第六章　一阶电路

第一部分　要点、考点归纳

§6-1　动态电路的方程及其初始条件

1．电路的特征

当电路中含有储能元件 L 和 C 时，由于 L、C 元件上电压、电流的约束关系为微分或积分关系：

$$u_L = L\frac{di}{dt} \qquad i_C = C\frac{du_C}{dt}$$　（关联参考方向下）

因此，根据 KCL、KVL 和元件的 VCR 所建立的电路方程是以电压或电流为变量的微分方程。我们将 L 元件和 C 元件又称为动态元件。含有动态元件的电路称为动态电路。

动态电路的一个特征是：当电路的结构和元件的参数发生改变时，可能使电路改变原来的稳定状态而转变到另一种稳定状态。这种转变，一般说来，不能马上完成，而需要经历一个过程。

实例：S 打开时，灯不亮；S 闭合后，为有源电路，C 相当于开路，灯应不亮，可为什么 S 闭合后，灯泡会马上亮起来然后才熄灭？

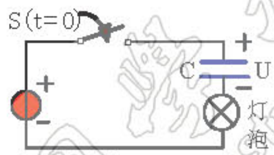


图6.1.1

原因：S 闭合改变了电路的工作状态，由稳态 1（S 打开）转变到稳态 2（S 闭合后无限长时间），中间经历了被充电的过程。

这种从一种稳态转变到另一咱稳态中间所经历的过程，工程上称为过渡过程。因为过渡过程所经历的时间很短（以 ns、μs、ms 计），所以又称为暂态。

2．换路定律

如果将换路发生的时刻取为计时起点，即 $t=0$，而以 $t=0_-$ 表示换路前的最后一瞬间，它和 $t=0$ 之间的时间间隔趋近于零；以 $t=0_+$ 表示换路后的最初一瞬间，它 $t=0$ 之间的间隔也趋近于零，则换路所经历的时间为 0_- 到 0_+。

对于线性电容来说，在任意时刻 t，有

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} i_C(\xi)d\xi$$

$$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\xi)d\xi$$

令 $t_0 = 0_-$，$t = 0_+$，则得

$$\left.\begin{aligned} q(0_+) &= q(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i_C dt \\ u_C(0_+) &= u_C(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C dt \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}1\text{-}1)$$

如果在换路前后，即 0_- 到 0_+ 瞬间，电流 $i_C(t)$ 为有限值，则上式中积分项为零。此时，电容上电荷和电压就不发生跃变。有

$$\left.\begin{aligned} q(0_+) &= q(0_-) \\ u_C(0_+) &= u_C(0_-) \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}1\text{-}2)$$

在线性电感元件上，磁链和电流可写为

$$\psi_L(t) = \psi_L(t_0) + \int_{t_0}^{t} u_L(\xi) d\xi$$

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L(\xi) d\xi$$

令 $t_0 = 0_-$，$t = 0_+$，得

$$\left.\begin{aligned} \psi_L(0_+) &= \psi_L(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} u dt \\ i_L(0_+) &= i_L(0_-) + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} u dt \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}1\text{-}3)$$

如果在换路瞬间，即 0_- 到 0_+ 瞬间，电感元件的端电压 $u(t)$ 为有限值，则式（6-3）中积分项为零，电感中磁通链和电流就不发生跃变。即

$$\left.\begin{aligned} \psi_L(0_+) &= \psi_L(0_-) \\ i_L(0_+) &= i_L(0_-) \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}1\text{-}4)$$

换路定律：在换路瞬间，电容元件的电流值为有限时，电容电压 u_C 及其电荷量 q_C 不能跃变；电感元件的电压值为有限时，其电流 i_L 及磁通链不能跃变。即

$$\left.\begin{aligned} u_C(0_+) &= u_C(0_-) \\ i_L(0_+) &= i_L(0_-) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} q_C(0_+) &= q_C(0_-) \\ \psi_L(0_+) &= \psi_L(0_-) \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}1\text{-}5)$$

除 u_C、i_L、q_C、ψ_L 四个物理量以外，其余物理量，如 i_C、u_L、u_R、i_R 以及电压源中的电流、电流源中的电压在换路瞬间都可以跃变。因为它们的跃变不会引起电场各磁场能量的跃变。亦即不会出现无限大的功率。

3．电路初始值计算

电路响应及其 $(n-1)$ 阶导数在换路后最初一瞬间的值（即 $t = 0_+$ 时）称为初始值。独立初始值：$u_C(0_+)$、$i_L(0_+)$。

相关初始值：其它可以跃变的物理量的初始值，又称非独立初始值。

独立初始值的求法：

由换路定律确定，即 $\begin{cases} u_C(0_+)=u_C(0_-) \\ i_L(0_+)=i_L(0_-) \end{cases}$

①若换路前电路中的动态元件均未储能，即 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 均为零，则电路称为零状态电路，具有零初始条件。此时，独立初始值为

$$\begin{cases} u_C(0_+)=u_C(0_-)=0 \\ i_L(0_+)=i_L(0_-)=0 \end{cases}$$

表明，电路在换路后的瞬间（0_+ 时），C 相当于短路，L 相当于开路。

②换路前，动态元件均已储能，即

$$\begin{cases} u_C(0_+)=u_C(0_-)\neq 0 \\ i_L(0_+)=i_L(0_-)\neq 0 \end{cases}$$

则在换路后的初始瞬间（$t=0_+$ 时），C 相当于一个电压值为 $u_C(0_+)$ 的电压源，电压源参考方向与 $u_C(0_+)$ 相同；L 则相当于一个电流值为 $i_L(0_+)$ 的电流源，电流源参考方向与 $i_L(0_+)$ 相同。

相关初始值的求解：①先求独立初始值 $u_C(0_+)$ 、$i_L(0_+)$；②画 0_+ 等效电路；③得到 $t=0_+$ 等效电路为一个电阻性电路，依 KCL、KVL 和欧姆定律求相关初始值。

§6-2 一阶电路的零输入响应

零输入响应：零输入是指没有外加电源激励，响应是电路中电压、电流变化规律的统称。零输入响应是指在没有外加电源激励的情况下，仅由储能元件初始储能 $u_C(0_+)$ 、$i_L(0_+)$ 引起的响应。

1．RC 电路的零输入响应

（1）定性分析

如图 6.2.1 所示，在换路前，开关 S 合在 1 的位置上，电源对电容元件充电，达到稳态时，u_C=U。在 t=0 时，将开关 S 从位置“1”合到位置“2”，使电路脱离电源，输入信号为零，此时，电容元件上的电压初始值 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U$ 。在 t>0 时，电容元件经过电阻 R 开始放电。

