Введение в Теорию Типов
Конспект лекций

Штукенберг Д. Г.
Университет ИТМО

22 января 2019 г.

1 Введение

Эти лекции были рассказаны студентам групп M3334–M3337, M3339 в 2018 году в Университете ИТМО, на Кафедре компьютерных технологий Факультета информационных технологий и программирования.

Конспект подготовили студенты Кафедры: Егор Галкин (лекции 1 и 2), Илья Кокорин (лекции 3 и 4), Никита Дугинец (лекции 5 и 6), Степан Прудников (лекции 7 и 8).

(возможно, история сложнее)

2 Лекция 1

2.1 λ-исчисление

Определение 2.1 (λ-выражение)**.** λ-выражение — выражение, удовлетворяющее грамматике:

$$\Phi ::= x \,|\, (\Phi) \,|\, \lambda x.\Phi \,|\, \Phi\ \Phi$$

Иногда для упращения записи мы будем опускать скобки. В этом случае, перед разбором выражения, следует расставить все опущенные скобки. При их рассатвлении будем придерживаться правил:

1. В аппликации расставляем скобки слева направо: $A\ B\ C \implies (A\ B)\ C$.

2. Абстракции жадные — поглащают скобками все что могут до конца строки: $\lambda a.\lambda b.a\ b \implies \lambda a.(\lambda b.(a\ b))$.

   Пример. $\lambda x.(\lambda f.((fx)(fx)\lambda y.(yf)))$

Договоримся, что:

- Переменные — x, a, b, c.

- Термы (части λ-выражения) — X, A, B, C.

- Фиксированные переменные обозначаются буквами из начала алфавита, метапеременные — из конца.

Есть понятия связанного и свободного вхождения переменной (аналогично исчислению предикатов).

Определение 2.2. Если вхождение x находится в области действия абстракции по x, то такое вхождение называется связанным, иначе вхождение называется свободным.

Определение 2.3. Терм Q называется свободным для подстановски в Φ вместо x, если после подстановки Q ни одно вхождение не станет связанным.

Пример. $\lambda x.A$ связывает все свободные вхождения x в A.

Определение 2.4. Функция $V(A)$ — множество переменных, входящих в A.

Определение 2.5. Функция $\mathrm{FV}(A)$ — множество свободных переменных, входящих в A:

$$\mathrm{FV}(A) = \begin{cases} \{x\} & \text{если } A \equiv x \\ \mathrm{FV}(P) \cup \mathrm{FV}(Q) & \text{если } A \equiv PQ \\ \mathrm{FV}(P) \setminus \{x\} & \text{если } A \equiv \lambda x.P \end{cases}$$

λ-выражение можно понимать как функцию. Абстракция — это функция с аргументом, аппликация — это передача аргумента.

Определение 2.6 (α-эквивалентность)**.** $A =_\alpha B$, если имеет место одно из следующих условий:

1. $A \equiv x$, $B \equiv y$ и $x \equiv y$.
2. $A \equiv P_1 Q_1$, $B \equiv P_2 Q_2$ и $P_1 =_\alpha P_2$, $Q_1 =_\alpha Q_2$.
3. $A \equiv \lambda x.P_1$, $B \equiv \lambda y.P_2$ и $P_1[x := t] =_\alpha P_2[y := t]$, где t — новая переменная.

Пример. $\lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx$.

Доказательство.

1. $tz =_\alpha tz$ верно по второму условию.
2. Тогда получаем, что $\lambda y.ty =_\alpha \lambda x.tx$ по третьему условию, так как из предыдущего пункта следует $ty[y := z] =_\alpha tx[x := z]$.
3. Из второго пункта пункта получаем что $\lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx$ по третьему условию, так как $\lambda y.xy[x := t] =_\alpha \lambda x.yx[y := t]$.

$\square$

Определение 2.7 (β-редекс)**.** β-редекс — выражение вида: $(\lambda x.A)\, B$

Определение 2.8 (β-редукция)**.** $A \to_\beta B$, если имеет место одно из следующих условий:

1. $A \equiv P_1 Q_1$, $B \equiv P_2 Q_2$ и либо $P_1 =_\alpha P_2$, $Q_1 \to_\beta Q_2$, либо $P_1 \to_\beta P_2$, $Q_1 =_\alpha Q_2$
2. $A \equiv (\lambda x.P)\, Q$, $B \equiv P[x := Q]$ причем Q свободна для подстановки вместо x в P
3. $A \equiv \lambda x.P$, $B \equiv \lambda x.Q$ и $P \to_\beta Q$

Пример. $(\lambda x.x)\, y \to_\beta y$

Пример. $a\, (\lambda x.x)\, y \to_\beta ay$

2.2 Представление некоторых функций в лямбда исчислении

Логические значения легко представить в терминах λ-исчисления. В самом деле, положим:

- $\text{True} \equiv \lambda a \lambda b.a$
- $\text{False} \equiv \lambda a \lambda b.b$

Также мы можем выражать и более сложные функции

Определение 2.9. $\text{If} \equiv \lambda c.\lambda t.\lambda e.(ct)e$

Пример. $\text{If}\ \ \text{T}\ \ a\ b \to_\beta\ \ a$

Доказательство.

$$((\lambda c.\lambda t.\lambda e.(ct)e)\ \lambda a\lambda b.a)\ a\ b \to_\beta (\lambda t.\lambda e.(\lambda a\lambda b.a)\ t\ e)\ a\ b \to_\beta \\ (\lambda t.\lambda e.(\lambda b.t)\ e)\ a\ b \to_\beta\ \ (\lambda t.\lambda e.t)\ a\ b \to_\beta\ \ (\lambda e.a)\ b \to_\beta\ \ a$$

□

Как мы видим If T действительно возвращает результат первой ветки.
Другие логические операции:

$$\text{Not} = \lambda a.a\ \ \text{F}\ \ \text{T} \qquad \text{Add} = \lambda a.\lambda b.a\ b\ \ \text{F} \qquad \text{Or} = \lambda a.\lambda b.a\ \ \text{T}\ \ b$$

2.3 Черчевские нумералы

Определение 2.10 (черчевский нумерал)**.**

$$\overline{n} = \lambda f.\lambda x.f^n x, \quad \text{где} \quad f^n x = \begin{cases} f\,(f^{n-1}x) & \text{при } n > 0 \\ x & \text{при } n = 0 \end{cases}$$

Пример.

$$\overline{3} = \lambda f.\lambda x.f\,(f\,(fx))$$

Несложно определить прибавление единицы к такому нумералу:

$$(+1) = \lambda n.\lambda f.\lambda x.f(nfx)$$

Арифметические операции:

1. $\text{IsZero} = \lambda n.n\,(\lambda x.\,\text{F})\,\text{T}$
2. $\text{Add} = \lambda a.\lambda b.\lambda f.\lambda x.a\,f\,(b\,f\,x)$
3. $\text{Pow} = \lambda a.\lambda b.b\,(\text{Mul}\ \ a)\,\overline{1}$
4. $\text{IsEven} = \lambda n.n\ \ \text{Not}\ \ \text{T}$
5. $\text{Mul} = \lambda a.\lambda b.a\,(\text{Add}\ \ b)\,\overline{0}$

Для того, чтобы определить (-1), сначала определим пару:

$$\langle a, b\rangle = \lambda f.f\,a\,b \qquad \text{First} = \lambda p.p\,\text{T} \qquad \text{Second} = \lambda p.p\,\text{F}$$

Затем n раз применим функцию $f\,(\langle a, b\rangle) = \langle b, b+1\rangle$ и возьмём первый элемент пары:

$$(-1) = \lambda n.\,\text{First}(n\,(\lambda p.\,\langle(\text{Second}\,p)\,, (+1)\,(\text{Second}\,p)\rangle)\,\langle\overline{0},\overline{0}\rangle)$$

3 Лекция 2

3.1 Формализация λ-термов, классы α-эквивалентности термов

Определение 3.1 (λ-терм)**.** Рассмотрим классы эквивалентности $[A]_{=_\alpha}$
Будем говорить, что $[A] \to_\beta [B]$, если существуют $A' \in [A]$ и $B' \in [B]$, что $A' \to_\beta B'$.

