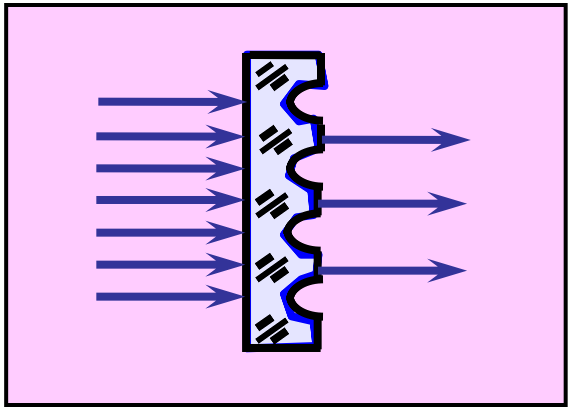
▲三、光栅夫琅和费衍射

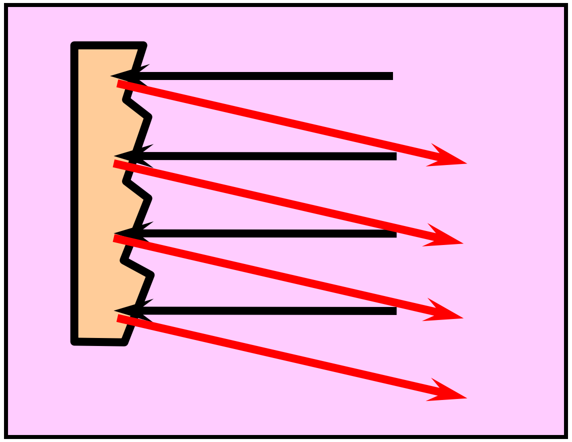
光栅:有大量等宽、等间距平行狭缝(或反射面)的光学元件。

1.光栅种类

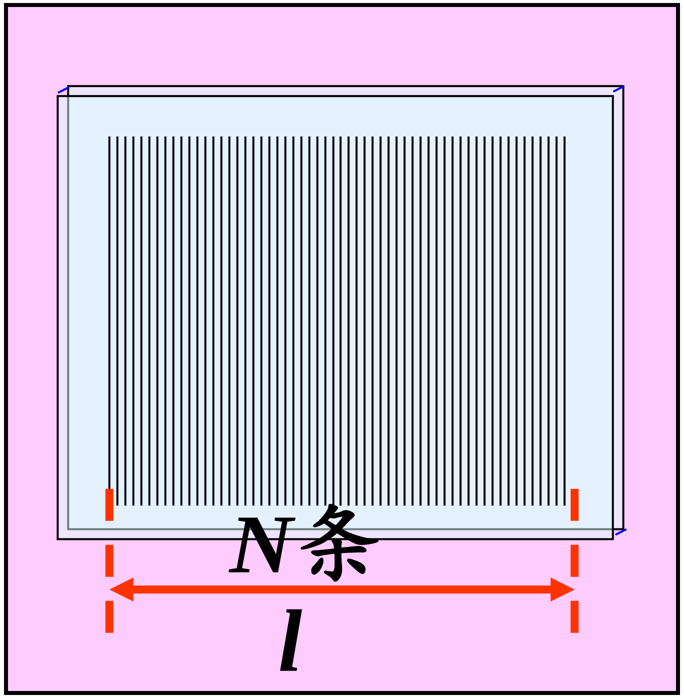
(1)透射光栅(衍射光栅):利用透射光衍射的光栅。

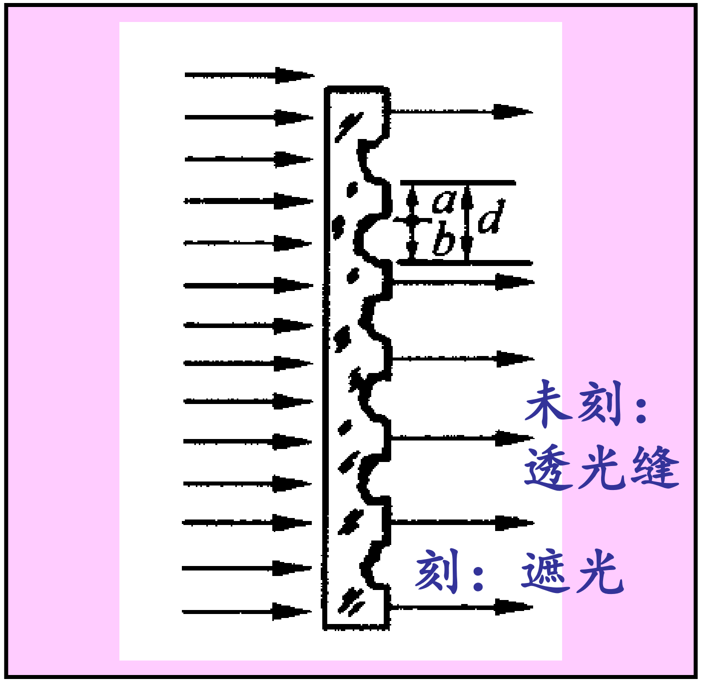
(2)反射光栅(闪耀光栅):利用反射光衍射的光栅。





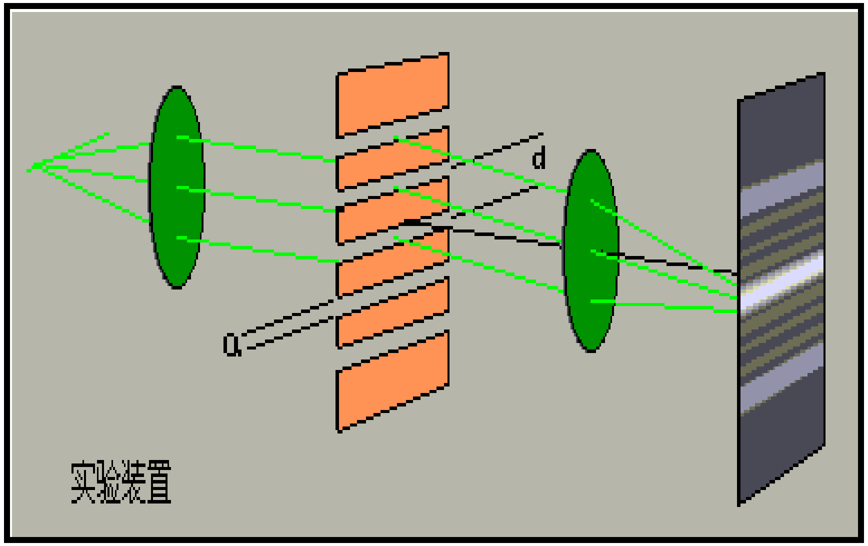
在玻璃片上刻划出一系列平行等距的划痕,刻过的地方不透光,未刻地方透光。

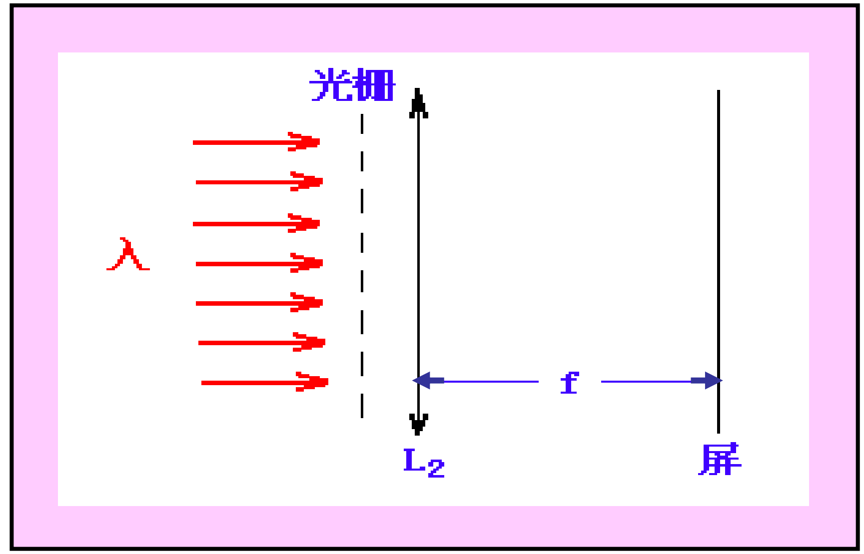




光栅常数：$\boxed{d = a + b = \dfrac{l}{N}}$ $(10^{-4} \sim 10^{-3}\,\mathrm{cm})$

光栅衍射装置：





学习思路：

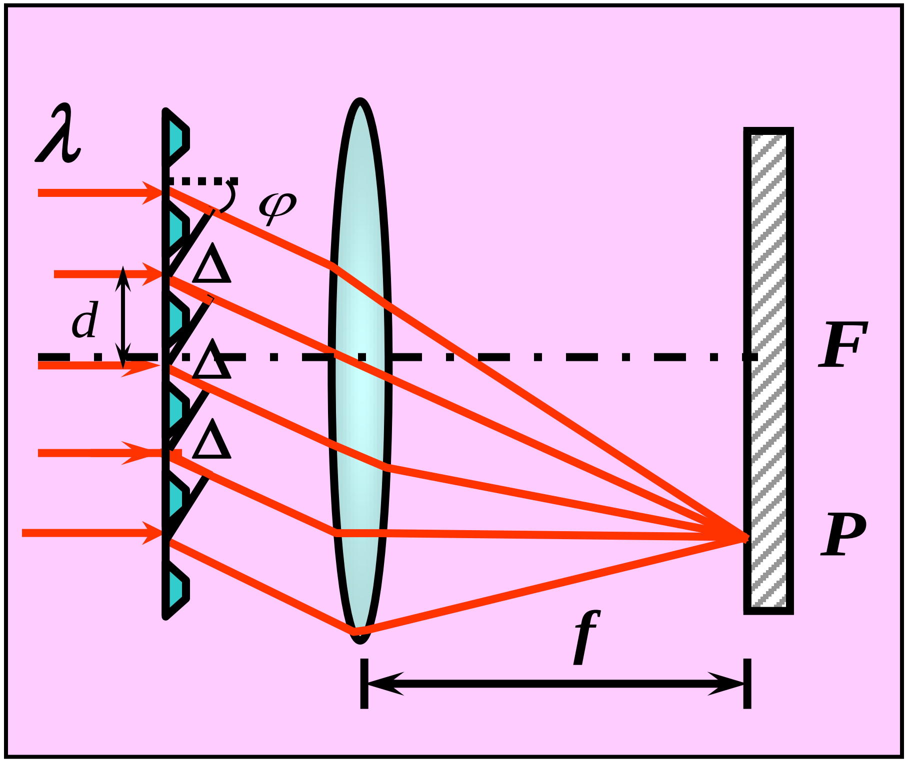
(1) 先不计缝宽：将每缝光强各集中于一个线光源，讨论N个几何线光源的干涉。

(2) 计及缝宽：加上N个单缝衍射的影响。

2.*N* 个几何线光源的干涉

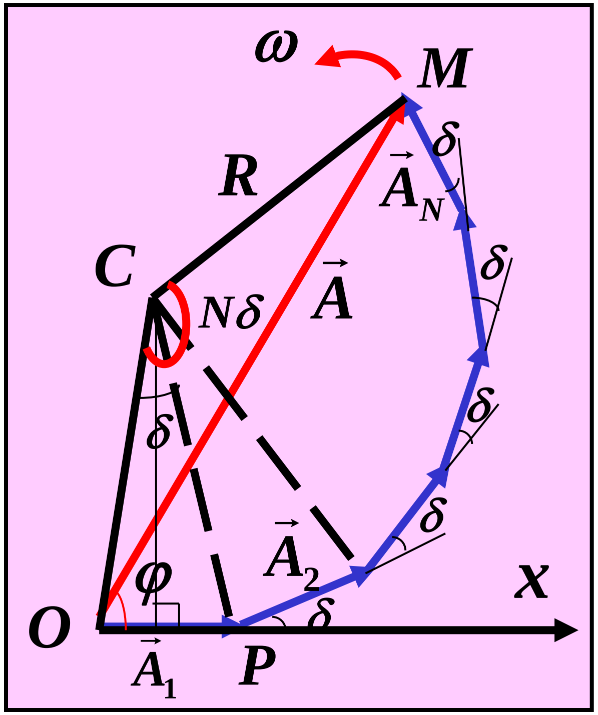
(1)光强分布

设光栅有*N*个缝，光栅常数为d=a+b,衍射角为φ:



相邻光线光程差:$\Delta = d\sin\varphi$

