1. **矩 阵**

**§1.1、1.2矩阵的概念及运算**

1**.** 判断正误，正确的画√，错误的画×。

（1）对矩阵与，若满足，则 与必为同阶方阵。 （ √ ）

解 由与能乘可知，由与能乘可知，是矩阵，是

，由可知，，从而有，故与必为同

阶方阵

（2）与为阶方阵，  。 （ × ）

，矩阵乘法不满足交换率，故一般情况



（3）与为阶方阵，。 （ × ）

，矩阵乘法不满足交换率，即一般情况，故

（4）为阶方阵，。 （ √ ）



（5）与为阶方阵，。 （ × ）

，矩阵乘法不满足交换率，即一般情况，故一般情况

（6）为阶方阵，。 （ √ ）



（7）若阶方阵满足，则。 （ × ）

例如，但。

（8）若阶方阵满足，则，或者。 （ × ）

例如有，但且。

（9）若矩阵满足且，则有。 （ × ）

，但

（10）每一个方阵都可以写成对称矩阵与反对称矩阵的和。 （ √ ）

对方阵有



而

，表明对称矩阵；

表明对称矩阵；

故每一个方阵都可以写成对称矩阵与反对称矩阵的和。

2**.** 选择题

(1) 设均为阶方阵，，则（ C ）。

(A)  （B） (C)  (D) 



