

Лекция 5

Изоморфизм Карри-Ховарда (завершение), Унификация

Определение

Изоморфизм Карри-Ховарда

1. $\Gamma \vdash M:\sigma$ влечет $|\Gamma| \vdash \sigma$
2. $\Gamma \vdash \sigma$, то существует M и существует Δ , такое что $|\Delta| = \Gamma$, что $\Delta \vdash M:\sigma$, где $\Delta = \{x_\sigma:\sigma \mid \sigma \in \Gamma\}$

Рассмотрим пример: $\{f:\alpha \rightarrow \beta, x:\beta\} \vdash fx:\beta$

Применив изоморфизм Карри-Ховарда получим: $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta\} \vdash \beta$

П.1 доказывается индукцией по длине выражения т.е. есть 3 правила вывода. убирая Р и Q.

П.2 доказывается аналогичным способом но действия обратные.
Т.е. отношения между типами в системе типов могут рассматриваться как образ отношений между высказываниями в логической системе, и наоборот.

Определение

расширенный полином определяется формулой:

$$E(p, q) = \begin{cases} C, & \text{if } p = q = 0 \\ p_1(p), & \text{if } q = 0 \\ p_2(q), & \text{if } p = 0 \\ p_3(p, q), & \text{if } p, q \neq 0 \end{cases}$$

, где C —константа, p_1, p_2, p_3 —выражения, составленные из $*$, $+$, p, q и констант по сути расширенный полином это множество функций над натуральными числами (черчевскими нумералами).

Пусть $v = (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$, где α —произвольный тип и пусть $F \in \Lambda$, что $F : v \rightarrow v \rightarrow v$, то существует расширенный полином E , такой что $\forall a, b \in \mathbb{N} F(\bar{a}, \bar{b}) =_{\beta} \overline{E(a, b)}$, где \bar{a} —черчевский нумерал

Теорема

У каждого терма в просто типизируемом λ исчислении существует расширенный полином.

Основные задачи типизации λ исчисления

1. *Проверка типа*—выполняется ли $\Gamma \vdash M : \sigma$ для контекста Γ терма M и типа σ (для проверки типа обычно откидывают σ и рассматривают п.2).
2. *Реконструкция типа*—можно ли подставить вместо $?$ и $?_1$ в $?_1 \vdash M : ?$ подставить конкретный тип σ в $?$ и контекст Γ в $?_1$.
3. *Обитаемость типа*—пытается подобрать, такой **замкнутый** терм M и контекст Γ , что бы было выполнено $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Определение **Алгебраический терм**—выражение типа $\Theta = a|(f_k \Theta_1 \cdots \Theta_n)$, где a —переменная, $(f_k \Theta_1 \cdots \Theta_n)$ —применение функции

Примеры:

1. $(fab(ga))$
2. Известно, что \rightarrow —функция, тогда выражение $((a \rightarrow b) \rightarrow c) \iff (\rightarrow (\rightarrow ab)c)$

Уравнение в алгебраических термах $\Theta_1 = \Theta_2$

Система уравнений в алгебраических термах

$$\begin{cases} \Theta_1 = \sigma_1 \\ \vdots \\ \Theta_n = \sigma_n \end{cases}$$

где Θ_i и σ_i — термы

Определение $\{a_i\} = A$ —множество перменных, $\{\Theta_i\} = T$ —множество термов.

Определение **Подстановка**—отображение вида: $S_0 : A \rightarrow T$, которое является решением в алгебраических термах.

Т.е. S_0 —конечное множество переменных $a_1 \cdots a_n$ на которых $S_0(a_i) = \Theta_i$ либо $S_0(a_i) = a_i$.

Доопределим S на все T т.е. $S : T \rightarrow T$, где

1. $S(a) = S_0(a)$
2. $S(f(\Theta_1 \cdots \Theta_k)) = f(S(\Theta_1) \cdots S(\Theta_k))$

По сути S тоже самое что и много if' ов либо $тар$ строк

Определение **Решить уравнение в алгебраических термах**—найти такое S , что $S(\Theta_1) = S(\Theta_2)$

Например:

Заранее обозначим: a, b — переменные, f, g, h — функции

1. $f(a(gb)) = f(he)d$ имеет решение $S(a) = he$ и $S(d) = gb$

$$(a) \quad S(fa(gb)) = f(he)(gb)$$

$$(b) \quad S(f(he)d) = f(he)(gb)$$

$$(c) \quad f(he)(gb) = f(he)(gb)$$

2. $fa = gb$ —решений не имеет

Таким образом, что бы существовало решение необходимо равенство строк полученной подстановки

Алгоритм Унификации

1. Система уравнений E_1 эквивалентна E_2 , если они имеют одинаковые решения(унификаторы).

2. Любая система E эквивалентна некторому уравнению $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

Доказательство:

Возьмем функциональный символ f , не использующийся в E ,

$$E = \begin{cases} \Theta_1 = \sigma_1 \\ \vdots \\ \Theta_n = \sigma_n \end{cases}$$

это же уравнение можно записать как— $f\Theta_1 \dots \Theta_n = f\sigma_1 \dots \sigma_n$

Если сущесвтует подстановка S такая, что

$$S(\Theta_i) = S(\sigma_i) \forall i, \text{ то } S(f\Theta_1 \dots \Theta_n) = f S(\sigma_1) \dots S(\sigma_n)$$

Обратное аналогично.

3. Рассмотрим операции

(a) *Редукция терма*

Заменим уравнение вида— $f_1 \Theta_1 \dots \Theta_n = f_1 \sigma_1 \dots \sigma_n$ на систему уравнений

$$\Theta_1 = \sigma_1$$

$$\vdots$$

$$\Theta_n = \sigma_n$$

(b) *Устранение переменной*

Пусть есть уравнение $x = \Theta$, заменим во всех остальных уравнениях переменную x на терм Θ

Утверждение — эти операции не изменяют множества решений.

Определение: Система уравнений в разрешенной форме

Если

1. Все уравнения имеют вид $a_i = \Theta_i$
2. Каждый из a_i входит в систему уравнений только раз

Определение: Система несовместима

Если

1. существует уравнение вида $f \Theta_1 \dots \Theta_n = g \sigma_1 \dots \sigma_n$, где $f \neq g$
2. существует уравнение вида $a = f \Theta_1 \dots \Theta_n$, причем a выходит в какой-то из Θ_i

Алгоритм унификации

1. Пройдемся по системе, выберем такое уравнение, что оно удовлетворяет одному из условий:
 - (a) Если $\Theta_i = a_i$, то перепишем, как $a_i = \Theta_i$, Θ_i — не переменная
 - (b) $a_i = a_i$ — удалим
 - (c) $f \Theta_1 \dots \Theta_n = f \sigma_1 \dots \sigma_n$ применим редукцию термов
 - (d) $a_i = \Theta_i$ Применим подстановку переменной т.е. подставим во все остальные уравнения Θ_i вместо a_i
2. Проверим разрешима ли система, совместима ли система (два пункта несовместимости)
3. повторим пункт 1

Утверждение: алгоритм не изменяет множества решений

Утверждение: несовместимая система не имеет решений

Утверждение: система в разрешенной форме имеет решение:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \Theta_1 \\ \vdots \\ a_n = \Theta_n \end{array} \right. \text{ имеет решение} - \left\{ \begin{array}{l} S_0(a_1) = \Theta_1 \\ \vdots \\ S_0(a_n) = \Theta_n \end{array} \right.$$

Утверждение: алгоритм всегда заканчивается

Доказательство: по индукции, выберем три числа $\langle x \ y \ z \rangle$, где
 x —количество переменных, которые встречаются строго больше одного раза в левой части некоторого уравнения (т.е. b не повлияет на x , а a повлияет в уравнении $f(a(g \ a) \ b) = \Theta$),

y — количество функциональных символов в системе,

z —количество уравнений типа $a = a$ и $\Theta = b$

Заметим, что (a) и (b) всегда уменьшают z и иногда уменьшают x ,

(c) всегда уменьшает y иногда x и, возможно, увеличивает z ,

операция (d) всегда уменьшает x , и иногда увеличивает y .

Очевидно, что с каждой операцией $a - d$ данная тройка уменьшается и так как $x, y, z \geq 0$, то данный алгоритм завершится за конечное время.

Пример

Исходная система

$$E =$$

$$g(x_2) = x_1$$

$$f(x_1, h(x_1), x_2) = f(g(x_3), x_4, x_3)$$

Применим пункт (c) ко второму уравнению верхней системы получим:

$$E =$$

$$g(x_2) = x_1$$

$$x_1 = g(x_3)$$

$$h(x_1) = x_4$$

$$x_2 = x_3$$

Применим пункт (d) ко второму уравнению верхней системы
(оно изменит 1ое уравнение) получим:

$$\begin{aligned} E = \\ g(x_2) &= g(x_3) \\ x_1 &= g(x_3) \\ h(g(x_3)) &= x_4 \\ x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

Применим пункт (c) ко первому ур-ию
и пункт (a) к третьему уравнению верхней системы

$$\begin{aligned} E = \\ x_2 &= x_3 \\ x_1 &= g(x_3) \\ x_4 &= h(g(x_3)) \\ x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

Применим пункт (b) к последнему уравнению и
получим систему в разрешенной форме

$$\begin{aligned} E = \\ x_2 &= x_3 \\ x_1 &= g(x_3) \\ x_4 &= h(g(x_3)) \end{aligned}$$

Решение системы:

$$\begin{aligned} S = \{ \\ (x_1 = g(x_3)), \\ (x_2 = x_3), \\ (x_4 = h(g(x_3)))) \\ \} \end{aligned}$$

Определение: $S \circ T$ —композиция подстановок, если $S \circ T = S(T(a))$

Определение: S —наиболее общий унификатор ксли любое решение сисетмы R может быть получено уточнением:

$$\exists T : R = T \circ S$$

Утверждение: Алгоритм дает наиболее общий унификатор системы, если у нее есть решения. Если решений нет алгоритм окончится неудачей.

Лекция 6

Реконструкция типов в просто типизированном лямбда-исчислении, комбинаторы

Ссылки

1. <https://www.quora.com/What-is-an-intuitive-explanation-of-the-Curry-Howard-correspondence>
2. <https://habr.com/post/269907/>
3. <https://arxiv.org/pdf/cs/0701022.pdf>
4. <http://moscova.inria.fr/levy/courses/X/IF/03/pi/levy2/martelli-montanari.pdf>