第三节 经典统计在理想气体中的应用

一、麦克斯韦分子速率分布定律

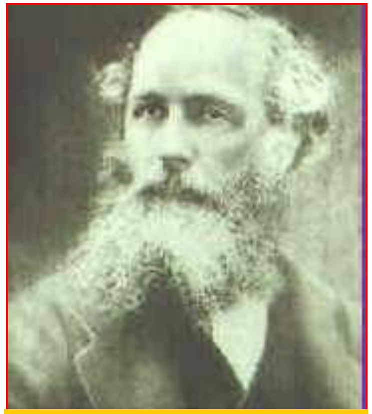
二、玻尔兹曼粒子按势能的分布定律

三、能均分定律 理想气体内能

四、分子碰撞的统计规律

一、麦克斯韦分子速率分布定律

1.定律内容


1831-1879

平衡态下，无外力场作用时，理想气体分子速率在v — v+dv间的概率为：

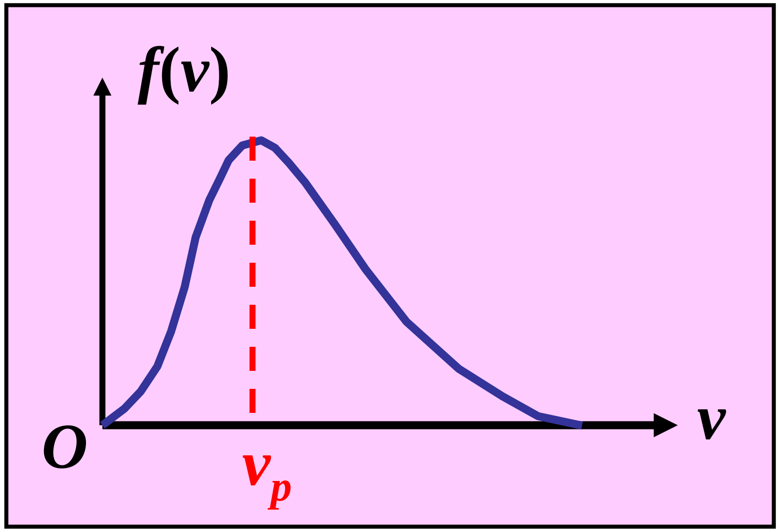
$$\mathrm{d}W=\frac{\mathrm{d}N}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2\mathrm{d}v$$

分布函数，即分子速率在v附近单位速率区间的概率为：

$$\boxed{f(v)=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2}$$

归一化条件：$\boxed{\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v=1}$

2. 分布曲线



讨论：

(1) 气体分子速率：

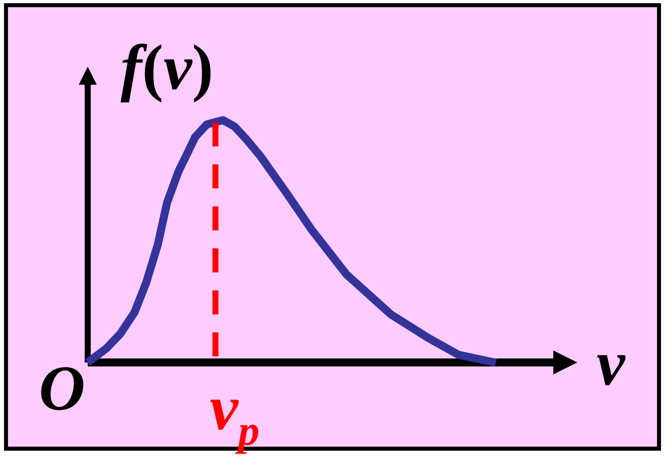
$$0 < v < \infty \quad \left(0 < v < c\right)$$

v 很小和 v 很大的分子所占比率小，具有中等速率分子所占比率大。

令：$\dfrac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v} = 0$ 解得 $\boxed{v_p = \sqrt{\dfrac{2kT}{m}} = \sqrt{\dfrac{2kN_A T}{mN_A}} = \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}}}$

