第四章

第一节 多维随机变量及其分布

多维随机变量及其联合分布

- 多维随机变量及其分布函数
  - 二维随机变量及其分布函数
  - 分布函数的性质
  - 边缘分布函数
  - n维随机变量及其分布
- 二维离散型随机变量
- 二维连续型随机变量

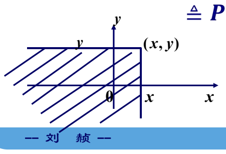
一、多维随机变量及其分布

1. 二维随机变量及分布函数的定义

➢ 若X, Y是两个定义在同一个样本空间上的随机变量，则称(X, Y)是二维随机变量.

$$F(x,\ y) = P\big((X \le x) \cap (Y \le y)\big)$$

$$\triangleq P(X \le x, Y \le y) \quad (x, y) \in R^2$$



一、多维随机变量及其分布函数

2. 分布函数的性质

$1°$ $F(x, y)$是变量x和y的非减函数

即 $\forall x_1 \le x_2, F(x_1, y) \le F(x_2, y)$

$\forall y_1 \le y_2, F(x, y_1) \le F(x, y_2)$

$2°$ $0 \le F(x, y) \le 1$

$F(x, -\infty) = 0 \qquad F(-\infty, y) = 0$

$F(-\infty, -\infty) = 0 \qquad F(+\infty, +\infty) = 1$

一、多维随机变量及其分布函数

$3°$ 关于变量x和y均是右连续的.

即 $\forall x, y \in R, F(x+0, y) = F(x, y) = F(x, y+0)$

$4°$ $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2,$

$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \ge 0$

满足上述$1° \sim 4°$,的二元函数可作为某个二维随机变量的分布函数。

一、多维随机变量及其分布函数

3. 边缘分布函数

已知$(X, Y) \sim F(x, y)$, 则

$$F(x, +\infty) = P\big((X \le x) \cap (\boxed{Y < +\infty})\big)$$

必然事件S

$$= P(X \le x)$$

$$= F_X(x)$$

称之为X的边缘（边际）分布函数

一、多维随机变量及其分布函数

已知$(X,Y) \sim F(x,y)$，则

$$F(+\infty, y) = P\left(\boxed{X < +\infty} \cap (Y \le y)\right)$$

必然事件S

$$= P(Y \le y)$$

$$= F_Y(y)$$

称之为Y的边缘（边际）分布函数

一、多维随机变量及其分布函数

4. n维随机变量

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ —— n维随机变量

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n)$$

$$X_1 \sim F_{X_1}(x) = F(x, +\infty, \cdots, +\infty)$$

$$(X_1, X_n) \sim F_{X_1 X_n}(x, y) = F(x, +\infty, \cdots, +\infty, y)$$

二、二维离散型随机变量

- 二维离散型随机变量的定义
- 二维离散型随机变量的概率分布
- 常见的二维离散型随机变量的分布

二、二维离散型随机变量

1. 定义

若二维随机变量(X, Y)的所有可能取的值是有限对或可列多对，则称(X,Y)为二维离散随机变量。

二、二维离散型随机变量

2. 分布律

$X \backslash Y$	y_1	y_2	……	y_n	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	……	p_{1n}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	……	p_{2n}	$p_{2\cdot}$
⋮	⋮	⋮	……	⋮	⋮
x_m	p_{m1}	p_{m2}	……	p_{mn}	$p_{m\cdot}$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	……	$p_{\cdot n}$	1

$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ $\quad p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}$ $\quad p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$

二、二维离散型随机变量

3. 分布函数的确定

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \Rightarrow F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

$$p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij} = \sum_j P(X = x_i) \Rightarrow F_X(x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$$

$$p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij} = \sum_i P(Y = y_j) \Rightarrow F_Y(y) = \sum_{y_j \le y} P(Y = y_j)$$

二 维 两 点 分 布

X \ Y	0	1
0	$1-p$	0
1	0	p

X	0	1
p	$1-p$	p

Y	0	1
p	$1-p$	p

多 项 分 布

若每次试验有r种结果：$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_r$

记 $P(A_i)=p_i$, $\quad i=1, 2, \ldots\ldots, r$

记X_i为 n 次独立重复试验中A_i出现的次数，则

$$P(X_1=n_1, X_2=n_2, \ldots, X_r=n_r)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots\cdots p_r^{n_r}$$

