University Physics

大学物理

大学
物理

复习

§8.3　狭义相对论时空观

一．“同时”的相对性

二. 时间量度的相对性（时间膨胀）

普遍的法则是：动钟变慢　原时最短

$$\tau = \gamma \tau_0$$

三. 空间量度的相对性（动尺缩短）

$$l = l_0 / \gamma$$

洛仑兹变换的意义

★ 给出了对物理定律的约束条件：即物理定律在洛仑兹变换下的不变性。

这种不变性显示出物理定律对匀速直线运动的对称性，这种对称性也是自然界的一种基本对称性，即相对论的对称性。

一、牛顿力学必须改造

牛顿第二定律 $\vec{a} = \vec{F} / m$ → $v \to \infty$

X方向的分量： $a_x = F_x / m$

由洛仑兹速度变换 $v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - uv_x / c^2}$ 得：

加速度变换公式 $a'_x = \gamma^{-3} a_x /(1 - \frac{v_x u}{C^2})^2$

牛顿力学定律不满足洛仑兹不变性，不满足光速不变原理，必须加以改造。

二、改造牛顿力学的原则

1. 狭义相对性原理（对称性思想）的要求

改造后的力学定律必须是洛仑兹变换的不变式

2. 对应原理的要求

新理论应该包容那些在一定范围内已被证明是正确的旧理论，并在极限条件下过渡到旧理论。

即：　　相对论力学定律 $\xrightarrow{u<<c}$ 经典力学定律

改造牛顿力学的思路

牛顿力学是建立在伽利略时空观基础之上的，以伽利略时空观为基础定义了一套力学量, 如：速度、加速度、动量……，现在在相对论时空观的基础上建立相对论动力学，必须重新定义一套概念，如果仍要用以前的概念则必须重新赋于新的理解。

