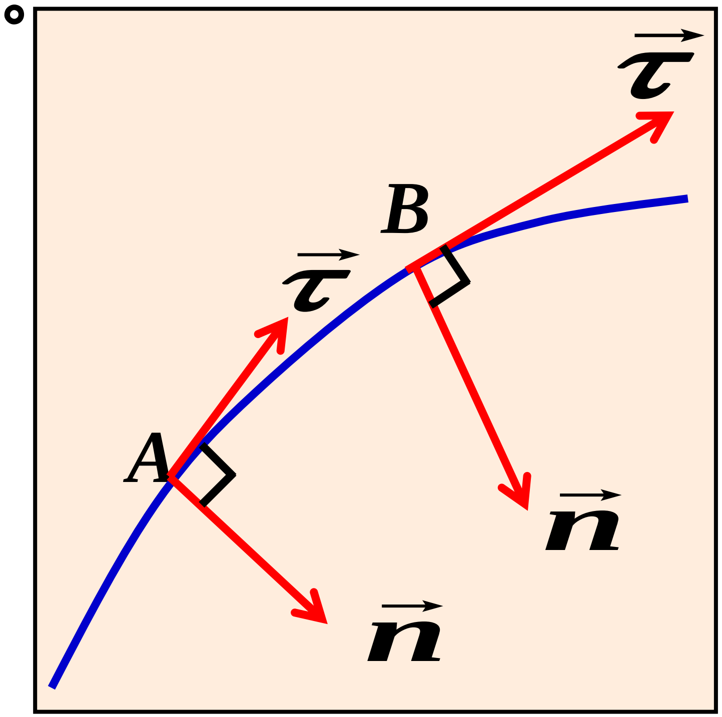
二、切向加速度和法向加速度

自然坐标系： 坐标原点固接于质点，坐标轴沿质点运动轨道的切向和法向的坐标系。

原点： 固接于质点。

坐标轴： 沿质点运动轨道的切向和法向。切向以质点前进方向为正，记做 $\vec{\tau}$，法向以曲线凹侧方向为正，记做 $\vec{n}$。



在自然坐标中描述质点的运动：

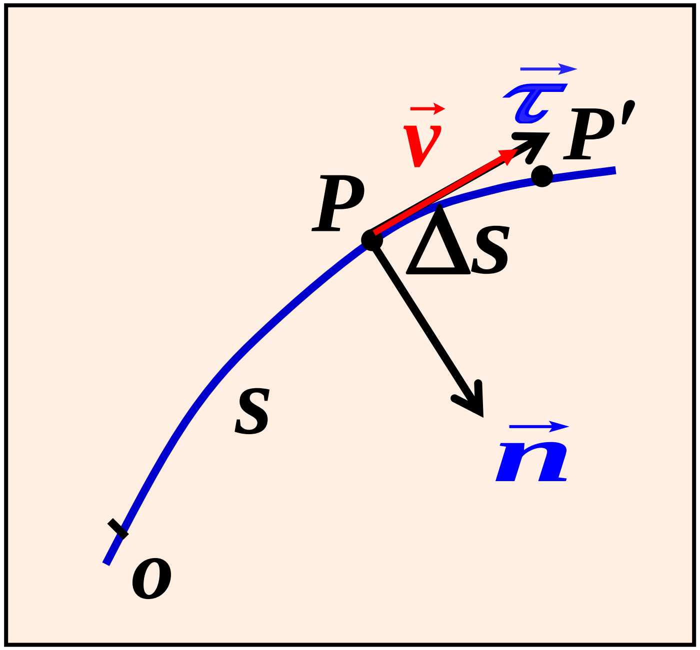
(1) 位置：在轨道上取一固定点O，用质点距离O的路程长度 s，可唯一确定质点的位置。 位置 s有正负之分。

(2) 位置变化：Δs

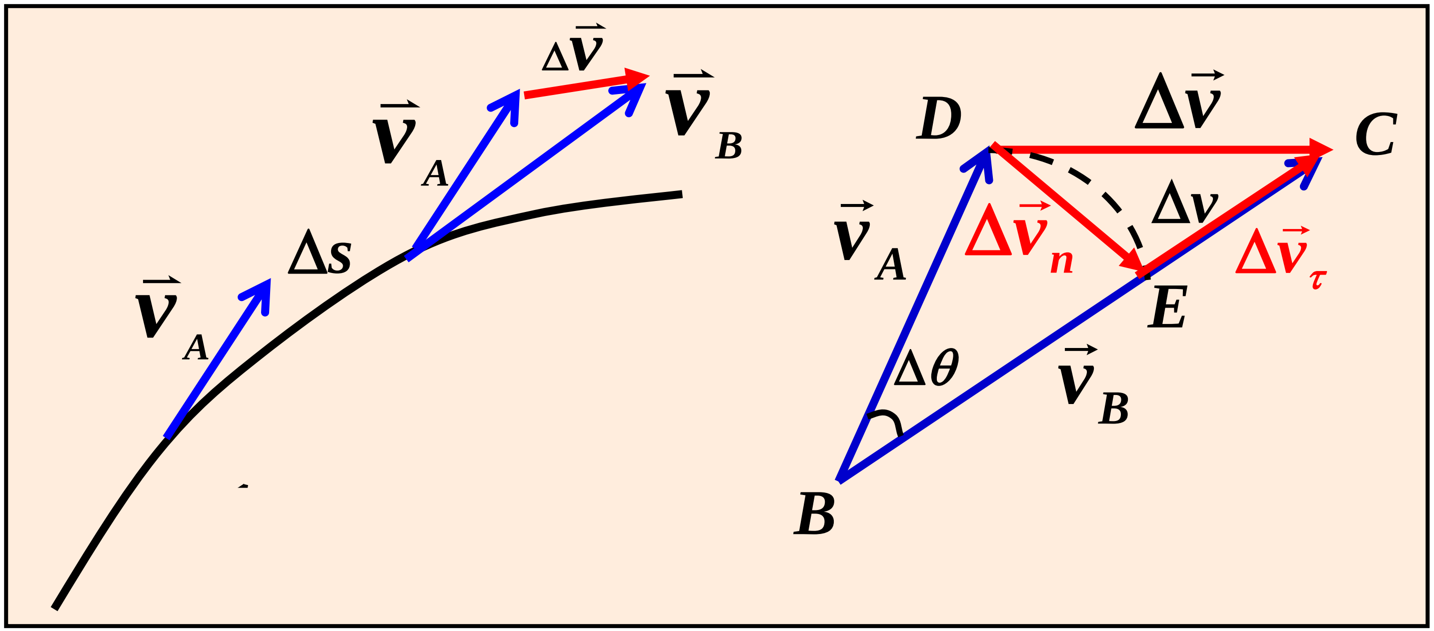
(3) 速度：沿切线方向。

$$\because |\vec{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \vec{v} = |\vec{v}|\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$$

