密封装订线

姓 名________

密封装订线

学 号________

密封装订线

班 级________

西南交通大学 2021—2022 学年第(1)学期期末考试 A 卷

课程代码 MATH000212 课程名称 线性代数 A 考试时间 120 **分钟**

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

注意：本试卷共四大题，16 小题。

一. 选择题（每小题 4 分，共计 24 分）

1. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&a&x\\1&b&y\\1&c&z\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $P^6AQ=$（　　）。

（A）$\begin{pmatrix}1&a&x\\1&b&y\\1&c&z\end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix}1&a&x\\1&c&z\\1&b&y\end{pmatrix}$ （C）$\begin{pmatrix}1&a&1+x\\1&b&1+y\\1&c&1+z\end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix}1&a&1+x\\1&c&1+z\\1&b&1+b\end{pmatrix}$

2. 设 $A^2=O$, 则下列叙述 不 正确的是（　　）。

（A） $A=O$　　　（B） $|A|=O$

（C） $A+E$ 可逆　　　（D） $\lambda=0$ 为 A 的特征值

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\-1&1&0\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$（　　）。

（A）$\begin{pmatrix}2&2&-3\\-1&-1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&-1&-1\\-3&-2&-1\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&-1&1\\-3&2&-1\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}2&-2&-3\\1&-1&-2\\0&-1&-1\end{pmatrix}$

4. 设 λ 为矩阵 A 的特征值， p 为 λ 对应的特征向量，则 $C^{-1}AC$ 对应于特征值 λ 的特征向量为（　　）。

（A） p （B）Cp （C） $C^{-1}p$ （D） C^Tp

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则下述结论正确的是（　　）。

（A）A可以相似对角化

（B）A能否相似对角化与a的取值有关

（C）A能否相似对角化与b的取值有关

（D）A不能相似对角化

6. 设四元非齐次线性方程组$Ax=b$的系数矩阵的秩为 3，η_1,η_2,η_3是它的三个解，且

$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$，$k$是任意常数，则$Ax=b$的通解为$x=$（　　）.

（A）$k\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$　　**（B）**$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$　　**（C）**$k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$　　**（D）**$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

二．填空题（每小题 4 分，共计 16 分）

7. 行列式 $\begin{vmatrix}19&20&21\\20&21&19\\21&19&20\end{vmatrix}=$__________.

8. 已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\a\end{pmatrix}$线性相关，则$a=$__________.

9. 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 1，0，−1，方阵 B 与 A 相似，则

$\left|B^2+B+E\right|=$___________.

10. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+2x_1x_2+2x_2{}^2+4x_2x_3+4x_3{}^2$ 的规范型为

是____________________.

三．计算题（每小题 12 分，共计 48 分）

11． 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\2&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-2&0\\1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$，计算：（1）$2A+B$；（2）$A^TB$；（3）$AB^T$.

12. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\end{pmatrix}$， $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-6\\6\end{pmatrix}$， $\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\-9\end{pmatrix}$， $\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\7\end{pmatrix}$， $\alpha_5=\begin{pmatrix}4\\2\\4\\9\end{pmatrix}$ 的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表出.

13． 求方程组 $\begin{cases}-x_1+x_2+x_4=2\\ x_1-x_2-2x_3+x_4=4\\ -x_2+2x_3-x_4=1\\ -x_1+2x_2-2x_3+2x_4=1\end{cases}$ 的通解.

14． 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&-1&4\\-1&1&-1\\4&-1&-2\end{pmatrix}$， 二次型 $f=x^TAx$，

（1）求 A 的特征值与特征向量；

（2）求正交变换 $x=Qy$，将二次型 $f=x^TAx$ 化为标准型，并写出 f 的标准型.

四． 计算证明题（每小题 6 分）

15． 已知向量组 α_1， α_2， α_3 线性无关，

（1）计算 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&4\\2&0\\3&5\end{pmatrix}$；

（2）证明向量组 α_1， $\alpha_1+2\alpha_2$， $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 线性无关.

16． 已知 A 是 3 阶方阵， A 的第一行元素分别为 $1,1,-1$， A^* 是 A 的伴随矩阵， A^* 的第一列元素分别为 $1,1,2$，

（1）证明 $|A|=0$；

（2）证明 A^* 的秩 $R\left(A^*\right)=1$.

2021-2022 学年第（1）学期期末考试 A 卷参考答案

一、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1. C； 2. A； 3. C； 4. C ； 5. B ； 6. A

二、填空题

7. -180； 8. 5 ； 9. 3 ； 10. $y_1^{\,2}+y_2^{\,2}$。

三、计算题（每小题 12 分，共计 48 分）

11. 已知矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\-\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{2}&\mathbf{3}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&-\mathbf{1}\\-\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$，计算：（1）2A+B；（2）$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$；（3）$\mathbf{AB}^{\mathrm{T}}$。

解：（1）$2\mathrm{A}+\mathrm{B}=2\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0\\1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-2&0\\4&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0\\1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4\\-1&-1\\3&7\end{pmatrix}$. （**4分**）

（2）$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\2&3\end{pmatrix}^{T}\begin{pmatrix}-2&0\\1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&3\\-7&3\end{pmatrix}$； （**4分**）

