

第十七章 非线性电路

第一部分 要点、考点归纳

§ 17-1 研究非线性电路的意义和方法

1. 概述

(1) 研究非线性电路的意义

①含有非线性元件的电路称为非线性电路。严格地说,实际电路都或多或少具有非线性。只是许多实际元件,当其工作在一定的电流或电压范围内时,非线性程度较弱。将它们当作线性元件处理,能满足要求,不会带来本质上的差异。但是,许多非线性元件的非线性特征很强,若忽略其非线性,而用线性电路的分析方法处理,会带来本质的差别,不仅计算的结果与实际量值相差太大,没有意义,而且也无法解释其中的物理现象。

②许多非线性元件具有线性元件无法达到的物理功能。工程上可以利用它。因此在自动控制,无线电电子学等领域中得到了广泛应用。

(2) 非线性电路的分析方法

①基本依据:仍然是 KCL, KVL 和元件的伏安关系,但由于元件伏安关系的非线性,则由 KCL, KVL 和元件 VAR 得到的电路方程是非线性代数方程,计算较困难,故非线性电路的方法常采用图解法。当然,计算机的飞速发展为非线性问题的求解提供了很好的工具。但在电路较简单,计算精度不高,只作定性分析时,图解法仍然是一个直观、简单的方法。

②应用以直代曲的思想,将非线性电路的求解过程分成几个线性区段,就每个线性区段来说,应用线性电路的计算方法,称为分段线性化方法。

③小信号分析法是工程上分析非线性电路的一个重要方法,如电子技术课程中有关放大器的分析和设计,就是以小信号分析法为基础的。其基本思想是:当激励信号很小时,非线性电路可以用线性电路代替,误差很小。(将工作点附近的非线性伏安特性线性化)。

§ 17-2 非线性电阻

1. 非线性电阻

线性电阻元件的伏安特性可用欧姆定律来表示,即 $u = Ri$, 在 $u-i$ 平面上它是通过坐标原点的一条直线。非线性电阻元件的伏安关系不满足欧姆定律,而是遵循某种特定的非线性函数关系。非线性电阻在电路中符号如图 17.1 (a) 所示。

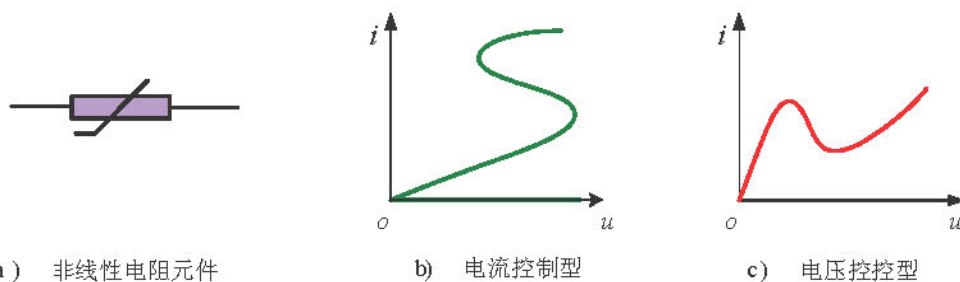


图 17.1. 非线性电阻

(1) **电流控制型电阻** 非线性电阻元件两端电压是其电流的单值函数,它的伏安特性可用函数关系 $u = f(i)$ 表示。其典型的伏安特性如图 17.1 (b) 所示,从其特性曲线上可以看到:对于同一电压值,与之对应的电流可能是多值的;而对于每一个电流值,有且只有一个电压值与之对应。

(2) **电压控制型电阻** 通过非线性电阻元件中的电流是其两端电压的单值函数，其伏安特性可用下列函数关系 $i = g(u)$ 表示。其典型的伏安特性如图 17.1 (c) 所示，从其特性曲线上可以看到：对于同一电流值，与之对应的电压可能是多值的。但是对于每一个电压值，有且只有一个电流值与之对应。隧道二极管就具有这样的伏安特性。

