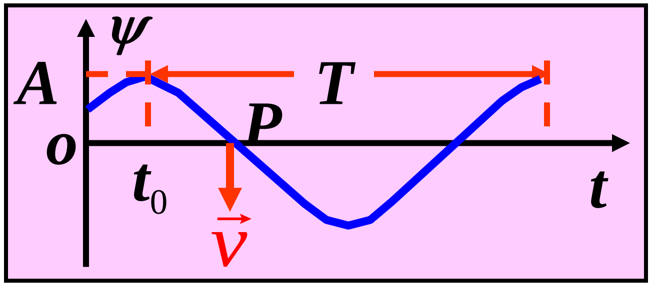
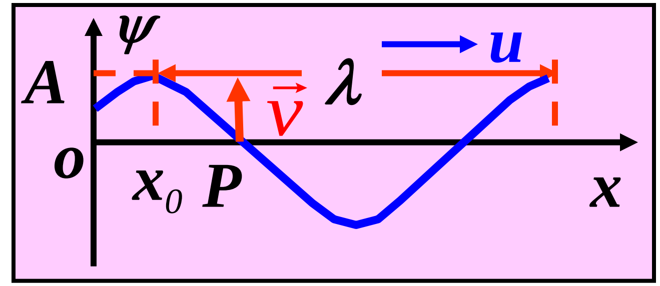
纵波波形曲线不是实际波形

纵波





注意: 波形曲线与振动曲线的区别(见下页表)

	振动曲线	波形曲线
图形		
研究对象	某质点位移随时间变化规律	某时刻，波线上各质点位移随位置变化规律
物理意义	由振动曲线可知： 周期T、振幅A、初相φ_0 某时刻$\vec{V}$ 的方向参看下一时刻	由波形曲线可知 该时刻各质点位移 波长λ，振幅A 只有$t=0$时刻波形才能提供初相 某质点$\vec{V}$方向参看前一质点
特征	对确定质点曲线形状一定	曲线形状随t 向前平移

若波形曲线上某质点的前一质点的位移比它的大，其$v>0$;反之，$v<0$（波峰和波谷除外）。

第二节　　平面简谐行波

一、平面简谐行波的波函数（波动方程的积分形式）

二、例题

三、波的能量

▲一、平面简谐行波的波函数（波动方程的积分形式）

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi(x,t) \longrightarrow \Psi = \Psi(x,y,z,t)$$

波函数：描述振动量ψ随时间、空间的变化规律的函数。

建立波函数的依据：

波的空间、时间周期性

沿波传播方向各质点振动状态（相位）相继落后（滞后效应）

要求：只讨论一维情况，即：

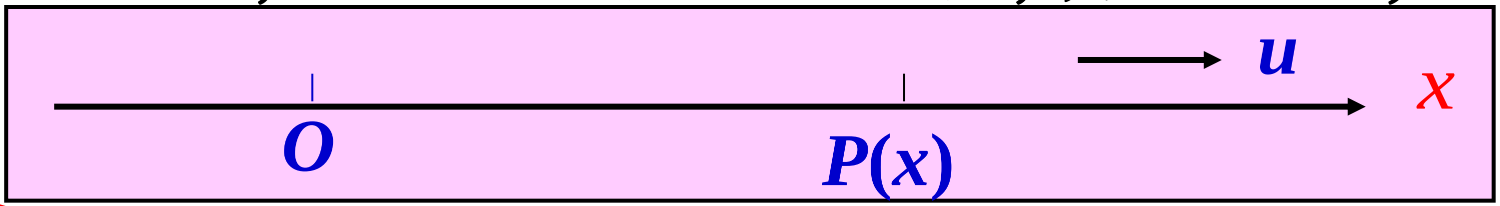
对平面简谐行波，建立$\Psi = \Psi(x、t)$的数学形式

已知：波线上任一点O的振动方程 $\Psi_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$
波速u，向右传播。

求：该平面简谐波波函数$\Psi = \Psi(x,t)$。

思路：将O 视为参考点，沿传播方向任取一点$P(x)$，
求出其振动方程$\Psi(x,t)$，则为波函数。

解:设O为波源(参考点),以O为坐标原点,波速u的方向为$+x$,建立一维坐标,设P为波线上任意一点,其坐标为x,如图:



参考点

坐标原点O的振动方程: $\Psi_0 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

P点的振幅与O点的相同, 为A。

O点的振动状态传到P所需时间为: $\Delta t = \dfrac{x-0}{u} = \dfrac{x}{u}$

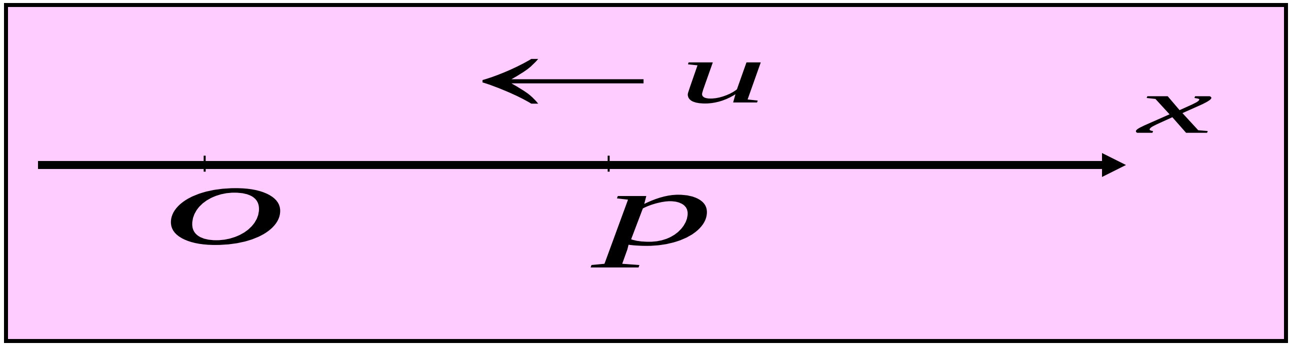
则: t时刻P点相位与O点$(t-\Delta t)$时刻相位相同, 为: $\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi_0$

$$\therefore \Psi_p(t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

即 $$\Psi(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

为波沿$+x$方向传播时简谐行波的波函数。

思考：波沿-x方向传播时简谐行波波函数？



t时刻P点相位与O点$t+\Delta t=t+\dfrac{x-0}{u}$时刻的相位相同

则： $\Psi(x,t)=A\cos[\omega(t+\dfrac{x}{u})+\varphi_0]$

参考点为坐标原点，波沿 $\pm x$ 方向传播的平面简谐波波函数的数学形式：

$$\Psi(x,t)=A\cos[\omega(t\mp\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$=A\cos(\omega t+\varphi_0\mp 2\pi\frac{x}{\lambda})$$

$$=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}\mp\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

$$=A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut\mp x)+\varphi_0]$$

$$=\cdots\cdots$$

注意：x_2与x_1处质点的相位差$\Delta\varphi(=\varphi_2-\varphi_1)=\mp\frac{\omega}{u}(x_2-x_1)$为波从$x_1$传播到$x_2$引起的相位改变。

讨论：

1. 若已知参考点(为坐标原点)各特征量、波速和波传播方向，将各量代入相应波函数公式，可求到波函数。

2. 若已知参考点(为坐标原点)的振动方程(或容易求到振动方程)，用 $t \mp \dfrac{x}{u}$ 代替参考点振动方程中的t，可求到波函数。

平面简谐波波函数的物理意义：

1. 当x 给定$(x = x_0)$时：

$$\Psi(x_0, t) = \Psi(t) = A\cos[\omega(t - \frac{x_0}{u}) + \varphi_0]$$

为x_0处质点的振动方程，可画出x_0处质点的振动曲线。

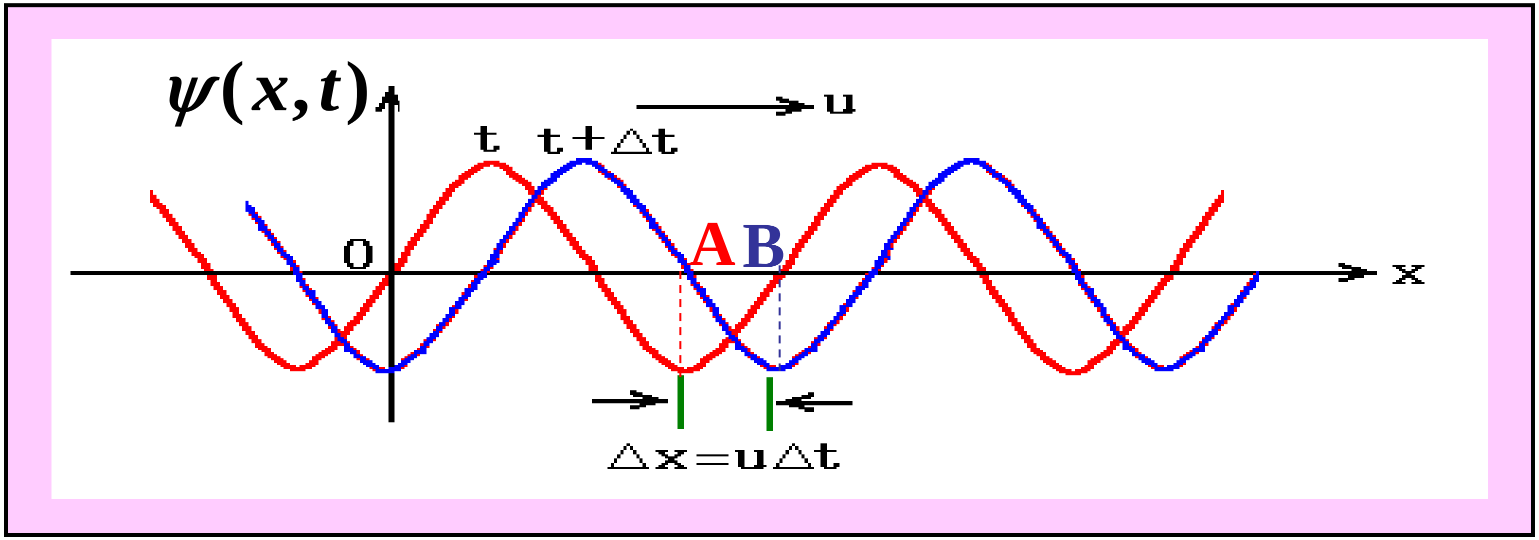
2.当t 给定$(t=t_0)$时：

$$\Psi(x,t_0)=\Psi(x)=A\cos[\omega(t_0-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

