密封装订线

姓 名________

学 号________

班 级________

西南交通大学 2020－2021 学年第(1)学期考试试卷

课程代码 MATH000112 课程名称 **线性代数 B（A 卷）** 考试时间 **120 分钟**

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：________________

一. 选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设三阶方阵 B 的行列式$|B|=3$，则$|(-2)B|=$（ B ）

(A) 24； (B) -24； (C) 6； (D) -6.

2. 已知三阶方阵 P 的秩为 3，A 是 4×3 的矩阵，它的秩为 2，则 $R(AP)$=（ B ）

(A) 1； (B) 2； (C) 3； (D) 4.

3. 方阵 A 可逆，以下说法错误的是（ A ）

(A) A 的特征值可能为零；

(B) A 可以由单位矩阵经过有限次数的初等行变换得到；

(C) A 的秩与 A 的阶数一样；

(D) A 可以写成有限个初等矩阵的乘积。

4. 已知 4 阶实对称矩阵 A 有一个重数为 2 的特征值 1,则 A 的属于特征值 1 的所有 线性无关的特征向量有（ C ）个

(A) 4； (B) 3； (C) 2； (D) 1.

5.已知$\beta_1\ \beta_2$是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解，α_1,α_2是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 导出组的基础解系，$k_1,k_2\in R$，则线性方程组 $Ax=b$ 的通解为（ B ）

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$;　　(B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$;

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$;　　(D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$

二. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

6. 已知 $P=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，且$P^{-1}AP=B$,则$A^{2020}=$___$2^{2020}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$___。

7. 向量组$\alpha_1=(1\ \ 1\ \ 2\ \ 3)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(3\ \ 2\ \ 1\ \ 2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(3\ \ 1\ \ 3\ \ 2)^{\mathrm{T}}$线性__无__关.

8.设线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+ax_3=0\\ x_1+2x_2+x_3=1\end{cases}$有唯一解，则 $a\neq$____1____。

9.设四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$，则$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$____0____。

10.已知向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$线性无关，向量组$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$线性相关，且存在三阶方阵 P 使得 $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)P$，则$|P|=$____0____。

三. 计算解答题（每小题 12 分，共 48 分）

11. 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$，

（1）求向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 的秩；

（2）求向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$的极大无关组，并用它来线性表示向量组中其他向量。

解：(1)对矩阵 $A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)$ 作初等行变换，化成行最简型$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

于是向量组的秩为 3.

(2)极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,且 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2$.

12. 求线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-8x_3+7x_4=1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=2 \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=1 \end{cases}$的通解。

解：线性方程组的增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -8 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim\sim}{\text{行等价于}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组$\begin{cases} x_1-4x_3+x_4=1 \\ x_2+2x_3+2x_4=-1 \end{cases}$

对应齐次方程组的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

方程组的一个特解为$\eta=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

故方程组的通解为$x=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2$， $k_1,k_2\in R.$

13. 设$A=(a_{ij})$为三阶方阵，其特征值分别为$\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$， 对应的特征向量分别为

$$p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}，p_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}，p_3=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

（1）求$|A|$；（2）求A的迹$trA=a_{11}+a_{22}+a_{33}$；（3）求A。

解：（1）$|A|=0.$ （2）A的迹trA=0.

（3）令$P=(p_1\ p_2\ p_3)$,则$p^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

14. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$**，求正交矩阵** Q**，使得**$Q^{-1}AQ$ **为对角矩阵，并写出该对角阵。**

解： $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-1&2\\-2&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$

故 A 的特征值为$\lambda=-1,\lambda=5$.

当$\lambda_1=-1$ 时，解方程组$(-E-A)x=0$

$$-E-A=\begin{pmatrix}-2&2&-2\\2&-2&2\\-2&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

基础解系为：$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

令$\beta_1=\xi_1$， $\beta_2=\xi_2-\frac{<\xi_2,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

单位化：$p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$p_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$。

当$\lambda_2=5$ 时，解方程组$(5E-A)x=0$

$$5E-A=\begin{pmatrix}4&2&-2\\2&4&2\\-2&2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

基础解系为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化：$p_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

令 $Q=(p_1,p_2,p_3)$，则$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

四. 证明题（每小题 6 分，共计 12 分）

15．已知 A 相似于矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，证明$|A^2-2E|=-14$.

证明：

因为 A 相似于矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，所以 A 的特征值分别为 1,2,3.

将$\lambda=1,2,3$ 分别代入λ^2-2 可得A^2-2E 的特征值分别为-1,2,7,

所以$|A^2-2E|=-1\times 2\times 7=-14$.

16. 已知 n 阶方阵 A 的秩为 n-1, 则它的伴随矩阵A^*的秩为 1.

证明:

$|A|=0$,于是$AA^*=0$。

由结论$A_{mn}B_{ns}=O\Rightarrow R(A)+R(B)\le n$ 可得 $R(A^*)\le \mathrm{n}-\mathrm{R(A)}=1$.

因为A^*不是零矩阵，所以存在一个$M_{ij}\neq 0$,从而存在一个$A_{ij}\neq 0$,

于是 $R(A)\ge 1$;

综上所以 $R(A)=1$.