第五章补充题及答案

1. 已知一个 LTI 连续系统的频率响应为$H(jw)=\dfrac{j4w}{(jw)^2+j6w+8}$求描述该系统的微分方程；并计算在输入$f(t)=cos(3t)u(t)$激励下系统的稳态响应 y(t)

【解】由于

$$H(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{Y(\mathrm{j}\,\omega)}{F(\mathrm{j}\,\omega)}=\frac{\mathrm{j}4\,\omega}{(\mathrm{j}\,\omega)^2+\mathrm{j}6\,\omega+8}$$

$$Y(\mathrm{j}\,\omega)[(\mathrm{j}\,\omega)^2+\mathrm{j}6\,\omega+8]=F(\mathrm{j}\,\omega)\mathrm{j}4\,\omega$$

对以上方程两边进行 Fourier 反变换，并利用 Fourier 变换的时域微分性质可得

$$y''(t)+6\,y'(t)+8\,y(t)=4\,f'(t),\quad t>0$$

系统的稳态响应为

$$y(t)=|H(\mathrm{j}3)|\cos(3\,t+\varphi(3))=0.6656\cos(3\,t-0.0555)$$

2. 已知滤波器的频率响应$H(jw)=-3e^{-j2w}$，系统的输入信号 f(t)如下，求系统的输出响应

（1）$f(t)=u(t)+\delta(t-3)$　　　(2) $f(t)=2\delta(t)+3\delta'(t)$

评分标准：每小题 7 分。

【解】(1)

$$F(\mathrm{j}\,\omega)=\pi\,\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{j}\,\omega}$$

$$Y(\mathrm{j}\,\omega)=H(\mathrm{j}\,\omega)\,F(\mathrm{j}\,\omega)=-3\left\{\pi\,\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}\right\}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\,\omega}-3\mathrm{e}^{-5\mathrm{j}\,\omega}$$

所以

$$y(t)=\mathscr{F}^{-1}\{Y(\mathrm{j}\,\omega)\}=-3\,u(t-2)-3\,\delta(t-5)$$

（2）

$$F(\mathrm{j}\,\omega)=2+3\mathrm{j}\,\omega$$

$$Y(\mathrm{j}\,\omega)=H(\mathrm{j}\,\omega)\,F(\mathrm{j}\,\omega)=-3(2+3\mathrm{j}\,\omega)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\,\omega}=-6\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\,\omega}-9\mathrm{j}\,\omega\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\,\omega}$$

所以

$$y(t)=\mathscr{F}^{-1}\{Y(\mathrm{j}\,\omega)\}=-6\,\delta(t-2)-9\,\delta'(t-2)$$

该系统为无失真系统，所以输出和输入信号形式相同，这是幅度变为原来的-3 倍，并且时移了-2 个单位。

2. 已知信号 f(t)通过系统 H(jw)后输出的响应为 y(t),现预使 f(t)通过另一个系统$H_a(jw)$后的输出响应为 f(t)-y(t),求此系统的频率响应$H_a(jw)$

【解】已知 $Y(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)$，信号 $f(t)$通过 $H_a(\mathrm{j}\omega)$的系统响应的频谱为

$$F(\mathrm{j}\omega)-Y(\mathrm{j}\omega)=H_a(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)$$

化简可得

$$H_a(\mathrm{j}\omega)=1-H(\mathrm{j}\omega)$$

4.已知一 LTI 系统，输入 f(t)=Sa(t)cos(2t)+Sa(t)cos(4t)，$-\infty<t<\infty$，

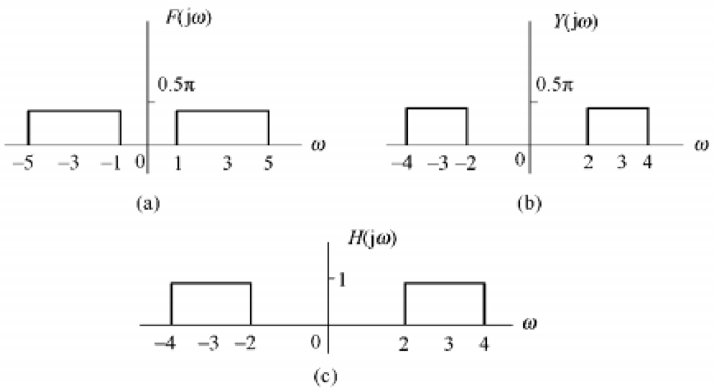
输出 y(t)=Sa(t)cos(3t)，$-\infty<t<\infty$. 求该系统的频率响应 H(jw).

