第四章补充题及答案

1. 试写出下列信号的频谱系数，ω_0为常数

（1）$f(t)=sin\omega_0 t + cos\omega_0(t-t_0)$

(2) $f(t)=e^{-2|t|}cos(\omega_0 t)u(t)$

(3) $f(t)=sin^2\omega_0 tu(t)$

评分标准：每小题 7 分。

【解】（1） $F(j\omega)=j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]+\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]e^{-j\omega t_0}$

(2)

$$f(t)=e^{-2t}u(t)\cos\omega_0 t$$

所以

$$F(j\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2+j(\omega-\omega_0)}+\frac{1}{2+j(\omega+\omega_0)}\right]$$

(3)

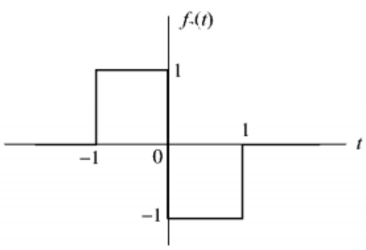
$$f(t)=0.5[1-\cos(2\omega_0 t)]u(t)$$

所以 $F(j\omega)=0.5\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)-\frac{1}{4}\left[\pi\delta(\omega-2\omega_0)+\frac{1}{j(\omega-2\omega_0)}+\pi\delta(\omega+2\omega_0)+\frac{1}{j(\omega+2\omega_0)}\right]=$

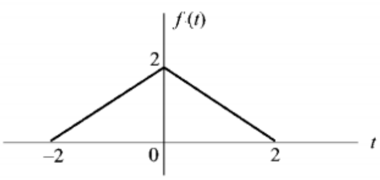
$$\frac{\pi}{4}(2\delta(\omega)-\delta(\omega-2\omega_0)-\delta(\omega+2\omega_0))-\frac{2\omega_0^2}{j(\omega^2-\omega_0^2)\omega}$$

2. 利用 $p_1(t)\longleftrightarrow \mathrm{Sa}(\omega/2)$及 Fourier 变换的性质，求图中各信号的 Fourier 变化。

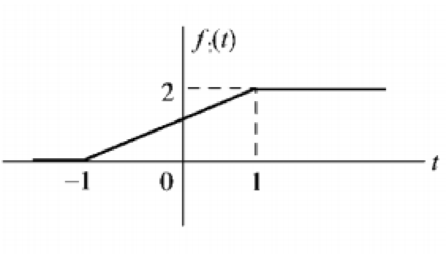
（1）



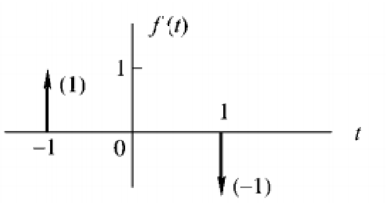
（2）



（3）



（4）



解：评分标准：每小题 7 分。

（1）

由于 $f(t)=p_1(t+1/2)-p_1(t-1/2)$

所以 $F(j\omega)=2j\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$

（2）

由于 $f(t)=p_2(t)*p_2(t)$

所以 $F(j\omega)=4\mathrm{Sa}^2(\omega)$

（3）

由于 $f'(t)=p_2(t)$，根据 Fourier 变换积分特性，得

$$F(j\omega)=\frac{2\mathrm{Sa}(\omega)}{j\omega}+2\pi\delta(\omega)$$

（4）

由于 $f(t)=\delta(t+1)-\delta(t-1)$

所以 $F(j\omega)=e^{j\omega}-e^{-j\omega}=j2\sin\omega$

3.

利用对偶特性，求下列信号的频谱函数。

（1）$f(t)=\dfrac{\sin\pi t}{t}$　　（2）$f(t)=\dfrac{1}{a^2+t^2}$

（3）$f(t)=\dfrac{1}{a+jt}$

【解】 (1) 因为 $p_\tau(t)\longleftrightarrow \tau\mathrm{Sa}(\tau\omega/2)$，$2\pi\mathrm{Sa}(\pi t)\longleftrightarrow 2\pi p_{2\pi}(\omega)$，所以 $\sin(\pi t)/t\longleftrightarrow \pi p_{2\pi}(\omega)$

(2) 令 $G(j\omega)=\dfrac{1}{a^2+\omega^2}$，则 $e^{-a|t|}\longleftrightarrow 2aG(j\omega)$，即 $g(t)=\dfrac{e^{-a|t|}}{2a}\longleftrightarrow G(j\omega)$

根据对称互易性质：$G(jt)\longleftrightarrow 2\pi g(-\omega)=\dfrac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$，而 $f(t)=G(jt)$

所以
$$F(j\omega)=\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$$

(3) 令 $G(j\omega)=\dfrac{1}{a+j\omega}$，所以 $g(t)=e^{-at}u(t)$，而 $f(t)=G(jt)=\dfrac{1}{a+jt}$

根据对称互易性质：$G(jt)\longleftrightarrow 2\pi g(-\omega)=2\pi e^{a\omega}u(-\omega)$，即 $F(j\omega)=2\pi e^{a\omega}u(-\omega)$

4.试求下列频谱函数所对应的信号 f(t)

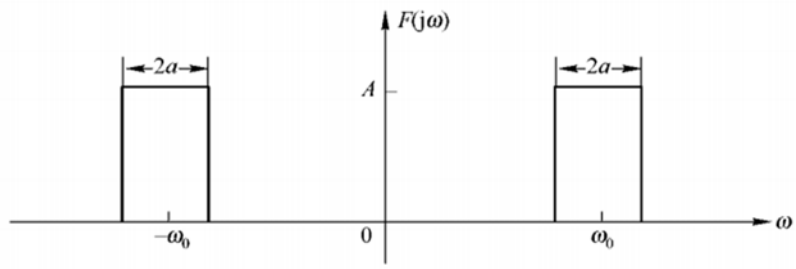
$$\frac{1}{jw(jw+1)}+2\pi\delta(w)$$

解：

由于
$$F(j\omega)=\frac{1}{j\omega(j\omega+1)}+2\pi\delta(\omega)=\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{j\omega+1}+2\pi\delta(\omega)$$

所以
$$f(t)=0.5\mathrm{sgn}(t)+1-e^{-t}u(t)$$

5.已知信号的频谱 F（jw）如图所示，试求信号 f(t)



【解】(1) $F(j\omega)=A[p_{2a}(\omega+\omega_0)+p_{2a}(\omega-\omega_0)]$

利用互易对称性质，$F(jt)=A[p_{2a}(t+\omega_0)+p_{2a}(t-\omega_0)]$

而
$$A[p_{2a}(t+\omega_0)+p_{2a}(t-\omega_0)]\longleftrightarrow A[2a\mathrm{Sa}(a\omega)e^{j\omega_0\omega}+2a\mathrm{Sa}(a\omega)e^{-j\omega_0\omega}]=4aA\mathrm{Sa}(a\omega)\cos\omega_0\omega$$

$$F(jt)\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

所以
$$2\pi f(-\omega)=4aA\mathrm{Sa}(a\omega)\cos\omega_0\omega$$

即
$$f(t)=\frac{2aA}{\pi}\mathrm{Sa}(at)\cos\omega_0 t$$

6.试确定下列周期序列的周期及 DFS 系数

$$f[k]=2\sin(\pi k/4)+\cos(\pi k/3)$$

解：

由于 $\cos(\pi k/3)$的周期为 6，$\sin(\pi k/4)$的周期为 8，所以 $f[k]$的周期为 $N=24$。

又 $$f[k]=2\sin(\pi k/4)+\cos(\pi k/3)=\frac{1}{j}[e^{j\frac{\pi k}{4}}-e^{-j\frac{\pi k}{4}}]+\frac{1}{2}[e^{j\frac{\pi k}{3}}-e^{-j\frac{\pi k}{3}}]=\frac{1}{j}[e^{j\frac{6\pi k}{24}}-e^{-j\frac{6\pi k}{24}}]+\frac{1}{2}[e^{j\frac{8\pi k}{24}}-e^{-j\frac{8\pi k}{24}}]$$

而 $$f[k]=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}F[m]e^{-\frac{j2\pi}{N}mk}=\frac{1}{24}\sum_{m=0}^{N-1}F[m]e^{-\frac{j2\pi}{24}mk}$$

所以 $$F[3]=-24j,\ F[-3]=24j,\ F[4]=12,\ F[-4]=12$$

根据 $F[m]$的周期性，可得其在 $0\leqslant m\leqslant N-1$ 上的值为

$$F_2[3]=-24j,\ F_2[21]=24j,\ F_2[4]=12,\ F_2[20]=12$$