西南交通大學
Southwest Jiaotong University

自 动 控 制 原 理

第 三 章

控制系统的时域分析

任课教师：　马磊
电气工程学院
2020

本章内容

3.1 引言

3.2 状态空间方程的解

3.3 一阶系统的暂态响应特性

3.4 二阶系统的暂态响应特性

3.5 三阶系统的暂态响应特性

3.6 控制系统的稳态误差

3.7 控制系统的稳定性

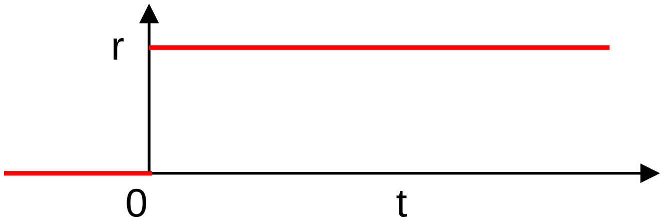
3.1 引言

- 系统响应
  - 稳态响应
  - 动态响应

典型输入信号

1) 阶跃信号 (Step Function)

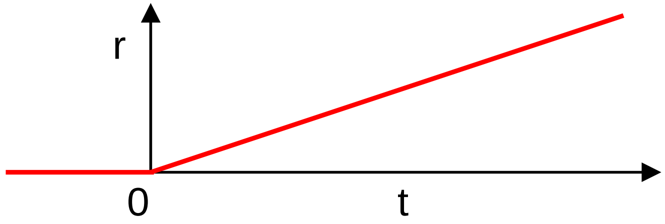
$$r(t)=\begin{cases}0, t<0\\ A, t>0\end{cases}, R(s)=A/s$$



单位阶跃信号常记为1(t) 或 u(t)

2) 斜坡信号 (Ramp Function)

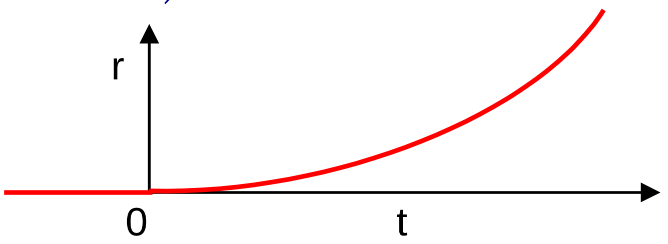
$$r(t)=\begin{cases}0, t<0\\ At, t\geq 0\end{cases}, R(s)=\frac{A}{s^2}$$



典型输入信号

3） 抛物线信号（Parabolic Function unction）

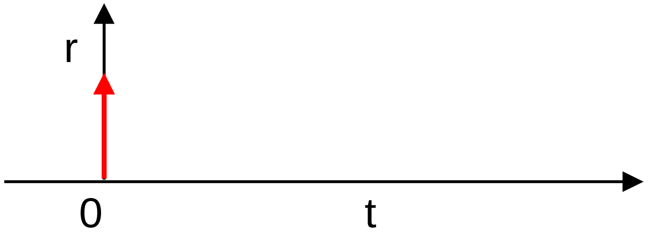
$$r(t)=\begin{cases}0, t<0\\ \frac{1}{2}At^2, t\ge 0\end{cases}, R(s)=\frac{A}{s^3}$$



当A=1时，分别称为单位阶跃、单位斜坡、单位抛物线函数(信号)

4) 脉冲信号 (Impulse function)

$$r(t)=\begin{cases}\lim\limits_{t_0\to 0}\frac{A}{\mathrm{t}_0}, 0<t<t_0\\ 0, other\end{cases}, R(s)=A$$



典型输入信号

单位脉冲函数 $\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, t=t_0\\ 0, t\neq t_0\end{cases}$

特点 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\rightarrow\int_{0-}^{0+}\delta(t)dt=1$

采样特性

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0)\text{或}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$$

单位脉冲函数作为典型输入信号，用于考察系统的脉冲响应，分析系统的固有性质：

输入：$r(t)=\delta(t),R(s)=1$

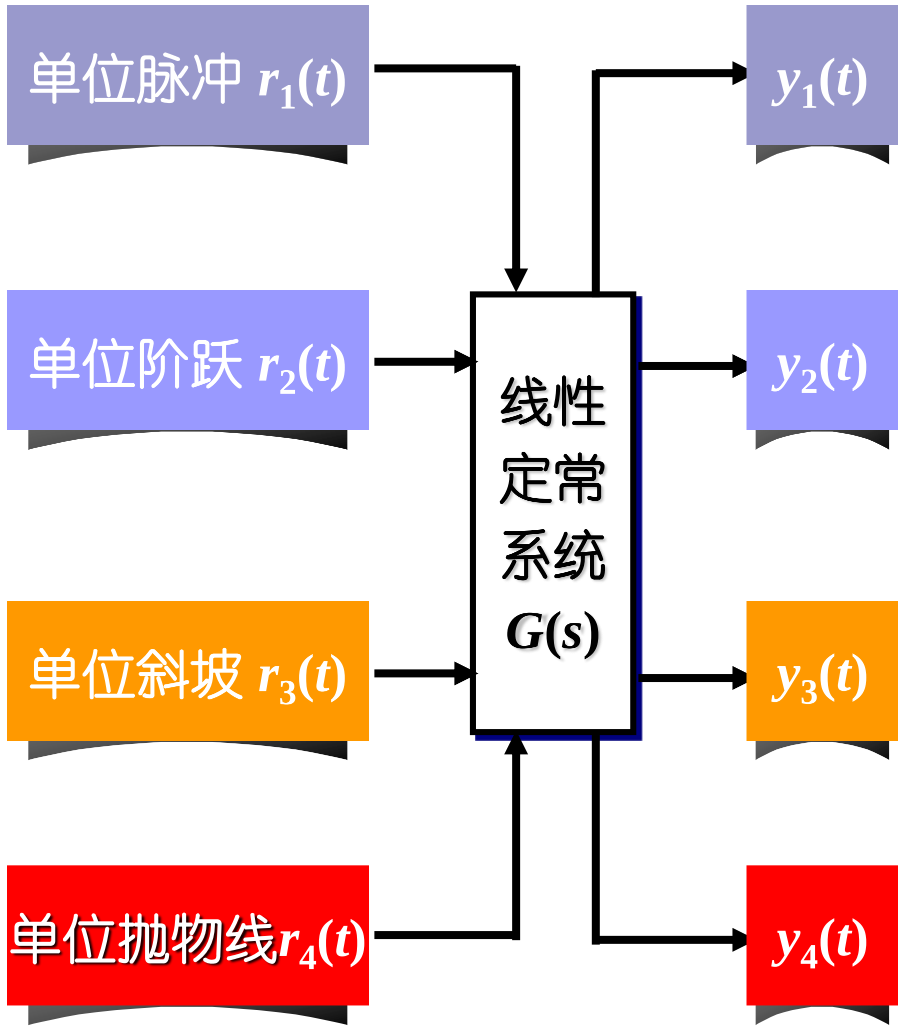
输出：$Y(s)=G(s)R(s)=G(s),y(t)=g(t)$

四个函数之间的关系

$$r_1(t)=\frac{d}{dt}r_2(t)$$

$$r_2(t)=\frac{d}{dt}r_3(t)$$

$$r_3(t)=\frac{d}{dt}r_4(t)$$



$$y_1(t)=\frac{d}{dt}y_2(t)$$

$$y_2(t)=\frac{d}{dt}y_3(t)$$

$$y_3(t)=\frac{d}{dt}y_4(t)$$

典型输入信号

- 正弦信号(Sinusoidal Function)

$$r(t) = A\sin(\omega t + \varphi),$$

$$R(s) = Ae^{\frac{\varphi}{\omega}s}\frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

线性定常系统的一个特性

- 系统对输入信号导数的响应，等于系统对该输入信号响应的导数；或者，系统对输入信号积分的响应，等于系统对该输入信号响应的积分，积分常数由零初始条件确定。

3.2 状态空间方程的解

- 系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = C' x(t) + du(t)$$

- 问题：
  - 如何解上述一阶微分方程组？
  - 微分方程的解与各参数的关系
  - 微分方程的解之深入认识

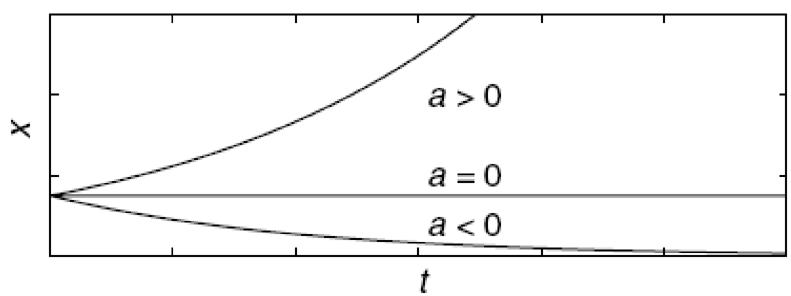
一阶常系数微分方程的解

■ 微分方程

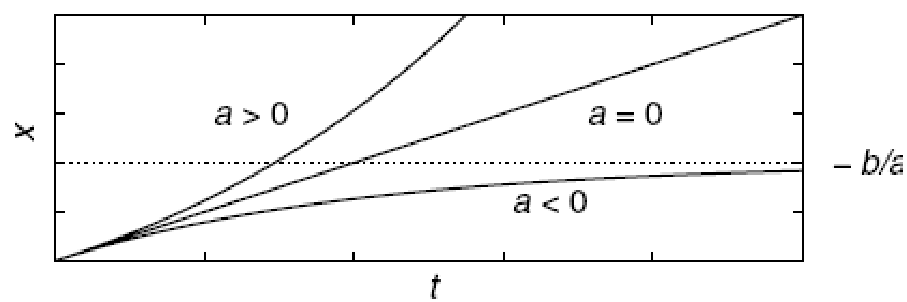
$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0$$

■ 解：

$$x(t) = \phi(t)x_0 + \int_0^t \phi(t-\tau)\, bu(\tau)\, d\tau$$



自由运动



受迫运动

状态空间方程的解

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)\,d\tau.$$

- 讨论
  - 状态转移矩阵（矩阵指数函数）的定义和计算

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^i t^i}{i!} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\boldsymbol{A}^3}{3!}t^3 + \ldots$$

$$\mathrm{e}^{at} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^i t^i}{i!} = 1 + at + \frac{a^2}{2!}t^2 + \frac{a^3}{3!}t^3 + \ldots$$

  - 系统响应与系统矩阵特征值的关系

系统矩阵的规范型

- 通过矩阵相似变换，可将系统矩阵A转化为对角规范型或约当规范型，便于状态转移矩阵的计算
- 对角规范型：

$$e^{\operatorname{diag}\lambda_i t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \operatorname{diag} e^{\lambda_i t}.$$

系统输出

- 系统输出的完整形式

$$y(t) = \boldsymbol{c}'\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{c}'\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)\,d\tau + d\,u(t)$$

- 单位阶跃响应

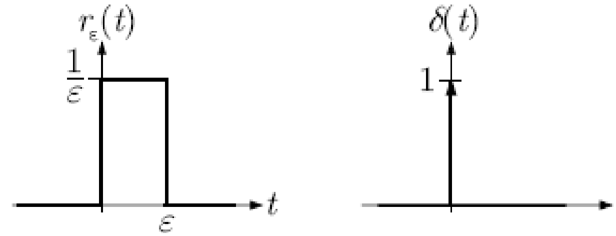
$$h(t) = d - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}'\boldsymbol{A}^{-1}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{b}.$$

  - 静态放大系数

$$k_{\mathrm{s}} = -\boldsymbol{c}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} + d.$$

单位脉冲响应

- 狄拉克脉冲

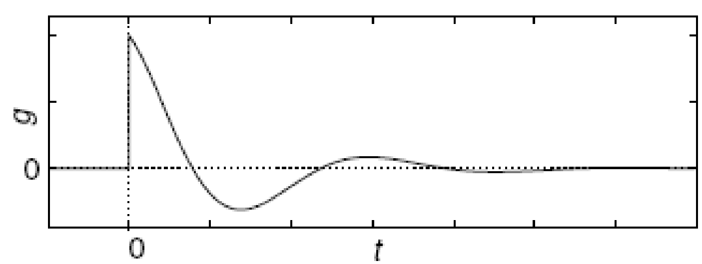


- 单位脉冲响应

$$g(t) = \boldsymbol{c}'\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{b} + d\,\delta(t)$$

