# 5. Hafta

# DENKLEM SİSTEMLERİ-2

# İÇİNDEKİLER

## Doğrusal Denklem Sistemlerinin Çözümü

# Gauss-Jordan Yöntemi

Gaus Yönteminin değişik bir şeklidir. Burada amaç alt/üst üçgensel bir matris oluşturmak yerine, elementer işlemler sonucunda köşegen veya birim matris oluşturulması amaçlanmaktadır.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}}$$

Böylece bilinmeyen değerler rahatlıkla bulunabilmektedir.

# Örnek

$$x+2y+z=8$$
$$2x-y+z=3$$
$$3x+3y-2z=3$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri bulunuz.

$$G=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 8\\ 2 & -1 & 1 & 3\\ 3 & 3 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

1. sütün düzenlenirse:

G(2,:)= (-G(2,1)/G(1,1))*G(1,:) + G(2,:)

G(3,:)= (-G(3,1)/G(1,1))*G(1,:) + G(3,:)

$$G=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 8\\ 0 & -5 & -1 & -13\\ 3 & 3 & -2 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow G=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 8\\ 0 & -5 & -1 & -13\\ 0 & -3 & -5 & -21\end{bmatrix}$$

# Örnek

$$G=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 8\\ 0 & -5 & -1 & -13\\ 0 & -3 & -5 & -21\end{bmatrix}$$

2. sütün düzenlenirse:

G(1,:)= (-G(1,2)/G(2,2))*G(2,:) + G(1,:)

G(3,:)= (-G(3,2)/G(2,2))*G(2,:) + G(3,:)

$$G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3/5 & 14/5\\ 0 & -5 & -1 & -13\\ 0 & -3 & -5 & -21\end{bmatrix} \Rightarrow G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3/5 & 14/5\\ 0 & -5 & -1 & -13\\ 0 & 0 & -22/5 & -66/5\end{bmatrix}$$

# Örnek

$$G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3/5 & 14/5\\ 0 & -5 & -1 & -13\\ 0 & 0 & -22/5 & -66/5\end{bmatrix}$$

3. sütün düzenlenirse:

G(1,:)= (-G(1,3)/G(3,3))*G(3,:) + G(1,:)

G(2,:)= (-G(2,3)/G(3,3))*G(3,:) + G(2,:)

$$G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -5 & -1 & -13\\ 0 & 0 & -22/5 & -66/5\end{bmatrix} \Rightarrow G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -5 & 0 & -10\\ 0 & 0 & -22/5 & -66/5\end{bmatrix}$$