(3) **单调型非线性电阻** 非线性电阻元件的伏安特性是单调增长或单调下降的，它同时是电流控制又是电压控制的。这类电阻以 $P-n$ 结二极管最为典型，其伏安特性用下式表示：

$$i = I_s (e^{\frac{qu}{kT}} - 1)$$

式中 I_s 为一常数，称为反向饱和电流， q 是电子的电荷 (1.6×10^{-19} 库)， k 是玻尔兹曼常数 $1.38 \times 10^{-23} J/K$ ， T 为热力学温度。在 $t = 300K$ (室温下) 时

$$\frac{q}{kT} = 40(J/C)^{-1} = 40V^{-1}$$

因此

$$i = I_s (e^{40u} - 1)$$

从式 $i = I_s (e^{\frac{qu}{kT}} - 1)$ 可求得

$$u = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{1}{I_s} i + 1\right)$$

换句话说，电压可用电流的单值函数来表示。它的伏安特性曲线如图 17.2 所示。

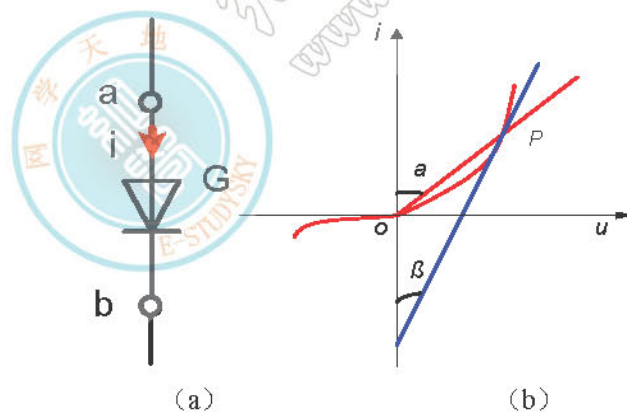


图 17.2 $P-n$ 结二极管的伏安特性

(4) **非线性电阻的单向性**：线性电阻是双向性的，而许多非线性电阻却是单向性的。当加在非线性电阻两端的电压方向不同时，流过它的电流也完全不同，故其特性曲线不对称于原点。在工程中，非线性电阻的单向导电性可作为整流用。当然也有一些非线性电阻是双向性的。

(5) **静态电阻和动态电阻**：为了计算上的需要，对于非线性电阻元件有时引用静态电阻和动态电阻的概念。

非线性电阻元件在某一工作状态下 (如图 17.2 中 P 点) 的静态电阻 R 等于该点的电压

值 u 与电流值 i 之比, 即

$$R = \frac{u}{i}$$

显然 P 点的静态电阻正比于 $\tan \alpha$ 。

非线性电阻元件在某一工作状态下 (如图 17.2 中 P 点) 的动态电阻 R_d 等于该点的电压对电流的导数值, 即

$$R_d = \frac{du}{di}$$

显然 P 点的动态电阻正比于 $\tan \beta$ 。

这里特别要说明的是, 当非线性电阻伏安特性某一点处的动态电阻为负值时, 称非线性电阻在该点具有“负电阻”的性质。

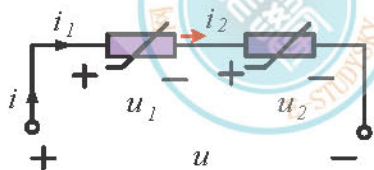
R 和 R_d 都是电压 u 或电流 i 的函数, 静态电阻恒为正值。动态电阻可正可负。具有 N 型或 S 型伏安特性曲线的非线性电阻, 在其曲线的下倾段, 其动态电阻为负, 因此, 具有“负电阻”性质。

(6) 非线性电阻的串联和并联

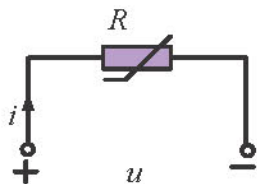
a 串联

当非线性电阻元件串联或并联时, 只有所有非线性电阻元件的控制类型相同, 才有可能得出其等效电阻伏安特性的解析表达式。对于下图所示两个非线性电阻的串联电路, 设两个非线性电阻的伏安特性分别为 $u_1 = f_1(i_1)$, $u_2 = f_2(i_2)$, 用 $u = f(i)$ 表示图 17.3 (a) 所示两个非线性电阻串联电路的一端口伏安特性。根据 KCL 和 KVL 得:

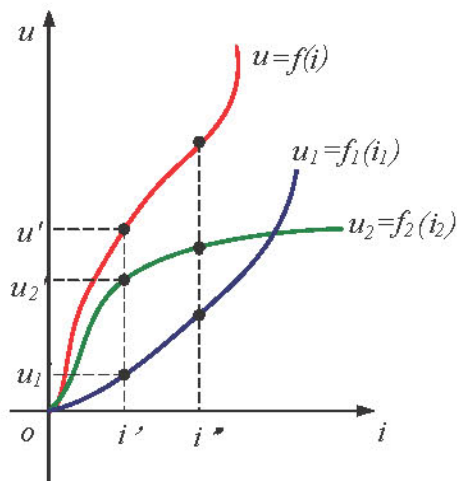
$$u = u_1 + u_2$$



a)



c)



b)

图 17.3 非线性电阻的串联

又有
$$u = f_1(i_1) + f_2(i_2)$$

因此对所有 i 则有 $f(i) = f_1(i) + f_2(i)$

因此两个电流控制的非线性电阻串联组合的等效电阻还是一个电流控制的非线性电阻。也可以用图解的方法来分析非线性电阻的串联电路。图 17.3 (b) 说明了这种分析方法，即在同一电流值下将 u_1 和 u_2 相加可得出 u 。例如，当 $i = i_1 = i_2$ 时，有， $u_1 = u'_1$ ， $u_2 = u'_2$ ，而 $u' = u'_1 + u'_2$ 。取不同的 i 值，可逐点求出其等效伏安特性 $u = f(i)$ ，如图 17.3 (b)。

如果这两个非线性电阻中有一个是电压控制型，在电流值的某范围内电压是多值的，很难写出等效伏安特性 $u = f(i)$ 的解析式。可以用图解的方法求其等效伏安特性。

图 17.4 (a) 所示电路由线性电阻 R_0 和直流电压源 U_0 及一个非线性电阻 R 组成。线性电阻 R_0 和电压源 U_0 的串联组合可以是一个线性一端口的戴维宁等效电路。设非线性电阻的伏安特性如图 17.4 (b) 所示。这里介绍另一种图解法，称为“曲线相交法”。对此电路用 KVL，可得：

$$U_0 = R_0 i + u, \quad u = U_0 - R_0 i$$

此方程可以看作是图 17.4 (a) 虚线方框所示一端口的伏安特性。它在 $u-i$ 平面上是一条如图 17.4 (b) 中的直线 \overline{AB} 。设非线性电阻 R 的伏安特性可表示为

$$i = g(u)$$

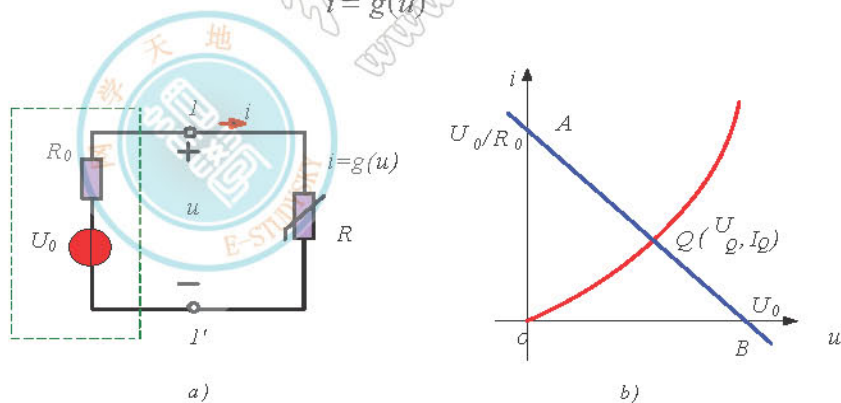


图 17.4 静态工作点

直线 \overline{AB} 与此伏安特性的交点 $Q(I_Q, U_Q)$ 同时满足 $U_0 = R_0 i + u$ 和 $i = g(u)$ ，所以有：

