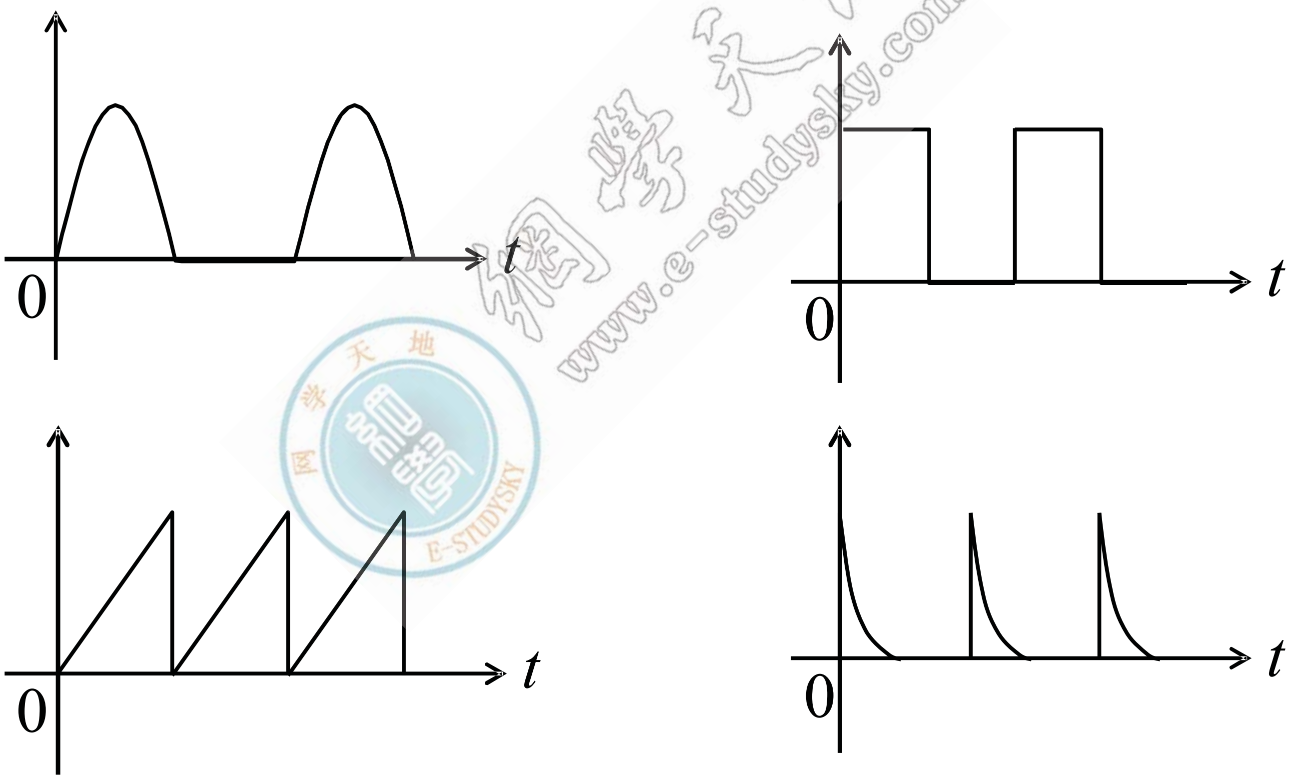
第九章　周期性非正弦电流电路

§9－1　周期信号及其付里叶级数分解

一、周期信号



二、周期信号的付氏级数

周期为T的函数$f(t)$，满足如下狄里赫莱条件时，可以用付里叶级数表示。

①在一个周期里连续或只有有限个第一类间断点

②在一个周期里只有有限个极大值和极小值

③积分 $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|dt$ 存在

$$f(t)=A_0+A_1\cos\omega t+A_2\cos 2\omega t+\cdots$$

$$+B_1\sin\omega t+B_2\sin 2\omega t+\cdots$$

$$=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos k\omega t+B_k\sin k\omega t\right)$$

$$A_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$A_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t dt \qquad k=1,\ 2\cdots$$

$$B_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t dt \qquad k=1,\ 2\cdots$$

若 $f(t)$以ωt 作为横坐标

则 $A_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)d\omega t$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos k\omega t d\omega t$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin k\omega t d\omega t$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega t + \psi_k)$$

其中：$C_0 = A_0$ $\quad C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ $\quad \psi_k = arctg\dfrac{-B_k}{A_k}$

C_0：$f(t)$的直流分量

$C_1\cos(\omega t+\psi_1)$：**$f(t)$的基波**

$C_2\cos(2\omega t+\psi_2)$ ：**$f(t)$的二次谐波**

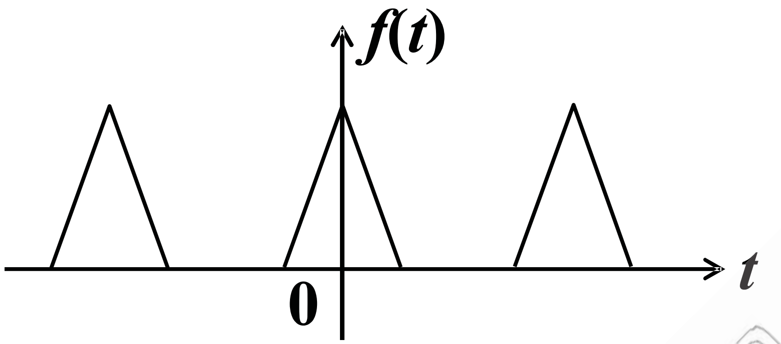
k较小时称低次谐波，k较大时称高次谐波

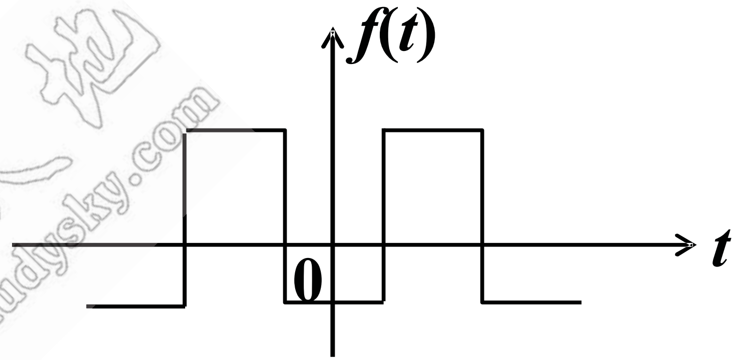
k为奇数称奇次谐波，k为偶数称偶次谐波

工程上只取前几项（依精度而定）

三、波形的对称性与付里叶级数系数的关系

1. 偶函数：$f(t)=f(-t)$　　纵轴对称



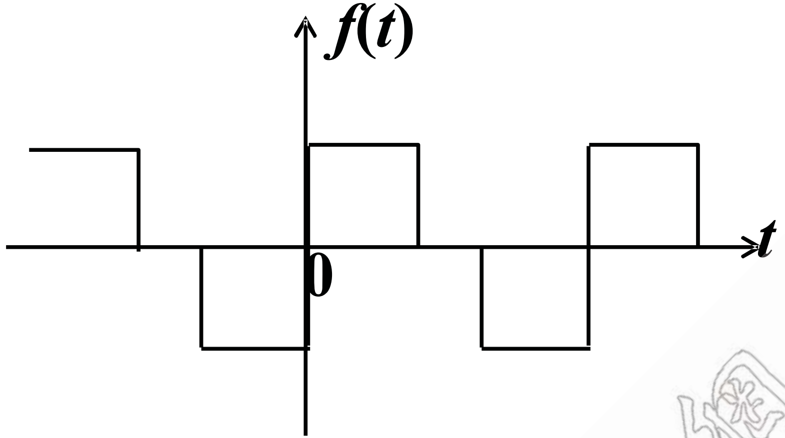


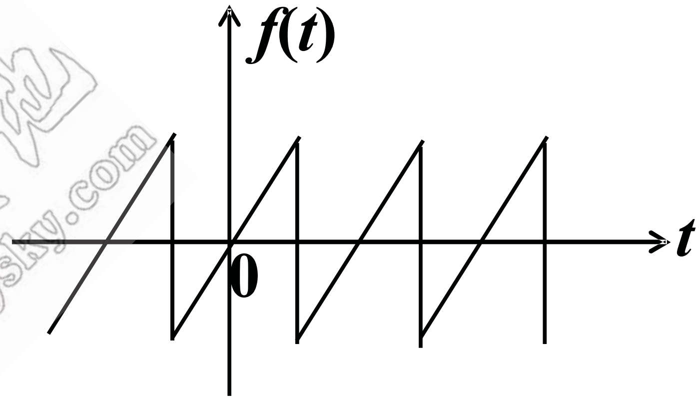
$$B_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega t dt=0$$

$$A_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega t dt=\frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega t dt$$

只有恒定分量和余弦项

2. 奇函数 $f(t)=-f(-t)$ 原点对称





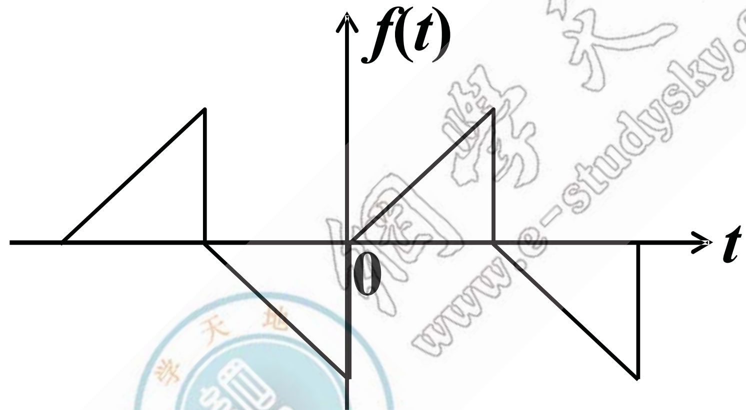
$$A_k = 0$$

$$B_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega t dt$$

只有正弦项

3. 奇谐波函数

$$f(t)=-f\left(t\pm\frac{T}{2}\right)$$ 镜像对称

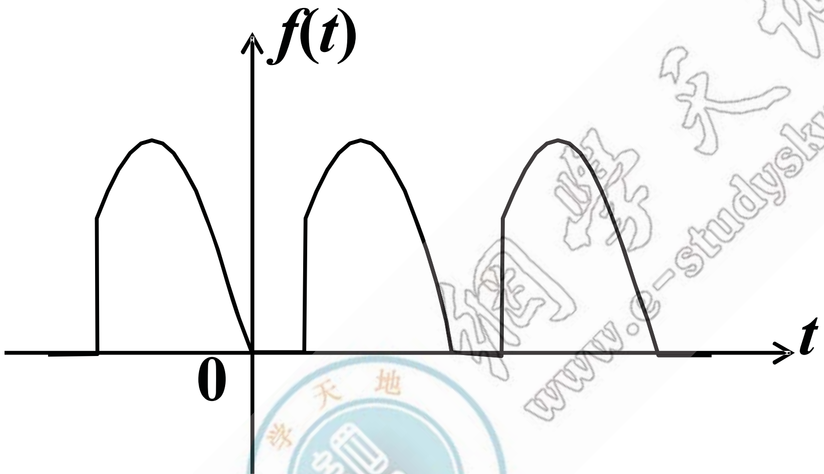


k=0、2、4…时，A_k=0，B_k=0

k=1、3、5…时，A_k、B_k有值

4. 偶谐波函数

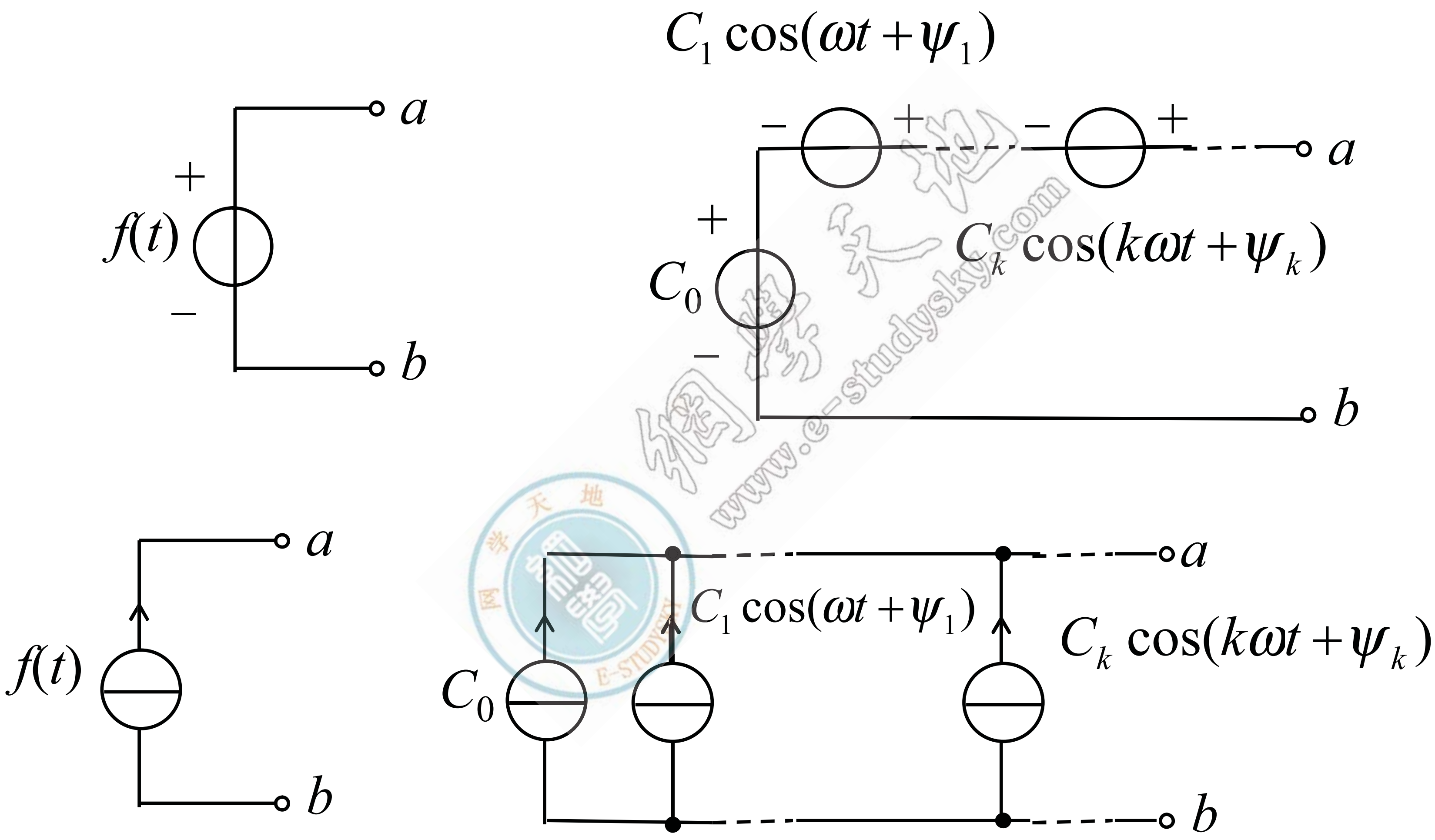
$$f(t)=f\left(t\pm\frac{T}{2}\right)$$ 前后半周波形重合



k=1、3、5…A_k=0，B_k=0

k=2、4、6…A_k、B_k有值

四、展开式在电路中的意义



第九章　周期性非正弦电流电路

§9－2　有效值、绝对平均值和功率

一、有效值：

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2dt}=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i^2d\omega t}$$

$$i=I_0+\sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\cos\left(k\omega t+\psi_k\right)$$

$$i^2=I_0^2+2\sum I_0I_{km}\cos\left(k\omega t+\psi_k\right)+\left[\sum I_{km}\cos\left(k\omega t+\psi_k\right)\right]^2$$

$$=I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty} 2I_0I_{km}\cos\left(k\omega t+\psi_k\right)+\sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2\cos^2\left(k\omega t+\psi_k\right)$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\n=1\\k\neq n}}^{\infty}2I_{km}I_{nm}\cos\left(k\omega t+\psi_k\right)\cos\left(n\omega t+\psi_n\right)$$

$$\because \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_0^2 d\omega t = I_0^2$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2I_0 I_{km}\cos(k\omega t+\psi_k)d\omega t = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_{km}^2\cos^2(k\omega t+\psi_k)d\omega t$$

$$=\frac{I_{km}^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[1+\cos(2k\omega t+2\psi_k)]d\omega t = \frac{I_{km}^2}{2} = I_k^2$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2I_{km}I_{nm}\cos(k\omega t+\psi_k)\cos(n\omega t+\psi_n)d\omega t = 0$$

$$\therefore I=\sqrt{I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2}=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+\cdots}$$

同理 $U=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_2^2+\cdots}$

二、绝对平均值:

$$U_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T|u(t)|dt$$

电磁系或电动系仪表的偏转角:

$$\alpha\propto\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2dt}$$ 测有效值

磁电系仪表：

$$\alpha \propto \frac{1}{T}\int_0^T i dt$$ 测恒定分量

全波整流磁电系仪表： $$\alpha \propto \frac{1}{T}\int_0^T |i| dt$$

三、功率

瞬时功率：$p = u i$

$$= [U_0 + \Sigma U_{km}\cos(k\omega t + \psi_{uk})][I_0 + \Sigma I_{km}\cos(k\omega t + \psi_{ik})]$$

有功功率：

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\,dt$$

$$=U_0I_0+U_1I_1\cos\varphi_1+U_2I_2\cos\varphi_2+\cdots$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}U_kI_k\cos\varphi_k$$

其中　U_k、I_k为第k次谐波电压、电流的有效值

$\varphi_k=\psi_{uk}-\psi_{ik}$　k次谐波的功率因数角、阻抗角

视在功率：

$$S=UI=\sqrt{U_0^2+U_1^2+\cdots}\sqrt{I_0^2+I_1^2+\cdots}$$

第九章　周期性非正弦电流电路

§9－3　周期性非正弦电流电路的计算

步骤：

1）对激励源进行付氏分解，取几项看精度。

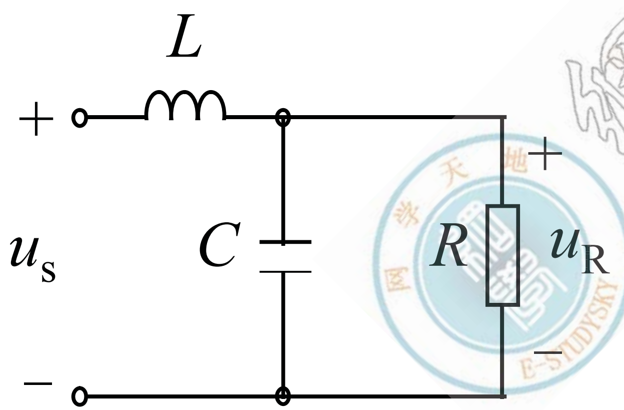
2）分别求出恒定分量（直流）、基波、谐波作用下的响应。

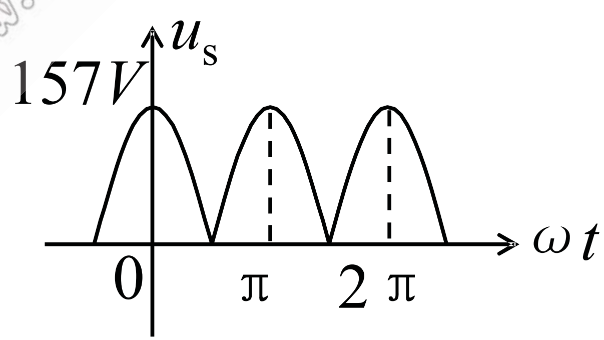
直流作用时：C开路、L短路

基波、谐波作用时：采用相量法

3）用叠加定理求响应。瞬时叠加。

例1：已知L=5H, C=10μF, 负载R=2kΩ, ω=314rad/s。u_s为整流后的波形（见图），L、C 构成滤波电路，求负载两端电压的有效值、瞬时值以及负载消耗的功率（付氏级数取到4次谐波）。





