

Введение в Теорию Типов

Конспект лекций

Штукенберг Д. Г.
Университет ИТМО

21 января 2019 г.

1 Введение

Эти лекции были рассказаны студентам групп М3334–М3337, М3339 в 2018 году в Университете ИТМО, на Кафедре компьютерных технологий Факультета информационных технологий и программирования.

Конспект подготовили студенты Кафедры: Егор Галкин (лекции 1 и 2), Илья Кокорин (лекции 3 и 4), Никита Дугинец (лекции 5 и 6), Степан Прудников (лекции 7 и 8).
(возможно, история сложнее)

2 Лекция 1

2.1 λ -исчисление

Определение 2.1 (λ -выражение). λ -выражение — выражение, удовлетворяющее грамматике:

$$\Phi ::= x \mid (\Phi) \mid \lambda x. \Phi \mid \Phi \Phi$$

Иногда для упрощения записи мы будем опускать скобки. В этом случае, перед разбором выражения, следует расставить все опущенные скобки. При их расставлении будем придерживаться правил:

1. В аппликации расставляем скобки слева направо: $A B C \implies (A B) C$.
2. Абстракции жадные — поглощают скобками все что могут до конца строки: $\lambda a. \lambda b. a b \implies \lambda a. (\lambda b. (a b))$.

Пример. $\lambda x. (\lambda f. ((fx)(fx) \lambda y. (yf)))$

Договоримся, что:

- Переменные — x, a, b, c .
- Термы (части λ -выражения) — X, A, B, C .
- Фиксированные переменные обозначаются буквами из начала алфавита, метaperменные — из конца.

Есть понятия связанного и свободного вхождения переменной (аналогично исчислению предикатов).

Определение 2.2. Если вхождение x находится в области действия абстракции по x , то такое вхождение называется связанным, иначе вхождение называется свободным.

Определение 2.3. Терм Q называется свободным для подстановки в Φ вместо x , если после подстановки Q ни одно вхождение не станет связанным.

Пример. $\lambda x.A$ связывает все свободные вхождения x в A .

Определение 2.4. Функция $V(A)$ — множество переменных, входящих в A .

Определение 2.5. Функция $FV(A)$ — множество свободных переменных, входящих в A :

$$FV(A) = \begin{cases} \{x\} & \text{если } A \equiv x \\ FV(P) \cup FV(Q) & \text{если } A \equiv PQ \\ FV(P) \setminus \{x\} & \text{если } A \equiv \lambda x.P \end{cases}$$

λ -выражение можно понимать как функцию. Абстракция — это функция с аргументом, аппликация — это передача аргумента.

Определение 2.6 (α -эквивалентность). $A =_\alpha B$, если имеет место одно из следующих условий:

1. $A \equiv x, B \equiv y$ и $x \equiv y$.
2. $A \equiv P_1 Q_1, B \equiv P_2 Q_2$ и $P_1 =_\alpha P_2, Q_1 =_\alpha Q_2$.
3. $A \equiv \lambda x.P_1, B \equiv \lambda y.P_2$ и $P_1[x := t] =_\alpha P_2[y := t]$, где t — новая переменная.

Пример. $\lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx$.

Доказательство.

1. $tz =_\alpha tz$ верно по второму условию.
2. Тогда получаем, что $\lambda y.ty =_\alpha \lambda x.tx$ по третьему условию, так как из предыдущего пункта следует $ty[y := z] =_\alpha tx[x := z]$.
3. Из второго пункта пункта получаем что $\lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx$ по третьему условию, так как $\lambda y.xy[x := t] =_\alpha \lambda x.yx[y := t]$.

□

Определение 2.7 (β -редекс). β -редекс — выражение вида: $(\lambda x.A) B$

Определение 2.8 (β -редукция). $A \rightarrow_\beta B$, если имеет место одно из следующих условий:

1. $A \equiv P_1 Q_1, B \equiv P_2 Q_2$ и либо $P_1 =_\alpha P_2, Q_1 \rightarrow_\beta Q_2$, либо $P_1 \rightarrow_\beta P_2, Q_1 =_\alpha Q_2$
2. $A \equiv (\lambda x.P) Q, B \equiv P[x := Q]$ причем Q свободна для подстановки вместо x в P
3. $A \equiv \lambda x.P, B \equiv \lambda x.Q$ и $P \rightarrow_\beta Q$

Пример. $(\lambda x.x) y \rightarrow_\beta y$

Пример. $a (\lambda x.x) y \rightarrow_\beta ay$

2.2 Представление некоторых функций в лямбда исчислении

Логические значения легко представить в терминах λ -исчисления. В самом деле, положим:

- $\text{True} \equiv \lambda a \lambda b. a$
- $\text{False} \equiv \lambda a \lambda b. b$

Также мы можем выражать и более сложные функции

Определение 2.9. $\text{If} \equiv \lambda c. \lambda t. \lambda e. (ct)e$

Пример. $\text{If } T \ a \ b \rightarrow_{\beta} a$

Доказательство.

$$\begin{aligned} ((\lambda c. \lambda t. \lambda e. (ct)e) \ \lambda a \lambda b. a) \ a \ b &\rightarrow_{\beta} (\lambda t. \lambda e. (\lambda a \lambda b. a) \ t \ e) \ a \ b \rightarrow_{\beta} \\ &(\lambda t. \lambda e. (\lambda b. t) \ e) \ a \ b \rightarrow_{\beta} (\lambda t. \lambda e. t) \ a \ b \rightarrow_{\beta} (\lambda e. a) \ b \rightarrow_{\beta} a \end{aligned}$$

□

Как мы видим $\text{If } T$ действительно возвращает результат первой ветки.
Другие логические операции:

$$\text{Not} = \lambda a. a \ \text{F} \ \text{T} \quad \text{Add} = \lambda a. \lambda b. a \ b \ \text{F} \quad \text{Or} = \lambda a. \lambda b. a \ \text{T} \ b$$

2.3 Черчевские нумералы

Определение 2.10 (черчевский нумерал).

$$\bar{n} = \lambda f. \lambda x. f^n x, \quad \text{где} \quad f^n x = \begin{cases} f(f^{n-1}x) & \text{при } n > 0 \\ x & \text{при } n = 0 \end{cases}$$

Пример.

$$\bar{3} = \lambda f. \lambda x. f(f(fx))$$

Несложно определить прибавление единицы к такому нумералу:

$$(+1) = \lambda n. \lambda f. \lambda x. f(nfx)$$

Арифметические операции:

1. $\text{IsZero} = \lambda n. n \ (\lambda x. \text{F}) \ \text{T}$
2. $\text{Add} = \lambda a. \lambda b. \lambda f. \lambda x. a \ f \ (b \ f \ x)$
3. $\text{Pow} = \lambda a. \lambda b. b \ (\text{Mul } a) \ \bar{1}$
4. $\text{IsEven} = \lambda n. n \ \text{Not} \ \text{T}$
5. $\text{Mul} = \lambda a. \lambda b. a \ (\text{Add } b) \ \bar{0}$

Для того, чтобы определить (-1) , сначала определим пару:

$$\langle a, b \rangle = \lambda f. f \ a \ b \quad \text{First} = \lambda p. p \ \text{T} \quad \text{Second} = \lambda p. p \ \text{F}$$

Затем n раз применим функцию $f(\langle a, b \rangle) = \langle b, b + 1 \rangle$ и возьмём первый элемент пары:

$$(-1) = \lambda n. \text{First}(n \ (\lambda p. \langle (\text{Second } p), (+1) (\text{Second } p) \rangle)) \ \langle \bar{0}, \bar{0} \rangle$$

3 Лекция 2

3.1 Формализация λ -термов, классы α -эквивалентности термов

Определение 3.1 (λ -терм). Рассмотрим классы эквивалентности $[A]_{=\alpha}$. Будем говорить, что $[A] \rightarrow_\beta [B]$, если существуют $A' \in [A]$ и $B' \in [B]$, что $A' \rightarrow_\beta B'$.

Лемма 3.1. $(=_\alpha)$ — отношение эквивалентности.

Пусть в A есть β -редекс $(\lambda x.P)Q$, но Q не свободен для подстановки вместо x в P , тогда найдем $y \notin V[P], y \notin V[Q]$. Сделаем замену $P[x := y]$. Тогда замена $P[x := y][y := Q]$ допустима. То есть, можно сказать, что мы просто переименовали переменную x в P и получили свободу для подстановки, тем самым получив возможность редукции.

Лемма 3.2. $P[x := Q] =_\alpha P[x := y][y := Q]$, если замена допустима.

3.2 Нормальная форма, λ -выражения без нормальной формы, комбинаторы K, I, Ω

Определение 3.2. λ -выражение A находится в нормальной форме, если оно не содержит β -редексов.

Определение 3.3. A — нормальная форма B , если существует последовательность термов $A_1 \dots A_n$ такая, что $B =_\alpha A_1 \rightarrow_\beta A_2 \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta A_n =_\alpha A$.

Определение 3.4. Комбинатор — λ -выражение без свободных переменных.

Определение 3.5.

