第五章 离散时间信号与系统的时域分析

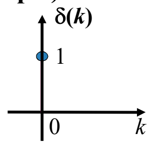
主讲教师：郭爱
主讲课程：信号与系统

5.1 基本离散时间信号

目录

♣ 单位脉冲（**Unit Sample**）

$$\delta(k)=\begin{cases}1 & (k=0)\\ 0 & (k\neq 0)\end{cases}$$



对任意序列$f(k)$有：

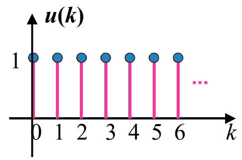
$f(k)\delta(k)=f(0)\delta(k)$

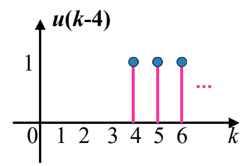
$f(k)\delta(k-m)=f(m)\delta(k-m)$ m是整数

♣ 单位阶跃序列

$$u(k)=\begin{cases}1 & (k\geq 0)\\ 0 & (k<0)\end{cases}$$

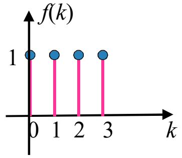
注意：$u(0)=1$





5.1 基本离散时间信号

例5.1-1 请分别用脉冲序列和阶跃序列写出$f(k)$的表达式



解：$f(k)=u(k)-u(k-4)$

单位脉冲序列和单位阶跃序列的关系：

$$u(k)=\delta(k)+\delta(k-1)+\delta(k-2)+\cdots+\delta(k-m)+\cdots$$

$$\boxed{u(k)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(k-m)}$$

任意序列$f(k)$和单位脉冲序列的关系：

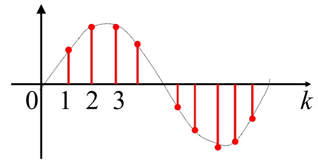
$$\boxed{f(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)\delta(k-m)}$$

$$f(k)=\cdots+f(-2)\delta(k+2)+f(-1)\delta(k+1)+f(0)\delta(k)+f(1)\delta(k-1)+f(2)\delta(k-2)+\cdots$$

5.1 基本离散时间信号

♣ 正弦序列

$$f(k)=A\cos(\Omega_0 k+\phi)$$



$$f(k)=A\cos(\Omega_0 k+2n\pi+\phi)=A\cos[\Omega_0(k+\frac{2n\pi}{\Omega_0})+\phi]$$

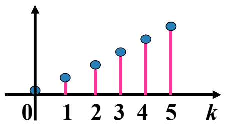
♣ 虚指数序列

$$f(k)=e^{j\omega_0 k}=\cos\omega_0 k+j\sin\omega_0 k$$

5.1 基本离散时间信号

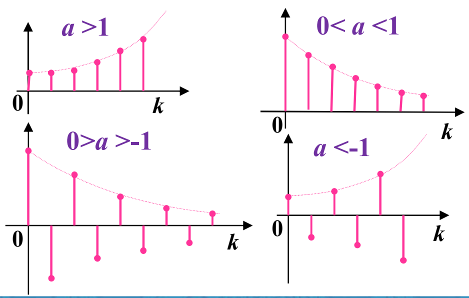
♣ 斜变序列

$R(k)=ku(k)$



♣ 指数序列

$f(k)=a^k u(k)$



5.2 离散时间系统的描述

例5.2-1 费班纳西数列(Fibonacci)

13世纪意大利数学家Fibonacci提出一个有趣的数学题目：假定每对兔子每个月可以生育一对小兔，新生的小兔要隔月才具有生育能力，若第一个月只有一对新生小兔，求第个k月兔子对的数目是多少？

{0,1,1,2,3,5,8…}

分析：

$y(k)$表示第个k月兔子对的数目，

且已知$y(0)=0$　$y(1)=1$

第k个月时：

应有$y(k-2)$对兔子具有生育能力，

因此这部分兔子对数增加为$2y(k-2)$，

还有$[y(k-1)-y(k-2)]$对兔子未能生育

所以　$y(k)=2y(k-2)+[y(k-1)-y(k-2)]$

$y(k)=y(k-1)+y(k-2)$

离散系统：

激励与响应均为离散时间信号的系统称为离散系统。

$f(k) \longrightarrow$ 离散时间系统 $\longrightarrow y(k)$

一、 离散时间系统的分类

与连续时间系统的分类相似，对离散系统的分类也可分为：

线性的和非线性的、时变的和非时变的、因果的和非因果的。

二、 离散时间系统的模型

例5.2-2 银行存款利息

某人每月月初定期在银行存入一定数量的存款，设第k个月时存入款项为$f(k)$，银行每月以利率β支付利息，利息按复利计算，试计算第k个月时的本金$y(k)$(假定第个月存款已存)。

