区间估计与假设检验

刘 桢

数学学院

2019年

§1. 区间估计

一 区间估计的基本概念

§1. 区间估计

一 区间估计的基本概念

1. 两个要求:

§1. 区间估计

一 区间估计的基本概念

1. 两个要求：

（1） $P\left\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\right\}$尽可能大

§1. 区间估计

一 区间估计的基本概念

1. 两个要求:

（1）$P\left\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\right\}$尽可能大

（2）估计的精度尽可能高，如区间长度$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$尽可能小

§1. 区间估计

一 区间估计的基本概念

1. 两个要求：

(1) $P\left\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\right\}$尽可能大

(2) 估计的精度尽可能高，如区间长度$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$尽可能小

2. Neyman原则

§1. 区间估计

一 区间估计的基本概念

1. 两个要求:

（1） $P\left\{\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2\right\}$尽可能大

（2） 估计的精度尽可能高，如区间长度$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$尽可能小

2. Neyman原则

Def. 给定一个很小的数α（$0 < \alpha < 1$），如果$\forall \theta \in \Theta$，都有

§1. 区间估计

一 区间估计的基本概念

1. 两个要求:

（1） $P\left\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\right\}$尽可能大

（2） 估计的精度尽可能高，如区间长度$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$尽可能小

2. Neyman原则

Def. 给定一个很小的数α（$0 < \alpha < 1$），如果$\forall\theta \in \Theta$，都有

$$P\left\{\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U\right\} \ge 1 - \alpha$$

§1. 区间估计

一 区间估计的基本概念

1. 两个要求:

(1) $P\left\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\right\}$尽可能大

(2) 估计的精度尽可能高，如区间长度$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$尽可能小

2. Neyman原则

Def. 给定一个很小的数α（$0 < \alpha < 1$），如果$\forall \theta \in \Theta$，都有

$$P\left\{\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U\right\} \ge 1 - \alpha$$

则称随机区间$\left[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right]$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间，$\hat{\theta}_L$和$\hat{\theta}_U$分别称为$\theta$的（双侧）置信区间的置信下限和置信上限。

例1. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N\left(\mu, \sigma^2\right)$的简单随机样本，其中$\sigma^2$已知。试求未知参数$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

例1. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N\left(\mu, \sigma^2\right)$的简单随机样本，其中$\sigma^2$已知。试求未知参数$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

【枢轴量法】

例1. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N\left(\mu, \sigma^2\right)$的简单随机样本，其中$\sigma^2$已知。试求未知参数$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

【枢轴量法】

（1）找一个与待估参数θ有关的统计量$T = T\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$，一般是$\theta$的点估计。（如上例中的$\overline{X}$）

例1. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N\left(\mu, \sigma^2\right)$的简单随机样本，其中$\sigma^2$已知。试求未知参数$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

【枢轴量法】

（1）找一个与待估参数θ有关的统计量$T = T\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$，一般是$\theta$的点估计。（如上例中的$\overline{X}$）

（2）构造枢轴量$S\left(T, \theta\right)$，即T和θ的函数，要求$S\left(T, \theta\right)$的分布F已知，且F与θ无关。

例1. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N\left(\mu, \sigma^2\right)$的简单随机样本，其中$\sigma^2$已知。试求未知参数$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

【枢轴量法】

（1）找一个与待估参数θ有关的统计量$T = T\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$，一般是$\theta$的点估计。（如上例中的$\overline{X}$）

（2）构造枢轴量$S\left(T, \theta\right)$，即T和θ的函数，要求$S\left(T, \theta\right)$的分布F已知，且F与θ无关。

（3）取F的分位点$\omega_{1-\alpha/2}$、$\omega_{\alpha/2}$，有

$$P\left\{\omega_{1-\alpha/2} \le S\left(T, \theta\right) \le \omega_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

例1. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N\left(\mu, \sigma^2\right)$的简单随机样本，其中$\sigma^2$已知。试求未知参数$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

【枢轴量法】

（1）找一个与待估参数θ有关的统计量$T = T\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$，一般是$\theta$的点估计。（如上例中的$\overline{X}$）

（2）构造枢轴量$S\left(T, \theta\right)$，即T和θ的函数，要求$S\left(T, \theta\right)$的分布F已知，且F与θ无关。

（3）取F的分位点$\omega_{1-\alpha/2}$、$\omega_{\alpha/2}$，有

$$P\left\{\omega_{1-\alpha/2} \le S\left(T, \theta\right) \le \omega_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

（4）解不等式$\omega_{1-\alpha/2} \le S\left(T, \theta\right) \le \omega_{\alpha/2}$，得到

$$\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U$$

例1. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N\left(\mu, \sigma^2\right)$的简单随机样本，其中$\sigma^2$已知。试求未知参数$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

【枢轴量法】

（1）找一个与待估参数θ有关的统计量$T = T\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$，一般是$\theta$的点估计。（如上例中的$\overline{X}$）

（2）构造枢轴量$S\left(T, \theta\right)$，即T和θ的函数，要求$S\left(T, \theta\right)$的分布F已知，且F与θ无关。

（3）取F的分位点$\omega_{1-\alpha/2}$、$\omega_{\alpha/2}$，有

$$P\left\{\omega_{1-\alpha/2} \leq S\left(T, \theta\right) \leq \omega_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

