西南交通大学 2018－2019 学年第(2)学期期中考试试卷

课程代码 6041720 课程名称 高等数学 AII 考试时间 100 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：____________________

密封装订线 姓名______ 学号______ 班级______

一、选择题（每题 5 分，共 20 分）

1．下列说法正确的是（　　）。

（A）直线 $x-1=y-2=z$ 与平面 $x+y+z=1$ 平行；

（B）直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 与直线 $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 共面；

（C）过点 $(2,1,1)$ 与 $(1,1,2)$ 的直线方程为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$；

（D）过点 $(1,1,1)$ 与 $(0,1,-1)$ 且与平面 $x+y+z=0$ 垂直的平面方程为 $2x-y-z=0$。

2．设 $V_1:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le R^2\\ z\ge 0\end{cases}$，$V_2:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le R^2\\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\end{cases}$，则以下结论正确的是(　　)。

（A）$\iiint\limits_{V_1} x\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{V_2} x\mathrm{d}V$；（B）$\iiint\limits_{V_1} y\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{V_2} y\mathrm{d}V$；

（C）$\iiint\limits_{V_1} z\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{V_2} z\mathrm{d}V$；（D）$\iiint\limits_{V_1} xy\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{V_2} xy\mathrm{d}V$。

3．设 $\Omega:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$，则 $\iiint_\Omega x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 为（　　）。

（A）$\dfrac{4}{15}\pi a^3bc$ ；（B）$\dfrac{4}{15}\pi ab^3c$；（C）$\dfrac{4}{15}\pi abc^3$；（D）$\dfrac{4}{15}\pi a^3b^3c^3$。

4．函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极小值点有（　　）

（A）$(1,\ 0)$ ；（B）$(1,\ 2)$；（C）$(-3,\ 0)$；（D）$(-3,\ 2)$。

二、填空题（每题5分，共30分）

5．已知 $\begin{cases}x=e^u+u\sin v\\ y=e^u-u\cos v\end{cases}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$__________。

6．交换二次积分的次序 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y=$__________。

7．已知单位向量 $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ 满足 $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$，计算 $\bar{a}\bullet\bar{b}+\bar{b}\bullet\bar{c}+\bar{c}\bullet\bar{b}=$ __________。

8．函数$u=x^2+y^2+2z^2$在点$P_0(1,1,1)$处沿$\overrightarrow{P_0O}$方向的方向导数为________，在点$P_0(1,1,1)$处最大的方向导数值_________，其中O为坐标原点。

9．计算$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$____________，其中$\Omega$是由$x^2+y^2+z^2=z$围成的闭区域。

10．设D是$(x-1)^2+y^2\le 1$与$x^2+(y-1)^2\le 1$，则$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$写成极坐标下的二次积分为__________________________。

三、计算题（每题 9 分，共 45 分）

11．设函数$w=f(x+y+z,xyz)$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$。

12．方程$xy+z\ln y=1-e^{xz}$在点$(0,1,1)$的某个邻域内能否确定以y为因变量的隐函数，给出理由，若能确定以y为因变量的隐函数，求$\dfrac{\partial y}{\partial z}$。

13．计算$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由$4z^2=25(x^2+y^2)$及$z=5$围成的闭区域。

14．计算$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$是由曲面$z=xy$与平面$y=x, x=1$和$z=0$所围成的闭区域；

15．求直线$\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$在平面$4x-y+z=1$上的投影直线的方程。

四、（5分）设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$，证明 $\iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge \left[\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right]^2$。

西南交通大学 2018－2019 学年第(2)学期期中考试试卷

课程代码 6041720 课程名称 高等数学 AII 考试时间 100 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：

密封装订线 密封装订线 密封装订线

姓 名 学 号 班 级

一、选择题（每题 5 分，共 20 分）

1．下列说法正确的是（ D ）。

（A）直线 $x-1=y-2=z$ 与平面 $x+y+z=1$ 平行；

（B）直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 与直线 $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 共面；

（C）过点 $(2,1,1)$ 与 $(1,1,2)$ 的直线方程为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$；

（D）过点 $(1,1,1)$ 与 $(0,1,-1)$ 且与平面 $x+y+z=0$ 垂直的平面方程为 $2x-y-z=0$。

2．设 $V_1:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le R^2\\ z\ge 0\end{cases}$，$V_2:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le R^2\\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\end{cases}$，则以下结论正确的是(C)。