相邻光线相位差： $\delta = \dfrac{2\pi\Delta}{\lambda} = \dfrac{2\pi d\sin\varphi}{\lambda}$



采用P₁₇例1的方法,即:利用多边形法则进行N个大小相等，两两依次相差为δ的光振动的叠加，得P点合振幅：

$$A = A_1 \cdot \frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

其中:A_1为每条缝发出的光波的振幅

令 $\beta = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi d \sin\varphi}{\lambda}$ 则：$A = A_1 \cdot \frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$

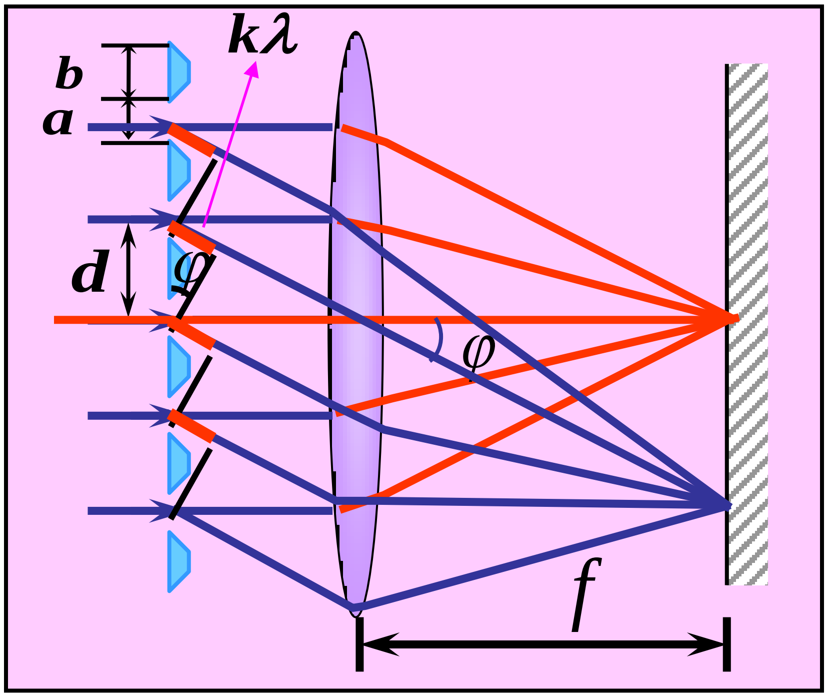
光强分布：$I = I_1\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$

N缝干涉因子

其中:$I_1 = A_1^2$为每条缝单独存在时在P点的光强

（2）条纹特点（半定量讨论）

①明纹中心（主明纹、主极大）条件



主明纹、
主极大

光栅公式：

$$\boxed{\Delta = d\sin\varphi = (a+b)\sin\varphi = k\lambda}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