- 若系统矩阵为对角矩阵，则

$$g(t) = c'e^{diag\lambda_i t}b + d\delta(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i e^{\lambda_i t} + d\delta(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i e^{\lambda_i t} + d\delta(t)$$



稳态与暂态响应

- 系统的受迫运动由稳态响应和暂态响应构成
- 分析方法：
  - 将输入信号分解成若干指数函数之和

$$u(t) = \sum_{j=1}^{m} u_j e^{\mu_j t}$$

  - 系统输出（不考虑初始条件）是单位脉冲响应与输入信号的卷积：

$$y=g*u$$

稳态与暂态响应

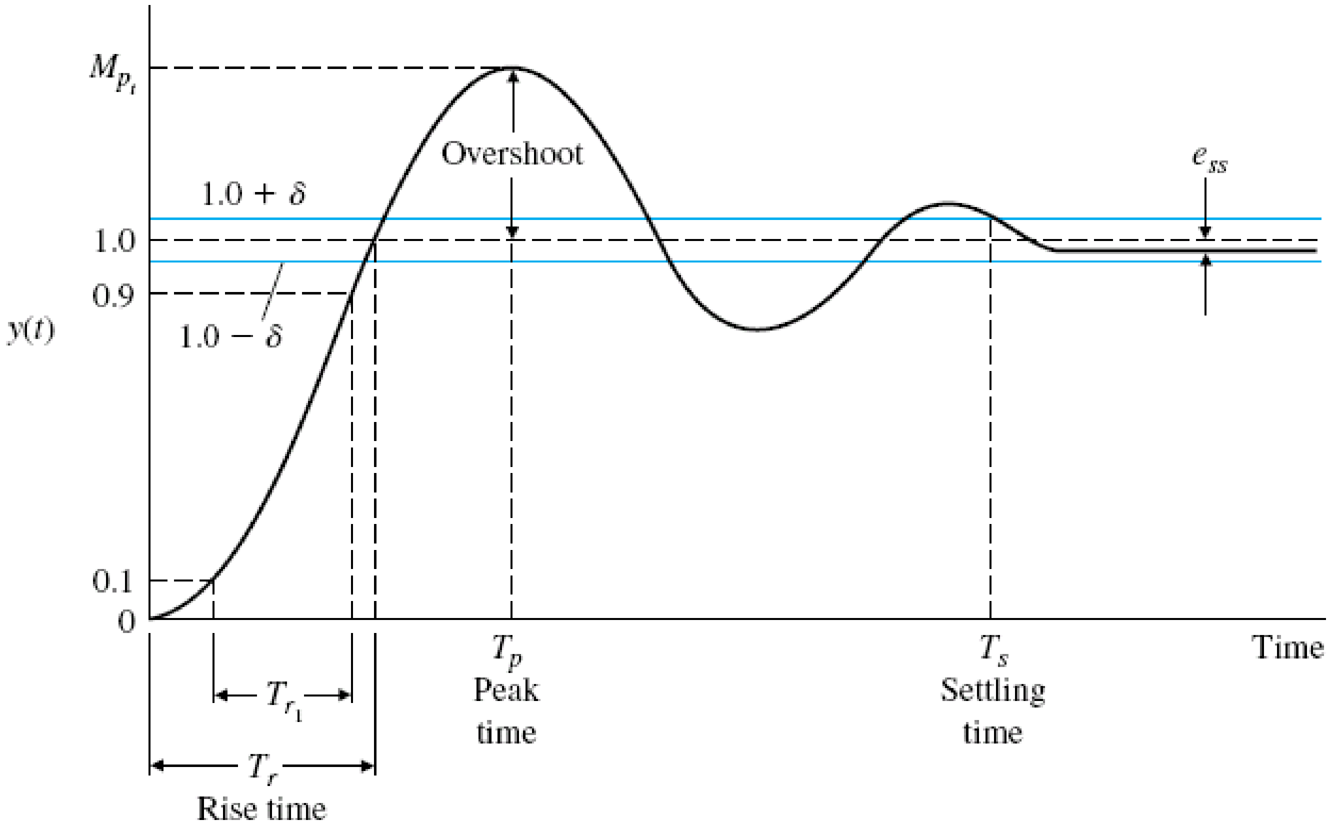
$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g_i u_j \mathrm{e}^{\lambda_i(t-\tau)} \mathrm{e}^{\mu_j \tau} d\tau \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g_i u_j \mathrm{e}^{\lambda_i t} \int_0^t \mathrm{e}^{(\mu_j-\lambda_i)\tau} d\tau \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{g_i u_j}{\lambda_i-\mu_j} \mathrm{e}^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{g_i u_j}{\mu_j-\lambda_i} \mathrm{e}^{\mu_j t}
\end{aligned}
$$

暂态响应，由特征值决定

稳态响应，由输入决定

单位阶跃响应与性能指标

- 控制系统的典型单位阶跃响应曲线



暂态性能指标

- **延迟时间**T_d:系统响应从0上升到稳态值的50%所需要的时间
- **上升时间**T_r:
  - 系统响应从0上升到稳态值所需时间(有振荡系统)
  - 系统响应从稳态值的10%上升到90%所需时间(无振荡系统)
- **峰值时间**T_p:系统响应达到最大峰值所需要的时间

暂态性能指标

- (最大)**超调量σ**：系统响应超出稳态值的最大偏离量(常以百分比表示)

$$\sigma\% \overset{def}{=} \frac{y(T_p)-y(\infty)}{y(\infty)}\times 100\% \qquad (3.1)$$

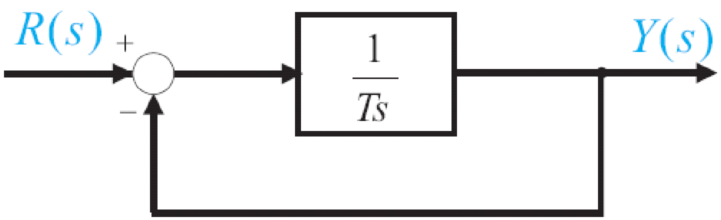
- **调节时间**Ts：系统响应与稳态值之差达到误差±△所需要的最小时间

$$|y(t)-y(\infty)| \le y(\infty)\Delta,\quad t \ge T_s$$

- **振荡次数**N：调节时间Ts内，$y(t)$偏离$y(\infty)$的振荡次数

3.3 一阶系统的暂态响应特性

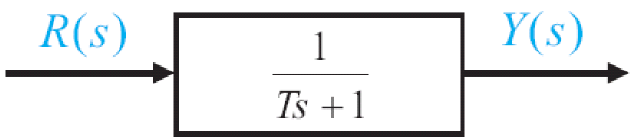
一阶系统的暂态性能指标



- **延迟时间** T_d:

$$y(t)\big|_{t=T_d} = 1 - e^{-T_d/T} = 0.5$$

$$\boxed{T_d = -T\ln(0.5) = 0.69T} \qquad (3.3)$$



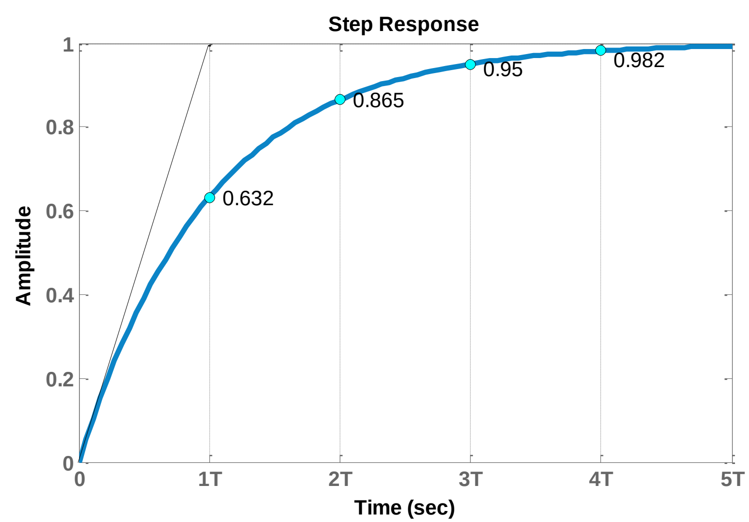
- **上升时间** T_r:

$$y(t_{0.1}) = 0.1 = 1 - e^{-t_{0.1}/T}$$

$$t_{0.1} = -T\ln 0.9 = 0.105T$$

$$y(t_{0.9}) = 0.9 = 1 - e^{-t_{0.9}/T}$$

$$t_{0.9} = -T\ln 0.1 = 2.303T$$



$$\boxed{T_r = t_{0.9} - t_{0.1} = 2.20T} \qquad (3.4)$$

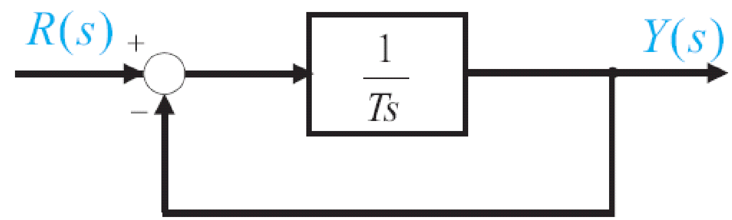
一阶系统的暂态响应特性

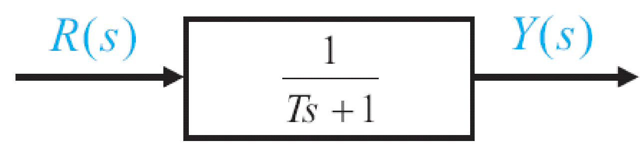
单位脉冲响应

$$r(t)=\delta(t), R(s)=1$$

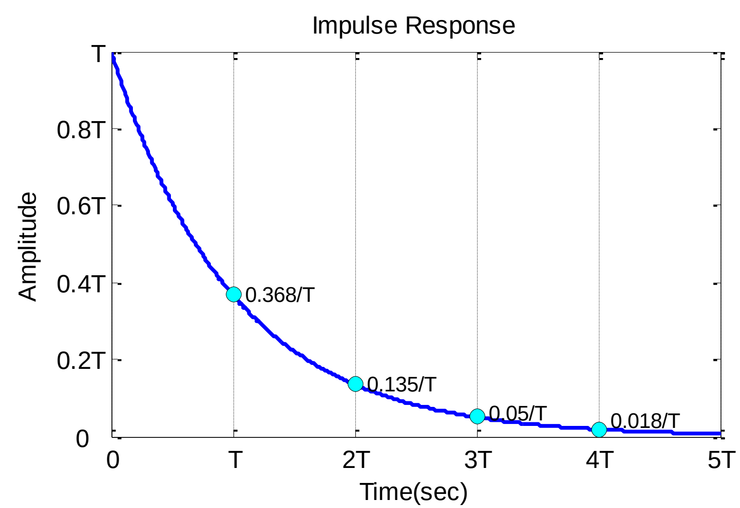
$$Y(s)=G(s)R(s)$$

$$=\frac{1}{Ts+1}1=\frac{1/T}{s+1/T}$$



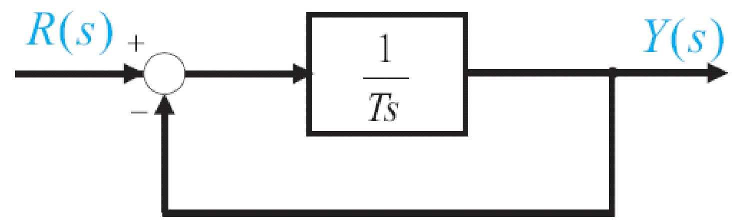


$$\boxed{y(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}, t\geq 0} \qquad (3.5)$$



