Лекция 6
Реконструкция типов в просто типизированном лямбда-исчислении, комбинаторы

1 Лекция 6 Реконструкция типов в просто типизированном лямбда-исчислении, комбинаторы

1.1 Алгоритм вывода типов

Пусть есть: $?| - A :?$, хотим найти пару $\langle \text{контекст}, \text{тип} \rangle$

Алгоритм:

1. Рекурсия по структуре формулы

   Построить по формуле A пару $\langle E, \tau \rangle$, где

   $E-$набор уравнений, $\tau-$тип A

2. Решение уравнения, получения подстановки S и из решения E и $S(\tau)$ получения ответа

Т.е. необохимо свести вывод типа к алгоритму унификации.

Пункт 1.1. Рассмотрим 3 случая

1. $A \equiv x \implies \langle \{\}, \alpha_A \rangle$, где $\{\}-$пустой конекст, α_A-новая переменная нигде не встречавшаяся до этого в формуле

2. $A \equiv P\,Q \implies \langle E_P \cup E_Q \cup \{\tau_P = \tau_Q \to \alpha_A\}, \alpha_A \rangle$, где α_A-новая переменная

3. $A \equiv \lambda x.P \implies \langle E_P, \alpha_x \to \tau_P \rangle$

Пункт 1.2. Алгоритм унификации

Рассмотрим $E-$набор уравнений, запишем все уравнения в алгебраическом виде т.е. $\alpha \to \beta \Leftrightarrow \to \alpha\beta$, затем применяем алгоритм унификации.

Лемма 1.1. Рассмотрим терм M и пару $\langle E_M, \tau_M \rangle$, Если $\Gamma| - M : \rho$, то существует:

1. $S-$решение E_M тогда $\Gamma = \{S(\alpha_x)\,|\,x \in FV(M)\}$, $FV-$множество свободных переменных в терме M, α_x- переменная полученная при разборе терма M

   $\rho = S(\tau_M)$

2. Если $S-$ решение E_M, то $\Gamma| - M : \rho$,Доказательство$-$индукция по структуре терма M

$\langle \Gamma, \rho \rangle$–основная пара для терма M, если

1. $\Gamma | - M : \tau$
2. Если $\Gamma' | - M : \tau'$, то сущесвтует $S: \; S(\Gamma) \subset \Gamma'$

Пример.

Рассмотрим терм: $\lambda\, f \lambda\, x.f(f(x))$, построим и пронумеруем его дерево разбора:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \lambda\, f \lambda\, x.f(f(x)) \;\; (7) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & & \lambda\, x.f(f(x)) \;\; (6) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \lambda\, f \\
 & f(f(x)) \;\; (5) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \lambda\, x & \\
 f(x) \;\; (4) \arrow[d] \arrow[dr] & & f \;\; (3) & & \\
 f \;\; (2) & x \;\; (1) & & &
\end{tikzcd}$$

1. $E_1 = \langle \{\}, \alpha_x \rangle$
2. $E_2 = \langle \{\}, \alpha_f \rangle$
3. $E_3 = \langle \{\}, \alpha_f \rangle$
4. $E_4 = \langle \{\alpha_f = \alpha_x \to \alpha_1\}, \alpha_1 \rangle$
5. $E_5 = \langle \{\alpha_f = \alpha_x \to \alpha_1$
   $\alpha_f = \alpha_1 \to \alpha_2\}, \alpha_2 \rangle$
6. $E_6 = \langle \{\alpha_f = \alpha_x \to \alpha_1$
   $\alpha_f = \alpha_1 \to \alpha_2\}, \alpha_x \to \alpha_2 \rangle$
7. $E_7 = \langle \{\alpha_f = \alpha_x \to \alpha_1$
   $\alpha_f = \alpha_1 \to \alpha_2\}, \alpha_f \to (\alpha_x \to \alpha_2) \rangle$

$E = \alpha_f = \alpha_x \to \alpha_1$
$\alpha_f = \alpha_1 \to \alpha_2$, решим полученную систему:

1. приведем систему к алгебрачиескому виду и решим её:

   (a)
   $$\begin{cases} \alpha_f = \to (\alpha_x\, \alpha_1) \\ \alpha_f = \to (\alpha_1\, \alpha_2) \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} \to (\alpha_1\, \alpha_2) = \to (\alpha_x\, \alpha_1) \end{cases}$$

   (c)
   $$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_x \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases}\alpha_1 = \alpha_x\\ \alpha_2 = \alpha_x\end{cases}$$

2. Получим

$$S = \begin{cases}\alpha_f = \to (\alpha_x\,\alpha_1)\\ \alpha_1 = \alpha_x\\ \alpha_2 = \alpha_x\end{cases}$$

3. $\Gamma = \{\}$, так как в заданной формуле нет свободных переменных

4. тип терма $\lambda\, f \lambda\, x.f(f(x))$ является результат подстановки $S(\to\ \alpha_f\ (\alpha_x \to \alpha_2))$, получаем $\tau = (\alpha_x \to \alpha_x) \to (\alpha_x \to \alpha_x)$

1.2 Сильная и слабая нормализации

Определение 1.1. Если существует последовательность редукций, приводящая терм M в нормальную форму, то $M-$слабо нормализуем. (Т.е. при редуцировании терма M мы можем не прийти в н.ф.)

Определение 1.2. Если не существует бесконечной последовательности редукций терма M, то терм $M-$ сильно нормализуем.

Утверждение 1.1.

1. $KI\Omega-$ слабо нормализуема

2. $\Omega-$ не нормализуема

3. $II-$ сильно нормализуема

Лемма 1.2. Сильная нормализация влечет слабую.

1.3 Выразимость комбинаторов

Утверждение 1.2. Любое λ выражение можно записать с помощью комбинаторов S и K, где

$S = \lambda\, x \lambda\, y \lambda\, z.(x\ z)(y\ z)$
$K = \lambda\, x \lambda\, y.x$

Утверждение 1.3. Соотношение комбинаторов с λ исчислением:

1. $T(x) = x$

2. $T(P\,Q) = T(P)T(Q)$

3. $T(\lambda\, x.P) = K(T(P)),\ \ x \notin FV(P)$

4. $T(\lambda\, x.x) = I$

5. $T(\lambda\, x \lambda\, y.P) = T(\lambda\, x.T(\lambda\, y.P))$

6. $T(\lambda\, x.P\,Q) = S\,T(\lambda\, x.P)T(\lambda\, x.Q)$

Утверждение 1.4. Альтернативный базис:

1. $B = \lambda\, x \lambda\, y \lambda\, z.x(y\ z)$
2. $C = \lambda\, x \lambda\, y \lambda\, z.((x\ z) y)$
3. $W = \lambda\, x \lambda\, y.((x\ y) y)$