# Введение в Теорию Типов
*Конспект лекций*

Штукенберг Д. Г.
Университет ИТМО

8 января 2019 г.

## 1 Введение

Эти лекции были рассказаны студентам групп M3334–M3337, M3339 в 2018 году в Университете ИТМО, на Кафедре компьютерных технологий Факультета информационных технологий и программирования.

Конспект подготовили студенты Кафедры: Егор Галкин (лекции 1 и 2), Илья Кокорин (лекции 3 и 4), Никита Дугинец (лекции 5 и 6), Степан Прудников (лекции 7 и 8).

(возможно, история сложнее)

## 2 Лекция 1

### 2.1 $\lambda$-исчисление

**Определение 2.1** ($\lambda$-выражение)**.** $\lambda$-выражение — выражение, удовлетворяющее грамматике:

$$\Phi ::= x \,|\, (\Phi) \,|\, \lambda x.\Phi \,|\, \Phi\ \Phi$$

Иногда для упращения записи мы будем опускать скобки. В этом случае, перед разбором выражения, следует расставить все опущенные скобки. При их рассатвлении будем придерживаться правил:

1. В аппликации расставляем скобки слева направо: $A\ B\ C \implies (A\ B)\ C$.

2. Абстракции жадные — поглащают скобками все что могут до конца строки: $\lambda a.\lambda b.a\ b \implies \lambda a.(\lambda b.(a\ b))$.

   **Пример.** $\lambda x.(\lambda f.((fx)(fx)\lambda y.(yf)))$

Договоримся, что:

- Переменные — $x$, $a$, $b$, $c$.
- Термы (части $\lambda$-выражения) — $X$, $A$, $B$, $C$.
- Фиксированные переменные обозначаются буквами из начала алфавита, метапеременные — из конца.

Есть понятия связанного и свободного вхождения переменной (аналогично исчислению предикатов).

**Определение 2.2.** Если вхождение $x$ находится в области действия абстракции по $x$, то такое вхождение называется связанным, иначе вхождение называется свободным.

**Определение 2.3.** Терм $Q$ называется свободным для подстановски в $\Phi$ вместо $x$, если после подстановки $Q$ ни одно вхождение не станет связанным.

**Пример.** $\lambda x.A$ связывает все свободные вхождения $x$ в $A$.

**Определение 2.4.** Функция $V(A)$ — множество переменных, входящих в $A$.

**Определение 2.5.** Функция $\mathrm{FV}(A)$ — множество свободных переменных, входящих в $A$:

$$\mathrm{FV}(A) = \begin{cases} \{x\} & \text{если } A \equiv x \\ \mathrm{FV}(P) \cup \mathrm{FV}(Q) & \text{если } A \equiv PQ \\ \mathrm{FV}(P) \setminus \{x\} & \text{если } A \equiv \lambda x.P \end{cases}$$

$\lambda$-выражение можно понимать как функцию. Абстракция — это функция с аргументом, аппликация — это передача аргумента.

**Определение 2.6** ($\alpha$-эквивалентность)**.** $A =_\alpha B$, если имеет место одно из следующих условий:

1. $A \equiv x$, $B \equiv y$ и $x \equiv y$.
2. $A \equiv P_1Q_1$, $B \equiv P_2Q_2$ и $P_1 =_\alpha P_2$, $Q_1 =_\alpha Q_2$.
3. $A \equiv \lambda x.P_1$, $B \equiv \lambda y.P_2$ и $P_1[x := t] =_\alpha P_2[y := t]$, где $t$ — новая переменная.

**Пример.** $\lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx$.

*Доказательство.*

1. $tz =_\alpha tz$ верно по второму условию.
2. Тогда получаем, что $\lambda y.ty =_\alpha \lambda x.tx$ по третьему условию, так как из предыдущего пункта следует $ty[y := z] =_\alpha tx[x := z]$.
3. Из второго пункта пункта получаем что $\lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx$ по третьему условию, так как $\lambda y.xy[x := t] =_\alpha \lambda x.yx[y := t]$.

