% MathType!Translator!2!1!LaTeX.tdl!LaTeX 2.09 and later!
% MathType!MTEF!2!1!+-
% faaagCart1ev2aaaKnaaaaWenf2ys9wBH5garuavP1wzZbItLDhis9
% wBH5garmWu51MyVXgaruWqVvNCPvMCG4uz3bqee0evGueE0jxyaiba
% ieYBf9irVeeu0dXdh9vqqj-hHeeu0xXdbba9frFj0-OqFfea0dXdd9
% vqaq-JfrVkFHe9pgea0dXdar-Jb9hs0dXdbPYxe9vr0-vr0-vqpi0d
% c9GqpWqaaeaabiGaciaacaqadeaadaqaaqaaa0qaamaalaaabaGaaG
% 4maaqaaiaaikdadaGcbaqaaiaaiodaaSqaaiaaiodaaaaaaa0WaaSaa
% aeaacqqHuoarcaWG5baabaGaeuiLdqKaamiEaaaadaWcaaqaaiabes
% 7aKjaadMhaaeaacqaH0oazcaWG4baaamaalaaabaGaey0aIy7aaWba
% aSqabeaacaaIYaaaa0GaeyyQdCfabaGaey0aIyRaamyDamaaCaaale
% qabaGaaG0maaaaaaaaaaa!47A1!
\[\frac{3}{{2\sqrt[3]{3}}}\frac{{\Delta y}}{{\Delta x}}\frac{{\delta y}}{{\delta x}}\frac{{{\partial ^2}\Omega }}{{\partial {u^2}}}\]% MathType!End!2!1!

将系统的状态方程及测量方程描述为：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}_c(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)\end{aligned}$$

（2-1）

其中

$$\mathbf{x}(t)$$

是系统的n维状态向量，

$$\mathbf{z}(t)$$

是m维测量输出向量，

$$\mathbf{w}_c(t)$$

是p维随机过程噪声，

$$\mathbf{v}(t)$$

是m维随机测量噪声。如果

$$\mathbf{F}(t)$$

、

$$\mathbf{G}(t)$$

、

$$\mathbf{H}(t)$$

的各元素均与时间无关，且

$${{\mathbf{w}}_{c}}(t)$$

、

$$\mathbf{v}(t)$$

都是平稳随机过程，则系统方程可简化为

$$\mathbf{\dot{x}}(t)=\mathbf{Fx}(t)+\mathbf{G}{{\mathbf{w}}_{c}}(t) \tag{2-2}$$

$$\mathbf{z}(t)=\mathbf{Hx}(t)+\mathbf{v}(t) \tag{2-3}$$

假设 $\boldsymbol{w}_c(t)$、$\boldsymbol{v}(t)$ 均为零均值高斯白噪声过程，其中 $E[\boldsymbol{w}_c(t)]=0,\ E[\boldsymbol{w}_c(t)\boldsymbol{w}_c^T(s)]=\boldsymbol{\sigma}^2\delta(t-s)$，$E[\boldsymbol{v}(t)]=0,\ E[\boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{v}^T(s)]=\boldsymbol{R}\delta(t-s)$，$\delta(t-s)$为 Dirac 函数，$T$ 表示矩阵转置。

由高等数学中求解微分方程的知识中可知，（2-2）中 $\boldsymbol{x}(t)$的解与指数函数$e^{\boldsymbol{F}t}$相关，假设$e^{\boldsymbol{F}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}t+\frac{\boldsymbol{F}^2t^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{F}^3t^3}{3!}+\frac{\boldsymbol{F}^4t^4}{4!}+\cdots\cdots$。根据$e^{\boldsymbol{F}t}$的两个重要性质

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{F}t}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^2t+\frac{\boldsymbol{F}^3t^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{F}^4t^3}{3!}+\frac{\boldsymbol{F}^5t^4}{4!}+\cdots\cdots=\boldsymbol{F}\cdot e^{\boldsymbol{F}t}\\&\frac{d}{dt}[e^{-\boldsymbol{F}t}\boldsymbol{x}(t)]=e^{-\boldsymbol{F}t}[\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x}(t)]\end{aligned} \tag{2-4}$$

来求解状态方程式（2-2）描述状态$\boldsymbol{x}(t)$，其过程如下：

1）式（2-2）两边左乘$e^{-\boldsymbol{F}t}$

$$e^{-\boldsymbol{F}t}[\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x}(t)]=e^{-\boldsymbol{F}t}\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}_c(t) \tag{2-5}$$

根据指数函数$e^{\boldsymbol{F}t}$在式（2-4）所示的性质可知，式（2-5）左边为$\frac{d}{dt}[e^{-\boldsymbol{F}t}\boldsymbol{x}(t)]$

$$\frac{d}{dt}[e^{-\boldsymbol{F}t}\boldsymbol{x}(t)]=e^{-\boldsymbol{F}t}\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}_c(t) \tag{2-6}$$

2）对式（2-6）式两边取积分，积分区间为$[t_0,\ t]$，即可得到

$$e^{-\boldsymbol{F}t}\boldsymbol{x}(t) = e^{-\boldsymbol{F}t_0}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\boldsymbol{F}\lambda}\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}_c(\lambda)d\lambda$$