第三节 动量定理

一、质点的动量定理

二、质点系动量定理

三、动量定理的应用举例

一、质点的动量定理

1. 微分形式 $$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

2. 积分形式

$$\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$$

冲力

令 $\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t$——力的元冲量

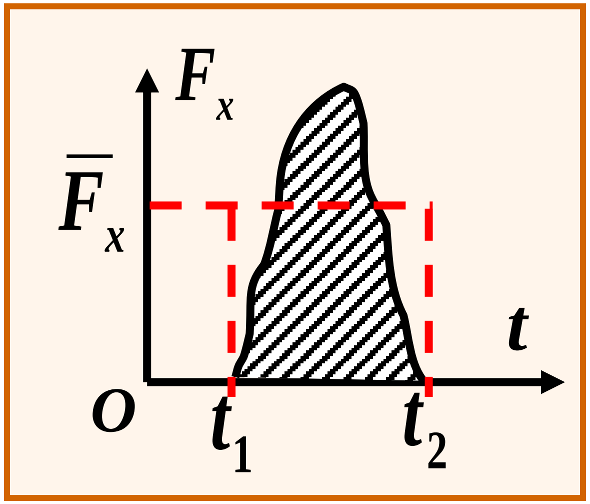
$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} \mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$$

令 $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$——力的冲量，则 $\vec{I} = \Delta\vec{p}$

* 质点所受合力的冲量等于质点动量的增量

思考：冲量的方向？动量增量的方向！

又：$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\overline{\vec{F}}\Delta t$（$\overline{\vec{F}}$ 为平均冲力）



$\therefore \vec{I}=\overline{\vec{F}}\Delta t=\Delta\vec{p}$——质点的动量定理

分量式：

$$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t=\overline{F}_x\Delta t=\Delta p_x\,(=mv_{2x}-mv_{1x})$$

$$I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y\mathrm{d}t=\overline{F}_y\Delta t=\Delta p_y\,(=mv_{2y}-mv_{1y})$$

$$I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_z\mathrm{d}t=\overline{F}_z\Delta t=\Delta p_z\,(=mv_{2z}-mv_{1z})$$

*冲量 $\vec{I}$是$\vec{F}$对时间的累积效应，其效果在于改变物体的动量。

二、质点系动量定理

1. 微分形式 $$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_{外}, \quad \mathrm{d}\vec{p}=\vec{F}_{外}\mathrm{d}t$$

2. 积分形式 $$\vec{I}_{外}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{外}\mathrm{d}t=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}\mathrm{d}\vec{p}=\Delta\vec{p}$$

质点系所受外力矢量和的冲量等于质点系总动量的增量。

分量式：
$$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_{外x}\mathrm{d}t=\Delta p_x$$
$$I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_{外y}\mathrm{d}t=\Delta p_y$$
$$I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_{外z}\mathrm{d}t=\Delta p_z$$

注意1： $\vec{F}_{内}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i内}\equiv 0 \quad \therefore \vec{I}_{内}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{内}\mathrm{d}t\equiv 0$

