西南交通大学 2018—2019 学年第 2 学期半期测试卷

课程代码 1272005 课程名称 高等数学 BII 考试时间 90 分钟

注意： 本试卷共三大题，15 小题。请一律将答案写在指定的答题卡上，在本试卷上作答视为无效。考试结束后将答题卡交回，本试卷自行留存。

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1、直线 $l:\begin{cases}2x-y=0\\3y-2z=0\end{cases}$ 与平面 $\Pi: x+y-z=1$ 的位置关系为（　　）.

（A）垂直；　（B）平行；　（C）直线在平面上；　（D）斜交.

2、二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）.

（A）偏导数存在；　（B）极限存在；　（C）连续；　（D）可全微.

3、设 $z=\arctan(xy)$，则全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=$（　　）.

（A）3；　（B）$\dfrac{3}{5}$；　（C）$\dfrac{1}{5}\mathrm{d}x+\dfrac{2}{5}\mathrm{d}y$；　（D）$\dfrac{2}{5}\mathrm{d}x+\dfrac{1}{5}\mathrm{d}y$.

4、设 $u=f(xy,\dfrac{yz}{x})$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=$（　　）.

（A）$yf''_{12}+\dfrac{1}{x}f''_{22}$；　（B）$\dfrac{1}{x}f'_2+\dfrac{yz}{x^2}f''_{22}$；

（C）$yf''_{12}+\dfrac{yz}{x^2}f''_{22}$；　（D）$yf''_{12}+\dfrac{1}{x}f'_2+\dfrac{yz}{x^2}f''_{22}$.

5、设函数 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$，则点 $(1,1)$（　　）.

（A）不是 $f(x,y)$ 的极值点；　（B）是 $f(x,y)$ 的极大值点；

（C）是 $f(x,y)$ 的极小值点；　（D）无法判断是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

6、交换二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分顺序，结果为（　　）.

（A）$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\mathrm{d}y$；　（B）$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1+x}} f(x,y)\mathrm{d}y$；

（C）$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1+x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$；　（D）$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$.

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7、以曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$为准线，母线平行于$z$轴的柱面方程为__________.

8、函数$u=x^2+y^2+z^2$在点$A(1,-1,1)$处的方向导数最大值是__________.

9、设D是由直线$x=2$，$y=x$以及曲线$xy=1$所围成的平面闭区域，则二重积分

$\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma=$__________.

10、设空间区域$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0\}$，则三重积分$\iiint\limits_\Omega (1+xyz)\mathrm{d}v=$______.

三. 解答题（每小题 10 分，共 50 分）

11、求曲面$x^2+2y^2+3z^2=6$的切平面，使得该切平面与曲线$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$在$t=1$处的切线垂直.

12、设$z=z(x,y)$是由方程$e^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$确定的函数，计算$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$和$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$.

13、求函数$f(x,y)=x^2+y^2-6x+8y$在闭区域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 100\}$上的最大值.

14、计算二重积分$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是圆$x^2+(y-1)^2=1$与$y$轴围成的右半部分区域.

15、由抛物面$z=1-x^2-y^2$与xOy面围成立体Ω，已知其内任意点(x,y,z)处的密度为$\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z$，求其质量m.

2018-2019（二）高等数学 BII 半期考试参考答案

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1、B　　2、A　　3、D　　4、D　　5、C　　6、D

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7、$x^2+xy+y^2=\dfrac{1}{2}$ （或 $x^2+y^2+(x+y)^2=1$）　　8、$2\sqrt{3}$

9、$\dfrac{9}{4}$　　10、$\dfrac{2}{3}\pi$

三. 解答题（每小题 10 分，共 50 分）

11、解：设切平面与曲面的切点为(x,y,z)，则切平面的法向量为

$$n=(2x,4y,6z)=2(x,2y,3z)$$

曲线在$t=1$处的切线的切向量$s=\left.\left(1,2t,3t^2\right)\right|_{t=1}=(1,2,3)$

由切平面与切线垂直得$n//s$，故$x=y=z$

联立$x^2+2y^2+3z^2=6$解得切点$x=y=z=1$或$x=y=z=-1$

所求切平面方程为$x+2y+3z=6$或$x+2y+3z=-6$

12、解：$x=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{2}$时$z=0$

设$F(x,y,z)=e^{2yz}+x+y^2+z-\dfrac{7}{4}$

则$F_x=1$, $F_y=2ze^{2yz}+2y$, $F_z=2ye^{2yz}+1$

故$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\left.\frac{F_x}{F_z}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\left.\frac{1}{2ye^{2yz}+1}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\left.\frac{F_y}{F_z}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\left.\frac{2ze^{2yz}+2y}{2ye^{2yz}+1}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}$$

（注：此题可用直接求导法）

13、解：由 $\begin{cases} f_x = 2x-6=0 \\ f_y = 2y+8=0 \end{cases}$ 得驻点 $(3,-4)$，且 $(3,-4)\in D$

在区域 D 的边界 $x^2+y^2=100$ 上，引入拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-6x+8y+\lambda(x^2+y^2-100)$$

由 $\begin{cases} F_x = 2x-6+2\lambda x=0 \\ F_y = 2y+8+2\lambda y=0 \\ F_\lambda = x^2+y^2-100=0 \end{cases}$，求得驻点 $(x,y)=(6,-8)$ 或 $(-6,8)$

计算 $f(3,-4)=-25$， $f(6,-8)=0$， $f(-6,8)=200$

比较得最大值 $f_{\max}=f(-6,8)=200$

（注：在边界上讨论时可用无条件极值，也可设拉格朗日函数为：

$F(x,y,\lambda)=100-6x+8y+\lambda(x^2+y^2-100)$ ）

14、解：圆的极坐标方程 $\rho=2\sin\theta$，

区域 D 用极坐标表示为： $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le\rho\le 2\sin\theta$

$$\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$$

15、解： $m=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}v=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x^2-y^2}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^2+z)\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{2}(\rho-\rho^5)\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})=\frac{\pi}{3}$$

（注：此题也可用先二后一法）