问题：能否给出具体的概率模型？？

三、二维连续型随机变量

- 二维连续型随机变量的定义
- 二维连续型随机变量的概率密度
- 边缘概率密度及边缘分布函数

三、二维连续型随机变量

1. 定义

如果二维随机变量$(X,Y)\sim F(x,y)$, 存在一个非负可积的二元函数$f(x,y)$，使$\forall(x,y)\in R^2$，都有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$$

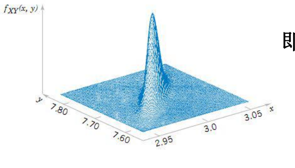
则称(X,Y)是二维连续型随机变量，$f(x,y)$称为(X,Y)的概率密度函数或X与Y的联合密度函数。

三、二维连续型随机变量

2. 概率密度函数的性质

$1°$ 非负性：$f(x,y)\geq 0$

$2°$ 规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$



即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy$

$=F(+\infty,+\infty)=1$

$3°\quad \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

$4°$ 随机点(X,Y)落在平面区域D内的概率

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy$$

三、二维连续型随机变量

3. 边缘分布函数与边缘密度函数

(X,Y)关于X的边缘分布函数

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,y)dy}\right]du$$

u 的一元函数 $g(u)=f_X(u)$

关于X的边缘概率密度为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

且 $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)dt$

(X,Y)关于Y的边缘分布函数

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,v)dx}\right]dv$$

v 的一元函数 $g(v)=f_Y(v)$

关于Y的边缘概率密度为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

且 $F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}f_Y(t)dt$

二维均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中A为平面区域D的面积值。

二维正态分布

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$均为常数,且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}\Rightarrow X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}\Rightarrow Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

注：只有两个边缘分布，一般不能确定联合分布。

如 ρ 不同，而边缘分布相同，但联合分布却不同。

课 堂 练 习

设$(X，Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}C(1-x)y & 0\le x\le 1,0\le y\le x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

1）试确定常数C；

2）试求$(X，Y)$的边缘概率密度；

3）$P\left\{\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2},Y<\frac{1}{2}\right\}$.

课堂练习

设随机变量$(X,\ Y)$的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其　它}\end{cases}$$

试求$(X,\ Y)$的分布函数$F(x,y)$.

第四章

第二节

随机变量的独立性与条件分布

❖ 随机变量的独立性

❖ 条件分布

一、随机变量的独立性

问题：$F(x,\ y)$ 包含了哪些信息？

❖ 随机变量的独立性

❖ 离散型随机变量的独立性

❖ 连续型随机变量的独立性

一、随机变量的独立性

1. 定义

Def. 设$F(x,y)$及$F_X(x)$、$F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数，若$\forall x,y$,有

$$P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}=P\{X\le x\}\cdot P\{Y\le y\}$$

即　$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

则称随机变量X与Y是相互独立的。

一、随机变量的独立性

2. 离散型随机变量的独立性

1）独立性的判定

定理　离散型随机变量X和Y相互独立

$$\Leftrightarrow P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$$

$$\Leftrightarrow p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}\qquad i,j=1,2,\cdots$$

一、随机变量的独立性

2） 不独立的判别

只要$\exists(i,j)$，满足$p_{ij}\neq p_{i.}p_{.j}$则X与Y必不相互独立。

命题 若二维离散型随机变量(X,Y)的联合概率分布表中存在某个$p_{i_0 j_0}=0$，则X与Y必不相互独立。

一、随机变量的独立性

3. 连续型随机变量的独立性

1）定理 连续型随机变量 X 和 Y 相互独立

$$\Longleftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

例 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

则X与Y相互独立$\Leftrightarrow \rho=0$

一、随机变量的独立性

例1. 设r. v. X与Y i.i.d. $N(0,1)$，试求$P\{X^2+Y^2\leq 1\}$。

解：因 X,Y i.i.d. $N(0,1)$，

故(X,Y)的概率密度为边缘密度乘积，即

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

一、随机变量的独立性

$$P\left(X^2+Y^2\leq 1\right)=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ $\quad 0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq r\leq 1$

则

$$P\left(X^2+Y^2\leq 1\right)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot rdr$$

$$=-e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^1=1-e^{-\frac{1}{2}}=0.3935$$

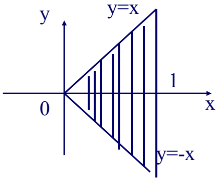
一、随机变量的独立性

例2. 设r. v.$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x,0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

试问随机变量X与Y是否相互独立？

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1dy=2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



