西南交通大学 2019－2020 学年第(1)学期考试试卷

课程代码 MATH000212 课程名称 线性代数 A(A 卷) 考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	总分
得分					

密封装订线 姓 名 密封装订线 学 号 密封装订线 班 级

请考生注意，本试卷共四大题，共 17 小题. 试卷中，$|A|$表示矩阵A的行列式，A^{-1}表示A的逆矩阵，A^T是A的转置，$r(A)$表示矩阵A的秩，E表示单位矩阵.

一、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设A,B为n阶方阵，满足等式$AB=O$，则必有（　　）.

（A）$A=O$或$B=O$；　　（B）$A+B=O$；

（C）$|A|=0$或$|B|=0$；　　（D）$|A|+|B|=0$.

2. 设A是$m\times n$矩阵，且$m<n$，则下列说法正确的是（　　）

（A）A的列向量组一定线性相关；

（B）A的列向量组一定线性无关；

（C）A的行向量组一定线性相关；

（D）A的行向量组一定线性无关.

3. 设向量组α_1，α_2，α_3线性无关，则下列向量组中线性无关的是（　　）.

（A）$\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$；

（B）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$；

（C）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$；

（D）$\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3$，$\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3$.

4. 设α_1，α_2，α_3是四元非齐次线性方程组$Ax=b$的三个解向量，且$r(A)=3$，$\alpha_1=(1,\ 2,\ 3,\ 4)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(0,\ 1,\ 2,\ 3)^T$，$k$表示任意常数，则线性方程组$Ax=b$的通解为（　　）

（A）$(1,\ 2,\ 3,\ 4)^T+k(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$；　　（B）$(1,\ 2,\ 3,\ 4)^T+k(0,\ 1,\ 2,\ 3)^T$；

（C）$(1,\ 2,\ 3,\ 4)^T+k(2,\ 3,\ 4,\ 5)^T$；　　（D）$(1,\ 2,\ 3,\ 4)^T+k(3,\ 4,\ 5,\ 6)^T$.

5. 设$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则下列说法正确的是（　　）

（A）A与B既合同又相似；　　（B）A与B既不合同又不相似；

（C）A与B不合同但相似；　　（D）A与B合同但不相似.

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

6．行列式$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} =$____________________.

7．设 4 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$______________.

8．设 $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，已知 A 与 B 相似，则 $r(A-2E)=$_____________.

9．设 A 是 3 阶实对称矩阵，$r(A)=2$. 若 $A^2=2A$，则 A 的特征值是____________.

10．若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+4x_2{}^2+2x_3{}^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，那么 t 的取值范围是 ___________.

三、解答下列各题（每小题 10 分，共 50 分）.

11．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$,求 $\boldsymbol{B}$.

12 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$，求出这个向量组的一个极大无关组，

并把不属于该极大无关组的向量用该极大无关组线性表示.

13. 设方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及公共解.

14. 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为1，2，3． $\alpha_1=(-1,-1,1)^T$，$\alpha_2=(1,-2,-1)^T$ 分别是矩阵 A 对应特征值1，2 的特征向量.

（1）求A属于特征值3的全部特征向量；

（2）求出矩阵A.

15. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2ax_2x_3$经过正交变换$x=Qy$化为$3y_1^2+3y_2^2+by_3^2$.

（1）求a,b的值；

（2）求出所用的正交变换.

四、证明题（10分）

16. 设$V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\in R^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$.

（1）证明：V是一个向量空间，并且$\alpha_1=(1,0,0,-1)^T$，$\alpha_2=(0,1,0,-1)^T$，$\alpha_3=(0,0,1,-1)^T$是V的一个基；

（2）定义V上的映射T为$T:(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\mapsto(x_3,x_1,x_2,x_4)^T$，$\forall(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\in V$，证明$T$是$V$上的线性变换，并求$T$在基$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$下的矩阵.

西南交通大学 2019－2020 学年第(1)学期考试
线性代数 A(A 卷)答案及评分标准

一、 单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1．C　　**2.** A　　**3.** B　　**4.** C　　**5.** D

二、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

6. $(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. 2

9. 2，2，0

10. $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$

三、解答下列各题（每小题 10 分，共 50 分）．

11.设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\mathbf{2}\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{B}$．

解　　由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\mathbf{2}\boldsymbol{B}$ 可得 $(\boldsymbol{A}-\mathbf{2}\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ ……………………2 分

故 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\mathbf{2}\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$ …………………4 分

$$=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$ ……………………10 分

12 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\4\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-6\\6\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\7\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\4\\4\\9\end{pmatrix}$，求出这个向量组的一个极大无关组，并把不属于该极大无关组的向量用该极大无关组线性表示.

