西南交通大学2018--2019学年第一学期

《高等数学BI》A卷试题参考答案

一、选择题（每小题4分）

1、解：$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x}{x+2}=\dfrac{1}{2}$，

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}=\frac{1}{2\sqrt{a}},$$

$x=0$为可去间断点，则$\dfrac{1}{2\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=1$，选D。

2、解：选B。A被积函数为奇函数；C根据周期函数的性质，再被积函数为奇函数；D直接积分代值。

3、解：首先可判断$r_1=1,r_2=-2$为特征根，故对应齐次方程为$y''+y'-2y=0$，

又特解为xe^x，$\lambda=1$为特征根，$k=1$，故其自由项应为ae^x形式，选D。

4、解：$y'=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}=0\Rightarrow t=\pm 1$，

$$y''=\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)'\cdot\frac{1}{t^2+1}=\frac{4t}{(t^2+1)^3}\Rightarrow y''\big|_{t=1}=\frac{1}{2}>0,\ y''\big|_{t=-1}=-\frac{1}{2}<0,$$

故$t=1$时取得极小值$y=-\dfrac{1}{3}$，$t=-1$时取得极大值$y=1$，选A。

二、填空题（每小题4分）

5、解：$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\dfrac{1}{2}x^4$，$x\sin^n x\sim x^{n+1}$，$e^{x^2}-1\sim x^2$，故$n=2$。

6、解：$y'(1)=-\dfrac{1}{x^2}\Big|_{x=1}=-1,\ y''(1)=\dfrac{2}{x^3}\Big|_{x=1}=2$，故$k=\left|\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

7、解：$\int f'(x^3)dx=x^3+C$两边关于求导有：

$$f'(x^3)=3x^2\Rightarrow f'(x)=3x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow f(x)=\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+C\ 。$$

8、解：$y'=(1+2x)e^{2x},\ y''=(4+4x)e^{2x}=0\Rightarrow x=-1$，故拐点为$(-1,-e^{-2})$。

9、解：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2(1+x^2)}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$。

三、计算题（每小题 7 分）

10、解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x[\ln(1+t)-t]dt}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=-1$。

11、解：$y'=\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{1+x^2}=\arctan x$，$y'(\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}$，故 $dy|_{x=\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{3}dx$。

12、解：$\int\dfrac{3dx}{x+\sqrt{x+2}}\xrightarrow{\sqrt{x+2}=t}=\int\dfrac{6tdt}{t^2+t-2}=\int(\dfrac{2}{t-1}+\dfrac{4}{t+2})dt$

$=2\ln|t-1|+4\ln|t+2|+C\to=2\ln\left|\sqrt{x+2}-1\right|+4\ln\left|\sqrt{x+2}+2\right|+C$

13、解：$I=\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}\dfrac{1}{1+\cos x}dx+\int_0^2 xe^{-x^2}dx=\int_{-2}^{0}\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\dfrac{1}{2}\int_0^2 e^{-x^2}dx^2$

$=\tan\dfrac{x}{2}\Big|_{-2}^{0}-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^2=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(e^{-4}-1)$。

四、解答题（14、15 小题每题 10 分，16 小题 11 分）

14、解：关系式 $f(x)=\int_0^{2x}f(\dfrac{t}{2})dt+3e^x$ 两边关于 x 求导有：$f'(x)=2f(x)+3e^x$，

方程乘积分因子 $e^{\int -2dx}=e^{-2x}$ 有：$e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)=3e^{-x}$，

即：$[e^{-2x}f(x)]'=3e^{-x}\Rightarrow e^{-2x}f(x)=-3e^{-x}+C\Rightarrow f(x)=-3e^x+Ce^{2x}$，

又 $f(0)=3\Rightarrow C=6$，所以 $f(x)=-3e^{-x}+6e^{2x}$。

14、解：由题意，$b=\pi r^2h\Rightarrow h=\dfrac{b}{\pi r^2}$，则粮仓造价（不考虑圆柱的下底）

$\Phi=2\pi rh\cdot a+2\pi r^2\cdot 2a=4\pi ar^2+\dfrac{2ab}{r}$，

$\Phi_r'=8\pi ar-\dfrac{2ab}{r^2}=0\Rightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{b}{4\pi}},h=4\sqrt[3]{\dfrac{b}{4\pi}}$，此时粮仓造价最低。

16、解：（1）设切点为 $(a,\ln a)$，则过该点的切线方程为 $y-\ln a=\dfrac{1}{a}(x-a)$，

切线过原点 $(0,0)$，则 $a=e$，故所求切线方程为 $y=\dfrac{1}{e}x$。

（2）$S=\dfrac{1}{2}e-\int_1^e\ln xdx=\dfrac{1}{2}e-(x\ln x-x)\Big|_1^e=\dfrac{1}{2}e+1$。

（3）$V=\dfrac{1}{3}\pi e-\pi\int_1^e\ln^2 xdx=\dfrac{1}{3}\pi e-\pi(x\ln^2 x-2x\ln x+2x)\Big|_1^e=2\pi(1-\dfrac{1}{3}e)$。

五、证明题（5 分）

17、证明：设$F(x)=\frac{\int_x^b f(t)dt}{x}$，其在$[a,b]$连续、可导，且$F(a)=0=F(b)$，由罗尔定理，存在$\xi\in(a,b)$，使得$F(\xi)=0$，

即$\frac{-\xi f(\xi)-\int_\xi^b f(t)dt}{\xi^2}=0\Rightarrow \xi f(\xi)+\int_\xi^b f(t)dt=0$。