Введение в Теорию Типов
*Конспект лекций*

Штукенберг Д. Г.
Университет ИТМО

17 ноября 2018 г.

# 1 Введение

Эти лекции были рассказаны студентам групп M3334–M3337, M3339 в 2018 году в Университете ИТМО, на Кафедре компьютерных технологий Факультета информационных технологий и программирования.

Конспект подготовили студенты Кафедры: Егор Галкин (лекции 1 и 2), Илья Кокорин (лекции 3 и 4), Никита Дугинец (лекции 5 и 6), Степан Прудников (лекции 7 и 8).

(возможно, история сложнее)

# 2 Лекция 1

## 2.1 $\lambda$-исчисление

**Определение 2.1** ($\lambda$-выражение)**.** $\lambda$-выражение — выражение, удовлетворяющее грамматике:

$$\begin{aligned} \Phi ::= &\quad x \\ &\mid (\Phi) \\ &\mid \lambda x.\Phi \qquad () \\ &\mid \Phi\ \Phi \qquad () \end{aligned}$$

1. Аппликация левоассациативна.

2. Абстракции жадные, едят все что могут.

   **Пример.** $(\lambda x.(\lambda f.((fx)(fx)\lambda y.(yf))))$

**Определение 2.2** ($\alpha$-эквивалентность)**.** $A =_\alpha B$, если имеет место одно из следующих условий:

1. $A \equiv x$, $B \equiv y$ (x,y — переменные) и $x \equiv y$

2. $A \equiv P_1Q_1$, $B \equiv P_2Q_2$ и $P_1 =_\alpha P_2$, $Q_1 =_\alpha Q_2$

3. $A\lambda x.P_1$, $B\lambda y.P_2$и $P_1[x \coloneqq t] =_\alpha P_2[y \coloneqq t]$, где $t$ — новая переменная.

**Определение 2.3** ($\beta$-редекс)**.** $\beta$-редекс — выражение вида: $(\lambda x.A)\,B$

**Определение 2.4** ($\beta$-редукция)**.** $A \to_\beta B$, если имеет мето одно из следующих условий:

1. $A \equiv P_1Q_1$, $B \equiv P_2Q_2$ и либо $P_1 =_\alpha P_2$, $Q_1 \to_\beta Q_2$, либо $P_1 \to_\beta P_2$, $Q_1 =_\alpha Q_2$
2. $A \equiv (\lambda x.P)\,Q$, $B \equiv P[x \coloneqq Q]$ — Q свободна для подстановки вместо x в P

**Пример.** $X \to_\beta X$, $(\lambda x.x)\,y \to_\beta y$

**Пример.** $a\,(\lambda x.x)\,y \to_\beta ay$

**Пример.** $A \equiv \lambda x.P$, $B \equiv \lambda x.Q$, $P \to_\beta Q$

## 2.2 Представление некоторых функций в лямбда исчислении

Boolean значения легко представить в терминах $\lambda$-исчисления, к примеру

- $True = \lambda a\lambda b.a$
- $False = \lambda a\lambda b.b$

Также мы можем выражать и более сложные функции
If $= \lambda c.\lambda t.\lambda e.(ct)e$

**Пример.**

## 2.3 Черчевские нумералы

**Определение 2.5** (черчевский нумерал)**.**

$$\overline{n} = \lambda f.\lambda x.f^n x, \quad \text{где} \quad f^n x = \begin{cases} f\left(f^(n-1)x\right) & \text{при } n > 0 \\ x & \text{при } n = 0 \end{cases}$$

# 3 Лекция 2

## 3.1 Формализация $\lambda$-термов, классы $\alpha$-эквивалентности термов

**Определение 3.1** ($\lambda$-терм)**.** Рассмотрим классы эквивалентности $[A] = \alpha$
Будем говорить, что $[A] \to_\beta [B]$, если $\exists A' \in [A], B' \in [B]$, что $A' \to_\beta B'$.

**Лемма 3.1.** $=_\alpha$ — отношение эквивалентности.

Пусть в A есть $\beta$-редекс $\lambda x.Q$, но $P[x \coloneqq Q]$ не может быть, тогда найдем $y \notin V[P]$, $y \notin V[Q]$. Сделаем замену $P[x \coloneqq y]$. Тогда замена $P[x \coloneqq y][y \coloneqq Q]$ допустима.

