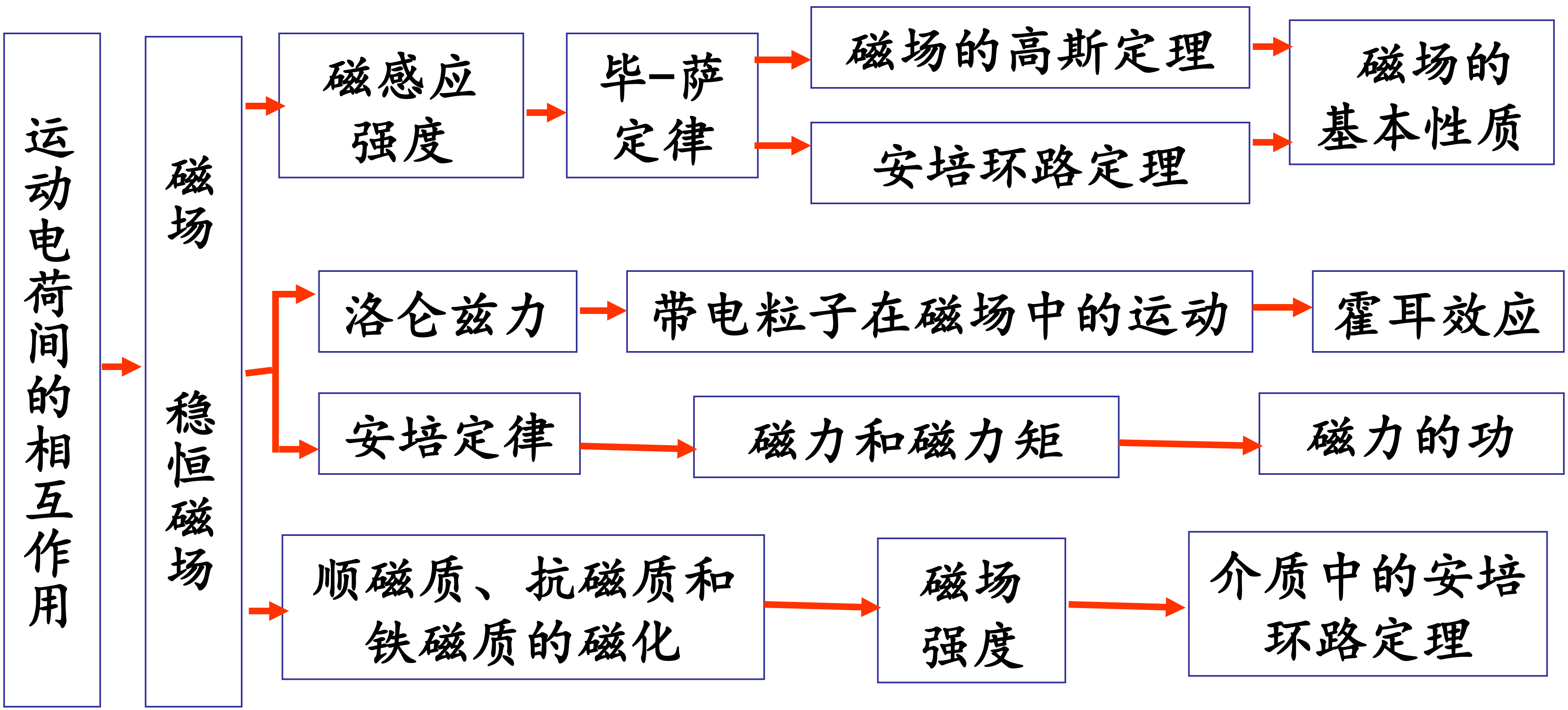
第十章 运动电荷间的相互作用和稳恒磁场

结构框图



重点

基本概念：磁感应强度，磁通量，电流磁矩。

基本规律：磁场叠加原理，毕—萨定律及其应用，稳恒磁场高斯定理和环路定理，磁场的基本性质（无源场、涡旋场）。

基本计算：稳恒磁场 $\vec{B}$分布，洛仑兹力，安培力，磁力矩。

难点

运动电荷之间的相互作用，磁场是电场的相对论效应，磁介质。

学时：10

第一节　运动电荷间相互作用

（自学）

第二节 磁感应强度 毕奥—萨伐定律及其应用

一、磁感应强度

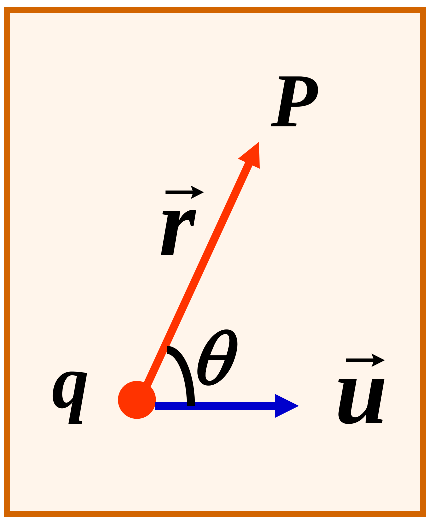
二、毕奥 — 萨伐定律

三、毕奥 — 萨伐定律应用

一、磁感应强度

定义：$\vec{B}=\dfrac{1}{c^2}\vec{u}\times\vec{E}$　磁场是电场的相对论效应

设点电荷相对于观察者以 $\vec{u}$ 匀速直线运动：



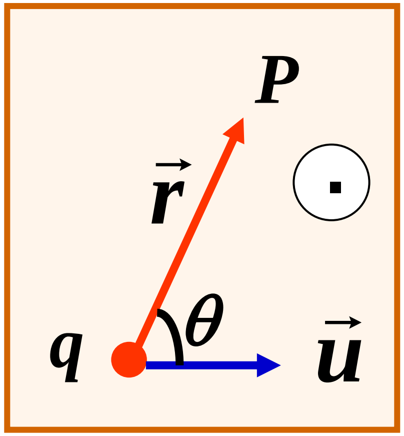
电场分布：$\vec{E}=\dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$

