

Введение в Теорию Типов

Конспект лекций

Штукенберг Д. Г.
Университет ИТМО

10 декабря 2018 г.

1 Введение

Эти лекции были рассказаны студентам групп М3334–М3337, М3339 в 2018 году в Университете ИТМО, на Кафедре компьютерных технологий Факультета информационных технологий и программирования.

Конспект подготовили студенты Кафедры: Егор Галкин (лекции 1 и 2), Илья Кокорин (лекции 3 и 4), Никита Дугинец (лекции 5 и 6), Степан Прудников (лекции 7 и 8).
(возможно, история сложнее)

2 Лекция 1

2.1 λ -исчисление

Определение 2.1 (λ -выражение). λ -выражение — выражение, удовлетворяющее грамматике:

$$\begin{aligned}\Phi ::= & x \\ & | (\Phi) \\ & | \lambda x. \Phi \quad (\textit{abstraction}) \\ & | \Phi \Phi \quad (\textit{application})\end{aligned}$$

1. Аппликация левоассоциативна.
2. Абстракции жадные, едят все что могут.

Пример. $(\lambda x. (\lambda f. ((fx)(fx)) \lambda y. (yf))))$

Есть понятия связанного и свободного вхождения переменной (аналогично исчислению предикатов). $\lambda x. A$ связывает все свободные вхождения x в A .

Определение 2.2. Функция $FV(A)$ — множество свободных переменных, входящих в A :

$$FV(A) = \begin{cases} \{x\} & \text{если } A \equiv x \\ FV(P) \cup FV(Q) & \text{если } A \equiv PQ \\ FV(P) \setminus \{x\} & \text{если } A \equiv \lambda x. P \end{cases}$$

Договоримся, что:

- Переменные — x, a, b, c .
- Термы (части λ -выражения) — X, A, B, C .
- Фиксированные переменные обозначаются буквами из начала алфавита, метаварьируемые — из конца.

На самом деле, смысл в этом есть, λ -выражение можно понимать как функцию. Абстракция — это функция с аргументом, аппликация — это передача аргумента.

Определение 2.3 (α -эквивалентность). $A =_\alpha B$, если имеет место одно из следующих условий:

1. $A \equiv x, B \equiv y$ (x, y — переменные) и $x \equiv y$
2. $A \equiv P_1 Q_1, B \equiv P_2 Q_2$ и $P_1 =_\alpha P_2, Q_1 =_\alpha Q_2$
3. $A \equiv \lambda x. P_1, B \equiv \lambda y. P_2$ и $P_1[x := t] =_\alpha P_2[y := t]$, где t — новая переменная.

Пример. $\lambda x. \lambda y. xy =_\alpha \lambda y. \lambda x. yx$.

Доказательство. Согласно второму правилу следующие утверждения верны:

$$\begin{aligned} \lambda y. ty =_\alpha \lambda x. tx &\implies \lambda x. \lambda y. xy =_\alpha \lambda y. \lambda x. yx \\ tz =_\alpha tz &\implies \lambda y. ty =_\alpha \lambda x. tx \end{aligned}$$

$tz =_\alpha tz$ верно по третьему условию. □

Определение 2.4 (β -редекс). β -редекс — выражение вида: $(\lambda x. A) B$

Определение 2.5 (β -редукция). $A \rightarrow_\beta B$, если имеет место одно из следующих условий:

1. $A \equiv P_1 Q_1, B \equiv P_2 Q_2$ и либо $P_1 =_\alpha P_2, Q_1 \rightarrow_\beta Q_2$, либо $P_1 \rightarrow_\beta P_2, Q_1 =_\alpha Q_2$
2. $A \equiv (\lambda x. P) Q, B \equiv P[x := Q]$ — Q свободна для подстановки вместо x в P

Пример. $X \rightarrow_\beta X, (\lambda x. x) y \rightarrow_\beta y$

Пример. $a (\lambda x. x) y \rightarrow_\beta ay$

Пример. $A \equiv \lambda x. P, B \equiv \lambda x. Q, P \rightarrow_\beta Q$

2.2 Представление некоторых функций в лямбда исчислении

Boolean значения легко представить в терминах λ -исчисления, к примеру

- $True = \lambda a \lambda b. a$
- $False = \lambda a \lambda b. b$

Также мы можем выражать и более сложные функции

Определение 2.6. $If = \lambda c. \lambda t. \lambda e. (ct)e$

Пример. $If T a b \rightarrow_\beta a$

Доказательство.

$$\begin{aligned} ((\lambda c. \lambda t. \lambda e. (ct)e) \lambda a \lambda b. a) a b \rightarrow_{\beta} (\lambda t. \lambda e. (\lambda a \lambda b. a) t e) a b \rightarrow_{\beta} \\ (\lambda t. \lambda e. (\lambda b. t) e) a b \rightarrow_{\beta} (\lambda t. \lambda e. t) a b \rightarrow_{\beta} (\lambda e. a) b \rightarrow_{\beta} a \end{aligned}$$

□

Как мы видим If true действительно возвращает результат первой ветки.
Другие логические операции:

$$Not = \lambda a. a \ F \ T \quad And = \lambda a. \lambda b. a \ b \ F \quad Or = \lambda a. \lambda b. a \ T \ b$$

2.3 Черчевские нумералы

Определение 2.7 (черчевский нумерал).

$$\bar{n} = \lambda f. \lambda x. f^n x, \quad \text{где} \quad f^n x = \begin{cases} f(f^{n-1}x) & \text{при } n > 0 \\ x & \text{при } n = 0 \end{cases}$$

Пример.

$$\bar{3} = \lambda f. \lambda x. f(f(fx))$$

Несложно определить прибавление единицы к такому нумералу:

$$(+1) = \lambda n. \lambda f. \lambda x. f(nfx)$$

Арифметические операции:

1. IsZero = $\lambda n. n \ (\lambda x. F) \ T$
2. Add = $\lambda a. \lambda b. \lambda f. \lambda x. a \ f \ (b \ f \ x)$
3. Pow = $\lambda a. \lambda b. b \ (\text{Mul } a) \ \bar{1}$
4. IsEven = $\lambda n. n \ \text{Not } T$
5. Mul = $\lambda a. \lambda b. a \ (\text{Add } b) \ \bar{0}$

Для того, чтобы определить (-1) , сначала определим «пару»:

$$\langle a, b \rangle = \lambda f. f \ a \ b \quad \text{First} = \lambda p. p \ T \quad \text{Second} = \lambda p. p \ F$$

Затем n раз применим функцию $f(\langle a, b \rangle) = \langle b, b+1 \rangle$ и возьмём первый элемент пары:

$$(-1) = \lambda n. \text{First}(n(\lambda p. \langle (\text{Second } p), (+1)(\text{Second } p) \rangle)) \ \langle \bar{0}, \bar{0} \rangle$$

3 Лекция 2

3.1 Формализация λ -термов, классы α -эквивалентности термов

Определение 3.1 (λ -терм). Рассмотрим классы эквивалентности $[A] = \alpha$. Будем говорить, что $[A] \rightarrow_{\beta} [B]$, если $\exists A' \in [A], B' \in [B]$, что $A' \rightarrow_{\beta} B'$.

Лемма 3.1. $=_{\alpha}$ — отношение эквивалентности.

Пусть в A есть β -редекс $\lambda x. Q$, но $P[x := Q]$ не может быть, тогда найдем $y \notin V[P]$, $y \notin V[Q]$. Сделаем замену $P[x := y]$. Тогда замена $P[x := y][y := Q]$ допустима.

Лемма 3.2. $P[x := y] =_{\alpha} P[x := y][y := Q]$, если замена допустима.

3.2 Нормальная форма, λ -выражения без нормальной формы, комбинаторы K , I , Ω

Определение 3.2. Нормальная форма — это λ -выражение без β -редексов.

Лемма 3.3. λ -выражение A в нормальной форме, т.е.т.т, когда $\nexists B$, что $A \rightarrow_\beta B$.

Определение 3.3. A — Н.Ф. B , если $\exists A_1 \dots A_n$, что $B =_\alpha A_1 \rightarrow_\beta A_2 \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta A_n =_\alpha A$.

Определение 3.4. Комбинатор — λ -выражение без свободных переменных.

Определение 3.5.

- $I = \lambda x.x$ (Identitant)
- $K = \lambda a.\lambda b.a$ (Konstanz)
- $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

Лемма 3.4. Ω — не имеет нормальной формы.

Доказательство. $\Omega \rightarrow_\beta \Omega$

□

3.3 β -редуцируемость

Определение 3.6. Будем говорить, что $A \twoheadrightarrow_\beta B$, если \exists такие $X_1 \dots X_n$, что $A =_\alpha X_1 \rightarrow_\beta X_2 \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta X_{n-1} \rightarrow_\beta X_n =_\alpha B$.

\twoheadrightarrow_β — рефлексивное и транзитивное замыкание \rightarrow_β . \twoheadrightarrow_β не обязательно приводит к нормальной форме

Пример. $\Omega \twoheadrightarrow_\beta \Omega$

3.4 Ромбовидное свойство

Определение 3.7 (Ромбовидное свойство). Отношение R обладает ромбовидным свойством, если $\forall a, b, c$, таких, что aRb , aRc , $b \neq c$, $\exists d$, что bRd и cRd . Далее будем обозначать ромбовидное свойство как $<>$.

Пример. (\leq) на множестве натуральных чисел обладает $<>$ $(>)$ не обладает $<>$ на множестве натуральных чисел

3.5 Теорема Чёрча-Россера, следствие о единственности нормальной формы

Теорема 3.5 (Черча-Россера). $(\twoheadrightarrow_\beta)$ обладает ромбовидным свойством.

Следствие 3.1. Если у A есть Н.Ф., то она единственная с точностью до $(=_\alpha)$ (переименования переменных).

Доказательство. Пусть $A \twoheadrightarrow_\beta B$ и $A \twoheadrightarrow_\beta C$. B, C — нормальные формы и $B \neq_\alpha C$. Тогда по теореме Черча-Россера $\exists D$: $B \twoheadrightarrow_\beta D$ и $C \twoheadrightarrow_\beta D$. Тогда $B =_\alpha D$ и $C =_\alpha D \Rightarrow B =_\alpha C$. Противоречие. □

Лемма 3.6. Если B — Н.Ф., то $\nexists Q$: $B \rightarrow_\beta Q$. Значит если $B \twoheadrightarrow_\beta Q$, то количество шагов редукции равно 0.

Лемма 3.7. Если R — обладает $<>$, то и R^* (транзитивное, рефлексивное замыкание R) обладает R^* .

Доказательство. content...

□

Лемма 3.8 (Грустная лемма). (\rightarrow_β) не обладает $<>$

Определение 3.8 (Параллельная β -редукция). $A \rightrightarrows_\beta B$, если

1. $A =_\alpha B$
2. $A \equiv P_1 Q_1, B \equiv P_2 Q_2$ и $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2, Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$
3. $A \equiv \lambda x. P_1, B \equiv \lambda x. P_2$ и $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$
4. $A =_\alpha (\lambda x. P) Q, B =_\alpha P[x := Q]$

Лемма 3.9. $(\rightrightarrows_\beta)$ обладает $<>$

$P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$ и $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$, то $P_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta P_2[x := Q_2]$