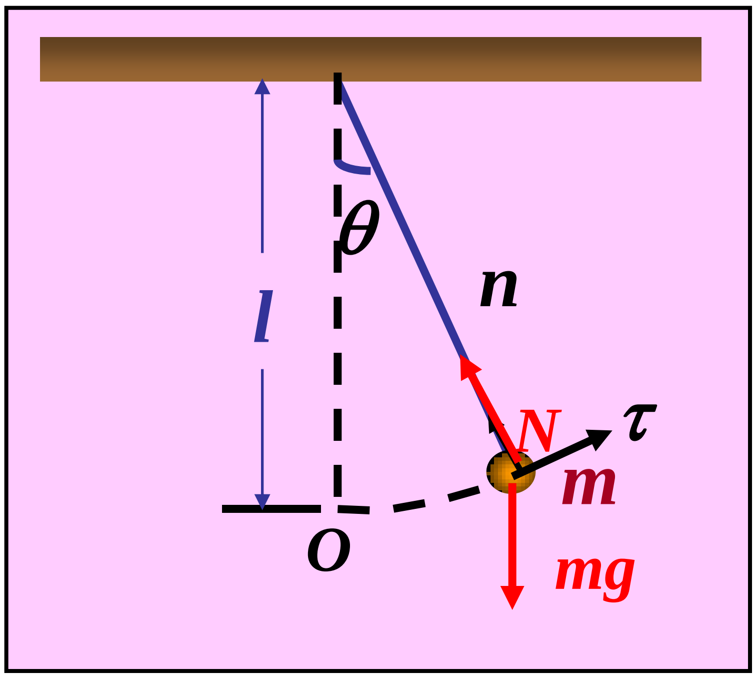
第二节 简谐运动——其它振动系统

一、单摆(数学摆)（教材第五节）

二、复摆（物理摆）

研究摆动的理想模型 —— 单摆和复摆

一、单摆(数学摆)：无伸长的轻线下悬挂质点作无阻尼摆动的振动系统。



建立如图坐标系，其中悬线在竖直方向右边时，摆角为θ。受力分析如图：

切向运动方程：

$$F_\tau = ma_\tau = ml\beta$$

$$-mg\sin\theta = ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

摆动方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

令 $\omega^2=g/l$ 得：$\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\sin\theta=0$ → 单摆运动的微分方程。为非线性微分方程，无解析解。

