三、平面简谐行波的能量

条件：连续、弹性、各向同性、无耗散介质

思考：讨论波的能量时，能否将介质视为质点的集合？

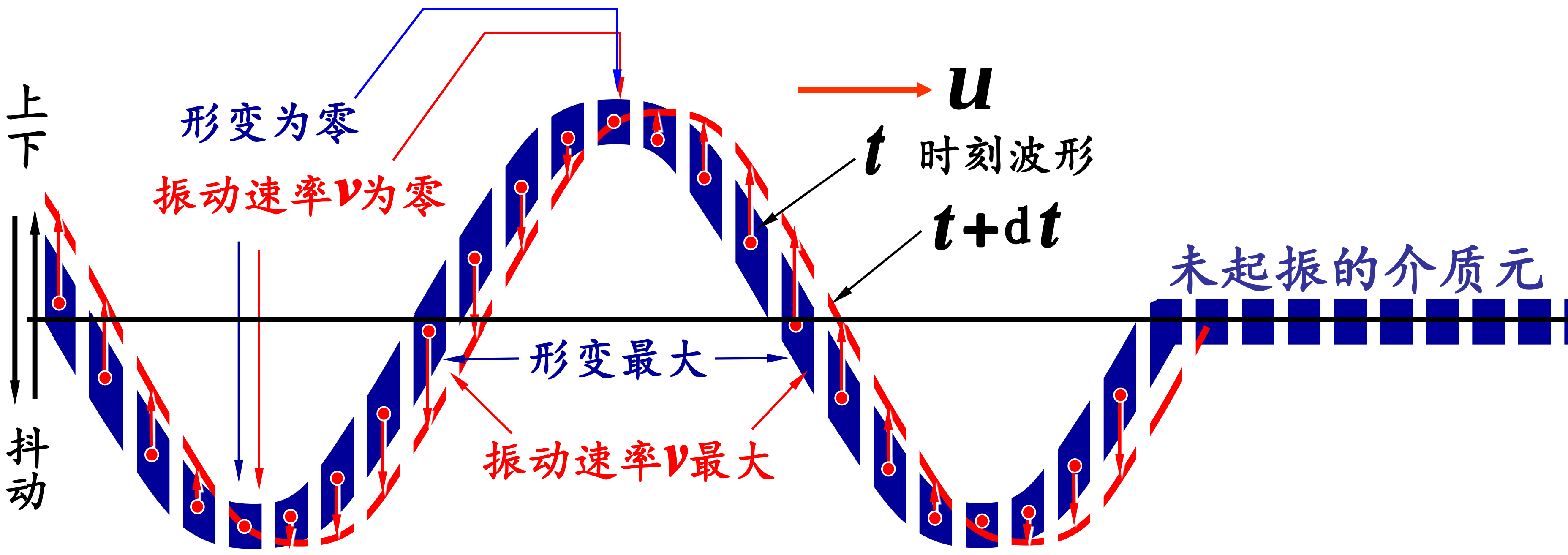
介质元：载波介质中的微小体积元（质量元），忽略其中各质点振动速度的差异，而要计及各质点振动位移的差异，即计及介质元的形变。

载波介质模型：

载波介质—介质元的集合

波的能量：各介质元振动能量（dE_k、dE_p）的总和。

实例：将一软绳（弹性介质）划分为多个微小体积元（介质元）



在波传播的过程中，

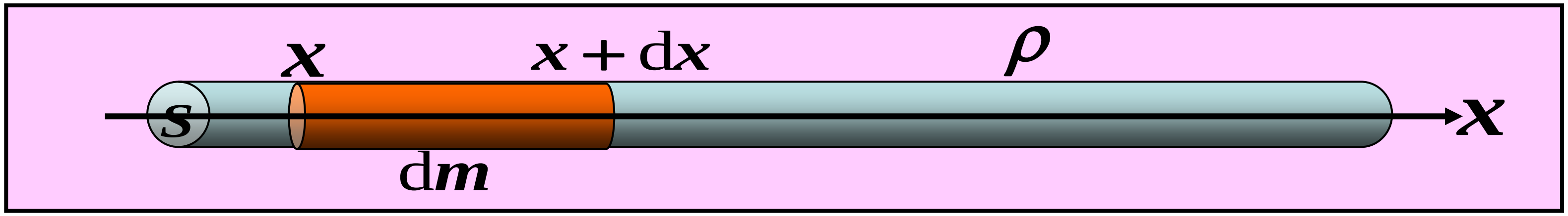
• 各介质元产生不同程度的弹性形变，具有弹性势能 $\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$

