复习：惯性系中的力学定律

十六字诀

隔离物体——明确研究对象

具体分析——研究对象的运动情况和受力情况

选定坐标——参考系、坐标系、正方向

建立方程——分量式

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = ma_x \\ F_y = \dfrac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = ma_y \\ F_z = \dfrac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = ma_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_\tau = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma_\tau \\ F_n = m\dfrac{v^2}{R} = ma_n \end{cases}$$

非惯性系中

$$\vec{F}_{合} = \vec{F}_{真} + \vec{F}_{惯}$$

$$\vec{F}_{合} = \vec{F} + \vec{F}_0 = \vec{F} + (-m\vec{a}_0) = m\vec{a}'$$

§ 4.3 动量定理

一、质点的动量定理

1. 微分形式

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

任何力总是在一定时间内起作用!!

2. 积分形式

$$\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$$

令 $\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t$ —力的元冲量

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$$ —力的冲量

得：　$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}\mathrm{d}\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1=\Delta\vec{p}$

*质点所受合力的冲量等于质点动量的增量—动量定理

分量式：

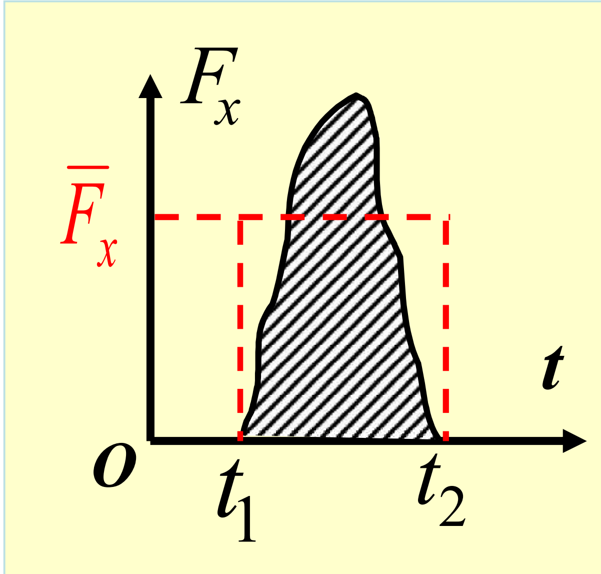
$$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t=\Delta p_x$$

$$I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y\mathrm{d}t=\Delta p_y$$

$$I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_z\mathrm{d}t=\Delta p_z$$

冲量和平均冲力　$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\overline{\vec{F}}\Delta t$

$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t=\overline{F}_x\Delta t\quad I_y=\overline{F}_y\Delta t\quad I_z=\overline{F}_z\Delta t$



冲量 $\vec{I}$ 是 $\vec{F}$ 对时间的累积效应，其效果在于改变物体的动量。

二、质点系动量定理

1.微分形式：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_{外}$$

2. 积分形式：

$$\vec{I}_{外}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{外}\mathrm{d}t=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}\mathrm{d}\vec{p}=\Delta\vec{p}$$

质点系所受外力矢量和的冲量等于质点系总动量的增量。

分量式：

$$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_{外x}\mathrm{d}t=\Delta p_x$$

$$I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_{外y}\mathrm{d}t=\Delta p_y$$

$$I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_{外z}\mathrm{d}t=\Delta p_z$$

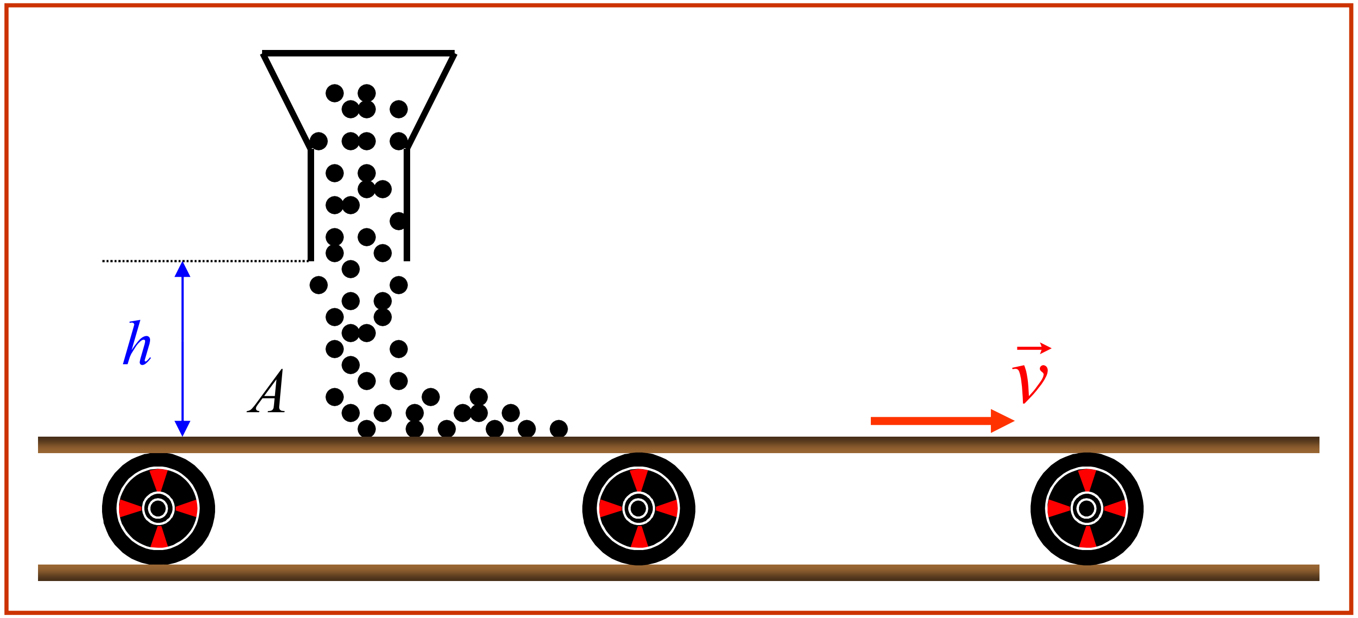
注意：

$$\vec{F}_{内}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i内}\equiv 0$$

$$\vec{I}_{内}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{内}\mathrm{d}t\equiv 0$$

质点系总动量的变化与内力的冲量无关。

[例1]　如图用传送带A输送煤粉，料斗口在A上方高h =0.5m处，煤粉自料斗口自由落在A上。设料斗口连续卸煤的流量为q =40kg·s^{-1}，A以v = 2.0m·s^{-1}的水平速度匀速向右移动。求装煤的过程中，煤粉对A的作用力的大小和方向。(不计相对传送带静止的煤粉质量)