分析：

设第k个月时本金$y(k)$，

应包括三部分：

(1)第k-1个月时的本金$y(k-1)$

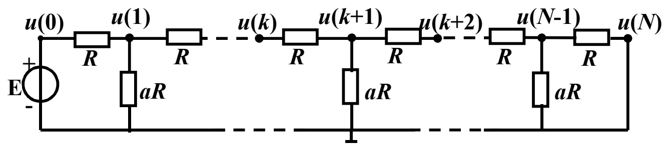
(2)本金$y(k-1)$在一个月内利息$\beta y(k-1)$

(3)第k个月存入的存款$f(k)$

所以　$y(k)= y(k-1) + \beta y(k-1) +f(k)$

即　$y(k)-(1+ \beta)y(k-1)= f(k)$

例5.2-3 电阻梯形网络



解：对网络中第k+1个结点的结点电压方程

$$\left(\frac{2}{R}+\frac{1}{aR}\right)u(k+1)-\frac{1}{R}u(k)-\frac{1}{R}u(k+2)=0$$

$$u(k+2)-\frac{2a+1}{a}u(k+1)+u(k)=0$$

自变量k为电 阻 网络中结点顺序的编号。

★常系数差分方程的解法

- 时域经典法

  求解差分方程

- 离散卷积法

  利用齐次解得零输入解，再利用卷积和求零状态解。

- 变换域法（Z变换法）
- 迭代法

例5.2-4 某线性系统的差分方程为:

$y(k)-ay(k-1)=f(k)$

输入$f(k)=\delta(k)$ 初始值$y(-1)=0$

求$k\geq0$时 $y(k)=?$

解: $y(k)=ay(k-1)+f(k)$

$k=0$ $y(0)=ay(-1)+f(0)=0+\delta(0)=1$

$k=1$ $y(1)=ay(0)+f(1)=a+0=a$

$k=2$ $y(2)=ay(1)+f(2)=aa+0=a^2$

………

差分方程的一般形式:

1. 向后形式的差分方程(右移序列的差分方程)

$$y(k)+a_1y(k-1)+\cdots+a_ny(k-n)=b_0f(k)+b_1f(k-1)+\cdots+b_mf(k-m)$$

2. 向前形式的差分方程(左移序列的差分方程)

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_0y(k)$$
$$=b_mf(k+m)+b_{m-1}f(k+m-1)+\cdots+b_0f(k)$$

差分方程的阶数:

输出序列中自变量的最高序号和最低序号的差数。

5.3 离散时间系统的传输算子和系统模拟

$$\underbrace{(E^n+a_{n-1}E^{n-1}+a_{n-2}E^{n-2}+\ldots+a_2E^2+a_1E+a_0)}_{D(E)}y(k)$$

$$=\underbrace{(b_mE^m+b_{m-1}E^{n-1}+b_{m-2}E^{m-2}+\ldots+b_2E^2+b_1E+b_0)}_{N(E)}f(k)$$

所以　$D(E)y(k)=N(E)f(k)$

$$y(k)=\frac{N(E)}{D(E)}f(k)$$　令：$H(E)=\dfrac{N(E)}{D(E)}$　传输算子

所以　$y(k)=H(E)f(k)$

传输算子$H(E)$作用输入序列$f(k)$，把它转换为输出序列$y(k)$

$$f(k)\longrightarrow\boxed{H(E)}\longrightarrow y(k)$$

★ 离散时间系统的传输算子

定义：算子E 表示把序列向前推进一个时间间隔的移位运算。

$E[f(k)]=f(k+1)$　　$E^2[f(k)]=f(k+2)$　　…　　$E^n[f(k)]=f(k+n)$

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_0y(k)$$
$$=b_mf(k+m)+b_{m-1}f(k+m-1)+\cdots+b_0f(k)$$

算子方程:

$$(E^n+a_{n-1}E^{n-1}+a_{n-2}E^{n-2}+\ldots+a_2E^2+a_1E+a_0)y(k)$$
$$=(b_mE^m+b_{m-1}E^{n-1}+b_{m-2}E^{m-2}+\ldots+b_2E^2+b_1E+b_0)f(k)$$

