概率论与数理统计 B 习题四答案

A

1. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
概率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

求：（1）$E(X)$；（2）$E(-X+1)$；（3）$E(X^2)$；（4）$D(X)$。

解：由随机变量 X 的分布律，得：

X	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$-X+1$	2	1	$\frac{1}{2}$	0	-1
X^2	1	0	$\frac{1}{4}$	1	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

所以：$E(X)=(-1)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$，

$E(-X+1)=2\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{12}+(-1)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，

$E(X^2)=1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{12}+4\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{35}{24}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{9}{7}$。

2. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布（$\lambda>0$），且已知 $E((X-2)(X-3))=2$，求 λ 的值。

解：$\because E\left[(X-2)(X-3)\right]=E\left(X^2-5X+6\right)=E\left(X^2\right)-5E(X)+6=2$

$\therefore \left(D(X)+\left(E(X)\right)^2\right)-5E(X)+6=2$

$\therefore \lambda+\lambda^2-5\lambda+4=0$，$\lambda=2$。

3. 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，试求 X^2 的数学期望 $E(X^2)$。

解：因为 $X \sim B(10,0.4)$，所以 $E(X)=10\times0.4=4, D(X)=10\times0.4\times0.6=2.4$，

故 $E(X^2)=D(X)+(E(X))^2=2.4+4^2=18.4$。

4. 国际市场每年对我国某种出口商品的需求量 X 是一个随机变量，它在[2000，4000]（单位：吨）上服从均匀分布.若每售出一吨，可得外汇 3 万美元，若销售不出而积压，则每吨需保养费 1 万美元。问应组织多少货源，才能使平均收益最大?

解：设随机变量 Y 表示平均收益（单位：万元），进货量为 a 吨

$$Y=\begin{cases} 3X-(a-X) & x<a \\ 3a & x\ge a \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} E(Y)&=\int_{2000}^{a}(4x-a)\frac{1}{2000}dx+\int_{a}^{4000}3a\frac{1}{2000}dx \\ &=\frac{1}{2000}\left(-2a^2+14000a-8000000\right) \end{aligned}$$

要使得平均收益 $E(Y)$ 最大，所以 $\left(-2a^2+14000a-8000000\right)'=0$

得 $a=3500$（吨）。

5. 一台设备由三大部件构成，在设备运转过程中各部件需要调整的概率相应为 0.1，0.2，0.3.假设各部件的状态相互独立，以 X 表示同时需要调整的部件数，试求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$。

解：X 的可能取值为 0，1，2，3，有

$$P(X=0)=0.9\times0.8\times0.7=0.504,$$
$$P(X=1)=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3=0.398,$$
$$P(X=2)=0.1\times0.2\times0.7+0.9\times0.2\times0.3+0.1\times0.8\times0.3=0.092,$$
$$P(X=3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006,$$

所以 X 的分布律为

X	0	1	2	3
Pr	0.504	0.398	0.092	0.006

$$E(X)=0\times0.504+1\times0.398+2\times0.092+3\times0.006=0.6,$$
$$E(X^2)=0^2\times0.504+1^2\times0.398+2^2\times0.092+3^2\times0.006=0.82,$$
$$D(X)=0.82-(0.6)^2=0.46。$$

6. 设随机变量 X 有分布律：

$$p_k=P(X=k)=pq^{k-1}\ (k=1,2,\cdots),$$

其中 $0<p<1, q=1-p$，称 X 服从具有参数 p 的几何分布，求 $E(X)$ 和 $D(X)$。

解：$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}=p(\frac{1}{1-q})'=\frac{1}{p}$，

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2pq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}[k(k-1)+k]q^{k-1}=pq\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)q^{k-2}+p\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1-p}{p^2}=\frac{1}{p^2},$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1-p}{p^2}。$$

7. 某商店经销商品的利润率 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2(1-x),0<x<1,\\0, \quad 其他,\end{cases}$ 求 $E(X)$，$D(X)$。

解：（1）$E\left(X\right)=\int_0^1 x\cdot 2(1-x)dx=\frac{1}{3}$；（2）$E\left(X^2\right)=\int_0^1 x^2\cdot 2(1-x)dx=\frac{1}{6}$，

