2018-2019 第 2 学期 高等数学下册

复习参考资料

主编：西南交大基础数学协会

指导：教务处、数学学院

2018 级数学交流群：824293125

扫码关注西南交大基础数协微信公众号

写在前面

高等数学（下册）主要有五个部分内容：向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线曲面积分和无穷级数。而本资料也是从这五个方面分别进行总结概括，为同学们提供一个复习参考。

由于各个同学的基础不同，所以此资料适用于那些想通过期末的复习来取得一个较好成绩的同学。本资料从五个大的方面展开，每一个大的章节又分为多个小节，大多为课本教材上的知识总结与概览，包括定义、概念、定理、性质和公式等内容，同时有部分例题供大家巩固知识。最后，我们还编写了一套期末模拟卷，其题型和期末试题题型类似，难度适中，大家在复习完后可以做一下这套题目，检验复习成果。

对大家复习的一些建议：高数虽难，但却有章可循，并且就经验来看，每年的期末试题都相对简单，考点和解题方法和技巧大都来自平时课本例题和习题集，所以希望大家复习的时候主要配合教材和习题集来复习。首先复习基础知识比如定理、概念和公式等。然后根据掌握的知识去做课本例题和习题集，但题太多，也不大可能每题都去做，重点挑易错题或者习题集每章的自测题来看，只要合理规划时间，按照进度将所有知识都复习一遍，相信期末考试对大家来说一定不是问题，在此，也希望大家都能取得一个好成绩。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，敬请各位同学批评指出，可反馈在数学交流群里。

基础数学协会

2019.6

目录

第一章、向量代数与空间解析几何

第一节 向量及其运算

1. 向量的数量积（点积）

向量$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$与向量$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$的数量积是一个数，其值为$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，其中$\theta$为向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角，记作$\vec{a}\cdot\vec{b}$，若其中有一个为零向量时，则定义其值为 0，数量积的坐标表达式为$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$，两个向量相互垂直则称它们正交，记作$\vec{a}\perp\vec{b}$，特别的，规定零向量与任意向量垂直。

数量积有以下基本性质：

（1） $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

（2） $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

（3） $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

（4） $\vec{a}\perp\vec{b}$的充要条件为$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

2. 向量的向量积（叉积）

向量积，顾名思义，就是两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的经过特殊的法则所合成的向量，通常该向量垂直于向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$所在的平面，记此向量为$\vec{c}$，$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$，通常，向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$交换位置后要再添加一个负号才能使其值还是$\vec{c}$，$\vec{c}$的模等于$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，$\theta$为两个向量的夹角，应注意这里的$\theta$范围。向量$\vec{c}$的方向由向量$\vec{a}$，向量$\vec{b}$所决定，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$顺次构成右手系，若向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$中有零向量时，则定义$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$，向量积$\vec{a}\times\vec{b}$的坐标表示式为

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_1\end{vmatrix}\}$$

向量积有以下性质：

（1） $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

（2） $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

（3） $(a+b)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

（4） $\vec{a}||\vec{b}$的充要条件是$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

3．向量的混合积

设向量$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，向量$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$，则称乘积$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$称为向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的混合积，记为$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$。

混合积是一种数量，其几何意义为：混合积绝对值等于以$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$为相邻三条棱的平行六面体的的体积，因此，向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$共面的充要条件易得为

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$$

向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$混合积的坐标表达式为$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$，且有

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$$

第二节 空间的平面和直线

1．平面及其方程

法向量的概念 ：与平面垂直的任意非零向量，成为该平面的法向量。

平面的方程分为以下四种：

（1）点法式方程：设平面过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，其法向量为$\vec{n}=(A,B,C)$，则平面方程可记为$A(x-x_0)+\beta(y-y_0)+C(z-z_0)=0$；

（2）截距式方程：设a,b,c分别为平面关于 x，y，z 轴的截距，则平面方程可记为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

（3）三点式方程：设平面不共线的三点$A(x_1,y,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，$C(x_3,y_3,z_3)$，则此平面可记为$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$（此式的推导可尝试用上一部分混合积为$\vec{0}$这一结论）

（4）一般式方程：平面的一般式方程为$Ax+By+Cz+D=0$

2．空间直线及其方程

方向向量指的是与直线平行的非零向量。直线的方程分为以下三种：

（1） 对称式方程（又称标准式方程）

过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量为$\vec{s}=(l,m,n)$的直线标准式方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

（2）参数方程

由上一个方程可以建立这样一个方程：

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$$

易得参数方程：

$$\begin{cases} x=lt+x_0 \\ y=mt+y_0，（t\text{为参数}） \\ z=nt+z_0 \end{cases}$$

（3）两点式方程

过点$M_1(x_1,y_1,z_1)$与$M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线方程为：

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

（4）一般式方程

直线的一般式方程为三元一次方程组：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

方程组中每一个方程都表示一个平面。

3. 直线、平面之间相对位置关系

令平面π_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，平面π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，它们的法向量分别是$\overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$。

直线L_1: $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ ，L_2: $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$

它们的方向向量分别为$\overrightarrow{s_1}=(l_1,m_1,n_1)$，$\overrightarrow{s_1}=(l_2,m_2,n_2)$。

（1）夹角

①平面π_1与平面π_2的夹角θ定义为他们法向量的夹角，故有以下关系成立：

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

②直线L_1与直线L_2之间的夹角θ定义为方向向量$\overrightarrow{s_1}$，$\overrightarrow{s_2}$的夹角，即：

$$\cos\theta=\frac{|\vec{s}_1\cdot\overrightarrow{s_2}|}{|\overrightarrow{s_1}|\cdot|\overrightarrow{s_2}|}=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

③直线L_1与平面π_1间的夹角θ定义为直线L_1和它在平面π_1上所投影形成的两邻角中的锐角，即

$$\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{s_1}|}{|\vec{n}_1|\cdot|\overrightarrow{s_1}|}=\frac{|A_1l_1+B_1m+C_1n_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}$$

（2）平行的条件

①平面π_1与平面π_2平行的充要条件是$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

②直线L_1与直线L_2平行的充要条件为$\frac{l_1}{l2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$

③直线L_1与平面π_1平行的充要条件为$A_1l_1+B_1m_1+C_1n_1=0$　（利用$sin\,\theta=0$这一条件）

（3）垂直的条件

①平面π_1与平面π_2垂直的充要条件为$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

②直线L_1与直线L_2垂直的充要条件为$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

③直线L_1与平面π_1垂直的充要条件为$\frac{A_1}{L_1}=\frac{B_1}{m_1}=\frac{C_1}{n_1}$

4. 距离公式

（1）点到平面的距离

点$M_0(x_0,y_0,z_0)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

（2）点到直线的距离

点$Q_1(x_1,y,z_1)$到直线$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$的距离为

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0Q_1}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}$$

其中，$M_0(x_0,y_0,z_0)$，$\vec{s}=(l,m,n)$

（3）两直线共面的条件

其中两直线分别为L_1:$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$，$L_2$:$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$，它们共面的条件是

$$\overrightarrow{Q_1Q_2}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=0$$

