

东南大学考试卷(A卷)

课程名称 几何与代数(B) 考试学期 2014-2015-2 得分 _____
 适用专业 电类各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120 分钟

题目	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一. 填空(每小题 3 分, 共 30 分)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix}$ 满足 $AB = BA$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____.

2. 设三阶方阵 $A = (\alpha, \beta, \gamma)$, $B = (\alpha, \beta, \delta)$, 且 $|A| = -1$, $|B| = 2$, 则 $|A + B| =$ _____.

3. 直线 $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases}$ 与 $x+y+z+1=0$ 的夹角为 _____.

4. 设平面 π 过点 $P(1, 0, 1)$ 且垂直于直线 $\frac{x-6}{2} = y-5 = \frac{z+9}{-2}$, 则点 $Q(1, 2, 3)$ 到平面 π 的距离为 _____.

5. 曲面 $x^2 + 2y^2 + z - 1 = 0$ 与 $z = 2xy$ 的交线在 xOy 平面内的投影曲线 L 的方程为 _____.

6. 设 n 阶方阵 A 与 n 维列向量 ξ 满足 $A^2\xi \neq 0$, $A^3\xi = 0$, 则向量组 $\xi, A\xi, A^2\xi$ 线性 _____ 关.

7. 设 A, P 为 n 阶方阵, P 可逆阵, 则下列方程组中 _____ 一定与 $Ax = b$ 同解.
 ① $APx = b$, ② $P Ax = Pb$, ③ $P^T APx = b$, ④ $P^{-1} APx = b$.

8. 设 $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.

9. 实矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ 合同的充分必要条件是 a _____,
 b _____, c _____.

10. 设 n 阶方阵 A 的秩为 1, $\text{tr}(A) = 2$, 则满足 $A^2 = kA$ 的实数 $k =$ _____.

自觉遵守考场纪律

如考试作弊 此答卷无效

二. (6 分) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩以及一个极大无关组.

三. (14 分) 设线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 & + x_3 + 5x_4 = 2, \\ & x_2 & + 3x_4 = 1, \\ x_1 & + (a+1)x_3 + 2x_4 = b, \\ -x_1 & & - x_3 - 2x_4 = a-1 \end{cases}$$
 有无穷多解, 求参数 a, b 的值, 并求该方程组的通解(要求写成向量的形式).

四. (8 分) 设 $B = \begin{pmatrix} A & E \\ E & O \end{pmatrix}$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X 使得 $BX = B^T$.

五. (12 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. 求 A 的特征值和特征向量.

2. 求标准正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和实数 k_1, k_2, k_3 使得 $A = k_1 \alpha_1 \alpha_1^T + k_2 \alpha_2 \alpha_2^T + k_3 \alpha_3 \alpha_3^T$.

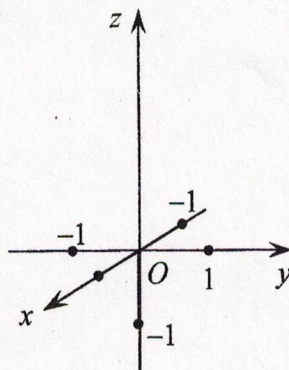
六. (12 分) 设二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

1. 用配方法把二次型 $f(\mathbf{x})$ 化为标准形, 并写出所用的可逆线性变换 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$.

2. 分别就实数 a 的不同取值范围讨论二次曲面 $f(\mathbf{x}) = 1$ 的类型.

七. (8分) 设曲线 c 是曲面 $x^2 - 2xy + y^2 - z - 1 = 0$ 与 yOz 平面的交线, S 是曲线 c 绕 z 轴旋转一周得到的曲面.

1. 求曲线 c 的方程.



2. 求曲面 S 的方程.

3. 在上面的直角坐标系中绘制曲面 S 的草图(要求标出曲线 c 以及 S 与 xOy 平面的交线).

八. 证明题(每小题 5 分, 共 10 分)

1. 设平面 $\pi_i: A_i x + B_i y + C_i z = D_i$ 的法向量 $\vec{n}_i = (A_i, B_i, C_i)$, $i = 1, 2, 3$. 证明: 三平面

π_1, π_2, π_3 交于一点的充分必要条件是它们的法向量 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ 不共面.

2. 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 为非零实矩阵, a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} . 若对于任意的 $i, j = 1, 2, 3$, 有 $A_{ij} = a_{ij}$, 证明: A 为正交阵.