第五章作业题及答案

1. 已知描述某稳定的连续 LTI 系统的微分方程为

$$y''(t)+3y(t)+2y(t)=x(t)$$

求该系统的频率响应 $H(\mathrm{j}w)$

解：利用 Fourier 变换的微分特性，对微分方程两边进行 Fourier 变换得

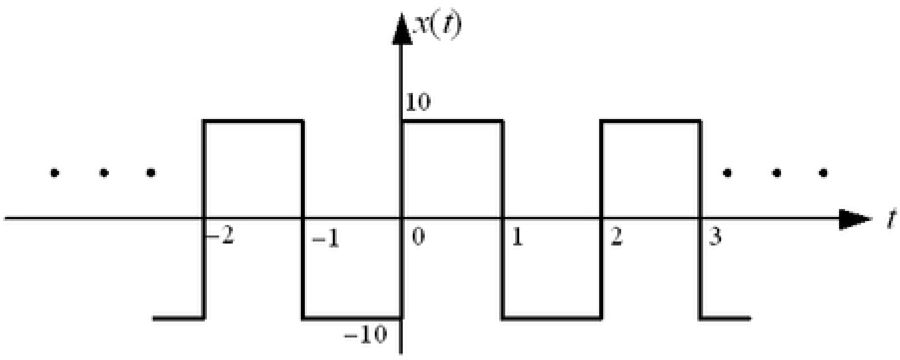
$$[(\mathrm{j}w)^2+3\mathrm{j}w+2]Y_{zs}(\mathrm{j}w)=X(\mathrm{j}w)$$ （5 分）

根据频率响应的定义，可得 $$H(\mathrm{j}w)=\frac{Y_{zs}(\mathrm{j}w)}{X(\mathrm{j}w)}=\frac{1}{(\mathrm{j}w)^2+3(\mathrm{j}w)+2}$$ （5 分）

只有当连续系统是稳定的 LTI 系统时，才可以根据描述系统的微分方程直接求解系统的频率响应 $H(\mathrm{j}w)$。

2. 已知某连续系统的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)$ 为 $$H(\mathrm{j}w)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2w} & |\mathrm{w}|<2\pi\\ 0 & |\mathrm{w}|>2\pi\end{cases}$$

若该系统的输入信号为下图所示周期方波信号，试求系统输出 $y_{zs}(t)$



周期矩形信号

解：任意周期信号 $x(t)$ 可用 Fourier 级数表示为 $$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}nw_0t}$$

所以周期信号 $x(t)$作用在系统上的零状态响应为 $$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_nH(\mathrm{j}nw_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}nw_0t}$$

求出周期信号频谱C_n，由上式即可得到零状态响应(2 分)

$x(t)$是周期 T=2 的周期信号，其基波角频率$w_0=2\pi/T=\pi$。$x(t)$的 Fourier 系数为

$$C_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nw_0t}\mathrm{d}t=\int_0^1 10(-\mathrm{j})\sin(n\pi t)\mathrm{d}t=\frac{20}{\mathrm{j}n\pi},n\neq 0$$ (3 分)

由于 $x(t)$实奇对称，故 $x(t)$中无直流分量，即$C_0=0$ (2 分)

根据系统的频率响应，有$H(\mathrm{j}0)=1$，$H(\mathrm{j}w_0)=H(\mathrm{j}\pi)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi}$，

$H(-\mathrm{j}w_0)=H(-\mathrm{j}\pi)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi}$，$H(\mathrm{j}nw_0)=0,n\neq 0,\pm 1$ (3 分)因此，系统的零状态响应为$y_{zs}(t)=C_1H(\mathrm{j}w_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}w_0t}+C_{-1}H(-\mathrm{j}w_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w_0t}$

$$=\frac{20}{\mathrm{j}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(t-2)}-\frac{20}{\mathrm{j}\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(t-2)}=\frac{40}{\pi}\sin[\pi(t-2)]\qquad(-\infty<t<\infty)$$ (5 分)

3. 已知描述某稳定的连续 LTI 系统的微分方程为

$$y''(t)+3y(t)+2y(t)=2x'(t)+3x(t)$$

系统的输入激励$x(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)$，求系统的零状态响应$y_{zs}(t)$。

解：对微分方程两边进行 Fourier 变换，并根据系统频率响应的定义，可得

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{2(\mathrm{j}\omega)+3}{(\mathrm{j}\omega)^2+3(\mathrm{j}\omega)+2}=\frac{2(\mathrm{j}\omega)+3}{(\mathrm{j}w+1)(\mathrm{j}+2)}$$ (4 分)

由于输入激励$x(t)$的频谱函数为$X(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega+3}$故该系统的零状态响应$y_{zs}(t)$的频谱函数$Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)$为$Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)=X(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{2(\mathrm{j}\omega)+3}{(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)(\mathrm{j}\omega+3)}$(3 分)

