

东南大学考试卷(A卷)

课程名称 几何与代数(B) 考试学期 2013-2014-2 得分 _____
 适用专业 电类各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120 分钟

题目	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一. 填空(每小题 3 分, 共 30 分)

- 设三阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3, 2\alpha_2 - \alpha_1)$, 若 $|A| = 3$, 则 $|B| =$ _____.
- 设向量 $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_3 = (0, 1, 1)$, $\alpha = (1, 2, 3)$, 则 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的坐标为 _____.
- 设平面 $x + y - z + 9 = 0$ 与 $x + y - 2z + 9 = 0$ 的夹角为 φ , 则 $\cos \varphi =$ _____.
- 设直线 $\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 上点 P 到坐标原点的距离最近, 则点 P 的坐标为 _____.
- 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ 生成的向量空间的维数为 2, 则 $a =$ _____.
- 设直线 $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z = b_4 \end{cases}$ 异面. 令 $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$, $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$, 则 $r(A) =$ _____, $r(A, b) =$ _____.
- 设曲面 $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$ 与平面 π 的交线在 xOy 平面内的投影曲线为 $\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$, 则平面 π 的方程为 _____.
- 已知二次曲面 S 的方程为 $x^2 + ay^2 + bz^2 + 2xy + c = 0$, 其中 a, b, c 为常数, 而且 S 的过点 $P_1(1, 1, 0)$ 和 $P_2(0, 0, 1)$. 若 S 为椭球面, 则 c 的取值范围是 _____.
- 设 α 为三维列向量, $A = \alpha\alpha^T$, 则 A 的伴随矩阵 $A^* =$ _____.
- 设 A 为二阶方阵, E 为二阶单位矩阵. 若 $A + E$ 和 $A - 2E$ 都不可逆, 则 $(A - E)^{-1} =$ _____.

二. (6分) 计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ c & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$, 其中 $n \geq 2$.

三. (14分) 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ b \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 求 a 和 b 的值以及 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组, 并把其余的向量用这个极大无关组表示出来.

四. (6分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} A & E \\ A & O \end{pmatrix}$, 求 B^{-1} .

五. (10 分) 设 $\alpha = (1, 1, 1, 1)^T$. 问参数 λ 为何值时, 存在列向量 x 使得 $(1 - \alpha^T x)\alpha = \lambda x$? 何时这样的 x 是唯一的? 何时不唯一? 并在不唯一时, 求满足条件的所有的 x .

六. (10 分) 设 A 为 3 阶矩阵, x 为三维列向量. 已知 $P = (x, Ax, A^2x)$ 为可逆矩阵, 且 $4Ax - 4A^2x + A^3x = 0$.

(1) 求 3 阶矩阵 B 使 $A = PBP^{-1}$.

(2) 问 A 是否相似于对角阵? 请说明理由.

七. (14 分) 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 把二次型 $f(\mathbf{x}) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3)$ 化为标准形, 要求写出所用的正交变换和对应的标准形, 并指出 $a = 0$ 时二次曲面 $f(\mathbf{x}) = 1$ 的类型.

八. 证明题(每小题 5 分, 共 10 分)

1. 设 ξ_1, ξ_2 为矩阵 A 的两个线性无关的特征向量, 证明: $\xi_1 + \xi_2$ 为 A 的特征向量当且仅当 ξ_1, ξ_2 对应于 A 的同一个特征值.

2. 设 A, B 均为 n 阶正定阵, 证明: AB 为正定阵当且仅当 $AB = BA$.