Лекция 5
Изоморфизм Карри-Ховарда (завершение), Унификация

Определение
Изоморфизм Карри-Ховарда

1. $\Gamma \vdash$ M:σ влечет $|\Gamma|\vdash \sigma$

2. $\Gamma \vdash \sigma$, то существует M и существует Δ, такое что $|\Delta|$=Γ, что Δ $\vdash$M:σ, где Δ=$\{x_\sigma$:$\sigma|\sigma \in \Gamma$ $\}$

Рассмотрим пример: {f:$\alpha \to \beta$, x:β}$\vdash$fx:β
Применив изоморфизм Карри-Ховарда получим: $\{\alpha \to \beta$, $\beta\}\vdash \beta$

П.1 доказывается индукцией по длине выражения т.е. есть 3 правила вывода. убирая P и Q.

П.2 доказывается аналогичным способом но действия обратные.
Т.е. отношения между типами в системе типов могут рассматриваться как образ отношений между высказываниями в логической системе, и наоборот.

Определение
расширенный полином определяется формулой:

$$E(p,q) = \begin{cases} C, & \text{if } p=q=0 \\ p_1(p), & \text{if } q=0 \\ p_2(q), & \text{if } p=0 \\ p_3(p,q), & \text{if } p,q\neq 0 \end{cases}$$

, где $C-$константа, p_1, p_2, p_3-выражения, составленные из $*, +, p, q$ и констант

по сути расширенный полином это множество функций над натуральными числами(черчевскими нумералами).

Пусть $\upsilon = (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$, где $\alpha-$произвольный тип и пусть $F \in \Lambda$, что $F : \upsilon \to \upsilon \to \upsilon$, то существует расширенный полином E, такой что $\forall a, b \in \mathbb{N}\ F(\overline{a}, \overline{b}) =_\beta \overline{E(a, b)}$, где $\overline{a}-$черчевский нумерал

Теорема

У каждого терма в просто типизиреумом λ исчислении существует расширенный полином.

Основные задачи типизации λ исчисления

1. *Проверка типа*$-$выполняется ли $\Gamma \vdash M : \sigma$ для контекста Γ терма M и типа σ (для проверки типа обычно откидывают σ и рассматривают п.2).

2. *Реконструкция типа*$-$можно ли подставить вместо ? и $?_1$ в $?_1 \vdash M :?$ подставить конкретный тип σ в ? и контекст Γ в $?_1$.

3. *Обитаемость типа*$-$пытается подобрать, такой **замкнутый** терм M и контекст Γ, что бы было выполнено $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Определение **Алгебраический терм**$-$выражение типа $\Theta = a|(f_k\Theta_1 \cdots \Theta_n)$, где $-$переменная, $(f_k\Theta_1 \cdots \Theta_n)-$применение функции

Примеры:

1. $(fab(ga))$

2. Известно, что $\to$ $-$функция, тогда выражение $((a \to b) \to c) \iff (\to (\to ab)c)$

Уравнение в алгебраических термах $\Theta_1 = \Theta_2$

Система уравнений в алгебраических термах

$$\begin{cases} \Theta_1 = \sigma_1 \\ \vdots \\ \Theta_n = \sigma_n \end{cases}$$

где Θ_i и σ_i $-$ термы

Определение $\{a_i\} = A-$множество перменных, $\{\Theta_i\} = T-$множество термов.

Определение **Подстановка**$-$отображение вида: $S_0 : A \to T$, которое является решением в алгебраических термах.

Т.е. S_0-конечное множество переменных $a_1 \cdots a_n$ на которых $S_0(a_i) = \Theta_i$ либо $S_0(a_i) = a_i$.

Доопределим S на все T т.е. $S : T \to T$, где

1. $S(a) = S_0(a)$

2. $S(f(\Theta_1 \cdots \Theta_k)) = f(S(\Theta_1) \cdots S(\Theta_k))$

По сути S тоже самое что и много if'ов либо map строк

Определение **Решить уравнение в алгебраических термах**—найти такое S, что $S(\Theta_1) = S(\Theta_2)$

Например:

Заранее обозначим: a, b – переменные, f, g, h – функции

1. $f(a(gb)) = f(he)d$ имеет решение $S(a) = he$ и $S(d) = gb$
   (a) $S(fa(gb)) = f(he)(gb)$
   (b) $S(f(he)d) = f(he)(gb)$
   (c) $f(he)(gb) = f(he)(gb)$
2. $fa = gb$—решений не имеет

Таким образом, что бы существовало решение необходимо равенство строк полученной подстановки

Алгоритм Унификации

Ссылки

1. https://www.quora.com/What-is-an-intuitive-explanation-of-the-Curry-Howard-correspondence
2. https://habr.com/post/269907/
3. https://arxiv.org/pdf/cs/0701022.pdf