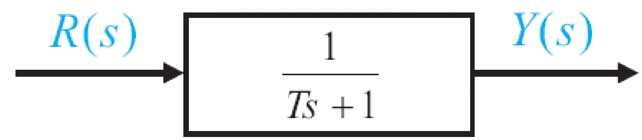
一阶系统的暂态响应特性

单位斜坡响应



$$r(t)=t1(t),R(s)=1/s^2$$

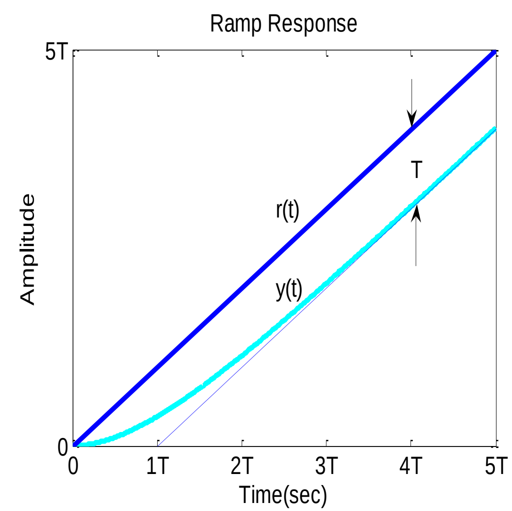
$$Y(s)=G(s)R(s)$$



$$=\frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T^2}{Ts+1}$$

$$\boxed{y(t)=t-T+Te^{-\frac{t}{T}}=t-T(1-e^{-\frac{t}{T}}),t\geq 0} \qquad (3.6)$$

$$\boxed{e(t)=r(t)-y(t)=T(1-e^{-\frac{t}{T}})} \qquad (3.7)$$



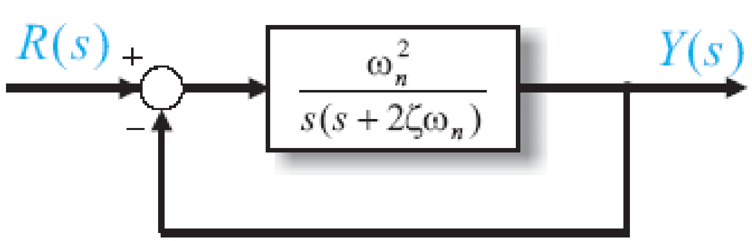
$$e(\infty)=T$$

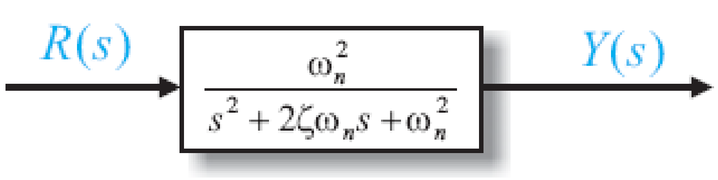
3.4 二阶规范系统的暂态响应

- 二阶规范系统(二阶典型(无零点)系统)
  - 闭环传递函数

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{3.8}$$

  - 典型结构图





二阶规范系统的暂态响应

- 二阶规范系统响应特性的讨论以闭环传函形式为准
- 特征方程 $$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0 \tag{3.9}$$
- 特征根 $$-p_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \tag{3.10}$$

  - $\zeta<0$, $\mathrm{Re}(-p_{1,2})>0$, 系统不稳定 (不讨论)
  - $\zeta=0$ 无阻尼
  - $0<\zeta<1$ 欠阻尼
  - $\zeta=1$ 临界阻尼
  - $\zeta>1$ 过阻尼

二阶规范系统单位阶跃响应

欠阻尼的情况($0<\zeta<1$)

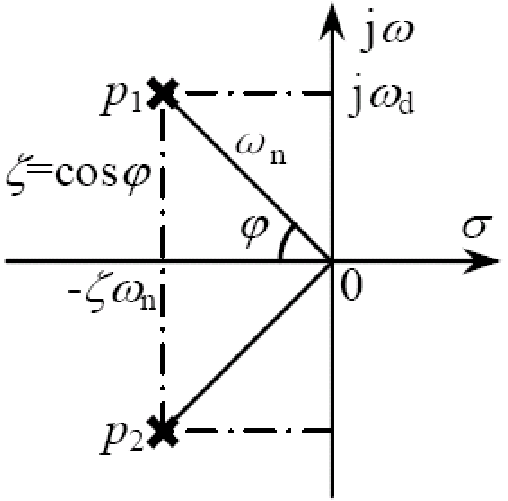
$$-p_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=\sigma \pm j\omega_d \qquad (3.11)$$

ω_n : 无阻尼自然振荡(角)频率

$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 阻尼自然振荡(角)频率

ζ : 阻尼比

σ : 阻尼系数或衰减系数



二阶规范系统单位阶跃响应

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n+\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)} \qquad (3.12)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=y(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)$$

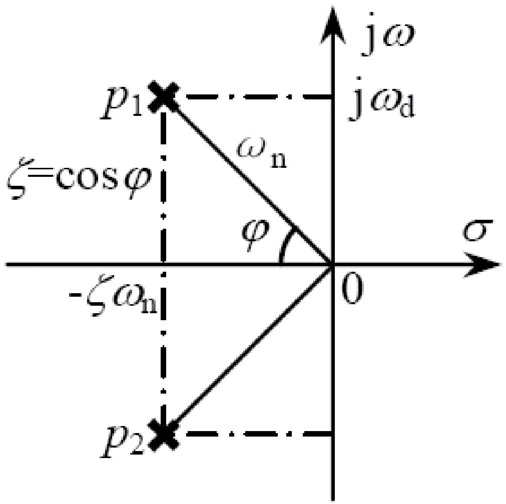
$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\varphi\right),t\geq 0 \qquad (3.13)$$

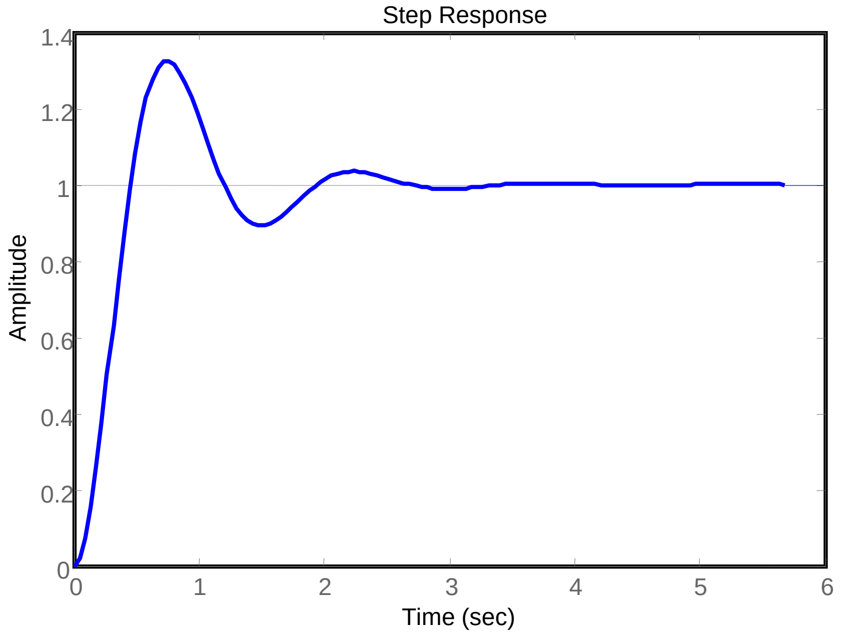
$$\varphi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \qquad (3.14)$$

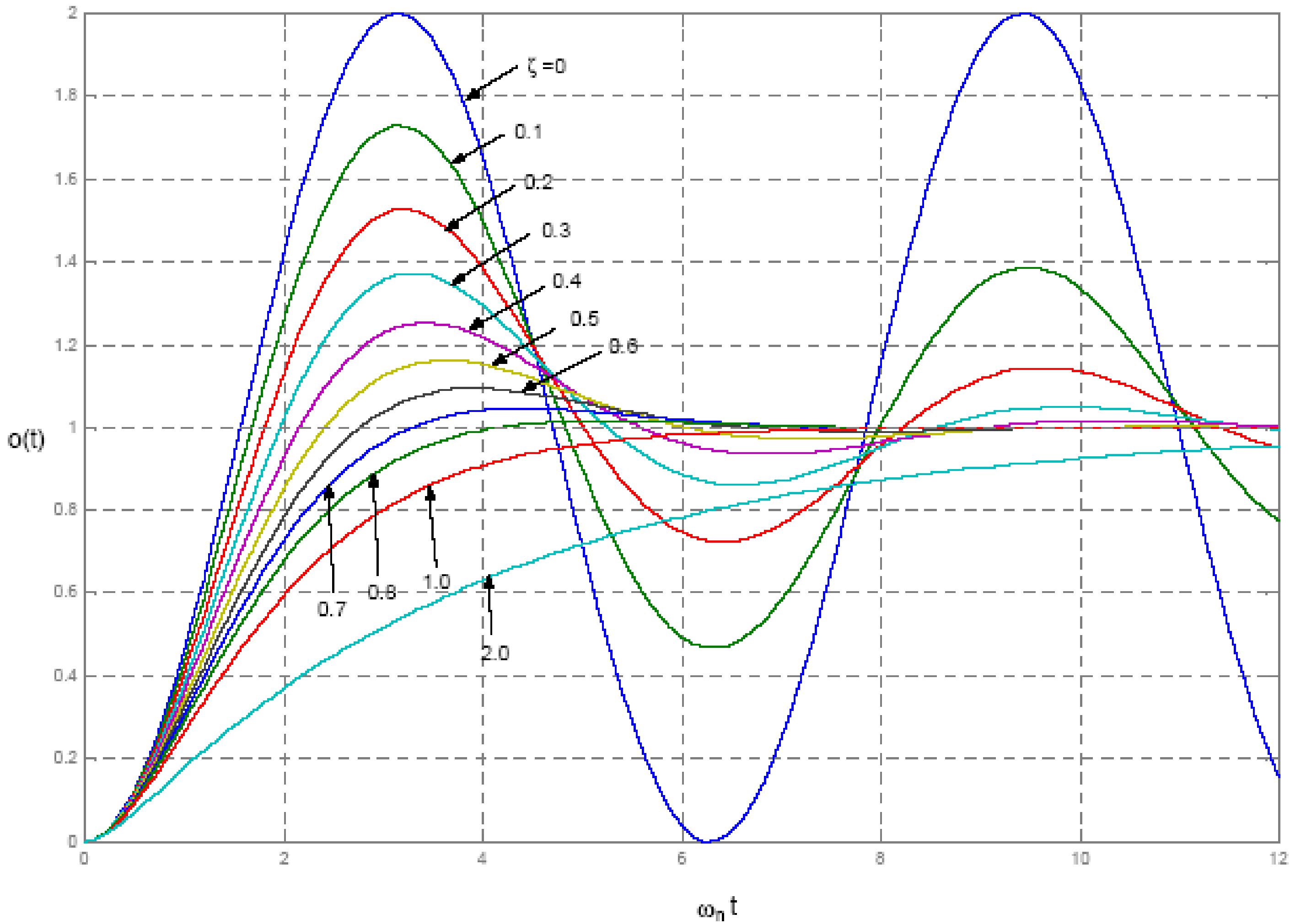
二阶规范系统单位阶跃响应

(3.13)是一个振幅按指数衰减的振荡;

$y(\infty)=1$, 无稳态误差；







ζ =0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
1.0
2.0
o(t)
$\omega_n t$
0
2
4
6
8
10
12
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

二阶规范系统单位阶跃响应

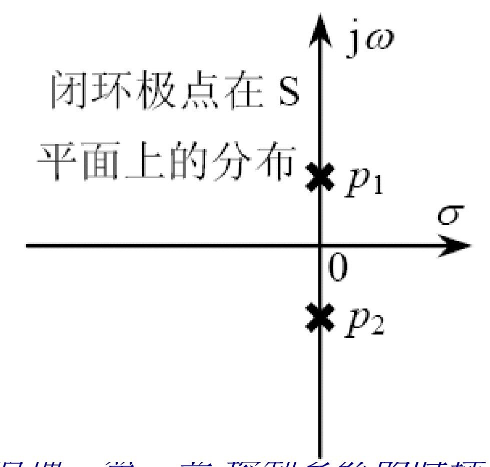
无阻尼的情况($\zeta = 0$)