将$Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)$表达式用部分分式展开，得

$$Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)=\frac{1/2}{\mathrm{j}\omega+1}+\frac{1}{(\mathrm{j}\omega+2)}+\frac{-3/2}{\mathrm{j}\omega+3}$$ (4 分)

由 Fourier 反变换可得系统的零状态响应$y_{zs}(t)$为

$$y_{zs}(t) = (\frac{1}{2}e^{-t} + e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-3t})u(t)$$ （4 分）

4. 已知理想模拟低通滤波器的频率响应为$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j2\omega} & |\omega| < 2\pi \\ 0 & |\omega| > 2\pi \end{cases}$

(1) 求该低通滤波器的单位冲激响应$h(t)$;

(2) 输入$x(a) = Sa(\pi t)$, $-\infty < t < \infty$，求输出$y_{zs}(t)$;

(3) 输入$x(t) = Sa(3\pi t)$, $-\infty < t < \infty$，求输出$y_{zs}(t)$;

解：由已知理想模拟低通滤波器的频率响应可用矩形脉冲表示为$H(j\omega) = p_{4\pi}(\omega)e^{-j2\omega}$

利用抽样信号的频谱和 Fourier 变换的时移特性，可得$h(t) = 2Sa[2\pi(t-2)]$（5 分）

由于 $\mathrm{Sa}(\pi t) \xleftrightarrow{F} p_{2\pi}(\omega)$

所以 $Y_{zs}(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = p_{2\pi}(\omega)e^{-j2\omega}$

对上式进行 Fourier 反变换

$$y_{zs}(t) = F^{-1}\{Y_{zs}(j\omega)\} = \mathrm{Sa}\left[\pi(t-2)\right]$$

（5 分）

由于 $\mathrm{Sa}(3\pi t) \xleftrightarrow{F} (1/3)p_{6\pi}(\omega)$

所以 $Y_{zs}(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = (1/3)p_{4\pi}(\omega)e^{-j2\omega}$

对上式进行 Fourier 反变换

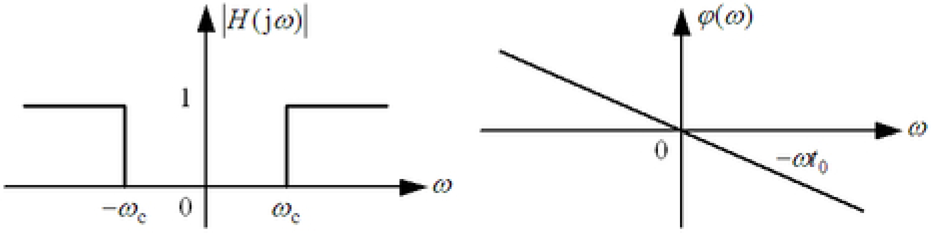
$$y_{zs}(t) = F^{-1}\{Y_{zs}(j\omega)\} = (2/3)\mathrm{Sa}[2\pi(t-2)]$$

（5 分）

5. 已知某高通滤波器的幅度响应和相位响应如下图所示，其中$\omega_c = 80\pi$ rad/s，

(1) 计算该系统的单位冲激响应$h(t)$;

(2) 若输入信号$x(t)=1+0.5\cos(60\pi t)+0.2\cos(120\pi t)$，求该系统的稳态响应$y(t)$。



解：(1)高通滤波器的频率响应可以表示为$H(\mathrm{j}\omega)=[1-p_{2\omega_c}(\omega)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$

利用低通滤波器的冲激响应，$\delta(t)\xleftrightarrow{F}1$，以及 Fourier 变换的时移特性、线性特性，可得$h(t)=\delta(t-t_0)-80Sa[80\pi(t-t_0)]$（4 分）

(2)输入信号$x(t)$中含有$\omega=0,60\pi,120\pi$三个频滤分量的正弦信号。根据高通滤波器的幅度响应，有$|H(\mathrm{j}0)|=|H(\mathrm{j}60\pi)|=0,|H(\mathrm{j}120\pi)|=1$

利用

$$\cos(\omega_0 t+\theta)\Rightarrow y(t)=|H(\mathrm{j}\omega_0)|\cos(\omega_0 t+\varphi(\omega_0)+\theta)$$

可得

$$y(t)=0.2|H(\mathrm{j}120\pi)|\cos[120\pi t+\varphi(120\pi)]=0.2\cos[120\pi(t-t_0)]$$（6 分）

6. 已知描述某离散稳定 LTI 系统的差分方程为

$$y[k]-0.75y[k-1]+0.125y[k-2]=4x[k]+3x[k-1]$$

试求该系统的频率响应$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$和单位脉冲响应$h[k]$。

解：利用 DTFT 的时域位移特性，对差分方程两边进行 DTFT 可得

$$(1-0.75\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}+0.125\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\Omega})Y_{zs}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=(4+3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

