University Physics

大学物理

大学
物理

第六章 机械能　机械能守恒定律

§ 6.1 动能 功 动能定理

一、动能

动能　（非相对论）

质点： $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

质点系： $E_k = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = E_{kc} + E_k' \neq \frac{1}{2}Mv_c^2$

定轴刚体： $E_k = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$

质点动能的时间变化率

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{v}\right)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

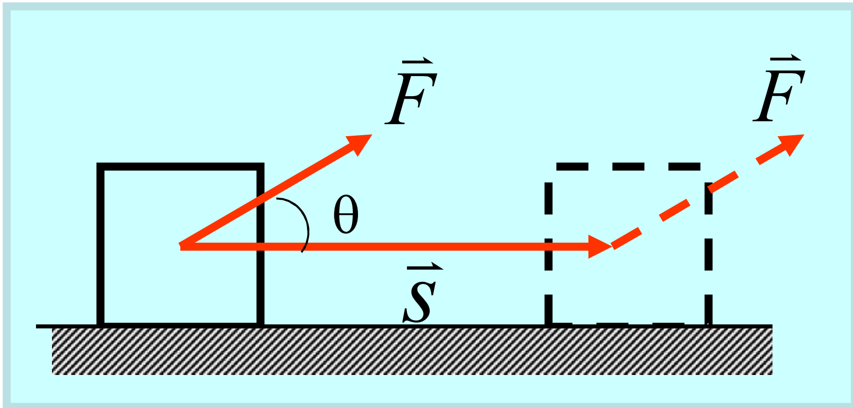
$$=\frac{1}{2}\vec{F}\cdot\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{v}\cdot m\vec{a}$$

$$=\vec{F}\cdot\vec{v}=\vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\rightarrow \text{力的元功}$$

第六章 能量　能量守恒定律

二. 功 ——力对空间累积



（1）恒力作功

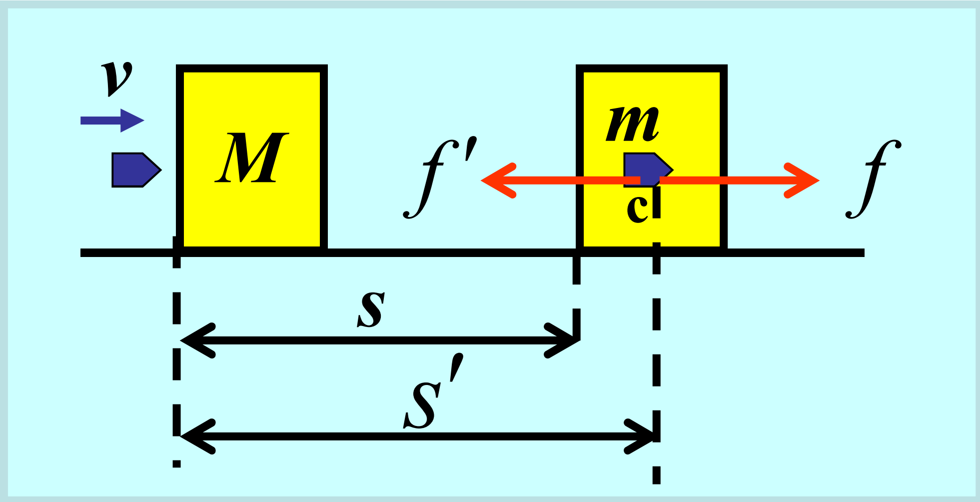
$$A = F \cdot S \cdot \cos\theta = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