（4）解不等式$\omega_{1-\alpha/2} \leq S\left(T, \theta\right) \leq \omega_{\alpha/2}$，得到

$$\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U$$

其中$\hat{\theta}_L$和$\hat{\theta}_U$只与$\omega_{1-\alpha/2}$、$\omega_{\alpha/2}$和T有关，与待估参数θ无关。

Remark. 置信水平； 单侧置信区间

Remark. 置信水平； 单侧置信区间

二. 单个正态总体参数的区间估计

Remark. 置信水平； 单侧置信区间

二. 单个正态总体参数的区间估计

1. 标准差σ已知时μ的置信区间

Remark. 置信水平； 单侧置信区间

二. 单个正态总体参数的区间估计

1. 标准差σ已知时μ的置信区间

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Remark. 置信水平；单侧置信区间

二. 单个正态总体参数的区间估计

1. 标准差σ已知时μ的置信区间

$$\left[\overline{X}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

例2. 一流水线加工生产零件，其长度X服从正态分布$N\left(\mu,0.5^2\right)$。任意抽取8个零件，测得其长度（单位：mm）如下：

15.1 14.8 14.9 15.3 14.8 15.2 14.7 15

试确定总体均值μ的置信水平为90%的置信区间。

Remark. 置信水平； 单侧置信区间

二. 单个正态总体参数的区间估计

1. 标准差σ已知时μ的置信区间

$$\left[\overline{X}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

例2. 一流水线加工生产零件，其长度X服从正态分布$N\left(\mu,0.5^2\right)$。任意抽取8个零件，测得其长度（单位：mm）如下：

$$15.1\quad 14.8\quad 14.9\quad 15.3\quad 14.8\quad 15.2\quad 14.7\quad 15$$

试确定总体均值μ的置信水平为90%的置信区间。

解：已知$X\sim N\left(\mu,0.5^2\right)$，且$\sigma=0.5$，故$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\overline{X}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Remark. 置信水平； 单侧置信区间

二. 单个正态总体参数的区间估计

1. 标准差σ已知时μ的置信区间

$$\left[\overline{X}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

例2. 一流水线加工生产零件，其长度X服从正态分布$N\left(\mu,0.5^2\right)$。任意抽取8个零件，测得其长度（单位：mm）如下：

15.1 14.8 14.9 15.3 14.8 15.2 14.7 15

试确定总体均值μ的置信水平为90%的置信区间。

解：已知$X\sim N\left(\mu,0.5^2\right)$，且$\sigma=0.5$，故$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\overline{X}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

根据样本数据有$n = 8$，$\overline{x} = 14.975$，由于$\alpha = 0.10$，查表可得$z_{0.05} = 1.645$，代入上式即可得到μ的一个置信水平为90%的置信区间为

$$\left[14.975 - 1.645 \times \frac{0.5}{\sqrt{8}}, 14.975 + 1.645 \times \frac{0.5}{\sqrt{8}}\right] = [14.684, 15.266]$$

根据样本数据有$n = 8$，$\overline{x} = 14.975$，由于$\alpha = 0.10$，查表可得$z_{0.05} = 1.645$，代入上式即可得到μ的一个置信水平为90%的置信区间为

$$\left[14.975 - 1.645 \times \frac{0.5}{\sqrt{8}}, 14.975 + 1.645 \times \frac{0.5}{\sqrt{8}}\right] = [14.684, 15.266]$$

2.标准差σ未知时μ的置信区间

根据样本数据有$n = 8$，$\overline{x} = 14.975$，由于$\alpha = 0.10$，查表可得$z_{0.05} = 1.645$，代入上式即可得到μ的一个置信水平为90%的置信区间为

$$\left[14.975 - 1.645 \times \frac{0.5}{\sqrt{8}}, 14.975 + 1.645 \times \frac{0.5}{\sqrt{8}}\right] = [14.684, 15.266]$$

2.标准差σ未知时μ的置信区间

（1）选取参数μ的点估计量——$\overline{X}$

根据样本数据有$n = 8$，$\overline{x} = 14.975$，由于$\alpha = 0.10$，查表可得$z_{0.05} = 1.645$，代入上式即可得到μ的一个置信水平为90%的置信区间为

$$\left[14.975 - 1.645 \times \frac{0.5}{\sqrt{8}}, 14.975 + 1.645 \times \frac{0.5}{\sqrt{8}}\right] = [14.684, 15.266]$$

2.标准差σ未知时μ的置信区间

（1）选取参数μ的点估计量——$\overline{X}$

（2）构造枢轴量

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t\left(n - 1\right)$$

根据样本数据有$n=8$，$\overline{x}=14.975$，由于$\alpha=0.10$，查表可得$z_{0.05}=1.645$，代入上式即可得到μ的一个置信水平为90%的置信区间为

$$\left[14.975-1.645\times\frac{0.5}{\sqrt{8}},14.975+1.645\times\frac{0.5}{\sqrt{8}}\right]=[14.684,15.266]$$

