PROGRAMLAMA UYGULAMALARIYLA SAYISAL YÖNTEMLER

Dr. Öğr. Üyesi Adnan SONDAŞ

asondas@kocaeli.edu.tr

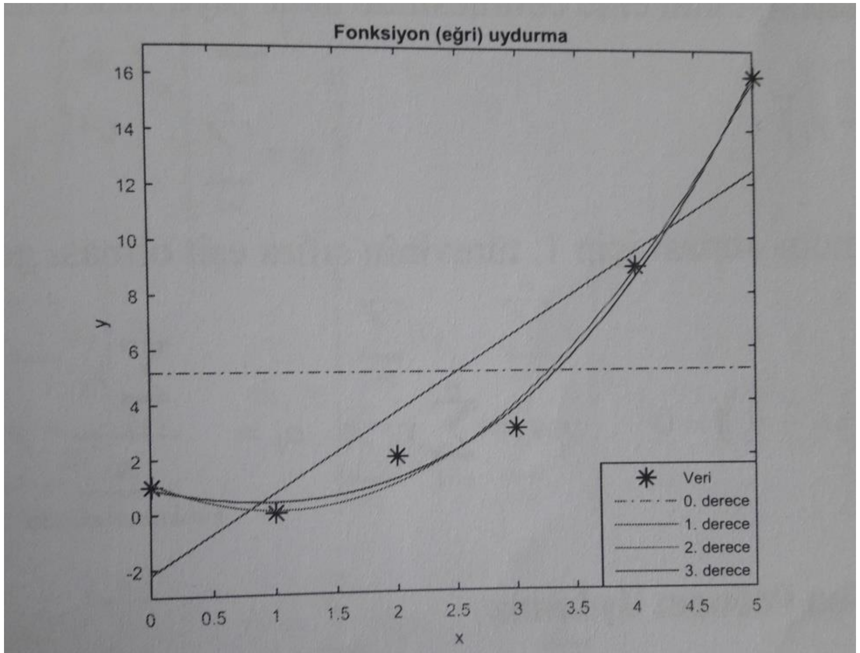
0262-303 22 58

6. Hafta

EM KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

Giriş

Uygulama veya bilim alanındaki deney ve gözlemlerden birçok veri elde edilmektedir. Bu verilerin, anlamlı fonksiyonlar şeklinde ifade edilmesi gerekmektedir. Bilinene değerlerden faydalanılarak fonksiyonun kendisini veya kendisine en yakın fonksiyonun belirlenmesi işlemi «*eğri uydurma*, *curve fitting*» olarak adlandırılır.



Şekil 2.1: Veriler ve uydurulan farklı derecelerden polinomlar

En Küçük Kareler Yöntemi (Least-Squares Method)

Bu yöntem, gerçek (ölçülen) değerler ile uydurulan yaklaşık fonksiyon değerleri arasındaki farkların kareleri toplamının minimum yapılması esasına dayanana eğri uydurma yöntemidir.

Eğer gerçek fonksiyon $y=f(x)$ ve uydurulan fonksiyon $z=g(x)$ ise, n tane nokta için fark fonksiyonunun minimum yapılmasıyla $z=g(x)$ fonksiyonunun katsayıları/parametreleri elde edilir.

$$H = \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]^2$$

Hatanın minimum olması, fark fonksiyonunun birinci türevinin sıfıra eşitlenmesi ile sağlanır.

Sıfırıncı Dereceden Polinom (Sabit) Uydurma

Elde edilmiş olan n tane (x_i, y_i) verisi için en küçük kareler yöntemi kullanılarak $g(x)=a_1$ şeklinde sıfırıncı dereceden (sabit) fonksiyonun elde edilmesinde hata veya fark fonksiyonu:

$$H(a_1) = \sum_{i=1}^{n} [a_1 - y_i]^2$$

şeklinde olup minimum olması için 1. türevinin sıfıra eşit olması gerekmektedir.

