大学物理

主讲：林月霞

第二篇 实物的运动规律

最简单最基本的：机械运动

物体在空间的位置随时间变化的运动称为机械运动。

“首先要研究物体是怎样运动，（运动学）--第三章

然后才能研究物体为什么运动”。（动力学）--第四-六章

--------伽利略

第三章 运动的描述

本章结构框图

质点和刚体 → 参考系坐标系 → 运动的描述 → 运动学的两类基本问题 → 相对运动

§3.1：质点、质点系和刚体

质点：当物体的线度和形状在所研究的问题中的作用可以忽略不计时，将物体抽象为一个具有质量，占有位置，但无形状大小的"点"。

质点系：质点的集合。

刚体：任意两质点间距离保持不变的质点系。

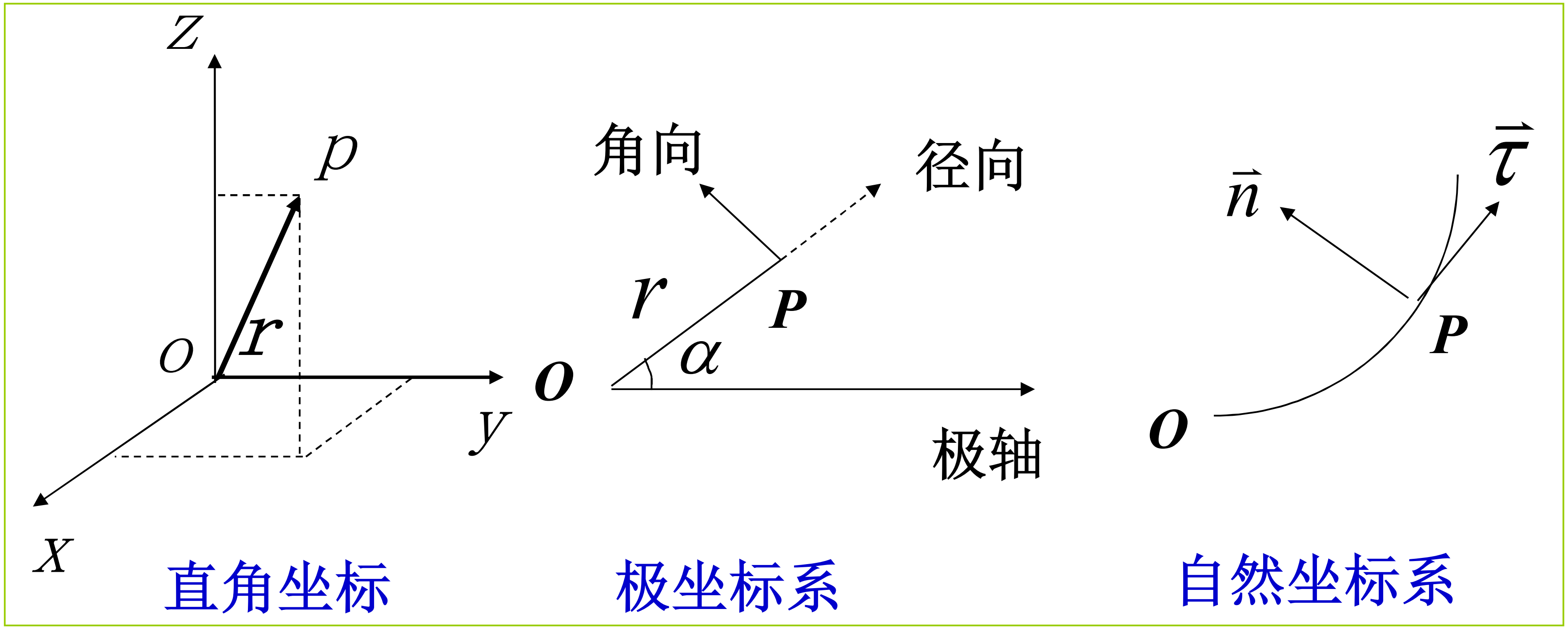
* 质点 $\xrightarrow{\text{集合}}$ 质点系 $\xrightarrow{\text{特例}}$ 刚体

§3.2　参考系和坐标系

一、 参考系 —— 为了描述一个物体的运动而选定的另一个作为参考的物体，叫参考系。任何实物物体均可被选作参考系。

二、 坐标系 —— 为了定量的描述物体的运动，在选定的参考系上建立的带有标尺的数学坐标,简称坐标系。坐标系是固结于参考系上的一个数学抽象。

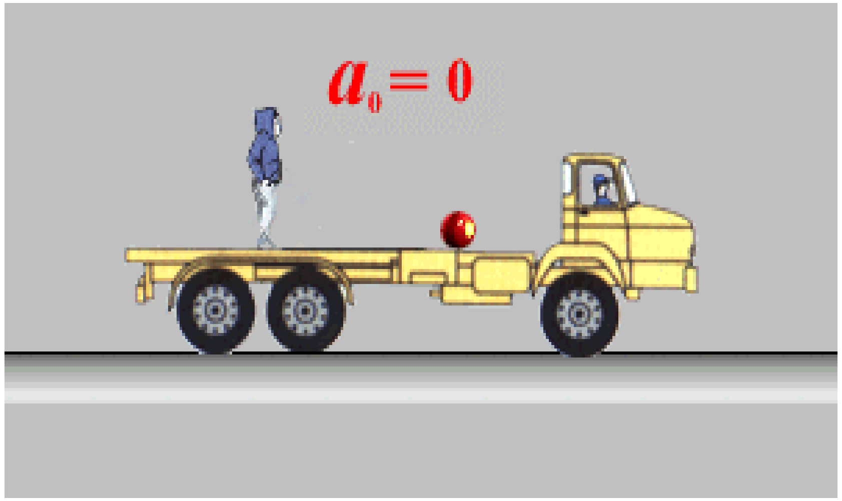
用坐标的改变量描述该点位置的变动

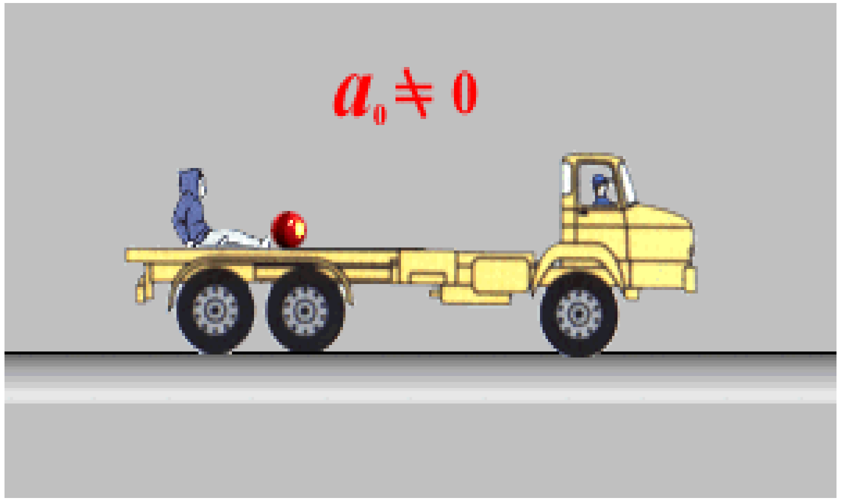


要想解决任何一个具体的力学问题，首先应选取一个适当的参考系并在参考系上建立一个适当的坐标系，否则无从讨论物体的运动。

三、 惯性系和非惯性系

我们把牛顿第一定律在其中成立的参考系叫做惯性系，牛顿第一定律在其中不成立的参考系叫做非惯性系。





真正的惯性系是无法检验的，它也是一种理想模型。经典力学定律只对惯性系适用。

§ 3.3 运动的描述

一. 描述质点运动的基本物理量及其直角坐标描述

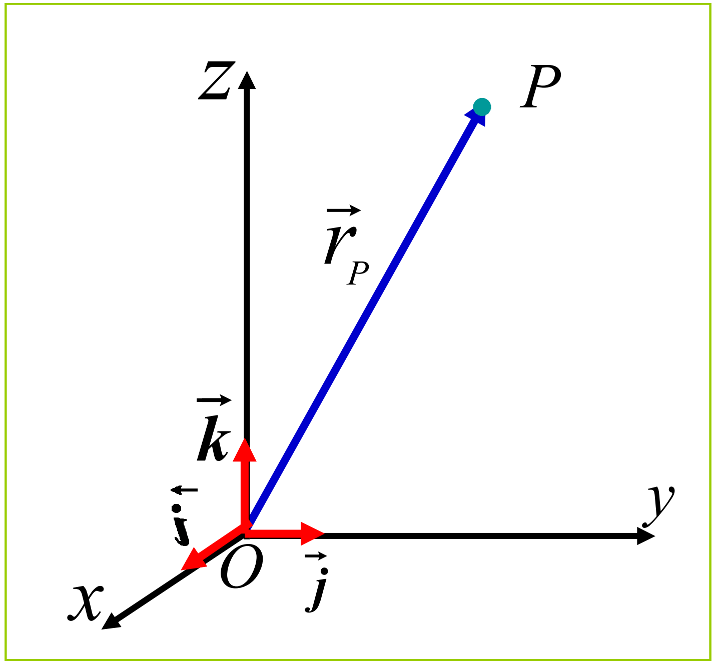
1. 描述质点在空间的位置 —— 位置矢量

➢ 定义： 从参考点*O*指向空间*P*点的有向线段叫做*P*点的位置矢量 $\vec{r}_P$，简称位矢或矢径。表示为：

$$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}$$

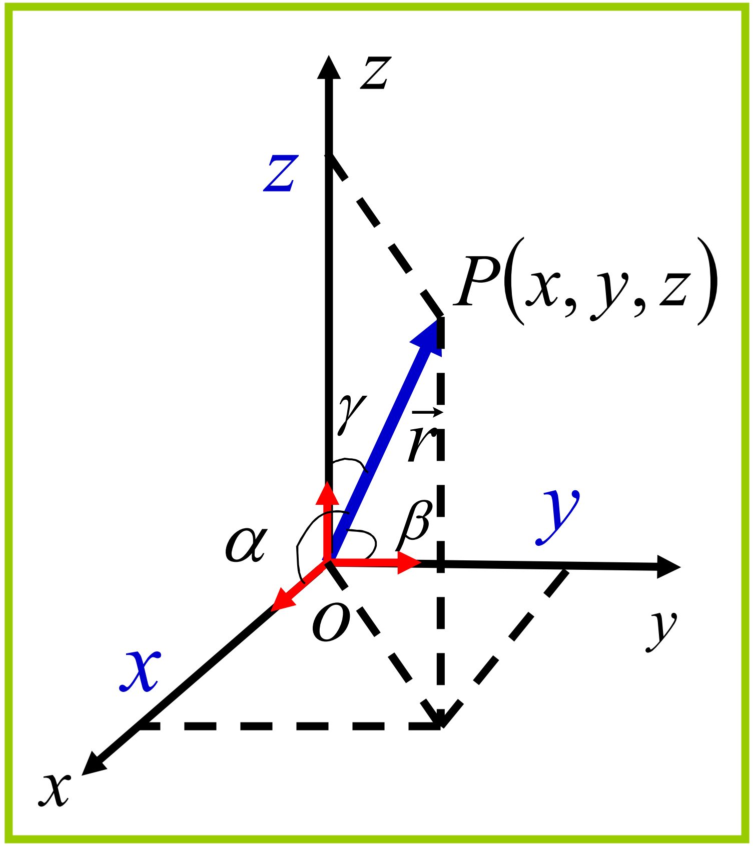
➢ 直角坐标描述 $o-xyz$

单位矢量：$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$



直角坐标中位矢的表达式

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



大小：

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

方向：

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \cos\beta = \frac{y}{r}, \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