其中：$\beta=\dfrac{u}{c}$

代入 $\vec{B}=\dfrac{1}{c^2}\vec{u}\times\vec{E}$ 得：

$$\vec{B}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\vec{u}\times\vec{r}$$

令：$\mu_0 = \dfrac{1}{c^2\varepsilon_0} = \dfrac{4\pi\times9\times10^9}{(3\times10^8)^2} = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{Ns^2C^{-2}}$ 为真空磁导率



则：$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 q}{4\pi r^3}\dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\vec{u}\times\vec{r}$

若 $u << c$，则 $\beta = \dfrac{u}{c} \to 0$

得：$\boxed{\vec{B} = \dfrac{\mu_0 q\vec{u}\times\vec{r}}{4\pi r^3}}$ → 低速下运动电荷磁场公式

大小：$B = \dfrac{\mu_0 qu\sin\theta}{4\pi r^2}$

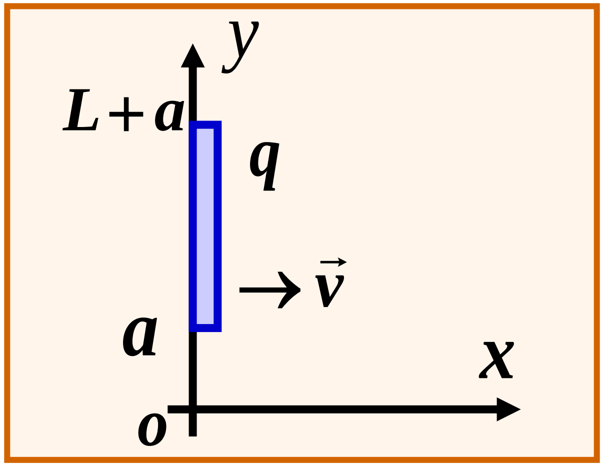
方向：右手法则，垂直于 $\vec{u}$ 、$\vec{r}$ 决定的平面。

磁场叠加原理：

如果空间不止一个运动电荷，则空间某点总磁感应强度等于各场源电荷单独在该点激发的磁感应强度的矢量和：

$$\vec{B}=\sum\vec{B}_i \qquad 或 \quad \vec{B}=\int d\vec{B}$$

例 (P_{281} 10. 5)长为L, 带电量q的均匀带电细棒，以速率v沿x正方向运动, 当细棒运动到与 y 轴重合的位置时, 细棒下端与坐标原点o的距离为a，求此时坐标原点o的磁感应强度，各参数大小如下：

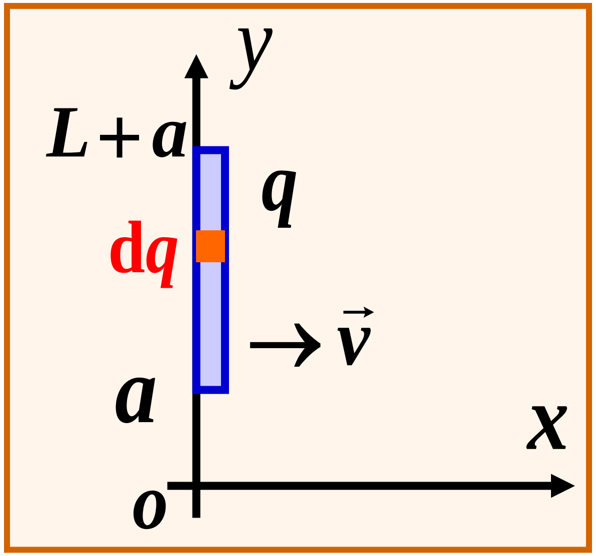


已知：$L=0.1\,\text{m}$ ，$q=10^{-10}\,\text{C}$ ，

$v=1\,\text{ms}^{-1}$, $a=0.1\,\text{m}$

求:$B_0=?$

解：在 L 上取 $\mathrm{d}q=\dfrac{q}{L}\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}q$ 以 $\vec{v}$ 沿 $+x$ 运动。



$$\mathrm{d}\vec{B}_o=\frac{\mu_0\mathrm{d}q\vec{v}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$

$$\mathrm{d}B_o=\frac{\mu_0\mathrm{d}qvy\sin 90^0}{4\pi y^3}$$

$$=\frac{\mu_0 qv\mathrm{d}y}{4\pi Ly^2}$$ 方向：$\otimes$

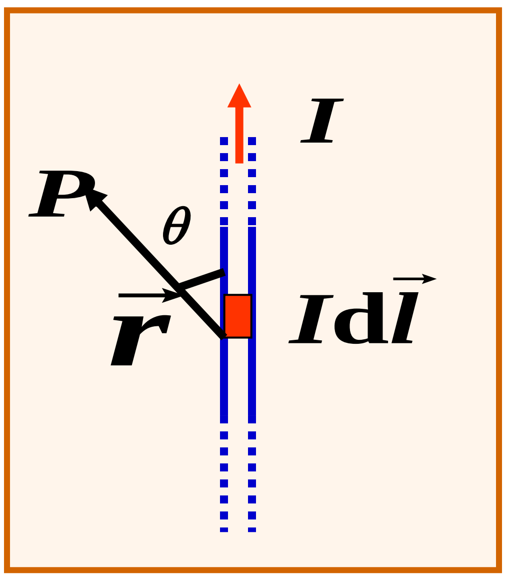
各 $\mathrm{d}q$ 在 o 点处 $\mathrm{d}\vec{B}$ 同向：

$$B_o=\int_o \mathrm{d}B=\int_a^{L+a}\frac{\mu_0 qv\mathrm{d}y}{4\pi Ly^2}=\frac{\mu_0 qv}{4\pi L}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+L}\right)=5\times10^{-6}(\mathrm{T})$$