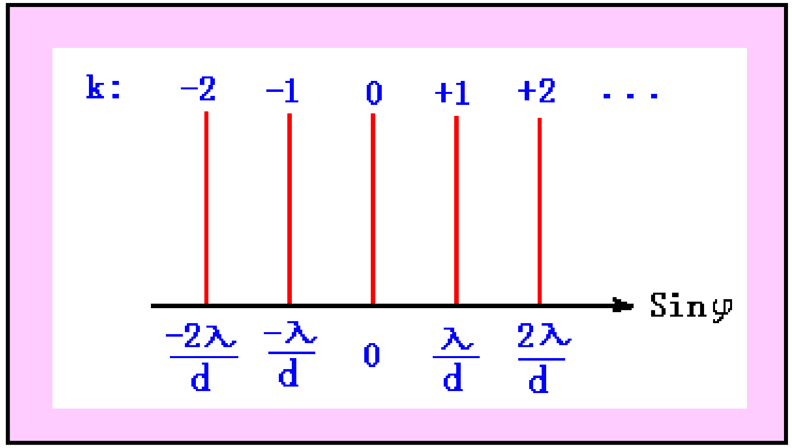
光强：$I = N^2 I_1$

光栅公式：$\boxed{\Delta = d\sin\varphi = (a+b)\sin\varphi = k\lambda}$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

主明纹角位置：

$$\sin\varphi = k\frac{\lambda}{d}$$



亮度：$I = N^2 I_1$

$$\because |\sin\varphi| < 1 \quad \therefore |k| < \frac{d}{\lambda}$$

主极大的最高级次 $k_m = [\frac{d}{\lambda}]_{进整} - 1$

能观察到的谱线条数为：$2k_m + 1 = 2[\frac{d}{\lambda}]_{进整} - 1$

例：$\frac{d}{\lambda} = 4 \cdot 2, k_m = 4, \quad 2\times 4 + 1 = 9;$ $\quad \frac{d}{\lambda} = 4, k_m = 3, \quad 2\times 3 + 1 = 7$

② 暗纹条件

$$N\cdot d\sin\varphi = k'\lambda$$

光强I=0　暗纹中心

k'为不等于Nk的整数

位置： $\sin\varphi = \dfrac{k'}{N}\cdot\dfrac{\lambda}{d} \quad (k' \neq Nk)$

注意：k'为不等于Nk的整数,否则为主极大,不是暗纹。

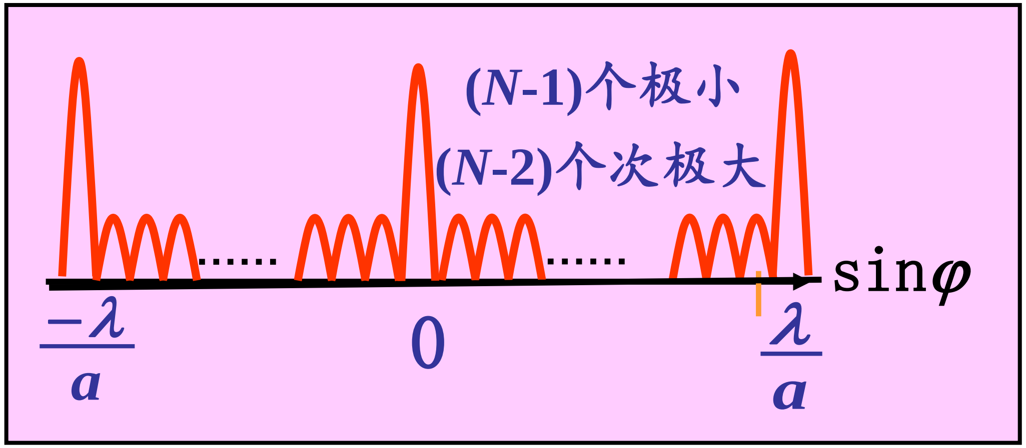
k'取值：

k	0	1	2
k'	$\underline{\neq 0}$, $\underbrace{1,\ 2,\cdots N-1,}$	$\underline{\neq N}$, $\underbrace{N+1, N+2,\cdots 2N-1,}$	$\underline{\neq 2N}$, $2N+1,\cdots$

暗纹数目：相邻两条主明纹间有N-1条暗纹

③ 次极大条件：

相邻两条主明纹间有 N-1条暗纹和 N-2个次极大。



④ 主明纹角宽度

k: 0　　1　　2

k': $\neq 0,\ 1,\ 2,\cdots N-1,\ \underline{\neq N},\ N+1,\ N+2,\cdots 2N-1,\ \underline{\neq 2N},\ 2N+1,\cdots$

k级主明纹的角宽度：kN-1和kN+1两条暗纹角位置之差，对应 $\Delta k' = 2$ 。

由暗纹条件: $\sin\varphi = \dfrac{k'}{N} \cdot \dfrac{\lambda}{d}$

对于低级次条纹:

$$\varphi_{kN+1} \approx \sin\varphi_{kN+1} = \frac{kN+1}{N} \cdot \frac{\lambda}{d} \qquad \varphi_{kN-1} \approx \sin\varphi_{kN-1} = \frac{kN-1}{N} \cdot \frac{\lambda}{d}$$

主明纹角宽度: $\Delta\varphi = \varphi_{kN+1} - \varphi_{kN-1} \approx \dfrac{2\lambda}{Nd}$

$N\uparrow$,主明纹越细窄明亮。

$\lambda\uparrow$, $\Delta\varphi\uparrow$, 白光照射, 出现彩色光谱, 高级次重叠。

(3)光栅分辨本领

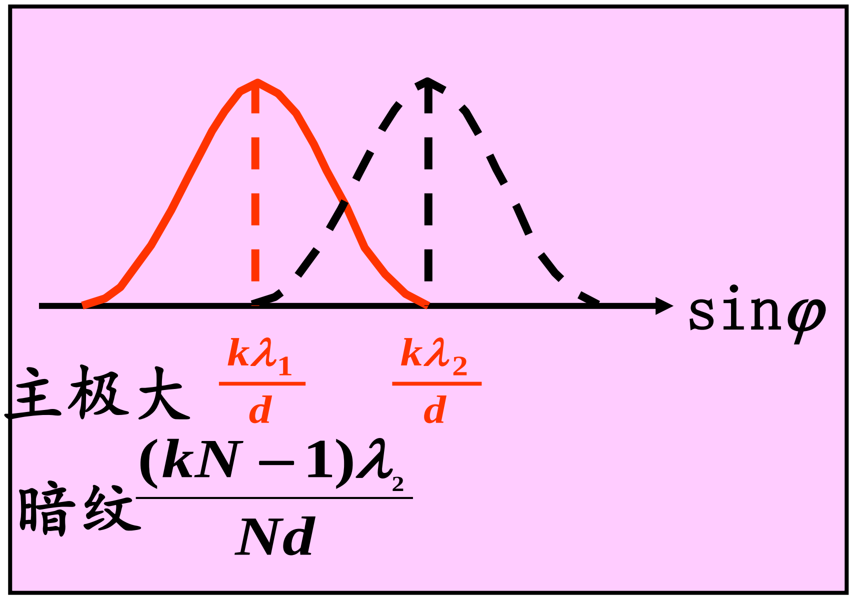
由瑞利判据：λ_1和λ_2光第k级主明纹恰能分辨条件：

λ_1的主极大在λ_2主极大相邻最近的暗纹$(kN\pm1$级$)$处

$$\frac{(kN-1)}{Nd}\cdot\lambda_2=\frac{k\lambda_1}{d}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{1}{kN}$$

分辨本领：$R=\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}=kN$



R的意义：表征光栅能够分辨靠得最近的两个波长产生的k 级明纹的能力。

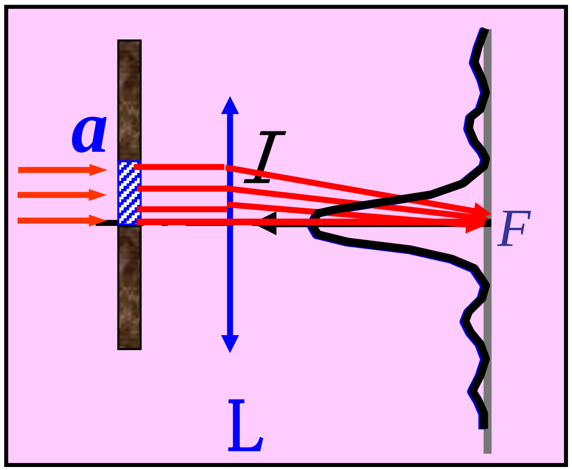
$R\propto k$，$R\propto N$，与d无关。

3.N 个单缝衍射的影响

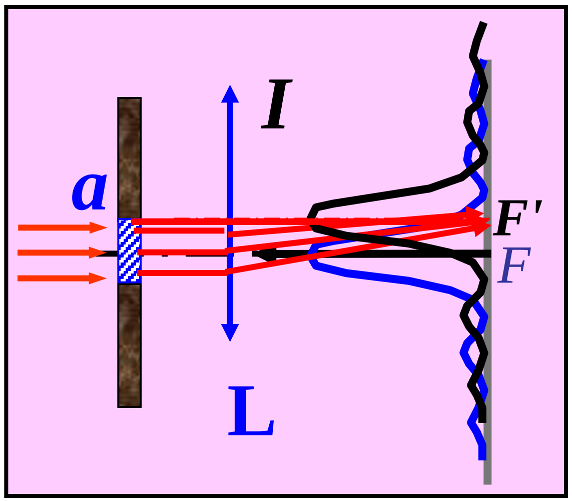
思考： 考虑缝宽后会带来什么影响?

