

第十三章 拉普拉斯变换

第一部分 要点、考点归纳

§ 13-1 拉普拉斯变换的定义

拉普拉斯变换法是一种数学积分变换,通过积分变换,把已知的时域函数 $f(t)$ 变换为频域函数 $F(s)$,从而把时域函数的微分方程变换为频域函数的代数方程,在求出频域函数后,再作相反的变换,返回时域,得到满足电路初始条件的原微分方程的解。由于求解(复)频域函数的代数方程比解时域微分方程较有规律且有效,所以拉普拉斯变换在线性电路分析中得到广泛应用。

一个定义在 $[0, +\infty]$ 区间的函数 $f(t)$, 它的拉普拉斯变换式 $F(s)$ 定义为

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

式中 $s = \sigma + j\omega$ 为复数,被称为复频率; $F(s)$ 为 $f(t)$ 的象函数, $f(t)$ 为 $F(s)$ 的原函数。

由 $F(s)$ 到 $f(t)$ 的变换称为拉普拉斯反变换,它定义为

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{-st} ds$$

式中 c 为正的有限常数。

注意:

①定义中拉氏变换的积分从 $t=0_-$ 开始,即:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{0+} f(t)e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

它计及从 $t=0_-$ 至 $0+$ $f(t)$ 包含的冲激和电路动态变量的初始值,从而为电路的计算带来方便。

②象函数 $F(s)$ 一般用大写字母表示,如 $I(s)$, $U(s)$, 原函数 $f(t)$ 用小写字母表示,如 $i(t)$, $u(t)$ 。

③象函数 $F(s)$ 存在的条件: $|f(t)| \leq Me^{ct}$ 或 $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt < \infty$, 式中, M 、 c 为正的有限常数。

§ 13-2 拉普拉斯变换的性质

$$\text{记 } L[f_1(t)] = F_1(s), \quad L[f_2(t)] = F_2(s)$$

1. 线性性质

$$L[af_1(t) + bf_2(t)] = aL[f_1(t)] + bL[f_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s)$$

$$L^{-1}[aF_1(s) + bF_2(s)] = aL^{-1}[F_1(s)] + bL^{-1}[F_2(s)] \quad (a, b \text{ 为常数})$$

2. 延迟性质

$$\text{①时域延迟} \quad L[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s) \quad (\tau \text{ 为一非负实数})$$

$$\text{②频域延迟} \quad L[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s-\alpha) \quad (\operatorname{Re}(s-\alpha) > c)$$

3. 微分性质

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - [s^{n-2} f'(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)]$$

若所有初值为零, 则有 $L[f'(t)] = sF(s)$, $L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s)$

4. 积分性质

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} L[f(t)] = \frac{1}{s} F(s), \quad L\left[\underbrace{\int_0^t dt \int_0^t dt \dots \int_0^t f(t) dt}_{n\text{次}}\right] = \frac{1}{s^n} F(s)$$

5. 初值定理

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s), \quad \text{或} \quad f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad \left(\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \text{存在} \right)$$

6. 终值定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad \text{或} \quad f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad \left(sF(s) \text{所有奇点均在 } s \text{ 平面左半部} \right)$$

7. 卷积定理

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s) \quad \text{其中,}$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

应用拉氏变换的性质, 同时借助于表 13.1 中所示的一些常用函数的拉普拉斯变式可以使一些函数的象函数求解简化。

表 13-1 拉氏变换简表

原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
$A\delta(t)$	A	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
$A\varepsilon(t)$	$\frac{A}{s}$	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$
$Ae^{-\alpha t}$	$\frac{A}{s + \alpha}$	t	$\frac{1}{s^2}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$	$\sinh(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\cosh(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$

$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$(1 - at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s + a)^2}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{n!}t^n$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{n!}t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^{n+1}}$

§ 13-3 拉普拉斯反变换的部分分式展开

1. 由象函数求原函数的方法

用拉氏变换求解线性电路的时域响应时, 需要把求得的响应的拉氏变换式反变换为时间函数。基本方法有:

1) 利用拉氏反变换公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{-st} ds$$

2) 对简单形式的 $F(s)$ 可以查拉氏变换表得原函数

3) 把 $F(s)$ 分解为简单项的组合, 也称部分分式展开法:

如果
$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s)$$

则
$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$$

实际中, 方法 1) 很少用; 而是将象函数化简, 再利用拉氏变换表查得原函数。

2. 部分分式展开法

用部分分式法求拉氏反变换 (海维赛德展开定理), 即将 $F(s)$ 展开成部分分式, 成为可在拉氏变换表中查到的 s 的简单函数, 然后通过查拉氏变换表得到原函数 $f(t)$ 。

设电路响应的象函数为 s 的一个有理分式

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_{m-1} s + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}$$

式中, m 和 n 为正整数, 且 $n \geq m$ 。一般, $N(s)$ 的阶次不高于 $D(s)$ 的阶次, 否则,

用 $D(s)$ 除 $N(s)$, 以得到一个 s 的多项式与一个余式 (真分式) 之和。对于真分式, 将其分

母 (多项式) 作因式分解, 为此需求出 $D(s)=0$ 的根。

下面讨论 $D(s)=0$ 的根的情况。

(1) 若 $D(s)=0$ 有 n 个不同的单根 p_1, p_2, \dots, p_n 。 $F(s)$ 可以展开为:

$$F(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n}$$

式中, K_1, K_2, \dots, K_n 为待定系数。其确定方法有二:

方法一: 按 $K_i = [(s-p_i)F(s)]|_{s=p_i}$, $i=1, 2, 3, \dots, n$ 来确定。

方法二: 用求极限方法确定 K_i 的值

$$K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{(s-p_i)N(s)}{D(s)} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{(s-p_i)N'(s) + N(s)}{D'(s)} = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)}$$

得原函数的一般形式为:

$$f(t) = \frac{N(p_1)}{D'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{D'(p_2)} e^{p_2 t} + \dots + \frac{N(p_n)}{D'(p_n)} e^{p_n t}$$

(2) 若 $D(s)=0$ 有共轭复根 设 $p_1 = \alpha + j\omega$, $p_2 = \alpha - j\omega$ 可将 $F(s)$ 分解为:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\dots(s-p_n)} = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \frac{K_3}{s-p_3} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n}$$

其中,

$$K_1 = [(s-\alpha-j\omega)F(s)]|_{s=\alpha+j\omega} = \frac{N(s)}{D'(s)} \Big|_{s=\alpha+j\omega}$$

$$K_2 = [(s-\alpha+j\omega)F(s)]|_{s=\alpha-j\omega} = \frac{N(s)}{D'(s)} \Big|_{s=\alpha-j\omega}$$

