Введение в Теорию Типов
Конспект лекций

Штукенберг Д. Г.
Университет ИТМО

13 ноября 2018 г.

1 Введение

Эти лекции были рассказаны студентам групп M3334–M3337, M3339 в 2018 году в Университете ИТМО, на Кафедре компьютерных технологий Факультета информационных технологий и программирования.

Конспект подготовили студенты Кафедры: Егор Галкин (лекции 1 и 2), Илья Кокорин (лекции 3 и 4), Никита Дугинец (лекции 5 и 6), Степан Прудников (лекции 7 и 8).

(возможно, история сложнее)

2 Лекция 1

2.1 λ-исчисление

Определение 2.1 (λ-выражение)**.** λ-выражение — выражение, удовлетворяющее грамматике:

$$
\begin{aligned}
\Phi ::= \quad & x \\
\mid (\Phi) & \\
\mid \lambda x.\Phi \quad & () \\
\mid \Phi\ \Phi \quad & ()
\end{aligned}
$$

1. Аппликация левоассациативна.
2. Абстракции жадные, едят все что могут.

   Пример. $(\lambda x.(\lambda f.((fx)(fx)\lambda y.(yf))))$

Определение 2.2 (α-эквивалентность)**.** $A =_\alpha B$, если имеет место одно из следующих условий:

1. $A \equiv x$, $B \equiv y$ (x,y — переменные) и $x \equiv y$
2. $A \equiv P_1 Q_1$, $B \equiv P_2 Q_2$ и $P_1 =_\alpha P_2$, $Q_1 =_\alpha Q_2$
3. $A\lambda x.P_1$, $B\lambda y.P_2$и $P_1[x \coloneqq t] =_\alpha P_2[y \coloneqq t]$, где t — новая переменная.

Определение 2.3 (β-редекс)**.** β-редекс — выражение вида: $(\lambda x.A)\, B$

Определение 2.4 (β-редукция)**.** $A \to_\beta B$, если имеет мето одно из следующих условий:

1. $A \equiv P_1 Q_1$, $B \equiv P_2 Q_2$ и либо $P_1 =_\alpha P_2$, $Q_1 \to_\beta Q_2$, либо $P_1 \to_\beta P_2$, $Q_1 =_\alpha Q_2$
2. $A \equiv (\lambda x.P)\, Q$, $B \equiv P[x \coloneqq Q]$ — Q свободна для подстановки вместо x в P

Пример. $X \to_\beta X$, $(\lambda x.x)\, y \to_\beta y$

Пример. $a\,(\lambda x.x)\, y \to_\beta ay$

Пример. $A \equiv \lambda x.P$, $B \equiv \lambda x.Q$, $P \to_\beta Q$

2.2 Представление некоторых функций в лямбда исчислении

Boolean значения легко представить в терминах λ-исчисления, к примеру

- $True = \lambda a \lambda b.a$
- $False = \lambda a \lambda b.b$

Также мы можем выражать и более сложные функции
If $= \lambda c.\lambda t.\lambda e.(ct)e$

Пример.

2.3 Черчевские нумералы

Определение 2.5 (черчевский нумерал)**.**

$$\overline{n} = \lambda f.\lambda x.f^n x, \quad \text{где} \quad f^n x = \begin{cases} f\left(f^(n-1)x\right) & \text{при } n > 0 \\ x & \text{при } n = 0 \end{cases}$$

3 Лекция 2

3.1 Формализация λ-термов, классы α-эквивалентности термов

Определение 3.1 (λ-терм)**.** Рассмотрим классы эквивалентности $[A] = \alpha$
Будем говорить, что $[A] \to_\beta [B]$, если $\exists A' \in [A], B' \in [B]$, что $A' \to_\beta B'$.

Лемма 3.1. $=_\alpha$ — отношение эквивалентности.

Пусть в A есть β-редекс $\lambda x.Q$, но $P[x \coloneqq Q]$ не может быть, тогда найдем $y \notin V[P]$, $y \notin V[Q]$. Сделаем замену $P[x \coloneqq y]$. Тогда замена $P[x \coloneqq y][y \coloneqq Q]$ допустима.

Лемма 3.2. $P[x \coloneqq y] =_\alpha P[x \coloneqq y][y \coloneqq Q]$, если замена допустима.

3.2 Нормальная форма, λ-выражения без нормальной формы, комбинаторы K, I, Ω

Определение 3.2. Нормальня форма — это λ-выражение без β-редексов.

Лемма 3.3. λ-выражение A в нормальноф форме, т.и.т.т, когда $\nexists B$, что $A \to_\beta B$.

Определение 3.3. A — Н.Ф B, если $\exists A_1 ... A_n$, что $B =_\alpha A_1 \to_\beta A_2 \to_\beta ... \to_\beta A_n =_\alpha A$.

Определение 3.4. Комбинатор — λ-выражение без свободных переменных.

Определение 3.5.

- $I = \lambda x.x$ (Identitant)
- $K = \lambda a.\lambda b.a$ (Konstanz)
- $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

Лемма 3.4. Ω — не имеет нормальной формы.

Доказательство. $\Omega \to_\beta \Omega$ □

3.3 β-редуцируемость

Определение 3.6. Будем говорить, что $A \twoheadrightarrow_\beta B$, если $\exists$ такие $X_1 .. Xn$, что $A =_\alpha X_1 \to_\beta X_2 \to_\beta ... \to_\beta X_{n-1} \to_\beta X_n =_\alpha B$.

$\twoheadrightarrow_\beta$ — рефлексивное и транзитивное замыкание $\to_\beta$. $\twoheadrightarrow_\beta$ не обязательно приводит к нормальной форме

Пример. $\Omega \twoheadrightarrow_\beta \Omega$