13－1 求下列各函数的象函数：

(1) $f(t)=1-\mathrm{e}^{-\alpha t}$　　(2) $f(t)=\sin(\omega t+\varphi)$

(3) $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}(1-\alpha t)$　　(4) $f(t)=\dfrac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})$

(5) $f(t)=t^2$　　(6) $f(t)=t+2+3\delta(t)$

(7) $f(t)=t\cos(\alpha t)$　　(8) $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}+\alpha t-1$

解

(1) $F(s)=\mathscr{L}[1-\mathrm{e}^{-\alpha t}]=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+\alpha}=\dfrac{\alpha}{s(s+\alpha)}$

(2) $F(s)=\mathscr{L}[\sin(\omega t+\varphi)]=\mathscr{L}[\sin\omega t\cos\varphi+\cos\omega t\sin\varphi]$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cos\varphi+\frac{s}{s^2+\omega^2}\sin\varphi=\frac{\omega\cos\varphi+s\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$$

(3) $F(s)=\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}(1-\alpha t)]=\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}-\alpha t\mathrm{e}^{-\alpha t}]$

$$=\frac{1}{s+\alpha}-\frac{\alpha}{(s+\alpha)^2}=\frac{s}{(s+\alpha)^2}$$

(4) $F(s)=\mathscr{L}[\dfrac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})]=\mathscr{L}[\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t}]$

$$= \frac{1}{\alpha s} - \frac{1}{\alpha(s+\alpha)} = \frac{1}{s(s+\alpha)}$$

(5) $F(s) = \mathscr{L}[t^2] = \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt = -\frac{1}{s}\int_0^\infty t^2 de^{-st}$

$$= \frac{t^2}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty - \frac{2}{s^2} te^{-st} \Big|_0^\infty - \frac{2}{s^3} te^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{2}{s^3}$$

(6) $F(s) = \mathscr{L}[t + 2 + 3\delta(t)] = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + 3 = \frac{3s^2 + 2s + 1}{s^2}$

(7) $F(s) = \mathscr{L}[t\cos(\alpha t)] = \mathscr{L}[\frac{1}{2}t(e^{j\alpha t} + e^{-j\alpha t})] = \frac{s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}$

(8) $F(s) = \mathscr{L}[e^{-\alpha t} + \alpha t - 1] = \frac{1}{s+\alpha} + \frac{\alpha}{s^2} - \frac{1}{s} = \frac{\alpha^2}{s^2(s+\alpha)}$

13-2 求下列各函数的原函数：

(1) $\frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$　　(2) $\frac{2s^2+16}{(s^2+5s+6)(s+12)}$

(3) $\frac{2s^2+9s+9}{s^2+3s+2}$　　(4) $\frac{s^3}{(s^2+3s+2)s}$

解

(1) 设 $F(s)$ 的部分分式展开式为

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4}$$

待定系数为

$$K_1 = [sF(s)]\big|_{s=0} = \frac{3}{8}$$

$$K_2 = [(s+2)F(s)]\big|_{s=-2} = \frac{1}{4}$$

$$K_3 = [(s+4)F(s)]\big|_{s=-4} = \frac{3}{8}$$

所以原函数为

$$f(t) = \frac{1}{8}(3 + 2e^{-2t} + 3e^{-4t})$$

(2) $F(s) = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+3} + \frac{K_3}{s+12}$

则待定系数为

$$K_1 = [(s+2)F(s)]|_{s=-2} = \frac{12}{5}$$

$$K_2 = [(s+3)F(s)]|_{s=-3} = -\frac{34}{9}$$

$$K_3 = [(s+12)F(s)]|_{s=-12} = \frac{152}{45}$$

故原函数

$$f(t) = \frac{12}{5}e^{-2t} - \frac{34}{9}e^{-3t} + \frac{152}{45}e^{-12t}$$

(3) $F(s)$ **为假分式，可变为真分式，即**

$$F(s) = 2 + \frac{3s+5}{s^2+3s+2} = 2 + F_{1(s)}$$

$$F_{1(s)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1 = [(s+1)F_{1(s)}]_{s=-1} = 2,$$

$$K_2 = [(s+2)F_{1(s)}]|_{s=-2} = 1$$

原函数

$$f(t) = 2\delta(t) + 2e^{-t} + e^{-2t}$$

(4) $F(s) = 1 - \dfrac{3s+2}{(s+1)(s+2)} = 1 - F_{1(s)}$

令 $$F_{1(s)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

则待定系数为

$$K_1 = [(s+1)F_{1(s)}]|_{s=-1} = -1$$

$$K_2 = [(s+2)F_{1(s)}]|_{s=-2} = 4$$

故原函数为

$$f(t) = \delta(t) + e^{-t} - 4e^{-2t}$$

13-3 求下列各函数的原函数：

(1) $\dfrac{1}{(s+1)(s+2)^2}$　　(2) $\dfrac{s+1}{s^3+2s^2+2s}$

(3) $\dfrac{s^2+6s+5}{s(s^2+4s+5)}$　　(4) $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$

解

(1) 令 $D(s)=0$，有 $p_1=-1$（单根），$p_2=-2$ 为二重根，则

$$F(s)=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_{22}}{s+2}+\frac{K_{21}}{(s+2)^2}$$

$$K_1=[(s+1)F(s)]\mid_{s=-1}=\frac{1}{(s+2)^2}\mid_{s=-1}=1$$

$$K_{21}=[(s+2)^2F(s)]\mid_{s=-2}=-1$$

$$K_{22}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+2)^2F(s)]\mid_{s=-2}=-1$$

所以，原函数为

$$f(t)=\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}-t\mathrm{e}^{-2t}$$

(2) $F(s)=\dfrac{s+1}{s(s^2+2s+2)}=\dfrac{s+1}{D(s)}$

令 $D(s)=0$，有 $p_1=0$ 为单根，$p_2=-1+\mathrm{j}1$，$p_3=-1-\mathrm{j}1$ 为共轭复根.

则 $$F(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1-\mathrm{j}1}+\frac{K_3}{s+1+\mathrm{j}1}$$

则各系数为

$$K_1=[sF(s)]\mid_{s=0}=0.5$$

$$K_2=\frac{N(s)}{D'(s)}\mid_{s=p_2}=\frac{s+1}{3s^2+4s+2}\mid_{s=-1+\mathrm{j}1}=0.3536\mathrm{e}^{-\mathrm{j}135^\circ}$$

$$K_3=\mid K_2\mid\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta 2}=0.3536\mathrm{e}^{\mathrm{j}135^\circ}$$

原函数为

$$f(t)=0.5+0.707\mathrm{e}^{-t}\cos(t-135^\circ)$$

(3) 令 $D(s)=0$，有 $p_1=0$ 为单根，$p_2=-2+\mathrm{j}1$，$p_3=-2-\mathrm{j}1$ 为共轭复根.

设 $$F(s)=\frac{s^2+6s+5}{s(s^2+4s+5)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+2-\mathrm{j}1}+\frac{K_3}{s+2+\mathrm{j}1}$$

$$K_1=[sF(s)]\mid_s=0=1$$

$$K_2=\frac{N(s)}{D'(s)}\mid_{s=p_2}=\frac{s^2+6s+5}{3s^2+8s+5}\mid_{s=-2+\mathrm{j}1}=-\mathrm{j}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$K_3=\mid K_2\mid\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta 2}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

所以原函数为 $$f(t)=1+2\mathrm{e}^{-2t}\sin t$$

(4) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)^2}=\dfrac{s}{(s+\mathrm{j})^2(s-\mathrm{j})^2}=\dfrac{s}{D(s)}$

令 $D(s)=0$，有 $p_1=-\mathrm{j}$ 和 $p_2=\mathrm{j}$，分别为二重根，且 p_1,p_2 为共轭复根.

$$F(s)=\frac{K_{11}}{(s+\mathrm{j})^2}+\frac{K_{12}}{s+\mathrm{j}}+\frac{K_{22}}{s-\mathrm{j}}+\frac{K_{21}}{(s-\mathrm{j})^2}$$

则
$$K_{11}=[(s+\mathrm{j})^2F(s)]_{s=p_1}=\mathrm{j}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$K_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+\mathrm{j})^2F(s)]\,|_{s=-\mathrm{j}}=0$$

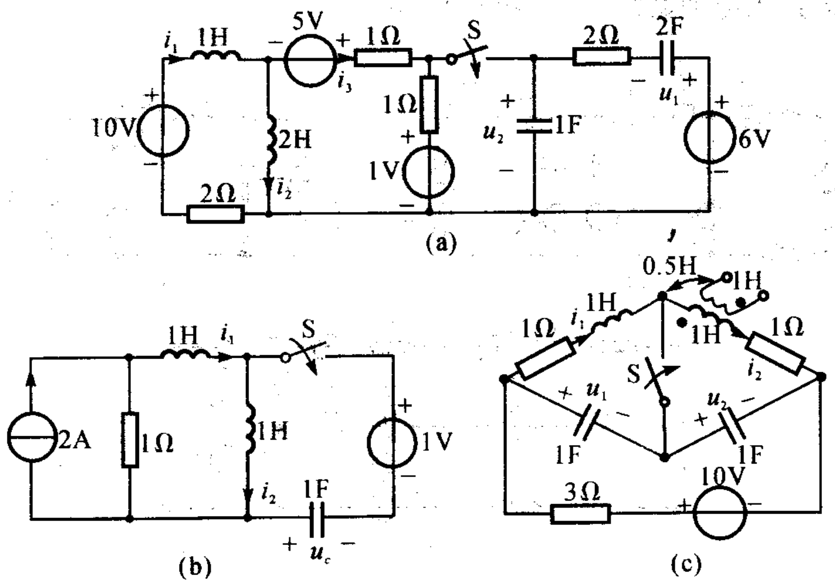
$$K_{21}=[(s-\mathrm{j})^2F(s)]\,|_{s=\mathrm{j}}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$K_{22}=0$$

原函数为

$$f(t)=\mathrm{j}\frac{1}{4}t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}-\mathrm{j}\frac{1}{4}t\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}=\frac{1}{2}t\sin t$$

13-4 图(a),(b),(c)所示电路原已达稳态，$t=0$ 时把开关 S 合上，分别画出运算电路.



题 13-4 图

解

(1) 图(a) 所示电路，开关动作前，电路处于稳态，则有

$$i_1(0_-) = \frac{10}{2} = 5\text{A}, i_3(0_-) = \frac{4}{2}\text{A} = 2\text{A}$$

$$i_2(0_-) = i_1(0_-) - \frac{1}{4}(0_-) = 5\text{A} - 2\text{A} = 3\text{A}$$

$$L_1 i_1(0_-) = 5, L_2 i_2(0_-) = 2 \times 3 = 6$$

$$u_1(0_-) = \frac{2}{1+2} \times 6 = 4V, u_2(0_-) = 6\text{V} - 4\text{V} = 2\text{V}$$

运算电路如题解 13－4 图(a) 所示.

(2) 图(b) 所示电路中，开关动作前，电路处于稳态，则有

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = 2\text{A}, u_c(0_-) = 0\text{V}$$

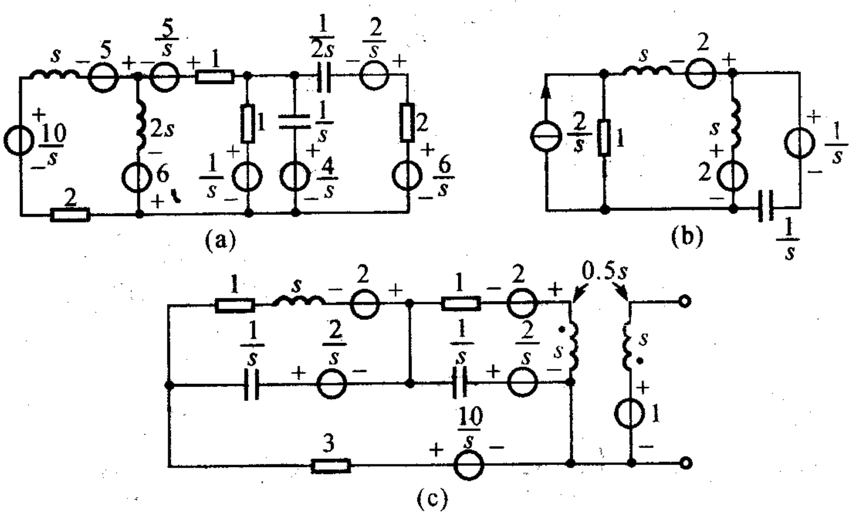
运算电路如题解 13－4 图(b) 所示.

(3) 图示电路中，开关动作前，电路处于稳态，则有

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{10}{3+1+1}\text{A} = 2\text{A}$$

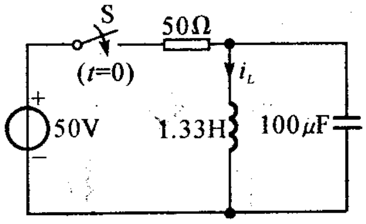
$$u_1(0_-) = u_2(0_-) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times 10\text{V} = 2\text{V}$$

运算电路如题解 13－4 图(c) 所示.

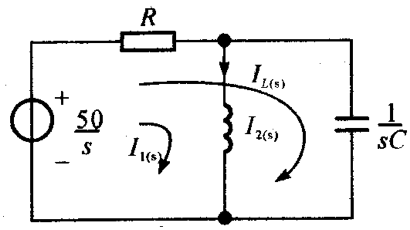


题解 13－4 图

13－5 图示电路原处于零状态，$t=0$ 时合上开关 S，试求电流 i_L.



题 13－5 图



题解 13－5 图

解　提示　画出运算电路，可采用回路电流法求解.

开关动作前，电路处于零状态，故有 $i_L(0_-)=0$，$u_c(0_-)=0$，画出运算电路如题解 13－5 图所示.

利用回路电流法，设回路电流为 $I_1(s)$，$I_2(s)$，方向如图所示，则

$$\begin{cases}(R+sL)I_1(s)+RI_2(s)=\dfrac{50}{s}\\[2mm] RI_1(s)+(R+\dfrac{1}{sC})I_2(s)=\dfrac{50}{s}\end{cases}$$

解得

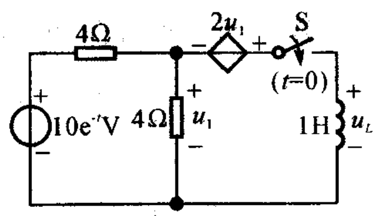
$$I_1(s)=I_L(s)=\frac{50}{RLC}\frac{1}{s(s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC})}$$

$$I_L(s)=\frac{7500}{s(s^2+200s+7500)}=\frac{7500}{s(s+50)(s+150)}$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{1.5}{s+50}+\frac{0.5}{s+150}$$

$$i_{L(t)}=\mathscr{L}^{-1}[I_L(s)]=(1-1.5e^{-50t}+0.5e^{-150t})\text{A}.$$

13－6 电路如图所示，已知 $i_L(0_-)=0\text{A}$，$t=0$ 时将开关 S 闭合，求 $t>0$ 时的 $u_L(t)$.



题 13－6 图

解　提示　外施电压的像函数为 $\dfrac{10}{s+1}$，受控源的像函数为 $2U_1(s)$

开关合上前，$i_L(0_-)=0\text{A}$，画中运算电路图如图题解 13－6 图所示.

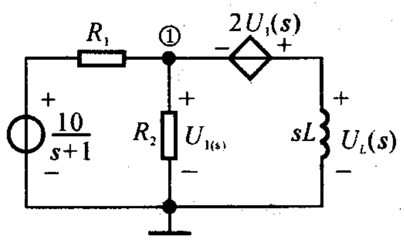
利用结点法，取 $U_1(s)$ 为结点电压，对 ① 列出方程，有

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{sL}\right)U_1(s)=\frac{10}{(s+1)R_1}-\frac{2U_1(s)}{sL}$$

代入数据，得

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{s}\right)U_1(s)=\frac{5}{2(s+1)}$$

$$U_1(s)=\frac{5s}{(s+1)(s+6)}$$



题解 13－6 图

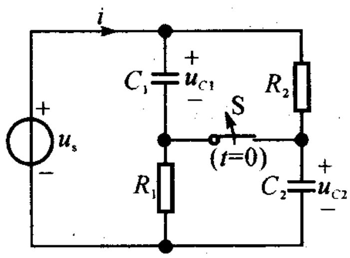
有 $\quad U_L(s)=3U_1(s)=\dfrac{15s}{(s+1)(s+6)}$

$$=\frac{-3}{s+1}+\frac{18}{s+6}$$

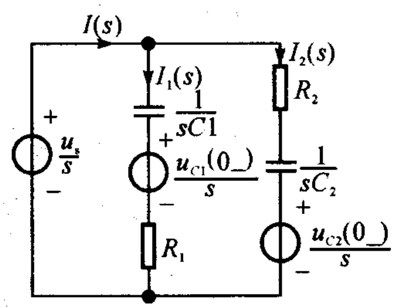
其反变换为

$$u_L(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_L(s)]=(-3e^{-t}+18e^{-6t})\text{V}.$$

13－7 图示电路中 $u_s(t)$ 为直流电压源，开关原闭合，已达稳定状态. $t=0$ 时开关断开，求开关断开后总电流 i 和电容上电压 u_{C1} 和 u_{C2}. 已知 $u_s(t)=30\text{V}, C_1=0.2\mu\text{F}, C_2=\dfrac{1}{2}C_1, R_1=100\Omega, R_2=2R_1$.



题 13－7 图



题解 13－7 图

解 开关断开前，电路已处于稳态，在 $t=0$ 时，有

$$u_{C1}(0_-)=\frac{R_2}{R_1+R_2}u_s=\frac{2}{3}\times 30\text{V}=20\text{V}$$

$$u_{C2}(0_-)=u_s-u_{C1}(0_-)=10\text{V}$$

画出运算电路图，如图题解 13－7 图所示.

根据 KCL 和 KVL 列出

$$(R_1+\frac{1}{s_{C1}})I_1(s)=\frac{u_s}{s}-\frac{u_{C1}(0_-)}{s}$$

$$(R_2+\frac{1}{s_{C2}})I_2(s)=\frac{u_s}{s}-\frac{u_{C2}(0_-)}{s}$$

$$I_1(s)+I_2(s)=I(s)$$

解得

$$I_1(s)=\frac{0.1}{s+5\times10^4},\quad I_2(s)=\frac{0.1}{s+5\times10^4}$$

$$I(s)=I_1(s)+I_2(s)=\frac{0.2}{s+5\times10^4}$$

所以

$$U_{C1}(s)=\frac{1}{s_{C1}}I_1(s)+\frac{u_{C1}(0_-)}{s}=\frac{30}{s}-\frac{10}{s+5\times10^4}$$

$$U_{C2}(s)=\frac{1}{s_{C2}}I_2(s)+\frac{u_{C2}(0_-)}{s}=\frac{30}{s}-\frac{20}{s+5\times10^4}$$

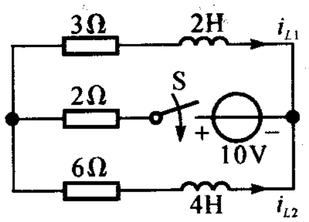
则

$$i(t)=0.2e^{-5\times10^4t}\ \mathrm{A}$$

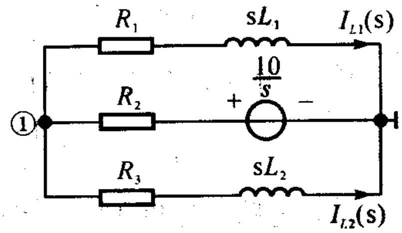
$$u_{C1}(t)=(30-10e^{-5\times10^4t})\mathrm{V}$$

$$u_{C2}(t)=(30-20e^{-5\times10^4t})\mathrm{V}$$

13-8 图示电路中的电感原无磁场能量 $t=0$ 时，合上开关S，用运算法求电感中的电流.



题 13-8 图



题解 13-8 图

解 由题意，$i_{L1}(0_-)=0$，$i_{L2}(0_-)=0$，则合上开关后，运算电路如题解 13-8 所示.

利用结点电压法，对 ① 列出方程

$$\left(\frac{1}{R_1+sL_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3+sL_2}\right)U_{n1}(s)=\frac{10}{sR_2}$$

解得
$$U_{n1}(s)=\frac{5(2s+3)}{s(s+3)}$$

所以电感中的电流为

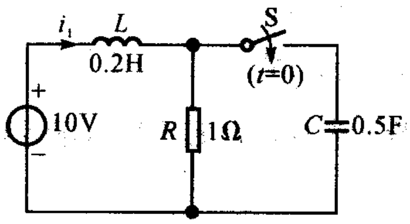
$$I_{L1}(s)=\frac{U_{n1}(s)}{sL_1+R_1}=\frac{5}{s(s+3)}=\frac{\frac{5}{3}}{s}-\frac{\frac{5}{3}}{s+3}$$

$$I_{L2}(s)=\frac{U_{n1}(s)}{sL_2+R_3}=\frac{\frac{5}{2}}{s(s+3)}=\frac{\frac{5}{6}}{s}-\frac{\frac{5}{6}}{s+3}$$

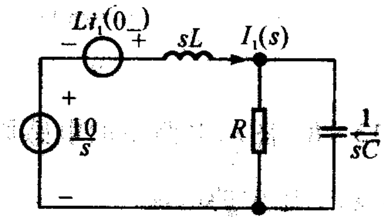
故
$$i_{L1}(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_{L1}(s)]=\frac{5}{3}(1-e^{-3t})\text{A}$$

$$i_{L2}(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_{L2}(s)]=\frac{5}{6}(1-e^{-3t})\text{A}$$

13－9 图示电路中开关S闭合前电路已处于稳定状态，电容初始储能为零，在 $t=0$ 时闭合开关 S，求 $t>0$ 时电流 $i_1(t)$.



题 13－9 图



题解 13－9 图

解 开关合上前，电路已处于稳态，则有

$$i_L(0_-)=\frac{10}{R}=10\text{A},\quad u_C(0_-)=0$$

画出运算电路如题解 13－9 图所示.

电路的等效运算阻抗为

$$Z(s)=sL+\frac{R\times\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{s^2RLC+sL+R}{sRC+1}$$

电流
$$I_1(s)=\frac{\frac{10}{s}+Li_1(0_-)}{Z(s)}$$

代入数据，得

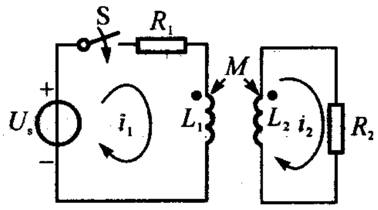
$$I_1(s)=\frac{\frac{10}{s}+2}{\frac{0.2(s^2+2s+10)}{s+2}}=\frac{10(s^2+7s+10)}{s(s^2+2s+10)}$$

$$=\frac{10}{s}+\frac{\frac{25}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}}{s+1-j3}+\frac{\frac{25}{3}e^{j\frac{\pi}{2}}}{s+1+j3}$$

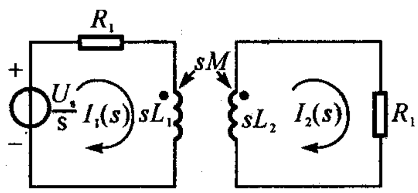
其反变换

$$i_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_1(s)]=(10+\frac{50}{3}e^{-t}\sin 3t)\mathrm{A}$$

13-10 图示电路中 $L_1=1\mathrm{H}, L_2=4\mathrm{H}, M=2\mathrm{H}, R_1=R_2=1\Omega, U_s=1\mathrm{V}$，电感中原无磁场能量. $t=0$ 时合上开关 S，用运算法求 i_1, i_2.



题 13-10 图



题解 13-10 图

解 由题意，$i_{L_1}(0_-)=0, i_{L2}(0_-)=0$，画出运算电路如题解 13-10 图所示，对于含耦合电感的电路，采用回路电流法，列出方程

$$(R_1+sL_1)I_1(s)-sMI_2(s)=\frac{U_s}{s}$$

$$-sMI_1(s)+(R_2+sL_2)I_2(s)=0$$

代入数据，得

$$(1+s)I_1(s)-2sI_2(s)=\frac{1}{s} \qquad (1)$$

$$-2sL_1(s)+(1+4s)I_2(s)=0 \qquad (2)$$

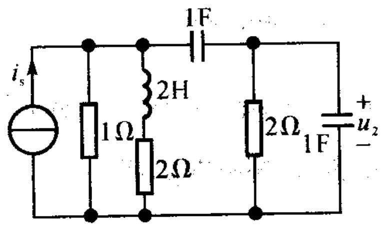
解之得 $$I_1(s)=\frac{4s+1}{s(5s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{5(s+\frac{1}{5})}$$

$$I_2(s)=\frac{2}{5s+1}=\frac{2}{5}\frac{1}{s+\frac{1}{5}}$$

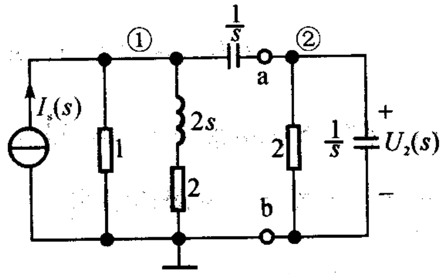
则 $$i_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_1(s)]=1-\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}t}\mathrm{A}$$

$$i_2(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_2(s)]=\frac{2}{5}e^{-\frac{1}{5}t}\mathrm{A}$$

13-11 图示电路中 $i_s=2e^{-t}\varepsilon(t)\mathrm{A}$，用运算法求 $U_2(s)$.



题 13-11 图



题解 13-11 图

解 在 $t=0_-$ 时，电路处于零状态，电感电流、电容电压值均为零，$I_s(s)=\frac{2}{s+1}$，画出相应的运算电路如题解 13-11 图所示. 利用结点法对结点 ① 和 ② 列方程，有

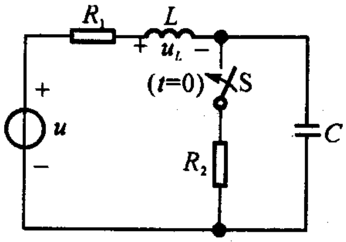
$$(1+\frac{1}{2s+2}+s)U_{n1}(s)-sU_{n2}(s)=$$

$$\frac{2}{s+1}-sU_{n1}(s)+(s+\frac{1}{2}+s)U_{n2}(s)=0$$

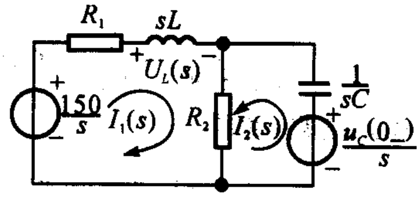
解得 $$U_2(s)=U_{n2}(s)=\frac{8s}{4s^3+14s^2+16s+3}$$

13-12 图示电路中 $R_1=10\Omega, R_2=10\Omega, L=0.15\mathrm{H}, C=250\mu\mathrm{F}, u=150\mathrm{V}$，S 闭合前电路已达稳态. 用运算法求合上 S 后的电感电压 u_L.

解 开关闭合前，电路已达到稳态，$U_C(0_-)=150\mathrm{V}, i_L(0_-)=0$，画出运算电路如题解 13-12 图所示.



题 13-12 图



题解 13-12 图

设回路电流为 $I_1(s)$，$I_2(s)$，方向如图所示，可列出方程

$$\begin{cases}(R_1+R_2+sL)I_1(s)+R_2I_2(s)=\dfrac{150}{s}\\ R_2I_1(s)+(R_2+\dfrac{1}{sC})I_2(s)=\dfrac{150}{s}\end{cases}$$

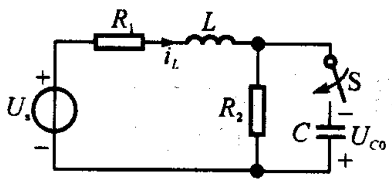
代入数据，得

$$I_1(s)=\frac{150\times 4000}{s(1.5s^2+700s+8\times 10^4)}=\frac{4\times 10^5}{s(s+200)(s+\frac{800}{3})}$$

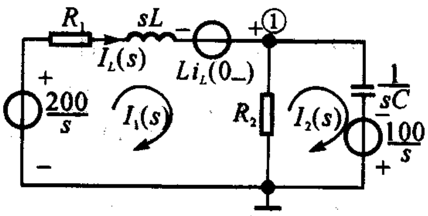
$$U_L(s)=sLI_1(s)=\frac{0.15\times 4\times 10^5}{(s+200)(s+\frac{800}{3})}=\frac{900}{s+200}-\frac{900}{s+\frac{800}{3}}$$

所以 $$u_L(t)=(900e^{-200t}-900e^{-\frac{800}{3}t})\text{V}$$

13-13 电路如图，设电容上原有电压 $U_{C0}=100\text{V}$，电源电压 $U_s=200\text{V}$，$R_1=30\Omega$，$R_2=10\Omega$，$L=0.1\text{H}$，$C=1000\mu\text{F}$. 求 S 合上后电感中的电流 $i_L(t)$.



题 13-13 图



题解 13-13 图

解 开关闭合前，电路处于稳态，$i_L(0_-)=\dfrac{200}{40}=5\text{A}$ 且 $U_C(0_-)=U_{C0}=100\text{V}$，则运算电路图如题解 13-13 图所示.

利用结点电压法，对 ① 结点列方程

$$\left(\frac{1}{R_1+sL}+\frac{1}{R_2}+sC\right)U_{n1}(s)=\frac{\frac{200}{5}+0.5}{R_1+sL}-sC\times\frac{100}{s}$$

代入数据，解得

$$U_{n1}(s)=\frac{2\times10^6-25\times10^3s-100s^2}{s(s+200)^2}$$

所以有 $$I_L(s)=\frac{\frac{200}{s}+0.5-U_{n1}(s)}{R_1+sL}=\frac{5}{s}+\frac{1500}{(s+200)^2}$$

$$i_L(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_L(s)]=(5+1500te^{-200t})\text{A}$$

13-14 图示电路中的储能元件均为零初始值，$u_s(t)=5\varepsilon(t)\text{V}$，在下列条件下求 $U_1(s)$：(1)$r=-3$；(2)$r=3$.

解 在 $t=0_-$ 时，储能元件处于零状态，画出电路如题解 13 - 14 图所示. 利用结点电压法，结点 ① 的电压 $U_{n1}(s)$. 即为 $U_1(s)$.

$$\left[\frac{1}{1+\frac{s}{s+1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{s}}+\frac{1}{2}\right]U_1(s)=\frac{\frac{5}{s}}{1+\frac{s}{s+1}}-\frac{rI_1(s)}{2}$$

其中 $$I_1(s)=\frac{\frac{5}{s}-U_1(s)}{1+\frac{s}{s+1}}=\frac{[5-sU_1(s)](s+1)}{s(2s+1)}$$

解得 $$U_1(s)=\frac{5(2-r)(s+1)^2}{s[(2-r)(s+1)^2+6s^2+5s+1]}$$

(1) 当 $r=-3$ 时，有

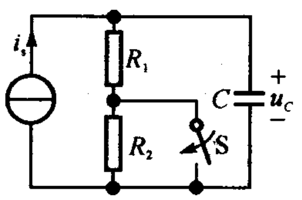
$$U_1(s)=\frac{25(s+1)^2}{s(11s^2+15s+6)}=\frac{25}{11}\frac{(s+1)^2}{s(s^2+\frac{15}{11}s+\frac{6}{11})}$$

(2) 当 $r=3$ 时，有

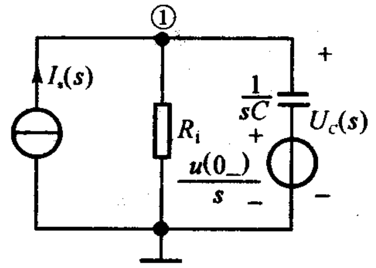
$$U_1(s)=\frac{-5(s+1)^2}{s^2(5s+3)}=-\frac{(s+1)^2}{s^2(s+\frac{3}{5})}$$

13-15 图示电路中，$i_s=2\sin(1000t)\text{A}$，$R_1=R_2=20\Omega$，$C=1000\mu\text{F}$，

$t=0$ 时合上开关 S，用运算法求 $u_C(t)$.



题 13-15 图



题解 13-15 图

解　提示　换路前电路处于稳态，用相量法求出 $\dot{U}_C$，然后求出 $U_C(0_-)$.

开关闭合前，电路已处于正弦稳态，利用相量法求 $U_C(0_-)$ 的值.

令 $\dot{I}_{sm}=2\angle 0^\circ \mathrm{A}, I_s(s)=\mathscr{L}[2\sin(100t)]=\dfrac{2\omega}{s^2+\omega^2}$，此处 $\omega=1000$.

$$\dot{U}_c=\frac{(R_1+R_2)\times\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R_1+R_2+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}\times\dot{I}_{sm}$$

代入数据，得

$$\dot{U}_C=1.9994\angle -88.568^\circ \mathrm{V}$$
$$u_C(t)=1.9994\sin(1000t-88.568^\circ)\mathrm{V}$$
$$u_C(0_-)=1.9994\times(-0.9997)\mathrm{V}=-1.9988\mathrm{V}$$

该电路开关闭合后的运算电路如题解 13-15 图.

利用结点电压法，对 ① 列出方程

$$\left(\frac{1}{R_1}+sC\right)U_C(s)=I_s(s)+sC\frac{U_C(0_-)}{s}$$

即
$$U_C(s)=\frac{\dfrac{2\omega}{C}+U_C(0_-)(s^2+\omega^2)}{\left(s+\dfrac{1}{R_1\cdot C}\right)(s^2+\omega^2)}$$

代入数据，得

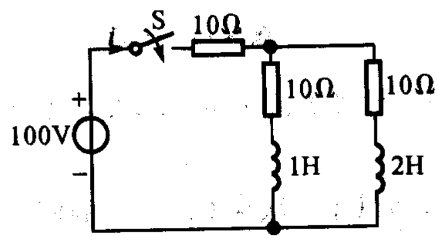
$$U_C(s)=\frac{2\times10^6-1.9988(s^2+1000^2)}{(s+50)(s^2+1000^2)}$$

$$= \frac{-3.788\times 10^{-3}}{s+50} + \frac{0.9988e^{-j177.138^\circ}}{s-j1000} + \frac{0.9988e^{j179.138^\circ}}{s+j1000}$$

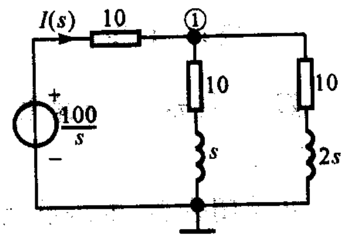
利用反变换有

$$u_C(t) = \mathscr{L}^{-1}[U_c(s)]$$
$$= [-3.788\times 10^{-3}e^{-50t} + 1.9976\sin(1000t - 87.138^\circ)]\text{V}$$

13-16 图示电路在 $t=0$ 时合上开关 S，用结点法求 $i(t)$。



题 13-16 图



题解 13-16 图

解 开关合上前，电路处于零状态，其运算电路图如题解 13-16 图所示。

对结点 ① 列出结点电压方程

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{s+10}+\frac{1}{2s+10}\right)U_{n1}(s) = \frac{10}{s}$$

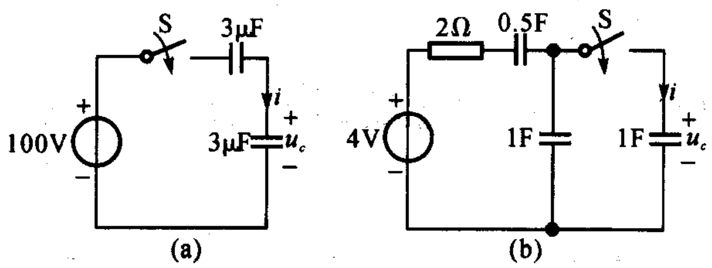
解得
$$U_{n1}(s) = \frac{10}{s\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{s+10}+\frac{1}{2s+10}\right)}$$
$$= \frac{50(s+10)(2s+10)}{s(s^2+30s+150)}$$

故有
$$I(s) = \frac{1}{10}\times\left[\frac{100}{s} - U_{n1}(s)\right]$$
$$= \frac{10}{s} - \frac{5(s+10)(2s+10)}{s(s^2+30s+150)}$$
$$= \frac{150s+1000}{s(s^2+30s+150)} = \frac{150+1000}{s(s+6.34)(s+23.66)}$$
$$= \frac{6.667}{s} - \frac{0.446}{s+6.34} - \frac{6.22}{s+23.66}$$

反变换，得

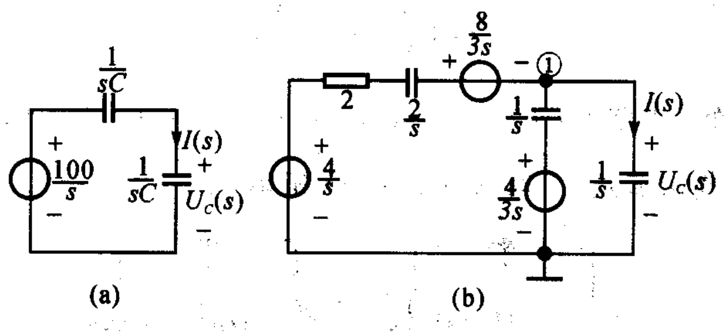
$$i(t) = (6.667 - 0.446e^{-6.34t} - 6.22e^{-23.66t})\text{A}$$

13-17 图示各电路在 $t=0$ 时合上开关 S，用运算法求 $i(t)$ 及 $u_C(t)$.



题 13-17 图

解 (1) 图(a) 所示电路，处于零状态，电路的运算电路如图题解 13-17 图(a) 所示，则有



题解 13-17 图

$$I(s)=\frac{\dfrac{100}{s}}{\dfrac{1}{sC}+\dfrac{1}{sC}}=50C=0.15\times10^{-3}$$

$$U_C(s)=\frac{1}{sC}I(s)=\frac{50}{s}$$

得 $\qquad i(t)=0.15\delta(t)\mathrm{mA};\quad u_C(t)=50\varepsilon(t)\mathrm{V}$

(2) 题 13-17 图(b) 所示电路中，$u_C(0_-)=\dfrac{1}{0.5+1}\times4=\dfrac{8}{3}\mathrm{V}$，$u_{C2}(0_-)=4-\dfrac{8}{3}=\dfrac{4}{3}\mathrm{V}$，则运算电路如题解 13-17 图(b) 所示. 利用结点法，对结点 ① 列方程，有

$$\left(\frac{1}{2+\frac{2}{s}}+s+s\right)U_{n1}(s)=\frac{\frac{4}{s}-\frac{8}{3s}}{2+\frac{2}{s}}+s\times\frac{4}{3s}$$

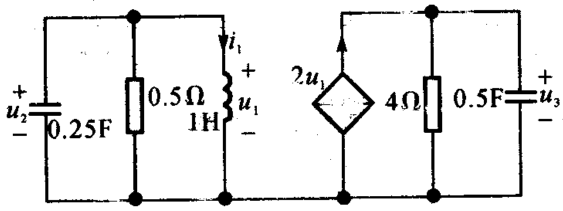
解得 $$U_C(s)=U_{n1}(s)=\frac{4(2s+3)}{3s(4s+5)}=\frac{4}{5s}-\frac{2}{15(s+\frac{5}{4})}$$

且 $$I(s)=sU_C(s)=\frac{4(2s+3)}{3(4s+5)}=\frac{2(s+\frac{3}{2})}{3(s+\frac{5}{4})}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6(s+\frac{5}{4})}$$

得 $$u_C(t)=\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{15}e^{-\frac{5}{4}t}\right)\text{V}$$

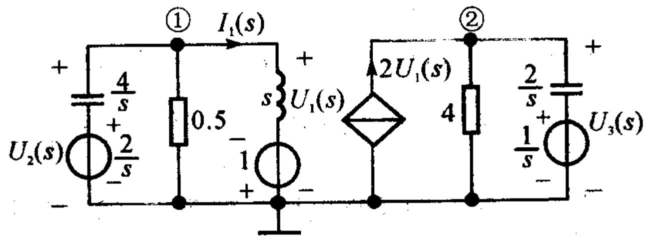
$$i(t)=\left(\frac{2}{3}\delta(t)+\frac{1}{6}e^{-\frac{5}{4}t}\right)\text{A}$$

13-18 图示电路中 $i_1(0_-)=1\text{A}$，$u_2(0_-)=2\text{V}$，$u_3(0_-)=1\text{V}$，试用拉普拉斯变换法求 $t\geqslant 0$ 时的电压 $u_2(t)$ 和 $u_3(t)$。



题 13-18 图

解 画出运算电路如题解 13-18 图所示。



题解 13-18 图

利用结点法，对 ① 和 ② 列出结点电压方程。

$U_{n1}(s)$ 即 $U_1(s)$ 或 $U_2(s)$，$U_{n2}(s)$ 即 $U_3(s)$。

$$(\frac{s}{4}+2+\frac{1}{s})U_1(s)=\frac{s}{4}\times\frac{2}{s}-\frac{1}{s}$$

$$(\frac{1}{4}+\frac{s}{2})U_3(s)=2U_1(s)+\frac{s}{2}\times\frac{1}{s}$$

解得

$$U_2(s)=U_1(s)=\frac{2(s-2)}{s^2+8s+4}=\frac{2.732}{s+7.464}-\frac{0.732}{s+0.536}$$

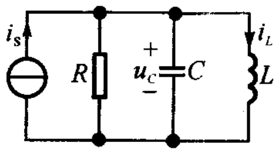
$$U_3(s)=\frac{8U_1(s)+2}{2s+1}=\frac{-1.57}{s+7.464}+\frac{81.35}{s+0.536}-\frac{79}{s+0.5}$$

故

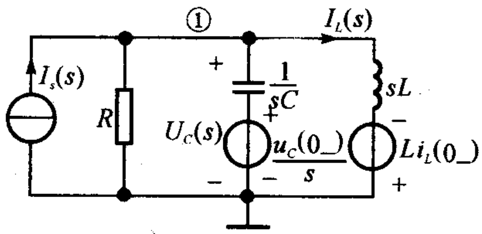
$$u_2(t)=(2.732e^{-7.464t}-0.732e^{-0.536t})\text{V}$$

$$u_3(t)=(-1.57e^{-7.464t}+81.35e^{-0.536t}-79e^{-0.5t})\text{V}$$

13-19 已知图示电路中$R=1\Omega$，$C=0.5\text{F}$，$L=1\text{H}$，电容电压$u_C(0_-)=2\text{V}$，$i_L(0_-)=1\text{A}$，$i_s(t)=\delta(t)\text{A}$. 试求RLC并联电路的响应$u_C(t)$.



题 13-19 图



题解 13-19 图

解 画出运算电路如题解 13-19 图所示.

利用结点电压法. 结点①的电压即为$U_C(s)$，列出结点电压方程为

$$(\frac{1}{R}+sC+\frac{1}{sL})U_C(s)=I_s(s)+sC\frac{U_C(0_-)}{s}-\frac{Li_L(0_-)}{sL}$$

代入数据，得

$$(1+\frac{s}{2}+\frac{1}{s})U_C(s)=2-\frac{1}{s}$$

解得

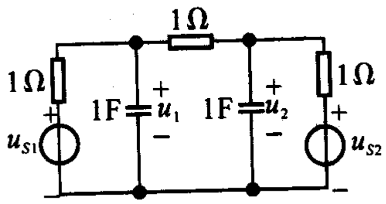
$$U_C(s)=\frac{2(2s-1)}{s^2+2s+2}=\frac{3.606e^{j56.31^\circ}}{s+1-j1}+\frac{3.606e^{-j56.31^\circ}}{s+1+j1}$$

故 $u_C(t)=7.212e^{-t}\cos(t+56.31^\circ)\text{V}$

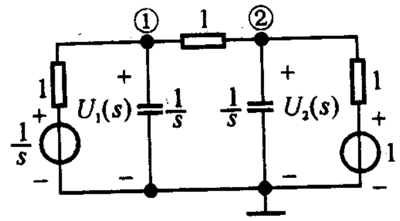
或展开得

$$u_C(t) = (4\mathrm{e}^{-t}\cos t - 6\mathrm{e}^{-t}\cos t)\,\mathrm{V}$$

13-20 电路如图所示，已知 $u_{s1}(t) = \varepsilon(t)\,\mathrm{V}$，$u_{s2}(t) = \delta(t)$，试求 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$.



题 13-20 图



题解 13-20 图

解　由题意，画出运算电路如题解 13-20 所示.

利用结点电压法，设结点电压分别为 $U_1(s)$ 和 $U_2(s)$.

$$\begin{cases}(1+s+1)U_1(s) - U_2(s) = \dfrac{1}{s} \\ -U_1(s) + (1+s+1)U_2(s) = 1\end{cases}$$

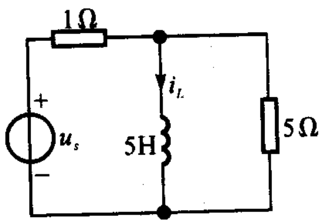
解得

$$U_1(s) = \frac{2}{s(s+3)} = \frac{2}{3s} - \frac{2}{3(s+3)}$$

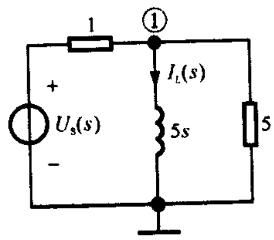
$$U_2(s) = \frac{s+1}{s(s+3)} = \frac{1}{3s} + \frac{2}{3(s+3)}$$

则　$u_1(t) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{V}$，　$u_2(t) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{V}$

13-21 电路如图，已知 $u_s(t) = [\varepsilon(t) + \varepsilon(t-1) - 2\varepsilon(t-2)]\,\mathrm{V}$，求 $i_L(t)$.



题 13-21 图



题解 13-21 图

解 电压源 $U_s(t)$ 的象函数为

$$U_s(s)=\mathscr{L}[U_s(t)]=\frac{1}{s}+\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{2}{s}e^{-2s}$$

画出运算电路图如题解 13－21 图所示.列出结点电压方程为

$$(1+\frac{1}{5s}+\frac{1}{5})U_{n1}(s)=U_s(s)$$

$$U_{n1}(s)=\frac{5sU_s(s)}{6s+1}$$

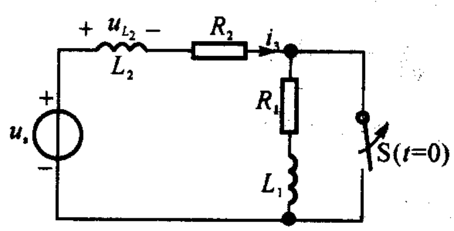
有 $$I_L(s)=\frac{U_{n1}(s)}{5s}=\frac{U_s(s)}{6s+1}=\frac{1}{6s+1}(\frac{1}{s}+\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{2}{s}e^{-2s})$$

$$=[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{6}}](1+e^{-s}-2e^{-2s})$$

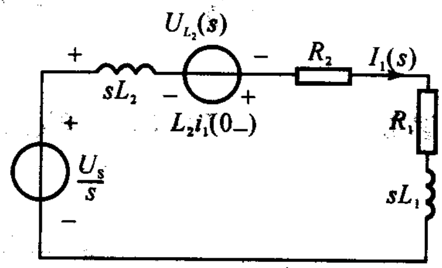
其反变换

$$i_L(t)=[(1-e^{-\frac{1}{6}t})\varepsilon(t)+(1-e^{-\frac{1}{6}(t-1)})\varepsilon(t-1)-(1-e^{-\frac{1}{6}(t-2)}\varepsilon(t-2))]A$$

13－22 电路如图所示，开关 S 原是闭合的，电路处于稳态.若 S 在 $t=0$ 时打开，已知 $U_s=2V$，$L_1=L_2=1H$，$R_1=R_2=1\Omega$.试求 $t\geqslant 0$ 时的 $i_1(t)$ 和 $u_{L_2}(t)$.



题 13－22 图



题解 13－22 图

解 开关动作前处于稳态，$i_1(0_-)=\frac{U_s}{R_2}=2A$，画出运算电路图，如题解 13－22 图所示.电流 $I_1(s)$ 为

$$I_1(s)=\frac{\frac{U_s}{s}+L_2i_1(0_-)}{R_1+R_2+sL_1+sL_2}=\frac{\frac{2}{s}+2}{2+2s}=\frac{1}{s}$$

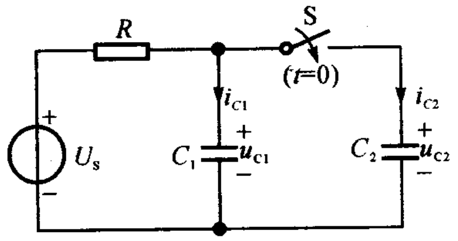
电压 $U_{L_2}(s)$ 为

$$U_{L_2}(s) = sL_2 I_1(s) - L_2 i_1(0_-) = 1 - 2 = -1$$

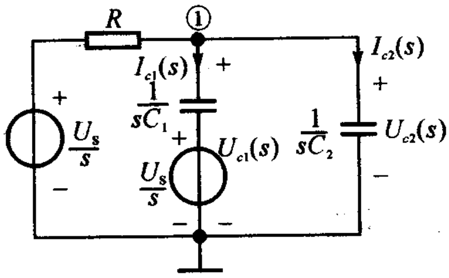
$$i_1(t) = \varepsilon(t)\mathrm{A}$$

$$u_{L_2}(t) = -\delta(t)\mathrm{V}$$

13－23 图示电路中 U_s 为恒定值，$u_{C2}(0_-) = 0$，开关闭合前电路已达稳态，$t = 0$ 时 S 闭合，求开关闭合后，电容电压 u_{C1} 和 u_{C2}，电流 i_{C1} 和 i_{C2}.



题 13－23 图



题解 13－23 图

解　开关闭合前电路已达稳态，有 $u_{C1}(0_-) = U_s$，$u_{C2}(0_-) = 0$，则开关闭合后电路运算电路如题解 13－23 图所示.

利用结点法，结点电压即为 $U_{C1}(s)$ 或 $U_{C2}(s)$，列出方程为

$$\left(\frac{1}{R} + sC_1 + sC_2\right)U_{C1}(s) = \frac{U_s}{sR} + sC_1\frac{U_s}{s}$$

解得

$$U_{C1}(s) = U_{C2}(s) = \frac{\left(\frac{1}{sR} + C_1\right)U_s}{\frac{1}{R} + s(C_1 + C_2)}$$

$$= \frac{(sRC_1 + 1)U_s}{R(C_1 + C_2)s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}$$

其中 $\tau = R(C_1 + C_2)$. 则

$$U_{C1}(s) = U_{C2}(s) = \frac{U_s}{s} - \frac{\frac{C_2}{C_1 + C_2}U_s}{s + \frac{1}{\tau}}$$

各电容中电流为

$$I_{C1}(s)=sC_1\left[U_{C1}(s)-\frac{U_s}{s}\right]$$

$$=\frac{C_1C_2}{(C_1+C_2)^2}\frac{U_s}{R}\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}-\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_s$$

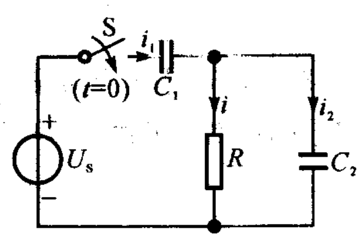
$$I_{C2}(s)=sC_2U_{C2}(s)=\frac{C_2^2}{(C_1+C_2)^2}\frac{U_s}{R}\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}+\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_s$$

得 $$u_{C1}=u_{C2}=U_s(1-\frac{C_2}{C_1+C_2}e^{-t/\tau})\text{V}$$

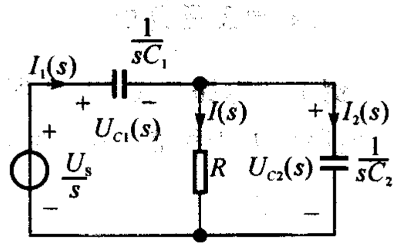
$$i_{C1}(t)=\left(\frac{C_1C_2}{(C_1+C_2)^2}\frac{U_s}{R}e^{-t/\tau}-\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_s\delta(t)\right)\text{A}$$

$$i_{C2}(t)=\left(\frac{C_2^2}{(C_1+C_2)}\frac{U_s}{R}e^{-t/\tau}+\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_s\delta(t)\right)\text{A}$$

13-24 图示电路中两电容原来未充电，在 $t=0$ 时将开关S闭合，已知 $U_s=10\text{V}$，$R=5\Omega$，$C_1=2\text{F}$，$C_2=3\text{F}$. 求 $t\geqslant 0$ 时的 u_{C1}，u_{C2} 及 i_1，i_2，i.



题 13-24 图



题解 13-24 图

解 开关闭合前，电路处于零状态，画出运算电路如图题解 13-24 图所示.

$$I_1(s)=\frac{\frac{U_s}{s}}{\frac{1}{sC_1}+\frac{R\frac{1}{sC_2}}{R+\frac{1}{sC_2}}}=\frac{20(15s+1)}{25s+1}=12+\frac{0.32}{s+0.04}$$

其它电流

$$I_2(s)=\frac{R}{R+\frac{1}{sC_2}}I_1(s)=\frac{300s}{25s+1}=12-\frac{0.48}{s+0.04}$$

$$I(s)=I_1(s)-I_2(s)=\frac{0.8}{s+0.04}$$

则电容电压为

$$U_{C1}(s)=\frac{1}{sC_1}I_1(s)=\frac{20(15s+1)}{2s(25s+1)}=\frac{10}{s}-\frac{4}{s+0.04}$$

$$U_{C2}(s)=\frac{1}{sC_2}I_2(s)=\frac{100}{25s+1}=\frac{4}{s+0.04}$$

得

$$u_{C1}(t)=10-4e^{-0.04t}\ \mathrm{V}$$

$$u_{C2}(t)=4e^{-0.04t}\ \mathrm{V}$$

$$i_1(t)=[12\delta(t)+0.32e^{-0.04t}]\mathrm{A}$$

$$i_2(t)=[12\delta(t)-0.48e^{-0.04t}]\mathrm{A}$$

$$i(t)=0.8e^{-0.04t}\ \mathrm{A}$$