补充：

缝微移动，透镜不动



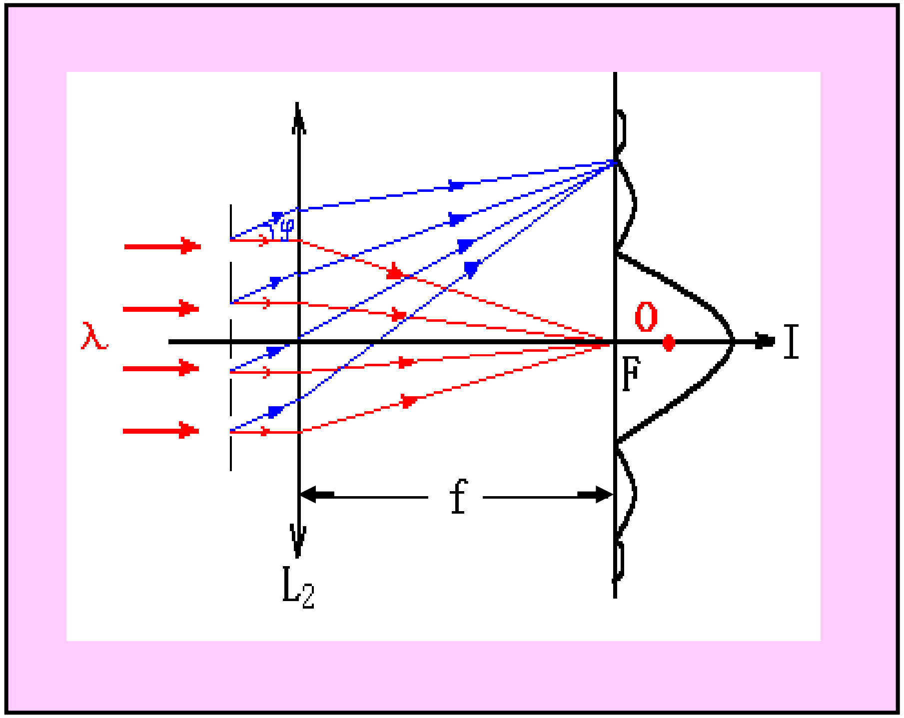
缝不动，透镜向上微移动



中央明纹位置仍在F处　　中央明纹位置移动到F'处

3.*N* 个单缝衍射的影响

思考： 考虑缝宽后会带来什么影响？



每条缝的单缝衍射

条纹彼此重合

影响：

*N*个单缝衍射的影响彼此一致。

亮度调制、主明纹缺级。

(1)亮度调制

N缝干射光强：$I = I_1 (\frac{\sin N\beta}{\sin\beta})^2$

单缝衍射光强：$I_1 = I_0 (\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2$

其中：I_0为中央明纹光强。

光栅衍射光强分布 $I = I_0 \underbrace{(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2}_{\text{单缝衍射因子}} \cdot \underbrace{(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta})^2}_{\text{多}(N)\text{缝干涉因子}}$

上式中：$\alpha = \frac{\pi a \sin\varphi}{\lambda}$ $\beta = \frac{\pi d \sin\varphi}{\lambda}$

a： 缝宽 d：光栅常数 $a+b$ φ：衍射角

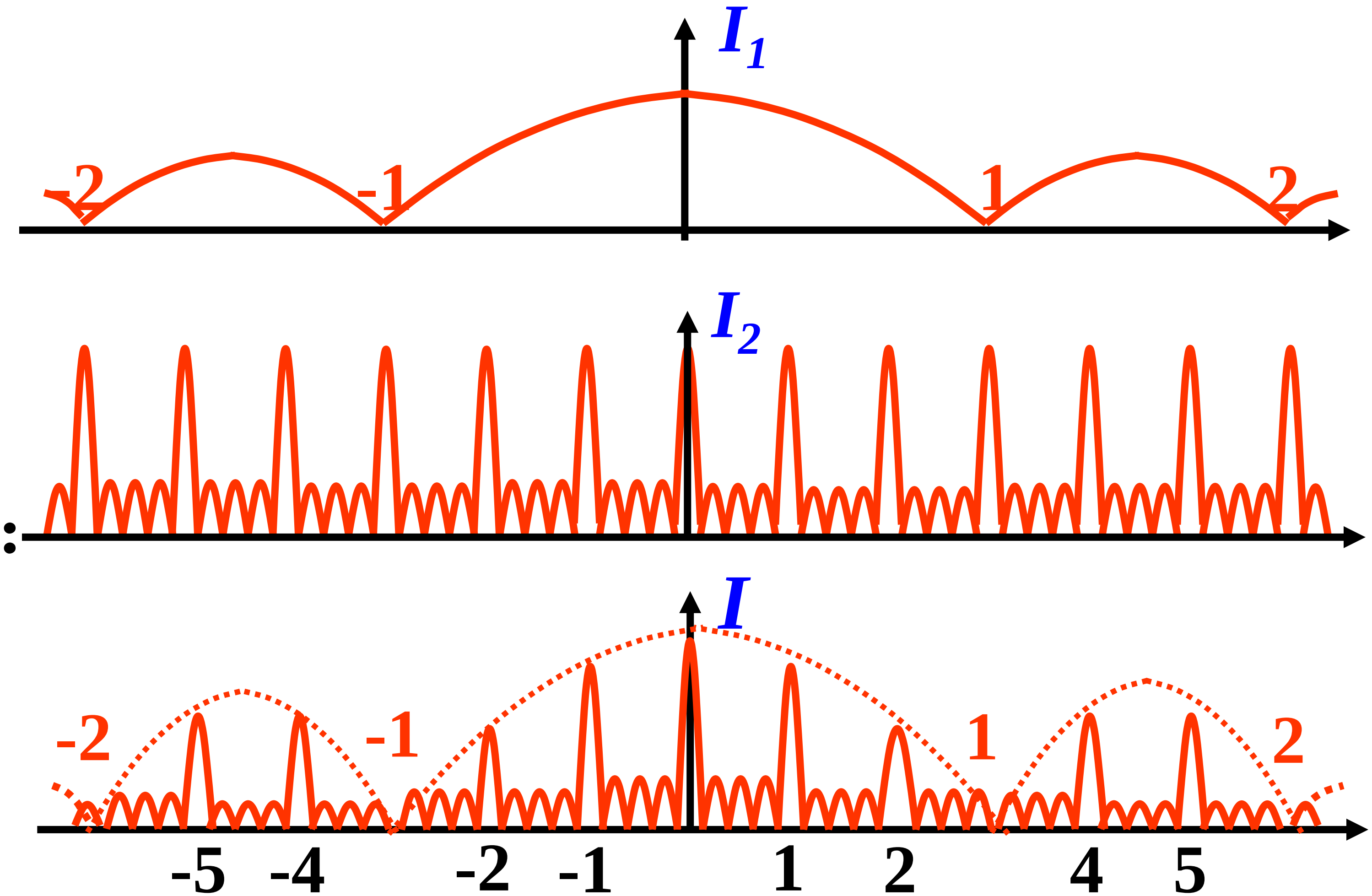
$$\therefore I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