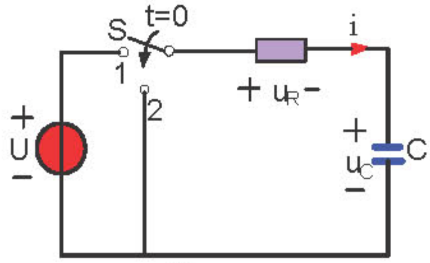


图6.2.1

（2）定量分析

根据 KVL，列出 t≥0 时的电路微分方程

$$u_R + u_C = 0$$

而 $u_R = Ri$， $i = C\dfrac{du_C}{dt}$ 代入上式得： $RC\dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0$

上式为一阶常系数线性齐次微分方程，令它的通解为： $u_C = Ae^{pt}$

代入方程中，并消去公因子 Ae^{pt}，得出该微分方程的特征方程： $RCp + 1 = 0$

其特征根为 ： $p = -\dfrac{1}{RC}$

因此，该微分方程的通解为： $u_C = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$

式中 A 为积分常数，由电路的初始条件确定，即：

$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U$， $U = A = u_C(0_+)$

所以 $u_C = Ue^{-\frac{1}{RC}t}$

（3）波形分析

可见，电容在放电时，其电压随时间按指数规律衰减，它的初始值为 U，衰减终了为零。u_C 随时间的变化曲线如图 6.2.2 所示。

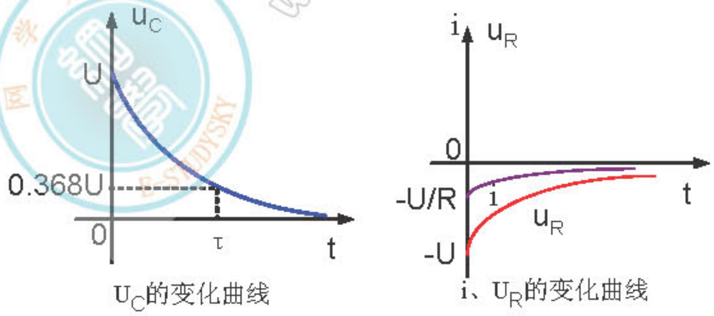


图6.2.2

RC 电路放电过程中电容放电电流和电阻上的电压为

$$i = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{U}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} \qquad u_R = R \cdot i = -Ue^{-\frac{1}{RC}t}$$

上两式中的负号表示放电电流的实际方向与图中的参考方向相反。画出了 i、u_R 随时间变化的曲线。

（4）RC 电路的零输入响应的时间常数

令 $\tau = RC$ 因为它具有时间的量纲，单位是秒，所以称为 RC 电路的时间常数。电压

u_C 衰减的快慢决定于电路的时间常数。

当 $t=\tau$ 时，电容上电压值为

$$u_C = Ue^{-\frac{t}{\tau}} = Ue^{-1} = 0.368U = 0.368u_C(0_+)$$

可见时间常数 τ 为电容电压衰减到初始值的 0.368 倍所需要的时间。

1.5 RC 零输入响应一般公式：$\begin{cases} u_C(t) = U_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} & \tau = RC \\ i_C(t) = C\dfrac{dU_C}{dt} \end{cases}$

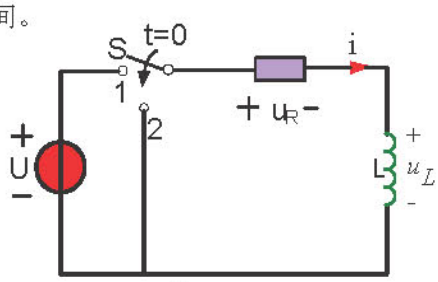


图6.2.3

2. RL 电路的零输入响应

（1）定性分析

如图 6.2.3 所示，在换路前，开关 S 是合在“1”的位置上，电感元件中通有电流，$i(0_-) = \dfrac{U}{R}$。在 t=0 时将开关从“1”的位置合到“2”的位置，使电路脱离电源，RL 电路被短路。此时，$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \dfrac{U}{R}$，电感元件已储有能量，逐渐被电阻 R 消耗。

（2）定量分析

根据 KVL 得：$u_R + u_L = 0$

又由 $u_R = R \cdot i$ 和 $u_L = L\dfrac{di}{dt}$ 代入上式得：$\dfrac{L}{R}\dfrac{di}{dt} + i = 0$

上式为一阶线性常系数齐次微分方程。其特征方程：$\dfrac{L}{R}p + 1 = 0$

特征根为：$p = -\dfrac{R}{L}$

因此，微分方程的通解为 ：$i = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{R}{L}t}$

由初始条件可确定 ：$A = i(0_+) = \dfrac{U}{R}$

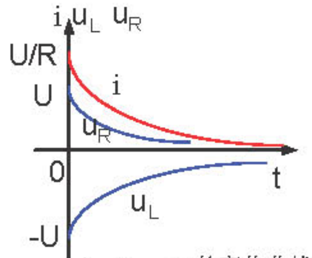


图6.2.4

所以，R L 电路的零输入响应为：$i = Ae^{-\frac{R}{L}t} = \dfrac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

上式中，令 $\tau = \dfrac{L}{R}$；τ 也具有时间的量纲，称为 R L 电路的时间常数。

u_L、u_R的响应为：$u_L = L\frac{di}{dt} = -Ue^{-\frac{t}{\tau}}$

$u_R = R \cdot i = Ue^{-\frac{t}{\tau}}$

（3）波形分析

所求 i、u_L、u_R随时间而变化的曲线如图所示。u_L为负值表示此时电感元件的实际电压极性与参考极性相反。

（4）RL 零输入响应的一般形式

$$\begin{cases} i_L(t) = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = \dfrac{L}{R} \\ u_L(t) = L\dfrac{di_L}{dt} \end{cases}$$

§6-3　一阶电路的零状态响应

零状态响应：零状态是指储能元件初始储能为零的电路状态，即$u_C(0_-) = 0$、$i_L(0_-) = 0$。零状态响应是指$u_C(0_-) = 0$、$i_L(0_+) = 0$时，仅由外加电源激励引起的响应。

1．直流激励下 RC 电路的零状态响应

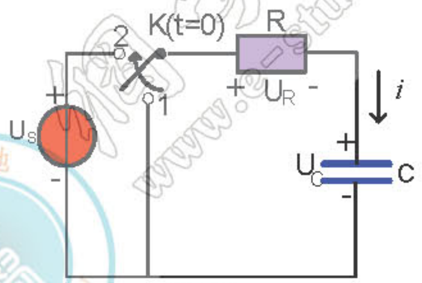


图6.3.1

如图 6.3.1，开关 k 置于位置 1 处，电容即使充过电，极板上的电荷也已放尽，故为零状态。$u_C(0_-) = 0$，$t = 0$时，将 k 投向 2，依 KVL 有，$u_R + u_C = U_S$

式中：$u_R = Ri \quad i = C\frac{du_C}{dt}$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \tag{6-3-1}$$

式（6-3-1）是一阶常系数线性非齐次微分方程，其解由非齐次微分方程的特解$u_C^{'}$和对应的齐次微分方程的通解$u_C^{''}$两部分组成，即$u_C = u_C^{'} + u_C^{''}$。

电路中的稳态解仍然满足 KVL，此特解是$u_C^{'} = U_S$，可见$u_C^{'}$的变化规律与外施激励的变化规律有关，故称为强制分量。当激励为直流量或者正弦量时，强制分量也是直流或正弦量，此时，强制分量又称稳态分量。（若激励为衰减的指数函数，则强制分量也是相同规律衰减的指数函数，此时强制分量将不再是稳态分量。）

$u_C^{''}$是式（6-3-1）对应的齐次微分方程的通解，为$u_C^{''} = Ae^{pt}$，p是特征方程$Rcp + 1 = 0$

的根，即 $p=-\frac{1}{Rc}=-\frac{1}{\tau}$，$u_C^{''}=Ae^{-\frac{t}{Rc}}=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$，$\tau=RC$ 是电路的时间常数。

$u_C^{''}$ 称为暂态分量，是暂存于电路中的一个分量。过渡过程一结束，$u_C^{''}$ 即变成全零，$u_C^{''}$ 的变化规律与外施激励无关，又称为自由分量。

于是，式（6-3-1）的通解为

$$u_C=u_C^{'}+u_C^{''}=U_S+Ae^{-\frac{t}{\tau}}\qquad(t\geq 0)$$

由初始条件确定积分常数。

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$$

$$u_C(0_+)=U_S+A=0\qquad A=-U_S$$

于是有 $$u_C=U_S-U_Se^{-\frac{t}{\tau}}=U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\qquad(t\geq 0)\qquad(6\text{-}3\text{-}2)$$

可见，换路后，u_C 从零开始随时间按指数规律上升，趋近于它的稳态值 u_S，工程上认为经过（3～5）τ 时间，过渡过程便结束。此时，$u_C=U_S$

电容电流 $$i=c\frac{du_c}{dt}=\frac{U_s}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\qquad(t>0)\qquad(6\text{-}3\text{-}3)$$

电阻电压 $$u_R=Ri=U_Se^{-\frac{t}{\tau}}\qquad(t>0)\qquad(6\text{-}3\text{-}4)$$

在充电过程中，电阻所消耗的电能为：

$$W_R=\int_0^{\infty}Ri^2dt=\int_0^{\infty}R[\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}]^2dt=\frac{U_S}{R}(-\frac{Rc}{2})[e^{-\frac{2t}{\tau}}]_0^{\infty}=\frac{1}{2}cU_S^2$$

恰好等于进入稳态时电容中存储的能量。因此，不论 R，C 的数值如何，充电过程中，电源供给的能量只有一半转换成电场能量储存在电容中，充电效率为 50%。

2．直流激励下 RL 电路的零状态响应

如图 6.3.2 所示，开关 S 打开后，$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$，电路的响应为零状态响应，电路的微分方程为

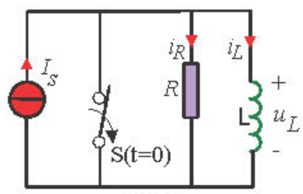


图6.3.2

$$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}+i_L=I_S\qquad(6\text{-}3\text{-}5)$$

$$i_L=i_L^{'}+Ae^{-\frac{Rt}{L}}=i_L^{'}+Ae^{-\frac{t}{\tau}}\qquad(t\geq 0)$$

$\tau=\frac{L}{R}$ 为时间常数。

特解 $i_L^{'}=I_s$ 由初始条件得，$$i_L=I_s(1-e^{-\frac{Rt}{L}})=I_s(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\qquad(t\geq 0)\qquad(6\text{-}3\text{-}6)$$

§6-4　一阶电路的全响应

全响应是指储能元件初始储能不为零的同时，又有外加电源激励引起的响应。

1．叠加法

图 6.4.1 为一已充电的电容经过电阻接到直流电压源 U_s 上，$u_C(0_+)=U_0$ 故设 $u_c(0_+)=u_c(0_-)=U_0$，$t=0$ 时，合上 K 后，求电容两端的电压 u_C。

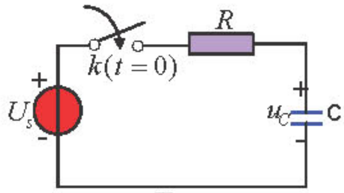


图6.4.1

利用分解原理，图 6.4.1 中的响应等效于图 6.4.1（a）和 6.4.1（b）作用的叠加。

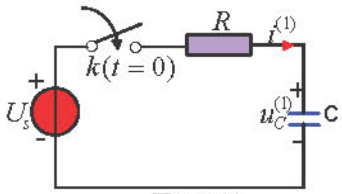


图6.4.1 (a)

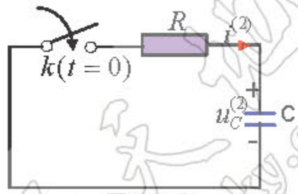


图6.4.1 (b)

图 6.4.1（a）中 $u_C^{(1)}(0_+)=0$，电路中的响应为零状态响应。

图 6.4.1（b）中 $u_C^{(2)}(0_+)=U_0$，电路中的响应为零输入响应。

零状态响应：$u_c^{(1)}=U_s(1-e^{-\frac{t}{RC}})$

零输入响应：$u_c^{(2)}=U_0e^{-\frac{t}{RC}}$

那么图 6.4.1 （a）中的全响应：

$$u_c=u_c^{(1)}+u_c^{(2)}=U_s(1-e^{-\frac{t}{RC}})+U_0e^{-\frac{t}{RC}}$$

即　　全响应＝零状态响应＋零输入响应

同理，电流全响应应为

$$i=i^{(1)}+i^{(2)}=\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}-\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

求零输入响应时，应将输入激励去掉，即把电压源断路，电流源开路。

零输入响应与电路的初始状态量值（U_0）成正比，称为零输入线性；零状态响应则与输入激励的量值（U_s）成正比，称为零状态线性。但全响应与初始状态量值及输入激励量值之间都不存在正比关系，另有当初始状态量值和外施激励量值同时增大 K 倍时，全响应才能增加 K 倍。

