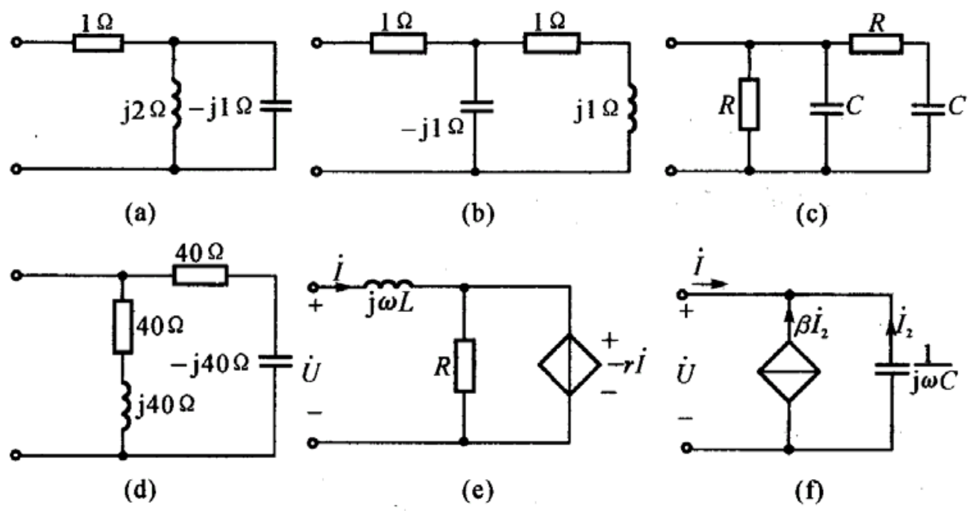
9-1 试求图示各电路的输入阻抗 Z 和导纳 Y.

解 提示 正弦电路的输入阻抗（或导纳）的定义与直流电路输入电阻（或电导）的定义很相似，即

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}} \text{ 或 } Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}\left(\text{故 } Z=\frac{1}{Y}\right)$$

一般地，对于不包含受控源的无源一端口网络，可以直接利用阻抗（或导纳）的串、并联关系，Y-△ 变换等方法求得网络的输入阻抗（或导纳）；对于包含受控源的一端口网络，必须利用输入阻抗的定义，通过加压求流法（或加流求压法）求得网络的输入阻抗.



题 9-1 图

(a) $$Z=1+\frac{1}{\frac{1}{\mathrm{j}2}+\frac{1}{-\mathrm{j}1}}=(1-\mathrm{j}2)\Omega$$

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{1-\mathrm{j}2}=(0.2+\mathrm{j}0.4)\mathrm{S}$$

(b) $$Z=1+\frac{1}{\frac{1}{-\mathrm{j}1}+\frac{1}{1+\mathrm{j}1}}=[1+(1-\mathrm{j}1)]\Omega=(2-\mathrm{j}1)\Omega$$

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{2-\mathrm{j}}=(0.4+\mathrm{j}0.2)\mathrm{S}$$

(c) $$Y=\frac{1}{R}+\mathrm{j}\omega C+\frac{1}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{1}{R}+\mathrm{j}\omega C+\frac{\mathrm{j}\omega C}{R\cdot\mathrm{j}\omega C+1}$$

$$=\frac{(1+2\omega^2C^2R^2)+\mathrm{j}\omega CR(2+\omega^2C^2R^2)}{R(1+\omega^2C^2R^2)}\mathrm{S}$$

$$Z=\frac{1}{Y}=\frac{1}{\frac{1}{R}+\mathrm{j}\omega C+\frac{1}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}}\Omega$$

$$= \frac{R(1+\omega^2C^2R^2)}{(1+2\omega^2C^2R^2)+\mathrm{j}\omega CR(2+\omega^2C^2R^2)}\Omega$$

(d) $Y = \frac{1}{40+\mathrm{j}40} + \frac{1}{40-\mathrm{j}40} = \frac{40-\mathrm{j}40+40+\mathrm{j}40}{(40+\mathrm{j}40)(40-\mathrm{j}40)}$

$$= \frac{1}{40}\mathrm{S} = 0.025\mathrm{S}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = 40\Omega$$

(e) 设端电压为 $\dot{U}$，依题意有

$$\dot{U} = \mathrm{j}\omega L \cdot \dot{I} + (-r\dot{I}) = (\mathrm{j}\omega L - r)\dot{I}$$

则输入阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \mathrm{j}\omega L - r\ \Omega$$

输入导纳为

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L - r} = \frac{-r-\mathrm{j}\omega L}{r^2+\omega^2L^2}\mathrm{S}$$

(f) 设端电压、端电流分别为 $\dot{U}$、$\dot{I}$，则依题意有

$$\dot{I} = -\beta\dot{I}_2 - \dot{I}_2 = -(1+\beta)\dot{I}_2$$

而
$$\dot{U} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\cdot(-\dot{I}_2) = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\cdot\dot{I}_2$$

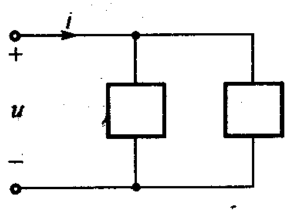
故输入电阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{-\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{-(1+\beta)} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C(1+\beta)} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C(1+\beta)}\Omega$$

输入导纳为

$$Y = \frac{1}{Z} = \mathrm{j}\omega C(1+\beta)\mathrm{S}$$

9-2 已知图示电路中 $u = 50\sin(10t+\pi/4)\mathrm{V}$，$i = 400\cos(10t+\pi/6)\mathrm{A}$. 试求电路中合适的元件值(等效).



题 9-2 图

解 因为 $u = 50\sin(10t+\frac{\pi}{4})$

$$= 50\cos(10t+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})$$

$$= 50\cos(10t-\frac{\pi}{4})(\mathrm{V})$$

所以 $\dot{U} = \frac{50}{\sqrt{2}}\angle -\frac{\pi}{4}\ \mathrm{V}$

$$\dot{I} = \frac{400}{\sqrt{2}}\angle\frac{\pi}{6}\ \mathrm{A}$$

则输入导纳为

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{\frac{400}{\sqrt{2}}\angle\frac{\pi}{6}}{\frac{50}{\sqrt{2}}\angle-\frac{\pi}{4}} = 8\angle\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4} = 8\angle 75^\circ = (2.07 + \mathrm{j}7.73)\mathrm{S}$$

故图示的并联元件为电导 G 和电容 C，且其参数分别为

$$G = 2.07\mathrm{S}$$

$$C = \frac{7.73}{\omega} = \frac{7.73}{10} = 0.773(\mathrm{F})$$

9-3 附图中 N 为不含独立源的一端口，端口电压 u、电流 i 分别如下列各式所示. 试求每一种情况下的输入阻抗 Z 和导纳 Y，并给出等效电路图(包括元件的参数值)

(1) $\begin{cases} u = 200\cos(314t)\mathrm{V} \\ i = 10\cos(314t)A \end{cases}$ (2) $\begin{cases} u = 10\cos(10t+45^\circ)\mathrm{V} \\ i = 2\cos(10t-90^\circ)A \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u = 100\cos(2t+60^\circ)\mathrm{V} \\ i = 5\cos(2t-30^\circ)\mathrm{A} \end{cases}$ (4) $\begin{cases} u = 40\cos(100t+17^\circ)\mathrm{V} \\ i = 8\sin(100t+\pi/2)\mathrm{A} \end{cases}$

解　提示　利用输入阻抗(或导纳)定义求出输入阻抗和导纳，根据求得的阻抗(或导纳)值合理选择等效电路. 一般地，阻抗宜用 R，L 或 R，C 串联电路实现，导纳宜用并联电路实现.

(1) 因为 $\dot{U} = \frac{200}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ\mathrm{V}$，　$\dot{I} = \frac{10}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ\mathrm{A}$，　$\omega = 314\mathrm{rad/s}$

所以
$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\frac{200}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ}{\frac{10}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ} = 20\angle 0^\circ = 20(\Omega)$$

故
$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{20} = 0.05(\mathrm{S})$$

等效电路为 20Ω 的电阻，等效电路图如题解图(a) 所示.

(2) 因为 $\dot{U} = \frac{10}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ\mathrm{V}$，　$\dot{I} = \frac{2}{\sqrt{2}}\angle -90^\circ\mathrm{A}$，　$\omega = 10\mathrm{rad/s}$，

所以 $$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{\frac{10}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ}{\frac{2}{\sqrt{2}}\angle -90^\circ}=5\angle 135^\circ=(-3.536+\mathrm{j}3.536)\Omega$$

故 $$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{5\angle 135^\circ}=0.2\angle -135^\circ=(-0.141-\mathrm{j}0.141)\mathrm{S}$$

根据输入阻抗值，其等效电路可以视为一个负电阻和电感的串联，其中负电阻可由一受控源实现，电感 L 为

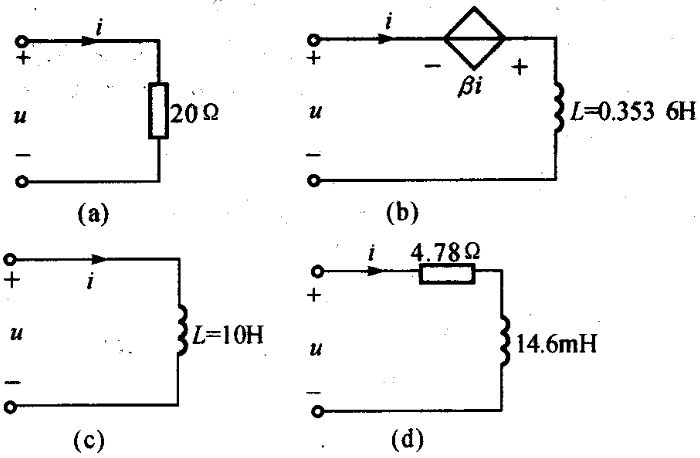
$$\omega L=3.536\Rightarrow L=\frac{3.536}{\omega}=\frac{3.536}{10}=0.3536(\mathrm{H})$$

等效电路图如题解图(b) 所示.

(3) 因为 $\dot{U}=\frac{100}{\sqrt{2}}\angle 60^\circ\mathrm{V},\dot{I}=\frac{5}{\sqrt{2}}\angle -30^\circ\mathrm{A},\omega=2\mathrm{rad/s}$

所以 $$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{\frac{100}{\sqrt{2}}\angle 60^\circ}{\frac{5}{\sqrt{2}}\angle -30^\circ}=20\angle 90^\circ=\mathrm{j}20(\Omega)$$

故 $$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{\mathrm{j}20}=-\mathrm{j}0.05(\mathrm{S})$$



题解 9－3 图

则等效电路为一个电感，且 $\omega L=20\Rightarrow L=\frac{20}{\omega}=\frac{20}{2}=10(\mathrm{H})$，等

效电路如题解图(c) 所示.

(4) $i = 8\sin(100t + \frac{\pi}{2}) = 8\cos(100t + 90° - 90°) = 8\cos(100t)\text{A}$

因为 $\dot{U} = \frac{40}{\sqrt{2}}\underline{/17°}\text{V}$，$\dot{I} = \frac{8}{\sqrt{2}}\underline{/0°}\text{A}$，$\omega = 100\text{rad/s}$

所以 $$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\frac{40}{\sqrt{2}}\underline{/17°}}{\frac{8}{\sqrt{2}}\underline{/0°}} = 5\underline{/17°} = (4.78 + \text{j}1.46)\Omega$$

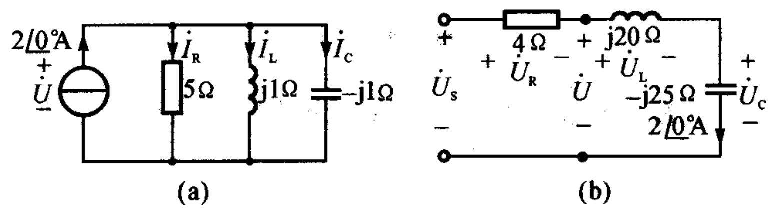
故 $$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{5\underline{/17°}} = 0.2\underline{/-17°} = (0.191 - \text{j}0.0585)\text{S}$$

则等效电路可以由一个 4.78Ω 的电阻和一个电感 L 串联构成，该电感 L 满足

$$\omega L = 1.46 \Rightarrow L = \frac{1.46}{\omega} = \frac{1.46}{100} = 0.0146\text{H} = 14.6\text{mH}$$

该等效电路如题解图(d) 所示.

9-4 求附图(a)、(b) 中的电压 $\dot{U}$，并画出电路的相量图.



题 9-4 图

解 (a) 电路总导纳应为

$$Y = \frac{1}{5} + \frac{1}{\text{j}1} + \frac{1}{-\text{j}1} = \frac{1}{5} = 0.2(\text{S})$$

则 $$\dot{U} = \frac{\dot{I}}{Y} = \frac{2\underline{/0°}}{0.2} = 10\underline{/0°}(\text{V})$$

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{5} = \frac{10\underline{/0°}}{5} = 2\underline{/0°}(\text{A})$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{\text{j}1} = \frac{10\underline{/0°}}{\text{j}1} = 10\underline{/-90°}(\text{A})$$

$$\dot{I}_C=\frac{\dot{U}}{-\mathrm{j}1}=\frac{10\angle 0^\circ}{-\mathrm{j}1}=10\angle 90^\circ(\mathrm{A})$$

电路的相量图如题解 9－4 图(a) 所示.

(b) 依题意有

$$\dot{U}=(\mathrm{j}20-\mathrm{j}25)\times 2\angle 0^\circ=10\angle -90^\circ(\mathrm{V})$$

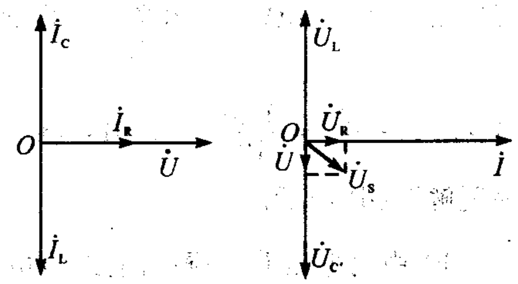
$$\dot{U}_R=4\times 2\angle 0^\circ=8\angle 0^\circ(\mathrm{V})$$

$$\dot{U}_L=\mathrm{j}20\times 2\angle 0^\circ=40\angle 90^\circ(\mathrm{V})$$

$$\dot{U}_C=-\mathrm{j}25\times 2\angle 0^\circ=50\angle -90^\circ(\mathrm{V})$$

$$\dot{U}_\mathrm{s}=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C=\dot{U}_R+\dot{U}$$

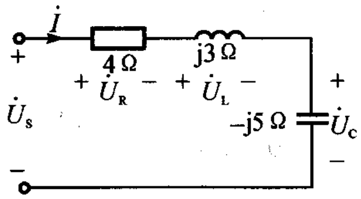
电路的相量图如题解 9－4 图(b) 所示.



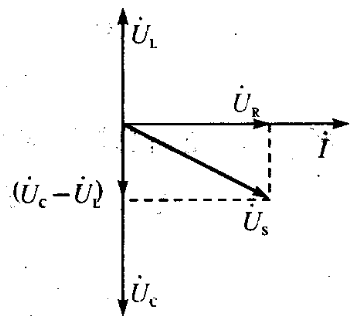
(a) (b)

题解 9－4 图

9－5 已知图示电路中 $\dot{I}=2\angle 0^\circ\mathrm{A}$，求电压 $\dot{U}_\mathrm{s}$，并作电路的相量图.



题 9－5 图



题解 9－5 图

解 依题意有

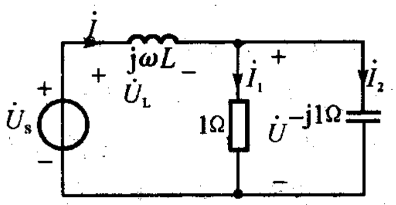
$$\dot{U}=(4+\mathrm{j}3-\mathrm{j}5)\times 2\angle 0^\circ=(4-\mathrm{j}2)\times 2\angle 0^\circ$$

$$=8-\mathrm{j}4=8.94\angle -26.565^\circ(\mathrm{V})$$

$$\dot{U}_R = 4\dot{I} = 4 \times 2\angle 0^\circ = 8\angle 0^\circ (\text{V})$$
$$\dot{U}_L = \text{j}3\dot{I} = \text{j}3 \times 2\angle 0^\circ = 6\angle 90^\circ (\text{V})$$
$$\dot{U}_C = -\text{j}5\dot{I} = -\text{j}5 \times 2\angle 0^\circ = 10\angle -90^\circ (\text{V})$$

电路的相量图如题解 9－5 图所示.

9－6 附图电路中，$I_2 = 10\text{A}, U_s = \dfrac{10}{\sqrt{2}}\text{V}$，求电流 $\dot{I}$ 和电压 $\dot{U}_s$，并画出电路的相量图.



题 9－6 图

解 提示 由于本题已知条件中没有给定某相量的初相位，因此必须首先确定参考相量. 若设 $\dot{I}_2$ 为参考相量，则可求出 $\dot{U}$，继而求出 $\dot{I}$ 和 $\dot{U}_s$，考虑到相量图，还应求出 $\dot{I}_1$.

