2024年春

# 程序设计实习(II)：算法设计

## 第十六讲 动态规划1

贾川民
北京大学

# 主要内容

- 为什么？什么是动态规划
- 例题：数字三角形(POJ1163)
- 递归 → 动规的一般转化方法
- 动规解题的一般思路
- 例题：最长上升子序列
- 例题：最长公共子序列 (POJ1458)

# 问题提出:为什么要用动态规划

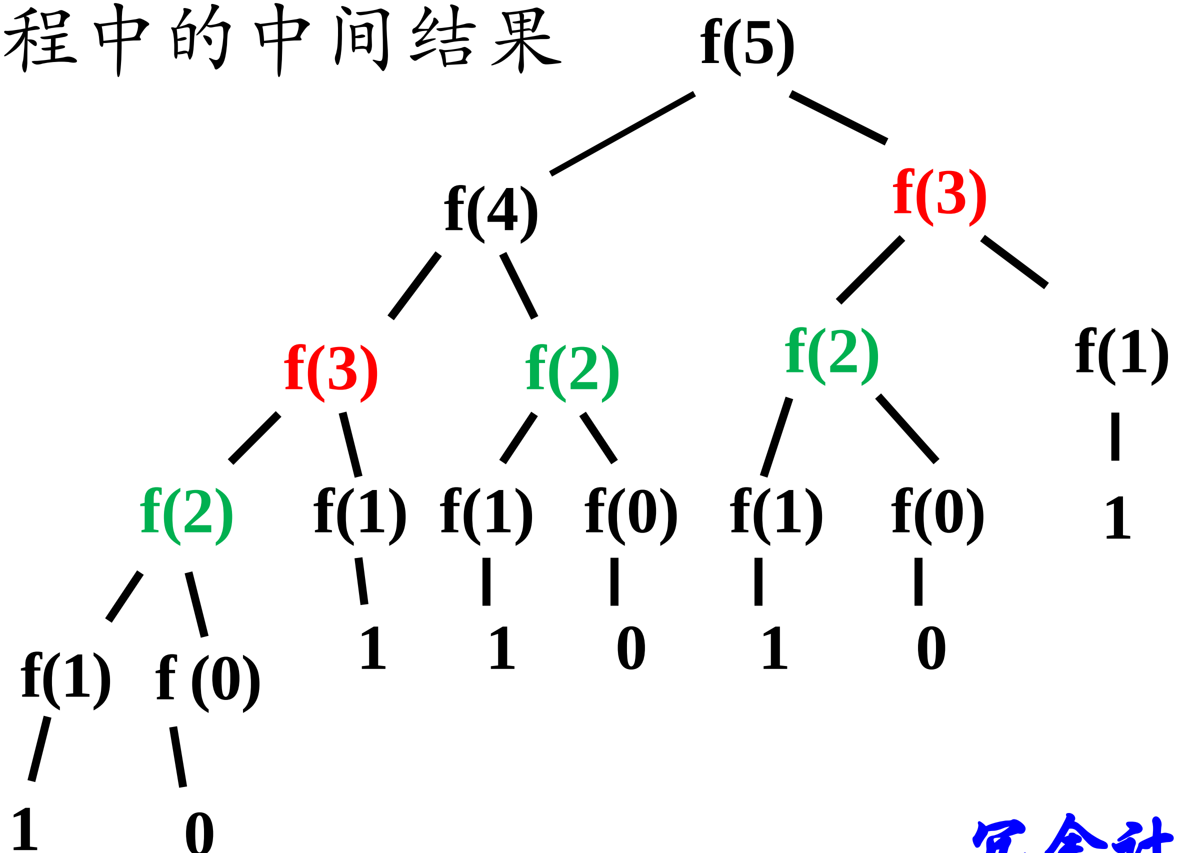
- 树形递归存在冗余计算
- **例1 (POJ 2753) Fibonacci数列**

 求 Fibonacci数列的第n项

```
int f(int n){
	if(n == 0 || n == 1) return n;
	return f(n-1) + f(n-2);
}
```

# 树形递归存在冗余计算

- 为了除去冗余，需要从**已知条件开始计算**，并记录计算过程中的中间结果




**冗余计算!**

# 树形递归存在冗余计算

- 去除冗余:

```
int f[n+1];
f[1]=f[2]=1;
int i;
for(i=3;i<=n;i++)
    f[i] = f[i-1]+f[i-2];
cout << f[n] <<endl;
```

用空间换时间 → 动态规划

# 什么是动态规划（Dynamic Programming）

- **动态规划**是求解包含**重叠子问题**的最优化方法
  - **基本思想：**将原问题分解为**相似的子问题**
  - 在求解的过程中通过**保存子问题的解**求出原问题的解（注意:不是简单**分而治之**）
  - 只能应用于有**最优子结构**的问题(即**局部最优解能决定全局最优解**，或问题能分解成子问题来求解)
- **动态规划=记忆化搜索**

