东南大学考试卷 A 卷

课程名称 几何与代数（B） 考试学期 12-13-2 得 分

适用专业 电类各专业 考试形式 闭 卷 考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

姓名______ 学号______ 线 封 密

一. （30%）填空题

1. 若对任意数 x, y，矩阵 A 满足 $(x, y)A = (y, x, x+y)$，则 $A=$______；

2. 若 2 阶方阵 $A=(\alpha,\beta)$ 可逆，$B=\left(3\alpha+\beta,\alpha+2\beta\right)$，则 $A^{-1}B=$；

3. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的第一行各元素的代数余子式之和等于____________；

4. 过点 $A(1,0,1), B(1,2,0), C(0,1,3)$ 的平面的方程是____；

5. R^3 的子空间 $V=\{(x,y,z) \mid x+y-z=0\}$ 的维数 $\dim V=$__________；

6. 曲线 $\begin{cases} z=2x^2+y^2 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$ 在 xy 平面上的投影曲线的方程为；

7. 若方程 $x^2+py^2+pz^2+2xy+2xz=1$ 表示椭球面，则 p 的取值范围是；

8. 若矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & y \end{pmatrix}$ 相似，则 $(x, y)=$____________________；

9. 已知 α 是实三维列向量，且 $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则 α 的长度 $\|\alpha\|=$____；

10. 假设 A, B 都是 $n\times n$ 矩阵，则下述 4 个断言中正确的命题的个数为_____；

（1）若 $AB=O$，则 $A=O$ 或 $B=O$；（2）若 $AB=O$，则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$；
（3）若 $AB=O$，则 $A=O$ 或 $|B|=0$；（4）若 $AB=O$，则 $|A|=0$ 或 $B=O$。

二. （8%）计算n阶行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 1 & & & \\ 3 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ n & & & & 1 \end{vmatrix}$。

三. （12%）已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，如果矩阵$P,Q$满足$PA=B$，$PQ=C$。求矩阵$Q$。

四. （15%）已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\p\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\p\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-p\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\4\\q\end{pmatrix}$。

1. 当p,q取何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是这个向量组的极大线性无关组？

2. 当p,q取何值时，α_1,α_2是这个向量组的极大线性无关组？并在这时将α_3,α_4表示成α_1,α_2的线性组合。

五. （10%）已知平面σ的方程为$6x+3y+2z+21=0$；球面S的球心在点$M(1,2,-1)$，半径为1；平面π与σ平行，且与S相切。求π的方程。

六. （15%）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ k & -1 & -k\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$ 与对角阵相似。求参数 k 的值，并求可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$。

七. （10%，第一小题 4%，第二小题 6%）证明题：

1. 若 2×2 矩阵 A 的迹 $tr(A)=2$，且 A 不与对角阵相似，证明 A 的行列式 $|A|=1$。

2. 已知 n 维实非零列向量 α,β 相互正交。证明：矩阵 $A=\alpha\alpha^T-\beta\beta^T$ 的秩 $r(A)=2$。