因为 $F(s)$ 为实系数多项式之比, 故 K_1 和 K_2 为共轭复数。设 $K_1 = |K_1| e^{j\theta}$, 则

$$K_2 = |K_1| e^{-j\theta}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= K_1 e^{(\alpha+j\omega)t} + K_2 e^{(\alpha-j\omega)t} + K_3 e^{p_3 t} + \dots + K_n e^{p_n t} \\ &= |K_1| e^{j\theta} e^{(\alpha+j\omega)t} + |K_1| e^{-j\theta} e^{(\alpha-j\omega)t} + K_3 e^{p_3 t} + \dots + K_n e^{p_n t} \end{aligned}$$

(3) $D(s)=0$ 的具有重根 因含有 $(s-p_1)^r$ 的因式。

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)^r (s-p_{r+1}) \dots (s-p_n)} = \frac{K_r}{(s-p_1)^r} + \frac{K_{r-1}}{(s-p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_{r+1}}{s-p_{r+1}} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n}$$

则, $K_r = [(s - p_1)^r F(s)]|_{s=p_1}$; $K_{r-1} = \frac{d}{ds} [(s - p_1)^r F(s)]|_{s=p_1}$;

$$K_1 = \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [(s - p_1)^r F(s)]|_{s=p_1};$$

综上所述, 由分式 $F(s)$ 求 $f(t)$ 的步骤:

- 1) $n = m$ 时将 $F(s)$ 化成真分式和多项式之和;
- 2) 求真分式分母 $D(s) = 0$ 的根, 确定分解单元;
- 3) 将真分式展开成部分分式, 求各部分分式的系数;
- 4) 对每个部分分式和多项式逐项求拉氏反变换。

§ 13-4 运算电路

应用拉普拉斯变换求解线性电路的方法称为运算法。

1. 电路定律的运算形式

基尔霍夫定律的时域表示:

$$\sum i(t) = 0, \quad \sum u(t) = 0$$

把时间函数变换为对应的象函数:

$$i(t) \xrightarrow{L[i(t)]} I(s) \quad u(t) \xrightarrow{L[u(t)]} U(s)$$

得基尔霍夫定律的运算形式:

$$\sum I(s) = 0, \quad \sum U(s) = 0$$

2. 电路元件的运算形式

根据元件电压、电流的时域关系, 可以推导出各元件电压电流关系的运算形式。

(1) 电阻 R 的运算形式

图 13.1 (a) 所示电阻元件的电压电流关系为:

$$u(t) = R i(t),$$

两边取拉普拉斯变换, 得电阻元件 VCR 的运算形式:

$$U(s) = RI(s) \quad \text{或} \quad I(s) = GU(s)$$

根据上式得电阻 R 的运算电路如图 13.1 (b) 所示。

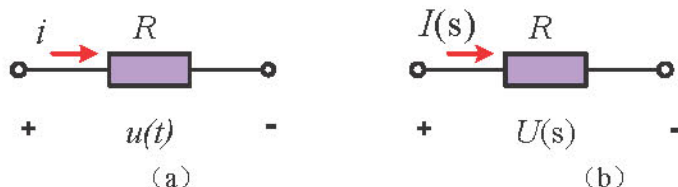


图 13.1 电阻的运算形式

(2) 电感 L 的运算形式

图 13.2 (a) 所示电感元件的电压电流关系为:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

两边取拉普拉斯变换并根据拉氏变换的微分性质，得电感元件 VCR 的运算形式：

$$U(s) = sLI(s) - Li(0_-)$$

$$I(s) = \frac{U(s)}{sL} + \frac{i(0_-)}{s}$$

根据上式得电感 L 的运算电路如图 13.2 (b) 和 (c) 所示。图中 $Li(0_-)$ 表示附加电

压源的电压， $\frac{i(0_-)}{s}$ 表示附加电流源的电流。式中 $Z(s) = sL$ ， $Y(s) = \frac{1}{sL}$ 分别称为电感的运算阻抗和运算导纳。

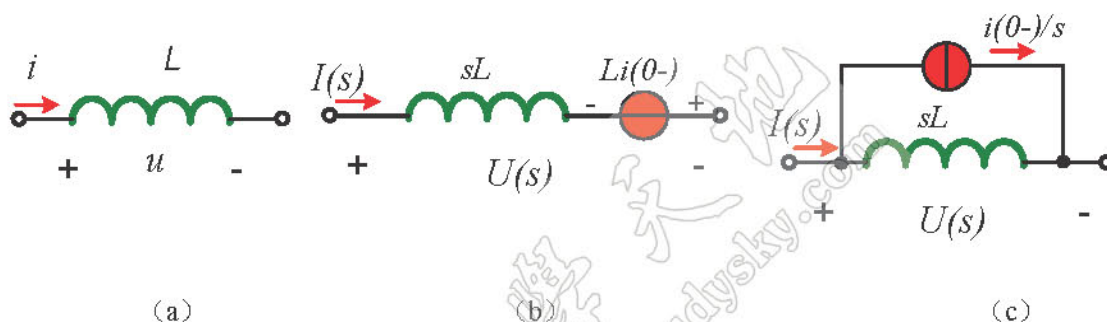


图 13.2 电感的运算形式

(3) 电容 C 的运算形式

图 13.3 (a) 所示电容元件的电压电流关系为：

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

两边取拉普拉斯变换并根据拉氏变换的微分性质，得电容元件 VCR 的运算形式：

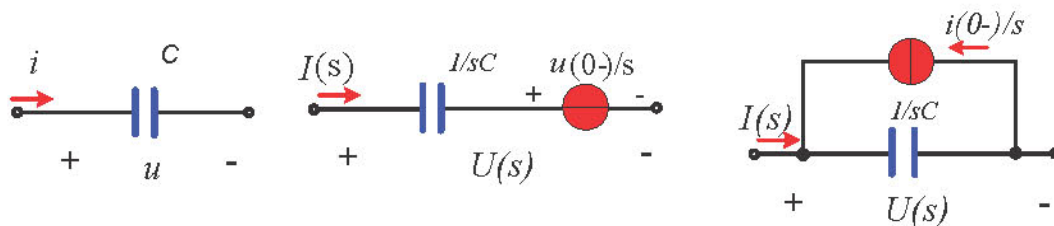
$$I(s) = sCU(s) - Cu(0_-)$$

或

$$U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u(0_-)}{s}$$

根据上式得电容 C 的运算电路如图 13.3 (b) 和图 (c) 所示。图中 $Cu(0_-)$ 表示附加

电流源的电流， $\frac{u(0_-)}{s}$ 表示附加电压源的电压。式中， $Z(s) = \frac{1}{sC}$ 、 $Y(s) = sC$ 分别为电容的运算阻抗和运算导纳。



(a)

(b)

(c)