# 动态规划是如何工作的

- **例2 (POJ 1163) 数字三角形**

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 7 | | | | |
| 3 | 8 | | | |
| 8 | 1 | 0 | | |
| 2 | 7 | 4 | 4 | |
| 4 | 5 | 2 | 6 | 5 |

- 在上面的数字三角形中**寻找一条从顶部到底边的路径**，使得路径上所经过的数字之和最大
- 路径上的每一步都只能往左下或右下走
- 只需要求出这个**最大和**即可，不必给出具体路径
  - 三角形的行数大于1小于等于100
  - 数字为 0 - 99

# POJ 1163 数字三角形问题

**输入格式:**

```
5 //三角形行数，下面是三角形
7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5
```

要求输出最大和

# 解题思路

## 算法一：递归

- 设f(i, j) 为三角形上从点(i, j)出发向下走的最长路径，则

**f(i, j) = max(f(i+1, j), f(i+1, j+1))+D(i, j)**

- 要输出的就是f(1,1)即从最上面一点出发的最长路径

# 解题思路

- **D(i, j) --** 第i行第j个数字
- **MaxSum(i, j) --** 从第i行第j个数字**到底边**的各条路径中，数字之和最大的那条路径的数字之和

  * 本题要求**MaxSum(1, 1)** (i, j从1开始算)

- 从某个D(i, j)出发，下一步只能走**D(i+1, j) / D(i+1, j+1)**，所以对于N行的三角形：

**if ( i == N )** //最底层

**MaxSum(i, j) = D(N, j)**

**else**

**MaxSum(i, j) = D(i, j)+Max(MaxSum(i+1, j), MaxSum(i+1, j+1));**

# 数字三角形的递归程序

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#define MAX 101
using namespace std;

intD[MAX][MAX];
int n;
int MaxSum(inti,   intj){
    if(i==n)
        return D[i][j];
    int x = MaxSum(i+1,  j);
    inty = MaxSum(i+1,  j+1);
    return max(x, y)+D[i][j];
}
```

```
int main(){
  int i,  j;
  cin >> n;
  for(i=1; i<=n; i++)
    for(j=1; j<=i; j++)
        cin >> D[i][j];
  cout << MaxSum(1, 1) << endl;
}
```

# 数字三角形的递归程序

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#define MAX 101
using namespace std;

intD[MAX][MAX];
int n;
int MaxSum(inti,  intj){
    if(i==n)
        return D[i][j];
    int x = MaxSum(i+1, j);
    inty = MaxSum(i+1, j+1);
    return max(x, y)+D[i][j];
}
```

```
int main(){
  int i, j;
  cin >> n;
  for(i=1; i<=n; i++)
    for(j=1; j<=i; j++)
      cin >> D[i][j];
  cout << MaxSum(1, 1) << endl;
}
```

超时!!!

# 为什么超时?

回答: **重复计算**

$7_1$

$3_1$ $8_1$

$8_1$ $1_2$ $0_1$

$2_1$ $7_3$ $4_3$ $4_1$

$4_1$ $5_4$ $2_6$ $6_4$ $5_1$

如果采用递归的方法, **深度遍历每条路径**, 存在大量重复计算,

**则时间复杂度为$2^n$, 对于 $n = 100$, 肯定超时**

# 改进

- 如果每算出一个MaxSum(i, j)就保存起来，下次用到其值的时候直接取用

→ 则可免去重复计算

- 那么可以用$O(n^2)$时间完成计算

因为三角形的数字总数是 $n(n+1)/2$

# 记忆递归型动规程序

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;

#define MAX 101
intD[MAX][MAX];     int n;
int maxSum[MAX][MAX];
int MaxSum(int i,  intj){
    if( maxSum[i][j]  != -1 )
        return maxSum[i][j];
    if(i==n) maxSum[i][j] = D[i][j];
    else {
      int x = MaxSum(i+1, j);
      inty = MaxSum(i+1, j+1);
      maxSum[i][j] = max(x, y)+ D[i][j];
    }
    return maxSum[i][j];
}
```

```
int main(){
    int i, j;
    cin >> n;
    for(i=1;i<=n;i++)
        for(j=1;j<=i;j++) {
            cin >> D[i][j];
            maxSum[i][j] = -1;
    }
    cout << MaxSum(1, 1) << endl;
}
```

# 解题思路

- 一种可能的改进思想：**从下往上**计算，对于每一点，只需要保留**从下面来的路径中最大的路径的和**即可
  - 因为在它上面的点只关心到达它的最大路径和，不关心它从那条路径上来的
- 问题：有几种解法？
  - 从使用不同的存储开销角度分析

# 解法一：递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| 4 | 5 | 2 | 6 | 5 |

# 解法一：递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| 7 | | | | |
| 4 | 5 | 2 | 6 | 5 |

# 解法一：递归转成递推

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | | | | |
| 3 | 8 | | | |
| 8 | 1 | 0 | | |
| 2 | 7 | 4 | 4 | |
| 4 | 5 | 2 | 6 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| 7 | 12 | | | |
| 4 | 5 | 2 | 6 | 5 |

# 解法一：递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| 7 | 12 | 10 | | |
| 4 | 5 | 2 | 6 | 5 |

# 解法一：递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| 7 | 12 | 10 | 10 | |
| 4 | 5 | 2 | 6 | 5 |

# 解法一：递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| 20 | | | | |
| 7 | 12 | 10 | 10 | |
| 4 | 5 | 2 | 6 | 5 |

# 解法一：递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| 20 | 13 | | | |
| 7 | 12 | 10 | 10 | |
| 4 | 5 | 2 | 6 | 5 |

# 解法一：递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| 20 | 13 | 10 | | |
| 7 | 12 | 10 | 10 | |
| 4 | 5 | 2 | 6 | 5 |

# 解法一：递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 30 | | | | |
| 23 | 21 | | | |
| 20 | 13 | 10 | | |
| 7 | 12 | 10 | 10 | |
| 4 | 5 | 2 | 6 | 5 |

# “人人为我” 递推型动规程序

```
#include <algorithm>
using namespace std;
#define MAX 101
intD[MAX][MAX];    int n;
int maxSum[MAX][MAX];
int main()  {
    int i,  j;
    cin >> n;
    for( i=1; i<=n; i++)
        for( j=1; j<=i; j++)
            cin >> D[i][j];
    for( int i = 1; i <= n; ++ i )
        maxSum[n][i] = D[n][i];
    for( int i = n-1; i>= 1;  --i )
       for( intj = 1; j <= i; ++j )
           maxSum[i][j] = max(maxSum[i+1][j],  maxSum[i+1][j+1]) + D[i][j]
    cout << maxSum[1][1] << endl;
}
```

# 解法二

- 没必要用**二维Sum数组**存储每一个MaxSum(i, j), 只要从底层一行行向上递推

**Vs.** 只要**一维数组Sum[100]**，即只要存储一行的MaxSum值就可以

- 比**解法一**改进之处在于节省空间，时间复杂度不变

# 空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 2 | 6 | 5 |

- 没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(i, j)
- 只要<u>从底层一行行向上递推</u>

→ 那么只要一维数组maxSum[100]即可
→ 即只要存储一行的MaxSum值就可以

# 空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 2 | 6 | 5 |

- 没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(i, j)
- 只要<u>从底层一行行向上递推</u>

→ 那么只要一维数组maxSum[100]即可

→ 即只要存储一行的MaxSum值就可以

# 空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 12 | 2 | 6 | 5 |

- 没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(i, j)
- 只要<u>**从底层一行行向上递推**</u>

→ 那么只要一维数组maxSum[100]即可
→ 即只要存储一行的MaxSum值就可以

# 空间优化

7

3 8

8 1 0

2 7 4 4

4 5 2 6 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 12 | 10 | 6 | 5 |

- 没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(i, j)
- 只要<u>**从底层一行行向上递推**</u>

→ 那么只要一维数组maxSum[100]即可

→ 即只要存储一行的MaxSum值就可以

# 空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 12 | 10 | 10 | 5 |

- 没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(i, j)
- 只要<u>从底层一行行向上递推</u>

→ 那么只要一维数组maxSum[100]即可
→ 即只要存储一行的MaxSum值就可以

# 空间优化

7

3 8

8 1 0

2 7 4 4

4 5 2 6 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 12 | 10 | 10 | 5 |

- 没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(i, j)
- 只要<u>从底层一行行向上递推</u>

→ 那么只要一维数组maxSum[100]即可

→ 即只要存储一行的MaxSum值就可以

# 空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 13 | 10 | 10 | 5 |

- 没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(i, j)
- 只要<u>从底层一行行向上递推</u>

→ 那么只要一维数组maxSum[100]即可

→ 即只要存储一行的MaxSum值就可以

# 空间优化

- 进一步考虑，连maxSum数组都可以不要

→ 直接用**<u>D的第n行替代maxSum</u>**即可

- 节省空间，时间复杂度不变

# 空间优化

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;
#define MAX 101
intD[MAX][MAX];
int n; int * maxSum;
int main(){
    int i,  j;
    cin >> n;
    for( i=1; i<=n; i++)
        for( j=1; j<=i; j++)
            cin >> D[i][j];
    maxSum = D[n];   //maxSum指向第n行
    for( int i = n-1; i>= 1;  --i )
        for( intj = 1; j <= i; ++j )
            maxSum[j] = max(maxSum[j], maxSum[j+1]) + D[i][j];
    cout << maxSum[1] << endl;
}
```

# 递归转动规的一般转化方法

- 递归函数有**n个参数**，就定义一个**n维的数组**
- 数组的**下标**是递归函数参数的**取值范围**
- 数组元素的**值**是递归函数的**返回值**
- 这样就可以从边界开始，逐步填充数组

