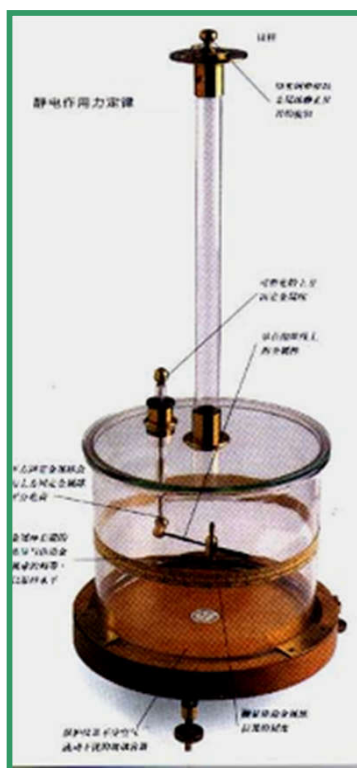




# 同学们好!

库仑(1736 ~ 1806)——法国工程师、物理学家。 1773年发表有关材料强度的论文，所提出的计算物体上应力和应变分布情况的方法沿用到现在。 1777年开始研究静电和磁力问题，发明扭秤，能够测量 $10^{-8}\text{N}$ 的微弱作用。 1779年对摩擦力进行分析，提出有关润滑剂的科学理论。1785-1789年，用扭秤测量静电力和磁力，导出著名的库仑定律。



扭秤



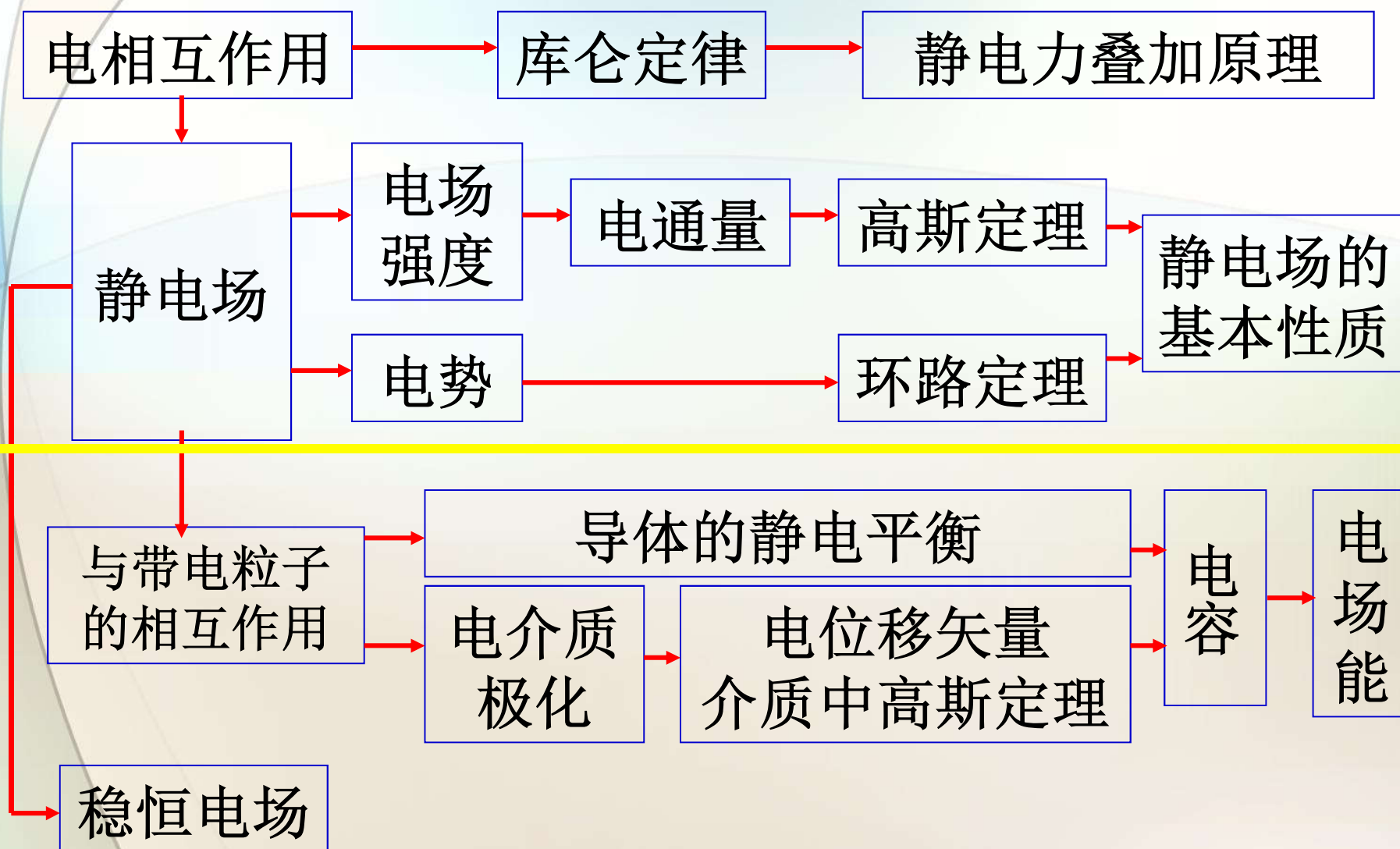
# 电磁学

## 本篇特点：

1. 研究对象不再是分离的实物，而是在空间连续分布的场，用空间函数（如  $\vec{E}$ ， $U$ ， $\vec{B}$  等）描述其性质。
2. 场不具有不可入性，所以叠加原理地位重要。
3. 更多地运用高等数学手段，如用求空间矢量的通量和环流的方法来描述场的规律。
4. 在四种基本相互作用中，电磁相互作用理论最成熟，所以电磁相互作用和电磁场是全篇重点。
5. 电相互作用是电磁学的基础，也是重点和难点。

# 第九章 真空中的静电场

## 结构框图



## 重点：

1. 两条基本实验定律：库仑定律，静电力叠加原理。
2. 两个基本物理量：电场强度  $\vec{E}$ ，电势  $U$ 。
3. 两条基本定理：静电场高斯定理，环路定理。  
揭示静电场基本性质。  
(有源场、保守场)

难点：求解  $\vec{E}$ ， $U$  分布；  
静电场的基本性质；

## § 9.1 两条基本实验定律 静电场

### 一. 电荷

1. 正负性 同种电荷相互排斥，异种电荷相互吸引

2. 量子性

$$Q = ne \quad e = (1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$$

盖尔曼提出夸克模型： $\pm \frac{1}{3}e$        $\pm \frac{2}{3}e$

3. 守恒性

在一个孤立系统中总电荷量是不变的。即在任何时刻系统中的正电荷与负电荷的代数和保持不变，这称为电荷守恒定律。

4. 相对论不变性

电荷的电量与它的运动状态无关

## 二. 库仑定律

相对观察者

中学：真空中，两个静止的点电荷间相互作用力

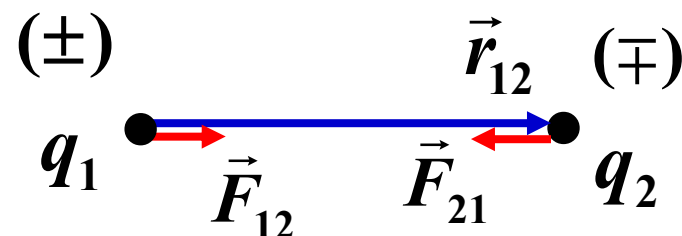
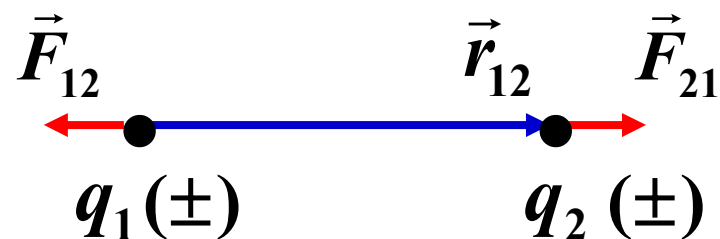
$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \text{静电力恒量} \quad k = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$$

