PROGRAMLAMA UYGULAMALARIYLA SAYISAL YÖNTEMLER

Dr. Öğr. Üyesi Adnan SONDAŞ

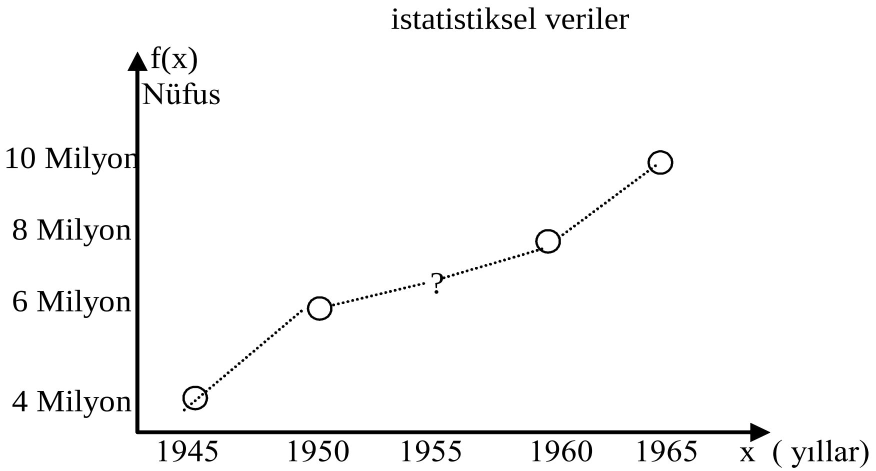
asondas@kocaeli.edu.tr

0262-303 22 58

İNTERPOLASYON (ARA DEĞER BULMA)

Ara Değer Hesabı (İnterpolasyon)

- Ara değer hesabı mühendislik problemlerinde sıklıkla karşılaşılan bir işlemdir.
- İnterpolasyon
  - Bilinen değerlerden bilinmeyen ara değerin ya da değerlerin bulunması işlemidir.
  - Genel olarak ise bir $f(x)$ fonksiyonunun x_0, x_1, …, x_n gibi ayrık noktalarda verilen f_0, f_1,…,f_n değerlerini kullanarak, bu fonksiyonu temsil eden ve daha basit bilinen bir $F(x)$ fonksiyonu (enterpolasyon fonksiyonu) ile ifade edilmesidir.



İnterpolasyon

- **İnterpolasyon fonksiyonu için polinom, trigonometrik fonksiyon, üstel gibi fonksiyonlar kullanılır. Ancak çoğu durumda koşulları kolaylıkla sağlamaları sebebiyle polinomlar tercih edilir.**
- **İnterpolasyon fonksiyonunun seçiminde kullanılan teoremler:**

❶ **Eğer fonksiyon [a, b] aralığında sürekli ve türevlenebilir ise polinom kullanılabilir.**

- **[a,b] aralığında küçük bir ε değeri için,**

  $|f(x) - F(x)| \leq \varepsilon$ koşulu sağlanabilir

❷ **Periyodik (2π) ve sürekli bir fonksiyon için,**

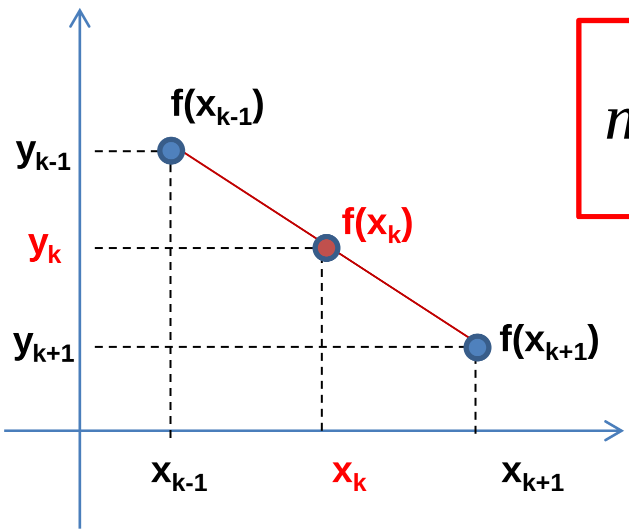
$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$$

şeklinde sonlu bir trigonometrik seri interpolasyon fonksiyonu olarak kullanılabilir

