第四节 运动学的两类基本问题(习题课)(续)

二、已知加速度（或速度）及初始条件，求质点任一时刻的速度和运动方程。

$$\vec{a}(t),(t=0\text{时}\ \vec{r}_0,\vec{v}_0)\rightarrow\vec{v}(t),\vec{r}(t)$$

方法：积分法

例1 (P$_{49}$ 例3)：已知：质点沿直线运动，

$$a = a(t)\,; \quad t = 0:\ x = x_0 \ \ v = v_0$$

求：$v(t)$， $x(t)$

解：

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t \qquad\qquad \mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t a\mathrm{d}t \qquad\qquad \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t v\mathrm{d}t$$

$$v - v_0 = \int_0^t a\mathrm{d}t \qquad\qquad x - x_0 = \int_0^t v\mathrm{d}t$$

$$v = v_0 + \int_0^t a\mathrm{d}t \quad * \qquad\qquad x = x_0 + \int_0^t v\mathrm{d}t \quad *$$

若：$a=a(x)$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\qquad \int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x}a\mathrm{d}x$$

$$v^2-v_0^2=2\int_{x_0}^{x}a\mathrm{d}x \quad *$$

思考：若加速度 a =恒量，三个*式成为什么形式？

$$v=v_0+\int_0^t a\mathrm{d}t \quad * \qquad\qquad v=v_0+at$$

$$x=x_0+\int_0^t v\mathrm{d}t \quad * \qquad\qquad x-x_0=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$v^2-v_0^2=2\int_{x_0}^{x}a\mathrm{d}x \quad * \qquad\qquad v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$$

思考： 用类比方法写出用角量表示的圆周运动公式和$\beta =$ 恒量时的形式

$$v = v_0 + \int_0^t a\mathrm{d}t \qquad \omega = \omega_0 + \int_0^t \beta\mathrm{d}t$$

$$x = x_0 + \int_0^t v\mathrm{d}t \qquad \theta = \theta_0 + \int_0^t \omega\mathrm{d}t$$

$$v^2 - v_0^2 = 2\int_{x_0}^{x} a\mathrm{d}x \qquad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\int_{\theta_0}^{\theta} \beta\,\mathrm{d}\theta$$

$$v = v_0 + at \qquad \omega = \omega_0 + \beta t$$

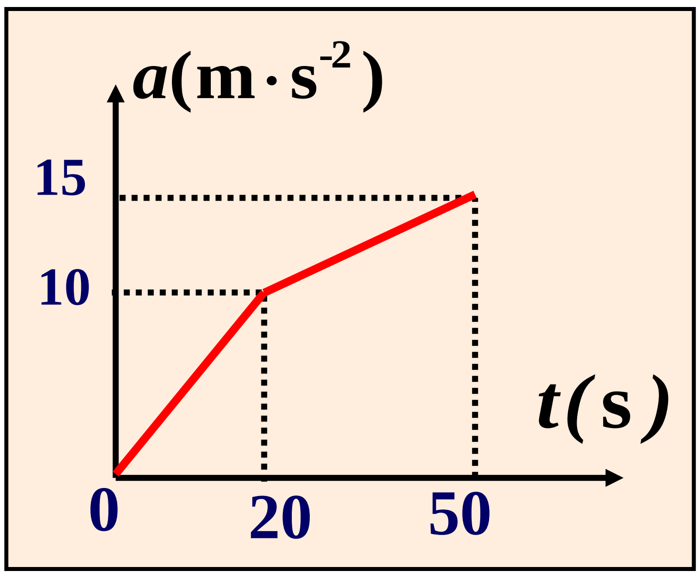
$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \qquad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0)$$

公式需记住！

注意： 若初始时间为t_0(不为0)，公式中变量为t的积分下限为t_0。

例2: 火箭竖直向上发射，加速度随时间变化规律如图。求火箭在 t=50 s 时燃料用完瞬间的速度和高度。



解： 写出 $a(t)$ 表达式

$$a=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t & (0\le t\le 20)\\[2ex] 10+\dfrac{1}{6}(t-20) & (20\le t\le 50)\end{cases}$$

