Elektromanyetikte Sayısal Yöntemler

Dr. Öğr. Üy. Mustafa Hikmet Bilgehan UÇAR

mhbucar@kocaeli.edu.tr

0262-303 22 61

Elektromanyetikte Sayısal Yöntemler

1. <u>Bölüm</u>

GİRİŞ

GİRİŞ

Mühendisler ve fizikçiler ilgili problemleri çözerken 3 farklı yöntem kullanmaktadırlar.

Ölçüm Yöntemi: Oldukça masraflı, zaman alıcı, bazen tehlikeli ve parametre değişimi için esnek değildir.

Analitik Yöntem: Oldukça karmaşık ve uzun matematiksel işlemler gerektirir parametre değişimi için esnek değildir.

Sayısal Yöntem: Parametre değişimi araştırmalar için uygundur.

GİRİŞ

- ❑ Elektronik çevre kirliliği,
- ❑ İnsan sağlığına etkisi,
- ❑ Cihazların birbirlerinin normal çalışmalarına engel olması
- ❑ Basit bir PC kasasının tasarımı gibi problemler

Tasarım mühendislerinin bu sorunların üstesinden nasıl gelebilecekler?

Mühendislerin yapacağı iki şey vardır;

- ➢ Sorunların temelinde yatan fiziksel nedenleri ortaya çıkarmak
- ➢ Güçlü tasarım algoritmaları kullanarak, sorunları temelde/başlangıçta çözmek
  - Burada sözü edilen problemler o kadar karmaşıktır ki, basit problemler de olduğu gibi, matematiksel bağıntılarla çözülmeleri hemen hemen olanaksızdır. Ancak temel yasalar üzerine kurulmuş sayısal algoritmalarla bu işlerin üstesinden gelmek olasıdır. Uğraştığı problemin fiziğini iyi bilen ve güçlü sayısal algoritmalar kullanabilen mühendislerin başarısı oldukça yüksek olacaktır. Önemli bir diğer nokta, da problemin fiziğini iyi kavrayabilmek yanında kullanılan sayısal algoritmaların da geçerli oldukları parametreleri ve doğruluk derecelerini iyi bilmek gerektiğidir.

GİRİŞ

ANALİTİK YÖNTEM (Kesin Sonuç-Exact Solution)	SAYISAL YÖNTEM (Yaklaşık Sonuç-Approximate Solutions)
Değişkenlerine ayırmak Seperation of Variables (SoV)	Sonlu Farklar Yöntemi Finite Difference Method FD
Seri açılım Series Expansion	Moment Metodu MoM
İntegral, Türev işlemleri	Sonlu Elemanlar Yöntemi Finite Element Method FEM
Laplace, Fourier çözümü, ….	İletim Hattı Modeli, …. Transmission Line Method

Bu metodların uygulama alanları EM-bağlantılı problemlerle sınırlı değildir.
Buldukları diğer uygulama alanları; Akışkanları, Isı transferi ve akustik problemleri

Nümerik yöntemlere neden ihtiyaç duyuldu? Kompleks geometriler…
1960'ların ortalarında modern yüksek hızlı sayısal bilgisayarların gelişimiyle…

ELEKTROMANYETİK TEORİYE GİRİŞ

Elektromanyetik Teorideki problemler 8 farklı denklem ile (4 tanesi Maxwell denklemi, 4 tanesi ise ortamdan bağımsız denklemler) ifade edilmektedir.

Elektromanyetik Teoriye giriş yaparken GAUSS ve STOKE Teoremlerini incelemek bize yardımcı olacaktır.

Gauss, Green, Diverjans Teoremi

Verilen bir hacim içindeki kaynaklar ile hacmi çevreleyen kapalı yüzeyden geçen net akı arasındaki ilişkinin matematiksel ifadesi: Ele alınan bir hacimdeki kaynakların toplam etkisi, o hacmi çevreleyen yüzeyden geçen akının toplamına eşittir

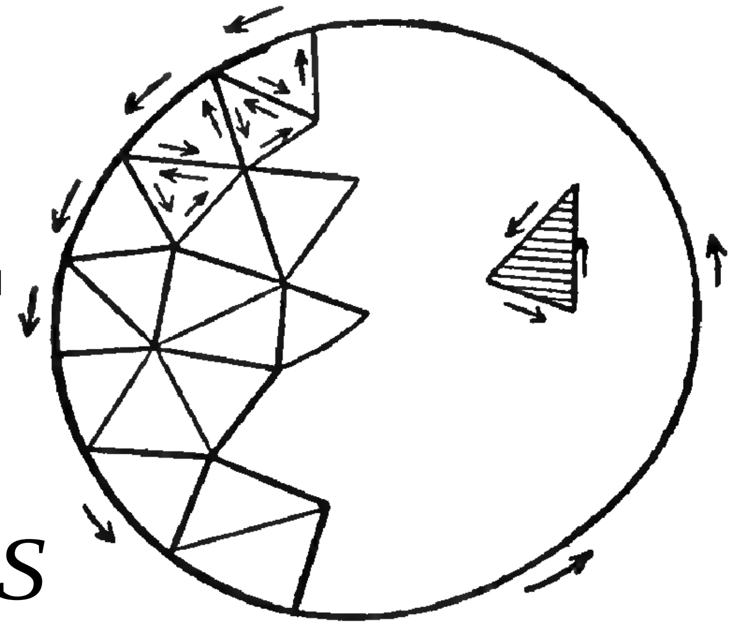
$$\oint_S E.dS = \int_v \nabla.E.dv$$

Gauss teoremi, matematiksel olarak üç boyutlu hacim integralini, iki boyutlu kapalı yüzey integraline dönüştürmektedir. Bu çoğu kez integral alam işimizi kolaylaştırır.

StokeTeoremi

Rotasyonel bir vektör alanının verilen nokta etrafında sonsuz küçük dolanımıdır.

Şekil'de verilen yüzey içinde alınan rotasyoneller yani dolanımlara bakıldığında, komşu dolanımların bir birlerini sıfırladıkları, sadece yüzeyi tanımlayan sınırda yer alan dolanımlardan net bir katkı gelebileceğini görmek zor değildir. Şekilde görüldüğü gibi, kapalı bir çizgi ile tanımlanan alan içindeki rotasyonellerin toplam etkisi, yol boyunca alınacak çizgi integraline eşit olacaktır. Yani;



$$\oint_L E.dl = \int_S \nabla \times E.dS$$

Çevrimin yönü $d\vec{l}$ ile yüzey vektörü $d\vec{S}$ nin yönleri sağ el kuralı ile belirlenir.

