

Введение в Теорию Типов

Конспект лекций

Штукенберг Д. Г.
Университет ИТМО

10 ноября 2018 г.

1 Введение

Эти лекции были рассказаны студентам групп М3336–М3339 в 2018 году в Университете ИТМО, на Кафедре компьютерных технологий Факультета информационных технологий и программирования.

Конспект подготовили студенты Кафедры: Егор Галкин (лекции 1 и 2), Илья Кокорин (лекции 3 и 4), Никита Дугинец (лекции 5 и 6), Степан Прудников (лекции 7 и 8).
(возможно, история сложнее)

2 Лекция 3

2.1 Y-комбинатор

Определение 2.1. Комбинатором называется λ -выражение, не имеющее свободных переменных

Определение 2.2. (Y -комбинатор)

$$Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

Очевидно, Y -комбинатор является комбинатором.

Теорема 2.1. $Yf =_{\beta} f(Yf)$

Доказательство. β -редуцируем выражение Yf

$$\begin{aligned} &=_{\beta} (\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))f \\ &=_{\beta} (\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)) \\ &=_{\beta} f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))) \\ &=_{\beta} f(Yf) \end{aligned}$$

Так как при второй редукции мы получили, что $Yf =_{\beta} (\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ □

Следствием этого утверждения является теорема о неподвижной точке для бестипового лямбда-исчисления

Теорема 2.2. В лямбда-исчислении каждый терм f имеет неподвижную точку, то есть такое p , что $f p =_{\beta} p$

Доказательство. Возьмём в качестве p терм Yf . По предыдущей теореме, $f(Yf) =_{\beta} Yf$, то есть Yf является неподвижной точкой для f . Для любого терма f существует терм Yf , значит, у любого терма есть неподвижная точка. \square

2.2 Рекурсия

С помощью Y -комбинатора можно определять рекурсивные функции, например, функцию, вычисляющую факториал Чёрчевского нумерала. Для этого определим вспомогательную функцию

$$fact' = \lambda f. \lambda n. isZero\ n\ \bar{1}(mul\ n\ f((-1)n))$$

Тогда $fact = Yfact'$

Заметим, что $fact\ \bar{n} =_{\beta} fact'\ (Y\ fact')\ \bar{n} =_{\beta} fact'\ fact\ \bar{n}$, то есть в тело функции $fact'$ вместо функции f будет подставлена $fact$ (заметим, что это значит, что именно функция $fact$ будет применена к $\bar{n} - \bar{1}$, то есть это соответствует нашим представлениям о рекурсии.)

Для понимания того, как это работает, посчитаем $fact\ \bar{2}$

$$\begin{aligned} & fact\ \bar{2} \\ &=_{\beta} Y\ fact'\ \bar{2} \\ &=_{\beta} fact'(Y\ fact'\ \bar{2}) \\ &=_{\beta} (\lambda f. \lambda n. isZero\ n\ \bar{1}(mul\ n\ f((-1)n)))(Y\ fact')\ \bar{2} \\ &=_{\beta} isZero\ \bar{2}\ \bar{1}(mul\ \bar{2}\ ((Y\ fact')((-1)\bar{2}))) \\ &=_{\beta} mul\ \bar{2}\ ((Y\ fact')((-1)\bar{2})) \\ &=_{\beta} mul\ \bar{2}\ (Y\ fact'\ \bar{1}) \\ &=_{\beta} mul\ \bar{2}\ (fact'\ (Y\ fact'\ \bar{1})) \end{aligned}$$

Раскрывая $fact'\ (Y\ fact'\ \bar{1})$ так же, как мы раскрывали $fact'\ (Y\ fact'\ \bar{2})$, получаем

$$=_{\beta} mul\ \bar{2}\ (mul\ \bar{1}\ (Y\ fact'\ \bar{0}))$$

Посчитаем $(Y\ fact'\ \bar{0})$.

$$\begin{aligned} & (Y\ fact'\ \bar{0}) \\ &=_{\beta} fact'\ (Y\ fact')\ \bar{0} \\ &=_{\beta} (\lambda f. \lambda n. isZero\ n\ \bar{1}(mul\ n\ f((-1)n)))(Y\ fact')\ \bar{0} \\ &=_{\beta} isZero\ \bar{0}\ \bar{1}(mul\ \bar{0}\ ((Y\ fact')((-1)\bar{0}))) =_{\beta} \bar{1} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & fact\ \bar{2} \\ &=_{\beta} mul\ \bar{2}\ (mul\ \bar{1}\ (Y\ fact'\ \bar{0})) \\ &=_{\beta} mul\ \bar{2}\ (mul\ \bar{1}\ \bar{1}) =_{\beta} mul\ \bar{2}\ \bar{1} =_{\beta} \bar{2} \end{aligned}$$

2.3 Парадокс Карри

Попробуем построить логику на основе λ -исчисления. Введём логический символ \rightarrow .

