《高等数学》第六章习题解答

习题6.1

3. 设$E\subset\mathbb{R}^2$为任意一个集合, ∂E为E的边界点集合. 试证明$\bar{E}=E\cup\partial E$是一个闭集合.

证. 设$P\notin\bar{E}$. 则P必为E的一个外点. 因此存在正数r, 使得P的r邻域$U_r(P)$与E不相交. 进一步地, $U_r(P)$中的任意一点都为E的外点, 因为$U_r(P)$中任意一点都可以找到一个包含在$U_r(P)$中的邻域, 该邻域显然与E不相交. 于是$U_r(P)\cap\partial E=\emptyset$. 因此$P$为$\bar{E}$的外点. 于是$\bar{E}$包含它的所有边界点, 即$\bar{E}$为一个闭集合.

习题6.2

3. 讨论当$(x,y)\to(0,0)$时, 下列函数是否有极限, 若有极限, 求出其值.

(1) $f(x,y)=(x+2y)\ln(x^2+y^2)$. $\frac{x+2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$是有界量, 且$\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)\to 0$. 所以$f$的极限为$0$.

(2) $f(x,y)=\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$. $\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$的极限为$\frac{1}{2}$, 而$\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$无极限. 所以$f$的极限不存在.

(3) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{x^2y^2}$. 类似于第(1)题, $\ln(x^2+y^2)^{x^2y^2}=x^2y^2\ln(x^2+y^2)$的极限为$0$, 所以$f$的极限为$0$.

(4) $f(x,y)=\frac{P_n(x,y)}{\rho^{n-1}}$, 其中$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $P_n(x,y)$为x,y的n次齐次多项式. 因为$\frac{x^{n-1}}{\rho^{n-1}}$为有界量, 所以$\frac{x^n}{\rho^{n-1}}$的极限为$0$. 同理$\frac{x^my^{n-m}}{\rho^{n-1}}$的极限都为$0$, $0\le m\le n$. 所以f的极限为0.

习题6.3

2. 设$\bar{D}$是Oxy平面上的有界闭区域, $P_0(x_0,y_0)$是D的外点. 证明: 在$\bar{D}$内一定存在与P_0的距离最长的点, 也存在与P_0距离最短的点.

证. 设$f(x,y)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 则$f$在$\bar{D}$上连续. 因此$f$在$\bar{D}$内一点处达到最大值, 该点即为$\bar{D}$内与$P_0$的距离最长的点. 同理可证存在与$P_0$距离最短的点.

3. 设函数$f(x,y)$在区域D内连续, 又点$(x_i,y_i)\in D$ $(i=1,2,\dots,n)$. 证明: 在D内存在点(ξ,η), 使$f(\xi,\eta)=\frac{1}{n}[f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)+\cdots+f(x_n,y_n)]$.

证. 选取一个位于D内, 包含点$(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$的有界闭区域$E$. 则$f$在$E$上连续. 设$f$在$E$上的最大, 最小值分别为$M,m$. 则$m\le\frac{1}{n}[f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)+\cdots+f(x_n,y_n)]\le M$. 根据介值定理, 存在$(\xi,\eta)\in E$, 使得$f(\xi,\eta)=\frac{1}{n}[f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)+\cdots+f(x_n,y_n)]$.

习题6.4

3. 证明函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点$(0,0)$处连续, 但$f'_x(0,0)$不存在.

证. 当$(x,y)\to(0,0)$时, 因为$\frac{x}{|x|+|y|}$是有界量, 而x是无穷小量, 因此$\frac{x^2}{|x|+|y|}\to 0$. 同理$\frac{y^2}{|x|+|y|}\to 0$. 于是$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, $f(x,y)$在$(0,0)$点连续. 但函数$f(x,0)=|x|$在$x=0$处不可导, 因此$f'_x(0,0)$不存在.

4. 设$z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$. 证明: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{2}$.

证. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}+\sqrt{x}(-\frac{y}{x^2})\sin\frac{y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}$. 代入方程即可.

5. 求下列函数的二阶混合偏导数f''_{xy}.

(1) $f(x,y)=\ln(2x+3y)$. $f'_x=\frac{2}{2x+3y}$, $f''_{xy}=-\frac{6}{(2x+3y)^2}$.

(2) $f(x,y)=y\sin x+e^x$. $f'_y=\sin x$, $f''_{xy}=\cos x$.

(3) $f(x,y)=x+xy^2+4x^3-\ln(x^2+1)$. $f'_y=2xy$, $f''_{xy}=2y$.

(4) $f(x,y)=x\ln(xy)$. $f'_y=\frac{x}{y}$, $f''_{xy}=\frac{1}{y}$.

9. 已知函数$z(x,y)$满足$\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\frac{1}{1-xy}$ 以及$z(0,y)=2\sin y+y^2$. 试求$z(x,y)$的表达式.

解. $z=-x\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-xy|+\varphi(y)$. 代入初值条件, 得$\varphi(y)=2\sin y+y^2$. 所以$z=-x\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-xy|+2\sin y+y^2$.

10. 求下列函数的全微分.

(1) $z=e^{\frac{y}{x}}$. $dz=e^{\frac{y}{x}}d\frac{y}{x}=e^{\frac{y}{x}}\frac{xdy-ydx}{x^2}$.

(2) $z=\frac{x+y}{x-y}$. $dz=\frac{(x-y)d(x+y)-(x+y)d(x-y)}{(x-y)^2}=\frac{2xdy-2ydx}{(x-y)^2}$.

(3) $z=\arctan\frac{y}{x}+\arctan\frac{y}{x}$. $z=\frac{\pi}{2}$, $dz=0$.

(4) $z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. $dz=\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

12. 设$z(x,y)$的全微分为$dz=(x-\frac{y}{x^2+y^2})dx+(y+\frac{x}{x^2+y^2})dy$, 求$z(x,y)$的表达式.

解. 凑微分得$dz=\frac{1}{2}dx^2+\frac{1}{2}dy^2+d\arctan\frac{y}{x}$. 因此$z(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+\arctan\frac{y}{x}+C$.

14. 证明函数$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在点$(0,0)$处连续, $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$存在, 但$f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微.

证. $f(x,y)$为初等函数, 因此在$(0,0)$点处连续. 又$f(x,0)=f(0,y)=0$, 因此$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$.
若$f(x,y)$在$(0,0)$处可微, 则$f(x,y)$在$(0,0)$处的方向导数都为$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)$的线性组合, 因此都为0. 但$f(x,y)$沿向量$(1,1)$的方向导数为$\frac{d}{dt}f(\frac{t}{\sqrt{2}},\frac{t}{\sqrt{2}})|_{t=0+0}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 得出矛盾.

16. 设函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

(1) 计算$f'_x(0,y)$ $(y\neq 0)$;
(2) 根据偏导数定义证明$f'_x(0,0)=0$;

(3) 在上述结果的基础上, 证明$f''_{xy}(0,0)=-1$;
(4) 重复上述步骤与$f'_y(x,0)$, 并证明$f''_{yx}(0,0)=1$.

解. (1) $f'_x(x,y)=\frac{(x^2+y^2)(3x^2y-y^3)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$, 因此$f'_x(0,y)=-y$ $(y\neq 0)$.
(2) $f(x,0)=0$, 因此$f'_x(0,0)=0$.
(3) 综上所述$f'_x(0,y)=-y$, 因此$f''_{xy}(0,0)=-1$.
(4) 同理可证$f'_y(x,0)=x$, 因此$f''_{yx}(0,0)=1$.

17. 设$z=x\ln(xy)$, 求$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$及$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

解. $z=x\ln x+x\ln y$, $\frac{\partial z}{\partial x}=1+\ln x+\ln y$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=-\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}$.

习题6.5

2. 设$u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$, 求$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

解. 设$s=x+y+z$, $t=x^2+y^2+z^2$. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}+2x\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+2x\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+2\frac{\partial f}{\partial t}+2x\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$. 同理计算$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. 所以$\Delta u=3\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+2(x+y+z)(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s})+6\frac{\partial f}{\partial t}+4(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$.

8. 若$f(x,y,z)$满足关系式$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$, 其中t为任意实数, 则称$f(x,y,z)$为n次齐次函数. 证明: 任意一个可微的n次齐次函数均满足下列方程: $xf'_x+yf'_y+zf'_z=nf$.

证. 将等式$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$两边看做x,y,z,t的函数, 对t求偏导数, 得$xf'_x(tx,ty,tz)+yf'_y(tx,ty,tz)+zf'_z(tx,ty,tz)=nt^{n-1}f(x,y,z)$. 然后令$t=1$, 得$xf'_x+yf'_y+zf'_z=nf$.

10. 设$z=f(x,y)$在全平面有定义, 且有连续的一阶偏导数, 满足方程$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=0$. 证明: 存在一个函数$F(\theta)$, 使得$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=F(\theta)$, $r>0$.

证. 做变量替换$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r>0$, $\theta\in(-\infty,+\infty)$. 则$z'_r=f'_x\cos\theta+f'_y\sin\theta=\frac{1}{r}(xf'_x+yf'_y)=0$. 由第9题结论, z可表为变量θ的函数. 即存在一个函数$F(\theta)$, 使得$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=F(\theta)$.

习题6.6

9. 证明函数$f(x,y)=\frac{y}{x^2}$在椭圆周$x^2+2y^2=1$ 上任一点处沿椭圆周法方向的方向导数等于0.

证. $f'_x=\frac{-2y}{x^3}$, $f'_y=\frac{1}{x^2}$. 由隐函数求导得$2x+4yy'=0$, 因此椭圆在点(x,y)处的法向量为$\mathbf{n}=(2x,4y)$. 函数f沿$\mathbf{n}$的方向导数为$\frac{-2y}{x^3}\frac{2x}{|\mathbf{n}|}+\frac{1}{x^2}\frac{4y}{|\mathbf{n}|}=0$.

习题6.7

1. 求函数$f(x,y)=xy-y$在$(1,1)$点的二阶泰勒多项式.

解. $f(1+\Delta x,1+\Delta y)=(1+\Delta x)(1+\Delta y)-(1+\Delta y)=\Delta x+\Delta x\Delta y$. 因此$f$在$(1,1)$点的二阶泰勒多项式为$\Delta x+\Delta x\Delta y$.

2. 在点$(0,0)$的邻域内, 将下列函数按带皮亚诺型余项展开成泰勒公式(到二阶).

(1) $f(x,y)=\frac{\cos x}{\cos y}$.

解. $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$, $x\to 0$. $\cos y=1-\frac{1}{2}y^2+o(y^2)$, 故$\frac{1}{\cos y}=1+\frac{1}{2}y^2+o(y^2)$, $y\to 0$. 因此$f(x,y)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+o(\rho^2)$, $\rho\to 0$.

(2) $f(x,y)=\ln(1+x+y)$.

解. $\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)$, $u\to 0$. 因此$f(x,y)=(x+y)-\frac{1}{2}(x+y)^2+o((x+y)^2)=(x+y)-\frac{1}{2}(x+y)^2+o(\rho^2)$, $\rho\to 0$.

(3) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解. $\sqrt{1-u}=1-\frac{1}{2}u+o(u)$, $u\to 0$. 因此$f(x,y)=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+o(x^2+y^2)=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+o(\rho^2)$, $\rho\to 0$.

(4) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$.

解. $f(x,y)=(x^2+y^2)+o(x^2+y^2)=(x^2+y^2)+o(\rho^2)$, $\rho\to 0$.

3. 在点$(0,0)$的邻域内, 将函数$f(x,y)=\ln(1+x+y)$按拉格朗日型余项展开成泰勒公式(到一阶).

解. $f'_x=f'_y=\frac{1}{1+x+y}$, $f''_{xx}=f''_{yy}=f''_{xy}=-\frac{1}{(1+x+y)^2}$. 因此$f(x,y)=x+y-\frac{1}{2}\frac{x^2+2xy+y^2}{(1+\theta x+\theta y)^2}$, $0<\theta<1$.

5. 设D是单位圆, 即$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$, 又设函数$f(x,y)$在$D$内有连续的偏导数且满足: $xf'_x(x,y)+f'_y(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in D$. 证明: $f(x,y)$在D内是一常数.

证. 由点$(0,0)$及点(x,y)的拉格朗日中值定理, 得$f(x,y)=f(0,0)+xf'_x(\theta x,\theta y)+yf'_y(\theta x,\theta y)$, $0<\theta<1$. 由题设条件, $\theta xf'_x(\theta x,\theta y)+\theta yf'_y(\theta x,\theta y)=0$, 因此$f(x,y)=f(0,0)$, 即$f(x,y)$为一常数.

习题6.8

2. 设由方程$f(xy^2,x+y)=0$确定的隐函数为$y=y(x)$, 求$\frac{dy}{dx}$.

解. $f'_1\cdot(y^2+2xyy')+f'_2\cdot(1+y')=0$. 因此$y'=-\frac{y^2f'_1+f'_2}{2xyf'_1+f'_2}$.

3. 设$z+\cos xy=e^z$, 求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解. $z'_x-y\sin xy=e^zz'_x$, 因此$z'_x=\frac{y\sin xy}{1-e^z}$, $z''_{xx}=\frac{(1-e^z)y^2\cos xy+e^zz'_xy\sin xy}{(1-e^z)^2}=\frac{(1-e^z)^2y^2\cos xy+e^zy^2\sin^2 xy}{(1-e^z)^3}$.

习题6.9

1. 求下列函数$z=z(x,y)$的极值.

(1) $z=x^2(x-1)^2+y^2$. $z'_x=2x(x-1)(2x-1)$, $z'_y=2y$. 得稳定点$(0,0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(1,0)$. $z''_{xx}=12x^2-12x+2$, $z''_{xy}=0$, $z''_{yy}=2$. 因此$(0,0),(1,0)$为极小值点, $(\frac{1}{2},0)$不是极值点.

4. 已知三角形的周长为$2p$, 问怎样的三角形绕自己的一边旋转一周所得的体积最大.

解. 设三角形三边长为x,y,z, $x+y+z=2p$. 则三角形面积为$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$. 三角形到长为$x$的边的高为$h=\frac{2S}{x}$, 因此绕长为$x$的边旋转所得的体积为$V(x,y,z)=\frac{1}{3}\pi h^2 x=\frac{4\pi p(p-x)(p-y)(p-z)}{3x}$. 求条件极值, 得稳定点$(p,p,0)$, $(p,0,p)$, $(\frac{p}{2},\frac{3p}{4},\frac{3p}{4})$. 因此三角形三边长为$\frac{p}{2},\frac{3p}{4},\frac{3p}{4}$时, 绕长为$\frac{p}{2}$的边旋转所得体积最大.

6. 求椭球面$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$与平面$x+y+z=0$的交线上的点到坐标原点的最大距离与最小距离.

解. 令$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2+\frac{z^2}{4}-1)+\mu(x+y+z)$. 解$F$的稳定点, 得$(x,y,z)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\mp\frac{2}{\sqrt{3}})$. 因此最大距离为$\sqrt{2}$, 最小距离为1.

8. 当n个正数$x_1,\dots,x_n$的和等于常数l时, 求它们的乘积的最大值. 并证明: n个正数$a_1,\dots,a_n$的几何平均值小于算术平均值, 即$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\le\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.

解. 求函数$f(x_1,\dots,x_n)=x_1\cdots x_n$在条件$x_1+\cdots+x_n=l$下的极值.
令$F(x_1,\dots,x_n,\lambda)=x_1\cdots x_n+\lambda(x_1+\cdots+x_n-l)$, $x_i\ne 0$, 解F的稳定点, 得$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{l}{n}$. 因此当$n$个正数全等时, 其乘积最大, 最大值为$(\frac{l}{n})^n$.
设$a_1+\cdots+a_n=l$, 由前一结论, $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\le\frac{l}{n}=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.

9. 在椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上哪些点处, 其切线与坐标轴构成的三角形的面积最小.

解. 设$x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$. 椭圆周的切向量为$(x',y')=(-a\sin\theta,b\cos\theta)$, 切线方程为$b\cos\theta(x-a\cos\theta)+a\sin\theta(y-b\sin\theta)=0$, 即$b\cos\theta x+a\sin\theta y=ab$. 因此与$x,y$轴的截距为$\frac{a}{\cos\theta}$, $\frac{b}{\sin\theta}$, 三角形面积为$\frac{ab}{2|\sin\theta\cos\theta|}=\frac{ab}{|\sin 2\theta|}$. 因此$\theta=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$时, 即$|x|=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $|y|=\frac{b}{\sqrt{2}}$时, 三角形面积最小.

习题6.10

1. 在指定的点求出曲面的切平面.

(2) $z=x^2-y^2$在$(2,1,3)$点.

解. 令$\vec{r}(x,y)=(x,y,x^2-y^2)$. $\vec{r}_x'(2,1)=(1,0,4)$, $\vec{r}_y'(2,1)=(0,1,-2)$. 因此所求切平面法向量为$(4,-2,-1)$, 方程为$4(x-2)-2(y-1)-(z-3)=0$.

(3) $x=\operatorname{ch}\rho\cos\theta$, $y=\operatorname{ch}\rho\sin\theta$, $x=\rho$, 在$\rho=1$, $\theta=\frac{\pi}{2}$对应的点.

解. 令$\vec{r}(\rho,\theta)=(\operatorname{ch}\rho\cos\theta,\operatorname{ch}\rho\sin\theta,\rho)$. $\vec{r}(1,\frac{\pi}{2})=(0,\operatorname{ch}1,1)$,
$\vec{r}_\rho'(1,\frac{\pi}{2})=(\operatorname{sh}\rho\cos\theta,\operatorname{sh}\rho\sin\theta,1)|_{(1,\frac{\pi}{2})}=(0,\operatorname{sh}1,1)$,
$\vec{r}_\theta'(1,\frac{\pi}{2})=(-\operatorname{ch}\rho\sin\theta,\operatorname{ch}\rho\cos\theta,0)|_{(1,\frac{\pi}{2})}=(-\operatorname{ch}1,0,0)$.
因此所求切平面方程为$\begin{vmatrix} x & y-\operatorname{ch}1 & z-1 \\ 0 & \operatorname{sh}1 & 1 \\ -\operatorname{ch}1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$,
即$(y-\operatorname{ch}1)-\operatorname{sh}1(z-1)=0$.

(4) $e^z-2z+xy=3$, 在$(2,1,0)$点.

解. 函数$F(x,y,z)=e^z-2z+xy-3$在$(2,1,0)$点的梯度向量为$(y,x,e^z-2)|_{(2,1,0)}=(1,2,-1)$. 因此所求切平面方程为$(x-2)+2(y-1)-z=0$.

第六章总练习题

1. 若$f(\frac{y}{x})=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, 求$f(x)$.

解. 令$x=1$, 得$f(y)=\frac{1}{(1+y^2)^{3/2}}$. 因此$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$.

3. 若已知当$x\neq 0$且$x+y\neq 0$时, $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$, 求$f(x,y)$.

解. 设$u=x+y, v=\frac{y}{x}$, 则$x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}$. 因此$f(u,v)=\frac{u^2(1-v^2)}{(1+v)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$.
所以$f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}$, $(x\neq 0, y\neq -1)$.

6. 求下列函数的不连续点集合.

(1) $f(x,y)=[y]\operatorname{sgn}x$, 其中$[y]$表示$y$的整数部分.

解. (a) 当$x\neq 0$且$y\notin\mathbb{Z}$时, $f(x,y)$为局部常值函数, 显然连续.
(b) 当$0<y<1$时, $f(x,y)=0$, 显然连续.
(c) 当(x_0,y_0)位于其它点时, (x,y)沿直线$y-y_0=x-x_0$趋于(x_0,y_0)时函数f无极限, 因此$f(x,y)$在(x_0,y_0)不连续.
综上所述, f的不连续点的集合为$\{(x,y)\mid x\neq 0,\ y\in\mathbb{Z}\}\cup\{(0,y)\mid y\leq 0$或$y\geq 1\}$.

(2) $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x^2-y)$.

解. 当$y>x^2$或$y<x^2$时, $f(x,y)$为常数函数, 因此连续. 设$y_0=x_0^2$. 由于$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y>x^2}}f(x,y)=-1$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y<x^2}}f(x,y)=1$, 函数$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$不连续. 所以$f$的不连续点的集合是抛物线$y=x^2$.

10. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\arctan(xy)}{xy}$, 其中$xy\neq 0$. 令$z(x,y)=xy$, 则$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}z(x,y)=0$, 所以原式$=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\arctan z}{z}=1$.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$, 其中$xy\neq 0$. 令$z=\sqrt{|xy|}$, 原式$=\lim\limits_{z\to 0}\frac{4-4\cos z}{z^2}=2$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(2x^2-y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$. 当$(x,y)\to(0,0)$时, $2x^2-y^2\to 0$, 而$\sin\frac{1}{x^2+y^2}$是有界量. 所以所求极限为0.

12. 设函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 证明: (1) 在$(0,0)$的邻域内, $f'_x(x,y)$与$f'_y(x,y)$存在, 但这两个偏导数在$(0,0)$处不连续; (2) $f(x,y)$在$(0,0)$点可微.

证. (1) 计算得$f'_x(x,y)=\begin{cases}2x[\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}], & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$
因此$f'_x(x,y)$处处存在. 但当(x,y)沿x轴趋于$(0,0)$时, $f'_x(x,y)=2x[\sin\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}]$没有极限, 因此$f'_x(x,y)$在$(0,0)$不连续. 对$f'_y(x,y)$同理可证.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho^2}=0$, 其中$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.
因此$f(x,y)=o(\rho)$, $\rho\to 0$. 因此f在$(0,0)$可微.

16. 设$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$, 求雅可比行列式$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}$.

解. $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r$.

17. 设$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\rho\cos\varphi$, 求雅可比行列式$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)}$.

解. $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\end{vmatrix}$. 按第三行展开行列式, 得$\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\cos\varphi+\rho\sin\varphi\cdot\rho\sin^2\varphi=\rho^2\sin\varphi$.

21. 设函数$f(x,y)$在$(2,3)$处沿$\mathbf{i}+\mathbf{j}$方向的方向导数为$2\sqrt{2}$, 沿$-2\mathbf{j}$的方向导数为-3, 其中$\mathbf{i},\mathbf{j}$为单位坐标向量. 求$f(x,y)$在$(2,3)$处沿$2\mathbf{i}+\mathbf{j}$的方向导数.

解. 设$\operatorname{grad}f|_{(2,3)}=(a,b)$. 则$\frac{1}{|\mathbf{i}+\mathbf{j}|}(1,1)\cdot(a,b)=2\sqrt{2}$, $\frac{1}{|-2\mathbf{j}|}(0,-2)\cdot(a,b)=-3$. 解得$(a,b)=(1,3)$. 因此沿$2\mathbf{i}+\mathbf{j}$的方向导数为$\frac{1}{|2\mathbf{i}+\mathbf{j}|}(2,1)\cdot(1,3)=\sqrt{5}$.

23. 设函数$z=f(x,y)$可微. 又已知$\frac{\partial z}{\partial x}=x^2+y$, 且当$y=x$时, 有$f(x,x)=x^2$, 求$f(x,y)$的表达式.

解. 求不定积分, 得$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+xy+\varphi(y)$. 代入$f(x,x)=x^2$, 得$\frac{1}{3}x^3+x^2+\varphi(x)=x^2$, 因此$\varphi(y)=-\frac{1}{3}y^3$, $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+xy-\frac{1}{3}y^3$.

27. 在图6.22所示的并联电路中, 总电阻R由下式确定: $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$, 求$\frac{\partial R}{\partial R_1}$在$R_1=30, R_1=45, R_1=90$时的值.

解. 等式$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$两边求关于$R_1$的偏导数, 得$-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial R_1}=-\frac{1}{R_1^2}$. 代入$R_1=30, R_1=45, R_1=90$, 得$R=15$, $\frac{\partial R}{\partial R_1}=\frac{1}{4}$.

29. 设函数$z=z(x,y)$由方程$ax+by+cz=F(x^2+y^2+z^2)$所确定, 其中$F(u)$为可微函数, a,b,c为常数. 证明: $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$.

证. 方程两边求关于x,y的偏导数, 得$a+cz'_x=F'(x^2+y^2+z^2)(2x+2zz'_x)$, $b+cz'_y=F'(x^2+y^2+z^2)(2y+2zz'_y)$. 因此$\frac{a+cz'_x}{2x+2zz'_x}=\frac{b+cz'_y}{2y+2zz'_y}$. 整理, 得$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$.

31. 求函数$f(x,y)=x^2+xy+y^2-6x+2$在矩形域$0\le x\le 5, -3\le y\le 0$ 上的最大值与最小值.

解. $f'_x=2x+y-6$, $f'_y=x+2y$, 得f的稳定点$(4,-2)$. $f(4,-2)=-10$.
$f(0,y)=y^2+2$, 因此在矩形域的左边f的最值为$0,11$.
$f(5,y)=y^2+5y-3$, 因此在矩形域的右边f的最值为$-9,-3$.
$f(x,-3)=x^2-9x+11$, 因此在矩形域的下边f的最值为$-\frac{37}{4},11$.
$f(x,0)=x^2-6x+2$, 因此在矩形域的上边f的最值为$-7,2$.
因此函数的最大值为11, 最小值为-10.

33. 利用条件极值求椭圆周$5x^2+8xy+5y^2=9$的长, 短半轴之长.

解. 令$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(5x^2+8xy+5y^2-9)$. 解$F$的稳定点, 得$(x,y)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(3,-3)$. 所以长半轴为$3$, 短半轴为$1$.

《高等数学》第七章习题解答

习题7.1

3. 设函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续, $g(x,y)$在D上非负, 且$g(x,y)$与$f(x,y)g(x,y)$在D上可积. 证明: 在D中存在一点(x_0,y_0)使$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma = f(x_0,y_0)\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$.

证. 设m,M为f在D上的最小, 最大值. 则$mg(x,y)\le f(x,y)g(x,y)\le Mg(x,y)$.
因此$\iint\limits_D mg(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D Mg(x,y)d\sigma$.
若$\iint\limits_D g(x,y)d\sigma = 0$, 则$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma = 0$, 可任取一点$(x_0,y_0)\in D$使命题成立. 否则有$m \le \frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D g(x,y)d\sigma} \le M$. 由介值定理, 存在$(x_0,y_0)\in D$使得
$f(x_0,y_0) = \frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D g(x,y)d\sigma}$, 即$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma = f(x_0,y_0)\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$.

4. 设函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续, 非负, 且$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0$. 证明$f(x,y)=0$, 当$(x,y)\in D$时.

证. 因为f非负, 若f不处处为零, 则f在某点$P\in D$处大于0. 又因f连续, 因此在P的一个邻域内f的值大于$\frac{1}{2}f(P)$. 于是$\iint\limits_D f(x,y)dxdy > 0$, 矛盾.

习题7.2

计算下列二重积分.

3. $\iint\limits_D ydxdy$, 其中D由$y=0$及$y=\sin x$ $(0\le x\le \pi)$所围.

$I=\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x} dyy = \int_0^\pi dx\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{\pi}{4}$.

4. $\iint\limits_D xy^2dxdy$, 其中D由$x=1$, $y^2=4x$所围.

$I=\int_{-2}^2 dy\int_{y^2/4}^1 dxxy^2 = \int_{-2}^2 dy\frac{1}{2}(1-\frac{y^4}{16})y^2 = \frac{32}{21}$.

5. $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$, 其中$D$由$y^2=x$, $x=0$, $y=1$所围.

$I=\int_0^1 dy\int_0^{y^2} dxe^{\frac{x}{y}} = \int_0^1 dyye^y = 1$.

6. $\int_0^1 dy\int_{y^{\frac{1}{3}}}^1 \sqrt{1-x^4}dx = \int_0^1 dx\int_0^{x^3} dy\sqrt{1-x^4} = \int_0^1 dxx^3\sqrt{1-x^4} = \frac{1}{6}$.

7. $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$, 其中$D$由$y=x^2$, $x=y^2$所围.

$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy(x^2+y) = \int_0^1 dx(\frac{1}{2}x + x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}x^4) = \frac{33}{140}$.

8. $\int_0^\pi dx\int_x^\pi \frac{\sin y}{y}dy = \int_0^\pi dy\int_0^y dx\frac{\sin y}{y} = \int_0^\pi dy\sin y = 2$.

9. $\int_0^2 dx\int_x^2 2y\sin(xy)dy = \int_0^2 dy\int_0^2 dx2y\sin(xy) = \int_0^2 dy2(1-\cos 2y) = 4-\sin 4$.

10. $\iint\limits_D y^2\sqrt{1-x^2}dxdy$, $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$.

$I=4\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dyy^2\sqrt{1-x^2}=4\int_0^1 dx\frac{1}{3}(1-x^2)^2=\frac{32}{45}$.

11. $\iint\limits_D(|x|+y)dxdy$, $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\}$.

$I=\iint\limits_D |x|dxdy+\iint\limits_D ydxdy=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dyx+0=4\int_0^1 dxx(1-x)=\frac{2}{3}$.

12. $\iint\limits_D(x+y)dxdy$, 其中D为由$x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2y$所围区域的中间一块.

$I=\iint\limits_D xdxdy+\iint\limits_D ydxdy=0+2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} ydy=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx(\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

利用极坐标计算下列累次积分或二重积分.

13. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 r^2rdr=\frac{\pi}{8}$.

14. $\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dy=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta\int_0^1 \frac{2}{1+r}rdr=\pi(1-\ln 2)$.

15. $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} 3xydy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} 3r\cos\theta r\sin\theta rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta 12\cos^5\theta\sin\theta=2$.

16. $\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^R \ln(1+r^2)rdr=\frac{\pi}{4}[(1+R^2)\ln(1+R^2)-R^2]$.

17. $\iint\limits_D \frac{1}{x^2}dxdy$, D是由$y=\alpha x$, $y=\beta x$ ($\frac{\pi}{2}>\beta>\alpha>0$), $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=b^2$ ($b>a>0$)所围的在第一象限的部分.

$I=\int_{\arctan\alpha}^{\arctan\beta} d\theta\int_a^b \frac{1}{(r\cos\theta)^2}rdr=(\beta-\alpha)\ln\frac{b}{a}$.