质点系总动量的变化与内力的冲量无关

思考：内力的冲量起什么作用？

改变质点系总动量在系内各质点间的分配

注意2:牛顿第二定律反映了力的瞬时效应；

动量定理则反映力对时间的累积效应。

加速度———对应———合外力

动量变化———对应———合外力的冲量

注意3：质点系动量定理中各质点动量（速度）应对同一参考系而言。

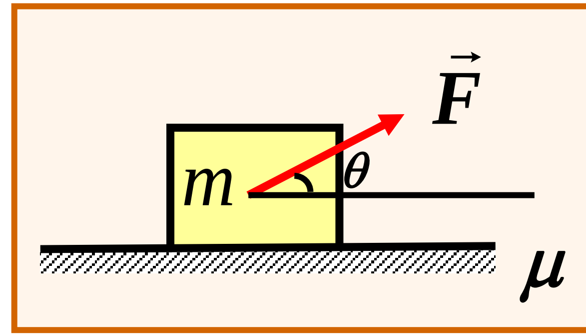
三、动量定理的应用举例

例1（P_{80} 4.7）：

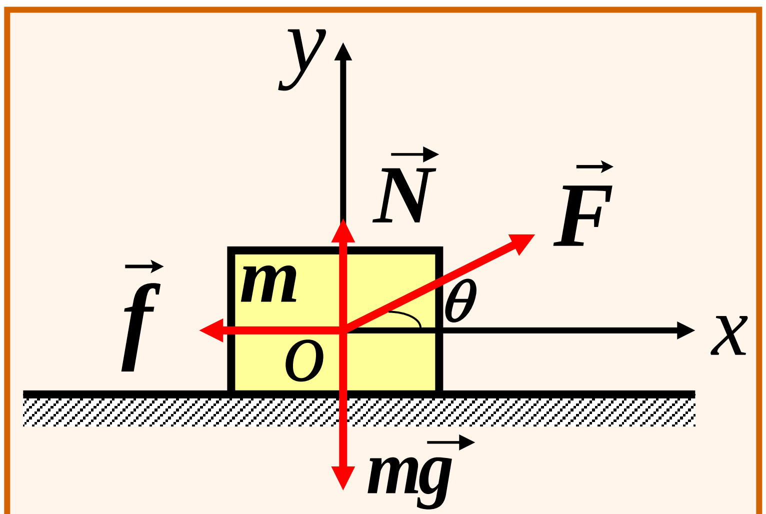
已知：$m = 1\text{kg} \quad v_0 = 0 \quad F = 1.12t \quad \theta = 37^\circ$