v_p的意义：若将 v 分为相等的速率间隔，则在包含 v_p 的间隔中的分子数最多。

v_p：最概然速率，数量级：室温下$10^2 \sim 10^3 \mathrm{m \cdot s^{-1}}$



最概然速率：

$$\boxed{v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}}$$

思考：是不是速率正好等于 v_p 的分子数最多？

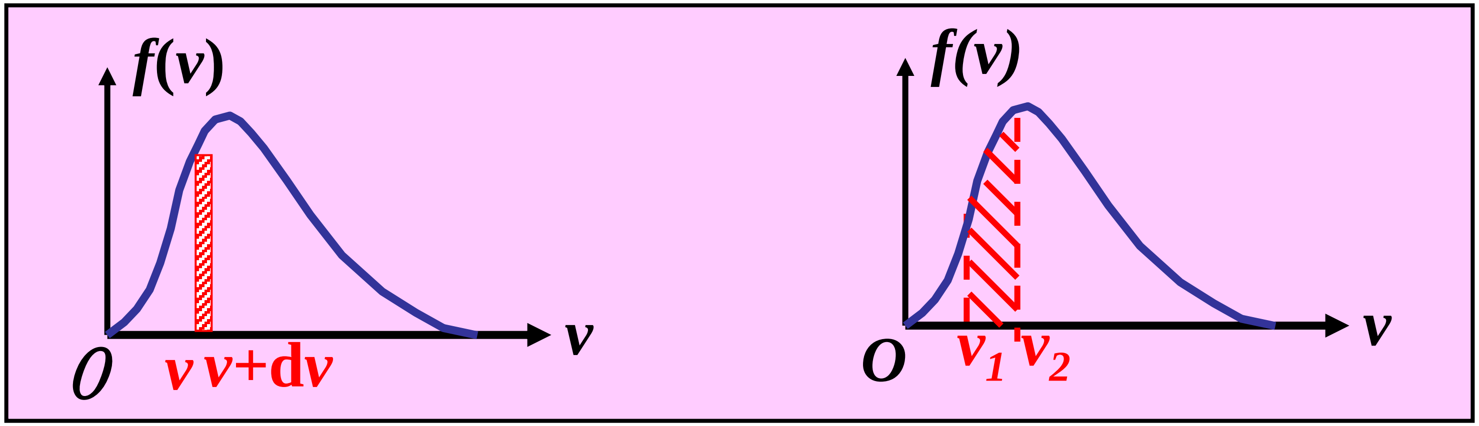
$$f(v_p)=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v},\quad \mathrm{d}N=f(v_p)N\mathrm{d}v$$

若 $\mathrm{d}v=0$ 则 $\mathrm{d}N=0$

即：速率为 v_p 的分子数为0。 因此：讨论它无意义

正确的说法：若将 v 分为相等的速率间隔，则在包含 v_p 的间隔中的分子数最多。

讨论：(2)曲线下的面积:

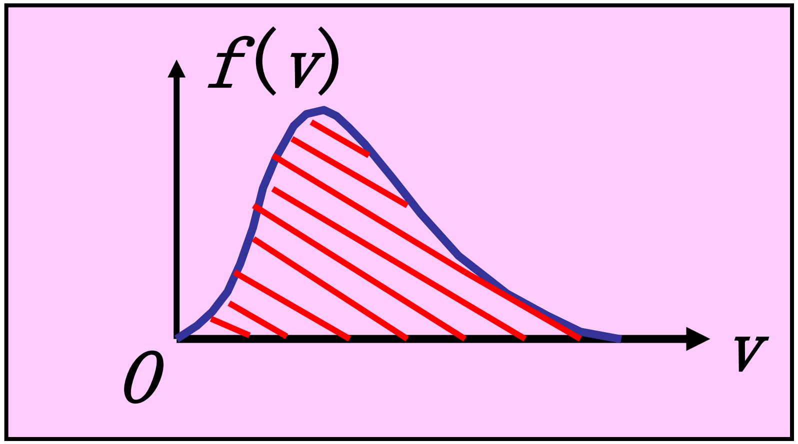


窄条：$f(v)\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}\cdot \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}N}{N}$

表示分子速率在 v——$v+\mathrm{d}v$ 区间内的概率

部分：$\displaystyle\int_{v_1}^{v_2} f(v)\mathrm{d}v = \frac{\int_{v_1}^{v_2}\mathrm{d}N}{N} = \frac{N_{v_1\to v_2}}{N}$

表示分子速率在 v_1—v_2 区间的概率



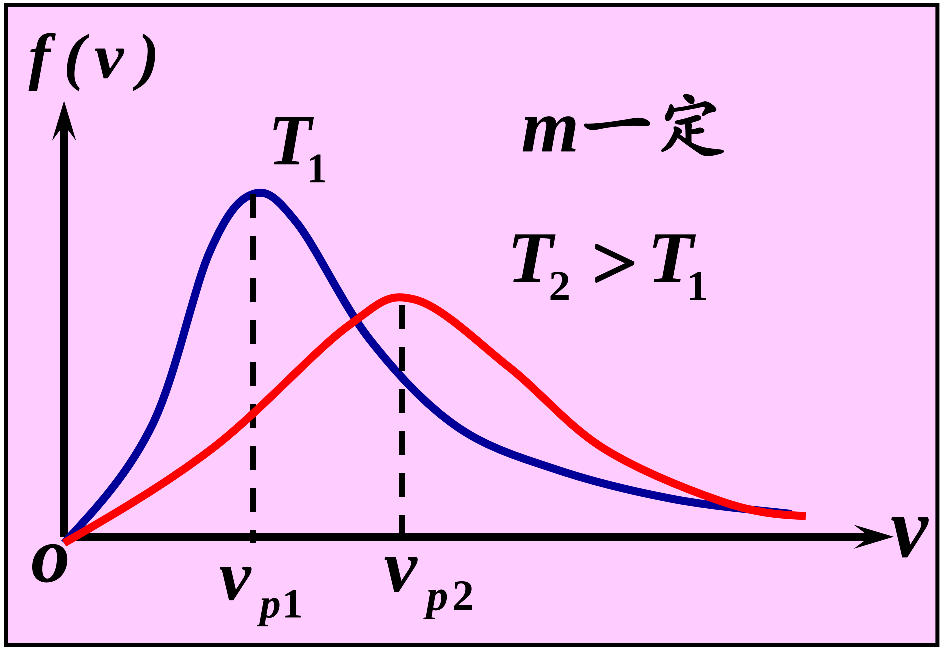
总面积：

$$\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v = \frac{\int_0^\infty \mathrm{d}N}{N} = \frac{N}{N} = 1$$ ……归一化条件

讨论： (3) 分布曲线随 m, T 变化

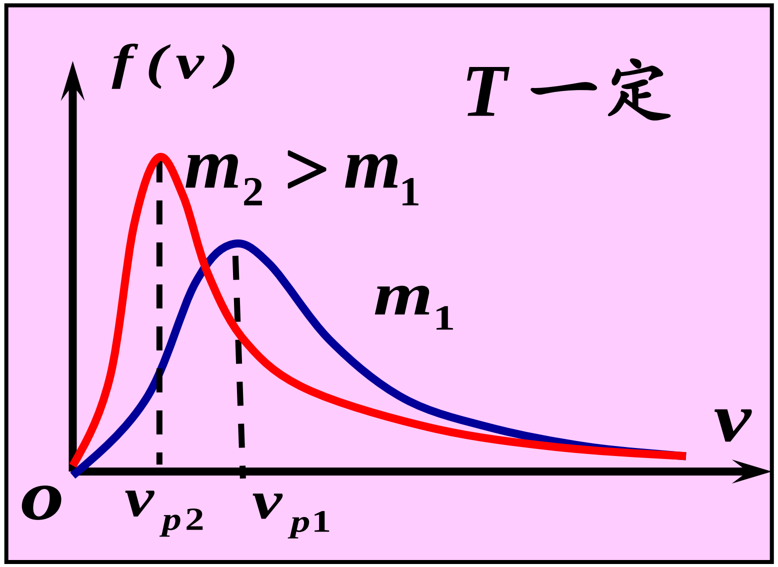
m一定，

$T\uparrow$ $\quad v_p = \sqrt{\dfrac{2kT}{m}}\uparrow$



曲线峰值右移，总面积不变，曲线变平坦。

T 一定， $m\uparrow \quad v_p = \sqrt{\dfrac{2kT}{m}}\downarrow$



曲线峰值左移，总面积不变，曲线变尖锐。

3.分子速率的三种统计平均值

一般情况： $\overline{g(v)} = \int_0^\infty g(v) f(v) \mathrm{d}v$

(1)平均速率

$$\bar{v} = \int_0^\infty v f(v) \mathrm{d}v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx \underline{1.60\sqrt{\frac{RT}{\mu}}}$$

$$\overline{g(v)}=\int_0^{\infty} g(v)f(v)\mathrm{d}v$$

$$\bar{v}=\int_0^{\infty} vf(v)\mathrm{d}v=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\approx 1.60\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

(2)方均根速率

$$\overline{v^2}=\int_0^{\infty} v^2 f(v)\mathrm{d}v=\frac{3kT}{m}$$

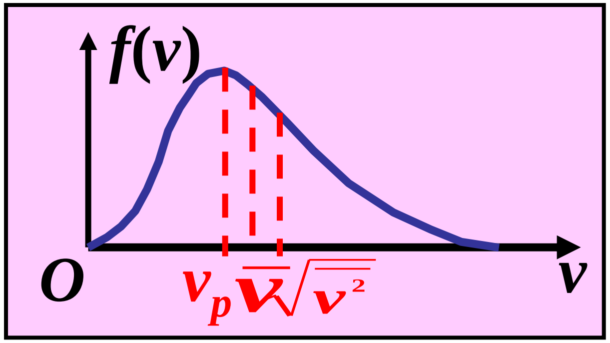
$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}\approx 1.73\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

三者关系：

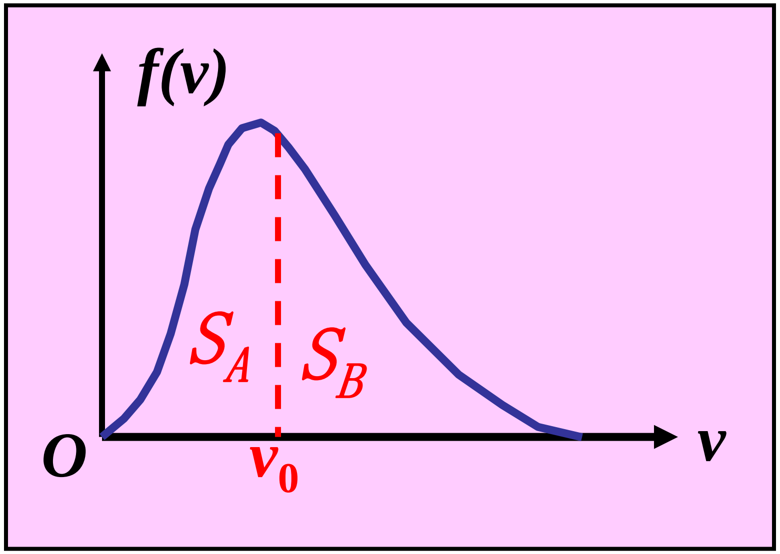
$$v_p<\bar{v}<\sqrt{\overline{v^2}}$$

(3)最概然速率（最可几速率)

$$v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}\approx 1.41\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$



练习1 若$S_A = S_B$，则下列答案中正确的是：



① $v_0 = \bar{v}$

② $v_0 = v_p$

③ $v_0 = \sqrt{\overline{v^2}}$

④ $N_{0—v_0} = N_{v_0—\infty} = \dfrac{1}{2}N$

练习2　说明在平衡态下，下列各式的物理意义。

$Nf(v)\mathrm{d}v$：速率在 $v \to v+\mathrm{d}v$ 区间的分子数.

$nf(v)\mathrm{d}v$：速率在 $v \to v+\mathrm{d}v$ 区间的分子数密度.

$\int_{v_p}^{\infty} f(v)\mathrm{d}v$：分子速率大于 v_p 的概率.

$\int_{0}^{v_p} Nf(v)\mathrm{d}v$：速率小于 v_p 的分子数.

练习3.

求平衡态下，速率在v_1—v_2区间的分子的平均速率。

解法一：$$\bar{v}_{v_1-v_2}=\int_{v_1}^{v_2} vf(v)\mathrm{d}v$$

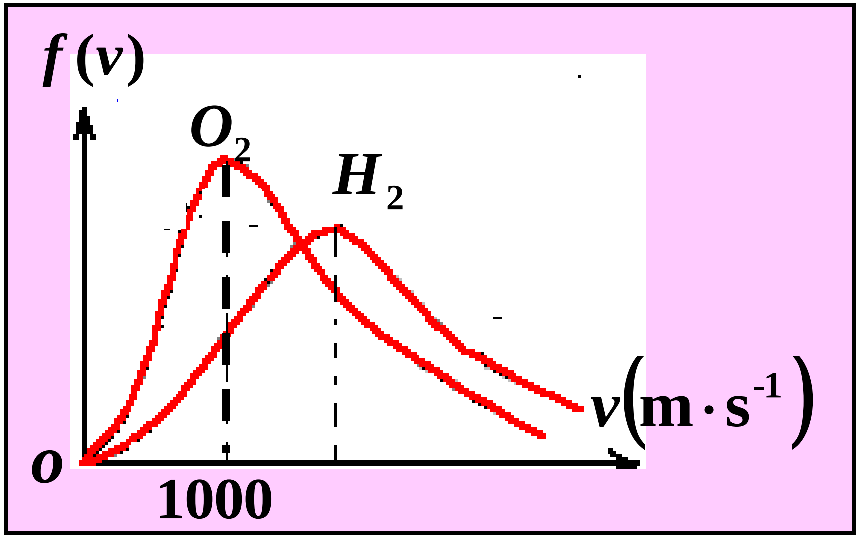
解法二：$$\bar{v}_{v_1-v_2}=\frac{\int_{v_1}^{v_2} v\mathrm{d}N}{\int_{v_1}^{v_2}\mathrm{d}N}=\frac{\int_{v_1}^{v_2} vNf(v)\mathrm{d}v}{\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)\mathrm{d}v}=\frac{\int_{v_1}^{v_2} vf(v)\mathrm{d}v}{\int_{v_1}^{v_2} f(v)\mathrm{d}v}$$

$$\int_{v_1}^{v_2} vf(v)\mathrm{d}v=\int_{v_1}^{v_2} v\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}\mathrm{d}v=\frac{\int_{v_1}^{v_2} v\mathrm{d}N}{N}\neq\bar{v}_{v_1-v_2};$$

$$\frac{\int_{v_1}^{v_2} v\mathrm{d}N}{\int_{v_1}^{v_2}\mathrm{d}N}=\frac{\int_{v_1}^{v_2} v\mathrm{d}N}{N_{v_1\to v_2}}=\bar{v}_{v_1-v_2}$$

练习4

图示为氢分子和氧分子在相同温度下的麦克斯韦速率分布曲线，氢分子的最概然速率为 4000 $m\cdot s^{-1}$，氧分子的最概然速率为 1000 $m\cdot s^{-1}$。



$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

$$\mu_{H_2} = \frac{1}{16}\mu_{O_2}$$

$$v_{p_{H_2}} = 4v_{p_{O_2}} = 4000(\mathrm{m.s}^{-1})$$

例题:处理理想气体分子速率分布的统计方法可用于金属中自由电子("电子气"模型),设导体中自由电子数为N,电子速率最大值为费米速率 v_F ,且已知电子速率在 v — $v+dv$ 区间概率为:

$$\frac{dN}{N} = \begin{cases} Av^2 dv & (v_F > v > 0) \\ 0 & (v > v_F) \end{cases} \qquad A\text{为常数}$$

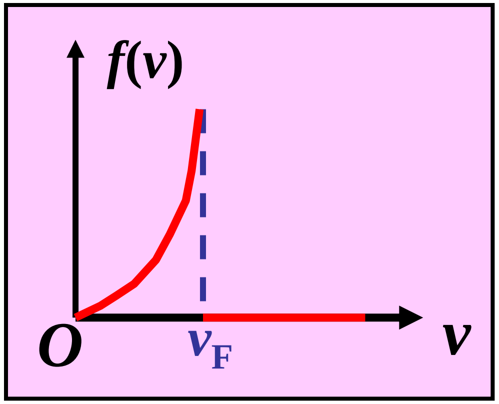
1. 由v_F定出A

2. 画出电子气速率分布曲线

3. 求 v_p ,$\bar{v}$,$\sqrt{\overline{v^2}}$

解:

1. $$f(v)=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}=\begin{cases}Av^2 & (v_F>v>0)\\ 0 & (v>v_F)\end{cases}$$



由归一化条件

$$\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v=\int_0^{v_F}Av^2\mathrm{d}v=\frac{A}{3}v_F^3=1 \longrightarrow A=\frac{3}{v_F^3}$$

2. $$f(v)=\begin{cases}\frac{3}{v_F^3}v^2 & (v_F>v>0)\\ 0 & (v>v_F)\end{cases}$$

3. $v_p=v_F$ ；$$\bar{v}=\int_0^\infty vf(v)\mathrm{d}v=\int_0^{v_F}v\cdot\frac{3}{v_F^3}\cdot v^2\mathrm{d}v=0.75v_F$$

$$\overline{v^2}=\int_0^{v_F}v^2\frac{3}{v_F^3}v^2\mathrm{d}v=0.6v_F^2 \qquad \sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{0.6}\,v_F\approx 0.77v_F$$