第 1 章

数列の極限

練習問題 1

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

で与えられる数列 $\{c_n\}$ が 0 に収束することを示せ。
また，3 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ が 0 に収束する速さを比較しなさい。ただし

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n^2}$$

とする。。

第 2 章

関数の極限

2.1　練習問題 2

$f(x) = \sqrt{x}$ のとき，$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ であることを示せ。

2.2　練習問題 3

関数 $f(x) = x^2 - 2x$ が $\mathbb{R}$ 上の任意の点 a で連続であることを示せ。

第 3 章

集合の上限と下限

3.1 練習問題 1'

集合 $S = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \mid n = 1, 2, 3, \cdots \right\}$ の上限と下限を求めよ（定義をみたすことを示せ）。

3.2 練習問題 2'

集合

$$S_1 = \{x \mid x > 0\}$$

$$S_2 = \{x \mid x \leq 1\}$$

$$S_3 = \{x \mid 0 < x \leq 1\}$$

について，S_1 が下に有界，S_2 が上に有界，S_3 が有界であることを定義にしたがって確かめよ。

3.3 練習問題 3'

実数 $\mathbb{R}$ 上の集合 S は下に有界であるとする。S の最大下界が存在すれば，S の下限が存在し，S の最大下界と下限は一致することを示せ。

第 4 章

技術的な話

4.1　練習問題 5

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき，$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$ が成り立つことを示せ。

4.2　練習問題 6

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \neq 0$ のとき，$a_n = 0$ のとなる a_n は有限個 (0 個の場合も含む) であることを示しなさい。

4.3　練習問題 7

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \neq 0$ のとき，次が成り立つことを示しなさい。

(1)　$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t.$\forall n \geq N_1$,　$\dfrac{1}{|a_n|} < \dfrac{2}{|\alpha|}$

(2)　$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\alpha}$

4.4　練習問題 8

以下の (1) と (2) が成り立つことを示せ。

(1)　$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ のとき, ある正の数 M が存在して次が成り立つ；ある正の数 ρ が存在して, $0 < |x-a| < \rho$ をみたすすべての x に対して，$f(x) < M$ である。

(2)　$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha\,, \lim_{x\to a} g(x) = \beta$ ならば，$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$

4.5　練習問題 9

次の条件 (A'),(B') を満たす数列の例をそれぞれ考えよ。

(A')　ある自然数 n に対して，ある正の数 M が存在して，$|a_n| \leq M$ が成り立つ。

(B')　ある正の数 M が存在して，$|a_n| > M$ が成り立つ。

4.6　練習問題 10

次の主張を満たす関数 $f(x)$ の例を挙げよ。また，もとの主張の否定形をつくり，それをみたす関数 $f(x)$ の例を挙げよ。

(i)　ある正の数 K が存在して，任意の正の数 x に対して，$f(x) \leq K$ が成り立つ。

(ii)　任意の正の数 K に対して，$x < 1$ を満たすある正の数 $x = x(K)$ が存在して，$f(x) > K$ が成り立つ。