

Введение в Теорию Типов

Конспект лекций

Штукенберг Д. Г.
Университет ИТМО

26 декабря 2018 г.

1 Введение

Эти лекции были рассказаны студентам групп М3334–М3337, М3339 в 2018 году в Университете ИТМО, на Кафедре компьютерных технологий Факультета информационных технологий и программирования.

Конспект подготовили студенты Кафедры: Егор Галкин (лекции 1 и 2), Илья Кокорин (лекции 3 и 4), Никита Дугинец (лекции 5 и 6), Степан Прудников (лекции 7 и 8).
(возможно, история сложнее)

2 Лекция 1

2.1 λ -исчисление

Определение 2.1 (λ -выражение). λ -выражение — выражение, удовлетворяющее грамматике:

$$\begin{aligned}\Phi ::= & x \\ & | (\Phi) \\ & | \lambda x. \Phi \quad (\textit{abstraction}) \\ & | \Phi \Phi \quad (\textit{application})\end{aligned}$$

1. Аппликация левоассоциативна.
2. Абстракции жадные, едят все что могут.

Пример. $(\lambda x. (\lambda f. ((fx)(fx) \lambda y. (yf))))$

Есть понятия связанного и свободного вхождения переменной (аналогично исчислению предикатов). $\lambda x. A$ связывает все свободные вхождения x в A .

Определение 2.2. Функция $FV(A)$ — множество свободных переменных, входящих в A :

$$FV(A) = \begin{cases} \{x\} & \text{если } A \equiv x \\ FV(P) \cup FV(Q) & \text{если } A \equiv PQ \\ FV(P) \setminus \{x\} & \text{если } A \equiv \lambda x. P \end{cases}$$

Договоримся, что:

- Переменные — x, a, b, c .
- Термы (части λ -выражения) — X, A, B, C .
- Фиксированные переменные обозначаются буквами из начала алфавита, метаварьируемые — из конца.

На самом деле, смысл в этом есть, λ -выражение можно понимать как функцию. Абстракция — это функция с аргументом, аппликация — это передача аргумента.

Определение 2.3 (α -эквивалентность). $A =_\alpha B$, если имеет место одно из следующих условий:

1. $A \equiv x, B \equiv y$ (x, y — переменные) и $x \equiv y$
2. $A \equiv P_1 Q_1, B \equiv P_2 Q_2$ и $P_1 =_\alpha P_2, Q_1 =_\alpha Q_2$
3. $A \equiv \lambda x. P_1, B \equiv \lambda y. P_2$ и $P_1[x := t] =_\alpha P_2[y := t]$, где t — новая переменная.

Пример. $\lambda x. \lambda y. xy =_\alpha \lambda y. \lambda x. yx$.

Доказательство. Согласно второму правилу следующие утверждения верны:

$$\begin{aligned} \lambda y. ty =_\alpha \lambda x. tx &\implies \lambda x. \lambda y. xy =_\alpha \lambda y. \lambda x. yx \\ tz =_\alpha tz &\implies \lambda y. ty =_\alpha \lambda x. tx \end{aligned}$$

$tz =_\alpha tz$ верно по третьему условию. □

Определение 2.4 (β -редекс). β -редекс — выражение вида: $(\lambda x. A) B$

Определение 2.5 (β -редукция). $A \rightarrow_\beta B$, если имеет место одно из следующих условий:

1. $A \equiv P_1 Q_1, B \equiv P_2 Q_2$ и либо $P_1 =_\alpha P_2, Q_1 \rightarrow_\beta Q_2$, либо $P_1 \rightarrow_\beta P_2, Q_1 =_\alpha Q_2$
2. $A \equiv (\lambda x. P) Q, B \equiv P[x := Q]$ — Q свободна для подстановки вместо x в P