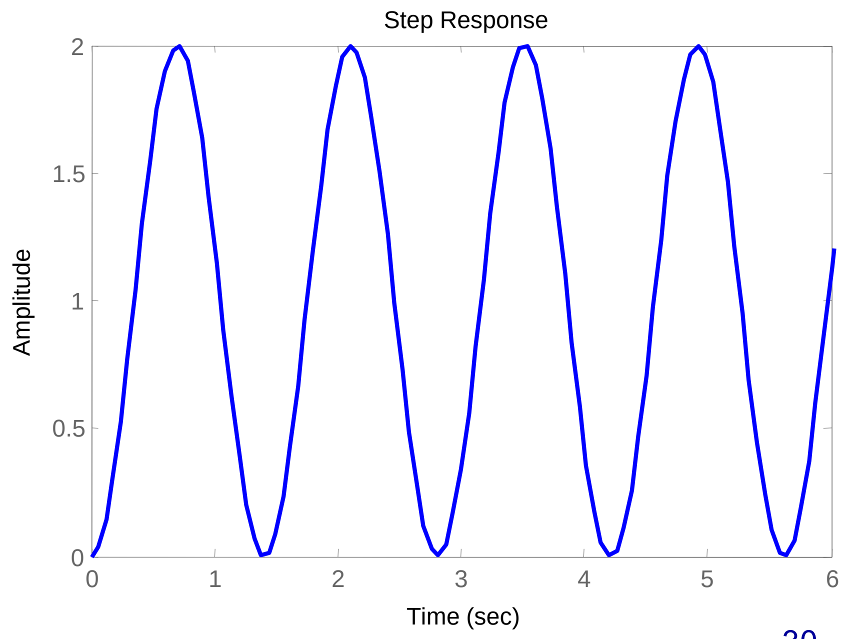
由(3.12), (3.13)令$\zeta = 0$得到无阻尼时的阶跃响应

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + \omega_n^2)} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$y(t) = 1 - \cos\omega_n t, \quad t \geq 0 \tag{3.15}$$

(3.15)是一个无衰减的振荡;





二阶规范系统单位阶跃响应

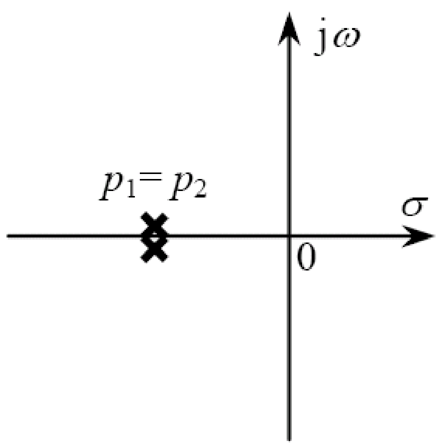
临界阻尼的情况($\zeta=1$)

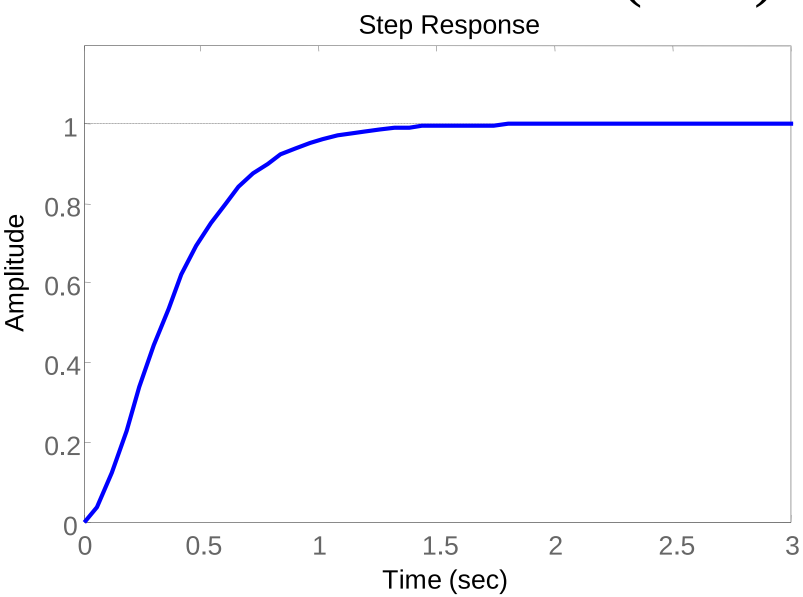
$$-p_{1,2}=\sigma\pm j\omega_d=-\omega_n$$

$$Y(s)=\frac{\omega_n^{\;2}}{(s+\omega_n)^2}\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\omega_n}-\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

$$y(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t),\quad t\geq 0 \qquad (3.16)$$

(3.16)是无振荡的上升曲线;





二阶规范系统单位阶跃响应

过阻尼的情况($\zeta > 1$)

$$-p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\omega_n(\zeta \mp \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

$$Y(s) = \frac{\omega_n{}^2}{(s+p_1)(s+p_2)}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{-1/p_1}{s+p_1} + \frac{1/p_2}{s+p_2}\right)$$

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{-1}{p_1}e^{-p_1 t} + \frac{1}{p_2}e^{-p_2 t}\right), \quad t \ge 0 \qquad (3.17)$$

若令 $T_1 = \dfrac{1}{\left|-p_1\right|} = \dfrac{1}{p_1} = \dfrac{1}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$

$$T_2 = \frac{1}{\left|-p_2\right|} = \frac{1}{p_2} = \frac{1}{\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

为过阻尼二阶规范系统的两个时间常数，可得

二阶规范系统单位阶跃响应

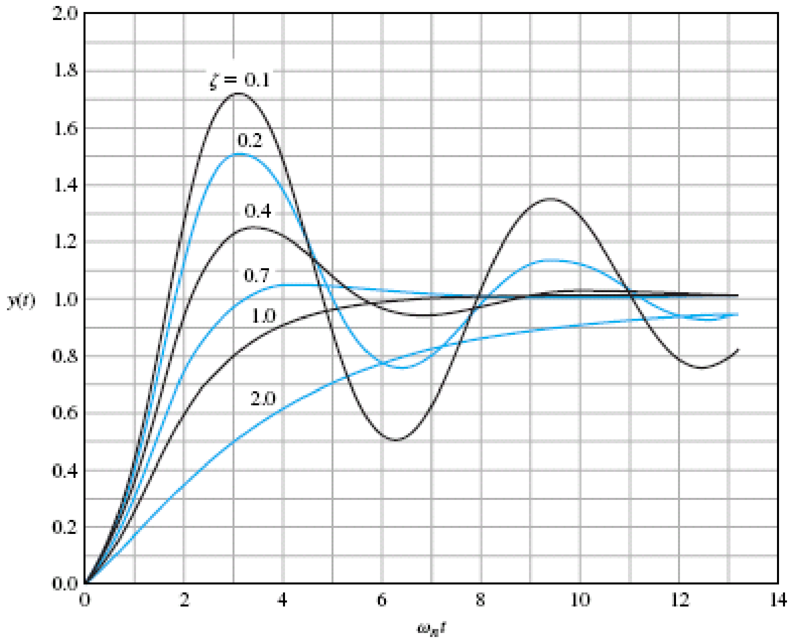
$$y(t)=1-\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(T_1e^{-\frac{t}{T_1}}-T_2e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$$

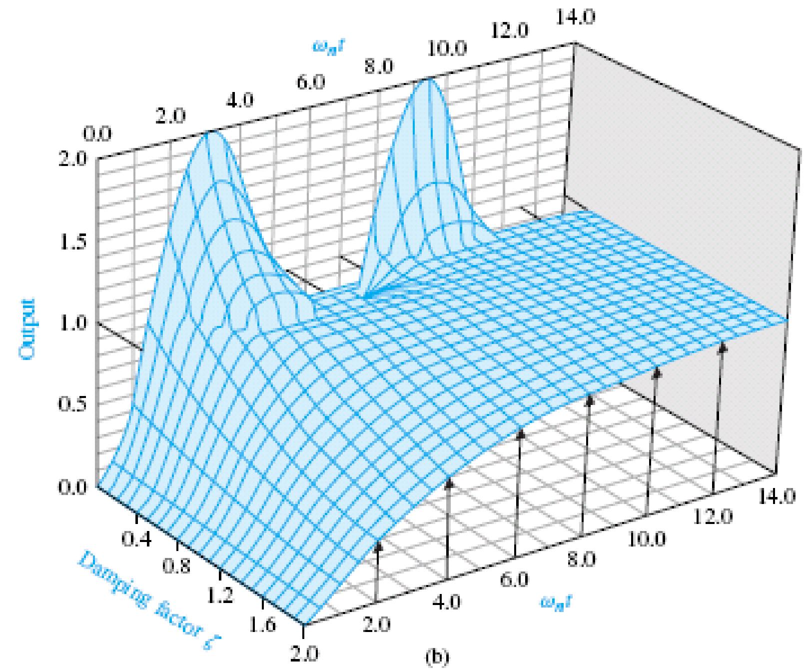
$$=1-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{1}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-\frac{t}{T_1}}-\frac{1}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-\frac{t}{T_2}}\right),t\geq 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{|-p_2|}{|-p_1|}=\frac{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}=\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)^2$$

当$\zeta>>1,T_1>>T_2,e^{-\frac{t}{T_2}}$项的衰减比$e^{-\frac{t}{T_1}}$项快得多($e^{-\frac{t}{T_1}}$项的系数也较大)对于系统暂态响应$e^{-\frac{t}{T_2}}$项在后期的影响很小,因此当$\zeta>>1,T_1>>T_2,(|-p_2|>>|-p_1|)$,系统暂态响应近似于阶系统

二阶规范系统阶跃响应曲线

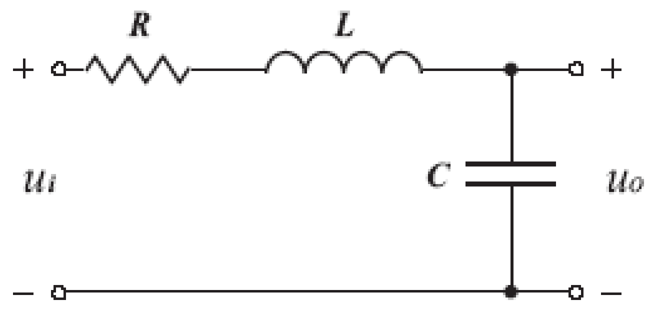




ζ	$\zeta=0$ 无阻尼	$0<\zeta<1$ 欠阻尼	$\zeta=1$ 临界阻尼	$\zeta<1$ 过阻尼
响应	无衰减振荡	衰减振荡	无振荡	无振荡

二阶规范系统的暂态响应特性

<例3.1>: 如图RLC串联网络



解：传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

$$\omega_n=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad 2\zeta\omega_n=\frac{R}{L} \qquad \zeta=\frac{R}{2\omega_n L}=\frac{1}{2}\sqrt{LC}\frac{R}{L}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{\frac{1}{Cs}}\frac{R}{sL}}$$

ζ大□R较大(R为耗能元件) Ls,$1/Cs$ 较小(L,C储能元件)

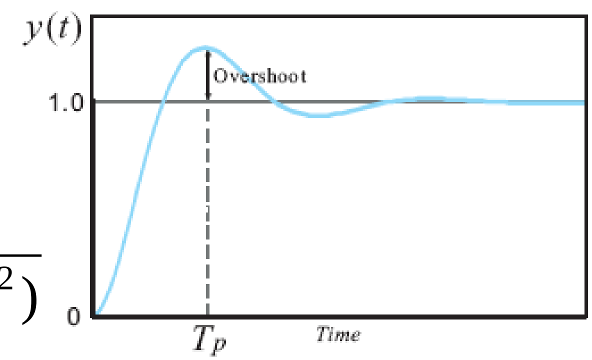
R较大,能耗较大(如上串联电路中)磁能和场能相互转换过程中在R上耗能较多，使得振荡衰减较快，甚至不能产生振荡。

二阶规范系统的暂态响应特性

峰值时间 T_p: 响应曲线第一次达到峰值的时间

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=T_p}=0 \qquad sY(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)}$$



$$\frac{dy(t)}{dt}=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t=0$$

$$\sin\omega_d t=0 \Rightarrow \omega_d t=n\pi \Rightarrow t=n\pi/\omega_d,(n=0,1,2,\cdots)$$