□

**Определение 2.7** ($\beta$-редекс)**.** $\beta$-редекс — выражение вида: $(\lambda x.A)\,B$

**Определение 2.8** ($\beta$-редукция)**.** $A \to_\beta B$, если имеет место одно из следующих условий:

1. $A \equiv P_1Q_1$, $B \equiv P_2Q_2$ и либо $P_1 =_\alpha P_2$, $Q_1 \to_\beta Q_2$, либо $P_1 \to_\beta P_2$, $Q_1 =_\alpha Q_2$
2. $A \equiv (\lambda x.P)\,Q$, $B \equiv P[x := Q]$ причем $Q$ свободна для подстановки вместо $x$ в $P$
3. $A \equiv \lambda x.P$, $B \equiv \lambda x.Q$ и $P \to_\beta Q$

**Пример.** $(\lambda x.x)\,y \to_\beta y$

**Пример.** $a\,(\lambda x.x)\,y \to_\beta ay$

## 2.2 Представление некоторых функций в лямбда исчислении

Логические значения легко представить в терминах $\lambda$-исчисления. В самом деле, положим:

- True $\equiv \lambda a \lambda b.a$
- False $\equiv \lambda a \lambda b.b$

Также мы можем выражать и более сложные функции

**Определение 2.9.** If $\equiv \lambda c.\lambda t.\lambda e.(ct)e$

**Пример.** If T $a\ b \to_\beta\ a$

*Доказательство.*

$$((\lambda c.\lambda t.\lambda e.(ct)e)\ \lambda a\lambda b.a)\ a\ b \to_\beta (\lambda t.\lambda e.(\lambda a\lambda b.a)\ t\ e)\ a\ b \to_\beta$$
$$(\lambda t.\lambda e.(\lambda b.t)\ e)\ a\ b \to_\beta\ (\lambda t.\lambda e.t)\ a\ b \to_\beta\ (\lambda e.a)\ b \to_\beta\ a$$

□

Как мы видим If T действительно возвращает результат первой ветки.
Другие логические операции:

$$\text{Not} = \lambda a.a\ \text{F}\ \text{T} \qquad \text{Add} = \lambda a.\lambda b.a\ b\ \text{F} \qquad \text{Or} = \lambda a.\lambda b.a\ \text{T}\ b$$

## 2.3 Черчевские нумералы

**Определение 2.10** (черчевский нумерал)**.**

$$\overline{n} = \lambda f.\lambda x.f^n x, \quad \text{где} \quad f^n x = \begin{cases} f\,(f^{n-1}x) & \text{при } n > 0 \\ x & \text{при } n = 0 \end{cases}$$

**Пример.**

$$\overline{3} = \lambda f.\lambda x.f\,(f\,(fx))$$

Несложно определить прибавление единицы к такому нумералу:

$$(+1) = \lambda n.\lambda f.\lambda x.f(nfx)$$

Арифметические операции:

1. IsZero $= \lambda n.n\,(\lambda x.\,\text{F})\,\text{T}$
2. Add $= \lambda a.\lambda b.\lambda f.\lambda x.a\,f\,(b\,f\,x)$
3. Pow $= \lambda a.\lambda b.b\,(\text{Mul}\ a)\,\overline{1}$
4. IsEven $= \lambda n.n\ \text{Not}\ \text{T}$
5. Mul $= \lambda a.\lambda b.a\,(\text{Add}\ b)\,\overline{0}$

Для того, чтобы определить $(-1)$, сначала определим пару:

$$\langle a, b\rangle = \lambda f.f\,a\,b \qquad \text{First} = \lambda p.p\,\text{T} \qquad \text{Second} = \lambda p.p\,\text{F}$$

Затем $n$ раз применим функцию $f\,(\langle a, b\rangle) = \langle b, b+1\rangle$ и возьмём первый элемент пары:

$$(-1) = \lambda n.\,\text{First}(n\,(\lambda p.\,\langle(\text{Second}\,p)\,,(+1)\,(\text{Second}\,p)\rangle)\,\langle\overline{0},\overline{0}\rangle)$$

# 3 Лекция 2

## 3.1 Формализация $\lambda$-термов, классы $\alpha$-эквивалентности термов

**Определение 3.1** ($\lambda$-терм)**.** Рассмотрим классы эквивалентности $[A]_{=_\alpha}$
Будем говорить, что $[A] \to_\beta [B]$, если существуют $A' \in [A]$ и $B' \in [B]$, что $A' \to_\beta B'$.

**Лемма 3.1.** $(=_\alpha)$ — отношение эквивалентности.

Пусть в А есть $\beta$-редекс $(\lambda x.P)Q$, но $Q$ не свободен для подстановски вместо $x$ в $P$, тогда найдем $y \notin V[P]$, $y \in V[Q]$. Сделаем замену $P[x := y]$. Тогда замена $P[x := y][y := Q]$ допустима. То есть, можно сказать, что мы просто переименовали переменную $x$ в $P$ и получили свободу для подстановки, тем самым получив возможность редукции.

**Лемма 3.2.** $P[x := Q] =_\alpha P[x := y][y := Q]$, если замена допустима.

## 3.2 Нормальная форма, $\lambda$-выражения без нормальной формы, комбинаторы $K$, $I$, $\Omega$

**Определение 3.2.** $\lambda$-выражение $A$ находится в нормальноф форме, если оно не содержит $\beta$-редексов.

**Определение 3.3.** $A$ — нормальная форма $B$, если существует последовательность термов $A_1 ... A_n$ такая, что $B =_\alpha A_1 \to_\beta A_2 \to_\beta ... \to_\beta A_n =_\alpha A$.

**Определение 3.4.** Комбинатор — $\lambda$-выражение без свободных переменных.

**Определение 3.5.**

- $I \equiv \lambda x.x$ (Identitant)
- $K \equiv \lambda a.\lambda b.a$ (Konstanz)
- $\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

**Лемма 3.3.** $\Omega$ — не имеет нормальной формы.

*Доказательство.* $\Omega$ Имеет едintсвенный $\beta$-редекс, где $A \equiv xx$, $B \equiv (\lambda x.xx)$. Тогда единственный возможный путь редукции — подставить $B$ вместо $x$ в $A$. Но тогда мы получим $\Omega$. Следовательно у $\Omega$ нет нормальной формы, так как в полученном выражении у нас всегда будет $\beta$-редекс. □

## 3.3 $\beta$-редуцируемость

**Определение 3.6.** Будем говорить, что $A \twoheadrightarrow_\beta B$, если $\exists$ такие $X_1 .. X_n$, что $A =_\alpha X_1 \to_\beta X_2 \to_\beta ... \to_\beta X_{n-1} \to_\beta X_n =_\alpha B$.

$(\twoheadrightarrow_\beta)$ — рефлексивное и транзитивное замыкание $(\to_\beta)$. $(\twoheadrightarrow_\beta)$ не обязательно приводит к нормальной форме

**Пример.** $\Omega \twoheadrightarrow_\beta \Omega$

## 3.4 Ромбовидное свойство

**Определение 3.7** (Ромбовидное свойство)**.** Отношение $R$ обладает ромбовидным свойством, если $\forall a, b, c$, таких, что $aRb$, $aRc$, $b \neq c$, $\exists d$, что $bRd$ и $cRd$.

**Пример.** $(\leqslant)$ на множестве натуральных чисел обладает ромбовидным свойством, $(>)$ на множестве натуральных чисел не обладает ромбовидным свойством.

## 3.5 Теорема Чёрча-Россер, следствие о единственности нормальной формы

**Теорема 3.1** (Черча-Россера)**.** $(\twoheadrightarrow_\beta)$ обладает ромбовидным свойством.

**Следствие 3.1.** Если у $A$ есть нормальная форма, то она единтсвенная с точностью до $(=_\alpha)$ (переименования переменных).

*Доказательство.* Пусть $A \twoheadrightarrow_\beta B$ и $A \twoheadrightarrow_\beta C$. $B$, $C$ — нормальные формы и $B \neq_\alpha C$. Тогда по теореме Черча-Россера $\exists D$: $B \twoheadrightarrow_\beta D$ и $C \twoheadrightarrow_\beta D$. Тогда $B =_\alpha D$ и $C =_\alpha D \Rightarrow B =_\alpha C$. Противоречие. □

**Лемма 3.4.** Если $B$ — нормальная форма, то не существует $Q$ такой, что $B \to_\beta Q$. Значит если $B \twoheadrightarrow_\beta Q$, то количество шагов редукции равно 0.

**Лемма 3.5.** Если $R$ — обладает <>, то и $R^*$ (транзитивное, рефлексивное замыкание $R$) обладает $R^*$.

*Доказательство.* Пусть $M_1 R^* M_n$ и $M_1 R N_1$. Тогда существуют такие $M_2 \dots M_{n-1}$, что $M_1 R M_2 \ \dots M_{n-1} R M_n$. Так как $R$ обладает ромбовидным свойством, $M_1 R M_2$ и $M_1 R N_1$, то существует такое $N_2$, что $N_1 R N_2$ и $M_2 R N_2$. Аналогично, существуют такие $N_3 \dots N_n$, что $N_{i-1} R N_i$ и $M_i R N_i$. Мы получили такое $N_n$, что $N_1 R^* N_n$ и $M_n R^* N_n$.

Пусть теперь $M_{1,1} R^* M_{1,n}$ и $M_{1,1} R^* M_{m,1}$, то есть имеются $M_{1,2} \dots M_{1,n-1}$ и $M_{2,1} \dots M_{m-1,1}$, что $M_{1,i-1} R M_{1,i}$ и $M_{i-1,1} R M_{i,1}$. Тогда существует такое $M_{2,n}$, что $M_{2,1} R^* M_{2,n}$ и $M_{1,n} R^* M_{2,n}$. Аналогично, существуют такие $M_{3,n} \dots M_{m,n}$, что $M_{i,1} R^* M_{i,n}$ и $M_{1,n} R^* M_{i,n}$. Тогда $M_{1,n} R^* M_{m,n}$ и $M_{m,1} R^* M_{m,n}$. □

**Лемма 3.6** (Грустная лемма)**.** $(\to_\beta)$ не обладает ромбовидным свойством.

*Доказательство.* Пусть $A = (\lambda x.x.x)(\mathcal{I}\mathcal{I})$. Покажем что в таком случае не будет выполняться ромбовидное свойство: □

$$\begin{tikzcd}
 & & A & & \\
B & & (\lambda x.xx)(\mathcal{I}\mathcal{I}) \arrow[dl] \arrow[dr] & & C \\
 & (\mathcal{I}\mathcal{I})(\mathcal{I}\mathcal{I}) \arrow[dl] \arrow[d] & & (\lambda x.xx)\,\mathcal{I} \arrow[ddl] & \\
(\mathcal{I}\mathcal{I})\,\mathcal{I} \arrow[drr] & \mathcal{I}(\mathcal{I}\mathcal{I}) \arrow[dr] & & & \\
 & & \mathcal{I}\mathcal{I} & &
\end{tikzcd}$$

Рис. 1: Нет такого $D$, что $B \to_\beta D$ и $C \to_\beta D$.

**Определение 3.8** (Параллельная $\beta$-редукция)**.** $A \rightrightarrows_\beta B$, если

1. $A =_\alpha B$
2. $A \equiv P_1Q_1$, $B \equiv P_2Q_2$ и $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$
3. $A \equiv \lambda x.P_1$, $B \equiv \lambda x.P_2$ и $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$
4. $A =_\alpha (\lambda x.P)Q$, $B =_\alpha P[x := Q]$ причем $Q$ свободна для подстановки вместо $x$ в $P$

**Лемма 3.7.** Если $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$ и $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$, то $P_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta P_2[x := Q2]$

*Доказательство.* Будем доказывать индукцией по определению $\rightrightarrows_\beta$. Рассмотрим случаи:

- Пусть $P_1 =_\alpha P_2$. Тогда лемма легко доказывается индукцией по структуре выражения.
- Пусть $P_1 \equiv A_1B_1$, $P_2 \equiv A_2B_2$. По определению $(\rightrightarrows_\beta)$ $A_1 \rightrightarrows_\beta A_2$ и $B_1 \rightrightarrows_\beta B_2$. Рассмотрим два случая:
  1. $x \in \mathrm{FV}(A_1)$. По индукционному предположению $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]$. Тогда $A_1[x := Q_1]B_1 \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]B_2$. Тогда $A_1B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2B_2[x := Q_2]$.
  2. $x \in \mathrm{FV}(B_1)$. По индукционному предположению $B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta B_2[x := Q_2]$. Тогда $A_1B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2B_2[x := Q_2]$.
- Пусть $P_1 \equiv \lambda y.A_1$, $P_2 \equiv \lambda y.A_2$. по определению $(\rightrightarrows_\beta)$ $A_1 \rightrightarrows_\beta A_2$. Тогда по индукционному предположению $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]$. Тогда $\lambda y.(A_1[x := Q_1]) \rightrightarrows_\beta \lambda y.(A_2[x := Q_2])$ по определению $(\rightrightarrows_\beta)$. Следовательно $\lambda y.A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta \lambda y.A_2[x := Q_2]$ по определению подстvановки.
- Пусть $P_1 =_\alpha (\lambda y.A)B$, $P_2 =_\alpha A[y := B]$ и подстановка возможна. Из предположения индукции получаем, что $A[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A[x := Q_2]$, $B[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta B[x := Q_2]$. Значит $P_1[x := Q_1]$ с учетом редукций примет вид $(\lambda y.A[x := Q_2])B[x := Q_2]$. $P_2[x := Q_2]$ же примет вид $A[y := B][x := Q_2]$. Следовательно мы получим, что $P_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta P_2[x := Q_2]$.

