第二章　电阻电路的等效变换

第一部分　要点、考点归纳

§2-1　引言

线性电路：由时不变线性无源元件、线性受控源和独立电源组成的电路，称为时不变线性电路，简称为线性电路。

电阻电路：构成电路的无源元件均为线性电阻，则称为线性电阻性电路，简称为电阻电路。

直流电路：电路中电压源的电压或电流源的电路都是直流电源。

本章为简单电阻电路的分析与计算，着重介绍等效变换的概念。

§2-2　电路的等效变换

所谓等效与等效变换，是指两个二端网络，若它们端口处的电压 u 和电流 i 间的伏安特性完全相同，则对任一外电路而言，它们具有完全相同的影响，我们便称这两个二端网络对外是等效的，将一个复杂的二端网络在上述等效条件下，用一个简单的二端网络代换，从而达到简化计算的目的，这就是等效变换。

本章介绍电阻电路的等效变换，对于较简单的电路，利用等效的概念可对其　进行化简，得到其等效电路，从而达到简化计算的目的。

§2-4　电阻的 Y 形连接和△形连接的等效变换

1．电阻的 Y 形联接与△联接

（1）定义

Y 形联接（图 2.4.1a 所示）和△形联接（图 2.4.1b 所示）都是通过 3 个端子与外部电路相联，它们之间的等效变换是要求它们的外部性能相同，也即当它们对应端子间的电压相同时，流入对应端子的电流也必须分别相等。

（2）等效条件

图 2.4.1 中，设在两个电路对应端子间加有相同的电压 u_{12}、u_{23} 和 u_{31}，当它们流入对应端子的电流分别相等时，即

$$u_{12} = u_{23} = u_{31}$$

$$i_1 = i_1',\quad i_1 = i_1',\quad i_1 = i_1'$$

在此条件下，它们彼此等效。

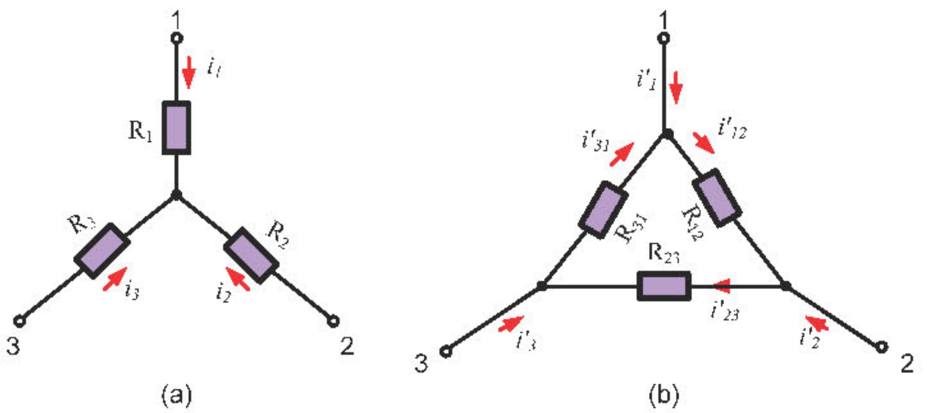


图 2.4.1　Y 连接和△连接的等效变换

2．等效变换

（1）△联接

对于△形联接的电路，各个电阻中的电流分别为

$$i_{12}'=\frac{u_{12}}{R_{12}} \qquad i_{23}'=\frac{u_{23}}{R_{23}} \qquad i_{31}'=\frac{u_{31}}{R_{31}}$$

按 KCL，有

$$\left.\begin{aligned} i_1'&=\frac{u_{12}}{R_{12}}-\frac{u_{31}}{R_{31}}\\ i_2'&=\frac{u_{23}}{R_{23}}-\frac{u_{12}}{R_{12}}\\ i_3'&=\frac{u_{31}}{R_{31}}-\frac{u_{23}}{R_{23}} \end{aligned}\right\} \tag{2-8}$$

（2）Y 联接

对于 Y 形联接的电路，有

$$\left.\begin{aligned} u_{12}&=R_1i_1-R_2i_2\\ u_{23}&=R_2i_2-R_3i_3\\ i_1+i_2+i_3&=0 \end{aligned}\right\}$$

从中解出电流

$$\left.\begin{aligned} i_1&=\frac{R_3u_{12}}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}-\frac{R_2u_{31}}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}\\ i_2&=\frac{R_1u_{23}}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}-\frac{R_3u_{12}}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}\\ i_3&=\frac{R_2u_{31}}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}-\frac{R_1u_{23}}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1} \end{aligned}\right\} \tag{2-9}$$

（3）Y→△

不论电压 u_{12}、u_{23}，u_{31} 为何值，要使两个电路等效，流入对应端子的电流应该相等，因此，式（2-8），（2-9）中电压 u_{12}、u_{23} 和 u_{31}，前面的系数应该对应相等，于是得：

各电阻的关系式：

$$\left.\begin{aligned} R_{12}&=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R}{R_3}=R_1+R_2+\frac{R_1R_2}{R_3}\\ R_{23}&=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R}{R_1}=R_2+R_3+\frac{R_2R_3}{R_1}\\ R_{31}&=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R}{R_2}=R_1+R_3+\frac{R_3R_1}{R_2} \end{aligned}\right\}$$

（4）△→Y

由式（2-10）中解出 R_1、R_2、R_3，便得：

各电阻关系式为：

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{31}\cdot R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{12}\cdot R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{23}\cdot R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{aligned}\right\}$$

（5）互换公式

$$\text{Y形电阻}=\frac{\Delta\text{形相邻电阻的乘积}}{\Delta\text{形电阻之和}}$$

$$\Delta\text{形电阻}=\frac{\text{Y形电阻两两乘积之和}}{\text{Y形不相邻电阻}}$$

若 Y 型电路的 3 个电阻相等。即 $R_1=R_2=R_3$，则等效△形电路的电阻也相等，为

$$R_\Delta=R_{12}=R_{23}=R_{31}=3R_Y$$

反之，则

$$R_Y=\frac{1}{3}R_\Delta$$

利用 Y，△等效互换，可使电路得到简化。

§2-5 电压源、电流源的串联和并联

1．电压源的串联

由 KVL 知道，当 n 个电压源串联时（如图 2.5.1 所示），可以用一个电压源等效替代，这个等效电压源的电压等于各串联电压源电压的代数和，即

$$u_s=u_{s1}+u_{s2}+\cdots+u_{sn}=\sum_{k=1}^{n}u_{sk}$$

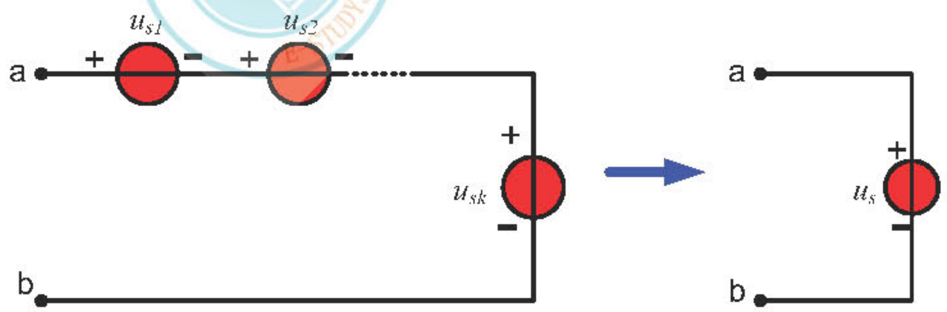


图 2.5.1 电压源的串联

2．电压源的并联

只有电压相等的电压源才允许同相性并联。此时电压源中的电流不确定。

从外部性能等效的角度来看，任何一条支路与电压源 u_s 并联后（这个并联组合与外部电路相联接），总可以用一个等效电压源替代，等效电压源的电压为 u_s，等效电压源中的电流等于外部电流 i 而不等于替代后的电压源的电流，如图 2.5.2 中的图(a)，(b)，(c)均可等效