NABLA (∇) OPERATÖRÜ

Elektromanyetik Teorideki bolca karşımıza çıkan nabla operatörü aslında aşağıdaki işlemi gerçekleştiren bir operatördür.

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Tek başına bir anlamı yoktur ancak üzerine etkiyeceği bir vektör var ise anlamlı hale gelir. Nabla operatörü aslında bir vektör değildir ama vektör gibi davranır ve sadece başka vektörlere ***etki eder*** çarpılmaz.

NABLA (∇) OPERATÖRÜ

Bir vektörün 3 farklı çarpımı olabilir:

1) Bir a skaleri ile çarpma; **A** a
2) Bir başka vektör ile skaler çarpma: **A** . **B**
3) Bir başka vektör ile vektörel çarpma: **A** × **B**

NABLA operatörü 3 farklı şekilde etkiyebilir:

1) Skaler bir T fonksiyonu üzerine etkime (GRADYAN)
2) Bir vektör üzerine skaler çarpım ile etkime (DİVERJANS)
3) Bir vektör üzerine vektörel çarpım ile etkime (ROTASYONEL)

GRADYAN

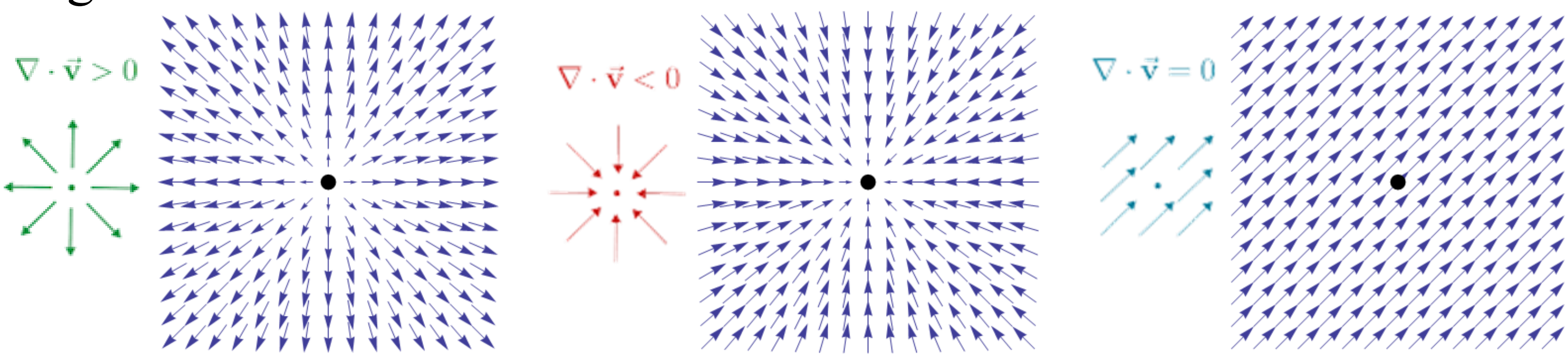
Bir skaler alanın yön türevi (gradyan), artımın en çok olduğu yere doğru yönelmiş bir vektör alanını verir ve büyüklüğü değişimin en büyük değerine eşittir.

Örneklemek gerekirse bir odadaki zamandan bağımsız sıcaklık dağılımı düşünülebilir. Sıcaklık dağılımı skaler bir alandır ve kartezyen koordinatlarda $\phi = \phi (x , y , z)$ olarak gösterilebilir. Bu dağılımın yöntürevi en çok ısınan yeri işaret edecektir ve yöntürevi büyüklüğü de o yöndeki ısınmanın miktarını verecektir. Başka bir örnek olarak bir yokuş ele alınabilir. Yokuşa onu üstten kesen bir düzlemden bakılırsa ortaya çıkan fonksiyon yokuşun eğim profili $H = H (x , y)$' i verir (basitlik için yokuşu iki boyutta düşünmek faydalı olacaktır). Bu fonksiyonun yöntürevi yokuşun en dik yerini, yöntürevinin büyüklüğü de bu yerin dikliğini verir.

DİVERJANS

$$\nabla . v = \left(\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \right) . \left(\hat{i}\, v_x + \hat{j} v_y + \hat{k} v_z \right) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

İşlem sonucu bir skaler çıkar. Diverjansın kelime anlamı ıraksamaktır. Sonuç pozitif ise, kaynaktan ıraksayan doğrular olduğunu, sonuç negatif ise noktaya giriş olduğunu ve sonuç 0 ise kaynağa giren ve çıkan doğruların eşit olduğunu ifade eder.



Diverjans'ın matematiksel tanımı: Ele alınan nokta etrafında sonsuz küçük hacmi saran yüzey üzerinden, vektör fonksiyonu ***F***'in yüzey integrali (toplam net akı) olarak tanımlanır;

$$\vec{\nabla} . \vec{F} \equiv \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint \vec{F} . d\vec{S}$$

ROTASYON/DÖNEL/CURL

$$\nabla \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

İşlem sonucu bir vektör çıkar. Sonuçta ***v*** vektörünün bir nokta etrafında dolanış miktarının bir ölçüsünü verir.

Rotasyonel'in matematiksel tanımı: Ele alınan nokta etrafında sonsuz küçük bir daire etrafında vektör fonksiyonu $\vec{F}$'in çizgisel integrali olarak tanımlanır;

EM Teori

EM teorisi, hareketsiz ve hareket halinde elektrik yükleri tarafından üretilen alanların araştırılması olarak kabul edilebilir.

- Elektrostatik alanlar genellikle **statik elektrik yükleri** tarafından üretilirken,

- Manyetostatik alanlar elektrik yüklerinin **tekdüze hızdaki** (doğru akım) hareketi nedeniyledir.

- Dinamik veya zamana göre değişen alanlar genellikle hızlanan yüklerden (a_q) veya zamana göre değişen akımlardan J(t) kaynaklanır.

ELEKTROSTATİK ALAN

Duran veya çok yavaş hareket eden elektrik yüklerin bir test yüküne olan etkileri incelenmektedir.

Bu elektrostatik alanları düzenleyen iki temel yasa, Coulomb yasasının doğrudan bir sonucu olan **Gauss yasası** ve **elektrostatik alanların korunumu** olarak tanımlayan yasadır.

