自动控制原理第 6 章作业解答

1．设某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_o(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

试对该系统进行串联校正，使之具有下列性能指标：系统对单位斜坡输入信号的稳态误差 $e_{ss}\leqslant 1/30$，相角裕度 $\phi_{pm}\geqslant 40^\circ$，增益裕度 $G_M\geqslant 10\text{dB}$，幅穿频率 ω_c 不低于 2rad/s。（在给出的对数坐标中画出校正前后的 Bode 图）。

1. 解：

1）要求对单位斜坡输入信号的稳态误差 $e_{ss}\leqslant 1/30$，则 $K\geqslant 30$，取 $K=30$。

2）画出 $G_o(j\omega)$ 的 Bode 图。

$$G_0(\mathrm{j}\omega)=\frac{30}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}0.1\omega+1)(\mathrm{j}0.2\omega+1)}$$

由 $G_o(j\omega)$ 的 Bode 图（实线）读出：

$$\omega_{c0}=11\text{rad/s}，\ \phi_{\mathrm{pm}0}=-23^\circ，\ \omega_{g0}=7\text{rad}/\text{s}，\ G_{M0}=-10\text{dB}$$

$$（\omega_{c0}=12\text{rad/s}，\ \phi_{\mathrm{pm}0}=-28^\circ，\ \omega_{g0}=7\text{rad}/\text{s}，\ G_{M0}=-10\text{dB}）$$

$G_o(j\omega)$ 的相频特性在 ω_{c0} 附近(略大于 ω_{c0} 处)下降太快，用超前校正一般无效。

3）采用滞后校正

$$G_c(s)=\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}=\frac{1}{\alpha}\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}\qquad \alpha>1$$

根据 $\phi_{pm}\geqslant 40^\circ$，选 ω_c：

考虑到加入校正环节后会使幅穿频率处的相频下降，因此，幅穿频率应选在

$$\Phi_M^*=40^\circ+\Delta\varphi\left(=\varphi_0(\omega_c)+180^\circ\right)$$

取 $\Delta\varphi=5°$， $\Phi_M^*=45^\circ$

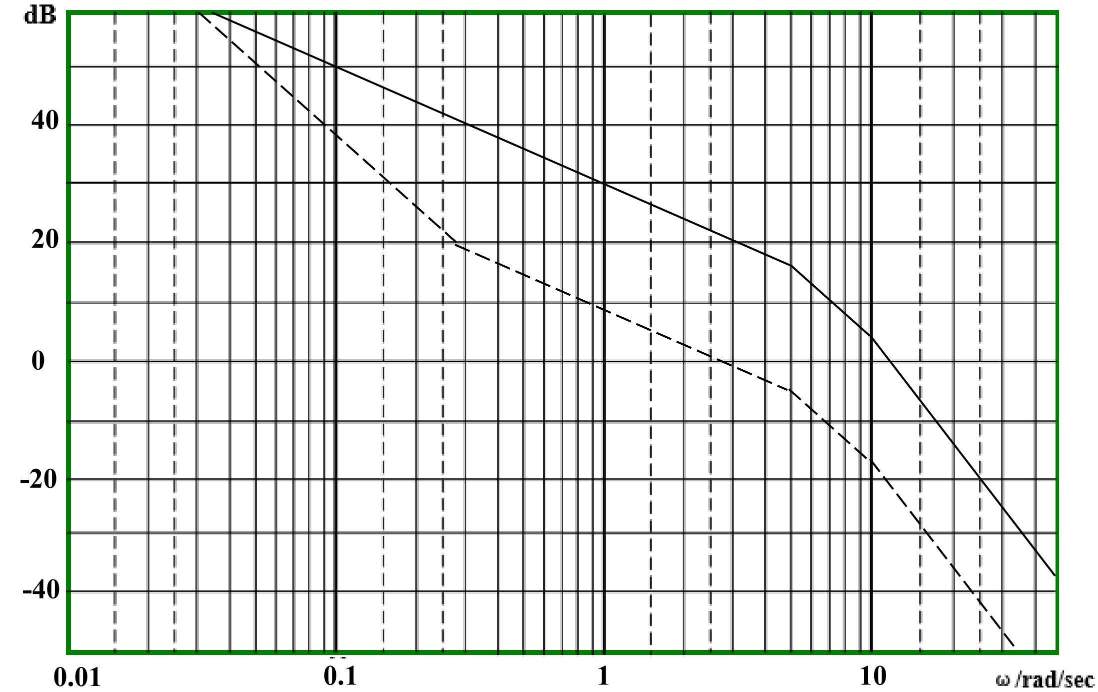
$$\varphi_0(\omega)=\Phi_M^*-180^\circ=45^\circ-180^\circ=-135^\circ$$

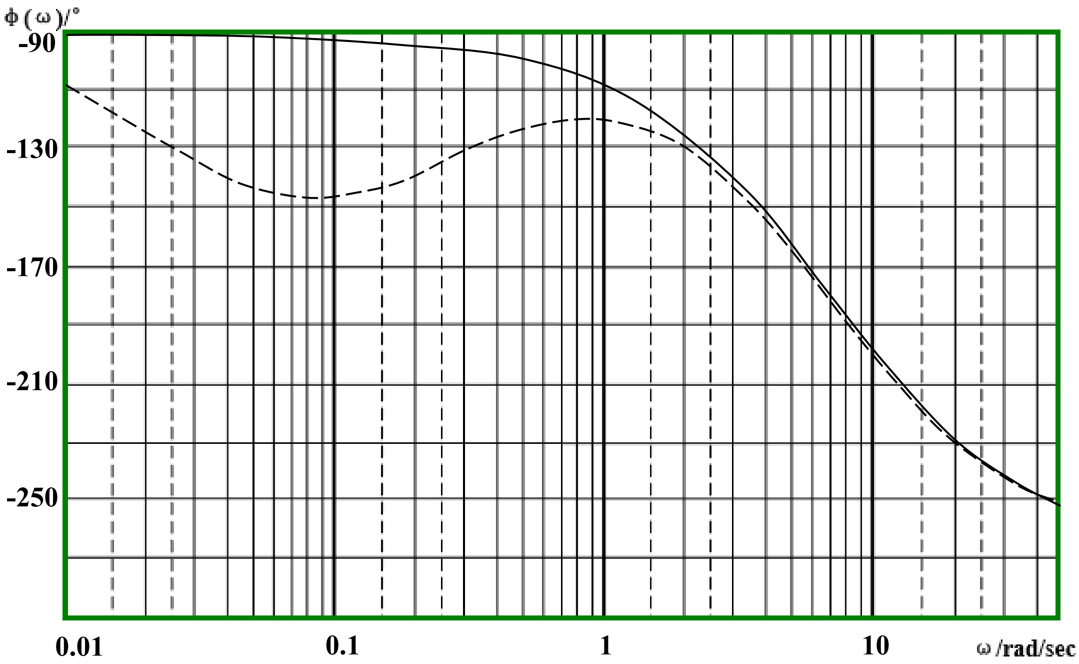
$\omega_c=2.8\text{rad/s}$

确定衰减度 α：

$$20\lg\left|G_0(j\omega)\right|_{\omega=2.8}=-20\lg\frac{1}{\alpha}=21\text{dB}\ \ (\text{或}20\text{dB})$$

故 $\alpha=11$ (或10)





确定转折频率：

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{10}\omega_c=0.28 \quad \rightarrow T=3.57$$

所加校正环节传函为：

$$G_c(s)=\frac{1+3.57s}{1+39.3s} \quad （或G_c(s)=\frac{1+3.57s}{1+35.7s}）$$

校正后开环传函为

$$G(s)=G_c(s)G_0(s)=\frac{30(3.57s+1)}{s(0.1s+1)(0.2s+1)(39.3s+1)}$$

$$（或G(s)=G_c(s)G_0(s)=\frac{30(3.57s+1)}{s(0.1s+1)(0.2s+1)(35.7s+1)}）$$

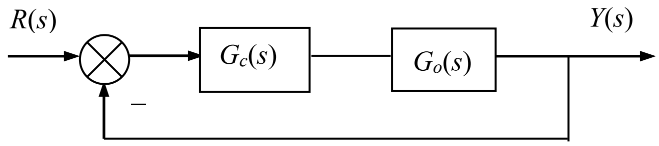
画出校正后的 Bode 图(虚线)。

4）检验性能指标：

$K_v=30\text{s}^{-1}$，$\omega_c=2.8\text{rad/s}$，$\phi_{pm}=40^\circ$ $\omega_g=6.8\text{rad/s}$，$G_M=10\text{dB}$

满足要求。

2．控制系统框图如下图所示，试确定串联校正环节$G_c(s)$。



其中 $G_o(s)=\dfrac{10}{s(s+1)}$，要求校正后系统的相位裕量 $\phi_{pm}\geqslant 40°$，$\omega_c\geqslant 4rad/s$，$K_v\geqslant 12s^{-1}$。（在给出的对数坐标中画出校正前后的 Bode 图）。

解：1) 根据对静态速度误差系数的要求，确定系统的附加开环增益 K_c

$$K_v=\lim_{s\to 0}s\left[K_cG_o(s)\right]=\lim_{S\to 0}\frac{10K_c}{s+1}=10K_c\ge 12$$

即：$K_c\geqslant 1.2$，取 $K_c=1.2$

2) 画出$K_cG_0(j\omega)$的 Bode 图

$$K_cG_o(j\omega)=\frac{12}{j\omega(j\omega+1)}$$

由 Bode 图（实线）上读出：

$\omega_{c0}=3.5\text{ rad/s}$，$\Phi_{pm0}=15^\circ$，$\boldsymbol{\omega_{g0}=\infty}$，$\boldsymbol{G_{M0}=\infty}$

相角裕度达不到指标要求，要使相角裕度大于等于 40°，需加入超前校正网络。

3) 确定采用超前校正网络

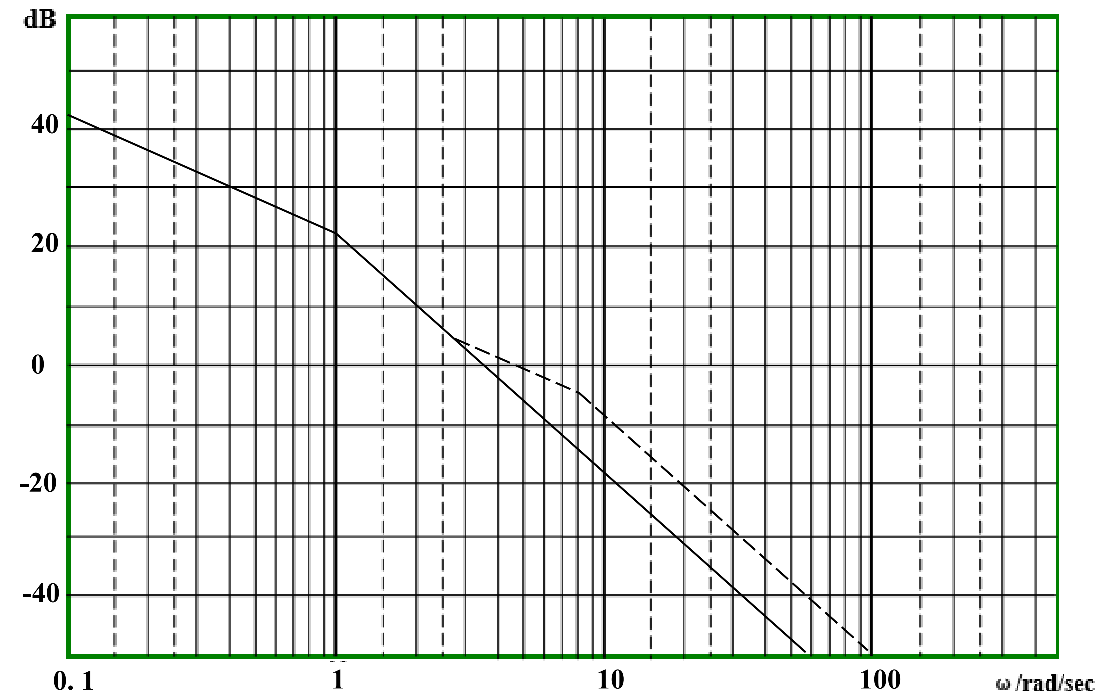
$$G_c(s)=K_cG_c{}'(s)=K_c\frac{1+Ts}{1+\beta Ts}\qquad \beta<1$$

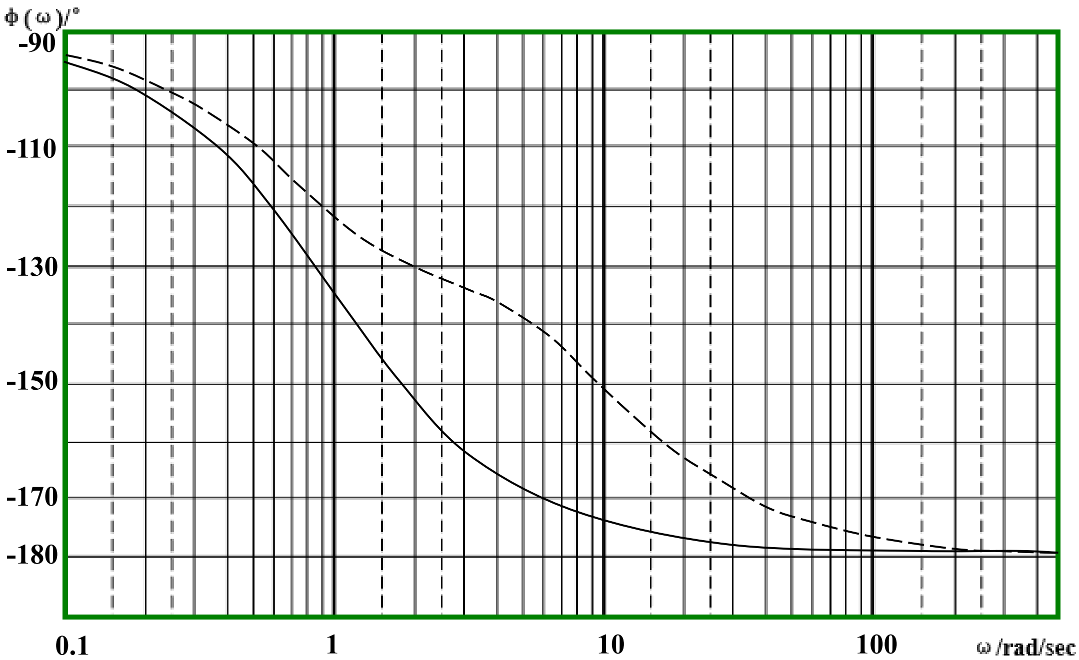
(1) 超前装置提供的超前角φ_m为

$$\varphi_\text{m}=\Phi_{pm}-\Phi_{pm0}+\Delta\varphi=40^\circ-15^\circ+5^\circ=30^\circ$$

(2) 确定衰减系数β

$$\beta=\frac{1-\sin\varphi_m}{1+\sin\varphi_m}=\frac{1-0.5}{1+0.5}=0.334$$





(3) 确定校正后系统的幅穿频率 ω_c

为充分利用超前相角,令最大超前角处的频率 ω_m 等于 ω_c 。

$$10\lg\frac{1}{\beta}=10\lg\frac{1}{0.334}=4.8dB$$

故将 ω_m 选在 $K_cG_0(j\omega)$ 的幅值为-4.8dB 处。

即

$$20\lg\left|K_cG_0\left(j\omega\right)\right|=-4.8$$

由图读出 $\omega_c=\omega_m=4.6\ \text{rad/ s}$

(4) 确定 T

$$T=\frac{1}{\omega_m\sqrt{\beta}}=\frac{1}{4.6\times\sqrt{0.334}}=0.376$$

4) 校正网络的传递函数

$$G_c(s)=1.2\frac{1+0.376s}{1+0.125s}$$

5) 校正后系统的开环传函

$$G(s)=G_0(s)G_c(s)=\frac{12(1+0.376s)}{s(1+s)(1+0.125s)}$$

6) 画出校正后系统的 Bode 图（虚线）并检验性能指标。

$$K_v=12\ 秒^{-1},\ \omega_c=\omega_m=4.6\ \text{rad/ s},\ \ \varPhi_{pm}=42^\circ,\omega_g=\infty,G_M=\infty$$

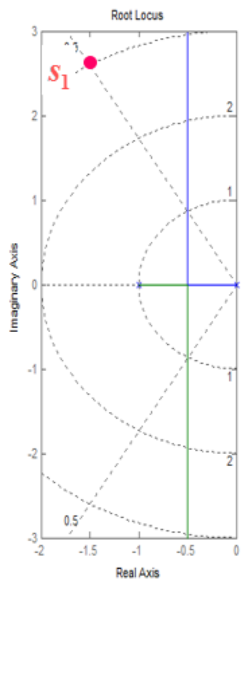
达到性能指标要求。

3．设某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_o(s)=\frac{10}{s(s+1)}$$

试对该系统进行串联校正，要求校正后系统的闭环主导极点满足 $\zeta=0.5$，$\omega_n=3\text{s}^{-1}$。（在给出的坐标图中画出校正前后的根轨迹）。

解：1）画出校正前原系统的根轨迹：



期望的闭环主导极点：

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n=-1.5\pm j2.6$$

期望的闭环主导极点位于原系统根轨迹的左侧，故缺个超前角，应串联超前校正网络进行校正。

2）确定超前校正网络

$$G_c(s)=K_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}\qquad \alpha<1$$

(1)确定超前相位角

$$\begin{aligned}\angle G_0(s_1)&=[-\angle s-\angle(s+1)]_{s=s_1}\\&=-\angle(-1.5+j2.6)-\angle(-0.5+j2.6)\\&=-220.9^\circ\end{aligned}$$

$$\phi_c=\angle G_c(s_1)=-180^\circ-\angle G_0(s_1)=40.9^\circ$$

(2) 确定超前校正网络的零点和极点。(即确定α、T)

选择T, 以使α为最大值。

$$\delta=\frac{1}{2}\left(180^{\circ}-\phi_c-\theta\right)=39.55^{\circ}$$

$$\left|Z_c\right|=\frac{1}{T}=\frac{\sin\delta}{\sin(\delta+\theta)}\omega_n=1.94$$

$$\left|P_c\right|=\frac{1}{\alpha T}=\frac{\sin(\phi_c+\delta)}{\sin\delta}\omega_n=4.65$$

(3) 确定K_c

由幅值条件$\left|G_c(s)G_0(s)\right|_{s=s_1}=1$

$$K_c=1.234$$

(4) 超前校正网络：

$$G_c(s)=K_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}=1.234\cdot\frac{s+1.94}{s+4.65}$$

3）检查s_1是否为主导极点

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{12.34(s+1.94)}{(s+1.5-j2.6)(s+1.5+j2.6)(s+2.65)}$$

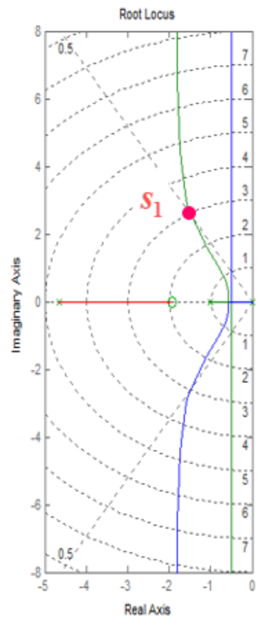
第三个闭环极点为-2.65,与闭环零点-1.94很靠近,作用相消，对动态响应影响很小。

可以认为$s_{1,2}=-1.5\pm j2.6$是主导极点。

4）画出校正后系统根轨迹，验算性能指标。

只考虑主导极点，将三阶系统按二阶无零点欠阻尼系统近似估算。

满足性能指标要求。



4. 设某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_o(s)=\frac{2.688}{s(s+1)(s+4)}$$

试对该系统进行串联校正，使之满足以下性能指标：超调量小于等于16.3%，调节时间小于等于12s(Δ=0.02) ，速度误差系数 K_v ≥5 s^{-1}。（在给出的坐标图中画出校正前后的根轨迹）。

解：1）对原系统进行分析，根据 $G_o(s)=\dfrac{2.688}{s(s+1)(s+4)}$，得

$$T_0(s)=\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}=\frac{2.688}{(s+4.2)(s+0.4+j0.693)(s+0.4-j0.693)}$$

主导极点为 $s_{01,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-0.4\pm j0.693$，$\zeta_0=0.5$，$\omega_{\mathrm{n}}=0.8$，得

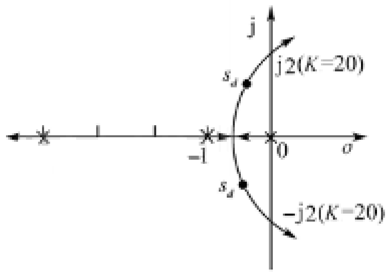
$$P.O.=16.3\%，T_{\mathrm{s}}=10\mathrm{s}\ \ (\Delta=0.02)$$

满足动态性能指标 $\mathrm{P.O.}\leqslant 16\%$，$T \leqslant 10\mathrm{s}\ \ (\Delta=0.02)$。

$$K_{v0}=\lim_{s\to 0} sG_o(s)=\lim_{s\to 0} s\times\frac{2.688}{s(s+1)(s+4)}=0.672$$

不满足稳态性能指标 K_v ≥5 s^{-1}。

2）绘制未校正系统的根轨迹图。



3）由于原系统满足期望的动态性能，因此可设定期望的主导极点为原系统的主导极点，即

$$s_{1,2}=s_{01,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-0.4\pm j0.693$$

4）因为期望的主导极点在原系统的根轨迹上，因此选择滞后校正改善稳态特性。

5）原系统在期望主导极点处的增益和稳态速度误差系数为：

$$K\big|_{s=s_{1,2}}=K_0=2.688$$

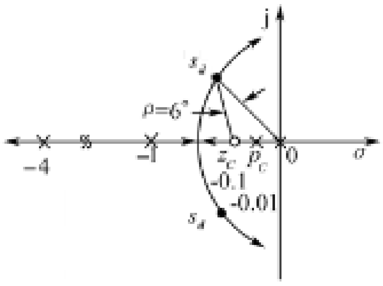
$$K'_{v0}=K_{v0}=0.672s^{-1}$$

则

$$\alpha=\frac{K_v}{K'_{v0}}=\frac{5}{0.672}=7.44$$

为留有余量，取 $\alpha = 10$

6）由根轨迹可得 $-z = -0.1$，



则 $-p = \dfrac{-z}{\alpha} = -0.01$

$$G_c(s) = K_c \frac{s+0.1}{s+0.01}$$

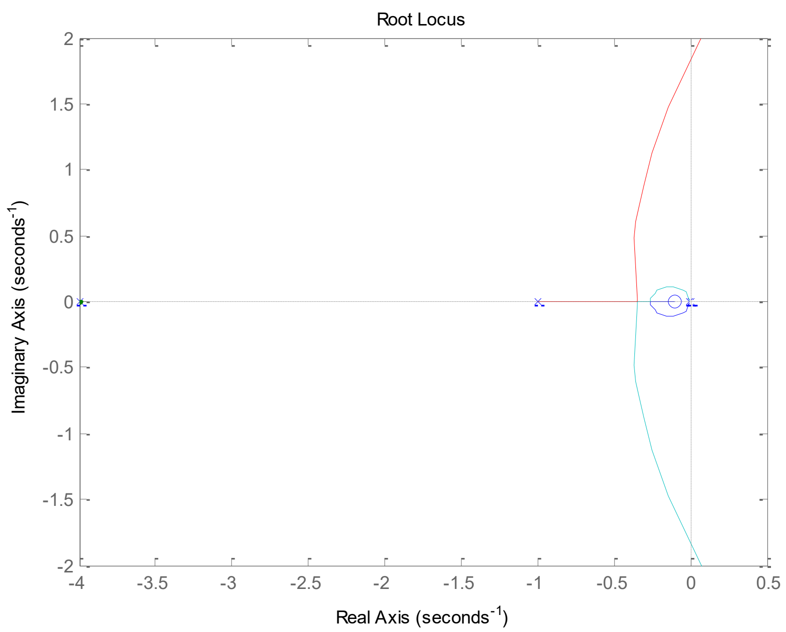
7）校正后系统的开环传递函数为：

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{K_c \times 2.688(s+0.1)}{s(s+1)(s+4)(s+0.01)} = \frac{K(s+0.1)}{s(s+1)(s+4)(s+0.01)}$$

画出校正后系统的根轨迹图。

假设超调量不变，则 $\zeta = 0.5$，由校正后系统的根轨迹图可得：

实际的主导极点为：$s'_{1,2} = -0.36 \pm j0.61 \Rightarrow \zeta = 0.5$，$\omega_n = 0.72$



校正后系统的根轨迹图

8）确定增益 K_c

$$\left| K_c \times \frac{s+0.1}{s+0.01} \times \frac{2.688}{s(s+1)(s+4)} \right|_{s=-0.36+j0.61} = 1 \quad \Longrightarrow \quad K_c = 0.946$$

9）滞后校正装置：$G_c(s)=K_c\times\dfrac{s+0.1}{s+0.01}=\dfrac{0.946(s+0.1)}{s+0.01}$

经检验闭环极点 $s_{1,2}'$ 是校正后系统的闭环主导极点。

10）校正后系统性能：

$P.O.=16.3\%$，$T_s=11\text{s}\ (\Delta=0.02)$

$$K_v=\lim_{s\to 0}sG_c(s)G_o(s)=\lim_{s\to 0}s\times\frac{0.946(s+0.1)}{(s+0.01)}\times\frac{2.688}{s(s+1)(s+4)}=6.36>5\ \ s^{-1}$$

校正后的系统满足性能指标。

5. （1）列直线方程

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{20lgK\text{-}L(0.2)=\text{-}20\times(lg1\text{-}lg0.2\,)}\\&\mathbf{L(0.2)\text{-}\ L(1)=\text{-}40\times(lg0.2\text{-}lg1\,)}\\&\mathbf{L(1)\text{-}0=\text{-}20\times(lg1\text{-}lg8\,)}\end{aligned}\right\}$$

联立求解得 **K=40**

由图可知校正后系统的开环传函为

$$G_0(s)G_c(s)=\frac{40(s+1)}{s\left(\dfrac{s}{0.2}+1\right)\left(\dfrac{s}{10}+1\right)\left(\dfrac{s}{25}+1\right)}$$

故串联校正环节传递函数为

$$G_c(s)=\frac{40(s+1)\left(\dfrac{s}{2}+1\right)}{\left(\dfrac{s}{0.2}+1\right)\left(\dfrac{s}{10}+1\right)}$$

（2）

$$\begin{aligned}\Phi_M&=180^\circ+\varphi(\omega_c)\\&=180^\circ+\left(-90^\circ+tg^{-1}\omega_c-tg^{-1}\frac{\omega_c}{0.2}-tg^{-1}\frac{\omega_c}{10}-tg^{-1}\frac{\omega_c}{25}\right)\\&=27.9^\circ\end{aligned}$$