

Лекция 6

Реконструкция типов в просто типизированном лямбда-исчислении, комбинаторы

1 Лекция 6

Реконструкция типов в просто типизированном лямбда-исчислении, комбинаторы

1.1 Алгоритм вывода типов

Пусть есть: $?| - A : ?$, хотим найти пару $\langle \text{контекст, тип} \rangle$

Алгоритм:

1. Рекурсия по структуре формулы

Построить по формуле A пару $\langle E, \tau \rangle$, где

E —набор уравнений, τ —тип A

2. Решение уравнения, получения подстановки S и из решения E и $S(\tau)$ получения ответа

Т.е. необходимо свести вывод типа к алгоритму унификации.

Пункт 1.1. Рассмотрим 3 случая

1. $A \equiv x \implies \langle \{\}, \alpha_A \rangle$, где $\{\}$ —пустой контекст, α_A —новая переменная нигде не встречавшаяся до этого в формуле
2. $A \equiv P Q \implies \langle E_P \cup E_Q \cup \{\tau_P = \tau_Q \rightarrow \alpha_A\}, \alpha_A \rangle$, где α_A —новая переменная
3. $A \equiv \lambda x. P \implies \langle E_P, \alpha_x \rightarrow \tau_P \rangle$

Пункт 1.2. Алгоритм унификации

Рассмотрим E —набор уравнений, запишем все уравнения в алгебраическом виде т.е. $\alpha \rightarrow \beta \iff \alpha\beta$, затем применяем алгоритм унификации.

Лемма 1.1. Рассмотрим терм M и пару $\langle E_M, \tau_M \rangle$, Если $\Gamma| - M : \rho$, то существует:

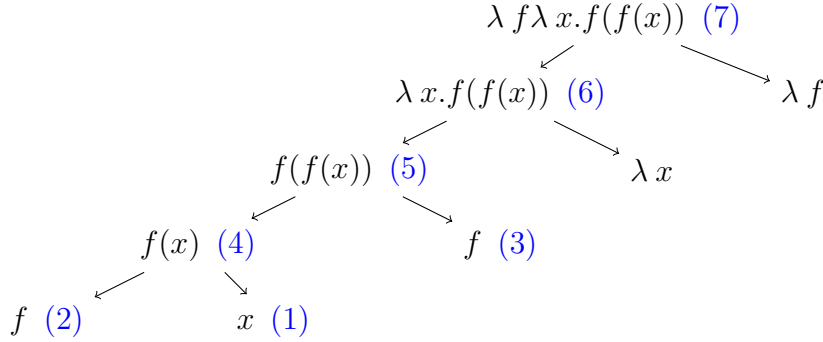
1. S —решение E_M тогда $\Gamma = \{S(\alpha_x) | x \in FV(M)\}$, FV —множество свободных переменных в терме M , α_x — переменная полученная при разборе терма M
 $\rho = S(\tau_M)$
2. Если S — решение E_M , то $\Gamma| - M : \rho$, Доказательство—индукция по структуре терма M

$\langle \Gamma, \rho \rangle$ —основная пара для терма M , если

1. $\Gamma \mid - M : \tau$
2. Если $\Gamma' \mid - M : \tau'$, то существует $S : S(\Gamma) \subset \Gamma'$

Пример.

Рассмотрим терм: $\lambda f \lambda x. f(f(x))$, построим и пронумеруем его дерево разбора:



1. $E_1 = \langle \{\}, \alpha_x \rangle$
2. $E_2 = \langle \{\}, \alpha_f \rangle$
3. $E_3 = \langle \{\}, \alpha_f \rangle$
4. $E_4 = \langle \{\alpha_f = \alpha_x \rightarrow \alpha_1\}, \alpha_1 \rangle$
5. $E_5 = \langle \{\alpha_f = \alpha_x \rightarrow \alpha_1$
 $\alpha_f = \alpha_1 \rightarrow \alpha_2\}, \alpha_2 \rangle$
6. $E_6 = \langle \{\alpha_f = \alpha_x \rightarrow \alpha_1$
 $\alpha_f = \alpha_1 \rightarrow \alpha_2\}, \alpha_x \rightarrow \alpha_2 \rangle$
7. $E_7 = \langle \{\alpha_f = \alpha_x \rightarrow \alpha_1$
 $\alpha_f = \alpha_1 \rightarrow \alpha_2\}, \alpha_f \rightarrow (\alpha_x \rightarrow \alpha_2) \rangle$

$E = \alpha_f = \alpha_x \rightarrow \alpha_1$
 $\alpha_f = \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$, решим полученную систему:

1. приведем систему к алгебраическому виду и решим её:

(a)

$$\begin{cases} \alpha_f \Rightarrow (\alpha_x \alpha_1) \\ \alpha_f \Rightarrow (\alpha_1 \alpha_2) \end{cases}$$

(b)

$$\left\{ \rightarrow (\alpha_1 \alpha_2) \Rightarrow (\alpha_x \alpha_1) \right.$$

(c)

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_x \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_x \\ \alpha_2 = \alpha_x \end{cases}$$

2. Получим

$$S = \begin{cases} \alpha_f \Rightarrow (\alpha_x \alpha_1) \\ \alpha_1 = \alpha_x \\ \alpha_2 = \alpha_x \end{cases}$$

3. $\Gamma = \{\}$, так как в заданной формуле нет свободных переменных

4. тип терма $\lambda f \lambda x. f(f(x))$ является результат подстановки

$$S(\rightarrow \alpha_f (\alpha_x \rightarrow \alpha_2)), \text{ получаем } \tau = (\alpha_x \rightarrow \alpha_x) \rightarrow (\alpha_x \rightarrow \alpha_x)$$

Определение 1.1. Если существует последовательность редукций, приводящая терм M в нормальную форму, то M —слабо нормализуем. (Т.е. при редуцировании терма M мы можем не прийти в н.ф.)

Определение 1.2. Если не существует бесконечной последовательности редукций терма M , то терм M — сильно нормализуем.

Утверждение 1.1.

1. $KI\Omega$ — слабо нормализуема
2. Ω — не нормализуема
3. II — сильно нормализуема

Лемма 1.2. Сильная нормализация влечет слабую.

Утверждение 1.2. Любое λ выражение можно записать с помощью комбинаторов S и K , где

$$\begin{aligned} S &= \lambda x \lambda y \lambda z. (x z)(y z) \\ K &= \lambda x \lambda y. x \end{aligned}$$

Утверждение 1.3. Соотношение комбинаторов с λ исчислением:

1. $T(x) = x$
2. $T(P Q) = T(P)T(Q)$
3. $T(\lambda x. P) = K(T(P))$, $x \notin FV(P)$
4. $T(\lambda x. x) = I$
5. $T(\lambda x \lambda y. P) = T(\lambda x. T(\lambda y. P))$
6. $T(\lambda x. P Q) = S T(\lambda x. P) T(\lambda x. Q)$

Утверждение 1.4. Альтернативный базис:

1. $B = \lambda x \lambda y \lambda z. x(y z)$
2. $C = \lambda x \lambda y \lambda z. ((x z)y)$
3. $W = \lambda x \lambda y. ((x y)y)$