# 1 复数的概念

## 1.1 复数的概念

，是实数, ..

注：一般两个复数不比较大小，但其模 (为实数) 有大小.

## 1.2 复数的表示

1) 模：．

2) 幅角：在时，矢量与轴正向的夹角，记为 (多值函数) ；主值是位于中的幅角．

3) 与之间的关系如下：

当 ；

当．

4) 三角表示：，其中．

5) 指数表示：，其中．

# 2 复数的运算

## 2.1 加减法

若，则．

## 2.2 乘除法

1) 若，则

；

．

2) 若, 则

；．

## 2.3 乘幂与方根

若，则．

若，则．

# 3 复变函数

## 3.1 复变函数

，在几何上可以看作把平面上的一个点集变到平面上的一个点集的映射.

## 3.2 复初等函数

### 3.2.1 指数函数

，在平面处处可导，处处解析；且．

注：是以为周期的周期函数． (注意与实函数不同)

### 3.2.2 对数函数

， (多值函数) .

主值：． (单值函数)

的每一个主值分支在除去原点及负实轴的平面内处处解析，且.

注：负复数也有对数存在． (与实函数不同)

### 3.2.3 乘幂与幂函数

，．

注：在除去原点及负实轴的平面内处处解析，且．

### 3.2.4 三角函数

 ．

在平面内解析，且．

注：有界性不再成立. (与实函数不同)

### 3.2.5 双曲函数

．

奇函数，是偶函数．在平面内解析，且．

# 4 解析函数的概念

## 4.1 复变函数的导数

1) 点可导：=．

2) 区域可导：在区域内点点可导．

## 4.2 解析函数的概念

1) 点解析：在及其的邻域内可导，称在点解析．

2) 区域解析：在区域内每一点解析，称在区域内解析．

3) 若在点不解析，称为的奇点．

## 4.3 解析函数的运算法则

解析函数的和、差、积、商 (除分母为零的点) 仍为解析函数；解析函数的复合函数仍为解析函数．

# 5 函数可导与解析的充要条件

## 5.1 函数可导的充要条件

在可导和在可微，且在 处满足条件：．此时．

## 5.2 函数解析的充要条件

在区域内解析和在内可微，且满足条件：．此时．

注意：若在区域具有一阶连续偏导数，则在区域内是可微的．因此在使用充要条件证明时，只要能说明具有一阶连续偏导且满足条件时，函数一定是可导或解析的．

## 5.3 函数可导与解析的判别方法

1) 利用定义．

2) 利用充要条件． (函数以形式给出)

3) 利用可导或解析函数的四则运算定理． (函数是以的形式给出)

# 6 复变函数积分的概念与性质

## 6.1 复变函数积分的概念

，是光滑曲线．

注：复变函数的积分实际是复平面上的线积分．

## 6.2 复变函数积分的性质

． (与的方向相反)

，是常数．

若曲线由与连接而成，则．

## 6.3 复变函数积分的一般计算法

**1) 化为线积分**：． (常用于理论证明)

**2) 参数方法**：设曲线：，其中对应曲线的起点，对应曲线的终点，则．

# 7复变函数积分重要定理与结论

## 7.1 柯西-古萨基本定理

设在单连域内解析，为内任一闭曲线，则．

## 7.2 复合闭路定理

设在多连域内解析，为内任意一条简单闭曲线，是内的简单闭曲线，它们互不包含互不相交，并且以为边界的区域全含于内，则：

① ，其中与均取正向；

② ，其中由及所组成的复合闭路．

## 7.3 闭路变形原理

一个在区域内的解析函数沿闭曲线的积分，不因在内作连续变形而改变它的值，只要在变形过程中不经过使不解析的奇点．

## 7.4 解析函数沿非闭曲线的积分

设在单连域内解析，为在内的一个原函数，则．

说明：解析函数沿非闭曲线的积分与积分路径无关，计算时只要求出原函数即可．

## 7.5 柯西积分公式

设在区域内解析，为内任一正向简单闭曲线，的内部完全属于，为内任意一点，则．

## 7.6 高阶导数公式

解析函数的导数仍为解析函数，它的阶导数为 ，其中为的解析区域内围绕的任何一条正向简单闭曲线，而且它的内部完全属于．

## 7.7 重要结论

． (是包含的任意正向简单闭曲线)

## 7.8 复变函数积分的计算

**1) 在区域内处处不解析**，用一般积分法．

**2) 在区域内解析**：

① 是内一条正向简单闭曲线，则由柯西—古萨定理，．

② 是内的一条非闭曲线，对应曲线的起点和终点，则有 ．

**3) 在区域内不解析**：

① 曲线内仅有一个奇点：． (在内解析)

② 曲线内有多于一个奇点： (内只有一个奇点) ．

# 8 解析函数与调和函数

## 8.1 调和函数的概念

若二元实函数在内有二阶连续偏导数且满足，为内的调和函数．

## 8.2 解析函数与调和函数的关系

1) 解析函数的实部与虚部都是调和函数，并称虚部为实部的共轭调和函数．

2) 两个调和函数与构成的函数不一定是解析函数；但是若如果满足柯西-黎曼方程，则一定是解析函数．

## 8.3 求解析函数的方法

**1) 偏微分法**：若已知实部，利用条件，得．

对两边积分，得 (\*)

再对 (\*) 式两边对求偏导，得 (\*\*)

由条件，，得，可求出．

代入 (\*) 式，可求得虚部．

**2) 线积分法**：若已知实部，利用条件可得 ，故虚部为；

由于该积分与路径无关，可选取简单路径 (如折线) 计算它，其中与是解析区域中的两点．

**3) 不定积分法**：若已知实部，根据解析函数的导数公式和条件得知， ，将此式右端表示成的函数，由于仍为解析函数，故．

注：若已知虚部也可用类似方法求出实部．