

东南大学考试卷 A 卷

课程名称	几何与代数 (B)	考试学期	12-13-2	得分	
适用专业	电类各专业	考试形式	闭 卷	考试时间长度	120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一. (30%) 填空题

1. 若对任意数 x, y , 矩阵 A 满足 $(x, y)A = (y, x, x + y)$, 则 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ _____;

2. 若 2 阶方阵 $A = (\alpha, \beta)$ 可逆, $B = (3\alpha + \beta, \alpha + 2\beta)$, 则 $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的第一行各元素的代数余子式之和等于 _____ 0 _____;

4. 过点 $A(1,0,1), B(1,2,0), C(0,1,3)$ 的平面的方程是 _____ $5x + y + 2z = 7$ _____;

5. R^3 的子空间 $V = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$ 的维数 $\dim V =$ _____ 2 _____;

6. 曲线 $\begin{cases} z = 2x^2 + y^2 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$ 在 xy 平面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - x - y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$;

7. 若方程 $x^2 + py^2 + pz^2 + 2xy + 2xz = 1$ 表示椭球面, 则 p 的取值范围是 _____ $p > 2$ _____;

8. 若矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & y \end{pmatrix}$ 相似, 则 $(x, y) =$ _____ (5, 1) _____;

9. 已知 α 是实三维列向量, 且 $\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 α 的长度 $\|\alpha\| =$ _____ $\sqrt{3}$ _____;

10. 假设 A, B 都是 $n \times n$ 矩阵, 则下述 4 个断言中正确的命题的个数为 _____ 3 _____;

(1) 若 $AB = O$, 则 $A = O$ 或 $B = O$; (2) 若 $AB = O$, 则 $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$;

(3) 若 $AB = O$, 则 $A = O$ 或 $|B| = 0$; (4) 若 $AB = O$, 则 $|A| = 0$ 或 $B = O$.

二. (8%) 计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 1 & & & \\ 3 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ n & & & & 1 \end{vmatrix}$ 。

解: $D = \begin{vmatrix} 1-2-3-\cdots-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots 5$

$= 2 - \frac{n(n+1)}{2} \dots\dots\dots 3$

三. (12%) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 如果矩阵 P, Q

满足 $PA = B, PQ = C$ 。求矩阵 Q 。

解: $P = BA^{-1}, Q = P^{-1}C = AB^{-1}C \dots\dots\dots 4$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 4$

$Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 4$

四. (15%) 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ p \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -p \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ q \end{pmatrix}$ 。

1. 当 p, q 取何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是这个向量组的极大线性无关组?

解: $D = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = (p+1)^2(p-2) \dots\dots\dots 2$

所以, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大无关组当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关...2

当且仅当 $D \neq 0$, 即 $p \neq -1, 2$, q 可以任意取值。...2

2. 当 p, q 取何值时, α_1, α_2 是这个向量组的极大线性无关组? 并在这时将 α_3, α_4 表示成 α_1, α_2 的线性组合。

若 α_1, α_2 是极大无关组, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 故 $p = -1$ or 2 。

当 $p = -1$ 时, α_1, α_2 线性相关, 故 $p \neq -1$ 。

当 $p = 2$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, α_1, α_2 线性无关。...3

又 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q-5 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 3$

所以, 此时 $q = 5$ 且 $\alpha_3 = -\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \dots\dots\dots 3$

五. (10%) 已知平面 σ 的方程为 $6x + 3y + 2z + 21 = 0$; 球面 S 的球心在点 $M(1, 2, -1)$, 半径为1; 平面 π 与 σ 平行, 且与 S 相切。求 π 的方程。

解: 设 π 的方程是 $6x + 3y + 2z + D = 0 \dots\dots\dots 3$

故 $\frac{1}{7} |6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + D| = 1 \dots\dots\dots 3$

即 $D = -3$ or $-17 \dots\dots\dots 2$

所以, π 的方程是 $6x + 3y + 2z - 3 = 0$

或 $6x + 3y + 2z - 17 = 0 \dots\dots\dots 2$

六. (15%) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ k & -1 & -k \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ 与对角阵相似。求参数 k 的值, 并求可逆矩阵 P

及对角阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

解: $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$ 。所以, A 的特征值是 $1, -1$ (二重)。.....6

如果 A 相似于对角阵, 则相应于特征值 -1 , A 有两个线性无关特征向量,

即 $r(A + E) = 1$, 于是 $k = 0$ 。.....3

这时, $(A + E)x = 0$ 有基础解系: $(1, -2, 0)^T, (0, 1, 1)^T$;

$(A - E)x = 0$ 有基础解系: $(0, 2, 1)^T$ 3

故, 若令 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

则 $\Lambda = P^{-1}AP = \text{diag}\{-1, -1, 1\}$ 3

七. (10%, 第一小题 4%, 第二小题 6%) 证明题:

1. 若 2×2 矩阵 A 的迹 $\text{tr}(A) = 2$, 且 A 不与对角阵相似, 证明 A 的行列式 $|A| = 1$ 。

证: 因为 A 不与对角阵相似, 所以, 两个特征值相同。.....2

又 A 的迹 $\text{tr}(A) = 2$, 所以, 这两个特征值都为 1.

因为行列式是特征值之积, 故 $|A| = 1$ 。.....2

2. 已知 n 维实非零列向量 α, β 相互正交。证明: 矩阵 $A = \alpha\alpha^T - \beta\beta^T$ 的秩 $r(A) = 2$ 。

证: 因为 $A\alpha = \alpha, A\beta = -\beta$, 所以, α, β 是 A 的特征向量, $\alpha^T\alpha, -\beta^T\beta$ 是特征值。....2

又 A 是实对称的, 所以, A 相似于对角阵。

设 A 相似于对角阵 Λ , 则都是 $\alpha^T\alpha, -\beta^T\beta$ Λ 的对角元, 因此, $r(\Lambda) \geq 2$,

故 $r(A) = r(\Lambda) \geq 2$ 。.....2

又 $r(A) \leq r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) \leq 1 + 1 = 2$ 。所以, $r(A) = 2$ 2