University Physics

大学物理

大学
物理

§ 5.3 角动量定律

复习上讲内容

质点	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$	
质点系	$\vec{M}_{外} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
$\boxed{\vec{\boldsymbol{M}}_{轴} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}_{\perp}}$	
定轴刚体	$M_{轴} = J\beta = J\dfrac{d\omega}{dt}$

§ 5.3 角动量定律

复习上讲内容

质点 $\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$	$\vec{M} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$	$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2} \mathrm{d}\vec{L} = \Delta\vec{L}$
质点系 $\boxed{\vec{M}_{轴} = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp}}$	$\vec{M}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$	$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{外}\mathrm{d}t = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2} \mathrm{d}\vec{L} = \Delta\vec{L}$
定轴刚体	$M_{轴} = J\beta = J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$	$\int_{t_1}^{t_2} M_{轴}\mathrm{d}t = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\mathrm{d}\omega = J\Delta\omega$

注意:

1. 力矩对时间的积累：角冲量

定义： $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t$　　　效果：改变角动量

2. 比较： $\vec{p}$ $\begin{cases} \text{时间变化率与 } \vec{F} \text{ 对应} \\ \text{一定时间过程的变化量与 } \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t \text{ 对应} \end{cases}$

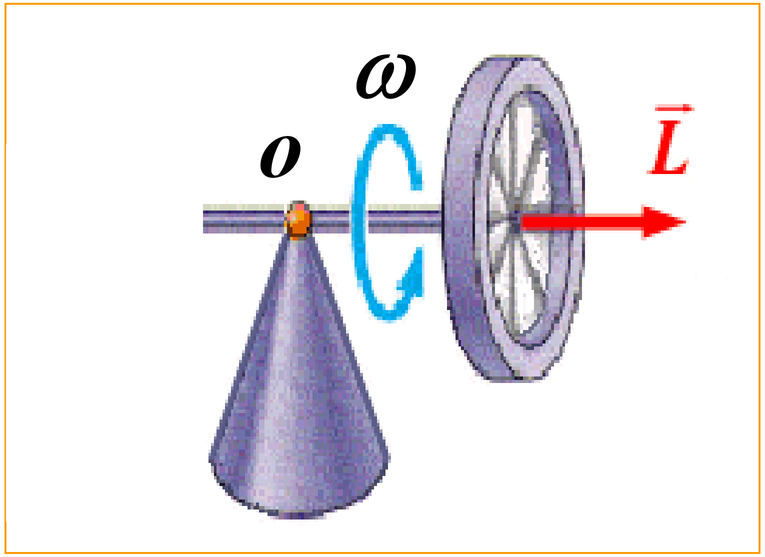
$\vec{L}$ $\begin{cases} \text{时间变化率与 } \vec{M} \text{ 对应} \\ \text{一定时间过程的变化量与 } \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t \text{ 对应} \end{cases}$

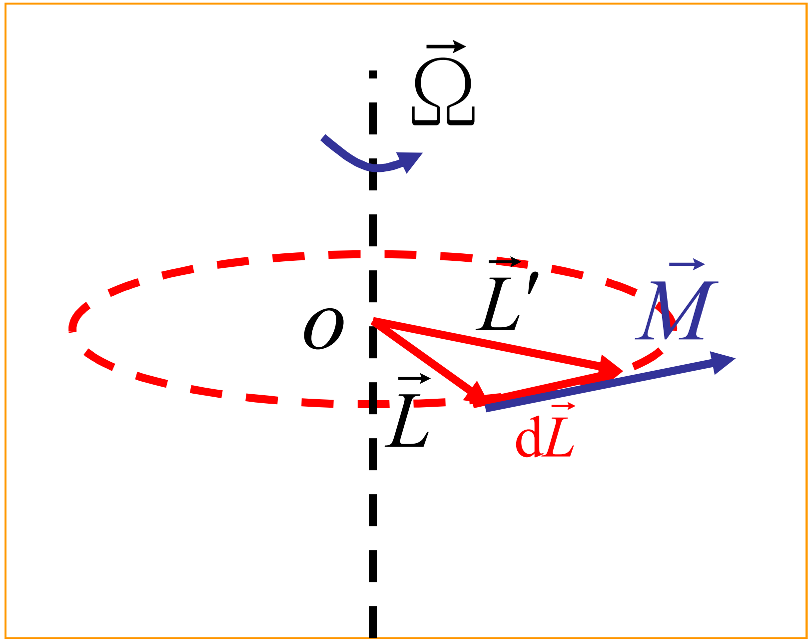
3. 同一式中，$\vec{M}$，$\vec{L}$，J，$\vec{\omega}$ 等角量

要对同一参考点或同一轴计算。

*旋进——角动量定理的应用举例

1.车轮的旋进（演示）





讨论：

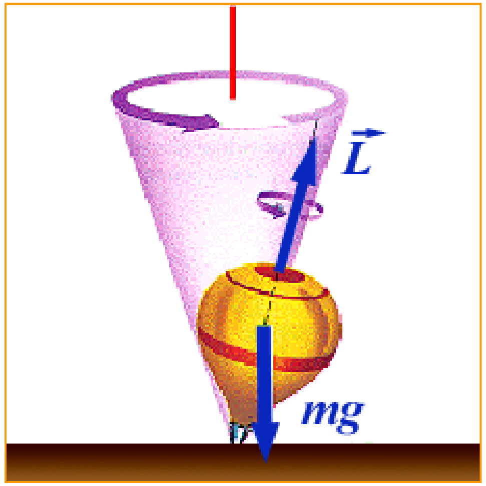
- 改变ω的方向，旋进方向是否改变？
- 改变配重G，对旋进有什么影响？
- 用外力矩加速（或阻碍）旋进，会发生什么现象？

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{L} \perp \vec{L}}$$

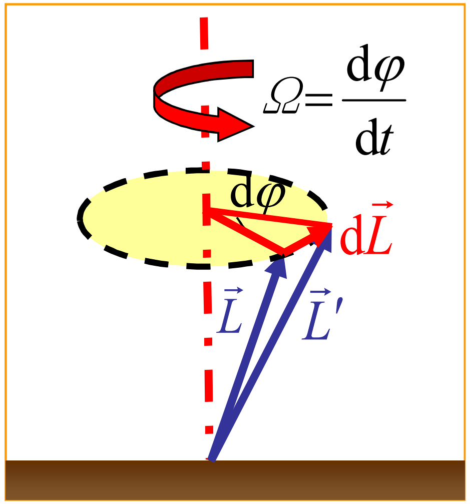
*旋进——角动量定理的应用举例

2、陀螺



(1) 若 $\vec{L}=0$，则在重力矩 $\vec{r}_c\times m\vec{g}$ 作用下，陀螺将绕垂直于板面的轴转动，即倒地。

(2) 当 $\vec{L}\neq 0$ 时，重力矩 $\vec{r}_c\times m\vec{g}$ 将改变 $\vec{L}$ 的方向，而不改变 $\vec{L}$ 的大小(因 $\vec{r}_c\times m\vec{g}\perp\vec{L}$)。