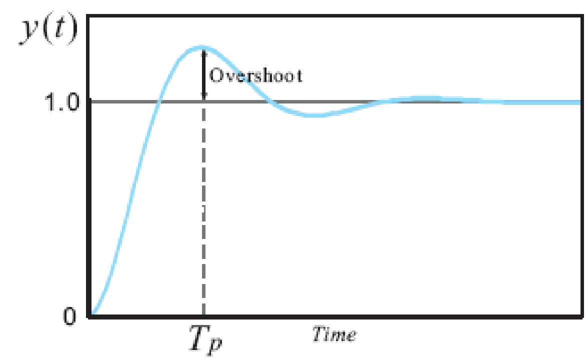
第一次到达峰值, 取$n=1$

$$\boxed{T_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad (3.19)$$

二阶规范系统的暂态响应特性

2) 超调量 $\sigma\%$：

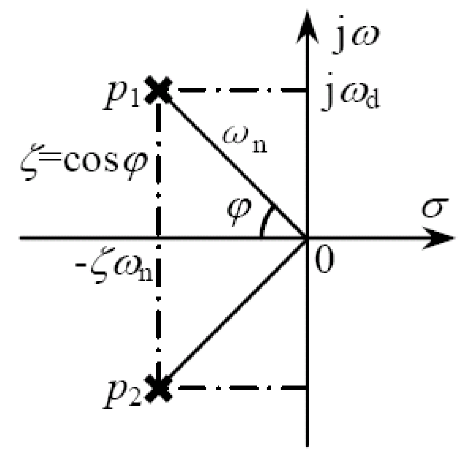
$$t = T_p = \pi / \omega_d$$



$$\sigma\% = \left| y(T_p) - 1 \right| \times 100\%$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_p} \sin(\omega_d T_p + \varphi)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \exp\left(-\zeta\omega_n \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \sin(\pi + \varphi)$$

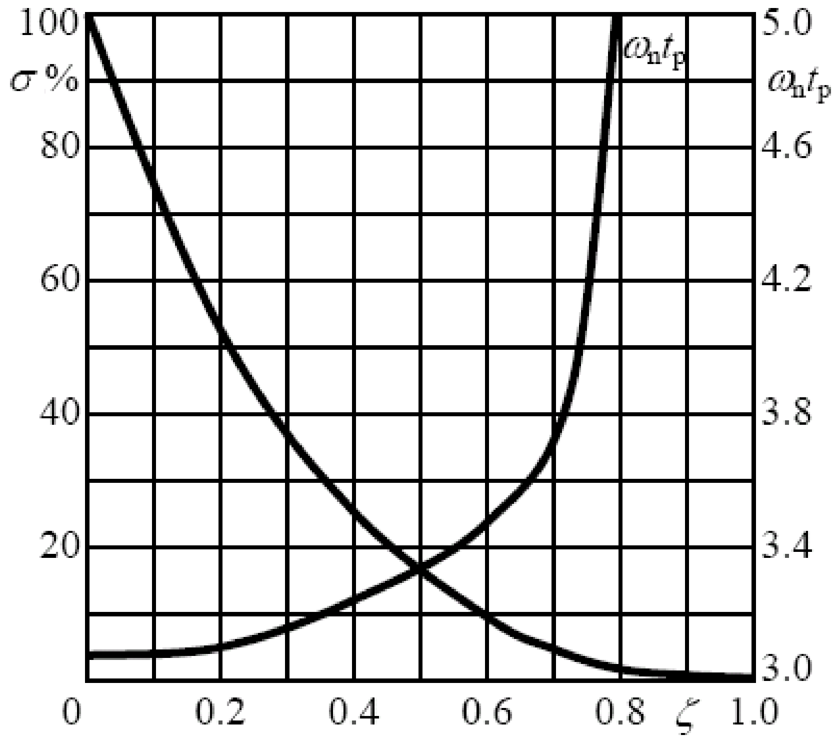


又因为 $\sin(\pi+\varphi) = -\sin\varphi = -\sqrt{1-\zeta^2}$

$$\boxed{\sigma\% = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \times 100\%} \qquad (3.20)$$

二阶规范系统的暂态响应特性

注意：超调量$\sigma\%$只是ζ的函数，与 ω_n 无关

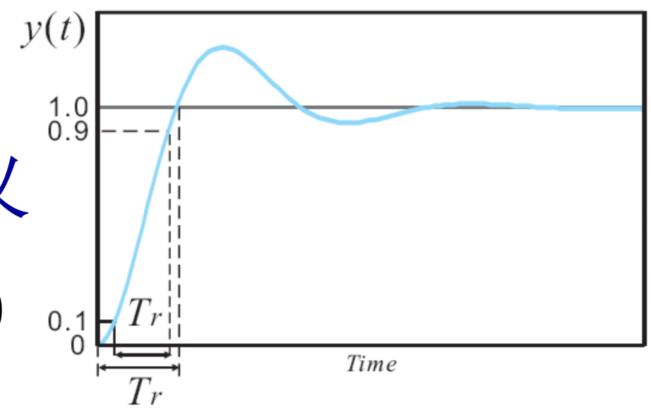


$\sigma\%$以及$\omega_n T_p$与ζ的关系

二阶规范系统的暂态响应特性

3) 上升时间 T_r:

采用“0→100%”的上升时间定义



$$y(T_r) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_r} \sin(\omega_d T_r + \varphi)$$

$$= 1$$

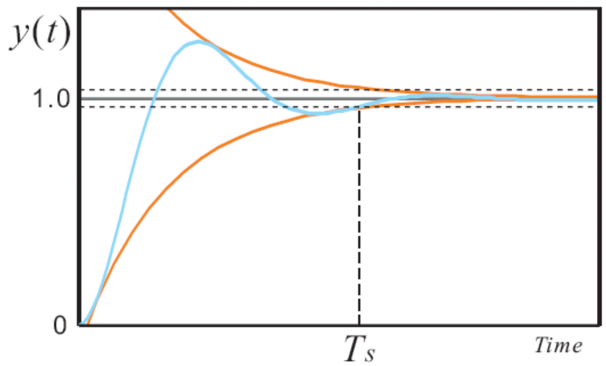
令 $\sin(\omega_d T_r + \varphi) = 0 \Rightarrow \omega_d T_r + \varphi = \pi$

$$\boxed{T_r = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi - \varphi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad (3.21)$$

二阶规范系统的暂态响应特性

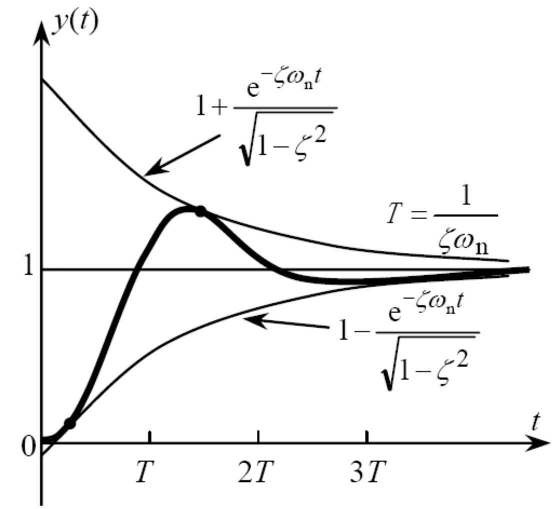
4) 调节时间 T_s:

$$t \ge T_s : \left| y(t) - y(\infty) \right| \le y(\infty)\Delta$$



响应曲线的包络线： $1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) \right| \le \Delta$$



为了便于计算,近似取

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_s} \approx \Delta$$

$$\boxed{T_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{1}{\Delta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{\zeta\omega_n}\left[-\ln\Delta - \frac{1}{2}\ln(1-\zeta^2) \right]} \qquad (3.22)$$

二阶规范系统的暂态响应特性

$$T_s(2\%)=\frac{1}{\zeta\omega_n}\left[4-\frac{1}{2}\ln(1-\zeta^2)\right] \qquad (3.23)$$

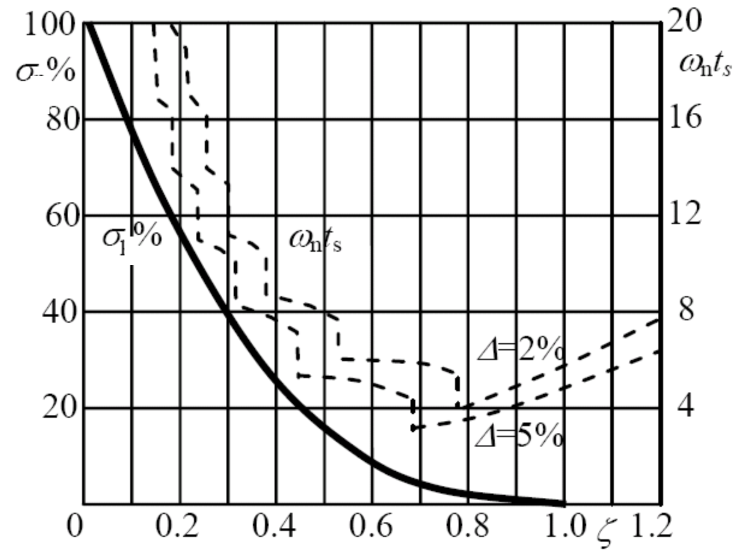
$$T_s(5\%)=\frac{1}{\zeta\omega_n}\left[3-\frac{1}{2}\ln(1-\zeta^2)\right] \qquad (3.24)$$

对于$0<\zeta<0.9$,近似取

$$\boxed{T_s(2\%)=\frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad T_s(5\%)=\frac{3}{\zeta\omega_n}}$$

$$T_s(2\%)=\frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad (3.25)$$

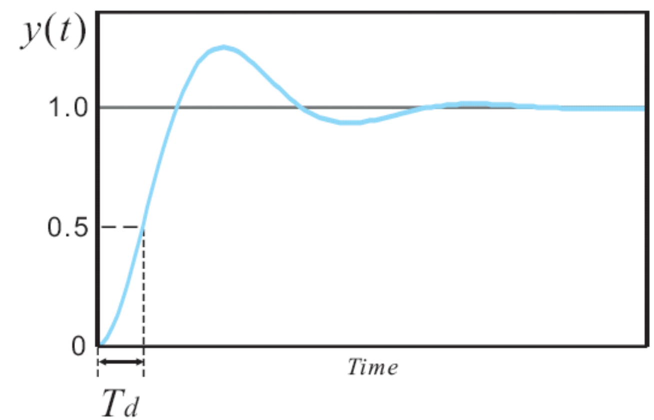
$$T_s(5\%)=\frac{3}{\zeta\omega_n} \qquad (3.26)$$



T_s的精确曲线实际上是不连续的,由T_s的定义,可知造成T_s为不连续的曲线,如图所示.

二阶规范系统的暂态响应特性

5) 延迟时间 T_d:

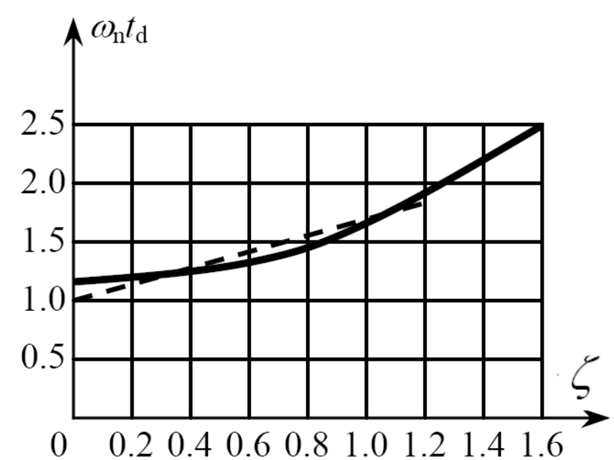


$$t = T_d, y(T_d) = 0.5$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_d} \sin(\omega_d T_d + \varphi) = 0.5$$

T_d的求解由隐函数给出

$$\boxed{\omega_n T_d = \frac{1}{\zeta} \ln \frac{2\sin(\omega_d T_d + \varphi)}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad (3.27)$$



其曲线如图所示

二阶规范系统的暂态响应特性

6) 振荡次数 *N*:

阻尼振荡周期:

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

由公式(3.25)或(3.26)可以给出振荡次数N 的近似计算公式:

$$\boxed{N = \frac{T_s}{\tau_d} = \frac{(3\sim4)\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi\zeta}} \qquad (3.28)$$