2．三要素法

三要素法是指依据暂态过程中电压、电流的初始值$f(0_+)$、稳态值$f(\infty)$、时间常数τ及三要素快速公式求解线性一阶动态电路的方法。需要注意的是：

1）直流电源激励时，三要素快速公式为

$$f(t)=f(\infty)+[f(0_+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t\geq 0)$$

2）交流电源激励时，三要素快速公式为

$$f(t)=f_\infty(t)+[f(0_+)-f_\infty(0)]e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t\geq 0)$$

式中：$f_\infty(t)$ 是指电路进入稳态后的正弦稳态响应。可用相量法求解。

$f_\infty(0)$是指正弦稳态响应$f_\infty(t)$在$t=0$时刻的值。

§6-5 一阶电路的阶跃响应

阶跃响应指在阶跃电源的激励下，电路的零状态响应。

1．单位阶跃函数

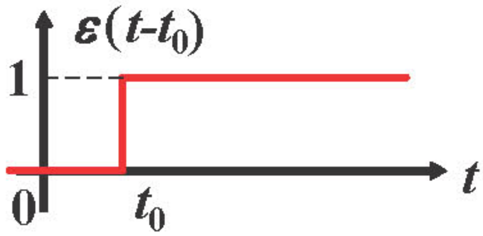
（1）单位阶跃函数（k=1）

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0_-)\\ 1 & (t\geq 0^+)\end{cases}$$

（2）单位延迟阶跃函数（$t=t_0$时刻发生跃变）

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_{0-})\\ 1 & (t\geq t_{0+})\end{cases}$$

(a)



(b)

图6.5.1

（3）性质："起始"任意一个函数$f(t)$。如图 6.5.2 所示。

$$f(t)\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_{0-})\\ f(t) & (t\geq t_{0+})\end{cases}$$

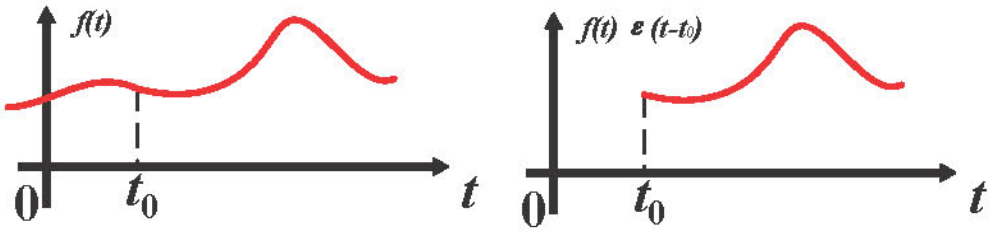


图6.5.2

§6-6 一阶电路的冲激响应

1. 冲激响应

一阶电路在单位冲激函数 $\delta(t)$ 激励下的零状态响应，称为单位冲激响应。求冲激响应时，可分两个阶段进行：

1）在 $t=0_-$ 到 0_+ 区间内，当电路在冲激函数 $\delta(t)$ 作用下所引起的零状态响应，此时，u_c 或 i_L 发生跃变，储能元件得到能量。

2）$t \geq 0_+$ 时，$\delta(t)=0$，电路中的响应相当由初始状态引起的零输入响应。

求解冲激响应的关键：求得 $\delta(t)$ 在 $t=0_-$ 到 0_+ 时间内所引起的初始状态，即 $u_c(0_+)$，$i_L(0_+)$ 值。

以 RC 并联电路，如图 6.6.1 所示来说明怎样确定电路中的初始状态，即 $u_c(0_+)$，$i_L(0_+)$ 值，及电路的单位冲激响应。依 KCL，有

$$C\frac{du_c}{dt}+\frac{u_c}{R}=\delta_i(t)$$

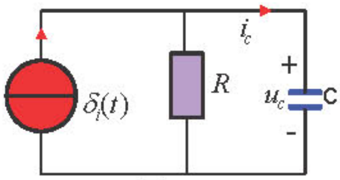


图6.6.1

已知 $u_c(0_-)=0$，求 $u_c(0_+)$ 值如下：

将上式在 0_- 到 0_+ 时间间隔内积分，为

$$\int_{0_-}^{0_+} C\frac{du_c}{dt}dt+\int_{0_-}^{0_+}\frac{u_c}{R}dt=\int_{0_-}^{0_+}\delta_i(t)dt$$

上式等号左方第二个积分，若 u_c 为有限值，则设积分为零，设 u_c 为冲激函数，则 $\frac{u_c}{R}$ 也为冲激函数，$C\frac{du_c}{dt}$ 为冲激函数的一阶导数，代入上式中，不满足 KCL，故 u_c 不可能为冲激函数，只能是有限值，故上式第二项积分为零，于是有

$$C\left[u_c(0_+)-u_c(0_-)\right]=1$$

即：$u_c(0_+) = u_c(0_-) + \frac{1}{C} = \frac{1}{C}$

事实上，由于$u_c(0_-) = 0$，故在$t = 0$时，C 相当于短路，冲激电流$\delta_i(t)$全部通过电容，$t = 0_+$时，$u_c(0_+)$跃变为$\frac{1}{C}$。

当$t \geq 0_+$时，冲激电流源相当于开路，可求得$t \geq 0_+$时的u_c。即单位冲激响应为

$$u_c = u_c(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \varepsilon(t)$$

一般情况下，若冲激量不为 1 而为θ_s则$u_c = \frac{\theta_s}{C}e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \varepsilon(t)$

$$\begin{aligned} i_c &= C\frac{du_c}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[\frac{\theta_s}{C}e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \varepsilon(t)\right] \\ &= -\frac{\theta_s}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \varepsilon(t) + \theta_s e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \delta(t) \\ &= -\frac{\theta_s}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \varepsilon(t) + \theta_s \cdot \delta(t) \end{aligned}$$

