

# Введение в Теорию Типов

## Конспект лекций

Штукенберг Д. Г.  
Университет ИТМО

4 января 2019 г.

## 1 Введение

Эти лекции были рассказаны студентам групп М3334–М3337, М3339 в 2018 году в Университете ИТМО, на Кафедре компьютерных технологий Факультета информационных технологий и программирования.

Конспект подготовили студенты Кафедры: Егор Галкин (лекции 1 и 2), Илья Кокорин (лекции 3 и 4), Никита Дугинец (лекции 5 и 6), Степан Прудников (лекции 7 и 8).  
(возможно, история сложнее)

## 2 Лекция 1

### 2.1 $\lambda$ -исчисление

**Определение 2.1** ( $\lambda$ -выражение).  $\lambda$ -выражение — выражение, удовлетворяющее грамматике:

$$\Phi ::= x \mid (\Phi) \mid \lambda x. \Phi \mid \Phi \Phi$$

Иногда для упрощения записи мы будем опускать скобки. В этом случае, перед разбором выражения, следует расставить все опущенные скобки. При их расставлении будем придерживаться правил:

1. Аппликация левоассоциативна:  $A B C \implies (A B) C$ .
2. Абстракции жадные — поглощают скобками все что могут до конца строки:  $\lambda a. \lambda b. a b \implies \lambda a. (\lambda b. (a b))$ .

**Пример.**  $\lambda x. (\lambda f. ((fx)(fx) \lambda y. (yf)))$

Договоримся, что:

- Переменные —  $x, a, b, c$ .
- Термы (части  $\lambda$ -выражения) —  $X, A, B, C$ .
- Фиксированные переменные обозначаются буквами из начала алфавита, метаварьируемые — из конца.

Есть понятия связанного и свободного вхождения переменной (аналогично исчислению предикатов).

**Определение 2.2.** Если вхождение  $x$  находится в области действия абстракции по  $x$ , то такое вхождение называется связанным, иначе вхождение называется свободным.

**Определение 2.3.** Терм  $Q$  называется свободным для подстановки в  $\Phi$  вместо  $x$ , если после подстановки  $Q$  ни одно вхождение не станет связанным.

**Пример.**  $\lambda x.A$  связывает все свободные вхождения  $x$  в  $A$ .

**Определение 2.4.** Функция  $V(A)$  — множество переменных, входящих в  $A$ .

**Определение 2.5.** Функция  $FV(A)$  — множество свободных переменных, входящих в  $A$ :

$$FV(A) = \begin{cases} \{x\} & \text{если } A \equiv x \\ FV(P) \cup FV(Q) & \text{если } A \equiv PQ \\ FV(P) \setminus \{x\} & \text{если } A \equiv \lambda x.P \end{cases}$$

На самом деле, смысл в этом есть,  $\lambda$ -выражение можно понимать как функцию. Абстракция — это функция с аргументом, аппликация — это передача аргумента.

**Определение 2.6** ( $\alpha$ -эквивалентность).  $A =_\alpha B$ , если имеет место одно из следующих условий:

1.  $A \equiv x, B \equiv y$  и  $x \equiv y$
2.  $A \equiv P_1 Q_1, B \equiv P_2 Q_2$  и  $P_1 =_\alpha P_2, Q_1 =_\alpha Q_2$
3.  $A \equiv \lambda x.P_1, B \equiv \lambda y.P_2$  и  $P_1[x := t] =_\alpha P_2[y := t]$ , где  $t$  — новая переменная.