□

**Лемма 3.8.** $(\rightrightarrows_\beta)$ обладает ромбовидным свойством.

*Доказательство.* Будем доказывать индукцией по определению $\rightrightarrows_\beta$. Покажем, что если $M \rightrightarrows_\beta M_1$ и $M \rightrightarrows_\beta M_2$, то $\exists M_3$, что $M_1 \rightrightarrows_\beta M_3$ и $M_2 \rightrightarrows_\beta M_3$. Рассмотрим случаи:

- Если $M \equiv M_1$, то просто возьмем $M_3 \equiv M_2$.
- Если $M \equiv \lambda x.P, M_1 \equiv \lambda x.P_1, M_2 \equiv \lambda x.P_2$ и $P \rightrightarrows_\beta P_1, P \rightrightarrows_\beta P_2$, то по предположению индукции $\exists P_3$, что $P_1 \rightrightarrows_\beta P_3, P_2 \rightrightarrows_\beta P_3$, тогда возьмем $M_3 \equiv \lambda x.P_3$.
- Если $M \equiv PQ, M_1 \equiv P_1Q_1$ и по определению $\rightrightarrows_\beta$ $P \rightrightarrows_\beta P_1, Q \rightrightarrows_\beta Q_1$, то рассмотрим два случая:
  1. $M_2 \equiv P_2Q_2$. Тогда по предположению индукции $\exists P_3$, что $P_1 \rightrightarrows_\beta P_3, P_2 \rightrightarrows_\beta P_3$. Аналогично для $Q$. Тогда возьмем $M_3 \equiv P_3Q_3$.
  2. $P \equiv \lambda x.P', M_2 \equiv P_2'[x := Q_2]$, по определению $\rightrightarrows_\beta$ $P' \rightrightarrows_\beta P_2', Q \rightrightarrows_\beta Q_2$. Также $P_1 \equiv \lambda x.P_1', P' \equiv P_1'$. Тогда по предположению индукции и леммы 3.7 мы можем взять $M_3 \equiv P_3'[x := P_3]$.
- Если $M =_\alpha (\lambda x.P)Q, M_1 =_\alpha M_2 =_\alpha P[x := Q]$, то просто возьмем $M_3 =_\alpha P[x := Q]$.

$\square$

**Лемма 3.9.**

1. $(\rightrightarrows_\beta)^* \subseteq (\to_\beta)^*$

2. $(\to_\beta)^* \subseteq (\rightrightarrows_\beta)^*$

**Следствие 3.2.** $(\to_\beta)^* = (\rightrightarrows_\beta)^*$

Из приведенных выше лемм и следствия докажем теорему Черча-Россера.

*Доказательство.* $(\to_\beta)^* = (\twoheadrightarrow_\beta)$. Тогда $(\twoheadrightarrow_\beta) = (\rightrightarrows_\beta)^*$. Значит из того, что $(\rightrightarrows_\beta)$ обладает ромбовидным свойством и леммы 3.5 следует, что $(\twoheadrightarrow_\beta)$ обладает ромбовидным свойством. $\square$

## 3.6 Нормальный и аппликативный порядок вычислений

**Пример.** Выражение $KI\Omega$ можно редуцировать двумя способами:

1. $\mathcal{K}\mathcal{I}\,\Omega =_\alpha ((\lambda a.\lambda b.a)\,\mathcal{I})\Omega \to_\beta (\lambda b.\,\mathcal{I})\Omega \to_\beta \mathcal{I}$

2. $\mathcal{K}\mathcal{I}\,\Omega =_\alpha ((\lambda a.\lambda b.a)I)((\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)) \twoheadrightarrow_\beta ((\lambda a.\lambda b.a)I)((\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)) \to_\beta \mathcal{K}\mathcal{I}\,\Omega$

Как мы видим, в первом случае мы достигли нормальной формы, в то время как во втором мы получаем бесонечную редукцию. Разница двух этих способов в порядке редукции. Первый называется нормальный порядок, а второй аппликативный.

**Определение 3.9** (нормальный порядок редукции)**.** Редукция самого левого $\beta$-редекса.

**Определение 3.10** (аппликативный порядок редукции)**.** Редукция самого левого $\beta$-редекса из самых вложенных.

**Теорема 3.2** (Приводится без доказательсвта)**.** Если нормальная форма существует, она может быть достигнута нормальным порядком редукции.