东 南 大 学 考 试 卷（ A 卷）

课程名称 几何与代数B　考试学期 16-17-2　得分 ______

适用专业 电类专业　考试形式 闭卷　考试时间长度 120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

自觉遵守考场纪律　如考试作弊　此答卷无效

姓名______　学号______

……线……封……密……

一．（30%）填空题

1. 设 3 阶方阵 $A=(\alpha,\gamma_1,\gamma_2)$，$B=(\beta,\gamma_1,\gamma_2)$ 的行列式分别等于 3，5，则矩阵 $A+B$ 的行列式 $|A+B|=$ ______；

2. 若矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$，则 $A^{-1}=$ ______；

3. 过点 $P(1,0,1)$ 且与直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 垂直的平面方程为______；

4. 点 $P(2,-1,1)$ 到直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 的距离是______；

5. 已知向量组 α,β,γ 线性无关，若 $\alpha+\beta,2\beta+k\gamma,\gamma-2\alpha$ 线性相关，则 $k=$ ______；

6. R^2 的从基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为______；

7. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是______；

8. 已知 2 阶方阵 A 与 B 相似。若 $A+E$，$2B-E$ 不可逆，则 $|B|=$ ______；

9. 若 n 维列向量 α,β 满足 $\alpha^T\beta=3$，则矩阵 $\beta\alpha^T$ 的一非零特征值为______；

10. 设 4 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_3-\alpha_4$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系是______。

二. （10%）已知 $XA=B+2X$，其中 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，求矩阵 X。

三. （14%）设三个平面 π_1: $x+y+z=0$，π_2: $x+3y+5z=2$，π_3: $-y+az=b$。

1. 参数 a,b 满足什么条件时这三个平面交于一点？a,b 满足什么条件时这三个平面交于一条直线？a,b 满足什么条件时这三个平面无公共交点？

2. 设这三个平面交于一条直线 l，求直线 l 的方向向量。

四. （14%）若矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 相似于对角阵 Λ，

1. 试确定 a 的值，并求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$；

2. 问：是否存在正交阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$？为什么？

五. （8%）设 Σ 是抛物线 $\begin{cases} z=y^2+1 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的曲面，π 是平面 $z-2x=1$。

1.求 Σ 的方程；

2.求 Σ 与 π 的交线在 xOy 平面上的投影曲线的方程。

六. （14%）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+3x_2^{\ 2}+cx_3^{\ 2}+4x_1x_3$ 的秩为 2，

1. 求参数 c 的值及二次型的矩阵，

2. 求正交变换将 f 化为标准形，并写出所用的正交变换和相应的标准形；

3. 指出二次曲面 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 的类型。

七. （10%）证明题

1. 假设 A,B 都是实对称矩阵，$M=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$，证明：$M$ 正定 $\Leftrightarrow$ A,B 都正定。

2. 已知 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，证明：存在 $m\times r$ 的矩阵 M 和 $r\times n$ 的矩阵 N，使得 $A=MN$，并证明，若 P,Q 满足上述要求，则 $r(M)=r(N)=r$。