第五章作业

1. 计算码长 n=5 的二元重复码的译码错误概率。假设无记忆二元对称信道中正确传递概率 ，错误传递概率 。此码能检测出多少错误？又能纠正多少错误？若 ，译码错误概率是多大？

2. 设一离散无记忆信道，其信道矩阵为

(1) 计算信道容量；

(2) 找出一个码长为 2 的重复码，其信息传输率为 （即 5 个码字）。如果按最大似然译码准则设计译码器，求译码器输出端的平均错误概率 （输入码字为等概率分布）；

3. 某系统(8,4)线性分组码，其后 4 位校验位 *vi* 与信息位 *ui* ,*i*=0，1，2，3 的关系如下

$$v_0 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$v_1 = u_0 + u_1 + u_2$$
$$v_2 = u_0 + u_1 + u_3$$
$$v_3 = u_0 + u_2 + u_3$$

求：(1)该码的生成矩阵和校验矩阵;(2)该码子的最小距离;(3)并且画出该编码器的硬件逻辑连接图。

4. 某系统 (7, 4) 线性分组码，生成矩阵为：

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 列出其标准阵列译码表
(2) 如果接收序列为 R=0010100, R=0111000, R=1110010 通过标准阵列译码表译码

1. 计算码长 n=5 的二元重复码的译码错误概率。假设无记忆二元对称信道中正确传递概率 $\overline{p}$，错误传递概率 $p=1-\overline{p}$。此码能检测出多少错误？又能纠正多少错误？若 $p=0.01$，译码错误概率是多大？

解： 码长 n=5 的二元重复码的码字是（00000，11111）。这码的最小距离 $d_{\min}=5$。

因为 $$d_{\min}=5=4+1$$

所以此码用于检测错误能检测出所有发生小于等于 4 位码元的随机错误。

又因为 $$d_{\min}=5=2\times2+1$$

所以此码用于纠正错误能纠正所有发生小于等于 2 位码元的随机错误。

可以根据最大似然译码准则的译码规则或择多译码的译码规则来计算这 n=5 的二元重复码的错误概率。这两种计算结果是一致的。所以，采用择多译码的译码规则来计算，得：

$$P_E=C_5^3P^3\bar{P}^2+C_5^4P^4\bar{P}+C_5^5P^5$$

$$=10P^3\bar{P}^2+5P^4\bar{P}+P^5$$

若 p=0.01,则 $P_E\approx9.8\times10^{-6}\approx1.0\times10^{-5}$

2. 设一离散无记忆信道，其信道矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0.5&0.5&0&0&0\\0&0.5&0.5&0&0\\0&0&0.5&0.5&0\\0&0&0&0.5&0.5\\0.5&0&0&0&0.5\end{bmatrix}$$

(1) 计算信道容量；

(2) 找出一个码长为 2 的重复码，其信息传输率为 $\frac{1}{2}\log5$（即 5 个码字）。如果按最大似然译码准则设计译码器，求译码器输出端的平均错误概率 P_E（输入码字为等概率分布）；

解：（1）根据信道矩阵 P，可知其是一对称信道，所以信道容量为：

$$
\begin{aligned}
C &= \log 5 - H(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,0) \\
&= \log 5 - \log 2 \\
&\approx 1.322 \text{比特/符号}
\end{aligned}
$$

（2）设信道的输入符号集 A={0，1，2，3，4}，输出符号集 B={0，1，2，3，4}，其传递信道矩阵为 P，任选码长为 2 的重复码：

C：$W_1=00$， $W_2=11$， $W_3=22$， $W_4=33$， $W_5=44$

因为输入码字等概率分布，这重复码 n=2,M=5,因此满足信息传输率

$$R=\frac{\log M}{n}=\frac{1}{2}\log 5$$

此信道是无记忆信道，满足

$$P(\beta_j|W_i)=P(b_{j_1}|a_{i_1})P(b_{j_2}|a_{i_2})$$

$\beta_j=(b_{j_1},b_{j_2})$， $W_i=(a_{i_1},a_{i_2})$， $b_{j_1},b_{j_2}\in B$， $a_{i_1},a_{i_2}\in A$

j=1,2,…,25, i=1,2,…,5

下面给出传递概率 $P(\beta_j|W_i)$ 的矩阵为：

	00	01	02	03	04	10	11	12	13	14	20	21
$W_1=00$	1/4	1/4	0	0	0	1/4	1/4	0	0	0	0	0
$W_2=11$	0	0	0	0	0	0	1/4	1/4	0	0	0	1/4
$W_3=22$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$W_4=33$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$W_5=44$	1/4	0	0	0	1/4	0	0	0	0	0	0	0

22	23	24	30	31	32	33	34	40	41	42	43	44
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/4	1/4	0	0	0	1/4	1/4	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1/4	1/4	0	0	0	1/4	1/4
0	0	0	0	0	0	0	0	1/4	0	0	0	1/4

根据最大似然译码准则，确定的译码规则是：

$$\beta_j = \left.\begin{matrix}00\\01\\10\end{matrix}\right\}\text{译成 }00,\quad \beta_j = \left.\begin{matrix}11\\12\\21\end{matrix}\right\}\text{译成 }11,\quad \beta_j = \left.\begin{matrix}22\\23\\32\end{matrix}\right\}\text{译成 }22$$

$$\beta_j = \left.\begin{matrix}33\\34\\43\end{matrix}\right\}\text{译成 }33,\quad \beta_j = \left.\begin{matrix}40\\44\\04\end{matrix}\right\}\text{译成 }44$$

在选择码 C 重复码的情况下，因为对于其他 β_j，$P(\beta_j|W_i)=0$，所以其他 β_j 在输出端不会出现。可计算得：

$$P_E = \frac{1}{M}P_e^{(i)} = \frac{1}{M}\sum_{Y^2}\{P(\beta_j|W_i), F(\beta_j)\neq W_i\}$$
$$= \frac{1}{5}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

3. 某系统(8,4)线性分组码，其后 4 位校验位 *vi* 与信息位 *ui* ,*i*=0，1，2，3 的关系如下

$$\begin{aligned} v_0 &= u_1+u_2+u_3 \\ v_1 &= u_0+u_1+u_2 \\ v_2 &= u_0+u_1+u_3 \\ v_3 &= u_0+u_2+u_3 \end{aligned}$$

求：(1)该码的生成矩阵和校验矩阵;(2)该码子的最小距离;(3)并且画出该编码器的硬件逻辑连接图。

解：

(1) 根据 4 位校验位 *vi* 与信息位 *ui* ,*i*=0，1，2，3 的关系可以得到生成矩阵

$$G = [I_{4\times4} \mid P_{4\times4}] = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&1&0&0&1&1&1&0 \\ 0&0&1&0&1&1&0&1 \\ 0&0&0&1&1&0&1&1 \end{bmatrix}$$

根据生成矩阵可以得到系统的校验矩阵 H

$$H = [P^T \mid I] = \begin{bmatrix} 0&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&1&0&0 \\ 1&1&0&1&0&0&1&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

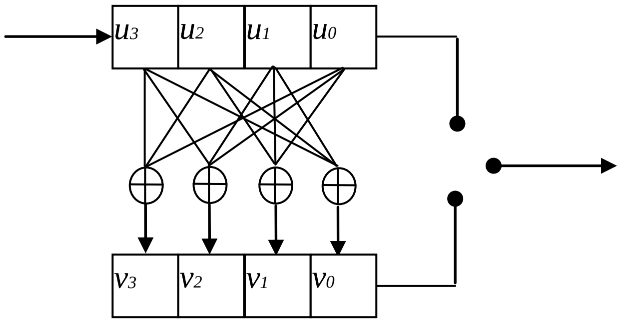
(2) 由于输入的 4 位信息组，

可以的到码字如下

码字的最小汉明距离 $d_{\min} = 4$

0000	根据 C=mG 得到码字	0000 0000
0001		0001 1011
0010		0010 1101
0011		0011 0110
0100		0100 1110
0101		0101 0101
0110		0110 0011
0111		0111 1000
1000		1000 0111
1001		1001 1100
1010		1010 1010
1011		1011 0001
1100		1100 1001
1101		1101 0010
1110		1110 0100
1111		1111 1111

(3) 该编码器的硬件逻辑连接图



4. 某系统 (7, 4) 线性分组码，生成矩阵为：

$$G=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

(1) 列出其标准阵列译码表

(2) 如果接受序列为 R=0010100, R=0111000, R=1110010 通过标准阵列译码表译码.

解：

(3) (1) 由于输入的 4 位信息组，可以的到码字如下

0000		0000 000
0001		0001 011
0010		0010 110
0011		0011 101
0100		0100 111
0101		0101 100
0110		0110 001
0111	根据 C=mG	0111 010
1000	得到码字	1000 101
1001		1001 110
1010		1010 011
1011		1011 000
1100		1100 010
1101		1101 001
1110		1110 100
1111		1111 111

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
000 000	**001 011**	**010 110**	**011 101**	**100 111**	**101 100**	**110 001**	**111 010**	**000 101**	**001 110**	**010 011**	**011 000**	**100 010**	**101 001**	**110 100**	**111 111**
000 001	001 010	010 111	011 100	100 110	101 101	110 000	111 011	000 100	001 111	010 010	011 001	100 011	101 000	110 101	111 110
000 010	001 001	010 100	011 111	100 101	101 110	110 011	111 000	000 111	001 100	010 001	011 010	100 000	101 011	110 110	111 101
000 100	001 111	010 010	011 001	100 011	101 000	110 101	111 110	000 001	001 010	010 111	011 100	100 110	101 101	110 000	111 011

001 000	000 011	011 110	010 101	101 111	100 100	111 001	110 010	001 101	000 110	011 011	010 000	101 010	100 001	111 100	11 011 1
010 000	011 011	000 110	001 101	110 111	111 100	100 001	101 010	010 101	011 110	000 011	001 000	110 010	111 001	100 100	10 111 1
100 000	101 011	110 110	111 101	000 111	001 100	010 001	011 010	100 101	101 110	110 011	111 000	000 010	001 001	010 100	011 111
000 000	001 011	010 110	011 101	100 111	101 100	110 001	111 010	000 101	001 110	010 011	011 000	100 010	101 001	110 100	111 111