• 各介质元以变化的振动速率 v 上下振动，具有振动动能 $\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}$

1. 介质元的能量

设弹性细棒中有纵波 $y = A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$

弹性细棒密度 ρ，S为截面积



取长dx的介质元 $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \rho S \mathrm{d}x$

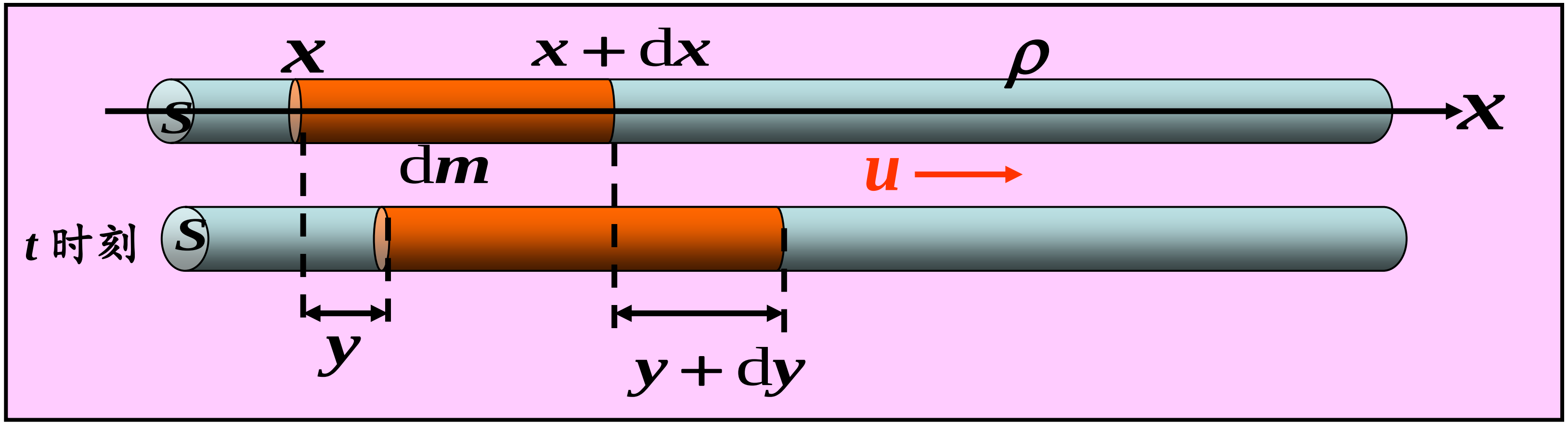
振动速度：$v = \frac{dy}{dt} = -A\omega\sin\omega(t-\frac{x}{u})$

动能：

$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2}\mathrm{d}mv^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2\omega(t-\frac{x}{u})\cdot \mathrm{d}V$$

势能：

dE_p 取决于介质元的形变（两端质点的相对位移）



$$dE_p = \frac{1}{2}k(dy)^2 \neq \frac{1}{2}ky^2$$

（k: 由系统决定的系数）

又：$Y = \dfrac{F/s}{dy/dx} = \dfrac{k\,dy/s}{dy/dx} = \dfrac{k\,dx}{s}$ $\quad \therefore k = \dfrac{Y \cdot s}{dx}$