Coulomb Yasası:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{R^2} \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Coulomb sabiti

$$\varepsilon_0 = 8.85\times 10^{-12}\ \frac{C^2}{N.m^2}$$

Gauss Yasası:

$$\oint_S D.dS = \int \rho_v.dv \qquad \nabla.D = \rho_v$$

C/m^3

hacimsel yük yoğunluğu

$$D = \varepsilon E$$

Elektrik Akı Yoğunluğu C/m^2

Dielektrik geçirgenlik (permittivity) $Farad/m$

Elektrik Alan Şiddeti V/m

Alanların Korunumu

$$\oint E.dl = 0 \qquad \nabla\times E = 0$$

ELEKTROSTATİK ALAN

Elektrik potansiyeli V (volts) cinsinden, elektrik alan şiddeti

$$E = -\nabla V \qquad V = -\int E.dl$$

$$\nabla.D = \rho_v \Longrightarrow \nabla.\varepsilon\nabla V = -\rho_v$$

ε sabit ise;

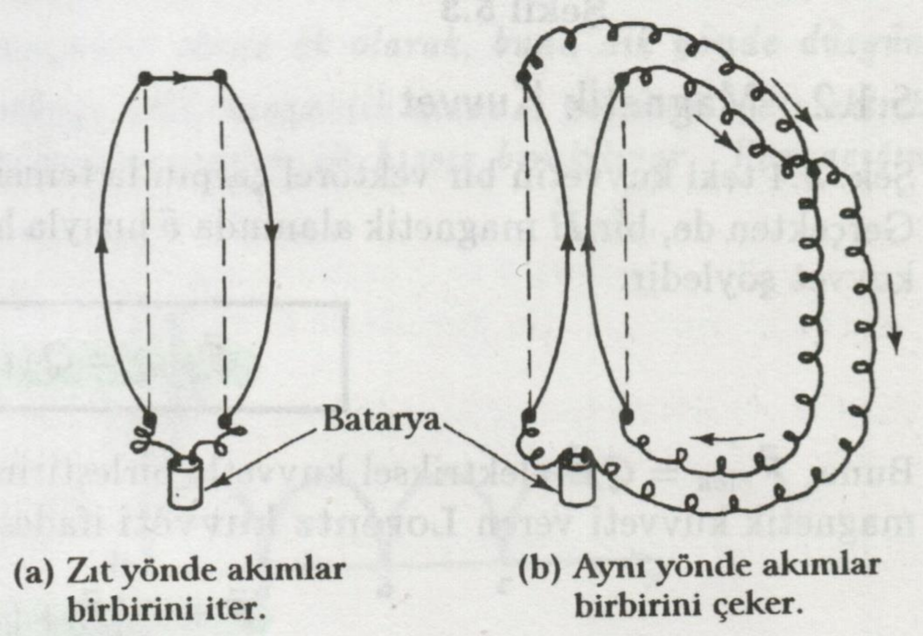
Poisson Denklemi: $$\nabla^2 V = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$$

ρ_v =0 ise;

Laplace Eşitliği: $$\nabla^2 V = 0$$

MAGNETOSTATİK ALAN

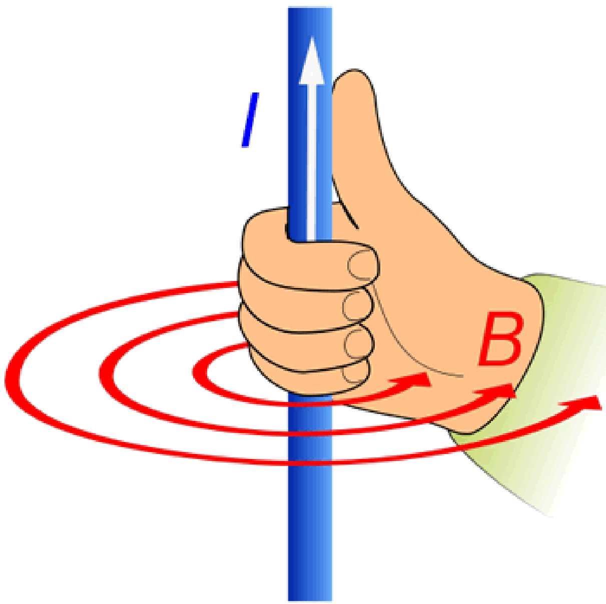
Hareketli elektrik yüklerinin bir test yüküne olan etkilerini incelenmektedir.

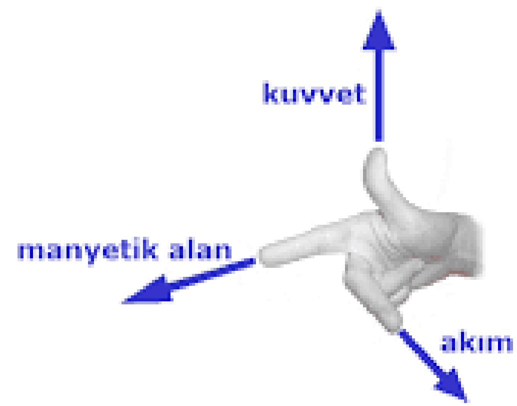


Durgun bir yük sadece **E** elektrik alanını oluştururdu. Hareketli yükler ise elektrik alana ek olarak birde **H** magnetik alan oluşturur.

MAGNETOSTATİK ALAN

Pusula yardımı ile bakıldığında manyetik alanın akım akan bir telin etrafında döndüğü gözlemlenebilir.





MAGNETİK KUVVET

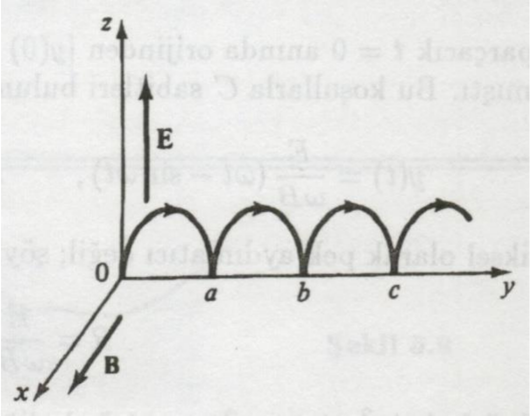
Magnetostatik alanda Q yükü üzerine etkiyen kuvvet:

Lorentz Kuvveti

$$\left.\begin{aligned} F_{mag} &= Q(v \times B) \\ F_{elek} &= QE \end{aligned}\right\} \quad F = Q[E + (v \times B)]$$

Örnek:

Düzgün bir manyetik alan (x) ve buna dik bir elektrik alan (z) olan bir ortamda, orjine hareketsiz bir Q yükü bırakılıyor. Parçacığın hareket yörüngesi nasıl olur?



MAGNETOSTATİK ALAN

Manyetostatik alanların temel yasaları, Biot-Savart yasasıyla ilgili Amper yasası ve manyetik akının korunumu yasasıdır. Amper yasası kapalı bir eğri üzerinden integrali alınmış manyetik alanla o eğri üzerindeki elektrik akımı arasındaki ilişkiyi açıklayan yasadır.

Amper Yasası

$$\oint_L H.dl = \int_s J.ds$$

Elektrik akım yoğunluğu $Amper/m^2$

Manyetik Alan şiddeti $Amper/m$

Odev; Biot-savart yasasından, Amper yasasını elde ediniz

Manyetik akının korunumu yasası (Manyetostatik alanlar için Gauss yasası)

$$\oint B.ds = 0$$

Manyetik akı yoğunluğu Tesla, $weber/m^2$

$$B = \mu H$$

Manyetik Geçirgenlik (Permeability) $Henry/m$

$$\nabla \times H = J_e \qquad \nabla . B = 0$$

Ohm kanunu

$$J = \sigma E$$

İletkenlik mhos/m

$$B = \nabla \times A$$

Manyetik Vektör Potansiyeli $weber/m$

MAGNETOSTATİK ALAN

Odev-2
Özdeşliğini ispatlayın, mansyetostatik alanlarda possion denklemini elde ediniz.

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla . \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}$$

Vektör özelliğini kullanarak;

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J}$$

Manyetostatik alanlarda poisson denklemi

$\boldsymbol{J}$=0 olursa;

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = 0$$

Manyetostatik alanlarda laplace denklemi

MAGNETOSTATİK ALAN

Poisson Denklemi: $$\nabla^2 A = -\mu J$$

Laplace Eşitliği: $$\nabla^2 A = 0$$

ZAMANLA DEĞİŞEN ALANLAR

Bu durumda, elektrik ve manyetik alanlar aynı anda bulunur. Denklemler $\nabla . \vec{D} = \rho_v$ ve $\nabla . \vec{B} = 0$ aynı kalırken; $\nabla \times \vec{E}$=0 ve $\nabla \times \vec{H}$=$\overrightarrow{J_e}$ denklemlerde, dinamik alanlar için bir takım düzenlemeler gerekmektedir. $\nabla \times \vec{E}$=0 denkleminin modifikasyonu, Faraday'ın indiksiyon yasası ve $\nabla \times \vec{H}$=$\overrightarrow{J_e}$ denkleminin deplasman akımına izin verilmesi garanti edilecek şekilde dahil edilmesi gereklidir.

$$\nabla . \vec{D} = \rho_v$$
$$\nabla . \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \overrightarrow{J_m}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \overrightarrow{J_e} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$\overrightarrow{J_m} = \sigma_m{}^* \, \vec{H}$;

$\overrightarrow{J_m}$, manyetik iletkenlik akım yoğunluğu (Volts/m^2)
$\sigma_m{}^*$, manyetik direnç (Ω/m)

Bu denklemler, genelleştirilmiş formdaki Maxwell denklemleri olarak adlandırılır. Vektör alanı büyüklüklerini birbirine bağlayan birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerdir.

ZAMANLA DEĞİŞEN ALANLAR

Genelleştirilmiş Maxwell denklemlerinin, eş değer integral formları;

$$\nabla . \vec{D} = \rho_v$$
$$\nabla . \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \overrightarrow{J_m}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \overrightarrow{J_e} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_S \vec{D} \, . \, d\vec{S} = \int_V \rho_v \, . \, dv$$
$$\oint_S \vec{B} \, . \, d\vec{S} = 0$$
$$\oint_L \vec{E} \, . \, d\vec{l} = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{J_m} \right) . \, d\vec{S}$$
$$\oint_L \vec{H} \, . \, d\vec{l} = \int_S \left(\overrightarrow{J_e} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) . \, d\vec{S}$$

Bu dört Maxwell denklemine ek olarak, ortam-bağımlı dört denklem vardır:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$
$$\overrightarrow{J_e} = \sigma \vec{E}$$
$$\overrightarrow{J_m} = \sigma^* \overrightarrow{M}$$

ELEKTROMANYETİK ALAN

Maxwell Denklemleri

Türev Formu

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_m$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

İntegral Formu

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho_v dv$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{J}_m\right) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J}_e &= \sigma \mathbf{E} \\ \mathbf{J}_m &= \sigma^* \mathbf{M} \end{aligned}}$$

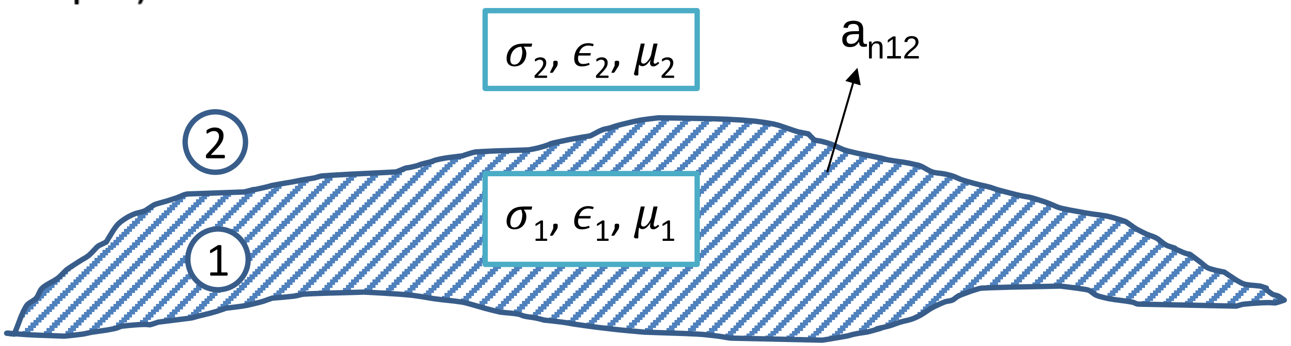
SINIR KOŞULLARI

Bir EM alanının bulunduğu malzeme ortamı, genellikle yapısal parametreleri σ, ϵ ve μ ile karakterize edilir.