2. （单位）阶跃响应与（单位）冲激响应间的关系

电路的阶跃响应$s(t)$与同电路的冲激响应$h(t)$间存在着下列数学关系：

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

$$s(t) = \int h(t)dt$$

即：冲激响应在数值上是阶跃响应的导数，阶跃响应则是冲激响应的积分。

第二部分　例题

例 1:图6-1 电路原已稳定，求开关闭合瞬间电流 $i(0_+)$

解：(1) $i_L(0_-)=\dfrac{12}{2}=6A$

$u_{c1}(0_-)+u_{c2}(0_-)=12$

$C_1u_{c1}(0_-)=C_2u_{c2}(0_-)$　（电荷相等）

$u_{c1}(0_-)=8V$　　$u_{c2}(0_-)=4V$

(2)根据换路定理画 0_+ 等效电路：电容用电压源代替，电感用电流源代替，画出换路后的电路，即为 0_+ 等效电路

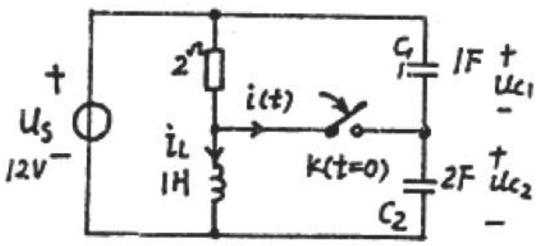
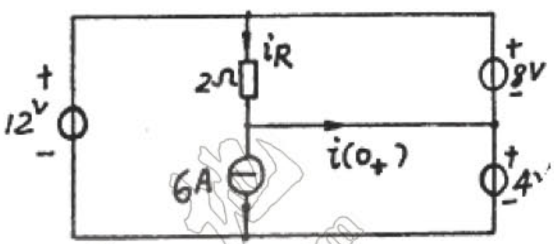


图 6−1



0_+等效电路

$$i(0_+)=i_R-6=\frac{8}{2}-6=-2A$$

例 2　图 6-2 所示电路中，R1=10Ω，R2=6Ω，L=0.5H，$u_s(t)=20\varepsilon(t)$ V，$i_L(0-)=0$，求 $i_L(t)$

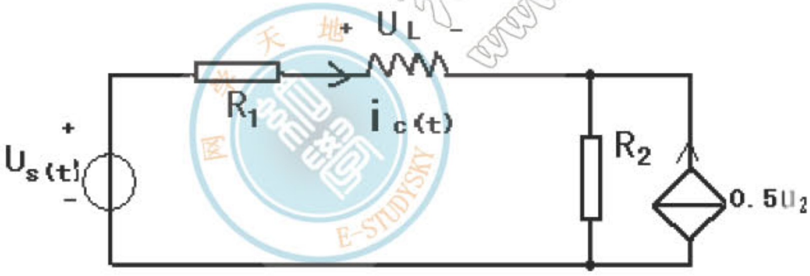
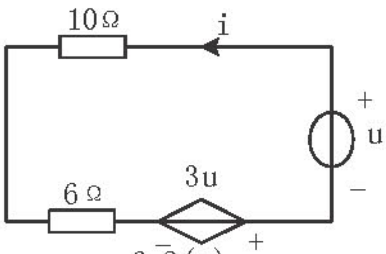


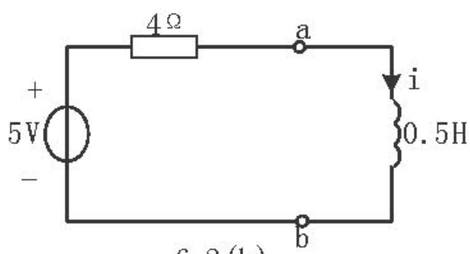
图 6−2

解：用三要素法：$i_L(t)=i_L'(t)+\{i_L(0+)+i_L'(t)\}e^{-t/\tau}$

把 L 作外电路，求戴维南等效电路，见图 6-2（a)、6-2（b)



6−2 (a)



6−2 (b)

求 $u_\infty=u_L$

$4u_L=20$　　　　$u_L=5V$

求 R_{eq}，见图6－2(a)。

$i=\frac{4u}{16}$

∴ $R_{eq}=\frac{u}{i}=4\Omega$

画戴维南等效电路，装上电感，见图6－2(b)

$i'_L=(t)=1.25A$

$\tau=L/R=\frac{0.5}{4}=0.125S$

另 $i_L(O_+)=i_L(O_-)=0$

∴ $i_L(t)=1.25(1-e^{-8t})\varepsilon(t)$ A

例3：图(6－3)电路，$u_c=(O_-)=0$，外加电压 $u_s(t)$ 如图(b)示，求 $u_c(t)$，$i_c(t)$。

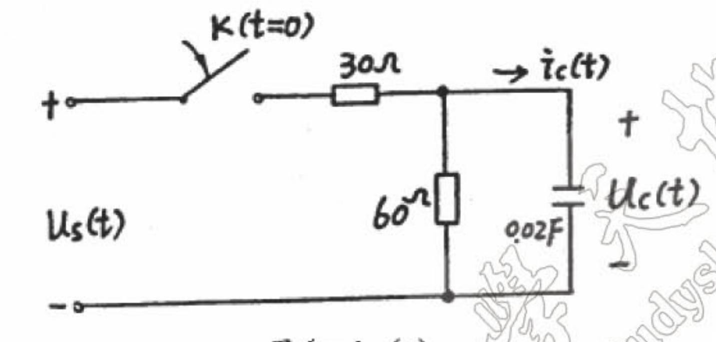


图6－3 (a)

解：方法一，激励分段求其响应

(1)0<t<1S，电路为零状去响应

$u_c(t)=u'_c+[u_c(O_+)-u'_c(O_+)]e^{-t/\tau}$

$\tau=20\times0.02=0.4S$

$u'_c=6V\times\frac{2}{3}=4V$

$u_c(O_+)=u_c(O_-)=0$

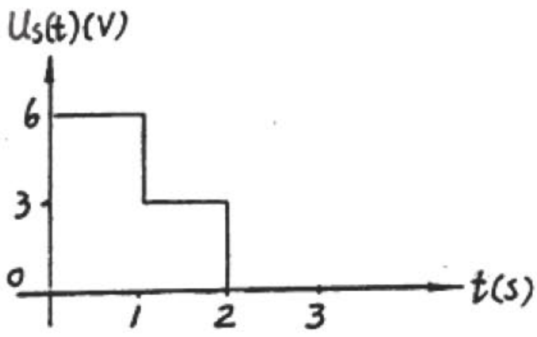
∴ $u_c(t)=4(1-e^{-2.5t})V$ 0<t<1S

$i_c(t)=C\frac{du_c}{dt}=0.2e^{-2.5t}$ (A)

(2)1S<t<2S，电路为全响应，1S≫τ

但时间上比前要延迟1秒，所以有

$u_c(t)=u'_c+[u_c(1_+)-u'_c(1_+)]e^{-2.5(t-1)}$



图(b)

