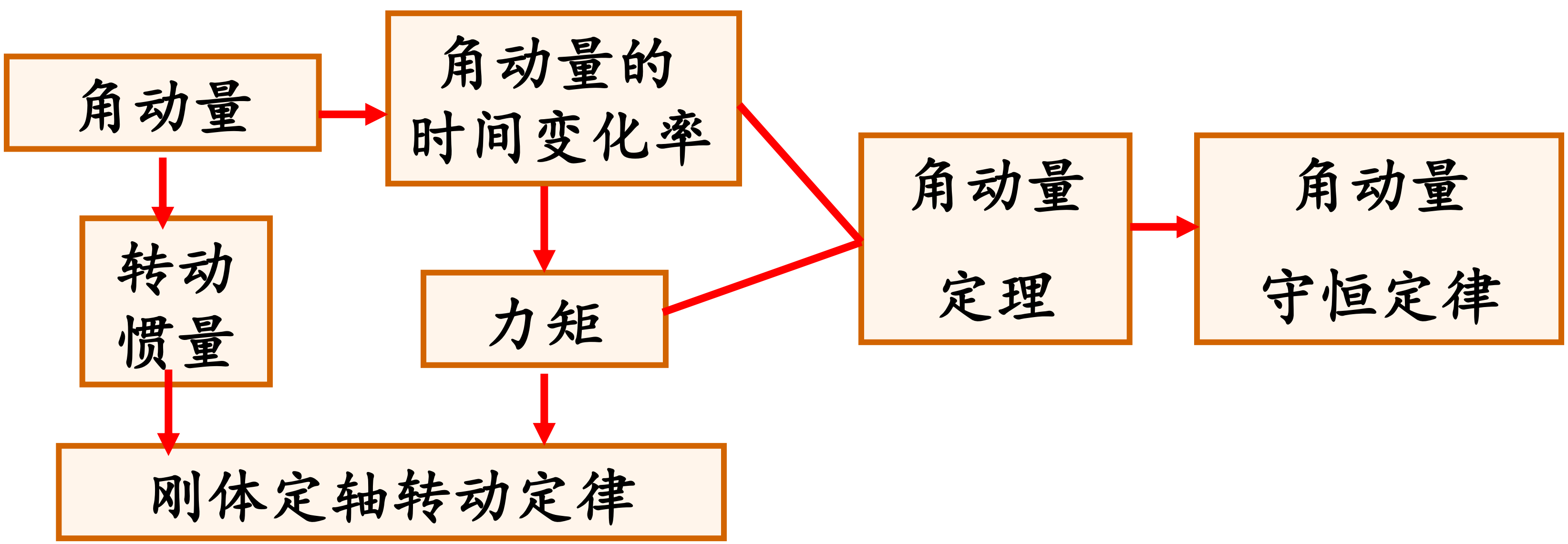
第五章 角动量 角动量守恒定律

结构框图：



重点：

概念：角动量，转动惯量，力矩，角冲量。

规律：刚体定轴转动定律，

角动量定理的微分形式和积分形式，

角动量守恒定律。

难点：角动量概念，

角动量定理及角动量守恒定律的应用。

学时：6

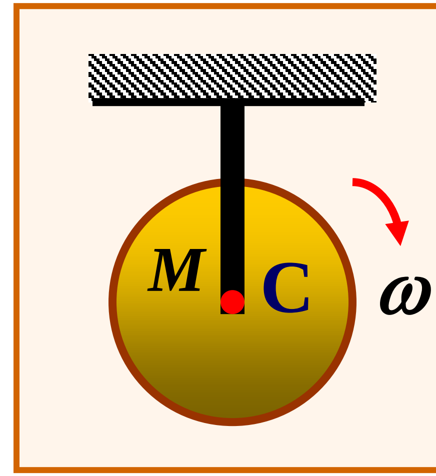
第一节　角动量　转动惯量

一、角动量(动量矩)

二、刚体对轴的转动惯量

一、角动量(动量矩)

问题： 将一绕通过质心的固定轴转动的圆盘视为一个质点系，系统总动量为多少？



$$\vec{p}_{总} = M\vec{v}_C = 0$$

由于该系统质心速度为零，所以，系统总动量为零，但系统有机械运动。

因此： 不宜采用动量来量度转动物体的机械运动

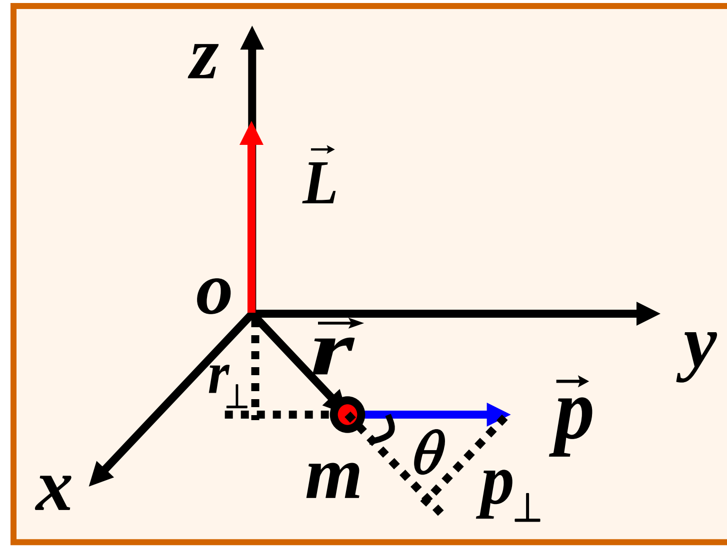
*引入与动量 $\vec{p}$ 对应的角量 $\vec{L}$——角动量（动量矩）

动量对参考点（或轴）求矩

1. 质点的角动量

定义： t 时刻质点对参考点O的角动量：

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$



大小： $L=rmv\sin\theta$

$$=rp_\perp=pr_\perp$$

方向： 服从右手定则，垂直于 $\vec{r}$ 和 $\vec{p}$ 组成的平面。

特例： 若$\vec{v}\perp\vec{r}$，则$L=mvr$，若 $\vec{v}//\vec{r}$，则$L=0$

注意： 必须指明参考点，角动量才有实际意义。

记住！

讨论：(1) 质点m作曲线运动时具有角动量。

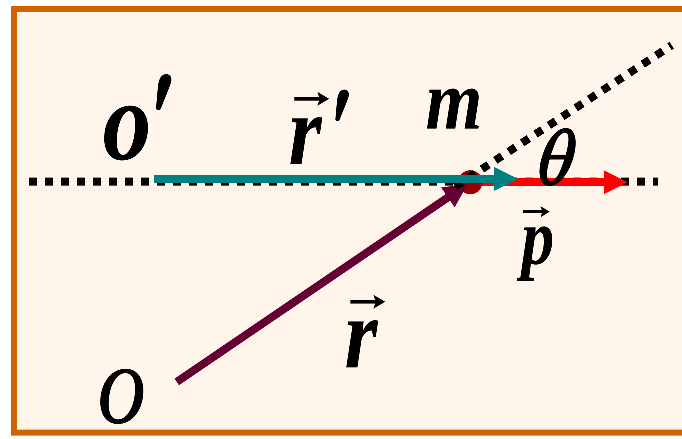
(2) 质点m作直线运动时也可以具有角动量。

(3) 相对不同参考点质点m直线运动有无角动量的情况可能变化。

设m作直线运动：

以o为参考点：$\vec{L} \neq 0$

以o′为参考点：$\vec{L}' = 0$

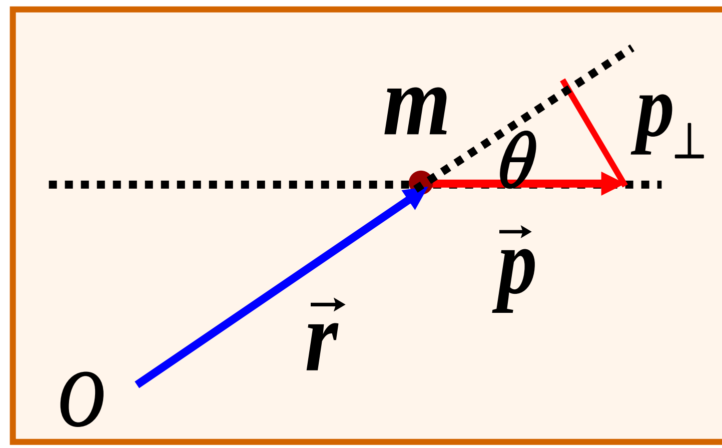


判断直线运动质点有无角动量的方法：观察质点的是否与$\vec{r}$平行，若平行，则无角动量，否则有角动量。

(4) 质点对某参考点的角动量反映质点绕该参考点旋转运动的强弱。

角动量：

$$L = r\,p\sin\theta = r\,mv\sin\theta$$
$$= rp_{\perp} = rmv_{\perp}$$



若运动质点：$L\uparrow, p_{\perp}\uparrow$， $v_{\perp}\uparrow$

2. 质点系角动量

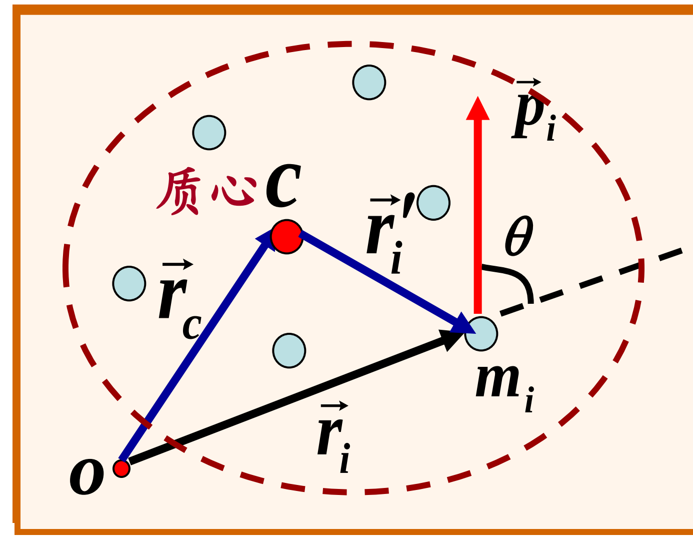
系统内所有质点对同一参考点角动量的矢量和

$$\vec{L}=\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i=\sum_i \vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$$

$$=\vec{r}_c\times M\vec{v}_c+\sum_i \vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i' \text{（推导略）}$$

第一项：$\vec{r}_c\times M\vec{v}_c$

即将质点系全部质量集中于质心处的一个质点上，该质点对参考点O的角动量。



有'：对质心

无'：对参考点

以质心为代表，描述质点系整体绕参考点的旋转运动，称为质点系的轨道角动量。

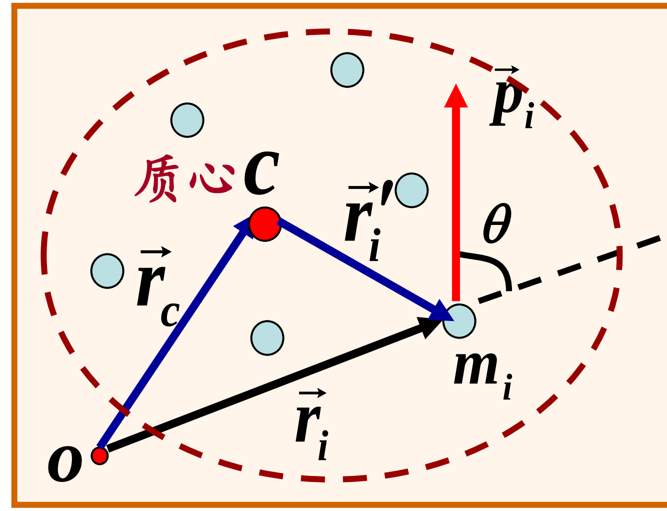
$$\vec{L} = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

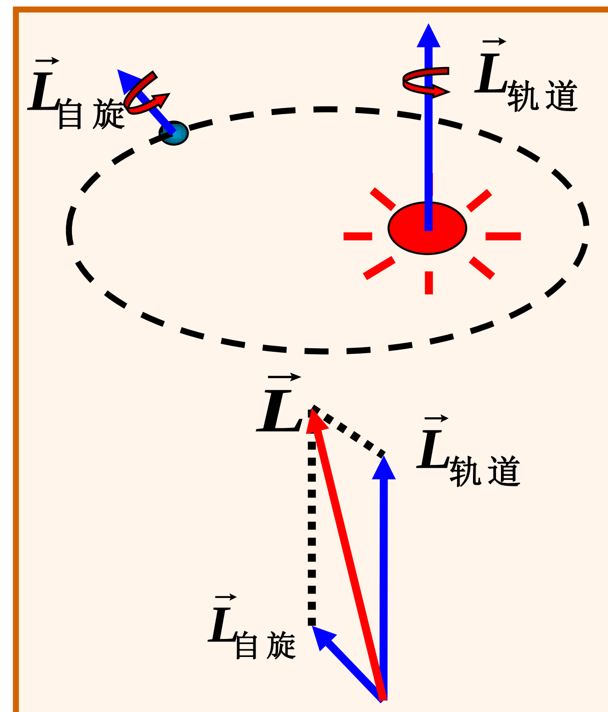
$$= \vec{L}_{轨道} + \vec{L}_{自旋}$$

第二项： $\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$

各质点相对于质心角动量的矢量和

反映质点系绕质心的旋转运动，与参考点O的选择无关，描述系统的内禀性质,为自旋角动量。





一、角动量(动量矩)

3. 定轴转动刚体的角动量

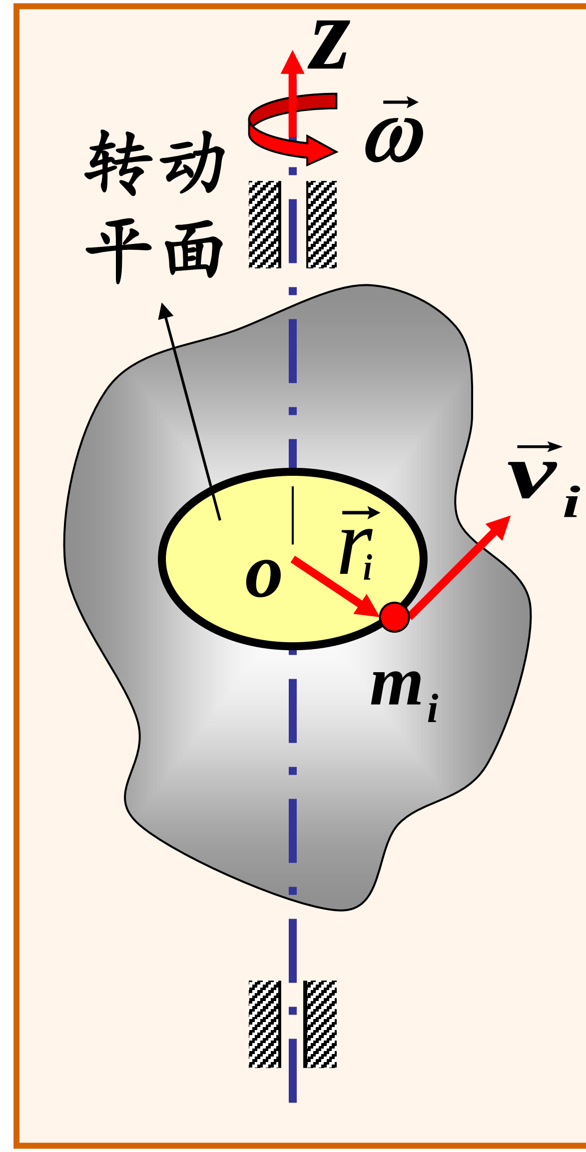
(1) 质点对定轴的角动量

转轴Z 角速度 $\vec{\omega}$

质点m_i对O的角动量：$\vec{L}_{io} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

$$\vec{L}_{io} \Rightarrow \begin{cases} 大小：L_{io} = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega \\ 方向沿：\vec{\omega} \end{cases}$$

即 $\vec{L}_{io} = m_i r_i^2 \vec{\omega}$



质点对 z 轴的角动量：在轴上确定正方向，角速度表示为代数量，质点 m 对O 点的角动量的大小：

$$L_{iz}=L_{iO}=m_i r_i^2\omega$$

注意：以旋转方向为正方向，ω和L_{iz}为正。

(2) 定轴转动刚体对定轴的角动量

刚体定轴转动的特点：

①质点均在各自的转动平面内,作半径不同的圆周运动；

②各质点的角速度$\vec{\omega}$大小相等，且均沿轴向。

定轴转动刚体对z轴的总角动量为：

$$L_z=\sum_i L_{iz}=\sum_i r_i^2 m_i\omega=\omega\sum_i r_i^2 m_i$$

令 $J=\sum_i r_i^2 m_i$ 为刚体对轴的转动惯量，则： $L_z=J\omega$

二、刚体对轴的转动惯量

1. 质量不连续分布刚体： $J=\sum_i r_i^2 m_i$

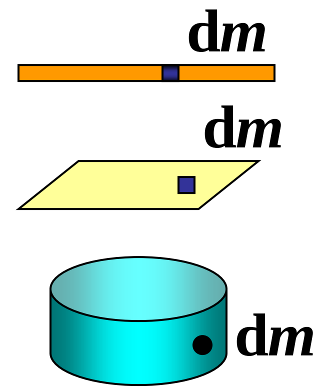
刚体对某定轴的转动惯量等于其各质点到转轴距离的平方与该质点的质量之积求和。

注意：J为各质点对定轴转动惯量之和。

2. 质量连续分布刚体： $J=\int r^2 \mathrm{d}m$

$$J=\int r^2\mathrm{d}m$$ 中积分元选取：

$$\mathrm{d}m=\begin{cases}\lambda\mathrm{d}l & \text{线密度：}\lambda\text{，　线元：}\mathrm{d}l\\ \sigma\mathrm{d}S & \text{面密度：}\sigma\text{，　面元：}\mathrm{d}S\\ \rho\mathrm{d}V & \text{体密度：}\rho\text{，　体元：}\mathrm{d}V\end{cases}$$



