Введение в Теорию Типов
Конспект лекций

Штукенберг Д. Г.
Университет ИТМО

19 ноября 2018 г.

1 Введение

Эти лекции были рассказаны студентам групп M3334–M3337, M3339 в 2018 году в Университете ИТМО, на Кафедре компьютерных технологий Факультета информационных технологий и программирования.

Конспект подготовили студенты Кафедры: Егор Галкин (лекции 1 и 2), Илья Кокорин (лекции 3 и 4), Никита Дугинец (лекции 5 и 6), Степан Прудников (лекции 7 и 8).

(возможно, история сложнее)

2 Лекция 5 Изоморфизм Карри-Ховарда (завершение), Унификация

2.1 Изоморфизм Карри-Ховарда

Определение 2.1. Изоморфизм Карри-Ховарда

1. $\Gamma \vdash$ M:σ влечет $|\Gamma| \vdash \sigma$

2. $\Gamma \vdash \sigma$, то существует M и существует Δ, такое что $|\Delta|=\Gamma$, что $\Delta \vdash$M:σ, где $\Delta=\{x_\sigma:\sigma|\sigma \in \Gamma\}$

Пример.

$\{$f:$\alpha \to \beta$, x:$\beta\}\vdash$fx:β
Применив изоморфизм Карри-Ховарда получим: $\{\alpha \to \beta,\ \beta\} \vdash \beta$

Доказательство. □

П.1 доказывается индукцией по длине выражения т.е. есть 3 правила вывода. убирая P и Q.

П.2 доказывается аналогичным способом но действия обратные.
Т.е. отношения между типами в системе типов могут рассматриваться как образ отношений между высказываниями в логической системе, и наоборот.

Определение 2.2. Расширенный полином определяется формулой:

$$E(p,q) = \begin{cases} C, & \text{if } p = q = 0 \\ p_1(p), & \text{if } q = 0 \\ p_2(q), & \text{if } p = 0 \\ p_3(p,q), & \text{if } p,q \neq 0 \end{cases}$$

, где C – константа, p_1, p_2, p_3 – выражения, составленные из $*, +, p, q$ и констант

по сути расширенный полином это множество функций над натуральными числами(черчевскими нумералами).

Пусть $\upsilon = (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$, где α–произвольный тип и пусть $F \in \Lambda$, что $F : \upsilon \to \upsilon \to \upsilon$, то существует расширенный полином E, такой что $\forall a, b \in \mathbb{N}\ F(\overline{a}, \overline{b}) =_\beta \overline{E(a,b)}$, где $\overline{a}$–черчевский нумерал

Теорема 2.1. У каждого терма в просто типизиреумом λ исчислении существует расширенный полином.

Утверждение 2.1. Основные задачи типизации λ исчисления

1. *Проверка типа*–выполняется ли $\Gamma \vdash M : \sigma$ для контекста Γ терма M и типа σ (для проверки типа обычно откидывают σ и рассматривают п.2).

2. *Реконструкция типа*–можно ли подставить вместо ? и $?_1$ в $?_1 \vdash M :?$ подставить конкретный тип σ в ? и контекст Γ в $?_1$.

3. *Обитаемость типа*–пытается подобрать, такой **замкнутый** терм M и контекст Γ, что бы было выполнено $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Определение 2.3. Алгебраический терм

Выражение типа $\Theta = a | (f_k \Theta_1 \cdots \Theta_n)$,
где a–переменная, $(f_k \Theta_1 \cdots \Theta_n)$–применение функции

Пример.

1. $(fab(ga))$

2. Известно, что $\to$ –функция, тогда выражение $((a \to b) \to c) \iff (\to (\to ab)c)$

2.2 Уравнение в алгебраических термах $\Theta_1 = \Theta_2$ Система уравнений в алгебраических термах

Определение 2.4. Система уравнений в алгебраических термах

$$\begin{cases} \Theta_1 = \sigma_1 \\ \vdots \\ \Theta_n = \sigma_n \end{cases}$$

где Θ_i и σ_i – термы

Определение 2.5. $\{a_i\} = A$–множество перменных, $\{\Theta_i\} = T$–множество термов.

Определение 2.6. Подстановка–отображение вида: $S_0 : A \to T$, которое является решением в алгебраических термах.

Т.е. S_0−конечное множество переменных $a_1 \cdots a_n$ на которых $S_0(a_i) = \Theta_i$ либо $S_0(a_i) = a_i$.

