概率论与数理统计习题册

交大概帮

2019

目录

Chapter 1

概率的性质与计算

一、选择题

1. 设 A 和 B 是任意两个互斥事件，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则以下结论正确的是 (A)。

A. $P(A\cup\overline{B})=P(\overline{B})$　　B. 事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

C. 事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容　　D. $P(A\overline{B})=P(\overline{B})$

2. 设事件 A，B，C 有包含关系：$A\subset C$，$B\subset C$，则 (C)。

A. $P(C)=P(AB)$　　B. $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$

C. $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$　　D. $P(C)=P(A)+P(B)$

3. 若概率 $P(AB)=0$，则必有 (D)。

A. $AB=\varnothing$　　B. 事件 A 与 B 互斥

C. 事件 A 与 B 对立　　D. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

4. 袋中装有 2 白 1 红共 3 个质量、大小相同的球。甲先任取一球，观察后放回；然后乙再任取一球，则两人取相同颜色球的概率为 (D)。

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{2}{9}$　　C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{5}{9}$

二、填空题

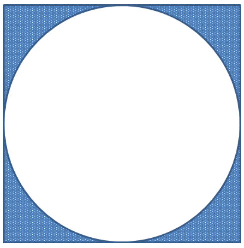
5. 设事件 A, B 互斥，且 $P(A)=p$, $P(B)=q$，则 $P(\overline{A}\,\overline{B})=$ ___1-p-q___。

解 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-p-q$

6. 设 A, B 为两个事件，且 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.7$, $P(A\cup B)=0.8$，则 $P(A-B)=$ ___0.1___

解
$$\begin{aligned} P(A-B) &= P(A)-P(AB)=P(A)-[P(A)+P(B)-P(A\cup B)] \\ &= P(A\cup B)-P(B)=0.8-0.7=0.1 \end{aligned}$$

7. 取一个边长为 $2a$ 的正方形及其内切圆（如图所示），随机地向正方形内投一粒豆子，则豆子落入圆内的概率为 ___$\pi/4$___。



解 根据题意知，此模型是几何概型，故所求事件概率为

$$p=\frac{\pi a^2}{(2a)^2}=\frac{\pi}{4}$$

三、计算题

8. 设 A, B 是两事件，且 $P(A)=0.4$, $P(B)=0.8$。问:

(1) 在什么条件下，$P(AB)$ 取得最小值，最小值是什么?

(2) 在什么条件下，$P(AB)$ 取得最大值，最大值是什么?

解 根据题意知，

$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.4+0.8-P(A\cup B)=1.2-P(A\cup B)$

因为

$$1\geqslant P(A\cup B)\geqslant \max(P(A),P(B))=0.8$$

故

(1) 当 $P(A\cup B)=1$ 时，$P(AB)$ 取得最小值 0.2;

(2) 当 $P(A\cup B)=0.8$ 时，$P(AB)$ 取得最大值 0.4。

9. 甲、乙两人参加知识竞赛，共有 10 道不同的题目，其中，选择题 6 道，判断题 4 道，甲、乙两人依次各抽一题。试求:

(1) 甲抽到选择题、乙抽到判断题的概率是多少?

(2) 甲、乙两人中至少有一个抽到选择题的概率是多少?

解 根据题意知，此模型为古典概型，且

(1) 甲抽到选择题、乙抽到判断题的概率是

$$P_1=\frac{6\times 4}{10\times 9}=\frac{4}{15}$$

(2) 甲、乙两人中至少有一个抽到选择题的概率是

$$P_2=1-\frac{4\times 3}{10\times 9}=\frac{13}{15}$$

10. 在 60 件产品中有 30 件一等品，20 件二等品，10 件三等品，从中任取 3 件。试求：

(1) 3 件都是一等品的概率；

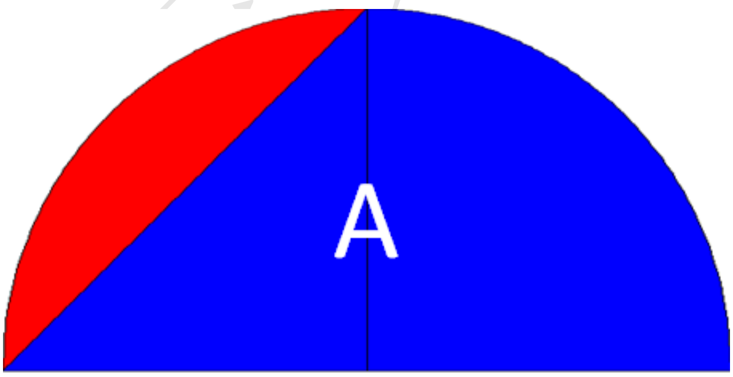
(2) 2 件一等品、1 件二等品的概率；

(3) 一等品、二等品和三等品各 1 件的概率。

解 根据题意知，

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{C_{30}^3}{C_{60}^3} = \frac{30 \times 29 \times 28/3!}{60 \times 59 \times 58/3!} = \frac{7}{59} \\ P_2 &= \frac{C_{30}^2 C_{20}^1}{C_{60}^3} = \frac{30 \times 29/2! \times 20}{60 \times 59 \times 58/3!} = \frac{15}{59} \\ P_3 &= \frac{C_{30}^1 C_{20}^1 C_{10}^1}{C_{60}^3} = \frac{30 \times 20 \times 10}{60 \times 59 \times 58/3!} = \frac{300}{1711} \end{aligned}$$

11. 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ $(a > 0)$ 内投一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域面积成正比。试求原点和该点连线与 x 轴夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率。



解 由题意知，此模型为几何概型，故，所求事件概率为

$$p = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{2+\pi}{2\pi}$$

12. n 个朋友随机围绕圆桌就座，试问其中两个人一定要坐在一起（即座位相邻）的概率是多少?

解

(法一) n 个人组成的环排列总共 $(n-1)!$ 种不同的排法，其中两个人要坐在一起，分左右 2 种，然后，可以把他们当成一个整体，再与剩余的 $(n-2)$ 个人构成环排列共 $2(n-2)!$ 种，于是，所求事件的概率为 $\frac{2(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{2}{n-1}$。

(法二) 可以让其中任意一人坐定，这时，还剩下 $n-1$ 个位置，则另外一个人与前一个人相邻的概率为 $\frac{2}{n-1}$。

Chapter 2

条件概率

一、选择题

13. 设 A_1，A_2 和 B 是任意事件，且 $0 < P(B) < 1$，$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$，则以下结论正确的是 (C)。

A. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$　　B. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$

C. $P(A_1B \cup A_2B) = P(A_1B) + P(A_2B)$　　D. $P(A_1 \cup A_2|\overline{B}) = P(A_1|\overline{B}) + P(A_2|\overline{B})$

14. 设事件 A，B，C 满足条件：$0 < P(A) < 1$，$P(B) > 0$，$P(B|A) = P(B|\overline{A})$，则 (D)。

A. $P(A|B) = P(A|\overline{B})$　　B. $P(A|B) \neq P(A|\overline{B})$

C. $P(AB) \neq P(A)P(B)$　　D. $P(AB) = P(A)P(B)$

解　因为 $P(A|B) = P(A|\overline{B})$，即

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)}$$

于是，

$$P(AB) - P(A)P(AB) = P(A)P(B) - P(A)P(AB) \quad \Longrightarrow \quad P(AB) = P(A)P(B)$$

二、填空题

15. 设 10 件产品中含有 4 件次品，现从中任取 2 件，发现其中一件是次品，则另一件也是次品的概率是 __0.2__。

解 设 A, B 分别表示第一、二件产品是次品，则所求事件概率为

$$P(AB|A\cup B)=\frac{P(AB)}{P(A\cup B)}=\frac{P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}=\frac{\frac{4\times 3}{10\times 9}}{\frac{4}{10}+\frac{4}{10}-\frac{4\times 3}{10\times 9}}=0.2$$

16. 已知 $P(A)=0.7$, $P(B)=0.4$, $P(A\overline{B})=0.5$，则 $P(A|B)=$ __0.5__。

解

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)-P(A\overline{B})}{P(B)}=\frac{0.7-0.5}{0.4}=0.5$$

17. 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B|A)=\frac{1}{3}$, $P(A|B)=\frac{1}{2}$，则 $P(A\cup B)=$ __1/3__。

解

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12} \\ P(B) &= \frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6} \\ P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

18. 已知某个家庭有 3 个小孩，且至少有一个是女孩，则该家庭至少有一个男孩的概率为 __6/7__。

解 设 A 表示至少有一个女孩，B 表示至少有一个男孩，则所求事件概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1-(1/2)^3-(1/2)^3}{1-(1/2)^3}=\frac{6}{7}$$

三、计算题

19. 设随机事件 A, B, C 满足 A 和 C 互斥，且 $P(AB)=\frac{1}{2}, P(C)=\frac{1}{3}$，求条件概率 $P(AB|\overline{C})$。

解　由题意知，$P(AC)=P(\varnothing)=0$，从而，

$$P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}-0}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

20. 老李一家承包一段江面养鱼，一日出现鱼浮头现象，不几日就出现大量死鱼事件，造成严重的经济损失。渔政部门出具的检测报告显示，此次死鱼事件是由于水体中的 COD 超标引起的。而老李家承包的江面上游有 4 家企业，其生产产生的工业污水经处理后排入江中，4 家企业的排污量分别占 40%, 30%, 20% 和 10%，由于各种原因导致它们的 COD 超标的可能性分别是 3%, 4%, 5% 和 6%。目前，没有证据证明是哪一家企业的污水导致了此次死鱼事件，请问老李向这 4 家企业索赔的比例分别是多少?

解　设 A_1, A_2, A_3, A_4 分别表示进入江面污水来自这 4 家企业，B 表示 COD 超标，根据题意知

$$P(A_1)=0.4,\ P(A_2)=0.3,\ P(A_3)=0.2,\ P(A_4)=0.1$$
$$P(B|A_1)=0.03,\ P(B|A_2)=0.04,\ P(B|A_3)=0.05,\ P(B|A_4)=0.06$$

由全概率公式知

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)+P(A_4)P(B|A_4)\\
&= 0.4\times0.03+0.3\times0.04+0.2\times0.05+0.1\times0.06\\
&= 0.04\\
P(A_1|B) &= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.4\times0.03}{0.04}=0.3\\
P(A_2|B) &= \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.3\times0.04}{0.04}=0.3\\
P(A_3|B) &= \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.2\times0.05}{0.04}=0.25\\
P(A_4|B) &= \frac{P(A_4)P(B|A_4)}{P(B)}=\frac{0.1\times0.06}{0.04}=0.15
\end{aligned}$$

于是，老李向这 4 家企业索赔的比例分别是 30%, 30%, 25% 和 15%。

21. 美国一家大型汽车保险公司利用其长达 10 年的数据来研究在校学生的驾驶状况与其学习状况和是否到正规驾驶学校学习之间的关系。公司发现，这类驾驶员中，第一年发生负主要责任交通事故的占 6%，已上正规驾校学习的占 70%，在校时是优秀生的占 10%，三者都不是的占 22%。保险公司同时还发现，参加正规驾校学习的优秀生占 $\frac{1}{14}$，第一年发生负主要责任交通事故中参加正规驾校学习的占 $\frac{1}{3}$，第一年发生负主要责任交通事故的优秀生占总数的 1%。试求：

(1) 如果参加正规驾校学习，第一年发生负主要责任交通事故的概率；

(2) 如果在校时是优秀生，第一年发生负主要责任交通事故的概率；

(3) 如果在校时是优秀生，且参加正规驾校学习，第一年发生负主要责任交通事故的概率。

解 设 A 表示第一年发生负主要责任交通事故，B 表示上正规驾校，C 表示在校时是优秀生，根据题意知，

$$
\begin{aligned}
P(A) &= 0.06\\
P(B) &= 0.7\\
P(C) &= 0.1\\
P(C|B) &= \frac{1}{14}\\
P(B|A) &= \frac{1}{3}\\
P(AC) &= 0.01\\
P(AB) &= P(A)P(B|A) = 0.06\times\frac{1}{3} = 0.02\\
P(BC) &= P(B)P(C|B) = 0.7\times\frac{1}{14} = 0.05\\
0.22 &= P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1-P(A\cup B\cup C)\\
&= 1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(BC)+P(AC)-P(ABC)\\
&= 1-0.06-0.7-0.1+0.02+0.05+0.01-P(ABC)\\
&= 0.22-P(ABC)\\
P(ABC) &= 0
\end{aligned}
$$

(1) 如果参加正规驾校学习，第一年发生负主要责任交通事故的概率：

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.02}{0.7} = \frac{1}{35}$$

(2) 如果在校时是优秀生，第一年发生负主要责任交通事故的概率：

$$P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{0.01}{0.1} = 0.1$$

(3) 如果在校时是优秀生，且参加正规驾校学习，第一年发生负主要责任交通事故的概率:

$$P(A|BC) = \frac{P(ABC)}{P(BC)} = \frac{0}{0.05} = 0$$

22. 猎人在距离动物 $100m$ 处射击这只动物，且击中动物的概率为 0.6。如果第一次未击中，再进行第二次射击，由于动物的逃跑而使猎人与动物之间的距离变为 $150m$；如果第二次未击中，又进行第三次射击，此时猎人与动物之间的距离变为 $200m$。假定猎人击中动物的概率与猎人和动物之间的距离成反比，求猎人最多射击三次就可击中动物的概率。

解 设 A_i 表示第 i 次击中动物，其中 $i = 1, 2, 3$。根据题意知，A_1, A_2, A_3 相互独立，且

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= 0.6 \\
P(A_2) &= \frac{100}{150} \times P(A_1) = \frac{100}{150} \times 0.6 = 0.4 \\
P(A_3) &= \frac{100}{200} \times P(A_1) = \frac{100}{200} \times 0.6 = 0.3
\end{aligned}$$

于是，根据乘法公式，猎人最多射击三次就可击中动物的概率为

$$\begin{aligned}
& P(A_1) + P(\overline{A_1}A_2) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) \\
= \;& P(A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2}) \\
= \;& 0.6 + (1-0.6) \times 0.4 + (1-0.6)(1-0.4) \times 0.3 \\
= \;& 0.808
\end{aligned}$$

Chapter 3

事件的独立性

一、选择题

23. 将一枚硬币连续泡制两次，记事件 $A_1 = \{$第一次出现正面$\}$，$A_2 = \{$第二次出现正面$\}, A_3 = \{$正面和反面各出现一次$\}, A_4 = \{$两次都出现正面$\}$，则下列说法正确的是（ A ）。

A. A_1, A_2, A_3 两两独立　　B. A_2, A_3, A_4 两两独立

C. A_1, A_2, A_3 相互独立　　D. A_2, A_3, A_4 相互独立

24. 将 3 粒黄豆随机地放入 4 个杯子中，则杯子中盛黄豆最多为一粒的概率为（ B ）。

A. $\frac{3}{32}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{1}{16}$　　D. $\frac{1}{8}$

25. 某人向同一目标独立地重复射击，每次射击时命中目标的概率为 $p \in (0,1)$，则此人第 4 次射击时恰好是第 2 次命中目标的概率为（ C ）。

A. $3p(1-p)^2$　　B. $6p(1-p)^2$

C. $3p^2(1-p)^2$　　D. $6p^2(1-p)^2$

26. 设随机事件 A, B, C 相互独立，且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$，则

(1) A, B, C 中至少出现一个的概率是（ B ）。

(2) A, B, C 中最多出现一个的概率是（ C ）。

A. $\frac{1}{27}$　　B. $\frac{19}{27}$　　C. $\frac{20}{27}$　　D. $\frac{26}{27}$

二、填空题

27. 三人独立破译一个密码，他们能破译密码的概率分别是 $\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，则将此密码破译出的概率是 ___0.6___。

解 $p=1-\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=0.6$

28. 设随机事件 A,B 相互独立，且 $P(B)=0.5, P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$ ___0.2___

解 因为 A,B 相互独立，故

$$\begin{aligned} P(A-B) &= P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B) \\ 0.3 &= P(A)-P(A)\times 0.5 \\ P(A) &= 0.6 \\ P(B-A) &= P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B) \\ &= 0.5-0.6\times 0.5=0.2 \end{aligned}$$

29. 假设 $P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$，试在以下条件下求 $P(B)$:

(1) 若 A,B 相互独立，则 $P(B)=$ ___0.5___;

(2) 若 A,B 互斥，则 $P(B)=$ ___0.3___;

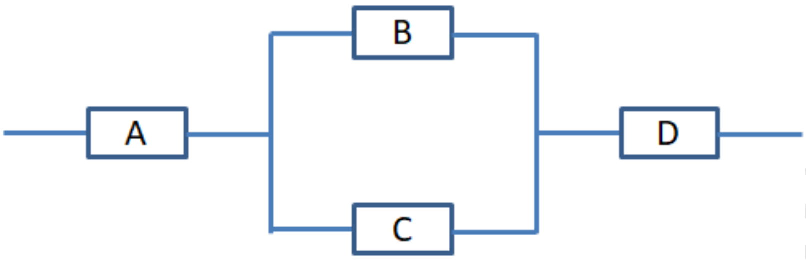
(3) 若 $A\subset B$，则 $P(B)=$ ___0.7___;

解 根据容斥原理知，$P(B)=P(A\cup B)+P(AB)-P(A)$，故

$$\begin{aligned} (1)\qquad P(B) &= P(A\cup B)+P(A)P(B)-P(A) \\ &= 0.7+0.4P(B)-0.4 \\ P(B) &= 0.5 \\ (2)\qquad P(B) &= P(A\cup B)-P(A)=0.7-0.4=0.3 \\ (3)\qquad P(B) &= P(A\cup B)+P(A)-P(A)=0.7+0.4-0.4=0.7 \end{aligned}$$