Пример. $X \rightarrow_\beta X, (\lambda x. x) y \rightarrow_\beta y$

Пример. $a (\lambda x. x) y \rightarrow_\beta ay$

Пример. $A \equiv \lambda x. P, B \equiv \lambda x. Q, P \rightarrow_\beta Q$

2.2 Представление некоторых функций в лямбда исчислении

Boolean значения легко представить в терминах λ -исчисления, к примеру

- $\text{True} = \lambda a \lambda b. a$
- $\text{False} = \lambda a \lambda b. b$

Также мы можем выражать и более сложные функции

Определение 2.6. $\text{If} = \lambda c. \lambda t. \lambda e. (ct)e$

Пример. $\text{If } T \ a \ b \rightarrow_\beta a$

Доказательство.

$$\begin{aligned} ((\lambda c.\lambda t.\lambda e.(ct)e) \lambda a\lambda b.a) a b \rightarrow_\beta (\lambda t.\lambda e.(\lambda a\lambda b.a) t e) a b \rightarrow_\beta \\ (\lambda t.\lambda e.(\lambda b.t) e) a b \rightarrow_\beta (\lambda t.\lambda e.t) a b \rightarrow_\beta (\lambda e.a) b \rightarrow_\beta a \end{aligned}$$

□

Как мы видим If true действительно возвращает результат первой ветки.
Другие логические операции:

$$\text{Not} = \lambda a.a \text{ F T} \quad \text{Add} = \lambda a.\lambda b.a b \text{ F} \quad \text{Or} = \lambda a.\lambda b.a \text{ T } b$$

2.3 Черчевские нумералы

Определение 2.7 (черчевский нумерал).

$$\bar{n} = \lambda f.\lambda x.f^n x, \quad \text{где} \quad f^n x = \begin{cases} f(f^{n-1}x) & \text{при } n > 0 \\ x & \text{при } n = 0 \end{cases}$$

Пример.

$$\bar{3} = \lambda f.\lambda x.f(f(fx))$$

Несложно определить прибавление единицы к такому нумералу:

$$(+1) = \lambda n.\lambda f.\lambda x.f(nfx)$$

Арифметические операции:

1. IsZero = $\lambda n.n (\lambda x. \text{F}) \text{T}$
2. Add = $\lambda a.\lambda b.\lambda f.\lambda x.a f (b f x)$
3. Pow = $\lambda a.\lambda b.b (\text{Mul } a) \bar{1}$
4. IsEven = $\lambda n.n \text{ Not T}$
5. Mul = $\lambda a.\lambda b.a (\text{Add } b) \bar{0}$

Для того, чтобы определить (-1) , сначала определим «пару»:

$$\langle a, b \rangle = \lambda f.f a b \quad \text{First} = \lambda p.p \text{T} \quad \text{Second} = \lambda p.p \text{F}$$

Затем n раз применим функцию $f(\langle a, b \rangle) = \langle b, b + 1 \rangle$ и возьмём первый элемент пары:

$$(-1) = \lambda n. \text{First}(n (\lambda p. \langle (\text{Second } p), (+1) (\text{Second } p) \rangle)) \langle \bar{0}, \bar{0} \rangle$$

3 Лекция 2

3.1 Формализация λ -термов, классы α -эквивалентности термов

Определение 3.1 (λ -терм). Рассмотрим классы эквивалентности $[A] = \alpha$
Будем говорить, что $[A] \rightarrow_\beta [B]$, если $\exists A' \in [A], B' \in [B]$, что $A' \rightarrow_\beta B'$.

Лемма 3.1. $=_\alpha$ — отношение эквивалентности.

Пусть в A есть β -редекс $\lambda x.Q$, но $P[x := Q]$ не может быть, тогда найдем $y \notin V[P]$, $y \notin V[Q]$. Сделаем замену $P[x := y]$. Тогда замена $P[x := y][y := Q]$ допустима.

Лемма 3.2. $P[x := y] =_\alpha P[x := y][y := Q]$, если замена допустима.

3.2 Нормальная форма, λ -выражения без нормальной формы, комбинаторы K , I , Ω

Определение 3.2. Нормальная форма — это λ -выражение без β -редексов.