Будем требовать от этого исчисления наличия следующих схем аксиом:

1. $\vdash A \rightarrow A$
2. $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
3. $\vdash A =_\beta B$, тогда $A \rightarrow B$

А так же правила вывода МР:

$$\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash A}{\vdash B}$$

Не вводя дополнительные правила вывода и схемы аксиом, покажем, что данная логика является противоречивой. Для чего введём следующие условные обозначения:

$$F_\alpha = \lambda x.(x x) \rightarrow \alpha$$

$$\Phi_\alpha = F_\alpha F_\alpha = (\lambda x.(x x) \rightarrow \alpha) (\lambda x.(x x) \rightarrow \alpha)$$

Редуцируя Φ_α , получаем

$$\begin{aligned} & \Phi_\alpha \\ &=_\beta (\lambda x.(x x) \rightarrow \alpha) (\lambda x.(x x) \rightarrow \alpha) \\ &=_\beta (\lambda x.(x x) \rightarrow \alpha) (\lambda x.(x x) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \\ &=_\beta \Phi_\alpha \rightarrow \alpha \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства α нужно всего лишь доказать Φ_α и применить правило МР.

- | | |
|---|--|
| 1) $\vdash \Phi_\alpha \rightarrow \Phi_\alpha \rightarrow \alpha$ | Так как $\Phi_\alpha =_\beta \Phi_\alpha \rightarrow \alpha$ |
| 2) $\vdash (\Phi_\alpha \rightarrow \Phi_\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\Phi_\alpha \rightarrow \alpha)$ | Так как $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ |
| 3) $\vdash \Phi_\alpha \rightarrow \alpha$ | МР 2, 3 |
| 4) $\vdash (\Phi_\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \Phi_\alpha$ | Так как $\vdash \Phi_\alpha \rightarrow \alpha =_\beta \Phi_\alpha$ |
| 5) $\vdash \Phi_\alpha$ | МР 3, 4 |
| 6) $\vdash \alpha$ | МР 3, 5 |

Таким образом, введённая логика оказывается противоречивой.

2.4 Импликационный фрагмент интуиционистского исчисления высказываний

Рассмотрим подмножество ИИВ, со следующей грамматикой:

$$\Phi ::= x \mid \Phi \rightarrow \Phi \mid (\Phi)$$

То есть состоящее только из меремных и импликаций.

Добавим в него одну схему аксиом

$$\Gamma, \varphi \vdash \varphi$$

И два правила вывода

1. Правило введения импликации:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$$

2. Правило удаления импликации:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Пример. Докажем $\vdash \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$

$$\frac{\frac{\varphi, \psi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi} \text{ (Введение импликации)}}{\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)} \text{ (Введение импликации)}$$

Пример. Докажем $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma, \alpha, \beta \vdash \gamma$

$$\frac{\frac{\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma, \alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \quad \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma, \alpha, \beta \vdash \alpha}{\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma, \alpha, \beta \vdash \beta \rightarrow \gamma} \quad \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma, \alpha, \beta \vdash \beta}{\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma, \alpha, \beta \vdash \gamma}$$

2.5 Просто типизированное по Карри лямбда-исчисление

Определение 2.3. Тип в просто типизированном лямбда-исчислении по Карри это либо маленькая греческая буква $(\alpha, \phi, \theta, \dots)$, либо импликация $(\theta_1 \rightarrow \theta_2)$

Таким образом, $\Theta ::= \theta_i | \Theta \rightarrow \Theta | (\Theta)$

Импликация при этом считается правоассоциативной операцией.

Определение 2.4. Язык просто типизированного лямбда-исчисления это язык бестипового лямбда-исчисления.

Определение 2.5. Контекст Γ это список выражений вида $A : \theta$, где A - лямбда-терм, а θ - тип

Определение 2.6. Просто типизированное лямбда-исчисление по Карри.

Рассмотрим исчисление с единственной схемой аксиом:

$$\Gamma, x : \theta \vdash x : \theta, \text{ если } x \text{ не входит в } \Gamma$$

И следующими правилами вывода

1. Правило типизации абстракции

$$\frac{\Gamma, x : \varphi \vdash P : \psi}{\Gamma \vdash (\lambda x. P) : \varphi \rightarrow \psi}$$

2. Правило типизации импликации:

$$\frac{\Gamma \vdash P : \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash Q : \varphi}{\Gamma \vdash PQ : \psi}$$

Если λ -выражение типизируется с использованием этих двух правил и одной схемы аксиом, то будем говорить, что оно типизируется по Карри.