写成矢量式

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \left( \frac{\vec{r}_{12}}{r} \right)$$

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{r^3} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_0$$

$\vec{r}_0$  是单位矢量



引入真空电容率(1986年推荐值):

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{r^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r}_0$$

目的: 使后面的大量电磁学公式不出现  $4\pi$  因子,

适用范围 : 目前认为在  $10^{-15} \text{m} - 10^7 \text{m}$  范围均成立。

原子核尺度:  $\alpha$  粒子散射实验, 以库仑定律为依据计算的结果与实验相符。

更大尺度: 需要天体物理证明。

表：库仑定律平方反比关系的实验验证

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^{2+\delta}};$$

$$\delta \leq 4 \times 10^{-2} (1785 \text{年}); \quad \delta \leq 2 \times 10^{-16} (1971 \text{年})$$

数量级： 四种基本相互作用相对强度

强力	电磁力	弱力	引力
1	$10^{-2}$	$10^{-13}$	$10^{-38}$

**例：**在卢瑟福  $\alpha$  粒子散射实验中， $\alpha$  粒子可达到离金原子核  $2 \times 10^{-14} \text{m}$  处，求它们相互斥力的大小。

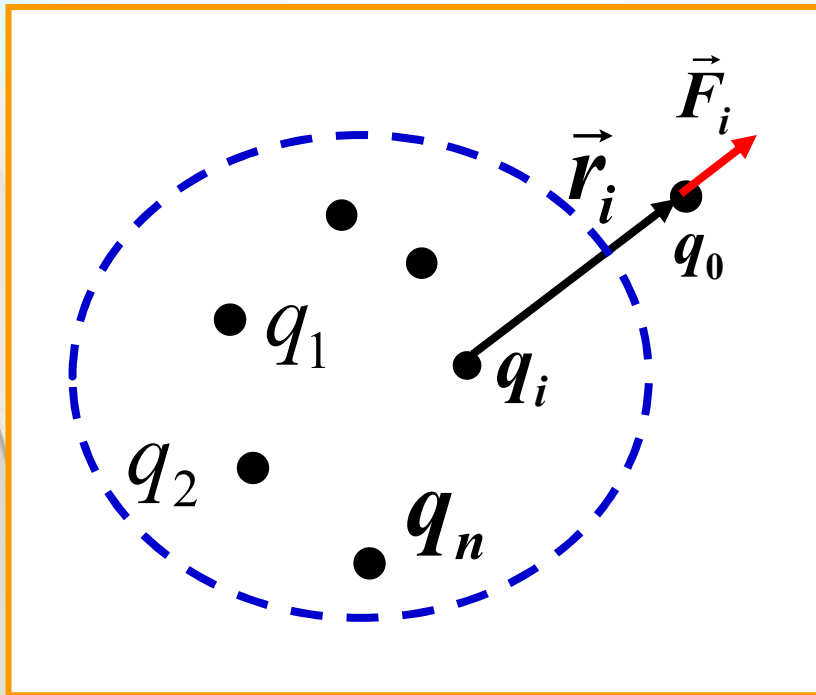
$$F = \frac{2e \times 79e}{4\pi \epsilon_0 r^2} \approx 91(\text{N})$$



### 三. 电场力叠加原理

两点电荷间相互作用力不因其它电荷的存在而改变。

点电荷系对某点电荷的作用等于系内各点电荷单独存在时对该电荷作用的矢量和。

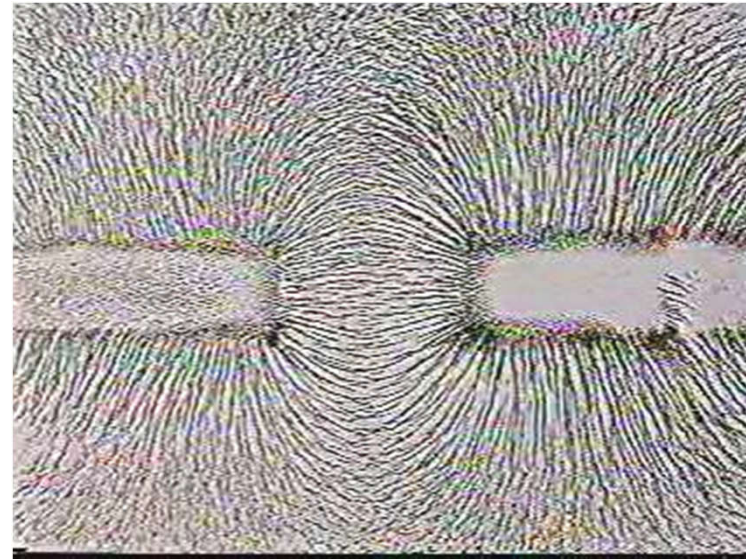
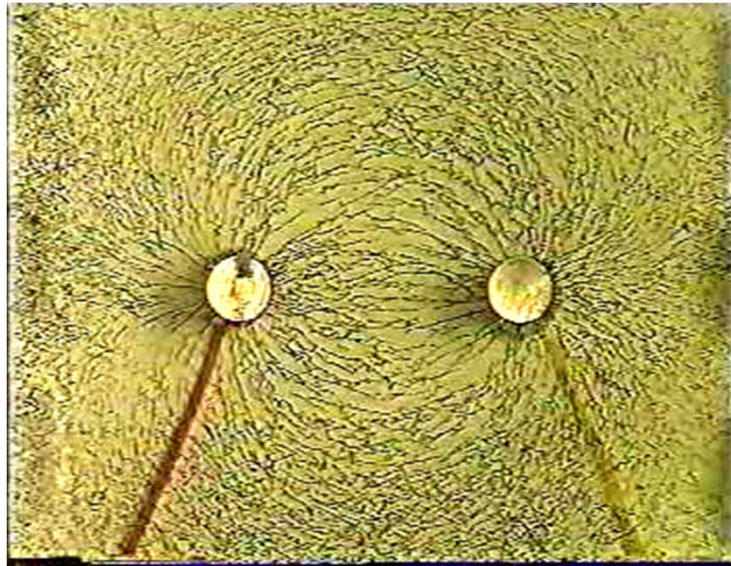


$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{q_0 q_i \vec{r}_i}{4\pi \epsilon_0 r_i^3}\end{aligned}$$

## 四. 静电场

- 早期：电磁理论是超距作用理论
- 后来：法拉第提出场的概念

英国法拉第：探索电磁力传递机制, 由电极化现象和磁化现象提出中间介质是发生电、磁现象的场所——“场”的概念.