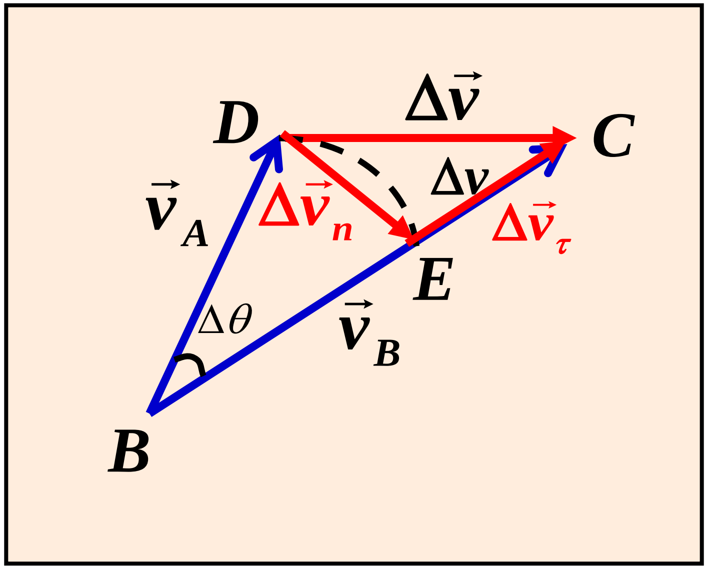


▲ (4) 加速度



速度的改变为：$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$

$$\therefore \vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\text{n}}{\Delta t}$$

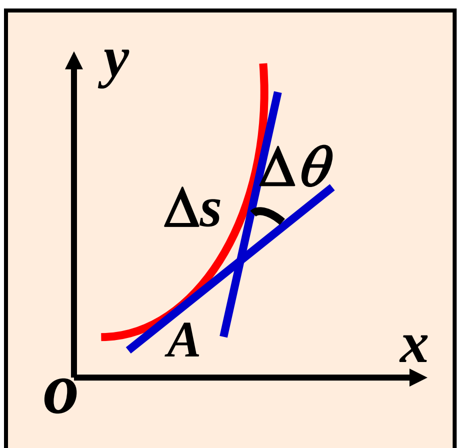


$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\mathrm{n}}{\Delta t}$$

第一项：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\vec{\tau}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$$

第二项：$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\mathrm{n}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v\Delta\theta}{\Delta t}\vec{n}=\frac{v\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{n}$$



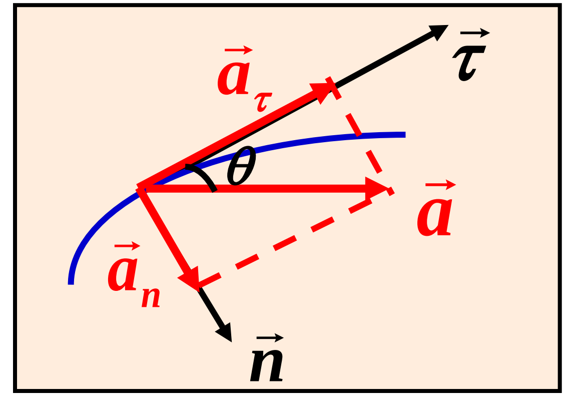
$$=v\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\vec{n}$$

曲率

$$=\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

$\rho \longrightarrow$ 曲率半径

$$\therefore \quad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$$



切向加速度：令 $\vec{a}_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$

描述速度大小改变的快慢，不影响速度的方向。

法向加速度：令 $\vec{a}_n=\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$

描述速度方向改变的快慢，不影响速度的大小。

大小：

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_\tau^{\ 2}+a_n^{\ 2}}$$

方向：$\vec{a}$与$\vec{a}_\tau$的夹角

$\theta=\operatorname{arctg}\frac{a_n}{a_\tau}$，且指向曲线凹侧

练习： 判断下列说法是否正确。

1） a_n恒等于零的运动是匀速率直线运动。

恒

2） 作曲线运动的质点a_n不能为零。

3） a_τ 恒等于零的运动是匀速率运动。

恒

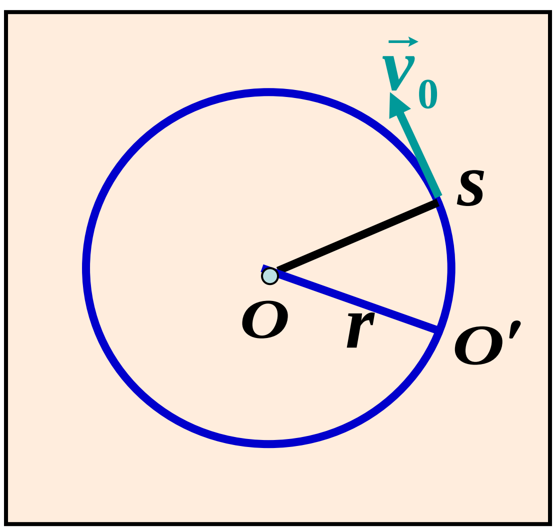
4） 作变速率运动的质点a_τ 不能为零。

小结：（1） $a_\tau \equiv 0$ 匀速率运动； $a_\tau \not\equiv 0$ 变速率运动

（2） $a_n \equiv 0$ 直线运动； $a_n \not\equiv 0$ 曲线运动

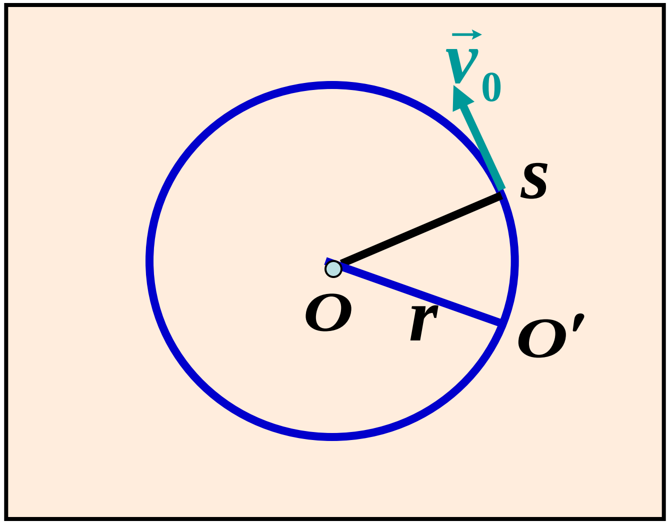
例6: 设一质点在半径为 r 的圆周上以匀速率 v_0 运动，写出自然坐标系中质点的速度和加速度。

解: 建立如图坐标系，以 O' 为自然坐标系的原点和计时起点。



$$v_0 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

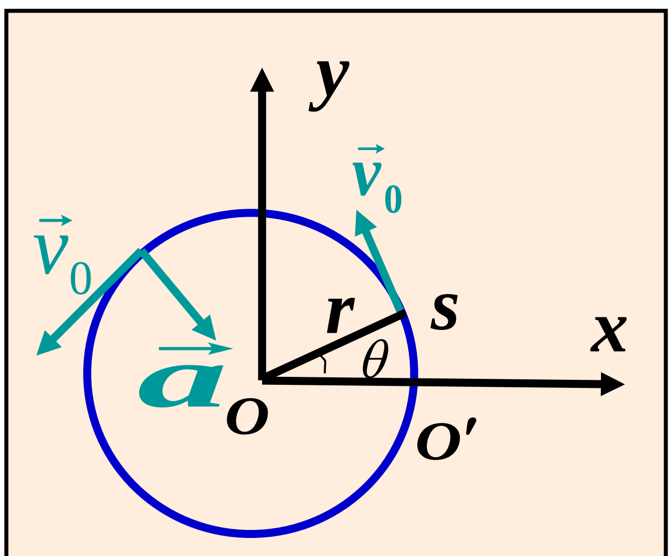
$$\vec{v} = v_0\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$$