Лемма 3.3. λ -выражение A в нормальной форме, т.е.т.т, когда $\nexists B$, что $A \rightarrow_\beta B$.

Определение 3.3. A — Н.Ф B , если $\exists A_1 \dots A_n$, что $B =_\alpha A_1 \rightarrow_\beta A_2 \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta A_n =_\alpha A$.

Определение 3.4. Комбинатор — λ -выражение без свободных переменных.

Определение 3.5.

- $I = \lambda x.x$ (Identitant)
- $K = \lambda a.\lambda b.a$ (Konstanz)
- $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

Лемма 3.4. Ω — не имеет нормальной формы.

Доказательство. $\Omega \rightarrow_\beta \Omega$ □

3.3 β -редуцируемость

Определение 3.6. Будем говорить, что $A \twoheadrightarrow_\beta B$, если \exists такие $X_1 \dots X_n$, что $A =_\alpha X_1 \rightarrow_\beta X_2 \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta X_{n-1} \rightarrow_\beta X_n =_\alpha B$.

\twoheadrightarrow_β — рефлексивное и транзитивное замыкание \rightarrow_β . \twoheadrightarrow_β не обязательно приводит к нормальной форме

Пример. $\Omega \twoheadrightarrow_\beta \Omega$

3.4 Ромбовидное свойство

Определение 3.7 (Ромбовидное свойство). Отношение R обладает ромбовидным свойством, если $\forall a, b, c$, таких, что aRb , aRc , $b \neq c$, $\exists d$, что bRd и cRd . Далее будем обозначать ромбовидное свойство как $<>$.

Пример. (\leq) на множестве натуральных чисел обладает $<>$ $(>)$ не обладает $<>$ на множестве натуральных чисел

3.5 Теорема Чёрча-Россера, следствие о единственности нормальной формы

Теорема 3.1 (Черча-Россера). $(\twoheadrightarrow_\beta)$ обладает ромбовидным свойством.

Следствие 3.1. Если у A есть Н.Ф, то она единственная с точностью до $(=_\alpha)$ (переименования переменных).

Доказательство. Пусть $A \twoheadrightarrow_\beta B$ и $A \twoheadrightarrow_\beta C$. B, C — нормальные формы и $B \neq_\alpha C$. Тогда по теореме Черча-Россера $\exists D$: $B \twoheadrightarrow_\beta D$ и $C \twoheadrightarrow_\beta D$. Тогда $B =_\alpha D$ и $C =_\alpha D \Rightarrow B =_\alpha C$. Противоречие. □

Лемма 3.5. Если B — Н.Ф, то $\nexists Q$: $B \rightarrow_\beta Q$. Значит если $B \twoheadrightarrow_\beta Q$, то количество шагов редукции равно 0.

Лемма 3.6. Если R — обладает $<>$, то и R^* (транзитивное, рефлексивное замыкание R) обладает R^* .

Доказательство. Пусть $M_1 R^* M_n$ и $M_1 R N_1$. Тогда существуют такие $M_2 \dots M_{n-1}$, что $M_1 R M_2 \dots M_{n-1} R M_n$. Так как R обладает ромбовидным свойством, $M_1 R M_2$ и $M_1 R N_1$, то существует такое N_2 , что $N_1 R N_2$ и $M_2 R N_2$. Аналогично, существуют такие $N_3 \dots N_n$, что $N_{i-1} R N_i$ и $M_i R N_i$. Мы получили такое N_n , что $N_1 R^* N_n$ и $M_n R^* N_n$.