图 13.3 电容的运算形式

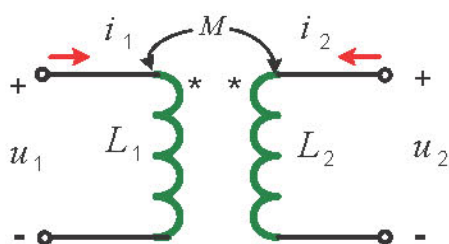
(4) 耦合电感的运算形式

图 13.4 (a) 所示耦合电感的电压电流关系为:

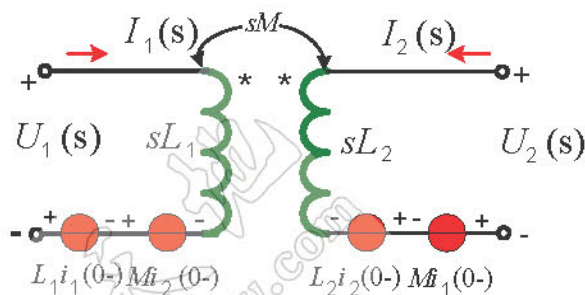
$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

两边取拉普拉斯变换, 得耦合电感 VCR 的运算形式

$$\begin{cases} U_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(0_-) + sMI_2(s) - Mi_2(0_-) \\ U_2(s) = sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(0_-) + sMI_1(s) - Mi_1(0_-) \end{cases}$$



(a)



(b)

图 13.4 耦合电感的运算形式

根据上式得耦合电感的运算电路如图 13.4 (b) 所示。图中 $Mi_1(0_-)$, $Mi_2(0_-)$ 都是附加电压源。式中

$Z_M(s) = sM$, $Y_M(s) = \frac{1}{sM}$ 分别称为互感运算阻抗和互感运算导纳。

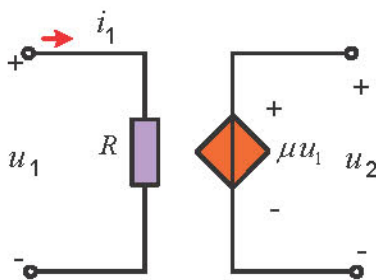
(5) 受控源的运算形式

图 13.5 (a) 所示 VCVS 的电压电流关系为:

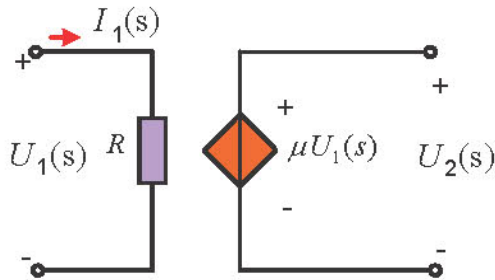
$$u_1 = R i_1 \quad u_2 = \mu u_1$$

两边取拉普拉斯变换, 得运算形式为: $U_1(s) = R I_1(s) \quad U_2(s) = \mu U_1(s)$

根据上式得 VCVS 的运算电路如图 (b) 所示。



(a)



(b)

图 13.5 受控源的运算形式

3. RLC 串联电路的运算形式

图 13.6 为 RLC 串联电路, 设电容电压的初值为 $u_c(0_-)$, 电感电流的初值为 $i_L(0_-)$, 其时域方程为:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t idt$$

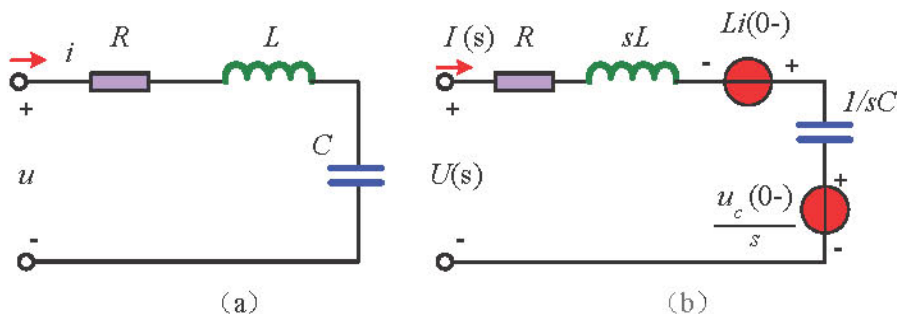


图 13.6 运算电路模型

取拉普拉斯变换, 得运算方程

$$U(s) = RI(s) + sLI(s) - Li(0_-) + \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_c(0_-)}{s}$$

或写为

$$(R + sL + \frac{1}{sC})I(s) = U(s) + Li(0_-) - \frac{u_c(0_-)}{s}$$

即:

$$(R + sL + \frac{1}{sC})I(s) = U(s) + Li(0_-) - \frac{u_c(0_-)}{s}$$

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC} \quad \text{称运算阻抗。根据上式得图 13.6 (b) 所示的运算电路。}$$

综上, 运算电路的实质是:

- (1) 电阻、电感及电容等元件用运算阻抗或运算导纳表示;
- (2) 电压、电流用象函数形式;
- (3) 电容电压和电感电流初始值用附加电源表示, 并注意附加电源的描述 (大小和参考方向)。

运算法与相量法的基本思想极为相似, 它们都有一个从时域到频域, 频域到时域的变换过程。相量法把待求的正弦响应和正弦激励变换为相量 (复数), 从而把求解正弦电流电路的问题 (微分方程求特解) 归结为求解以相量为变量的线性代数方程。运算法则通过拉氏变换将时域中的微分方程转化为复频域中以象函数为变量的线性代数方程。在相量法中, 求得待求相量后, 可直接写出对应的正弦量, 而在运算法中求出待求象函数后, 利用拉氏反变换, 可求得相应的时间函数。当电路所有的独立初始条件为零时, R 、 L 、 C 元件的运算形式与相量形式是类似的, KCL 、 KVL 的运算形式和相量形式也是类似的。因此, 对于同一电路列出的相量方程和零状态下的复频域方程在形式上是相似的。 (S 对应于 $j\omega$ 、 $Z(s)$ 对应于 Z ,

$Y(s)$ 对应于 Y , $U(s) \rightarrow \dot{U}$, $I(s) \rightarrow \dot{I}$ 等)。

在非零初始状态下, 电路方程的运算形式中应考虑附加电源的作用, 只要将非独立初始

条件考虑成附加电源后, 电路方程的运算形式仍然和相量方程相似。所以相量法中各种计算方法和定理在形式上完全可以应用于运算法。

应注意, 两种方法的适用范围完全不同, 两种方程也就是具有完全不同的意义。相量方程用来求解的是正弦稳态响应。它描述了电路的激励相量和响应相量之间的关系, 复频域方程求解的是线性电路的全响应。