$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}=0$$

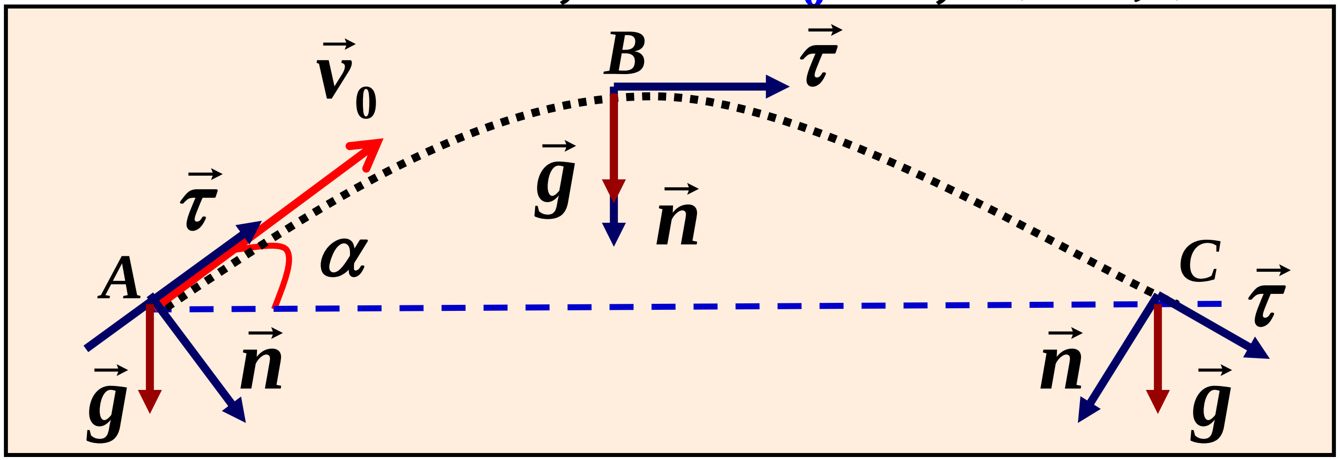
$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{v_0^{\,2}}{r}$$

$$\therefore \vec{a}=a_\tau\vec{\tau}+a_n\vec{n}=\frac{v_0^{\,2}}{r}\vec{n}$$



结论：在直角坐标中重做，可发现用自然坐标描述匀速率圆周运动较直角坐标简便。

例7： 一物体做抛体运动，已知 v_0, α，讨论其加速度和 ρ。



	A	B	C
$\vec{a}$	$\vec{g}$	$\vec{g}$	$\vec{g}$
a_τ	$-g\sin\alpha$	0	$g\sin\alpha$
a_n	$g\cos\alpha$	g	$g\cos\alpha$
ρ	$\dfrac{v_0^2}{g\cos\alpha}$	$\dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$	$\dfrac{v_0^2}{g\cos\alpha}$

三、圆周运动的角量描述

线量： 在自然坐标系下，以运动曲线为基准的基本参量。

角量： 在极坐标系下，以旋转角度为基准的基本参量。

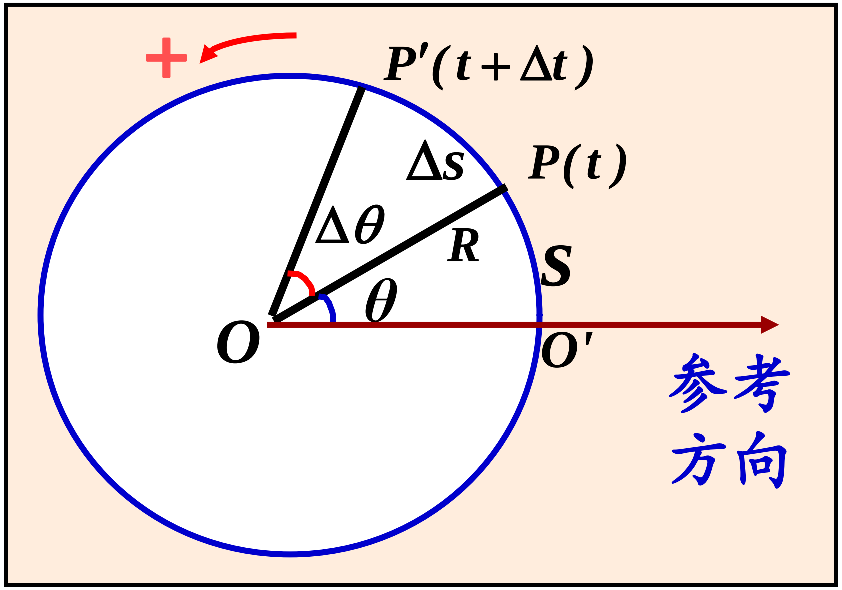
1. 角位置 θ

2. 角位移 $\Delta\theta$

单位： rad

规定：

逆时针方向为正

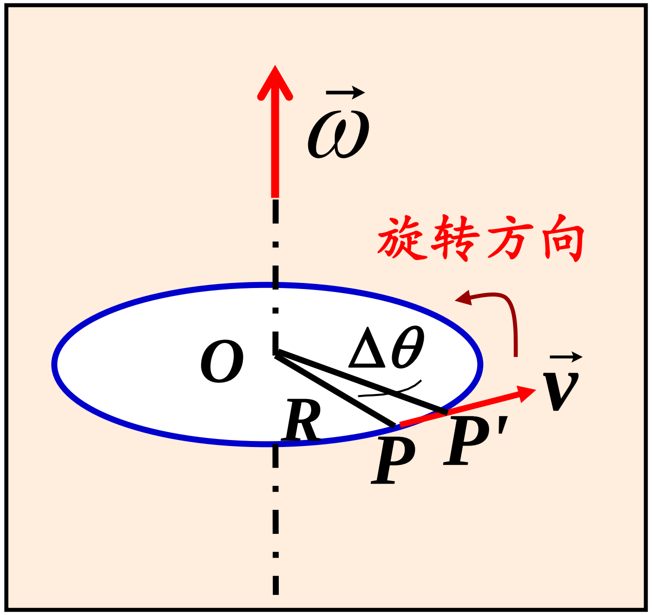


3. 角速度

平均角速度： $\overline{\omega}=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

角速度： $\omega=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{d\theta}{dt}$

单位： $rad.s^{-1}$



定义角速度矢量 $\vec{\omega}$

方向： 右手螺旋法则

垂直于运动平面，沿轴向。

4. 角加速度

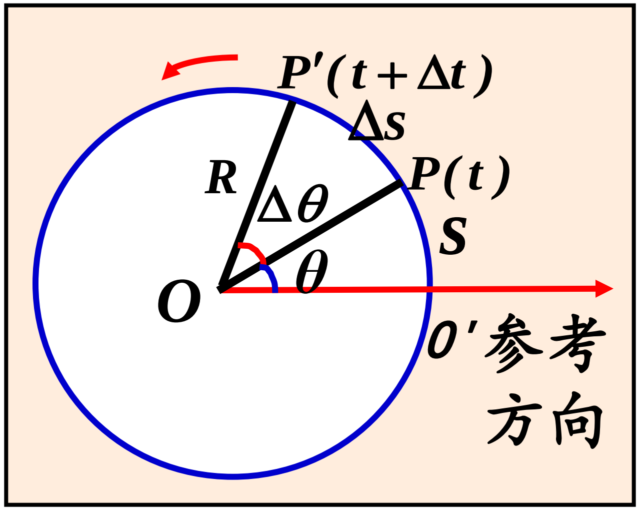
平均角加速度: $\overline{\beta}=\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$

角加速度: $\beta=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

注意: 角加速度不是矢量

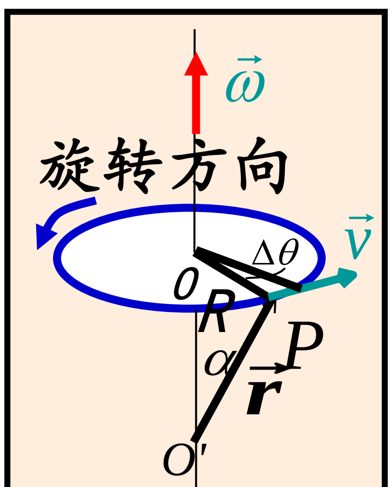
(参看《教与学参考》P_{71})

5. 角量与线量的关系



$$s = R\theta$$

$$\Delta s = R\Delta\theta$$



$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\beta$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2$$

$\vec{v}$与$\vec{\omega}$ 的关系：

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$（证明略）

例8（P_{56} 3.12）：某发动机工作时，主轴边缘一点作圆周运动方程为 $\theta = t^3 + 4t + 3(\mathrm{SI})$

（1）t =2s 时，该点的角速度和角加速度为多大？

（2）若主轴直径 $D = 40$ cm，求 $t = 1$ s 时，该点的速度和加速度。

思路：（1）$\theta(t) \to \omega(t) \to \beta(t) \to t = 2$

（2）由角量与线量的关系

解：(1) 由运动方程得边缘一点的角速度和角加速度

$$\theta = t^3 + 4t + 3 \qquad \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 3t^2 + 4 \qquad \beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 6t$$

$$t = 2\,\mathrm{s}:\omega = 3\times 2^2 + 4 = 16\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} \qquad \beta = 6\times 2 = 12\ \mathrm{rad}\cdot s^{-2}$$

（2）由角量和线量的关系，得边缘一点的速度、切向加速度和法向加速度

$$v=\omega r=\frac{1}{2}\omega D=\frac{1}{2}\left(3t^2+4\right)\times 0.4=0.2\left(3t^2+4\right)$$

$$a_\tau=\beta r=6t\times 0.2=1.2t$$

$$a_n=\omega^2 r=\left(3t^2+4\right)^2\times 0.2$$

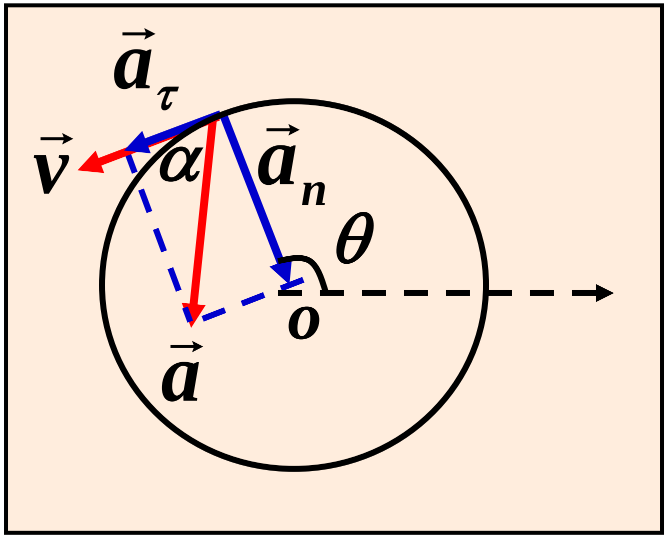
$t=1\mathrm{s}$时，$v=0.2(3+4)=1.4(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$

$$a_\tau=1.2(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

$$a_n=\left(3+4\right)^2\times 0.2=9.8(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

此时总加速度的大小为：

$$a=\sqrt{a_\tau{}^2+a_n{}^2}=\sqrt{1.2^2+9.8^2}=9.87\,(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$



$\vec{a}$与$\vec{v}$的夹角为：$\alpha=\mathrm{arctg}\dfrac{a_n}{a_\tau}=\mathrm{arctg}\dfrac{9.8}{1.2}=83.0^\circ$

四、刚体的运动

1. 基本形式

平动： 刚体运动时，其上任意两点连线的方位始终不变的刚体运动。

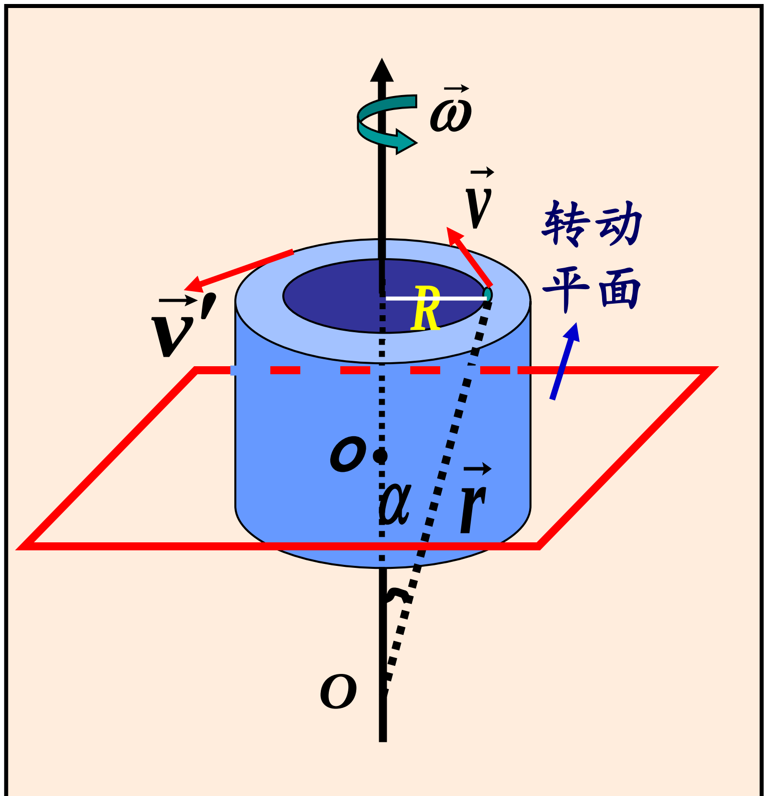
特点： 刚体可视为质点，对质点运动的描述方法对平动刚体适用。

转动： 刚体上各质点都绕同一直线所做的圆周运动。该直线叫刚体的**转轴**。

一般运动： 平动与转动的叠加。

2. 刚体定轴转动

定轴转动：转轴为固定直线的转动。



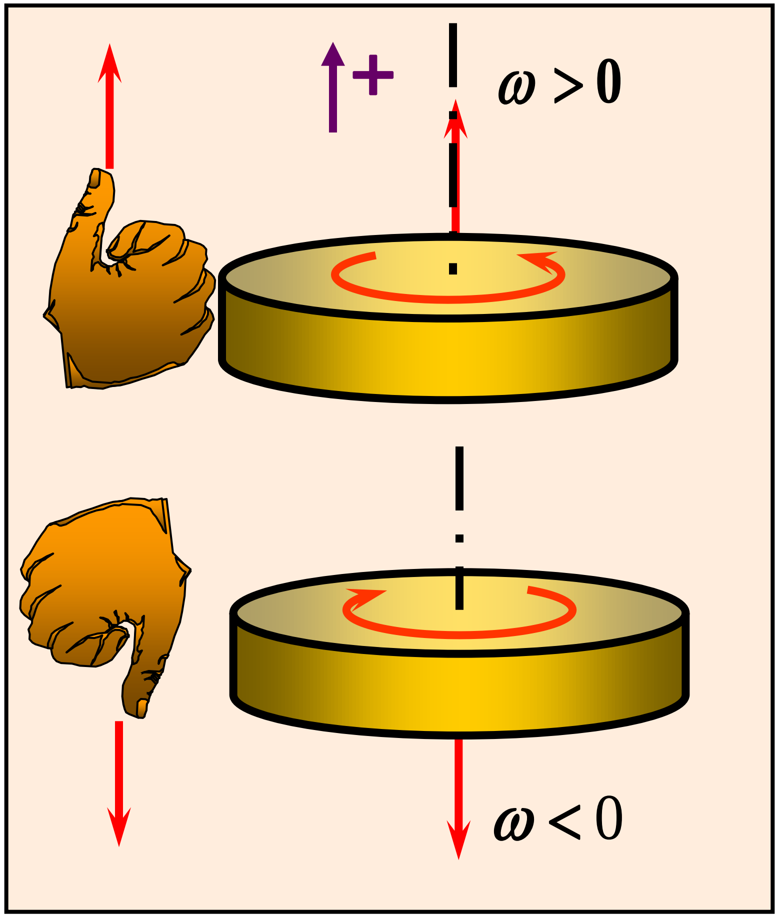
刚体定轴转动的简化：

(1) 可简化为研究刚体在它的某个**转动平面**内的运动。

(2) 可用角量作整体描述。

(3) 在轴上选定正方向后，各角量均表示为代数量：

$$\theta \quad \Delta\theta \quad \omega \quad \beta$$



因此： 对于刚体定轴转动:在轴上选定正方向后，用角速度的**正负**就可表示角速度的**方向**，不必用矢量表示。

注意： 一般以旋转方向为正方向，此时$\omega>0$。若加速运动，$\beta>0$；若减速运动，$\beta<0$，。

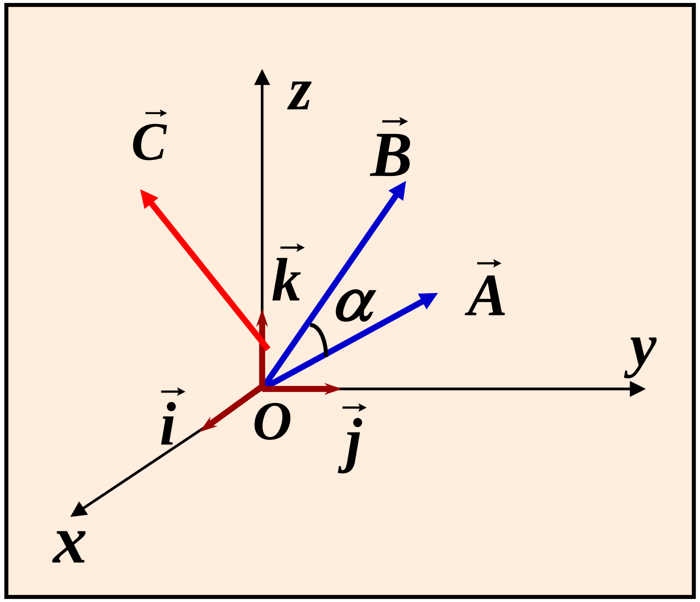
复习　矢量的乘法

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

$$\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$$

标积（点积）：

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A\cdot B\cdot\cos\alpha=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$



矢积（叉积）：

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=A_yB_z\vec{i}+A_zB_x\vec{j}+A_xB_y\vec{k}-A_zB_y\vec{i}-A_xB_z\vec{j}-A_yB_x\vec{k}$$

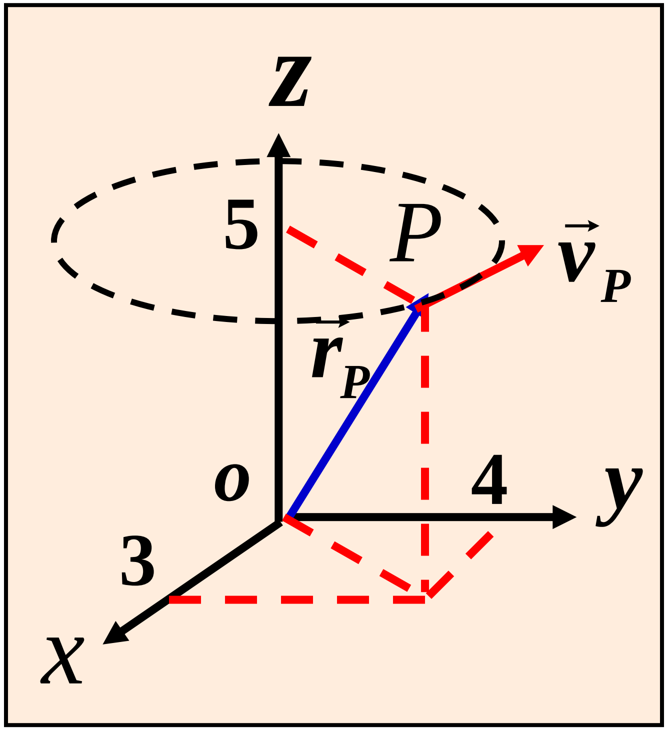
方向：右手定则，垂直于$(\vec{A},\vec{B})$平面。

大小：$C=\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=A\cdot B\cdot\sin\alpha$

练习(P46 例7)：一刚体以每分钟60转速率绕 z 轴逆时针匀速转动，设某时刻刚体上某点 P 的位矢为：

$$\vec{r}_P = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}\,\mathrm{cm}$$

该时刻P点的速度为：



1. $\vec{v} = 94.2\vec{i} + 125.6\vec{j} + 157.0\vec{k}$

2. $\vec{v} = -25.1\vec{i} + 18.8\vec{j}$

3. $\vec{v} = 25.1\vec{i} + 18.8\vec{j}$

4. $\vec{v} = 31.4\vec{k}$

单位均为$\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$

定性分析：正确答案：2

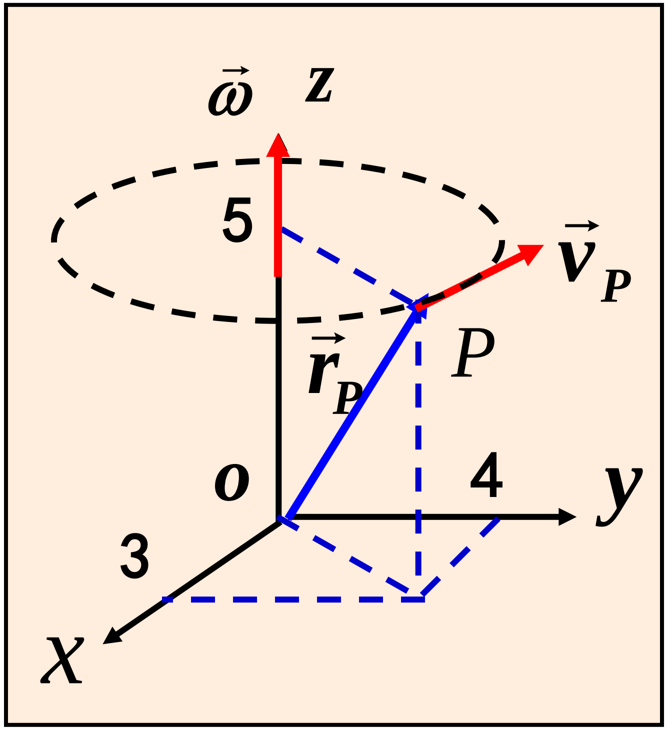
定量计算：

$$\vec{\omega}=60\vec{k}\text{转}/\text{分}=2\pi\,\vec{k}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\vec{r}_P=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}\quad\text{cm}$$

该时刻P点的速度为：

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 2\pi\\ 3 & 4 & 5\end{vmatrix}$$



$$\vec{v}=-25.1\vec{i}+18.8\vec{j}\quad(\text{cm}\cdot\text{s}^{-1})$$

正确答案：2

第四节　运动学的两类基本问题(习题课)

一、已知质点运动方程，求任一时刻的速度、加速度

$$\vec{r}(t) \rightarrow \vec{v},\quad \vec{a}\quad ;\quad \theta(t) \rightarrow \omega,\quad \beta$$

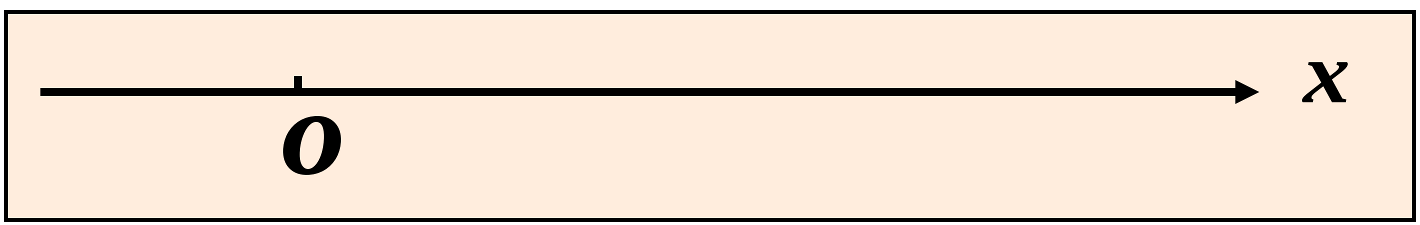
方法：微分法

例1 (P_{48} 例1)：已知粒子运动方程 $x = t^3 - 3t^2 - 9t + 5\,(\mathrm{SI})$

分析粒子的运动情况

1. 粒子轨迹？ ……其轨迹为一条直线

注意：凡直线运动，可将坐标原点选在轨道直线上，建立一维坐标，将各矢量按代数量处理。



$$\vec{r}, \Delta\vec{r}, \vec{v}, \vec{a} \quad \rightarrow \quad x, \Delta x, v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

2. 该粒子作何种直线运动？

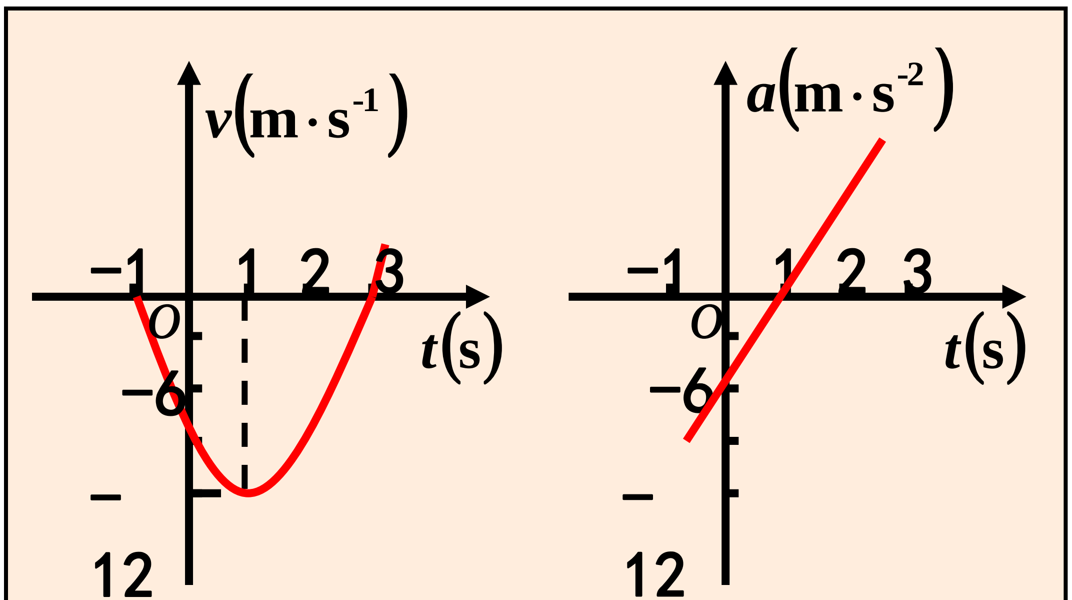
$$x = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$$

$$v = 3t^2 - 6t - 9$$

$$a = 6t - 6$$

该粒子作一般变速直线运动

画图：$v-t$，$a-t$ 曲线

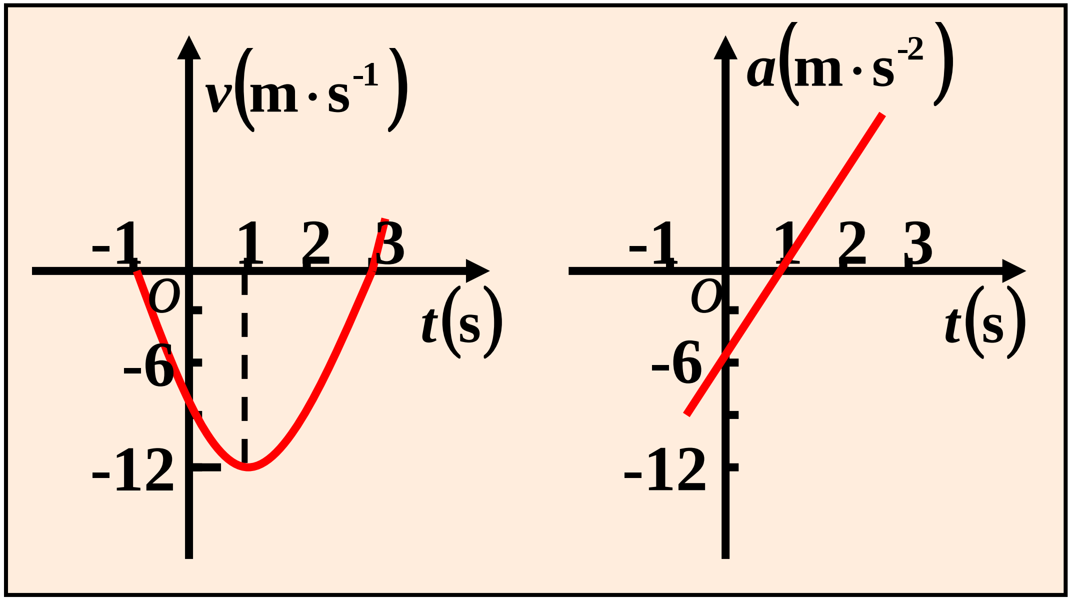


$t > 3; t < -1: v > 0$

粒子向+x运动

$-1 < t < 3: v < 0$

粒子向-x运动



何时加速？

a，v同号

何时减速？

a，v异号

t <-1： v>0, a<0: 粒子向 +x 减速运动

-1 < t < 1： v<0, a<0: 粒子向 –x 加速运动

1< t < 3： v<0, a>0: 粒子向 –x 减速运动

t > 3： v>0, a>0: 粒子向 +x 加速运动

注意：(1) 凡直线运动，可将坐标原点选在轨道直线上，建立一维坐标，将各矢量按代数量处理。

(2) 根据运动叠加原理，质点的一般曲线运动可以归结为直线运动处理。

例2. 已知：$\vec{r}=5t\vec{i}+(15t-5t^2)\vec{j}$ (SI)

1. 质点做什么运动？答：平面曲线运动

2. 找一个实例。

解：$\vec{v}=5\vec{i}+(15-10t)\vec{j}$ $\vec{a}=-10\vec{j}$

$t=0$： $\vec{r}_0=0$, $\vec{v}_0=5\vec{i}+15\vec{j}$

质点从原点出发，初速度为 $\vec{v}_0$

t时刻 x: $v_x=5$, $a_x=0$ 匀速直线运动

y: $v_y=15-10t$ $a_y=-10\approx -g$ 为竖直上抛运动

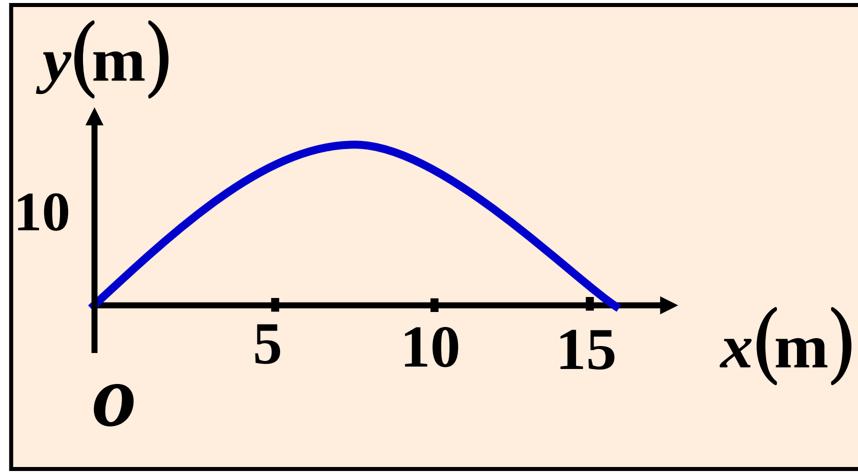
合运动：斜抛运动

3. 求 $t=1\text{s}$ 时 $:a_n=?\quad a_\tau=?\quad \rho=?$

$$\vec{r}=5t\vec{i}+(15t-5t^2)\vec{j}$$

$$\vec{v}=5\vec{i}+(15-10t)\vec{j}$$

$$\vec{a}=-10\vec{j}$$



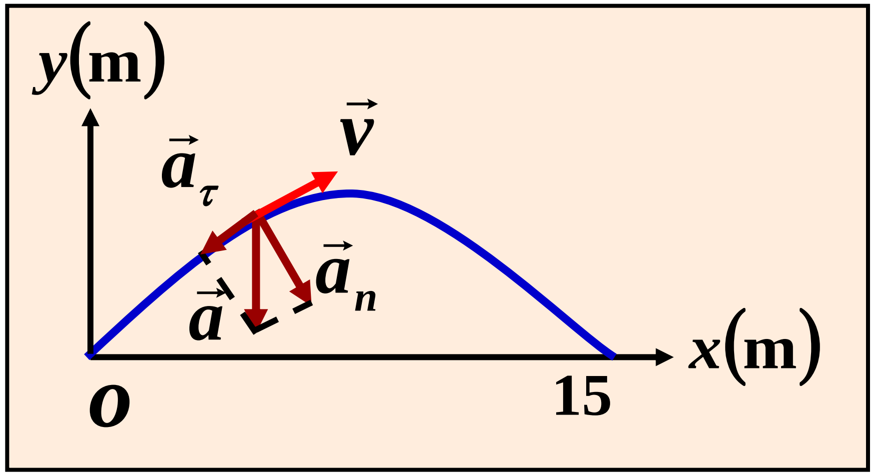
$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{5^2+(15-10t)^2}$$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{10(2t-3)}{\sqrt{4t^2-12t+10}}$$

$$t=1:\quad v=5\sqrt{2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\ ,\quad a_\tau=-5\sqrt{2}\approx-7.1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$t=1:\quad v=5\sqrt{2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\qquad a_\tau=-5\sqrt{2}\approx-7.1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$a=-10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$



$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=5\sqrt{2}\approx7.1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=5\sqrt{2}\approx7.1\ \mathrm{m}$$

注意：结果保留2∽3位有效数字

思考：如何求抛射角、轨道方程、射程、射高？

例3（ P_{56} 3.8）： 距海岸（视为直线）h=500米处有一艘静止的船A，船上的探照灯以每分钟1转的转速旋转，当光束与岸边成 $\theta=60^\circ$ 时，光点沿岸边移动速度多大？

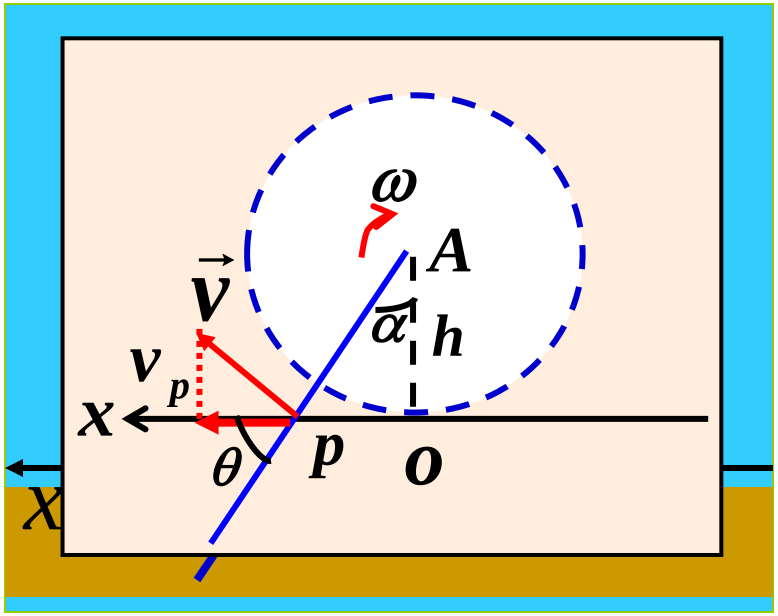
解： 首先建立 P 的运动方程 $x(t)$

$$x=h\cdot \mathrm{tg}\alpha$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{h}{\cos^2\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{h\omega}{\cos^2\alpha}$$

$$\theta=60^\circ \quad \alpha=30^\circ$$

$$v=\frac{500\times\frac{2\pi}{60}}{\cos^2 30^\circ}=69.8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$



注意： 质点运动方向为总速度方向，其它方向的速度为速度分量。

例4(P$_{44}$ 例6增加问题(2))：

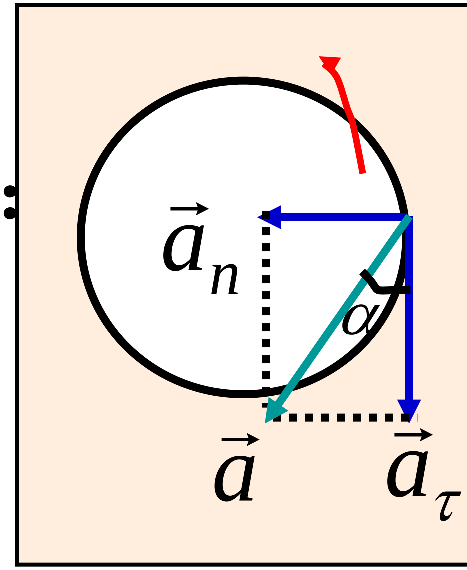
. 一质点沿半径为R的圆周运动，路程与时间的关系为

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} b t^2 \quad (\mathrm{SI}),$$

求：(1) 任意时刻 t，质点加速度的大小和方向；

(2) 什么时刻质点加速度的大小等于b，这时质点已转了几圈？

解： 质点的速率 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 - bt$



(1) 任意时刻t, 法向加速度和切向加速度：

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}, \quad a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -b$$

加速度的大小为：

$$a = \sqrt{a_n^{\ 2} + a_\tau^{\ 2}} = \sqrt{\frac{(v_0 - bt)^4}{R^2} + (-b)^2} = \frac{1}{R}\sqrt{(v_0 - bt)^4 + b^2 R^2}$$

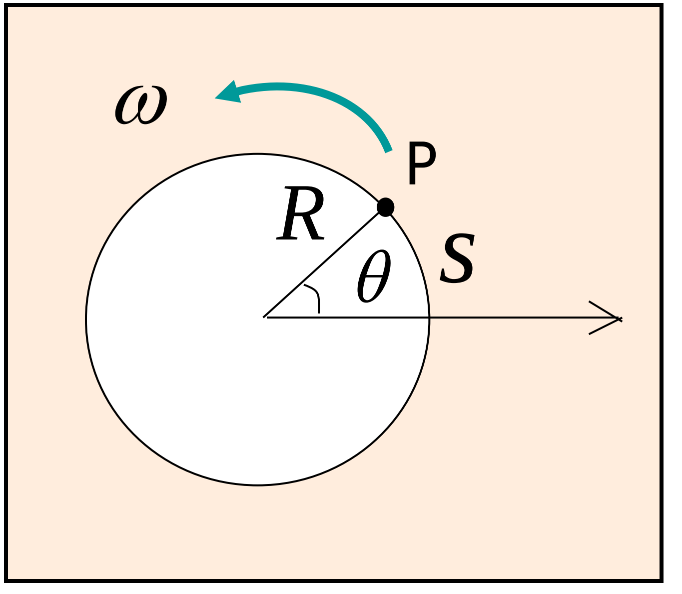
$\vec{a}$与切向轴的夹角为 $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{a_n}{a_\tau} = \mathrm{arctg}\dfrac{(v_0 - bt)^2}{(-Rb)}$

令加速度 $a=\frac{1}{R}\sqrt{(v_0-bt)^2+b^2R^2}=b$,解得时间 $t=\frac{v_0}{b}$

用角量表示质点运动方程为

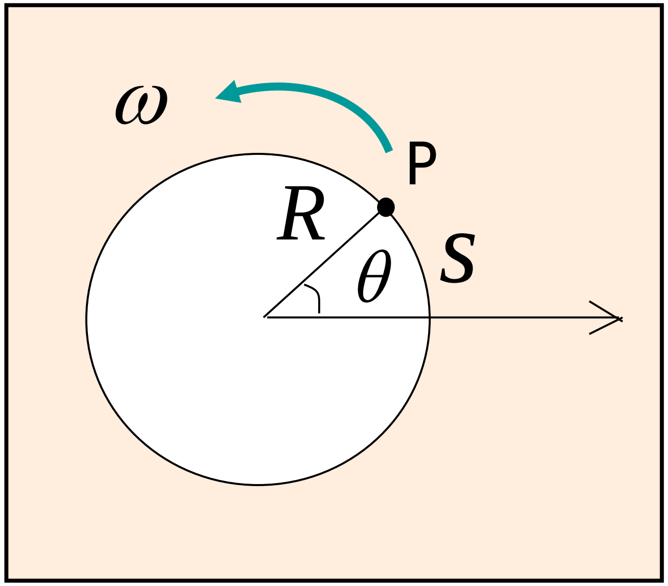
$$\theta=\frac{s}{R}=\frac{v_0 t}{R}-\frac{1}{2R}bt^2$$

$$\omega=\frac{v_0}{R}-\frac{bt}{R}$$



令 $\omega=0$, 解得 $t=\frac{v_0}{b}$

因此$t=\frac{v_0}{b}$实质点还没有反向转动。



质点运动方程为：

$$\theta=\frac{s}{R}=\frac{v_0t}{R}-\frac{1}{2R}bt^2$$

将$t=\dfrac{v_0}{b}$代入运动方程可得

$$\theta=\frac{v_0}{R}\frac{v_0}{b}-\frac{b}{2R}\left(\frac{v_0}{b}\right)^2=\frac{{v_0}^2}{2Rb}$$

转过的圈数为 $n=\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{{v_0}^2}{4\pi Rb}$

思考：当$t>\dfrac{v_0}{b}$时如何计算n?