**Лемма 3.2.** $P[x \coloneqq y] =_\alpha P[x \coloneqq y][y \coloneqq Q]$, если замена допустима.

## 3.2 Нормальная форма, $\lambda$-выражения без нормальной формы, комбинаторы $K$, $I$, $\Omega$

**Определение 3.2.** Нормальня форма — это $\lambda$-выражение без $\beta$-редексов.

**Лемма 3.3.** $\lambda$-выражение $A$ в нормальноф форме, т.и.т.т, когда $\nexists B$, что $A \to_\beta B$.

**Определение 3.3.** $A$ — Н.Ф $B$, если $\exists A_1 ... A_n$, что $B =_\alpha A_1 \to_\beta A_2 \to_\beta ... \to_\beta A_n =_\alpha A$.

**Определение 3.4.** Комбинатор — $\lambda$-выражение без свободных переменных.

**Определение 3.5.**

- $I = \lambda x.x$ (Identitant)
- $K = \lambda a.\lambda b.a$ (Konstanz)
- $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

**Лемма 3.4.** $\Omega$ — не имеет нормальной формы.

*Доказательство.* $\Omega \to_\beta \Omega$ □

## 3.3 $\beta$-редуцируемость

**Определение 3.6.** Будем говорить, что $A \twoheadrightarrow_\beta B$, если $\exists$ такие $X_1..Xn$, что $A =_\alpha X_1 \to_\beta X_2 \to_\beta ... \to_\beta X_{n-1} \to_\beta X_n =_\alpha B$.

$\twoheadrightarrow_\beta$ — рефлексивное и транзитивное замыкание $\to_\beta$. $\twoheadrightarrow_\beta$ не обязательно приводит к нормальной форме

**Пример.** $\Omega \twoheadrightarrow_\beta \Omega$

## 3.4 Ромбовидное свойство

**Определение 3.7** (Ромбовидное свойство)**.** Отношение $R$ обладает ромбовидным свойством, если $\forall a, b, c$, таких, что $aRb$, $aRc$, $b \neq c$, $\exists d$, что $bRd$ и $cRd$. Далее будем обозначать ромбовидное свойство как $<>$.

**Пример.** $(\leq)$ на множестве натуральных чисел обладает $<>$ $(>)$ не обладает $<>$ на множестве натуральных чисел

## 3.5 Теорема Чёрча-Россер, следствие о единственности нормальной формы

**Теорема 3.5** (Черча-Россер)**.** $(\twoheadrightarrow_\beta)$ обладает ромбовидным свойством.

**Следствие 3.1.** Если у $A$ есть Н.Ф, то она единтсвенная с точностью до $(=_\alpha)$ (переименования переменных).

*Доказательство.* Пусть $A \twoheadrightarrow_\beta B$ и $A \twoheadrightarrow_\beta C$. $B$, $C$ — нормальные формы и $B \neq_\alpha C$. Тогда по теореме Черча-Россера $\exists D$: $B \twoheadrightarrow_\beta D$ и $C \twoheadrightarrow_\beta D$. Тогда $B =_\alpha D$ и $C =_\alpha \Rightarrow B =_\alpha C$. Противоречие. □

**Лемма 3.6.** Если $B$ — Н.Ф, то $\nexists Q$: $B \to_\beta Q$. Значит если $B \twoheadrightarrow_\beta Q$, то количество шагов редукции равно 0.

**Лемма 3.7.** Если $R$ — обладает <>, то и $R^*$ (транзитивное, рефлексивное замыкание $R$) обладает $R^*$.

*Доказательство.* content... □

**Лемма 3.8** (Грустная лемма)**.** $(\to_\beta)$ не обладает <>

**Определение 3.8** (Параллельная $\beta$-редукция)**.** $A \rightrightarrows_\beta B$, если

1. $A =_\alpha B$
2. $A \equiv P_1 Q_1$, $B \equiv P_2 Q_2$ и $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$
3. $A \equiv \lambda x.P_1$, $B \equiv \lambda x.P_2$ и $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$
4. $A =_\alpha (\lambda x.P)Q$, $B =_\alpha P[x \coloneqq Q]$

**Лемма 3.9.** $(\rightrightarrows_\beta)$ обладает <>

$P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$ и $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$, то $P_1[x \coloneqq Q_1] \rightrightarrows_\beta P_2[x \coloneqq Q2]$