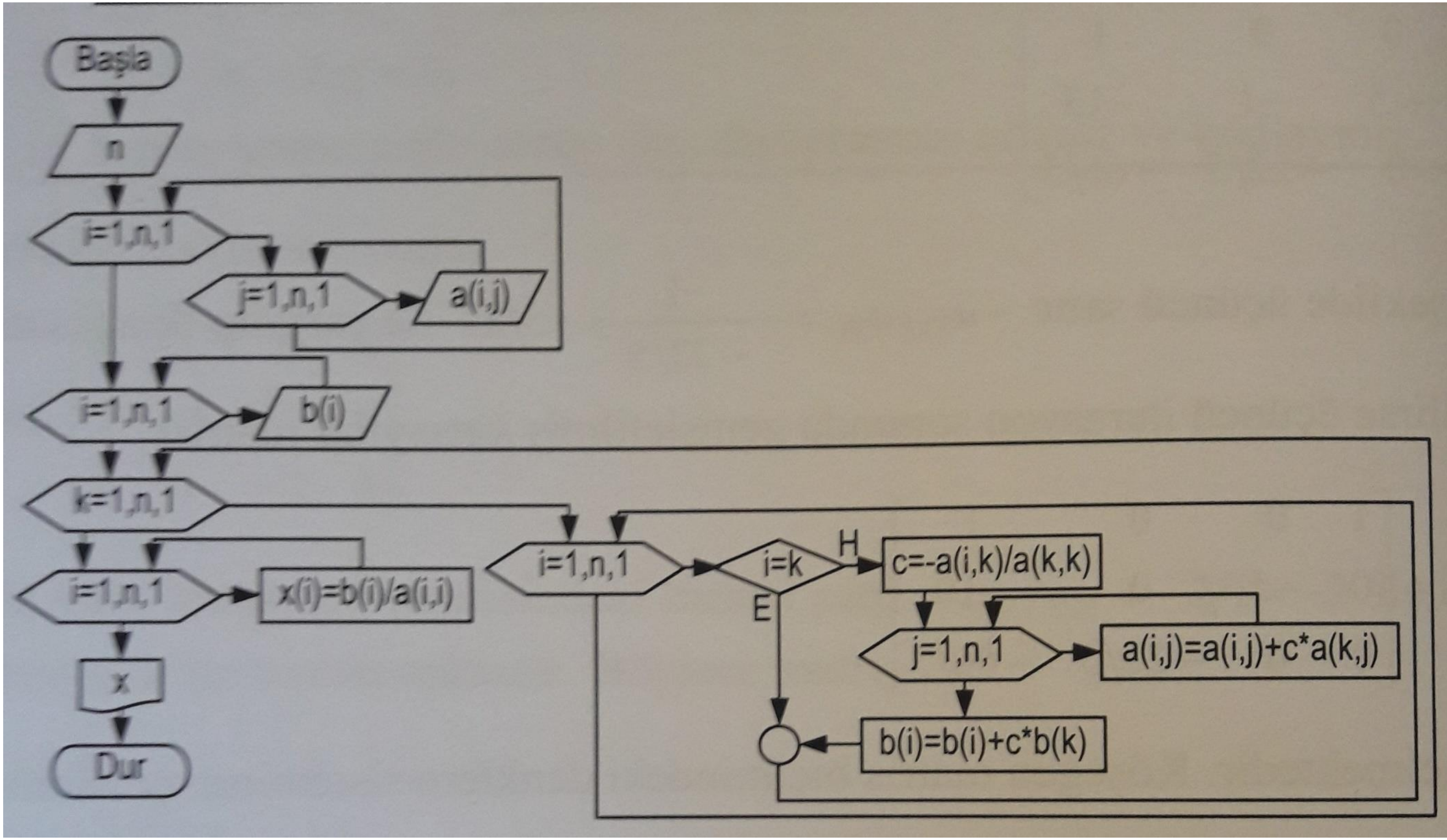
# Örnek

$$G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -5 & 0 & -10\\ 0 & 0 & -22/5 & -66/5\end{bmatrix}$$

Değişkenler çözümlenirse:

$$\left.\begin{aligned} x&=1\\ -5y&=-10\\ -\frac{22}{5}z&=-\frac{66}{5}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x&=1\\ y&=2\\ z&=3\end{aligned}}$$

# Gauss-Jordan Yöntemi Akış Şeması



# Örnek-MATLAB ile çözümü

$$x + 2y + z = 8$$

$$2x - y + z = 3$$

$$3x + 3y - 2z = 3$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri MATLAB programı ile bulunuz.

```
clc; clear all; close all;
A=[1 2 1;2 -1 1;3 3 -2];
b=[8;3;3];
n=length(b);

for (k=1:n)
    for (i=1:n)
        if(i~=k)
            c=-(A(i,k)/A(k,k));
            for(j=1:n)
                A(i,j)=A(i,j)+c*A(k,j)
            end
            b(i)=b(i)+c*b(k);
        end
    end
end

for (i=1:n)
    x(i,1)=b(i)/A(i,i);
end
x
```

# Aşırı Tanımlı LDS'nin Çözümü

Bağıntı sayısı bilinmeyen sayısından fazladır. Böyle bir durumda, sistemin satır boyutu sütun boyutundan daha büyük olmalıdır. (m>n)

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}} \times \overset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}} = \overset{\vec{b}}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}}$$

$$Ax = b$$

# Aşırı Tanımlı LDS'nin Çözümü*

Eşitliğin her iki tarafı, A matrisinin transpozu ile soldan çarpılırsa:

$A^T A x = A^T b$ eşitliği elde edilir ki ($A^T A$) ifadesi $n \times n$ boyutlu olur.

Bundan dolayı ilgili kare matrisin tersi alınabilir veya diğer alternatif yöntemler ile sistemin çözümü yapılabilir.

$$\boxed{x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b}$$

* Bülent ORUÇ, Adnan SONDAŞ, "*Sayısal Çözümleme*", Umuttepe Yayınları

# Örnek*

$$3x-2y=-1$$
$$x+3y=7$$
$$-2x+y=0$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri bulunuz.

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$x=\left(A^TA\right)^{-1}A^Tb$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 7\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

* Bülent ORUÇ, Adnan SONDAŞ, "*Sayısal Çözümleme*", Umuttepe Yayınları

# Az Tanımlı LDS'nin Çözümü

Bağıntı sayısı bilinmeyen sayısından azdır. Böyle bir durumda, sistemin satır boyutu sütun boyutundan daha büyük olmalıdır. (m<n)

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}} \times \overset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}} = \overset{\vec{b}}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}}$$

$$Ax = b$$

# Az Tanımlı LDS'nin Çözümü*

Lagrange çarpanları kuramından yola çıkılarak:

$$x = -\frac{A^T \beta}{2}$$ elde edilir. $$\beta = -2\left(AA^T\right)^{-1} b$$

$$\boxed{x = A^T\left(AA^T\right)^{-1} b}$$

* Bülent ORUÇ, Adnan SONDAŞ, "*Sayısal Çözümleme*", Umuttepe Yayınları

# Örnek*

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 1$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$x = A^T\left(AA^T\right)^{-1}b$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* Bülent ORUÇ, Adnan SONDAŞ, "*Sayısal Çözümleme*", Umuttepe Yayınları

# LU Ayrıştırma Yöntemi ile Çözüm

LU ayrışım yöntemi bir matrisin çarpanlarına ayrılması esasına dayanır. Yöntem doğrusal bağıntılar sistemi çözümlerinde, matris determinantının ve tersinin hesaplanmasında kullanılmaktadır.