一、随机变量的独立性

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_y^1 1dx=1-y & 0<y<1\\ \int_{-y}^1 1dx=1+y & -1<y<0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y)\Rightarrow X\text{与}Y\text{不相互独立}$$

一、随机变量的独立性

2）．连续型随机变量的独立性判定条件

命题　若（X,Y)为连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y)$，则X与Y相互独立 $\Leftrightarrow$

1^0存在连续函数$h(x), g(y)$,使

$$f(x,y)=\begin{cases} h(x)g(y) & a\le x\le b, c\le y\le d \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

2^0 a,b,c,d均为与x,y无关的常数（可为∞）。

一、随机变量的独立性

课堂练习

设连续型随机变量(X,Y)具有下述概率密度,试讨论X与Y的相互独立性。

$$(1)\ f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xe^{-x}}{(1+y)^2} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$(2)\ f(x,y)=\begin{cases} 4 & -\dfrac{1}{2}\le x\le 0, 0\le y\le 2x+1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

二、条 件 分 布

1. 条件分布列

$$p_{i|j}=P(X=x_i\,|\,Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

例3．以X记某医院一天内出生婴儿的个数，以Y 记其中男婴的个数。已知X与Y 的联合分布律为

$$P\{X=m, Y=n\}=\frac{e^{-14}(7.14)^n(6.86)^{m-n}}{n!(m-n)!}\qquad \begin{array}{l} m=0,1,2,\ldots \\ n=0,1,2,\ldots,m \end{array}$$

试求条件分布律$P\{Y=n\,|\,X=m\}$.

二、条 件 分 布

2. 条件密度函数

$$f(x\,|\,y)=\frac{f(x,\ y)}{f_Y(y)}$$

例4．设数X 在区间（0，1）上随机地取值，当观察到$X=x$（$0<x<1$）时，数 Y在区间（0，x）上随机地取值. 试求 $P\{Y>0.5\}$ ．

二、条 件 分 布

3. 条件分布函数

$$F(x\,|\,y)=\begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i\le x} P(X=x_i\,|\,Y=y) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(u\,|\,y)du=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,\ y)}{f(y)}du \end{cases}$$

说明

联合分布 → 边缘分布、条件分布 → 联合分布

第四章

第三节　多维随机变量的数字特征

- 多维随机变量函数的数学期望
- 数学期望和方差的运算性质
- 协方差与相关系数

一、多维随机变量函数的数学期望

1. 离散型的情况

若已知(X,Y)的分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad i,j=1,2,\ldots$$

则函数$Z=g(X,Y)$的数学期望为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

一、多维随机变量函数的数学期望

2. 连续型的情况

若已知$(X,Y)\sim f(x,y)$，则函数$Z=g(X,Y)$

的数学期望为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

注1　上式中级数与积分要求绝对收敛。

注2　上式可推广至二维以上的情况。

一、多维随机变量函数的数学期望

例1. 设$r.v.(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases} x+y & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

试求$Z=X^2Y$的数学期望.

解：$E(X^2Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2yf(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1\int_0^1 x^2y(x+y)dxdy= ?$$

一、多维随机变量函数的数学期望

例2. 已知(X,Y)在正方形$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$上随机取值,试求$E(X^2+Y^2)$.

解:依题意,(X,Y)服从D上均匀分布，D的面积为1

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1(x^2+y^2)dxdy=\frac{2}{3}$$

二、数学期望与方差的性质

1．加法法则　$E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)$

$$D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\overset{ind.}{=\!=}\sum_{k=1}^{n}D(X_k)$$

2．乘法法则　$E\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)\overset{ind.}{=\!=}\prod_{i=1}^{n}E(X_i)$

3．柯西-许瓦兹不等式　$|E(XY)|^2\le E(X^2)E(Y^2)$

二、数学期望与方差的性质

例3. 一民航送客车载有20位乘客自机场开出，乘客有10个站可以下车。如到达一车站没有乘客下车就不停车，以X表示停车次数，试求$E(X)$。（设乘客在各车站下车是等可能的，且各乘客是否下车是相互独立的）。