（A）$\iiint\limits_{V_1} x\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{V_2} x\mathrm{d}V$；（B）$\iiint\limits_{V_1} y\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{V_2} y\mathrm{d}V$；

（C）$\iiint\limits_{V_1} z\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{V_2} z\mathrm{d}V$；（D）$\iiint\limits_{V_1} xy\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{V_2} xy\mathrm{d}V$。

3．设 $\Omega:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$，则 $\iiint_\Omega x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 为（ A ）。

（A）$\dfrac{4}{15}\pi a^3bc$ ； （B）$\dfrac{4}{15}\pi ab^3c$； （C）$\dfrac{4}{15}\pi abc^3$；（D）$\dfrac{4}{15}\pi a^3b^3c^3$。

4．函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极小值点有（A）

（A）$(1,\ 0)$ ； （B）$(1,\ 2)$； （C）$(-3,\ 0)$；（D）$(-3,\ 2)$。

二、填空题（每题5分，共30分）

5．已知 $\begin{cases}x=e^u+u\sin v\\ y=e^u-u\cos v\end{cases}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\underline{\dfrac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}}$ 。

6．交换二次积分的次序 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y=\underline{\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x}$。

7．　已知单位向量$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$满足$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$，计算$\bar{a}\bullet\bar{b}+\bar{b}\bullet\bar{c}+\bar{c}\bullet\bar{b}=$ ＿＿＿$-\dfrac{3}{2}$＿＿＿＿＿。

8. 函数$u=x^2+y^2+2z^2$在点$P_0(1,1,1)$处沿$\overrightarrow{P_0O}$方向的方向导数为＿＿$-\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$＿＿，在点$P_0(1,1,1)$处最大的方向导数值＿＿＿$2\sqrt{6}$＿＿＿，其中O为坐标原点。

9．计算$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$＿＿＿$\dfrac{\pi}{10}$＿＿＿＿，其中$\Omega$是由$x^2+y^2+z^2=z$围成的闭区域。

10．设D是$(x-1)^2+y^2\le 1$与$x^2+(y-1)^2\le 1$，则$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$写成极坐标下的二次积分为

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\text{。}$$

三、计算题（每题 9 分，共 45 分）

11．设函数$w=f(x+y+z,xyz)$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$。

解：$\dfrac{\partial w}{\partial x}=f_1'+yzf_2'$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'+yzf_2'\right)=\frac{\partial}{\partial y}f_1'+\frac{\partial}{\partial y}\left(yzf_2'\right)$$

$$=f_{11}''+xzf_{12}''+zf_2'+yz\left(f_{21}''+xzf_{22}''\right)$$

$$=zf_2'+f_{11}''+\left(xz+yz\right)f_{12}''++xyz^2f_{22}''$$

12. 方程$xy+z\ln y=1-e^{xz}$在点$(0,1,1)$的某个邻域内能否确定以y为因变量的隐函数，给出理由，若能确定以y为因变量的隐函数，求$\dfrac{\partial y}{\partial z}$。

解　令$F(x,y,z)=xy+z\ln y+e^{xz}-1,$

（1）$F_x'=y+ze^{xz},\ F_y'=x+\dfrac{z}{y},\ F_y'=\ln y+xe^{xz}$连续；

（2）$F(0,1,1)=0;$

注意到$F_y'(0,1,1)=1\ne 0,$所以能确定以y为因变量的隐函数，$y=y(x,z)$, 且

$$\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z'}{F_y'}=-\frac{\ln y+xe^{xz}}{x+\dfrac{z}{y}}=-\frac{y\ln y+xye^{xz}}{xy+z}.$$

13．计算 $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由 $4z^2=25\left(x^2+y^2\right)$ 及 $z=5$ 围成的闭区域。

解 $\Omega:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\rho\le 2\\ \dfrac{5}{2}\rho\le z\le 5\end{cases}$，

故

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}\rho\int_{\frac{5}{2}\rho}^{5}\rho^3\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^2\rho^3\left(5-\frac{5}{2}\rho\right)\mathrm{d}\rho=8\pi$$

14．计算 $\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$ 是由曲面 $z=xy$ 与平面 $y=x,x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域；

解：$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x\end{cases}\\ 0\le z\le xy\end{cases}$，故