**Пример.**  $\lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx$ .

*Доказательство.* Согласно второму правилу следующие утверждения верны:

$$\begin{aligned} \lambda y.ty =_\alpha \lambda x.tx &\implies \lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx \\ tz =_\alpha tz &\implies \lambda y.ty =_\alpha \lambda x.tx \end{aligned}$$

$tz =_\alpha tz$  верно по третьему условию. □

**Определение 2.7** ( $\beta$ -редекс).  $\beta$ -редекс — выражение вида:  $(\lambda x.A) B$

**Определение 2.8** ( $\beta$ -редукция).  $A \rightarrow_\beta B$ , если имеет место одно из следующих условий:

1.  $A \equiv P_1 Q_1, B \equiv P_2 Q_2$  и либо  $P_1 =_\alpha P_2, Q_1 \rightarrow_\beta Q_2$ , либо  $P_1 \rightarrow_\beta P_2, Q_1 =_\alpha Q_2$
2.  $A \equiv (\lambda x.P) Q, B \equiv P[x := Q]$  причем  $Q$  свободна для подстановки вместо  $x$  в  $P$

**Пример.**  $(\lambda x.x) y \rightarrow_\beta y$

**Пример.**  $a(\lambda x.x) y \rightarrow_\beta ay$

**Пример.**  $A \equiv \lambda x.P, B \equiv \lambda x.Q, P \rightarrow_\beta Q$

## 2.2 Представление некоторых функций в лямбда исчислении

Логический значения легко представить в терминах  $\lambda$ -исчисления. В самом деле, положим:

- $\text{True} \equiv \lambda a \lambda b. a$
- $\text{False} \equiv \lambda a \lambda b. b$

Также мы можем выражать и более сложные функции

**Определение 2.9.**  $\text{If} \equiv \lambda c. \lambda t. \lambda e. (ct)e$

**Пример.**  $\text{If } T \ a \ b \rightarrow_{\beta} a$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} ((\lambda c. \lambda t. \lambda e. (ct)e) \ \lambda a \lambda b. a) \ a \ b &\rightarrow_{\beta} (\lambda t. \lambda e. (\lambda a \lambda b. a) \ t \ e) \ a \ b \rightarrow_{\beta} \\ &(\lambda t. \lambda e. (\lambda b. t) \ e) \ a \ b \rightarrow_{\beta} (\lambda t. \lambda e. t) \ a \ b \rightarrow_{\beta} (\lambda e. a) \ b \rightarrow_{\beta} a \end{aligned}$$

□

Как мы видим  $\text{If } T$  действительно возвращает результат первой ветки. Другие логические операции:

$$\text{Not} = \lambda a. a \ F \ T \quad \text{Add} = \lambda a. \lambda b. a \ b \ F \quad \text{Or} = \lambda a. \lambda b. a \ T \ b$$

## 2.3 Черчевские нумералы

**Определение 2.10** (черчевский нумерал).

$$\bar{n} = \lambda f. \lambda x. f^n x, \quad \text{где} \quad f^n x = \begin{cases} f(f^{n-1}x) & \text{при } n > 0 \\ x & \text{при } n = 0 \end{cases}$$

**Пример.**

$$\bar{3} = \lambda f. \lambda x. f(f(fx))$$

Несложно определить прибавление единицы к такому нумералу:

$$(+1) = \lambda n. \lambda f. \lambda x. f(nfx)$$

Арифметические операции:

1.  $\text{IsZero} = \lambda n. n \ (\lambda x. F) \ T$
2.  $\text{Add} = \lambda a. \lambda b. \lambda f. \lambda x. a \ f \ (b \ f \ x)$
3.  $\text{Pow} = \lambda a. \lambda b. b \ (\text{Mul } a) \ \bar{1}$
4.  $\text{IsEven} = \lambda n. n \ \text{Not} \ T$
5.  $\text{Mul} = \lambda a. \lambda b. a \ (\text{Add } b) \ \bar{0}$

Для того, чтобы определить  $(-1)$ , сначала определим пару:

$$\langle a, b \rangle = \lambda f. f \ a \ b \quad \text{First} = \lambda p. p \ T \quad \text{Second} = \lambda p. p \ F$$

Затем  $n$  раз применим функцию  $f(\langle a, b \rangle) = \langle b, b + 1 \rangle$  и возьмём первый элемент пары:

$$(-1) = \lambda n. \text{First}(n \ (\lambda p. \langle (\text{Second } p), (+1) (\text{Second } p) \rangle)) \ \langle \bar{0}, \bar{0} \rangle)$$

## 3 Лекция 2

### 3.1 Формализация $\lambda$ -термов, классы $\alpha$ -эквивалентности термов

**Определение 3.1** ( $\lambda$ -терм). Рассмотрим классы эквивалентности  $[A]_{=\alpha}$ . Будем говорить, что  $[A] \rightarrow_\beta [B]$ , если существуют  $A' \in [A]$  и  $B' \in [B]$ , что  $A' \rightarrow_\beta B'$ .

**Лемма 3.1.**  $(=_\alpha)$  — отношение эквивалентности.

Пусть в  $A$  есть  $\beta$ -редекс  $(\lambda x.P)Q$ , но  $Q$  не свободен для подстановки вместо  $x$  в  $P$ , тогда найдем  $y \notin V[P], y \in V[Q]$ . Сделаем замену  $P[x := y]$ . Тогда замена  $P[x := y][y := Q]$  допустима. То есть, можно сказать, что мы просто переименовали переменную  $x$  в  $P$  и получили свободу для подстановки, тем самым получив возможность редукции.

**Лемма 3.2.**  $P[x := Q] =_\alpha P[x := y][y := Q]$ , если замена допустима.

### 3.2 Нормальная форма, $\lambda$ -выражения без нормальной формы, комбинаторы $K, I, \Omega$

**Определение 3.2.** Нормальная форма — это  $\lambda$ -выражение без  $\beta$ -редексов.

**Лемма 3.3.**  $\lambda$ -выражение  $A$  в нормальной форме, если оно не содержит  $\beta$ -редексов.

**Определение 3.3.**  $A$  — нормальная форма  $B$ , если существует последовательность термов  $A_1 \dots A_n$  такая, что  $B =_\alpha A_1 \rightarrow_\beta A_2 \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta A_n =_\alpha A$ .

**Определение 3.4.** Комбинатор —  $\lambda$ -выражение без свободных переменных.

**Определение 3.5.**

- $I \equiv \lambda x.x$  (Identitanz)
- $K \equiv \lambda a.\lambda b.a$  (Konstanz)
- $\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

**Лемма 3.4.**  $\Omega$  — не имеет нормальной формы.

*Доказательство.*  $\Omega$  имеет единственный  $\beta$ -редекс, где  $A \equiv xx, B \equiv (\lambda x.xx)$ . Тогда единственный возможный путь редукции — подставить  $B$  вместо  $x$  в  $A$ . Но тогда мы получим  $\Omega$ . Следовательно у  $\Omega$  нет нормальной формы, так как в полученном выражении у нас всегда будет  $\beta$ -редекс.  $\square$

### 3.3 $\beta$ -редуцируемость

**Определение 3.6.** Будем говорить, что  $A \twoheadrightarrow_\beta B$ , если  $\exists$  такие  $X_1 \dots X_n$ , что  $A =_\alpha X_1 \rightarrow_\beta X_2 \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta X_{n-1} \rightarrow_\beta X_n =_\alpha B$ .

$\twoheadrightarrow_\beta$  — рефлексивное и транзитивное замыкание  $\rightarrow_\beta$ .  $\twoheadrightarrow_\beta$  не обязательно приводит к нормальной форме

**Пример.**  $\Omega \twoheadrightarrow_\beta \Omega$

### 3.4 Ромбовидное свойство

**Определение 3.7** (Ромбовидное свойство). Отношение  $R$  обладает ромбовидным свойством, если  $\forall a, b, c$ , таких, что  $aRb$ ,  $aRc$ ,  $b \neq c$ ,  $\exists d$ , что  $bRd$  и  $cRd$ .

**Пример.**  $(\leq)$  на множестве натуральных чисел обладает ромбовидным свойством,  $(>)$  на множестве натуральных чисел не обладает ромбовидным свойством.

### 3.5 Теорема Чёрча-Россера, следствие о единственности нормальной формы

**Теорема 3.1** (Черча-Россера).  $(\rightarrow_\beta)$  обладает ромбовидным свойством.

**Следствие 3.1.** Если у  $A$  есть нормальная форма, то она единственная с точностью до  $(=_\alpha)$  (переименования переменных).

*Доказательство.* Пусть  $A \rightarrow_\beta B$  и  $A \rightarrow_\beta C$ .  $B, C$  — нормальные формы и  $B \neq_\alpha C$ . Тогда по теореме Черча-Россера  $\exists D$ :  $B \rightarrow_\beta D$  и  $C \rightarrow_\beta D$ . Тогда  $B =_\alpha D$  и  $C =_\alpha D \Rightarrow B =_\alpha C$ . Противоречие.  $\square$

**Лемма 3.5.** Если  $B$  — нормальная форма, то не существует  $Q$  такой, что  $B \rightarrow_\beta Q$ . Значит если  $B \rightarrow_\beta Q$ , то количество шагов редукции равно 0.

**Лемма 3.6.** Если  $R$  — обладает  $<>$ , то и  $R^*$  (транзитивное, рефлексивное замыкание  $R$ ) обладает  $R^*$ .

*Доказательство.* Пусть  $M_1 R^* M_n$  и  $M_1 R N_1$ . Тогда существуют такие  $M_2 \dots M_{n-1}$ , что  $M_1 R M_2 \dots M_{n-1} R M_n$ . Так как  $R$  обладает ромбовидным свойством,  $M_1 R M_2$  и  $M_1 R N_1$ , то существует такое  $N_2$ , что  $N_1 R N_2$  и  $M_2 R N_2$ . Аналогично, существуют такие  $N_3 \dots N_n$ , что  $N_{i-1} R N_i$  и  $M_i R N_i$ . Мы получили такое  $N_n$ , что  $N_1 R^* N_n$  и  $M_n R^* N_n$ .

Пусть теперь  $M_{1,1} R^* M_{1,n}$  и  $M_{1,1} R^* M_{m,1}$ , то есть имеются  $M_{1,2} \dots M_{1,n-1}$  и  $M_{2,1} \dots M_{m-1,1}$ , что  $M_{1,i-1} R M_{1,i}$  и  $M_{i-1,1} R M_{i,1}$ . Тогда существует такое  $M_{2,n}$ , что  $M_{2,1} R^* M_{2,n}$  и  $M_{1,n} R^* M_{2,n}$ . Аналогично, существуют такие  $M_{3,n} \dots M_{m,n}$ , что  $M_{i,1} R^* M_{i,n}$  и  $M_{1,n} R^* M_{i,n}$ . Тогда  $M_{1,n} R^* M_{m,n}$  и  $M_{m,1} R^* M_{m,n}$ .  $\square$

**Лемма 3.7** (Грустная лемма).  $(\rightarrow_\beta)$  не обладает  $<>$

*Доказательство.* Пусть  $A = (\lambda x.xx)(II)$ . Покажем что в таком случае не будет выполняться ромбовидное свойство:  $\square$

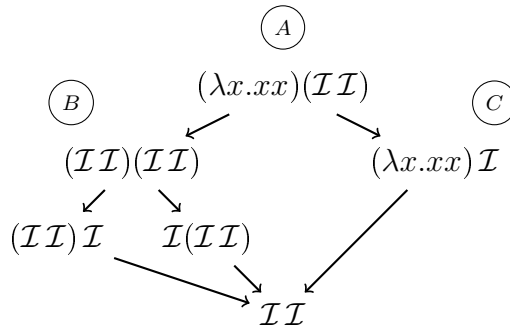


Рис. 1: Нет такого  $D$ , что  $B \rightarrow_\beta D$  и  $C \rightarrow_\beta D$ .

**Определение 3.8** (Параллельная  $\beta$ -редукция).  $A \rightrightarrows_\beta B$ , если

1.  $A =_{\alpha} B$
2.  $A \equiv P_1 Q_1$ ,  $B \equiv P_2 Q_2$  и  $P_1 \rightrightarrows_{\beta} P_2$ ,  $Q_1 \rightrightarrows_{\beta} Q_2$
3.  $A \equiv \lambda x. P_1$ ,  $B \equiv \lambda x. P_2$  и  $P_1 \rightrightarrows_{\beta} P_2$
4.  $A =_{\alpha} (\lambda x. P) Q$ ,  $B =_{\alpha} P[x := Q]$

**Лемма 3.8.**  $P_1 \rightrightarrows_{\beta} P_2$  и  $Q_1 \rightrightarrows_{\beta} Q_2$ , то  $P_1[x := Q_1] \rightrightarrows_{\beta} P_2[x := Q_2]$

*Доказательство.* Будем доказывать индукцией по определению  $\rightrightarrows_{\beta}$ . Рассмотрим случаи:

- Пусть  $P_1 =_{\alpha} P_2$ . Тогда лемма легко доказывается индукцией по структуре выражения.
- Пусть  $P_1 \equiv A_1 B_1$ ,  $P_2 \equiv A_2 B_2$ . По определению  $\rightrightarrows_{\beta}$   $A_1 \rightrightarrows_{\beta} A_2$  и  $B_1 \rightrightarrows_{\beta} B_2$ . Рассмотрим два случая:
  1.  $x \in \text{FV}(A_1)$ . По индукционному предположению  $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_{\beta} A_2[x := Q_2]$ . Тогда  $A_1[x := Q_1] B_1 \rightrightarrows_{\beta} A_2[x := Q_2] B_2$ . Тогда  $A_1 B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_{\beta} A_2 B_2[x := Q_2]$ .
  2. Аналогично для  $B$
- Пусть  $P_1 \equiv \lambda x. A_1$ ,  $P_2 \equiv \lambda x. A_2$ . по определению  $\rightrightarrows_{\beta}$   $A_1 \rightrightarrows_{\beta} A_2$ . Тогда по индукционному предположению  $A_1[x' := Q_1] \rightrightarrows_{\beta} A_2[x' := Q_2]$ . Тогда  $\lambda x. (A_1[x' := Q_1]) \rightrightarrows_{\beta} \lambda x. (A_2[x' := Q_2])$  по определению  $\rightrightarrows_{\beta}$ . Следовательно  $\lambda x. A_1[x' := Q_1] \rightrightarrows_{\beta} \lambda x. A_2[x' := Q_2]$  по определению подстановки.
- Пусть  $P_1 \equiv (\lambda x. A) B$ ,  $P_2 \equiv A[x := B]$ . Тогда по индукционному предположению  $A[x := Q_1] \rightrightarrows_{\beta} A[x := Q_2]$ ,  $B[x := Q_1] \rightrightarrows_{\beta} B[x := Q_2]$ . Тогда по определению  $\rightrightarrows_{\beta}$  имеем  $(\lambda x. A[x' := Q_1]) B \rightrightarrows_{\beta} A[x' := Q_2][x := B]$ . Тогда имеем, что  $A[x' := Q_1][x := B] \equiv (A[x := B])[x' := Q_2] \equiv B[x' := Q_2]$ .

□

**Лемма 3.9.**  $(\rightrightarrows_{\beta})$  обладает  $<>$

*Доказательство.* Будем доказывать индукцией по определению  $\rightrightarrows_{\beta}$ . Покажем, что если  $M \rightrightarrows_{\beta} M_1$  и  $M \rightrightarrows_{\beta} M_2$ , то  $\exists M_3$ , что  $M_1 \rightrightarrows_{\beta} M_3$  и  $M_2 \rightrightarrows_{\beta} M_3$ . Рассмотрим случаи:

- Если  $M \equiv M_1$ , то просто возьмем  $M_3 \equiv M_2$ .
- Если  $M \equiv \lambda x. P$ ,  $M_1 \equiv \lambda x. P_1$ ,  $M_2 \equiv \lambda x. P_2$  и  $P \rightrightarrows_{\beta} P_1$ ,  $P \rightrightarrows_{\beta} P_2$ , то по предположению индукции  $\exists P_3$ , что  $P_1 \rightrightarrows_{\beta} P_3$ ,  $P_2 \rightrightarrows_{\beta} P_3$ , тогда возьмем  $M_3 \equiv \lambda x. P_3$ .
- Если  $M \equiv P Q$ ,  $M_1 \equiv P_1 Q_1$  и по определению  $\rightrightarrows_{\beta}$   $P \rightrightarrows_{\beta} P_1$ ,  $Q \rightrightarrows_{\beta} Q_1$ , то рассмотрим два случая:
  1.  $M_2 \equiv P_2 Q_2$ . Тогда по предположению индукции  $\exists P_3$ , что  $P_1 \rightrightarrows_{\beta} P_3$ ,  $P_2 \rightrightarrows_{\beta} P_3$ . Аналогично для  $Q$ . Тогда возьмем  $M_3 \equiv P_3 Q_3$ .
  2.  $P \equiv \lambda x. P'$ ,  $M_2 \equiv P'_2[x := Q_2]$ , по определению  $\rightrightarrows_{\beta}$   $P' \rightrightarrows_{\beta} P'_2$ ,  $Q \rightrightarrows_{\beta} Q_2$ . Также  $P_1 \equiv \lambda x. P'_1$ ,  $P' \equiv P'_1$ . Тогда по предположению индукции и леммы 3.8 мы можем взять  $M_3 \equiv P'_3[x := P_3]$ .
- Если  $M =_{\alpha} (\lambda x. P) Q$ ,  $M_1 =_{\alpha} M_2 =_{\alpha} P[x := Q]$ , то просто возьмем  $M_3 =_{\alpha} P[x := Q]$ .

□

**Лемма 3.10.**

1.  $(\Rightarrow_\beta)^* \subseteq (\rightarrow_\beta)^*$
2.  $(\rightarrow_\beta)^* \subseteq (\Rightarrow_\beta)^*$

**Следствие 3.2.**  $(\rightarrow_\beta)^* = (\Rightarrow_\beta)^*$ 

Из приведенных выше лемм и следствия докажем теорему Черча-Россера.

*Доказательство.*  $(\rightarrow_\beta)^* \equiv (\twoheadrightarrow_\beta)$ . Тогда  $(\twoheadrightarrow_\beta) = (\Rightarrow_\beta)^*$ . Значит из того, что  $(\Rightarrow_\beta)$  обладает  $<>$  и леммы 3.6 следует, что  $(\twoheadrightarrow_\beta)$  обладает  $<>$ .  $\square$

**3.6 Нормальный и аппликативный порядок вычислений**

**Пример.** Выражение  $KI\Omega$  можно редуцировать двумя способами:

1.  $KI\Omega =_\alpha ((\lambda a.\lambda b.a)\mathcal{I})\Omega \rightarrow_\beta (\lambda b.\mathcal{I})\Omega \rightarrow_\beta \mathcal{I}$
2.  $KI\Omega =_\alpha ((\lambda a.\lambda b.a)I)((\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)) \twoheadrightarrow_\beta ((\lambda a.\lambda b.a)I)((\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)) \rightarrow_\beta KI\Omega$

Как мы видим, в первом случае мы достигли нормальной формы, в то время как во втором мы получаем бесконечную редукцию. Разница двух этих способов в порядке редукции. Первый называется нормальный порядок, а второй аппликативный.

**Определение 3.9** (нормальный порядок редукции). Редукция самого левого  $\beta$ -редекса.

**Определение 3.10** (аппликативный порядок редукции). Редукция самого левого  $\beta$ -редекса из самых вложенных.

**Теорема 3.2** (Приводится без доказательства). Если нормальная форма существует, она может быть достигнута нормальным порядком редукции.