当θ很小时$\sin\theta\approx\theta$，则：

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0$$ → 简谐振动（角谐振动）

运动方程：$\theta=\theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)$

角振幅　　初相

由初始条件决定

周期：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

单摆和弹簧振子周期的**区别**：

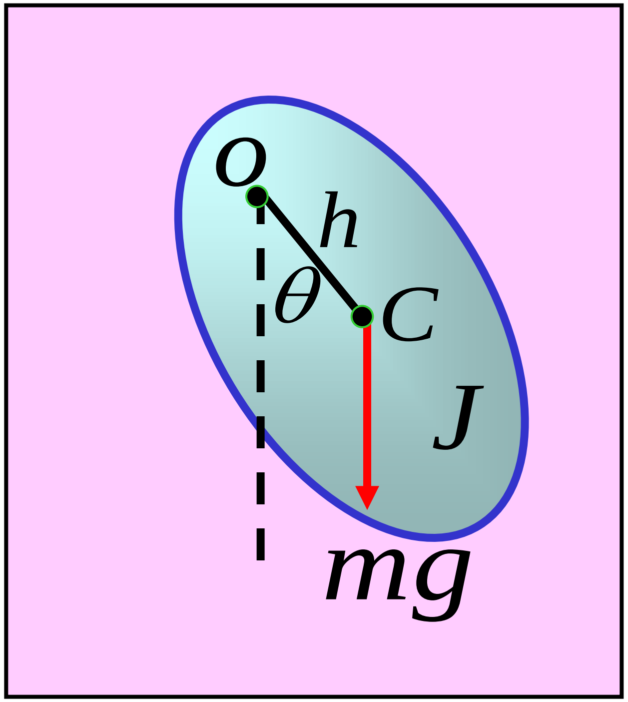
前者与m无关，而后者与m有关。

单摆的**特点**：小角度单摆的周期T与θ_m无关，具有等时性。

二、复摆（物理摆）：

绕不通过质心的固定光滑水平轴摆动的刚体。

重力力矩：$M=-mgh\sin\theta$



设刚体转动惯量为J, β为角加速度，由刚体定轴转动定律得：$M=J\beta$

$$\therefore -mgh\sin\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mgh}{J}\sin\theta=0$$

令$\omega^2=\dfrac{mgh}{J}$，则：$\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\sin\theta=0$

—— 复摆运动的微分方程为非线性微分方程

当θ很小时 $\sin\theta \approx \theta$，则：

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\theta = 0 \longrightarrow \text{角谐振动}$$

运动方程： $\theta = \theta_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi)$

由初始条件决定

周期： $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgh}}$

复摆的特点：小角度复摆具有等时性。

若单摆周期与复摆周期相等，则：$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}}$

$$\therefore l = \frac{J}{mh}$$ —— 等值摆长

由复摆周期得：$J = \frac{T^2 mgh}{4\pi^2}$ ——计算转动惯量

由小角度摆动都是谐振动，可推广到:

一切微振动均可用谐振动模型处理。

例如：晶体中原子或离子在晶体空间点阵格点平衡位置附近的振动；理想气体分子中原子在平衡位置附近的振动……

大角度摆动不是谐振动，可用相图分析其运动。

作业

1. No. 1;
2. 自学本章各例题并完成书上的习题(对照书后的参考答案自己订正)。
3. 自学单摆的非简谐运动、混沌, 频谱分析。

第三周星期三交作业

第12章习题课

一. 教学要求

掌握： 1. 简谐振动的运动方程，特征量，能量计算（弹簧系统，准弹性系统）

2. 旋转矢量法

3. 振动曲线

4. 同一直线上同频率谐振动合成

二. 基本练习

练习1：

一弹簧振子沿 x 轴作简谐振动，已知振动物体的最大位移为 $x_m = 0.4\ \mathrm{m}$ ，最大回复力 $F_m = 0.8\ \mathrm{N}$ ，最大速度为 $v_m = 0.8\pi\ \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ ，又知 t =0 时的初位移0.2m，初速度与 x 轴反向。求：

（1）振动能量；（2）振动方程。

解：（1）

$$\left.\begin{aligned} A &= x_m = 0.4\ \mathrm{m} \\ F_m &= kA = 0.8\ \mathrm{N} \end{aligned}\right\} k = \frac{F_m}{A} = \frac{0.8}{0.4} = 2\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 0.4^2 = 0.16\ (\mathrm{J})$$

（2）由初始条件：

$$\left.\begin{aligned}&\cos\varphi_0=\frac{x_0}{A}=\frac{0.2}{0.4}=\frac{1}{2}\\&v_0=-A\omega\sin\varphi_0<0\rightarrow\sin\varphi_0>0\end{aligned}\right\}\varphi_0=\frac{\pi}{3}$$