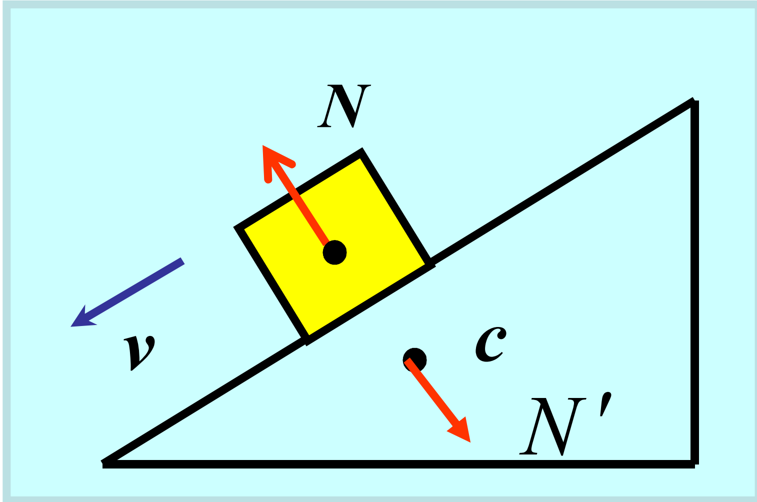
（a）力作用点的位移不同于物体的位移；

（b）功是标量（代数量）；

（c）一个力所做的功与参考系的选择相关，是相对量。

（d）质点系内力做功的代数和不一定为零





$$A_f + A_{f'} < 0$$

$$A_N + A_{N'} = 0$$

↓

内力作功之和只与作用点之间的相对位移有关

什么条件下,一对内力做功为零?

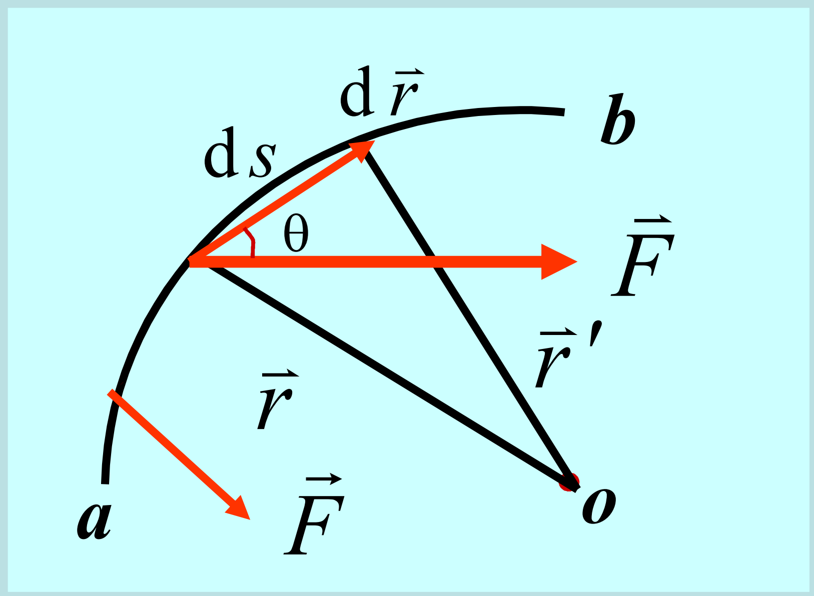
- 作用点无相对位移 $\therefore$ 对刚体：$A_{内}=0$
- 相互作用力与相对位移垂直

注意

$$\sum_i \vec{F}_{i内} \equiv 0 \qquad \sum_i \vec{I}_{i内} \equiv 0$$

$$\sum_i \vec{M}_{i内} \equiv 0 \qquad \sum_i A_{i内} \not\equiv 0$$

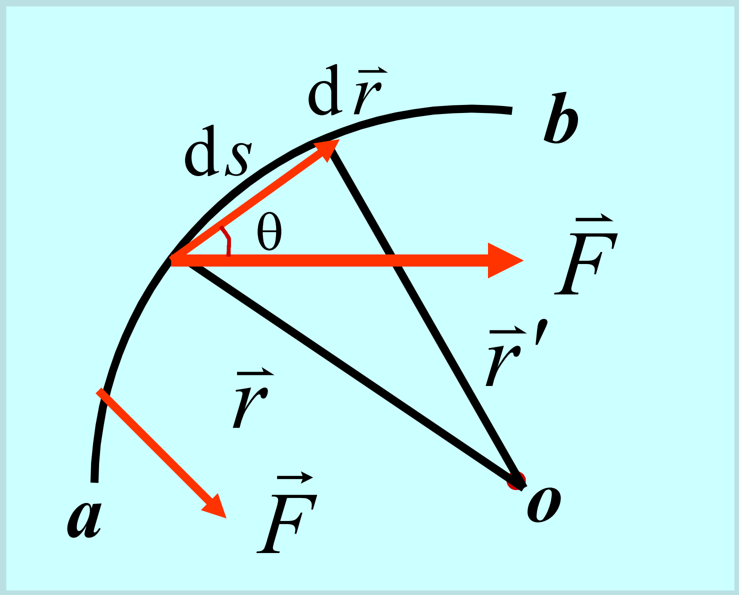
（2）变力的功



微元分析法：

取微元过程
以直代曲
以不变代变

再求和



元功：
$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$
$$= F\cdot\left|d\vec{r}\right|\cdot\cos\theta$$
$$= F\cos\theta\, ds$$

