第一节

第三章

随机变量及其分布

一、随机变量及分布函数

1. 随机变量

Def. 设E为随机试验，其样本空间$S=\{e\}$，若对于每一个$e\in S$，均有一个实数$X(e)$与之对应，这样一个定义在样本空间上的单值实函数

$$X = X(e)$$

称为随机变量，值域为$R_x \subset (-\infty,+\infty)$。

一、随机变量及分布函数

2. 分布函数

Def. 设X是一个随机变量，x是任意实数，函数

$$F(x) = P(X \le x)$$

称为X的分布函数。

一、随机变量及分布函数

3. 分布函数的性质

1） $\forall x_1 \le x_2,\ F(x_1) \le F(x_2)$

2） $0 \le F(x) \le 1$

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \qquad F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

3） 右连续性

$$F(x+0) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} F(x+\varepsilon) = F(x)$$

4）$\forall x_1 \le x_2,\ P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

课 堂 练 习

• 下列函数能否作为分布函数？为什么？

$$(1)F(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ \dfrac{1}{2} & -2\le x<0, \\ 2 & x\ge 0 \end{cases} \qquad (2)F(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ \sin x & 2\le x<\pi \\ 1 & x\ge \pi \end{cases}$$

$$(3)F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \sin x & 0\le x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & x\ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \qquad (4)\ F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x+\frac{1}{3} & 0\le x<\dfrac{1}{2} \\ 1 & x\ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

二、离散型随机变量

- 离散型随机变量定义
- 离散型随机变量的概率分布
- 离散型随机变量的分布函数
- 离散型随机变量分布律的求法

二、离散型随机变量

1. 定义

若随机变量 X 的可能取值仅有有限或可列多个，则称此随机变量为离散型随机变量。

二、离散型随机变量

2. 离散型随机变量的概率分布

定义 设离散型随机变量X的可能取值为：$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$

称： $P\{X = x_k\} = p_k$， $k = 1,2,\cdots$

为X的概率分布或分布律，其中p_k 满足条件：

（1）非负性 $p_k \geq 0,\ k = 1,2,\cdots$

（2）规范性 $\sum_k p_k = 1$

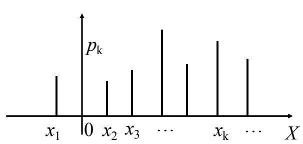
注：概率分布有三种表示方式

(1) 分析表达式： $p_k = P\left(X = x_k\right), p_k \geq 0, \sum p_k = 1$

(2)表格或矩阵表达式：

$$\begin{array}{c|ccccc} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ \hline P(X = x_k) & p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{array} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}$$

(3)图形表达式：



二、离散型随机变量

3. 离散型随机变量的分布函数

若 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ ，则

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ p_1 & x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & x_2 \leq x < x_3 \\ \cdots & \cdots \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} & x_{n-1} \leq x < x_n \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + p_n = 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

注1 离散型随机变量X的分布函数$F(x)$在$X = x_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$处有跳跃，其跳跃值为$p_k = P(X = x_k)$;

注2 离散型随机变量X的分布函数$F(x)$的图形为一阶梯形曲线;

注3 如果随机变量X取k个可能取值$x_1, x_2, \cdots, x_k$,则应将$(-\infty, +\infty)$分为$k+1$个区间：$(-\infty, x_1), [x_1, x_2), \cdots, [x_k, +\infty)$,再分别求$F(x)$的值。

二、离散型随机变量

4. 确定分布律的步骤

Step 1: 先确定X的全部可能取值x_k, k=1, 2, …;

Step 2: 具体求出事件{X= x_k}的概率，即p_k 。

例 设r. v. $X \sim F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.4 & -1 \leq x < 1 \\ 0.8 & 1 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$

