PROGRAMLAMA UYGULAMALARIYLA SAYISAL YÖNTEMLER

Dr. Öğr. Üyesi Adnan SONDAŞ

asondas@kocaeli.edu.tr

0262-303 22 58

3. Hafta

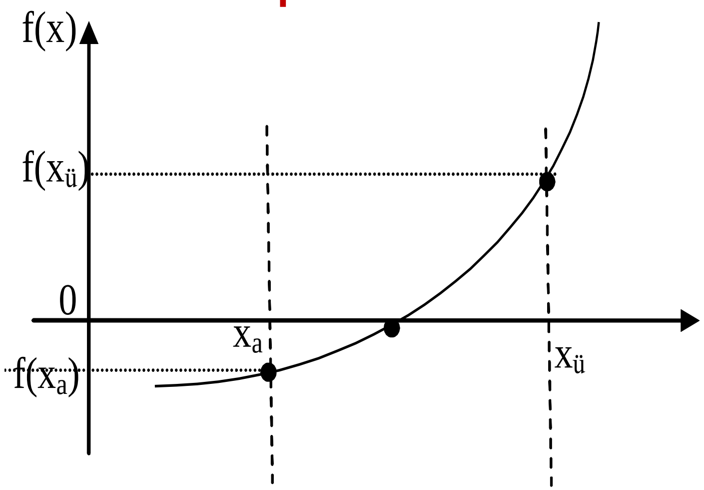
DENKLEM ÇÖZÜMLERİ (Devam)

İÇİNDEKİLER

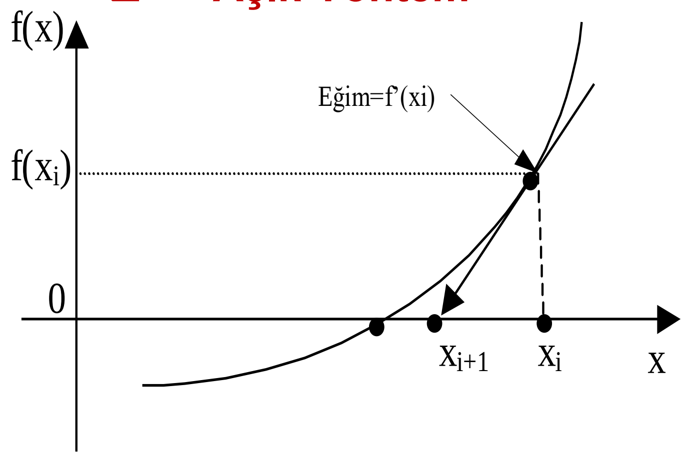
Denklem Çözümünde Açık Yöntemler

- Bu yöntem, x’in yalnızca başlangıç değeri kullanılan ya da kökü kapsayan bir aralık kullanılması gerekmez.
- Açık yöntemler hızlı sonuç vermesine karşın, başlangıç değeri uygun seçilmediğinde ıraksayabilir.
- Kökü iki başlangıç değeri arasında kıskaca alma ($f(x_a).f(x_ü) <0$) sorgulaması yok
- *Tüm açık yöntemler, kökün bulunması için matematiksel bir formül kullanır.*

- **Kapalı Yöntem**



- **Açık Yöntem**



Serhat Yılmaz’ın Sunusundan Alınmıştır.

Basit İterasyon Yöntemi

❶ f(x) fonksiyonu $f(x)=0$ denkliği $x=g(x)$ formuna getirilir.

- **Örnek:** $f(x)= x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow x = x^2 + 3$

  $f(x)= \cos x = 0 \Rightarrow x = \cos x + x$

- Bu eşitliğin anlamı $y=x$ doğrusu ile $y=g(x)$ fonksiyonunun kesişim noktasını bulmaktır.

❷ Bir x_0 başlangıç değeri seçilir,

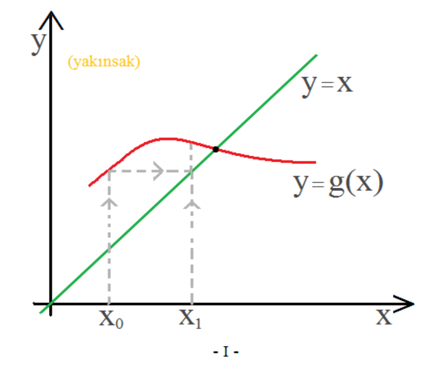
- x_0 , $|g'(x_0)| < 1$ şartını sağlar ise köke yakınsama olur.