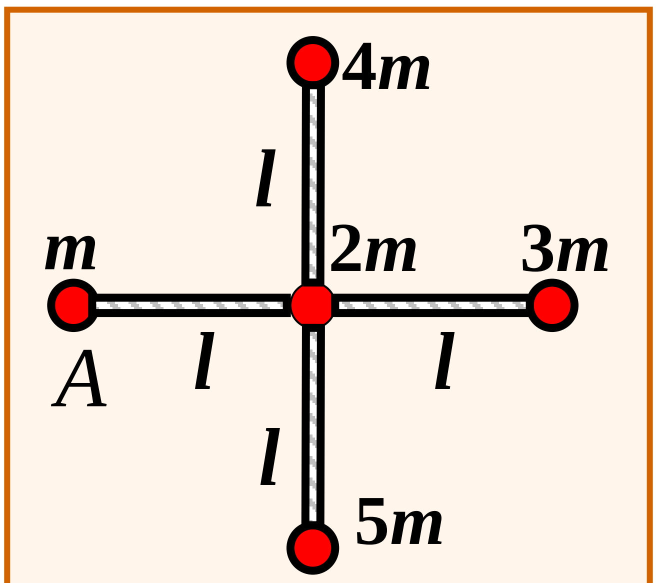
刚体对轴的转动惯量J的特点：

$$\text{刚体对轴的转动惯量}J\begin{cases}\text{与刚体总质量有关}\\ \text{与刚体质量分布有关}\\ \text{与转轴的位置有关}\end{cases}$$

3. 转动惯量的计算

例1：

由长l的轻杆连接的质点如图所示，求质点系对过A垂直于纸面的轴的转动惯量

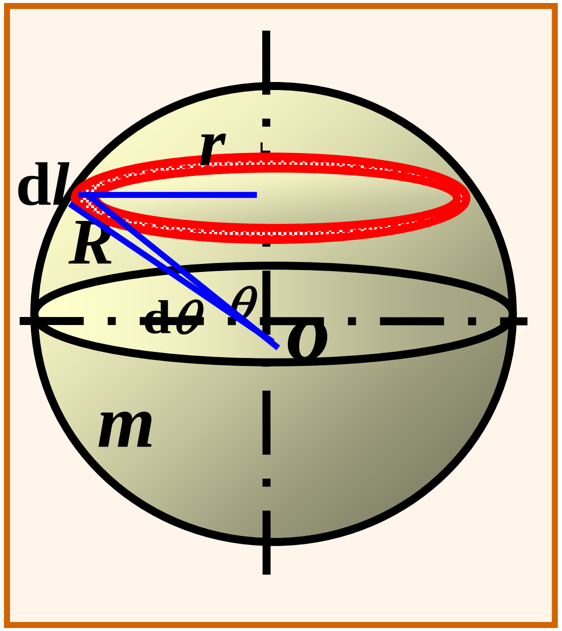


$$J = 2ml^2 + 3m(2l)^2 + (4m + 5m)(\sqrt{2}l)^2$$

$$= 32ml^2$$

例2（P_{87}例3）：

求质量 m ,半径 R 的均匀球壳对直径的转动惯量。



解：取离轴线距离相等的点的集合为积分元

$$\mathrm{d}S = 2\pi r \mathrm{d}l = 2\pi R\sin\theta \cdot R\mathrm{d}\theta$$

$$\sigma = \frac{m}{4\pi R^2}$$

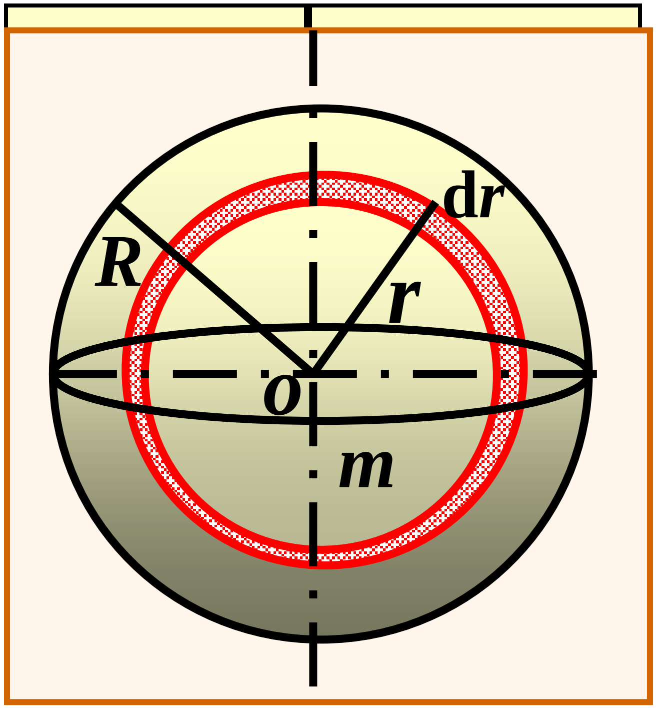
$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}S = \frac{1}{2} m \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}J = r^2 \mathrm{d}m = (R\sin\theta)^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2} mR^2 \sin^3\theta \mathrm{d}\theta$$

$$J = \int \mathrm{d}J = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} mR^2 \sin^3\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2}{3} mR^2$$

例3 (P$_{88}$例4)：

求质量 m ,半径 R 的均匀球体对直径的转动惯量。



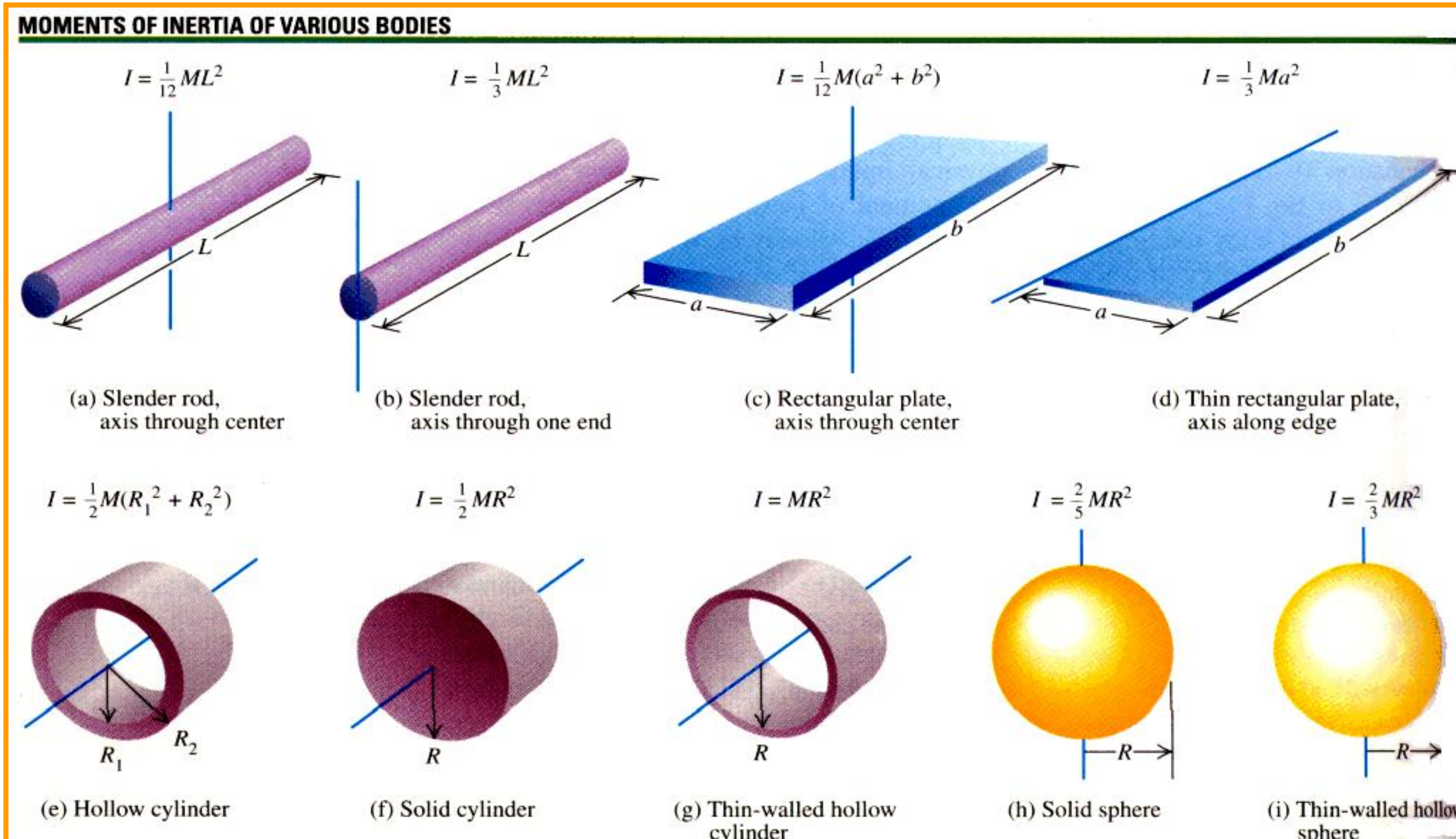
解：以距中心 r, 厚 $\mathrm{d}r$ 的球壳为积分元。

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}V &= 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\ \rho &= \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \end{aligned}\right\} \mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}J = \frac{2}{3}\mathrm{d}m \cdot r^2 = \frac{2mr^4\mathrm{d}r}{R^3}$$

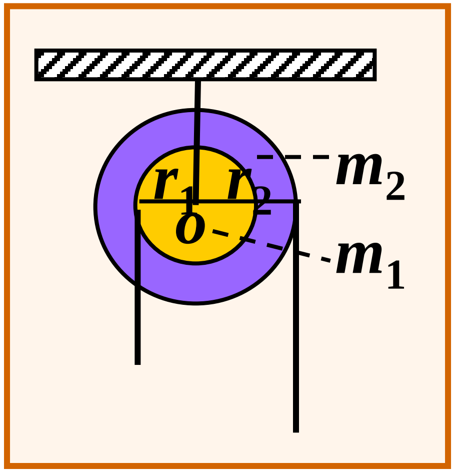
$$J = \int \mathrm{d}J = \int_0^R \frac{2mr^4\mathrm{d}r}{R^3} = \frac{2}{5}mR^2$$

教材P$_{89}$ 一些均匀刚体的转动惯量表



注意：对同轴的转动惯量具有可加减性。

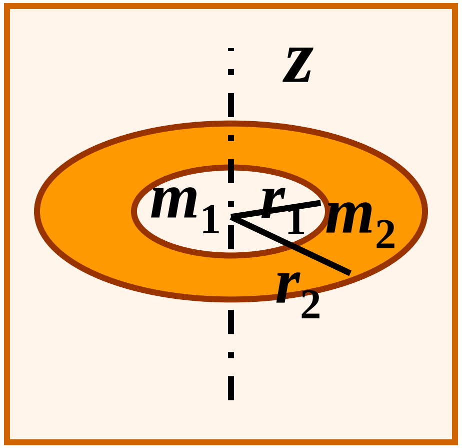
同轴圆柱



$$J_z = J_1 + J_2$$

$$= \frac{m_1 r_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2}$$

空心圆盘

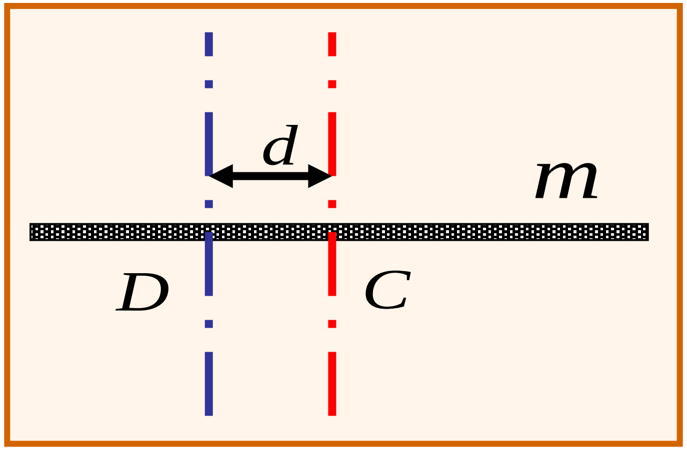


$$J_z = J_2 - J_1$$

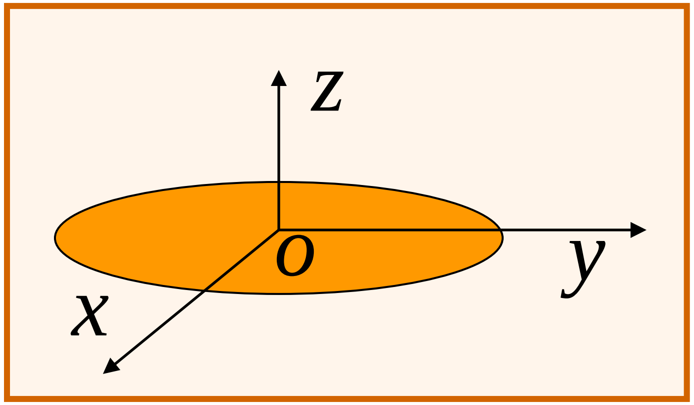
$$= \frac{m_2 r_2^2}{2} - \frac{m_1 r_1^2}{2}$$

4. 平行轴定理

$$J_D = J_C + md^2$$



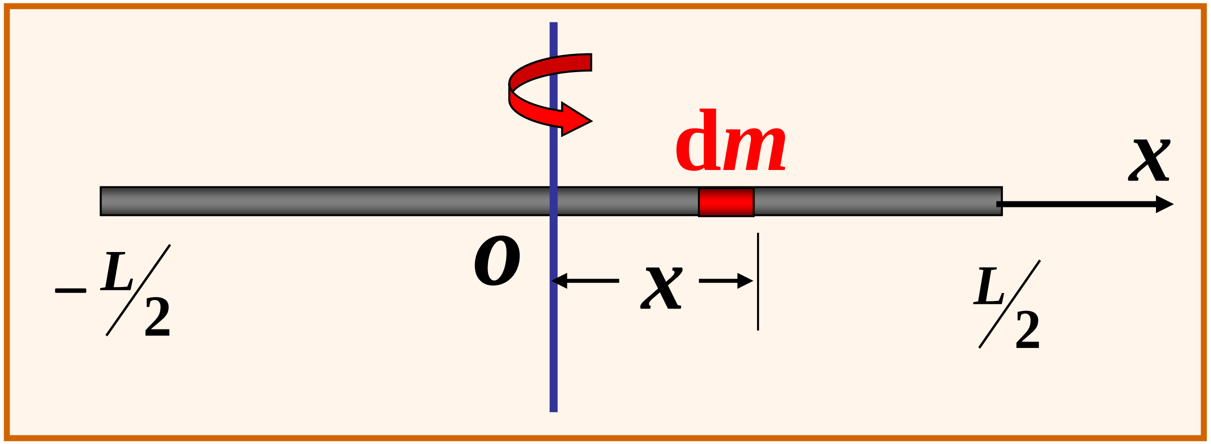
5. 正交轴定理



对平面刚体

$$J_z = J_x + J_y$$

例4. 一长为L的细杆，质量m均匀分布，求该杆对垂直于杆，分别过杆的中点、一端端点和距端点$L/4$处的轴的转动惯量。



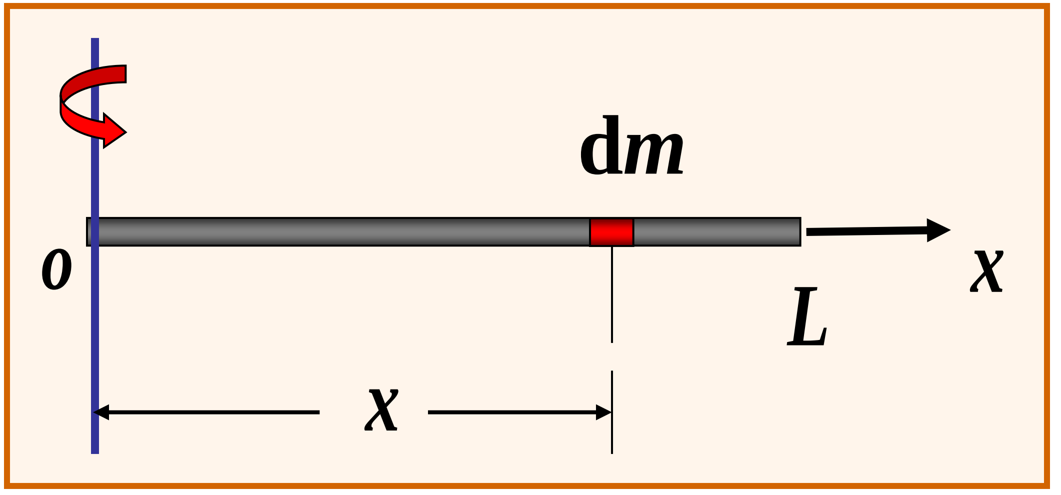
解：(1) 轴过中点

$$dm = \frac{m}{L}dx$$

$$J = \int x^2 dm$$

$$= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{m}{L}\frac{1}{3}x^3 \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{12}mL^2$$

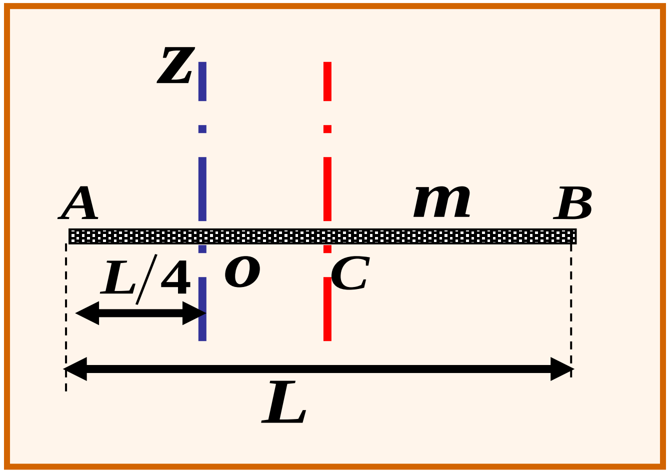
(2) 轴过一端端点



$$J=\int x^2 \mathrm{d}m$$

$$=\int_0^L x^2 \frac{m}{L}\mathrm{d}x=\frac{m}{L}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^L=\frac{1}{3}mL^2$$

(3) 轴过距端点L/4处



解法一：

$$J_z = \int x^2 dm = \int_{-L/4}^{3L/4} \frac{m}{L} x^2 dx = \frac{7}{48} mL^2$$

解法二： $J_z = J_{oA} + J_{oB} = \frac{1}{3}\frac{m}{4}\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\frac{3m}{4}\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = \frac{7}{48} mL^2$

解法三： $J_z = J_C + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{12} mL^2 + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{7}{48} mL^2$

第二节 角动量的时间变化率 力矩

一、质点角动量的时间变化率

二、力矩

三、质点系角动量的时间变化率

四、刚体定轴转动定律

一、质点角动量的时间变化率

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

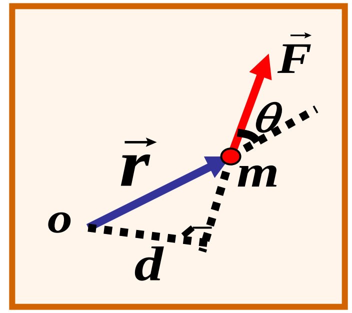
又 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}=\vec{v}\times\vec{p}=\vec{v}\times m\vec{v}=0$

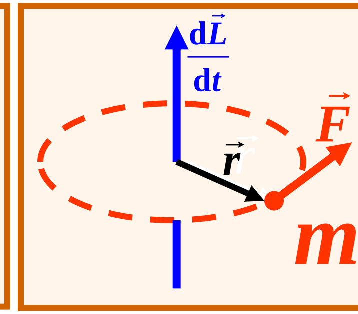
$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\underset{\text{质点位矢}}{\vec{r}}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\underset{\text{合力}}{\vec{F}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$ 合力的力矩

大小： $\left|\vec{r}\times\vec{F}\right|=rF\sin\theta=Fd$

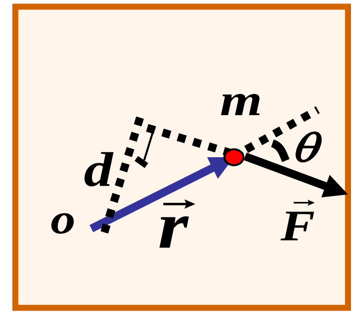
方向：服从右手定则





二、力矩

1. 力对参考点的力矩：$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$



大小：$\left|\vec{r}\times\vec{F}\right|=Fr\sin\theta=Fd$

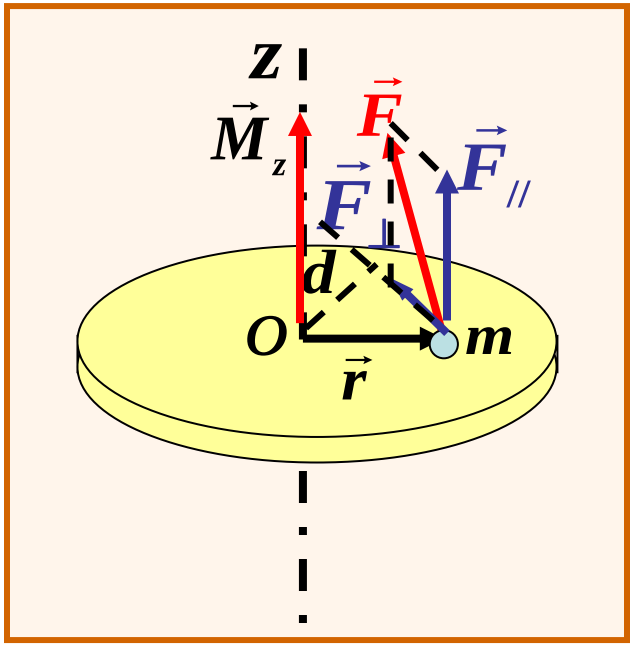
方向：服从右手定则，垂直于$\vec{r}$和$\vec{F}$组成的平面。

特例：

1. 若 $\vec{r}\perp\vec{F}$，则 $\left|\vec{M}\right|=Fr$，若 $\vec{r}\,/\!/\,\vec{F}$，则 $\left|\vec{M}\right|=0$

2. 力作用于参考点或其作用线通过参考点时，力对参考点的力矩为零。

2. 力对轴的力矩



力对O点的力矩：

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times(\vec{F}_{//}+\vec{F}_{\perp})$$

$$=\vec{r}\times\vec{F}_{//}+\vec{r}\times\vec{F}_{\perp}$$

第一项： $\vec{M}_1=\vec{r}\times\vec{F}_{//}$

方向垂直于轴，为$\vec{M}$在垂直于z轴方向的分量。其效果是企图改变轴的方位，在定轴问题中，与轴承约束力矩平衡。

第二项： $\vec{M}_z=\vec{r}\times\vec{F}_{\perp}$

方向平行于轴,为$\vec{M}$在z轴方向的分量。其效果是改变绕轴转动状态,称为**力对转轴z的力矩**,表示为代数量为：

$$M_z=\pm\left|\vec{M}_z\right|=\pm\left|\vec{r}\times\vec{F}_{\perp}\right|$$

$$M_z = \pm\left|\vec{M}_z\right| = \pm\left|\vec{r}\times\vec{F}_\perp\right| = \pm F_\perp r\sin\theta = \pm F_\perp d$$

若 $\vec{M}_z$沿规定的正方向，取“+”;反之取“-”。

总结： 求力$\vec{F}$对z 轴的力矩

先求出力$\vec{F}$在垂直于z轴的平面（转动平面）内的分力$\vec{F}_\perp$，找出转动平面与z轴的交点O，求出O到$\vec{F}_\perp$的距离d，再求出$\vec{F}_\perp$对O的力矩的代数量$M_z = \pm F_\perp d$，则为力F对z轴的力矩。

特例： 若 $\vec{F}\perp$ z轴，则$M_z = \pm Fd$ ，若 $\vec{F}\,//$ z轴，则$M_z = 0$

其它情况：$M_z = \pm F_\perp r\sin\theta = \pm F_\perp d$

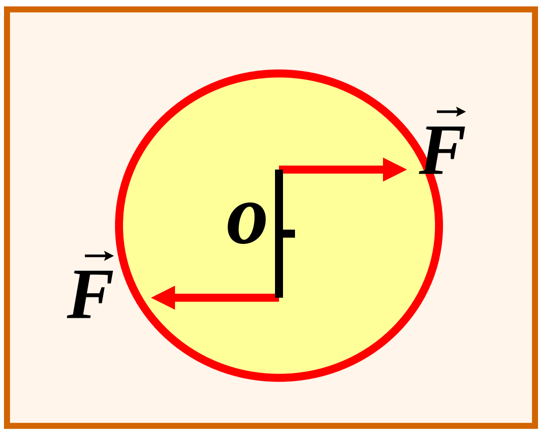
注意:(1) 力矩求和只能对同一参考点（或轴）进行。

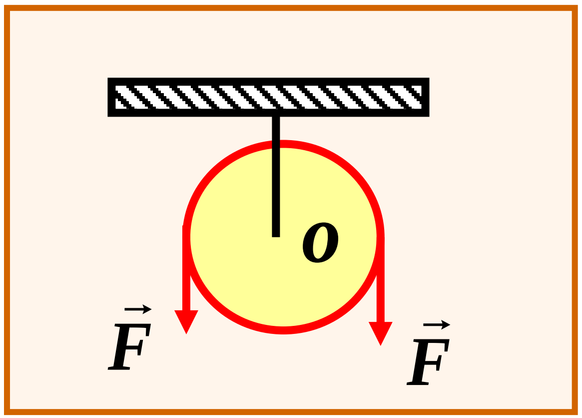
$$\vec{M}_o=\vec{M}_{1o}+\vec{M}_{2o}+\cdots \qquad \text{矢量和}$$

$$M_z=M_{1z}+M_{2z}+\cdots \qquad \text{代数和}$$

(2) 合力为零时，其合力矩不一定为零；合力矩为零时，合力不一定为零。

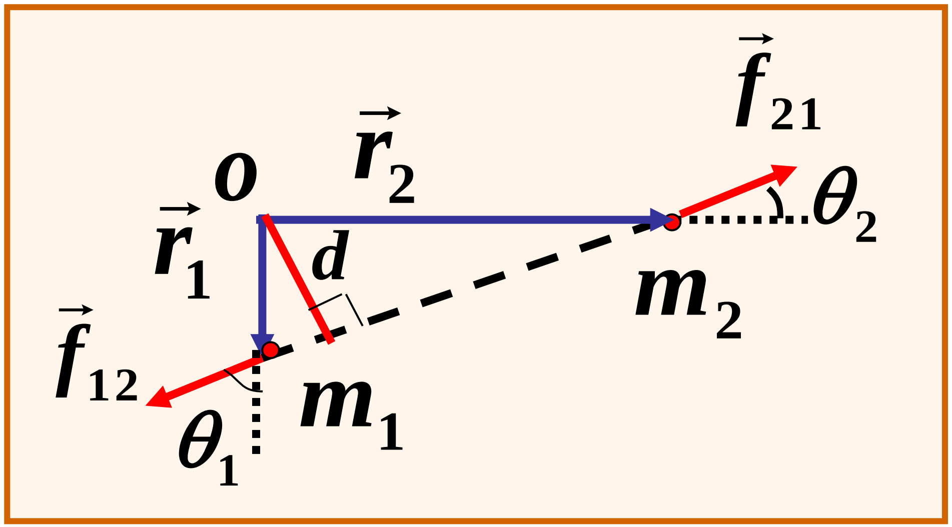
例:





$$\sum\vec{F}=0 \quad \sum\vec{M}_o\neq 0 \qquad\qquad \sum\vec{M}_o=0 \quad \sum\vec{F}\neq 0$$

注意: (3) 质点系所有内力矩之和 $\sum_i \vec{M}_{i内} = 0$



质点系内力矩的作用:

不能改变质点系总角动量，但是影响总角动量在系内各质点间的分配。

三、质点系角动量的时间变化率

对N个质点$m_1, m_2, \cdots, m_N$组成的质点系，由

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$ 可得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{L}_1}{\mathrm{d}t} &= \vec{M}_{1外} + \vec{M}_{1内} \\
\frac{\mathrm{d}\vec{L}_2}{\mathrm{d}t} &= \vec{M}_{2外} + \vec{M}_{2内} \\
&\cdots\cdots \\
\frac{\mathrm{d}\vec{L}_N}{\mathrm{d}t} &= \vec{M}_{N外} + \vec{M}_{N内}
\end{aligned}\right\}$$

两边求和得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec{L}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \sum_i \vec{M}_{i外} + \sum_i \vec{M}_{i内}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_i \vec{M}_{i外}+\sum_i \vec{M}_{i内}$$

又 $$\sum_i \vec{M}_{i内}=0 \quad \therefore \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_i \vec{M}_{i外}=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_{i外}$$

质点系总角动量的时间变化率等于质点系所受外力的矩矢量和(合外力矩)

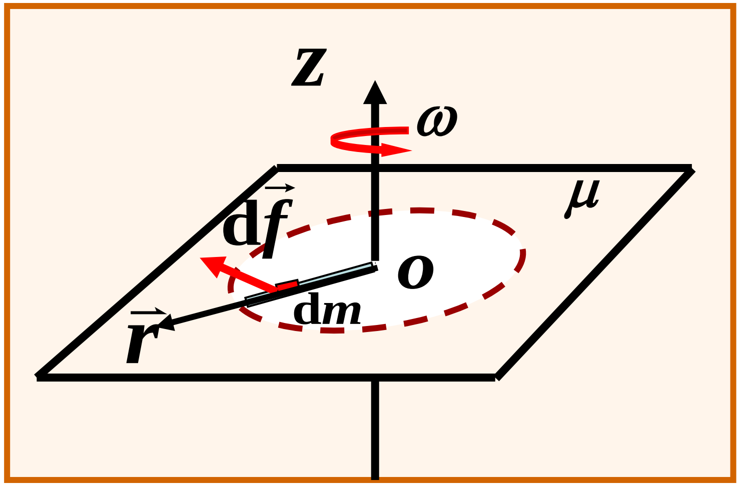
注意：对质点系：合外力矩 $\sum_i \vec{M}_{i外}$ 是质点系所受各外力矩的矢量和，而非合力的力矩。

对质点：合力矩 $\vec{M}_{合}$ 是质点所受各力力矩的矢量和，也是合力 $\vec{F}_{合}$ 的力矩。

例P$_{91}$例1：质量为m,长为L的细杆在水平粗糙桌面上绕过其一端的竖直轴旋转，杆与桌面间的摩擦系数为μ，求摩擦力矩。

1) 杆的质量均匀分布

2) 杆的密度与离轴距离成正比



解:1） $$\mathrm{d}m=\frac{m}{L}\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}f=\mu \mathrm{d}mg$$