2.标准差σ未知时μ的置信区间

（1）选取参数μ的点估计量——$\overline{X}$

（2）构造枢轴量

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t\left(n-1\right)$$

（3）由于t分布具有对称性，取其$\alpha/2$分位点$t_{\alpha/2}\left(n-1\right)$，有

根据样本数据有$n=8$，$\overline{x}=14.975$，由于$\alpha=0.10$，查表可得$z_{0.05}=1.645$，代入上式即可得到μ的一个置信水平为90%的置信区间为

$$\left[14.975-1.645\times\frac{0.5}{\sqrt{8}},14.975+1.645\times\frac{0.5}{\sqrt{8}}\right]=[14.684,15.266]$$

2.标准差σ未知时μ的置信区间

（1）选取参数μ的点估计量——$\overline{X}$

（2）构造枢轴量

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t\left(n-1\right)$$

（3）由于t分布具有对称性，取其$\alpha/2$分位点$t_{\alpha/2}\left(n-1\right)$，有

$$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1)\leq\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\leq t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) \le \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \le t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

（4）由$-t_{\alpha/2}(n-1) \le \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \le t_{\alpha/2}(n-1)$，即得

$$\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$$

故标准差σ未知时μ的$1-\alpha$置信区间为

$$\left[\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) \le \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \le t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

（4） 由$-t_{\alpha/2}(n-1) \le \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \le t_{\alpha/2}(n-1)$，即得

$$\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$$

故标准差σ未知时μ的$1-\alpha$置信区间为

$$\left[\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

3.σ^2的置信区间

$$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) \le \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \le t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

（4） 由$-t_{\alpha/2}(n-1) \le \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \le t_{\alpha/2}(n-1)$，即得

$$\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$$

故标准差σ未知时μ的$1-\alpha$置信区间为

$$\left[\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

3.σ^2的置信区间

（1） 选取σ^2的无偏估计量—样本方差$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

$$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \leq t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

（4） 由$-t_{\alpha/2}(n-1) \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \leq t_{\alpha/2}(n-1)$，即得

$$\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$$

故标准差σ未知时μ的$1-\alpha$置信区间为

$$\left[\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

3.σ^2的置信区间

（1） 选取σ^2的无偏估计量—样本方差$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

(2) 构造枢轴量

$$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2\,(n-1)$$

（2）构造枢轴量

$$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2\,(n-1)$$

（3）取χ^2分布的分位点$\chi^2_{1-\alpha/2}\,(n-1)$、$\chi^2_{\alpha/2}\,(n-1)$，有

(2) 构造枢轴量

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(3) 取χ^2分布的分位点$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$、$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$，有

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

(2) 构造枢轴量

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(3) 取χ^2分布的分位点$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$、$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$，有

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

(4) 解不等式，即得

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$$

(2) 构造枢轴量

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(3) 取χ^2分布的分位点$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$、$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$，有

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

(4) 解不等式，即得

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$$

故σ^2的$1-\alpha$置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{\alpha/2}\,(n-1)},\ \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}\,(n-1)}\right]$$

故σ^2的$1-\alpha$置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{\alpha/2}\,(n-1)},\ \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}\,(n-1)}\right]$$

进一步，还可以得到σ的$1-\alpha$置信区间为

$$\left[\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}\,(n-1)}},\ \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}\,(n-1)}}\right]$$

故σ^2的$1-\alpha$置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$$

进一步，还可以得到σ的$1-\alpha$置信区间为

$$\left[\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\ \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right]$$

Table 1: 单个正态总体参数的置信区间

待估参数	其它参数	枢轴量及其分布	置信区间
μ	σ 已知	$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$	$\left[\overline{X}\pm z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
μ	σ 未知	$\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$	$\left[\overline{X}\pm t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$
σ^2		$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$

§2. 假设检验

§2. 假设检验

一.假设检验的基本概念

§ 2. 假设检验

一.假设检验的基本概念

例1. 某自动流水线灌装饮料，每一瓶的标准容量是350ml。当流水线工作时，每一瓶的灌装容量X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，标准差$\sigma = 1.5$ml。为了检验流水线是否正常工作，随机抽取了已经灌装的8瓶饮料，测得其容量分别为（单位：ml）：

$$349 \quad 352 \quad 346 \quad 347 \quad 351 \quad 348 \quad 353 \quad 348$$

试推断该流水线是否正常工作?

§2. 假设检验

一.假设检验的基本概念

例1. 某自动流水线灌装饮料，每一瓶的标准容量是350ml。当流水线工作时，每一瓶的灌装容量X服从正态分布$N\left(\mu, \sigma^2\right)$，标准差$\sigma = 1.5$ml。为了检验流水线是否正常工作，随机抽取了已经灌装的8瓶饮料，测得其容量分别为（单位：ml）：

$$349 \quad 352 \quad 346 \quad 347 \quad 351 \quad 348 \quad 353 \quad 348$$

试推断该流水线是否正常工作?

【问题分析】

§2. 假设检验

一.假设检验的基本概念

例1. 某自动流水线灌装饮料，每一瓶的标准容量是350ml。当流水线工作时，每一瓶的灌装容量X服从正态分布$N\left(\mu, \sigma^2\right)$，标准差$\sigma = 1.5$ml。为了检验流水线是否正常工作，随机抽取了已经灌装的8瓶饮料，测得其容量分别为（单位：ml）：

349　352　346　347　351　348　353　348

试推断该流水线是否正常工作?

