1 设 $z=(1-i)^{500}$，求：$\mathrm{Im}z$, $\mathrm{Re}z$, $|z|$

解

$$z=\left[(1-i)^{2}\right]^{250}$$

$$=(-2i)^{250}$$

$$=-2^{250}$$

2 当$z=\dfrac{1+i}{1-i}$时，求$z^{500}+z^{50}+z^{5}$的值

解

$$z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$

$$z^{500}+z^{50}+z^{5}=1-1+i=i$$

3　求 $-\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$的主幅角及模

解

$$-\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$$

$$=\cos(-\frac{2}{3}\pi)+i\sin(-\frac{2}{3}\pi)$$

4　解方程　$z^4+1=0$

解

$$z^4=e^{2k\pi i+\pi i}$$

$$z_k=e^{\frac{(2k+1)\pi}{4}i}\qquad (k=0,1,2,3)$$

5、将复数$1-\cos\varphi+i\sin\varphi$化为指数形式.(π<φ<2π)

解:

$$1-\cos\varphi+i\sin\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2}+2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$=\sin\frac{\varphi}{2}\left[\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}\right]$$

$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

$$=2\sin\frac{\varphi}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}$$

6 解方程 $z^3+1+i\sqrt{3}=0$

解

$$z^3=-1-i\sqrt{3}$$

$$z^3=2e^{-\frac{2}{3}\pi i}=2e^{-\frac{2}{3}\pi i+2k\pi i}$$

$$z_k=2^{\frac{1}{3}}e^{(-\frac{2}{3}\pi i+2k\pi i)/3} \qquad \mathrm{k}=0,1,2$$

7 解方程 $z^4+z^2+1=0$

解 $z^4+z^2+1=0$

$(z^2+1)^2=z^2$

$z^2+z+1=0$ or $z^2-z+1=0$

$z_1=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ $z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$z_3=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ $z_4=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$

1　解方程 $z^2-4iz-(4-9i)=0.$

解　原方程为 $z^2-4iz+(2i)^2+4-(4-9i)=0.$

即 $(z-2i)^2=-9i$

于是 $z-2i=\sqrt{-9i}$

$$=3\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right),\quad k=0,1$$

故 $z_1=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\left(2-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)i, z_2=\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}+\left(2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)i.$

2　满足下列条件的点组成何种图形?是不是区域?若是区域请指出是单连通区域还是多连通区域.

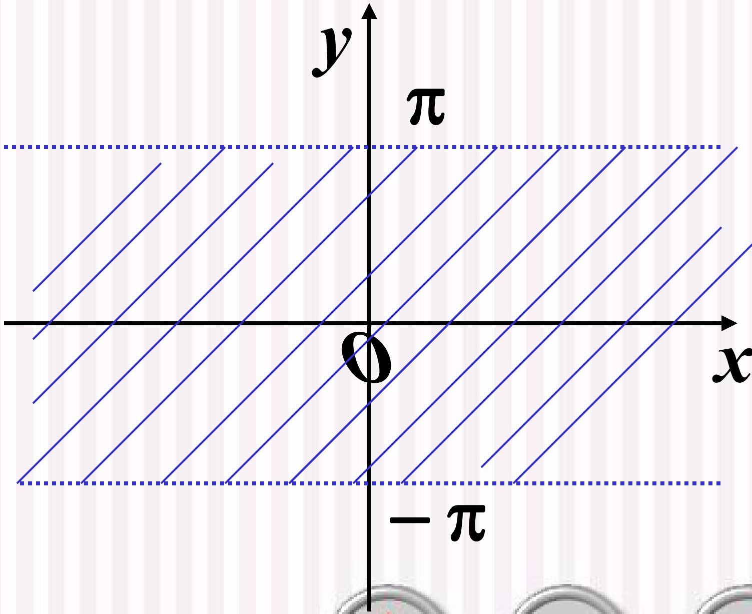
(1)　$\mathrm{I_m}(z)=0$;

解　$\mathrm{I_m}(z)=0$是实数轴,不是区域.

