

Лекция 6

Реконструкция типов в просто типизированном лямбда-исчислении, комбинаторы

1 Лекция 6

Реконструкция типов в просто типизированном лямбда-исчислении, комбинаторы

1.1 Алгоритм вывода типов

Пусть есть: $? \vdash A : ?$, хотим найти пару $\langle \text{контекст, тип} \rangle$

Алгоритм:

1. Рекурсия по структуре формулы

Построить по формуле A пару $\langle E, \tau \rangle$, где

E —набор уравнений, τ —тип A

2. Решение уравнения, получения подстановки S и из решения E и $S(\tau)$ получение ответа

Т.е. необходимо свести вывод типа к алгоритму унификации.

Пункт 1.1. Рассмотрим 3 случая

Обозначение \rightarrow — алгебраический тип

1. $A \equiv x \implies \langle \{\}, \alpha_A \rangle$, где $\{\}$ —пустой контекст, α_A —новая переменная нигде не встречавшаяся до этого в формуле
2. $A \equiv P Q \implies \langle E_P \cup E_Q \cup \{\tau_P = \rightarrow (\tau_Q \alpha_A)\}, \alpha_A \rangle$, где α_A —новая переменная
3. $A \equiv \lambda x.P \implies \langle E_P, \alpha_x \rightarrow \tau_P \rangle$

Пункт 1.2. Алгоритм унификации

Рассмотрим E —набор уравнений, запишем все уравнения в алгебраическом виде т.е. $\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \rightarrow \alpha \beta$, затем применяем алгоритм унификации.

Лемма 1.1. Рассмотрим терм M и пару $\langle E_M, \tau_M \rangle$, Если $\Gamma \vdash M : \rho$, то существует:

1. S —решение E_M тогда $\Gamma = \{x : S(\alpha_x) \mid x \in FV(M)\}$, FV —множество свободных переменных в терме M , α_x — переменная полученная при разборе терма M
 $\rho = S(\tau_M)$

2. Если S – решение E_M , то $\Gamma \vdash M : \rho$,

Доказательство. индукция по структуре терма M

(а) Если $M \equiv x$, то так как решение существует, то существует и $S(\alpha_x)$, что:

$$\Gamma, x : S(\alpha_x) \vdash x : S(\alpha_x)$$

(b) Если $M \equiv \lambda x. P$, то по индукции уже известен тип P , контекст Γ и тип x , тогда:

$$\frac{\Gamma, x : S(\alpha_x) \vdash P : S(\alpha_P)}{\Gamma \vdash \lambda x. P : S(\alpha_x) \rightarrow S(\alpha_P)}$$

(с) Если $M \equiv P Q$, то по индукции:

$$\frac{\Gamma \vdash P : S(\alpha_P) \equiv \tau_1 \rightarrow \tau_2 \quad \Gamma \vdash Q : S(\alpha_Q) \equiv \tau_1}{\Gamma \vdash P Q : \tau_2}$$

□

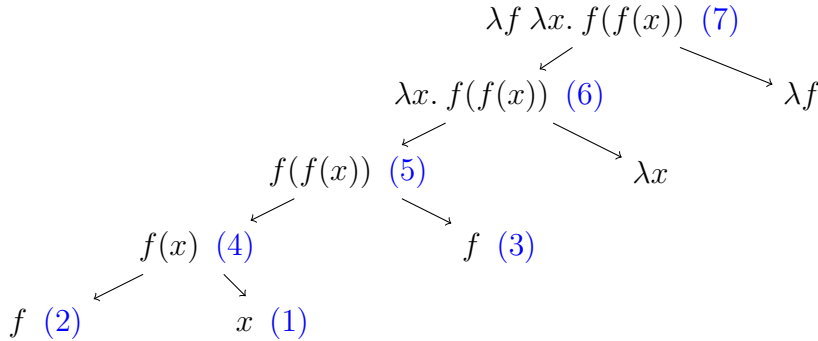
$\langle \Gamma, \rho \rangle$ – основная пара для терма M , если

1. $\Gamma \vdash M : \tau$

2. Если $\Gamma' \vdash M : \tau'$, то существует $S : S(\Gamma) \subset \Gamma'$

Пример.

Рассмотрим терм: $\lambda f \lambda x. f(f(x))$, построим и пронумеруем его дерево разбора:



1. $E_1 = \langle \{\}, \alpha_x \rangle$

2. $E_2 = \langle \{\}, \alpha_f \rangle$

3. $E_3 = \langle \{\}, \alpha_f \rangle$

4. $E_4 = \langle \{\alpha_f = \rightarrow (\alpha_x \alpha_1)\}, \alpha_1 \rangle$

5. $E_5 = \langle \left\{ \begin{array}{l} \alpha_f = \rightarrow (\alpha_x \alpha_1) \\ \alpha_f = \rightarrow (\alpha_1 \alpha_2) \end{array} \right\}, \alpha_2 \rangle$

6. $E_6 = \langle \left\{ \begin{array}{l} \alpha_f = \rightarrow (\alpha_x \alpha_1) \\ \alpha_f = \rightarrow (\alpha_1 \alpha_2) \end{array} \right\}, \alpha_x \rightarrow \alpha_2 \rangle$

7. $E_7 = \langle \left\{ \begin{array}{l} \alpha_f = \rightarrow (\alpha_x \alpha_1) \\ \alpha_f = \rightarrow (\alpha_1 \alpha_2) \end{array} \right\}, \alpha_f \rightarrow (\alpha_x \rightarrow \alpha_2) \rangle$

$$E = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_f = \rightarrow (\alpha_x \alpha_1) \\ \alpha_f = \rightarrow (\alpha_1 \alpha_2) \end{array} \right\}, \text{ решим полученную систему:}$$

1. Решим сисетму:

(a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_f = \rightarrow (\alpha_x \alpha_1) \\ \alpha_f = \rightarrow (\alpha_1 \alpha_2) \end{array} \right\}$$

(b)

$$\left\{ \rightarrow (\alpha_1 \alpha_2) = \rightarrow (\alpha_x \alpha_1) \right\}$$

(c)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_x \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{array} \right\}$$

(d)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_x \\ \alpha_2 = \alpha_x \end{array} \right\}$$

2. Получим

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_f = \rightarrow (\alpha_x \alpha_1) \\ \alpha_1 = \alpha_x \\ \alpha_2 = \alpha_x \end{array} \right\}$$

3. $\Gamma = \{\}$, так как в заданной формуле нет свободных переменных

4. тип терма $\lambda f \lambda x. f(f(x))$ является результат подстановки

$$S(\rightarrow \alpha_f (\alpha_x \rightarrow \alpha_2)), \text{ получаем } \tau = (\alpha_x \rightarrow \alpha_x) \rightarrow (\alpha_x \rightarrow \alpha_x)$$

1.2 Сильная и слабая нормализации

Определение 1.1. Если существует последовательность редукций, приводящая терм M в нормальную форму, то M —слабо нормализуем. (Т.е. при редуцировании терма M мы можем не прийти в н.ф.)

Определение 1.2. Если не существует бесконечной последовательности редукций терма M , то терм M — сильно нормализуем.

Утверждение 1.1.

1. $KI\Omega$ — слабо нормализуема

Пример.

Перепишем $KI\Omega$ как $((\lambda x \lambda y. x)(\lambda x. x))(((\lambda x. x x)(\lambda x. x x)))$, очевидно, что этот терм можно редуцировать двумя разными способами:

(a) Сначала редуцируем красную скобку

i. $((\lambda x \lambda y. x)(\lambda x. x))(((\lambda x. x x)(\lambda x. x x)))$

ii. $((\lambda y. (\lambda x. x))((\lambda x. x x)(\lambda x. x x)))$

iii. $(\lambda x. x)$

Видно, что в этом случае количество шагов конечно.

- (b) Редуцируем синюю скобку. Очевидно, что комбинатор Ω не имеет нормальной формы, тогда понятно, что в этом случае терм $KI\Omega$ никогда не редуцируется в нормальную форму.

2. Ω — не нормализуема

3. II — сильно нормализуема

Лемма 1.2. Сильная нормализация влечет слабую.

1.3 Выразимость комбинаторов

Утверждение 1.2. Любое λ выражение можно записать с помощью комбинаторов S и K , где

$$S = \lambda x \lambda y \lambda z. (x z) (y z) : (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow a \rightarrow c$$

$$K = \lambda x \lambda y. x : a \rightarrow b \rightarrow a$$

Утверждение 1.3. Комбинаторы S и K являются аксиомами в ИИВ

Утверждение 1.4. Соотношение комбинаторов с λ исчислением:

1. $T(x) = x$

2. $T(P Q) = T(P) T(Q)$

3. $T(\lambda x. P) = K(T(P)), \quad x \notin FV(P)$

4. $T(\lambda x. x) = I$

5. $T(\lambda x \lambda y. P) = T(\lambda x. T(\lambda y. P))$

6. $T(\lambda x. P Q) = S T(\lambda x. P) T(\lambda x. Q)$

Утверждение 1.5. Связь комбинаторов с ИИВ

Утверждение 1.6. Альтернативный базис:

1. $B = \lambda x \lambda y \lambda z. x (y z) : (a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a) \rightarrow c \rightarrow b$

2. $C = \lambda x \lambda y \lambda z. ((x z) y) : (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c$

3. $W = \lambda x \lambda y. ((x y) y) : (a \rightarrow a \rightarrow b) \rightarrow a \rightarrow b$