【解】根据 $\mathrm{Sa}(\omega_0 t)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}(\pi/\omega_0)\,p_{2\omega_0}(\omega)$和 Fourier 变换的频移特性得

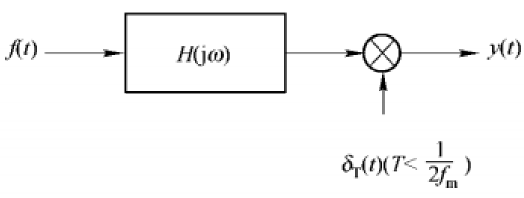
$$F(\mathrm{j}\omega)=0.5\pi(p_2(\omega+2)+p_2(\omega-2)+p_2(\omega+4)+p_2(\omega-4))=$$
$$0.5\pi(p_4(\omega+3)+p_4(\omega-3))$$
$$Y(\mathrm{j}\omega)=0.5\pi\{p_2(\omega+3)+p_2(\omega-3)\}$$

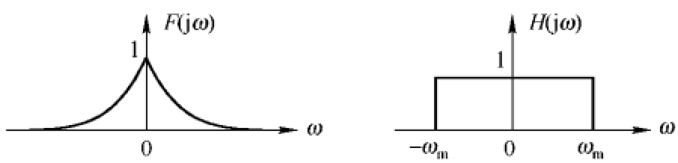
$F(\mathrm{j}\omega)$和 $Y(\mathrm{j}\omega)$的频谱如图 6-6(a)(b)所示。可以看出，滤波器是理想带通滤波器，系统频响特性如图 6-6(c)所示，即

$$H(\mathrm{j}\omega)=p_2(\omega+3)+p_2(\omega-3)$$



5.如图所示系统中信号 f(t)先经过理想低通滤波器进行限带，然后再进行理想抽样。试画出抽样信号的频谱图。





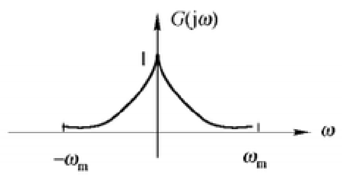
【解】对信号 $f(t)$进行时域抽样，$f(t)$应是带限信号。如果信号不是带限信号，抽样前需对信号进行低通滤波以限带。

设信号 $f(t)$经过理想低通滤波器后的输出为 $g(t)$，则 $G(j\omega)=F(j\omega)H(j\omega)$，$G(j\omega)$的频谱如图　　所示。

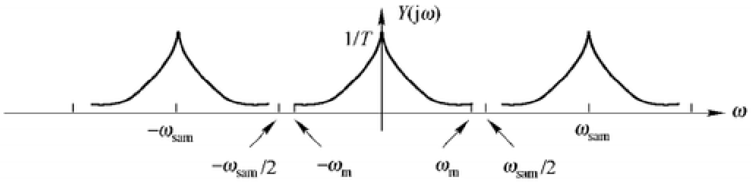
$g(t)$经理想抽样得到 $y(t)$，即 $y(t)=g(t)\delta_T(t)$。利用变换的乘积特性，可得 $y(t)$的频谱为

$$Y(j\omega)=\frac{1}{2\pi}G(j\omega)*\omega_{sam}\delta_{\omega_{sam}}(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}G[j(\omega-n\omega_{sam})]$$，其中 $\omega_{sam}=\frac{2\pi}{T}$。

$y(t)$的频谱如图　　所示。



(a)



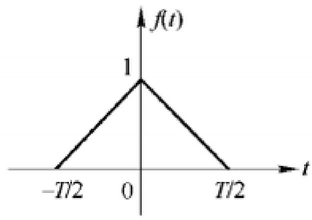
(b)

6.已知如图所示三角波信号 f(t)：

(1) 求出其频谱；

(2) $f_s(t)$是对 $f(t)$以等间隔 $T/8$ 进行抽样所得信号，分析并画出其频谱图 $F_s(j\omega)$；

(3) 将 $f(t)$以周期 T 进行周期延拓构成周期信号 $f_p(t)$，画出对 $f_p(t)$以等间隔 $T/8$ 进行抽样所得信号的频谱 $F_{ps}(j\omega)$。



评分标准：每小题 5 分。

【解】(1) 利用 Fourier 变换的微分特性或直接利用三角波信号的频谱公式可得

$$F(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{T}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)$$