为(d)。

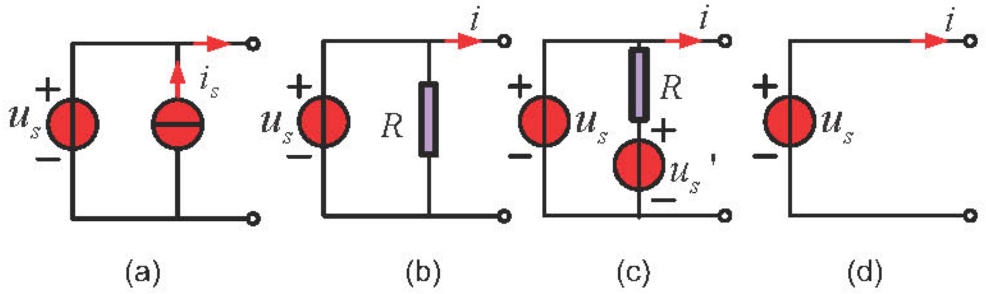


图 2.5.2　电压源与各支路的并联

3．电流源的并联

如图 2.5.3a 所示，当 n 个电流源并联时，可以用一个电流源等效替代，这个等效电流源的电流（如图 2.5.3b 所示）：

$$i_s = i_{s1} + i_{s2} + \cdots\cdots + i_{sn} = \sum_{k=1}^{n} i_{sk}$$

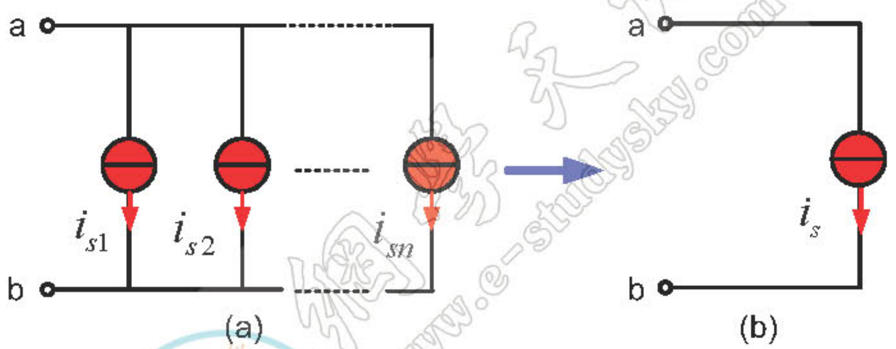


图 2.5.3　电流源的并联

4．电流源的串联

只有电流相等的电流源才允许同相性串联。此时电流源中的电压不确定。

任何一条支路与电流源 i_s 串联后，总可以用一个等效电流源替代，等效电流源的电流为 i_s，电压等于外部电压 u 而不等于替代后的电流源的电压，如图 2.5.4 中图(a)，(b)均可等效为(c)。

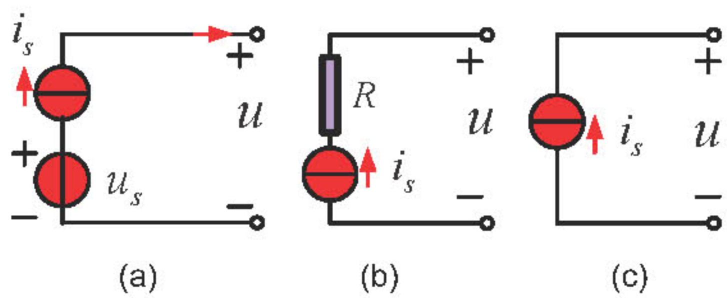


图 2.5.4　电流源与各支路的串联

§2-6　实际电源的两种模型及其等效变换

实际电源的内部由于存在损耗，故实际电压源的输出电压和实际电流源的输出电流均随

负载功率的增大而减小。

1．实际电压源

考虑实际电压源有损耗，其电路模型用理想电压源和电阻的串联组合表示（如图 2.6.1a 所示），这个电阻称为电压源的内阻或输出电阻。

实际电压源电流与电压的关系为：

$$u = u_s - iR_s \tag{2-6-1}$$

其伏安特性如图 2.6.1b 所示。

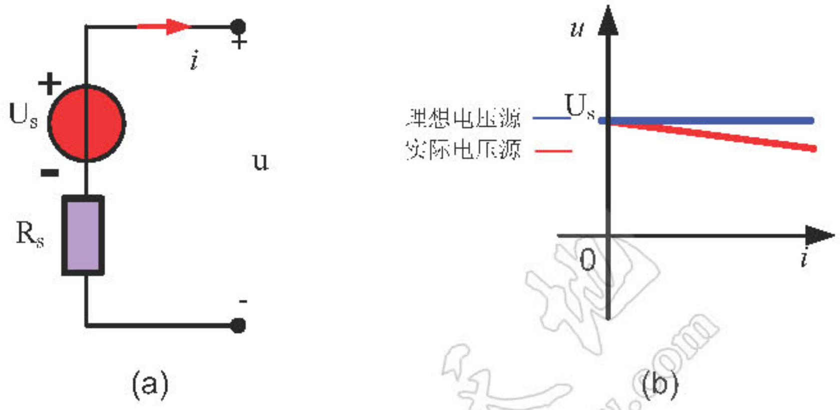


图 2.6.1　实际电压源的电路模型和伏安特性

2.实际电流源

考虑实际电流源有损耗，其电路模型用理想电流源和电阻的并联组合表示（如图 2.6.2a 所示），这个电阻称为电流源的内阻或输出电阻。

实际电流源的电压、电流关系为：

$$i = i_s - \frac{u}{R_s} \tag{2-6-2}$$

即：实际电流源的输出电流在一定范围内随着端电压的增大而逐渐下降。因此,一个好的电流源的内阻 Rs→∞。其伏安特性如图 2.6.2b 所示。

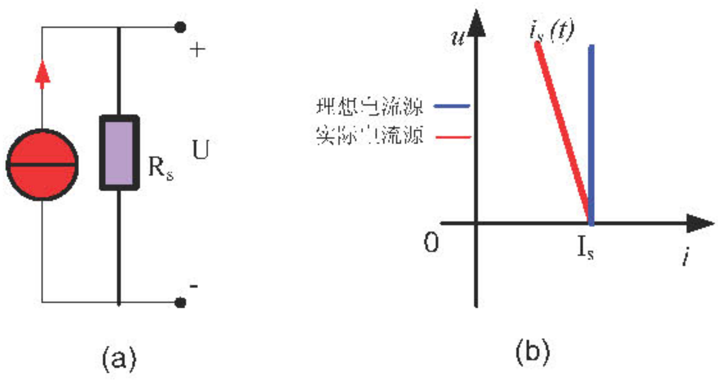


图 2.6.2 实际电流源的电路模型和伏安特性

3．独立电源的等效变换

将式（2-6-1）两边同除以 R_s，则

$$\frac{u}{R_s}=\frac{u_s}{R_s}-i$$

得

$$i=\frac{u_s}{R_s}-\frac{u}{R_s}=i_s-Gu$$

式中，$i=\frac{u_s}{R_s}$ 为实际电源的短路电流，上式即为式（2-6-2），可见，当满足式（2-6-3）时，式（2-6-1）和式（2-6-2）完全相同。它们在 $i-u$ 平面上表示的是同一条直线，即二者具有相同的伏安特性（外特性）。因此，实际电源的这两种电路模型可以互相等效变换。

等效互换的条件：对外的电压电流相等（外特性相等）。

等效互换公式：

$$\begin{cases} G=\dfrac{1}{R_s} \\ i_s=Gu_s \end{cases} \tag{2-6-3}$$

如图 2.6.3 中图（a）的实际电压源和图（b）中的实际电流若满足式（2-6-3），就可实现等效互换，对于外电路 R_L 来说是等效的。变换时注意 i_s 与 u_s 参考方向的关系。

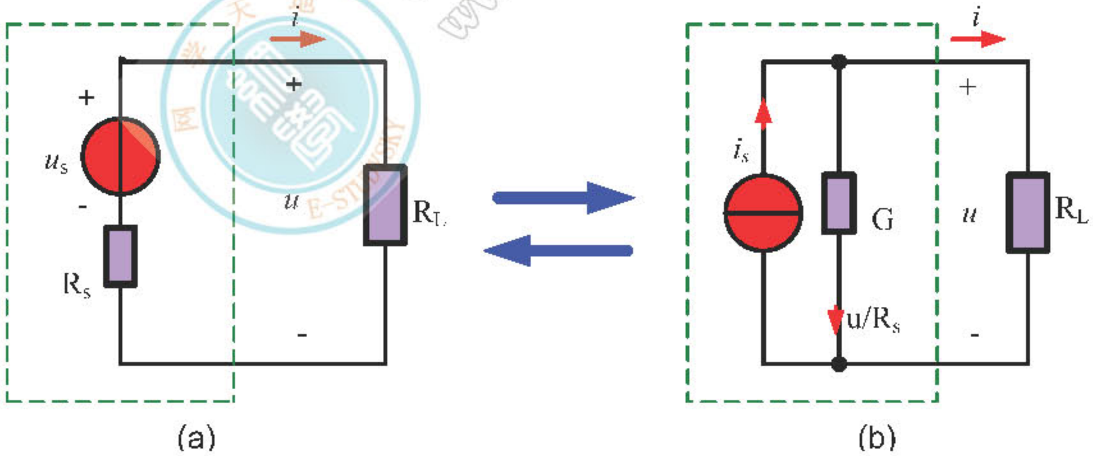


图 2.6.3 实际电流源和电压源的等效互换

等效是对外部电路而言，即这两种模型具有相同的外特性，它们对外吸收或发出的功率总是一样的。但对内部不等效，如开路时，电压源与电阻的串联组合内部，电压源不发出功率，电阻也不吸收功率，而电流源与电导的并联组合内部，电流源发出功率，且全部为电导所吸收，但在开路时，这两种组合对外都即不发出功率，也不吸收功率。

等效变换的注意事项

（1）“等效”是指“对外”等效（等效互换前后对外伏—安特性一致）；

（2）注意转换前后 Us 与 Is 的方向相同；

（3）恒压源和恒流源不能等效互换；

（4）理想电源之间的等效电路：与理想电压源并联的元件可去掉；与理想电流源串联的元件可去掉。

4．受控电源的等效变换

受控电压源、电阻的串联组合与受控电流源、电导的并联组合可以按上述方法进行变换。此时将受控源当作独立电源处理。但在变换中。应始终保持控制量所在支路，不能将控制量消去。但在变换过程中，必须消去控制量所在支路，则必须先将控制量转化为未被消去的量以后，才能进行变换。如图 2.6.4，先将控制量 i 表示为 $i=\dfrac{u}{2}$，才能变换。

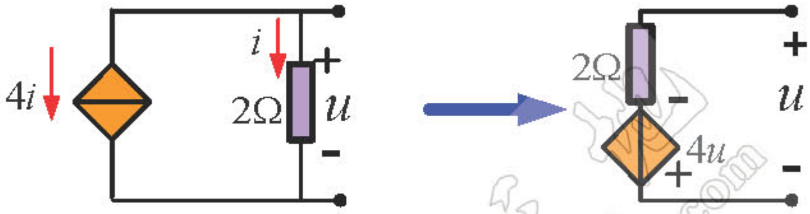


图 2.6.4 受控源的等效互换示例

§2-7 等效电阻和输入电阻

等效电阻 Req： 纯电阻网络(只含电阻)通过串、并联，Y— △变换所求得的电阻。

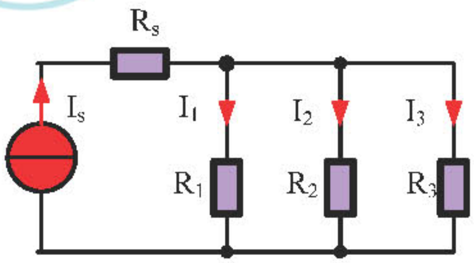
输入电阻 Rin： 二端网络的端口电压与电流之比。(u,i 取关联参考方向，网络无独立源或独立源置 0；可含受控源)

对无源网络：$R_{in}=R_{eq}$

对含源网络：含受控源或独立源置 0，按定义求：

第二部分 例题

例 1 如图所示电路中，IS=16.5mA，RS=2kΩ，R1＝40kΩ，R2＝10kΩ，R3＝25kΩ，求 I1、I2 和 I2。



解：

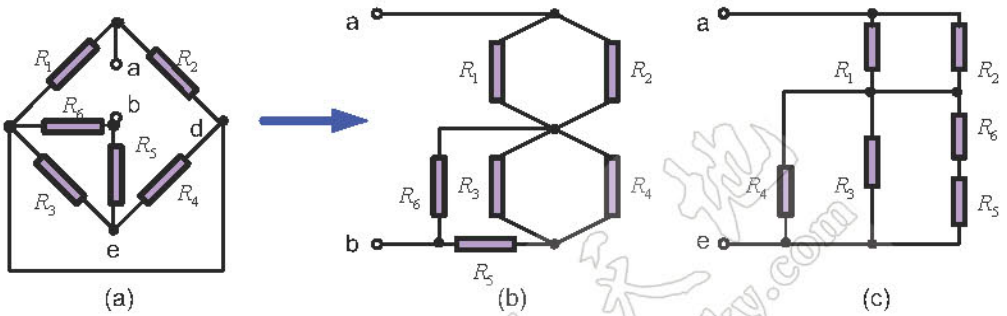
Rs 不影响 R1、R2、R3 中电流的分配。现在 $G_1=\dfrac{1}{R_1}=0.025mS$，$G_2=\dfrac{1}{R_2}=0.1mS$，$G_3=\dfrac{1}{R_3}=0.04mS$。按电流分配公式，有：

$$I_1 = \frac{G_1}{G_1+G_2+G_3} I_S = \frac{0.025}{0.025+0.1+0.04} \times 16.5mA = 2.5mA$$

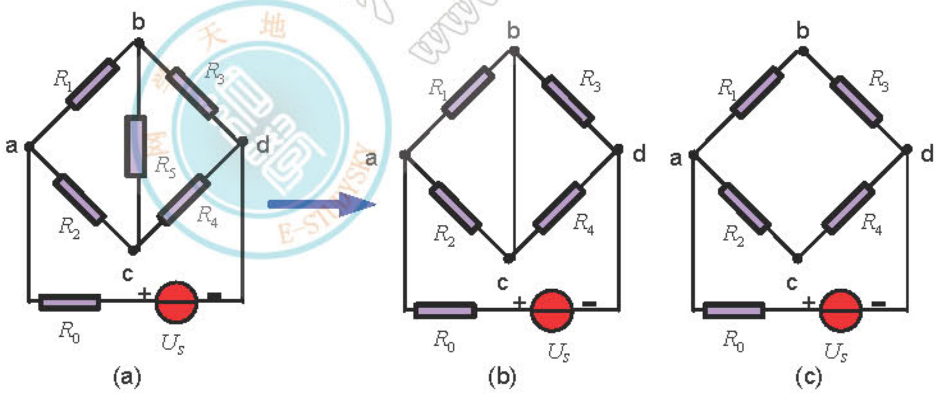
$$I_2 = \frac{G_2}{G_1+G_2+G_3} I_S = \frac{0.1}{0.025+0.1+0.04} \times 16.5mA = 10mA$$

$$I_3 = \frac{G_3}{G_1+G_2+G_3} I_S = \frac{0.04}{0.025+0.1+0.04} \times 16.5mA = 4mA$$

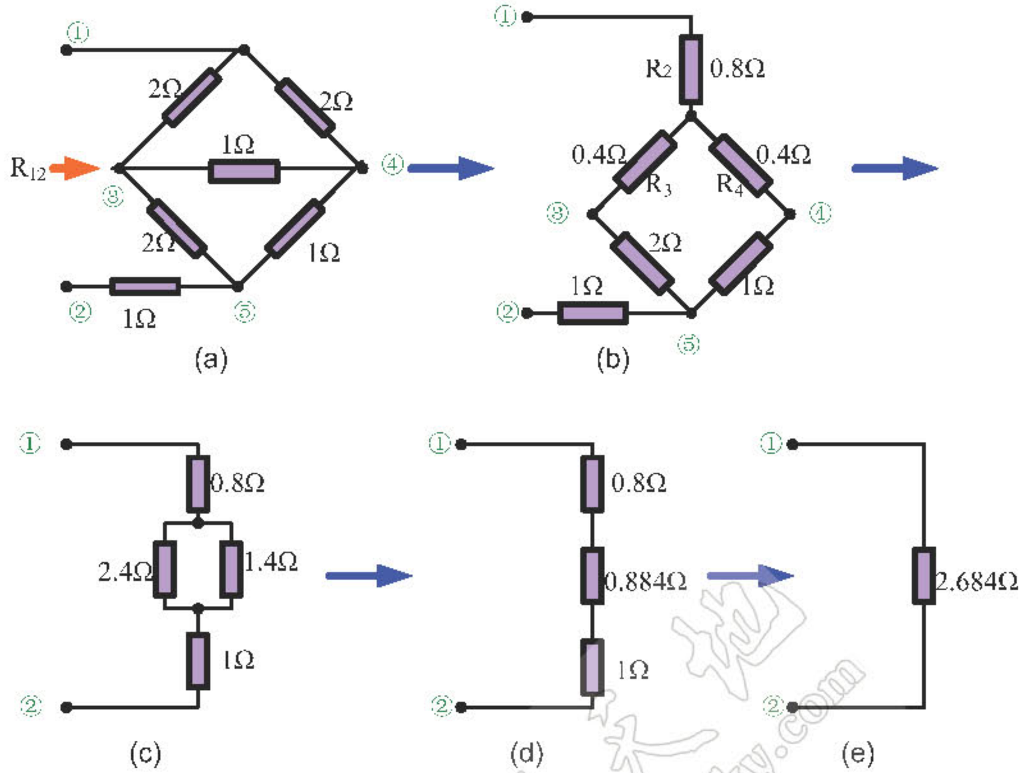
例 2　如图所示电路（a）中 a、b 两点间电阻电路可等效成为（b），a、e 两点间电阻电路可等效成为（c）。



例 3　如图（a）所示桥式电路，若 $R_1=R_3$，$R_2=R_4$，则电路对称，b，c 两点等电位，因此可以把 b，c 两点联在一起，得图（b），又由于 b，c 两个等电位间接有电阻，则电流值为零，故也可以把电阻 R_5 支路断开，成为图（c），由于电路对称，图 b 和图 c 的计算结果相同。



例 4　求图（a）所示桥形电路的总电阻 R_{12}。



解：将结点①、②、③内的△形电路用等效 Y 形电路替代，得到图（b）电路，其中：

$$R_2=\frac{2\times 2}{2+2+1}\Omega=0.8\Omega$$

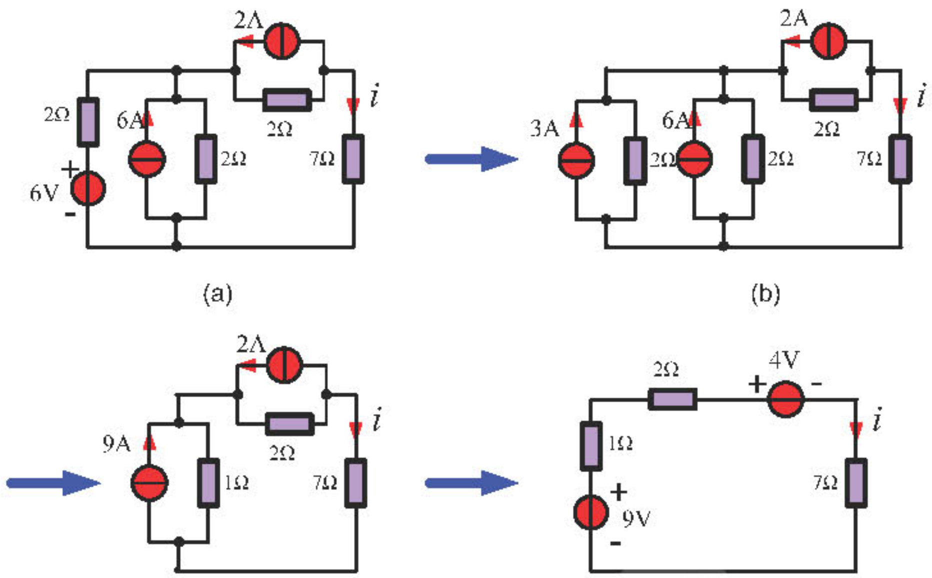
$$R_3=\frac{2\times 1}{2+2+1}\Omega=0.4\Omega$$

$$R_4=\frac{2\times 1}{2+2+1}\Omega=0.4\Omega$$

然后用串、并联的方法，得到（c）、（d）、（e）电路，从而得到：

$$R_{12}=2.684\Omega$$

例 5　求图示电路中的电流 i。



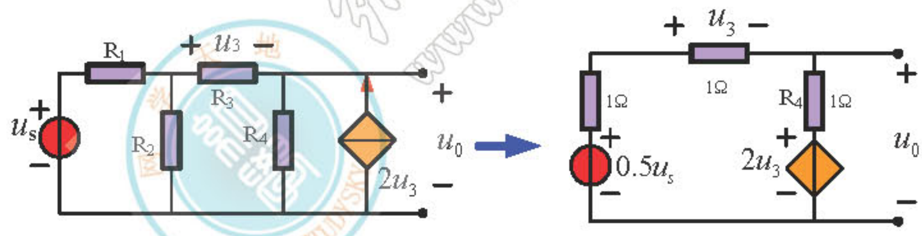
(a) (b)

(c) (d)

解：图中（a）电路可简化为（d）所示单回路电路。简化过程如图（b）、（c）、（d）所示。化简后的电路可求得电流为：

$$i=\frac{9-4}{1+2+7}=0.5A$$

例 6　图示电路（a）中，已知 $R_1=R_2=2\Omega$，$R_3=R_4=1\Omega$。求 u_0/u_s。



(a) (b)

解：利用电源等效变换，原题可等效为图（b），则：

$$\begin{aligned}u_0&=1\times\frac{0.5u_s-2u_3}{3}+2u_3\\&=\frac{0.5}{3}u_s-\frac{2}{3}u_3+2u_3\\&=\frac{0.5}{3}u_s+\frac{4}{3}u_3\end{aligned}\qquad(1)$$

又：

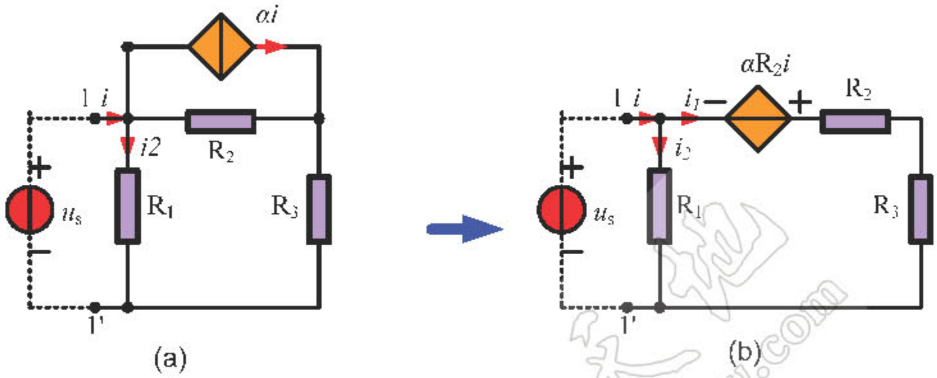
$$u_0=u_{R4}+2u_3=u_3+2u_3=3u_3$$

即：$u_3 = \frac{u_0}{3}$

代入式（1）得：

$$\frac{u_0}{u_s} = \frac{1.5}{5} = 0.3$$

例 7　求图示电路（a）中的输入电阻 R_{in}。



解：在端口 1-1'处加电压 u_s，求出 i，再由定义求输入电阻 R_{in}。

将 CCCS 和电阻 R2 的并联组合等效变换为 CCVS 和电阻的串联组合，如图（b）所示。根据 KVL，有：

$$u_s = -R_2\alpha i + (R_2 + R_3)i_1 \qquad (1)$$

$$u_s = R_1 i_2 \qquad (2)$$

再由 KCL，$i = i_1 + i_2$，可得 $i_1 = i - i_2 = i - \frac{u_S}{R_1}$，代入（1）式，整理后，有

$$R_{in} = \frac{u_S}{i} = \frac{R_1R_3 + (1-\alpha)R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

上式分子中有负号出现，因此，在一定的参数条件下，R_{in} 有可能是零，也有可能是负值。若是负值，则是一个发出功率的元件。