

第六篇 多粒子体系的热运动

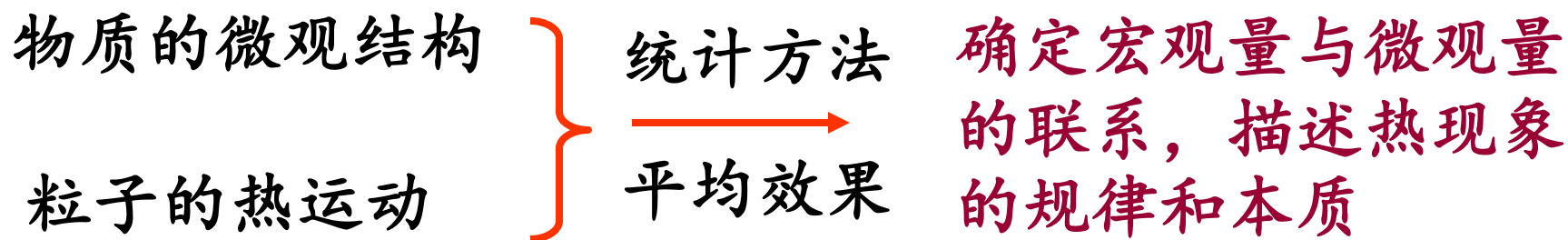
研究对象：单粒子 \longrightarrow 多粒子体系

多粒子体系：由大量微观粒子组成的体系。

热运动：微观粒子都在作永不停息的、无规则的运动，其运动的剧烈程度由温度的高低表现出来。

研究热运动规律的理论： $\left\{ \begin{array}{l} \text{统计物理学：微观理论} \\ \text{热力学：宏观理论} \end{array} \right.$