例5.3-1：已知一个离散系统的传输算子 $H(E)=\dfrac{E}{E^2+3E+2}$
请写出该系统的差分方程。

解：设输入序列是$f(k)$，输出序列是$y(k)$，
根据传输算子的定义有：

$$y(k)=H(E)f(k)=\frac{E}{E^2+3E+2}f(k)$$

$$(E^2+3E+2)y(k)=Ef(k)$$

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=f(k+1)$$

或 $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k-1)$

例5.3-2 已知一个离散系统的传输算子 $H(E)=\dfrac{1}{E}$

请写出该系统的差分方程。

解：设输入序列是 $f(k)$，输出序列是 $y(k)$，

根据传输算子的定义有：

$$y(k)=H(E)f(k)=\frac{1}{E}f(k)$$

$$Ey(k)=f(k)$$

$$y(k+1)=f(k)$$

或 $y(k)=f(k-1)$

$$E^{-1}f(k)=f(k-1)$$
$$E^{-2}f(k)=f(k-2)$$
$$---$$
$$E^{-m}f(k)=f(k-m)$$

单位延时器

$f(k)\rightarrow \boxed{1/E} \rightarrow y(k)=f(k-1)$

★离散时间系统的模拟

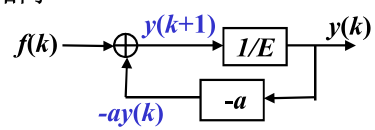
单位延时器：

具有记忆功能，其作用是将输入信号延时一个时间单位后输出。

$f(k)\rightarrow \boxed{1/E} \rightarrow y(k)=f(k-1)$

加法器和数乘器与连续时间系统的相同

一阶系统：$y(k+1)+ay(k)=f(k)$



例5.3-3 设描述某离散时间系统的差分方程是

$$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)+3f(k-1)$$

$$E^{-1}f(k)=f(k-1)$$
$$E^{-2}f(k)=f(k-2)$$

求系统的传输算子 $H(E)$

解：算子形式的方程是 $(1+3E^{-1}+2E^{-2})y(k)=(1+3E^{-1})f(k)$

$$y(k)=\frac{1+3E^{-1}}{1+3E^{-1}+2E^{-2}}f(k)$$

系统的传输算子 $H(E)=\dfrac{1+3E^{-1}}{1+3E^{-1}+2E^{-2}}=\dfrac{E+3}{E^{2}+3E+2}$

例5.3-4 设描述某离散时间系统的差分方程是

$$y(k)+4y(k-1)+4y(k-2)=f(k)+3f(k-1)$$

求系统的传输算子 $H(E)$，并画出该系统的模拟框图和信号流图。

解：算子形式的方程是

$$(1+4E^{-1}+4E^{-2})y(k)=(1+3E^{-1})f(k)$$

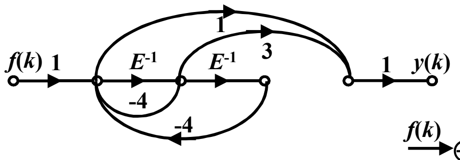
$$y(k)=\frac{1+3E^{-1}}{1+4E^{-1}+4E^{-2}}f(k)$$

系统的传输算子 $H(E)=\dfrac{1+3E^{-1}}{1+4E^{-1}+4E^{-2}}$

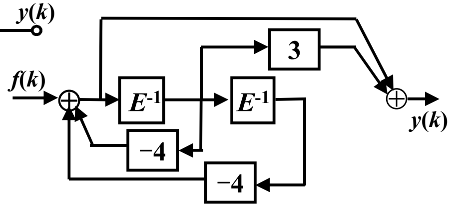
5.3 离散时间系统的传输算子和系统模拟

系统的传输算子 $H(E)=\dfrac{1+3E^{-1}}{1+4E^{-1}+4E^{-2}}$

将E看成s用**Mason**公式得到模拟的信号流图



模拟框图



5.4 离散系统的零输入响应

♣ 零输入响应

$(E^n+a_{n-1}E^{n-1}+a_{n-2}E^{n-2}+\dots+a_2E^2+a_1E+a_0)y(k)=0$的解。

对E多项式因式分解：

$(E-\gamma_1)(E-\gamma_2)(E-\gamma_3)\dots(E-\gamma_n)y(k)=0$ (1)

$(E-\gamma_i)y(k)=0 \quad i=1,2,3,\dots,n$ 的解满足方程(1)

$y(k+1)-\gamma_i y(k)=0$

$\gamma_i=\frac{y(k+1)}{y(k)}$ 等比数列，所以 $y(k)=A_i\gamma_i^k$

A_i是待定系数

因此(1)式的解为：$y_x(k)=C_1\gamma_1^k+C_2\gamma_2^k+C_3\gamma_3^k+\dots+C_n\gamma_n^k$

其中：C_1、C_2、…、C_n有初始条件决定。

$(E^n+a_{n-1}E^{n-1}+\dots+a_2E^2+a_1E+a_0)y(k)=(b_mE^m+b_{m-1}E^{n-1}+\dots+b_2E^2+b_1E+b_0)f(k)$

全响应=零输入响应+零状态响应，

即：$y(k)=y_x(k)+y_f(k)$

♣ 零输入响应

输入f(t)为零时，有初始状态引起的响应。

初始条件

例5.4-1 已知某线性系统的差分方程为：$y(k)-ay(k-1)=f(k)$

输入$f(k)=\delta(k)$，试确定初始条件。

解：$y(k)=ay(k-1)+f(k)$

$k=-2 \quad y(-2)=ay(-3)+f(-2)=ay(-3)$

$k=-1 \quad y(-1)=ay(-2)+f(-1)=ay(-2)$

$k=0 \quad y(0)=ay(-1)+f(0)$

$k=1 \quad y(1)=ay(0)+f(1)$

$k=2 \quad y(2)=ay(1)+f(2)$

………

对于右移序列的差分方程：

$y(k)+a_1y(k-1)+\dots+a_Ny(k-N)=f(k)$

零输入响应的初始条件为：

$y(-1)$，$y(-2)$，…，$y(-N)$

5.4 离散系统的零输入响应

例5.4-2 已知某线性系统的差分方程为:

$y(k+1)-by(k)=f(k)$

输入$f(k)=\delta(k)$，试确定初始条件。

解: $y(k+1)=by(k)+f(k)$

$k=-2$ $y(-1)=by(-2)+f(-2)=by(-2)$

$k=-1$ $y(0)=by(-1)+f(-1)=by(-1)$

$k=0$ $y(1)=ay(0)+f(0)$

$k=1$ $y(2)=ay(1)+f(1)$

$k=2$ $y(3)=ay(2)+f(2)$

………

对于左移序列的差分方程:

$y(k+N)+a_{N-1}y(k+N-1)+\ldots+a_0y(k)=f(k)$

零输入响应的初始条件为:

$y(0)$，$y(1)$，…，$y(N-1)$

5.4 离散系统的零输入响应

例5.4-4 若某系统的差分方程为$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)$

初始值$y(-1)=-1$，$y(-2)=1.5$，试求系统的零输入响应$y_x(k)$。

解: 令$f(k)=0$，k变为$k+2$方程变为:

$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=0$

算子形式 $(E^2+3E+2)y(k)=0$

$(E+2)(E+1)y(k)=0$

所以 $y_x(k)=C_1(-2)^k+C_2(-1)^k$

初始条件有:

$y_x(-1)=y(-1)=-1$

$y_x(-2)=y(-2)=1.5$

代入初始条件有:

$$\begin{cases} y_x(-1)=C_1(-2)^{-1}+C_2(-1)^{-1}=-1 \\ y_x(-2)=C_1(-2)^{-2}+C_2(-1)^{-2}=1.5 \end{cases}$$

解得:$C_1=-2$ $C_2=2$

所以$y_x(k)=-2(-2)^k+2(-1)^k$ $k\geq 0$

5.4 离散系统的零输入响应

例5.4-3 已知某线性系统的输入$f(k)=\delta(k)$，试确定初始条件。

其差分方程为: $y(k+2)-ay(k+1)-by(k)=f(k+1)+cf(k)$

解: $y(k+2)=ay(k+1)+by(k)+f(k+1)+cf(k)$

$k=-2$ $y(0)=ay(-1)+by(-2)+f(-1)+cf(-2)$

$=ay(-1)+by($

$k=-1$ $y(1)=ay(0)+by($

$=ay(0)+by($

$k=0$ $y(2)=ay(1)+by(0)$

$=ay(1)+by(-1$

………

差分方程式如:

$y(k+L)+\ldots+a_0y(k)=b_Sf(k+S)+\ldots+b_0f(k)$

则零输入响应的初始条件$y(k)$中的序号应满足:

$k<L-S$

5.4 离散系统的零输入响应

♠ 对于重根的情况

$(E-\gamma_1)^2y(k)=0$

解的形式为: $y_x(k)=\gamma_1^k(c_1+c_2k)$

$(E^n+a_{n-1}E^{n-1}+a_{n-2}E^{n-2}+\ldots+a_2E^2+a_1E+a_0)y(k)=0$的解。

对E多项式因式分解:

$(E-\gamma_1)^m(E-\gamma_{m+1})\ldots(E-\gamma_n)y(k)=0$

解的形式为:

$y_x(k)=\gamma_1^k(C_1+C_2k+\ldots+C_mk^{m-1})+C_{m+1}\gamma_{m+1}^k+\ldots+C_n\gamma_n^k$

其中: C_1、C_2、…、C_n有初始条件决定。

5.4 离散系统的零输入响应

例5.4-5 若描述某离散时间系统的差分方程为

$$y(k)+6y(k-1)+12y(k-2)+8y(k-3)=f(k)$$

试写出系统的零输入响应$y_x(k)$的形式。

解:令$f(k)=0$，k变为$k+3$

方程变为: $y(k+3)+6y(k+2)+12y(k+1)+8y(k)=0$

算子形式 $(E^3+6E^2+12E+8)y(k)=0$

$$(E+2)^3y(k)=0$$

所以 $y_x(k)=(C_1+C_2k+C_3k^2)(-2)^k$

5.4 离散系统的零输入响应

例5.2-6 已知某离散系统的传输算子为: $H(E)=\dfrac{E(7E-2)}{(E-0.5)(E-0.2)}$

初始条件$y_x(0)=2$，$y_x(1)=4$， 试求系统的零输入响应$y_x(k)$。

解: $H(E)$的极点为 $\gamma_1=0.5$ $\gamma_2=0.2$

所以零输入响应$y_x(k)=C_1(0.5)^k+C_2(0.2)^k$

确定 C_1、C_2

代入初始条件 $y_x(0)=2$;$y_x(1)=4$ 有:

$$\begin{cases} y_x(0)=C_1+C_2=2 \\ y_x(1)=0.5C_1+0.2C_2=4 \end{cases}$$

解得:$C_1=12$ $C_2=-10$

所以$y_x(k)=12(0.5)^k-10(0.2)^k$ $k\geq 0$

5.4 离散系统的零输入响应

♠ 传输算子$H(E)$与零输入响应的关系

$$\underbrace{(E^n+a_{n-1}E^{n-1}+a_{n-2}E^{n-2}+\dots+a_2E^2+a_1E+a_0)}_{D(E)}y(k)$$

$$=\underbrace{(b_mE^m+b_{m-1}E^{n-1}+b_{m-2}E^{m-2}+\dots+b_2E^2+b_1E+b_0)}_{N(E)}f(k)$$

$$H(E)=\frac{N(E)}{D(E)}$$

零输入响应是的解 $D(E)y(k)=0$

所以传输算子的分母$D(E)=0$的根，即$H(E)$的极点决定零输入响应的形式。

5.4 离散系统的零输入响应

例5.4-7 已知某系统的差分方程为 $y(k+3)+6y(k+2)+12y(k+1)+8y(k)=u(k)$

初始值为$y(1)=1$；$y(2)=2$；$y(3)=-23$，求系统的零输入响应。

解：(1)先求出初始条件

$y(k+3)=-6y(k+2)-12y(k+1)-8y(k)+u(k)$

$k=-3$ $y(0)=-6y(-1)-12y(-2)-8y(-3)+u(-3)$

$k=-2$ $y(1)=-6y(0)-12y(-1)-8y(-2)+\boxed{u(-2)}$

$k=-1$ $y(2)=-6y(1)-12y(0)-8y(-1)+\boxed{u(-1)}$

$k=0$ $y(3)=-6y(2)-12y(1)-8y(0)+\boxed{u(0)}$

说明:$y(2)$、$y(1)$、$y(0)$与外加激励无关。仅由初始条件引起的。 $y(3)$与外加激励有关，是激励与初始条件共同决定的，不能用它来确定零输入响应。即零输入响应的边界条件应为$y(0)$ 、$y(1)$、$y(2)$

5.4 离散系统的零输入响应

将初始值$y(1)=1$、$y(2)=2$、$y(3)=-23$ 代入

$$y(k+3)+6y(k+2)+12y(k+1)+8y(k)=u(k)$$

得$y(0)=0$。

算子形式 $(E^3+6E^2+12E+8)y(k)=0$

$$(E+2)^3y(k)=0$$

所以 $y_x(k)=(C_1+C_2k+C_3k^2)(-2)^k$

确定C_1、C_2、C_3

代入初始条件 $y(0)=0;y(1)=1;y(2)=2$有：

$$\begin{cases} y_x(0)=C_1=0 \\ y_x(1)=C_1(-2)+C_2(-2)+C_3(-2)=1 \\ y_x(2)=C_1(-2)^2+2C_2(-2)^2+4C_3(-2)^2 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} C_1=0 \\ C_2=-4/5 \\ C_3=3/4 \end{cases}$$

$$\therefore y_x(k)=-\frac{5}{4}k(-2)^k+\frac{3}{4}k^2(-2)^k$$

5.5 离散系统的单位响应

系统的算子形式的差分方程为：$(E-r)y(k)=Ef(k)$

令$f(k)=\delta(k)$时，$y_f(k)=h(k)$，故有：$(E-r)h(k)=E\delta(k)$

$h(k+1)-r\,h(k)=\delta(k+1)$

$h(k+1)=r\,h(k)+\delta(k+1)$ （1）

根据系统的因果性知，当$k\le-1$时，有$h(k)=0$

所以对(1)式有：

$k=-1$时 $h(0)=r\,h(-1)+\delta(0)=r\times0+1=1$

$k=0$时 $h(1)=r\,h(0)+\delta(1)=r\times1+0=r$

$k=1$时 $h(2)=r\,h(1)+\delta(2)=r\times r+0=r^2$

$k=2$时 $h(3)=r\,h(2)+\delta(3)=r\times r^2+0=r^3$

…

$\boxed{h(k)=r^k}$

因此系统的单位响应为：

$h(k)=r^k u(k)$

$$H(E)=\frac{E}{E-r}\longrightarrow h(k)=r^k u(k)$$

♣ 单位响应$h(k)$

输入为单位脉冲序列$\delta(k)$时的零状态响应，简称单位响应。

例5.5-1： 若系统的传输算子为$H(E)=\dfrac{E}{E-r}$，求系统的单位响应$h(k)$。

解:设系统的输入序列为$f(k)$，输出序列为$y(k)$

根据传输算子的定义：$y(k)=H(E)f(k)$

$$\therefore y(k)=\frac{E}{E-r}f(k)$$

系统的算子形式的方程为：$(E-r)y(k)=Ef(k)$

例5.5-2： 若系统的传输算子为 $H(E)=\dfrac{E}{(E-r)^2}$

求系统的单位响应$h(k)$。

解:设系统的输入序列为$f(k)$，输出序列为$y(k)$

根据传输算子的定义：$y(k)=H(E)f(k)$

$$\therefore y(k)=\frac{E}{(E-r)^2}f(k)$$

系统的算子形式方程为：

$$(E-r)^2y(k)=Ef(k)$$

令$f(k)=\delta(k)$时，$y_f(k)=h(k)$，故有：

$$(E-r)^2h(k)=E\delta(k)$$

5.5 离散系统的单位响应

$(E-r)^2h(k)=E\delta(k)$

$(E-r)[(E-r)\,h(k)]=E\delta(k)$

令$h_1(k)=(E-r)\,h(k)$

则有：$(E-r)h_1(k)=E\delta(k)$

根据上例的结论有：

$h_1(k)=r^ku(k)$

因而 $(E-r)\,h(k)=r^ku(k)$

$h(k+1)-r\,h(k)=r^ku(k)$

$h(k+1)=r\,h(k)+r^ku(k)$

上式中：k=-1时

$h(0)=rh(-1)+r^{-1}u(-1)=r\times0+r^{-1}\times0=0$

k=0时

$h(1)=rh(0)+r^0u(0)=r\times0+1\times1=1$

k=1时

$h(2)=rh(1)+r^1u(2)=r\times1+r=2r$

k=2时

$h(3)=rh(2)+r^2u(3)=r\times2r+r^2=3r^2$

…

$h(k)=kr^{k-1}$

系统的单位响应为:$h(k)=kr^{k-1}u(k)$

5.5 离散系统的单位响应

求单位响应$h(k)$的步骤：

1、将$H(E)$除以E得到$\dfrac{H(E)}{E}$

2、将$\dfrac{H(E)}{E}$展开成部分分式和的形式；

3、将上面得到的部分分式展开式两边都乘以E，得到如下展开式：

$$H(E)=\sum_{i=1}^{g}H_i(E)=\sum_{i=1}^{g}\frac{A_iE}{(E-r_i)^{n_i}}$$

其中：A_i为部分分式法确定的系数，n_i为极点r_i的阶数

5.5 离散系统的单位响应

$$H(E)=\frac{E}{(E-r)^2}\longrightarrow h(k)=kr^{k-1}u(k)$$

同理可得：

$$H(E)=\frac{E}{(E-r)^3}\longrightarrow h(k)=\frac{k(k-1)}{2!}r^{k-2}u(k)$$

$$H(E)=\frac{E}{(E-r)^n}\longrightarrow h(k)=\frac{k(k-1)\ldots(k-n+2)}{(n-1)!}r^{k-n+1}u(k)$$

5.5 离散系统的单位响应

4、根据以下规则写出各$H_i(E)$对应的单位响应的分量$h_i(k)$；

$$H(E)=\frac{E}{E-r}\longrightarrow h(k)=r^ku(k)$$

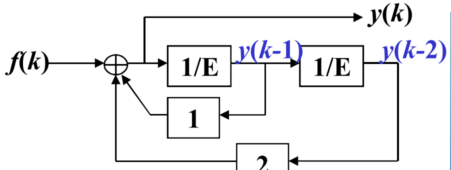
$$H(E)=\frac{E}{(E-r)^n}\longrightarrow h(k)=\frac{k(k-1)\ldots(k-n+2)}{(n-1)!}r^{k-n+1}u(k)$$

5、求出系统的单位响应$h(k)$

$$h(k)=\sum_{i=1}^{g}h_i(k)$$

5.5 离散系统的单位响应

例5.5-3:　求所示离散系统的单位响应$h(k)$。



解:由加法器的输出得到差分方程:

$y(k)=y(k-1)+2y(k-2)+f(k)$

$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$

算子方程为: $(1-E^{-1}-2E^{-2})y(k)=f(k)$

系统的传输算子为:

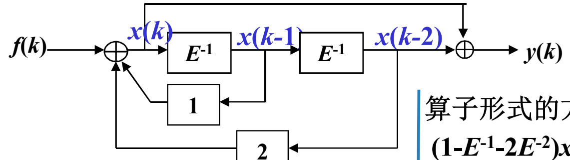
$$H(E)=\frac{1}{1-E^{-1}-2E^{-2}}$$

$$H(E)=\frac{E^2}{E^2-E-2}$$

$$\frac{H(E)}{E}=\frac{E}{E^2-E-2}=\frac{E}{(E-2)(E+1)}$$

5.5 离散系统的单位响应

例5.5-4:　求所示离散系统的单位响应$h(k)$。



解: (1)求传递算子$H(E)$

引入中间变量$x(k)$

由加法器的输出可得:

$x(k)=x(k-1)+2x(k-2)+f(k)$

$x(k)-x(k-1)-2x(k-2)=f(k)$

算子形式的方程为:

$(1-E^{-1}-2E^{-2})x(k)=f(k)$

又因为$y(k)=x(k)+x(k-2)$

$y(k)=(1+E^{-2})x(k)$……(2)

由(1)式和(2)式得系统传输算子:

$$H(E)=\frac{1+E^{-2}}{1-E^{-1}-2E^{-2}}$$

5.5 离散系统的单位响应

$$\frac{H(E)}{E}=\frac{E}{(E-2)(E+1)}=\frac{2/3}{E-2}+\frac{1/3}{E+1}$$

$$\therefore H(E)=\frac{2}{3}\frac{E}{E-2}+\frac{1}{3}\frac{E}{E+1}$$

$$H(E)=\frac{E}{E-r}\longrightarrow h(k)=r^k u(k)$$

$$h(k)=[\frac{2}{3}\cdot 2^k+\frac{1}{3}\cdot(-1)^k]u(k)$$

5.5 离散系统的单位响应

$$H(E)=\frac{1+E^{-2}}{1-E^{-1}-2E^{-2}}=\frac{E^2+1}{E^2-E-2}$$

2、单位响应$h(k)$

$$\frac{H(E)}{E}=\frac{E^2+1}{E(E^2-E-2)}=\frac{E^2+1}{E(E-2)(E+1)}=\frac{-1/2}{E}+\frac{5/6}{E-2}+\frac{2/3}{E+1}$$

$$\therefore H(E)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\frac{E}{E-2}+\frac{2}{3}\frac{E}{E+1}$$

$$H(E)=\frac{E}{E-r}\longrightarrow h(k)=r^k u(k)$$

$$h(k)=-\frac{1}{2}\delta(k)+[\frac{5}{6}\cdot 2^k+\frac{2}{3}\cdot(-1)^k]u(k)$$

另一种结果

$$H(E)=-\frac{2}{3}\frac{1}{E+1}+\frac{5}{3}\frac{1}{E-2}$$

$$h(k)=[-\frac{2}{3}\cdot(-1)^{k-1}+\frac{5}{3}\cdot 2^{k-1}]u(k-1)$$

5.5 离散系统的单位响应

例5.5-5　设描述离散系统的差分方程为:

$y(k+3)-1.2y(k+2)+0.45y(k+1)-0.05y(k)=11f(k+3)-3f(k+2)+0.25f(k+1)$

求系统的单位响应$h(k)$

解:算子形式的方程为

$(E^3-1.2E^2+0.45E-0.05)y(k)=(11E^3-3E^2+0.25E)f(k)$

系统的传输算子为:

$$H(E)=\frac{E(11E^2-3E+0.25)}{E^3-1.2E^2+0.45E-0.05}=\frac{E(11E^2-3E+0.25)}{(E-0.2)(E-0.5)^2}$$

$$\frac{H(E)}{E}=\frac{11E^2-3E+0.25}{(E-0.2)(E-0.5)^2}=\frac{1}{E-0.2}+\frac{10}{E-0.5}+\frac{5}{(E-0.5)^2}$$

5.5 离散系统的单位响应

$$H(E)=\frac{E}{E-0.2}+\frac{10E}{E-0.5}+\frac{5E}{(E-0.5)^2}$$

$$H(E)=\frac{E}{E-r}\longrightarrow h(k)=r^k u(k)$$

$$H(E)=\frac{E}{(E-r)^2}\longrightarrow h(k)=kr^{k-1}u(k)$$

所以系统的单位响应

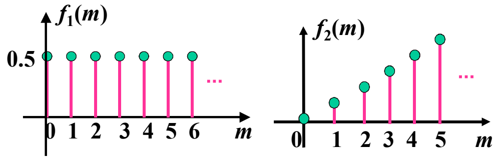
$$h(k)=[0.2^k+10\cdot(0.5)^k+5k(0.5)^{k-1}]u(k)$$

5.6 离散信号的卷积和

例5.6-2 设两个离散序列 $f_1(k)=0.5u(k)$ $f_2(k)=ku(k)$

用图解的方法求$f_1(k)*f_2(k)$

解：1、将自变量k变为m，画出序列$f_1(m)$和$f_2(m)$的波形



$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_1(m)f_2(k-m)$$

2、选择$f_2(m)$波形，翻转后得到$f_2(-m)$的波形

离散信号的卷积和定义是 $f_1(k)*f_2(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_1(m)f_2(k-m)$

例5.6-1 设两个离散序列

$f_1(k)=a^k u(k)$ (a是常数，且$a\neq1$)

$f_2(k)=u(k)$ 求$f_1(k)*f_2(k)$

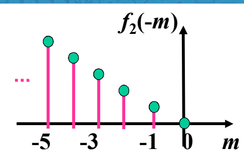
等比数列求和公式：首项是a_1、公比是q，前k项之和为S_k

$$S_k=\frac{a_1(1-q^k)}{1-q}$$

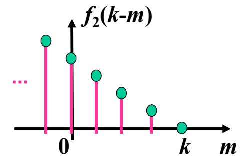
解：根据卷积的定义

$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_1(m)f_2(k-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a^m u(m)u(k-m)$$

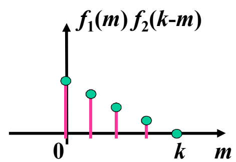
$$=\sum_{m=0}^{k}a^m\cdot u(k)=\frac{1-a^{k+1}}{1-a}\cdot u(k)$$