❸ $x_{n+1} = g(x_n)$ formu ile iterasyon gerçekleştirilir.

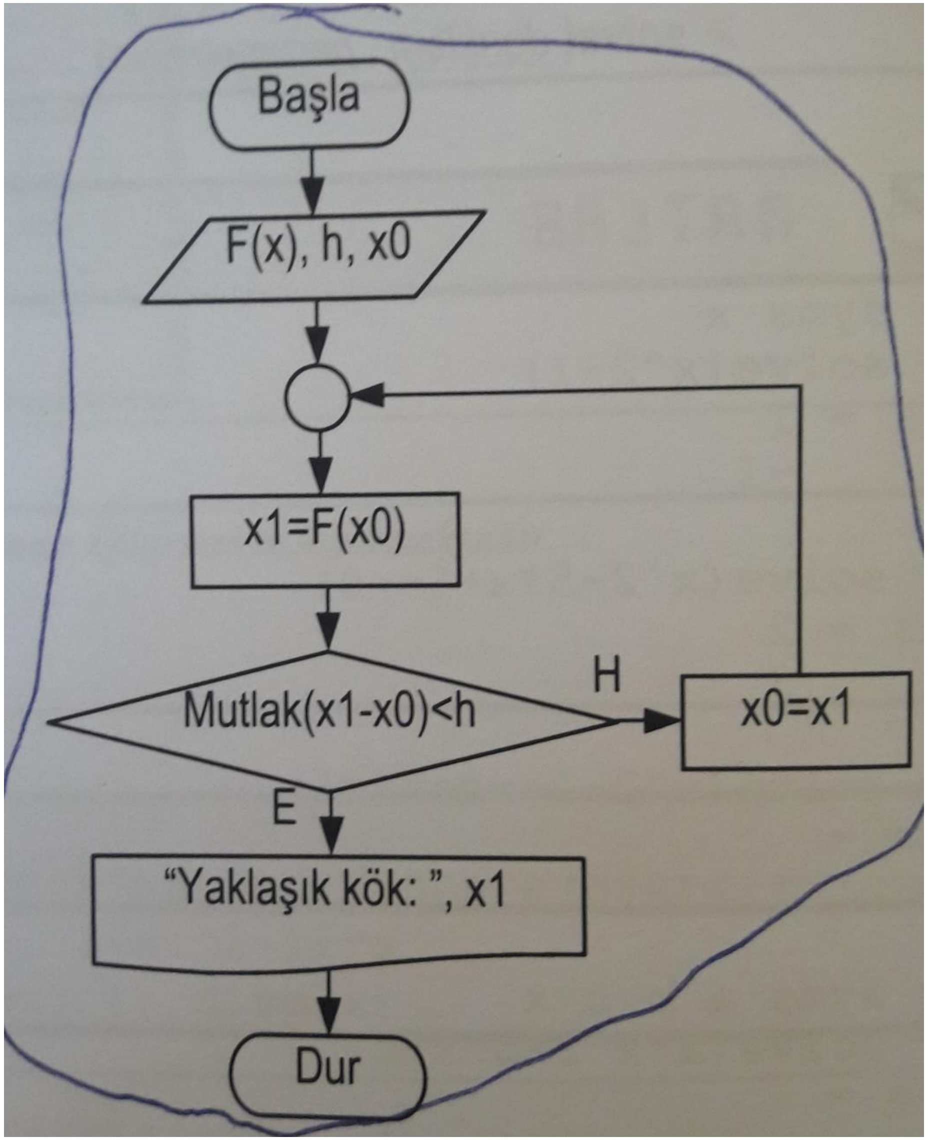
- $x_1=g(x_0)$
- $x_2=g(x_1)$
- …
- $x_n=g(x_{n-1})$

❹ Durdurma şartı

- $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon_s$ sağlanıncaya kadar
- Ya da belirli iterasyonda durdurulabilir



Basit İterasyon Yöntemi



Basit İterasyon Yöntemi

❖ **Örnek :** **$f(x) = x^2 – 3x + 1$** denkleminin kökünü **mutlak hata δ_a = 0.1** sınırlamasına göre Basit İterasyon yöntemini kullanarak x_0 = 2 değerinden başlayarak çözünüz.