又： $v_m=A\omega$

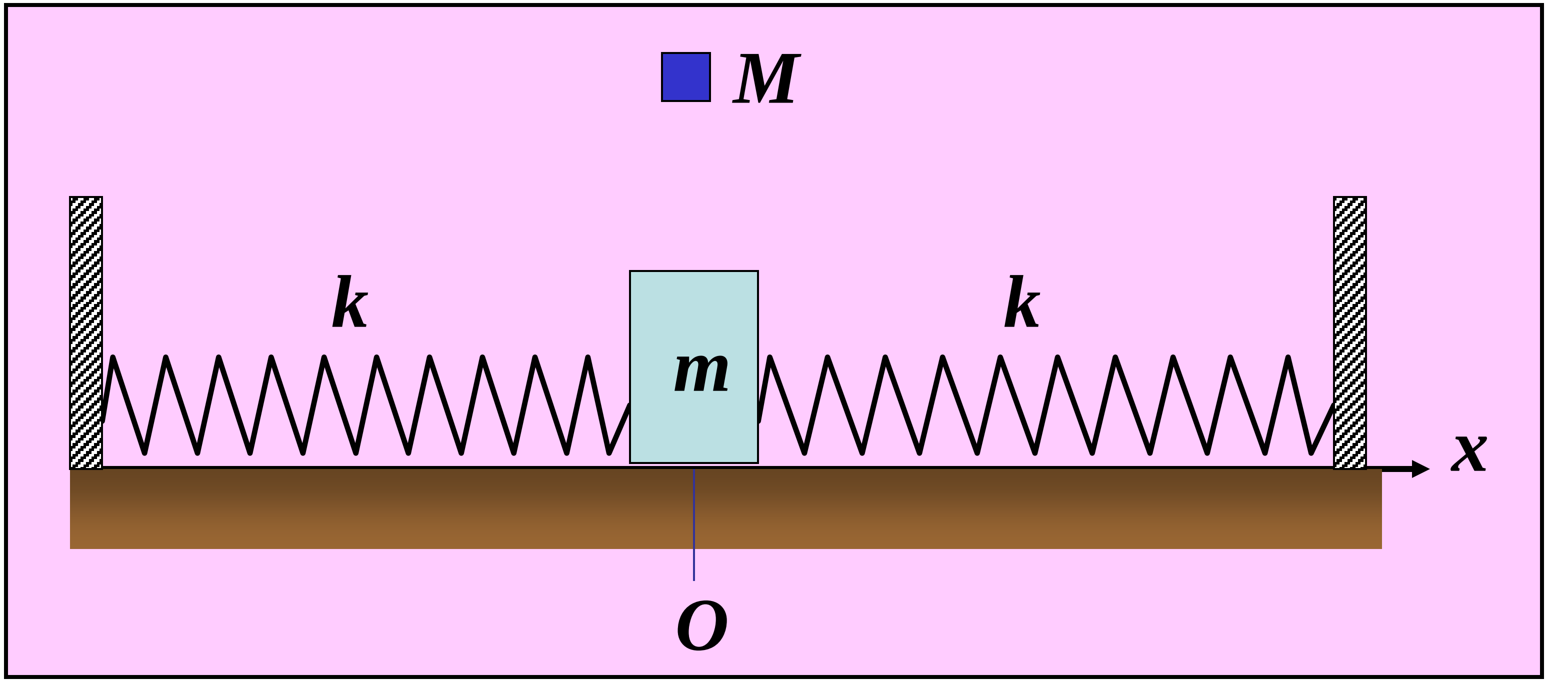
$$\omega=\frac{v_m}{A}=\frac{0.8\pi}{0.4}=2\pi\ (\mathrm{s}^{-1})$$

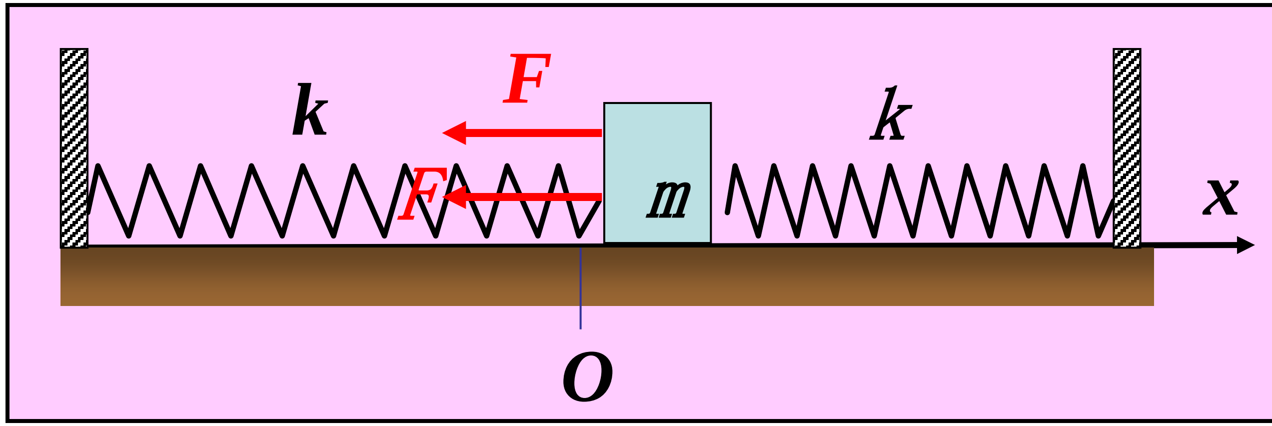
得：

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)=0.4\cos\left(2\pi t+\pi/3\right)\quad(\mathrm{SI})$$

练习2

图中水平面光滑。两弹簧完全相同，且最初处于原长状态。令m沿水平面振动，经过平衡位置O时，另一质点M恰自由落下粘在m上，求M粘上前后，振动系统角频率比及振幅比。





解： 粘上M 以前

运动微分方程：

$$F_x = 2F = -2kx = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \qquad \therefore \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2k}{m}x = 0$$

系统作简谐振动 $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

$$\therefore \frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{M+m}{m}}$$

粘上M 以后： $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{2k}{m+M}}$

粘上M前, m 经过平衡位置O 时位移$x_1=0$, 设速率为v_1, 刚粘上M后, $(M+m)$在平衡位置O点的位移$x_2=0$, 设速率为v_2, 由振幅公式得:

$$A_1=\sqrt{x_1^2+\frac{v_1^2}{\omega_1^2}}=\frac{v_1}{\omega_1}\qquad A_2=\sqrt{x_2^2+\frac{v_2^2}{\omega_2^2}}=\frac{v_2}{\omega_2}$$

M与m粘接过程水平方向动量守恒, 即:

$$mv_1=(m+M)v_2 \longrightarrow v_2=\frac{m}{m+M}v_1$$

$$\therefore \quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{v_1}{v_2}\frac{\omega_2}{\omega_1}=\sqrt{\frac{M+m}{m}}$$

