东南大学考试卷 A 卷

课程名称	几何与代数（B）	考试学期	15-16-2	得分	
适用专业	电类各专业	考试形式	闭卷	考试时间长度	120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

姓名______ 学号______ 密……封……线

一.（30%）填空题

1. $\alpha=(1,2)$，$\beta=(3,4)$，则 $(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)^{2016}=$________________；

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&3&-3\end{pmatrix}$，则 $\left|(3A)^{-1}\right|=$________________；

3. 设 $A_{4\times4}$ 的秩为 3，则 A^* 的秩为________________；

4. 直线 $l:\begin{cases}x-2y+z+1=0\\2x+y-z+3=0\end{cases}$ 的一个方向向量________________；

5. 向量空间 $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathrm{R}^3\,\middle|\,2x_1-x_2+ax_3=0\right\}$ 的一组基是________________；

6. 曲线 $\begin{cases}z=2y^2+1\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转所产生的旋转曲面方程为________________；

7. 若矩阵 $\begin{pmatrix}a&2\\0&3\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}7&0\\-2&b\end{pmatrix}$ 相似，则 $(a,b)=$________________；

8. 二次型 $f(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&b\\a&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ 的矩阵为________________；

9. 已知 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&a\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{-1}{2}\end{pmatrix}$ 是正交矩阵，则 $a=$________________；

10. 设线性方程组 $A_{4\times5}x=b(\neq\theta)$ 至少存在 3 个线性无关的解向量，则 A 的秩 $r(A)$ 的取值范围是________________.

二.（8%）计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 3 & -7 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$.

三.（12%）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$XA-\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=X$．求矩阵 X．

四. （15%）已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$。

1. 当λ取何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是这个向量组的极大线性无关组？

2. 当λ取何值时，α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示但表示不唯一？并求所有的表示式.

五. （10%）已知球面$\Sigma: x^2+y^2+z^2-x+2y+6z=0$；平面$\pi$过球面$\Sigma$的球心且垂直于$x$轴. 求$\Sigma$与$\pi$的交线在$yOz$平面上的投影曲线的方程.

六. （15%）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^3+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经正交变换 $x=Qy$ 化为 $4y_1^2+y_2^2$.

(1) 求 a 的值；(2) 求一个合适的正交矩阵 Q；(3) 求 $\max\limits_{\|x\|=1} f(x)$，其中 $\|x\|$ 指 x 的长度.

七. （10%，第一小题 6%，第二小题 4%）证明题：

1. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_t$ 为正交向量组，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_t$ 线性无关.

2. 已知 A 为实正定矩阵. 证明：存在上三角矩阵 B，使得 $A=B^T B$.