其中，$Q_1(x_1,y,z_1)$，$Q_2(x_2,y_2,z_2)$，$\vec{a}=(l_1,m_1,n_1)$，$\vec{b}=(l_2,m_2,n_2)$

（4）两直线间的距离

其中两直线（异面）分别为L_1:$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$，$L_2$:$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$，它们的距离为$d=\frac{|\overrightarrow{Q_1Q_2}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$

第三节 空间曲面与空间曲线

1. 空间曲面方程

（1）一般方程

$$F(x,y,z)=0$$

（2）显式方程

$$z=f(x,y)$$

（3）参数方程

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

2. 旋转曲面方程

设$C: f(y,z) = 0$为平面yOz的曲线，则

（1）绕 z 轴旋转所得曲面为$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = 0$

（2）绕 y 轴旋转所得曲面为$f\left(y, \pm\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0$

求平面绕某坐标轴旋转是，则该坐标轴对应那个变量不变，而曲线中的的另一变量写为该变量与第三变量的平方和的正负平方根。

3. 柱面方程

（1）母线平行于 z 轴的柱面方程为$F(x,y) = 0$
（2）母线平行于 x 轴的柱面方程为$G(y,z) = 0$
（3）母线平行于 y 轴的柱面方程是$H(x,y,z) = 0$

当曲面方程中缺少一个变量时，不难联想到该曲面为柱面。

习题

1. 设一平面平行于已知直线$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$且垂直于已知平面
2. $7x - y + 4z - 3 = 0$, 求该平面法线的方向余弦。求与两平面$x - 4z = 3$和$2x - y - 5z = 1$的交线平行，且过点（$-3,2,5$）的直线方程。
3. 求过点$M(-1,0,4)$, 且平行于平面$3x - 4y + z - 10 = 0$, 又与直线$l: x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}$相交的直线方程。
4. 求直线$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$在平面$x + 2y - z = 0$上的投影直线方程（提示:平面束）

第二章、多元函数微分法及其应用

第一节 偏导数

1. 定义

偏导数：设函数$z = f(x,y)$在点(x_0, y_0)的内某一个领域有定义，当 y 固定在y_0，而 x 在x_0处有增量Δx，相应的函数有增量$f(x+x_0, y_0) - f(x_0, y_0)$，如果

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$存在，那么称在点$(x_0,y_0)$处有偏导数，记作

$f_x(x_0,y_0)$，函数对于 y 的求导和 x 一样。

2.高阶偏导数

设函数$z=f(x,y)$在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)\text{，}\ \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)\text{，}$$

在 D 内 $f_x(x,y)$， $f_y(x,y)$都是x,y的函数。若这两个函数也存在偏导数，那么称是它们的二阶偏导数。关于变量求导次序不同，可以得到四个二阶偏导。n 阶偏导数，即是对其求 n 次偏导，和上面类似。

3.结论

通常在求 x 的偏导时候，将其他的变量都看成是常数。

一个函数连续，但是不一定有偏导数。

函数在各点偏导数都存在，但是在该点不一定连续。

Eg： $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 函数在（0,0）点处。

第二节 全微分

1.定义

设函数$z=f(x,y)$在点（x，y）的某领域内有定义，如果函数在点（x，y）的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$可以表示为$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A,B 不依赖于$\Delta x,\Delta y$,仅且与 x 和 y 有关，那么称函数$z=f(x,y)$在（x，y）可微分。全微分为 dz=$A\Delta x+B\Delta y$， $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$。

其中 $o(\rho)=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

2.结论

全微$\to$偏导数，但是有偏导数不一定有全微分，只有当偏导数存在且连续，才可以说明在该点可微。

判断是由有全微条件：$\frac{\Delta z - A\Delta x - B\Delta y}{\rho} = 0$

3. 多元复合函数的求导法则

若 $z = f[\phi(t),\varphi(t)]$，$u=\phi(t),v=\varphi(t)$，在 t 可以导，则 z 关于 t 的偏导

$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{dv}{dt}$ （链式法则）

4. 隐函数的求导公式

（1）对于 $F(x,y)=0$，条件 1. F_x, F_y连续 2. $F(x_0,y_0)=0$ 3. $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ 均成立，则有 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

（2）方程组形式：$\begin{cases} F\left(x,y,u,v\right)=0 \\ G\left(x,y,u,v\right)=0 \end{cases}$

关于 x 求导后，$\begin{cases} F_x + F_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + F_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G_x + G_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + G_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$

最后 u 关于 x 的导数为：$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & Fv \\ G_x & Gv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$

5. 多元函数的几何应用

（1）空间曲线的切线和法平面

空间曲线的参数方程为：$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\varphi(t) \\ z=\gamma(t) \end{cases}$

则其切线为：$\frac{x-x_0}{\phi'(t)} = \frac{y-y_0}{\varphi'(t)} = \frac{z-z_0}{\gamma'(t)}$

在此点的法平面为：$\phi'(t)(x-x_0)+\varphi'(t)(y-y_0)+\gamma'(t)(z-z_0)=0$

（2）曲线的切平面与法线

对于 $F(x,y,z)=0$ 而言

其法线：$\frac{x-x_0}{F_x} = \frac{y-y_0}{F_y} = \frac{z-z_0}{F_z}$

其切平面为：$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$

第三节 方向导数和梯度

1. 方向导数

（1）**定义**：关于 L 的参数方程：$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\cos\beta \end{cases}$

$f(x,y)$在(x_0,y_0)点处沿L 的方向导数为：

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

其中$(\cos\alpha,\cos\beta)$实际上为该直线的方向。

（2）**定理**：如果函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$可微分，那么函数在该店沿任一方向都有方向导数，那么，

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta$是方向 L 的方向余弦。上面的式子实际可以看成

(f_x,f_y)和$(\cos\alpha,\cos\beta)$两个向量的点乘。（书 p104 有证明）

若要求方向导数，把(f_x,f_y)和$(\cos\alpha,\cos\beta)$分别求出来，然后点乘即可。

2. 梯度

设函数$f(x,y)$有一阶导数，对于每一点(x_0,y_0)都可以定义出一个向量

$$f_x(x_0,y_0)i+f_y(x_0,y_0)j$$

该向量就是函数在该点的梯度。

因此可以的到

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta=|\mathrm{gradf}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)|\cdot\cos\theta$$

其中$\theta=(gradf(x_0,y_0),e_l)$，当$\begin{cases}\theta=0 \text{ 方向导数最大} \\ \theta=\pi \text{方向导数最小} \\ \theta=\frac{\pi}{2} \text{方向导数为 } 0\end{cases}$

第四节 多元函数的极值以求法

1. 定理

定理 1（必要条件） 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0, y_0) 处有极值，则有

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$$

定理 2 （充分条件）设函数 $z = f(x, y)$在点（x_0, y_0）的某领域内连续且有一阶和二阶的连续偏导数，又 $f_x = 0, f_y = 0$

