第七章作业题

1. 根据定义求以下序列的单边 z 变换及其收敛域。

(1) $\{\dot{1},2,3,4,5\}$

(2) $(k+1)u[k]$

(3) $\sum_{i=0}^{k} b^{i}$

(4) $a^{k}\{u[k]-u[k-N]\}$

解：

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}=1+2z^{-1}+3z^{-2}+4z^{-3}+5z^{-4},|z|>0$$

(2 分)

$$(k+1)u[k]=ku[k]+u[k]=-z(\frac{1}{1-z^{-1}})'+\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}+\frac{1}{1-z^{-1}}$$，

$|z|>1$ (2 分)

由于 $\sum_{i=0}^{k} b^{i}=u[k]*b^{k}u[k]$，利用卷积特性

$$Z\{\sum_{i=0}^{k} b^{i}\}=\frac{1}{(1-z^{-1})(1-bz^{-1})},|z|>max(1,|b|)$$

。(2 分)

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}=\sum_{k=0}^{N-1} a^{k}z^{-k}=\frac{1-(az^{-1})^{N}}{1-az^{-1}},|z|>0$$

(2 分)

2. 已知 $X(z)=Z\{x[k]\},x[k]=a^{k}u[k]$，，不计算 $X(z)$，利用 z 变换的性质，求下列各式对应的时域表达式。

(1) $X_1(z)=z^{-N}X(z)$

(2) $X_2(z)=X(2z)$

(3) $X_3(z)=z^{-N}X(2z)$

(4) $X_4(z)=zX'(z)$

(5) $X_5(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$

(6) $X_6(z)=X(-z)$

解：利用因果序列的位移特性，有

$x_1[k]=x[k-N]=a^{k-N}u[k-N]$（2 分）

利用指数加权特性，有

$x_2[k]=(\frac{1}{2})^k x[k]=(\frac{a}{2})^k u[k]$（2 分）

利用(2)题结果及因果序列的位移特性，有

$x_3[k]=x_2[k-N]=(\frac{a}{2})^{k-N}u[k-N]$（2 分）

利用 z 域微分特性，有

$x_4[k]=-kx[k]=-ka^k u[k]$（2 分）

利用卷积特性，有

$$x_5[k]=u[k]*x[k]=\sum_{i=0}^{k}a^i=\begin{cases}\frac{1-a^{k+1}}{1-a}u[k] & a\neq 1\\ (k+1)u[k] & a=1\end{cases}$$（2 分）

利用指数加权特性，有$x_6[k]=(-1)^k x[k]=(-a)^k u[k]$（2 分）

3. 已知因果序列$x[k]$的z变换式$X(z)=\frac{z(z+1)}{(z^2-1)(z+0.5)}$，试求$x[k]$的初值和终值$x[0]$，$x[1]$，$x[\infty]$。

解：由初值定理，有$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)=\lim_{z\to\infty}\dfrac{z(z+1)}{(z^2-1)(z+0.5)}=0$（2 分）

利用位移特性，有$Z\{x[k+1]u[k]\}=z[X(z)-x[0]]$,

对上式应用初值定理，可得

$$x[1]=\lim_{z\to\infty}z[X(z)-x[0]]=\lim_{z\to\infty}\frac{z^2(z+1)}{(z^2-1)(z+0.5)}=1$$（2 分）

由终值定理：$x[\infty]=\lim_{z\to1}(z-1)X(z)=\lim_{z\to1}\dfrac{z}{z+0.5}=\dfrac{2}{3}$（2 分）

4.用部分分式法求以下各式的单边 z 反变换$x[k]$。

(1) $X(z)=\dfrac{1-4z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+5z^{-1}+6z^{-2})},|z|>3$

(2) $X(z)=\dfrac{z^{-2}}{2-z^{-1}-z^{-2}},|z|>1$

解：$X(z)=-\dfrac{\frac{1}{4}}{1-z^{-1}}-\dfrac{4}{1+2z^{-1}}+\dfrac{\frac{21}{4}}{1+3z^{-1}}$（2 分）

$$x[k]=L^{-1}\{X(s)\}=[-\frac{1}{4}-4(-2)^k+\frac{21}{4}(-3)^k]u[k]$$（2 分）

$$X(z)=-1+\frac{\frac{1}{3}}{1-z^{-1}}+\frac{\frac{2}{3}}{1+0.5z^{-1}}$$（2 分）

$$x[k]=-\delta[k]+\frac{1}{3}u[k]+\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^k u[k]$$（2 分）

5.已知序列$x[k]$的z变换为$X(z)=\dfrac{1}{(1-0.5z^{-1})(1+2z^{-1})}$

(1)试确定$X(z)$所有可能的收敛域；

(2)求(1)中所有不同收敛域时$X(z)$所对应的$x[k]$。

解：(1)　由于$X(z)$有两个极点$p_1=0.5,p_2=-2$，故可能的收敛域为

$|z|<0.5, |z|>2, 0.5<|z|<2$（3 分）

$X(z)=\frac{\frac{4}{5}}{1+2z^{-1}}+\frac{\frac{1}{5}}{1-0.5z^{-1}}$三种不同的收敛域对应的序列如下：

$|z|>2: x[k]=[\frac{4}{5}(-2)^k+\frac{1}{5}(0.5)^k]u[k]$

$|z|<0.5: x[k]=[-\frac{4}{5}(-2)^k-\frac{1}{5}(0.5)^k]u[-k-1]$

$0.5<|z|<2: x[k]=-\frac{4}{5}(-2)^k u[-k-1]+\frac{1}{5}(0.5)^k u[k]$（7 分）

6. 已知某因果离散 LTI 系统在阶跃信号$u[k]$激励下产生的阶跃响应为

$g[k]=(\frac{1}{2})^k u[k]$，试求

(1) 该系统的系统函数 $H(z)$和单位脉冲响应 $h[k]$。

(2) 在$x[k]=(\frac{1}{3})^k u[k]$激励下产生的零状态响应$y_{zs}[k]$。

解：先由阶跃响应求出系统的系统函数$H(z)$，再由$Y_{zs}(z)=H(z)X(z)$求出在$x[k]$ 激励下的$y_{zs}[k]$。

根据系统函数的定义，可求出$H(z)=\frac{G(z)}{Z\{u[k]\}}=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, Re(s)>\frac{1}{2}$（2 分）

进行z反变换得$h[k]=\delta[k]-(\frac{1}{2})^k u[k-1]$（2 分）

由于$X(z)=Z\{x[k]\}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, Re(s)>\frac{1}{3}$（2 分）

故$x[k]$激励下的零状态响应$y[k]$的z域表达式为

$Y_{zs}(z)=X(z)H(z)$（2 分）

$$=\frac{1-z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}=\frac{-3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{4}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},Re(s)>\frac{1}{2}$$ （2 分）

进行z反变换得$y_{zs}[k]=[4(\frac{1}{3})^k-3(\frac{1}{2})^k]u[k]$（2 分）

7.某离散时间 LTI 因果系统的差分方程为

$$y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=2x[k]+x[k-1]$$

系统的初始状态$y[-1]=0.5,y[-2]=0.25$，输入$x[k]=u[k]$。

(1)由 z 域求系统的零输入响应$y_{zi}[k]$和零状态响应$y_{zs}[k]$；

(2)求系统的系统函数$H(z)$和单位脉冲响应$h[k]$，并判断系统是否稳定。

解：

(1). 对差分方程进行单边 z 变换，可得

$$Y(z)+3[z^{-1}Y(z)+0.5]+2[z^{-2}Y(z)+0.5z^{-1}+0.25]=2X(z)+z^{-1}X(z)$$

经整理后，得到$Y(z)=\frac{2+z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}X(z)+\frac{-1.5-z^{-1}-0.5}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$所以

$$Y_{zi}(z)=\frac{-1.5-z^{-1}-0.5}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{2+z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}X(z)=\frac{2+z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

所以

$$y_{zi}(k)=[(-1)^k-3(-2)^k]u[k],y_{zs}[k]=[-0.5(-1)^k+2(-2)^k+0.5]u[k]$$

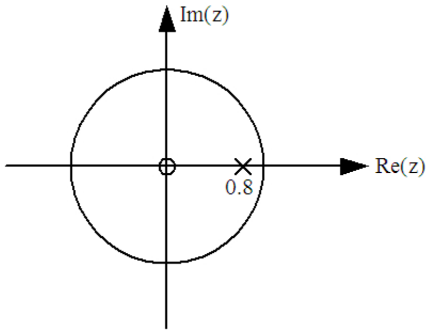
（8 分）

(2).

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{2+z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{3}{1+2z^{-1}}+\frac{-1}{1+z^{-1}},h[k]=[3(-2)^k-(-1)^k]u[k]$$

系统不稳定。（4 分）

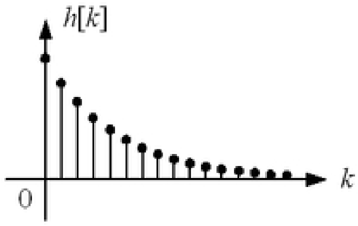
8. 已知某离散时间系统函数 $H(z)$ 的零极点分布图如题 8 图所示，试定性画出系统单位脉冲响应$h[k]$的波形，求出系统函数$H(z)$，画出其幅度响应。



题 8 图

解：由零极点分布图，系统在单位$z=0.8$内处有一个极点，故其单位脉冲响应形式为$h[k]=K(0.8)^k u[k]$ (2 分)

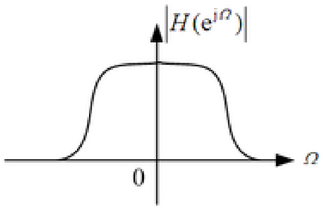
由此可以定性地画出其波形，如下图所示。



(2 分)

$$H(z)=\frac{K}{1-0.8z^{-1}}$$ (2 分)

其幅度响应为 $H(e^{j\Omega})=\dfrac{K}{1-0.8(e^{j\Omega})^{-1}}=\dfrac{K}{1-0.8e^{-j\Omega}}$ (2 分)



(2 分)

9. 已知因果离散时间系统的系统函数$H(z)=\dfrac{1-z^{-1}}{6+5z^{-1}+z^{-2}}$，求系统的单位脉冲响应、描述系统的差分方程、系统的模拟框图，并判断系统是否稳定。

解：将 H(z)部分分式展开可得 $H(z)=\dfrac{3/2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\dfrac{-4/3}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$

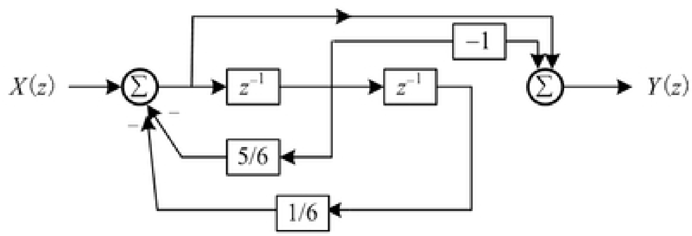
对其进行 z 反变换，可得单位脉冲响应为 $h[k]=[\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^{k}-\frac{4}{3}(\frac{1}{3})^{k}]u[k]$ (2 分)

因为 $H(z)=\dfrac{1-z^{-1}}{6+5z^{-1}+z^{-2}}=\dfrac{Y_{zs}(z)}{X(z)}$ (1 分)由此可得系统差分方程 z 域形式 $6Y(z)+5z^{-1}Y(z)+z^{-2}Y(z)=X(z)-z^{-1}X(z)$ (1 分)

进行 z 反变换即得系统的差分方程为

$6y[k]+5y[k-1]+y[k-2]=x[k]-x[k-1]$ (2 分)直接型模拟框图为：

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{6+5z^{-1}+z^{-2}}=\frac{1-z^{-1}}{1+(5/6)z^{-1}+(1/6)z^{-2}}$$



(2 分)

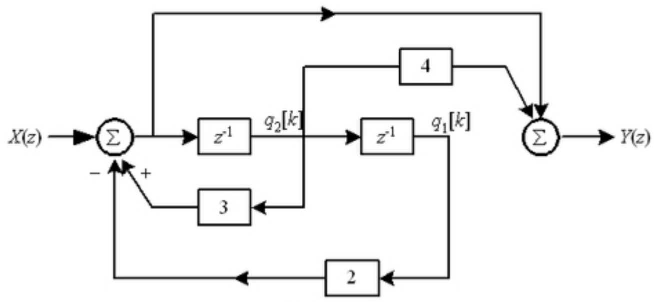
由于系统为因果系统,且系统函数的极点为 1/2,1/3，均在单位园内，故系统稳定。(2 分)

10. 某因果离散时间 LTI 系统的直接型模拟框图如题 10 图所示，已知 $x[k]=4^{k}u[k],y[-1]=-1,y[-2]=2$ 由 z 域求解：

(1)描述系统的差分方程;

(2)零输入响应 $y_{zi}[k]$，零状态响应 $y_{zs}[k]$，完全响应 $y[k]$；

(3)系统函数 $H(z)$，单位脉冲响应 $h[k]$。



题 10 图

解：系统的差分方程$y[k]-3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]+4x[k-1], k\geq 0$（2 分）

$y_{zi}[k]=5-12\times 2^k, k\geq 0$（2 分）

$y_{zs}[k]=[\frac{5}{3}-6\times 2^k+\frac{16}{3}\times 4^k]u[k]$（2 分）

$y[k]=y_{zi}[k]+y_{zs}[k]=\frac{20}{3}-18\times 2^k+\frac{16}{3}\times 4^k, k\geq 0$（2 分）

$H(z)=\frac{1+4z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$（2 分）$h[k]=(6\times 2^k-5)u[k]$（2 分）