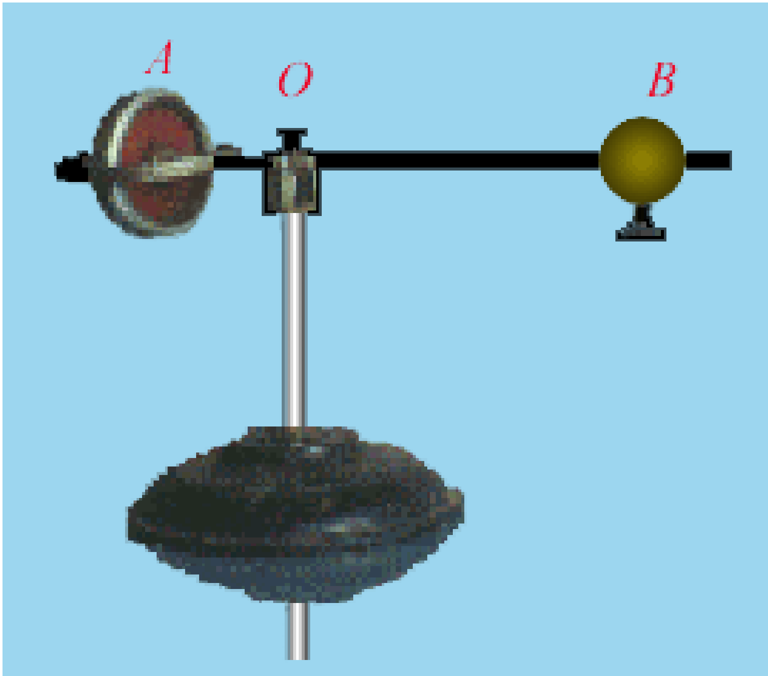
$$\because \vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\qquad\qquad \therefore\ \mathrm{d}\vec{L}\perp\vec{L}$$

最终效果：陀螺绕竖直轴旋转 — 旋进

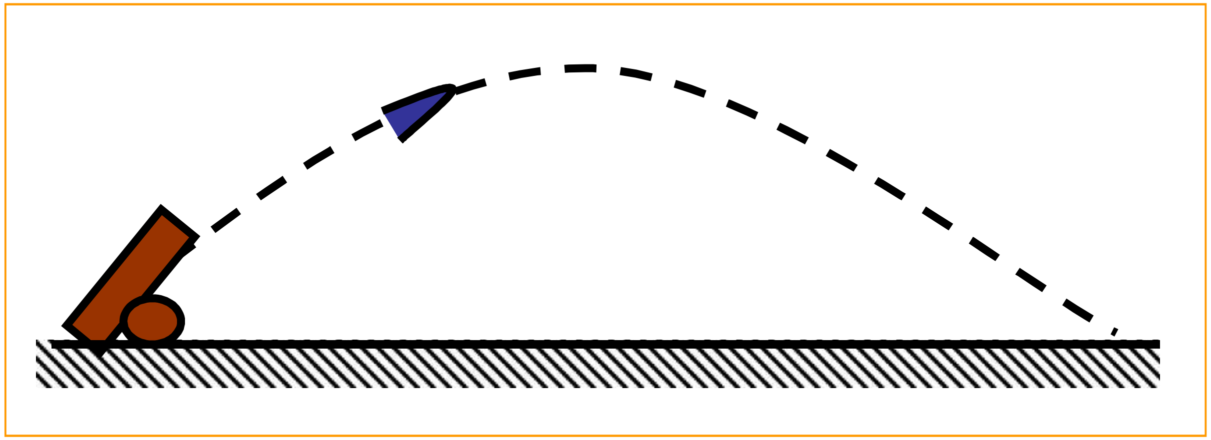
旋进角速度 $$\Omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}L}{L\sin\theta\,\mathrm{d}t}=\frac{M}{L\sin\theta}\qquad(\omega>>\Omega)$$

3. 回转仪实验：

如图所示的杠杆陀螺仪。当陀螺仪高速旋转时，移动平衡物*B*，杆不会倾斜，而是在水平面内绕*O*旋转。这种运动称为旋进运动，它是在外力矩作用下产生的回转效应。



4、炮弹的旋进

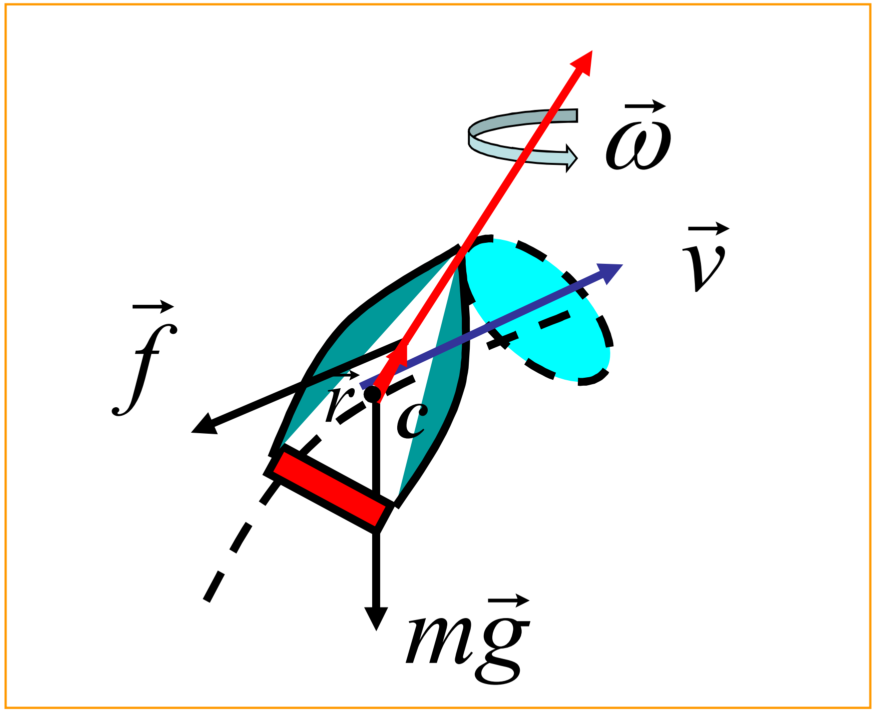


5、旋进现象在自然界广泛存在：

地球的旋进；

用电子在外磁场中的旋进解释物质的磁化的本质；

……



§5.4 角动量守恒定律

一、角动量守恒定律

对质点： $\vec{M}=0$ $\quad \vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=0$ $\quad \boxed{\vec{L}=\text{恒矢量}}$

对质点系由角动量定理：

当 $\vec{M}_{外}=0$ 时， $\quad \vec{M}_{外}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=0$ $\quad \boxed{\vec{L}=\text{恒矢量}}$

分量式：
$$
\begin{cases}
M_x=0 \quad \text{时} \quad L_x=\text{恒量} \\
M_y=0 \quad \text{时} \quad L_y=\text{恒量} \\
M_z=0 \quad \text{时} \quad L_z=\text{恒量}
\end{cases}
$$

对定轴转动刚体，当 $M_{轴}=0$ 时， $\boxed{L_{轴}=\text{恒量}}$

角动量守恒定律:

当质点系所受外力对某参考点（或轴）的力矩的矢量和为零时，质点系对该参考点（或轴）的角动量守恒。

注意 **1.守恒条件:** $\vec{M}_{外} = 0$ **或** $M_{轴} = 0$

能否为 $\int \vec{M}_{外} \mathrm{d}t = 0$?

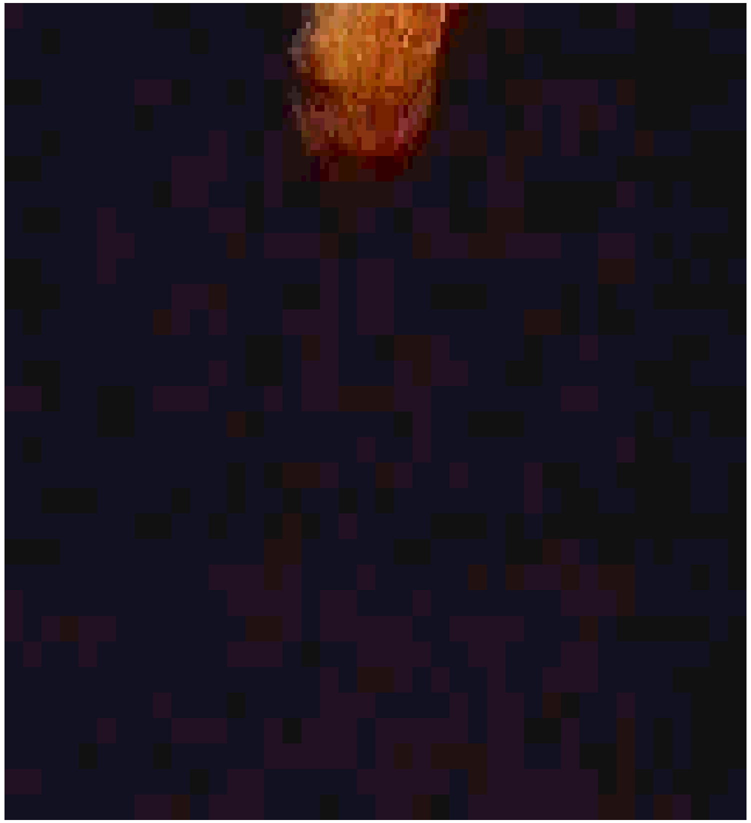
2. 与动量守恒定律对比:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{当 } \vec{F}_{外} = 0 \text{ 时,} & \vec{p} = \text{恒矢量} \\ \text{当 } \vec{M}_{外} = 0 \text{ 时,} & \vec{L} = \text{恒矢量} \end{array}\right\} \text{彼此独立}$$

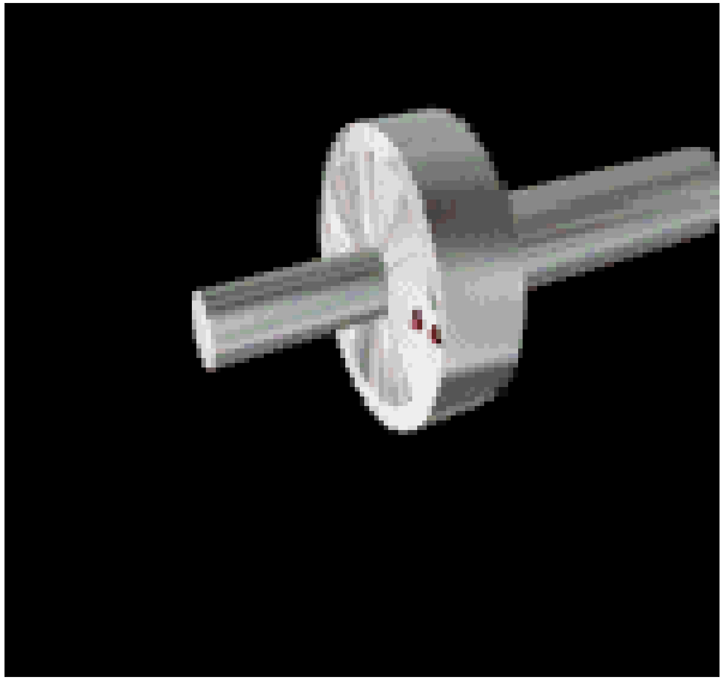
角动量守恒现象举例

适用于一切转动问题，大至天体，小至粒子...

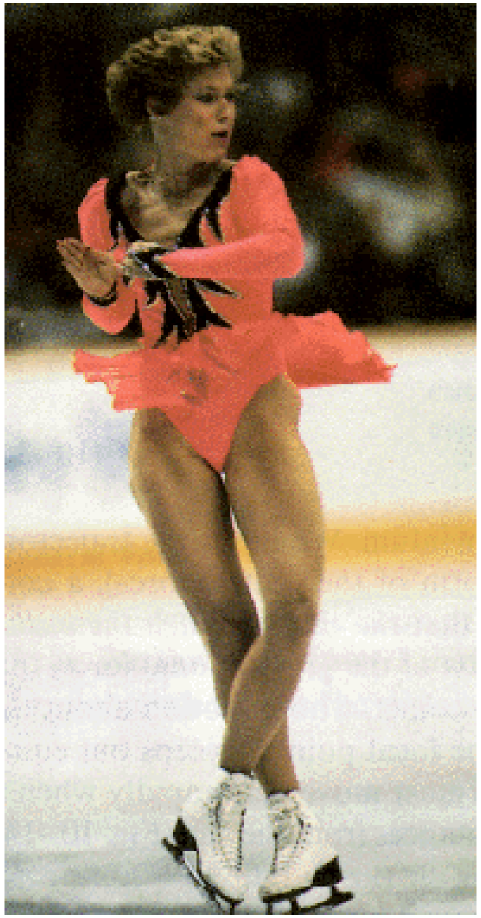
为什么猫从高处落下时总能四脚着地？



请看：猫刚掉下的时候，由于体重的缘故，四脚朝天，脊背朝地，这样下来肯定会摔死。请你注意，猫狠狠地甩了一下尾巴，结果，四脚转向地面，当它着地时，四脚伸直，通过下蹲，缓解了冲击。那么，甩尾巴而获得四脚转向的过程，就是角动量守恒过程。



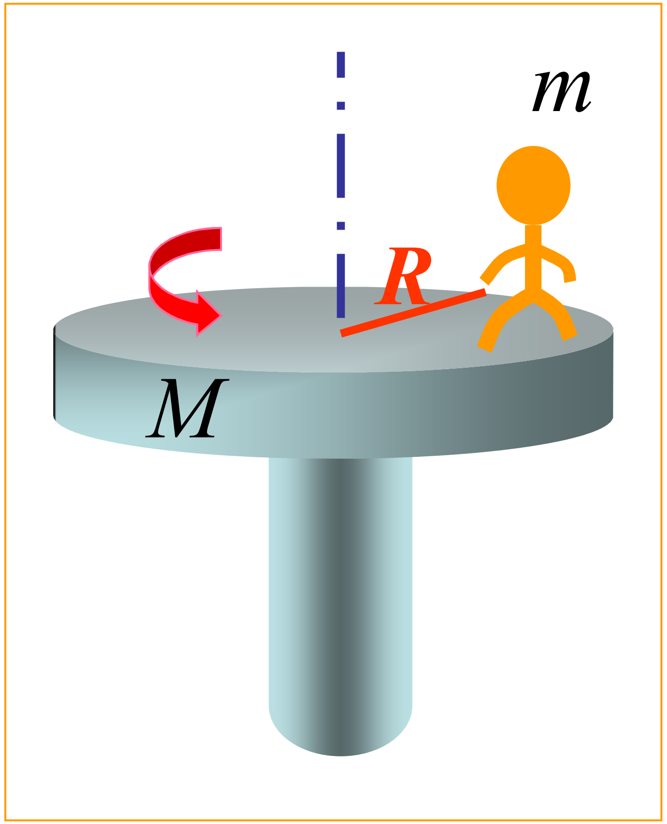
直升飞机的尾翼要安装螺旋桨？



体操运动员的“晚旋”

芭蕾、花样滑冰、跳水……

例. 一半径为R、质量为 M 的转台，可绕通过其中心的竖直轴转动，质量为 m 的人站在转台边缘，最初人和台都静止。若人沿转台边缘跑一周（不计阻力），相对于地面，人和台各转了多少角度？



解：选地面为参考系，设对转轴

人：$J\,,\omega$ ；　台：$J'\,,\omega'$

$$J = mR^2 \qquad J' = \tfrac{1}{2}MR^2$$

系统对转轴合外力矩为零，角动量守恒。以向上为正：

$$J\omega - J'\omega' = 0$$

$$\omega' = \frac{2m}{M}\omega$$

设人沿转台边缘跑一周的时间为 t：

$$\int_0^t \omega \mathrm{d}t + \int_0^t \omega' \mathrm{d}t = 2\pi$$

$$\int_0^t \omega \mathrm{d}t + \frac{2m}{M}\int_0^t \omega \mathrm{d}t = 2\pi$$

人相对地面转过的角度：

$$\theta = \int_0^t \omega \mathrm{d}t = \frac{2\pi M}{2m+M}$$

台相对地面转过的角度：

$$\theta' = \int_0^t \omega' dt = \frac{4\pi m}{2m+M}$$

二. 有心力场中的运动

物体在有心力作用下的运动

↓

力的作用线始终通过某定点的力

↓

力心

有心力对力心的力矩为零，只受有心力作用的物体对力心的角动量守恒。

应用广泛，例如：

天体运动（行星绕恒星、卫星绕行星...）

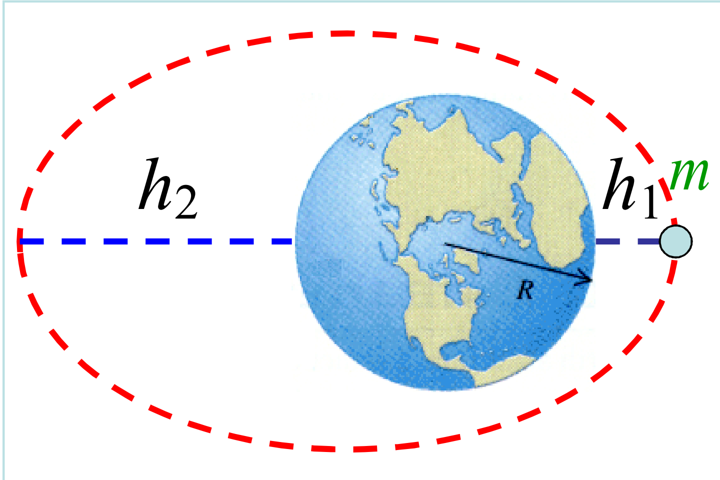
微观粒子运动（电子绕核运动；原子核中质子、中子的运动一级近似；加速器中粒子与靶核散射...）

例.

已知: 地球　$R = 6378$ km

卫星　近地: $h_1 = 439$ km　　$v_1 = 8.1\ \mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$

远地: $h_2 = 2384$ km



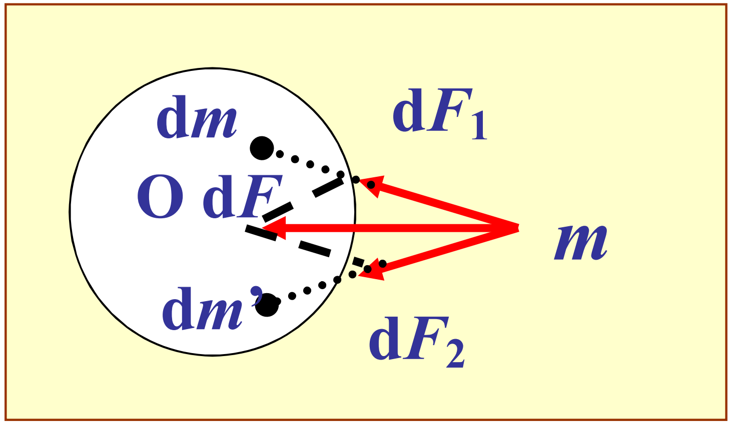
求: v_2

解: 卫星~质点　m

地球~均匀球体

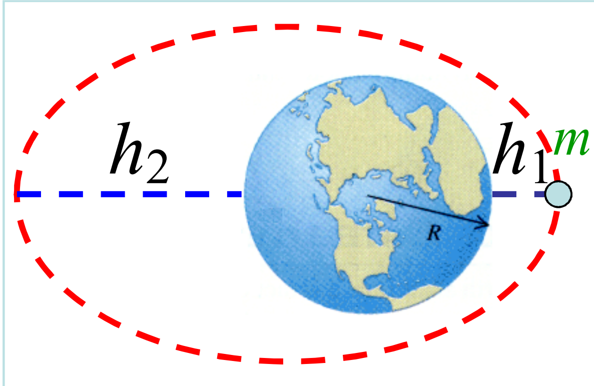
对称性: 引力矢量和过地心

对地心力矩为零



卫星 m 对地心 o 角动量守恒

卫星 **m** 对地心 ***o*** 角动量守恒



$$mv_1(R+h_1)=mv_2(R+h_2)$$

$$v_2=\frac{R+h_1}{R+h_2}\cdot v_1=\frac{6378+439}{6378+2384}\times 8.1=6.3\text{kms}^{-1}$$

- 增加通讯卫星的可利用率:远地点在发射国上空

探险者号卫星偏心率高

近地 $\begin{cases} h_1=160.9\text{km} \\ v_1=3.38\times10^4\text{kms}^{-1} \\ \Delta t \text{小很快掠过} \end{cases}$

远地 $\begin{cases} h_2=2.03\times10^5 km \\ v_2=1225 kms^{-1} \\ \Delta t \text{大充分利用} \end{cases}$

三、角动量守恒与空间旋转对称性（了解）

空间绝对位置是不可测量的

$\Rightarrow$ 空间具有平移对称性

$\Rightarrow$ 动量守恒

空间绝对方向是不可测量的

$\Rightarrow$ 空间具有旋转对称性

$\Rightarrow$ 角动量守恒

空间各向同性：各方向对物理定律等价。

孤立系统在某个角位置具有角动量 $\vec{L}$ ，

则在其它角位置也应具有相同的角动量 $\vec{L}$ ，

即孤立系统角动量守恒。

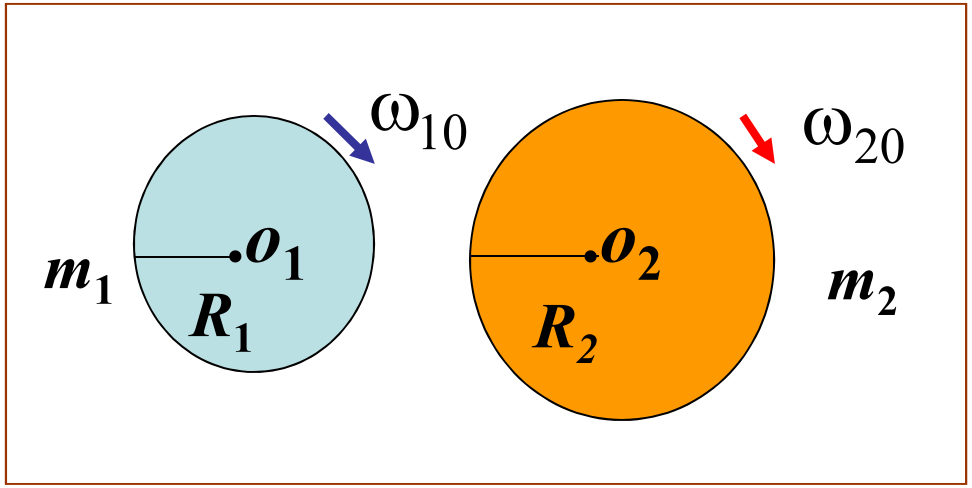
第五章 角动量 角动量守恒 习题课

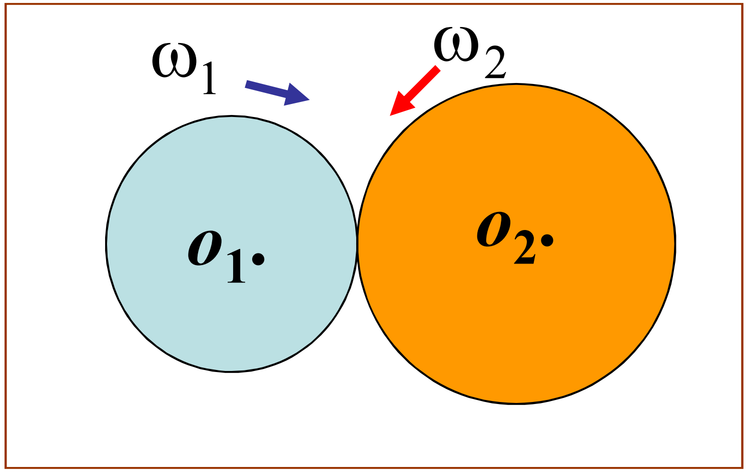
例1. 已知：两平行圆柱在水平面内转动，

$$m_1\ ,R_1\ ,\omega_{10};\quad m_2\ ,R_2\ ,\omega_{20}$$

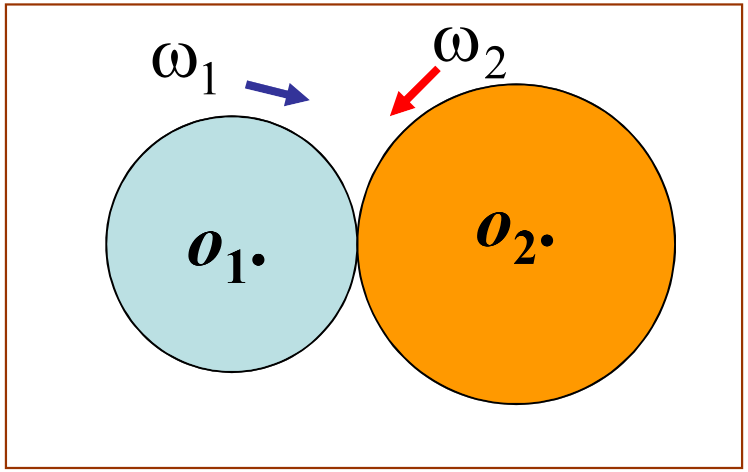
求：接触且无相对滑动时

$$\omega_1 = ?\quad \omega_2 = ?$$





解一：因摩擦力为内力，外力过轴，外力矩为零，则：
J_1+J_2 系统角动量守恒，以顺时针方向为正：



$$J_1\omega_{10}+J_2\omega_{20}=J_1\omega_1-J_2\omega_2 \quad (1)$$

接触点无相对滑动：

$$\omega_1 R_1=\omega_2 R_2 \quad (2)$$

又：$$J_1=\frac{1}{2}m_1R_1^2 \quad (3) \qquad J_2=\frac{1}{2}m_2R_2^2 \quad (4)$$

联立1、2、3、4式求解，对不对？

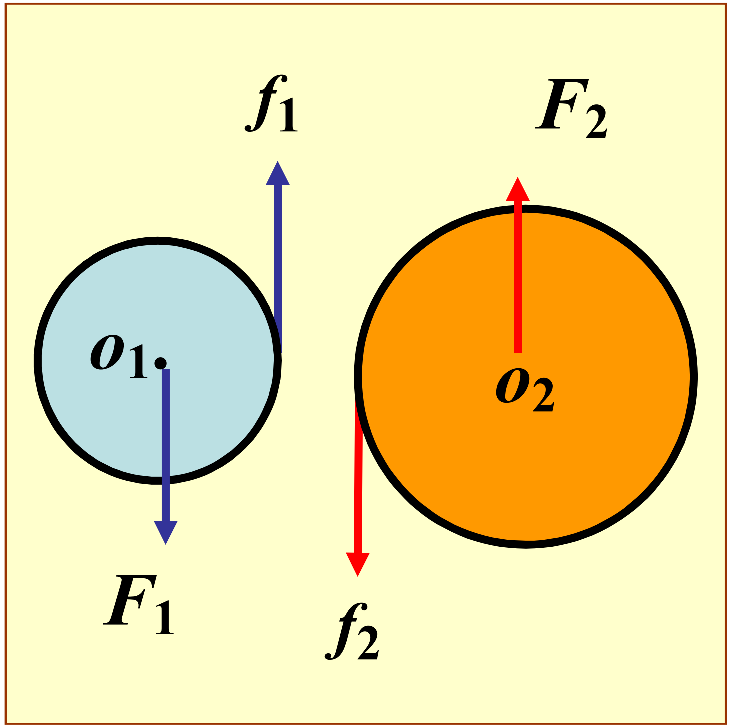
问题：(1) 式中各角量是否对同轴而言？

(2) J_1+J_2 系统角动量是否守恒？

问题：(1) 式中各角量是否对同轴而言？

(2) J_1+J_2 系统角动量是否守恒？

分别以m_1, m_2为研究对象，受力如图：



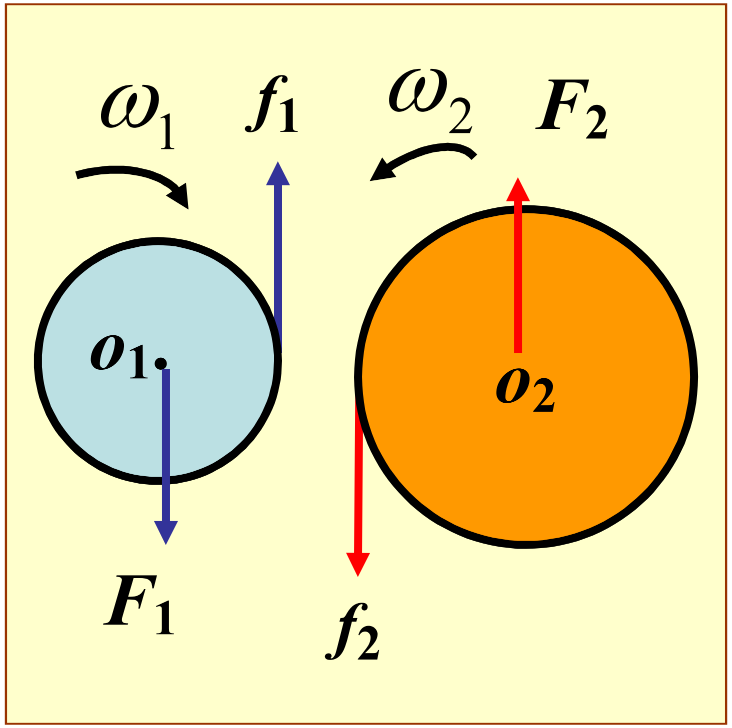
(1) o_1为轴　$\vec{M}_{F_2} \neq 0$

(2) o_2为轴　$\vec{M}_{F_1} \neq 0$

系统角动量不守恒！

解二：分别对m_1，m_2用角动量定理列方程

设：$f_1=f_2=f$，　以顺时针方向为正



m_1对o_1轴：

$$-\int R_1 f\mathrm{d}t = J_1\omega_1 - J_1\omega_{10},$$

$$J_1 = \tfrac{1}{2}m_1R_1^2$$

m_2对o_2轴：

$$-\int R_2 f\mathrm{d}t = -J_2\omega_2 - J_2\omega_{20},$$

$$J_2 = \tfrac{1}{2}m_2R_2^2$$

接触点：　$\omega_1R_1 = \omega_2R_2$

联立各式解得：

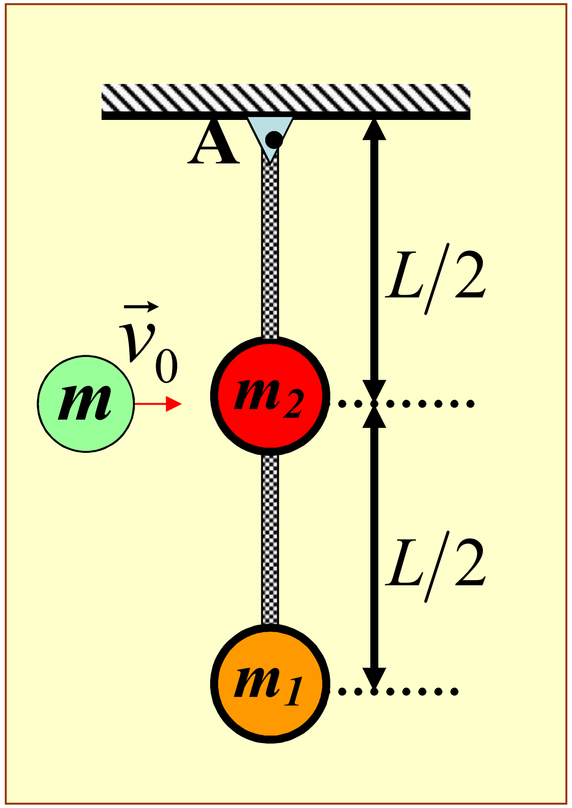
$$\omega_1 = \frac{m_1 R_1 \omega_{10} - m_2 R_2 \omega_{20}}{(m_1 + m_2) R_1}$$

$$\omega_2 = \frac{m_1 R_1 \omega_{10} - m_2 R_2 \omega_{20}}{(m_1 + m_2) R_2}$$

例2. 已知：轻杆，$m_1 = m$，$m_2 = 4m$，油灰球 m，

m 以速度 $\vec{v}_0$ 撞击 m_2，发生完全非弹性碰撞

求：撞后 m_2 的速率 v？



解一：m 和 m_2 系统动量守恒

$$m v_0 = (m + m_2) v$$

解二：m 和 $(m + m_2)$ 系统动量守恒

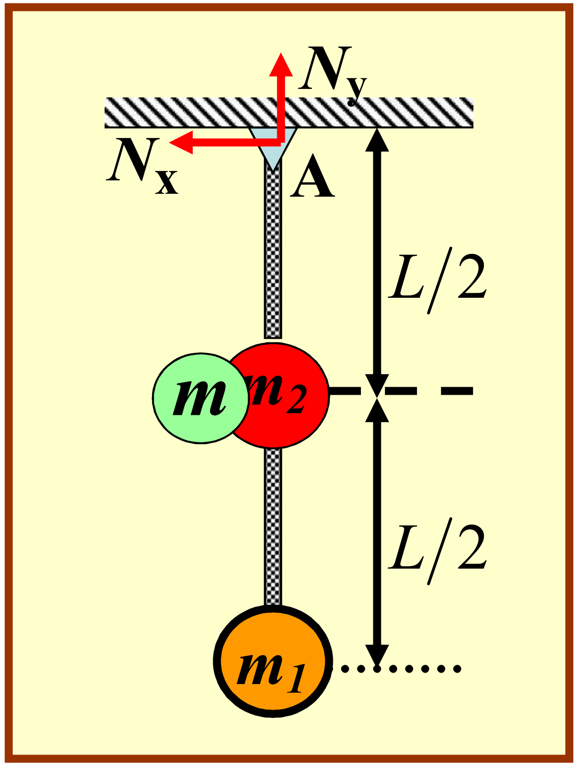
$$m v_0 = (m + m_1 + m_2) v$$

解三：$$m v_0 = (m + m_2) v + m_1 \times 2v$$

以上解法对不对？

因为相撞时轴A作用力不能忽略不计，故系统动量不守恒。

因为重力、轴作用力过轴，对轴力矩为零，故系统角动量守恒。



由此列出以下方程：

$$mv_0 \cdot \frac{L}{2} = (m + m_2)v \cdot \frac{L}{2} + m_1 \cdot 2v \cdot L$$

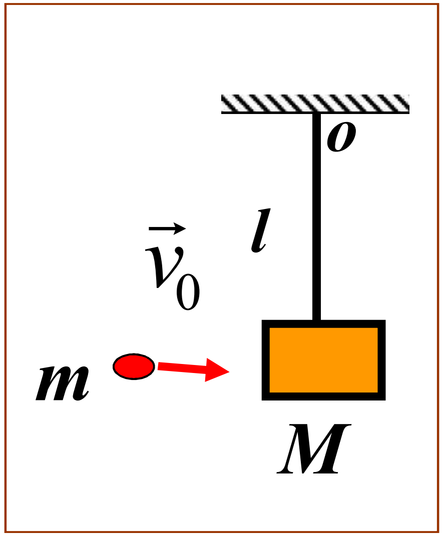
或：
$$m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \cdot \omega_0 = \left[(m + m_2)\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_1 \cdot L^2\right] \cdot \omega$$

$$\omega_0 \cdot \frac{L}{2} = v_0\ ; \quad \omega \cdot \frac{L}{2} = v$$

得： $v = v_0/9$

注意：区分两类冲击摆

(1)



质点 ⟷ 质点　柔绳无切向力

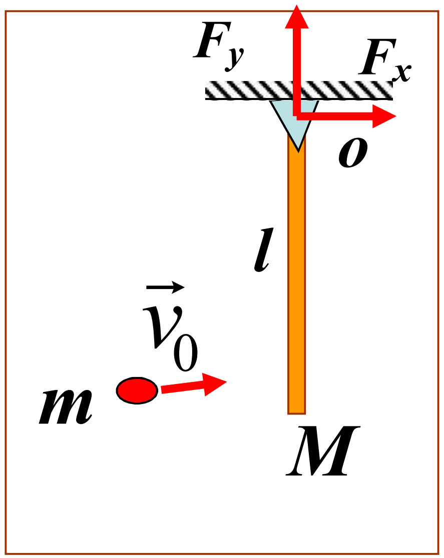
• 水平方向：$F_x = 0$，p_x 守恒

$$m v_0 = (m + M) v$$

• 对 o 点：$\vec{M} = 0$，$\vec{L}$ 守恒

$$m v_0 l = (m + M) v l$$

(2)

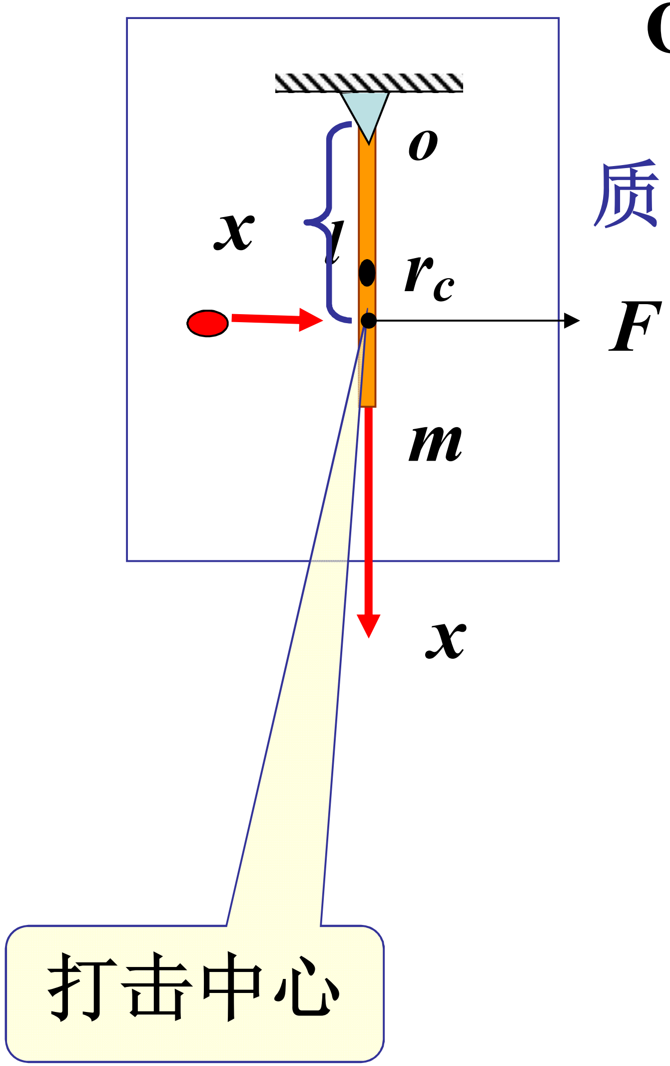


质点 ⟷ 定轴刚体（不能简化为质点）

轴作用力不能忽略，动量不守恒，

但对 o 轴合力矩为零，角动量守恒

$$m v_0 l = m l^2 \omega + \frac{1}{3} M l^2 \cdot \omega \qquad v = \omega l$$



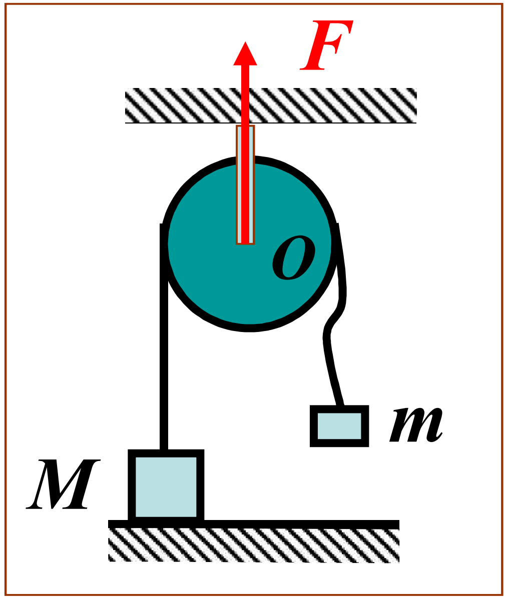
O点不受力的条件：

质点 ⟷ 定轴刚体（不能简化为质点）

$$\begin{cases} M = Fx = J\beta \\ F = ma_c = mr_c\beta = m\dfrac{1}{2}l\beta \\ J = \dfrac{1}{3}ml^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}l$$

回顾:

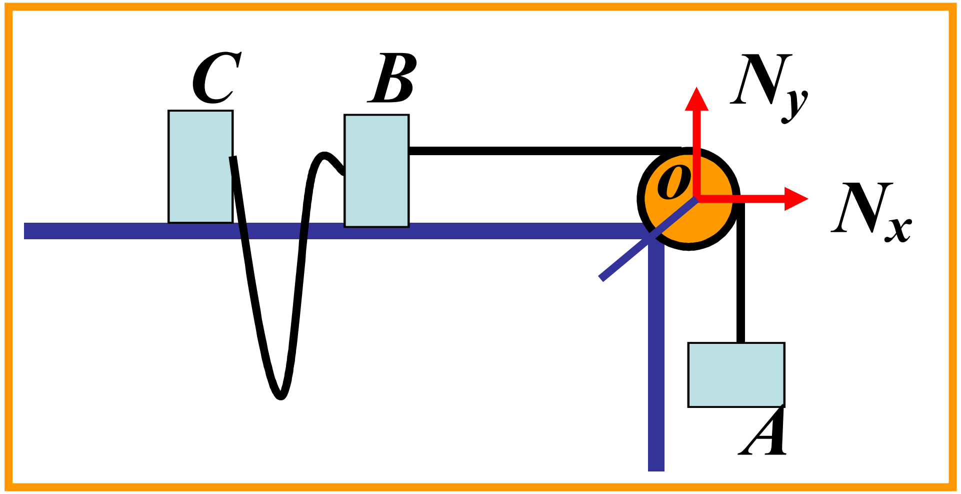


$$\vec{F}_{轴} \neq 0 \quad m+M系统 \quad \vec{p}不守恒;$$

$$\vec{M}_{轴} = 0 \quad m+M系统 \quad 对O点角动量守恒$$

$$m\sqrt{2gh}\cdot R = (m+M)vR$$

回顾



$\vec{F}_{轴} \neq 0$　　　***A*、*B*、*C*系统 $\vec{p}$ 不守恒；**

$\vec{M}_{轴} = 0$　　　***A*、*B*、*C*系统对 *o* 轴角动量守恒**

$$(m_A + m_B)v_1 R = (m_A + m_B + m_c)vR$$

练习1：已知 $m=20$ 克，$M=980$ 克 ,v_0=400米/秒，绳不可伸长。求 m 射入M 后共同的 v =?

哪些物理量守恒？请列方程。

解：m、M系统水平方向动量守恒（F_x=0)

竖直方向动量不守恒（绳冲力不能忽略）

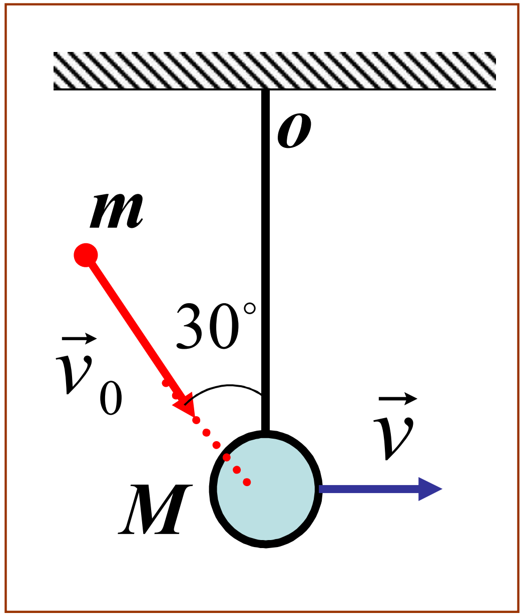
对o 点轴角动量守恒（外力矩和为零）

$$mv_0 \sin 30^0 = (m+M)v$$

或：

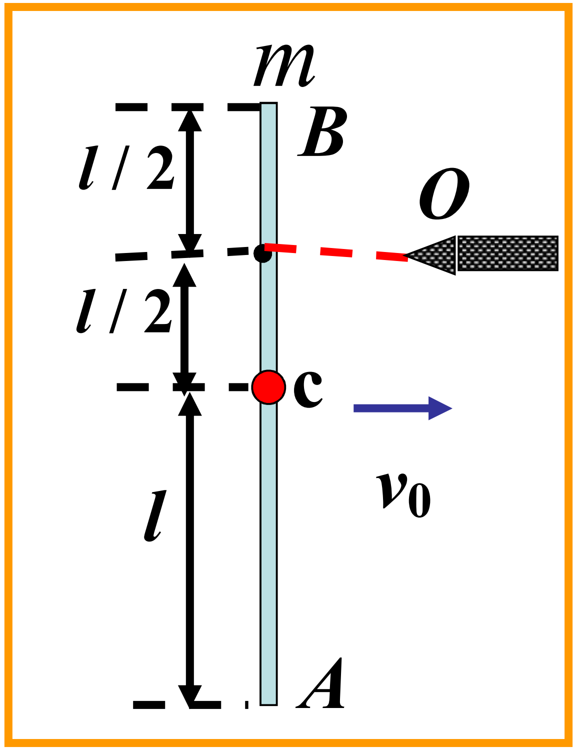
$$mv_0 \cdot l \cdot \sin 30^0 = v(m+M)l \cdot \sin 90^0$$

得：　$v = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$



练习2． 已知：匀质细棒 m，长 $2l$；在光滑水平面内以 v_0 平动，与支点 O 完全非弹性碰撞。

求：碰后瞬间棒绕 O 的 ω ＝ ?



解：碰撞前后AB棒对O的角动量守恒

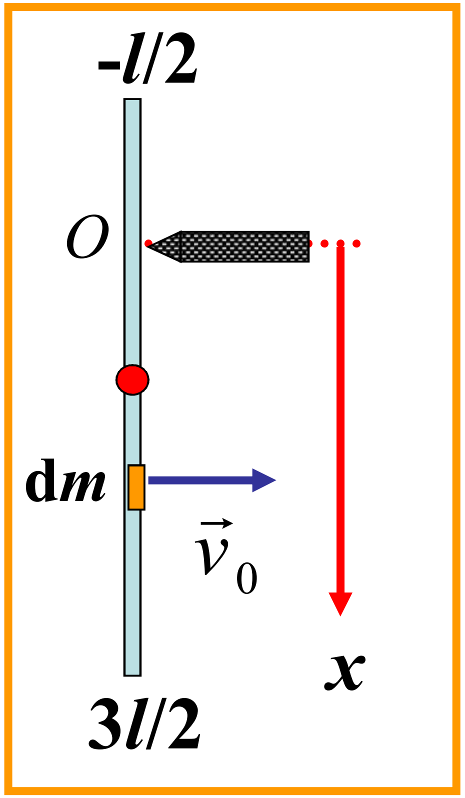
思考：碰撞前棒对O角动量 L=?

碰撞后棒对O角动量 L'=?

撞前:方法1: $\vec{L} = \vec{L}_{轨} + \vec{L}_{自旋}$

$$L = mv_0 \cdot \frac{l}{2} + 0$$

方法2： 各微元运动速度相同，但到*O*距离不等，棒上段、下段对轴*O*角动量方向相反



线密度： $\lambda = \dfrac{m}{2l}$

取质元： $dm = \lambda \cdot dx = \dfrac{m dx}{2l}$

质元角动量：

$$dL = dm \cdot v_0 \cdot x = \frac{mv_0}{2l} x dx$$

设垂直向外为正方向，总角动量：

$$L = \int_0^{3l/2} \frac{mv_0}{2l} x dx - \int_{-l/2}^{0} \frac{mv_0}{2l} x dx = \frac{1}{2} mv_0 l$$

撞后：

$$L' = J\omega = \left[\tfrac{1}{12}m(2l)^2 + m\left(\tfrac{l}{2}\right)^2\right]\omega = \tfrac{7}{12}ml^2\omega$$

令　$L = L'$

$$\frac{1}{2}mv_0 l = \frac{7}{12}ml^2\omega$$

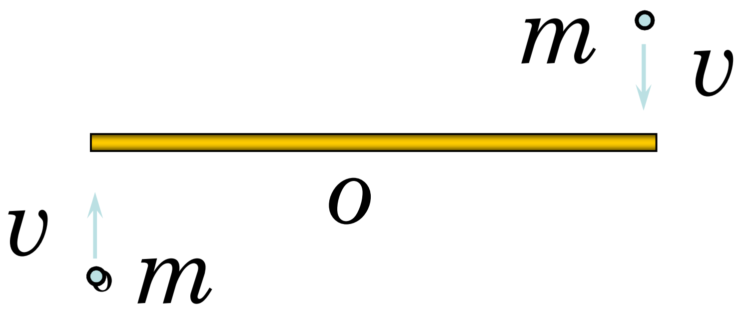
得：　$\omega = \dfrac{6v_0}{7l}$

自测题：1.一个人站在有光滑固定转轴的转动平台上,双臂伸直水平地举起二哑铃,在该人把此二哑铃水平收缩到胸前的过程中,人、哑铃与转动平台组成的系统的

（A）机械能守恒,角动量守恒;
（B）机械能守恒,角动量不守恒,
（C）机械能不守恒,角动量守恒;
（D）机械能不守恒,角动量不守恒.

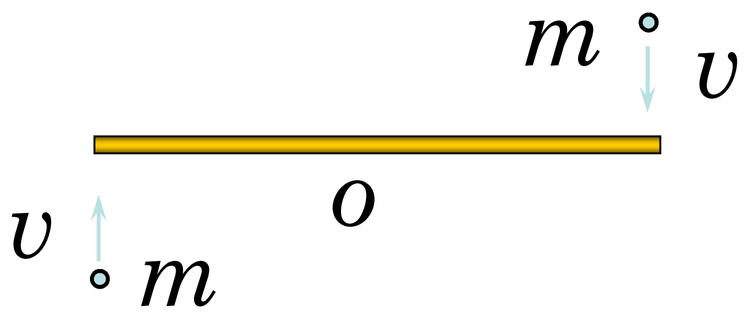
[C]

2.光滑的水平桌面上, 有一长为 $2L$、质量为 m 的匀质细杆,可绕过其中点且垂直于杆的竖直光滑固定轴自由转动,其转动惯量为 $mL^2/3$, 起初杆静止,桌面上有两个质量均为 m 的小球,各自在垂直于杆的方向上,正对着杆的一端,以相同速率 v 相向运动,当两个小球同时与杆的两个端点发生完全非弹性碰撞后,与杆粘在一起转动,则这一系统碰撞后的转动角速度应为:



（A）$\dfrac{2v}{3L}$　　（B）$\dfrac{4v}{5L}$

（C）$\dfrac{6v}{7L}$　　（D）$\dfrac{8v}{9L}$



[C]

3.一块方板，可以其一边为轴自由转动.最初板自由下垂.今有一小团粘土,垂直板面撞击方板并粘在板上,对粘土和方板系统，如果忽略空气阻力,在碰撞中守恒的量是:

(A)动能.
(B)绕木板转轴的角动量.
(C)机械能.
(D)动量.

[B]

4.人造地球卫星，绕地球作椭圆轨道运动，地球在椭圆的一个焦点上，则卫星的

(A)动量不守恒，动能守恒。

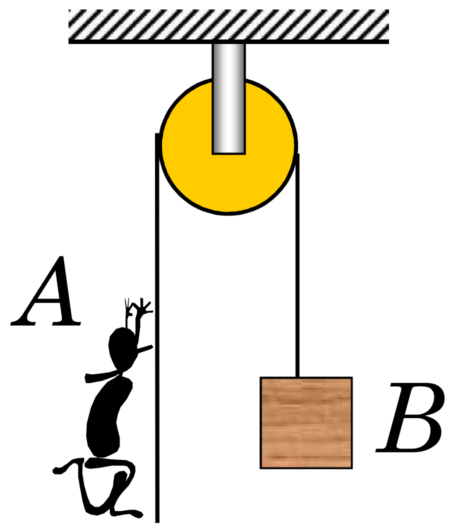
(B)动量守恒，动能不守恒。

(C)角动量守恒，动能不守恒。

(D)角动量不守恒，动能守恒。

[C]

5.一轻绳绕过一定滑轮,滑轮轴光滑,滑轮的质量为 $M/4$,均匀分布在其边远上,绳子 A 端有一质量为 M的人抓住了绳端,而在绳的另一端 B 系了一质量为 $M/4$ 的重物,如图。已知滑轮对 o 轴的转动惯量 $J=MR^2/4$,设人从静止开始以相对绳匀速向上爬时,绳与滑轮间无相对滑动,求 B 端重物上升的加速度?



解：受力分析如图 由题意 $a_{人}=a_B=a$

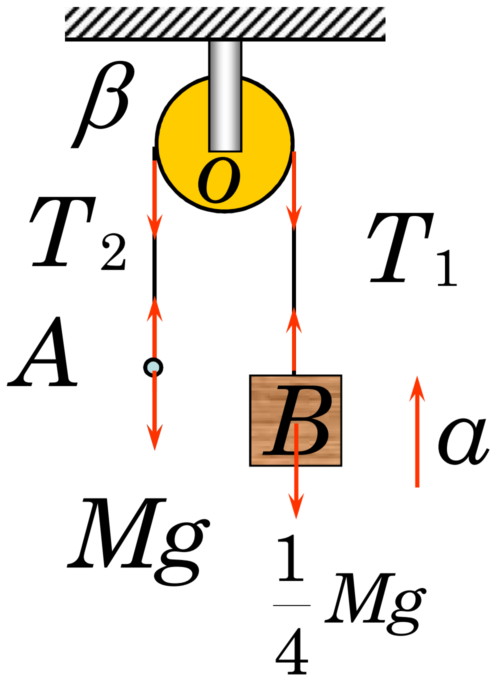
由牛顿第二定律
$$\begin{cases} 人:Mg-T_2=Ma & ① \\ B:T_1-\frac{1}{4}Mg=\frac{1}{4}Ma & ② \end{cases}$$

由转动定律：

对滑轮：

$$(T_2-T_1)R=J\beta=\frac{1}{4}MR^2\beta \quad ③$$

附加：$a=\beta R$ ④



联立① ② ③ ④求解

$$a = \frac{1}{2} g$$

第六章 能量 能量守恒定律 (自学要求)

1.功的计算，熟练计算变力的功，理解保守力做功的特征；2.质点、质点系、定轴刚体的动能；

3.保守力与其相关势能的关系，由势能曲线分析物体运动特征；

4.熟练使用动能定理或功能原理解题，注意内力的功可以改变质点系的总动能；

5.熟练使用机械能守恒定律解题，对综合性问题要能划分阶段，分别选用恰当的力学定理或守恒定律求解。