- $I \equiv \lambda x.x$ (Identitant)
- $K \equiv \lambda a.\lambda b.a$ (Konstanz)
- $\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

Лемма 3.3. Ω — не имеет нормальной формы.

Доказательство. Ω Имеет единственный β -редекс, где $A \equiv xx$, $B \equiv (\lambda x.xx)$. Тогда единственный возможный путь редукции — подставить B вместо x в A . Но тогда мы получим Ω . Следовательно у Ω нет нормальной формы, так как в полученном выражении у нас всегда будет β -редекс. \square

3.3 β -редуцируемость

Определение 3.6. Будем говорить, что $A \twoheadrightarrow_\beta B$, если \exists такие $X_1 \dots X_n$, что $A =_\alpha X_1 \rightarrow_\beta X_2 \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta X_{n-1} \rightarrow_\beta X_n =_\alpha B$.

$(\twoheadrightarrow_\beta)$ — рефлексивное и транзитивное замыкание (\rightarrow_β) . $(\twoheadrightarrow_\beta)$ не обязательно приводит к нормальной форме

Пример. $\Omega \twoheadrightarrow_\beta \Omega$

3.4 Ромбовидное свойство

Определение 3.7 (Ромбовидное свойство). Отношение R обладает ромбовидным свойством, если $\forall a, b, c$, таких, что aRb , aRc , $b \neq c$, $\exists d$, что bRd и cRd .

Пример. (\leq) на множестве натуральных чисел обладает ромбовидным свойством, $(>)$ на множестве натуральных чисел не обладает ромбовидным свойством.

3.5 Теорема Чёрча-Россера, следствие о единственности нормальной формы

Теорема 3.1 (Черча-Россера). (\rightarrow_β) обладает ромбовидным свойством.

Следствие 3.1. Если у A есть нормальная форма, то она единственная с точностью до $(=_\alpha)$ (переименования переменных).

Доказательство. Пусть $A \rightarrow_\beta B$ и $A \rightarrow_\beta C$. B, C — нормальные формы и $B \neq_\alpha C$. Тогда по теореме Черча-Россера $\exists D$: $B \rightarrow_\beta D$ и $C \rightarrow_\beta D$. Тогда $B =_\alpha D$ и $C =_\alpha D \Rightarrow B =_\alpha C$. Противоречие. \square

Лемма 3.4. Если B — нормальная форма, то не существует Q такой, что $B \rightarrow_\beta Q$. Значит если $B \rightarrow_\beta Q$, то количество шагов редукции равно 0.

Лемма 3.5. Если R — обладает $<>$, то и R^* (транзитивное, рефлексивное замыкание R) обладает R^* .

Доказательство. Пусть $M_1 R^* M_n$ и $M_1 R N_1$. Тогда существуют такие $M_2 \dots M_{n-1}$, что $M_1 R M_2 \dots M_{n-1} R M_n$. Так как R обладает ромбовидным свойством, $M_1 R M_2$ и $M_1 R N_1$, то существует такое N_2 , что $N_1 R N_2$ и $M_2 R N_2$. Аналогично, существуют такие $N_3 \dots N_n$, что $N_{i-1} R N_i$ и $M_i R N_i$. Мы получили такое N_n , что $N_1 R^* N_n$ и $M_n R^* N_n$.

Пусть теперь $M_{1,1} R^* M_{1,n}$ и $M_{1,1} R^* M_{m,1}$, то есть имеются $M_{1,2} \dots M_{1,n-1}$ и $M_{2,1} \dots M_{m-1,1}$, что $M_{1,i-1} R M_{1,i}$ и $M_{i-1,1} R M_{i,1}$. Тогда существует такое $M_{2,n}$, что $M_{2,1} R^* M_{2,n}$ и $M_{1,n} R^* M_{2,n}$. Аналогично, существуют такие $M_{3,n} \dots M_{m,n}$, что $M_{i,1} R^* M_{i,n}$ и $M_{1,n} R^* M_{i,n}$. Тогда $M_{1,n} R^* M_{m,n}$ и $M_{m,1} R^* M_{m,n}$. \square

Лемма 3.6 (Грустная лемма). (\rightarrow_β) не обладает ромбовидным свойством.

Доказательство. Пусть $A = (\lambda x.xx)(II)$. Покажем что в таком случае не будет выполняться ромбовидное свойство: \square

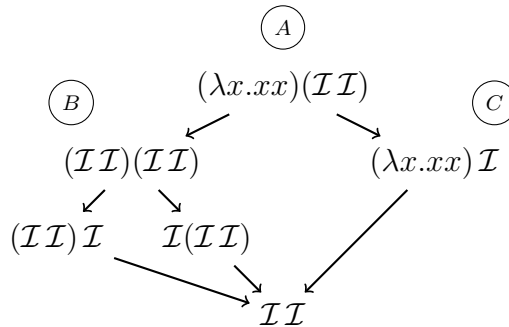


Рис. 1: Нет такого D , что $B \rightarrow_\beta D$ и $C \rightarrow_\beta D$.