Ortam, σ, ϵ ve μ eğer $\vec{E}$ ve $\vec{H}$'den bağımsızsa doğrusal (lineer) aksi takdirde doğrusal değildir (non-lineer).

Ortam, σ, ϵ ve μ eğer uzay değişkenlerinin fonksiyonu değilse (kartezyen kordinatlarda, x,y,z) homojen (homogeneous) aksi takdirde inhomojendir (inhomogeneous).

Ortam, σ, ϵ ve μ eğer yönden bağımsız, yani skaler ise izotropik (isotropic) aksi takdirde anizotrpik (anisotrpic).



iki ortam arasındaki ara-yüz

SINIR KOŞULLARI

İki farklı ortamı (1 ve 2) ayıran Ara yüzdeki sınır koşulları, $(\sigma_1,\ \epsilon_1,\ \mu_1)$ ve $(\sigma_2,\ \epsilon_2,\ \mu_2\ )$ ortam parametreleriyle Maxwell denklemlerinin integral formundan kolayca elde edilir. a_{n12} birim norma vektör. t ve n ler sırasıyla ilgili bölgelerdeki alanların teğetsel ve normal bileşenleridir.

$$\overrightarrow{E_{1t}} = \overrightarrow{E_{2t}} \text{ ya da } \left(\overrightarrow{E_1} - \overrightarrow{E_2}\right) \times a_{n12}=0$$

$$\overrightarrow{H_{1t}} - \overrightarrow{H_{2t}} = \text{K ya da } \left(\overrightarrow{H_1} - \overrightarrow{H_2}\right) \times a_{n12}=\text{K}$$

$$\overrightarrow{D_{1n}} - \overrightarrow{D_{2n}} = \rho_s \text{ ya da } \left(\overrightarrow{D_1} - \overrightarrow{D_2}\right).a_{n12}=\rho_s$$

$$\overrightarrow{B_{1n}} - \overrightarrow{B_{2n}} = 0 \text{ ya da } \left(\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1}\right).a_{n12}=0$$

DALGA DENKLEMİ

Maxwell denklemleri, sınır-değer problemlerini çözerken uygulanması zor olan birinci dereceden diferansiyel denklemlerdir.

Birinci dereceden denklemlerin ayrıştırılması ve böylece problemlerin çözümü için faydalı olan **ikinci dereceden bir diferansiyel denklem olan dalga denkleminin** elde edilmesiyle bu zorluğun üstesinden gelinebilir.

Doğrusal, izotropik, homojen, kaynaksız bir ortam (ρ_v=0, $\vec{J}$=0) için dalga denklemini elde etmek için

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Denkleminin her ikitarafınında rotasyoneli alınır;

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{H}\right)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

DALGA DENKLEMİ

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{H}\right)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Vektör özdeşliği kullanılarak;

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla\left(\nabla . \vec{F}\right) - \nabla^2 \vec{F}$$

$$\nabla\left(\nabla . \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

ρ_v=0, olduğundan $\nabla . \vec{E} = 0$dır. Böylece;

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

zamana bağlı vektör Helmholtz denklemini veya sadece dalga denklemini elde ederiz.

DALGA DENKLEMİ

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$\nabla \times \vec{H} = \overrightarrow{J_e} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ile, H için dalga denklemini türetebiliriz;

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Bu denklemler, incelenen ortamdaki EM dalgalarının hareket denklemleridir. Dalga yayılımının hızı (m/sn)

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$u \approx 3 \times 10^8$ m/s serbest uzayda

E ve H için elde edilen dalga vektör denklemlerinin, üçer adet skaler bileşeni vardır. H_x ,H_y ,H_z ,E_x ,E_y ,E_z şeklinde. Böylece dalga denklemlerinin her bir bileşeni;

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

Skaler dalga denklemi formundadır.

Zamanla Değişen Potansiyeller

Fiziksel olarak ölçülebilen büyüklükteki elektriksel ve manyetik alan yoğunluğu ($\vec{E}$ ve $\vec{H}$) ile ilgilenmeye devam etmemize rağmen, bir EM alanını analiz etmek için yardımcı fonksiyonları kullanmak genellikle uygundur. Bu yardımcı fonksiyonlar skaler elektrik potansiyeli V ve vektör manyetik potansiyel $\vec{A}$'dır. Bu potansiyel fonksiyonlar keyfi olsa da, Maxwell denklemlerini sağlamaları gerekmektedir. Bunların türetilmesi iki temel vektör özdeşliğine dayanmaktadır.

$$\nabla \times \nabla\Phi = 0$$

$$\nabla . \nabla \times \vec{F} = 0$$

rastgele keyfi bir skaler alan Φ ve vektör alan $\vec{F}$ Maxwell denklemlerini sağlamalıdır.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Zamanla Değişen Potansiyeller

Böylece, eğer V ve $\vec{A}$ potansiyel fonksiyonlarını bilseydik, $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ alanlarının $\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$

$\boxed{\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$ Elde edebilirdik. Oysa hala potansiyel fonksiyonlar için çözüm bulmalıyız.

$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$ ve $\boxed{\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$ denklemlerini $\nabla \times \vec{H} = \vec{J_e} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ denkleminde yerine koyarak ve doğrusal, homojen ortamı varsayarsak;

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu\vec{J} + \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla . \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$ Vektör özdeşliğini uygularsak;

$$\nabla^2 \vec{A} - \nabla(\nabla . \vec{A}) = -\mu\vec{J} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \epsilon\mu\nabla \frac{\partial V}{\partial t}$$

$\boxed{\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$ yı $\nabla . \vec{D} = \rho_v$ 'da yerine koyarsak; $\nabla . \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = -\nabla^2 V - \frac{\partial \nabla . \vec{A}}{\partial t}$

Zamanla Değişen Potansiyeller

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\nabla.\vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$ Elde ederiz

Vektör analizinin Helmholtz teoremine göre, bir vektör, ancak hem rotasyonu hem de diverjansı tanımlanırsa benzersiz olarak tanımlanır. denkleminde sadece $\vec{A}$'nın rotasyonelini belirledik, $\vec{A}$"nın diverjansını öyle seçelim ki, böylece diferansiyel denklemler, olası en basit halini alabilsin;

Buna Lorentz koşulu sağlayabiliriz;

1

$$\boxed{\nabla.\vec{A} = -\epsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t}}$$

2

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}}$$

3

$$\boxed{\nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}}$$

Homojen olmayan dalga denklemleri. Böylece, Maxwell denklemleri V ve $\vec{A}$ potansiyelleri cinsinden, üç denkleme indirgenir. Başka bir deyişle, üç denklem, bu denklemleri sağlayan potansiyellerin her zaman $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ ve $\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ ile kullanıldığında Maxwell denklemlerinin $\vec{E}$ve $\vec{B}$ için bir çözümüne götürdüğü, Maxwell denklemlerinin normal formuna eşdeğerdir.

