同学们好！

高斯

(Carl Friedrich Gauss)

1777-1855

德国数学家和物理学家。

长期从事于数学研究并将数学应用于物理学、天文学和大地测量学等领域.著述丰富，成就甚多。他一生中共发表323篇（种）著作，提出404项科学创见。

在CGS电磁系单位制中磁感应强度的单位定为高斯，便是为了纪念高斯在电磁学上的卓越贡献。

高斯在各领域的主要成就有：

（1）物理学和地磁学中，关于静电学、温差电和摩擦电的研究、利用绝对单位（长度、质量和时间）法则量度非力学量以及地磁分布的理论研究。

（2）利用几何学知识研究光学系统近轴光线行为和成像，建立高斯光学。

（3）天文学和大地测量学中，如小行星轨道的计算，地球大小和形状的理论研究等。

（4）结合试验数据的测算，发展了概率统计理论和误差理论，发明了最小二乘法，引入高斯误差曲线。此外，在纯数学方面，对数论、代数、几何学的若干基本定理作出严格证明。

§ 9.3 电通量　高斯定理

一. 电场线

$\vec{E}$：空间矢量函数，描述电场参与动量传递的性质。

定量研究电场：对给定场源电荷求出其分布函数 $\vec{E}(\vec{r})$

定性描述电场整体分布：电场线方法

"在法拉第的许多贡献中，最伟大的一个就是力线的概念了。借助于它可以把电场和磁场的许多性质最简单而又极富启发性的表示出来。"

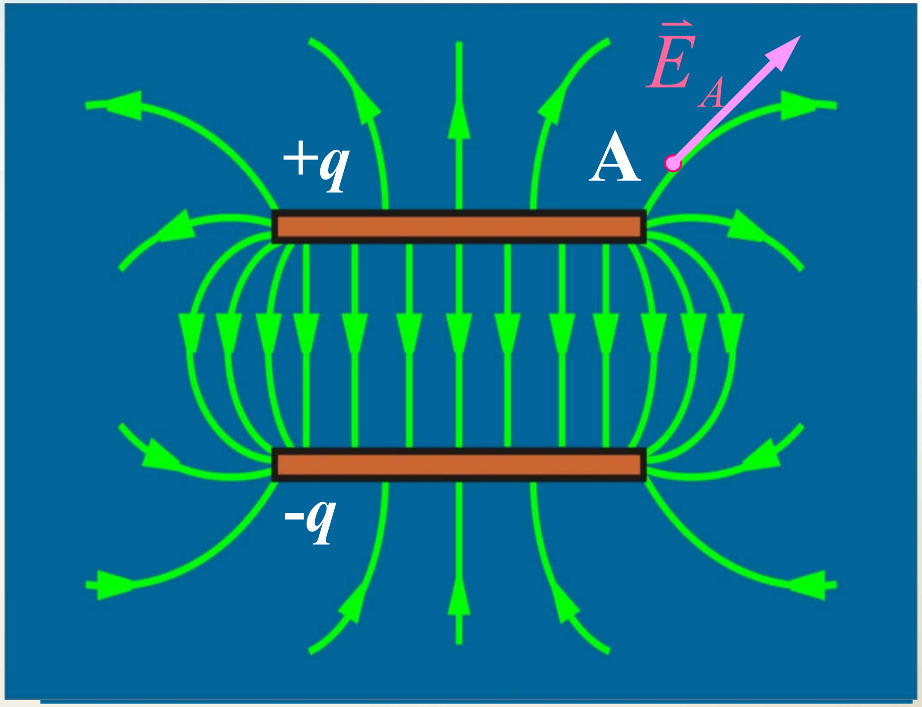
——W. Thomson

- 电场线的特点:

(1) 由正电荷指向负电荷或无穷远处

(2) 反映电场强度的分布电场线上每一点的切线方向反映该点的场强方向 ，电场线的疏密反映场强大小。

$$E=\frac{\mathrm{d}\phi_e}{\mathrm{d}S_\perp}$$

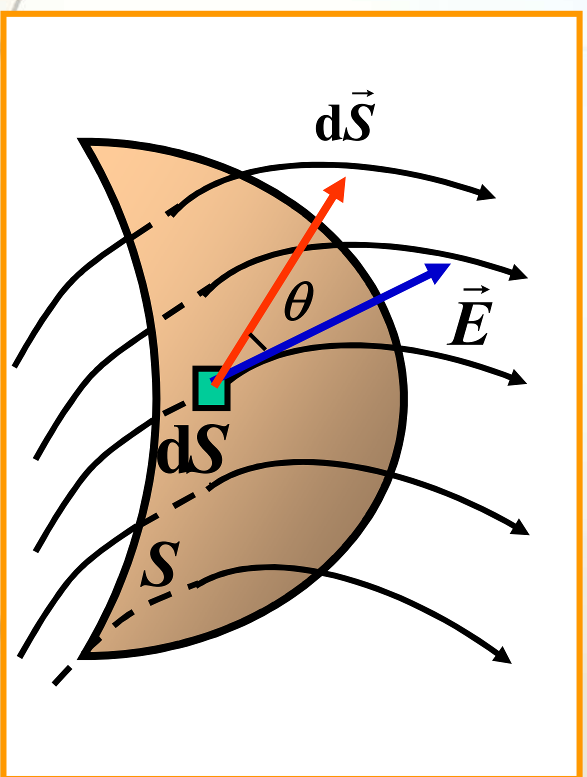


(3) 电场线是非闭合曲线

(4) 电场线不相交

二. 电通量

通过电场中某一给定面的电场线的总条数叫做通过该面的电通量 .



定义：面积元矢量

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$$

面积元范围内 $\vec{E}$ 视为均匀

微元分析法：以平代曲；

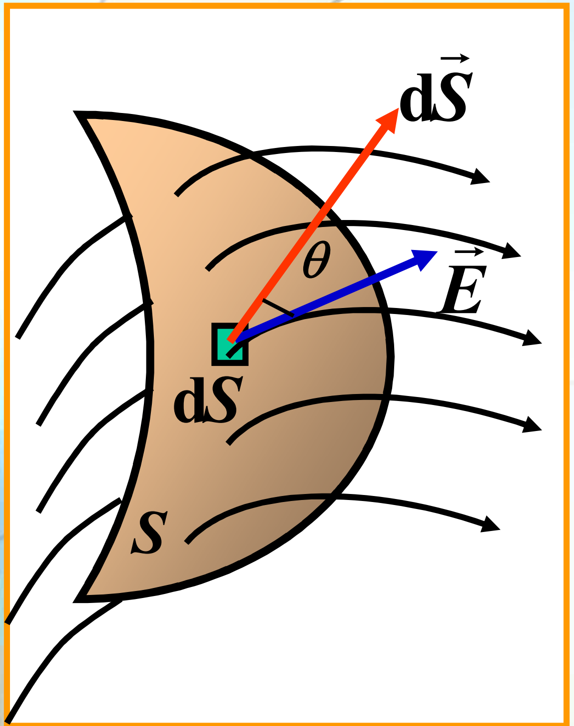
以恒代变。

1）通过面元的电通量

$$\mathrm{d}\phi_e = E\mathrm{d}S_{\perp} = E(\mathrm{d}S\cos\theta) = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

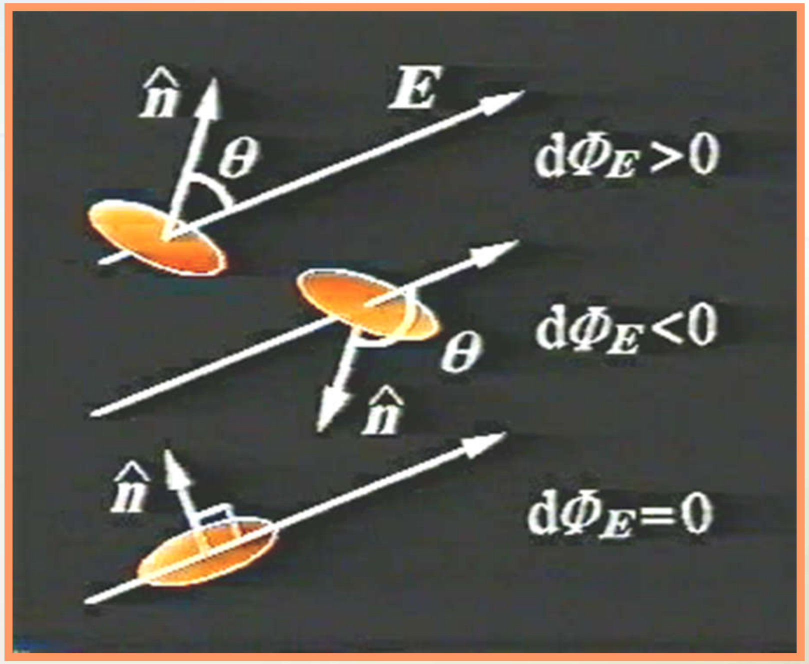
取正、负、零的条件?

1）通过面元的电通量



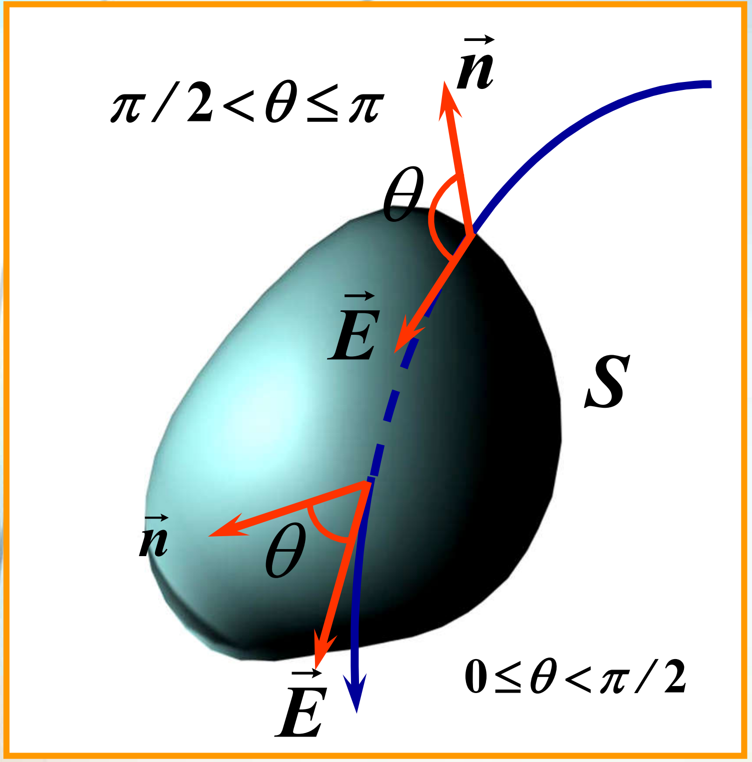
$$\mathrm{d}\phi_e = E\mathrm{d}S_\perp = E(\mathrm{d}S\cos\theta) = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\begin{cases} \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ \theta > \dfrac{\pi}{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



2）通过曲面 S 的电通量 $\phi_e = \int_s \mathrm{d}\phi_e = \int_s \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

3）通过封闭曲面的电通量 $\phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$



通过封闭曲面的电通量

$$\phi_e=\oint_s\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

规定：封闭曲面外法向为正

穿入的电场线 $\phi_e<0$

穿出的电场线 $\phi_e>0$

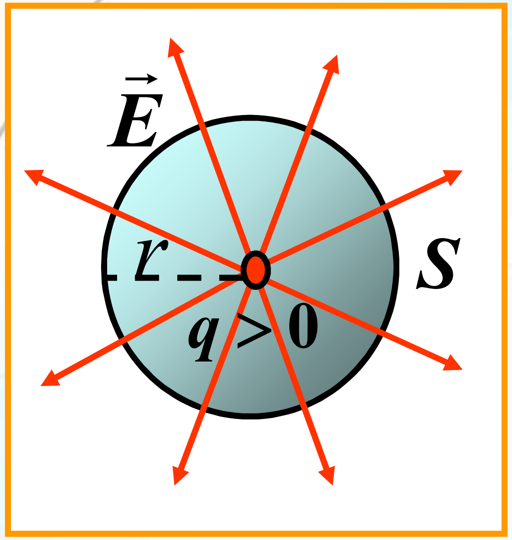
练习1：空间有点电荷q，求下列情况下穿过曲面的电通量

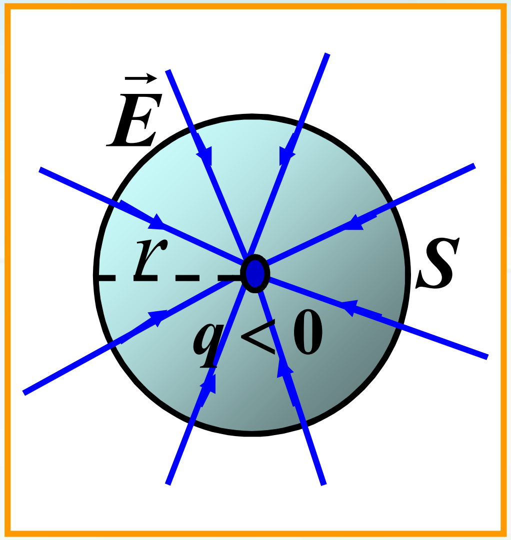
1）曲面为以电荷为中心的球面

2）曲面为包围电荷的任意封闭曲面

3）曲面为不包围电荷的任意封闭曲面

1）曲面为以电荷为中心的球面





$q>0 \quad : \quad \phi_e>0$

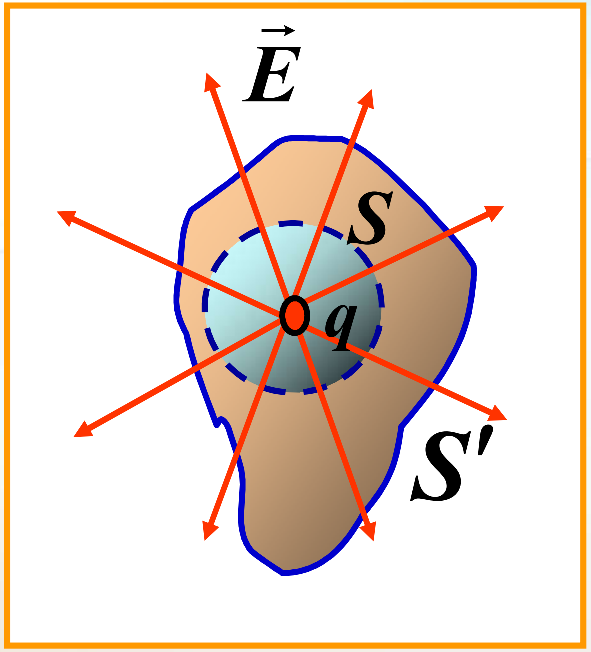
$q<0 \quad : \quad \phi_e<0$

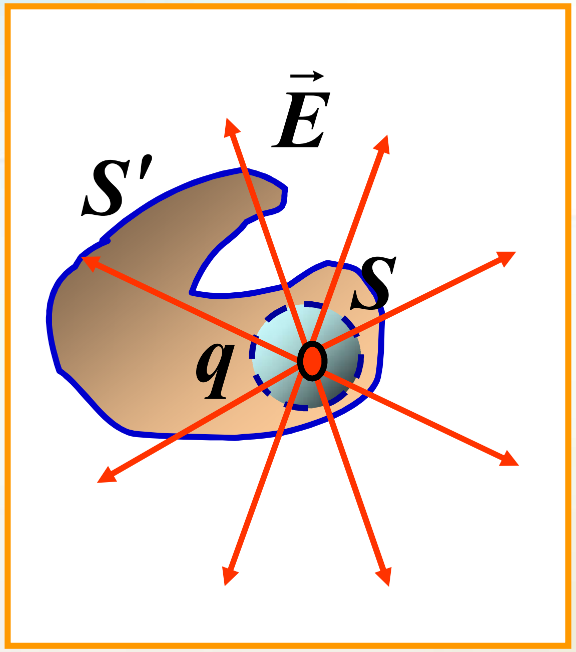
$$\phi_e=\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint\frac{q\vec{r}\cdot d\vec{S}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint dS=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

结果与 r 无关

单个点电荷场中，由 $+q$ 发出的电场线延伸到 ∞ ，由 ∞ 而来的电场线到 $-q$ 终止。在无电荷处，电场线不中断、不增加。

2）曲面为包围电荷的任意封闭曲面

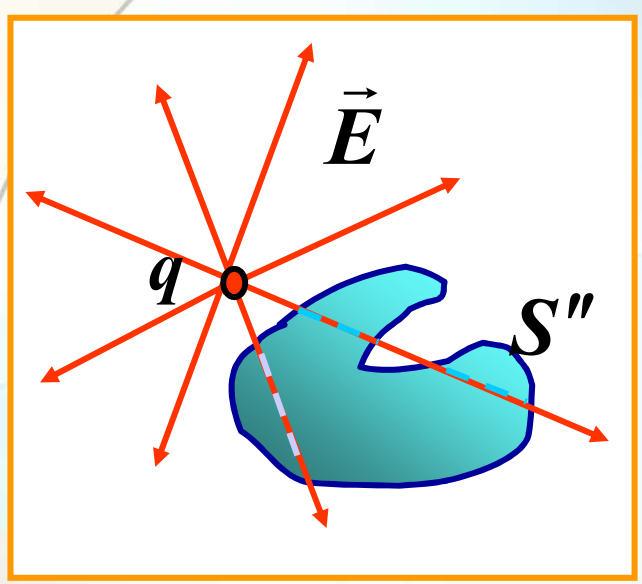




$$\phi_{es'} = \phi_{es} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{cases} q > 0 \quad : \quad \phi_e > 0 \\ q < 0 \quad : \quad \phi_e < 0 \end{cases}$$

3）曲面为不包围电荷的任意封闭曲面



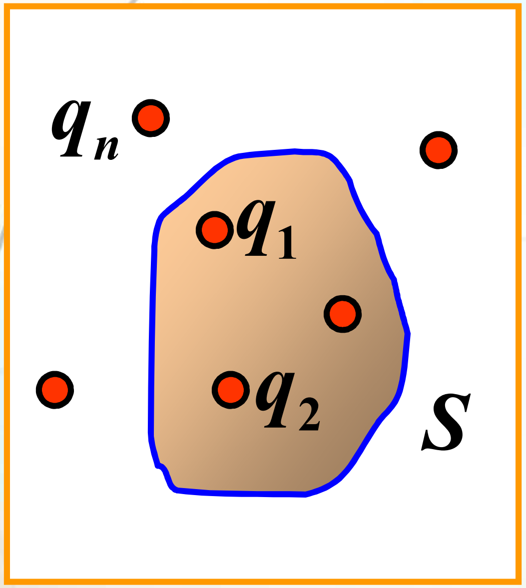
$$\phi_{es''} = 0$$

结论： $\phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \begin{cases} q/\varepsilon_0 & (q在S内) \\ 0 & (q在S外) \end{cases}$

思考：1）是否存在 q 恰好在 S 上的情况？

2）上述结论与库仑定律 $F \propto 1/r^2$ 有何关系？

练习2：空间有点电荷系 $q_1, q_2 \cdots q_n$ ，求穿过空间任意封闭曲面 S 的电通量



曲面上各点处电场强度：

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n$$

包括 S 内、S 外，所有电荷的贡献。

穿过 S 的电通量：

$$\phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \oint \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \cdots + \oint \vec{E}_n \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \phi_{e1} + \phi_{e2} + \cdots + \phi_{en} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$$

只有 S 内的电荷对穿过 S 的电通量有贡献

练习3：请总结穿过静电场中任意封闭曲面的电通量与空间电荷分布的关系。

三．高斯定理

静电场中，通过任意封闭曲面（高斯面）的电通量等于该封闭曲面所包围的电量代数和的 $1/\varepsilon_0$ 倍：

$$\boxed{\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{\text{内}}}$$

关于高斯定理的讨论：

$$\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

1. 式中各项的含义

S： 高斯面，封闭曲面

$\vec{E}$： S上各点的总场，S内外所有电荷均有贡献.

ε_0： 真空电容率

$\sum q_{内}$： S内的净电荷

ϕ_{es}： 通过S的电通量， 只有S内电荷有贡献

关于高斯定理的讨论：

$$\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

2. 揭示了静电场中“场”和“源”的关系

电场线有头有尾

$+q$：发出 q/ε_0 条电场线，是电场线的“头”

$-q$：吸收 q/ε_0 条电场线，是电场线的“尾”

“头”、“尾” $\longrightarrow$ “源”

静电场的重要性质 —— 静电场是有源场

关于高斯定理的讨论：$\boxed{\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}}$

3. 反映了库仑定律的平方反比关系，而且更普遍。

4. 利用高斯定理可方便求解具有某些对称分布的静电场

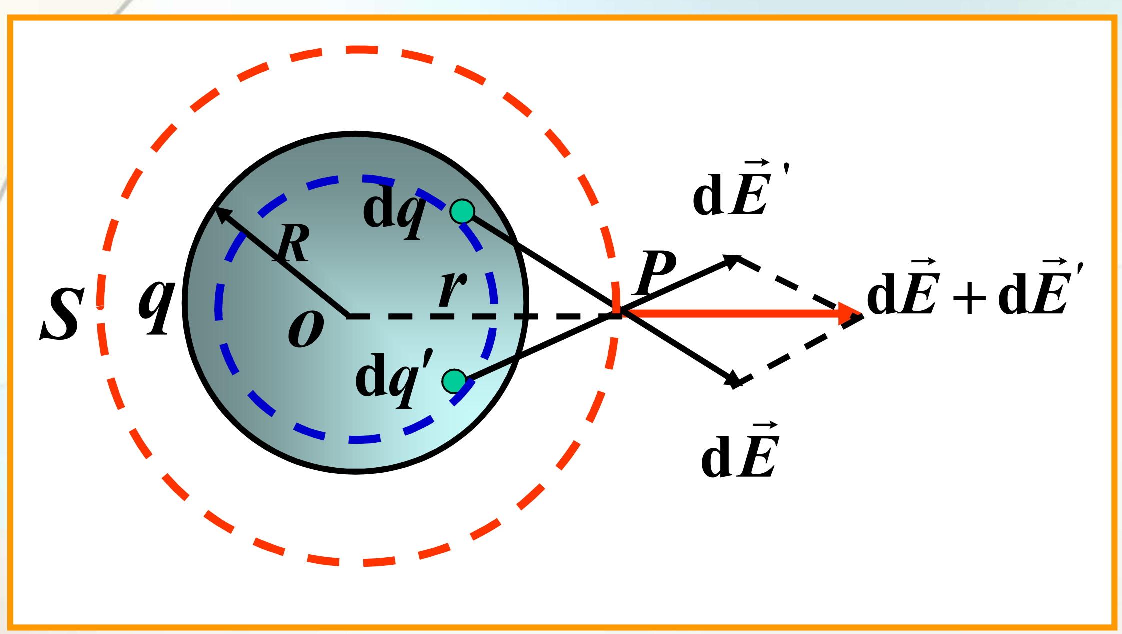
成立条件：静电场

求解条件：电场分布具有某些对称性：

才能找到恰当的高斯面，使 $\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 中的 $\vec{E}$ 能够以标量形式提到积分号外，从而简便地求出 $\vec{E}$ 分布。

常见类型：场源电荷分布 $\left\{\begin{array}{l}\text{球对称性}\\ \text{轴对称性}\\ \text{面对称性}\end{array}\right.$

[例一] 求均匀带电球体（q、R ）的电场分布



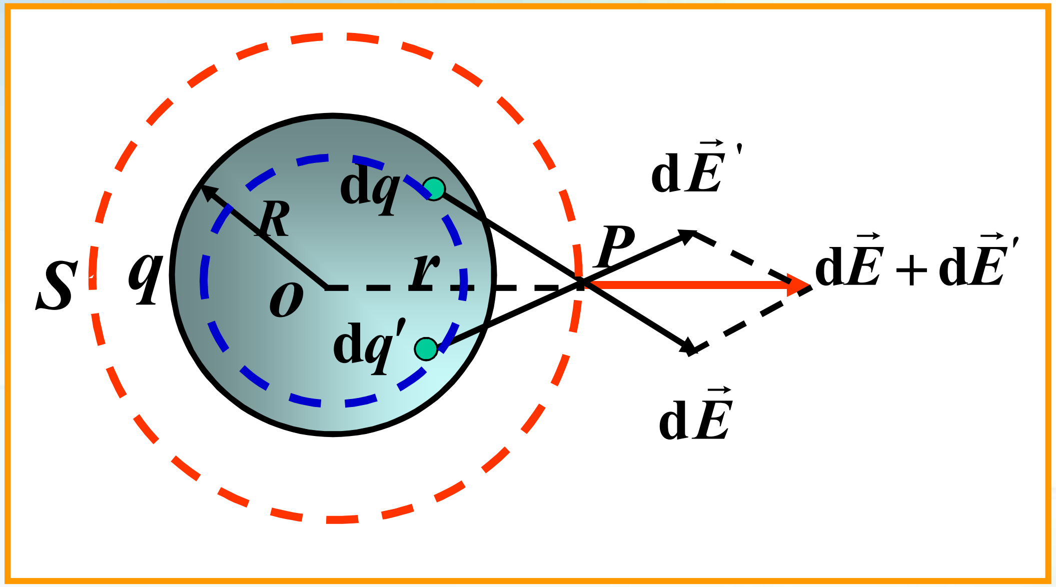
对称性分析:

以 O 为中心，r 为半径的球面 S 上各点彼此等价

以 O 为中心的球面 S 上各点 $\begin{cases} \vec{E} \text{ 大小相等} \\ \vec{E} \text{ 方向沿径向} \end{cases}$

确定高斯面:

以半径 r 的同心球面 S 为高斯面

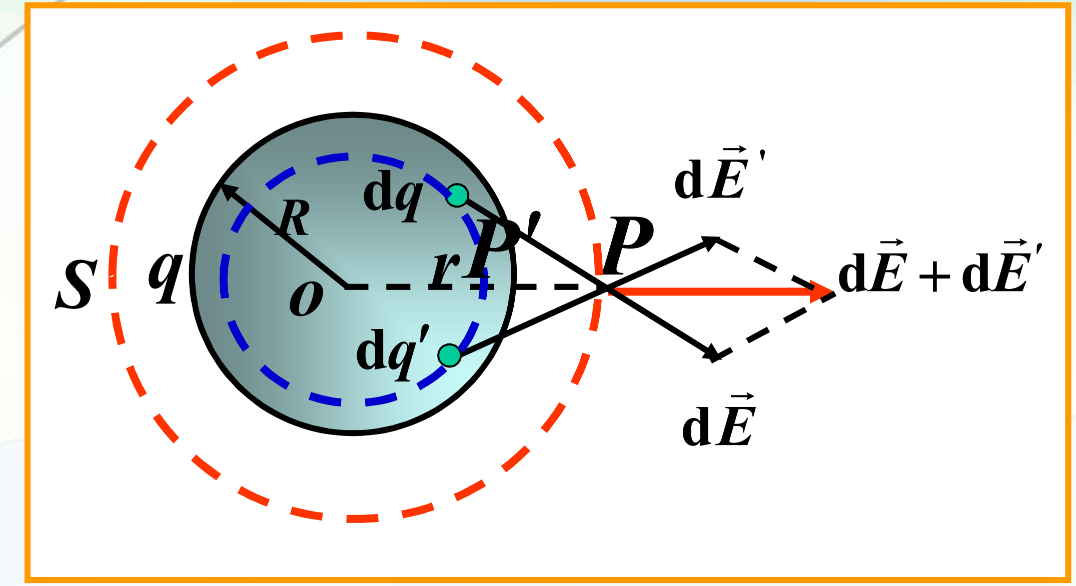


通过 S 的电通量: $\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_s E\cos 0^\circ \mathrm{d}S = E\cdot 4\pi r^2$

由高斯定理:

$$\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

$$E = (\sum q_{内})/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$$



$$E = \left(\sum q_{内}\right) \Big/ (4\pi\varepsilon_0 r^2)$$

$$r \geq R: \quad \sum q_{内} = q \qquad E_{外} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

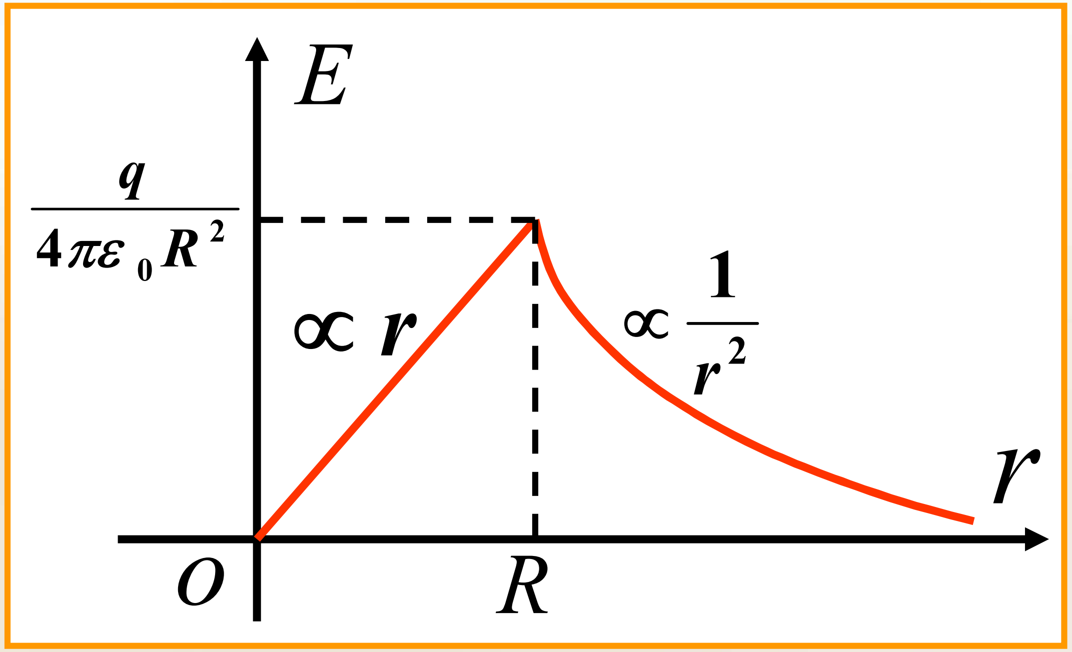
$$r \leq R: \quad \sum q_{内} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad E_{内} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

即：

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r\le R) \\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r\ge R)\end{cases}$$

$(r\le R)$ 球体内区域 $E\propto r$

$(r\ge R)$ 球体外区域～电量集中于球心的点电荷

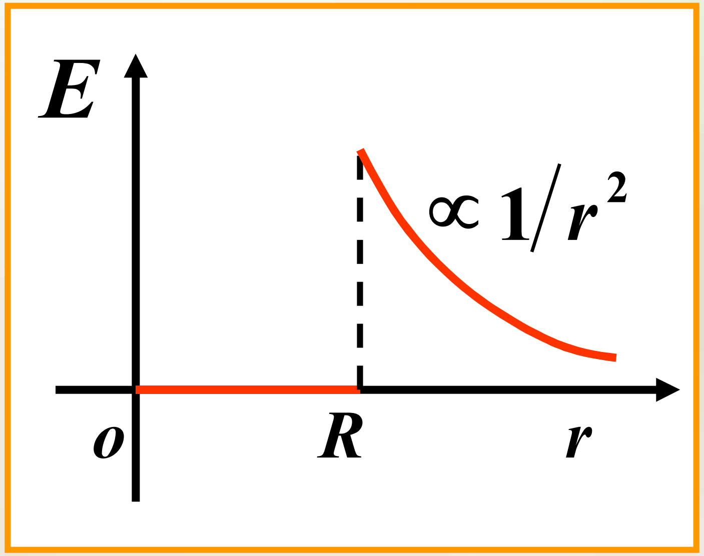


讨论：

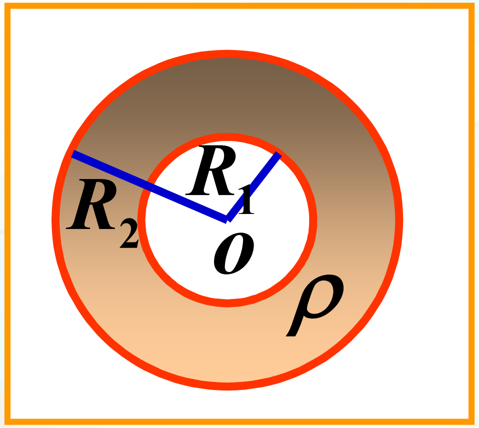
1. 求均匀带电球面（R , q ）的电场分布，并画出 $E \sim r$ 曲线.

高斯面：半径 r 的同心球面

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r > R) \end{cases}$$

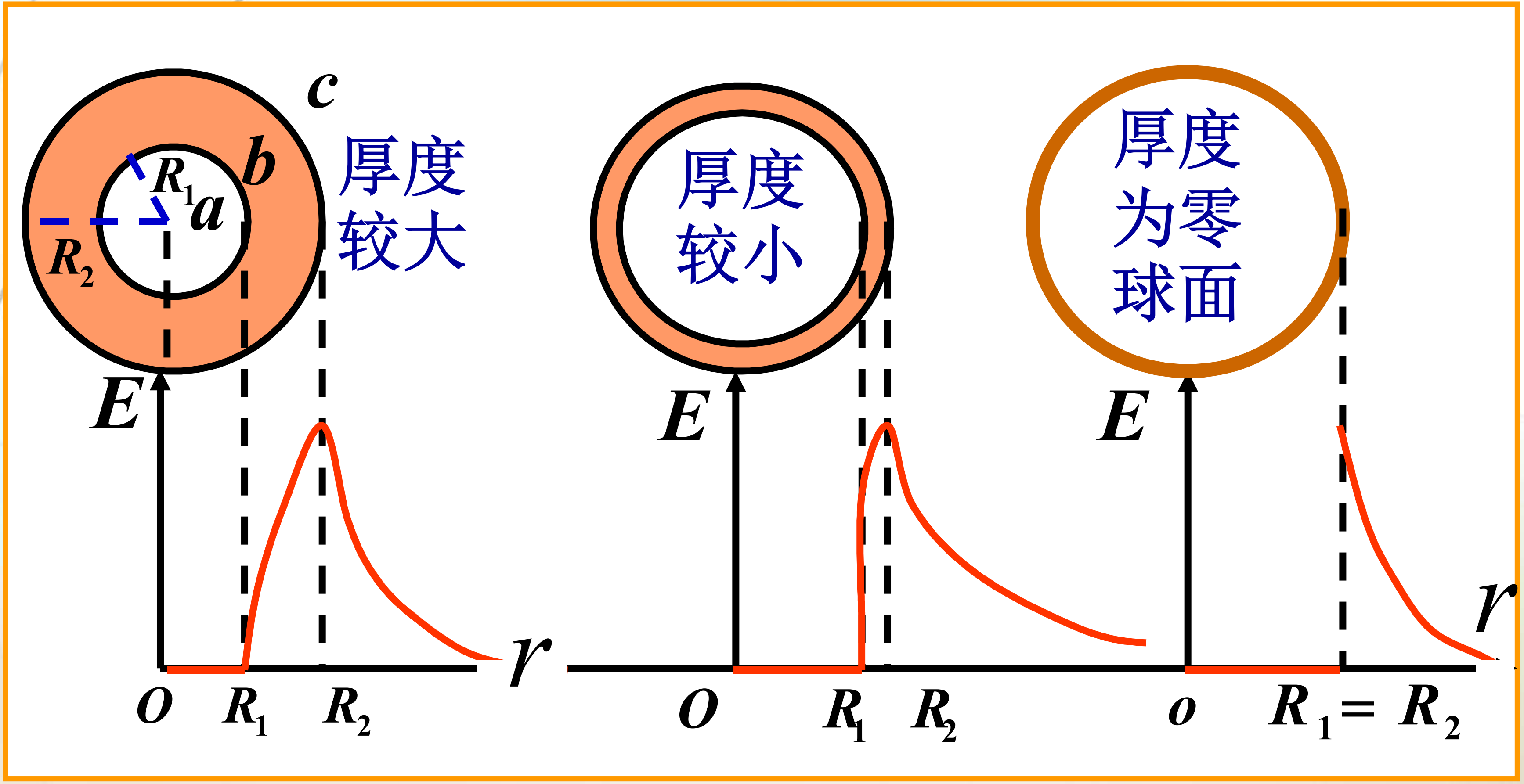


2. 如何理解带电球面 $r = R$ 处 E 值突变?