Определение 3.8 (Параллельная β -редукция). $A \Rightarrow_\beta B$, если

1. $A =_{\alpha} B$
2. $A \equiv P_1 Q_1$, $B \equiv P_2 Q_2$ и $P_1 \Rightarrow_{\beta} P_2$, $Q_1 \Rightarrow_{\beta} Q_2$
3. $A \equiv \lambda x. P_1$, $B \equiv \lambda x. P_2$ и $P_1 \Rightarrow_{\beta} P_2$
4. $A =_{\alpha} (\lambda x. P_1) Q_1$, $B =_{\alpha} P_2[x := Q_2]$ причем Q_2 свободна для подстановки вместо x в P_2 и $P_1 \Rightarrow_{\beta} P_2$, $Q_1 \Rightarrow_{\beta} Q_2$

Лемма 3.7. Если $P_1 \Rightarrow_{\beta} P_2$ и $Q_1 \Rightarrow_{\beta} Q_2$, то $P_1[x := Q_1] \Rightarrow_{\beta} P_2[x := Q_2]$

Доказательство. Будем доказывать индукцией по определению \Rightarrow_{β} . Рассмотрим случаи:

- Пусть $P_1 =_{\alpha} P_2$. Тогда лемма легко доказывается индукцией по структуре выражения.
- Пусть $P_1 \equiv A_1 B_1$, $P_2 \equiv A_2 B_2$. По определению (\Rightarrow_{β}) $A_1 \Rightarrow_{\beta} A_2$ и $B_1 \Rightarrow_{\beta} B_2$. Рассмотрим два случая:
 1. $x \in \text{FV}(A_1)$. По индукционному предположению $A_1[x := Q_1] \Rightarrow_{\beta} A_2[x := Q_2]$. Тогда $A_1[x := Q_1] B_1 \Rightarrow_{\beta} A_2[x := Q_2] B_2$. Тогда $A_1 B_1[x := Q_1] \Rightarrow_{\beta} A_2 B_2[x := Q_2]$.
 2. $x \in \text{FV}(B_1)$. По индукционному предположению $B_1[x := Q_1] \Rightarrow_{\beta} B_2[x := Q_2]$. Тогда $A_1 B_1[x := Q_1] \Rightarrow_{\beta} A_2 B_2[x := Q_2]$.
- Пусть $P_1 \equiv \lambda y. A_1$, $P_2 \equiv \lambda y. A_2$. по определению (\Rightarrow_{β}) $A_1 \Rightarrow_{\beta} A_2$. Тогда по индукционному предположению $A_1[x := Q_1] \Rightarrow_{\beta} A_2[x := Q_2]$. Тогда $\lambda y. (A_1[x := Q_1]) \Rightarrow_{\beta} \lambda y. (A_2[x := Q_2])$ по определению (\Rightarrow_{β}) . Следовательно $\lambda y. A_1[x := Q_1] \Rightarrow_{\beta} \lambda y. A_2[x := Q_2]$ по определению подстановки.
- Пусть $P_1 =_{\alpha} (\lambda y. A) B$, $P_2 =_{\alpha} A[y := B]$ и подстановка возможна. Из предположения индукции получаем, что $A[x := Q_1] \Rightarrow_{\beta} A[x := Q_2]$, $B[x := Q_1] \Rightarrow_{\beta} B[x := Q_2]$. Значит $P_1[x := Q_1]$ с учетом редукций примет вид $(\lambda y. A[x := Q_2]) B[x := Q_2]$. $P_2[x := Q_2]$ же примет вид $A[y := B][x := Q_2]$. Следовательно мы получим, что $P_1[x := Q_1] \Rightarrow_{\beta} P_2[x := Q_2]$.