这时 $u_s=3V$

$u'=\frac{2}{3}u_s=2V$

$u_c(1_+)=4(1-e^{-2.5\times1})=3.672V$

$u_c(t)=2+1.672e^{-2.5(t-1)}$ (V)

$$i(t)=C\frac{du_c}{dt}=-0.0836e^{-2.5(t-1)}\quad(A)$$

(3)t>2S，电路为零输入响应

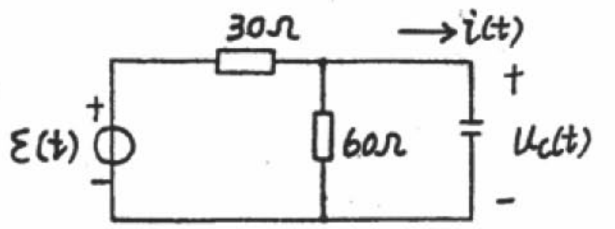
$u_c(2_+)=2+1.672e^{-2.5}=2.137\quad(V)$

$u_c(t)=u_c(2_+)e^{-2.5(t-2)}$

$\quad=2.137e^{-2.5(t-2)}\quad(V)$

$i_c(t)=-0.106e^{-2.5(t-2)}\quad(A)$

方法二：应用阶路跃函数表示 $u_c(t)$



图(c)

例 4 在下图中，$E=100\text{V}$，$R_1=1\Omega$，$R_2=99\Omega$，$C=10\mu\text{F}$，试求：（1）S 闭合瞬间（$t=0_+$），各支路电流及各元件两端电压的数值；（2）S 闭合后到达稳定状态时中各电流和电压的数值；（3）当用电感元件替换电容元件后（1），（2）两种情况下的各支路电流及各元件两端电压的数值。

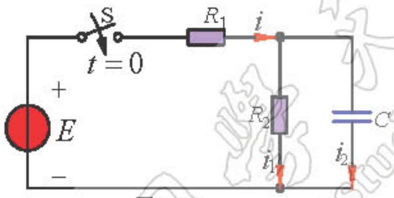


图 6.1.2

解：（1）因 $q(0_-)=0$，即 $u_C(0_-)$ 所以由换路定则得 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$

又因为 $i_1(0_+)=\dfrac{u_C}{R_2}=0$，于是由 KCL 得

$$i_2(0_+)=i(0_+)-i_1(0_+)=i(0_+)$$

于是 $i(0_+)=i_2(0_+)=\dfrac{E}{R_1}=100\text{A}$（欧姆定理）

$u_{R_1}(0_+)=100\text{V}\qquad u_{R_2}(0_+)=u_C=0$

（2）到达稳态时，电容 C 相当于开路，$i_2(\infty)=0$，因此

$$i(\infty)=i_1(\infty)=\frac{E}{R_1+R_2}=\frac{100}{1+99}=1\text{A}$$（欧姆定律）

所以 $u_C(\infty)=u_{R_2}(\infty)=i_1(\infty)R_2=1\times99=99\text{V}$

$$u_{R_1}(\infty)=i(\infty)R_1=1\times1=1\text{V}$$

（3）换成电感后，S 闭合瞬间（$t=0_+$）

$$i_2(0_+)=i_2(0_-)=0$$ （换路定则）

$$i(0_+)=i_1(0_+)=\frac{E}{R_1+R_2}=\frac{100}{1+99}=1\text{A}$$ （欧姆定律）

$$u_L(0_+)=u_{R_2}(0_+)=i_1(0_+)R_2=1\times 99=99\text{V}$$

$$u_{R_1}(0_+)=1\text{V}$$

到达稳态后，电感 L 相当于短路：

$$i(\infty)=i_2(\infty)=\frac{E}{R_1}=\frac{100}{1}=100\text{A}$$ （欧姆定律）

$$i_1(\infty)=0,\qquad u_L(\infty)=u_{R_2}(\infty)=0,\qquad u_{R_1}(\infty)=100\text{V}$$

例 5　下图所示各电路在换路前都处于稳态，试求换路后其中电流 i 的初始值 $i(0_+)$ 和稳态值 $i(\infty)$。

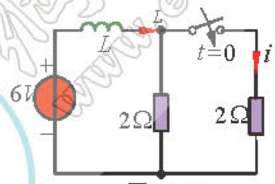


图6. 1. 3

分析：对于电感换路前为短路，由此可求出换路前的电感电流值，换路后，电感电流值不变。稳态时电感短路，由此得到纯阻电路，就可求出稳态值 $i(\infty)$。

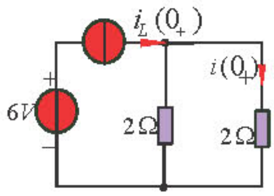


图6.13(a)

解：（1）$t=0_+$ 时刻，等效电路如图 6.1.3（a）所示。求初始值：换路前，L 导通相当于短路

$$i_L(0_-)=\frac{6}{2}=3\text{A}$$ （欧姆定律）

换路后，i_L 不发生跳变，因此，

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 3\text{A} \quad \text{（换路定则）}$$

$$i\ (0_+) = \frac{2}{2+2} i_L(0_+) = 1.5\text{A} \quad \text{（分流公式）}$$

（2）求稳态值：稳态时，L 相当于短路，等效电路如图 6.1.3（b）所示。

$$i(\infty) = \frac{1}{2} i_L(\infty) = \frac{6}{\frac{2\times 2}{2+2}} \times \frac{1}{2} = 3\text{A}$$

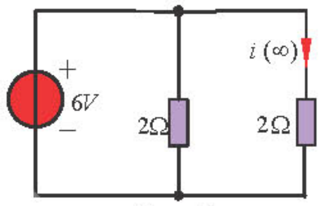


图 6.1.3(b)

例 6　图 6.2.5 是用伏安法测电感线圈的电阻 R_L 的电路，电路稳定时，电流表的读数为 4A，电压表的读数为 10V。已知电流表的内阻为 R_1=0.05Ω，电压表的内阻为 $R_V = 10K\Omega$，电感 L=5H。若开关 S 在 t=0 时打开，求（1）$t=0_-$、$t=0_+$ 时电感电流 i_L。（2）$t=0_-$、$t=0_+$ 时电压表上的电压 u_V。

解：（1）换路前，电路已稳定，则有：

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 4(A)\ ,\quad R_L = \frac{10}{4} = 2.5(\Omega)$$

$$\tau_L = \frac{L}{R_L + R_V} = \frac{5}{2.5 + 10^4} = 5\times 10^{-4}(s)$$

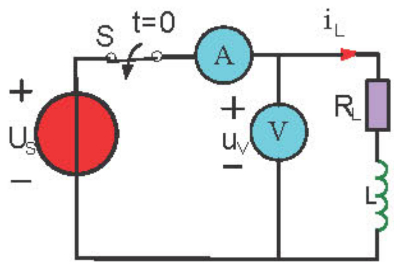


图6.2.5

画 t=0+时的等效电路如图 6.2.6，电路的时间常数为：

电流响应：$i_L = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau_L}} = 4e^{-2\times 10^3 t}(A)$