三、计算题

30. 用 4 个整流二极管组成的如图所示的系统。设系统各元件能正常工作是相互独立的，且每个整流二极管的可靠度（即能保持正常工作的概率）均为 0.4，试求该系统的可靠度。



解 根据题意知，该系统的可靠度为

$$p = 0.4 \times [1-(1-0.4)\times(1-0.4)] \times 0.4 = 0.1024$$

31. 设一枚深水炸弹击沉一艘潜艇的概率为 $\frac{1}{3}$，击伤的概率为 $\frac{1}{2}$，击不中的概率为 $\frac{1}{6}$，并设击伤两次也会导致潜水艇下沉。求释放 4 枚深水炸弹能击沉潜水艇的概率。（提示：先求出击不沉的概率。）

解 释放 4 枚深水炸弹击不沉的概率为

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+C_4^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{13}{1296}$$

于是，释放 4 枚深水炸弹能击沉潜水艇的概率为

$$1-\frac{13}{1296}=\frac{1283}{1296}$$

32. 一名学生想借一本书，决定到 3 个图书馆去借。每个图书馆有无此书是等可能的；如有，是否借出也是等可能的。设 3 个图书馆有无此书、是否借出是相互独立的，试求此学生能借到此书的概率。

解 设 A_i 表示第 i 个图书馆有此书，B 表示该生能借到此书，其中，$i = 1, 2, 3$。由全概率公式知，

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

33. 设打靶场有 10 只某种型号的枪支，其中 4 支已经校正，6 支未校正。某人使用已校正的枪支击中目标的概率为 0.9，使用未校正的枪支击中目标的概率为 0.3。他随机地取出一支进行射击，各次射击的结果相互独立。已知他射击了 3 次，但都未射中目标，试求他使用的是已校正的枪支的概率。

解 设 A 表示该枪支已校正，B 表示 3 次射击中命中目标。根据题意知，

$$\begin{aligned}
P(A) &= 0.4 \\
P(B|A) &= 1 - (1-0.9)^3 = 0.999 \\
P(B|\overline{A}) &= 1 - (1-0.3)^3 = 0.657 \\
P(A|\overline{B}) &= \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A)P(\overline{B}|A)}{P(A)P(\overline{B}|A) + P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})} \qquad \text{贝叶斯公式} \\
&= \frac{0.4 \times [1-0.999]}{0.4 \times [1-0.999] + (1-0.4) \times [1-0.657]} \\
&= 0.00193986
\end{aligned}$$

34. 甲、乙两选手进行乒乓球单打比赛，已知每局中甲获胜的概率为 0.6，乙获胜的概率为 0.4，比赛可以采用三局二胜制或者五局三胜制，问哪一种比赛对乙更有利？

解 设 X 表示乙获胜的次数，若比赛 n 局，则 $X \sim B(n, 0.4)$，从而，乙获胜的概率为

三局二胜制：

$$P(X \geqslant 2) = C_3^2 0.4^2 \times 0.6 + C_3^3 0.4^3 = 0.352$$

五局三胜制：

$$P(X \geqslant 3) = C_5^3 0.4^3 \times 0.6^2 + C_5^4 0.4^4 \times 0.6 + C_5^5 0.4^5 = 0.31744$$

故，三局二胜制对乙更有利。

Chapter 4

离散型随机变量

一、选择题

35. 设每次试验成功的概率为 $p \in (0,1)$，重复进行试验直到第 n 次才取得第 $r(1 \leqslant r \leqslant n)$ 次成功的概率为 (A)。

A. $C_{n-1}^{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$ B. $C_n^r p^r(1-p)^{n-r}$

C. $C_{n-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r+1}$ D. $p^r(1-p)^{n-r}$

36. 若随机变量 X 的概率分布为 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{C\cdot k!}$，$(\lambda>0,\ k=0,1,2,\cdots)$，则 $C=$(B)。

A. $e^{-\lambda}$ B. e^{λ} C. $e^{-\lambda}-1$ D. $e^{\lambda}-1$

37. 离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X=0)=\frac{C}{2}$，$P(X=1)=2C$，$P(X=2)=C$，$P(X=3)=\frac{1}{8}$，则常数 $C=$(C)。

A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

38. 设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 都是随机变量的分布函数，则为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 称为随机变量的分布函数，系数 a 和 b 可能是 (B)。

A. $a=\frac{2}{3}$，$b=-\frac{2}{3}$ B. $a=\frac{3}{5}$，$b=-\frac{2}{5}$

C. $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$ D. $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{3}{2}$

二、填空题

39. 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=k)=\lambda p^k$, $k=1,2,3,\cdots$ ，其中 $\lambda>0$ 是常数，则未知参数 $p=$ $\underline{\frac{1}{\lambda+1}}$

解 根据规范性知，

$$1=\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda p^k=\frac{\lambda p}{1-p}\quad\Longrightarrow\quad p=\frac{1}{\lambda+1}$$

40. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ 0.4, & -1\leqslant x<1;\\ 0.8, & 1\leqslant x<3;\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$$

则 X 的分布律为 $\underline{P(X=-1)=0.4,\ P(X=1)=0.4,\ P(X=3)=0.2}$ ，$P(X>1)=$ $\underline{0.2}$，$P(X\geqslant 1)=$ $\underline{0.6}$，$P(X<3)=$ $\underline{0.8}$。

41. 设随机变量 $X\sim B(2,p)$，随机变量 $Y\sim B(4,p)$，若 $P(X\geqslant 1)=\frac{8}{9}$，则 $P(Y\geqslant 1)=$ $\underline{\frac{80}{81}}$

解 $P(X\geqslant 1)=\frac{8}{9}\quad\Longrightarrow\quad\frac{1}{9}=P(X=0)=C_2^0p^0(1-p)^2\quad\Longrightarrow\quad p=\frac{2}{3}$

$$P(Y\geqslant 1)=1-P(Y=0)=1-C_4^0p^0(1-p)^4=1-\frac{1}{81}=\frac{80}{81}$$

42. 设随机变量 $X\sim\pi(\lambda)$，且已知 $P(X=1)=P(X=2)$，则 $P(X=4)=$ $\underline{\frac{2}{3}e^{-2}}$

解 根据题意知，$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\cdots,$, 且

$$\begin{aligned}P(X=1)&=P(X=2)\\ \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}&=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}\qquad\Longrightarrow\qquad\lambda=2\\ P(X=4)&=\frac{2^4}{4!}e^{-2}=\frac{2}{3}e^{-2}\end{aligned}$$

三、计算题

43. 有 3 个球，4 个盒子，盒子的编码为 $1,2,3,4$。将球独立地、随机地诸葛放入 4 个盒子中，以 X 表示其中至少有一个球的盒子的最小号码（例如 $X=3$ 表示 1 号、2 号盒子是空的，第 3 个盒子至少有一个球），试求 X 的分布律和分布函数。

解 根据题意知，X 的分布律为

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= 1-\frac{3^3}{4^3}=\frac{37}{64}\\
P(X=2) &= \frac{C_3^3+C_3^2C_2^1+C_3^12^2}{4^3}=\frac{19}{64}\\
P(X=3) &= \frac{C_3^1+C_3^2+C_3^3}{4^3}=\frac{7}{64}\\
P(X=4) &= \frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}
\end{aligned}$$

于是，X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ \frac{37}{64}, & 1\leqslant x<2;\\ \frac{56}{64}, & 2\leqslant x<3;\\ \frac{63}{64}, & 3\leqslant x<4;\\ 1, & x\geqslant 4.\end{cases}$$

44. 某教科书出版了 2000 册，因装订等原因造成错误的概率为 0.001，试求在这 2000 册教科书中恰有 5 册有错误的概率。

解 设 X 表示这 2000 册教科书中出现错误的册数，则 $X\sim B(2000,0.001)$。根据泊松逼近定理知，X 近似服从参数为 $2000\times0.001=2$ 的泊松分布，从而，在这 2000 册教科书中恰有 5 册有错误的概率为

$$P(X=5)=C_{2000}^5 0.001^5 0.999^{1995}\approx\frac{2^5}{5!}e^{-5}\approx 0.036$$

45. 设某机场每天有 200 架飞机在此降落，任一飞机在某一时刻降落的概率为 0.02，且各飞机降落是相互独立的。试问该机场需配备多少条跑道，才能保证某一时刻飞机需立即降落而没有空闲跑道的概率小于 0.01（每条跑道只能允许一架飞机降落）?

解 设某一时刻需要立即降落的飞机数量为 $X \sim B(200, 0.02)$。若配备 n 条跑道，在某一时刻飞机需立即降落而没有空闲跑道的概率为

$$P(X > n) = 1 - P(X \leqslant n) = 1 - \sum_{k=0}^{n} C_{200}^{k} 0.02^k 0.98^{200-k} < 0.01 \quad \Rightarrow \quad n = 10$$

即，需要配备 10 条跑道，才能保证某一时刻飞机需立即降落而没有空闲跑道的概率小于 0.01。

46. 将一枚硬币连续抛 5 次，假设 5 次中只至少有一次国徽不出现，试求国徽出现的次数与不出现的次数之比 Y 的分布律。

解 设 X 表示 5 次中出现国徽的次数，从而，$X\sim B(5,0.5)$，且

$$\begin{aligned}
P(X<5) &= 1-P(X=5)=1-C_5^5 0.5^5=\frac{31}{32}\\
P(Y=0) &= P\left(\frac{X}{5-X}=0\Big|X<5\right)=P(X=0|X<5)\\
&= \frac{P(X=0,X<5)}{P(X<5)}=\frac{P(X=0)}{P(X<5)}=\frac{C_5^0 0.5^5}{31/32}=\frac{1}{31}\\
P\left(Y=\frac{1}{4}\right) &= P\left(\frac{X}{5-X}=\frac{1}{4}\Big|X<5\right)=P(X=1|X<5)\\
&= \frac{P(X=1,X<5)}{P(X<5)}=\frac{P(X=1)}{P(X<5)}=\frac{C_5^1 0.5^5}{31/32}=\frac{5}{31}\\
P\left(Y=\frac{2}{3}\right) &= P\left(\frac{X}{5-X}=\frac{2}{3}\Big|X<5\right)=P(X=2|X<5)\\
&= \frac{P(X=2,X<5)}{P(X<5)}=\frac{P(X=2)}{P(X<5)}=\frac{C_5^2 0.5^5}{31/32}=\frac{10}{31}\\
P\left(Y=\frac{3}{2}\right) &= P\left(\frac{X}{5-X}=\frac{3}{2}\Big|X<5\right)=P(X=3|X<5)\\
&= \frac{P(X=3,X<5)}{P(X<5)}=\frac{P(X=3)}{P(X<5)}=\frac{C_5^3 0.5^5}{31/32}=\frac{10}{31}\\
P(Y=4) &= P\left(\frac{X}{5-X}=4\Big|X<5\right)=P(X=4|X<5)\\
&= \frac{P(X=4,X<5)}{P(X<5)}=\frac{P(X=4)}{P(X<5)}=\frac{C_5^4 0.5^5}{31/32}=\frac{5}{31}
\end{aligned}$$

47. 进行某项试验，已知试验成功的概率为 $\frac{3}{4}$，失败的概率为 $\frac{1}{4}$。X 表示首次成功所需要的试验次数，求 X 的分布律以及 X 取偶数的概率。

解 根据题意知，X 服从参数为 0.75 几何分布，即

$$P(X=k)=0.25^{k-1}0.75,\ k=1,2,3,\cdots$$

X 的分布律以及 X 取偶数的概率为

$$\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=2k)=\sum_{k=1}^{+\infty}0.25^{2k-1}0.75=0.2$$

48. 已知某商场一天来的顾客数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，而每个到商场的顾客购物的概率为 p，且每个顾客购买与否相互独立。试证：此商场一天内购物顾客数服从参数为 λp 的泊松分布。

证　设 Y 表示此商场一天内购物顾客数，则

$$Y|\{X=n\} \sim B(n,p)$$

从而，利用全概率公式知，对任意 $k=0,1,2,\cdots$，有

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)P(Y=k|X=n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

从而，此商场一天内购物顾客数服从参数为 λp 的泊松分布。

Chapter 5

连续型随机变量

一、选择题

49. 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$ 是偶函数，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对于任意实数 a，有 (B)。

A. $F(-a) = 2F(a) - 1$
B. $F(-a) = 0.5 - \int_0^a f(x)dx$
C. $F(-a) = F(a)$
D. $F(-a) = 1 - \int_0^a f(x)dx$

50. 设 $X \sim N(3,4)$ 且 $P(X \leqslant C) = P(X > C)$，则 $C =$(A)。

A. 3　B. 2　C. 0　D. 4

51. 以下具有无记忆性的分布是 (B)。

A. 均匀分布
B. 指数分布
C. 正态分布
D. 二项分布

52. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Ax^2, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

则常数 $A =$(C)。

A. 3　B. 2　C. 1　D. 0

53. 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量，且 $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,4), X_3 \sim N(5,9)$，$p_i = P(-2 < X_i < 2)$，$(i = 1,2,3)$，则 (A)。

A. $p_1 > p_2 > p_3$　　B. $p_2 > p_1 > p_3$

C. $p_3 > p_1 > p_2$　　D. $p_1 > p_3 > p_2$

二、填空题

54. 若随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$，$(-\infty < x < +\infty)$，则 $a =$ __$\frac{1}{\pi}$__，$P(X > 0) =$ __0.5__，$P(X = 0) =$ __0__。

解 根据规范性，

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}dx = a \arctan x|_{-\infty}^{+\infty} = a\pi \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\pi}$$

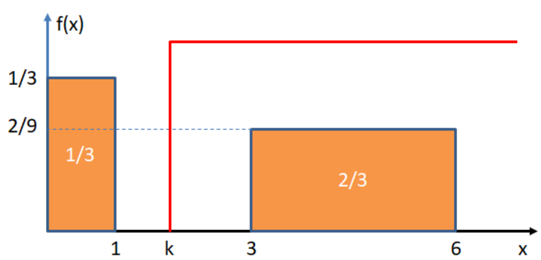
此分布称为*Cauchy* 分布，密度函数为偶函数，故，$P(X > 0) = P(X < 0) = 0.5$。又因为它是连续型随机变量，故取任意值的概率为 0，特别地，$P(X = 0) = 0$。

55. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{2}{9}, & 3 \leqslant x \leqslant 6, \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

若存在 k，使得 $P(X \geqslant k) = \frac{2}{3}$，则 k 的取值范围是 __$1 \leqslant k \leqslant 3$__。

解 数形结合即得



56. 设 $X \sim N(1,4)$，则 $P(X < 2.3) =$ __0.7421539__，$P(-1.6 < X < 3.8) =$ __0.8224429__，$P(X > 1.8) =$ __0.3445783__。

解 利用正态分布的性质:

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，即 $P(X < x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

从而，

$$\begin{aligned}
P(X < 2.3) &= \Phi\left(\frac{2.3-1}{2}\right) = \Phi(0.65) = 0.7421539 \\
P(-1.6 < X < 3.8) &= \Phi\left(\frac{3.8-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1.6-1}{2}\right) = \Phi(1.4) - [1 - \Phi(1.3)] = 0.8224429 \\
P(X > 1.8) &= 1 - \Phi\left(\frac{1.8-1}{2}\right) = 1 - \Phi(0.4) = 0.3445783
\end{aligned}$$

57. 设 $X \sim E(\lambda)$, $(\lambda > 0)$，则当 $k =$ __$\frac{\ln 2}{\lambda}$__ 时，$P(k \leqslant X \leqslant 2k) = \frac{1}{4}$。

解 根据指数分布的定义知，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} &= P(k \leqslant X \leqslant 2k) = e^{-\lambda k} - e^{-2\lambda k} \\
0 &= (e^{-\lambda k} - 0.5)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad k = \frac{\ln 2}{\lambda}
\end{aligned}$$

58. 设随机变量 X 的概率密度函数

$$f(x) = \begin{cases} 0.5, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

以 Y 表示对 X 的 3 次独立重复观测中“$X \leqslant 0.5$”出现的次数，则 $P(Y = 2) =$ __$\frac{9}{64}$__。

解 在每次观测中，“$X \leqslant 0.5$”出现的概率为 $P(X \leqslant 0.5) = \int_0^{0.5} 0.5dx = 0.25$。根据题意知，$Y \sim B(3, 0.25)$，从而，

$$P(Y = 2) = C_3^2 0.25^2 0.75 = \frac{9}{64} = 0.140625$$

三、计算题

59. 已知连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，试求：(1) 常数 A 和 B 的值；(2) $P(|X|<1)$；(3) 概率密度函数 $f(x)$。

解

(1) 根据分布函数的性质知，

$$\begin{cases} F(-\infty)=A-\frac{\pi}{2}B=0 \\ F(+\infty)=A+\frac{\pi}{2}B=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{\pi} \end{cases}$$

(2) $P(|X|<1)=F(1)-F(-1)=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 1\right]-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 1\right]=\frac{1}{2}$

(3) $f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，$x\in(-\infty,+\infty)$。 *Cauchy* 分布

60. 已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且关于未知数 y 的一元二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 0.5，则 μ 的值是多少?

解 根根式判别法知，该方程无根的概率为

$$0.5=P(\Delta<0)=P(4^2-4X<0)=P(X>4)$$

因为正态分布的概率密度函数关于 $x=\mu$ 对称，故，$P(X\leqslant\mu)=P(X>\mu)=0.5$，即 $\mu=4$。

61. 某种电子元件在电压不超过 $200V$、$200\sim240V$ 及超过 $240V$ 这三种情况下的概率依次为 $0.1, 0.001, 0.2$。设电源电压 $X\sim N(220,25^2)$，求：

(1) 此种电子元件的损坏率；

(2) 此种电子元件损坏时，电压为 $200\sim240V$ 的概率。

解 设 A 表示此种电子元件损坏，则

(1) 根据全概率公式知，

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \leqslant 220)P(A|X \leqslant 220) + P(200 < X \leqslant 240)P(A|200 < X \leqslant 240) \\ &\quad + P(X > 240)P(A|X > 240) \\ &= \Phi\left(\frac{200-220}{25}\right) \times 0.1 + \left[\Phi\left(\frac{240-220}{25}\right) - \Phi\left(\frac{200-220}{25}\right)\right] \times 0.001 \\ &\quad + \left[1 - \Phi\left(\frac{240-220}{25}\right)\right] \times 0.2 \\ &= 0.299 - 0.298\Phi(0.8) = 0.06413291 \end{aligned}$$

(2) 根据贝叶斯公式知，

$$\begin{aligned} P(200 < X \leqslant 240|A) &= \frac{P(200 < X \leqslant 240)P(A|200 < X \leqslant 240)}{P(A)} \\ &= \frac{\left[\Phi\left(\frac{240-220}{25}\right) - \Phi\left(\frac{200-220}{25}\right)\right] \times 0.001}{0.06413291} \\ &= \frac{[2\Phi(0.8) - 1] \times 0.001}{0.06413291} = 0.008985858 \end{aligned}$$

62. 在区间 $[0, a]$ 上任意投掷一个质点，以 X 表示该质点的坐标。设这个质点落在 $[0, a]$ 中任意小区间的概率与这个小区间的长度成正比，试求 X 的分布函数。

解 根据题意知，$X \sim U[0, a]$，故，X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{a}, & 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

63. 设我国某城市男子身高（以 cm 计）服从 $N(168,36)$ 的正态分布，试求：

(1) 该城市男子身高在 $170cm$ 以上的概率；

(2) 为使 99% 以上的男子上公交车时不致在车门上沿碰头，当地公共汽车门框的高度应设计成多少厘米?

解 根据正态分布的性质：$X \sim N(\mu,\sigma^2) \quad \Rightarrow \quad P(X \leqslant x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$，知

(1) $P(X > 170) = 1 - \Phi\left(\frac{170-168}{6}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right) = 0.3694413$

(2) $P(X \leqslant h) = \Phi\left(\frac{h-168}{6}\right) \geqslant 0.99 = \Phi(2.326348) \quad \Longrightarrow \quad h \geqslant 181.9581$
即，为使 99% 以上的男子上公交车时不致在车门上沿碰头，当地公共汽车门框的高度应设计成 181.9581 厘米。

64. 某地的抽样结果表明，考生的外语成绩 X 近似服从正态分布，其中，平均 72 分，96 分以上的考生占 2.38%。试求考生的外语成绩在 60 分以上的概率。

解 根据题意知，$X \sim N(72,\sigma^2)$，且

$$P(X > 96) = 1 - \Phi\left(\frac{96-72}{\sigma}\right) = 0.0238 = \Phi(1.980922) \Rightarrow \sigma = 12.11557$$

从而，考生的外语成绩在 60 分以上的概率为

$$P(X > 60) = 1 - \Phi\left(\frac{60-72}{12.11557}\right) = \Phi\left(0.990461\right) = 0.8390256$$

Chapter 6

随机变量的函数的分布

一、选择题

65. 设 X 的分布函数 $F(x)$，则 $Y=3X+1$ 的分布函数为（ A ）。

A. $F\left(\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}\right)$　　B. $F(3y+1)$

C. $3F(y)+1$　　D. $\frac{1}{3}F(y)-\frac{1}{3}$

66. 设 $f_1(x)$ 是标准正态分布的概率密度函数，$f_2(x)$ 是 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度函数，若 $f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x<0, \\ bf_2(x), & x>0, \end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 是概率密度函数，则 a 和 b 应满足（ A ）。

A. $2a+3b=4$　　B. $3a+ab=4$

C. $a+b=1$　　D. $a+b=2$

解　利用规范性知，

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} af_1(x)dx + \int_0^{+\infty} bf_2(x)dx \\ &= a\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + b\int_0^3 \frac{1}{4} dx = \frac{a}{2} + \frac{3b}{4} \quad \Longrightarrow \quad 2a+3b=4 \end{aligned}$$

67. 设 $X\sim N(0,1)$，令 $Y=-X-2$，则 $Y\sim$（ C ）。

A. $N(-2,-1)$　　B. $N(0,1)$　　C. $N(-2,1)$　　D. $N(2,1)$

解 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 则对 $\forall a \neq 0, \forall b \in \mathbb{R}$ 有, $Y = aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$

二、填空题

68. 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Y = 3-2X \sim$ $\underline{N(3-2\mu, 4\sigma^2)}$。

69. 设 $X \sim E(2)$,则 $Y = 1-e^{-2X}$ 的密度函数为 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$。

解 先计算分布函数，在利用 $f_Y(y) = F'_Y(y)$ 求密度函数。

(1) 当 $y \leqslant 0$ 时,

$$F_Y(y) = P(1-e^{-2X} \leqslant y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_Y(y) = 0$$

(2) 当 $0 < y < 1$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(1-e^{-2X} \leqslant y) = P\left(X \leqslant -\frac{\ln(1-y)}{2}\right) \\ &= 1-\exp\left[-2\times\left(-\frac{\ln(1-y)}{2}\right)\right] = y \\ f_Y(y) &= 1 \end{aligned}$$

(3) 当 $y \geqslant 1$ 时,

$$F_Y(y) = P(1-e^{-2X} \leqslant y) = 1 \quad \Longrightarrow \quad f_Y(y) = 0$$

综上所述，$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$。

一般地，对任意随机变量 $X \sim F_X(x)$，则 $Y = F_X(X) \sim U(0,1)$。因此，在做蒙特克罗模拟时，可以利用标准均匀分布产生任意分布。

70. 设 $X \sim \pi(\lambda)$,若记 $Y=\min\{X,2\}$,则 $P(Y=2)=$ $\underline{\quad 1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda} \quad}$。

解 $P(Y=2)=P(X\geqslant 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}$。

71. 设 $X\sim E(1)$, $a>0$, 则 $P(X\leqslant a+1|X>a)=$ $\underline{\quad 1-e^{-1} \quad}$。

解 $P(X\leqslant a+1|X>a)=\frac{P(a<X\leqslant a+1)}{P(X>a)}=\frac{e^{-a}-e^{-(a+1)}}{e^{-a}}=1-e^{-1}$。

三、计算题 72. 设随机变量 X 的分布律为

X	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$
p_k	0.3	0.2	0.5

试求 $Z=\cos X$ 的分布律和分布函数。

解 $Z=\cos X$ 的分布律为

$$\begin{aligned} P(Z=0.5) &= P(\cos X=0.5)=P\left(X=-\frac{\pi}{3}\right)+P\left(X=\frac{\pi}{3}\right)=0.3+0.5=0.8 \\ P(Z=1) &= P(\cos X=1)=P(X=0)=0.2 \end{aligned}$$

于是，$Z=\cos X$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0, & z<0.5, \\ 0.8, & 0.5\leqslant z<1, \\ 1, & z\geqslant 1. \end{cases}$$

73. 设 $X\sim N(0,1)$，试求：

(1) $Y=e^X$ 的概率密度函数；

(2) $Z=2X^2+1$ 的概率密度函数；

(3) $W=|X|$ 的概率密度函数。

解 先计算分布函数，在利用 $f_Y(y)=F'_Y(y)$ 求密度函数。

(1) 当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P(e^X\leqslant y\leqslant 0)=0\Rightarrow f_Y(y)=0$;

当 $y>0$ 时，

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(e^X\leqslant y)=P(X\leqslant \ln y)=\Phi(\ln y) \\ f_Y(y) &= F'_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}(\ln y)'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-1-\frac{\ln y}{2}} \end{aligned}$$

故，$Y=e^X$ 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-1-\frac{\ln y}{2}}, & y>0.\end{cases}$$

(2) 当 $z<1$ 时，$F_Z(z)=P(2X^2+1\leqslant z<1)=0\Rightarrow f_Z(z)=0$;

当 $z\geqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(2X^2+1\leqslant z)=P\left(|X|\leqslant\sqrt{\frac{z-1}{2}}\right)=2\Phi\left(\sqrt{\frac{z-1}{2}}\right)-1 \\ f_Z(z) &= F'_Z(z)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z-1}{4}}\left(\sqrt{\frac{z-1}{2}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\pi(z-1)}}e^{-\frac{z-1}{4}} \end{aligned}$$

故，$Z=2X^2+1$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<1,\\ \frac{1}{2\sqrt{\pi(z-1)}}e^{-\frac{z-1}{4}}, & z\geqslant 1.\end{cases}$$

(3) 当 $w<0$ 时，$F_W(w)=P(|X|\leqslant w<0)=0\Rightarrow f_W(w)=0$;

当 $w\geqslant 0$ 时，

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(|X|\leqslant w)=2\Phi(w)-1 \\ f_W(w) &= F'_W(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{w^2}{2}} \end{aligned}$$

故，$W=|X|$ 的概率密度函数为

$$f_W(w)=\begin{cases}0, & w<0,\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{w^2}{2}}, & w\geqslant 0.\end{cases}$$

74. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 2xe^{-x^2}, & x>0\end{cases}$$

试求 $Y=X^2$ 的概率密度函数。

解 当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P(e^X\leqslant y\leqslant 0)=0\Rightarrow f_Y(y)=0$；
当 $y>0$ 时，

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(X^2\leqslant y)=P(|X|\leqslant\sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{y}}2xe^{-x^2}dx\\ f_Y(y)&=F_Y'(y)=2\sqrt{y}e^{-y}(\sqrt{y})'=e^{-y}\end{aligned}$$

故，$Y=X^2$ 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ e^{-y}, & y>0.\end{cases}$$

75. 已知离散型随机变量 X 的可能取值为 $-2,0,2,7$，取相应值的概率分别为 $a,\frac{2}{3}a,\frac{5}{4}a,\frac{7}{8}a$。试求：(1) 常数 a 的值；(2) $P(|X|\leqslant 2|X\geqslant 0)$；(3) $Y=X^2$ 的分布律。

解

(1) 根据规范性知，

$$1=a+\frac{2}{3}a+\frac{5}{4}a+\frac{7}{8}a=\frac{91}{24}a\qquad\Longrightarrow\qquad a=\frac{24}{91}$$

(2)

$$\begin{aligned}P(|X|\leqslant 2|X\geqslant 0)&=\frac{P(|X|\leqslant 2,X\geqslant 0)}{P(X\geqslant 0)}=\frac{P(X=0)+P(X=2)}{P(X=0)+P(X=2)+P(X=7)}\\ &=\frac{\frac{2}{3}a+\frac{5}{4}a}{\frac{2}{3}a+\frac{5}{4}a+\frac{7}{8}a}=\frac{46}{67}\end{aligned}$$

(3) $Y = X^2$ 的分布律为

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= P(X^2=0) = P(X=0) = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \times \frac{24}{91} = \frac{16}{91} \\ P(Y=4) &= P(X^2=4) = P(X=\pm 2) = a + \frac{5}{4}a = \frac{24}{91} + \frac{5}{4} \times \frac{24}{91} = \frac{54}{91} \\ P(Y=49) &= P(X^2=49) = P(X=7) = \frac{7}{8}a = \frac{7}{8} \times \frac{24}{91} = \frac{21}{91} \end{aligned}$$

76. 已知随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})},\ x \in (-\infty, +\infty)$$

即随机变量

$$Y = \begin{cases} -1, & X < 0, \\ 1, & X \geqslant 0. \end{cases}$$

试求 Y 的概率分布。

解 因为 $f(x) = f(-x)$，故，$P(X<0) = P(X \geqslant 0) = 0.5$，从而，

$$P(Y=-1) = P(X<0) = 0, \qquad P(Y=1) = P(X \geqslant 0) = 0.5$$

Chapter 7

数学期望与方差

一、选择题

77. 若 $X \sim B(n,p)$，则下列式子中正确的是（ D ）。

A. $E(2X-1)=2np$　　B. $E(2X+1)=4np+1$

C. $D(2X-1)=4np(1-p)-1$　　D. $D(2X+1)=4np(1-p)$

78. 设 $X \sim P(1)$，则 $P(X=E(X^2))=$（ B ）。

A. e^{-1}　　B. $\frac{1}{2}e^{-1}$　　C. $1-e^{-1}$　　D. $1-\frac{1}{2}e^{-1}$

79. 设随机变量 X 的期望和方差分别是 μ 和 σ^2，则对任意常数 C，必有（ D ）。

A. $E[(X-C)^2]=E(X^2)-C^2$　　B. $E[(X-C)^2]=E[(X-\mu)^2]$

C. $E[(X-C)^2]<E[(X-\mu)^2]$　　D. $E[(X-C)^2]\geqslant E[(X-\mu)^2]$

解

$$\begin{aligned}E[(X-C)^2]-E[(X-\mu)^2] &= E\left[-2CX+C^2+2\mu X-\mu^2\right]\\ &= -2C\mu+C^2+2\mu^2-\mu^2=(C-\mu)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

80. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 且

$E(X)=\frac{7}{12}$，则（ B ）。

A. $a=1,\ b=-0.5$　　B. $a=1,\ b=0.5$

C. $a=0.5,\ b=1$　　D. $a=-0.5,\ b=1$

解

$$\begin{cases}1=\int_0^1(ax+b)dx=\frac{a}{2}+b\\ \frac{7}{12}=E(X)=\int_0^1 x(ax+b)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0.5\end{cases}$$

81. 设 $X\sim U(0,4)$，则 $E(e^X)=$（ D ）。

A. e^2　　B. e^4　　C. $4(e^4-1)$　　D. $\frac{1}{4}(e^4-1)$

82. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，其中，$\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数，则 $E(X)=$（ C ）。

A. 0　　B. 0.3　　C. 0.7　　D. 1

解 利用标准正态分布的期望为 0，即积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\phi(x)dx=0$，可得

$$\begin{aligned}f(x)&=0.3\phi(x)+0.35\phi\left(\frac{x-1}{2}\right)\\ E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\phi(x)dx+0.35\int_{-\infty}^{+\infty}x\phi\left(\frac{x-1}{2}\right)dx\\ &=0.35\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+1)\phi(t)\,d(2t)\qquad\left(t=\frac{x-1}{2}\right)\\ &=0.7\left[2\int_{-\infty}^{+\infty}t\phi(t)\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\,dt\right]=0.7\end{aligned}$$

二、填空题

83. 已知随机变量 X 的期望 $E(X)=-4$，方程 $D(X)=1$，则 $E\left(\frac{1}{2}X-5\right)=$ $\underline{\quad -7\quad}$，$D\left(\frac{1}{2}X-5\right)=$ $\underline{\quad \frac{1}{4}\quad}$。

解 $E(aX+b)=aE(X)+b,\quad D(aX+b)=a^2D(X)$。

84. 若 X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则 $D(X)=$____2____。

解

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x\times\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0 \\
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\times\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=2\int_{0}^{+\infty} x^2\times\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx \\
&= -\int_{0}^{+\infty} x^2de^{-x}=-x^2e^{-x}|_0^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx^2=2\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx \\
&= -2\int_{0}^{+\infty} xde^{-x}=-2xe^{-x}|_0^{+\infty}+2\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx=-2e^{-x}|_0^{+\infty}=2 \\
D(X) &= E(X^2)-[E(X)]^2=2
\end{aligned}$$

85. 若随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \frac{x}{4}, & 0<x\leqslant 4,\\ 1, & x>0\end{cases}$，则 X 的数学期望 $E(X)=$____2____，方差 $D(X)=$____$\frac{4}{3}$____。

解　由题意知 $X\sim U(0,4)$。利用均匀分布的结论可得：

$$X\sim U(a,b)\quad\Longrightarrow\quad E(X)=\frac{a+b}{2},\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

86. 设随机变量 $X\sim P(\lambda)$，且 $P(X=0)=P(X=1)$，则数学期望 $E(X)=$____1____，方差 $D(X)=$____1____。

解　由题意知，$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0,1,2,3,\cdots$，

$$P(X=0)=P(X=1)\quad\Rightarrow\quad e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\quad\Rightarrow\quad\lambda=1$$

从而，由泊松分布的期望和方差都是 λ 知，$E(X)=D(X)=1$。

87. 若随机变量 X 的期望和方差分别是 μ 和 σ^2，则由切比雪夫不等式知 $P(|X-\mu|<3\sigma)\geqslant$ $\underline{\qquad\frac{8}{9}\qquad}$

解 切比雪夫不等式：$P(|X-\mu|<\epsilon)\geqslant 1-\frac{D(X)}{\epsilon^2}$，$\forall\epsilon>0$。

三、计算题

88. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$x\in(-\infty,+\infty)$。试计算 X 的期望和方差。

解 注意到 $f(x)=f(-x)$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，即 $f(x)$ 是偶函数，故

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\times\frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 0 \\
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\times\frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 2 \qquad \text{分部积分} \\
D(X) &= E(X^2)-[E(X)]^2 = 2
\end{aligned}$$

89. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$ 又知 X 的数学期望为 $E(X)=\frac{1}{3}$。试求：(1) 常数 a 和 b 的值；(2) $E(3X+8)$；(3) $D(3X+8)$。

解

(1) 根据规范性及期望的定义知，

$$\begin{cases} 1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1(ax+b)dx=\frac{a}{2}+b \\ \frac{1}{3}=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x(ax+b)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases}$$

(2) $E(3X+8)=3E(X)+8=3\times\frac{1}{3}+8=9$

(3) 因为

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2(-2x+2)dx = \frac{1}{6}$$

从而，

$$D(3X+8) = 9D(X) = 9\left\{E(X^2) - [E(x)]^2\right\} = 9\left\{\frac{1}{6} - \frac{1}{3^2}\right\} = \frac{1}{2}$$

90. 在国际市场上，每年对我国某种产品出口的需求量 X（单位：吨）是一个随机变量，且 $X \sim U(2000, 4000)$。若每出口一吨可得外汇 3 万元，若销售不出去，每吨需要保养费 1 万元。问应组织多少货源，才能使平均收益最大?

解 设需要组织是 $a \in [2000, 4000]$ 吨货源, 则收益为 $3\min\{a, X\} - (a - X)_+$，于是，平均收益为

$$\begin{aligned} r(a) &= E\left[3\min\{a, X\} - (a-X)_+\right] \\ &= \int_{2000}^{4000} \left[3\min\{a, x\} - (a-x)_+\right] \frac{1}{4000-2000} dx \\ &= \frac{1}{2000}\left\{\int_{2000}^{a} (4x-a)dx + \int_a^{4000} 3a dx\right\} \\ &= -\frac{1}{1000}(a-3500)^2 + 8250 \end{aligned}$$

这是一个关于 a 的二次函数，开口向下，当且仅当 $a = 3500 \in [2000, 4000]$ 时，平均收益达到最大值 8250 万元。

91. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \leqslant x < 1, \\ ax, & 1 \leqslant x < 3, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

试求常数 a，以及随机变量 X 的数学期望。

解 根据规范性知，

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{2}x^2dx+\int_1^3 axdx=\frac{1}{6}+4a\quad\Rightarrow\quad a=\frac{5}{24}$$

从而，X 的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1\frac{1}{2}x^3dx+\int_1^3\frac{5}{24}x^2dx=\frac{139}{72}$$

92. 已知随机变量 X 满足：

$$E\left(\frac{X}{2}-1\right)=1,\qquad D\left(-\frac{X}{2}+1\right)=2$$

试求 X^2 的期望。

解 根据题意知，

$$\begin{aligned}1&=E\left(\frac{X}{2}-1\right)=\frac{1}{2}E(X)-1\quad\Rightarrow\quad E(X)=4\\2&=D\left(-\frac{X}{2}+1\right)=\frac{1}{4}D(X)\quad\Rightarrow\quad D(X)=8\\E(X^2)&=D(X)+[E(X)]^2=8+4^2=24\end{aligned}$$

Chapter 8

数学期望与方差

一、选择题

93. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	b
1	a	0.1

若随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则 (D)。

A. $a=0.2,\ b=0.3$ B. $a=0.4,\ b=0.1$

C. $a=0.3,\ b=0.2$ D. $a=0.1,\ b=0.4$

解 若随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则

$$P(X=0)P(X+Y=1)=P(X=0,X+Y=1)=P(X=0,Y=1)=b$$

即

$$\begin{cases}(0.4+b)(b+a)=b\\ 0.4+b+a+0.1=1\end{cases} \implies \begin{cases}a=0.1\\ b=0.4\end{cases}$$

94. 设随机变量 X 和 Y 的联合分布函数为 $F(x,y)$，而 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 分别是 X 和 Y 的分布函数，则对任意 a,b，概率 $P(X>a,Y>b)=$(B)。

A. $1-F(a,b)$　　B. $F(a,b)+1-[F_X(a)+F_Y(b)]$

C. $1-F_X(a)-F_Y(b)$　　D. $F(a,b)-1+[F_X(a)+F_Y(b)]$

解　记 $A=\{X\leqslant a\}$，$B=\{Y\leqslant b\}$，于是，

$$\begin{aligned}P(X>a,Y>b) &= P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\ &= 1-P(A)-P(B)+P(AB)\\ &= 1-F_X(a)-F_Y(b)+F(a,b)\end{aligned}$$

95. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
p	0.25	0.5	0.25

随机变量 Y 与 X 具有相同的概率分布，且满足条件 $P(XY=0)=1$，则 $P(X=Y)=$(A)。

A. 0　　B. 0.25　　C. 0.5　　D. 1

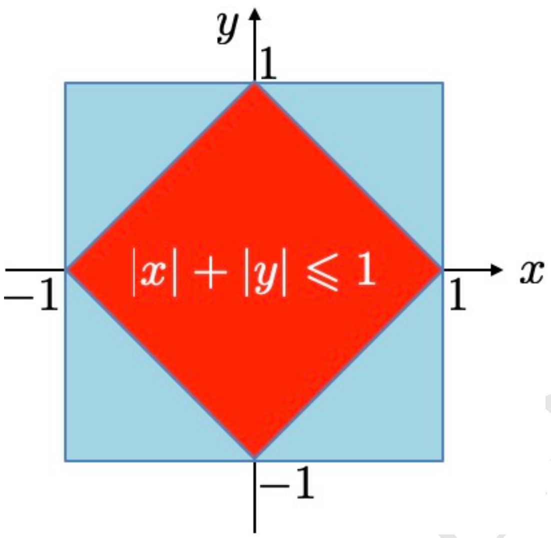
解　由 $P(XY=0)=1\Rightarrow P(XY\neq 0)=0$，然后，根据边缘分布律与联合分布律之间的关系可先写出联合分布律，再计算得 $P(X=Y)=P(X=Y=-1)+P(X=Y=0)+P(X=Y=1)=0$

X \ Y	-1	0	1	
-1	0	0.25	0	0.25
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.25	0	0.25
	0.25	0.5	0.25	1

二、填空题

96. 设区域 $D=\{(x,y)||x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$, 二维随机变量 (X,Y) 服从区域 D 上的均匀分布，则它的联合密度函数 $f(x,y)=$ $\begin{cases}0.25, & (x,y)\in D\\ 0, & 其它.\end{cases}$;

$P(|X|+|Y|\leqslant 1)=$ ____0.5____。



97. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}C, & -1\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

则 $C=$ ____0.25____, Y 的边缘密度函数为 $f_Y(y)=$ $\begin{cases}0.5, & 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 。

解 根据规范性知,

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}Cdxdy=4C \quad\Longrightarrow\quad C=0.25$$

利用五步法计算 Y 的边缘密度函数:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-1}^{1}0.25dx=0.5, & 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

98. 若三维随机变量 $(X, Y, Z) \sim F(x, y, z)$，则 Z 的边缘分布函数 $F_Z(z) =$ $\underline{\quad F(+\infty, +\infty, z) \quad}$，$(X, Z)$ 的分布函数 $F_{XZ}(x, z) =$ $\underline{\quad F(x, +\infty, z) \quad}$。

99. 已知随机变量 X 和 Y 的联合分布律为:

X \ Y	0	1
0	0.12	0.28
1	0.18	0.42

则 $P(X < Y) =$ $\underline{\quad 0.28 \quad}$，$P(X = Y) =$ $\underline{\quad 0.54 \quad}$，$P(X + Y = 1) =$ $\underline{\quad 0.46 \quad}$。

三、计算题

100. 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} C(1-x)y, & 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

试求:(1) 常数 C 的值;(2) X, Y 的边缘密度函数;(3) 概率 $P\left\{\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}\right\}$。

解

(1) 根据规范性知，

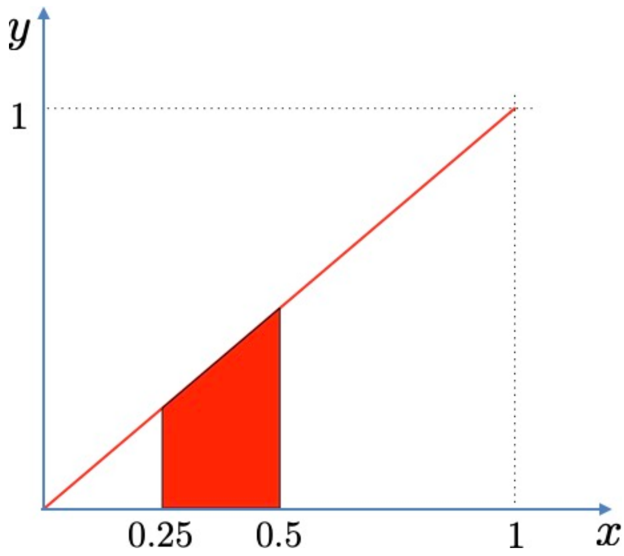
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^x C(1-x)ydy\right] dx = \frac{C}{2}\int_0^1 (1-x)x^2 dx = \frac{C}{24}$$

于是，$C = 24$。

(2) 利用五步法计算边缘密度函数:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \begin{cases} \int_0^x 24(1-x)ydy = 12(1-x)x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \begin{cases} \int_y^1 24(1-x)ydx = 12(1-y)^2 y, & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$



(3)

$$
\begin{aligned}
P\left\{\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2}, Y<\frac{1}{2}\right\} &= \int_{0.25}^{0.5}\left[\int_{0}^{x} 24(1-x) y dy\right] dx \\
&= \int_{0.25}^{0.5} 12(1-x) x^{2} dx=\frac{67}{256}
\end{aligned}
$$

101. 100 件产品中有 50 件一等品、30 件二等品、20 件三等品。从中任取 5 件，用 X 和 Y 分别表示这 5 件中的一等品数和二等品数，试在：(1) 有放回；(2) 无放回；两种情况下求 (X,Y) 分布律。

解 对任意 $m,n\in\mathbb{N}$，且 $m+n\leqslant 5$。

(1) 有放回：

$$
P(X=m, Y=n)=\frac{5!}{m!n!(5-m-n)!} 0.5^{m} 0.3^{n} 0.2^{5-m-n}
$$

(2) 无放回：

$$
P(X=m, Y=n)=\frac{C_{50}^{m} C_{30}^{n} C_{20}^{5-m-n}}{C_{100}^{5}}
$$

102. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y\begin{cases} Ce^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

试求：(1) 常数 C 的值；(2) Y 的边缘密度函数；(3) 概率 $P(X<Y)$。

解

(1) 由规范性知，

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} Ce^{-(3x+4y)}dxdy=\frac{C}{12}\Rightarrow C=12$$

(2) 根据边缘密度的定义知，

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_0^{+\infty} 12e^{-(3x+4y)}dx=4e^{-4y}, & y>0, \\ 0, & y\leqslant 0. \end{cases}$$

(3)

$$\begin{aligned} P(X<Y) &= \iint_{x<y} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\left[\int_x^{+\infty} 12e^{-(3x+4y)}dy\right]dx \\ &= \int_0^{+\infty} 3e^{-7x}dx=\frac{3}{7} \end{aligned}$$

103. 设 $Y\sim E(1)$，定义随机变量

$$X_k=\begin{cases} 0, & Y\leqslant k, \\ 1, & Y>k \end{cases}, \qquad k=1,2.$$

试求 X_1 和 X_2 的联合分布律。

解　由题意知，$P(Y \leqslant y) = 1 - e^{-y}$，$y > 0$。

$$\begin{aligned}
P(X_1 = 0, X_2 = 0) &= P(Y \leqslant 1, Y \leqslant 2) = P(Y \leqslant 1) = 1 - e^{-1} \\
P(X_1 = 0, X_2 = 1) &= P(Y \leqslant 1, Y > 2) = 0 \\
P(X_1 = 1, X_2 = 0) &= P(1 < Y \leqslant 2) = [1 - e^{-2}] - [1 - e^{-1}] = e^{-1} - e^{-2} \\
P(X_1 = 1, X_2 = 1) &= P(Y > 1, Y > 2) = P(Y > 1) = e^{-2}
\end{aligned}$$

104.　设 A, B 是随机事件，且 $P(A) = \frac{1}{4}$，$P(B|A) = \frac{1}{3}$，$P(A|B) = \frac{1}{2}$，令

$$X = \begin{cases} 1, & A\text{发生}, \\ 0, & A\text{不发生}, \end{cases}, \qquad Y = \begin{cases} 1, & B\text{发生}, \\ 0, & B\text{不发生}, \end{cases}$$

试求 X 和 Y 的联合分布律。

解　根据题意知，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{1/4} \quad\Rightarrow\quad P(AB) = \frac{1}{12} \\
P(B) &= \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{1/12}{1/2} = \frac{1}{6} \\
P(X = 0, Y = 0) &= P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} \\
P(X = 0, Y = 1) &= P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \\
P(X = 1, Y = 0) &= P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \\
P(X = 1, Y = 1) &= P(AB) = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

105. 设 $(X,Y) \sim N\left(0,3,2,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$，试写出其边缘密度函数函数。

解 根据二维正态分布的边缘分布是一维正态分布:

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho) \Rightarrow \begin{cases} X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2) \\ Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2) \end{cases}$$

于是，在本题中，

$$\begin{aligned} X \sim N(0,2): \quad & f_X(x) &=& \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}, \quad & x \in (-\infty,+\infty) \\ Y \sim N\left(3,\frac{1}{3}\right): \quad & f_Y(y) &=& \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-\frac{3(y-3)^2}{2}} \quad & y \in (-\infty,+\infty). \end{aligned}$$

106. 若二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y), & 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

试求：(1) 常数 k 的值；(2) X,Y 的边缘密度函数；(3) 概率 $P(X \leqslant 0.5)$ 和 $P(X+Y \geqslant 1)$。

解

(1) 由规范性知，

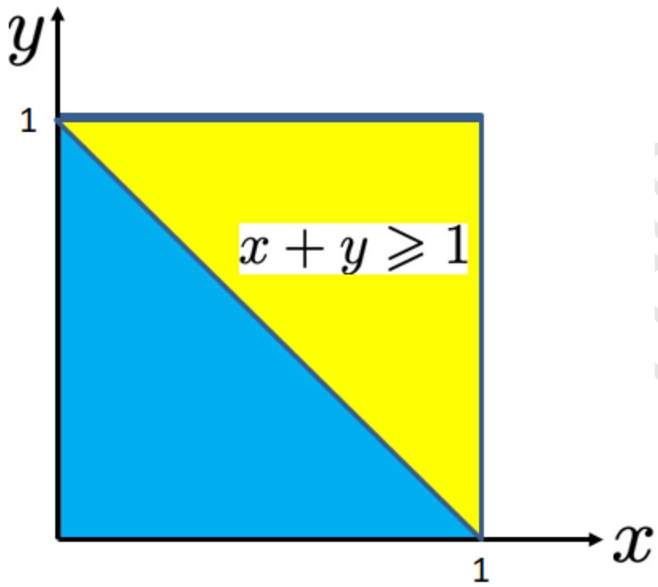
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 k(x+y)dxdy = k \Rightarrow k=1$$

(2) 利用五步法计算边缘密度函数，

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^1 (x+y)dy = x+0.5, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^1 (x+y)dx = y+0.5, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
P(X \leqslant 0.5) &= \int_{-\infty}^{0.5} f_X(x)dx = \int_0^{0.5} (x+0.5)dx = 0.375 \\
P(X+Y \geqslant 1) &= \iint_{x+y\geqslant 1} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_{1-y}^{1} (x+y)dx\right] dy \\
&= \int_0^1 \left[y + \frac{1}{2}y^2\right] dy = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$



Chapter 9

条件分布与独立性

一、选择题

107. 设 X 和 Y 是不独立，则 $f(x,y)$ 可能是（ A ）。

A. $\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x \\ 0, & 其它 \end{cases}$　　B. $\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0,y>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

C. $\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<1,y>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$　　D. $\begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

108. 袋中装有 1 个红球，2 个黑球和 3 个白球。现在有放回地从袋中取两次，每次取一个球，以 X,Y,Z 分别表示两次取到的红球、黑球和白球的数量，则 $P(X=1|Z=0)=$(C)。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{2}{9}$

109. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且均服从 $(0-1)$ 分布：

$$P(X=0)=P(Y=0)=\frac{2}{3}, \qquad P(X=1)=P(Y=1)=\frac{1}{3}$$

则 $P(X=Y)=$(B)。

A. 0　　B. $\frac{5}{9}$　　C. $\frac{7}{9}$　　D. 1

解

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1) \\ &= P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1) \\ &= \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9} \end{aligned}$$

110. 设 $X\sim E(1)$ 与 $Y\sim E(4)$ 相互独立，则 $P(X\leqslant Y)=($ A $)$。

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{5}$

解 根据题意知，

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} 4e^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\leqslant 0 \end{cases}$$

又因为 X 与 Y 相互独立，故

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} 4e^{-(x+4y)}, & x>0,y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\ P(X\leqslant Y) &= \iint_{x\leqslant y} f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}\left[\int_x^{+\infty}4e^{-(x+4y)}dy\right]dx \\ &= \int_0^{+\infty}e^{-5x}dx=\frac{1}{5} \end{aligned}$$

二、填空题

111. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$，在 $X=x\in(0,1)$ 的条件下，$Y\sim U(0,x)$，于是在 $X=x\in(0,1)$ 的条件下，关于 Y 的条件概率密度函数为 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & 0<y<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & 0<y<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，概率 $P(Y>0.5)=$ $0.5-0.5\ln 2$ 。

解 利用五步法计算 Y 的边缘概率密度函数:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_y^1 \frac{1}{x}dx = -\ln y, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \\ P(Y>0.5) &= \int_{0.5}^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_{0.5}^{1} -\ln y dy \\ &= -y\ln y\Big|_{0.5}^{1} + \int_{0.5}^{1} y d\ln y = 0.5-0.5\ln 2 \end{aligned}$$

112. 若二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.08	a	0.12
1	0.12	b	0.18

且 X 与 Y 相互独立，则 $a=$__0.2__，$b=$__0.3__。

解 根据规范性和独立的定义：$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$知，

$$\begin{cases} 1 = 0.08+a+0.12+0.12+b+0.18 = a+b+0.5 \\ 0.08 = (0.08+0.12)\times(0.08+a+0.12) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0.2 \\ b=0.3 \end{cases}$$

三、计算题

113. 若二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0.2	0	0.2
2	0.2	0.2	0.2

试求：

(1) 当 $Y=1$ 时，X 的条件分布律；

(2) 当 $X=1$ 时，Y 的条件分布律；

(3) 概率 $P(Y=3|X=1)$。

解 根据题意知，

(1) 因为

$$P(Y=1) = P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=1)=0.2+0.2=0.4$$

故

$$\begin{aligned} P(X=1|Y=1) &= \frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{0.2}{0.4}=0.5 \\ P(X=2|Y=1) &= \frac{P(X=2,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{0.2}{0.4}=0.5 \end{aligned}$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2)+P(X=2,Y=3) \\ &= 0.2+0.2+0.2=0.6 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} P(Y=1|X=2) &= \frac{P(X=2,Y=1)}{P(X=2)}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3} \\ P(Y=2|X=2) &= \frac{P(X=2,Y=2)}{P(X=2)}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3} \\ P(Y=3|X=2) &= \frac{P(X=2,Y=3)}{P(X=2)}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

(3) 因为

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=1,Y=3) \\ &= 0.2+0+0.2=0.4 \end{aligned}$$

故

$$P(Y=3|X=1)=\frac{P(X=1,Y=3)}{P(X=1)}=\frac{0.2}{0.2+0.2}=0.5$$

114. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试求：(1) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$；(2) $P\{Y>0.5|X>0.5\}$。

解　利用五步法求边缘分布密度函数

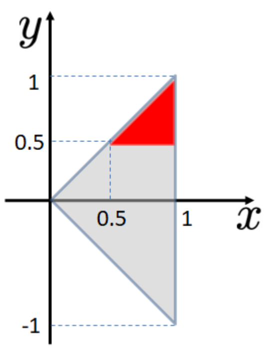
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1dy=2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{|y|}^{1}1dy=1-|y|, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & |y|<x<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}P(Y>0.5|X>0.5) &= \frac{P(X>0.5,Y>0.5)}{P(X>0.5)}=\frac{\iint_{x>0.5,y>0.5}f(x,y)dxdy}{\int_{0.5}^{+\infty}f_X(x)dx}\\ &= \frac{\int_{0.5}^{1}\int_{0.5}^{x}1dydx}{\int_{0.5}^{1}2xdx}=\frac{\int_{0.5}^{1}(x-0.5)dx}{0.75}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$



115. 已知随机变量 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}5y^4, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

在给定 $Y=y$ 的条件下，随机变量 X 的条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{3x^2}{y^3}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试求 $P(X>0.5)$。

解 根据条件密度的定义知，

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)\\
&= \begin{cases}5y^4\times\frac{3x^2}{y^3}=15x^2y, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\\
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\\
&= \begin{cases}\int_x^1 15x^2ydy=\frac{15}{2}x^2(1-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\\
P(X>0.5) &= \int_{0.5}^{+\infty} f_X(x)dx=\int_{0.5}^1\frac{15}{2}x^2(1-x^2)dx=\frac{47}{64}
\end{aligned}$$

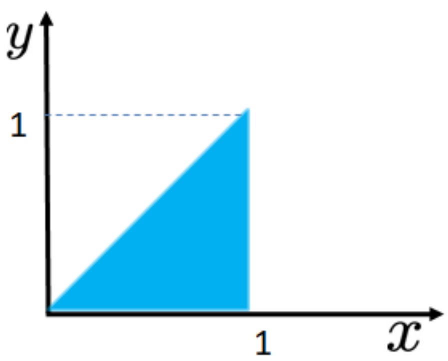
116. 设 X 与 Y 是相互独立的随机变量，$X \sim U(0,1)$，$Y \sim E(2)$，试求 t 的二次方程

$$t^2 + 2Xt + Y^2 = 0$$

有实根的概率。

解　一元二次方程方程有实根的充要条件是判别式 $\Delta = 4X^2 - 4Y^2 \geqslant 0$，即

$$\begin{aligned} P(\Delta \geqslant 0) &= P(X^2 \geqslant Y^2) = P(|X| \geqslant |Y|) \\ &= \iint_{|x| \geqslant |y|} f(x,y)dxdy = \iint_{|x| \geqslant |y|} f_X(x) f_Y(y) dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^x 2e^{-2y} dydx = \frac{1}{2}(1 + e^{-2}) \end{aligned}$$



117. 在打靶训练中，设弹着点 $A(X,Y)$ 的坐标 X 和 Y 相互独立，且都服从 $N(0,1)$ 分布，规定点 A 落在区域 $D_1 = \{(x,y)|x^2 + y^2 > 4\}$ 内得 0 分，点 A 落在区域 $D_2 = \{(x,y)|1 < x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ 内得 1 分，点 A 落在区域 $D_3 = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 内得 2 分。以 Z 记打靶的得分。试求：

(1) X 和 Y 的联合概率密度函数；

(2) 随机变量 Z 的分布律。

解 因为 X 与 Y 独立同标准正态分布，故，对任意 $z>0$，

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\
P(X^2+Y^2\leqslant z) &= \iint_{x^2+y^2\leqslant z} f(x,y)dxdy \\
(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rdrd\theta = 1-e^{-\frac{z}{2}} \\
P(Z=0) &= P(X^2+Y^2>4)=1-P(X^2+Y^2\leqslant 4) \\
&= 1-[1-e^{-\frac{4}{2}}]=e^{-2} \\
P(Z=1) &= P(1<X^2+Y^2\leqslant 4) \\
&= [1-e^{-\frac{4}{2}}]-[1-e^{-\frac{1}{2}}]=e^{-\frac{1}{2}}-e^{-2} \\
P(Z=2) &= P(X^2+Y^2\leqslant 1)=1-e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

118. 若二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$
f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(2x+y)}, & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}
$$

试求：(1) 常数 A 的值；(2) $P(X<2,Y<1)$；(3) X 的边缘分布；(4) $P(X+Y<2)$；(5) $P(X<2|Y<1)$；(6) X 与 Y 是否独立。

解

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} Ae^{-(2x+y)}dxdy = \frac{A}{2} \\
A &= 2 \\
P(X<2,Y<1) &= \iint_{x<2,y<1} f(x,y)dxdy = \int_0^2 \left[\int_0^1 2e^{-(2x+y)}dy\right] dx \\
&= \int_0^2 2e^{-2x}(1-e^{-1})dx = (1-e^{-1})(1-e^{-4}) \\
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^{+\infty} 2e^{-(2x+y)}dy = 2e^{-2x}, & x>0, \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases} \\
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^{+\infty} 2e^{-(2x+y)}dx = e^{-y}, & y>0, \\ 0, & y \leqslant 0 \end{cases} \\
P(X+Y<2) &= \iint_{x+y\geqslant 2} f(x,y)dxdy = \int_0^2 \left[\int_0^{2-x} 2e^{-(2x+y)}dy\right] dx \\
&= \int_0^2 2e^{-2x}\left[1-e^{-2+x}\right] dx = 1-2e^{-2}+e^{-4} = (1-e^{-2})^2 \\
P(X<2|Y<1) &= \frac{P(X<2,Y<1)}{Y<1} = \frac{P(X<2,Y<1)}{P(Y<1)} \\
&= \frac{(1-e^{-1})(1-e^{-4})}{\int_0^1 e^{-y}dy} = \frac{(1-e^{-1})(1-e^{-4})}{1-e^{-1}} = 1-e^{-4} \\
f(x,y) &= f_X(x)f_Y(y) \quad \Rightarrow \quad X\text{与}Y\text{相互独立}
\end{aligned}
$$

Chapter 10

多维随机变量的数字特征

一、选择题

119. 若随机变量 X 与 Y 满足 $Y = 1-0.5X$,则相关系数 ρ_{XY} =(B)。

A. 1　　B. -1　　C. 0.5　　D. -0.5

120. 协方差 $Cov(X,Y) = 0$ 是 X 与 Y 相互独立的 (D) 条件。

A. 充要　　B. 充分　　C. 必要　　D. 既不充分也不必要

(1) 无关但不独立:

设 $P(X=-1) = P(X=0) = P(X=1) = 1/3$，令 $Y = X^2$。显然 X 与 Y 不独立，但是，

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

从而，$\rho_{XY} = 0$，即 X 与 Y 无关。

(2) 独立但不无关:

设 (X,Y) 的联合密度函数为:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\pi(1+y^2)} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

即 X 与 Y 独立。但是，$E(X)$ 不存在，从而，$Cov(X,Y)$ 不存在。

121. 对任意随机变量 X 和 Y，以下选项正确的是 (A)。

A. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$　　B. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

C. $E(XY)=E(X)E(Y)$　　D. $D(XY)=D(X)D(Y)$

122. 设 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$，以下选项不正确的是 (B)。

A. $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$　　B. $X+a$ 与 $Y-b$ 必相互独立

C. (X,Y) 可能服从二维均匀分布　　D. $E(XY)=E(X)E(Y)$

二、填空题

123. 若 $X\sim U(-1,1)$ 与 $Y\sim E(4)$ 相互独立,则 $E(X+Y)=$ __0.25__，$E(XY)=$ __0__，$D(X+Y)=$ __$\frac{19}{48}$__。

124. 若相互独立的随机变量 X 和 Y 满足 $E(X)=E(Y)=1$，$D(X)=2$，$D(Y)=4$，则 $E[(X+Y)^2]=$ __10__。

解 根据期望与方差的关系：$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$，知

$$\begin{aligned}E[(X+Y)^2] &= E(X^2+2XY+Y^2)\\ &= \left[D(X)+(EX)^2\right]+2E(X)E(Y)+\left[D(Y)+(EY)^2\right]\\ &= \left[2+1^2\right]+2\times1\times1+\left[4+1^2\right]=10\end{aligned}$$

125. 若随机变量 X 和 Y 满足 $D(X)=D(Y)=3$，相关系数 $\rho_{XY}=-0.5$，则 $D(X-Y)=$ __9__，$D(3X+2Y)=$ __21__。

解

$$\begin{aligned} D(X-Y) &= D(X)-2Cov(X,Y)+D(Y) \\ &= D(X)-2\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}+D(Y) \\ &= 3-2\times(-0.5)\times\sqrt{3\times 3}+3=9 \\ D(3X+2Y) &= 9D(X)-12Cov(X,Y)+4D(Y) \\ &= 9D(X)+12\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}+4D(Y) \\ &= 9\times 3+12\times(-0.5)\times\sqrt{3\times 3}+4\times 3=21 \end{aligned}$$

126. 若 X 与 Y 满足 $D(X+Y)=D(X-Y)$，则协方差__0__。

解 $D(X\pm Y)=D(X)\pm 2Cov(X,Y)+D(Y)$

127. 设 $(X,Y)\sim N\left(0,1,4,9,-\frac{1}{3}\right)$，则 (X,Y) 的协方差矩阵为 $\Sigma=\underline{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}}$。

解 $\sigma_1^2=D(X)=4,\ \sigma_2^2=D(Y)=9,\ Cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2=-\frac{1}{3}\times 2\times 3=-2$

三、计算题

128. 10 个人随机地进入 15 个房间，每个房间容纳的人数不限，考虑每个人进入每个房间是等可能的，且各人是否进入房间相互独立。设 X 表示有人的房间数，求 $E(X)$。

解 设

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个房间有人}, \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个房间无人}, \end{cases}, \qquad i = 1, 2, \cdots, 15,$$

则 $X = \sum\limits_{i=1}^{15} Y_i$。因为

$$P(Y_i =) = \frac{14^{10}}{15^{10}}, \qquad P(Y_i = 1) = 1 - \frac{14^{10}}{15^{10}}$$

从而，

$$E(X) = E\left[\sum_{i=1}^{15} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{15} E(Y_i) = 15 \times \left[1 - \frac{14^{10}}{15^{10}}\right] = 7.475823$$

129. 一箱零件共有 100 件，其中一、二、三等品分别为 80 件、10 件、10 件，现从中随机地抽取一件，记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{抽到 } i \text{ 等品}, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3.$$

试求：(1) X_1 与 X_2 的联合分布律；(2) $Cov(X_1, X_2)$。

解

$$\begin{aligned}
P(X_1 = 0, X_2 = 0) &= \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \\
P(X_1 = 0, X_2 = 1) &= \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \\
P(X_1 = 1, X_2 = 0) &= \frac{80}{100} = \frac{4}{5} \\
P(X_1 = 1, X_2 = 1) &= \frac{0}{100} = 0 \\
Cov(X_1, X_2) &= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = 0 - \left(\frac{4}{5} \times 1 + \frac{1}{10} \times 1\right) = -0.08
\end{aligned}$$

130. 已知 (X,Y) 服从二维正态分布，其边缘分布分别是 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$，且 $\rho_{XY}=-0.5$。设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$。试求：

(1) Z 的期望与方差；

(2) X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}；

(3) X 与 Z 是否相互独立？为什么？

解 根据题意知，

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= E\left[\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right]=\frac{E(X)}{3}+\frac{E(Y)}{2}=\frac{1}{3}\\
D(Z) &= D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{3}Cov(X,Y)+\frac{1}{4}D(Y)\\
&= \frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}+\frac{1}{4}D(Y)\\
&= \frac{1}{9}\times 9+\frac{1}{3}\times(-0.5)\times 3\times 4+\frac{1}{4}\times 16=3\\
E(XY) &= Cov(X,Y)+E(X)E(Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}+E(X)E(Y)\\
&= -0.5\times 3\times 4+1\times 0=-6\\
Cov(X,Z) &= E(XZ)-E(X)E(Z)=E\left[X\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)\right]-E(X)E(Z)\\
&= \frac{1}{3}E(X^2)+\frac{1}{2}E(XY)-E(X)E(Z)\\
&= \frac{1}{3}\left\{D(X)+[E(X)]^2\right\}+\frac{1}{2}E(XY)-E(X)E(Z)\\
&= \frac{1}{3}\left[9+1^2\right]+\frac{1}{2}\times(-6)-1\times\frac{1}{3}=0\\
\rho_{XZ} &= \frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)D(Z)}}=0
\end{aligned}
$$

因为 (X,Y) 服从二维正态分布，从而，由

$$
aX+bZ=aX+b\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{3a+1}{3}X+\frac{b}{2}Y,\qquad \forall a,b\in\mathbb{R}
$$

服从一维正态分布，知 (X,Z) 也服从二维正态分布。再因为 $\rho_{XZ}=0$，于是，X 与 Z 相互独立。

131. 设 $W=(aX+3Y)^2$，$E(X)=E(Y)=0$，$D(X)=4$，$D(Y)=16$，$\rho_{XY}=-0.5$。试求常数 a 使得 $E(W)$ 达到最小，并求 $E(W)$ 的最小值。

解 根据题意知，

$$
\begin{aligned}
E(W) &= E(aX+3Y)^2 = E(X^2)a^2+6E(XY)a+9E(Y^2)\\
&= \left\{D(X)+[E(X)]^2\right\}a^2+6\left[Cov(X,Y)+E(X)E(Y)\right]a+9\left\{D(Y)+[E(Y)]^2\right\}\\
&= 4a^2+6\times(-0.5)\times 2\times 4a+9\times 16\\
&= 4\left[(a-3)^2+27\right]\geqslant 4\times 27=108
\end{aligned}
$$

当且仅当 $a=3$ 时，$E(W)$ 取得最小值 108。

132. 设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为：

X	0	1
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P(X^2=Y^2)=1$。试求：(1) (X,Y) 的概率分布；(2) ρ_{XY}。

解 $P(X^2=Y^2)=1\Rightarrow P(|X|\neq|Y|)=0$，故

X \ Y	-1	0	1	
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \\
E(X^2) &= 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \\
D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{3} \\
E(Y) &= -1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = 0 \\
E(Y^2) &= (-1)^2 \times \frac{1}{3} + 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\
D(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{2}{3} \\
Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = 0 \\
\rho_{XY} &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = 0
\end{aligned}$$

133. 设随机变量 X 和 Y 满足：$D(X) = 25$，$D(Y) = 36$，$\rho_{XY} = 0.4$，试求 $Cov(X,Y)$ 和 $D(X+Y)$。

解 根据题意知，

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= \rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)} = 0.4 \times \sqrt{25 \times 36} = 12 \\
D(X+Y) &= D(X) + 2Cov(X,Y) + D(Y) = 25 + 2 \times 12 + 36 = 85
\end{aligned}$$

Chapter 11

多维随机变量函数的分布

一、选择题

134. 对任意随机变量 X 和 Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为（ A ）。

A. $F^2(x)$

B. $F(x)F(y)$

C. $1-[1-F(x)]^2$

D. $[1-F(x)][1-F(y)]$

135. 已知随机变量 X 与 Y 相互独立，如果 $X+Y$ 与 X 和 Y 服从同一分布类型，则 X 不可能服从（ A ）。

A. 均匀分布

B. 二项分布

C. 泊松分布

D. 正态分布

136. 设 $X\sim N(0,1)$ 与 $Y\sim N(1,1)$ 相互独立，则（ B ）。

A. $P(X+Y<0)=0.5$

B. $P(X+Y<1)=0.5$

C. $P(X-Y<0)=0.5$

D. $P(X-Y<1)=0.5$

137. 设 (X,Y) 服从圆 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant r^2\}$ 上的均匀分布，则（ D ）服从均匀分布。

A. X

B. Y

C. $X+Y$

D. $Y|_{\{X=1\}}$

解

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \\
&= \begin{cases} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{\pi r^2}} dx = \frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & -r \leqslant x \leqslant r, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \\
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{\pi r^2}}{\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}} = \frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}, & x^2+y^2 \leqslant r^2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \\
f_{Y|X}(y|1) &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{r^2-1}}, & -\sqrt{r^2-1} \leqslant y \leqslant \sqrt{r^2-1}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

二、填空题

138. 二维随机变量 (X,Y) 的联合概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0.1	0.2	0.1
2	0.1	0	0.1
3	0.2	0.2	0

则随机变量 $X+Y$ 的概率分布为

$X+Y$	0	1	2	3
p	0.1	0.3	0.3	0.3

139. 若随机变量 X 的分布律为 $P(X=-1)=0.4$，$P(X=1)=0.6$，$Y\sim B(2,0.5)$，且 X 与 Y 相互独立，则

$Y-X$	-1	0	1	2	3
p	0.15	0.3	0.25	0.2	0.1

XY	-2	-1	0	1	2
p	0.1	0.2	0.25	0.3	0.15

140. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$ $\underline{\quad\frac{1}{9}\quad}$。

解

$$P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=P(X\leqslant 1,Y\leqslant 1)=P(X\leqslant 1)P(Y\leqslant 1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

三、计算题

141. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$ 与 $Y\sim U(0,2)$ 相互独立。试求：

(1) $Z=X+Y$ 的概率密度函数；

(2) $P(X>Y)$。

解 根据题意知，

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 0.5, & 0<x<1, 0<y<2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \\
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx = \int_{(z-2)\vee 0}^{z\wedge 1} f(x,z-x)dx \\
&= \int_{(z-2)\vee 0}^{z\wedge 1} 0.5dx = 0.5\left[z\wedge 1-(z-2)\vee 0\right] \\
&= \begin{cases} 0, & z\leqslant 0\text{或}z\geqslant 3, \\ 0.5z, & 0<z<1, \\ 0.5, & 1\leqslant z\leqslant 2, \\ 1.5-0.5z, & 2<z<3, \end{cases} \\
P(X>Y) &= \iint_{x>y} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^x 0.5dy\right] dx = 0.25
\end{aligned}
$$

142. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率密度函数分别为：

$$
f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}
$$

试求：$Z=X+Y$、$M=\max\{X,Y\}$ 和 $N=\min\{X,Y\}$ 的概率密度函数。

解

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \\
&= \int_{(z-1)\vee 0}^{z\wedge 1} 2xdx = (z\wedge 1)^2 - [(z-1)\vee 0]^2 \\
&= \begin{cases} z^2, & 0<z\leqslant 1, \\ 2z-z^2, & 1<z\leqslant 2, \\ 0, & z\leqslant 0\text{或}z>2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \int_0^x 2t dt = x^2, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ y, & 0 < y < 1, \\ 1, & y \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_M(m) &= P(M \leqslant m) = P(X \leqslant m, Y \leqslant m) \overset{\text{独立}}{=} P(X \leqslant m)P(Y \leqslant m) \\ &= F_X(m)F_Y(m) = \begin{cases} 0, & m \leqslant 0, \\ m^3, & 0 < m < 1, \\ 1, & m \geqslant 1 \end{cases} \\ f_M(m) &= F'_M(m) = \begin{cases} 3m^2, & 0 < m \leqslant 1, \\ 0, & m \leqslant 0 \text{或} m \geqslant 1 \end{cases} \\ F_N(n) &= P(N \leqslant n) = 1 - P(N > n) = 1 - P(X > n, Y > n) \\ &\overset{\text{独立}}{=} 1 - P(X > n)P(Y > n) = 1 - [1 - P(X \leqslant n)][1 - P(Y \leqslant n)] \\ &= 1 - [1 - F_X(n)][1 - F_Y(n)] = \begin{cases} 0, & n \leqslant 0, \\ 1 - (1 - n^2)(1 - n), & 0 < n < 1, \\ 1, & n \geqslant 1 \end{cases} \\ f_N(n) &= F'_N(n) = \begin{cases} 1 + 2n - 3n^2, & 0 < n \leqslant 1, \\ 0, & n \leqslant 0 \text{或} n \geqslant 1 \end{cases} \end{aligned}$$

143. 设随机变量 $X \sim B(1, 0.3)$ 与 $Y \sim U(-1, 1)$ 相互独立，记 $Z = X + Y$，试求 Z 的概率密度函数。

解 根据全概率公式知，

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leqslant z) = P(X + Y \leqslant z) \\
&= P(X = 0)P(X + Y \leqslant z | X = 0) + P(X = 1)P(X + Y \leqslant z | X = 1) \\
&= P(X = 0)P(Y \leqslant z) + P(X = 1)P(Y \leqslant z - 1) \\
&= 0.7F_Y(z) + 0.3F_Y(z - 1)
\end{aligned}
$$

$$
f_Z(z) = F'_Z(z) = 0.3f_Y(z) + 0.7f_Y(z - 1) = \begin{cases} 0.35, & -1 < z \leqslant 0, \\ 0.5, & 0 < z \leqslant 1, \\ 0.15, & 1 < z < 2, \\ 0, & z \leqslant -1 \text{或} z \geqslant 2 \end{cases}
$$

144. 设随机变量 X 与 Y 的分布律分别为:

X	-1	0	1
p	0.25	0.5	0.25

Y	0	1
p	0.5	0.5

已知 $P(XY=0)=1$，试求 $Z=X+Y$、$M=\max\{X,Y\}$ 的分布律。

解 由 $P(XY=0)=1$ 知，$P(XY\neq 0)=0$，于是，(X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	-1	0	1	
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.5	0	0.5
	0.25	0.5	0.25	

从而，

(X,Y)	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$
p	0.25	0.5	0.25
$Z=X+Y$	-1	1	1
$M=X\vee Y$	-1	0	0

$Z=X+Y$	-1	1
p	0.25	0.75
$M=X\vee Y$	-1	0
p	0.25	0.75

145. 设 X 与 Y 是随机变量，且 $P(X\geqslant 0,Y\geqslant 0)=\frac{3}{7}$，$P(X\geqslant 0)=P(Y\geqslant 0)=\frac{4}{7}$，试求 $P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}$。

解

$$\begin{aligned} P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\} &= P(X\geqslant 0)+P(Y\geqslant 0)-P(X\geqslant 0,Y\geqslant 0) \\ &= \frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7} \end{aligned}$$

146. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)(\sigma>0)$，求随机变量 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度函数。

解 当 $z\leqslant 0$ 时，

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\leqslant z\right)=0\Rightarrow f_Z(z)=0$$

当 $z>0$ 时，

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z\leqslant z)=P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\leqslant z\right)\\
&= \iint_{x^2+y^2\leqslant z} f_X(x)f_Y(y)dxdy\\
&= \iint_{x^2+y^2\leqslant z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy\\
(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdrd\theta=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\\
f_Z(z) &= \frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2}}
\end{aligned}$$

故，$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

Chapter 12

统计量及分布与中心极限定理

一、选择题

147. 以下结论正确的是 (B)。

A. 一组数中的众数是唯一的

B. 样本的联合分布是由总体的分布决定的

C. 样本的方差就是样本的二阶中心矩

D. 以上三个结论都正确

148. 设总体 $X \sim E(\alpha)$,从中取出一个容量为 n 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,$\overline{X}$ 是样本均值，以下结论正确的是 (B)。

A. $\overline{X} \sim N\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{n\alpha^2}\right)$

B. $E(\overline{X}) = \frac{1}{\alpha}$, $D(\overline{X}) = \frac{1}{n\alpha^2}$

C. $E(\overline{X}) = \frac{1}{\alpha}$, $D(\overline{X}) = \frac{1}{\alpha^2}$

D. $\overline{X} \sim N\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}\right)$

149. 设总体 $X \sim N(3.4, 6^2)$，从中取出一个容量为 n 的样本，若要使 $P(1.4 < \overline{X} \leqslant 5.4) \geqslant 0.95$ 成立，则 n 的值至少为 (C)。

A. 34　　B. 34.5　　C. 35　　D. 33

解 因为 $\overline{X} \sim N(3.4, 36/n)$，故

$$\begin{aligned}
P(1.4 < \overline{X} \leqslant 5.4) &= \Phi\left(\frac{5.4-3.4}{6/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{1.4-3.4}{6/\sqrt{n}}\right) \\
&= \Phi\left(\sqrt{n}/3\right) - \Phi\left(-\sqrt{n}/3\right) = 2\Phi\left(\sqrt{n}/3\right) - 1 \geqslant 0.95 \\
\Phi\left(\sqrt{n}/3\right) &\geqslant 0.975 = \Phi(1.96) \qquad \Rightarrow \qquad n \geqslant 34.5
\end{aligned}$$

因为 $n \in \mathbb{N}$，故，样本容量 n 至少为 35。

150. 在抽样检查某种产品的质量时，如果发现次品数多于 10 个，则拒绝接受这批产品。设产品的次品率为 10%，至少应抽取（ D ）个产品，才能保证拒绝接受这批产品的概率达到 0.9。

A. 120 B. 135 C. 124 D. 147

解 设抽取 n 件产品，并用 X 表示抽样中次品数量，则 $X \sim B(n, 0.1)$。由棣莫夫-拉普拉斯中心极限定理知，X 近似服从 $N(0.1n, 0.09n)$，故，

$$\begin{aligned}
P(X > 10) &= 1 - P(X \leqslant 10) \approx 1 - \Phi\left(\frac{10-0.1n}{\sqrt{0.09n}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{0.1n-10}{0.3\sqrt{n}}\right) \geqslant 0.9 = \Phi(1.28) \\
\frac{0.1n-10}{\sqrt{0.09n}} &\geqslant 1.28 \quad \Rightarrow \quad n \geqslant 146.47
\end{aligned}$$

因为 $n \in \mathbb{N}$，故，样本容量 n 至少为 147。

二、填空题

151. 在一本书的初稿中随机地检查了 10 页，发现其每页上的错误数分别是 $4,5,6,0,3,1,4,2,1,4$，则样本均值是 3 ，样本方差是 $\frac{34}{9}$ ，变异系数为 $\frac{\sqrt{34}}{9}$ 。

152. 一个盒子里有 3 件产品，其中 1 件正品、2 件次品。每次从盒子中任取一件产品，记正品的个数为 X。有放回地取了 10 次，得一容量为 10 的样本，则样本均值的方差为 $\frac{1}{45}$ 。

解 根据题意知，$X \sim B(1, 1/3)$，故 $D(\overline{X}) = \frac{D(X)}{10} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{10} = \frac{1}{45}$

153. 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$ $(\theta>-1)$, 从中取出一个容量为 n 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 则 $E\left(\overline{X}\right)=$ $\underline{\quad\frac{\theta+1}{\theta+2}\quad}$, $D\left(\overline{X}\right)=$ $\underline{\quad\frac{\theta+1}{n(\theta+3)(\theta+2)^2}\quad}$。

解 根据题意知,

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,\theta)=\int_0^1 x\times(\theta+1)x^{\theta}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}\\
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x,\theta)=\int_0^1 x^2\times(\theta+1)x^{\theta}dx=\frac{\theta+1}{\theta+3}\\
D(X) &= E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{\theta+1}{\theta+3}-\frac{(\theta+1)^2}{(\theta+2)^2}=\frac{\theta+1}{(\theta+3)(\theta+2)^2}\\
E(\overline{X}) &= E(X)=\frac{\theta+1}{\theta+2}\\
D(\overline{X}) &= \frac{D(X)}{n}=\frac{\theta+1}{n(\theta+3)(\theta+2)^2}
\end{aligned}
$$

154. 设总体 $X\sim N(1,4)$, 从中取出一个容量为 25 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{25}$, 令 $\overline{X}=\frac{1}{25}\sum\limits_{i=1}^{25}X_i$, 则当常数 $a=$ $\underline{\ 2.5\ }$, $b=$ $\underline{\ -2.5\ }$ 时, $Y=a\overline{B}\sim N(0,1)$。

解 因为 $X\sim N(1,4)$, 故, $\overline{X}\sim N(1,4/25)$, 于是, 将 $\overline{X}$ 标准化得

$$
Y=\frac{\overline{X}-1}{\sqrt{4/25}}=2.5\overline{X}-2.5\sim N(0,1)
$$

即, $a=2.5$, $b=-2.5$。

155. 设总体 $X\sim B(1,p)$, 从中取出一个容量为 n 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 样本的联合分布律为 $P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)$ $\underline{\quad p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\quad}$。

解 因 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布, 故, 对 $x_i\in\{0,1\}$, $i=1,2,\cdots,n$, 有

$$
P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n) = \prod_{i=1}^n p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}
$$

三、计算题

156. 设总体 $X \sim N(2,1)$，$X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自总体 X 的一组样本。试求：$P\{1 < X < 3\}$，$P\{1 < \overline{X} < 3\}$，$P\{|\overline{X}-2| < 1\}$。

解 根据题意知，$\overline{X} \sim N(2, 1/9)$，故，

$$
\begin{aligned}
P\{1 < X < 3\} &= \Phi\left(\frac{3-2}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{1}\right) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0.6827 \\
P\{1 < \overline{X} < 3\} &= \Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{1/9}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{1/9}}\right) = 2\Phi(3) - 1 \approx 0.9973 \\
P\{|\overline{X}-2| < 1\} &= P\{1 < \overline{X} < 3\} \approx 0.9973
\end{aligned}
$$

157. 从总体 $N(12,4)$ 中随机取出一组样本 X_1, X_2, X_3, X_4，试求：

(1) 样本均值与总体均值之差的绝对值大于 1 的概率；

(2) $P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4) > 15\}$，$P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4) < 10\}$。

解 根据题意知，$\overline{X} \sim N(12, 1)$，故，

$$
\begin{aligned}
P(|\overline{X}-12| > 1) &= P(\overline{X} < 11) + P(\overline{X} > 13) \\
&= \Phi\left(\frac{11-12}{1}\right) + \left[1 - \Phi\left(\frac{13-12}{1}\right)\right] \\
&= 2\left[1 - \Phi(1)\right] \approx 0.3173 \\
P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4) > 15\} &= 1 - P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4) \leqslant 15\} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{4} P(X_i \leqslant 15) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{15-12}{\sqrt{4}}\right)\right]^4 \\
&= 1 - \left[\Phi\left(1.5\right)\right]^4 \approx 0.2416 \\
P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4) < 10\} &= 1 - P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4) \geqslant 10\} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{4} P(X_i \geqslant 10) = 1 - \prod_{i=1}^{4} [1 - P(X_i < 10)] \\
&= 1 - \left[1 - \Phi\left(\frac{10-12}{\sqrt{4}}\right)\right]^4 \approx 0.4989
\end{aligned}
$$

158. 设某元件是某电气设备的一个关键部件，当该元件失效后，需立即换上一个新的元件。若该元件的平均寿命为 $100h$，标准差为 $30h$，试问：应该有多少备件，才能有 95% 以上的概率保证这个系统能够正常工作 $2000h$ 以上？

解 设需要备 n 个元件以满足要求。根据独立同分布中心极限定理知，$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从正态分布 $N(100, 30^2/n)$，进而，

$$
\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > 2000\right) &= P\left(\overline{X} > \frac{2000}{n}\right) \approx \Phi\left(\frac{100 - \frac{2000}{n}}{30/\sqrt{n}}\right) \geqslant 0.95 = \Phi(1.645) \\
\frac{100 - \frac{2000}{n}}{30/\sqrt{n}} &\geqslant 1.645 \quad \Rightarrow \quad n \geqslant 22.33
\end{aligned}
$$

因为 $n \in \mathbb{N}$，故，$n \geqslant 23$，即应该有 23 个备件，才能有 95% 以上的概率保证这个系统能够正常工作 $2000h$ 以上。

159. 某餐厅每天接待 400 位顾客，设每位顾客的消费额（元）服从区间 $(20, 100)$ 上的均匀分布，且每位顾客的消费额是相互独立的。试求：

(1) 该餐厅每天的平均营业额；

(2) 该餐厅每天的营业额在平均营业额 ± 760 元内的概率。

解 对任意 $i \in \{1, 2, \cdots, 40\}$，设 X_i 表示第 i 个顾客的消费额。根据题意知，$X_i \overset{i.i.d}{\sim} U(20, 100)$。于是，该餐厅每天的营业额为

$$Y = \sum_{i=1}^{40} X_i \triangleq 40\overline{X}$$

(1) 该餐厅每天的平均营业额为：

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{400} X_i\right) = \sum_{i=1}^{400} E(X_i) = 400\times \frac{20+100}{2} = 24000$$

(2) 因为 $X \sim U(20, 100)$，故，

$$E(X) = \frac{20+100}{2} = 60,\ \ D(X) = \frac{(100-20)^2}{12} = \frac{1600}{3}$$

根据中心极限定理知，$\overline{X}$ 近似服从 $N(60, 4/3)$。从而，该餐厅每天的营业额在平均营业额 ± 760 元内的概率为：

$$\begin{aligned} P(|Y-2400| \leqslant 760) &= P\left(|\overline{X}-60)| \leqslant 1.9\right) \\ &\approx 2\Phi\left(\frac{1.9}{\sqrt{4/3}}\right) - 1 \approx 0.9 \end{aligned}$$

160. 某种电池的寿命 $X \sim N(300, 35^2)$（单位：h）。

(1) 求寿命大于 $250h$ 的概率；

(2) 求 x 的值，使寿命在 $(300-x, 300+x)$ 之内的概率不小于 0.9。

解

$$\begin{aligned} P(X > 250) &= \Phi\left(\frac{300-250}{35}\right) = \Phi(10/7) \approx 0.9234 \\ P(300-x < X < 300+x) &= \Phi\left(\frac{300+x-300}{35}\right) - \Phi\left(\frac{300-x-300}{35}\right) \\ &= 2\Phi(x/35) - 1 \geqslant 0.9 \\ \Phi(x/35) &\geqslant 0.95 = \Phi(1.645) \quad \Rightarrow \quad x \geqslant 57.58 \end{aligned}$$

Chapter 13

三大抽样分布

一、选择题

161. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的一组样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则下列统计量中服从 $\chi^2(n)$ 分布的是 (D)。

A. $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1}$　　B. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

C. $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$　　D. $\frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

162. 设总体 $X \sim N(0,1)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的一组样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则下列说法不正确的是 (B)。

A. $\overline{X} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$　　B. $n\overline{X} \sim N(0,1)$

C. $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$　　D. $\frac{\sqrt{n}\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$

163. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的一组简单随机样本，记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，则下列结论不正确的是 (B)。

A. $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布　　B. $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

C. $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布　　D. $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

164. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自标准正态总体 X 的样本，则 (D)。

A. $\frac{3X_1^2}{X_2^2+X_3^2+X_4^2} \sim \chi^2(3)$　　B. $\frac{3X_1^2}{X_2^2+X_3^2+X_4^2} \sim t(3)$

C. $\frac{3X_1^2}{X_2^2+X_3^2+X_4^2} \sim \chi^2(3) \sim N(0,1)$ D. $\frac{3X_1^2}{X_2^2+X_3^2+X_4^2} \sim \chi^2(3) \sim F(1,3)$

165. 随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，则 (C)。

A. $X+Y \sim N(0,2)$ B. $X^2+Y^2 \sim \chi^2(2)$ 分布

C. $X^2 \sim \chi^2(1)$ 且 $Y^2 \sim \chi^2(1)$ D. $\frac{X^2}{Y^2} \sim F(1,1)$

解 注意：X 与 Y 未必独立。

二、填空题

166. 设随机变量 $X \sim t(n)$，$Y \sim F(1,n)$，给定 $\alpha \in (0, 0.5)$ 和一个常数 c，若有 $P(X > c) = \alpha$，则 $P(Y > c^2) =$ __2α__。

解 因为 $X \sim t(n)$，故，$X^2 \sim F(1,n)$。再由 t 分布的对称性知，

$$P(Y > c^2) = P(X < -c) + P(X > c) = 2P(X > c) = 2\alpha$$

167. 设总体 $X \sim N(0, 0.09)$，从中抽取一个容量为 10 的样本，则 $P\left\{\sum\limits_{i=1}^{10} X_i \geqslant 1.44\right\} =$ __0.06452065__。

解 因为 $X \sim N(0, 0.09)$，故，$\sum\limits_{i=1}^{10} X_i \sim N(0, 0.9)$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i \geqslant 1.44\right\} = \Phi\left(\frac{0-1.44}{\sqrt{0.9}}\right) \approx 0.06452065$$

168. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自标准正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则统计量 $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2}$ 服从__$F(1, n-1)$__分布（注明参数）。

解 因为 $X_1^2\chi^2(1)$ 与 $\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$ 相互独立，故，

$$\frac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} = \frac{X_1^2/1}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2/(n-1)} \sim F(1, n-1)$$

169. 设 $X \sim t(n)(n>1)$，令 $Y = \frac{1}{X^2}$，则 $Y \sim$ __$F(n,1)$__。

170. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，样本方差为 S^2，为使 $P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2} \leqslant 1.5\right\} \geqslant 0.95$ 成立，样本容量 n 最小为__27__。

解 因为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，故，

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2} \leqslant 1.5\right\} &= P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leqslant 1.5(n-1)\right\} \geqslant 0.95 \\ 1.5(n-1) &\geqslant \chi^2_{0.95}(n-1) \quad \Rightarrow \quad n \geqslant 27 \quad \text{利用 } R \end{aligned}$$

```
n<-2:36
min(which(pchisq(1.5*(n-1),df=(n-1))>=0.95))+1
# [1] 27
```

171. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自标准正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则 $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 \sim$ __$\chi^2(n-1)$__，$\frac{n\overline{X}^2}{S^2} \sim$ __$F(1,n-1)$__。

解 因为$\overline{X}$ 与 S^2 独立且 $\sqrt{n}\overline{X} \sim N(0,1)$，故

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 &= (n-1) \times \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \\ \frac{n\overline{X}^2}{S^2} &= \frac{(\sqrt{n}\overline{X})^2/1}{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)} \sim F(1, n-1) \end{aligned}$$

三、计算题

172. 设 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 是来自总体 $X\sim N(0,4)$ 的简单随机样本。

(1) $Y=aX_1^2+b(X_2+X_3)^2+c(X_4-X_5)^2$，试确定常数 a,b,c 的值，使 Y 服从卡方分布并确定自由度；

(2) $Z=\frac{\alpha(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$，试确定常数 α 的值，使 Z 服从 t 分布并确定自由度。

解 由于卡方分布是独立同标准正态分布的平方和，故，

$$
\begin{aligned}
Y &= aX_1^2+b(X_2+X_3)^2+c(X_4-X_5)^2\\
&= 4aX_1^2+8b\left(\frac{X_2+X_3}{\sqrt{8}}\right)^2+8c\left(\frac{X_4-X_5}{\sqrt{8}}\right)^2\sim\chi^2(3)\\
&\Rightarrow\ a=\frac{1}{4},\ b=c=\frac{1}{8}\\
Z &= \frac{\alpha(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}=\frac{\sqrt{8}\alpha\times\frac{X_1+X_2}{\sqrt{8}}}{\sqrt{8}\times\sqrt{\left[\left(\frac{X_3^3}{2}\right)^2+\left(\frac{X_4^3}{2}\right)^2\right]/2}}\\
&= \alpha\times\frac{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{8}}}{\sqrt{\left[\left(\frac{X_3^3}{2}\right)^2+\left(\frac{X_4^3}{2}\right)^2\right]/2}}\sim t(2)\\
\alpha &= 1
\end{aligned}
$$

173. 设 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 是来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本，试求 k 的值，使 $P\left\{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}\leqslant k\right\}=0.9$。

解 根据题意知，

$$
\begin{aligned}
P\left\{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}\leqslant k\right\} &= P\left\{\frac{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)/3}}\leqslant\sqrt{\frac{3}{2}}k\right\}=0.9\\
\sqrt{\frac{3}{2}}k &= t_{0.9}(3)=1.637744\quad\Rightarrow\quad k=1.337213
\end{aligned}
$$

174. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自总体 $X \sim N(10,4)$ 的简单随机样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_5$ 是来自总体 $Y \sim N(20,4)$ 的简单随机样本，且 X 与 Y 相互独立，试求 $P(\overline{Y} - \overline{X} > 11)$。

解 根据题意知，$\overline{X} \sim N(10, 0.4)$ 与 $\overline{Y} \sim N(20, 0.8)$ 相互独立，故，$\overline{Y} - \overline{X} \sim N(10, 1.2)$，进而，

$$P(\overline{Y} - \overline{X} > 11) = 1 - \Phi\left(\frac{11-10}{\sqrt{1.2}}\right) \approx 0.1806552$$

175. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 σ^2 已知。$X_1, X_2, \cdots, X_{40}$ 为样本，求：

$$P\left\{0.5\sigma^2 \leqslant \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40}(X_i - \overline{X})^2 \leqslant 1.435\sigma^2\right\}$$

解 根据题意知，

$$\begin{aligned} & P\left\{0.5\sigma^2 \leqslant \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40}(X_i - \overline{X})^2 \leqslant 1.435\sigma^2\right\} \\ = & P\left\{20 \leqslant \frac{(40-1)\times \frac{1}{40-1}\sum\limits_{i=1}^{40}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \leqslant 57.4\right\} \\ = & P\left\{20 \leqslant \chi^2(39) \leqslant 57.4\right\} \approx 0.9660778 \end{aligned}$$

Chapter 14

点估计

一、填空题

176. 设总体 $X \sim U(\theta - 0.5, \theta + 0.5)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的一组样本，则未知参数 θ 的极大似然估计量为 $\underline{\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i - 0.5, \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i + 0.5\right)}$。

解 因为总体 $X \sim U(\theta - 0.5, \theta + 0.5)$，故，

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 1, & \theta - 0.5 < x < \theta + 0.5, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

似然函数为

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \begin{cases} 1, & \theta - 0.5 < x_1, x_2, \cdots, x_n < \theta + 0.5, \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \theta - 0.5 < \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i < \theta + 0.5, \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i - 0.5 < \theta < \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i + 0.5, \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

对任意 $\theta \in \left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i - 0.5, \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i + 0.5\right)$，似然函数都可以达到最大值 1，即，$\theta$ 的极大似然估计量为 $\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i - 0.5, \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i + 0.5\right)$ 里的元素。

177. 设 X 的可能取值为 $1, 2, \cdots, \theta$，且 X 等可能地取每一个值，则 θ 的矩估计量为 $\underline{\quad \frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - 1 \quad}$。

解 利用样本矩等于总体矩知，

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{\theta+1}{2} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\
\theta &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 1
\end{aligned}
$$

178. 设总体 $X \sim P(\lambda)$，其中 $\lambda > 0$ 是未知常数。在已知的样本观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_{2608}$ 中有 57 个值取 0，则参数 λ 的点估计值为$\underline{\quad 3.823288 \quad}$。

解 利用频率趋于概率知

$$
P(X=0) = e^{-\lambda} = \frac{57}{2068} \quad \Rightarrow \quad \lambda \approx 3.823288
$$

179. 已知 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X \sim P(\lambda)$ 的一组样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应的观测值，则 $P(X=0)$ 的矩估计值为$\underline{\quad \frac{\#\{i|x_i\neq 0\}}{n} \quad}$。

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

二、计算题

180. 设总体 X 的分布律如下表：

其中 $\theta \in (0,1)$ 是未知参数。已知取得了样本值 $x_1=1, x_2=2, x_3=1, x_4=3$。试求参数 θ 的矩估计值和极大似然估计值。

解 由题意知，若设 $3-X \sim B(2,\theta)$，故，

(1) 矩估计：

$$\begin{aligned} E(X) &= 3-2\theta \triangleq \overline{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = \frac{1+2+1+3}{4} = \frac{7}{4} \\ \theta &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

从而，θ 的矩估计值为 $5/8$。

(2) 极大似然估计：

$$\begin{aligned} f(x) &= C_2^{3-x}\theta^{3-x}(1-\theta)^{x-1}, \quad x=1,2,3, \\ L(\theta) &= \prod_{i=1}^{4} C_2^{3-x_i}\theta^{3-x_i}(1-\theta)^{x_i-1} \\ &= C_2^2C_2^1C_2^2C_2^0\theta^{12-1-2-1-3}(1-\theta)^{1+2+1+3-4} \\ &= 2\theta^5(1-\theta)^3 \\ \ln L(\theta) &= 5\ln\theta + 3\ln(1-\theta) + \ln 2 \\ \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} &= \frac{5}{\theta} - \frac{3}{1-\theta} \triangleq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

从而，θ 的极大似然估计值为 $5/8$。

181. 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的一组样本，试求：θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$ 及其方差。

解 根据题意知，

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\theta \frac{6x^2}{\theta^3}(\theta - x)dx = \frac{\theta}{2} \triangleq \overline{X} \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = 2\overline{X} \\ E(X^2) &= \int_0^\theta \frac{6x^3}{\theta^3}(\theta - x)dx = \frac{3\theta^2}{10} \\ D(\hat{\theta}) &= D(2\overline{X}) = \frac{4}{n}D(X) = \frac{4}{n}\left\{E(X^2) - [E(X)]^2\right\} \\ &= \frac{4}{n} \times \left[\frac{3\theta^2}{10} - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right] = \frac{\theta^2}{5n} \end{aligned}$$

182. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的一组样本，其中，X 的概率密度函数为：

$$f(x; a) = \begin{cases} ax^{-2}, & 0 < a \leqslant x < +\infty, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

参数 a 未知。若得样本值为 $0.1, 0.2, 0.9, 0.8, 0.7, 0.7$，试求参数 a 的极大似然估计值。

解 根据题意知，似然函数为：

$$\begin{aligned} L(a) &= \begin{cases} \prod_{i=1}^n ax_i^{-2}, & 0 < a \leqslant x_1, x_2, \cdots, x_n < +\infty, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} a^n \left(\prod_{i=1}^n x_i^{-2}\right), & 0 < a \leqslant \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i < +\infty, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \end{aligned}$$

易知，$L(a)$ 关于 a 单调递增，故，当 $a = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ 时，似然函数 $L(a)$ 达到极大值，即，当样本值为 $0.1, 0.2, 0.9, 0.8, 0.7, 0.7$，求参数 a 的极大似然估计值为 0.1。

183. 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中，θ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的一组样本，试求：(1) θ 的矩估计量；(2) θ 的极大似然估计量。

解　根据题意知，

(1) θ 的矩估计量:

$$E(X)\ =\ \int_0^1\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}\triangleq\overline{X}\quad\Rightarrow\quad\hat{\theta}=\left(\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}\right)^2$$

(2) θ 的极大似然估计量:

$$\begin{aligned}L(\theta)\ &=\ \begin{cases}\prod_{i=1}^n\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\leqslant x_1,x_2,\cdots,x_n\leqslant 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\\ &=\ \begin{cases}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1}\theta^{\frac{n}{2}}, & 0\leqslant \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i\leqslant 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\end{aligned}$$

当 $0\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i\leqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}\ln L(\theta)\ &=\ \frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^n\ln x_i\\ (\ln L(\theta))'\ &=\ \frac{n}{2\theta}+\frac{\sum\limits_{i=1}^n\ln x_i}{2\sqrt{\theta}}\triangleq 0\quad\Rightarrow\quad\hat{\theta}=\frac{n^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^n\ln x_i\right)^2}\end{aligned}$$

故，θ 的极大似然估计量为 $\frac{n^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^n\ln X_i\right)^2}$。

184. 设总体 X 的分布函数为:

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\frac{\alpha^\beta}{x^\beta}, & x\geqslant\alpha,\\ 0, & x<\alpha,\end{cases}$$

其中未知参数 $\alpha>0,\beta>1$，设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的一组样本，求:

(1) 当 $\alpha=1$ 时，β 的矩估计量;

(2) 当 $\alpha=1$ 时，β 的极大似然估计量;

(3) 当 $\beta=2$ 时，α 的极大似然估计量。

解 根据题意知，总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}, & x\geqslant\alpha,\\ 0, & x<\alpha,\end{cases}$$

(1) 当 $\alpha=1$ 时，β 的矩估计量:

$$E(X)=\int_1^{+\infty}\frac{\beta}{x^\beta}dx=\frac{\beta}{\beta-1}\triangleq\overline{X}\quad\Rightarrow\quad\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$$

(2) 当 $\alpha=1$，且 $x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant1$ 时，

$$\begin{aligned}L(\beta)&=\frac{\beta^n}{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\beta+1}}\\ \ln L(\beta)&=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^n\ln x_i\\ (\ln L(\beta))'&=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^n\ln x_i\triangleq0\quad\Rightarrow\quad\hat{\beta}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^n\ln x_i}\end{aligned}$$

即，β 的极大似然估计量为 $\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^n\ln X_i}$。

(3) 当 $\beta=2$，且 $x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant\alpha$ 时，

$$L(\alpha)=\frac{\alpha^{2n}2^n}{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^3}\quad\text{关于 }\alpha\text{ 单调递增}$$

故，当且仅当 $\alpha=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i$ 时，$L(\alpha)$ 达到极大值，从而，β 的极大似然估计量为 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$。

185. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的一组样本，其中，X 的概率密度函数为：

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中，$\theta\in(0,1)$ 是未知参数。记 K 为样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中小于 1 的个数，试求：

(1) θ 的矩估计量；

(2) θ 的极大似然估计量。

解

(1) 根据题意知，

$$E(X) = \int_0^1 \theta x dx + \int_1^2 (1-\theta) x dx = 1.5-\theta \triangleq \overline{X}$$

从而，θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=1.5-\overline{X}$。

(2) 关于 θ 的似然函数为

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \theta^K(1-\theta)^{n-K} \\ \ln L(\theta) &= K\ln\theta+(n-K)\ln(1-\theta) \\ (\ln L(\theta))' &= \frac{K}{\theta}-\frac{n-K}{1-\theta}\triangleq 0 \quad\Rightarrow\quad \hat{\theta}=\frac{K}{n} \end{aligned}$$

即，θ 的极大似然估计量为 $\frac{K}{n}$。

186. 设总体 X 服从参数为 p 的几何分布，其分布律为

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,3,\cdots,$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，试求未知参数 p 的矩估计量和极大似然估计量。

解

(1) 设函数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x},\qquad \forall x\in(0,1)$$

两边同时关于 x 求导，可得

$$\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

于是，

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}p\\ &= \frac{p}{[1-(1-p)]^2}=\frac{1}{p}\triangleq\overline{X}\quad\Rightarrow\quad\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}\end{aligned}$$

即，p 的矩估计量为 $\frac{1}{\overline{X}}$。

(2) 关于 p 的似然函数为

$$\begin{aligned}L(p) &= p^n\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i-1}=p^n(1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n}\\ \ln L(p) &= n\ln p+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\right)\ln(1-p)\\ (\ln L(p))' &= \frac{n}{p}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n}{1-p}\triangleq 0\quad\Rightarrow\quad\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}\end{aligned}$$

即，p 的极大似然估计量为 $\frac{1}{\overline{X}}$。

Chapter 15

估计量的评选标准

一、选择题

187. 总体 $X \sim P(\lambda)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，则以下统计量中不是 λ 的无偏估计的是 (C)。

A. 样本均值 $\overline{X}$　　B. $\alpha\overline{X} + (1-\alpha)S^2$，其中，$\alpha \in (0,1)$ 是常数

C. $\frac{(n-1)S^2}{n}$　　D. 样本方差 S^2

188. 下列结论正确的是 (B)。

A. 参数的点估计是未知参数的近似值，因此，样本容量越小，近似程度越好

B. 对于正态总体，样本均值和样本方差分别是总计均值和总体方差的无偏估计

C. 同一未知参数的矩估计量是唯一的

D. 样本中心矩是相应的总体中心矩的无偏估计

189. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，$\alpha_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是常数。若 $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ 是 $E(X)$ 的无偏估计量，则 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足 (C)。

A. $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$

B. 只要所有的 α_i 都是大于 0 小于 1 的正数就可以

C. $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

D. 不能确定 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的值以及它们之间的关系

190. 总体 $X \sim U(0,\theta)$，其中，θ 是未知参数。X_1, X_2, X_3 是来自总体 X 的一个容量为 3 的样本，则下列统计量中，不是未知参数 θ 的无偏估计量的是 (D)。

A. $\hat{\theta}_1 = \frac{4}{3}\max\{X_1, X_2, X_3\}$　　B. $\hat{\theta}_2 = 4\min\{X_1, X_2, X_3\}$

C. $\hat{\theta}_3 = 2\overline{X}$　　D. $\hat{\theta}_4 = \frac{1}{2}\overline{X}$

二、计算题

191. 设总体 $X \sim N(\mu, 4)$，X_1, X_2, X_3 是来自总体 X 的一个容量为 3 的样本，令

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3), \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$$

求证：$\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是总体均值 μ 的无偏估计量，并比较哪一个更有效。

解　根据题意知，

$$\begin{aligned}
E(\hat{\theta}_1) &= E\left(\frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)\right) = \frac{1}{4}\left(E(X_1) + 2E(X_2) + E(X_3)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\mu + 2\mu + \mu\right) = \mu \\
E(\hat{\theta}_2) &= E\left(\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\right) = \frac{1}{3}\left(E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\mu + \mu + \mu\right) = \mu
\end{aligned}$$

因此，$\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是总体均值 μ 的无偏估计量。

$$\begin{aligned}
D(\hat{\theta}_1) &= D\left(\frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)\right) = \frac{1}{16}\left(D(X_1) + 4D(X_2) + D(X_3)\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(4 + 4 \times 4 + 4\right) = \frac{3}{2} \\
D(\hat{\theta}_2) &= D\left(\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\right) = \frac{1}{9}\left(D(X_1) + D(X_2) + D(X_3)\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(4 + 4 + 4\right) = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

因为 $D(\hat{\theta}_1) > D(\hat{\theta}_2)$，故，$\hat{\theta}_2$ 更有效。

192. 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta,\end{cases}$$

其中,$\theta>0$ 是未知参数。从总体 X 中随机地抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,记 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$。

(1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$;

(2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$;

(3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否具有无偏性。

解 根据题意知，

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, & x\leqslant\theta,\\ \int_\theta^x 2e^{-2(t-\theta)}dt=1-e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\end{cases}\\
F_{\hat{\theta}}(x) &= P(\hat{\theta}\leqslant x)=P\left(\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\leqslant x\right)\\
&= 1-P\left(\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}>x\right)\\
&= 1-P\left(X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x\right)\\
&= 1-P\left(X_1>x\right)P\left(X_2>x\right)\cdots P\left(X_n>x\right)\\
&= 1-[1-F(x)]^n\\
&= \begin{cases}0, & x\leqslant\theta,\\ 1-e^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta,\end{cases}\\
f_{\hat{\theta}}(x) &= F'_{\hat{\theta}}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant\theta,\\ 2ne^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta,\end{cases}\\
E\left(\hat{\theta}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\hat{\theta}}(x)dx=\int_\theta^{+\infty}2nxe^{-2n(x-\theta)}dx\\
&\overset{t=x-\theta}{=} \int_0^{+\infty}2n(t+\theta)e^{-2nt}dt=\theta+\frac{1}{2n}\neq\theta
\end{aligned}$$

因此，$\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计量。

193. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $\mu, \sigma 2$ 的一个简单随机样本，记 $\hat{\sigma}^2 = C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$，若已知 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，求常数 C。

解 根据题意知，

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{\sigma}^2\right) &= CE\left[\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right] \\
&= CE\left[\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}^2-2X_iX_{i+1}+X_i^2)\right] \\
&= C\sum_{i=1}^{n-1}\left[E(X_{i+1}^2)-2E(X_iX_{i+1})+E(X_i^2)\right] \\
&= C\sum_{i=1}^{n-1}\left\{D(X_{i+1})+[E(X_{i+1})]^2-2E(X_i)E(X_{i+1})+D(X_i)+[E(X_i)]^2\right\} \\
&= C\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\sigma^2+\mu^2-2\mu\times\mu+\sigma^2+\mu^2\right\} \\
&= 2(n-1)C\sigma^2 \triangleq \sigma^2 \qquad \text{无偏} \\
C &= \frac{1}{2(n-1)}
\end{aligned}
$$

194. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $\mu, \sigma 2$ 的一个简单随机样本，记

$$
\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}(X_i-\overline{X})^2, \quad T = \overline{X}^2 - \frac{1}{n}S^2
$$

(1) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量；

(2) 当 $\mu = 0$, $\sigma = 1$ 时，求 $D(T)$。

解

(1) 根据题意知,

$$
\begin{aligned}
E(\overline{X}^2) &= \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}E(X_iX_j)\right\} \\
&= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2+\mu^2\right)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\mu^2\right\} = \frac{\sigma^2}{n}+\mu^2 \\
E(S^2) &= \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right] = \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right] = \sigma^2 \\
E(T) &= E(\overline{X}^2)-E\left(\frac{1}{n}S^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-\frac{\sigma^2}{n} = \mu^2
\end{aligned}
$$

故, T 是 μ^2 的无偏估计量。

(2) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时, $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立, 且

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n}\overline{X} &\sim N(0,1) \quad\Rightarrow\quad n\overline{X}^2\sim\chi^2(1),\ D(n\overline{X}^2)=2 \\
(n-1)S^2 &\sim \chi^2(n-1) \quad\Rightarrow\quad D((n-1)S^2)=2(n-1) \\
D(T) &= D\left(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right) = D(\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}D(S^2) \\
&= \frac{1}{n^2}D(n\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2(n-1)^2}D((n-1)S^2) \\
&= \frac{2}{n^2}+\frac{2(n-1)}{n^2(n-1)^2} = \frac{2}{n(n-1)}
\end{aligned}
$$

Chapter 16

区间估计

一、选择题

195. 以下结论正确的是（ C ）。

A. 区间估计得到到置信区间是未知参数所处的范围，因此给定的置信水平越高，范围越大，估计效果越好

B. 在给定的置信水平下，未知参数的置信区间是唯一的

C. 在给定的置信水平下，区间估计的具体区间依赖于样本

D. 未知参数是一个确定的数，这个数是多少不知道，需要用给定的样本去估计，因此，它的估计方法和估计值是唯一的

196. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，已知方差 σ^2，估计期望 μ，则 μ 的 $(1-\alpha)100\%$ 置信区间为（ D ）。

A. $\left(\overline{X} - t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$　　B. $\left(\overline{X} - t_\alpha(n)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_\alpha(n)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

C. $\left(\overline{X} - t_\alpha(n-1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_\alpha(n-1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$　　D. $\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}(n)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}(n)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

197. 用机器来装罐头，已知质量 $X \sim N(\mu, 0.02^2)$（单位：千克）。现随机地抽取 25 听罐头来进行测量，测得 $\overline{X} = 1.05$，则总体的数学期望 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为（ B ）。

A. $[1.031, 1.042]$ B. $[1.042, 1.058]$
C. $[1.001, 1.028]$ D. $[1.025, 1.078]$

二、填空题

198. 已知某种白炽灯的寿命 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，在一批该种灯泡中随机地抽取 10 只，测得其寿命如下（单位：h）：1067，919，1196，785，1126，936，918，1156，920，948，则未知参数 μ, σ 置信水平为 95% 的置信区间分别为 $[902.9965, 1091.203]$，$[90.48306, 240.1546]$ 。

解 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\overline{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

σ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}S, \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}S\right]$$

三、计算题

199. 设正态总体 X 的标准差为 1，由来自 X 的简单随机样本建立数学期望 μ 的 0.95 置信区间，求：

(1) 当样本容量 $n = 25$ 时，置信区间的长度 L；

(2) 为使置信区间的长度不大于 0.5，所取的最小样本容量是多少?

解

$$\begin{aligned} L &= 2z_{\frac{1-0.95}{2}}(n)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \times 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{25}} = 0.784 \\ 2z_{\frac{\alpha}{2}}(n)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= 1 \times 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 0.5 \quad \Rightarrow \quad n \geqslant 61.4656 \end{aligned}$$

即， 样本容量至少为 62。

200. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim U[0,\theta]$ 的一个简单随机样本，记 $Y = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$。证明：

$$P\left\{\alpha^{\frac{1}{n}} < \frac{Y}{\theta} \leqslant 1\right\} = 1-\alpha$$

并利用这个结论给出 θ 的 $1-\alpha$ 水平置信区间估计。

证　根据题意知，Y 的分布函数为：

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leqslant y) = P(\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \leqslant y) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant y) = [F_X(y)]^n = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{y^n}{\theta^n}, & 0 \leqslant y \leqslant \theta, \\ 1, & y \geqslant \theta, \end{cases} \\
P\left\{\alpha^{\frac{1}{n}} < \frac{Y}{\theta} \leqslant 1\right\} &= P\left\{\alpha^{\frac{1}{n}}\theta < Y \leqslant \theta\right\} = F_Y(\theta) - F_Y\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\theta\right) \\
&= 1-\alpha
\end{aligned}$$

于是，$P\left\{Y < \theta < Y\alpha^{-\frac{1}{n}}\right\} = 1-\alpha$，即 θ 的 $1-\alpha$ 水平置信区间为 $[\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, \max\{X_1, X_2,$

201. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，已知 $\sum\limits_{i=1}^{15} x_i = 8.7, \sum\limits_{i=1}^{15} x_i^2 = 25.05$，试求 μ 和 σ 的置信度为 0.95 的区间估计。

解　根据题意知，

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i = 0.58 \\
s^2 &= \frac{1}{15-1}\left(\sum_{i=1}^{15} x_i^2 - 15\overline{x}^2\right) = 1.428857
\end{aligned}$$

μ 的置信度为 0.95 的区间估计为：

$$\left[\overline{x} - t_{0.025}(14)\frac{s}{\sqrt{15}}, \overline{x} + t_{0.025}(14)\frac{s}{\sqrt{15}}\right] = [-0.08196173, 1.241962]$$

σ 的置信度为 0.95 的区间估计为:

$$\left[\frac{\sqrt{14}s}{\sqrt{\chi^2_{0.025}(14)}}, \frac{\sqrt{14}s}{\sqrt{\chi^2_{0.975}(14)}}\right] = [0.8751462, 1.8851822]$$

Chapter 17

假设检验

一、选择题

202. 以下结论错误的是（ D ）。

A. 在一个确定的假设检验中，当样本容量 n 一定时，犯两类错误的概率 α 和 β 不可能同时减少

B. 在参数的假设检验中，若显著水平 α 相同，但选取不同的随机样本，可能得出不同的检验结果

C. 假设检验中，无论做出拒绝原假设或者接受原假设，都有可能犯错误

D. 在假设检验中，检验统计量的拒绝域形式是根据备择假设而确定的，要使犯两类错误的概率同时减少，只有增加样本容量

203. 在假设检验中，检验的显著水平 α 的意义是（ A ）。

A. 假设 H_0 成立，经检验被拒绝的概率

B. 假设 H_0 成立，经检验被接受的概率

C. 假设 H_0 不成立，经检验被拒绝的概率

D. 假设 H_0 不成立，经检验被接受的概率

204. 在假设检验中，如果待检验的原假设 H_0 是拒绝域为 W，那么，样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在以下情况中，拒绝 H_0 且不犯错的是（ D ）。

A. H_0 成立，$(x_1, x_2, \cdots x_n) \in W$　　B. H_0 成立，$(x_1, x_2, \cdots x_n) \notin W$

C. H_0 不成立，$(x_1, x_2, \cdots x_n) \notin W$　　D. H_0 不成立，$(x_1, x_2, \cdots x_n) \in W$

二、填空题

205. 设总体 $X \sim N(\mu, 1)$，$x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ 是一组样本观测值，要在 $\alpha = 0.05$ 的水平下检验

$$H_0 : \mu = 0, \qquad H_1 : \mu \neq 0$$

拒绝域的形式为 $W = \{|\overline{x}| > c\}$，则

(1) 常数 $c =$ <u>1.96</u>；

(2) 若 $\overline{x} = 1$，<u>是</u>（填“是”或“不”）可据此推断总体的均值 $\mu = 0$;

(3) 若以 $W = \{|\overline{x}| > 1.15\}$ 作为原假设 $H_0 : \mu = 0$ 的拒绝域，则对应的的显著水平 $\alpha =$ <u>0.25</u>。

三、计算题

206. 设某商场的日营业额为 X 万元，已知在正常情况下 $X \sim N(3.864, 0.2^2)$，“十一”黄金周前 5 天的营业额分别为:

$$4.28,\ 4.40,\ 4.42,\ 4.35,\ 4.37\ (\text{万元})$$

假设标准差不变，问“十一”黄金周是否显著增加了商场的营业额？（取 $\alpha = 0.01$）

解

(1) $H_0 : \mu \leqslant 3.864$　　$H_1 : \mu > 3.864$;

(2) 构造统计量，在 H_0 成立的条件下，

$$\frac{\overline{X} - 3.864}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 3.864}{0.2/\sqrt{5}} \sim N(0, 1)$$

(3) 在给定显著水平 $\alpha = 0.01$ 下，拒绝域为

$$W = \left\{\overline{x} - 3.864 > z_{0.01}\frac{0.2}{\sqrt{5}} = 0.2080749\right\} = \{\overline{x} > 4.072075\}$$

(4) 在本题中，$\overline{x} = \frac{1}{5} \times (4.28 + 4.40 + 4.42 + 4.35 + 4.37) = 4.364 \in W$，故，拒绝原假设，即认为“十一”黄金周是否显著增加了商场的营业额。

207. 某班学生上周平均伙食费为 235.5 元。现在从该班学生中随机地抽取 49 名学生，这 49 名学生本周的平均伙食费为 236.5 元，且由这 49 名学生计算出的样本标准差为 3.5 元。假设该班学生周伙食费 X 服从正态分布，试在显著水平 $\alpha = 0.05$ 之下，检验“本周该班学生平均伙食费较上周无变化”的假设。

解

(1) $H_0 : \mu = 235.5 \qquad H_1 : \mu \neq 235.5$;

(2) 构造统计量，在 H_0 成立的条件下，

$$\frac{\overline{X} - 235.5}{S/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 235.5}{3.5/\sqrt{49}} = \frac{\overline{X} - 235.5}{0.5} \sim t(48)$$

(3) 在给定显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，拒绝域为

$$W = \{|\overline{x} - 235.5| > 0.5t_{0.025}(48)\} = \{\overline{x} < 234.4947 \text{或} x > 236.5053\}$$

(4) 在本题中，$\overline{x} = 236.5 \notin W$，故，接受原假设，即认为本周该班学生平均伙食费较上周无变化。

208. 某车间生产的铜丝的质量一直都比较稳定，其折断力服从 $N(\mu, 64)$ 的正态分布。现从该车间生产的铜丝中任取 10 根检验其折断力，测得数据如下（单位：N）：

578，572，570，568，572，570，572，596，584，570

是否可以认为该车间生产的铜丝的折断力比较稳定?（取 $\alpha = 0.05$）

解

(1) $H_0 : \sigma = 8 \qquad H_1 : \sigma \neq 8;$

(2) 构造统计量，在 H_0 成立的条件下，

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{9S^2}{64} \sim \chi^2(9)$$

(3) 在给定显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，拒绝域为

$$W = \left\{\frac{9s^2}{64} < \chi^2_{0.975}(9) 或 \frac{9s^2}{64} > \chi^2_{0.025}(9)\right\} = \{s^2 < 19.20277 或 s^2 > 135.273\}$$

(4) 在本题中，$s^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2 = 75.73333 \notin W$，故，接受原假设，即认为该车间生产的铜丝的折断力比较稳定。

209. 某厂生产的某种型号的电池,其寿命长期以来服从方差为 $5000(h^2)$ 的正态分布。现有一批这种电池，从它的生产情况来看，寿命的波动性有所变化。现随机地取 26 只电池，测出其寿命的样本方差为 $9200(h^2)$。问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的方差较以往有显著变化?

解

(1) $H_0 : \sigma^2 = 5000 \qquad H_1 : \sigma^2 \neq 5000;$

(2) 构造统计量，在 H_0 成立的条件下，

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{25S^2}{5000} = \frac{S^2}{200} \sim \chi^2(25)$$

(3) 在给定显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，拒绝域为

$$W = \left\{\frac{S^2}{200} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(25) 或 \frac{S^2}{200} > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(25)\right\}$$

(4) 在本题中，若取 $\alpha = 0.05$，则

$$W = \left\{s^2 < 2623.944\text{或}s^2 > 8129.294\right\}$$

$s^2 = 9200 \in W$，故，拒绝原假设，即认为这批电池的寿命的方差较以往有显著变化。
若取 $\alpha = 0.01$，则

$$W = \left\{s^2 < 2103.93\text{或}s^2 > 9385.578\right\}$$

$s^2 = 9200 \notin W$，故，拒绝原假设，即认为这批电池的寿命的方差较以往无显著变化。