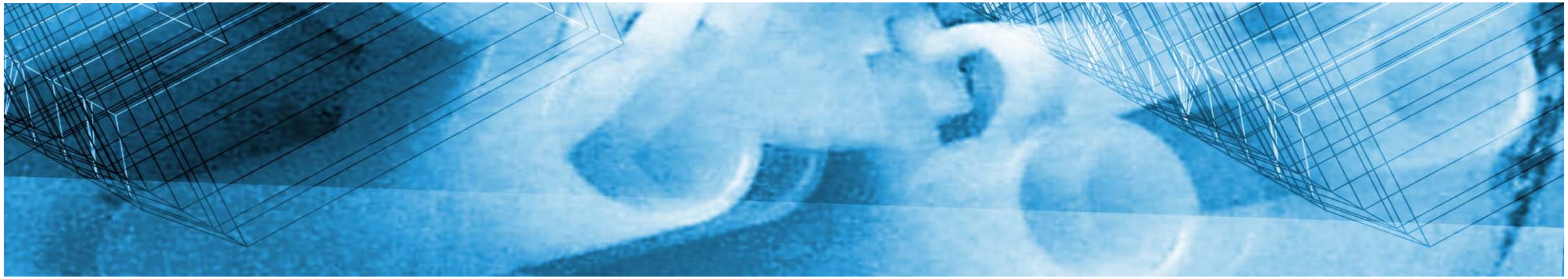
西南交通大學



信号与系统

韩志伟

上节课复习：

- 信号的基本概念
- 常见的典型信号
- 信号的基本运算
- 系统的描述与分类

系统分析方法

三、系统分析方法

系统分析就是在给定系统的构成和参数的情况下去研究系统的特性。

范围 确定性信号经LTI系统的基本分析方法

系统分析一般分三步：

第一步：建模——建立系统的数学模型

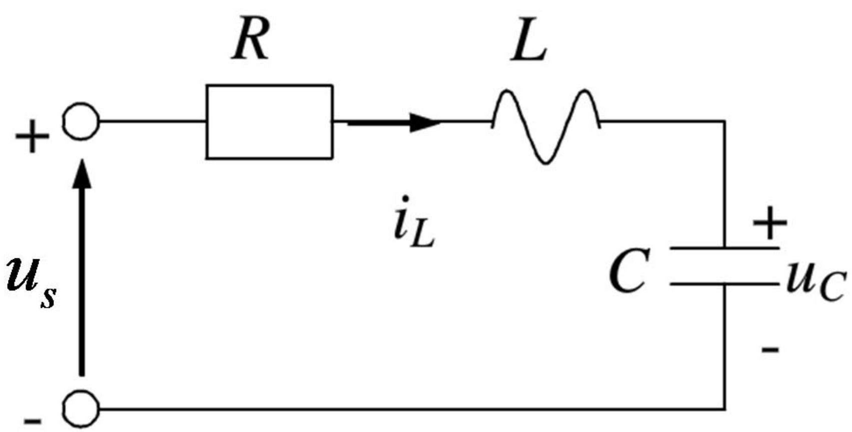
第二步：处理——对数学模型进行数学处理

第三步：解释——对数学结果进行物理解释

三、系统分析方法

例1：

$$u_R = Ri \quad u_L = L\frac{di}{dt} \quad u_c = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i d\tau$$



$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i d\tau = u_s$$

两边对t求导：

微分方程 $L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = u_s$ 单输入-单输出描述（SISO）

想了解电流 i 和电容电压 u_c

$$\begin{cases} \dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{1}{C} i \\ \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{1}{L} u_c - \dfrac{R}{L} i + \dfrac{1}{L} u_s \end{cases}$$

状态空间

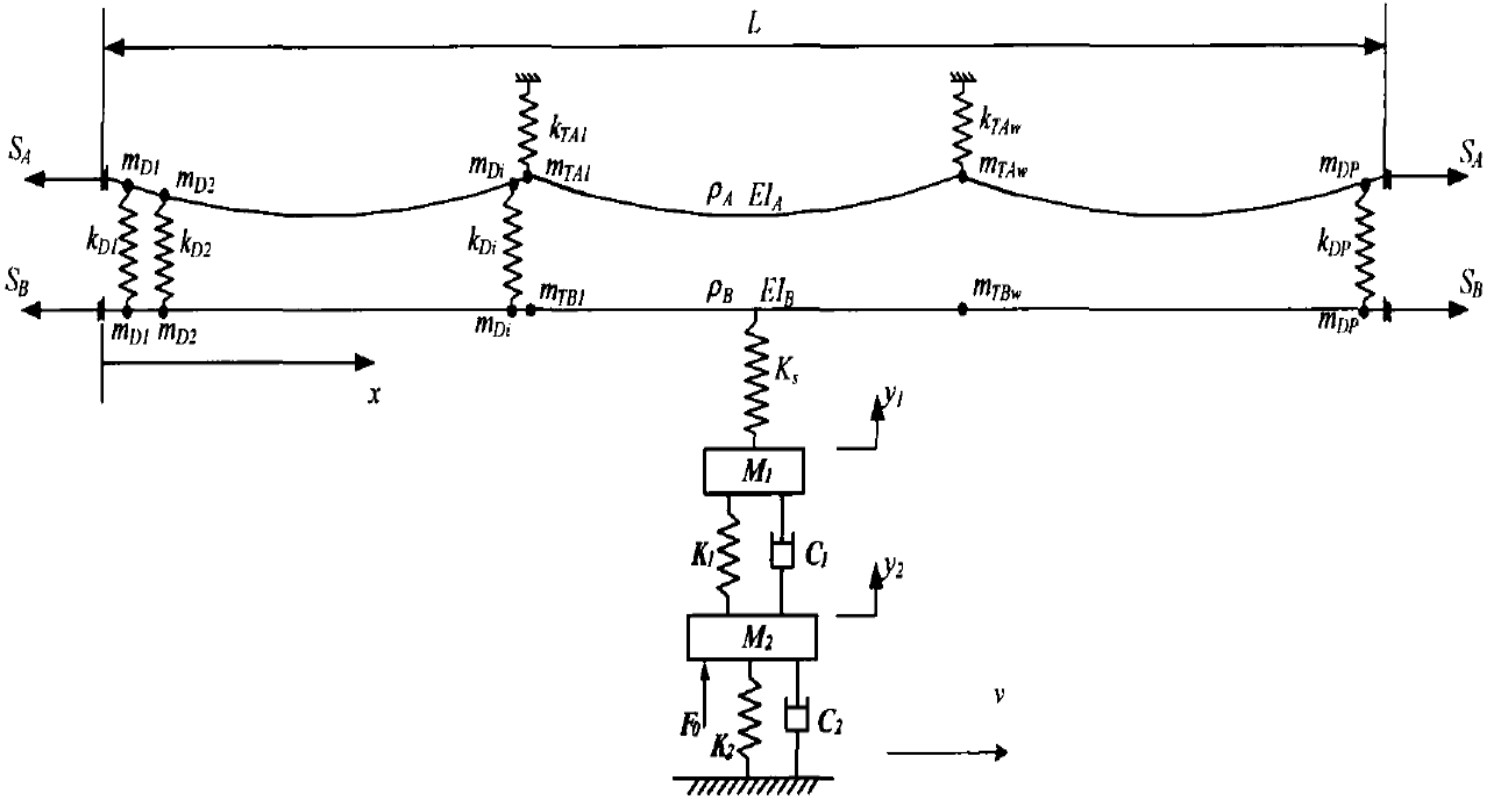
$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_c}{dt} \\ \dfrac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} [u_s]$$

$$\begin{bmatrix} u_L \\ u_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -R \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [u_s]$$