直角坐标系：
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$
$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

总功：
$$A = \int_a^b dA = \int_a^b F\cos\theta\, ds = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$$
$$= \int_a^b \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

例1 质量为10kg 的质点，在外力作用下做平面曲线运动，该质点的速度为 $\vec{v}=4t^2\vec{i}+16\vec{j}$ ，开始时质点位于坐标原点。

求 在质点从 $y=16\text{m}$ 到 $y=32\text{m}$ 的过程中，外力做的功。

解 $v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x=4t^2\mathrm{d}t$

$v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=16 \Rightarrow y=16t \Rightarrow \begin{cases} y=16\text{时} & t=1 \\ y=32\text{时} & t=2 \end{cases}$

$$F_x=m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=80t \qquad F_y=m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=0$$

$$A=\int F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y=\int_1^2 320t^3\mathrm{d}t=1200\ \text{J}$$

（3）功率　描写作功快慢的物理量，即单位时间内外力做的功。

1.平均功率

外力作功与时间之比。

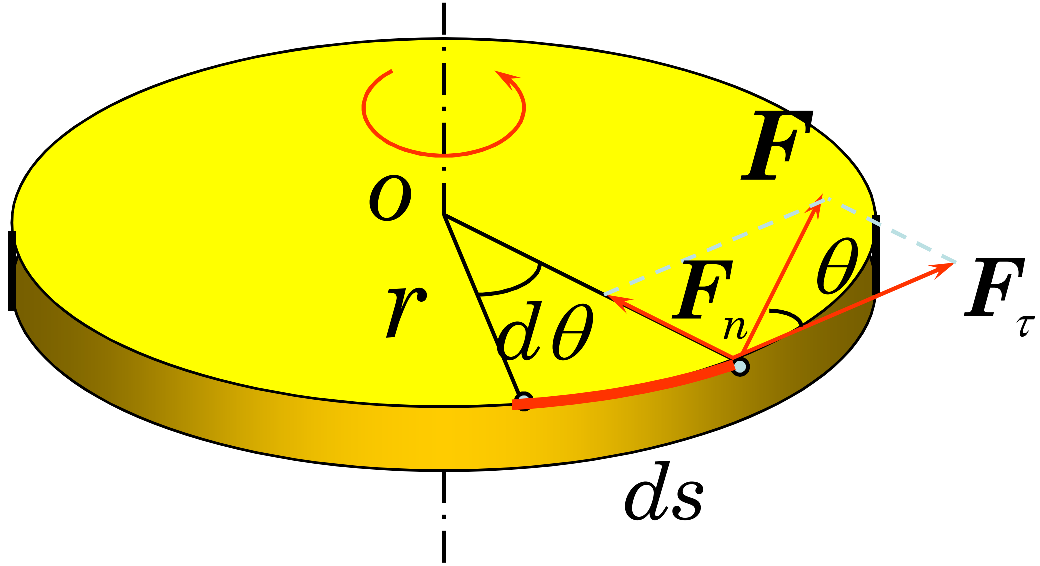
$$\overline{P} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

2. 功率

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

（4）力矩作功

将F分解为切向力和法向力。



刚体转过 $d\theta$, 作用点的位移为 ds, 法向力 F_n 不作功，只有切向力作功,

其中　$F\cos\theta = F_\tau$　,　　$ds = r d\theta$

由功的定义　$A=\int_a^b Fds\cos\theta$

其中　$F\cos\theta = F_\tau$ ，　$ds = rd\theta$

则　$A=\int_{\theta_0}^{\theta} F_\tau r d\theta$　　$\boxed{A=\int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta}$

对于恒力矩作功　$A=M(\theta-\theta_0)=M\Delta\theta$

恒力矩的功为力矩与角位移的乘积。

力矩的功率

由功率的定义：　$P = \dfrac{dA}{dt}$

$$P = \frac{dA}{dt} = M\frac{d\theta}{dt} = M\omega$$

$$\begin{cases} P = \vec{F}\cdot\vec{v} = Fv\cos\theta & \text{外力的功率} \\ P = M\omega & \text{力矩的功率} \end{cases}$$

