

## 11-12-2 几何与代数 B 期末试卷 A

### 一、填空题 (30%)

1. 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $BA = B - 2E$ ,  $E$  为 2 阶单位阵, 则  $|B| =$  \_\_\_\_\_;

2. 设矩阵  $A, B$  分别是  $s$  和  $t$  阶可逆矩阵, 则  $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$  \_\_\_\_\_;

3. 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A^3$  的秩为 \_\_\_\_\_;

4. 过点  $P(1, 2, 0)$  且与直线  $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$  垂直的平面的方程是 \_\_\_\_\_;

5. 若向量组  $(1, -1, 2), (1, k, -3), (3, 0, 1)$  线性相关, 则  $k =$  \_\_\_\_\_;

6. 设  $A$  是  $4 \times 3$  阶矩阵, 若齐次线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系只含一个解向量, 则方程组  $A^T y = 0$  的基础解系中有 \_\_\_\_\_ 个线性无关的解向量;

7. 设  $\alpha, \beta$  是非零向量, 若  $\|\alpha + \beta\| = \|\alpha - \beta\|$ , 则向量  $\alpha$  与  $\beta$  的关系是 \_\_\_\_\_;

8. 设 3 阶方阵  $A$  的特征值为  $-1, 2, 3$ , 则行列式  $|2A^{-1}| =$  \_\_\_\_\_;

9. 若矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  与对角阵相似, 则参数  $a$  和  $b$  满足条件 \_\_\_\_\_;

10. 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & k+1 & k \\ 0 & k & k+1 \end{pmatrix}$  正定, 则参数  $k$  满足 \_\_\_\_\_。

二、(10%) 计算行列式  $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a-1 & b+1 & c & d \\ a-2 & b & c+2 & d \\ a-3 & b & c & d+3 \end{vmatrix}$ .

三、(12%) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ , 求矩阵方程  $AXA^{-1} + A - AX = O$  的解。

四、(14%) 设线性方程组  $\begin{cases} -x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$  与  $\begin{cases} x_1 + x_2 + bx_3 = 0 \\ cx_2 + x_3 = 2 \end{cases}$  都是相容的, 且是同解

方程组。(1) 求参数  $a$  的值; (2) 求参数  $b, c$  的值和方程组的通解。

五、(10%) 在空间直角坐标系中, 曲线  $\Gamma_1: \begin{cases} x^2 = 1 - 2z \\ y = 0 \end{cases}$ ,  $\Gamma_2: \begin{cases} y^2 = 3z \\ x = 0 \end{cases}$ 。曲面  $\pi_1$  是以曲线  $\Gamma_1$  为准线, 母线与  $y$  轴平行的柱面,  $\pi_2$  为  $\Gamma_2$  绕  $z$  轴旋转所产生的旋转面。分别求

曲面  $\pi_1$ 、 $\pi_2$  的方程; 并求  $\pi_1$  与  $\pi_2$  的交线在  $xOy$  平面上的投影曲线的方程。

六、(14%) 给定二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ 。

1. 求正交变换  $x = Qy$ , 将二次型化为标准形, 并给出相应的标准型;

2. 作出二次曲面  $f(x_1, x_2, x_3) = -1$  的草图。

七、证明题 (10%)

1. 设  $A$  是  $s \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵, 若  $AB = E$ , 证明:  $A$  的行向量组线性无关。

2. 假设  $a, b, c$  是实数, 证明: 矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$  的三个特征值互不相同。

一、填空题 (30%, 每空 3 分)

1. 2; 2.  $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ ; 3. 0; 4.  $5x - 4y - 3z + 3 = 0$ ; 5. 2;

6. 2 7. 垂直; 8.  $-4/3$ ; 9.  $a = 0, b$  任意; 10.  $k > 0$ 。

二、(10%)

$$\begin{aligned} \text{解: } & \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a-1 & b+1 & c & d \\ a-2 & b & c+2 & d \\ a-3 & b & c & d+3 \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & b+1 & c & d \\ 1 & b & c+2 & d \\ 1 & b & c & d+3 \end{vmatrix} \\ & = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(a+b+c+d) \end{aligned}$$

三、(12%)

解：先化简矩阵方程， $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ ,

故方程组两边同时左乘  $A^{-1}$ ，得  $XA^{-1} + E - X = O$ ，再右乘  $A$ ，

得  $X + A - XA = O$ ，即  $X(A - E) = A$ ，

$\therefore X = A(A - E)^{-1} = E - (A - E)^{-1}$ 。

$$\text{而 } A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, (A - E)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\therefore X = E - (A - E)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

四、(14%)

$$\text{解：(1) 设 } A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

因为  $A_1x = b_1$  与  $A_2x = b_2$  相容，且它们是同解方程组，

则  $r(A_1) = r(A_1, b_1) = r(A_2, b_2) = r(A_2) = 2$ ，由  $|A_1| = 0$ ，得到  $a = 3$ ；

(2)  $A_1x = b_1$  与  $A_2x = b_2$  同解，所以  $\begin{cases} A_1x = b_1 \\ A_2x = b_2 \end{cases}$  与  $A_1x = b_1$  也同解，且增广矩阵秩为 2

$$\begin{aligned} \text{增广矩阵 } \begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & b & 0 \\ 0 & c & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & b+1 & 2 \\ 0 & c & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1-c & 2-2c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore b=0, c=1 \end{aligned}$$

$$\text{同解方程组 } \begin{cases} x_1 = -2 + x_3 \\ x_2 = 2 - x_3 \end{cases}, \text{ 即通解 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

五、(10%)

解：柱面  $\pi_1$  的方程：  $x^2 + 2z = 1$ ，

旋转面  $\pi_2$  的方程：  $x^2 + y^2 - 3z = 0$ ；

曲面  $\pi_1$  与  $\pi_2$  的交线  $\Gamma_3$  的方程：  $\begin{cases} x^2 + 2z = 1 \\ x^2 + y^2 - 3z = 0 \end{cases}$ ；

交线  $\Gamma_3$  在  $xOy$  平面的投影曲线方程：  $\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 = 3 \\ z = 0 \end{cases}$ ，投影曲线是一个椭圆。

六、(14%)

解：(1) 二次型  $f(x) = x^T A x$  的矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ，

求特征值，得  $\lambda_{1,2} = 7$ ，  $\lambda_3 = -2$ ；

求特征向量：

$$\lambda_{1,2} = 7 \text{ 时, } \lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{得到正交的特征向量: } \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -2 \text{ 时, } \lambda_3 E - A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 特征向量 } \eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{令正交矩阵 } Q = \left( \frac{\eta_1}{\|\eta_1\|}, \frac{\eta_2}{\|\eta_2\|}, \frac{\eta_3}{\|\eta_3\|} \right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 0 & -4/\sqrt{18} & 1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \end{pmatrix},$$

则正交变换  $x = Qy$  将二次型化为标准形：  $f(y_1, y_2, y_3) = 7y_1^2 + 7y_2^2 - 2y_3^2$

(2) 变换  $x = Qy$  将二次曲面  $f(x_1, x_2, x_3) = -1$  的方程化为：  $7y_1^2 + 7y_2^2 - 2y_3^2 = -1$ ，

这是一个双叶双曲面，草图如下（略）

七、证明题 (10%)

1. 证明:  $A_{s \times n}, B_{n \times s} \Rightarrow (AB)_{s \times s}, \because AB = E, \therefore r(AB) = r(E) = s;$

而  $s = r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} \leq r(A),$

同时  $r(A) \leq \min\{s, n\} \leq s, \therefore r(A) = s,$  即  $A$  的行向量组线性无关。

2. 证明: (反证法)  $\because A$  是实对称矩阵,  $\therefore A \sim \Lambda$  (其中  $\Lambda$  是对角矩阵)。

下面只需要证明矩阵  $A$  没有二重特征值即可。

假设矩阵  $A$  的特征值  $\lambda$  是二重特征值, 则它必有 2 个线性无关的特征向量,

则此时矩阵  $\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - a & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - b & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - c \end{pmatrix}$  的秩必须为 1, 即  $r(A) = 1;$

但  $\lambda E - A$  有 2 阶非零子式  $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda - b & -1 \end{vmatrix},$  则  $r(A) \geq 2,$  与  $r(A) = 1$  矛盾。

所以矩阵  $A$  的三个特征值互不相同。