→相当于计算**递归函数值的逆过程**

# 动规解题的一般思路

## 1. 将原问题分解为子问题

- 把原问题分解为若干个子问题
- 子问题经常和原问题形式相似，有时甚至完全一样，只不过规模变小了
- 子问题都解决，原问题即解决
- 子问题的解一旦求出就会被保存，所以每个子问题只需求解一次

# 动规解题的一般思路

## 2. 确定状态

- 将和子问题相关的各个变量的一组取值，称之为一个**状态**
- 一个**状态**对应于一个或多个子问题
- 所谓某个**状态**下的 **"值"**，就是这个**状态**所对应的子问题的解
- 所有**状态**的集合构成问题的 **"状态空间"**

"状态空间" 的大小，与用动态规划解决问题的**时间复杂度**直接相关

- 在数字三角形的例子里，一共有**N×(N+1)/2**个数字，所以这个问题的状态空间里一共就有**N×(N+1)/2个状态**
- 在该问题里每个状态只需要经过一次，且在每个状态上作计算所花的时间都是和N无关的常数

# 动规解题的一般思路

## 2. 确定状态

- 用动态规划解题，经常碰到的情况是:
- K个整型变量能构成一个状态

(如数字三角形中**行号和列号**这两个变量构成 "状态")

- 如果K个整型变量的取值范围分别是N1, N2, ……Nk, 那么就可以用一个K维的数组array[N1] [N2]……[Nk]来存储各个状态的 "值"
- 这个"值" 未必就是一个整数或浮点数，可能是需要一个结构才能表示的，那么array就可以是一个结构数组
- 一个 "状态" 下的 "值" 通常会是一个或多个子问题的解

# 动规解题的一般思路

## 3. 确定一些初始状态（边界状态）的值

- 以"数字三角形"为例,初始状态就是底边数字,值就是底边数字值

# 动规解题的一般思路

## 4. 确定状态转移方程

- 定义出什么是"状态"和在该"状态"下的"值"后，就要找出不同的状态之间如何迁移
- 即如何从一个或多个"值"已知的"状态"

→ 求出另一个"状态"的"值" **("人人为我"递推型)**

- 状态的迁移可以用递推公式表示，该递推公式也可被称作 **"状态转移方程"**
- 数字三角形的**状态转移方程**

$$anMaxSum[r][j] = \begin{cases} D[r][j], & r = N \\ Max(anMaxSum[r+1][j], anMaxSum[r+1][j+1]) + D[r][j], & otherwise \end{cases}$$

# 能用动规解决的问题的特点

- 问题具有**最优子结构**性质
  - 如果问题的最优解所包含的子问题的解也是最优的
  - 就称该问题具有最优子结构性质
- **无后效性**
  - 当前的若干个状态值一旦确定，则此后过程的演变就只和这若干个状态的值有关
  - 和之前是采取哪种手段或经过哪条路径演变到当前的这若干个状态，没有关系

# 例题: 最长上升子序列

- 一个数的序列$b_i$，当$b_1 < b_2 < \ldots < b_S$的时候, 称这个序列是上升的。对于给定的一个序列$(a_1, a_2, \ldots, a_N)$,

  可以得到一些上升的子序列$(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_K})$,

  这里$1 <= i_1 < i_2 < \ldots < i_K <= N$

  - 对于序列(1, 7, 3, 5, 9, 4, 8), 有它的一些上升子序列,

    如(1, 7), (3, 4, 8)等

    这些子序列中最长的长度是4, 即子序列(1, 3, 5, 8)或(1, 3, 4, 8)

- 你的任务, 就是对于给定的序列, 求出最长上升子序列的长度

# 例题: 最长上升子序列

- **输入要求**
  - 输入的第一行是序列的长度N (1 <= N <= 1000)。第二行给出序列中的N个整数，这些整数的取值范围都在0到10000。
- **输出要求**
  - 最长上升子序列的长度。
- **输入样例**
  - 7
  - 1 7 3 5 9 4 8
- **输出样例**
  - 4

## 解题思路(1): 找子问题

- "求序列的前n个元素的最长上升子序列的长度"是个子问题，但这样分解子问题，**不具有"无后效性"**
- 假设F(n) = x，但可能有多个序列满足F(n) = x
  - 有的序列的最后一个元素比 $a_{n+1}$小，则加上$a_{n+1}$就能形成更长上升子序列
  - 有的序列最后一个元素不比$a_{n+1}$小 …… 以后的事情受如何达到状态n的影响，不符合"无后效性"

# 解题思路(1): 找子问题

经过分析，发现

求以$a_k$ (k=1，2，3…N) 为终点的最长上升子序列的长度是个好的**子问题**

- 把一个上升子序列中最右边的那个数，称为该子序列的"**终点**"
- 虽然这个子问题和原问题形式上并不完全一样，但只要这N个子问题都解决了，那么这N个子问题的解中，最大的那个就是整个问题的解

# 解题思路(2): 确定状态

- 上面所述的子问题只和一个变量相关，就是数字的位置
- 因此序列中数的位置k就是 "状态"
  - 状态 k 对应的 "值"

    就是以$a_k$做为 "终点" 的最长上升子序列的长度
  - 这个问题的状态一共有N个

# 解题思路(3): 找出状态转移方程

- 状态定义好后，转移方程就不难想了
- 假定MaxLen (k)表示以$a_k$做为"终点"的最长上升子序列的长度，则

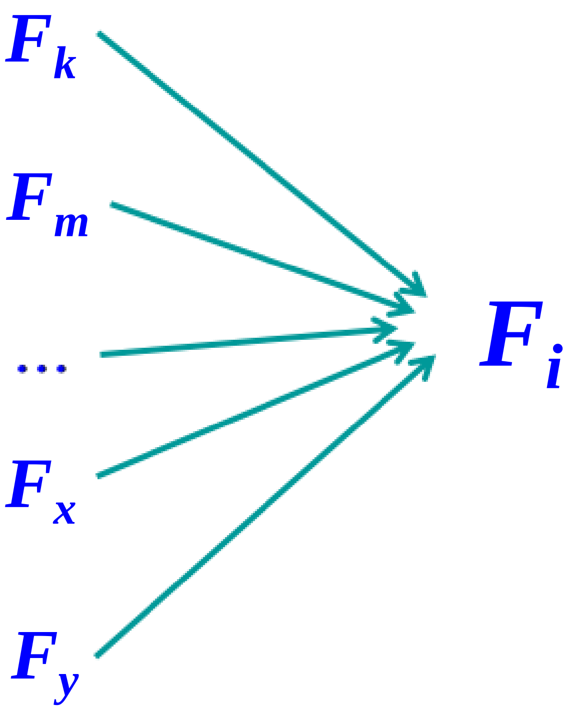
  **MaxLen (1) = 1**

  **MaxLen (k) = Max { MaxLen (i): 1<i<k 且 $a_i < a_k$ 且 k≠1 } + 1**
- 状态转移方程是，MaxLen(k)的值，就是在$a_k$左边，"终点"数值小于$a_k$，且长度最大的那个上升子序列的长度再加1
- 因为$a_k$左边任何"终点"小于$a_k$的子序列，加上$a_k$后就能形成一个更长的上升子序列
- 实际实现的时候，可以不必编写递归函数，因为从MaxLen(1)就能推算出MaxLen(2)，有了MaxLen(1)和MaxLen(2)就能推算出MaxLen(3)，…

# "人人为我"递推型动归程序

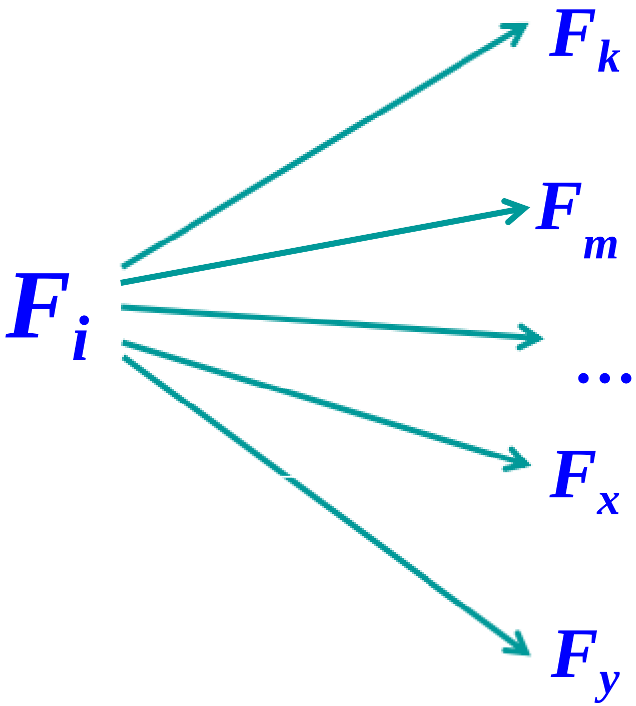
```
#include <iostream>
#include <cstring>
#include <algorithm>
using namespace std;
constint  MAXN =1010;
int a[MAXN];   int maxLen[MAXN];
int main() {
    int N;    cin >> N;
    for( inti = 1;i <= N;++i) {
        cin >> a[i];
        maxLen[i] = 1;
    }
    for( inti = 2; i <= N; ++i) { //每次求以第i个数为终点的最长上升子序列的长度
        for( intj = 1; j < i; ++j)  //查看以第j个数为终点的最长上升子序列
            if( a[i] > a[j] )
                maxLen[i] = max(maxLen[i],  maxLen[j]+1);
    }
    cout << * max_element(maxLen+1, maxLen + N + 1 );
    return 0;
  //时间复杂度O(N^2)
```

# "人人为我"递推型动归




状态i的值$F_i$由若干个值已知的状态值$F_k$，$F_m$，…，$F_y$推出，如求和，取最大值 …

# "我为人人"递推型动归




状态i的值$F_i$在被更新(不一定是最终求出)的时候，依据$F_i$去更新(不一定是最终求出)和状态i相关的其他一些状态的值$F_k$，$F_m$，…，$F_y$

# " 我为人人 " 递推型动归

```
#include <cstring>
#include <algorithm>
using namespace std;
const int  MAXN =1010;
int a[MAXN];
int maxLen[MAXN];
int main() {
    int N;     cin >> N;
    for( int i = 1;i <= N;++i) {
        cin >> a[i];
        maxLen[i] = 1;
    }
    for( int i = 1; i <= N; ++i)
        for( intj = i + 1; j <= N; ++j ) //看看能更新哪些状态的值
            if( a[j] > a[i] )
                maxLen[j] = max(maxLen[j], maxLen[i]+1);
    cout << * max_element(maxLen+1, maxLen + N + 1 );
    return 0;
} //时间复杂度O(N2)
```

人人为我:

```
for( int i = 2; i <= N; ++i)
    for( intj = 1; j < i; ++j)
        if( a[i] > a[j] )
            maxLen[i] =
                max(maxLen[i], maxLen[j]+1);
```

# 动归的三种形式

## 1) 记忆递归型

**优点：** 只经过有用的状态，没有浪费。递推型会查看一些没用的状态，有浪费

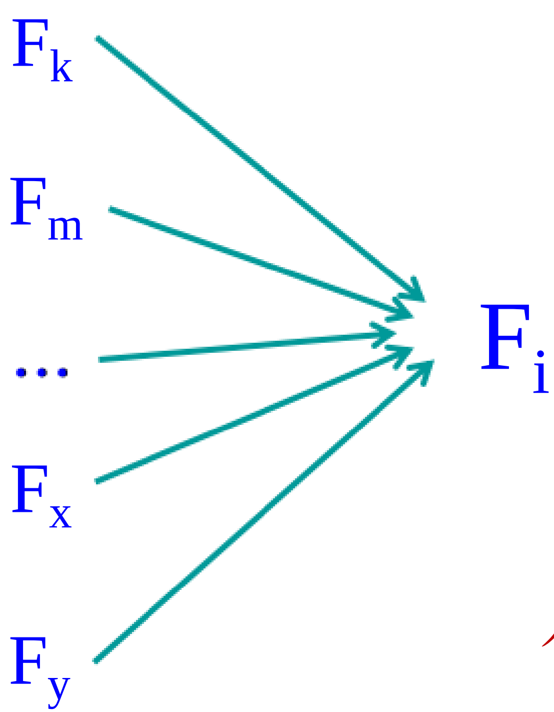
**缺点：** 可能会因递归层数太深导致爆栈，函数调用带来额外时间开销。总体来说，比递推型慢

## 2) "我为人人"递推型

没有什么明显的优势，有时比较符合思考的习惯。个别特殊题目中会比"人人为我"型节省空间

# 动归的三种形式

## 3) "人人为我"递推型




状态i的值$F_i$由若干个值已知的状态值$F_k$, $F_m$, ..., $F_y$推出，如求和，取最大值……

在选取最优备选状态的值$F_m$, $F_n$, …, $F_y$时，有可能有好的算法或数据结构可以用来显著降低时间复杂度。

# 例:最长公共子序列 POJ1458

- 给出两个字符串，求出这样的一个最长的公共子序列的长度
  - 最长的公共子序列：子序列中的每个字符都能在两个原串中找到，而且**每个字符的先后顺序和原串中的先后顺序一致**

# 最长公共子序列

| 样例输入 | | 样例输出 |
| --- | --- | --- |
| abcfbc | abfcab | 4 |
| programming | contest | 2 |
| abcd | mnp | 0 |

# 算法1：递归

- 设两个字符串分别是
  **charstr1[MAXL]；长度是len1**
  **charstr2[MAXL]；长度是len2**
- 设f(str1, len1, str2, len2)为str1和str2的最大公共子串的长度，则可以对两个字符串的**最后一个字符的情况**进行枚举：
  - **情况一**：str1[len1-1] == str2[len2-1]，则f(str1, len1, str2, len2) = 1+ f(str1, len1-1, str2, len2-1)
  - **情况二**：str1[len1-1] != str2[len2-1]，则f(str1, len1, str2, len2) = max(f(str1, len1-1, str2, len2), f(str1, len1, str2, len2-1))

# 算法1: 递归

```
#include <iostream>  using namespace std;
#include <string.h>

#define MAX 1000
char str1[MAX],  str2[MAX];
int commonstr(int, int);

void main(){
    while(cin>> str1 >> str2){
          int len1 = strlen(str1);
          int len2 = strlen(str2);
          cout<<commonstr(len1-1,  len2-1);
          cout<<endl;
    }
}
```

# 算法1: 递归

```
int commonstr(int len1, int len2){
    if(len1==-1 || len2==-1) return 0;
    if(str1[len1] == str2[len2])
            return 1+commonstr(len1-1, len2-1);
    else{
            int tmp1 = commonstr(len1-1, len2);
            int tmp2 = commonstr(len1, len2-1);
        if(tmp1>tmp2)
                return tmp1;
        else
                return tmp2;
    }
}
```

超时!!!