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy}xy^2z^3dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x(\frac{1}{4}xy^2z^4)\Big|_0^{xy}dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x\frac{1}{4}x^5y^6dy=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{7}x^5y^7\Big|_0^x dx=\frac{1}{28}\int_0^1x^{12}dx=\frac{1}{364}$$

15．求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\ 3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程。

解法一　设过直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\ 3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 且与 $4x-y+z=1$ 垂直的平面方程为

$$\left(2x-4y+z\right)+\lambda\left(3x-y-2z-9\right)$$

即为

$$\left(2+3\lambda\right)x+\left(-4-\lambda\right)y+\left(1-2\lambda\right)z-9\lambda=0$$

（**注** 容易验证平面 $3x-y-2z-9=0$ 与平面 $4x-y+z=1$ 不垂直）

于是有

$$\left(2+3\lambda\right)\times 4+\left(-4-\lambda\right)\times\left(-1\right)+\left(1-2\lambda\right)\times 1=0$$

解得 $\lambda=-\dfrac{13}{11}$，故过直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\ 3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 且与 $4x-y+z=1$ 垂直的平面方程为

$$17x+31y-37z-117=0$$

故投影直线的方程为

$$\begin{cases}4x-y+z=1\\17x+31y-37z-117=0\end{cases}$$

法二　对直线$\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$

令 $x=0,$ 可得$\begin{cases}-4y+z=0\\-y-2z-9=0\end{cases}$，从而可得直线上一点$P(0,-1,-4)$；

令 $x=1,$ 可得$\begin{cases}2-4y+z=0\\3-y-2z-9=0\end{cases}$，从而可得直线上一点$Q\left(1,-\dfrac{2}{9},-\dfrac{26}{9}\right)$；

过点$P(0,-1,-4)$垂直于$4x-y+z=1$的直线L_1方程为

$$\begin{cases}x=4t\\y=-1-t\\z=-4+t\end{cases}$$

故可设直线L_1与平面$4x-y+z=1$的交点为$M_1(4t_1,-1-t_1,-4+t_1)$，所以

$$4\times4t_1-(-1-t_1)-4+t_1=1$$

得$t_1=\dfrac{2}{9}$，即交点为$M_1\left(\dfrac{8}{9},-\dfrac{11}{9},-\dfrac{34}{9}\right)$

过点$Q\left(1,-\dfrac{2}{9},-\dfrac{26}{9}\right)$垂直于$4x-y+z=1$的直线$L_2$方程为

$$\begin{cases}x=1+4t\\y=-\dfrac{2}{9}-t\\z=-\dfrac{26}{9}+t\end{cases}$$

故可设直线L_2与平面$4x-y+z=1$的交点为$M_2\left(1+4t_2,-\dfrac{2}{9}-t_2,-\dfrac{26}{9}+t_2\right)$，所以

$$4\times(1+4t_2)-\left(-\frac{2}{9}-t_2\right)-\frac{26}{9}+t_2=1$$

得$t_2=-\dfrac{1}{3}$，即交点为$M_2\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{29}{9}\right)$

投影直线的方向向量为$\overline{M_1M_2}$，从而有一个方向向量为$(-11,12,5)$，所以投影直线方程为

$$\frac{x+\frac{1}{3}}{-11}=\frac{y-\frac{1}{9}}{12}=\frac{z+\frac{29}{9}}{5}$$

四、（5分） 设$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$，证明$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge\left[\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right]^2$。

证明：$\left[\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right]^2=\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}e^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y=\iint_{D_1}e^{-(x^2+y^2)}$

其中$D_1=\left\{(x,y)\middle|-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{\pi}}{2},-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\le y\le\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right\}$

对任意$(x_1,y_1)\in D_1-D$，对任意$(x_2,y_2)\in D-D_1$有$e^{-(x_1^2+y_1^2)}\le e^{-(x_2^2+y_2^2)}$，若设$e^{-(x^2+y^2)}$在$D_1-D$最大值在$D-D_1$最小值分别为$M,N$，则有$M\le N$。

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\left[\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right]^2=\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_1}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D-D_1}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_1-D}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\ge\iint_{D-D_1}N\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_1-D}M\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge NS(D-D_1)-MS(D_1-D),$$

其中$S(D-D_1),S(D_1-D)$分别表示$D-D_1$与D_1-D的面积。

注意到$S(D-D_1)=S(D_1-D)$，故

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\left[\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right]^2\ge 0,$$

即

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge\left[\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right]^2$$