I_1 I_2

只考虑单缝衍射:

只考虑多光束干涉:

干涉衍射均考虑:



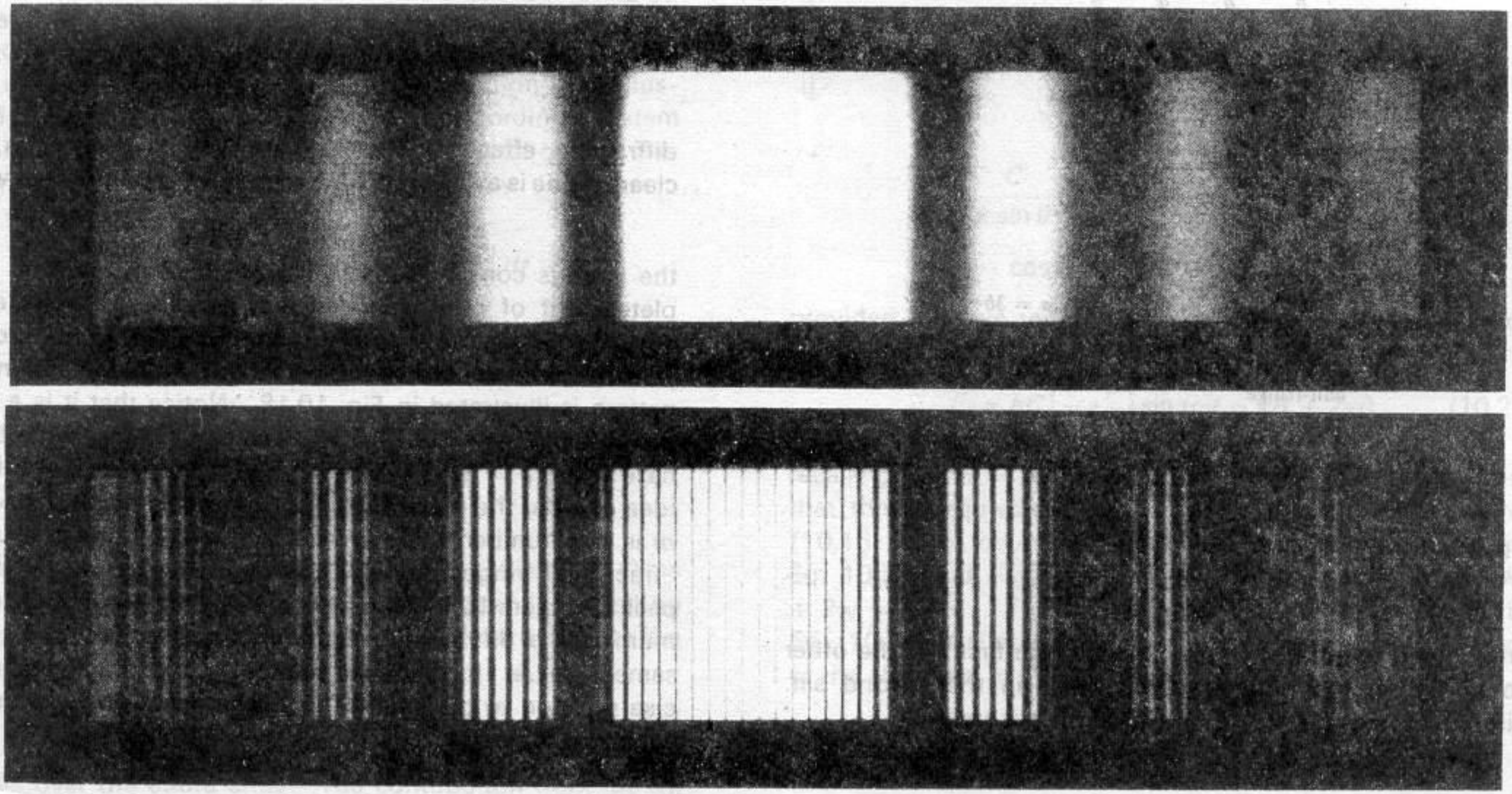


Fig. Single- and double-slit Fraunhofer patterns. The faint cross hatching arises entirely in the printing process. [Photos courtesy M. Cagnet, M. Francon, and J. C. Thrierr: *Atlas optischer Erscheinungen*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1962.]

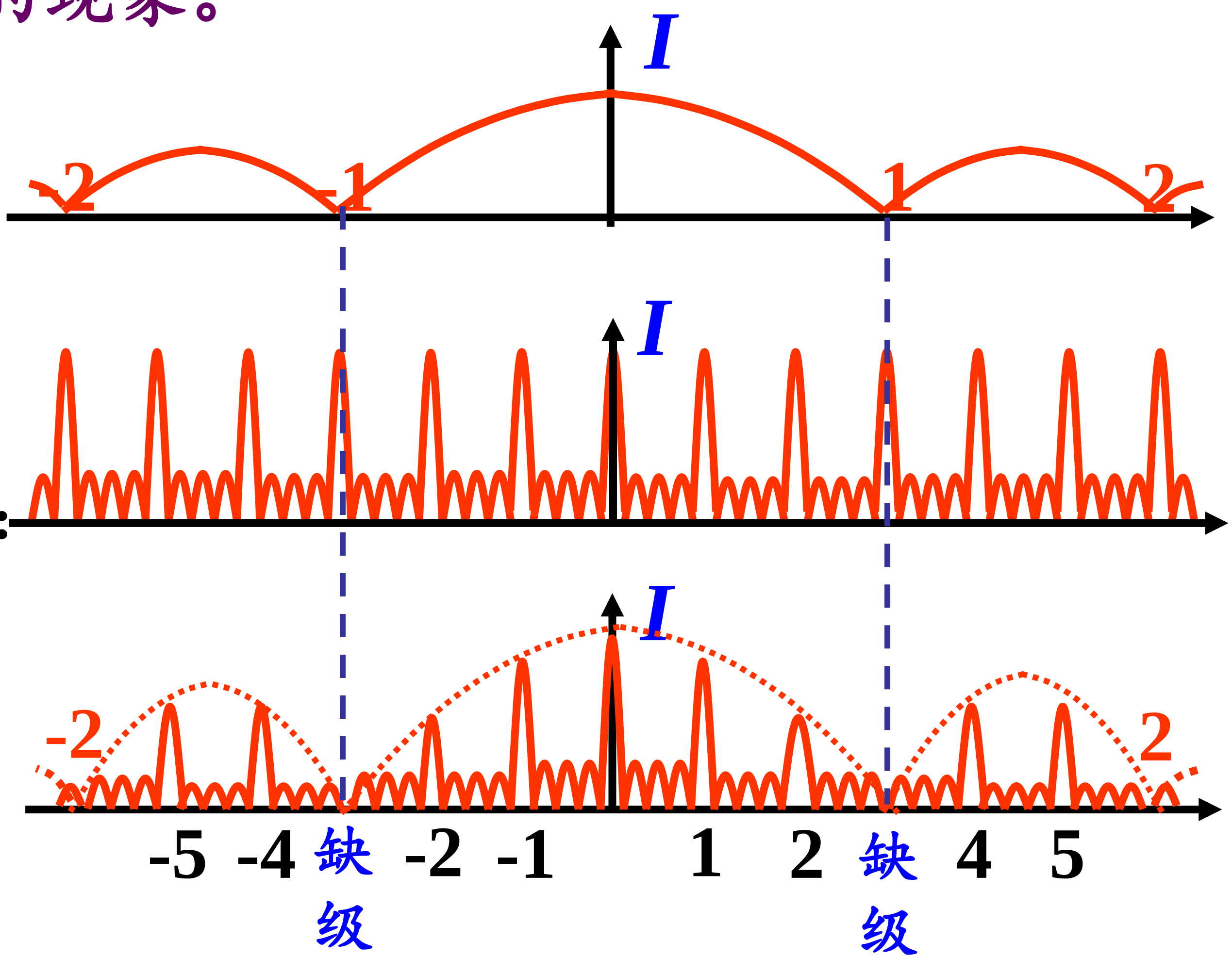
(2)主极大可能出现缺级

缺级：考虑单缝衍射后，N缝干涉的某些极大消失的现象。

只考虑单缝衍射：

只考虑多光束干涉：

干涉衍射均考虑：



缺级条件：

光栅主明纹：$d\sin\varphi=(a+b)\sin\varphi=k\lambda$ $(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$

单缝暗纹： $a\sin\varphi=k'\lambda$ $(k'=\pm1,\pm2\cdots)$

若$\sin\varphi$同时满足上面两式，则第k级主明纹消失。

即： $\dfrac{d}{a}=\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{k}{k'}$ （为整数比）

缺级的级次： $k=\dfrac{d}{a}\cdot k'$ $(k'=\pm1,\pm2\cdots)$

注意：k必须为整数，且$k\neq0$(0级主极大不可能缺级)

例： $d/a=2,\quad k=\pm2,\pm4,\cdots$ 缺级

$d/a=5/2,\ k=\pm5,\pm10,\cdots$

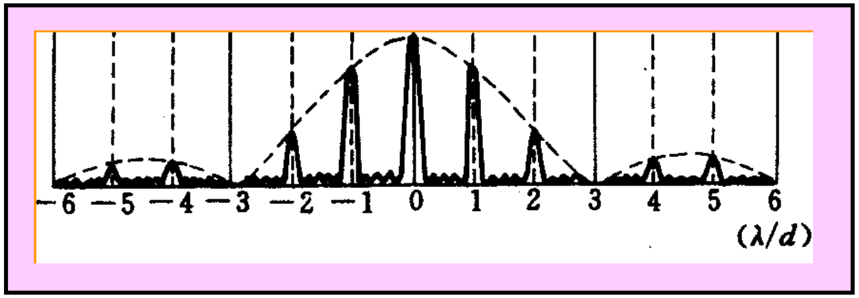
$$d/a = 2$$

干涉主极大：

光栅衍射：

缺级： $\pm 2, \quad \pm 4 \cdots$

(3)单缝衍射中央明纹区主极大条数



当$k'=\pm1$时，$\sin\varphi=\pm\dfrac{\lambda}{a}$

主明纹角位置：$\sin\varphi'=k\dfrac{\lambda}{d}$

要求：$|\sin\varphi'|<|\sin\varphi|$ $\quad\therefore |k|<\dfrac{d}{a}$

主极大的最高级次 $k_m=[\dfrac{d}{a}]_{进整}-1$

能观察到的谱线条数为：$2k_m+1=2[\dfrac{d}{a}]_{进整}-1$

例：$\dfrac{d}{a}=2.1, k_m=2$，主极大数目：$2\times2+1=5$

4. 总结：光栅衍射是N缝干涉和N个单缝衍射的总效果

光强分布
$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

式中：
$$\alpha = \frac{\pi a\sin\varphi}{\lambda} \qquad \beta = \frac{\pi d\sin\varphi}{\lambda}$$

I_0：每条缝衍射的中央明纹光强

(1) 细窄明亮的主明纹

位置：$d\sin\varphi = k\lambda \quad k = (0, \pm 1, \cdots)$ ——光栅公式

缺级：$a\sin\varphi = k'\lambda$

$$k = \frac{d}{a}k' \qquad (k' = \pm 1, \pm 2\cdots)$$

角宽度：$$\Delta\varphi = \frac{2\lambda}{Nd\cos\varphi}$$

屏上观察到的主明纹的最高级次：$k_m = [\frac{d}{\lambda}]_{进整} - 1$

不考虑缺级时主明纹条数：$2k_m + 1$

考虑缺级时剩下的主明纹级数：$2k_m + 1$ - 缺级数目

单缝衍射中央明纹区主明纹的最高级次：$k_m = [\frac{d}{a}]_{进整} - 1$

单缝衍射中央明纹区主明纹条数：$2k_m + 1$

(2) 相邻主明纹间较宽暗区

N-1条暗纹，N-2条次极大。

(3) 白光入射中央零级主明纹为白色，其余各级为

彩色光谱，高级次重叠。

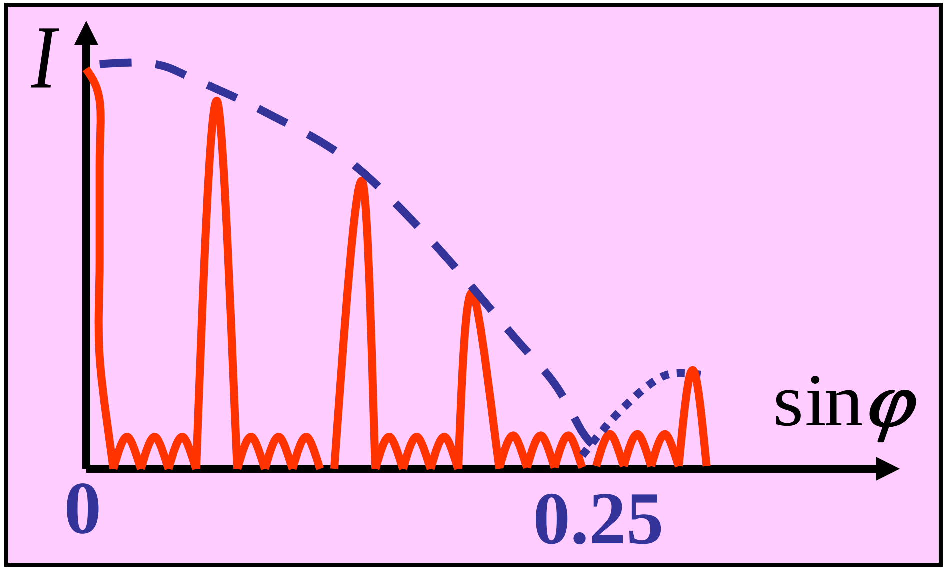
(4) 分辨本领： $R = Nk(k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$

5.例题

例题1:

入射光 $\lambda = 5000\,\mathring{\mathrm{A}}$，由图中衍射光强分布确定

(1) 缝数 $N = ?$ (2) 缝宽 $a = ?$ (3) 光栅常数 $d = a+b = ?$



解：（1）$N = 5$

（2） $a\sin\varphi = k'\lambda$

又：$k' = 1$

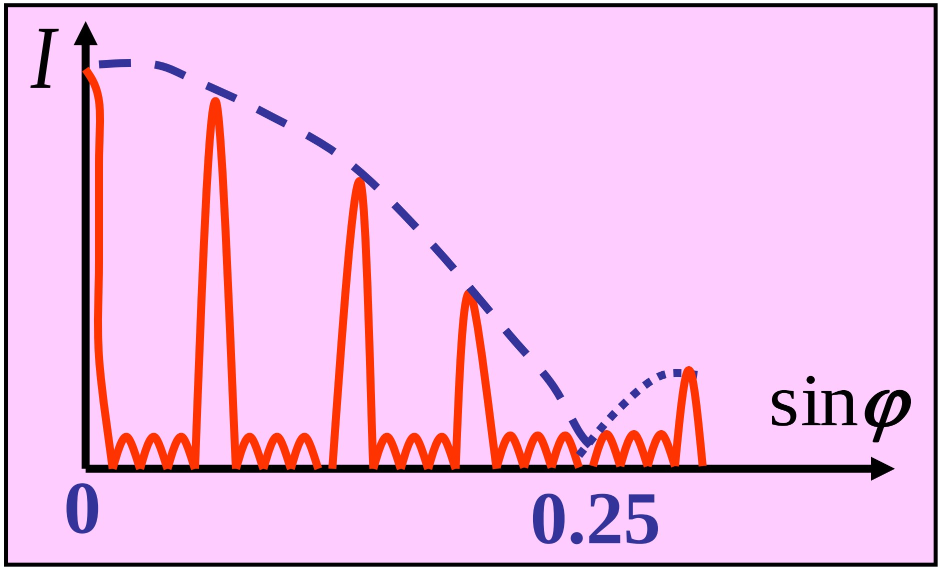
$\sin\varphi = 0.25$

$$a = \frac{5000}{0.25} = 2\times10^4\ \mathring{\mathrm{A}}$$

（3） $d\sin\varphi = k\lambda$

又: $k = 4$

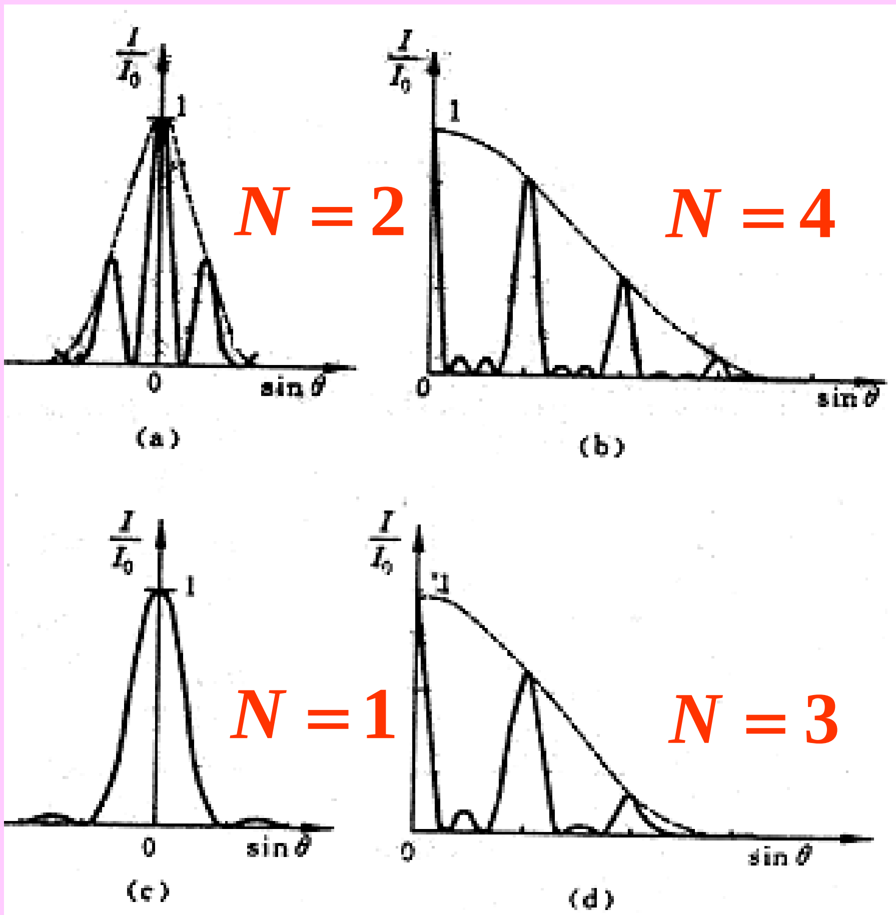
$\sin\varphi = 0\cdot 25$



$$d = \frac{4\times 5000}{0\cdot 25} = 8\times 10^4 \overset{0}{\mathrm{A}}$$

或由缺级： $4 = \frac{d}{a}\times 1$ $d = 4a = 8\times 10^4 \overset{0}{\mathrm{A}}$

练习：入射光波长相同，问(1)：哪个图对应的a大？(2)各图的d/a =?有无缺级？(3)各图N＝？



(1):图c中a最大。

(2):

（a） $\dfrac{d}{a}=2$, ±2缺级

（b） $\dfrac{d}{a}=4$, ±4缺级

（c） $\dfrac{d}{a}=1$, 即单缝衍射

（d） $\dfrac{d}{a}=3$, ±3缺级

例题2: 一平面衍射光栅，每厘米刻1000条，用可见光垂直入射，缝后透镜焦距 $f=100$ cm。

(1). 光栅衍射第一级完整可见光谱所占宽度。

(2). 证明第二、三级光谱重叠。

(3). 用红光 $\lambda = 7000\,\mathring{A}$ 入射，$b = 3a$，最多看到主明纹条数。

解: (1). $d = a + b = 10^{-5}\,\text{m}$ $\quad d\sin\varphi = k\lambda$

$$k=1:\quad \lambda_1 = 4\times10^{-7}\,\text{m} \qquad \sin\varphi_1 = \frac{\lambda_1}{d} = 0.04$$

$$\lambda_2 = 7\times10^{-7}\,\text{m} \qquad \sin\varphi_2 = \frac{\lambda_2}{d} = 0.07$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = f(\text{tg}\varphi_2 - \text{tg}\varphi_1) \approx f(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) = 3(\text{cm})$$

(2). 红光 $k=2$ $\sin\varphi=\frac{2\lambda_2}{d}=0\cdot 14$

紫光 $k=3$ $\sin\varphi'=\frac{3\lambda_1}{d}=0\cdot 12<0\cdot 14$

$\therefore$ 二、三级光谱重迭

(3). $\frac{d}{\lambda}=14.2$ $k_m=[\frac{d}{\lambda}]_{进整}-1=14$ $2k_m+1=29$

为:-14,-13,…0,…13,14

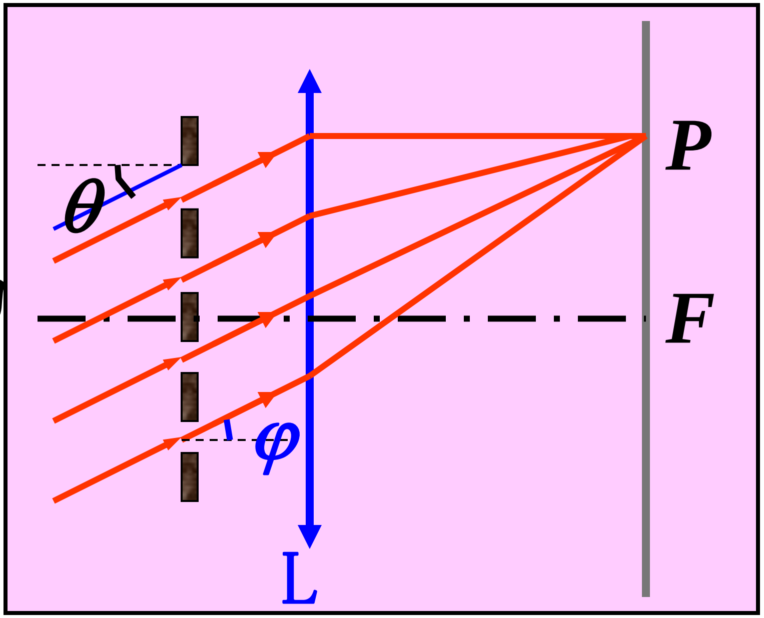
缺级: $d=a+b=4a$ $k=4k'$ ($k'=\pm1,\pm2,\pm3$)

第 12、8、4、-4、-8、-12 级，共6条主明纹缺级。

最多可见主明纹: $29-6=23$条

例3:(与P_{117}例5类似):

已知:波长λ=5000Å的光以θ=30°照射到光栅常数d=2.5a=2μm的光栅上。



求:(1) 中央主极大位置。

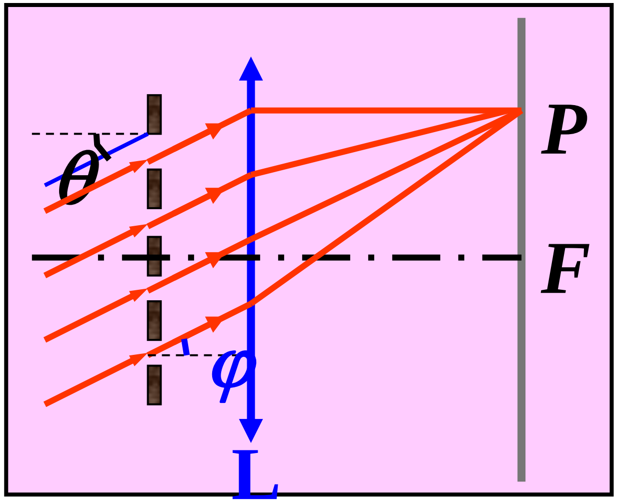
(2) 屏中心 F 处条纹级次。

(3) 屏上可见到哪几级主明纹?

解: 由 $\Delta = d\sin\varphi - d\sin\theta = k\lambda$

(1) 中央主极大 $k = 0$

$$\sin\varphi = \sin\theta \qquad \varphi = \theta = 30^o$$



$$\Delta = d\sin\varphi - d\sin\theta = k\lambda$$

(2) 屏中心 F 处 $\varphi = 0$

$$-d\sin\theta = k\lambda$$

$$k = \frac{-d\sin\theta}{\lambda} = \frac{-2\times10^{-6}\times0.5}{5000\times10^{-10}} = -2$$

(3) F上方取$\varphi < \frac{\pi}{2}$得 $k < \frac{d(1-\sin\theta)}{\lambda} = 2$ $k_{max} = 1$

F下方取$\varphi > -\frac{\pi}{2}$得 $k > \frac{d(-1-\sin\theta)}{\lambda} = -6$ $k_{max} = -5$

$\therefore k$ 为:-5,-4,-3,-2,-1,0,+1

考虑缺级: $k = \frac{d}{a}k' = \frac{5}{2}k'\ (k' = \pm2,\pm4\cdots)$ k=-5级缺级

屏上级次: $-4,-3,-2,-1,0,+1$ 共6条主明纹

四、晶格衍射（X光衍射）

伦琴（1845—1923）

1895年11月8日德国物理学家伦琴在阴极射线实验中，偶然发现附近桌上的荧光屏上发出了光，伦琴用一张黑纸挡住管子，荧光仍存在，而用一片金属板就挡住了，他称这种射线为X射线。其特点为：不带电，穿透本领强。

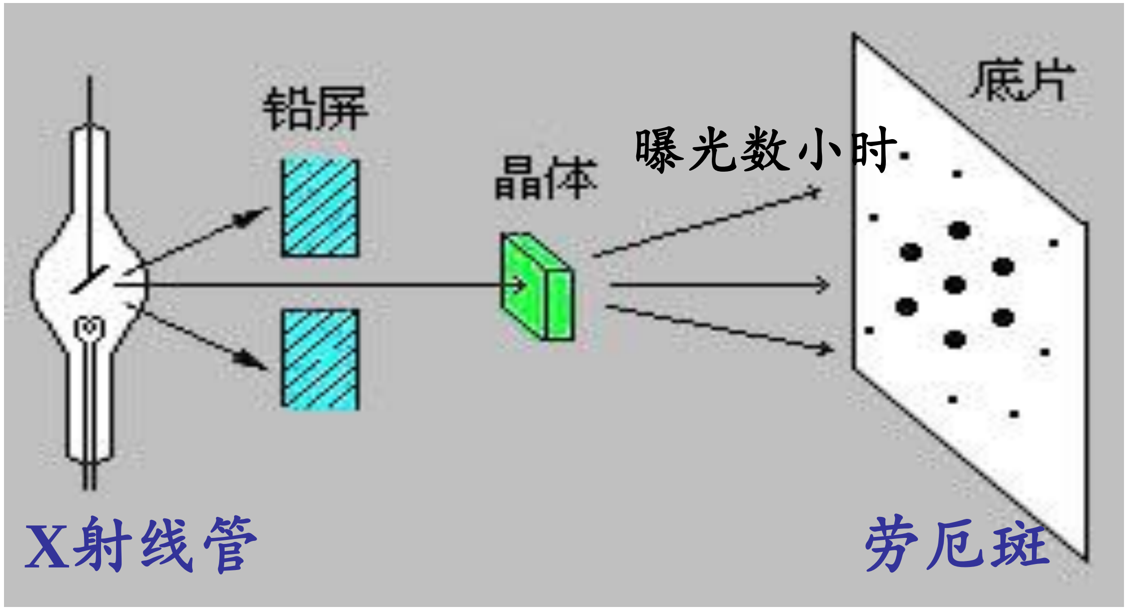
1895年12月22日：伦琴拍摄历史上第一张X射线照片----他夫人手的照片（现在保存在慕尼黑德国国家博物馆）。

1895年12月28日：发表《关于一种新射线》，引起轰动，影响深远。

由于X射线的发现具有重大的理论意义和实用价值，伦琴于1901年获得首届诺贝尔物理学奖。

X 射线的本质是什么？——科学史上的一场激烈论争。

1912年，德国慕尼黑大学物理学讲师劳厄（1879-1960）完成判决性实验：用晶体作天然光栅进行X射线衍射实验



晶体：三维结构空间立体光栅

实验结果表明：

X 射线本质：原子内层电子跃迁或加速器中电子运动产生的电磁波。

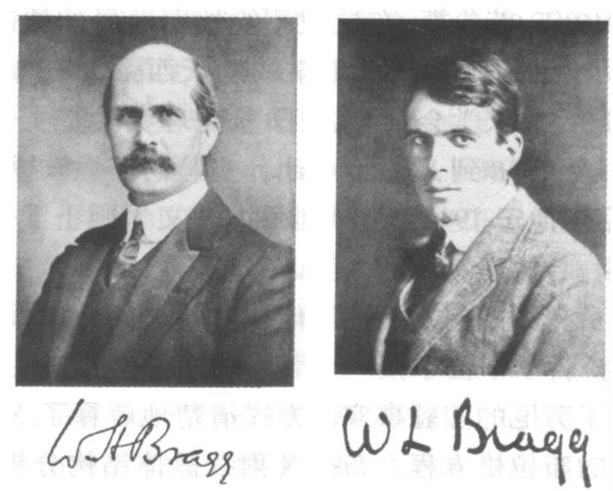
晶体点阵：其尺度可与X射线波长相比拟(λ:$4\times10^{-2}\sim100$nm)

实验结果一箭双雕：既证明了X射线的波动性，又肯定了晶体空间点阵理论，荣获1914年诺贝尔物理学奖。

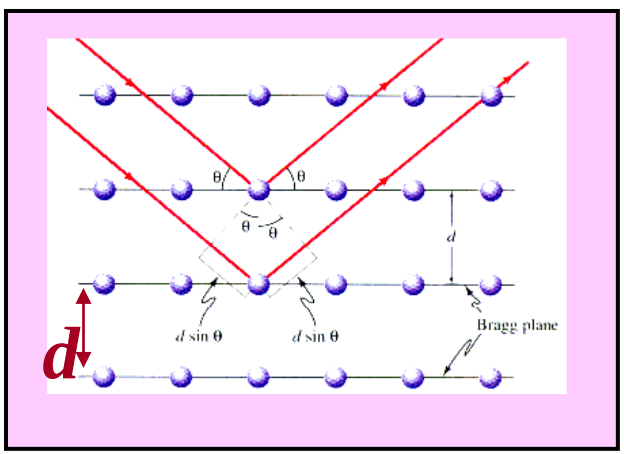
劳厄实验在理论上怎样解释？

英国物理学家亨利.布拉格(1862—1942)，劳伦斯.布拉格(1890—1971)(父子)

获1915年诺贝尔物理奖。



晶体的某一个断面～一系列平行原子层



干涉加强条件：

$$\boxed{2d\sin\theta = k\lambda}$$ ——布拉格公式

其中:d为晶格常数，θ为掠射角

入射X射线对晶体内不同取向晶面族的d，θ不同，衍射后形成劳厄斑。