# 🌸1 复数的概念

## 🍉1.1 复数的概念

，是实数, ..

注：一般两个复数不比较大小，但其模 (为实数) 有大小.

## 🍉1.2 复数的表示

1) 模：．

2) 幅角：在时，矢量与轴正向的夹角，记为 (多值函数) ；主值是位于中的幅角．

3) 与之间的关系如下：

当 ；

当．

4) 三角表示：，其中．

5) 指数表示：，其中．

# 🌸2 复数的运算

## 🍉2.1 加减法

若，则．

## 🍉2.2 乘除法

1) 若，则

；

．

2) 若, 则

；．

## 🍉2.3 乘幂与方根

若，则．

若，则．

# 🌸3 复变函数

## 🍉3.1 复变函数

，在几何上可以看作把平面上的一个点集变到平面上的一个点集的映射.

## 🍉3.2 复初等函数

### 🍥3.2.1 指数函数

，在平面处处可导，处处解析；且．

注：是以为周期的周期函数． (注意与实函数不同)

### 🍥3.2.2 对数函数

， (多值函数) .

主值：． (单值函数)

的每一个主值分支在除去原点及负实轴的平面内处处解析，且.

注：负复数也有对数存在． (与实函数不同)

### 🍥3.2.3 乘幂与幂函数

，．

注：在除去原点及负实轴的平面内处处解析，且．

### 🍥3.2.4 三角函数

 ．

在平面内解析，且．

注：有界性不再成立. (与实函数不同)

### 🍥3.2.5 双曲函数

．

奇函数，是偶函数．在平面内解析，且．

# 🌸4 解析函数的概念

## 🍉4.1 复变函数的导数

1) 点可导：=．

2) 区域可导：在区域内点点可导．

## 🍉4.2 解析函数的概念

1) 点解析：在及其的邻域内可导，称在点解析．

2) 区域解析：在区域内每一点解析，称在区域内解析．

3) 若在点不解析，称为的奇点．

## 🍉4.3 解析函数的运算法则

解析函数的和、差、积、商 (除分母为零的点) 仍为解析函数；解析函数的复合函数仍为解析函数．

# 🌸5 函数可导与解析的充要条件

## 🍉5.1 函数可导的充要条件

在可导和在可微，且在 处满足条件：．此时．

## 🍉5.2 函数解析的充要条件

在区域内解析和在内可微，且满足条件：．此时．

注意：若在区域具有一阶连续偏导数，则在区域内是可微的．因此在使用充要条件证明时，只要能说明具有一阶连续偏导且满足条件时，函数一定是可导或解析的．

## 🍉5.3 函数可导与解析的判别方法

1) 利用定义．

2) 利用充要条件． (函数以形式给出)

3) 利用可导或解析函数的四则运算定理． (函数是以的形式给出)

# 🌸6 复变函数积分的概念与性质

## 🍉6.1 复变函数积分的概念

，是光滑曲线．

注：复变函数的积分实际是复平面上的线积分．

## 🍉6.2 复变函数积分的性质

． (与的方向相反)

，是常数．

若曲线由与连接而成，则．

## 🍉6.3 复变函数积分的一般计算法

**1) 化为线积分**：． (常用于理论证明)

**2) 参数方法**：设曲线：，其中对应曲线的起点，对应曲线的终点，则．

# 🌸7复变函数积分重要定理与结论

## 🍉7.1 柯西-古萨基本定理

设在单连域内解析，为内任一闭曲线，则．

## 🍉7.2 复合闭路定理

设在多连域内解析，为内任意一条简单闭曲线，是内的简单闭曲线，它们互不包含互不相交，并且以为边界的区域全含于内，则：

① ，其中与均取正向；

② ，其中由及所组成的复合闭路．

## 🍉7.3 闭路变形原理

一个在区域内的解析函数沿闭曲线的积分，不因在内作连续变形而改变它的值，只要在变形过程中不经过使不解析的奇点．

## 🍉7.4 解析函数沿非闭曲线的积分

设在单连域内解析，为在内的一个原函数，则．

说明：解析函数沿非闭曲线的积分与积分路径无关，计算时只要求出原函数即可．

## 🍉7.5 柯西积分公式

设在区域内解析，为内任一正向简单闭曲线，的内部完全属于，为内任意一点，则．

## 🍉7.6 高阶导数公式

解析函数的导数仍为解析函数，它的阶导数为 ，其中为的解析区域内围绕的任何一条正向简单闭曲线，而且它的内部完全属于．

## 🍉7.7 重要结论

． (是包含的任意正向简单闭曲线)

## 🍉7.8 复变函数积分的计算

**1) 在区域内处处不解析**，用一般积分法．

**2) 在区域内解析**：

① 是内一条正向简单闭曲线，则由柯西—古萨定理，．

② 是内的一条非闭曲线，对应曲线的起点和终点，则有 ．

**3) 在区域内不解析**：

① 曲线内仅有一个奇点：． (在内解析)

② 曲线内有多于一个奇点： (内只有一个奇点) ．

# 🌸8 解析函数与调和函数

## 🍉8.1 调和函数的概念

若二元实函数在内有二阶连续偏导数且满足，为内的调和函数．

## 🍉8.2 解析函数与调和函数的关系

1) 解析函数的实部与虚部都是调和函数，并称虚部为实部的共轭调和函数．

2) 两个调和函数与构成的函数不一定是解析函数；但是若如果满足柯西-黎曼方程，则一定是解析函数．

## 🍉8.3 求解析函数的方法

**1) 偏微分法**：若已知实部，利用条件，得．

对两边积分，得 (\*)

再对 (\*) 式两边对求偏导，得 (\*\*)

由条件，，得，可求出．

代入 (\*) 式，可求得虚部．

**2) 线积分法**：若已知实部，利用条件可得 ，故虚部为；

由于该积分与路径无关，可选取简单路径 (如折线) 计算它，其中与是解析区域中的两点．

**3) 不定积分法**：若已知实部，根据解析函数的导数公式和条件得知， ，将此式右端表示成的函数，由于仍为解析函数，故．

注：若已知虚部也可用类似方法求出实部．

# 🌸9 复变函数项级数

## 🍉9.1复数列的极限

1) 复数列()收敛于复数的充要条件为



2) 复数列收敛实数列同时收敛．

## 🍉9.2 复数项级数

1) 复数项级数收敛的充要条件是级数与同时收敛；

2) 级数收敛的必要条件是．

注：复数项级数的敛散性可以归纳为两个实数项级数的敛散性问题的讨论．

# 🌸10 幂级数及其敛散性

## 🍉10.1 幂级数

表达式或为幂级数．

## 🍉10.2 幂级数的敛散性

### 🍥10.2.1 幂级数的收敛定理：阿贝尔(Abel)定理

如果幂级数在处收敛，那么对满足的一切，该级数绝对收敛；如果在处发散，那么对满足的一切，级数必发散．

### 🍥10.2.2 幂级数的收敛域

幂级数在收敛圆域内，绝对收敛；在圆域外，发散；在收敛圆的圆周上可能收敛，也可能发散．

### 🍥10.2.3 收敛半径

收敛圆的半径称收敛半径．

**1) 比值法**：如果，则收敛半径；

**2) 根值法**：，则收敛半径；

如果，则；说明在整个复平面上处处收敛；

如果，则；说明仅在或点收敛；

注：若幂级数有缺项时，不能直接套用公式求收敛半径．(如)

## 🍉10.3 幂级数的性质

### 🍥10.3.1 代数性质

设的收敛半径分别为与，记．

则当时，有：

 (线性运算)

 (乘积运算)

### 🍥10.3.2 复合性质

设当时，，当时，解析且，则当时，．

### 🍥10.3.3 分析运算性质

设幂级数的收敛半径为，则其和函数是收敛圆内的解析函数：

1) 在收敛圆内可逐项求导，收敛半径不变；且，；

2) 在收敛圆内可逐项求积，收敛半径不变；，．

# 🌸11泰勒级数

## 🍉11.1 泰勒展开

设函数在圆域内解析，则在此圆域内可以展开成幂级数 ；并且此展开式是唯一的．

注：若在解析，则在的泰勒展开式成立的圆域的收敛半径；

其中为从到的距最近一个奇点之间的距离．

## 🍉11.2 几个初等函数的幂级数展开式

在处：

1)  ，；

2) ，；

3) ，；

4) ，．

## 🍉11.3 解析函数展开成泰勒级数的方法

### 🍥11.3.1直接法

直接求出，于是．

### 🍥11.3.2 间接法

利用已知函数的泰勒展开式及幂级数的代数运算、复合运算和逐项求导、逐项求积等方法将函数展开．

# 🌸12洛朗级数

## 🍉12.1 洛朗级数

，含正幂项和负幂项．

## 🍉12.2 洛朗展开定理

设函数在圆环域内处处解析，为圆环域内绕的任意一条正向简单闭曲线，则在此在圆环域内，有，且展开式唯一．

## 🍉12.3 解析函数的洛朗展开法

洛朗级数一般只能用间接法展开．

## 🍉12.4 利用洛朗级数求围线积分

设在内解析，为内的任何一条正向简单闭曲线，则 ．其中为在内洛朗展开式中的系数．

即：围线积分可转化为求被积函数的洛朗展开式中的系数．

# 🌸13 孤立奇点

## 🍉13.1 孤立奇点分类

### 🍥13.1.1 孤立奇点的定义

在点不解析,但在的内解析．

### 🍥13.1.2 孤立奇点的类型

**1) 可去奇点**：展开式中不含的负幂项，常数；

**2) 极点**：展开式中含有限项的负幂项，；

**3) 本性奇点**：展开式中含无穷多项的负幂项，不存在且不为．

## 🍉13.2 零点与极点的关系

### 🍥13.2.1 零点

不恒为零的解析函数，如果能表示成，其中在解析，，为正整数，称为的级零点．

### 🍥13.2.2 零点级数判别的充要条件

是的级零点，．

### 🍥13.2.3 零点与极点的关系

是的级零点是的级极点．

### 🍥13.2.4 重要结论

若分别是与的级与级零点，则：

1) 是的级零点．

2) 当时，是的级零点；当时，是的级极点；当时，是的可去奇点．

3) 当时，是的级零点，;当时，是的级零点，其中．

# 🌸14 留数的概念

## 🍉14.1留数的定义

设为的孤立奇点，在的去心邻域内解析，为该域内包含的任一正向简单闭曲线，则称积分为在的留数，记作:



## 🍉14.2 留数的计算方法

若是的孤立奇点，则，其中为在的去心邻域内洛朗展开式中的系数．

1) 可去奇点处的留数：若是的可去奇点，则

2) 级极点处的留数：

① 若是的级极点，则：



特别地，若是的一级极点，则：

．

注：如果极点的实际级数比低，上述规则仍然有效．

② 设，在解析，，则：



## 🍉14.3 留数基本定理

设在区域内除有限个孤立奇点外处处解析，为内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线，则．

说明：留数定理把求沿简单闭曲线积分的整体问题转化为求被积函数在内各孤立奇点处留数的局部问题．