[解]煤粉对*A*的作用力即单位时间内落下的煤粉给*A*的平均冲力。这个冲力大小等于煤粉单位时间内的动量改变量，方向与煤粉动量改变量的方向相反。

如何求煤粉动量的改变量？

设 Δt 时间内落下的煤粉质量为 Δm 则有

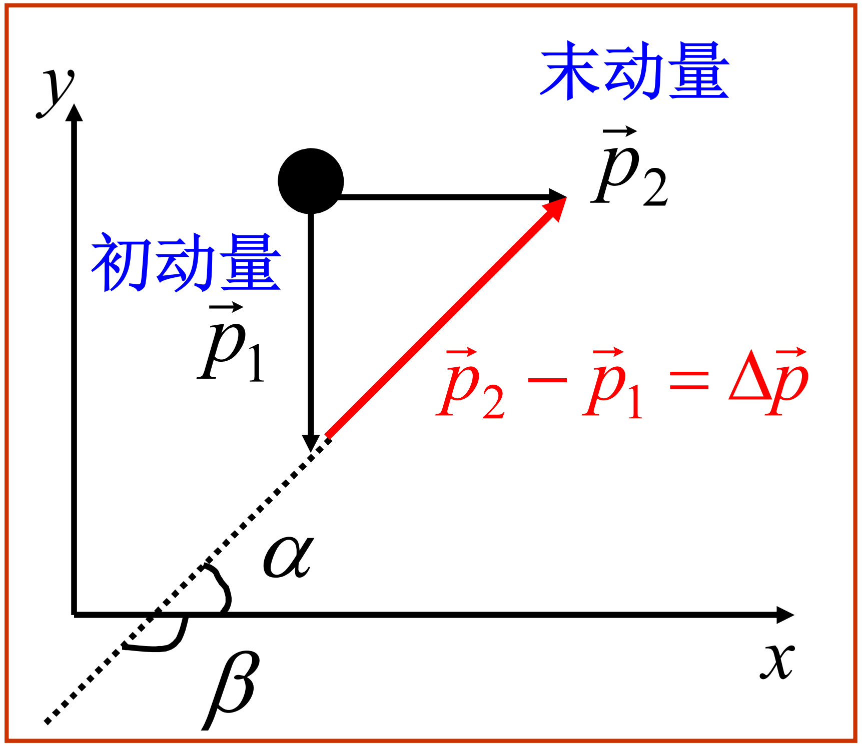
$$\Delta p_x = p_2 - 0 = \Delta m v$$

$$\Delta p_y = 0 - p_1 = 0 - (-\Delta m v')$$

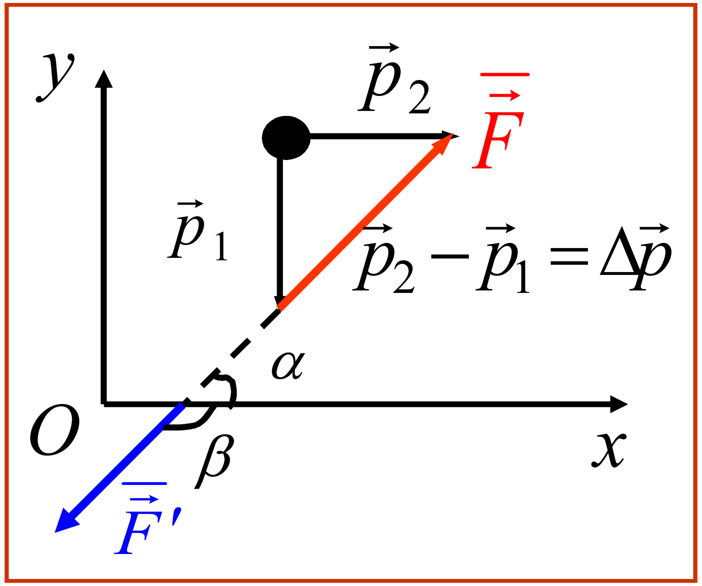
$$= \Delta m \sqrt{2gh}$$

由动量定理

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \bar{\vec{F}} \Delta t = \Delta \vec{p}$$



可得煤粉所受的平均冲力为



$$\overline{F}_x=\frac{\Delta p_x}{\Delta t}=\frac{\Delta mv}{\Delta t}=qv=80\ (\mathrm{N})$$

$$\overline{F}_y=\frac{\Delta p_y}{\Delta t}=q\sqrt{2gh}=125.2\ (\mathrm{N})$$

$$\overline{F}=\sqrt{\overline{F}_x{}^2+\overline{F}_y{}^2}=149\ (\mathrm{N})$$

与x轴的夹角　$\alpha=\mathrm{arctg}\dfrac{\overline{F}_y}{\overline{F}_x}=\mathrm{arctg}\dfrac{125.2}{80}=57.4^\circ$

煤粉给传送带的平均冲力为　$\overline{F}'=149\ (\mathrm{N})$

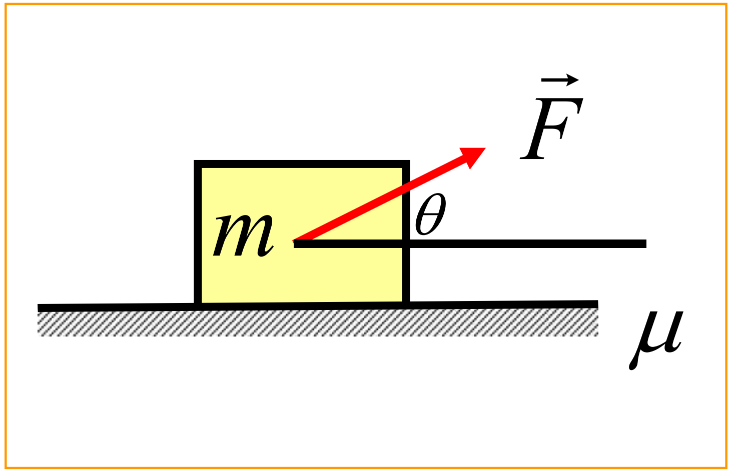
与x轴的夹角为　$\beta=180^\circ-57.4^\circ=122.6^\circ$

例2：

已知：$m = 1\text{kg} \quad v_0 = 0 \quad F = 1.12t \quad \theta = 37^\circ$

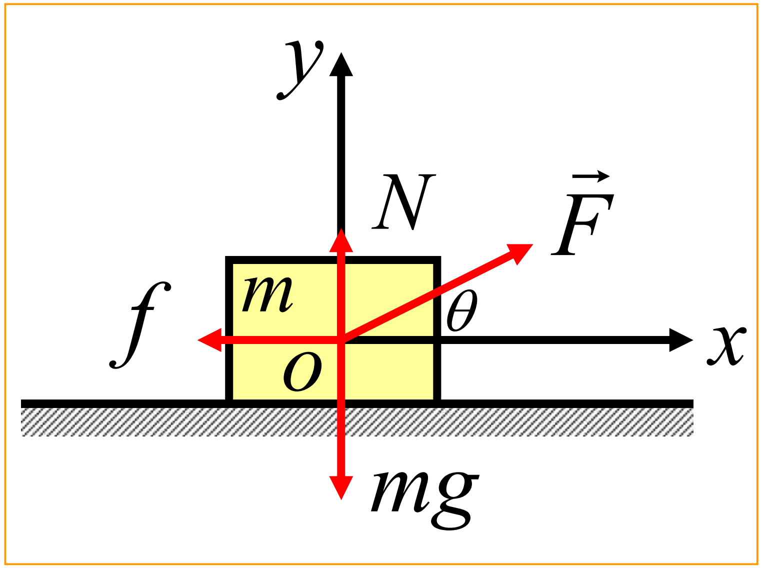
$\mu = 0.2 \quad g \approx 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