□

Лемма 3.8. (\Rightarrow_{β}) обладает ромбовидным свойством.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по определению \Rightarrow_{β} . Покажем, что если $M \Rightarrow_{\beta} M_1$ и $M \Rightarrow_{\beta} M_2$, то $\exists M_3$, что $M_1 \Rightarrow_{\beta} M_3$ и $M_2 \Rightarrow_{\beta} M_3$. Рассмотрим случаи:

- Если $M \equiv M_1$, то просто возьмем $M_3 \equiv M_2$.
- Если $M \equiv \lambda x. P$, $M_1 \equiv \lambda x. P_1$, $M_2 \equiv \lambda x. P_2$ и $P \Rightarrow_{\beta} P_1$, $P \Rightarrow_{\beta} P_2$, то по предположению индукции $\exists P_3$, что $P_1 \Rightarrow_{\beta} P_3$, $P_2 \Rightarrow_{\beta} P_3$, тогда возьмем $M_3 \equiv \lambda x. P_3$.
- Если $M \equiv PQ$, $M_1 \equiv P_1 Q_1$ и по определению \Rightarrow_{β} $P \Rightarrow_{\beta} P_1$, $Q \Rightarrow_{\beta} Q_1$, то рассмотрим два случая:
 1. $M_2 \equiv P_2 Q_2$. Тогда по предположению индукции $\exists P_3$, что $P_1 \Rightarrow_{\beta} P_3$, $P_2 \Rightarrow_{\beta} P_3$. Аналогично для Q . Тогда возьмем $M_3 \equiv P_3 Q_3$.
 2. $P \equiv \lambda x. P'$, $M_2 \equiv P'_2[x := Q_2]$, по определению \Rightarrow_{β} $P' \Rightarrow_{\beta} P'_2$, $Q \Rightarrow_{\beta} Q_2$. Также $P_1 \equiv \lambda x. P'_1$, $P' \equiv P'_1$. Тогда по предположению индукции и леммы 3.7 мы можем взять $M_3 \equiv P'_3[x := P_3]$.

- Если $M =_{\alpha} (\lambda x.P)Q$, $M_1 =_{\alpha} M_2 =_{\alpha} P[x := Q]$, то просто возьмем $M_3 =_{\alpha} P[x := Q]$.

□

Лемма 3.9.

1. $(\Rightarrow_{\beta})^* \subseteq (\rightarrow_{\beta})^*$
2. $(\rightarrow_{\beta})^* \subseteq (\Rightarrow_{\beta})^*$

Следствие 3.2. $(\rightarrow_{\beta})^* = (\Rightarrow_{\beta})^*$

Из приведенных выше лемм и следствия докажем теорему Черча-Россера.

Доказательство. $(\rightarrow_{\beta})^* = (\Rightarrow_{\beta})^*$. Тогда $(\rightarrow_{\beta}) = (\Rightarrow_{\beta})^*$. Значит из того, что (\Rightarrow_{β}) обладает ромбовидным свойством и леммы 3.5 следует, что (\rightarrow_{β}) обладает ромбовидным свойством.

□

3.6 Нормальный и аппликативный порядок вычислений

Пример. Выражение $KI\Omega$ можно редуцировать двумя способами:

1. $KI\Omega =_{\alpha} ((\lambda a.\lambda b.a)I)\Omega \rightarrow_{\beta} (\lambda b.I)\Omega \rightarrow_{\beta} I$
2. $KI\Omega =_{\alpha} ((\lambda a.\lambda b.a)I)((\lambda x.x x)(\lambda x.x x)) \rightarrow_{\beta} ((\lambda a.\lambda b.a)I)((\lambda x.x x)(\lambda x.x x)) \rightarrow_{\beta} KI\Omega$

Как мы видим, в первом случае мы достигли нормальной формы, в то время как во втором мы получаем бесконечную редукцию. Разница двух этих способов в порядке редукции. Первый называется нормальный порядок, а второй аппликативный.

Определение 3.9 (нормальный порядок редукции). Редукция самого левого β -редекса.

Определение 3.10 (аппликативный порядок редукции). Редукция самого левого β -редекса из самых вложенных.

Теорема 3.2 (Приводится без доказательства). Если нормальная форма существует, она может быть достигнута нормальным порядком редукции.

Нормальный порядок хоть и приводит к нормальной форме, если она существует, но бывает ситуации в которых аппликативный порядок вычисляется быстрее чем нормальный

Пример. Рассмотрим лямбда выражение $(\lambda x.x x x x)(II)$. Попробуем редуцировать его нормальным порядком:

$$(\lambda x.x x x x)(II) \rightarrow_{\beta} (II)(II)(II)(II) \rightarrow_{\beta} I(II)(II)(II) \rightarrow_{\beta} (II)(II)(II) \rightarrow_{\beta} \dots \rightarrow_{\beta} I$$

Как мы увидим, в данной ситуации аппликативный порядок редукции оказывается значительно эффективней:

$$(\lambda x.x x x x)(II) \rightarrow_{\beta} (\lambda x.x x x x)I \rightarrow_{\beta} IIII \rightarrow_{\beta} III \rightarrow_{\beta} II \rightarrow_{\beta} I$$