三、动能定理

质点的动能定理

合外力作功的代数和等于质点动能的增量(或末态动能减去初态动能)。

$$A = E_k - E_{k0} = \Delta E_k$$

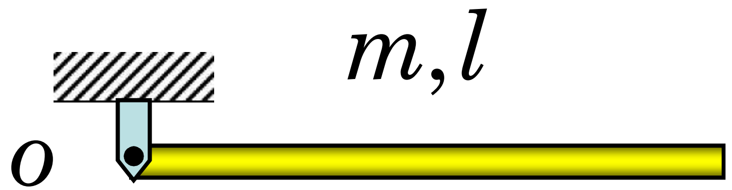
质点系的动能定理

合外力与合内力作功代数和，等于质点系动能的增量。

$$A_{外} + A_{内} = E_k - E_{k0} = \Delta E_k$$

刚体转动动能定理：合外力矩对绕定轴转动的刚体作功的代数和等于刚体转动动能的增量。

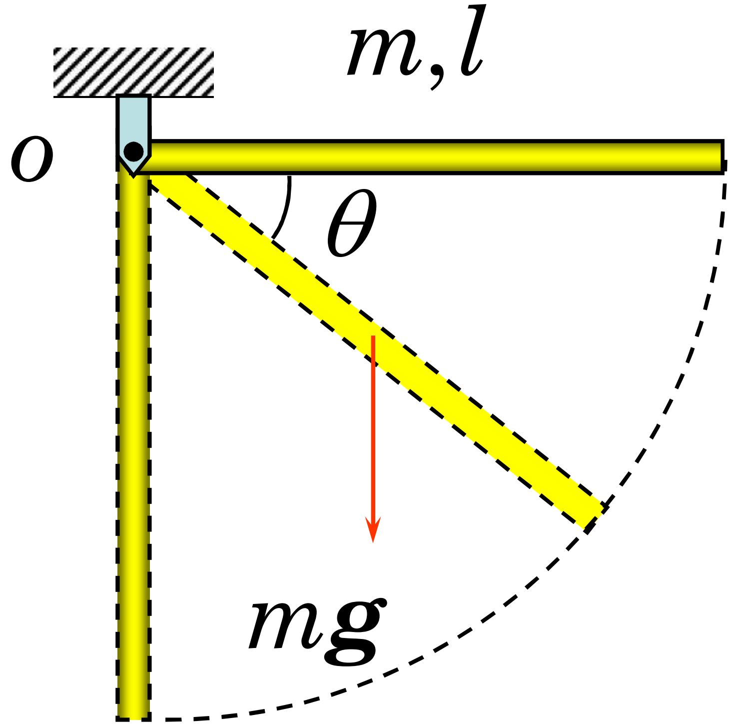
$$A = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 = E_k - E_{k0} = \Delta E_k$$



例1：一细杆质量为m，长度为l，一端固定在轴上，静止从水平位置摆下，求细杆摆到铅直位置时的角速度。

解：以杆为研究对象，

只有重力产生力矩，且重力矩随摆角变化而变化。



重力矩作功：

$$A_{重} = \int_0^{90^\circ} M d\theta$$

$$= \int_0^{90^\circ} mg \frac{l}{2} \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} mgl$$

始末两态动能：　$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$ ，　$E_{k0} = 0$

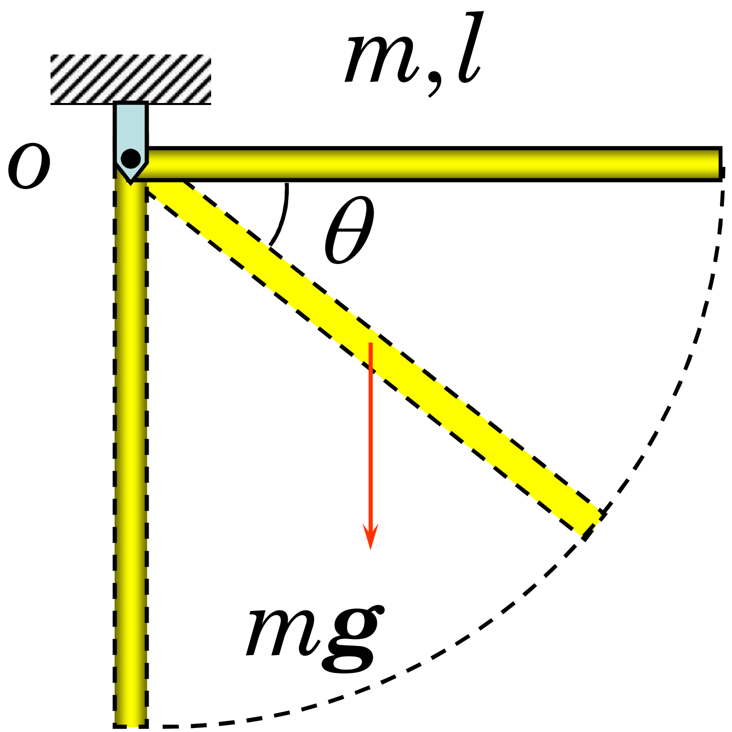
由动能定理：　$\boxed{A = E_k - E_{k0}}$

$$\frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2}J\omega^2 - 0$$

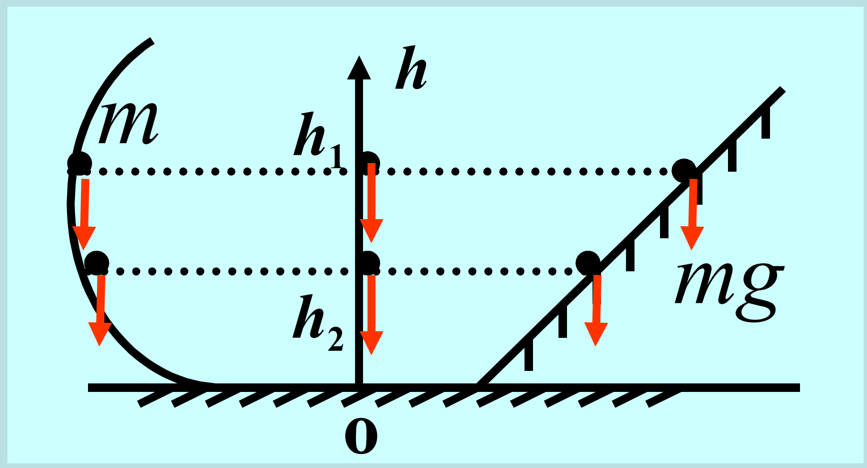
$$\boxed{J = \frac{1}{3}ml^2}$$

$$\frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

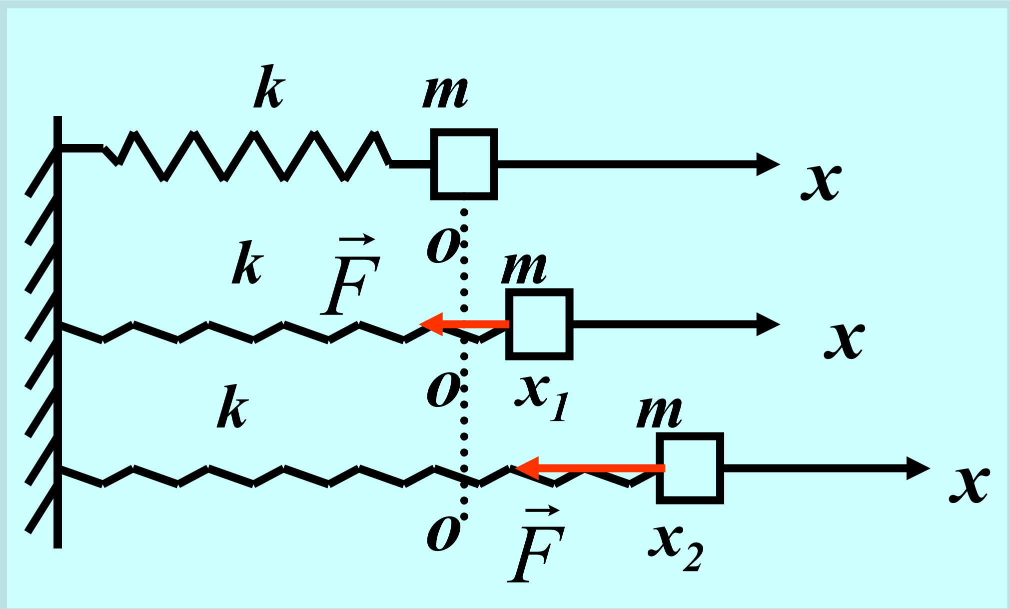


计算重力、弹力、引力的功



$$A=\int_{h_1}^{h_2} dA=\int_{h_1}^{h_2} -mgdh$$

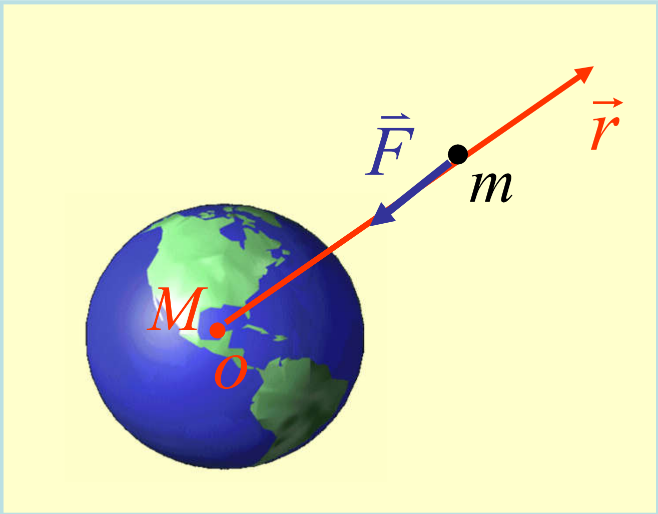
$$=-\left(mgh_2-mgh_1\right)$$



$$\vec{F}=-kx\vec{i}$$

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{x_1}^{x_2} -kx\mathrm{d}x$$

$$=-\left(\tfrac{1}{2}kx_2{}^2-\tfrac{1}{2}kx_1{}^2\right)$$



$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}$$

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} -G\frac{mM}{r^2}dr$$

$$= -\left[\left(-G\frac{mM}{r_2}\right) - \left(-G\frac{mM}{r_1}\right)\right]$$

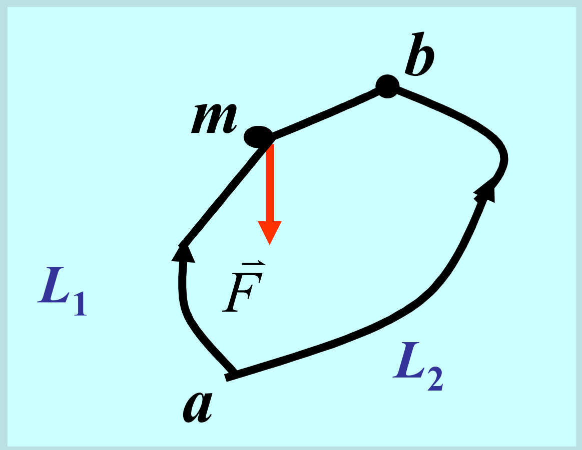
共同特点：

① 做功与路径无关，只与起、末点位置有关

② 做功等于与相互作用物体的相对位置有关的某函数在始末位置的值之差

一、保守力

➤做功与路径无关，只与起点、终点位置有关



$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

（路径L_1）（路径L_2）

➤对沿闭合路径运动一周的物体做功为零 $\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$

否则为非保守力（耗散力）

（重力、弹力、万有引力、库仑力都是保守力）

二、　势能：

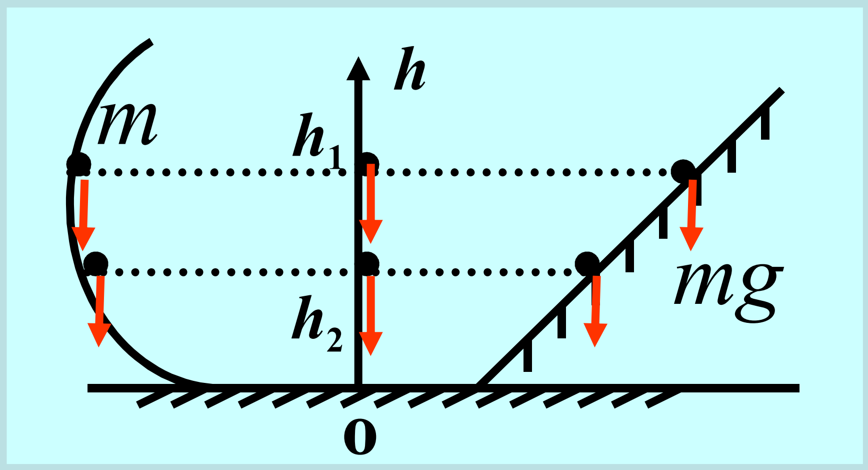
物体在场中某点的势能等于将物体从该点移到零势点过程中保守力做的功

$$E_p = \int_{\text{场点}}^{\text{零势点}} \vec{F}_{\text{保}} \cdot d\vec{r}$$

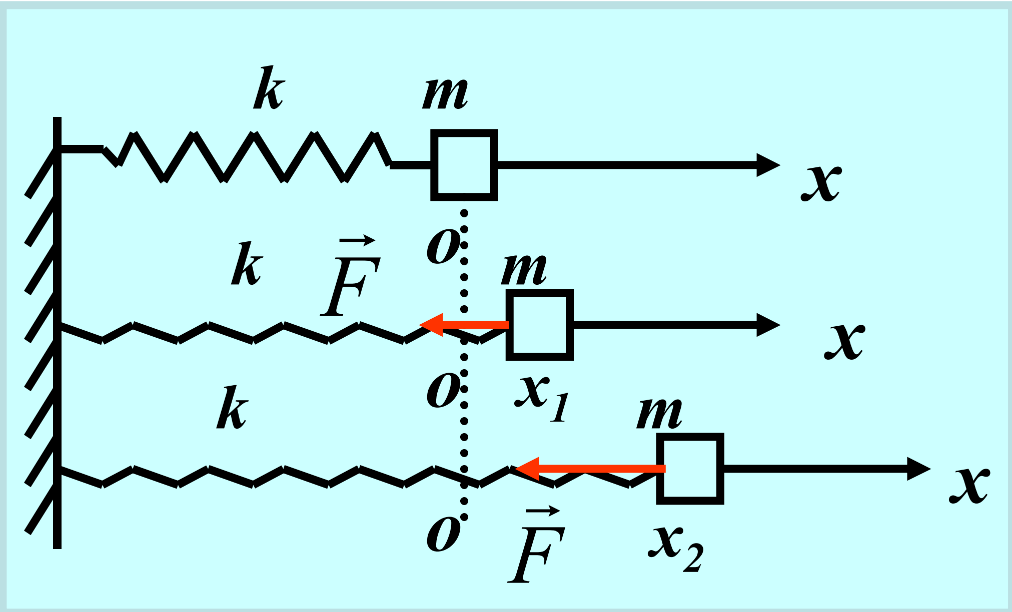
理解势能注意几点：

(1).势能是系统的，如说某物体的势能不确切。

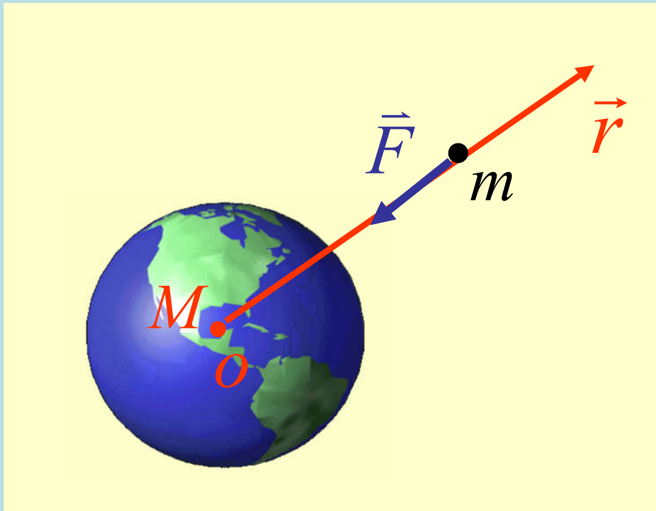
(2).势能的绝对值没有意义，只关心势能的相对值。



$$E_P = \int_h^0 - mg \cdot dx = mgh$$

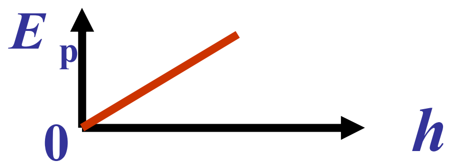
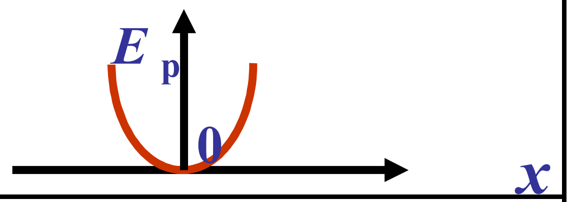
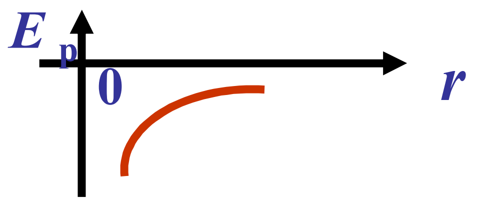


$$E_P = \int_x^0 - kx \cdot dx = \frac{1}{2}kx^2$$



$$E_P = \int_r^{\infty} -G_0 \frac{mM}{r^2} \cdot dr$$

$$= -G_0 \frac{mM}{r}$$

保守力	势能（E_p）	势能零点	势能曲线
重　力	mgh	$h=0$	
弹　力	$\frac{1}{2}kx^2$	$x=0$	
引　力	$-G\dfrac{mM}{r}$	$r=\infty$	