解：对矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 施行初等行变换 ……………………1 分

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 4\\ 4 & -6 & -2 & 4\\ 3 & 6 & 7 & 9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$$ …… 6 分

由于 β_1,β_2,β_3 是 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的一个极大无关组，且 $\beta_4=4\beta_1+3\beta_2-3\beta_3$，

相应地，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组，且 $\alpha_4=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_3$

………………………10 分

13. 设方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与方程$x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解，求a的值及公共解.

解：方程组与方程有公共解当且仅当方程组与该方程联立之后所得的新方程组有解，对新方程组的增广矩阵施行初等行变换 ……………1 分

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{pmatrix}$$ ………………5 分

当$a=1$或$a=2$时，联立之后的方程组有解，从而原方程组与方程有公共解 ………………6 分

当$a=1$时，$\overline{A} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，通解为$k(-1,0,1)^T$ k为任意常数，即为公共解. …………………………………… 8 分

当$a=2$时，$\overline{A} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得唯一解$(0,1,-1)^T$，即为唯一公共解 …………………………………… 10 分

14. 设三阶实对称矩阵A的特征值为$1, 2, 3$．$\alpha_1=(-1,-1,1)^T$，$\alpha_2=(1,-2,-1)^T$分别是矩阵A对应特征值$1, 2$的特征向量.

（1）求A属于特征值3的全部特征向量；

（2）求出矩阵A.

解:(1) 设A的属于特征值 3 的特征向量为$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$. 由于实对称矩阵属于不同特征值的特征向量彼此正交，所以$\alpha_1{}^T\alpha_3=0$，$\alpha_2{}^T\alpha_3=0$，即

$$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0\\ x_1-2x_2-x_3=0\end{cases}$$ ……………………… 3 分

得其基础解系为$(1,0,1)^T$，因此，A的属于特征值 3 的特征向量为

$$\alpha_3=k(1,0,1)^T \quad k\text{ 为任意非零常数}$$ ……………………… 5 分

（2）令矩阵$P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&-2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$，即$A=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}P^{-1}$

……………………… 8 分

由于$P^{-1}=-\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}2&2&-2\\-1&2&1\\-3&0&-3\end{pmatrix}$，故$A=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}P^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{pmatrix}$

……………………………10 分

15. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2ax_2x_3$经过正交变换$x=Qy$

化为$3y_1^2+3y_2^2+by_3^2$.

（1）求a,b的值；

（2）求出所用的正交变换.

解：二次型及其标准型的矩阵分别是$A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&a\\-2&a&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&b\end{pmatrix}$

………………………… 2 分

由于是用正交变换化为标准型，故A与B不仅合同而且相似，那么

$$tr(A)=tr(B)\Rightarrow 1+1+1=3+3+b\Rightarrow b=-3$$ ……………3 分

$$\left|A-3E\right|=2(a+2)^2=0 \Rightarrow a=-2$$

【 或$\left|A\right|=\left|B\right| \Rightarrow 9-(a-4)^2=9b \Rightarrow a=-2$或$10$（舍去）】………… 5 分

对应特征值 3，由$(A-3E)x=0$得线性无关的特征向量为

$$\alpha_1=(1,-1,0)^T, \qquad \alpha_2=(1,0,-1)^T$$

施密特正交化、单位化，得$\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$，$\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$

…………………………8 分

对应特征值−3 的线性无关的特征向量为$\alpha_3=(1,1,1)^T$，单位化后得

$$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$$ ……………………9 分

令$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，则所用的正交变换为$x=Qy$

…………………… 10 分

四、证明题（10 分）

16. 设$V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\in R^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$.

（1）证明：V 是一个向量空间，并且$\alpha_1=(1,0,0,-1)^T$，$\alpha_2=(0,1,0,-1)^T$，$\alpha_3=(0,0,1,-1)^T$

是V 的一个基；

（2）定义V 上的映射T 为$T:(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\mapsto(x_3,x_1,x_2,x_4)^T$，$\forall(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\in V$，

证明T 是V 上的线性变换，并求T 在基α_1，α_2，α_3 下的矩阵.

解. （1）$\forall x,y\in V$，对任意数k_1,k_2 都有$k_1x+k_2y\in V$，故 V 是一个向量空间.

………………………… 2 分

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且对$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\in V$，由于$x_1+x_2+x_3+x_4=0$，从而

$$x=(x_1,x_2,x_3,-x_1-x_2-x_3)^T=x_1(1,0,0,-1)^T+x_2(0,1,0,-1)^T+x_3(0,0,1,-1)^T$$

$$=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$$

即$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是V 的一个基 ……………………………… 5 分

（2）$\forall x,y\in V$，对任意数k_1,k_2 都有$T(k_1x+k_2y)=k_1Tx+k_2Ty$，故 T 是V 上一个线性变换.

………………………… 7 分

$$T\alpha_1=\alpha_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad T\alpha_2=\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$T\alpha_3=\alpha_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

故T 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ ……………………………… 10 分