故 $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{6}-(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{18}$。

8. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, x>0,\\0, x\le 0,\end{cases}$ 求 $E(X)$，$E(2X)$，$E(X+\mathrm{e}^{-2X})$，$D(X)$。

解：$E\left(X\right)=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=1$，$E\left(2X\right)=2E\left(X\right)=2$，

$$E\left(X+e^{-2X}\right)=E\left(X\right)+E\left(e^{-2X}\right)=1+\int_0^{+\infty}e^{-2x}e^{-x}dx=1+\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},$$

$$E\left(X^2\right)=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2，D\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2=1。$$

9. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$，求：（1）$E(X)$；（2）$E(X^2)$ 的值。

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$，

（2）$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}x^2e^{-x}dx=2$。

10. 设二维随机变量 (X,Y) 服从在 A 上的均匀分布，其中 A 为 x 轴，y 轴及直线 $x+y+1=0$ 所围成的区域，求：（1）$E(X)$；（2）$E(-3X+2Y)$；（3）$E(XY)$ 的值。

解：$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x-1}^{0}2dy=2(1+x) & -1\le x\le 0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-1-y}^{0}2dx=2(1+y) & -1\le y\le 0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-1}^{0}x\cdot 2(1+x)dx=-\frac{1}{3}，E(Y)=\int_{-1}^{0}y\cdot 2(1+y)dy=-\frac{1}{3}$$

$$E(-3X+2Y)=-3E(X)+2E(Y)=-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)+2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},$$

$$E(XY)=\int_{-1}^{0}\int_{-1-x}^{0}xy2dydx=\int_{-1}^{0}-x(1+x)^2dx=\frac{1}{12}。$$

11. 设随机向量 (X,Y) 的联合分布律为：

$X \backslash Y$	0	1
0	0.3	0.2
1	0.4	0.1

求 $E(X),E(Y),E(X-2Y),E(3XY),D(X),D(Y),\mathrm{cov}(X,Y),\rho_{X,Y}$ 。

解：关于 X 与 Y 的边缘分布律分别为：

X	0	1
Pr	0.5	0.5

Y	0	1
Pr	0.7	0.3

$$E(X)=0\times0.5+1\times0.5=0.5，E(X^2)=0^2\times0.5+1^2\times0.5=0.5,$$

$$D(X)=0.5-(0.5)^2=0.25，E(Y)=0\times0.7+1\times0.3=0.3,$$

$$E(Y^2)=0^2\times0.7+1^2\times0.3=0.3，D(Y)=0.3-(0.3)^2=0.21$$

$$E(X-2Y)=E(X)-2E(Y)=0.5-2\times0.3=-0.1$$

$$E(3XY)=3E(XY)=3(0\times0\times0.3+0\times1\times0.2+1\times0\times0.4+1\times1\times0.1)=3\times0.1=0.3$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0.1-0.5\times0.3=-0.05$$

$$\rho_{X,Y}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-0.05}{\sqrt{0.25}\sqrt{0.21}}=-\frac{\sqrt{21}}{21}$$

12. 设随机变量 X,Y 相互独立，它们的密度函数分别为 $f_X(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x} & ,x>0,\\ 0 & ,x\le 0,\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4y} & ,y>0,\\ 0 & ,y\le 0,\end{cases}$ 求 $D(X+Y)$ 。

解： $X\sim E(2)$，所以 $D(X)=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$， $Y\sim E(4)$，所以 $D(Y)=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$，

因为 X,Y 相互独立，所以 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)=\frac{5}{16}$。

13. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}12y^2, 0\le y\le x\le 1,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$ 求 $E(X)$， $E(Y)$，

$E(XY)$， $E(X^2+Y^2)$， $D(X)$， $D(Y)$。

解：$E(X)=\int_0^1 x\cdot 4x^3dx=\frac{4}{5}, E(Y)=\int_0^1 y\cdot 12y^2(1-y)dy=\frac{3}{5}$，

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^X xy\cdot 12y^2dydx=\frac{1}{2},$$

$$E(X^2+Y^2)=E(X^2)+E(Y^2)=\int_0^1 x^2\cdot 4x^3dx+\int_0^1 y^2\cdot 12y^2(1-y)dy=\frac{16}{15},$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{4}{6}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{2}{75},$$

$$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{6}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{1}{75}。$$

14. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $E(X)=E(Y)=1$， $D(X)=2$， $D(Y)=3$.求：

（1） $E(X^2),E(Y^2)$；（2） $D(XY)$。

解： $E(X^2)=D(X)+E^2(X)=3$， $E(Y^2)=D(Y)+E^2(Y)=4$，

$$\begin{aligned}D(XY)&=E(X^2Y^2)-(E(XY))^2\\&=E(X^2)E(Y^2)-(E(X)\cdot E(Y))^2\\&=\left[D(X)+(E(X))^2\right]\left[D(Y)+(E(Y))^2\right]-\left[E(X)\right]^2\left[E(Y)\right]^2\\&=(2+1)(3+1)-1\cdot 1=11。\end{aligned}$$

15. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(1,1)$， $Y\sim N(-2,1)$，求 $E(2X+Y),D(2X+Y)$。

解：$E(X)=1,D(X)=1;E(Y)=-2,D(Y)=1$，

$E(2X+Y)=2E(X)+E(Y)=\times 2+1-($

$D(2X+Y)=2^2D(X)+D(Y)=\times 4+1=1$ 。

16. 设 X 的方差为 2.5，利用契比晓夫不等式估计 $P\{|X-EX|\geq 7.5\}$ 的值。

解：$P\{|X-EX|\geq 7.5\}\leq\frac{D(X)}{7.5^2}=\frac{2.5}{7.5^2}=\frac{1}{22.5}$。

17. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为-2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为-0.5，根据切比雪夫不等式估计 $P(|X+Y|\geq 6)$的值。

解：$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=-2+2=0$，

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\rho_{X,Y}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=1+4+2\times(-0.5)\sqrt{1}\cdot\sqrt{4}=3,$$

所以

$$P(|X+Y|\ge 6)=P(|X+Y-0|\ge 6)=P(|X+Y-E(X+Y)|\ge 6)$$
$$\le \frac{D(X+Y)}{6^2}=\frac{1}{12}\text{。}$$

18. 已知随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，设 $Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$，（1）求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$；（2）求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}；（3）问 X 与 Z 是否相互独立，为什么？。

解：$X\sim N(1,3^2)$，$Y\sim N(0,4^2)$。

（1）$E(Z)=E(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{2}\times 0=\frac{1}{3}$，

$$D(Z)=D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=(\frac{1}{3})^2D(X)+(\frac{1}{2})^2D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(\frac{X}{3})}\sqrt{D(\frac{Y}{2})}$$
$$=(\frac{1}{3})^2\times 3^2+(\frac{1}{2})^2\times 4^2+2(-\frac{1}{2})\sqrt{\frac{1}{3^2}\times 3^2}\sqrt{\frac{1}{2^2}\times 4^2}=1+4-2=3\text{；}$$

（2）$\mathrm{cov}(X,Z)=\mathrm{cov}(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}\mathrm{cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$

$$=\frac{1}{3}\times 3^2+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times 3\times 4=0\text{，}$$

$\rho_{XZ}=0$。

（3）因 Z 为正态分布，(X,Z) 为二维正态分布，由于 X 与 Z 不相关，故 X 与 Z 相互独立。

B

1. 设两个随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从均值为 0，方差为 1/2 的正态分布，试求随机变量 $|X-Y|$ 的方差。

解：令随机变量 $Z=X-Y$，因为 X 与 Y 相互独立且同分布 $N(0,1/2)$，则

$$Z=X-Y\sim N(0,\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=N(0,1)$$

所以 $E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}(-e^{-\frac{z^2}{2}})_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$$E(|Z|^2)=E(Z^2)=1,\quad D(Z)=E(|Z|^2)-[E(|Z|)]^2=1-\frac{2}{\pi}$$

2. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，试求：（1）常数a与b；（2）协方差$Cov(X,X-Y)$；（3）$D[1-2(X-Y)^2]$。

解（1）由题设可得：

X \ Y	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0.4	a	$0.4+a$
1	b	0.1	$0.1+b$
$p_{\cdot j}$	$0.4+b$	$a+0.1$	1