Доопределим S на все T т.е. $S : T \to T$, где

1. $S(a) = S_0(a)$
2. $S(f(\Theta_1 \cdots \Theta_k)) = f(S(\Theta_1) \cdots S(\Theta_k))$

По сути S тоже самое что и много if'ов либо map строк

Определение 2.7. Решить уравнение в алгебраических термах−найти такое S, что $S(\Theta_1) = S(\Theta_2)$

Пример.

Заранее обозначим: a, b − переменные, f, g, h − функции

1. $f(a(gb)) = f(he)d$ имеет решение $S(a) = he$ и $S(d) = gb$
   (a) $S(fa(gb)) = f(he)(gb)$
   (b) $S(f(he)d) = f(he)(gb)$
   (c) $f(he)(gb) = f(he)(gb)$
2. $fa = gb$−решений не имеет

Таким образом, что бы существовало решение необходимо равенство строк полученной подстановки

2.3 Алгоритм Унификации

1. Система уравнений E_1 эквивалентна E_2, если они имеют одинаковые решения(унификаторы).
2. Любая система E эквивалентна некторому уравнению $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

   Доказательство. □

   Возьмем функциональный символ f, не использующийся в E,

   $$E = \begin{cases} \Theta_1 = \sigma_1 \\ \vdots \\ \Theta_n = \sigma_n \end{cases}$$

   это же уравнение можно записать как− $f\Theta_1 \dots \Theta_n = f\sigma_1 \dots \sigma_n$

   Если сущесвтует подстановка S такая, что

   $S(\Theta_i) = S(\sigma_i)\,\forall i$, то $S(f\,\Theta_1 \dots \Theta_n) = f\,S(\sigma_1) \dots S(\sigma_n)$

   Обратное аналогично.

3. Рассмотрим операции
   (a) *Редукция терма*
   Заменим уравнение вида−$f_1\,\Theta_1 \dots \Theta_n = f_1\,\sigma_1 \dots \sigma_n$ на систему уравнений
   $\Theta_1 = \sigma_1$
   $\vdots$
   $\Theta_n = \sigma_n$

(b) *Устранение переменной*

Пусть есть уравнеие $x = \Theta$, заменим во всех остальных уравнениях переменную x на терм Θ

Утверждение 2.2. Эти операции не изменяют множества решений.

Определение 2.8. Система уравнений в разрешеной форме если

1. Все уравнения имеют вид $a_i = \Theta_i$
2. Каждый из a_i входит в систему уравнений только раз

Определение 2.9. Система несовместима если

1. существует уравнение вида $f\, \Theta_1 \dots \Theta_n = g\, \sigma_1 \dots \sigma_n$, где $f \neq g$
2. существует уравнение вида $a = f\, \Theta_1 \dots \Theta_n$, причем a выходит в какой-то из Θ_i

2.4 Алгоритм унификации

1. Пройдемся по системе, выберем такое уравнение, что оно удовлетворяет одному из условий:
   (a) Если $\Theta_i = a_i$, то перепишем, как $a_i = \Theta_i$, Θ_i−не переменная
   (b) $a_i = a_i$− удалим
   (c) $f\, \Theta_1 \dots \Theta_n = f\, \sigma_1 \dots \sigma_n$ применим редукцию термов
   (d) $a_i = \Theta_i$ Применим подстановку переменной т.е. подставим во все остальне уравнения Θ_i вместо a_i
2. Проверим разрешима ли система, совместима ли система (два пункта несовместимости)
3. повторим пункт 1

Утверждение 2.3. Алгоритм не изменяет множетва решений

Утверждение 2.4. Несовместимая решения не имеет решений

Утверждение 2.5. Система в разрешеной форме имеет решение:

$$\begin{cases} a_1 = \Theta_1 \\ \vdots \\ a_n = \Theta_n \end{cases} \quad \text{имеет решение}- \qquad \begin{cases} S_0(a_1) = \Theta_1 \\ \vdots \\ S_0(a_n) = \Theta_n \end{cases}$$

Утверждение 2.6. Алгоритм всегда закначивается

Доказательство. □

По индукции, выберем три числа $\langle x\ y\ z \rangle$, где

$x-$количество переменных, которые встречаются строго больше одного раза в левой части некоторого уравнения (т.е. b не повлияет на x, а a повлияет в уравнении $f(a(g a) b) = \Theta$),

$y-$ количество функциональных символов в системе,

$z-$количество уравнеий типа $a = a$ и $\Theta = b$

Заметим, что (a) и (b) всегда уменьшают z и иногда уменьшают x,

(c) всегда уменьшает y иногда x и, возможно, увеличивает z,

операция (d) всегда уменьшает x, и иногда увеличивает y.

Очевидно, что с каждой операцией $a-d$ данная тройка уменьшается и так как $x, y, z \geq 0$, то данный алгоритм завершится за конечное время.

Пример.

$$\begin{aligned} &\text{Исходная система} \\ &E = \\ &g(x_2) = x_1 \\ &f(x_1, h(x_1), x_2) = f(g(x_3), x_4, x_3) \end{aligned}$$

Применим пункт (c) ко второму уравнению верхней системы получим:

$$\begin{aligned} E &= \\ g(x_2) &= x_1 \\ x_1 &= g(x_3) \\ h(x_1) &= x_4 \\ x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

Применим пункт (d) ко второму уравнению верхней системы

(оно изменит 1ое уравнение) получим:

$$\begin{aligned} E &= \\ g(x_2) &= g(x_3) \\ x_1 &= g(x_3) \\ h(g(x_3)) &= x_4 \\ x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

Применим пункт (c) ко первому ур-ию

и пункт (a) к третьему уравнению верхней системы

$$\begin{aligned} E &= \\ x_2 &= x_3 \\ x_1 &= g(x_3) \\ x_4 &= h(g(x_3)) \\ x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

Применим пункт (b) к последнему уравнению и
получим систему в разрешеной форме

$$\begin{aligned} E = \\ x_2 = x_3 \\ x_1 = g(x_3) \\ x_4 = h(g(x_3)) \end{aligned}$$

Решение системы:

$$\begin{aligned} S = \{ \\ (x_1 = g(x_3)), \\ (x_2 = x_3), \\ (x_4 = h(g(x_3)))) \\ \} \end{aligned}$$

Определение 2.10. $S \circ T-$композиция подстановок, если $S \circ T = S(T(a))$

Определение 2.11. $S-$наиболее общий унификатор кcли любое решение сисетмы R может быть получено уточнением: $\exists T : R = T \circ S$

Утверждение 2.7. Алгоритм дает наиболее общий унификатор системы, если у нее есть решения. Если решений нет алгоритм окончится неудачей.

3 Лекция 6 Реконструкция типов в просто типизированном лямбда-исчислении, комбинаторы

3.1 Алгоритм вывода типов

Пусть есть: $?| - A :?$, хотим найти пару $\left\langle \text{контекст}, \text{тип} \right\rangle$

Алгоритм:

1. Рекурсия по структуре формулы

   Построить по формуле A пару $\left\langle E, \tau \right\rangle$, где

   $E-$набор уравнений, $\tau-$тип A

2. Решение уравнения, получения подстановки S и из решения E и $S(\tau)$ получения ответа

Т.е. необохимо свести вывод типа к алгоритму унификации.

Пункт 3.1. Рассмотрим 3 случая

1. $A \equiv x \implies \left\langle \{\}, \alpha_A \right\rangle$, где $\{\}-$пустой конекст, α_A-новая переменная нигде не встречавшаяся до этого в формуле

2. $A \equiv P\,Q \implies \left\langle E_P \cup E_Q \cup \{\tau_P = \tau_Q \to \alpha_A\}, \alpha_A \right\rangle$, где α_A-новая переменная

3. $A \equiv \lambda x.P \implies \langle E_P, \alpha_x \to \tau_P \rangle$

Пункт 3.2. Алгоритм унификации

Рассмотрим $E-$набор уравнений, запишем все уравнения в алгебраическом виде т.е. $\alpha \to \beta \Leftrightarrow \to \alpha\beta$, затем применяем алгоритм унификации.

Лемма 3.1. Рассмотрим терм M и пару $\langle E_M, \tau_M \rangle$, Если $\Gamma| - M : \rho$, то существует:

1. $S-$решение E_M тогда $\Gamma = \{S(\alpha_x) \,|\, x \in FV(M)\}$, $FV-$множество свободных переменных в терме M, α_x- переменная полученная при разборе терма M

   $\rho = S(\tau_M)$

2. Если $S-$ решение E_M, то $\Gamma| - M : \rho$,Доказательство$-$индукция по структуре терма M

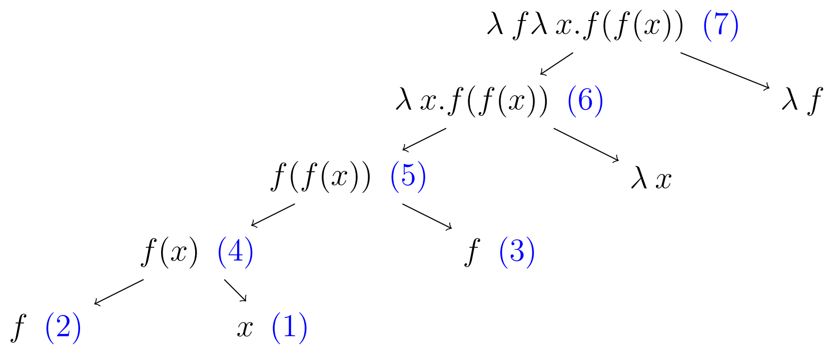
$\langle \Gamma, \rho \rangle-$основная пара для терма M, если

1. $\Gamma| - M : \tau$

2. Если $\Gamma'| - M : \tau'$, то сущесвтует $S: \ S(\Gamma) \subset \Gamma'$

Пример.