其频谱如图

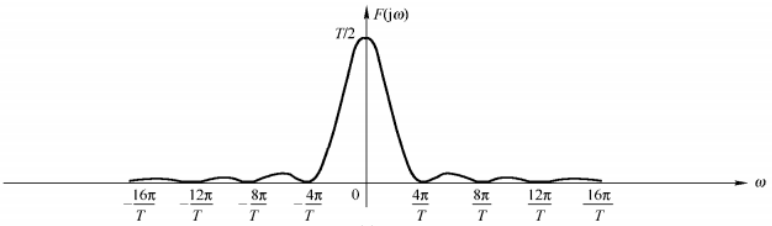
(2) $f_s(t)$是对 $f(t)$进行等间隔 $T_1=T/8$ 抽样，即 $f_s(t)=f(t)\,\delta_{T_1}(t)$，因此有

$$F_s(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{8}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F[\mathrm{j}(\omega-n\omega_s)]，其中\ \omega_s=\frac{2\pi}{T_1}=\frac{16\pi}{T}$$

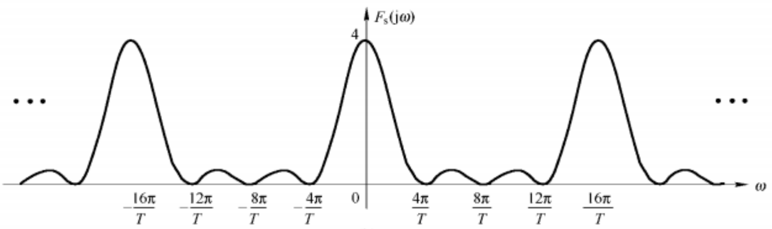
其频谱如图

(3) $f_p(t)$是对 $f(t)$以周期 T进行周期延拓，即 $f_p(t)=f(t)*\delta_T(t)$，所以有

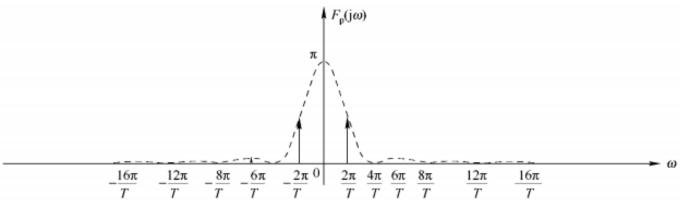
$$F_p(\mathrm{j}\,\omega)=\omega_m\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\,n\omega_m)\,\delta(\omega-n\omega_m)=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\delta\left(\omega-\frac{2n\pi}{T}\right)$$



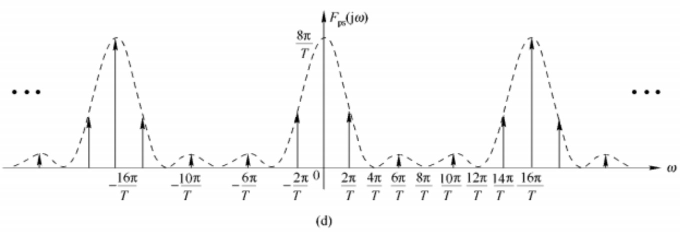
(a)



(b)



(c)



(d)

$f_p(t)$的频谱 $F_p(j\omega)$是对 $F(j\omega)$在频域的等间隔抽样，抽样间隔为 $\omega_n = 2\pi/T$，如图(c)所示。

若 $f_{ps}(t)$是对 $f_p(t)$以 $T_1 = T/8$ 进行等间隔抽样，即 $f_{ps}(t) = f_p(t)\,\delta_{T_1}(t)$，则有

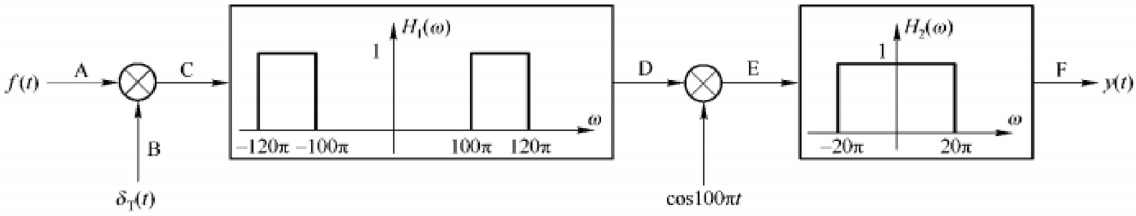
$$F_{ps}(j\omega) = \frac{8}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_p[j(\omega - n\omega_s)]，其中\ \omega_s = \frac{16\pi}{T}$$

$f_{ps}(t)$频谱 $F_{ps}(j\omega)$是对 $F_p(j\omega)$在频域进行周期延拓，周期为 ω_s，如图 (d)所示。

7.

试分析题 图示系统中 A、B、C、D、E 和 F 各点信号的频谱，并画出其频谱图。

已知 $f(t) = \mathrm{Sa}^2(10\pi t)$，$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$，$T = 0.02$。



评分标准：写对一个点的频谱函数分别得 1 分，画对一个图个得 2 分，满分 1*6+2*6=18 分。

【解】 由于 $$\Delta(t) = \begin{cases} 1 - |t|/\tau, & |t| < \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \tau\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

根据 Fourier 变换的对称互易特性可得

$$f(t) = \mathrm{Sa}^2(10\pi t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega) = \frac{1}{10}\Delta(\omega)$$

其余各点的频谱分别为

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0), \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 100\pi$$

$$f_C(t) = f(t)\,\delta_T(t)$$

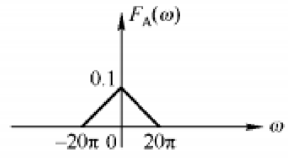
$$F_C(\omega) = \frac{1}{2\pi}F(\omega) * \mathscr{F}[\delta_T(t)] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega - n\omega_0) = 50\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega - 100\pi n)$$

$$F_D(\omega) = F_C(\omega)\,H_1(\omega)$$

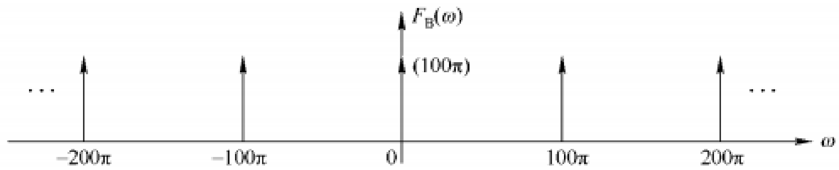
$$F_E(\omega) = \frac{1}{2}[F_D(\omega + 100\pi) + F_D(\omega - 100\pi)]$$

$$F_F(\omega) = Y(\omega) = F_E(\omega) H_2(\omega)$$

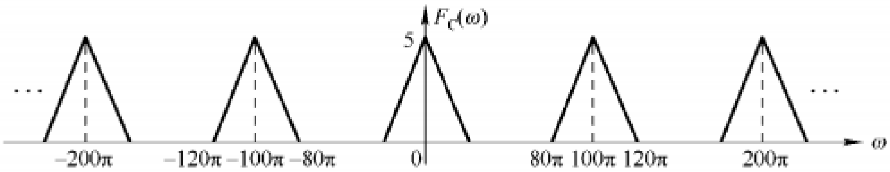
A、B、C、D、E 和 F 各点频谱分别如图 (a)、(b)、(c)、(d)、(e)和(f)所示。



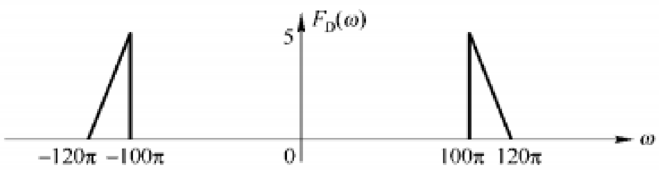
(a)



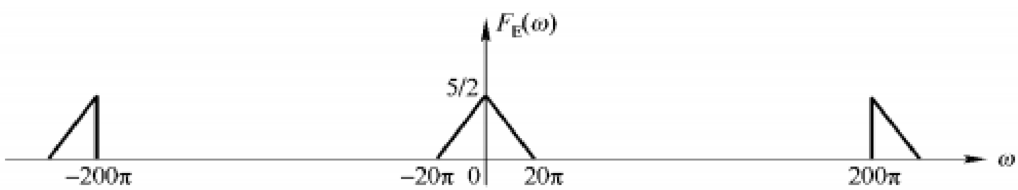
(b)



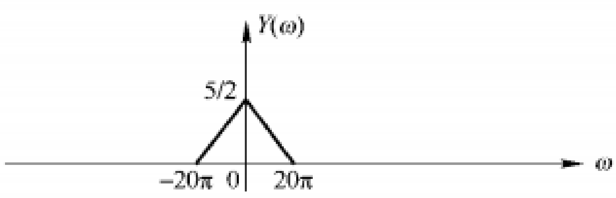
(c)



(d)



(e)



(f)

8. 已知三路带限信号$f_1(t)$、$f_2(t)$、$f_3(t)$的最高频率分别为100Hz、200Hz、400Hz.若对此三路信号进行脉冲幅度调制形成时分复用信号，试计算脉冲载波信号的最大周期。

【解】 在脉冲幅度调制时，要保证调制信号的频谱在搬移过程中不出现相互重叠，周期脉冲信号的周期为

$$T_0=\min\left(\frac{1}{200},\frac{1}{400},\frac{1}{800}\right)=\frac{5}{4}\ \text{ms}$$

此三路信号进行时分复用，脉冲载波信号的最大周期为

$$T_{\max}=\frac{T_0}{3}=\frac{5}{12}\ \text{ms}$$