## 线性方程组自测题

一．单项选择题.

1. 设为阶方阵，且，是的两个不同的解向量，为任意常数，则的通解为 ( C ).

（A）； （B）； （C）；（D）.

解：这里是求齐次方程的通解，首先确定基础解系中向量个数：，故找一个齐次方程的**非零**解就构成该方程的基础解系。、、是齐次方程的解，但它们可能是零解，仅一定是非零解。

2. 当( D )时，齐次线性方程组一定有非零解.

（A）；（B）；（C）；（D）.

解：要齐次线性方程组一定有非零解当且仅当系数矩阵的秩小于未知数个数。当时有，故有，此时方程一定有非零解。（即齐次方程组当方程个数小于未知数个数时方程组一定有非零解）。其它选项不能保证。

3. 方程组的系数矩阵记为，若存在三阶方阵，使得，则 ( A ) .

（A）且； （B）且；

（C）且； （D）且.

解：由可知的每一列是齐次方程组的解，可知方程有非零解，故，可得。注意到，又可得，故，

所以。

4. 设为阶奇异方阵，中有一元素的代数余子式，则方程组的基础解系所含向量个数为 ( B ) .

（A） ； （B） ； （C）； （D）.

解：为阶奇异方阵是指，故；又中有一元素的代数余子式即有一个阶子式不为零，故，所以。故则方程组的基础解系所含向量个数为

5. 设是的三个解向量，，，

，为任意常数，则的通解为 ( C ) .

（A）（B）（C）（D）

解：由可得导出组的基础解系有解向量，可取为，故的通解可表示为，即C

二．填空题.

1. 设四阶方阵   且，则方程组的一个解向量为  .

解 方程组的解即为满足的，故为一个解向量。

2. 方程的通解为 .

解 方程增广矩阵为它已经是简单阶梯形（即可取为非自由变量，其余为自由变量），故等价方程组为，故方程通解为

3. 设方程组有解，则其增广矩阵的行列式= .

解：有解，说明的列向量组能线性表示，即增广矩阵有一列（最后一列）能被其余列表示，故增广矩阵的列向量组是线性相关的，故。

4. 若有解，则常数应满足条件  .

解：方程组的增广矩阵为



故方程系数矩阵的秩，增广矩阵的秩当且仅当，又方程有解当且仅当，故该题答案为。

5. 已知方程组无解，则。.





当时系数矩阵的秩与增广矩阵的秩都为3相等，此时方程有解；

当时系数矩阵的秩与增广矩阵的秩都为2相等，此时方程有解；

当时系数矩阵的秩为2而增广矩阵的秩都为3两者不相等，此时方程无解；

三. 判断题（正确打√，错误打**×**）.

1. 若都是的解，则是的一个解. ( √ )

解：



2. 方程组基础解系的个数等于. ( **×** )

解：正确说法是程组一个**基础解系中向量的个数**等于

3. 若方程组有非零解，则方程组必有无穷多解. ( **×** )

解：当方程组有非零解可能发生无解的情形。例：



4. 与为同解方程组. ( √ )

解：显然的解是的解；

今设是的解，故有

，即也是的解。

5. 方程组有无穷多个解的充分必要条件是有两个不同的解. ( √ )

解：方程组有无穷多个解显然可得有两个不同的解；

设两个不同的解为，设为的导出方程组的**非零**解。显然是的解，其中为任意实数，由于是非零的**，**当取遍所有实数时就能产生的无穷多个解。

四. 求齐次线性方程组的一个基础解系.

解 齐次线性方程组的矩阵为

（故方程组的非自由变量为，剩下的为自由变量）

故等价方程组为，故方程的一个基础解系为

**注 解方程化矩阵为简单阶梯型时只能用行变换**

五. 

,,,，讨论实数满足什么条件时，也是的一个基础解系.

解：法一：显然是的解，且解可将为4，故也是的一个基础解系只需线性无关即可。设，即



注意是一个基础解系所以它们是线性无关，这可得。

欲使需方程组仅有零解，由克兰姆法可知方程组系数行列式值



法二：由,,,可得



由于向量组所含向量是4个，故要为基础解系则只需要能表示，这只需要可逆，这需要

六. 求方程组与的非零公共解.

解方程组的非零公共解即为方程组的非零公共解，

的系数矩阵为

（化到简单阶梯型，这样就能使得非自由变量和自由变量分别位于方程左右两边，且非自由变量系数为1，这样当自由变量取值确定，非自由变量也确定了。这非自由变量为）

故等价方程组为，故非零公共解为，其中。

七. 若齐次线性方程组的解均为齐次线性方程组的解,试证明.

证明：设齐次线性方程组与的解空间分别为与，由题的条件可知

，故有。又有，，所以

。

八. 设非齐次方程组的系数矩阵的秩为，是的一个基础解系，是的一个解.证明的任一解可表示为，其中 ,并且线性无关.

证明 （1）是的一个基础解系，是的一个解，故的任一解可表示为



从而

令，则有

，其中 

（2）设等式两边乘以得：



由于可得，所以（\*）等式即为



又方程组的一个基础解系，故线性无关，所以有



进而有，所以线性无关。

九.解矩阵方程.

解由题可设，由题条件可得解方程组，

解（\*），增广矩阵为

，故同解方程组为，故可取，其中为任意常数。

同理解（\*\*）得，其中为任意常数。

所以。

十. 已知，，，，讨论当满足什么条件时，

（1）不能由线性表示；

（2）可由线性表示，且表示法唯一；

（3）可由线性表示，但表示法不唯一.

解：设

法一：则得到系数行列式为方程组。

由克兰姆法则可知，方程组有唯一解，故只要，可由线性表示，且表示法唯一；

当 时，方程组增广矩阵为





注意到方程组系数矩阵的秩为2，而当时增广矩阵的秩也为2，故方程组有解且由于系数矩阵的秩小于未知数个数，故方程组有无数个解，即

当且时可由线性表示，但表示法不唯一

而当且方程组系数矩阵与增广矩阵的秩不相等，故方程无解，即不能由线性表示。

**（注对于系数矩阵含有参数的方程组，若系数矩阵是方阵推荐用克兰姆法则先处理有唯一解的情形）**

法二方程组增广矩阵为



当时最后一个矩阵已是阶梯形，且可知方程组系数矩阵与增广矩阵的秩相等且为3，即方程组有解且系数矩阵向量组线性无关，即有唯一解，所以当，可由线性表示，且表示法唯一；

当增广矩阵为，后面处理与法一一样

**（注意处理含有参数的矩阵化阶梯型）**