18. $\iint\limits_D rd\sigma$, 其中D是由心脏线$r=a(1+\cos\theta)$ 与圆周$r=a$ ($a>0$)所围的不包含极点的区域.

$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_a^{a(1+\cos\theta)} rrdr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta a^3(\cos\theta+\cos^2\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta)=(\frac{22}{9}+\frac{\pi}{2})a^3$.

19. 利用二重积分的几何意义证明: 由射线$\theta=\alpha$, $r=\beta$与曲线$r=r(\theta)$ ($\alpha\le\theta\le\beta$)所围区域D的面积可表示成$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r(\theta)^2]d\theta$.

证. $S=\iint\limits_D dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)} rdr=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r(\theta)^2]d\theta$.

20. 求心脏线$r=a(1+\cos\theta)$ ($a>0, 0\le\theta<2\pi$)所围区域之面积.

解. $S=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)} rdr=\int_0^{2\pi} d\theta\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2=\frac{3}{2}\pi a^2$.

计算下列二重积分.

21. $\iint\limits_D(2x^2-xy-y^2)dxdy$, 其中$D$由$y=-2x+4$, $y=-2x+7$, $y=x-2$, $y=x+1$所围.

解. 设$u=2x+y$, $v=x-y$. 则$x=\frac{u+v}{3}$, $y=\frac{u-2v}{3}$, $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\frac{1}{3}$.
因此$I=\int_4^7 du\int_{-1}^2(uv)\frac{1}{3}dv=\frac{33}{4}$.

22. $\iint\limits_D(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy})dxdy$, 其中$D$由$xy=1$, $xy=9$, $y=x$与$y=4x$所围.

解. 设$u=\sqrt{\frac{y}{x}}$, $v=\sqrt{xy}$. 则$x=\frac{v}{u}$, $y=uv$, $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\frac{2v}{u}$.
因此$I=\int_1^2 du\int_1^3(u+v)\frac{2v}{u}dv=8+\frac{52}{3}\ln 2$.

23. $\iint\limits_D ydxdy$, 其中D为圆域$x^2+y^2\le x+y$.

解1. 设$x=\frac{1}{2}+r\cos\theta$, $y=\frac{1}{2}+r\sin\theta$. 则$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=r$.
因此$I=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dr\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}+r\sin\theta)rd\theta=\frac{\pi}{4}$.
解2. 设$x=u+\frac{1}{2}$, $y=v+\frac{1}{2}$. 则$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=1$. 设D'为圆域$u^2+v^2\le\frac{1}{2}$,
得$I=\iint_{D'}(v+\frac{1}{2})dudv=0+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$.

24. $\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$, 其中$D$为椭圆域$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$.

解. 设$x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$. 则$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=abr$.
因此$I=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}(a^2r^2\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\theta)abrd\theta=\int_0^1 dr\pi(a^2r^2+b^2r^2)abr=\frac{\pi}{4}(a^2+b^2)ab$.

26. 设$a>0$, 并令$I(a)=\int_0^a e^{-x^2}dx$, $J(a)=\iint\limits_{D_a}e^{-x^2-y^2}dxdy$, 其中$D_a=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2,x\ge 0,y\ge 0\}$. 证明
(1) $[I(a)]^2=\iint\limits_{R_a}e^{-x^2-y^2}dxdy$, 其中$R_a=\{(x,y)\mid 0\le x\le a,0\le y\le a\}$;
(2) $J(a)\le[I(a)]^2\le J(\sqrt{2}a)$;
(3) 利用本节例10的结果推出$\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

证. (1) $[I(a)]^2=\int_0^a e^{-x^2}dx\int_0^a e^{-y^2}dy=\iint\limits_{R_a}e^{-x^2-y^2}dxdy$.

(2) $D_a\subset R_a\subset D_{\sqrt{2}a}$, 所以$\iint\limits_{D_a}e^{-x^2-y^2}dxdy\le\iint\limits_{R_a}e^{-x^2-y^2}dxdy\le\iint\limits_{D_{\sqrt{2}a}}e^{-x^2-y^2}dxdy$.

(3) $J(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})$. 因此$\lim\limits_{a\to+\infty}J(a)=\lim\limits_{a\to+\infty}J(\sqrt{2}a)=\frac{\pi}{4}$. 由夹逼定理, 得$\lim\limits_{a\to+\infty}I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

习题7.3

计算下列三重积分.

1. $\iiint\limits_\Omega(z+z^2)dV$, 其中$\Omega$为单位球$x^2+y^2+z^2\le 1$.

$I=\iiint\limits_\Omega zdV+\iiint\limits_\Omega z^2dV=0+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi d\varphi\int_0^1 drr^2\sin\varphi(r\cos\varphi)^2=\frac{4\pi}{15}$.

2. $\iiint\limits_{\Omega} x^2y^2zdV$, 其中$\Omega$是由$2z=x^2+y^2$, $z=2$所围成的区域.

$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 rdr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2 z = \int_0^{2\pi}(\sin^2\theta\cos^2\theta)d\theta \cdot \int_0^2 r^5(2-\frac{r^4}{8})dr = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{128}{15} = \frac{32\pi}{15}$.

3. $\iiint\limits_{\Omega} x^2\sin xdxdydz$, 其中$\Omega$为由平面$z=0$, $y+z=1$及柱面$y=x^2$所围的区域.

区域Ω关于Oyz平面对称, 被积函数是关于x的奇函数, 因此积分为0.

4. $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$, 其中$\Omega$由$x^2+y^2=4$, $z=x^2+y^2$及$z=0$所围.

$I=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 rdr\int_0^{r^2} dzz = 2\pi\cdot\frac{16}{3}=\frac{32\pi}{3}$.

5. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2-y^2-z^2)dV$, $\Omega: x^2+y^2+z^2\le a^2$.

$\iiint\limits_{\Omega} z^2dV = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^a r^2\sin\varphi dr(r\cos\varphi)^2 = \frac{4\pi}{15}a^5$. 同理$\iiint\limits_{\Omega} x^2dV = \iiint\limits_{\Omega} y^2dV = \frac{4\pi}{15}a^5$. 因此$I=-\frac{4\pi}{15}a^5$.

6. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV$, $\Omega: 3\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 3$.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{3r}^3 dzr^2 = 2\pi\int_0^1 3(1-r)r^3dr=\frac{3\pi}{10}$.

7. $\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)dV$, $\Omega: 0\le a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2$.

取球坐标系$x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi\cos\theta$, $z=r\sin\varphi\sin\theta$.
得$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_a^b r^2\sin\varphi dr(r\sin\varphi)^2 = 2\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{b^5-a^5}{5}=\frac{8\pi}{15}(b^5-a^5)$.

8. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)dV$, $\Omega: x^2+y^2\le z\le 1$.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz(r^2\cos^2\theta+z^2)=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$.

9. $\iiint\limits_{\Omega} z^2dV$, $\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2, x^2+y^2\le Rx$.

$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}2rdr\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}}dzz^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\frac{1}{15}R^5(1-\sin^5\theta) = \frac{2}{15}(\pi-\frac{16}{15})R^5$.

10. $\iiint\limits_{\Omega}(1+xy+yz+zx)dV$, 其中$\Omega$为由曲面$x^2+y^2=2z$及$x^2+y^2+z^2=8$所围$z\ge 0$的部分.

由对称性$I=\iiint\limits_{\Omega}1dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{8-r^2}}dz = 2\pi\frac{16\sqrt{2}-14}{3}$.

11. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV$, Ω由$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$与$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^R r^2\sin\varphi drr^2\sin^2\varphi = 2\pi(\frac{2}{15}-\frac{\sqrt{2}}{12})R^5$.

12. $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dV$, Ω由$z=x^2+y^2+z^2=z$所围.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^2\sin\varphi drr=\frac{\pi}{10}$.

13. $\iiint\limits_{\Omega}z^2dV$, $\Omega:\sqrt{3(x^2+y^2)}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi drr^2\cos^2\varphi=\frac{2\pi}{15}(1-\frac{3\sqrt{3}}{8})$.

14. $\iiint\limits_{\Omega}\frac{zdV}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, Ω由$x^2+y^2+z^2=2az$所围.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi dr\cos\varphi=\frac{16\pi}{15}$.

15. $\iiint\limits_{\Omega}\frac{2xy+1}{x^2+y^2+z^2}dV$, Ω为由$x^2+y^2+z^2=2a^2$与$az=x^2+y^2$所围$z\ge0$的部分.

由对称性$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}a}r^2\sin\varphi dr\frac{1}{r^2}$

$+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}r^2\sin\varphi dr\frac{1}{r^2}=2\pi a(\sqrt{2}-1+\ln\sqrt{2})$.

16. $\iiint\limits_{\Omega}\frac{dV}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, $\Omega:x^2+y^2+z^2\le1$.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1dr\int_0^{\pi}d\varphi r^2\sin\varphi\frac{1}{\sqrt{r^2-4r\cos\varphi+4}}=2\pi\int_0^1drr^2\frac{|r+2|-|r-2|}{r}=\frac{2}{3}\pi$.

17. $\iiint\limits_{\Omega}(x^3+\sin y+z)dV$, Ω由$x^2+y^2+z^2\le2az$, $\sqrt{x^2+y^2}\le z$所围.

由对称性$I=\iiint\limits_{\Omega}zdV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi drr\cos\varphi=\frac{7}{6}\pi a^4$.

18. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2y+3xyz)dV$, $\Omega:1\le x\le2$, $0\le xy\le2$, $0\le z\le1$.

设$u=x,v=xy,w=z$. 则$x=u,y=\frac{v}{u},z=w$, $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\frac{1}{u}$.
$I=\int_1^2du\int_0^2dv\int_0^1dw(uv+3vw)\frac{1}{u}dudvdw=2+3\ln2$.

19. $\iiint\limits_{\Omega}(x+1)(y+1)dV$, $\Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le1$.

由对称性$I=\iiint\limits_{\Omega}(xy+x+y+1)dV=\iiint\limits_{\Omega}1dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1abcr^2\sin\varphi dr=\frac{4}{3}\pi abc$.

20. $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dV$, $\Omega:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le a^2$.

设$x=x_0+u$, $y=y_0+v$, $z=z_0+w$, $\Omega':u^2+v^2+w^2\le a^2$. 则$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=1$.
$I=\iiint\limits_{\Omega'}(x_0+y_0+z_0+u+v+w)dudvdw=\iiint\limits_{\Omega'}(x_0+y_0+z_0)dudvdw=\frac{4}{3}\pi a^3(x_0+y_0+z_0)$

21. 分别用柱坐标和球坐标, 把三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dV$表成累次积分, 其中$\Omega$为球体$x^2+y^2+z^2\le z$在锥面$z=\sqrt{3x^2+3y^2}$上方的部分.

解. 柱坐标: $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}rdr\int_{\sqrt{3x^2+3y^2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4r^2}}{2}}f(\sqrt{r^2+z^2})dz$.

球坐标: $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}f(r)r^2\sin\varphi dr$.

22. 化累次积分$I=\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y dzf(z)dz$为定积分.

解. 设Ω为区域$0\le z\le y\le x\le a$. 则$I=\iiint\limits_{\Omega}f(z)dxdydz=\int_0^a dz\int_z^a dy\int_y^a dxf(z)=\frac{1}{2}\int_0^a f(z)(z-a)^2dz$.

习题7.4

1. 求由上半球面$z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$及旋转抛物面$x^2+y^2=2az$所围立体的表面积$(a>0)$.

解. $S=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2a^2}(\sqrt{\frac{3a^2}{3a^2-x^2-y^2}}+\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}})dxdy$
$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}rdr(\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-r^2}}+\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}})=\frac{16}{3}\pi a^2$.

2. 求锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$z^2=2x$所割下部分的曲面面积.

解. $S=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\pi$

3. 求由三个圆柱面$x^2+y^2=R^2$, $x^2+z^2=R^2$, $y^2+z^2=R^2$所围立体的表面积.

解. 设$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le x\le\frac{R}{\sqrt{2}}\}$, 柱面$x^2+z^2=R^2$投影到$D$上的第一卦限部分的面积为$\iint\limits_{D}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dxdy=(1-\frac{1}{\sqrt{2}})R^2$. 因此总的表面积为$48(1-\frac{1}{\sqrt{2}})R^2$.

4. 求由三个圆柱面$x^2+y^2=R^2$, $x^2+z^2=R^2$, $y^2+z^2=R^2$所围立体的体积.

解. 设$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2, 0\le y\le x\}$, 投影到$D$上的第一卦限部分的立体体积为$\iint\limits_{D}\sqrt{R^2-x^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^R R\sin\theta rdr=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})R^3$. 因此总体积为$8(1-\frac{1}{\sqrt{2}})R^3$.

第七章总练习题

4. 求下列累次积分.

(1) $\int_0^1 dy\int_{2y}^2 4\cos x^2dx=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{x}{2}}4\cos x^2dy=\int_0^2 2x\cos x^2dx=\sin 4$.

(2) $\int_0^8 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^2\frac{dy}{1+y^4}=\int_0^2 dy\int_0^{y^3}\frac{dx}{1+y^4}=\int_0^2 dy\frac{y^3dy}{1+y^4}=\frac{\ln 17}{4}$.

11. 求圆$x^2+y^2\le a^2$上所有的点到原点的平均距离.

解. $d=\frac{1}{\pi a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\frac{2}{3}a$.

21. 设闭曲面S在球坐标下的方程为$\rho=2\sin\varphi$. 求S所围立体的体积.

解. $V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}r^2\sin\varphi dr=2\pi^2$.

《高等数学》第八章习题解答

习题8.1

1. 求$\int_L (xy+yz+zx)ds$, 其中L为过四点$O(0,0,0)$, $A(0,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(1,1,1)$的折线.

解. $I=\int_0^1 0dz+\int_0^1 ydy+\int_0^1(x+1+x)dx=\frac{5}{2}$.

2. 求$\oint_L xyds$, 其中L是正方形$|x|+|y|=a$ $(a>0)$.

解. 被积函数是关于x的奇函数, 积分曲线L关于y轴对称, 因此积分为0.

3. 求$\int_L (1+y^2)ds$, 其中L为摆线段: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

解. $I=\int_0^{2\pi}(1+4a^2\sin^4\frac{t}{2})2a\sin\frac{t}{2}dt=8a+\frac{256}{15}a^3$.

4. 求$\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$, 其中$L$为螺旋线段: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0\le t\le 2\pi$.

解. $I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2+b^2t^2}\sqrt{a^2+b^2}dt=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\arctan\frac{2\pi b}{a}$.

5. 求$\oint_C (x+y)ds$, 其中C为双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$的右面的一瓣.

解. 曲线C的参数方程: $x=a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta$, $y=a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta$, $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.
$x'^2+y'^2=\frac{a^2}{\cos 2\theta}$. 于是$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\theta}(\cos\theta+\sin\theta)\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta=\sqrt{2}a^2$.

6. 求$\int_L xyds$, 其中L是椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$位于第一象限中的那部分.

解. L的参数方程: $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.
$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos\theta\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta=\frac{ab(a^3-b^3)}{a^2-b^2}$.