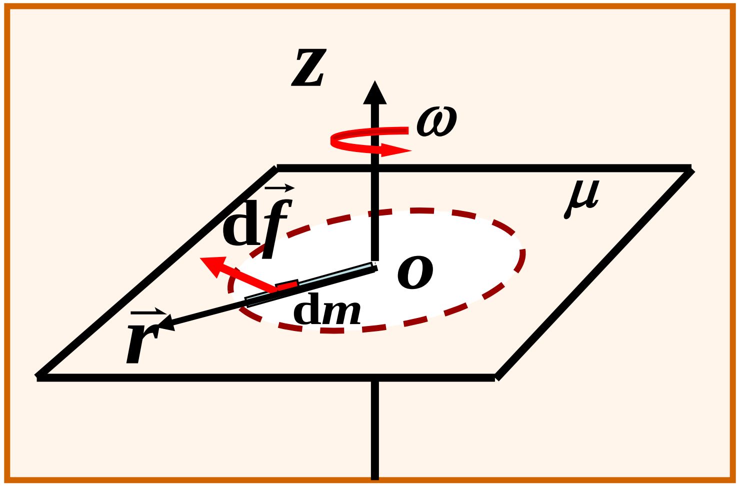
$$\mathrm{d}M=-r\mathrm{d}f$$

$$M=\int \mathrm{d}M=-\int_0^L r\mu\frac{m}{L}g\mathrm{d}r=-\frac{1}{2}\mu mgL$$

2）设杆的线密度 $\lambda = kr$

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}r = kr\mathrm{d}r$$

由 $m = \int \mathrm{d}m = \int_0^L kr\mathrm{d}r = \frac{1}{2}kL^2$



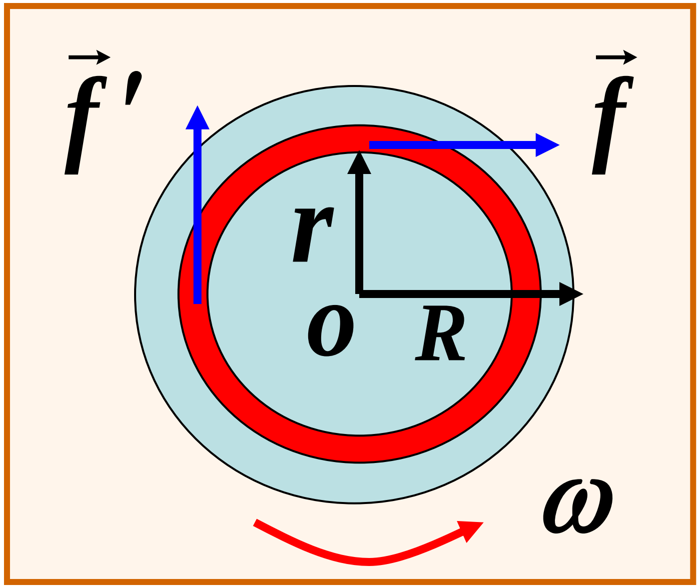
得 $k = \frac{2m}{L^2}$

$$\mathrm{d}f = \mu \mathrm{d}mg = \frac{2\mu mg}{L^2} r\mathrm{d}r$$

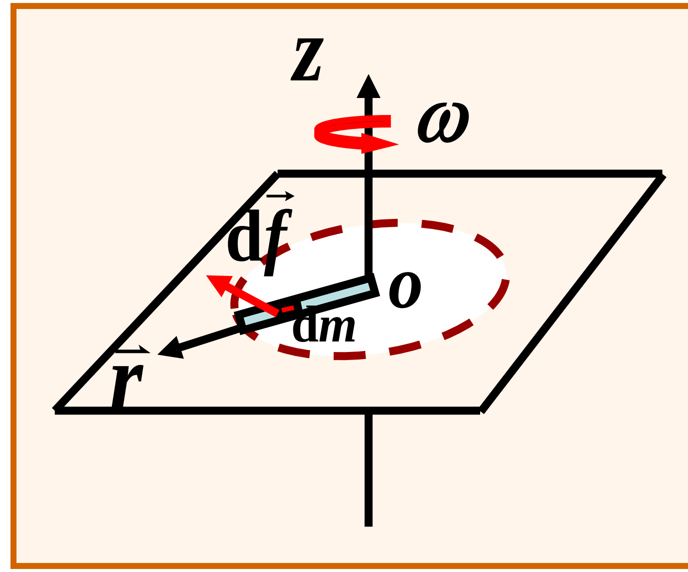
$$\mathrm{d}M = -r\mathrm{d}f = -\frac{2\mu mg}{L^2} r^2 \mathrm{d}r$$

$$M = \int \mathrm{d}M = -\int_0^L \frac{2\mu mg}{L^2} r^2 \mathrm{d}r = -\frac{2}{3}\mu mgL$$

实际意义



等效



半径 R，质量 m 的匀质圆盘，与桌面间摩擦系数 μ，求摩擦力矩

简化模型：

长 R，线密度 $\lambda = kr$ 总质量 m 的细杆

▲四、刚体定轴转动定律

质点系：$\vec{M}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

对定轴刚体：$M_z = \dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$

又：$L_z = \omega \sum_i r_i^2 m_i = J\omega$

故 $M_z = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\omega) = J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\beta$ → 刚体定轴转动定律

刚体定轴转动加速度的大小与刚体所受的对该轴的合外力矩成正比，与刚体对该轴的转动惯量成反比。

比较

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} & \text{—矢量式} \\ M_z = J\beta & \text{—标量式} \end{cases}$$

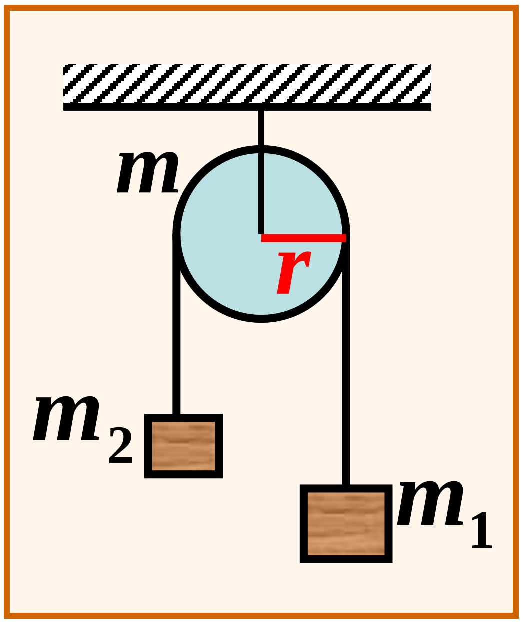
$\vec{F}$	改变物体平动状态的原因
m	是物体平动惯性的量度
M_z	改变物体绕轴转动状态的原因
J	是物体转动惯性的量度

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{F} = m\vec{a} & \text{平动问题} \\ M_z = J\beta & \text{刚体定轴转动问题} \end{array}\right\} \text{地位相同}$$

求M_z：找出垂直于z轴的各力(或分力)，求出其对z轴的力矩$\pm Fd$ (或$\pm F_{\perp}d$),将其代数相加,则为对z轴的合外力矩。

特例：若力作用于轴或力的作用线通过轴，力对轴的力矩为零。

例1: 一定滑轮的质量为m，半径为r，一轻绳两边分别系m_1和m_2两物体挂于滑轮上，绳不伸长，绳与滑轮间无相对滑动。不计轴的摩擦，初角速度为零，求滑轮转动角速度随时间变化的规律。



已知：

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad r,\quad \omega_0=0$$

求：$\omega(t)=?$

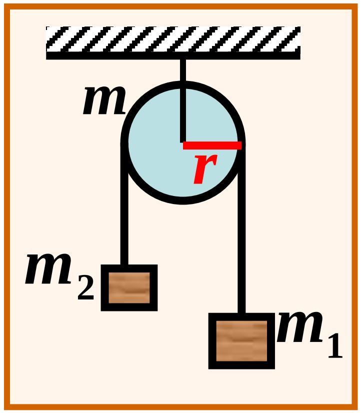
思路:

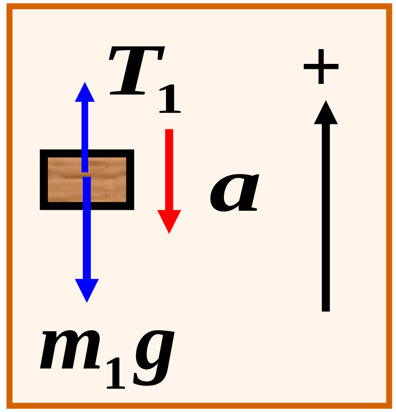
质点平动与刚体定轴转动关联问题，

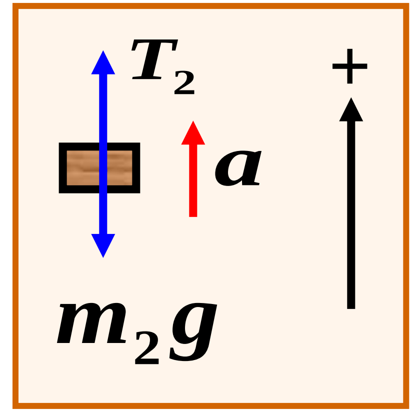
隔离法，分别列方程，

先求角加速度 $\beta \rightarrow \omega$

解: 在地面参考系中，分别以 m_1, m_2, m 为研究对象，用隔离法，分别以牛顿第二定律和刚体定轴转动定律建立方程。



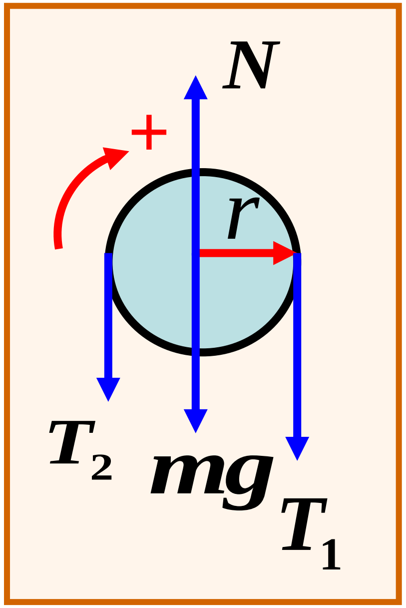




$$m_1: \quad T_1 - m_1 g = -m_1 a \qquad (1)$$

$$m_2: \quad T_2 - m_2 g = m_2 a \qquad (2)$$

思考：$T_1 \overset{?}{=} T_2$



滑轮 m：以顺时针方向为正方向

$$T_1 r - T_2 r = J\beta = \frac{1}{2}mr^2\beta \qquad (3)$$

$$T_1 \neq T_2$$

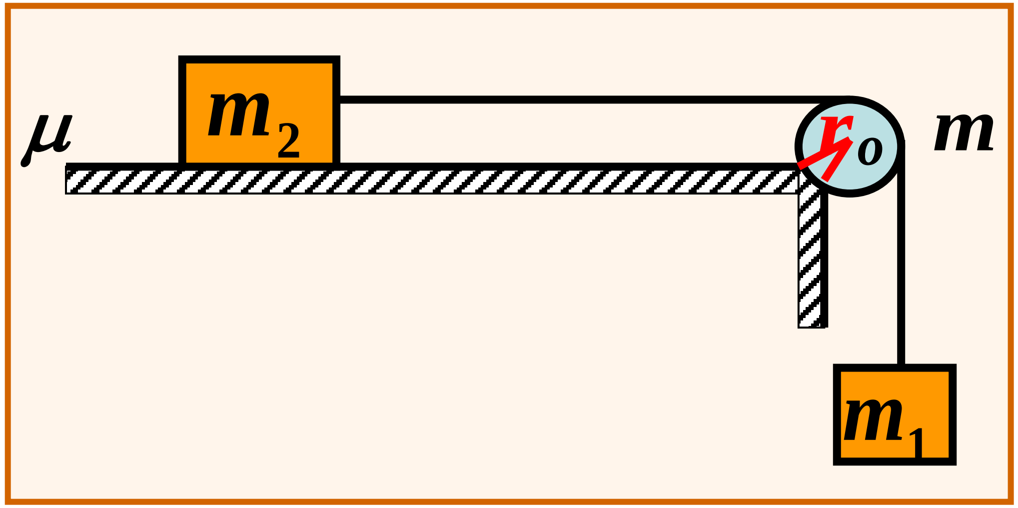
四个未知数：a，T_1，T_2，β 三个方程 ？

绳与滑轮间无相对滑动，由角量和线量的关系：

$$a = r\beta \qquad (4)$$

解得 $\beta = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m\right)r}$ $\qquad \omega = \omega_0 + \beta t = \dfrac{(m_1 - m_2)gt}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m\right)r}$

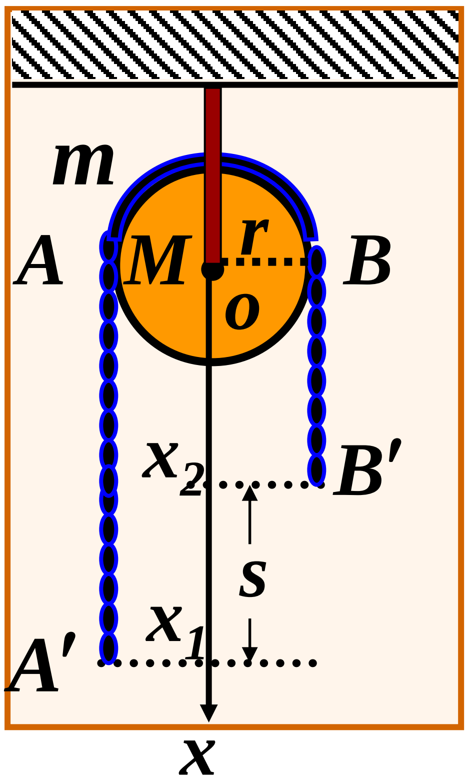
P_{104} 5.7:



求m_1下落的加速度和两段绳中的张力。

思路:在地面参考系中,选取m_1和m_2滑轮为研究对象,采用隔离法分别运用牛顿定律和刚体定轴转动定律求解。

例2（P_{105} 5.9）：质量为M的匀质圆盘,可绕通过盘中心垂直于盘的固定光滑轴转动，绕过盘的边缘有质量为m、长为l的匀质柔软绳索(如图)。设绳与圆盘无相对滑动，试求当圆盘两侧绳长差为s时，绳的加速度的大小。



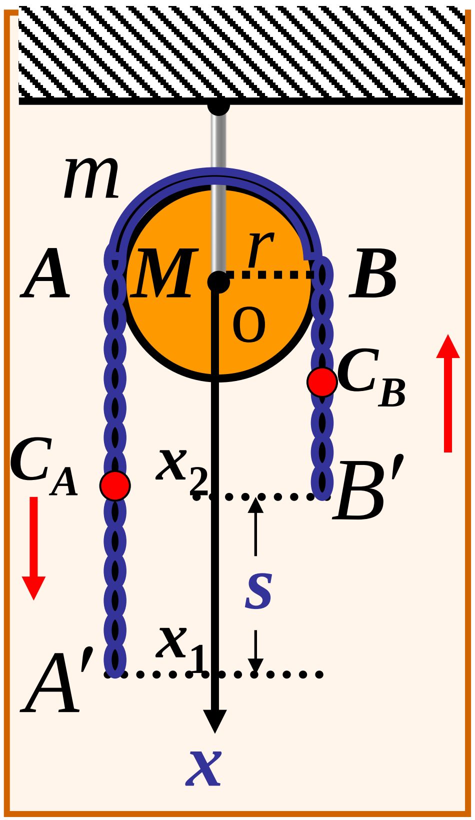
解：在地面参考系中，建立如图x坐标系，设绳两端坐标分别为x_1，x_2，滑轮半径为r，有：

$$l = AA' + \overset{\frown}{AB} + BB' = x_1 + x_2 + \pi r$$

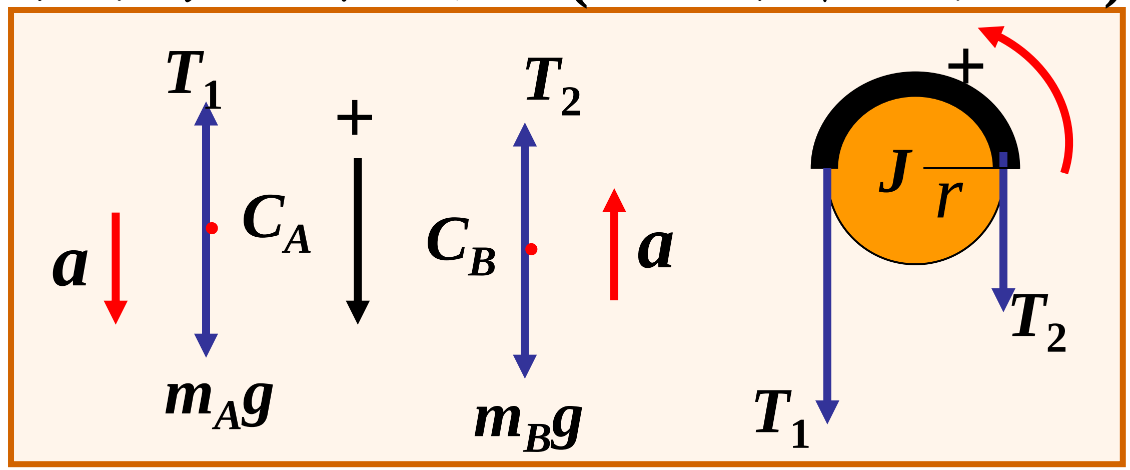
$$s = x_1 - x_2$$

$$m_{AB} = \frac{m}{l} \cdot \pi r \qquad m_A = m_{AA'} = \frac{m}{l} \cdot x_1$$

$$m_B = m_{BB'} = \frac{m}{l} \cdot x_2$$



用隔离法列方程：(以逆时针方向为正)



$$\begin{cases} m_A g - T_1 = m_A a \\ m_B g - T_2 = -m_B a \\ T_1 r - T_2 r = J\beta \\ J = J_M + J_{AB} = \frac{1}{2}Mr^2 + m_{AB}r^2 \end{cases}$$

又：$a = r\beta$

$$s = x_1 - x_2$$

解得：$a = \dfrac{mgs}{(m + \frac{1}{2}M)l}$

第三节 角动量定理

一、角动量定理的微分、积分形式

二、角动量定理的应用

一、角动量定理的微分、积分形式

	瞬时效应	微分形式	积分形（有限时间过程）
质点	$\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$	$\mathrm{d}\vec{L}=\vec{M}\mathrm{d}t$	$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,\mathrm{d}t=\int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2}\mathrm{d}\vec{L}=\Delta\vec{L}$
质点系	$\vec{M}_{外}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$	$\mathrm{d}\vec{L}=\vec{M}_{外}\mathrm{d}t$	$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_{外}\mathrm{d}t=\int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2}\mathrm{d}\vec{L}=\Delta\vec{L}$
定轴刚体	$M_{轴}=J\beta$	$J\mathrm{d}\omega=M_{轴}\mathrm{d}t$	$\int_{t_1}^{t_2}M_{轴}\mathrm{d}t=\int_{\omega_1}^{\omega_2}J\mathrm{d}\omega$ $=J\Delta\omega$

注意:

1. 力矩对时间的积累：$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t$ 定义为角冲量(冲量矩)

其效果为改变角动量。

2. 比较：$\vec{p}$ $\begin{cases} \text{时间变化率与 } \vec{F} \text{ 对应} \\ \text{一定时间过程的变化量与 } \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t \text{ 对应} \end{cases}$

$\vec{L}$ $\begin{cases} \text{时间变化率与 } \vec{M} \text{ 对应} \\ \text{一定时间过程的变化量与 } \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t \text{ 对应} \end{cases}$

3. 同一式中，$\vec{M}$，$\vec{L}$，J，$\vec{\omega}$ 等角量要对同一参考点或同一轴计算。

二、角动量定理的应用

自学：旋进运动