一、　　选择题

CBCAD

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

6. a=___9__;　7. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;　8._4_;　9._3/4_;　10._-2<t<1_.

三、计算题（4 小题，共 48 分）

（12 分）11. 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$,.

解：将所有的列加到第一列，有

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2n-1 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2n-1 & 2 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2n-1 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

用所有的行减去第一行，有

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \ 2n-1$$

（12 分）12. 求向量组 $A: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 的秩和一个极

大线性无关组，并将其它向量用极大线性无关组线性表示.

解：由

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\1&1&3&3\\1&3&2&-1\\1&2&2&1\\2&3&5&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得，$R(A)=3$，一个极大线性无关组为：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；

剩余向量$\alpha_4=5\alpha_1-2\alpha_2+0\alpha_3$。

（12 分）**13. 已知**$x=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\\-1\end{pmatrix}$**是非齐次线性方程组**$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+bx_4=-1\\3x_1+2x_2+4x_3-2x_4=0\\ax_1+x_2+3x_3-3x_4=1\end{cases}$**的**

解，（1）求参数a,b**；（2）求方程组的通解.**

解：(1) 将$x=\left(-2\quad 2\quad 0\quad -1\right)^T$**带进原可得方程可得**$a=2$，$b=1$

（2）对方程组的增广矩阵施行初等行变换，得

$$\left(A,b\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\3&2&4&-2&0\\2&1&3&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可得方程组的通解为

$$x=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix},c_1,c_2\in R.$$

（12 分）14. 已知$\alpha=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$是二次型

$$f=xAx^T=ax_1^2+4x_2^2+bx_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$$

的矩阵 A 的特征向量。

（1）求a，b的值；

（2）求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化该二次型为标准形，并写出所用正交变换及标准形.

解：（1）二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & b \end{pmatrix}$，

设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 是矩阵 A 的属于特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 的特征向量，则

$$\begin{pmatrix} a & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

解此方程组得 $a=1, b=4, \lambda=9$ 。

（2）根据（1）的结果，可得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$，其特征多项式

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-4 & a \\ -2 & 4 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)$$

可知矩阵 A 的特征值为：0，0，9.

对 $\lambda=0$，解 $0E-A\ \ x=0$ 得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

因为 α_1 ， α_2 不正交，故需 Schmidt 正交化，即

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

把 β_1, β_2, α 单位化，得

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \gamma_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

故所求的正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{P}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ 。

在此正交变换下，原二次型的标准形为：$f=xAx^T=y^T\Lambda y=9y_3^2$.

四、证明题

（6 分）15. 已知 A 是$\boldsymbol{m\times n}$矩阵，其 n 个列向量是齐次线性方程组$\boldsymbol{Cx=0}$的基础解系，B 是 n 阶可逆矩阵，证明 AB 的列向量也是齐次线性方程组$\boldsymbol{Cx=0}$的基础解系.

证明：因为 A 的列向量是$\boldsymbol{Cx=0}$的解，即 CA=0，那么 CAB=0，可见 AB 的列向量也是$\boldsymbol{Cx=0}$的解。

由于 A 的列向量组是$\boldsymbol{Cx=0}$的基础解系，所以 A 的列向量组线性无关，于是

$$\boldsymbol{n=R(A)=m-R(C)}.$$

又因 B 是可逆矩阵，故$\boldsymbol{R(AB)=R(A)=n=m-R(C)}$，所以 AB 的列向量组线性无关，其向量个数正好是$\boldsymbol{m-R(C)}$，从而是方程组$\boldsymbol{Cx=0}$的基础解系.

（6 分）16. 设$\boldsymbol{A}$是 3 阶方阵，$\boldsymbol{R(A)=1}$，证明：存在常数$\boldsymbol{k}$，使得$\boldsymbol{A^2=kA}$.

证明：由于$\boldsymbol{R(A)=1}$，$\boldsymbol{A}$的所有二阶子式全为零，那么，A 的任何两行、任何两列都成比例，故可设

$$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)}$$

那么

$$\boldsymbol{A^2=\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\right)\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\right)=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\left((b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right)(b_1,b_2,b_3)}$$

$$\boldsymbol{=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\right)}$$

令 $\boldsymbol{k=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$，则有 $\boldsymbol{A^2=kA}$.