质点的运动方程

$\vec{r}$ 随时间变化的函数 $\vec{r}(t)$ 称为质点的运动方程。

$$\vec{r}=\vec{r}(t)$$

在直角坐标系中，质点运动方程的具体形式为：

$$\vec{r}=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+z(t)\,\vec{k} \qquad \cdots \quad \cdots \qquad \Theta$$

即质点运动方程的标量形式（以t为参数的参数方程）

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{消去参数 } t} \text{质点运动的轨迹方程}$$

例1：$OA = BA = AC$, OA 以角速度 ω 绕O旋转，B、C 分别沿y、x 轴运动，现有一点P，已知 $BP = a$，$PC = b$，求P 点的轨迹方程。

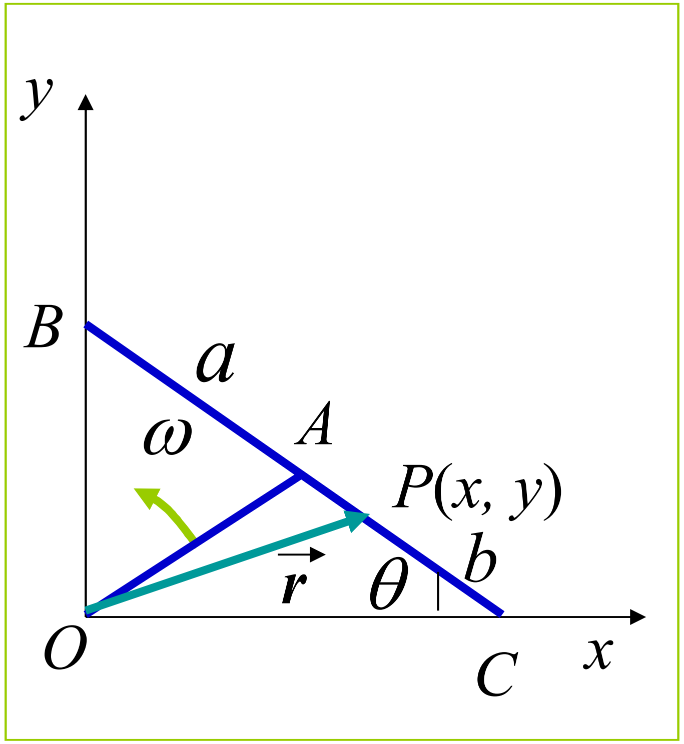
思路：

(1) 确定P 的位置

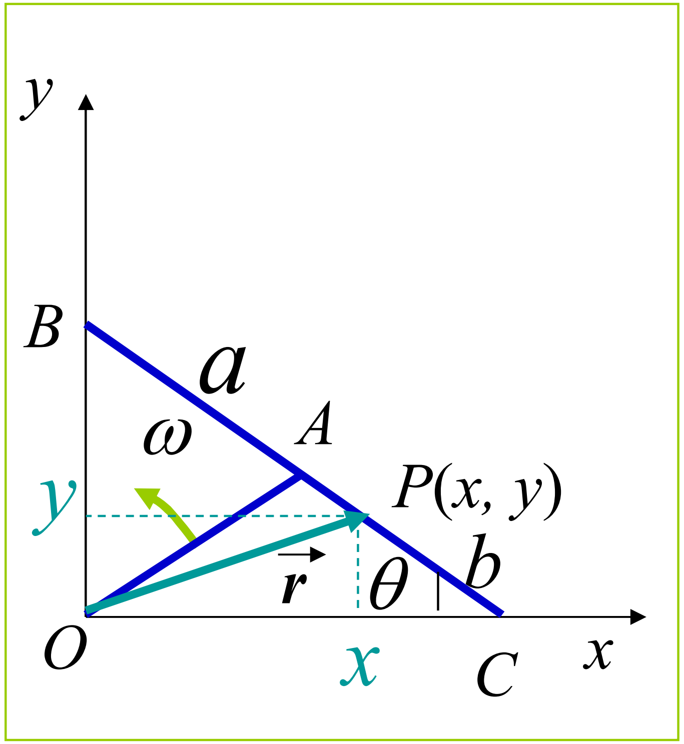
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

(2) 写出参数方程

(3) 消去 t，得到轨迹方程



解：以 OA 与 x 轴重合时为计时起点则：$\theta=\omega t$



运动方程：

$$\therefore \vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$$

参数方程：

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = b\sin\omega t \end{cases}$$

消去 t 得轨迹方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

椭圆规原理

例2. 已知：质点的运动方程 $\vec{r} = 2t\vec{i} + (2 - t^2)\vec{j}$ (SI)

求： (1) 质点的轨迹；

(2) $t = 0$s 及 $t = 2$s 时, 质点的位置矢量。

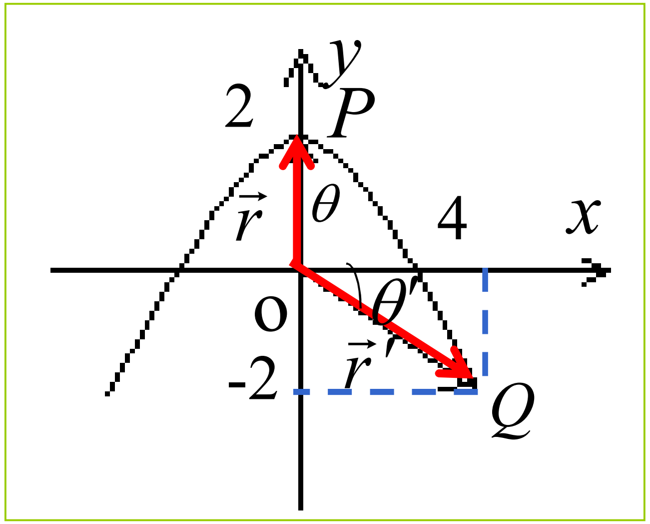
解：(1) 先写参数方程 $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t^2 \end{cases}$

消去 t 得轨迹方程： $y = 2 - \dfrac{x^2}{4}$ 抛物线

(2) 位置矢量：

$t = 0$时， $x = 0$ $y = 2$ $\vec{r} = 2\vec{j}$

$t = 2$时， $x = 4$ $y = -2$ $\vec{r}\,' = 4\vec{i} - 2\vec{j}$



$$y = 2 - \frac{x^2}{4}$$

$$\vec{r} = 2\vec{j}$$

$$\vec{r}\,' = 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

位置矢量的大小：　$r = |\vec{r}| = 2(\mathrm{m})$

$$r' = |\vec{r}\,'| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 4.47(\mathrm{m})$$

