第八章　相量法

第一部分　要点、考点归纳

§8-1　复数

1．复数的表示形式

代数形式：F=a+jb　　模：$|F| = \sqrt{a^2+b^2}$　　复角：$\theta = \arctan\frac{b}{a}$

三角形式：F=$|F|$（$\cos\theta+\sin\theta$）　模：$|F|$　复角：θ

指数形式：F=$|F|e^{j\theta}$　　模：$|F|$　复角：θ

极坐标形式：F=$|F|\angle\theta$　模：$|F|$　复角：θ

2．复数的运算

（1）复数的加减

采用代数形式比较方便。

若 $A_1 = a_1 + jb_1 \quad A_2 = a_2 + jb_2$

则 $A_1 \pm A_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$

即复数的加、减运算满足实部和实部相加减，虚部和虚部相加减。

复数的加、减运算也可以在复平面上按平行四边形法用向量的相加和相减求得。

（2）复数的乘除

采用指数形式或极坐标形式比较方便。

若 $A_1 = |A_1|e^{j\theta_1} = |A_1|\angle\theta_1 \quad A_2 = |A_2|e^{j\theta_2} = |A_2|\angle\theta_2$

则 $A_1 \cdot A_2 = |A_1|e^{j\theta_1} \cdot |A_2|e^{j\theta_2} = |A_1||A_2|e^{j(\theta_1+\theta_2)} = |A_1||A_2|\angle\theta_1+\theta_2$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{|A_1|e^{j\theta_1}}{|A_2|e^{j\theta_2}} = \frac{|A_1|\angle\theta_1}{|A_2|\angle\theta_2} = \frac{|A_1|}{|A_2|}e^{j(\theta_1-\theta_2)} = \frac{|A_1|}{|A_2|}\angle\theta_1+\theta_2$$

即复数的乘法运算满足模相乘，辐角相加。除法运算满足模相除，辐角相减。

§8-2　正弦量

1．正弦量的三要素

正弦量的一般形式，以电流为例：

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

三要素：I_m：最大值（振幅）≥ 0

ω：角频率 $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$ （弧/秒）

工频：$f = 50HZ$ （不同国家此值不同）

φ：初相角或初相位，$t = 0$ 时的相位角，可正、可负

2．正弦量的有效值

设：$i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi)$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \sqrt{I_m^2 \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1+\cos 2(\omega t+\varphi)}{2} dt}$$

$$= \sqrt{I_m^2 \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad 即：I_m = \sqrt{2}I$$

同理：$u = \dfrac{u_m}{\sqrt{2}}$ 即：$u_m = \sqrt{2}u$

3.（同频率）正弦量的相位差

用 θ 表示。

设：$u(t) = u_m\cos(\omega t + \varphi_u)$ $i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi_i)$

$$\theta = (\omega t + \varphi_u) - (\omega t + \varphi_i) = \varphi_u - \varphi_i$$

§8-3 相量法的基础

1．有效值相量：$\dot{I} = (Ie^{j\varphi_A} =)I\angle\varphi$

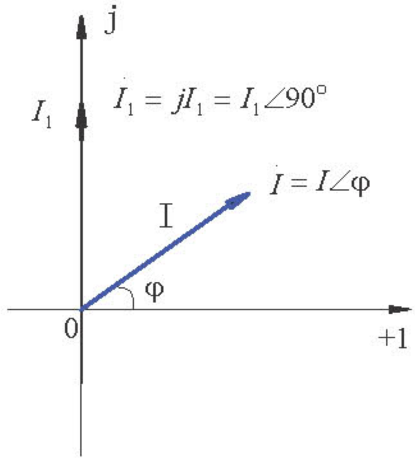
最大值相量：$\dot{I}_m = (I_m e^{j\varphi} =)I_m\angle\varphi$

2．相量的极坐标形式与直角坐标形式的转换

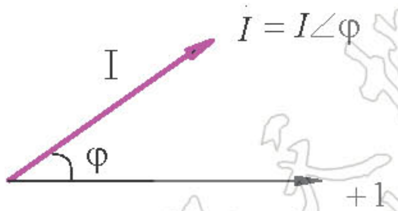
$$Ae^{j\varphi} = A\cos\varphi + jA\sin\varphi = a + jb$$

3．相量图

把相量表示在复平面上，就叫相量图。



常用简单形式：



相量图上可以进行“+、−”运算。平行四边形法则、多边形法则，均可用。

4．相量变换的性质

1）同频正弦量的代数和

$\alpha i_1(t)+\beta i_2(t) \Rightarrow \alpha \dot I_1+\beta \dot I_2$　　α、β 为实数

2）正弦量的微分

$\frac{di}{dt} \Rightarrow j\omega \dot I$　　　　$\frac{d^n i}{dt^n} \Rightarrow (j\omega)^n \dot I$

3）正弦量的积分

$\int i_{(t)}dt \Rightarrow \frac{1}{j\omega}\dot I$　　　　$\int\ldots\int i_{(t)}dt\ldots dt \Rightarrow \frac{1}{(j\omega)^n}\dot I$

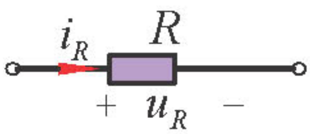
§8-4　电路定律的相量形式

1．基尔霍夫定律的相量形式：$\sum \dot I = 0$　$\sum \dot U = 0$

2．线性元件 VAR 的相量形式：

1）线性电阻

①相量形式 VAR：

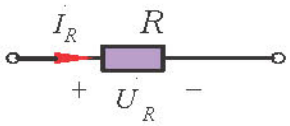


$u_R(t) = Ri_R(t)$ 进行相量正变换得：$\dot U_R = R\dot I_R = RI_R\angle\varphi_i$ 。也满足欧姆定律

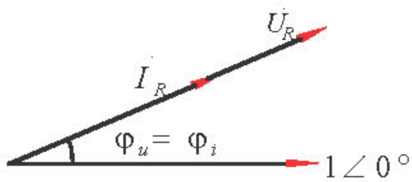
$i_R(t) = Gu_R(t)$ 进行相量正变换得 $\dot{I}_R = G\dot{U}_R$

由此可得：$\begin{cases} U_R = RI_R \\ \varphi_u = \varphi_i \end{cases}$

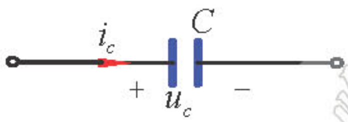
② 相量模型



③ 相量图



2）线性电容：



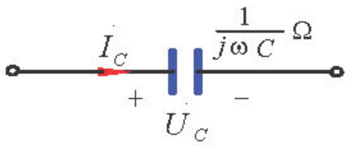
$$i_c(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

①VAR 的相量形式：

$\dot{I}_C = j\omega c\dot{U}_c = \omega cU_c\angle(\varphi_u + 90°)$ 或 $\dot{U}_c = \dfrac{1}{j\omega c}\dot{I}_C$　　$\dfrac{1}{j\omega c}$ 单位：Ω

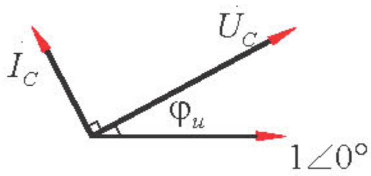
由此可得：$\begin{cases} I_C = \omega CU_C \text{或者} U_C = \dfrac{1}{\omega C}I_C \\ \varphi_i = \varphi_u + 90° \text{电流超前电压} 90° \end{cases}$

② 相量模型：

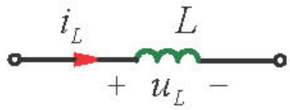


显然有：$\begin{cases} \dot{I}_{cm} = j\omega c\dot{U}_{cm} \\ I_{cm} = \omega c U_{cm} \end{cases}$

③ 相量图：



3）线性电感

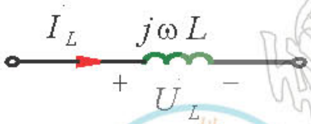


$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt}$$

①相量形式　　取相量变换 $\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}_L$ 或 $\dot{I}_L = \dfrac{1}{j\omega L}\dot{U}_L$

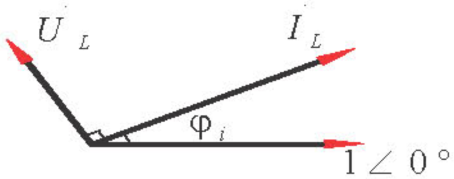
由此可得：$\begin{cases} U_L = \omega LI_L \text{或者} I_L = \dfrac{1}{\omega L}U_L \\ \varphi_u = \varphi_i + 90^\circ \end{cases}$　　电压超前电流 90°

②相量模型



显然有：$\begin{cases} \dot{U}_{Lm} = j\omega L\dot{I}_{Lm} \\ U_{Lm} = \omega LI_{Lm} \end{cases}$

③相量图



第二部分　例题

例 1　设 $F_1 = 3 - j4$，$F_2 = 10\angle 135^\circ$。求 $F_1 + F_2$ 和 $\dfrac{F_1}{F_2}$。

解： 求复数的代数和用代数形式：

$$F_2 = 10\angle 135^\circ = 10(\cos 135^\circ + j\sin 135^\circ) = -7.07 + j7.07$$

$$F_1 + F_2 = 3 - j4 + (-7.07 + j7.07) = -4.07 + j3.07$$

转换为指数形式：

$$\arg(F_1+F_2)=\arctan(\frac{3.07}{-4.07})=143^\circ$$

$$|F_1+F_2|=\sqrt{(4.07)^2+(3.07)^2}=5.1$$

即有：$F_1+F_2=5.1\angle 143^\circ$

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{3-j4}{}=\frac{(3-j4)(-7.07-j7.07)}{(-7.07+j7.07)((-7.07-j7.07))}=-0.495+j0.071$$

例 2 求 $i_1=I_{m1}\cos(\omega t+\frac{3}{4}\pi)\mathrm{A}$ 和 $i_L=I_{m2}\cos(\omega t-\frac{1}{2}\pi)\mathrm{A}$ 的相位差。

解： $\theta=\frac{3}{4}\pi-(-\frac{\pi}{2})=\frac{5}{4}\pi=225^\circ \quad \theta'=-2\pi+\frac{5}{4}\pi=-\frac{3}{4}\pi=-135^\circ$

i_1 滞后 i_L 135°。

例 3 求 $i_1(t)=I_{m1}\cos(1000t-60^\circ)$ 和 $i_L(t)=I_{m2}\sin(1000t+150^\circ)$ 的相位差。

解： 先变成同样形式的函数

$i_1(t)=I_{m1}\cos(1000t-60^\circ)=I_{m1}\sin(1000t-60^\circ+90^\circ)=30^\circ$ 也可以把 sin 变成 cos

$\theta=\varphi_1-\varphi_2=30^\circ-150^\circ=-120^\circ \quad i_1$ 滞后 $i_L 120^\circ$ or i_L 超前 $i_1 120^\circ$。

例 84 求 $u=\sqrt{2}\cdot 5\sin(\omega t+30^\circ)$ 和 $i=-\sqrt{2}\cdot 3\sin(\omega t-30^\circ)$ 的相位差。

解： 先把 i 变成正的。（为了使 $|\varphi'|\le\pi$，当 $\varphi>0$ 时取 -180°；当 $\varphi<0$ 时，取 180°。）

$i=\sqrt{2}\cdot 3\sin(\omega t-30^\circ+180^\circ) \qquad \theta=\varphi_u-\varphi_i=30^\circ-150^\circ=-120^\circ$

电压滞后电流 120°，或电流超前电压 120°

例 5 已知两个同频正弦电流分别为 $i_1=10\sqrt{2}\cos(314t+\frac{\pi}{3})A$，$i_2=22\sqrt{2}\cos(314t-\frac{5\pi}{6})A$，求（1）$i_1+i_2$；（2）$di_1/dt$；（3）$\int i_2 dt$。

解：（1）设 $i=i_1+i_2=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi_i)$，其相量为 $\dot{I}=I\angle\varphi_i$（待求），可得：

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=10\angle 60^\circ+22\angle -150^\circ=(5+j8.66)+(-19.05-j11)$$
$$=(-14.05-j2.34)=14.24\angle -170.54A$$

因此 $i=14.24\sqrt{2}\cos(314t-170.54^\circ)A$

（2）求 di_1/dt 可直接用时域形式求解，也可以用相量求解

$$di_1/dt=-10\sqrt{2}\times 314\sin(314t+60^\circ)=3140\sqrt{2}\cos(314t+150^\circ)$$

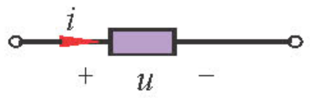
（3）$\int i_2 dt$ 的相量为

$$\frac{\dot{I}_2}{j\omega}=\frac{22\angle -150^\circ}{314\angle 90^\circ}=0.07\angle 120^\circ$$

例 6 讨论 R 、 L 、 C 上的 u ，i 之间的相位差及有效值之间的关系。

解： 设 $i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i)$

（1）

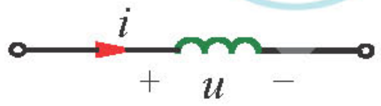


$$u(t)=iR=\sqrt{2}IR\sin(\omega t+\varphi_i)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi_u)$$

比较得： $U=IR$ （满足欧姆定律），

$\varphi_u=\varphi_i$ （同相）

（2）



$$u(t)=L\frac{di}{dt}=\sqrt{2}\omega LI\cos(\omega t+\varphi_i)$$
$$=\sqrt{2}\omega LI\sin(\omega t+\varphi_i+90^\circ)=\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_u)$$

（函数不同，应先变成相同的，再比较相位。）

比较得： $U=\omega LI$ （ωL 的量纲为“Ω”）

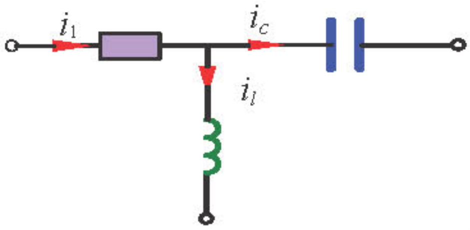
$\varphi_u=90^\circ+\varphi_i$ （电压超前电流 90°）

用对偶的方法直接说 C 上的结论：$L\rightarrow C$，$u\rightarrow I$，$I\rightarrow u$，$\varphi_u\rightarrow\varphi_i$，$\varphi_i\rightarrow\varphi_u$。

（3）由于 C 与 L 为对偶元件，

$$\begin{cases} I=\omega Cu & \omega C\text{的量纲是}\dfrac{1}{\Omega}=S \\ \varphi_i=90^\circ+\varphi_u & \text{电流超前电压}90^\circ \end{cases}$$

例 7 已知：$i_l=2\sin(\omega t+60^\circ)$、$i_c=2\sin(\omega t+30^\circ)$，问：$i_1=?$

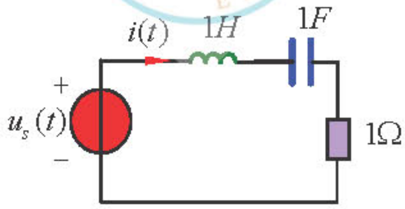


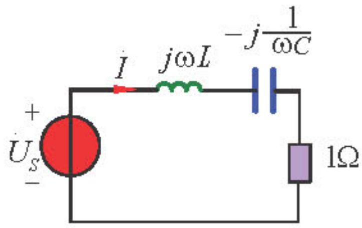
解： 由 $\sum \dot{I}=0$ 知 $\dot{I}_{1m}-\dot{I}_{Lm}-\dot{I}_{cm}=0$

$$\begin{aligned}\dot{I}_{1m}&=2\angle 60^\circ+2\angle 30^\circ=(2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2})+j(2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{1}{2})\\ &=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}+j(1+\frac{2}{2}\sqrt{3})\\ &=(1+\sqrt{3})+j(1+\sqrt{2})\\ &=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\angle 45^\circ\end{aligned}$$

$$i_1(t)=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\sin(\omega t+45^\circ)$$

例 8 $u_s(t)=\sqrt{2}\cdot 10\sin(1000t+30^\circ)$，求 $i(t)$。





解： 由 KVL 得：

$$j\omega L\dot{I}+\frac{1}{j\omega C}\dot{I}+R\dot{I}=\dot{U}_s\rightarrow jX_L\dot{I}+jX_C\dot{I}+R\dot{I}=\dot{U}_s$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_s}{R+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}}\rightarrow\dot{I}=\frac{\dot{U}_s}{R+j(X_L+X_C)}$$

$$R+j(X_L+X_C)=1+j(1000-\frac{1}{1000})=1+j1000=1000\angle 90^\circ$$

$$\dot{I}=\frac{10\angle 30^\circ}{1000\angle 90^\circ}=\frac{1}{100}\angle -60^\circ=10\angle -60^\circ \text{mA}$$

$$i(t)=\sqrt{2}10\sin(1000t-60^\circ)\text{mA}$$