Bu yöntemde bir kare matris, alt üçgen *L* ve üst üçgen *U* matrislerinden oluşan çarpanlara ayrılmaktadır.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & & a_{2n} \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & & & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & . & . & l_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & . & . & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & & & u_{2n} \\ 0 & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

| Crout | Doolittle | Cholesky |
|---|---|---|
| $u_{ii}=1$ | $l_{ii}=1$ | $l_{ij}=\mathrm{u}_{\mathrm{ji}}$ , $l_{ii}=u_{ii}$ |

# LU Ayrıştırma Yöntemi ile Çözüm

Ayrıştırma işlemi gerçekleştirildikten sonra:

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad L.\underbrace{U.x}_{z} = b$$

$$\boxed{L.z = b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} l_{11}z_1 = b_1 \\ l_{21}z_1 + l_{22}z_2 = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_{n1}z_1 + l_{n2}z_2 + \dots + l_{nn}z_n = b_n \end{cases}}$$

Şeklini almakta ve ileri doğru süpürme işlemi yapılarak bilinmeyen $z_i$ değerleri hesaplanmaktadır.

# LU Ayrıştırma Yöntemi ile Çözüm

$$U.x = z \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n = z_1 \\ u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n = z_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{nn}x_n = z_n \end{cases}$$

eşitliğinde geriye doğru süpürme ile sistemin çözümüne ulaşılabilir.

MATLAB'daki lu komutu verilen kare matrisin LU ayrışımını gerçekleştirir.
[L,U]=*lu*(A)

# Doolittle Ayrıştırma Yöntemi ile Çözüm

3x3 boyutunda bir matris üzerinde gösterilir ise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \times \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}}_{U}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

Genelleyecek olursak:

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \quad , & \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,n \\ j = i, i+1,\ldots,n \end{matrix} \\ l_{ij} = \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \right) \Big/ u_{jj} \quad , & \begin{matrix} j = 1,2,\ldots,n-1 \\ i = j+1, j+2,\ldots,n \end{matrix} \end{cases}$$

# Örnek*

Aşağıdaki A matrisini alt ve üst üçgen matrislerine ayrıştıralım

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 8 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 8 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

* Bülent ORUÇ, Adnan SONDAŞ, "*Sayısal Çözümleme*", Umuttepe Yayınları

# Örnek*

$$u_{11} = a_{11} = \mathbf{4}$$

$$l_{21}.u_{11} = a_{21} \quad \Rightarrow l_{21} = a_{21}/u_{11} = 2/4 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$l_{31}.u_{11} = a_{31} \quad \Rightarrow l_{31} = a_{31}/u_{11} = \mathbf{2}$$

$$u_{12} = a_{12} = -\mathbf{2}$$

$$l_{21}.u_{12} + u_{22} = a_{22} \quad \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}.u_{12} = 3 - \frac{1}{2}(-2) = \mathbf{4}$$

$$l_{31}.u_{12} + l_{32}.u_{22} = a_{32} \quad \Rightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{31}.u_{12})/u_{22} = [-5 - 2(-2)]/4 = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