$$\begin{cases} U_0 = R_0 I_Q + U_Q \\ I_Q = g(U_Q) \end{cases}$$

交点 $Q(I_Q, U_Q)$ 称为电路的静态工作点，它就是图 17.4 (a) 所示电路的解。在电子

电路中直流电压源通常表示偏置电压， R_0 表示负载，故直线 \overline{AB} 通常称为负载线。

b 并联

图 17.5 为两个非线性电阻的并联电路。按 KCL 和 KVL 有

$$u = u_1 = u_2, \quad i = i_1 + i_2$$

设两个非线性电阻均为电压控制型的，其伏安特性分别表示为

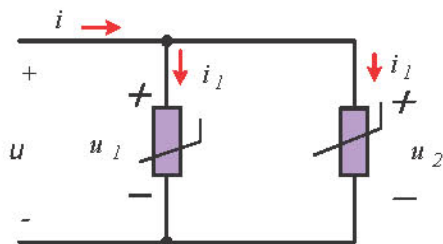


图 17.5 非线性电阻的并联

$$i_1 = f_1(u_1), \quad i_2 = f_2(u_2)$$

由此并联电路组成的一端口伏安特性用 $i = f(u)$ 来表示。利用以上关系，可得

$$i = f_1(u) + f_2(u)$$

所以，该端口的伏安特性是一个电压控制型的非线性电阻。如果并联的非线性电阻中之一不是电压控制的，就得不出以上的解析式，但可以用图解法来解。

用图解法来分析非线性电阻的并联电路时，把在同一电压值下的各并联非线性电阻的电流值相加，即可得到所需要的驱动点特性。

§ 17-3 非线性电容和非线性电感

1. 非线性电容

电容是一个二端储能元件。它两端电压与其电荷的关系是用库伏特性表示的。

$$C = \frac{q}{u}$$

线性电容元件的库伏特性曲线为一条过原点的直线， u （关联参考方向下）为正实

常数。非线性电容元件的库伏特性遵循某种特定的函数关系，不再是过原点的直线。 C 不为常数。

非线性电容的电荷、电压关系可表示为：

$$\text{电压控制型电容} \quad q = f(u)$$

$$\text{电荷控制型电容} \quad u = h(q)$$

非线性电容元件的电路符号如图 17-6 a) 所示，图 b) 给出了一非线性电容元件的库伏特性曲线。

同非线性电阻类似，可引入静态电容 C 和动态电容 C_d 的概念。分别定义为：

$$C = \frac{q}{u} \quad \text{正比于 } \tan \alpha$$

$$C_d = \frac{dq}{du} \quad \text{正比于 } \tan \beta$$

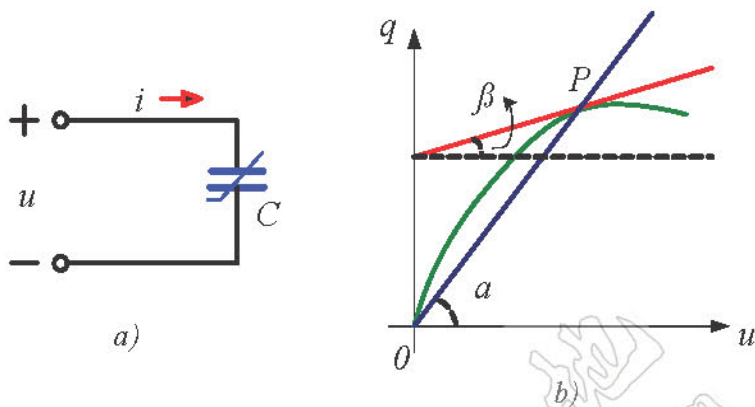


图 17-6 非线性电容的 $q=u$ 特性曲线

非线性电容在工程上和无线电技术中也有着广泛的应用。如利用可变电容器调谐的调谐电路，会产生机械动作引起的噪声，这一问题可用非线性电容 C 谐调解决。

2. 非线性电感

电感也是一个二端储能元件。其特征用磁通链与电流之间的函数关系或韦安特性表示。

线性电感元件：韦—安特性是一条过原点的直线，在关联参考方向下，电感值 $L = \frac{\psi}{i}$ 为一正实常数。

非线性电感元件：韦—安特性不是过原点的直线，而遵循某种特定的函数关系。 L 不为常数。

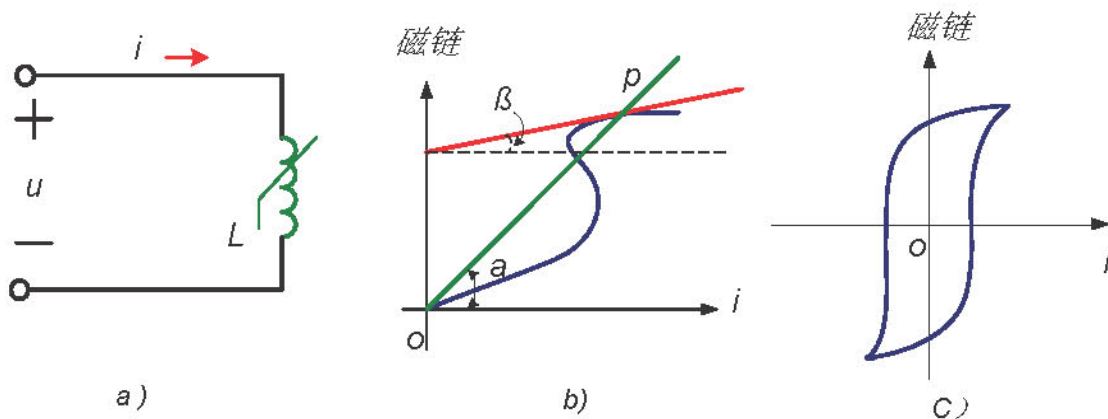


图 17-8 非线性电感的 $\psi-i$ 曲线

非线性电感元件的韦安特性一般可表示为:

磁通控制的电感 $i = h(\psi)$

电流控制的电感 $\psi = f(i)$

非线性电感元件的电路符号及典型伏安特性如图 17-8a) 和 b) 所示。

同样, 非线性电感有静态电感 L 和动态电感 L_d 之分, 分别定义为:

P 点的静态电感 $L = \frac{\psi}{i}$ 正比于 $\tan \alpha$

P 点的动态电感 $L_d = \frac{d\psi}{di}$ 正比于 $\tan \beta$

非线性电感也有单调型的, 即韦安特性曲线是单调增长或单调下降的。非线性电感在工程实际中有着广大的用途。如电机、变压器的铁心, 就是非线性电感。由于铁磁材料的磁滞现象, 这一类非线性电感的韦安特性曲线具有回线形状。如图 17-8c) 所示, 称为磁滞回线。

§ 17-4 非线性电路的方程

1. 非线性电阻电路的非线性代数方程

用解析法分析非线性电路的依据仍然是 KCL、KVL 和元件的 VCR。对于非线性电阻电路, 依上述定律列出的是一组非线性代数方程。而对于含有储能元件的非线性电路, 将得到一组非线性微分方程。

2. 非线性动态电路的非线性微分方程

对于含有非线性动态元件的电路, 通常选择非线性电感的磁通链和非线性电容的电荷为电路的状态变量, 根据 KCL 和 KVL 列写的方程是一组非线性微分方程。

含非线性电容的电路如图 17.12 所示, $u = 0.5kq^2$, 以电容电荷 q 为电路变量写出微分方程如下:

$$i_c = \frac{dq}{dt}, \quad i_0 = \frac{u}{R_0} = \frac{0.5kq^2}{R_0}$$

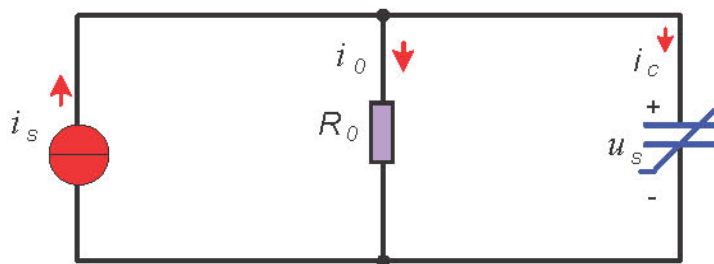


图 17.12 含有非线性电容的电路

应用 KCL: $i_c + i_0 = i_s$, 因此, 得一阶非线性微分方程

列写具有多个非线性储能元件电路的状态方程比线性电路更为复杂和困难。

对于非线性代数方程和非线性微分方程的解析解一般都是难以求出来的, 但是可以利用计算机应用数值法来求解。

§ 17-5 小信号分析法

1. 小信号分析法的基本思想和应用前提

(1) 小信号分析的基本思想

将静态工作点 Q 处的非线性特性予以线性化, 从而应用线性电路的叠加定理。

(2) 小信号分析的应用条件

电路中同时有直流电源 U_0 和随时间变动的电压 $u_s(t)$ 共同作用, 且 $u_s(t)$ 足够小 (通常把 $u_s(t)$ 称为小信号), 满足 $|u_s(t)| \ll U_0$ 。

小信号分析法是电子工程中分析非线性电路的一个重要方法。

2. 小信号分析

在图 17.13 (a) 所示电路中, 直流电压源 U_0 为偏置电压, R_0 为线性电阻, 非线性电阻 R 是电压控制型的, 其伏安特性为 $i = g(u)$, 图 17.13 (b) 为其伏安特性曲线。小信号时变电压为 $u_s(t)$, 且 $|u_s(t)| \ll U_0$ 总成立。现在待求的是非线性电阻电压 u 和电流 i 。

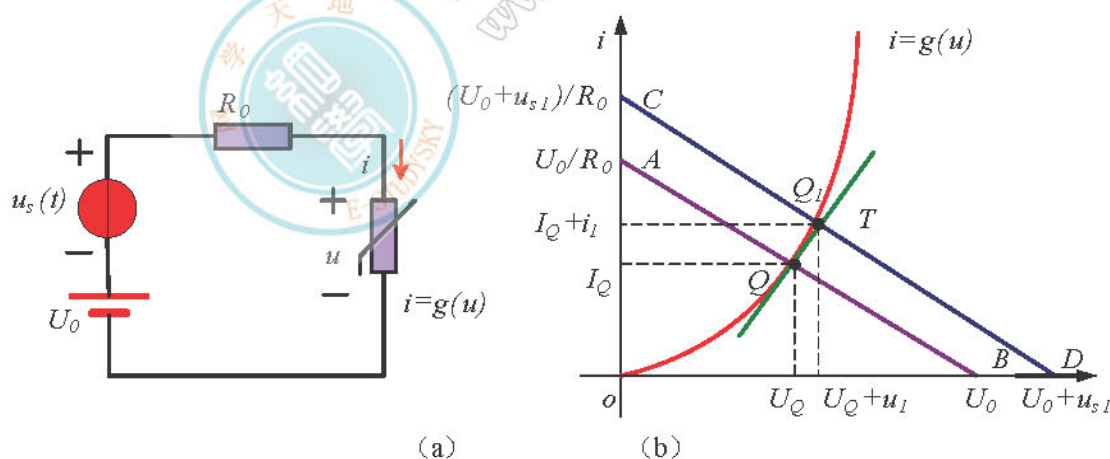


图 17.13 非线性电路的小信号分析

应用 KVL 列出电路方程 $U_0 + u_s(t) = R_0 i(t) + u(t)$

(1) 当 $u_s(t) = 0$ 时, 即只有直流电压源单独作用时, 负载线 \overline{AB} 如上图 17.13 (b) 所示,

它与特性曲线的交点 $Q(U_Q, I_Q)$ 即静态工作点。

(2) 当 $u_s(t) \neq 0$ 时, 但 $|u_s(t)| \ll U_0$, 电路的解 $u(t), i(t)$ 必在工作点 $Q(U_Q, I_Q)$ 附近, 所以可以近似地把 $u(t), i(t)$ 写为: $u(t) = U_Q + u_1(t) \quad i(t) = I_Q + i_1(t)$

式中 $u_1(t), i_1(t)$ 是由于信号 $u_s(t)$ 在工作点 $Q(U_Q, I_Q)$ 附近引起的偏差。在任意时刻 t , $u_1(t)$ 和 $i_1(t)$ 相对于 U_Q, I_Q 都是很小的量。