为t_0时刻的波形曲线方程，由此可画出t_0时刻的波形曲线。

3.当x、t均变化时： $\Psi(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

$\psi(x,t)$表征振动量随时间、空间的变化规律，



对应跑动的波形。

4. $\psi(x,t)$表征了沿波传播方向各质元振动状态(相位)相继落后(滞后效应)。

沿+x方向传播的波的相位 $\varphi=\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0$，若$x_2>x_1$，则$\varphi_2<\varphi_1$，$x_2$处质点的相位 φ_2 滞后于x_1处质点的相位φ_1 。

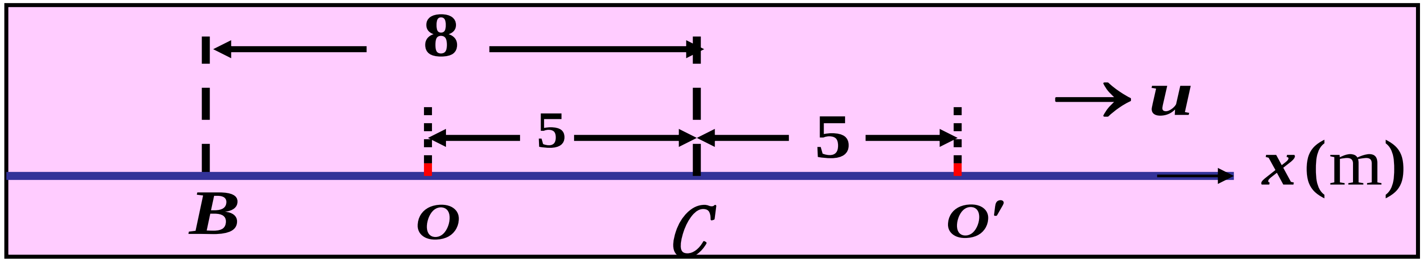
二、例题

例题1：移动坐标原点后如何建立波函数（即参考点不作为坐标原点）

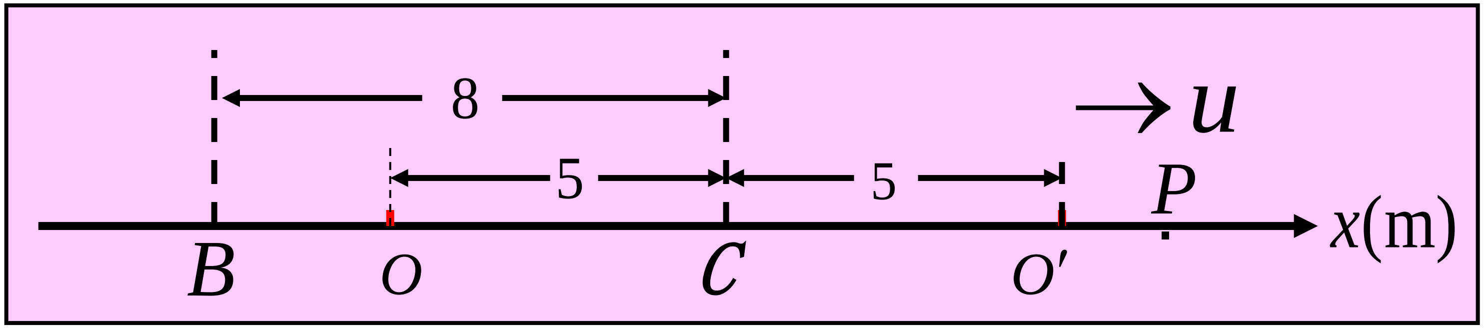
已知：$\Psi_C = A\cos(\omega t+\varphi)$ 波速u沿$+x$