故 $1=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}P\{X=i,Y=j\}=0.4+a+b+0.1$，得$a+b=0.5$

又因为 $P\{X=0,X+Y=1\}=a$，$P\{X=0\}=0.4+a$，

$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=a+b$，且$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，故有$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}$，于是得

$a=(0.4+a)(a+b)=0.5(0.4+a)$，所以求得 $a=0.4$，$b=0.5-a=0.1$

（2）X，Y的边缘分布律分别为

X	0	1
P	0.8	0.2

Y	0	1
P	0.5	0.5

$E(X)=0.2$，$D(X)=0.16$，$E(Y)=0.5$，$E(XY)=0.1$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.1-0.2\times0.5=0$$
$$Cov(X,X-Y)=Cov(X,X)-Cov(X,Y)=0.16-0=0.16$$

（3）因为 $Z=(X-Y)^2$的概率分布为

Z	0	1
P	0.5	0.5

$D[1-2(X-Y)^2]=4D[(X-Y)^2]=4\times0.5\times0.5=1$。

3. 设随机变量X和Y的分布律为：

X	-1	0	1
P	1/4	1/2	1/4

Y	0	1
P	1/2	1/2

已知 $P(XY=0)=1$，试求（1）联合分布律；（2）$Cov(X,Y)$；（3）X 与 Y 相互独立吗，为什么？

解：（1）

X \ Y	-1	0	P(*X*=*K*)
-1	1/4	0	1/4
0	0	1/2	1/2
1	1/4	0	1/4
P(*X*=*K*)	1/2	1/2	1

（2）$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$，$E(XY)$=0，$E(X)$=0，$E(Y)$=1/2，

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$；

（3）$P(XY=0)=1\neq P(X=0)P(Y=0)$ X 与 Y 不相互独立。

4. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases} xy, & 0<x<1, 0<y<2(1-x) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$；

求：（1）协方差 $Cov(X,Y)$；（2）相关系数 ρ_{XY}。

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}x^2ydy=\int_0^1 2x^2(1-x)^2dx=\dfrac{1}{15}$，

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}xy^2dy=\int_0^1\dfrac{8}{3}x(1-x)^3dx=\dfrac{2}{15}$，

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}x^3ydy=\int_0^1 2x^3(1-x)^2dx=\dfrac{1}{30}$，

$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}xy^3dy=\int_0^1 4x(1-x)^4dx=\dfrac{2}{15}$，

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{1}{30}-(\dfrac{1}{15})^2=\dfrac{13}{450}$，

$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\dfrac{2}{15}-(\dfrac{2}{15})^2=\dfrac{26}{225}$，

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}x^2y^2dy=\int_0^1\dfrac{8}{3}x^2(1-x)^3dx=\dfrac{2}{45}$

$Cov(X,Y)=\dfrac{2}{45}-\dfrac{2}{15}\times\dfrac{1}{15}=\dfrac{4}{225}$，$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{\frac{4}{225}}{\sqrt{\frac{26\times13}{225\times450}}}=\dfrac{4}{13}$。

5. 设某种商品每周的需求量 X 是服从区间 $[10,30]$ 上的均匀分布的随机变量，而经销商进货数量为区间 $[10,30]$ 中的某一整数，商店每销售 1 单位商品可获利 500 元。若供大于求则削价处理，每处理 1 单位商品亏损 100 元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时，每 1 单位商品仅获利 300 元；为使商店所获利润期望值不少于 9280，试确定最少进货量。

解：设进货量为a，商店所获利润L_a为需求量X的函数$L_a = g(X)$：

$$L_a = g(X) = \begin{cases} 500a + 300(X-a) = 300X + 200a & a \le X \le 30 \\ 500X - 100(a-X) = 600X - 100a & 10 \le X \le a \end{cases}$$

而需求量X服从均匀分布$U(10,30)$，其概率密度为：

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} & 10 < x < 30 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

于是商店所获利润期望值为：

$$E(L_a) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$
$$= \int_a^{30} (300x + 200a)\frac{1}{20}dx + \int_{10}^{a} (600x - 100a)\frac{1}{20}dx$$
$$= \frac{1}{20}[150(30^2 - a^2) + 200a(30-a)] + \frac{1}{20}[300(a^2 - 10^2) - 100a(a-10)]$$
$$= 350a - 7.5a^2 + 5250,$$