(1) 《统计物理》



由基本假设 → 构造性理论

微观理论

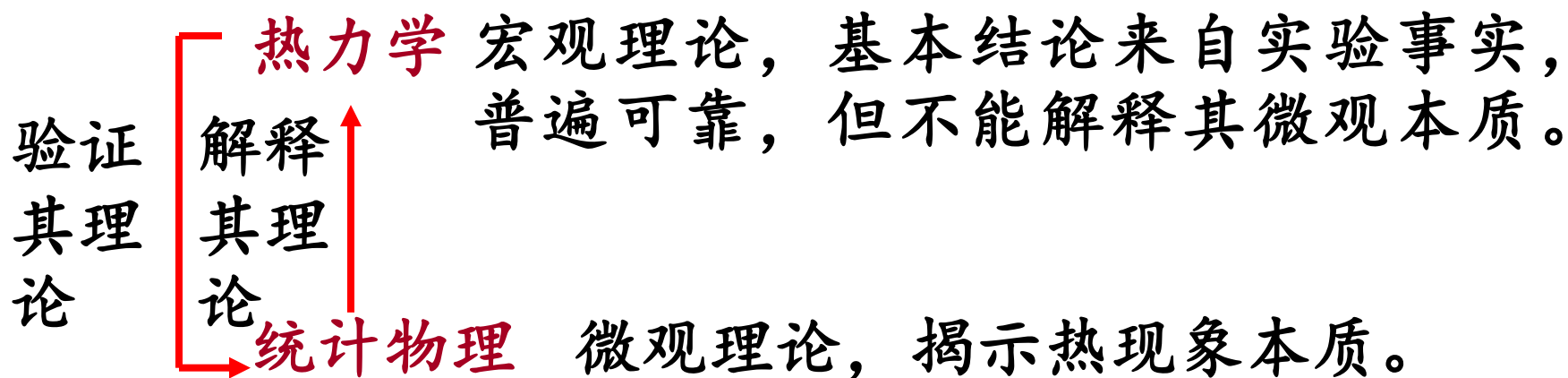
(2) 《热力学》



由现象出发 → 原理性理论

宏观理论

(3) 相互关系:互相补充, 相辅相成

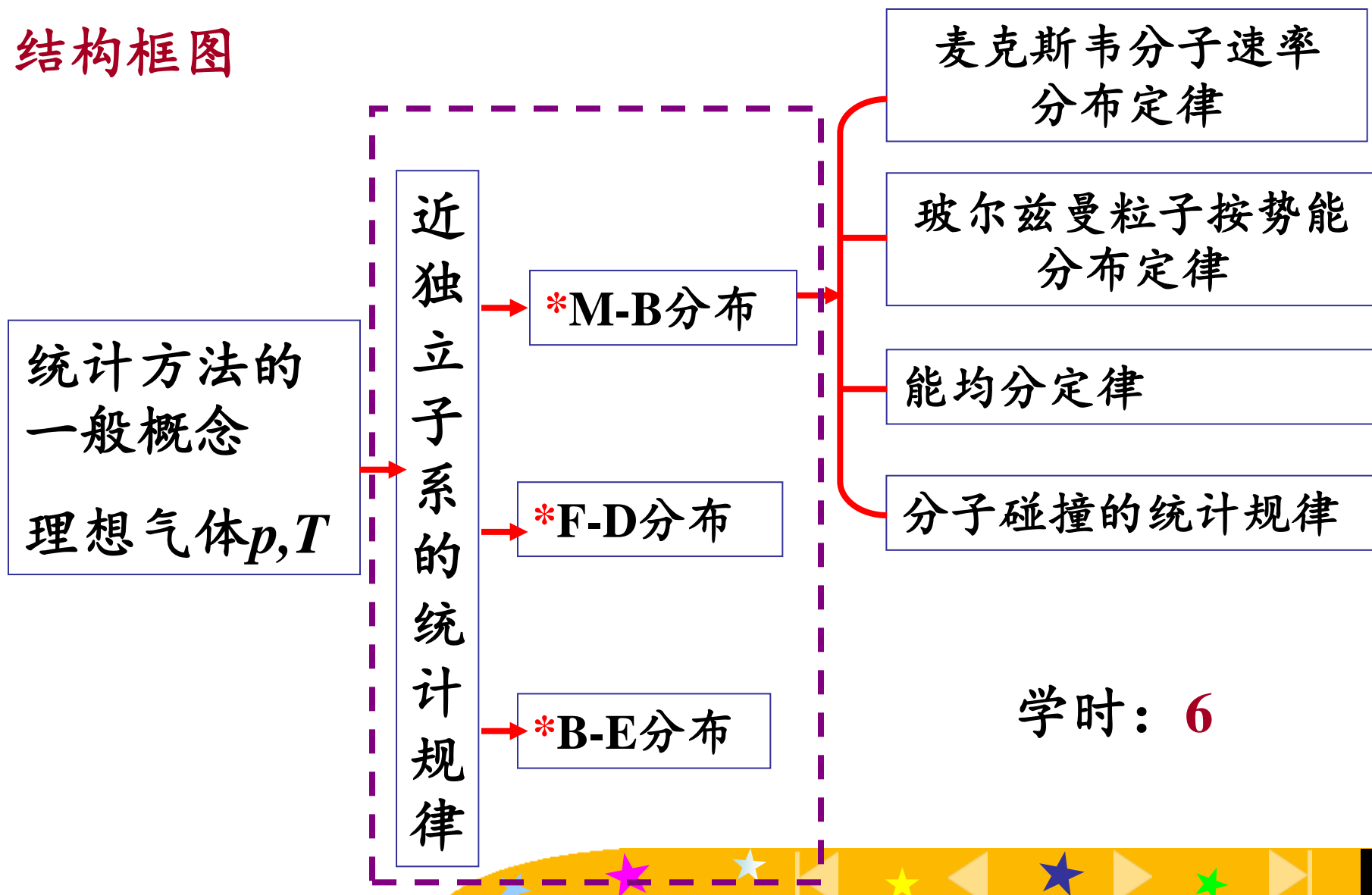


基本观念: 宏观现象是微观过程统计平均的结果

- 第十八章 平衡态的气体动理论
- 第十九章 热力学第一定律和第二定律

第十八章 平衡态的气体动理论

结构框图



第一节 统计方法的一般概念

- 一、统计规律
- 二、统计规律的数学形式——概率理论
- 三、分布函数 统计平均值 涨落
- 四、宏观量 微观量 平衡态
- 五、理想气体的压强公式和温度公式

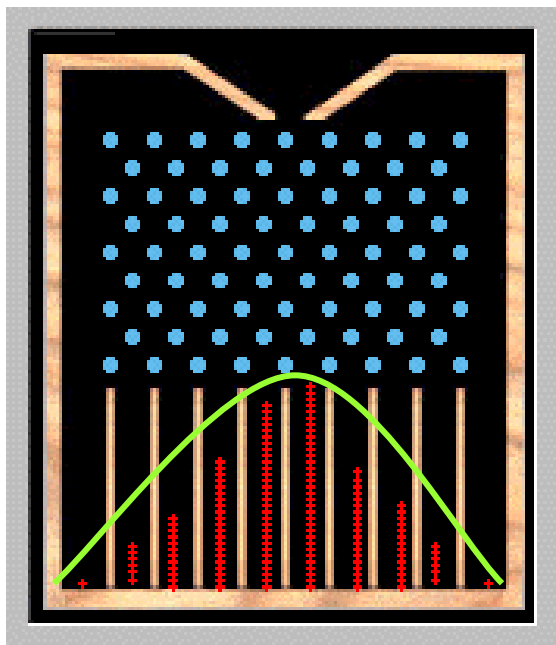
一、统计规律

定义：大量偶然事件整体所遵从的规律

不能预测

多次重复

例：伽尔顿板实验



每个小球落入哪个槽是偶然的

少量小球按狭槽分布有明显偶然性

大量小球按狭槽分布呈现规律性

统计规律

共同特点:

1.群体规律: 只能通过大量偶然事件总体显示出来,
对少数事件不适用。

2.量变—质变: 整体特征占主导地位

注意: 统计规律 \neq 近似规律

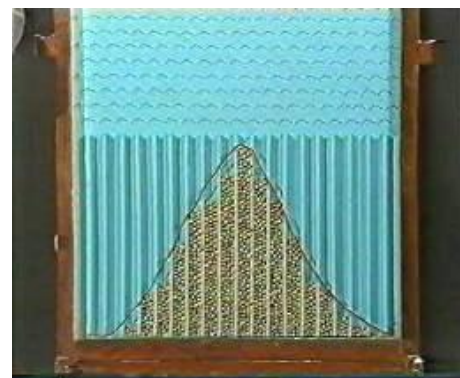
统计规律 \neq 个体规律简单叠加

例如: 理想气体实验定律

3.与宏观条件相关

例如: 伽尔顿板中钉的分布

4.伴有涨落



二、统计规律的数学形式——概率理论

1. 定义

概率(W):描述偶然事件出现可能性大小的物理量。

设实验总观测次数为 N ，其中结果 A 出现的次数为 N_A ，则 A 出现的概率：

$$W_A = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}$$

2. 意义：描述事物出现可能性的大小

3. 概率的基本性质

(1)任一事件 A ： $0 \leq W \leq 1$ 。若 $W=0$ ， A 为不可能事件，若 $W=1$ ， A 为必然事件。

(2) 加法定理

互斥事件: 不可能同时出现的事件。

例如: 伽尔顿板实验

加法定理: 出现几个互斥事件的总概率等于每个事件单独出现的概率之和。

设 A 、 B 为互斥事件, 出现 A 或 B 的总概率

$$W_{A+B} = W_A + W_B$$

$$\sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} = \frac{\sum N_i}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

即: 出现所有可能的互斥事件的总概率为 1。

.....归一化条件

(3) 乘法定理

相容独立事件: 彼此独立, 可以同时发生的事件。

乘法定理: 同时发生两个相容独立事件的概率是两个事件单独发生时的概率之积。

设 A 、 B 为相容独立事件, 出现 A 和 B 的概率为:

$$W_{A+B} = W_A \times W_B$$

例如: 同时掷两枚骰子

其一出现 2: $W_2 = \frac{1}{6}$

另一出现 3: $W_3 = \frac{1}{6}$

同时发生

$$W_{2+3} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

三、分布函数 统计平均值 涨落

1. 分布函数

例如：伽尔顿板实验

槽：1, 2, 3,

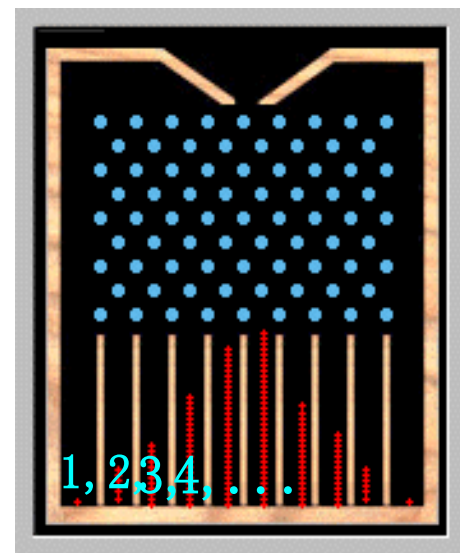
各槽小球数： N_1, N_2, N_3

总小球数： $N = \sum_i N_i$

小球出现在第 i 槽内的概率为： $W_i = \frac{N_i}{N}$

$W_i = \frac{N_i}{N}$ 随槽的位置 x 变化，与槽宽 Δx 成正比。

小球在 x 附近，单位宽度区间出现的概率 = $\frac{N_i}{N\Delta x}$ → 概率密度

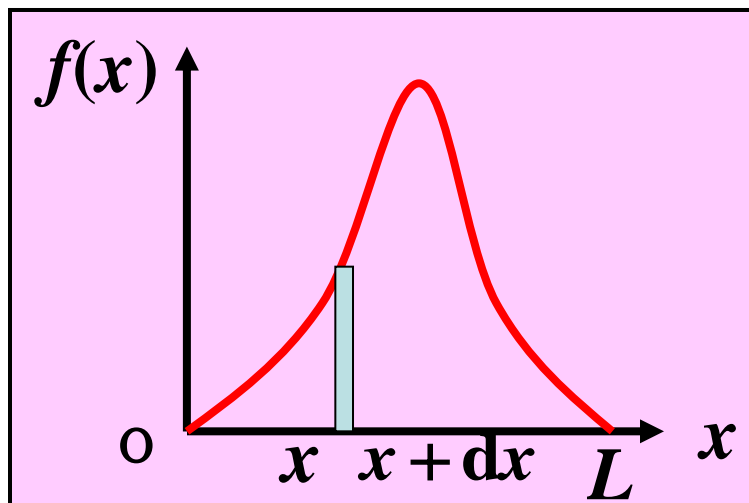


一般情况：

物理量 M 的概率密度 $f(x)$ ：物理量 M 在 x 附近，单位宽度区间出现的概率。

$$f(x) = \frac{dW}{dx} = \frac{dN}{Ndx} \text{ —— 分布函数}$$

分布曲线：



曲线下窄条面积：

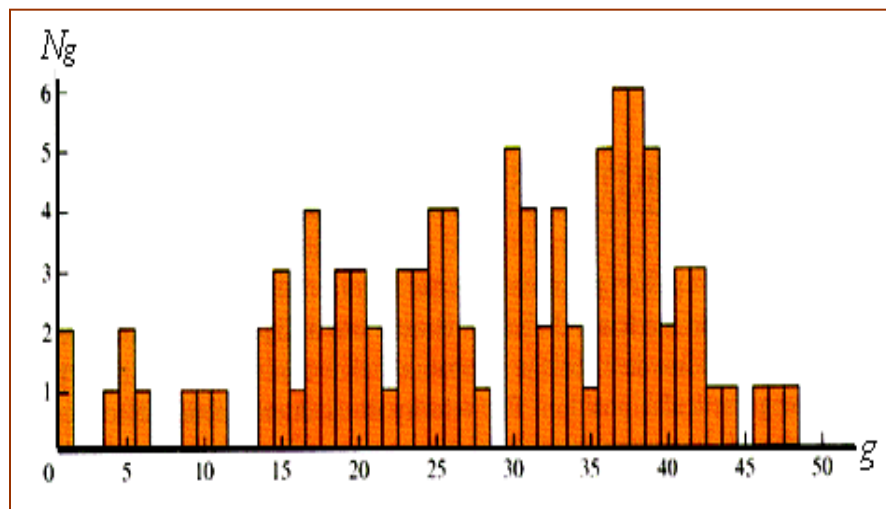
$$\Delta S = f(x) \cdot dx = \frac{dN}{N} = dW$$

由归一化条件：曲线下总面积为

$$\int_0^L f(x) dx = \int_0^L \frac{dW}{dx} \cdot dx = \int_0^L dW = 1$$

2. 统计平均值

例: 图示100人参加测试的成绩分布（满分50），即：



分数为 g 的人数为: N_g

总人数 $N = \sum_g N_g$

分数 g 出现的概率 $\frac{N_g}{N}$

该分数出现的概率

分数值

分数平均值 $\bar{g} = \frac{1}{N} \sum_g N_g g = \sum_g \frac{N_g}{N} g$

.....分数的统计平均值

分数平方平均值 $\overline{g^2} = \frac{1}{N} \sum_g N_g g^2 = \sum_g \frac{N_g}{N} g^2$

.....分数平方的统计平均值

一般情况: M 的统计平均值: $\overline{M} = \sum_i M_i W_i$

M 平方的统计平均值: $\overline{M^2} = \sum_i M_i^2 W_i$

若 $f(x)$ 随 x 连续分布, 则:

$$\begin{aligned}\overline{M} &= \int M dW = \int M f(x) dx \\ &= \int \text{物理量} \times \text{分布函数} \times \text{变量间隔}\end{aligned}$$

例如:

$$\overline{v} = \int v f(v) dv$$

$$\overline{v^2} = \int v^2 f(v) dv$$

$$\overline{\left(\frac{1}{v}\right)} = \int \frac{1}{v} f(v) dv$$

练习1: 一群粒子按速率分布如下: (单位:米/秒)

粒子数	2	4	6	8	2
速率	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0

求: 平均速率? 方均根速率? 最概然速率?

速率在 3.0 ~ 4.0 米/秒间的粒子的平均速率?

解: $N = 2 + 4 + 6 + 8 + 2 = 22$

$$\bar{v} = \sum_i w_i v_i = 1 \times \frac{2}{22} + 2 \times \frac{4}{22} + 3 \times \frac{6}{22} + 4 \times \frac{8}{22} + 5 \times \frac{2}{22} = 3.18 \text{ (米/秒)}$$

粒子数	2	4	6	8	2
速率	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0

$$\overline{v^2} = \sum_i w_i v_i^2 = 1^2 \times \frac{2}{22} + 2^2 \times \frac{4}{22} + 3^2 \times \frac{6}{22} + 4^2 \times \frac{8}{22} + 5^2 \times \frac{2}{22}$$

$$= \frac{250}{22} (\text{米/秒})^2$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = 3.37 (\text{米/秒})$$

$$v_p = 4.0 (\text{米/秒})$$

$$\bar{v}_{3\sim 4} = \frac{6 \times 3 + 8 \times 4}{6 + 8} = 3.57 (\text{米/秒})$$

3. 涨落

定义：实际出现的情况与统计平均值的偏差。

例如：伽尔顿板：某槽中小球数各次不完全相同，在平均值附近起伏。

$N \uparrow$ ，涨落 \downarrow ， N 很大时，涨落可忽略；

$N \downarrow$ ，涨落 \uparrow ， N 太小时，统计规律失去意义。

四、宏观量 微观量 平衡态

宏观量：以系统整体为研究对象，表征整体特征的物理量。

例如： p 、 T 、 V 、 $\sum m_i$ 、……

微观量：以系统内各子系为研究对象，表征个别子系特征的物理量

例如： \vec{p}_i 、 \vec{v}_i 、 m_i 、……

关系：宏观量是大量粒子运动的集体表现，是微观量的统计平均值。

平衡态: 不受外界影响时, 宏观量不随时间变化(具有稳定值)的状态。

(不传热、不做功, 内部无热核反应、化学反应)

注意: 平衡是指热动平衡, 即: 微观量变化, 但其统计平均值不变。

五、理想气体的压强公式和温度公式

理想气体的微观模型:

(1) 可以将气体分子当作质点。

(2) 气体分子为自由质点, 并且除碰撞瞬间外, 分子之间、分子与容器壁之间无相互作用。

(3) 气体分子之间、分子与容器壁之间的碰撞为
弹性碰撞。

(4) 每个气体分子遵守经典力学定律。

理想气体的统计性假设：

(1) 平衡态下，气体分子处于容器内任一位置处的概率相同(均匀分布)：

$$\text{分子数密度 } n = \frac{N}{V} \text{ 处处相等}$$

(2) 平衡态下，气体分子沿各方向运动的概率相同。

包括：

➤ 任一时刻向各方向运动的分子数相同

$$N_x = N_y = N_z, \quad N_{+x} = N_{-x}$$

➤ 分子速率在各个方向分量的各种平均值相同

$$\bar{v}_x = \bar{v}_y = \bar{v}_z, \quad \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

1.理想气体的压强公式

压强：单位时间内容器壁单位面积上所受的平均冲量。

$$p = \frac{\sum I_i}{dSdt}$$

通过推导可知：

理想气体的压强 $p = \frac{\sum I_i}{dSdt} = \frac{2}{3} n \bar{\varepsilon}_t$

式中 $\bar{\varepsilon}_t = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$ 为分子平均平动动能

讨论:

(1) 压强公式是一个统计规律, 离开“大量”、“平均”, p 失去意义, 少数分子不能产生稳定, 持续的压强。

{ 观测时间足够长 (宏观小, 微观大)
dS 足够大 (宏观小, 微观大)
分子数足够多

(2) 压强公式反映了宏观量 p 与微观量统计平均值 $n, \bar{\varepsilon}_t$ 的相互关系。

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\varepsilon}_t \quad \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{N}{V} \\ \bar{\varepsilon}_t = \frac{1}{2} m \overline{v^2} \end{array} \right.$$

(3) n 越大, $\bar{\varepsilon}_t$ 越大, 则 p 越大。

2. 理想气体温度公式

理想气体状态方程:

$$pV = \frac{M}{\mu} RT = \frac{N}{N_A} RT \longrightarrow p = \frac{N}{V} \frac{R}{N_A} T = n \cdot kT$$

玻尔兹曼常数 $k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

$$p = nkT$$

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\varepsilon}_t$$

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{3}{2} kT$$

.....理想气体温度公式

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{3}{2}kT$$

讨论：

- (1) 理想气体温度 T 是分子平均平动动能的量度，
是分子热运动剧烈程度的标志。
- (2) 温度是大量分子热运动的集体表现，是统计性概念，对个别分子无温度可言。
- (3) 热力学认为绝对零度只能逼近，不能达到。
 - $\bar{\varepsilon}_t \propto T$, 与气体种类无关
 - $T = 0, \bar{\varepsilon}_t = 0$, 意味着热运动停止

练习2: P₂₂₉ 18.2(1)

一定量的理想气体贮存于某一容器中，温度为 T ，气体分子的质量为 m 。根据理想气体分子模型和统计假设，分子速度在 x 方向的分量的下列平均值为：

$$\overline{v_x} = \underline{\quad 0 \quad} \qquad \overline{v_x^2} = \underline{\quad \frac{kT}{m} \quad}$$

解： $\overline{\varepsilon_t} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} m (\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}) = \frac{3}{2} m \overline{v_x^2}$

$$\text{又 } \overline{\varepsilon_t} = \frac{3}{2} kT$$

$$\therefore \frac{3}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{3}{2} kT$$

$$\therefore \overline{v_x^2} = \frac{kT}{m}$$

练习3:

氢原子的运动速率等于它在300K时的方均根速率时，它的德布罗意波长是多少？(氢原子的质量 $m_H = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ，普朗克常数 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J.S}$ ，玻尔兹曼常数 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$)

解: 将其视为理想气体: $\bar{\varepsilon}_t = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT \quad \therefore \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

由题知: $v = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

$$\therefore \lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{3kTm}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 \times 1.67 \times 10^{-27}}} \approx 1.45 (\text{\AA})$$