【问题分析】

1. 明确问题

§ 2. 假设检验

一.假设检验的基本概念

例1. 某自动流水线灌装饮料，每一瓶的标准容量是350ml。当流水线工作时，每一瓶的灌装容量X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，标准差$\sigma=1.5$ml。为了检验流水线是否正常工作，随机抽取了已经灌装的8瓶饮料，测得其容量分别为（单位：ml）：

$$349 \quad 352 \quad 346 \quad 347 \quad 351 \quad 348 \quad 353 \quad 348$$

试推断该流水线是否正常工作?

【问题分析】

1. 明确问题

$$H_0:\ \mu=350\ vs.\ H_1:\ \mu\neq 350$$

§2. 假设检验

一.假设检验的基本概念

例1. 某自动流水线灌装饮料，每一瓶的标准容量是350ml。当流水线工作时，每一瓶的灌装容量X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，标准差$\sigma=1.5$ml。为了检验流水线是否正常工作，随机抽取了已经灌装的8瓶饮料，测得其容量分别为（单位：ml）：

$$349 \quad 352 \quad 346 \quad 347 \quad 351 \quad 348 \quad 353 \quad 348$$

试推断该流水线是否正常工作?

【问题分析】

1. 明确问题

$$H_0:\ \mu=350\ vs.\ H_1:\ \mu\neq350$$

其中称H_0为原假设，H_1为备择假设。

若$|\overline{x}-350|<c$，就接受原假设H_0；

若$|\overline{x}-350|<c$，就接受原假设H_0；

若$|\overline{x}-350|\geq c$，就拒绝原假设H_0。

若$|\overline{x}-350|<c$，就接受原假设H_0；

若$|\overline{x}-350|\geq c$，就拒绝原假设H_0。

2. 两类错误

若$|\overline{x}-350|<c$，就接受原假设H_0；

若$|\overline{x}-350|\geq c$，就拒绝原假设H_0。

2. 两类错误

（1）第一类错误

若$|\overline{x}-350|<c$，就接受原假设H_0；

若$|\overline{x}-350|\geq c$，就拒绝原假设H_0。

2. 两类错误

（1）第一类错误

$$P\left(\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\right)=P_{H_0}(\text{拒绝}H_0)$$

若$|\overline{x}-350|<c$，就接受原假设H_0；

若$|\overline{x}-350|\geq c$，就拒绝原假设H_0。

2. 两类错误

（1）第一类错误

$$P\left(\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\right)=P_{H_0}(\text{拒绝}H_0)$$

（2）第二类错误

若$|\overline{x}-350|<c$，就接受原假设H_0；

若$|\overline{x}-350|\geq c$，就拒绝原假设H_0。

2. 两类错误

（1）第一类错误

$$P\left(\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\right)=P_{H_0}(\text{拒绝}H_0)$$

（2）第二类错误

$$P(\text{接受}H_0|H_0\text{为假})=P_{H_1}(\text{接受}H_0)$$

若$|\overline{x}-350|<c$，就接受原假设H_0;

若$|\overline{x}-350|\geq c$，就拒绝原假设H_0。

2. 两类错误

（1） 第一类错误

$$P\left(\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\right)=P_{H_0}(\text{拒绝}H_0)$$

（2） 第二类错误

$$P(\text{接受}H_0|H_0\text{为假})=P_{H_1}(\text{接受}H_0)$$

3. 解决方法——显著性检验

若$|\overline{x}-350|<c$，就接受原假设H_0；

若$|\overline{x}-350|\geq c$，就拒绝原假设H_0。

2. 两类错误

（1）第一类错误

$$P\left(拒绝H_0|H_0为真\right)=P_{H_0}\left(拒绝H_0\right)$$

（2）第二类错误

$$P\left(接受H_0|H_0为假\right)=P_{H_1}\left(接受H_0\right)$$

3. 解决方法——显著性检验

$$P\left(拒绝H_0|H_0为真\right)=P_{H_0}\left(拒绝H_0\right)\leq\alpha$$

若$|\overline{x}-350|<c$，就接受原假设H_0；

若$|\overline{x}-350|\geq c$，就拒绝原假设H_0。

2. 两类错误

（1） 第一类错误

$$P\left(\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\right)=P_{H_0}\left(\text{拒绝}H_0\right)$$

（2） 第二类错误

$$P\left(\text{接受}H_0|H_0\text{为假}\right)=P_{H_1}\left(\text{接受}H_0\right)$$

3. 解决方法——显著性检验

$$P\left(\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\right)=P_{H_0}\left(\text{拒绝}H_0\right)\leq\alpha$$

这里α称为显著性水平，相应的假设检验也称为显著性检验。

由于当原假设H_0为真，即流水线工作正常时，

由于当原假设H_0为真，即流水线工作正常时，

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-350}{1.5/\sqrt{8}}\sim N(0,1)$$

由于当原假设H_0为真，即流水线工作正常时，

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-350}{1.5/\sqrt{8}}\sim N(0,1)$$

$$P_{H_0}\left\{\frac{\left|\overline{X}-350\right|}{1.5/\sqrt{8}}\geq\frac{c}{1.5/\sqrt{8}}=c_0\right\}=\alpha$$

