第四章作业参考答案

习题二

系统的开环极点 $p_1=0$, $-p_{2,3}=-18.6332$, -5.3668

开环零点 $-z=-25$

分离点：

$$P(s)=s+25, Q(s)=s(s^2+24s+100)$$
$$=s^3+24s^2+100s$$
$$P'(s)=1, Q'(s)=3s^2+48s+100$$
$$P(s)Q'(s)-P'(s)Q(s)$$
$$=s^3+24s^2+100s-(s+25)(3s^2+48s+100)=0$$
$$s_1=-31.9401,\text{验证K}=-1627.4(\text{舍去})$$
$$s_2=-14.9404,\text{验证K}=-52.5074(\text{舍去})$$
$$s_3=-2.6195,\text{验证K}=5.1492$$

与虚轴交点：

系统特征方程

$$s^3+24s^2+(100+K)s+25K$$

$Routh$阵列表

$$\begin{array}{cc} 1 & 100+K \\ 24 & 25K \\ \dfrac{2400-K}{24} & 0 \\ 25K & \end{array}$$

$$\frac{2400-K}{24}=0 \Rightarrow K=2400$$

相应交点等于$\omega=\sqrt{2500}=50$

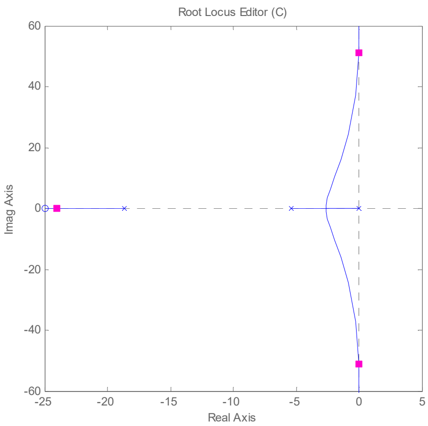
渐近中心：

$$\varphi_A=\frac{(2k+1)}{n-m}180^\circ=\frac{(2k+1)}{2}180^\circ=\pm 90^\circ$$

$$\sigma_A=-\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m}=-\frac{\sum_{i=1}^{3}p_i}{2}$$
$$=-\frac{0+18.6332+5.3668-25}{2}=0.5$$

使得系统产生振荡的 *K* 值的取值范围：

5.1492<*K*<=2400



习题三

系统的开环极点 $-p_1=0$, $-p_{2,3}=-1+j2$ $-1-j2$

渐近中心：

$$\varphi_A=\frac{(2k+1)}{n-m}180^\circ=\frac{(2k+1)}{3}180^\circ=\pm 60^\circ,180^\circ$$

$$\sigma_A=-\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m}=-\frac{\sum_{i=1}^{3}p_i}{3}$$
$$=-\frac{0+1-j2+1+j2}{3}=-2/3$$

出射角

在$p_2=-1-j2$的出射角

$$\varphi_{p_2}=-\angle(p_2-p_1)-\angle(p_2-p_3)\pm 180^\circ$$
$$=-\left[tg^{-1}\left(\frac{-2}{1}\right)-90^\circ\right]\pm 180^\circ$$
$$=116.5651^\circ+90^\circ-180^\circ=26.5651^\circ$$

在$p_3=-1+j2$的出射角

$$\varphi_{p3}=-\angle(p_3-p_1)-\angle(p_3-p_2)\pm 180^\circ$$
$$=-\left[tg^{-1}\left(\frac{-2}{1}\right)+90^\circ\right]\pm 180^\circ$$
$$=-116.5651^\circ-90^\circ+180^\circ=-26.5651^\circ$$

与虚轴交点：

系统特征方程

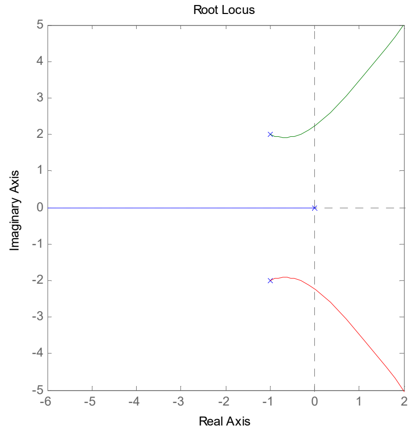
s^3+2s^2+5s+K

$Routh$阵列表

$$\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 2 & K \\ \dfrac{10-K}{2} & 0 \\ K & \end{array}$$

$\dfrac{10-K}{2}=0 \Rightarrow K=10$

相应交点等于$s_{1,2}=\pm j\sqrt{5}=\pm j2.2361$



1、 渐近线： $\varphi_A=\pm 60°,180°,\sigma_A=-2/3$

2、 出射角： $\varphi_{p_2}=26.57°;\varphi_{p_2}=-26.57°\text{or}333.43°$

3、 虚轴交点处增益:K＝10，相应交点： $s_{1,2}=\pm j\sqrt{5}=\pm j2.2361$

习题四

系统的开环极点 p_1=0, $-p_2$= -1 开环零点 -z=-2

渐近中心：

$$\varphi_A=\frac{(2k+1)}{n-m}180°=\frac{(2k+1)}{1}180°=180°$$

$$\sigma_A=-\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m}=-\frac{0+1-2}{1}=1$$

分离点：

$P(s)=s+2, Q(s)=s(s+1)=s^2+s$

$P'(s)=1, Q'(s)=2s+1$

$P(s)Q'(s)-P'(s)Q(s)=(s+2)(2s+1)-s^2-s$

$=s^2+4s+2=0$

$s_1=-3.4142$, 验证$K=5.8284$

$s_2=-0.5858$, 验证$K=0.1716$

当复根的实部为-2 时，求出系统增益和闭环根；可以采用幅值条件和相位条件进行计算(如右):系统在复平面上的根轨迹是一个圆当复根实部等于-2 时，系统的闭环极点为: $-2\pm j\omega$ 由幅角条件可以得到：

故系统的闭环极点为: $-2\pm j\sqrt{2}$ 时由幅值条件：

$$\frac{1}{K}=\frac{\left|-2+j\sqrt{2}+2\right|}{\left|-2+j\sqrt{2}+1\right|\left|-2+j\sqrt{2}\right|}=\frac{1}{3}\Rightarrow K=3$$

幅值条件：

$s=-2\pm j\omega$

$$\frac{K(-2+j\omega+2)}{(-2+j\omega)(-2+j\omega+1)}=\frac{-3K\omega^2+jK\omega(2-\omega^2)}{\omega^4+5\omega^2+4}=-1$$

即 $K\omega(2-\omega^2)=0\Rightarrow\omega=\pm\sqrt{2}$

幅角条件：

$$-\angle(-2+j\omega)-\angle(-2+j\omega+1)+\angle(-2+j\omega+2)=\pm 180°$$

$$180°-tg^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)+180°-tg^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right)+90°=\pm 180°$$

由三角公式$tg^{-1}x\pm tg^{-1}y=tg^{-1}\dfrac{x+y}{1\mp xy}$

$$tg^{-1}\frac{\frac{\omega}{2}+\omega}{1-\frac{\omega^2}{2}}=90°\Rightarrow\frac{\frac{\omega}{2}+\omega}{1-\frac{\omega^2}{2}}=\infty\Rightarrow 1-\frac{\omega^2}{2}=0\Rightarrow\omega=\pm\sqrt{2}$$

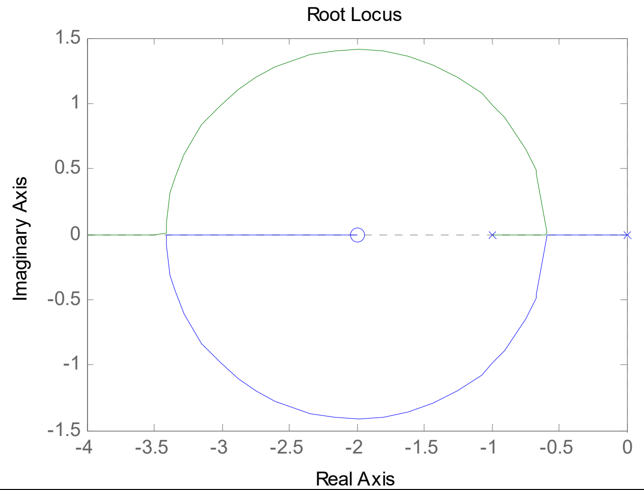
1、 实轴上分离点和汇合点：

$$s_1 = -3.4142, K = 5.8284$$

$$s_2 = -0.5858, K = 0.1716$$

2、 复根实部为－2，系统增益和闭环根：

$$s_{1,2} = -2 \pm j\sqrt{2}, K = 3$$



习题五：

系统的特征方程为： $s^2 + as + 4s^2 + 4 = 0 \Rightarrow 5s^2 + 4 + as = 0 \Rightarrow 1 + \dfrac{as}{5s^2 + 4} = 0$

系统的等效开环传递函数：$G(s) = \dfrac{as}{5s^2 + 4}$

系统的等效开环极点为 $s = \pm j\sqrt{0.8}$　系统的等效开环零点为 $s=0$

系统的等效开环传递函数的根轨迹分离点：

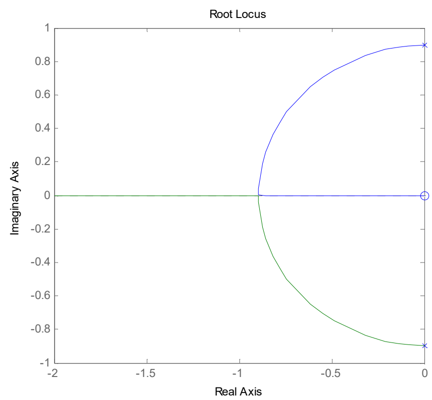
$$P(s) = s, Q(s) = 5s^2 + 4$$

$$P'(s) = 1, Q'(s) = 10s$$

$$P(s)Q'(s) - P'(s)Q(s) = 10s^2 - 5s^2 - 4 = 0$$

$$s_1 = -\sqrt{0.8} = -0.8944, a = \sqrt{0.8} = 0.8944$$

$$s_2 = \sqrt{0.8} = 0.8944, a = -\sqrt{0.8} = -0.8944(\text{舍去})$$



可以验证系统在复平面上的根轨迹是一个圆的一部份

系统的闭环极点为:$-\sigma \pm j\omega$ 由幅角条件可以得到：

$$-\angle(-\sigma + j\omega - j\sqrt{8}) - \angle(-\sigma + j\omega + j\sqrt{8}) + \angle(-\sigma + j\omega) = \pm 180^\circ$$

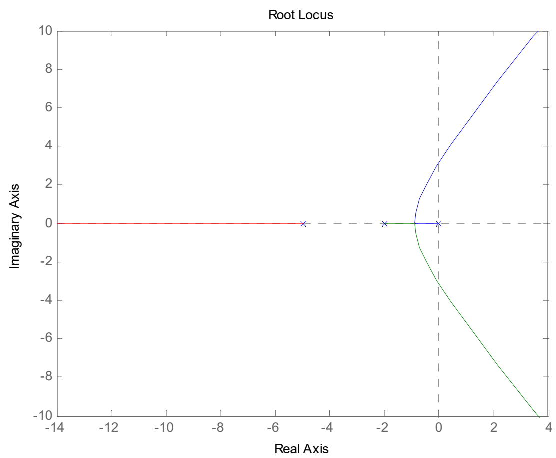
$$-\left[tg^{-1}\left(\frac{\omega - \sqrt{8}}{\sigma}\right)\right] - \left[tg^{-1}\left(\frac{\omega + \sqrt{8}}{\sigma}\right)\right] + \left[tg^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)\right] = \pm 180^\circ$$

由三角公式 $tg^{-1}x \pm tg^{-1}y = tg^{-1}\dfrac{x+y}{1 \mp xy}$

$$\sigma^2 + \omega^2 = \sqrt{0.8}^2$$

习题六：

系统的开环极点 $p_1=0$,　$p_2=2$　$p_3=5$	
渐近中心：	**分离点：**

$\varphi_A=\dfrac{(2k+1)}{n-m}180^\circ=\dfrac{(2k+1)}{3}180^\circ=\pm60^\circ,180^\circ$ $\sigma_A=-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m}=-\dfrac{\sum_{i=1}^{3}p_i}{3}=-\dfrac{0+2+5}{3}=-7/3$	$P(s)=1,Q(s)=s^3+7s^2+10s$ $P'(s)=0,Q'(s)=3s^2+14s+10$ $P(s)Q'(s)-P'(s)Q(s)=3s^2+14s+10=0$ $s_1=-3.7863$,验证$K=-8.2088$(舍去) $s_2=-0.8804$,验证$K=4.0607$
与虚轴交点： 系统特征方程 $s^3+7s^2+10s+K$ $Routh$阵列表 $\begin{array}{cc} 1 & 10 \\ 7 & K \\ \dfrac{70-K}{7} & 0 \\ K & \end{array}$ $\dfrac{70-K}{7}=0\Rightarrow K=70$ 相应交点等于$s_{1,2}=\pm j\sqrt{10}=\pm j3.1623$	
当 K=6 时，系统的特征根为： -5.3369　　-0.8315 + j0.6579　　-0.8315 - j0.6579	
3、分离点：$s_2=$ -0.8804;　$K=4.0607$ **4**、虚轴上闭环特征根：$s_{1,2}=\pm j\sqrt{10}=\pm j3.1623$;　$K=70$ **5**、K**=6** 时闭环特征根：-5.3369　-0.8315 + j0.6579　-0.8315 - j0.6579	

习题七：