7. 求$\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds$, 其中L为曲线段$x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $(0\le t\le 2\pi)$.

解. $x^2+y^2=a^2(1+t^2)$, $x'^2+y'^2=a^2t^2$, $I=\int_0^{2\pi}a^2\sqrt{1+t^2}tdt=\frac{(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1}{3}a^2$.

8. 求$\int_L (x+\sqrt{y}-z^5)ds$, 其中$L$由曲线段$L_1, L_2$组成, L_1与L_2的方程分别为$L_1:\left\{\begin{array}{l} y=x^2, \\ z=0, \end{array}\right. \ 0\le x\le 1$; $L_2:\left\{\begin{array}{l} x=1, \\ y=1, \end{array}\right. \ 0\le z\le 1$.

解. $I=\int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2}dx+\int_0^1(2-z^5)dz=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}+\frac{11}{6}=\frac{5\sqrt{5}+10}{6}$.

9. 若椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上任一点$(x,y)$处的线密度为$|y|$, 求椭圆周的质量$(0<b<a)$.

解. 记椭圆为L, $m=\int_L |y|ds=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta=2b^2+\frac{2a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

习题8.2

1. 求$\int_L 2xydx-x^2dy$的值, 其中L沿下列不同路径从原点$O(0,0)$到终点$A(2,1)$:
(1) 直线段$\overline{OA}$; (2) 以Oy轴为对称轴的抛物线段; (3) 折线OBA; (4)折线OCA.

解. (1) $I=\int_0^1 2(2y)yd(2y)-(2y)^2dy=\frac{4}{3}$.

(2) $I=\int_0^2 2x\frac{x^2}{2}dx-x^2d\frac{x^2}{2}=0$.

(3) $I=\int_0^2 0dx-\int_0^1 4dy=-4$.

(4) $I=-\int_0^1 0dy+\int_0^2 2xdx=4$.

2. 求$\int_L \mathbf{F}d\mathbf{r}$, 其中$\mathbf{F}=(x^2+y,x+y^2)$, L沿下列各路径从点$A(1,0)$到$B(-1,0)$: (1) 半圆周$y=-\sqrt{1-x^2}$; (2) 直线段$\overline{AB}$; (3) 折线段ACB, 其中C点坐标为$(0,-1)$.

解. (1) 曲线L: $x=\cos t, y=\sin t, t$从0至$-\pi$. $I=\int_0^{-\pi}(\cos^2 t+\sin t)(-\sin tdt)+(\cos t+\sin^2 t)\cos tdt=-\frac{2}{3}$.

(2) 曲线L: $y=0$, x从1至-1. $I=\int_1^{-1}(x^2+0)(-dx)=-\frac{2}{3}$.

(3) $I=\int_1^0(x^2+x-1)dx+(x+(x-1)^2)dx+\int_0^{-1}(x^2-x-1)dx+(x+(-x-1)^2)(-dx)=-\frac{2}{3}$.

3. 求$\oint x^2dy-y^2dx$, 其中积分路径为椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 按逆时针方向.

解. L: $x=a\cos t, y=b\sin t, t$从0至2π. $I=\int_0^{2\pi} a^2\cos^2 tb\cos t-\sin^2 t(-a\sin t)dt=0$.

4. $\int_L(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, 其中$L$为: (1) 曲线$y=x^4$上由点$(-1,1)$到点$(1,1)$的一段; (2) 由点$(-1,1)$到点$(1,1)$的直线段.

解. (1) $I=\int_{-1}^1(x^2-2xx^4)dx+(x^8-2xx^4)dx^4=-\frac{10}{9}$.

(2) $I=\int_{-1}^1(x^2-2x)dx=\frac{2}{3}$.

5. 求$\int_L ydx+zdy+xdz$, 其中L为螺旋线段: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\le t\le 2\pi)$.

解. $I=\int_0^{2\pi} a\sin t(-a\sin t)dt+bta\cos tdt+a\cos tbdt=-\pi a^2+0+0=-\pi a^2$.

6. 求$\int_L(x^2+y^2)dx+(x^2-y)dy$, 其中$L$是曲线$y=|x|$上从点$(-1,1)$到$(2,2)$的一段.

解. $I=\int_{-1}^0(x^2+x^2)dx+(x^2+x)(-dx)+\int_0^2(x^2+x^2)dx+(x^2-x)dx=\frac{41}{6}$.

7. 求$\oint_L\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, 其中$L$是以$A(2,0),B(0,2),C(-2,0),D(0,-2)$为顶点的正向正方形闭路.

解. 被积向量函数$(\frac{1}{|x|+|y|},\frac{1}{|x|+|y|})$和积分曲线都关于原点对称, 因此积分为$0$.

8. 求$\int_L(x^4-z^2)dx+2xy^2dy-ydz$, 其中$L$为依参数$t$增加方向的曲线: $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ $(0\le t\le 1)$.

解. $I=\int_0^1(t^4-t^6)dt+2tt^4dt^2-t^2dt^3=\frac{1}{35}$.

9. 求$\oint_L(z^2-y^2)dx+(x^2-z^2)dy+(y^2-x^2)dz$, 其中$L$为球面$x^2+y^2+z^2=1$在第一卦限的边界, 方向由$A(1,0,0)$到$B(0,1,0)$到$C(0,0,1)$再回到$A$.

解. 由对称性$I=3\int_{AB}(z^2-y^2)dx+(x^2-z^2)dy+(y^2-x^2)dz$
$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(0-\sin^2 t)(-\sin tdt)+(\cos^2 t-0)\cos tdt+0=4$.

14. 求$\oint_L \frac{xy(ydx-xdy)}{x^2+y^2}$, 其中$L$为双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta\ (a>0)$的右面的一瓣, 沿逆时针方向.

解. 曲线L: $x=a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta$, $y=a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta$, $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.
$ydx-xdy=-a^2\cos 2\theta d\theta$, $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-a^2\cos 2\theta\cos\theta\sin\theta d\theta=0$.

习题8.3

1. 利用格林公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{L^+}(xy^2+y^3)dy-(x^3+x^2y)dx$, 其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$.

解. $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2rdr=\frac{\pi}{2}a^4$.

(2) $\oint_L y^2dx+x^2dy$, 其中L为以$O(0,0),B(1,0),C(0,1)$为顶点的三角形OBC的正向边界线.

解. $I=\iint\limits_{\triangle OBC}(2y-2x)dxdy$, 由对称性$I=0$.

(4) $\oint_{L^+}(x+e^x\sin y)dx+(x+e^x\cos y)dy$, 其中$L$是双纽线$r^2=\cos 2\theta$的右半支.

解. 设D为L所围区域. $I=\iint\limits_D(1+e^x\cos y-e^x\cos y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}rdr=\frac{1}{2}$.

(5) $\oint_{L^+}(e^x\sin y+\sin x-8y)dx+(e^x\cos y-\sin y)dy$, 其中$L$为上半圆$0\le y\le\sqrt{ax-x^2}\ (0\le x\le a)$的边界.

解. 设D为L所围区域. $I=\iint\limits_D(e^x\cos y-e^x\cos y+8)dxdy=\pi a^2$.

2. 利用曲线积分计算下列闭曲线所围图形的面积:

(1) 星形线$x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t\ (0\le t\le 2\pi)$.

解. 记星形线为L, 所围区域为D. $S=\iint\limits_D dxdy=\oint_{L^+}xdy=\int_0^{2\pi}3a^2\cos^4 t\sin^2 tdt=\frac{3}{8}\pi a^2$.

(2) 心脏线$x=a(1-\cos t)\cos t$, $y=a(1-\cos t)\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$.

解. 记心脏线为L. $S=\frac{1}{2}\oint_{L^+}xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2dt=\frac{3}{2}\pi a^2$.

3. 证明$\oint_{L^+}f(xy)(ydx+xdy)=0$, 其中$f(u)$有连续的一阶导数, L为光滑曲线.

证. $f(xy)(ydx+xdy)=f(xy)d(xy)$为全微分, 因此它的曲线积分与路径无关. 由于$L$的起点和终点重合, 因此$\oint_{L^+}f(xy)(ydx+xdy)=0$.

4. 证明下列曲线积分与路径无关, 并求积分值.

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x+y)dx+(x-y)dy$. $\frac{\partial(x+y)}{\partial y}=\frac{\partial(x-y)}{\partial x}$, 因此曲线积分与路径无关. $(x+y)dx+(x-y)dy=d(\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2)$, $I=(\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2)|_{(0,0)}^{(1,1)}=1$.

(3) $\int_{(0,0)}^{(a,b)}e^x\cos ydx-e^x\sin ydy$. $\frac{\partial(e^x\cos y)}{\partial y}=\frac{\partial(-e^x\sin y)}{\partial x}$, 因此曲线积分与路径无关. $e^x\cos ydx-e^x\sin ydy=d(e^x\cos y)$, $I=e^x\cos y|_{(0,0)}^{(a,b)}=e^a\cos b-1$.

5. 求$\int_{AB}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$的值, 其中$A(-2,-1), B(3,0)$, AB为任意路径.

解. $(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=d(\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5)$,
$I=(\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5)|_{(-2,-1)}^{(3,0)}=62$.

7. 求常数a,b, 使$\frac{(y^2+2xy+ax^2)dx-(x^2+2xy+by^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$是某个函数$u(x,y)$的全微分, 并求$u(x,y)$.

解. 记$P=\frac{y^2+2xy+ax^2}{(x^2+y^2)^2}$, $Q=-\frac{x^2+2xy+by^2}{(x^2+y^2)^2}$. 解$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 得$a=b=-1$.
由$\frac{\partial u}{\partial x}=P$, 得$u=\frac{x-y}{x^2+y^2}+\varphi(y)$. 求导得$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2+2xy+by^2}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(y)$, 代入$\frac{\partial u}{\partial y}=Q$, 得$\varphi(y)=C$. 因此$u=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C$.

8. 求$\int_{(0,1)}^{(1,1)}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y)dx+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x)dy$.

解. $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y)dx+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x)dy=d(\sqrt{x^2+y^2}+xy)$.
因此$I=(\sqrt{x^2+y^2}+xy)|_{(0,1)}^{(1,1)}=\sqrt{2}$.

9. 求$\int_{AB}(x^2+y)dx+(x-y^2)dy$, 其中$AB$是由$A(0,0)$至$B(1,1)$的曲线段$y^3=x^2$.

解. $(x^2+y)dx+(x-y^2)dy=d(\frac{1}{3}x^3+xy-\frac{1}{3}y^3)$, $I=(\frac{1}{3}x^3+xy-\frac{1}{3}y^3)|_{(0,0)}^{(1,1)}=1$.

10. 设D是平面有界闭区域, 其边界线L逐段光滑, 函数$P(x,y)$, $Q(x,y)$在D上有连续的一阶偏导数. 证明: $\oint_{L^+}[P\cos(n,x)+Q\cos(n,x)]ds=\iint\limits_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})d\sigma$, 其中$\cos(n,x),\cos(n,y)$为曲线$L$的外法向量的方向余弦.

证. $\oint_{L^+}[P\cos(n,x)+Q\cos(n,y)]ds=\oint_{L^+}Pdy-Qdx=\iint\limits_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})d\sigma$.

11. 求曲线积分$\oint_{L^+}[x\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{i}\rangle+y\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{j}\rangle]ds$, 其中$L$为一简单封闭曲线, $\mathbf{n}$为L的外法线方向的单位向量.

解. 设L所围区域为D. $I=\oint_{L^+}xdy-ydx=\iint\limits_D 2d\sigma=$两倍$D$的面积,

12. 设函数$u(x,y),v(x,y)$在有界闭区域D上有连续的二阶偏导数, L为D的边界, 分段光滑. 证明:

(1) $\iint\limits_D v\triangle ud\sigma=\oint_{L^+}v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}ds-\iint\limits_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})d\sigma$, 其中$\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}$为$u$沿$L$的外法线方向的方向导数.

(2) $\iint\limits_D(u\triangle v-v\triangle u)d\sigma=\oint_{L^+}(u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}})ds$.

证. $\iint\limits_D v\triangle ud\sigma+\iint\limits_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})d\sigma=\iint\limits_D(v\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})d\sigma=\iint\limits_D(\frac{\partial}{\partial x}(v\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(v\frac{\partial u}{\partial y}))d\sigma$, 由格林公式, 该式$=\oint_{L^+}v\frac{\partial u}{\partial x}dy-v\frac{\partial u}{\partial y}dx$, 由于$dy=\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{i}\rangle ds$, $dx=-\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{j}\rangle ds$, 该式$=\oint_{L^+}v\frac{\partial u}{\partial x}\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{i}\rangle ds+v\frac{\partial u}{\partial y}\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{j}\rangle ds=\oint_{L^+}v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}ds$. (1)得证. (2)是(1)的直接推论.

13. 设$u(x,y)$是有界闭区域D上的调和函数, 即$u(x,y)$有连续的二阶偏导数, 且满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 证明:

(1) $\oint_{L^+} u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}ds=\iint\limits_D[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2]d\sigma$, 其中$L$为$D$的边界, $\mathbf{n}$为L的外法线方向.

(2) 若$u(x,y)$在L上处处为零, 则$u(x,y)$在D上也恒为零.

证. (1) 在12(1)题中取$v=u$, 并利用$\triangle u=0$, 即得所要等式.

(2) 一方面由(1)的结论$\iint\limits_D[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2]d\sigma=0$, 另一方面$(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2$为$D$上非负连续函数, 因此$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$在$D$内恒为零, 因此$u$在$D$上恒为零.

习题 9.2

1.(1) $\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{dx}{x(1+x^2)}$. $\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

$\ln(1+y^2)=\ln x^2-\ln(1+x^2)+C\Rightarrow(1+x^2)(1+y^2)=\cancel{\ln}\, e^C x^2=C^* x^2$. $C^*>0$.

(3) $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$. $\arcsin y=\ln(\underbrace{x+\sqrt{1+x^2}}_{>0})+C=\ln e^C(x+\sqrt{1+x^2})=\ln C^*(x+\sqrt{1+x^2})$ $C^*>0$.

(7) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x^2+y^2}{2xy+3y^2}=-\frac{2+u^2}{2u+3u^2}$. $u=\frac{y}{x}$

$u'=\frac{h(u)-u}{x}=\frac{1}{x}(-\frac{2+3u^2+3u^3}{2u+3u^2})$, $\frac{2u+3u^2}{2+3u^2+3u^3}du=-\frac{1}{x}dx$

$\frac{1}{3}\ln|2+3u^2+3u^3|=-\ln|x|+C$. $|2+3u^2+3u^3|=C|x|^{-3}$. $C>0$. $2+3u^2+3u^3=Cx^{-3}$. C任意

(8) $y'=(x+y+2)^2$, $z=x+y+2$, $z'=1+y'=1+z^2$. $\frac{dz}{1+z^2}=dx$. $\arctan z=x+C$

(10) $\frac{dy}{dx}=\frac{-(x-2y+5)}{2x-y+4}$. $\Delta=\begin{vmatrix}-1&2\\2&-1\end{vmatrix}\neq0$. $(x_0,y_0)=(-1,2)$, $u=x_0+1$. $v=y_0-2$

$\frac{dv}{du}=\frac{-u+2v}{2u-v}=\frac{-1+2\frac{v}{u}}{2-\frac{v}{u}}$ 令 $\frac{v}{u}=z$. $z'=\frac{1}{u}(h(z)-z)=\frac{1}{u}\cdot\frac{-1+2z-2z+z^2}{2-z}=\frac{1}{u}\cdot\frac{z^2-1}{2-z}$

$z=\pm1$ 是特解. $\frac{(2-z)dz}{z^2-1}=\frac{1}{u}du\Rightarrow[-\frac{1}{1+z}-\frac{1}{1-z}-\frac{2z}{2(z^2-1)}]dz=\frac{1}{u}du$

$-\ln|1+z|+\ln|1-z|-\frac{1}{2}\ln|z^2-1|=\ln|u|+C$

$-\ln(1+z)^2+\ln(1-z)^2-\ln|z^2-1|=\ln u^2+C$

$|z^2-1|=C\cdot\frac{(1-z)^2}{(1+z)^2}\cdot\frac{1}{u^2}$. $C>0$. $\Rightarrow$ $z^2-1=C\cdot\frac{(1-z)^2}{(1+z)^2}\cdot\frac{1}{u^2}$ $C\neq0$.

又 $z=\pm1$ 是特解. $z^2-1=C\frac{(1-z)^2}{(1+z)^2}\cdot\frac{1}{u^2}$. $C\in R$. $\frac{(z+1)^3}{z-1}=C\frac{1}{u^2}$. $(u+v)^3=C(u-v)$

8. $\frac{dR}{dt}=-kR$. $k>0$. $R=Ce^{-kt}$

当 $t=0$, $R_0=C$ $t=1600$, $R_{1600}=R_0e^{-1600k}=\frac{1}{2}R_0$. $e^{-1600k}=\frac{1}{2}$. $k=\frac{\ln 2}{1600}$

$R_0=1(g)$. $t=1$. $R_1=e^{-k}$. $R_0-R_1=1-e^{-k}=1-e^{-\frac{\ln 2}{1600}}=1-2^{-\frac{1}{1600}}\approx0.00043(g)$

9. $u=tx$. $\int_0^x\varphi(u)\cdot\frac{1}{x}du=n\varphi(x)$. $\int_0^x\varphi(u)du=nx\varphi(x)$. 两边求导: $\varphi(x)=n\varphi(x)+nx\varphi'(x)$

$\frac{d\varphi}{\varphi}=\frac{1-n}{nx}dx$. $\ln|\varphi|=\frac{1-n}{n}\ln|x|+C$. $|\varphi|=|x|^{\frac{1-n}{n}}\cdot C_1$. $C_1>0$. $\Rightarrow\varphi=|x|^{\frac{1-n}{n}}\cdot C_1$. $C_1\in R$

13.(1) 令 $z=y'$. $x^2z'=z^2$. $\frac{dz}{z^2}=\frac{dx}{x^2}$, $-\frac{1}{z}=-\frac{1}{x}+C_1$. $z=\frac{x}{1+C_1x}$

当 $C_1=0$. $z=x\Rightarrow y'=x$. $y=\frac{x^2}{2}+C_2$. 当 $C_1\neq0$. $y'=\frac{x}{1+C_1x}=\frac{1}{C_1}-\frac{1}{C_1(1+C_1x)}$

$y=\frac{x}{C_1}-\frac{1}{C_1^2}\ln|1+C_1x|+C_2\Rightarrow C_1x-C_1^2y=\ln|1+C_1x|+C_2$. 另还有特解 $z\equiv0\Rightarrow y\equiv C$

(2) 令 $p=y'$. $p^2+2y\cdot p\cdot p'=0$. $p\equiv0\Rightarrow y\equiv C$.

$\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{2y}$. $\ln|p|=-\frac{1}{2}\ln|y|+C$ $|p|=|y|^{-\frac{1}{2}}C$. $C>0$, $p=C|y|^{-\frac{1}{2}}$ C任意.

$y'=C|y|^{-\frac{1}{2}}$. $|y|^{\frac{1}{2}}dy=Cdx$. $\frac{2}{3}|y|^{\frac{3}{2}}\cdot\mathrm{sgn}(y)=Cx+C_1$. $\frac{2}{3}|y|^{\frac{3}{2}}=Cx+C_1$

$|y|^{\frac{3}{2}}=Cx+C_1=C(x+C_1)$ $|y|=C^{\frac{2}{3}}(x+C_1)^{\frac{2}{3}}=C_2(x+C_1)^{\frac{2}{3}}$. $C_2\geq0$.

$y=C_2(x+C_1)^{\frac{2}{3}}$. $C_1,C_2\in R$

14.(3). $\frac{\partial P}{\partial y}=e^y$. $\frac{\partial Q}{\partial x}=e^y$. $u(x,y)=xe^y+\varphi(y)$. $\frac{\partial u}{\partial y}=xe^y+\varphi'(y)$

$\varphi'(y)=-2y$. $\varphi(y)=-y^2+C$. $u=xe^y-y^2+C=C'$. $xe^y-y^2\equiv C$.

(6) $\frac{\partial P}{\partial y}=-b$. $\frac{\partial Q}{\partial x}=b$ 不是.

(7). $\frac{\partial P}{\partial y}=e^x+2y$. $\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x+2y$. $u=ye^x+2e^x+xy^2+\varphi(y)$. $\frac{\partial u}{\partial y}=e^x+2xy+\varphi'(y)$

$\varphi(y)\equiv 0$. $ye^x+2e^x+xy^2\equiv C$

15.(1) $dx-dy=\frac{1}{(x+y)^2}(dx+dy)$. $d(x-y)=-d\frac{1}{x+y}$. $x-y=-\frac{1}{x+y}+C$

(4) $(x^2+y^2)dx+ydx-xdy=0$. $(x^2+y^2)dx+d(\frac{x}{y})\cdot y^2=0$

$dx+d(\frac{x}{y})\cdot\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}=0$. $dx+d(\frac{x}{y})\cdot d\arctan(u)=0$.

$x+\arctan\frac{x}{y}\equiv C$

16.(3). $y(x+1)dx+x(y+1)dy=0$. $xy\neq 0$.

$\frac{\partial P}{\partial y}=x+1$. $\frac{\partial Q}{\partial x}=y+1$

两边同除 xy. $(1+\frac{1}{x})dx+(1+\frac{1}{y})dy=0$. $x+\ln|x|+y+\ln|y|=C$

(6) $e^x dx+(e^x\cot y+2y\cos y)dy=0$.

$\frac{\partial M}{\partial y}=0$. $\frac{\partial N}{\partial x}=e^x\cot y$. $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\cot y$. $\mu=e^{\ln\sin y}=\sin y$

$\sin y\cdot e^x dx+\sin y(e^x\cot y+2y\cos y)dy=0$.

$u=\sin y\cdot e^x+\varphi(y)$. $\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\cos y+\varphi'(y)=e^x\cos y+y\sin 2y$

$\varphi'(y)=y\sin 2y$. $\varphi(y)=-\frac{1}{2}y\cos 2y+\frac{1}{4}\sin 2y$

或凑微分法: 两边乘 $\sin y$.

$e^x\sin y\,dx+e^x\cos y\,dy+2y\sin y\cos y\,dy=0$

$d(\sin y\,e^x)+y\sin 2y\,dy=0$

$d(\sin y\,e^x)+d(-\frac{1}{2}y\cos 2y+\frac{1}{4}\sin 2y)$

习题9.4

2. 设 φ_1, φ_2 是 $y''+q(x)y=0$ 的两个解.

$$\varphi_1''=-q(x)\varphi_1, \quad \varphi_2''=-q(x)\varphi_2.$$

$W(x)=\varphi_1\varphi_2'-\varphi_1'\varphi_2$. $W'(x)=\varphi_1'\varphi_2'+\varphi_1\varphi_2''-\varphi_1''\varphi_2-\varphi_1'\varphi_2'$

$$=\varphi_1\varphi_2''-\varphi_1''\varphi_2=-q(x)\varphi_1\varphi_2+q(x)\varphi_1\varphi_2=0.$$

$W(x)\equiv C$.

3. 设 φ_1, φ_2 是齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的线性无关解.

则 $\varphi(x)$ 可表示为 $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$, C_1, C_2 为某固定常数.(通解包含一切解)

若 $\exists x_0$, $\varphi(x_0)=0$. $\Rightarrow C_1\varphi_1(x_0)+C_2\varphi_2(x_0)=0$.

若 $\varphi'(x_0)=0 \Rightarrow C_1\varphi_1'(x_0)+C_2\varphi_2'(x_0)=0$

由于 $\varphi(x)$ 是非零解, C_1, C_2 一定不同时为零. 则上述方程组有非零解.

$\Rightarrow \begin{vmatrix}\varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0)\\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0)\end{vmatrix}=0$. 总言之. $\exists x_0$. $W(x_0)=0$ 与 φ_1, φ_2 线性无关矛盾.

4. 若存在 x_0 是 φ_1, φ_2 的公共零点, 即 $\varphi_1(x_0)=0$ $\varphi_2(x_0)=0$.

$$\begin{vmatrix}\varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0)\\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0)\end{vmatrix}=0.$$ 也即存在 x_0. $W(x_0)=0$

与 φ_1, φ_2 线性无关矛盾.

习题9.6

1. $y''+3y'+2y=\frac{1}{e^x+1}$

$y''+3y'+2y=0 \Rightarrow \lambda^2+3\lambda+2=0$. $\lambda=-1$ $\lambda=-2$ $\quad C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

$$\begin{cases} C_1'e^{-x}+C_2'e^{-2x}=0 \\ -C_1'e^{-x}-2C_2'e^{-2x}=\frac{1}{e^x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)=\frac{e^x}{e^x+1} \\ C_2'(x)=-\frac{e^{2x}}{e^x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=\ln(1+e^x)+C_1 \\ \end{cases}$$

$C_2'(x)=-e^x+\frac{e^x}{1+e^x}$. $C_2(x)=-e^x+\ln(1+e^x)+C_2$

$y=e^{-x}\ln(1+e^x)+C_1e^{-x}-e^{-x}+e^{-2x}\ln(1+e^x)+C_2e^{-2x}$

$=(e^{-x}+e^{-2x})\ln(1+e^x)+\underbrace{(C_1-1)}_{C_1\ (\text{任意})}e^{-x}+C_2e^{-2x}$

2. $y''+y=\frac{1}{\sin x}$.

$\lambda^2+1=0$. $\lambda=\pm i$. $C_1\cos x+C_2\sin x$

$$\begin{cases} C_1'\cos x+C_2'\sin x=0 \\ -C_1'\sin x+C_2'\cos x=\frac{1}{\sin x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'=-1 \\ C_2'=\operatorname{ctg} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=-x+C_1 \\ C_2(x)=\ln|\sin x|+C_2 \end{cases}$$

$y=(-x+C_1)\cos x+(\ln|\sin x|+C_2)\sin x=-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|+C_1\cos x+C_2\sin x$

3. $y''+4y=2\tan x$

$\lambda^2+4=0$. $\lambda=\pm 2i$. $C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

$$\begin{cases} C_1'\cos 2x+C_2'\sin 2x=0 \\ -2C_1'\sin 2x+2C_2'\cos 2x=2\tan x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'=-2\sin^2 x=-1+\cos 2x \\ C_2'=\tan x\cos 2x=\sin 2x-\tan x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=-x+\frac{1}{2}\sin 2x+C_1 \\ C_2(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+\ln|\cos x|+C_2 \end{cases}$$

$y=(-x+\frac{1}{2}\sin 2x+C_1)\cos 2x+(-\frac{1}{2}\cos 2x+\ln|\cos x|+C_2)\sin 2x$

$=-x\cos 2x+\sin 2x\ln|\cos x|+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

4. $y''+y=2\sec^3 x$ $\quad$. $C_1\cos x+C_2\sin x$

$$\begin{cases} C_1'\cos x+C_2'\sin x=0 \\ -C_1'\sin x+C_2'\cos x=2\sec^3 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'=-2\sec^3 x\cdot\sin x=\frac{-2\sin x}{\cos^3 x} \\ C_2'=2\sec^3 x\cdot\cos x=2\sec^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=-\sec^2 x+C_1 \\ C_2(x)=2\tan x+C_2 \end{cases}$$

$y=(-\sec^2 x+C_1)\cos x+(2\tan x+C_2)\sin x=-\sec x+2\tan x\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x$

$=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1-2\sin^2 x}{\cos x}=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{\cos 2x}{\cos x}$

5. $x^2y''-4xy'+6y=0$

$x=e^t$. $y_x'=y_t'\cdot\frac{1}{x}$. $y_x''=(y_t''-y_t')\frac{1}{x^2}$

$(t=\ln|x|)$ $\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$
$e^t=|x|$

$y_t''-y_t'-4y_t'+6y_t=0$ $\quad \lambda^2-5\lambda+6=0$ $\quad \lambda=2,\ \lambda=3$

$e^{2t},\ e^{3t} \Rightarrow C_1x^2+C_2x^3$

6. $x^2y''-xy'-3y=0$. $\quad y_t''-y_t'-y_t'-3y=0$. $\quad \lambda^2-2\lambda-3=0$ $\quad \lambda=-1,\ \lambda=3$

$C_1\frac{1}{x}+C_2x^3$

7. $x^3y'''+xy'-y=0$. $\quad y_x'''=[(y_t'''-y_t'')\frac{1}{x^2}-2(y_t''-y_t')\frac{1}{x^3}x]\cdot\frac{1}{x}=(y_t'''-3y_t''+2y_t')\frac{1}{x^3}$

$y_t'''-3y_t''+2y_t'+y_t'-y=0 \Rightarrow y_t'''-3y_t''+3y_t'-y=0$ $\quad \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$, $(\lambda-1)^3=0$

$C_1e^t+C_2te^t+C_3t^2e^t \Rightarrow x(C_1+C_2\ln|x|+C_3(\ln|x|)^2)$

8. $x^2y''+xy'+4y=10$ $\qquad \Rightarrow$ 特解: $y=\frac{5}{2}$

$y_t''-y_t'+y_t'+4y=10$. $\quad y_t''+4y=10$. $\quad \lambda^2+4=0$. $\quad \lambda=\pm 2i$

$C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+\frac{5}{2} \Rightarrow C_1\cos(\ln x^2)+C_2\sin(\ln x^2)+\frac{5}{2}$

习题 9.5

1.(1) $y''-3y'+2y=0$. $\quad \lambda^2-3\lambda+2=0$. $\lambda=1,\ \lambda=2$. $\quad C_1e^x+C_2e^{2x}$

(3) $y''+6y'+9y=0$ $\quad \lambda^2+6\lambda+9=0$. $\lambda=-3$. $\quad C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$

(5) $y''-y'+2y=0$ $\quad \lambda^2-\lambda+2=0$. $\lambda=\frac{1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$. $\quad C_1e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x+C_2e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x$

3.(7) $y''-y=2e^x-x^2$. $\quad \lambda^2-1=0$, $\lambda=\pm1$. $\quad C_1e^x+C_2e^{-x}$.

$y=Axe^x$: $\quad y''=2Ae^x+Axe^x$. $\quad 2Ae^x=2e^x \Rightarrow A=1$. $\quad y_1=xe^x$

$y=ax^2+bx+c$. $\quad y''=2a$. $\quad 2a-ax^2-bx-c=-x^2$. $\quad y_2=x^2+2$

$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+xe^x+x^2+2$

(8) $y''+y'=\sin 4x-2\sin 2x$. $\quad \lambda^2+\lambda=0$. $\lambda=0,-1$ $\quad C_1+C_2e^{-x}$

$y=A\sin 4x+B\cos 4x$. $\quad y'=4A\cos 4x-4B\sin 4x$. $\quad y''=-16A\sin 4x-16B\cos 4x$

$$\begin{cases}-16A-4B=1\\ 4A-16B=0\end{cases},\quad \begin{cases}A=-\frac{1}{17}\\ B=-\frac{1}{68}\end{cases} \Rightarrow y_1=-\frac{1}{17}\sin 4x-\frac{1}{68}\cos 4x$$

$y=A\sin 2x+B\cos 2x$ $\quad y'=2A\cos 2x-2B\sin 2x$. $\quad y''=-4A\sin 2x-4B\cos 2x$

$$\begin{cases}-4A-2B=-2\\ 2A-4B=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=\frac{2}{5}\\ B=\frac{1}{5}\end{cases} \Rightarrow y_2=\frac{2}{5}\sin 2x+\frac{1}{5}\cos 2x$$

$y=C_1+C_2e^{-x}-\frac{1}{17}\sin 4x-\frac{1}{68}\cos 4x+\frac{2}{5}\sin 2x+\frac{1}{5}\cos 2x$

4. (2) $y''+y'=x-2$. $\lambda^2+\lambda=0$ $\lambda=0,-1$. $x(ax+b)$

(4) $y''-y=e^x(x^2-1)$. $\lambda^2-1=0$. $\lambda=\pm1$. $x(ax^2+bx+c)e^x$

(5) $y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(x-5)$

$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$. $(\lambda+1)^3$ $\lambda=-1$. $x^3(ax+b)e^{-x}$

《高等数学》第十章习题解答

习题10.1

1. 利用柯西收敛原理证明:

(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n(n+1)}$收敛.

证. $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{\cos k}{k(k+1)}|\leq\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k+1)}=\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n}$. 对任意$\varepsilon>0$, 令$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$, 则当$n>N$时, $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{\cos k}{k(k+1)}|<\frac{1}{n}<\varepsilon$. 由柯西收敛原理, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n(n+1)}$收敛.

(2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散.

证. $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{\sqrt{k}}|\geq\frac{p}{\sqrt{n+p}}$. 无论$N$多么大, 取$n=p=N+1$时, $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{\sqrt{k}}|\geq\sqrt{\frac{N+1}{2}}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$. 由柯西收敛原理, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散.

(3) 设两个级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛, 且存在正整数$N$, 使当$n\geq N$时有$a_n\leq u_n\leq b_n$, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛.

证. 对任意的$\varepsilon>0$, 因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛, 所以存在$N'>N$, 使得当$n>N'$时, $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k|<\varepsilon$, $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}b_k|<\varepsilon$. 另一方面, $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k\leq\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k\leq\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}b_k$. 所以$|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k|<\varepsilon$. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

2. 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 又知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散, 问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$是否收敛?

答: 一定发散. 否则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$也收敛.

3. 判断下列级数是否收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. 因为部分和$\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{n+1}-1$, 在$n\to\infty$时没有极限, 所以级数发散.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. 因为$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$, 在$n\to\infty$时有极限, 所以级数收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos^2\frac{\pi}{n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\cos^2\frac{\pi}{n}=1$, 所以级数发散.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.0001}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.0001}=1$, 所以级数发散.

4. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和序列为$\{S_n\}$. 若$n\to\infty$时$\{S_{2n}\}$与$\{S_{2n+1}\}$都收敛且收敛到同一个常数$A$. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

证. 对任意的$\varepsilon>0$, 因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=A$, 所以存在$N>0$, 使得当$n>N$时, $|S_{2n}-A|<\varepsilon$, $|S_{2n+1}-A|<\varepsilon$. 于是当$n>N$时, $|S_n-A|<\varepsilon$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

5. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 且$u_n\ge u_{n+1}\ge 0$ $(n=1,2,\dots)$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

证. 对任意的$\varepsilon>0$, 因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 由柯西收敛原理, 存在$N$, 使得当$n>N$时, $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_n<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是当$n>N$时, $(2n)u_{2n}\le 2\sum\limits_{k=n+1}^{2n}u_k<\varepsilon$. $(2n+1)u_{2n+1}\le\sum\limits_{k=n+1}^{2n}u_k+\sum\limits_{k=n+1}^{2n+1}u_k<\varepsilon$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

习题10.2

1. 讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{4^n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\pi}{4^n}/\frac{1}{2^n}=\pi$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛, 所以原级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^3+1}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^3+1}}/\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$收敛, 所以原级数收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$, 所以级数发散.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^2+4n-3}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{n^2+4n-3}/\frac{1}{n}=4$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 所以原级数发散.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n^2+3n+1)^{\frac{n+2}{2}}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n^2+3n+1)^{\frac{n+2}{2}}}/\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{3n+1}{n^2})^{-\frac{n+2}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 所以原级数收敛.

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(\ln n)^{\ln n}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\ln[\frac{n}{(\ln n)^{\ln n}}/\frac{1}{n^2}]=\lim\limits_{n\to\infty}(3-\ln\ln n)\ln n=-\infty$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(\ln n)^{\ln n}}/\frac{1}{n^2}=0$. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 所以原级数收敛.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{1}{3^n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\tan\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{3}$, 由柯西判别法, 级数收敛.

2. 讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n!}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{(n+1)!}/\frac{n^5}{n!}=0$, 由达朗贝尔判别法, 级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3n^2}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{3n^2}=+\infty$, 级数发散.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}/\frac{3^n\cdot n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}3(1+\frac{1}{n})^{-n}=3e^{-1}>1$, 由达朗贝尔判别法, 级数发散.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}/\frac{1}{n}=1$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 所以原级数发散.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3-\frac{1}{n})^n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{(3-\frac{1}{n})^n}}=\frac{1}{3}$, 由柯西判别法, 级数收敛.

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(\ln n)^n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{(\ln n)^n}}=0$, 由柯西判别法, 级数收敛.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}/\frac{1000^n}{n!}=0$, 由达朗贝尔判别法, 级数收敛.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}/\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{1}{4}$, 由达朗贝尔判别法, 级数收敛.

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}}=\frac{e}{3}<1$, 由柯西判别法, 级数收敛.

(10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ $(p>0)$. 当$p>1$时, 积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}=\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}|_2^{+\infty}$收敛, 所以级数收敛. 当$p=1$时, 积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}=\ln\ln x|_2^{+\infty}$发散, 所以级数发散. 当$0<p<1$时, 积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}=\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}|_2^{+\infty}$发散, 所以级数发散.

(11) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln\ln n)^q}$ $(q>0)$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(\ln\ln n)^q}/\frac{1}{n(\ln n)^{1/2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^{1/2}}{(\ln\ln n)^q}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{1/2}}{(\ln x)^q}=+\infty$. 级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{1/2}}$发散, 所以原级数发散.

3. 证明: 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$也收敛. 反之不一定成立, 试举例说明.

证. 因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 所以序列$\{u_n\}$有界. 设$u_n<M$. 则$u_n^2\le Mu_n$. 由比较判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛.

反之不一定成立, 例如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})^2$收敛, 但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

4. 证明: 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$都收敛, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$也收敛.

证. 由题设条件, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$收敛. 由于$|a_nb_n|\le\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$, $(a_n+b_n)^2\le$

$2(a_n^2+b_n^2)$, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$也收敛. 取$b_n=\frac{1}{n}$, 即得出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$收敛.

5. 证明: 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛, 问下列级数是否发散?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$.

答. (1) 一定发散, 因为$u_n+v_n\geq u_n$, 根据比较判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$发散. (2) 不一定, 比如$u_n=v_n=\frac{1}{n}$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$收敛到0. (3) 不一定, 比如$u_n=v_n=\frac{1}{n}$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$收敛.

6. 设$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=l$, 其中$0<l<+\infty$. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛, 而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

证. 首先$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=l>0$意味着当$n$充分大时$u_n>0$. 所以可以假设$u_n>0$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n^2/\frac{1}{n^2}=l^2$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n/\frac{1}{n}=l$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

习题10.3

1. 判断下列级数是否收敛? 条件收敛还是绝对收敛?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2}$. 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2}|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$收敛, 所以原级数绝对收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^p}$ $(p>0)$. 序列$\{\frac{1}{(2n-1)^p}\}$单调趋于0, 所以该交错级数收敛. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^p}$当且仅当$p>1$时收敛, 所以原级数当$p>1$时绝对收敛, 否则条件收敛.

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$. 序列$\{\frac{1}{n\ln n}\}$单调趋于0, 所以该交错级数收敛. 但是级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散, 所以原级数条件收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}-1}{n}$. 原式$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, 右端两个交错级数都收敛, 所以原级数收敛. 但是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n}/\frac{1}{\sqrt{n}}=1$, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n}$发散. 所以原级数条件收敛.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{3^{n^2}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{3^{(n+1)^2}}/\frac{n!}{3^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{2n+1}}=0$. 由达朗贝尔判别法, 级数绝对收敛.

(7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}/\frac{1}{n^2}=\pi$, 所以级数绝对收敛.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\tan\frac{\varphi}{n}\ (-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$. 当$\varphi=0$时, 级数显然绝对收敛. 否则该级数为交错级数, 且$|\tan\frac{\varphi}{n}|$单调趋于0, 因此级数收敛. 但是$\lim\limits_{n\to\infty}|\tan\frac{\varphi}{n}|/\frac{1}{n}=|\varphi|$, 级数不绝对收敛.

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$. $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n)=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$. 因此该级数为收敛的交错级数. 但是$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}/\frac{1}{n}=\frac{\pi}{2}$, 级数不绝对收敛.

2. 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}\ (p>0)$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}u_n$均收敛.

证. 数列$\{\frac{1}{n^p}\}$及$\{\frac{n}{n+1}\}$均单调有界, 又因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 由阿贝尔判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}u_n$均收敛.

3. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^p}\ (0<\varphi<2\pi)$ 当$p>1$时绝对收敛, 当$0<p\le 1$时条件收敛.

证. (i) 当$p>1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛. 由于$|\frac{\cos n\varphi}{n^p}|\le\frac{1}{n^p}$, 故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^p}$绝对收敛. (ii) 设$0<p\le 1$. 由于数列$\{\frac{1}{n^p}\}$单调趋于0, 部分和$\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k\varphi$有界, 由狄利克雷判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^p}$收敛. 同理可证当$\varphi\ne\pi$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\varphi}{2n^p}$收敛. 又由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$发散, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos 2n\varphi}{2n^p}$发散. 因为$|\frac{\cos n\varphi}{n^p}|\ge\frac{\cos^2 n\varphi}{n^p}=\frac{1+\cos 2n\varphi}{2n^p}$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^p}$不绝对收敛.

5. 形如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$的级数称作狄利克雷级数. 证明它有下列性质: 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$收敛(发散), 那么当$x>x_0(x<x_0)$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$也收敛(发散).

证. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$收敛. 当$x>x_0$时, 数列$\{n^{x_0-x}\}$单调有界. 由阿贝尔判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}n^{x_0-x}$收敛.

6. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛, 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n}u_n$也绝对收敛.

证. $|\frac{2n-1}{n}u_n|\le 2|u_n|$, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛意味着级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n}|u_n|$也收敛.

习题10.4

1. 求下列级数的收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$. 当且仅当$|\ln x|<1$时级数收敛, 所以收敛域为$(e^{-1},e)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}(\frac{1-x}{1+x})^n$. 当且仅当$\frac{1-x}{1+x}\in[-1,1)$时级数收敛, 所以收敛域为$(0,+\infty)$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{3^n}$. 当$|x|\le\frac{1}{3}$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{3^n}\ne 0$, 所以级数发散. 当$|x|>\frac{1}{3}$时, $|\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{3^n}|\le\frac{1}{|x|^n}\frac{\pi}{3^n}$, 由比较判别法可知, 级数绝对收敛. 所以收敛域为$(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},+\infty)$.

2. 讨论下列函数序列在所示区间内的一致收敛性.

(1) $f_n(x)=\frac{1}{2^n+x^2}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 由于$|f_n(x)-0|\le\frac{1}{2^n}$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$, 所以函数序列一致收敛.

(2) $f_n(x)=\sqrt{x^4+e^{-n}}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\sqrt{x^4}=x^2$. 由于$|f_n(x)-x^2|=\frac{e^{-n}}{\sqrt{x^4+e^{-n}}+x^2}\le\frac{e^{-n}}{\sqrt{e^{-n}}}=e^{-\frac{n}{2}}$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{n}{2}}=0$, 所以函数序列一致收敛.

(3) $f_n(x)=\ln(1+\frac{x^2}{n^2})$, (a) $-l<x<+l$, (b) $-\infty<x<+\infty$.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. (a) 由于$|f_n(x)-0|\le\frac{x^2}{n^2}<\frac{l^2}{n^2}$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{l^2}{n^2}=0$, 所以函数序列在区间$(-l,l)$上一致收敛. (b) 取$x_n=n$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-0]=\ln 2$ 所以函数序列在区间$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛.

(4) $f_n(x)=\frac{n^2x}{1+n^2x}$, $0<x<1$.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=1$. 取$x_n=\frac{1}{n^2}$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-1]=-\frac{1}{2}$ 所以函数序列不一致收敛.

3. 讨论下列级数在所示区间上的一致收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{x^2+n^2}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{x^2+n^2}|\le\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{n^{3/2}}$, 由$M$判别法, 级数一致收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1})$, $-1\le x\le 1$.

解. $|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(\frac{x^k}{k}-\frac{x^{k+1}}{k+1})|=|\frac{x^{n+1}}{n+1}|\le\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 所以级数一致收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{1+(x^2+n^2)^3}}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $|\frac{\sin nx}{\sqrt{1+(x^2+n^2)^3}}|\le\frac{1}{n^3}$, 由$M$判别法, 级数一致收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+4n^4x^2}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $1+4n^4x^2\ge 4n^2|x|$, 所以$|\frac{x}{1+4n^4x^2}|\le\frac{1}{4n^2}$, 由$M$判别法, 级数一致收敛.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x)^n}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x)^k}=\frac{x}{(1+x)^n}\le\frac{x}{1+nx}\le\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 所以级数一致收敛.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\cdot\sin nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $0\le x\le 2\pi$.

解. $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\le\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 所以函数序列$\{\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\}$一致收敛到0. 因为$\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$关于$n$单调, 且$|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x\cdot\sin kx|=|\cos\frac{x}{2}\cdot[\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x]|\le 2$, 根据狄利克雷判别法, 级数一致收敛.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^2e^{-nx^2}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}x^2e^{-kx^2}|=\frac{x^2e^{-nx^2}}{e^{x^2}+1}\le x^2e^{-nx^2}\le\frac{e^{-1}}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{-1}}{n}=0$, 所以级数一致收敛.

4. 证明级数$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{-n}\sin 2^nx$在$(-\infty,+\infty)$中一致收敛, 且有连续的导函数.

证. (i) $|3^{-n}\sin 2^nx|\le 3^{-n}$, 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{-n}\sin 2^nx$一致收敛.

(ii) $|(3^{-n}\sin 2^nx)'|=|(\frac{2}{3})^n\cos 2^nx|\le(\frac{2}{3})^n$, 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3^{-n}\sin 2^nx)'$一致收敛. 于是$f(x)$有连续的导函数.

5. 证明级数$g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$在$(-\infty,+\infty)$中不一致收敛, 但在任意闭区间$[-M,M]$ $(M>0)$上一致收敛, 并证明$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$中有连续的导函数.

证. (i) 取$x_n=3^{n+1}$, 则$|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}2^k\sin\frac{x_n}{3^k}|\ge 2^{n+1}\sin 1>\sin 1$, 所以级数在$(-\infty,+\infty)$中不一致收敛.
(ii) 当$x\in[-M,M]$时, $|2^n\sin\frac{x}{3^n}|\le|2^n\cdot\frac{x}{3^n}|\le M(\frac{2}{3})^n$. 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$在闭区间$[-M,M]$上一致收敛.

(iii) $|(2^n\sin\frac{x}{3^n})'|=|(\frac{2}{3})^n\cos\frac{x}{3^n}|\le(\frac{2}{3})^n$, 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n\sin\frac{x}{3^n})'$在区间$(-\infty,+\infty)$上一致收敛. 于是$g(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上有连续的导函数.

6. 证明级数$\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在任意区间$[1+\delta,+\infty)$中一致收敛$(\delta>0)$, 并证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在任意区间$[1+\delta,+\infty)$中一致收敛$(\delta>0)$, 从而导出函数$\zeta(x)$在$(1,+\infty)$中有连续的导函数.

证. (i) 当$x\in[1+\delta,+\infty]$时, $\frac{1}{n^x}\le\frac{1}{n^{1+\delta}}$, 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在区间$[1+\delta,+\infty)$中一致收敛.
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\delta/2}}=0$, 所以存在$M>0$, 使得$\frac{\ln n}{n^{\delta/2}}<M$. 于是当$x\in[1+\delta,+\infty]$时, $\frac{\ln n}{n^x}\le\frac{\ln n}{n^{1+\delta}}\le\frac{M}{n^{1+\delta/2}}$, 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在区间$[1+\delta,+\infty)$中一致收敛.
(iii) 综上所述, 在任意区间$(1+\delta,+\infty)$上, $\zeta(x)$有连续的导函数$\zeta'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^x})'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-\ln n}{n^x}$. 所以$\zeta'(x)$在区间$(1,+\infty)$上连续.

8. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$在$[0,+\infty)$中一致收敛, 并有$\lim\limits_{x\to0+0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

证. 当$x\in[0,+\infty)$时, $\frac{1}{n^x}$关于n单调, 且$\frac{1}{n^x}\le1$. 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 根据阿贝尔判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$在$[0,+\infty)$中一致收敛. 于是$\lim\limits_{x\to0+0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to0+0}\frac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

习题10.5

1. 求下列幂级数的收敛半径.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}/\frac{1}{n2^n}=\frac{1}{2}$, 收敛半径为2.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(n+1)!}/\frac{n^k}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^k\cdot\frac{1}{n+1}=0$, 收敛半径为$+\infty$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}/\frac{n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n}=e^{-1}$, 收敛半径为$e$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}/\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}$, 收敛半径为4.

2. 求下列幂级数的收敛区间与收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}/\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=1$, 故收敛区间为$(-1,1)$. 又$x=1$时级数发散, $x=-1$时交错级数收敛, 所以收敛域为$[-1,1)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{na^n}$ $(a>0)$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{na^n}}=\frac{1}{a}$, 故收敛区间为$(-a,a)$. 又$x=a$时级数发散, $x=-a$时交错级数收敛, 所以收敛域为$[-a,a)$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x^{2n+3}|}{(2n+3)\cdot(2n+3)!}/\frac{|x^{2n+1}|}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}=0$, 故收敛区间和收敛域皆为$(-\infty,+\infty)$.

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$. 等比级数, 当且仅当$x^2 < 1$时收敛, 故收敛区间和收敛域皆为$(-1,1)$.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3^{-n}+5^{-n})x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{-n}+5^{-n}} = \frac{1}{3}$, 故收敛区间为$(-3,3)$. 又$x = \pm 3$时, $\lim\limits_{n\to\infty}(3^{-n}+5^{-n})x^n \neq 0$, 级数发散, 所以收敛域为$(-3,3)$.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+e^{-n})x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}+e^{-n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}(1+\frac{n}{e^n})} = 1$, 故收敛区间为$(-1,1)$. 当$x = 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n}$发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}x^n$收敛, 所以原级数发散. 当$x = -1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}x^n$均收敛, 所以原级数收敛. 所以收敛域为$[-1,1)$.

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$. $1 \le 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \le n$, 由夹逼定理, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = 1$, 故收敛区间为$(-1,1)$. 又$x = \pm 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n = \infty$, 级数发散, 所以收敛域为$(-1,1)$.

3. 求下列幂函数的和函数.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.

解. 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$的和函数为$\frac{x}{1-x}$, 收敛半径为1. 所以级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'$的和函数为$(\frac{x}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$, 收敛半径为1. 当$x = \pm 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)x^n = \infty$, 级数发散. 所以级数的收敛域为$(-1,1)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$.

解. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-1}$的和函数为$\frac{x}{1+x^2}$, 收敛半径为1. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(x^{2n-1})'$的和函数为$(\frac{x}{1+x^2})' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, 收敛半径为1. 当$x = \pm 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} = \infty$, 级数发散. 所以级数的收敛域为$(-1,1)$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

解. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的和函数为$\ln(1+x)$, 收敛半径为1. 当$x = 0$时原级数为0, 所以原级数的和函数为$\int_0^x \ln(1+t)dt = (1+x)\ln(1+x) - x$, 收敛半径为1. 当$x = \pm 1$时, 级数绝对收敛, 所以收敛域为$[-1,1]$. 和函数在$x = -1$时补充定义为它在该点的右极限1.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n}$.

解. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$的和函数为$xe^{x^2}$, 收敛半径为$+\infty$. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{x^{2n+1}}{n!})'$的和函数为$(xe^{x^2})'=(1+2x^2)e^{x^2}$, 收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

习题10.6

1. 利用已知的初等函数的展开式, 求下列函数在$x=0$处的幂级数展开式, 并指出收敛域.

(1) $\frac{x}{16+x^2}=\frac{x}{16}\frac{1}{1+\frac{x^2}{16}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{16^{n+1}}$, $x\in(-4,4)$.

(2) $e^{x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $\frac{1}{a+x}$ $(a\neq 0)$. $\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{x}{a}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{a^{n+1}}$, $x\in(-|a|,|a|)$.

(4) $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1-x)=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x\in(-1,1)$.

(5) $(1+x)e^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(n-1)!}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1-n}{n!}x^n$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(6) $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{x^n-(-x)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(8) $\sin(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}]$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(9) $\ln(1+x-2x^2)=\ln(1-x)+\ln(1+2x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n+(2x)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n-1}{n}x^n$, $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

(10) $\frac{5x-12}{x^2+5x-6}=\frac{6}{6+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1+\frac{x}{6}}+\frac{1}{1-x}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+(-6)^{-n})x^n$, $x\in(-1,1)$.

2. 利用逐项微分法和逐项积分法, 求下列函数在$x=0$处的幂级数展开式.

(1) $\arctan x$.

解. $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, 收敛半径为1. 又因为$\arctan 0=0$, 所以$\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 收敛半径为1. 当$x=\pm 1$时级数收敛, 所以收敛域为$[-1,1]$.

(2) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解. $\frac{d}{dx}\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^{2n}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$, 收敛半径为1. 又因为$\ln(0+\sqrt{1+0^2})=0$, 所以$\ln(x+$

$\sqrt{1+x^2}) = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 收敛半径为1. 因为序列$\{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\}$单调递减, 又序列$\{\frac{1}{2n+1}\}$单调递减趋于0, 所以当$x = \pm 1$时级数为收敛的交错级数, 所以收敛域为$[-1, 1]$.

3. 证明级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{1}{x}(e^x - 1)\ (x \neq 0)$, 并证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = 1$.

证. 当$x \neq 0$时, $\frac{1}{x}(e^x - 1) = \frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$. 于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{d}{dx}(\frac{e^x-1}{x}) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$. 代入$x = 1$, 得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = 1$.

第十章总练习题

3. 设有$\alpha > 0$使得$n \geq N$时$\ln\frac{1}{a_n} \geq (1+\alpha)\ln n$, 其中$a_n > 0$. 试证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

证. 当$n \geq N$时, 因为$\ln\frac{1}{a_n} \geq (1+\alpha)\ln n$, 所以$\frac{1}{a_n} \geq n^{1+\alpha}$, 所以$a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$. 由比较判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

9. 设$y = f(x)$在$(x_0 - a, x_0 + a)\ (a > 0)$中有定义, 有任意阶导数, 且$|f^{(n)}(x)| \leq M$ (M为常数). 证明: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n\ (x_0 - a < x < x_0 + a)$.

证. $f(x)$在$x = x_0$点的泰勒级数的拉格朗日余项为$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1}$. 于是当$x \in (x_0 - a, x_0 + a)$时, $|R_n(x)| \leq \frac{Ma^n}{(n+1)!}$, 于是$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, 所以$f(x)$的泰勒级数收敛到$f(x)$.

《高等数学》第十一章习题解答

习题11.1

1. 判别下列广义积分的敛散性; 若收敛, 求出其值.

(1) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = (-xe^{-x} - e^{-x})|_0^{+\infty} = 1.$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \ln\frac{x+1}{x+2}|_0^{+\infty} = \ln 2.$

(3) $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \overset{x-a=\sqrt{2}\sigma t}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 1\ (\sigma > 0).$

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx \overset{u=x-x^{-1}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan u|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

(5) $\int_0^{+\infty} x\sin xdx = (-x\cos x + \sin x)|_0^{+\infty}$, 发散.

(6) $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \overset{t=\sqrt{x-1}}{=} \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{2dt}{t^2+1} = 2\arctan t|_{\sqrt{3}}^{+\infty} = \frac{\pi}{3}.$

(8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}dx = \arctan(x+1)|_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$

(9) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos xdx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$

(10) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \overset{x=\sin t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi.$

(11) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x|_0^{\frac{1}{2}}$, 发散.

(12) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\ln 2}.$

3. 判断下列积分的敛散性.

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+3}}$. 因为$\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x^4+3}} < \frac{1}{x^2}$, 且积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$收敛, 原积分收敛.

(2) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+6}$. 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+6}/\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, 且积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x}$发散, 原积分发散.

(3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}+x^3}$. 因为$\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}+x^3}/\frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{3}$, 且积分$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$收敛, 原积分收敛.

(4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$. 因为$\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}/\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x+x^2+x^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, 且积分$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$收敛, 原积分收敛.

(5) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}}dx$. 因为$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x^{3/2}}/\frac{1}{x^{1/2}} = 1$, 且积分$\int_0^1\frac{dx}{x^{1/2}}$收敛, 原积分收敛.

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$, 积分无瑕点. 因为当$x \to +\infty$时, 函数$\frac{1}{x}$单调趋于0, 且$|\int_0^A \sin xdx| \le 2$, 根据狄利克雷判别法, 原积分收敛.

(7) $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x^2}dx\ (\alpha > 0)$. 因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha e^{-x^2}}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = 0$, 且积分$\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$收敛, 原积分收敛.

(8) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$, 1不是瑕点. 因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{1-x}/\ln x = 1$, 且积分$\int_0^1 \ln xdx = (x\ln x - x)|_0^1 = -1$收敛, 原积分收敛.

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$. 0与$\frac{\pi}{2}$是瑕点. 因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}/\frac{1}{x^2} = 1$, 且积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{x^2}$发散, 原积分发散.

4. 判断下列积分是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+3}dx$.

解. 当n为非负整数时, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sqrt{x}|\cos x|}{x+3}dx \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sqrt{n\pi}|\cos x|}{(n+1)\pi+3}dx = \frac{2\sqrt{n\pi}}{(n+1)\pi+3}$. $\int_0^{n\pi} \frac{\sqrt{x}|\cos x|}{x+3}dx \geq \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{2\sqrt{k\pi}}{(k+1)\pi+3}$. 所以积分$\int_0^A \frac{\sqrt{x}|\cos x|}{x+3}dx$无界, 原积分不绝对收敛.

因为$(\frac{\sqrt{x}}{x+3})' = \frac{3-x}{2\sqrt{x}(x+3)^2}$, 所以当$x$充分大时, 函数$\frac{\sqrt{x}}{x+3}$单调递减. 由于$x \to +\infty$时, $\frac{\sqrt{x}}{x+3} \to 0$, 又因为$|\int_0^A \cos x dx| \leq 2$, 由狄利克雷判别法, 原积分收敛.
综上所述, 原积分条件收敛.

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(3x+2)}{\sqrt{x^3+1}\sqrt[3]{x^2+1}}dx$.

解. 因为$|\frac{\cos(3x+2)}{\sqrt{x^3+1}\sqrt[3]{x^2+1}}| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{2}{3}}}$, 且积分$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{2}{3}}}$收敛, 原积分绝对收敛.

5. 叙述关于瑕积分的狄利克雷判别法及阿贝尔判别法.

(i) 狄利克雷判别法: 设函数$f(x), g(x)$在$(a,b]$上有定义, 且a是它们的瑕点. 设存在常数$M > 0$, 使得对一切$0 < \varepsilon < b-a$, $|\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx| \leq M$. 又设函数$g(x)$在$x \to a+0$时单调趋于0, 则瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛.

(ii) 阿贝尔判别法: 设函数$f(x), g(x)$在$(a,b]$上有定义, 且a是它们的瑕点. 若瑕积分$\int_a^b f(x)dx$收敛, 且函数$g(x)$在$(a,b]$上单调有界, 则瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛.

习题11.2

1. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{k\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$. 以$\varphi, k$为变量的二元函数$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$在$[0,\frac{\pi}{2}]\times[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$上连续, 因此原式$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim\limits_{k\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$.

(2) $\lim\limits_{k\to 1-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi$. 以$\varphi, k$为变量的二元函数$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$在$[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1]$上连续, 因此原式$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim\limits_{k\to 1-0} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = 1$.

(4) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$. 二元函数$\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$在全平面上连续, 所以$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. 又因为$|\int_1^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}| \leq |\int_1^{1+\alpha} dx| = |\alpha|$, 所以$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_1^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = 0$. 综上所述, 原式$= \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$.

(5) $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1 \frac{e^x\sin xy}{y+1}dx$. 以$x, y$为变量的二元函数$\frac{e^x\sin xy}{y+1}$在$[0,1]\times[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$上连续, 因此原式$= \int_0^1 \lim\limits_{y\to 0} \frac{e^x\sin xy}{y+1}dx = \int_0^1 0dx = 0$.

2. 求下列函数的导函数.