由于当原假设H_0为真，即流水线工作正常时，

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-350}{1.5/\sqrt{8}}\sim N(0,1)$$

$$P_{H_0}\left\{\frac{\left|\overline{X}-350\right|}{1.5/\sqrt{8}}\geq\frac{c}{1.5/\sqrt{8}}=c_0\right\}=\alpha$$

本例中，显著性水平$\alpha=0.05$，$z_{0.025}=1.96$，$\overline{x}=349.25$，即

由于当原假设H_0为真，即流水线工作正常时，

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-350}{1.5/\sqrt{8}}\sim N(0,1)$$

$$P_{H_0}\left\{\frac{|\overline{X}-350|}{1.5/\sqrt{8}}\geq\frac{c}{1.5/\sqrt{8}}=c_0\right\}=\alpha$$

本例中，显著性水平$\alpha=0.05$，$z_{0.025}=1.96$，$\overline{x}=349.25$，即

$$\frac{|\overline{x}-350|}{1.5/\sqrt{8}}\approx 1.41<1.96$$

由于当原假设H_0为真，即流水线工作正常时，

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-350}{1.5/\sqrt{8}}\sim N\left(0,1\right)$$

$$P_{H_0}\left\{\frac{\left|\overline{X}-350\right|}{1.5/\sqrt{8}}\geq\frac{c}{1.5/\sqrt{8}}=c_0\right\}=\alpha$$

本例中，显著性水平$\alpha=0.05$，$z_{0.025}=1.96$，$\overline{x}=349.25$，即

$$\frac{\left|\overline{x}-350\right|}{1.5/\sqrt{8}}\approx 1.41<1.96$$

故接受原假设H_0，认为流水线工作正常。

【假设检验的基本步骤】

【假设检验的基本步骤】

1. 提出原假设与备择假设

【假设检验的基本步骤】

1. 提出原假设与备择假设

$$H_0 : \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$$

【假设检验的基本步骤】

1. 提出原假设与备择假设

$$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$$

【假设检验的基本步骤】

1. 提出原假设与备择假设

$$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$$

$$H_0: \mu \geq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$$

【假设检验的基本步骤】

1. 提出原假设与备择假设

$$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$$

$$H_0: \mu \geq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$$

2. 构造检验统计量，明确其分布

【假设检验的基本步骤】

1. 提出原假设与备择假设

$$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$$

$$H_0: \mu \geq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$$

2. 构造检验统计量，明确其分布
3. 确定临界值，即拒绝域（Critical region）

【假设检验的基本步骤】

1. 提出原假设与备择假设

$$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$$

$$H_0: \mu \geq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$$

2. 构造检验统计量，明确其分布
3. 确定临界值，即拒绝域（Critical region）
4. 做出决策——接受原假设或拒绝原假设

二.单个正态总体参数的假设检验

二.单个正态总体参数的假设检验

1.标准差σ已知时μ的检验

二.单个正态总体参数的假设检验

1.标准差σ已知时μ的检验

（1）提出原假设与备择假设

二.单个正态总体参数的假设检验

1.标准差σ已知时μ的检验

（1）提出原假设与备择假设

$$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$$

二.单个正态总体参数的假设检验

1.标准差σ已知时μ的检验

（1）提出原假设与备择假设

$$H_0:\mu=\mu_0\longleftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$$

（2）构造检验统计量，明确其分布

二.单个正态总体参数的假设检验

1.标准差σ已知时μ的检验

（1）提出原假设与备择假设

$$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$$

（2）构造检验统计量，明确其分布

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

二.单个正态总体参数的假设检验

1.标准差σ已知时μ的检验

（1）提出原假设与备择假设

$$H_0 : \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$$

（2） 构造检验统计量，明确其分布

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

（3）确定临界值

二.单个正态总体参数的假设检验

1.标准差σ已知时μ的检验

（1）提出原假设与备择假设

$$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$$

（2） 构造检验统计量，明确其分布

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

（3）确定临界值

给定显著性水平α，由

$$P_{H_0}(\text{拒绝}H_0) = P_{H_0}\left\{|Z| \geq z_{\alpha/2}\right\} = \alpha$$

可确定临界值为$z_{\alpha/2}$。

（4） 做出决策

(4) 做出决策

计算检验统计量Z的样本观测值z，与临界值$z_{\alpha/2}$比较，做出如下决策:

（4） 做出决策

计算检验统计量Z的样本观测值z，与临界值$z_{\alpha/2}$比较，做出如下决策：

①若$|z| < z_{\alpha/2}$，则接受原假设H_0；

（4） 做出决策

计算检验统计量Z的样本观测值z，与临界值$z_{\alpha/2}$比较，做出如下决策:

①若$|z| < z_{\alpha/2}$，则接受原假设H_0;

②若$|z| \geq z_{\alpha/2}$，则拒绝原假设H_0。

(4) 做出决策

计算检验统计量Z的样本观测值z，与临界值$z_{\alpha/2}$比较，做出如下决策:

①若$|z| < z_{\alpha/2}$，则接受原假设H_0；

②若$|z| \geq z_{\alpha/2}$，则拒绝原假设H_0。

注：考虑单边假设

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$$

（4） 做出决策

计算检验统计量Z的样本观测值z，与临界值$z_{\alpha/2}$比较，做出如下决策：

①若$|z| < z_{\alpha/2}$，则接受原假设H_0；

②若$|z| \geq z_{\alpha/2}$，则拒绝原假设H_0。

注：考虑单边假设

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$$

拒绝域W为

$$\mathrm{W} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,|\overline{x} \geq c\}$$

