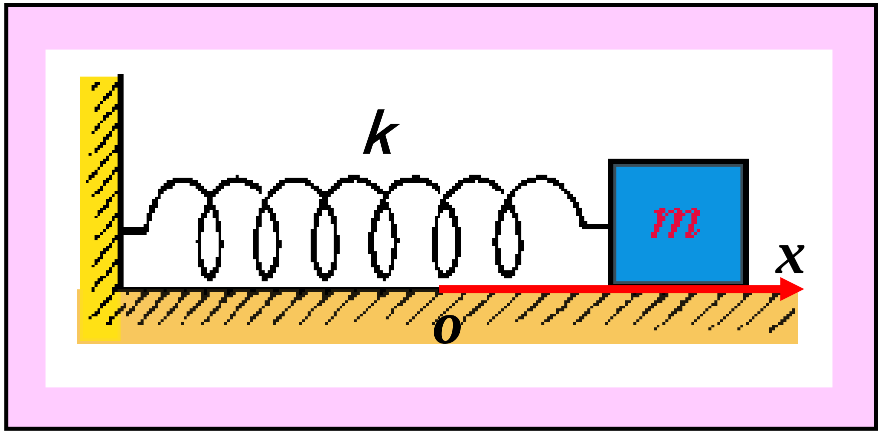
四、孤立谐振动系统的能量

不计振动传播带来的能量损失(辐射阻尼为零)

不计摩擦产生的热损耗(摩擦阻尼为零)

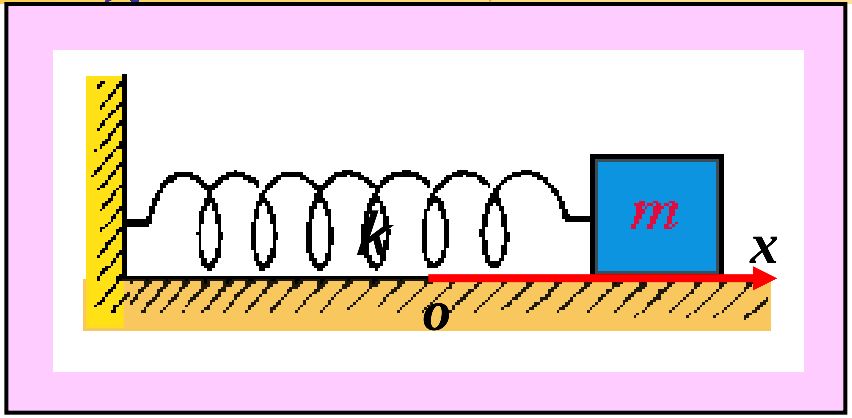
➢水平放置的弹簧振子不记空气阻力和摩擦力，以平衡位置为坐标原点，则：

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$



以弹簧振子所在水平面为重力势能零点，则：

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$



$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi_0) \\ v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi_0) \end{cases}$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)$$

$$\omega^2 = k/m$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

总能量 $E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2$=恒量

孤立谐振动系统机械能守恒

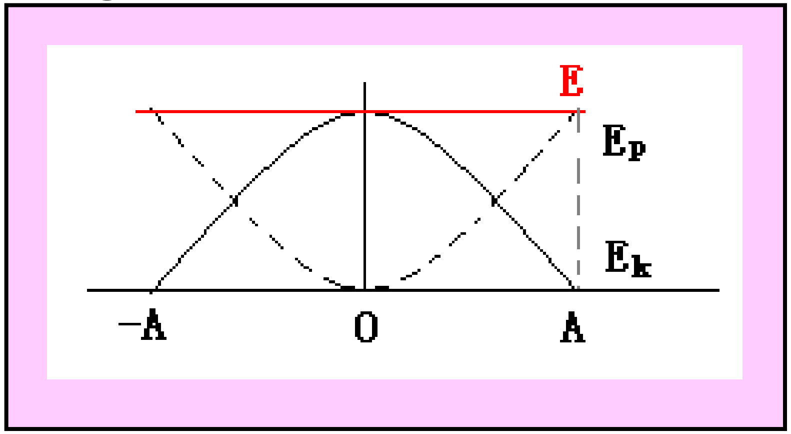
$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kx^2$$

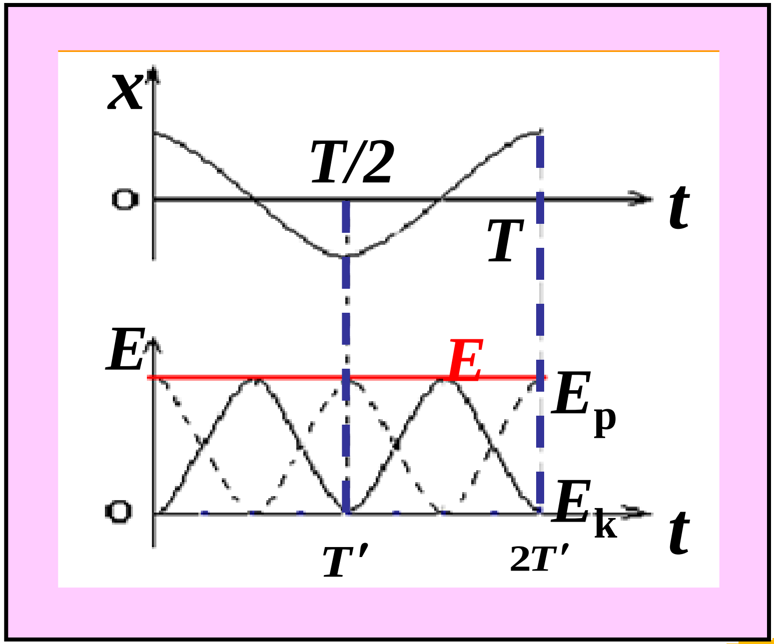
$$E_k = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

● E - x 曲线



● E-t 曲线



讨论：

1. 动能和势能随时间作周期性变化，且E_k，E_p变化频率为x的2倍。

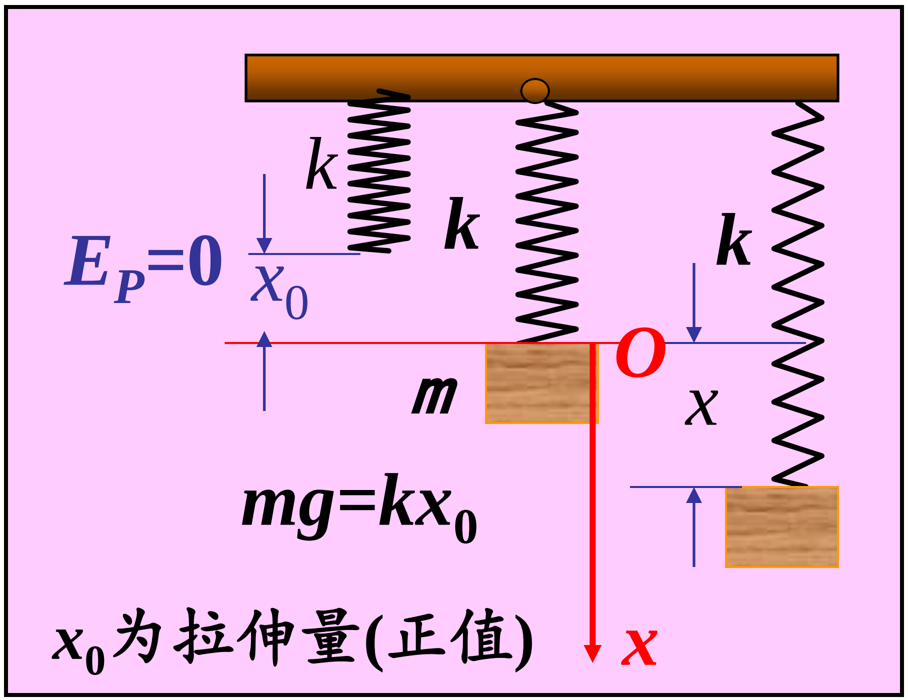
2. E_k，E_p彼此变化步调相反，系统机械能守恒。

3. 振幅A不仅表征了振动范围，还表征了振动强度。

例题1：P_9[例4]：求竖直悬挂的弹簧振子的能量。

解:以平衡位置为坐标原点，弹簧振子作简谐振动。

方法1:以弹簧原长处为重力势能、弹性势能零点，则：



$$E_p=\frac{1}{2}k(x+x_0)^2-mg(x+x_0)$$

$$\because\quad mg=kx_0$$

$$\therefore E_p=\frac{1}{2}k(x+x_0)^2-kx_0(x+x_0)$$

$$=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}kx_0^2$$

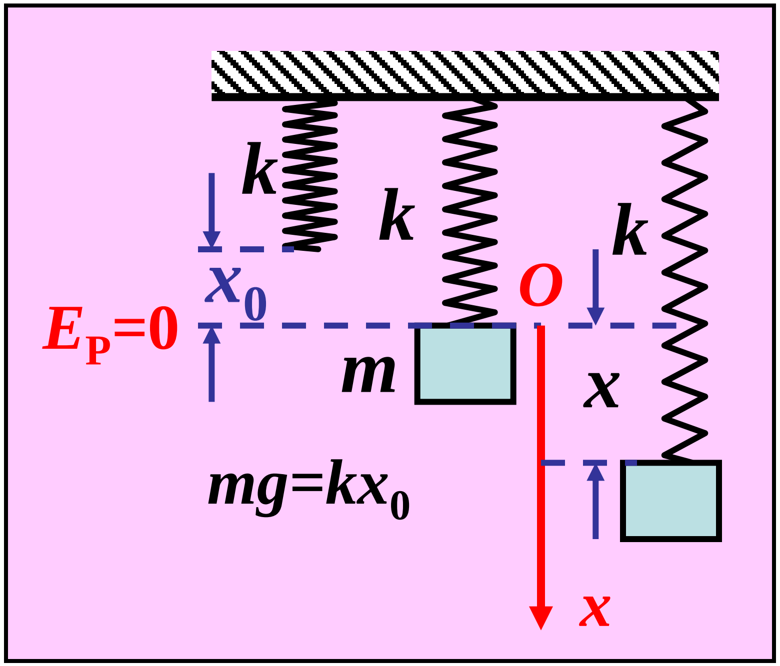
$$E_k=\frac{1}{2}mv^2$$

$$E=E_P+E_K=(\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2)-\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}kx_0^2=\text{恒量}$$

怎样选？

恰当选择零势点，可去掉第二项：

方法2: 以平衡位置为坐标原点和势能零点



$$E_p = \frac{1}{2}k(x+x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 - mgx$$

$$= \frac{1}{2}k(x+x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 - kx_0 x$$

$$= \frac{1}{2}kx^2$$

关键步骤一

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

关键步骤二

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

关键步骤三

比较	水平放置的弹簧振子	竖直悬挂的弹簧振子
回复力	弹簧的弹力 $F=-kx$ 弹簧的伸长	准弹性力：弹力与重力的合力 $F=-kx$ 离系统平衡位置的位移
势能	$kx^2/2$ 弹性势能	$kx^2/2$ 准弹性势能，重力势能和弹性势能的总和
总能	$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$	

统一描述：只要以平衡位置为坐标原点和零势点

准弹性势能（包括重力势能、弹性势能）$E_p=\frac{1}{2}kx^2$

振动系统总能量 $E=\frac{1}{2}kA^2$

振动系统平均动能和势能 $\overline{E}_k=\overline{E}_p=\frac{1}{4}kA^2=\frac{1}{2}E$

总结：

1. 能量法求谐振动的振幅：

机械能守恒： $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$

2. 能量法求谐振动的周期：

机械能守恒：$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$

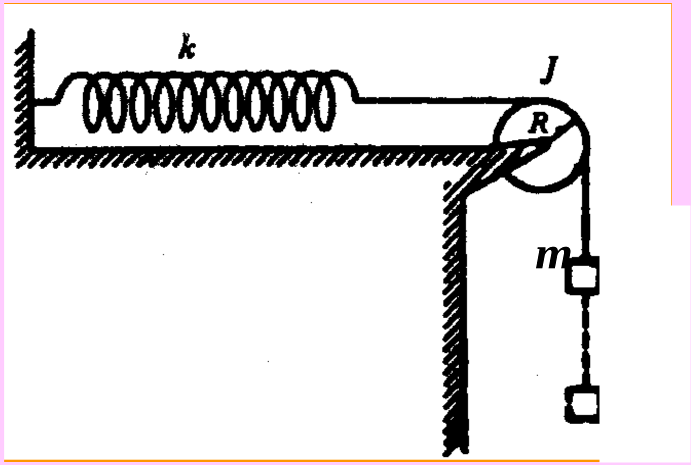
两边对时间求导 $\longrightarrow$ 关于 a 的关系式

又 $a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$

$\left.\begin{matrix}\text{关于 } a \text{ 的关系式} \\ a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x\end{matrix}\right\}\rightarrow\omega\rightarrow T=2\pi/\omega$

自学　教材 P$_{10}$ [例5]

例题2：已知：k,R,J,m 求：T



解：以平衡位置为坐标原点和零势点，向下为正，任意时刻 t ：

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega'^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

滑轮转动角速度

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + E_{p滑轮} = \frac{1}{2}kx^2 + c$$

振动系统机械能守恒：

$$E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\left(\frac{v}{R}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2+c=\text{恒量}$$

两边对时间求导，得：$mva+\dfrac{Jva}{R^2}+kxv=0$

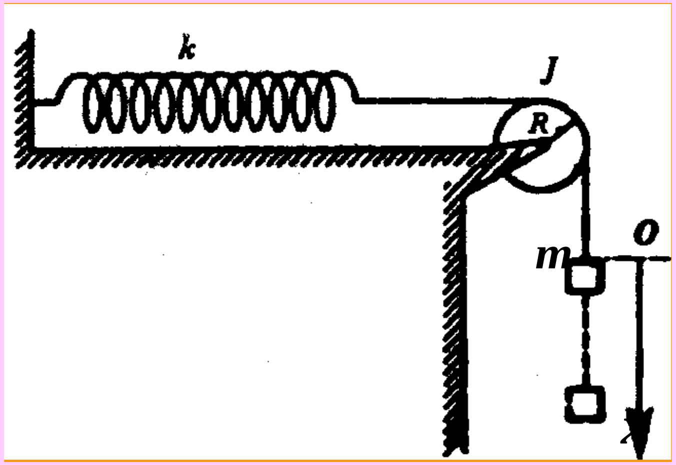
$$\therefore a=-\frac{kx}{m+J/R^2}$$

又：$a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$

$$\frac{kx}{m+J/R^2}=\omega^2x$$

$$\therefore \omega=\sqrt{\frac{k}{m+J/R^2}};\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m+J/R^2}{k}}$$

例题2：已知： k,R,J,m 求：T



关键步骤一

解：以平衡位置为坐标原点和零势点，向下为正，任意时刻 t ：

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega'^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

关键步骤二

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2+E_{p滑轮}=\frac{1}{2}kx^2+c$$

振动系统机械能守恒：

关键步骤三

$$E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\left(\frac{v}{R}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2+c=\text{恒量}$$

两边对时间求导，得：$mva+\dfrac{Jva}{R^2}+kxv=0$

关键步骤四

$$\therefore a=-\frac{kx}{m+J/R^2}$$

又：$a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$

$$\frac{kx}{m+J/R^2}=\omega^2x$$

$$\therefore \omega=\sqrt{\frac{k}{m+J/R^2}};\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m+J/R^2}{k}}$$

第三节 振动的合成 频谱分析

一、关于叠加原理的一般概念

二、同一直线上谐振动的合成

三、互相垂直的谐振动合成

一、关于叠加原理的一般概念

物理量满足叠加原理的条件是该物理量遵从线性微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+p_1\frac{\mathrm{d}y^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+p_n y=\varphi(x)$$

例如：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 x=0 \qquad \vec{F}=m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \qquad \begin{cases} F_x=m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ F_y=m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \\ F_z=m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

注意：自然界中存在大量用非线性方程描述的物理现象：强振动，非线性波，激光等，均不遵从叠加原理。

叠加原理（数学描述）：若$x_1(t)$, $x_2(t)$是线性微分方程的解，则$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$也是该方程的解。

叠加原理（物理描述）：若$x_1(t)$, $x_2(t)$是线性微分方程的解，则代表它们的矢量的合成满足平行四边形法则。

简谐振动遵从叠加原理，其合成分解方法：

合成：矢量合成的平行四边形法则

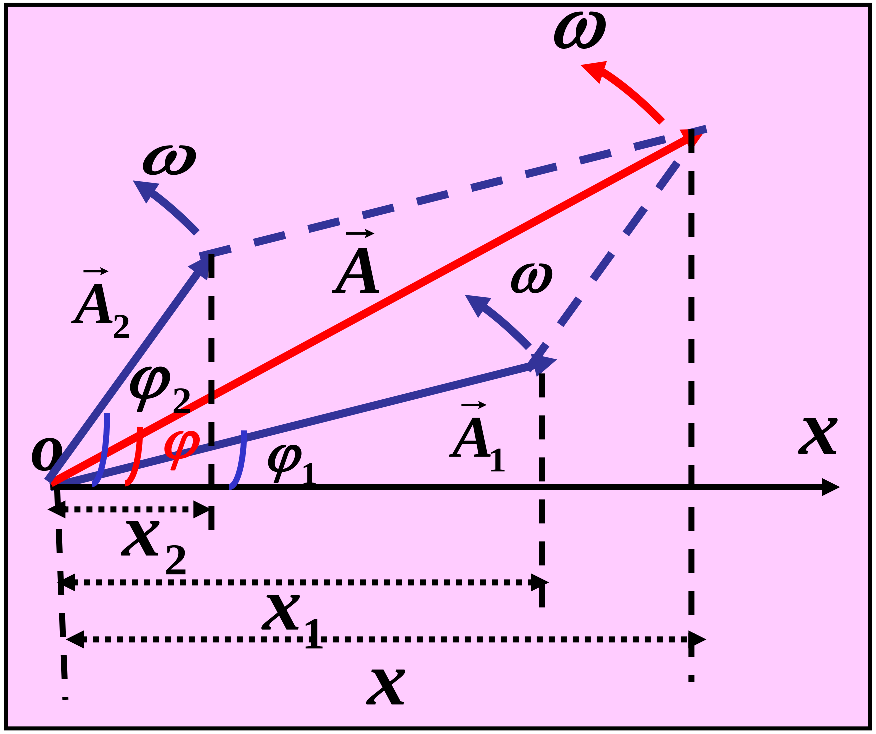
分解：傅立叶级数展开

二、同一直线上谐振动的合成

1.同频率

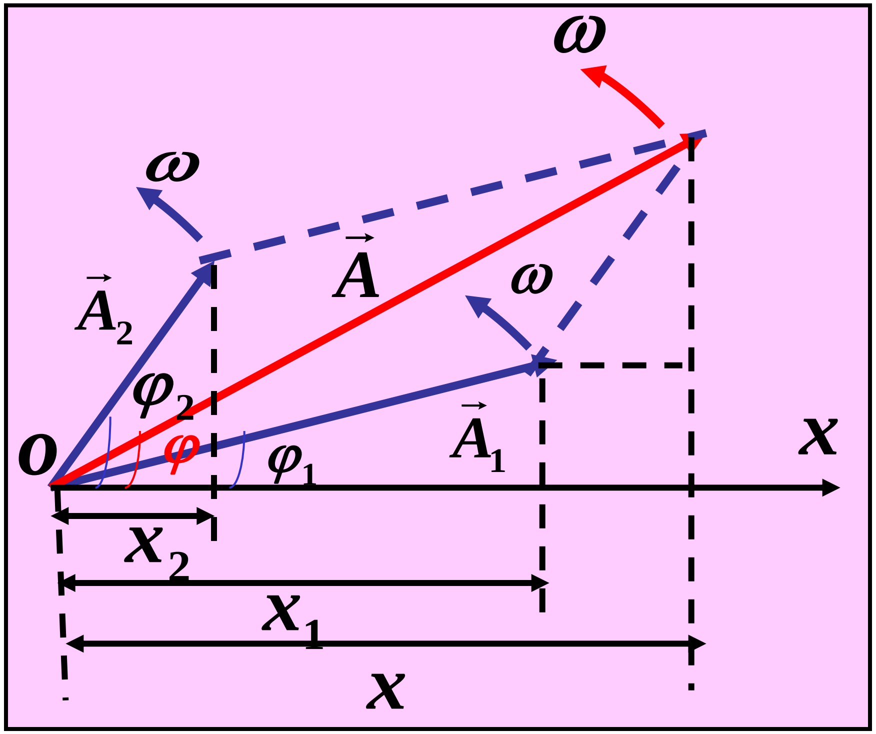
$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$



$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

平行四边形整体旋转，其对角线为简谐振动的旋转矢量，合振动仍为该直线上同一频率的谐振动。



$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\varphi = \text{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

练习：

已知：$\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2 \qquad A_1=8\text{cm} \qquad A=10\text{cm}$

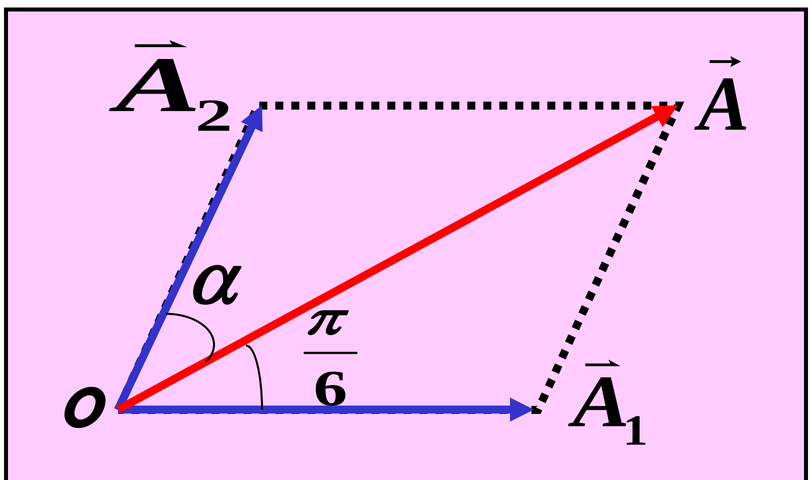
$\vec{A}$与$\vec{A}_1$相差$\pi/6$

求：A_2及$\vec{A}_1$，$\vec{A}_2$的相差$\Delta\varphi$

解：作平行四边形如图

$$A_2=\sqrt{A_1^2+A^2-2A_1A\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$=5.04\,\text{cm}$$



$$A_1^2=A_2^2+A^2-2A_2A\cos\alpha$$

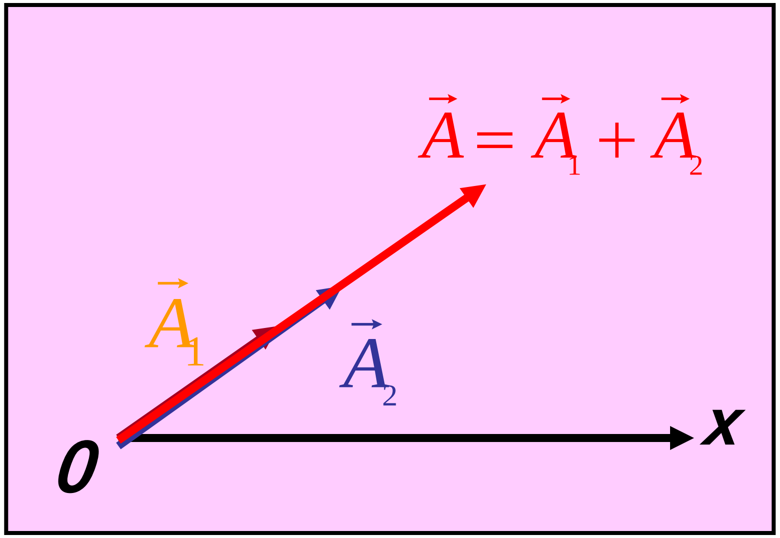
$$\alpha=\arccos\frac{A_1^2-A_2^2-A^2}{2A_2A}=52.47^o$$

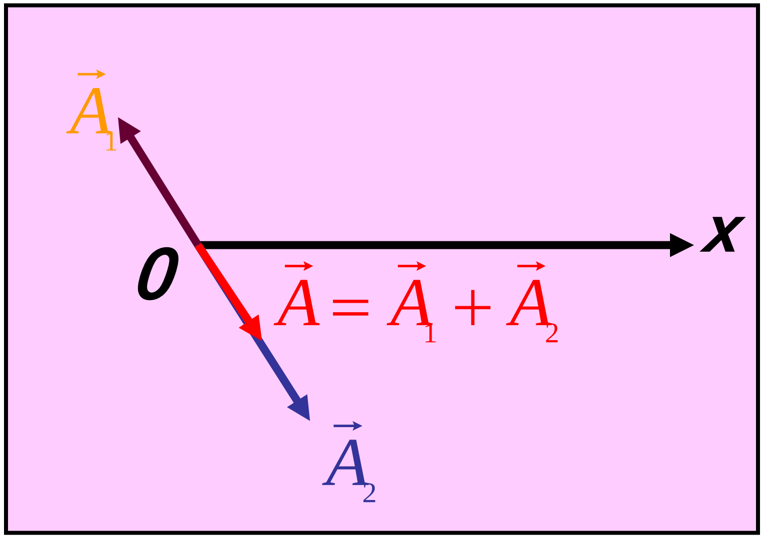
$$\Delta\varphi=\alpha+\frac{\pi}{6}=82.47^o$$

讨论：(1)合振动的振幅(强弱)取决于两分振动相位差。

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\begin{cases}2k\pi & A_{max}=A_1+A_2\\(2k+1)\pi & A_{min}=\left|A_1-A_2\right|\end{cases}\qquad(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

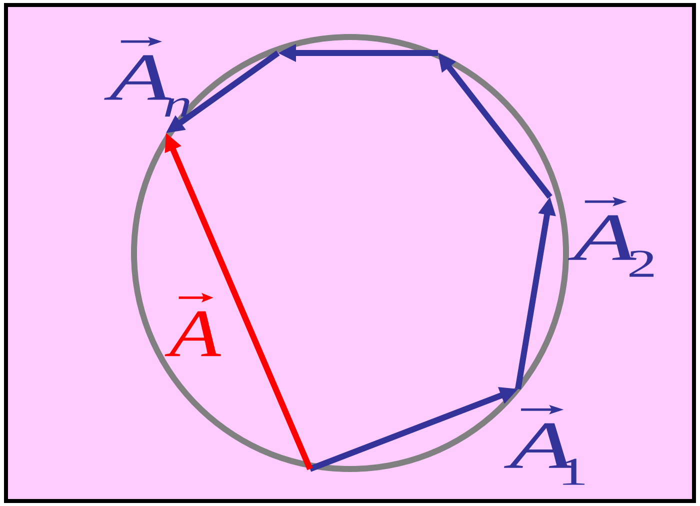




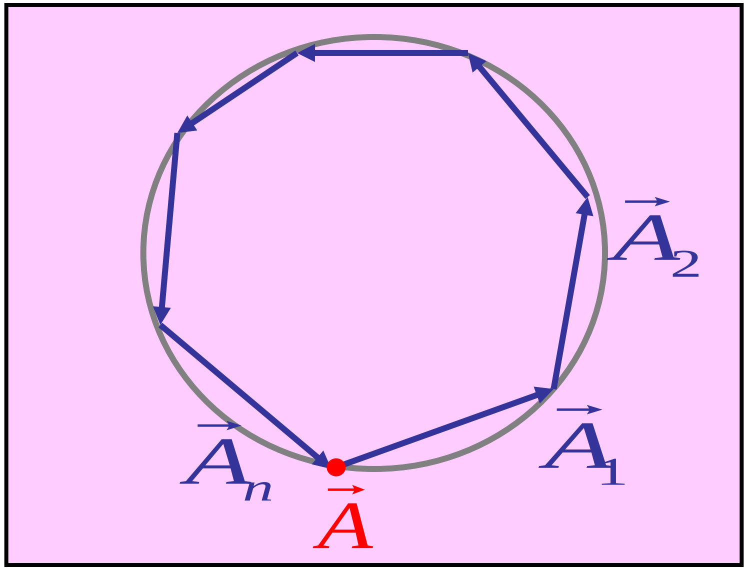
(2)合振动频率与分振动频率相同。

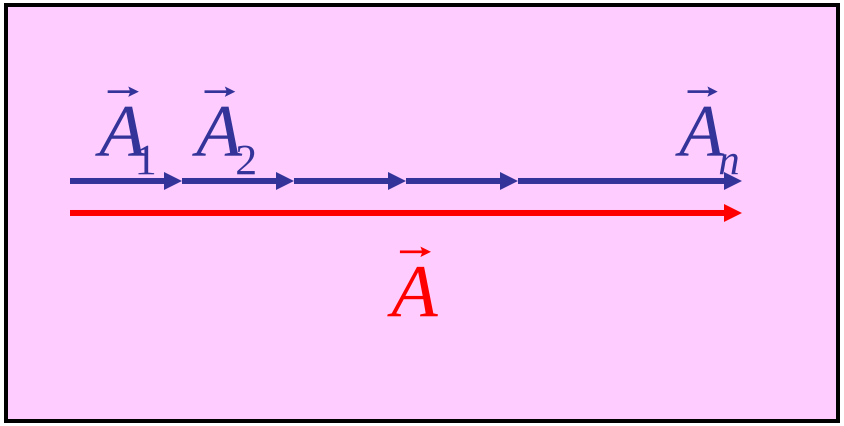
(3) 多个同一直线上，同频率谐振动的合成——多边形法则

$$\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2+\cdots+\vec{A}_n$$



特例：



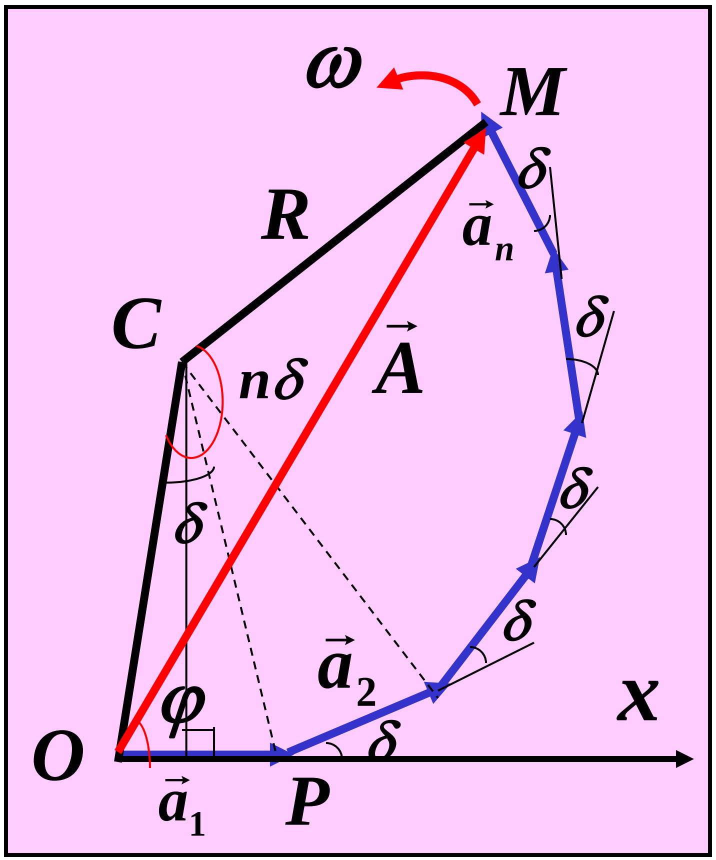


封闭多边形：$A_{\min}=0$

直线：$A_{\max}=A_1+A_2+\cdots+A_n$

▲例题：教材 P_{17} [例1]

同一直线上 n 个同频率谐振动，其振幅相等而初相依次相差一个恒量，求合振动。



解：按多边形法则叠加：

$$\vec{A}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$$

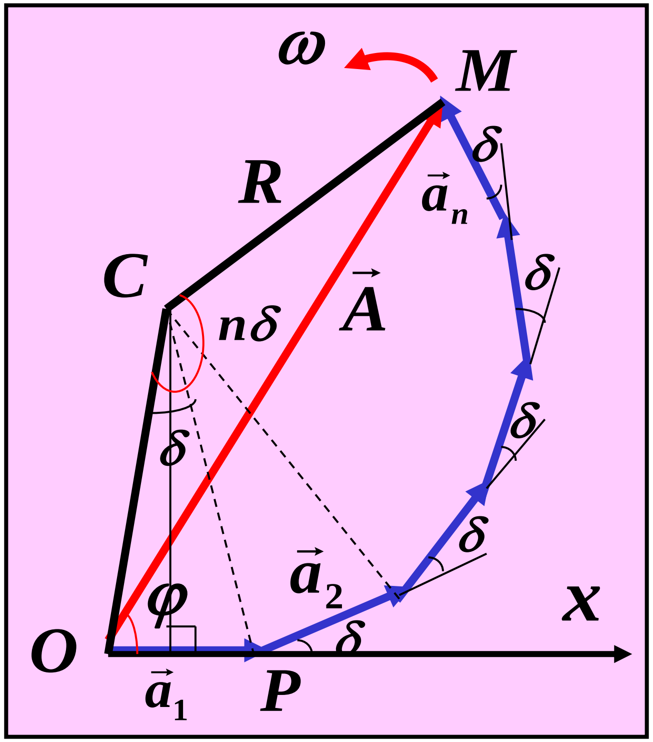
构成正多边形的一部分。

设该正多边形外接圆圆心为C，半径为R，则：

$$a_1=2R\sin\frac{\delta}{2} \qquad A=2R\sin\frac{n\delta}{2}$$

$$\therefore A=a_1\frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$$

合振动振幅



振幅：$A = a_1 \dfrac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$

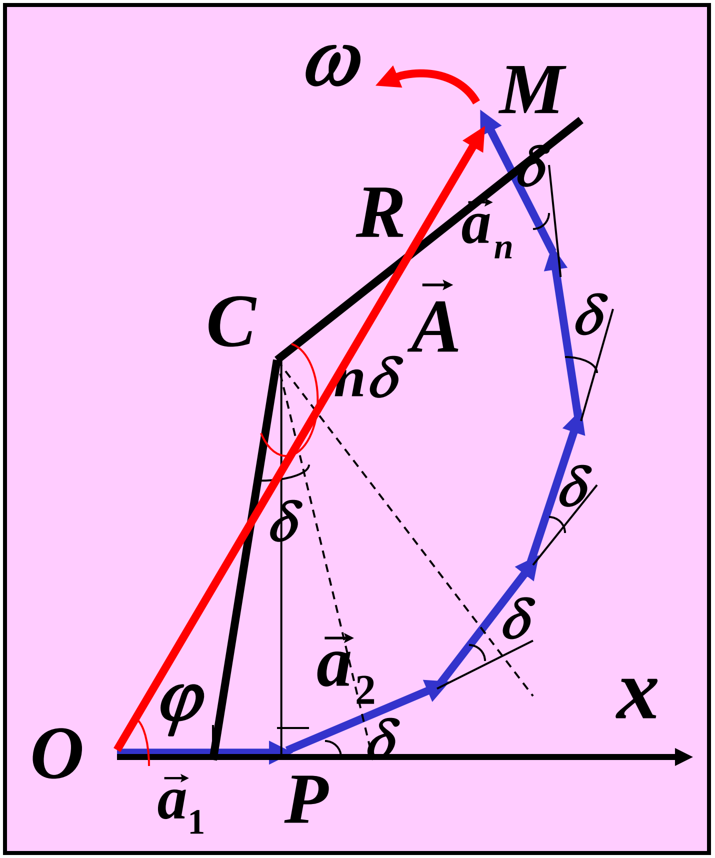
初相：$\varphi = \dfrac{1}{2}(\pi - \delta) - \dfrac{1}{2}(\pi - n\delta) = \dfrac{n-1}{2}\delta$

合振动 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$= a_1 \frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \cos\left(\omega t + \frac{n-1}{2}\delta\right)$$

▲例题：教材 P_{17}[例1]

同一直线上 n 个同频率谐振动，其振幅相等而初相依次相差一个恒量，求合振动。



解：按多边形法则叠加：

$$\vec{A}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$$

构成正多边形的一部分。

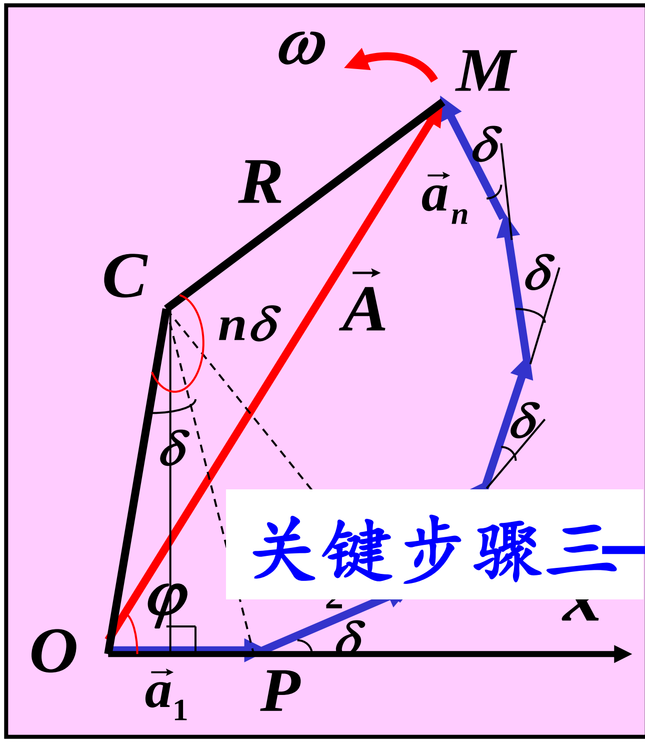
关键步骤一

设该正多边形外接圆圆心为C，半径为R，则：

$$a_1=2R\sin\frac{\delta}{2}\qquad A=2R\sin\frac{n\delta}{2}$$

$$\therefore A=a_1\frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$$

合振动振幅



关键步骤三

振幅： $A = a_1 \dfrac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$ 关键步骤二

初相：$\varphi = \dfrac{1}{2}(\pi-\delta) - \dfrac{1}{2}(\pi - n\delta) = \dfrac{n-1}{2}\delta$

合振动 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$= a_1 \frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \cos\left(\omega t + \frac{n-1}{2}\delta\right)$$

说明:合振动角频率与分振动相同，初相与n,δ有关，
振幅与a_1, n,δ有关。

若$\delta = 2k\pi$ 多边形 ⟶ 直线 $A = na_1$ ……合振动最强

若$\delta = \dfrac{2k'\pi}{n}$ 多边形 ⟶ 闭合 A=0 ……合振动最弱

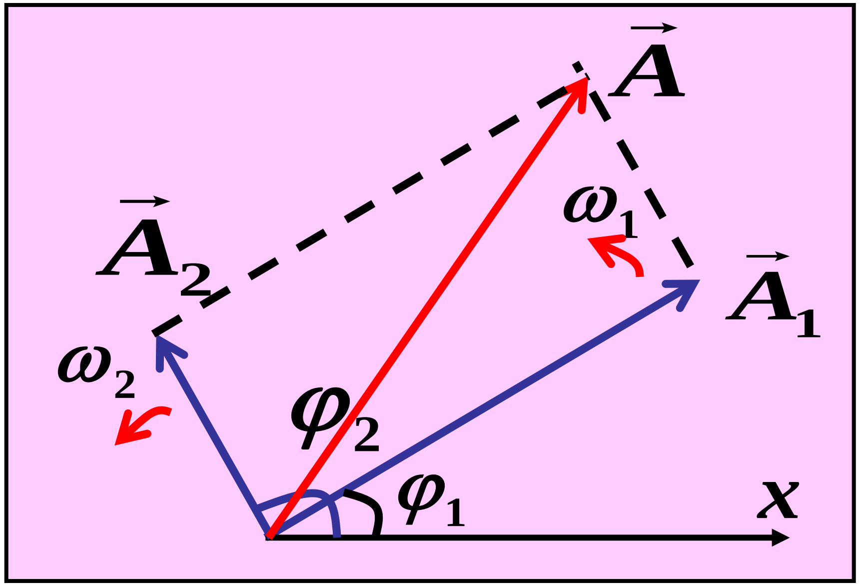
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ $k' \neq nk$

2. 频率不同：

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\omega_1 \neq \omega_2$$



平行四边形形状变化，

$\vec{A}$ 大小变化，不表示谐振动。

(1)特例一：设 $A_1 = A_2 = A,\ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$

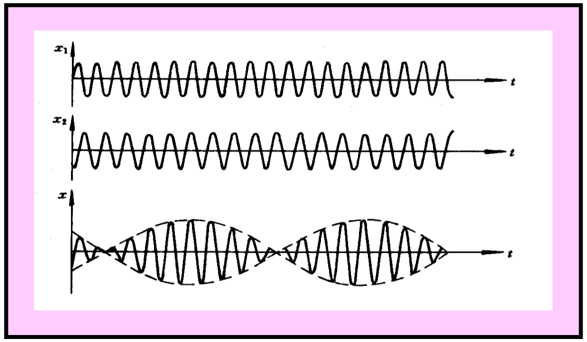
$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi\right)$$

振幅随时间变化　　振动

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\cdot\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi)$$

讨论：ω_1, ω_2 均很大，但彼此相差很小。

$$\left|\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right| << \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$$



第一个因子缓慢变化，第二个因子快速变化

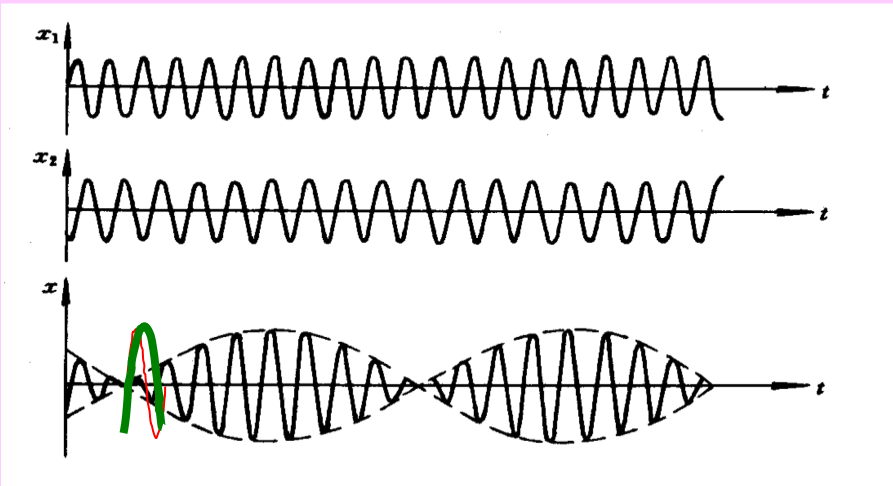
调制

合振动为近似谐振动，出现“拍”现象。

“拍”现象：振动的强弱周期性变化。

可用音叉演示“拍”现象(演示实验室开放)

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\cdot\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi)$$



振幅: $\left|2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\right|$

调制频率: $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$

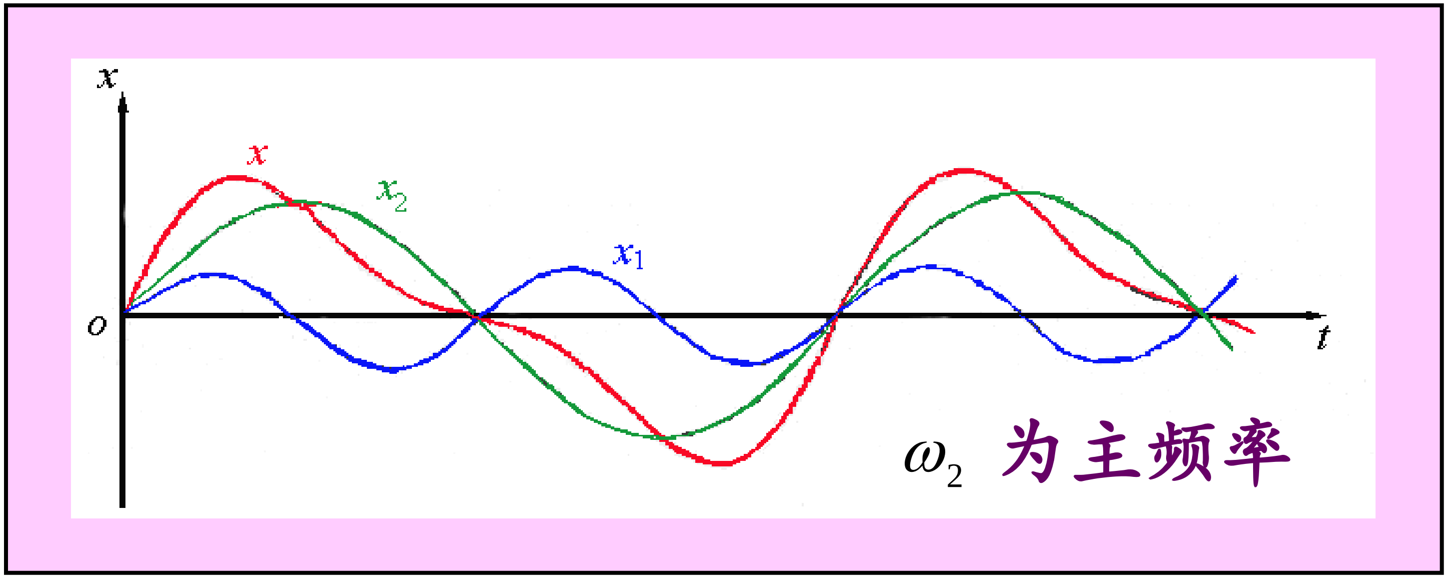
载频: $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$

拍频(ν):单位时间中合振动最强（或最弱）的次数。

调制频率: $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}/(2\pi) = \frac{\nu_2 - \nu_1}{2}$

拍频: $\nu = 2\cdot\frac{\nu_2 - \nu_1}{2} = \nu_2 - \nu_1$

(2)特例二: 当 $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ 可化为整数比时，合振动为周期性振动，否则合振动为非周期振动。



振动合成的重要意义：

谐振动 $\xrightarrow{\text{合成}}$ $\begin{cases} \text{谐振动} \rightarrow \text{周期性} \\ \text{非谐振动} \begin{cases} \text{周期性} \\ \text{非周期性} \end{cases} \end{cases}$

↓

研究一切振动的基础

三、互相垂直的谐振动合成

1.频率相同

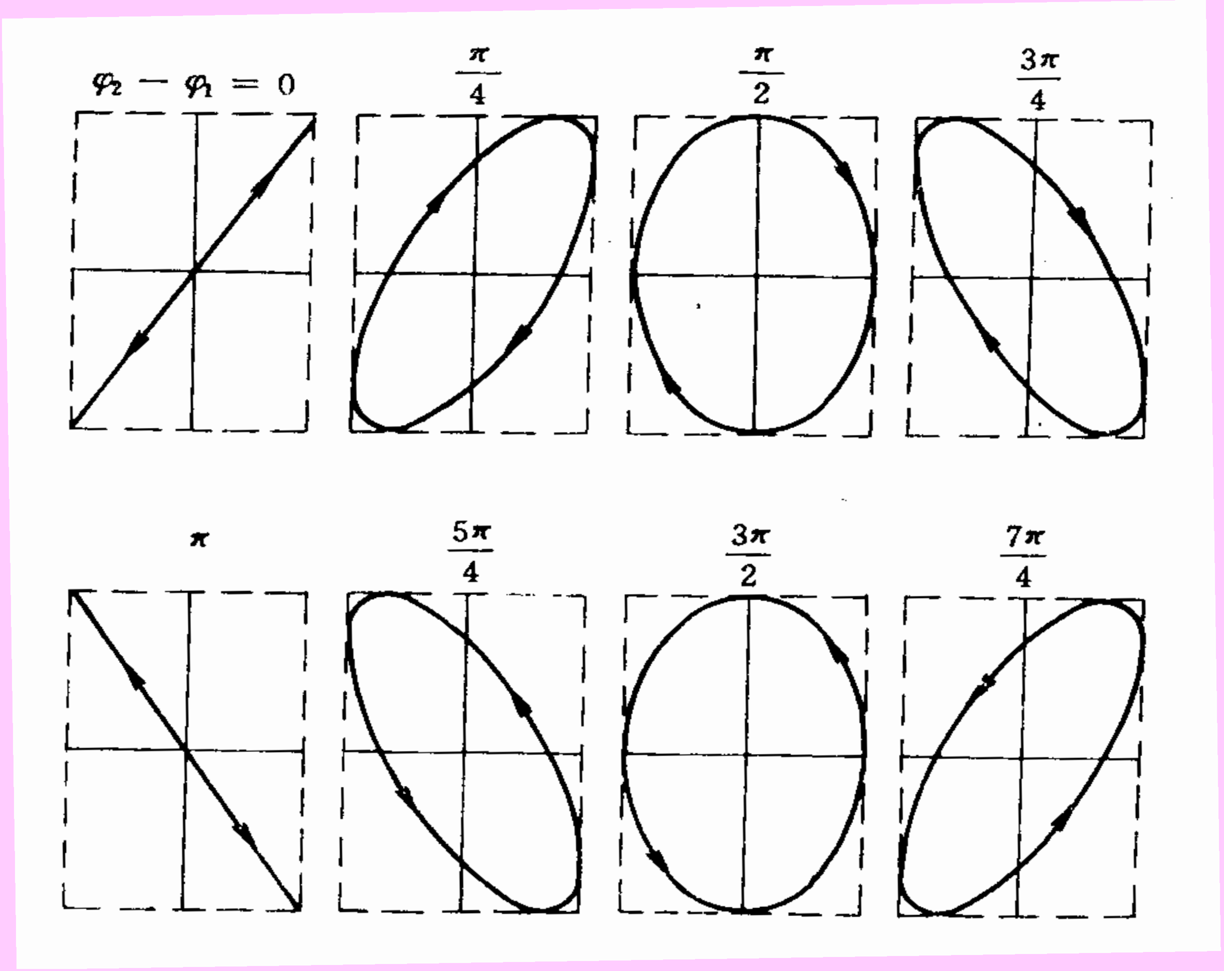
$$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

消去t：
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

………一般情况下为椭圆方程

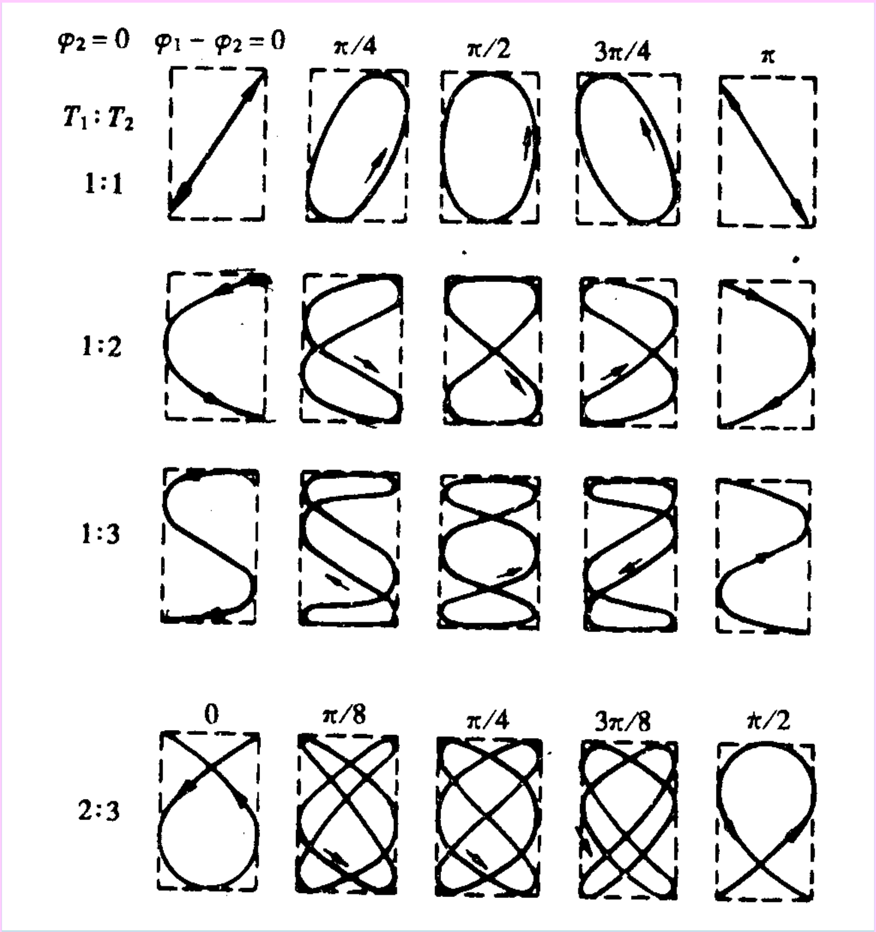
几种不同相差情况下合运动轨迹



2.频率成简单整数比

合振动为具有严格的周期性和稳定、封闭的轨道

——利萨如图形



第三节 内容小结

掌握：同一直线上同频率谐振动的合成

1.合振动仍为该直线上同一频率的谐振动

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

2.合振动的强弱与两分振动相位差的关系

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\begin{cases}2k\pi & A_{\max}=A_1+A_2\\(2k+1)\pi & A_{\min}=|A_1-A_2|\end{cases}$$

$$(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

了解:

1. 同一直线上不同频率的谐振动的合成，“拍”

2. 频谱分析

3. 互相垂直的谐振动合成（物理实验课）