三、 保守力与相关势能的关系:

①凡保守力都有其相关势能,势能属于物体系,保守力为该势能系统的内力。

②保守力的功等于其相关势能增量的负值

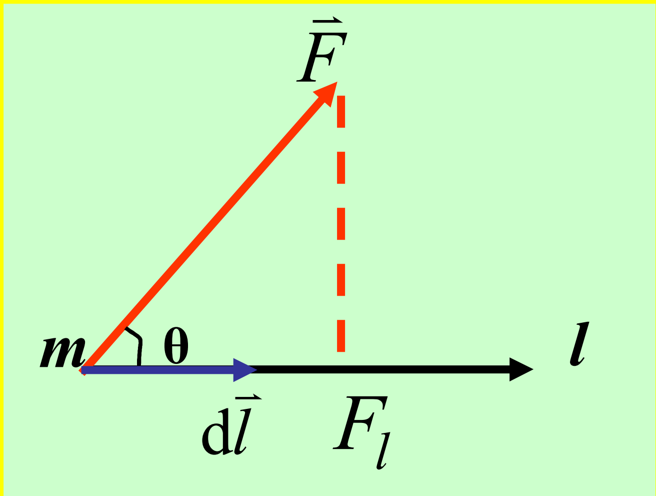
$$A_{保} = -\Delta E_p$$

③ 保守力为其相关势能梯度的负值:

$$\vec{F}_{保} = -\mathrm{grad}E_p = -\nabla E_p$$

$$= -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right)$$

③ 保守力为其相关势能梯度的负值:



$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = F_l\mathrm{d}l = -\mathrm{d}E_p$$

$$F_l = -\left(\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}l}\right)$$

保守力在 l 方向投影

E_{p} 在 l 方向空间变化率

$$\vec{F}_{保} = -\mathrm{grad}E_{\mathrm{p}} = -\nabla E_{\mathrm{p}}$$

$$= -\left(\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial z}\vec{k}\right)$$

四、功能原理

利用质点系的动能定理：

$$A_{外} + A_{内} = E_k - E_{k0} = \Delta E_k$$

其中内力作功的代数和项 $A_{内}$ 可分为

系统内部保守力的功和内部非保守力的功，

$$A_{内} = A_{保内} + A_{非保内}$$

由保守力作功等于势能增量的负值的结论，

$$A_{外} + A_{保内} + A_{非保内} = \Delta E_k$$

$$A_{保内} = -\Delta E_p$$

$$A_{外} + A_{非保内} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta(E_k + E_p)$$

定义机械能：为物体系的动能与势能之和。

$$E = E_k + E_p$$

功能原理

$$A_{外} + A_{非保内} = \Delta E$$

功能原理：系统外力与内部非保守力作功的代数和，等于系统机械能的增量。

§ 6.3 机械能守恒定律

1. 当各微元过程都满足 $\mathrm{d}A_{外} + \mathrm{d}A_{非保内} = 0$ 时，

$\mathrm{d}E = 0$ $E =$ 恒量，系统机械能守恒。

2. 当过程满足 $A_{外} + A_{非保内} = 0$ 时，$\boldsymbol{E_1 = E_2}$

系统初、末态机械能相等。

注意： 动量、角动量、能量守恒定律彼此独立

$\vec{F}_{外} = 0$ $\Delta\vec{p} = 0$ —— 空间平移对称性

$\vec{M}_{外} = 0$ $\Delta\vec{L} = 0$ —— 空间旋转对称性

$\mathrm{d}A_{外} + \mathrm{d}A_{非保内} = 0$ $\Delta E = 0$ —— 时间平移对称性

练习：将守恒定律与其相关的时空对称性连接起来。

动量守恒定律	时间平移对称性
角动量守恒定律	空间旋转对称性
能量守恒定律	空间平移对称性