(4) 做出决策

计算检验统计量Z的样本观测值z，与临界值$z_{\alpha/2}$比较，做出如下决策:

①若$|z| < z_{\alpha/2}$，则接受原假设H_0；

②若$|z| \geq z_{\alpha/2}$，则拒绝原假设H_0。

注：考虑单边假设

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$$

拒绝域W为

$$\mathrm{W} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,|\overline{x} \geq c\}$$

$$= \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,|\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha\right\}$$

（4） 做出决策

计算检验统计量Z的样本观测值z，与临界值$z_{\alpha/2}$比较，做出如下决策：

①若$|z| < z_{\alpha/2}$，则接受原假设H_0；

②若$|z| \geq z_{\alpha/2}$，则拒绝原假设H_0。

注：考虑单边假设

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$$

拒绝域W为

$$\mathrm{W} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,|\overline{x} \geq c\}$$

$$= \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,|\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha\right\}$$

Table 2: 标准差σ已知时μ的假设检验

原假设	备择假设	检验统计量	拒绝域
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z \geq z_{\alpha/2}$或$Z \leq -z_{\alpha/2}$
$H_0: \mu \leq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$		$Z \geq z_\alpha$
$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$		$Z \leq -z_\alpha$

Table 2: 标准差σ已知时μ的假设检验

原假设	备择假设	检验统计量	拒绝域
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z \geq z_{\alpha/2}$或$Z \leq -z_{\alpha/2}$
$H_0: \mu \leq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$		$Z \geq z_\alpha$
$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$		$Z \leq -z_\alpha$

2.标准差σ未知时μ的检验

Table 2: 标准差σ已知时μ的假设检验

原假设	备择假设	检验统计量	拒绝域
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z \geq z_{\alpha/2}$或$Z \leq -z_{\alpha/2}$
$H_0: \mu \leq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$		$Z \geq z_\alpha$
$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$		$Z \leq -z_\alpha$

2.标准差σ未知时μ的检验

检验统计量

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \sim t\left(n-1\right)$$

Table 2: 标准差σ已知时μ的假设检验

原假设	备择假设	检验统计量	拒绝域
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z \geq z_{\alpha/2}$或$Z \leq -z_{\alpha/2}$
$H_0: \mu \leq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$		$Z \geq z_\alpha$
$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$		$Z \leq -z_\alpha$

2.标准差σ未知时μ的检验

检验统计量

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \sim t\left(n-1\right)$$

Table 3: 标准差σ未知时μ的假设检验

原假设	备择假设	检验统计量	拒绝域
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$T \geq t_{\alpha/2}\left(n-1\right)$ 或$T \leq -t_{\alpha/2}\left(n-1\right)$
$H_0: \mu \leq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$		$T \geq t_\alpha\left(n-1\right)$
$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$		$T \leq -t_\alpha\left(n-1\right)$

Table 2: 标准差σ已知时μ的假设检验

原假设	备择假设	检验统计量	拒绝域
$H_0:\mu=\mu_0$	$H_1:\mu\neq\mu_0$	$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z\geq z_{\alpha/2}$或$Z\leq -z_{\alpha/2}$
$H_0:\mu\leq\mu_0$	$H_1:\mu>\mu_0$		$Z\geq z_{\alpha}$
$H_0:\mu\geq\mu_0$	$H_1:\mu<\mu_0$		$Z\leq -z_{\alpha}$

2.标准差σ未知时μ的检验

检验统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}\sim t\left(n-1\right)$$

Table 3: 标准差σ未知时μ的假设检验

原假设	备择假设	检验统计量	拒绝域
$H_0:\mu=\mu_0$	$H_1:\mu\neq\mu_0$	$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$T\geq t_{\alpha/2}\left(n-1\right)$ 或$T\leq -t_{\alpha/2}\left(n-1\right)$
$H_0:\mu\leq\mu_0$	$H_1:\mu>\mu_0$		$T\geq t_{\alpha}\left(n-1\right)$
$H_0:\mu\geq\mu_0$	$H_1:\mu<\mu_0$		$T\leq -t_{\alpha}\left(n-1\right)$

例2. 某工厂生产一批钢材，已知这种钢材强度X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，今从中抽取6件，测得数据（单位：kg/cm）如下：

$$48.5 \quad 49.0 \quad 53.5 \quad 49.5 \quad 56.0 \quad 52.5$$

试问能否认为这批钢材的平均强度为52kg/cm？（$\alpha=0.05$）

例2. 某工厂生产一批钢材，已知这种钢材强度X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，今从中抽取6件，测得数据（单位：kg/cm）如下：

$$48.5 \quad 49.0 \quad 53.5 \quad 49.5 \quad 56.0 \quad 52.5$$

试问能否认为这批钢材的平均强度为52kg/cm? （$\alpha=0.05$）

解：（1）建立原假设和备择假设

例2. 某工厂生产一批钢材，已知这种钢材强度X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，今从中抽取6件，测得数据（单位：kg/cm）如下：