$OC=O'C=5\text{m},\quad BC=8\text{m}$

求：分别以O, O'为原点建立波函数，并写出B点振动方程。



解：



C为参考点：$\Psi_C = A\cos(\omega t+\varphi)$，设$P(x)$为波线上任意一点。

（1）以O为坐标原点

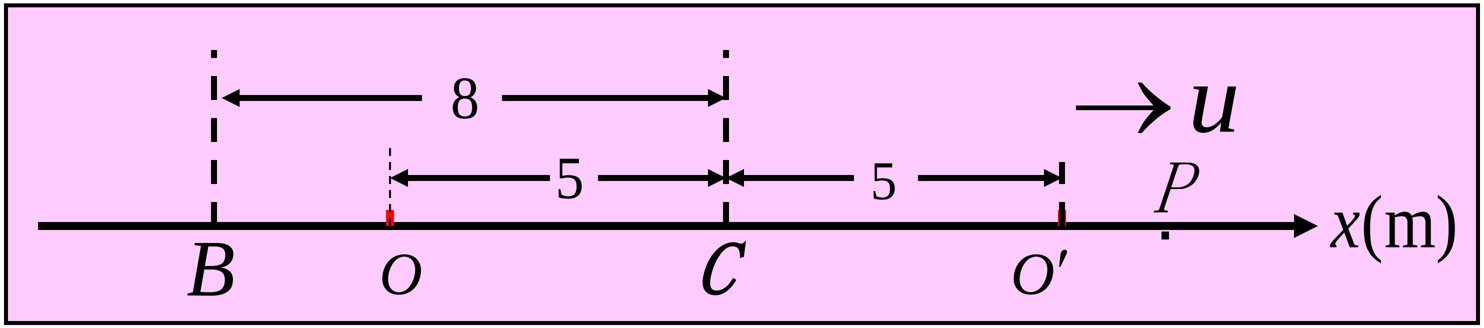
P离O点的距离为x，那么P点离参考点C的距离为：

$x' = x-5$，则：

$$\Psi = A\cos[\omega(t-\frac{x'}{u})+\varphi] = A\cos[\omega(t-\frac{x-5}{u})+\varphi](\mathrm{m})$$

将$x_B = -3$代入上式，得：

$$\Psi_B = A\cos[\omega(t-\frac{-3-5}{u})+\varphi] = A\cos[\omega(t+\frac{8}{u})+\varphi](\mathrm{m})$$



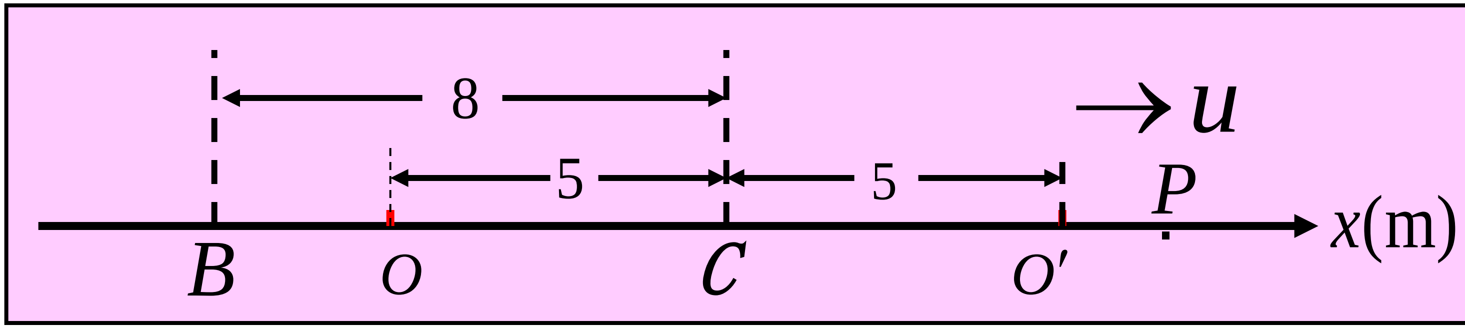
（2）以 O' 为坐标原点，$P(x)$ 离 O' 点的距离为 x，那么 P 点离参考点 C 的距离为：$x'' = x + 5$

$$\therefore \Psi(x,t) = A\cos[\omega(t - \frac{x''}{u}) + \varphi] = A\cos[\omega(t - \frac{x+5}{u}) + \varphi](\mathrm{m})$$

将 $x_B = -13$ 代入上式，得：

$$\Psi_B = A\cos[\omega(t - \frac{-13+5}{u}) + \varphi] = A\cos[\omega(t + \frac{8}{u}) + \varphi](\mathrm{m})$$

解：



C为参考点：$\Psi_C = A\cos(\omega t+\varphi)$，设$P(x)$为波线上任意一点。

关键步骤一

（1）以O为坐标原点

关键步骤二

P离O点的距离为x，那么P点离参考点C的距离为：

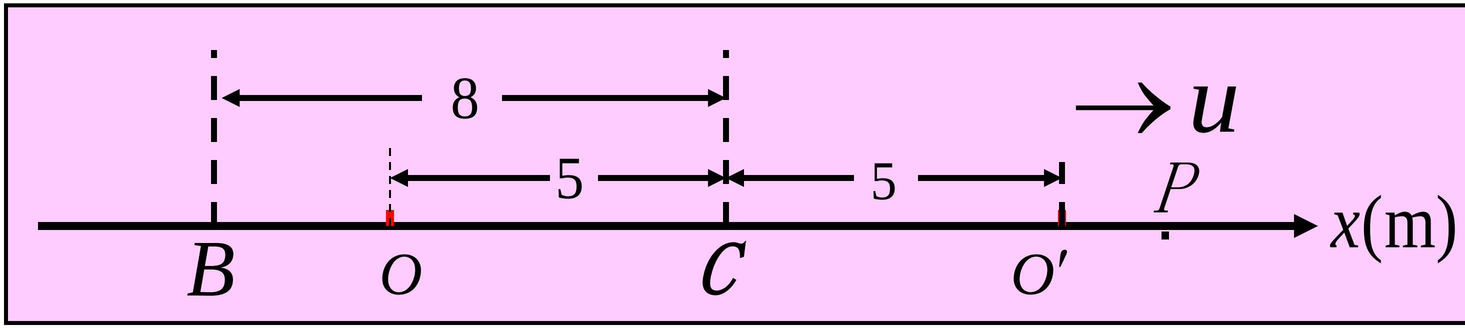
$x' = x-5$，则：

$$\Psi = A\cos[\omega(t-\frac{x'}{u})+\varphi] = A\cos[\omega(t-\frac{x-5}{u})+\varphi]\text{(m)}$$