若X与Y不独立，$D(X+Y)=?$

$$D(X+Y)=E\left[\left((X+Y)-E(X+Y)\right)^2\right]$$

$$=E\left[\left((X-EX)+(Y-EY)\right)^2\right]$$

$$=E\left[(X-EX)^2\right]+E\left[(Y-EY)^2\right]+2E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$$

$$=D(X)+D(Y)+2\boxed{E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]}$$

协方差

三、协方差与相关系数

1. 基本概念

1） 协方差

$$Cov(X,Y)=E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$$

量纲的影响

2）相关系数

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

三、协方差与相关系数

2. 协方差的基本性质

1^0 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

2^0 $Cov(X,X)=D(X)$

3^0 $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$

4^0 $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

5^0 $|Cov(X,Y)|\le\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$

三、协方差与相关系数

3. 相关系数的基本性质

1^0 $|\rho_{XY}|\le 1$

注：$|\rho_{XY}|=1\Leftrightarrow\exists$常数$a,b$,使 $P\{Y=aX+b\}=1$

2^0 若X,Y相互独立，且$D(X),D(Y)>0$,则 $\rho_{XY}=0$

Def. 若$\rho_{XY}=0$，则称X与Y为不相关。

3^0 当(X,Y)服从二维正态分布时，

X与Y不相关$\Leftrightarrow$ X和Y相互独立

三、协方差与相关系数

例4. 设随机变量(X,Y)服从单位圆内的均匀分布，即

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & \text{当 } x^2+y^2<1\\ 0 & \text{当 } x^2+y^2\ge 1\end{cases}$$

试求$Cov(X,Y)$。

解：$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & |x|<1\\ 0 & |x|\ge 1\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & |y|<1\\ 0 & |y|\ge 1\end{cases}$$

三、协方差与相关系数

显然，$E(X)=E(Y)=0$

$$Cov(X,Y)=E(XY)=\frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2<1} xydxdy=0 \quad \Rightarrow \rho_{XY}=0$$

显而易见，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$

故而，X与Y不独立

注1：X与Y相互独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ X与Y不相关

三、协方差与相关系数

例5. 设r.v. $X\sim U\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，而$Y=\cos X$，即$Y$与$X$有严格的函数关系，但

$$E(XY)=E(X\cos X)=\int_{-1/2}^{1/2} x\cos x\cdot 1dx=0$$

而 $E(X)=0$

故 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0 \quad \Rightarrow \rho_{XY}=0$

注2：相关系数只是刻划了两个随机变量间"线性"关系的强弱。

三、协方差与相关系数

例6. 设$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

试求$Cov(X,Y)$。

例7. 设随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

试求$D(2X-3Y)$。

三、协方差与相关系数

解：$E(X)=\int_0^1\int_0^1 x(x+y)dxdy=7/12$

$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy=1/3$

$\Rightarrow Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-1/144$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=11/144$ 同理：$D(Y)=11/144$

$D(2X-3Y)=4D(X)+9D(Y)-12Cov(X,Y)$

$$=4\times\frac{11}{144}+9\times\frac{11}{144}-12\times\left(-\frac{1}{144}\right)=\frac{155}{144}$$

三、协方差与相关系数

4. 随机向量的数学期望与协方差阵

1）基本概念

记 $\vec{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)'$，则

$$E(\vec{X})=(E(X_1), E(X_2), \cdots, E(X_n))'$$

称
$$\begin{pmatrix}\mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1,X_n)\\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2,X_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{Cov}(X_n,X_1) & \mathrm{Cov}(X_n,X_2) & \cdots & \mathrm{Var}(X_n)\end{pmatrix}$$

为 $\vec{X}$ 的协方差阵，记为$\mathrm{Cov}(\vec{X})$,

三、协方差与相关系数

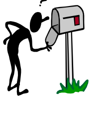
2） 协方差阵的性质

定理 协方差阵对称、非负定.

EX. 设 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(0,1)$, $D(X-Y)=0$,

求 (X, Y) 的协差阵Σ .

$$\Sigma=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$



3） 相关矩阵（相关系数矩阵）

三、协方差与相关系数

EX. 设 (X, Y) 的联合分布列为

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

求 X, Y 的相关系数.

第四章

第四节

多维随机变量函数的分布

一、离散型的情况

1. 例题

设随机变量 (X, Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0.1	0.05	0.01	0.12
1	0.04	0.06	0.07	0.08
2	0.13	0.08	0.11	0.15

试求: (1) $Z = 2X - Y$ 的分布律;

(2) $N = \min\{X, Y\}$ 的分布律.

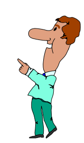
一、离散型的情况

2. 基本步骤 $Z = g(X, Y)$

1^0 确定Z的可能取值$z_{ij} = g(x_i, y_j)$ $i, j = 1, 2, \cdots$

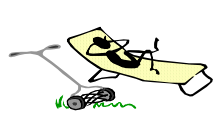
2^0 确定$P\{Z = g(x_i, y_j)\} = P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$

3^0 列出$Z = g(X, Y)$的分布律。



二、连续型的情况

- 两随机变量之和的分布
- 随机变量极值的分布
- n维正态分布



二、连续型的情况

1. 和的分布

若$(X, Y) \sim f(x, y)$, 则$Z = X + Y$的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)dx$$

或 $$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y)dy$$

二、连续型的情况

证明：$F_Z(z)=P\big(Z\le z\big)=P\big(X+Y\le z\big)$

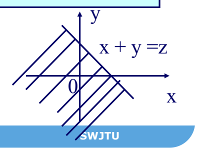
$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy\right]dx$$

$$\underline{\underline{y=u-x}}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(x,u-x)du\right]dx$$

u 的一元函数 $g(u)=f_Z(u)$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)dx}\right]du$$

$$\Rightarrow\quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$



二、连续型的情况

当X与Y相互独立时，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

注：$f_X * f_Y=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

称为卷积公式。

二、连续型的情况

例1. 设随机变量$(X，Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)} & x>0,\ y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

试求 $Z=X+Y$的概率密度。

例2. 设X 和Y是两个相互独立的随机变量 它们都服从$N(0,1)$分布，试求Z=X+Y的概率分布。

二、连续型的情况

命题 若X与Y ind，且$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

$$\Rightarrow Z=X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

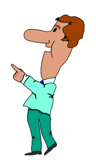
推广. 有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布。

二、连续型的情况

2. 随机变量极值的分布

设X,Y是两个相互独立的随机变量，其概率密度为$f_X(x),f_Y(y)$,

$$\left.\begin{aligned}M&=\max\{X,Y\}\\ N&=\min\{X,Y\}\end{aligned}\right\}\text{——统称为极值变量}$$



二、连续型的情况

$$F_M(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$$

$$\underline{\underline{ind}}\ P\{X\le z\}\cdot P\{Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_N(z)=P\{N\le z\}=1-P\{N>z\}$$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$\underline{\underline{ind}}\ 1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}$$

$$=1-\big(1-F_X(z)\big)\big(1-F_Y(z)\big)$$

推 广

$$X_1,\cdots,X_n \ \textit{ind.} \Longrightarrow \begin{cases} F_M(z)=\prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(z) \\ F_N(z)=1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-F_{X_i}(z)\right) \end{cases}$$

$$X_1,\cdots,X_n \ \textit{i.i.d.} F(x) \Longrightarrow \begin{cases} F_M(z)=\left[F(z)\right]^n \\ F_N(z)=1-\left[1-F(z)\right]^n \end{cases}$$

二、连续型的情况

例3. 设随机变量X与Y相互独立，且均服从$U(-1,1)$. 试求$Z=X+Y$, $M=\max(X,Y)$, $N=\min(X,Y)$的概率密度。

例4. 已知随机变量X与Y相互独立，其中

$P(X=-1)=0.4,\ \ P(X=1)=0.6$

而随机变量$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$。

试求$Z=X+Y$的分布。

课 堂 练 习

设$r.v.X$、Y相互独立，且$X\sim N(720,30^2)$, $Y\sim N(640,25^2)$,求$Z_1=2X+Y, Z_2=X-Y$的分布，并求$P\{X>Y\}, P\{X+Y>1400\}$。

二、连续型的情况

3. n维正态随机变量

1）基本概念

令 $X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ $\mu=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$

$\Sigma=\left(C_{ij}\right)_{n\times n}$， $C_{ij}=Cov(X_i,X_j)$ $\quad i,j=1,2,\cdots,n$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$$

二、连续型的情况

2）n维正态随机变量的性质

1^0 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$服从n维正态分布$\Leftrightarrow$

任意线性组合$\sum_{i=1}^{n} l_i X_i$服从一维正态分布

2^0 $(X_1,\cdots,X_n)$服从n维正态分布, 设$Y_1,\cdots,Y_k$是$X_j\,(j=1,\cdots,n)$的线性函数，则$(Y_1,\cdots,Y_k)$服从k维正态分布

--- 正态变量的线性变换不变性

3^0 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$服从n维正态分布, 则

$X_1,\cdots,X_n$相互独立$\Leftrightarrow$两两不相关