Лекция 5
Изоморфизм Карри-Ховарда (завершение), Унификация

Определение
Изоморфизм Карри-Ховарда

1. $\Gamma \vdash$ M:σ влечет $|\Gamma| \vdash \sigma$

2. $\Gamma \vdash \sigma$, то существует M и существует Δ, такое что $|\Delta|=\Gamma$, что $\Delta \vdash$M:σ, где $\Delta=\{x_\sigma{:}\sigma | \sigma \in \Gamma\ \}$

Рассмотрим пример: {f:$\alpha \to \beta$, x:β}$\vdash$fx:β
Применив изоморфизм Карри-Ховарда получим: $\{\alpha \to \beta,\ \beta\} \vdash \beta$

П.1 доказывается индукцией по длине выражения т.е. есть 3 правила вывода. убирая P и Q.

П.2 доказывается аналогичным способом но действия обратные.
Т.е. отношения между типами в системе типов могут рассматриваться как образ отношений между высказываниями в логической системе, и наоборот.

Определение
расширенный полином определяется формулой:

$$E(p,q) = \begin{cases} C, & \text{if } p=q=0 \\ p_1(p), & \text{if } q=0 \\ p_2(q), & \text{if } p=0 \\ p_3(p,q), & \text{if } p,q \neq 0 \end{cases}$$

, где $C-$константа, p_1, p_2, p_3-выражения, составленные из $*, +, p, q$ и констант

по сути расширенный полином это множество функций над натуральными числами(черчевскими нумералами).

Пусть $\upsilon = (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$, где $\alpha-$произвольный тип и пусть $F \in \Lambda$, что $F : \upsilon \to \upsilon \to \upsilon$, то существует расширенный полином E, такой что $\forall a, b \in \mathbb{N}\ F(\overline{a}, \overline{b}) =_\beta \overline{E(a,b)}$, где $\overline{a}-$черчевский нумерал

Теорема

У каждого терма в просто типизиреумом λ исчислении существует расширенный полином.

Основные задачи типизации λ исчисления

1. *Проверка типа*$-$выполняется ли $\Gamma \vdash M : \sigma$ для контекста Γ терма M и типа σ (для проверки типа обычно откидывают σ и рассматривают п.2).
2. *Реконструкция типа*$-$можно ли подставить вместо ? и $?_1$ в $?_1 \vdash M :?$ подставить конкретный тип σ в ? и контекст Γ в $?_1$.
3. *Обитаемость типа*$-$пытается подобрать, такой **замкнутый** терм M и контекст Γ, что бы было выполнено $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Определение **Алгебраический терм**$-$выражение типа $\Theta = a|(f_k\Theta_1 \cdots \Theta_n)$, где $a-$переменная, $(f_k\Theta_1 \cdots \Theta_n)-$применение функции

Примеры:

1. $(fab(ga))$
2. Известно, что $\to$ $-$функция, тогда выражение $((a \to b) \to c) \Longleftrightarrow (\to (\to ab)c)$

Уравнение в алгебраических термах $\Theta_1 = \Theta_2$

Система уравнений в алгебраических термах

$$\begin{cases} \Theta_1 = \sigma_1 \\ \vdots \\ \Theta_n = \sigma_n \end{cases}$$

где Θ_i и σ_i $-$ термы

Определение $\{a_i\} = A-$множество перменных, $\{\Theta_i\} = T-$множество термов.

Определение **Подстановка**$-$отображение вида: $S_0 : A \to T$, которое является решением в алгебраических термах.

Т.е. S_0-конечное множество переменных $a_1 \cdots a_n$ на которых $S_0(a_i) = \Theta_i$ либо $S_0(a_i) = a_i$.

Доопределим S на все T т.е. $S : T \to T$, где

1. $S(a) = S_0(a)$
2. $S(f(\Theta_1 \cdots \Theta_k)) = f(S(\Theta_1) \cdots S(\Theta_k))$

По сути S тоже самое что и много if'ов либо map строк

Определение **Решить уравнение в алгебраических термах**−найти такое S, что $S(\Theta_1) = S(\Theta_2)$

Например:

Заранее обозначим: a, b − переменные, f, g, h − функции

1. $f(a(gb)) = f(he)d$ имеет решение $S(a) = he$ и $S(d) = gb$
   (a) $S(fa(gb)) = f(he)(gb)$
   (b) $S(f(he)d) = f(he)(gb)$
   (c) $f(he)(gb) = f(he)(gb)$
2. $fa = gb$−решений не имеет

Таким образом, что бы существовало решение необходимо равенство строк полученной подстановки

Алгоритм Унификации

1. Система уравнений E_1 эквивалентна E_2, если они имеют одинаковые решения(унификаторы).
2. Любая система E эквивалентна некторому уравнению $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

   Доказательство:

   Возьмем функциональный символ f, не использующийся в E,

   $$E = \begin{cases} \Theta_1 = \sigma_1 \\ \vdots \\ \Theta_n = \sigma_n \end{cases}$$

   это же уравнение можно записать как− $f\Theta_1 \dots \Theta_n = f\sigma_1 \dots \sigma_n$

   Если сущесвтует подстановка S такая, что

   $S(\Theta_i) = S(\sigma_i)\ \forall i$, то $S(f\ \Theta_1 \dots \Theta_n) = f\ S(\sigma_1) \dots S(\sigma_n)$

   Обратное аналогично.
3. Рассмотрим операции
   (a) *Редукция терма*

   Заменим уравнение вида−$f_1\ \Theta_1 \dots \Theta_n = f_1\ \sigma_1 \dots \sigma_n$ на систему уравнений

   $\Theta_1 = \sigma_1$

   $\vdots$

   $\Theta_n = \sigma_n$

(b) *Устранение переменной*

Пусть есть уравнеие $x = \Theta$, заменим во всех остальных уравнениях переменную x на терм Θ

Утверждение – эти операции не изменяют множества решений.

Определение: *Система уравнений в разрешеной форме*
Если

1. Все уравнения имеют вид $a_i = \Theta_i$
2. Каждый из a_i входит в систему уравнений ТОЛЬКО РАЗ

Определение: *Система несовместима*
Если

1. существует уравнение вида $f\,\Theta_1 \dots \Theta_n = g\,\sigma_1 \dots \sigma_n$, где $f \neq g$
2. существует уравнение вида $a = f\,\Theta_1 \dots \Theta_n$, причем a выходит в какой-то из Θ_i

Алгоритм унификации

1. Пройдемся по системе, выберем такое уравнение, что оно удовлетворяет одному из условий:
   (a) Если $\Theta_i = a_i$, то перепишем, как $a_i = \Theta_i$, $\Theta_i -$не переменная
   (b) $a_i = a_i -$ удалим
   (c) $f\,\Theta_1 \dots \Theta_n = f\,\sigma_1 \dots \sigma_n$ применим редукцию термов
   (d) $a_i = \Theta_i$ Применим подстановку переменной т.е. подставим во все остальне уравнения Θ_i вместо a_i
2. Проверим разрешима ли система, совместима ли система (два пункта несовместимости)
3. повторим пункт 1

Утверждение: алгоритм не изменяет множетва решений
Утверждение: несовместимая решения не имеет решений
Утверждение: система в разрешеной форме имеет решение:

$$\begin{cases} a_1 = \Theta_1 \\ \vdots \\ a_n = \Theta_n \end{cases} \quad \text{имеет решение}- \qquad \begin{cases} S_0(a_1) = \Theta_1 \\ \vdots \\ S_0(a_n) = \Theta_n \end{cases}$$

Утверждение: алгоритм всегда закначивается

Доказательство: по индукции, выберем три числа $\langle x\, y\, z\rangle$, где

$x-$количество переменных, которые встречаются строго больше одного раза в левой части некоторого уравнения (т.е. b не повлияет на x, а a повлияет в уравнении $f(a(g\, a)\, b) = \Theta$),

$y-$ количество функциональных символов в системе,

$z-$количество уравнеий типа $a = a$ и $\Theta = b$

Заметим, что (a) и (b) всегда уменьшают z и иногда уменьшают x,

(c) всегда уменьшает y иногда x и, возможно, увеличивает z,

операция (d) всегда уменьшает x, и иногда увеличивает y.

Очевидно, что с каждой операцией $a - d$ данная тройка уменьшается и так как $x, y, z \geq 0$, то данный алгоритм завершится за конечное время.

Пример

$$\begin{aligned} &\text{Исходная система} \\ &E = \\ &g(x_2) = x_1 \\ &f(x_1, h(x_1), x_2) = f(g(x_3), x_4, x_3) \end{aligned}$$

Применим пункт (c) ко второму уравнению верхней системы получим:

$$\begin{aligned} E &= \\ g(x_2) &= x_1 \\ x_1 &= g(x_3) \\ h(x_1) &= x_4 \\ x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

Применим пункт (d) ко второму уравнению верхней системы (оно изменит 1ое уравнение) получим:

$$E =$$
$$g(x_2) = g(x_3)$$
$$x_1 = g(x_3)$$
$$h(g(x_3)) = x_4$$
$$x_2 = x_3$$

Применим пункт (c) ко первому ур-ию и пункт (a) к третьему уравнению верхней системы

$$E =$$
$$x_2 = x_3$$
$$x_1 = g(x_3)$$
$$x_4 = h(g(x_3))$$
$$x_2 = x_3$$

Применим пункт (b) к последнему уравнению и получим систему в разрешеной форме

$$E =$$
$$x_2 = x_3$$
$$x_1 = g(x_3)$$
$$x_4 = h(g(x_3))$$

Решение системы:

$$S = \{$$
$$(x_1 = g(x_3)),$$
$$(x_2 = x_3),$$
$$(x_4 = h(g(x_3))))$$
$$\}$$

Ссылки

1. https://www.quora.com/What-is-an-intuitive-explanation-of-the-Curry-Howard-correspondence
2. https://habr.com/post/269907/
3. https://arxiv.org/pdf/cs/0701022.pdf
4. http://moscova.inria.fr/ levy/courses/X/IF/03/pi/levy2/martelli-montanari.pdf