求： $t = 3\text{s}$ 时 $\vec{v} = ?$



请自行列方程。

解1：



$$F_y = N - mg + F\sin 37^\circ = 0$$

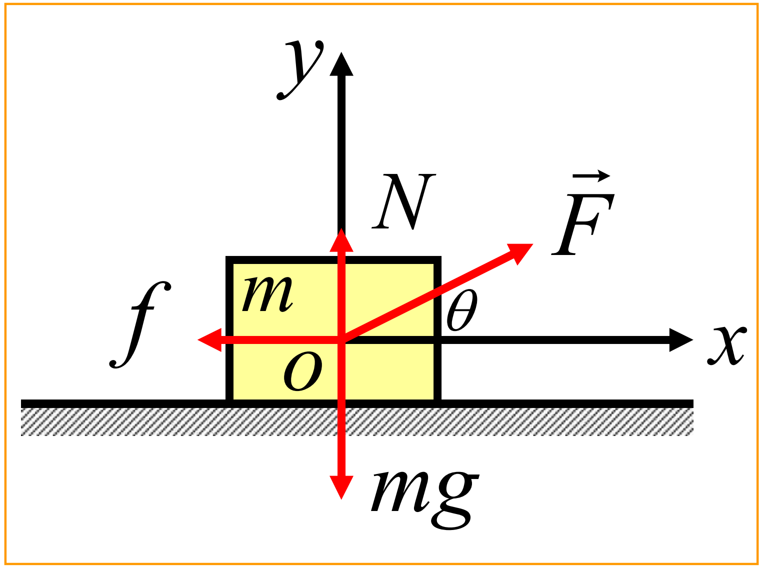
$$N = 10 - 0.672t \qquad (1)$$

$$f = \mu N = 2 - 0.1344t \qquad (2)$$

对不对？

$$F_x = F\cos 37^\circ - f = 1.03t - 2 \qquad (3)$$

$$\int_0^3 F_x \mathrm{d}t = \Delta m v_x = m v_3 \qquad (4)$$



(1): $N = 10 - 0.672\,t$ ？

$t\uparrow$, $F = 1.12t\uparrow$

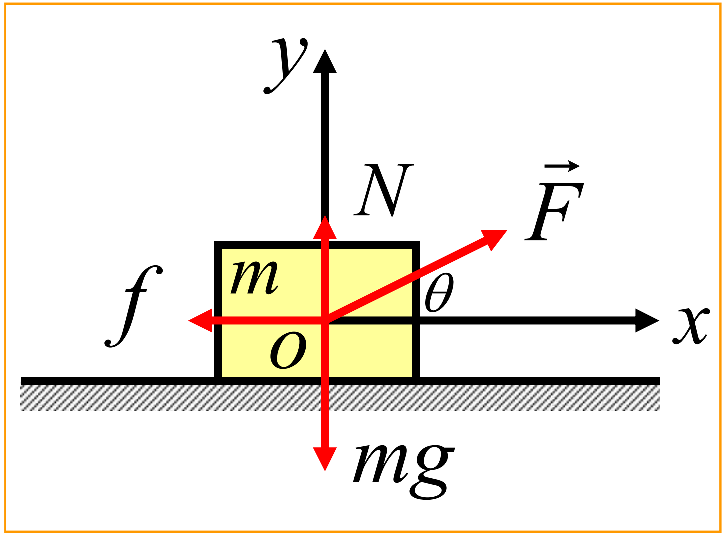
物体可能飞离桌面，

何时飞离？

令 $10 - 0.672t = 0$ 得： $t = 14.9\ \text{s}$

$$\begin{cases} N = 10 - 0.672t & (0 < t < 14.9\ \text{s}) \\ N = 0 & (t > 14.9\ \text{s}) \end{cases}$$

$t = 3\ \text{s}$ 时,尚未飞离，$\vec{v}$ 沿 x 方向.



$$(2):\quad f=\mu N=2-0.1344t$$?

静摩擦力达到最大值以前与正压力无关。物体何时开始运动？

$$F\cos\theta=\mu N$$

$$0.896t=2-0.1344t \qquad t=1.94s$$

$$\begin{cases} f=F\cos\theta=0.896t & (0<t<1.94) \\ f=\mu N=2-0.1344t & (1.94<t<14.9) \end{cases}$$

$$(3):\quad F_x=F\cos37^\circ-f=1.03t-2$$?

则： $$F_x=F\cos\theta-f=\begin{cases} 0 & (0\le t\le 1.94) \\ 1.03t-2 & (1.94\le t\le 14.9) \end{cases}$$

$$F_x = F\cos\theta - f = \begin{cases} 0 & (0 \le t \le 1.94) \\ 1.03t - 2 & (1.94 \le t \le 14.9) \end{cases}$$

(4): $\int_0^3 F_x \mathrm{d}t = \Delta m v_x = m v_3$?

$$\int_0^3 F_x \mathrm{d}t = 0 + \int_{1.94}^3 (1.03t - 2)\mathrm{d}t = m v_3$$

$$v_3 = 0.58 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$\vec{v}_3 = 0.58\,\vec{i} \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

通过本题体会存在变力作用时的动量定理应用

“地球是人类的摇篮，但是人类不能永远生活在摇篮里，开始他将小心翼翼地穿出大气层，然后便去征服太阳系……”

——齐奥尔科夫斯基

齐奥尔科夫斯基（Konstantin Tsiolkovsky，1857-1935）俄国科学家。对火箭研究作出杰出贡献。

$$v = v_e \ln \frac{m_e}{m_1}$$

$$v_{\mathrm{m}} = v_0 + v_{e1} \ln N_1 + \cdots + v_{en} \ln N_n$$

火箭飞行原理

人造卫星、宇宙飞船、航天飞机都是由火箭送入太空中的。

火箭工作的基本原理是质点系的动量守恒定律

火箭前进的动力来自火箭燃料燃烧喷出的气体产生的反冲推力

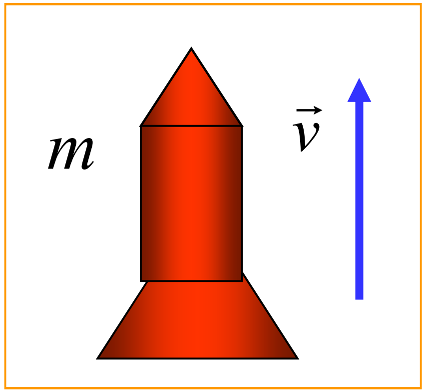
火箭在进入运行轨道前，质量不断减少——变质量系统

对变质量系统怎样运用动量守恒定律分析问题？

例：火箭的运动

火箭依靠排出其内部燃烧室中产生的气体来获得向前的推力。设火箭发射时的质量为m_0，速率为v_0，燃料烧尽时的质量为m'，气体相对于火箭排出的速率为v_e。不计空气阻力，求火箭所能达到的最大速率。

解： 火箭和燃气组成一个系统。



t时刻：　系统总质量为 m

系统总动量为 $\vec{p}_1 = m\vec{v}$

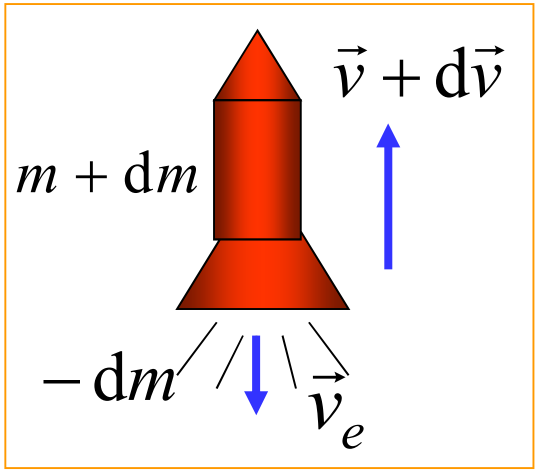
$t + \mathrm{d}t$时刻：

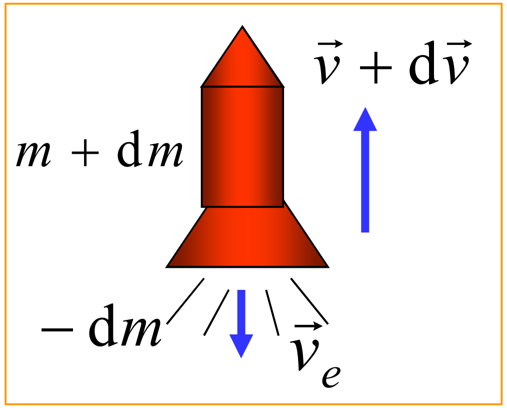
火箭质量为 $m + \mathrm{d}m \quad (\mathrm{d}m < 0)$

排出的燃气质量为 $-\mathrm{d}m$

火箭速度为 $\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}$

排出的燃气速度为 $\vec{v}_e + (\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v})$





系统的总动量为：

$$\vec{p}_2=(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})+(-\mathrm{d}m)(\vec{v}_e+\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})$$

$$=m\vec{v}+m\mathrm{d}\vec{v}-\vec{v}_e\mathrm{d}m$$

$\mathrm{d}t$时间内系统的动量增量为：

$$\mathrm{d}\,\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1=m\mathrm{d}\vec{v}-\vec{v}_e\mathrm{d}m\ =\vec{F}_{net}dt$$

$$\vec{F}_{net}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{dt}-\vec{v}_e\frac{\mathrm{d}m}{dt}$$

$$\vec{F}_{net} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e \frac{\mathrm{d}m}{dt}$$

火箭失去质量的速率

$$\vec{F}_{net} + \vec{v}_e \frac{\mathrm{d}m}{dt} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{dt}$$

具有力的量纲，称为火箭发动机的<u>推力</u>

令　$-R = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$　（火箭失去质量的速率）

则　$Rv_e = ma$　——第一火箭方程

$$\vec{F}_{net} + \vec{v}_e \frac{\mathrm{d}m}{dt} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{dt}$$

火箭竖直向上运动时，忽略空气阻力，外力为重力 mg 。取向上为正：

$$-mg - v_e \frac{\mathrm{d}m}{dt} = m\frac{\mathrm{d}v}{dt}$$

$$-mg\mathrm{d}t = m\mathrm{d}v + v_e \mathrm{d}m$$

设 t' 时刻燃料烧尽，对上式两边积分得

$$-\int_0^{t'} g\mathrm{d}t = \int_{v_0}^{v_\mathrm{m}} \mathrm{d}v + v_e \int_{m_0}^{m'} \frac{\mathrm{d}m}{m}$$

$$v_{\mathrm{m}} - v_0 = v_e \ln \frac{m_0}{m'} - gt'$$

第二火箭方程

$$v_{\mathrm{m}} = v_0 + v_e \ln \frac{m_0}{m'} - gt'$$

若火箭水平方向前进，水平方向不受重力：

$$v_{\mathrm{m}} = v_0 + v_e \ln \frac{m_0}{m'} \qquad \boxed{v_{\mathrm{m}} - v_0 = v_e \ln \frac{m_0}{m'}}$$

用增大喷气速度和增大质量比的方法可以提高火箭末速度。

多级火箭：$v_{\mathrm{m}} = v_0 + v_{e1}\ln N_1 + v_{e2}\ln N_2 + \cdots + v_{en}\ln N_n$

$1+1=2$	原始人	计数规则
$A^2+B^2=C^2$	毕达哥拉斯	勾股定理
$F_1x_1=F_2x_2$	阿基米德	杠杆原理
$e^{\ln N}=N$	纳皮尔	对数
$F=G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$	牛顿	万有引力
$\nabla^2 E=\dfrac{ku}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$	麦克斯韦	电磁波方程
$S=k\ln\Omega$	玻尔兹曼	熵公式
$\boxed{v=v_e\ln\dfrac{m_e}{m_1}}$	齐奥尔科夫斯基	火箭飞行原理
$E=mc^2$	爱因斯坦	质能公式
$\lambda=\dfrac{h}{mv}$	德布罗意	物质波波长

[例2] 铁轨平板车沿水平无摩擦轨道以 45 m/s速率运动。车上安装一个瞄准前方的加农炮以 625 m/s 速率发射质量为65-kg 炮弹。 炮车、炮和炮弹的总质量为3500 kg。必须发射多少颗炮弹才能使得炮车几乎停下来?

第一火箭方程

[解I] 变质量系统

$$\vec{F}_{\text{total}} + \vec{v}_{rel}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{F}_{x\,\text{total}} = 0, \quad \vec{v}_{rel} = v_{rel}\hat{i}, \quad \mathrm{d}\vec{v} = \mathrm{d}v\hat{i}$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}v}{v_e} \qquad \int_{v_i}^{0}\mathrm{d}v = v_{rel}\int_{M}^{M-nm}\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

$$n = \frac{M}{m}(1 - e^{-v_i/v_{rel}}) = \frac{3500}{65}(1 - e^{-45/625}) = 3.74 \approx 4$$

§4.4 动量守恒定律

一、动量守恒定律

由质点系动量定理： $\vec{F}_{外} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

当质点系所受外力的矢量和 $\vec{F}_{外} = 0$ 时，质点系动量的时间变化率为零 。即当质点系所受外力矢量和为零时，质点系的总动量不随时间变化。

孤立系统的总动量不随时间变化。

↓

不受外力作用且总质量不变的系统。

当 $\vec{F}_{外} = 0$ 时　$\vec{p} = M\vec{v}_c =$ 恒矢量

孤立系统的质心作匀速直线运动

思考：系统动量守恒条件能否为：$\vec{I}_{外} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{外} \mathrm{d}t = 0$ ？

注意：**(1)** 当 $\vec{F}_{外} \neq 0$时，系统总动量不守恒，但

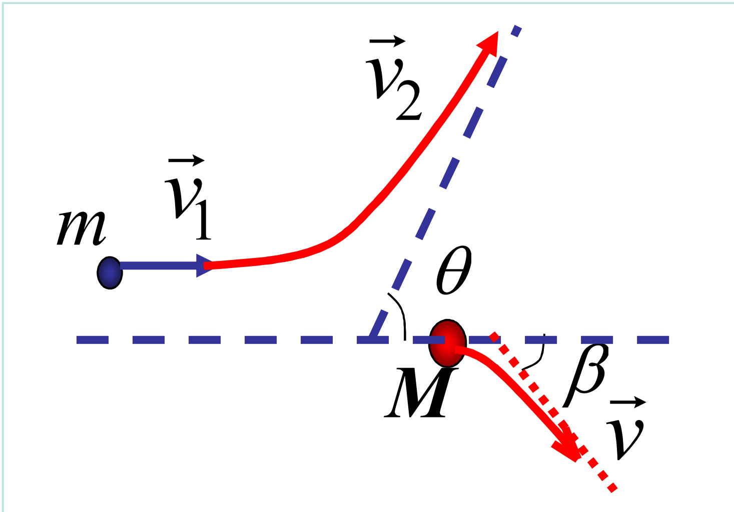
$$
\begin{cases}
F_{外x} = 0\text{时} & p_x = \sum_i m_i v_{ix} = \text{恒量} \\
F_{外y} = 0\text{时} & p_y = \sum_i m_i v_{iy} = \text{恒量} \\
F_{外z} = 0\text{时} & p_z = \sum_i m_i v_{iz} = \text{恒量}
\end{cases}
$$

(2) 若系统内力>>外力，以致外力可以忽略不计时，可以应用动量守恒定律处理问题。

(3) 式中各速度应对同一参考系而言。

二、动量守恒定律的应用

例题： α 粒子散射中，质量为m的α 粒子与质量为M的静止氧原子核发生“碰撞”。实验测出碰撞后，α 粒子沿与入射方向成 $\theta=72°$ 角方向运动，而氧原子核沿与 α 粒子入射方向成 $\beta=41°$ 角反冲，如图示，求“碰撞”前后α 粒子速率之比。



解： “碰撞”：相互靠近，由于斥力而分离的过程——散射。

对α粒子和氧原子核系统，

碰撞过程总动量守恒。

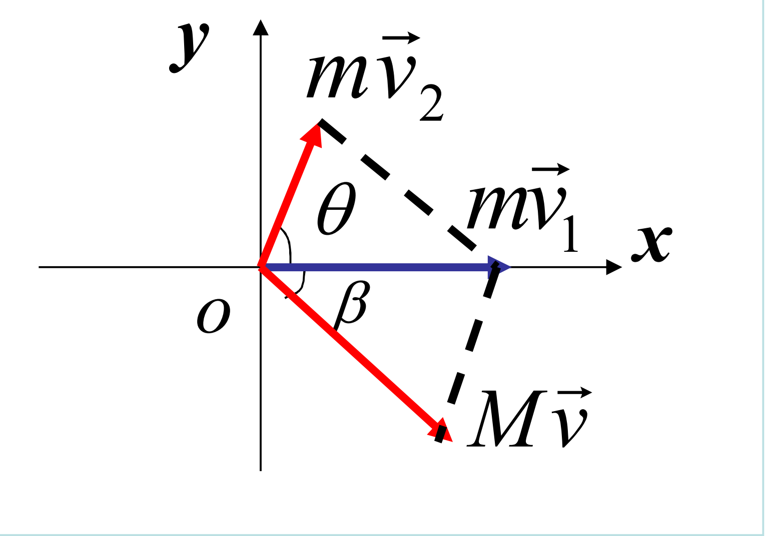
碰前：　α粒子动量为 $m\vec{v}_1$ 氧原子核动量为0

碰后：　α粒子动量为 $m\vec{v}_2$ 氧原子核动量为 $M\vec{v}$

碰前：　α粒子动量为 $m\vec{v}_1$　氧原子核动量为0

碰后：　α粒子动量为$m\vec{v}_2$　氧原子核动量为 $M\vec{v}$

由动量守恒定律得　$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_2 + M\vec{v}$



直角坐标系中

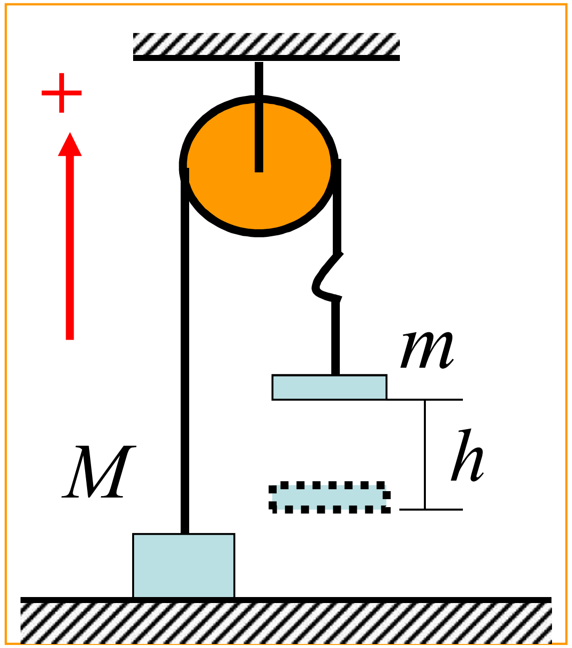
$$mv_1 = mv_2\cos\theta + Mv\cos\beta$$

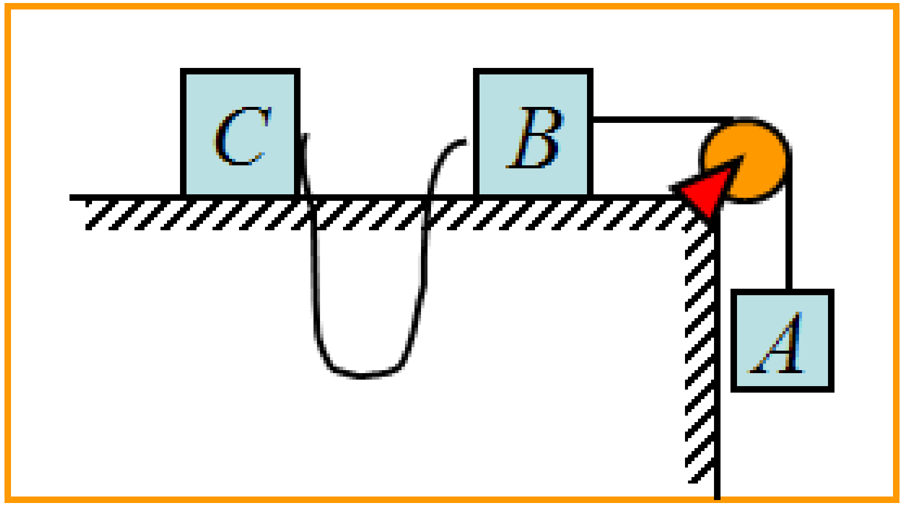
$$0 = mv_2\sin\theta - Mv\sin\beta$$

解得“碰撞”前后，α 粒子速率之比为

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta+\beta)} = \frac{\sin 41^\circ}{\sin(72^\circ + 41^\circ)} = 0.71$$

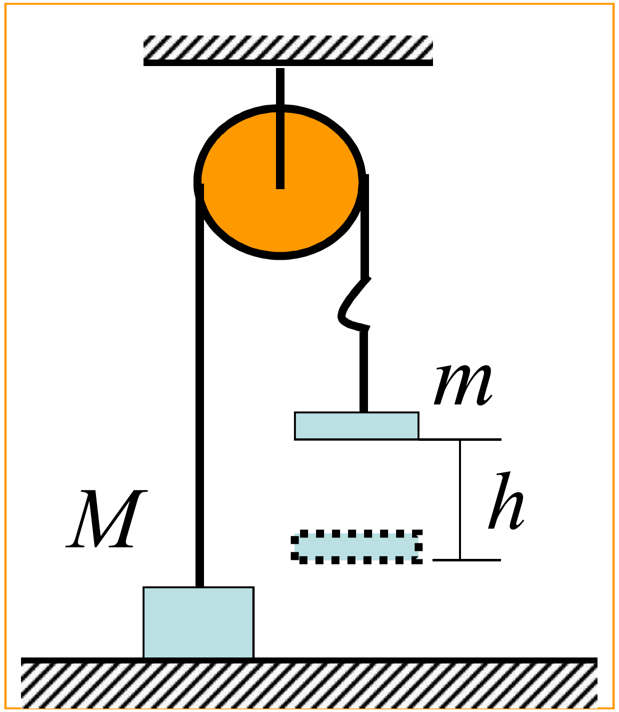
思考：以下过程是否动量守恒？





以上过程不满足动量守恒，但是满足角动量守恒。

例题：一绳跨过一定滑轮，两端分别系有质量m及M的物体，且$M>m$。最初M静止在桌上，抬高m使绳处于松弛状态。当m自由下落距离h后，绳才被拉紧，求此时两物体的速率v和M所能上升的最大高度(不计滑轮和绳的质量、轴承摩擦及绳的伸长)。



分析运动过程

当 m 自由下落 h 距离，绳被拉紧的瞬间，m和 M 获得相同的运动速率 v，此后 m 向下减速运动，M向上减速运动。M上升的最大高度为：

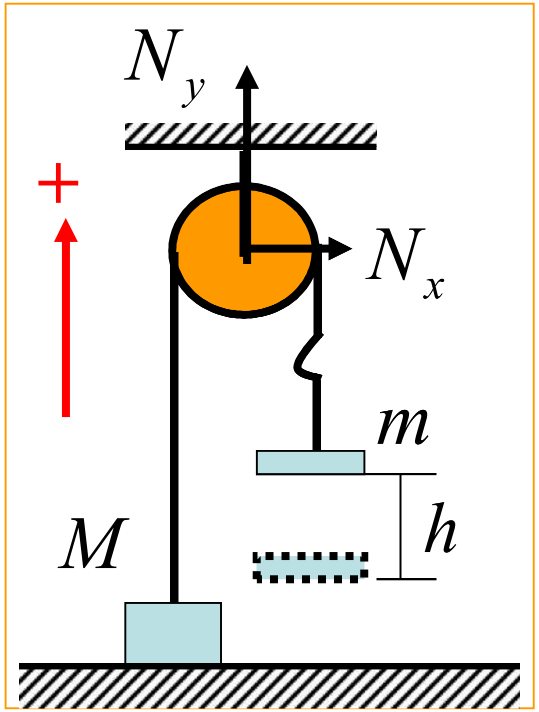
$$H=\frac{v^2}{2a}$$

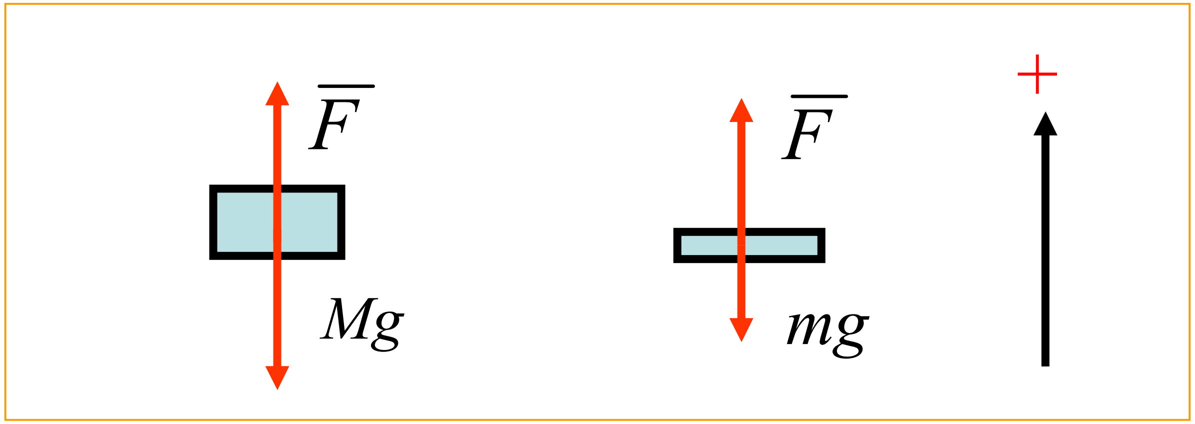
分两个阶段求解

正确解法：

绳拉紧时冲力很大，轮轴反作用力 $\vec{N}$ 不能忽略，$m+M$ 系统动量不守恒，应分别对它们用动量定理；

设平均冲力大小为$\overline{F}$，取向上为正方向

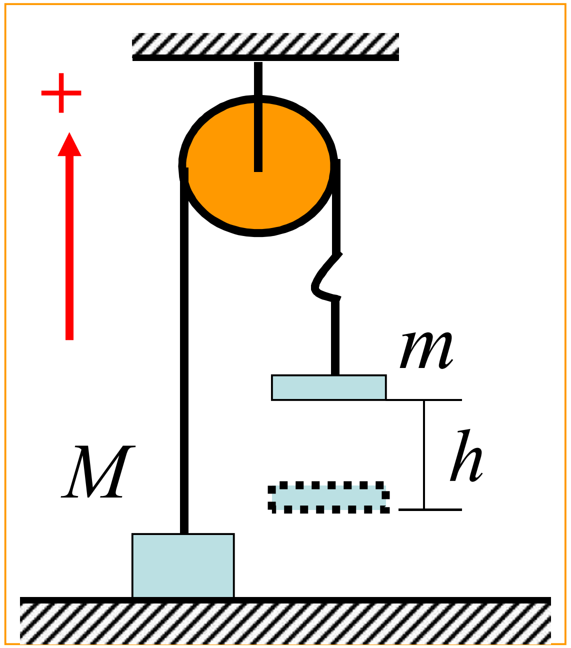




$$I_1=\left(\overline{F}-mg\right)\Delta t=-mv-(-m\sqrt{2gh})$$

$$I_2=\left(\overline{F}-Mg\right)\Delta t=Mv-0=Mv$$

$$\begin{cases} I_1 = \left(\overline{F} - mg\right)\Delta t = -mv - (-m\sqrt{2gh}) \\ I_2 = \left(\overline{F} - Mg\right)\Delta t = Mv \end{cases}$$

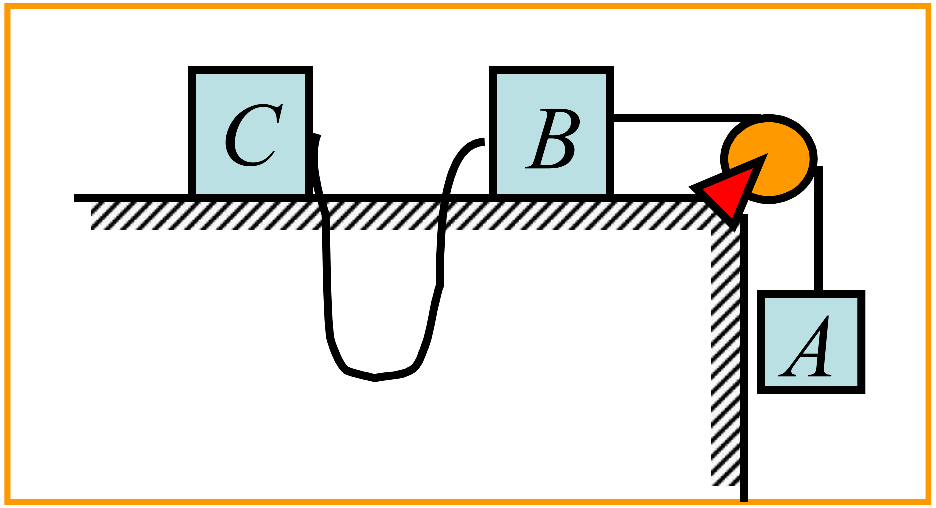


忽略重力，则有　$I_1 = I_2$

$$-mv - (-m\sqrt{2gh}) = Mv$$

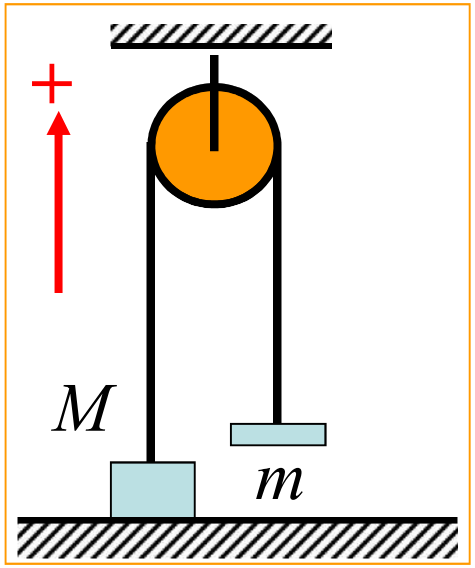
$$v = \frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$$

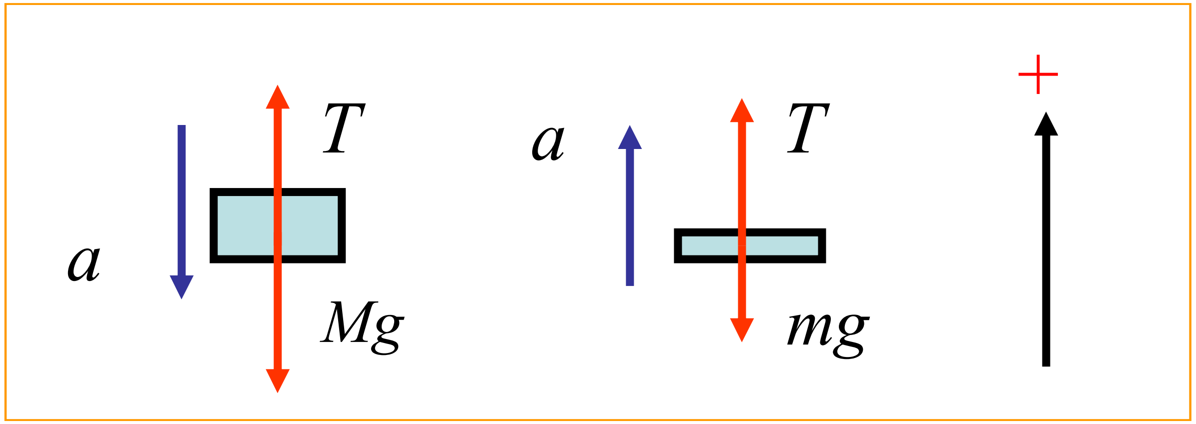
类似问题：



第二阶段　M 与 m 有大小相等，方向相反的加速度 a

设绳拉力为 T ，画出 m 与 M 的受力图





由牛顿运动定律
$$\begin{cases} Mg - T = Ma \\ T - mg = ma \end{cases}$$
解得 $a = \dfrac{(M-m)g}{M+m}$

M 上升的最大高度为

$$H = \frac{v^2}{2a} = \left(\frac{m(\sqrt{2gh})}{M+m}\right)^2 \Big/ \left(\frac{2(M-m)g}{M+m}\right) = \frac{m^2 h}{M^2 - m^2}$$

动量守恒定律是比牛顿定律更基本的定律!!

动量守恒定律的适用范围更广

动量守恒定律不仅适用于机械运动，而且适用于电磁运动、热运动和微观粒子的运动；不仅适用于低速运动，而且适用于高速运动。

现代物理学中，力的概念不再处于中心地位，取而代之的是动量和动量守恒定律　。

练习

1.质量分别为 m_A 和 m_B （$m_A > m_B$）的两质点 A 和 B，受到相等的冲量作用，则：

(A) A 比 B 的动量增量少.
(B) A 比 B 的动量增量多.
(C) A 、 B 的动量增量相等.
(D) A 、 B 的动能增量相等.

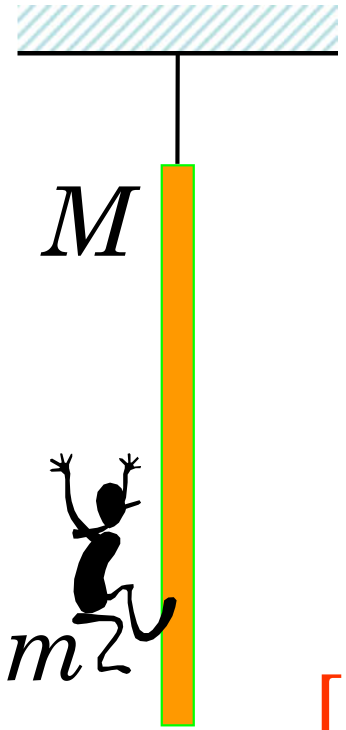
[C]

2. 一只质量为 m 的猴子抓住一质量为 M 的直杆,杆与天花板用一线相连,若悬线突然断开后,小猴则沿杆子竖直向上爬以保持它离地面的高度不变,此时直杆下落的加速度为:

(A) g, (B) mg/M,

(C) $\dfrac{M+m}{M}g$, (D) $\dfrac{M+m}{M-m}g$,

(E) $\dfrac{M-m}{M}g$。



[C]

3.一烟火总质量为 $M+2m$ 从离地面高 h 处自由下落到 $h/2$ 时炸开,并飞出质量均为 m 的两块,它们相对于烟火体的速度大小相等 ,方向一上一下,爆炸后烟火体从 $h/2$ 处落到地面的时间为 t_1, 若烟火体在自由下落到 $h/2$ 处不爆炸,它从 $h/2$ 处落到地面的时间为 t_2, 则:

(A) $t_1 > t_2$,　　(B) $t_1 < t_2$,

(C) $t_1 = t_2$,　　(D)无法确定。

[C]

4.质量为 20g 的子弹沿 x 轴正向以500m/s 的速度射入一木块后，与木块一起以 50m/s 的速度仍沿 x 轴正向前进，在此过程中木块所受冲量的大小为

（A）$9\,\mathrm{N\cdot s}$

（B）$-9\,\mathrm{N\cdot s}$

（C）$10\,\mathrm{N\cdot s}$

（D）$-10\,\mathrm{N\cdot s}$

[A]

5.在水平冰面上以一定速度向东行驶的炮车，向东北（斜向上）方向发射一炮弹，对于炮车和炮弹这一系统，在此过程中（忽略冰面摩擦力及空气阻力）

（A）总动量守恒。

（B）总动量在炮身前进的方向上的分量守恒，其它方向动量不守恒。

（C）总动量在水平面上任意方向的分量守恒，竖直方向分量不守恒。

（D）总动量在任何方向的分量均不守恒。

[C]

6.质量为 m 的小球，以水平速度 v 与固定的竖直壁作弹性碰撞，设指向壁内的方向为正方向，则由于此碰撞，小球的动量变化为

（A）mv

（B）0

（C）$2mv$

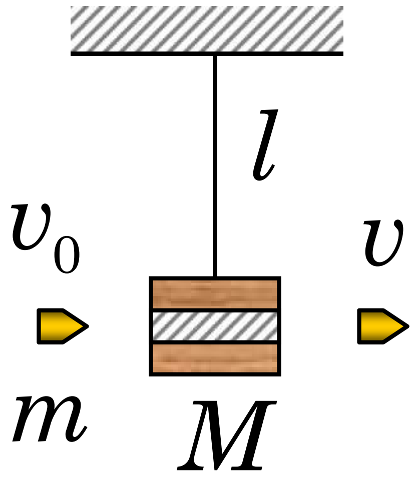
（D）$-2mv$

[D]