（2）由换路前稳定电路得：

$u_V(0_-) = 10(V)$

由 t=0+时的等效电路得：

$u_V(0_+) = -R_V i_L(0_+) = -10^4 \times 4 = -40(kV)$

电压响应：

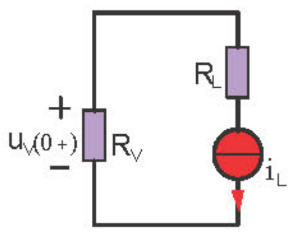


图6.2.6

$u_V = -R_V i_L = -10^4 \times 4e^{-2\times10^4 t}(V)$

例 7 在图 6.3.3 中，$E = 20\text{V}$，$R_1 = 12\text{k}\Omega$，$R_2 = 6\text{k}\Omega$，$C_1 = 10\mu F$，$C_2 = 20\mu\text{F}$。电容元件原先均未储能。当开关闭合后，试求电容元件两端电压 u_C。

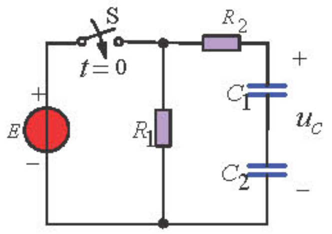


图 6.3.3

分析：由于电容元件初始无储能，故为 RC 电路零状态响应，则 $U_C = U_C(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$。

解： 两电容元件串联时总等效电容值。

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{10\times20}{10+20} = 6.67\mu\text{F}$$

时间常数

$$\tau = R_2 C = 6\times10^3 \times 6.67\times10^{-6} = 0.04s$$

电路达到稳态后，C 两端电压为 $u_C(\infty)$，且

$$u_C(\infty) = E = 20\text{V}$$

故有电容元件电压的零状态响应

$$u_C = u_C(\infty)(1-e^{-\frac{1}{\tau}}) = 20(1-e^{-\frac{5}{0.04}}) = 20((1-e^{-25t})\text{V} \qquad (\text{t} \geq 0)$$

例 8 电路 6.3.4 中，已知外加电压 $u_s = \sqrt{2}220\text{Sin}(324\text{t}+\varphi)\text{V}$，$R = 30\Omega$，$L = 0.2H$ 求：1）开关 S 闭合时，$\varphi = 0$，电路中电流。2）开关 S 闭合时，$\varphi = 64.5^0$，求电路中电流。

解： 求 i'

$$\text{I}_\text{m} = \frac{\text{U}_\text{m}}{|\text{Z}|} = \frac{\text{U}_\text{m}}{\sqrt{\text{R}^2 + (\omega\text{L})^2}}$$

$$= \frac{220\sqrt{2}}{\sqrt{30^2 + (324\times0.2)^2}} = 4.47\text{A}$$

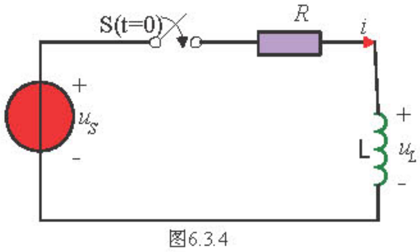


图6.3.4

$$\varphi = tg^{-1}\frac{\omega L}{R} = tg^{-1}\frac{324\times0.2}{30} = 64.5^0$$

$$\therefore i' = 4.47Sin(324t + \varphi - 64.5^0)A$$

$$i'' = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = \frac{L}{R} = \frac{0.2}{30} = 6.67\times10^{-3}s$$

$$\therefore i = i' + i'' = 4.47Sin(324t + \varphi - 64.5^0) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

代入初始条件，$i(0_+) = 4.47Sin(\varphi - 64.5^0) + A = 0$

$$\therefore A = -4.47Sin(\varphi - 64.5^0)$$

$$i = 4.47Sin(324t + \varphi - 64.5^0) - 4.47Sin(\varphi - 64.5^0)e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ A}$$

当 φ =0 时

$$i = 4.47Sin(324t - 64.5^0) + 4.02e^{-150t} \text{ A}$$

当 φ =64.5 时

$$i = 4.47Sin(324t) \text{ A}$$

例 9 电路如图 6.4.2 所示，在开关 S 闭合前电路已处于稳态，求开关闭合后的电压 u_C。

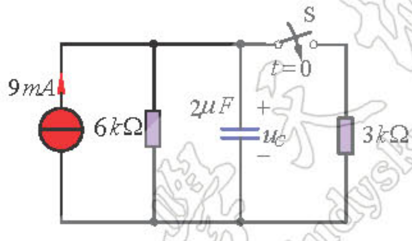


图6.4.2

分析：S 闭合前后，电流源都存在，故是全响应过程。可以分别求出零输入响应与零状态响应进行叠加得到全响应，也可以先求出初始值与稳态值，用全响应公式进行求解。

解： 方法 1：叠加法：求出零输入响应与零状态响应进行叠加得到全响应

开关 S 闭合前，电容相当于开路： $u_C(0_-) = 9\times10^{-3}\times6\times10^3 = 54\text{V}$

1）求零输入响应 $u'_C(t)$：

将电路激励电源除去（开路掉），以 $u_C(0_-) = 54\text{V}$ 作为初始储能电压，

除源后电容两端的等效电阻 $R = \dfrac{6\times3}{6+3} = 2\text{k}\Omega$

因此时间常数 $\tau = RC = 2\times10^3\times2\times10^{-6} = 4\text{ms}$

于是，零输入响应为：

$$u'_C(t) = U_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = U_C(0_-)e^{-\frac{t}{\tau}} = 54e^{-\frac{t}{4\times10^{-3}}} = 54e^{-250t}\text{V} \quad t\ge0$$

2）求零状态响应 $u''_C(t)$：

令 $u_C(0_-) = 0$，则 $u_C(0_+) = 0$。电路在电源作用下电容器充电，

稳态值 $u_C(\infty)=9\times10^{-3}\times\frac{6\times3}{6+3}\times10^{3}=18\text{V}$ （分流公式和欧姆定律）

时间常数 $\tau=4\text{ms}$，于是零状态响应

$$u''_C(t)=U_C(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=18(1-e^{-250t})\text{V}$$ （零状态响应公式）

由叠加原理，则全响应

$$u_C(t)=u'_C(t)+u''_C(t)=54e^{-250t}+18(1-e^{-250t})=18+36e^{-250t}\text{V}\qquad t\geq0$$

