PROGRAMLAMA UYGULAMALARIYLA SAYISAL YÖNTEMLER

Dr. Öğr. Üyesi Adnan SONDAŞ

asondas@kocaeli.edu.tr

0262-303 22 58

2. Hafta

DENKLEM ÇÖZÜMLERİ

İÇİNDEKİLER

Denklem Çözümleri

- **Denklemler fizik kanunlarına ve fiziksel parametrelere dayanır.**
- **Problemlerin çözümünde ve sistemlere ait bağımlı değişkenlerin tahmin edilmesinde kullanılırlar.**
- **Denklemler mühendislikte tasarımda kullanılır.**
- **Sayısal analizdeki matematiksel modelleme aşaması denklemler ve denklem çözümlerinden oluşur.**

Sayısal Analizde Denklem Köklerini Bulmada İzlenecek Yol

❶ **Denklem köklerini aramaya belirli bir başlangıç değeri ya da değer aralığından başlanır.**

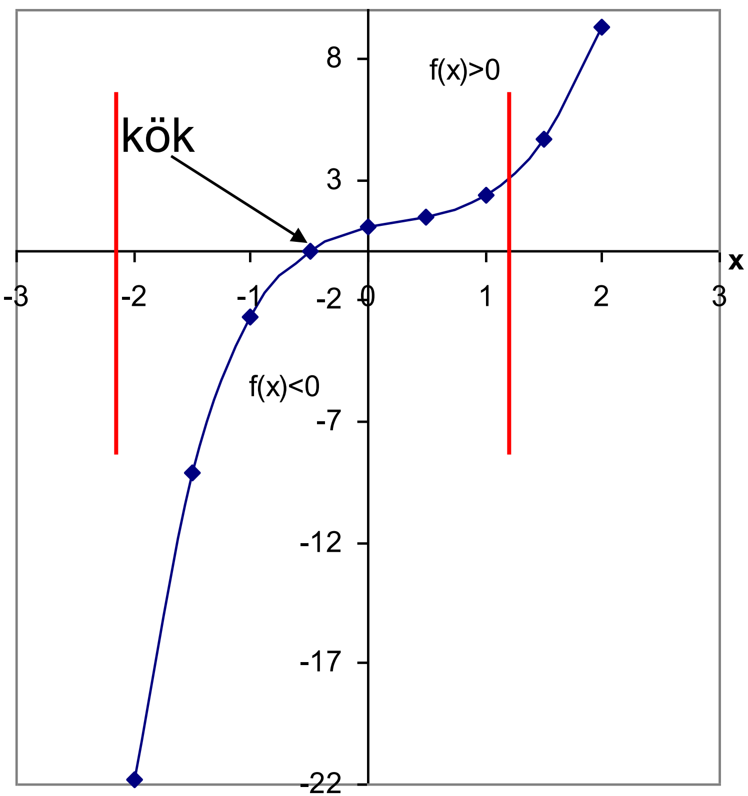
- ❑ **Kökü aramaya doğru bir noktadan başlamak çözüme ulaşmayı hızlandıracaktır.**

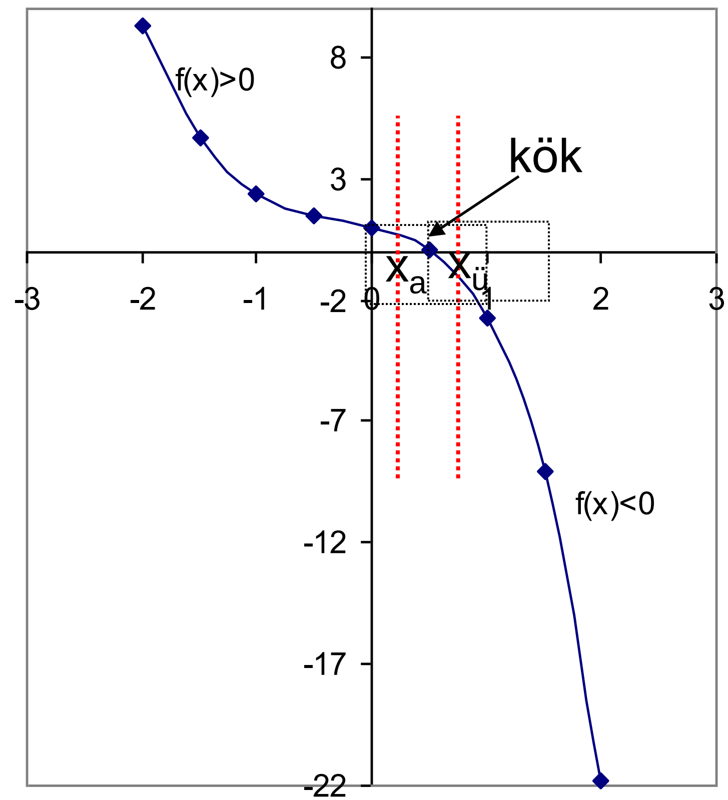
❷ **Fonksiyonun girişine değerler vererek, fonksiyonun çıkışı gözlemlenir.**

- ❑ **Fonksiyonun çıkışını gözlemlemenin kolay yolu, fonksiyonun grafiğini çizdirmektir.**
- ❑ **Grafik, köke yakın aralığı hızlı ve kolay tespit etmeyi sağlar.**
- ❑ **Kökü aramaya uygun yerden başlamayı sağlar.**

Denklem Çözümünde Kapalı Yöntemler

- **Fonksiyonlar kök civarında işaret değiştirdikleri için, *kökü sağından ve solundan* kıskaca alarak bu aralığı gittikçe daraltıp köke ulaşmak mümkündür. Bunun için iki tane başlangıç değeri belirlemek gerekir.**
- **Kök, bu iki değerin arasındaki kapalı bölgede olduğu için bu yöntemlere *kapalı yöntemler* adı verilir.**

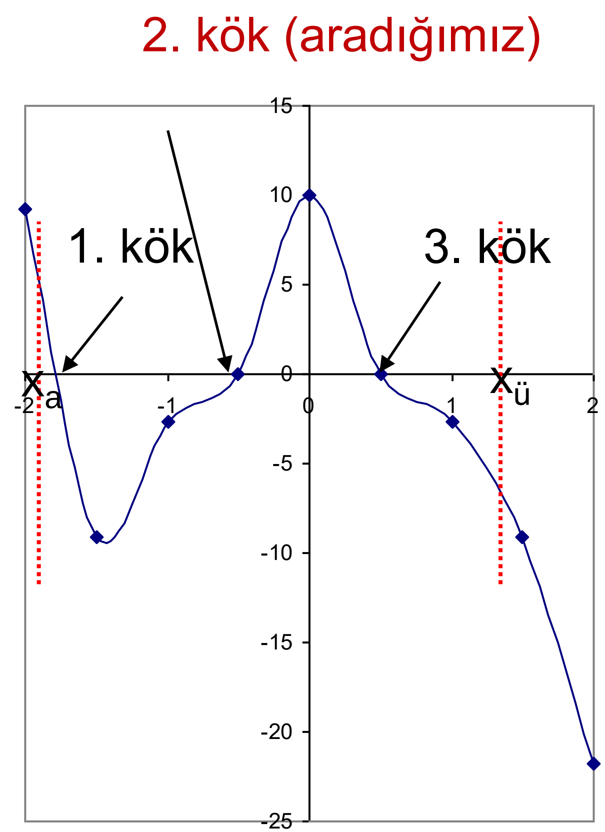




Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

Denklem Çözümünde Kapalı Yöntemler

- **Doğru kökü hızlı ve sağlıklı olarak bulmak için, arada başka bir kök olmaması gerekir, bundan dolayı aralık mümkün olduğunca dar seçilmelidir.**



Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

İkiye Bölme (Yarılama, Bisection) Yöntemi

- Denklem çözümünde kapalı yöntemlerin bir türü olan ***Bisection***, ikiye bölme ya da yarılama olarak ta adlandırılmaktadır.
- ***Bisection***, sürekli bir fonksiyonun bir sıfırının (**kökünün**) bulunması için kullanılan sistematik bir tarama tekniğidir.
- Tekrarlama (tarama) yöntemlerinin en basit ve en anlaşılırıdır.
- Kökün bulunduğu aralığı **yarılayarak** (**ikiye bölerek**) daraltma prensibine dayanır.
  - Bu yöntem, içerisinde bir sıfır bulunan bir aralığın öncelikle tespitine dayanır.
  - Aralık sonunda fonksiyon zıt işarete sahiptir.
  - Sonra aralık iki eşit alt aralığa bölünür ve hangi aralığın bir sıfır değeri içerdiğine bakılır.
  - Sıfır içeren alt aralıklarda hesaplamalara devam edilir.
- Dezavantajı, yavaş yakınsaması ve bazen tam olarak çalışmaması.

İkiye Bölme (Yarılama, Bisection) Yöntemi

- Bir f(x) fonksiyonu, [x_a, $x_ü$] aralığında bir sıfır noktasına (köke) sahip olduğunu varsayalım.

❶ İlk olarak, f(x) fonksiyonunun belirtilen aralıkta kökü olup olmadığı [$f(x_a) * f(x_ü) < 0$] kontrol edilir. Şart sağlıyorsa kök vardır. Çünkü fonksiyonlar zıt işaretlidir.

- [$f(x_a) * f(x_ü) > 0$] ise kök yoktur.
- [$f(x_a) * f(x_ü) = 0$] ise kök x_a ya da $x_ü$

❷ İlk iterasyonda, belirtilen fonksiyon aralığının orta noktası tespit edilir.

$$x_o = \frac{x_a + x_ü}{2}$$

❸ Kök [x_a, x_o] ya da [x_o, $x_ü$] aralığından birisinde olmalıdır

- $f(x_a) * f(x_o) < 0$ ise kök [x_a, x_o] aralığında
- $f(x_o) * f(x_ü) < 0$ ise kök [x_o, $x_ü$] aralığında
- $f(x_o) * f(x_ü) = 0$ ise kök x_o 'dur

❹ Bir sonraki iterasyonda kök yeni aralıkta aranır ve 2. adımdan itibaren işlemler tekrarlanır.

- Tekrarlama işlemi $\left| \frac{x_a - x_ü}{2} \right| < \varepsilon_s$ şartı sağlanana kadar devam eder.

İkiye Bölme (Yarılama, Bisection) Yöntemi

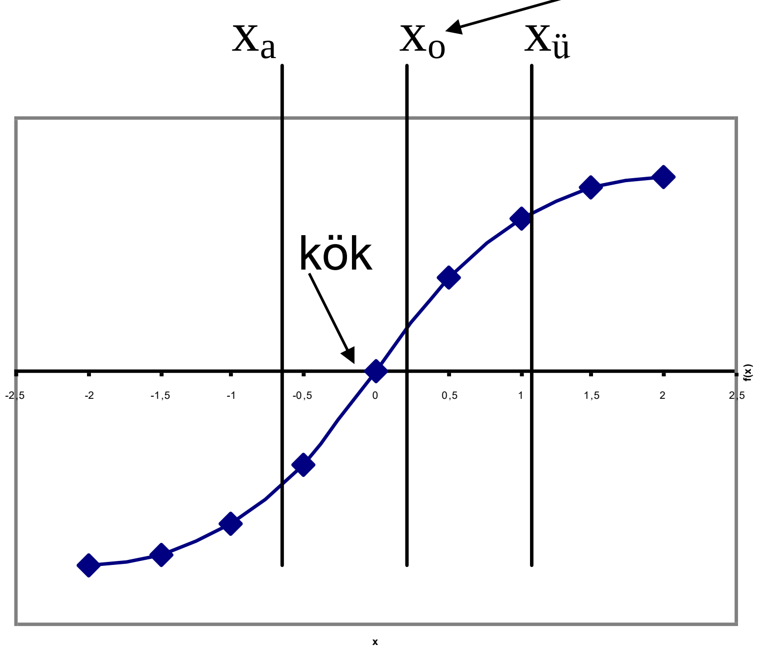
$$x_o = \frac{x_a + x_{\ddot{u}}}{2}$$

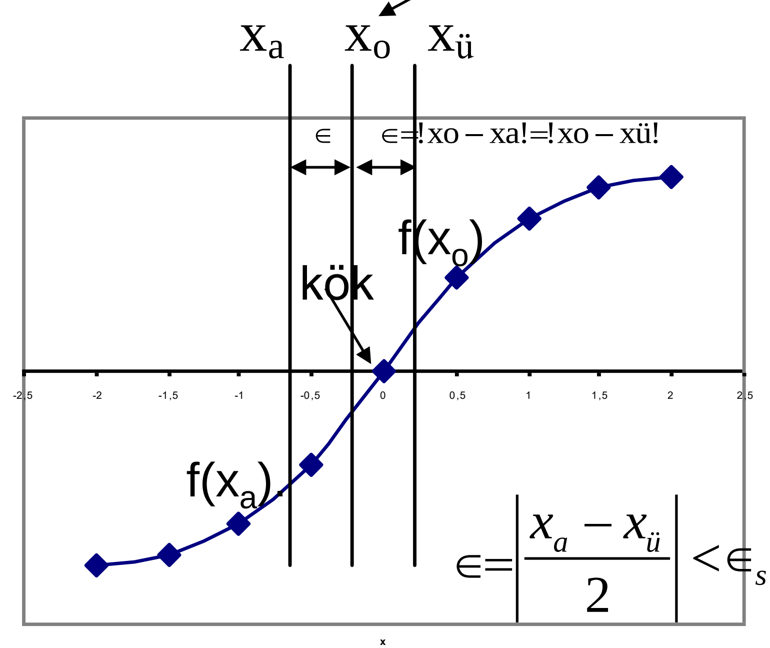
- $f(x_a).f(x_o) < 0$ x_a ile x_o farklı bölgelerde
- $f(x_a).f(x_o) > 0$ x_a ile x_o aynı bölgelerde

Güncellenecek sınır

$x_{\ddot{u}}(yeni)=x_o$

$x_a(yeni)=x_o$



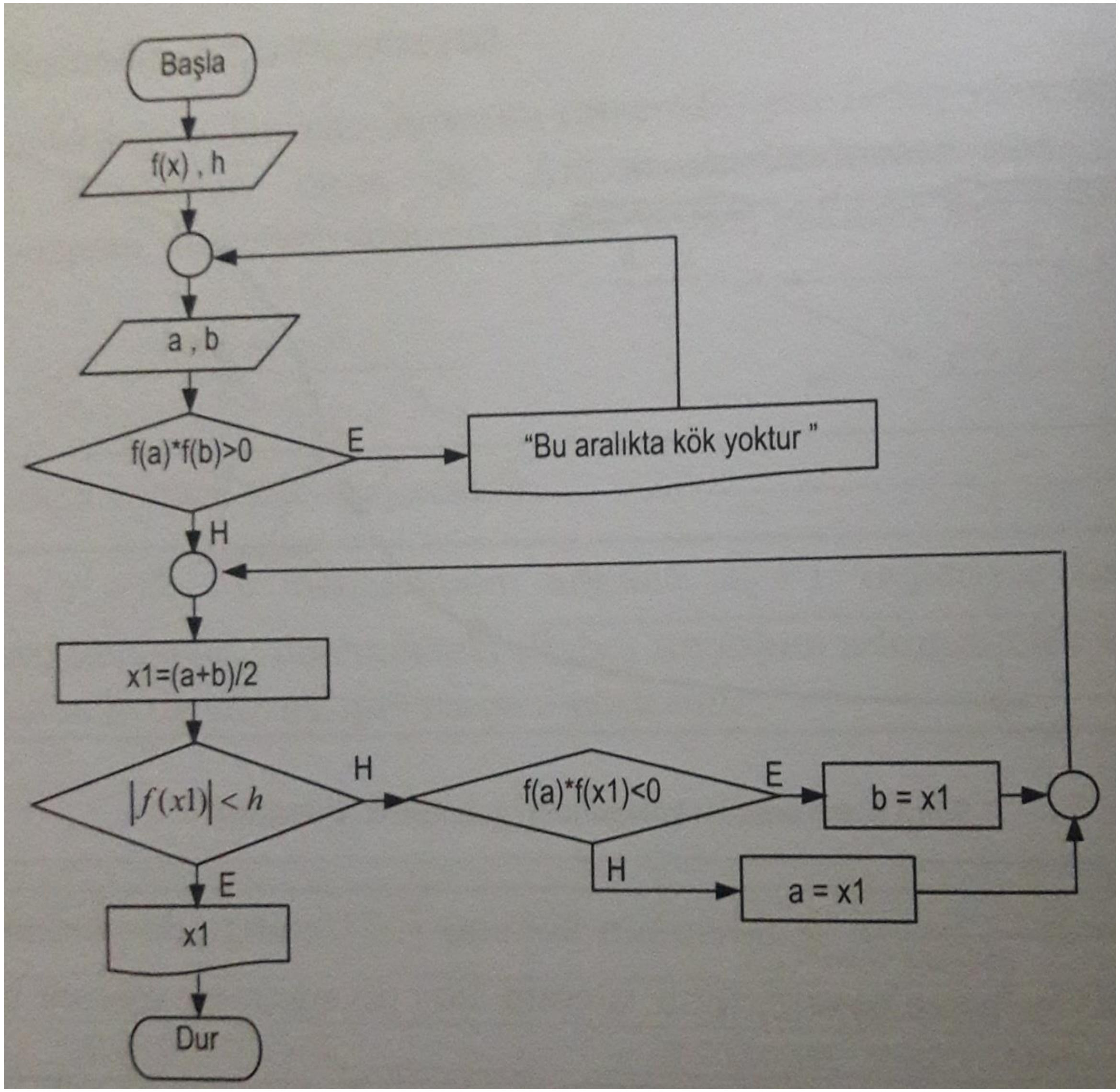


Kök, x_a, x_o arasında

Kök, x_o, $x_{\ddot{u}}$ arasında

Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

İkiye Bölme (Yarılama, Bisection) Yöntemi



İkiye Bölme (Yarılama, Bisection) Yöntemi

- **Örnek:** $\mathbf{x^2 – 5 = 0}$ fonksiyonunun kökünü başlangıç aralığını [1 - 3] alarak $\delta_s = 0{,}13$ duyarlılıkla bulalım.

Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

İkiye Bölme (Yarılama, Bisection) Yöntemi

❖ **Örnek:** **$f(x) = x.e^{-x}+x^3+1$** fonksiyonunun kökünü $\delta_s = 2*10^{-6}$ duyarlılıkla bulalım,

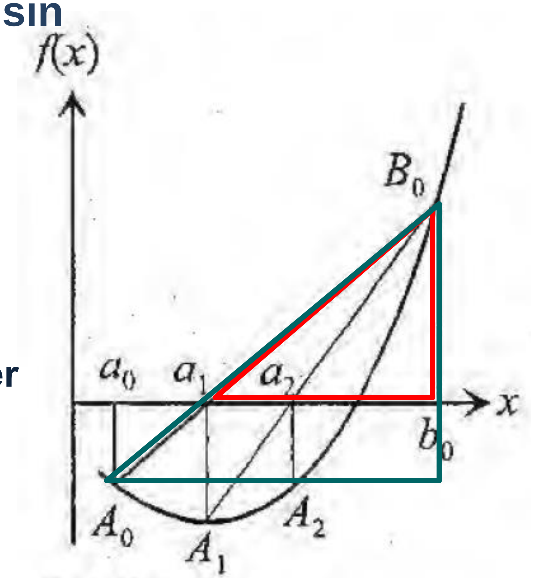
Not: *Grafik yönteminde, [-1,0] aralığı için kabaca sonuç x=-0.51*

n	x_a	$x_ü$	x_o	$f(x_a).f(x_o)$	$\in = \left\lvert \frac{x_a - x_ü}{2} \right\rvert$
1	-1.000000	0.000000	-0.500000	-	0.500000
2	-1.000000	-0.500000	-0.750000	+	0.250000
3	-0.750000	-0.500000	-0.625000	+	0.125000
4	-0.625000	-0.500000	-0.562500	+	0.062500
5	-0.562500	-0.500000	-0.531250	+	0.031250
6	-0.531250	-0.500000	-0.515625	+	0.015625
7	-0.515625	-0.500000	-0.507813	-	0.007813
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
19	-0.515449	-0.515442	-0.515446	+	0.000004
20	-0.515446	-0.515442	-0.515444	-	0.000002

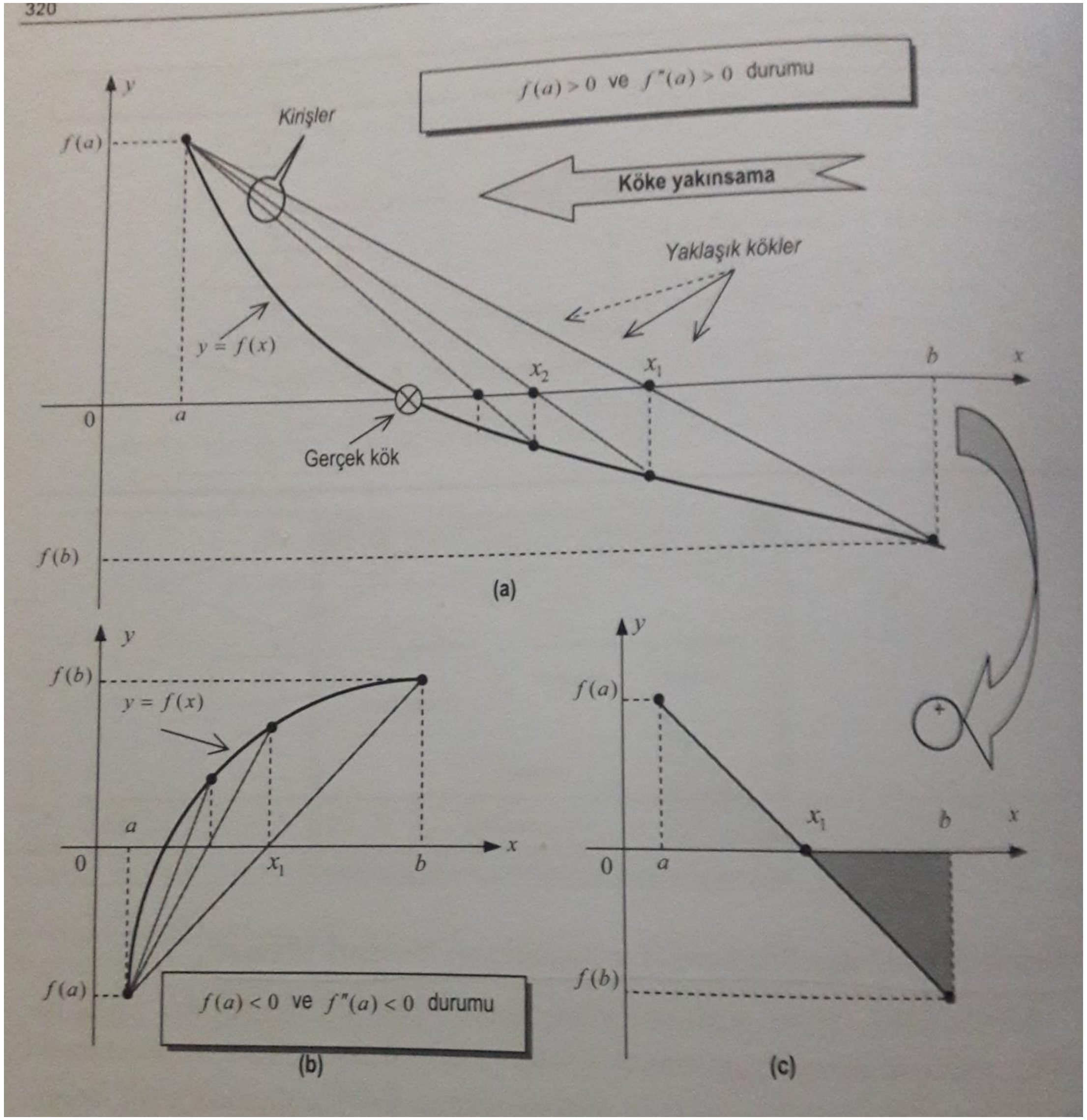
Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

Yer Değiştirme Yöntemi (Regula Falsi)

- En eski kök bulma yöntemlerinden birisidir.
- Eğrinin bir doğruyla yer değiştirmesi sonucunda, kökün konumunun yanlış belirlenmesi nedeniyle, latince "yanlış nokta" anlamında olan Regula Falsi olarak adlandırılır.
- Regula Falsi yönteminde köke yakınsama yavaş olmasına rağmen, mutlaka yakınsama vardır.
  - Bisection'dan hızlıdır.
- f(x) fonksiyonunun [a, b] aralığında kökü hesaplanmak istensin
  - [a, f(a)] ve [b, f(b)] noktaları arasına bir kiriş (doğru) çizilir.
  - Doğrunun x eksenini kestiği noktanın (a_1) alt ve üst kısmında iki benzer üçgen oluşur.
  - İki üçgenin benzerliğinden x eksenini kestiği nokta (a_1) hesaplanır.
  - İstenilen hassasiyet (hata sınırı) sağlanmadıysa yukarıdaki işlemler [a_1 , f(a_1)] ve [b, f(b)] noktaları için tekrar ettirilir.



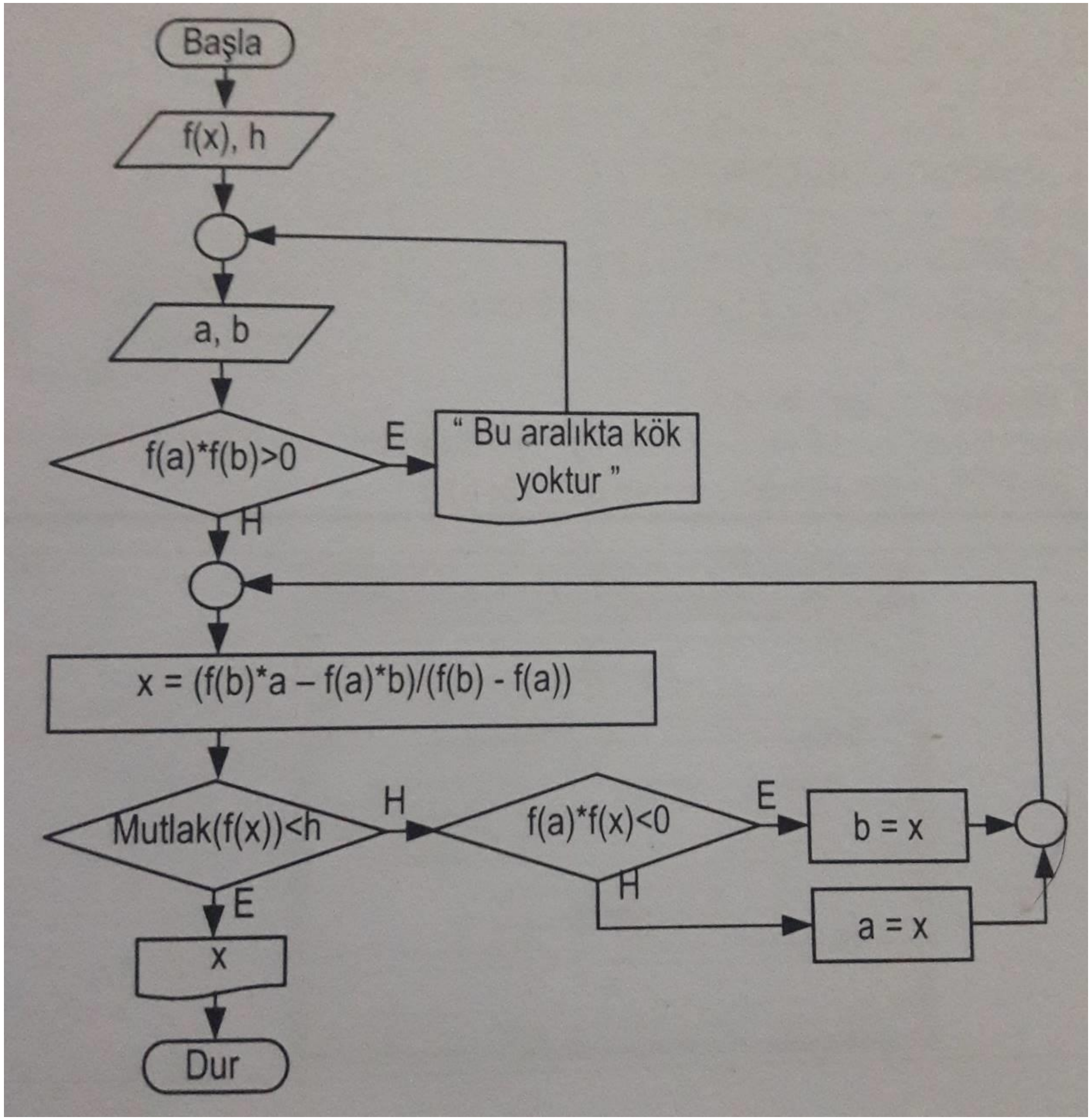
Yer Değiştirme Yöntemi (Regula Falsi)



$$\frac{f(b)}{f(a)} = \frac{b - x_1}{a - x_1}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{a.f(b) - b.f(a)}{f(b) - f(a)}}$$

Yer Değiştirme Yöntemi (Regula Falsi)



Yer Değiştirme Yöntemi (Regula Falsi)

Örnek : $f(x)=x^3+4x^2-10$ denkleminin [1-2] aralığındaki kökünü yer değiştirme yöntemini kullanarak 2 iterasyon için çözünüz.

$$\boxed{x_1 = \frac{a.f(b) - b.f(a)}{f(b) - f(a)}}$$

1. İTERASYON:

$a=1 \rightarrow f(a) = -5$

$b=2 \rightarrow f(b) = 14$

$x_1=1{,}2631 \rightarrow f(x_1) = -1{,}6022$

$f(b)\,.\,f(x_1) < 0$

$a = 1{,}2631$

$b = 2$

2. İTERASYON:

$a=1{,}2631 \rightarrow f(a) = -1.6022$

$b=2 \rightarrow f(b) = 14$

$x_1=1{,}3388 \rightarrow f(x_1) = -0{,}4303$

$f(b)\,.\,f(x_1) < 0$

$a = 1{,}3388$

$b = 2$

Yer Değiştirme Yöntemi (Regula Falsi)

❖ **Örnek:** **$f(x) = x.e^{-x}+x^3+1$** fonksiyonunun kökünü $\delta_s = 2*10^{-6}$ duyarlılıkla bulalım,

Not: *Grafik yönteminde, [-1,0] aralığı için kabaca sonuç x=-0.51*

n	x_a	$x_ü$	x_o	$f(x_a).f(x_o)$	$\in = \left\lvert \frac{x_a - x_ü}{2} \right\rvert$
1	-1.000000	0.000000	-0.500000	-	0.500000
2	-1.000000	-0.500000	-0.750000	+	0.250000
3	-0.750000	-0.500000	-0.625000	+	0.125000
4	-0.625000	-0.500000	-0.562500	+	0.062500
5	-0.562500	-0.500000	-0.531250	+	0.031250
6	-0.531250	-0.500000	-0.515625	+	0.015625
7	-0.515625	-0.500000	-0.507813	-	0.007813
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
19	-0.515449	-0.515442	-0.515446	+	0.000004
20	-0.515446	-0.515442	-0.515444	-	0.000002

Yer Değiştirme Yöntemi (Regula Falsi)

$f(x)=x^3+x^2-12x$ denkleminin [2-4] aralığındaki kökünü Regula Falsi yöntemini kullanarak *tol*=0.001 için bulan MATLAB kodunu yazınız.

```
clc; clear all; close all;
a=1;
b=2;
tol=0.0001;
fark=1;
iter=0;
while (fark > tol)
    x=[a b];
    fx=x.^3+4*x.^2-10;
    xr=(a*fx(2)-b*fx(1))/(fx(2)-fx(1));
    fxr=xr^3+4*xr^2-10;
    if (fx(1)*fxr < 0)
        b=xr;
    else
        a=xr;
    end
    fark=abs(fxr);
    iter=iter+1;
end
```

KAYNAKLAR

❖ Diğer Kaynaklar

- **Bülent ORUÇ, Adnan SONDAŞ, "*Sayısal Çözümleme*", Umuttepe Yayınları**
- **Fahri VATANSEVER, "*Sayısal Hesaplama ve Programlama*", Seçkin Yayınları, 2018.**
- **Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), "*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*", Literatür Yayıncılık.**
- **Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar ile Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.**
- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR "*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*",Seçkin Yayıncılık**
- **İrfan Karagöz, "*Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları*", VİPAŞ Yayınevi, 2001.**
- **Cüneyt Bayılmış, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**