1 Лекция 9 (30.10.2018)

1.1 Ранг типа, Типовая система

Def. Ранг типа

$R(x)$ — все типа ранга x.

- $R(0)$ — все типы без кванторов
- $R(x+1) = R(x) \mid R(x) \to R(x+1) \mid \forall \alpha . R(x+1)$

Enddef.

Например:

- $\alpha \in R(0)$
- $\forall \alpha . \alpha \in R(1)$
- $(\forall \alpha . \alpha) \to (\forall b . b) \in R(2)$
- $((\forall \alpha . \alpha) \to (\forall b . b)) \to b \in R(3)$

Тут видно, если если выражение слева от знака имликации имеет ранг n, то все выражение будет иметь ранг $\geq (n+1)$.

Утверждение: Пусть x — выражение только с поверхностными кванторами, тогда $x \in R(1)$.

Def. Типовая система

$\sigma ::= \forall \alpha_1 . \forall \alpha_2 . \ldots \forall \alpha_n . \tau$, где $\tau \in R(0)$ и, следовательно, $\sigma \in R(1)$.

Enddef.

Def. Частный случай (спциализация) типовой схемы

$\sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2$ — типовая схема

σ_2 — частный случай (специализация) σ_1, если

1. $\sigma_1 = \forall \alpha_1 . \forall \alpha_2 . \ldots \forall \alpha_n . \tau_1$
2. $\sigma_2 = \forall \beta_1 . \forall \beta_2 . \ldots \forall \beta_n . \tau_1 [\alpha_i := S(\alpha_i)]$
3. $\forall i . \beta_i \in FV(\tau_1)$

Enddef.

$$M_1 : \forall \alpha . \alpha \to \alpha$$

$$M : \forall \beta_1 . \forall \beta_2 : (\beta_1 \to \beta_2) \to (\beta_1 \to \beta_2)$$

Вполне возможно, что в ходе замены, все типы будут уточнены (α уточниться как $\beta_1 \to \beta_2$.

Соглашение:

- σ — типовая схема
- τ — простой тип

1.2 Алгоритм W

На вход подаются Γ, M, на выходе наиболее общая пара (S, τ)

1. $M = x,\ x \notin \Gamma$
2. $(\emptyset, \Gamma(x))$, если $x \in \Gamma$
3. $M = \lambda n.e$
   - τ — новая типовая переменная
   - $\Gamma' = \Gamma \setminus \{n :_\}$ (т.е. Γ без переменной n)
   - $\Gamma'' = \Gamma' \cup n : \tau$
4. $M = P\ Q$
   - τ — новая типовая переменная
   - $(S_1, \tau_1) = W(\Gamma, P)$
   - $(S_2, \tau_2) = W(S_1(\Gamma), Q)$
   - S_3 — Унификация $(S_2(\tau_1), \tau_2 \to \tau)$ $(S_3 \circ S_2 \circ S_3, S_3(\tau))$
5. $let\ x = P\ in\ Q$
   - $(S, \tau) = W(\Gamma, P)$
   - $\Gamma' = \Gamma$ без x
   - $\Gamma'' = \Gamma' \cup \{x : \forall \alpha_1 \dots \alpha_k.\tau_1\}$, где $\alpha_1 \dots \alpha_k$ свободные переменные в τ_1
   - $(S_2, \tau_2) = W(S_1(\Gamma''), Q)$
   - $(S_1 \circ S_2), \tau_2)$
6. $M = x : \tau$
   - Выбросить все кванторы из τ
   - Переименовать все свободные переменные в свежие
     Например: $\forall \alpha_1.\phi \Rightarrow \phi[\alpha_1 := \beta_1]$, где β_1 — свежая переменная

2 Лекция 10 (06.11.2019)

2.1 Обобщенные типовые системы

- Сорта: {*, □}
  - Выражение "$A : *$"означает, что A — тип. И тогда, если на метаязыке мы хотим сказать "Если A тип, то и $A \to A$ тоже тип то формально это выглядит как $A : * \vdash (A \to A) : *$
  - □ - это абстракция над сортом для типов.
- $T ::= x \mid c \mid T\ T \mid \lambda x : T.\ T\ |\Pi x : T.\ T$
- Аксиома:
  - $\overline{\vdash *.\Box}$

- Правила вывода:

  1. $\dfrac{\Gamma \vdash A : S}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$ $x \notin \Gamma$
  2. $\dfrac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma C : S}{\Gamma, x : C \vdash A : B}$ — правило ослабление (примерно как $\alpha \to \beta \to \alpha$ в И.В.)
  3. $\dfrac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma \vdash B' : S \qquad B =_\beta B'}{\Gamma \vdash A : B'}$ — правило конверсии
  4. $\dfrac{\Gamma \vdash F : (\Pi x : A.B) \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (F\ a) : B[x := a]}$ — правило применения

- Семейства правила (generic-правила)

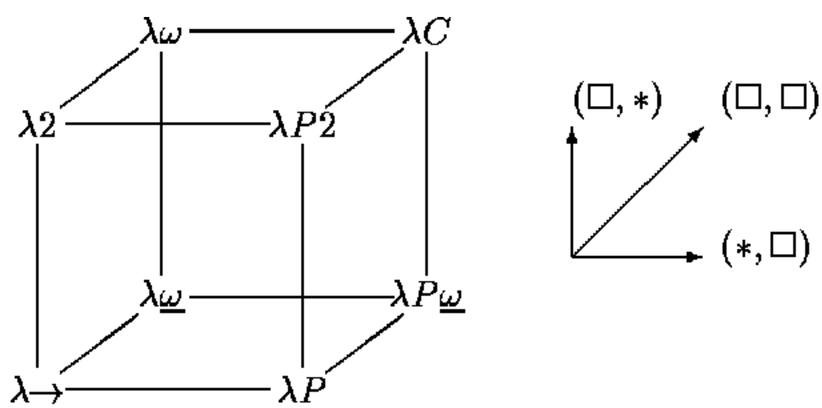
  Пусть $(s_1, s_2) \in S \subseteq \{*, \Box\}^2$.

  1. П-правило: $\dfrac{\Gamma \vdash A : s_1 \qquad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash (\Pi x : A.B) : s_2}$
  2. λ-правило: $\dfrac{\Gamma \vdash A : s_1 \qquad \Gamma, x : A \vdash b : B \qquad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash (\lambda x : A.b) : (\Pi x : A.B)}$

Например:

- $5 : int : * : \Box$
- $[] : * \to * : \Box$
- $\Lambda M.List < M >: * \to *\Box$

2.2 λ-куб



Th
Обобщенная типовая система сильно нормализуема

Примеры:

- $\lambda\omega$:

$$\vdash (\lambda\alpha : *.\alpha \to \alpha)(* \to *) : \Box$$

1. $$\dfrac{\vdash * : \Box \qquad \dfrac{\vdash *.\Box}{a : * \vdash *.\Box}}{\vdash (* \to *) : \Box}$$

2. $$\dfrac{\vdash * : \Box \qquad \dfrac{\alpha : * \vdash \alpha : * \qquad \alpha : *, x : * \vdash \alpha : *}{\alpha : * \vdash \alpha \to \alpha : x} \qquad \dfrac{\vdash * : \Box \qquad \dfrac{\vdash *.\Box}{a : * \vdash *.\Box}}{\vdash (* \to *) : \Box}}{\vdash (\lambda \alpha : *.\alpha \to \alpha) : * \to *}$$

Notes:

- $(\lambda x.x) : (A \to A)$ - implicit typing (Curry style)
- $I_A = \lambda x : A.x$ - explicit typing (Church style)