考虑到给定非线性电阻的特性 $i = g(u)$, 从以上两式得:

$$I_Q + i_1(t) = g[U_Q + u_1(t)]$$

由于 $u_1(t)$ 很小, 可以将上式右方在 $Q(U_Q, I_Q)$ 点附近用泰勒级数展开, 取级数前面两项而略去一次项以上的高次项, 则上式可写为

$$I_Q + i_1(t) \approx g(U_Q) + \left. \frac{dg}{du} \right|_{U_Q} u_1(t)$$

由于 $I_Q = g(U_Q)$, 故从上式得

又因为 $\left. \frac{dg}{du} \right|_{U_Q} = G_d = \frac{1}{R_d}$ 为非线性电阻在工作点 $Q(U_Q, I_Q)$ 处的动态电导, 所以,

$$i_1(t) = G_d u_1(t), \quad i_1(t) = G_d u_1(t)$$

由于 $G_d = \frac{1}{R_d}$ 在工作点 $Q(U_Q, I_Q)$ 处是一个常量, 所以由小信号电压 $u_s(t)$ 产生的电压 $u_1(t)$ 和电流 $i_1(t)$ 之间的关系是线性的。

这样,

$$U_0 + u_s(t) = R_0 i(t) + u(t)$$

可改写为 $U_0 + u_s(t) = R_0 [I_Q + i_1(t)] + U_Q + u_1(t)$

但是 $U_0 = R_0 I_Q + U_Q$,

$$u_s(t) = R_0 i_1(t) + u_1(t)$$

又因为在工作点 $Q(U_Q, I_Q)$ 处, 有 $u_1(t) = R_d i_1(t)$, 代入上式,

$$u_s(t) = (R_0 + R_d) i_1(t)$$

最后得

上式是一个线性代数方程,由此可以作出给定非线性电阻在静态工作点 $Q(U_Q, I_Q)$ 处的小信号等效电路如图 17.14 所示。于是,求得

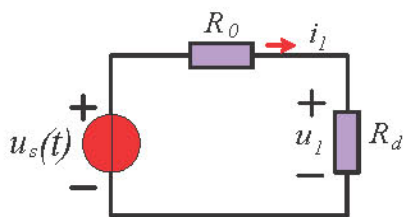


图 17.14 小信号等效电路

综上所述,小信号法分析步骤为:

- ①求解非线性电路的静态工作点;
- ②求解非线性电路的动态电导或动态电阻;
- ③作出给定的非线性电阻在静态工作点处的小信号等效电路;
- ④根据小信号等效电路进行求解。

第二部分 例题

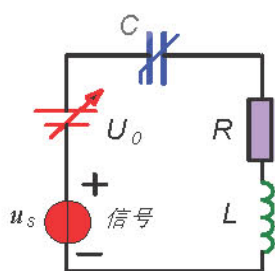
例 1 图 17-7 a) 为一非线性电容 C 的调谐电路,其中直流电压 U_0 是作控制(偏置)用的,电容的 $q-u$ 关系为 $q = \frac{1}{2}ku^2$, 曲线如图 17-6 b)。试分析此电路的工作。

的,电容的 $q-u$ 关系为 $q = \frac{1}{2}ku^2$, 曲线如图 17-6 b)。试分析此电路的工作。

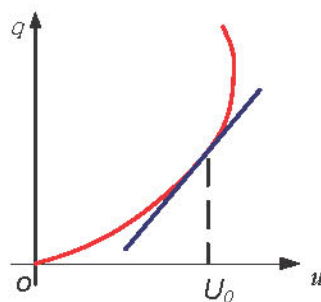
解: 通常,信号电压 u_s 比直流偏置电压 U_0 小很多,则在一定的 U_0 下,将非线性电容作为线性电

容处理,电容值就是工作点的动态电容:

$$C_d = \left. \frac{dq}{du} \right|_{U_0} = kU_0$$



a)



b)

图 17-7

可见,对于不同的偏置电压 U_0 , C_d 的值就不同,所以调节直流偏置电压 U_0 就可以改变电容的大小而达到调谐的目的,使电路对信号频率发生谐振。这样,就代替了可变电容器的作用,且减小了机械动作引起的噪声。

例 2 电路如图 17-9 所示, 其中非线性电阻的伏安特性关系为 $u_3 = 20i_3^{1/2}$, 试列出电路方程。

解: 元件 VCR 为: $u_1 = R_1 i_1$; $u_2 = R_2 i_2$; $u_3 = 20i_3^{1/2}$

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ u_1 + u_2 = U_s \\ u_2 = u_3 \end{cases}$$

依 KCL 和 KVL,

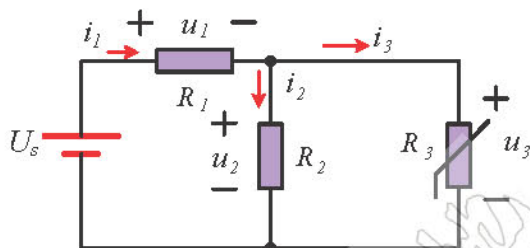


图 17-9 例 17-2 图

将元件 VCR 代入,
$$\begin{cases} R_1 i_1 + R_2 i_2 = U_s \\ R_2 i_2 = 20i_3^{1/2} \\ i_1 = i_2 + i_3 \end{cases} \quad (\text{支路电流法})$$

可合并为

$$\begin{cases} (R_1 + R_2)i_1 - R_2 i_3 = U_s \\ -R_2 i_1 + R_2 i_3 + 20i_3^{1/2} = 0 \end{cases} \quad (\text{回路电流法})$$

若电路中既有电压控制的电阻, 又有电流控制的电阻, 建立方程的过程相当复杂。

例 3 图 17-10 所示电路为一个充电的线性电容向一个晶体二极管放电的电路。设二极管 VCR 用幂级数形式近似表示为 $i = au + bu^2$, a 和 b 为正的常量。试列出电路方程。

解: 设电容电压初始值 $u_c(0_+) = U_0$

$$\begin{cases} C \frac{du_c}{dt} = -i \\ u_c = u \end{cases}$$

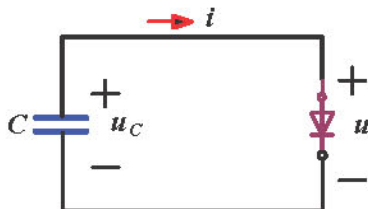


图 17-10 例 17-3 图

代入二极管的 VCR, 得
$$C \frac{du_c}{dt} = -au_c - bu_c^2$$

即: $\frac{du_c}{dt} = -\frac{a}{c}u_c - \frac{b}{c}u_c^2$ 令 $\alpha = \frac{a}{c}, \beta = \frac{b}{c}$, 则

$$\frac{du_c}{dt} = -\alpha u_c - \beta u_c^2$$

u_c 为状态变量。此为一阶非线性微分方程。

例 4 电路如图 17.11 所示, 已知 $R_1 = 3\Omega, R_2 = 2\Omega, U_s = 10V, i_s = 1A$, 非线性电阻

R 的特性是电压控制型的, $i = u^2 + u$, 试求 u 。应用 KCL 有 $i_1 = i_s + i$

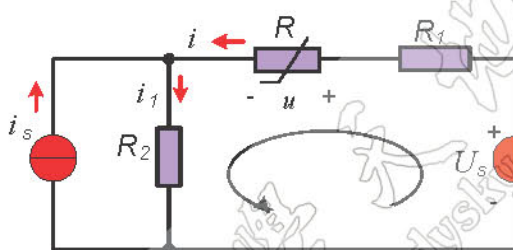


图 17-11 例 17-4 图

对于回路 1 应用 KVL: $R_1 i + R_2 i_1 + u = u_s$,

而将 $i_1 = i_s + i$ 及 $i = u^2 + u$ 代入上式, 得

$$5u^2 + 6u - 8 = 0$$

$$5u^2 + 6u - 8 = 0$$

$$u' = 0.8V, u'' = -2V$$

非线性电阻电压有两个解, 这说明由于非线性电阻的参数通常不等于常数, 导致了非线性电路的解不是唯一的。如果电路中既有电压控制的电阻, 又有电流控制的电阻, 建立方程的过程就比较复杂。可根据元件的特性选择支路电流法, 回路电流法, 结点电压法等来建立电路的方程。