# 算法1: 递归

```
int commonstr(int len1,  int len2){
    if(len1==-1 || len2==-1) return 0;
    if(str1[len1] == str2[len2])
            return 1+commonstr(len1-1,  len2-1);
    else{
            int tmp1 = commonstr(len1-1,  len2);
            int tmp2 = commonstr(len1,  len2-1);
        if(tmp1>tmp2)
                return tmp1;
        else
                return tmp2;
    }
}
```

超时!!!

# 算法2: 动态规划

- 输入两个子串s1, s2
  - 设**MaxLen(i, j)**表示:

    s1的左边i个字符形成的子串，与s2左边的j个字符形成的子串的最长公共子序列的长度

  - **MaxLen(i, j) 就是本题的"状态"**，定义一数组
- 假定 len1 = strlen(s1)，len2 = strlen(s2)
  - 那么题目就是求： **MaxLen(len1, len2)**

# 算法2: 动态规划

显然:

MaxLen(n, 0) = 0 ( n=0…len1 )

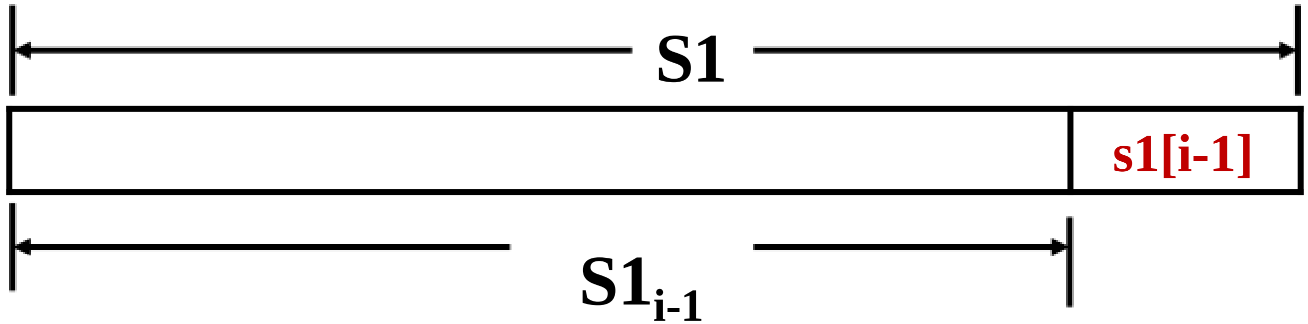
MaxLen(0, n) = 0 ( n=0…len2 )

递推公式:

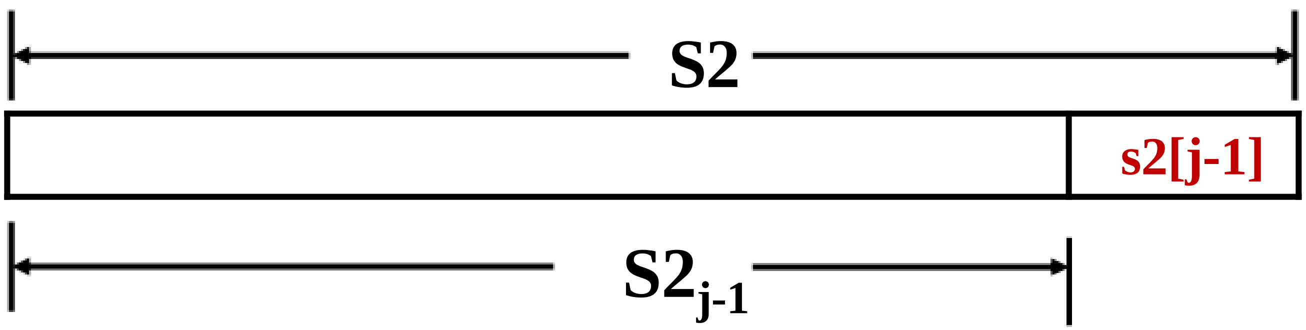
```
if ( s1[i-1] == s2[j-1] )
    MaxLen(i, j) = MaxLen(i-1, j-1) + 1;
else
    MaxLen(i, j) = Max(MaxLen(i, j-1), MaxLen(i-1, j));
```