试求X的概率分布。

解：(1) $F(x)$的间断点为$-1,1,3$，即为X的可能取值；

(2) $p_1 = P(X=-1) = 0.4 - 0 = 0.4$

$p_2 = P(X=1) = 0.8 - 0.4 = 0.4$

$p_3 = P(X=3) = 1 - 0.8 = 0.2$

即所求为

X	-1	1	3
p_k	0.4	0.4	0.2

三、连续型随机变量

- 连续型随机变量的定义
- 概率密度的性质
- 几点说明

三、连续型随机变量

1. 定义

如果对于随机变量X的分布函数$F(x)$，

存在非负函数$f(x)$，使对于任意实数均有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

则称X为连续型随机变量，其中函数$f(x)$

称为X的概率密度函数，简称概率密度。

三、连续型随机变量

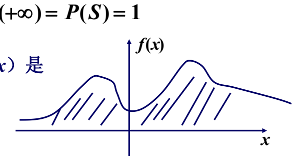
2. 概率密度的性质

1) 非负性：$f(x) \geq 0 \quad x \in (-\infty, +\infty)$

2) 规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

即 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) = P(S) = 1$

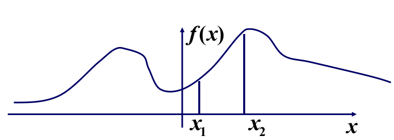
注：这两个性质是判断f（x）是密度函数的充要条件！



三、连续型随机变量

3) $\forall x_1 \leq x_2$,

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$



三、连续型随机变量

4) 当$F(x)$在x点可导时，$f(x) = F'(x)$

当$F(x)$在x点不可导时，可令$f(x) = 0$.

表明密度函数$f(x)$可与分布函数$F(x)$相互确定。

5) $f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{P\{x < X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}$

$\Rightarrow P\{x < X \leq x + \Delta x\} \approx f(x) \cdot \Delta x$

三、连续型随机变量

3. 几点说明

1） $P\{X=c\}=0$

2） $P\{a<X\le b\}=P\{a\le X<b\}=P\{a<X<b\}$

$=P\{a\le X\le b\}=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

3) $A=\phi \Rightarrow P(A)=0$

例题—1

设随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

试确定常数k，并求X的分布函数$F(x)$及$P(X>0.1)$。

解：由于 $1=\int_0^{+\infty} ke^{-3x}dx=-\frac{k}{3}e^{-3x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{k}{3}$

故 $k=3$

所以 $f(x)=\begin{cases} 3e^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

当$x\le 0$时， $F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt=0$

当$x>0$时， $F(x)=\int_0^x 3e^{-3t}dt=-e^{-3t}\Big|_0^x$

$=1-e^{-3x}$

即 $F(x)=\begin{cases} 1-e^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

故 $P(X>0.1)=1-P(X\le 0.1)$

$=1-F(0.1)=1-(1-e^{-0.3})=0.7408$

例题—2

设随机变量X的密度为

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求分布函数$F(x)$及$P\left(\frac{1}{2}<X\le\frac{3}{2}\right)$。

解： 当$x<0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^x 0dt=0$

当$0\le x<1$时，$F(x)=\int_{-\infty}^0 0dt+\int_0^x tdt=\frac{x^2}{2}$

当$1\le x<2$时，

$F(x)=\int_{-\infty}^0 0dt+\int_0^1 tdt+\int_1^x (2-t)dt$

$=-\frac{x^2}{2}+2x-1$

当 $x \ge 2$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{1}tdt+\int_{1}^{2}(2-t)dt+\int_{2}^{x}0dt=1$$

所以 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{2} & 0\le x<1\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$

故 $P\left(\dfrac{1}{2}<X\le\dfrac{3}{2}\right)=F\left(\dfrac{3}{2}\right)-F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$

课 堂 练 习

设 $X\sim f(x)$，且 $f(-x)=f(x)$，$F(x)$是 X 的分布函数，

则对任意实数 $a>0$，有(②)

① $F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$　② $F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$

③ $F(-a)=F(a)$　④ $F(-a)=2F(a)-1$

第三章

第二节

常见分布

离散型随机变量的

常见分布

Bernoulli 试验

设随机试验E的结果只有两个——A或$\overline{A}$,

且$P(A)=p, P(\overline{A})=1-p=q(0<p<1)$,

将E独立地重复进行n次，则称这一串重复的独立试验为n重$Bernoulli$试验.

