4. Hafta

DENKLEM SİSTEMLERİ

İÇİNDEKİLER

Doğrusal Denklem Sistemlerinin Çözümü

Grafiksel Yöntem

Az satıda (2 veya 3) denklem içeren sistemlerin çözümünde, grafiksel yaklaşım kullanılabilmektedir. Örneğin 2 denklemden oluşan:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}}$$

2 adet doğru denklemi elde edilebilmektedir.

$$\boxed{y = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x \quad , \quad y = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x}$$

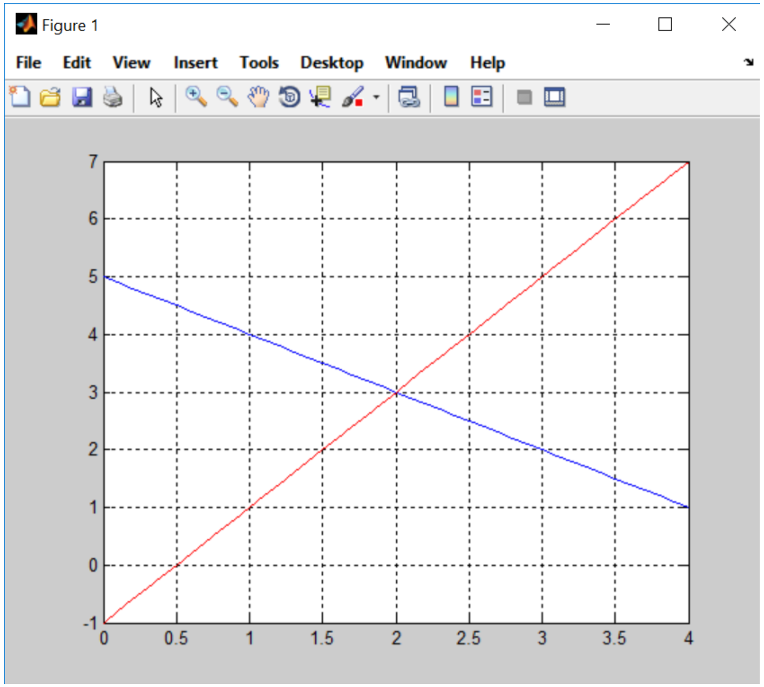
Böylece iki doğrunun kesiştiği (x, y) değerleri, denklem sisteminin çözümüdür.

Örnek

$$\boxed{\begin{aligned} x+y&=5 \\ 2x-y&=1 \end{aligned}}$$

Denklem sistemini grafiksel yöntemle çözünüz.

İlgili doğru denklemleri: $\boxed{y=5-x \quad , \quad y=2x-1}$



Lineer Denklem Sistemi

Belirli sayıda bilinmeyen ve belli sayıda denklemden oluşan bir denklem sistemi lineer terimlerden oluşuyorsa bu sistem lineer denklem sistemi olarak adlandırılır.

$$2x-3y=5$$
$$-2x+y=-1$$

denklem sistemi iki bilinmeyen içeren lineer bir denklem sistemidir. Genel olarak *n* adet bilinmeyen (x_1, x_2, x_3,….., x_n) içeren lineer bir denklem sistemi aşağıda gösterildiği gibi çık halde veya daha basit olarak matris formunda yazılabilir.

$$\left.\begin{array}{llllll}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \ldots\ldots\ldots & a_{1n}x_n = & b_1 \\
a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \ldots\ldots\ldots & a_{2n}x_n = & b_2 \\
a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 + & \ldots\ldots\ldots & a_{3n}x_n = & b_3 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & a_{n3}x_3 + & \ldots\ldots\ldots & a_{nn}x_n = & b_n
\end{array}\right\} \quad A.\vec{x}=\vec{b}$$

Lineer Denklem Sistemi

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \ldots\ldots\ldots & a_{1n}x_n = & b_1 \\
a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \ldots\ldots\ldots & a_{2n}x_n = & b_2 \\
a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 + & \ldots\ldots\ldots & a_{3n}x_n = & b_3 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & a_{m3}x_3 + & \ldots\ldots\ldots & a_{mn}x_n = & b_m
\end{array}
$$

$$
\overset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}} \times \overset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots. \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}} = \overset{\vec{b}}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots. \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}}
$$

A: katsayılar matrisi

x: bilinmeyen vektör

b: sağ taraf vektörü

Örnek

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 &+ 2x_2 &+ 4x_3 &= 14 \\ x_1 &- 2x_2 &+ 0x_3 &= 7 \\ -x_1 &+ 3x_2 &+ 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü

Lineer bir denklem sisteminin çözülerek bilinmeyen x_i değerlerinin bulunmasında değişik yöntemler kullanılır. Bu yöntemler 2 grup halinde ayrılabilir.

1-) Analitik (Direkt) Yöntemler: Denklem sisteminin çözümünü matematik anlamda tam olarak veren yöntemlerdir. Bu yöntemler sayesinde doğrudan aranan çözüm elde edilir.

- Matris Tersi Yöntemi
- Cramer Yöntemi
- Eliminasyon Yöntemi
- Gauss Eliminasyon Yöntemi
- Gauss-Jordan Yöntemi
- LU Ayırma Yöntemi

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü

2-) İteratif (Dolaylı) Yöntemler: Çözümü bulmak için öncelikle tahmini değerlerden başlanır ve adım adım ardışık hesaplamalarla belirli tolerans sınırları içinde aranan çözüme ulaşılır.

- Basit İterasyon (Jacobi) Yöntemi
- Gauss-Seidel Yöntemi
- Rölaksasyon (SOR) Yöntemi

Matrisin Tersi ile Çözümleme

Verilen *A. x=b* denklem sisteminde, katsayılar matrisinin tersi (A^{-1}) hesaplandığında çözüm vektörü iki matrisin çarpımından elde edilebilir.

$$A.\vec{x} = \vec{b} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{x} = A^{-1}.\vec{b}$$

Matris tersinin hesabı için farklı yöntemler vardır. Fakat bu yöntemlerde, eleman sayısı ne kadar fazla ise matris tersini bulmak için daha fazla bilgisayar hafızasına ve hesaplama zamanına ihtiyaç duyulur.

Örnek

$$x_1 + 2x_3 = -9$$
$$2x_1 + x_2 = 5$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri bulunuz.

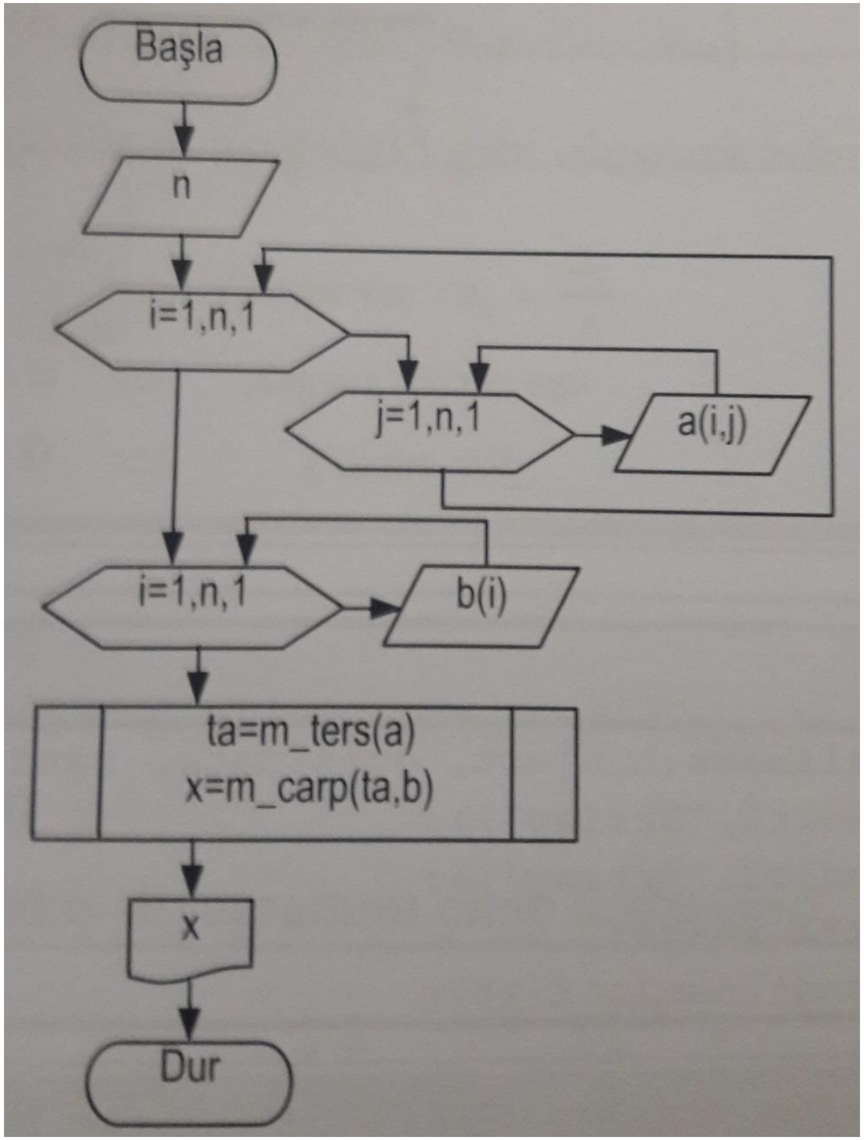
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

