Введение в Теорию Типов
Конспект лекций

Штукенберг Д. Г.
Университет ИТМО

10 ноября 2018 г.

1 Введение

Эти лекции были рассказаны студентам групп M3334–M3337, M3339 в 2018 году в Университете ИТМО, на Кафедре компьютерных технологий Факультета информационных технологий и программирования.

Конспект подготовили студенты Кафедры: Егор Галкин (лекции 1 и 2), Илья Кокорин (лекции 3 и 4), Никита Дугинец (лекции 5 и 6), Степан Прудников (лекции 7 и 8).

(возможно, история сложнее)

2 Лекция 1

2.1 λ-исчисление

Определение 2.1 (λ-выражение)**.** λ-выражение — выражение, удовлетворяющее грамматике:

$$\begin{aligned} \Phi ::= \quad & x \\ & \mid (\Phi) \\ & \mid \lambda x.\Phi \qquad () \\ & \mid \Phi\ \Phi \qquad () \end{aligned}$$

1. Аппликация левоассациативна.

2. Абстракции жадные, едят все что могут.

   Пример. $(\lambda x.(\lambda f.((fx)(fx)\lambda y.(yf))))$

Определение 2.2 (α-эквивалентность)**.** $A =_\alpha B$, если имеет место одно из следующих условий:

1. $A \equiv x$, $B \equiv y$ (x,y — переменные) и $x \equiv y$

2. $A \equiv P_1Q_1$, $B \equiv P_2Q_2$ и $P_1 =_\alpha P_2$, $Q_1 =_\alpha Q_2$

3. $A\lambda x.P_1$, $B\lambda y.P_2$и $P_1[x \coloneqq t] =_\alpha P_2[y \coloneqq t]$, где t — новая переменная.

Определение 2.3 (β-редекс)**.** β-редекс — выражение вида: $(\lambda x.A)\,B$

Определение 2.4 (β-редукция)**.** $A \to_\beta B$, если имеет мето одно из следующих условий:

1. $A \equiv P_1Q_1$, $B \equiv P_2Q_2$ и либо $P_1 =_\alpha P_2$, $Q_1 \to_\beta Q_2$, либо $P_1 \to_\beta P_2$, $Q_1 =_\alpha Q_2$
2. $A \equiv (\lambda x.P)\,Q$, $B \equiv P[x \coloneqq Q]$ — Q свободна для подстановки вместо x в P

Пример. $X \to_\beta X$, $(\lambda x.x)\,y \to_\beta y$

Пример. $a\,(\lambda x.x)\,y \to_\beta ay$

Пример. $A \equiv \lambda x.P$, $B \equiv \lambda x.Q$, $P \to_\beta Q$

2.2 Представление некоторых функций в лямбда исчислении

Boolean значения легко представить в терминах λ-исчисления, к примеру

- $True = \lambda a \lambda b.a$
- $False = \lambda a \lambda b.b$

Также мы можем выражать и более сложные функции
If $= \lambda c.\lambda t.\lambda e.(ct)e$

Пример.

2.3 Черчевские нумералы

Определение 2.5 (черчевский нумерал)**.**

$$\overline{n} = \lambda f.\lambda x.f^n x, \quad \text{где} \quad f^n x = \begin{cases} f\left(f^(n-1)x\right) & \text{при } n > 0 \\ x & \text{при } n = 0 \end{cases}$$