Пусть теперь $M_{1,1} R^* M_{1,n}$ и $M_{1,1} R^* M_{m,1}$, то есть имеются $M_{1,2} \dots M_{1,n-1}$ и $M_{2,1} \dots M_{m-1,1}$, что $M_{1,i-1} R M_{1,i}$ и $M_{i-1,1} R M_{i,1}$. Тогда существует такое $M_{2,n}$, что $M_{2,1} R^* M_{2,n}$ и $M_{1,n} R^* M_{2,n}$. Аналогично, существуют такие $M_{3,n} \dots M_{m,n}$, что $M_{i,1} R^* M_{i,n}$ и $M_{1,n} R^* M_{i,n}$. Тогда $M_{1,n} R^* M_{m,n}$ и $M_{m,1} R^* M_{m,n}$. \square

Лемма 3.7 (Грустная лемма). (\rightarrow_β) не обладает $<>$

Доказательство. Пусть $A = (\lambda x.xx)(\mathcal{I}\mathcal{I})$. Покажем что в таком случае не будет выполняться сомбовидное свойство: \square

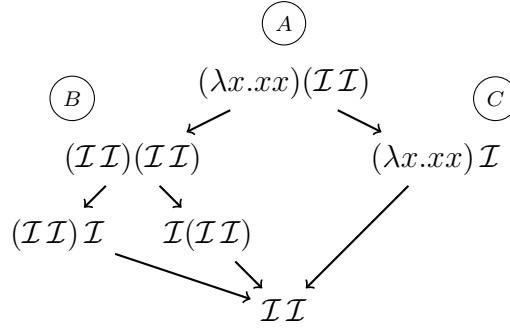


Рис. 1: Нет такого D , что $B \rightarrow_\beta D$ и $C \rightarrow_\beta D$.

Определение 3.8 (Параллельная β -редукция). $A \rightrightarrows_\beta B$, если

1. $A =_\alpha B$
2. $A \equiv P_1 Q_1$, $B \equiv P_2 Q_2$ и $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$
3. $A \equiv \lambda x.P_1$, $B \equiv \lambda x.P_2$ и $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$
4. $A =_\alpha (\lambda x.P)Q$, $B =_\alpha P[x := Q]$

Лемма 3.8. $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$ и $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$, то $P_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta P_2[x := Q_2]$

Доказательство. Будем доказывать индукцией по определению \rightrightarrows_β . Рассмотрим случаи:

- Пусть $P_1 =_\alpha P_2$. Тогда лемма легко доказывается индукцией по структуре выражения.
- Пусть $P_1 \equiv A_1 B_1$, $P_2 \equiv A_2 B_2$. По определению \rightrightarrows_β $A_1 \rightrightarrows_\beta A_2$ и $B_1 \rightrightarrows_\beta B_2$. Рассмотрим два случая:
 1. $x \in \text{FV}(A_1)$. По индукционному предположению $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]$. Тогда $A_1[x := Q_1]B_1 \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]B_2$. Тогда $A_1 B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2 B_2[x := Q_2]$.
 2. Аналогично для B

- Пусть $P_1 \equiv \lambda x.A_1$, $P_2 \equiv \lambda x.A_2$. по определению $\Rightarrow_\beta A_1 \Rightarrow_\beta A_2$. Тогда по индукционному предположению $A_1[x' := Q_1] \Rightarrow_\beta A_2[x' := Q_2]$. Тогда $\lambda x.(A_1[x' := Q_1]) \Rightarrow_\beta \lambda x.(A_2[x' := Q_2])$ по определению \Rightarrow_β . Следовательно $\lambda x.A_1[x' := Q_1] \Rightarrow_\beta \lambda x.A_2[x' := Q_2]$ по определению подстановки.
- Пусть $P_1 \equiv (\lambda x.A)B$, $P_2 \equiv A[x := B]$. Тогда по индукционному предположению $A[x := Q_1] \Rightarrow_\beta A[x := Q_2]$, $B[x := Q_1] \Rightarrow_\beta B[x := Q_2]$. Тогда по определению \Rightarrow_β имеем $(\lambda x.A[x' := Q_1])B \Rightarrow_\beta A[x' := Q_2][x := B]$. Тогда имеем, что $A[x' := Q_1][x := B] \equiv (A[x := B])[x' := Q_2] \equiv B[x' := Q_2]$.