Рассмотрим терм: $\lambda\, f \lambda\, x.f(f(x))$, построим и пронумеруем его дерево разбора:



1. $E_1 = \langle \{\}, \alpha_x \rangle$

2. $E_2 = \langle \{\}, \alpha_f \rangle$

3. $E_3 = \langle \{\}, \alpha_f \rangle$

4. $E_4 = \langle \{\alpha_f = \alpha_x \to \alpha_1\}, \alpha_1 \rangle$

5. $E_5 = \langle \{\alpha_f = \alpha_x \to \alpha_1$

   $\alpha_f = \alpha_1 \to \alpha_2\}, \alpha_2 \rangle$

6. $E_6 = \langle \{\alpha_f = \alpha_x \to \alpha_1$

   $\alpha_f = \alpha_1 \to \alpha_2\}, \alpha_x \to \alpha_2 \rangle$

7. $E_7 = \langle \{\alpha_f = \alpha_x \to \alpha_1$

   $\alpha_f = \alpha_1 \to \alpha_2\}, \alpha_f \to (\alpha_x \to \alpha_2) \rangle$

$E = \alpha_f = \alpha_x \to \alpha_1$
$\alpha_f = \alpha_1 \to \alpha_2$, решим полученную систему:

1. приведем систему к алгебрачиескому виду и решим её:

   (a)
   $$\begin{cases} \alpha_f = \to (\alpha_x\, \alpha_1) \\ \alpha_f = \to (\alpha_1\, \alpha_2) \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} \to (\alpha_1\, \alpha_2) = \to (\alpha_x\, \alpha_1) \end{cases}$$

   (c)
   $$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_x \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases}$$

   (d)
   $$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_x \\ \alpha_2 = \alpha_x \end{cases}$$

2. Получим
   $$S = \begin{cases} \alpha_f = \to (\alpha_x\, \alpha_1) \\ \alpha_1 = \alpha_x \\ \alpha_2 = \alpha_x \end{cases}$$

3. $\Gamma = \{\}$, так как в заданной формуле нет свободных переменных

4. тип терма $\lambda\, f \lambda\, x.f(f(x))$ является результат подстановки
   $S(\to\ \alpha_f\ (\alpha_x \to \alpha_2))$, получаем $\tau = (\alpha_x \to \alpha_x) \to (\alpha_x \to \alpha_x)$

3.2 Сильная и слабая нормализации

Определение 3.1. Если существует последовательность редукций, приводящая терм M в нормальную форму, то $M-$слабо нормализуем. (Т.е. при редуцировании терма M мы можем не прийти в н.ф.)

Определение 3.2. Если не существует бесконечной последовательности редукций терма M, то терм $M-$ сильно нормализуем.

Утверждение 3.1.

1. $KI\Omega-$ слабо нормализуема

2. $\Omega-$ не нормализуема

3. $II-$ сильно нормализуема

Лемма 3.2. Сильная нормализация влечет слабую.

3.3 Выразимость комбинаторов

Утверждение 3.2. Любое λ выражение можно записать с помощью комбинаторов S и K, где

$$S = \lambda\, x \lambda\, y \lambda\, z.(x\, z)(y\, z)$$
$$K = \lambda\, x \lambda\, y.x$$

Утверждение 3.3. Соотношение комбинаторов с λ исчислением:

1. $T(x) = x$
2. $T(P\, Q) = T(P) T(Q)$
3. $T(\lambda\, x.P) = K(T(P)),\;\; x \notin FV(P)$
4. $T(\lambda\, x.x) = I$
5. $T(\lambda\, x \lambda\, y.P) = T(\lambda\, x.T(\lambda\, y.P))$
6. $T(\lambda\, x.P\, Q) = S\, T(\lambda\, x.P) T(\lambda\, x.Q)$

Утверждение 3.4. Альтернативный базис:

1. $B = \lambda\, x \lambda\, y \lambda\, z.x(y\, z)$
2. $C = \lambda\, x \lambda\, y \lambda\, z.((x\, z) y)$
3. $W = \lambda\, x \lambda\, y.((x\, y) y)$