7.质量为 M=2.0 kg 的物体（不考虑体积）,用一根长 l =1.0 m 为的细绳悬挂在天花板上,今有一质量为 m=20 g 的子弹以v_0=600 m/s 的水平速度射穿物体,刚射出物体时子弹的速度大小 v = 30 m/s, 设穿透时间极短,求:

（1）子弹刚穿出时绳中张力的大小。

（2）子弹在穿透过程中所受的冲量。



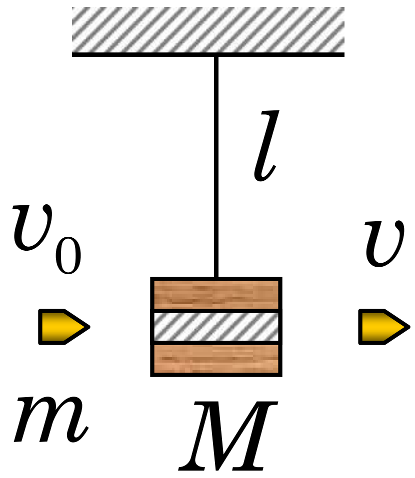
解:（1）因穿透时间极短,故可认为物体未离开平衡位置,因此,作用于子弹、物体系统上的外力均在铅直方向, 故系统在水平方向上动量守恒,设子弹穿出物体时的速度为 v' 则:

$$m v_0 = m v + M v',$$

$$v' = (v_0 - v')/M = 5.7\,\text{m/s}$$

子弹穿出时,

M绕点O作圆周运动.

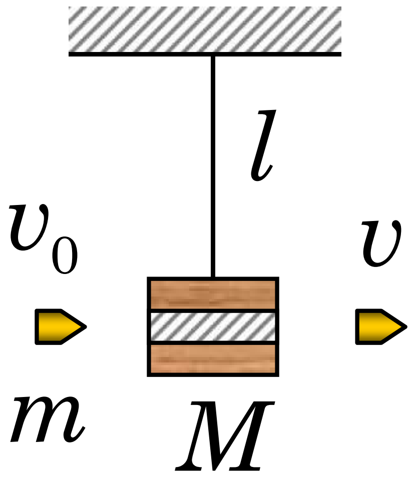


$$T - Mg = M\upsilon'^2 / l,$$

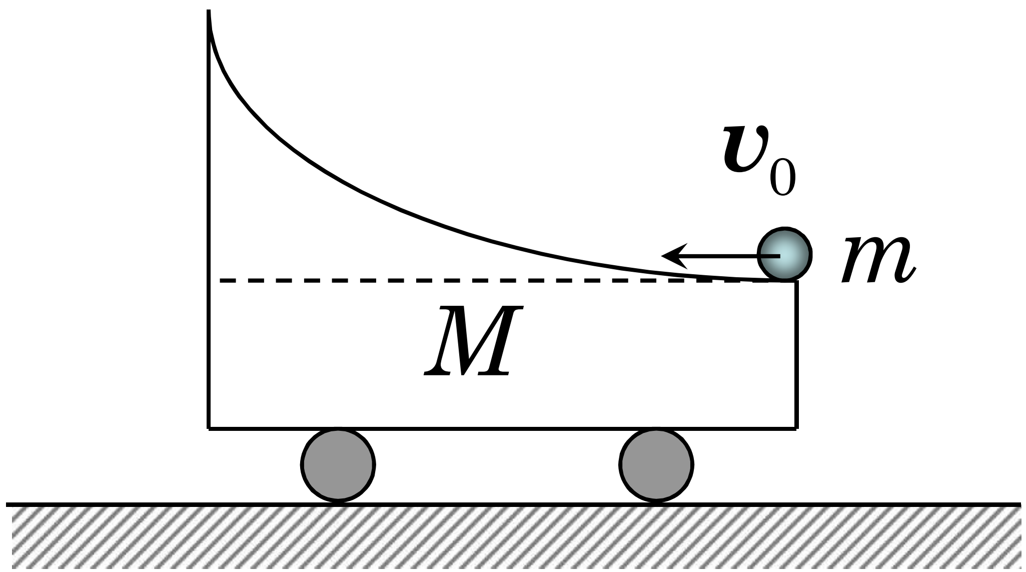
$$\therefore T = Mg + M\upsilon'^2 / l = 84.6(\mathrm{N})$$

(2)子弹受冲量：

$$I = f\Delta t = m\upsilon - m\upsilon_0 = 11.4(\mathrm{N\cdot s})$$



8.如图，一辆小车上装有光滑的弧形轨道，总质量为 M，放在光滑的水平面上而静止。今有一质量为 m，速度为 v_0 的铁球，从轨道下端水平射入，求球沿弧形轨道上升的最大高度 h 及之后下降离开小车时的速度 v' .



解：以v表示球上升到最大高度时 m 和 M 的共同速度，则由动量守恒和机械能守恒可得

$$m\boldsymbol{v}_0 = (m+M)\boldsymbol{v}$$

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_0{}^2 = \frac{1}{2}(m+M)\boldsymbol{v}^2 + mgh$$

由此二式可解得：

$$h = \frac{M\boldsymbol{v}_0{}^2}{2g(m+M)}$$

以 v' 表示球离开小车时的速度，则对小球射入到离开的整个过程用动量守恒和机械能守恒，可得：

$$mv_0 = mv + Mv'$$

$$\frac{1}{2}mv_0^{\ 2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv'^2$$

由此二式可得： $$\boldsymbol{v} = \frac{m-M}{m+M}v_0$$

视 m 和 M 的大小，v 可与 v_0 同向或反向

全章小结

一、动量与动量的时间变化率

质点：$\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$

质点系：$\vec{F}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}_{总}}{\mathrm{d}t} = M\vec{a}_c \quad \left(\vec{p}_{总} = \sum_i \vec{p}_i = M\vec{v}_c\right)$

二、惯性系与非惯性系的运动定律

惯性系：$\vec{F} = m\vec{a}$ $\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases}$ 或 $\begin{cases} F_\tau = ma_\tau \\ F_n = ma_n \end{cases}$

非惯性系：$\vec{F} + \vec{F}_0 = m\vec{a}'$ $\begin{cases} \vec{F}_0 = -m\vec{a}_0 \\ \vec{F}_0 = -mr\omega^2\vec{n} \end{cases}$

三、动量定理

质点：

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\Delta\vec{p}\qquad \begin{cases} I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t=\Delta p_x\approx\overline{F}_x\Delta t \\ I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y\mathrm{d}t=\Delta p_y\approx\overline{F}_y\Delta t \\ I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_z\mathrm{d}t=\Delta p_z\approx\overline{F}_z\Delta t \end{cases}$$

质点系：

$$\vec{I}_{外}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{外}\mathrm{d}t=\Delta\vec{p}_{总}$$

$$\vec{I}_{内}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{内}\mathrm{d}t=0$$

四、动量守恒定律——空间平移对称性

孤立系统：　$\vec{F}_{外}=0$　$\vec{p}_{总}=$恒矢量　$\vec{v}_c=$恒矢量