Введение в Теорию Типов
Конспект лекций

Штукенберг Д. Г.
Университет ИТМО

9 ноября 2018 г.

1 Введение

Эти лекции были рассказаны студентам групп M3336–M3339 в 2018 году в Университете ИТМО, на Кафедре компьютерных технологий Факультета информационных технологий и программирования.

Конспект подготовили студенты Кафедры: Егор Галкин (лекции 1 и 2), Илья Кокорин (лекции 3 и 4), Никита Дугинец (лекции 5 и 6), Степан Прудников (лекции 7 и 8).

(возможно, история сложнее)

2 Лекция 3

2.1 Y-комбинатор

Определение 2.1. Комбинатором называется λ-выражение, не имеющее свободных переменных

Определение 2.2. (Y-комбинатор)

$$Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

Очевидно, Y-комбинатор является комбинатором.

Теорема 2.1. $Yf =_\beta f(Yf)$

Доказательство. β-редуцируем выражение Yf

$$\begin{aligned} &=_\beta (\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))f \\ &=_\beta (\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)) \\ &=_\beta f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))) \\ &=_\beta f(Yf) \end{aligned}$$

Так как при второй редукции мы получили, что $Yf =_\beta (\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ □

Следствием этого утверждения является теорема о неподвижной точки для бестипового лямбда-ичисления

Теорема 2.2. В лямбда-исчислении каждый терм f имеет неподвижную точку, то есть такое p, что $f\ p =_\beta p$

Доказательство. Возьмём в качестве p терм Yf. По предыдущей теореме, $f(Yf) =_\beta Yf$, то есть Yf является неподвижной точкой для f. Для любого терма f существует терм Yf, значит, у любого терма есть неподвижная точка. $\square$

2.2 Рекурсия

С помощью Y-комбинатора можо определять рекурсивные функции, например, функцию, вычисляющую факториал Чёрчевского нумерала. Для этого определим вспомогательную функцию

$fact' = \lambda f.\lambda n.isZero\, n\, \overline{1}(mul\ n\ f((-1)n))$

Тогда $fact = Y fact'$

Заметим, что $fact\ \overline{n} =_\beta fact'\ (Y\ fact')\ \overline{n} =_\beta fact'\ fact\ \overline{n}$, то есть в тело функции $fact'$ вместо функции f будет подставлена $fact$ (заметим, что это значит, что именно функция $fact$ будет применена к $\overline{n}-1$, то есть это соответсувует нашим представлениям о рекурсии.)

Для понимания того, как это работает, посчитаем $fact\ \overline{2}$

$$\begin{aligned}
&fact\ \overline{2}\\
&=_\beta Y\ fact'\ \overline{2}\\
&=_\beta fact'(Y\ fact'\ \overline{2})\\
&=_\beta (\lambda f.\lambda n.isZero\, n\, \overline{1}(mul\ n\ f((-1)n)))(Y\ fact')\overline{2}\\
&=_\beta isZero\, \overline{2}\, \overline{1}(mul\ \overline{2}\ ((Y\ fact')((-1)\overline{2})))\\
&=_\beta mul\ \overline{2}\ ((Y\ fact')((-1)\overline{2}))\\
&=_\beta mul\ \overline{2}\ (Y\ fact'\ \overline{1})\\
&=_\beta mul\ \overline{2}\ (fact'\ (Y\ fact'\ \overline{1}))
\end{aligned}$$

Раскрывая $fact'\ (Y\ fact'\ \overline{1})$ так же, как мы раскрывали $fact'\ (Y\ fact'\ \overline{2})$, получаем

$$=_\beta mul\ \overline{2}\ (mul\ \overline{1}\ (Y\ fact'\ \overline{0}))$$

Посчитаем $(Y\ fact'\ \overline{0})$.

$$\begin{aligned}
&(Y\ fact'\ \overline{0})\\
&=_\beta fact'\ (Y\ fact')\ \overline{0}\\
&=_\beta (\lambda f.\lambda n.isZero\, n\, \overline{1}(mul\ n\ f((-1)n)))\ (Y\ fact')\ \overline{0}\\
&=_\beta isZero\, \overline{0}\, \overline{1}(mul\ \overline{0}\ ((Y\ fact'))((-1)\overline{0})) =_\beta \overline{1}
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&fact\ \overline{2}\\
&=_\beta mul\ \overline{2}\ (mul\ \overline{1}\ (Y\ fact'\ \overline{0}))\\
&=_\beta mul\ \overline{2}\ (mul\ \overline{1}\ \overline{1}) =_\beta mul\ \overline{2}\ \overline{1} =_\beta \overline{2}
\end{aligned}$$

2.3 Парадокс Карри

Попробуем построить логику на основе λ-исчисления. Введём логический символ $\rightarrow$.

Будем тредовать от этого исчисления наличия следующих схем аксиом:

1. $\vdash A \to A$

2. $\vdash (A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

3. $\vdash A =_\beta B$, тогда $A \to B$

А так же правила вывода MP:

$$\frac{\vdash A \to B, \vdash A}{\vdash B}$$

Не вводя дополнительные правила вывода и схемы аксиом, покажем, что данная логика является противоречивой. Для чего введём следующие условные обозначения:

$F_\alpha = \lambda x.(x\ x) \to \alpha$

$\Phi_\alpha = F_\alpha\ F_\alpha = (\lambda x.(x\ x) \to \alpha)\ (\lambda x.(x\ x) \to \alpha)$

Редуцируя Φ_α, получаем

$$\begin{aligned} &\Phi_\alpha \\ =_\beta\ &(\lambda x.(x\ x) \to \alpha)\ (\lambda x.(x\ x) \to \alpha) \\ =_\beta\ &(\lambda x.(x\ x) \to \alpha)\ (\lambda x.(x\ x) \to \alpha) \to \alpha \\ =_\beta\ &\Phi_\alpha \to \alpha \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства α нужно всего лишь доказать Φ_α и применить правило MP.

1) $\vdash \Phi_\alpha \to \Phi_\alpha \to \alpha$	Так как $\Phi_\alpha =_\beta \Phi_\alpha \to \alpha$
2) $\vdash (\Phi_\alpha \to \Phi_\alpha \to \alpha) \to (\Phi_\alpha \to \alpha)$	Так как $\vdash (A \to (A \to B)) \to (A \to B)$
3) $\vdash \Phi_\alpha \to \alpha$	MP 2, 3
4) $\vdash (\Phi_\alpha \to \alpha) \to \Phi_\alpha$	Так как $\vdash \Phi_\alpha \to \alpha =_\beta \Phi_\alpha$
5) $\vdash \Phi_\alpha$	MP 3, 4
6) $\vdash \alpha$	MP 3, 5

Таким образом, введённая логика оказывается противоречивой.

2.4 Импликационный фрагмент интуиционистского исчисления высказываний