速度、高度分两段算：

第一段：$0 \to 20\text{s}: a = \frac{1}{2}t$

初始条件：$t = 0;\quad v_0 = 0;\quad h_0 = 0$

$$v_1 = v_0 + \int_0^t \frac{1}{2} t \mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^2$$

$$h_1 = h_0 + \int_0^t v_1 \mathrm{d}t = \int_0^t \frac{1}{4}t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{12}t^3$$

$t = 20\text{s}:\qquad v = 100\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\quad h = 666.7(\text{m})$

第二段： $20 \rightarrow 50\text{s}: a = 10 + \frac{1}{6}(t-20) = \frac{t}{6} + \frac{20}{3}$

初始条件： $t = 20; v = 100\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ； $h = 666.7\ \text{m}$

$$v_2 = v + \int_{20}^{t} a\ \text{d}t = 100 + \int_{20}^{t}\left(\frac{t}{6} + \frac{20}{3}\right)\text{d}t = \frac{t^2}{12} + \frac{20t}{3} - \frac{200}{3}$$

$$h_2 = h + \int_{20}^{t} v_2 \text{d}t = 666.7 + \int_{20}^{t}\left(\frac{t^2}{12} + \frac{20t}{3} - \frac{200}{3}\right)\text{d}t$$

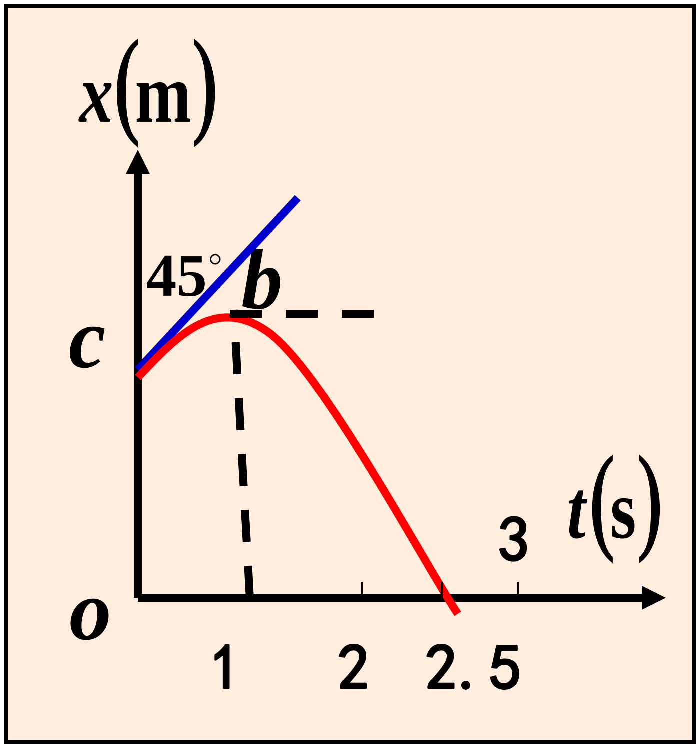
$$= 444.5 + \frac{t^3}{36} + \frac{20t^2}{6} - \frac{200t}{3}$$