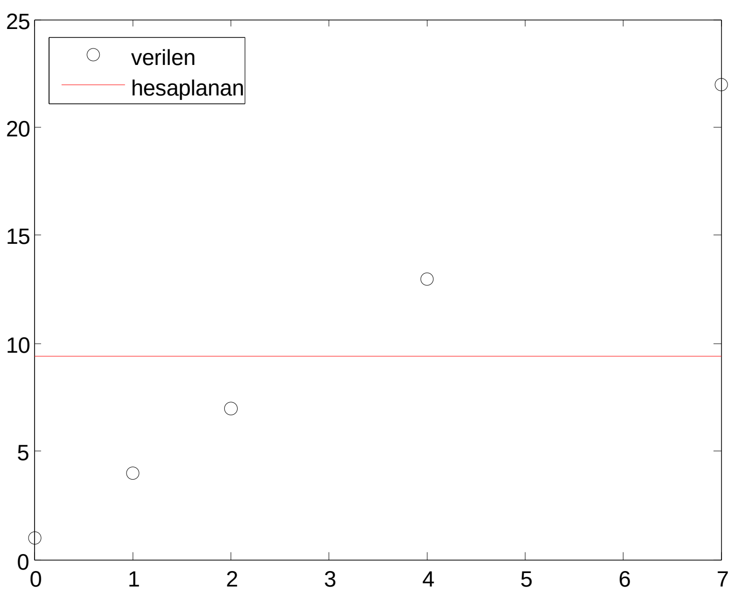
$$\frac{\partial H(a_1)}{\partial a_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sum_{i=1}^{n} [a_1 - y_i].1 = 0 \quad \Rightarrow \quad n.a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\boxed{a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}$$

Sıfırıncı Dereceden Polinom (Sabit) Uydurma

x	0	1	2	4	7
y	1	4	7	13	22

bilinen değerleri için en uygun sabiti bulan MATLAB kodlarını yazınız.



enKucukKarelerYontemi.m

```
clc; clear all; close all;

x=[0 1 2 4 7];
y=[1 4 7 13 22];

fx=(sum(y)/length(y))*ones(1,5)

plot(x,y,'k o',x,fx,'r')
legend('verilen','hesaplanan')
```

Birinci Dereceden Polinom Uydurma

Elde edilmiş olan n tane (x_i, y_i) verisi için en küçük kareler yöntemi kullanılarak $g(x)=a_1+ a_2x$ şeklinde birinci dereceden fonksiyonun elde edilmesinde hata veya fark fonksiyonu:

$$H(a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} [a_1 + a_2 x_i - y_i]^2$$

şeklinde olup minimum olması için a_1 ve a_2 ye göre kısmi türevlerin sıfıra eşit olması gerekmektedir.

$$\frac{\partial H(a_1, a_2)}{\partial a_i} = 0 \qquad , \qquad i = 1, 2$$

$$\left.\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{n} [a_1 + a_2 x_i - y_i].1 = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n} [a_1 + a_2 x_i - y_i].x_i = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} n.a_1 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i \end{aligned}$$

Birinci Dereceden Polinom Uydurma

$$n.a_1 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i$$

Yukarıdaki iki bilinmeyenli denklem sistemi aşağıdaki şekilde matris formatında yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i \end{bmatrix}$$

İlgili matris sistemi çözülerek a_1 ve a_2 katsayıları bulunabilir.

Birinci Dereceden Polinom Uydurma

x	0	1	2	4	7
y	1	5	8	13	21

bilinen değerleri için en uygun birinci dereceden polinumu bulunuz.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 14 & 70 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 224 \end{bmatrix}$$

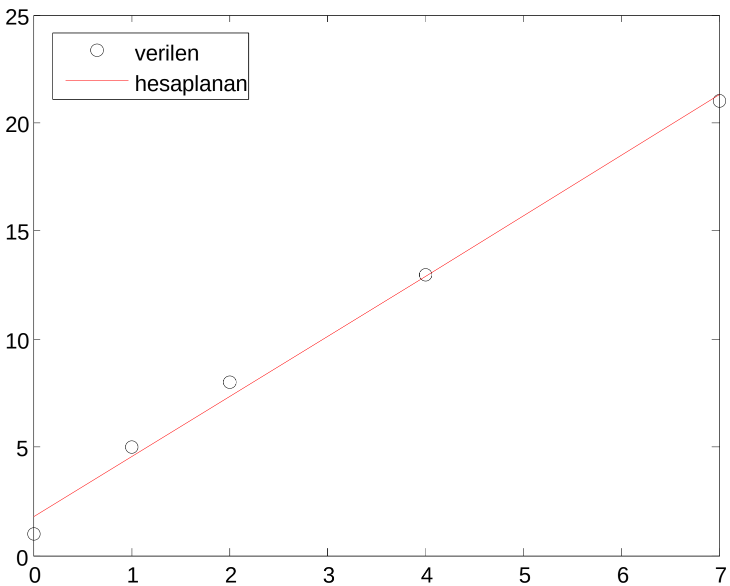
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8182 \\ 2.7792 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{f(x) = 1.8182 + 2.7792x}$$

Birinci Dereceden Polinom Uydurma

x	0	1	2	4	7
y	1	5	8	13	21

bilinen değerleri için en uygun birinci dereceden polinumu bulan MATLAB kodlarını yazınız.




```
clc; clear all; close all;
x=[0 1 2 4 7];
y=[1 5 8 13 21];

A(1,1)=length(x);
A(1,2)=sum(x);
A(2,1)=sum(x);
A(2,2)=sum(x.*x);

b(1,1)=sum(y);
b(2,1)=sum(x.*y);

a=inv(A)*b
fx=a(1,1)+a(2,1)*x
plot(x,y,'k o',x,fx,'r')
legend('verilen','hesaplanan')
```

İkinci Dereceden Polinom Uydurma

Elde edilmiş olan n tane (x_i, y_i) verisi için en küçük kareler yöntemi kullanılarak $g(x)=a_1+a_2x+a_3x^2$ şeklinde birinci dereceden fonksiyonun elde edilmesinde hata veya fark fonksiyonu:

$$H(a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^{\ 2} - y_i\right)^2$$

şeklinde olup minimum olması için a_1, a_2 ve a_3 e göre kısmi türevlerin sıfıra eşit olması gerekmektedir.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 3} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 3} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} . y_i \end{bmatrix}$$

İkinci Dereceden Polinom Uydurma

x	0	2	3	5	8
y	-6	0	7	21	65

bilinen değerleri için en uygun ikinci dereceden polinumu bulan MATLAB kodlarını yazınız.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . y_i \end{bmatrix}$$

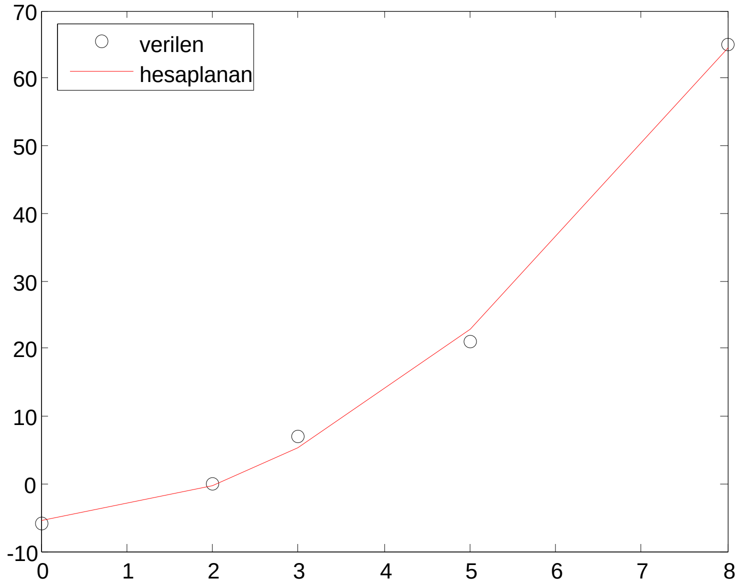
$$\begin{bmatrix} 5 & 18 & 102 \\ 18 & 102 & 672 \\ 102 & 672 & 4818 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102 \\ 646 \\ 4748 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{f(x) = -5.46 + 0.5278x + 1.0274x^2}$$

İkinci Dereceden Polinom Uydurma

x	0	2	3	5	8
y	-6	0	7	21	65

bilinen değerleri için en uygun ikinci dereceden polinumu bulan MATLAB kodlarını yazınız.




```
clc; clear all; close all;
x=[0 2 3 5 8];
y=[-6 0 7 21 65];

A(1,1)=length(x);
A(1,2)=sum(x);
A(1,3)=sum(x.^2);
A(2,1)=sum(x);
A(2,2)=sum(x.^2);
A(2,3)=sum(x.^3);
A(3,1)=sum(x.^2);
A(3,2)=sum(x.^3);
A(3,3)=sum(x.^4);

b(1,1)=sum(y);
b(2,1)=sum(x.*y);
b(3,1)=sum((x.^2).*y);
A
b
a=inv(A)*b
fx=a(1,1)+a(2,1)*x+a(3,1)*x.^2
plot(x,y,'k o',x,fx,'r')
legend('verilen','hesaplanan')
```

Yüksek Dereceden Polinom Uydurma

Elde edilmiş olan n tane (x_i, y_i) verisi için en küçük kareler yöntemi kullanılarak $g(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+....+a_px^{p-1}$ şeklinde birinci dereceden fonksiyonun elde edilmesinde hata veya fark fonksiyonu:

$$H(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^{\;2} + \ldots. + apx_i^{\;p-1} - y_i \right)^2$$

şeklinde olup minimum olması için a_1, a_2 ve a_3 e göre kısmi türevlerin sıfıra eşit olması gerekmektedir.

$$\frac{\partial H(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p)}{\partial a_i} = 0 \quad , \quad i = 1,2,3,\ldots, p$$

Yüksek Dereceden Polinom Uydurma

$$
\begin{bmatrix}
n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,p} \\
\sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,p+1} \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,4} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,p+2} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,p} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,p+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,p+2} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2p}
\end{bmatrix}
.
\begin{bmatrix}
a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdots\cdots \\ a_p
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^{n} y_i \\
\sum_{i=1}^{n} x_i . y_i \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} . y_i \\
\cdots\cdots \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,p} . y_i
\end{bmatrix}
$$

İlgili matris sistemi çözülerek a_1, a_2, a_3,…..,a_p katsayıları bulunabilir.

Yüksek Dereceden Polinom Uydurma

x	0	2	5	9	15	25	40
y	5	12	23	37	44	60	81

bilinen değerleri için en uygun beşinci dereceden polinumu bulan MATLAB kodlarını yazınız.

MATLAB ile Polinom Uydurma

MATLAB'ta verilere en uygun polinom uydurma işlemi için «*polyfit*» komutu kullanılır. Bunun genel kullanım şekli:

polinomKatsayıları=polyfit(x,y,derece)

şeklindedir. Verilen x, y değerlerine göre belirtilen dereceden polinom katsayılarını hesaplar.

```
>> pk=polyfit([-3 0 3],[-9 -3 3],1)

pk =

    2.0000   -3.0000
```

KAYNAKLAR

❖ Diğer Kaynaklar

- **Bülent ORUÇ, Adnan SONDAŞ, "*Sayısal Çözümleme*", Umuttepe Yayınları**
- **Fahri VATANSEVER, "*Sayısal Hesaplama ve Programlama*", Seçkin Yayınları, 2018.**
- **Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), "*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*", Literatür Yayıncılık.**
- **Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar ile Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.**
- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR "*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*",Seçkin Yayıncılık**
- **İrfan Karagöz, "*Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları*", VİPAŞ Yayınevi, 2001.**
- **Cüneyt Bayılmış, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**