令 $f_{xx} = A, f_{xt} = B, f_{yy} = C$

$f(x, y)$在(x_0, y_0) 是否取极值，条件如下：

① $AC - B^2 > 0$时，有极值，$A > 0$时，极小值；$A < 0$, 极大值。

② $AC - B^2 = 0$时，没有极值

③ $AC - B^2 < 0$时，可能有，可能没有，需要另作讨论。

2. 求极值的方法

①先算驻点→判别，求二阶偏导数。

②条件极值 拉格朗日乘数法

思想：将条件直接带入→变成等式→根据极值性质求解

函数：$z = f(x, y)$

条件：$\varphi(x, y) = 0 \to \lambda\varphi(x, y) = 0$

则引入的辅助函数：$L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ 【拉格朗日函数】

再根据极值性质$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$，求解函数即可

习题

1. 证明$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$在点（0，0）处连续且偏导数存在，但不可微。

2. 已知 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2+\varphi(x+y)$，且 $f(x,0)=x$，求出 f（x，y）的表达式

3. 设 $z=xf(x+y),F(x,y,z)=0$，其中f与F分别具有一阶偏导数或偏导数，求$\frac{dz}{dx}$。

4. 已知函数$z=x^3y^2$，定点$P_0(3,1)$，$P_1(2,3)$，求函数z在P_0沿$\overrightarrow{P_0P_1}$方向的方向导数。

第三章、重积分

谨记：大化小、常代变、近似和、取极限

第一节 二重积分的概念和性质（几何意义）

1. 概念

（1）曲顶柱体的体积

设有一立体，它的底是xOy面上的闭区域 D，它的侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面，它的顶是曲面$f(x,y)$，其中$f(x,y)\geq 0$且在 D 上连续，那么对底部区域 D 大化小，可得到一个个小面积元$\Delta\sigma_i$，再常代变，将小面积元中的最大的面积元设为λ，之后近似和，用求和公式$\sum_{i=1}^{n}f(x,y)\,\Delta\sigma_i$得到每个小面积元对应的体积，最后取极限，取λ→0，即有每个小面积足够小，取极限时即与原曲顶柱体体积一致，由积分的几何意义可化为积分形式$\iint_D f(x,y)d\sigma$。

（2）平面薄片的质量

设一平面薄片在xOy平面上，此平面所围的闭区域为 D，面密度为$\mu(x,y)$，其中$\mu(x,y)>0$ 且在 D 上连续。那么可计算其质量，对其平面 D 大化小，可得到一个个小面积元$\Delta\sigma_i$，再常代变，将小面积元中的最大的面积元设

为λ，之后近似和，用求和公式$\sum_{i=1}^{n}\mu(x,y)\Delta\sigma_i$，最后取极限，取λ→0，即有每个小面积足够小，取极限时即与原平面质量一致，由积分的几何意义可化为积分形式$\iint_D \mu(x,y)d\sigma$。

2.二重积分的性质

小记：常数乘除，积分加减；化一为面，区域可分；递归不变，介值可用。

性质 1 设α与β为常数，则

$$\iint_D[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint_D g(x,y)d\sigma.$$

性质 2 如果闭区域D被有限条曲线分为有限个部分闭区域，那么在D上的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分之和。

例如D可分为两个闭区域D1和D2，则有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D2} f(x,y)d\sigma.$$

性质 3 如果在D上，f(x,y)=1，σ为D的面积，那么

$$\sigma=\iint_D 1\bullet d\sigma=\iint_D d\sigma.$$

性质 4 如果在D上，f(x,y)≦g(x,y),那么有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma\le\iint_D g(x,y)d\sigma.$$

特殊的，由于

$$-|f(x,y)|\le f(x,y)\le|f(x,y)|,$$

又有

$$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right|\le\iint_D|f(x,y)|d\sigma.$$

性质 5 设M和m分别是f(x,y)在闭区域D上的最大值和最小值，σ是D的面积，则有

$$m\sigma\le\iint_D f(x,y)d\sigma\le M\sigma.$$

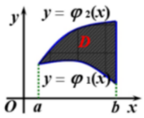
性质 6（二重积分中值定理） 设函数f(x,y)在闭区域D上连续，σ是D的面积，则在D上至少存在一点（ξ，η），使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\sigma.$$

第二节 二重积分的计算法

1. 利用直角坐标计算二重积分

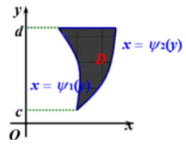
X 型区域：穿过 D 内部且用平行于 y 轴的直线与 D 的边界相交不多于两点。如图（上）。此时可以用公式来计算此二重积分的值



（X 型）

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_{1(x)}}^{\varphi_{2(x)}} f(x,y)dy \quad .$$

Y 型区域：穿过 D 内部且用平行于 x 轴的直线与 D 的边界相交不多于两点。如图（下）。此时可以用公式来计算此二重积分的值



（Y 型）

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_{1(y)}}^{\psi_{2(y)}} f(x,y)dy \,.$$

特别的，对于既满足 X 型也满足 Y 型的则两种类型的计算方法都可以使用。

对于两种类型都不满足的积分域，则需要平行于坐标轴的直线将其积分域化为各个小块满足 X 型或者 Y 型的简单积分域，然后进行计算并且求和。

2. 交换积分次序的方法

对于一些题目，可以使用交换积分次序的方法以达到简化或者解出不换限则不能求解的二重积分。换限时注意原闭区域面积既不能变大也不能变小。

小编建议换序时先把原区域在草稿纸上画出，然后再根据画出的图形进行确定积分域或者分割定域。

3. 利用极坐标计算二重积分

在计算二重积分时，我们常会遇到积分域 D 是一个圆或者圆的部分或者椭圆或者圆弧等，遇到这类积分域，使用 X 型或者 Y 型方法时总是会感觉很麻烦，所以此时我们就可以使用极坐标法来解决此类积分。

具体方法为：在直角坐标中做代换：x=$\rho\cos\theta$，y=$\rho\sin\theta$，并用 $\rho d\rho\theta$ 来代替 dxdy （**这里千万要注意前面的 ρ**），并用 θ 和 ρ 来表示积分域。公式如下：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_{2(\theta)}}^{\rho_{2(\theta)}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho \,.$$

＊ 4. 二重积分换元法

若存在 x 与 y 对于 u、v 间的函数变换 x=x(u, v), y=y(u, v)，且 x(u, v), y(u, v) 在 D 变换后的积分域 D' 上具有一阶连续偏导数，且雅各比式

$$\iint_{D} f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix}\right| dudv.$$

第三节 三重积分的概念

设 f(x, y, z)是空间有界闭区域Ω上的有界函数。将Ω任意分为 n 个小闭区域（大化小）

$$\Delta v_1, \Delta v_2 \cdots \Delta v_n$$

其中Δv_i表示第 i 个小闭区域，也表示它的体积（常代变），在每个小体积元内

任取一点（x, y, z），作乘积 f(x, y, z) Δv_i （i=1, 2, 3, …, n），并作和

$\sum_{i=1}^{n} f(x,y,z)\Delta v_i$（近似和），如果各小体积元中的最大值 λ→0 时，这和的极限

总存在（取极限），且与闭区域Ω的分法及点$f(x,y,z)$的取法无关，那么称此极限为函数$f(x,y,z)$在闭区域Ω上的三重积分。记作$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$, 即

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x,y,z)\Delta v_i,$$

其中$f(x,y,z)$叫做被积函数，dv叫做体积元素，Ω叫做积分区域。

第四节 三重积分的计算

1. 利用直角坐标计算三重积分

直角坐标方法有“先一后二”与“先二后一”两种形式。

“先一后二”常用于投影法，即Ω所围区域在xoy、yoz、zox三个面上那两个参数与另一个非此平面的参数的联系不大时，可以将闭区域Ω化为类似于:

$\{(x,y,z)|z_1(x,y) < z < z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}\}$的形式，其中$D_{xy}$为Ω在$xoy$面上的投影，$z_1(x,y)$与$z_2(x,y)$分别是Ω的上下曲面的曲面方程。此时可以将三重积分化为一个一重积分与一个二重积分的乘积：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z1(x,y)}^{z2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

“先二后一”常用于截面法，即Ω所围区域在xoy、yoz、zox三个面上那两

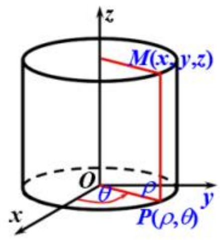
个参数可以用与另一个非此平面的参数表示时，可以将闭区域Ω化为类似于：

$\{(x,y,z)|c<z<d,(x,y)\in D_{xy}\}$的形式，其中$D_{xy}$为Ω在$xoy$面上的投影，$c$与$d$为参数$z$的积分上下限。此时可以将三重积分化为一个二重积分与一个一重积分的乘积：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_c^d dz\iint_{D_{xy}} f(x,y,z)dxdy.$$

2. 利用柱坐标计算三重积分

当计算三重积分中使用“先二后一”的方法时常常会是遇到的类似于Ω为一个柱体或者圆锥等在D_{xy}上可化为极坐标的题目，这时推荐使用极坐标法。



空间的柱面坐标即在平面的极坐标上引入一个z坐标，其中规定ρ，θ，z的变化范围是：

0≤ρ<+∞

0≤θ≤2π

-∞<z<+∞

此时显然有：$\begin{cases}x=\rho cos\theta\\y=\rho sin\theta\\z=z\end{cases}$

体积微元：$dV=\rho d\theta d\rho dz$,

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{\Omega} f(\rho cos\theta,\rho sin\theta,z)\rho d\theta d\rho dz$$

此时要注意$d\theta d\rho$前的ρ.

3. 利用球坐标计算三重积分

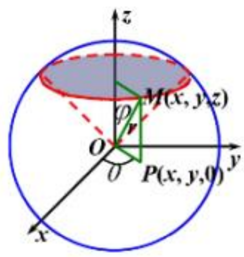
当计算三重积分时，有时会遇到类似于球体的闭区域，此时推荐使用球坐标法求解三重积分。

利用球坐标即为用空间上某点M到原点的距离r及此点与原点连线的向量关于z轴的夹角φ及其在xoy面上对于x轴的夹角θ来表示。其中规定r、φ、θ的取值范围为：

0≤r≤+∞

0≤φ≤π

0≤θ≤2π



$$\begin{cases}x=rsin\varphi cos\theta\\y=rsin\varphi sin\theta\\z=rcos\varphi\end{cases}$$

体积微元：$dV=r^2 sin\varphi drd\varphi d\theta$,

$$\iiint_{\Omega} f\left(x,y,z\right)dxdydz=\iiint_{\Omega} f\left(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi\right)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

此时要注意 $drd\varphi d\theta$ 前的 $r^2\sin\varphi$ 。

第五节 重积分的应用

1. 曲面的面积

求曲面的面积的一般方法为先求出曲面在一个投影平面上的投影（以 xoy 为例子），再把不是这个平面上的参数(z)化为与这平面的两个参数(x, y)有关的函数关系式[z(x, y)],之后化曲面为投影面（ $ds=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})\hat{}2+(\frac{\partial z}{\partial y})\hat{}2}\ dxdy$ ）具体公式为：

$$\iint ds=\iint_D \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})\hat{}2+(\frac{\partial z}{\partial y})\hat{}2}dxdy.$$

2. 质心

设物块的体密度为μ(x, y, z)，则此物块对于质点的坐标为：（ $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ ）其中有：

$$\bar{x}=\frac{\iiint_{\Omega} x\mu(x,y,z)dv}{\iiint_{\Omega}\mu(x,y,z)dv}$$

$$\bar{y}=\frac{\iiint_{\Omega} y\mu(x,y,z)dv}{\iiint_{\Omega}\mu(x,y,z)dv}$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega} z\mu(x,y,z)dv}{\iiint_{\Omega}\mu(x,y,z)dv}$$

3. 转动惯量

设物块的体密度为 $\rho(x,y,z)$ ，则此物体对 x 轴、y 轴、z 轴的转动惯量

Ix、Iy、Iz 分别为

$$Ix=\iiint_{\Omega}(y\hat{}2+z\hat{}2)\rho(x,y,z)dv$$

$$Iy=\iiint\limits_{\Omega}(z\text{^}2+x\text{^}2)\rho（x,y,z)dv$$

$$Iz=\iiint\limits_{\Omega}(x\text{^}2+y\text{^}2)\rho(x,y,z)dv$$

习题

1. $\iint\limits_{D}\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D:\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$。

2. 计算二重积分 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx$

3. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围成的体积

4. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\left(x+y+z\right)^2dxdydz$，其中 $\Omega:0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 1$

第四章、曲线积分与曲面积分

第一节 对弧长的曲线积分

1. 定义

被积函数为 f（x，y），沿某曲线的积分弧段弧的曲线积分：

$$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

2. 性质

（1）对同弧段段不同被积函数的可加合性：

$$\int_L[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]ds=\alpha\int_L f(x,y)ds+\beta\int_L g(x,y)ds$$

（2） 积分弧段可分段进行求解：

$$\int_L f(x,y)ds=\int_{L_1}f(x,y)ds+\int_{L_2}f(x,y)ds+......$$

（3）同积分弧段，不同被积函数的可比较性：

若同弧段 L 上：

$$f(x,y)\le g(x,y)$$

则：

$$\int_L f(x,y)ds \le \int_L g(x,y)ds$$

特别地，容易得到绝对值下的关系：

$$\left|\int_L f(x,y)ds\right| \le \int_L |f(x,y)|ds$$

可尝试思考同被积函数，不同积分弧段的比较。

3. 计算方法

引入参数方法：

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi^{'}(t)^2+\psi^{'}(t)^2}dt$$

其中：

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$$

要求关于 x，y 的参数为 t 的方程具有连续的一阶导数，且导数平方和不恒为零，即：

$$\varphi^{'}(t)^2+\psi^{'}(t)^2 \ne 0$$

特别的，可运用 y 与 x 之间的关系直接求解，即：

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y(x))\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$$

其中：

$$\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \end{cases}, x_1 \le x \le x_2$$

其他条件类似不变。

注意：该积分的积分下限需小于积分上限！

例：计算其对弧长的曲线积分：

$$\int_L x^2+y^2ds$$

其中：

$$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}(0 \le t \le 2\pi)$$

解：将 x，y 关于参数 t 的方程带入得：

$$\int_L x^2+y^2ds=\int_L a^2(1+t^2)ds=\int_0^{2\pi}a^2(1+t^2)\sqrt{a^2(t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}dt=\int_0^{2\pi}a^3t(1+t^2)dt=a^3(4\pi^4+2\pi^2)$$

第二节 对坐标的曲线积分

1.定义：以 P（x，y）为 x 轴方向上的被积函数，Q（x, y）为 y 轴方向上的被积函数，L 为积分弧段的曲线积分：

$$\int_L P(x,y)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_{i,}\eta_i)\Delta x_i$$

$$\int_L Q(x,y)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_{i,}\eta_i)\Delta y_i$$

2. 性质：

前两条性质与对弧长的曲线积分相似。与之不同的性质为：可反向性：反向弧段的积分为正向积分的相反数

即：

$$\int_{L^-}F(x,y)\cdot dr=-\int_L F(x,y)\cdot dr$$

3. 计算方法

与对弧长的曲线积分计算方法相似，寻找参数方程或找到 x 与 y 之间的关系直接进行求解。

对弧长的曲线积分与对坐标的曲线积分的关系：

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L (P\cos\alpha+Q\sin\beta)ds$$

第三节 格林公式

1. 应用范围：可利用格林公式将闭曲线积分转化为二重积分进行计算上的简化，有时即使不是闭曲线，也可通过构造闭曲线的方式来求解问题。

2. 格林公式：

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_L Pdx+Qdy$$

经典例题：

计算：

$$\int_L \frac{xdy-ydx}{(x^2+y^2)}$$

其中 L 为一条无重点，分段光滑且不经过原点的连续闭曲线。L 的方向为逆时针方向。

解：令

$$\begin{cases} P = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ Q = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

注意到：

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

考虑格林公式：若所围成的区域不包括原点，则：

$$\int_L \frac{xdy-ydx}{(x^2+y^2)^2} = \iint_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = 0$$

若包括原点，由于分母不为零，故需挖出包括原点的一部分单独计算，现以原点为圆心，作半径适当小的 r 圆，使得 L 包括圆形区域，其构成复连通区域 D。

运用格林公式，复连通区域为：

$$\int_L \frac{xdy-ydx}{(x^2+y^2)^2} - \int_l \frac{xdy-ydx}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

其中小圆 l 沿逆时针方向。由此可得：

$$\int_L \frac{xdy-ydx}{(x^2+y^2)^2} = \int_l \frac{xdy-ydx}{(x^2+y^2)^2} = 2\pi$$

（1） 推广应用：

i)曲线积分在 G 内与路径无关的充分必要条件为：

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ii)$P(x,y)dx + Q(x,y)dx$在 G 内为某一函数$u(x,y)$的全微分的充分必要条件为：

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

再通过其积分与路径的无关性可自行规定一条简单的路线进行求解$u(x,y)$。

iii)曲线积分的基本定理：

$$\int_L F \cdot dr = f(B) - f(A)$$

要求：

$$F = \nabla f$$

即该曲线积分与路径无关。

第四节 对面积的曲面积分

1.简化定义: 以$f(x,y,z)$为被积函数，$\sum$为积分曲面的曲面积分：

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i,}\eta_i,\varsigma_i)\Delta S_i$$

2.计算方法

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D} \frac{f(x,y,z)}{\cos\gamma} dxdy = \iint_{D} f(x,y,z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

其中 D 为$\sum$在 xoy 平面上的投影。

第五节 对坐标的曲面积分

1.简化定义： 以P,Q,R分别为x,y,z正方向的被积函数，以$\sum$为曲面，的上侧，下侧或前侧的曲面积分：

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_{i,}\eta_i,\varsigma_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_{i,}\eta_i,\varsigma_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_{i,}\eta_i,\varsigma_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

2.计算方法

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

其他坐标面上依次类推。

3.两类曲面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma dS$$

4.高斯公式

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$$

5.沿任意闭曲面积分为零的条件

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial z}$$

6. 通量：以向量场 A 通过曲面向着指定侧的通量：

$$\iint_{\Sigma} A\cdot ndS=\iint_{\Sigma} A\cdot dS=\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

7. 斯托克斯公式：

在P,Q,R具有连续一阶偏导及曲面的正侧与Γ曲线的右手螺旋法则所定的方向相同的情况下，对∑曲面的某曲面积分可通过Γ的有向闭曲线的曲线积分表示并求解：

$$\iint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz$$

便于记忆的形式为：

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz$$

证明见高数教材下册 P241.

8. 推广：空间曲线积分与路径无关的条件：

$$\begin{cases}\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\end{cases}$$

9. 环流量：向量场沿某空间曲线的流量：

$$\int_{\Gamma} A\cdot\tau ds$$

其中τ为空间曲线Γ的单位切向量：

$$\int_{\Gamma} A\cdot\tau ds=\int_{\Gamma} A\cdot dr=\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz$$

10. 旋度$rot\boldsymbol{A}$：

$$rotA=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})i+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})j+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})k$$

旋度的引入便于利用斯托克斯公式计算环流量。若其为零，则称向量场 A 为无旋场，无源且无旋称为调和场。

习题

1. 计算曲线积分$\oint_\Gamma \sqrt{x^2+z^2+xz}\,ds$, 其中$\Gamma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$与平面$x+y+z=0$的交线。
2. 计算$\int_\Gamma x^2dx+zdy-ydz$，其中$\Gamma$为$x=k\theta, y=a\cos\theta, z=a\sin\theta$上对应于$\theta$到从 0 到$\pi$的一段弧。
3. 证明曲线积分$\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$在整个$xOy$平面上与路径无关，并计算积分值。
4. 计算$\iint\limits_{\Sigma} zdS$，其中$\Sigma$为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在柱体$x^2+y^2\le 2x$内部分。

第五章、无穷级数

第一节 常数项级数的概念和性质

1. 级数收敛定义：如果级数$\sum_{i=1}^{\infty}u_i$的部分和数列$\{s_n\}$有极限 s，即

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

那么称无穷级数$\sum_{i=1}^{\infty}u_i$收敛，反之则称无穷级数$\sum_{i=1}^{\infty}u_i$发散。

2. 收敛级数的基本性质

性质一：如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于和 s，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$也收敛，且其和为 ks

性质二：如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$分别收敛于和 s 与σ，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \pm v_n$也收敛，且其和为$s\pm\sigma$

性质三：在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性。

性质四：如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，那么对这级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变。

性质五：如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，那么它的一般项u_n趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

第二节 常数项级数的审敛法

1. 正项级数及其审敛法

定理一： 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充分必要条件是：它的部分和数列$\{s_n\}$有界。

定理二（比较审敛法）： 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，且$u_n \le v_n$ $(\mathrm{n}=1,2,\cdots)$，若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；反之，若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散。

推论： 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，且存在正整数 N，使当$\mathrm{n} \ge \mathrm{N}$时有$u_n \le kv_n(\mathrm{k}>0)$成立，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，且存在正整数 N，使当$\mathrm{n} \ge \mathrm{N}$时有$u_n \ge kv_n(\mathrm{k}>0)$成立，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

证明：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，由收敛级数的基本性质 1 和 3，因为级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，所以级数$\sum_{n=N}^{\infty} kv_n$收敛。因为当$\mathrm{n} \ge \mathrm{N}$时有$u_n \le kv_n(\mathrm{k}>0)$成立，由比较审敛法得，级数$\sum_{n=N}^{\infty} u_n$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。同理可得，若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，且存在正整数 N，使当$\mathrm{n} \ge \mathrm{N}$时有$u_n \ge kv_n(\mathrm{k}>0)$成立，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

定理三（比较审敛法极限形式）： 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，

（1） 如果$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \mathrm{l}$ $(0<\mathrm{l}<+\infty)$, 那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$有相同敛散性。

（2） 如果$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \mathrm{l}$ $(\mathrm{l}=+\infty)$, 且级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

（3） 如果$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \mathrm{l}$ $(\mathrm{l}=0)$, 且级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

定理四（比值审敛法）： 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数，如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

那么当$\rho<1$时级数收敛，$\rho>1$时级数发散，$\rho=1$时级数可能收敛也可能发散。

定理五（根值审敛法）： 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数，如果

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho,$$

那么当$\rho<1$时级数收敛，$\rho>1$时级数发散，$\rho=1$时级数可能收敛也可能发散。

定理六（极限审敛法）： 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数，

（1） 如果$\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = \mathrm{l}>0$，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散；

（2） 如果 p>1, 而$\lim\limits_{n\to\infty} n^p u_n = \mathrm{l}$，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

2. 交错级数及其审敛法

定理七（莱布尼兹定理）：如果交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足条件：

（1） $u_n \geq u_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，

那么级数收敛，且其和$s \leq u_1$，其余项r_n的绝对值$|r_n| \leq u_{n+1}$。

3. 绝对收敛与条件收敛

定理八：如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$必定收敛。

第三节 幂级数

1. 概念

定理一（阿贝尔定理）：如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$当$x = x_0(x_0 \neq 0)$时收敛，那么适合不等式$|x| < x_0$的一切 x 使这幂级数绝对收敛；反之，如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$当$x = x_0(x_0 \neq 0)$时发散，那么适合不等式$|x| > x_0$的一切 x 使这幂级数发散。

推论：如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$不是仅在 x=0 一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，那么必有一个确定的正数 R 存在，使得

当$|x| < R$时，幂级数绝对收敛；

当$|x| > R$时，幂级数发散；

当$|x| = R$时，幂级数可能收敛也可能发散。

定理二：如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho,$$

其中a_n、a_{n+1}是幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的相邻两项的系数，那么这幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}，\rho \neq 0， \\ +\infty，\rho = 0， \\ 0，\rho = +\infty. \end{cases}$$

2. 幂级数运算

性质一：幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数 s(x) 在其收敛域 I 上连续。

性质二：幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数 s(x) 在其收敛域 I 上可积，并有逐项积分公式

$$\int_0^x s(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\,(x \in I),$$

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

性质三：幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数 s(x) 在其收敛区间（-R, R）内可导，且有逐

项求导公式

$$s'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\ (|x| < R),$$

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

第四节 傅里叶级数

1. 三角级数 三角函数系的正交性

三角函数系在区间$[-\pi,\pi]$上正交，是指在三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

中任何不同的两个函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$上的积分等于零。

2. 函数展开成傅里叶级数

设f(x)是周期为2π的周期函数，且能展开成三角级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

其中 $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx\ \ (n = 0,1,2,3,\cdots)$， $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\ \ (n = 1,2,3,\cdots)$。

定理（收敛定理）：设f(x)是周期为2π的周期函数，如果它满足：

（1） 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，

（2） 在一个周期内至多只有有限个极值点，

那么 f(x)的傅里叶级数收敛，并且当 x 是 f(x)的连续点时，级数收敛于 f(x)；当 x 是 f(x)的间断点时，级数收敛于$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

3. 正弦级数和余弦级数

f(x)级数展开后若只有正弦项则称为正弦级数。即（$a_n = 0$）。即 f(x)是积函数。

f(x)级数展开后若只有常数项和余弦项则称为余弦级数。即（$b_n = 0$）。即 f(x)是偶函数。

4. 一般周期函数的傅里叶级数

定理：设周期为 2l 的周期函数 f(x)满足收敛定理的条件，则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})\quad (x \in C)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} dx\quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

$$\mathrm{C}=\left\{x\middle|f(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\right\}$$

证：设$z=\frac{\pi x}{l}$，所以区间$-l\le x\le l$转换为$-\pi\le z\le\pi$。$f(x)=f\left(\frac{zl}{\pi}\right)=F(z)$。

所以$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)cosnzdz=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(x)cos\frac{n\pi x}{l}d(\frac{\pi x}{l})=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)cos\frac{n\pi x}{l}dx$

同理$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)sin\frac{n\pi x}{l}dx$

$$F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_ncosnz+b_nsinnz)=f(x)$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_ncos\frac{n\pi x}{l}+b_nsin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

习题

1. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于 S，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛于___________

2. 设$\sum_{n=1}^{\infty}n(u_n-u_{n-1})=S$，且$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=A$，则$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=$ ____________

3. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosn\pi}{\sqrt{n^3+n}}$的敛散性

期末模拟卷

1. 已知$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y}$，则$f\left(xy,\frac{x}{y}\right)=($　　　$)$

（A）$\frac{x}{xy^3+1}$　　(B)$\frac{y}{xy^3+1}$　　（C）$\frac{xy}{x^2y^2+1}$　　（D）$\frac{xy}{xy^3+1}$

2. 设有三元方程$xy-z\,ln\,y+e^{xz}=1$，则根据隐函数存在定理，存在点(0,1,1)的一个邻域，在此邻域内该方程(　　　)

（A）只能确定一个具有连续偏导数的隐函数$z=z(x,y)$
（B）可确定两个具有连续偏导数的隐函数$y=y(x,z)$和$z=z(x,y)$
（C）可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$z=z(x,y)$
（D）可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$y=y(x,z)$

3. 设$f(x,y,z)$是k次齐次函数，即$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$，λ为某一常数，则结论正确的是(　　　)

（A）$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=k^{\lambda}f(x,y,z)$　　（B）$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=\lambda^kf(x,y,z)$

（C）$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$ （D）$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=f(x,y,z)$

4. 累次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr$可以写为(　　)

（A）$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\,dx$ （B）$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx$

（C）$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy$ （D）$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)\,dy$

5. 设区域 D= $\{(x,y)|x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$，$f(x)$为 D 上的正值连续函数，$a,b$为常数，则$\iint_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=$(　　)

（A）$ab\pi$ （B）$\frac{ab\pi}{2}$ （C）$(a+b)\pi$ （D）$\frac{a+b}{2}\pi$

6. 设$u_n=(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则级数(　　)

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$都收敛 （B）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$都发散

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$发散 （D）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛

7. 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处收敛，那么当 x=2 时该级数(　　)
（A）条件收敛 （B）绝对收敛 （C）发散 （D）敛散性不变

8. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}=$____________

9. 设有一半径为 R 的球体，P_0是此球的表面上的一个定点，球体上任意一点的密度都与该点到此定点距离的平方成正比（比例系数$k>0$），则此球体的重心位置为____________。（圆心在原点，$P_0(R,0,0)$）

10. 重积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}\,e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=$__________（$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$，此为泊松积分）

11. 设$z=z(x,y)$是由方程$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$所确定的函数，则$\frac{\partial z}{\partial y}=$__________

12. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$的收敛域，并求其和函数。

13. 求抛物线$y=x^2$和直线$x-y-2=0$之间的最短距离。

14. 求经过直线$\begin{cases}x+5y+z=0\\x-z+4=0\end{cases}$且与平面$x-4y-8z+12=0$交成$\frac{\pi}{4}$的平面方程。

15. 试计算曲面积分$I=\iint_{\Sigma}\frac{2\,dy\,dz}{x\cos^2 x}+\frac{dz\,dx}{\cos^2 y}-\frac{dx\,dy}{z\cos^2 z}$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧。

16. 计算$\iint_D \frac{(x+y)\,ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}dx\,dy$，其中$D: x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0$

参考答案

第一章

1. 解：

已知平面法向量 $\overrightarrow{n_1}=(7,-1,4)$

已知直线的方向向量 $\vec{s}=(1,1,2)$

取所求平面的法向量$\vec{n}$=$\overrightarrow{n_1}\times\vec{s}=(6,10,-8)$

所求为：$cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{51}}$，$cos\beta=\frac{5}{\sqrt{51}}$，$cos\gamma=\frac{-4}{\sqrt{51}}$

2. 解：

所求直线方向向量可取为

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}=(-4,-3,-1)$$

则由点向式得直线方程为

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}$$

3. 解：关键求出直线与平面的交点或直线的方向向量。

过点$M(-1,0,4)$且与已知平面平行的平面方程为

π：$3(x+1)-4(y-0)+(z-4)=0$即$3x-4y+z-1=0$

平面π与直线l的交点为：G(15,19,32)，MG所在直线即为所求，其方程为:

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$$

4. 解：过直线$\begin{cases}2x+y-z-1=0\\x-y+3z+1=0\end{cases}$的平面束方程为

$$(2+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+3\lambda)z-1+\lambda=0$$

其中λ为待定常数，这平面与平面$x+y+z=0$垂直的条件是

$$(2+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 2+(-1+\lambda)\cdot(-1)=0$$

即$5-2\lambda=0$ =即$\lambda=\frac{5}{2}$，故投影直线方程为

$$\begin{cases}9x-3y+13z+3=0\\x+2y-z=0\end{cases}$$

第二章

1．解：

$2xy \le x^2 + y^2$,知

$$\left| f(x,y) \right| \le \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

故 f 在（0，0）连续

又因 $f(x,0) = f(0,y) = 0$，所以 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

而 $\Delta f \mid_{(0.0)} = \dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}$

当 $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ 时，

$$\frac{\Delta f \mid_{(0,0)}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]} \ne 0$$

$\therefore f(x,y)$在（0，0）不可微

2．解：令 $u = x + y.v = x - y$ 则

$$x = \frac{1}{2}(u+v), y = \frac{1}{2}(u-v)$$

$$f(u,v) = \frac{1}{4}(u+v)^2 - \frac{1}{4}(u-v)^2 + \varphi(u) = uv + \varphi(u)$$

即 $f(x,y) = xy + \varphi(x)$,

$\because f(x,0) = x \therefore \varphi(x) = x$

$\therefore$原函数为：$f(x,y) = x(y+1)$

3.解：方程两边微分，得

$$\begin{cases} dz = f dx + x f'(dx + dy) \\ F_1' dx + F_2' dy + F_3' dz = 0 \end{cases}$$

化简后得：

$$\begin{cases} (f + x f')dx + x f' dy - dz = 0 \\ F_1' dx + F_2' dy + F_3' dz = 0 \end{cases}$$

去dy即可得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x F_2' f' + F_2' f - x F_1' f'}{x F_3' f' + F_2'}$$

4. 解：$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = 3x^2y^2|_{P_0} = 27$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = 2x^3y|_{P_0} = 54$，$\overrightarrow{P_0P_1} = (-1,2)$, $\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|$

所以方向余弦$cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, 故方向导数

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \times cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \times cos\beta = \frac{81\sqrt{5}}{5}$$

第三章

1. 解：当二重积分积分域为圆域或扇形域，可考虑用极坐标

$$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_\pi^{2\pi} \sin\rho \cdot \rho d\rho$$

$$= 2\pi\int_\pi^{2\pi} \sin\rho \cdot \rho d\rho$$

$$= 2\pi\left[-\rho\cos\rho\Big|_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi}\cos\rho d\rho\right]$$

$$= -6\pi$$

2. 解：由于被积函数的原函数不易求出，可考虑改变积分次序后再计算。

设区域$D: \frac{1}{2} \le x \le 1, x^2 \le y \le x$

$$I = \iint_D e^{\frac{y}{x}} d\sigma = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{x^2}^x e^{\frac{y}{x}} dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 x\left(e - e^x\right)dx = \frac{3e}{8} - \frac{\sqrt{e}}{2}$$

3. 解：

投影域$D: x^2+y^2 \le 1$

$$V = \iint_D \left[\sqrt{x^2+y^2} - \left(x^2+y^2\right)\right] d\sigma$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\rho - \rho^2\right)\rho d\rho$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

4. 解：$\iiint_\Omega (x+y+z)^2 dxdydz$

$$= \iiint_\Omega \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz + 2\iiint_\Omega (xy+yz+zx)dxdydz$$

$$= 3\iiint_\Omega x^2 dxdydz + 6\iiint_\Omega xydxdydz$$ （**轮换对称性**）

$$= \frac{5}{2}$$

第四章

1. 解：

$$\Gamma：\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x+y+z=0\end{cases} \quad 即 \quad \Gamma：\begin{cases}x^2+y^2+xz=\frac{R^2}{2}\\ x+y+z=0\end{cases}$$

$$原式=\oint_\Gamma \sqrt{\frac{R^2}{2}}ds=\frac{R}{\sqrt{2}}\oint_\Gamma ds=\frac{R}{\sqrt{2}}\bullet 2\pi R=\sqrt{2}\pi R^2$$

2. 解：原式$=\int_0^\pi k^3\theta^2\cdot kd\theta+a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)d\theta-a\sin\theta\cdot a\cos\theta d\theta$

$$=\int_0^\pi\left(k^3\theta^2-a^2\right)d\theta=\left(\frac{1}{3}k^3\theta^3-a^2\theta\right)\Big|_0^\pi=\frac{k^3\pi^3}{3}-a^2\pi$$

3. 证明：

$\because (x+y)dx+(x-y)dy=xdx+ydx+xdy-ydy$

$=d\left(x^2\right)+d(xy)-d\left(y^2\right)=d\left(x^2+xy-y^2\right)$

被积式是函数$u(x,y)=x^2+xy-y^2$的全微分，从而题设积分与路径无关。

$$原式=\left(\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{(1,1)}^{(2,3)}=\frac{5}{2}$$

4. 解：Σ在xOy面上的投影为D_{xy}：　$x^2+y^2\le 2x(z=0)$

Σ用极坐标表示，则为：$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2\cos\theta$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

$$原式=\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cdot rdr$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}8\cos^3\theta d\theta=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{16\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{32\sqrt{2}}{9}$$

注：利用$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta=\frac{n-1}{n}I_{n-2},I_1=1,I_0=\frac{\pi}{2}$

第五章

1. 解：$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}-u_1+S=2S-u_1$

2. 解：$\sum_{n=1}^{\infty}n(u_n-u_{n-1})=u_1-u_0+2(u_2-u_1)+\cdots+n(u_n-u_{n-1})=nu_n-(u_0+u_1+\cdots+u_n=nu_n-\sum_{n=0}^{\infty}u_n=A-\sum_{n=0}^{\infty}u_n=S$

所以$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=A-S$

3. 解：$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{cosn\pi}{\sqrt{n^3+n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$，因为$\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^3}}$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$收敛，

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosn\pi}{\sqrt{n^3+n}}$收敛。

期末模拟卷答案

1. D

令$u=xy$，$v=\frac{x}{y}$，则$f\left(xy,\frac{x}{y}\right)=f(u,v)=\frac{uv}{u^2+v}=\frac{xy}{xy^2+1}$

2. D

3. C

令$u=tx,v=ty,w=tz$，则

$$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,t)\Rightarrow f(u,v,w)=t^kf(x,y,z)$$

上式对 t 求导得

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=kt^{k-1}f(x,y,z)$$
$$\Rightarrow x\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}+z\frac{\partial f}{\partial w}=kx^{k-1}f(x,y,z)$$
$$\Rightarrow xt\frac{\partial f}{\partial u}+yt\frac{\partial f}{\partial v}+zt\frac{\partial f}{\partial w}=kx^tf(x,y,z)$$
$$\Rightarrow u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}+w\frac{\partial f}{\partial w}=kt^kf(x,y,z)$$
$$\Rightarrow x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$$

故选 C

4. D

平面区域 D 为曲线$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}(y>0)$及$x$轴围城，所以，原式$=\int_0^1dx\int_v^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)\,dy$

5. D

因$D:x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0$，对于$x,y$具有轮换对称性，故

$$\iint\limits_D\sqrt{f(x)}\,d\sigma=\iint\limits_D\sqrt{f(y)}\,d\sigma$$

则

$$I=\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=\frac{1}{2}\iint_{\mathrm{D}}(\mathrm{a}+\mathrm{b})\,\mathrm{d}\sigma=\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}\pi$$

故选 D

6. C

7. B

根据阿贝尔引理，$|2-1|<|-1-1|$，故该幂级数收敛

8 2

利用拆项法

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3k}{3^k-2^k}-\frac{3^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}\right)=3-\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}$$

$n\to+\infty$, 该级数的值为 2

9. $\left(-\frac{R}{4},0,0\right)$

10. $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{y}xe^{-(x^2+y^2)}\,dx+\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}ye^{-(x^2+y^2)}\,dy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2}\,dx-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2y^2}\,dy=-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2}\,dx$$

因为$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\sqrt{2\pi}$，故$I=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

11. $\frac{z^2}{y(x+z)}$

将方程两边对 y 求导，可得：

$$-\frac{x}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{z}\cdot\frac{y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2}$$

故

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{Z^2}{y(x+z)}$$

12. 解：

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$$

故收敛半径为

$$R=2$$

当$x=2$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$$

发散，

当$x=-2$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n\cdot 1}}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$$

收敛。

设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}$$

则

$$xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n\cdot 2^n}$$

$$[xS(x)]'=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2-x}$$

两边积分得

$$xS(x)=-\,ln|2-x|+ln\,2$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}=-\frac{\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)}{x}\qquad\qquad(-2\le x<0,0<x<2)$$

或

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{2}\qquad\qquad(x=0)$$

13.　解：

设(x_1,y_1)为抛物线上任意一点，而(x_2,y_2)是直线$x-y-2=0$的任意一点，即求函数

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

在条件

$$y_1=x_1^2,x_2-y_2-2=0$$

下的极值

故可设函数

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,\lambda_1,\lambda_2)=(x,-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+\lambda_1(y_1-x_1^2)+\lambda_2(x_2-y_2-2)$$

解方程组$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=-2(x_2-x_1)-2\lambda_1x_1=0\\\dfrac{\partial F}{\partial x_2}=2(x_2-x_1)+\lambda_2z=0\\\dfrac{\partial F}{\partial y_1}=-2(y_2-y_1)+\lambda_1=0\\\dfrac{\partial F}{\partial y_2}=2(y_2-y_1)-\lambda_2=0\\y_1=x_1^2\\x_2-y_2=2\end{cases}$

解得

$$x_1=\frac{1}{2},y_1=\frac{1}{4},x_2=\frac{11}{8},y_2=-\frac{5}{8}$$

显然，当(x_1,y_1)，(x_2,y_2)至少有一个趋于无穷时，距离也趋于无穷，故在$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$，$\left(\frac{11}{8},-\frac{5}{8}\right)$处取得极小值，最短距离为$d=\frac{7}{8}\sqrt{2}$

14. 解：

过直线的约束方程为

$$\lambda(x+5y+z)+\mu(x-z+4)=0$$

即

$$(\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)z+4\mu=0$$

所求平面法向量为$\overrightarrow{n_1}=(\lambda+\mu,5\lambda,\lambda-\mu)$，已知平面法向量为$\overrightarrow{n_2}=(1,-4,-8)$

所以

$$cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$$

解得$\lambda=0$或$\frac{\lambda}{\mu}=-\frac{4}{3}$

故方程为$x-z+4=0$或$x+20y+7z-12=0$

15. 解：

由Σ对称性，可知

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{2\,dy\,dz}{x\cos^2x}+\frac{dz\,dx}{cos^2y}-\frac{dx\,dy}{z\cos^2z}=\iint\limits_{\Sigma}\frac{2\,dx\,dy}{z\cos^2z}+\frac{dx\,dy}{cos^2z}-\frac{dx\,dy}{z\cos^2z}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{1}{z\cos^2z}+\frac{1}{\cos^2z}\right)dx\,dy$$

且

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dx\,dy}{cos^2 z}=\iint\limits_{x+y^2\le 1}\frac{dx\,dy}{\cos\sqrt[2]{x^2+y^2+z^2}}-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{dx\,dy}{\cos^2\left(-\sqrt{x^z+y^2+z^2}\right)}=0$$

所以

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z\,cos^2 z}dx\,dy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{dx\,dy}{-\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)}$$

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-r^2}\cos\sqrt[2]{1-r^2}}r\,dr$$

$$=-4\pi\tan\sqrt{1-r^2}\Big|_0^1=4\pi\tan 1$$

16.　解：

令$u=x+y$，$v=\frac{y}{x}$，则$x=\frac{u}{1+v},y=\frac{uv}{1+v}$，$D'\colon 0\le u\le 1,v\ge 0$，且

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2}\\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}=\frac{u}{(1+v)^2}$$

于是，

$$\iint\limits_{D}\frac{(x+y)\,ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}dx\,dy=\int_0^1 du\int_0^{+\infty}\frac{u\ln(1+v)}{\sqrt{1-u}}\frac{u}{(1+v)^2}dv$$

$$=\int_0^1\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}dv=\frac{16}{15}\cdot 1=\frac{16}{15}$$