积分变换复习提纲

1 傅里叶变换的概念

$$\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=F(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=f(t)$$

2 几个常用函数的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}[\delta(t)]=1$$

$$\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

3 傅里叶变换的性质

位移性(时域)：$\mathcal{F}[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\ \mathcal{F}[f(t)]$

位移性(频域)：$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}f(t)]=F(\omega)\big|_{\omega=\omega-\omega_0}=F(\omega-\omega_0)$

位移性推论：$\mathcal{F}[\sin\omega_0 t f(t)]=\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)]$

位移性推论：$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t f(t)]=\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)]$

微分性(时域)：$\mathcal{F}[f'(t)]=(\mathrm{j}\omega)F(\omega)$ （$|t|\to+\infty, f(t)\to 0$）

$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(\mathrm{j}\omega)^n F(\omega)$，$|t|\to+\infty, f^{(n-1)}(t)\to 0$

微分性(频域)：$\mathcal{F}[(-\mathrm{j}t)f(t)]=F'(\omega)$，$\mathcal{F}[(-\mathrm{j}t)^n f(t)]=F^{(n)}(\omega)$

相似性：$\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$，$(a\neq 0)$

4 拉普拉斯变换的概念

$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=F(s)$

5 几个常用函数的拉普拉斯变换

$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{kt}]=\frac{1}{s-k}$；

$\mathcal{L}[t^m]=\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}=\frac{m!}{s^{m+1}}$（$m$ 是自然数）；（$\Gamma(1)=1,\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi},\Gamma(m+1)=m\Gamma(m)$）

$\mathcal{L}[u(t)]=\mathcal{L}[1]=\frac{1}{s}$；

$\mathcal{L}[\delta(t)]=1$

$\mathcal{L}[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2}$，$\mathcal{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}[\mathrm{sh}\, kt]=\frac{k}{s^2-k^2}$，$\mathcal{L}[\mathrm{ch}\, kt]=\frac{s}{s^2-k^2}$

设 $f(t+T)=f(t)$，则 $\mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$（$f(t)$ 是以 T 为周期的周期函数）

6 拉普拉斯变换的性质

微分性(时域）：$\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$，$\mathcal{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

微分性(频域）：$\mathcal{L}[(-t)f(t)]=F'(s)$，$\mathcal{L}[(-t)^n f(t)]=F^{(n)}(s)$

积分性(时域）：$\mathcal{L}[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t]=\frac{F(s)}{s}$

积分性(频域）：$\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^{\infty} F(s)\mathrm{d}s$（收敛）

位移性(时域）：$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at} f(t)]=F(s-a)$

位移性（频域）：$\mathcal{L}[f\left(t-\tau\right)] = \mathrm{e}^{-s\tau}F\left(s\right)$（$\tau > 0$，$t < 0, f(t) \equiv 0$）

相似性：$\mathcal{L}[f(at)] = \dfrac{1}{a}F(\dfrac{s}{a})$，$(a > 0)$