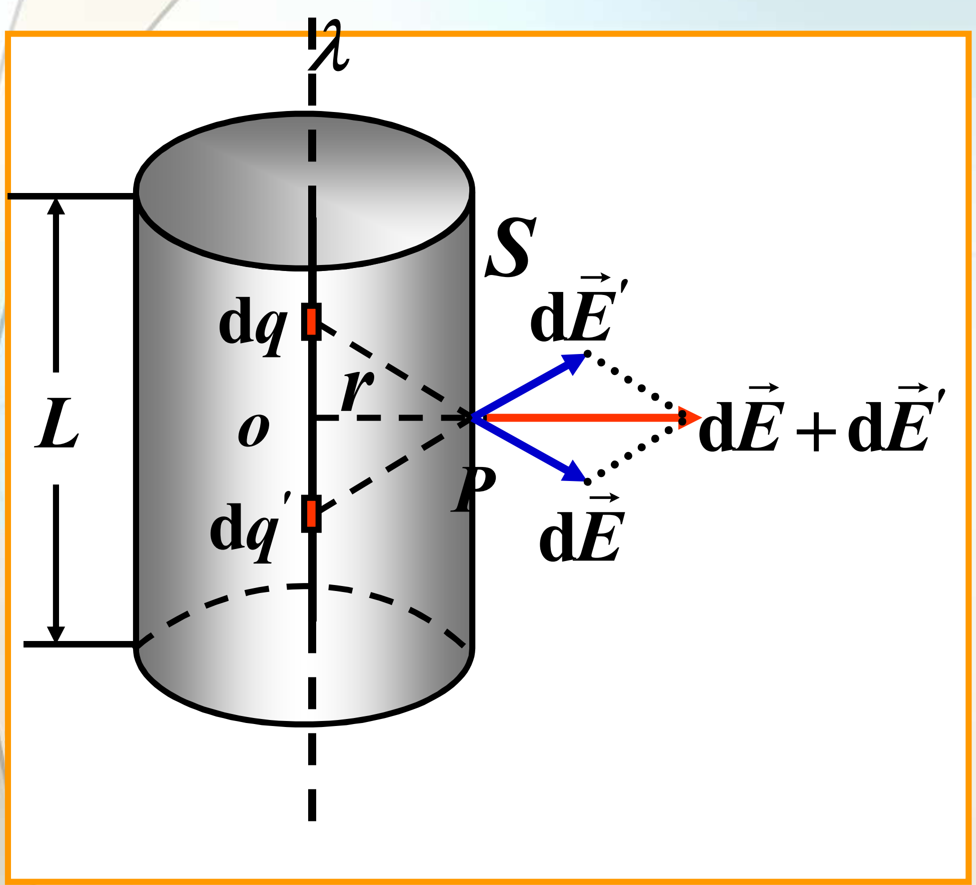
计算带电球层（R_1， R_2， ρ ）的电场分布

$$E = \begin{cases} 0 & (r \le R_1) \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \dfrac{R_1^3}{r^2}\right) & (R_1 \le r \le R_2) \\ \dfrac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r \ge R_2) \end{cases}$$



带电面上场强 E 突变是采用面模型的结果，实际问题中计算带电层内及其附近的准确场强时，应放弃面模型而还其体密度分布的本来面目.

[例二]　无限长均匀带电直线（λ）的电场



对称性分析：

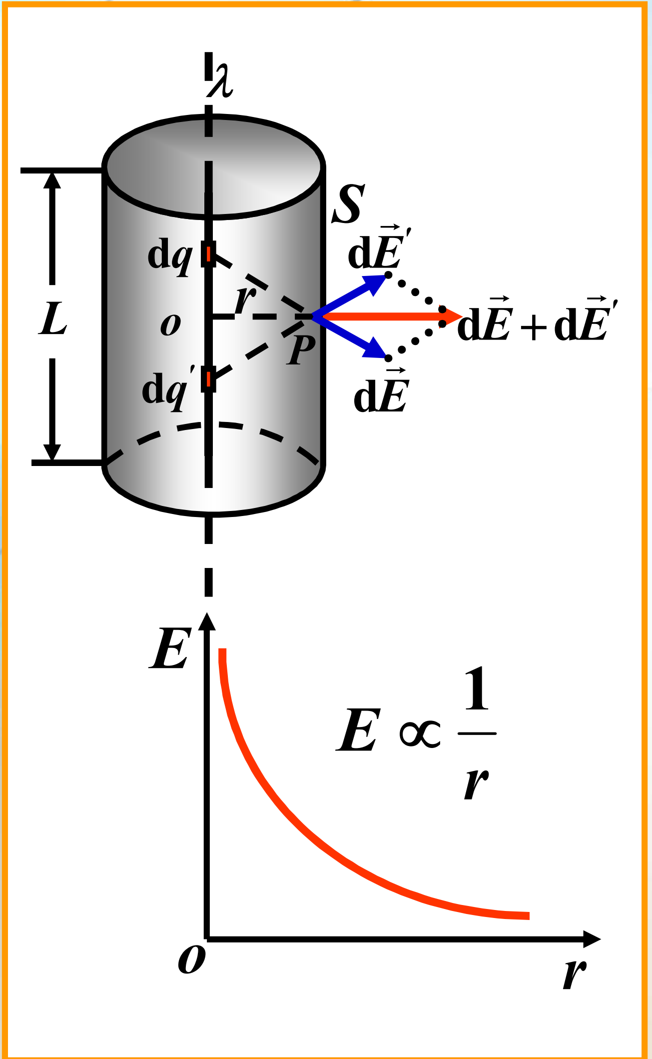
P点处合场强 $\vec{E}$

垂直于带电直线，

与 P 地位等价的点的集合为以带电直线为轴的圆柱面.

高斯面：

取长 L 的同轴圆柱面，加上底、下底构成高斯面 S



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{上} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{下} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{侧} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{上} E\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}S + \int_{下} E\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}S + \int_{侧} E\cos 0^\circ \mathrm{d}S$$

$$= E\cdot 2\pi rL$$

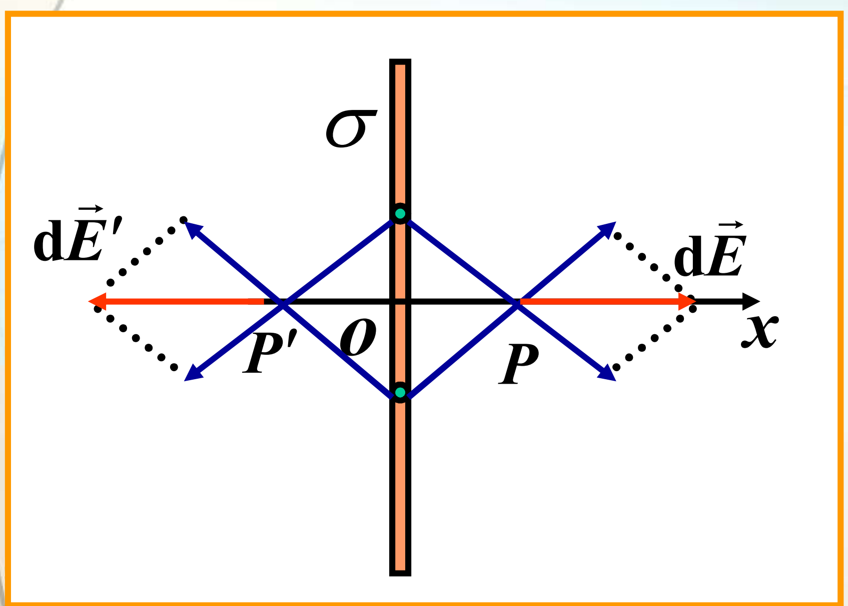
由高斯定理 $\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\cdot 2\pi rL$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

[例三] 无限大均匀带电平面的电场（电荷面密度σ ）

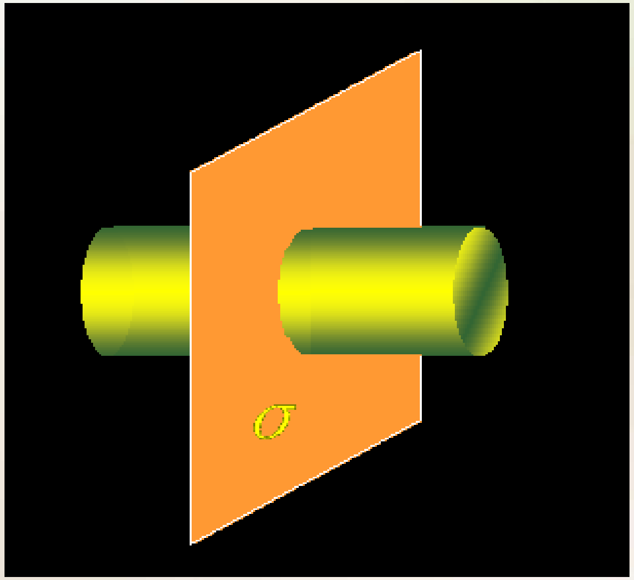
对称性分析：视为无限长均匀带电直线的集合



$\vec{E}$ 方向 垂直于带电平面，

离带电平面距离相等的场点彼此等价

如何构成封闭的高斯面？

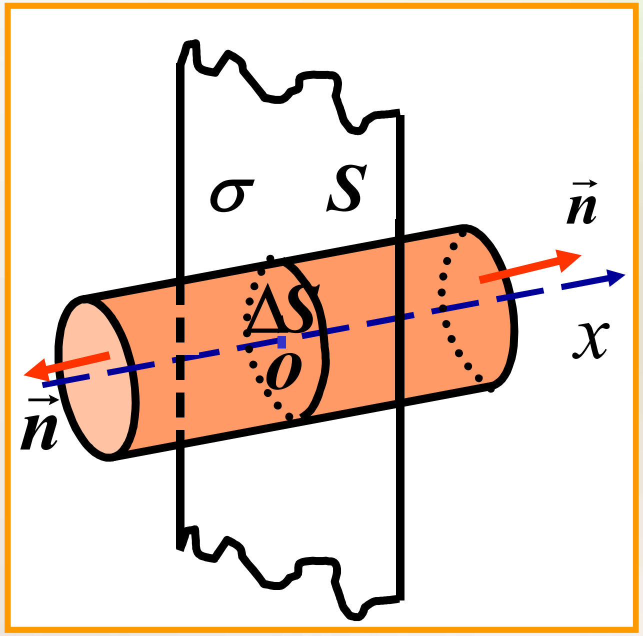


高斯面：两底面与带电平面平行、离带电平面距离相等，轴线与带电平面垂直的柱面。

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{左} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{右} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{侧} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{左} E\cos 0^\circ \mathrm{d}S + \int_{右} E\cos 0^\circ \mathrm{d}S + \int_{侧} E\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}S$$

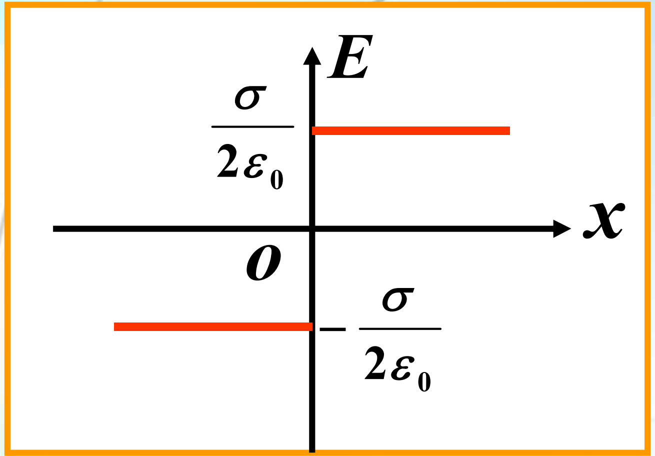
$$= E\cdot 2\Delta S$$



由高斯定理：

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\cdot 2\Delta S$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内} = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

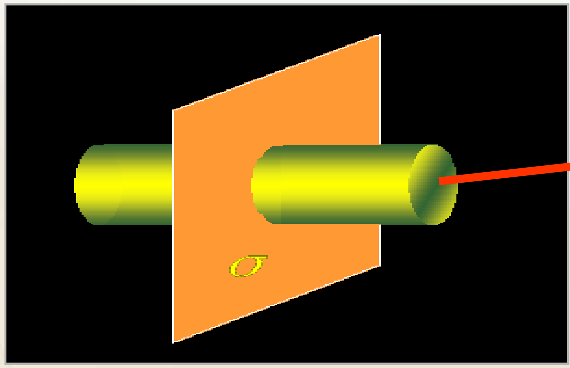


$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

其指向由 σ 的符号决定

讨论　1. 本题是否还有其它构成高斯面的方法?

底面与带电平面平行、轴线与带电平面垂直的柱面均可（不一定为圆柱面）。



可以为任意形状

2. 带电平面上电场强度突变的原因?

采用面模型，未计带电平面的厚度。

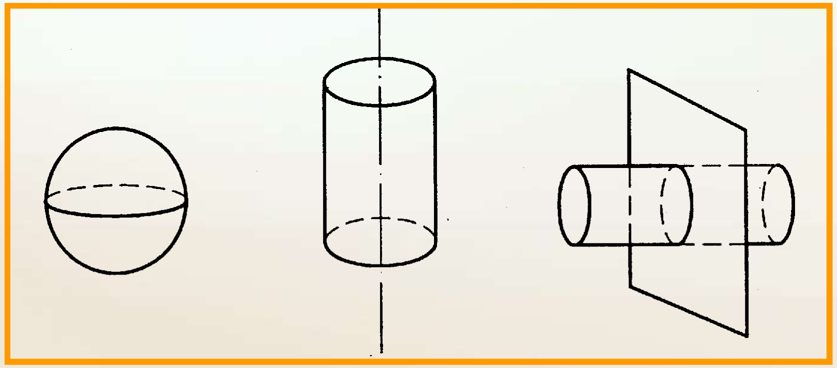
总结： 由高斯定理求电场分布的步骤

1. 由电荷分布的对称性分析电场分布的对称性.

2. 在对称性分析的基础上选取高斯面. 目的是使

$\oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 能够以乘积形式给出.

（球对称、轴对称、面对称三种类型）



3. 由高斯定理 $\oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$ 求出电场的大小，并说明其方向.

• 典型带电体 $\vec{E}$ 分布：

点电荷电场 $$\vec{E}=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

无限长均匀带电直线 $$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$ 垂直于带电直线

均匀带电圆环轴线上 $$\vec{E}=\frac{qx\vec{i}}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

无限大均匀带电平面 $$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ 垂直于带电平面

• 典型带电体 $\vec{E}$ 分布：

均匀带电球体

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r \leq R) \\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r \geq R) \end{cases}$$

均匀带电球面

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r > R) \end{cases}$$