1. 每帧电视图像可以认为是由 3×10^5 个像素组成的，所以像素均是独立变化。且每一像素又取128个不同的亮度电平，并设亮度电平等概率出现。问每帧图像含有多少信息量？若现有一广播员在约10000个汉字的字汇中选1000个字来口述此电视图像，试问广播员描述此图像所广播的信息量是多少（假设汉字字汇是等概率分布，并彼此无依赖）？若要恰当地描述此图像，广播员在口述中至少需要用多少汉字？

解：设电视图像每个像素取128个不同的亮度电平，并设电平等概率出现，每个像素的亮度信源为：

$$\begin{bmatrix} X \\ P(a_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_{128} \\ 1/128, & 1/128, & \dots, & 1/128 \end{bmatrix} \quad \sum_{i=1}^{128} P(a_i) = 1$$

得每个像素亮度含有的信息量为：

$$H(X) = \log 128 = 7 \text{ 比特/像素}$$

一帧中像素均是独立变化的，则每帧图像就是离散亮度信源的 无记忆*N*次扩展信源。得每帧图像含有的信息量为：

$$H(X^N)=NH(X)=2.1\times10^6$$ 比特/每帧

广播口述时，广播员是从10000 个汉字字汇中选取的，假设汉字字汇是等概率分布的，则汉字字汇信源是：

$$\begin{bmatrix} Y \\ P(b_j) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1, & b_2, & \ldots, & b_q \\ 1/q, & 1/q, & \ldots, & 1/q \end{bmatrix} \quad \sum_{i=1}^{q} P(b_j)=1, \quad q=10000$$

得该汉字字汇中每个汉字含有的信息量

$$\mathrm{H}(Y)=\log q=\log 10000=13.29$$ 比特/字

广播员口述电视图像是从汉字字汇信源中独立地选取1000个字来描述的。所以，广播员描述此帧图像的信息量为

$$H(Y^N)=NH(Y)=1000\log 10^4=1.329\times10^4$$ 比特/千字

若广播员仍从此汉字字汇信源中独立地选取汉字来描述电视图像，每次口述一个汉字含有信息量是H(Y)，每帧电视图像含有的信息量是 $H(X^N)$，则广播员口述此图像至少需用的汉字数等于

$$\frac{H(X^N)}{H(Y)} = \frac{2.1\times 10^6}{13.29} = 1.58\times 10^5 = 158000 \quad \text{字}$$

2.设8个等概率分布的消息通过传递错误概率为p的BBC进行传递。8个消息相应编成下述码字：

$$M_1=0000,\ M_2=0101,\ M_3=0110,\ M_4=0011,$$

$$M_5=1001,\ M_6=1010,\ M_7=1100,\ M_8=1111,$$

试问（1）接收到第一个数字0与M1之间的互信息。

（2）接收到第二个数字也是0时，得到多少关于M1的附加互信息。

（3）接收到第三个数字仍是0时，又增加多少关于M1的互信息。

（4）接收到第四个数字还是0时，再增加了多少关于M1的互信息。

（5）接收到全部四个数字0000后，获得多少关于M1的互信息。

（6）当p=0时和p=0.5时，以上的结果是多少，这结果说明什么。

解： 信源

$M:$	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
$P(M_i):$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
对应码字：	0000	0101	0110	0011	1001	1010	1100	1111

信道为二元对称无记忆信道，信道传递矩阵为：

$$\begin{bmatrix} \bar{p} & p \\ p & \bar{p} \end{bmatrix}, \quad \bar{p} + p = 1$$

消息M_i与码字一一对应，所以设 $M_i = (x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4})$

其中 $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4} \in [0,1]$ $i = 1, 2, \ldots, 8$

又设接受序列为

$$Y = (y_1 y_2 y_3 y_4) \quad y_1, y_2, y_3, y_4 \in [0,1]$$

（1）接收到第一数字为0，即 $y_1 = 0$ 。那么，接收到第一数字0与 M1之间的互信息为

$$I(M_1; y_1 = 0) = \log \frac{P(y_1 = 0 \mid M_1)}{P\left(y_1 = 0\right)}$$

因为信道是无记忆信道，所以：

$$P(y_1=0|M_1)=P(y_1=0|x_{1_1},x_{1_2},x_{1_3},x_{1_4}=0000)$$

$$=P(y_1=0|x_{1_1}=0)=P(0|0)=\overline{p}$$

同理，得

$$P(y_1=0|M_i)=P(y_1=0|x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})=P(y_1=0|x_{i_1})$$

$$x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4}\in[0,1]\ i=1,2,\ldots,8$$

输出第一个符号是$y_1=0$时，有可能是八个消息中任意一个第一个数字传递送来的。所以

$$P(y_1=0)=\sum_{i=1}^{8}P(M_i)P(y_1=0|M_i)$$

$$=\frac{1}{8}\left[4P(0|0)=4P(0|1)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[4(p+\overline{p})\right]=\frac{1}{2}$$

故得：

$$I(M_1;y_1=0)=1+\log\overline{p}\quad \text{比特}$$

（2）接收到第二个数字也是0时（即$y_2 = 0$），得到关于M1的附加互信息为

$$I(M_1; y_2 = 0 \mid y_1 = 0) = I(M_1; y_1 y_2 = 00) - I(M_1; y_1 = 0)$$

其中 $$I(M_1; y_1 y_2 = 00) = \log \frac{P(y_1 y_2 = 00 \mid M_1)}{P\left(y_1 y_2 = 00\right)}$$

同理，因为信道是无记忆信道，所以

$$\begin{aligned} P(y_1 y_2 = 00 \mid M_i) &= P(y_1 y_2 = 00 \mid x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) \\ &= P(y_1 y_2 = 00 \mid x_{i_1} x_{i_2}) \\ &= P(y_1 = 0 \mid x_{i_1}) P(y_2 = 0 \mid x_{i_2}) \end{aligned}$$

$$x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4} \in \left[0,1\right] \quad i = 1, 2, \ldots, 8$$

得 $$\begin{aligned} P(y_1 y_2 = 00 \mid M_1) &= P(y_1 = 0 \mid x_{1_1} = 0) P(y_2 = 0 \mid x_{1_2} = 0) \\ &= P(0 \mid 0) P(0 \mid 0) = \bar{p}^2 \end{aligned}$$

输出端出现第一个符号和第二个符号都为0（即 $y_1=0$ ，$y_2=0$ ）的概率为

$$P(y_1y_2=00)=\sum_{i=1}^{8}P(M_i)P(y_1y_2=00\,|\,M_i)$$

$$=\frac{1}{8}\big[P(0|0)P(0|0)+P(0|0)P(0|1)+P(0|0)P(0|1)+$$

$$P(0|0)P(0|0)+P(0|1)P(0|0)+P(0|1)P(0|0)+$$

$$P(0|1)P(0|1)+P(0|1)P(0|1)\big]$$

$$=\frac{1}{8}\left[2\overline{p}^2+4\overline{p}p+2p^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}(\overline{p}+p)^2=\frac{1}{4}$$

所以

$$I(M_1;y_1y_2=00)=\log\frac{\overline{p}^2}{\frac{1}{4}}=2(1+\log\overline{p})\quad \text{比特}$$

得附加互信息为：

$$I(M_1;y_2=0\,|\,y_1=0)=1+\log\overline{p}\ \text{比特}$$

（3）接收到第三个数字仍是0（即$y_3=0$）时关于M1的互信息又增加为

$$I(M_1;y_3=0\,|\,y_1y_2=00)=I(M_1;y_1y_2y_3=000)-I(M_1;y_1y_2=00)$$

其中
$$I(M_1;y_1y_2y_3=000)=\log\frac{P(y_1y_2y_3=000\,|\,M_1)}{P(y_1y_2y_3=000)}$$

同理得

$$\begin{aligned}P(y_1y_2y_3=000\,|\,M_i)&=P(y_1y_2y_3=000\,|\,x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\\&=P(y_1y_2y_3=000\,|\,x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3})\\&=P(y_1=0\,|\,x_{i_1})P(y_2=0\,|\,x_{i_2})P(y_3=0\,|\,x_{i_3})\end{aligned}$$

得
$$P(y_1y_2y_3=000\,|\,M_1)=P(0|0)P(0|0)P(0|0)=\bar{p}^3$$

输出端出现前三个符号都为0（即 $y_1y_2y_3=000$ ）的概率。

$$\begin{aligned}P(y_1y_2y_3=000)&=\sum_{i=1}^{8}P(M_i)P(y_1y_2y_3=00\,|\,M_i)\\&=\frac{1}{8}\left[\bar{p}^3+\bar{p}^2p+\bar{p}p^2+\bar{p}^2p+\bar{p}^2p+\bar{p}p^2+\bar{p}p^2+p^3\right]\\&=\frac{1}{8}\left[\bar{p}^3+3\bar{p}^2p+3\bar{p}p^2+p^3\right]=\frac{1}{8}(\bar{p}+p)^3=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

所以得 $$I(M_1;y_1y_2y_3=000)=3(1+\log\overline{p})$$ 比特

得又增加的互信息 $$I(M_1;y_3=0\mid y_1y_2=00)=1+\log\overline{p}$$ 比特

（4）接受到第四个数字还是0时（即 $y_1y_2y_3y_4=0000$）再增加了关于M1的互信息为

$$I(M_1;y_4=0\mid y_1y_2y_3=000)=I(M_1;y_1y_2y_3y_4=0000)-I(M_1;y_1y_2y_3=000)$$

同理，有

$$P(y_1y_2y_3y_4=0000\mid M_i)$$
$$=P(y_1=0\mid x_{i_1})\,P(y_2=0\mid x_{i_2})\,P(y_3=0\mid x_{i_3})\,P(y_4=0\mid x_{i_4})$$
$$x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4}\in\left[0,1\right]\quad i=1,2,\ldots,8$$

$$P(y_1y_2y_3y_4=0000)=\sum_{i=1}^{8}P(M_i)P(y_1y_2y_3y_4=00\mid M_i)$$
$$=\frac{1}{8}\left[\overline{p}^4+6\overline{p}^2p^2+p^4\right]$$

所以

$$I(M_1;y_1y_2y_3y_4=0000)=\log\frac{P(y_1y_2y_3y_4=0000\,|\,M_1)}{P(y_1y_2y_3y_4=0000)}$$

$$=\log\frac{\overline{p}^4}{\frac{1}{8}\left[\overline{p}^4+6\overline{p}^2p^2+p^4\right]}$$

$$=3+4\log\overline{p}-\log(\overline{p}^4+6\overline{p}^2p^2+p^4)\ 比特$$

所以又增加了关于M1的和信息：

$$I(M_1;y_4=0\,|\,y_1y_2y_3y_4=0000)=\log\overline{p}-\log(\overline{p}^4+6\overline{p}^2p^2+p^4)\ 比特$$

（5）接到全部四个数字0000后获得关于M1的互信息等于

$$I(M_1;y_4=0\,|\,y_1y_2y_3y_4=0000)=3+4\log\overline{p}-\log(\overline{p}^4+6\overline{p}^2p^2+p^4)\ 比特$$

（6）当二元对称信道 $p=0$ 和 $p=0.5$ 时得

$$I(M_1;y_1=0)=1+\log\overline{p}=\begin{cases}1\ \ 比特 & (p=0)\\ 0\ \ 比特 & (p=0.5)\end{cases}$$

$$I(M_1; y_2=0 \mid y_1=0) = 1+\log \overline{p} = \begin{cases} 1 \text{ 比特} & (p=0) \\ 0 \text{ 比特} & (p=0.5) \end{cases}$$

$$I(M_1; y_3=0 \mid y_1 y_2=00) = 1+\log \overline{p} = \begin{cases} 1 \text{ 比特} & (p=0) \\ 0 \text{ 比特} & (p=0.5) \end{cases}$$

$$I(M_1; y_4=0 \mid y_1 y_2 y_3=000) = \log \frac{\overline{p}^4}{\overline{p}^4 + 6\overline{p}^2 p^2 + p^4} = \begin{cases} 0 \text{ 比特} & (p=0) \\ 0 \text{ 比特} & (p=0.5) \end{cases}$$

$$I(M_1; y_1 y_2 y_3 y_4=0000) = \begin{cases} 3 \text{ 比特} & (p=0) \\ 0 \text{ 比特} & (p=0.5) \end{cases}$$

以上结果说明，当p=0时，二元对称信道是无干扰信道，从接收到第一个数字0得到关于M1的互信息是1比特。接收到第二个数字0又得到关于M1的1比特信息；接收到第三个数字0又得到关于M1的1比特信息；而接收到第四个数字0时得不到关于M1的任何信息。因为所有关于M1的3比特已经从前三个数字中全部获得了，而且在无扰信道中当接收到前三个数字后就能完全确定所发的Mi了。当p=0.5，这二元对称信道干扰很大，从任何一个数字中都不能获得有关M1的信息，所以接收到Y=(0000)中也不能获得任何关于M1的信息。