（2）设为方阵，，则为（ B ）

(A)  （B）

(C)  (D) 不能确定

3**.** 设，，计算：(1)；(2) ；(3) 。







4**.** 计算（1），（2）（3）。

（1）

（2）

（3）





5**.** 设，

（1）计算；

（2）若证明的充分必要条件是为对角矩阵。

（1）



（2）由（1）可知的第行第的元素为，的第行第的元素为，

若则，又当时有，于是当时，故为对角矩阵。若为对角矩阵显然有。

6**.** 设为实对称矩阵，若，证明，其中表示零矩阵。

证明: 设，

故



由为实对称矩阵可知

，

故



故



故



7**.** 设是方阵且，证明。

证明 ，所以





故

8**.** 设都是对称矩阵，证明：为对称矩阵的充要条件是。

证明 都是对称矩阵，故

为对称矩阵

另一方面，若，则有，即为对称矩阵。

9**.** 设阶方阵，，且与的各行元素之和为1，是矩阵，且每个元素都为1，求证：

(1) ；(2) 的各行元素之和都等于1；

(3) 若各行元素之和分别为，则的各行元素之和都等于什么？

证明 

同理有



(2)设 

一方面

另一方面

故



这表明的各行元素之和都等于1。

(3) 由各行元素之和分别为，可知



这表明的各行元素之和都等于。

**§1.3矩阵的分块**

1**.** 设，，利用分块矩阵计算。

解 分块

,

记，，其中

，，，





，

故

2**.** 设 计算。

解 记其中





。















3**.** 设为阶方阵，若对任意的维列向量均有，证明

证明 设，今取列向量

则，又，故，所以。

**§1.4方阵的行列式**

1**.** 填空

(1) 排列6427531的逆序数为 15 ，该排列为 奇 排列。

(2)  = 8 ， = 3 时， 排列1274569为偶排列。

(3) 在6阶行列式中， 含的项的符号为 + ，含的项的符号为 + 。

；

或





(4) 多项式中的系数为 9 ，的系数为  。

行列式展开式能提供的项仅有

行列式展开式能提供的项仅有

（5） 。

解 行列式值



（6） ， 。

解 



（7）方阵按列分块为且则

 4 。

解 



（8）方阵是奇数阶反对称矩阵，则 。

解 故

（9）已知四阶行列式*D*的第三行元素分别为：；第四行元素的对应的余子式依次是2，10，，4，则 。

解 第四行线数余子





∴

得

2**.**  证明下列恒等式



记





同理可得

注 

一般情况不能同时拆几行

3**.** 已知，计算(1) ；

(2) 和；（3）和。

（1）

=0 （第3列的元与乘以第2列的代数余子式）

（2）

即

 （\*）



即

 （\*\*）

由（\*）（\*\*）得

， 

（3）

即

 （\*）



即

 （\*\*）

由（\*）（\*\*）得

，

4**.** 若为阶方阵，且满足。 若，求。

解 

，即



得





可得



5**.** 已知阶方阵、、的行列式值分别为2、3、4，计算。

解 按行列式的前行展开，只有取列至列，子式中才没有零列，即只有子式可能不为零，而对应的代数余子式为



由laplace定理可得



6**.** 计算下列行列式 （1） ，（2） 

（1）





（2）



7**.** 利用三角行列式的结果计算下列阶行列式

（1）

解：按第一列展开

（上三角行列式）

（下三角行列式）

=

（2）设，

原式





8**.** ，求











故



9**.** 用数学归纳法证明：



证明：（1）时，等式显然成立；

（2）假定等式对于小于阶的行列式成立；

（3）（下证阶行列式成立）





由于，（注：按最后一行（列）展开）

=

= 

所以，

10**.** 利用范德蒙行列式的结果计算下列行列式

(1) ，

解：



交换次将第行变至第2行

范德蒙行列式











(2) ，

解：在行中提出因子，



11**.** 用递归法计算

（1）已知，计算 

解：按第一行展开，有递推公式 (*a*+*b*) + (-*ab*) ，得递推公式：





 b  

 ①

同理可得： ②

联立①与②，解方程组得：

（2）

解：按第一行（列）展开，得递推公式：= + 2 。于是

 1 =  1  1 = 1 。

由此得： 2 +

 3 +

 （n-1） +

 n+1 。

**§1.5 逆矩阵**

1**.** 填空

(1)方阵满足，则 。

解 由可知可逆，互为逆矩阵

，可逆，同理可知

于是

(2) 设，则 ， ， = 。

解 

，

由，可得即，故本题中



（3）设为3阶方阵，且，，= ，= ，

= ，= 。 。

解 知可逆，且又

，可得，于是









2**.** 给出对角矩阵可逆充分必要条件，在可逆的情况下给出其逆矩阵。

解 ，故可逆当且仅当不为零。



3**.**若为奇数阶方阵，且满足，，证明不可逆。

证明 

，即

即有



这表明



故不可逆。

4**.**设是阶方阵，如有非零矩阵使，证明。

证明 若，则可逆。由可得，即



这与是非零矩阵矛盾，故。

5**.**设阶非零方阵的伴随矩阵为，且=，求证可逆。

证明 若，由可得，故有。

设，

则



故



故



这与是非零方阵矛盾，故。

6**.** 设是阶方阵，证明：(1) 若，则；(2) ； (3) 当可逆时有。

（提示：凡是与伴随矩阵有关的结论，可先考虑等式）

证明：(1) （反证）若当时，则可逆；

另一方面由可得，由可逆可得

即是零矩阵，故，这与可逆矛盾。所以若，则

(2) 当时有，故有；

当时，由可得，故也有。综上所述有



（3）由及(1) 可知可逆，且由可知，故



另一方面注意到，可得



加上（2）的结论可得



7**.** 设，证明：。

证明 







即



8**.**  设方阵满足，证明：及都可逆，并求其逆矩阵。

证明 由 可得，即有，故

可逆，且；

注意到，又可得

，即，即



法二由 可得，由前可知可逆，且，可知

可逆，且





9**.** 已知，求。

解 

由可得

，

由于可逆，故与可逆，故由可得



计算





故



10**.** 设均为阶可逆方阵，求

解 计算







故



11**.** 设分别是阶方阵，（1）给出分块矩阵可逆充分必要条件，在可逆情况下求出其逆矩阵。（2）设，求

1. ，利用Lapace展式将按前n行展开的



可逆当且仅当，即可逆当且仅当，故可逆的充要条件是均可逆。

若可逆，设的逆矩阵为，故



即，得

，

故

（2），其中

故



其中

12**.**设为阶可逆方阵，为矩阵，为常数， ，

（1）计算；(2) 证明：可逆的充要条件是。

解 （1）

注意到 ，可得



1. 由Lapace展式可得，。

由Lapace展式可得 ，即



故



故可逆的充要条件是当且仅当，即，

进而有，即



故可逆的充要条件是

13 **.** 已知，且，计算。

解 ，故

**§1.6 矩阵的初等变换**

1**.** 填空题

（1）已知， ，则

 。



（2） 。（A）；（B）；（C）；



（3）已知，矩阵 。







2**.** 用将下列矩阵化为行最简形与标准形

（1）



（行简单形）

（标准形）

（2）



（行简单形）

（标准形）

（3）





（行简单形）

（标准形）

（4）





（行简单形）

（标准形）

3**.** 判定下列是否可逆，若可逆求出其逆矩阵

（1），











故

（2）

解 作矩阵











故



4**.**求解矩阵方程

（1）

解 作矩阵







故



（2）

**解 法一** 先解，即解



作矩阵按（1）做法求出，进而可得

**法二** 作矩阵 







故



**§1.7 矩阵的秩**

1. 判断正误

(1) 若为矩阵，，则。 (√ )

解 解 因为的最高阶子式阶为

(2) 若，则的所有的阶子式都不为0，而所有的阶子式都为0。( × )

例其 ，但其只有一个1阶子式为零。

正确说法是

“若，则的**存在一个**阶子式不为0，而所有的阶子式都为0”

(3) 若矩阵存在一个阶子式都不为0，则。 ( √ )

(4) 任何一个可逆矩阵都可分解为初等方阵的乘积，且分解唯一。 ( × )

正确说法是

“任何一个可逆矩阵都可分解为初等方阵的乘积，但分解不唯一”

（5）设为矩阵，为矩阵，且，则。( √ )

解 ，又，故

，但是阶方阵，且，故

1. 已知两两不同，且，求，求。

解 显然；

另一方面矩阵有阶子式（的前列）



故，于是有



1. 求矩阵的秩。

法一 ，故：

当时，，

当时矩阵，，，

，显然有一个二阶子式不为零（例如），故

，于是当时。

法二 



当时矩阵是阶梯形，故

当时矩阵也是阶梯形，故。

1. 求下列矩阵的秩

（1）

解





故

（2）,其中不全为零，不全为零。

解 **法一** 不妨设



由于不全为零，故可知第一行是非零行，故

**法二** 由，不全为零，故是非零矩阵，故



另一方面 的二阶子式



即的二阶子式全为零，故



综上所述



1. 设矩阵，(1) 为何值时，最大？(2) 为何值时，最小？

解 法一







故当时变为阶梯形为，此时的秩最小为2；

故当时变为阶梯形为，此时的秩最大为3.

1. 讨论阶方阵的秩。

解 



当时变为阶梯形为此时的秩为1；

当且时变为阶梯形为，此时的秩为n；

当且时，注意到与的秩相同，当时，，故，又有n-1阶子式（2至行、2至n列形成的子式）不为零，故，所以有

当且时。

1. 已知分别为矩阵，证明不可逆。

解 且又

，所以，又是矩阵，可知不可逆。

1. 设都是方阵且，求

解 由得，所有可知是可逆（故）且

所以



，于是有



所以



1. 已知， 分别为方阵，且，证明

；

证明 ，可知可逆，可有限个初等矩阵的乘积，

故可由作有限次初等行变换得到，可由作有限次初等列变换得到，由初等变换不改变矩阵的秩可得：



10**.** 矩阵的的充分必要条件是存在非零列向量与使得。

证明 由于，则必有一列是非零列向量，不失一般性，可设的第一列是非零列，记为，若的第列不是第一列的数乘倍，那么选取第一列与第列，再选取恰当的两行可以得的一个2阶子式，该2阶子式不为零，故，这与矛盾，故的任何一列都是是第一列的数乘倍，即可设



今作向量，则。

11**.** 判定非齐次方程组是否有解，有解时求出其所有解

（1）

解 方程组增广矩阵为



可知系数矩阵的秩，增广矩阵的秩，由可知方程无解。

（2） 

解 方程组增广矩阵为







可知系数矩阵的秩，增广矩阵的秩，由可知方程有解。且方程组与下列方程组同解：



所以方程组解为



（3）

解 方程组增广矩阵为





可知系数矩阵的秩，增广矩阵的秩，由可知方程有解。且方程组与下列方程组同解：



所以方程组解为



12**.** 解方程组其中两两不同。

解 方程组的系数矩阵为方阵，且，由克莱姆法则可知方程组有唯一解，且



其中是把系数矩阵的列换成。故

13**.** 当取何值时，方程组有非零解？，并求出其所有非零解。

解 方程组的系数矩阵为方阵，，

于是由克莱姆法则可知，当且时方程组只有零解

当或时方程组有非零解。

当时系数矩阵



，于是方程组同解与下列方程组



故当时方程组有非零解，。

当时系数矩阵



，于是方程组同解与下列方程组



故当时方程组有非零解，。

14**.** 设，已知齐次线性方程组有非零解，其中是的伴随矩阵，求。

解 ，故，由于有非零解，故，于是可得，可得或

## 矩阵自测题

1．单项选择题.

（1）方程的根为（ ）。

（A） （B）

（C） （D）。

解：注意到行列式是的三次多项式，故方程至多有三实数根，由于分别取0，-2，3行列式均有两列相同，故行列式值为零，即方程有三个根分别为0，-2，3。

（2）若为阶可逆矩阵，则下列结论不正确的是（ D ）。

（A）； （B）；

（C）； （D）。

解（A）；

（B）

（C）由，可得，

故



由（1）（2）可得

（D）

（3）均为三阶可逆矩阵，则下列等式成立的是（ A ）。

（A）； （B）；

（C）； （D）。

解（A）；

（B）；

（C）注意到一般情况下，故没有

（D）

（4）设为阶矩阵，是伴随矩阵，，则（ C ）。

（A） ； （B）；

（C） ； （D） 。

解 由拉普拉斯展式可知。设（注一般的我们应设，但观察选项可设），

一方面

另一方面

故，得；

，得；

（5）设为阶矩阵，则必有（ B ）。

（A）或可逆，则可逆； （B）或不可逆，则不可逆；

（C）与都可逆，则可逆； （D）与都不可逆，则不可逆。

解 （A）若与中有一个可逆、一个不可逆，则不可逆；A不对；

（B）或不可逆，不妨设不可逆，则，而，所以不可逆；

（C）与都可逆，但不可逆；

（D）与都不可逆，但可逆；

（6）已知，矩阵按列分块为，设，则（ A ）。

（A） ； （B）；

（C） ； （D） 。

解，所以







（7） 设，那么必满足 （ ）。

（A） 三阶子式全为零； （B）至少有一个四阶子式不为零；

（C）二阶子式全为零； （D）至少有一个二阶子式不为零。

（A） 三阶子式全为零；（B）至少有一个四阶子式不为零；

（C）二阶子式全为零；（D）至少有一个二阶子式不为零．

解（A）若 三阶子式全为零，则

（B）若至少有一个四阶子式不为零，则

（C）若二阶子式全为零，则。

（D）若所有的二阶子式均为零，则阶数大于等于二的子式均为零，则，矛盾。

（8）设分别为型与型矩阵，且，其中为单位矩阵，则（ A ）。

（A）； （B）；

（C）； （D）。

解：



故

。

（9）已知且，则（ A ）。

（A）； （B）；（C）； （D）无法确定。

解 ，故可逆，所以

（10） 已知齐次线性方程组仅有零解，则（ A ）。

（A）且； （B）或；

（C）  （D）。

解 齐次线性方程组系数矩阵的

由克莱姆法则可齐次线性方程组仅有零解当且仅当

则且。

（11）已知方程组有唯一解,且,那么（ D ）。

（A）； （B）；（C）； （D）。

解 由克拉姆法则可知，由和

，得

2．填空题.

（1）是三维列向量，，则 。

设，故



（2） 设4阶方阵按列分块为，且，则 。

解 



（3）为三阶矩阵，，，则 。

解 

（4） 已知，的所有代数余子式之和 。

法一 









故

法二解 作矩阵











故

（2至n-1行是1，-1作为块出现）

知易



由可得



由此可知



（5）已知，则 。

解

，故

（6）若，，那么 。

解是初等矩阵且，

故矩阵左乘相当于对矩阵施行行变换交换一二两行，右乘相当于对矩阵施行列变换交换一二两列。



（7）设，若有非零矩阵使得，则 。

解 若有非零矩阵使得这表明齐次方程组有非零解，由克莱姆法则可知

，而，故

3．判断题（正确打√，错误打×）.

（1）阶行列式的展开式中含有的项数为。 ( × )

解：阶行列式而，而只有的展开式中才含有 ，而且是的展开式每一项都含，注意到是行列式，故的展开式有，故阶行列式的展开式中含有的项数为。

（2） 若阶行列式每行元素之和均为零，则等于零。 ( √ )

解：法一

法二设由若阶行列式每行元素之和均为零可得方程有非零解，有克拉姆法则可知

（3） 若为范德蒙行列式, 是代数余子式，则。 ( √ )

解：设，





同理，故

（4） 若阶行列式满足,,则。 ( × )

解：若元素全为零也满足,，但；

若元素不全为零，不妨设第一行有非零元，则



（5） 若阶行列式的展开式中每一项都不为零,则。 ( × )

展开式中每一项都不为零但

（6） 的充分必要条件是。 （ ×　 ）

解 对任何方阵有，故若可逆则有，故在可逆则有条件下的充分必要条件是。但存在不可逆方阵例零矩阵满足，由于零矩阵不可逆故式子的无意义，故题的结论是×

（7） 不可逆。 （ 　√ ）

解：，又，

但是三阶矩阵而又小于等于2，故不可逆。（故也有

（8）对任意的矩阵只要满足，则。 （ √ 　）

（9）为阶非零矩阵，若则． （ 　 √ ）

解：**法一** 为阶非零矩阵，故；又故（到线性方程组理论证明），故，则。

**法二** 可知的每一列是齐次方程组的解，故齐次方程组有非零解，由克兰姆法则可知。

，故，从而

（10）为可逆矩阵，若的每行元素之和为，则的每行元素之和为。（ √ ）

解：由的每行元素之和为可得，故

，即

4． 计算行列式。





当时行列式值为零，

当时为箭形行列式





5．（1）计算； (2) 若满足，求。其中。

解 （1）

，于是

，且

(2)由（1）





6． 已知，（1）计算；计算 。

解（1）

故

（2）由可得，

其中



7．为三阶可逆矩阵，，若，求。

解 









（法二求的逆矩阵，

，其，，

而）

故

8．判定是否可逆，若可逆求出其逆矩阵。

解 记，其中

，由Laplace定理得



故可逆，另外，注意到







，故

所以

9．讨论参数的取值，求矩阵的秩．

解 



，无论参数的怎么取值。

10 ．讨论为何值时，方程组有唯一解？有无穷多解？无解？有解时求出其解。

解：系数矩阵行列式

由克拉姆法则知，即时方程组有唯一解，且

且

，，



当时增广矩阵

，故当，故无解

当时增广矩阵



故当时有，故无解。

故当时有，有无穷多解，此时****

，即方程组同解于****，

故故当时，有通解。

11．阶非零矩阵满足，证明

证明 （1）

作分块矩阵，通过初等（列变换）变换能变成

于是

又，故有

（2）

由（1）（2）可得