$$48.5 \quad 49.0 \quad 53.5 \quad 49.5 \quad 56.0 \quad 52.5$$

试问能否认为这批钢材的平均强度为52kg/cm？（$\alpha = 0.05$）

解：（1）建立原假设和备择假设

$$H_0: \mu = 52 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq 52$$

例2. 某工厂生产一批钢材，已知这种钢材强度X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，今从中抽取6件，测得数据（单位：kg/cm）如下：

$$48.5 \quad 49.0 \quad 53.5 \quad 49.5 \quad 56.0 \quad 52.5$$

试问能否认为这批钢材的平均强度为52kg/cm？（$\alpha=0.05$）

解：（1）建立原假设和备择假设

$$H_0:\ \mu=52 \longleftrightarrow H_1:\ \mu\neq 52$$

（2）选择检验统计量。当原假设H_0为真时，检验统计量

例2. 某工厂生产一批钢材，已知这种钢材强度X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，今从中抽取6件，测得数据（单位：kg/cm）如下：

$$48.5 \quad 49.0 \quad 53.5 \quad 49.5 \quad 56.0 \quad 52.5$$

试问能否认为这批钢材的平均强度为52kg/cm? （$\alpha=0.05$）

解：（1）建立原假设和备择假设

$$H_0: \mu=52 \longleftrightarrow H_1: \mu\neq 52$$

（2）选择检验统计量。当原假设H_0为真时，检验统计量

$$T=\frac{\overline{X}-52}{S/\sqrt{n}}\sim t\left(n-1\right)=t\left(5\right)$$

例2. 某工厂生产一批钢材，已知这种钢材强度X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，今从中抽取6件，测得数据（单位：kg/cm）如下：

$$48.5 \quad 49.0 \quad 53.5 \quad 49.5 \quad 56.0 \quad 52.5$$

试问能否认为这批钢材的平均强度为52kg/cm? （$\alpha=0.05$）

解：（1）建立原假设和备择假设

$$H_0: \mu=52 \longleftrightarrow H_1: \mu\neq 52$$

（2）选择检验统计量。当原假设H_0为真时，检验统计量

$$T=\frac{\overline{X}-52}{S/\sqrt{n}}\sim t\left(n-1\right)=t\left(5\right)$$

（3）确定临界值。$t_{\alpha/2}\left(5\right)=t_{0.025}\left(5\right)=2.5706$

例2. 某工厂生产一批钢材，已知这种钢材强度X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，今从中抽取6件，测得数据（单位：kg/cm）如下：

$$48.5 \quad 49.0 \quad 53.5 \quad 49.5 \quad 56.0 \quad 52.5$$

试问能否认为这批钢材的平均强度为52kg/cm? （$\alpha = 0.05$）

解：（1）建立原假设和备择假设

$$H_0: \mu = 52 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq 52$$

（2）选择检验统计量。当原假设H_0为真时，检验统计量

$$T = \frac{\overline{X} - 52}{S/\sqrt{n}} \sim t\left(n-1\right) = t\left(5\right)$$

（3）确定临界值。$t_{\alpha/2}\left(5\right) = t_{0.025}\left(5\right) = 2.5706$

（4）根据样本数据有$n = 6$，$\overline{x} = 51.5$，$s^2 = 8.9$，代入可得检验统计量的观测值

例2. 某工厂生产一批钢材，已知这种钢材强度X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，今从中抽取6件，测得数据（单位：kg/cm）如下：

$$48.5 \quad 49.0 \quad 53.5 \quad 49.5 \quad 56.0 \quad 52.5$$

试问能否认为这批钢材的平均强度为52kg/cm？（$\alpha=0.05$）

解：（1）建立原假设和备择假设

$$H_0:\ \mu=52 \longleftrightarrow H_1:\ \mu\neq 52$$

（2）选择检验统计量。当原假设H_0为真时，检验统计量

$$T=\frac{\overline{X}-52}{S/\sqrt{n}}\sim t\left(n-1\right)=t\left(5\right)$$

（3）确定临界值。$t_{\alpha/2}\left(5\right)=t_{0.025}\left(5\right)=2.5706$

（4）根据样本数据有$n=6$，$\overline{x}=51.5$，$s^2=8.9$，代入可得检验统计量的观测值

$$t = \frac{\overline{x} - 52}{s/\sqrt{n}} = \frac{51.5 - 52}{\sqrt{8.9/6}} = -0.4105$$

$$t=\frac{\overline{x}-52}{s/\sqrt{n}}=\frac{51.5-52}{\sqrt{8.9/6}}=-0.4105$$

由于$|t|=0.4105<2.5706=t_{0.025}(5)$，故接受原假设$H_0$，可以认为这批钢材的平均强度为52kg/cm 。

$$t=\frac{\overline{x}-52}{s/\sqrt{n}}=\frac{51.5-52}{\sqrt{8.9/6}}=-0.4105$$

由于$|t|=0.4105<2.5706=t_{0.025}(5)$，故接受原假设$H_0$，可以认为这批钢材的平均强度为52kg/cm 。

3.总体方差σ^2的检验

$$t=\frac{\overline{x}-52}{s/\sqrt{n}}=\frac{51.5-52}{\sqrt{8.9/6}}=-0.4105$$

由于$|t|=0.4105<2.5706=t_{0.025}(5)$，故接受原假设$H_0$，可以认为这批钢材的平均强度为52kg/cm 。

3.总体方差σ^2的检验

Table 4: 总体方差σ^2的假设检验

原假设	备择假设	检验统计量	拒绝域
$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$	$H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或$\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
$H_0:\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\geq\chi^2_{\alpha}(n-1)$
$H_0:\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