* Bülent ORUÇ, Adnan SONDAŞ, "*Sayısal Çözümleme*", Umuttepe Yayınları

# Örnek*

$$u_{13} = a_{13} = \mathbf{1}$$

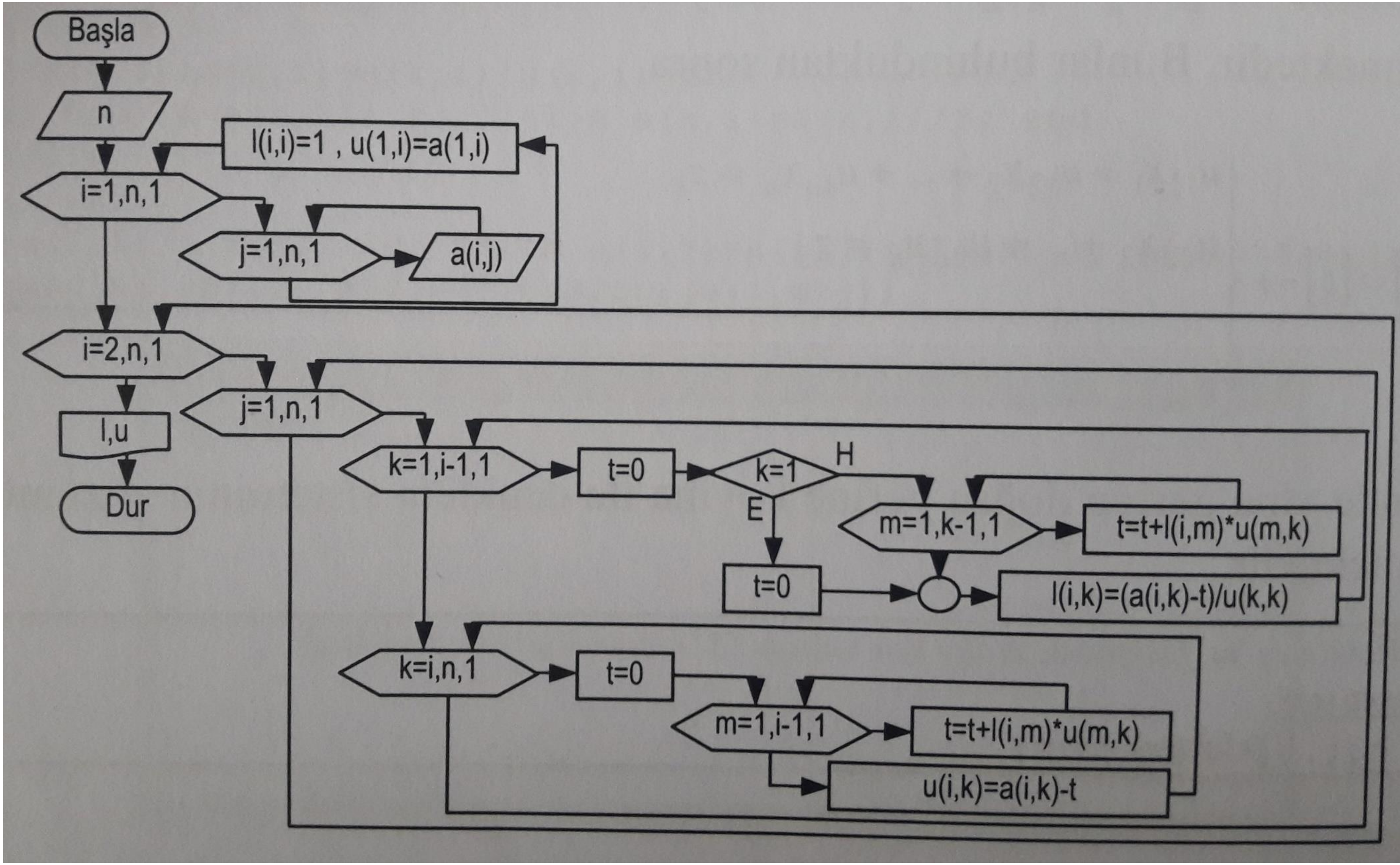
$$\ell_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - \ell_{21}u_{13} = -1 - \frac{1}{2} \times 1 = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

$$\ell_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} \Rightarrow u_{33} = a_{33} - (\ell_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) = 2 - \left[2 \times 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)\right] = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

* Bülent ORUÇ, Adnan SONDAŞ, "*Sayısal Çözümleme*", Umuttepe Yayınları

# Doolittle Ayrıştırma Yöntemi Akış Şeması



# Örnek-MATLAB ile çözümü

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 8 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matris sistemini MATLAB programı ile ayrıştırınız.

```
clc; clear all; close all;
A=[4 -2 1; 2 3 -1; 8 -5 2];
m=length(A);
L=eye(m);
U=zeros(m);
for i=1:m
    for k=1:i-1
        L(i,k)=A(i,k);
        for j=1:k-1
            L(i,k)= L(i,k)-L(i,j)*U(j,k);
        end
        L(i,k) = L(i,k)/U(k,k);
    end
    for k=i:m
        U(i,k) = A(i,k);
        for j=1:i-1
            U(i,k)= U(i,k)-L(i,j)*U(j,k);
        end
    end
end
U;
L;
```

# Yinelemeli Yöntemler

- Büyük katsayılar matrisi içeren lineer denklem sistemlerinin eliminasyon yöntemleriyle çözümü çoğu zaman kolay olmaz. Bu gibi durumlarda iteratif yöntemler seçilir.

- İteratif ve yaklaşık çözümler daha önce anlatılan yerine koyma yöntemlerine alternatif oluştururlar.

