密封装订线 姓名 学号 班级

西南交通大学 2022—2023 学年第(1)学期考试试卷

西南交通大学本科考试试卷

课程代码 MATH000112 课程名称 线性代数 B（A 卷） 考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 A，B 均为 n 阶可逆方阵，则下列等式成立的是（A）

(A) $|(AB)^{-1}|=|A|^{-1}|B|^{-1}$； (B) $|-AB|=|AB|$；

(C) $|A^2-B^2|=|A+B||A-B|$； (D) $|2A|=2|A|$.

2、设 $A=\begin{pmatrix}9&x&1\\x&4&0\\3&2&1\end{pmatrix}$，$A^*$ 为方阵 A 的伴随矩阵，且 $A^*x=0$ 只有零解，则（D）.

(A) $x=-4$；(B) $x=6$；(C) $x=-4$ 或 $x=6$；(D) $x\neq-4$ 且 $x\neq 6$.

3、下列命题中正确的是（D）.

(A) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$（$m>1$）线性相关，则任一向量 $\alpha_i(1\le i\le m)$ 可由其余向量线性表出.

(B) 若有不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$（$m>1$），使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_m\beta_m=o$ 成立，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 线性相关，向量组 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$ 亦线性相关.

(C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$（$m>1$）中任意两个向量线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 线性无关.

(D) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$（$m>1$）中任意一个向量都不能用其余向量线性表出，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 线性无关.

4、设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$，向量 $b=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，$c_1,c_2$ 表示任意常数，则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解为（A）.

(A) $c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$；(B) $c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$；(C) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$；(D) $c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

5、已知 A 为三阶矩阵，三阶可逆矩阵 P 按列分块为 $P=(p_1,p_2,p_3)$，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，设 $Q=(2p_3,p_1,p_1+p_2)$，则 $Q^{-1}AQ=$（B）.

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；(B) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；(C) $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；(D) $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

注：$Ap_1=p_1$
$Ap_2=p_2$
$Ap_3=2p_3$，因此
$A(2p_3)=2(2p_3)$
$Ap_1=p_1$
$A(p_1+p_2)=1(p_1+p_2)$

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

6、已知四阶行列式 D 的第三行元素分别为：$-1,0,2,4$；第四行元素对应的代数余子式依次是 $2,10,x,4$，则 $x=$ <u>-7</u>.

7、设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $(A-3E)^{-1}(A^2-9E)=$ <u>$\begin{pmatrix}4&0&1\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$</u>.

8、设 A,B 均为 n（$n>2$）阶非零方阵，且 $AB=O$，则方阵 A 的列向量组是线性 <u>相关</u>（相关、无关）的.

9、设 n（$n>2$）阶方阵 A 的特征值分别为整数 $-(n-1),-(n-2),\dots,-2,-1,0$，且方阵 B 与方阵 A 相似，E 为 n 阶单位矩阵，则 $|B+nE|=$ <u>$n!$</u>.

10、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2$ 为正定二次型，则参数 t 的取值范围为 <u>$t>1$</u>.

三、解答题（5 小题，共 52 分）

11、(10 分) 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\6\end{pmatrix}$ 的秩和一个极大线性无关组，并把其余向量用极大线性无关组线性表出.

$R\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=2$，$\alpha_1,\alpha_2$为一个极大无关组

$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2$

12、(10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&-4&-2\end{pmatrix}$，计算：(1) $|A|$；(2) A^2；(3) A^{2023}.

$|A| = 0$

(2) $A^2=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$　(3) $A^{2023}=\begin{pmatrix}1&2023&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

13、(12 分) 问 t 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}tx_1-x_2+x_3=2,\\2x_1+tx_2-x_3=1,\\-2x_1+x_2-x_3=1\end{cases}$ 无解，有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时求出方程组的通解。

13. $|A|=-(t-1)(t-2)$

- $|A|\neq0$ 即 $t\neq1$ 且 $t\neq2$ 时，有唯一解
- $t=2$ 时，无解
- $t=1$ 时，无解

14、(10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&x&1\\1&1&y\end{pmatrix}$ 有特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

(1) 计算 $A\alpha_1$，指出 α_1 对应的特征值，并确定 x，y 的值；

(2) 求 A 的所有特征值；

14. (1) $A\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\2+x\\2+y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$．$\alpha_1$对应的特征值为3，$x=1$，$y=1$

(2) 特征值为0，0，3

15、(10 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$，其中 $A=\begin{pmatrix}5&-4&2\\-4&5&-2\\2&-2&2\end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，

(1) 求方阵 A 的特征值与特征向量；

(2) 求一个正交变换 $x=Py$ 把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形，并写出标准形.

15. (1) 特征值为1，1，10

$\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$　(k_1，k_2 不同时为0)

$\lambda_3=10$ 时，特征向量为 $k\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ ($k\neq0$)

(2) $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{\sqrt2}{6}&2/3\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{\sqrt2}{6}&-2/3\\0&\frac{2\sqrt2}{3}&1/3\end{pmatrix}$．则 $x=Py$ 将二次型化为标准形 $y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

四、证明题（8 分）

16、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，$\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+s\alpha_3$，其中 t,s 为参数，证明：当 $t+s\neq0$ 时，向量组 β_1,β_2,β_3 也是 $Ax=0$ 的基础解系.

16. • $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\t&1&0\\0&1&s\end{pmatrix}$　$\begin{vmatrix}1&0&1\\t&1&0\\0&1&s\end{vmatrix}\neq0$，故 β_1,β_2,β_3 线性无关

• $A\beta_1=A(\alpha_1+t\alpha_2)=0$，$A\beta_2=0$，$A\beta_3=0$，故 β_1,β_2,β_3 是 $AX=0$ 的解

• 由于 $AX=0$ 的基础解系含3个向量，因此 β_1,β_2,β_3 是 $AX=0$ 的基础解系.