多输入-多输出描述（MIMO）

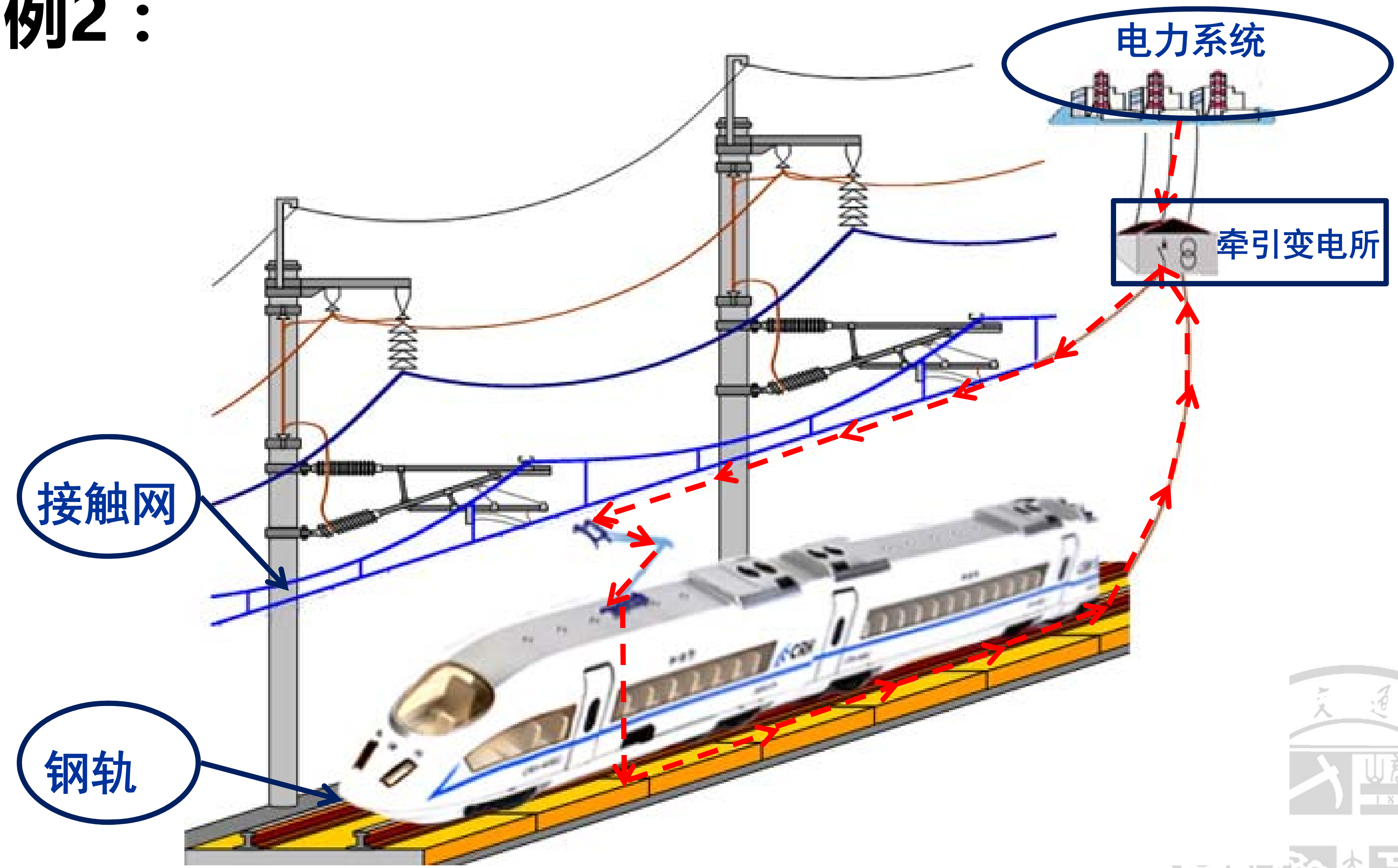
三、系统分析方法

例2：


L
S_A
m_{D1} m_{D2}
k_{TA1}
m_{Di} m_{TA1}
k_{TAw}
m_{TAw}
ρ_A EI_A
m_{DP}
k_{D1} k_{D2} k_{Di} k_{DP}
S_B
m_{TB1} ρ_B EI_B m_{TBw}
m_{D1} m_{D2} m_{Di} m_{DP}
x
K_s
y_1
M_1
K_1 C_1
y_2
M_2
F_0 K_2 C_2
v

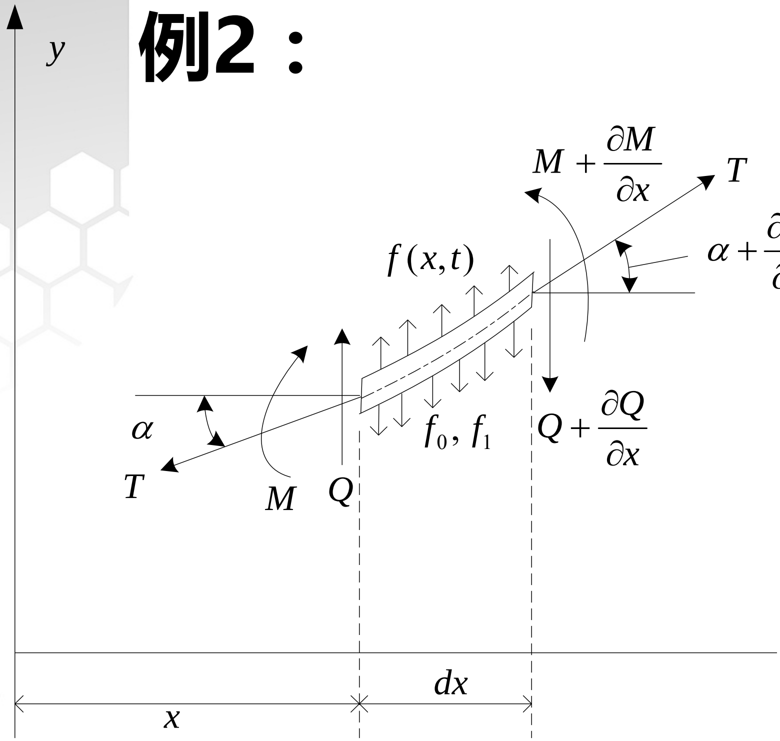
三、系统分析方法

例2：



三、系统分析方法

例2：



剪应力Q，形成弯矩M，动程过程中形成的惯性力$f1$，阻尼力$f0$

$$Q+f(x,t)dx-\left(Q+\frac{\partial Q}{\partial x}dx\right)-f_1\cdot dx-f_0\cdot dx-\rho g\cdot dx=0$$

$$M+Q\cdot dx+T\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}dx-\left(M+\frac{\partial M}{\partial x}\cdot dx\right)=0$$

$$\boxed{EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}-T\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}+\rho\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}+C\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}+\rho g=P_0\delta(x,vt)}$$

三、系统分析方法

$$\frac{\rho_A L}{2}\ddot{A}_n + \sum_m \ddot{A}_m \left[\sum_{i=1}^{p} m_{Di}\sin\frac{m\pi x_i}{L}\sin\frac{n\pi x_i}{L} + \sum_{k=1}^{w} m_{TAk}\sin\frac{m\pi x_k}{L}\sin\frac{n\pi x_k}{L}\right]$$

$$+\left[\frac{S_A\pi^2}{2L}\right.$$

$$M\ddot{Y}+C\dot{Y}+KY=F$$

$$\sum_m A_m\left[\sum_{i=1}^{p} k_{Di}\sin\frac{m\pi x_i}{L}\sin\frac{n\pi x_i}{L} + \sum_{i=1}^{w} k_{TAi}\sin\frac{m\pi x_i}{L}\sin\frac{n\pi x_i}{L}\right] = 0 \qquad n=1,2,\cdots,m$$

$$ca\ddot{A}_n + \sum_{m=1}^{N} MA_{mn}\cdot\ddot{A}_m + QA_n\cdot A_n + \sum_{m=1}^{N} KA_{mn}\cdot A_m - \sum_{m=1}^{N} KB_{mn}\cdot B_m = 0$$

$$cb\ddot{B}_n + \sum_{m=1}^{N} MB_{mn}\cdot\ddot{B}_m - \sum_{m=1}^{N} KA_{mn0}\cdot A_m + QB_n\cdot B_n + \sum_{m=1}^{N}(KB_{mn} + Ks_{mn}(t))\cdot B_m - K_{sn}(t)\cdot y_1 = 0$$

$$M_1\ddot{y}_1 + C_1(\dot{y}_1-\dot{y}_2) + K_1(y_1-y_2) = -K_s\left[y_1 - \sum_m B_m\sin\frac{m\pi x_c}{L}\right]$$

$$M_2\ddot{y}_2 + C_2\dot{y}_2 + C_1(\dot{y}_2-\dot{y}_1) + K_1(y_2-y_1) + K_2 y_2 = F_0$$

三、系统分析方法

系统数学模型的求解方法：

1）时域分析

不通过任何变换，直接求解系统的微分、积分方程。

●经典法求解 $\begin{cases} \text{连续系统:微分方程} \\ \text{离散系统:差分方程} \end{cases}$

●卷积积分（或卷积和）法

时域分析法优点：

直观，物理概念清楚，是学习各种变换域分析方法的基础

目前计算机技术的发展，各种算法软件的开发，使这一经典的方法重新得到广泛的关注和应用。

三、系统分析方法

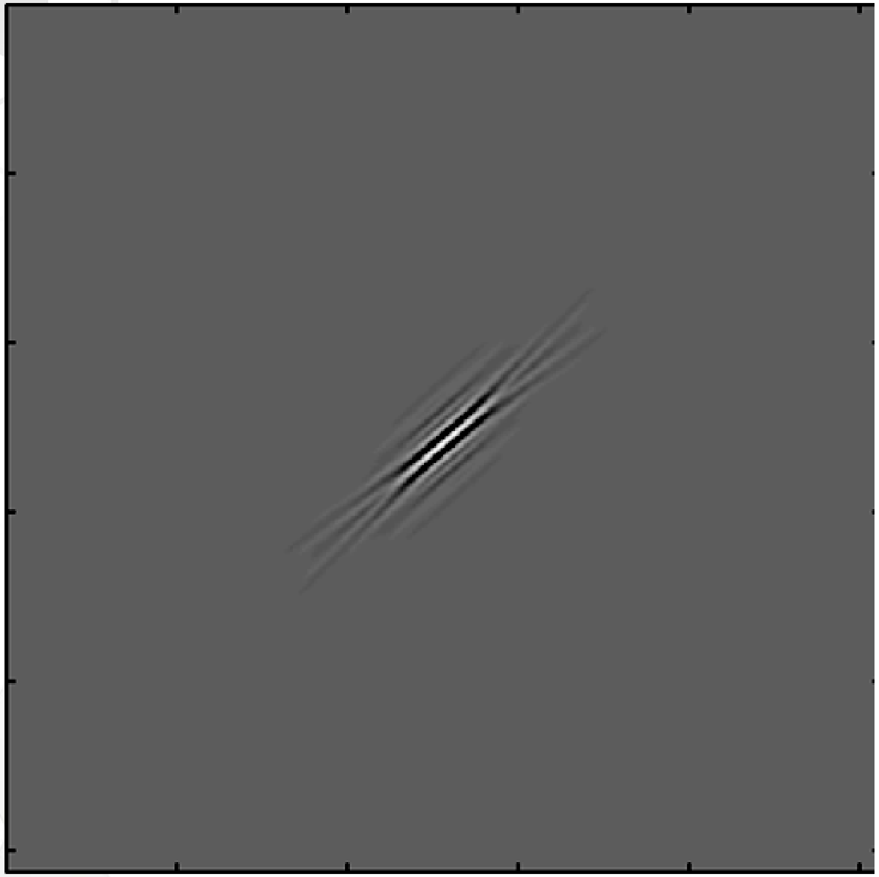
2）变换域分析

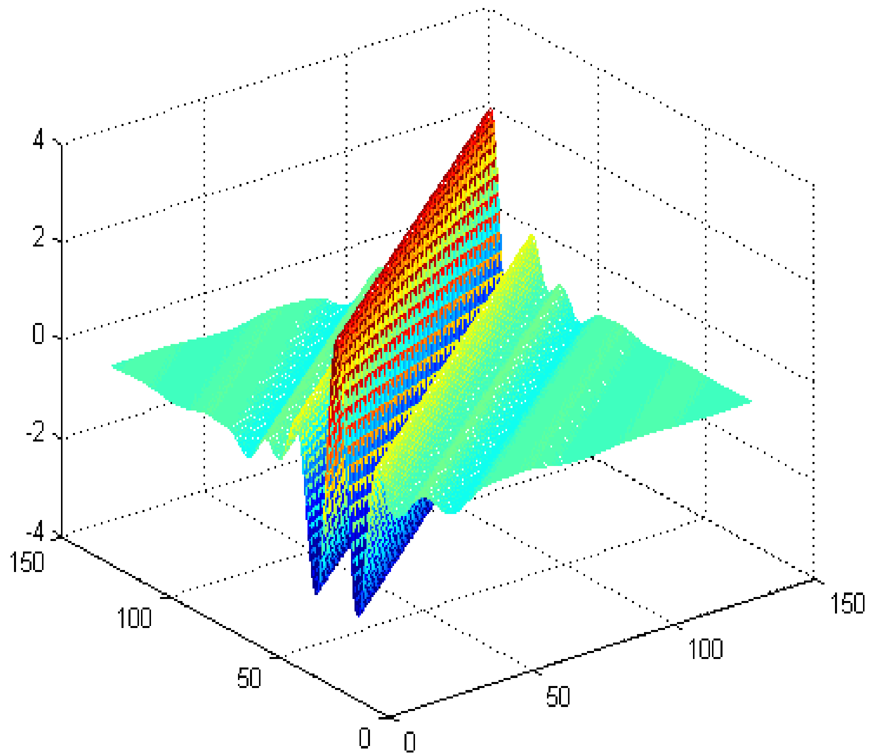
就是将信号与系统模型的时间变量函数变成相应变换域的某种变量函数。

- **傅里叶变换——FT**
- **拉普拉斯变换——LT**
- **z变换——ZT**
- **离散傅里叶变换——DFT**
- **离散沃尔什变换——DWT**

三、系统分析方法

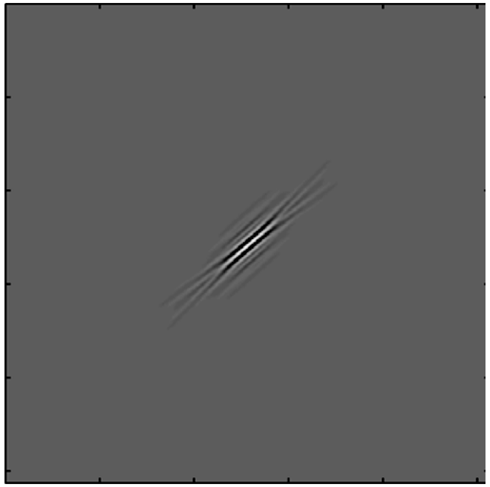
例3：



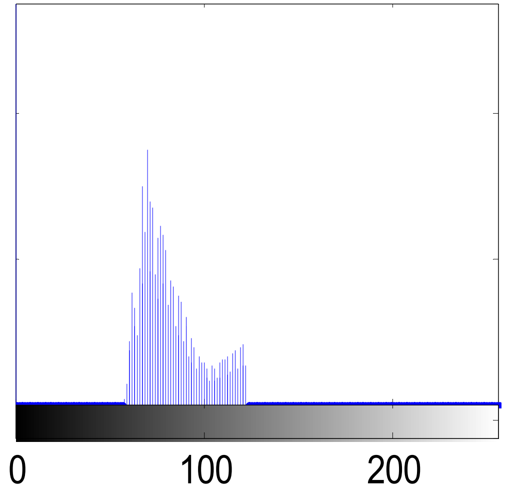


三、系统分析方法

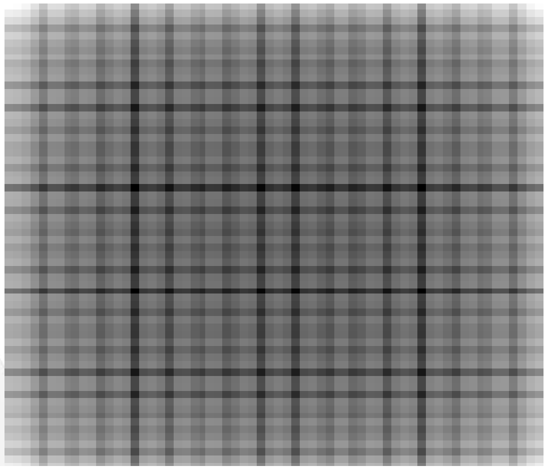
例3：



时域直方图



二维傅立叶



各向异性曲波

三、系统分析方法

Authors:

Dr.Candès and Dr.Donoho

1. Curvelet 99.1999.
2. Second generation curvelets.2002.
3. Discrete Curvelet Transform.2005.

三、系统分析方法

例4：3D系统建模

第二章
连续时间系统的时域分析

- 微分算子
- 传输算子

微分算子

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=u_s$$

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}-T\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}+\rho\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}+C\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}+\rho g=P_0\delta(x,vt)$$

用算子符号表示微分方程

1、算子符号的基本规则

$$p=\frac{d}{dt}$$ 微分算子

$$\frac{1}{p}=p^{-1}=\int_{-\infty}^{t}(\ )d\tau$$ 积分算子

微分算子

1、算子符号的基本规则

$$p = \frac{d}{dt}$$

$$\frac{1}{p} = p^{-1} = \int_{-\infty}^{t} (\quad) d\tau$$

则

$$px = \frac{dx}{dt} \qquad p^2 x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx^2}{dt^2}$$

$$p^2 = \frac{d^2}{dt^2} \qquad \cdots \qquad p^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

$$\frac{1}{p} x = \int_{-\infty}^{t} x d\tau \qquad \frac{1}{p^2} x = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} x = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\tau} x d\xi d\tau$$

微分算子

根据这个规定，可以将下列方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+5y(t)+\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+3e(t) \qquad (1)$$

用算子表示：

微积分算子方程

$$p^2 y+2py+5y+\frac{1}{p}y=pe+3e \qquad (2)$$

即：

$$(p^2+2p+5+\frac{1}{p})y=(p+3)e \qquad (3)$$

注意：此方程表示的不是一个代数方程，而是算子记法的微积分方程。式中算子与变量不是相乘，而是一种变换。

微分算子

代数规律能否用于算子方程？？？

例：算子多项式 $(p+3)(p+2)y$

$$(p+3)(p+2)y=(\frac{d}{dt}+3)(\frac{dy}{dt}+2y)=\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+3\frac{dy}{dt}+6y$$

$$=\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y=p^2y+5py+6y=(p^2+5p+6)y$$

$$\therefore(p+3)(p+2)y=(p^2+5p+6)y$$

则 $(p+3)(p+2)=p^2+5p+6$

性质1：p的正幂多项式可以象代数量一样进行乘法运算和因式分解

微分算子

例：

$$p \cdot \frac{1}{p} x = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{t} x d\tau = x$$

$$\frac{1}{p} \cdot px = \int_{-\infty}^{t} \frac{dx}{dt} d\tau = x(t) - x(-\infty) \neq x$$

所以，一般 $p \cdot \frac{1}{p} x \neq \frac{1}{p} \cdot px$

性质2：算子乘除的顺序（表示对函数微分、积分的先后次序）不能随便颠倒

微分算子

例： $px = py$ 等号两边的公因子*p*能不能消？

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$ 两边积分得：

$$x = y + c$$ 式中c为积分常数

一般情况下 $x \neq y$

性质3：算子方程等号两边的公因子不能随便消去

微分算子

例：方程 $(p+a)N(p)x=(p+a)y$

一般 $N(p)x\neq y$

等式两边公共因子不能随便消

例：方程 $$x=\frac{(p+a)}{(p+a)N(p)}y$$

$$x\neq\frac{1}{N(p)}y$$

性质4：分子、分母上的公共因子不能随便消

微分算子

性质1：p的正幂多项式可以象代数量一样进行乘法运算和因式分解

$$(p+3)(p+2)=p^2+5p+6$$

性质2：算子乘除的顺序不能随便颠倒

$$p\cdot\frac{1}{p}x\neq\frac{1}{p}\cdot px$$

性质3：算子方程等号两边的公因子不能随便消去

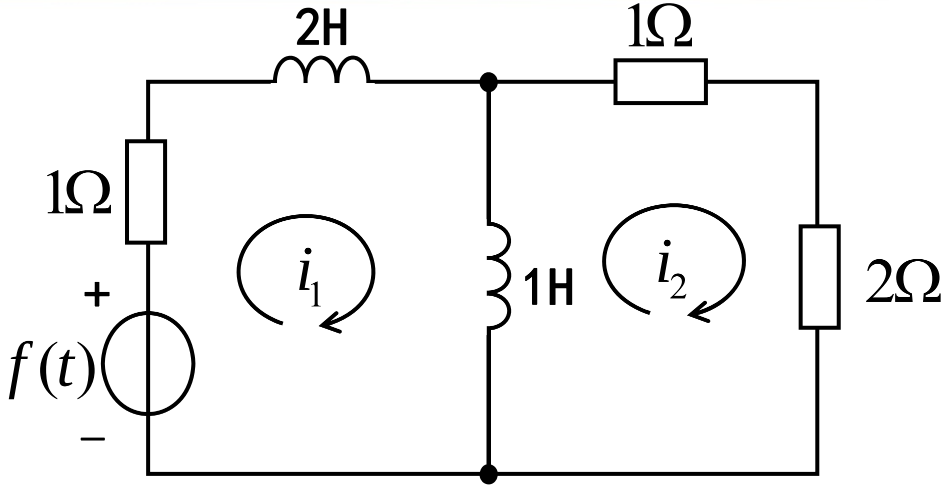
$$px=py \qquad x\neq y$$

性质4：分子、分母上的公共因子不能随便消

$$x=\frac{(p+a)}{(p+a)N(p)}y \qquad x\neq\frac{1}{N(p)}y$$

微分算子

例1 求 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$



解：回路方程为：

$$\begin{cases} 3\dfrac{di_1}{dt}+i_1-\dfrac{di_2}{dt}=f(t) \\ -\dfrac{di_1}{dt}+\dfrac{di_2}{dt}+3i_2=0 \end{cases}$$

写成算子形式：

$$\begin{cases} (3p+1)i_1-pi_2=f(t) & (1) \\ -pi_1+(p+3)i_2=0 & (2) \end{cases}$$

消元法： $(1)\times(p+3)$ $(2)\times p$ 得：

微分算子

$$\begin{cases}(p+3)(3p+1)i_1-(p+3)pi_2=(p+3)f(t) & (3)\\ -p^2i_1+p(p+3)i_2=0 & (4)\end{cases}$$

(3) + (4) 消去 i_2 得：

$$(2p^2+10p+3)i_1=(p+3)f(t)$$

$$2\frac{d^2i_1}{dt^2}+10\frac{di_1}{dt}+3i_1=\frac{df(t)}{dt}+3f(t)$$

检验合法性： 第一步： $(1)\times(p+3)$ 乘法运算

第二步： $(2)\times p$ 乘法运算

第三步： $(3)+(4)$ 加法运算

每步只运用了算子的乘法和加法----运算过程正确

传输算子

对于线性时不变系统，在一般情况下，其输入信号***f(t)***和响应***y(t)***之间关系，可以写成如下微分方程

$$D(p)y(t)=N(p)f(t)$$

将算子方程在形式上改写为

$$y(t)=\frac{N(p)}{D(p)}f(t)$$

定义：

把联系响应 $y(t)$ 和激励 $f(t)$ 之间的关系 $\dfrac{N(p)}{D(p)}$ 定义为传输算子。用符号 $H(p)$ 表示

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)} \qquad 则 \qquad y(t)=H(p)f(t)$$

$$f(t) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow y(t)$$

◆ 线性系统时域分析

线性系统时域分析

一个线性系统，其激励信号 $f(t)$ 与响应信号 $y(t)$ 之间的关系，可以用下列形式的微分方程式来描述

$$y(t)=\frac{N(p)}{D(p)}f(t)=H(p)f(t) \quad \text{或} \quad D(p)y(t)=N(p)f(t)$$

式中 $y(t)$ 是系统的某个响应信号

$f(t)$ 是系统的激励信号

算子表达式为：$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0)y(t)$

$$=(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0)f(t)$$

对应的微分方程式为：

n阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_0y(t)$$

$$=b_m\frac{\mathrm{d}^m f(t)}{\mathrm{d}t^m}+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} f(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+b_0f(t)$$

线性系统时域分析

时域分析法有两种：

※ **经典法：直接求解微分方程；**

经典法着重说明物理意义。

建立自由响应和强迫响应、零输入响应和零状态响应概念。它使线性系统分析在理论上更完善，为解决实际问题带来方便。

※ **卷积法：即已知系统的单位冲激响应，将冲激响应与输入激励信号进行卷积积分。**

用卷积积分只能求到系统的零状态响应。零输入响应仍要用经典法求得。

物理概念明确，运算过程方便，是系统分析的基本方法。是近代计算分析系统的强有力工具。

一、微分方程的经典解法

微分方程的全解即系统的完全响应，由齐次解$y_h(t)$和特解$y_p(t)$组成

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- 齐次解$y_h(t)$的形式由齐次方程的特征根确定

- 特解$y_p(t)$的形式由方程右边激励信号的形式确定

1、齐次解

齐次解 $y_h(t)$ 是齐次微分方程

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0$$

的解。

即 $$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0)y(t) = 0$$

或 $D(p)y(t) = 0$ 的解。

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \quad (2.2\text{-}4)$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0)y(t) = 0$$

解的基本形式为 $ke^{\lambda t}$， 代入上式，得

$$k\lambda^n e^{\lambda t} + ka_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \cdots + ka_1\lambda e^{\lambda t} + ka_0 e^{\lambda t} = 0$$

在 $k \neq 0$ 的条件下，得

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (2.2\text{-}5)$$

式(2.2-5)称为微分方程(2.2-4)对应的特征方程。

特征方程的 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 称为微分方程的特征根。

线性系统时域分析

齐次解$y_h(t)$的形式

(1) 特征根是不等实根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

$$y_h(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}$$

(2) 特征根是等实根 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$

$$y_h(t)=(c_0+c_1t+\cdots+c_{n-1}t^{n-1})e^{\lambda t}$$

(3) 特征根有共轭复根 $\lambda_{1.2}=\alpha\pm j\beta$

对应于这对共轭复根的齐次解为

$$y_0(t)=c_1e^{(\alpha+j\beta)t}+c_2e^{(\alpha-j\beta)t}$$

- 例 求如下所示的微分方程的齐次解。

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t)+7\frac{d^2}{dt^2}y(t)+16\frac{d}{dt}y(t)+12y(t)=f(t)$$

解：系统的特征方程为 $\lambda^3+7\lambda^2+16\lambda+12=0$

因式分解： $(\lambda+2)^2(\lambda+3)=0$

特征根： $\lambda_{1,2}=-2(\text{重根}),\lambda_3=-3$

对应的齐次解为： $\lambda_h(t)=(A_1t+A_2)e^{-2t}+A_3e^{-3t}$

其中A1，A2，A3为待定系数。

2、特解

❖ 求特解的步骤

•微分方程的特解$y_p(t)$的形式与激励信号形式有关。

•将激励$e(t)$代入方程式的右端，化简后右端函数式称为“自由项”。

•通过观察自由项的函数形式，试选特解函数式。

•代入方程，求得特解函数式中的待定系数。即求出特解$y_p(t)$。

❖ 几种典型激励信号对应特解的形式

激励函数e(t)	响应函数r(t)的特解
E（常数）	B（常数）
t^p	$B_1t^p + B_2t^{p-1} + \cdots + B_pt + B_{p+1}$
$e^{\alpha t}$	$Be^{\alpha t}$
cos(wt) sin(wt)	$B_1\cos(wt) + B_2\sin(wt)$
$t^pe^{\alpha t}\cos(wt)$ $t^pe^{\alpha t}\sin(wt)$	$(B_1t^p + \cdots + B_pt + B_{p+1})e^{\alpha t}\cos(wt)$ $+(D_1t^p + \cdots + D_pt + D_{p+1})e^{\alpha t}\sin(wt)$

例1： 描述某线性非时变系统的方程为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f'(t)+2f(t)$$

试求：当 $f(t)=t^2,\ y(0^+)=1,\ y'(0^+)=1$ 时的全解。

解：

(1)求齐次方程 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0$ 的齐次解。

特征方程为：$p^2+3p+2=0$

特征根为： $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$

齐次解为 $y_h(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

线性系统时域分析

(2)求非齐次方程

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f'(t)+2f(t)$$ 的特解：

由输入 $f(t)=t^2$

设特解为：$y_p(t)=A_2t^2+A_1t+A_0$

将上式代入原微分方程，得：

$$2A_2+3(2A_2t+A_1)+2(A_2t^2+A_1t+A_0)=2t+2t^2$$

即：

$$2A_2t^2+(2A_1+6A_2)t+(2A_0+3A_1+2A_2)=2t^2+2t$$

上式两边比较系数可得：

$$\left.\begin{aligned}2A_2&=2\\2A_1+6A_2&=2\\2A_0+3A_1+2A_2&=0\end{aligned}\right\}$$

解得：

$$\begin{cases}A_2=1\\A_1=-2\\A_0=2\end{cases}$$

$$\therefore\quad y_p(t)=t^2-2t+2$$

(3) 微分方程完全解为：

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+t^2-2t+2$$

将初始条件代入上式，

$$y(0^+)=1,\ y'(0^+)=1$$

得：

$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2+2=1 \\ y'(0)=-C_1-2C_2-2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-2 \end{cases}$$

故，全解为：

$$y(t)=\underbrace{e^{-t}-2e^{-2t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\boxed{t^2-2t+2}}_{\text{强迫响应}} \qquad t\geq 0$$

线性系统时域分析

系统完全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

零输入响应是输入 $f(t)=0$ 时的系统响应，它是系统内部条件（如能量存储、初始条件）单独作用的结果，而与外部输入 $f(t)$ 无关。

零状态响应是系统在零状态（如内部能量存储不存在、所有初始条件为零）时对输入 $f(t)$ 产生的响应。

系统响应的这两个分量是相互独立的。

二、零输入响应

1、系统初始条件

设系统初始观察时刻t=0，分别考察$y(t)$及各阶导数在初始观察时刻前一瞬间$t=0^-$和后一瞬间$t=0^+$时的情况。

- 0^-状态是指系统没加外部激励时系统的固有状态，即零输入时的初始状态，反映的是系统以往的历史信息。初始值是由系统的储能产生的；
- 0^+状态称为加入输入后的初始状态。即初始值不仅有系统的储能，还受激励的影响。

$$y(t)=y_x(t)+y_f(t) \Rightarrow \begin{cases} y(0^-)=y_x(0^-)+y_f(0^-) \\ y(0^+)=y_x(0^+)+y_f(0^+) \end{cases}$$

2、零输入响应的求解

1）系统的零输入响应是输入信号为零，仅由系统的初始状态单独作用而产生的输出响应。

- 数学模型:

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)=0$$

- 求解方法:

- 根据微分方程的特征根确定零输入响应的形式

- 再由0^-初始条件确定待定系数

线性系统时域分析

n 阶微分方程

若零输入响应方程 p 算子多项式可分解为（以单根为例）

$$(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\cdots(p-\lambda_n)y(t)=0$$

则有**零输入响应**

$$y_x(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}=\sum_{k=1}^{n}c_ke^{\lambda_k t}$$

式中 c_k为任意待定常数，由0^-初始条件确定。

线性系统时域分析

2）由传输算子求零输入响应

设有微分方程 $D(p)y(t)=N(p)f(t)$

对应的零输入响应的微分方程是:

$$D(p)y(t)=0$$

若 $D(p)$ 有n个相异的单零点，则可分解为

$$(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\cdots(p-\lambda_n)y(t)=0$$

当 $p=\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$时，$D(p)=0$， 称 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$是$D(p)$的零点

零输入响应解（齐次解）为：

$$y_x(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}=\sum_{k=1}^{n}c_ke^{\lambda_k t}$$

线性系统时域分析

如果微分方程表示为：

$$y(t)=\frac{N(p)}{D(p)}f(t)=H(p)f(t)$$

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$$

当 $p=\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$时，$D(p)=0$， 称 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$是$D(p)$的零点

$D(p)\to 0$ $H(p)\to\infty$ 称 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 是 $H(p)$的极点

由传输算子$H(p)$ 的极点可立刻写出零输入响应

线性系统时域分析

若传输算子$H(p)$ 有n个极点，其中包含以下情况：

(1) $D(p)=0$ 有单根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n \quad m\le n$

零输入响应为： $c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}$

单实根 λ_k 对应响应：$c_ke^{\lambda_k t}$

一对共轭复根 $\longrightarrow$ $c'e^{\alpha t}\cos(\omega t+\phi)$

$\lambda_i=\alpha+j\omega \quad \lambda_j=\alpha-j\omega$

式中 c'和ϕ 为待定常数

(2) $D(p)=0$ 有重根

二重根 λ $\longrightarrow$ $(c_0+c_1t)e^{\lambda t}$

三重根 λ $\longrightarrow$ $(c_0+c_1t+c_2t^2)e^{\lambda t}$

$\vdots$

m重根 λ $\longrightarrow$ $(c_0+c_1t+\cdots+c_{m-1}t^{m-1})e^{\lambda t}$

线性系统时域分析

例3：已知 $H(p)=\dfrac{2p^2+8p+3}{(p+1)(p+3)^2}$ ，初始条件为：

$y(0^-)=2,\ y'(0^-)=1, y''(0^-)=0$，求零输入响应 $y_x(t)$。

解： $D(p)=(p+1)(p+3)^2=0$

求得极点： $\lambda_1=-1 \quad \lambda_2=\lambda_3=-3$

零输入响应为： $y_x(t)=c_1e^{-t}+(c_2+c_3t)e^{-3t}$

代入初始条件有：

$$\begin{cases} y(0^-)=c_1+c_2=2 \\ y'(0^-)=-c_1-3c_2+c_3=1 \\ y''(0^-)=c_1+9c_2-6c_3=0 \end{cases}$$

求解得： $c_1=6 \quad c_2=-4 \quad c_3=-5$

$$\therefore y_x(t)=6e^{-t}+(-4-5t)e^{-3t} \qquad (t\geq 0)$$

三、单位冲激响应

1）冲激响应 $h(t)$ 的定义

冲激响应$h(t)$：系统激励$\delta(t)\xrightarrow{\text{产生}}$零状态响应

$$h(t)=H(p)\delta(t)=\frac{N(p)}{D(p)}\delta(t)$$

$$=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1 p+a_0}\delta(t)$$

❖对于 n 阶系统

$$H(p)=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1 p+a_0}=\frac{N(p)}{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\cdots(p-\lambda_n)}$$

即 $$h^{(n)}+a_{n-1}h^{(n-1)}+\cdots+a_1 h'+a_0 h$$

$$=b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta'(t)+b_0\delta(t)$$

部分分式展开有：

$$H(p)=\frac{k_1}{p-\lambda_1}+\frac{k_2}{p-\lambda_2}+\cdots+\frac{k_n}{p-\lambda_n}$$

由于$t>0^+$后，方程右端为零，故 $h(t)=(\sum_{i=1}^{n}k_i e^{\lambda_i t})\varepsilon(t)$

$n>m$ 时

$t>0^+$后冲激响应与零输入响应的形式相同

冲激响应的计算分三种情况：

（一）当 $n > m$ 时，$H(p)$ 为真分式

(1) $D(p)=0$ 的根为单根(不论实根、虚根、复数根)

$$H(p)=\frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1 p + a_0}$$

$$=\frac{k_1}{p-\lambda_1}+\frac{k_2}{p-\lambda_2}+\cdots+\frac{k_n}{p-\lambda_n}$$

$$h(t)=(k_1 e^{\lambda_1 t}+k_2 e^{\lambda_2 t}+\cdots+k_n e^{\lambda_n t})u(t)=(\sum_{i=1}^{n} k_i e^{\lambda_i t})u(t)$$

每一项 $\dfrac{k_i}{p-\lambda_i}$ $\Longleftrightarrow$ $h(t)$中的一项 $k_i e^{\lambda_i t}\varepsilon(t)$

$$H(p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{p-\lambda_i} \Longleftrightarrow h(t)=(\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{e}^{\lambda_i t})\varepsilon(t)$$

线性系统时域分析

(2) $D(p)=0$ 有重根，如m重根

$H(p)$ 中包含有 $$\frac{k_1}{p-\lambda}+\frac{k_2}{(p-\lambda)^2}+\cdots+\frac{k_m}{(p-\lambda)^m}$$

对应 $h(t)$ 中将包含有：$k_1e^{\lambda t}+k_2te^{\lambda t}+\cdots+\frac{k_m}{(m-1)!}t^{m-1}e^{\lambda t}$

（二）当$n=m$时，$H(p)$可用除法化为一个常数项

与一个真分式之和

$$H(p)=b_m+\frac{N_0(p)}{D(p)}=b_m+\frac{k_1}{p-\lambda_1}+\frac{k_2}{p-\lambda_2}+\cdots+\frac{k_n}{p-\lambda_n}$$

$$h(t)=b_m\delta(t)+(\sum_{i=1}^{n}k_ie^{\lambda_i t})u(t)$$

$h(t)$中将包含冲激函数 $\delta(t)$

线性系统时域分析

（三）当 $n<m$ 时，$h(t)$ 中除了包含指数项和冲激函数 $\delta(t)$ 外，还将包含有直到 $\delta^{(m-n)}(t)$ 的冲激函数 $\delta(t)$ 的各阶导数。

$$h(t)=\sum_{j=0}^{m-n}B_j\delta^{(j)}(t)+\left(\sum_{i=1}^{n}K_ie^{\lambda_i t}\right)\varepsilon(t)$$

小结：求单位冲激响应 $h(t)$ 的步骤：

第一步：确定系统的传递算子 $H(p)$；

第二步：将 $H(p)$ 展开成部分分式和的形式；

第三步：求得各分式对应的冲激响应分量 $h_i(t)$；

第四步：将所有的 $h_i(t)$ 相加，得到系统的单位冲激响应 $h(t)$。

四、零状态响应

当系统的初始状态为零时，由系统的外部激励$f(t)$产生的响应称为系统的零状态响应，用$y_f(t)$表示。

求解系统的零状态响应$y_f(t)$方法：

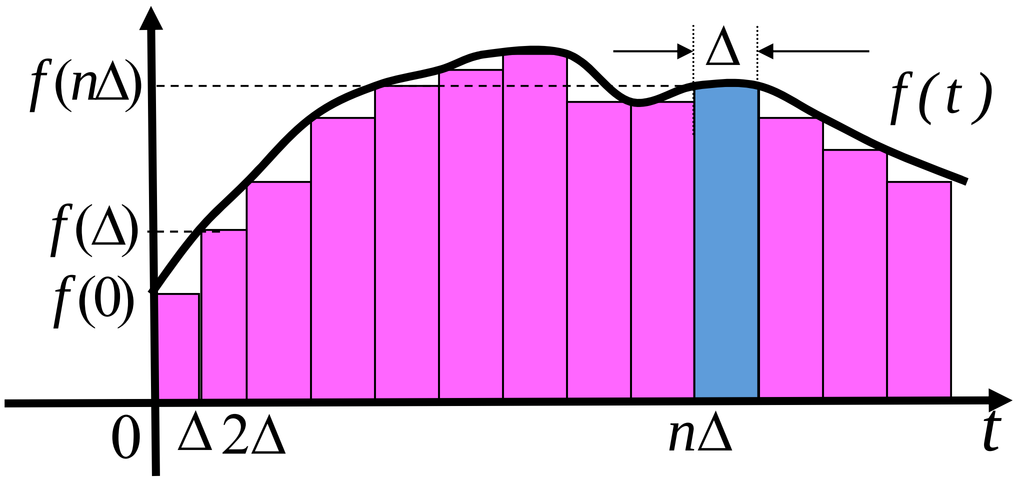
- 直接求解初始状态为零的微分方程

  包含齐次解和特解

- 卷积法：

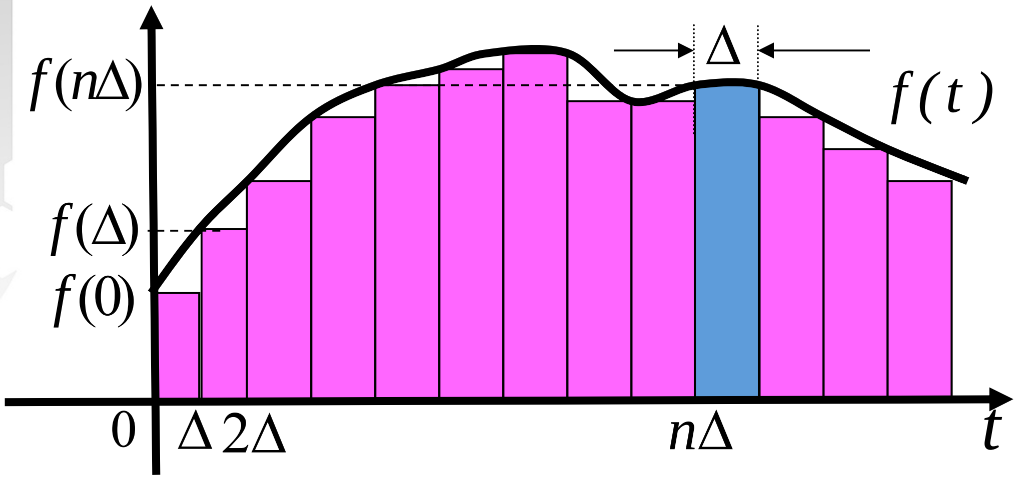
  利用信号分解和线性时不变系统的特性求解

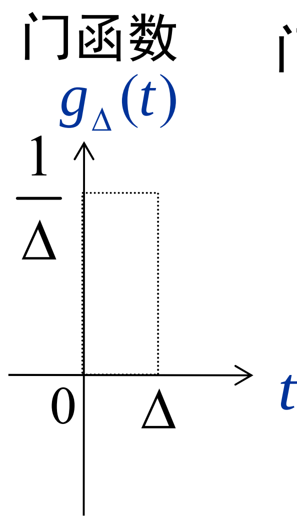
1、连续信号的 $\delta(t)$分解

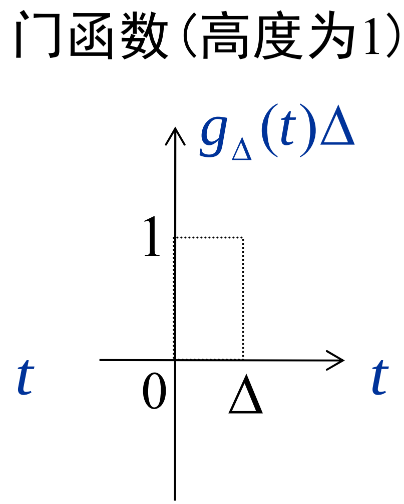


对一般信号$f(t)$，可以将其分成很多Δ宽度的区段，用一个阶梯信号$f_\Delta(t)$近似表示$f(t)$。当Δ→0时，有$f_\Delta(t) \to f(t)$

线性系统时域分析







第零个矩形脉冲 $f(0)g_{\Delta}(t)\Delta$

第1个矩形脉冲 $f(\Delta)g_{\Delta}(t-\Delta)\Delta$

第n个矩形脉冲 $f(n\Delta)g_{\Delta}(t-n\Delta)\Delta$

$$f(t)\approx\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta)g_{\Delta}(t-n\Delta)\Delta$$

因为 $\lim_{\Delta\to 0}g_{\Delta}(t)=\delta(t)$

$$f(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\Delta$$ 分解成冲激脉冲分量和

线性系统时域分析

$$f(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\Delta$$

当 $\Delta\to 0$ 时，即$\Delta\to d\tau, n\Delta$成为新变量 τ，求和变成对连续新变量 τ 的积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \qquad \text{抽样特性}$$

表明任意波形的信号可以表示为无限多个强度为

$f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的冲激信号 $\left[f(\tau)d\tau\right]\delta(t-\tau)$ 的积分，也就是说，

<u>任意波形的信号可以分解为连续的加权冲激信号之和</u>

线性系统时域分析

一般信号 $f(t)$ 激励下的零状态响应 $y_f(t)$

$$\delta(t) \longrightarrow h(t)$$

$$\delta(t-n\Delta) \longrightarrow h(t-n\Delta)$$

$$f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\Delta \longrightarrow f(n\Delta)h(t-n\Delta)\Delta$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\Delta \longrightarrow \lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)h(t-n\Delta)\Delta$$

将 $y_f(t)$ 写成积分的形式，即得任意波形信号 $f(t)$ 作用于线性系统引起的零状态响应

$$y_f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$f(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分

记为 $y_f(t)=f(t)*h(t)$

西南交通大学

谢 谢 大 家！