二阶规范系统的暂态响应特性

注： 兼顾超调量和响应时间，控制系统常选择

$\zeta = 0.4\sim0.8$，相应的 $\sigma\% = 25.4\%\sim1.5\%$

实际控制系统常选取工作在欠阻尼状态，只有当不允许出现超调或对象本身惯性很大时，才采用接近临界阻尼的过阻尼状态。

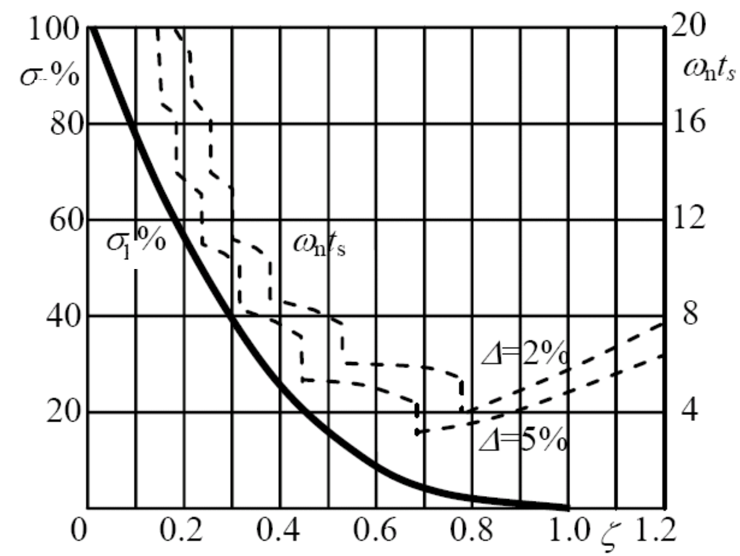
二阶规范系统的暂态响应特性

二阶工程最佳参数

某些控制系统采用所谓“二阶工程最佳参数”作为控制系统工程设计的依据，即选择参数使

$$\zeta = 1/\sqrt{2} = 0.707, \text{相应的} \sigma\% = e^{-\pi} \times 100\% = 4.3\%$$

由 $\sigma\%$ 和 $\omega_n T_s$ 与 ζ 的关系曲线可见，此时控制系统较好地兼顾了暂态响应和平稳性与快速性。



零点vs系统响应

对于二阶规范系统，添加一个闭环零点，则其闭环传函为:

$$T(s)=\frac{Y_Z(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^{\ 2}(\tau s+1)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}} \qquad (3.29)$$

$$=\frac{\omega_n^{\ 2}(s+z)}{z(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})}$$

其中，$-z=-\dfrac{1}{\tau}$为闭环零点

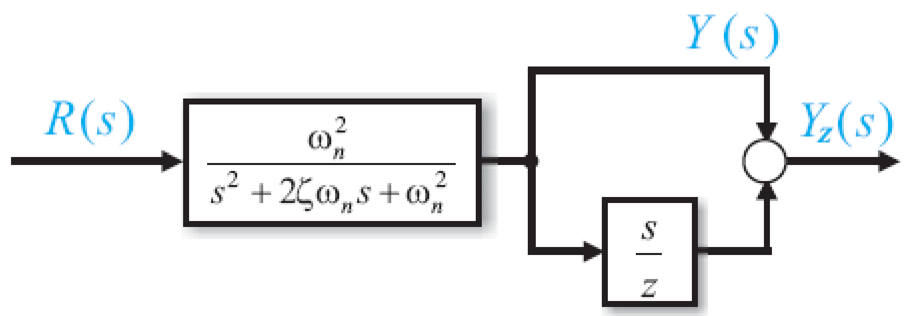
零点vs系统响应

- 具有零点的二阶系统的单位阶跃响应

$$r(t)=1(t), R(s)=1/s; \quad 0<\zeta<1$$

$$\Phi_Z(s)=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}+\frac{s}{z}\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

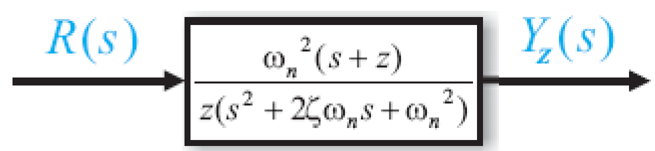
其等效结构图



$$Y_Z(s)=Y(s)+\frac{s}{z}Y(s)$$

考虑到零初始条件

$$y_Z(t)=y(t)+\frac{1}{z}\dot{y}(t)$$



零点vs系统响应

$$\frac{1}{z}\dot{y}(t)=\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{z\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\zeta\omega_n\sin(\omega_d t+\varphi)-\omega_d\cos(\omega_d t+\varphi)\right)$$

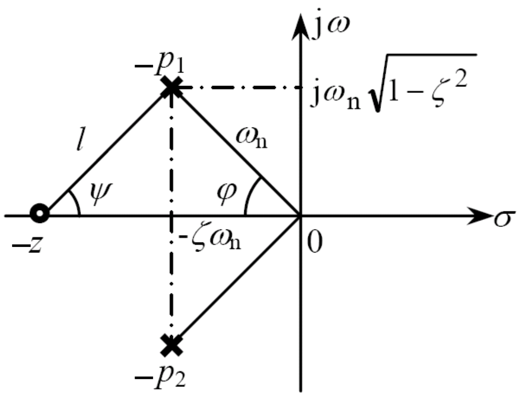
$$y_z(t)=y(t)+\frac{1}{z}\dot{y}(t)$$

$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{z\sqrt{1-\zeta^2}}\left((z-\zeta\omega_n)\sin(\omega_d t+\varphi)-\omega_d\cos(\omega_d t+\varphi)\right)$$

$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{l}{z}\sin(\omega_d t+\varphi+\psi),t\geq 0 \qquad (3.30)$$

其中$l=\sqrt{(z-\zeta\omega_n)^2+\omega_d^{\ 2}}=\sqrt{z^2-2\zeta\omega_n z+\omega_n^{\ 2}}$

$$\psi=tg^{-1}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{z-\zeta\omega_n},\quad \varphi=tg^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

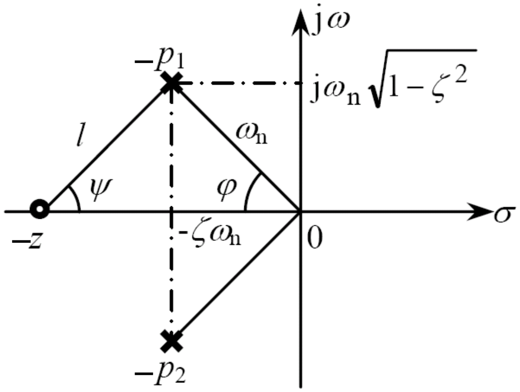


零点vs系统响应

$$\frac{l}{z}=\frac{\sqrt{z^2-2\zeta\omega_n z+\omega_n^{\ 2}}}{z}=\sqrt{1-\frac{2\zeta\omega_n}{z}+\frac{\omega_n^{\ 2}}{z^2}}$$

$$=\frac{1}{\zeta}\sqrt{\zeta^2-2r\zeta^2+r^2}$$

其中$r=\dfrac{\zeta\omega_n}{z}$为复数极点实部与零点比



$$\boxed{y(t)=1-\frac{\sqrt{\zeta^2-2r\zeta^2+r^2}}{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\varphi+\psi),t\geq 0} \qquad (3.31)$$

零点vs系统响应

- 具有零点的二阶系统的暂态特性

1) 上升时间 T_{rz}:

$$T_{rz}=\frac{\pi-\varphi-\psi}{\omega_d}=T_r-\frac{\psi}{\omega_d} \quad \rightarrow \text{提前} \qquad (3.32)$$

2) 峰值时间 T_p:

$$T_{pz}=\frac{\pi-\psi}{\omega_d}=T_p-\frac{\psi}{\omega_d} \quad \rightarrow \text{提前} \qquad (3.33)$$

3) 超调量 $\sigma\%$:

$$\sigma_z\%=\frac{1}{\zeta}\sqrt{\zeta^2-2r\zeta^2+r^2}e^{-\zeta\omega_n T_{pz}}\times 100\%$$

$$=\frac{l}{z}e^{-\zeta\omega_n T_p}e^{\zeta\omega_n\frac{\psi}{\omega_d}}=\sigma\%\frac{l}{z}e^{\frac{\zeta\psi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \rightarrow \text{增大} \qquad (3.34)$$

零点vs系统响应

4) 调节时间 T_{sz}:

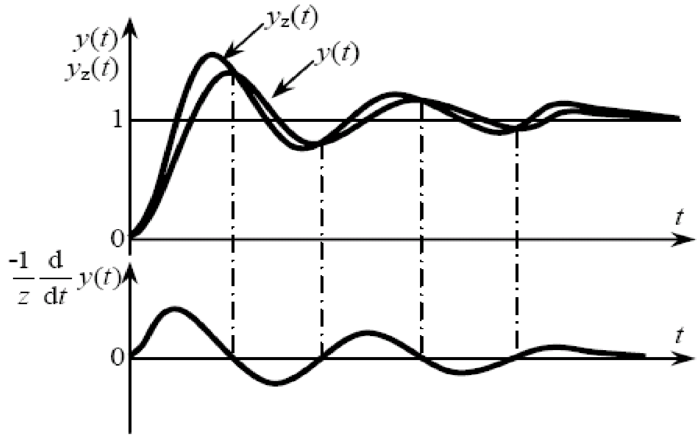
与求解 T_s 类似，近似取

$$\frac{l}{z}\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}=\Delta$$

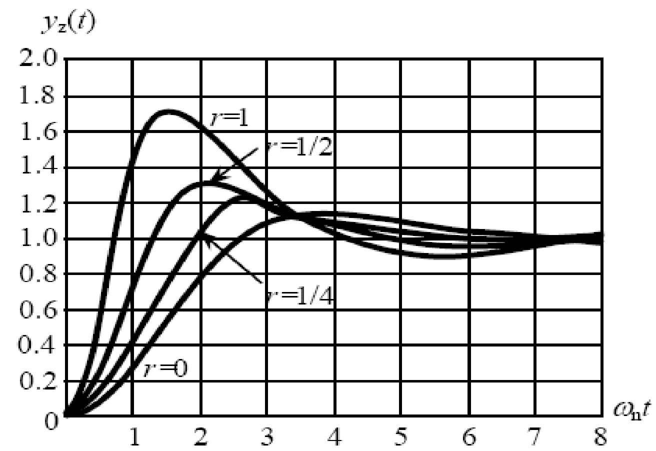
$$T_{sz}=\frac{1}{\zeta\omega_n}\left[-\ln\Delta-\frac{1}{2}\ln(1-\zeta^2)+\ln\frac{l}{z}\right]$$

$$=T_s+\frac{1}{\zeta\omega_n}\ln\frac{l}{z} \qquad \rightarrow 加长 \tag{3.35}$$

零点vs系统响应



(a)闭环零点对系统暂态响应的影响



(b)单位阶跃响应曲线(ζ=0.5)

添加零点对原无零点规范二阶系统性能的影响：

峰值时间提前；

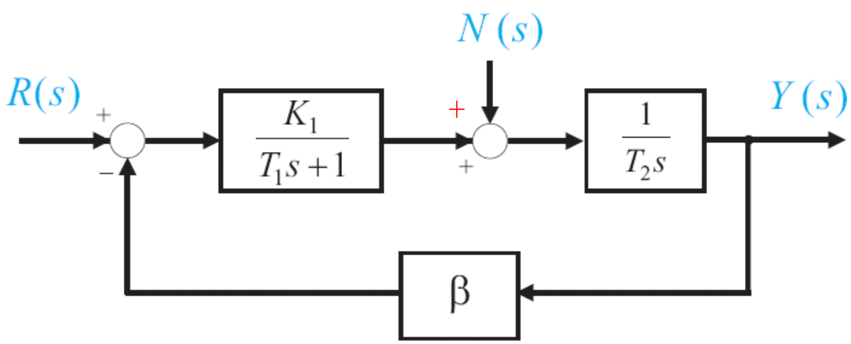
超调量增大(振荡加剧)；

调节时间增长

$$\frac{z}{\zeta\omega_n}=\frac{1}{r}$$ 越小，影响越大

零点vs系统响应

<例3.2>: 负载作用下的二阶系统



解： 当参考输入 $r(t)$ 作用下时 ($n(t) = 0$):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_1}{T_1T_2s^2 + T_2s + \beta K_1}$$

无零点的二阶系统

当负载 $n(t)$ 作用下时 ($r(t)=0$):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{T_1s + 1}{T_1T_2s^2 + T_2s + \beta K_1}$$

有零点的二阶系统

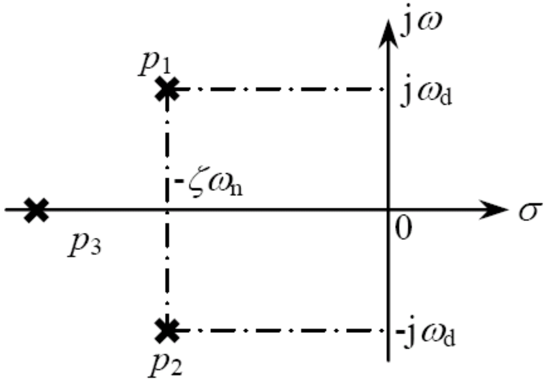
3.5 三阶系统的暂态响应特性

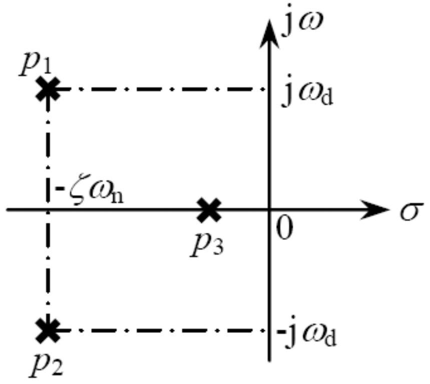
- 典型三阶系统的**闭环传递函数**

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^{\ 2}}{(Ts+1)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})}$$

$$=\frac{\omega_n^{\ 2}p}{(s+p)\left[(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^{\ 2}(1-\zeta^2)\right]} \qquad (3.36)$$

其中 $p=1/T$





三阶系统的暂态响应特性

- 典型三阶系统的单位阶跃响应

当 $0<\zeta<1, r(t)=1(t), R(s)=1/s$

$$Y(s)=\frac{\omega_n{}^2 p}{(s+p)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2)}\frac{1}{s}=\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s+p}+\frac{A_2 s+A_3}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

$$=\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s+p}+\frac{A_2(s+\zeta\omega_n)-A_2\zeta\omega_n+A_3}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

$$A_0=1 \quad A_1=\frac{-1}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1} \quad A_2=\frac{-\zeta^2\beta(\beta-2)}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}$$

$$-A_2\zeta\omega_n+A_3=\frac{-\beta\zeta\omega_n[\zeta^2(\beta-2)+1]}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}=\frac{-\beta\zeta[\zeta^2(\beta-2)+1]\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\left[\zeta^2\beta(\beta-2)+1\right]\sqrt{1-\zeta^2}}$$

三阶系统的暂态响应特性

$$y(t)=1-\frac{e^{-pt}}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}$$

$$\times\left[\zeta^2\beta(\beta-2)\cos\omega_d t+\frac{\beta\zeta[\zeta^2(\beta-2)+1]}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right]$$

$$=1-\frac{e^{-\beta\zeta\omega_n t}}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}-\frac{\beta\zeta e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}}\sin(\omega_d t+\gamma),t\geq 0 \qquad (3.37)$$

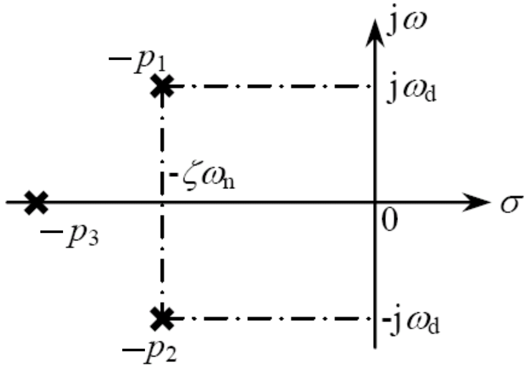
$$\gamma=tg^{-1}\frac{\zeta(\beta-2)\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta^2(\beta-2)+1}$$

$$\beta=\frac{p}{\zeta\omega_n},\left(\text{比较:有零点二阶系统}\frac{1}{r}=\frac{z}{\zeta\omega_n}\right)$$

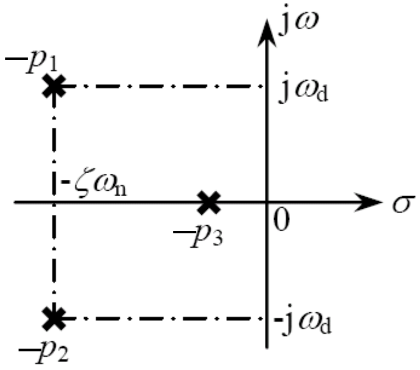
注：$\zeta^2\beta(\beta-2)+1=\zeta^2\beta^2-2\zeta^2\beta+1=\zeta^2(\beta-1)^2+(1-\zeta^2)>0$

$\Rightarrow e^{-pt}$项的系数总是为负数

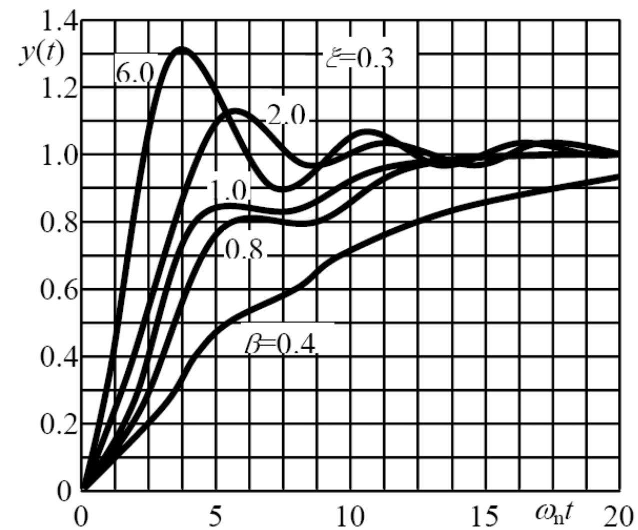
三阶系统的暂态响应特性



(a)β>1 时



(b)β<1 时



- 讨论:

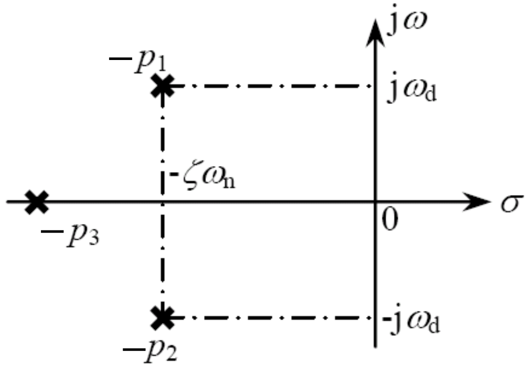
1) $y(t)$与$\zeta,\omega_n,\beta=\dfrac{p}{\zeta\omega_n}$有关

$\beta\to\infty$，相当于二阶系统；

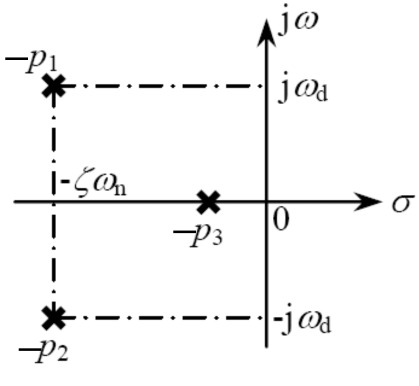
$\beta>>1$，共轭复数极点为主导极点，响应主要呈现为二阶特性；

$\beta<<1$，实极点为主导极点,响应主要呈现为一阶特性；

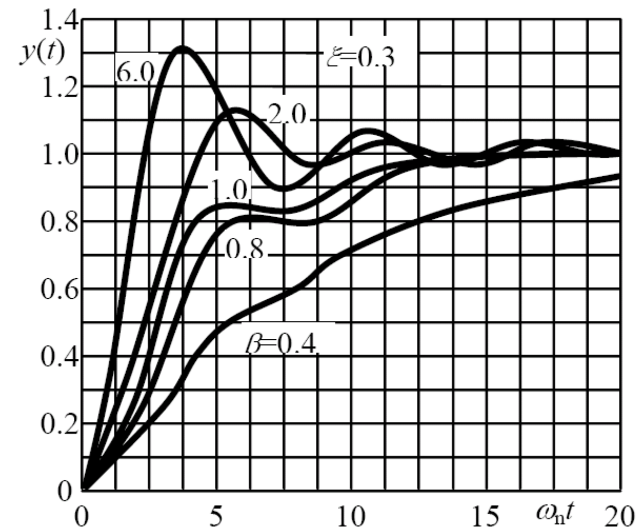
三阶系统的暂态响应特性



(a)$\beta>1$ 时



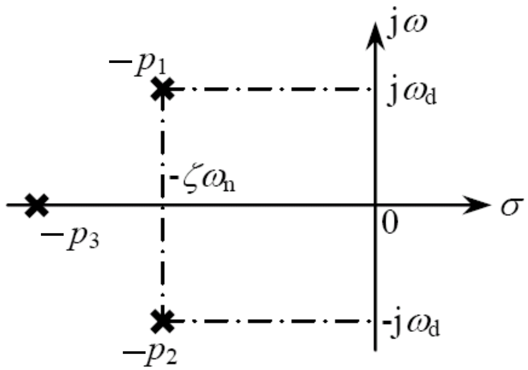
(b)$\beta<1$ 时



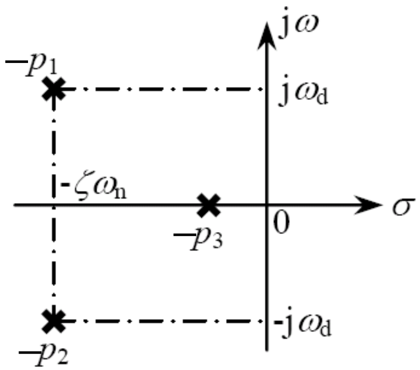
- 讨论:

2) 当$\beta\geq5$左右(或者$\beta\leq1/5$左右)，可按照主导极点共轭复数极点(或按照主导极点实极点)估算暂态响应特性

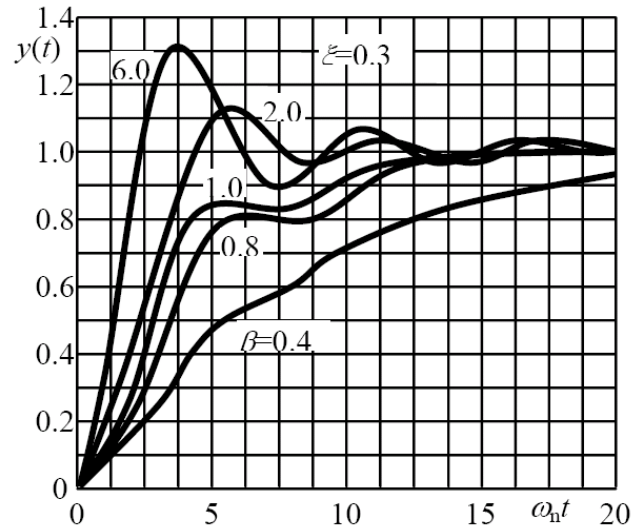
三阶系统的暂态响应特性



(a)β>1 时

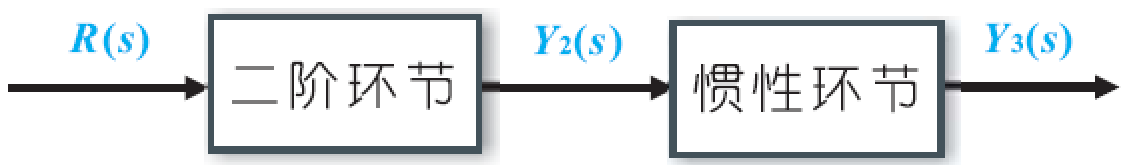


(b)β<1 时



- **讨论:**

3) 实极点的影响：振荡性减弱，超调量减小，响应速度变慢，相当于增加了系统的惯性；

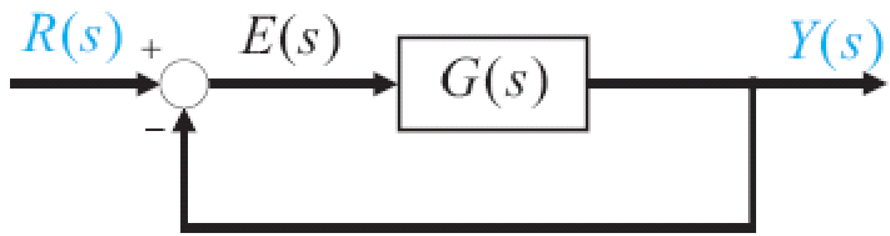


三阶系统的暂态响应特性

- 高阶控制系统的增益，常调整到使系统有一对闭环共轭复数主导极点。稳定系统中这一对共轭复数主导极点会减小非线性因素(如死区、间隙等)对系统性能的影响。

3.6 控制系统的稳态误差

3.6.1 单位反馈系统的稳态误差



误差信号

$$e(t)=r(t)-y(t)$$

$$E(s)=R(s)-Y(s)$$

$$E(s)=R(s)-\frac{G(s)}{1+G(s)}R(s)=\frac{1}{1+G(s)}R(s)=\Phi_e(s)R(s) \qquad (3.39)$$

$$\Phi_e(s)=\frac{1}{1+G(s)}=\frac{1}{1+G_k(s)}$$ 称为误差传递函数

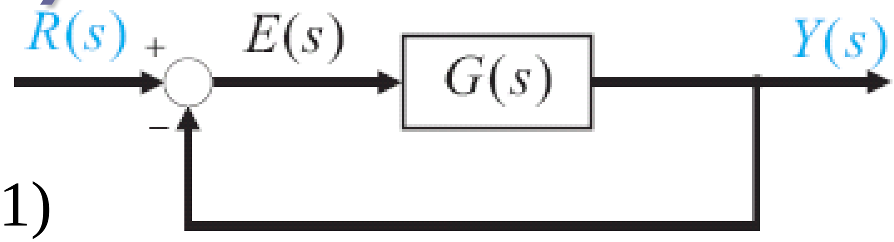
稳态误差 $$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)} \qquad (3.41)$$

稳态误差由**开环传递函数**和**输入**决定

单位反馈系统的稳态误差

开环传递函数(*n*阶系统)

$$G(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(T_i s+1)}{s^N\prod_{j=1}^{n-N}(\tau_j s+1)} \qquad (3.41)$$



N: 开环传递函数$G(s)$中零极点的重数，即串联的积分环节的个数，称为系统的类型(或无差阶数)

$N=0,1,2,\ldots$ 分别称为0型,1型,2型,…系统

单位反馈系统的稳态误差

以**静态误差系数**给出典型输入下的系统的稳态误差:

1) 阶跃输入: $R(s)=\dfrac{A}{s}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)}\frac{A}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{A}{1+G(s)} \qquad (3.42)$$

静态位置误差系数

$$K_p\overset{def}{=}\lim_{s\to 0}G(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^N} \qquad (3.43)$$

稳态误差

$$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p} \qquad (3.44)$$

0型系统: $K_p=K \quad e_{ss}=\dfrac{A}{1+K}$

1型,2型系统: $K_p=\infty \quad e_{ss}=0$

单位反馈系统的稳态误差

2) 斜坡输入: $R(s)=\dfrac{A}{s^2}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{A}{s[1+G(s)]}=\lim_{s\to 0}\frac{A}{sG(s)} \qquad (3.45)$$

静态速度误差系数 $$K_v \overset{def}{=} \lim_{s\to 0} sG(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{N-1}} \qquad (3.46)$$

稳态误差 $$e_{ss}=\frac{1}{K_v} \qquad (3.47)$$

0型系统: $K_v=0$ $e_{ss}=\infty$

1型系统: $K_v=K$ $e_{ss}=\dfrac{A}{K}$

2型系统: $K_v=\infty$ $e_{ss}=0$

单位反馈系统的稳态误差

3) 抛物线输入： $R(s)=\dfrac{A}{s^3}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{A}{s^2[1+G(s)]}=\lim_{s\to 0}\frac{A}{s^2G(s)} \tag{3.48}$$

静态加速度误差系数 $$K_a \overset{def}{=} \lim_{s\to 0} s^2G(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{N-2}} \tag{3.49}$$

稳态误差 $$e_{ss}=\frac{1}{K_a} \tag{3.50}$$

0型, 1型系统： $K_a=0 \qquad e_{ss}=\infty$

2型系统： $K_a=K \qquad e_{ss}=\dfrac{A}{K}$

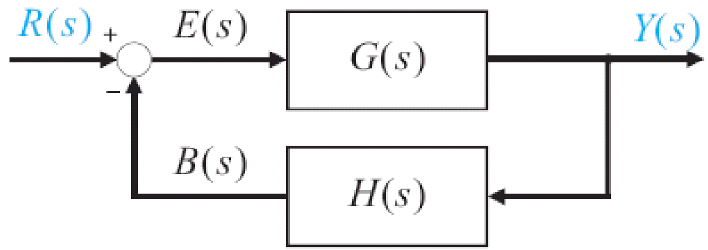
单位反馈系统的稳态误差

- 稳态误差小结

系统的型无差阶数	误差系数			稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	阶跃输入 $e_{ss}=\dfrac{A}{1+K_p}$	斜坡输入 $e_{ss}=\dfrac{A}{K_v}$	抛物线输入 $e_{ss}=\dfrac{A}{K_a}$
0 型	K	0	0	$A/(1+K)$	∞	∞
1 型	∞	K	0	0	A/K	∞
2 型	∞	∞	K	0	0	A/K

3.6.2 非单位反馈系统的稳态误差

1) 折算到输入端



$$e(t) = r(t) - b(t)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)\frac{G(s)R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

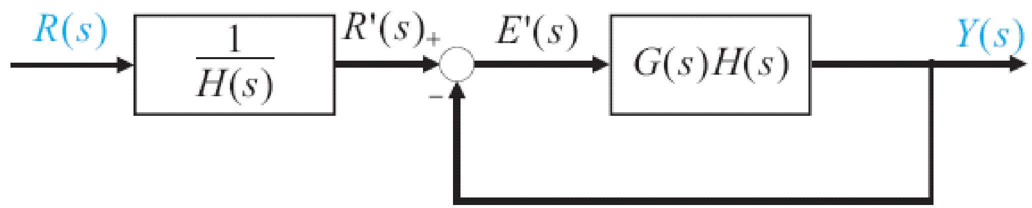
$$= \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) = \Phi_e(s)R(s) \qquad (3.51)$$

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)} = \frac{1}{1+G_k(s)}$$ 误差传递函数

$$G_k(s) = G(s)H(s)$$ 开环传递函数

非单位反馈系统的稳态误差

2) 折算到输出端



$$R'(s)=\frac{1}{H(s)}R(s)$$

$$e'(t)=r'(t)-y(t)$$

$$E'(s)=R'(s)-Y(s)=R'(s)-\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}R'(s)$$

$$=\frac{1}{1+G(s)H(s)}R'(s)=\Phi_e(s)R'(s)=\frac{\Phi_e(s)R(s)}{H(s)}=\frac{E(s)}{H(s)} \qquad (3.52)$$

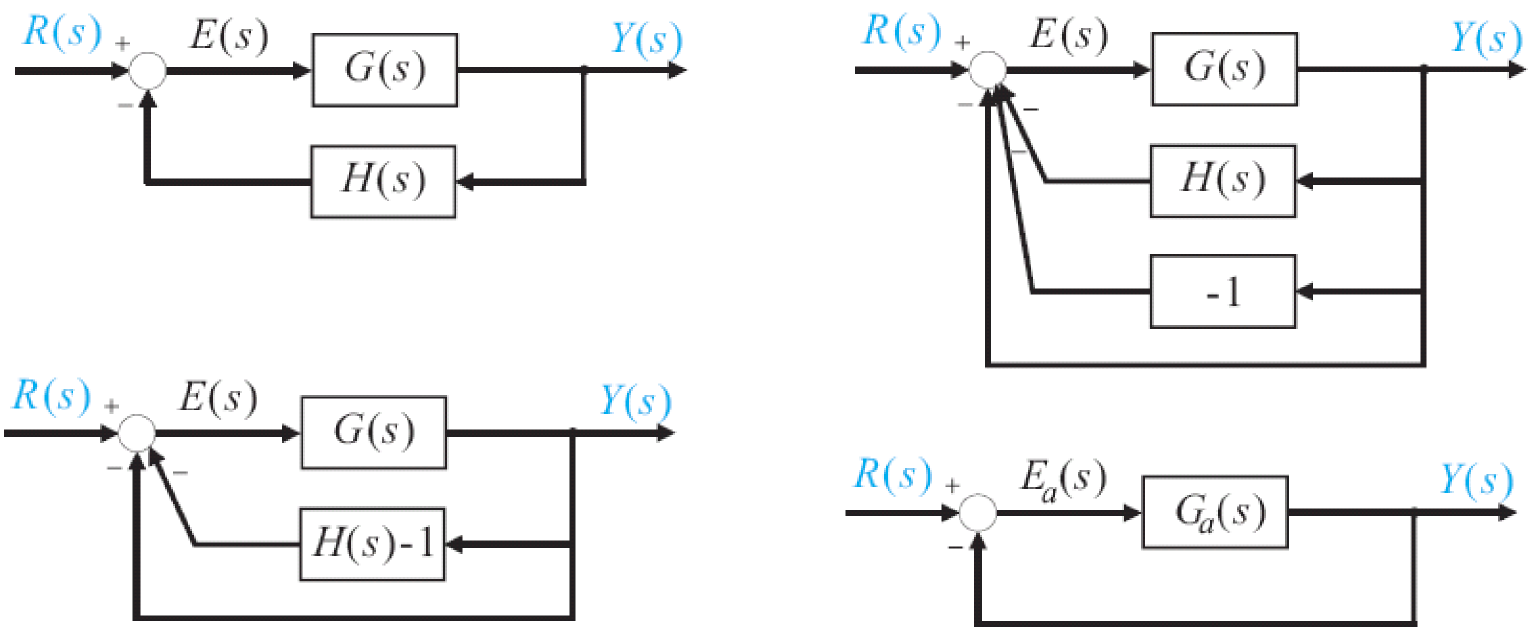
$e'(t)$的定义，物理意义明确;

$e(t)$的定义，结构图中有对应的量,便于理论分析;

一般用$e(t)$进行误差分析;

非单位反馈系统的稳态误差

非单位反馈系统可化为等效单位反馈系统讨论



$$G_a(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)-G(s)}$$

转换为讨论 $e_a(t)=r(t)-y(t)$

3.7 控制系统的稳定性

- 稳定系统是一个对于有界输入具有有界响应的动态系统
- 充要条件：系统传递函数的所有极点（系统矩阵的特征值）具有负实部
- 稳定性判据：Routh-Hurwitz稳定性判据

Routh-Hurwitz稳定性判据

设线性控制系统的闭环传递函数为

$$G(s)=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+b_2 s^{m-2}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

闭环系统的特征方程为

$$a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$$

特征方程式的根就是系统闭环传递函数的极点。

Routh-Hurwitz稳定性判据

一. 系统稳定的必要条件

假设特征方程为

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

根据代数理论中韦达定理所指出的方程根和系数的关系可知，为使系统特征方程的根都为负实部，其必要条件：

特征方程的各项系数均为正。

含义：**1 各项系数符号相同（即同号）**

2 各项系数均不等于0（即不缺项）

Routh-Hurwitz稳定性判据

二. 控制系统稳定的充分必要条件

*Routh*阵列

$$
\begin{array}{lllllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \cdots \\
s^{n-2} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\
s^{n-3} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
s^2 & a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & & & & \\
s^1 & a_{n-1,1} & & & & & \\
s^0 & a_{n,1} & & & & &
\end{array}
$$

特征方程全部为负实部根的充分必要条件是*Routh*表中第一列各值为正，

如*Routh*表第一列中出现小于零的数值，系统就不稳定，且第一列各数符号的改变次数，代表特征方程式的正实部根的数目。

小结

- 控制系统时间域的运动分析
- 通过典型输入信号下系统响应-- 单位阶跃响应，讨论控制系统暂态响应的性能指标
- 重点:对规范二阶系统的暂态响应性能指标的讨论

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\sigma\% = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\times 100\%$$

$$T_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$T_s(5\%) = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$T_r = \frac{\pi-\varphi}{\omega_d} = \frac{\pi-\varphi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\varphi = tg^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

小结

注意到其中 $\delta\%$ 只与 ζ 有关

求解问题：
$$\begin{cases}\zeta \to \sigma\% \\ \zeta,\omega_n \to T_s,T_r\end{cases},\ \left.\begin{cases}\sigma\% \to \zeta \\ T_s,T_r \to\end{cases}\right\}\omega_n$$

在规范二阶系统暂态响应分析的基础上，讨论增加零点和极点的影响。对于高阶系统的分析，注意“主导极点”的概念；

控制系统稳态误差的分析，掌握几个静态误差系数及稳态误差的计算；

小结

- 稳定性的概念和稳定性判据