❶ $$f(x) = x^2 - 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad g(x) = \sqrt{3x - 1}$$

❷ **x_0 = 2 'den başlayarak köke doğru yaklaşalım**

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

❸ **Durdurma Kriteri (Hata Sınırlaması)**

I $x_{i+1} – x_i$ I < ε_s yada iterasyon

$$x_1 = g(x_0) = \sqrt{3.2 - 1} = \sqrt{5} = 2,2361$$

$$|x_1 - x_0| = |2,2361 - 2| = 0.2361$$

$$x_2 = g(x_1) = \sqrt{3 * 2.2361 - 1} = 2,3892$$

$$|x_2 - x_1| = |2,3892 - 2,2361| = 0.1531$$

$$x_3 = g(x_2) = \sqrt{3 * 2.3892 - 1} = 2,4835$$

$$|x_3 - x_2| = |2,4835 - 2,3892| = 0.0943$$

$$x_{kök} = 2.4835 \quad \Rightarrow \quad f(x_{kök}) = -0,2828$$

Basit İterasyon Yöntemi

- **Örnek:** $f(x)= 3e^{-0.5x} - x$ fonksiyonunun kökünü mutlak hata $\delta_a = 0.07$ sınırlamasına göre $x_0 = 8$ değerinden başlayarak hesaplayınız.
  - Her adım (iterasyon) için yeni x, g(x) ve hatayı hesaplayınız.

❶ f(x)=0 denkliği x=g(x) formuna getirilir.

- $x = 3e^{-0.5x}$

❷ $g(x) = 3e^{-0.5x}$ fonksiyonu $x_0 = 8$ başlangıç değeri ve $\varepsilon_a = 0.07$ hata sınırlamasına göre iterasyona tabi tutuluyor.

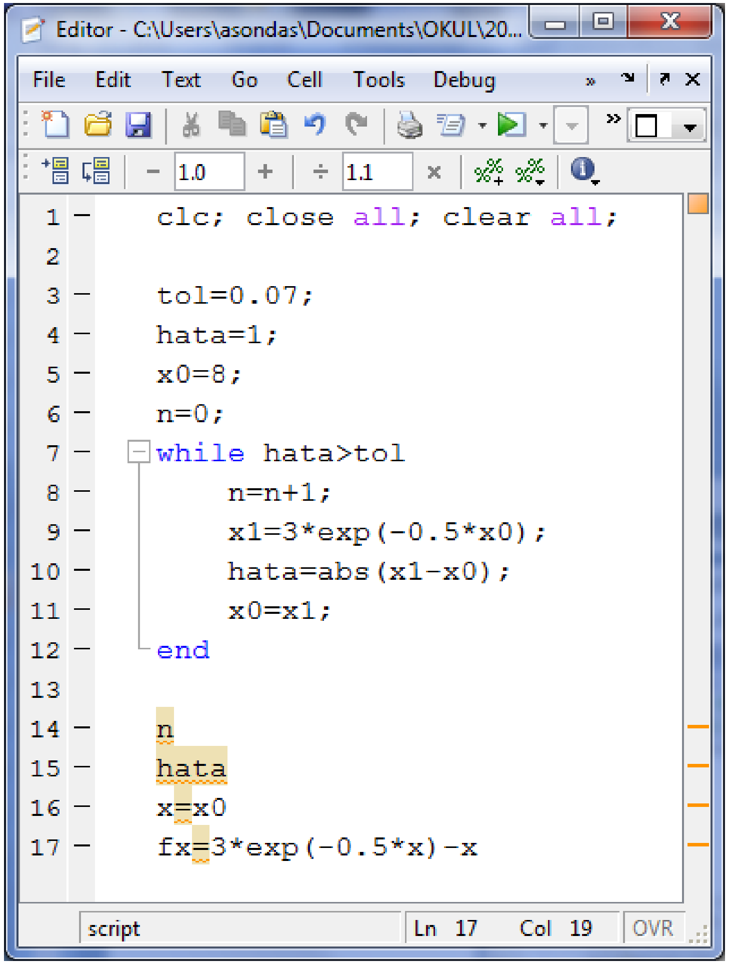
❸ 13. iterasyondan sonra $\varepsilon_a = 0.07$ hata ile kök değeri x=1.4 elde edilir.