Elektromanyetik Problemlerin Sınıflandırılması

EM problemlerini sınıflandırmak, daha sonra verilen bir problemi çözmek için hangi yöntemin en iyi olduğu sorusunu cevaplamamıza yardımcı olacaktır. Devamlılık sorunları, bunlardan biri olabilecek belirli bir maddeye bağlı olarak farklı kategorilere ayrılır:

1. problemin çözüm bölgesi,
2. problemi tanımlayan denklemin niteliği
3. ilişkili sınır koşulları.

(Aslında, yukarıdaki üç madde bir sorunu benzersiz olarak tanımlamaktadır.)

Bu sınıflandırmaların bazen birbirinden bağımsız değildir.

Elektromanyetik Problemlerin Sınıflandırılması

1. Çözüm Bölgelerinin Sınıflandırılması

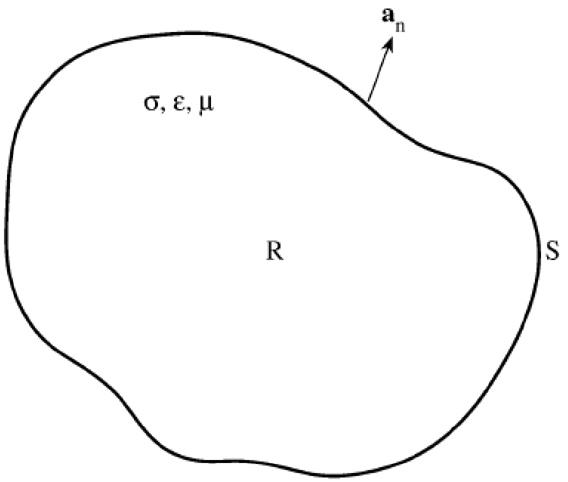
Çözüm bölgesi veya problem domeni açısından,

- Problem, iç (inner), kapalı (closed) veya sınırlı (bounded) problem olarak da adlandırılan bir **iç problem** **(Interior Problem)**
- Dış (outer), açık (open) veya sınırsız (unbounded) bir problem olarak da adlandırılan bir **dış problem** **(Exterior Problem)** olabilir.

Şekil'de gösterildiği gibi **S** sınırlı, **R** çözüm bölgesini göz önüne alındığında;
S'nin bir kısmı veya tamamı **sonsuz** ise, **R** dış / açık, aksi takdirde **R** iç / kapalıdır.

Örneğin;

- Bir dalga kılavuzundaki dalga yayılımı bir iç problemdir,
- Serbest uzayda dalga yayılımı - EM dalgalarının yağmur damlaları ile saçılması ve dipol anten'den gelen radyasyon - dış problemlerdir.



Elektromanyetik Problemlerin Sınıflandırılması

1. Çözüm Bölgelerinin Sınıflandırılması

Bir problem, çözüm bölgesinin elektriksel, yapısal özellikleri (σ, μ, ε) açısından da sınıflandırılabilir. Daha öncede belirtildiği gibi çözüm bölgesi ;

- doğrusal (lineer) (veya doğrusal olmayan)
- Homojen (homogeneous) (veya homojen olmayan) ve
- izotropik (isotropic) (veya anizotropik) olabilir.

Çoğunlukla, doğrusal, homojen, izotropik ortamlarla ilgileneceğiz.

Elektromanyetik Problemlerin Sınıflandırılması

2. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

EM problemleri, kendilerini tanımlayan denklemler açısından sınıflandırılır. Denklemler;

- diferansiyel
- integral
- Veya her ikisi olabilir.

EM problemlerinin çoğu, bir operatör denklemi ile ifade edilebilir.

$$L\Phi = \mathrm{g}$$

burada L bir operatördür (diferansiyel, integral veya integro diferansiyel), g bilinen uyarma veya kaynaktır ve Φ hesaplanacak bilinmeyen fonksiyondur. Tipik bir örnek olarak, Poisson denklemini içeren elektrostatik problemi örnek olarak değerlendirecek olursak;

Diferansiyel formda, $L\Phi = \mathrm{g}$ denklem;

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

$L = \nabla^2$ Laplasyen operatörü, $\mathrm{g} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}$ kaynak terimi, $\Phi = V$ elektrik potansiyelidir.

Elektromanyetik Problemlerin Sınıflandırılması

2. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

İntegral formda, Poisson eşitliği;

$$V = \int \frac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon r^2}$$

Burada; $L = \int \frac{dv}{4\pi r^2}$, $g = V$, $\Phi = \frac{\rho_v}{\varepsilon}$

Biz daha çok bu aşamada diferansiyel denklemlerle ilgileneceğiz.

Daha önceden elde ettiğimiz ilgilendiğimiz denklemlerden görüldüğü üzere;

$\nabla^2\psi + k^2\psi = g$ Helmholtz denklemi

$\nabla^2\psi = g$ Poisson denklemi (k=0, statik durum)

$\nabla^2\psi = 0$ Laplace denklemi (k=g=0)

EM problemleri doğrusal, ikinci dereceden diferansiyel denklemleri içermektedir. Genel olarak, ikinci dereceden bir kısmi diferansiyel denklem (PDE);

$$a\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + d\frac{\partial\Phi}{\partial x} + e\frac{\partial\Phi}{\partial y} + f\Phi = g$$ Şeklinde verilir.

Elektromanyetik Problemlerin Sınıflandırılması

2. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Ya da basit şekilde

$$a\Phi_{xx} + b\Phi_{xy} + c\Phi_{yy} + d\Phi_x + e\Phi_y + f\Phi = \mathrm{g}$$

Genel olarak;

- a, b ve c katsayıları, x ve y'nin fonksiyonlarıdır; bunlar ayrıca Φ'nin kendisine de bağlı olabilir, bu durumda PDE'nin doğrusal değildir denir.

- Denklemdeki g (x, y)'nin sıfır olduğu bir PDE'ye homojen denir

- Denklemdeki g (x, y)≠0 ise PDE'ye homojen olmayan (inhomogeneous) PDE denir

Verilen denklem ile $L\Phi = \mathrm{g}$ aynı forma sahiptir. Burada L aşağıda verilen bir diferansiyel operatördür.

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + f$$

Elektromanyetik Problemlerin Sınıflandırılması

2. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Genel olarak bir PDE hem sınır değerlere (**boundary values**) hem de başlangıç değerlerine (**initial values**) sahip olabilir.

- Sınır koşulları belirtilen PDE'lere kalıcı hal denklemleri (steady-state equations),
- Yalnızca ilk değerler belirtilirse, geçici denklemler (transient equations) olarak adlandırılırlar.

Herhangi bir doğrusal ikinci dereceden PDE, a, b ve c katsayılarına bağlı olarak **eliptik**, **hiperbolik** veya **parabolik** olarak sınıflandırılabilir. Bu durumda genel PDE denklemi için;

Eğer $b^2-4ac < 0$ eliptik

Eğer $b^2-4ac > 0$ hiperboik

Eğer $b^2-4ac = 0$ parabolik

Hiperbolik, parabolik ve eliptik ifadeleri, ikinci dereceden denklemden kaynaklanmaktadır.

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Aslında b^2-4ac 'nin sırasıyla pozitif, sıfır veya negatif olması bir hiperbol, parabol veya elipsi temsil eder.

Elektromanyetik Problemlerin Sınıflandırılması

2. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Bu kategorilerin her birinde, belirli fiziksel olayları modelleyen PDE'ler vardır. Bu olayla EM ile sınırlı değildir, hemen hemen tüm bilim ve mühendislik alanlarına uzanabilir. Denklemde belirtilen matematiksel model;
Isı transferi, sınır tabakası akımı, titreşimler, esneklik, elektrostatik, dalga yayılımı v.b. problemlerde ortaya çıkmaktadır.

Eliptik PDE'ler sürekli hal olayıyla, yani sınır değer problemleriyle ilişkilendirilir. Bu tip PDE'nin tipik örnekleri arasında **Laplace denklemi** bulunur.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Ve **Poisson denklemi**

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \mathrm{g(x, y)}$$

her iki durumda da a = c = 1, b = 0'dır. Bir eliptik PDE genellikle bir iç problemi modeller ve bu nedenle çözüm bölgesi genellikle kapalı veya sınırlıdır.

Elektromanyetik Problemlerin Sınıflandırılması

2. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Hiperbolik PDE'ler yayılma (propagation) problemlerinde ortaya çıkar. Çözüm bölgesi genellikle açıktır, böylelikle bir çözüm, başlangıç koşullarından daima belirsiz olarak ilerlerken, her zaman belirtilen sınır koşullarını sağlar. Tipik bir hiperbolik PDE örneği, bir boyuttaki dalga denklemidir

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

burada a = u^2, b = 0, c = −1.

Parabolik PDE'ler genellikle, ilgili miktarın rastgele hareketlere kıyasla yavaşça değiştiği problemlerle ilişkilidir. En yaygın parabolik PDE, bir boyuttaki difüzyon (veya ısı) denklemidir.

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = k\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

burada a = 1, b = 0, c = 0.

Hiperbolik PDE gibi, parabolik PDE için çözüm bölgesi genellikle açıktır.

Tipik olarak parabolik denklemlerle ilişkilendirilen başlangıç ve sınır koşulları, zamanda 1. dereceden PDE olduğudan t = 0'da yalnızca bir başlangıç koşulunun gerekli olması dışında, hiperbolik problemlerle benzerdir. Ayrıca, parabolik ve hiperbolik denklemler benzer teknikler kullanılarak çözülürken, eliptik denklemler genellikle daha zordur ve farklı teknikler gerektirir.

Elektromanyetik Problemlerin Sınıflandırılması

2. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Şunlara dikkat edin:

(1) a, b ve c katsayıları genel olarak x ve y fonksiyonları olduğundan ,

$$a\Phi_{xx} + b\Phi_{xy} + c\Phi_{yy} + d\Phi_x + e\Phi_y + f\Phi = \mathrm{g}$$ denklemi sınıflandırması

çözüm bölgesinde noktadan noktaya değişebilir

(2) İkiden fazla bağımsız değişkene (x, y, z, t,. ...) sahip PDE'ler bahsi geçen sınıflandırmaya tam olarak uymayabilir.

Bu bölümde şimdiye kadarki tartışmamızın bir özeti aşağıdaki gibi listelenmektedir;

PDE Türü	b^2-4ac'nin işareti	Örnek	Çözüm Bölgesi
Eliptik	$-$	Laplas Denklemi $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$	Kapalı
Hiperbolik	$+$	Dalga Denklemi $u^2\Phi_{xx} = \Phi_{tt}$	Açık
Parabolik	0	Difizyon Denklemi $\Phi_{xx} = k\Phi_t$	Açık

Elektromanyetik Problemlerin Sınıflandırılması

2. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

$$L\Phi = \mathrm{g}$$

Denklem ile temsil edilen problemin türü deterministik (rasgele olmayan) olduğu söylenir, çünkü ilgilenilen sonuç doğrudan belirlenebilir. Sonucun dolaylı olarak bulunduğu bir başka problem türü ise nondeterministik veya özdeğer (eigenvalue) olarak adlandırılır. Standart öz problem (eigenproblem) biçimindedir.

$$L\Phi = \lambda\Phi$$

Kaynak terimi g , $\lambda\Phi$ ile yer değiştirmiştir. Genelleştirilmiş öz-problem daha genel bir formda;

$$L\Phi = \lambda M\Phi$$

M, L gibi, EM problemleri için doğrusal bir operatördür. Eşitliklerde, özdeğerler olarak adlandırılan sadece bazı λ değerlerine izin verilir; bu değerlerle ilişkilendirilmiş çözümler özfonksiyonlar olarak adlandırılır. Özproblemler, genellikle λ özdeğerlerinin sırasıyla rezonans ve kesme frekansları gibi fiziksel büyüklüklere karşılık geldiği titreşim ve dalga kılavuzu problemlerinde görülür.