- Yinelemeli (iteratif) yöntemler
  - Jacobi Yöntemi
  - Gauss-Siedel Yöntemi

# Jacobi Yöntemi

- Toplam adımlarla yineleme yöntemi olarak ta bilinir.
- Örneğin iki bilinmeyenli bir denklem ele alalım.
  - $a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 = c_1$
  - $a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 = c_2$
- Denklemler tekrar düzenlenirse (bilinmeyenler yalnız bırakılırsa)
  - $x_1 = ( c_1 - a_{12}\ x_2 )/\ a_{11} = f(x_1,x_2)$
  - $x_2 = ( c_2 - a_{21}\ x_1 )/\ a_{22} = g(x_1,x_2)$
- Jacobi iterasyonu bilinmeyenler için bir tahmin ile başlar.
  - Çözüm için bir başlangıç $x_1$ ve $x_2$ değerleri seçilir. (yani $x_0$ vektörü)
    - Örneğin; $X_1 = Ax_o + C$ ve sırasıyla $X_2 = Ax_1 + C$
    - genellersek, $X_k = Ax_{k-1} + C$ ve $X_k$ bilinmeyen vektör elemanları
    - . $x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + c_i\ , \qquad i = 1 : n$
- Durdurma kriteri olarak ya iterasyon sayısı ya da hata sınırlaması kullanılır

$$\max_{i \le i \ge n} \frac{\left| x_i^k - x_i^{k-1} \right|}{x_i^k}$$

# Örnek

Jacobi iterasyon metodu kullanarak aşağıdaki lineer denklem sistemini çözünüz

$$10x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 23$$
$$2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -9$$
$$-x_1 - x_2 + 5x_3 = 12$$

**Çözüm Yolu: yeniden düzenleme**

$$x_1 = (23 - 2x_2 - 3x_3)/10$$
$$x_2 = (-9 - 2x_1 - 3x_3)/(-10)$$
$$x_3 = (12 + x_1 + x_2)/5$$

$x_1 = 0$ , $x_2 = 0$ , ve $x_3 = 0$. keyfi tahminlerle başlıyoruz ve iterasyon aşağıdaki sonuçları verir.

| ITER | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | Hata normu, $E = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i^{new} - x_i^{old} \right|$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | --- |
| 1 | 2.300000 | 0.900000 | 2.400000 | 5.600000 |
| 2 | 1.400000 | 2.080000 | 3.040000 | 2.720000 |
| 3 | 0.972000 | 2.092000 | 3.096000 | 4.960001E-01 |
| 4 | 0.952800 | 2.023200 | 3.012800 | 1.712000E-01 |
| 5 | 0.991520 | 1.994400 | 2.995200 | 8.512014E-02 |
| 6 | 1.002560 | 1.996864 | 2.997184 | 1.548803E-02 |
| 7 | 1.001472 | 1.999667 | 2.999885 | 6.592035E-03 |
| 8 | 1.000101 | 2.000260 | 3.000228 | 2.306700E-03 |
| 9 | 0.9998797 | 2.000089 | 3.000072 | 5.483031E-04 |
| 10 | 0.9999606 | 1.999998 | 2.999994 | 2.506971E-04 |

# Örnek

$$Ax = b \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x = ?$$

- Denklem sisteminin direkt yöntemlerle çözümü x=[0.1667 0.4167 -0.0833 0.1667] dir. Çözümde ondalık sayıdan sonra 4 hane verilmiştir. Aynı denklem sistemini JACOBI iterasyonu ile çözelim. Denklem sistemini

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3), \quad x_2 = \frac{1}{4}(2 - x_1 - x_4), \quad x_3 = \frac{1}{4}(-x_1 - x_4), \quad x_4 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3)$$

şeklinde yazalım. i. bilinmeyenin k. Ve k-1. adımda hesaplanan iki değerinin farkı $x_i^k - x_i^{k-1}$ olmak üzere, $Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| \le \varepsilon$ koşulu **sağlanınca iterasyonu durduralım**. ε=0.0001 seçelim. Çözümde 4 ondalık hane kullanalım. Başlangıç için $x = x^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 0]^T$ alalım.

# Örnek

| k | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0.2500 | 0.5000 | 0 | 0.2500 |
| 2 | 0.1250 | 0.3750 | -0.1250 | 0.1250 |
| 3 | 0.1875 | 0.4375 | -0.0625 | 0.1875 |
| 4 | 0.1563 | 0.4063 | -0.0938 | 0.1563 |
| 5 | 0.1719 | 0.4219 | -0.0782 | 0.1719 |
| 6 | 0.1641 | 0.4141 | -0.0860 | 0.1641 |
| 7 | 0.1680 | 0.4180 | -0.0821 | 0.1680 |
| 8 | 0.1660 | 0.4160 | -0.0840 | 0.1660 |
| 9 | 0.1670 | 0.4170 | -0.0830 | 0.1670 |
| 10 | 0.1665 | 0.4165 | -0.0835 | 0.1665 |
| 11 | 0.1668 | 0.4168 | -0.0833 | 0.1667 |
| 12 | 0.1666 | 0.4166 | -0.0834 | 0.1666 |
| 13 | 0.1667 | 0.4167 | -0.0833 | 0.1667 |

Başlangıç değerleri

$Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| = |x_4^2 - x_4^1| = |0.1250 - 0.2500| = 0.1250 > \varepsilon = 0.0001$ olduğundan **iterasyona devam!**