将k代入$\mathrm{d}E_\mathrm{p}$中，则：

$$\mathrm{d}E_\mathrm{p}=\frac{1}{2}\frac{Ys}{\mathrm{d}x}(\mathrm{d}y)^2$$

$$=\frac{1}{2}Y(\frac{\partial y}{\partial x})^2\cdot s\cdot\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}Y\frac{\omega^2A^2}{u^2}\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})\cdot\mathrm{d}V$$

$$u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

$$=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})\cdot\mathrm{d}V$$

介质元振动能量

$$\mathrm{d}E=\mathrm{d}E_\mathrm{k}+\mathrm{d}E_\mathrm{p}=\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})\cdot\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})\cdot\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})\cdot\mathrm{d}V$$

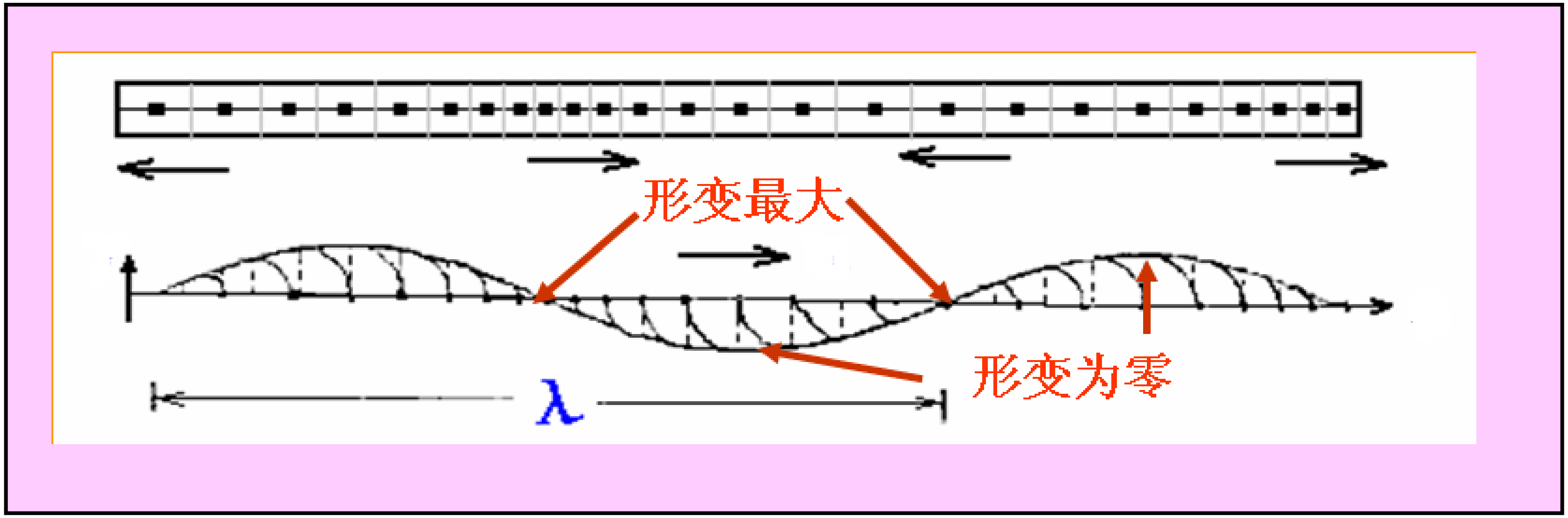
$$\mathrm{d}E=\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}+\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}=\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})\cdot\mathrm{d}V$$

结论：

(1). $\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}$，$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$，$\mathrm{d}E$ 随时间和空间周期性变化，且 $\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}$，$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$在每一时刻均相等。

(2). 介质元在平衡位置处，$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}$，$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$，$\mathrm{d}E$均最大，介质元在最大位移处， $\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}$，$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$，$\mathrm{d}E$均为零。因此：$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}$，$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$步调相同。

纵波（体变）

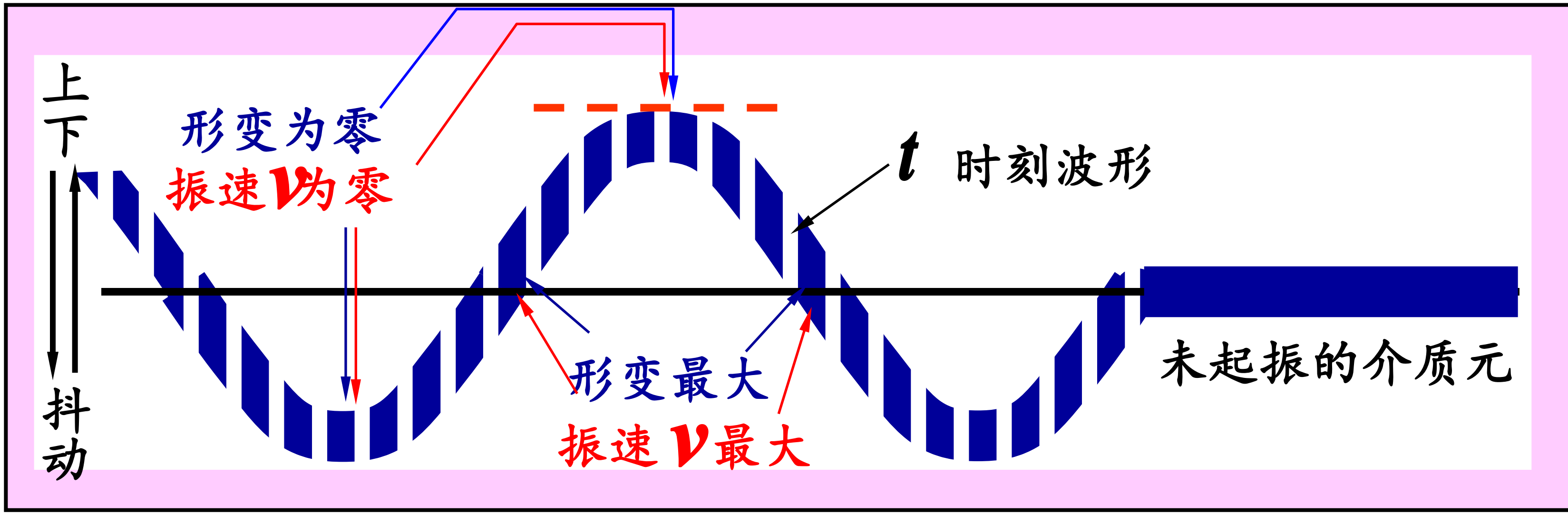


平衡位置处：密部或疏部中心，形变最大，速度最大，

$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$、$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}$、$\mathrm{d}E$ 均最大。

最大位移处：形变为零，速度为零，$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = \mathrm{d}E_{\mathrm{k}} = \mathrm{d}E = 0$。

横波：（切变$\dfrac{\partial y}{\partial x}$ ）



平衡位置处：切变$\dfrac{\partial y}{\partial x}$最大，速度最大，

$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$、$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}$、$\mathrm{d}E$ 均最大。

最大位移处：切变$\dfrac{\partial y}{\partial x}$为零，速度为零，

$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$、$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}$、$\mathrm{d}E$ 均为零。

(3) 介质元从最大位移处向平衡位置运动时，从相位比它超前的相邻介质元处获得能量，dE增加；从平衡位置向最大位移处运动时，将能量传给相位比它落后的相邻介质元，dE 减少。

比较：

质点谐振动能量	介质元波动能量
孤立系统，机械能守恒 E_k, E_p反相变化	非孤立系统，$\mathrm{d}E$不守恒 $\mathrm{d}E_k, \mathrm{d}E_p$同相变化

练习1. 一平面简谐波在弹性媒质中传播时，某一时刻在传播方向上媒质中某介质元在负的最大位移处，则它的能量是：

（1）动能为零，势能最大；

（2）动能为零，势能为零；

（3）动能最大，势能最大；

（4）动能最大，势能为零；

练习2

一平面简谐波在弹性媒质中传播，在媒质质元从最大位移处回到平衡位置的过程中

（1）它的势能转换成动能；

（2）它的动能转换成势能；

（3）它从相邻的一段媒质元获得能量，其能量逐渐增加；

（4）它把自己的能量传给相邻的一段媒质元，其能量逐渐减小；

2. 能量密度

由介质元振动能量：

$$\mathrm{d}E=\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}+\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}=\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})\cdot\mathrm{d}V$$

得：能量密度：

$$w=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V}=\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

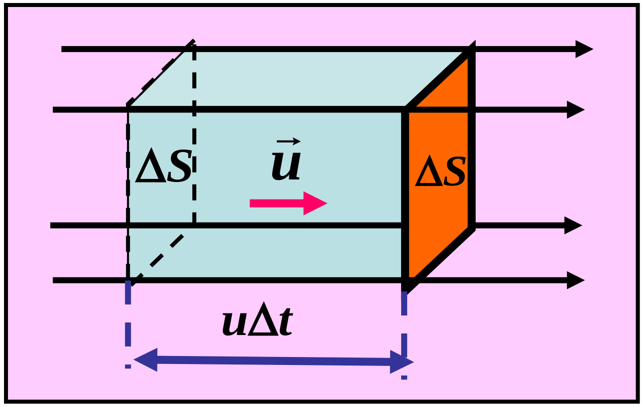
平均能量密度：

$$\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

……衡量能量分布的疏密程度

3. 能流密度：

平均能流：单位时间内通过垂直于波线的某个截面的平均能量。



Δt 内通过 ΔS 的平均能量：

$$\Delta E = \overline{w}\cdot u\cdot \Delta t\cdot \Delta S$$

单位时间通过 ΔS 的平均能量：

$$\overline{P}=\frac{\Delta E}{\Delta t}=\overline{w}\cdot u\cdot \Delta S=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u\Delta S \longrightarrow \text{平均能流}$$

能流密度：单位时间内通过垂直于波线的单位面积的平均能量。大小为：

$$I=\frac{\overline{P}}{\Delta S}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u \longrightarrow \text{波的强度}$$

……．衡量能量传播的快慢

由于能量传播方向与 $\vec{u}$ 方向相同，则：

矢量式为： $\boxed{\vec{I} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\vec{u}}$

自学：教材P$_{71}$ 13.13求出：

柱面波波函数 $\psi = \frac{A}{\sqrt{r}}\cos[\omega(t - \frac{r}{u}) + \varphi_0]$

教材P$_{46}$[例4]求出：

球面波波函数 $\psi = \frac{A}{r}\cos[\omega(t - \frac{r}{u}) + \varphi_0]$

作业

1.No2;

2.自学本章各例题并完成书上的习题(对照书后的参考答案自己订正)。

3.自学：电磁波；声波、超声和次声；非线性波简介。

第四周星期三交作业

第四节　多普勒效应

多普勒（奥地利. 1803—1853）

1842年提出多普勒效应，图为1992年奥地利发行的纪念多普勒效应发现150周年邮票。

多普勒效应：由于波源或观测者的运动，导致观测者所接收到的波动频率与波源的振动频率不相等的现象。

以载波介质为参考系：假设波源、观察者沿其连线运动。设波速：u ；观察者：相对介质速度u_τ ，接收频率ν_τ ；波源：相对介质速度u_s ，振动频率ν_s 。则观察者接收到的频率：

$$\nu_\tau = \frac{u + u_\tau}{u - u_s} \cdot \nu_s$$

式中：观察者向着波源运动：$u_\tau > 0$, 背离波源运动：$u_\tau < 0$

波源向着观察者运动：$u_s > 0$, 背离观察者运动:$u_s < 0$

$$\begin{cases} \text{观察者与波源相向运动：} u_\tau > 0, \quad u_s > 0, \quad \nu_\tau > \nu_s \\ \text{观察者与波源相背运动：} u_\tau < 0, \quad u_s < 0, \quad \nu_\tau < \nu_s \end{cases}$$

特例：波源静止：$u_s = 0, \ \nu_\tau = \dfrac{u + u_\tau}{u} \cdot \nu_s$

观察者静止:$u_\tau = 0, \nu_\tau = \dfrac{u}{u - u_s} \cdot \nu_s$