位置矢量的方向：

$\vec{r}$与x轴夹角　$\theta = \mathrm{arctg}\,\frac{2}{0} = 90^\circ$

$\vec{r}\,'$与x轴之间的夹角 $\theta' = \mathrm{arctg}\,\frac{-2}{4} = -26^\circ 32'$

2. 描述质点位置变动的大小和方向 —— 位移矢量

定义：质点沿曲线运动

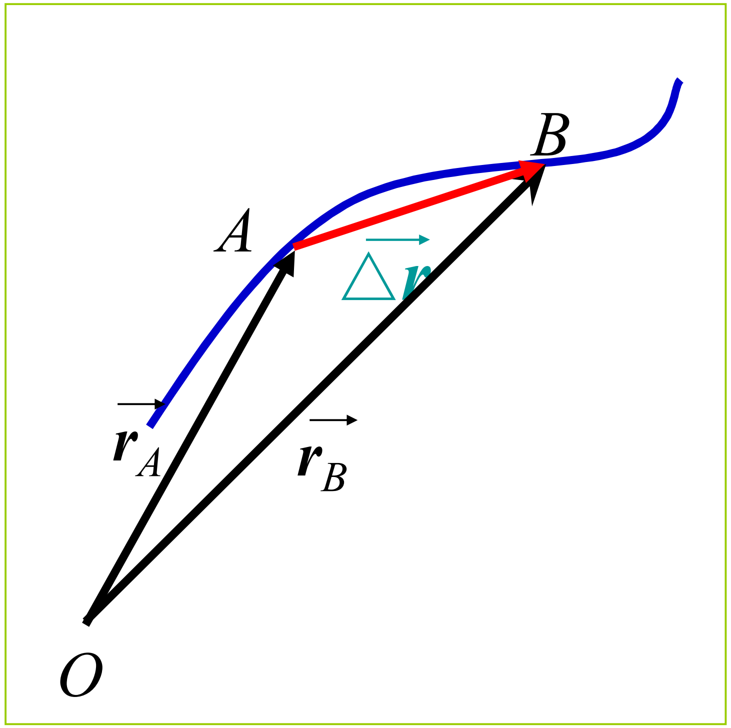
t 时刻：A, $\vec{r}_A$

$t+\Delta t$ 时刻：B, $\vec{r}_B$

Δt 时间内位置变化的净效果：

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \Delta\vec{r}$$

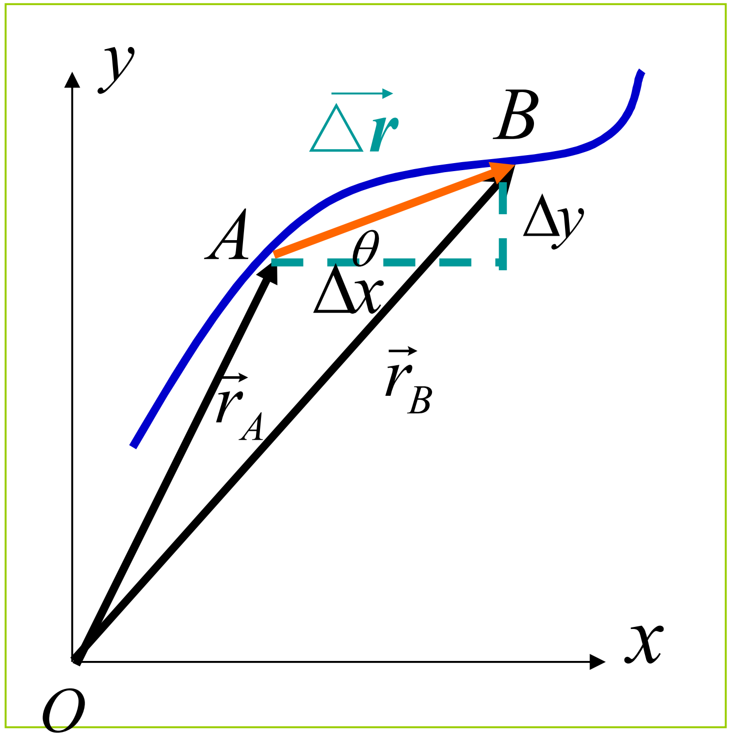
位移矢量　末位矢　初位矢　位矢增量



直角坐标表示（以二维情况为例）：

$$\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$$

$$\vec{r}_B = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$$



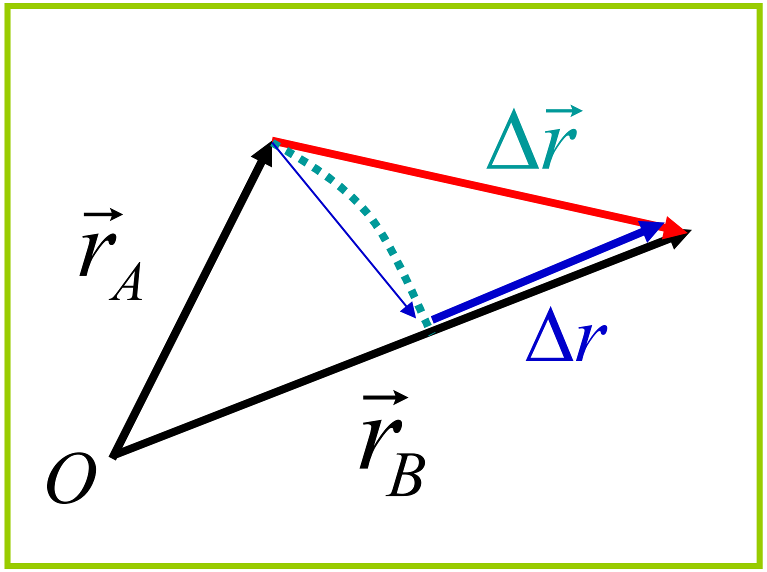
$$\Delta\vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$

$$= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}$$

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

讨论　$\left|\Delta\vec{r}\right| = \Delta r$　?



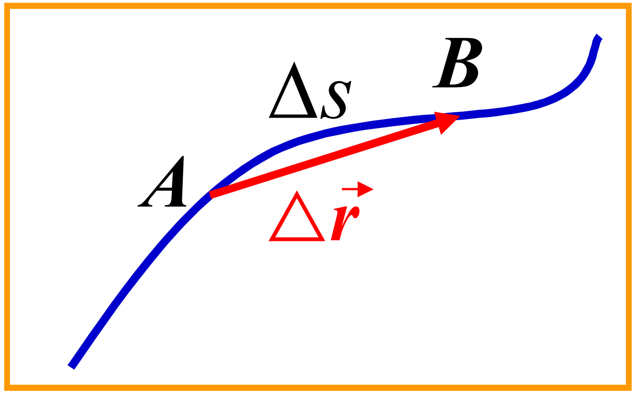
$$\Delta r = \left|\vec{r}_B\right| - \left|\vec{r}_A\right| = r_B - r_A$$

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \left|\vec{r}_B - \vec{r}_A\right|$$

比较位移和路程

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{AB}$$

$$\Delta s = \overset{\frown}{AB}$$



物理量	位移	路程
性质	矢量 描述质点位置变化的净效果 只与始末点有关，与质点运动轨迹无关。	标量 描述质点通过的实际路径的长 与质点运动轨迹有关
关系	$\lvert \Delta\vec{r} \rvert \le \Delta s$　何时取等号？ $\begin{cases} \text{直线直进运动} \\ \text{曲线运动 } \Delta t \to 0 \end{cases}$	

例3.求例2中P、Q两点间的位移和路程。

解：(1) 位移：

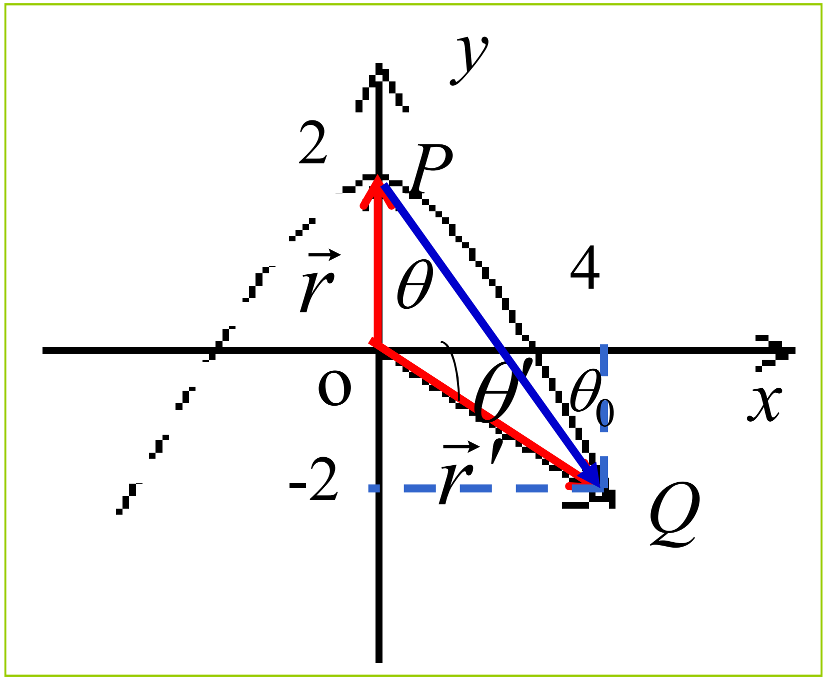
$$\vec{r} = 2\vec{j}$$

$$\vec{r}\,' = 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}$$

$$= 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{j}$$

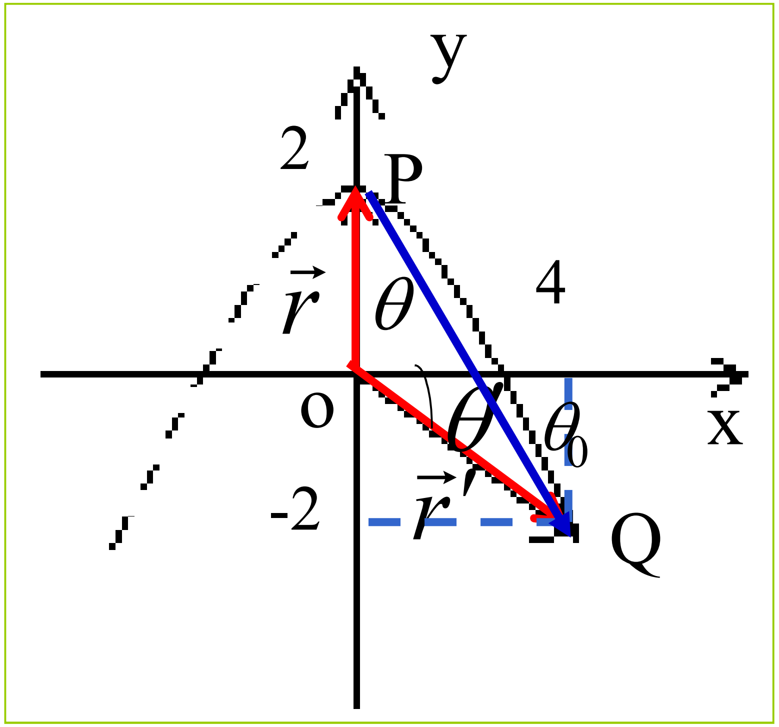
$$= 4\vec{i} - 4\vec{j}$$



大小：$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 5.65\text{m}$$

方向：$$\theta_{\circ} = \operatorname{arctg}\frac{-4}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

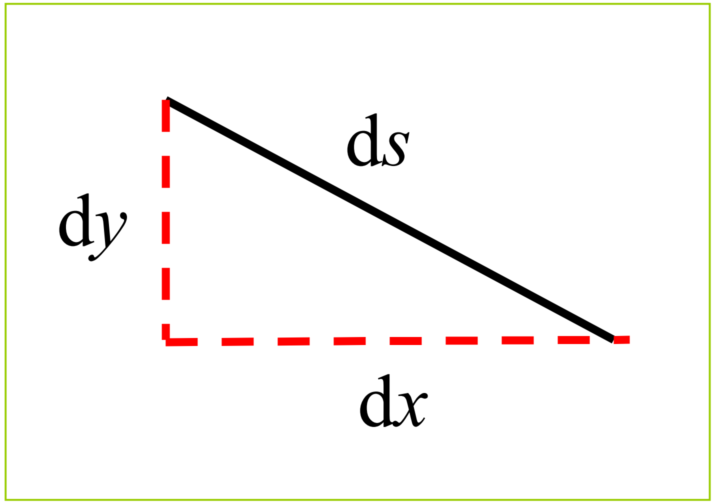
(2) 路程： $\Delta s=\int_P^Q \mathrm{d}s$



$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$

$$\begin{cases} x=2t \\ y=2-t^2 \end{cases} \Rightarrow y=2-\frac{x^2}{4}$$

$$\therefore \mathrm{d}y=-\frac{1}{2}x\mathrm{d}x$$



于是 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$

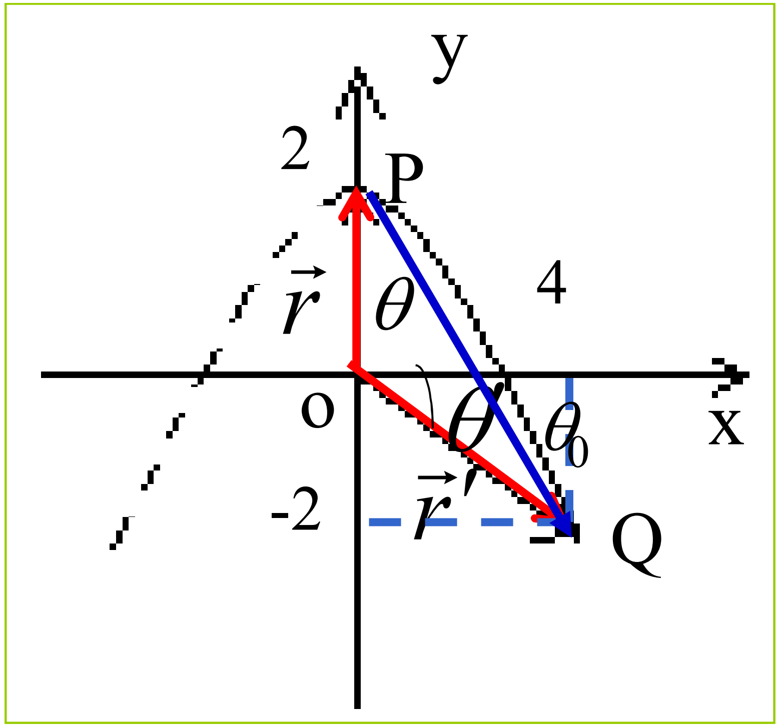
$$=\frac{1}{2}\sqrt{4+x^2}\mathrm{d}x$$

$$\Delta s = \int_P^Q \mathrm{d}s = \int_0^4 \frac{1}{2}\sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\left[x\sqrt{4+x^2} + 4\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)\right]_0^4$$