关键步骤三

将$x_B=-3$代入上式，得：

$$\Psi_B = A\cos[\omega(t-\frac{-3-5}{u})+\varphi] = A\cos[\omega(t+\frac{8}{u})+\varphi]\text{(m)}$$



(2) 以 O' 为坐标原点, $P(x)$ 离 O' 点的距离为 x, 那么

P点离参考点C 的距离为: $x'' = x + 5$

关键步骤四

$$\therefore \Psi(x,t) = A\cos[\omega(t - \frac{x''}{u}) + \varphi] = A\cos[\omega(t - \frac{x+5}{u}) + \varphi](\mathrm{m})$$

将 $x_B = -13$ 代入上式, 得:

$$\Psi_B = A\cos[\omega(t - \frac{-13+5}{u}) + \varphi] = A\cos[\omega(t + \frac{8}{u}) + \varphi](\mathrm{m})$$

关键步骤五

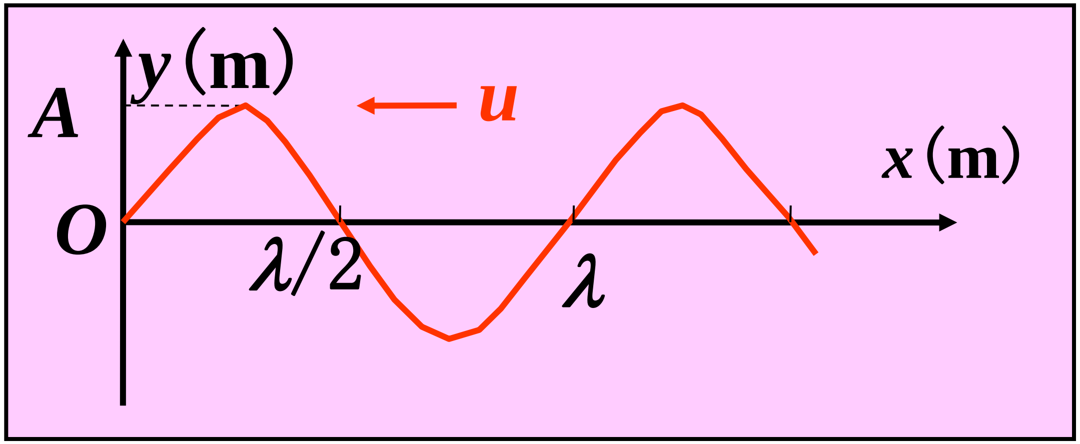
结论:(1)原点不同时, 波函数形式变化, 但波线上确定点振动方程不变。

(2): 若已知参考点的振动方程(或容易求到振动方程)，但参考点不为坐标原点(为x_0)，用$t \mp \dfrac{\Delta x}{u}$($\Delta x = x - x_0$)代替参考点振动方程中的$t$，可求到波函数。

(3): 已知波函数求某点(x_0)的振动方程，将$x=x_0$代入波函数则可。

(4): 已知波函数求某时刻(t_0)的波形，将$t=t_0$代入波函数则可。

例2: 已知平面简谐波在 $t=2\text{s}$ 时波形，求波函数及 $\lambda/2$ 处质点的振动方程。

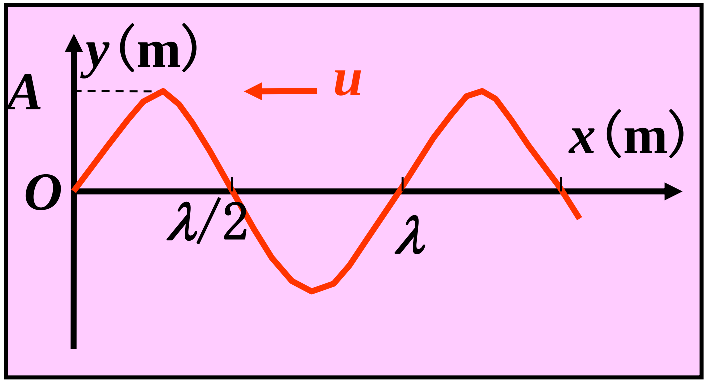


由题知：A, u, λ，波向 $-x$ 方向传播 $\omega = 2\pi\nu = 2\pi\dfrac{u}{\lambda}$

以坐标原点为参考点。

解法一：

作时间变换: 令 $t' = t-2$，该波形变为 $t'=0$ 时刻波形



原点处：$y_0 = 0 \quad v_0 = \dfrac{dy}{dt} > 0$ 得 $\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{2}$

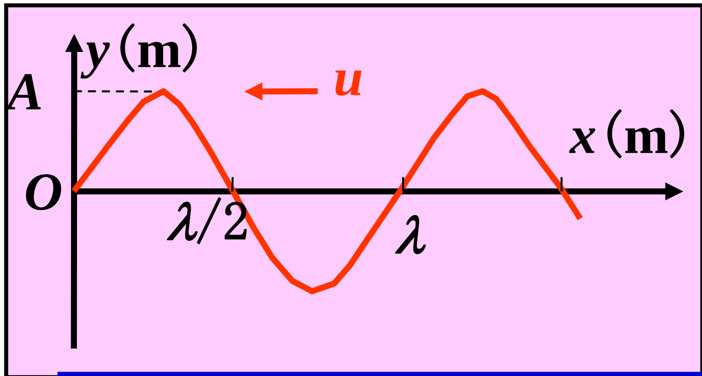
原点振动方程 $y_0 = A\cos(2\pi \dfrac{u}{\lambda} t' - \dfrac{\pi}{2})$

将 $t' = t - 2$ 代入，得 $y_o = A\cos[2\pi \dfrac{u}{\lambda}(t-2) - \dfrac{\pi}{2}] = A\cos(2\pi \dfrac{u}{\lambda} t - 4\pi \dfrac{u}{\lambda} - \dfrac{\pi}{2})$

波函数：$y = A\cos[2\pi \dfrac{u}{\lambda}(t + \dfrac{x}{u}) - 4\pi \dfrac{u}{\lambda} - \dfrac{\pi}{2}]$ (SI)

将 $x = \lambda/2$ 代入上式，得 $\lambda/2$ 处质点的振动方程为：

$$y = A\cos[2\pi \frac{u}{\lambda}(t-2) + \frac{\pi}{2}] \text{(SI)}$$



解法二：

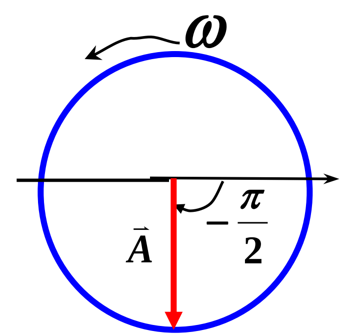
关键步骤一

设波函数为：$y = A\cos[2\pi \frac{u}{\lambda}(t + \frac{x}{u}) + \varphi_0]$

则 t =2s时O点相位为：$\varphi = 2\pi \frac{u}{\lambda}(2 + \frac{0}{u}) + \varphi_0 = 4\pi \frac{u}{\lambda} + \varphi_0$

由图知O点的振动状态：$y_{Ot} = 0,\ v_{Ot} > 0$

由旋转矢量法得t =2s时O点相位为：$\varphi = -\frac{\pi}{2}$



$\therefore \varphi = 4\pi \frac{u}{\lambda} + \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \longrightarrow \varphi_0 = -4\pi \frac{u}{\lambda} - \frac{\pi}{2}$

关键步骤二

关键步骤三

波函数：$y = A\cos[2\pi \frac{u}{\lambda}(t + \frac{x}{u}) - \frac{4\pi u}{\lambda} - \frac{\pi}{2}]$(SI)

将$x = \lambda/2$代入上式，得 $y = A\cos[2\pi \frac{u}{\lambda}(t - 2) + \frac{\pi}{2}]$(SI)