# 算法的工作原理

S1长度为 i




S2长度为 j




S1[i-1]!= s2[j-1]时, MaxLen(S1, S2)不会比MaxLen(S1, $S2_{j-1}$)和MaxLen($S1_{i-1}$, S2)两者之中任何一个小, 也不会比两者都大

```
#include <iostream>
#include <string.h>
using namespace std;
char sz1[1000];
char sz2[1000];
int anMaxLen[1000][1000];
int main(){
        while( cin >> sz1 >> sz2 ) {
                int nLength1 = strlen( sz1);
                int nLength2 = strlen( sz2);
                int nTmp;
                int i,  j;
                for( i = 0; i <= nLength1; i ++ )
                    anMaxLen[i][0] = 0;
                for( j = 0; j <= nLength2; j ++ )
                    anMaxLen[0][j] = 0;
```

```
    for( i = 1; i <= nLength1; i ++ )  {
        for( j = 1; j <= nLength2; j ++ ) {
            if( sz1[i-1] == sz2[j-1] )
                anMaxLen[i][j] = anMaxLen[i-1][j-1] + 1;
            else {
                int nLen1 = anMaxLen[i][j-1];
                int nLen2 = anMaxLen[i-1][j];
                if( nLen1 > nLen2 )
                    anMaxLen[i][j] = nLen1;
                else
                    anMaxLen[i][j] = nLen2;
            }
        }
    }
    cout <<  anMaxLen[nLength1][nLength2] << endl;
}
```

# 例: 最佳加法表达式

- 有一个由 **1...9** 组成的数字串
- 问如果将 **m** 个加号(+)插入到这个数字串中，使得所形成的算术表达式的**值最小**

# 最佳加法表达式

- 添完加号后，表达式的最后一定是个数字串
- 从这里入手，不难发现：
  - 前一状态：在<u>前i个字符</u>中插入(m-1)个加号（这里的i是当作决策在枚举）
  - 然后 <u>**i+1到最后一位**</u> 一定是整个没有被分割的数字串
  - 第m个加号就添在i与i+1个数字之间

  → 这样就构造出了整个数字串的最优解
- 至于前i个字符中插入(m-1)个加号

  → 这又回到了原问题的形式，也就是回到了以前状态

  → 所以状态转移方程就能很快的构造出来了

# 最佳加法表达式

- 例如:

  数字串79846，若需要加入两个加号，

  则最佳方案为79+8+46，算术表达式的值为133

- 算法实现分析:

  - V[m][n]: 在n个数字中插入m个加号能达到的最小值

# 最佳加法表达式

- 算法实现分析:
  - **V[m][n]:** 在**n**个数字中插入**m**个加号能达到的最小值
  - 动规的递推方程:

**if m = 0**

**V(m, n) = n个数字构成的整数**

**else if n < (m + 1)**　//加号多于数字的个数

**V(m, n) =** $\infty$

**else**

**V(m, n) = Min{V(m-1, i) + Num(i+1, n) } ( i = m, …, n-1)**

- Num(k, j)表示从第k个数字到第j个数字所组成的整数
- 数字编号从1开始算

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <string>
#include <stdlib.h>
using namespace std;
#define MAXN  15
#define MAXM 15
#define INFINITE 999999999
//不考虑大整数加法
int anMinValue[MAXM][MAXN]; //anMinValue[i][j]表示把i个加号
                            //放到j个数字前面所能的到的最小值
                            //题目要求 "anMinValue[m][n-1]"
int main(){
    int m;
    string s;
    cin >> s >> m;
    int n = s.length();
    int i;
    for( i = 0; i < n ; i ++ )
        anMinValue[0][i]= atoi( s.substr(0, i+1).c_str() );
  // c_str()函数表示将str转换成 char*格式; atoi()表示将字符转换为整数
```

```
for(  i = 1; i <= m; i ++ )
   for( intj = 0; j < n; j ++ )  { //把i个加号放第j个数字前面
        if( j < i )
            anMinValue[m][j] = INFINITE;
        else {
             int nMin = INFINITE;
             for( int k = 0; k <= j - 1; k ++ ) {  //把i个加号里的最右边加号
                                                   //放在第k个字符后面
                  int nVal = 0;
                  for( int u = k+1; u <= j  ; u ++)
                       nVal = nVal * 10 + s.c_str()[u]-'0';
                  nMin = min(nMin,  anMinValue[i-1][k] + nVal);
             }
             anMinValue[i][j] = nMin;
        }
   }
 cout << anMinValue[m][n-1];
 return 0;
}
```

# 动规的要诀

- 用动态规划解题，关键是要找出“状态”和在“状态”间进行转移的办法(即状态转移方程)

- 一般在动规的时候所用到的一些数组，也就是用来存储每个状态的最优值的

# 动规的要诀

枚举 --------->搜索--------->动态规划

(系统化)　　(记忆化)

Thanks!