(2)　$-\pi<\mathrm{I_m}(z)<\pi$;

解　$-\pi<\mathrm{I_m}(z)<\pi$

是以 $y=-\pi,\quad y=\pi$ 为界的带形单连通区域.

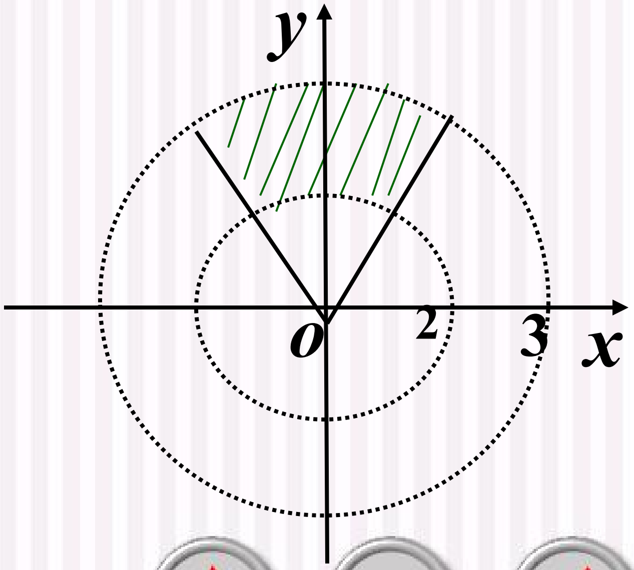


(3) $\frac{\pi}{3} \le \arg z \le \frac{2\pi}{3}$，且$2 < |z| < 3$

解 不是区域，因为图中

$$\arg z = \frac{\pi}{3}, \quad \arg z = \frac{2\pi}{3}$$

在圆环内的点不是内点.



3 证明$f(z)=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z}\right)(z\neq 0)$在$z\to 0$时的极限不存在.

证明：令 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$f(z)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{z^2-\bar{z}^2}{z\cdot\bar{z}}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{r^2}$$

$$=\frac{1}{2ir^2}\cdot 2r\cos\theta\cdot 2ri\sin\theta=\sin 2\theta$$

从而当沿正实轴 $\theta=0$时：$\lim\limits_{z\to 0}f(z)=0$

沿第一象限的角平分线 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$时：$\lim\limits_{z\to 0}f(z)=1$

故极限不存在

4 函数 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|}, z \neq 0 \\ 0, z=0\end{cases}$ 在原点 $z = 0$ 处是否连续？说明理由。

解

令 $z = re^{i\theta}$ 令 $z = re^{i\theta}$

$$z \neq 0,\ f(z) = \frac{r\sin\theta}{r} = \sin\theta$$

一、判定下列函数是否解析。

$$w = z\,\mathrm{Re}(z)$$

解：由 $w = z\,\mathrm{Re}(z) = x^2 + ixy$ 得

$$u = x^2, v = xy$$

所以 $$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y, \frac{\partial v}{\partial y} = x$$

容易看出，这四个偏导数处处连续，但是仅当$x=y=0$时，满足柯西—黎曼方程，因而函数仅在$z=0$可导且导数为0，但在复平面内任何地方都不解析。

二、讨论$f(z)=x^2+iy^2$的可导性和解析性。

解：$u=x^2, v=y^2$，故

$$u_x=2x,\ u_y=0,\ v_x=0,\ v_y=2y$$

$$u_y=0=-v_x$$

令 $2x=u_x=v_y=2y$，得 $x=y$

偏导数都在Z面处处连续，但u,v仅在直线x=y上满足c.-R.条件。从而f(z)仅在直线 x= y上可导。但在Z面上f(z)却处处不解析。

三、证明 $f(z)=x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i$ 在全平面上解析，并求其导数。

解： $u=x^3-3xy^2, v=3x^2y-y^3$,故

$$u_x=3x^2-3y^2, u_y=-6xy,$$

$$v_x=6xy，\ v_y=3x^2-3y^2$$

$$\therefore u_x=v_y，\ u_y=-v_x$$

$$f(z)=z^3, f'(z)=3z^2$$

四：决定实常数k使得$f(z)=\dfrac{(x+k)-\mathrm{i}\,y}{x^2+y^2+2x+1}$ (z ≠ -1)