(1) $g(y) = \int_{a-ky}^{a+ky} f(x)dx$, 其中$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

解. $g'(y) = kf(a+ky) + kf(a-ky)$.

(2) $g(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}}dx$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

解. $g'(y) = -\sin y e^{y\sin x} - \cos y e^{y\cos y} + \int_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2} e^{y\sqrt{1-x^2}} dx$.

(3) $g(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x} dx$, $0 < y < +\infty$.

解. $g'(y) = \frac{\ln(1+y^2)}{y} + \int_0^y \frac{1}{1+xy} dx = \frac{\ln(1+y^2)}{y} + \frac{\ln(1+xy)}{y}\Big|_0^y = \frac{2\ln(1+y^2)}{y}$.

(4) $g(y) = \int_0^{y^2} \sin(x^2+y^2) dx$, $-\infty < y < +\infty$.

解. $g'(y) = 2y\sin(y^4+y^2) + \int_0^{y^2} 2y\cos(x^2+y^2) dx$.

3. 利用积分号下求导数的方法求下列积分.

(1) $g(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x} dx$, $-\infty < a < +\infty$.

解. 当$(x,a) \to (0, a_0)$时, $\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x} = \frac{a\cdot\arctan(a\tan x)}{a\tan x} \to a_0$.

当$(x,a) \to (\frac{\pi}{2}, a_0)$时, 由夹逼定理, $\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x} \to 0$.

因此补充定义后, 以x, a为变量的二元函数$\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}$在$[0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$上连续.

所以$g'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial a}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}$.

当$a > 0$且$a \neq 1$时, $g'(a) \overset{t=\tan x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+a^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-a^2}(\arctan t - a\arctan at)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2(a+1)}$. 注意到$g'(a)$是处处连续的偶函数, 故$g'(a) = \frac{\pi}{2(|a|+1)}$. 又因为$g(0) = 0$, 积分可得$g(a) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a \cdot \ln(|a|+1)$.

(2) $g(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}$, $-1 < a < 1$.

解. 当$(x,a) \to (\frac{\pi}{2}, a_0)$时, $a\cos x \to 0$, $\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \cdot \frac{1}{a\cos x} \to 2$. 补充定义后, 以$x, a$为变量的二元函数$\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$在$[0, \frac{\pi}{2}] \times (-1, 1)$上连续. 所以$g'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{1-a^2\cos^2 x} \overset{t=\tan x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{1-a^2+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$. 因为$g(0) = 0$, 所以$g(a) = \pi\arcsin a$.

(3) $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + \cos^2 x) dx$, $a \neq 0$.

解. 二元函数$\ln(a^2\sin^2 x + \cos^2 x)$在$a \neq 0$时连续, 所以$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\sin^2 x dx}{a^2\sin^2 x + \cos^2 x}$.

当$a > 0$且$a \neq 1$时, $I'(a) \overset{t=\tan x}{=} 2a\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+a^2t^2)(1+t^2)} = \frac{2a}{a^2-1}(\arctan t - \frac{1}{a}\arctan at)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{a+1}$. 注意到$I'(a)$在$a \neq 0$时连续, 故等式$I'(a) = \frac{\pi}{a+1}$在$a = 1$处亦成立. 又因为$I(1) = 0$, 所以当$a > 0$时$I(a) = \pi\ln\frac{a+1}{2}$. 又因为$I(a)$是偶函数, 所以$I(a) = \pi\ln\frac{|a|+1}{2}$.

习题11.3

1. 讨论下列积分在指定区间上的一致收敛性.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{1+x^2} dx$, $(-\infty < t < +\infty)$.

解. $|\frac{\sin tx}{1+x^2}| \leq \frac{1}{1+x^2}$, 且积分$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$收敛, 根据$M$-判别法, 原积分一致收敛.

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} dx$, $(0 < t_0 < t < +\infty)$.

解. 当$t > t_0 > 0$时, $|e^{-t^2x^2}| \leq e^{-t_0^2x^2}$, 积分$\int_0^{+\infty} e^{-t_0^2x^2} dx$收敛, 根据$M$-判别法, 原积分在区间$(t_0, +\infty)$上一致收敛.

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x dx$, (i) $(0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq +\infty)$, (ii) $(0 < \alpha \leq +\infty)$.

解. (i) 当$x \in [0,+\infty)$且$0 < \alpha_0 \le \alpha \le +\infty$时, $|e^{-\alpha x}\sin x| \le e^{-\alpha_0 x}$, 积分$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x}dx$收敛, 根据$M$-判别法, 原积分在区间$[\alpha_0,+\infty)$上一致收敛.

(ii) 当$\alpha > 0$时, $\int_A^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x dx = \frac{-e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{1+\alpha^2}|_A^{+\infty} = \frac{e^{-\alpha A}(\alpha\sin A+\cos A)}{1+\alpha^2}$. 则不论$M$多么大, 取$\alpha = \frac{1}{M}$及$A = 2k\pi$使得$M < A < 2M$时, $|\int_A^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x dx| > \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}$. 所以原积分在区间$(0,+\infty)$上不一致收敛.

(4) $\int_1^{+\infty} e^{-bx}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$, $(0 \le b < +\infty)$.

解. e^{-bx}是x的单调函数, 且$|e^{-bx}| \le 1$. 积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$收敛. 由阿贝尔别法, 原积分在区间$[0,+\infty)$上一致收敛.

(5) $\int_0^{+\infty} te^{-tx}dx$, (i) $(0 < c \le t \le d)$, (ii) $(0 < t \le d)$.

解. (i) 当$x \in [0,+\infty)$且$0 < c \le t \le d$时, $|te^{-tx}| \le de^{-cx}$, 积分$\int_0^{+\infty} de^{-ct}dx$收敛, 根据$M$-判别法, 原积分在区间$[c,d]$上一致收敛.

(ii) 当$t > 0$时, $\int_A^{+\infty} te^{-tx}dx = -e^{-tx}|_A^{+\infty} = e^{-tA}$. 则不论$M$多么大, 取$t = \frac{1}{M}$, $A = 2M$时, $\int_A^{+\infty} te^{-tx}dx = e^{-\frac{1}{2}}$. 所以原积分在区间$(0,d]$上不一致收敛.

(6) $\int_0^1 \frac{dx}{x^t}$, $(0 < t \le b < 1)$.

解. 当$x \in (0,1]$且$0 < t \le b < 1$时, $|\frac{1}{x^t}| \le \frac{1}{x^b}$, 积分$\int_0^1 \frac{dx}{x^b}$收敛, 根据$M$-判别法, 原积分在区间$(0,b]$上一致收敛.

2. 求下列积分的值.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, $(0 < a < b)$.

解. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \int_0^{+\infty} dx\int_a^b e^{-tx}dt$. 因为积分$\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx$在区间$[a,b]$上一致收敛, 所以原式$= \int_a^b dt\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx = \int_a^b \frac{1}{t}dt = \ln\frac{b}{a}$.

(2) $\int_0^1 \frac{x^a-x^b}{\ln x}dx$, $(a > -1, b > -1)$.

解. 不失一般性, 假设$a > b$. $\int_0^1 \frac{x^a-x^b}{\ln x}dx = \int_0^1 dx\int_b^a x^t dt$. 因为积分$\int_0^1 x^t dx$在区间$[b,a]$上一致收敛, 所以原式$= \int_b^a dt\int_0^1 x^t dx = \int_b^a \frac{1}{1+t}dt = \ln\frac{1+a}{1+b}$.

(3) $\int_{-\frac{1}{4}}^{+\infty} e^{-(2x^2+x+1)}dx$.

解. 设$t = \sqrt{2}(x+\frac{1}{4})$, 原式$= \int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{7}{8}}\frac{dt}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{7}{8}}$.

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\cdot\cos\beta x}{x}dx$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

解. 原式$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x}{2x}dx = \frac{\pi}{4}(1+\mathrm{sgn}(\alpha-\beta))$.

3. 求积分$\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin tx}{x}dx$的初等函数表达式.

解. 将积分记做$I(t)$. 当$t \in [-a,a]$且$x \in (0,+\infty)$时, $|e^{-x}\frac{\sin tx}{x}| \le |e^{-x}t| \le ae^{-x}$, 积分$\int_0^{+\infty} ae^{-x}dx$收敛, 所以积分$I(t)$在区间$[-a,a]$上一致收敛. 所以当$t \in (-a,a)$时, $I'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos tx dx = \frac{e^{-x}(t\sin tx-\cos tx)}{1+t^2}|_0^{+\infty} = \frac{1}{1+t^2}$. 由$a$的任意性, 及等式$I(0) = 0$, 得$I(t) = \arctan t$, $t \in \mathbb{R}$.

高等数学(I)下学期总结

第一部分．多元函数微分

第二部分．多元函数积分

第三部分．常微分方程

第四部分．级数，无穷积分

第三部分. 常微分方程

- 方程类型: <u>常微分方程</u>, 偏微分方程
- 方程解法: <u>积分法</u>, 幂级数解法, 数值解法
- 问题: 解的存在唯一性, 定性分析, <u>求解方程</u>

基本概念: 方程的阶, 通解, 特解, 通积分, 初值问题

1. 初等积分法.

   - $y^{(n)} = f(x)$.
     解法: 反复求不定积分.
   - 变量分离方程: $P(x)dx = Q(y)dy$.
     解法: 方程两边求不定积分.
   - 全微分方程: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$,
     其中$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
     解法: 求函数$u(x, y)$, 使得$du = Pdx + Qdy$.
   - 可降阶方程$F(x, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$.
     解法: 设$u = y'$, 降阶.

2. 线性微分方程.

- 解的存在唯一性定理. 设函数
$$p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x), q(x)$$
在区间$[a,b]$上连续. 则初值问题
$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=q(x),$$
$$y(a)=\xi_0,\ y'(a)=\xi_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(a)=\xi_{n-1}$$
在区间$[a,b]$上存在唯一的解.

- 解的结构. 通解=全部解
$$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x)+\psi(x).$$

- 一阶齐次方程: $y'+p(x)y=0$.
解法: 可变量分离, $\frac{1}{y}dy+p(x)dx=0$,
得$y=Ce^{-\int p(x)dx}$.

- 常系数齐次方程(二阶): $y''+ay'+b=0$.
解法: 考虑特征方程$\lambda^2+a\lambda+b=0$的根.

两不同实根λ_1, λ_2	$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$
二重根λ	$y=e^{\lambda x}(C_1x+C_2)$
一对复根$\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

- 非齐次方程: 首先求解齐次方程, 然后用待定系数法或者常数变易法求特解.

- 几类典型方程.
  - 齐次(非线性)方程: $y' = f(\frac{y}{x})$.
    解法: 换元$u = \frac{y}{x}$, 化为变量分离方程.
  - 伯努利方程: $y' + p(x)y = q(x)y^n$.
    解法: 两边同除y^n, 化为线性方程,
    $\frac{1}{1-n}(y^{1-n})' + p(x)y^{1-n} = q(x)$.
  - 欧拉方程:
    $$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 xy' + a_0 y = q(x).$$
    解法: 换元$x = e^t$, 化为常系数线性方程.

例1. 求微分方程$xy' - y = (x-1)e^x$的通解.
解. 齐次方程的通解为$e^{\int \frac{1}{x}dx} = Cx$.
设$y = C(x)x$, 代入方程, 得$x^2C'(x) = (x-1)e^x$.
所以$C(x) = -\frac{e^x}{x} + C$, $y = -e^x + Cx$.

例2. 求微分方程$(x+2y)dx+(2x-3y)dy=0$的通积分.

解. 全微分方程, 观察可得$\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{3}{2}y^2=C$.

例3. 求微分方程$(3x+5y)dx+(4x+6y)dy=0$的通积分.

解. 方程可化为齐次方程$y'+\frac{3+5\frac{y}{x}}{4+6\frac{y}{x}}=0$.

设$u=\frac{y}{x}$, $y=xu$, 得$xu'+u+\frac{3+5u}{4+6u}=0$,

$xu'+\frac{3(u+1)(2u+1)}{2(3u+2)}=0$,

$\frac{2(3u+2)du}{(u+1)(2u+1)}+\frac{3dx}{x}=0$, $(u+1)^2(2u+1)x^3=C$,

$(x+y)^2(x+2y)=C$.

例4. 求解初值问题: $y'+\frac{y}{x}=y^3$, $y(1)=1$.

解. (i) 两边同除y^3, 得$-\frac{1}{2}(y^{-2})'+\frac{1}{x}y^{-2}=1$.

设$u=y^{-2}$, 化为线性方程$u'-\frac{2}{x}u=-2$.

(ii) 齐次方程$u'-\frac{2}{x}u=0$的通解为$e^{\int\frac{2}{x}dx}=Cx^2$.

设$u=C(x)x^2$, 代入方程得$C'(x)x^2=-2$.

于是$C(x)=\frac{2}{x}+C$, $u=2x+Cx^2$.

(iii) 代入初值$u(1)=1$, 得$C=-1$.

所以初值问题的解为$y=(2x-x^2)^{-1/2}$.

例5．求微分方程$y''+y=3x+2e^{-x}$的通解.
解．(i) 齐次方程的特征根为一对复根$\pm i$,
通解为$C_1\cos x+C_2\sin x$.
(ii) 设$y=(ax+b)+ce^x$，代入方程，得

$$ax+b+ce^x+ce^{-x}+ce^{-x}=3x+2e^{-x}.$$

比较两边得$a=3$，$b=0$，$c=1$．于是得到方程的一个特解$y=3x+e^{-x}$.
(iii) 综上所述，方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+3x+e^{-x}.$$

例6．求微分方程$y''-2y'+y=6(x+1)e^x$的通解.
解．(i) 齐次方程的特征根为二重根1,
通解为$e^x(C_1+C_2x)$.
(ii) 设$y=e^x(ax^2+bx^3)$，代入方程，得

$$\begin{aligned}&e^x(ax^2+bx^3)+2e^x(2ax+3bx^2)+e^x(2a+6bx)\\&-2e^x(ax^2+bx^3)-2e^x(2ax+3bx^2)\\&+e^x(ax^2+bx^3)=6(x+1)e^x.\end{aligned}$$

比较两边得$a=3$，$b=1$．于是得到方程的一个特解$y=(3x^2+x^3)e^x$.
(iii) 综上所述，方程的通解为

$$y=e^x(C_1+C_2x+3x^2+x^3).$$

例7．求微分方程$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$的通解.
解．(i) 齐次方程的特征根为一对复根$\pm i$,
通解为$C_1 \cos x + C_2 \sin x$.
(ii) 设$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$．解方程组

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\sin x}, \end{cases}$$

得$C_1'(x) = -1$, $C_2'(x) = \cot x$.
$C_1(x) = -x + C_1$, $C_2(x) = \ln|\sin x| + C_2$.
于是方程的通解为

$$y = (-x+C_1) \cos x + (\sin x \cdot \ln|\sin x| + C_2) \cos x.$$

例8．求微分方程$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$的通解.
解．设$x = e^t$, $t = \ln x$．则$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$,
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(e^{-t}\frac{dy}{dt}) = \frac{d}{dt}(e^{-t}\frac{dy}{dt}) \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})$.
原方程化为$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$, 通解为

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} = C_1 x^2 + C_2 x^3.$$