$|0.1875 - 0.1250| = 0.0625 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1660 - 0.1680| = 0.0020 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1668 - 0.1665| = 0.0003 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

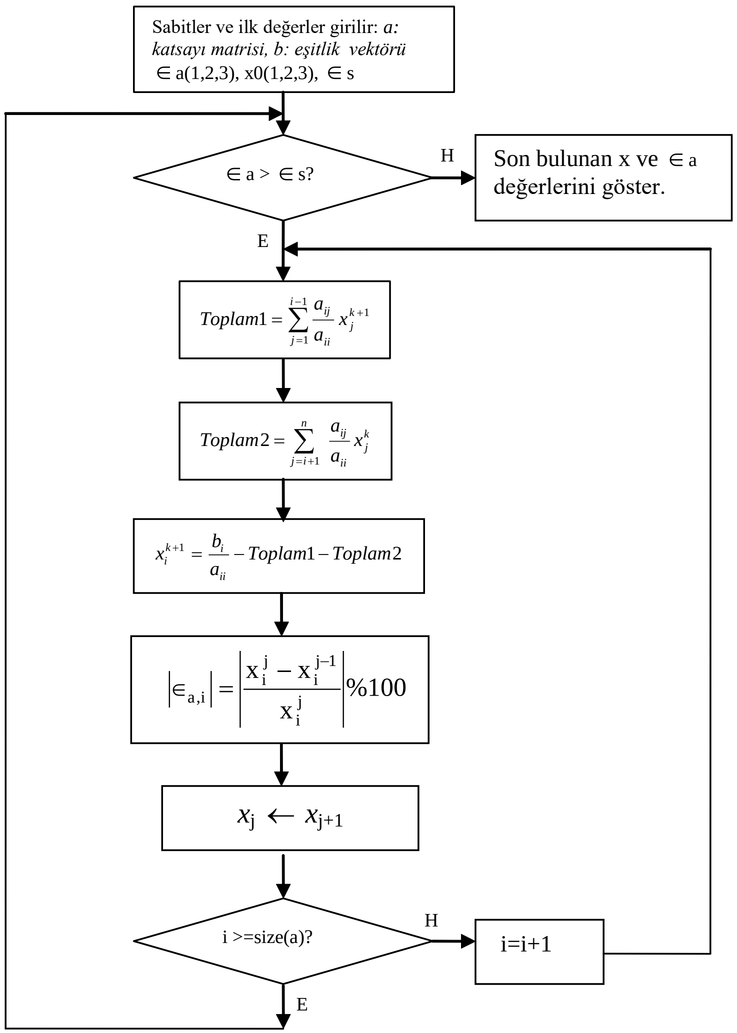
$|0.1667 - 0.1666| = 0.0001 = \varepsilon = 0.0001$. **iterasyon durduruldu**

*İterasyon no*

13. iterasyon sonunda bulunan çözüm

Çözüm: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.4167 \\ -0.0833 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$

# Jacobi Yöntemi - MATLAB




```matlab
clc; close all; clear all;

a=[4 1 1 0;1 4 0 1;1 0 4 1;0 1 1 4]
b=[1;2;0;1]

x0=[0;0;0;0]; %başlangıç değeri

[satir sutun]=size(a);
tol=0.0001;
hata=1;
iter=0;
while hata>tol
    iter=iter+1;
    for i=1:satir
        fark=0;
        for j=1:sutun
            if i==j
                fark=fark;
            else
                fark=fark+a(i,j)*x0(j);
            end
        end
        x(i,1)=(b(i)-fark)/a(i,i);
    end
    hata=max(abs(x-x0));
    x0=x;
end
iter
x
```

# Gauss-Siedel Yöntemi

- En çok kullanılan iteratif yöntemdir.
- Değişkenlerin yeni değerleri, tüm değişkenler için bir iterasyonun tamamlanması beklenmeden, sonraki hesaplamalarda kullanılır.
- 3'e 3'lük bir denklem sistemi üzerinde Gauss-Siedel yönteminin çalışması.

Başlangıç koşulları: $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3$$

$$x_1=\frac{b_1-a_{12}\overset{0}{x_2}-a_{13}\overset{0}{x_3}}{a_{11}}$$

$$x_2=\frac{b_2-a_{21}x_1-a_{23}\overset{0}{x_3}}{a_{22}}$$

$$x_3=\frac{b_3-a_{31}x_1-a_{32}x_2}{a_{33}}$$

n değişken için Gauss-Siedel formülü;

$$\boxed{x_i^{k+1}=\frac{b_i}{a_{ii}}-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{k+1}-\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{k}}$$

Yakınsama koşulu $\left|a_{ii}\right|\geq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}\right|$

# Örnek

Aşağıdaki denklemi Gauss-Siedel yöntemini kullanarak 2 iterasyon için çözünüz?