由于互易定理只适用于单电源电路, 故在运算法中, 只有在单电源作用的零状态电路中适用。

§ 13-4 运算电路

应用拉普拉斯变换求解线性电路的方法称为运算法。

1. 电路定律的运算形式

基尔霍夫定律的时域表示:

$$\sum i(t) = 0, \quad \sum u(t) = 0$$

把时间函数变换为对应的象函数:

$$i(t) \xrightarrow{L[i(t)]} I(s) \quad u(t) \xrightarrow{L[u(t)]} U(s)$$

得基尔霍夫定律的运算形式:

$$\sum I(s) = 0, \quad \sum U(s) = 0$$

2. 电路元件的运算形式

根据元件电压、电流的时域关系, 可以推导出各元件电压电流关系的运算形式。

(1) 电阻 R 的运算形式

图 13.1 (a) 所示电阻元件的电压电流关系为:

$$u(t) = R i(t),$$

两边取拉普拉斯变换, 得电阻元件 VCR 的运算形式:

$$U(s) = RI(s) \quad \text{或} \quad I(s) = GU(s)$$

根据上式得电阻 R 的运算电路如图 13.1 (b) 所示。

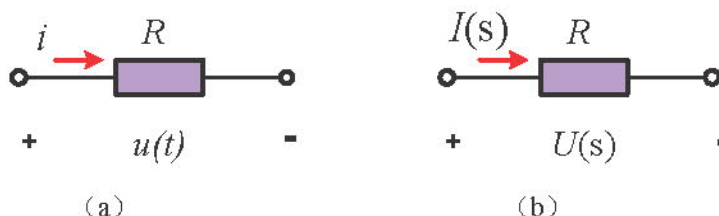


图 13.1 电阻的运算形式

(2) 电感 L 的运算形式

图 13.2 (a) 所示电感元件的电压电流关系为:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

两边取拉普拉斯变换并根据拉氏变换的微分性质, 得电感元件 VCR 的运算形式:

$$U(s) = sLI(s) - Li(0_-)$$

$$I(s) = \frac{U(s)}{sL} + \frac{i(0_-)}{s}$$

根据上式得电感 L 的运算电路如图 13.2 (b) 和 (c) 所示。图中 $Li(0_-)$ 表示附加电压源的电压, $\frac{i(0_-)}{s}$ 表示附加电流源的电流。式中 $Z(s) = sL$, $Y(s) = \frac{1}{sL}$ 分别称为电感的运算阻抗和运算导纳。

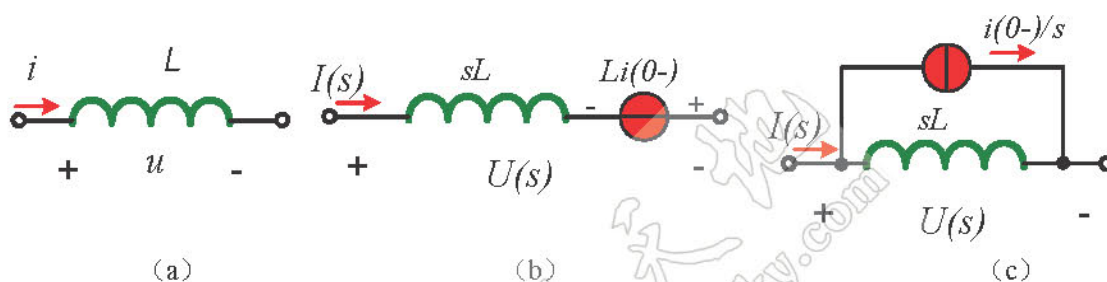


图 13.2 电感的运算形式

(3) 电容 C 的运算形式

图 13.3 (a) 所示电容元件的电压电流关系为:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

两边取拉普拉斯变换并根据拉氏变换的微分性质, 得电容元件 VCR 的运算形式:

$$I(s) = sCU(s) - Cu(0_-)$$

或

$$U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u(0_-)}{s}$$

根据上式得电容 C 的运算电路如图 13.3 (b) 和图 (c) 所示。图中 $Cu(0_-)$ 表示附加电流源的电流, $\frac{u(0_-)}{s}$ 表示附加电压源的电压。式中, $Z(s) = \frac{1}{sC}$ 、 $Y(s) = sC$ 分别为电容的运算阻抗和运算导纳。

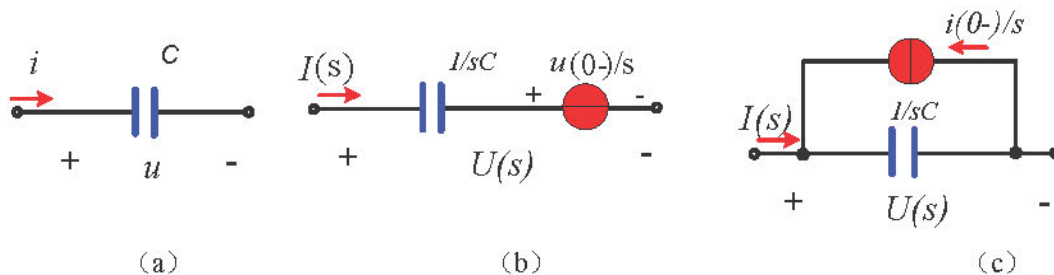


图 13.3 电容的运算形式

(4) 耦合电感的运算形式

图 13.4 (a) 所示耦合电感的电压电流关系为:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

两边取拉普拉斯变换, 得耦合电感 VCR 的运算形式

$$\begin{cases} U_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(0_-) + sMI_2(s) - Mi_2(0_-) \\ U_2(s) = sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(0_-) + sMI_1(s) - Mi_1(0_-) \end{cases}$$

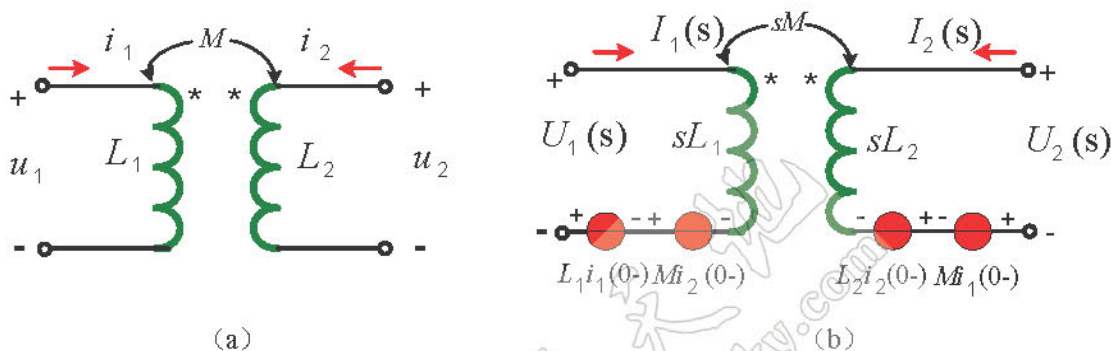


图 13.4 耦合电感的运算形式

根据上式得耦合电感的运算电路如图 13.4 (b) 所示。图中 $Mi_1(0_-)$, $Mi_2(0_-)$ 都是附加电压源。式中

$Z_M(s) = sM$, $Y_M(s) = \frac{1}{sM}$ 分别称为互感运算阻抗和互感运算导纳。

(5) 受控源的运算形式

图 13.5 (a) 所示 VCVS 的电压电流关系为:

$$u_1 = Ri_1 \quad u_2 = \mu u_1$$

两边取拉普拉斯变换, 得运算形式为: $U_1(s) = RI_1(s) \quad U_2(s) = \mu U_1(s)$

根据上式得 VCVS 的运算电路如图 (b) 所示。

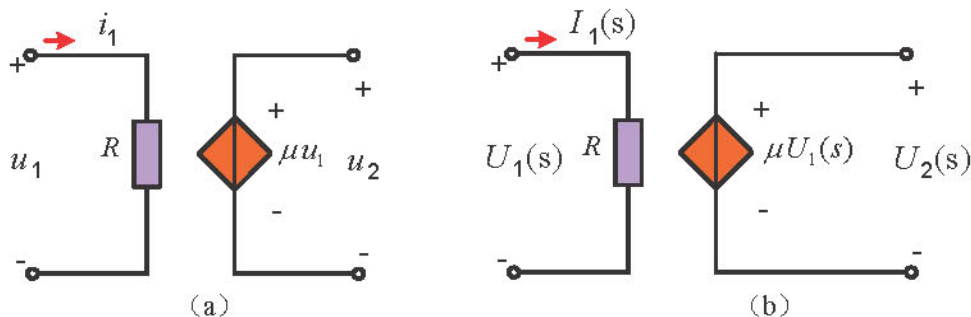


图 13.5 受控源的运算形式

3. RLC 串联电路的运算形式

图 13.6 为 RLC 串联电路, 设电容电压的初值为 $u_c(0_-)$, 电感电流的初值为 $i_L(0_-)$, 其时域方程为:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i dt$$

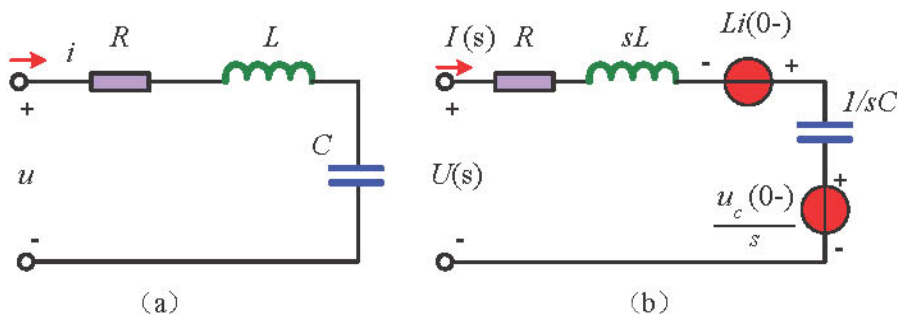


图 13.6 运算电路模型

取拉普拉斯变换, 得运算方程

$$U(s) = RI(s) + sLI(s) - Li(0_-) + \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_c(0_-)}{s}$$

或写为

$$(R + sL + \frac{1}{sC})I(s) = U(s) + Li(0_-) - \frac{u_c(0_-)}{s}$$

即:

$$(R + sL + \frac{1}{sC})I(s) = U(s) + Li(0_-) - \frac{u_c(0_-)}{s}$$

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC} \quad \text{称运算阻抗。根据上式得图 13.6 (b) 所示的运算电路。}$$

综上, 运算电路的实质是:

- (1) 电阻、电感及电容等元件用运算阻抗或运算导纳表示;
- (2) 电压、电流用象函数形式;
- (3) 电容电压和电感电流初始值用附加电源表示, 并注意附加电源的描述 (大小和参考方向)。

运算法与相量法的基本思想极为相似, 它们都有一个从时域到频域, 频域到时域的变换过程。相量法把待求的正弦响应和正弦激励变换为相量 (复数), 从而把求解正弦电流电路的问题 (微分方程求特解) 归结为求解以相量为变量的线性代数方程。运算法则通过拉氏变换将时域中的微分方程转化为复频域中以象函数为变量的线性代数方程。在相量法中, 求得待求相量后, 可直接写出对应的正弦量, 而在运算法中求出待求象函数后, 利用拉氏反变换, 可求得相应的时间函数。当电路所有的独立初始条件为零时, R 、 L 、 C 元件的运算形式与相量形式是类似的, KCL 、 KVL 的运算形式和相量形式也是类似的。因此, 对于同一电路列出的相量方程和零状态下的复频域方程在形式上是相似的。(S 对应于 $j\omega$ 、 $Z(s)$ 对应于 Z , $Y(s)$ 对应于 Y , $U(s) \rightarrow \dot{U}$, $I(s) \rightarrow \dot{I}$ 等)。

在非零初始状态下, 电路方程的运算形式中应考虑附加电源的作用, 只要将非独立初

始条件考虑成附加电源后, 电路方程的运算形式仍然和相量方程相似。所以相量法中各种计算方法和定理在形式上完全可以应用于运算法。

应注意, 两种方法的适用范围完全不同, 两种方程也就是具有完全不同的意义。相量方程用来求解的是正弦稳态响应。它描述了电路的激励相量和响应相量之间的关系, 复频域方程求解的是线性电路的全响应。

由于互易定理只适用于单电源电路, 故在运算法中, 只有在单电源作用的零状态电路中适用。

第二部分 例题

例 1 用拉氏变换的定义, 求 $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ 的拉氏变换。

解: ① $f_1(t) = \sin t$,

$$\begin{aligned} \text{则 } F_1(S) &= \int_{0-}^{\infty} \sin \omega t e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{S} \int_{0-}^{\infty} \sin \omega t e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{S} [e^{-st} \cdot \sin \omega t] \Big|_{0-}^{\infty} + \frac{1}{S} \left[\int_{0-}^{\infty} e^{-st} \omega \cos \omega t dt \right] \\ &= -\frac{\omega}{S^2} \left[\int_{0-}^{\infty} \cos \omega t de^{-st} \right] \\ &= -\frac{\omega}{S^2} e^{-st} \cos \omega t \Big|_{0-}^{\infty} - \frac{\omega}{S^2} \int_{0-}^{\infty} e^{-st} \omega \sin \omega t dt \\ &= \frac{\omega}{S^2} - \frac{\omega^2}{S^2} F_1(S) \end{aligned}$$

$$\therefore F_1(S) = \frac{\frac{\omega}{S^2}}{1 + \frac{\omega^2}{S^2}} = \frac{\omega}{S^2 + \omega^2}$$

