

# Введение в Теорию Типов

## Конспект лекций

Штукенберг Д. Г.  
Университет ИТМО

9 ноября 2018 г.

## 1 Введение

Эти лекции были рассказаны студентам групп М3336–М3339 в 2018 году в Университете ИТМО, на Кафедре компьютерных технологий Факультета информационных технологий и программирования.

Конспект подготовили студенты Кафедры: Егор Галкин (лекции 1 и 2), Илья Кокорин (лекции 3 и 4), Никита Дугинец (лекции 5 и 6), Степан Прудников (лекции 7 и 8).  
(возможно, история сложнее)

## 2 Лекция 3

### 2.1 Y-комбинатор

**Определение 2.1.** Комбинатором называется  $\lambda$ -выражение, не имеющее свободных переменных

**Определение 2.2.** ( $Y$ -комбинатор)

$$Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

Очевидно,  $Y$ -комбинатор является комбинатором.

**Теорема 2.1.**  $Yf =_{\beta} f(Yf)$

*Доказательство.*  $\beta$ -редуцируем выражение  $Yf$

$$\begin{aligned} &=_{\beta} (\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))f \\ &=_{\beta} (\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)) \\ &=_{\beta} f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))) \\ &=_{\beta} f(Yf) \end{aligned}$$

Так как при второй редукции мы получили, что  $Yf =_{\beta} (\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$  □

Следствием этого утверждения является теорема о неподвижной точке для бестипового лямбда-исчисления

**Теорема 2.2.** В лямбда-исчислении каждый терм  $f$  имеет неподвижную точку, то есть такое  $p$ , что  $f p =_{\beta} p$

*Доказательство.* Возьмём в качестве  $p$  терм  $Yf$ . По предыдущей теореме,  $f(Yf) =_{\beta} Yf$ , то есть  $Yf$  является неподвижной точкой для  $f$ . Для любого терма  $f$  существует терм  $Yf$ , значит, у любого терма есть неподвижная точка.  $\square$

## 2.2 Рекурсия

С помощью  $Y$ -комбинатора можно определять рекурсивные функции, например, функцию, вычисляющую факториал Чёрчевского нумерала. Для этого определим вспомогательную функцию

$$fact' = \lambda f. \lambda n. isZero\ n\ \bar{1}(mul\ n\ f((-1)n))$$

Тогда  $fact = Y fact'$

Заметим, что  $fact\ \bar{n} =_{\beta} fact' (Y fact')\ \bar{n} =_{\beta} fact' fact\ \bar{n}$ , то есть в тело функции  $fact'$  вместо функции  $f$  будет подставлена  $fact$  (заметим, что это значит, что именно функция  $fact$  будет применена к  $\bar{n}-1$ , то есть это соответствует нашим представлениям о рекурсии.)

Для понимания того, как это работает, посчитаем  $fact\ \bar{2}$

$$\begin{aligned} & fact\ \bar{2} \\ &=_{\beta} Y\ fact'\ \bar{2} \\ &=_{\beta} fact'(Y\ fact'\ \bar{2}) \\ &=_{\beta} (\lambda f. \lambda n. isZero\ n\ \bar{1}(mul\ n\ f((-1)n)))(Y\ fact')\ \bar{2} \\ &=_{\beta} isZero\ \bar{2}\ \bar{1}(mul\ \bar{2}\ ((Y\ fact')((-1)\bar{2}))) \\ &=_{\beta} mul\ \bar{2}\ ((Y\ fact')((-1)\bar{2})) \\ &=_{\beta} mul\ \bar{2}\ (Y\ fact'\ \bar{1}) \\ &=_{\beta} mul\ \bar{2}\ (fact' (Y\ fact'\ \bar{1})) \end{aligned}$$

Раскрывая  $fact' (Y\ fact'\ \bar{1})$  так же, как мы раскрывали  $fact' (Y\ fact'\ \bar{2})$ , получаем

$$=_{\beta} mul\ \bar{2}\ (mul\ \bar{1}\ (Y\ fact'\ \bar{0}))$$

Посчитаем  $(Y\ fact'\ \bar{0})$ .

$$\begin{aligned} & (Y\ fact'\ \bar{0}) \\ &=_{\beta} fact' (Y\ fact'\ \bar{0}) \\ &=_{\beta} (\lambda f. \lambda n. isZero\ n\ \bar{1}(mul\ n\ f((-1)n)))(Y\ fact')\ \bar{0} \\ &=_{\beta} isZero\ \bar{0}\ \bar{1}(mul\ \bar{0}\ ((Y\ fact')((-1)\bar{0}))) =_{\beta} \bar{1} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & fact\ \bar{2} \\ &=_{\beta} mul\ \bar{2}\ (mul\ \bar{1}\ (Y\ fact'\ \bar{0})) \\ &=_{\beta} mul\ \bar{2}\ (mul\ \bar{1}\ \bar{1}) =_{\beta} mul\ \bar{2}\ \bar{1} =_{\beta} \bar{2} \end{aligned}$$

## 2.3 Парадокс Карри

Попробуем построить логику на основе  $\lambda$ -исчисления. Введём логический символ  $\rightarrow$ .

Будем требовать от этого исчисления наличия следующих схем аксиом:

1.  $\vdash A \rightarrow A$
2.  $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
3.  $\vdash A =_{\beta} B$ , тогда  $A \rightarrow B$

А так же правила вывода МР:

$$\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash A}{\vdash B}$$

Не вводя дополнительные правила вывода и схемы аксиом, покажем, что данная логика является противоречивой. Для чего введём следующие условные обозначения:

$$F_{\alpha} = \lambda x.(x x) \rightarrow \alpha$$

$$\Phi_{\alpha} = F_{\alpha} F_{\alpha} = (\lambda x.(x x) \rightarrow \alpha) (\lambda x.(x x) \rightarrow \alpha)$$

Редуцируя  $\Phi_{\alpha}$ , получаем

$$\begin{aligned} & \Phi_{\alpha} \\ &=_{\beta} (\lambda x.(x x) \rightarrow \alpha) (\lambda x.(x x) \rightarrow \alpha) \\ &=_{\beta} (\lambda x.(x x) \rightarrow \alpha) (\lambda x.(x x) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \\ &=_{\beta} \Phi_{\alpha} \rightarrow \alpha \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства  $\alpha$  нужно всего лишь доказать  $\Phi_{\alpha}$  и применить правило МР.

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\vdash \Phi_{\alpha} \rightarrow \Phi_{\alpha} \rightarrow \alpha$  | Так как $\Phi_{\alpha} =_{\beta} \Phi_{\alpha} \rightarrow \alpha$               |
| 2) $\vdash (\Phi_{\alpha} \rightarrow \Phi_{\alpha} \rightarrow \alpha) \rightarrow (\Phi_{\alpha} \rightarrow \alpha)$ | Так как $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ |
| 3) $\vdash \Phi_{\alpha} \rightarrow \alpha$  | МР 2, 3  |
| 4) $\vdash (\Phi_{\alpha} \rightarrow \alpha) \rightarrow \Phi_{\alpha}$  | Так как $\vdash \Phi_{\alpha} \rightarrow \alpha =_{\beta} \Phi_{\alpha}$        |
| 5) $\vdash \Phi_{\alpha}$   | МР 3, 4  |
| 6) $\vdash \alpha$  | МР 3, 5  |

Таким образом, введённая логика оказывается противоречивой.

## 2.4 Импликационный фрагмент интуиционистского исчисления высказываний

Рассмотрим подмножество ИИВ, со следующей грамматикой:

$$\Phi ::= x \mid \Phi \rightarrow \Phi$$

То есть состоящее только из меремных и импликаций.

Добавим в него одну схему аксиом

$$\Gamma, \varphi \vdash \varphi$$

И два правила вывода

1. Правило введения импликации:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$$

2. Правило удаления импликации:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

**Пример.** Докажем  $\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$

$$\frac{\frac{\varphi, \psi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi} \text{ (Введение импликации)}}{\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)} \text{ (Введение импликации)}$$

**Пример.** Докажем  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma, \alpha, \beta \vdash \gamma$

$$\frac{\frac{\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma, \alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma, \alpha, \beta \vdash \beta \rightarrow \gamma} \quad \frac{\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma, \alpha, \beta \vdash \alpha}{\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma, \alpha, \beta \vdash \beta} \text{ (Удаление импликации)}}{\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma, \alpha, \beta \vdash \gamma} \text{ (Удаление импликации)}$$

## 2.5 Просто типизированное по Карри лямбда-исчисление