第四节 角动量守恒定律

一、角动量守恒定律

二、角动量守恒定律的应用

三、有心力场中的运动

一、角动量守恒定律

1. 质点系

$$\vec{M}_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

当 $\vec{M}_{外} = 0$ 时， $\vec{M}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$

$\boxed{\vec{L} = 恒矢量}$ ⟶ 质点系角动量守恒定律

分量式：
$$\begin{cases} M_x = 0 \quad 时 \quad L_x = 恒量 \\ M_y = 0 \quad 时 \quad L_y = 恒量 \\ M_z = 0 \quad 时 \quad L_z = 恒量 \end{cases}$$

2. 定轴转动刚体 $$M_{轴} = \frac{\mathrm{d}L_{轴}}{\mathrm{d}t}$$

当 $M_{轴} = 0$ 时，$L_{轴}$ = 恒量 ⟶ 定轴转动刚体角动量守恒定律

角动量守恒定律：当质点系所受外力对某参考点(或轴)的力矩的矢量和(或代数和)为零时，质点系对该参考点(或轴)的角动量守恒。

注意 1. 守恒条件 $\vec{M}_{外} = 0$ (或 $M_{轴} = 0$),而不是 $\int \vec{M}_{外}\mathrm{d}t = 0$。(或 $\int M_{轴}\mathrm{d}t = 0$)。

2. 与动量守恒定律对比：

$$\left.\begin{array}{l} \text{当} \vec{F}_{外} = 0 \text{ 时，} \vec{p} = \text{恒矢量} \\ \text{当} \vec{M}_{外} = 0 \text{ 时，} \vec{L} = \text{恒矢量} \end{array}\right\} \text{彼此独立}$$

二、角动量守恒定律的应用

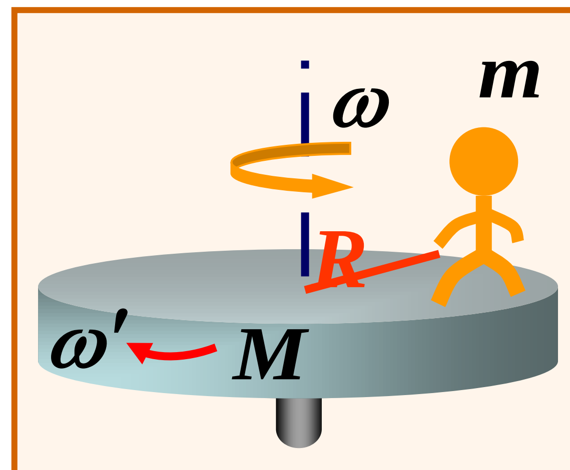
例: 一半径为R、质量为 M 的转台，可绕通过其中心的竖直轴转动，质量为 m 的人站在转台边缘，最初人和台都静止。若人沿转台边缘跑一周 (不计阻力)，相对于地面，人和台各转了多少角度？

思考:

1.台为什么转动？向什么方向转动？

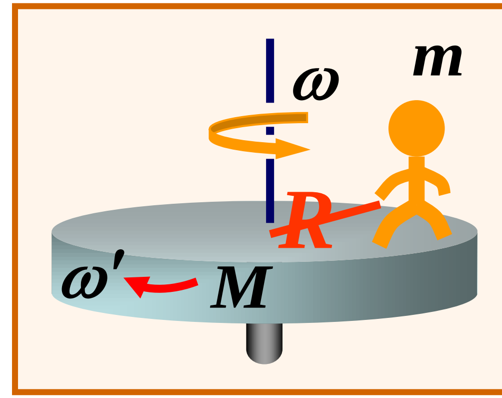
2.人相对转台跑一周，相对于地面是否也跑了一周？

3.人和台相对于地面转过的角度之间有什么关系？



解：选地面为参考系，设对转轴

人：J, ω ；台：J', ω'



$$J = mR^2 \qquad J' = \frac{1}{2}MR^2$$

系统对转轴合外力矩为零，角动量守恒，以逆时针方向为正：

$$0 = J\omega - J'\omega' \qquad \omega' = \frac{2m}{M}\omega$$

由于逆时针方向(人跑方向)为正,则:

$$\theta_{人对台} = \theta_{人对地} - (-\theta_{台对地}) = \theta_{人对地} + \theta_{台对地}$$

绝对量

设人沿转台边缘跑一周的时间为t：$2\pi = \int_0^t \omega \mathrm{d}t + \int_0^t \omega' \mathrm{d}t$

$$\int_0^t \omega \mathrm{d}t + \frac{2m}{M}\int_0^t \omega \mathrm{d}t = 2\pi \longrightarrow \int_0^t \omega \mathrm{d}t = \frac{2\pi M}{2m+M}$$

人相对地面转过的角度：

$$\theta_{人对地} = \int_0^t \omega \mathrm{d}t = \frac{2\pi M}{2m+M}$$

台相对地面转过的角度：

$$\theta_{台对地} = \int_0^t \omega' \mathrm{d}t = \frac{2m}{M}\int_0^t \omega \mathrm{d}t = \frac{4\pi m}{2m+M}$$

三、有心力场中的运动

有心力：力的作用线始终通过某定点的力

力心

有心力场中的运动：物体在有心力作用下的运动

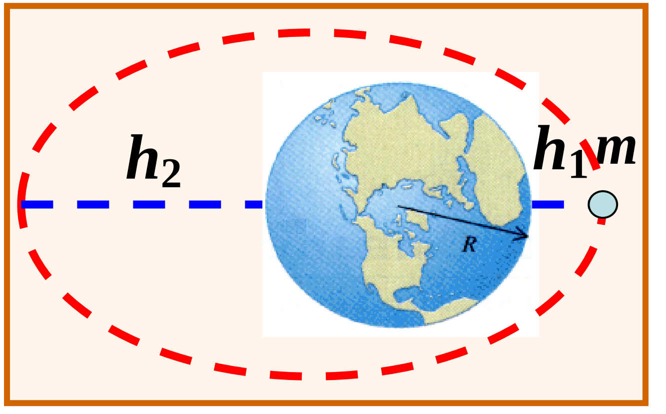
有心力对力心的力矩为零，只受有心力作用的物体对力心的角动量守恒。

例如：

天体运动(行星绕恒星、卫星绕行星……)

微观粒子运动(电子绕核运动；原子核中质子、中子的运动一级近似；加速器中粒子与靶核散射……)

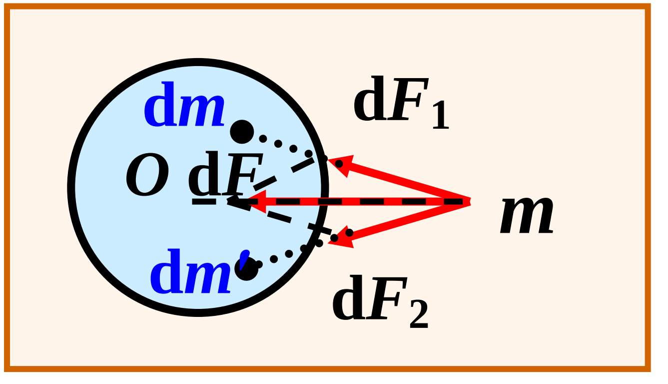
例 (P_{106} 5.15)：已知：地球 R=6378 km。卫星近地：h_1= 439 km　v_1=8.1 km.s^{-1}；远地：h_2= 2384 km。求：v_2=?



解：建立模型

卫星~质点m

地球~均匀球体

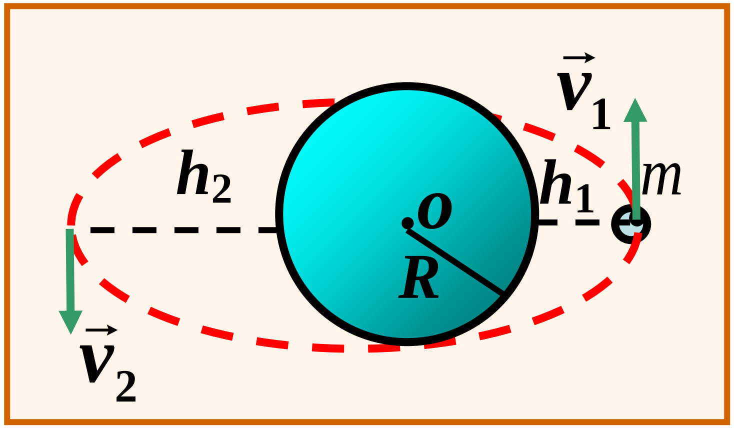


对称性：引力矢量和过地心

对地心力矩为零，卫星 m 对地心 o 角动量守恒。

卫星 m 对地心o角动量守恒

以垂直屏幕向外为正：



$$mv_1(R+h_1)=mv_2(R+h_2)$$

$$v_2=\frac{R+h_1}{R+h_2}\cdot v_1=\frac{6378+439}{6378+2384}\times 8.1=6.3(\mathrm{km}\cdot \mathrm{s}^{-1})<v_1$$

第五章 角动量 角动量守恒 习题课

一、复习提要：三个概念，两条规律

1. 转动惯量 $J=\sum_i m_i r_i^2=\int_m r^2 \mathrm{d}m$

2. 角动量

质点： $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$

质点系： $\vec{L}=\vec{L}_{轨道}+\vec{L}_{自旋}=\vec{r}_c\times m\vec{v}_c+\sum_i \vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i'$

定轴刚体：$L_z=J\omega$

3. 力矩

$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$； $M_z=\pm\left|\vec{r}\times\vec{F}_\perp\right|$； $\sum_i \vec{M}_{i内}\equiv 0$

4. 角动量定理

质点： $\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t=\Delta\vec{L}$

质点系： $\vec{M}_{外}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_{外}\mathrm{d}t=\Delta\vec{L}$

定轴刚体： $M_z=J\beta$ $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}M_z\mathrm{d}t=\Delta L_z$

5. 角动量守恒定律

$\vec{M}_{外}=0$ $\vec{L}=$恒矢量

$M_z=0$ $L_z=$恒量

二、例题

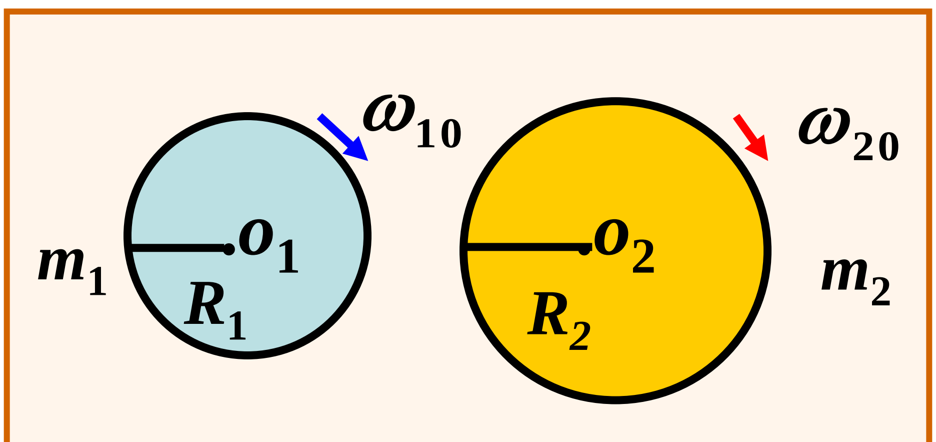
例1 (P$_{95}$ 例1)：

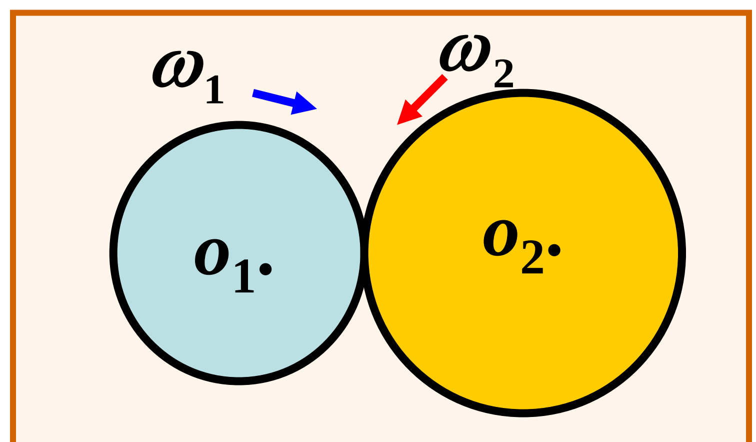
已知：两平行圆柱在水平面内转动，

$$m_1\ ,R_1\ ,\omega_{10};\quad m_2\ ,R_2\ ,\omega_{20}$$

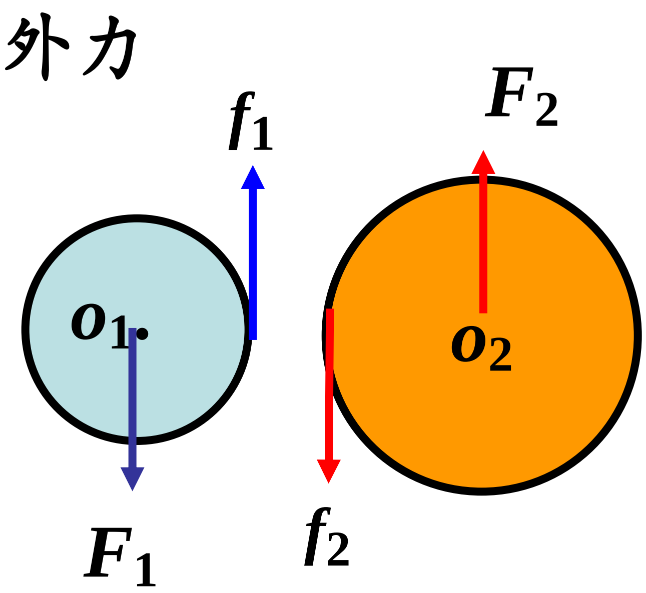
求：接触且无相对滑动时

$$\omega_1=?\quad \omega_2=?$$





$m_1 + m_2$系统受力如图：



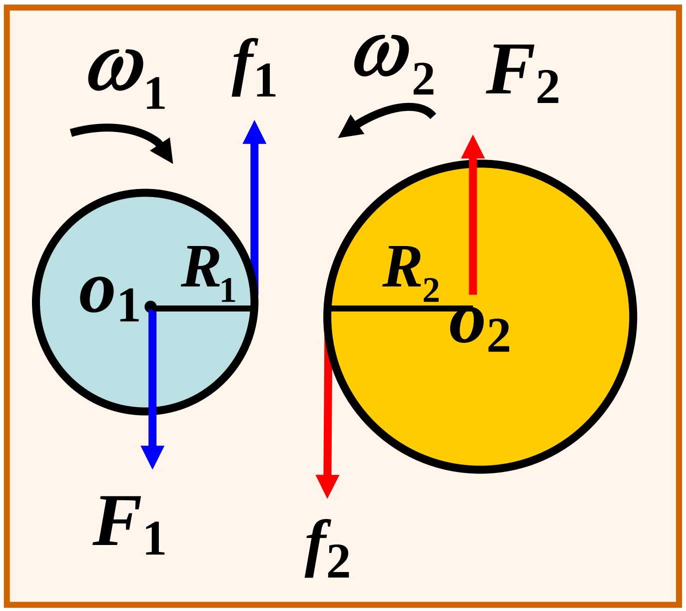
(1) o_1为轴 $\vec{M}_{F_2} \neq 0$

(2) o_2为轴 $\vec{M}_{F_1} \neq 0$

系统角动量不守恒！

注意：角动量守恒中力矩和角量是应对同轴而言

解: 分别以m_1, m_2为研究对象，对它们用角动量定理列方程，设：$f_1=f_2=f$，以顺时针方向为正：



m_1对o_1轴：

$$-\int R_1 f\mathrm{d}t = J_1\omega_1 - J_1\omega_{10}$$

$$J_1 = \frac{1}{2}m_1R_1^2$$

m_2对o_2轴：

$$-\int R_2 f\mathrm{d}t = -J_2\omega_2 - J_2\omega_{20}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}m_2R_2^2$$

接触点：$\omega_1R_1 = \omega_2R_2$

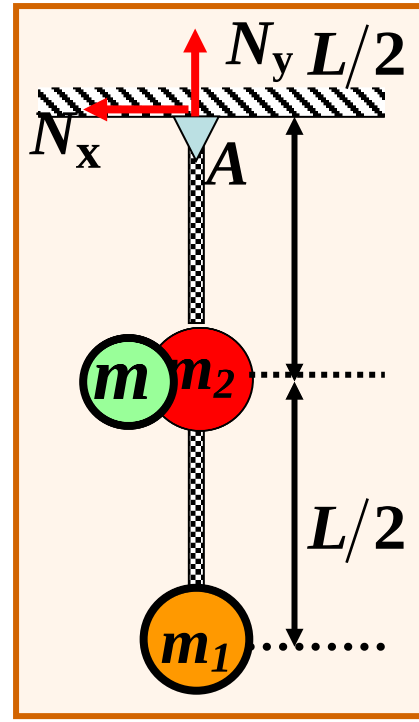
联立各式解得：

$$\omega_1 = \frac{m_1 R_1 \omega_{10} - m_2 R_2 \omega_{20}}{(m_1 + m_2) R_1}$$

$$\omega_2 = \frac{m_1 R_1 \omega_{10} - m_2 R_2 \omega_{20}}{(m_1 + m_2) R_2}$$

例2. 已知：轻杆，$m_1 = m$，$m_2 = 4m$，油灰球 m，m 以速度v_0 撞击 m_2，发生完全非弹性碰撞

求：撞后m_2的速率 v？



解：由于相撞时轴A作用力不能忽略不计，故系统动量不守恒。

因为重力、轴作用力过轴，对轴力矩为零，故系统角动量守恒。

由此列出以下方程：

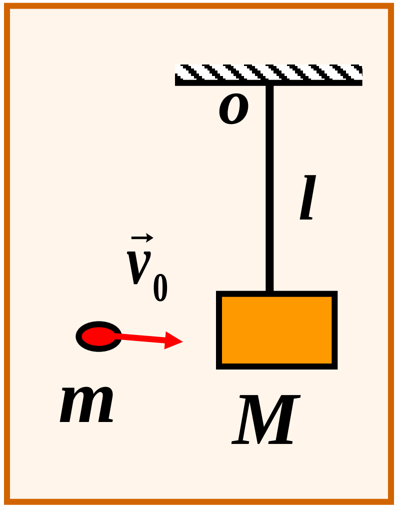
$$mv_0 \cdot \frac{L}{2} = (m + m_2)v \cdot \frac{L}{2} + m_1 \cdot 2v \cdot L$$

或：
$$m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \cdot \omega_0 = (m + m_2)\left(\frac{L}{2}\right)^2 \omega + m_1 L^2 \omega$$

$$\omega_0 \cdot \frac{L}{2} = v_0\text{；}\quad \omega \cdot \frac{L}{2} = v \quad \text{得：} v = \frac{v_0}{9}$$

注意： 区分两类冲击摆

（1）



质点 ⟷ 质点　柔绳无切向力

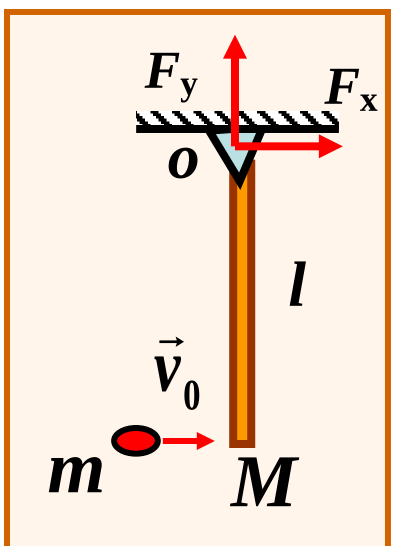
• 水平方向：$F_x = 0$，p_x 守恒

$$m v_0 = (m + M) v$$

• 对 o 点：$\vec{M} = 0$ 守恒 $\vec{L}$

$$m v_0 l = (m + M) v l$$

（2）



质点 ⟷ 定轴刚体（不能简化为质点）

轴作用力不能忽略，动量不守恒，
但对 o 轴合力矩为零，角动量守恒

$$m v_0 l = m l^2 \omega + \frac{1}{3} M l^2 \cdot \omega \qquad v = \omega l$$

练习：已知 $m = 20$ 克，$M = 980$ 克，v_0=400米/秒，绳不可伸长。求 m 射入M 后共同的 v =?

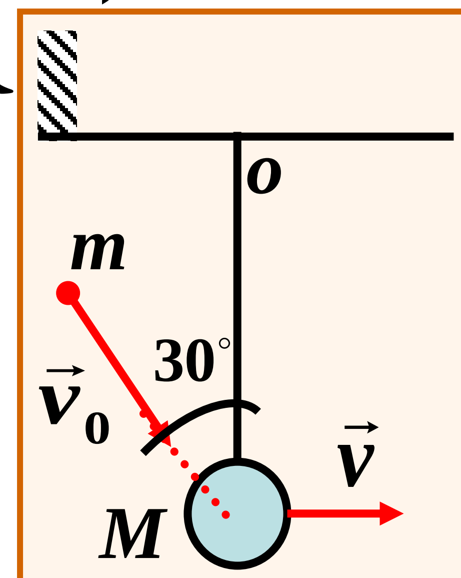
思考： M、 m系统哪些物理量守恒？

（总动量、动量分量、角动量）

解：m、M系统水平方向动量守恒（F_x=0)

竖直方向动量不守恒（绳冲力不能忽略

对o 点轴角动量守恒（外力矩和为零）



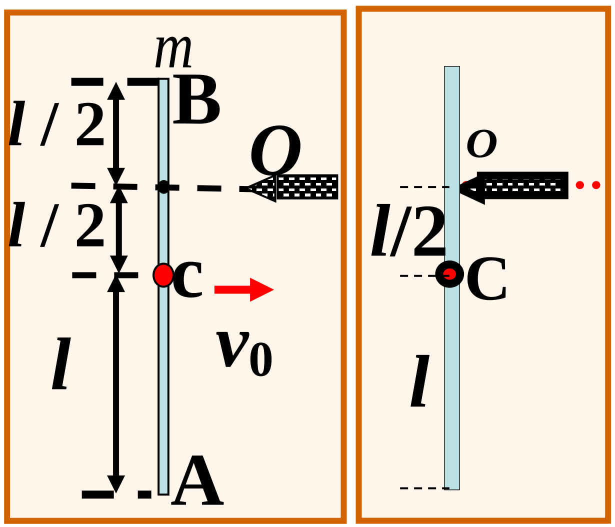
$$mv_0\sin30^0 = (m + M)v$$

或：$$mv_0 \cdot l \cdot \sin30^0 = v(m + M)l$$

得： $v = 4\ (\mathrm{m.s}^{-1})$

例3．已知：匀质细棒 m，长$2l$；在光滑水平面内以 $\vec{v}_0$ 平动，与固定支点O完全非弹性碰撞。

求：碰后瞬间棒绕 O 的 $\omega = ?$



解： 碰撞前后AB棒对O轴角动量守恒，以垂直纸面向外为正。

碰撞前棒对O轴角动量：

$$L_{轴} = L_{轴轨道} + L_{轴自旋}$$

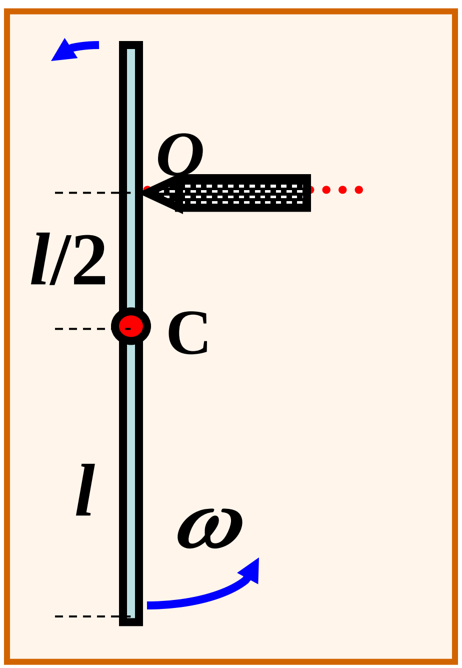
$$L_{轴} = mv_0 \cdot \frac{l}{2} + 0 = \frac{1}{2} mv_0 l$$

思考： 碰撞后的旋转方向？(逆时针方向)

碰撞后棒对O轴角动量：

$$L'_{\text{轴}} = J\omega = \left[\frac{1}{12}m(2l)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega \quad = \frac{7}{12}ml^2\omega$$

平行轴定理



令： $L_{\text{轴}} = L'_{\text{轴}}$

则： $\dfrac{1}{2}mv_0 l = \dfrac{7}{12}ml^2\omega$

得： $\omega = \dfrac{6v_0}{7l}$

作业

1. No.3（希望在作业题纸中选择、填空各题的相应位置处写出其关键步骤）；
2. 自学本章各例题并完成书上的习题(对照书后的参考答案自己订正)。

第六周星期三交作业