1 Лекция 5 Изоморфизм Карри-Ховарда (завершение), Унификация

1.1 Изоморфизм Карри-Ховарда

Определение 1.1. Изоморфизм Карри-Ховарда

1. $\Gamma \vdash M : \sigma$ влечет $|\Gamma| \vdash \sigma$ т.е. $|\{x_1 : \Theta_1 \, \dots \, x_n : \Theta_n\}| = \{\Theta_1 \, \dots \, \Theta_n\}$

2. Если $\Gamma \vdash \sigma$, то существует M и существует Δ, такое что $|\Delta| = \Gamma$, что $\Delta \vdash M : \sigma$, где $\Delta = \{x_\sigma : \sigma \mid \sigma \in \Gamma\}$

Пример. $\{f \, : \, \alpha \, \rightarrow \, \beta, \, x \, : \, \beta\} \, \vdash \, f \, x \, : \, \beta$
Применив , изоморфизм Карри-Ховарда получим: $\{\alpha \, \rightarrow \, \beta, \, \beta\} \, \vdash \, \beta$

Доказательство. П.1 доказывается индукцией по длине выражения

1. $\Gamma, \, x : \Theta \vdash x : \Theta \qquad \Rightarrow_{KH} \qquad |\Gamma|, \, \Theta \vdash \, \Theta$

2. $$\frac{\Gamma, \, x : \tau_1 \vdash P : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x. \, P : \tau_1 \, \rightarrow \, \tau_2} \qquad \Rightarrow_{KH} \qquad \frac{|\Gamma|, \tau_1 \vdash \tau_2}{|\Gamma| \, \vdash \, \tau_1 \, \rightarrow \, \tau_2}$$

3. $$\frac{\Gamma \vdash P : \tau_1 \, \rightarrow \, \tau_2 \qquad \Gamma \vdash Q : \tau_1}{\Gamma \vdash P \, Q : \tau_2} \qquad \Rightarrow_{KH} \qquad \frac{|\Gamma| \vdash \tau_1 \, \rightarrow \, \tau_2 \qquad |\Gamma| \vdash \tau_1}{|\Gamma| \vdash \tau_2}$$

П.2 доказывается аналогичным способом но действия обратные.
Т.е. отношения между типами в системе типов могут рассматриваться как образ отношений между высказываниями в логической системе, и наоборот. □

Определение 1.2. Расширенный полином:

$$E(p, \, q) = \begin{cases} C, & \text{if } p = q = 0 \\ p_1 \, (p), & \text{if } q = 0 \\ p_2 \, (q), & \text{if } p = 0 \\ p_3 \, (p, \, q), & \text{if } p, \, q \neq 0 \end{cases}$$

, где C – константа, $p_1, \, p_2, \, p_3$ – выражения, составленные из $*$, $+$, p, q и констант.

Пусть $\upsilon = (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$, где α–произвольный тип и пусть $F \in \Lambda$, что $F : \upsilon \rightarrow \upsilon \rightarrow \upsilon$, то существует расширенный полином E, такой что $\forall a, \, b \in \mathbb{N} \; F(\overline{a}, \, \overline{b}) =_\beta \; \overline{E(a, \, b)}$, где $\overline{a}$–черчевский нумерал.

Утверждение 1.1. Типы черчевских нумералов

1. $0 : \lambda f \; \lambda y. \, x : a \, \rightarrow \, b \, \rightarrow \, a$

2. $1 : \lambda f \; \lambda y. \, f \, x : (a \, \rightarrow \, b) \, \rightarrow \, a \, \rightarrow \, b$

3. $2 : \lambda f \; \lambda y. \, f \, (f \, x) : (a \, \rightarrow \, a) \, \rightarrow \, a \, \rightarrow \, a$

4. $\forall \, i, \, i \geq 2 \quad \lambda f \; \lambda y. \, f(\, \dots \, (f \, x)) : (a \, \rightarrow \, a) \, \rightarrow \, a \, \rightarrow \, a$

Доказательство. Пункты 1 − 2− очевидно. Рассмотрим более подробно пункт 4:

Разберем нумерал и рассмотрим два последних шага −

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{f : a \;\to\; b \vdash x : a \quad \{1\}}{f : a \;\to\; b \vdash f\;x : b \quad \{2\}}}{f : a \;\to\; b \vdash f\;(f\;x) : \bot \quad \{3\}}}{\dots}}{\lambda f\;\lambda x.\, f(\,\dots\,(f\;x))}$$

на шаге 3 становится понятно, что $f : a \;\to\; a$ и $x : a$ □

Теорема 1.1. У каждого терма в просто типизируемом λ исчислении существует расширенный полином.

Утверждение 1.2. Основные задачи типизации λ исчисления

1. *Проверка типа*−выполняется ли $\Gamma \vdash M : \sigma$ для контекста Γ терма M и типа σ (для проверки типа обычно откидывают σ и рассматривают п.2).
2. *Реконструкция типа*−можно ли подставить вместо ? и $?_1$ в $?_1 \vdash M : ?$ подставить конкретный тип σ в ? и контекст Γ в $?_1$.
3. *Обитаемость типа*−пытается подобрать, такой терм M и контекст Γ, что бы было выполнено $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Определение 1.3. Алгебраический терм Выражение типа

$$\Theta ::= a \mid (f_k\,\Theta_1\;\cdots\;\Theta_n)$$

где a−переменная, $(f_k\,\Theta_1\;\cdots\;\Theta_n)$−применение функции

1.2 Уравнение в алгебраических термах $\Theta_1 = \Theta_2$ Система уравнений в алгебраических термах

Определение 1.4. Система уравнений в алгебраических термах

$$\begin{cases} \Theta_1 = \sigma_1 \\ \vdots \\ \Theta_n = \sigma_n \end{cases}$$

где Θ_i и σ_i − термы

Определение 1.5. $\{a_i\} = A$−множество перменных, $\{\Theta_i\} = T$−множество термов.

Определение 1.6. Подстановка−отображение вида: $S_0 : A \to T$, которое является решением в алгебраических термах.

$S_0(a)$ может быть либо $S_0(a) = \Theta_i$, либо $S_0(a) = a$.

Доопределим S на все T т.е. $S : T \to T$, где

1. $S(a) = S_0(a)$
2. $S(f(\Theta_1 \cdots \Theta_k)) = f(S(\Theta_1) \cdots S(\Theta_k))$

S то же самое что и много if'ов либо *map* строк.

Определение 1.7. Решить уравнение в алгебраических термах—найти такое S, что $S(\Theta_1) = S(\Theta_2)$

Пример.

Заранее обозначим: $a,\ b$ – переменные $\quad f,\ g,\ h$ – функции

1. $f\ (a\ (g\ b)) = f\ (h\ e)\ d$ имеет решение $S(a) = h\ e$ и $S(d) = g\ b$
   (a) $S(f\ a\ (g\ b)) = f\ (h\ e)\ (g\ b)$
   (b) $S(f\ (h\ e)\ d) = f\ (h\ e)\ (g\ b)$
   (c) $f\ (h\ e)\ (g\ b) = f\ (h\ e)\ (g\ b)$
2. $f\ a = g\ b$—решений не имеет

Таким образом, что бы существовало решение необходимо равенство строк полученной подстановки.

1.3 Алгоритм Унификации. Определения

1. Система уравнений E_1 эквивалентна E_2, если они имеют одинаковые решения(унификаторы).
2. Любая система E эквивалентна некторому уравнению $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

   Доказательство. Возьмем функциональный символ f, не использующийся в E,

   $$E = \begin{cases} \Theta_1 = \sigma_1 \\ \vdots \\ \Theta_n = \sigma_n \end{cases}$$

   это же уравнение можно записать как– $f\ \Theta_1 \dots \Theta_n = f\ \sigma_1 \dots \sigma_n$

   Если существует подстановка S такая, что

   $S(\Theta_i) = S(\sigma_i)\ \forall\, i$, то $S(f\ \Theta_1 \dots \Theta_n) = f\ S(\sigma_1) \dots S(\sigma_n)$

   Обратное аналогично. □

3. Рассмотрим операции
   (a) *Редукция терма*
   Заменим уравнение вида–$f_1\ \Theta_1 \dots \Theta_n = f_1\ \sigma_1 \dots \sigma_n$ на систему уравнений
   $\Theta_1 = \sigma_1$
   $\vdots$
   $\Theta_n = \sigma_n$
   (b) *Устранение переменной*
   Пусть есть уравнение $x = \Theta$, заменим во всех остальных уравнениях переменную x на терм Θ.

   Утверждение 1.3. Эти операции не изменяют множества решений.

Определение 1.8. Система уравнений в разрешеной форме если

1. Все уравнения имеют вид $a_i = \Theta_i$

2. Каждый из a_i входит в систему уравнений только раз

Определение 1.9. Система несовместима если

1. существует уравнение вида $f\,\Theta_1 \ldots \Theta_n = g\,\sigma_1 \ldots \sigma_n$, где $f \neq g$

2. существует уравнение вида $a = f\,\Theta_1 \ldots \Theta_n$, причем a выходит в какой-то из Θ_i

1.4 Алгоритм унификации

1. Пройдемся по системе, выберем такое уравнение, что оно удовлетворяет одному из условий:

   (a) Если $\Theta_i = a_i$, то перепишем, как $a_i = \Theta_i$, Θ_i-не переменная

   (b) $a_i = a_i-$ удалим

   (c) $f\,\Theta_1 \ldots \Theta_n = f\,\sigma_1 \ldots \sigma_n-$ применим редукцию термов

   (d) $a_i = \Theta_i-$ Применим подстановку переменной – подставим во все остальне уравнения Θ_i вместо a_i

2. Проверим разрешима ли система, совместима ли система (два пункта несовместимости)

3. повторим пункт 1

Утверждение 1.4. Алгоритм не изменяет множетва решений

Утверждение 1.5. Несовместная система не имеет решений

Утверждение 1.6. Система в разрешеной форме имеет решение:

$$\begin{cases} a_1 = \Theta_1 \\ \vdots \\ a_n = \Theta_n \end{cases} \quad \text{имеет решение} - \quad \begin{cases} S_0(a_1) = \Theta_1 \\ \vdots \\ S_0(a_n) = \Theta_n \end{cases}$$

Утверждение 1.7. Алгоритм всегда закначивается

Доказательство. По индукции, выберем три числа $\langle x\,y\,z \rangle$, где

$x-$количество переменных, которые встречаются строго больше одного раза в левой части некоторого уравнения (b не повлияет на x, а a повлияет в уравнении $f(a(g\,a)b) = \Theta$),

$y-$ количество функциональных символов в системе,

$z-$количество уравнеий типа $a = a$ и $\Theta = b$.

Определим отношение $\leq$ между двумя кортежами, как $\langle x_1\,y_1\,z_1 \rangle \leq \langle x_2\,y_2\,z_2 \rangle$ если верно одно из следующих условий:

1. $x_1 < x_2$

2. $x_1 = x_2 \,\&\, y_1 < y_2$

3. $x_1 = x_2 \,\&\, y_1 = y_2 \,\&\, z_1 < z_2$

Заметим, что операции (a) и (b) всегда уменьшают z и иногда уменьшают x.

Операция (c) всегда уменьшает y иногда x и, возможно, увеличивает z.

Операция (d) всегда уменьшает x, и иногда увеличивает y.

Очевидно, что с каждой операцией $a-d$ данная тройка уменьшается и так как $x, y, z \geq 0$, то данный алгоритм завершится за конечное время. $\square$

Пример.

$$\begin{aligned} &\text{Исходная система} \\ &E = \\ &g(x_2) = x_1 \\ &f(x_1,\ h(x_1),\ x_2) = f(g(x_3),\ x_4,\ x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Применим пункт } (c) \text{ ко второму уравнению верхней системы получим:} \\ &E = \\ &g(x_2) = x_1 \\ &x_1 = g(x_3) \\ &h(x_1) = x_4 \\ &x_2 = x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Применим пункт } (d) \text{ ко второму уравнению верхней системы} \\ &\text{(оно изменит 1ое уравнение) получим:} \\ &E = \\ &g(x_2) = g(x_3) \\ &x_1 = g(x_3) \\ &h(g(x_3)) = x_4 \\ &x_2 = x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Применим пункт } (c) \text{ ко первому ур-ию} \\ &\text{и пункт } (a) \text{ к третьему уравнению верхней системы} \\ &E = \\ &x_2 = x_3 \\ &x_1 = g(x_3) \\ &x_4 = h(g(x_3)) \\ &x_2 = x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Применим пункт } (b) \text{ к последнему уравнению и} \\ &\text{получим систему в разрешеной форме} \\ &E = \\ &x_2 = x_3 \\ &x_1 = g(x_3) \\ &x_4 = h(g(x_3)) \end{aligned}$$

Решение системы:

$$\begin{aligned} S = \{ \\ (x_1 = g(x_3)), \\ (x_2 = x_3), \\ (x_4 = h\left(g\left(x_3\right)\right)) \\ \} \end{aligned}$$

Определение 1.10. $S \circ T-$композиция подстановок, если $S \circ T = S\left(T\left(a\right)\right)$

Определение 1.11. $S-$наиболее общий унификатор, если любое решение сисетмы R может быть получено уточнением: $\exists\, T : R = T \circ S$

Утверждение 1.8. Алгоритм дает наиболее общий унификатор системы, если у нее есть решения. Если решений нет алгоритм окончится неудачей.