Лемма 3.1. $(=_\alpha)$ — отношение эквивалентности.

Пусть в A есть β-редекс $(\lambda x.P)Q$, но Q не свободен для подстановски вместо x в P, тогда найдем $y \notin V[P]$, $y \notin V[Q]$. Сделаем замену $P[x := y]$. Тогда замена $P[x := y][y := Q]$ допустима. То есть, можно сказать, что мы просто переименовали переменную x в P и получили свободу для подстановки, тем самым получив возможность редукции.

Лемма 3.2. $P[x := Q] =_\alpha P[x := y][y := Q]$, если замена допустима.

3.2 Нормальная форма, λ-выражения без нормальной формы, комбинаторы K, I, Ω

Определение 3.2. λ-выражение A находится в нормальноф форме, если оно не содержит β-редексов.

Определение 3.3. A — нормальная форма B, если существует последовательность термов $A_1 ... A_n$ такая, что $B =_\alpha A_1 \to_\beta A_2 \to_\beta ... \to_\beta A_n =_\alpha A$.

Определение 3.4. Комбинатор — λ-выражение без свободных переменных.

Определение 3.5.

- $I \equiv \lambda x.x$ (Identitant)
- $K \equiv \lambda a.\lambda b.a$ (Konstanz)
- $\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

Лемма 3.3. Ω — не имеет нормальной формы.

Доказательство. Ω Имеет единтсвенный β-редекс, где $A \equiv xx$, $B \equiv (\lambda x.xx)$. Тогда единственный возможный путь редукции — подставить B вместо x в A. Но тогда мы получим Ω. Следовательно у Ω нет нормальной формы, так как в полученном выражении у нас всегда будет β-редекс. $\square$

3.3 β-редуцируемость

Определение 3.6. Будем говорить, что $A \twoheadrightarrow_\beta B$, если $\exists$ такие $X_1 .. X_n$, что $A =_\alpha X_1 \to_\beta X_2 \to_\beta ... \to_\beta X_{n-1} \to_\beta X_n =_\alpha B$.

$(\twoheadrightarrow_\beta)$ — рефлексивное и транзитивное замыкание $(\to_\beta)$. $(\twoheadrightarrow_\beta)$ не обязательно приводит к нормальной форме

Пример. $\Omega \twoheadrightarrow_\beta \Omega$

3.4 Ромбовидное свойство

Определение 3.7 (Ромбовидное свойство)**.** Отношение R обладает ромбовидным свойством, если $\forall a, b, c$, таких, что aRb, aRc, $b \neq c$, $\exists d$, что bRd и cRd.

Пример. ($\leqslant$) на множестве натуральных чисел обладает ромбовидным свойством, ($>$) на множестве натуральных чисел не обладает ромбовидным свойством.

3.5 Теорема Чёрча-Россер, следствие о единственности нормальной формы

Теорема 3.1 (Черча-Россера)**.** ($\twoheadrightarrow_\beta$) обладает ромбовидным свойством.

Следствие 3.1. Если у A есть нормальная форма, то она единтсвенная с точностью до ($=_\alpha$) (переименования переменных).

Доказательство. Пусть $A \twoheadrightarrow_\beta B$ и $A \twoheadrightarrow_\beta C$. B, C — нормальные формы и $B \neq_\alpha C$. Тогда по теореме Черча-Россера $\exists D$: $B \twoheadrightarrow_\beta D$ и $C \twoheadrightarrow_\beta D$. Тогда $B =_\alpha D$ и $C =_\alpha D \Rightarrow B =_\alpha C$. Противоречие. ☐

Лемма 3.4. Если B — нормальная форма, то не существует Q такой, что $B \to_\beta Q$. Значит если $B \twoheadrightarrow_\beta Q$, то количество шагов редукции равно 0.