解：1）分解u_s

∵ u_s为偶函数 ∴ $B_k=0$

又∵ u_s前后半周重迭 ∴$k=1$、3、5… $A_k=0$

$$u_s \doteq U_0 + A_2\cos 2\omega t + A_4\cos 4\omega t$$

$$U_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_s d\omega t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 157\cos\omega t d\omega t = 99.95V$$

$$A_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_s \cos 2\omega t d\omega t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_s \cos 2\omega t d\omega t$$

$$= \frac{2\times 157}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega t \cos 2\omega t d\omega t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\omega t \cos 2\omega t d\omega t\right]$$

$$= 66.7$$

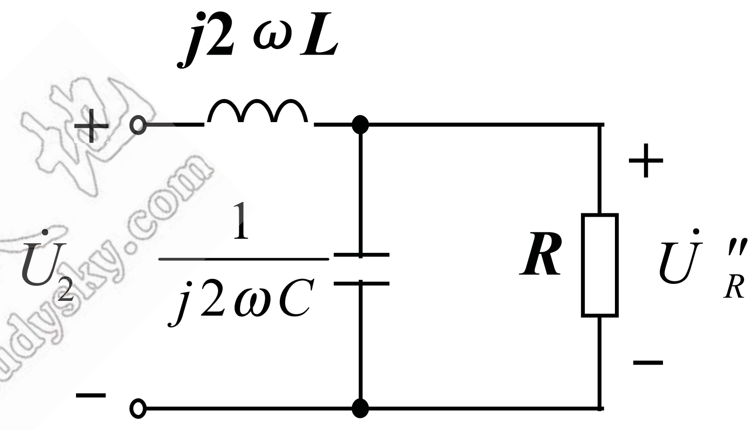
$$A_4 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_s \cos 4\omega t d\omega t = -13.33$$

$$\therefore u_s \doteq 99.95 + 66.7\cos 2\omega t - 13.33\cos 4\omega t V$$

2）a. 直流作用

$$u'_R = U_0 = 99.95V$$

b. 二次谐波作用：



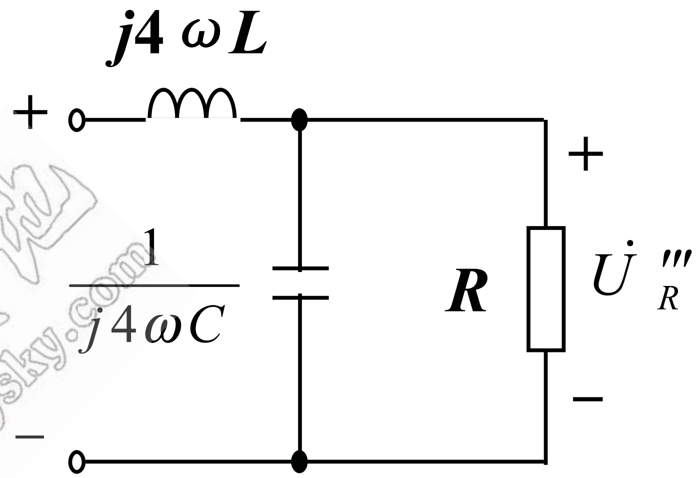
$$\frac{\dfrac{R}{j2\omega C}}{R+\dfrac{1}{j2\omega C}} = 158\angle -85.4^\circ\ \Omega$$

$$\dot{U}''_R = \frac{158\angle -85.4^\circ}{j2\omega L + 158\angle -85.4^\circ}\frac{66.7}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ = \frac{3.53}{\sqrt{2}}\angle -175.2^\circ\ V$$

$$\therefore u''_R = 3.53\cos(2\omega t - 175.2^\circ)V$$

c. 四次谐波作用：

$$\frac{\dfrac{R}{j4\omega C}}{R+\dfrac{1}{j4\omega C}}=79.5\underline{/-87.8^\circ}\ \Omega$$



$$\dot{U}'''_R=\frac{79.5\underline{/-87.7^\circ}}{j4\omega L+79.5\underline{/-87.7^\circ}}\cdot\frac{13.33}{\sqrt{2}}\underline{/180^\circ}=\frac{0.171}{\sqrt{2}}\underline{/2.33^\circ}\ V$$

$$\therefore u'''_R=0.171\cos(4\omega t+2.33^\circ)V$$

3）叠加：

$$u_R = u'_R + u''_R + u'''_R$$

$$= 99.95 + 3.53\cos(2\omega t - 175.2°) + 0.171\cos(4\omega t + 2.33°)V$$

$$U_R = \sqrt{99.95^2 + \frac{3.53^2}{2} + \frac{0.171^2}{2}} = 99.98V$$

$$P = \frac{U'^2_R}{R} + \frac{U''^2_R}{R} + \frac{U'''^2_R}{R} = \frac{U^2_R}{R} = 5W$$