$$= 5.91\ \mathrm{m}$$

注意：数学方法在物理问题中的应用。

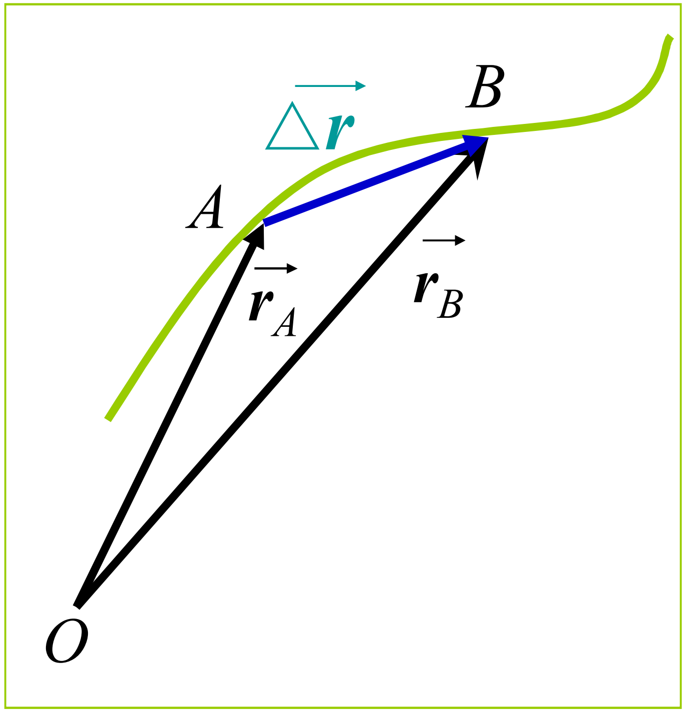


3. 描述质点运动的快慢和方向 —— 速度矢量

粗略描述： t 时刻： A， $\vec{r}_A$

$t+\Delta t$ 时刻： B， $\vec{r}_B$

位移： $\Delta\vec{r}$



平均速度：

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

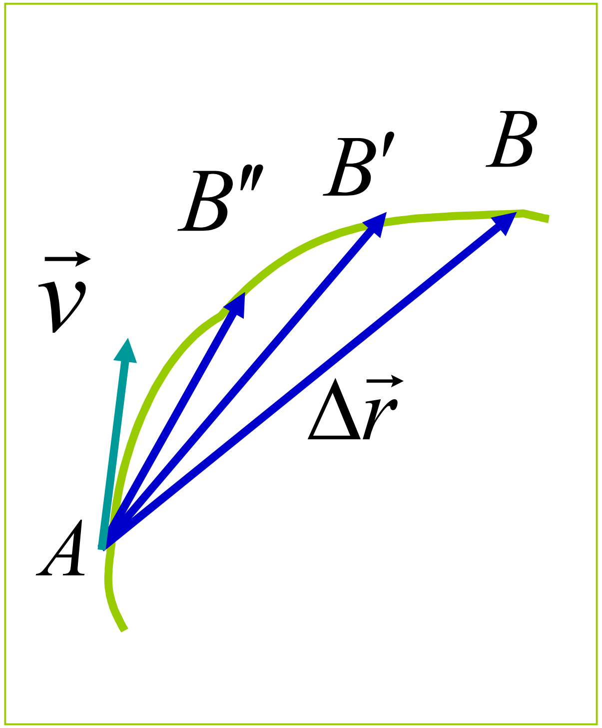
物理思想：

变速运动 ......类比...... 总效果相同的匀速直线运动

精确描述：

瞬时速度：　当Δt趋于0时，B点趋于A点，平均速度的极限表示质点在 t 时刻通过A点的瞬时速度，简称速度。表示为：

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$



速度是位矢对时间的一阶导数，其方向沿轨道上质点所在处的切线，指向前进的一侧。

注意速度的矢量性和瞬时性。

在直角坐标系中： $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

速度的大小： $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

速度与速率的关系

平均速度	瞬时速度
$\overline{\vec{v}} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$	$\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$
平均速率	瞬时速率
$\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$	$v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

速度是矢量，速率是标量

讨论

（1）$\left|\overline{\vec{v}}\right| = \overline{v}$　？

（2）$\left|\vec{v}\right| = v$　？

（3）$\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　？

（1）　$\left|\overline{\vec{v}}\right| = \overline{v}$　？

$$\because \left|\Delta \vec{r}\right| \neq \Delta s, \therefore \left|\overline{\vec{v}}\right| = \left|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| \neq \frac{\Delta s}{\Delta t} = \overline{v}$$

平均速度的大小不等于平均速率

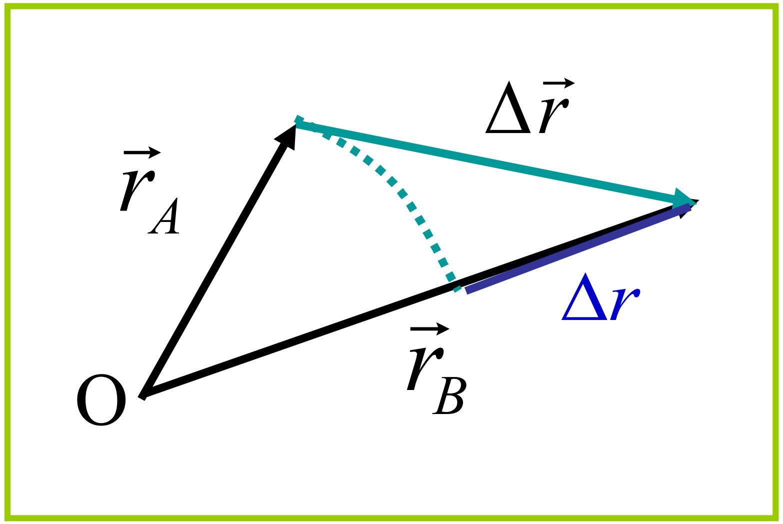
（2）　$\left|\vec{v}\right| = v$　？

$$\Delta t \to 0\text{时}，\lim_{\Delta t \to 0} \Delta s = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\Delta \vec{r}\right|,$$

$$\text{即} \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \mathrm{d}s \quad \therefore \left|\vec{v}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$$

速度的大小等于速率。

（3） $\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ ？



$$\because\ \Delta r \neq \left|\Delta\vec{r}\right|,\quad \therefore \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| \neq \mathrm{d}r$$

$$\therefore\ \left|\vec{v}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \neq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

例4：已知：　$\vec{r}=2t\,\vec{i}+(2-t^2)\,\vec{j}$　(SI)

求：　2秒末速度的大小

$$\vec{r}=2t\,\vec{i}+\left(2-t^2\right)\vec{j}$$

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=2\vec{i}-2t\,\vec{j}$$

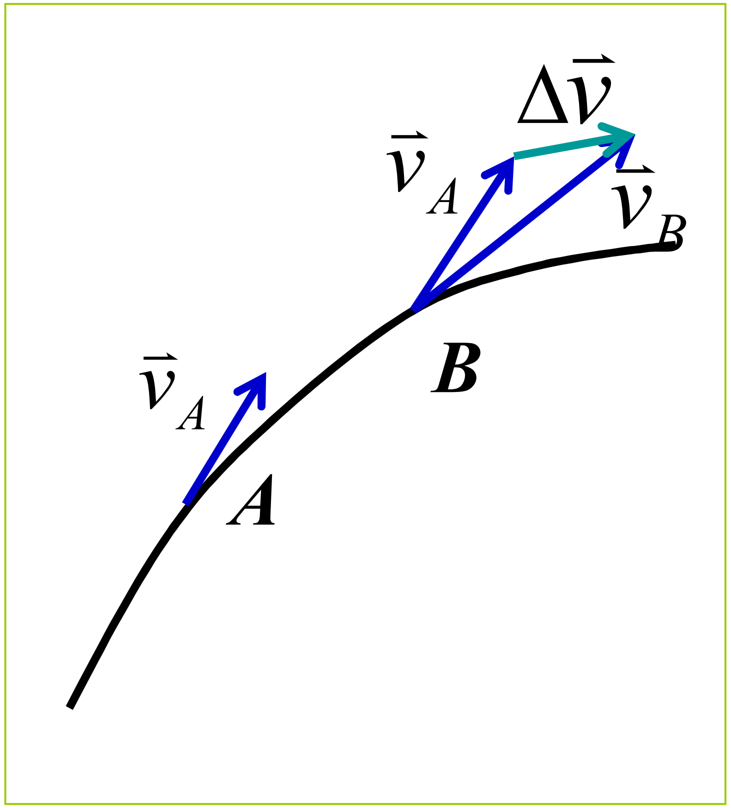
$$v_x=2 \qquad v_y=-2t$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=2\sqrt{1+t^2}$$

$$t=2 \quad v_2=2\sqrt{5}=4.47\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

4. 描述质点速度大小、方向变化的快慢 ——加速度矢量

平均加速度——质点在A，B两点的速度分别是$\vec{v}_A$,$\vec{v}_B$,在Δt时间内从A运动到B速度改变为$\Delta\vec{v}=\vec{v}_B-\vec{v}_A$。



用$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$可粗略描述质点速度改变快慢和方向,称为平均加速度 。

表示为:

$$\bar{a}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

物理思想?

物理思想：

变速运动 ······类比······ 总效果相同的匀变速直线运动

瞬时加速度 —— 当Δt 趋于0时，求得平均加速度的极限，表示质点通过 A 点的瞬时加速度，简称加速度。表示为：

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

加速度等于速度对时间的一阶导数,或位失对时间的二阶导数。

直角坐标系表示：

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

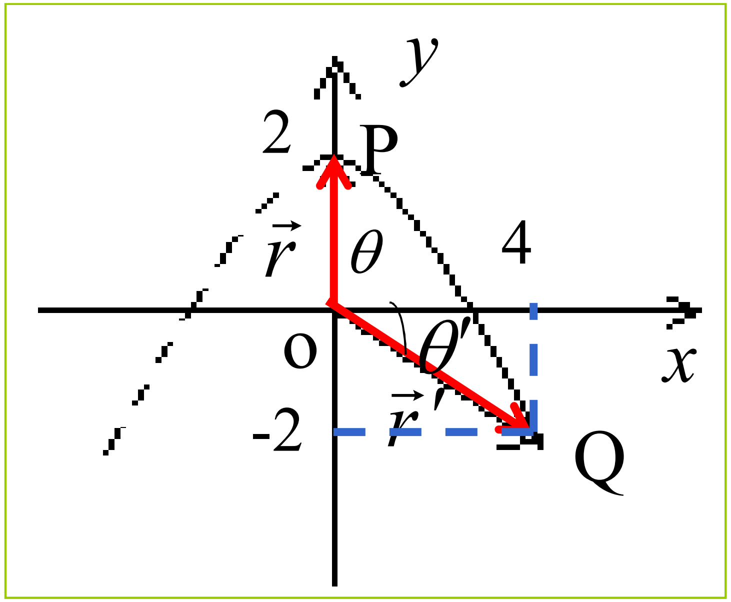
$$=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}$$

例5： 已知： $\vec{r} = 2t\,\vec{i} + (2 - t^2)\,\vec{j} \quad \text{(SI)}$

求：　**2秒末加速度的大小**

解：



$$\vec{r} = 2t\,\vec{i} + \left(2 - t^2\right)\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = 2\vec{i} - 2t\,\vec{j}$$

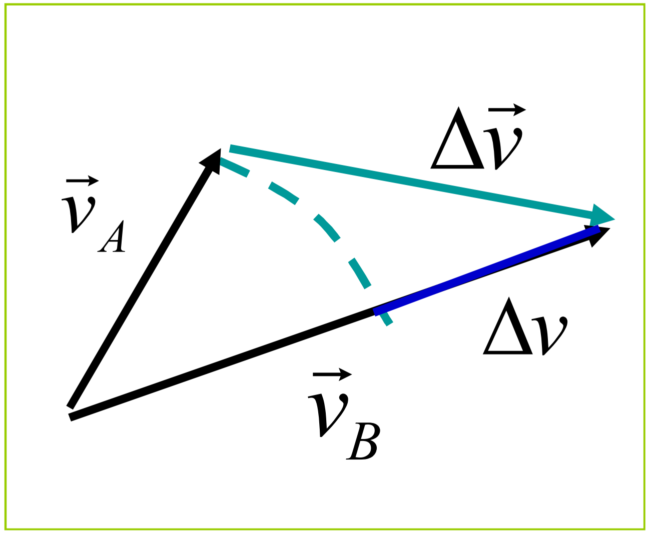
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -2\vec{j}$$

$\boldsymbol{a}$ **=2** $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 沿 **-*y*** 方向，与时间无关。

思考：

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad ?$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad ?$$



$$\therefore \left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

小结

描述质点运动的基本物理量

位置： 位矢 $\vec{r}, \quad \vec{r}(t)$ 中心

位置变化： 位移 $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

位置变化率： 速度 $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

速度变化率： 加速度 $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

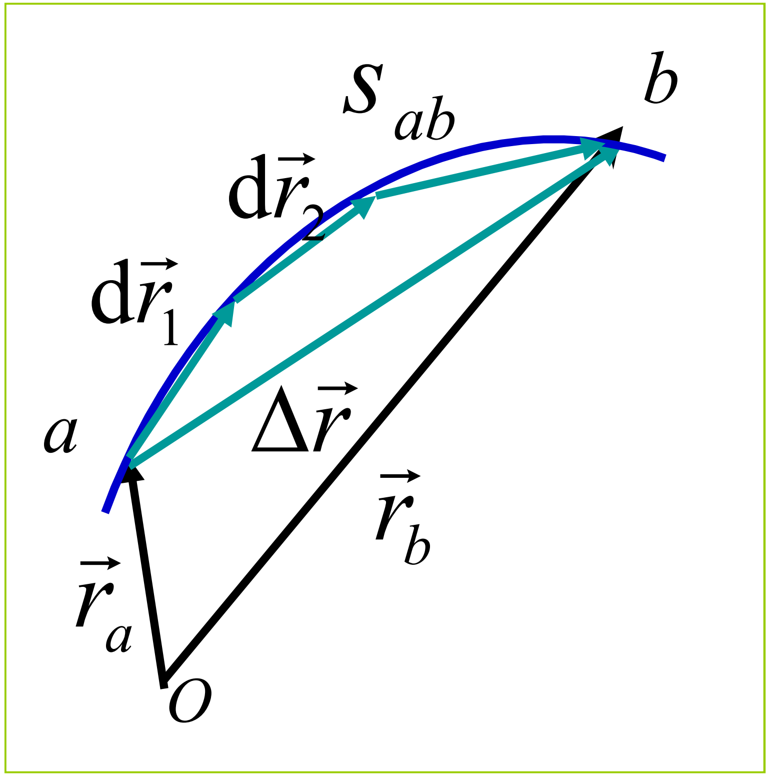
练习：**3.3.1，3.3.2 P47**

3.3.1

(1) $$\left|\int_a^b \mathrm{d}\vec{r}\right| = \overline{ab} = \left|\vec{r}_b - \vec{r}_a\right|$$

(2) $$\int_a^b \left|d\vec{r}\right| = a\overset{\frown}{b} = S_{ab}$$

(3) $$\int_a^b \mathrm{d}\vec{r} = \overrightarrow{ab} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$$



3.3.2

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0 \begin{cases} 静止 \\ 圆周运动 \end{cases}$$

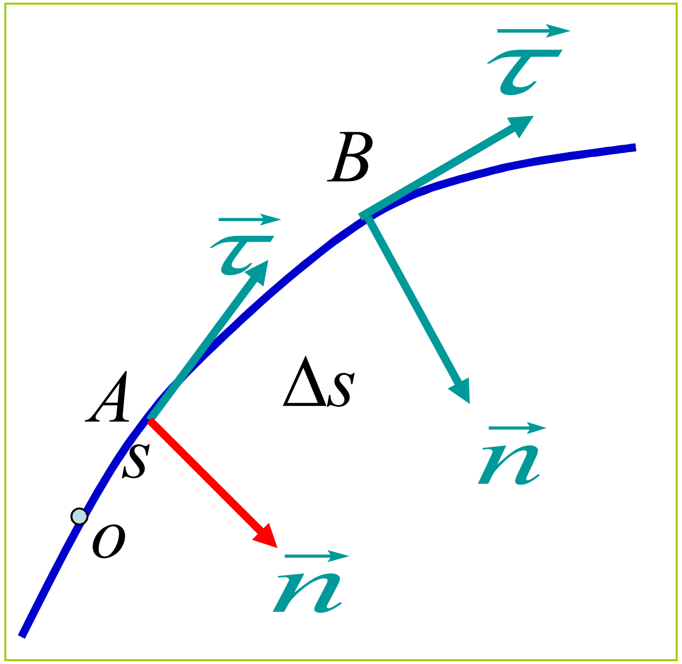
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \quad 匀速率运动$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad 静止$$

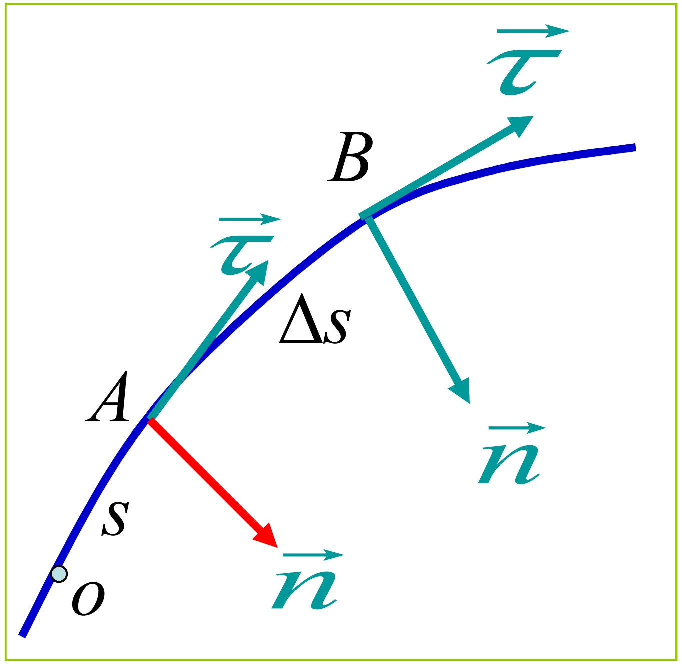
$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad 匀速直线运动$$

二. 质点运动的自然坐标描述

自然坐标系 —— 坐标轴沿质点运动轨道的切向和法向的坐标系，叫做自然坐标系。切向以质点前进方向为正，记做 $\vec{\tau}$，法向以曲线凹侧方向为正，记做 $\vec{n}$ 。



(1) 位置： 在轨道上取一固定点O，用质点距离O的路程长度 s，可唯一确定质点的位置。 位置 s有正负之分。$s=s(t)$

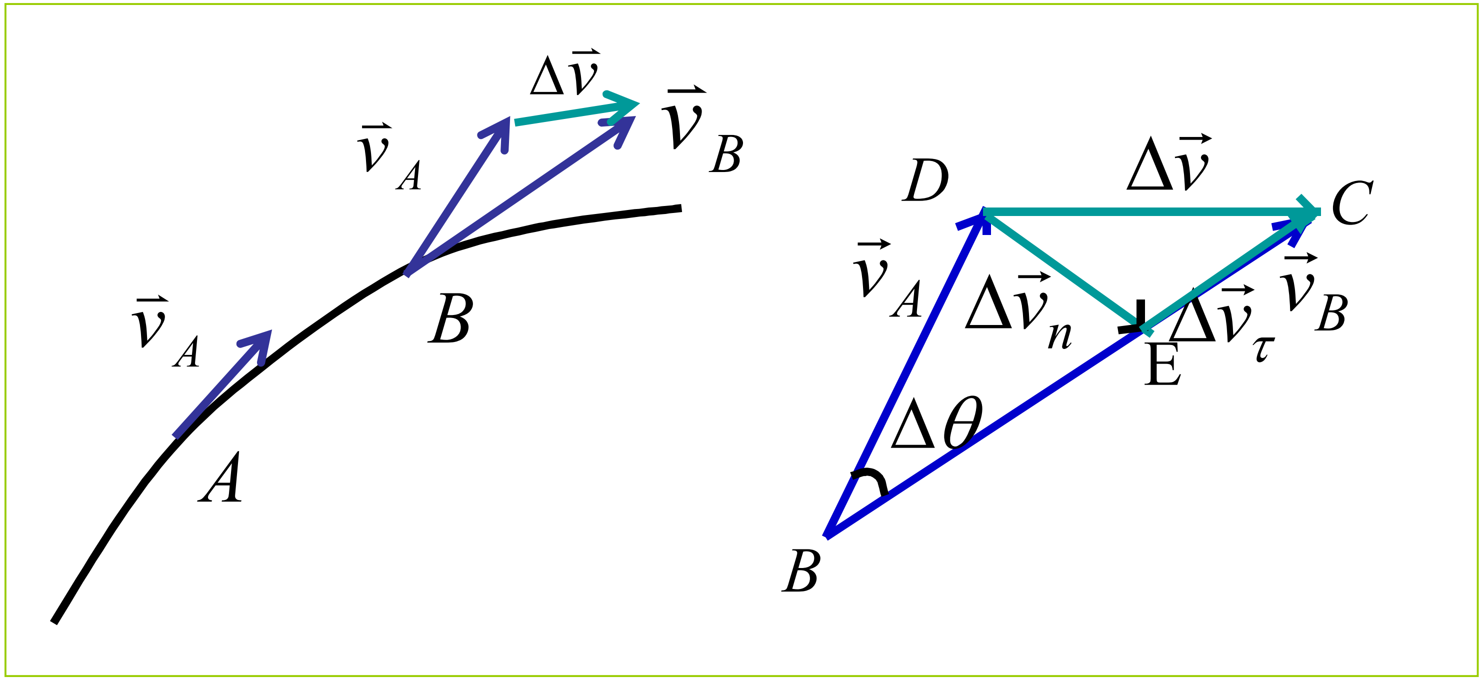


(2) 位置变化： Δs

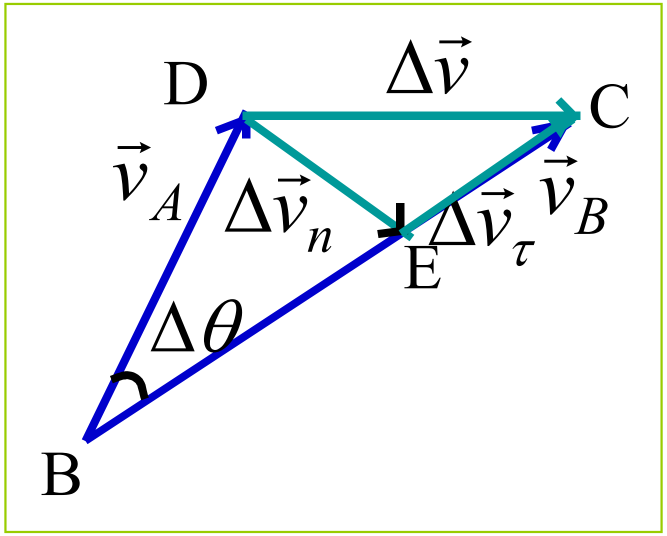
(3) 速度： 沿切线方向。

$$\vec{v} = |\vec{v}|\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$$

*（4） 加速度：



速度的改变为： $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$



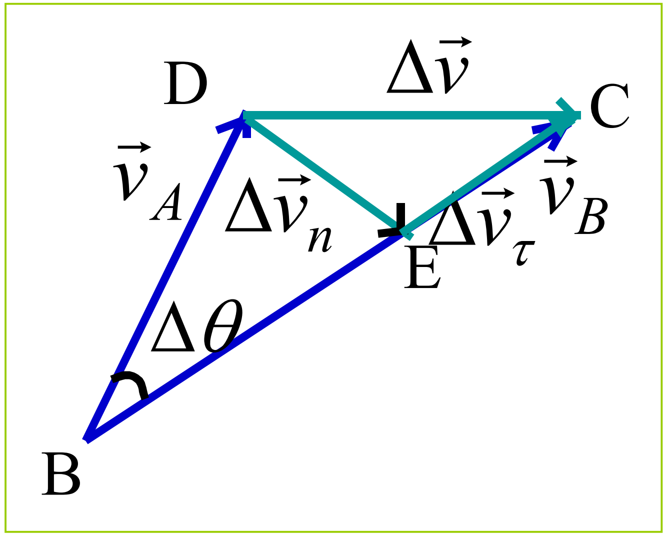
$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$$

$$\therefore\ \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_\mathrm{n}}{\Delta t}$$

第一项： $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\vec{\tau}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$$

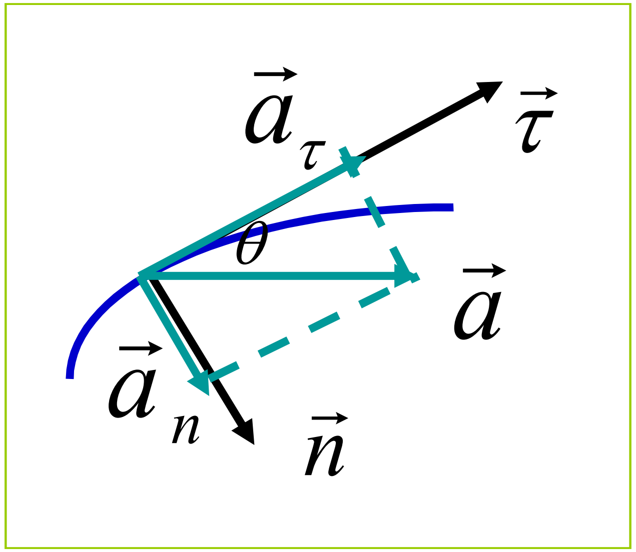
第二项： $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec{v}_\mathrm{n}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v\Delta\theta}{\Delta t}\vec{n}=\frac{v\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{n}$$



$$=v\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

ρ → 曲率半径

$$\therefore \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$



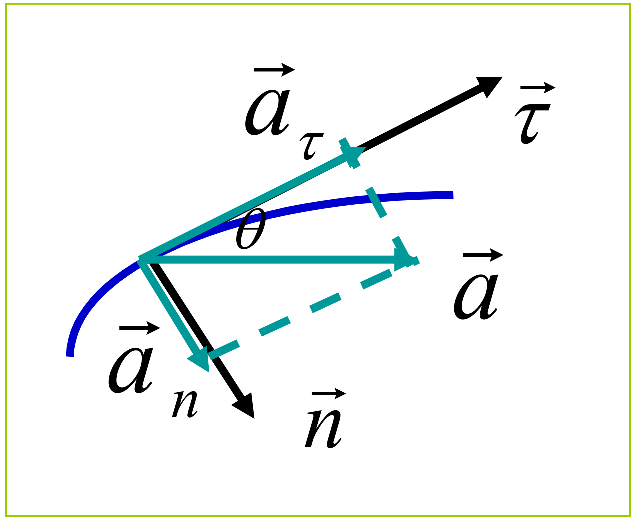
切向加速度： $\vec{a}_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$

描述速度大小改变的快慢，不影响速度的方向。

法向加速度： $\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{\rho}\vec{n}$

描述速度方向改变的快慢，不影响速度的大小。

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$



大小： $|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^{\ 2} + a_n^{\ 2}}$

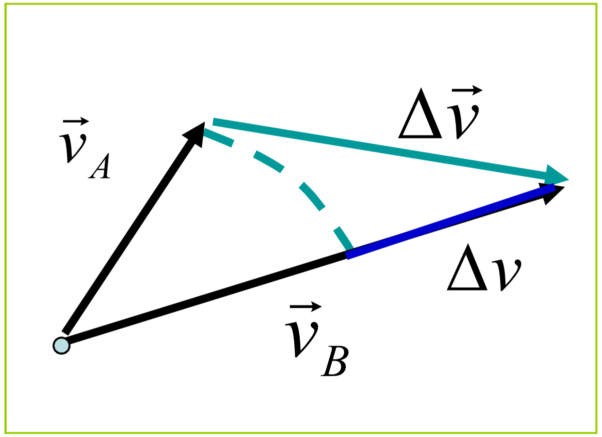
方向： $\vec{a}$与$\vec{a}_\tau$的夹角 $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{a_n}{a_\tau}$

$\vec{a}$ 总是指向曲线凹侧

练习：

1. 讨论 $\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right| = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$?

$$\left|\vec{a}\right| \neq \left|\vec{a}_{\tau}\right|$$



练习2:

判断下列说法是否正确?

1）　a_n 恒等于零的运动是匀速率直线运动。　×

2）　作曲线运动的质点 a_n 不能为零。　×

3）　a_τ 恒等于零的运动是匀速率运动。　√

4）　作变速率运动的质点 a_τ 不能为零。　×

小结：

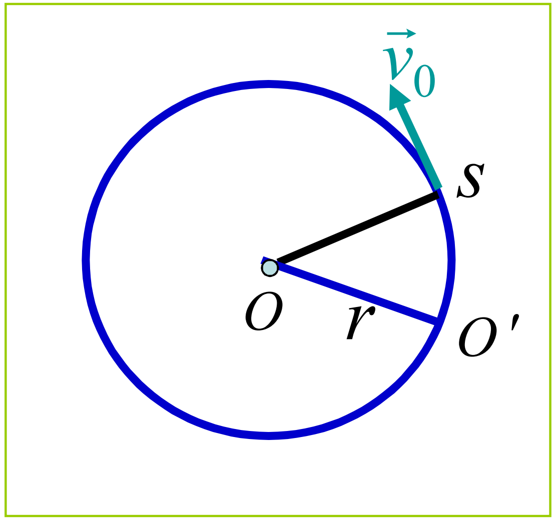
(1) $a_\tau = 0$ 匀速率运动；　$a_\tau \neq 0$ 变速率运动

(2) $a_n = 0$ 直线运动；　$a_n \neq 0$ 曲线运动

例：　设一质点在半径为 r 的圆周上以匀速率 v_0 运动，写出自然坐标系中质点的速度和加速度。

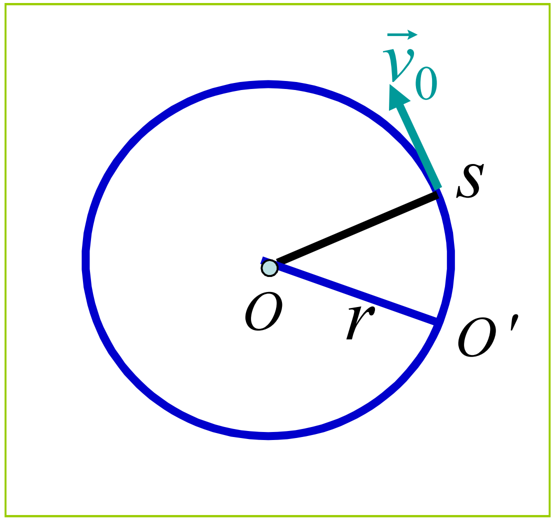
解：建立如图坐标系

以 O' 为自然坐标系的原点和计时起点



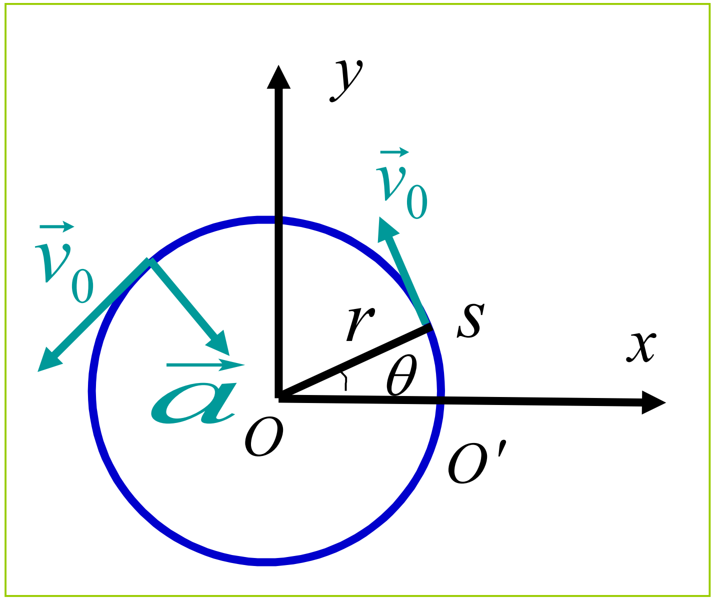
$$v_0 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} = v_0\vec{\tau}$$



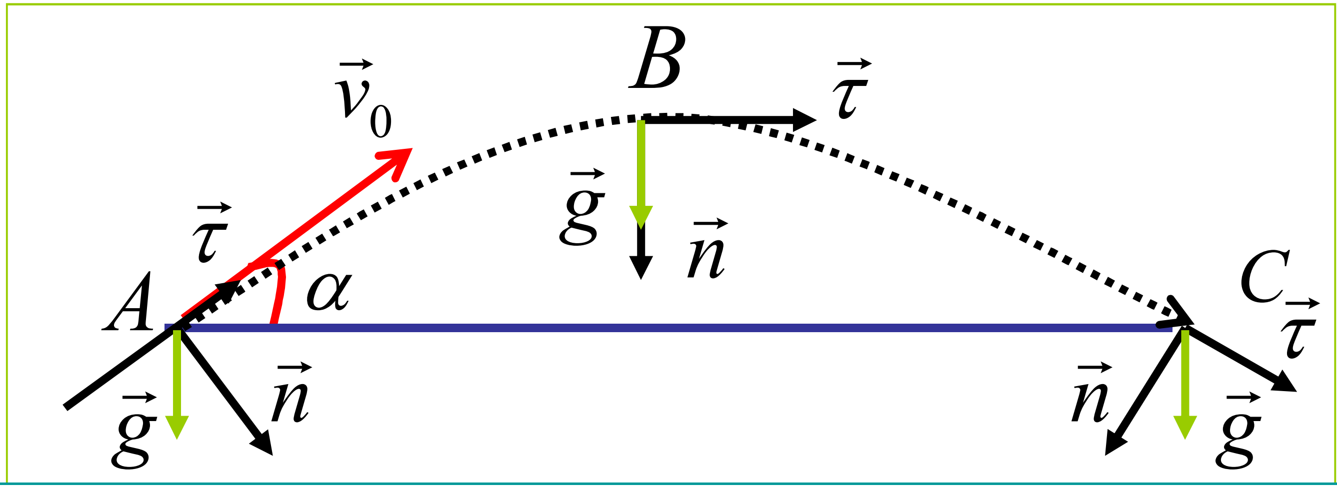
$$\vec{a}=a_\tau\vec{\tau}+a_n\vec{n},\ a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=0$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{v_0^2}{r},\ \vec{a}=\vec{a}_n=\frac{v_0^2}{r}\vec{n}$$



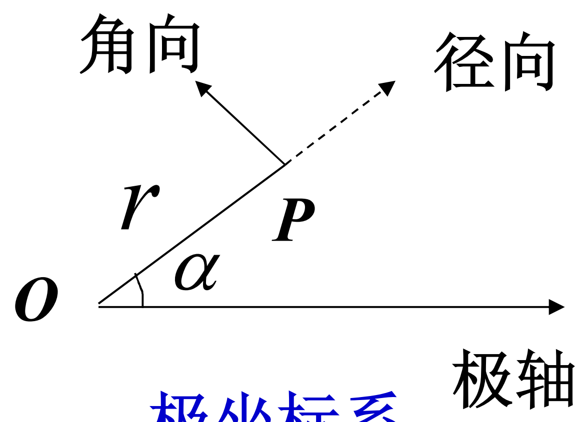
在直角坐标中重做，可发现用自然坐标描述匀速率圆周运动较直角坐标简便。

练习：一物体做抛体运动，已知 v_0, α 讨论：



	A	B	C
$\vec{a}$	$\vec{g}$	$\vec{g}$	$\vec{g}$
a_τ	$-g\sin\alpha$	0	$g\sin\alpha$
a_n	$g\cos\alpha$	g	$g\cos\alpha$
ρ	$\dfrac{v_0^2}{g\cos\alpha}$	$\dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$	$\dfrac{v_0^2}{g\cos\alpha}$

三. 圆周运动的角量描述



极坐标系

线量 —— 在自然坐标系下，基本参量以运动曲线为基准，称为线量。

角量 —— 在极坐标系下，以旋转角度为基准的基本参量，称为角量。

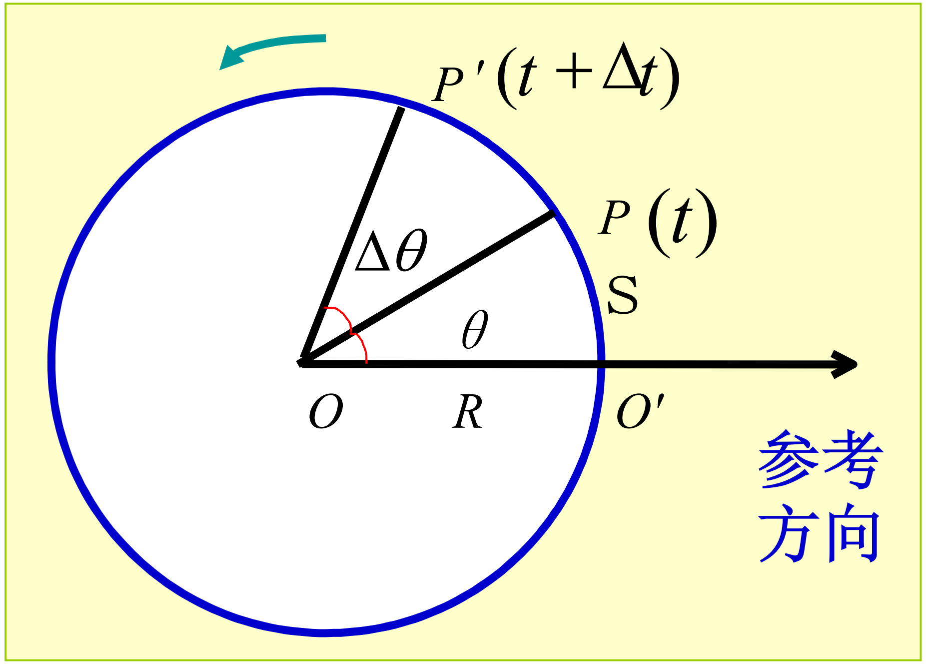
1. 角位置：θ

运动方程：$\theta = \theta(t)$

2. 角位移　$\Delta\theta$

单位：　rad

逆时针为正



3. 角速度

平均角速度： $\overline{\omega}=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

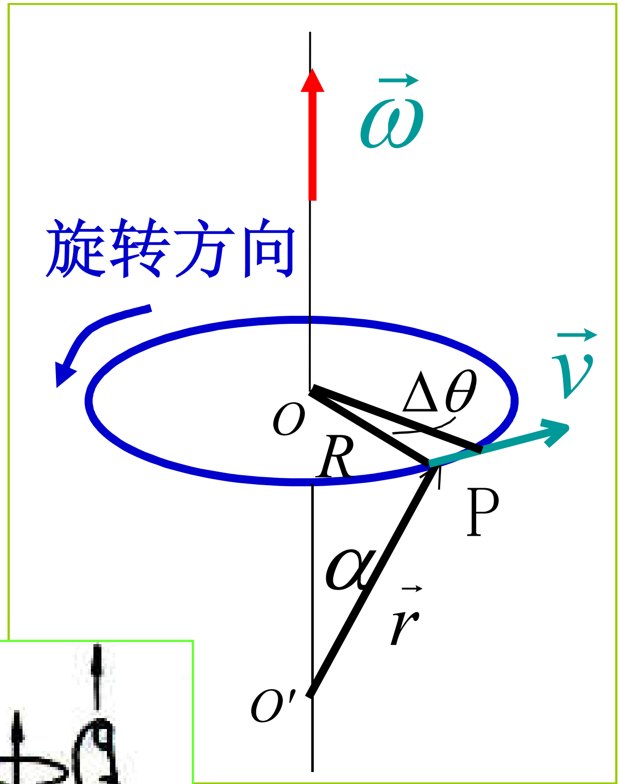
角速度： $\omega=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

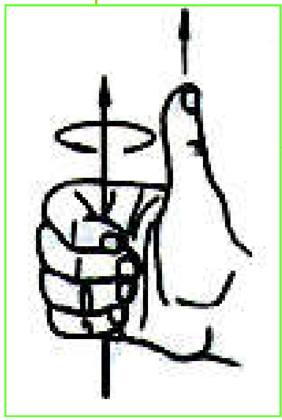
角速度矢量： $\vec{\omega}$　方向沿轴

$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

大小： $v=\omega r\sin\alpha=\omega R$

方向：　右手螺旋法则





4. 角加速度

平均角加速度:
$$\overline{\beta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

角加速度:
$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

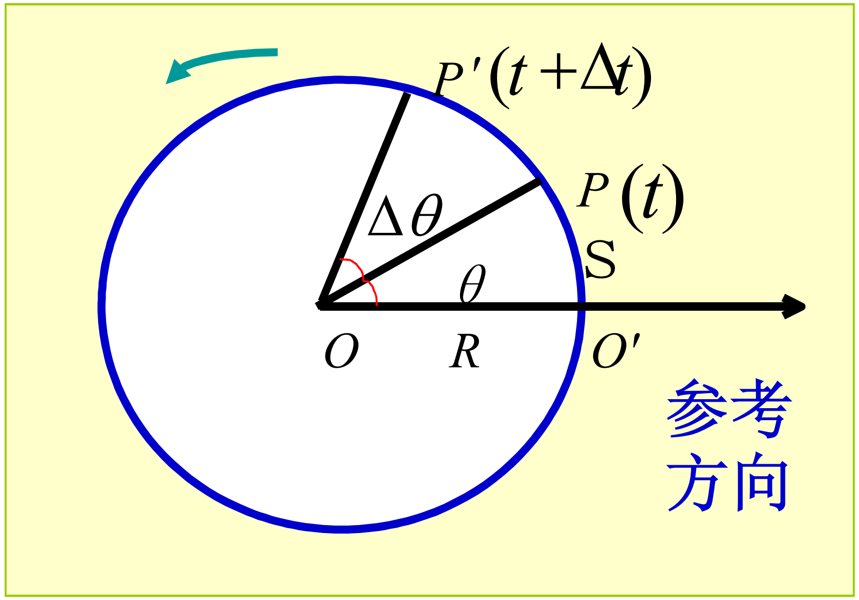
5. 角量与线量的关系

$$s = R\theta$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\beta$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2$$



练习 某发动机工作时，主轴边缘一点作圆周运动方程为 $\theta = t^3 + 4t + 3 \quad (\mathrm{SI})$

(1) $t = 2\mathrm{s}$时，该点的角速度和角加速度为多大?

