Введение в Теорию Типов
Конспект лекций

Штукенберг Д. Г.
Университет ИТМО

10 декабря 2018 г.

1 Введение

Эти лекции были рассказаны студентам групп M3334–M3337, M3339 в 2018 году в Университете ИТМО, на Кафедре компьютерных технологий Факультета информационных технологий и программирования.

Конспект подготовили студенты Кафедры: Егор Галкин (лекции 1 и 2), Илья Кокорин (лекции 3 и 4), Никита Дугинец (лекции 5 и 6), Степан Прудников (лекции 7 и 8).

(возможно, история сложнее)

2 Лекция 1

2.1 λ-исчисление

Определение 2.1 (λ-выражение)**.** λ-выражение — выражение, удовлетворяющее грамматике:

$$\begin{aligned}\Phi ::=& x \\ &\mid (\Phi) \\ &\mid \lambda x.\Phi \qquad (\textit{abstraction}) \\ &\mid \Phi\ \Phi \qquad (\textit{application})\end{aligned}$$

1. Аппликация левоассациативна.

2. Абстракции жадные, едят все что могут.

   Пример. $(\lambda x.(\lambda f.((fx)(fx)\lambda y.(yf))))$

Есть понятия связанного и свободного вхождения переменной (аналогично исчислению предикатов). $\lambda x.A$ связывает все свободные вхождения x в A.

Определение 2.2. Функция $\mathrm{FV}(A)$ — множество свободных переменных, входящих в A:

$$\mathrm{FV}(A) = \begin{cases} \{x\} & \text{если } A \equiv x \\ \mathrm{FV}(P) \cup \mathrm{FV}(Q) & \text{если } A \equiv PQ \\ \mathrm{FV}(P) \setminus \{x\} & \text{если } A \equiv \lambda x.P \end{cases}$$

Договоримся, что:

- Переменные — x, a, b, c.
- Термы (части λ-выражения) — X, A, B, C.
- Фиксированные переменные обозначаются буквами из начала алфавита, метапеременные — из конца.

На самом деле, смысл в этом есть, λ-выражение можно понимать как функцию. Абстракция — это функция с аргументом, аппликация — это передача аргумента.

Определение 2.3 (α-эквивалентность)**.** $A =_\alpha B$, если имеет место одно из следующих условий:

1. $A \equiv x$, $B \equiv y$ (x,y — переменные) и $x \equiv y$
2. $A \equiv P_1Q_1$, $B \equiv P_2Q_2$ и $P_1 =_\alpha P_2$, $Q_1 =_\alpha Q_2$
3. $A\lambda x.P_1$, $B\lambda y.P_2$и $P_1[x := t] =_\alpha P_2[y := t]$, где t — новая переменная.

Пример. $\lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx$.

Доказательство. Согласно второму правилу следующие утверждения верны:

$$\lambda y.ty =_\alpha \lambda x.tx \implies \lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx$$
$$tz =_\alpha tz \implies \lambda y.ty =_\alpha \lambda x.tx$$

$tz =_\alpha tz$ верно по третьему условию. □

Определение 2.4 (β-редекс)**.** β-редекс — выражение вида: $(\lambda x.A)\,B$

Определение 2.5 (β-редукция)**.** $A \to_\beta B$, если имеет мето одно из следующих условий:

1. $A \equiv P_1Q_1$, $B \equiv P_2Q_2$ и либо $P_1 =_\alpha P_2$, $Q_1 \to_\beta Q_2$, либо $P_1 \to_\beta P_2$, $Q_1 =_\alpha Q_2$
2. $A \equiv (\lambda x.P)\,Q$, $B \equiv P[x := Q]$ — Q свободна для подстановки вместо x в P

Пример. $X \to_\beta X$, $(\lambda x.x)\,y \to_\beta y$

Пример. $a\,(\lambda x.x)\,y \to_\beta ay$

Пример. $A \equiv \lambda x.P$, $B \equiv \lambda x.Q$, $P \to_\beta Q$

2.2 Представление некоторых функций в лямбда исчислении

Boolean значения легко представить в терминах λ-исчисления, к примеру

- True = $\lambda a\lambda b.a$
- False = $\lambda a\lambda b.b$

Также мы можем выражать и более сложные функции

Определение 2.6. If = $\lambda c.\lambda t.\lambda e.(ct)e$

Пример. If T a $b \to_\beta$ a

Доказательство.

$$((\lambda c.\lambda t.\lambda e.(ct)e)\ \lambda a\lambda b.a)\ a\ b \to_\beta (\lambda t.\lambda.e(\lambda a\lambda b.a)\ t\ e)\ a\ b \to_\beta$$
$$(\lambda t.\lambda.e(\lambda b.t)\ e)\ a\ b \to_\beta\ (\lambda t.\lambda e.t)\ a\ b \to_\beta\ (\lambda e.a)\ b \to_\beta\ a$$

□

Как мы видим If true действительно возвращает результат первой ветки.
Другие логические операции:

$$\text{Not} = \lambda a.a\ \text{ F }\ \text{T} \qquad \text{Add} = \lambda a.\lambda b.a\ b\ \text{ F} \qquad \text{Or} = \lambda a.\lambda b.a\ \text{ T }\ b$$

2.3 Черчевские нумералы

Определение 2.7 (черчевский нумерал)**.**

$$\overline{n} = \lambda f.\lambda x.f^n x, \quad \text{где} \quad f^n x = \begin{cases} f\,(f^{n-1}x) & \text{при } n > 0 \\ x & \text{при } n = 0 \end{cases}$$

Пример.

$$\overline{3} = \lambda f.\lambda x.f\,(f\,(fx))$$

Несложно определить прибавление единицы к такому нумералу:

$$(+1) = \lambda n.\lambda f.\lambda x.f(nfx)$$

Арифметические операции:

1. $\text{IsZero} = \lambda n.n\,(\lambda x.\,\text{F})\,\text{T}$
2. $\text{Add} = \lambda a.\lambda b.\lambda f.\lambda x.a\,f\,(b\,f\,x)$
3. $\text{Pow} = \lambda a.\lambda b.b\,(\text{Mul}\ \ a)\,\overline{1}$
4. $\text{IsEven} = \lambda n.n\ \ \text{Not}\ \ \text{T}$
5. $\text{Mul} = \lambda a.\lambda b.a\,(\text{Add}\ \ b)\,\overline{0}$

Для того, чтобы определить (-1), сначала определим «пару»:

$$\langle a, b\rangle = \lambda f.f\,a\,b \qquad \text{First} = \lambda p.p\,\text{T} \qquad \text{Second} = \lambda p.p\,\text{F}$$

Затем n раз применим функцию $f\,(\langle a, b\rangle) = \langle b, b+1\rangle$ и возьмём первый элемент пары:

$$(-1) = \lambda n.\,\text{First}(n\,(\lambda p.\,\langle(\text{Second}\,p)\,,(+1)\,(\text{Second}\,p)\rangle)\,\langle\overline{0},\overline{0}\rangle)$$

3 Лекция 2

3.1 Формализация λ-термов, классы α-эквивалентности термов

Определение 3.1 (λ-терм)**.** Рассмотрим классы эквивалентности $[A] = \alpha$
Будем говорить, что $[A] \to_\beta [B]$, если $\exists A' \in [A], B' \in [B]$, что $A' \to_\beta B'$.

Лемма 3.1. $=_\alpha$ — отношение эквивалентности.

Пусть в A есть β-редекс $\lambda x.Q$, но $P[x := Q]$ не может быть, тогда найдем $y \notin V[P]$, $y \notin V[Q]$. Сделаем замену $P[x := y]$. Тогда замена $P[x := y][y := Q]$ допустима.

Лемма 3.2. $P[x := y] =_\alpha P[x := y][y := Q]$, если замена допустима.

3.2 Нормальная форма, λ-выражения без нормальной формы, комбинаторы K, I, Ω

Определение 3.2. Нормальня форма — это λ-выражение без β-редексов.

Лемма 3.3. λ-выражение A в нормальноф форме, т.и.т.т, когда $\nexists B$, что $A \to_\beta B$.

Определение 3.3. A — Н.Ф B, если $\exists A_1 ... A_n$, что $B =_\alpha A_1 \to_\beta A_2 \to_\beta ... \to_\beta A_n =_\alpha A$.

Определение 3.4. Комбинатор — λ-выражение без свободных переменных.

Определение 3.5.

- $I = \lambda x.x$ (Identitant)
- $K = \lambda a.\lambda b.a$ (Konstanz)
- $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

Лемма 3.4. Ω — не имеет нормальной формы.

Доказательство. $\Omega \to_\beta \Omega$ □

3.3 β-редуцируемость

Определение 3.6. Будем говорить, что $A \twoheadrightarrow_\beta B$, если $\exists$ такие $X_1 .. Xn$, что $A =_\alpha X_1 \to_\beta X_2 \to_\beta ... \to_\beta X_{n-1} \to_\beta X_n =_\alpha B$.

$\twoheadrightarrow_\beta$ — рефлексивное и транзитивное замыкание $\to_\beta$. $\twoheadrightarrow_\beta$ не обязательно приводит к нормальной форме

Пример. $\Omega \twoheadrightarrow_\beta \Omega$

3.4 Ромбовидное свойство

Определение 3.7 (Ромбовидное свойство)**.** Отношение R обладает ромбовидным свойством, если $\forall a, b, c$, таких, что aRb, aRc, $b \neq c$, $\exists d$, что bRd и cRd. Далее будем обозначать ромбовидное свойство как $<>$.

Пример. $(\leqslant)$ на множестве натуральных чисел обладает $<>$ $(>)$ не обладает $<>$ на множестве натуральных чисел

3.5 Теорема Чёрча-Россер, следствие о единственности нормальной формы

Теорема 3.5 (Черча-Россер)**.** $(\twoheadrightarrow_\beta)$ обладает ромбовидным свойством.

Следствие 3.1. Если у A есть Н.Ф, то она единтсвенная с точностью до $(=_\alpha)$ (переименования переменных).

Доказательство. Пусть $A \twoheadrightarrow_\beta B$ и $A \twoheadrightarrow_\beta C$. B, C — нормальные формы и $B \neq_\alpha C$. Тогда по теореме Черча-Россера $\exists D$: $B \twoheadrightarrow_\beta D$ и $C \twoheadrightarrow_\beta D$. Тогда $B =_\alpha D$ и $C =_\alpha D \Rightarrow B =_\alpha C$. Противоречие. □

Лемма 3.6. Если B — Н.Ф, то $\nexists Q$: $B \to_\beta Q$. Значит если $B \twoheadrightarrow_\beta Q$, то количество шагов редукции равно 0.

Лемма 3.7. Если R — обладает <>, то и R^* (транзитивное, рефлексивное замыкание R) обладает R^*.

Доказательство. content... □

Лемма 3.8 (Грустная лемма)**.** $(\to_\beta)$ не обладает <>

Определение 3.8 (Параллельная β-редукция)**.** $A \rightrightarrows_\beta B$, если

1. $A =_\alpha B$
2. $A \equiv P_1Q_1$, $B \equiv P_2Q_2$ и $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$
3. $A \equiv \lambda x.P_1$, $B \equiv \lambda x.P_2$ и $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$
4. $A =_\alpha (\lambda x.P)Q$, $B =_\alpha P[x := Q]$

Лемма 3.9. $(\rightrightarrows_\beta)$ обладает <>

$P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$ и $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$, то $P_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta P_2[x := Q2]$