□

Лемма 3.9. (\Rightarrow_β) обладает $\langle \rangle$

Доказательство. Будем доказывать индукцией по определению \Rightarrow_β . Покажем, что если $M \Rightarrow_\beta M_1$ и $M \Rightarrow_\beta M_2$, то $\exists M_3$, что $M_1 \Rightarrow_\beta M_3$ и $M_2 \Rightarrow_\beta M_3$. Рассмотрим случаи:

- Если $M \equiv M_1$, то просто возьмем $M_3 \equiv M_2$.
- Если $M \equiv \lambda x.P$, $M_1 \equiv \lambda x.P_1$, $M_2 \equiv \lambda x.P_2$ и $P \Rightarrow_\beta P_1$, $P \Rightarrow_\beta P_2$, то по предположению индукции $\exists P_3$, что $P_1 \Rightarrow_\beta P_3$, $P_2 \Rightarrow_\beta P_3$, тогда возьмем $M_3 \equiv \lambda x.P_3$.
- Если $M \equiv PQ$, $M_1 \equiv P_1Q_1$ и по определению $\Rightarrow_\beta P \Rightarrow_\beta P_1$, $Q \Rightarrow_\beta Q_1$, то рассмотрим два случая:
 1. $M_2 \equiv P_2Q_2$. Тогда по предположению индукции $\exists P_3$, что $P_1 \Rightarrow_\beta P_3$, $P_2 \Rightarrow_\beta P_3$. Аналогично для Q . Тогда возьмем $M_3 \equiv P_3Q_3$.
 2. $P \equiv \lambda x.P'$, $M_2 \equiv P'_2[x := Q_2]$, по определению $\Rightarrow_\beta P' \Rightarrow_\beta P'_2$, $Q \Rightarrow_\beta Q_2$. Также $P_1 \equiv \lambda x.P'_1$, $P' \equiv P'_1$. Тогда по предположению индукции и леммы 3.8 мы можем взять $M_3 \equiv P'_3[x := P_3]$.
- Если $M =_\alpha (\lambda x.P)Q$, $M_1 =_\alpha M_2 =_\alpha P[x := Q]$, то просто возьмем $M_3 =_\alpha P[x := Q]$.

□

Лемма 3.10.

1. $(\Rightarrow_\beta)^* \subseteq (\rightarrow_\beta)^*$
2. $(\rightarrow_\beta)^* \subseteq (\Rightarrow_\beta)^*$

Следствие 3.2. $(\rightarrow_\beta)^* = (\Rightarrow_\beta)^*$

Из приведенных выше лемм и следствия докажем теорему Черча-Россера.

Доказательство. $(\rightarrow_\beta)^* \equiv (\twoheadrightarrow_\beta)$. Тогда $(\twoheadrightarrow_\beta) = (\Rightarrow_\beta)^*$. Значит из того, что (\Rightarrow_β) обладает $\langle \rangle$ и леммы 3.6 следует, что $(\twoheadrightarrow_\beta)$ обладает $\langle \rangle$. □

3.6 Нормальный и аппликативный порядок вычислений

Пример. Выражение $KI\Omega$ можно редуцировать двумя способами:

1. $KI\Omega =_\alpha ((\lambda a.\lambda b.a)I)\Omega \rightarrow_\beta (\lambda b.I)\Omega \rightarrow_\beta I$
2. $KI\Omega =_\alpha ((\lambda a.\lambda b.a)I)((\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)) \twoheadrightarrow_\beta ((\lambda a.\lambda b.a)I)((\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)) \rightarrow_\beta KI\Omega$

Как мы видим, в первом случае мы достигли нормальной формы, в то время как во втором мы получаем бесконечную редукцию. Разница двух этих способов в порядке редукции. Первый называется нормальный порядок, а второй аппликативный.

Определение 3.9 (нормальный порядок редукции). Редукция самого левого β -редекса.

Определение 3.10 (аппликативный порядок редукции). Редукция самого левого β -редекса из самых вложенных.

Утверждение 3.1. Если нормальная форма существует, она может быть достигнута нормальным порядком редукции.