(2) 若主轴直径$D = 40\ \mathrm{cm}$，求 $t = 1\ \mathrm{s}$ 时, 该点的速度和加速度

解: (1)由运动方程得边缘一点的角速度和角加速度

$$\theta = t^3 + 4t + 3 \quad (\mathrm{SI})$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 3t^2 + 4 \qquad \beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 6t$$

$$t = 2\,\mathrm{s}: \quad \omega = 3\times 2^2 + 4 = 16\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

$$\beta = 6\times 2 = 12\ \ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

(2) 由角量和线量的关系，得边缘一点的速度、切向加速度和法向加速度

$$v=\omega r=\frac{1}{2}\omega D=\frac{1}{2}\left(3t^2+4\right)\times 0.4=0.2\left(3t^2+4\right)$$

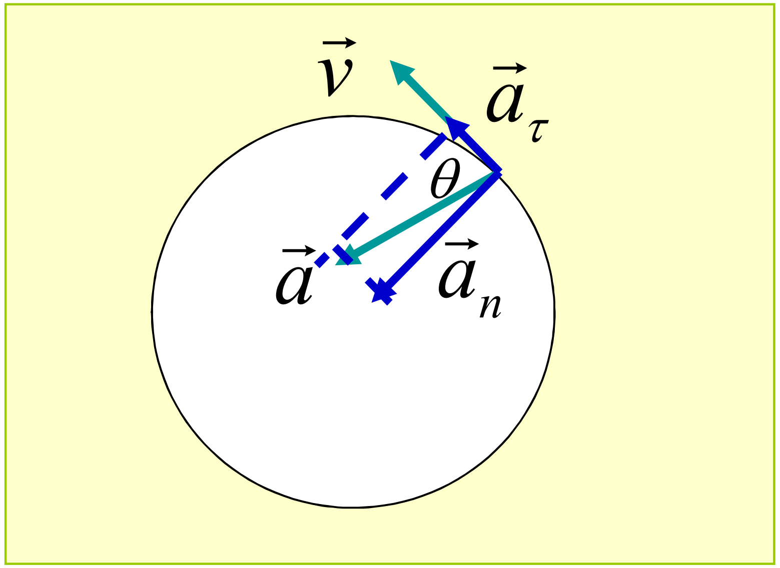
$$a_\tau=\beta r=6t\times 0.2=1.2t$$

$$a_n=\omega^2 r=\left(3t^2+4\right)^2\times 0.2$$

$t=1\mathrm{s}$时，$v=0.2(3+4)=1.4(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$

$$a_\tau=1.2(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

$$a_n=\left(3+4\right)^2\times 0.2=9.8(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$



此时总加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_n{}^2+a_\tau{}^2}=\sqrt{1.2^2+9.8^2}=9.87\,(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

$\vec{a}$与$\vec{v}$的夹角为

$$\theta=\mathrm{arctg}\frac{a_n}{a_\tau}=\mathrm{arctg}\frac{9.8}{1.2}=83.0^\circ$$

四. 刚体的运动

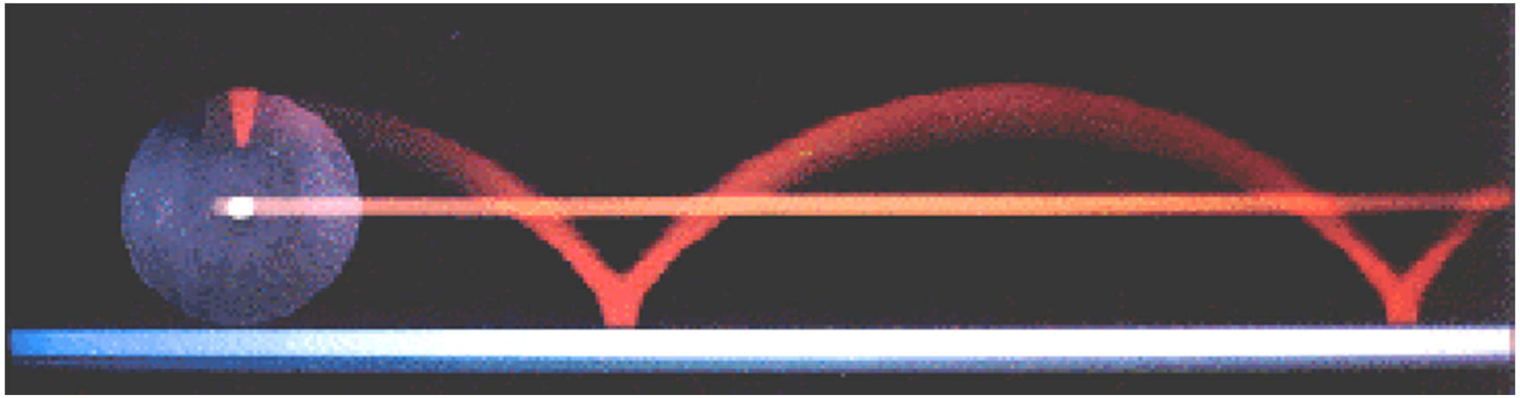
1. 基本形式

平动 —— 刚体运动时,若其上任意两点连线的方位始终不变,这种运动称为刚体的平动。平动时刚体上各质点的速度、加速度、轨道均相同,可归结为质点运动。

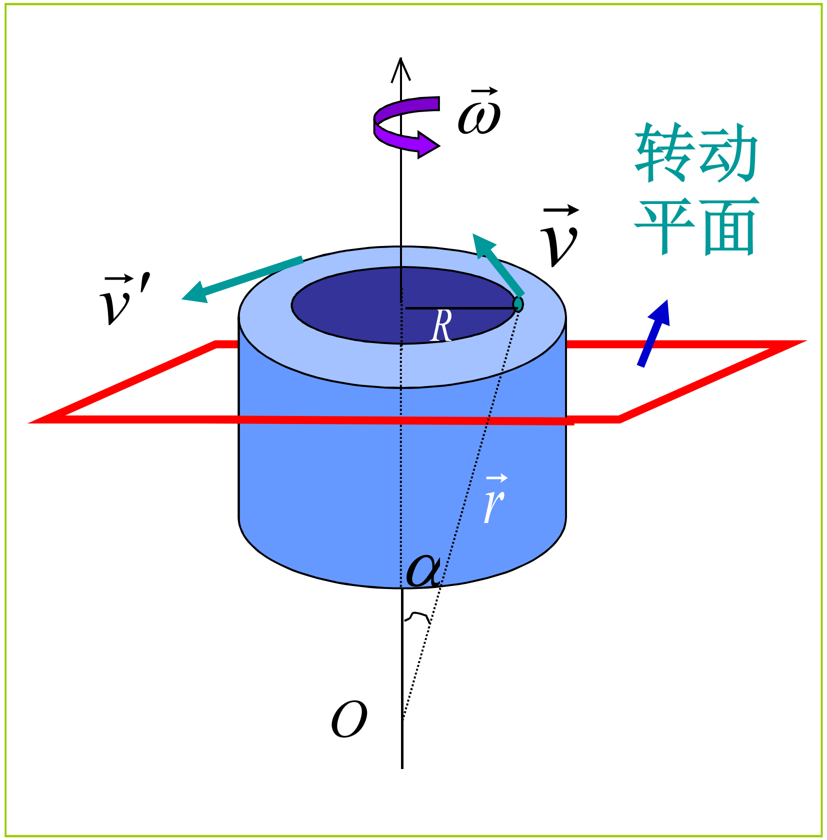
转动 —— 刚体上各质点都绕同一直线做圆周运动,叫做刚体的转动。该直线叫刚体的转轴。

定轴转动:转轴为固定直线的转动叫做刚体的定轴转动。

一般运动 —— 平动与转动叠加。



2. 刚体定轴转动　如何简化？



* 简化为研究转动平面内的运动
* 用角量作整体描述
* 在轴上选正方向，各角量均表示为代数量

$$\theta \quad \Delta\theta \quad \omega \quad \beta$$

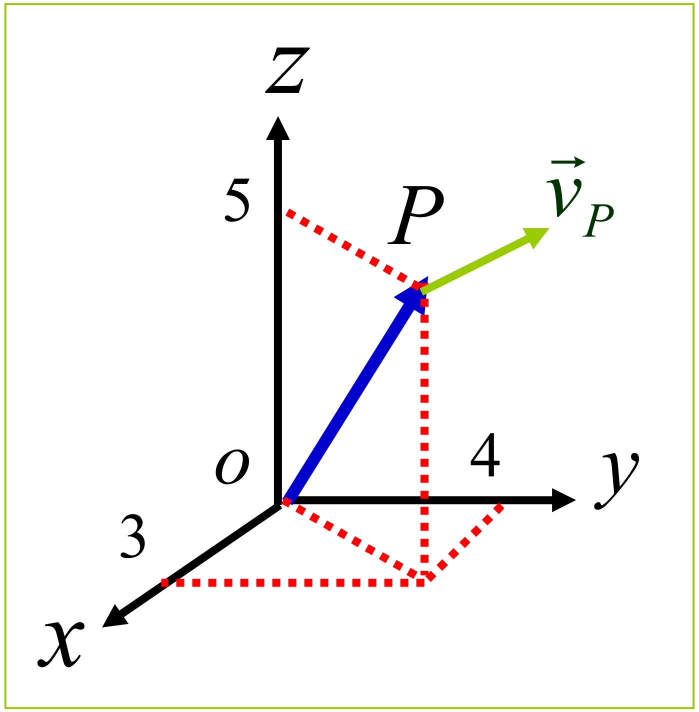
练习　一刚体以每分钟60转速率绕 z 轴逆时针匀速转动，设某时刻刚体上某点 P 的位矢为：

$$\vec{r}_P = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k} \quad \text{cm}$$

该时刻 P 点的速度为：

1. $\vec{v} = 94.2\vec{i} + 125.6\vec{j} + 157.0\vec{k}$
2. $\vec{v} = -25.1\vec{i} + 18.8\vec{j}$
3. $\vec{v} = 25.1\vec{i} + 18.8\vec{j}$
4. $\vec{v} = 31.4\vec{k}$

单位均为 $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$



正确答案：**2**