Введение в Теорию Типов
Конспект лекций

Штукенберг Д. Г.
Университет ИТМО

9 ноября 2018 г.

1 Введение

Эти лекции были рассказаны студентам групп M3336–M3339 в 2018 году в Университете ИТМО, на Кафедре компьютерных технологий Факультета информационных технологий и программирования.

Конспект подготовили студенты Кафедры: Егор Галкин (лекции 1 и 2), Илья Кокорин (лекции 3 и 4), Никита Дугинец (лекции 5 и 6), Степан Прудников (лекции 7 и 8).

(возможно, история сложнее)

2 Лекция 3

2.1 Y-комбинатор

Определение 2.1. Комбинатором называется λ-выражение, не имеющее свободных переменных

Определение 2.2. (Y-комбинатор)

$$Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

Очевидно, Y-комбинатор является комбинатором.

Теорема 2.1. $Yf =_\beta f(Yf)$

Доказательство. β-редуцируем выражение Yf

$$\begin{aligned} &=_\beta (\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))f \\ &=_\beta (\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)) \\ &=_\beta f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))) \\ &=_\beta f(Yf) \end{aligned}$$

Так как при второй редукции мы получили, что $Yf =_\beta (\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ □

Следствием этого утверждения является теорема о неподвижной точки для бестипового лямбда-ичисления

Теорема 2.2. В лямбда-исчислении каждый терм f имеет неподвижную точку, то есть такое p, что $f\ p =_\beta p$

Доказательство. Возьмём в качестве p терм $Y f$. По предыдущей теореме, $f(Y f) =_\beta Y f$, то есть $Y f$ является неподвижной точкой для f. Для любого терма f существует терм $Y f$, значит, у любого терма есть неподвижная точка. □

2.2 Рекурсия

С помощью Y-комбинатора можо определять рекурсивные функции, например, функцию, вычисляющую факториал Чёрчевского нумерала. Для этого определим вспомогательную функцию

$fact' = \lambda f.\lambda n.isZero\, n\, \overline{1}(mul\; n\; f((-1)n))$

Тогда $fact = Y fact'$

Заметим, что $fact\ \overline{n} =_\beta fact'\ (Y\ fact')\ \overline{n} =_\beta fact'\ fact\ \overline{n}$, то есть в тело функции $fact'$ вместо функции f будет подставлена $fact$ (заметим, что это значит, что именно функция $fact$ будет применена к $\overline{n-1}$, то есть это соответсувует нашим представлениям о рекурсии.)

Для понимания того, как это работает, посчитаем $fact\ \overline{2}$

$$\begin{aligned}
&fact\ \overline{2}\\
&=_\beta Y\ fact'\ \overline{2}\\
&=_\beta fact'(Y\ fact'\ \overline{2})\\
&=_\beta (\lambda f.\lambda n.isZero\, n\, \overline{1}(mul\; n\; f((-1)n)))(Y\ fact')\overline{2}\\
&=_\beta isZero\, \overline{2}\, \overline{1}(mul\ \overline{2}\ ((Y\ fact')((-1)\overline{2})))\\
&=_\beta mul\ \overline{2}\ ((Y\ fact')((-1)\overline{2}))\\
&=_\beta mul\ \overline{2}\ (Y\ fact'\ \overline{1})\\
&=_\beta mul\ \overline{2}\ (fact'\ (Y\ fact'\ \overline{1}))
\end{aligned}$$

Раскрывая $fact'\ (Y\ fact'\ \overline{1})$ так же, как мы раскрывали $fact'\ (Y\ fact'\ \overline{2})$, получаем

$$=_\beta mul\ \overline{2}\ (mul\ \overline{1}\ (Y\ fact'\ \overline{0}))$$

Посчитаем $(Y\ fact'\ \overline{0})$.

$$\begin{aligned}
&(Y\ fact'\ \overline{0})\\
&=_\beta fact'\ (Y\ fact')\ \overline{0}\\
&=_\beta (\lambda f.\lambda n.isZero\, n\, \overline{1}(mul\; n\; f((-1)n)))\ (Y\ fact')\ \overline{0}\\
&=_\beta isZero\, \overline{0}\, \overline{1}(mul\ \overline{0}\ ((Y\ fact'))((-1)\overline{0})) =_\beta \overline{1}
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&fact\ \overline{2}\\
&=_\beta mul\ \overline{2}\ (mul\ \overline{1}\ (Y\ fact'\ \overline{0}))\\
&=_\beta mul\ \overline{2}\ (mul\ \overline{1}\ \overline{1}) =_\beta mul\ \overline{2}\ \overline{1} =_\beta \overline{2}
\end{aligned}$$

2.3 Парадокс Карри

Попробуем построить логику на основе λ-исчисления. Введём логический символ $\rightarrow$.

Будем тредовать от этого исчисления наличия следующих схем аксиом:

1. $\vdash A \rightarrow A$
2. $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
3. $\vdash A =_\beta B$, тогда $A \rightarrow B$

А так же правила вывода MP:

$$\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash A}{\vdash B}$$

Не вводя дополнительные правила вывода и схемы аксиом, покажем, что данная логика является противоречивой. Для чего введём следующие условные обозначения:

$F_\alpha = \lambda x.(x\ x) \rightarrow \alpha$

$\Phi_\alpha = F_\alpha\ F_\alpha = (\lambda x.(x\ x) \rightarrow \alpha)\ (\lambda x.(x\ x) \rightarrow \alpha)$

Редуцируя Φ_α, получаем

$$\begin{aligned} &\Phi_\alpha \\ =_\beta\ &(\lambda x.(x\ x) \rightarrow \alpha)\ (\lambda x.(x\ x) \rightarrow \alpha) \\ =_\beta\ &(\lambda x.(x\ x) \rightarrow \alpha)\ (\lambda x.(x\ x) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \\ =_\beta\ &\Phi_\alpha \rightarrow \alpha \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства α нужно всего лишь доказать Φ_α и применить правило MP.

1) $\vdash \Phi_\alpha \rightarrow \Phi_\alpha \rightarrow \alpha$	Так как $\Phi_\alpha =_\beta \Phi_\alpha \rightarrow \alpha$
2) $\vdash (\Phi_\alpha \rightarrow \Phi_\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\Phi_\alpha \rightarrow \alpha)$	Так как $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
3) $\vdash \Phi_\alpha \rightarrow \alpha$	MP 2, 3
4) $\vdash (\Phi_\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \Phi_\alpha$	Так как $\vdash \Phi_\alpha \rightarrow \alpha =_\beta \Phi_\alpha$
5) $\vdash \Phi_\alpha$	MP 3, 4
6) $\vdash \alpha$	MP 3, 5

Таким образом, введённая логика оказывается противоречивой.

2.4 Импликационный фрагмент интуиционистского исчисления высказываний

Рассмотрим подмножество ИИВ, со следующей грамматикой:

$\Phi ::= x \mid \Phi \rightarrow \Phi$

То есть состоящее только из меременных и импликаций.

Добавим в него одну схему аксиом

$\Gamma, \varphi \vdash \varphi$

И два правила вывода

1. Правило введения импликации:
$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$$

2. Правило удаления импликации:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Пример. Докажем $\vdash \alpha \to \beta \to \alpha$

$$\cfrac{\cfrac{\varphi, \psi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \psi \to \varphi}\text{ (Введение импликации)}}{\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)}\text{ (Введение импликации)}$$

Пример. Докажем $\alpha \to \beta \to \gamma,\ \alpha,\ \beta \vdash \gamma$

$$\cfrac{\cfrac{\alpha \to \beta \to \gamma,\ \alpha,\ \beta \vdash \alpha \to \beta \to \gamma \qquad \alpha \to \beta \to \gamma,\ \alpha,\ \beta \vdash \alpha}{\alpha \to \beta \to \gamma,\ \alpha,\ \beta \vdash \beta \to \gamma} \qquad \alpha \to \beta \to \gamma, \alpha,\ \beta \vdash \beta}{\alpha \to \beta \to \gamma,\ \alpha,\ \beta \vdash \gamma}$$

2.5 Просто типизированное по Карри лямбда-исчисление

Определение 2.3. Тип в просто типизированном лямбда-исчислении по Карри это либо маленькая греческая буква $(\alpha, \phi, \theta, \ldots)$, либо импликация $(\theta_1 \to \theta_2)$

Таким образом, $\Theta ::= \theta_i | \Theta \to \Theta | (\Theta)$

Импликация при этом считается правоассоциативной операцией.

Определение 2.4. Язык просто типизированного лямбда-исчисления это язык бестипового лямбда-исчисления.

Определение 2.5. Контекст Γ это список выражений вида $A : \theta$, где A - лямбда-терм, а θ - тип

Определение 2.6. Просто типизипрованное лямбда-исчисление по Карри.

Рассмотрим исчисление с единственной схемой аксиом:

$$\Gamma, x : \theta \vdash x : \theta, \text{если } x \text{ не входит в } \Gamma$$

И следующими правилами вывода

1. Правило типизации абстракции

$$\frac{\Gamma, x : \varphi \vdash P : \psi}{\Gamma \vdash (\lambda\, x.\, P) : \varphi \to \psi}$$

2. Правило типизации импликации:

$$\frac{\Gamma \vdash P : \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash Q : \varphi}{\Gamma \vdash PQ : \psi}$$

Пример. Докажем $\vdash \lambda\, x.\, \lambda\, y.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha$

$$\cfrac{\cfrac{x : \alpha, y : \beta \vdash x : \alpha}{x : \alpha \vdash \lambda\, y.\, x : \beta \to \alpha}\text{ (Правило типизации импликации)}}{\vdash \lambda\, x.\, \lambda\, y.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha}\text{ (Правило типизации импликации)}$$

Пример. Докажем $\vdash \lambda\, x.\, \lambda\, y.\, x\ y : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{x : \alpha \to \beta, y : \alpha \vdash x : \alpha \to \beta \qquad x : \alpha \to \beta, y : \alpha \vdash y : \alpha}{x : \alpha \to \beta, y : \alpha \vdash x\ y : \beta}}{x : \alpha \to \beta \vdash \lambda\, y.\, x\ y : \alpha \to \beta}}{\vdash \lambda\, x.\, \lambda\, y.\, x\ y : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta}$$

2.6 Отсутствие типа у Y-комбинатора

ЫЫЫ, как-нибудь допишу

Теорема 2.3. Y-комбинатор не типизируется в просто типизированном по Карри лямбда исчислении

<кукарек></кукарек>

2.7 Изоморфизм Карри-Ховарда