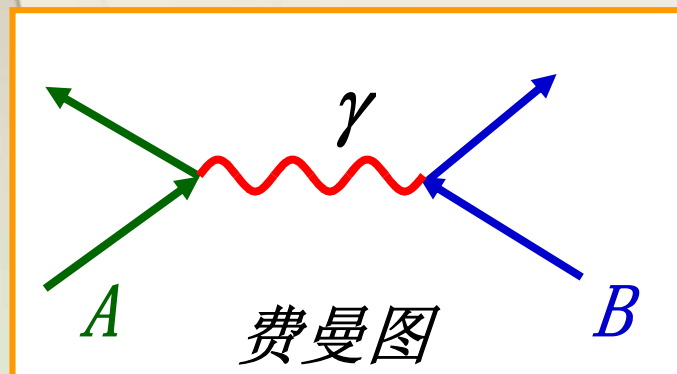
19 世纪:

英国麦克斯韦建立电磁场方程，定量描述场的性质和场运动规律。



20世纪:

爱因斯坦：相对论树立了“场”的实在地位。质能关系揭示出实物与场不能截然划分。场本身参与能量和动量交换，是物质存在的基本形式之一。



量子电动力学认为电磁场由光子组成，带电粒子通过交换光子相互作用。（传球模型）

## 静电场：

相对于观察者静止的带电体周围的电场

(1) 场中任何带电体都受电场力作用

—— 动量传递

(2) 带电体在电场中移动时，场对带电体做功

—— 能量传递

用  $\vec{E}$ 、 $U$  来分别描述静电场的上述两项性质

## § 9.2 电场强度

**场源电荷：**产生电场的点电荷、点电荷系、或带电体.

**检验电荷：**电量足够小的点电荷

↓                      ↓  
略去对场源电荷    与场点对应  
分布的影响

### 一、电场强度

**定义：**

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

**大小：**等于单位检验电荷在该点所受电场力

**方向：**与  $+q_0$  受力方向相同

**单位：**  $\text{N/C}$  ;  $\text{V/m}$  .



由静电场力叠加原理

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{\vec{F}_1}{q_0} + \frac{\vec{F}_2}{q_0} + \cdots + \frac{\vec{F}_n}{q_0}$$

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n$$

二、静电场强叠加原理：点电荷系电场中某点总场强等于各点电荷单独存在时在该点产生的场强矢量和。

$\vec{E}$ ：空间矢量函数

▲ 研究静电场也就是研究各种场源电荷的  $\vec{E}(\mathbf{r})$  分布

### 三、计算场强 $\vec{E}$ 分布的基本方法

计算  $\vec{E}$  方法:

- 由定义求.
- 由点电荷  $\vec{E}$  公式和  $\vec{E}$  叠加原理求.
- 由高斯定理求.
- 由  $\vec{E}$  与  $U$  的关系求.

基本方法: 已知场源电荷分布

将带电体看成  
许多点电荷的  
集合

点电荷  $\vec{E}$  公式  
和  $\vec{E}$  叠加原理

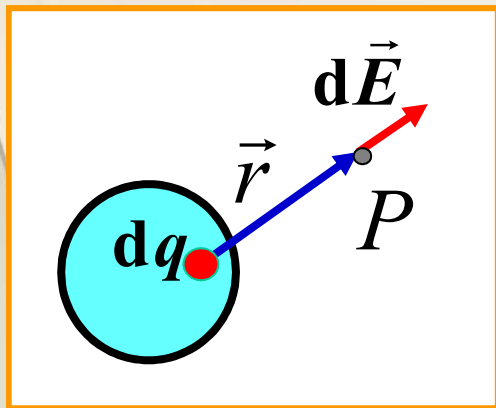
原则上可求出任  
意场源电荷 的  
分布  $\vec{E}$

(1) 点电荷  $\vec{E}$  公式

$$\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad \text{球对称分布}$$

(2) 点电荷系  $\vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \vec{r}_i$

(3) 连续带电体



$$d\vec{E} = \frac{\vec{r} dq}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$dq = \begin{cases} \lambda dl \\ \sigma dS \\ \rho dV \end{cases}$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

$$\begin{cases} E_x = \int dE_x \\ E_y = \int dE_y \\ E_z = \int dE_z \end{cases}$$



解题思路和方法：

- (1) 根据给定的电荷分布，恰当地选择电荷元和坐标系；
- (2) 应用点电荷电场强度的计算式，在选定的坐标系中写出某一电荷元 $dq$ 在P点的电场强度 $d\vec{E}$
- (3) 再根据电场强度叠加原理把每个电荷元产生的电场强度矢量相加或矢量积分，即可得到给定点的电场强度。