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad -0.1x_2 \quad -0.2x_3 &= 7.85 \\
0.1x_1 \quad +7x_2 \quad -0.3x_3 &= -19.3 \\
0.3x_1 \quad +0.2x_2 \quad +10x_3 &= 71.4
\end{aligned}
$$

❶**Bilinmeyen *x* değerlerini diğerleri cinsinden bul**

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3}$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7}$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}$$

❷ **İterasyon 0 için $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$**

❸ **İterasyon 1**

**$x_1$ hesabı için, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$**

$$x_1 = \frac{7.85 + 0 + 0}{3} = 2.616667$$

**$x_2$ hesabı için, $x_1 = 2.616667$, $x_3 = 0$**

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.616667) + 0}{7} = -2.794524$$

**$x_3$ hesabı için, $x_1 = 2.616667$, $x_2 = -2.794524$**

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.616667) + 0.2(-2.794524)}{10} = 7.005610$$

# Örnek

❹ **İterasyon 2**

**$x_1$ hesabı için, $x_2$ = -2.794524, $x_3$ = 7.005610,**

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(-2.794524) + 0.2(7.005610)}{3} = 2.990557$$

**$x_2$ hesabı için, $x_1$ = 2.990557, $x_3$ = 7.005610**

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.990557) + 0.3(7.005610)}{7} = -2.499625$$

**$x_3$ hesabı için, $x_1$ = 2.990557, $x_2$ = -2.499625,**

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.990557) + 0.2(-2.499625)}{10} = 7.000291$$

Hatayı tahmin etmek için bilinmeyenlerin bağıl yaklaşım yüzde hatalarına bakılır. Örneğin $x_1$ için:

$$\left|\in_{a,1}\right| = \left|\frac{2.990557 - 2.616667}{2.990557}\right| \%100 = \%12.5$$ ’tir. $x_2$ ve $x_3$ için hata tahminleri

$$\left|\in_{a,2}\right| = \left|\frac{-2.499625 - 2.794524}{-2.499625}\right| \%100 = \%11.8$$

$$\left|\in_{a,3}\right| = \left|\frac{7.000291 - 7.005610}{7.000291}\right| \%100 = \%0.076$$

Bu şekilde tüm hatalar belirlenen bir tolerans sınırı altına düşene kadar iterasyona devam edilir.

# Örnek

$$Ax = b \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x = ?$$

Denklem sisteminin direkt yöntemlerle çözümü x=[0.1667 0.4167 -0.0833 0.1667] dir. Çözümde ondalık sayıdan sonra 4 hane verilmiştir. Aynı denklem sistemini GAUSS-SIEDEL iterasyonu ile çözelim. Denklem sistemini

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3), \quad x_2 = \frac{1}{4}(2 - x_1 - x_4), \quad x_3 = \frac{1}{4}(-x_1 - x_4), \quad x_4 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3)$$

şeklinde yazalım. i. bilinmeyenin k. Ve k-1. adımda hesaplanan iki değerinin farkı $x_i^k - x_i^{k-1}$ olmak üzere, $Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| \leq \varepsilon$ koşulu **sağlanınca iterasyonu durduralım**. ε=0.0001 seçelim. Çözümde 4 ondalık hane kullanalım. Başlangıç için $x = x^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 0]^T$ alalım.

# Örnek

| k | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0.2500 | 0.4375 | -0.0625 | 0.1563 |
| 2 | 0.1563 | 0.4219 | -0.0782 | 0.1641 |
| 3 | 0.1641 | 0.4180 | -0.0821 | 0.1660 |
| 4 | 0.1660 | 0.4170 | -0.0830 | 0.1665 |
| 5 | 0.1665 | 0.4168 | -0.0833 | 0.1666 |
| 6 | 0.1666 | 0.4167 | -0.0833 | 0.1667 |
| 7 | 0.1667 | 0.4167 | -0.0834 | 0.1667 |

Başlangıç değerleri

$Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| = |x_1^2 - x_1^2| = |0.1563 - 0.2500| = 0.0937 > \varepsilon = 0.0001$ olduğundan **iterasyona devam!**

$|0.1641 - 0.1563| = 0.0078 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

