

西南交通大学 2022—2023 学年第 (一) 学期考试试卷

课程代码 MATH000812 课程名称 高等数学 I 考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	总成绩
得分						

阅卷教师签字: _____

一、选择题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 函数 $f(x) = \begin{cases} ax+3, & x \leq 0, \\ (1-x)^{\frac{a}{2}}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = (B)$.

- (A) $\ln 3$ (B) $-\ln 3$ (C) 3 (D) -3

2. 关于函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|x+1|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的间断点, 以下说法正确的是 (C).

- (A) $x=2$ 为跳跃间断点
(B) $x=1$ 为可去间断点
(C) $x=0$ 为可去间断点
(D) $x=-1$ 为跳跃间断点

3. 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续, 则 $F(x) = |x-a|\varphi(x)$ 在 $x=a$ 可导的充要条件为 (B).

- (A) $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导
(B) $\varphi'(a) = 0$
(C) $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处不可导
(D) $\varphi(a) = 0$

4. 函数 $f(x)$ 满足 $xf''(x) + 4f'(x) = 1 - e^x$, 若 $f'(x_0) = 0$ ($x_0 \neq 0$), 则 (B).

- (A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
(C) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值

5. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t) dt$, 则 $F'(x) = (A)$.

- (A) $\frac{1}{x} f(\ln x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$
(B) $-\frac{1}{x} f(\ln x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$
(C) $\frac{1}{x} f(\ln x) - \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$
(D) $f(\ln x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$

6. 微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的特解可设为 (D).

- (A) $y = ae^{3x} + be^{2x}$
(B) $y = axe^{2x}$
(C) $y = x(a + bx)e^{3x}$
(D) $y = x(a + bx)e^{2x}$

二、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

7. 设函数 $x \ln x$ 是 $F(x)$ 的一个原函数, 则 $dF(\frac{e^x}{1+x}) = \frac{x}{1+x} dx$.
 $\int \frac{x}{1+x} dx = x \ln x + C$
 $(x \ln x)' = F(x)$
 $\ln x + 1 = F(x)$
8. 曲线 $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ 的拐点是 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.
 $\frac{2x(1+x^2) - 2x \cdot x^2}{(1+x^2)^2}$
9. 设 $f(x) = \frac{3x+1}{e^x}$, 则 $f^{(2022)}(0) = -6066$.
10. 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \frac{\pi}{2}$.
 $\arctan \sqrt{x}$
11. 设 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2+y^2}$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.
 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$
 $\arctan +\infty = \frac{\pi}{2}$

三、计算题 (每小题 8 分, 共 24 分)

12. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(2x-1) \tan \frac{\pi}{2} x$.
13. 计算不定积分 $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ ($a > 0$).
14. 计算定积分 $I = \int_1^e |\ln x| dx$.

四、解答题 (15、16 题每题 8 分, 17 题 10 分, 共 26 分)

15. 求经过点 $(1, -2)$ 与曲线 $\begin{cases} x = 2t+3 \\ y = t^2+1 \end{cases}$ 相切的直线方程.
 $x=1$ 时, $t=-1$
 $y=-2$
 $x^2 = 4t^2 + 12t$
 $\frac{x}{2} = 1 + \frac{3}{2}$
 $(\frac{x}{2})^2 = t^2 + \frac{9}{4} - 3t$
16. 求微分方程 $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$ 满足初值条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.
 $a^2 \sin^2 t dt$
17. 求抛物线 $y = \sqrt{2x}$ 与 x 轴及直线 $y = x-4$ 所围图形的面积, 并求此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.
 $2x = x^2 - 8x + 16$
 $-1 \rightarrow -2 \cdot \frac{1}{e}$

五、证明题 (6 分)

18. 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4}$.
 $\arcsin \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \sin 2 \arcsin \frac{x}{a}$
 $\sin 2 \arcsin \frac{\pi}{4}$
 $\sin \arcsin \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
 $\frac{10 \pm b}{2}$
 $\sin t = \frac{x}{a}$
 $8, 2 t = \arcsin \frac{x}{a}$

SWJTU

单选: BCDBAD

7. $\frac{x}{1+x} dx$

8. $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$

9. -6065

10. $\frac{\pi}{2}$

11. $\frac{x+y}{x-y}$

12. $-\frac{4}{\pi}$

13. $\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$

14. $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

15. $x - y - 3 = 0$ 和 $3x + y - 1 = 0$

16. $x = \frac{1}{2}(y^2 - y^3)$

17. $S = \frac{40}{3}, V = \frac{128}{3}\pi$

18. 略