② $f_2(t) = \cos \omega t$

$$\begin{aligned} \therefore F_2(S) &= \int_{0-}^{\infty} \cos \omega t e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{S} \cos \omega t e^{-st} \\ &= -\frac{1}{S} \int_{0-}^{\infty} \cos \omega t e^{-st} de^{-st} \Big|_{0-}^{\infty} - \frac{\omega}{S} \int_{0-}^{\infty} e^{-st} \sin \omega t dt \\ &= \frac{1}{S} - \frac{\omega}{S} F_1(S) \\ &= \frac{1}{S} - \frac{\omega}{S(S^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\omega}{S^2 + \omega^2}$$

$$\text{OR: } F_1(S) = L[\sin \omega t]$$

$$= L\left[\frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right]$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{S - j\omega} - \frac{1}{S + j\omega} \right]$$

$$= \frac{\omega}{S^2 + \omega^2}$$

$$\text{注: } L[e^{\partial t}] = \int_0^{\infty} e^{\partial t} e^{-st} dt = \frac{1}{s - \partial}$$

$$F_2(S) = L[\cos \omega t]$$

$$= L\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{S - j\omega} + \frac{1}{S + j\omega} \right]$$

$$= \frac{\omega}{S^2 + \omega^2}$$

$$\text{OR: } F_2(S) = L[\cos \omega t] = L\left[\frac{1}{\omega} \frac{d \sin \omega t}{dt}\right]$$

$$\text{又: } L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{S^2 + \omega^2} = F_1(S)$$

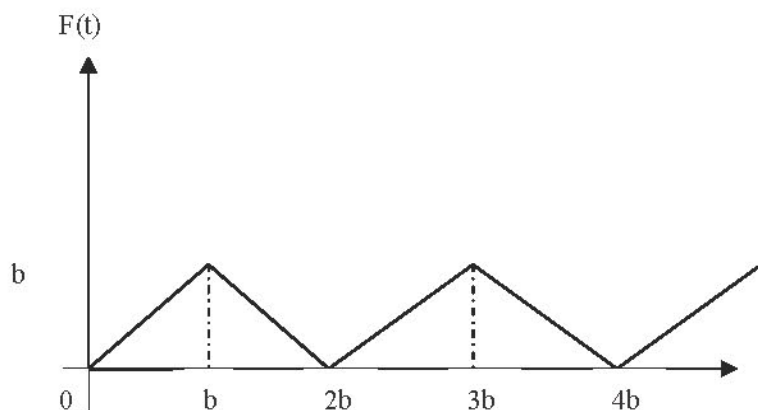
由拉氏变换微分性质得:

$$F_2(S) = \frac{1}{\omega} L\left[\frac{d \sin \omega t}{dt}\right] = \frac{1}{\omega} [S F_1(S) - f_1(0)]$$

$$= \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{S^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{\omega}{S^2 + \omega^2}$$

例 2 求周期性三角波 $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < b \\ 2b - t, & b \leq t < 2b \end{cases}$ 且 $f(t + 2b) = f(t)$ 的拉氏变换 (波形见下图)。



解：方法一：

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{2b} f(t) e^{-st} dt + \int_{2b}^{4b} f(t) e^{-st} dt + \cdots + \int_{2kb}^{2(k+1)b} f(t) e^{-st} dt + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2kb}^{2(k+1)b} f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

令 $t = \tau + 2kb$, 则

$$\begin{aligned} \int_{2kb}^{2(k+1)b} f(t) e^{-st} dt &= \int_0^{2b} f(\tau + 2kb) e^{-s(\tau + 2kb)} d\tau \\ &= e^{-2kbs} \int_0^{2b} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \int_0^{2b} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau &= \int_0^b \tau e^{-s\tau} d\tau + \int_b^{2b} (2b - \tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{s^2} (1 - e^{-bs})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore L[f(t)] &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kbs} \int_0^{2b} f(t) e^{-st} dt \\ &= (1 + e^{-2bs} + e^{-4bs} + e^{-8bs} + \cdots) \frac{1}{s^2} (1 - e^{-bs})^2 \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2bs}} \frac{1}{s^2} (1 - e^{-bs})^2 \\ &= \frac{1}{s^2} \frac{1 - e^{-bs}}{1 + e^{-bs}} = \frac{1}{s^2} \tanh \frac{bs}{2} \quad (\text{即 } \frac{1}{s^2} \tanh \frac{bs}{2}) \end{aligned}$$

方法二：

先求第一个波头 $f_1(t)$ 的拉氏变换 $F_1(S) = L[f_1(t)]$

则 $F_1(S) = L[f_1(t)]$

$$\begin{aligned} &= \int_0^b \tau e^{-st} dt + \int_b^{2b} (2b - \tau) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s^2} (1 - e^{-bs})^2 \end{aligned}$$

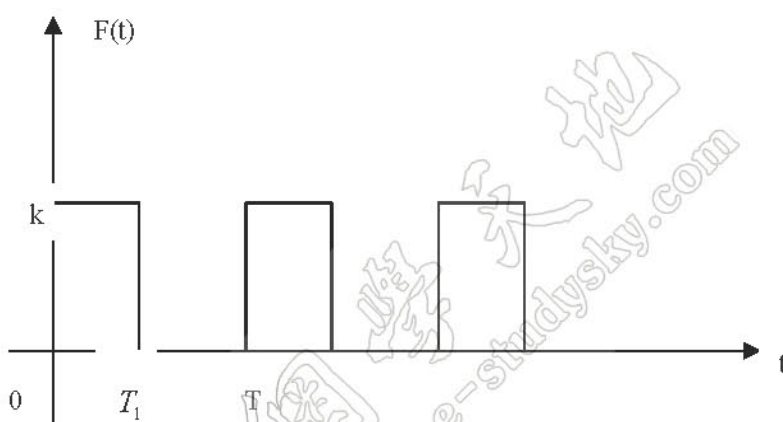
由于 $f(t)$ 是 $f_1(t)$ 的以 $T=2b$ 为周期的周期函数。

则由周期函数拉氏变换的性质：

$$F(S) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} F_1(S) \text{ 得:}$$

$$\begin{aligned} F(S) &= \frac{1}{1 - e^{-2bs}} F_1(S) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2bs}} \frac{1}{s^2} (1 - e^{-bs})^2 \\ &= \frac{1}{s^2} \frac{1 - e^{-bs}}{1 + e^{-bs}} \end{aligned}$$

例 3 求周期性方波的拉氏变换



解：先求第一个方波脉冲 $f_1(t)$ 的拉氏变换 $F_1(S)$

$$\begin{aligned} F_1(S) &= \mathcal{L}[f_1(t)] \\ &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{T_1} K e^{-st} dt = \frac{K}{S} (1 - e^{-sT_1}) \end{aligned}$$

由于 $f(t)$ 是 $f_1(t)$ 的以 T 为周期的周期函数。

则由周期函数拉氏变换的性质：

$$F(S) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} F_1(S) = \frac{K(1 - e^{-sT_1})}{S(1 - e^{-sT})}$$

例 4 求下列函数的原函数：

$$\textcircled{1} \frac{2S^2 + 16}{(S^2 + 5S + 6)(S + 12)}$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{S^2(S + 1)}$$

解：①方法一：

$$K_1 = (S+2)F(S)\big|_{s=-2} = \frac{2S^2+16}{(S+3)(S+12)}\big|_{s=-2} = 2.4$$

$$K_2 = (S+3)F(S)\big|_{s=-3} = \frac{2S^2+16}{(S+3)(S+12)}\big|_{s=-3} = -\frac{34}{9}$$

$$K_2 = (S+3)F(S)\big|_{s=-3} = \frac{2S^2+16}{(S+3)(S+12)}\big|_{s=-12} = -\frac{34}{9}$$

方法二:

$$F(S) = \frac{N(S)}{D(S)} = \frac{K_1}{S+2} + \frac{K_2}{S+3} + \frac{K_3}{S+12}$$

$$D(S) = (S^2+5S+6)(S+12)$$

$$S^3+17S^2+66S+72$$

$$K_1 = (S+2)F(S)\big|_{s=-2} = \frac{2S^2+16}{(S+3)(S+12)}\big|_{s=-2} = 2.4$$

$$K_2 = (S+3)F(S)\big|_{s=-3} = \frac{2S^2+16}{(S+3)(S+12)}\big|_{s=-3} = -\frac{34}{9}$$

$$K_2 = (S+3)F(S)\big|_{s=-3} = \frac{2S^2+16}{(S+3)(S+12)}\big|_{s=-12} = -\frac{34}{9}$$

$$\therefore F(S) = \frac{2.4}{S+2} - \frac{34/9}{S+3} + \frac{152/45}{S+12}$$

$$\therefore f(t) = 2.4e^{-2t} - \frac{34}{9}e^{-3t} + \frac{152}{45}e^{-12t}$$

$$\textcircled{2} F(S) = \frac{1}{S^2(S+1)} = \frac{K_{12}}{S} + \frac{K_{11}}{S^2} + \frac{K_2}{S+1}$$

$D(S)=0$ 具有一个二重根 $P=0$ 和一个单根 $P=-1$

$$\text{则 } K_2 = (S+1)F(S)\big|_{s=-1} = \frac{1}{S^2}\big|_{s=-1} = 1$$

$$K_{11} = S^2F(S)\big|_{s=0} = \frac{1}{S+1}\big|_{s=0} = 1$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds}[S^2F(S)]\big|_{s=0} = \frac{1}{(S+1)^2}\big|_{s=0} = -1$$

$$\therefore F(S) = \frac{-1}{S} + \frac{1}{S^2} + \frac{1}{S+1}$$

$$\therefore f(t) = -1 + t + e^{-t}$$

例 5 如图所示 RLC 串联电路中, $R=450\Omega$, $L=50H$, $C=1000\mu F$ 。电路的激励电压为单位冲激函数, 以电容电压为响应, 求冲击响应 $h(t)$ 。

解: (1) 初始条件都为 0

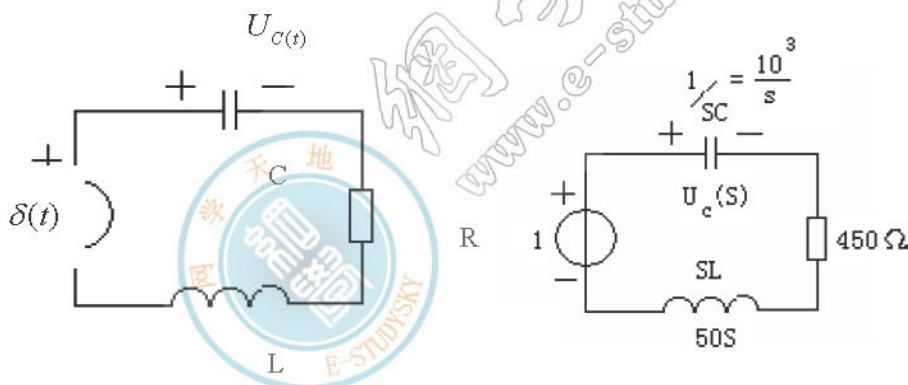
(2) 画运算电路图如图 (b)

$$\text{求以 } u_c(t) \text{ 为输出变量的网络函数 } H(S) = \frac{U_c(S)}{1}$$

$$H(S) = U_c(S) = \frac{1/SC}{SL + \frac{1}{SC} + 450}$$

$$= \frac{20}{S^2 + 9S + 20} = \frac{20}{(S+4)(S+5)} = \frac{20}{S+4} - \frac{20}{S+5}$$

$$\therefore u_c(t) = h(t) = (20e^{-4t} - 20e^{-5t})V \quad t \geq 0$$



例 6 将上例中 RLC 串联电路的激励电压改为图示的矩形脉冲, 求零状态响应 $u_c(t)$ 。

解: (1) $u_s(t)$ 的原函数为: $u_s(t) = 5\varepsilon(t) - 5\varepsilon(t-2)$

$$u_s(t) \text{ 的象函数为: } U_s(S) = \frac{5}{S} - \frac{5}{S}e^{2S} = \frac{5}{S}(1 - e^{-2S})$$

$$(2) U_c(S) = H(S)U_s(S) = \frac{20}{S^2 + 9S + 20} \cdot \frac{5}{S}(1 - e^{-2S}) = \frac{100}{S(S+4)(S+5)}(1 - e^{-2S})$$

先求 $\frac{100}{S(S+4)(S+5)}$ 的反变换

$$\text{上式} = \frac{5}{s} - \frac{25}{s+4} + \frac{20}{s+5}$$

$$\text{则, } U_c(s) = \left(\frac{5}{s} - \frac{25}{s+4} + \frac{20}{s+5} \right) (1 - e^{-2s})$$

$$U_c(t) = (5 - 25e^{-4t} + 20e^{-5t})\varepsilon(t) - [5 - 25e^{-4(t-2)} + 20e^{-5(t-2)}]\varepsilon(t-2)(V)$$

例 7 典型函数的拉氏变换。

① 单位阶跃函数的象函数

$$f(t) = \varepsilon(t)$$

$$F(s) = L[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

② 单位冲击函数的象函数

$$f(t) = \delta(t)$$

$$F(s) = L[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \times 0} = 1$$

③ 指数函数的象函数

$$f(t) = e^{\alpha t} \quad (\alpha \text{ 为实数})$$

$$F(s) = L[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = -\frac{1}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{s-\alpha}$$

例 8 设 $f_1(t) = \sin \omega t$, $f_2(t) = k(1 - e^{-at})$ 的定义域都是 $[0, \infty]$, 应用线性性质求它的象函数。

解: ① $L[\sin \omega t] = L\left[\frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \right]$

$$= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right)$$

$$= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

② $L[k(1 - e^{-at})] = L[k] - L[ke^{-at}]$

$$= \frac{k}{s} - \frac{k}{s+a}$$

$$= \frac{ka}{s(s+a)}$$

例 9 应用导数性质求 $f_1(t) = \cos \omega t$, $f_2(t) = \gamma(t)$ 的象函数。

解: a) 由于 $\frac{d(\sin \omega t)}{dt} = \omega \cos \omega t$

$$\text{则 } \cos \omega t = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}(\sin \omega t)$$

$$\text{所以 } L[\cos \omega t] = L\left[\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}(\sin \omega t)\right] = \frac{1}{\omega} \left(s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - 0\right)$$

$$= \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\text{b) 因为 } \delta(t) = \frac{d}{dt} \varepsilon(t)$$

所以应用导数定理, 可得 $\delta(t)$ 各阶导数的象函数为

$$L[\delta^{(n)}(t)] = s^n \quad L[\delta^{(n)}(t)] = s^n \quad \dots \quad L[\delta^{(n)}(t)] = s^n$$

例 10 利用积分性质求单位斜波函数 $r_a(t) = t$ 的象函数

解: 因为单位阶跃函数的积分等于单位斜波函数, 即 $r_a(t) = t = \int_{0-}^t \varepsilon(\xi) d\xi$, 且

$$L[\varepsilon(t)] = \frac{1}{s}, \quad \text{则 } L[r_a(t)] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

例 11 求函数 $f(t) = te^{-\alpha t}$ 的象函数。

解: 根据频域导数性质有:

$$F(s) = L[te^{-\alpha t}] = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s + \alpha} \right) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}$$

例 12 已知 $F(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+5}$ 求原函数 $f(t)$

解: $D(s) = s^2 + 2s + 5 = 0$ 的根 $p_1 = -1 + j2$, $p_2 = -1 - j2$ 为共轭复根。

$$K_1 = \left. \frac{N(s)}{D'(s)} \right|_{s=p_1} = \left. \frac{s+3}{2s+2} \right|_{s=p_1} = 0.5 - j0.5 = 0.5\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$$

$$K_2 = |K_1| e^{-j\frac{\pi}{4}} = 0.5\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$f(t) = 2|K_1| e^{-t} \cos(2t - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{-t} \cos(2t - \frac{\pi}{4})$$

例 13 已知 $F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^3}$, 求原函数 $f(t)$ 。

解: $D(s) = s^2(s+1)^3 = 0$ 的根 $p_1 = -1$ 为三重根, $p_2 = 0$ 为二重根。

$$F(s) = \frac{K_{11}}{(s+1)^3} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{s+1} + \frac{K_{21}}{s^2} + \frac{K_{22}}{s}$$

$$K_{11} = \frac{1}{s^2} \Big|_{s=-1} = 1, \quad K_{12} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2} \right) \Big|_{s=-1} = \frac{-2}{s^3} \Big|_{s=-1} = 2$$

$$K_{13} = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s^2} \right) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \frac{6}{s^4} \Big|_{s=-1} = 3$$

同理, 可得 $K_{21} = 1, \quad K_{22} = -3$

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^3 s^2} = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{3}{s}$$

所以

$$f(t) = 3e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} - 3 + t$$

原函数

例 14 在图 13.7a 所示电路中, 已知恒定电压 $U_1 = 50V$, $U_2 = 40V$,

$R_1 = R_2 = 100\Omega$, $R_3 = 400\Omega$, $L = 2H$ 。求 $t=0$ 时接通开关 K 后的 $u_3(t)$

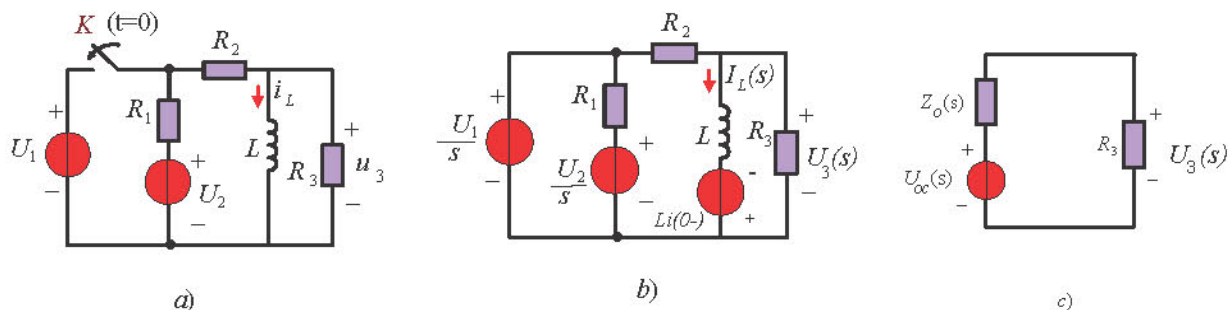


图 13.7

解: (1) 求初值 $i_L(0_-) = \frac{U_2}{R_1 + R_2} = 0.2A$

(2) 画运算电路如图 13.7 (b) 所示。

(3) 运用戴维南定理求解

断开 R_3 , 则有

$$U_{oc}(s) = \frac{\frac{U_1}{s} + Li(0_-)}{R_2 + sL} sL - Li(0_-)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{50}{s} + 0.4 \right) \\ &= \frac{\frac{50}{s} + 0.4}{100 + 2s} \times 2s - 0.4 = \frac{30}{s + 50} \end{aligned}$$

$$Z_0(s) = \frac{R_2 \cdot sL}{R_2 + sL} = \frac{200s}{2s + 100}$$

由图 c) 有 $Z_0(s) + R_3 = \frac{200s}{2s + 100} + 400 = \frac{10^3 s + 4 \times 10^4}{2s + 100}$

$$\therefore U_3(s) = \frac{U_{oc}(s)}{Z_0(s) + R_3} \cdot R_3 = \frac{60 \times 400}{10^3 s + 4 \times 10^4} = \frac{24}{s + 40}$$

(4) 取拉氏反变换

$$u_3(t) = 24e^{-40t} \text{ V}$$

