稳恒磁场:稳恒电流周围不随时间变化的磁场

二、稳恒磁场的安培环路定理

1. 定理的导出

思路：由毕奥—沙伐定律出发，以无限长直电流的磁场为例严格推证，然后将结果推广到任意稳恒电流磁场。(从特殊到一般)

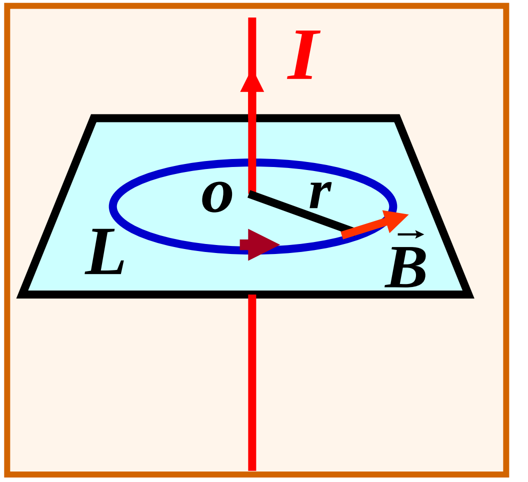
由毕奥—沙伐定律已推出：离无限长直电流距离为r处的磁感应强度为：

大小：$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

方向：与电流方向成右旋关系。

(1) 设闭合路径在垂直于长直载流导线的平面内，为以导线与平面交点o为圆心，r为半径的圆周路径L。

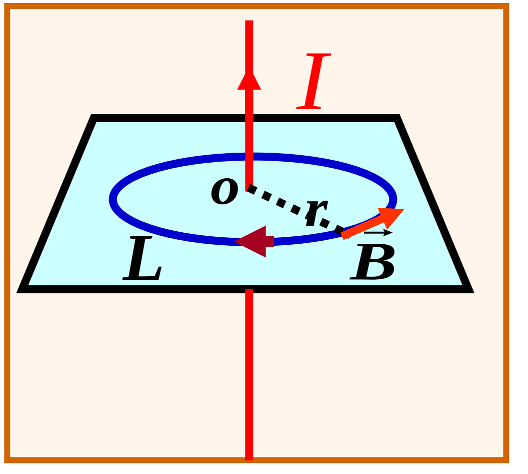
①路径指向与电流成右旋关系



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot dl\cdot\cos 0^\circ$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\int_0^{2\pi r} dl = \mu_0 I$$

②路径指向与电流成左旋关系



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi r}\frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl\cos\pi$$

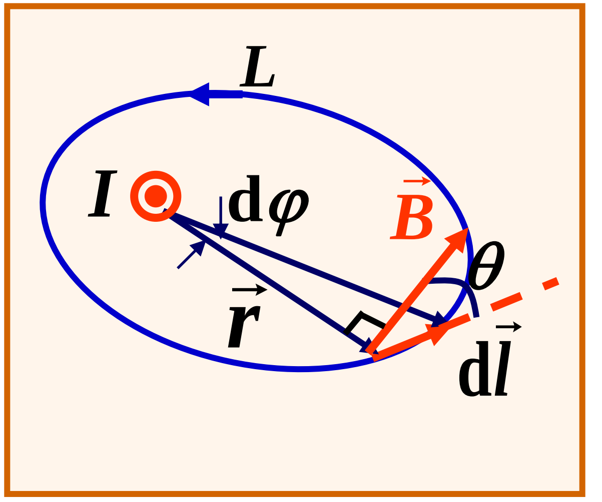
$$= -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\int_0^{2\pi r} dl = -\mu_0 I$$

结论： 与环路绕行方向成右旋关系的电流对环流的贡献为正，反之为负。

规定： 与环路绕行方向成右旋关系的电流为正，反之为负。

统一为： $$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

(2) 设闭合路径在垂直于导线平面内，为围绕电流的任意闭合路径。



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \underline{B\cos\theta \mathrm{d}l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\underline{r\mathrm{d}\varphi}$$

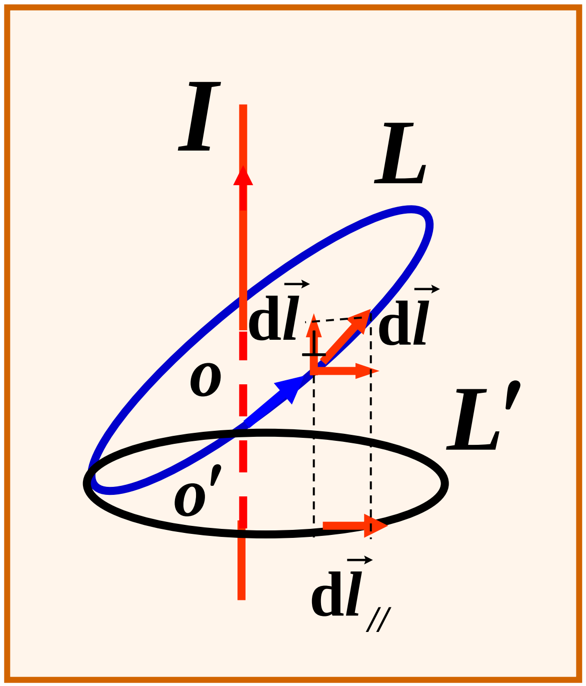
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \mu_0 I$$

若路径指向反向，则为 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\mu_0 I$

如果规定 $\begin{cases} \text{与 } L \text{ 绕向成右旋关系} & I > 0 \\ \text{与 } L \text{ 绕向成左旋关系} & I < 0 \end{cases}$

统一为：$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$

(3) 设闭合路径为不在垂直于导线平面内的任意空间闭合路径。



将L投影到垂直于电流的平面（即 $\vec{B}$ 线所在的平面）内

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\vec{l}_{//} + \mathrm{d}\vec{l}_{\perp}$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{B}\cdot(\mathrm{d}\vec{l}_{//} + \mathrm{d}\vec{l}_{\perp})$$

$$= \oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{//} + \oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{\perp}$$

$$\boxed{\cos 90^\circ = 0}$$

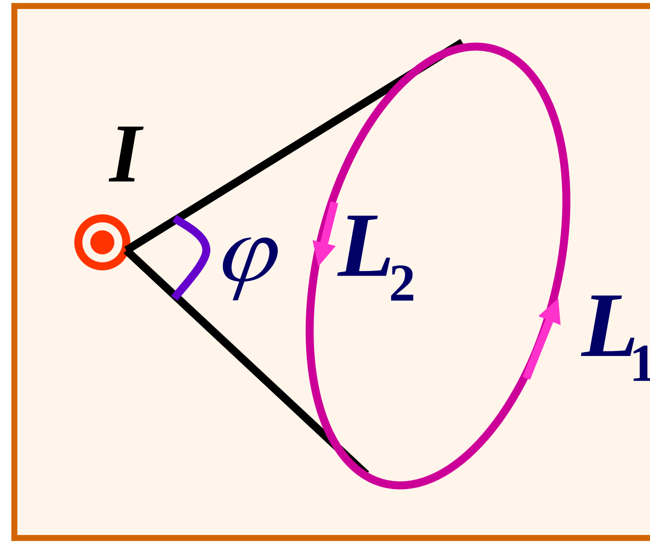
$$= \oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{//} = \oint_{L'} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{//} = \mu_0 I$$

(4) 闭合路径不包围电流

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{L_1}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{L_2}\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_{L_1} d\varphi + \int_{L_2} d\varphi\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\varphi + (-\varphi)\right] = 0$$



总结： $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \begin{cases} 0 & \text{闭合路径不包围电流} \\ \mu_0 I & \text{闭合路径包围电流} \end{cases}$

(5) 空间存在多个长直电流

设空间存在n个长直电流，其中k个在闭合曲线内，n-k个在闭合曲线外，由磁场叠加原理：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \cdots + \vec{B}_n)\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

空间所有电流的贡献

$$= \oint_L \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_L \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cdots + \oint_L \vec{B}_n \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \mu_0 \sum_{(\text{穿过}L)} I_i$$

穿过L电流的贡献

2. 推广得:稳恒磁场的安培环路定理 $\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(\text{穿过}L)} I_i}$

稳恒磁场中,磁感应强度$\vec{B}$沿任意闭合路径L的线积分(环流)等于穿过闭合路径的电流的代数和与真空磁导率的乘积。

稳恒磁场的安培环路定理：$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(\text{穿过}L)} I_i}$

成立条件：稳恒电流的磁场

L：场中任一闭合曲线 — 安培环路（规定绕向）

$\vec{B}$：环路上各点总磁感应强度（包含空间穿过L，不穿过L的所有电流的贡献）

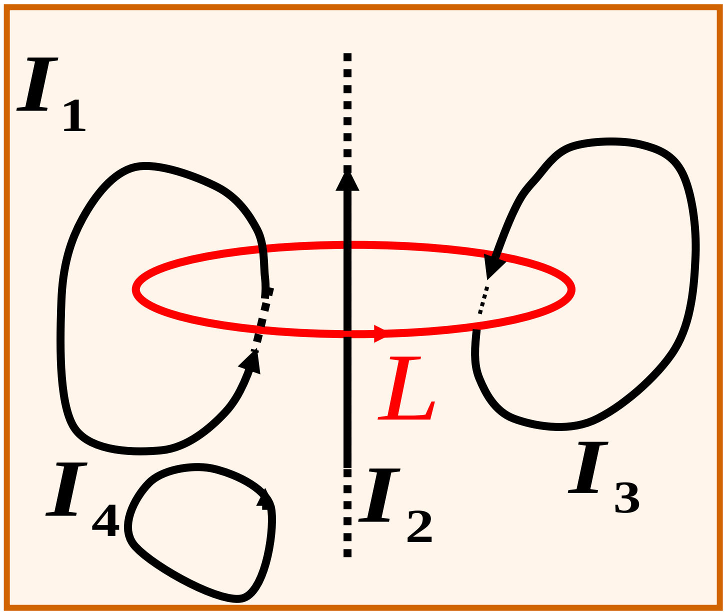
$\sum_{(\text{穿过}L)} I_i$：穿过以L为边界的任意曲面的电流的代数和。

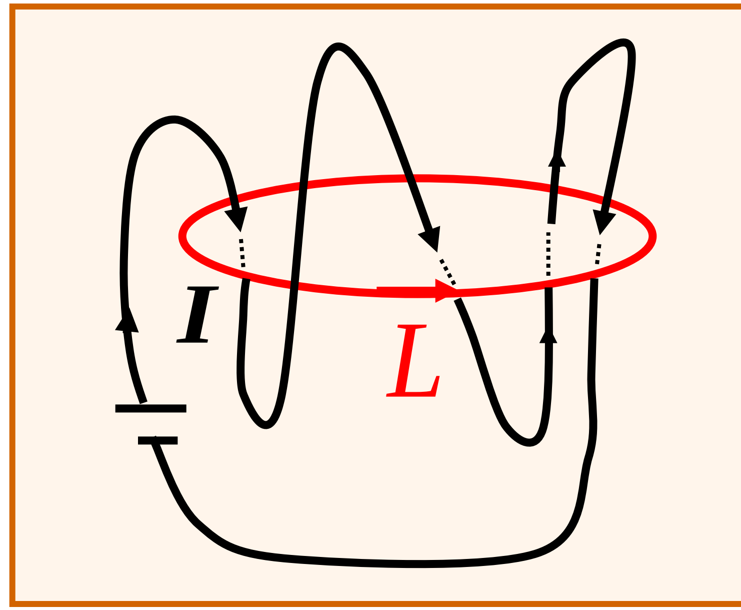
规定：

与 L 绕向成右旋关系 $I_i > 0$

与 L 绕向成左旋关系 $I_i < 0$

例如：





$$\sum_{(\text{穿过}L)} I_i = I_1 + I_2 - I_3$$

$$\sum_{(\text{穿过}L)} I_i = I - 3I = -2I$$

注意：

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(穿过L)} I_i}$$

$\vec{B}$：与空间所有电流有关；

$\vec{B}$的环流 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ ：只与穿过环路的电流代数和有关。

穿过 L的电流：对 $\vec{B}$ 和 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 均有贡献。

不穿过 L的电流：对 L上各点 $\vec{B}$有贡献；

对 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 无贡献。

安培环路定理揭示磁场是非保守场（无势场，涡旋场）

比较	高斯定理	环路定理
静电场	$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$ 有源场	$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ 保守场、有势场
稳恒磁场	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ 无源场	$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum_{(穿过L)} I_i$ 非保守场、无势场 （涡旋场）

三、安培环路定理的应用

——求解具有某些对称性的磁场分布

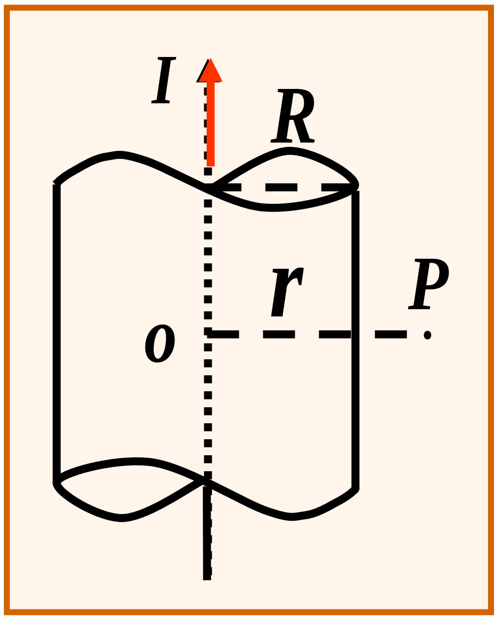
适用条件：稳恒电流的磁场

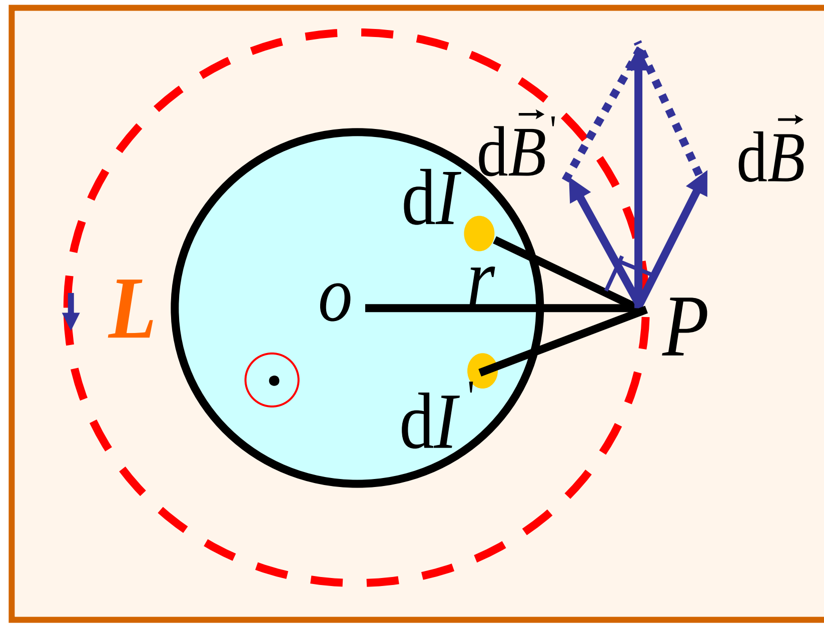
求解条件：电流分布(磁场分布)具有某些对称性，以便可以找到恰当的安培环路L，使$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$能积出，从而方便地求解$\vec{B}$。

求解思路：
- 对称性分析
- 选环路L并规定绕向
- 由$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{内}$求$\vec{B}$。

例1 (P$_{258}$ 例2)：求无限长均匀载流圆柱体(I,R)内外磁场。

（电流分布均匀）





对称性分析：

在$\perp I$平面内，作以o为中心、半径为r的圆环L。

L上各点：$\vec{B}$大小相等，方向沿切向(与I成右旋关系)

以L为安培环路，逆时针绕向为正(与I成右旋关系)：

彼此等价

+

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2\pi r \quad = \mu_0 \sum I_{内}$$

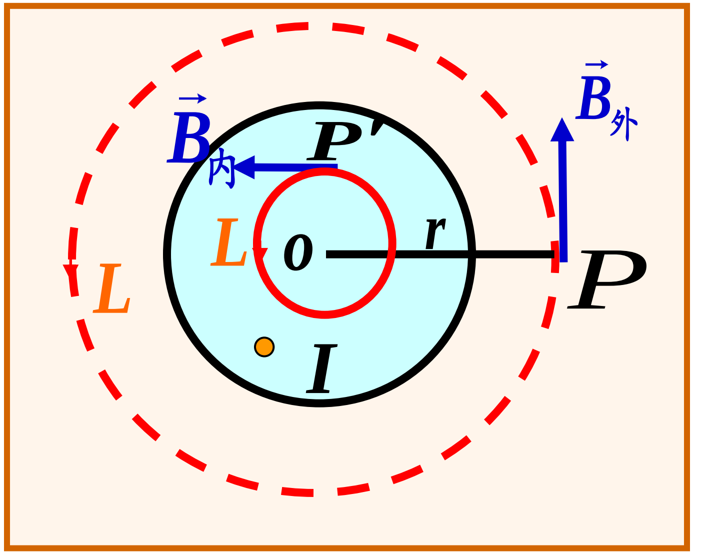
$$r \geq R: \quad \sum I_{内} = I$$

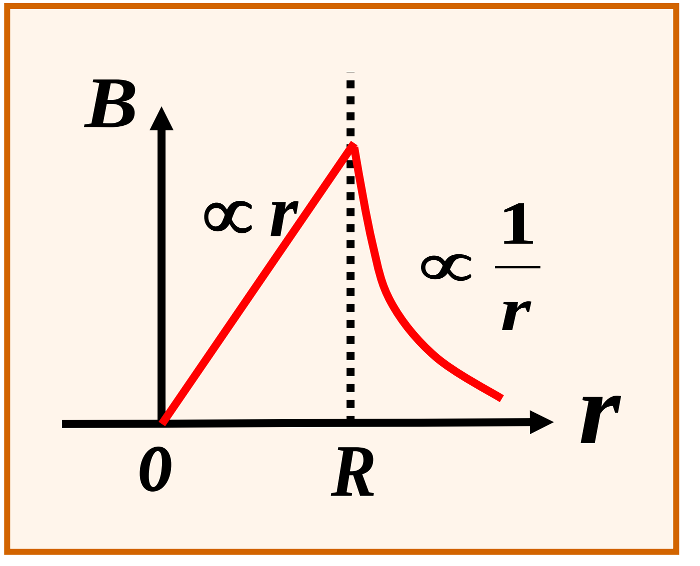
$$B_{外} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \propto \frac{1}{r}$$

$$r \leq R: \sum I_{内} = \frac{I}{\pi R^2}\cdot \pi r^2 \quad = \frac{Ir^2}{R^2}$$

$$B_{内} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \propto r$$

$\vec{B}$ 方向与 I 指向满足右旋关系

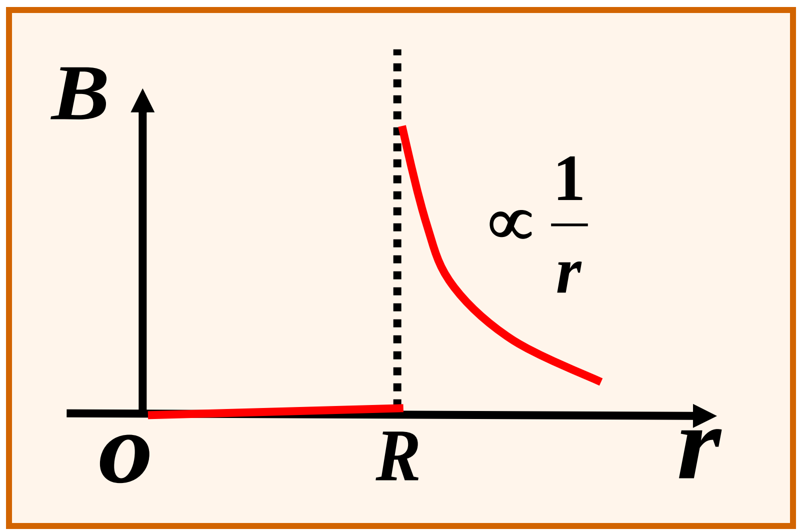




思考： 求无限长均匀载流直圆筒 $B \sim r$ 曲线？

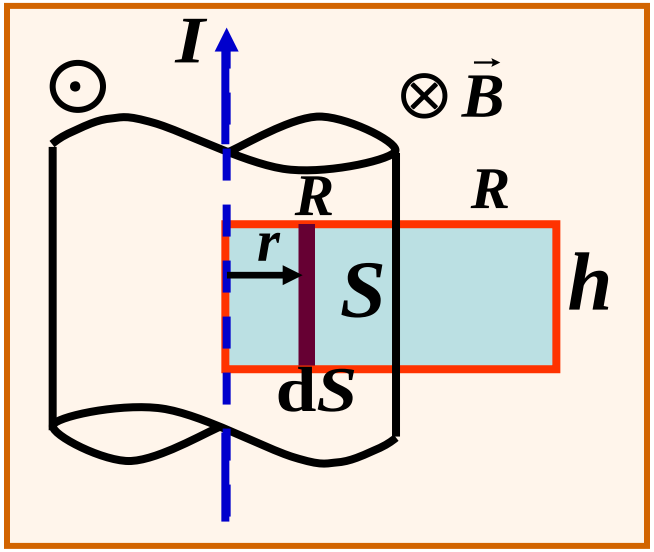
$$B_{内} = 0 \qquad B_{外} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$\vec{B}_{外}$方向与 I 指向满足右旋关系



等价于全部电流集中于轴线的无限长直电流

练习1 (P282 10.13)：无限长均匀载流圆柱体（R，I）如图，求通过$S(2R,h)$的磁通量。



解：磁场分布为

$$B_{内} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \qquad B_{外} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

微元分析法：取 $\mathrm{d}S = h\mathrm{d}r$

且取$\mathrm{d}\vec{S}$与$\vec{B}$方向相同

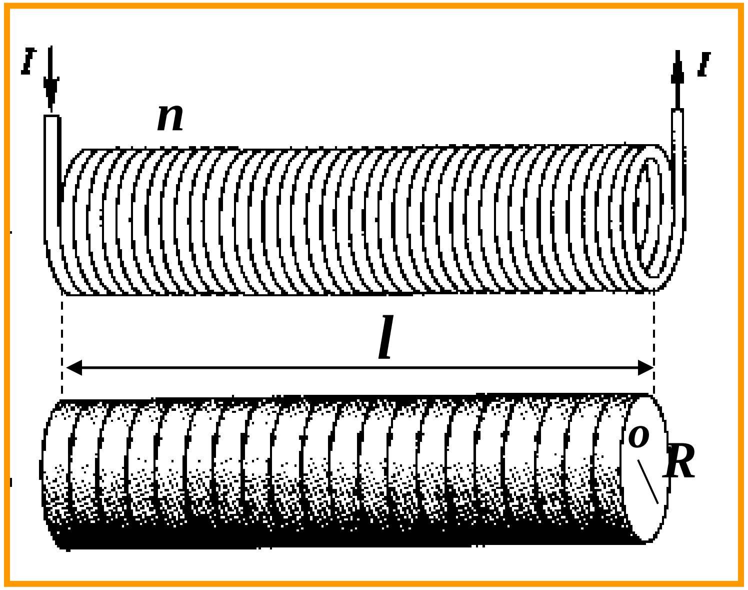
$$\phi_m = \int_s \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_{内}} B_{内}\mathrm{d}S + \int_{S_{外}} B_{外}\mathrm{d}S$$

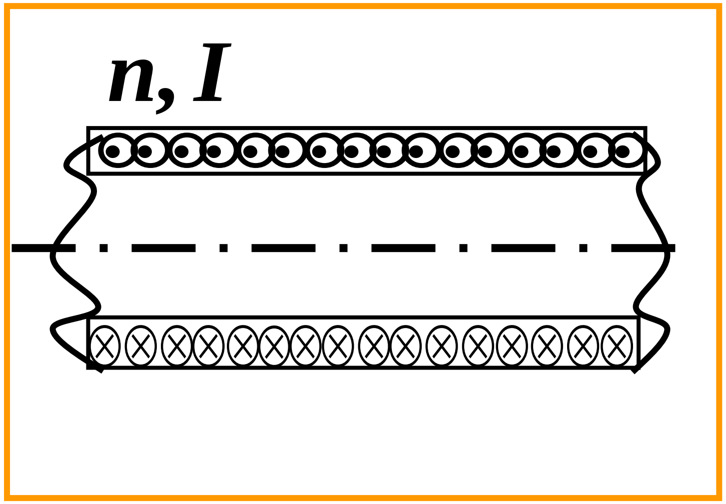
$$= \int_0^R \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} h\mathrm{d}r + \int_R^{2R} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I h}{4\pi}(1+2\ln 2)$$

例2（P_{259}例3）：求无限长载流直螺线管的磁场（I，n，线密绕）。

对邻近轴线的场点：$R<<l$

单位长度上的匝数



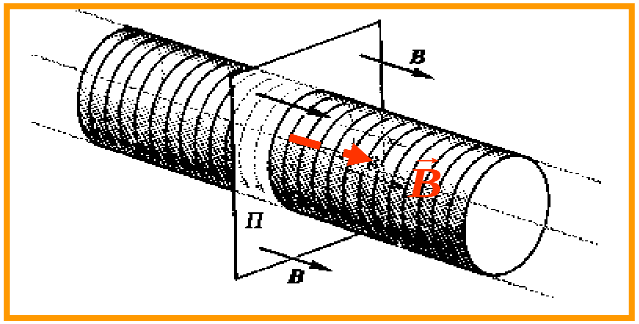


线密绕模型：螺距为零，视为一系列平行圆电流紧密排列。

解：通过对称性分析可知：

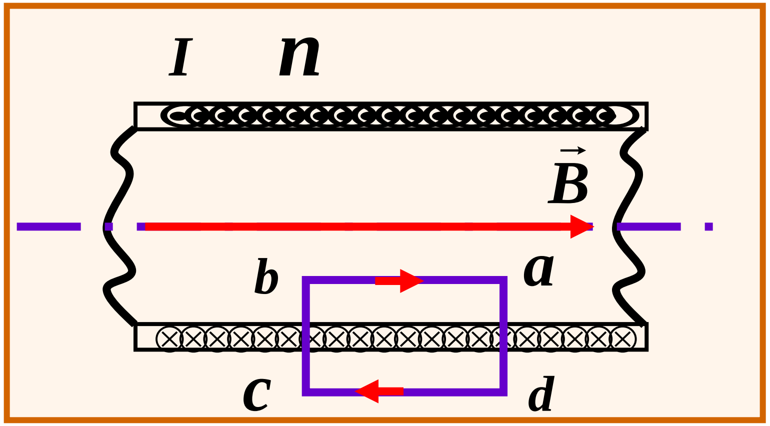
无限长载流直螺线管磁场内：

平行于轴线任一直线上各点$\vec{B}$大小相等，方向沿轴与I成右旋关系。



无限长载流直螺线管磁场外：

$$\vec{B}_{外}=0$$



下面求螺线管内磁场：

作矩形安培环路如图，

规定：$+$

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_b^a \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_a^d \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_d^c \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_c^b \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= B\,\overline{ab} + 0 + 0 + 0 = B\overline{ab}$$

$$\sum I_{内} = nI\overline{ab}$$

由安培环路定理：$B\overline{ab} = \mu_0 nI\overline{ab}$

$$\therefore B = \mu_0 nI$$

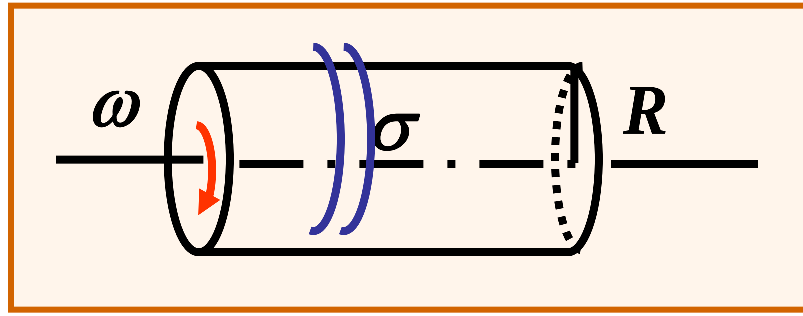
方向：与I成右手螺旋关系

无限长直螺线管内为**均匀磁场**！

练习2: 半径R 无限长均匀带电圆筒绕轴线匀速旋转

已知：σ、R、ω

求：内部 $\vec{B}=?$



解: 等效于长直螺线管：$B=\mu_0 nI$

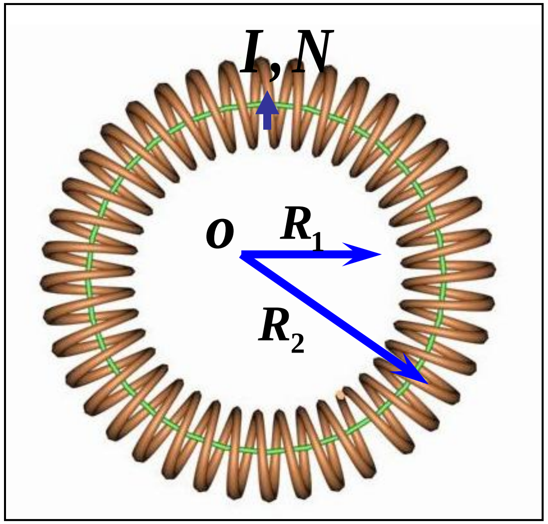
$nI=?$ 　　单位长度上电流

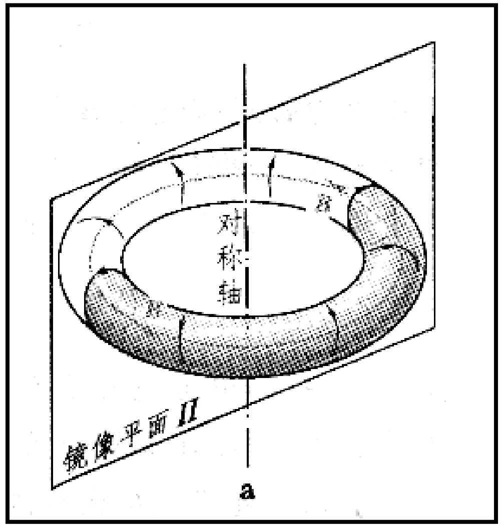
单位长度圆筒带电: $\boxed{\mathrm{d}q=2\pi R\cdot 1\cdot \sigma}$

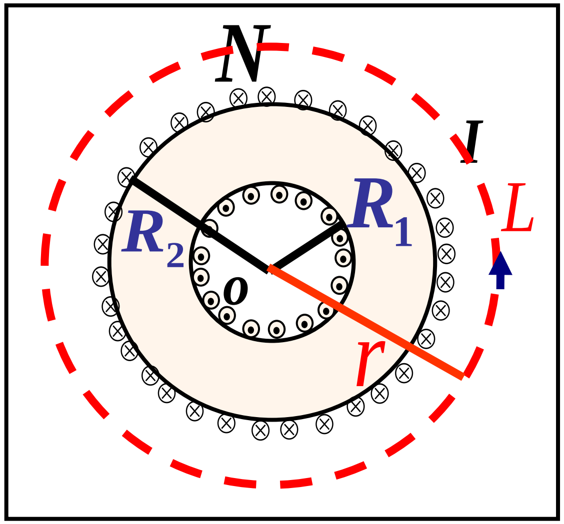
$$nI=\frac{\omega \mathrm{d}q}{2\pi}=2\pi R\cdot\sigma\cdot\frac{\omega}{2\pi}$$

$B=\mu_0 nI=\mu_0 R\sigma\omega$ 　　矢量式: $\vec{B}=\mu_0 R\sigma\,\vec{\omega}$

例3(P_{260}例4):求载流螺绕环的磁场分布(R_1 . R_2 . N . I)。







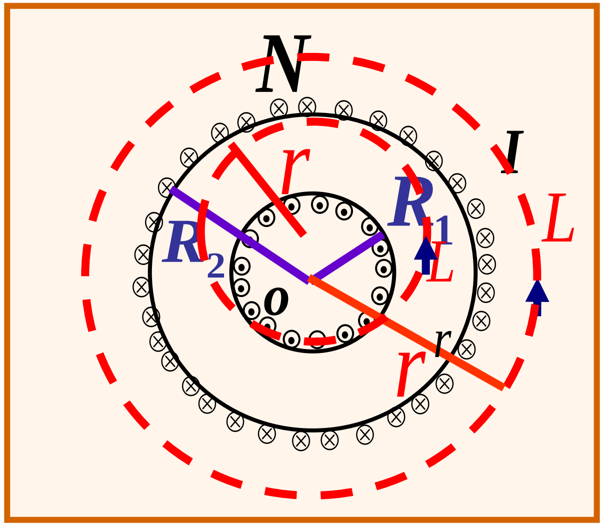
解:对称性分析:

在$\perp I$平面内,作以o为中心、r为半径的圆环L。

环上各点$\vec{B}$大小相等方向沿切向,彼此等价。

以中心O,半径r的圆环为安培环路

设$\vec{B}$沿逆时针方向



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_{内}$$

$$r < R_1\,,\ r > R_2 : \sum I_{内} = 0$$

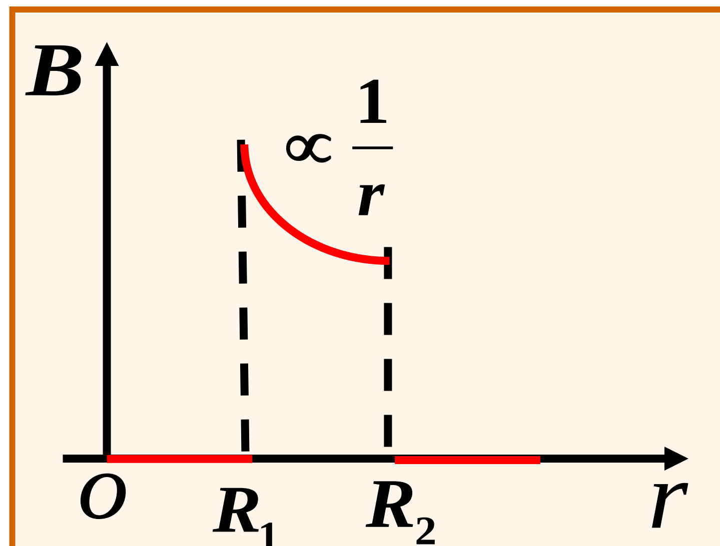
$$B_{外} = 0$$

$$R_1 < r < R_2 :$$

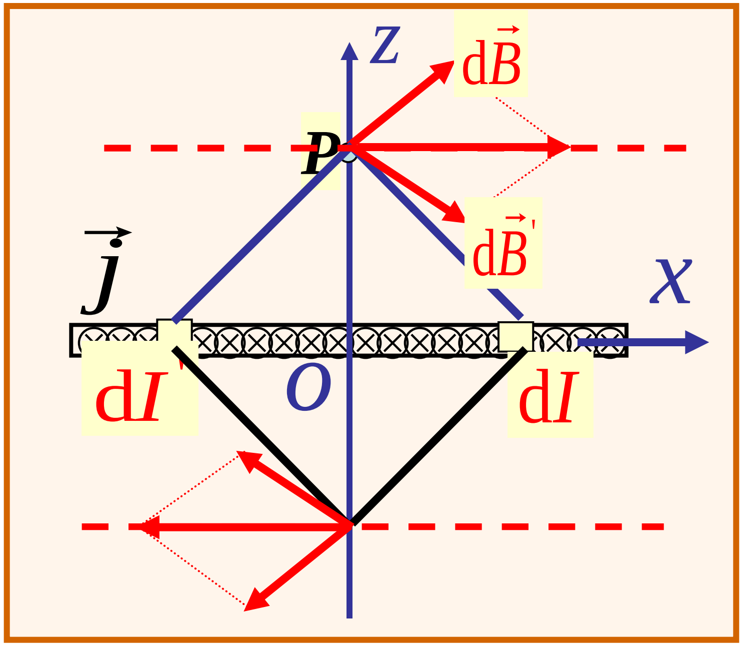
$$\sum I_{内} = NI$$

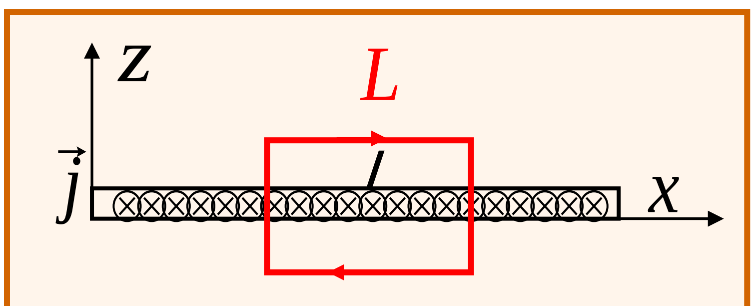
$$B_{内} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

方向：沿逆时针方向



练习3(P$_{281}$ 10.10)：无限大导体平板，电流沿y方向，线密度j(x方向、单位长度上的电流)。求：$\vec{B}$ 分布。





解：由对称性分析可知：距导体平板等距离的两个平面上的磁感应强度大小相等，方向为平行于x轴且相反。

选如图安培环路

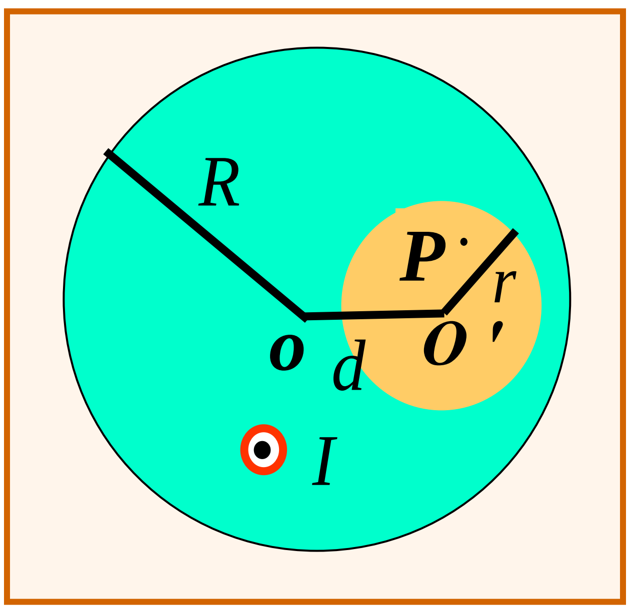
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2lB = \mu_0 jl$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 j}{2} \longrightarrow \text{均匀磁场}$$

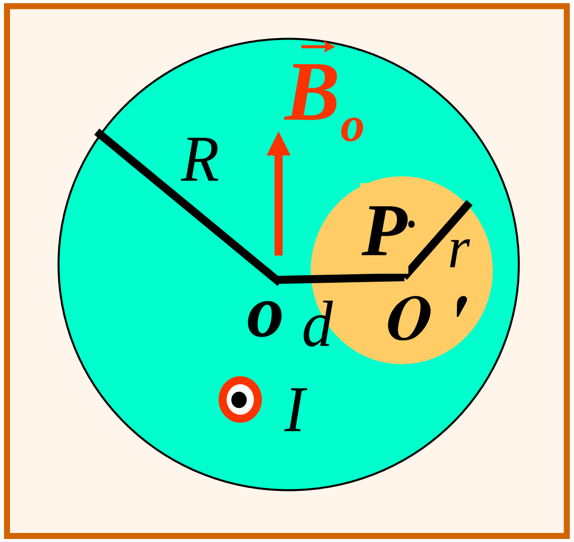
方向：$z>0$：沿$+x$方向；$z<0$：沿$-x$方向

例4（P_{281} 10. 11）：半径为R的长圆柱形导体内与轴线平行地挖去一个半径为r的圆柱形空腔：$oo'=d$, 电流I在截面内均匀分布，方向平行于轴线，求：

1. 圆柱轴线上磁感应强度B。
2. 空心部分中任一点的磁感应强度B



解：用补偿法：在空心部分中补上与实体具有相同的电流密度的电流I_2⊙（补上的部分电流 I_2 与原柱体部分的电流I构成实心圆柱电流I_1），再减去补上的圆柱电流I_2，等价于原来的带空腔的圆柱形电流I。



原电流分布 $I \odot$ —— $\vec{B}$

等效于：

半径为R的实心圆柱电流 $I_1 \odot$ —— $\vec{B}_1$

半径为r的实心圆柱电流 $I_2 \odot$ —— $\vec{B}_2$

原磁场 $\vec{B} = \vec{B}_1 - \vec{B}_2$

电流密度：$j = \dfrac{I}{\pi R^2 - \pi r^2}$ 电流：$I_1 = \dfrac{IR^2}{R^2 - r^2}$ $I_2 = \dfrac{Ir^2}{R^2 - r^2}$

1. 由安培环路定理(方法同例1):

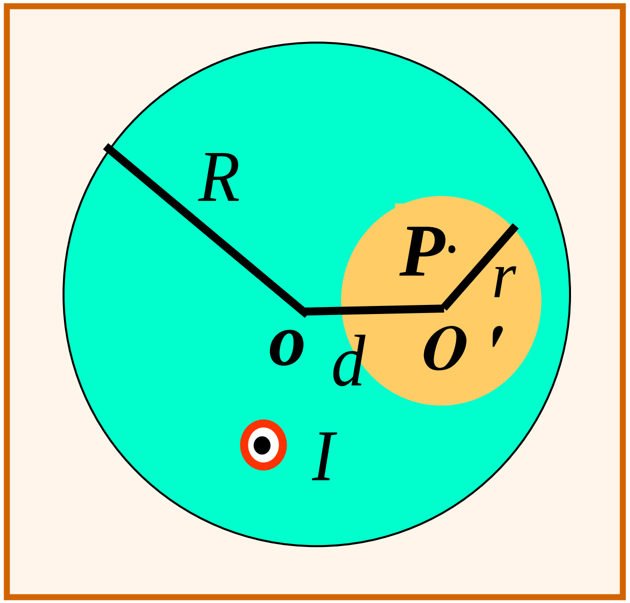
$$B_{o1} = 0$$

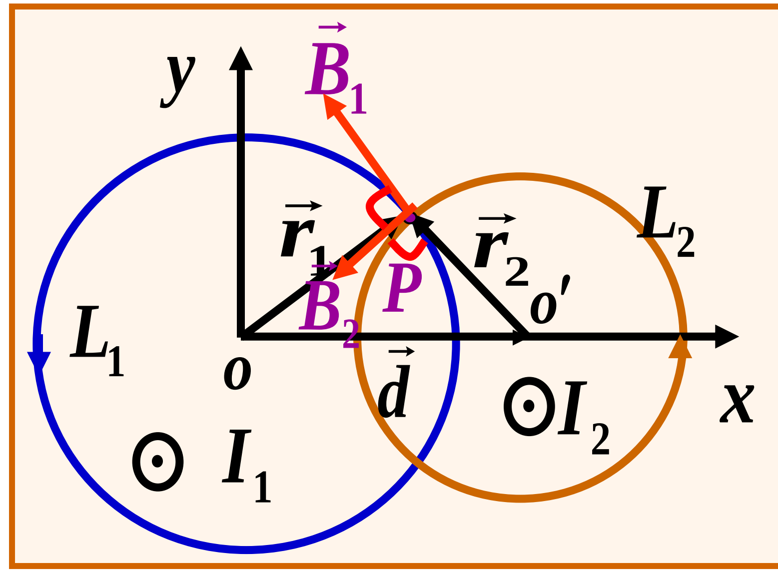
$$B_{o2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi d(R^2 - r^2)}$$

$$B_o = B_{o1} - B_{o2} = -\frac{\mu_0 I r^2}{2\pi d(R^2 - r^2)}$$

方向与 I_2 呈左旋关系

2. 对空腔内任一点P，设 $\overline{OP}=r_1$，$\overline{O'P}=r_2$

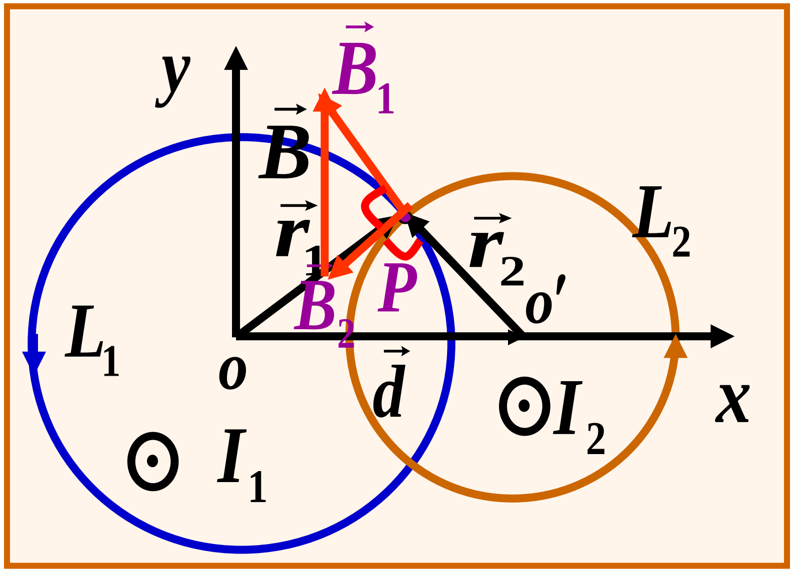




由安培环路定理 (方法同例1):

$$B_1=\frac{\mu_0 r_1 I_1}{2\pi R^2}=\frac{\mu_0 r_1 j}{2} \qquad B_2=\frac{\mu_0 r_2 I_2}{2\pi r^2}=\frac{\mu_0 r_2 j}{2}$$

方向如图



$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0 r_1 j}{2}\vec{k}\times\frac{\vec{r}_1}{r_1}=\frac{\mu_0 j}{2}\vec{k}\times\vec{r}_1$$

$$\vec{B}_2=\frac{\mu_0 r_2 j}{2}\vec{k}\times\frac{\vec{r}_2}{r_2}=\frac{\mu_0 j}{2}\vec{k}\times\vec{r}_2$$

$$\vec{B}=\vec{B}_1-\vec{B}_2=\frac{\mu_0 j}{2}\vec{k}\times\vec{r}_1-\frac{\mu_0 j}{2}\vec{k}\times\vec{r}_2$$

$$=\frac{\mu_0 j}{2}\vec{k}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\frac{\mu_0 j}{2}\vec{k}\times\vec{d}$$

空腔内为垂直于

$\vec{d}$ 的均匀磁场!

大小: $B=\dfrac{\mu_0 Id}{2\pi(R^2-r^2)}$　　方向如图

小结：形成均匀磁场的方法：

长直载流螺线管

亥姆霍兹圈

无限大载流平面上、下

圆柱载流导体内平行于轴线的空腔

……