(Yakınsak iterasyon)

iterasyon sayısı	x	g(x)	$h=\|x_n-x_{n-1}\|$
1	**8**	0,054946917	7,945053083
2	0,054946917	2,918701514	2,863754597
3	2,918701514	0,697161304	2,221540209
4	0,697161304	2,117066992	1,419905688
5	2,117066992	1,040892786	1,076174206
6	1,040892786	1,782765652	0,741872867
7	1,782765652	1,230264839	0,552500813
8	1,230264839	1,621707926	0,391443087
9	1,621707926	1,333435008	0,288272918
10	1,333435008	1,540173057	0,206738049
11	1,540173057	1,388919019	0,151254038
12	1,388919019	1,498032798	0,109113779
13	1,498032798	1,418494205	**0,079538593**
14	1,418494205	1,476043484	

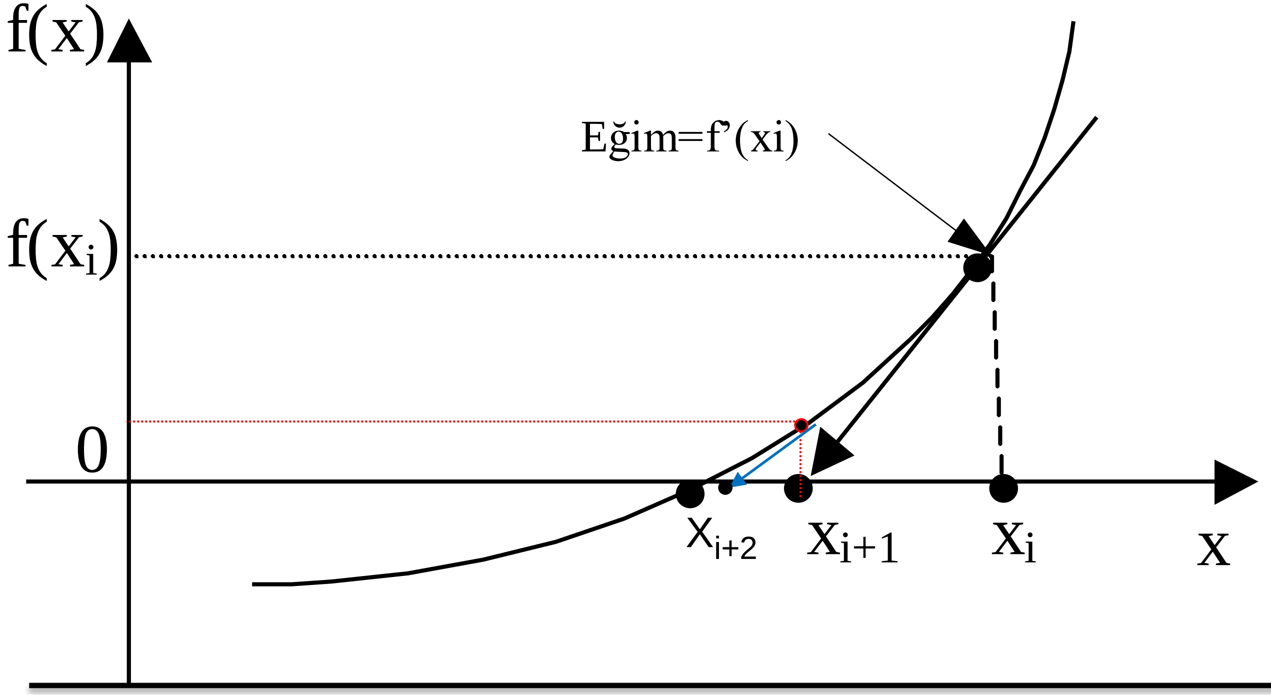
Basit İterasyon Yöntemi

❖ **Örnek :** $f(x) = 3e^{-0.5x} - x$ fonksiyonunun kökünü mutlak hata $\delta_a = 0.07$ sınırlamasına göre $x_0 = 8$ değerinden başlayarak hesaplayan MATLAB programını Basit iterasyon yöntemine göre yazınız.



Newton-Raphson Yöntemi

- En çok kullanılan yöntemlerden biridir.
- Köke, teğetler ile yaklaşılır.
  - Başlangıç değerinin fonksiyonu kestiği noktadan, çizilen teğetin yatay ekseni kestiği yeni nokta başlangıç değeri ile değiştirilerek köke yaklaşmaya çalışmaktır.
  - Bir noktadaki türev, o noktadan geçen teğetin eğimine eşittir.



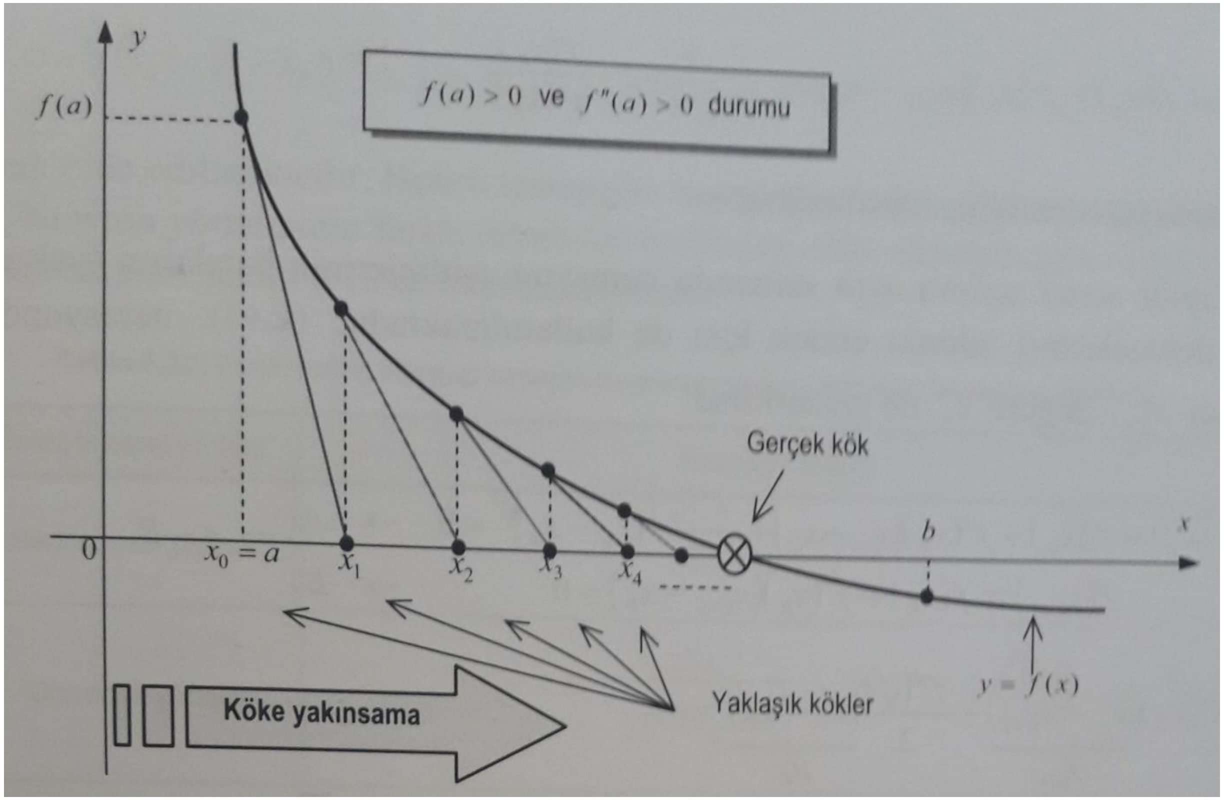
$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

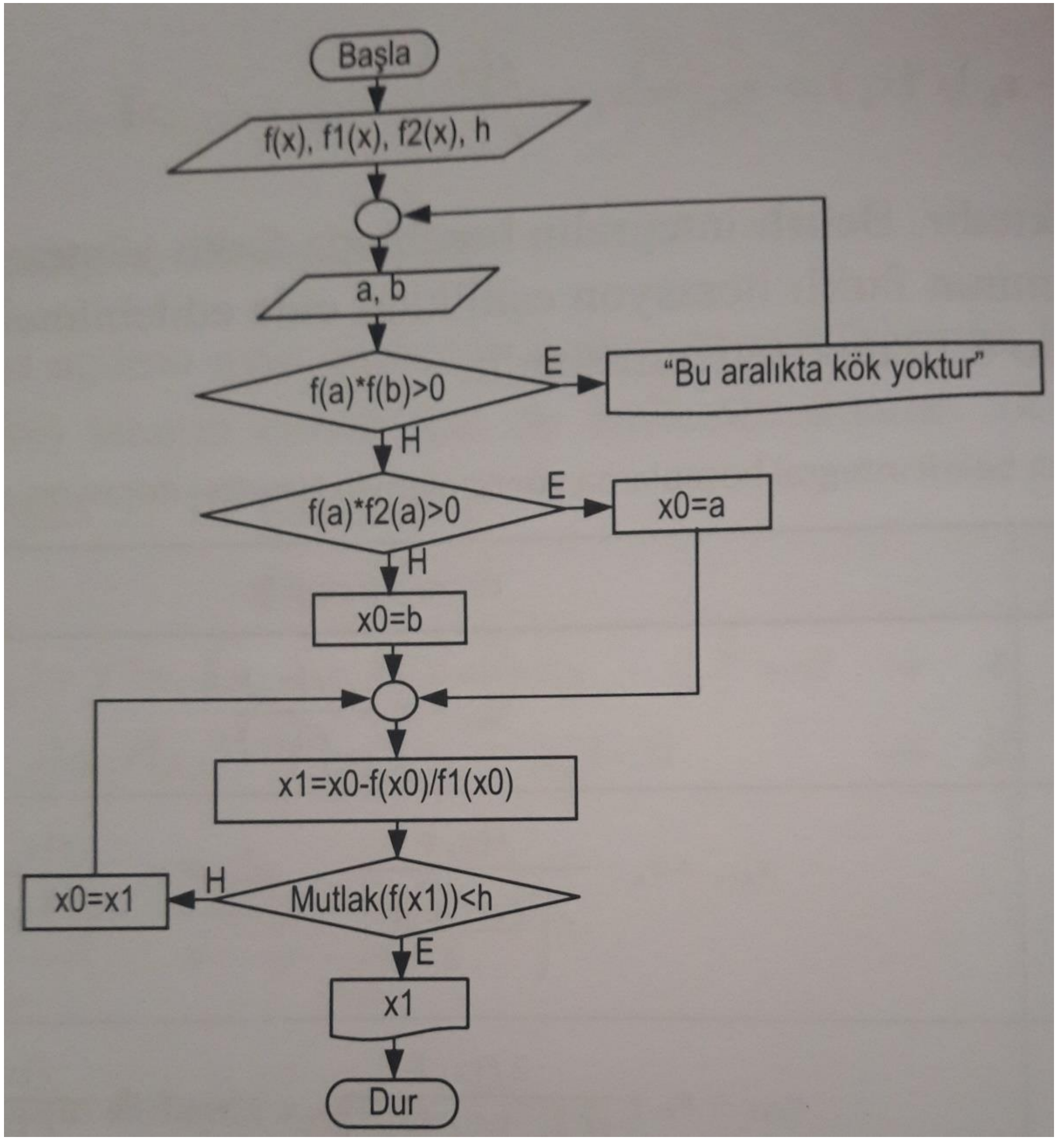
Newton-Raphson Yöntemi

- **Başlangıç değeri (x_0) belirlenirken, fonksiyonun ikinci türevinin aynı işaretli olduğu sınır değeri alınabilir.**

$$f(a).f''(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = a$$
$$f(b).f''(b) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = b$$



Newton-Raphson Yöntemi

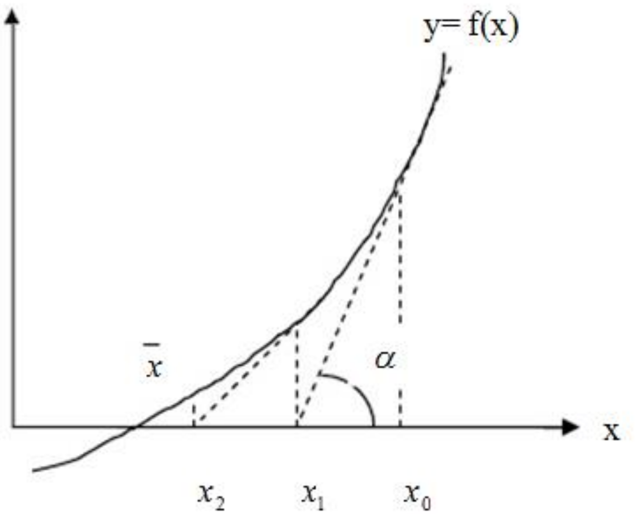


Newton-Raphson Yöntemi

Yakınsaklık Koşulu

❶ Başlangıç noktasındaki türev ile köke yaklaşma

$$\mathrm{Tan}(\alpha_1) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)} = f'(x_0)$$



❷ x_i yalnız bırakılırsa, ifade basit iterasyondaki gibi $x_{n+1} = g(x_n)$ formuna dönüştürülür

$$x_1 = \underbrace{x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}_{g(x_0)}$$

❸ Yakınsaklık koşulu,

$$\boxed{|g'(x_0)| < 1}$$

$$g'(x_0) = \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)' = \left|\frac{f''(x_0).f(x_0)}{(f'(x_0))^2}\right| < 1$$

Newton-Raphson Yöntemi

❖ **Örnek :** **f(x) = x^2 - 10** denklemini Newton-Raphson yöntemini kullanarak $x_0 = 3$ değerinden başlayarak, tol=0.05 için çözünüz.

❶ **f(x) = $x^2 - 10$ ⇒ f'(x) = 2x**

❷ **x_0 = 3 'ten başlayarak köke doğru yaklaşalım**

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

❸ **Durdurma Kriteri (Hata Sınırlaması)**

$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon_s$ yada iterasyon

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{(-1)}{6} = \frac{19}{6} = 3{,}166$$

$$|x_1 - x_0| = |3{,}166 - 3| = 0.166$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3{,}166 - \frac{(0{,}023556)}{6{,}332} = 3{,}162$$

$$|x_2 - x_1| = |3{,}162 - 3{,}166| = 0.04$$

Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

Newton-Raphson Yöntemi

❖ **Örnek :** **$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3$** denklemini Newton-Raphson yöntemini kullanarak $x_0 = 0.7$ değerinden başlayarak, tol=5e-5 için çözünüz?

❶ **$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3$ $\Rightarrow$ $f'(x) = 3x^2 + 8x$**

❷ **$x_0 =$ 0.7 'den başlayarak köke doğru yaklaşalım**

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

❸ **Durdurma Kriteri (Hata Sınırlaması)**

$| x_{i+1} - x_i | < \varepsilon_s$ yada iterasyon

$$x_1 = 0.7 - \frac{f(0.7)}{f'(0.7)} = 0.7 - \frac{(-0,6970)}{7,07} = 0,7986 \qquad |x_1 - x_0| = |0,7986 - 0.7| = 0.0986$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,7986 - \frac{0,0602}{8,3019} = 0,7913 \qquad |x_2 - x_1| = |0,7913 - 0,7986| = 0.0073$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,7913 - \frac{0,0003}{8,2092} = 0,7913 \qquad |x_3 - x_2| = |0,7913 - 0,7913| = 0.00004$$

Newton-Raphson Yöntemi

❖ **Örnek :** **$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3$** fonksiyonunun kökünü mutlak hata δ_a =5e-5 sınırlamasına göre x_0 = 0.7 değerinden başlayarak hesaplayan MATLAB programını Newton-Raphson yöntemine göre yazınız.

```
clc; close all; clear all;

x0=0.7;
hata=1;
tol=0.001;
i=0;
while hata>tol
    i=i+1
    fx=x0^3+4*x0^2-3;
    dfx=3*x0^2+8*x0;
    x1=x0-(fx/dfx)
    hata=abs(x1-x0)
    x0=x1;
end

x0
hata
```

ÖDEV

- $f(x) = x^3 - x + 127$ denklemini $x_0 = 5$ değerinden başlayarak $\varepsilon_s = 0.00001$ mutlak ve yaklaşık hata sınırlamasına göre
  - Newton-Raphson
  - Basit iterasyon metotlarını kullanarak çözünüz?

KAYNAKLAR

❖ Diğer Kaynaklar

- Bülent ORUÇ, Adnan SONDAŞ, "*Sayısal Çözümleme*", Umuttepe Yayınları
- Fahri VATANSEVER, "*Sayısal Hesaplama ve Programlama*", Seçkin Yayınları, 2018.
- Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), "*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*", Literatür Yayıncılık.
- Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar ile Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR "*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*",Seçkin Yayıncılık
- İrfan Karagöz, "*Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları*", VİPAŞ Yayınevi, 2001.
- Cüneyt Bayılmış, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi