1 复数的概念

1.1 复数的概念

$z = x + \mathrm{i}y$， x, y 是实数, $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$. $\mathrm{i}^2 = -1$.

注：一般两个复数不比较大小，但其模 (为实数) 有大小.

1.2 复数的表示

1) 模：$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2) 幅角：在 $z \neq 0$ 时，矢量与 x 轴正向的夹角，记为 $\mathrm{Arg}(z)$ (多值函数) ；主值 $\arg(z)$ 是位于 $(-\pi, \pi]$ 中的幅角.

3) $\arg(z)$ 与 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 之间的关系如下：

当 $x > 0$, $\arg z = \arctan\dfrac{y}{x}$；

当 $x < 0, \begin{cases} y \geq 0, \arg z = \arctan\dfrac{y}{x} + \pi \\ y < 0, \arg z = \arctan\dfrac{y}{x} - \pi \end{cases}$.

4) 三角表示：$z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，其中 $\theta = \arg z$.

5) 指数表示：$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，其中 $\theta = \arg z$.

2 复数的运算

2.1 加减法

若 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$， 则 $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$.

2.2 乘除法

1) 若 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，则

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_2 y_1 + x_1 y_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}.$$

2) 若 $z_1 = |z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, z_2 = |z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 - \theta_2)}.$$

2.3 乘幂与方根

若 $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $z^n = |z|^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) = |z|^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

若 $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k = 0,1,2,\cdots,n-1$.

3 复变函数

3.1 复变函数

$w = f(z)$，在几何上可以看作把 z 平面上的一个点集 D 变到 w 平面上的一个点集 G 的映射.

3.2 复初等函数

3.2.1 指数函数

$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$，在 z 平面处处可导，处处解析；且 $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$.

注：e^z 是以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期的周期函数． (注意与实函数不同)

3.2.2 对数函数

$\mathrm{Ln}z=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)$， $k=0,\pm1,\pm2\cdots$ (多值函数).

主值： $\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$. (单值函数)

$\mathrm{Ln}z$ 的每一个主值分支 $\ln z$ 在除去原点及负实轴的 z 平面内处处解析，且 $(\ln z)'=\dfrac{1}{z}$.

注：负复数也有对数存在．(与实函数不同)

3.2.3 乘幂与幂函数

$a^b=\mathrm{e}^{b\mathrm{Ln}a},a\neq0$， $z^b=e^{b\mathrm{Ln}z},z\neq0$.

注：在除去原点及负实轴的 z 平面内处处解析，且 $\left(z^b\right)'=bz^{b-1}$.

3.2.4 三角函数

$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}},\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2},\mathrm{tg}z=\frac{\sin z}{\cos z},\mathrm{ctg}z=\frac{\cos z}{\sin z}\ .$$

$\sin z,\cos z$ 在 z 平面内解析，且 $(\sin z)'=\cos z,(\cos z)'=-\sin z$.

注：有界性 $|\sin z|\leq1,|\cos z|\leq1$ 不再成立．(与实函数不同)

3.2.5 双曲函数

$$\mathrm{sh}z=\frac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2},\mathrm{ch}z=\frac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

$\mathrm{sh}z$ 奇函数， $\mathrm{ch}z$ 是偶函数． $\mathrm{sh}z,\mathrm{ch}z$ 在 z 平面内解析，且 $(\mathrm{sh}z)'=\mathrm{ch}z,(\mathrm{ch}z)'=\mathrm{sh}z$.

4 解析函数的概念

4.1 复变函数的导数

1) 点可导： $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$.

2) 区域可导：$f(z)$ 在区域内点点可导.

4.2 解析函数的概念

1) 点解析：$f(z)$ 在 z_0 及其 z_0 的邻域内可导，称 $f(z)$ 在 z_0 点解析.

2) 区域解析：$f(z)$ 在区域内每一点解析，称 $f(z)$ 在区域内解析.

3) 若 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点.

4.3 解析函数的运算法则

解析函数的和、差、积、商 (除分母为零的点) 仍为解析函数；解析函数的复合函数仍为解析函数.

5 函数可导与解析的充要条件

5.1 函数可导的充要条件

$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z=x+\mathrm{i}y$ 可导 $\Leftrightarrow$ $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x,y) 可微，且在 (x,y) 处满足 C-R 条件：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$. 此时 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

5.2 函数解析的充要条件

$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域内解析 $\Leftrightarrow$ $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内可微，且满足 C-R 条件：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$. 此时 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

注意：若 $u(x,y),v(x,y)$ 在区域 D 具有一阶连续偏导数，则 $u(x,y),v(x,y)$ 在区域 D 内是可微的. 因此在使用充要条件证明时，只要能说明 u,v 具有一阶连续偏导且满足 C-R 条件时，函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 一定是可导或解析的.

5.3 函数可导与解析的判别方法

1) 利用定义.

2) 利用充要条件. (函数以 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 形式给出)

3) 利用可导或解析函数的四则运算定理. (函数 $f(z)$ 是以 z 的形式给出)

6 复变函数积分的概念与性质

6.1 复变函数积分的概念

$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$，$c$ 是光滑曲线.

注：复变函数的积分实际是复平面上的线积分.

6.2 复变函数积分的性质

$\int_c f(z)\mathrm{d}z=-\int_{c^-} f(z)\mathrm{d}z$. ($c^-$ 与 c 的方向相反)

$\int_c [\alpha f(z)+\beta g(z)]\mathrm{d}z=\alpha\int_c f(z)\mathrm{d}z+\beta\int_c g(z)\mathrm{d}z$，$\alpha,\beta$ 是常数.

若曲线 c 由 c_1 与 c_2 连接而成，则 $\int_c f(z)\mathrm{d}z=\int_{c_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{c_2} f(z)\mathrm{d}z$.

6.3 复变函数积分的一般计算法

1) 化为线积分： $\int_c f(z)\mathrm{d}z=\int_c u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_c v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y$. (常用于理论证明)

2) 参数方法： 设曲线 c：$z=z(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$，其中 α 对应曲线 c 的起点，β 对应曲线 c 的终点，则 $\int_c f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$.

7 复变函数积分重要定理与结论

7.1 柯西-古萨基本定理

设 $f(z)$ 在单连域 B 内解析，c 为 B 内任一闭曲线，则 $\oint\limits_c f(z)\mathrm{d}z = 0$.

7.2 复合闭路定理

设 $f(z)$ 在多连域 D 内解析，c 为 D 内任意一条简单闭曲线，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 c 内的简单闭曲线，它们互不包含互不相交，并且以 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为边界的区域全含于 D 内，则：

① $\oint\limits_c f(z)\mathrm{d}z = \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{c_k} f(z)\mathrm{d}z$，其中 c 与 c_k 均取正向；

② $\oint\limits_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$，其中 Γ 由 c 及 $c_k^-, k = 1, 2, \cdots, n$ 所组成的复合闭路.

7.3 闭路变形原理

一个在区域 D 内的解析函数 $f(z)$ 沿闭曲线 c 的积分，不因 c 在 D 内作连续变形而改变它的值，只要在变形过程中 c 不经过使 $f(z)$ 不解析的奇点.

7.4 解析函数沿非闭曲线的积分

设 $f(z)$ 在单连域 B 内解析，$G(z)$ 为 $f(z)$ 在 B 内的一个原函数，则 $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z = G(z_2) - G(z_1)$，$z_1, z_2 \in B$.

说明：解析函数 $f(z)$ 沿非闭曲线的积分与积分路径无关，计算时只要求出原函数即可.

7.5 柯西积分公式

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，c 为 D 内任一正向简单闭曲线，c 的内部完全属于 D，z_0 为 c 内任意一点，则 $\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f(z_0)$.

7.6 高阶导数公式

解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数，它的 n 阶导数为 $\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}f^{(n)}(z_0), n=1,2,\cdots$，其中 c 为 $f(z)$ 的解析区域 D 内围绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线，而且它的内部完全属于 D.

7.7 重要结论

$$\oint_c \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}.$$ （c 是包含 a 的任意正向简单闭曲线）

7.8 复变函数积分的计算

1) $f(z)$ **在区域** D **内处处不解析**，用一般积分法 $\int_c f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$.

2) $f(z)$ **在区域** D **内解析**：

① c 是 D 内一条正向简单闭曲线，则由柯西—古萨定理，$\oint_c f(z)\mathrm{d}z=0$.

② c 是 D 内的一条非闭曲线，z_1,z_2 对应曲线 c 的起点和终点，则有 $\int_c f(z)\mathrm{d}z=\int_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z=F(z_2)-F(z_1)$.

3) $f(z)$ **在区域** D **内不解析**：

① 曲线 c 内仅有一个奇点：$\begin{cases}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}f(z_0)\\ \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}f^{(n)}(z_0)\end{cases}$. （$f(z)$ 在 c 内解析）

② 曲线 c 内有多于一个奇点：$\oint_c f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\oint_{c_k} f(z)\mathrm{d}z$ （c_i 内只有一个奇点 z_k）.

8 解析函数与调和函数

8.1 调和函数的概念

若二元实函数$\varphi(x,y)$在D内有二阶连续偏导数且满足$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$，$\varphi(x,y)$为$D$内的调和函数.

8.2 解析函数与调和函数的关系

1) 解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$的实部u与虚部v都是调和函数，并称虚部v为实部u的共轭调和函数.

2) 两个调和函数u与v构成的函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$不一定是解析函数；但是若u,v如果满足柯西-黎曼方程，则$u+\mathrm{i}v$一定是解析函数.

8.3 求解析函数的方法

1) 偏微分法：若已知实部$u=u(x,y)$，利用C-R条件，得$\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

对$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$两边积分，得$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+g(x)$ (*)

再对 (*) 式两边对x求偏导，得$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right)+g'(x)$ (**)

由C-R条件，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，得$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right)+g'(x)$，可求出$g(x)$.

代入 (*) 式，可求得虚部$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+g(x)$.

2) 线积分法：若已知实部$u=u(x,y)$，利用C-R条件可得$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$，

故虚部为$v=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C$；

由于该积分与路径无关，可选取简单路径（如折线）计算它，其中(x_0,y_0)与(x,y)是解析区域中的两点.

3) 不定积分法：若已知实部$u=u(x,y)$，根据解析函数的导数公式和C-R条件得知，$f'(z)=$

$\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$，将此式右端表示成 z 的函数 $U(z)$，由于 $f'(z)$ 仍为解析函数，故 $f(z)=\int U(z)\mathrm{d}z+C$.

注：若已知虚部 v 也可用类似方法求出实部 u.