解析。

解：由于

$$f(z)=\frac{(x+k)-\mathrm{i}\,y}{x^2+y^2+2x+1}=\frac{x-\mathrm{i}\,y+k}{(x+1+iy)(x+1-iy)}$$

$$=\frac{\bar{z}+k}{(z+1)(\bar{z}+1)}$$

k=1

五：设函数 $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$

问常数$a, b, c,$取何值时，$f(z)$在复平面内处处解析？

解：由于

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = a \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = b, \frac{\partial v}{\partial y} = c$$

从而要使

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

只需

$$c = 1, \quad a = -b$$

因此，当 $c = 1, \quad a = -b$ 时，此函数在复平面内处处解析。

1 设 $z=x+iy$,求$\left|e^{i-2z}\right|$

解

$$\left|e^{i-2z}\right|=\left|e^{i-2(x+iy)}\right|$$

$$=\left|e^{-2x+i(1-2y)}\right|$$

$$=\left|e^{-2x}\right|\times\left|e^{i(1-2y)}\right|$$

$$=e^{-2x}$$

2、 计算$Ln(-3+4i),(1+i)^i,\cos i$的值。

解

$$Ln(-3+4i)=\ln|-3+4i|+i[\arg(-3+4i)+2k\pi]$$

$$=\ln 5+i(-\arg tg\frac{4}{3}+\pi+2k\pi)\qquad \text{(k为整数)}$$

$$(1+i)^i=e^{iLn(1+i)}=e^{i[\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)]}$$

$$=e^{i\ln\sqrt{2}-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$$

$$\cos i=\frac{e^{i\times i}+e^{-i\times i}}{2}=\frac{e^{-1}+e}{2}$$

3、 解方程$e^{3z}+1-\sqrt{3}i=0$

解

$$e^{3z}=-1+\sqrt{3}i$$

$$3z=\mathrm{Ln}(-1+\sqrt{3}i)$$

$$3z=\ln 2+i(\frac{2\pi}{3}+2k\pi)$$

$$z=\frac{\ln 2}{3}+i(\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3})$$

例2 函数$f(z)=(x^2-y^2-x)+i(2xy-y^2)$在何处可导，何处解析.

解 $u(x,y)=x^2-y^2-x$, $u_x=2x-1$, $u_y=-2y$;

$v(x,y)=2xy-y^2$, $v_x=2y$, $v_y=2x-2y$;

当且仅当$y=\dfrac{1}{2}$时, $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$.

故 $f(z)$ 仅在直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 上可导.

由解析函数的定义知, $f(z)$ 在直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 上处处不解析，故 $f(z)$ 在复平面上处处不解析.

4、计算积分 $\int_C [(x-y)+ix^2]dz$。积分路径C为

(1) 自原点至 $1+i$ 的直线线段

(2) 自原点沿实轴至1，再由1沿直向上至 $1+i$；

(3) 自原点沿虚轴轴 i，再由 i沿水平方向向右至 $1+i$。

解(1) $z(t)=(1+i)t, x=t, y=t$

$$\int_C [(x-y)+ix^2]dz = \int_0^1 [(t-t)+it^2]\times(1+i)dt$$

$$= \int_0^1 (i-1)t^2 dt$$

$$= \frac{i-1}{3}$$

(2) $C_1 \quad z(t)=t\,, x=t, y=0$

$C_2 \quad z(t)=1+it, x=1, y=t$

$$\int_C [(x-y)+\mathrm{i}x^2]\mathrm{d}z$$

$$=\int_{C_1}[(x-y)+\mathrm{i}x^2]\mathrm{d}z+\int_{C_2}[(x-y)+\mathrm{i}x^2]\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1[(t-0)+i\times t^2]dt+\int_0^1[(1-t)+i\times 1]\times idt$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{i}{3}+i-\frac{i}{2}-1=-\frac{1}{2}+\frac{5i}{6}$$

(3) $\quad C_1 \quad z(t) = it\,, x = 0, y = t$

$\quad C_2 \quad z(t) = i + t, x = t, y = 1$

$$\int_C [(x-y) + \mathrm{i}x^2]\mathrm{d}z$$

$$= \int_{C_1} [(x-y) + \mathrm{i}x^2]\mathrm{d}z + \int_{C_2} [(x-y) + \mathrm{i}x^2]\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 [(0-t) + i \times 0] \times i\,dt + \int_0^1 [(t-1) + i \times t^2]\,dt$$

$$= -\frac{i}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{i}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{6}$$

1、试用观察法确定下列积分的值，并明理由。C 为$|z|=1$

(1) $\oint_C \frac{1}{z^2+4z+4}dz$ (2) $\oint_C \frac{1}{\cos z}dz$ (3) $\oint_C \frac{1}{z-\frac{1}{2}}dz$

解：(1) $\oint_C \frac{1}{z^2+4z+4}\mathrm{d}z$

$=0$ （奇点为-2在C外）

(2) $\oint_C \frac{1}{\cos z}\mathrm{d}z$

$=0$ （奇点为$k\pi+\frac{\pi}{2}$在C外）

(3) $\oint_C \frac{1}{z-\frac{1}{2}}\mathrm{d}z$

$=2\pi i$ (柯西积分公式）

2、计算复积分 $\oint_C \frac{1}{z(z-1)}\mathrm{d}z$ ，其中 C为不经过点0，1的正向简单闭曲线。

解： $\mathrm{I}=\oint_C \frac{1}{z(z-1)}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{1}{z-1}\mathrm{d}z-\oint_C \frac{1}{z}\mathrm{d}z$

(1)0,1在C内： $I=2\pi i-2\pi i=0$

(2)0在C内,1在C外： $I=0-2\pi i=-2\pi i$

(3)0在C外,1在C内： $I=2\pi i-0=2\pi i$

(4)0,1在C外： $I=0-0=0$

3、计算复积分 $\oint_C \frac{3z+2}{\left(z^4-1\right)}dz$，$C:|z-(1+i)|=\sqrt{2}$。

解： $f(z)$ 的奇点为 $1,-1,i,-i$.其中 $1,i$ 在 C 内。

$$\mathrm{I}=\oint_C \frac{3z+2}{\left(z^4-1\right)}dz=\oint_{|z-1|=0.1}\frac{3z+2}{\left(z^4-1\right)}dz+\oint_{|z-i|=0.1}\frac{3z+2}{\left(z^4-1\right)}dz$$

$$=\oint_{|z-1|=0.1}\frac{\dfrac{3z+2}{(z+1)(z^2+1)}}{\left(z-1\right)}dz+\oint_{|z-i|=0.1}\frac{\dfrac{3z+2}{(z^2-1)(z+i)}}{\left(z-i\right)}dz$$

$$=2\pi i\times\frac{3\times1+2}{(1+1)(1^2+1)}+2\pi i\times\frac{3\times i+2}{(i^2-1)(i+i)}$$

$$=\frac{5}{2}\pi i-\frac{2+3i}{2}\pi$$

$$=\pi i-\pi$$

4、计算复积分 $\oint_{|z|=3}\frac{\bar{z}}{|z|}dz$。

解：$$\oint_{|z|=3}\frac{\bar{z}}{|z|}dz=\oint_{|z|=3}\frac{\bar{z}\times z}{|z|\times z}dz$$

$$=\oint_{|z|=3}\frac{|z|^2}{|z|\times z}dz$$

$$=\oint_{|z|=3}\frac{|z|}{z}dz$$

$$=\oint_{|z|=3}\frac{3}{z}dz$$

$$=6\pi i$$

5、计算复积分 $I=\oint_{|z|=1}(|z|+z^{3}\sin z)\mathrm{d}z$。

解：$I = \oint\limits_{|z|=1} (|z| + z^3 \sin z) \mathrm{d}z$

$= \oint\limits_{|z|=1} (1 + z^3 \sin z) \mathrm{d}z$

$= 0$

1、计算复积分 $I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{|z|}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z$。

解：$I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{2}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z$

$$=\oint\limits_{|z-i|=0.25}\frac{\frac{2}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\mathrm{d}z+\oint\limits_{|z+i|=0.25}\frac{\frac{2}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\times\frac{-4}{(i+i)^3}+2\pi i\times\frac{-4}{(-i-i)^3}$$

$$=0$$

2、计算复积分 $I=\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\sin z}{(z-2)^{3}}\mathrm{d}z$。

解：$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{(z-2)^3} \mathrm{d}z$

$= 0$(柯西—古剎定理

3、计算复积分 $f(z)=\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\sin\xi}{(\xi-z)^3}\mathrm{d}\xi,f(i),f(1+6i)$。

$$解：f(z)=\begin{cases}0 & |z|>2\\ \dfrac{2\pi i}{2\times 1}\times(\sin\xi)''|_{\xi=z} & |z|<2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & |z|>2\\ -\pi i\sin z & |z|<2\end{cases}$$

$$f(i)=-\pi i\sin i$$

$$f(1+6i)=0$$

4、设$u = \mathrm{e}^{x}(x\cos y - y\sin y), f(0)=0,$
求解析函数$f(z)=u+iv$。

解：$u_x = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y)$

$$u_y = e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y)$$

$$f'(z) = u_x - iu_y$$

$$= e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y) + ie^x(x\sin y + \sin y + y\cos y)$$

$$= e^z + xe^z + ie^x y(\cos y + i\sin y)$$

$$= e^z + ze^z$$

$$f(z) = ze^z + c, \because f(0) = 0$$

$$f(z) = ze^z$$

4、已知调和函数$u(x,y)=x^2-y^2+xy$.求其共轭调和函数$v(x,y)$.

解：$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-(-2y+x)=2y-x,$

得 $v=\displaystyle\int(2y-x)\mathrm{d}x=2xy-\frac{x^2}{2}+g(y),$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2x+g'(y)$$

又 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y$

故 $g'(y)=y.$

即 $g(y)=\displaystyle\int y\mathrm{d}y=\frac{y^2}{2}+C.$

因此 $v=2xy-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+C$ (C为任意常数)

5、计算复积分 (1) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{e^{z}}{(z+2)^{3}z}dz$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=0.5}\frac{e^{z}}{(z+2)^{3}z}dz$

(3) $\displaystyle\oint_{|z-3|=0.5}\frac{e^{z}}{(z+2)^{3}z}dz$

解： ① $I=\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{\mathrm{e}}{(z+2)^3 z}\mathrm{d}z$

$$=\oint\limits_{|z|=0.25}\frac{\mathrm{e}^z}{(z+2)^3 z}\mathrm{d}z+\oint\limits_{|z+2|=0.25}\frac{\mathrm{e}^z}{(z+2)^3 z}\mathrm{d}z$$

$$=\oint\limits_{|z|=0.25}\frac{\mathrm{e}^z/(z+2)^3}{z}\mathrm{d}z+\oint\limits_{|z+2|=0.25}\frac{\mathrm{e}^z/z}{(z+2)^3}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\times\frac{e^0}{(0+2)^3}+\frac{2\pi i}{2}\times(\mathrm{e}^z/z)''\big|_{z=-2}$$

$$=\frac{\pi i}{4}(1-5e^{-2})$$

解： (2) $I = \oint\limits_{|z|=0.5} \frac{e^z}{(z+2)^3 z} dz$

$$= \oint\limits_{|z|=0.5} \frac{e^z/(z+2)^3}{z} dz$$

$$= 2\pi i \times \frac{e^0}{(0+2)^3}$$

$$= \frac{\pi i}{4}$$

解：　(3) $I=\oint\limits_{|z-3|=0.5}\dfrac{e^{z}}{(z+2)^{3}z}dz$

$=0$　　　　（柯西古萨定理