方法 2：先求出初始值与稳态值，用三要素法进行求解

由戴维南定理，可得等效电压源，

如图解 6.4.2（a）

$$u_S=R_S\cdot I_S=6\text{k}\times9\text{mA}=54\text{V},\quad R_0=R_S=6\text{k}\Omega$$

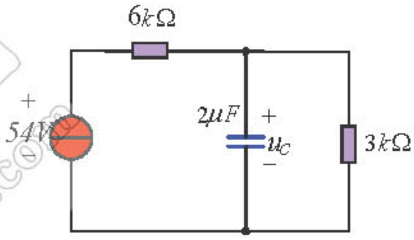


图6.4.2(a)

则 $u_C(\infty+)=\frac{3}{3+6}\times54=18\text{V}$

因为 $u_C(0_+)=U_C(0_-)=9\times6=54\text{V}$

$$\tau=RC=\frac{R_0\cdot R}{R_0+R}\times C=2\times2\text{ms}=4\text{ms}\qquad\frac{1}{\tau}=250\text{Hz}$$

由全响应公式：

$$u_C=u_C(\infty+)+[u_C(0_+)-u_C(\infty+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=18+(54-18)e^{-\frac{5}{\tau}}=18+36e^{-250t}\text{V}\qquad t\geq0$$

例 10 求如图 6.5.3 所示电路的单位阶跃响应 $s_C(t)$ 和 $s_R(t)$。

解： 利用三要素法：

（1）求 $s_C(0_+)$，$s_R(0_+)$

$$s_C(0_+)=0,\ s_R(0_+)=1\text{V}$$

（2）求 $s_C(\infty)$，$s_R(\infty)$

$$s_C(\infty)=\frac{1}{3}\text{V},\ s_R(\infty)=\frac{2}{3}\text{V}$$

（3）求 τ：$\tau=2\text{s}$

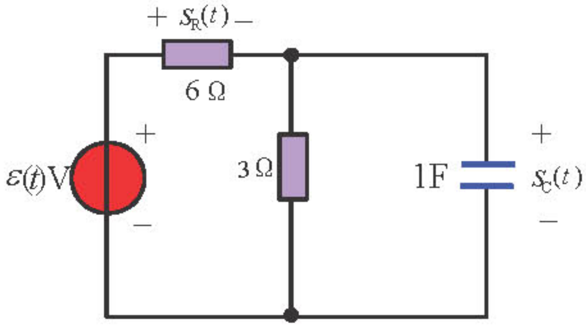
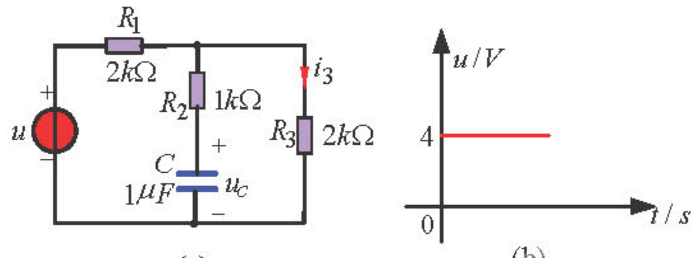


图6.5.3

$$s_C(t)=\frac{1}{3}(1-\text{e}^{-\frac{t}{2}})\varepsilon(t)V$$

$$s_{\mathrm{R}}(t)=(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

例 11 在图 6.5.3（a）的电路中，u 为一阶跃电压，如图（b）所示，试求 i_3 和 u_C。设 $u_C(0_-)=1\mathrm{V}$。



(a) (b)

图6.5.3

解：（1）求初始值：$i_3(0_+)$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=1\mathrm{V}$$

为了求 $i_3(0_+)$，可将 $u_C(0_+)$ 看成一个电压源，画出相应电路图如图解 6.5.4 所示。由结点电压法：

$$(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3})u_a(0_+)=\frac{u}{R_1}+\frac{u_C(0_+)}{R_2}$$

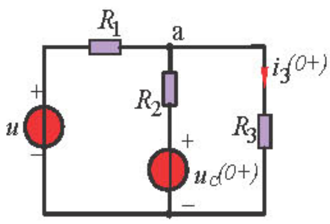


图6.5.4

解得

$$u_a(0_+)=\frac{3}{2}V$$

所以

$$i_3(0_+)=\frac{u_a(0_+)}{R_3}=\frac{3}{4}\mathrm{mA}$$

（2）求 τ：除去电容 C，再将电路除源，得到等效电阻

$$R=R_2+\frac{R_1R_3}{R_1R_3}=1\times10^3+\frac{2\times2}{2+2}\times10^3=2\times10^3\Omega$$

时间常数 $\tau=RC=2\times10^3\times1\times10^{-6}=2\mathrm{ms}$

（3）求稳态值：C 开路，则有

$$u_C(\infty)=\frac{R_3}{R_1+R_3}U=\frac{2}{2+2}\times4=2\mathrm{V}$$

（分压公式）

$$i_3(\infty)=\frac{U}{R_1+R_3}=\frac{2}{2\times10^3+2\times10^3}=1\text{mA}$$
（欧姆定律）

列写 u_C 和 i_3 如下：由全响应公式：

$$u_C=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$=2+[1-2]e^{-e\frac{t}{2ms}}=2-e^{-\frac{t}{2\times10^{-3}}}\text{V}\qquad(t\geq0)$$
$$i_3=i_3(\infty)+[i_3(0_+)-i_3(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$=1+[\frac{3}{4}-1]e^{-\frac{t}{2ms}}=1-0.25e^{-\frac{t}{2\times10^{-3}}}\text{mA}\qquad(t\geq0)$$

例 12 求图所示电路的冲激响应 i_L 。

解：求 i_L 的单位阶跃响应，再利用阶跃响应与冲激响应之间的微分关系求解。当激励为单位阶跃函数时，i_L 的单位阶跃响应为

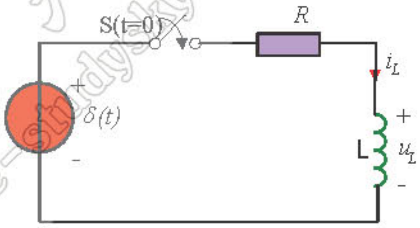


图6.6.2

$$s(t)=\frac{1}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})\varepsilon(t)$$

由 $h(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}$ 便可求得其单位冲激响应 i_L

$$i_L=\frac{ds(t)}{dt}=\frac{1}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})\delta(t)+\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

由以上分析可见，电路的输入为冲激函数时，电容电压和电感电流会发生跃变。