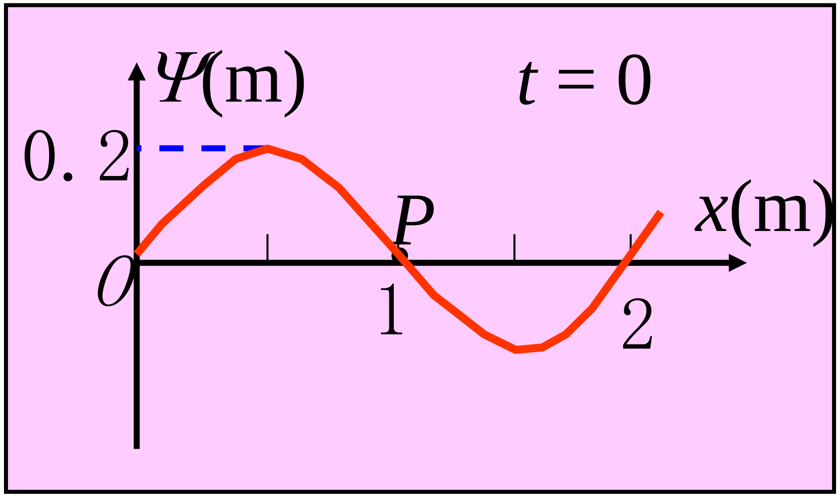
关键步骤四

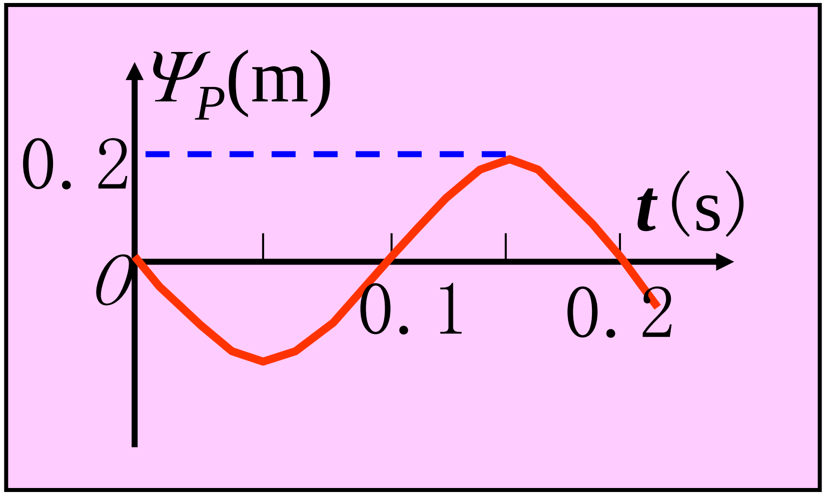
例3(P_{43}例3)：由波形曲线和振动曲线建立波函数。

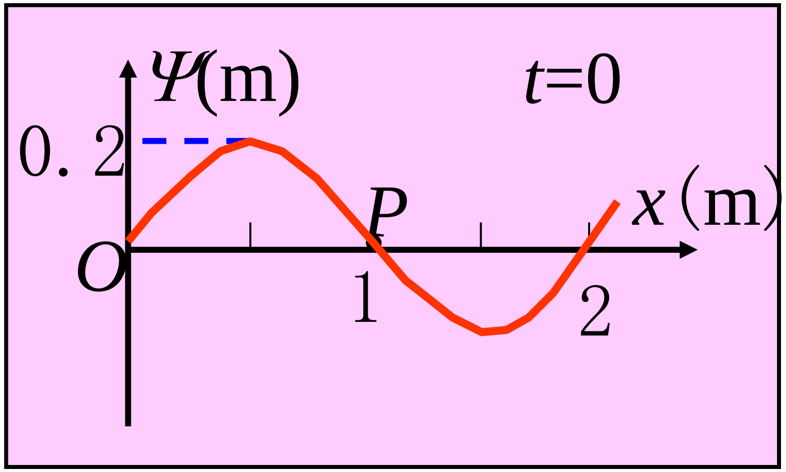
已知： 平面简谐波 $t=0$ 时波形和波线上 $x=1\text{m}$处 P点振动曲线。

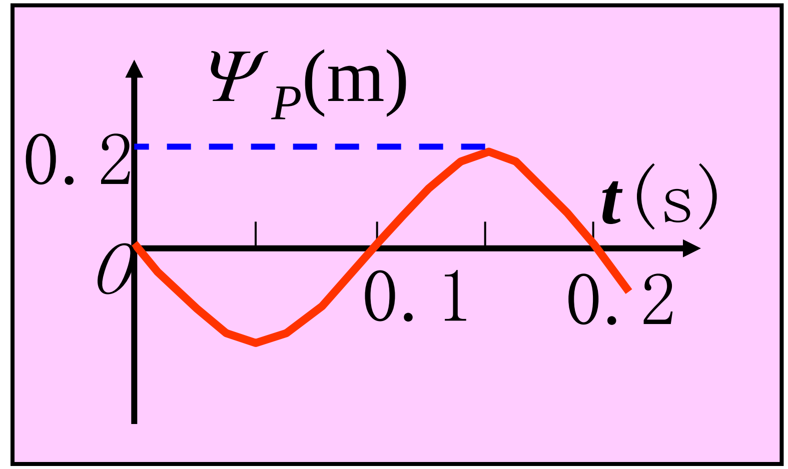
求： 波函数 (1) 以O 为参考点

(2) 以P 为参考点









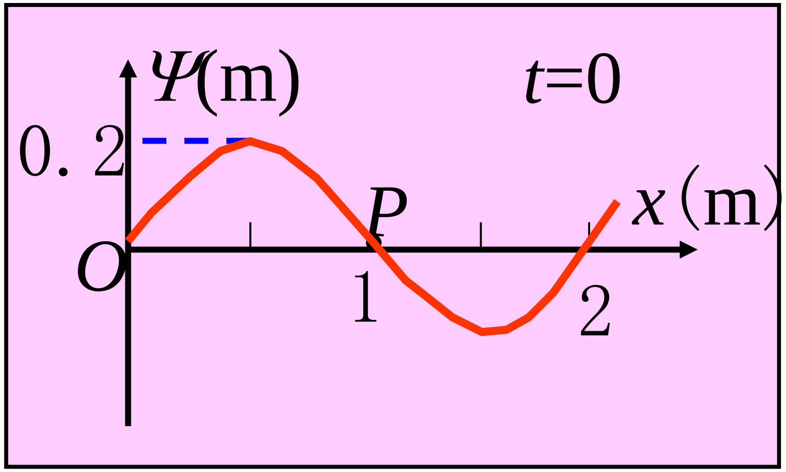
解：由图可知：$A = 0\cdot 2\text{m}$ $\lambda = 2\text{m}$ $T = 0\cdot 2\text{s}$