1. Bernoulli 分布（两点分布）

（1） $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$， $k=0,1$ $(0<p<1)$

X	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

（2） $$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-p & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

2. Binomial 分布（二项分布）

（1） $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\cdots,n$

X服从参数为n,p的二项分布，记为$X\sim B(n,p)$。

特别，$B(1,p)$ —— 两点分布

（2） $F(x)=\sum\limits_{0\le k\le x}P(X=k)=\sum\limits_{0\le k\le x}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

问题：n重贝努利试验中事件A发生的次数

例题-1

某厂自称产品的次品率不超过0.5%，经抽样检查，任抽200件产品就查出了5件次品，试问上述的次品率是否可信?

解：如果产品的次品率为0.005，随机变量X表示任意抽200件产品中的次品数，则$X\sim B(200,0.005)$

$$P(X=5)=C_{200}^5(0.005)^5(0.995)^{200-5}\approx 0.00298$$

其概率非常小，根据实际推断原理，次品率不超过0.5%是不可信的。

3. Geometric分布（几何分布）

（1） $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}, \quad k=1,2,3,\cdots$

X服从几何分布，记为$X\sim Ge(p)$.

（2） 几何分布具有无记忆性，即：

$$P(X>m+n|X>m)=P(X>n)$$

4. 负二项分布（Pascal 分布）

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r, \quad k=r,r+1,\cdots\cdots$$

记为$X\sim Nb(r,p)$.

- X为独立重复的Bernoulli试验中，事件A "第r次出现" 时的试验总次数

注 意

（1）二项随机变量是独立0−1 随机变量之和

（2）负二项随机变量是独立几何随机变量之和

例 题 -2

一张英语试卷，有10道选择填空题，每题有4个答案，只有1个是正确答案。某同学投机取巧，随意填空，试问他至少填对6题的概率是多大?

解：设r. v. X表示"猜对的题数"，则

$$X\sim B\left(10,\frac{1}{4}\right)$$

$$P(X\ge 6)=\sum_{k=6}^{10}C_{10}^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}\approx 0.0197$$

课 堂 练 习

巴拿赫火柴盒问题 某数学家有两盒火柴，每盒有n根火柴，每次用火柴时他在两盒中任取一盒并从中任取1根。试求他首次摸到空盒时另一盒中还有r根火柴（$1\le r\le n$）的概率；若第一次用完一盒火柴时（不是发现空），而另一盒中还有r根火柴（$1\le r\le n$）的概率。

5. Poisson分布（泊松分布）

1）$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0,1,2,\cdots$

$\lambda>0$为常数，记作$X\sim\pi(\lambda)$，或$X\sim P(\lambda)$;

2）$F(x)=\sum_{0\le k\le x}\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

应用模型：

描述大量独立试验中稀有事件A出现次数的分布模型.

例 题 - 3

寿命保险问题 设在保险公司里有2500个同一年龄和同社会阶层的人参加了人寿保险。在一年里每个人死亡的概率为0.002，每个参加保险的人在每年一月一日付12元保险费，而死亡时家属可到保险公司领取赔付费2000元。试问：（1）“一年内保险公司亏本”（记为A）的概率是多少？（2）“一年内保险公司获利不少于10000元”（记为B）的概率是多少？

解：每年保险公司收入为2500×12=30000元，

设X为2500人在一年中死亡的人数，若A发生，

则有 $2000X>30000$

即 $X>15$（人）

由于 $X \sim B(2500, 0.002)$

$$P(X>15)=\sum_{k=16}^{2500} C_{2500}^{k}(0.002)^{k}(0.998)^{2500-k} \approx 0.000069$$

(2) B发生$\Rightarrow 30000-2000X \geq 10000 \Rightarrow X \leq 10$

$$P(X \leq 10)=\sum_{k=0}^{10} C_{2500}^{k}(0.002)^{k}(0.998)^{2500-k} \approx 0.986305$$

即保险公司获利不少于10000元的概率在98%以上。

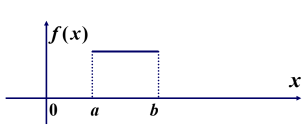
连续型随机变量的

常见分布

1. 均匀分布

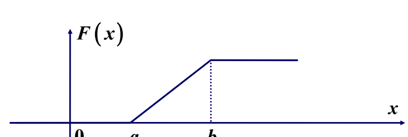
1） $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

记作 $X \sim U(a,b)$



特别，$U(0,1)$称为标准均匀分布。

2）$F(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x>b \end{cases}$



3） $\forall (c, c+l) \subset (a,b)$,

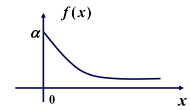
$$P(c<X<c+l)=\int_c^{c+l} f(x)dx = \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a}dx = \frac{l}{b-a}$$

即 X取值于(a,b)中任一小区间内的概率只与小区间长度有关，而与小区间位置无关。

故 均匀分布常用来描述在区间上"等可能投点"，"随机投点"的试验。

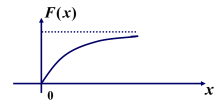
2. 指数分布

1） $f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$



记作$X \sim Exp(\alpha)$，或$X \sim Z(\alpha)$。

2） $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$



应用模型

一种重要的寿命分布，在可靠性理论及排队论中有重要应用。

例如：

（1） 保险丝，宝石轴承，陶瓷制品的寿命分布；

（2） 电子元件及设备的寿命分布；

（3） 一些动物的寿命分布；

（4） 电话中的通话时间，随机服务系统中的服务时间分布。

$$P\{X>s+t \mid X>s\}$$

$$=\frac{P\{(X>s+t)\cap(X>s)\}}{P\{X>s\}} = \frac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}}$$

$$=\frac{1-F(s+t)}{1-F(s)} = \frac{e^{-\alpha(s+t)}}{e^{-\alpha s}} = e^{-\alpha t} = P\{X>t\}$$

$$\Rightarrow P\{X>s+t \mid X>s\} = P\{X>t\}$$

—— 指数分布的无记忆性

例 题 -4

某仪器装有三只独立工作的同型号的电子元件，其寿命X(单位：小时)都服从同一指数分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

试求在仪器使用的最初200小时内至少有一只电子元件损坏的概率。

解：$X \sim Exp\left(\frac{1}{600}\right) \Rightarrow P(X\le 200)=\int_{-\infty}^{200} f(x)dx$

$$=\int_0^{200}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}dx = 1-e^{-\frac{1}{3}}$$

记$Y=\{$三只元件中使用寿命小于200h的只数$\}$,

显然$Y \sim B(3,p)$，$p=P(X\le 200)=1-e^{-\frac{1}{3}}$

故 $P\{Y\ge 1\}=1-P\{Y=0\} = 1-(1-p)^3$

$$=1-(1-1+e^{-\frac{1}{3}})^3 = 1-e^{-1}$$

3. 正态分布

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad -\infty<x<+\infty$

记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中 $\sigma>0$

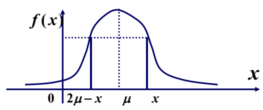
2) $f(x)$的图形特征:

a. $f(x)$关于μ对称, 即

$f(x)=f(2\mu-x)$

或 $\forall\ h>0$,

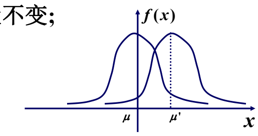
$P(\mu-h<X\le\mu)=P(\mu<X\le\mu+h)$



b. $\mu\uparrow\to$图形右移,形状不变;

$\mu\downarrow\to$图形左移,形状不变;

μ称为位置参数

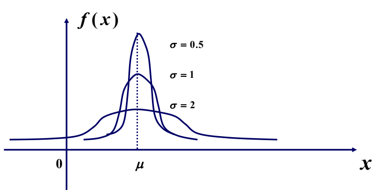


c. $f(\mu)=f_{\max}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

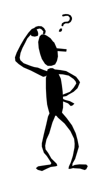
d. $\sigma\uparrow\to f(x)$平缓,位置不变;

$\sigma\downarrow\to f(x)$陡峭,位置不变;

σ称为尺度参数.



3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$



问题:

对于正态分布，如何计算概率？？

标准正态分布$N(0,1)$

- 密度: $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},x\in(-\infty,+\infty)$
- 分布函数: $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$
- 对称性: $\varphi(x)=\varphi(-x)$

  $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

$N(\mu,\sigma^2)\xrightarrow{\text{标准化}}N(0,1)$

定理 若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 分布函数为$F(x)$, 则

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$, 且 $F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

证明: $P\{Z\le x\}=P\left\{\dfrac{X-\mu}{\sigma}\le x\right\}=P\{X\le\mu+\sigma x\}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\mu+\sigma x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}d(\sigma y)$

$\left(令\ y=\dfrac{t-\mu}{\sigma}\right)$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\Phi(x)\Rightarrow Z\sim N(0,1)$$

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}$$

$$=P\left\{Z\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

推论　若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\forall a<b$

$$P\{a<X<b\}=F_X(b)-F_X(a)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

关于正态分布的计算

例. 司机在驾驶过程中看到前车刹车灯到减慢车速的反应时间（单位：秒）对于避免追尾事故至关重要的。研究发现，这个反应时间可用正态分布$N(1.25,0.46^2)$来描述。试问反应时间在1至1.75秒的概率是多少？

解：已知$X\sim N(1.25,0.46^2)$,则

$$P\{1<X<1.75\}=\Phi\left(\frac{1.75-1.25}{0.46}\right)-\Phi\left(\frac{1-1.25}{0.46}\right)$$

$$=\Phi(1.09)-\Phi(-0.54)$$

$$=0.5675$$

例.　将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内，调节器设定在d^0C，液体的温度$X(^0C)\sim N(d,0.5^2)$。

若要求保持液体的温度至少为80的概率不低于0.99，问d至少为多少？

解：由于$X\sim N(d,0.5^2)$，故

$$P(X>80)=1-\Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right)=\Phi\left(\frac{d-80}{0.5}\right)\ge 0.99$$

查表得$\frac{d-80}{0.5}\ge 2.33$

$\Rightarrow\ d>81.165$

课堂练习

1. 已知 $X\sim N(3, 2^2)$，且

   $P\{X>k\}=P\{X\le k\}$，则 $k=($ 3 $)$.

2. 设 $X\sim N(\mu, 4^2)$，$Y\sim N(\mu, 5^2)$，记

   $p_1=P\{X\le\mu-4\}$，$p_2=P\{Y\ge\mu+5\}$，则(①)

   ① 对任意的 μ，都有 $p_1=p_2$

   ② 对任意的 μ，都有 $p_1<p_2$

   ③ 只个别的 μ，才有 $p_1=p_2$

   ④ 对任意的 μ，都有 $p_1>p_2$

课堂练习

3. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则随 σ 的增大，

概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ （③）

① 单调增大　　② 单调减少

③ 保持不变　　④ 增减不定

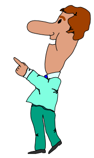
正态分布的 3σ 原则

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则

$$P\{|X-\mu|<\sigma\} = 0.6828$$

$$P\{|X-\mu|<2\sigma\} = 0.9545$$

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\} = 0.9973$$



第三节　第三章

随机变量函数的分布

一、离散型随机变量函数的分布

1. 例题

设随机变量X的分布律为

X	-2	-1	0	1	2
p_k	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

试求$Z=2X+1$, $Y=3X^2-1$的概率分布。

解：$Y=3X^2-1$ 的所有可能取值为1，2，11，

故　$P\{Y=-1\}=P\{X=0\}=0.4$

$P\{Y=2\}=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=0.2+0.2=0.4$

$P\{Y=11\}=P\{X=-2\}+P\{X=2\}=0.1+0.1=0.2$

即分布律为

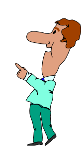
Y	-1	2	11
p_k	0.4	0.4	0.2

一、离散型随机变量函数的分布

2. 基本步骤

(1) 先求出$Y=g(X)$的所有可能取值 $y_1, y_2, \ldots$

(2) 计算Y取每个值y_k的概率；



二、连续型随机变量函数的分布

1. 例题

设 $r.v.\ X \sim f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{8} & 0<x<4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

试求 $r.v.\ Y=3X-2$ 的 $f_Y(y)$。

解：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(3X-2\le y)$

$$=P\left(X\le\frac{y+2}{3}\right)=F_X\left(\frac{y+2}{3}\right)\Rightarrow F_Y(y)=\int_{-\infty}^{\frac{y+2}{3}} f_X(x)dx$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=f_X\left(\frac{y+2}{3}\right)\cdot\left(\frac{y+2}{3}\right)'$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{y+2}{24}=\dfrac{y+2}{72} & -2<y<10 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

二、连续型随机变量函数的分布

2. 基本步骤

(1) 利用X的$F_X(x)$求出Y的分布函数$F_Y(y)$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=\int_{g(x)\le y} f_X(x)dx$$

(2) $F_Y(y)$对y求导,即得Y的概率密度, 即

$$f_Y(y)=F_Y'(y)$$

(3) 确定$y=g(x)$的值域，即使得$f_X(x)$非零的y值。

二、连续型随机变量函数的分布

3. 特殊情况 —— $g(x)$严格单增或单减

已知$r.v.X \sim f_X(x)\begin{cases} >0 & a<x<b \\ =0 & \text{其它} \end{cases}$

$y=g(x)$在(a,b)处处可导，且恒有 $g'(x)>0$(或 $g'(x)<0$)

记$x=h(y)$为$y=g(x)$的反函数，则 $Y=g(X)$的密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\left|h'(y)\right| & c<y<d \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中$c=\min\{g(a),g(b)\}, d=\max\{g(a),g(b)\}$。

二、连续型随机变量函数的分布

例1. 设随机变量$X\sim Exp(3)$，试求$Y=e^{2X}$的概率密度。

解：$y=g(x)=e^{2x} \Rightarrow g'(x)=2e^{2x}>0$

$g(0)=1, g(+\infty)=\infty$

且 $f(x)=\begin{cases} 3e^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

$x=\dfrac{1}{2}\ln y=h(y) \Rightarrow h'(y)=\dfrac{1}{2y} \qquad 1<y<+\infty$

故$Y=e^{2X}$的概率密度为

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\left|h'(y)\right|$$

$$=\begin{cases} 3e^{-\frac{3}{2}\ln y}\times\dfrac{1}{2y}=\cdots\cdots & y>1 \\ 0 & y\le 1 \end{cases}$$

二、连续型随机变量函数的分布

例2. 设随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,试证明X的线性函数$Y = aX + b(a \neq 0)$也服从正态分布。

证明：$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 即

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$y = g(x) = ax + b \Rightarrow g'(x) = a \neq 0$$

且 $g(-\infty) = -\infty$, $g(+\infty) = +\infty$

又 $x = h(y) = \frac{y-b}{a} \Rightarrow h'(y) = \frac{1}{a}$

故$Y = aX + b$的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} \times f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(|a|\sigma\right)}\exp\left\{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}\right\} \qquad -\infty < y < +\infty$$

即 $Y = aX + b \sim N\left(a\mu + b, \left(|a|\sigma\right)^2\right)$

特别地,取 $a = \frac{1}{\sigma}, b = -\frac{\mu}{\sigma}$ 即得

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

此即正态分布的标准化过程。

课 堂 练 习

1. 已知$r.v. X \sim f_X(x)$，试求 $Y = |X|$的密度函数。

2. 已知$r.v. X \sim f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2}, & 0 < x < \pi \\ 0, & 其他 \end{cases}$

试求$Y = \sin X$的密度函数$f_Y(y)$。

课 堂 练 习

3. 已知$r.v. X$的密度函数为

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{e^x + e^{-x}}, \qquad x \in R$$

记 $Y = \begin{cases} -1, & X < 0 \\ 1, & X \geq 0 \end{cases}$

试求Y的概率分布。

第三章

第四节

数学期望与方差

一、数学期望

- 数学期望的概念
- 随机变量函数的数学期望
- 数学期望的性质

---

1. 数学期望的概念

（1） 数学期望的定义

$$E(X)=\begin{cases}\sum\limits_{k} x_k \cdot P\left(X=x_k\right) & \text{—— 离散型}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx & \text{—— 连续型}\end{cases}$$

其中，级数和积分都是绝对收敛的！（**WHY？**）

---

1. 数学期望的概念

（2） 常见分布的数学期望

- 二项分布
- 泊松分布
- 均匀分布
- 指数分布
- 正态分布

二 项 分 布——$B(n,p)$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\cancel{k}\cdot\frac{n!}{\cancel{k}!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{np\cdot(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

$$=np\cdot\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}}$$

$$=np$$

$$\boxed{(p+q)^{n-1}=1}$$

泊 松 分 布——$\pi(\lambda)$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} k\cdot P(X=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

$$\boxed{e^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}}$$

均 匀 分 布

$$r.v.X \sim U[a,b] \Longrightarrow E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$$

$$=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{b+a}{2}$$

指 数 分 布

$$r.v.X \sim Exp(\alpha) \Longrightarrow E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$$

$$=\int_0^{+\infty} x\cdot \boxed{\alpha e^{-\alpha x}dx}=-\int_0^{+\infty} xd\left(e^{-\alpha x}\right)$$

$-d(e^{-\alpha x})$

$$=-x\cdot e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}$$

正 态 分 布 $N(\mu,\sigma^2)$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \qquad \left\langle t=\frac{x-\mu}{\sigma}\right\rangle$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma t+\mu}{\sqrt{2\pi}\cancel{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\cancel{\sigma}dt$$

$\varphi(t)$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot 0+\mu\cdot 1=\mu$$

例 题 – 1

在人群中普查某种疾病,要抽验N个人的血,有两种方法: 1)将每个人的血都分别去验,需N次; 2)按k人一组进行分组,把k个人的血样混合在一起化验,若呈阴性,就说明k个人的血都呈阴性; 若呈阳性,再分别化验. 假设每个人化验呈阳性的概率为p, 且各人的化验反应相互独立, 说明p很小时, 选取适当的k, 按第二种方法可以减小化验次数.

2. 随机变量函数的数学期望

已知随机变量X的分布，$Y=g(X)$的数学期望为

$$E(g(X))=\begin{cases}\sum_k g(x_k)\cdot P(X=x_k) & \text{—— 离散型}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot f_X(x)dx & \text{—— 连续型}\end{cases}$$

3. 数学期望的性质

(1) $E(c)=c$

(2) $E(aX)=aE(X)$

(3) $E(g_1(X)+g_2(X))=E(g_1(X))+E(g_2(X))$

例 题 – 2

某产品的次品率为0.1，检验员每天检验4次。每次随机地取10件产品进行检验，如发现其中的次品数多于1，就去调整设备。以X表示一天中调整设备的次数，试求$E(X)$.

关键：确定随机变量X的分布！

例 题 – 3

由自动生产线加工的某种零件的内径X（mm）服从正态分布$N(\mu,1)$，内径小于10或大于12的为不合格品，其余为合格品，销售每件合格品获利，销售每件不合格品亏损，设销售利润L（元）与销售零件的内径X的关系为

$$L=\begin{cases}-1 & X<10\\ 20 & 10\le X\le 12\\ -5 & X>12\end{cases}$$

试问平均内径μ取何值时，销售一个零件的平均利润最大？

二、方差与标准差

- 方差与标准差的概念
- 方差的基本性质
- 常见分布的方差

1. 方差的概念

（1） 方差的定义

定义 设X是一个随机变量，若$E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$存在，则称为$X$的方差，记为$D(X)$或$Var(X)$，$\sigma_X{}^2$，

即 $$D(X)=Var(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$$

$$D(X)\ge 0$$

$$\sigma_X=\sigma(X)\triangleq\sqrt{D(X)}$$ —— 均方差 / 标准差

1. 方差的概念

（2） 方差的计算

$$\begin{aligned}D(X)&=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}\\&=E\left\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\right\}\\&=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2\\&=E(X^2)-[E(X)]^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2\\ E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2\end{cases}$$

1. 方差的概念

$$\begin{cases}X\text{为离散型}\Rightarrow\ D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2\cdot p_k\\ \qquad\qquad\qquad\quad=\sum_{k=1}^{\infty}x_k{}^2p_k-(\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k)^2\\ X\text{为连续型}\Rightarrow\ D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)dx\\ \qquad\qquad\qquad\quad=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-\left[\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx\right]^2\end{cases}$$

2. 方差的基本性质

(1) $D(aX+b)=a^2D(X)$

证: $D(aX+b)=E\left\{\left[aX+b-E(aX+b)\right]^2\right\}$

$$=E\left\{a^2\left[X-E(X)\right]^2\right\}=a^2E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}=a^2D(X)$$

特别：当$a=0$时，$D(b)=0$

$$D(-X)=D(X)$$

$$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \Longrightarrow E(X^*)=0,\ D(X^*)=1$$

2. 方差的基本性质

(2) Chebyshev's inequality

设X为一随机变量，且$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，

则$\forall\varepsilon>0$，有 $P\left\{|X-\mu|\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

或 $P\left\{|X-\mu|<\varepsilon\right\}>1-\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

3. 常见分布的方差

$$E(X^2)=E(X^2-X)+E(X)$$

$$=E[X(X-1)]+E(X)$$

二 项 分 布——$B(n,p)$

$$E[X(X-1)]=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\cdot C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=n(n-1)p^2\boxed{\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}p^{k-2}(1-p)^{n-k}}=n(n-1)p^2$$

$$\Rightarrow E(X^2)=n(n-1)p^2+np$$

$$\Rightarrow D(X)=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np(1-p)$$

泊 松 分 布——$P(\lambda)$

$$E[X(X-1)]=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\boxed{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}}$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda^2$$

$$\Rightarrow E\left(X^2\right)=E[X(X-1)]+E\left(X\right)=\lambda^2+\lambda$$

$$\Rightarrow D(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

均 匀 分 布——$U(a,b)$

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx$$

$$=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$D(X)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

指 数 分 布—Exp(α)

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\boxed{\alpha e^{-\alpha x}dx}$$

$$-d(e^{-\alpha x})$$

$$=-x^2e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-\alpha x}dx$$

$$=\frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty}x\cdot\alpha e^{-\alpha x}dx=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{2}{\alpha^2}$$

$$D(X)=\frac{2}{\alpha^2}-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2=\frac{1}{\alpha^2}$$

正 态 分 布—$N(\mu,\sigma^2)$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(X-E(X))^2f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \qquad \left\langle\frac{x-\mu}{\sigma}=t\right\rangle$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2t^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[\cancel{-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]=\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2$$

几 何 分 布—Ge(p)

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}\ ,\ k=1,2,\ \ldots$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1} \qquad q=1-p$$

$$=p\sum_{k=1}^{\infty}\left(q^k\right)'=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)'$$

$$=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'=\frac{1}{p}$$

而 $E(X(X-1))=pq\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)q^{k-2}=pq\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)''$

$$=pq\cdot\frac{2}{(1-q)^3}=\frac{2q}{p^2}$$

$$\Rightarrow E(X^2)=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}=\frac{2-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

课 堂 练 习

设 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，则对任意常数 C，必有（ ④ ）.

(1) $E[(X-C)^2]=E(X^2)-C^2$

(2) $E[(X-C)^2]=E[(X-\mu)^2]$

(3) $E[(X-C)^2]<E[(X-\mu)^2]$

(4) $E[(X-C)^2]\ge E[(X-\mu)^2]$

三、矩

（1） $\mu_k=E(X^k)$

—— X 的 k 阶原点矩，简称 k 阶矩

（2） $\upsilon_k=E\left[(X-E(X))^k\right]$

—— X 的 k 阶中心矩

高阶矩存在 ⟹ 低阶矩存在