注意

$$\text{相对论力学量} \xrightarrow{u << c} \text{经典力学量}$$

新的物理量应使基本守恒定律继续成立

本讲主要内容

相对论质量

相对论动能

总能、静能

相对论动量

相对论动力学方程

质速关系

质能关系

相对论动量与能量关系

三、相对论质量

在相对论中，质量与惯性系的选择有关。

？？？

(1)时间、长度的测量都是相对的；质量的测量也应是相对，与惯性系的选择有关。

(2) 这可以从物体不能加速到光速这一客观实事中得到启发。

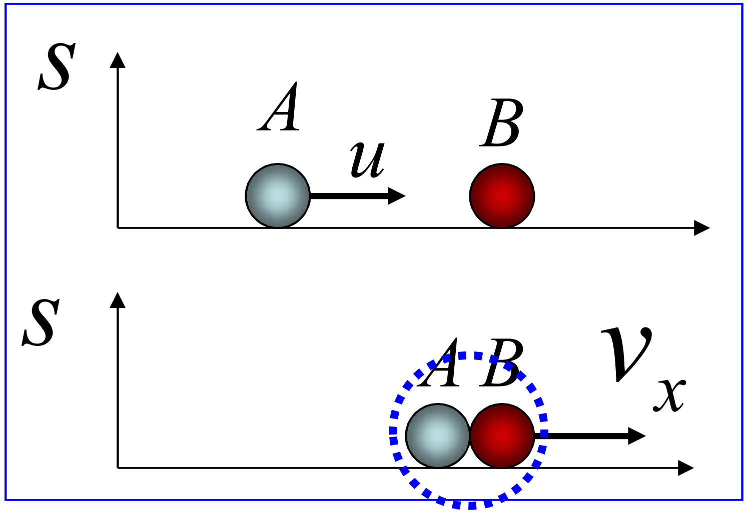
$$\boxed{\vec{a} = \vec{F} / m}$$

物体的质量随着它速率的增大而增大。

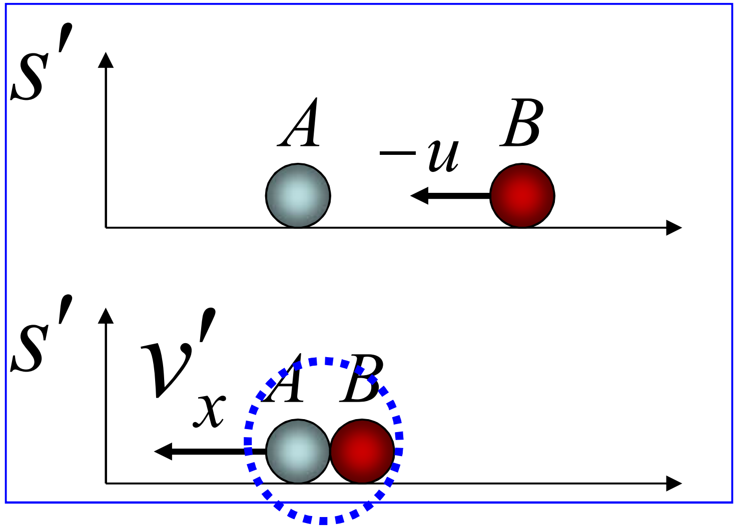
质速关系的推导

静系中：m_0　　　　动系中：$m(u)$　相对论质量

理想实验：全同粒子的完全非弹性碰撞



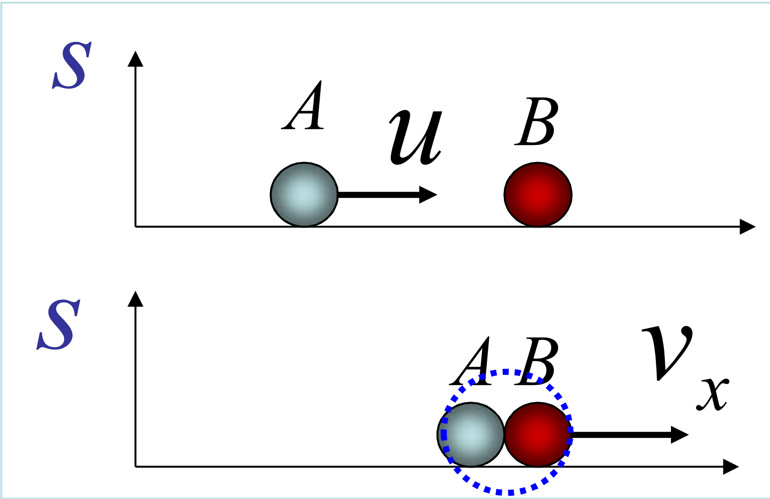
最初粒子B静止于 S 系



最初粒子A 静止于 S’ 系

在两坐标系中，粒子系统质量守恒、动量守恒。

最初粒子B静止于 S 系

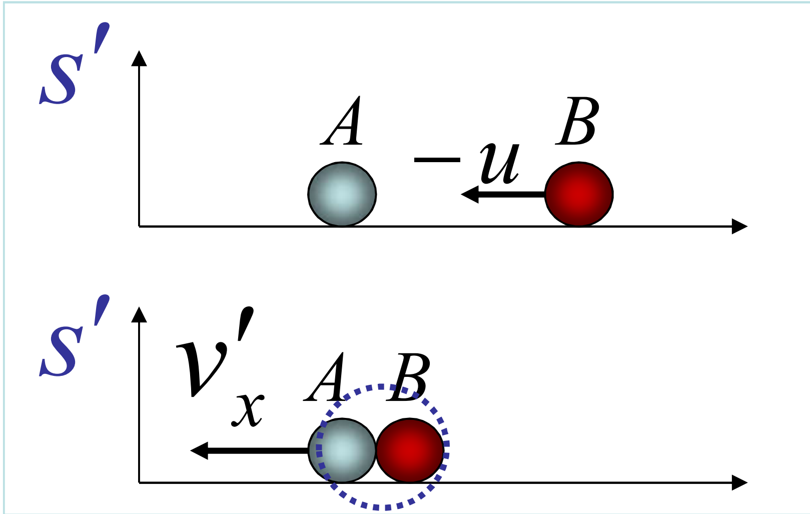


质量守恒：$m_0 + m(u) = M(v_x)$

动量守恒：$m(u)u = M(v_x)v_x$

解得：$$v_x = \frac{m(u)u}{m_0 + m(u)}$$

最初粒子A静止于 S’系



质量守恒：$m_0 + m(u) = M(v'_x)$

动量守恒：$-m(u)u = M(v'_x)v'_x$

$$v'_x = -\frac{m(u)u}{m_0 + m(u)}$$

$$v_x = \frac{m(u)u}{m_0 + m(u)}; \qquad v'_x = -\frac{m(u)u}{m_0 + m(u)}$$

代入洛仑兹速度变换：

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

得质速关系：

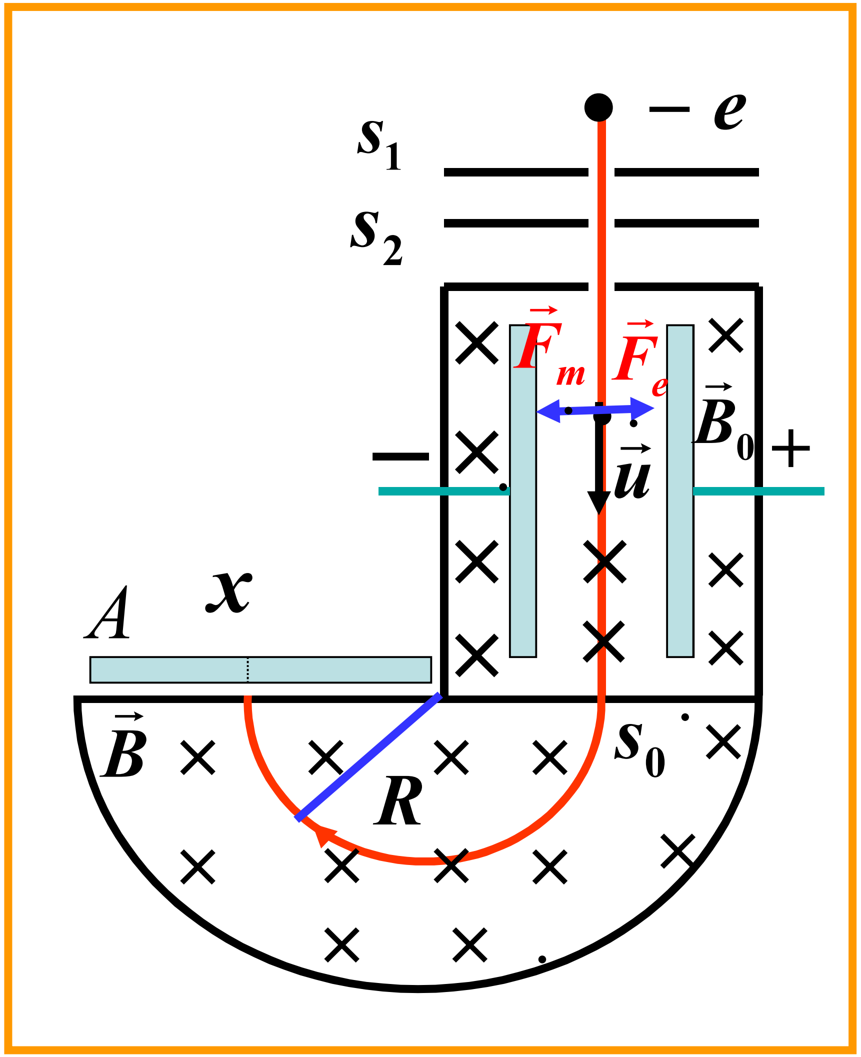
$$\boxed{m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma m_0}$$

$$\downarrow \quad u << c$$

满足对应原理的要求：

$$m(u) \to m_0$$

质速关系的实验验证



实验验证（质谱仪）：

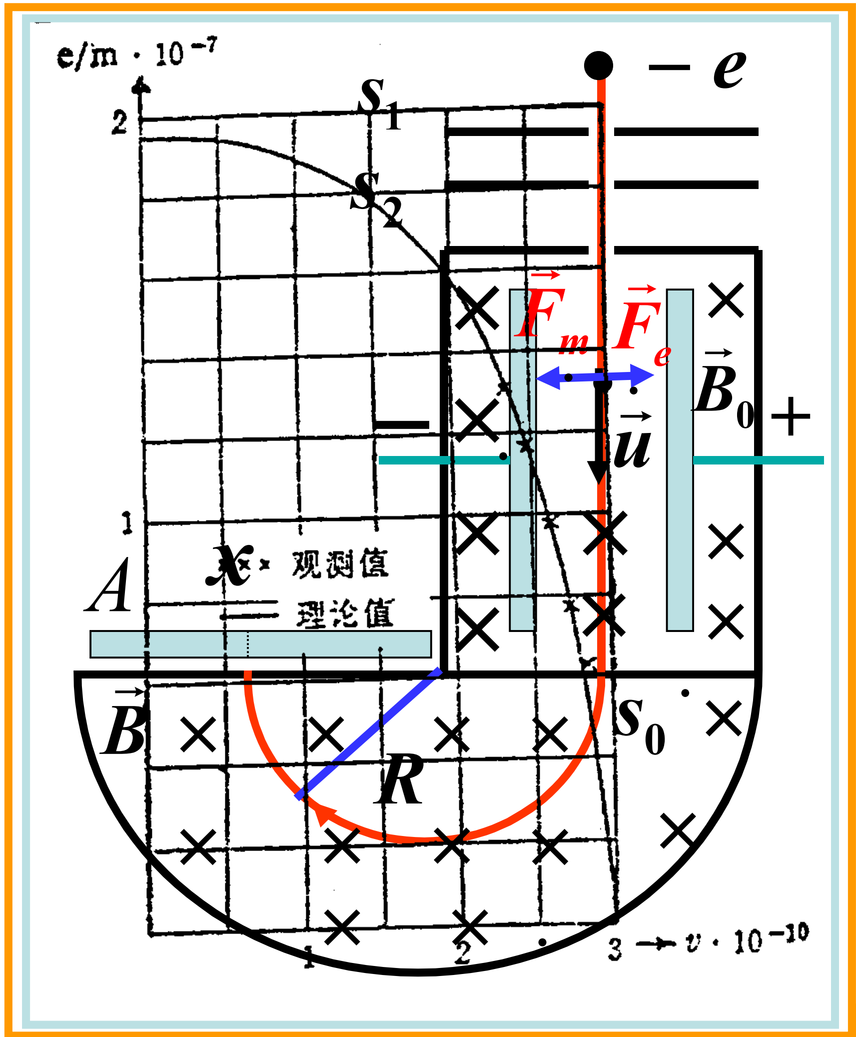
测高速电子的荷质比

由经典理论：

$$euB = \frac{mu^2}{R}$$

$$\frac{e}{m} = \frac{u}{BR} = \text{常数}$$

质速关系的实验验证



由相对论理论：

$$\frac{e}{m}=\frac{e}{\gamma m_0}=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\frac{e}{m_0}$$

当 $u\uparrow$ 时：$\dfrac{e}{m}\downarrow$

质量相对性的理解：

质量的定义：（1）物质所包含的量

（2）惯性大小的量度

经典力学中这两个定义对任何物体的质量给出相同的量值，因此我们就没有严格区分它们。

相对论中这两种质量的看待方式是不一样的。

一个物体随着速度的增加，其物质的量并不变化，因为它包含同样的原子，因而有相同摩尔数的物质。但是其惯性质量在增加，惯性质量是相对的。

四、相对论动量

动量定义式 $\vec{p} = m\vec{v}$ 在相对论力学中仍然有效：

$$\vec{p} = m(v)\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

$v << c \quad \gamma \to 1 \quad \vec{p} = m_0 \vec{v}$ 　满足对应原理

在相对论力学中仍然保留“力等于动量对时间的变化率”这一定义。

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m_0 \vec{v})}$$

相对论动力学基本方程

$v << c \quad \gamma \to 1 \quad \vec{F} = m_0 \vec{a}$

四、相对论动量

对质点而言：

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

（1）力既可以改变物体的速度，也可以改变物体的质量

（2）力与加速度 $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ 的方向一般不会相同；

（3）当$v<<c$时(此时$\mathrm{d}m/\mathrm{d}t=0$), $\vec{F}=m_0\vec{a}$ 满足对应原理。

五、相对论动能

相对论中仍然保留动能定理。 对质点：

$$\mathrm{d}E_k = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \quad = (m\,\mathrm{d}\vec{v} + \vec{v}\,\mathrm{d}m)\cdot\vec{v}$$

$$= mv\cdot\mathrm{d}v + v^2\,\mathrm{d}m$$

由 $m = m_0 \Big/ \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$, 有 $\mathrm{d}m = \dfrac{mv\,\mathrm{d}v}{c^2 - v^2}$

$$mv\mathrm{d}v = c^2\,\mathrm{d}m - v^2\,\mathrm{d}m \qquad \mathrm{d}E_k = c^2\,\mathrm{d}m$$

五、相对论动能

$$\mathrm{d}E_k = c^2\,\mathrm{d}m$$

$$E_k = \int_{m_0}^{m} c^2\,\mathrm{d}m = mc^2 - m_0c^2$$ 相对论动能

$$\boxed{E_k = mc^2 - m_0c^2} \xrightarrow{u \ll c} E_k = \frac{1}{2}m_0u^2$$

课外练习
推导

注意：

$$E_k \neq \gamma\frac{1}{2}m_0v^2$$

六、相对论能量

$$E_k = \int_{m_0}^{m} c^2 \,\mathrm{d}m = mc^2 - m_0 c^2$$

$E_0 = m_0 c^2$ 为 **静止能量**

$mc^2 = E_k + m_0 c^2$ 为**总能**

记作：$\boxed{E = mc^2}$ —— **质能关系**

质能关系的意义

1)　质能等当

质量是约束能量的形式，是能量的载体。质量、能量不可分割，没有脱离质量的能量，也没有无能量的质量。无论物质如何运动，二者只由常数 c^2 相联系。

2) 质能关系统一了质量守恒定律和能量守恒定律。

在经典物理中二者是分别发现的，互相独立的两条自然规律。在相对论中二者是统一的，能量守恒意味质量也一定守恒。

质能关系的意义

3） 质能关系的提出打开了核能宝库

核反应中能量守恒： $m_{01}c^2 + E_{K1} = m_{02}c^2 + E_{K2}$

$$E_{K2} - E_{K1} = (m_{01} - m_{02})c^2$$

$$\boxed{\Delta E = \Delta m_0 c^2}$$

核反应中释放的能量相应于一定的质量亏损。

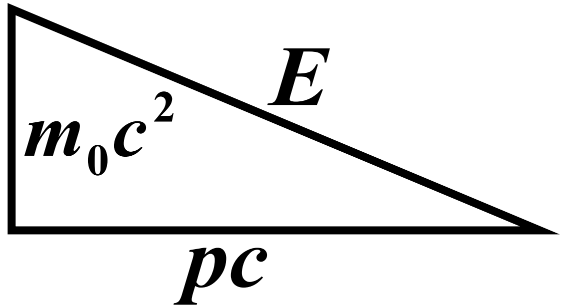
重核分裂、轻核聚合都会造成质量亏损，从而释放能量

应用：原子弹、氢弹、核电站 ……

七、相对论能量和动量之间的关系

由 $\vec{p} = m\vec{v}$，$E = mc^2$ 消去 m 得 $\vec{v} = \dfrac{c^2}{E}\vec{p} \rightarrow v^2 = \dfrac{c^4}{E^2}p^2$

于是 $E = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\dfrac{v}{c})^2}} = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{c^2}{E^2}p^2}}$



$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0{}^2c^4} \xrightarrow{v \ll c} \boxed{E_k = \frac{p^2}{2m_0}}$$

课外推导

小结

$$\boxed{m(u) = \gamma m_0}$$

$$\boxed{E_k = mc^2 - m_0c^2}$$

$$\boxed{m(u) = \gamma m_0}$$

$$\boxed{\vec{p} = m(v)\vec{v}}$$

$$\boxed{E_0 = m_0c^2}$$

$$\boxed{E = mc^2}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m_0\vec{v})}$$

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

练习1　一个静质量为 m_0 的粒子，以 $v=0.8c$ 的速率运动，并与静质量为 $3m_0$ 的静止粒子发生对心碰撞以后粘在一起，求合成粒子的静止质量。

问题：合成粒子的静止质量是 $4m_0$ 吗？

解：　设合成粒子的运动质量为 M，速率为 u，

由动量守恒和能量守恒：

$$mv = Mu \qquad (1)$$

$$3m_0c^2 + mc^2 = Mc^2 \qquad (2)$$

由于　$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-0.8^2}} = \frac{m_0}{0.6}$$

代入**(2)** 式得　$$M = 3m_0 + \frac{m_0}{0.6} = \frac{14}{3}m_0$$

再代入(1) 式得 $$u=\frac{mv}{M}=\frac{\frac{m_0}{0.6}\times 0.8c}{\frac{14}{3}m_0}=\frac{2}{7}c$$

又由 $$M=\frac{M_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$ 得

$$M_0=M\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{14}{3}m_0\sqrt{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2}\approx 4.47m_0$$

练习2 在什么速度下，粒子的动量等于其非相对论动量的两倍？又在什么速度下，粒子的动能等于其非相对论动能的两倍？

解： **(1)** 由题意

$$\frac{p}{p_0}=\frac{\gamma m_0 v}{m_0 v}=\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}=2$$

可得： $$v=\frac{\sqrt{3}}{2}c=0.866c$$

(2) 由题意 $$\frac{E_k}{E_{k0}}=\frac{(\gamma-1)m_0c^2}{\frac{1}{2}m_0v^2}=2$$

于是 $$\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}-1=\frac{v^2}{c^2}$$

得 $$v=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}c=0.786c$$

练习3 已知：一个电子的静能为 0.511MeV，经同步加速器加速后，能量增量为 20.00MeV，求：该电子质量与其静质量之比。

解：由题意

$$\Delta E = mc^2 - m_0c^2 = 20.00\text{MeV}$$

可得

$$\frac{m}{m_0} = \frac{mc^2}{m_0c^2} = \frac{m_0c^2 + \Delta E}{m_0c^2} = \frac{0.511 + 20}{0.511} = 40.1$$

练习4 观察者甲以 0.8c 速率相对于观察者乙运动，甲携带长 L，截面积 S，质量为 m 的棒，棒沿运动方向安放，求乙和甲测定的棒的密度之比。

解：棒相对于甲静止，甲测定的密度为： $\rho = \dfrac{m}{LS}$

棒相对于乙运动，设乙测定的 质量为 m'，

长度为 L'，截面积为 S'，有：

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad L' = \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot L \quad , \quad S' = S$$

乙测定的密度为： $\rho' = \dfrac{m'}{L'S'} = \dfrac{\gamma\ m}{\gamma^{-1} LS} = \gamma^2 \rho$

$$\therefore \frac{\rho'}{\rho} = \gamma^2 = \frac{1}{1 - 0.8^2} = \frac{25}{9} \approx 2.78$$

1.宇宙飞船相对于地面以速度 v 作匀速直线飞行，某一时刻飞船头部的宇航员向飞船尾部发出一个光讯号，经过 Δt （飞船上的钟）时间后，被尾部的接收器收到，则由此可知飞船的固有长度为

(A) $c \cdot \Delta t$

(B) $v \cdot \Delta t$

(C) $c \cdot \Delta t \cdot \sqrt{1-(v/c)^2}$

(D) $\dfrac{c \cdot \Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

[A]

2.把一个静止质量为 m_0 的粒子，由静止加速到 v=0.6c（c为真空中光速）需作的功等于

(A) $0.18\mathrm{m}_0c^2$　　(B) $0.25\mathrm{m}_0c^2$

(C) $0.36\mathrm{m}_0c^2$　　(D) $1.25\mathrm{m}_0c^2$

[B]

3.一均匀矩形薄板在静止时测得其长为a，宽度为 b ，质量为 m_0. 由此可算出其面积密度为m_0/ab. 假定该薄板沿长度方向以接近光速的速度 v 作匀速直线运动，此时再测算该矩形薄板的面积密度则为:

(A) $\dfrac{m_0\sqrt{1-(v/c)^2}}{ab}$.　　(B) $\dfrac{m_0}{ab\sqrt{1-(v/c)^2}}$.