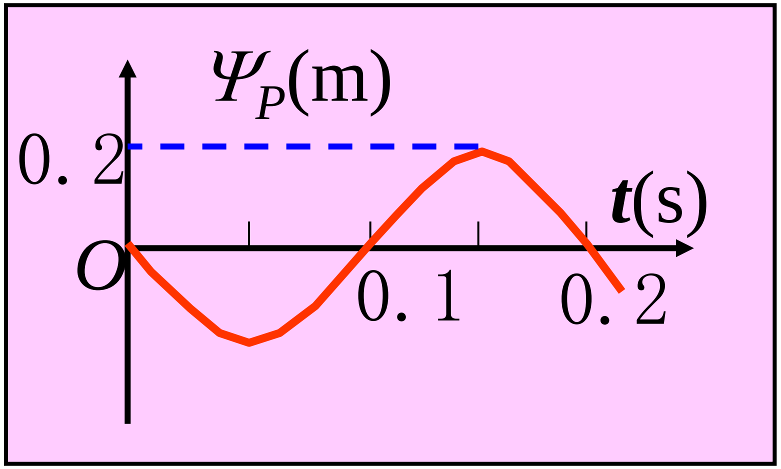
则 $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 10\pi\,(\text{s}^{-1})$ $u = \dfrac{\lambda}{T} = 10\,(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$

P在t=0时刻过平衡位置向负向运动:波向左(-x)方向传播

（1）以O为参考点，先求O的初相

左行波





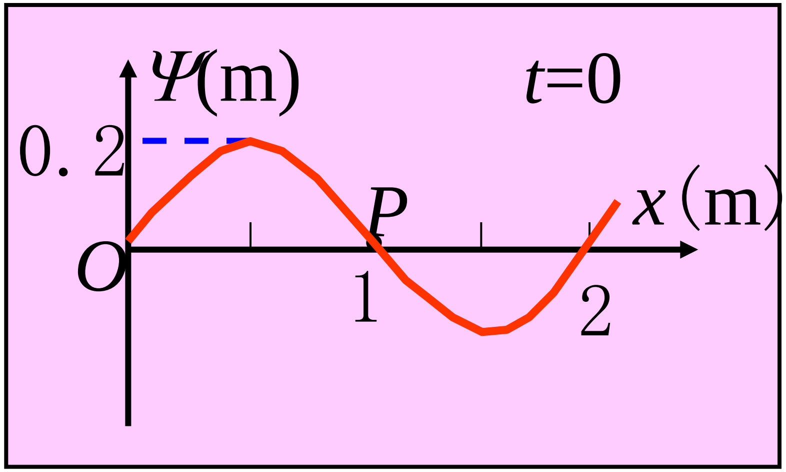
则：O 在 $t=0$ 时刻过平衡位置向正向运动：

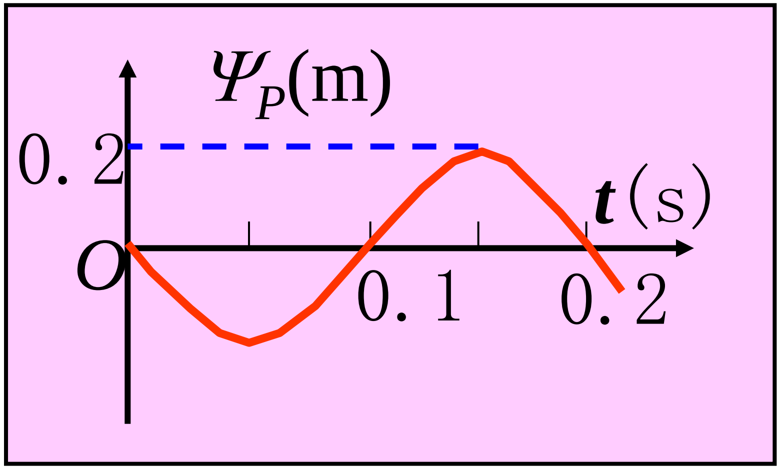
$$\left.\begin{array}{l} \Psi_0 = 0 \\ \left.\dfrac{d\psi}{dt}\right|_{t=0} > 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \varphi_0 = \frac{3}{2}\pi$$

将各特征量代入波函数公式，则：

$$\Psi = A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\frac{3}{2}\pi]$$

$$= 0.2\cos[10\pi(t+\frac{x}{10})+\frac{3}{2}\pi]$$





（2） 以P为参考点，先写P 的振动方程

$$\left.\begin{array}{l}\Psi_P = 0 \\ \left.\dfrac{d\psi}{dt}\right|_{t=0} < 0\end{array}\right\} \longrightarrow P \text{ 的初相}: \varphi_p = \frac{\pi}{2}$$

则：$\Psi_p = A\cos(\omega t + \varphi) = 0\cdot 2\cos(10\pi t + \dfrac{\pi}{2})$

将P点振动方程中 $t \rightarrow t + \dfrac{x-1}{u}$，则：

$$\Psi = 0\cdot 2\cos[10\pi(t + \frac{x-1}{10}) + \frac{\pi}{2}] = 0\cdot 2\cos[10\pi(t + \frac{x}{10}) - \frac{\pi}{2}]$$

总结:

(1) 若已知参考点各特征量、波速和波传播方向，将各量代入波函数公式，且将$x \longrightarrow x - x_0$($x_0$为参考点坐标。如果参考点为坐标原点，$x_0=0$，否则$x_0 \neq 0$)，可求到波函数。

(2) 若已知参考点振动方程、波速和波传播方向，将振动方程中$t \longrightarrow t \mp \dfrac{x - x_0}{u}$，可求到波函数。

自学：六、波动方程的微分形式（了解）