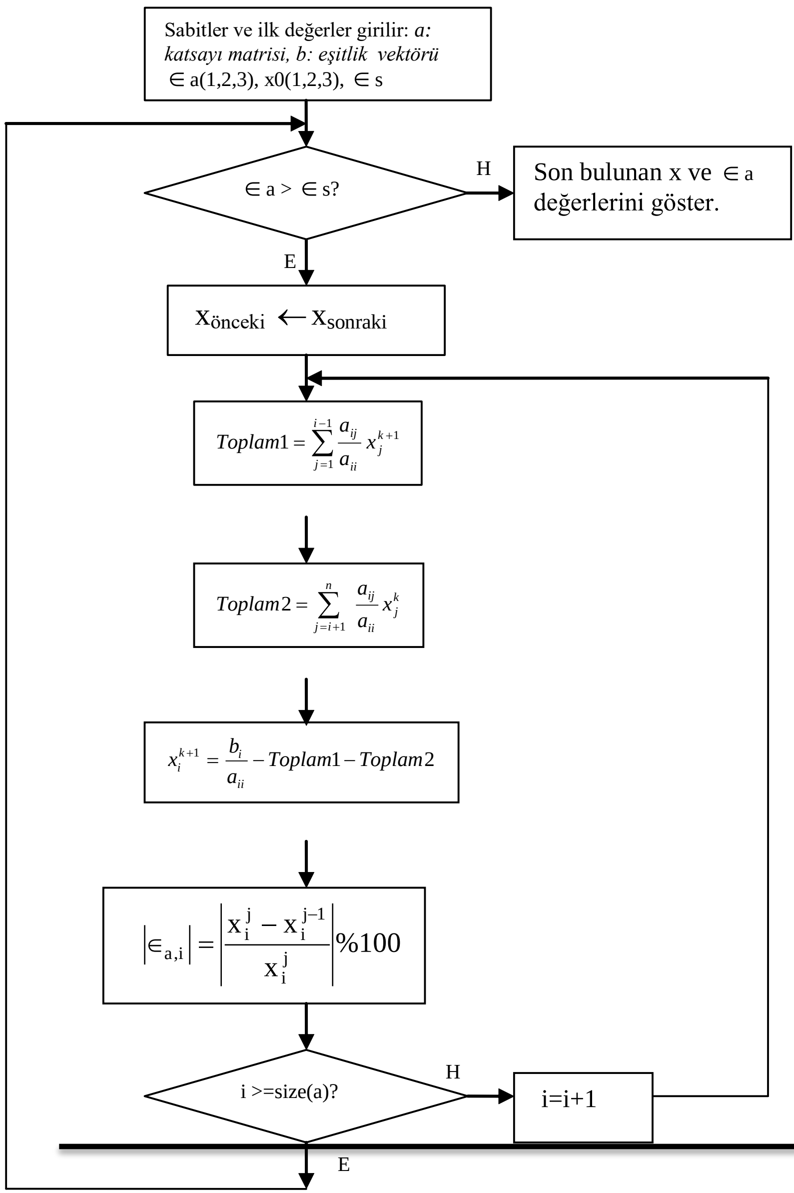
$|0.1667 - 0.1666| = 0.0001 = \varepsilon = 0.0001$, **iterasyonu durdur!**

İterasyon adımları

7. iterasyon sonunda bulunan çözüm

Çözüm: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.4167 \\ -0.0834 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$

# Gauss-Siedel Yöntemi - MATLAB




```
clc; close all; clear all;

a=[4 1 1 0;1 4 0 1;1 0 4 1;0 1 1 4]
b=[1;2;0;1]

x0=[0;0;0;0]; %başlangıç değeri

[satir sutun]=size(a);
tol=0.0001;
hata=1;
iter=0;
while hata>tol
    x=x0;
    iter=iter+1;
    for i=1:satir
        fark=0;
        for j=1:sutun
            if i==j
                fark=fark;
            else
                fark=fark+a(i,j)*x(j);
            end
        end
        x(i,1)=(b(i)-fark)/a(i,i);
    end
    hata=max(abs(x-x0));
    x0=x;
end
iter
x
```

# Jacobi ile Gauss-Siedel Yöntemlerinin karşılaştırılması

Birinci iterasyon

$$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$$

$$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$$

$$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$$

İkinci iterasyon

$$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$$

$$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$$

$$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$$

(a)

Gauss-Siedel

$$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$$

$$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$$

$$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$$

$$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$$

$$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$$

$$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$$

(b)

Jacobi

Her *x* değeri bulundukça bir sonraki *x* değerini belirleyen denklemde hemen hesaplanır.
Eğer çözüm yakınsıyorsa her zaman en iyi tahminler kullanılmış olur.

Her iterasyonda hesaplanan bütün *x* değerleri bir sonraki *x* değerleri bulunurken toplu olarak yerine koyulur.

# Örnek

$$-2x + y = -1$$
$$2x - 3y = 5$$

denklem sistemini Jacobi ve Gauss-Siedel yöntemleri ile çözen MATLAB programlarını yazınız.

# KAYNAKLAR

## ❖ Diğer Kaynaklar


- Bülent ORUÇ, Adnan SONDAŞ, "*Sayısal Çözümleme*", Umuttepe Yayınları
- Fahri VATANSEVER, "*Sayısal Hesaplama ve Programlama*", Seçkin Yayınları, 2018.
- Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), "*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*", Literatür Yayıncılık.
- Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar ile Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR "*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*",Seçkin Yayıncılık
- İrfan Karagöz, "*Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları*", VİPAŞ Yayınevi, 2001.
- Cüneyt Bayılmış, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi