信号与系统

Signals and Systems

绪论

- 信号与系统课程的地位
- 信号与系统课程的目标
- 信号与系统课程的特点
- 信号与系统课程的内容

1.信号与系统课程的地位

信号与系统是电气与信息类重要的专业技术基础课。

信号与系统是电子信息科学、计算机科学与技术、自动化、电力等专业的必修课。

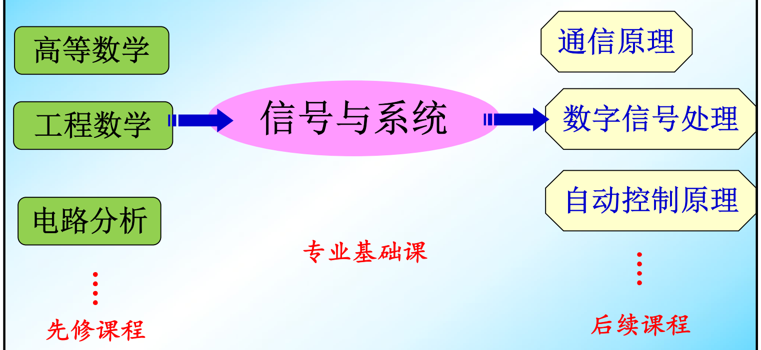
信号与系统课程是电类专业其它技术基础课程的先修课，在电类专业人才培养方面具有非常重要的地位。

信号与系统概念不仅限于电路、通信、控制，应用领域还包括其它物理系统以及非物理系统。

信号与系统电类用于控制、信号处理、信号检测、计算机等，非电类用于机械、热力、光学等，社科领域如股市分析、人口统计等。

信号与系统问题无处不在

信息科学和系统科学已渗透到所有现代自然科学和社会科学领域



2.信号与系统课程的目标

- **掌握信号与系统分析的基本理论和方法；**
- **掌握用MATLAB进行信号与系统分析的实验方法；**
- **培养学生科学的思维方式，提高学生分析问题、解决问题的能力，为专业课的学习以及工作打下扎实的基础。**

3.信号与系统课程的特点

•与《电路分析》联系密切，比之更抽象，更一般化；

•数学知识使用较多，用数学工具分析物理概念；

•理论与实际相结合，物理概念、数学概念和工程概念并重；

•讲、练、做相结合：加强计算机实践环节，用MATLAB进行信号与系统的分析。

4.教材和参考书

教　　材

1.《信号与系统》第2版　　西南交通大学出版社
王颖民 郭爱 编

2.《信号与系统实验》 西南交通大学出版社
王颖民 编

参 考 书

(1) 《信号与系统》　　西安交通大学出版社
ALAN V.OPPENHEIM　刘树棠译

(2) 《信号与线性系统分析》 高等教育出版社
吴大正主编

(3) 《信号与线性系统》　　高等教育出版社
管致中等编

(4) 《信号与系统》　　高等教育出版社 郑君里编

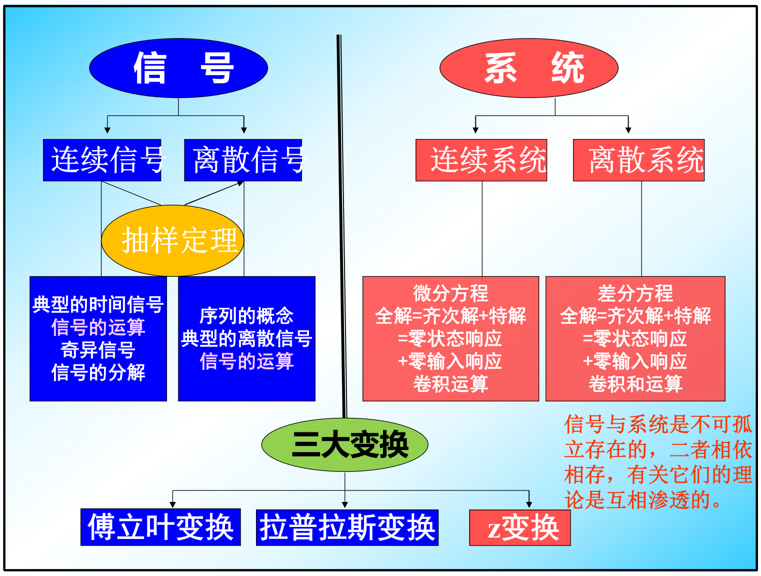
5.信号与系统课程的内容

信号理论与系统理论

信号理论
- 信号分析：研究信号的基本性能，如信号的描述、性质等
- 信号传输
- 信号处理

系统理论
- 系统分析：给定系统，研究系统对于输入激励所产生的输出响应
- 系统综合：按照给定的需求设计（综合）系统

重点讨论系统的分析，分析是综合的基础。



从连续信号与系统分析 ⟶ 离散信号与系统分析

从时间域分析 ⟶ 变换域分析

从输入输出描述 ⟶ 状态变量描述

第1章 信号与系统概述

- 信号的描述和分类
- 典型信号
- 系统的描述和分类

1.1 信号与系统的基本概念

信号(Signal)

一般表现为随时间变化的某种物理量

•消息（Message）：

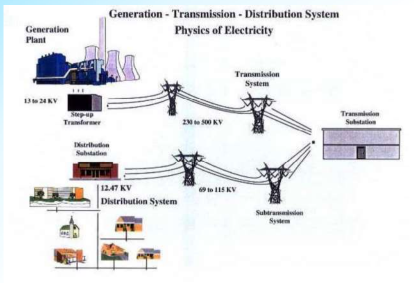
一般将语言、文字、图像或数据等内容统称为消息；

•信息(Information):

消息中赋予人们的新知识、新概念。

•信号（Signal）： 指消息的表现形式与传送载体。

消息是信号的具体内容



电信号传送声音、图像、文字等；

电信号：是应用最广泛的物理量，
通常表现为随时间变化的电压、电流、电荷、磁通等。

系统(System)

•系统（system）： 由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。

- 如通信系统、控制系统、经济系统、生态系统等

•电系统具有特殊的重要地位

1.2 信号的描述与分类

一、信号的描述

数学上：信号是一个或多个变量的函数

形态上：信号表现为一种波形

自变量：时间、位移、周期、频率、幅度、相位

二、信号的分类

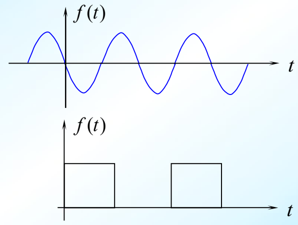
信号的分类方法很多，可以从不同的角度对信号进行分类

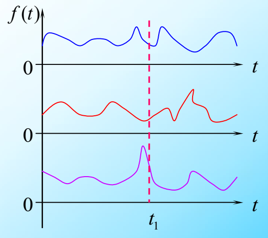
1. 确定性信号和随机信号
2. 连续信号和离散信号
3. 周期信号和非周期信号
4. 能量信号和功率信号
5. 一维信号和多维信号

1. 确定性信号和随机信号

确定性信号指一个可以表示为确定的时间函数的信号即对于指定的某一时刻t，信号有确定的值$f(t)$。

随机信号不是一个确定的时间函数，通常只知道它取某一值的概率。



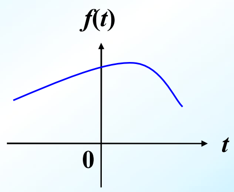


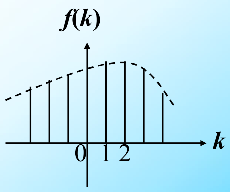
2. 连续信号和离散信号

根据信号自变量取值的连续与否，可将信号分为连续信号和离散信号

连续时间信号：信号在讨论的时间范围内，任意时刻都可以给出确定的函数值，可以有有限个间断点。用t表示连续时间变量，连续时间信号的时间自变量是连续的。

离散时间信号：在时间上是离散的，只在某些不连续的规定时刻给出函数值，其它时刻没有定义。
用k表示离散时间变量

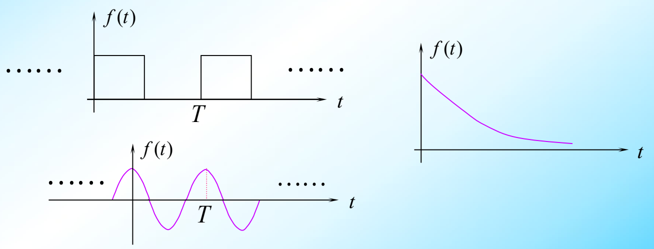




3. 周期信号和非周期信号

周期信号是指一个每隔一定时间T，周而复始且无始无终的信号。(在较长时间内重复变化)

非周期信号在时间上不具有周而复始的特性。



周期信号：一个连续信号 $f(t)$，若对所有t均有

$$f(t)=f(t+mT)\qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

则称 $f(t)$为连续周期信号，满足上式的最小T值称为 $f(t)$ 的周期。

一个离散信号$f(k)$，若对所有k均有

$$f(k)=f(k+mN)\qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

则称 $f(k)$为离散周期信号，满足上式的最小N值称为$f(k)$ 的周期。

非周期信号：不满足上式的信号称为非周期信号。不具有周期，或认为具有无限大的周期。

有关信号的几个名词

(1) 有时限信号与无时限信号

若在有限时间区间（ $t_1<t<t_2$ ）内信号 $f(t)$ 存在，而在此时间以外，信号 $f(t)=0$ ，则此信号即为有时限信号，简称时限信号，否则为无时限信号。

$$\text{有时限信号}\quad \begin{cases} f(t)=0 & t\le t_1 \\ f(t)\ne 0 & t_1<t<t_2 \\ f(t)=0 & t\ge t_2 \end{cases}$$

否则为无时限信号

(2) 有始信号与有终信号

设 t_1 为实常数。若 $t<t_1$ 时$f(t)=0$，$t>t_1$时$f(t)\neq 0$，则$f(t)$为有始信号，其起始时刻为 t_1 。

设 t_2 为实常数。若 $t>t_2$ 时$f(t)=0$，$t<t_2$时$f(t)\neq 0$，则$f(t)$为有终信号。

有始信号 $\begin{cases} f(t)=0 & t<t_1 \\ f(t)\neq 0 & t>t_1 \end{cases}$

有终信号 $\begin{cases} f(t)=0 & t>t_2 \\ f(t)\neq 0 & t<t_2 \end{cases}$

(3) 因果信号与反因果信号

若 $t<0$ 时$f(t)=0$，$t>0$时$f(t)\neq 0$，则$f(t)$为因果信号，可用 $f(t)u(t)$ 表示 。其中$u(t)$为单位阶跃信号。因果信号为有始信号的特例。

若 $t>0$ 时 $f(t)=0$，$t<0$时$f(t)\neq 0$，则$f(t)$为反因果信号。可用$f(t)u(-t)$表示。反因果信号为有终信号的特例。

因果信号：$\begin{cases} f(t)=0 & t<0 \\ f(t)\neq 0 & t>0 \end{cases}$

反因果信号：$\begin{cases} f(t)=0 & t>0 \\ f(t)\neq 0 & t<0 \end{cases}$

4. 能量信号和功率信号

信号可看作是随时间变化的电压或电流，信号 $f(t)$在 1 欧姆的电阻上的瞬时功率为$|f(t)|^2$，在时间区间所消耗的总能量和平均功率定义为：

总能量 $E=\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2 dt$

平均功率 $P=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2 dt$

- 能量信号：信号总能量为有限值而信号平均功率为零。
- 功率信号：平均功率为有限值而信号总能量为无限大。

5. 一维信号和多维信号

一维信号：

只由一个自变量描述的信号，如语音信号；

多维信号：

由多个自变量描述的信号，如图像信号。

主要讨论确定性信号

先连续，后离散；先周期，后非周期

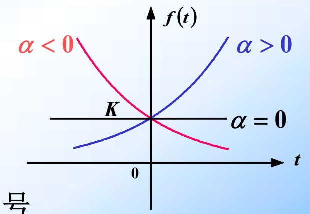
§1.3 基本典型信号

一．连续时间信号

1．实指数信号

$f(t) = Ke^{\alpha t}$

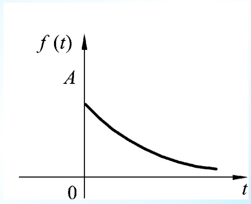
K和α均为实数



- $\alpha = 0$直流(常数)，
- $\alpha < 0$ ↘，衰减指数信号
- $\alpha > 0$ ↗ 升指数信号

单边指数衰减信号

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t \geq 0 \quad \alpha > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

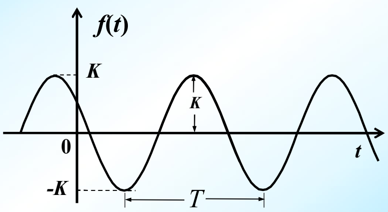


指数信号的一个重要性质：

指数信号对时间的微分和积分仍然是指数形式

2．正弦信号

$f(t) = K\sin(\omega t + \theta)$



振幅：K

周期：$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{f}$

频率：f

角频率：$\omega = 2\pi f$

初相：θ

根据欧拉公式，有

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

则

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) = \mathrm{Re}(e^{j\omega t})$$

$$\sin\omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = \mathrm{Im}(e^{j\omega t})$$

正弦信号和虚指数信号的共同特性是：对时间微分和积分后，仍是同周期的正弦信号和虚指数信号。

正弦信号和虚指数信号作为一种基本信号，常用于连续信号与系统的频域分析。

衰减正弦信号：

$$f(t) = \begin{cases} K e^{-\alpha t}\sin\omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$

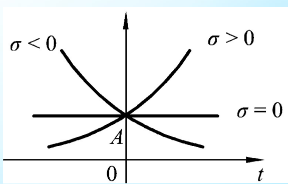
3．复指数信号

$$f(t) = Ke^{st} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

$$= Ke^{\sigma t}\cos\omega t + jKe^{\sigma t}\sin\omega t$$

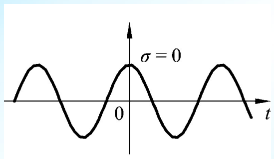
- $s = \sigma + j\omega$ 为复数，称为复频率
- σ, ω 均为实常数

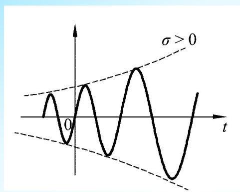
$$\begin{cases} \sigma = 0, \omega = 0 \text{直流} \\ \sigma > 0, \omega = 0, \text{升指数信号} \\ \sigma < 0, \omega = 0, \text{衰减指数信号} \end{cases}$$

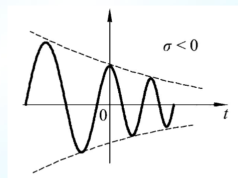


$f(t) = Ke^{st}$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma = 0, \omega \neq 0 \text{等幅} \\ \sigma > 0, \omega \neq 0 \text{增幅} \\ \sigma < 0, \omega \neq 0 \text{衰减} \end{array}\right\} \text{振荡}$$







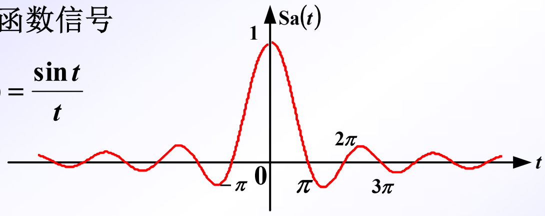
复指数信号对时间的微分和积分仍是复指数形式。

利用复指数信号可以使许多运算和分析简化。

复指数信号是连续信号与系统复频域分析中使用的一种基本信号

4．抽样函数信号

$$\mathrm{Sa}(t)=\frac{\sin t}{t}$$



性质

① $\mathrm{Sa}(-t)=\mathrm{Sa}(t)$，偶函数

② $t=0, \mathrm{Sa}(t)=1$，即$\lim\limits_{t\to 0}\mathrm{Sa}(t)=1$

③ $\mathrm{Sa}(t)=0,\ t=\pm n\pi$，$n=1,2,3\cdots$

④ $\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$，$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\pi$

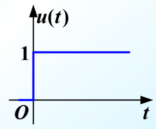
⑤ $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\mathrm{Sa}(t)=0$ 在t的正、负两方向振幅都逐渐衰减。

5．单位阶跃信号

用 $\varepsilon(t)$表示，也可用**1**(t)，$u(t)$表示

•定义

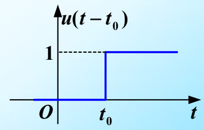
$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$



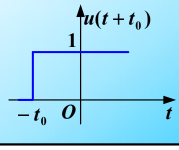
0点无定义或**1/2**

•延迟的单位阶跃信号

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}, t_0>0$$



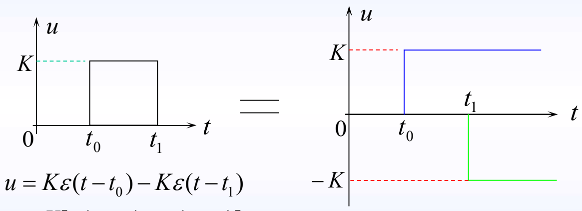
$$u(t+t_0)=\begin{cases}0 & t<-t_0\\ 1 & t>-t_0\end{cases}, t_0>0$$



•单位阶跃函数的作用

(1) 起始任一函数

(2) 用单位阶跃信号描述其他信号



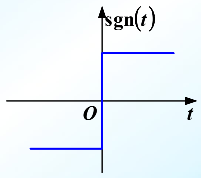
$$u=K\varepsilon(t-t_0)-K\varepsilon(t-t_1)$$
$$=K[\varepsilon(t-t_0)-\varepsilon(t-t_1)]$$

门函数：也称窗函数

其它函数只要用门函数处理(乘以门函数)，就只剩下门内的部分。

符号函数：(***Signum***)

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$



$$\mathrm{sgn}(t)=-u(-t)+u(t)=2u(t)-1$$

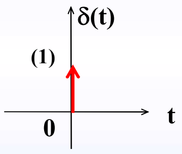
$$u(t)=\frac{1}{2}[\mathrm{sgn}(t)+1]$$

§1.3 基本典型信号

6．单位冲激函数

定义1：狄拉克(Dirac)函数

$$\begin{cases}\delta(t)=0 & t\neq 0\\ \delta(t)=\infty & t=0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 & \end{cases}$$



➢ 函数值只在t=0时不为零；

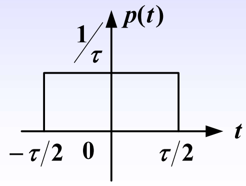
➢ 积分面积为1；

➢ t=0时，$\delta(t)\rightarrow\infty$，为无界函数。

定义2

$$p(t)=\frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

$\tau\rightarrow 0$



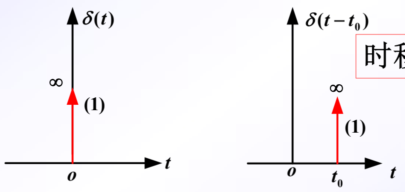
面积1；脉宽↓；　脉冲高度↑；

则窄脉冲集中于t=0处。

三个特点：
- ★面积为1
- ★宽度为0
- ★幅度$\begin{cases}\text{无穷} & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$

描述

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}p(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$



时移的冲激函数

若面积为k，则强度为k

三角形脉冲，双边指数脉冲，钟形脉冲，抽样函数，取$\tau\rightarrow 0$极限，都可以认为是冲激函数。

冲激函数的性质

(1) 抽样性(筛选性)

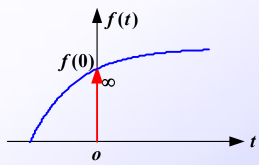
如果$f(t)$在t=0处连续，且处处有界，则有

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)\,dt=f(0)$$

对于移位情况：

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)\,dt=f(t_0)$$



例：$\int_{-\infty}^{\infty}(\sin t+t)\delta(t-\frac{\pi}{6})dt=\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}=1.02$

(2) 奇偶性

$\delta(t)=\delta(-t)$　　偶函数

(3) $\delta(t)$的积分　　与阶跃函数的关系

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\xi)d\xi=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}=u(t)$$

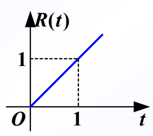
$$\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$$

(4) 尺度变换

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)\quad(a\neq 0\ \ \text{实常数})$$

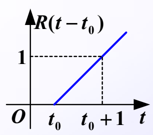
7．单位斜坡信号

(1) 定义　$R(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\geq 0\end{cases}$



(2) 有延迟的单位斜坡信号

$$R(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ t-t_0 & t\geq t_0\end{cases}$$

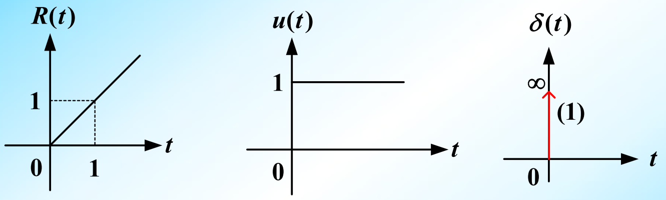


由$t-t_0$=0 可知起始点为 t_0

$$R(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau\qquad \frac{dR(t)}{dt}=u(t)$$

$$R(t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau d\tau\qquad \frac{d^2R(t)}{dt^2}=\delta(t)$$

总结： $R(t)$，$u(t)$， $\delta(t)$ 之间的关系

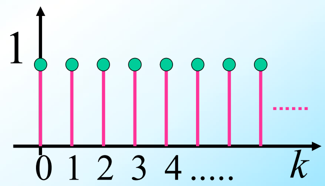


$$
\begin{array}{ccccc}
 & & R(t) & & \\
求 & \downarrow & & \uparrow & 积 \\
 & & u(t) & & \\
导 & \downarrow & & \uparrow & 分 \\
 & & \delta(t) & &
\end{array}
\qquad (-\infty<t<\infty)
$$

二、离散时间信号

1.离散单位阶跃序列

$$u(k)=\begin{cases}1 & (k\geq 0)\\ 0 & (k<0)\end{cases}$$

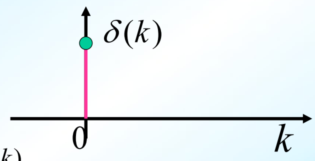


k －序列数　　整数

2.单位样值信号（*Unit Sample*）

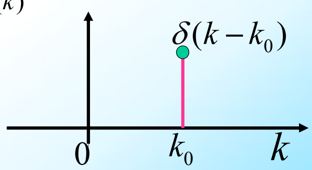
单位脉冲序列

$$\delta(k)=\begin{cases}1 & (k=0)\\ 0 & (k\neq 0)\end{cases}$$



抽样特性　$f(k)\delta(k)=f(0)\delta(k)$

$$\delta(k-k_0)=\begin{cases}1 & (k=k_0)\\ 0 & (k\neq k_0)\end{cases}$$

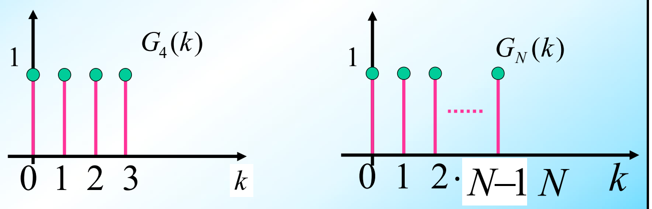


$u(k)$ 与 $\delta(k)$ 的关系：

$$\delta(k)=u(k)-u(k-1)\qquad u(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(k-n)=\sum_{n=-\infty}^{k}\delta(n)$$

3.离散矩形序列

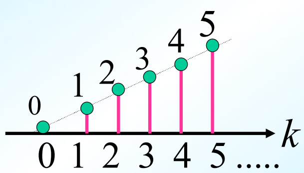
$$G_N(k)=\begin{cases}1 & (0\leq k\leq N-1)\\ 0 & (k<0\ \ or\ \ k\geq N)\end{cases}$$



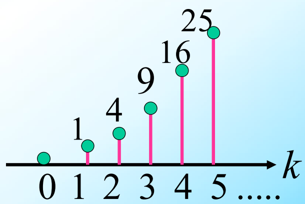
$G_N(k)=u(k)-u(k-N)$

4.斜变序列

$R(k)=ku(k)$

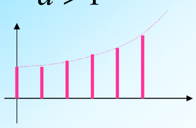


$r(k)=k^2u(k)$

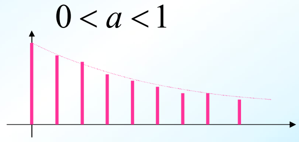


5.指数序列　　$x(k)=a^k u(k)$

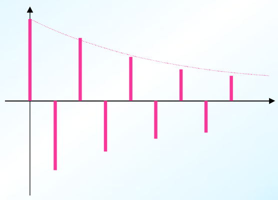
$a>1$



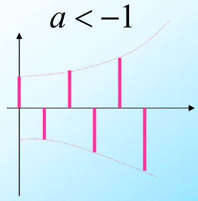
$0<a<1$



$-1<a<0$

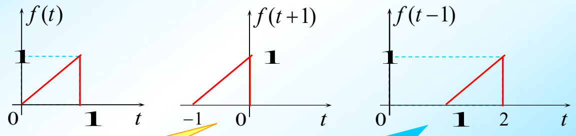


$a<-1$



§1.4 信号的基本运算

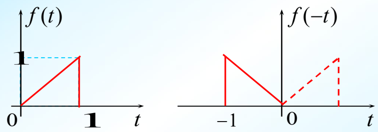
一、信号的时移



$f(t+t_0)$将$f(t)$超前时间t_0；即将$f(t)$的波形向左移动t_0。

$f(t-t_0)$将$f(t)$延迟时间t_0；即将$f(t)$的波形向右移动t_0。

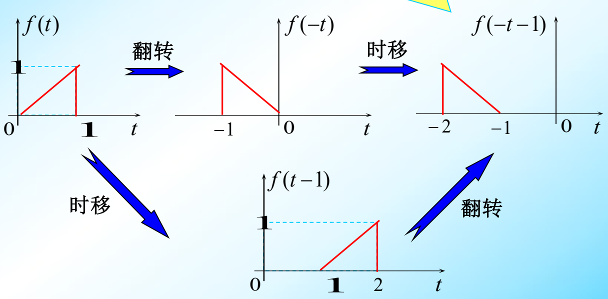
二、信号的翻转



- 翻转信号的时移

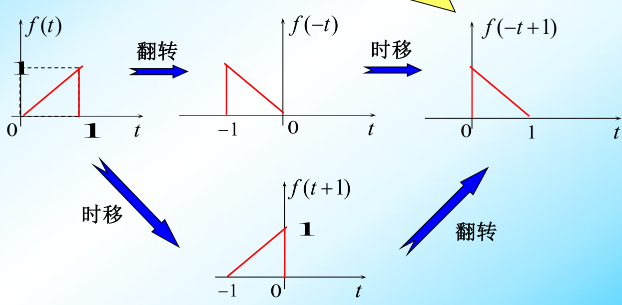
已知$f(t)$求$f(-t-1)$

$f(-t-1)=f[-(t+1)]$将$f(-t)$的波形向左移动1



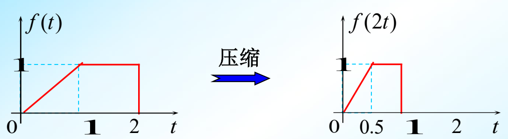
- 已知$f(t)$求$f(-t+1)$

$f(-t+1)=f[-(t-1)]$将$f(-t)$的波形向右移动1

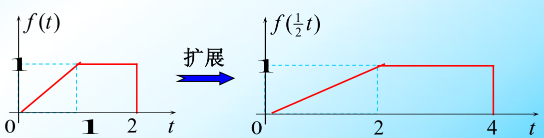


三、信号的尺度变换

- $a>1$　则$f(at)$将$f(t)$的波形沿时间轴压缩至原来的$1/a$

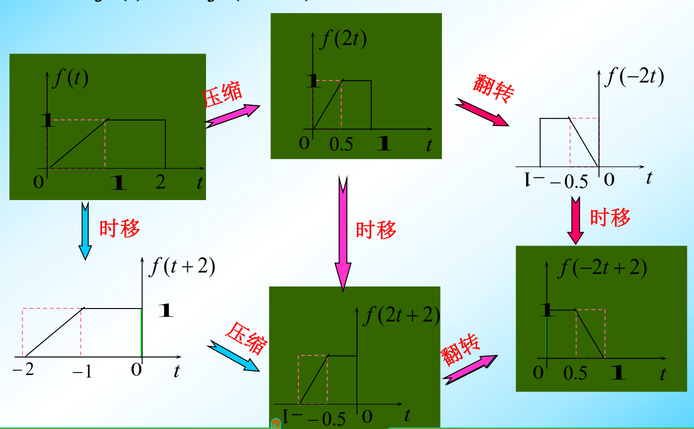


- $0<a<1$　则$f(at)$将$f(t)$的波形沿时间轴扩展至原来的$1/a$



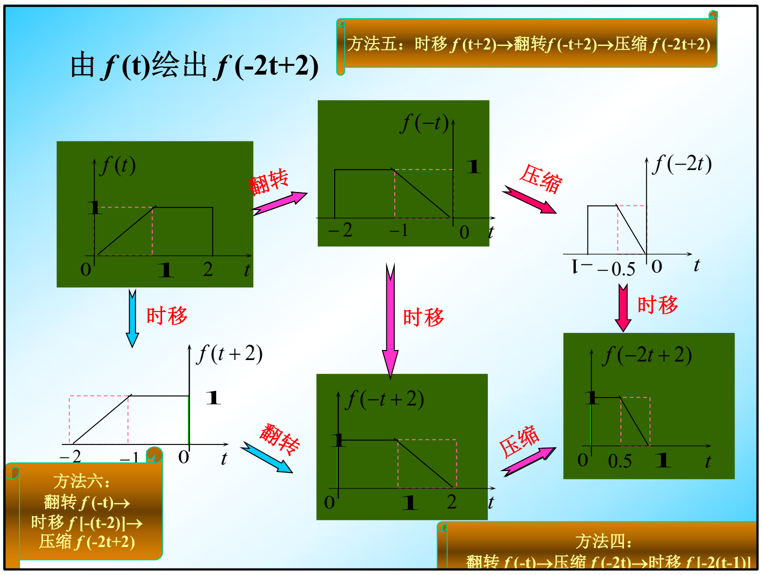
方法一：压缩$f(2t)$→翻转$f(-2t)$→时移$f[-2(t-1)]$

例 由$f(t)$绘出$f(-2t+2)$。



方法二：
时移$f(t+2)$→压缩$f(2t+2)$→翻转$f(-2t+2)$]

方法三：
压缩$f(2t)$→时移$f[2(t+1)]$→翻转$f(-2t+2)$


由 f(t)绘出 f(-2t+2)
方法五：时移 f(t+2)→翻转 f(-t+2)→压缩 f(-2t+2)
f(t)
f(−t)
f(−2t)
f(t+2)
f(−t+2)
f(−2t+2)
翻转
压缩
时移
时移
时移
翻转
压缩
方法六：
翻转 f(-t)→
时移 f[-(t-2)]→
压缩 f(-2t+2)
方法四：
翻转 f(-t)→压缩 f(-2t)→时移 f[-2(t-1)]

§1.5 系统的描述和分类

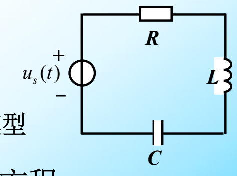
一、系统模型

系统模型：系统物理特性的数学抽象。其表示形式有数学表达式、图形符号和方框图。

•系统的物理模型：

如电路模型

由理想电路元件符号表示的系统模型



•系统的数学模型：系统的描述方程

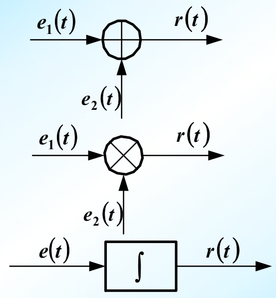
由数学表达式表示的系统模型

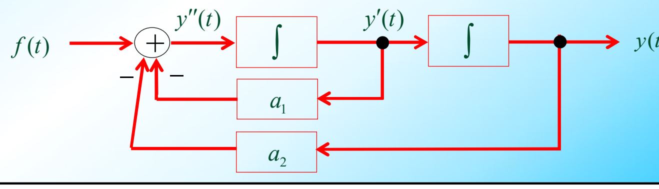
•系统的框图表示

（1）加法器

（2）乘法器

（3）积分器





•系统描述　　描述系统模型的两种方法

输入-输出描述法：

•着眼于激励与响应的关系，而不考虑系统内部变量情况；

•单输入/单输出系统；

•列写一元n阶微分方程。

状态变量分析法：

•不仅可以给出系统的响应，还可以描述内部变量如电容电压 $u_C(t)$ 或电感电流 $i_L(t)$ 的情况。

•研究多输入/多输出系统；

•列写多个一阶微分方程。

二、系统的分类

线性系统 / 非线性系统

非时变（定常）系统 / 时变系统

线性 / 非线性 —— 时变 / 非时变 —— 系统

静态系统 / 动态系统

集总参数系统 / 分布参数系统

连续时间系统 / 离散时间系统 / 混合系统

因果系统 / 非因果系统　　若系统在t_0时刻的响应只与$t=t_0$和$t<t_0$时刻的输入有关，否则，即为非因果系统。

重点研究：

确定性信号作用下的　集总参数　线性　时不变系统

线性时不变 (**Linear Time Invariant**)系统，简称**LTI**系统

1．线性系统与非线性系统

线性系统：就是指具有线性特性的系统，即系统同时具有齐次性（均匀性）和叠加性

非线性系统：不具线性特性的系统。

线性特性：指齐次性，叠加性。

齐次性(均匀性)：当输入激励改为原来的k倍时，输出响应也相应地改变为原来的k倍，k为常数。

$$f(t)\rightarrow y(t) \Rightarrow kf(t)\rightarrow ky(t)$$

齐次性： $f(t) \to y(t)$ ➡ $kf(t) \to ky(t)$

叠加性：当有几个激励同时作用于系统时，系统的总响应等于各个激励分别作用于系统所产生的响应之和。

$$\left.\begin{matrix} f_1(t) \to y_1(t) \\ f_2(t) \to y_2(t) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f_1(t)+f_2(t) \to y_1(t)+y_2(t)$$

对于线性系统的线性特性，归纳起来就是：将两个特性表达式合并为一个方程：

若 $f_1(t) \to y_1(t)$ $f_2(t) \to y_2(t)$

则 $k_1 f_1(t)+k_2 f_2(t)$ ➡ $k_1 y_1(t)+k_2 y_2(t)$

此方程代表了线性特性，包含了齐次性和叠加性。

例1.5-1、判断系统是否为线性系统 $y(t)=t\cdot f(t)$

解：考虑两个任意输入 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$

$$f_1(t) \Rightarrow y_1(t)=tf_1(t)$$

$$f_2(t) \Rightarrow y_2(t)=tf_2(t)$$

令 $f(t)=k_1 f_1(t)+k_2 f_2(t)$

若 $f(t)$ 为是系统的输入，则相应的输出可以表示为

$$y(t)=tf(t)=t[k_1 f_1(t)+k_2 f_2(t)]$$

$$=k_1 tf_1(t)+k_2 tf_2(t) \quad =k_1 y_1(t)+k_2 y_2(t)$$

即 $k_1 f_1(t)+k_2 f_2(t) \Rightarrow k_1 y_1(t)+k_2 y_2(t)$

系统具有线性特性，所以是线性系统。

例1.5-2：判断下述微分方程所对应的系统是否为线性系统？ $\dfrac{dy(t)}{dt}+10y(t)+5=f(t) \quad , \quad t>0$

解：根据线性系统的定义，证明此系统是否具有齐次性和叠加性。

先证明齐次性 设信号 $f(t)$ 作用系统，响应为 $y(t)$

当 $Af(t)$ 作用于系统时，若此系统具有线性，则

$$\frac{dAy(t)}{dt}+10Ay(t)+5=Af(t) \qquad t>0 \qquad (1)$$

原方程两端乘 A：

$$A\left[\frac{dy(t)}{dt}+10y(t)+5\right]=Af(t) \qquad t>0 \qquad (2)$$

(1)、(2)两式矛盾。故此系统不满足齐次性

证明叠加性

假设有两个输入信号 $f_1(t)及f_2(t)$ 分别激励系统，则由所给微分方程式分别有：

$$\frac{dy_1(t)}{dt}+10y_1(t)+5=f_1(t) \qquad t>0 \qquad (3)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt}+10y_2(t)+5=f_2(t) \qquad t>0 \qquad (4)$$

当 $f_1(t)+f_2(t)$ 同时作用于系统时，若该系统为线性系统，应有

$$\frac{d}{dt}\left[y_1(t)+y_2(t)\right]+10\left[y_1(t)+y_2(t)\right]+5=f_1(t)+f_2(t) \qquad t>0 \qquad (5)$$

(3)+(4)得

$$\frac{d}{dt}\left[y_1(t)+y_2(t)\right]+10\left[y_1(t)+y_2(t)\right]+10=f_1(t)+f_2(t) \qquad t>0 \qquad (6)$$

(5)、(6)式矛盾，该系统不具有叠加性

根据线性系统的定义，同时具有齐次性和叠加性的系统才是线性系统，根据上面的证明

系统不满足齐次性

系统不具有叠加性

$\therefore$此系统为非线性系统

将这个结果推广到如下形式的微分方程

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)$$

$$=b_m\frac{d^m f(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}f(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_0 f(t)$$

所描述的系统是一个线性系统。

方程中的系数 a_i 和 b_i 可以是常数或时间的函数。

含初始状态的线性系统的定义

零状态响应：初始状态为零（电容电压为零，电感电流为零）的情况下，对外加激励的响应。

零输入响应：电路的外加激励为零，由动态元件的初始储能引起的响应。

分解特性：

系统的响应可以分解为仅与激励相关的零状态响应和仅与初始状态相关的零输入响应，这种性质称为分解特性。

$$y(t)=y_x(t)+y_f(t)$$

零输入线性：

零输入响应 $y_x(t)$ 与初始状态 $x(0)$ 之间满足线性特性

当系统有多个初始状态时，零输入响应对每个初始状态呈线性。

零状态线性：

零状态响应 $y_f(t)$ 与激励 $f(t)$ 之间满足线性特性

当系统有多个输入时，零状态响应对每个输入呈线性。

线性系统：

一个系统如果满足以下三个条件，则称为线性系统，否则称为非线性系统：

(1)分解特性；**(2)**零输入线性；**(3)**零状态线性

例**1.5-3**、某系统的输入为 $f(t)$，初始状态为 $x(0)$，系统响应表达如下，试判别系统是否线性。

(1) $y(t)=ax(0)+bf(t)$　　线性系统

满足分解特性，零输入线性，零状态线性

(2) $y(t)=x^2(0)+3t^2f(t)$　　非线性系统

不满足零输入线性

(3) $y(t)=2x(0)f(t)+tf(t)$　　非线性系统

不满足分解特性

(4) $y(t)=x(0)\sin 5t+2\int_0^t f(\tau)d\tau$　　线性系统

(5) $y(t)=2x(0)+3|f(t)|$　　非线性系统

不满足零状态线性

§1.5 系统的描述和分类

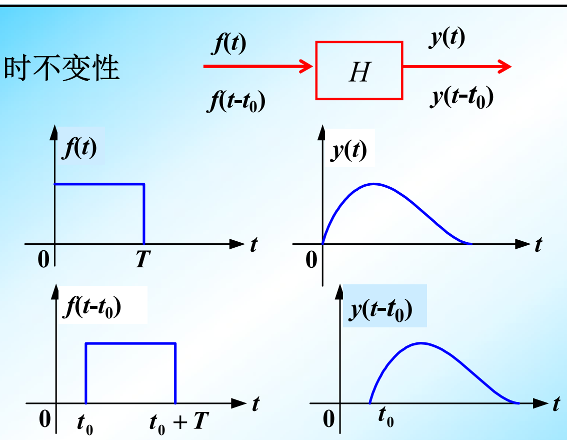
2．时变系统与时不变系统

时不变系统：其内部的参数是不随时间变化的系统，称为时不变系统或定常系统。它具有时不变特性 （Time Invariance）

时不变特性：只要初始状态不变，系统的输出响应形状不随激励施加的时间不同而改变。

时变系统：其内部的参数是随时间变化的系统。

时不变性



例：系统 $y(t)=t\cdot f(t)$ 是时变系统

$y(t)=\cos[f(t)]$ 是时不变系统

3. 因果系统与非因果系统

1） 定义

因果系统是指当且仅当输入信号激励系统时，才会出现输出（响应）的系统。也就是说，因果系统的响应不会出现在输入信号激励系统的以前时刻。

系统的这种特性称为因果特性。

符合因果性的系统称为因果系统 (非超前系统) 。

2）实际的物理可实现系统均为因果系统

若信号的自变量不是时间，如位移、距离、亮度…为变量的物理系统中研究因果性显得不很重要。

3）因果信号

t=0接入系统的信号称为因果信号

表示为： $f(t)=f(t)u(t)$

相当于 $t<0, f(t)=0$

三、系统分析方法

系统分析就是在给定系统的构成和参数的情况下去研究系统的特性。

范围 **确定性信号经LTI系统的基本分析方法**

系统分析一般分三步：

第一步：建模—建立系统的数学模型

第二步：处理—对数学模型进行数学处理

第三步：解释—对数学结果进行物理解释

LTI系统的基本分析方法

1.在建立系统模型方面

根据建立数学模型时选取变量的观点和方法的不同，对系统的数学描述方法可分为两类：

输入–输出描述法和状态变量描述法。

2.在系统数学模型的求解方法方面

按求解方法，大体可分为时域法和变换域法。

1）时域分析

就是直接处理时间变量的方法。

● 经典法求解 $\begin{cases} \text{连续系统:微分方程} \\ \text{离散系统:差分方程} \end{cases}$

●卷积积分（或卷积和）法

这里除了介绍基本方法外，还将重点介绍卷积法（对连续系统的卷积积分，离散系统的卷积和）

2）变换域分析

就是将信号与系统模型的时间变量函数变成相应变换域的某种变量函数。

- 傅里叶变换——FT
- 拉普拉斯变换——LT
- z变换——ZT
- 离散傅里叶变换——DFT
- 离散沃尔什变换——DWT

在线性时不变系统中，时域法和变换域法都以线性和时不变性为分析问题的基准。首先把激励信号分解为某种基本单元信号，然后求出在这些基本单元信号分别作用下系统的零状态响应，最后叠加。

思路

从输入输出描述 → 状态变量描述

从连续信号分析 → 离散信号分析

从时间域分析 → 变换域分析