$\mu = 0.2 \quad g \approx 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

求：$t = 3\text{s}$时 $\vec{v} = ?$



解： 受力图和坐标系如下：



$$F_y = N - mg + F\sin 37^\circ = 0$$

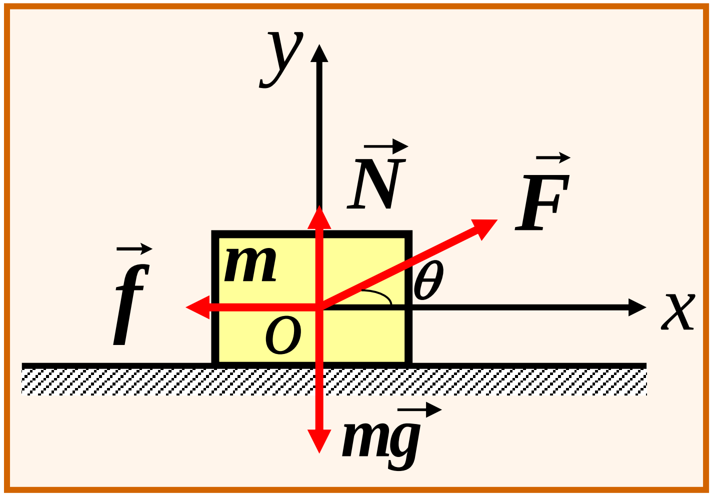
$$N = 10 - 0.672t \qquad (1)$$

$$f = \mu N = 2 - 0.1344t \qquad (2)$$

$$F_x = F\cos 37^\circ - f = 1.03t - 2 \qquad (3)$$

$$\int_0^3 F_x \mathrm{d}t = \Delta(mv_x) = mv_3 \qquad (4)$$

对不对？



(1) $N=10-0.672t$ ？不全对！

$t\uparrow,\quad F=1.12t\uparrow$

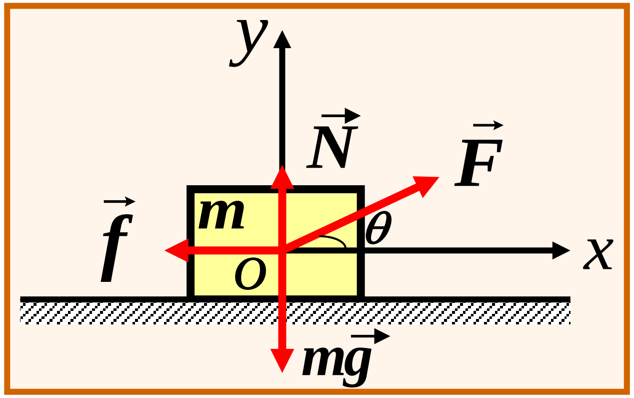
物体可能飞离桌面。

何时飞离？

正确的解法：令 $10-0.672t=0$ 得：$t=14.9\ \text{s}$

$$
\begin{cases}
N=10-0.672t & (0<t<14.9\ \text{s}) \\
N=0 & (t>14.9\ \text{s})
\end{cases}
$$

$t=3\ \text{s}$时，尚未飞离，$\vec{v}$沿x方向。



(2) $f = \mu N = 2 - 0.1344t$ ？不全对！

静摩擦力达到最大值以前与正压力无关。

物体何时开始运动？

正确的解法：$F\cos\theta = \mu N$

$0.896t = 2 - 0.1344t \qquad t = 1.94\text{s}$

$$\begin{cases} f = F\cos\theta = 0.896\text{t} & (0 < \text{t} < 1.94) \\ f = \mu N = 2 - 0.1344t & (1.94 < t < 14.9) \end{cases}$$

(3) $F_x = F\cos 37^\circ - f = 1.03t - 2$ ？ 不全对！

正确的解法：$F_x = F\cos\theta - f = \begin{cases} 0 & (0 \le t \le 1.94) \\ 1.03t - 2 & (1.94 \le t \le 14.9) \end{cases}$

$$F_x = F\cos\theta - f = \begin{cases} 0 & (0 \le t \le 1.94) \\ 1.03t - 2 & (1.94 \le t \le 14.9) \end{cases}$$

(4) $\int_0^3 F_x \mathrm{d}t = \Delta m v_x = m v_3$ ？ 对！

$$\int_0^3 F_x \mathrm{d}t = 0 + \int_{1.94}^3 (1.03t - 2)\mathrm{d}t = m v_3$$

$$v_3 = 0.58 \quad (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

$$\vec{v}_3 = 0.58\,\vec{i} \quad (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

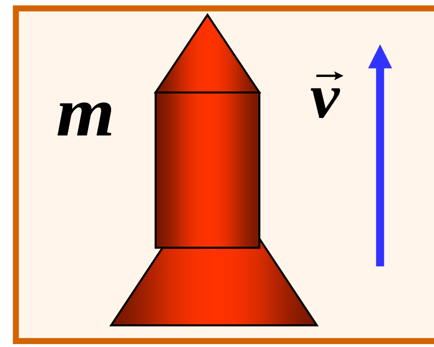
注意:

1. 通过本题体会存在变力(随t变化)作用时动量定理的应用。
2. 若F在不同时间段变化规律不同，应分段积分。

例2（P_{74} 例2）：

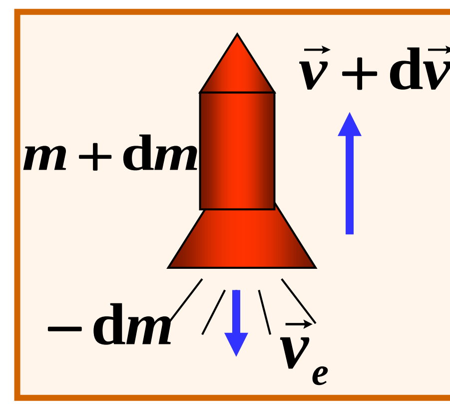
火箭的运动:火箭依靠排出其内部燃烧室中产生的气体来获得向前的推力。设火箭发射时的质量为m_0，速率为v_0，燃料烧尽时的时间为t',质量为m'，气体相对于火箭排出的速率为v_e。不计空气阻力，求火箭所能达到的最大速率。

解：火箭和燃气组成一个系统。



t时刻：系统总质量为 m

系统总动量为 $\vec{p}_1 = m\vec{v}$

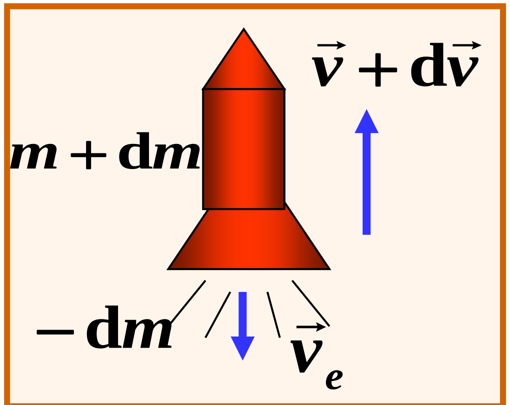


$t+\mathrm{d}t$时刻:火箭质量为 $m+\mathrm{d}m \quad (\mathrm{d}m<0)$

排出的燃气质量为 $-\mathrm{d}m$

火箭速度为 $\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}$

排出的燃气速度为 $\vec{v}_e+(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})$



t+dt时刻系统的总动量为：

$$\vec{p}_2=(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})+(-\mathrm{d}m)(\vec{v}_e+\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})$$

$$=m\vec{v}+m\mathrm{d}\vec{v}-\vec{v}_e\mathrm{d}m$$

dt时间内系统的动量增量为：$\mathrm{d}\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1=m\mathrm{d}\vec{v}-\vec{v}_e\mathrm{d}m$

火箭竖直向上运动时，忽略空气阻力，外力为重力 $m\vec{g}$ 。由质点系动量定理得：

$$m\vec{g}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$ 取向上为正，得：$-mg\mathrm{d}t=m\mathrm{d}v+v_e\mathrm{d}m$

设t=0是开始发射，t'时刻燃料烧尽，对上式两边积分得：

$$-\int_0^{t'}g\mathrm{d}t=\int_{v_0}^{v_m}\mathrm{d}v+v_e\int_{m_0}^{m'}\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

$$v_{\mathrm{m}} - v_0 = v_e \ln\frac{m_0}{m'} - gt'$$

$$\therefore v_{\mathrm{m}} = v_0 + v_e \ln\frac{m_0}{m'} - gt'$$

火箭水平飞行时：$v_{\mathrm{m}} = v_0 + v_e \ln\frac{m_0}{m'}$

多级火箭:$v_{\mathrm{m}} = v_0 + v_{e1}\ln N_1 + v_{e2}\ln N_2 + \cdots + v_{en}\ln N_n$

用增大喷气速度和增大质量比的方法可以提高火箭末速度。

设：$v_{e1} = v_{e2} = v_{e3} = 2500\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$　　$N_1 = N_2 = N_3 = 6$

$$v_{\mathrm{m}} = 2500 \cdot \ln 6^3 = 13440\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

足以发射人造地球卫星。

作业

1. No.2（希望在作业题纸中选择、填空各题的相应位置处写出其关键步骤）；
2. 自学本章各例题并完成书上的习题(对照书后的参考答案自己订正)。

第四周星期三交作业

第四节　动量守恒定律

一、动量守恒定律

二、动量守恒定律的应用

一、动量守恒定律

质点系： $\mathrm{d}\vec{I}_{外}=\vec{F}_{外}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}_{总}$

动量守恒定律的第一种表述:

当 $\vec{F}_{外}=0$ 时： $\mathrm{d}\vec{p}_{总}=0$ $\vec{p}_{总}=$ 恒量 ——动量守恒定律

孤立系统: 不受外力作用且总质量不变的系统

动量守恒定律的第二种表述:

孤立系统的动量不随时间变化。

动量守恒定律的第三种表述:

低速孤立系统的质心作匀速直线运动。

思考：系统动量守恒条件能否为：$\vec{I}_{外}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{外}\mathrm{d}t=0$ ？

$$\vec{I}_{外}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{外}\mathrm{d}t=\vec{P}_{总末}-\vec{P}_{总初}=0 \longrightarrow \vec{P}_{总末}=\vec{P}_{总初}$$

$\vec{P}_{总}$ 不一定为恒量，故系统动量不一定守恒！

所以：系统动量守恒条件不能为：$\vec{I}_{外}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{外}\mathrm{d}t=0$

应为：$\vec{F}_{外}=0$

注意：(1) 当$\vec{F}_{外} \neq 0$时，系统总动量不守恒，但

$$\begin{cases} F_{外x} = 0时 & p_x = \sum_i m_i v_{ix} = 恒量 \\ F_{外y} = 0时 & p_y = \sum_i m_i v_{iy} = 恒量 \\ F_{外z} = 0时 & p_z = \sum_i m_i v_{iz} = 恒量 \end{cases}$$

(2) 若系统内力>>外力，以致外力可以忽略不计时，可以应用动量守恒定律处理问题。

如：冲击、爆炸、碰撞等问题……

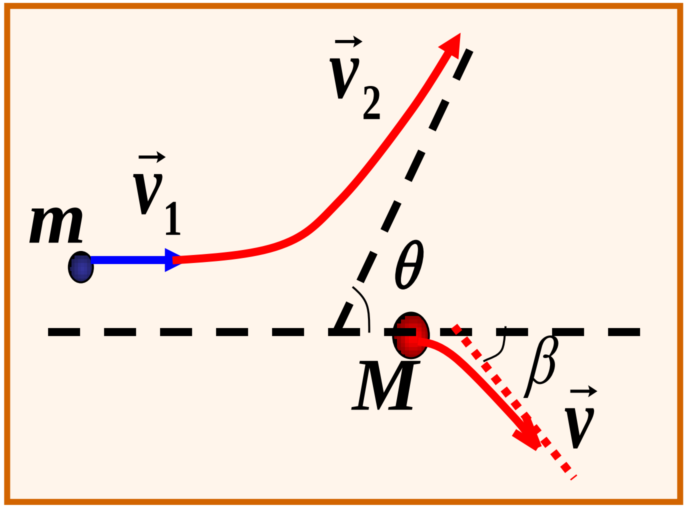
(3) 式中各速度应对同一参考系而言。

二、动量守恒定律的应用

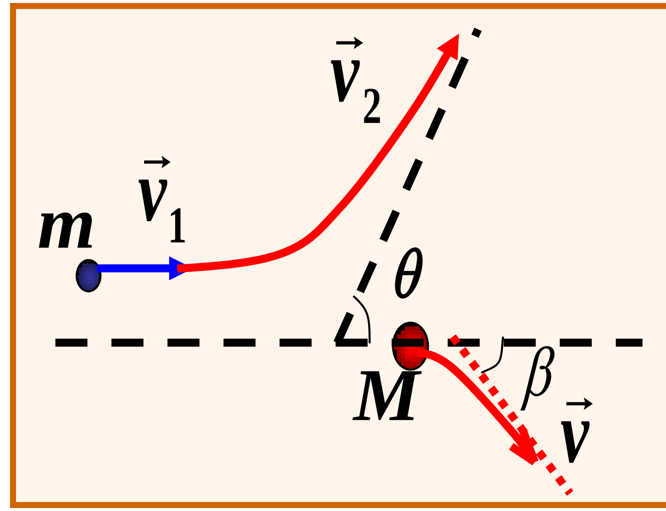
例1（P_{77} 例1）：

α粒子散射中，质量为m的α粒子与质量为M的静止氧原子核发生“碰撞”。实验测出“碰撞”后,α粒子沿与入射方向成$\theta=72°$角方向运动，而氧原子核沿与α粒子入射方向成$\beta=41°$角反冲，如图示，求“碰撞”前后α粒子速率之比。

高能物理可以用探测器得到粒子径迹



解：“碰撞”：相互靠近，由于斥力而分离的过程——散射。



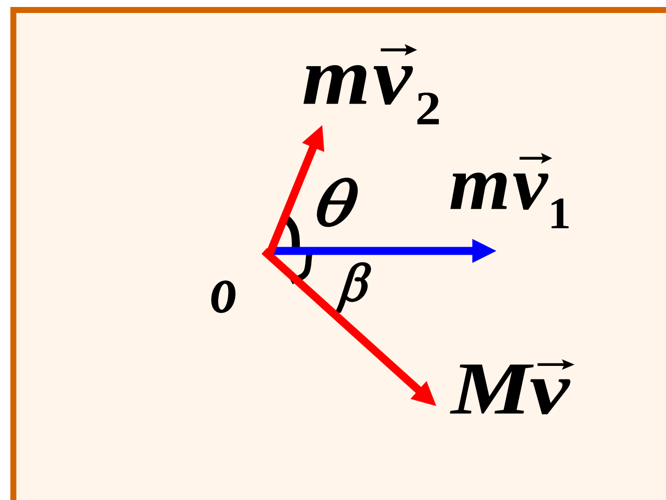
对α粒子和氧原子核系统，碰撞过程总动量守恒。

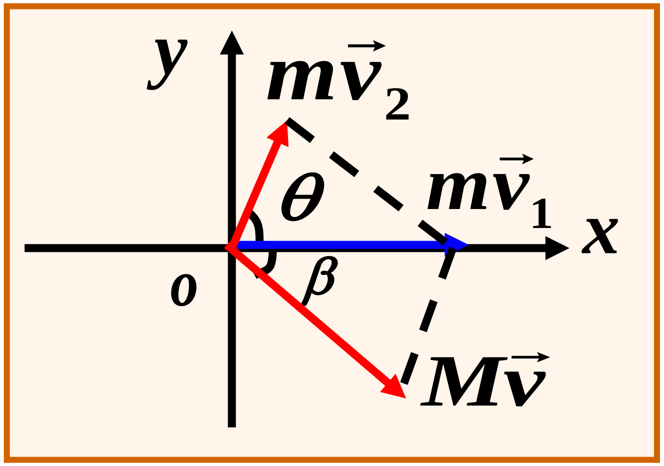
碰前：α粒子动量为 $m\vec{v}_1$

氧原子核动量为0

碰后：α粒子动量为 $m\vec{v}_2$

氧原子核动量为 $M\vec{v}$





由动量守恒定律得

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_2 + M\vec{v}$$

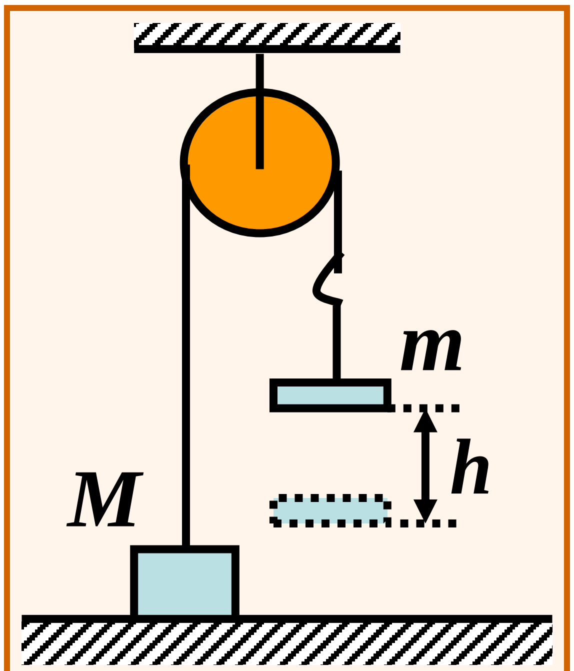
直角坐标系中 $$mv_1 = mv_2\cos\theta + Mv\cos\beta$$

$$0 = mv_2\sin\theta - Mv\sin\beta$$

解得“碰撞”前后，α粒子速率之比为

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta+\beta)} = \frac{\sin 41^\circ}{\sin(72^\circ + 41^\circ)} = 0.71$$

例2（P_{80} 4.8）：一绳跨过一定滑轮，两端分别系有质量m及M的物体，且$M>m$。最初M静止在桌上,抬高m使绳处于松弛状态。当m自由下落距离h后，绳才被拉紧，求此时两物体的速率v和M所能上升的最大高度（不计滑轮和绳的质量、轴承摩擦及绳的伸长）。

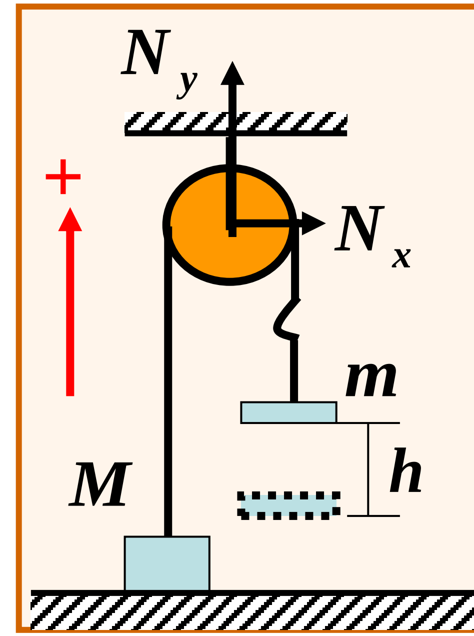


分析运动过程:

当m自由下落距离h，绳被拉紧的瞬间，m和M获得相同的运动速率v,此后m向下减速运动,M向上减速运动。

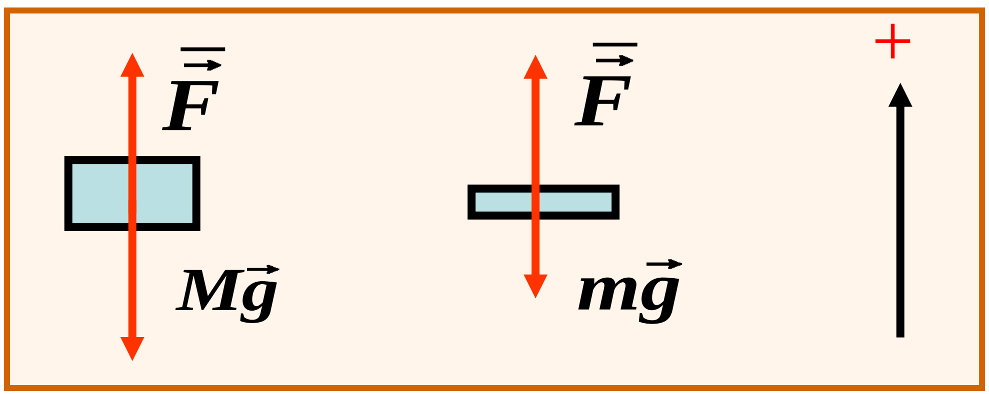
分两个阶段求解

第一阶段：绳拉紧，求共同速率v



思路：绳拉紧时冲力很大，轮轴反作用力$\vec{N}$不能忽略，$m+M$系统动量不守恒，应分别对它们用动量定理。

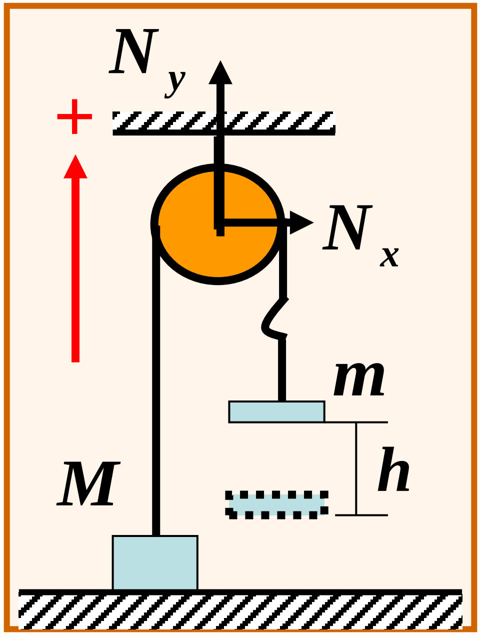
解：设绳平均冲力大小为$\overline{F}$，向上为正方向。



$$I_1=\int\left(\overline{F}-Mg\right)\mathrm{d}t=\left(\overline{F}-Mg\right)\Delta t=Mv-0=Mv$$

$$I_2=\int\left(\overline{F}-mg\right)\mathrm{d}t=\left(\overline{F}-mg\right)\Delta t=-mv-(-m\sqrt{2gh})$$

$$\begin{cases} I_1 = \left(\overline{F} - Mg\right)\Delta t = Mv \\ I_2 = \left(\overline{F} - mg\right)\Delta t = -mv - (-m\sqrt{2gh}) \end{cases}$$

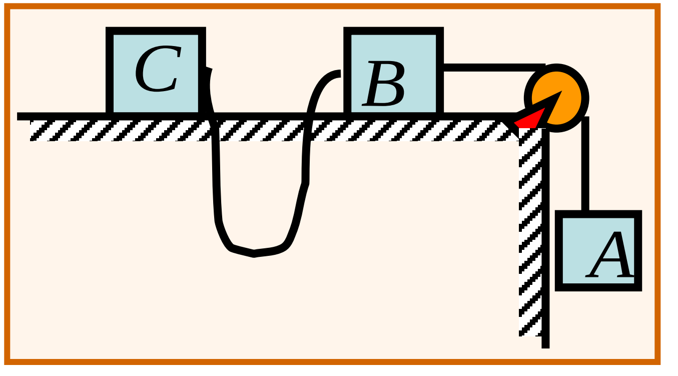


忽略重力，则有 $I_1 = I_2$

$$-mv - (-m\sqrt{2gh}) = Mv$$

类似问题：

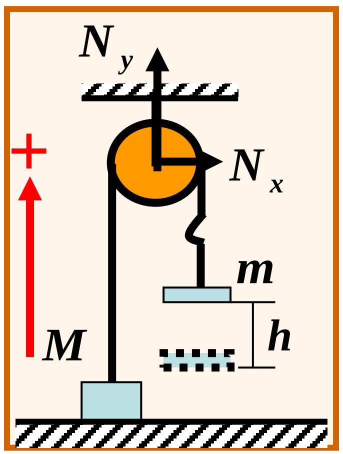
$$\therefore v = \frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$$

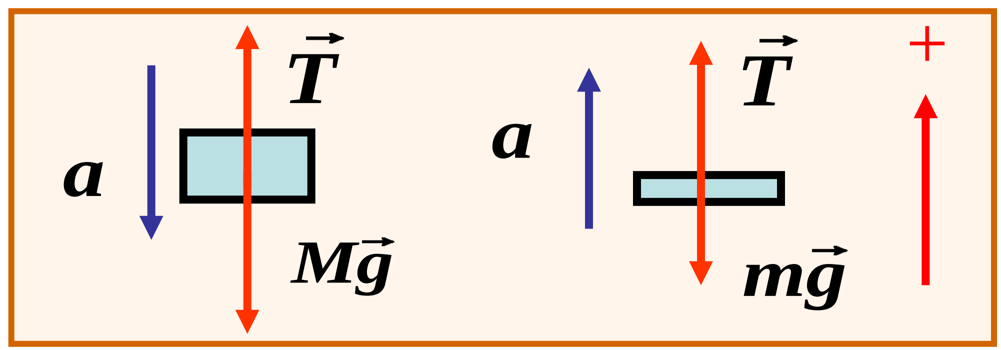


第二阶段：求M运动的最大高度

思路：M与m有大小相等，方向相反的加速度a

设绳拉力为T，画出M与m的受力图：





由牛顿运动定律 $\begin{cases} T - Mg = -Ma \\ T - mg = ma \end{cases}$ 解得：$a = \dfrac{(M-m)g}{M+m}$

M上升的最大高度为：

$$H = \frac{v^2}{2a} = \left(\frac{m(\sqrt{2gh})}{M+m}\right)^2 \Big/ \left(\frac{2(M-m)g}{M+m}\right) = \frac{m^2 h}{M^2 - m^2}$$