欲使 $E(L_a) = 350a - 7.5a^2 + 5250 \ge 9280$，即$7.5a^2 - 350a + 4030 \le 0$，

得$(a - \frac{62}{3})(a-26) \le 0$，此时解得$a$满足不等式：$20.67 < a < 26$，

所以为使商店所获利润期望值不少于 9280 时，最少进货量为 21 个单位。

6. 假设有十只同种电器元件，其中有两只废品，装配仪器时，从这批元件中任取一只，如是废品，则扔掉重新任取一只；如仍是废品，则扔掉再取一只。试求在取到正品之前，已取出的废品只数的分布、数学期望和方差。

解：以X表示在取到正品前已取出的废品数，X是一随机变量，有三个可能的取值：0、1、2。

$A_k = \{\text{第}k\text{次取得的是正品}\}\ (i = 1,2,3)$，则由乘法定理有：

$$P\{X=0\} = P(A_1) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},$$
$$P\{X=1\} = P(\overline{A_1}A_2) = P(A_2 \mid \overline{A_1})P(\overline{A_1}) = \frac{2}{10}\times\frac{8}{9} = \frac{8}{45},$$
$$P\{X=2\} = P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3) = P(A_3 \mid \overline{A_2}\overline{A_1})P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1})P(\overline{A_1}) = \frac{8}{8}\times\frac{1}{9}\times\frac{2}{10} = \frac{1}{45},$$

由此可得X的分布律：

X	0	1	2
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

根据定义，随机变量X的数学期望：

$$E(X) = 0\times\frac{4}{5} + 1\times\frac{8}{45} + 2\times\frac{1}{45} = \frac{2}{9},$$

随机变量 X 的方差：

$$E(X^2)=0^2\times\frac{4}{5}+1^2\times\frac{8}{45}+2^2\times\frac{1}{45}=\frac{4}{15},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{88}{405}。$$

7. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}ke^{-(3x+4y)} & x>0,y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$，同时 $F(x, y)$，$F_X(x)$和 $F_Y(y)$分别表示(X, Y)，X 和 Y 的联合分布函数和边缘分布函数，求：（1）系数 k；（2）$P(0\le X\le 1,0\le Y\le 2)$；（3）证明：$F(x, y) - F_X(x) F_Y(y) = 0$。

解：（1）k 必须满足$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，即$\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}ke^{-(3x+4y)}dx=1$，经计算得 $k=12$；

（2）$P(0\le X\le 1,0\le Y\le 2)=\int_0^2 dy\int_0^1 12e^{-(3x+4y)}dx=(1-e^{-3})(1-e^{-8})$；

（3）关于 X 的边缘密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}12e^{-(3x+4y)}dy, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

同理可求得 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

易见 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$，因此 X 与 Y 相互独立

根据独立性定义，$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$，故结论成立。

8. 设随机变量 X,Y 独立，且均服从 $N\left(1,\ \frac{1}{5}\right)$，若 $D(X-aY+1)=E[(X-aY+1)^2]$，求：（1）a 的值；（2）变量 $Z=X-aY+1$的分布；（3）$E|X-aY+1|$。

解：（1）$D(X-aY+1)=E[(X-aY+1)^2]\Rightarrow E(X-aY+1)=0$，

$EX-aEY+1=0$，$1-a+1=0\Rightarrow a=2$；

（2）$Z=X-aY+1,\quad EZ=0,\quad DZ=DX+a^2DY=1$，

$\therefore\quad Z\sim N(0,\ 1)$

（3）$E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$。

C

1. 设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}A\sin(x+y), & 0\le x\le\frac{\pi}{2},0\le y\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，试求：（1）常数$A$；（2）求$E(X)$，$E(Y)$，$D(X)$，$D(Y)$；（3）求$\rho(X,Y)$。

解：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}A\sin(x+y)dxdy=1$，得$A=\frac{1}{2}$；

（2）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\bullet\frac{1}{2}\sin(x+y)dxdy=\frac{\pi}{4}$，

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\bullet\frac{1}{2}\sin(x+y)dxdy=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2，$$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2$，同理可得：$E(Y)=\frac{\pi}{4}$，$D(Y)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2$；

（3）$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xy\bullet\frac{1}{2}\sin(x+y)dxdy=\frac{\pi}{2}-1$，

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}-$，

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}-1}{\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2}=\frac{8\pi-\pi^2-16}{\pi^2+8\pi-32}。$$

2. 某人掷一枚不均匀的硬币，一直掷到正反面出现为止，记正面出现的概率为$p(0<p<1)$，记X为直到正、反面出现的次数。试求（1）X的分布律；（2）平均抛掷的次数。

解：（1）$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p+p^{k-1}(1-p),k=2,3,4,\cdots$；

（2）$E(X)=\sum_{k=2}^{+\infty}k[(1-p)^{k-1}p+p^{k-1}(1-p)]$

$$=p\sum_{k=2}^{+\infty}(x^k)'|_{x=1-p}+(1-p)\sum_{k=2}^{+\infty}(x^k)'|_{x=p}=p(\frac{x^2}{1-x})'|_{x=1-p}+(1-p)(\frac{x^2}{1-x})'|_{x=p}$$

$$=p(-1+\frac{1}{p^2})+(1-p)((-1+\frac{1}{(1-p)^2})=\frac{1}{p(1-p)}-1。$$

3. 一箱零件共有 100 件，其中一、二、三等品分别为 80 件，10 件，10 件，现从中随机抽取一件，记$X_i=\begin{cases}1, & \text{抽到}i\text{等品}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $i=1,2,3$，试求：（1）X_1与X_2的联合分布律；（2）

X_1 和 X_2 的边缘分布律，X_1 与 X_2 是否独立？（3）$\mathrm{Cov}\left(X_1, X_2\right)$；（4）$X_1$ 与 X_2 的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$。

解：（1）X_1 与 X_2 的联合分布律如下：

X_1 \ X_2	0	1	X_1
0	0.1	0.1	0.2
1	0.8	0	0.8
X_2	0.9	0.1	1

（2）X_1 和 X_2 的边缘分布律如下：

X_1	0	1
P	0.2	0.8

X_2	0	1
P	0.9	0.1

由于 $\boldsymbol{P\left(X_1=1, X_2=1\right)=0 \neq P\left(X_1=1\right) \cdot P\left(X_2=1\right)}$，所以 X_1 与 X_2 不独立。

（3）由于 $P\left(X_1 X_2=0\right)=1$，即

X_1X_2	0
P	1

所以 $E\left(X_1 X_2\right)=0$，$E\left(X_1\right)=0.8$，$E\left(X_2\right)=0.1$

故 $\operatorname{cov}\left(X_1, X_2\right)=E\left(X_1 X_2\right)-E\left(X_1\right) E\left(X_2\right)=-0.08$

（4）由于 $\boldsymbol{D\left(X_1\right)=0.2 \times 0.8= 0.16}$，$\boldsymbol{D\left(X_2\right)=0.9 \times 0.1=0.09}$，$X_1$ 与 X_2 的协方差矩阵：

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix} \mathbf{0.16} & \mathbf{-0.08} \\ \mathbf{-0.08} & \mathbf{0.09} \end{pmatrix}。$$

4. 设随机变量 X、Y 的概率分布相同，X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\frac{1}{3}$，$P\{X=1\}=\frac{2}{3}$，且 X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$，求（1）(X, Y) 的联合分布律；（2）$P\{X+Y \leq 1\}$。

解：$\because \rho_{XY}=\dfrac{C\text{ov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}=\dfrac{E(XY)-E(X) E(Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}=\dfrac{1}{2}$，$E(X)=E(Y)=\dfrac{2}{3}$，

$D(X)=D(Y)=\dfrac{2}{9}$，

$\therefore E(XY)=\dfrac{1}{2} \sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}+E(X) E(Y)=\dfrac{5}{9}$，

即：

XY	0	1
P	4/9	5/9

$\therefore P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{5}{9}$，即：

$X \backslash Y$	0	1
0	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{9}$
1	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{5}{9}$

$\therefore P\{X+Y\le 1\}=1-P\{X+Y>1\}=1-P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{4}{9}$。