基本方法：已知场源电荷分布

选坐标系写出  
 $dp$

写出 $d\vec{E}$

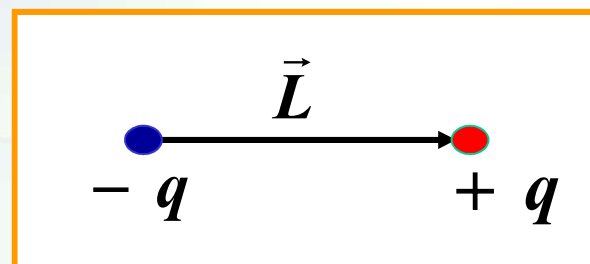
求和或积分得  
到  $\vec{E}$

## 例一 电偶极子的电场

电偶极子：相距很近的等量异号电荷

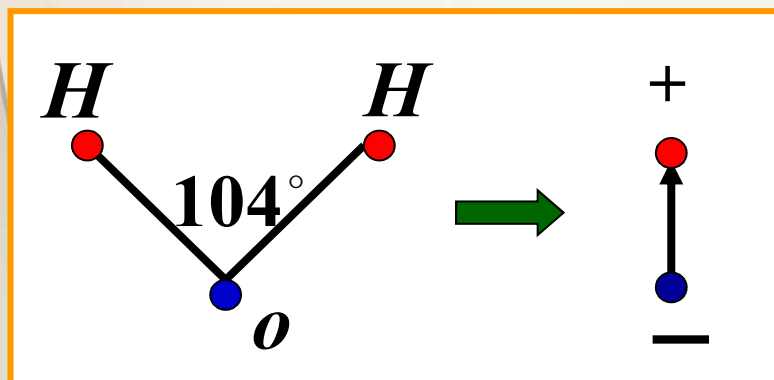
描述其性状—电偶极矩：

$$\vec{p} = q\vec{L}$$

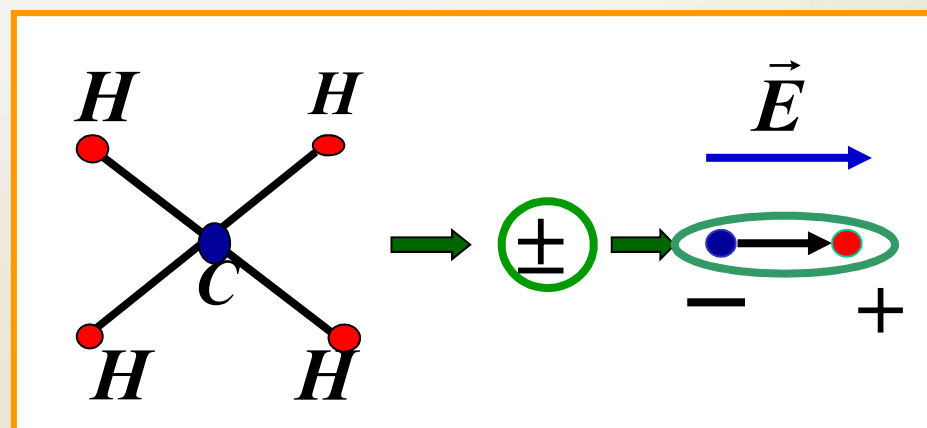


是由电介质极化，电磁波的发射、接收，

中性原子间相互作用.....总结出的理想模型。

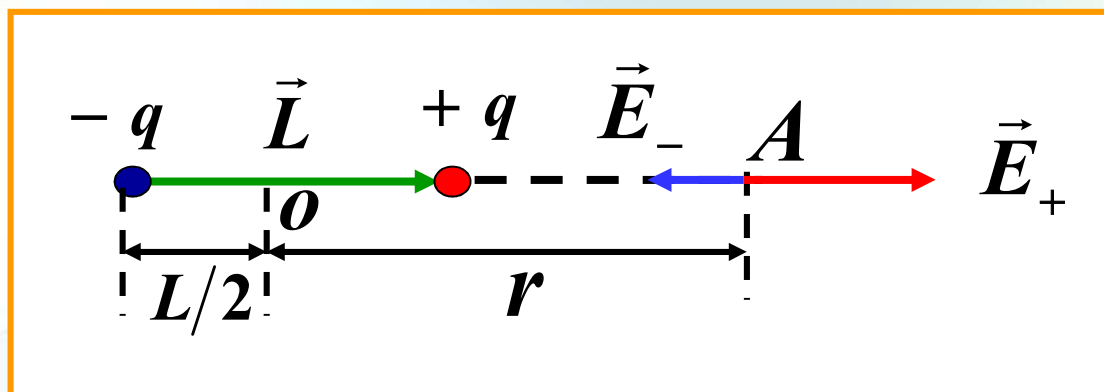


$H_2O$  分子



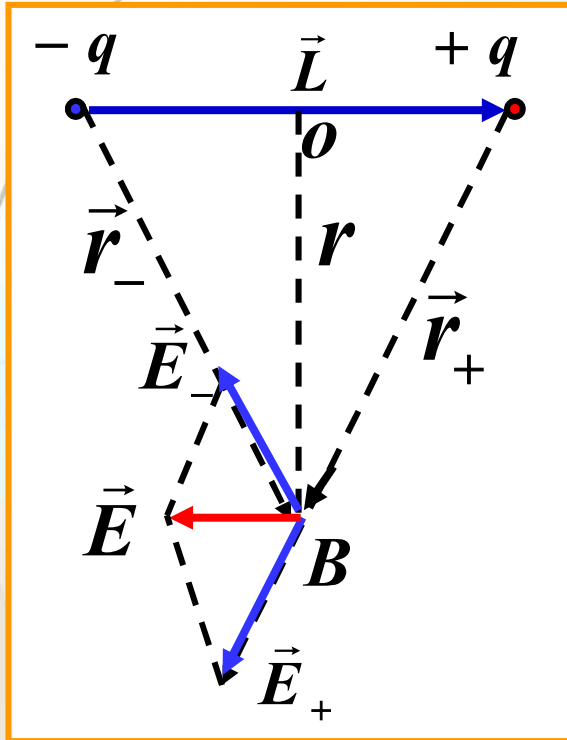
$CH_4$  分子

## 1. 轴线延长线上 $A$ 的场强



$$\begin{aligned} E &= E_+ + E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\left(r - \frac{L}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{L}{2}\right)^2} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2rL}{\left(r^2 - \frac{L^2}{4}\right)^2} \xrightarrow{r \gg L} \vec{E} = \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

## 2. 中垂面上 $B$ 的场强



$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q \vec{r}_+}{4\pi\epsilon_0 r_+^3} + \left(-\frac{q \vec{r}_-}{4\pi\epsilon_0 r_-^3}\right) \\ &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = -\frac{q \vec{L}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ &= -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\end{aligned}$$

## 3. 一般情况： 自行求解

## 例二. 均匀带电细棒的电场。

已知：电荷线密度  $\lambda$

场点  $P(a, \theta_1, \theta_2)$

求：  $\vec{E}_P$

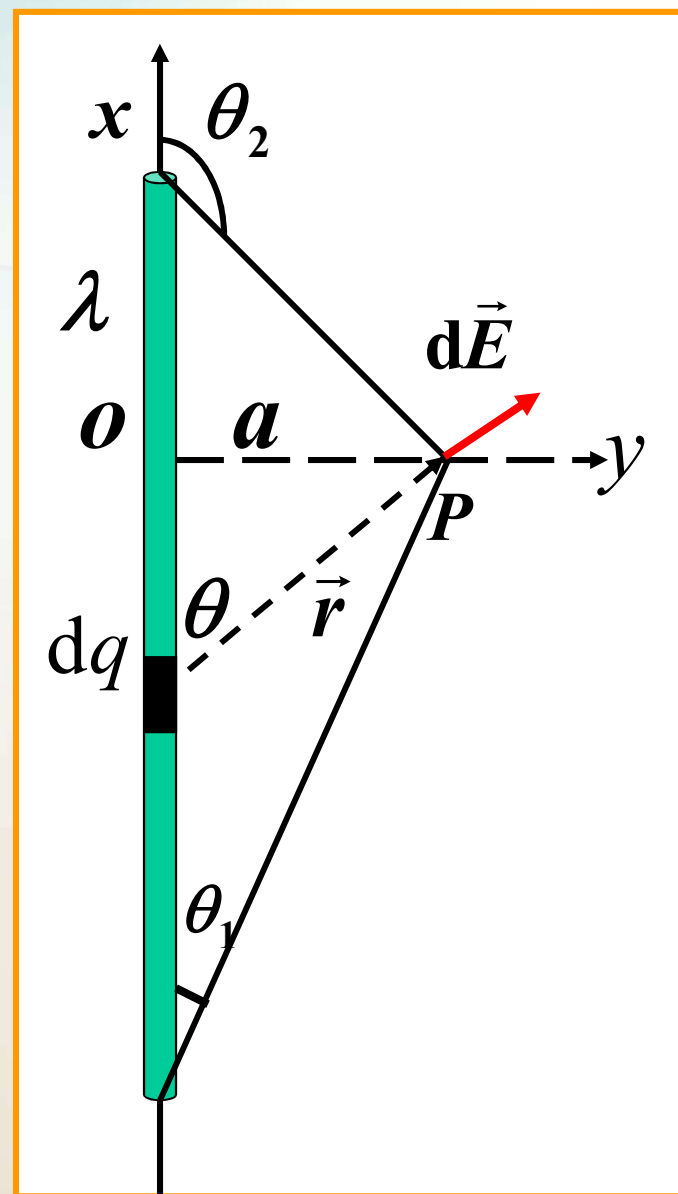
解：建立坐标系  $o-xy$

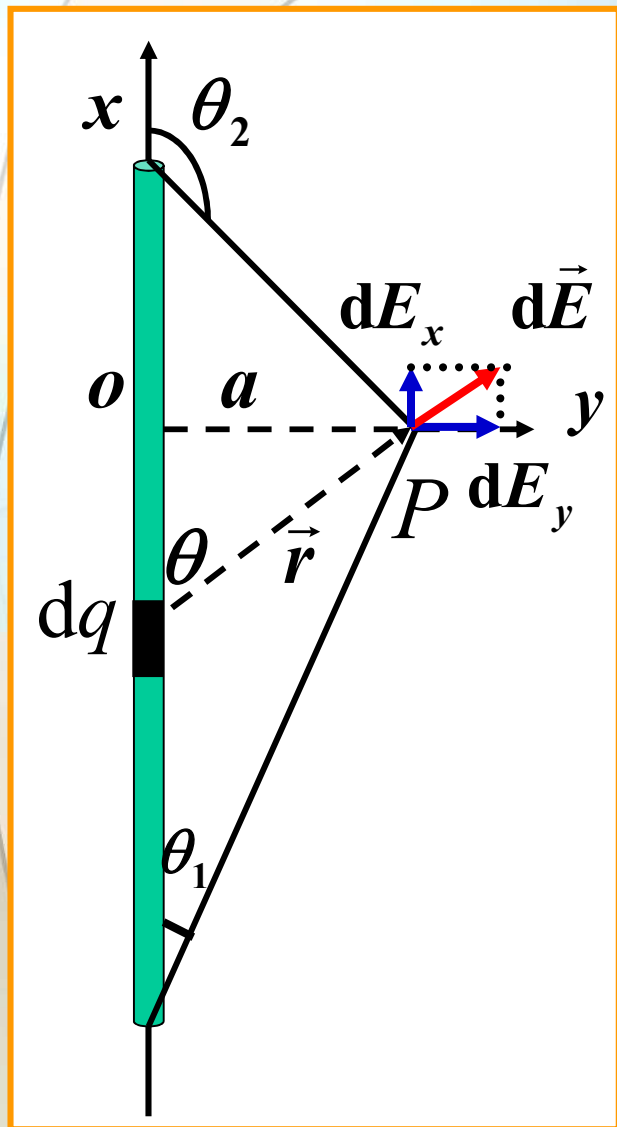
取：  $dq = \lambda dx$

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

大小  $dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

方向 与  $x$  夹  $\theta$  角





各电荷元在  $P$  点场强方向不同，  
应该用分量积分：

$$dE_x = dE \cos \theta$$

$$dE_y = dE \sin \theta$$

$$E_x = \int dE_x = \int \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

$$E_y = \int dE_y = \int \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta$$

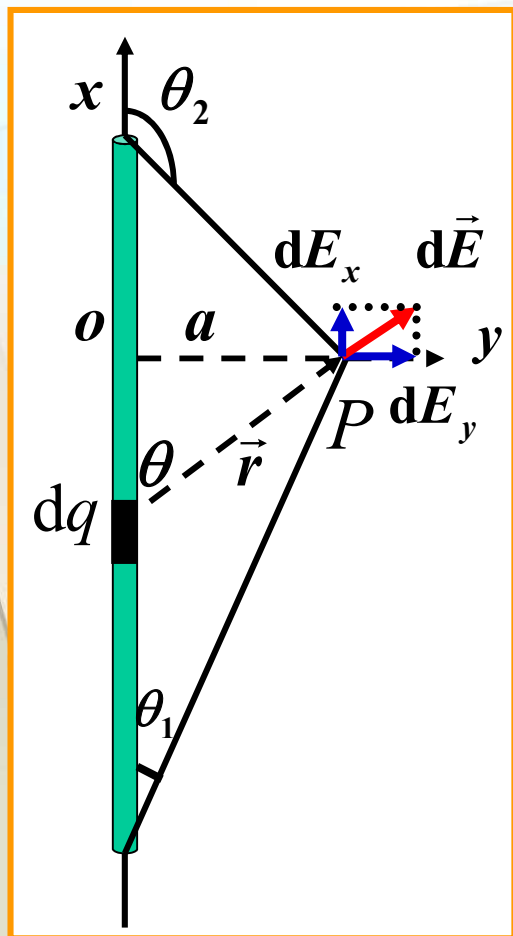
统一变量

$$x = -a \operatorname{ctg} \theta \quad dx = a \operatorname{csc}^2 \theta d\theta$$

$$r^2 = a^2 + x^2 = a^2 \operatorname{csc}^2 \theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$



得:  $E_P = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$

与 \$+x\$ 夹  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{E_y}{E_x}$

讨论: 对靠近直线场点如何?

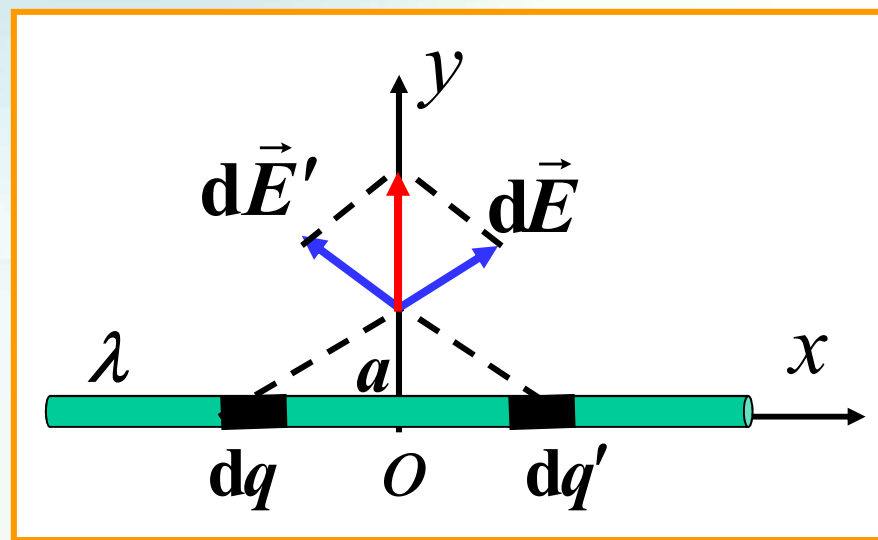
$a \ll \text{棒长}$ .  $\theta_1 \approx 0$ .  $\theta_2 \approx \pi$

$$E_x = 0 \quad E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

即理想模型—无限长带电直线场强公式：

由对称性：

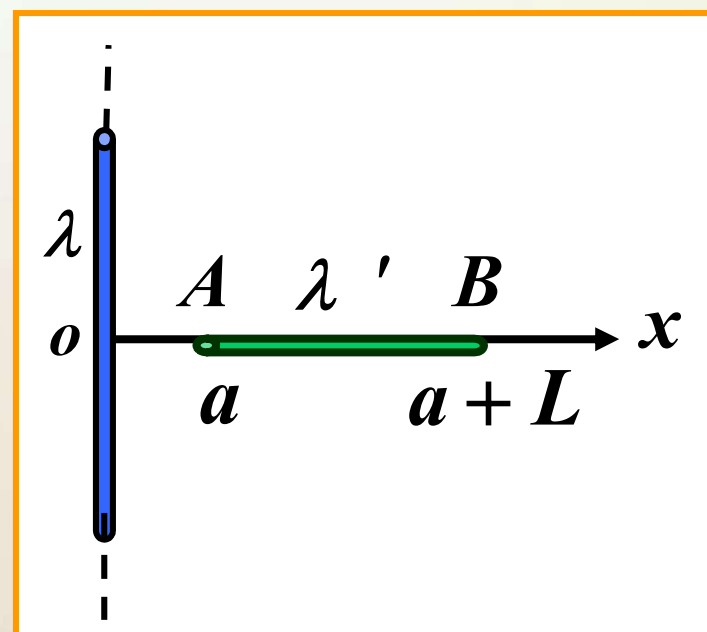
$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$



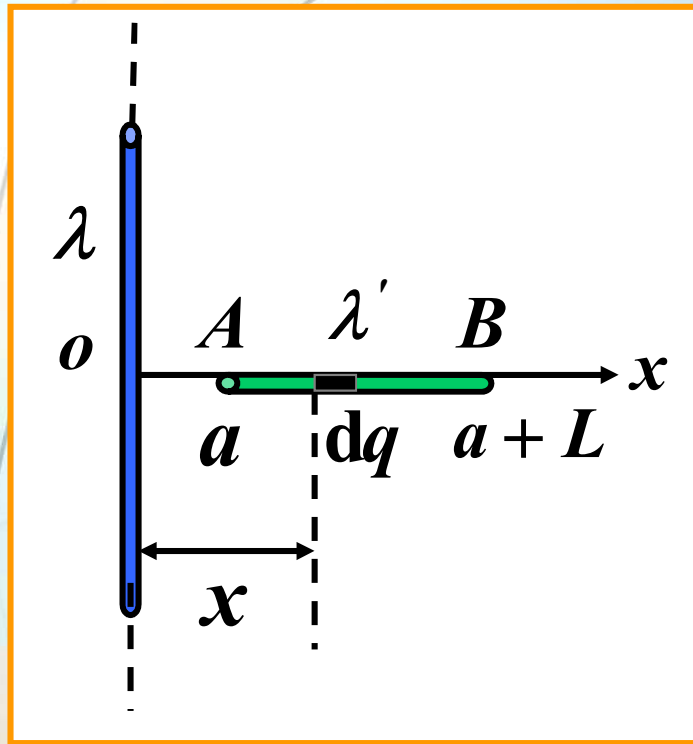
练习：如图所示

已知：  $\lambda, \lambda', L, a$  .

求：  $AB$  所受无限长带电直线的力  $\vec{F}$







解：建立如图坐标.

在 $AB$ 上坐标  $x$  处取电荷元

$$dq = \lambda' dx .$$

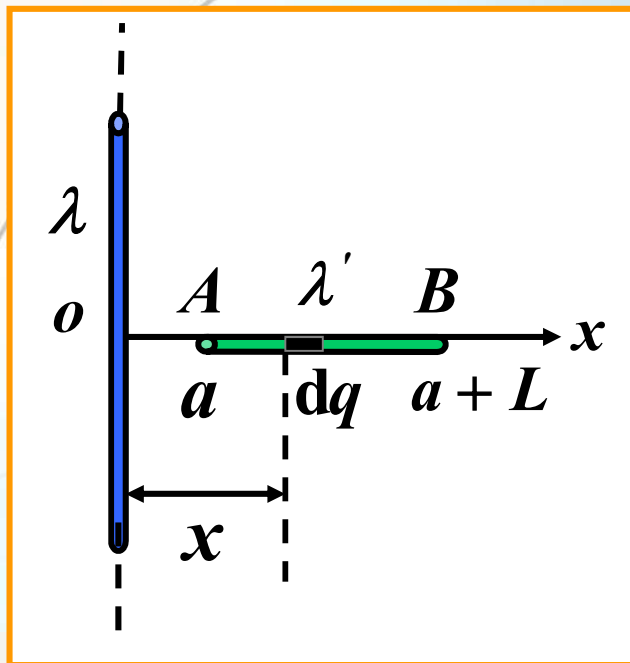
无限长带电直线在  $x$  处的场强

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \vec{i}$$

$$dq \text{ 受力大小 } dF = E dq = \frac{\lambda \lambda' dx}{2\pi\epsilon_0 x}$$

$AB$  受力大小：

$$F = \int dF = \int_a^{a+L} \frac{\lambda \lambda' dx}{2\pi\epsilon_0 x} = \frac{\lambda \lambda'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a+L}{a}$$



写成矢量式：

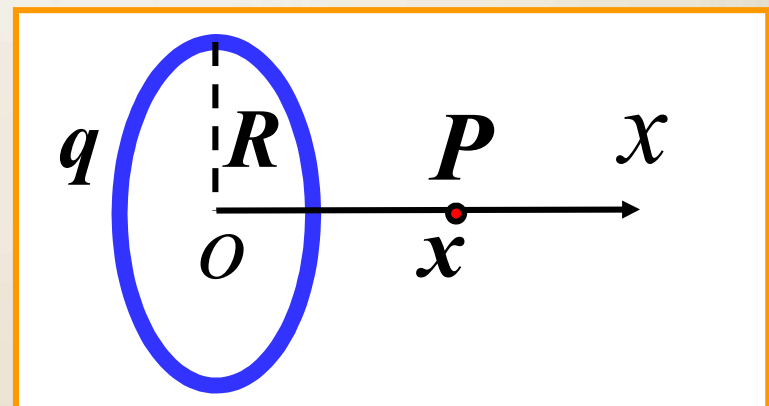
$$\vec{F} = \left( \frac{\lambda\lambda'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a+L}{a} \right) \vec{i}$$

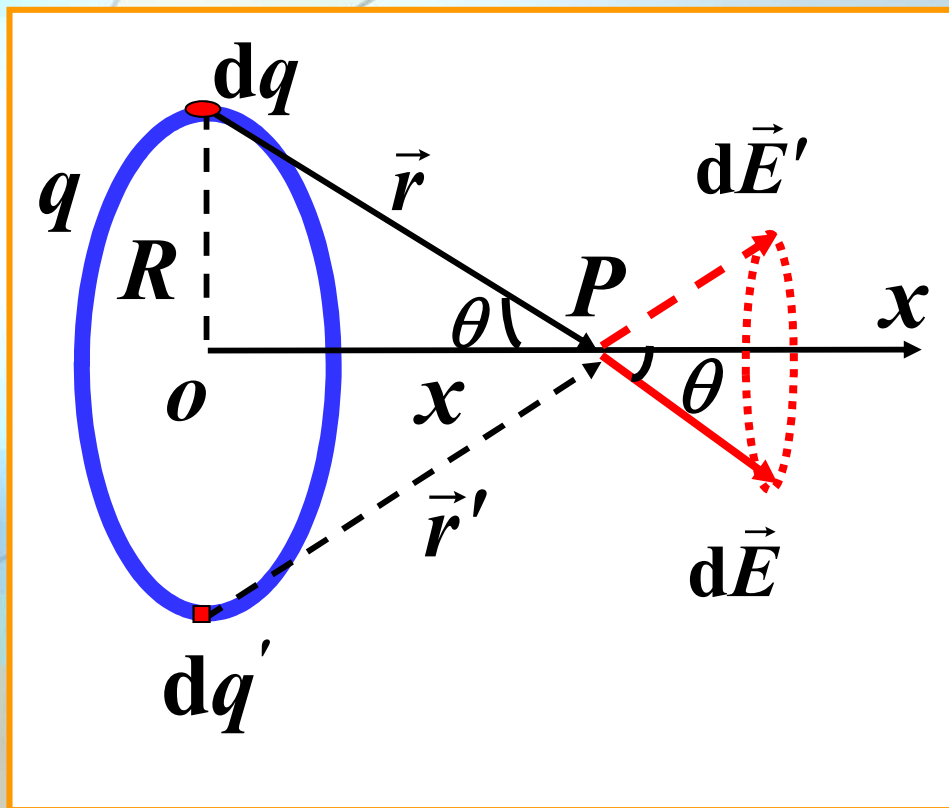
$\vec{F}$  的指向取决于  $\lambda$  ,  $\lambda'$  是同号还是异号 .

### 例三 . 均匀带电细圆环轴线上的电场

已知  $q$  ,  $R$  , 场点  $P(x)$

求  $\vec{E}_P = ?$



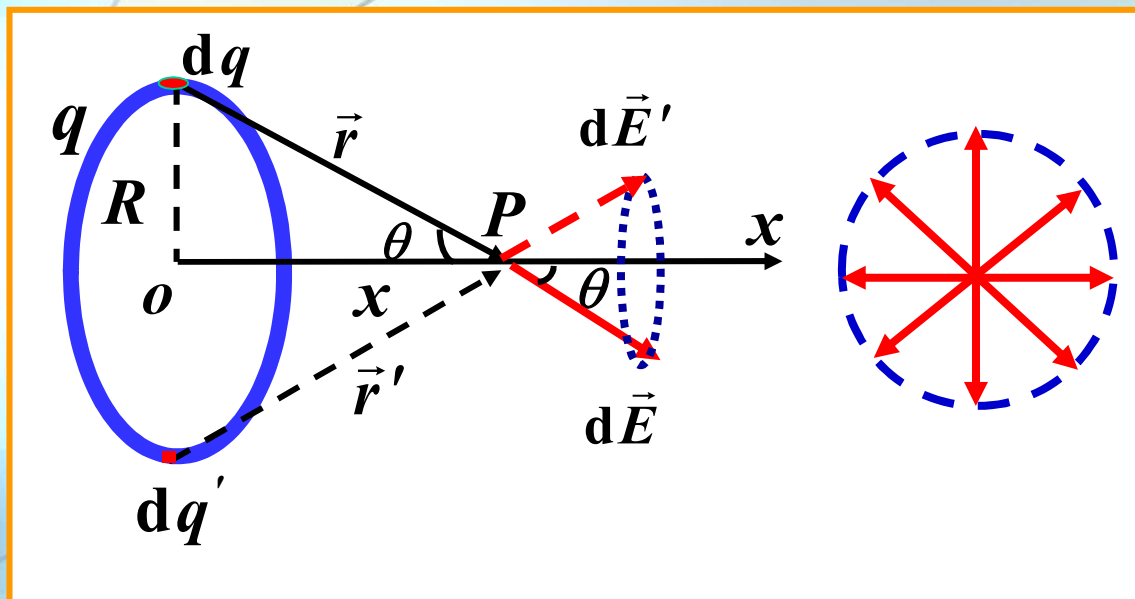


解：建立  $ox$  坐标  
在圆环上取

$$dq = \lambda dl = \frac{q}{2\pi R} dl$$

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

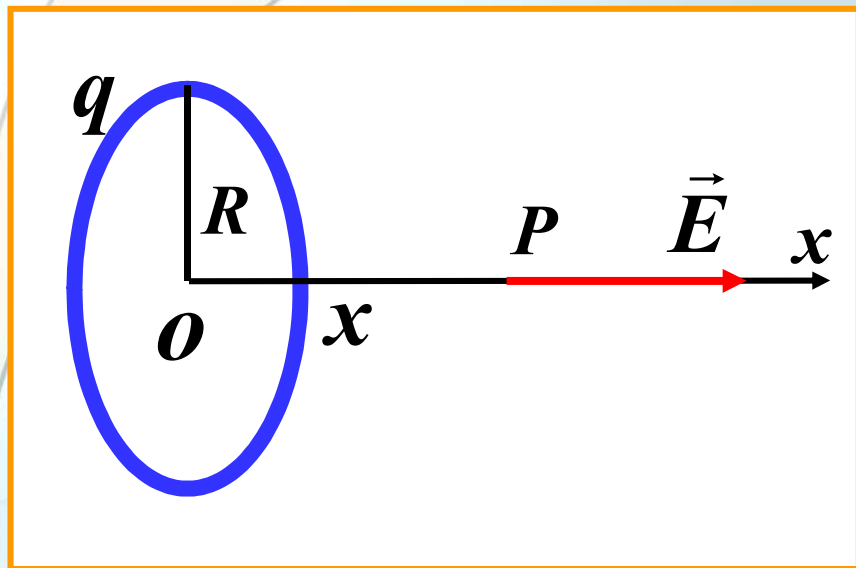
各电荷元在  $P$  点  $d\vec{E}$  方向不同，分布于一个圆锥面上，  
将  $d\vec{E}$  分解为平行于  $x$  轴的分量  $d\vec{E}_{//}$   
和在垂直于  $x$  轴平面内的分量  $d\vec{E}_{\perp}$



由对称性可知

$$\vec{E}_{\perp} = \int d\vec{E}_{\perp} = 0$$

$$\begin{aligned}
 E = E_{//} &= \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{q dl}{2\pi R} \cdot \frac{x}{r} \\
 &= \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$



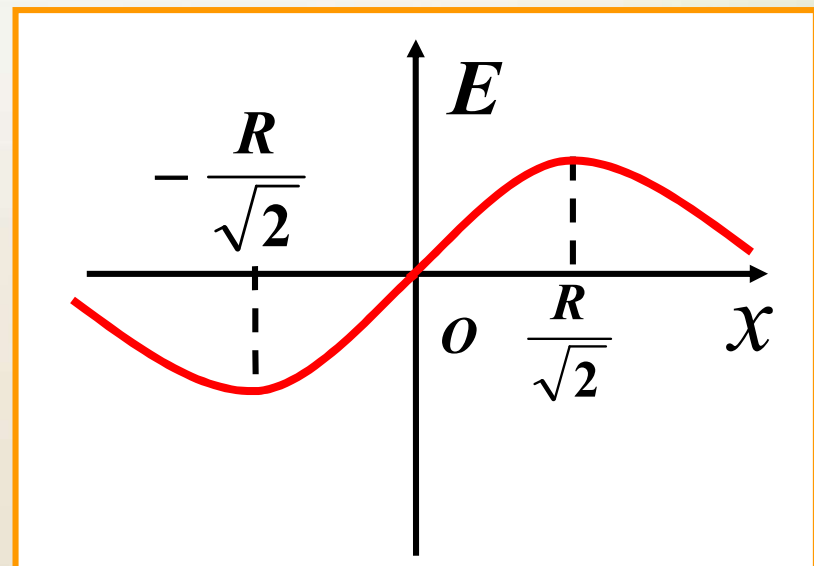
$$\vec{E} = \frac{qx\vec{i}}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

讨论：环心处  $E = 0$

$$x \rightarrow \infty \quad E \rightarrow 0$$

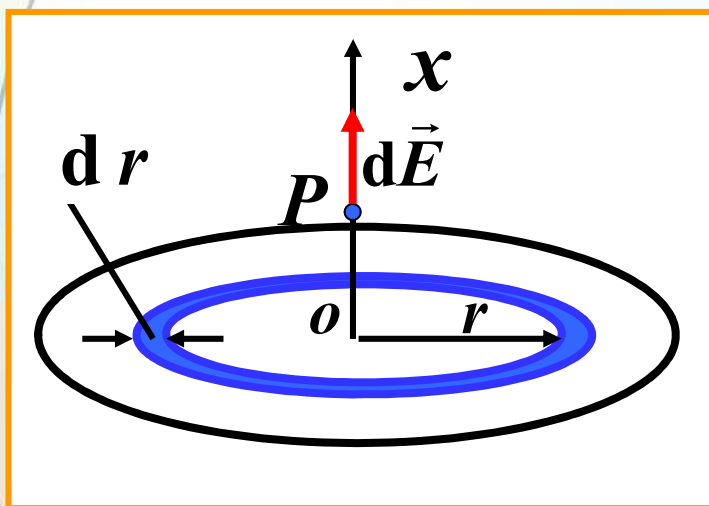
由  $\frac{dE}{dx} = 0$  得  $x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$   
处  $E$  取极大值.

$$x \gg R \quad E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$



**练习：**无限大均匀带电平面的电场。

已知电荷面密度  $\sigma$  。 为利用例三结果简化计算。  
将无限大平面视为半径  $R = \infty$  的圆盘 —— 由许多均匀带电圆环组成 。



思路

$$dq = \sigma \cdot dS = ?$$

$$d\vec{E} = ?$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = ?$$

$$dq = 2\pi r \sigma dr$$

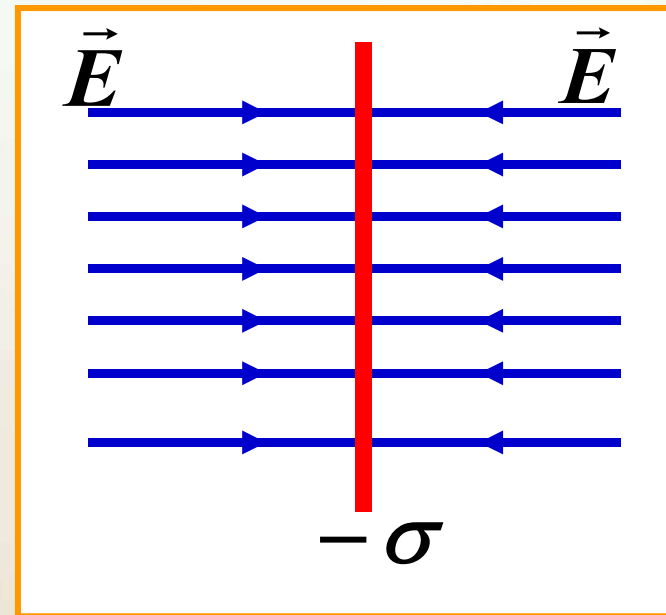
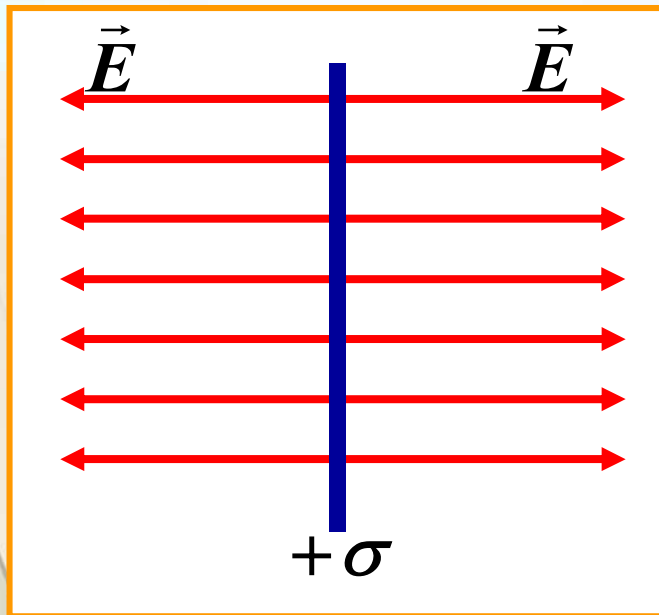
$$dE = \frac{x \cdot dq}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$E = \int_0^{\infty} \frac{\sigma \cdot x \cdot 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

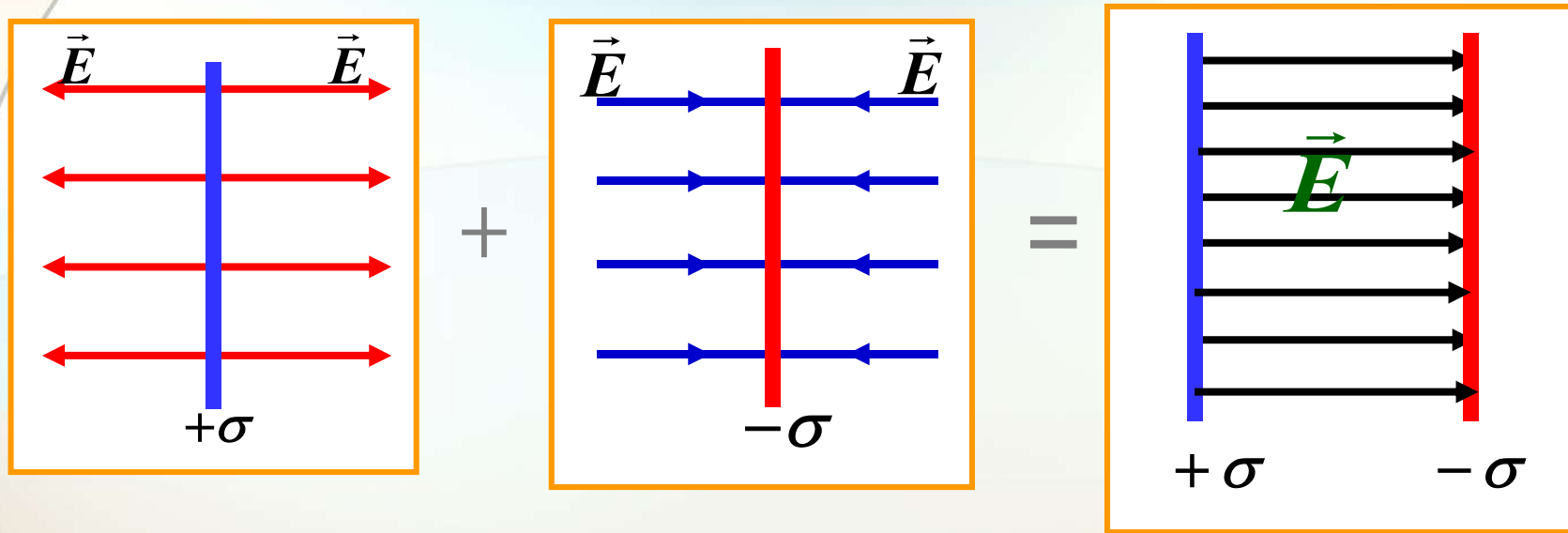
结论:

1. 无限大带电平面产生与平面垂直的均匀电场

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



## 2. 两平行无限大带电平面 ( $+\sigma, -\sigma$ ) 的电场



$$E = E_+ + E_- = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} & \text{两平面间} \\ 0 & \text{两平面外侧} \end{cases}$$



## § 5.2 电场强度小结

- 电场强度的定义:  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$
- 定量研究电场: 对给定场源电荷求其  $\vec{E}$  分布函数 .
- 基本方法: 用点电荷(典型电荷)电场公式和场强叠加原理

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad ; \quad \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

$$dq \Rightarrow d\vec{E} (dE_x, dE_y) \Rightarrow \vec{E} = \int d\vec{E} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x = \int dE_x \\ E_y = \int dE_y \end{array} \right.$$

• 典型带电体  $\vec{E}$  分布:

点电荷电场

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

无限长均匀带电直线

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{垂直于带电直线}$$

均匀带电圆环轴线上

$$\vec{E} = \frac{qx\vec{i}}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

无限大均匀带电平面

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{垂直于带电面}$$