A matrisinin tersi: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33 & 1.33 & -0.66 \\ -0.66 & -1.66 & 1.33 \\ 0.33 & -0.66 & 0.33 \end{bmatrix}$

olduğuna göre bilinmeyen vektörünün değeri:

$$\vec{x} = A^{-1} \times \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.33 & 1.33 & -0.66 \\ -0.66 & -1.66 & 1.33 \\ 0.33 & -0.66 & 0.33 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Matrisin Tersi ile Çözümleme (Akış Diyagramı)



Örnek-MATLAB ile çözümü

$$x_1 + 2x_3 = -9$$
$$2x_1 + x_2 = 5$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri MATLAB programı ile bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[1 0 2;2 1 0;3 2 1]

A =

     1     0     2
     2     1     0
     3     2     1

>> b=[-9;5;4]

b =

    -9
     5
     4

>> x=inv(A)*b

x =

    1.0000
    3.0000
   -5.0000

>>
```

Cramer Yöntemi ile Çözümleme

Klasik yöntemlerden biri olup, çözüm iki matrisin determinantları oranı olarak elde edilir. Bu yöntemde, *n* tane bilinmeyen içeren

$$A.\vec{x} = \vec{b}$$

şeklindeki lineer denklem sisteminin çözümü;

$$x_i = \frac{|D_i|}{|A|} \qquad (i = 1,2,3,\ldots,n)$$

$|D_i|$: Katsayılar matrisinde (*A*), *i.* *s*ütun atılıp yerine b vektörünün konması ile elde edilen matrisin determinantıdır.

Bu yöntemde, her biri (n×n) boyutundaki (n+1) adet matrisin determinantının bulunup, bunların oranlanması gerekir. Bundan dolayı işlem sayısı fazla ve çözüm süresi uzundur.

MATLAB’da Matrisin Determinantı

Matrisin determinantını verir.

det (matris)

determinantı hesaplanacak matris

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[-2 -1 4;6 -3 -2;4 1 2]

A =

    -2    -1     4
     6    -3    -2
     4     1     2

>> det(A)

ans =

   100
```

Örnek

$$x_1 + 2x_3 = -9$$
$$2x_1 + x_2 = 5$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri Cramer Yöntemi ile bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

1) A Matrisinin determinantı bulunur.

$$|A| = 3$$

2) D Matrisleri bulunur.

$$D_1 = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Örnek-Devam

3) Bilinmeyen değerler bulunur.

$$x_1 = \frac{\det(D_1)}{\det(A)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$x_2 = \frac{\det(D_2)}{\det(A)} = \frac{9}{3} = 3$$

$$x_3 = \frac{\det(D_3)}{\det(A)} = \frac{-15}{3} = -5$$

Örnek-MATLAB ile çözümü

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_3 &= -9 \\
2x_1 + x_2 &= 5 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri Cramer yöntemi ile çözen MATLAB programını yazınız.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

```matlab
clc; close all; clear all;

A=[1 0 2;2 1 0;3 2 1]
B=[-9; 5; 4]

for i=1:3
    D=A
    D(:,i)=B
    x(i,1)=det(D)/det(A)
end
x
```

Gauss Eliminasyonu Yöntemi ile Çözümleme

Değişkenlerin yok edilmesi ilkesine dayanan bu yöntemde öncelikle katsayılar matrisi alt/üst üçgensel hale dönüştürülür. Daha sonra çözüm vektörü hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_i = \frac{1}{\alpha_{ii}} \left[\beta_i - \sum_{j=i+1}^{n} \left(a_{ij} x_j \right) \right]}$$

Bu yöntemde katsayılar matrisindeki köşegen elemanlar mutlak değerce maksimum olacak şekilde satırların yer değiştirilmesi (pivotlama) gerekir. Böylece yuvarlatma hataları azalır ve köşegendeki sıfır rakamı kalmayacağından dolayı sıfıra bölme hatası da oluşmaz.

Örnek

$$\begin{aligned} 5x-2y-3z&=4 \\ -5x+7y-2z&=-10 \\ -3x-3y+8z&=6 \end{aligned}$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri bulunuz.

1. x değerleri yalnız bırakılır.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 5x & - & 2y & - & 3z & = & 4 & / \; 5 \\ -5x & + & 7y & - & 2z & = & -10 & / \; -5 \\ -3x & - & 3y & + & 8z & = & 6 & / \; -3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & - & \frac{2}{5}y & - & \frac{3}{5}z & = & \frac{4}{5} \\ x & - & \frac{7}{5}y & + & \frac{2}{5}z & = & 2 \\ x & + & y & - & \frac{8}{3}z & = & -2 \end{array}$$

Örnek-Devam

2. 2. ve 3. eşitliklerden 1. eşitlik çıkarılarak x'den kurtulunur.

$$\begin{aligned} x - \frac{2}{5}y - \frac{3}{5}z &= \frac{4}{5} \\ -y + z &= \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5}y - \frac{31}{15}z &= -\frac{14}{5} \end{aligned}$$

3. 2. eşitlik -1'e ve 3. eşitlik 7/5'e bölünerek tekrar yazılır.

$$\begin{aligned} x - \frac{2}{5}y - \frac{3}{5}z &= \frac{4}{5} \\ y - z &= -\frac{6}{5} \\ y - \frac{31}{21}z &= -2 \end{aligned}$$

4. 3. eşitlikten 2. eşitlik çıkarılarak y'den kurtulunur.

$$\begin{aligned} x - \frac{2}{5}y - \frac{3}{5}z &= \frac{4}{5} \\ y - z &= -\frac{6}{5} \\ -\frac{10}{21}z &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

5. 3. eşitlikten z hesaplanır.

$$z = \frac{84}{50}$$

6. z, 2. eşitlikte yerine koyulur ve y hesaplanır.

$$y - \frac{84}{50} = -\frac{6}{5} \Rightarrow y = \frac{24}{50}$$

7. y ve z, 1. eşitlikte yerine koyulur ve I_1 hesaplanır.

$$x - \frac{2}{5}\left(\frac{24}{50}\right) - \frac{3}{5}\left(\frac{84}{50}\right) = \frac{4}{5} \Rightarrow x = 2$$

Örnek

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri bulunuz.

k	i	Çarpan ($-a_{ik}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)}$)	Genişletilmiş katsayılar matrisi	
1	2	-2	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$	$G^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \\ 0 & -3 & -5 & -21 \end{bmatrix}$
	3	-3	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \\ 0 & -3 & -5 & -21 \end{bmatrix}$	
2	3	$-\frac{3}{5}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & -22/5 & -66/5 \end{bmatrix}$	$G^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & -22/5 & -66/5 \end{bmatrix}$

Örnek

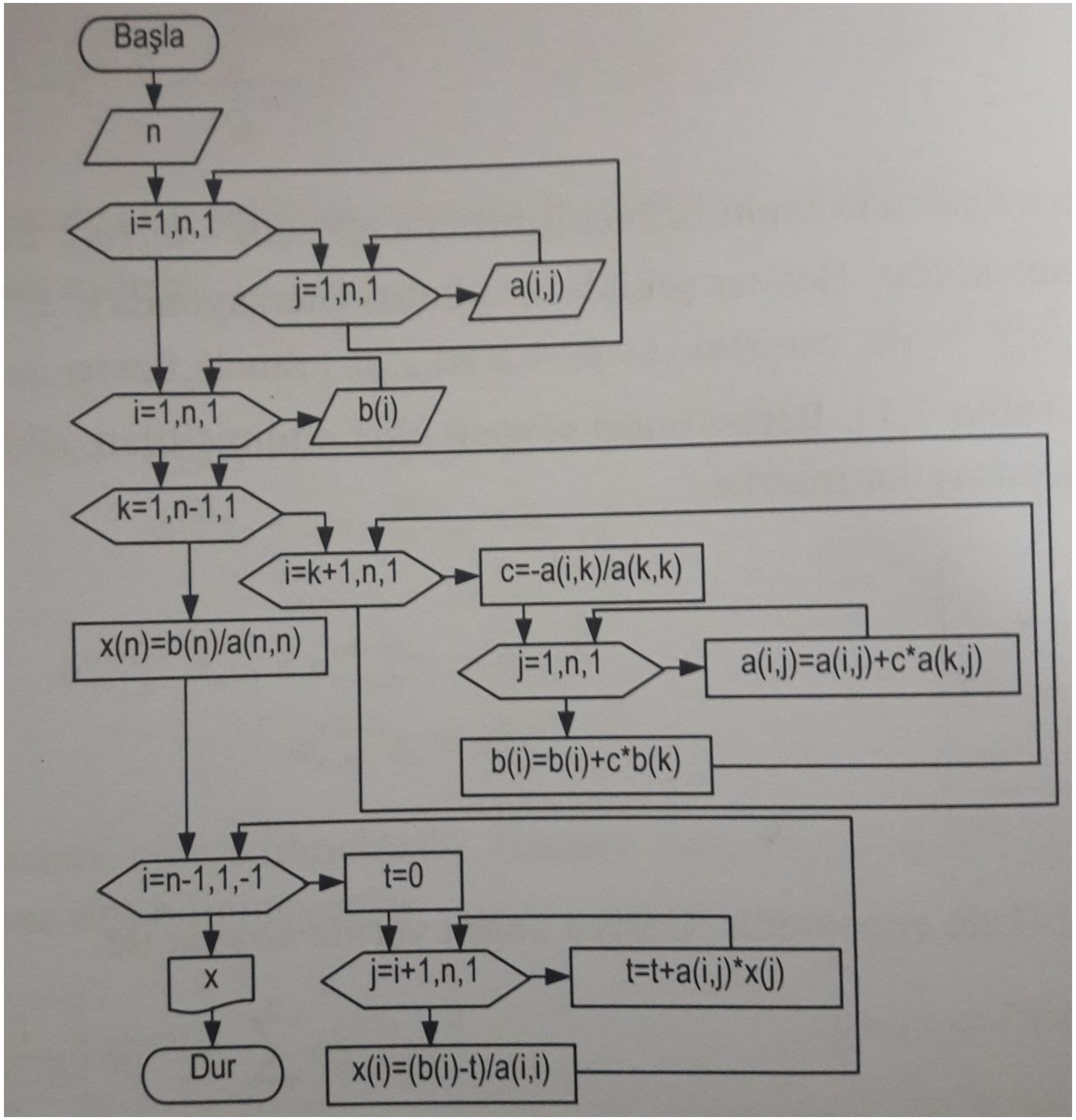
k	i	Çarpan ($-a_{ik}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)}$)	Genişletilmiş katsayılar matrisi	
1	2	-2	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$	$G^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \\ 0 & -3 & -5 & -21 \end{bmatrix}$
	3	-3	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \\ 0 & -3 & -5 & -21 \end{bmatrix}$	
2	3	$-\frac{3}{5}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & -22/5 & -66/5 \end{bmatrix}$	$G^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & -22/5 & -66/5 \end{bmatrix}$

$$-22x_3/5 = -66/5 \Rightarrow x_3 = 3$$

$$-5x_2 - x_3 = -13 \rightarrow -5x_2 - 3 = -13 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \rightarrow x_1 + 4 + 3 = 8 \Rightarrow x_1 = 1$$

Gauss Eliminasyonu Yöntemi Akış Diyagramı



Gauss Eliminasyonu Yönteminin MATLAB'ta Çözümü

$$x_1 + 2x_3 = -9$$
$$2x_1 + x_2 = 5$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
clear all; clc; close all;
a=[3 2 1; 2 1 0; 1 0 2]
b=[4;5;-9]

n=size(a,1)
aa=[a b]

for i=1:n-1
    aa(i,:)=aa(i,:)/aa(i,i);
    for j=i+1:n
        aa(j,:)=aa(j,:)-(aa(i,:)*aa(j,i))/aa(i,i);
    end
end
aa(n,:)=aa(n,:)/aa(n,n);
bb=aa(:,n+1);
aa

x(n)=bb(n);
for i=(n-1):-1:1
    for j=i+1:n
        m=aa(i,j)*x(j);
        bb(i)=bb(i)-m;
    end
    x(i)=bb(i)/aa(i,i);
end
x
```

MATLAB’da Sembolik Denklem Çözümü

solve; cebirsel denklemlerin sembolik olarak çözümünde kullanılır.

solve (‘denk1’, ‘denk2’,…., ‘denkn’)

çözümü yapılacak denklemler

Örnek:

$$4x + 3y = 10$$
$$2x - y = 0$$

```
>> [x y]=solve('4*x+3*y=10','2*x-y=0')

x =

1


y =

2

>>
```

KAYNAKLAR

❖ Diğer Kaynaklar

- Bülent ORUÇ, Adnan SONDAŞ, "*Sayısal Çözümleme*", Umuttepe Yayınları
- Fahri VATANSEVER, "*Sayısal Hesaplama ve Programlama*", Seçkin Yayınları, 2018.
- Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), "*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*", Literatür Yayıncılık.
- Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar ile Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR "*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*",Seçkin Yayıncılık
- İrfan Karagöz, "*Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları*", VİPAŞ Yayınevi, 2001.
- Cüneyt Bayılmış, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi