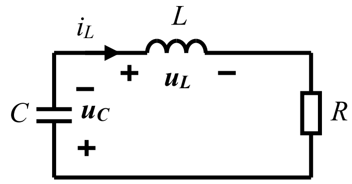
第十二章 二阶电路

12.1 二阶电路的零输入响应

12.1.1 RLC 串连电路



1. 建立关于 u_C 的电路方程

$$u_C + u_L + u_R = u_C + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + Ri_L = 0，\quad i_L = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{cases} LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0 \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0, i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0 \end{cases}$$

这是一个常系数线性齐次二阶微分方程。

2. 确定特解（稳态解）

$$u_{CP} = 0$$

3. 确定通解

特征方程为：

$$LCP^2 + RCP + 1 = 0$$

特征根为

$$P = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

所以u_C的通解为：

$$u_{Ch} = A_1\mathrm{e}^{P_1t} + A_2\mathrm{e}^{P_2t}$$

4. 写出全解

$$u_C = u_{Cp} + u_{Ch} = A_1\mathrm{e}^{P_1t} + A_2\mathrm{e}^{P_2t}$$

其中

$$P_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}},\quad P_2=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

5. 确定待定系数

由给定初始条件

$$u_C(0_+)=U_0=[A_1\mathrm{e}^{P_1t}+A_2\mathrm{e}^{P_2t}]|_{t=0_+}=A_1+A_2$$

$$i_L(0_+)=0=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0_+}=C[P_1A_1\mathrm{e}^{P_1t}+P_2A_2\mathrm{e}^{P_2t}]|_{t=0_+}=[A_1P_1+A_2P_2]C$$

即：

$$\begin{cases}A_1+A_2=U_0\\A_1P_1+A_2P_2=0\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}A_1=\dfrac{P_2U_0}{P_2-P_1}\\A_2=\dfrac{-P_1U_0}{P_2-P_1}\end{cases}$$

代入通解，并整理得零输入相应：

$$u_C=\frac{U_0}{P_2-P_1}(P_2\mathrm{e}^{P_1t}-P_1\mathrm{e}^{P_2t})$$

$$i_L=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{U_0CP_1P_2}{P_2-P_1}(\mathrm{e}^{P_1t}-\mathrm{e}^{P_2t})=\frac{U_0}{L(P_2-P_1)}(\mathrm{e}^{P_1t}-\mathrm{e}^{P_2t})$$

$$u_L=L\frac{di_L}{dt}=\frac{U_0}{P_2-P_1}(P_1\mathrm{e}^{P_1t}-P_2\mathrm{e}^{P_2t})$$

均为$t\geq 0$时，下同。

根据 R、L、C 的取值不同，其特征根有三种不同的形式。分别为不等实根、共轭根和重根。

12.1.2 电路不同参数值时的暂态过程分析(可跳过)

12.1.2.1 过阻尼状态 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}>0$（即$R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$）

$$u_C=\frac{U_0}{P_2-P_1}(P_2\mathrm{e}^{P_1t}-P_1\mathrm{e}^{P_2t})$$

在任一时刻，$u_C>0$，即换路后电容器始终处于放电状态，暂态过程是**非周期性放电**。电路为**过阻尼**。

$$i_L=\frac{Cp_1p_2U_0}{(P_2-P_1)}(\mathrm{e}^{P_1t}-\mathrm{e}^{P_2t})=\frac{U_0}{L(P_2-P_1)}(\mathrm{e}^{P_1t}-\mathrm{e}^{P_2t})$$

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{U_0}{L(P_2-P_1)}(\mathrm{e}^{P_1t}-\mathrm{e}^{P_2t})\right]=\frac{U_0}{P_2-P_1}(P_1\mathrm{e}^{P_1t}-P_2\mathrm{e}^{P_2t})$$

在$t=t_m=\frac{\ln(P_1/P_2)}{P_2-P_1}$时，$i_L$有极值，$u_L=0$；$t=t'_m=2t_m$处，$u_L$有极值。

若微分方程对应的特征方程有不等二负实根，电路为过阻尼状态，其零输入响应形式为：

$$f(t)=A_1\mathrm{e}^{P_1t}+A_2\mathrm{e}^{P_2t}$$

结合初始条件$f(0_+)$和$f'(0_+)$，可以确定 A_1、A_2，得出最后的结果。

12.1.2.2 欠阻尼状态 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}<0$（即$R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$）

令 $\delta=\frac{R}{2L}$，$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$：

$$\omega^2=\omega_0^2-\delta^2=\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2，\phi=arctan\frac{\omega}{\delta}$$

$$u_C=\frac{U_0\omega_0}{\omega}\mathrm{e}^{-\delta t}sin(\omega t+\phi)$$

$$i_L=-\frac{U_0}{\omega L}\mathrm{e}^{-\delta t}sin\,\omega\,t$$

$$u_L=\frac{U_0\omega_0}{\omega}\mathrm{e}^{-\delta t}sin(\omega t-\phi)$$

欠阻尼响应的波形是衰减振荡的波形，振荡频率为ω（P 的虚部），而振幅是按$\mathrm{e}^{-\delta t}$的指数衰减规律下降的，（其中δ为 P 的实部），直至衰减到零。在振荡过程中，L 与 C 都有反复的吸收能量、放出能量的过程，R 则一直耗能，直至将贮能耗尽。

若 $R=0$，则$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$为谐振频率，电路中各变量的变化曲线为**等幅振荡**，呈**无阻尼状态**。

12.1.2.3 临界阻尼 $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$p_1=p_2=p=-\delta$$

$$u_C=U_0(1+\delta t)\mathrm{e}^{-\delta t}$$

$$i_L=-\frac{U_0}{L}t\mathrm{e}^{-\delta t}$$

$$u_L=-U_0(1-\delta t)\mathrm{e}^{-\delta t}$$

仍由两项构成，第一项为指数衰减形式，从 A 衰减到零，第二项为一线性函数与指数衰减函数之乘积，其波形为从零上升到最大值而后又衰减到零。二者合成的波形是非振荡的波形。

12.1.3 二阶电路的零输入响应形式

① 当特征根$p_1 \neq p_2$ (不相等实根)时：

$$y(t) = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}$$

② 当特征根$p_1 = p_2^*$（共轭复根）时：

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega$$

$$y(t) = k e^{-\delta t} sin(\omega t + \varphi) = e^{-\delta t}(A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t)$$

③ 当特征根$p_1 = p_2 = p$（重根）时：

$$y(t) = (A_1 + A_2 t) e^{Pt}$$

12.2 二阶电路的零状态响应和全响应

零状态响应形式与零输入响应相同。

二阶电路的全响应=零输入响应+零状态响应。

12.3 二阶电路的阶跃响应和冲激响应

同理。

*如无特别声明使用经典法，二阶电路均可用运算电路求解。