（3）$\mathrm{AB}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\1&-1\\-1&1\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\2&-1&1\\-4&-1&1\end{pmatrix}$. （4 分）

12. 求向量组$\boldsymbol{\alpha_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha_2}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-6\\6\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha_3}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\-9\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha_4}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\7\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha_5}=\begin{pmatrix}4\\2\\4\\9\end{pmatrix}$的秩和一个极大线性无关组，并把其余向量用该极大线性无关组线性表示。

解：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1/3&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\stackrel{\text{def}}{=}\mathrm{B}$$ （4 分）

所以，向量组的秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是一个极大线性无关组， （2 分）

$$\mathrm{B}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ （4 分）

其余向量 $\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$；$\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$. （2 分）

注意：秩唯一，但极大无关组不唯一，故表出方式也会有相应调整

13. 求方程组$\begin{cases}-x_1+x_2\quad+x_4=2\\x_1-x_2-2x_3+x_4=4\\-x_2+2x_3-x_4=1\\-x_1+2x_2-2x_3+2x_4=1\end{cases}$ 的通解。

解：

$$(A,b)=\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\1&-1&-2&1&4\\0&-1&2&-1&1\\-1&2&-2&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}$$ （2分）

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&-2&1&-1\\0&0&-2&2&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&-9\\0&1&0&-1&-7\\0&0&1&-1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ （6分）

因$\mathrm{R(A)}=\mathrm{R(A,b)}=3<n=4$，故原方程组有无穷多解。

原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9\\-7\\-3\\0\end{pmatrix},c\in R.$$ （4分）

注意：非齐次的特解不唯一！

14. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&-1&4\\-1&1&-1\\4&-1&-2\end{pmatrix}$，二次型 $f=x^TAx$，

（1）求 A 的特征值与特征向量;

（2）求正交变换 $x=Qy$，将二次型 $f=x^TAx$ 化为标准型，并写出 f 的标准型.

解：（1）特征值与特征向量计算:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda&-1&4\\-1&1-\lambda&-1\\4&-1&-2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-3)(\lambda+6)=0$$

矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-6$，$\lambda_3=0$,. （**5 分**）

对 $\lambda_1=3$，解 $(A-3E)x=0$ 得其基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，对应的特征向量为 $c\xi_1,c\neq0$;

对 $\lambda_2=-6$，解 $(A+6E)x=0$ 得其基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，对应的特征向量为 $c\xi_2,c\neq0$;

对 $\lambda_3=0$，解 $(A-0E)x=0$ 得其基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，对应的特征向量为 $c\xi_3,c\neq0$;（**4 分**）

（2）单位化 ξ_1,ξ_2,ξ_3 得 3 个两两正交的特征向量

$$q_1=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad q_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad q_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix};$$

故所求正交阵 $Q=(q_1,q_2,q_3)$，令 $x=Qy$，则二次型的标准型为 $f=3{y_1}^2-6{y_2}^2$。 （**3 分**）

注意：正交阵各列顺序可换，但需注意二次型标准型脚标会做相应变换！

四、计算证明题（每小题 6 分）

15. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$线性无关，

（1）计算$(\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3})\begin{pmatrix}1&4\\2&0\\3&5\end{pmatrix}$；（2）证明向量组$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3}$线性无关。

解：（1）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&4\\2&0\\3&5\end{pmatrix}=(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3\,,\;4\alpha_1+5\alpha_3)$. （2 分）

（2）证明:

（法 1） 记$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$，又设

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$$

整理得

$$(x_1+x_2+x_3)\alpha_1+2(x_2+x_3)\alpha_2+3x_3\alpha_3=0$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关可知

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\2(x_2+x_3)=0\\3x_3=0\end{cases}$$

解得 $x_1=x_2=x_3=0$。

从而β_1,β_2,β_3线性无关，即 $\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 线性无关。 （4 分）

（法 2）

$$(\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$$

记$T=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，$|T|=6\neq0$，故 T 可逆。

又因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以

$\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 线性无关。 （4 分）

注意：也可以用初等列变换，$(\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)\sim(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$**此处就不给从详细步骤！**

16. 已知 A 是 3 阶方阵，A 的第一行元素分别为 1,1，-1，A^*是 A 的伴随矩阵，A^*的第一列元素分别为 1,1,2。

（1）求$|A|$；　　（2）证明 A^*的秩$R(A^*)=1$。

解： 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$，依题意有

$$a_{11}=1, a_{12}=1, a_{13}=-1,\ A_{11}=1,\ A_{12}=1, A_{13}=2。$$

（1） 由行列式的展开定理得

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=0.$$ （3 分）

（2） 由（1）知 $|A|=0$，故$R(A)<3$；

又因为 $A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，所以 A 中至少有一个二阶子式不为 0，得$R(A)\geq 2$；

所以 $R(A)=2$。

由公式 $R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n \\ 1, & R(A)=n-1 \\ 0, & R(A)<n-1 \end{cases}$ 知，$R(A^*)=1$。 （3 分）

注意：第二小问方法很多，此处只列出一种，阅卷老师请注意甄别！