Elektromanyetik Problemlerin Sınıflandırılması

2. Sınır Koşullarının Sınıflandırılması:

Bizim problemimiz kısmi bir diferansiyel denklemin bilinmeyen Φ fonksiypnunu bulmaktan ibarettir. Bir R çözüm bölgesi içinde Φ''nin, $L\Phi = \text{g}$ denklemini sağlamasına ek olarak, S üzerinde, R'nin sınırlı bölgesinde, belirli koşulları sağlamalıdır. Genellikle bu sınır koşulları Dirichlet ve Neumann tipindedir. Bir sınırın her ikisine de sahip olduğunda, karışık bir sınır koşulunun var olduğu söylenir.

(1) Dirichlet sınır koşulu

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = 0, \ \boldsymbol{r} \text{ S yüzeyinde}$$

(2) Neuman sınır koşulu

$$\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{r})}{\partial n} = 0, \ \boldsymbol{r} \text{ S yüzeyinde}$$ yani, S'deki normal türev sıfırdır.

(3) Karışık sınır koşulu

$$\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{r})}{\partial n} + h(\boldsymbol{r})\Phi(\boldsymbol{r}) = 0, \ \boldsymbol{r} \text{ S yüzeyinde}$$

h (r) bilinen bir fonksiyondur ve $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$, S sınırına dışa doğru normal olan yönlü türevdir, yani,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nabla \Phi . \widehat{a_n},$$

burada $\widehat{a_n}$, R dışına yönlendirilmiş bir normal vektördür. Neumann sınır koşulunun, $h(\boldsymbol{r}) = 0$ olan karışık durumun özel bir durumudur.

Elektromanyetik Problemlerin Sınıflandırılması

2. Sınır Koşullarının Sınıflandırılması:

Bahsi geçen denklemlerdeki koşullar homojen sınır koşulları olarak adlandırılmaktadır. Daha genel olanlar homojen değildir:

(1) Dirichlet sınır koşulu

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{p}(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \text{ S yüzeyinde}$$

(2) Neuman sınır koşulu

$$\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{r})}{\partial n} = \mathrm{q}(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \text{ S yüzeyinde}$$

(3) Karışık sınır koşulu

$$\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{r})}{\partial n} + h(\boldsymbol{r})\Phi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{w}(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \text{ S yüzeyinde}$$

p(r), q(r) ve w(r), S sınırında açıkça bilinen fonksiyonlardır. Örneğin, $\Phi(0) = 1$, homojen olmayan bir Dirichlet sınır koşulu ve ilgili homojen karşılığı, $\Phi(0)=0$. Ayrıca $\Phi'(1) = 2$ ve $\Phi'(1) = 0$ sırasıyla homojen ve homojen olmayan Neumann sınır koşullarıdır. Elektrostatikte, örneğin, elektrik potansiyelinin değeri **S**'de belirtilmişse, Dirichlet sınır koşuluna sahibizdir, oysa yüzey yükü ($\rho s = Dn = \varepsilon\partial V/\partial n$) belirtilmişse, sınır koşulu Neumann'dır. Eğer Φ (veya ∂V/∂n) bölge sınırlarında tanımlanmışsa bir bölgede harmonik olan bir Φ fonksiyonu bulma problemine Dirichlet problemi (veya Neumann problemi) denir.

"Homojen" teriminin farklı şeyler ifade etmek için kullanıldığını unutmamak gerek. Çözüm bölgesi, homojen demek; bu, σ, ve μ,'nün ortam parametrelerinin R içerisinde sabit olduğu anlamına gelir. PDE ise, g = 0 ise L = 0 olacak şekilde homojen olabilir; ve sınır şartları, p (r) = q (r) = w (r) = 0 olduğunda homojendir.

Bazı Önemli Teoremler

EM problemlerinin çözümünde iki teorem temel öneme sahiptir. Bunlar süperpozisyon (toplamsallık) ilkesi ve teklik (uniqueness) teoremidir.

1. Süperpozisyon Prensibi:

Süperpozisyon ilkesi çeşitli şekillerde uygulanır. Bunlardan ikisini dikkate alalım.

Bir fonksiyon kümesinin her üyesi Φ n, n = 1, 2,. . . , N, belirlenmiş bazı sınır koşullarında PDE L Φ = 0 için bir çözümdür, daha sonra doğrusal bir kombinasyondur;

$$\Phi_N = \Phi_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \Phi_n$$

Ayrıca $L\Phi = \mathrm{g}$ sağlar.

PDE tarafından açıklanan bir sorun göz önüne alındığında

sınır şartlarına tabi

$$M_1(s) = h_1$$
$$M_2(s) = h_2$$
$$\vdots$$
$$M_N(s) = h_N$$

$$L\Phi = \mathrm{g}$$

Bazı Önemli Teoremler

L doğrusal olduğu sürece, sorunu aşağıdaki gibi bir dizi soruna bölebiliriz:

$$
\begin{array}{cccc}
L\Phi_0 = \mathrm{g} & L\Phi_1 = 0 & \cdots & L\Phi_N = 0 \\
M_1(s) = 0 & M_1(s) = h_1 & \cdots & M_1(s) = 0 \\
M_2(s) = 0 & M_2(s) = 0 & \cdots & M_2(s) = 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
M_N(s) = 0 & M_N(s) = 0 & \cdots & M_N(s) = h_N
\end{array}
$$

buradaki Φ_0, Φ_1,. . . , Φ_N, asıl problemden daha kolay çözülen, indirgenmiş problemlerin çözümleridir. Orijinal problemin çözüm;

$$\Phi = \sum_{n=0}^{N} \Phi_n$$

Bazı Önemli Teoremler

2. Teklik Teoremi:

Bu teorem, belirlenmiş bir sınır koşulları olan bir PDE için elde edilen çözümün mümkün olan tek olası çözüm olduğunu garanti eder. EM problemleri için teorem aşağıdaki gibi ifade edilebilir: Herhangi bir şekilde Maxwell denklemlerini ve öngörülen sınır koşullarını aynı anda sağlayan bir dizi alan (E, H) bulunursa, bu alan dizisi benzersizdir. Bu nedenle, ortam içindeki kaynaklar (ρv, J) ile tanımlanan alan sınırların üzerinde E veya H'nin teğetsel bileşenleridir. Teklik teoremini ispatlamak için, Maxwell denklemlerini karşılayan iki çözüm (altindis 1 ve 2 ile birlikte) olduğunu varsayalım.