思考和讨论：

（1）如果M是在m运动到最大位移处，垂直落在m上的，情况如何？

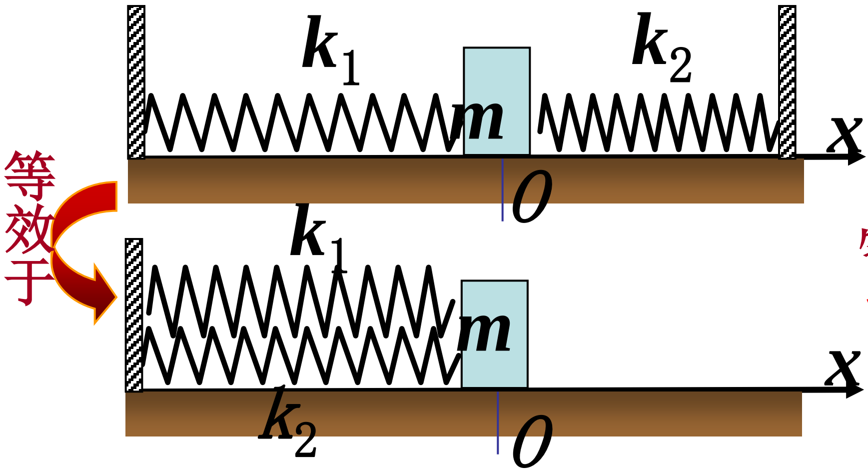
由于系统未变，所以 ω 之比不变。

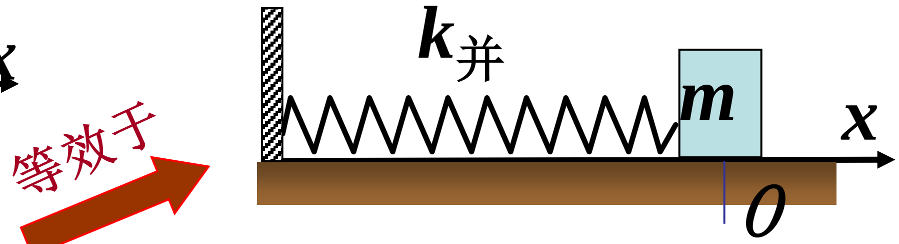
粘上M前：$x_1=A$，速率$v_1=0$ $\quad \therefore A_1 = \sqrt{x_1^2 + \dfrac{v_1^2}{\omega_1^2}} = A$

刚粘上M后：$x_2=A$，速率$v_2=0$ $\quad \therefore A_2 = \sqrt{x_2^2 + \dfrac{v_2^2}{\omega_2^2}} = A$

$$\therefore A_1 / A_2 = 1$$

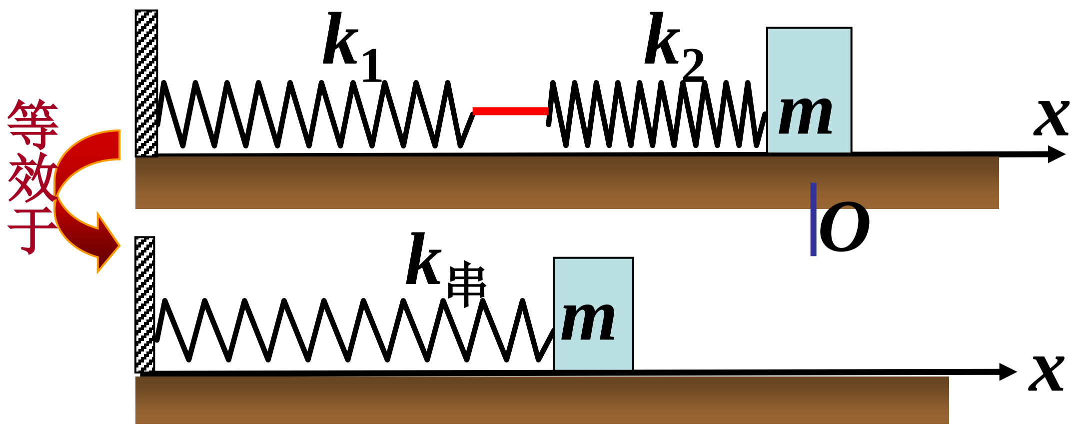
练习2的另一种解法的思路：





$$k_{并} = k_1 + k_2$$

（2）如果两弹簧串接在一起，再联结m，情况如何？



$$k_{串} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

例:一段劲度系数为k的弹簧平均剪成三段，每段的劲度系数$k_1=3k$。

将三段劲度系数为k_1的弹簧其连起来，$k=k_1/3$。

练习3：

宇航员在月球表面用一轻弹簧秤称岩石样品，此弹簧秤在10cm长的刻度尺上读数从0 —— 10N, 他称一块月球岩石时读数为4N, 让岩石上下自由振动时的周期为0.98s，试由此估算月球表面的重力加速度。

问题：用竖直悬挂的弹簧振子测重力加速度

关键步骤一

解：

$$x_0=\frac{10}{10}\times 4=4cm=0.04\mathrm{m}$$

$$mg=kx_0$$

$$x_0=\frac{m}{k}g=\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$g=x_0\frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{0.04\times 4\pi^2}{0.98^2}$$

$$=1.64(\mathrm{ms}^{-2})$$

关键步骤二