三.两个正态总体参数的假设检验

三.两个正态总体参数的假设检验

Table 5: 标准差σ_1和σ_2已知时$\mu_1-\mu_2$的假设检验

检验统计量: $Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$

原假设	备择假设	拒绝域
$H_0:\mu_1-\mu_2=\Delta_0$	$H_1:\mu_1-\mu_2\neq\Delta_0$	$Z\geq z_{\alpha/2}$ 或$Z\leq -z_{\alpha/2}$
$H_0:\mu_1-\mu_2\leq\Delta_0$	$H_1:\mu_1-\mu_2>\Delta_0$	$Z\geq z_{\alpha}$
$H_0:\mu_1-\mu_2\geq\Delta_0$	$H_1:\mu_1-\mu_2<\Delta_0$	$Z\leq -z_{\alpha}$

三.两个正态总体参数的假设检验

Table 5: 标准差σ_1和σ_2已知时$\mu_1-\mu_2$的假设检验

检验统计量：$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$

原假设	备择假设	拒绝域
$H_0:\mu_1-\mu_2=\Delta_0$	$H_1:\mu_1-\mu_2\neq\Delta_0$	$Z\geq z_{\alpha/2}$ 或$Z\leq -z_{\alpha/2}$
$H_0:\mu_1-\mu_2\leq\Delta_0$	$H_1:\mu_1-\mu_2>\Delta_0$	$Z\geq z_{\alpha}$
$H_0:\mu_1-\mu_2\geq\Delta_0$	$H_1:\mu_1-\mu_2<\Delta_0$	$Z\leq -z_{\alpha}$

Table 6: 标准差$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$未知时$\mu_1-\mu_2$的假设检验

检验统计量：$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\Delta_0}{s_W\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$

原假设	备择假设	拒绝域
$H_0:\mu_1-\mu_2=\Delta_0$	$H_1:\mu_1-\mu_2\neq\Delta_0$	$t\geq t_{\alpha/2}(m+n-2)$ 或$t\leq -t_{\alpha/2}(m+n-2)$
$H_0:\mu_1-\mu_2\leq\Delta_0$	$H_1:\mu_1-\mu_2>\Delta_0$	$t\geq t_{\alpha}(m+n-2)$
$H_0:\mu_1-\mu_2\geq\Delta_0$	$H_1:\mu_1-\mu_2<\Delta_0$	$t\leq -t_{\alpha}(m+n-2)$

Table 7: 两正态总体方差的假设检验

检验统计量：$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$		
原假设	备择假设	拒绝域
$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$f\geq F_{\alpha/2}(m-1,n-1)$ 或$f\leq F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)$
$H_0:\sigma_1^2\leq\sigma_2^2$	$H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$f\geq F_{\alpha}(m-1,n-1)$
$H_0:\sigma_1^2\geq\sigma_2^2$	$H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$f\leq F_{1-\alpha}(m-1,n-1)$

Table 7: 两正态总体方差的假设检验

检验统计量： $F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$		
原假设	备择假设	拒绝域
$H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$	$H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$f\geq F_{\alpha/2}(m-1,n-1)$ 或$f\leq F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)$
$H_0: \sigma_1^2\leq\sigma_2^2$	$H_1: \sigma_1^2>\sigma_2^2$	$f\geq F_{\alpha}(m-1,n-1)$
$H_0: \sigma_1^2\geq\sigma_2^2$	$H_1: \sigma_1^2<\sigma_2^2$	$f\leq F_{1-\alpha}(m-1,n-1)$

Table 8: 基于成对数据的t检验

检验统计量： $T=\frac{\overline{D}-\Delta_0}{S_D/\sqrt{n}}$		
原假设	备择假设	拒绝域
$H_0: \mu_D=\Delta_0$	$H_1: \mu_D\neq\Delta_0$	$t\geq t_{\alpha/2}(n-1)$ 或$t\leq -t_{\alpha/2}(n-1)$
$H_0: \mu_D\leq\Delta_0$	$H_1: \mu_D>\Delta_0$	$t\geq t_{\alpha}(n-1)$
$H_0: \mu_D\geq\Delta_0$	$H_1: \mu_D<\Delta_0$	$t\leq -t_{\alpha}(n-1)$

四.假设检验中的p–值

四.假设检验中的p–值

对于给定的显著性水平α，可以根据p–值按照以下原则进行判断：

四.假设检验中的p–值

对于给定的显著性水平α，可以根据p–值按照以下原则进行判断：

（1）p–值$\leq \alpha$ —— 拒绝原假设H_0；

四.假设检验中的p–值

对于给定的显著性水平α，可以根据p–值按照以下原则进行判断：

（1）p–值$\leq \alpha$ —— 拒绝原假设H_0;

（2）p–值$> \alpha$ —— 接受原假设H_0。

四.假设检验中的p–值

对于给定的显著性水平α，可以根据p–值按照以下原则进行判断：

（1）p–值$\leq \alpha$ —— 拒绝原假设H_0;

（2）p–值$> \alpha$ —— 接受原假设H_0。