根据系统频率响应的定义，即得系统频率响应为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\frac{Y_{zs}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}{X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}$$

$$= \frac{4+3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}{1-0.75\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}+0.125\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\Omega}}$$ （2 分）

将 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 用部分分式展开为 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \frac{20}{1-0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}} + \frac{-16}{1-0.25\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$（4 分）

对上式进行 IDTFT 即得系统的单位脉冲响应为

$h[k] = 20(0.5)^k u[k] - 16(0.25)^k u[k]$（4 分）

7. 已知某离散 LTI 系统的单位脉冲响应 $h[k]=(0.5)^k u[k]$，输入序列为 $x[k]=\cos(0.5\pi k)$，求该系统的零状态响应。

解：由系统的脉冲响应 $h[k]$ 可得系统的频率响应 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \frac{1}{1-0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$$ （3 分）

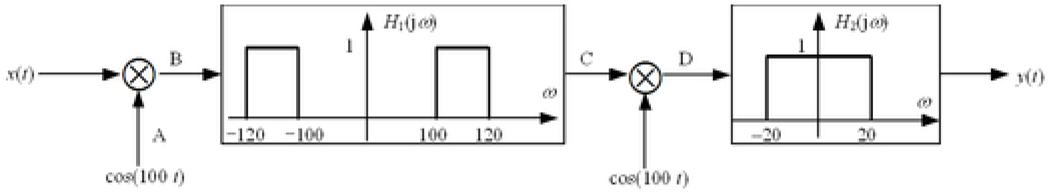
由于 $$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.5\pi}) = \frac{1}{1+0.5\mathrm{j}} = 0.8-0.4\mathrm{j} = 0.8944\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.4636}$$ （2 分）

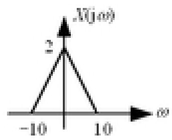
根据式(1)可得系统的零状态响应为

$$Y_{zs}[k] = |H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.5\pi})|\cos[0.5\pi k+\varphi(0.5\pi)] = 0.8944\cos(0.5\pi k-0.4636)$$

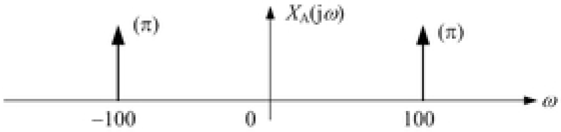
（5 分）

8. 在下图所示系统中，已知输入信号 $x(t)$ 的频谱 $X(\mathrm{j}\omega)$，试分析系统中 A、B、C、D 各点及 $y(t)$ 频谱并画出频谱图，求出 $y(t)$ 与 $x(t)$ 的关系。





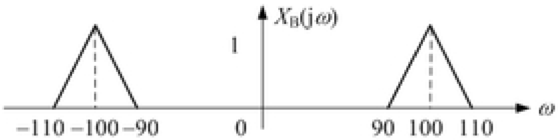
题 5-15 图



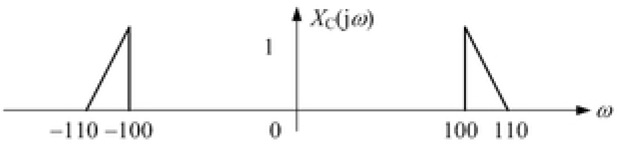
$$X_A(j\omega)=F\quad\{\cos(100t)\}=\pi\delta\big(j(\omega-100)\big)+\pi\delta\big(j(\omega+100)\big)$$ （3 分）

解：

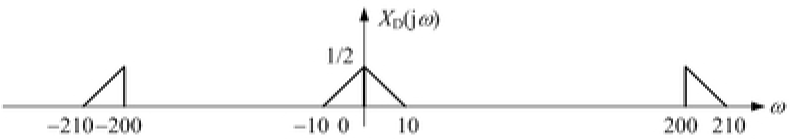
上图中 A 点的频谱应该为：$F_A(j\omega)=\pi[\delta(\omega-100)+\delta(\omega+100)]$



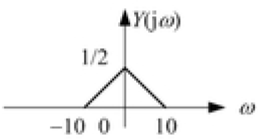
$$X_B(j\omega)=\frac{X\big(j(\omega-100)\big)+X\big(j(\omega+100)\big)}{2}$$ （3 分）



$$X_C(j\omega)=H_1(j\omega)X_B(j\omega)$$ （3 分）



$$X_D(j\omega)=\frac{X_C\big(j(\omega-100)\big)+X_C\big(j(\omega+100)\big)}{2}$$ （3 分）



$$Y(j\omega)=H_2(j\omega)X_D(j\omega)$$ （3 分）

比较可得 $Y(j\omega)=\frac{1}{4}X(j\omega)$ 即 $y(t)=\frac{1}{4}x(t)$