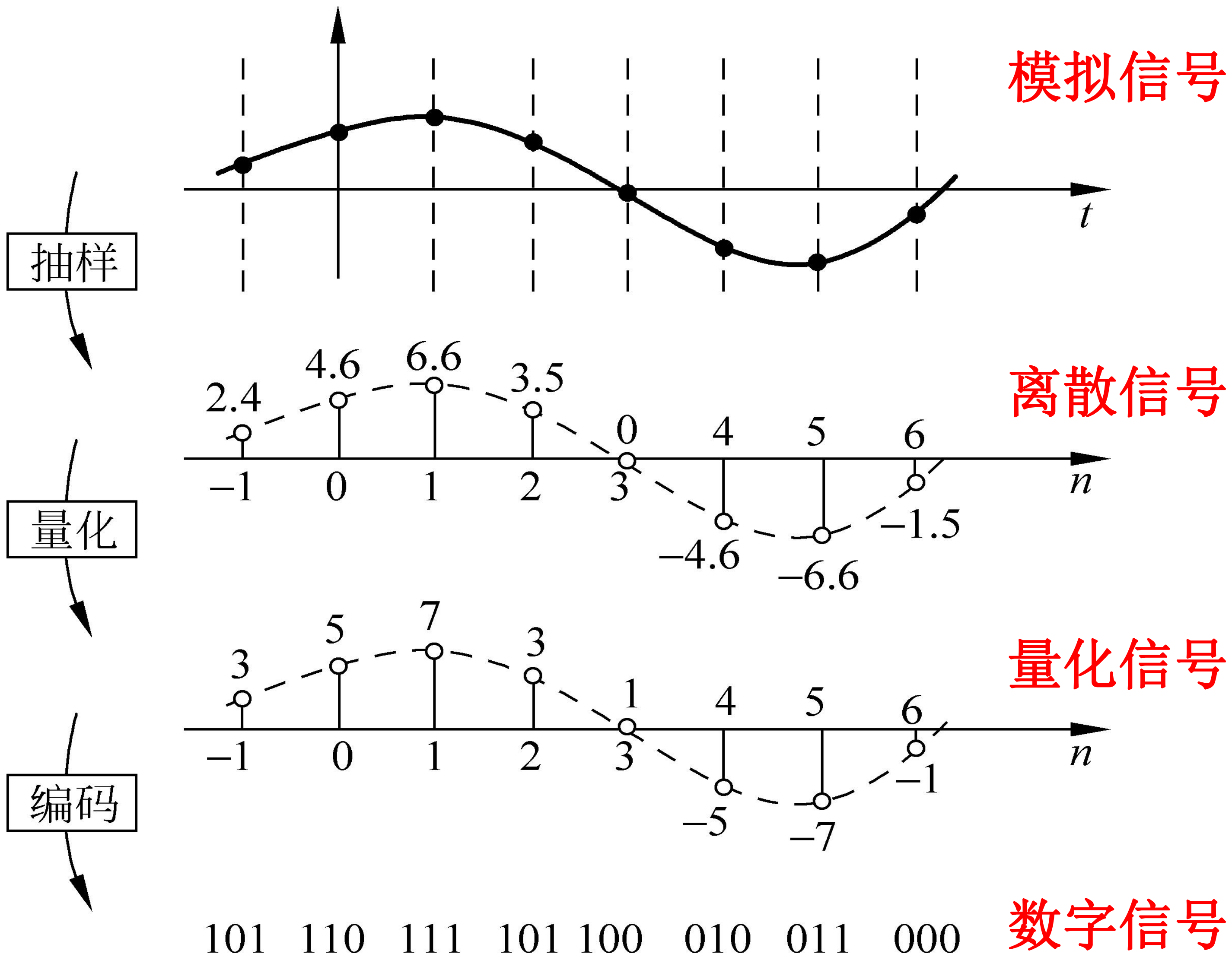
第四章 模拟信号的数字化

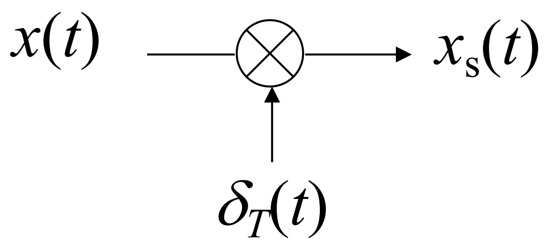
- 模拟信号的抽样（Sample）
- 抽样信号的量化（Quantification）
- 量化信号的编码（Code）
- 时分复用（TDM：Time Division Multiplexing）

模拟信号数字化的步骤


模拟信号
t
抽样
离散信号
2.4
4.6
6.6
3.5
0
4
5
6
–1
0
1
2
3
n
–4.6
–6.6
–1.5
量化
量化信号
3
5
7
3
1
4
5
6
–1
0
1
2
3
n
–5
–7
–1
编码
101 110 111 101 100 010 011 000
数字信号

理想抽样

- **抽样过程的描述**



$x(t)$： 模拟信号

$\delta_T(t)$： 抽样脉冲

$x_s(t)$： 抽样信号

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-nT_s)$$

T_s： 抽样间隔

$f_s=1/T_s$： 抽样频率

$\omega_s=2\pi f_s=2\pi/T_s$： 抽样角频率

模拟信号的抽样

- 频域描述（以ω为自变量）

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$\delta_T(t) \leftrightarrow \delta_T(\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$x_s(t) \leftrightarrow X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \delta_T(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right]$$

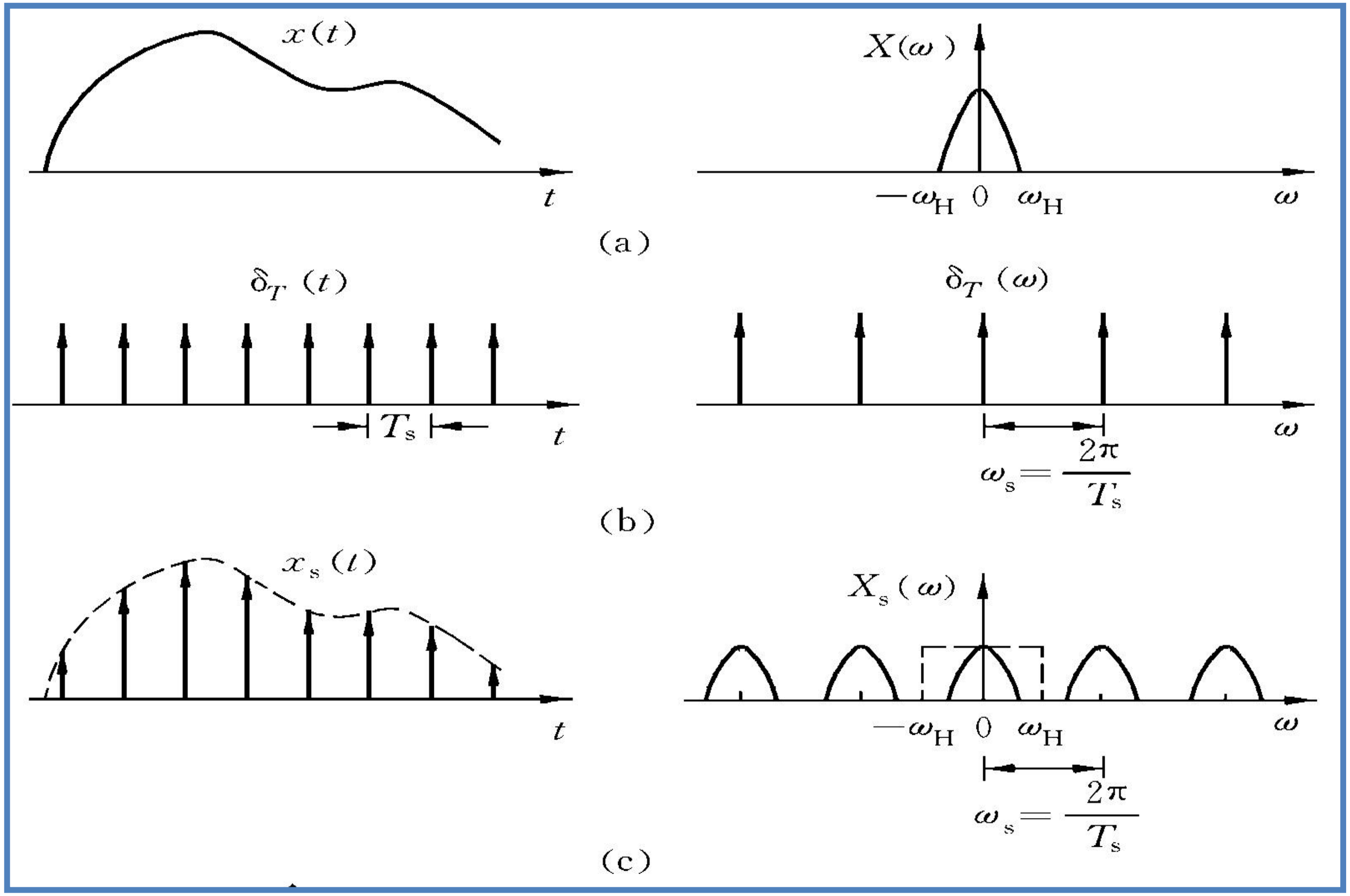
$$= f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

结论：抽样信号的频谱是原模拟信号频谱的周期延拓，延拓的间隔等于抽样频率，高度上差f_s倍。

模拟信号的抽样

时域相乘

频域卷积



模拟信号的抽样

- 频域描述（以 f 为自变量）

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$\delta_T(t) \leftrightarrow \delta_T(f) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)\Big|_{\omega=2\pi f}$$

$$= 2\pi f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(2\pi f - n2\pi f_s) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)$$

$$x_s(t) \leftrightarrow X_s(f) = X(f) * \delta_T(f)$$

$$= X(f) * f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)$$

$$= f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$

模拟信号的抽样

● 低通抽样定理

只要采样频率f_s不低于被采样信号最高频率f_H的两倍，即

$$f_s \geq 2f_H$$

就可由采样信号不失真地还原被采样信号。

通常将满足抽样定理所允许的最低抽样频率$2f_H$称为奈奎斯特速率，$1/(2f_H)$称为奈奎斯特间隔。

- 带通抽样定理

设带通模拟信号的上下截止频率分别为f_H和f_L之间，信号带宽$B = f_H - f_L$，并且满足$B < f_L$，则此带通模拟信号所需最小抽样频率为

$$\boxed{f_s = 2B\left(1+\frac{M}{N}\right) = \frac{2f_H}{N}}$$

式中，N 一 商 f_H / B的整数部分，N=1，2，…；

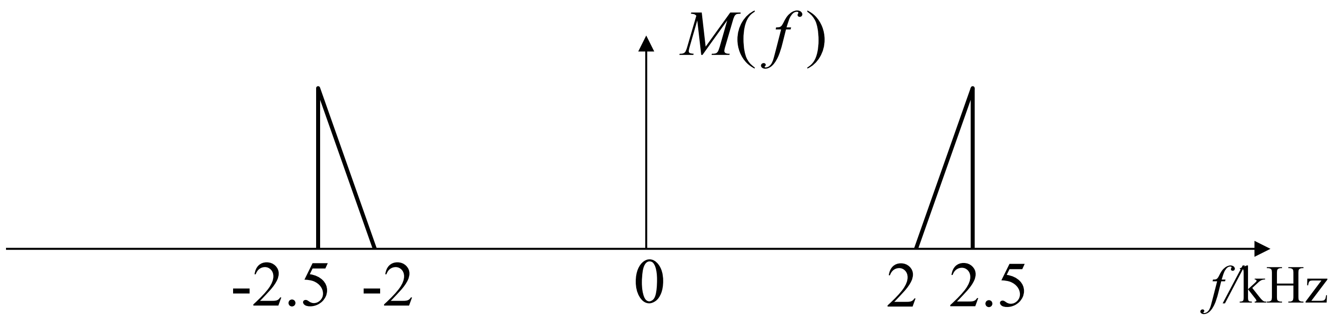
M 一 商 f_H / B的小数部分，$0 < M < 1$。

当f_L、$f_H >> B$ 时，$N >> 1$，所以 $f_s << 2f_H$。

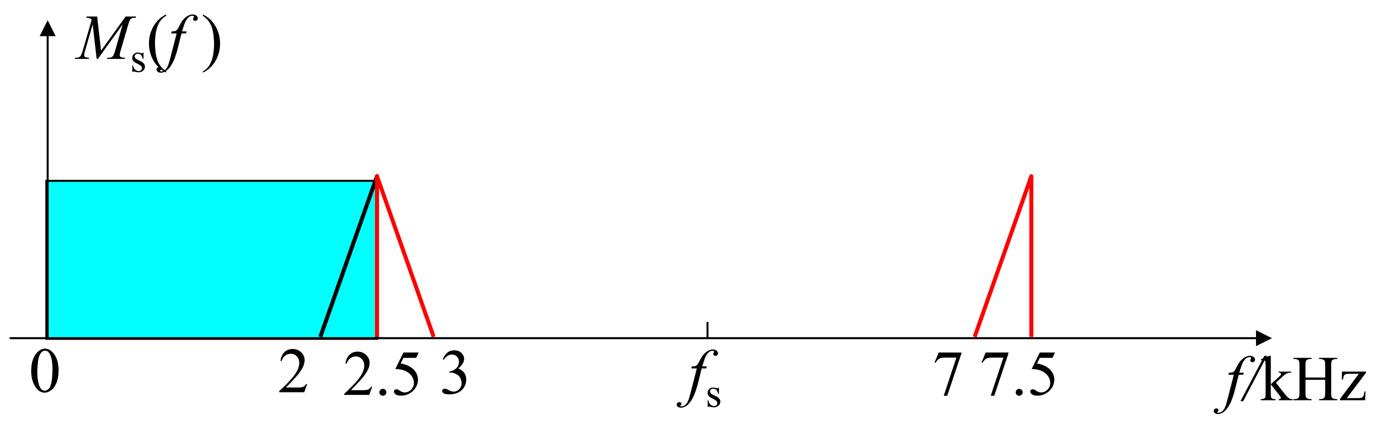
结论：带通抽样可以极大地降低抽样频率。

模拟信号的抽样

例： 模拟信号如图所示。

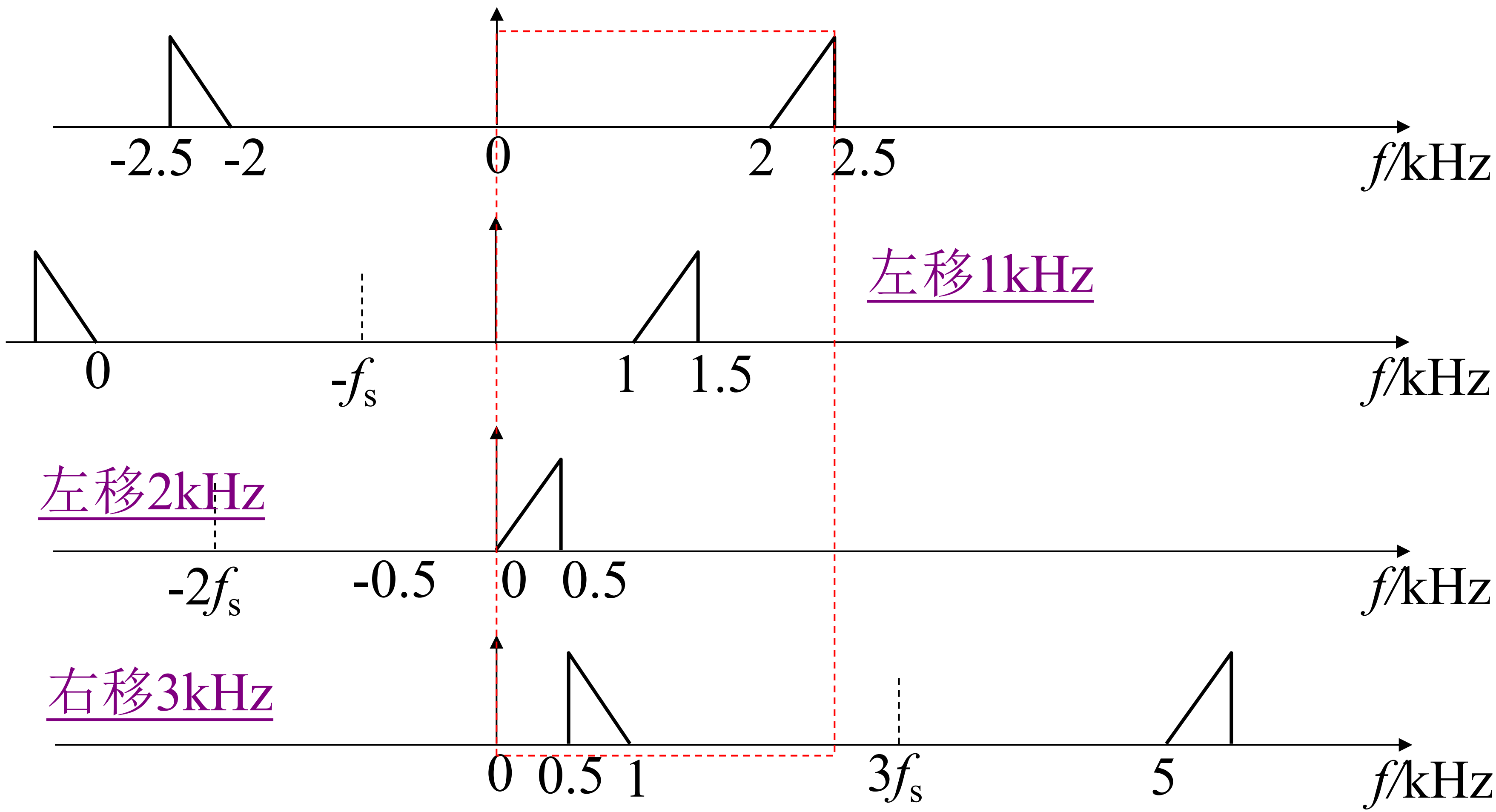


<u>理想低通抽样</u>： f_s=5 kHz



模拟信号的抽样

理想带通抽样： f_s=1 kHz



实际抽样

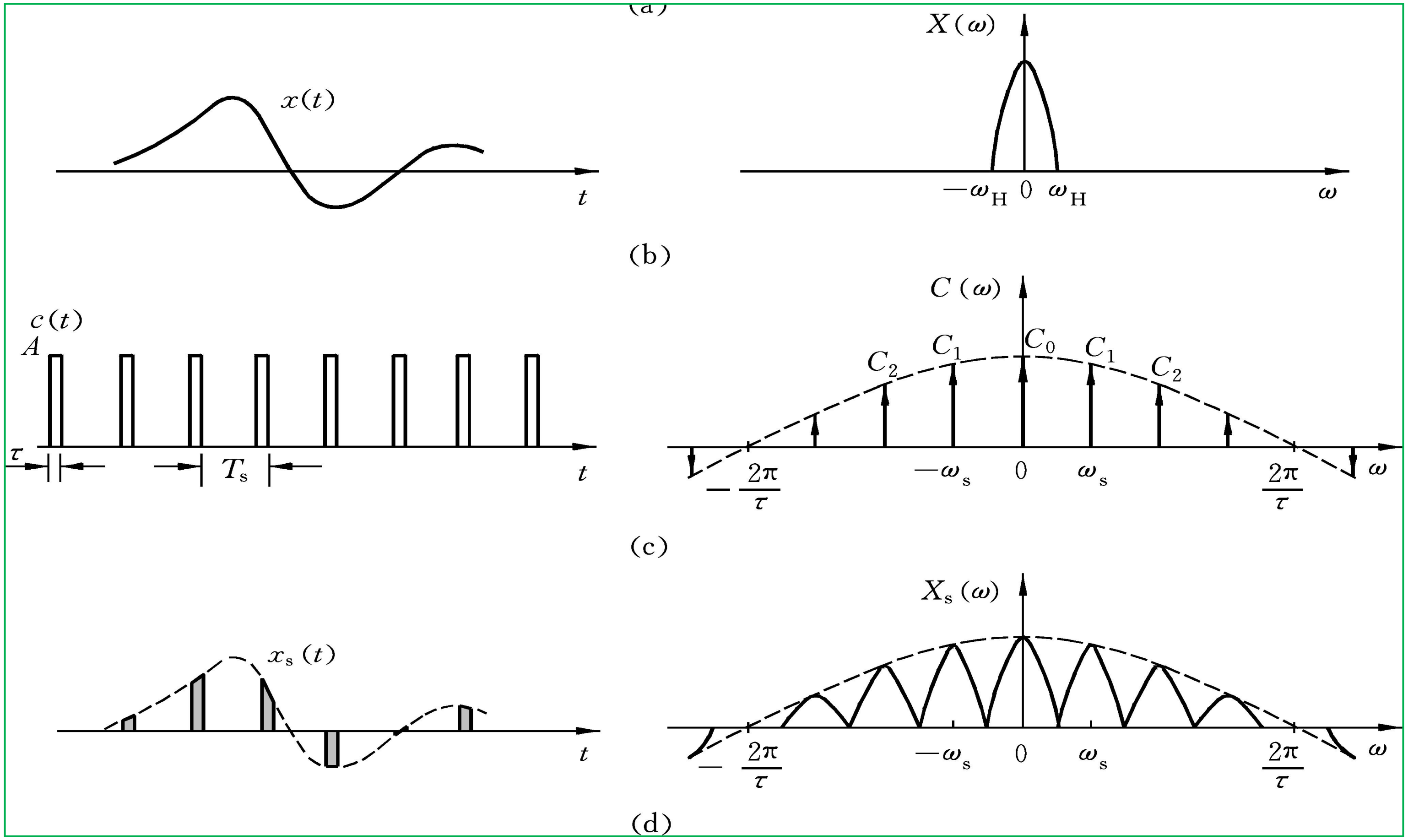
- 自然抽样

实际系统中，理想的周期冲击序列无法获得，因此用周期性矩形窄脉冲近似，这样的抽样称为自然抽样。

$$X_s(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_nX(\omega-n\omega_s)$$

结论：实际抽样信号的频谱仍然是原模拟信号频谱的延拓，只是对每个延拓波形进行了幅度加权，频谱的形状保持不变，因此仍然可以用低通滤波器进行重构。

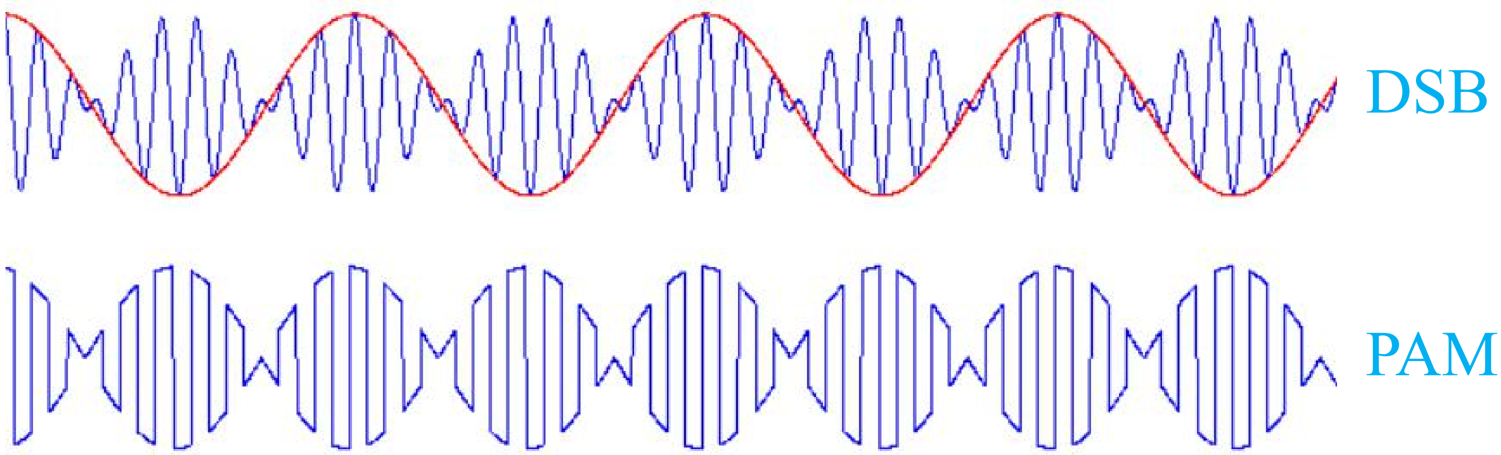
模拟信号的抽样


(a)
x(t)
t
X(ω)
−ω_H
0
ω_H
ω
(b)
c(t)
A
τ
T_s
t
C(ω)
C_2
C_1
C_0
C_1
C_2
−2π/τ
−ω_s
0
ω_s
2π/τ
ω
(c)
x_s(t)
t
X_s(ω)
−2π/τ
−ω_s
0
ω_s
2π/τ
ω
(d)

模拟信号的抽样

- 脉冲振幅调制（**PAM**）

  实际抽样过程相当于将周期矩形脉冲作为调制载波，对模拟信号进行振幅调制，所以实际抽样过程又称为脉冲振幅调制（**PAM，Pulse Amplitude Modulation**）。

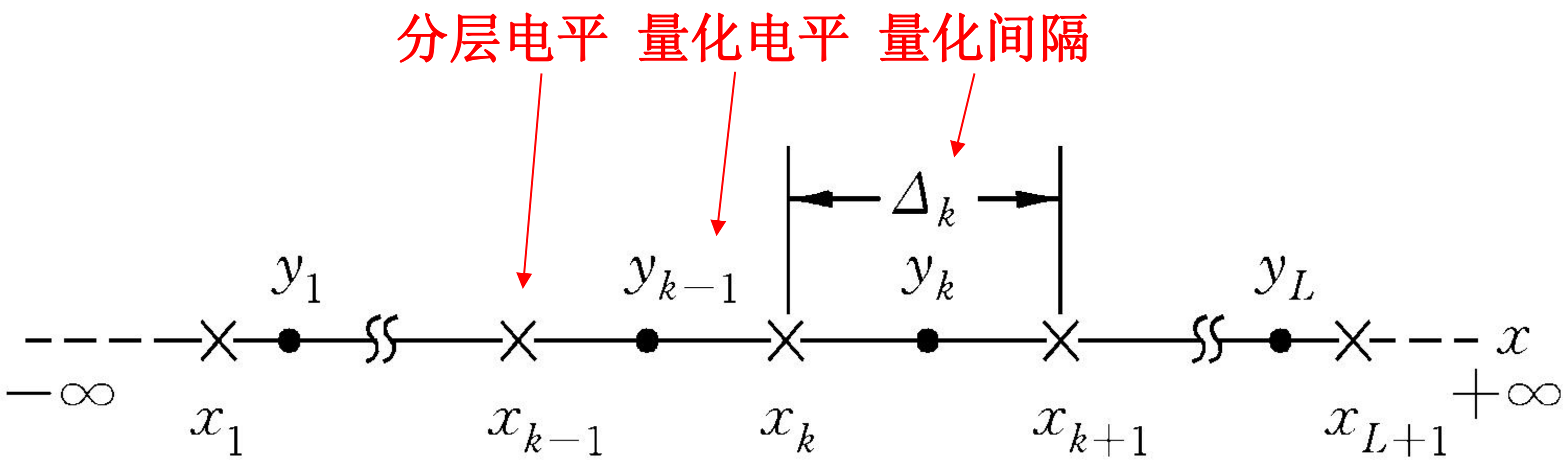


抽样信号的量化

量化的原理

对抽样信号进行幅度上的离散化，使得在给定范围内，输出量化信号的幅度只有有限个取值，这一过程称为量化。

- 量化原理



对最佳量化，量化电平都取在量化间隔的中点。

抽样信号的量化

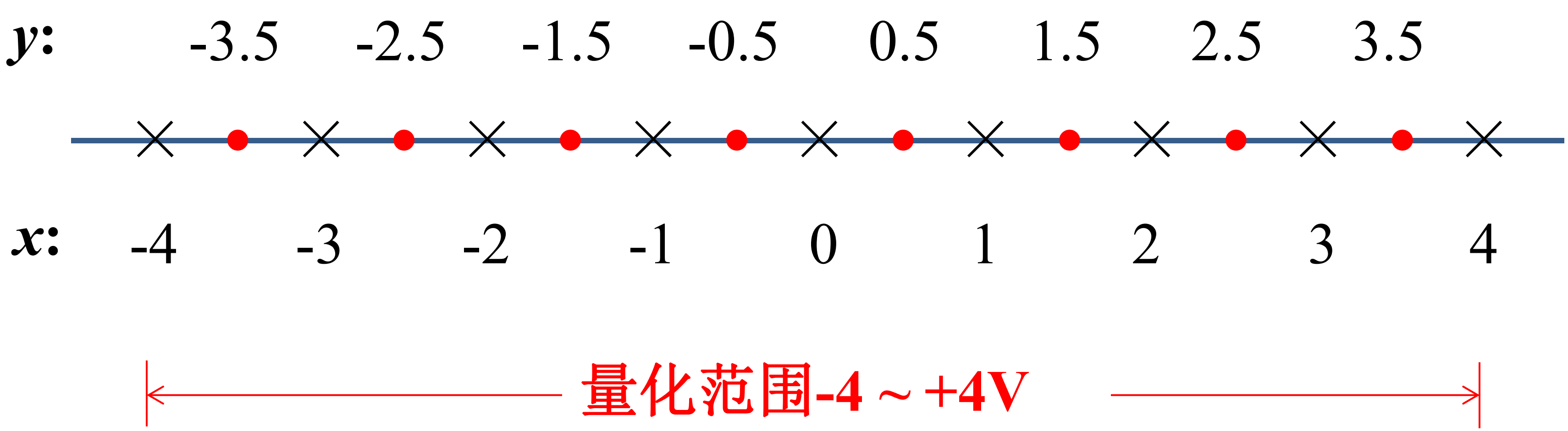
举例： $V = 4$ V：量化器的最大输入电平，

当Δ很小时，近似等于最大量化电平；

$(-V,+V)$：**量化范围**（抽样值一般正负对称）；

$L = 8$，**量化间隔数**（一般取为偶数，并且$=2^n$）；

$\Delta = 2V/L = 1$ V：量化间隔。



抽样信号的量化

- **量化误差（量化噪声）**

量化器输入输出之间的误差。 $q = x - y = x - Q(x)$

量化误差是一个随机信号，其平均功率等于其均方误差：

$$\sigma_q^2 = E[(x - Q(x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - Q(x)]^2 p_x(x)\mathrm{d}x$$

对于L>>1的最佳量化，

$$\sigma_q^2 \approx \frac{1}{12}\int_{-V}^{V} \Delta_k^2(x) p_x(x)\mathrm{d}x$$

式中，$p_x(x)$为输入信号x的幅度概率密度函数；

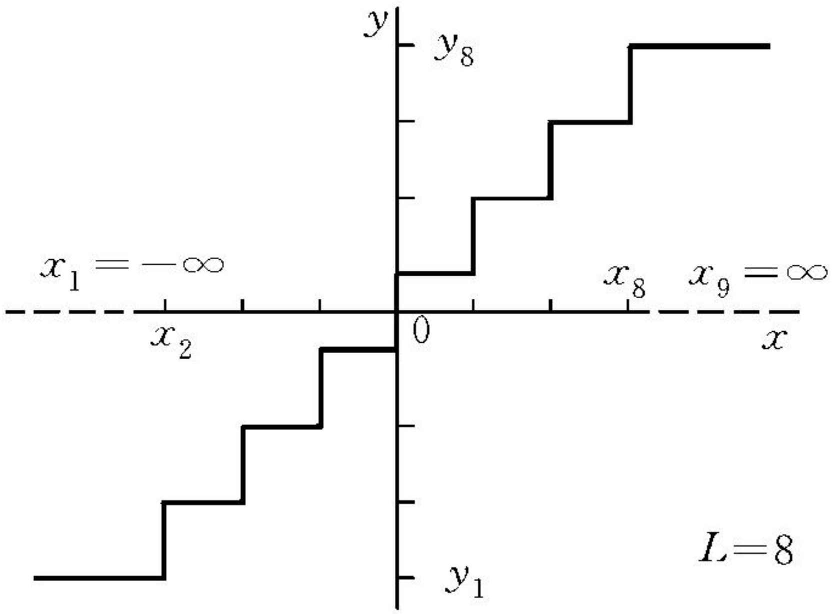
Δ_k为第k个量化间隔。

□ 均匀量化

各量化区间均匀划分，量化特性是等阶距的阶梯型曲线。

不过载量化噪声的功率为

$$\boxed{\sigma_q^2 \approx \frac{\Delta^2}{12} = \frac{V^2}{3L^2}}$$



抽样信号的量化

➢ 正弦信号的均匀量化

设正弦波的幅度为A_m，归一化有效值

$$D = A_{\mathrm{m}} / (\sqrt{2}V)$$

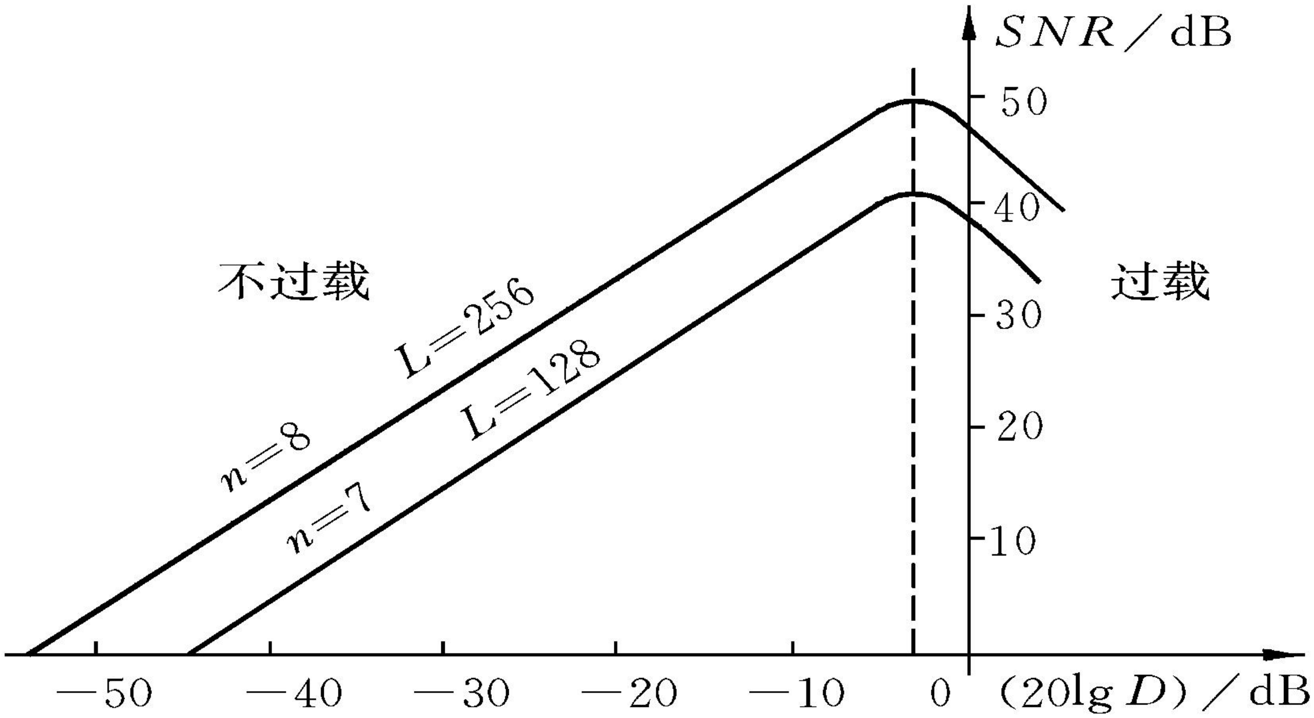
则量化信噪比

$$\mathrm{SNR} = \frac{S}{\sigma_{\mathrm{q}}^2} = \frac{A_{\mathrm{m}}^2 / 2}{V^2 / (3L^2)} = \frac{3A_{\mathrm{m}}^2 L^2}{2V^2}$$

$$= 3D^2L^2 = 3D^2 2^{2n}$$

$$\boxed{\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} = 10\log \mathrm{SNR} \approx 4.77 + 20\log D + 6.02n}$$

抽样信号的量化



量化信噪比特性曲线

抽样信号的量化

说 明：

✓ 满载时，$A_m=V$，$20\log D \approx -3$ dB，则

$$\mathrm{SNR_{dB}} = 1.76 + 6.02n$$

表示对正弦信号进行量化时，能够获得的最大量化信噪比；

✓ 信号功率$20\log D$一定时，量化信噪比随编码位数的增大而提高，每增加一位编码，量化信噪比提高6.02 dB。

✓ 量化信噪比的分贝值随正弦信号功率的分贝值$20\log D$的减小而线性减小。满足一定量化信噪比要求所允许的信号功率的变化范围称为**动态范围**。

抽样信号的量化

例 对正弦信号抽样后进行均匀量化，已知量化器的量化范围为(-5V, +5V)，量化编码位数*n*=7。

1）求满载时的量化信噪比；

2）假设正弦信号的幅度减小为2V，求此时的量化信噪比；

3）为使量化信噪比不低于26 dB，求正弦信号的最小幅度。

解：1）满载时，$[\mathrm{SNR}]_{\max\mathrm{dB}} \approx 1.76 + 6.02n = 43.9\,\mathrm{dB}$

2）当$A_{\mathrm{m}} = 2\mathrm{V}$时，$D = A_{\mathrm{m}}/(\sqrt{2}V) = 2/(\sqrt{2}\times 5) \approx 0.283$

则 $\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} \approx 4.77 + 20\log D + 6.02n \approx 32.94\,\mathrm{dB}$

3）由 $\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} \approx 4.77 + 20\log D + 6.02n = 43.9 + 20\log D \geq 26$

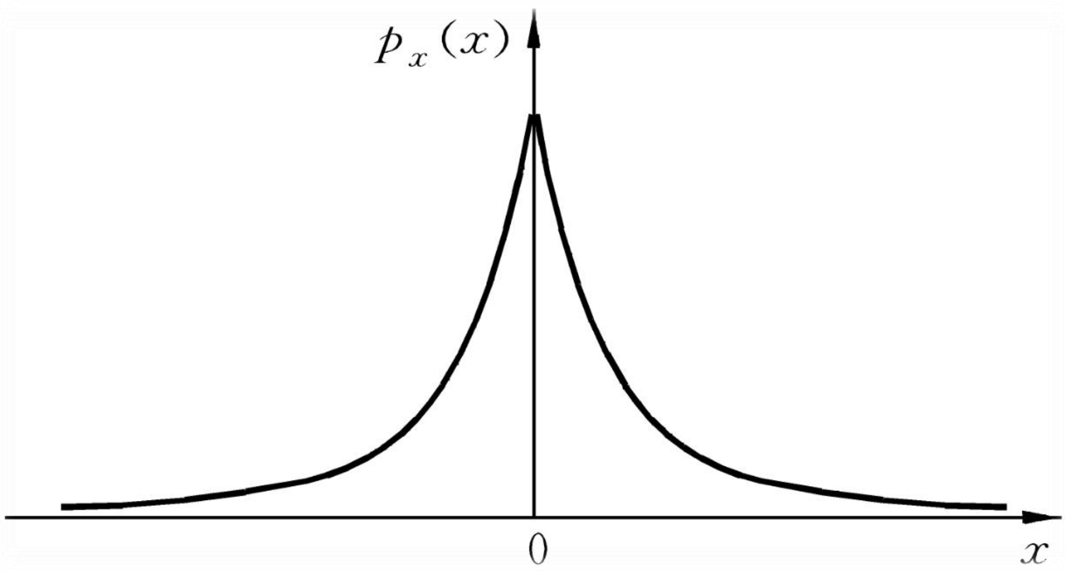
求得 $D \geq 0.127$，则 $A_{\mathrm{m}} = \sqrt{2}DV \geq \sqrt{2}\times 0.127\times 5 \approx 0.898\mathrm{V}$

抽样信号的量化

➢ 语音信号

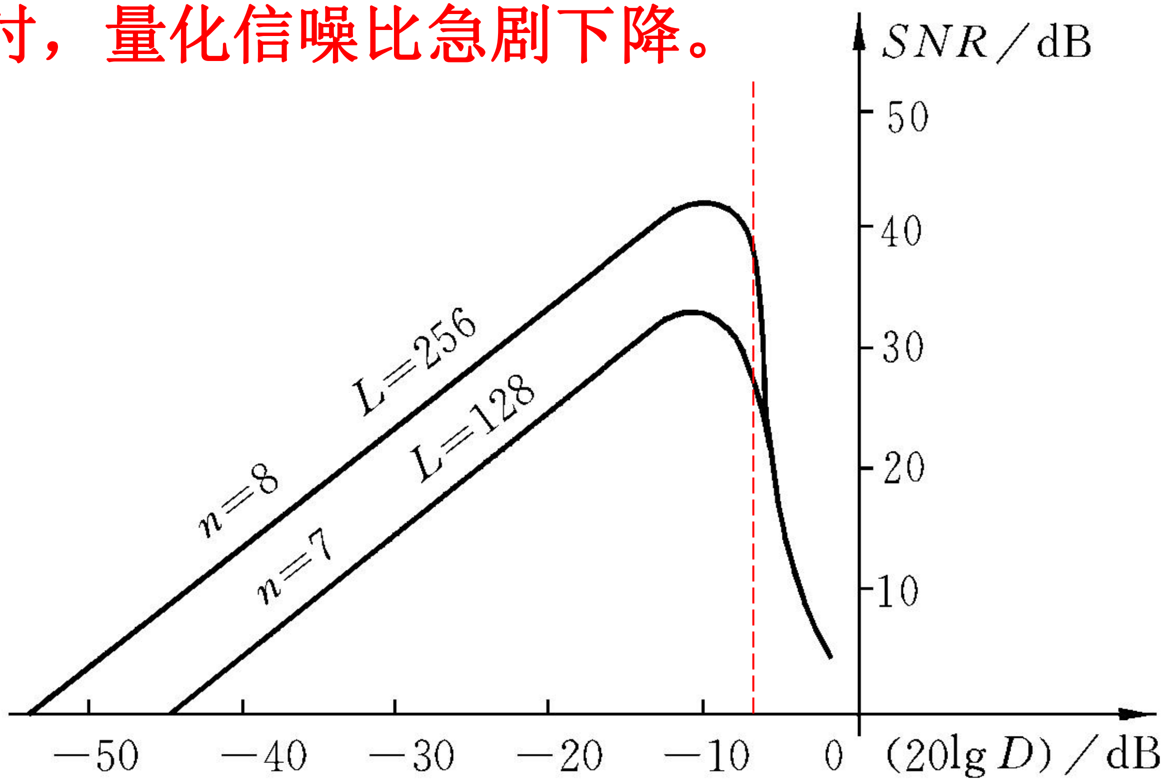
其幅度概率密度近似服从拉普拉斯分布 。

无论量化器的量化范围怎样确定，总有极小一部分信号幅度超出量化范围而造成过载。



抽样信号的量化

过载时，量化信噪比急剧下降。

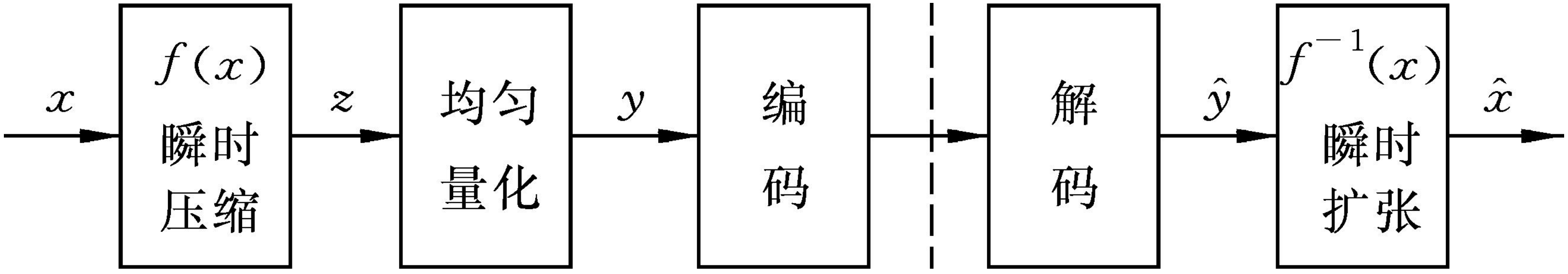


非均匀量化

当信号幅度和功率减小时，适当减小量化间隔，从而减小量化噪声的功率，使量化信噪比得到提高。

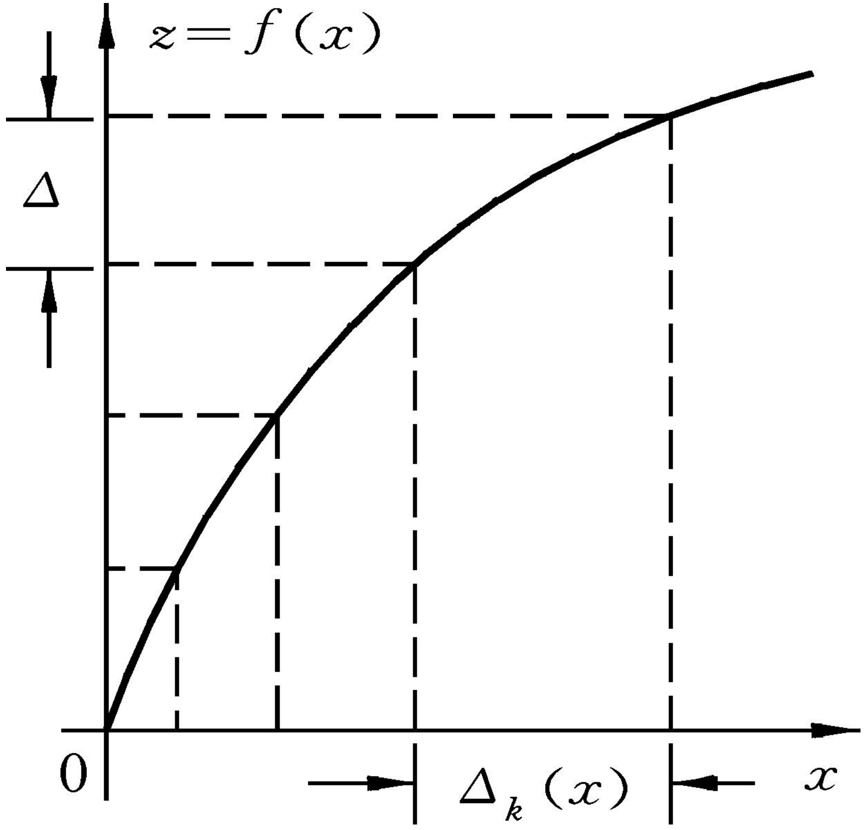
当信号幅度和功率较大时，在保证量化信噪比满足要求的前提下，允许适当增大量化间隔和量化噪声的功率。

- 原 理



抽样信号的量化

压缩特性是一条曲线，当z信号有均匀量化间隔时，对应输入信号x有非均匀量化间隔，这就等效于对输入信号进行了非均匀量化。

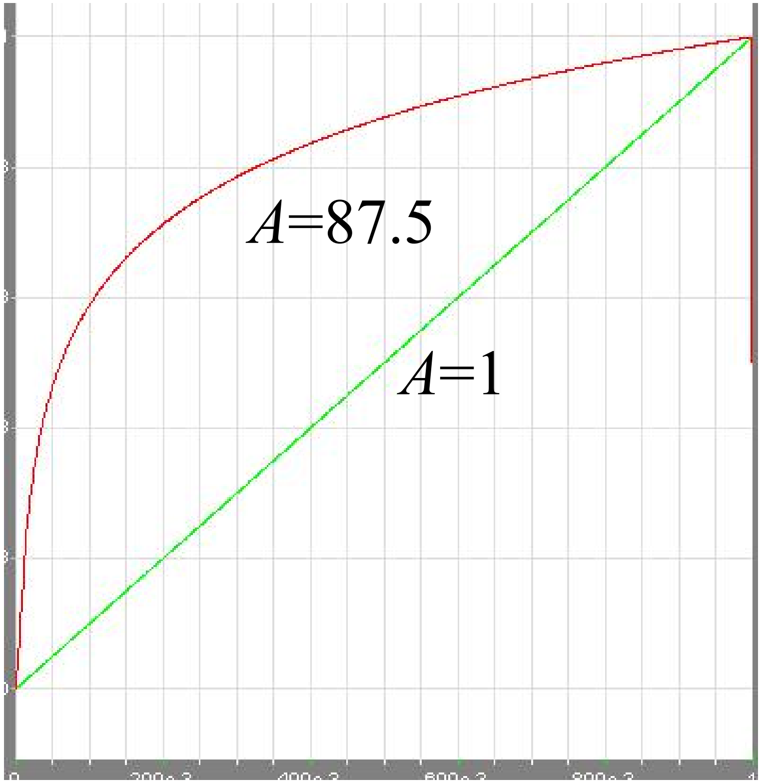


抽样信号的量化

- 对数压缩特性

具有对数压缩特性的非均匀量化。A律、μ律。

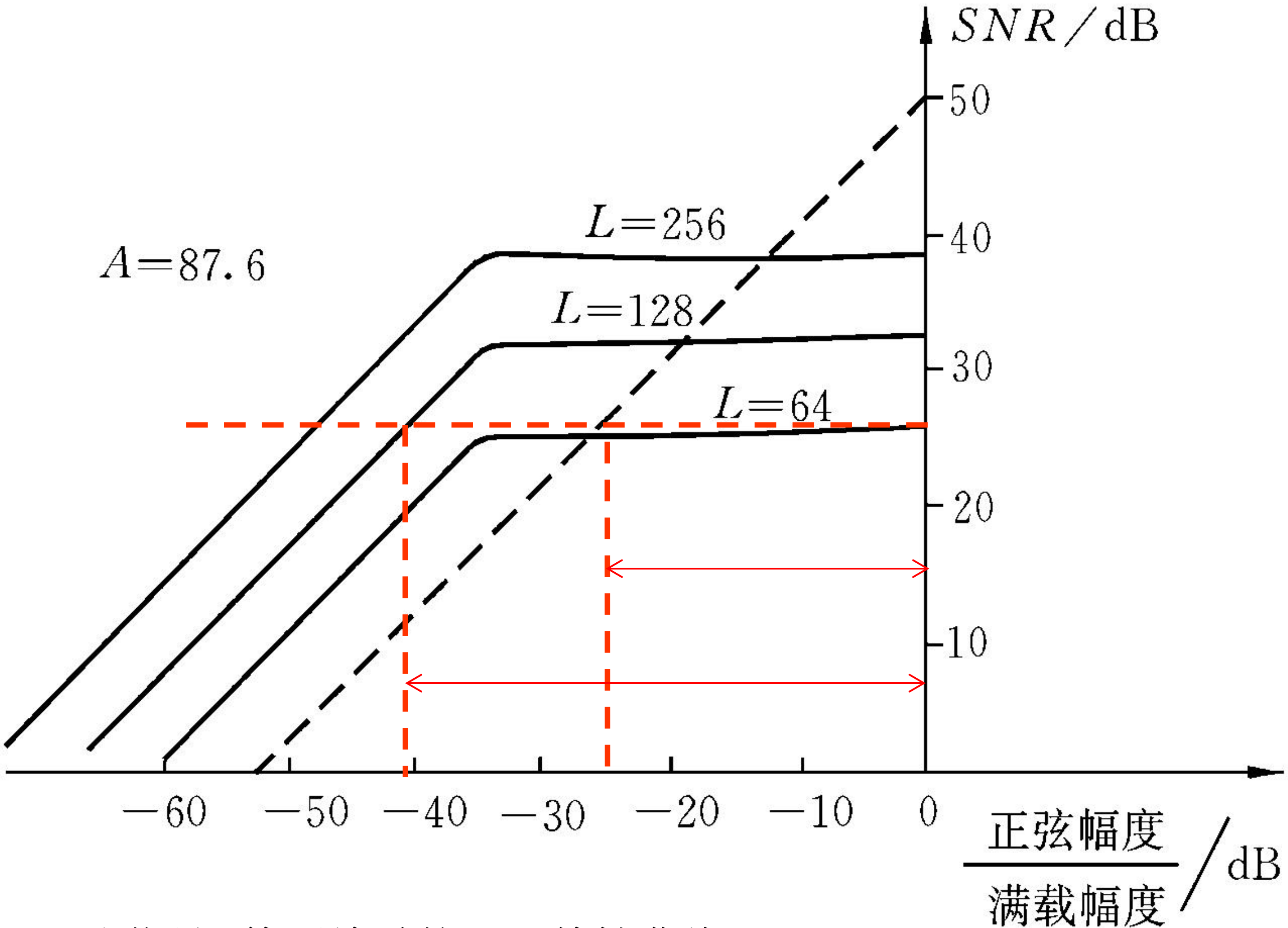
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{Ax}{1+\ln A}, & 0\le x\le \dfrac{1}{A}\\[2ex] \dfrac{1+\ln Ax}{1+\ln A}, & \dfrac{1}{A}\le x\le 1\end{cases}$$



其中x为输入电平抽样值相对于满量程的归一化值；

A：压缩系数，A越大，压缩越明显。

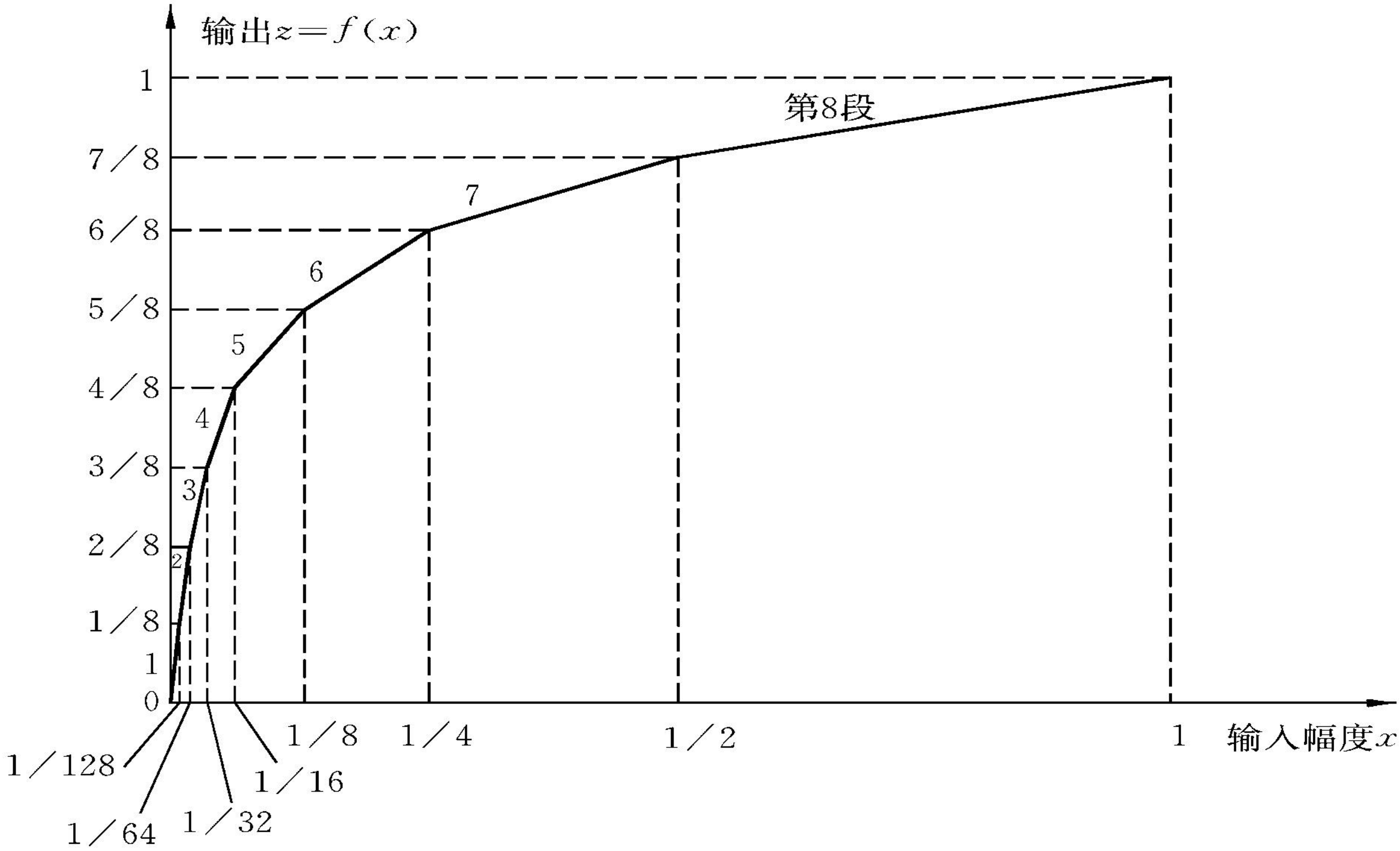
抽样信号的量化



正弦信号***A***律压缩时的SNR特性曲线

抽样信号的量化

● 对数压缩特性的折线近似



量化信号的编码

常用的二进制码组

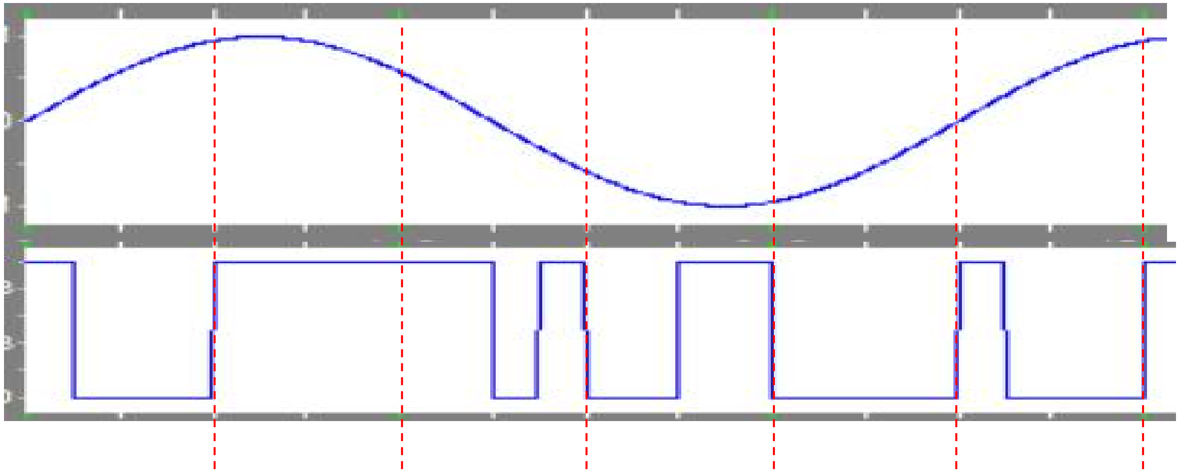
- 常用的二进制码组
  - 自然码：十进制正整数的二进制表示。
  - 折叠码：首位为极性码，其余位为幅度码。

电平序号	极性	自然码	折叠码	格雷码
15	正	1111	1111	1000
14		1110	1110	1001
13		1101	1101	1011
12		1100	1100	1010
11		1011	1011	1110
10		1010	1010	1111
9		1001	1001	1101
8		1000	1000	1100
7	负	0111	0000	0100
6		0110	0001	0101
5		0101	0010	0111
4		0100	0011	0110
3		0011	0100	0010
2		0010	0101	0011
1		0001	0110	0001
0		0000	0111	0000

量化信号的编码

- **均匀量化的编码——线性PCM编码**

对均匀量化器输出的$L=2^n$个量化电平分别用n位二进制代码的顺序组合表示，称为线性PCM编码。



1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0

量化信号的编码

自然码编码步骤

- 确定量化范围($-V$~$+V$)、量化间隔数$L=2^n$或者编码位数n；
- 求量化间隔 $\Delta = 2V/L$；
- 设信号抽样值或者量化电平为x，计算$[x-(-V)]/\Delta$；
- 将商的整数部分转换为n位二进制。若位数不够，高位添0。

折叠码编码步骤

- 由x的正负确定最高位a_0（0负1正）；
- 计算$|x|/\Delta$；
- 将商的整数部分转换为n-1位二进制$a_1a_2\ldots a_{n-1}$；
- 最后得到n位编码 $a_0\,a_1a_2\ldots a_{n-1}$。

量化信号的编码

【例】已知均匀量化的量化范围为-1V~+1V，要求量化信噪比不低于24dB，求抽样值$x=-0.2$V对应的自然码和折叠码编码。

解：由$1.76+6.02n \geq 24$，取 $n=4$，则 $\Delta = 2/2^4 = 0.125$V。

1）自然码编码。由$[x-(-1)]/\Delta = 6.4$，将整数部分转换为4位编码得到0110。

2）折叠码编码。由$x<0$得到$a_0=0$；

$|x|/\Delta=0.2/0.125=1.6$，整数部分转换为3位二进制得到$a_1a_2a_3$=001；

最后得到折叠码编码为0001。

量化信号的编码

*A*律PCM编码

对A律压缩非均匀量化信号的编码（**非线性PCM编码**）。

- 将*A*律压缩特性的正（负）方向非均匀地划分为8个段落，每个段落内均匀划分为16个小区间；
- 每个小区间内指定一个量化电平，共16×8=128个量化电平；
- 码位安排：

极性码	段落码			段内码			
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8

量化信号的编码

- 编码方法

设送入编码器的抽样值（模拟信号、量化电平）为 x，以Δ为单位。

- 由x的正负确定极性码（0负1正）；
- 将$|x|$与各段落起始电平x_i比较，确定段落码；
- 计算$(|x|-x_i)/\Delta_i$，其中Δ_i为第 i 段落中的量化间隔；
- 将商的整数部分转换为4位二进制得到段内码。若位数不够，高位添0。

量化信号的编码

编码表（段落起始电平和量化间隔）

段落号	段落码	段落起始电平 /Δ	量化间隔 /Δ
1	0 0 0	0	2
2	0 0 1	32	2
3	0 1 0	64	4
4	0 1 1	128	8
5	1 0 0	256	16
6	1 0 1	512	32
7	1 1 0	1024	64
8	1 1 1	2048	128

量化信号的编码

例4-4 设输入信号取样值x=1260Δ，A律13折线编码，求编码输出码组C、解码输出$\hat{x}$及量化误差q。

解 (1) 编码过程及码组C

因样值为“正”，所以极性码M_1=1。

将x与段落码的起始电平比较，得到段落码

$$M_2M_3M_4=110$$

再由(1260Δ-1024Δ)/64Δ=3…余44Δ，得到段内码

$$M_5M_6M_7M_8=0011$$

最后得到 C=11100011

量化信号的编码

(2) 译码输出电平

译码输出电平等于第八段第4级的量化电平，即该级的中间电平，即

$$\hat{x}=+(1024\Delta+3\times64\Delta+64\Delta/2)=+1248\Delta$$

(3) 量化误差

$$q=+1260\Delta-(+1248\Delta)=+12\Delta$$

量化信号的编码

- 归一化电平

将压缩特性中最大归一化值1等分为4096份，每份对应的电平称为归一化电平，即$1\Delta=1/4096$。

例如，第7段：起始电平$1/4 = (1/4)/(1/4096) = 1024\Delta$，

终止电平$1/2 = (1/2)/(1/4096) = 2048\,\Delta$

则该段落中，每个量化区间的归一化幅度范围（量化间隔的归一化电平）为

$$\frac{2048\Delta - 1024\Delta}{16} = 64\Delta$$

量化信号的编码

- 实际电平的归一化电平表示

若已知量化范围为$-V\sim+V$，则输入样值x与其归一化电平x_Δ的关系为：

$$\boxed{x_\Delta = x/(V/4096) = 4096x/V \quad \text{（四舍五入取整）}}$$

$$\boxed{x = x_\Delta V/4096}$$

例：设量化范围为-5V~+5V，则抽样值$x=-1.2$V对应的归一化电平为 $x_\Delta = -1.2\times 4096/5 \approx -983\Delta$

若已知输入样值为+410Δ，则对应的实际量化电平为

$$x = +410\times 5/4096 \approx +0.5\ \text{V}$$

量化信号的编码

例 设量化范围为-2~+2 V，已知输入信号取样值$x = -0.12$ V。

1）编码输出

求x的归一化电平：$x_\Delta = -0.12 \times 4096 / 2 \approx -246\Delta$

查表得到编码输出$C = 00111110$

2）译码输出电平

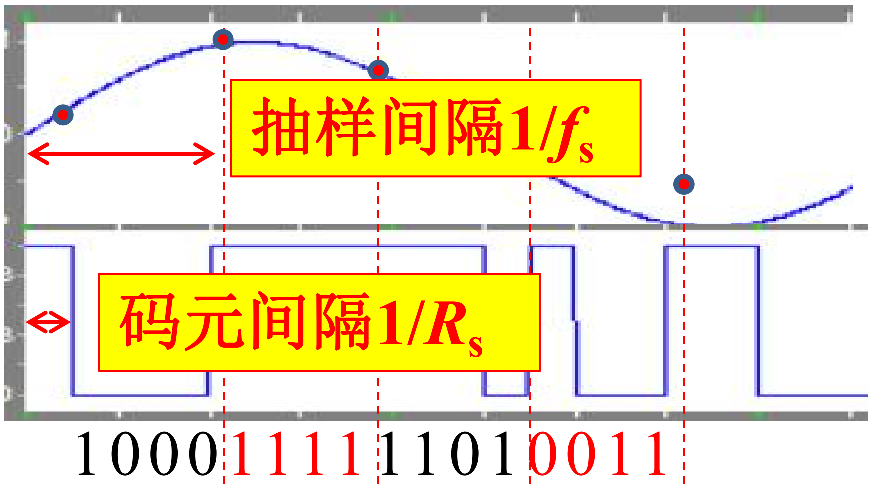
$$\hat{x} = -(128\Delta + 14 \times 8\Delta + 8\Delta/2) = -244\Delta$$

$$= -244 \times 2/4096 \approx -0.119 \text{ V}$$

3) 量化误差 $q = -0.12 - (-0.119) = -1$ mV

PCM信号的码元速率和带宽（P.141）

$$\boxed{R_s = nf_s}$$



- 抽样速率越高，码元速率越高。在满足抽样定理的前提下，尽量降低抽样频率；
- 编码位数n越多，码元速率越高，占用的带宽就越大。在满足量化信噪比要求的前提下，尽量减少编码位数。

量化信号的编码

例4-2 对频率范围为30 Hz～300 Hz的模拟信号进行抽样、均匀量化和线性PCM编码。

(1) 求最低抽样频率f_s；

(2) 若量化电平数$L = 64$，求PCM信号的信息速率R_b。

解 (1) 根据抽样定理得到 $f_s=2f_H=600\text{Hz}$

(2) 编码位数 $n=\log_2 L=6$

则

$$R_b = nf_s = 3.6\ \text{kbps}$$

量化信号的编码

例4-5 模拟信号的最高频率为4000Hz，以奈奎斯特频率抽样并进行PCM编码。编码信号的波形为矩形，占空比为1。

(1) 按A律13折线编码，计算PCM信号的第一零点带宽；

(2) 设量化电平数L=128，计算PCM信号的第一零点带宽。

解 (1) $f_s = 2f_H = 8$ kHz，$R_s = nf_s = 8f_s = 64$ kBd

$$B = R_s = 64\ \text{kHz}$$

(2) $n = \log_2 L = 7$，$R_s = nf_s = 7f_s = 56$ kBd

$$B = R_s = 56\ \text{kHz}$$

时分复用

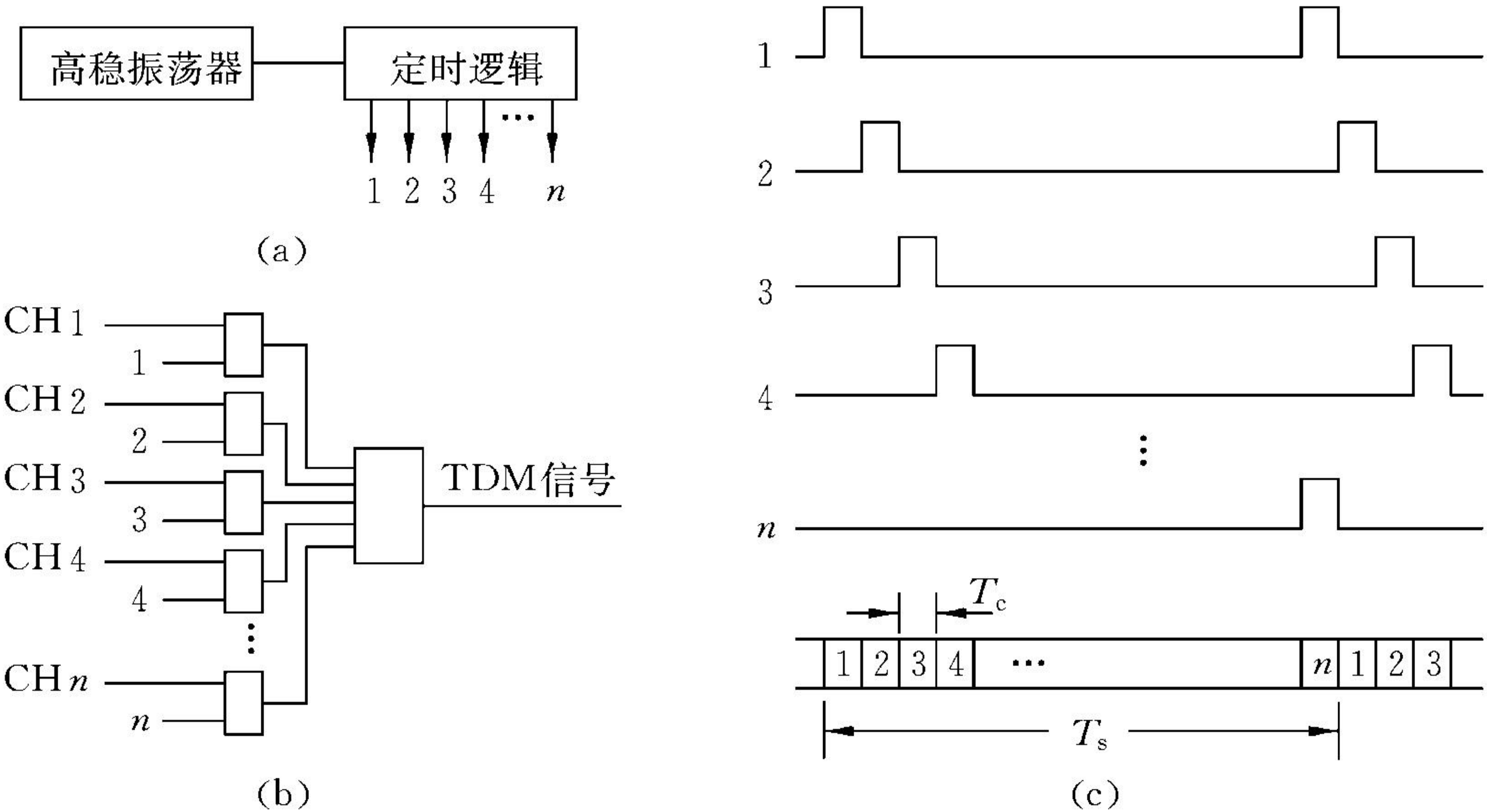
时分复用的原理

时分复用：TDM，将传输时间划分为若干个互不重叠的时隙，互相独立的多路信号顺序地占用各自的时隙，合路成为一个复用信号，在同一信道中传输。

- **相关概念**
  - 路（CH：channel）：通道，每个通道传输一个信号。
  - 时隙(TS：time slot)：时间片，传输一路信号一个抽样量化编码码组的时间，T_c；
  - 帧（Frame）：各路信号顺序传送一次所需的总时间，T_s，一般等于各路信号的抽样间隔。

时分复用

- 基本原理


高稳振荡器
定时逻辑
1 2 3 4 … n
(a)
CH 1
1
CH 2
2
CH 3
3
CH 4
4
CH n
n
TDM信号
(b)
1
2
3
4
n
T_c
1 2 3 4 … n 1 2 3
T_s
(c)

时分复用

性能及要求

- 对每一路信号的抽样间隔必须满足抽样定理的要求；
- 各路信号占用时隙不重叠，同步的问题；
- 一帧内的路数越多，时隙越窄，码元速率越高：

假设对m路PCM信号进行时分复用，抽样频率为f_s，PCM编码位数为n，则输出总的码元速率为

$$R_s = nmf_s$$

时分复用

例4-6 10路模拟信号，最高频率为3400Hz，时分复用传输，抽样频率$f_s = 8$ kHz，量化电平L=256，码元脉冲占空比为0.5。计算PCM编码信号的第一零点带宽。

解 码元速率

$$R_s = nmf_s = 10\log_2 256 \times 8000 = 0.64\ \text{Mbaud}$$

码元宽度 $T_s = 1/R_s$

码元脉冲宽度 $\tau = 0.5T_s = 1/(2R_s)$

则第一零点带宽为

$$B = 2R_s = 1.28\ \text{MHz}$$

本章总结

- 了解模拟信号数字化的步骤以及抽样、量化、编码的基本概念。
- 掌握抽样过程的时域和频域分析方法，熟悉理想低通、带通抽样定理及其应用。
- 熟练掌握量化噪声和量化信噪比的计算，了解均匀量化存在的问题，掌握非均匀量化的基本思想和方法，掌握A律对数压缩特性及其近似实现方法。
- 了解自然码和折叠码的概念，线性和非线性PCM编码方法。
- 了解时分复用的概念。