(C) $\dfrac{m_0}{ab[1-(v/c)^2]}$.　　(D) $\dfrac{m_0}{ab[1-(v/c)^2]^{3/2}}$.

[C]

4.某核电站年发电量为 100亿度，它等于 36×10^{15}J 的能量，如果这是由核材料的全部静止能转化产生的，则需要消耗的材料的质量为:

(A) 0.4 Kg . (B) 0.8 Kg.

(C) 12×10^{7} Kg . (D) $(1/12) \times 10^{7}$Kg.

[A]

5.一个电子运动速 v=0.99c ,它的动能是:
(电子的静止能量为0.51MeV)

(A) 3.5MeV·

(B) 4.0MeV·

(C) 3.1MeV·

(D) 2.5MeV·

[C]

6.相对于地球的速度为 v 的一飞船，要到离地球为 5 光年的星球上去。若飞船的宇航员测得该旅程的距离为 3 光年，则 v 应为：

(A) $c/2$　　(B) $3c/5$

(C) $9c/10$　　(D) $4c/5$

[D]

7.坐标轴相互平行的两惯性系 S、S'，S 相对沿 ox 轴正方向以 v 匀速运动，在 S' 中有一根静止的刚性尺，测得它与 ox' 轴成 30° 角，与 ox 轴成 45° 角，则v应为：

(A) $2c/3$ (B) $c/3$

(C) $(2/3)^{1/2}c$ (D) $(1/3)^{1/3}c$

[C]

8.观察者甲、乙，分别静止在惯性系 S、S' 中， S' 相对 S 以 $\boldsymbol{u}$ 运动， S' 中一个固定光源发出一束光与 $\boldsymbol{u}$ 同向

(1)乙测得光速为 c .

(2)甲测得光速为 $c+u$;

(3)甲测得光速为 $c-u$ ；

(4)甲测得光相对于乙的速度为 $c-u$。

正确的答案是：

(A) (1),(2),(3);　　(B) (1),(4)

(C) (2),(3);　　(D) (1),(3),(4)

[B]

9.在惯性系中，两个静质量都是 m_0 的粒子，都以速度沿同一直线相向运动并碰撞，之后合并为一体，则其静止质量为：

(A) $2m_0$;　　(B) $2m_0\sqrt{1-(v/c)^2}$;

(C) $\dfrac{m_0}{2}\sqrt{1-(v/c)^2}$;　(D) $2m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$.

[D]

10. α粒子在加速器中被加速，当其质量为静止质量的 3 倍时，其动能为静止能量的：

（A）2倍.　　　　（B）3倍.

（C）4倍.　　　　（D）5倍

[A]

11.质子在加速器中被加速，当其动能为静止能量的 4 倍时，其质量为静止质量的

（A）5倍.　　（B）6倍.

（C）4倍.　　（D）8倍.

[A]

12．在惯性系 K 中，有两个事件同时发生在 x 轴上相距 1000m 的两点,而在另一惯性系 K' (沿轴方向相对于 K 系运动）中测得这两个事件发生的地点相距 2000m . 求在 K' 系中测得这两个事件的时间间隔.

解：根据洛仑兹力变换公式:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

可得： $$x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

在 K 系，两事件同时发生，t_1=t_2 则

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

$$\therefore \sqrt{1-(v/c)^2} = (x_2 - x_1)/(x'_2 - x'_1) = \frac{1}{2}$$

解得：$v = \sqrt{3}c/2.$

在 K' 系上述两事件不同时发生，设分别发生于 t'_1 和 t'_2 时刻,则

$$t'_1 = \frac{t_1 - vx_1/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad t'_2 = \frac{t_2 - vx_2/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

由此得 $$t'_1 - t'_2 = \frac{v(x_2 - x_1)/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$= 5.77 \times 10^{-6}\mathrm{s}$$