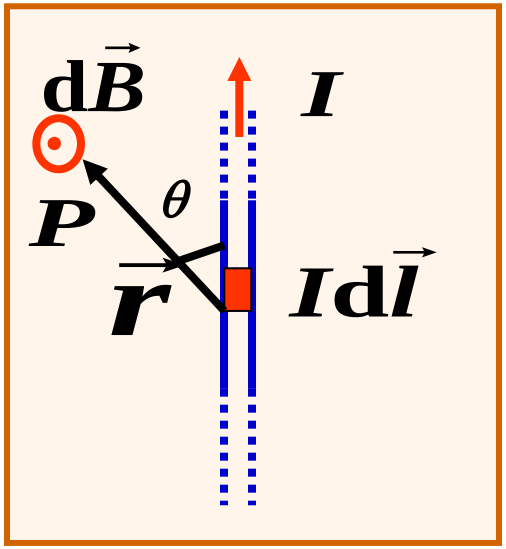
方向：垂直于纸面向里。

二、毕奥 — 萨伐定律

毕奥 — 萨伐定律：电流元产生磁场的规律,与点电荷电场公式作用地位等价。



$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}}$$



设：电流元$I\mathrm{d}\vec{l}$，截面积S

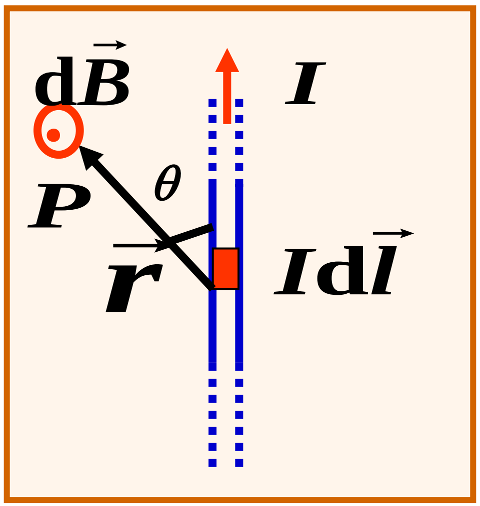
载流子电量q，密度n，漂移速度$\vec{u}$

则：电流元中载流子数$N = nS\mathrm{d}l$

每个载流子在场点P处磁场 $$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 q\vec{u}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$

电流元在场点P处磁场 $$\mathrm{d}\vec{B} = N\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 nSq\mathrm{d}l\vec{u}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$

$$\mathrm{d}\vec{B} = N\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 nSq\mathrm{d}l\vec{u}\times\vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 nSqu\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$



$$\because\ I = nqSu$$

$$\therefore \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$

电流元在场点 P 处磁场

大小: $\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0 I\mathrm{d}l\sin\theta}{4\pi r^2}$

方向: 右手法则

三、毕奥 — 萨伐定律应用

应用举例: 讨论一些典型电流的磁场分布

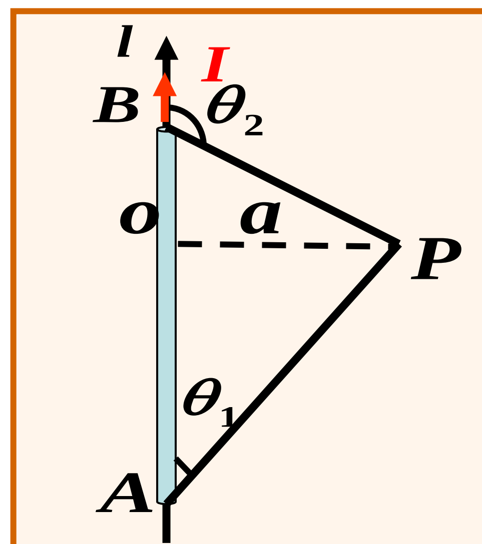
求解电流磁场分布**基本思路:**

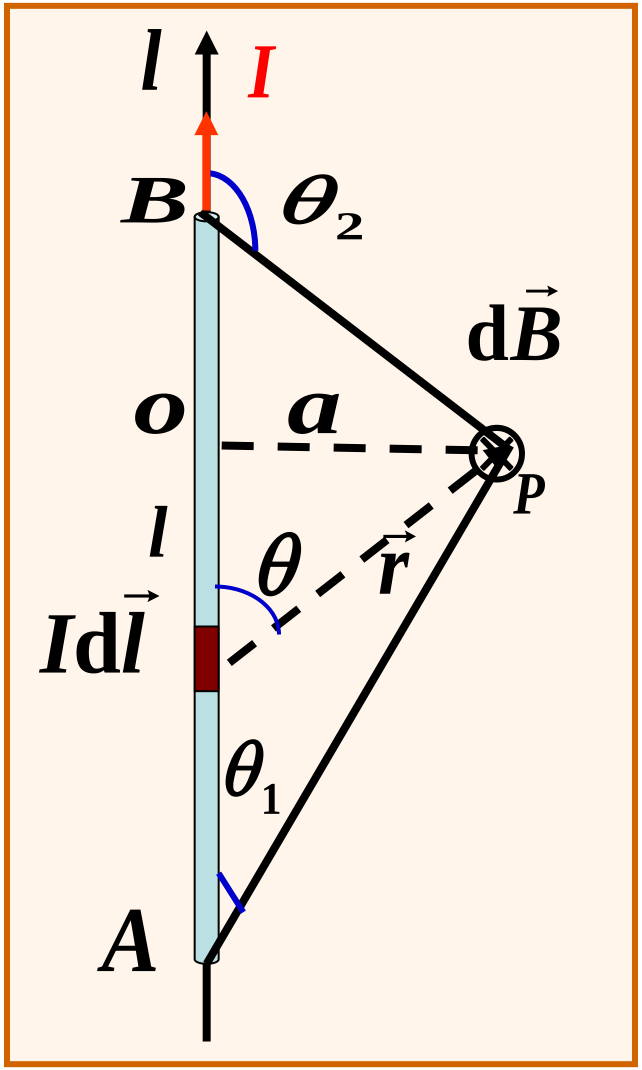
将电流视为电流元（或典型电流）的集合 → 电流元（或典型电流）磁场公式和磁场叠加原理 → 电流磁场分布

例1 (P_{250}例2): 求直线电流的磁场

已知： I、a、θ_1、θ_2

求： $\vec{B}$ 分布





解：在直电流(AB)上取电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l\sin\theta}{4\pi r^2}$$；方向 ⊗

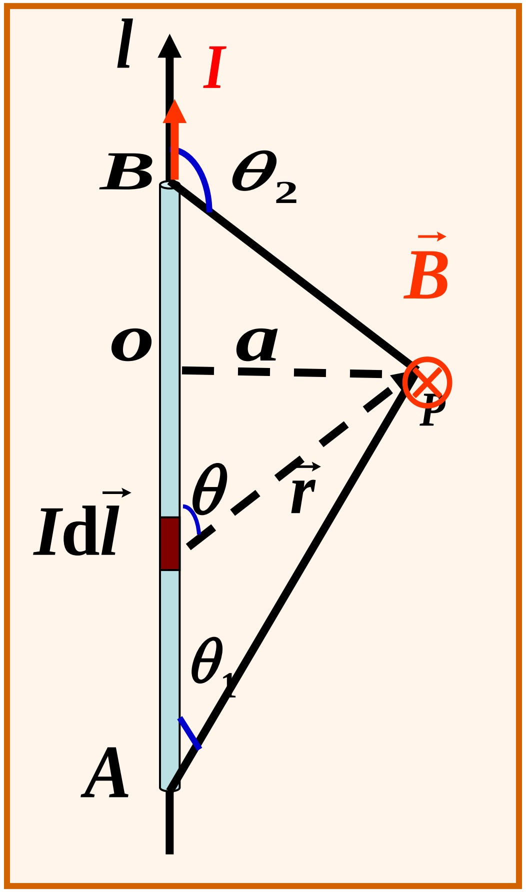
各电流元在 P 点 $\mathrm{d}\vec{B}$ 同向，

采用代数量积分：

$$B=\int \mathrm{d}B=\int_A^B \frac{\mu_0 I\mathrm{d}l\sin\theta}{4\pi r^2}$$

统一变量：

$$l=-a\operatorname{ctg}\theta \qquad \mathrm{d}l=\frac{a\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta} \qquad r=\frac{a}{\sin\theta}$$



$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

方向 $\otimes$

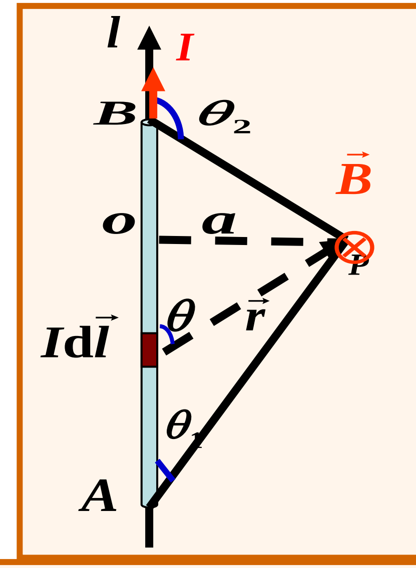
式中：

a：场点到直电流距离

θ_1：起点到场点矢径与 I 方向夹角

θ_2： 终点到场点矢径与 I 方向夹角

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$



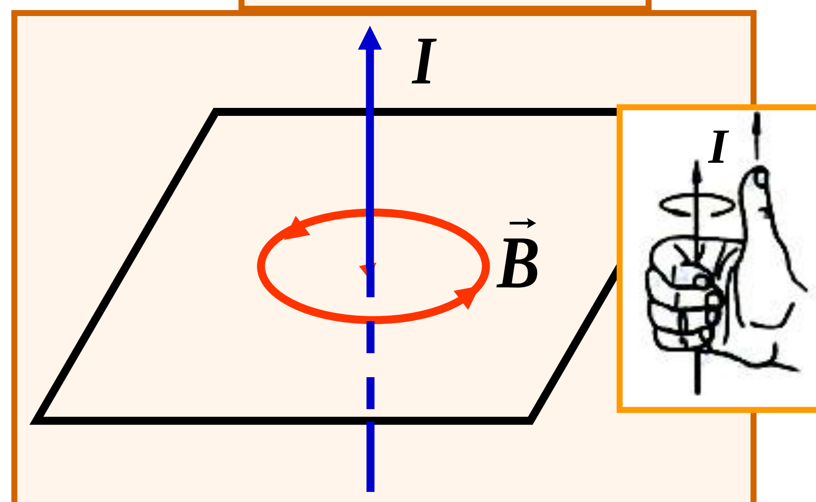
讨论：

1. 无限长直电流 $\vec{B}=?$

$$\theta_1=0\ ,\quad \theta_2=\pi$$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$

方向：右手螺旋法则



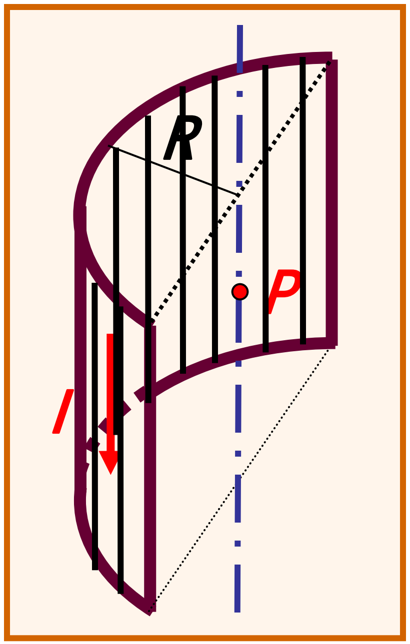
2. 直导线及其延长线上点 $\vec{B}=?$

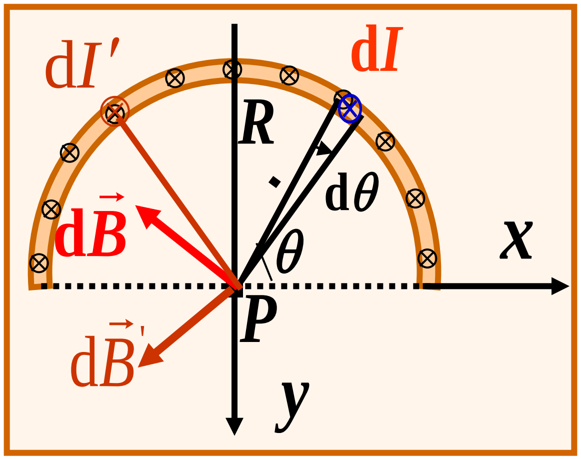
$$\theta=0\ \text{或}\ \pi$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l\sin\theta}{4\pi r^2}=0\qquad \vec{B}=0$$

例2：半径为R，无限长半圆柱金属面通电流I，求轴线上的$\vec{B}$。

解：通电半圆柱面 ⇒ 电流线（无限长直电流）集合





建立如图所示坐标系

$$\mathrm{d}I=\frac{I}{\pi R}\cdot R\mathrm{d}\theta=\frac{I\mathrm{d}\theta}{\pi}$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2\pi R}=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}\theta}{2\pi^2 R}$$

方向如图

各直电流在 P 点 $\mathrm{d}\vec{B}$ 的方向不同，分量积分。

$\mathrm{d}B_x=\mathrm{d}B(-\sin\theta)$ 由对称性：$B_y=\int\mathrm{d}B_y=0$

$$B=B_x=\int\mathrm{d}B_x=\int\mathrm{d}B(-\sin\theta)=\int_0^\pi-\frac{\mu_0 I\sin\theta\mathrm{d}\theta}{2\pi^2 R}=-\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

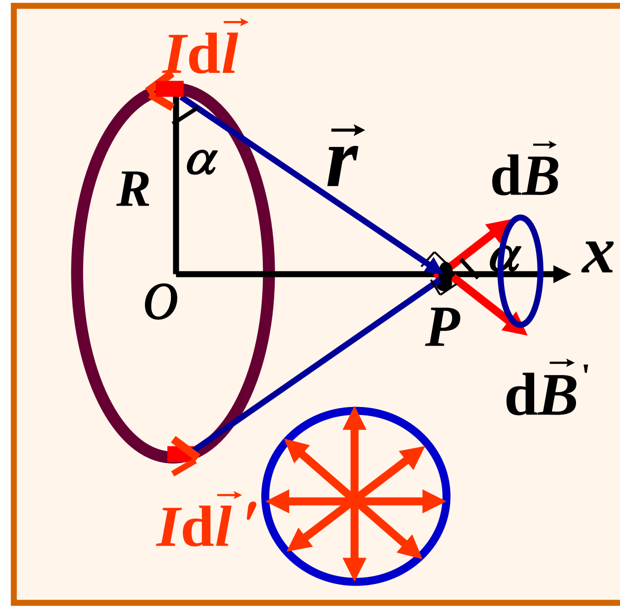
矢量式：$\vec{B}=-\dfrac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\vec{i}$ 沿$-x$轴方向

例3 (P$_{250}$ 例3) 求圆电流轴线上的磁场(I, R)。

解：在圆电流上取电流元$Id\vec{l}$

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin 90^\circ}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}$$

方向如图



各电流元在P点$d\vec{B}$的方向不同，分量积分. $dB_{//} = dB\cos\alpha$

由对称性：$B_{\perp} = \int dB_{\perp} = 0$

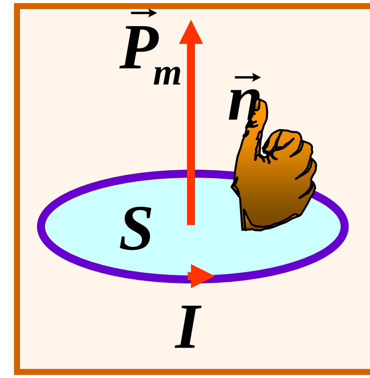
$$B = B_{//} = \int dB_{//} = \int dB\cos\alpha = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}\frac{R}{r} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

矢量式：$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}\vec{i}$ 方向：+x（右手螺旋法则）

讨论:1. 定义电流的磁矩 $\vec{P}_m = I \cdot S\vec{n}$

其中：S：电流所包围的面积

规定正法线方向：$\vec{n}$ 与 I 指向成右旋关系



圆电流磁矩：$\vec{P}_m = I \cdot \pi R^2 \vec{n}$

圆电流轴线上磁场：

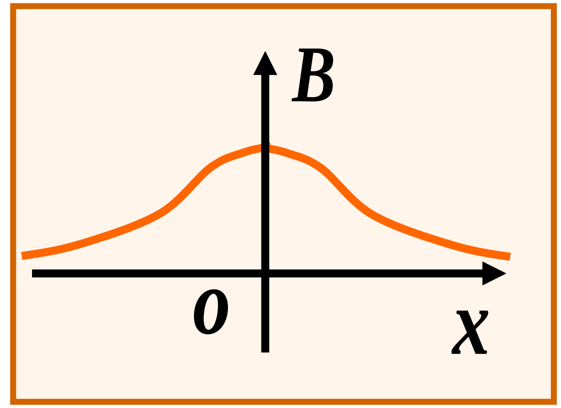
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2 \vec{i}}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \vec{P}_m}{2\pi (R^2 + x^2)^{3/2}}}$$

2. 圆心处磁场

$$x = 0,\ B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}\ ;\ N\text{匝}：B_0 = \frac{N\mu_0 I}{2R}$$

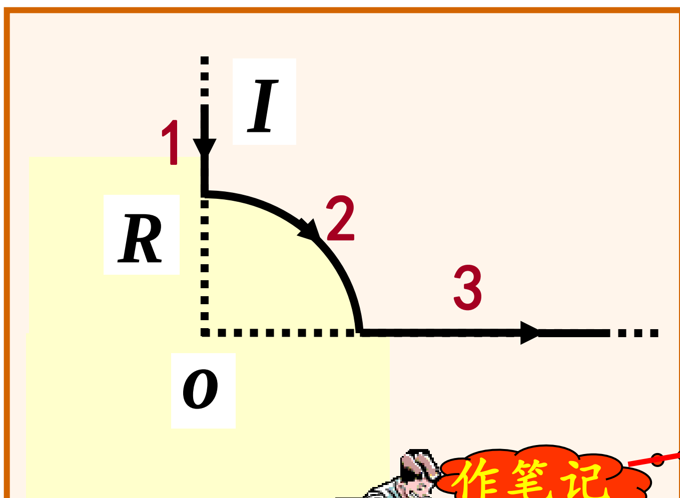
3. 画 $B-x$曲线

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$



练习：$B_o=?$

(1)：



$$B_1=B_3=0$$

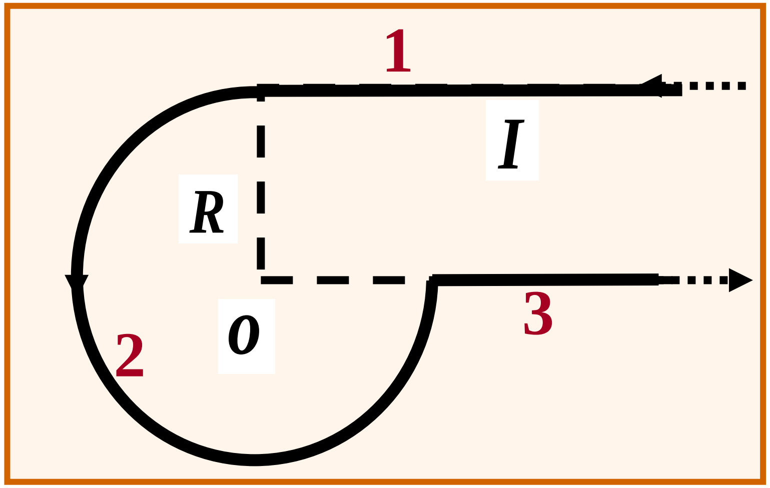
$$B_o=B_2=\int_0^{2\pi R/4}\frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2}=\frac{\mu_0 I}{8R}\quad\otimes$$

部分圆电流在圆心产生的磁场：

$$B_0=\frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{弧长}{2\pi R}$$

方向：右手螺旋法则

(2) :



$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

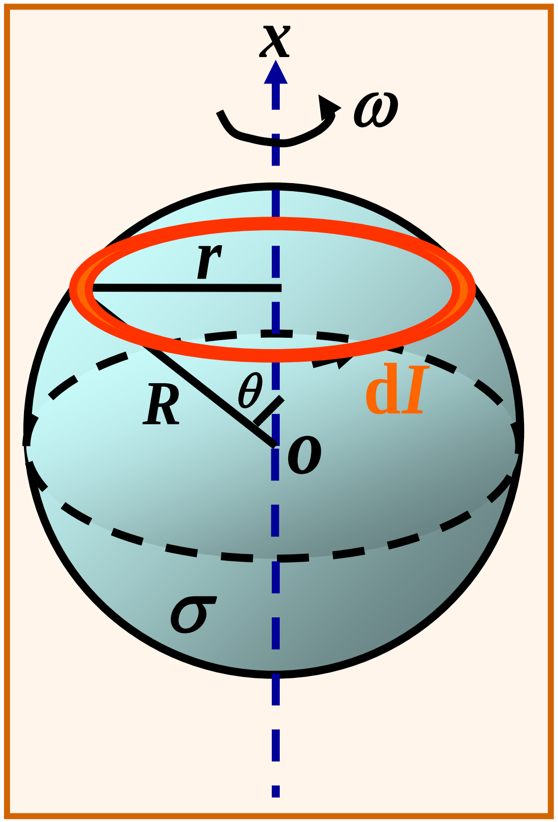
$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos 0^\circ-\cos 90^\circ)=\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \quad \odot$$

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{\frac{3}{2}\pi R}{2\pi R}=\frac{3\mu_0 I}{8R} \quad \odot$$

$$B_3=0$$

$$B_0=B_1+B_2+B_3=\frac{3\mu_0 I}{8R}+\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \quad \odot$$

例4(与P_{310} 10.6类似):均匀带电球面(R ,σ), 绕直径以 ω 匀速旋转, 求球心处$\vec{B}_o$。



解:旋转带电球面 $\xrightarrow{\text{等效}}$ 环形电流集合

取半径 r的环带

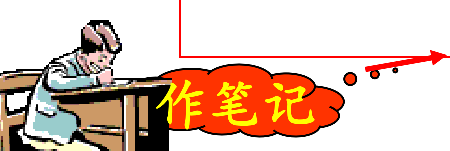
$$dq = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi r R d\theta$$

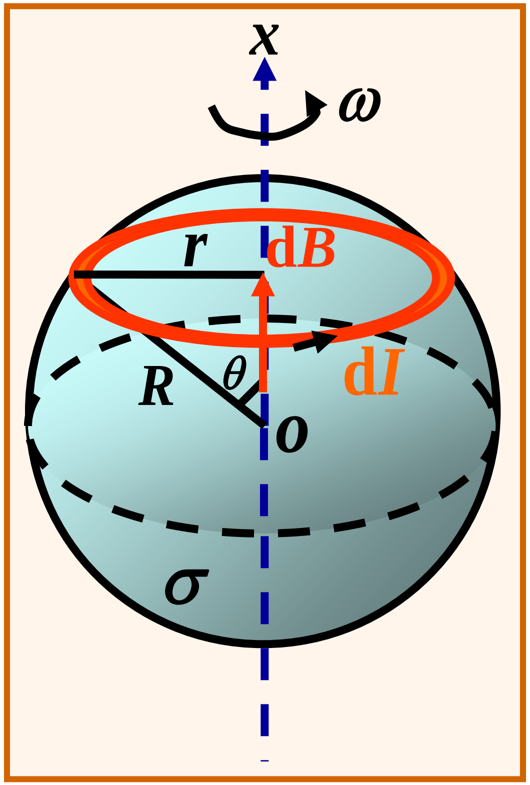
$$= \sigma \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

等效圆电流:

$$dI = \frac{\omega dq}{2\pi} = \sigma R^2 \omega \sin\theta d\theta$$

注意: 任何电量dq旋转产生的圆电流为:$dI = \dfrac{\omega dq}{2\pi}$





$$\mathrm{d}B_o = \frac{\mu_0 r^2 \mathrm{d}I}{2(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma R^2 \omega \sin\theta \mathrm{d}\theta \cdot R^2 \sin^2\theta}{2R^3}$$

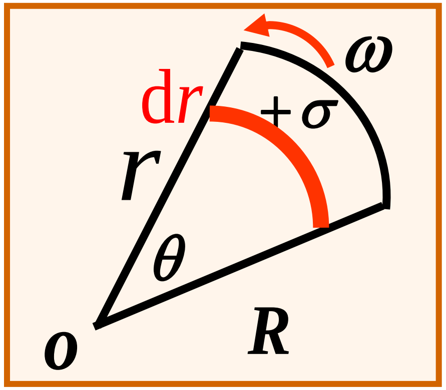
$$= \frac{R}{2}\mu_0 \sigma \omega \sin^3\theta \mathrm{d}\theta$$

方向如图

$$B_o = \int \mathrm{d}B_o = \frac{\mu_0}{2} R\sigma\omega \int_0^{\pi} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\mu_0 R\sigma\omega$$ 方向：沿x方向

写成矢量式：$\vec{B}_o = \frac{2}{3}\mu_0 R\sigma\vec{\omega}$

练习 (P_{281} 10. 7)：已知：R、θ、σ、ω 求：$\vec{B}_o = ?$



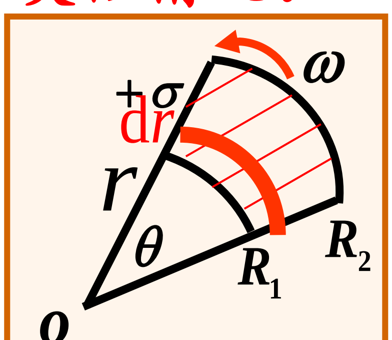
$$dq = \sigma r\theta dr \qquad dI = \frac{\omega dq}{2\pi} = \frac{\omega\sigma r\theta dr}{2\pi}$$

$$dB_o = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0\omega\sigma\theta dr}{4\pi}$$ 方向：$\odot$

$$B_o = \int dB_o = \frac{\mu_0\omega\theta}{4\pi}\int_0^R dr = \frac{1}{4\pi}\mu_0\sigma\theta\omega R$$ 方向：$\odot$

写成矢量式：$\vec{B}_0 = \frac{1}{4\pi}\mu_0\sigma\theta R\vec{\omega}$

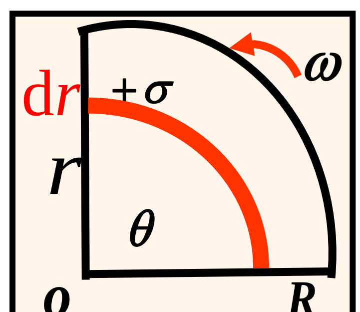
类似情况：



积分线由$R_1 \longrightarrow R_2$,

其它同上。

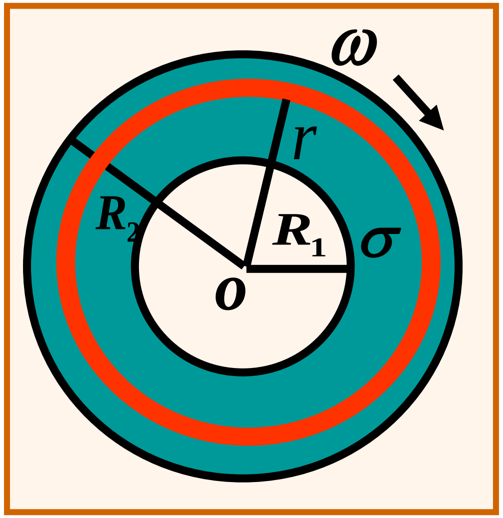
类似情况：



θ=90,°

其它同上。

例5：带电圆环（R_1、R_2、σ）顺时针旋转（ω）求$\vec{P}_m$



解：$\mathrm{d}q = \sigma \cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}I = \frac{\omega \mathrm{d}q}{2\pi} = \sigma\omega r \mathrm{d}r$$

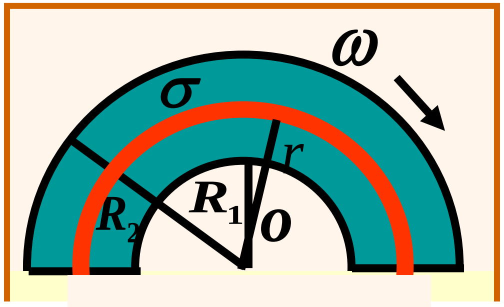
$$\mathrm{d}P_m = \pi r^2 \mathrm{d}I = \sigma\pi\omega r^3 \mathrm{d}r$$ 方向：$\otimes$

$$P_m = \int \mathrm{d}P_m = \int_{R_1}^{R_2} \sigma\pi\omega r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\sigma\omega(R_2^4 - R_1^4)$$

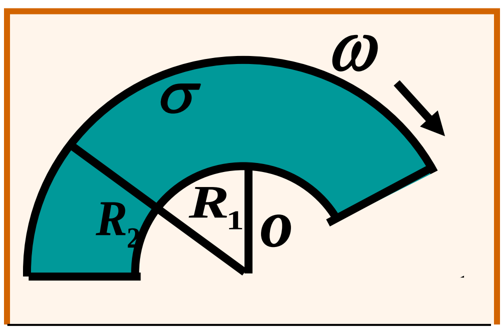
方向：$\otimes$ 矢量式：$$\vec{P}_m = \frac{\sigma\pi\vec{\omega}}{4}(R_2^4 - R_1^4)$$

类似情况：

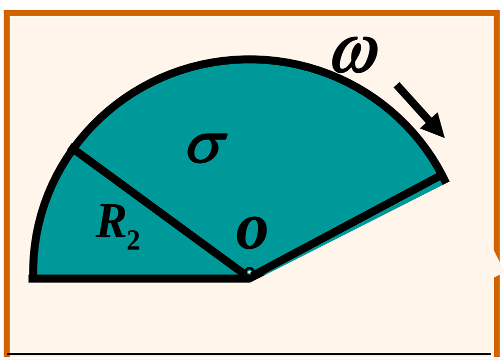
(1)



(2)



(3)



解： $\mathrm{d}q = \sigma \cdot \pi r \cdot \mathrm{d}r$

$\longrightarrow \mathrm{d}I = \dfrac{\omega \mathrm{d}q}{2\pi} \longrightarrow \mathrm{d}P_m = \pi r^2 \mathrm{d}I$

$\longrightarrow P_m = \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} \mathrm{d}P_m$　　方向：$\otimes$

$\mathrm{d}q = \sigma \cdot r\theta \cdot \mathrm{d}r$　其它步骤同上

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{d}q = \sigma \cdot r\theta \cdot \mathrm{d}r \\ P_m = \displaystyle\int_0^{R_2} \mathrm{d}P_m \end{array} \right.$$

其它步骤同上

自学 P_{251} 例4：求载流直螺线管轴线上磁场

记住结果：

无限长载流直螺线管内的磁场：$\boxed{B=\mu_0 nI}$

（下讲用安培环路定理求解）

第三节　磁场的高斯定理和安培环路定理

一、磁场高斯定理

二、稳恒磁场的安培环路定理

三、安培环路定理的应用

一、磁场高斯定理

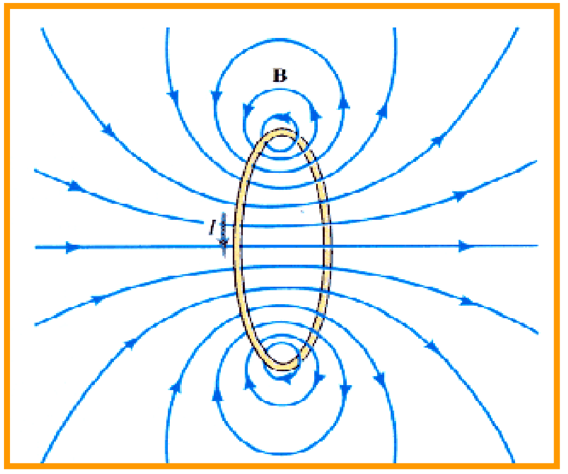
1. 磁感应线 $\begin{cases} \text{切向：该点 } \vec{B} \text{ 方向} \\ \text{疏密：正比于该点 } \vec{B} \text{ 的大小} \end{cases}$

特点：

(1) 为闭合曲线或两端伸向无穷远；

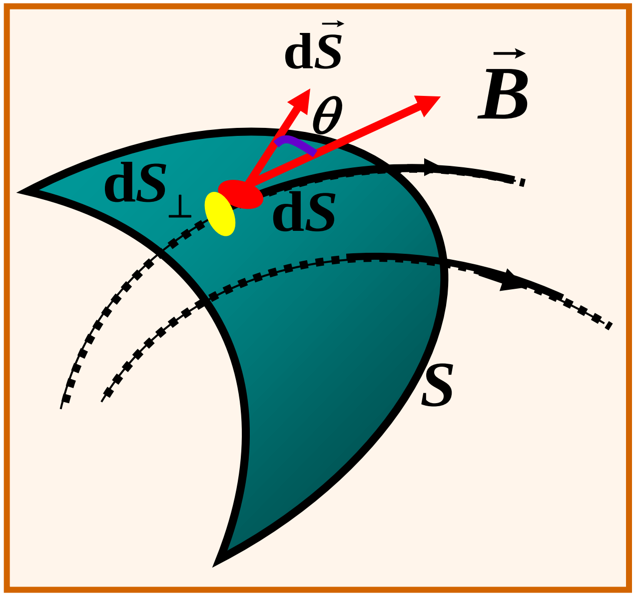
(2) 与载流回路互相套联；

(3) 任意两条磁感应线不相交。



2. 磁通量

定义:通过磁场中某给定面的磁感应线的总条数



单位:韦伯（Wb）

用微元分析法求磁通量

（以平代曲，以不变代变）

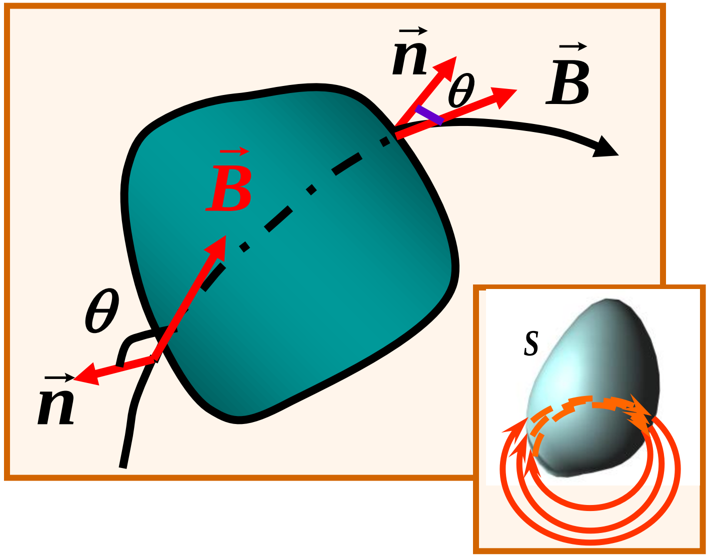
$$\mathrm{d}\phi_m = B\mathrm{d}S_{\perp} = B\cos\theta\mathrm{d}S$$

$$= \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \longrightarrow \text{通过dS的磁通量}$$

通过S的磁通量: $\boxed{\phi_m = \int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$

特例: $\vec{B}$为匀强磁场，S为平面,设$\vec{B}$与$\vec{S}$夹角为θ，则:

$$\phi_m = \int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_S B\cos\theta\mathrm{d}S = BS\cos\theta$$



封闭曲面：$\phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

对封闭曲面，规定外法向为正

进入的磁感应线 $\phi_m < 0$

穿出的磁感应线 $\phi_m > 0$

3. 磁场的高斯定理

穿过磁场中任意封闭曲面的磁通量为零：$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$

磁场是**无源场** $\begin{cases} \text{磁感应线闭合成环，无头无尾。} \\ \text{不存在磁单极。} \end{cases}$