Лемма 3.5. Если R — обладает <>, то и R^* (транзитивное, рефлексивное замыкание R) обладает R^*.

Доказательство. Пусть $M_1 R^* M_n$ и $M_1 R N_1$. Тогда существуют такие $M_2 \dots M_{n-1}$, что $M_1 R M_2 \ \dots M_{n-1} R M_n$. Так как R обладает ромбовидным свойством, $M_1 R M_2$ и $M_1 R N_1$, то существует такое N_2, что $N_1 R N_2$ и $M_2 R N_2$. Аналогично, существуют такие $N_3 \dots N_n$, что $N_{i-1} R N_i$ и $M_i R N_i$. Мы получили такое N_n, что $N_1 R^* N_n$ и $M_n R^* N_n$.

Пусть теперь $M_{1,1} R^* M_{1,n}$ и $M_{1,1} R^* M_{m,1}$, то есть имеются $M_{1,2} \dots M_{1,n-1}$ и $M_{2,1} \dots M_{m-1,1}$, что $M_{1,i-1} R M_{1,i}$ и $M_{i-1,1} R M_{i,1}$. Тогда существует такое $M_{2,n}$, что $M_{2,1} R^* M_{2,n}$ и $M_{1,n} R^* M_{2,n}$. Аналогично, существуют такие $M_{3,n} \dots M_{m,n}$, что $M_{i,1} R^* M_{i,n}$ и $M_{1,n} R^* M_{i,n}$. Тогда $M_{1,n} R^* M_{m,n}$ и $M_{m,1} R^* M_{m,n}$. ☐

Лемма 3.6 (Грустная лемма)**.** ($\to_\beta$) не обладает ромбовидным свойством.

Доказательство. Пусть $A = (\lambda x.x.x)(\mathcal{I}\mathcal{I})$. Покажем что в таком случае не будет выполняться ромбовидное свойство: ☐

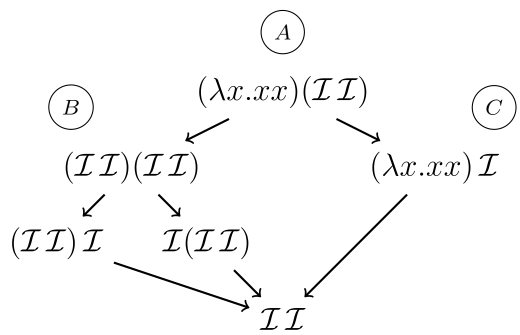

Рис. 1: Нет такого D, что $B \to_\beta D$ и $C \to_\beta D$.

Определение 3.8 (Параллельная β-редукция)**.** $A \rightrightarrows_\beta B$, если

1. $A =_\alpha B$
2. $A \equiv P_1Q_1$, $B \equiv P_2Q_2$ и $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$
3. $A \equiv \lambda x.P_1$, $B \equiv \lambda x.P_2$ и $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$
4. $A =_\alpha (\lambda x.P_1)Q_1$, $B =_\alpha P_2[x := Q_2]$ причем Q_2 свободна для подстановки вместо x в P_2 и $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$

Лемма 3.7. Если $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$ и $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$, то $P_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta P_2[x := Q2]$

Доказательство. Будем доказывать индукцией по определению $\rightrightarrows_\beta$. Рассмотрим случаи:

- Пусть $P_1 =_\alpha P_2$. Тогда лемма легко доказывается индукцией по структуре выражения.
- Пусть $P_1 \equiv A_1B_1$, $P_2 \equiv A_2B_2$. По определению $(\rightrightarrows_\beta)$ $A_1 \rightrightarrows_\beta A_2$ и $B_1 \rightrightarrows_\beta B_2$. Рассмотрим два случая:
  1. $x \in \mathrm{FV}(A_1)$. По индукционному предположению $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]$. Тогда $A_1[x := Q_1]B_1 \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]B_2$. Тогда $A_1B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2B_2[x := Q_2]$.
  2. $x \in \mathrm{FV}(B_1)$. По индукционному предположению $B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta B_2[x := Q_2]$. Тогда $A_1B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2B_2[x := Q_2]$.
- Пусть $P_1 \equiv \lambda y.A_1$, $P_2 \equiv \lambda y.A_2$. по определению $(\rightrightarrows_\beta)$ $A_1 \rightrightarrows_\beta A_2$. Тогда по индукционному предположению $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]$. Тогда $\lambda y.(A_1[x := Q_1]) \rightrightarrows_\beta \lambda y.(A_2[x := Q_2])$ по определению $(\rightrightarrows_\beta)$. Следовательно $\lambda y.A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta \lambda y.A_2[x := Q_2]$ по определению подствановки.
- Пусть $P_1 =_\alpha (\lambda y.A_1)B_1$, $P_2 =_\alpha A_2[y := B_2]$ и $A_1 \rightrightarrows_\beta A_2$, $B_1 \rightrightarrows_\beta B_2$. По индукционному предположению получаем, что $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]$, $B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta B_2[x := Q_2]$. Следовательно по определению $(\rightrightarrows_\beta)$ получаем, что $(\lambda y.A_1[x := Q_1])B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[y := B_2][x := Q_2]$

□

Лемма 3.8. $(\rightrightarrows_\beta)$ обладает ромбовидным свойством.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по определению $(\rightrightarrows_\beta)$. Покажем, что если $M \rightrightarrows_\beta M_1$ и $M \rightrightarrows_\beta M_2$, то существует M_3, что $M_1 \rightrightarrows_\beta M_3$ и $M_2 \rightrightarrows_\beta M_3$. Рассмотрим случаи:

- Если $M \equiv M_1$, то просто возьмем $M_3 \equiv M_2$.
- Если $M \equiv \lambda x.P, M_1 \equiv \lambda x.P_1, M_2 \equiv \lambda x.P_2$ и $P \rightrightarrows_\beta P_1, P \rightrightarrows_\beta P_2$, то по предположению индукции существует P_3, что $P_1 \rightrightarrows_\beta P_3, P_2 \rightrightarrows_\beta P_3$, тогда возьмем $M_3 \equiv \lambda x.P_3$.
- Если $M \equiv PQ, M_1 \equiv P_1Q_1$ и по определению $(\rightrightarrows_\beta)$ $P \rightrightarrows_\beta P_1, Q \rightrightarrows_\beta Q_1$, то рассмотрим два случая:
  1. $M_2 \equiv P_2Q_2$. Тогда по предположению индукции существует P_3, что $P_1 \rightrightarrows_\beta P_3, P_2 \rightrightarrows_\beta P_3$. Аналогично для Q. Тогда возьмем $M_3 \equiv P_3Q_3$.
  2. $P \equiv \lambda x.P'$ значит $P_1 \equiv \lambda x.P_1'$ и $P' \rightrightarrows_\beta P_1'$. Пусть тогда $M_2 \equiv P_2[x := Q_2]$, по определению $(\rightrightarrows_\beta)$ $P' \rightrightarrows_\beta P_2, Q \rightrightarrows_\beta Q_2$. Тогда по предположению индукции и лемме 3.7 существует $M_3 \equiv P_3[x := Q_3]$ такой, что $P_1' \rightrightarrows_\beta P_3$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_3$ и $P_2 \rightrightarrows_\beta P_3$, $Q_2 \rightrightarrows_\beta Q_3$.

- Если $M \equiv (\lambda x.P)Q$, $M_1 \equiv P_1[x := Q_1]$ и $P \rightrightarrows_\beta P_1$, $Q \rightrightarrows_\beta Q_1$, то рассмотрим случаи:

  1. $M_2 \equiv (\lambda x.P_2)Q_2$, $P \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q \rightrightarrows_\beta Q_2$. Тогда по предположению индукции и лемме 3.7 существует такой $M_3 \equiv P_3[x := Q_3]$, что $P_1 \rightrightarrows_\beta P_3$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_3$ и $P_2 \rightrightarrows_\beta P_3$, $Q_2 \rightrightarrows_\beta Q_3$.
  2. $M_2 \equiv P_2[x := Q_2]$, $P \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q \rightrightarrows_\beta Q_2$. Тогда по предположению индукции и лемме 3.7 существует такой $M_3 \equiv P_3[x := Q_3]$, что $P_1 \rightrightarrows_\beta P_3$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_3$ и $P_2 \rightrightarrows_\beta P_3$, $Q_2 \rightrightarrows_\beta Q_3$.