Doğrusal (Lineer) İnterpolasyon

- **Doğrusal interpolasyonda iki farklı değişkene karşılık gelen fonksiyon değerleri (x_1, y_1), (x_2, y_2), bir doğru ile birleştirilir.**
- **Aradeğer (interpolasyon) doğru üzerindedir. Doğru denkleminin elde edilmesi ile interpolasyon bulunur.**
- **Bilinen iki nokta arasındaki uzaklık ne kadar az ise bilinmeyen nokta için bulunacak interpolasyon fonksiyonunun değeri de o kadar doğru olacaktır.**

Doğru Denklemi



$$m = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} \qquad y_k = y_{k-1} + m(x_k - x_{k-1})$$

$$\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k} = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_{k+1})}{x_{k-1} - x_{k+1}}$$

Örnek

- Aşağıdaki tablo da bir firmanın son 5 yılki ciro dağılımı görülmektedir. Tabloda 2009 yılına ait sonuç yer almamaktadır. Doğrusal interpolasyon yöntemini kullanarak değeri bulunuz.

Yıllar	2007	2008	2009	2010	2011
Ciro	120	142	?	146	143

- **Çözüm:**
  - **Doğru Denklemi ile**

$$m = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{146 - 142}{2010 - 2008} = 2$$

$$y_i = y_k + m(x_i - x_k)$$

$$y_i = 142 + 2(2009 - 2008)$$

$$y_i = 144$$

$$\frac{f(x_k) - f(x_i)}{x_k - x_i} = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}$$

$$\frac{142 - f(x_i)}{2008 - 2009} = \frac{142 - 146}{2008 - 2010}$$

$$f(x_i) = 144$$

Örnek

$$\ln(1) = 0$$
$$\ln(4) = 1.3862944$$
$$\ln(6) = 1.7917595$$

olduğuna göre, lineer enterpolasyon kullanarak *ln*(2) = ? sonucunu bulunuz. [ln(2)=0.69314718]

1. x_0=1; x_1=6 alınır ise:

$$f(x_i) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x_i - x_k) = 0 + \frac{1.7917575 - 0}{6-1}(2-1)$$

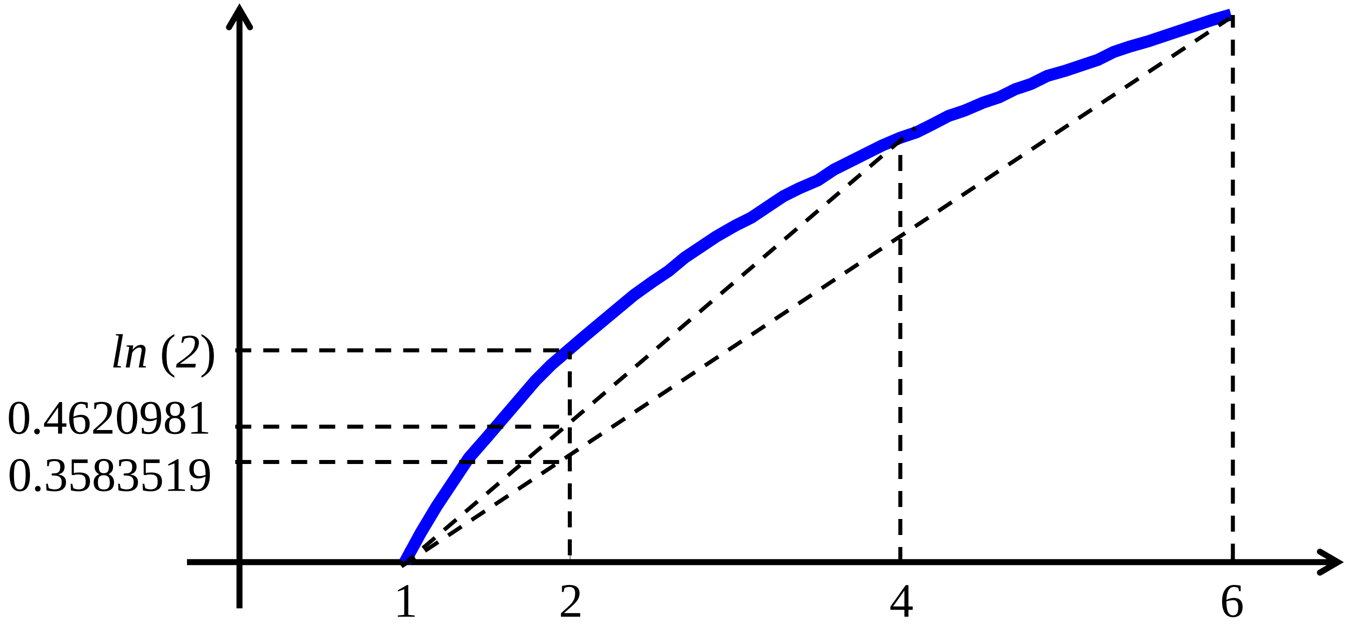
$$\Rightarrow \ln(2) = 0.3583515 \qquad \varepsilon_t = \%48.3$$

2. x_0=1; x_1=4 alınır ise:

$$f(x_i) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x_i - x_k) = 0 + \frac{1.3862944 - 0}{4-1}(2-1)$$

$$\Rightarrow \ln(2) = 0.46209813 \qquad \varepsilon_t = \%33.3$$

Örnek



MATLAB İle Doğrusal İnterpolasyon

- **YI= interp1 (X, Y, XI)**

  X'in bu değeri için işlem yapılacak

  bilinen Y değerlerinden oluşan **<u>sütun vektörü</u>**

  bilinen X değerlerinden oluşan **<u>sütun vektörü</u>**

  Y sütun vektöründe bilinmeyen olarak hesaplanacak değer

- **Örnek: Önceki sorudaki işlemi MATLAB'ta *interp1* komutu ile çözünüz?**

Command Window

```
>> x=[1 4 6]';
>> y=[0 1.3862944 1.7917595]';
>> Yi=interp1(x,y,2)

Yi =

   0.462098133333333

>>
>>
```

Doğrusal (Lineer) İnterpolasyon

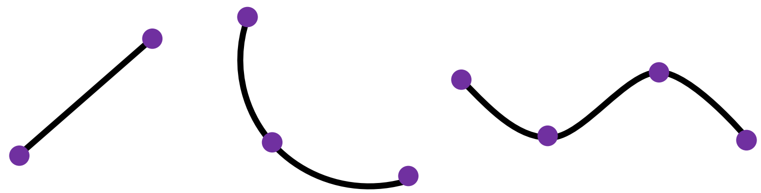
- **Örnek: f(x)= e^x fonksiyonunun [0.2, 0.3] noktalarındaki değerleri sırasıyla [1.22140, 1.34986]'dır. Doğrusal interpolasyon yöntemi ile x=0.27 noktasındaki değer nedir?**
  - **x=0.27 noktasındaki gerçek değer 1.3099 olduğuna göre bağıl yüzde hatayı hesaplayınız?**

$$f(0.27) = 1.311322$$

$$e^{0.27} = 1.309964$$

Lagrange Polinom İnterpolasyonu

- **Lagrange interpolasyonu, bilinen noktalara önce bir eğri uydurulması sonra eğriyi temsil eden denklemden istenilen noktaların değerlerinin elde edilmesine dayanır.**



N adet noktadan N-1. dereceden polinom geçebilir

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$f(x)$	f_1	f_2	f_3	…	f_n

- **n elemandan oluşan bir f(x) yukarıdaki tablodaki gibi tanımlanmış olsun.**
- **Lagrange yöntemine göre interpolasyon hesabı yapılırken kullanılacak polinom forma sahip fonksiyonun derecesi sahip olunan ölçüm değerlerinin adedinden bir eksik olacak şekilde seçilir.**

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

Lagrange Polinom İnterpolasyonu

Eğer verilen aralıklar eşit değilse Lagrange İnterpolasyon polinomu kullanılır. En basit haliyle 2 nokta kullanan Lineer İnterpolasyon denklemi düzenlenirse:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\left(x - x_0\right)$$

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_0$$

$$y = \left[1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right] y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \quad = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

Bulunan bu ifade n nokta için genelleştirilirse:

Lagrange Polinom İnterpolasyonu

$$y_p(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\cdots(x_1-x_n)} * y_1$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_n)} * y_2$$
$$\vdots$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-1})} * y_n$$

Elde edilen *f(x)* eşitliğinde *x* değişkeninin istenilen değer karşılığı sayısal olarak girilmek suretiyle fonksiyonun karşılığı Lagrange yöntemine göre bulunmuş olur.

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x).y_i \qquad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Lagrange İnterpolasyon

- **Örnek:** **Aşağıdaki tabloda x'e bağlı bir f(x) fonksiyonunun sayısal değişimi görülmektedir. x=3 için aradeğeri Lagrange interpolasyon yöntemi kullanarak bulunuz**

x	0	2	4	7	10
f(x)	1	7	10	13	20

- **Çözüm:**

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-7)(x-10)}{(0-2)(0-4)(0-7)(0-10)}*1 + \frac{(x-0)(x-4)(x-7)(x-10)}{(2-0)(2-4)(2-7)(2-10)}*7$$

$$\frac{(x-0)(x-2)(x-7)(x-10)}{(4-0)(4-2)(4-7)(4-10)}*10 + \frac{(x-0)(x-2)(x-4)(x-10)}{(7-0)(7-2)(7-4)(7-10)}*13$$

$$+\frac{(x-0)(x-2)(x-4)(x-7)}{(10-0)(10-2)(10-4)(10-7)}*20$$

X=3 için f(3)=8.7583

Örnek

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(4) = 1.3862944$$

$$\ln(6) = 1.7917595$$

olduğuna göre, lagrange enterpolasyon kullanarak *ln*(2) = ? sonucunu bulunuz. [ln(2)=0.69314718]

$$f(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

$$\ln(x) = \frac{x-4}{1-4}\frac{x-6}{1-6}*0 + \frac{x-1}{4-1}\frac{x-6}{4-6}*1.3862944 + \frac{x-1}{6-1}\frac{x-4}{6-4}*1.7917595$$

$$\ln(2) = \frac{2-4}{1-4}\frac{2-6}{1-6}*0 + \frac{2-1}{4-1}\frac{2-6}{4-6}*1.3862944 + \frac{2-1}{6-1}\frac{2-4}{6-4}*1.7917595$$

$$\ln(2) = 0.5658413$$

Örnek

Aşağıdaki tabloda x'e bağlı bir f(x) fonksiyonunun sayısal değişimi görülmektedir. *x* = 2.3 için ara değeri Lagrange interpolasyon yöntemi kullanarak bulunuz

x	1.1	1.7	3
f(x)	10.6	15.2	20.3

$$y_p(x) = \frac{x-1.7}{1.1-1.7}\frac{x-3}{1.1-3}10.6 + \frac{x-1.1}{1.7-1.1}\frac{x-3}{1.7-3}15.2 + \frac{x-2.2}{3-1.1}\frac{x-1.7}{3-1.7}20.3$$

$$x = 2.3 \quad \Rightarrow \quad y_p(2.3) = 18.3813$$

Örnek

- **Aşağıdaki tabloda x'e bağlı bir f(x) fonksiyonunun sayısal değişimi görülmektedir. X=4 için ara değeri Lagrange interpolasyon yöntemi kullanarak bulunuz**
  - **Soruyu hem el ile hemde matlab ile çözünüz. Matlab da program (döngüler) yazınız**

x	0	2	5	7	9
$f(x)$	2	6	8	11	15

Örnek

$f(4) = 7.190476$

```
clc; close all; clear all;
x=[0 2 5 7 9]
f=[2 6 8 11 15]
a=4
snc=0;
for i=1:length(x)
    crpm=1;
    for j=1:length(x)
        if i==j
            crpm=crpm;
        else
            crpm=crpm*(a-x(j))/(x(i)-x(j));
        end
    end
    snc=snc+crpm*f(i);
end
snc
```

KAYNAKLAR

❖ Diğer Kaynaklar

- **Bülent ORUÇ, Adnan SONDAŞ, "*Sayısal Çözümleme*", Umuttepe Yayınları**
- **Fahri VATANSEVER, "*Sayısal Hesaplama ve Programlama*", Seçkin Yayınları, 2018.**
- **Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), "*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*", Literatür Yayıncılık.**
- **Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar ile Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.**
- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR "*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*", Seçkin Yayıncılık**
- **İrfan Karagöz, "*Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları*", VİPAŞ Yayınevi, 2001.**
- **Cüneyt Bayılmış, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**