$t = 50\text{s}:\quad v_2 = 475(\text{m.s}^{-1}) \qquad h_2 = 8916.7(\text{m})$

例3 (P_{56} 3.6): 已知：x-t 曲线为如图所示抛物线

求：a-t，v-t 图，运动方程。

解:1）质点作何种运动？x-t 曲线为抛物线（二次曲线）



$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\text{常数}$$

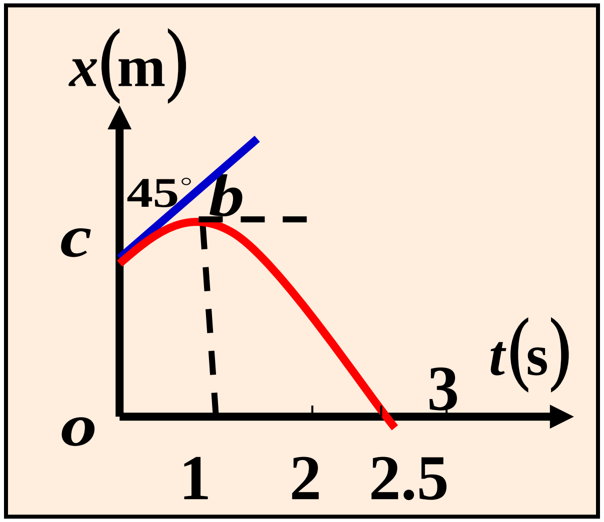
匀变速直线运动

2) $a=?$

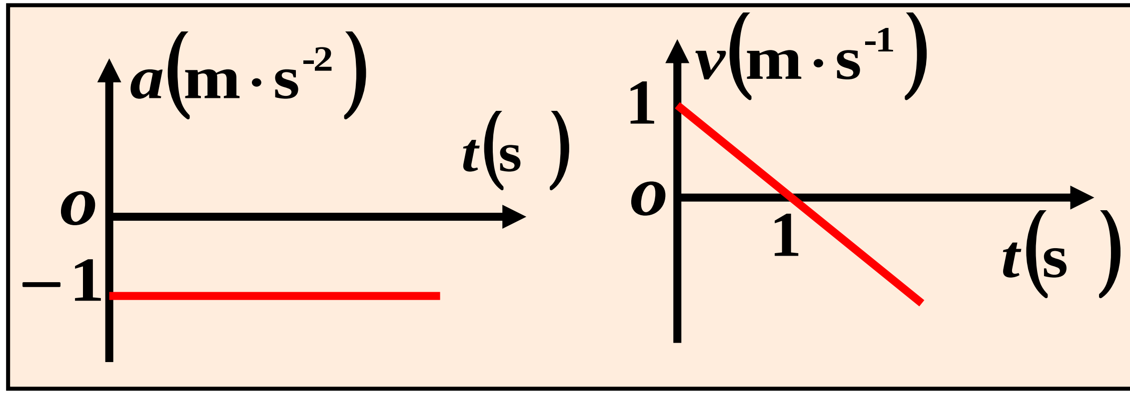
$$t=0: v_c=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=\mathrm{tg}45^\circ=1$$

$$t=1: v_b=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1}=\mathrm{tg}0^\circ=0$$

$$a=\frac{v_b-v_c}{\Delta t}=-1$$



3) $v = ?$　　$v = v_c + at = 1 - t$



4) 运动方程

$$x - x_0 = v_c t + \frac{1}{2}at^2 = t - \frac{t^2}{2} \quad ; \quad x_0 = ?$$

由 $t = 2.5$ 时 $x = 0$　得：$x_0 = 0.625$

$$\therefore \quad x = \frac{5}{8} + t - \frac{1}{2}t^2 \quad (\mathrm{SI})$$

例4（P_{57} 3.14）：一艘快艇在速率为v_0时关闭发动机，其加速度 $a=-kv^2$，式中k为常数，试证明关闭发动机后又行驶 x 距离时，快艇速率为:$v=v_0e^{-kx}$

证明：$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kv^2$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\mathrm{d}x \qquad \int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^x -k\mathrm{d}x$$

$$\ln v\Big|_{v_0}^{v}=\ln v-\ln v_0=\ln\frac{v}{v_0}=-kx$$

$$\ln\frac{v}{v_0}=-kx \qquad \therefore v=v_0e^{-kx}$$

证毕

作业

1.No.1（希望同学们在作业题纸中选择、填空各题的空白处写出其关键步骤）；

2. 自学本章各例题并完成书上的习题(该部分作业不交，对照参考答案自己订正)。

第三周星期三交作业

第五节　相对运动

一、运动的绝对性和描述运动的相对性

二、低速下$(v \ll c)$不同参考系中物体基本物理量的关系

三、变换参考系的运动学意义

一、运动的绝对性和描述运动的相对性

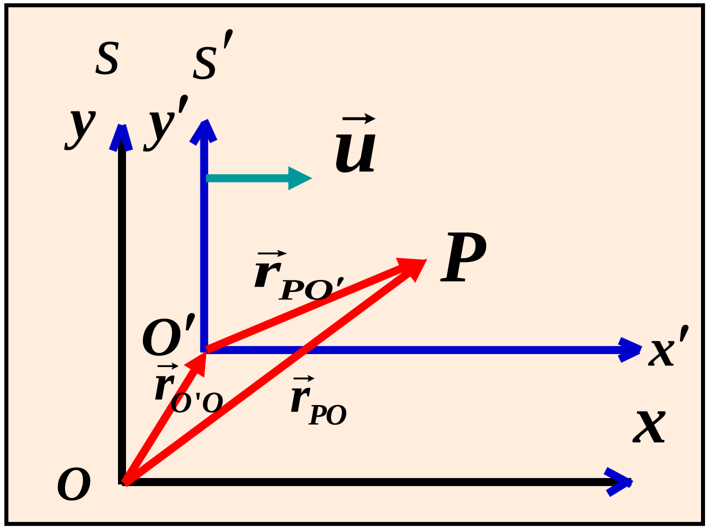
- 只有相对确定的参考系才能具体描述物体的运动。
- 选择的参考系不同，对同一物体运动的描述不相同。

一个坐标系中的描述 —— 变换 —— 另一个坐标系中的描述

二、低速下 $(v \ll c)$ 不同参考系中物体基本物理量的关系

位置矢量：$\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{PO'} + \vec{r}_{O'O}$

推广：$\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{PA} + \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BC} + \vec{r}_{CO}$



位移矢量： $\Delta\vec{r}_{PO} = \Delta\vec{r}_{PO'} + \Delta\vec{r}_{O'O}$

速度适量： $\vec{v}_{PO} = \vec{v}_{PO'} + \vec{v}_{O'O}$

推广：$\vec{v}_{PO} = \vec{v}_{PA} + \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC} + \vec{v}_{CO}$

加速度矢量（当o和o'间只有相对平动时）

$$\vec{a}_{PO} = \vec{a}_{PO'} + \vec{a}_{O'O}$$

特殊情况：S与S'系相对作匀速直线运动：$\vec{a}_{PO} = \vec{a}_{PO'}$

注意： 1.长度的测量与参考系无关。

2.时间的测量与参考系无关。

3. $\vec{r}_{O'O}$是O'相对于参考点O的位矢，

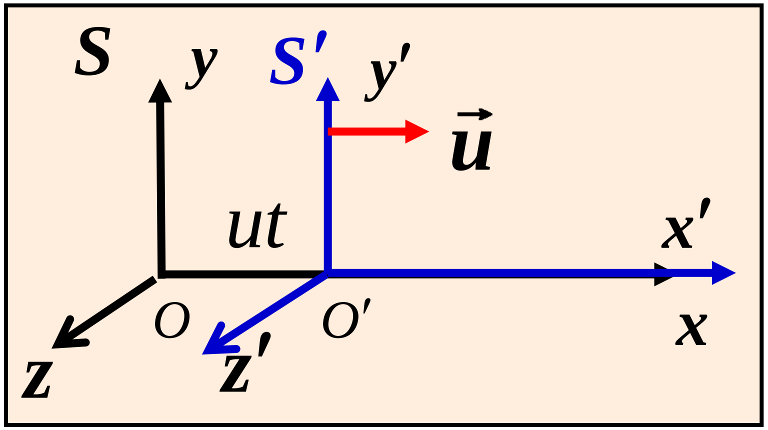
$\vec{v}_{O'O}$是O'相对于O的速度，

$\vec{a}_{O'O}$是O'相对于O的加速度。

若O'、O位置交换，前面加负号：

$$\vec{r}_{O'O} = -\vec{r}_{OO'} \qquad \vec{v}_{O'O} = -\vec{v}_{OO'} \qquad \vec{a}_{O'O} = -\vec{a}_{OO'}$$

伽利略变换:设 S' 系相对于 S 系沿 x 方向以速率 u 运动,以 o 和 o' 重合时为计时起点,$y \,//\, y'$, $z \,//\, z'$。



$$\begin{cases} x_{oo'} = -ut \\ y_{oo'} = 0 \\ z_{oo'} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{xoo'} = -u \\ v_{yoo'} = 0 \\ v_{zoo'} = 0 \end{cases}$$

伽利略坐标变换

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

伽利略速度变换

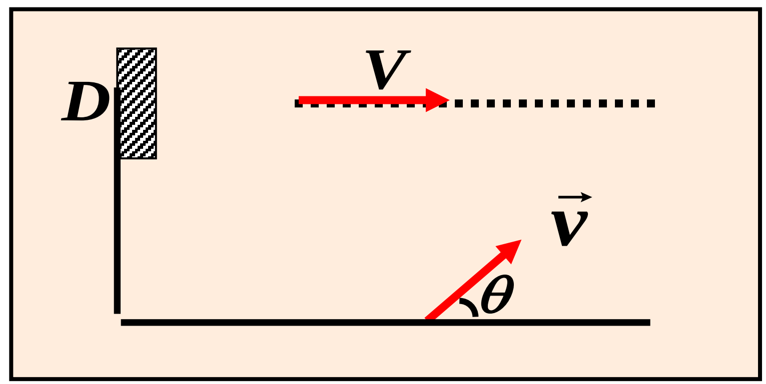
$$\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

注意:若 S' 系相对于 S 系沿 $+x$ 方向运动,u 为正值,若 S' 系相对于 S 系沿 $-x$ 方向运动,u 为负值。

三、变换参考系的运动学意义：处理问题简便

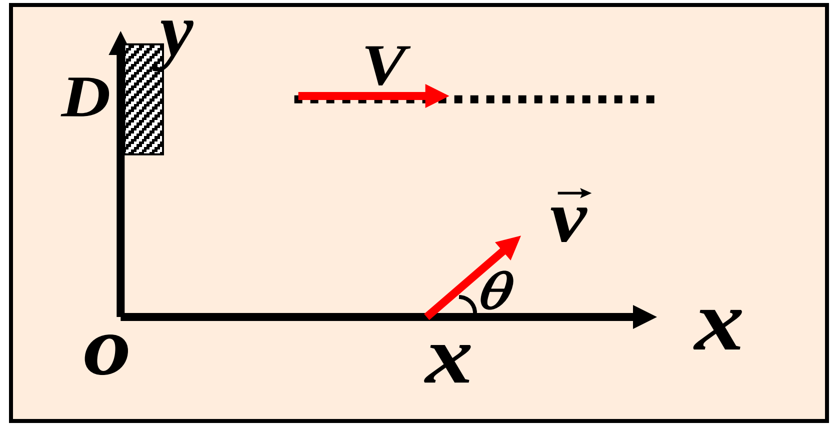
例1（P$_{52}$ 例 1）：一条船平行于平直海岸航行，离岸距离为D，速率为V。一艘快艇从港口出发去拦截这条船，快艇速率 $v<V$，试证明快艇必须在船驶过海岸线上某点以前出发才行，该点离港口的距离为：

$$x=\frac{D}{v}\sqrt{V^2-v^2}$$



解法1. 思路：以岸为参考系，分别写出船和艇的运动方程，令其坐标相等，得相遇条件。

建立如图坐标系



船 $\begin{cases} x_1 = Vt \\ y_1 = D \end{cases}$

艇 $\begin{cases} x_2 = x + vt\cos\theta \\ y_2 = vt\sin\theta \end{cases}$

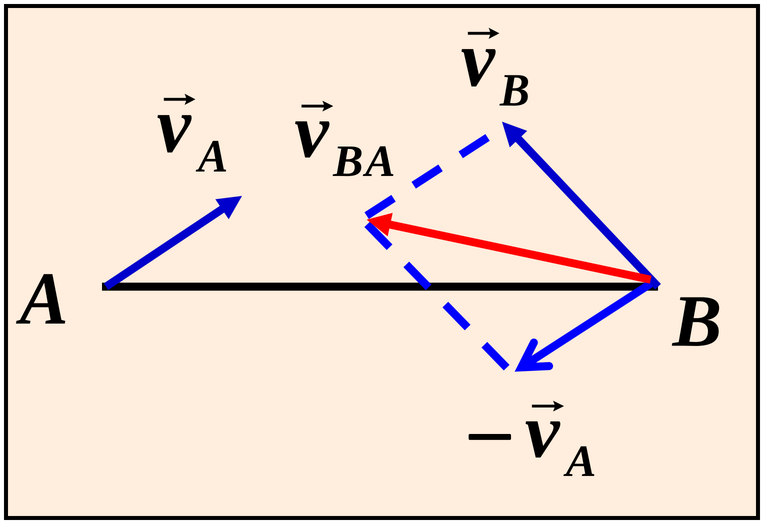
相遇: $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} Vt = x + vt\cos\theta \\ D = vt\sin\theta \end{cases}$

消去 t 得: $$x = \frac{(V - v\cos\theta)D}{v\sin\theta} \quad *$$

求极值:令 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = 0$ 解出 θ 代入* 得 $x_{\min} = \frac{D}{v}\sqrt{V^2 - v^2}$

证毕

思考：以船为参考系，相遇条件是什么？



设B、A为两运动物体，w为大地参考系，则：

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_{Bw} + \vec{v}_{wA}$$
$$= \vec{v}_{Bw} + \left[-\vec{v}_{Aw}\right]$$
$$= \vec{v}_B + \left[-\vec{v}_A\right] = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

若 $\vec{v}_{BA}$的延长线过A，则B向A运动，B、A相遇。

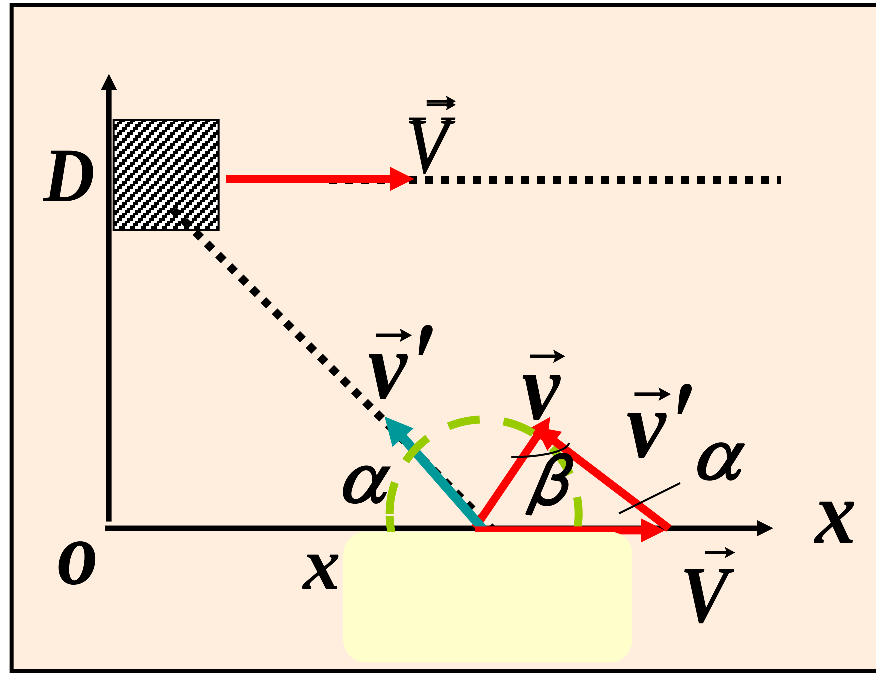
解法2：以船为参考系(A)，设艇(B)对船的速度为 $\vec{v}'$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

相遇条件：$\vec{V}'$延长线过D

即：艇出发时 $\sin\alpha = \dfrac{D}{\sqrt{D^2 + x^2}}$



由速度合成得：$\dfrac{v}{\sin\alpha} = \dfrac{V}{\sin\beta}$

将 $\sin\alpha$ 代入得：$x = \sqrt{\dfrac{D^2}{\sin^2\beta} \cdot \dfrac{V^2}{v^2} - D^2}$ *

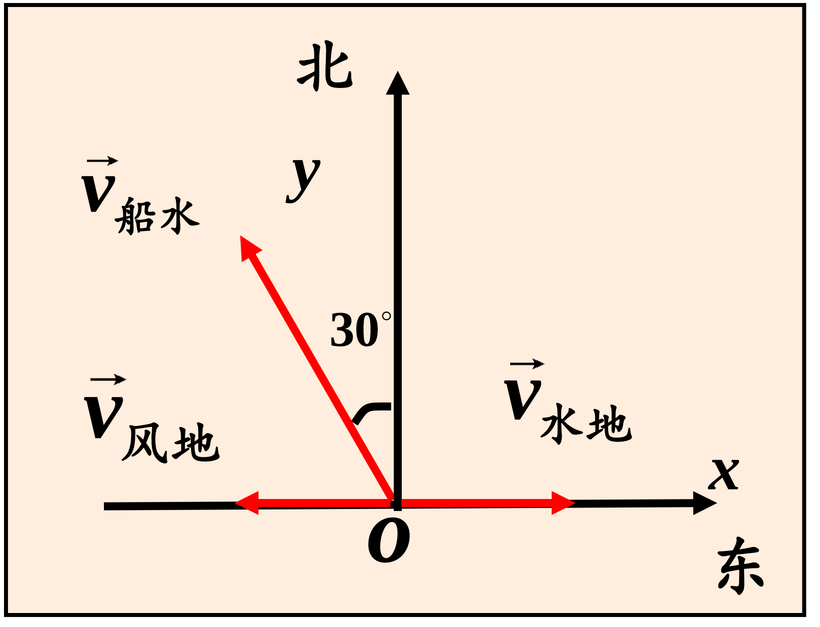
由题知：α要最大(x最小)，则β=90°

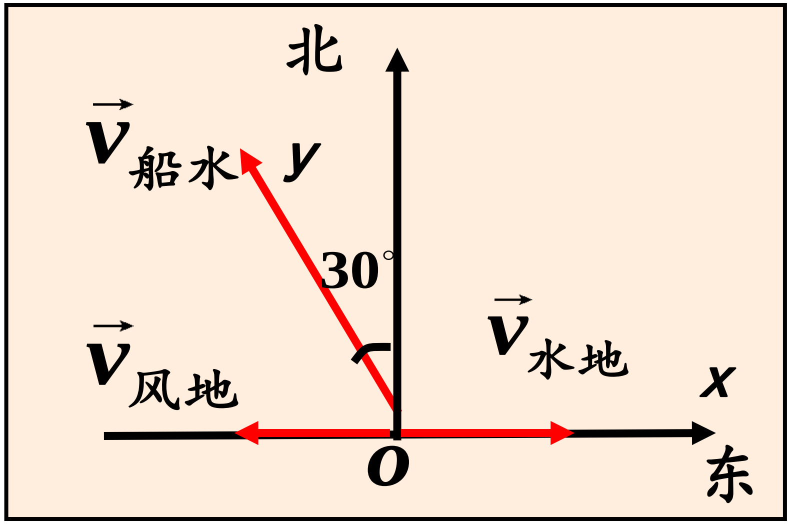
将β=90°代入 * 得 $x_{\min} = \dfrac{D}{v}\sqrt{V^2 - v^2}$ 证毕

例2(P_{57} 3.18):河水自西向东流动，速度为10km/h。一轮船在水中航行，船相对于河水的航向为北偏西30°，相对于河水的航速为20km/h。此时风向为由东向西，风速为10km/h。试求在船上观察到的烟囱冒出的烟缕的飘向（设烟离开烟囱后很快就获得与风相同的速度）。

解析法：

建立如图所示坐标系





由题意可知：

$$\vec{v}_{水地}=10\vec{i}\ (\mathrm{km/h}\ )$$

$$\vec{v}_{风地}=-10\vec{i}\ (\mathrm{km/h}\ )$$

$$\vec{v}_{船水}=-20\sin 30^\circ\vec{i}$$

$$+20\cos 30^\circ\vec{j}\ (\mathrm{km/h})$$

根据相对速度公式：

$$\vec{v}_{烟船}=\vec{v}_{风船}=\vec{v}_{风地}+\vec{v}_{地水}+\vec{v}_{水船}$$

$$=\vec{v}_{风地}-(\vec{v}_{水地}+\vec{v}_{船水})$$

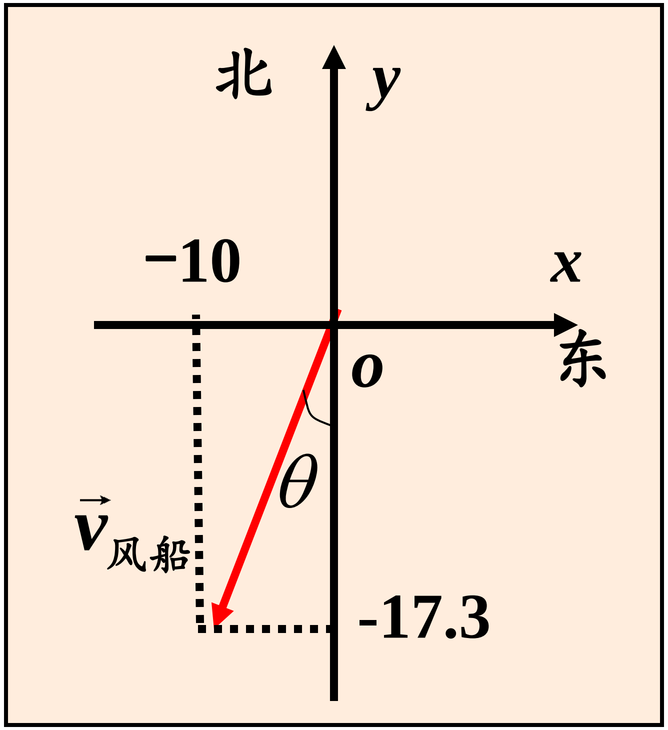
$$=-10\vec{i}-10\vec{i}-(-20\sin 30^\circ\vec{i}+20\cos 30^\circ\vec{j})$$

$$=-10\vec{i}-17.3\vec{j}\quad(\mathrm{km/h})$$

$$\vec{v}_{烟船} = -10\vec{i} - 17.3\vec{j} \quad (\mathrm{km/h})$$

$$v_{烟船} = \sqrt{(-10)^2 + (-17.3)^2} = 20(\mathrm{km/h})$$

$$\theta = \mathrm{arctg}\frac{10}{17.3} = 30^\circ$$



即在船上观察，

烟以20km/h的速率

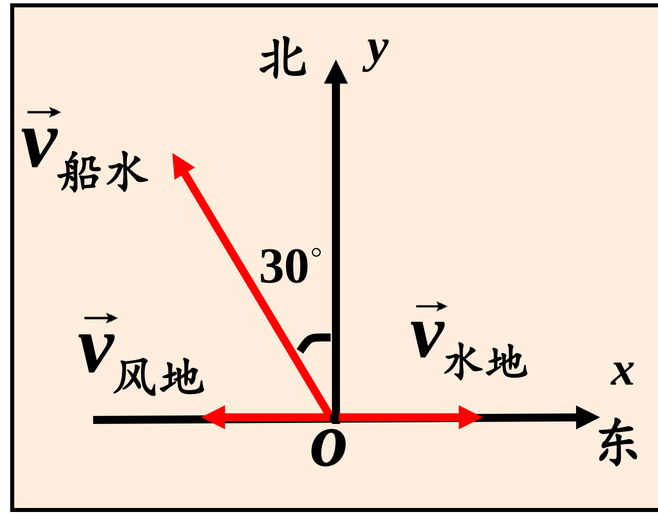
向南偏西30°飘去。

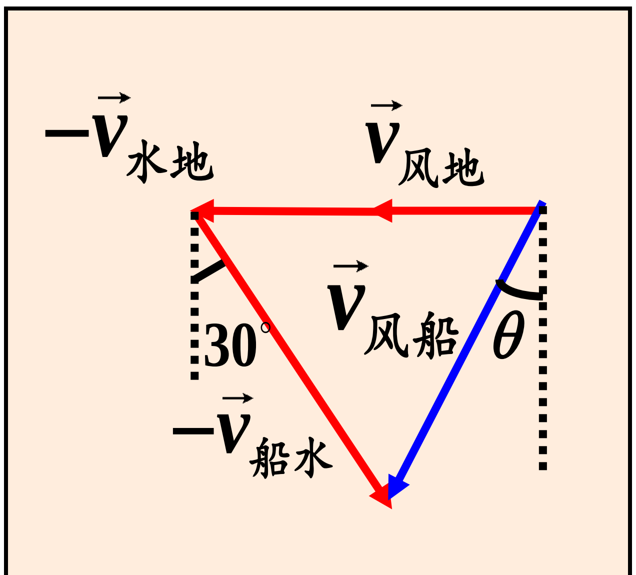
图解法：

根据相对速度公式：

$$\vec{v}_{烟船}=\vec{v}_{风船}=\vec{v}_{风地}+\vec{v}_{地水}+\vec{v}_{水船}$$

$$=\vec{v}_{风地}+(-\vec{v}_{水地})+(-\vec{v}_{船水})$$





$$v_{烟船}=20\quad(\mathrm{km/h})$$

$$\theta=30^{\circ}$$

即在船上观察，烟以20km/h的速率向南偏西30°飘去。