□

Лемма 3.9.

1. $(\rightrightarrows_\beta)^* \subseteq (\rightarrow_\beta)^*$
2. $(\rightarrow_\beta)^* \subseteq (\rightrightarrows_\beta)^*$

Следствие 3.2. $(\rightarrow_\beta)^* = (\rightrightarrows_\beta)^*$

Из приведенных выше лемм и следствия докажем теорему Черча-Россера.

Доказательство. $(\rightarrow_\beta)^* = (\twoheadrightarrow_\beta)$. Тогда $(\twoheadrightarrow_\beta) = (\rightrightarrows_\beta)^*$. Значит из того, что $(\rightrightarrows_\beta)$ обладает ромбовидным свойством и леммы 3.5 следует, что $(\twoheadrightarrow_\beta)$ обладает ромбовидным свойством.
□

3.6 Нормальный и аппликативный порядок вычислений

Пример. Выражение $KI\Omega$ можно редуцировать двумя способами:

1. $\mathcal{K}\mathcal{I}\,\Omega =_\alpha ((\lambda a.\lambda b.a)\mathcal{I})\Omega \rightarrow_\beta (\lambda b.\mathcal{I})\Omega \rightarrow_\beta \mathcal{I}$
2. $\mathcal{K}\mathcal{I}\,\Omega =_\alpha ((\lambda a.\lambda b.a)I)((\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)) \twoheadrightarrow_\beta ((\lambda a.\lambda b.a)I)((\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)) \rightarrow_\beta \mathcal{K}\mathcal{I}\,\Omega$

Как мы видим, в первом случае мы достигли нормальной формы, в то время как во втором мы получаем бесонечную редукцию. Разница двух этих способов в порядке редукции. Первый называется нормальный порядок, а второй аппликативный.

Определение 3.9 (нормальный порядок редукции)**.** Редукция самого левого β-редекса.

Определение 3.10 (аппликативный порядок редукции)**.** Редукция самого левого β-редекса из самых вложенных.

Теорема 3.2 (Приводится без доказательсвта)**.** Если нормальная форма существует, она может быть достигнута нормальным порядком редукции.

Нормальный порядок хоть и приводит к нормальной форме ,если она существует, но бывает ситуации в которых аппликативный порядок вычисляется быстрее чем нормальный

Пример. Рассмотрим лямбда выражение $(\lambda x.x\ x\ x\ x)(\mathcal{I}\mathcal{I})$. Попробуем редуцировать его нормальным порядком:

$(\lambda x.x\,x\,x\,x)(\mathcal{I}\mathcal{I}) \rightarrow_\beta (\mathcal{I}\mathcal{I})(\mathcal{I}\mathcal{I})(\mathcal{I}\mathcal{I})(\mathcal{I}\mathcal{I}) \rightarrow_\beta \mathcal{I}(\mathcal{I}\mathcal{I})(\mathcal{I}\mathcal{I})(\mathcal{I}\mathcal{I}) \rightarrow_\beta (\mathcal{I}\mathcal{I})(\mathcal{I}\mathcal{I})(\mathcal{I}\mathcal{I}) \rightarrow_\beta \ldots \rightarrow_\beta \mathcal{I}$

Как мы увидим, в данной ситуации аппликативный порядок редукции оказывается значительно эффективней:

$$(\lambda x.x\ x\ x\ x)(\mathcal{I}\mathcal{I}) \rightarrow_\beta (\lambda x.x\ x\ x\ x)\mathcal{I} \rightarrow_\beta \mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I} \rightarrow_\beta \mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I} \rightarrow_\beta \mathcal{I}\mathcal{I} \rightarrow_\beta \mathcal{I}$$