Пример. Докажем $\vdash \lambda x. \lambda y. x : \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$

$$\frac{\frac{x : \alpha, y : \beta \vdash x : \alpha}{x : \alpha \vdash \lambda y. x : \beta \rightarrow \alpha} \text{ (Правило типизации импликации)}}{\vdash \lambda x. \lambda y. x : \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha} \text{ (Правило типизации импликации)}$$

Пример. Докажем $\vdash \lambda x. \lambda y. x y : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$

$$\frac{\frac{\frac{x : \alpha \rightarrow \beta, y : \alpha \vdash x : \alpha \rightarrow \beta \quad x : \alpha \rightarrow \beta, y : \alpha \vdash y : \alpha}{x : \alpha \rightarrow \beta, y : \alpha \vdash x y : \beta}}{x : \alpha \rightarrow \beta \vdash \lambda y. x y : \alpha \rightarrow \beta}}{\vdash \lambda x. \lambda y. x y : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta}$$

2.6 Отсутствие типа у Y-комбинатора

Теорема 2.3. Y-комбинатор не типизируется в просто типизированном по Карри лямбда исчислении

Неформальное доказательство $Y f =_{\beta} f (Y f)$, поэтому $Y f$ и $f (Y f)$ должны иметь одинаковые типы.

Пусть $Y f : \alpha$

Тогда $Y : \beta \rightarrow \alpha, f : \beta$

Из $f (Y f) : \alpha$ получаем $f : \alpha \rightarrow \alpha$ (так как $Y f : \alpha$)

Тогда $\beta = \alpha \rightarrow \alpha$, из этого получаем $Y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$

Можно доказать, что $\lambda x. x : \alpha \rightarrow \alpha$. Тогда $Y \lambda x. x : \alpha$, то есть любой тип является обитаемым. Так как это невозможно, Y-комбинатор не может иметь типа, так как тогда он сделает нашу логику противоречивой.

Формальное доказательство Докажем от противного. Пусть Y-комбинатор типизируем. Тогда в выводе его типа есть вывод типа выражения $x x$. Так как $x x$ - абстракция, то и типизированна она может быть только по правилу абстракции. Значит, в выводе типа Y-комбинатора есть такой вывод:

$$\frac{\Gamma \vdash x : \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash x : \varphi}{\Gamma \vdash x x : \psi}$$

Рассмотрим типизацию $\Gamma \vdash x : \varphi \rightarrow \psi$ и $\Gamma \vdash x : \varphi$. x это атомарная переменная, значит, она могла быть типизирована только по единственной схеме аксиом.

Следовательно, x типизируется следующим образом.

$$\frac{\Gamma', x : \varphi \rightarrow \psi, x : \varphi \vdash x : \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma', x : \varphi \rightarrow \psi, x : \varphi \vdash x : \varphi}{\Gamma', x : \varphi \rightarrow \psi, x : \varphi \vdash x x : \psi}$$

Следовательно, в контексте Γ переменная x встречается два раза, что невозможно по схеме аксиом.

2.7 Изоморфизм Карри-Ховарда

Заметим, что аксиомы и правила вывода импликационного фрагмента ИИВ и просто типизированного по Карри лямбда-исчисления точно соответствуют друг другу.

| Просто типизированное λ -исчисление | Импликативный фрагмент ИИВ |
|---|---|
| $\Gamma, x : \theta \vdash x : \theta$ | $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ |
| $\frac{\Gamma, x : \varphi \vdash P : \psi}{\Gamma \vdash (\lambda x. P) : \varphi \rightarrow \psi}$ | $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$ |
| $\frac{\Gamma \vdash P : \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash Q : \varphi}{\Gamma \vdash P Q : \psi}$ | $\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$ |

Установим соответствие и между прочими сущностями ИИВ и просто типизированного по Карри лямбда-исчисления.

| Просто типизированное λ -исчисление | Импликативный фрагмент ИИВ |
|--|---|
| Тип | Высказывание |
| Терм | Доказательство высказывания |
| Проверка того, что терм имеет заданный тип | Проверка доказательства на корректность |
| Обитаемый тип | Доказуемое высказывание |
| Проверка того, что существует терм, имеющий заданный тип | Проверка того, что заданное высказывание имеет доказательство |

3 Лекция 4

3.1 Расширение просто типизированного λ -исчисления до изоморфного ИИВ

Заметим, что между просто типизированным по Карри λ -исчислением и импликационным фрагментом ИИВ существует изоморфизм, но при этом в просто типизированном λ -исчислении нет аналогов лжи, а также связок \vee и $\&$.

Для установления полного изоморфизма между ИИВ и просто типизированным λ -исчислением введём три необходимые для установления этого изоморфизма сущности:

1. Тип "Ложь" (\perp)
2. Тип упорядоченной пары $A \& B$, соответствующий логическому "И"
3. Алгебраический тип $A|B$, соответствующий логическому "ИЛИ"

Тип "Ложь"