3、将$f_2(-m)$波形右移的k个单位得到$f_2(k-m)$的波形



4、将$f_2(k-m)$的波形和$f_1(m)$的波形相乘



5、令m从-∞到+∞取值，然后一一相加。

$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_1(m)f_2(k-m)=\sum_{m=0}^{k}0.5(k-m)=k(k+1)u(k)$$

5.6 离散信号的卷积和

讨论 $f(k)*\delta(k)=f(k)$

$$f(k)*\delta(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)\delta(k-m)$$

$$\boxed{f_1(k)*f_2(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_1(m)f_2(k-m)}$$

$$=\cdots+f(-2)\delta(k+2)+f(-1)\delta(k+1)$$
$$+f(0)\delta(k)+f(1)\delta(k-1)+f(2)\delta(k-2)+\cdots$$
$$=f(k)$$

同理 $f(k)*\delta(k\text{-}m)=f(k-m)$　　m是整数

5.7 离散系统的零状态响应

例5.7-1: 已知离散系统的输入序列和单位响应如下:

$f(k)=u(k)-u(k-5)$ $\qquad$ $h(k)=(0.5)^k u(k)$

求系统的零状态响应。

解: $y_f(k)=f(k)*h(k)=[u(k)-u(k-5)]*h(k)=u(k)*h(k)-u(k-5)*h(k)$

$$u(k)*h(k)=u(k)*(0.5)^k u(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u(m)\cdot 0.5^{k-m}u(k-m)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}0.5^{k-m}u(k)=\frac{0.5^k[1-0.5^{-(k+1)}]}{1-0.5^{-1}}u(k)=(2-0.5^k)u(k)$$

根据时不变特性知: $u(k-5)*h(k)=(2-0.5^{k-5})u(k-5)$

所以系统的零状态响应为: $y_f(k)=(2-0.5^k)u(k)-(2-0.5^{k-5})u(k-5)$

$\delta(k)$ → LTI离散系统 → $h(k)$

时不变性 $\delta(k-m)$ → LTI离散系统 → $h(k-m)$

齐次性 $f(m)\delta(k-m)$ → LTI离散系统 → $f(m)h(k-m)$

叠加性 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)\delta(k-m)$ → LTI离散系统 → $\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)h(k-m)$

$f(k)*\delta(k)=f(k)$ → LTI离散系统 → $f(k)*h(k)=y_f(k)$

零状态响应: $y_f(k)=f(k)*h(k)$

例5.4-2: 设描述离散系统的差分方程为:

$y(k)-0.7y(k-1)+0.12y(k-2)=2f(k)-f(k-1)$

若输入$f(k)=(0.2)^k u(k)$, 初始条件为$y_x(0)=8$, $y_x(1)=3$

求系统的零输入响应、零状态响应和完全响应。

解: 1、求系统的传输算子$H(E)$

算子形式的方程为: $(1-0.7E^{-1}+0.12E^{-2})y(k)=(2-E^{-1})f(k)$

系统的传输算子为:

$$H(E)=\frac{2-E^{-1}}{1-0.7E^{-1}+0.12E^{-2}}=\frac{E(2E-1)}{E^2-0.7E+0.12}=\frac{E(2E-1)}{(E-0.3)(E-0.4)}$$

5.7 离散系统的零状态响应

2、求零输入响应$y_x(k)$

根据传输算子的极点知： $y_x(k)=c_1(0.3)^k+c_2(0.4)^k$

代入初始条件$y_x(0)=8$， $y_x(1)=3$ 有：

$$\left.\begin{aligned} c_1+c_2&=8 \\ 0.3c_1+0.4c_2&=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1=2 \quad c_2=6$$

零输入响应$y_x(k)=2(0.3)^k+6(0.4)^k \quad k\geq 0$

3、求系统单位响应$h(k)$

$$\frac{H(E)}{E}=\frac{2E-1}{(E-0.3)(E-0.4)}=\frac{4}{E-0.3}-\frac{2}{E-0.4}$$

5.7 离散系统的零状态响应

$$H(E)=\frac{4E}{E-0.3}-\frac{2E}{E-0.4}$$ 单位响应 $h(k)=[4\cdot(0.3)^k-2\cdot(0.4)^k]u(k)$

4、求零状态响应

$$y_f(k)=f(k)*h(k)=(0.2)^k u(k)*[4\cdot(0.3)^k-2\cdot(0.4)^k]u(k)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(0.2)^m u(m)\times[4\cdot(0.3)^{k-m}-2\cdot(0.4)^{k-m}]u(k-m)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}(0.2)^m\times[4\cdot(0.3)^{k-m}-2\cdot(0.4)^{k-m}]=\{12(0.3)^k-4(0.4)^k-6(0.2)^k\}u(k)$$

5、系统的完全响应

$$y(k)=y_x(k)+y_f(k)=2(0.3)^k+6(0.4)^k+12(0.3)^k-4(0.4)^k-6(0.2)^k$$

$$=14(0.3)^k+2(0.4)^k-3(0.2)^k \qquad k\geq 0$$