设参考相量为 $\dot{I}_2$，即 $\dot{I}_2 = 10\angle 0^\circ \text{A}$，则

$$\dot{U} = -\text{j}1\dot{I}_2 = -\text{j}1 \times 10\angle 0^\circ = 10\angle -90^\circ (\text{V})$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{1} = 10\angle -90^\circ (\text{A})$$

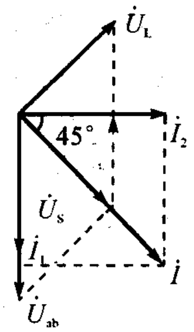
$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10\angle -90^\circ + 10\angle 0^\circ = 10 - \text{j}10 = 10\sqrt{2}\angle -45^\circ (\text{A})$$

$$\dot{U}_s = \text{j}\omega L\dot{I} + \dot{U}_1 = \text{j}\omega L \times 10\sqrt{2}\angle -45^\circ + 10\angle -90^\circ$$
$$= \omega L \cdot 10\sqrt{2}\angle 45^\circ - \text{j}10 = 10\omega L + \text{j}(10\omega L - 10)$$

而 $$U_s = \frac{10}{\sqrt{2}} = \sqrt{(10\omega L)^2 + (10\omega L - 10)^2}$$

当 $$(\omega L)^2 - \omega L + \frac{1}{4} = 0$$

有 $$\omega L = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times \frac{1}{4}}}{2} = 0.5(\Omega)$$



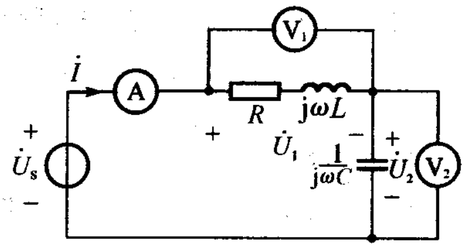
题解 9－6 图

故 $$\dot{U}_s = 10\omega L + \text{j}(10\omega L - 10)$$
$$= 10 \times 0.5 + \text{j}(10 \times 0.5 - 10)$$
$$= 5 - \text{j}5 = 5\sqrt{2}\angle -45^\circ (\text{V})$$

$$\dot{U}_L = \text{j}\omega L\dot{I} = \text{j}0.5 \times 10\sqrt{2}\angle -45^\circ = 5\sqrt{2}\angle 45^\circ (\text{V})$$

电路的相量图如题解 9－6 图所示.

9-7 附图中已知 $u_s = 200\sqrt{2}\cos(314t + \pi/3)\text{V}$，电流表 A 的读数为 2A，电压表 V_1，V_2 的读数均为 200V. 求参数 R, L, C，并作出该电路的相量图（提示：可先作相量图辅助计算）.



题 9-7

解 提示 由于电路中电流的有效值已知，且电容电压已知，则参数 C 易求得，如果能够想办法确定出 $\dot{U}_1$ 和 $\dot{I}$ 的相位关系，则可以得到 $R + j\omega L$，从而求得 R 和 L 的值. 考虑到本题中由于 $\dot{U}_s = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$ 且它们各自的有效值都为 200V，则它们的相量图构成等边电压三角形，利用这个等边三角形将有助于确定各相量的相位. 因此考虑使用相量图求解. 当然，不用相量图也可以求解本题，但相对复杂一些.

解法 Ⅰ 利用相量图求解：

根据分析，作等边电压三角形，如题解 9-7 所示. 由于已知 $\dot{U}_s = 200\underline{/60^\circ}\text{V}$，则 $\dot{U}_s$ 为三角形的 AB 边，若 $\dot{U}_2$ 为 CA 边，即 $\dot{U}_2 = 200\underline{/120^\circ}\text{V}$，则 $\dot{I}$ 应超前 $\dot{U}_2\,90^\circ$，故 $\dot{I} = 2\underline{/210^\circ} = 2\underline{/-150^\circ}$，此时 $\dot{I}$ 与 $\dot{U}_s$ 相位相差为 $210^\circ - 60^\circ = 150^\circ > 90^\circ$，这是不合理的（阻抗角或导纳角都应在 $\pm 90^\circ$ 范围内），故 $\dot{U}_2$ 不能是 CA 边，则 $\dot{U}_2$ 应该是 BC 边，即 $\dot{U}_2 = 200\underline{/0^\circ}\text{V}$，$\dot{U}_1 = 200\underline{/120^\circ}\text{V}$，$\dot{I}$ 超前 $\dot{U}_2\,90^\circ$，即 $\dot{I} = 2\underline{/90^\circ}\text{A}$.

因为 $\quad \dot{I} = j\omega C\dot{U}_2$

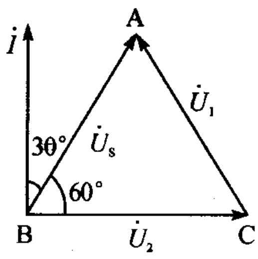
所以 $\quad C = \dfrac{I}{\omega U_2} = \dfrac{2}{314 \times 200} = 31.85\mu\text{F}$

而 $\quad R + j\omega L = \dfrac{\dot{U}_1}{\dot{I}} = \dfrac{200\underline{/120^\circ}}{2\underline{/90^\circ}} = 100\underline{/30^\circ}$

$$= (86.6 + j50)\Omega$$

解得 $\quad R = 86.6\Omega,\quad \omega L = 50\Omega$

故 $\quad L = \dfrac{50}{\omega} = \dfrac{50}{314} = 0.159(\text{H})$



题解 9-7

解法 Ⅱ 依题意

$$C=\frac{I}{\omega U_2}=\frac{2}{314\times 200}=31.85(\mu F)$$

为便于计算，可以假设 $\dot{I}=2\underline{/0^\circ}$A（注意此时 $\dot{U}_s$ 初相不再是 60°），

则 $\dot{U}_2=200\underline{/-90^\circ}$V，$\dot{U}_1=200\underline{/\varphi_1}$V，$\dot{U}_s=200\underline{/\varphi_s}$V，

且有
$$\dot{U}_s=\dot{U}_1+\dot{U}_2$$
$$200\underline{/\varphi_s}=200\underline{/\varphi_1}+200\underline{/-90^\circ}$$

推得
$$\begin{cases}\cos\varphi_s=\cos\varphi_1\\ \sin\varphi_s=\sin\varphi_1-1\end{cases}$$

将上式平方后相加，解得

$$\sin\varphi_1=\frac{1}{2}$$

因此
$$\varphi_1=30^\circ$$

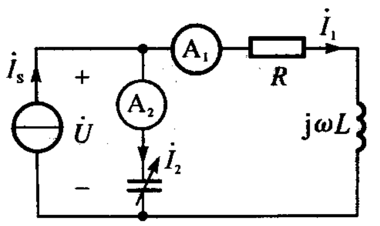
而得
$$\dot{U}_1=200\underline{/30^\circ}\text{V}$$

$$R+\mathrm{j}\omega L=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}}=\frac{200\underline{/30^\circ}}{2\underline{/0^\circ}}=100\underline{/30^\circ}=(86.6+\mathrm{j}50)\Omega$$

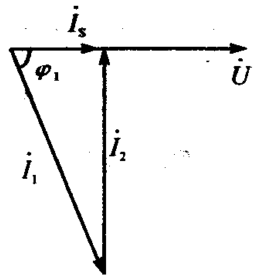
由于有
$$\begin{cases}R=86.6\Omega\\ \omega L=50\Omega\end{cases}$$

故
$$L=\frac{50}{\omega}=\frac{50}{314}\text{H}=0.159\text{H}$$

9-8 附图中 $i_s=14\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi)$mA，调节电容，使电压 $\dot{U}=U\underline{/\varphi}$，电流表 A_1 的读数为 50mA. 求电流表 A_2 的读数.



题 9-8 图



题解 9-8 图

解 提示 由 KCL，可得 $\dot{I}_s=\dot{I}_1+\dot{I}_2$，如果设定 φ 的值，则可以确定 $\dot{I}_1$ 与 $\dot{I}_2$ 的初相位，从而在相量图中得到一个特殊的电流三角形，有利于进一步求解.

解法 Ⅰ　相量图法　设 $\varphi=0°$，则 $\dot{I}_s=14\angle 0°\text{mA}$，$\dot{U}=U\angle 0°\text{V}$，$\dot{I}_1$ 为感性支路的电流，应该滞后电压 $\dot{U}$ 一个角度 φ_1；$\dot{I}_2$ 为电容支路的电流，应该超前电压 $\dot{U}$90°，故相量图如题解 9－8 图所示. 可以发现，三个电流正好构成一个直角三角形，则电流表 A_2 的读数为

$$I_2=\sqrt{I_1^2-I_s^2}=\sqrt{50^2-14^2}\text{mA}=48\text{mA}$$

解法 Ⅱ　代数方法

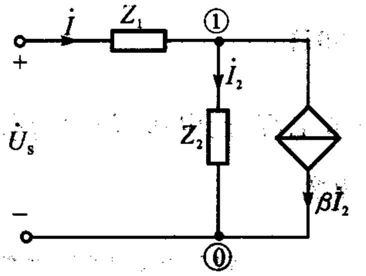
设 $\varphi=0°$，则 $\dot{I}_s=14\angle 0°\text{mA}$，$\dot{U}=U\angle 0°\text{V}$，且 $\dot{I}_1=50\angle\varphi_1(\varphi_1<0)$，$\dot{I}_2=I_2\angle 90°$，则由 KCL 方程可得

$$14\angle 0°=50\angle\varphi_1+I_2\angle 90°$$

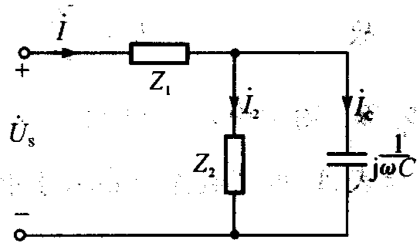
即
$$\begin{cases}14=50\cos\varphi_1\\0=50\sin\varphi_1+I_2\end{cases}$$

解之可得　$I_2=\sqrt{50^2-14^2}\text{mA}=48\text{mA}$

9－9　附图中 $Z_1=(10+\text{j}50)\Omega$，$Z_2=(400+\text{j}1000)\Omega$，如果要使 $\dot{I}_2$ 和 $\dot{U}_s$ 的相位差为 90°（正交），β 应等于多少？如果把图中 CCCS 换为可变电容 C，求 ωC.



题 9－9 图



题解 9－9 图

解　提示　若 $\dot{I}_2$ 和 $\dot{U}_s$ 的相位差为 90°，则二者之比应该是一个纯虚数.

由 KCL：

$$\dot{I}=\dot{I}_2+\beta\dot{I}_2=(1+\beta)\dot{I}_2$$

由 KVL：

$$\dot{U}_s=Z_1\dot{I}+Z_2\dot{I}_2=[Z_1(1+\beta)+Z_2]\dot{I}_2$$

则
$$\frac{\dot{U}_s}{\dot{I}_2}=Z_1(1+\beta)+Z_2$$

$$= (10 + j50)(1 + \beta) + (400 + j1000)$$
$$= 10(1 + \beta) + 400 + j[50(1 + \beta) + 1000]$$

依题意知上式中实部应该为零，则

$$10(1 + \beta) + 400 = 0$$

故 $$\beta = -41$$

如果 CCCS 换为可变电容 C，如题解 9－9 图所示，则

$$Z_2 \dot{I}_2 = \frac{\dot{I}_C}{j\omega C}$$

因此有 $$\dot{I}_C = j\omega C Z_2 \dot{I}_2$$

由 KCL：

$$\dot{I} = \dot{I}_2 + \dot{I}_C = (1 + j\omega C Z_2)\dot{I}_2$$

由 KVL：

$$\dot{U}_s = Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I}_2 = [Z_1(1 + j\omega C Z_2) + Z_2]\dot{I}_2$$

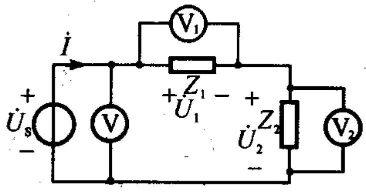
则 $$\frac{\dot{U}_s}{\dot{I}_2} = Z_1(1 + j\omega C Z_2) + Z_2 = Z_1 + Z_2 + j\omega C Z_1 Z_2$$
$$= (10 + j50) + (400 + j1000) + j\omega C(10 + j50)(400 + j1000)$$
$$= 410 - 30000\omega C + j(1050 - 46000\omega C)$$

若 $\dot{U}_s$ 与 $\dot{I}_2$ 相位相差 90°，则上式中实部为零，即

$$410 - 30000\omega C = 0$$

故 $$\omega C = \frac{410}{30000}\mathrm{S} = 1.37 \times 10^{-2}\mathrm{S}$$

9－10 已知附图电路中 $Z_2 = j60\Omega$，各交流电表的读数分别为 V：100V；V_1：171V；V_2：240V．求阻抗 Z_1．



题 9－10 图

解 提示 参考相量设定后，注意到三个电压构成三角形，故可以采用相量图辅助求解．

解法Ⅰ 相量图法

设串联电流 $\dot{I}$ 为参考相量，即 $\dot{I} = I\angle 0^\circ$A，$Z_2$ 为感抗，则 $\dot{U}_2$ 超前 $\dot{I}$ 90°，即 $\dot{U}_2 = 240\angle 90^\circ$V．若设 Z_1 为感性负载，则 $Z_1 = R_1 + jX_1 = |Z_1|\angle\varphi_1$，且 $X_1 > 0$，$\varphi_1 > 0$ 依题有 $\dot{U}_1 = 171\angle\varphi_1$，则

$$\dot{U}_s = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 171\,\underline{/\varphi_1} + 240\,\underline{/90^\circ}$$
$$= 171\cos\varphi_1 + j(171\sin\varphi_1 + 240)$$

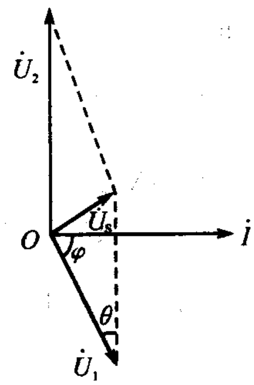
因此有 $U_s = \sqrt{(171\cos\varphi_1)^2 + (171\sin\varphi_1 + 240)^2}\text{V} > 240\text{V}$

而实际 $U_s = 100 < 240\text{V}$，则 Z_1 为感性负载不合题意，故 Z_1 为容性负载.

设 $Z_1 = R_1 + jX_1 = |Z_1|\,\underline{/\varphi_1}$ 且 $X_1 < 0, \varphi_1 < 0$，依题意作相量图如题解 9-10 图所示. 根据电压三角形可得

$$U_s^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2\cos\theta$$

得 $$\cos\theta = \frac{U_1^2 + U_2^2 - U_s^2}{2U_1U_2}$$
$$= \frac{171^2 + 240^2 - 100^2}{2\times 171\times 240} = 0.936$$
$$\theta = \arccos 0.936 = 20.58^\circ$$



题解 9-10 图

由相量图可知

$$\varphi = 90^\circ - \theta = 90^\circ - 20.58^\circ = 69.42^\circ$$

则 $$\dot{U}_1 = 171\,\underline{/-69.42^\circ}\text{V}$$

而 $$\dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{Z_2} = \frac{240\,\underline{/90^\circ}}{j60} = 4\,\underline{/0^\circ}\text{A}$$

故 $$Z_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}} = \frac{171\,\underline{/-69.42^\circ}}{4\,\underline{/0^\circ}}$$
$$= 42.75\,\underline{/-69.42^\circ} = (15.03 - j40.02)\Omega$$

解法 Ⅱ 设 $\dot{I}$ 为参考相量，$I = \dfrac{U_2}{|Z_2|} = \dfrac{240}{60}\text{A} = 4\text{A}$

故 $\dot{I} = 4\,\underline{/0^\circ}\text{A}$，设 $Z_1 = |Z_1|\,\underline{/\varphi_1}$

则 $$|Z_1| = \frac{U_1}{I} = \frac{171}{4} = 42.75\Omega$$

$$\dot{U}_2 = 240\,\underline{/90^\circ}\text{V}, \dot{U}_1 = 171\,\underline{/\varphi_1}\text{V}, \dot{U}_s = 100\,\underline{/\varphi_s}$$

由 $$\dot{U}_s = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 171\,\underline{/\varphi_1} + 240\,\underline{/90^\circ}$$

可得方程组：

$$\begin{cases} 100\cos\varphi_s = 171\cos\varphi_1 \\ 100\sin\varphi_s = 171\sin\varphi_1 + 240 \end{cases}$$

$$100^2 = 171^2 + 240^2 + 2\times 171\times 240\times \sin\varphi_1$$

解得　$\sin\varphi_1 = \dfrac{100^2 - 171^2 - 240^2}{2 \times 171 \times 240} = -0.936$

有　$\varphi_1 = -69.42°$

故　$Z_1 = 42.75 \underline{/-69.42°} = (15.03 - \mathrm{j}40.02)\Omega$

解法 Ⅲ　设电流 $\dot{I}$ 为参考相量，则

$$\dot{I} = \frac{U_2}{|Z_2|} \underline{/0°} = \frac{240}{60} \underline{/0°} = 4 \underline{/0°}\mathrm{A}$$

设阻抗 $Z_1 = R + \mathrm{j}X$，则

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_1\dot{I} = (R + \mathrm{j}X)\dot{I} = 171 \underline{/\varphi_1} \\ \dot{U}_s = (Z_1 + Z_2)\dot{I} = (R + \mathrm{j}X + \mathrm{j}60)\dot{I} = 100 \underline{/\varphi} \end{cases}$$

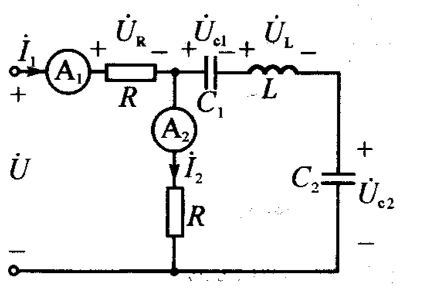
等式两边模相等，则

$$\begin{cases} R^2 + X^2 = (\dfrac{117}{I})^2 = (\dfrac{171}{4})^2 = 1827.5625 \\ R^2 + (X + 60)^2 = (\dfrac{100}{I})^2 = (\dfrac{100}{4})^2 = 625 \end{cases}$$

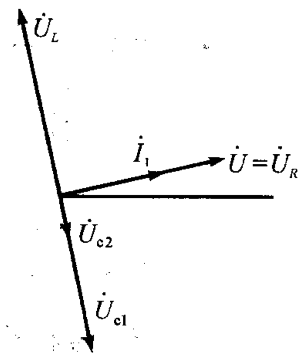
解上述方程组可得　$\begin{cases} R = 15.03\Omega \\ X = -40.02\Omega \end{cases}$

故有　$Z_1 = R + \mathrm{j}X = (15.03 - \mathrm{j}40.02)\Omega$

9-11　已知附图电路中，$u = 220\sqrt{2}\cos(250t + 20°)\mathrm{V}$，$R = 110\Omega$，$C_1 = 20\mu\mathrm{F}$，$C_2 = 80\mu\mathrm{F}$，$L = 1\mathrm{H}$. 求电路中各电流表的读数和电路的输入阻抗，画出电路的相量图.



题 9-11 图



题解 9-11 图

解　先计算 LC_1C_2 串联支路的总阻抗 Z

$$Z = \mathrm{j}\omega L - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C_2}$$

$$= \mathrm{j}\times 250\times 1 - \mathrm{j}\frac{1}{250\times 20\times 10^{-6}} - \mathrm{j}\frac{1}{250\times 80\times 10^{-6}}$$

$$= \mathrm{j}250 - \mathrm{j}200 - \mathrm{j}50 = 0$$

则该支路相当于短路，即发生了串联谐振．所以 $\dot{I}_2 = 0$，

$$\dot{U}_R = \dot{U} = 220\angle 20^\circ \mathrm{V}$$

故 $$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_R}{R} = \frac{220\angle 20^\circ}{110} = 2\angle 20^\circ \mathrm{A}$$

所以电流表 A_1 的读数为 2A，电流表 A_2 的读数为 0A.

电路的输入阻抗为 $Z_{eq} = R = 110\Omega$

各支路相量为 $\dot{U} = 220\angle 20^\circ \mathrm{V}$

$$\dot{I}_1 = 2\angle 20^\circ \mathrm{A}$$

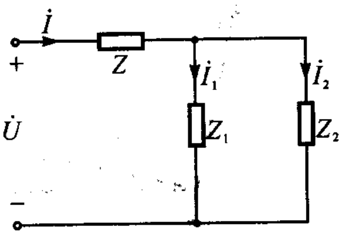
$$\dot{U}_{C1} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}\dot{I}_1 = -\mathrm{j}200\times 2\angle 20^\circ = 400\angle -70^\circ (\mathrm{V})$$

$$\dot{U}_{C2} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}\dot{I}_1 = -\mathrm{j}50\times 2\angle 20^\circ = 100\angle -70^\circ (\mathrm{V})$$

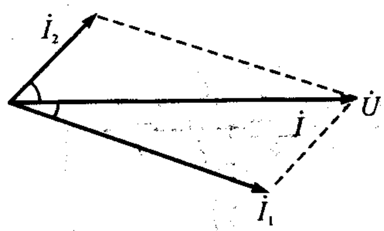
$$\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega L\dot{I}_1 = \mathrm{j}250\times 2\angle 20^\circ = 500\angle 110^\circ (\mathrm{V})$$

相量图如题解 9－11 图所示.

9－12 已知附图电路中 $U = 8\mathrm{V}$，$Z = (1-\mathrm{j}0.5)\Omega$，$Z_1 = (1+\mathrm{j}1)\Omega$，$Z_3 = (3-\mathrm{j}1)\Omega$. 求各支路的电流和电路输入导纳，画出电路的相量图.



题 9－12 图



题解 9－12 图

解 设参考相量为 $\dot{U} = 8\angle 0^\circ \mathrm{V}$，则电路输入阻抗为

$$Z_{in} = Z_1 /\!/ Z_2 + Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z$$

$$= \frac{(1+j)(3-j)}{1+j+3-j} + (1-j0.5) = 2(\Omega)$$

电路输入导纳为 $\quad Y_{in} = \frac{1}{Z_{in}} = \frac{1}{2} = 0.5(S)$

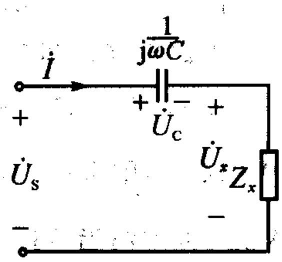
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_{in}} = \frac{8\underline{/0^\circ}}{2} = 4\underline{/0^\circ}(A)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\dot{I} = \frac{3-j}{1+j+3-j} \times 4\underline{/0^\circ} = 3.162\underline{/-18.44^\circ}(A)$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I} - \dot{I}_1 = 4\underline{/0^\circ} - 3.162\underline{/-18.44^\circ} = 1.414\underline{/45^\circ}(A)$$

电路的相量图如题解 9－12 图所示.

9－13 已知附图电路中，$U = 100V, U_C = 100\sqrt{3}V, X_C = -100\sqrt{3}\Omega$，阻抗 Z_x 的阻抗角 $|\varphi_x| = 60°$. 求 Z_x 和电路的输入阻抗.



题 9－13 图

解 提示 先判断 Z_x 的性质，再利用相量图分析.

设 $\dot{I}$ 为参考相量，依题意

$$\dot{I} = \frac{U_C}{|X_C|}\underline{/0^\circ} = \frac{100\sqrt{3}}{100\sqrt{3}}\underline{/0^\circ} = 1\underline{/0^\circ}(A)$$

因 $U = 100 < U_C = 100\sqrt{3}V$，所以 Z_x 只能为感性阻抗，则 $\varphi_x = 60°$，所以

$$\dot{U}_x = U_x\underline{/60^\circ}$$

$$\dot{U}_C = 100\sqrt{3}\underline{/-90^\circ}$$

电路的相量图如题解 9－13 图所示，对电压三角形，有

$$U^2 = U_C^2 + U_x^2 - 2U_CU_x\cos30^\circ$$

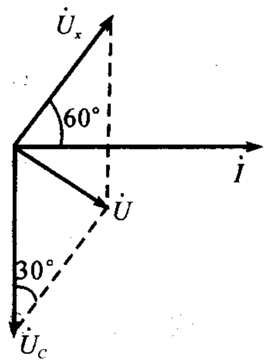
代入数据得

$$100^2 = (100\sqrt{3})^2 + U_x^2 - 2 \times 100\sqrt{3}U_x\cos30^\circ$$

$$U_x^2 - 300U_x + 20000 = 0$$

$$U_x = \frac{300 \pm \sqrt{(-300)^2 - 4 \times 20000}}{2}$$

$$= \frac{300 \pm 100}{2}(V)$$



题解 9－13 图

所以当 $U_x = \dfrac{300+100}{2} = 200(\text{V})$ 时，

$$|Z_x| = \frac{U_x}{I} = \frac{200}{1} = 200(\Omega)$$

故 $$Z_x = 200\underline{/60^\circ}\Omega = (100 + \text{j}100\sqrt{3})\ \Omega$$

电路的输入阻抗

$$Z_{\text{in}} = Z_x + \text{j}X_C = 100\ \Omega$$

当 $U_x = \dfrac{300-100}{2} = 100\text{V}$ 时，

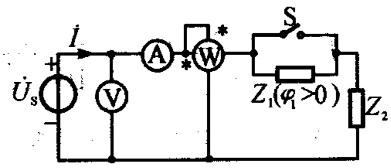
$$|Z_x| = \frac{U_x}{I} = \frac{100}{1} = 100(\Omega)$$

故 $$Z_x = 100\underline{/60^\circ} = (50 + \text{j}50\sqrt{3})\Omega$$

电路的输入阻抗

$$Z_{\text{in}} = Z_x + \text{j}X_C = (50 + \text{j}50\sqrt{3} - \text{j}100\sqrt{3})\Omega = (50 - \text{j}50\sqrt{3})\Omega$$

9-14 附图电路中，当S闭合时，各表读数如下：V为220V、A为10A、W为1000W；当S打开时，各表读数依次为220V、12A和1600W. 求阻抗 Z_1 和 Z_2，设 Z_1 为感性.



题 9-14 图

解 提示 三表法测复阻抗时，只要确定了复阻抗的性质，就可以惟一确定复阻抗的值.

开关闭合时，Z_1 被短路，此时电路阻抗为

$$Z_2 = |Z_2|\underline{/\varphi},\ P = UI\cos\varphi$$

推得 $$\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{1000}{220\times 10} = \frac{5}{11}$$

有 $$\varphi = \arccos\frac{5}{11} = \pm 62.964^\circ$$

$$|Z_2| = \frac{U}{I} = \frac{220}{10} = 22(\Omega)$$

故 $Z_2 = |Z_2|\underline{/\varphi} = 22\underline{/\pm 62.964^\circ}\Omega = (10 \pm \text{j}19.596)\Omega$

开关打开后，电路阻抗为 $Z = Z_1 + Z_2 = Z\underline{/\varphi}$，此时 $P = UI\cos\varphi$

推得 $$\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{1600}{220 \times 12} = 0.606$$

有 $$\varphi = \arccos 0.606 = \pm 52.695^\circ$$

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{220}{12} = 18.333(\Omega)$$

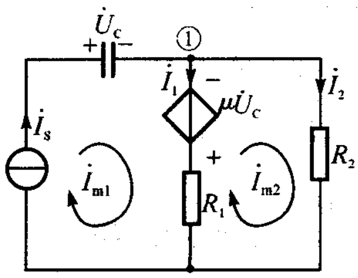
故 $Z = |Z| \angle\varphi = 18.333 \angle \pm 52.695^\circ \Omega = (11.11 \pm \mathrm{j}14.58)\Omega$

由于 Z_1 为感性，若 Z_2 也为感性，则开关闭合后的总阻抗会变大，从而电路中电流表读数应该减小，这不符合题意，故 Z_2 为容性负载，即 $Z_2 = (10 - \mathrm{j}19.596)\Omega$，而对 Z 的性质无法作出判断. 则

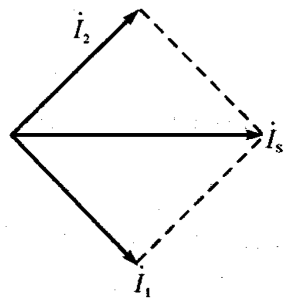
$$Z_1 = Z - Z_2 = [11.11 \pm \mathrm{j}14.58 - (10 - \mathrm{j}19.596)]\Omega$$

故 $$\begin{cases} Z_1 = 1.11 + \mathrm{j}5.016 = 5.137 \angle 77.52^\circ(\Omega) \\ \text{或} \quad Z_1 = 1.11 + \mathrm{j}34.176 = 34.194 \angle 88.14^\circ(\Omega) \end{cases}$$

9-15 已知附图电路中，$I_s = 10\mathrm{A}, \omega = 5000\mathrm{rad/s}, R_1 = R_2 = 10\Omega, C = 10\mu\mathrm{F}, \mu = 0.5$. 求各支路电流并作出电路的相量图.



题 9-15 图



题解 9-15 图

解 提示 可用结点电压法、回路法（网孔法）、支路法等方法求解.

解法 Ⅰ 结点电压法，只有一个独立结点，注意电容与电流源串联支路的处理，设 $\dot{I}_s = 10 \angle 0^\circ \mathrm{A}$，

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\dot{U}_{n1} = \dot{I}_s - \frac{1}{R_1}\mu\dot{U}_C = \dot{I}_s - \frac{\mu}{R} \cdot \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \cdot \dot{I}_s$$

代入数据，得

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)\dot{U}_{n1} = 10 \angle 0^\circ - \frac{0.5}{10} \times \frac{1}{\mathrm{j}5000 \times 10 \times 10^{-6}} \times 10 \angle 0^\circ$$

解得 $$\dot{U}_{n1} = 50 + j50 = 50\sqrt{2}\angle 45^\circ(\mathrm{V})$$

则各电流为

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{n1}}{R_2} = \frac{50\sqrt{2}\angle 45^\circ}{10} = 5\sqrt{2}\angle 45^\circ = (5 + j5)(\mathrm{A})$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_s - \dot{I}_2 = 10\angle 0^\circ - (5 + j5) = 5 - j5 = 5\sqrt{2}\angle -45^\circ(\mathrm{A})$$

相量图如题解 9－15 图所示

解法 Ⅱ 网孔法 $\dot{I}_{m1} = \dot{I}_s = 10\angle 0^\circ$

$$\dot{I}_{m2} = \dot{I}_2$$

$$-R_1\dot{I}_{m1} + (R_1 + R_2)\dot{I}_{m2} = -\mu\dot{U}_C = -\frac{\mu}{j\omega C}\dot{I}_{m1}$$

解得 $$\dot{I}_{m2} = \frac{R - \frac{\mu}{j\omega C}}{R_1 + R_2}\dot{I}_{m1} = \frac{10 - \frac{0.5}{j5000 \times 10 \times 10^{-6}}}{10 + 10} \times 10\angle 0^\circ \mathrm{A}$$

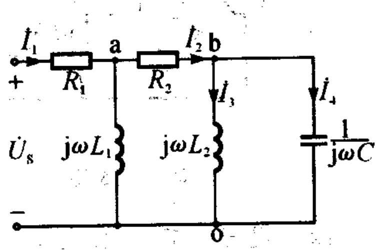
$$= (5 + j5)\ \mathrm{A}$$

因此有 $$\dot{I}_2 = \dot{I}_{m2} = (5 + j5)\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m2} = \dot{I}_s - \dot{I}_2$$

$$= [10\angle 0^\circ - (5 + j5)]\mathrm{A} = (5 - j5)\ \mathrm{A}$$

9－16 已知附图电路中，$R_1 = 100\Omega$，$L_1 = 1\mathrm{H}$，$R_2 = 200\Omega$，$L_2 = 1\mathrm{H}$，电压 $U_s = 100\sqrt{2}\mathrm{V}$，$\omega = 100\ \mathrm{rad/s}$，$I_2 = 0$. 求其它各支路电流.



题 9－16 图

解 提示 由 $I_2 = 0$ 可知 L_2 与 C 发生了并联谐振，则流过 L_1 的电流也为 $\dot{I}_1$，故此时电路等效总输入阻抗为 $R_1 + j\omega L_1$，因 R_2 上无电压，所以 a，b 等电位，即 $\dot{U}_{ao} = \dot{U}_{bo}$.

依题意，设 $\dot{U}_s = 100\sqrt{2}\angle 0^\circ\mathrm{V}$，则

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{100\sqrt{2}\angle 0^\circ}{100 + j \times 100 \times 1} = 1\angle -45^\circ\mathrm{A}$$

$$\dot{U}_{ao} = \dot{U}_{bo} = j\omega L_1 \cdot \dot{I}_1 = j100 \times 1 \times 1\angle -45^\circ$$

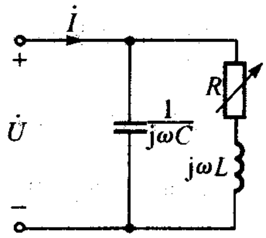
$$= 100\angle 45^\circ(\mathrm{V})$$

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{U}_{bo}}{j\omega L_2}=\frac{100\angle 45^\circ}{j\times 100\times 1}A=1\angle -45^\circ A$$

根据并联谐振的特点，知 $\dot{I}_3+\dot{I}_4=0$

故 $\dot{I}_4=-\dot{I}_3=-1\angle -45^\circ A=1\angle 135^\circ A$

9-17 如果图示电路中 R 改变时电流 I 保持不变，L，C 应满足什么条件？



题 9-17 图

解 提示 依题意，设 L、C 已经满足条件，则 R 不论为何值都应满足 I 保持不变，从而可以取 R 的两个特殊值来求解，此题用其它常规解法都较复杂。

当 $R=\infty$（开路）时，$I=\omega CU$。

当 $R=0$（短路）时，

$$\dot{I}=(j\omega C+\frac{1}{j\omega L})\dot{U}$$

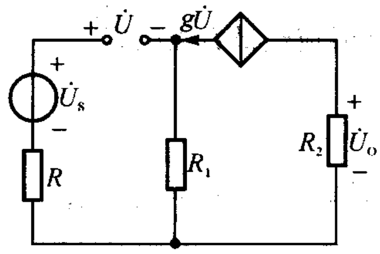
因此有
$$I=\left|\omega C-\frac{1}{\omega L}\right|\cdot U$$

根据分析，I 应保持不变，则有

$$\omega C=\left|\omega C-\frac{1}{\omega L}\right|$$

故 $LC=\dfrac{1}{2\omega^2}$，此即为所求条件。

9-18 求附图电路电阻 R_2 的端电压 $\dot{U}_o$。



题 9-18 图

解 提示 R_2 上的电流为 $g\dot{U}$，故欲求 $\dot{U}_o$，只需求出 $\dot{U}$ 即可。

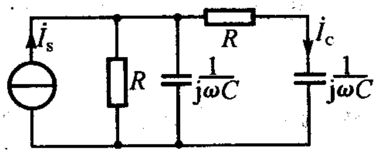
由于 $\dot{U}$ 为开路电压，则 R 上无电流，故有

$$\dot{U}=\dot{U}_s-R_1\cdot g\dot{U}$$

得
$$\dot{U}=\frac{\dot{U}_s}{1+R_1 g}$$

所以
$$\dot{U}_o=-R_2\cdot g\dot{U}=-\frac{R_2 g}{1+R_1 g}\cdot\dot{U}_s$$

9-19 图示电路中，已知 $I_s = 60\text{mA}, R = 1\text{k}\Omega, C = 1\mu\text{F}$. 如果电流源的角频率可变，问在什么频率时，流经最右端电容 C 的电流 $\dot{I}_C$ 为最大？求此电流.



题 9-19 图

解 提示 电路总结构为并联分流电路，且总电流大小已知，故可据此讨论频率对分流阻抗的影响.

RC 并联支路的导纳为 $\quad Y = \dfrac{1}{R} + j\omega C$

RC 串联支路的阻抗为 $\quad Z = R + \dfrac{1}{j\omega C}$

根据分流原理，流经最右端电容 C 的电流 $\dot{I}_C$ 为

$$\dot{I}_C = \frac{\frac{1}{Y}}{\frac{1}{Y} + Z} \cdot \dot{I}_s = \frac{\dot{I}_s}{1 + YZ}$$

要使 $\dot{I}_C$ 有效值为最大，则必须使 $1 + YZ$ 的模为最小，因为

$$1 + YZ = 1 + (\frac{1}{R} + j\omega C)(R + \frac{1}{j\omega C})$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{j\omega CR} + j\omega CR + 1 = 3 + j(\omega CR - \frac{1}{\omega CR})$$

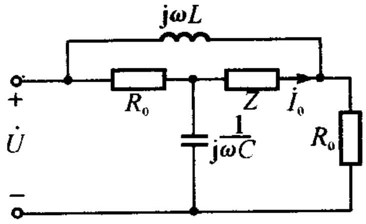
所以只有当 $\omega CR - \dfrac{1}{\omega CR} = 0$ 时 $|1 + YZ|$ 为最小值 3.

即 $\quad \omega = \dfrac{1}{RC} = \dfrac{1}{1 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-6}} = 1000\text{rad/s}$ 时，$|1+YZ|$ 为最小，此时流经最右端电容 C 的电流 $\dot{I}_C$ 有效值为最大.

$$I_{c\max} = \frac{I_s}{|1 + YZ|} = \frac{60}{3}\text{mA} = 20\text{mA}$$

（此时 $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1000}{2 \times 314} = 159.16\text{Hz}$）

9-20 已知附图电路中的电压源为正弦量，$L = 1\text{mH}, R_0 = 1\text{k}\Omega, Z = (3 + j5)\Omega$. 试求：(1) 当 $\dot{I}_0 = 0$ 时，C 值为多少？(2) 当条件(1) 满足时，试证明输入阻抗为 R_0.



题 9－20 图

解　提示　从桥式电路电桥平衡入手.

（1）当 $\dot{I}_0=0$ 时，电桥处于平衡状态，则满足

$$R_0^2=j\omega L\times\frac{1}{j\omega C}=\frac{L}{C}$$

得

$$C=\frac{L}{R_0^2}=\frac{1\times10^{-3}}{(1\times10^3)^2}=10^{-9}\mathrm{F}=1000\mathrm{pF}$$

（2）当 $\dot{I}_0=0$ 时，Z 所在支路相当于开路，则输入阻抗为

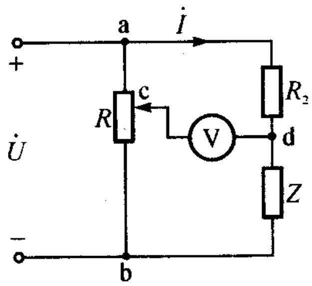
$$Z_{in}=(R_0+\frac{1}{j\omega C})\ //\ (R_0+j\omega L)$$

$$=\frac{(R_0+\frac{1}{j\omega C})\cdot(R_0+j\omega L)}{(R_0+\frac{1}{j\omega C})+(R_0+j\omega L)}=\frac{R_0^2+jR_0(\omega L-\frac{1}{\omega C})+\frac{L}{C}}{2R_0+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})}$$

代入 $R_0^2=\frac{L}{C}$ 得

$$Z_{in}=\frac{2R_0^2+jR_0(\omega L-\frac{1}{\omega C})}{2R_0+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})}=R_0$$

9－21　在附图电路中，已知 $U=100\mathrm{V}$，$R_2=6.5\Omega$，$R=20\Omega$，当调节触点 c 使 $R_{ac}=4\Omega$ 时，电压表的读数最小，其值为 30V. 求阻抗 Z.



题 9－21 图

解　提示　电压表的读数为 $\dot{U}_{cd}$ 的有效值；可以采用相量图分析.

解法 I　电压表的读数为 $\dot{U}_{cd}$ 的有效值，设 $\dot{U}=100\underline{/0^\circ}\mathrm{V}$，则

$$\dot{U}_{cd}=\dot{U}_{ca}+\dot{U}_{ad}=\dot{U}_{ad}-\dot{U}_{ac}=\frac{R_2\dot{U}}{R_2+Z}-\frac{R_{ac}\dot{U}}{R}$$

当调节触点时，改变了 R_{ac}，从而只影响到 $\dot{U}_{cd}$ 的实部而 $\dot{U}_{cd}$ 虚部保持不变. 因此当 $\dot{U}_{cd}$ 实部为零时 $|\dot{U}_{cd}|$ 为最小，故可知当电压表读数

为 30V 时 $\dot{U}_{cd}$ 实部为零，则 $\dot{U}_{cd}=\pm j30$，代入各参数值可得

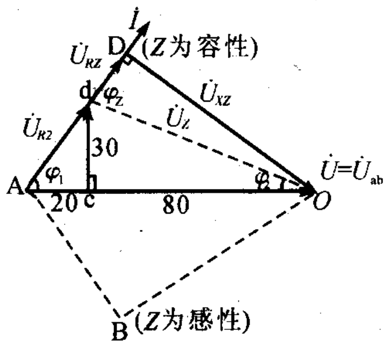
$$\pm j30=\frac{6.5\times 100\angle 0^\circ}{6.5+Z}-\frac{4\times 100\angle 0^\circ}{20}=\frac{650}{6.5+Z}-20$$

解之可得

$$Z=\frac{650}{20\pm j30}-6.5=10\mp j15-6.5=(3.5\mp j15)\Omega$$

解法 Ⅱ　利用相量图分析.

设 $\dot{U}=100\angle 0^\circ$V，对电阻支路来说，$\dot{U}_{ac}$ 和 $\dot{U}_{cb}$ 与 $\dot{U}$ 同相位，设 $Z=R_Z+jX_Z$，由于 Z 的性质未知，不妨设为容性分析，则其电流 $\dot{I}$ 超前 $\dot{U}$ 一定角度，作相量图如题解 9－21 图实线部分所示. $\dot{U}_{R2}$ 与 $\dot{I}$ 同相，$\dot{U}_{RZ}$ 与 $\dot{I}$ 同相，而 $\dot{U}_{XZ}$ 滞后 $\dot{I}$90°. 据相量图可知，d 位于 AD 线段上某点，不随 c 的移动而变化，而 c 在 AO 上滑动，电压表的读数对应于线段 cd，显然使 cd 最短的位置应是 cd ⊥ AO.



题解 9－21 图

依相量图，有

$$U_2=\sqrt{30^2+80^2}=85.44(\text{V})$$

$$U_{R2}=\sqrt{20^2+30^2}=36.06(\text{V})$$

$$I=\frac{U_{R2}}{R_2}=\frac{36.06}{6.5}=5.55(\text{A})$$

$$\varphi_1=\arctan\frac{30}{20}=56.31^\circ$$

$$\varphi_2=\arctan\frac{30}{80}=20.556^\circ$$

有

$$\dot{I}=I\angle\varphi_1=5.55\angle 56.31^\circ\text{A}$$

$$\dot{U}_Z=U_Z\angle-\varphi_2=85.44\angle-20.556^\circ\text{V}$$

故

$$Z=\frac{\dot{U}_Z}{\dot{I}}=\frac{85.44\angle-20.556^\circ}{5.55\angle 56.31^\circ}$$

$$=15.4\angle-76.866^\circ=(3.5-j15)\Omega$$

若设 Z 为感性负载，同理可得

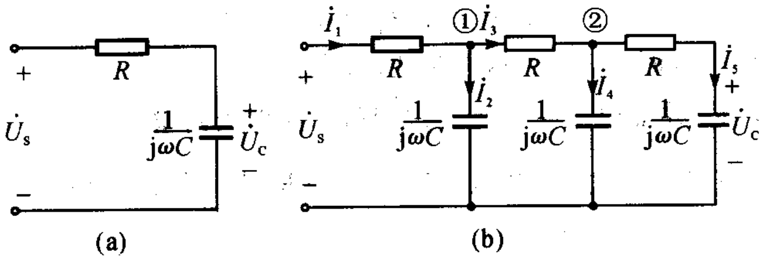
$$Z=15.4\angle 76.866^\circ=(3.5+j15)\Omega$$

9－22 附图电路是阻容移相装置.

(1) 如果要求图(a)中 $\dot{U}_C$ 滞后电压 $\dot{U}_s$ 的角度为 $\pi/3$，参数 R，C 应如何选择？

(2) 如果要求求图(b)中的 $\dot{U}_C$ 滞后 $\dot{U}_s$ 的角度为 π，即反相，R，C 应如何选择？

(3) 如果图(b)中 R 和 C 的位置互换，又如何选择 R，C？



题 9－22 图

解 (1) 依题意，

$$\dot{U}_C=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}\dot{U}_s=\frac{\dot{U}_s}{1+\omega CR},$$

要使 $\dot{U}_C$ 滞后电压 $\dot{U}_s$ 的角度为 $\frac{\pi}{3}$，则 $\frac{\omega CR}{1}=\tan\frac{\pi}{3}$ 即 $\omega CR=\sqrt{3}$.

(2) 可利用齐性定理求解，对"T"型电路，宜采用倒推法求解.

设 $\dot{U}_C=1\angle 0^\circ$ 则

$$\dot{I}_5=j\omega C\cdot\dot{U}_C=j\omega C=Y_C$$

$$\dot{U}_{n2}=R\dot{I}_5+\dot{U}_C=RY_C+1$$

$$\dot{I}_4=j\omega C\dot{U}_{n2}=Y_C\dot{U}_{n2}=RY_C^2+Y_C$$

$$\dot{I}_3=\dot{I}_4+\dot{I}_5=(RY_C^2+Y_C)+Y_C=RY_C^2+2Y_C$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{n1}&=R\dot{I}_3+\dot{U}_{n2}=R(RY_C^2+2Y_C)+(RY_C+1)\\&=R^2Y_C^2+3RY_C+1\end{aligned}$$

$$\dot{I}_2=j\omega C\dot{U}_{n1}=Y_C\dot{U}_{n1}=R^2Y_C^3+3RY_C^2+Y_C$$

$$\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3=(R^2Y_C^3+3RY_C^2+Y_C)+(RY_C^2+2Y_C)$$

$$= R^2Y_C^3 + 4RY_C^2 + 3Y_C$$

$$\dot{U}_s = R\dot{I}_1 + \dot{U}_{n1} = R(R^2Y_C^3 + 4RY_C^2 + 3Y_C) + (R^2Y_C^2 + 3RY_C + 1)$$

$$= R^3Y_C^3 + 5R^2Y_C^2 + 6RY_C + 1$$

$$= R^3(j\omega C)^3 + 5R^2(j\omega C)^2 + 6R\cdot j\omega C + 1$$

$$= 1 - 5R^2\omega^2C^2 + j(6R\omega C - R^3\omega^3C^3)$$

要使 $\dot{U}_C$ 与 $\dot{U}_s$ 反相，则 $\dot{U}_s = U_s \underline{/180^\circ}$，即虚部应为零，且实部为负值，故

$$6R\omega C - R^3\omega^3C^3 = 0$$

解得

$$R\omega C = 0 \text{ 或 } R\omega C = \sqrt{6}$$

$R\omega C = 0$ 时 $\dot{U}_s = 1$ 不合题意，故舍去.

$R\omega C = \sqrt{6}$ 时 $\dot{U}_s = -29$，满足题意，此即为所求.

(3) 按(2)所示方法倒推，把(2)中的 R 用 $\frac{1}{j\omega C}$ 替换，Y_C 用 $\frac{1}{R}$ 替换，

可得

$$\dot{U}_s = (\frac{1}{j\omega C})^3\cdot(\frac{1}{R})^3 + 5\cdot(\frac{1}{j\omega C})^2\cdot(\frac{1}{R})^2 + 6\cdot\frac{1}{j\omega C}\cdot\frac{1}{R} + 1$$

$$= 1 - \frac{5}{(R\omega C)^2} + j\,\frac{1}{R\omega C}[(\frac{1}{R\omega C})^2 - 6]$$

令 $\dot{U}_s$ 虚部为零，且实部为负值，即

$$\frac{1}{R\omega C}\cdot[(\frac{1}{R\omega C})^2 - 6] = 0$$

当 $R\omega C \to \infty$ 不合题意，舍去.

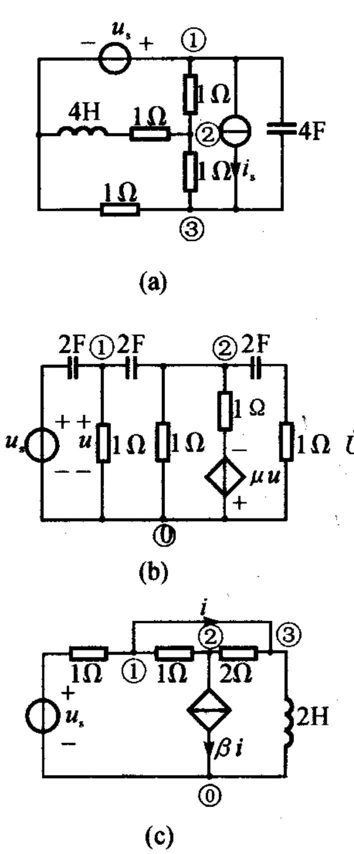
只有在 $R\omega C = \frac{1}{\sqrt{6}}$ 时，$\dot{U}_s = -29$，符合题意.

9-23 列出图示电路的回路电流方程和结点电压方程. 已知 $u_s = 14.14\cos(2t)\,\text{V}$，$i_s = 1.414\cos(2t + 30^\circ)\,\text{A}$.

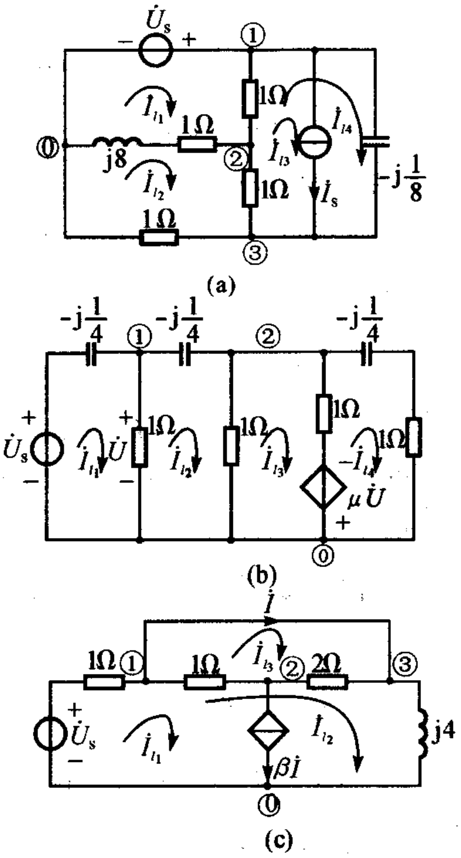
解 先计算各感抗和容抗，画出各电路的相量模型如题解 9-23 图所示. 给结点编号；给回路编号并设定各回路绕行方向.

(a) 回路电流方程

$$\begin{cases}(1+1+j8)\dot{I}_{l1} - (1+j8)\dot{I}_{l2} - \dot{I}_{l3} - \dot{I}_{l4} = \dot{U}_s = 10\underline{/0^\circ} \\ -(1+j8)\dot{I}_{l1} + (1+1+1+j8)\dot{I}_{l2} - \dot{I}_{l3} - \dot{I}_{l4} = 0 \\ \dot{I}_{l3} = \dot{I}_s = 1\underline{/30^\circ} \\ -\dot{I}_{l1} - \dot{I}_{l2} + (1+1)\dot{I}_{l3} + (1+1-j\,\frac{1}{8})\dot{I}_{l4} = 0\end{cases}$$



题 9－23 图



题解 9－23 图

整理得

$$\begin{cases}(2+\mathrm{j}8)\dot{I}_{l1}-(1+\mathrm{j}8)\dot{I}_{l2}-\dot{I}_{l3}-\dot{I}_{l4}=10\underline{/0^\circ} \\ -(1+\mathrm{j}8)\dot{I}_{l1}+(3+\mathrm{j}8)\dot{I}_{l2}-\dot{I}_{l3}-\dot{I}_{l4}=0 \\ \dot{I}_{l3}=1\underline{/30^\circ} \\ -I_{l1}-\dot{I}_{l2}+2\dot{I}_{l3}+(2-\mathrm{j}\dfrac{1}{8})\dot{I}_{l4}=0\end{cases}$$

结点电压方程：以结点 0 为参考结点，注意结点 1 的处理.

$$\begin{cases}\dot{U}_{n1}=\dot{U}_s=10\underline{/0^\circ} \\ -\dot{U}_{n1}+(1+1+\dfrac{1}{1+\mathrm{j}8})\dot{U}_{n2}-\dot{U}_{n3}=0 \\ -\mathrm{j}8\dot{U}_{n1}-\dot{U}_{n2}+(1+1+\mathrm{j}8)\dot{U}_{n3}=\dot{I}_s=1\underline{/30^\circ}\end{cases}$$

故 $$\begin{cases} \dot{U}_{n1} = 10\,\underline{/0^\circ} \\ -\dot{U}_{n1} + (2 + \dfrac{1}{1+j8})\dot{U}_{n2} - \dot{U}_{n3} = 0 \\ -j8\dot{U}_{n1} - \dot{U}_{n2} + (2+j8)\dot{U}_{n3} = 1\,\underline{/30^\circ} \end{cases}$$

(b) 回路电流方程

$$\begin{cases} (1-j0.25)\dot{I}_{l1} - \dot{I}_{l2} = \dot{U}_s = 10\,\underline{/0^\circ} \\ -\dot{I}_{l1} + (2-j0.25)\dot{I}_{l2} - \dot{I}_{l3} = 0 \\ -\dot{I}_{l2} + 2\dot{I}_{l3} - \dot{I}_{l4} = \mu\dot{U} \\ -\dot{I}_{l3} + (2-j0.25)\dot{I}_{l4} = -\mu\dot{U} \\ \dot{U} = 1\times(\dot{I}_{l1} - \dot{I}_{l2}) = \dot{I}_{l1} - \dot{I}_{l2} \end{cases}$$

结点电压方程：以结点 0 为参考结点.

$$\begin{cases} (1+j4+j4)\dot{U}_{n1} - j4\dot{U}_{n2} = j4\dot{U}_s = j4\times 10\,\underline{/0^\circ} = j40 \\ -j4\dot{U}_{n1} + (1+1+j4+\dfrac{1}{1-j0.25})\dot{U}_{n2} = -\mu\dot{U} \\ \dot{U} = \dot{U}_{n1} \end{cases}$$

故 $$\begin{cases} (1+j8)\dot{U}_{n1} - j4\dot{U}_{n2} = j40 \\ (\mu - j4)\dot{U}_{n1} + (2+j4+\dfrac{1}{1-j0.25})\dot{U}_{n2} = 0 \end{cases}$$

(c) 回路电流方程

$$\begin{cases} \dot{I}_{l1} = \beta\dot{I} \\ (1+1)\dot{I}_{l1} + (1+1+2+j4)\dot{I}_{l2} - (1+2)\dot{I}_{l3} = \dot{U}_s = 10\,\underline{/0^\circ} \\ -\dot{I}_{l1} - (1+2)\dot{I}_{l2} + (1+2)\dot{I}_{l3} = 0 \\ \dot{I} = \dot{I}_{l3} \end{cases}$$

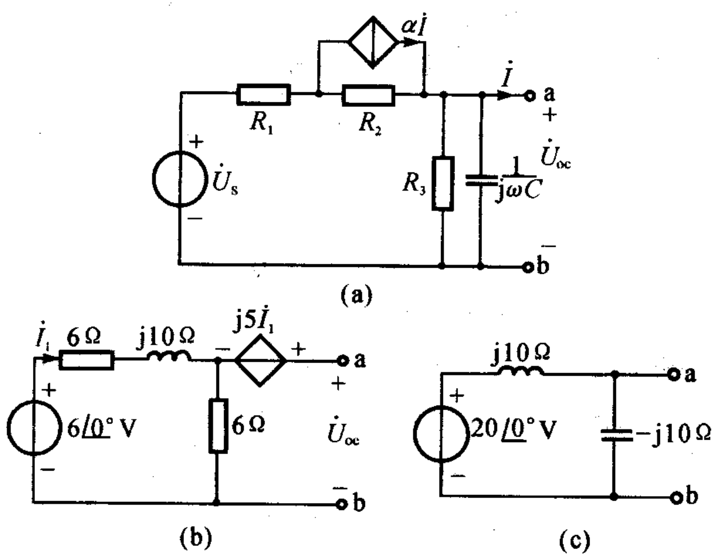
故 $$\begin{cases} \dot{I}_{l1} = \beta\dot{I} \\ 2\dot{I}_{l1} + (4+j4)\dot{I}_{l2} - 3\dot{I}_{l2} = 10\,\underline{/0^\circ} \\ -\dot{I}_{l1} - 3\dot{I}_{l2} + 3\dot{I}_{l3} = 0 \\ \dot{I} = \dot{I}_{l3} \end{cases}$$

结点电压方程，注意可将 $\dot{I}$ 所在短路导线视作零伏电压源或 $\dot{I}_s = \dot{I}$ 的电流源（替代定理）处理.

$$\begin{cases}(1+1)\dot{U}_{n1}-\dot{U}_{n2}=\dfrac{\dot{U}_s}{1}-\dot{I}=10\underline{/0^\circ}-\dot{I}\\ -\dot{U}_{n1}+(1+\dfrac{1}{2})\dot{U}_{n2}-\dfrac{1}{2}\dot{U}_{n3}=-\beta\dot{I}\\ -\dfrac{1}{2}\dot{U}_{n2}+(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{j4})\dot{U}_{n3}=\dot{I}\\ \dot{U}_{n1}-\dot{U}_{n3}=0\end{cases}$$

故
$$\begin{cases}2\dot{U}_{n1}-\dot{U}_{n2}=10\underline{/0^\circ}-\dot{I}\\ -\dot{U}_{n1}+1.5\dot{U}_{n2}-0.5\dot{U}_{n3}=-\beta\dot{I}\\ -0.5\dot{U}_{n2}+(0.5-j0.25)\dot{U}_{n3}=\dot{I}\\ \dot{U}_{n1}-\dot{U}_{n3}=0\end{cases}$$

9-24 求图示一端口的戴维宁(或诺顿)等效电路.



题 9-24 图

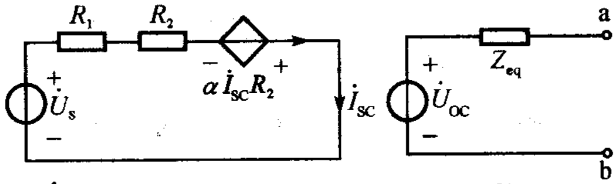
解 (a) 先求开路电压 $\dot{U}_{oc}$，由于开路，$\dot{I}=0$，则受控源 $\alpha\dot{I}=0$，设 R_3 与 $\frac{1}{j\omega C}$ 并联支路的等效阻抗为 Z，则

$$Z=\frac{R_3\times\dfrac{1}{j\omega C}}{R_3+\dfrac{1}{j\omega C}}=\frac{R_3}{1+j\omega CR_3}$$

故 $$\dot{U}_{oc}=\frac{Z}{R_1+R_2+Z}\cdot\dot{U}_s=\frac{\dfrac{R_3}{1+j\omega CR_3}}{R_1+R_2+\dfrac{R_3}{1+j\omega CR_3}}\cdot\dot{U}_s$$

$$=\frac{R_3\cdot\dot{U}_s}{R_1+R_2+R_3+j\omega CR_3(R_1+R_2)}$$

再求戴维宁等效阻抗 Z_{eq}，注意到短路电流易于求得，故先求短路电流 $\dot{I}_{sc}$. 将 ab 短路并将受控源支路作等效变换可得题解 9－24 图(a1) 所示电路，则



(a1)　　(a2)

题解 9－24 图

$$R_1\dot{I}_{sc}+R_2\dot{I}_{sc}-\alpha\dot{I}_{sc}R_2-\dot{U}_s=0$$

有 $$\dot{I}_{sc}=\frac{\dot{U}_s}{R_1+R_2-\alpha R_2}$$

故 $$Z_{eq}=\frac{\dot{U}_{oc}}{\dot{I}_{sc}}=\frac{R_3(R_1+R_2-\alpha R_2)}{R_1+R_2+R_3+j\omega CR_3(R_1+R_2)}$$

等效电路如题解 9－24 图(a2) 所示.

(b) 先求开路电压 $\dot{U}_{oc}$，开路时，端口无电流，则

$$\dot{U}_{oc}=j5\dot{I}_1+6\dot{I}_1=(6+j5)\dot{I}_1$$

而 $$6\underline{/0^\circ}=6\dot{I}_1+j10\dot{I}_1+6\dot{I}_1=(12+j10)\dot{I}_1$$

故 $$\dot{U}_{oc}=(6+j5)\dot{I}_1=(6+j5)\times\frac{6\underline{/0^\circ}}{12+j10}\text{V}=3\underline{/0^\circ}\text{V}$$

再求短路电流. 将 ab 短路可得题解 9－24 图(b1) 所示电路，则

$$(6+j10)\dot{I}_1-j5\dot{I}_1=6\underline{/0^\circ}$$

推得 $$\dot{I}_1=\frac{6\underline{/0^\circ}}{6+j5}\text{A}$$

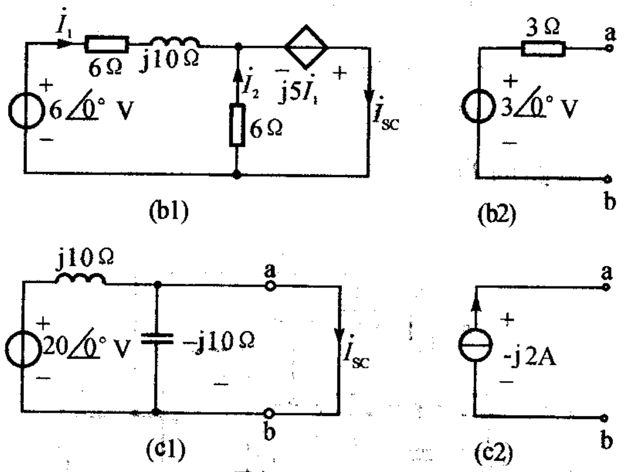
$$\dot{I}_2=\frac{j5\dot{I}_1}{6}=\frac{j5}{6}\times\frac{6}{6+j5}\text{A}=\frac{j5}{6+j5}\text{A}$$

则 $\dot{I}_{sc}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=\dfrac{6}{6+j5}+\dfrac{j5}{6+j5}=\dfrac{6+j5}{6+j5}=1\underline{/0^\circ}(A)$

电路的戴维宁等效阻抗为

$$Z_{eq}=\frac{\dot{U}_{oc}}{\dot{I}_{sc}}=\frac{3\underline{/0^\circ}}{1\underline{/0^\circ}}=3(\Omega)$$

戴维宁等效电路如题解 9－24 图(b2) 所示.



题解 9－24 图

(c) 求短路电流，将 ab 短路如题解 9－24 图(c1) 所示，则

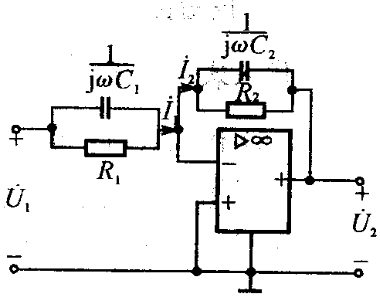
$$\dot{I}_{sc}=\frac{20\underline{/0^\circ}}{j10}=2\underline{/-90^\circ}=-j2(A)$$

将电压源置零，即用短路替代，求等效电导 Y_{eq}，则

$$Y_{eq}=\frac{1}{j10}+\frac{1}{-j10}=0(S)$$

故等效电路为一个电流源，如题解 9－24 图(c2) 所示. 该电路无戴维宁等效电路.

9－25 设 $R_1=R_2=1\text{k}\Omega, C_1=\mu\text{F}, C_2=0.01\mu\text{F}$. 求图示电路的 $\dot{U}_2/\dot{U}_1$.



题 9－25 图

解 提示 对理想运算放大器，可从"虚短路"和"虚断路"两个性质入手分析.

依题意 $\dot{I}_1=\dot{I}_2$

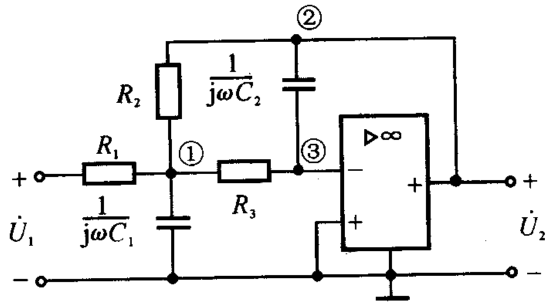
而 $\qquad \dot{I}_1=(j\omega C_1+\frac{1}{R_1})\dot{U}_1,\qquad \dot{I}_2=-(j\omega C_2+\frac{1}{R_2})\dot{U}_2$

则 $$(j\omega C_1+\frac{1}{R_1})\dot{U}_1=-(j\omega C_2+\frac{1}{R_2})\dot{U}_2$$

故 $$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{j\omega C_1+\frac{1}{R_1}}{-(j\omega C_2+\frac{1}{R_2})}=-\frac{0.001+j\omega\times10^{-6}}{0.001+j\omega\times0.01\times10^{-6}}$$

$$=-\frac{10^5+j100\omega}{10^5+j\omega}$$

9-26 求图示电路的 $\dot{U}_2/\dot{U}_1$.



题 9-26 图

解 结点编号如图，根据理想运放虚断路的特点可列写结点电压方程如下：

$$(G_1+G_2+G_3+j\omega C_1)\dot{U}_{n1}-G_2\dot{U}_{n2}-G_3\dot{U}_{n3}=G_1\dot{U}_1 \qquad (1)$$

$$\dot{U}_{n2}=\dot{U}_2 \qquad (2)$$

$$-G_3\dot{U}_{n1}-j\omega C_2\dot{U}_{n2}+(G_3+j\omega C_2)\dot{U}_{n3}=0 \qquad (3)$$

根据“虚短路”得 $\qquad \dot{U}_{n3}=0 \qquad (4)$

式(4)代入式(3)得 $\qquad \dot{U}_{n1}=-\frac{j\omega C_2}{G_3}\dot{U}_{n2} \qquad (5)$

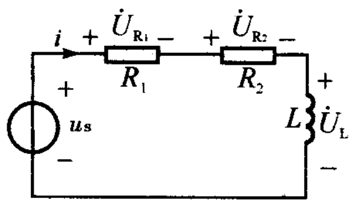
式(2),(5)代入式(1)得

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{G_1}{-(G_1+G_2+G_3+j\omega C_1)\cdot\frac{j\omega C_2}{G_3}-G_2}$$

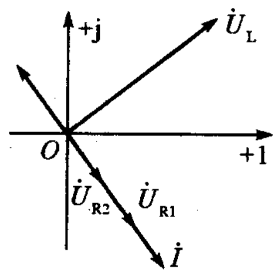
$$=-\frac{G_1G_3}{G_2G_3-\omega^2C_1C_2+j\omega C_2(G_1+G_2+G_3)}$$

其中 $$G_k=\frac{1}{R_k},\quad k=1,2,3.$$

9-27 图示电路中 $u_s=141.4\cos(314t-30^\circ)\text{V}$，$R_1=3\Omega$，$R_2=2\Omega$，$L=9.55\text{mH}$. 试求各元件的端电压并作电路的相量图，计算电源发出的复功率.



题 9-27 图



题解 9-27 图

解 依题意

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_s}{R_1+R_2+\text{j}\omega L}=\frac{100\angle-30^\circ}{3+2+\text{j}314\times9.55\times10^{-3}}\text{A}$$
$$=17.15\angle-60.96^\circ\text{A}$$

则各元件上的电压为

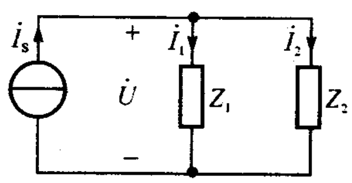
$$\dot{U}_{R1}=R_1\dot{I}=3\times17.15\angle-60.96^\circ\text{V}=51.45\angle-60.96^\circ\text{V}$$
$$\dot{U}_{R2}=R_2\dot{I}=2\times17.15\angle-60.96^\circ\text{V}=34.3\angle-60.96^\circ\text{V}$$
$$\dot{U}_L=\text{j}\omega L\cdot\dot{I}=\text{j}314\times9.55\times10^{-3}\times17.15\angle-60.96^\circ\text{V}$$
$$=51.45\angle29.04^\circ\text{V}$$

相量图如题解 9-27 图所示.

电源发出的复功率为

$$\overline{S}=\dot{U}_s\dot{I}^*=100\angle-30^\circ\times17.15\angle60.96^\circ\ \text{V}\cdot\text{A}$$
$$=1715\angle30.96^\circ\ \text{V}\cdot\text{A}=(1470.66+\text{j}882.26)\text{V}\cdot\text{A}$$

9-28 附图电路中 $i_s=\sqrt{2}\cos(10^4t)\text{A}$，$Z_1=(10+\text{j}50)\Omega$，$Z_2=-\text{j}50\Omega$. 求 Z_1，Z_2 吸收的复功率，并验证整个电路复功率守恒，即有 $\sum\overline{S}=0$.



题 9-28 图

解 根据分流公式，有

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_2\dot{I}_s}{Z_1+Z_2} = \frac{-j50\times 1\angle 0^\circ}{10+j50-j50} = -j5 = 5\angle -90^\circ(\text{A})$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_s - \dot{I}_1 = 1\angle 0^\circ - 5\angle -90^\circ = 1+j5 = \sqrt{26}\angle 78.69^\circ(\text{A})$$

Z_1 吸收的复功率为

$$\overline{S}_1 = Z_1 I_1^2 = (10+j50)\times 5^2 = (250+j1250)(\text{V·A})$$

Z_2 吸收的复功率为

$$\overline{S}_2 = Z_2 I_2^2 = -j50\times(\sqrt{26})^2 = -j1300(\text{V·A})$$

$$\dot{U} = Z_1\dot{I}_1 = (10+j50)\times 5\angle -90^\circ = (250-j50)\text{V}$$

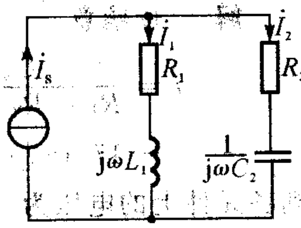
电流源发出的复功率为

$$\overline{S} = \dot{U}\dot{I}_s^* = (250-j50)\times 1\angle 0^\circ = (250-j50)(\text{V·A})$$

$$\overline{S}_1 + \overline{S}_2 = (250+j1250)+(-j1300) = 250-j50 = \overline{S}$$

即复功率守恒.

9-29 图示电路中 $I_s = 10\text{A}, \omega = 1000\text{rad/s}$, $R_1 = 10\Omega, j\omega L_1 = j25\Omega, R_2 = 5\Omega, -j\dfrac{1}{\omega C_2} = -j15\Omega$. 求各支路吸收的复功率和电路的功率因数.



题 9-29 图

解 提示 功率因数角 φ 是电路输入电压与输入电流之间的相位差，也是输入阻抗的阻抗角，还可以利用功率三角形计算得到. 在复功率的表示中，$\overline{S} = P + jQ = S\angle\varphi$，$\varphi$ 为功率因数角.

R_1, L_1 串联支路的阻抗为

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = (10+j25)\Omega$$

R_2, C_2 串联支路的阻抗为

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} = (5-j15)\Omega,$$

设 $\dot{I}_s = 10\angle 0^\circ\text{A}$，则根据分流公式有

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_2\dot{I}_s}{Z_1+Z_2} = \frac{(5-j15)\times 10\angle 0^\circ}{(10+j25)+(5-j15)}\text{A}$$

$$= 8.77\angle -105.25^\circ\text{A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_s - \dot{I}_1 = (10\angle 0^\circ - 8.77\angle -105.25^\circ)\text{A}$$

$$= 14.936\angle 34.51^\circ \text{A}$$

R_1, L_1 串联支路的复功率为

$$\bar{S}_1 = Z_1 I_1^2 = (10 + \text{j}25) \times 8.77^2\ \text{V·A}$$
$$= (769.13 + \text{j}1922.82)\ \text{V·A}$$

R_2, C_2 串联支路的复功率为

$$\bar{S}_2 = Z_2 I_2^2 = (5 - \text{j}15) \times 14.936^2\ \text{V·A}$$
$$= (1115.42 - \text{j}3346.26)\ \text{V·A}$$

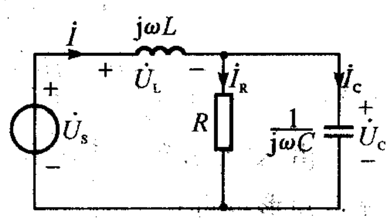
电流源发出的复功率为

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = (769.13 + \text{j}1922.82) + (1115.42 - \text{j}3346.26)$$
$$= (1884.55 - \text{j}1423.42)\ \text{V·A}$$
$$= 2361.7\angle -37.064^\circ\ \text{V·A}$$

则电路的功率因数为

$$\cos\varphi = \cos(-37.064^\circ) = 0.798$$

9-30 图示电路中 $R = 2\Omega, \omega L = 3\Omega, \omega C = 2\text{S}, \dot{U}_C = 10\angle 45^\circ\text{V}$. 求各元件的电压、电流和电源发出的复功率.



题 9-30 图

解 $\dot{I}_C = \text{j}\omega C \cdot \dot{U}_C = \text{j}2 \times 10\angle 45^\circ$
$$= 20\angle 135^\circ \text{A}$$

$$\dot{I}_R = \frac{1}{R} \cdot \dot{U}_C = \frac{1}{2} \times 10\angle 45^\circ \text{A}$$
$$= 5\angle 45^\circ \text{A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_C + \dot{I}_R = (20\angle 135^\circ + 5\angle 45^\circ)\text{A} = 20.62\angle 120.96^\circ \text{A}$$

电感 L 上的电压为

$$\dot{U}_L = \text{j}\omega L \cdot \dot{I} = \text{j}3 \times 20.62\angle 120.96^\circ \text{V} = 61.86\angle -149.04^\circ \text{V}$$

电压源的电压为

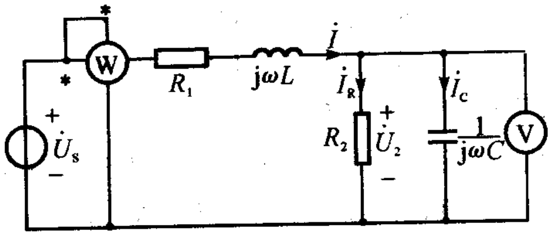
$$\dot{U}_s = \dot{U}_L + \dot{U}_C = (61.86\angle -149.04^\circ + 10\angle 45^\circ)\text{V}$$
$$= 52.217\angle -151.7^\circ \text{V}$$

电源发出的复功率为

$$\bar{S} = \dot{U}_s \dot{I}^* = 52.217\angle -151.7^\circ \times 20.62\angle -120.96^\circ\ \text{V·A}$$
$$= 1076.71\angle 87.34^\circ\ \text{V·A} = 49.97 + \text{j}1075.55\ \text{V·A}$$

9-31 图示电路中 $R_1 = R_2 = 10\Omega, L = 0.25\text{H}, C = 10^{-3}\text{F}$，电压表

的读数为20V，功率表的读数为120W. 试求$\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{U}_s}$和电源发出的复功率$\overline{S}$.



题 9-31 图

解 提示 功率表的读数为电阻R_1和R_2消耗的有功功率之和，电感和电容不消耗有功功率. 据此可求得I并进而求得I_C和ω.

设$\dot{U}_2 = 20\underline{/0^\circ}$V，则

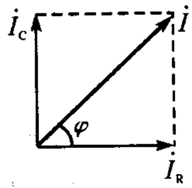
$$\dot{I}_R = \frac{1}{R_2}\cdot\dot{U}_2 = \frac{20\underline{/0^\circ}}{10}\text{A} = 2\underline{/0^\circ}\text{A},$$

$$\dot{I}_C = j\omega C\dot{U}_2 = \omega CU_2\underline{/90^\circ}\text{A}$$

$$P = I^2R_1 + I_R^2\cdot R_2$$

因此有 $$I = \sqrt{\frac{P - I_R^2\cdot R_2}{R_1}} = \sqrt{\frac{120 - 2^2\times 10}{10}}\text{A} = 2\sqrt{2}\text{A}$$

由KCL方程 $\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C$ 作相量图如题解9-31图所示，则由电流三角形可得：



题解 9-31 图

$$I_C = \sqrt{I^2 - I_R^2} = \sqrt{8 - 2^2}\text{A} = 2\text{A}$$

$$\varphi = \arctan\frac{I_C}{I_R} = \arctan\frac{2}{2} = 45^\circ$$

则 $$\dot{I} = 2\sqrt{2}\underline{/45^\circ}\text{A}$$

$$I_C = \omega CU_2 \Rightarrow \omega = \frac{I_C}{CU_2} = \frac{2}{10^{-3}\times 20} = 100\text{rad/s}$$

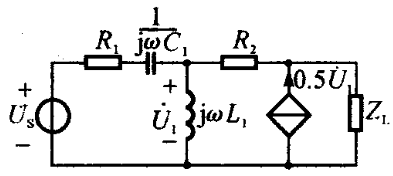
故 $$\begin{aligned}\dot{U}_s &= (R_1 + j\omega L)\dot{I} + \dot{U}_2\\ &= (10 + j100\times 0.25)\times 2\sqrt{2}\underline{/45^\circ} + 20\underline{/0^\circ}\\ &= -10 + j70 = 70.71\underline{/98.13^\circ}(\text{V})\end{aligned}$$

则 $$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_s} = \frac{20\underline{/0^\circ}}{70.71\underline{/98.13^\circ}} = 0.283\underline{/-98.13^\circ}$$

电源发出的复功率为

$$\bar{S} = \dot{U}_s \dot{I}^* = 70.71\angle 98.13^\circ \times 2\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{ V·A}$$
$$= 200\angle 53.13^\circ \text{ V·A} = (120 + \text{j}160)\text{V·A}$$

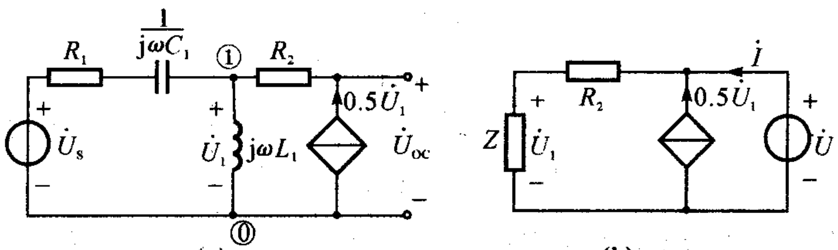
9-32 图示电路中 $R_1 = 1\Omega, C_1 = 10^3\mu\text{F}, L_1 = 0.4\text{mH}, R_2 = 2\Omega, \dot{U}_s = 10\angle -45^\circ\text{V}, \omega = 10^3\text{rad/s}$. 求 Z_L（可任意变动）能获得的最大功率.



题 9-32 图

解 提示 最大功率问题一般采用戴维宁定理分析.

把 Z_L 断开得含源一端口网络如题解 9-32 图(a) 所示，求开路电压 $\dot{U}_{oc}$，用结点法，注意 R_2 与受控电流源串联支路的处理.



(a) (b)

题解 9-32 图

$$\text{j}X_L = \text{j}\omega L_1 = \text{j} \times 10^3 \times 0.4 \times 10^{-3}\Omega = \text{j}0.4\Omega$$

$$-\text{j}X_C = -\text{j}\frac{1}{\omega C_1} = -\text{j}\frac{1}{10^3 \times 10^3 \times 10^{-6}}\Omega = -\text{j}\Omega$$

对结点 ①，有

$$\left(\frac{1}{R_1 + \frac{1}{\text{j}\omega C_1}} + \frac{1}{\text{j}\omega L_1}\right)\dot{U}_{n1} = \frac{\dot{U}_s}{R_1 + \frac{1}{\text{j}\omega C_1}} + 0.5\dot{U}_1$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{n1}$$

于是
$$\left(\frac{1}{1-\text{j}} + \frac{1}{\text{j}0.4}\right)\dot{U}_{n1} = \frac{10\angle -45^\circ}{1-\text{j}} + 0.5\dot{U}_{n1}$$

解得
$$\dot{U}_{n1} = \dot{U}_1 = \frac{5}{2}\sqrt{2}\angle 90^\circ\text{V}$$

因此有
$$\dot{U}_{oc} = R_2 \times (0.5\dot{U}_1) + \dot{U}_1$$

$$= 2\times 0.5\times \frac{5}{2}\sqrt{2}\angle 90^\circ + \frac{5}{2}\sqrt{2}\angle 90^\circ = 5\sqrt{2}\angle 90^\circ\ (\mathrm{V})$$

求戴维宁等效阻抗，采用加压求流法，电路如题解 9－32 图(b) 所示，图中

$$Z = (R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}) \mathbin{/\!/} j\omega L_1 = \frac{(1-j)\times j0.4}{1-j+j0.4} = \frac{4+j4}{10-j6}\Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_1}{Z} - 0.5\dot{U}_1 = (\frac{1}{Z} - 0.5)\dot{U}_1$$

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_1}{Z}\cdot R_2 + \dot{U}_1 = (\frac{R_2}{Z} + 1)\dot{U}_1$$

$$Z_{eq} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\frac{R_2}{Z}+1}{\frac{1}{Z}-0.5} = \frac{R_2+Z}{1-0.5Z}$$

$$= \frac{2+\frac{4+j4}{10-j6}}{1-0.5\times\frac{4+j4}{10-j6}} = \frac{3-j}{1-j} = (2+j)\Omega$$

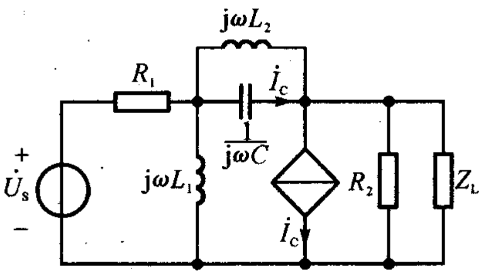
根据最大功率传输定理，当

$$Z_L = Z_{eq}^* = (2-j)\Omega$$

时获得最大功率，且最大功率为

$$P_{max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{(5\sqrt{2})^2}{4\times 2}\mathrm{W} = 6.25\mathrm{W}$$

9－33 附图中 $R_1 = R_2 = 100\Omega, L_1 = L_2 = 1\mathrm{H}, C = 100\mu\mathrm{F}, \dot{U}_s = 100\angle 0^\circ\mathrm{V}, \omega = 100\mathrm{rad/s}$. 求 Z_L 能获得的最大功率.



题 9－33 图

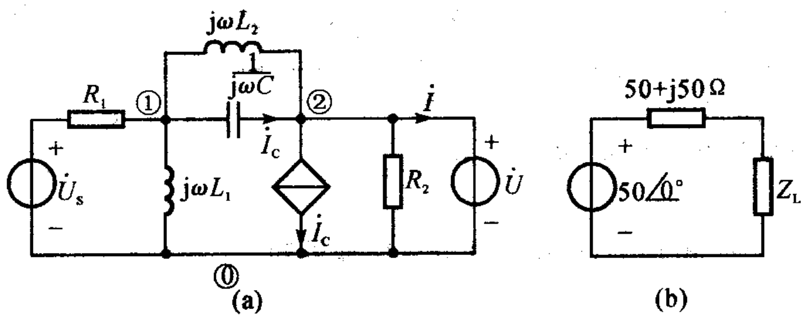
解 提示 可利用戴维宁定理或诺顿定理分析. 求取戴维宁等效电路可用求端电压与端电流的表达式的方法.

$$X_{L1} = \omega L_1 = 100\times 1 = 100\Omega$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 100\times 1 = 100\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100 \times 100 \times 10^{-6}}\Omega = 100\Omega$$

断开 Z_L 得到含源一端口网络，在端口上外加频率为 ω 的正弦电压 $\dot{U}$ 并设电流 $\dot{I}$ 如题解 9－33 图(a) 所示，由于 $X_C = X_{L2}$，可知 L_2 与 C 并联电路部分发生了并联谐振，则该并联支路可视为开路.



题解 9－33 图

对结点 ①，有分压关系成立：

$$\dot{U}_{n1} = \frac{j\omega L_1}{R_1 + j\omega L_1} \cdot \dot{U}_s = \frac{j100}{100 + j100} \times 100 \underline{/0^\circ} \text{V} = (50 + j50)\text{V}$$

对结点 ②，KCL 方程为

$$\frac{\dot{U}_{n1} - \dot{U}_{n2}}{j\omega L_2} + \dot{I}_C = \dot{I}_C + \frac{\dot{U}}{R_2} + \dot{I}$$

$$\dot{U}_{n2} = \dot{U}$$

$$\frac{50 + j50 - \dot{U}}{j100} + \dot{I}_C = \dot{I}_C + \frac{\dot{U}}{100} + \dot{I}$$

解得
$$\dot{U} = 50 - (50 + j50)\dot{I}$$

则该含源一端口的开路电压为

$$\dot{U}_{oc} = 50 \underline{/0^\circ} \text{V}$$

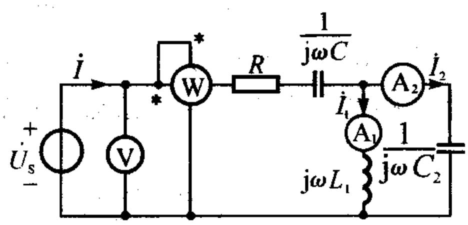
戴维宁等效阻抗为

$$Z_{eq} = (50 + j50)\Omega$$

其等效电路如题解 9－33 图(b) 所示. 所以当 $Z_L = Z_{eq}^* = (50 - j50)\Omega$ 时，会有最大功率，且最大功率为

$$P_{max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{50^2}{4 \times 50}\text{W} = 12.5\text{W}$$

9－34 附图电路中已知：$\frac{1}{\omega C_2}=1.5\omega L_1, R=1\Omega, \omega=10^4\text{rad/s}$，电压表的读数为10V，电流表$A_1$的读数为30A.求图中电流表$A_2$、功率表W的读数和电路的输入阻抗$Z_{in}$.



题 9－34 图

解 提示 功率表读数为电路消耗的有功功率，由于电感和电容不消耗有功功率，故该读数为电阻R消耗的有功功率，与流过R的电流I有关.

设$\dot{I}_1=30\underline{/0^\circ}\text{A}$，根据并联分流原理可知

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}=\frac{j\omega L_1}{-j\frac{1}{\omega C_2}}=\frac{j\omega L_1}{-j1.5\omega L_1}=-\frac{2}{3}$$

有 $$\dot{I}_2=-\frac{2}{3}\dot{I}_1=-\frac{2}{3}\times 30\underline{/0^\circ}\text{A}=20\underline{/180^\circ}\text{A}$$

则电流表A_2的读数为20A.

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=(30\underline{/0^\circ}+20\underline{/180^\circ})\text{A}=10\underline{/0^\circ}\text{A}$$

则电阻消耗的功率为$P=I^2R=10^2\times 1=100\text{W}$，故功率表读数为100W.

因 $$P=U_sI\cos\varphi$$

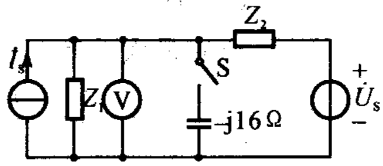
因此有 $$\cos\varphi=\frac{P}{U_sI}=\frac{100}{10\times 10}=1$$

解得 $$\varphi=0^\circ$$

即$\dot{U}_s$与$\dot{I}$同相位， $$\dot{U}_s=10\underline{/0^\circ}\text{V}$$

故 $$Z_{in}=\frac{\dot{U}_s}{\dot{I}}=\frac{10\underline{/0^\circ}}{10\underline{/0^\circ}}\Omega=1\Omega$$

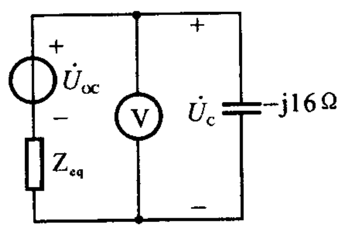
9－35 附图中的独立电源为同频正弦量，当S打开时，电压表的读数为25V.电路中的阻抗为$Z_1=(6+j12)\Omega, Z_2=2Z_1$.求S闭合后电压表的读数.



题 9－35 图

解 提示 把电容看作外加负载

阻抗，则其余电路构成含源一端口网络，当S打开时，电压表的读数应为该含源网络的开路电压 U_{oc}. 利用戴维宁定理求解.



题解 9－35 图

依题意将电容视作负载阻抗，其余电路为含源一端口网络，则开关 S 打开时，开路电压 $U_{oc}=25\text{V}$，故设 $\dot{U}_{oc}=25\underline{/0^\circ}\text{V}$.

求等效阻抗：将电压源和电流源置零，即 $\dot{U}_s$ 用短路替代，$\dot{I}_s$ 用开路替代，则等效阻抗

$$Z_{eq}=Z_1 /\!/ Z_2=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{Z_1\times 2Z_1}{Z_1+2Z_1}$$

$$=\frac{2}{3}Z_1=\frac{2}{3}\times(6+\text{j}12)\Omega=(4+\text{j}8)\Omega$$

开关闭合后的等效电路如题解 9－35 图所示，

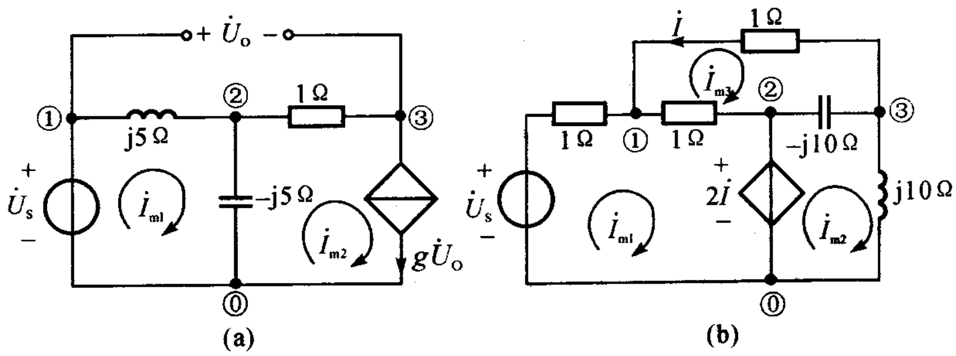
$$\dot{U}_C=\frac{-\text{j}16}{Z_{eq}+(-\text{j}16)}\cdot\dot{U}_{oc}$$

$$=\frac{-\text{j}16}{4+\text{j}8-\text{j}16}\times 25\underline{/0^\circ}\text{V}$$

$$=44.72\underline{/-26.57^\circ}\text{V}$$

故电压表读数为 44.72V.

9－36 列出附图电路的结点电压方程和网孔电流（顺时针）方程.



题 9－36 图

解　(a)　结点电压方程

有

$$\begin{cases}\dot{U}_{n1}=\dot{U}_s\\ -\frac{1}{j5}\dot{U}_{n1}+(\frac{1}{j5}+\frac{1}{-j5}+1)\dot{U}_{n2}-\dot{U}_{n3}=0\\ -\dot{U}_{n2}+\dot{U}_{n3}=-g\dot{U}_o\\ \dot{U}_o=\dot{U}_{13}=\dot{U}_{n1}-\dot{U}_{n3}\end{cases}$$

网孔电流方程，要注意只有两个网孔，$\dot{U}_o$ 是结点 ① 和 ③ 之间的开路电压.

$$\begin{cases}[j5+(-j5)]\dot{I}_{m1}-(-j5)\dot{I}_{m2}=\dot{U}_s\\ \dot{I}_{m2}=g\dot{U}_o\\ \dot{U}_o=j5\dot{I}_{m1}+\dot{I}_{m2}\end{cases}$$

故

$$\begin{cases}j5\dot{I}_{m2}=\dot{U}_s\\ \dot{I}_{m2}=g\dot{U}_o\\ \dot{U}_o=j5\dot{I}_{m1}+\dot{I}_{m2}\end{cases}$$

(b)　结点电压方程，要注意电流 $\dot{I}$ 不是电流源电流.

$$\begin{cases}(1+1+1)\dot{U}_{n1}-\dot{U}_{n2}-\dot{U}_{n3}=\frac{\dot{U}_s}{1}\\ \dot{U}_{n2}=2\dot{I}\\ -\dot{U}_{n1}-\frac{1}{-j10}\dot{U}_{n2}+\left(1\frac{1}{-j10}+\frac{1}{j10}\right)\dot{U}_{n3}=0\\ \dot{I}=\frac{\dot{U}_{31}}{1}=\dot{U}_{n3}-\dot{U}_{n1}\end{cases}$$

故

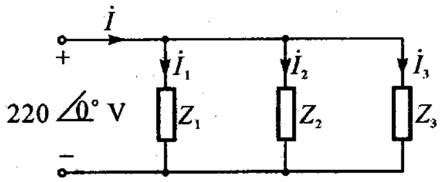
$$\begin{cases}3\dot{U}_{n1}-\dot{U}_{n2}-\dot{U}_{n3}=\dot{U}_s\\ \dot{U}_{n2}=2\dot{I}\\ -\dot{U}_{n1}-j0.1\dot{U}_{n2}+\dot{U}_{n3}=0\\ \dot{I}=\dot{U}_{n3}-\dot{U}_{n1}\end{cases}$$

网孔电流方程

$$\begin{cases}(1+1)\dot{I}_{m1}-\dot{I}_{m3}=\dot{U}_s-2\dot{I}\\ (-j10+j10)\dot{I}_{m2}-(-j10)\dot{I}_{m3}=2\dot{I}\\ -\dot{I}_{m1}-(-j10)\dot{I}_{m2}+[1+1+(-j10)]\dot{I}_{m3}=0\\ \dot{I}=-\dot{I}_{m3}\end{cases}$$

故
$$\begin{cases}2\dot{I}_{m1}-\dot{I}_{m3}=\dot{U}_s-2\dot{I}\\ j10\dot{I}_{m3}=2\dot{I}\\ -\dot{I}_{m1}+j10\dot{I}_{m2}+(2-j10)\dot{I}_{m3}=0\\ \dot{I}=-\dot{I}_{m3}\end{cases}$$

9-37 把3个负载并联接到220V正弦电源上，各负载取用的功率和电流分别为：$P_1=4.4\text{kW}, I_1=44.7\text{A}$（感性）；$P_2=8.8\text{kW}, I_2=50\text{A}$（感性）；$P_3=6.6\text{kW}, I_3=60\text{A}$（容性）. 求电源供给的总电流和电路的功率因数.



题解 9-37 图

解 提示 根据 $P=UI\cos\varphi$，在已知三个量的情况下可以确定第四个量.

依题意作题解9-37图，设

$$Z_1=|Z_1|\underline{/\varphi_1}, Z_2=|Z_2|\underline{/\varphi_2}, Z_3=|Z_3|\underline{/\varphi_3},$$

且 $\dot{U}=220\underline{/0^\circ}\text{V}$，则

$$\cos\varphi_1=\frac{P_1}{UI_1}=\frac{4.4\times10^3}{220\times44.7}=0.447 \Rightarrow \varphi_1=63.42^\circ(\text{感性})$$

$$\cos\varphi_2=\frac{P_2}{UI_2}=\frac{8.8\times10^3}{220\times50}=0.8 \Rightarrow \varphi_2=36.87^\circ(\text{感性})$$

$$\cos\varphi_3=\frac{P_3}{UI_3}=\frac{6.6\times10^3}{220\times60}=0.5\Rightarrow \varphi_3=-60^\circ(\text{容性})$$

则
$$\dot{I}_1=44.7\underline{/-63.42^\circ}\text{A}$$
$$\dot{I}_2=50\underline{/-36.87^\circ}\text{A}$$
$$\dot{I}_3=60\underline{/60^\circ}\text{A}$$

故总电流
$$\begin{aligned}\dot{I}&=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3\\&=(44.7\underline{/-63.42^\circ}+50\underline{/-36.87^\circ}+60\underline{/60^\circ})\text{A}\\&=91.79\underline{/-11.31^\circ}\text{A}\end{aligned}$$

电路的功率因数为

$$\lambda=\cos\varphi=\cos[0-(-11.31^\circ)]=\cos11.31^\circ=0.981$$

9-38 功率为60W，功率因数为0.5的日光灯（感性）负载与功率为

100W的白炽灯各50只并联在220V的正弦电源上($f=50$Hz).如果要把电路的功率因数提高到0.92,应并联多大电容？

解 **提示** 在线路上并联电容C提高电路的功率因数时,并联电容前后电路中原负载的工作状态不发生任何改变,即电压、电流、功率均不改变,但由于电路功率因数的提高,使得输电线上的总电流I减小,从而减少了线路损耗,提高了传输效率.并联电容后,电容产生无功功率提供给原负载,来自电源端的无功功率减少了,但是总有功功率依然不变.设原负载消耗有功功率为P,电压为U,功率因数为$\cos\varphi$,则其无功功率$Q=P\tan\varphi$;并联电容C后,功率因数为$\cos\varphi'$,故此时电源端提供的无功功率为$Q'=P\tan\varphi'$,而电容吸收的无功功率为$Q_C=UI_C\sin(-90°)=-\omega CU^2$,根据功率平衡有$Q'=Q+Q_C$,即

$$P\tan\varphi'=P\tan\varphi-\omega CU^2$$

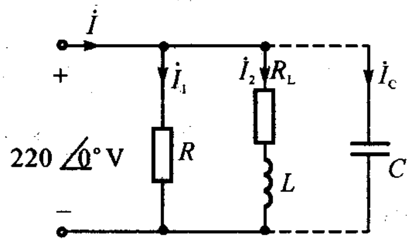
解得
$$C=\frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi-\varphi')$$

此式可直接用于C的计算,还可用相量图法或电流无功分量法分析.

依题意作题解9-38图,设电源电压为$\dot{U}=220\underline{/0°}$V,图中$R$为50只白炽灯的总电阻,$R_L+j\omega L$为50只日光灯的阻抗.则据$P=UI\cos\varphi$

得
$$I_1=\frac{P_1}{U\cos\varphi_1}=\frac{50\times100}{220\times\cos0°}\text{A}=22.727\text{A}$$

$$I_2=\frac{P_2}{U\cos\varphi_2}=\frac{50\times60}{220\times0.5}\text{A}=27.27\text{A}$$



题解 9-38 图

因此有 $\dot{I}_1=22.727\underline{/0°}$A

$\dot{I}_2=27.27\underline{/-60°}$A(感性负载)

$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=(22.727\underline{/0°}+27.27\underline{/-60°})$A

$=43.358\underline{/-33.003°}$A

则并联电容C前电路的功率因数为

$$\cos\varphi=\cos[0-(33.033°)]=\cos33.003°=0.8386$$

总功率为 $P=(50\times100+50\times60)\text{W}=8000\text{W}$

并联电容后电路的功率因数为

$$\cos\varphi' = 0.92(\text{感性})，\text{则 } \varphi' = 23.074°$$

故电容 C 的值为

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi - \tan\varphi')$$

$$= \frac{8000}{314 \times 220^2} \times (\tan 33.003° - \tan 23.074°)\mu\text{F}$$

$$= 117.6\mu\text{F}$$

对于过补偿情况（即电路并联电容 C 后呈容性）由于 $\cos\varphi' = 0.92$（容性）则 $\varphi' = -23.074°$.

故此时需并联的电容 C' 为

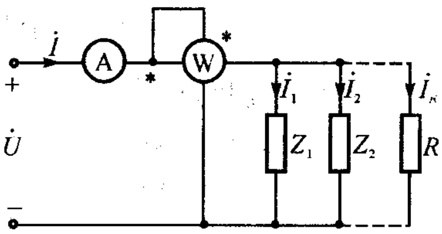
$$C' = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi - \tan\varphi')$$

$$= \frac{8000}{314 \times 220^2} \times [\tan 33.003° - \tan(-23.074°)]\mu\text{F}$$

$$= 566\mu\text{F} > 117.6\mu\text{F}$$

因此过补偿不经济，应采用 $C = 117.6\mu\text{F}$ 进行功率因数的提高.

9－39 已知附图电路中，$I_1 = 10\text{A}, I_2 = 20\text{A}$，其功率因数分别为 $\lambda_1 = \cos\varphi_1 = 0.8(\varphi_1 < 0), \lambda_2 = \cos\varphi_2 = 0.5(\varphi_2 > 0)$，端电压 $U = 100\text{V}, \omega = 1000\text{rad/s}$.（1）求图中电流表、功率表的读数和电路的功率因数；（2）若电源的额定电流为 30A，那么还能并联多大的电阻？求并联该电阻后功率表的读数和电路的功率因数；（3）如使原电路的功率因数提高到 $\lambda = 0.9$，需要并联多大电容？



题 9－39 图

解 依题意，设 $\dot{U} = U\angle 0° = 100\angle 0°\text{V}$，

（1）
$$\varphi_1 = \arccos 0.8 = -36.87°(\varphi_1 < 0)$$

$$\varphi_2 = \arccos 0.5 = 60°(\varphi_2 > 0)$$

故

$$\dot{I}_1 = 10\angle 36.87°\text{A}$$

$$\dot{I}_2 = 20\angle -60°\text{A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10\angle 36.87° + 20\angle -60°$$

$$= 21.264 \underline{/-32.166^\circ} \text{A}$$

则电流表读数为 21.264A.

功率表读数为

$$P = UI\cos\varphi = 100 \times 21.264 \times \cos[0-(-32.166^\circ)]\text{W}$$
$$= 1800\text{W}$$

电路的功率因数为

$$\lambda = \cos\varphi = \cos 32.166^\circ = 0.847$$

(2) 并联电阻后，对 Z_1、Z_2 的工作状况无影响，则此时总电流为

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_R = 21.264 \underline{/-32.166^\circ} + \frac{U}{R}\underline{/0^\circ}$$

$$= (18 - \text{j}11.32 + \frac{100}{R})\text{A}$$

依题意，令 $I = 30\text{A}$，则

$$30 = \sqrt{\left(18 + \frac{100}{R}\right)^2 + (-11.32)^2}$$

解之得 $$R = \frac{100}{\sqrt{30^2 - 11.32^2} - 18}\Omega = 10.22\Omega$$

此时 $$\dot{I} = (18 - \text{j}11.32 + \frac{100}{10.22})\text{A} = 30 \underline{/-22.167^\circ}\text{A}$$

功率表读数为

$$P = UI\cos\varphi = 100 \times 30 \times \cos[0-(-22.167^\circ)]\text{W}$$
$$= 2778\text{W}$$

电路的功率因数为

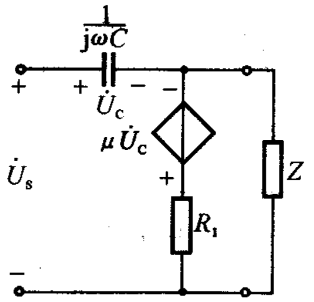
$$\lambda = \cos\varphi = \cos 22.167^\circ = 0.926$$

(3) 原电路 $\cos\varphi = 0.847$，则 $\tan\varphi = \tan 32.166^\circ = 0.627$，现提高到 $\cos\varphi' = 0.9$(感性)，即 $\tan\varphi' = 0.484$，则需并联的电容值为

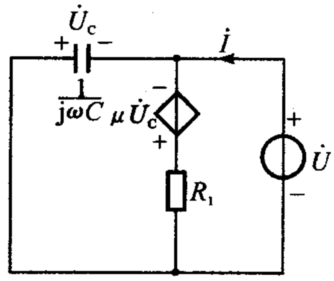
$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi - \tan\varphi')$$

$$= \frac{1800}{1000 \times 100^2} \times (0.627 - 0.484)\mu\text{F} = 25.8\mu\text{F}$$

9-40 求图示电路中 Z 的最佳匹配值.



题 9－40 图



题解 9－40 图

解　提示　计算含源一端口的戴维宁等效阻抗 Z_{eq}，则 $Z = Z_{eq}^*$ 即为最佳匹配值. 对于含有受控源的电路，一般采用加压求流法或加流求压法，计算输入阻抗.

依题意，将 $\dot{U}_s$ 置零，即用短路导线替代；将 Z 断开，外加电压，得题解 9－40 图. 则有

$$\dot{U} = -\dot{U}_C$$

$$\dot{I} = -j\omega C\dot{U}_C + \frac{\mu\dot{U}_C + \dot{U}}{R_1} = -j\omega C\dot{U}_C + \frac{\mu\dot{U}_C - \dot{U}_C}{R_1}$$

$$= \left(\frac{\mu-1}{R_1} - j\omega C\right)\dot{U}_C$$

故戴维宁等效阻抗为

$$Z_{eq} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{-\dot{U}_C}{\left(\frac{\mu-1}{R_1} - j\omega C\right)\dot{U}_C} = \frac{1}{j\omega C - \frac{\mu-1}{R_1}}$$

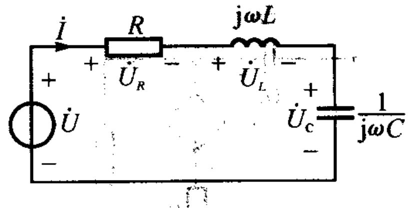
$$= \frac{R_1}{1-\mu+j\omega CR_1} = \frac{R_1(1-\mu-j\omega CR_1)}{(1-\mu)^2+(\omega CR_1)^2}$$

则最佳匹配值为

$$Z = Z_{eq}^* = \frac{R_1(1-\mu+j\omega CR_1)}{(1-\mu)^2+(\omega CR_1)^2}$$

9－41 当 $\omega = 5000\text{rad/s}$ 时，RLC 串联电路发生谐振，已知 $R = 5\Omega$，$L = 400\ \text{mH}$，端电压 $U = 1\text{V}$. 求电容 C 的值及电路中的电流和各元件电压的瞬时表达式.

解　提示　RLC 串联电路发生谐振时，有以下特点：



题解 9－41 图

(1)$Z = R + \mathrm{j}\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) = R$，阻抗模最小，电流 $I = \frac{U}{R}$ 达到最大值.

(2) 谐振频率 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$，或 $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$.

(3)$\dot{U}_L = -\dot{U}_C$，即电感电压和电容电压大小相等，相位相反.

(4) 电路的功率因数 $\lambda = \cos\varphi = 1, P = UI, Q = Q_L - Q_C = 0$.

(5) 品质因数 $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U}$.

依题意，作题解 9－41 图，设 $\dot{U} = 1\underline{/0^\circ}$，则 RLC 串联电路发生谐振时，有

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

因此有

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{5000^2 \times 400 \times 10^{-3}} = 0.1\mu\mathrm{F}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{1\underline{/0^\circ}}{5} = 0.2\underline{/0^\circ}\mathrm{A}$$

$$\dot{U}_R = \dot{U} = 1\underline{/0^\circ}\mathrm{V}$$

$$\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega_0 L\dot{I} = \mathrm{j}5000 \times 400 \times 10^{-3} \times 0.2\underline{/0^\circ}\mathrm{V} = 400\underline{/90^\circ}\mathrm{V}$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\dot{I} = \frac{1}{\mathrm{j}5000 \times 0.1 \times 10^{-6}} \times 0.2\underline{/0^\circ}\mathrm{V} = 400\underline{/-90^\circ}\mathrm{V} = -\dot{U}_L$$

各元件电压瞬时表达式为

$$u_R(t) = \sqrt{2}\cos(5000t)\,\mathrm{V}$$

$$u_L(t) = 400\sqrt{2}\cos(5000t + 90^\circ)\,\mathrm{V}$$

$$u_C(t) = 400\sqrt{2}\cos(5000t - 90^\circ)\,\mathrm{V}$$

电流瞬时表达式为

$$i(\mathrm{t}) = 0.2\sqrt{2}\cos(5000t)\,\mathrm{A}$$

9-42 RLC 串联电路的端电压 $u = 10\sqrt{2}\cos(2500t + 10°)$V，当 $C = 8\mu$F 时，电路中吸收的功率为最大，$P_{\max} = 100$W. (1) 求电感 L 和 Q 值；(2) 作出电路的相量图.

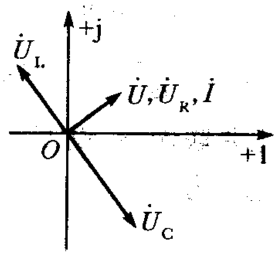
解 依题意，该电路吸收功率为最大时发生串联谐振，电路图参考题解 9-41 图，则

(1) 串联谐振时，有 $\omega_0 L = \dfrac{1}{\omega_0 C}$，

故 $L = \dfrac{1}{\omega_0^2 C} = \dfrac{1}{2500^2 \times 8 \times 10^{-6}} = 0.02\text{H}$

$$P_{\max} = UI = \frac{U^2}{R}$$

因此 $R = \dfrac{U^2}{P_{\max}} = \dfrac{10^2}{100} = 1\Omega$



题解 9-42 图

电路的品质因数

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2500 \times 0.02}{1} = 50$$

(2) 要画相量图，需求出各电压、电流相量.

$$\dot{U} = 10\angle 10°\text{V}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{10\angle 10°}{1} = 10\angle 10°\text{A}$$

$$\dot{U}_R = \dot{U} = 10\angle 10°\text{A}$$

$$\dot{U}_L = \text{j}Q\dot{U} = \text{j}50 \times 10\angle 10°\text{V} = 500\angle 100°\text{V}$$

$$\dot{U}_C = -\dot{U}_L = -500\angle 100°\text{V} = 500\angle -80°\text{V}$$

相量图如题解 9-42 图所示.

9-43 RLC 串联电路中，$R = 10\Omega$，$L = 1$H，端电压为 100V，电流为 10A. 如把 R，L，C 改成并联接到同一电源上. 求并联各支路的电流. 电源的频率为 50Hz.

解 提示 RLC 并联电路谐振条件为 $\omega_0 L = \dfrac{1}{\omega_0 C}$.

依题意，RLC 串联电路中，$f = 50$Hz，$\omega = 2\pi f = 314$rad/s.

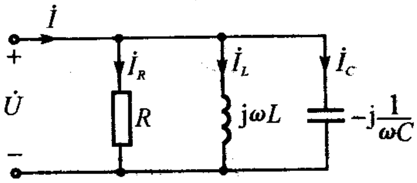
$I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{100}{10} = 10$A，则根据串联谐振特点可知该串联路发生了

谐振.

故 $$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

因此有 $$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{314^2 \times 1}\mu\text{F} = 10.13\mu\text{F}$$

把 R,L,C 改成并联接到同一电源上，电路如题解 9－43 图所示，则由于 $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ 依然成立，故此时电路发生并联谐振. 设 $\dot{U} = 100\angle 0°$，则各支路电流为



题解 9－43 图

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{100\angle 0°}{10}\text{A} = 10\angle 0°\text{A}$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{\mathrm{j}\omega_0 L} = \frac{100\angle 0°}{\mathrm{j}314 \times 1}\text{A} = 0.318\angle -90°\text{A}$$

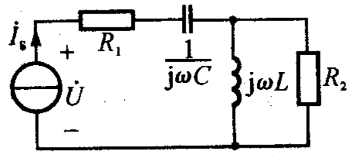
$$\dot{I}_C = \mathrm{j}\omega_0 C\dot{U} = -\dot{I}_L = -0.318\angle -90°\text{A} = 0.318\angle 90°\text{A}$$

总电流为

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$$
$$= (10\angle 0° + 0.318\angle -90° + 0.318\angle 90°)\text{A} = 10\angle 0°\text{A}$$

9－44 附图电路中，$I_s = 1\text{A}$，当 $\omega_0 = 1000\ \text{rad/s}$ 时电路发生谐振，$R_1 = R_2 = 100\Omega$，$L = 0.2\text{H}$. 求 C 值和电流源端电压 $\dot{U}$.

解 提示 电路发生谐振时，其等效输入阻抗的虚部为零，即 $I_m[Z_{in}] = 0$ 可求得串联谐振频率；而等效输入导纳的虚部为零，即 $I_m[Y_{in}] = 0$ 可求得并联谐振频率，谐振时端电压 $\dot{U}$ 与端电流 $\dot{I}$ 同相位.



题 9－44 图

依题意，设 $\dot{I}_s = 1\angle 0°\text{A}$，则电路入端阻抗为

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + \frac{R_2 \times \mathrm{j}\omega L}{R_2 + \mathrm{j}\omega L}$$
$$= \left[R_1 + \frac{(\omega L)^2 \cdot R_2}{R_2^2 + (\omega L)^2}\right] + \mathrm{j}\left[\frac{\omega L R_2^2}{R_2^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{\omega C}\right]$$

令 $I_m[Z_{in}] = 0$，此时电路发生谐振，则

$$\frac{\omega_0 L R_2^2}{R_2^2+(\omega_0 L)^2}-\frac{1}{\omega_0 C}=0$$

$$C=\frac{R_2^2+(\omega_0 L)^2}{\omega_0^2 L R_2^2}=\frac{100^2+(1000\times 0.2)^2}{1000^2\times 0.2\times 100^2}\mu\text{F}=25\mu\text{F}$$

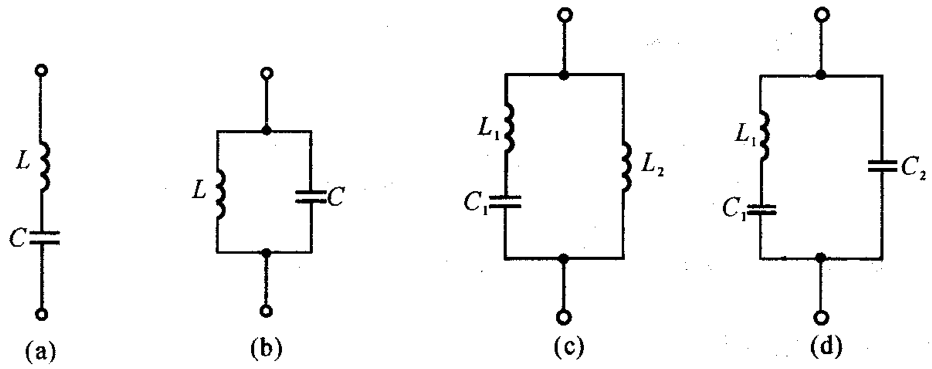
此时 $$Z_{\text{in}}=R_1+\frac{(\omega L)^2\cdot R^2}{R_2^2+(\omega L)^2}$$

$$=100+\frac{(1000\times 0.2)^2\times 100}{100+(1000\times 0.2)^2}\Omega=180\Omega$$

电流源端电压为

$$\dot{U}=Z_{\text{in}}\dot{I}_s=180\times 1\underline{/0^\circ}\text{V}=180\underline{/0^\circ}\text{V}$$

9-45 求附图电路在那些频率时为短路或开路.



题 9-45 图

解 提示 对 LC 串联电路，在发生谐振时，电感电压与电容电压大小相等，相位相反，故其两端电压为零，相当于短路；对 LC 并联电路，在发生谐振时，电感电流与电容电流大小相等，相位相反，故其总电流为零，相当于开路. 电感对直流短路，在高频($\omega\to\infty$) 时感抗为无穷大，故相当于开路；电容对直流开路，在高频($\omega\to\infty$) 时容抗为无穷小，故相当于短路.

(a) 电路总阻抗为

$$Z=\text{j}\omega L+\frac{1}{\text{j}\omega C}=\text{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})$$

令 $\text{I}_\text{m}[Z]=0$，得 $$\omega L-\frac{1}{\omega C}=0$$

故 $$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$ （可直接由 LC 串联谐振得到）

此时 $Z=0$，电路为短路.

当 $\omega=0$ 时，电容容抗为无穷大，则 $|Z|\to\infty$，电路为开路；

当 $\omega=\infty$ 时，电感感抗为无穷大，则 $|Z|\to\infty$，电路为开路.

(b) 显然 LC 发生并联谐振时电路导纳为零，相当于开路，即

$$\omega L=\frac{1}{\omega C}\quad\Rightarrow\quad\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$ 时，电路为开路.

当 $\omega=0$ 时，由于电感支路感抗为零而电容容抗为无穷大，故电路为短路.

当 $\omega=\infty$ 时，由于电容支路容抗为零而电感感抗为无穷大，故电路为短路.

(c) 电路总导纳为

$$Y=\frac{1}{\mathrm{j}\omega L_1+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L_2}=\mathrm{j}\frac{\omega L_1+\omega L_2-\frac{1}{\omega C_1}}{\omega L_2\cdot\left(\frac{1}{\omega C_1}-\omega L_1\right)}$$

则当 $\omega L_1+\omega L_2-\frac{1}{\omega C_1}=0$，即 $\omega=\frac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)C_1}}$

时，$Y=0$，电路开路.

当 $\left(\frac{1}{\omega C_1}-\omega L_1\right)\cdot\omega L_2=0$，即 $\omega=0$ 或 $\omega=\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$

时，$|Y|\to\infty$，电路短路.

(d) 电路总导纳为

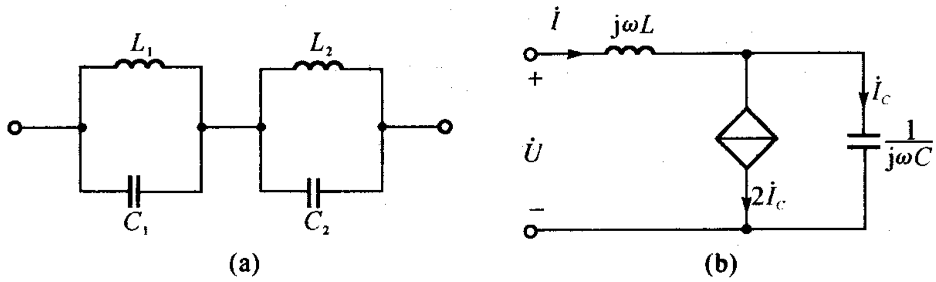
$$Y=\frac{1}{\mathrm{j}\omega L_1+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}}+\mathrm{j}\omega C_2=\mathrm{j}\frac{1+\frac{C_2}{C_1}-\omega^2L_1C_2}{\frac{1}{\omega C_1}-\omega L_1}$$

则当 $1+\frac{C_2}{C_1}-\omega^2L_1C_2=0$，即

$$\omega=\sqrt{\frac{1+\frac{C_2}{C_1}}{L_1C_2}}=\sqrt{\frac{1}{L_1C_1}+\frac{1}{L_1C_2}}$$ 时，$Y=0$，电路开路.

当$\frac{1}{\omega C_1}-\omega L_1=0$，即$\omega=\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$时，$|Y|\to\infty$，电路短路.

9-46 求附图电路的谐振频率.



题 9-46 图

解 提示 谐振时端电压与端电流同相.

(a) 显然L_1C_1并联支路可确定一个并联谐振频率$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$；$L_2C_2$并联支路可确定一个并联谐振频率$\omega_2=\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$.

电路总阻抗为

$$Z=\frac{1}{j\omega C_1+\frac{1}{j\omega L_1}}+\frac{1}{j\omega C_2+\frac{1}{j\omega L_2}}$$

$$=j\frac{\omega C_1+\omega C_2-\frac{1}{\omega L_1}-\frac{1}{\omega L_2}}{\left(\frac{1}{\omega L_1}-\omega C_1\right)\left(\omega C_2-\frac{1}{\omega L_2}\right)}$$

当 $$\omega C_1+\omega C_2-\frac{1}{\omega L_1}-\frac{1}{\omega L_2}=0$$

即$\omega=\sqrt{\frac{L_1+L_2}{(C_1+C_2)L_1L_2}}$时，$Z=0$，电路发生串联谐振.

(b) 依题意 $\dot{I}=2\dot{I}_C+\dot{I}_C=3\dot{I}_C$

$$\dot{U}=j\omega L\dot{I}+\frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C=j3\omega L\cdot\dot{I}_C-j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_C$$

$$=j\left(3\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}_C$$

则电路输入阻抗为

$$Z_{\mathrm{in}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\mathrm{j}\left(3\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}_C}{3\dot{I}_C} = \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right)$$

故当电路发生谐振时，$\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 应该同相，则 $I_{\mathrm{m}}[Z] = 0$，即

$$\omega L - \frac{1}{3\omega C} = 0$$

因此有 $\omega = \frac{1}{\sqrt{3LC}}$，此即为所求谐振频率.